

UNIVERSITATEA „POLITEHNICA” TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE MECANICĂ  
CATEDRA DE MECANICĂ

# TEZĂ DE DOCTORAT

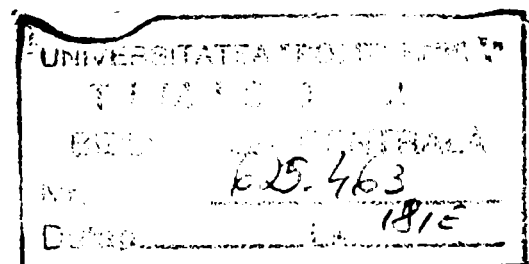
AUTOR :

ING. PELE ALEXANDRU-VIOREL

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC :

PROF. UNIV. EMERIT DR. DOC. ING. SILAȘ GHEORGHE  
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI ROMÂNE

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA „POLITEHNICA”  
TIMIȘOARA



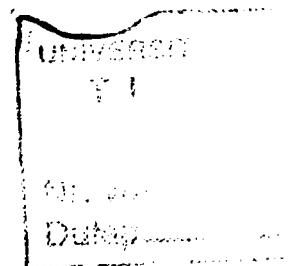
1999

# METODE DE ANALIZĂ ÎN MECANICA STRUCTURILOR

*MODELARE CU ELEMENTE FINITE, SIMULĂRI  
NUMERICE ȘI CERCETĂRI EXPERIMENTALE ÎN  
ANALIZA DINAMICII UNUI ROBOT*

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC :

PROF. UNIV. EMERIT DR. DOC. ING. SILAȘ GHEORGHE  
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI ROMÂNE



# CUVÂNT ÎNAINTE

Mecanica aplicată are astăzi numeroase ramuri, unele vechi de peste 200 de ani, altele care au apărut treptat, pe măsura necesității rezolvării unor probleme practice. Printre acestea se numără și studiul vibrațiilor, teorie fundamentată teoretic de cartea lui Rayleigh „*Teoria sunetului*” și care s-a conturat ca o știință de sine stătătoare, prin contribuția a numeroși oameni de știință, cadre didactice, cercetători etc.

În ultima vreme, o dată cu răspândirea tehnicii de calcul, se remarcă o abordare matriceală, algoritmică a problemelor de dinamică a structurilor, unii autori considerând că se conturează un domeniu distinct al mecanicii aplicate și anume ramura computațională a acesteia. În acest context se încadrează și eforturile depuse în această teză, de a adapta unele metode de analiză dinamică pentru structuri mecanice particulare, cum sunt cele ale roboților industriali.

Această lucrare nu ar fi fost finalizată dacă nu aș fi avut sprijinul constant, pe toată perioada doctoratului, a conducătorului științific, eminentul profesor universitar emerit doctor docent Silaș Gheorghe, căruia îi exprim recunoștința și mulțumirile mele. Mulțumesc de asemenea domnului profesor universitar doctor inginer Roșca Gavril, care m-a îndrumat spre școala mecanică timișoreană, una dintre cele mai recunoscute și puternice din domeniu.

În final, amintesc și mulțumesc pentru înțelegerea pe care am avut-o din partea familiei, în perioada realizării și redactării tezei de doctorat.

Oradea, decembrie 1999

# CUPRINS

## CAPITOLUL 1

### COMPLIANȚA STRUCTURILOR MECANICE

- 1.1 INTRODUCERE .....
- 1.2 COMPLIANȚA STRUCTURILOR
- 1.3 PARTICULARITĂȚI ALE STRUCTURII ROBOȚILOR INDUSTRIALI
- 1.4 EVALUAREA COMPLIANȚEI

## CAPITOLUL 2

### MODELAREA DINAMICĂ A MANIPULATOARELOR

- 2.1 INTRODUCERE .....
- 2.2 CADRUL GENERAL AL MODELĂRII
- 2.3 MODELUL DE BARĂ
- 2.4 MODELAREA MANIPULATORULUI PLAN
  - 2.4.1 DEFINIREA ELEMENTULUI FINIT
  - 2.4.2 PARAMETRI CINEMATICI
  - 2.4.3 FUNCȚIILE DE FORMĂ .....
  - 2.4.4 EVALUAREA MATRICEI DE RIGIDITATE
  - 2.4.5 EVALUAREA MATRICEI MASELOR
  - 2.4.6 ECUAȚIILE DE MIȘCARE

## ANEXA I

- a) Matricea de rigiditate structurală a unui element finit .....
  - b) Matricea consistentă a maselor unui element finit .....
  - c) Matricea de rigiditate centrifugală a unui element finit .....
  - d) Matricea de amortizare giroscopică a unui element finit
-

## CAPITOLUL 3

SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC	3-1
3.1 INTRODUCERE	3-1
3.2 FUNCȚIILE DE CONDUCERE	3-2
3.3 DISCRETIZAREA STRUCTURII	3-4
3.4 VITEZELE ȘI ACCELERĂȚIILE DE CORP RIGID	3-7
3.5 REZULTATE NUMERICE	3-9
3.6 RĂSPUNSUL DINAMIC AL MANIPULATORULUI ÎN POZIȚIE FIXĂ	3-12
3.6.1 DATELE GENERALE	3-12
3.6.2 ECUAȚIILE DE MIȘCARE	3-13
3.6.3 COMPLIANȚA ARTICULAȚIILOR MOTOARE	3-15
3.6.4 CONDENSAREA DINAMICĂ	3-16
3.6.5 FRECVENȚELE PROPRII DE VIBRAȚIE	3-19
3.6.6 MATRICEA DE AMORTIZARE	3-21
3.6.7 INTREGAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DE MIȘCARE	3-22
3.6.8 REZULTATE NUMERICE	3-24
a) Influența complianței articulațiilor	3-24
b) Influența poziției nodului în structura discretizată	3-25
c) Influența amortizării	3-25
d) Influența poziției structurii manipulatorului	3-25
3.7 RĂSPUNSUL DINAMIC AL MANIPULATORULUI ÎN MIȘCARE	3-29
3.7.1 DATELE GENERALE	3-29
3.7.2 MODELUL LINEAR	3-29
3.7.3 MODELUL NELINEAR	3-34
3.8 DATELE DE INTRARE ȘI SURSELE PROGRAMELOR DE CALCUL	3-39
3.8.1 DENUMIREA PROGRAMELOR	3-39
3.8.2 DATELE DE INTRARE	3-40
3.8.3 SURSELE PROGRAMELOR	3-43
	C-2

## CAPITOLUL 4

DETERMINĂRI EXPERIMENTALE	4-1
4.1 CARACTERISTICILE ROBOTULUI	4-1
4.2 SISTEMUL DE ACHIZIȚIE AL DATELOR	4-3
a) Traductorul	4-4
b) Condiționarea semnalului	4-5
c) Placa de achiziție a datelor	4-6
d) Calculatorul și programele	4-7
4.3 ACHIZIȚIONAREA DATELOR EXPERIMENTALE	4-7
4.4 PRELUCRAREA STATISTICĂ A DATELOR EXPERIMENTALE	4-10
4.5 COMPARAȚIA ÎNTRE REZULTATELE NUMERICE ȘI DATELE EXPERIMENTALE .....	4-13

## CAPITOLUL 5

CONTRIBUȚII, CONCLUZII ȘI PERSPECTIVE	5-1
COMPLIANȚA STRUCTURILOR .....	5-1
MODELUL DINAMIC .....	5-3
SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC	5-6
DETERMINĂRI EXPERIMENTALE .....	5-8

BIBLIOGRAFIE .....	B-1
--------------------	-----

INDEX .....	I-1
-------------	-----

# CAPITOLUL 1

## COMPLIANȚA STRUCTURILOR MECANICE

### 1.1 INTRODUCERE

Mecanica structurilor este o componentă a mecanicii solidului care studiază structurile sau elementele de structură reale, pentru determinarea stărilor de echilibru, tensiune și deformație și pentru stabilirea comportamentului dinamic al acestora.

Proiectarea unei structuri presupune calculul tensiunilor și deformațiilor produse de acțiunile la care aceasta este supusă în exploatare, pe baza cărora se evaluează răspunsul structurii în regim static sau dinamic, după care se dimensionează elementele structurale ținând cont de o funcție obiectiv, cum ar fi rezistența sub sarcină, stabilitatea, precizia de poziționare etc.

Modelarea este un demers teoretic, care conduce la definirea unui sistem echivalent parțial cu sistemul original, mai ușor de studiat, și presupune acceptarea unor ipoteze simplificatoare. În cazul structurilor aceste aproximări sunt de natură fizică, când se fac ipoteze asupra materialelor și comportamentului acestora, și de natură matematică, prin relațiile care descriu tensiunile, deformațiile, ecuațiile dinamice de mișcare etc. Se obține în acest fel un model de calcul al structurii.

Implicarea calculatorului electronic în analiza comportării structurilor permite creșterea gradului de finețe a ipotezelor admise în modelare și a preciziei de aproximare a soluțiilor, apropiind modelul de calcul adoptat de structura reală. Modelul de calcul numeric este o aproximare a modelului de calcul exact care guvernează problema, în limita ipotezelor admise, și se obține în urma unui proces de discretizare a sistemului fizic.

Considerând aspectul matematic al analizei structurilor, este necesar să se studieze aspectele care apar la generarea unui model numeric dintr-un model teoretic exact, mai concret verificarea legilor sau teoremelor privind elaborarea modelului matematic pe baza sistemului fizic, generarea modelului numeric aproximativ, existența, unicitatea, convergența și stabilitatea soluțiilor obținute. Aceste cercetări au condus la formularea unei teorii matematice a structurilor, numită uneori și *mecanică computațională*, și care a devenit un domeniu distinct al analizei funcționale.

În cazul structurilor clasice, formate din elemente structurale considerate rigide, calculul răspunsului static sau dinamic se poate efectua utilizând programe pentru calculator specializate în analiza cu elemente finite, acuratețea rezultatelor depinzând în principal de o discretizare suficient de fidelă și o alegere corectă a tipului de element finit. Dacă structura conține elemente ce nu mai pot fi asimilate cu cele clasice, considerate rigide, de exemplu asamblări cu jocuri, angrenaje, amortizori elastici, brațe telescopice, mecanisme spațiale ale roboților industriali etc., modelul de calcul numeric este unul particular și impune crearea unor programe și proceduri care să poată fi modificate după caz și care să includă aspectele specifice. În paralel cu simularea numerică a răspunsului dinamic al structurii trebuie efectuate o serie de determinări experimentale a unor parametri care descriu comportamentul dinamic al acesteia, în anumite puncte critice ale structurii reale, pentru verificarea rezultatelor numerice și eventual modificarea modelului de calcul.

În concluzie analiza dinamică a structurilor presupune simulare numerică și verificări de natură experimentală, care să valideze modelul numeric. Dacă elementele structurale au un comportament de corp rigid, se poate utiliza un software de analiză-proiectare specializat. În cazul în care există elemente de structură speciale sau pentru întreaga structură comportamentul de corp rigid nu mai este o ipoteză suficientă, modelul de calcul trebuie construit în mod explicit, ținând cont de parametri care caracterizează aspectele particulare ale structurii. Este necesar de asemenea un program de calcul deschis, cu acces la surse, a cărui proceduri numerice să poată fi modificate astfel încât să includă elementele particulare și în final să simuleze comportamentul dinamic al structurii.

## 1.2 COMPLIANȚA STRUCTURILOR

Termenul de *compliance* exprimă în mod general tendința unei structuri de a se deforma sub acțiunea forțelor exterioare. Această proprietate are o semnificație mult mai largă decât aceea de flexibilitate, definită ca inversă a rigidității structurale [20, 42]. Pentru a înțelege acest lucru se pot compara o structură de rezistență a unei mașini și structura unui corp natural viu. În timp ce prima structură este rezistentă și rigidă, fiind proiectată și asamblată din elemente realizate separat, organismul natural este rezistent și compliant, fiind conceput de la început să funcționeze ca un întreg. Compliance în cazul organismelor vii este expresia capacității de a transforma energia mecanică



disponibilă în mișcări utile și sofisticate. În timp ce complianța este peste tot prezentă în natură, mediul tehnic s-a limitat în general la structuri și mecanisme rigide.

Efectele complianței pot fi o sursă de inspirație pentru comunitatea inginerescă și științifică. Implicarea unor principii ale complianței în faza de proiectare a produselor poate conduce la o simplificare a fabricării acestora, în unele cazuri chiar la eliminarea operațiilor de asamblare. *Proiectarea orientată spre eliminarea asamblării* este posibilă în cazul unor produse la care mișcările relative între componente sunt mici, părțile putând fi unite într-o formă monolitică de dispozitiv mecanic, care utilizează mecanisme compliante fără articulații [4]. Este evident că numai un număr redus de produse pot fi proiectate astfel încât să se elimine operațiile de asamblare. Cercetările în această direcție sunt însă intense având în vedere că, pentru o mare varietate de produse industriale, 40 - 50 % din costul de fabricație sunt cheltuieli de asamblare.

Pe lângă avantajele fabricației orientate spre eliminarea asamblării, complianța poate avea și alte aplicații. În condițiile reale de lucru, deformațiile elastice sunt inevitabile chiar și pentru structurile supradimensionate. Printr-o proiectare adecvată, deformațiile elastice pot deveni un aliat pentru exploatarea complianței. *Mecanismele compliante* sunt o categorie de mecanisme în care deformațiile elastice sunt o sursă dorită pentru mișcare și transmitere a forței, spre deosebire de mișcarea prin cuple specifică mecanismelor convenționale [4]. Aceste mecanisme includ elemente elastice precum arcuri sau alte organe în care sursa primară de mișcare este deformarea elastică și care furnizează o caracteristică forță-deformație largă, pentru o cât mai mică complexitate mecanică. Și în cazul mecanismelor compliante, prezența unui număr redus de componente cu elasticitate mare conduce la o structură ușoară, iar articulațiile mai puțin rigide ajută la reducerea frecării, a încărcării lagărelor și a zgomotului.

*Structurile adaptive*, specifice roboților inteligenți, care reacționează și se adaptează stimulilor externi, pot de asemenea beneficia de pe urma mecanismelor compliante. În majoritatea cazurilor, structurile adaptive presupun capacitatea acestora de a-și reconfigura forma ca răspuns la geometria unor corpuri cu care vin în contact [22, 42]. Această capacitate implică existența pe o structură aparent rigidă a numeroși senzori și elemente de acționare legate prin bucle de feed-back necesare controlului și poziționării în timp real. Complianța în acest caz este localizată la nivelul unor elemente care se deformează elastic, de tipul barelor, precum și la nivelul articulațiilor, care nu sunt perfect rigide, datorită jocurilor și alunecărilor din ajustaje. Pentru acest domeniu, analiza

comportamentului dinamic este decisivă, mai ales pentru structuri specifice micromecanicii, destinate efectuării unor mișcări precise, unde acționarea și controlul poziției componentelor mobile se poate face printr-o varietate de metode mecanice, electrostatice, electromagnetice, optice, hidraulice sau termice.

Complianța este o caracteristică naturală a organismelor vii, în special pentru cele de dimensiuni reduse și care efectuează mișcări cu amplitudini mici, peste 90% dintre acestea fiind lipsite de structură scheletică. În cazul structurilor mecanice, complianța se concentrează în anumite componente de transmitere a mișcării sau de acționare, care simulează comportamentul compliant. Proiectarea unor asemenea structuri implică metode de analiză cinematică și dinamică particulare.

### 1.3 PARTICULARITĂȚI ALE STRUCTURII ROBOȚILOR INDUSTRIALI

*Robotul* este un produs mecatronic, înglobând tehnologie mecanică și electronică, și poate fi definit ca un sistem cu funcționare automată, adaptabil condițiilor de mediu complex și variabil în care acționează, prelungind sau înlocuind una sau mai multe acțiuni ale omului asupra mediului. Dacă procesul de activitate este unul tehnologic, roboții sunt numiți industriali, iar dacă gradul de dotare cu inteligență artificială este redus se preferă denumirea de *manipulator*. Un robot de ultimă generație este un sistem complex, care, pe o structură mecanică, utilizează microprocesoare, senzori, sisteme de acționare și comandă, conferindu-i astfel capacitate de acțiune și percepere, de decizie și comunicare [22].

Indiferent de generație, robotul acționează cu mediul înconjurător prin structura sa mecanică, care asigură deplasarea, poziționarea și orientarea organului de execuție sau a efectorului final. Foarte frecvente sunt structurile de manipulare de tip antropomorfic, a căror elemente au denumiri împrumutate de la scheletul uman, **Figura 1.1**.

Componentele specifice ale structurii unui manipulator sunt *bara* și *articulația*. Bara este elementul de structură cu trei grade de libertate, care asigură în principal poziționarea, iar articulația elementul de structură cu trei grade de libertate, care asigură orientarea barei și conexiunea între două elemente succesive. În interiorul articulațiilor se găsesc în mod frecvent motoare de acționare pas cu pas sau de curent continuu și mecanisme de transmitere a mișcării.

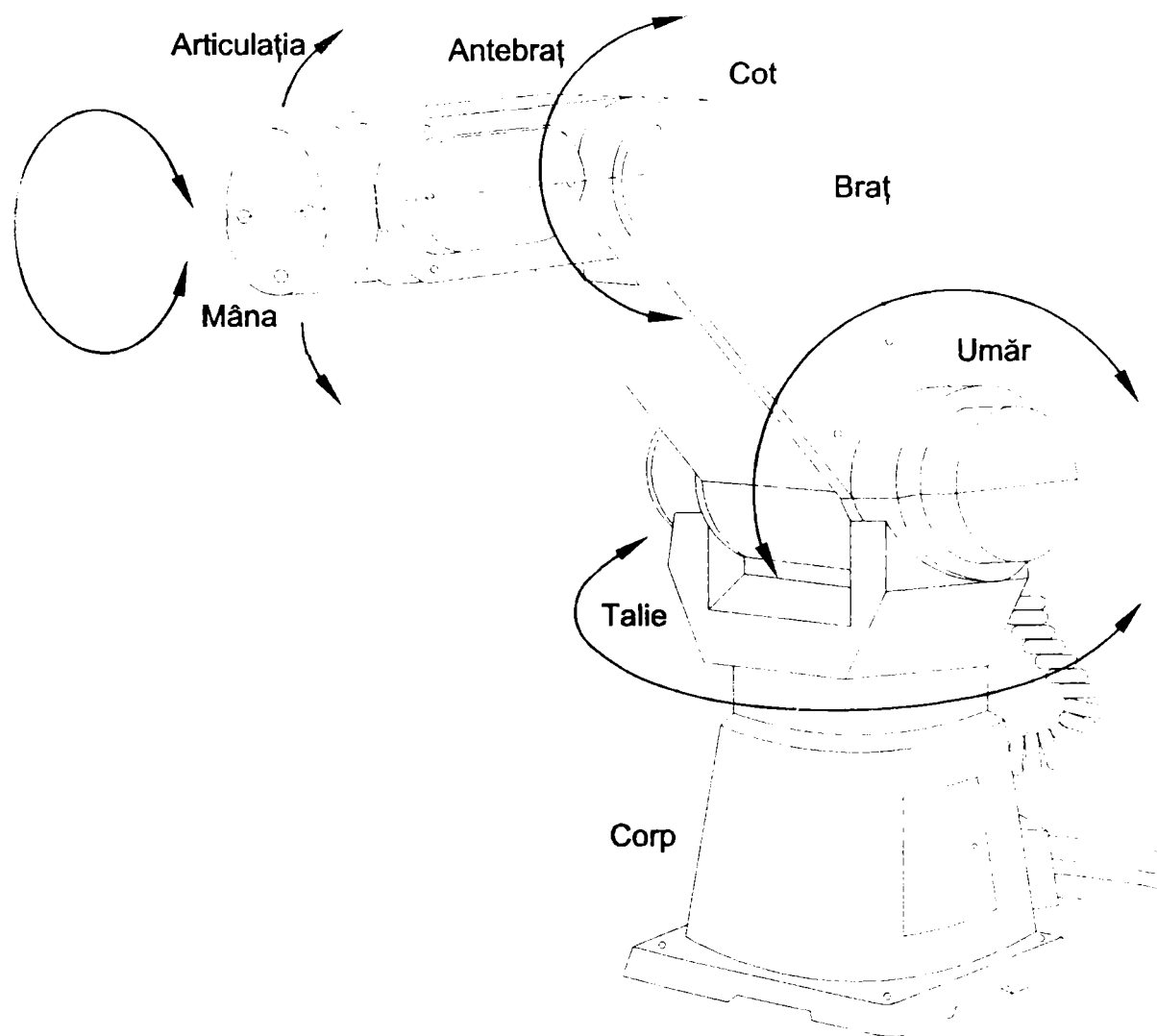


Fig. 1.1 Structura tipică a unui manipulator

Structurile articulate prezintă unele avantaje cum ar fi : o mare flexibilitate în mișcare, posibilitatea poziționării în interiorul sau deasupra corpurilor cu geometrie complicată, acoperă un spațiu mare de lucru în raport cu dimensiunile componentelor care le alcătuiesc etc. În schimb acestea au un comportament dinamic complex și sunt greu de comandat pentru asigurarea unor mișcări impuse în spațiul de lucru [42].

Atât în proiectarea mecanică a structurilor articulate, cât și la sinteza sistemelor de comandă a mișcării acestora, este necesară o etapă de modelare. Comanda mișcării presupune transformarea traiectoriei de mișcare din coordonate operaționale în coordonate robot, precum și generarea automată a planului de acțiuni a robotului în mediul de lucru, pentru efectuarea sarcinilor programate.

Această modelare are în vedere un aspect geometric, prin legăturile dintre poziția și orientarea elementelor mâinii, și un aspect dinamic, prin ecuațiile de mișcare ale robotului, care exprimă dependența între forțele aplicate și accelerațiile, vitezele și pozițiile rezultate. Modelul dinamic rezultat este puternic nelinear, în special datorită considerării complianței structurii mecanice.

Mișcarea compliantă apare atunci când poziția efectorului final este supusă la constrângeri prin natura sarcinii de îndeplinit. Exemple de astfel de sarcini ar fi ștergerea unui geam, deschiderea unei uși, răsucirea unei chei, montarea unui șurub, introducerea unui știft în gaură, așezarea unui obiect pe masă, apucarea unui obiect etc. În toate aceste operații, traiectoria este modificată datorită forțelor de contact sau a stimulilor tactili, ce apar pe parcursul mișcării efectorului final, care efectuează sarcina dată. În robotică se întâlnesc două clase de complianță, numite pasivă și activă. Complianța pasivă exprimă tendința corpurilor de a se deplasa datorită forțelor aplicate, de exemplu apariția deformațiilor elastice produse de solicitările exterioare, în timp ce complianța activă caracterizează mișcarea controlată a unui corp, ca răspuns la forțele de contact sau stimuli exteriori, astfel încât să minimizeze magnitudinea acestora.

Fiecare element de structură al manipulatorului este compliant într-un grad oarecare. Chiar dacă sunt supradimensionate, cu scopul de a fi foarte rigide și de a asigura repetabilitatea mișcării, barele brațelor se deformează sub încărcătură. De asemenea, motoarele de acționare nu se comportă identic la sarcini diferite, poziția, viteza și accelerația acestora depinzând de momentele rezistente. În contrast, pentru manipuloarele rapide, superușoare, răspunsul dinamic al structurii este decisiv marcat de complianță și necesită algoritmi speciali pentru a asigura precizia, repetabilitatea și, uneori, stabilitatea mișcării. Pentru un robot oarecare, există întotdeauna un element de structură a cărui complianță este determinantă. În cazul manipuloarelor complianța dominantă, ce va determina complianța întregii structuri, este generată de deformațiile elastice ale barelor brațelor și de alunecările din articulații.

Complianța manipuloarelor este prin urmare un element cheie în modelarea și simularea dinamicii structurii mecanice a acestora. Operațiile pentru care sunt proiectați roboții implică mișcări compliantă, care sunt obișnuite în natură, dar sunt greu de condus și realizat în cazul structurilor articulate. În general, complianța structurală poate fi utilizată, prin control și comnadă adecvate, la îmbunătățirea performanțelor operaționale ale roboților și manipuloarelor.

## 1.4 EVALUAREA COMPLIANȚEI

Este evident faptul că nici o structură reală nu este perfect rigidă. Aceasta înseamnă că structurile pot vibra prin mișcări de încovoiere sau răsucire. Mai mult decât atât, structurile care vibrează pot avea deformații complexe și mai multe frecvențe de rezonanță, ceea ce complică analiza acestora. Din acest motiv, proiectarea unor produse care implică structuri mecanice, necesită cunoașterea unor criterii sau parametri care caracterizează comportamentul dinamic al acestora.

Una dintre cele mai utilizate funcții de transfer pentru caracterizarea rigidității dinamice și a răspunsului vibrațional este complianța. *Complianța* reprezintă susceptibilitatea unei structuri la mișcare ca urmare a unor solicitări exterioare, exprimată cantitativ prin raportul dintre amplitudinea mișcării, liniară sau unghiulară și mărimea forței aplicate în acel punct

$$C = \frac{|d|}{|F|} \quad (1.1)$$

unde  $C$  este complianța,  $|F|$  mărimea forței aplicate, iar  $|d|$  amplitudinea mișcării rezultante [88]. Unitatea de măsură pentru complianță este  $[m/N]$ , în practică în mod frecvent fiind întâlnite valori ale complianței pentru structurile mecanice exprimate prin submultiplul  $[mm/N]$ .

În general complianța depinde de frecvență, poziția și direcția forței aplicate, precum și de poziția punctului unde se face măsurătoarea. Pentru o structură dată se obține experimental *curba de complianță*, care este reprezentată în coordonate logaritmice, ca în Figura 1.2.

Comportamentul de corp rigid perfect este reprezentat de segmentul de linie dreaptă, cu panta -2 în coordonate logaritmice, deoarece pentru o masă  $m$  care are o mișcare periodică după o lege sinusoidală, complianța are valoarea  $C = 1 / m\omega^2$ . Pentru frecvențe joase, zona I din figură, comportamentul structurii reale este cel al unui corp rigid, complianța scăzând invers proporțional cu pătratul frecvenței. Pentru frecvențe mari, zona II a graficului, curba de complianță deviază de la linia dreaptă, structura nu mai poate fi considerată rigidă și apar deformațiile datorate vibrațiilor. Se evidențiază punctele de maxim A, B, C, D, specifice frecvențelor de rezonanță. Spre deosebire de reprezentările în funcție de timp, unde valoarea amortizării poate fi determinată numai pentru frecvența naturală, reprezentările în funcție de frecvență oferă informații despre amortizările mai

multor moduri de vibrație. O metodă pentru determinarea coeficienților de amortizare pentru moduri diferite de vibrație va fi prezentată în Capitolul 4.

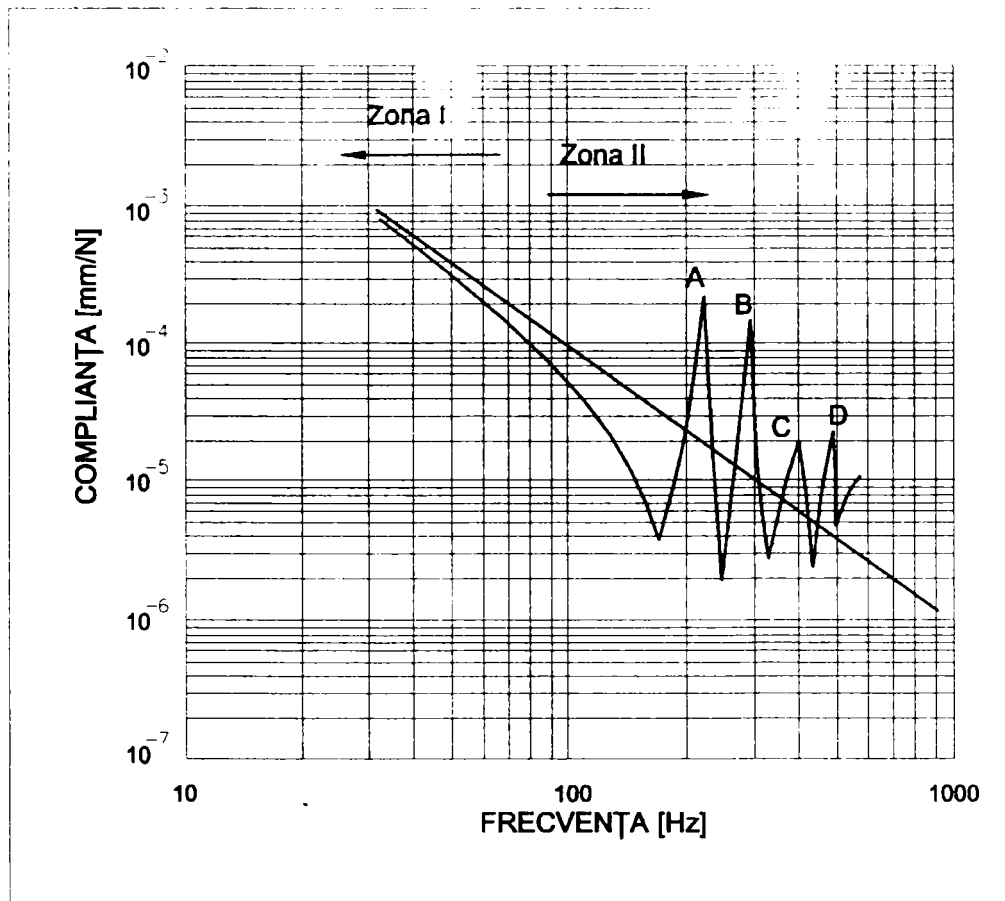


Fig.1.2 Curba de complianță

Pentru o caracterizare completă a răspunsului dinamic al unei structuri ar fi necesar determinarea curbei de complianță pentru fiecare pereche de puncte de măsurare și excitație a corpului și pentru fiecare direcție de aplicare a forței. În practică acest lucru nu este necesar, deoarece se pot utiliza metode analitice de extrapolare a rezultatelor câtorva seturi de măsurători, pentru mișcarea întregii structuri. Procesul prin care se estimează deformările structurale pornind de la un set minim de măsurători este specific analizei modale.

*Determinarea experimentală a complianței* se face cu ajutorul unei instalații care cuprinde în principal un ciocan de impact, echipat cu un traductor pentru măsurarea forței, utilizat pentru excitația structurii, și un accelerometru pentru înregistrarea accelerației mișcării rezultate [60, 88]. Cele două serii de date experimentale obținute, forța și accelerația în funcție de timp, Figura 1.3, se transformă utilizând analiza frecvențială, în serii funcție de frecvență, după care valorile pentru

acelerație se transformă în valori echivalente pentru deplasare și calculând raportul deplasare - forță se obține setul de puncte pentru curba de complianță.

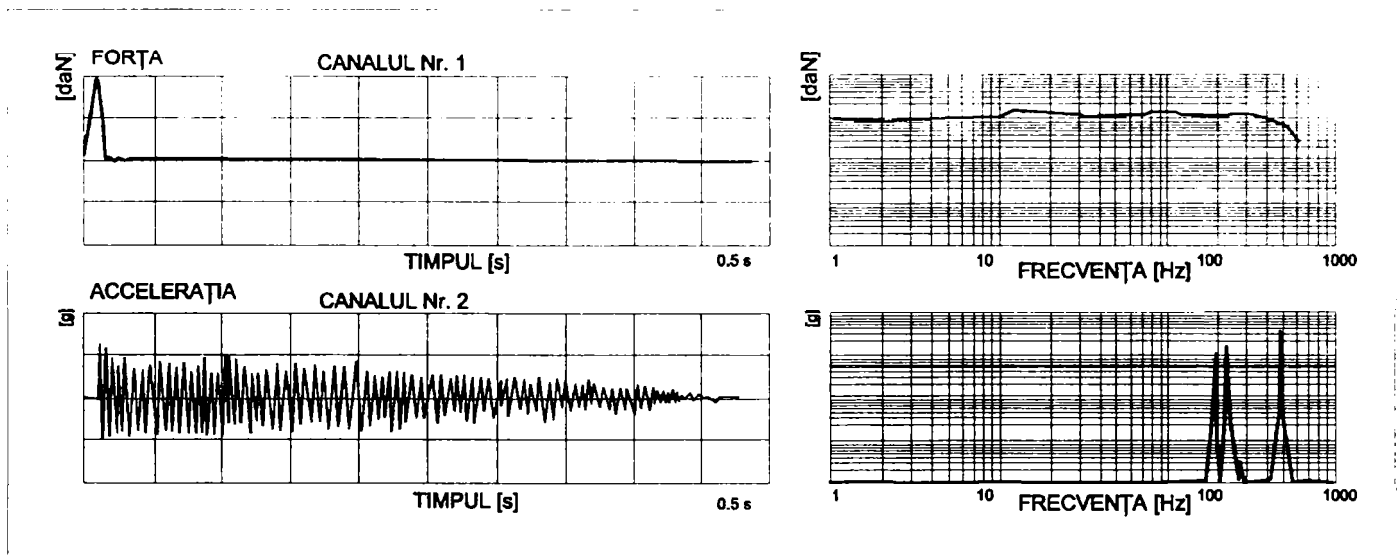


Fig. 1.3 *Diagramele de forță și accelerație în domeniile de timp și frecvență*

În mod obișnuit, curba obținută depinde de locul măsurării, dar datele măsurate în puncte diferite vor pune în evidență aceleași valori pentru frecvențele de rezonanță, în timp ce amplitudinea mișcărilor va diferi. Comparând datele pentru un număr suficient de mare de puncte se poate reconstitui mișcarea reală a structurii pentru fiecare frecvență de rezonanță. Numărul de puncte de măsurare depinde de complexitatea structurii testate, iar aceste valori sunt specifice unei mișcări rezonante sau *mod*. Inițial analiza modală era dificil de executat datorită volumului mare de calcule, dar prin utilizarea calculatoarelor electronice, răspunsul dinamic al unei structuri poate fi relativ ușor determinat.



# CAPITOLUL 2

## MODELAREA DINAMICĂ A MANIPULATOARELOR

### 2.1 INTRODUCERE

Necesitatea creșterii productivității a condus la creșterea *vitezei de operare* pentru multe din mașinile industriale, până la un punct la care elasticitatea elementelor care le compun influențează semnificativ performanțele întregului sistem. Funcționarea mașinilor în apropierea frecvențelor de rezonanță poate să conducă la amplificarea deformațiilor organelor în mișcare, încărcării rulmenților sau solicitărilor interne ale elementelor de structură, astfel încât performanțele sistemului pot fi degradate sau pot apărea chiar cazuri de distrugeri catastrofale. Din acest motiv un model analitic de calcul eficient și corect trebuie să țină seama de efectele modului de distribuire a maselor în mișcare și de elasticitatea elementelor componente, pentru proiectarea unor mașini capabile să opereze la viteze mari, în sisteme de mare productivitate.

Pentru studiul comportamentului dinamic al mecanismelor și structurilor sunt cunoscute mai multe tehnici analitice și formalisme matematice, dar majoritatea presupun un comportament ideal de corp rigid al elementelor care le compun. În schimb o metodă practică pentru proiectanți, care să estimeze răspunsul dinamic real al unei structurii compliante este destul de dificil de generalizat, datorită în principal factorilor de influență particulari fiecărui caz studiat.

Scopul acestui studiu este definirea unui model general pentru analiza dinamică a structurii mecanice a unui robot industrial, alcătuit din *bare elastice* și *articulații compliante* și simularea numerică a răspunsului dinamic al acestei structuri. Validarea acestui model se va face prin compararea rezultatelor numerice ale simulării cu datele măsurate experimental, pe o structură reală de robot industrial.

Acest model poate fi utilizat pentru analiza lanțurilor cinematice deschise și închise ale unui robot sau manipulator, pentru obținerea informațiilor necesare proiectării mecanismului, optimizării sistemelor de acționare și conducere, precum și pentru corecta planificare a mișcărilor.

2-1  
625-463/181 E



## 2.2 CADRUL GENERAL AL MODELĂRII

Structura mecanică a roboților industriali convenționali este în general proiectată și construită fără o analiză structurală detaliată. Fiecare componentă a manipulatorului este supradimensionată, astfel încât să se elimine flambajul elementelor sau deteriorări ale performanțelor sistemului provocate de vibrația încărcăturii utile. În realitate, lanțul cinematic deschis sau închis al structurii mecanice a manipulatorului este compliant, adică este format din elemente cu o anumită elasticitate și cuple cinematice de rotație compliant, care nu sunt perfect rigide, ceea ce determină suprapunerea peste mișcarea de bază, de corp rigid, a unor mișcări adiționale, perturbatoare.

Neglijarea comportamentului compliant al structurii mecanice a roboților industriali poate genera o degradare a performanțelor operaționale ale acestora, în special în aplicații care implică spațiu de lucru extins și o greutate cât mai mică a acestora. Chiar și în cazul roboților industriali de dimensiuni mici și aparent rigizi, este necesară luarea în considerare a deformațiilor pe care le suportă elementele componente. Efectul dinamic al acestor deformații suprapus peste tactul finit, digital al controlului computerizat în timp real al acționării acestora, poate cauza probleme serioase mai ales când se încearcă creșterea vitezei de operare.

*Vitezele de operare* ridicate, de ordinul 5 m/s sau 10 rad/s și precizii de poziționare de  $10^{-9}$  m, specifice roboților de ultime generații, implică mecanisme cât mai ușoare posibil, cu scopul reducerii forțelor inerțiale și a momentelor motoare necesare acționării. Acest lucru conduce însă la creșterea complianței structurii, care trebuie controlată spre a nu deteriora performanțele operaționale. În aceste situații contradictorii, modelarea dinamică trebuie să ia în considerare cât mai multe din aspectele următoare :

- 1) considerarea numai a mișcării de corp rigid a elementelor manipuloarelor este insuficientă ;
- 2) barele se deformează elastic și determină o mișcare adițională peste mișcarea de corp rigid ;
- 3) deformațiile barelor se datorează solicitărilor axiale, de încovoiere, de torsiune, de forfecare sau flambaj ;
- 4) bara poate fi considerată de tip Euler-Bernoulli sau de tip Timoshenko ;
- 5) articulațiile motoare sunt compliant, adică au o rigiditate echivalentă considerabil mai mică decât cea de corp rigid ;
- 6) modelarea barelor se poate face prin element finit cu două sau trei noduri ;

- 7) modelarea articulațiilor se poate face printr-un sistem echivalent cu arcuri sau prin element finit de tip articulație, în care dependența tensiuni-deformații nu mai este lineară.

Sistemul de ecuații diferențiale de ordinul doi care exprimă ecuațiile de mișcare este puternic nelinear și nu poate fi rezolvat analitic exact. Așa cum s-a anticipat în ipotezele anterioare, modelul numeric aproximativ are la bază metoda elementelor finite. Utilizarea acestei tehnici implică definirea unui tip de element finit special, care să ia în considerare cât mai mulți parametri sugerați de ipotezele 1) - 7), stabilirea proprietăților cinematice, evaluarea matricilor de rigiditate, masice și de amortizare, determinarea ecuațiilor de mișcare, precum și întocmirea unui program pentru asamblarea matricilor amintite, rezolvarea sistemului de ecuații și determinarea soluțiilor, care sunt deplasările nodale.

Având în vedere că structura este neomegenă, pentru modelarea numerică se definește un element finit izoparametric, cu trei noduri, care să poată caracteriza atât bara cât și articulația unui manipulator plan. După parcurgerea etapelor specifice analizei cu elemente finite, va rezulta un model dinamic neliniar al întregului mecanism compliant al manipulatorului, care înglobează efectele de cuplare din articulații cu mișcările barelor, considerate corpuri elastice.

În continuare, formalismul matematic fiind cunoscut, se va insista pe explicitarea cantitativă a termenilor expresiilor analitice care intervin în modelare, pentru ca, ulterior, să se poată întocmi programele de calcul pentru simularea numerică a răspunsului dinamic al structurii articulate.

## 2.3 MODELUL DE BARĂ

În teoria de rezistență a barei sunt răspândite două modele pentru bară. *Modelul Euler-Bernoulli* presupune că orice normală la fibra medie a barei, locul geometric al centrelor de greutate ale secțiunilor transversale, rămâne dreaptă și normală și după deformarea barei, deci rotirea secțiunii se poate calcula cu formula  $\varphi = dv/dx$ ,  $v$  fiind deplasarea perpendiculară pe fibra medie, iar  $x$  abscisa punctului de intersecție al fibrei medii cu secțiunea. *Modelului Timoshenko* consideră că normala la fibra medie a barei nedeformate rămâne dreaptă și după deformarea barei, dar nu mai este normală la fibra medie deformată, Figura 2.1. Secțiunea deformată se deplasează ca urmare a distribuției neuniforme a tensiunilor tangențiale.

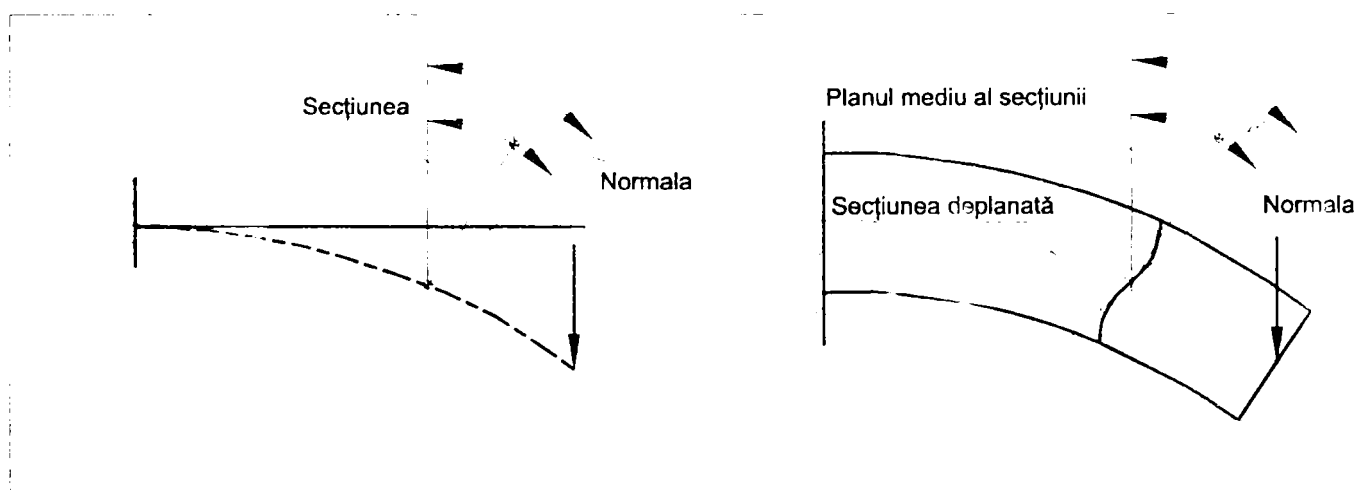


Fig. 2.1 Modelul de bară Timoshenko

Panta barei deformate are două componente, unghiul  $\Psi$  produs de momentul de încovoiere și unghiul  $\beta$ , care poate fi considerat egal cu valoarea medie a deformațiilor unghiulare  $\gamma$  produse de efortul tăietor. Aceste elemente se pot calcula cu formulele [44, 45]

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\frac{M_z}{EI_z}, \quad \beta = k_y \frac{T_y}{GA}, \quad \varphi = \Psi + \beta. \quad (2.1)$$

relații în care

- $M_z$  este momentul încovoiător,
- $E$  modulul de elasticitate longitudinal,
- $G$  modulul de elasticitate transversal,
- $I_z$  momentul de inerție în jurul axei  $z$ ,
- $T_y$  forța tăietoare,
- $k_y$  coeficientul lui Timoshenko.

Diferențele dintre modelele Euler-Bernoulli și Timoshenko rezultă din neglijarea sau considerarea efectului forțelor tăietoare asupra deformării barei. De exemplu, pentru o bară de tip Timoshenko, în secțiunea de încastrare rotația nu poate fi anulată de legături. Erorile introduse de modelul Euler-Bernoulli sunt mai pronunțate pentru barele cu raportul dintre lungime și înălțime mai mic decât 4. Cu alte cuvinte, efectul efortului tăietor se poate neglija în cazul barelor cu lungimea mare în raport cu înălțimea, pentru acestea ambele modele fiind aproximativ la fel de precise.

## 2.4 MODELAREA MANIPULATORULUI PLAN

### 2.4.1 DEFINIREA ELEMENTULUI FINIT

Structura mecanică a manipulatorului plan este formată din bare, care execută mișcări plan paralele, interconectate prin articulații, în care se găsesc în mod uzual elemente motoare de acționare și mecanisme de transmitere a mișcării. Articulațiile nu pot fi considerate, prin urmare, nici perfect rigide, ca și în cazul cadrelor, și nici simple cuple de rotație care nu preiau momente, ca și în cazul grinzilor cu zăbrele. Comportarea lor structurală este caracterizată printr-o complianță estimată sau determinată experimental, care se exprimă printr-o rigiditate echivalentă locală, semnificativ mai mică decât cea de corp rigid.

Analiza numerică a răspunsului dinamic al acestei structuri se poate efectua prin metoda elementelor finite. Formularea elementului finit trebuie să includă influențele solicitărilor axiale, de încovoiere și forfecare, care determină deformații elastice, generând o mișcare relativă, ce se suprapune peste mișcarea de transport de corp rigid. Complianța articulațiilor, masele unităților motoare și a sculei de lucru, precum și amortizarea externă, dacă aceasta există în spațiul de lucru, trebuie să fie de asemenea luate în considerare în formularea ecuațiilor de mișcare ale structurii discretizate cu elemente finite.

Pentru a include toate aceste cerințe, se definește un *element finit izoparametric* de tip bară, cu trei noduri, care reprezintă o porțiune din bara  $p$  a lanțului cinematic al manipulatorului, Figura 2.2. Se notează cu  $OXY$  sistemul de referință global al structurii, considerat fix, și cu  $O_p x_p y_p$  sistemul de coordonate local barei, cu originea în primul capăt al barei  $p$ , în așa fel încât axa  $x_p$  este pe direcția axei de simetrie a barei  $p$ , în forma sa rigidă, desenată cu linie continuă. Axa  $Ox_p$  este rotită față de direcția barei anterioare  $p-1$ , cu unghiul  $\theta_p$  al articulației motoare  $p$ .

Forma modificată a elementului finit, desenată cu linie întreruptă, se datorează deformațiilor elastice  $u_1$  până la  $u_9$ , care deplasează cele trei noduri **1**, **2** și **3**, nodul central fiind **3**, din pozițiile lor rigide  $A$ ,  $B$  și  $C$ , în configurația deformată  $A'$ ,  $B'$  și  $C'$ . Deplasările nodale ale elementului finit, sau *coordonatele generalizate*, se pot scrie sub formă matriceală

$$\{u\}^e = [u_1, u_2, \dots, u_9]^T \quad (2.2)$$

unde

- $u_1, u_4, u_7$  sunt deplasările longitudinale pe direcția axei  $x_p$ ,
- $u_2, u_5, u_8$  sunt deplasările transversale pe direcția axei  $y_p$ ,
- $u_3, u_6, u_9$  sunt rotațiile după axa  $z_p$ , ale nodurilor 1, 2 și 3.

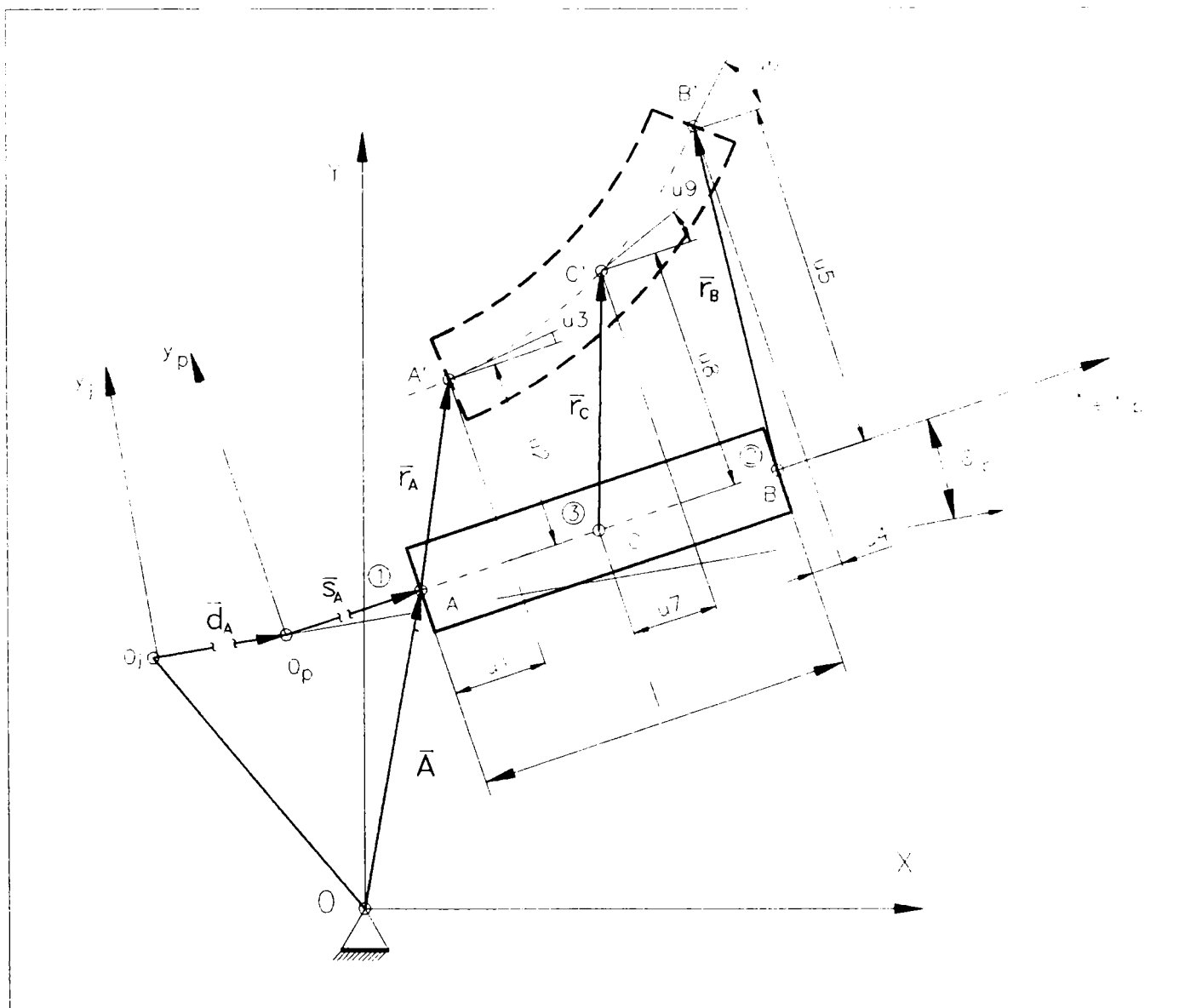


Fig. 2.2 Forma rigidă și deformată a elementului finit

## 2.4.2 PARAMETRI CINEMATICI

Vitezele și accelerațiile relative ale nodurilor 1, 2 și 3, față de poziția rigidă a elementului finit, se obțin prin derivare din relația (2.2)

$$\{\dot{u}\}^e = [\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_9]^T, \quad \{\ddot{u}\}^e = [\ddot{u}_1, \ddot{u}_2, \dots, \ddot{u}_9]^T \quad (2.3)$$

Dacă  $\vec{A}'$  și  $\vec{A}$  reprezintă vectorii de poziție ai nodului 1, în poziție deformată, respectiv nedeformată, față de sistemul global  $OXY$ , exprimați valoric în sistemul local de coordonate  $O_p x_p y_p$  al barei  $p$  și  $\vec{r}_A$  vectorul de poziție al punctului  $A'$  în sistemul local de coordonate  $O_p x_p y_p$ , se poate scrie

$$\vec{A}'^{(p)} = \vec{A}^{(p)} + \vec{r}_A^{(p)}, \quad (2.4)$$

sau sub formă matriceală [2]

$$\begin{Bmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{Bmatrix}^{(p)} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix}^{(p)} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^{(p)}, \quad (2.5)$$

unde

$$\begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix}^{(p)} = \sum_{j=1}^{p-1} \left( \prod_{k=j+1}^p [{}_{(k-1)}T^{(k)}] \right) \begin{Bmatrix} d_j \\ 0 \end{Bmatrix}^{(j)} + \begin{Bmatrix} s_A \\ 0 \end{Bmatrix}^{(p)} \quad (2.6)$$

Prin exponenții  $(p)$  și  $(j)$  s-au notat sistemele de coordonate  $O_p x_p y_p$ , respectiv  $O_j x_j y_j$ , în care sunt exprimate valorile coordonatelor respective. În relația (2.6),  $[{}_{(k-1)}T^{(k)}]$  este matricea de transformare de coordonate din sistemul  $O_{k-1} x_{k-1} y_{k-1}$ , în sistemul  $O_k x_k y_k$ , în urma rotirii articulației  $k$  în jurul axei  $z_k$  cu unghiul  $\theta_k$ . Vectorul  $\vec{d}_j$  este vectorul de poziție al capătului extrem al barei  $j$ , definit în sistemul local de coordonate  $O_j x_j y_j$  al barei  $j$ , iar  $\vec{s}_A$  este vectorul de poziție al punctului  $A$ , în sistemul local de coordonate  $O_p x_p y_p$  al barei  $p$ .

*Viteza liniară și accelerația liniară* absolute ale punctului  $A'$  se obțin prin derivare, din ecuația (2.4)

$$\vec{v}_{A'} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_A + \vec{v}_{rel} \quad (2.7)$$

$$\vec{a}_{A'} = \vec{a}_A + \vec{\epsilon}_A \times \vec{r}_A + 2\vec{\omega}_A \times \vec{v}_{rel} + \vec{\omega}_A \times (\vec{\omega}_A \times \vec{r}_A) + \vec{a}_{rel} \quad (2.8)$$

unde  $\vec{v}_A$  și  $\vec{a}_A$  sunt viteza liniară absolută și accelerația liniară absolută a punctului  $A$  a corpului rigid. *Viteza unghiulară și accelerația unghiulară* absolute  $\vec{\omega}_A$ ,  $\vec{\epsilon}_A$  ale punctului  $A$  sunt definite de

$$\vec{\omega}_A = (\omega_p + \dot{u}_3)\vec{k}, \quad \vec{\varepsilon}_A = (\varepsilon_p + \ddot{u}_3)\vec{k}, \quad (2.9)$$

unde  $\omega_p$  și  $\varepsilon_p$  sunt viteza și accelerația pentru mișcarea de corp rigid ale barei  $p$ . Pentru manipulatorul cu articulații motoare, acestea se calculează cu relațiile

$$\vec{\omega}_p = \sum_{j=1}^p \dot{\theta}_j \vec{k}, \quad \vec{\varepsilon}_p = \sum_{j=1}^p \ddot{\theta}_j \vec{k}, \quad (2.10)$$

unde  $\dot{\theta}_j$  și  $\ddot{\theta}_j$  sunt viteza și accelerația unghiulară ale articulației barei rigide  $j$ ,  $\vec{k}$  reprezintă vectorul unitar pe direcția  $Z$ . Vectorii  $\vec{v}_{rel}$  și  $\vec{a}_{rel}$  pentru nodul 1 sunt dați de

$$\{v_{rel}\} = [\dot{u}_1, \dot{u}_2]^T, \quad \{a_{rel}\} = [\ddot{u}_1, \ddot{u}_2]^T, \quad (2.11)$$

Ecuțiile (2.7) - (2.11) se assemblează sub formă matricială, pentru a descrie vitezele și accelerațiile absolute ale nodului 1. Dacă notăm  $\{u\}^1 = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ , coordonatele generalizate ale nodului 1, atunci [2, 3, 46]

$$\{\dot{u}^a\}^1 = \{\dot{u}^t\}^1 + [U]\{u\}^1 + \{\dot{u}\}^1, \quad (2.12)$$

și

$$\{\ddot{u}^a\}^1 = \{\ddot{u}^t\}^1 + [V]\{u\}^1 + [W]\{\dot{u}\}^1 + \{\ddot{u}\}^1, \quad (2.13)$$

unde

$$[U] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_p & 0 \\ \omega_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [V] = \begin{bmatrix} -\omega_p^2 & -\varepsilon_p & 0 \\ \varepsilon_p & -\omega_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [W] = \begin{bmatrix} 0 & -2\omega_p & 0 \\ 2\omega_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

Exponentul  $a$  semnifică valorile absolute pentru viteze și accelerații, iar exponentul  $t$  valorile pentru mișcarea de corp rigid, adică mișcarea transport a punctului  $A$ .

În mod analog se scriu expresiile vitezelor și accelerațiilor absolute ale nodurilor 2 și 3, care se combină împreună, pentru a descrie în mod sintetic comportamentul cinematic al elementului finit  $e$ , sub o formă matricială

$$\{\dot{u}^a\}^e = \{\dot{u}^t\}^e + [P]\{u\}^e + \{\dot{u}\}^e, \quad (2.15)$$

$$\{\ddot{u}^a\}^e = \{\ddot{u}^t\}^e + [Q]\{u\}^e + [R]\{\dot{u}\}^e + \{\ddot{u}\}^e, \quad (2.16)$$

relații în care

$$[P] = \begin{bmatrix} [U] & [0] & [0] \\ [0] & [U] & [0] \\ [0] & [0] & [U] \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} [V] & [0] & [0] \\ [0] & [V] & [0] \\ [0] & [0] & [V] \end{bmatrix}, \quad [R] = \begin{bmatrix} [W] & [0] & [0] \\ [0] & [W] & [0] \\ [0] & [0] & [W] \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

unde  $[0]$  reprezintă matricea nulă de dimensiune  $3 \times 3$ . Trebuie precizat că toate valorile variabilelor și coeficienților din relațiile (2.12), (2.13), (2.15) și (2.16) sunt definite în sistemul de coordonate local al barei  $p$  a manipulatorului, pe care elementul finit  $e$  este localizat.

### 2.4.3 FUNCȚIILE DE FORMĂ

O caracteristică esențială a metodei elementelor finite este aceea prin care mărimile necunoscute în interiorul domeniului elementului finit sunt exprimate prin intermediul unor funcții de interpolare, numite și *funcții de formă*, pornind de la valori corespunzătoare nodale, presupuse cunoscute. În mod frecvent interpolarea se utilizează pentru determinarea deplasărilor într-un punct curent al elementului finit, cunoscând deplasările nodale, și pentru determinarea coordonatelor geometrice ale aceluiași punct, cunoscând coordonatele nodale. Prin urmare, interpolarea aproximează câmpul deplasărilor sau deformația și coordonatele geometrice sau geometria, în interiorul elementului finit. Când funcțiile de interpolare sunt aceleași și pentru deformații și pentru coordonatele geometrice, elementul finit este numit *izoparametric*.

Este evident că expresiile analitice ale funcțiilor de formă depind de sistemul de coordonate la care se face raportarea elementului finit. Deoarece funcțiile de formă sunt implicate în operații de derivare și integrare, este de preferat expresii cât mai simple ale acestora.

*Sistemul local de coordonate* al elementului finit,  $O_e x_e y_e$ , are originea în nodul **1** și axa  $O_e x_e$  pe direcția longitudinală a acestuia, suprapusă peste axa  $x_p$ . Pentru a simplifica expresiile analitice, în mod frecvent, funcțiile de formă sunt exprimate în coordonate naturale, într-un *sistem natural de coordonate*, atașat elementului finit, Figura 2.3. Coordonatele naturale unidimensionale  $\eta$  ale elementului finit sunt adimensionale, au originea în punctul de mijloc al elementului, nodul **3**, verifică relația  $-1 \leq \eta \leq 1$  și sunt definite prin [8, 49]

$$\eta = \frac{x - \frac{l}{2}}{\frac{l}{2}}, \quad (2.18)$$

$x$  fiind abscisa curentă în sistemul local de coordonate al elementului finit.



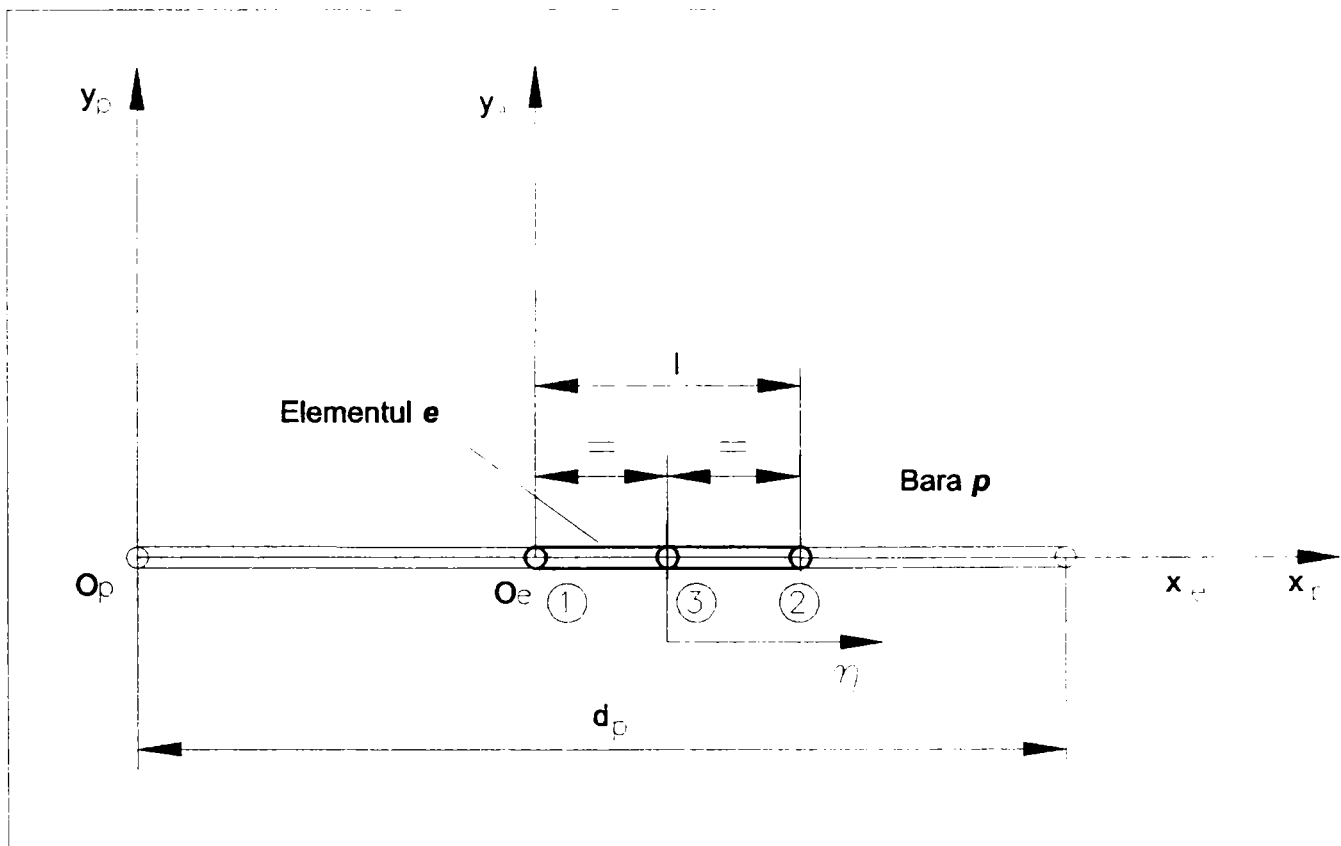


Fig. 2.3 Sistemul local și sistemul natural de coordonate al elementului finit

Coordonatele locale ale unui punct curent  $P$ , în interiorul unui element finit, sunt reprezentate în sistemul de coordonate naturale  $\eta$  de o deplasare axială  $w_\eta$ , o deplasare transversală  $v_\eta$  și o rotație  $\varphi_\eta$  a secțiunii transversale a barei care conține punctul  $P$ . Aceste coordonate generalizate pot fi exprimate în funcție de coordonatele nodale cu ajutorul funcțiilor de formă, prin relațiile [2, 3]

$$w_\eta = [N_w] \{u\}^e, \quad v_\eta = [N_v] \{u\}^e, \quad \varphi_\eta = [N_\varphi] \{u\}^e, \quad (2.19)$$

unde

$$[N_w] = [N_1, 0, 0, N_2, 0, 0, N_3, 0, 0], \quad (2.19a)$$

$$[N_v] = [0, N_1, 0, 0, N_2, 0, 0, N_3, 0], \quad (2.19b)$$

$$[N_\varphi] = [0, 0, N_1, 0, 0, N_2, 0, 0, N_3]. \quad (2.19c)$$

Alegerea funcțiilor de formă  $N_1$ ,  $N_2$  și  $N_3$ , care să aproximeze deformațiile în interiorul elementului finit, pornind de la deplasările nodale, are o importanță deosebită pentru precizia rezultatelor. Astfel, pentru un element finit de tip bară cu două noduri, funcțiile de formă sunt de gradul I, pentru că cele două noduri pot defini numai o dreaptă. Deoarece se consideră că solicitarea

la încovoiere este semnificativă pentru barele manipulatorului, forma după deformație a elementului finit va fi curbă. Această ipoteză presupune funcții de formă de gradul II, ceea ce necesită utilizarea unui element finit cu trei noduri. În consecință se aleg următoarele funcții de formă,  $N_1, N_2, N_3$ , definite în sistemul de coordonate naturale ale elementului finit [29, 49]

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \eta) - \frac{1}{2}(1 - \eta^2), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \eta) - \frac{1}{2}(1 - \eta^2), \quad N_3 = 1 - \eta^2 \quad (2.20)$$

Deoarece, pentru descrierea geometriei elementului finit, adică pentru determinarea coordonatelor geometrice ale unui punct în interiorul domeniului elementului finit, pornind de la coordonatele geometrice ale nodurilor, se utilizează pentru interpolare tot funcțiile de formă definite anterior, elementul finit va fi de tip bară cu trei noduri și izoparametric.

#### 2.4.4 EVALUAREA MATRICEI DE RIGIDITATE

*Energia de deformație*  $U^e$ , a unui element finit de bară considerat elastic, excluzând efectele temperaturii și deformațiile inițiale, este dată de relația [2, 49]

$$U^e = \frac{EA}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI_z}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{GAK}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right)^2 dx, \quad (2.21)$$

în care

- $l$  este lungimea elementului,
- $A$  aria secțiunii transversale,
- $I_z$  momentul de inerție,
- $k$  coeficientul lui Timoshenko,
- $E$  modulul de elasticitate longitudinal,
- $G$  modulul de elasticitate transversal.

Termenii cu integrale din membrul doi al relației (2.21) reprezintă energia de deformație produsă de deformațiile axiale, de încovoiere și de forfecare. Pentru evaluarea acestora este necesară cunoașterea derivatelor parțiale ale parametrilor  $w, v$  și  $\varphi$  în raport cu coordonata  $x$ . Deoarece  $w_\eta, v_\eta, \varphi_\eta$  sunt definite în sistemul de coordonate naturale  $\eta$ , trebuie definit operatorul iacobian  $[J]$ , pentru

a exprima derivatele în coordonate naturale în funcție de coordonatele locale. Formal acest lucru se scrie [2, 3]

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = [J] \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.22)$$

unde  $[J] = \left[ \frac{\partial x}{\partial \eta} \right]$  este *operatorul iacobian*

În formularea izoparametrică, coordonatele punctului curent  $P$  de pe elementul finit, sunt interpolate pornind de la coordonatele nodurilor  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , utilizând aceleași funcții de interpolare (2.20), ca și pentru aproximarea deplasărilor

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i x_i = (\eta+1) \frac{l}{2}, \quad (2.23)$$

de unde se deduce iacobianul

$$[J] = \left[ \frac{\partial x}{\partial \eta} \right] = \left[ \frac{l}{2} \right]. \quad (2.24)$$

Rezultă formalismul  $\frac{\partial}{\partial x} = [J]^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta}$ , unde  $[J]^{-1}$  este inversul operatorului iacobian și care are

expresia pentru elementul de tip bară,  $[J]^{-1} = \left[ \frac{2}{l} \right]$ . Utilizând acest formalism se determină valorile

derivatelor în raport cu coordonata  $x$ , pentru mărimile care intervin în relația (2.21), pornind de la exprimarea lor în sistemul natural de coordonate, relațiile (2.19). De exemplu pentru deplasarea  $w$  avem  $\frac{\partial}{\partial x}(w) = [J]^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta}(w_\eta)$  și astfel se obțin

$$\frac{\partial w}{\partial x} = [B_w] \{u\}^e, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = [B_v] \{u\}^e, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = [B_\varphi] \{u\}^e, \quad (2.25)$$

unde

$$[B_w] = [J]^{-1} \left[ \frac{\partial N_1}{\partial \eta}, 0, 0, \frac{\partial N_2}{\partial \eta}, 0, 0, \frac{\partial N_3}{\partial \eta}, 0, 0 \right], \quad (2.25a)$$

$$[B_v] = [J]^{-1} \left[ 0, \frac{\partial N_1}{\partial \eta}, 0, 0, \frac{\partial N_2}{\partial \eta}, 0, 0, \frac{\partial N_3}{\partial \eta}, 0 \right], \quad (2.25b)$$

$$[B_\varphi] = [J]^{-1} \left[ 0, 0, \frac{\partial N_1}{\partial \eta}, 0, 0, \frac{\partial N_2}{\partial \eta}, 0, 0, \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \right] \quad (2.25c)$$

Deoarece  $[B_w]$ ,  $[B_v]$ ,  $[B_\varphi]$  sunt funcții de coordonatele  $\eta$ , integrarea în ecuația (2.21) se va face tot în coordonate naturale, ținând cont că  $dx = |J| d\eta = \frac{l}{2} d\eta$ , unde  $|J|$  este determinantul

operatorului iacobian  $[J]$ . Spre exemplu, pentru calcularea primului termen din membrul doi al ecuației (2.21), care reprezintă energia datorată deformațiilor axiale, se procedează astfel [29, 49]:

- se determină derivata parțială a deplasării axiale în raport cu  $x$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = [B_w] \{u\}^e, \text{ relațiile (2.25), (2,25a);}$$

- se calculează pătratul derivatei

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = ([B_w] \{u\}^e)^T ([B_w] \{u\}^e) = \{u\}^T [B_w]^T [B_w] \{u\};$$

- se înlocuiește în expresia integralei

$$\frac{EA}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{EA}{2} \int_{-1}^1 \{u\}^T [B_w]^T [B_w] \{u\} |J| d\eta = \frac{1}{2} \{u\}^T \left( EA \int_{-1}^1 [B_w]^T [B_w] |J| d\eta \right) \{u\}$$

- se identifică expresia matricei de rigiditate corespunzătoare deformațiilor axiale,  $[k^s]_w^e$ , ținând cont de definiția energiei potențiale de deformație

$$[k^s]_w^e = EA \int_{-1}^1 [B_w]^T [B_w] |J| d\eta.$$

Procedând analog pentru ceilalți termeni ai relației (2.21), se determină expresia *matricei de rigiditate*  $[k^s]^e$ , pentru un element finit al structurii manipulatorului

$$\begin{aligned} [k^s]^e = & EA \int_{-1}^1 [B_w]^T [B_w] |J| d\eta + EI_z \int_{-1}^1 [B_\varphi]^T [B_\varphi] |J| d\eta + \\ & + GAK \int_{-1}^1 ([B_v] - [N_\varphi])^T ([B_v] - [N_\varphi]) |J| d\eta \end{aligned} \quad (2.26)$$

Exponentul  $s$  denotă proprietatea structurală de rigiditate, ulterior urmând să se pună în evidență și alt tip de rigiditate. După efectuarea integrărilor în (2.26) se obține *matricea de rigiditate* a unui element finit, ale cărei elemente sunt precizate în ANEXA I, la sfârșitul acestui capitol.

#### 2.4.5 EVALUAREA MATRICEI MASELOR

*Energia cinetică* a unui element finit este constituită din trei părți și are expresia [2, 49]

$$E_c = \frac{1}{2} \left( \int_0^l \rho A \dot{w}^2 dx + \int_0^l \rho A \dot{v}^2 dx + \int_0^l \rho I_z \dot{\varphi}^2 dx \right), \quad (2.27)$$

unde  $\rho$  este densitatea materialului,  $\dot{w}$ ,  $\dot{v}$  și  $\dot{\varphi}$  sunt vitezele absolute axială, transversală respectiv unghiulară a unui element diferențial de masă  $\rho A dx$  și de moment de inerție masic  $\rho I_z dx$ . Aceste viteze se obțin derivând ecuațiile (2.19)

$$\dot{w}_\eta = [N_w] \{\dot{u}\}^e, \quad \dot{v}_\eta = [N_v] \{\dot{u}\}^e, \quad \dot{\varphi}_\eta = [N_\varphi] \{\dot{u}\}^e \quad (2.28)$$

Deoarece  $[N_w]$ ,  $[N_v]$ ,  $[N_\varphi]$  sunt funcții de coordonatele  $\eta$ , integrarea în ecuația (2.27) se va face în coordonate naturale. În mod concret pentru evaluarea primului termen al energiei cinetice, datorat vitezei axiale, se parcurg următorii pași [29, 49] :

- se determină derivata deplasării axiale în raport cu timpul

$$\dot{w} = [N_w] \{\dot{u}\}^e, \text{ relația (2.28) ;}$$

- se calculează pătratul acestei derivate

$$\dot{w}^2 = ([N_w] \{\dot{u}\}^e)^T ([N_w] \{\dot{u}\}^e) = \{\dot{u}\}^T [N_w]^T [N_w] \{\dot{u}\} ;$$

- se înlocuiește în expresia integralei

$$\frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{w}^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho A \{\dot{u}\}^{eT} [N_w]^T [N_w] \{\dot{u}\}^e |J| d\eta = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^{eT} \left( \rho A \int_{-1}^1 [N_w]^T [N_w] |J| d\eta \right) \{\dot{u}\}^e$$

- se identifică expresia matricei maselor corespunzătoare vitezelor axiale ,  $[m^s]_w^e$  , ținând cont de definiția energiei cinetice

$$[m^s]_w^e = \rho A \int_{-1}^1 [N_w]^T [N_w] |J| d\eta.$$

Repetând acest procedeu pentru fiecare termen al energiei cinetice, se determină matricea maselor elementului finit, în coordonate locale  $O_e x_e y_e z_e$ ,

$$[m^s]^e = \rho A \int_{-1}^1 [N_w]^T [N_w] |J| d\eta + \rho A \int_{-1}^1 [N_v]^T [N_v] |J| d\eta + \rho I_z \int_{-1}^1 [N_\varphi]^T [N_\varphi] |J| d\eta \quad (2.29)$$

După integrările în (2.29) se obține *matricea consistentă a maselor*  $[m^s]^e$ , ale cărei elemente sunt precizate în ANEXA I, la sfârșitul acestui capitol. Exponentul  $s$  din interiorul parantezelor denotă proprietatea structurală a matricei. Matricea consistentă a maselor diferă de *matricea maselor concentrate* prin faptul că are și alte elemente nenule în afara celor situate pe diagonala principală.

#### 2.4.6 ECUAȚIILE DE MIȘCARE

*Ecuatiile de mișcare* ale unui element finit  $e$  se pot obține utilizând ecuațiile lui Lagrange [45, 46]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c^e}{\partial \dot{u}_n} \right) - \frac{\partial E_c^e}{\partial u_n} + \frac{\partial U^e}{\partial u_n} = P_n. \quad (2.30)$$

Dacă se ține cont de expresia energiei cinetice (2.27), scrisă sub forma din care s-a dedus matricea maselor (2.29), precum și de expresia accelerației absolute (2.16), ecuațiile lui Lagrange au următoarea exprimare matricială

$$[m^s]^e \{\ddot{u}^e\} + [Q]\{u\}^e + [R]\{\dot{u}\}^e + \{\ddot{u}\}^e + [k^s]^e \{u\}^e = \{p\}^e,$$

sau

$$[m^s]^e \{\ddot{u}\}^e + [c^g]^e \{\dot{u}\}^e + ([k^s]^e + [k^c]^e) \{u\}^e = \{f\}^e, \quad (2.31)$$

în care

$$- [k^c]^e = [m^s]^e [Q] \text{ este matricea de rigiditate centrifugală a elementului finit,} \quad (2.31a)$$

$$- [c^g]^e = [m^s]^e [R] \text{ este matricea de amortizare giroscopică,} \quad (2.31b)$$

$$- \{f\}^e = - [m^s]^e \{\ddot{u}^e\} + \{p^e\}^e \text{ este vectorul forțelor.} \quad (2.31c)$$

Exponenții  $c$  și  $g$  din interiorul parantezelor indică mărimile centrifugale și giroscopice și provin din termenii Coriolis și relativ ai accelerației absolute. Relația (2.31c) exprimă componentele vectorului forțelor și anume forțele de inerție, datorate accelerației mișcării de corp rigid, adică a mișcării de transport, și forțele externe, inclusiv datorate solicitărilor inițiale. Elementele matricilor  $[K^e]^e$  și  $[c^g]^e$ , calculate cu (2.31a) și (2.31b), sunt prezentate în ANEXA I, la sârșitul acestui capitol.

Expresia (2.31) reprezintă *ecuația dinamică a mișcării* unui element finit  $e$ , situat pe bara  $p$  a manipulatorului, în termenii coordonatelor generalizate ale sistemului local  $O_e x_e y_e$ . În sistemul global de coordonate  $OXY$ , coordonatele generalizate ale nodurilor, notate cu  $\{U\}^e$ , se obțin printr-o transformare de coordonate, utilizând matricea de transfer de la sistemul  $O_e x_e y_e$  sau  $O_p x_p y_p$ , la sistemul  $OXY$

$$\{U\}^e = [{}_{(p)}T^{(0)}]\{u\}^e, \quad (2.32)$$

unde cu  $[{}_{(p)}T^{(0)}]$  s-a notat matricea de transfer de la sistemul  $O_p x_p y_p (p)$ , la sistemul  $OXY (0)$ . Relația (2.32) se poate scrie

$$\{u\}^e = [B]_p \{U\}^e, \quad (2.33)$$

unde  $[B]_p = [{}_{(p)}T^{(0)}]^{-1}$  este matricea de transfer inversă, de la sistemul  $OXY (0)$ , la sistemul  $O_p x_p y_p (p)$ .

În formularea modelului dinamic al manipulatorului s-a admis ipoteza că deformațiile elastice sunt semnificative și determină o mișcare relativă, care se suprapune peste mișcarea de transport de corp rigid a barelor. Mișcarea relativă de deformație conduce la modificarea poziției reperului local de coordonate asociat unui element finit, din poziția rigidă a elementului finit, în poziția deformată a acestuia. Prin urmare, elementele matricei  $[B]_p$  sunt funcții de unghiul  $\Psi_k$ , care este suma dintre unghiul de deformație elastică  $u_k$  a nodului  $k$  al barei  $p$ , pe care nodul  $k$  este localizat, și suma unghiurilor de rotație ale articulațiilor 1.. $p$ , impuse de mișcarea de corp rigid a barelor 1.. $p$

$$\psi_k = \sum_{j=1}^p \theta_j + u_k, \quad (2.34)$$

adică matricea de compatibilitate  $[B]_p$  devine funcție de coordonatele generalizate sau necunoscute, prin intermediul deformațiilor elastice de rotație  $u_k$  [2].

Înlocuind relația (2.33) în ecuația (2.31) și după înmulțirea la stânga cu  $[B]_p^T$  a expresiei rezultate, se obține

$$[M^s]^e \{\ddot{U}\}^e + [C^g]^e \{\dot{U}\}^e + [K^{c,s}]^e \{U\}^e = \{F\}^e, \quad (2.35)$$

unde

$$[M^s]^e = [B]_p^T [m^s]^e [B]_p, \quad (2.35a)$$

$$[C^s]^e = [B]_p^T \left( 2[m^s]^e [\dot{B}]_p + [c^s]^e [B]_p \right), \quad (2.35b)$$

$$[K^{s,c}]^e = [B]_p^T \left( [m^s]^e [\ddot{B}]_p + [c^s]^e [\dot{B}]_p + ([k^c]^e + [k^s]^e) [B]_p \right), \quad (2.35c)$$

$$\{F\}^e = [B]_p^T \{f\}^e, \quad (2.35d)$$

elementele matricilor  $[\dot{B}]_p$  și  $[\ddot{B}]_p$  fiind prima, respectiv a doua derivată ale elementelor matricei  $[B]_p$ .

Relația (2.35) reprezintă ecuația mișcării unui element finit  $e$ , situat pe bara  $p$  a manipulatorului, exprimată în sistemul global de coordonate. Extinzând aceste ecuații la toate barele care alcătuiesc manipulatorul, prin operația de asamblare, se obțin ecuațiile de mișcare ale întregii structuri a manipulatorului

$$[M^s]\{\ddot{U}\} + [C^s]\{\dot{U}\} + [K^{s,c}]\{U\} = \{F\}. \quad (2.36)$$

*Matricile caracteristice* pentru masă, rigiditate și amortizare din ecuațiile de mișcare ale întregii structuri, relația (2.36), au fost deduse considerând numai mișcările de corp rigid și de deformație elastică ale elementelor finite. Pentru a implica și celelalte ipoteze ale modelării, formulate în secțiunea 2.2, acestea trebuie modificate pentru a ține cont de complianța articulațiilor motoare, de influența maselor suplimentare ale motoarelor de acționare și a sculei de lucru, precum și de amortizarea structurală și cea externă, a mediului de lucru, dacă aceasta există. Se obțin în final matricile caracteristice globale ale structurii, astfel :

- matricea de rigiditate globală

$$[K] = [K^{c,s}] + [K^j], \quad (2.36a)$$

- matricea globală a maselor

$$[M] = [M^s] + [M^e], \quad (2.36b)$$

- matricea globală de amortizare

$$[C] = [C^s] + [C^j] + [C^e]. \quad (2.36c)$$

Matricile  $[K^j]$ ,  $[M^e]$  și  $[C^e]$  reprezintă rigiditatea echivalentă a articulațiilor manipulatorului, masele unităților motoare și a încărcăturii efectorului final, respectiv amortizarea externă. Matricea  $[C^s]$  reprezintă amortizarea structurală a manipulatorului și este calculată prin *metoda de amortizare*



*proporțională Rayleigh*, considerând că este o combinație lineară între matricea structurală a maselor și matricea de rigiditate structurală

$$[C^s] = \alpha[M^s] + \beta[K^s]. \quad (2.37)$$

Constantele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt *constantele lui Rayleigh* și se determină prin rezolvarea sistemului de ecuații corespunzător primelor două moduri de vibrație

$$\alpha + \beta p_i^2 = 2p_i \xi_i \quad i = 1, 2, \quad (2.38)$$

unde  $p_i$  este frecvența modului  $i$  de vibrație, iar  $\xi_i$  coeficientul de amortizare corespunzător aceluiași mod  $i$  de vibrație. Cu aceste precizări, forma generală a ecuațiilor de mișcare a manipulatorului devine

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}. \quad (2.39)$$

Relația (2.39) reprezintă un sistem de ecuații diferențiale neliniare de ordinul doi, care descriu mișcarea nodurilor structurii discretizate a manipulatorului plan. Determinarea soluțiilor acestor ecuații se face prin iterații succesive și reprezintă răspunsul dinamic sau amplitudinile vibrațiilor neliniare ale sistemului. Dacă deformațiile elastice de rotație în relația (2.34) sunt neglijate, coeficienții matriceali în ecuația (2.39) devin constanți, soluțiile acestora reprezentând amplitudinile vibrațiilor liniare a sistemului manipulatorului.

Analiza modală a manipulatorului poate fi abordată prin neglijarea termenilor corespunzători încărcăturii și amortizărilor în ecuația (2.39), întregul sistem executând vibrații cu una din frecvențele naturale, ajungându-se la problema generalizată de valori proprii

$$\left( [K^s] - p_i^2 [M^s] \right) \{A_i\} = \{0\}, \quad (2.40)$$

unde  $p_i$  este frecvența naturală a modului  $i$  de vibrație, iar  $\{A_i\}$  este vectorul modal care descrie amplitudinile relative ale vibrațiilor structurii mecanice a manipulatorului plan.

Analiza cvasistatică a manipulatorului presupune ignorarea în ecuația (2.39) a termenilor derivați în raport cu timpul al deplasărilor nodale, ecuația devenind

$$[K^s]\{U\} = \{F\}. \quad (2.41)$$

Soluțiile ecuației (2.41) reprezintă deformațiile manipulatorului sub influența forțelor de inerție datorate accelerației barelor rigide și influențelor externe. Răspunsul cvasistatic reprezintă o limită a răspunsului tranzitoriu al sistemului oscilant nelinear.

A) MATRICEA DE RIGIDITATE STRUCTURALĂ A UNUI ELEMENT FINIT

$$[k^s]^e = \begin{bmatrix} \frac{7EA}{3l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{-8EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7Gak}{3l} & \frac{Gak}{2} & 0 & \frac{Gak}{3l} & \frac{-Gak}{6} & 0 & \frac{-8Gak}{3l} & \frac{2Gak}{3} \\ 0 & \frac{Gak}{2} & \frac{2Gakl}{15} + \frac{7EI}{3l} & 0 & \frac{Gak}{6} & \frac{-Gakl}{30} + \frac{EI}{3l} & 0 & \frac{-2Gak}{3} & \frac{Gakl}{15} - \frac{8EI}{3l} \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{7EA}{3l} & 0 & 0 & \frac{-8EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Gak}{3l} & \frac{Gak}{6} & 0 & \frac{7Gak}{3l} & \frac{-Gak}{2} & 0 & \frac{-8Gak}{3l} & \frac{-2Gak}{3} \\ 0 & \frac{-Gak}{6} & \frac{-Gakl}{30} + \frac{EI}{3l} & 0 & \frac{-Gak}{2} & \frac{2Gakl}{15} + \frac{7EI}{3l} & 0 & \frac{2Gak}{3} & \frac{Gakl}{15} - \frac{8EI}{3l} \\ \frac{-8EA}{3l} & 0 & 0 & \frac{-8EA}{3l} & 0 & 0 & \frac{16EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-8Gak}{3l} & \frac{-2Gak}{3} & 0 & \frac{-8Gak}{3l} & \frac{2Gak}{3} & 0 & \frac{16Gak}{3l} & 0 \\ 0 & \frac{2Gak}{3} & \frac{Gakl}{15} - \frac{8EI}{3l} & 0 & \frac{-2Gak}{3} & \frac{Gakl}{15} - \frac{8EI}{3l} & 0 & 0 & \frac{8Gakl}{15} + \frac{16EI}{3l} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

B) MATRICEA CONSISTENTĂ A MASELOR UNUI ELEMENT FINIT

$$[m^s]^e = \begin{bmatrix} \frac{2\rho Al}{15} & 0 & 0 & \frac{-\rho Al}{30} & 0 & 0 & \frac{\rho Al}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\rho Al}{15} & 0 & 0 & \frac{-\rho Al}{30} & 0 & 0 & \frac{\rho Al}{15} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\rho I_z l}{15} & 0 & 0 & \frac{-\rho I_z l}{30} & 0 & 0 & \frac{\rho I_z l}{15} \\ \frac{-\rho Al}{30} & 0 & 0 & \frac{2\rho Al}{15} & 0 & 0 & \frac{\rho Al}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\rho Al}{30} & 0 & 0 & \frac{2\rho Al}{15} & 0 & 0 & \frac{\rho Al}{15} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\rho I_z l}{30} & 0 & 0 & \frac{2\rho I_z l}{15} & 0 & 0 & \frac{\rho I_z l}{15} \\ \frac{\rho Al}{15} & 0 & 0 & \frac{\rho Al}{15} & 0 & 0 & \frac{8\rho Al}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho Al}{15} & 0 & 0 & \frac{\rho Al}{15} & 0 & 0 & \frac{8\rho Al}{15} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho I_z l}{15} & 0 & 0 & \frac{\rho I_z l}{15} & 0 & 0 & \frac{8\rho I_z l}{15} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

C) MATRICEA DE RIGIDITATE CENTRIFUGALĂ A UNUI ELEMENT FINIT

$$[k^c]^e = \begin{bmatrix} -\frac{2\rho Al}{15}\omega_p^2 & -\frac{2\rho Al}{15}\varepsilon_p & 0 & \frac{\rho Al}{30}\omega_p^2 & 0 & 0 & -\frac{\rho Al}{15}\omega_p^2 & 0 & 0 \\ \frac{2\rho Al}{15}\varepsilon_p & -\frac{2\rho Al}{15}\omega_p^2 & 0 & -\frac{\rho Al}{30}\varepsilon_p & \frac{\rho Al}{30}\omega_p^2 & 0 & \frac{\rho Al}{15}\varepsilon_p & -\frac{\rho Al}{15}\omega_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho Al}{30}\omega_p^2 & 0 & 0 & -\frac{2\rho Al}{15}\omega_p^2 & -\frac{2\rho Al}{15}\varepsilon_p & 0 & -\frac{\rho Al}{30}\omega_p^2 & -\frac{\rho Al}{15}\varepsilon_p & 0 \\ -\frac{\rho Al}{30}\varepsilon_p & \frac{\rho Al}{30}\omega_p^2 & 0 & \frac{2\rho Al}{15}\varepsilon_p & -\frac{2\rho Al}{15}\omega_p^2 & 0 & \frac{\rho Al}{15}\varepsilon_p & -\frac{\rho Al}{15}\omega_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho Al}{15}\omega_p^2 & -\frac{\rho Al}{15}\varepsilon_p & 0 & -\frac{\rho Al}{15}\omega_p^2 & -\frac{\rho Al}{15}\varepsilon_p & 0 & -\frac{8\rho Al}{15}\omega_p^2 & -\frac{8\rho Al}{15}\varepsilon_p & 0 \\ \frac{\rho Al}{15}\varepsilon_p & -\frac{\rho Al}{15}\omega_p^2 & 0 & \frac{\rho Al}{15}\varepsilon_p & -\frac{\rho Al}{15}\omega_p^2 & 0 & \frac{8\rho Al}{15}\varepsilon_p & -\frac{8\rho Al}{15}\omega_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

D) MATRICEA DE AMORTIZARE GIROSCOPICĂ A UNUI ELEMENT FINIT

$$[c^g]^e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 & \frac{\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 & -\frac{2\rho Al}{15}\omega_p & 0 \\ \frac{4\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 & -\frac{\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 & \frac{2\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 & -\frac{4\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 & -\frac{2\rho Al}{15}\omega_p & 0 \\ -\frac{\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 & \frac{4\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 & \frac{2\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 & \frac{2\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 & -\frac{16\rho Al}{15}\omega_p & 0 \\ \frac{2\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 & \frac{2\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 & \frac{16\rho Al}{15}\omega_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

## CAPITOLUL 3

### SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

#### 3.1 INTRODUCERE

Determinarea *răspunsului dinamic* al unei structuri presupune măsurarea sau evaluarea, în anumite puncte critice, a unor parametri variabili în timp, cum ar fi deplasări, deformații, viteze, accelerații etc. În funcție de structura reală acești parametri pot exprima rezistența la solicitări variabile, ca și în cazul clădirilor supuse mișcărilor seismice, precizia de prelucrare și rigiditatea în cazul mașinilor-unelte, precizia de poziționare și repetabilitatea mișcării pentru roboții industriali etc.

În faza de proiectare constructivă, dar și la verificarea sau reglarea parametrilor funcționali ai sistemelor care au la bază structuri mecanice, estimarea comportamentului dinamic se face pe baza unui model teoretic, care exprimă mișcarea printr-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul II, de regulă nelinear, având dimensiunea maximă egală cu numărul gradelor de libertate al structurii analizate. Rezolvarea aproximativă a acestui sistem se face prin metode numerice adecvate, care integrează ecuațiile de mișcare, la momente discrete de timp  $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots, t + n\Delta t$ , în intervalul de timp de studiu, rezultatele obținute urmând să fie validate experimental.

În capitolul anterior a fost formulat modelul dinamic al manipulatorului plan, utilizând metoda elementelor finite, presupunând că peste mișcarea de transport de corp rigid al mecanismului se suprapune o mișcare relativă datorită deformațiilor elastice ale barelor. S-au considerat de asemenea influențele complianțelor articulațiilor motoare, a maselor suplimentare și a amortizărilor. Simularea numerică a răspunsului dinamic al acestei modelări se va efectua în trei situații :

- 1) manipulatorul se găsește în repaos, într-o poziție caracteristică fixă în spațiul de lucru ; asupra efectorului final acționează o forță de excitație, pentru o durată scurtă de timp, după care structura execută mișcări vibratorii care se amortizează în timp ;
- 2) manipulatorul se găsește în mișcare, efectorul final execută o sarcină programată ; mișcarea vibratorie a structurii mecanice este influențată de parametri cinematici ai mișcării relative de

deformație elastică a barelor, adică se consideră în plus *rigiditatea centrifugală* și *amortizarea giroscopică*, relațiile (2.31a), (2.31b) ;

- 3) manipulatorul se găsește în mișcare ; în plus față de situația 2) se consideră că deplasările unghiulare datorate deformărilor elastice modifică poziția sistemului de referință local al elementului finit, matricea de transformare devenind funcție de timp, relația (2.34).

În fiecare situație simularea numerică trebuie să aibă posibilitatea de a include complianța articulațiilor, masele motoarelor de acționare din articulații și a efectorului final, amortizarea internă sau externă dacă există, precum și forțele exterioare constante sau variabile în timp.

Deoarece într-o astfel de abordare sunt implicate tehnici și metode din dinamica structurilor, proceduri numerice specifice analizei cu elemente finite, precum și algoritmi și tehnici de programare, pentru a facilita expunerea acestora se va considera modelul unui manipulator plan de tip RR. Mediul de programare utilizat este Matlab, care este specializat în calcul matriceal și care are posibilități suficiente de reprezentare grafică a rezultatelor. Versiunea 4.0 sau mai recentă a acestui mediu de programare larg răspândit, împreună cu un calculator personal pot constitui suportul informatic suficient pentru simularea numerică a răspunsului dinamic al manipulatorului plan.

### 3.2 FUNCȚIILE DE CONDUCERE

Se consideră un manipulator plan de tip RR, Figura 3.1, format din două bare de lungimi  $d_1$ , respectiv  $d_2$ , și două cuple motoare situate în articulațiile  $O_1$  și  $O_2$ , numite și *cuple cinematice conducătoare*. Fiecare din cuplele motoare imprimă barelor corespunzătoare mișcări de rotație independente între ele, caracterizate prin spațiul, viteza și accelerația unghiulare  $\theta_i$ ,  $\omega_i$ , respectiv  $\varepsilon_i$ ,  $i=1,2$ . Spațiile maxime parcurse de cele două bare, precum și perioada mișcărilor sunt impuse de valorile  $\Delta\theta_i$ ,  $i=1,2$ , respectiv  $T$ .

Funcțiile care exprimă dependența dintre spațiul parcurs și timp pentru cuplele cinematice conducătoare se numesc *funcții de conducere*. Aceste funcții se stabilesc ținând cont de restricțiile impuse de traiectoria de parcurs și de criteriile de productivitate maximă și trebuie să fie cunoscute în momentul programării mișcărilor robotului.

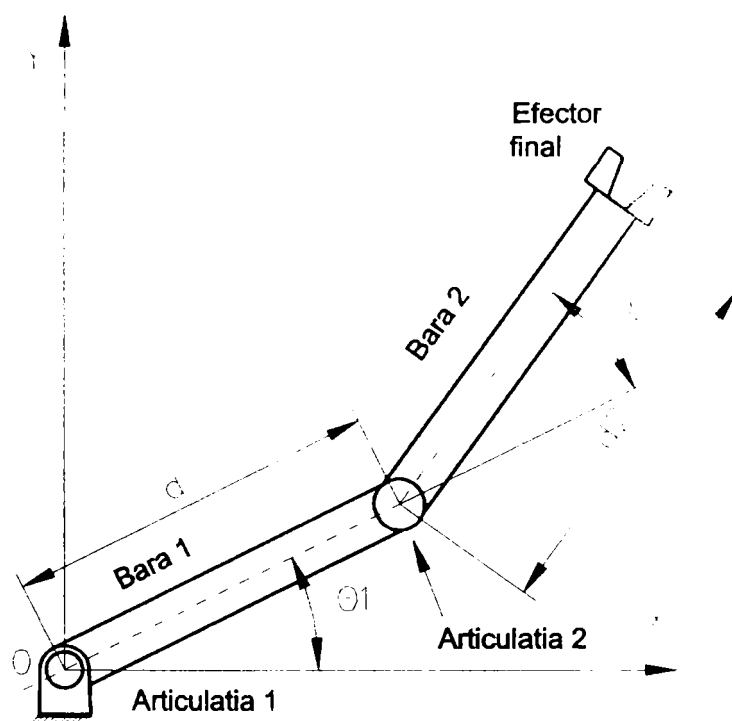


Fig. 3.1 Schema unui manipulator plan RR

Funcțiile de conducere cu profil trapezoidal de viteze răspund cel mai bine criteriilor de productivitate. În acest caz, notând cu  $t_0$  și  $t_f$  timpul de start, respectiv final al mișcării, cupla conducătoare evoluează uniform accelerat într-un interval  $t_0 \dots t_1$ , uniform încetinit până la oprire într-un interval  $t_2 \dots t_f$ , restul intervalului  $t_1 \dots t_2$  fiind parcurs cu viteza de lucru maximă. Dezavantajul acestor funcții constă în accelerațiile mari la pornirea și oprirea mișcării.

O soluție practică constă în adoptarea unor funcții de conducere cu profil cicloidal pentru care pozițiile, vitezele și accelerațiile pentru mișcarea de corp rigid se calculează cu relațiile :

$$\theta_i = \Delta\theta_i \left( \frac{t}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T} t \right), \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

$$\omega_i = \dot{\theta}_i = \frac{\Delta\theta_i}{T} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{T} t \right), \quad i = 1, 2, \quad (3.1a)$$

$$\varepsilon_i = \ddot{\theta}_i = \frac{2\pi\Delta\theta_i}{T^2} \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad i = 1, 2. \quad (3.1b)$$

Adoptând următoarele valori numerice  $T = 1.25$  s,  $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 = 0.523$  rad, rezultă următoarea reprezentare grafică a funcțiilor de conducere, Figura 3.2 :

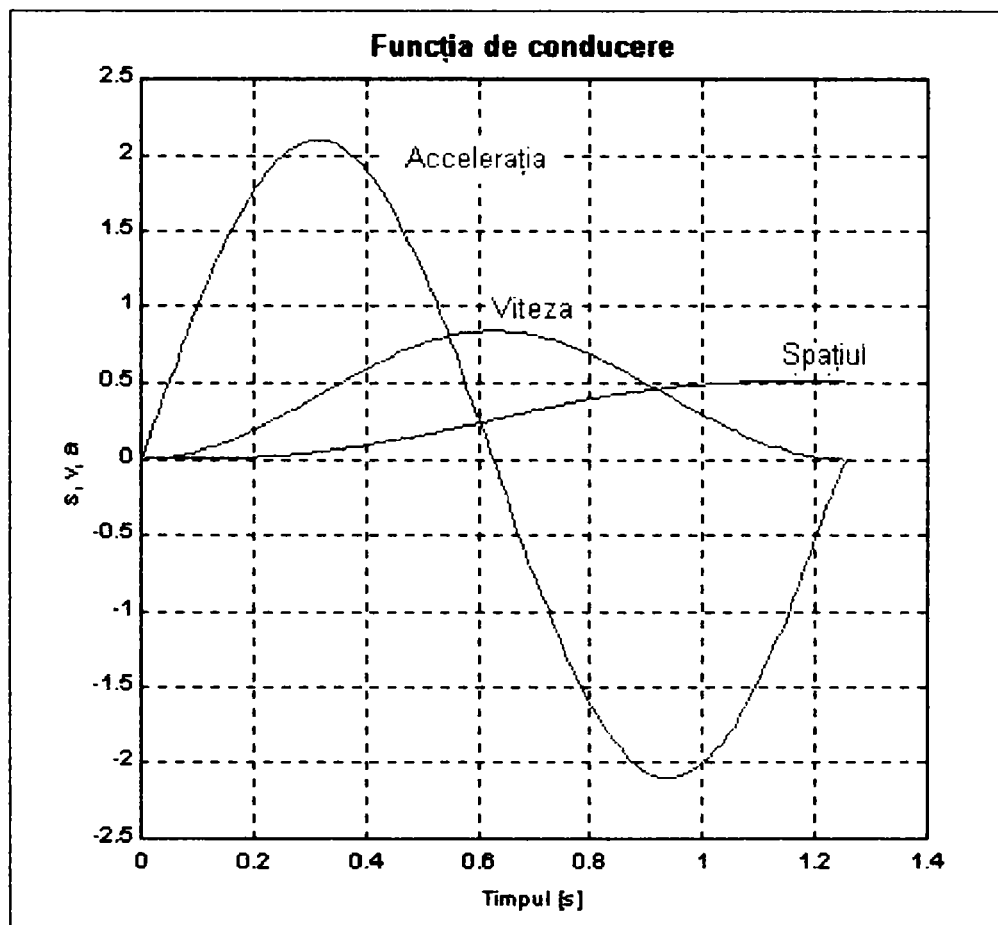


Fig. 3.2 Funcțiile de conducere

### 3.3 DISCRETIZAREA STRUCTURII

Prin discretizarea structurii, barele care alcătuiesc manipulatorul sunt împărțite în elemente finite, fiecare element având trei noduri, așa cum a fost definit în capitolul precedent. În urma discretizării vor rezulta coordonatele fiecărui nod în sistemul global de coordonate, precum și un tablou de definiție al fiecărui element finit prin nodurile care îl compun.

Pentru deducerea acestora considerăm Figura 3.3, în care s-a notat :

- $OXY$  sistemul global de coordonate, imobil, față de care se exprimă coordonatele, vitezele și accelerațiile absolute ale oricărui nod al structurii ;

- $O_i x_i y_i$ , sistemele locale de coordonate pentru fiecare bară  $i = 1, 2$ , definite astfel : originea  $O_i$  coincide cu centrul articulației motoare  $i$ , iar axa  $O_i x_i$  este axa de simetrie longitudinală a barei  $i$  ;
- $d_i$  lungimea barei  $i$  ;
- $\theta_i$ , unghiul articulației motoare  $i$ .

Se mai notează cu  $p$  numărul total de bare al manipulatorului, cu  $nel_i$  numărul de elemente finite considerate pe bara  $i$ , cu  $m_i$  numărul de noduri de pe bara  $i$  și cu  $P_{ij}$  nodul curent  $j$  de pe bara  $i$ .

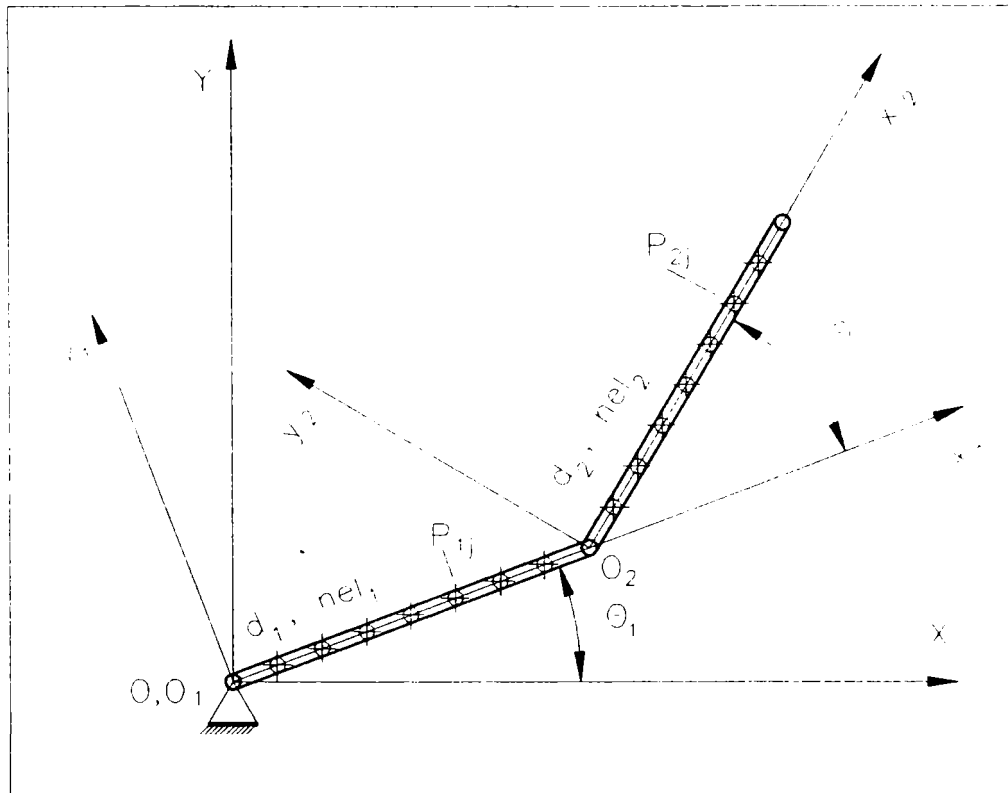


Fig. 3.3 Discretizarea structurii manipulatorului

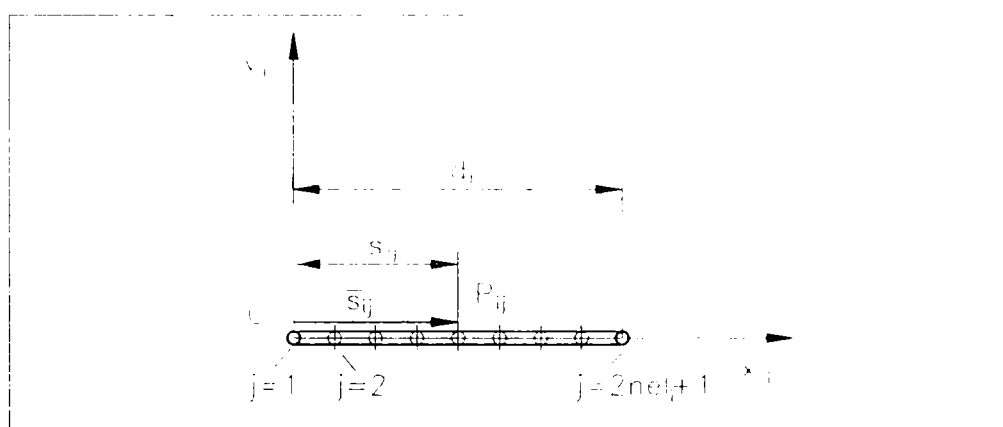
Deoarece un element finit are trei noduri, între numărul de noduri  $m_i$  de pe bara  $i$  și numărul de elemente finite considerate pe bara  $i$ , există relația de legătură

$$m_i = 2 \text{ nel}_i + 1. \quad (3.2)$$

Vectorul de poziție al nodului curent  $P_{ij}$ , în sistemul de coordonate local al barei  $O_i x_i y_i$ , Figura 3.4, este  $\vec{O_i P_{ij}} = \vec{s}_{ij}$ . Modulul acestui vector se exprimă în funcție de lungimea barei,  $d_i$ , și numărul elementelor finite ale barei,  $nel_i$ , prin

$$s_{ij} = d_i / \text{nel}_i / 2. \quad (3.3)$$




 Fig. 3.4 Sistemul local de coordonate al barei  $i$ 

Coordonatele nodului curent  $P_{ij}$  în sistemul  $Ox_i y_i$  local barei  $i$  se pot exprima prin relația

$$\begin{Bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \end{Bmatrix}^{(i)} = \begin{Bmatrix} (j-1) \frac{d_i}{2nel_i} \\ 0 \end{Bmatrix}^{(i)} = \begin{Bmatrix} (j-1) \frac{d_i}{2nel_i} \\ 0 \end{Bmatrix}^{(i)}, \quad j = 1, \dots, 2nel_i + 1, \quad (3.4)$$

unde exponentul  $(i)$  semnifică sistemul local de coordonate. Pentru sistemul global de coordonate se va utiliza exponentul  $(0)$ .

În transformările de coordonate de la sistemul de referință  $(i+1)$  la sistemul  $(i)$ , intervine matricea de rotație notată cu  ${}_{(i)}T^{(i+1)}$ , care are expresia cunoscută

$${}_{(i)}T^{(i+1)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i+1} & -\sin\theta_{i+1} \\ \sin\theta_{i+1} & \cos\theta_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Cu aceste precizări coordonatele unui nod curent  $P_{ij}$  se pot scrie :

- pentru bara  $i = 1$

$$\begin{Bmatrix} x_{1j} \\ y_{1j} \end{Bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{1j} \\ y_{1j} \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (j-1) \frac{d_1}{2nel_1} \\ 0 \end{Bmatrix}^{(1)}, \quad j = 1, \dots, 2nel_1 + 1; \quad (3.6)$$

- pentru bara  $i = 2$

$$\begin{Bmatrix} x_{2j} \\ y_{2j} \end{Bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{2j} \\ y_{2j} \end{Bmatrix}^{(2)} + \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ 0 \end{Bmatrix}^{(1)}, \quad j = 1, \dots, 2nel_2 + 1. \quad (3.7)$$

Relația (3.7) se poate generaliza pentru o bară oarecare  $i = p$  în modul următor

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_{pj} \\ y_{pj} \end{Bmatrix}^{(0)} &= [{}^0T^p] \begin{Bmatrix} x_{pj} \\ y_{pj} \end{Bmatrix}^{(p)} + [{}^0T^1] \begin{Bmatrix} d_1 \\ 0 \end{Bmatrix}^{(1)} + [{}^0T^1][{}^1T^2] \begin{Bmatrix} d_2 \\ 0 \end{Bmatrix}^{(2)} + \dots + \\ &[{}^0T^1][{}^1T^2] \dots [{}^{p-2}T^p] \begin{Bmatrix} d_{j-1} \\ 0 \end{Bmatrix}^{(p-1)}, \quad j = 1, \dots, 2nel_p, \end{aligned} \quad (3.8)$$

expresie care scrisă sub o formă concentrată, conduce la o relație analoagă cu (2.6)

$$\begin{Bmatrix} x_{pj} \\ y_{pj} \end{Bmatrix}^{(0)} = [{}^0T^p] \begin{Bmatrix} x_{pj} \\ y_{pj} \end{Bmatrix}^{(p)} + \sum_{m=1}^{p-1} \left( \prod_{k=1}^m [{}^{k-1}T^k] \begin{Bmatrix} d_k \\ 0 \end{Bmatrix}^{(k)} \right), \quad j = 1, \dots, 2nel_p + 1 \quad (3.9)$$

Cu ajutorul formulei (3.9) se determină *coordonatele geometrice*, în sistemul global  $OXY$ , pentru toate nodurile structurii discretizate a manipulatorului plan, dacă se cunosc lungimile barelor  $d_i$  și unghiurile în cuplele conducătoare  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

### 3.4 VITEZELE ȘI ACCELERAȚIILE DE CORP RIGID

Pentru calcularea vitezelor și accelerațiilor lineare și unghiulare în mișcarea de corp rigid a barelor manipulatorului, în nodurile structurii, se pornește de la următoarele observații :

- fiecare bară execută o mișcare de rotație plană independentă de a celorlalte ;
- prima bară are o mișcare de rotație simplă, în timp ce pentru următoarele se combină o mișcare relativă cu o mișcare de transport datorată articulațiilor motoare anterioare.

De exemplu, în Figura 3.5 a), bara a doua,  $i = 2$ , are o mișcare relativă de rotație în jurul articulației  $O_2$ , cu viteza unghiulară relativă  $\omega_r = \dot{\theta}_2$  și accelerația unghiulară relativă  $\varepsilon_r = \ddot{\theta}_2$ , care se suprapune peste o mișcare de transport a sistemului de coordonate  $O_1X_1Y_1$ , având viteza unghiulară de transport  $\omega_t = \dot{\theta}_1$  și accelerația unghiulară de transport  $\varepsilon_t = \ddot{\theta}_1$ . Trebuie făcută precizarea că vitezele și accelerațiile absolute calculate în acest paragraf se referă numai la mișcarea de corp rigid a barelor. În paragrafele următoare se vor deduce valorile vitezelor și accelerațiilor absolute rezultate din suprapunerea mișcării de corp rigid a barelor cu mișcarea relativă de deformare a acestora.

Pentru determinarea componentelor vitezei și accelerației absolute ale mișcării de corp rigid a barelor manipulatorului, se consideră un nod curent  $j$  pe bara  $i = 2$ , notat cu  $P_{2j}$ . *Viteza absolută* se

determină cu relația de compunere vectorială cunoscută  $\vec{v}_a = \vec{v}_t + \vec{v}_r$ , care adaptată la cazul manipulatorului RR conduce la

$$\vec{v}_{a2j} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_1 \times \vec{s}_{2j} + \vec{v}_r = \vec{v}_{02} + \vec{\omega}_1 \times \vec{s}_{2j} + \vec{\omega}_2 \times \vec{s}_{2j} \quad (3.10)$$

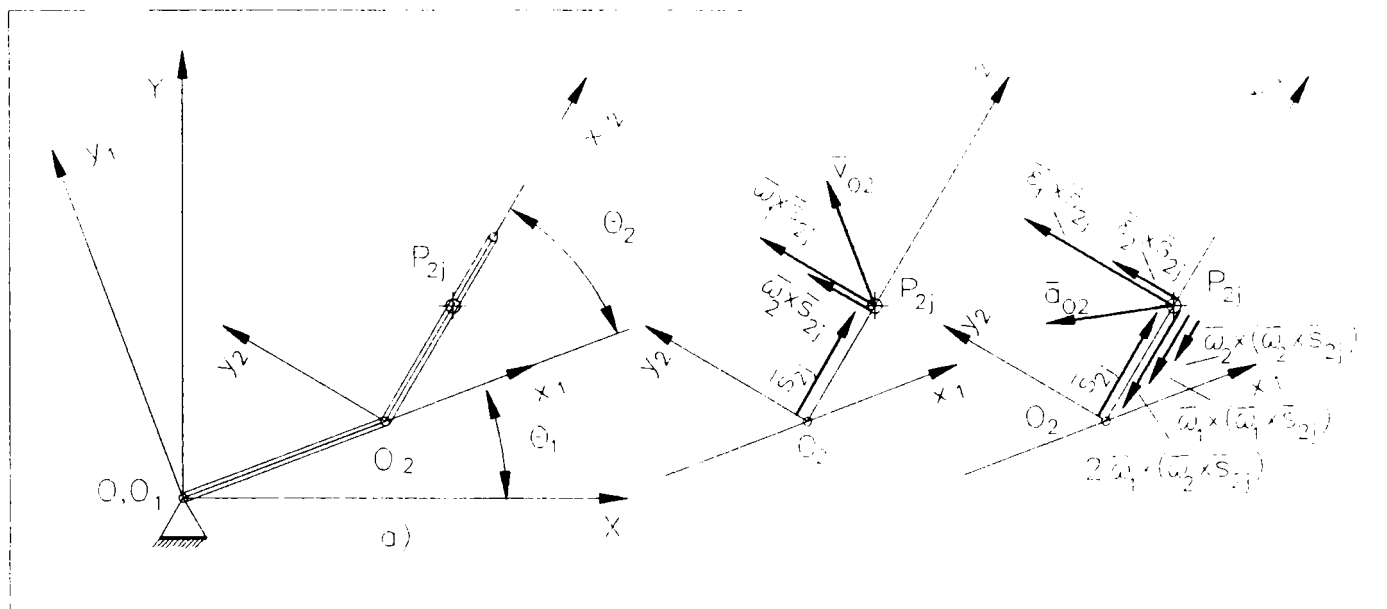


Fig. 3.5 Vitezele și accelerațiile de corp rigid

Accelerația absolută  $\vec{a}_a = \vec{a}_t + \vec{a}_r + \vec{a}_c$  are următoarele componente

$$\vec{a}_{t2j} = \vec{a}_0 + \vec{\epsilon}_1 \times \vec{s}_{2j} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{s}_{2j}) = \vec{a}_{02} + \vec{\epsilon}_1 \times \vec{s}_{2j} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{s}_{2j}), \quad (3.11)$$

$$\vec{a}_{c2j} = 2 \vec{\omega}_1 \times \vec{v}_r = 2 \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{s}_{2j}), \quad (3.12)$$

$$\vec{a}_{r2j} = \vec{\epsilon}_2 \times \vec{s}_{2j} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{s}_{2j}). \quad (3.13)$$

Pentru determinarea modulelor și a orientărilor vitezelor și accelerațiilor absolute se va proiecta fiecare vector component din relațiile (3.10) - (3.13) pe axele sistemului global de coordonate  $OXY$ . Acest lucru este practic posibil dacă în prealabil se cunosc modulele și orientările față de axa  $OX$  a fiecărei componente vectoriale din relațiile (3.10) - (3.13). Cu notațiile din Figura 3.5 b), c) rezultă :

- $|\vec{v}_{o2}| = d_1 \omega_1$ ,  $\angle(\vec{v}_{o2}, OX) = \pi/2 + \theta_1$  ;
- $|\vec{\omega}_1 \times \vec{s}_{2j}| = \omega_1 s_{2j} = \omega_1 d_2 / \sin \alpha_2 / 2$ ,  $\angle(\vec{\omega}_1 \times \vec{s}_{2j}, OX) = \pi/2 + \theta_1 + \theta_2$  ;
- $|\vec{\omega}_2 \times \vec{s}_{2j}| = \omega_2 s_{2j} = \omega_2 d_2 / \sin \alpha_2 / 2$ ,  $\angle(\vec{\omega}_2 \times \vec{s}_{2j}, OX) = \pi/2 + \theta_1 + \theta_2$  ;

$$\begin{aligned}
 - \quad & |\vec{a}_{o_2}| = d_1(\omega_1^2 + \varepsilon_1^4)^{1/2}, \quad \angle(\vec{a}_{o_2}, OX) = \pi/2 + \theta_1 + \text{atg}(\omega_1/\varepsilon_1^2); \\
 - \quad & |\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{s}_{2j}| = \varepsilon_1 s_{2j} = \varepsilon_1 d_2 / nel_2 / 2, \quad \angle(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{s}_{2j}, OX) = \pi/2 + \theta_1 + \theta_2; \\
 - \quad & |\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{s}_{2j})| = \omega_1^2 s_{2j} = \omega_1^2 d_2 / nel_2 / 2, \quad \angle(\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{s}_{2j}), OX) = \pi + \theta_1 + \theta_2, \\
 - \quad & |2\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{s}_{2j})| = 2\omega_1 \omega_2 d_2 / nel_2 / 2, \quad \angle(2\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{s}_{2j}), OX) = \pi + \theta_1 + \theta_2; \\
 - \quad & |\vec{\varepsilon}_2 \times \vec{s}_{2j}| = \varepsilon_2 s_{2j} = \varepsilon_2 d_2 / nel_2 / 2, \quad \angle(\vec{\varepsilon}_2 \times \vec{s}_{2j}, OX) = \pi/2 + \theta_1 + \theta_2; \\
 - \quad & |\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{s}_{2j})| = \omega_2^2 s_{2j} = \omega_2^2 d_2 / nel_2 / 2, \quad \angle(\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{s}_{2j}), OX) = \pi + \theta_1 + \theta_2
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Relațiile (3.14) se generalizează ușor pentru orice bară  $i \geq 3$ , în timp ce pentru prima bară toate componentele de transport sunt nule.

### 3.5 REZULTATE NUMERICE

Valorile numerice calculate sunt poziția, vitezele și accelerațiile unghiulare, coordonatele nodurilor în sistemul global de coordonate și vitezele și accelerațiile absolute în mișcarea de corp rigid a barelor. Sunt definite de asemenea elementele finite prin nodurile care le aparțin. În continuare sunt prezentate rezultatele calculelor pentru momentul de timp  $t = 0.625$  s, adică la jumătatea perioadei impuse mișcării.

\*\*\* Poziția, viteza și accelerația unghiulare

Articulația	Spațiul	Viteza	Accelerația
1.0000e+000	2.6180e-001	8.3774e-001	3.2230e-016
2.0000e+000	2.6180e-001	8.3774e-001	3.2230e-016

\*\*\* Coordonatelor nodurilor în sistemul global

Nodul	X	Y	Temperatura
1.0000e+000	0	0	0

# SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

2.0000e+000	1.2074e+002	3.2352e+001	0
3.0000e+000	2.4148e+002	6.4704e+001	0
4.0000e+000	3.6222e+002	9.7056e+001	0
5.0000e+000	4.8296e+002	1.2941e+002	0
6.0000e+000	6.0370e+002	1.6176e+002	0
7.0000e+000	7.2445e+002	1.9411e+002	0
8.0000e+000	8.4519e+002	2.2646e+002	0
9.0000e+000	9.6593e+002	2.5881e+002	0
1.0000e+001	1.0742e+003	3.2131e+002	0
1.1000e+001	1.1824e+003	3.8381e+002	0
1.2000e+001	1.2907e+003	4.4631e+002	0
1.3000e+001	1.3989e+003	5.0881e+002	0
1.4000e+001	1.5072e+003	5.7131e+002	0
1.5000e+001	1.6154e+003	6.3381e+002	0
1.6000e+001	1.7237e+003	6.9631e+002	0
1.7000e+001	1.8320e+003	7.5881e+002	0

### \*\*\* Elementele finite

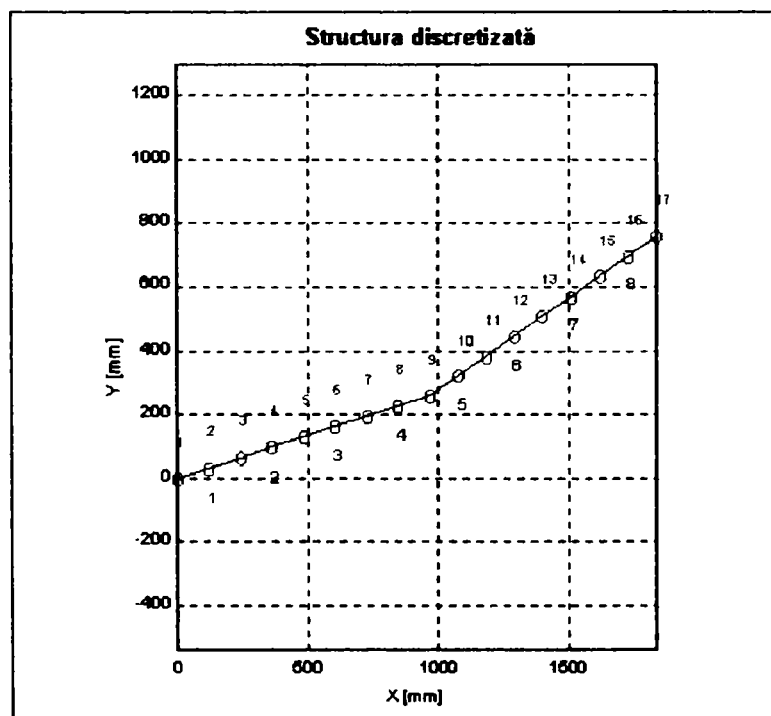
-----

Element Nod1 Nod2 Nod3 Material Geometrie

-----

1	1	2	3	1	1
2	3	4	5	1	1
3	5	6	7	1	1
4	7	8	9	1	1
5	9	10	11	1	1
6	11	12	13	1	1
7	13	14	15	1	1
8	15	16	17	1	1

-----



**Fig. 3.6 Structura discretizată la momentul  $t = 0.5 T$**

\*\* Vitezele de corp rigid în noduri

Nodul	VitezaX	VitezaY	Unghiul
1.0000e+000	0	0	0
2.0000e+000	-8.7103e+001	1.0115e+002	1.8326e+000
3.0000e+000	-8.4205e+001	2.0230e+002	1.8326e+000
4.0000e+000	-8.1308e+001	3.0345e+002	1.8326e+000
5.0000e+000	-1.0841e+002	4.0460e+002	1.8326e+000
6.0000e+000	-1.3551e+002	5.0575e+002	1.8326e+000
7.0000e+000	-1.6262e+002	6.0690e+002	1.8326e+000
8.0000e+000	-1.8972e+002	7.0805e+002	1.8326e+000
9.0000e+000	-2.1682e+002	8.0920e+002	1.8326e+000
1.0000e+001	-3.2154e+002	9.9058e+002	1.8847e+000
1.1000e+001	-4.2625e+002	1.1720e+003	1.9196e+000
1.2000e+001	-5.3097e+002	1.3533e+003	1.9447e+000
1.3000e+001	-6.3569e+002	1.5347e+003	1.9635e+000
1.4000e+001	-7.4040e+002	1.7161e+003	1.9781e+000
1.5000e+001	-8.4512e+002	1.8975e+003	1.9898e+000
1.6000e+001	-9.4984e+002	2.0788e+003	1.9994e+000
1.7000e+001	-1.0546e+003	2.2602e+003	2.0073e+000

\*\*\* Accelerațiile de corp rigid în noduri

Nodul	AcclerațiaX	AcclerațiaY	UnghiulOX
1.0000e+000	0	0	0
2.0000e+000	-8.4738e+001	-2.2705e+001	3.4034e+000
3.0000e+000	-1.6948e+002	-4.5410e+001	3.4034e+000
4.0000e+000	-2.5421e+002	-6.8115e+001	3.4034e+000
5.0000e+000	-3.3895e+002	-9.0820e+001	3.4034e+000
6.0000e+000	-4.2369e+002	-1.1353e+002	3.4034e+000
7.0000e+000	-5.0843e+002	-1.3623e+002	3.4034e+000
8.0000e+000	-5.9316e+002	-1.5894e+002	3.4034e+000
9.0000e+000	-6.7790e+002	-1.8164e+002	3.4034e+000
1.0000e+001	-9.8180e+002	-3.5709e+002	3.4904e+000
1.1000e+001	-1.2857e+003	-5.3254e+002	3.5343e+000
1.2000e+001	-1.5896e+003	-7.0799e+002	3.5606e+000
1.3000e+001	-1.8935e+003	-8.8344e+002	3.5781e+000
1.4000e+001	-2.1974e+003	-1.0589e+003	3.5906e+000
1.5000e+001	-2.5013e+003	-1.2343e+003	3.6000e+000
1.6000e+001	-2.8052e+003	-1.4098e+003	3.6073e+000
1.7000e+001	-3.1091e+003	-1.5852e+003	3.6131e+000

Datele de intrare și programele sursă pentru calcularea acestor valori numerice sunt prezentate în paragraful 3.8, la sfârșitul acestui capitol.

### 3.6 RĂSPUNSUL DINAMIC AL MANIPULATORULUI ÎN POZIȚIE FIXĂ

#### 3.6.1 DATELE GENERALE

În situația analizată, manipulatorul se găsește în repaos, într-o poziție fixă, cunoscută, în spațiul de lucru, de exemplu la începutul sau sfârșitul traiectoriei planificate. Vitezele și accelerațiile absolute lineare sau unghiulare fiind nule, nu există forțe de inerție și nici deformații elastice ale barelor. Un răspuns dinamic al structurii mecanice a manipulatorului poate să apară numai în condițiile existenței unor excitații datorate unor forțe exterioare de scurtă durată sau unor condiții inițiale de deplasări și viteze. Aplicarea excitației va genera o mișcare vibratorie a nodurilor structurii, cu amplitudini ce urmează să fie determinate.

Studiul răspunsului dinamic în acest caz poate să conducă la concluzii deosebit de utile, care se referă la :

- modurile de vibrație ale structurii ;
- determinarea coeficienților de amortizare a mișcării ;
- precizia de poziționare a efectorului final la puncte de final de cursă ;
- efectul considerării complianței articulațiilor față de comportamentul rigid al acestora.

Situația prezentată este schițată în Figura 3.7. În poziția I, manipulatorul este la început de cursă, momentul  $t = 0$ , iar în poziția II la sfârșit de cursă,  $t = T$ . În ambele poziții de repaos, în nodul efectorului final acționează o forță de excitație  $F_{ex}$ , de scurtă durată, cu o magnitudine cunoscută și direcție paralelă cu axa  $OY$ , în sensul negativ al acesteia.

Valorile numerice ale parametrilor de conducere, de discretizare, geometrici și de material utilizați în simularea numerică sunt următoarele :

- perioada de mișcare a articulațiilor motoare  $T = 1.25$  [s] ;
- domeniul de mișcare unghiulară  $\Delta\theta_i = 0.5233$  [rad],  $i = 1,2$  ;
- lungimile barelor  $d_i = 1000$  [mm],  $i = 1,2$  ;
- numărul elementelor finite pe bară  $nel_i = 4$ ,  $i = 1,2$  ;
- numărul gradelor de libertate 51 ;
- aria secțiunii transversale  $A = 315$  [mm<sup>2</sup>] ;
- momentul de inerție  $I_z = 10000$  [mm<sup>4</sup>] ;

- modulul de elasticitate longitudinal  $E = 2.07 \cdot 10^5$  [Nmm<sup>-2</sup>];
- modulul de elasticitate transversal  $G = 7.93 \cdot 10^4$  [Nmm<sup>-2</sup>];
- densitatea  $\rho = 7.8 \cdot 10^{-9}$  [Ns<sup>2</sup>mm<sup>-4</sup>];
- masa motorului de acționare din articulația a doua 0.001 [Ns<sup>2</sup>mm<sup>-1</sup>];
- masa efectorului final 0.0015 [Ns<sup>2</sup>mm<sup>-1</sup>].

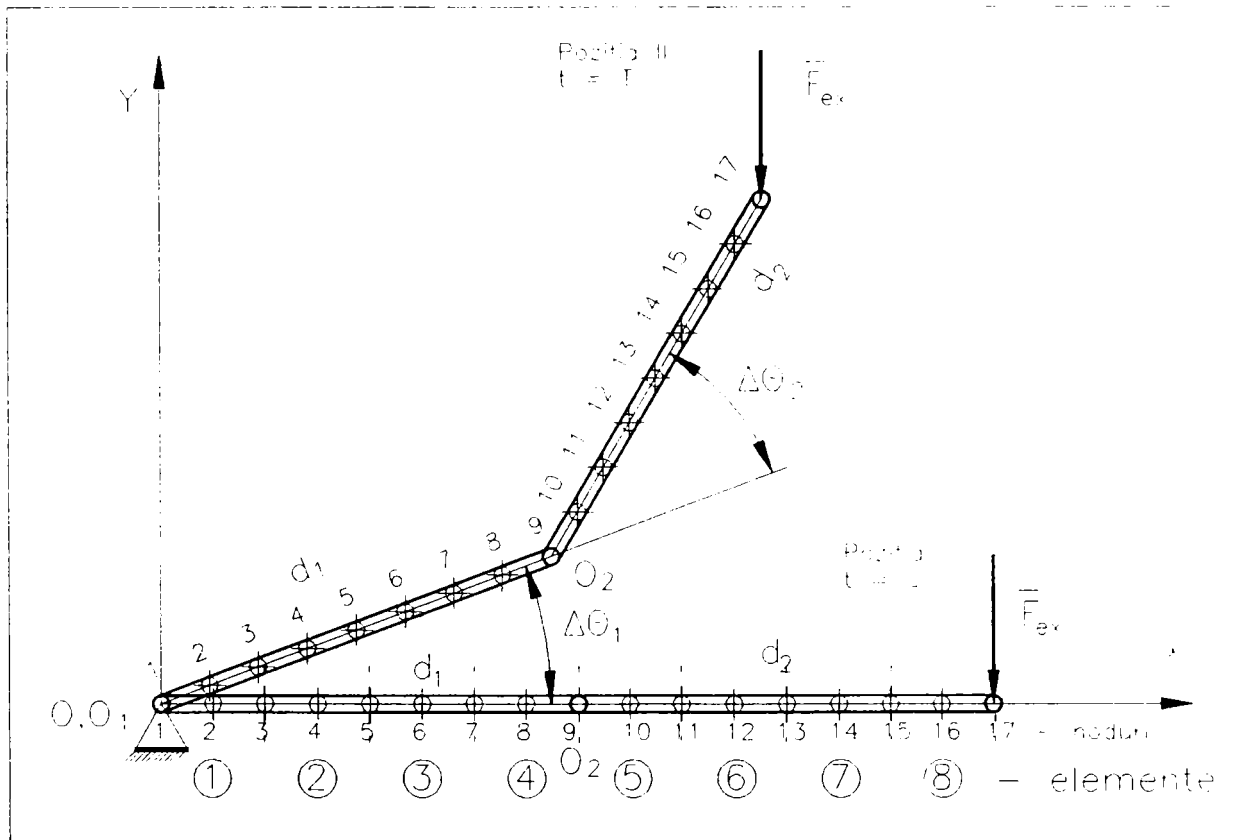


Fig. 3.7 Excitarea structurii manipulatorului în repaos

### 3.6.2 ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Pentru un sistem dinamic cu mai multe grade de libertate, așa cum rezultă în urma discretizării cu elemente finite, *ecuațiile de mișcare* formează un sistem de ecuații diferențiale de ordinul II de forma [45, 49]

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(t)\} , \quad (3.15)$$

cu condițiile inițiale



$$t = 0, \{U\} = \{U_0\}, \{\dot{U}\} = \{v_0\}, \quad (3.16)$$

unde

- $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  sunt matricile pătrate, simetrice și constante, ale maselor, amortizărilor și rigidităților,
- $\{U\}$ ,  $\{\dot{U}\}$ ,  $\{\ddot{U}\}$ ,  $\{F\}$  sunt matricile coloană ale deplasărilor, vitezelor, accelerațiilor, respectiv încărcării exterioare, exprimate în sistemul global de coordonate  $OXY$ .

Aceste ecuații exprimă echilibrul nodal cinetostatic între deplasări și derivatele acestora. Matricile  $[M]$ ,  $[K]$  se determină pentru structura discretizată a manipulatorului, pornind de la nivelul de element finit, prin asamblarea matricilor de rigiditate elementale  $[k]_e$  și a matricilor consistente ale maselor elementale  $[m]_e$ , exprimate de relațiile (2.42), respectiv (2.43).

Matricea maselor elementelor finite, definită de (2.43), nu include masele suplimentare ale unor accesorii sau piese, care pot fi adăugate structurii discretizate. Este cazul maselor motoarelor de acționare din articulații, nodurile 1 și 9, și a sculei din efectorul final, nodul 17. Valorile acestora sunt cuprinse într-o matrice de mase concentrate, care are elementele nule, mai puțin cele de pe diagonala principală corespunzătoare gradelor de libertate ale nodurilor ce conțin aceste mase. Trebuie remarcat că gradele de libertate afectate de aceste mase suplimentare sunt numai cele care se referă la translații. În final, matricea totală a maselor este suma dintre matricea distribuită a maselor elementelor finite și matricea concentrată a maselor suplimentare, relația (2.36b).

Matricea coloană a forțelor  $\{F\}$  are elementele nule, mai puțin elementul pe poziția gradului de libertate unde se aplică forța de excitație. În cazul analizat, forța de excitație se aplică în ultimul nod al elementului finit 8, paralel cu axa  $OY$ , având valoarea  $F_{ex} = -10$  [N] :

$$\{F\}^8 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -10, 0]^T.$$

Pentru determinarea matricei de amortizare  $[C]$ , se va utiliza metoda amortizării proporționale Rayleigh, relația (2.37), dar determinarea valorilor numerice concrete se va putea face numai după calcularea frecvențelor proprii de vibrație ale structurii.

Matricile caracteristice  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[C]$  și  $\{F\}$  sunt calculate pentru întreaga structură prin asamblarea matricilor corespunzătoare fiecărui element finit, utilizând programul de calcul *Bara3i n*, a cărui sursă este prezentată în paragraful 3.8.

3.6.3 COMPLIANȚA ARTICULAȚIILOR MOTOARE

În cazul roboților industriali, motoarele de acționare și elementele de transmitere a mișcării sunt plasate în interiorul articulațiilor sau a cuplelor conducătoare, Figura 3.8. Evident că, în această situație, rigiditatea nodului asociat articulației scade față de rigiditatea unui nod din interiorul barei, considerat rigid. În acest fel articulația devine *compliantă*.

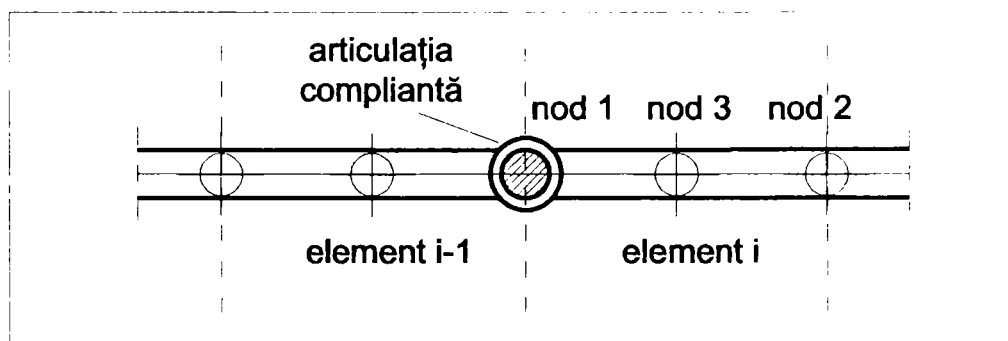


Fig. 3.8 Poziția articulației compliantă

Complianța unei articulații motoare poate fi precizată de către producător, prin specificarea rigidității echivalente a acesteia, poate fi determinată experimental sau poate fi caracterizată prin intermediul unui factor, numit *grad de complianță*, care exprimă raportul dintre rigiditatea articulației compliantă față de a articulației complet rigide. Se remarcă faptul că gradul de liberate afectat de complianță este cel care exprimă rotația în nodul respectiv. Existența articulației motoare în nodul 1 al unui element finit conduce la modificarea matricei de rigiditate a elementului respectiv, care va arăta astfel

nod1			nod2			nod3			
w	v	$\varphi$	w	v	$\varphi$	w	v	$\varphi$	
x	x	o	x	x	x	x	x	x	w
x	x	o	x	x	x	x	x	x	v nod1
o	o	o	o	o	o	o	o	o	$\varphi$
x	x	o	x	x	x	x	x	x	w
x	x	o	x	x	x	x	x	x	v nod2
x	x	o	x	x	x	x	x	x	$\varphi$
x	x	o	x	x	x	x	x	x	w
x	x	o	x	x	x	x	x	x	v nod3
x	x	o	x	x	x	x	x	x	$\varphi$

unde prin „o” s-au notat elementele matricei de rigiditate corespunzătoare gradului de libertate compliant. Deoarece această modificare va afecta toate elementele matricei de rigiditate, noile valori se vor calcula printr-o reducere Gauss parțială, după formula [45]

$$k_{ij}^* = k_{ij} - k_{i3} \frac{k_{3j}}{k_{33}} \cdot gc, \quad i = 1,6, \quad j = 1,6. \quad (3.17)$$

În relația (3.17)  $k_{ij}^*$  reprezintă elementele matricei de rigiditate care include complianța,  $k_{ij}$  elementele matricei de rigiditate fără complianță, iar  $gc$  gradul de complianță, cu valori în intervalul  $[0, 1]$ . Se observă că pentru  $gc = 0$ ,  $k_{ij}^* = k_{ij}$  articulația este complet rigidă sau blocată, iar pentru  $gc = 1$ , elementele de pe lina 3 și coloana 3 sunt nule, articulația devine o cuplă de rotație complet liberă.

Pentru a distinge nodurile asociate articulațiilor compliant, în tabloul de definiție al elementelor finite, numărul de ordine al acestora se înlocuiește cu negativul lor. În cazul structurii analizate, articulațiile compliant sunt plasate în nodurile 1 și 9, deci acest tablou va fi următorul :

\*\*\* Elementele finite

Element	Nod1	Nod2	Nod3	Material	Geometrie
1	-1	2	3	1	1
2	3	4	5	1	1
3	5	6	7	1	1
4	7	8	-9	1	1
5	-9	10	11	1	1
6	11	12	13	1	1
7	13	14	15	1	1
8	15	16	17	1	1

### 3.6.4 CONDENSAREA DINAMICĂ

Condensarea dinamică, numită și *reducere Guyan*, este procedeul prin care sistemul de ecuații (3.15) este înlocuit printr-un sistem echivalent, având un număr redus de necunoscute. Pentru aceasta, se aleg necunoscutele și ecuațiile corespunzătoare gradelor de libertate care vor forma sistemul redus. Aceste grade de libertate sunt numite *grade de libertate principale* sau *masters*. Restul gradelor de

libertate sunt numite *grade de libertate secundare* sau *slaves*, iar necunoscutele corespunzătoare acestora necunoscute reduse.

Procedeul se aplică în următoarele situații :

- pentru eliminarea gradelor de libertate fixate de legăturile din reazime ;
- pentru reducerea gradelor de libertate care nu sunt dinamice, adică acele grade de libertate ale căror mase asociate sunt nule ;
- pentru reducerea gradelor de libertate suplimentare sau ale nodurilor interioare elementelor finite, care nu participă direct la asamblarea acestora ;
- când dimensiunea sistemului de ecuații este foarte mare și rezolvarea numerică a acestuia necesită un timp de calcul mare.

Pentru aplicarea condensării, matricile care caracterizează structura,  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $[C]$ , sunt partiționate după gradele de libertate principale și secundare. De exemplu, pentru matricea  $[K]$  se obține partiționarea

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{ms}] \\ [K_{ms}]^T & [K_{ss}] \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

unde  $[K_{mm}]$  este submatricea corespunzătoare gradelor de libertate principale de dimensiune  $m \times m$ ,  $[K_{ss}]$  submatricea corespunzătoare gradelor de libertate secundare de dimensiune  $s \times s$ , iar  $[K_{ms}]$  o submatrice de dimensiune  $m \times s$ . Evident că  $m+s = n$ , dimensiunea inițială a sistemului.

Dacă se notează cu  $[G]$  matricea de dimensiuni  $n \times m$

$$[G] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{ss}]^{-1}[K_{ms}]^T \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

$[I]$  fiind matricea unitate de dimensiune  $m \times m$ , atunci se poate sintetiza reducerea Guyan sub o formă generală prin relația [45, 49]

$$[G]^T[M][G]\{\ddot{U}_m\} + [G]^T[C][G]\{\dot{U}_m\} + [G]^T[K][G]\{U_m\} = [G]^T\{F\}, \quad (3.20)$$

sau

$$[M^*]\{\ddot{U}_m\} + [C^*]\{\dot{U}_m\} + [K^*]\{U_m\} = \{F^*\}, \quad (3.20a)$$

unde  $[M^*]$ ,  $[C^*]$ ,  $[K^*]$ , sunt matricile reduse de dimensiuni  $m \times m$ .

După rezolvarea sistemului (3.20a) și obținerea soluției  $\{U_m\}$ , calcularea necunoscutelor secundare se face prin *retrosubstituție* cu formula

$$\{U\} = [G]\{U_m\}. \quad (3.21)$$

În mod practic, pentru realizarea unui subprogram care să calculeze matricile reduse, în locul calculelor matriciale mari consumatoare de timp, implicate de formula (3.19), se preferă reducerea parțială Gauss. Pentru aceasta, linia  $i$  care se referă la un grad de libertate secundar, se multiplică cu o constantă și se scade din celelalte linii ale matricei inițiale, astfel încât pe coloana  $i$  să rezulte numai elemente nule. În final, atât linia  $i$ , cât și coloana  $i$  vor avea toate elementele nule și se pot elimina, informațiile deținute de acestea fiind transferate asupra celorlalte grade de libertate.

Formula pentru reducerea parțială Gauss a matricei de rigiditate  $[K]$  este [45] :

$$[K] := [K] - \frac{1}{k_{ii}}(K_i)^T(K_i), \quad (3.22)$$

unde  $k_{ii}$  este elementul de pe diagonala principală corespunzător liniei  $i$ , iar cu  $(K_i)$  s-a notat linia  $i$  a matricei  $[K]$ . Simbolul  $:=$  înseamnă atribuire și este diferit de semnul de egalitate.

În mod analog se deduc relațiile pentru reducerea matricilor  $[M]$  și  $\{F\}$

$$[M] := [M] - \frac{m_{ii}}{k_{ii}^2}(K_i)^T(K_i) - \frac{1}{k_{ii}}(K_i)^T(M_i) - \frac{1}{k_{ii}}(M_i)^T(K_i), \quad (3.23)$$

$$\{F\} := \{F\} - \frac{1}{k_{ii}}(K_i)^T F_i. \quad (3.24)$$

Retrosubstituția pentru calcularea necunoscutelor secundare, pornind de la soluția sistemului redus se va realiza prin relația

$$U_i := (F_i - K_i\{U\})/k_{ii} + U_i. \quad (3.25)$$

Matricea redusă  $[C^*]$  se va obține din matricile reduse  $[M^*]$  și  $[K^*]$ , utilizând metoda amortizării proporționale Rayleigh, așa cum se va preciza în secțiunea 3.6.6.

Calculule făcute pentru condensarea dinamică nu influențează precizia soluțiilor obținute. În principiu se obțin aceleași rezultate dacă se lucrează cu matricile  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $[C]$  sau cu matricile  $[M^*]$ ,  $[C^*]$ ,  $[K^*]$ . Totuși prin reducerea gradelor de libertate secundare se elimină anumite moduri de vibrație, care sunt locale unei zone a structurii, însă acestea sunt fără o importanță semnificativă.

Reducerea Guyan în cazul manipulatorului discretizat, Figura 3.7, este obligatorie deoarece s-a utilizat un element finit cu trei noduri, nodul interior neparticipând direct la asamblarea matricilor

caracteristice. Gradele de libertate secundare sunt cele corespunzătoare acestor noduri interioare, la care se adaugă cele eliminate de legăturile din nodul 1. Tablourile gradelor de libertate principale,  $dofmas$ , și secundare,  $dofslv$ , sunt în acest caz de discretizare următoarele

```
dofmas = [ 1    2    3    7    8    9    13    14    15    19    20    21
           25    26    27    31    32    33    37    38    39    43    44    45
           49    50    51 ]
dofslv = [ 1    2    3    4    5    6    10    11    12    16    17    18
           22    23    24    28    29    30    34    35    36    40    41    42
           46    47    48 ]
```

Subprogramele pentru reducerea gradelor de libertate secundare și pentru calcularea necunoscutelor secundare prin retrosubstituție, *ReducG*, respectiv *Expand*, sunt prezentate în ANEXA II, la sfârșitul acestui capitol.

### 3.6.5 FRECVENȚELE PROPRII DE VIBRAȚIE

Frecvențele proprii ale vibrațiilor libere ale unei structuri nu depind de condițiile inițiale, adică forțe sau deplasări perturbatoare la momentul  $t = 0$ , ci numai de rigiditatea  $[K]$  și de distribuția maselor  $[M]$ . Deși în natură nu există sisteme care să aibă vibrații libere neamortizate, totuși frecvențele naturale și modurile de vibrație asociate acestora sunt elemente fundamentale în determinarea răspunsului dinamic al structurilor elastice reale.

Pentru rezolvarea problemelor de valori proprii există mai multe metode bazate pe algoritmi cu iterații succesive. La întocmirea subprogramului care determină frecvențele proprii s-a optat pentru *metoda iterației pe subspații*, al cărui algoritm este prezentat în continuare. Metoda este eficientă în cazul problemelor cu număr mare de grade de libertate, când se dorește determinarea simultană numai a primelor valori și vectori proprii, cel mult câteva zeci. Matricile  $[K]$ ,  $[M]$  au dimensiunile  $n \times n$  și se presupune că se dorește determinarea primelor  $s$  valori și vectori proprii. Se parcurg următorii pași [45]:

- 1) se inițializează un set de  $s$  vectori de dimensiune  $n \times 1$

$$[z]^{(0)} = \{z_1 \ z_2 \ \dots \ z_s\}^{(0)} ;$$

matricea  $[z]^{(0)}$  are dimensiunea  $n \times s$  ;

2) la iterația  $k$  se rezolvă sistemului linear

$$[K][x] = [M][z]^{(k)} ;$$

matricea  $[z]^{(k)}$  este determinată la iterația anterioară, iar  $[x]$  va avea dimensiunea  $n \times s$  ;

3) generarea unor matrici de dimensiuni  $s \times s$

$$[A] = [x]^T [K] [x],$$

$$[B] = [x]^T [M] [x] ;$$

pentru justificarea dimensiunilor formal se poate scrie  $[s \times n][n \times n][n \times s] = [s \times s]$  ;

4) rezolvarea problemei clasice de valori proprii de dimensiuni mici  $s \times s$

$$[A][v] = [B][v][\Lambda]^{(k+1)}$$

unde  $[\Lambda]^{(k+1)}$  este matricea diagonală a valorilor proprii, iar  $[v]$  matricea vectorilor proprii ;

5) se calculează produsul

$$[z]^{(k+1)} = [x][v] ;$$

6) se estimează eroarea la iterația  $k$  și se decide continuarea iterațiilor sau terminarea algoritmului.

Pentru un număr de iterații  $k$  suficient de mare, matricea  $[\Lambda]^{(k+1)}$  va tinde spre primele  $s$  valori proprii ale problemei, iar  $[z]^{(k+1)}$  la vectorii proprii corespunzători.

Valorile numerice ale frecvențelor proprii s-au calculat utilizând subprogramul *FrNatSsp*, întocmit pe baza algoritmului expus, în poziția I, de început de cursă, în poziția II, de sfârșit de cursă, pentru structura rigidă și pentru structura compliantă. S-au obținut următoarele rezultate :

Poziția I;  
structură rigidă

\*\*\* Frecvențele naturale

Modul	Frecvența
1.0000e+000	9.8203e+000
2.0000e+000	6.5374e+001
3.0000e+000	2.1998e+002
4.0000e+000	3.9086e+002
5.0000e+000	5.6811e+002
6.0000e+000	6.9982e+002
7.0000e+000	7.6808e+002
8.0000e+000	8.1049e+002

Poziția I;  
structură compliantă

\*\*\* Frecvențele naturale

Modul	Frecvența
1.0000e+000	9.1376e+000
2.0000e+000	5.8880e+001
3.0000e+000	2.1079e+002
4.0000e+000	3.5189e+002
5.0000e+000	5.6156e+002
6.0000e+000	6.6596e+002
7.0000e+000	7.6651e+002
8.0000e+000	7.9290e+002

Poziția II;  
structură rigidă

\*\*\* Frecvențele naturale

Modul	Frecvența
1.0000e+000	2.3283e+001
2.0000e+000	2.0735e+002
3.0000e+000	3.4411e+002
4.0000e+000	5.4060e+002
5.0000e+000	6.8810e+002
6.0000e+000	7.4139e+002
7.0000e+000	8.1020e+002
8.0000e+000	8.3480e+002

Poziția II;  
structură compliantă

\*\*\* Frecvențele naturale

Modul	Frecvența
1.0000e+000	2.1297e+001
2.0000e+000	2.0207e+002
3.0000e+000	3.0353e+002
4.0000e+000	5.3921e+002
5.0000e+000	6.5675e+002
6.0000e+000	7.4070e+002
7.0000e+000	7.9209e+002
8.0000e+000	8.3363e+002

### 3.6.6 MATRICEA DE AMORTIZARE

Matricea de amortizare  $[c]^e$ , a unui element finit, se poate determina analog cu matricile de rigiditate și masă  $[k]^e$ ,  $[m]^e$ , prin relația [45]

$$[c]^e = \int_{V_{el}} \mu [N]^T [N] dV, \quad (3.26)$$

unde  $\mu$  este un coeficient de proporționalitate cu viteza, determinat experimental,  $V_{el}$  domeniul ocupat de elementul finit, iar  $dV$  volumul elementar. Relația (3.26) are un caracter mai mult teoretic, datorită dificultății determinării experimentale a unui număr foarte mare de coeficienți de amortizare.

O metodă practică, larg răspândită în analiza incrementală liniară și neliniară a structurilor, constă în a considera matricea de amortizare ca o combinație liniară a matricei maselor și de rigiditate [49, 79]

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K], \quad (3.27)$$

cunoscută sub denumirea de *metoda amortizării proporționale de tip Rayleigh*. Deoarece doi vectori proprii,  $\{v\}_i$  și  $\{v\}_{i+1}$ , ai matricei modale  $[v]$ , sunt  $[M]$ , respectiv  $[K]$  - proporționali se adoptă aceeași ipoteză pentru matricea  $[C]$ , cu scopul de a păstra avantajul decuplării ecuațiilor de mișcare, specific analizei prin superpoziție modală. Se presupune deci că [45, 79]



$$\{v_i\}^T [C] \{v_j\} = \begin{cases} \xi_i p_i, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.28)$$

Înmulțind relația (3.27) la stânga cu  $[v]^T$  și la dreapta cu  $[v]$  se obține sistemul de ecuații

$$2\xi_i p_i = \alpha + \beta p_i, \quad i = 1, n, \quad (3.29)$$

unde  $\xi_i$  este raportul adimensional al amortizării modului de vibrație  $i$ ,  $p_i$  frecvența proprie  $i$ ,  $\alpha$  și  $\beta$  coeficienții amortizării proporționale Rayleigh.

În mod practic, se determină experimental valori pentru raportul  $\xi_i$ , se deduc coeficienții  $\alpha$  și  $\beta$  din sistemul (3.29), după care se determină matricea de amortizare  $[C]$ . Sunt necesare minimum două rapoarte de amortizare  $\xi_i$  pentru ca sistemul (3.29) să aibă soluție. Dacă se determină experimental mai multe valori pentru aceste rapoarte, se poate utiliza metoda celor mai mici pătrate pentru calcularea coeficienților  $\alpha$  și  $\beta$ .

Metoda amortizării proporționale Rayleigh are câteva inconveniente, deoarece sunt destul de rari amortizorii reali cu amortizare proporțională cu masa, iar proporționalitatea cu rigiditatea conduce la o creștere a amortizării pentru modurile înalte de vibrație a structurii. Cu toate acestea, metoda este utilizată de multe programe de firmă pentru analiză dinamică, datorită în primul rând simplității acesteia.

Matricea de amortizare a structurii discretizate a manipulatorului analizat, se calculează în cadrul subprogramului *Bara3i\_r*, după asamblarea și reducerea gradelor de libertate secundare în matricile  $[M]$  și  $[K]$ .

### 3.6.7 INTREGAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DE MIȘCARE

Ecuațiile de mișcare (3.15), împreună cu condițiile inițiale (3.16), formează un sistem de ecuații diferențiale de ordinul II. Deoarece, pentru manipulatorul aflat în reapos supus unei excitații la momentul  $t = 0$ , matricile caracteristice structurii mecanice,  $[K]$ ,  $[M]$  și  $[C]$  sunt constante în timp, sistemul (3.15) este linear și descrie mișcarea unei structuri elastice lineare discrete, cu  $n$  grade de libertate. Se presupune în continuare că dimensiunea  $n$  a matricilor caracteristice și valorile elementelor acestora rezultă după ce au fost introduse legăturile în nodul 1, s-au adăugat masele

suplimentare ale motorului 2 și efortului final, s-a ținut cont de complianța articulațiilor 1 și 9 și s-au eliminat prin reducere dinamică gradele de libertate ale nodurilor interioare.

Pentru determinarea necunoscutelor  $\{U\}$ , care sunt deplasări nodale, se cunosc mai multe metode pas cu pas, care integrează ecuațiile de mișcare, la momente discrete de timp  $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots, t + n\Delta t$ , în intervalul de timp de studiu. În principal, pentru obținerea soluției, se deduc relații de recurență care stabilesc valorile necunoscutelor la pasul de timp  $i$ , în funcție de valorile la pașii de timp anteriori  $i-1, i-2, i-3$  etc. Alegerea pasului de timp  $h = \Delta t$  are o importanță deosebită pentru precizia, stabilitatea și convergența metodei, precum și asupra timpului de calculator necesar.

Metoda Hubolt de integrare, adoptată în această lucrare, are la bază expresiile derivatei întâi și a derivatei de ordinul II obținute prin diferențe finite regresive

$$\{\dot{U}\} \cong \frac{1}{6h}(11\{U\}_i - 18\{U\}_{i-1} + 9\{U\}_{i-2} - 2\{U\}_{i-3}), \quad (3.30)$$

$$\{\ddot{U}\} \cong \frac{1}{h^2}(2\{U\}_i - 5\{U\}_{i-1} + 4\{U\}_{i-2} - \{U\}_{i-3}) \quad (3.31)$$

Prin introducerea relațiilor (3.30), (3.31), în sistemul (3.15), scris la momentul de timp  $i$  și prin explicitarea deplasărilor  $\{U_i\}$ , se obține relația de recurență [45]

$$\left(\frac{2}{h^2}[M] + \frac{11}{6h}[C] + [K]\right)\{U\}_i = \{F\}_i + \left(\frac{5}{h^2}[M] + \frac{3}{h}[C]\right)\{U\}_{i-1} - \left(\frac{4}{h^2}[M] + \frac{3}{2h}[C]\right)\{U\}_{i-2} + \left(\frac{1}{h^2}[M] + \frac{1}{3h}[C]\right)\{U\}_{i-3}, \quad (3.32)$$

adică  $[K^*]\{U\}_i = \{F^*\}_i$ , unde  $[K^*]$  este o matrice pozitiv definită, care permite calculul deplasărilor nodale la un pas de timp, în funcție de deplasările nodale la cei trei pași de timp precedenți. Această legătură produce probleme la startul recurenței  $i = 1$ , când ar trebui cunoscute valorile deplasărilor la trei pași anteriori notați cu 0, -1 și -2. Pentru depășirea acestei dificultăți se utilizează condițiile inițiale și formulele diferențelor finite centrale, din care se deduc valorile de pornire

$$\begin{aligned} \{U\}_{-1} &= \{U\}_0 - h\{\dot{U}\}_0 + \frac{h^2}{2}\{\ddot{U}\}_0, \\ \{\ddot{U}\}_0 &= [M]^{-1}(\{F\}_0 - [C]\{\dot{U}\}_0 - [K]\{U\}_0), \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\{U\}_{-2} = \{U\}_0 - 2h\{\dot{U}\}_0 + 2h^2\{\ddot{U}\}_0.$$

Metoda Hubolt este o metodă implicită de integrare a ecuațiilor de mișcare, adică, la fiecare pas de timp, trebuie calculată inversa matricei  $[K^*]$ . Avantajul major al acestei metode este stabilitatea

necondiționată, ceea ce înseamnă că soluția obținută prin integrare nu crește fără limită, chiar dacă pasul de integrare este mare. Subprogramul *Hubolt r* calculează pe baza acestei metode, deplasările nodale, cunoscând matricile caracteristice structurii  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $[C]$  și vectorul solicitărilor externe  $\{F\}$ .

### 3.6.8 REZULTATE NUMERICE

Determinarea răspunsului dinamic, prin calcularea deplasărilor nodale, s-a făcut impunând condiții concrete, pentru a surprinde influența complianței articulațiilor, a amortizării și a localizării nodului în cadrul structurii. Pozițiile particulare din spațiul de lucru studiate sunt cea de început de cursă, poziția I, și cea de sfârșit de cursă, poziția II, Figura 3.7.

#### A) INFLUENȚA COMPLIANȚEI ARTICULAȚIILOR

Complianțele articulațiilor motoare se determină experimental sau prin comparație cu alte cazuri constructive similare, la care se specifică valoarea acestora. Gradul de complianță,  $gc$ , definit în secțiunea 3.6.3, exprimă un raport între rigiditatea echivalentă a articulației și rigiditatea corespunzătoare de corp rigid, formula (3.17). Legătura dintre rigiditatea echivalentă, exprimată procentual, și gradul de complianță este definită în Tabelul 3.1.

**Gradul de complianță și rigiditatea echivalentă a cuplei**

**Tabelul 3.1**

	Cuplă liberă -				· Cuplă blocată	
% rigiditate echivalentă	0%	5%	10%	25%	50%	100%
grad de complianță $gc$	1.00	0.95	0.90	0.75	0.50	0

Deoarece rigiditatea echivalentă a unei articulații poate avea valori de câteva ordine de mărime mai mici decât în situația comportamentului de corp rigid, gradele de complianță semnificative pentru răspunsul dinamic sunt situate între 0.90 până la 1.00. Rezultatele numerice obținute sunt prezentate în Figura 3.9. Se observă influența complianței asupra mărimii deplasării și a perioadei vibrației, calculate pentru efortul final. Rezultă că neglijarea complianței poate compromite semnificativ rezultatele unei simulări numerice a răspunsului dinamic al structurilor roboților industriali.

## B) INFLUENȚA POZIȚIEI NODULUI ÎN STRUCTURA DISCRETIZATĂ

Evident că deplasările maxime sunt înregistrate în ectorul final. Cu cât nodul este mai depărtat de articulația 1, care asigură rezemarea cu exteriorul, cu atât deplasările nodale cresc. Figura 3.10 prezintă, comparativ, deplasările verticale în ectorul final și deplasările verticale în articulația motare 2. Manipulatorul se găsește în poziția I, de început de cursă.

## C) INFLUENȚA AMORTIZĂRII

Coeficienții de amortizare adimensionali,  $\xi_i$ , se determină pe cale experimentală. Sunt necesari minimum doi coeficienți, pentru două moduri proprii de vibrație, pentru a putea calcula matricea de amortizare  $[C]$ , utilizând metoda amortizării proporționale Rayleigh (3.29).

Pentru poziția I, de început de cursă a manipulatorului, Figura 3.7, se determină primele două frecvențe proprii  $p_1 = 8.4792$  [Hz] și  $p_2 = 53.3010$  [Hz]. Presupunând că s-au măsurat coeficienții  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ , din sistemul (3.29) rezultă  $\alpha = 1.4631 \cdot 10^{-1}$  [s<sup>-1</sup>]  $\beta = 3.2373 \cdot 10^{-4}$  [s].

Rezultatele numerice pentru diferite valori ale coeficienților de amortizare sunt prezentate în Figura 3.11. S-a obținut o familie de curbe care au o formă cunoscută în teoria amortizării. Din acest punct de vedere, al abordării calitative, rezultatele obținute confirmă modelul matematic și procedurile numerice care rezolvă acest model.

## D) INFLUENȚA POZIȚIEI STRUCTURII MANIPULATORULUI

Răspunsul dinamic al manipulatorului în poziție fixă s-a determinat în două puncte caracteristice din spațiul de lucru : *poziția I*, început de cursă, și *poziția II*, sfârșit de cursă. În poziția I, deplasările orizontale sunt nule și cele verticale sunt maxime. În poziția II ambele deplasări de translație sunt semnificative.

În Figura 3.12, Figura 3.13 și Figura 3.14 se prezintă comparativ deplasările ectorului final pentru fiecare din gradele de libertate, în poziția I, respectiv poziția II.

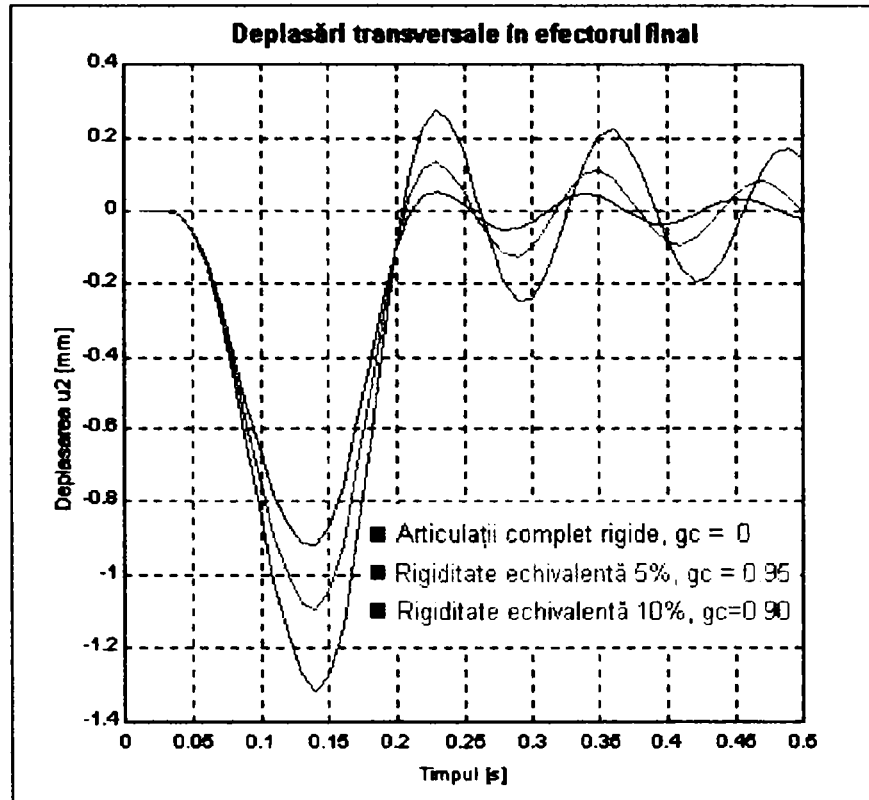


Fig. 3.9 Influența complianței articulațiilor

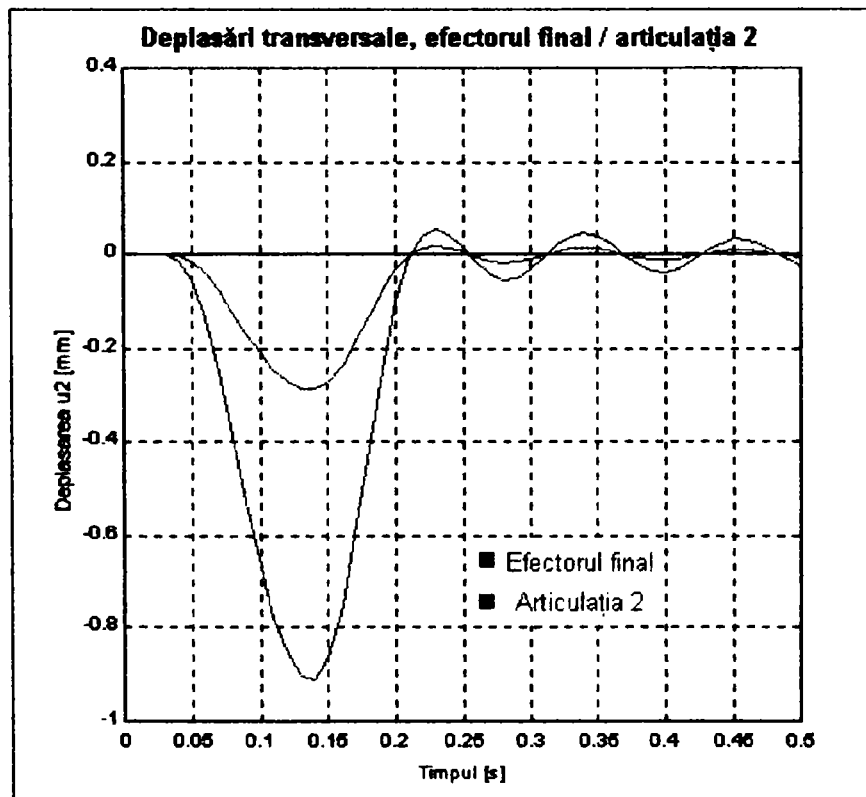
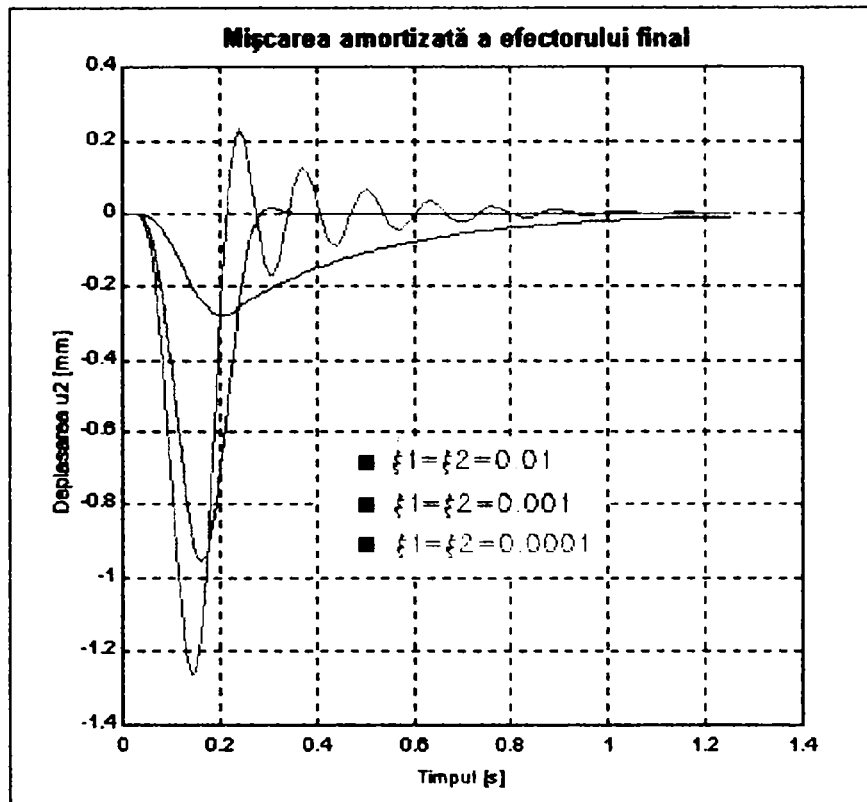
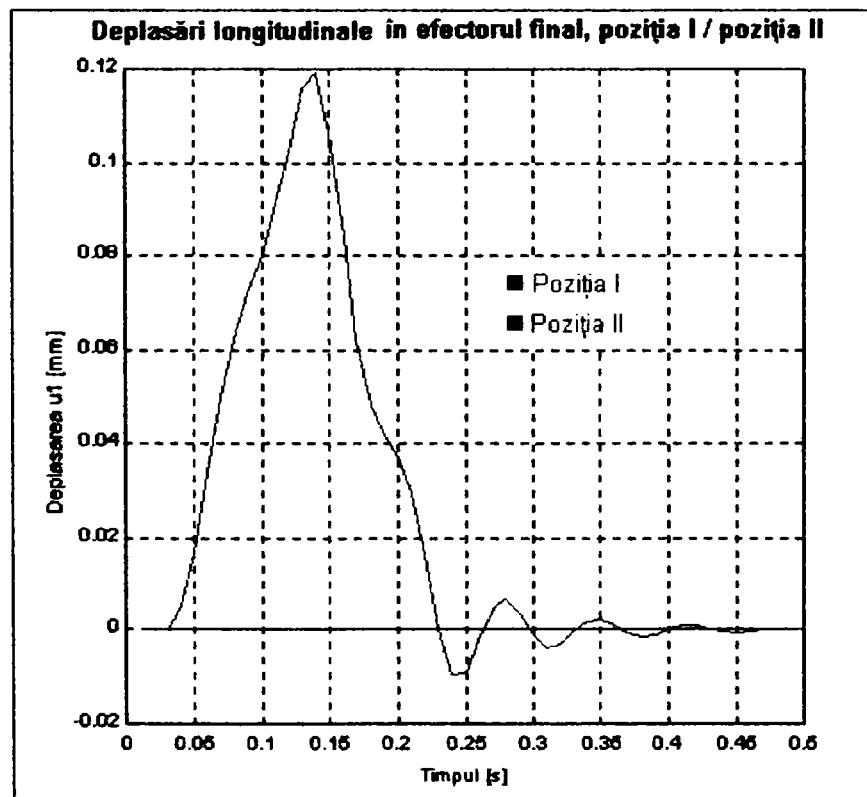


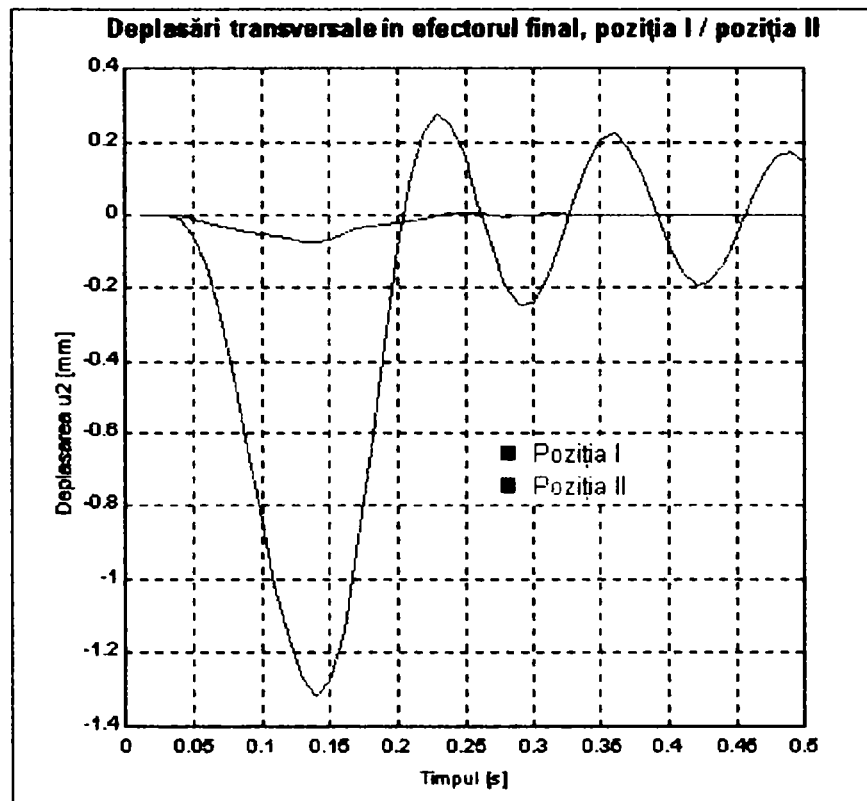
Fig 3.10 Influența poziției nodului în cadrul structurii



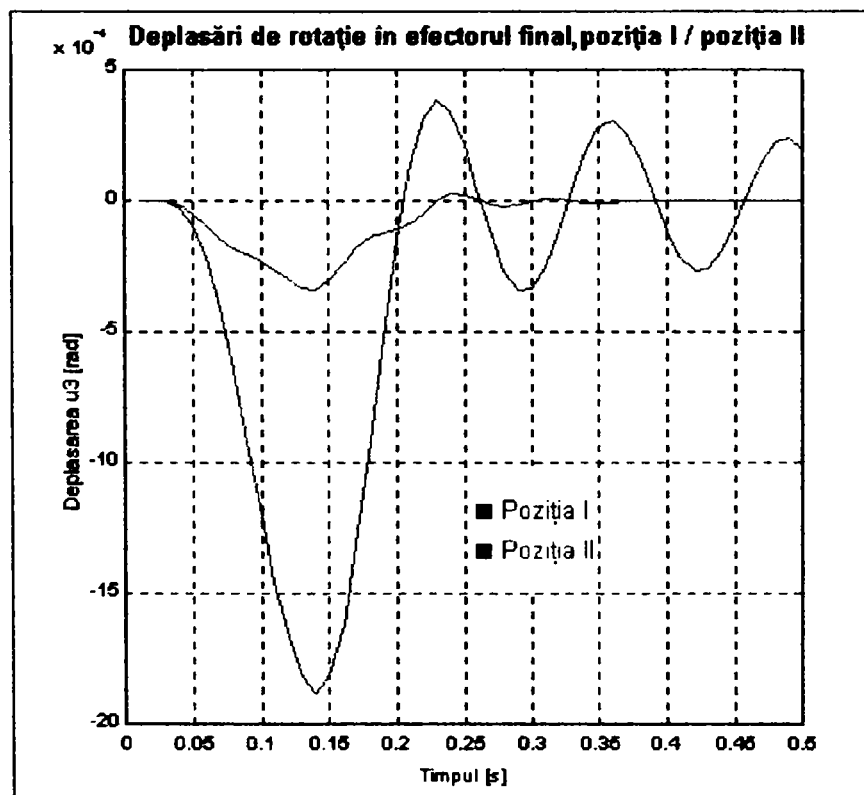
**Fig. 3.11 Influența amortizării**



**Fig. 3.12 Influența poziției structurii - deplasări longitudinale**



**Fig. 3.13 Influența poziției structurii - deplasări transversale**



**Fig. 3.14 Influența poziției structurii - deplasări unghiulare**

### 3.7 RĂSPUNSUL DINAMIC AL MANIPULATORULUI ÎN MIȘCARE

#### 3.7.1 DATELE GENERALE

Manipulatorul, respectiv efectorul final, execută o mișcare în spațiul de lucru și parcurge o traiectorie programată, efectuând o sarcină utilă. Această mișcare este precizată de funcțiile de conducere (3.1) și are trei faze : accelerare din poziția de start până la viteza de lucru, deplasare cu viteza de lucru și frânare până în poziția finală, unde efectorul final este în repaos. În prima și ultima fază, structura este solicitată de forțele de inerție datorate maselor distribuite ale structurii și maselor motoarelor de acționare din articulațiile 1 și 2, precum și masei sculei din efectorului final.

Față de o situație clasică de analiză dinamică, în care barele structurii execută numai mișcări de corp rigid, se consideră în plus următoarele ipoteze :

- a) peste mișcarea de transport de corp rigid, se suprapune o mișcare relativă a barelor, datorată deformațiilor elastice ; această ipoteză conduce la apariția unei rigidități centrifugale și a unei amortizări giroscopice ;
- b) deformațiile unghiulare în nodurile unui element finit conduc la modificarea poziției sistemului de coordonate local ; în această ipoteză, matricea de transformare, de la sistemul de coordonate local al elementului finit, la sistemul de coordonate global, devine funcție de timp, ecuațiile de mișcare fiind nelineare ;
- c) articulațiile motoare sunt compliante, așa cum s-a precizat în secțiunea 3.6.3.

#### 3.7.2 MODELUL LINEAR

În acest caz se iau în considerare numai ipotezele a) și c), din cele expuse anterior. Forma ecuațiilor de mișcare este dată de relația (3.15), cu condițiile inițiale (3.16). Diferența față de situația manipulatorului în repaos constă în faptul că, la fiecare pas de timp la care se face integrarea, în intervalul studiat, valorile numerice ale matricilor caracteristice  $[K]$ ,  $[C]$  și  $[M]$  sunt diferite, deși ele nu sunt funcții de necunoscutele  $\{U\}$  sau derivatele acestora. Din acest motiv sistemul de ecuații (3.15) nu este unul linear real, ci unul *pseudolinear*.



Ipoteza a) implică existența rigidității centrifugale și a amortizării giroscopice, care se datorează vitezelor de transport și a forțelor Coriolis, generate de mișcarea relativă de deformare elastică a barelor. Valorile acestora sunt exprimate de matricile (2.44) și (2.45) și sunt funcții de vitezele și accelerațiile unghiulare ale barelor.

În mod concret, la fiecare pas de timp, pentru fiecare element finit, se determină matricile caracteristice astfel :

- *matricea globală de rigiditate* este suma dintre *matricea structurală de rigiditate* (2.42), *matricea rigidităților echivalente* ale articulațiilor compliantă, cu elementele precizate în relația (3.17), și *matricea de rigiditate centrifugală* (2.44) ;
- *matricea globală a maselor* este suma dintre *matricea consistentă a maselor* (2.43) și *matricea maselor suplimentare* ale motoarelor de acționare din articulații și a sculei din efectorul final, precizată și în secțiunea 3.6.2 ;
- *matricea de amortizare globală* este suma dintre *matricea de amortizare structurală*, determinată prin metoda amortizării proporționale Rayleigh, relația (2.37) și secțiunea 3.6.6, și *matricea de amortizare giroscopică*, (2.45) ;
- *vectorul forțelor* este format numai din forțe de inerție și este produsul dintre matricea globală a maselor și vectorul accelerațiilor mișcării de corp rigid, determinate în secțiunea 3.4.

După calcularea acestor matrici la nivelul fiecărui element finit, se trece de la sistemul local de coordonate la sistemul global de coordonate, utilizând matricea de transformare corespunzătoare, și se face asamblarea pentru întreaga structură, obținându-se în final ecuațiile de mișcare, conform cu sistemul (3.15). Înainte de integrarea acestuia prin metoda Hubolt, se presupune că s-au redus dinamic gradele de libertate secundare, așa cum s-a precizat în secțiunea 3.6.4.

Răspunsul dinamic al manipulatorului în mișcare este caracterizat de deplasările nodale  $\{U\}$ , care se obțin prin integrarea ecuațiilor de mișcare. Deplasările nodale, corespunzătoare gradelor de libertate de translație ale unui nod, în speță cel din efectorul final, conduc la abateri de la traiectoria teoretică planificată a manipulatorului. Evident că estimarea acestor abateri are o importanță practică deosebită.

Integrarea ecuațiilor de mișcare se realizează la pași discreți de timp, în intervalul de studiu, iar la fiecare pas de timp matricile caracteristice ale structurii și vectorul încărcărilor trebuie recalulate. La fiecare pas de timp se integrează de fapt un alt sistem de ecuații diferențiale lineare.

În ansamblu, pe perioada întregului interval de studiu al răspunsului dinamic, sistemul are o comportare pseudolineară.

Rezultatele numerice s-au obținut cu ajutorul programului *DeplaN 1*, care are la bază itinerarul și relațiile de calcul precizate în această secțiune. Ele sunt sintetizate în Figura 3.15 și Figura 3.18.

În Figura 3.15 s-au reprezentat deplasările nodale orizontale și verticale ale efectorului final. Se observă că la sfârșitul fazei de accelerare pentru atingerea vitezei de regim, deplasările verticale sunt mai mari, în timp ce în faza de frânare, la sfârșit de cursă, deplasările orizontale și verticale își schimbă sensul și sunt comparabile ca mărime. Se poate observa de asemenea, la începutul mișcării, o perturbație datorată vibrațiilor libere ale structurii manipulatorului.

Figura 3.16 pune în evidență influența complianței articulațiilor motoare. În nodurile cu grade de libertate compliante rigiditatea echivalentă este substanțial mai mică decât cea de corp rigid, ceea ce conduce la deplasări mai mari. Ignorarea complianței poate conduce la erori semnificative în estimarea răspunsului dinamic.

Mărimea deplasărilor nodale poate fi micșorată prin amortizare, influența acesteia fiind arătată în Figura 3.17. În realitate, în structurile mecanice ale roboților industriali se găsesc destul de rar amortizori, deci influența acesteia nu ar trebui să fie semnificativă.

Cel mai important rezultat practic al determinării răspunsului dinamic este posibilitatea calculării abaterii de la traiectoria planificată a nodurilor structurii mecanice. Mărimea acestor abateri și localizarea lor pot fi luate în considerare de sistemul de comandă al robotului, pentru a minimiza eroarea de poziționare sau de traiectorie. În Figura 3.18 s-au reprezentat traiectoria teoretică și traiectoria reală ale efectorului final, zonele de abateri maxime fiind cele de început și sfârșit de cursă.

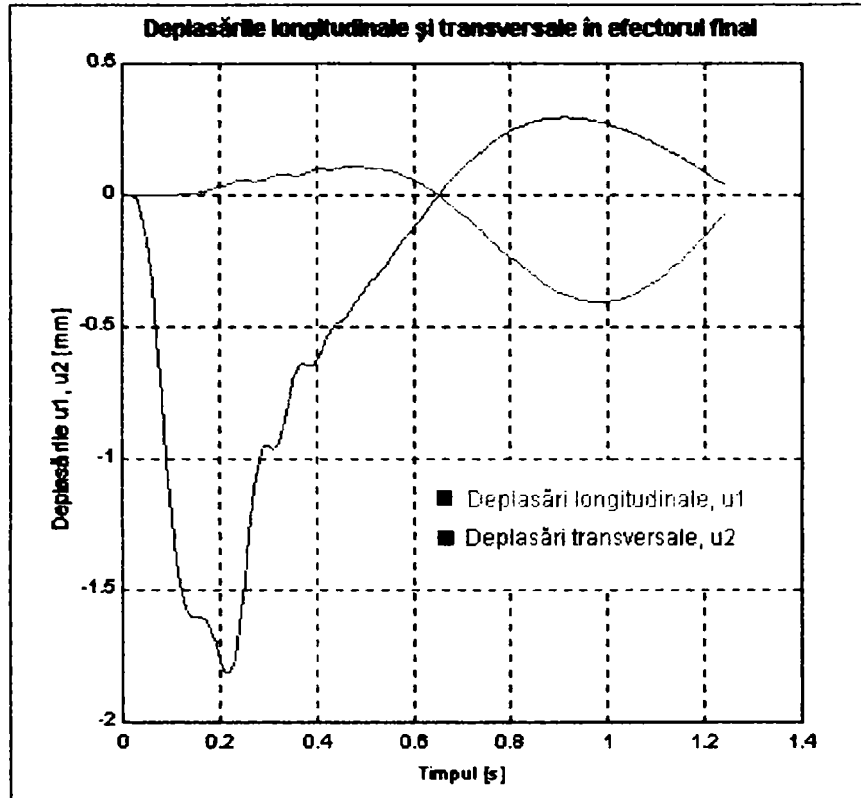


Fig. 3.15 Deplasările nodale de translație ale efectorului final

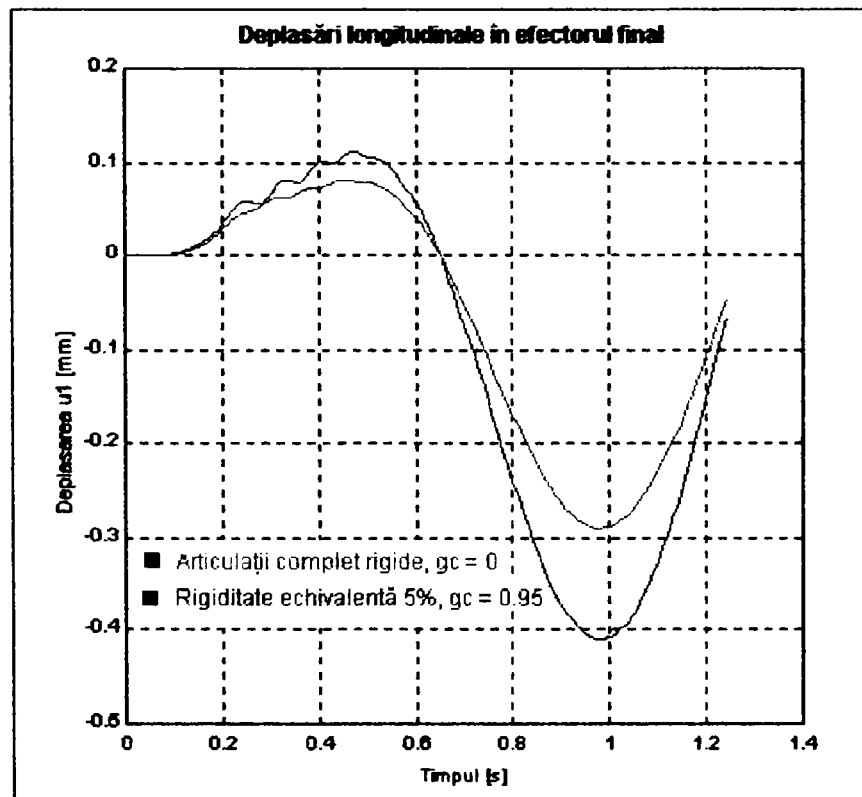
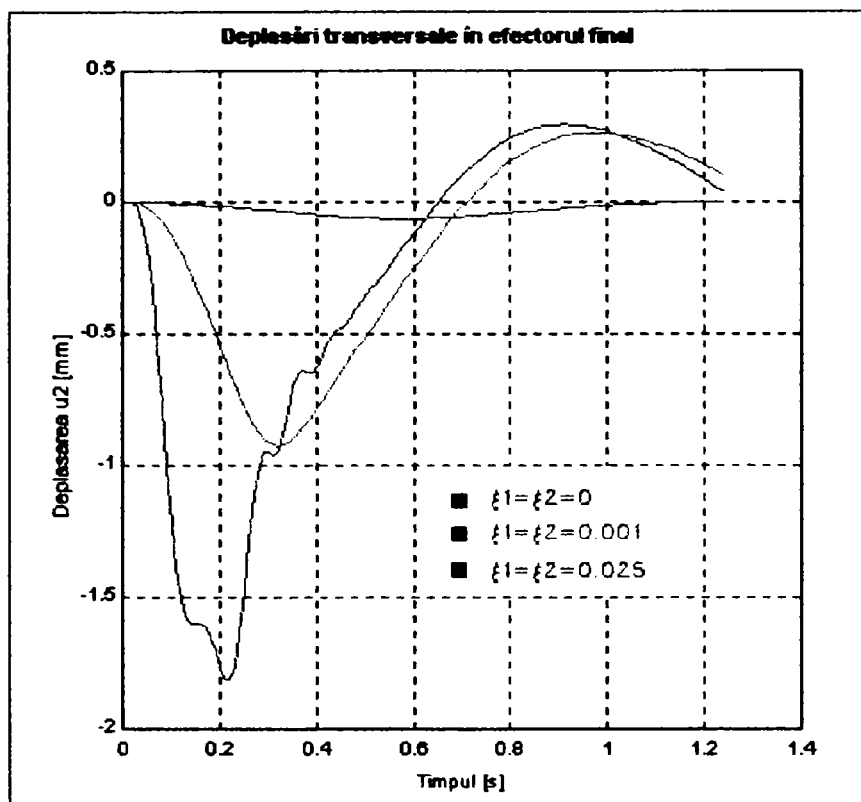
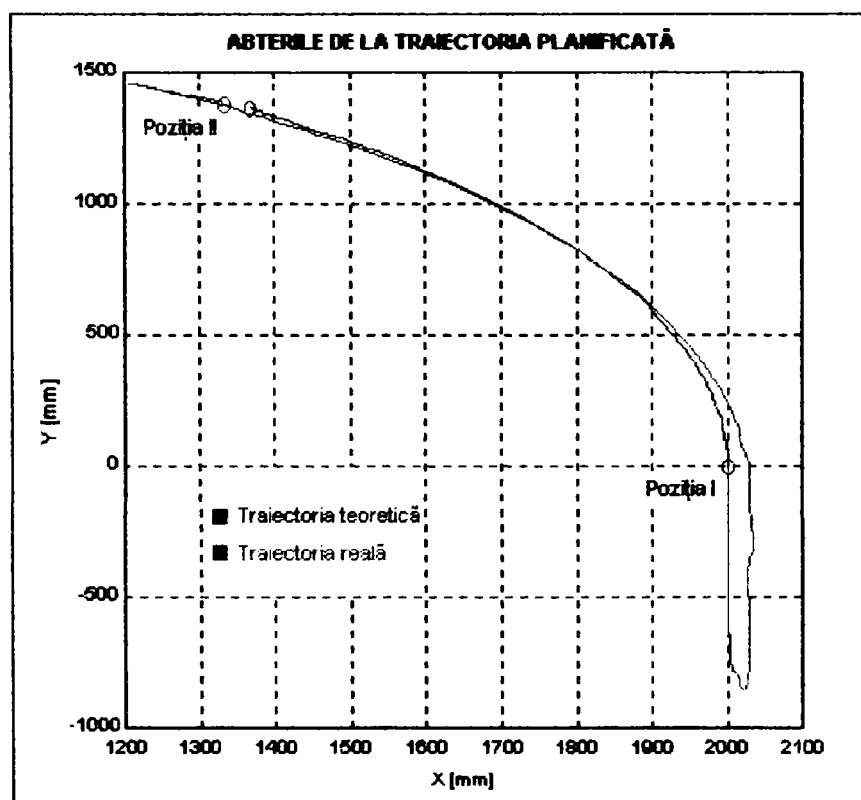


Fig. 3.16 Influența complianței articulațiilor



**Fig. 3.17 Influența amortizării - deplasări transversale**



**Fig. 3.18 Abaterile de la traiectoria planificată**

## 3.7.3 MODELUL NELINEAR

Datele generale ale acestui model sunt cele prezentate în secțiunea 3.7.1, cu sublinierea că sunt valabile toate cele trei ipoteze a), b) și c). Prin ipoteza c), neglijată în modelul pseudolinear, se admite că deformațiile unghiulare în noduri conduc la modificarea poziției sistemului de coordonate local al elementului finit printr-o rotație suplimentară, ceea ce face ca matricea de rotație de la sistemul local la sistemul global de coordonate să devină funcție de coordonatele generalizate care se referă la rotații,  $u_3$ ,  $u_6$ ,  $u_9$ , și implicit funcție de timp.

Prin urmare, într-un nod oarecare  $k$ , situat pe bara  $p$ , conform cu (2.34) și Figura 3.19, unghiul total de rotație al sistemului de coordonate local față de sistemul global este

$$\Psi_k = \Psi_p + u_k, \quad (3.34)$$

unde  $\Psi_p = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_p$  este suma unghiurilor de rotație ale articulațiilor motoare 1.. $p$ , impuse de mișcarea de corp rigid a barelor 1.. $p$ , iar  $u_k$  este unghiul de deformare elastică unghiulară în nodul  $k$ .

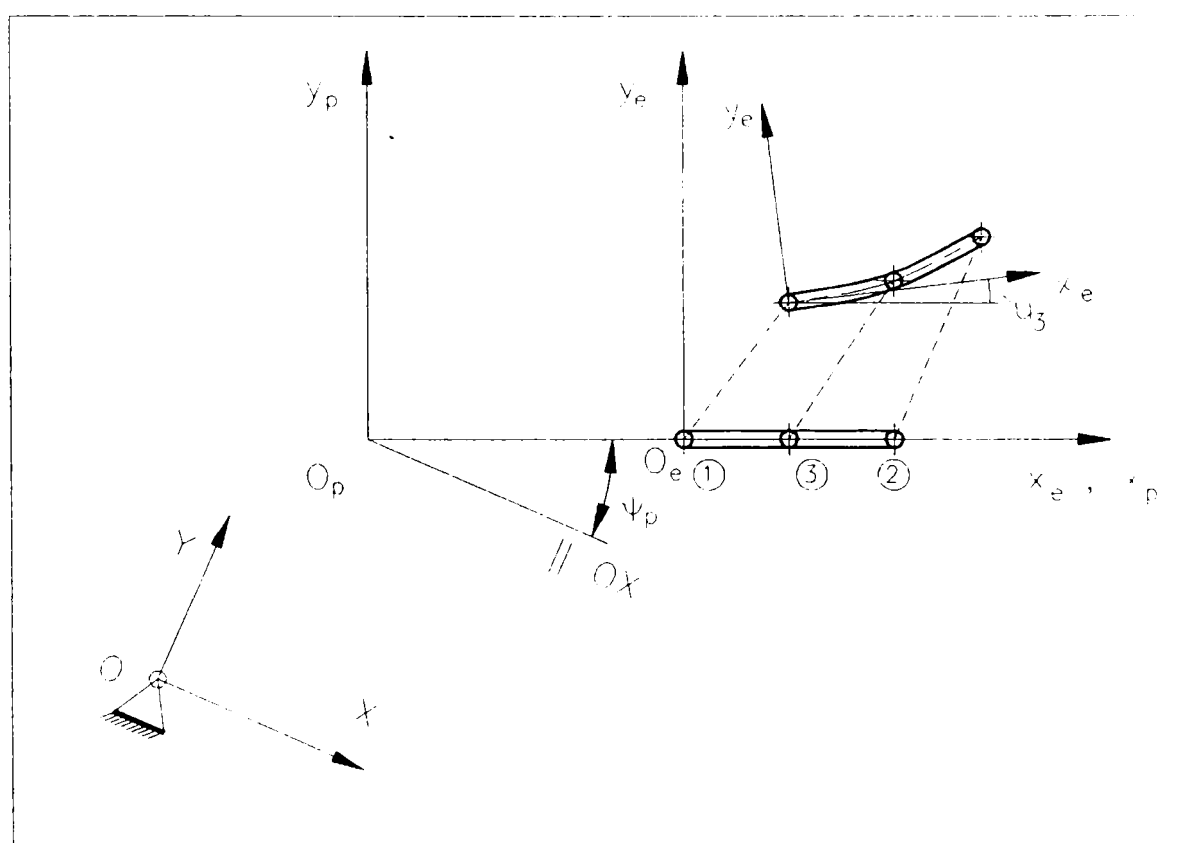


Fig. 3.19 Poziția sistemului local de coordonate după deformație

În continuare, pentru a simplifica scrierea relațiilor, se va considera că nodul  $k$  este nodul 1 al unui element finit curent  $e$ , care se găsește situat pe bara  $p$ . Între coordonatele generalizate  $\{u\}^e$  în sistemul de coordonate local  $O_e x_e y_e$ , respectiv  $\{U\}^e$  în sistemul global de coordonate  $OXY$ , există relația de legătură (2.33),  $\{u\}^e = [B]_p \{U\}^e$ , unde  $[B]_p$  este *matricea de transformare de coordonate* de la sistemul global de coordonate la sistemul local de coordonate. Pentru primul nod al elementului finit, submatricea corespunzătoare acestuia are forma

$$[B]_{1p} = \begin{bmatrix} \cos(\Psi_p + u_3) & \sin(\Psi_p + u_3) & 0 \\ -\sin(\Psi_p + u_3) & \cos(\Psi_p + u_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Ecuția de mișcare a unui element finit în sistemul global de coordonate se obține din ecuația de mișcare dedusă în sistemul local de coordonate (2.31), utilizând relația de legătură (2.33). În expresiile care rezultă, apar matricea (3.35) și derivatele acesteia, așa cum s-a prezentat în relațiile (2.35a) .. (2.35d). Derivatele de ordinul I și II ale matricei  $[B]_{1p}$  au următoarele exprimări

$$[\dot{B}]_{1p} = \begin{bmatrix} -\dot{u}_3 \sin(\Psi_p + u_3) & \dot{u}_3 \cos(\Psi_p + u_3) & 0 \\ -\dot{u}_3 \cos(\Psi_p + u_3) & -\dot{u}_3 \sin(\Psi_p + u_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$[\ddot{B}]_{1p} = \begin{bmatrix} -\ddot{u}_3 \sin(\Psi_p + u_3) - \dot{u}_3^2 \cos(\Psi_p + u_3) & -\dot{u}_3^2 \sin(\Psi_p + u_3) + \ddot{u}_3 \cos(\Psi_p + u_3) & 0 \\ -\dot{u}_3 \cos(\Psi_p + u_3) + \dot{u}_3^2 \sin(\Psi_p + u_3) & -\dot{u}_3 \sin(\Psi_p + u_3) - \dot{u}_3^2 \cos(\Psi_p + u_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Se observă că ecuațiile de mișcare scrise în sistemul global de coordonate, relația (2.35), sunt ecuații diferențiale de ordinul II nelineare, coeficienții necunoscutelor fiind funcții de aceste necunoscute și de derivatele acestora.

Pentru rezolvarea numerică a unui astfel de sistem nu se poate aplica o metodă de integrare directă, la fel ca și pentru sistemele lineare, soluția urmând să fie determinată prin *iterații succesive*. Integrarea se va face și în acest caz la intervale discrete de timp. La fiecare pas de timp ar trebui evaluate matricile caracteristice ale structurii  $[M]$ ,  $[K]$  și  $[C]$ . Acestea sunt însă funcții de necunoscute și derivatele acestora, care ar trebui deduse la același pas de timp. Ieșirea din acest impas se face

printr-un proces de iterații succesive, presupunând pentru început un set de valori aleatoare pentru necunoscute. În mod concret se procedează astfel :

- se împarte intervalul de timp de studiu în subintervale de lungime egală cu  $h$  ;
- la fiecare moment de timp  $t_0 + ih$  se efectuează iterativ operațiile :
  - se atribuie necunoscutelor un set de valori aleatoare
 
$$\{U\}_{0i} = [U_{01}, U_{02}, \dots, U_{0n}]^T ;$$
  - se calculează valorile derivatelor de ordin I și II ale necunoscutelor la iterația curentă  $j$ , utilizând valorile presupuse ale necunoscutelor  $\{U\}_{0i}$ , și a celor determinate la trei pași anteriori de timp,  $i-1$ ,  $i-2$  și  $i-3$ , prin metoda diferențelor finite regresive, relațiile (3.30), (3.31) ;
  - se determină matricile coeficienți ale sistemului  $[M]$ ,  $[K]$  și  $[C]$ , cu relațiile (2.35a) .. (2.35d) ;
  - se rezolvă sistemul linear rezultat prin metoda de integrare Hubolt ;
  - se compară soluția obținută la iterația curentă  $j$ ,  $\{U\}_j$ , cu valorile de start ale iterației  $\{U\}_{0i}$  ; dacă erorile sunt mai mari decât o toleranță admisă, se procedează la o nouă iterație, având valorile de start soluția determinată la iterația curentă,  $\{U\}_{0i} = \{U\}_j$ .

Programul *DeplanN\_n*, întocmit pe baza acestui algoritm, calculează deplasările nodale pentru un manipulator în mișcare. Datele de intrare și programul sursă sunt prezentate în paragraful 3.8. Rezultatele numerice sunt sintetizate în Figura 3.20, .. , Figura 3.23.

În Figura 3.20 și Figura 3.21 sunt prezentate comparativ deplasările nodale orizontale și verticale ale efectorului final, pentru modelul linear respectiv nelinear. Se observă că, deși formele de evoluție în timp ale deplasărilor sunt asemănătoare, există diferențe sensibile între valorile acestora, modelul nelinear descriind o structură mai rigidă.

Influența complianței articulațiilor motoare este mai scăzută pentru modelul nelinear, Figura 3.22, față de cazul modelului linear, ilustrată în Figura 3.16. În schimb influența amortizării este mai puțin pronunțată, după cum rezultă dacă se compară Figura 3.17, modelul linear, cu Figura 3.23, modelul nelinear.

În concluzie, modelul nelinear descrie o structură mai rigidă decât modelul linear. Măsurătorile experimentale ar trebui să descrie răspunsul dinamic al unei structuri reale a unui manipulator plan, care să fie situat între limitele marcate de modelul linear și nelinear.

# SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

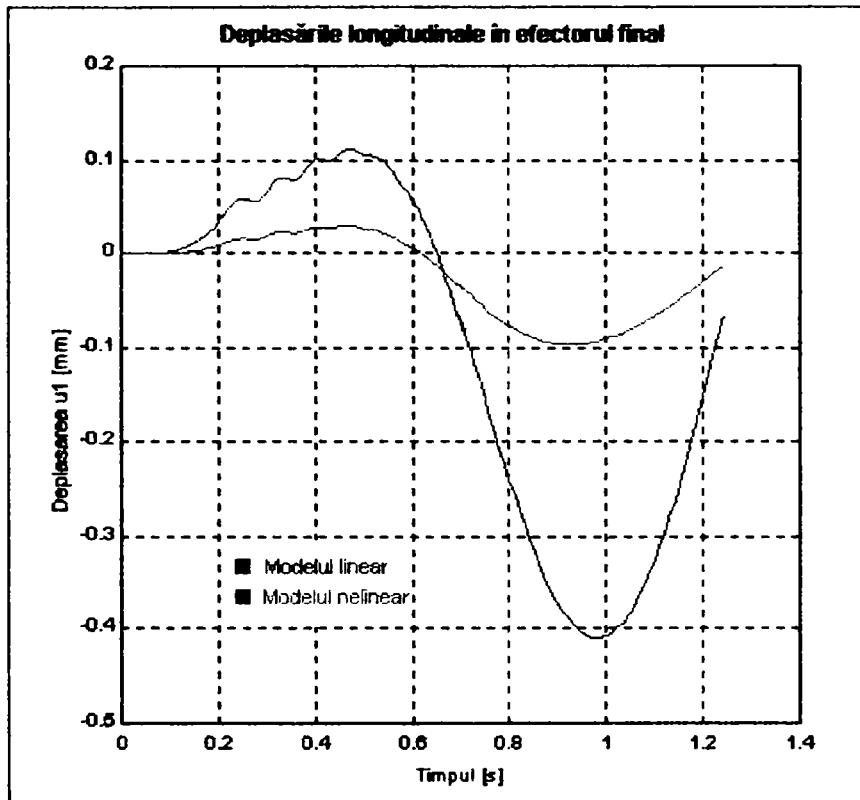


Fig. 3.20 Modelele nelinear / linear. Deplasări longitudinale

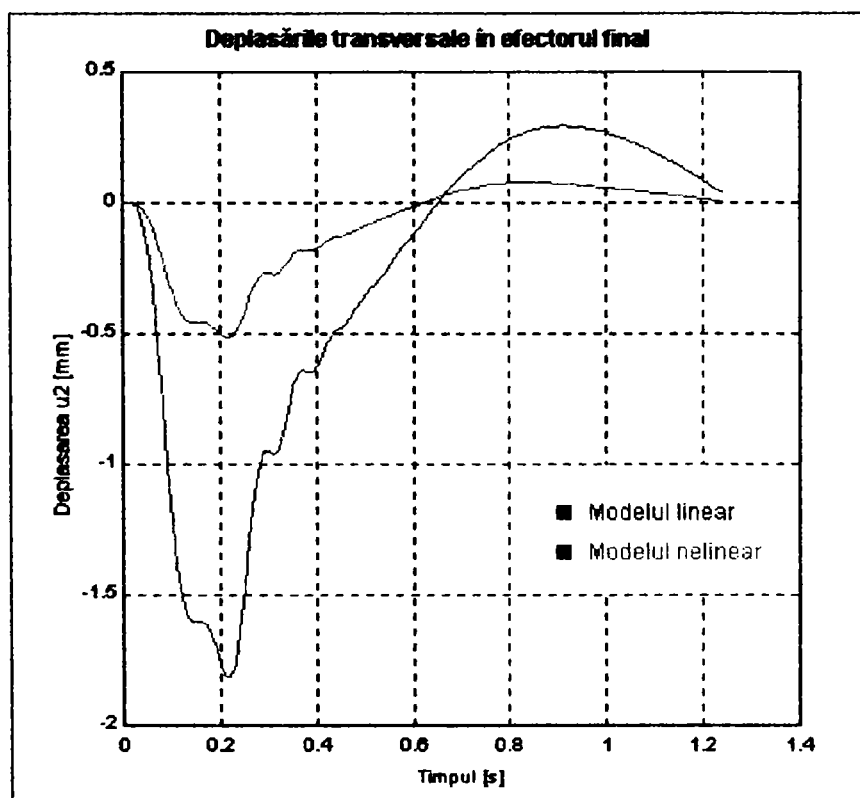
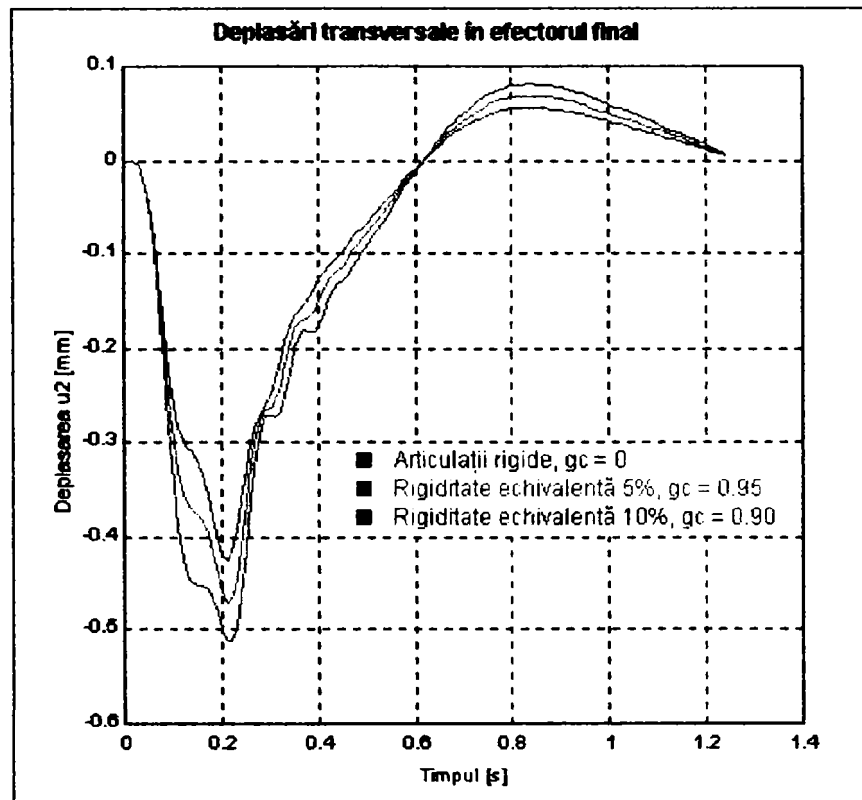
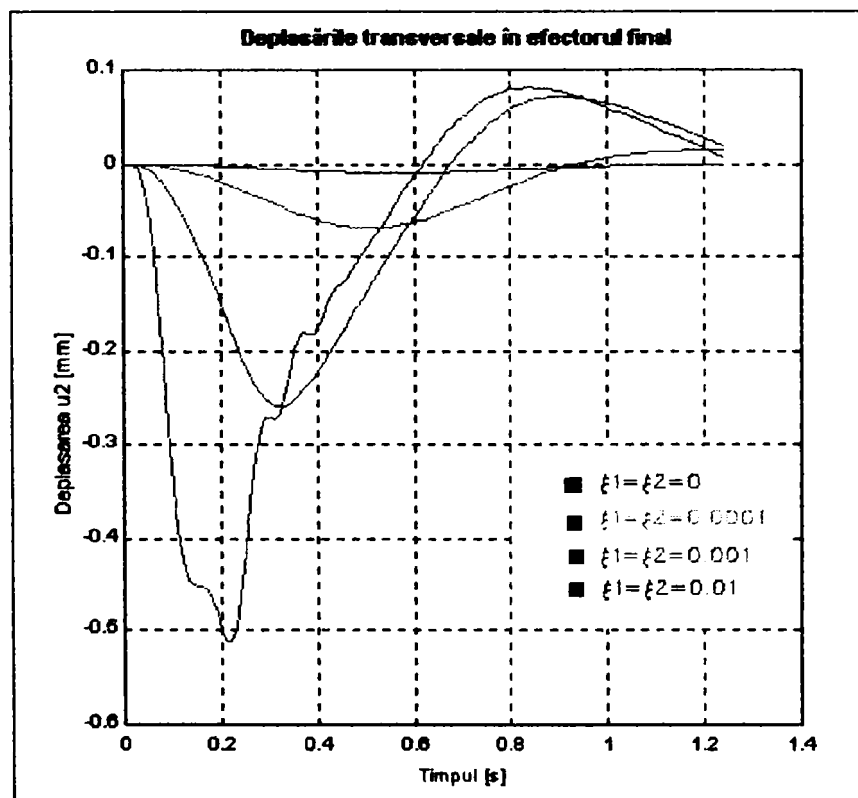


Fig. 3.21 Modelele nelinear / linear. Deplasări transversale





**Fig. 3.22 Modelul nelinear. Influența complianței**



**Fig. 3.23 Modelul nelinear. Influența amortizării**

## 3.8 DATELE DE INTRARE ȘI SURSELE PROGRAMELOR DE CALCUL

## 3.8.1 DENUMIREA PROGRAMELOR

Pentru determinarea răspunsului dinamic al structurii manipulatorului, aflat în repaos în diferite puncte ale spațiului de lucru, precum și în cazul în care acesta se află în mișcare, s-au întocmit următoarele programe de calcul, care rulează sub *mediul integrat de programare Matlab* :

- *DeplaN\_r*, programul principal pentru determinarea deplasărilor nodale ale manipulatorului în repaos;
- *DeplaN\_l*, programul principal pentru determinarea deplasărilor nodale ale manipulatorului în mișcare, modelul linear ;
- *DeplaN\_n*, programul principal pentru determinarea deplasărilor nodale ale manipulatorului în mișcare, modelul nelinear ;
- *Data*, încarcă în memoria internă a calculatorului datele de intrare ;
- *Discret*, discretizează structura manipulatorului, calculează coordonatele nodurilor și definește elementele finite ;
- *VitezeR*, calculează vitezele absolute pentru mișcarea de corp rigid ale nodurilor structurii ;
- *AcceleR*, calculează accelerațiile absolute pentru mișcarea de corp rigid ale nodurilor structurii ;
- *Bara3i\_r*, *Bara3i\_l*, *Bara3i\_n*, calculează matricile  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $[C]$  pentru elementul finit izoparametric cu trei noduri de tip bară plană încovoiată, precum și vectorul încărcărilor  $\{F\}$ , în cazul manipulatorului în repaos și în mișcare, modelul linear și nelinear ;
- *FrNatSsp*, determină frecvențele naturale de vibrație prin metoda iterației pe subspații ;
- *ReducG*, reduce gradele de libertate secundare prin metoda Guyan ;
- *Expand*, calculează valorile necunoscutelor secundare prin retrosubstituție ;
- *Hubolt*, integrează ecuațiilor de mișcare prin metoda Hubolt ;
- *Hubolt\_r*, variantă adaptată a subprogramului *Hubolt* pentru cazul manipulatorului în repaos.

## 3.8.2 DATELE DE INTRARE

*Datele de intrare*, încărcate în memoria internă a calculatorului prin subprogramul *Data*, sunt stocate în fișiere și au o organizare matriceală.

1) *Geometria structurii și funcțiile de conducere*, matricea *s*

$i$	$\Delta\theta_i$	$T$	$d_i$	$nel_i$	$i = 1, p$
-----	------------------	-----	-------	---------	------------

- $i$  numărul barei sau articulației motoare,
- $\Delta\theta_i$  spațiul maxim de lucru al barei  $i$ , [rad],
- $T$  perioada mișcării în care se parcurge spațiul maxim de lucru, [s],
- $d_i$  lungimea barei  $i$ , [mm]
- $nel_i$  numărul de elemente finite în care se divide bara  $i$ ,
- $p$  numărul barelor din structura manipulatorului ;

*s* =

```
1.0000e+000  5.2359e-001  1.2500e+000  1.0000e+003  4.0000e+000
2.0000e+000  5.2359e-001  1.2500e+000  1.0000e+003  4.0000e+000
```

2) *Proprietățile materialelor*, matricea *cm*

$E$	$G$	$k$	$\rho$	$\alpha$
-----	-----	-----	--------	----------

- $E$  modulul de elasticitate longitudinal, [Nmm<sup>-2</sup>],
- $G$  modulul de elasticitate transversal, [Nmm<sup>-2</sup>],
- $k$  coeficientul lui Timoshenko,
- $\rho$  densitatea, [Ns<sup>2</sup>mm<sup>-4</sup>],
- $\alpha$  coeficientul de dilatare termică liniară.

Matricea *cm* are atâtea linii câte tipuri de material există în structura mecanică.

*cm* =

```
2.0700e+005  7.9300e+004  1.1500e+000  7.6500e-009  0
```

3) *Proprietățile geometrice ale elementelor, matricea prop*

<i>A</i>	<i>I<sub>z</sub></i>
----------	----------------------

- *A* aria secțiunii transversale, [mm<sup>2</sup>],
- *I<sub>z</sub>* momentul de inerție, [mm<sup>4</sup>].

Matricea *prop* are atâtea linii câte dimensiuni geometrice diferite pentru bare există în structura manipulatorului.

*prop* =

315            10000

4) *Condițiile de rezemare, matricea condl*

<i>nod</i>	<i>direcție</i>
------------	-----------------

- *nod* numărul nodului în care există legături,
- *direcție* direcția fixată, 1 direcția *x*, 2 direcția *y*, 3 direcția  $\varphi$ .

Numărul de linii al matricei *condl* este egal cu numărul de garde de libertate fixate.

*condl* =

1        1  
1        2  
1        3

5) *Forțele exterioare, matricea forte*

<i>nod</i>	<i>direcție</i>	<i>nr.curbă</i>	<i>valoare</i>
------------	-----------------	-----------------	----------------

- *nod* numărul nodului în care se aplică forța,
- *direcție* direcția forței generalizate, 1 direcția *x*, 2 direcția *y*, 3 direcția  $\varphi$ ,
- *nr. curbă* numărul curbei de variație în timp a forței,
- *valoare* mărimea forței, [N].

Numărul de linii ale matricei *forte*, notat cu *ll*, este egal cu numărul forțelor exterioare aplicate în nodurile structurii.

```
forte =
  17      2      1     -10
```

6) *Curbe de timp pentru forțele exterioare, matricea curbe*

<i>npt</i>	$t_1$	$f_1$	$t_2$	$f_2$	...
------------	-------	-------	-------	-------	-----

- *npt* număr de puncte necesar pentru descrierea variației în timp a forței exterioare,
- $t_1$  abscisa timp, [s],
- $f_1$  valoarea forței la momentul  $t_1$ , [N],

Numărul de puncte ( $t_i, f_i$ ) este *npt*, iar numărul de linii al matricei *curbe* este cel al forțelor exterioare *ll*.

```
curbe =
Columns 1 through 6
4.0000e+000      0      0  1.0000e-001  1.0000e+000  2.0000e-001
Columns 7 through 9
      0  2.0000e+000      0
```

7) *Masele concentrate exterioare, matricea masc*

<i>nod</i>	<i>masc</i>
------------	-------------

- *nod* numărul nodului cu masă suplimentară,
- *masc* masa concentrată, [Ns<sup>2</sup>mm<sup>-1</sup>].

Numărul de linii ale matricei *masc* este egal cu numărul maselor suplimentare atașate structurii.

```
masc =
9.0000e+000  1.0000e-003
1.7000e+001  1.5000e-003
```

8) *Complianța cuplelor*, matricea *compl*

<i>nod</i>	<i>gc</i>
------------	-----------

- *nod* numărul nodului cu articulație compliantă,
- *gc* gradul de compliantă.

Numărul de linii ale matricei *compl* este egal cu numărul articulațiilor motoare ale manipulatorului.

```
compl =
  1.0000e+000  1.0500e+000
  9.0000e+000  1.0500e+000
```

9) *Condițiile inițiale*, matricea *cdint*

<i>nod</i>	<i>direcție</i>	<i>tip condiție</i>	<i>valoare</i>
------------	-----------------	---------------------	----------------

- *nod* numărul nodului cu condiție inițială,
- *direcție* direcția condiției inițiale, 1 direcția x, 2 direcția y, 3 direcția  $\varphi$
- *tip condiție*, 1 deplasări, 2 viteze
- *valoare*, valoarea condiției inițiale.

În cazul analizat, condițiile inițiale sunt nule, excitarea structurii fiind produsă de o forță de excitație.

## 3.8.3 SURSELE PROGRAMELOR

```
% *** Programul DeplaN_r, v. 1.0 1999
%   - Calculul deplasărilor nodale
%   - Răspunsul dinamic al manipulatorului în poziție fixă
%   - Modelul linear

tic;
clc;
disp('CALCULUL DEPLASĂRILOR NODALE');
disp(' Manipulatorul în repaos');
disp('-----');
disp('Progres : 0.00 [%]');
```

```

% Datele de intrare
data;

% Discretizarea structurii manipulatorului
discret;

% Formarea matricilor: K, M, C
bara3i_r;

    Reducerea gradelor de libertate secundare
reducg;

% Integrarea ecuațiilor de mișcare

h = 0.01;           % pasul de timp în integrarea ecuațiilor de mișcare
tmax = 1.25;       % perioada mișcării
npas = tmax/h;     % numărul de pași de timp
timp = [1:npas]*h; % coordonatele de timp
contor = 1;
timp = [1:npas]*h;

hubolt_r;

disp(100);
disp(' Timpul de calcul [min] :');
disp(toc/60);           % timpul de calcul

% ***

% *** Programul DeplaN_1, v. 1.0 1999
% - Deplasările nodale pentru manipulatorul în mișcare
% - Răspunsul dinamic al manipulatorului în mișcare
% - Modelul pseudolinear

% Inițializarea variabilelor

tic;
clc;
disp('CALCULUL DEPLASĂRILOR NODALE');
disp(' Modelul pseudolinear');
disp('-----');
disp('Progres : 0.00 [%]');
data;           % datele inițiale
h = 0.01;      % pasul de timp în integrarea ecuațiilor de mișcare
tmax = 1.25;   % perioada mișcării
npas = tmax/h; % numărul de pași de timp
timp = [1:npas]*h;
contor = 1;

t = 0;
discret;       % discretizarea structurii la momentul t = 0
vitezer;      % vitezele de corp rigid ale nodurilor
acceler;      % accelerațiile de corp rigid ale nodurilor
bara3i_l;     % calculul matricilor K, M, C, F
for l = 1:11   % forțele exterioare la momentul t = 0
    npt = curbe(l,1);

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

    tablou = [curbe(1,2:2:2*npt)
              curbe(1,3:2:2*npt+1)]';
    fact(1) = table1(tablou,t);
end %for;
Ft = F+Fex*fact';
app0 =M\ (Ft-C*ap0-K*a0);           % accelerațiile nodale inițiale
am1 = a0-h*ap0+app0*h*h/2;         % determinarea deplasării
am2 = a0-2*h*ap0+app0*2*h*h;       % a pasul de timp -1 și -2
a = [am2 am1 a0];                   % inițializarea tabloului a

    % Integrarea ecuațiilor de mișcare la momentul t

%t = 0;

for ip = 4:npas;
    t = t+h;
    discret;                         % discretizarea structurii la momentul t
    vitezer;                          % vitezele de corp rigid ale nodurilor
    acceler;                          % accelerațiile de corp rigid ale nodurilor
    bara3i_1;                         % calculul matricilor K, M, C, F
    reduc;                             % reducerea Guyan a DOF secundare
    hubolt;                            % rezolvarea sistemului linear prin metoda Hubolt
    expand;                             % deplasările DOF secundare prin retrosubstituție
    format bank;
    if ip == 10*contor
        disp(ip/npas*100);
        contor = contor + 1;
    end %if;
end %for;

disp(100);
disp(' Timpul de calcul [min] :');
disp(toc/60);                         % timpul de calcul

% ***

% *** Programul DeplaN_n, v. 1.0 1999
% - Deplasările nodale pentru manipulatorul în mișcare
% - Răspunsul dinamic al manipulatorului în mișcare
% - Modelul nelinear

    % Inițializarea variabilelor

tic;
clc;
disp('CALCULUL DEPLASĂRILOR NODALE');
disp('      Modelul nelinear');
disp('-----');
disp('Progres : 0.00 [%]');
data;                                 % datele inițiale
h = 0.01;                             % pasul de timp în integrarea ecuațiilor de mișcare
tmax = 1.25;                          % perioada mișcării
npas = tmax/h;                        % numărul de pași de timp
timp = [1:npas]*h;                    % coordonatele de timp
contor = 1;

```



```

t = 0;
discret;           % discretizarea structurii la momentul t = 0
vitezer;          % vitezele de corp rigid ale nodurilor
acceler;          % accelerațiile de corp rigid ale nodurilor
bara3i_1;         % calculul matricilor K, M, C, F
for l = 1:11      % forțele exterioare la momentul t = 0
    npt = curbe(1,1);
    tablou = [curbe(1,2:2:2*npt)
              curbe(1,3:2:2*npt+1)];
    fact(l) = table1(tablou,t);
end %for;
Ft = F+Fex*fact'; % forțele exterioare + forțele de inerție
app0 =M\ (Ft-C*ap0-K*a0); % accelerațiile nodale inițiale
am1 = a0-h*ap0+app0*h*h/2; % determinarea deplasării
am2 = a0-2*h*ap0+app0*2*h*h; % la pasul de timp -1 și -2
a = [am2 am1 a0]; % inițializarea tabloului a

    % Integrarea ecuațiilor de mișcare la momentul t

for ip = 4:npas;
    t = t+h;
    discret;           % discretizarea structurii la momentul t
    vitezer;          % vitezele de corp rigid ale nodurilor
    acceler;          % accelerațiile de corp rigid ale nodurilor
    at = eye(nec,1);
    eroare = 1;
    tol = 1e-12;
    iter = 0;          % iterații succesive pentru liniarizarea sistemului
    while eroare > tol
        atp = 1/6/h*(11*at-18*a(:,ip-1)+9*a(:,ip-2)-2*a(:,ip-3));
        atpp = 1/h/h*(2*at-5*a(:,ip-1)+4*a(:,ip-2)-a(:,ip-3));
        bara3i_n;      % calculul matricilor K, M, C, F
        reduc;         % reducerea Guyan a DOF secundare
        hubolt;        % rezolvarea sistemului linear prin metoda Hubolt
        expand;         % deplasările DOF secundare prin retrosubstituție
        eroare = max(max(abs(a(3:3:nec,ip)-at(3:3:nec))));
        at = a(:,ip);
        iter = iter+1;
    end %while;
    format bank;
    if ip == 10*contor
        disp(ip/npas*100);
        contor = contor + 1;
    end %if;
end %for;
disp(100);
disp(' Timpul de calcul [min] :');
disp(toc/60);          % timpul de calcul

% ***

% *** Subprogramul Data
% - Datele de intrare
% - Definirea elementelor finite

clear;

```

```

format short e;

    % 1. Titlul problemei

TitluProb = 'RR_1';

    % 2. Geometria structurii și funcțiile de conducere

fisier = [TitluProb '.str'];
eval(['load ' fisier]);
s = eval(TitluProb);
p = length(s(:,1));           % numărul barelor din structură
nnd = 2*sum(s(:,5))+1;       % numărul total de noduri
ngn = 3;                     % nr. grade de libertate / nod
nec = nnd*ngn;               % numărul total de necunoscute

    % 3. Proprietățile materialelor

fisier= [TitluProb '.mtr'];
eval(['load ' fisier]);
cm = eval(TitluProb);

    % 4. Proprietățile geometrice

fisier= [TitluProb '.pro'];
eval(['load ' fisier]);
prop = eval(TitluProb);

    % 5. Condițiile de rezemare

fisier= [TitluProb '.cnd'];
eval(['load ' fisier]);
concl = eval(TitluProb);

    % 6. Forțele exterioare

forte = [];
%forte = [ 17 2 1 -10 ];
if size(forte)~= [0,0]       % numărul cazurilor de încărcare
    ll=max(forte(:,3));
else
    ll=1;
end;
Fex = zeros(nec,ll);       % modulul maxim
nl = size(forte);
for i = 1:nl;
    nn = forte(i,1);
    direc = forte(i,2);
    l = forte(i,3);
    f = forte(i,4);
    loc = ngn*(nn-1)+direc;
    Fex(loc,l) = Fex(loc,l)+f;
end %for;
Fex0 = Fex;

    % 7. Curbele de timp pentru forțele exterioare

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

fisier= [TitluProb '.crb'];
eval(['load ' fisier]);
curbe = eval(TitluProb);

    % 8. Masele concentrate exterioare

fisier= [TitluProb '.msc'];
eval(['load ' fisier]);
masc = eval(TitluProb);
%masc = [];

    % 9. Amortizarea

amc = []; % amortizări concentrate
alf = 0;%1.4631e-01; % coeficientul alfa [MS]
bet = 0;%3.2373e-04; % coeficientul beta [KS]
CE = zeros(nec); % amortizarea externă

    % 10. Compliantța cuplelor

%compl = []; % fără compliantță
compl = [ 1 1.11 % nodurile compliante
          9 1.11 ]; % gradele de compliantță
if size(compl) ~= [0 0]
    nnc = size(compl(:,1));
    nnc = nnc(1,1); % numărul nodurilor compliante
else
    nnc = 0;
end %if;

    % 11. Condiții inițiale

cdinit = [];
a0 = zeros(nec,1); % deplasări inițiale
ap0 = zeros(nec,1); % viteze inițiale
ni = size(cdinit);
for i = 1:ni
    nn = cdinit(i,1);
    direc = cdinit(i,2);
    tip = cdinit(i,3);
    val = cdinit(i,4);
    loc = ngn*(nn-1)+direc;
    if tip == 1
        a0(loc) = val;
    elseif tip == 2
        ap0(loc) = val;
    end %if
end %for

    % 12. DOF principale

nmaster = []; % nodurile master
for i = 1:2:nnd
    nmaster = [nmaster i];
end %for;
```

```

% 13. Definirea elementelor finite

nel = sum(s(:,5)); % numărul elementelor finite
elemente = zeros(nel,6);
for i = 1:nel
    elemente(i,1) = i;
    elemente(i,2) = 2*i-1;
    elemente(i,3) = 2*i;
    elemente(i,4) = 2*i+1;
    elemente(i,5) = 1;
    elemente(i,6) = 1;
end %for;
elem = elemente(:,2:6);

% 14. Marcarea nodurilor cu complianță

for j = 1:nnc
    for i = 1:nel
        if elem(i,1) == compl(j,1)
            elem(i,1) = -compl(j,1);
        end %if;
        if elem(i,2) == compl(j,1)
            elem(i,2) = -compl(j,1);
        end %if;
        if elem(i,3) == compl(j,1)
            elem(i,3) = -compl(j,1);
        end %if;
    end %for;
end %for;

% 15. Momentul de timp

t = 0;

% ***

% *** Subprogramul Discret
% - Poziția, viteza și accelerația barelor robotului
% - Coordonatele nodurilor în sistem global

% Poziția, viteza și accelerația unghiulare la momentul t

msva = zeros(p,4);
for i=1:p
    delta = s(i,2) ;
    Tm = s(i,3);
    msva(i,1) = i;
    msva(i,2) = delta*(t/Tm - 1/2*pi*sin(2*pi*t/Tm)) ;
    msva(i,3) = delta/Tm*(1 - cos(2*pi*t/Tm)) ;
    msva(i,4) = 2*pi*delta/Tm*sin((2*pi*t/Tm)) ;
end %for;

% Coordonatele nodurilor la momentul t

noduri = zeros(nnd,5);

```

```

tmp = eye(2);
A = zeros(2,1);
teta = 0;
poznod = 1;
pozart=zeros(p,1);
for i = 1:p
    if i == 1
        di = 0;
        tetai = 0;
    else
        di = s(i-1,4);
        tetai = msva(i-1,2);
    end %if
    T = [ cos(tetai)  -sin(tetai)
          sin(tetai)  cos(tetai)  ];
    tmp = tmp*T;
    A = A + tmp*[di 0]';
    tetai = msva(i,2);
    teta = teta+tetai;
    di = s(i,4);
    neli = s(i,5);
    for j=1:2*neli+1
        noduri(poznod+j-1,1) = i;
        noduri(poznod+j-1,2) = poznod+j-1;
        noduri(poznod+j-1,3) = A(1,1)+cos(teta)*(j-1)*di/neli/2;
        noduri(poznod+j-1,4) = A(2,1)+sin(teta)*(j-1)*di/neli/2;
    end %for
    pozart(i,1) = poznod;
    poznod = poznod + 2*neli;
end %for;

% ***

% *** Subprogramul VitezeR
%      - Vitezele nodurilor pentru mișcarea de corp rigid

% Inițializarea variabilelor

va = zeros(nnd,6);
vant = 0;
vantx = 0;
vanty = 0;
uant = 0;
poznod = 1;
va(1,1) = 1;
unghi = 0;
omegai = 0;
uoriz = 0;

% Calculul proiecțiilor componentelor vitezei absolute

for i=1:p;
    omegai = omegai + msva(i,3);
    unghi = unghi + msva(i,2);
    di = s(i,4);
    neli = s(i,5);

```

```

for j=2:2*neli+1;
    prx = omegai*cos(unghi+pi/2)*(j-1)*di/neli/2 + vantx;
    pry = omegai*sin(unghi+pi/2)*(j-1)*di/neli/2 + vanty;
    vabs = sqrt(prx^2+pry^2);
    if prx > 0 & pry > 0
        uoriz = atan(abs(prx/pry));
    elseif prx > 0 & pry < 0
        uoriz = atan(abs(prx/pry)) - 3*pi/2;
    elseif prx < 0 & pry > 0
        uoriz = atan(abs(prx/pry)) + pi/2;
    elseif prx < 0 & pry < 0
        uoriz = -atan(abs(prx/pry)) + 3*pi/2;
    end %if;
    va(poznod+j-1,1) = poznod+j-1;
    va(poznod+j-1,2) = prx;
    va(poznod+j-1,3) = pry;
    va(poznod+j-1,4) = uoriz;
    va(poznod+j-1,5) = omegai;
    va(poznod+j-1,6) = unghi;
end %for;
vant = vabs;
vantx = prx;
vanty = pry;
uant = uoriz;
poznod = poznod + 2*neli;
end %for;

% ***

% *** Subprogramul AcceleR .
% - Accelațiile nodurilor pentru mișcarea de corp rigid

% Inițializarea variabilelor

ac = zeros(nnd,6);
aant = 0;
aantx = 0;
aanty = 0;
uant = 0;
poznod = 1;
ac(1,1) = 1;
unghi = pi/2;
epst = 0;
omgt = 0;
uoriz = 0;

% Calculul proiecțiilor componentelor accelerației absolute

for i=1:p;
    unghi = unghi + msva(i,2);
    if i>=2
        omgt = omgt + msva(i-1,3);
        epst = epst + msva(i-1,4);
    end %if;
    di = s(i,4);
    neli = s(i,5);

```

```

for j=2:2*neli+1;
    prx = aantx + (epst*cos(unghi)+omgt^2*cos(unghi+pi/2)+...
omgt*msva(i,3)*cos(unghi+pi/2)+msva(i,4)*cos(unghi)+msva(i,3)^2*cos(unghi+pi/
2))*...
    (j-1)*di/neli/2;
    pry = aanty + (epst*sin(unghi)+omgt^2*sin(unghi+pi/2)+...
omgt*msva(i,3)*sin(unghi+pi/2)+msva(i,4)*sin(unghi)+msva(i,3)^2*sin(unghi+pi/
2))*...
    (j-1)*di/neli/2;
    aabs = sqrt(prx^2+pry^2);
    if prx > 0 & pry > 0
        uoriz = atan(abs(prx/pry));
    elseif prx > 0 & pry < 0
        uoriz = atan(abs(prx/pry))+3*pi/2;
    elseif prx < 0 & pry > 0
        uoriz = atan(abs(prx/pry))+pi/2;
    elseif prx < 0 & pry < 0
        uoriz = -atan(abs(prx/pry))+3*pi/2;
    end %if;
    ac(poznod+j-1,1) = poznod+j-1;           % nodul
    ac(poznod+j-1,2) = prx;                 % accelerația liniară pe direcția
OX
    ac(poznod+j-1,3) = pry;                 % accelerația liniară pe direcția
OY
    ac(poznod+j-1,4) = uoriz;               % unghiul față de axa OX
    ac(poznod+j-1,5) = sum(msva(1:i,4));    % accelerația unghiulară
pe direcția OZ
    end %for;
    aantx = prx;
    aanty = pry;
    uant = uoriz;
    poznod = poznod + 2*neli;
end %for;

% ***

% *** Subprogramul Bara3i_r
% - Element finit izoparametric bară încovoiată cu trei noduri
% - Calculul matricilor K, M, C

% Coordonatele nodurilor

x = noduri(:,3:5);
xx = x(:,1);
yy = x(:,2);
if length(x(1,:)) == 3
    temp = x(:,3);
end;

% Inițializarea variabilelor

K = zeros(nec);           % matricea de rigiditate structurală
M = zeros(nec);           % matricea maselor
CE = zeros(nec);          % amortizarea externă

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

for i = 1:nel
    nod1 = abs(elem(i,1));           % nodul 1
    nod2 = abs(elem(i,2));           % nodul 2 mijloc
    nod3 = abs(elem(i,3));           % nodul 3
    tm = elem(i,4);                  % tipul materialului
    tp = elem(i,5);                  % tipul proprietății geometrice
    E = cm(tm,1);                    modулul de elasticitate longitudinal
    G = cm(tm,2);                    modулul de elasticitate transversal
    k = cm(tm,3);
    dens = cm(tm,4);                 % densitatea
    alfa = cm(tm,5);                 % coeficientul de dilatație longitudinal
    A = prop(tp,1);                  % aria secțiunii transversale
    Iz = prop(tp,2);                 % momentul de inerție
    dx = xx(nod3)-xx(nod1);          % lungimea elementului finit
    dy = yy(nod3)-yy(nod1);
    l = sqrt(dx*dx+dy*dy);
    cs = dx/l;                       % cosinșii directori
    sn = dy/l;

    % Matricea de rigiditate structurală a elementului

    ea = E*A;
    gak = G*A*k;
    eiz = E*Iz;
    kel = ...
    [7*ea/1/3  0  0  ea/1  0  0  -8*ea/1/3  0  0
     0  7*gak/1/3  gak/2  0  gak/1/3  -gak/6  0  -8*gak/1/3
     2*gak/3
     0  gak/2  2*gak*1/15+7*eiz/1/3  0  gak/6  -gak*1/30+eiz/1/30
     -2*gak/3  gak*1/15-8*eiz/1/3
     ea/1  0  0  7*ea/1/3  0  0  -8*ea/1/3  0  0
     0  gak/1/3  gak/6  0  7*gak/1/3  -gak/2  0  -8*gak/1/3
     -2*gak/3
     0  -gak/6  -gak*1/30+eiz/1/3  0  -gak/2  2*gak*1/15+7*eiz/1/3
     0  2*gak/3  gak*1/15-8*eiz/1/3
     -8*ea/1/3  0  0  -8*ea/1/3  0  0  16*ea/1/3  0  0
     0  -8*gak/1/3  -2*gak/3  0  -8*gak/1/3  2*gak/3  0
     16*gak/1/3  0
     0  2*gak/3  gak*1/15-8*eiz/1/3  0  -2*gak/3
     gak*1/15-8*eiz/1/3  0  0  8*gak*1/15+16*eiz/1/3  ];

    % Matricea consistentă a maselor unui element

    roa = dens*A*l;
    roi = dens*Iz*l;
    mel = ...
    [
     2*roa/15  0  0  -roa/30  0  0  r o a / 1 5
     0  0
     0  2*roa/15  0  0  -roa/30  0  0  roa/15
     0
     0  0  2*roi/15  0  0  -roi/30  0  0
     roi/15
     -roa/30  0  0  2*roa/15  0  0  r o a / 1 5
     0  0
     0  -roa/30  0  0  2*roa/15  0  0  roa/15
     0
    ]

```



## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

    roi/15      0      0      -roi/30      0      0      2*roi/15      0      0
0      0      roa/15      0      0      roa/15      0      0      8 * r o a / 1 5
0      0      0      roa/15      0      0      roa/15      0      0      8*roa/15
8*roi/15      0      0      roi/15      0      0      roi/15      0      0
];

    % Matricea de transformare

L = [ cs      sn      0
      -sn     cs      0
      0      0      1      ];
L1 = [ L      zeros(3)      zeros(3)      % matricea de
transformare      zeros(3)      L      zeros(3)
      zeros(3)      zeros(3)      L      ];
kel = L1'*kel*L1;      % matricile kel, mel
mel = L1'*mel*L1;      % față de reperul global

    % Complanța articulațiilor

for il = 1:3
    nlin = 3*il;
    if elem(i,il) < 0
        for j = 1:nnc
            if abs(elem(i,il)) == compl(j,1)
                gc = compl(j,2);
            end %if;
        end %for;
        kelii = kel(nlin,nlin);
        kelii = kelii*gc;
        linie = kel(nlin,:)/kelii;
        liniem = mel(nlin,:);
        kel = kel-kelii*linie'*linie;
        mel = mel+mel(nlin,nlin)*linie'*linie;
        mel = mel-(liniem'*linie+linie'*liniem);
    end % if
end % for

    % Asamblarea matricilor

ipoz(1) = ngn*nod1-2;      % poziția termenilor matricilor
ipoz(2) = ngn*nod1-1;      % în matricile asamblate
ipoz(3) = ngn*nod1;
ipoz(4) = ngn*nod2-2;
ipoz(5) = ngn*nod2-1;
ipoz(6) = ngn*nod2;
ipoz(7) = ngn*nod3-2;
ipoz(8) = ngn*nod3-1;
ipoz(9) = ngn*nod3;
K(ipoz,ipoz) = K(ipoz,ipoz)+kel;      % asamblarea matricilor
M(ipoz,ipoz) = M(ipoz,ipoz)+mel;
end % for

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

% Matricea totală a maselor

nmas=size(masc); % adăugarea maselor concentrate suplimentare
for i=1:nmas(1)
    nn = masc(i,1);
    msc = masc(i,2);
    loc = ngn*(nn-1);
    M(loc+1, loc+1) = M(loc+1, loc+1) + msc;
    M(loc+2, loc+2) = M(loc+2, loc+2) + msc;
end % for

% Matricea de amortizare

C = alf*M + bet*K + CE;

% ***

% *** Subprogramul Bara3i_1
% - Calculul matricilor K, M, C și F
% - Element finit izoparametric bară încovoiată cu trei noduri

% Coordonatele nodurilor

x = noduri(:,3:5);
xx = x(:,1); % coordonata X
yy = x(:,2); % coordonata Y
if length(x(1,:)) == 3
    temp = x(:,3); % temperatura în noduri
end;

% Inițializarea variabilelor

ngn = 3; % nr. grade de libertate / nod
nec = nnd*ngn; % numărul total de necunoscute
KS = zeros(nec); % matricea de rigiditate structurală
KC = zeros(nec); % matricea de rigiditate centrifugală
MS = zeros(nec); % matricea maselor
CG = zeros(nec); % matricea de amortizare giroscopică
AC = zeros(nec,1); % vectorul accelerație de corp rigid
for i = 1:nel
    nod1 = abs(elem(i,1)); % nodul 1
    nod2 = abs(elem(i,2)); % nodul 2 mijloc
    nod3 = abs(elem(i,3)); % nodul 3
    tm = elem(i,4); % tipul materialului
    tp = elem(i,5); % tipul proprietății geometrice
    E = cm(tm,1); % modulul de elasticitate logitudinal
    G = cm(tm,2); % modulul de elasticitate transversal
    k = cm(tm,3);
    dens = cm(tm,4); % densitatea
    alfa = cm(tm,5); % coeficientul de dilatație logitudinal
    A = prop(tp,1); % aria secțiunii transversale
    Iz = prop(tp,2); % momentul de inerție
    dx = xx(nod3)-xx(nod1); % lungimea elementului finit
    dy = yy(nod3)-yy(nod1);
    l = sqrt(dx*dx+dy*dy);
    cs=dx/l; % cosinușii directori

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```
sn=dy/l;
```

```
% Matricea de rigiditate structurală a elementului
```

```
ea=E*A;
gak=G*A*k;
eiz=E*Iz;
ksel= ...
[7*ea/l/3  0  0  ea/l  0  0  -8*ea/l/3  0  0
0  7*gak/l/3  gak/2  0  gak/l/3  -gak/6  0  -8*gak/l/3  2*gak/3
0  gak/2  2*gak*l/15+7*eiz/l/3  0  gak/6  -gak*l/30+eiz/l/3  0  -2*gak/3
gak*l/15-8*eiz/l/3
ea/l  0  0  7*ea/l/3  0  0  -8*ea/l/3  0  0
0  gak/l/3  gak/6  0  7*gak/l/3  -gak/2  0  -8*gak/l/3  -2*gak/3
0  -gak/6  -gak*l/30+eiz/l/3  0  -gak/2  2*gak*l/15+7*eiz/l/3
0  2*gak/3  gak*l/15-8*eiz/l/3
-8*ea/l/3  0  0  -8*ea/l/3  0  0  16*ea/l/3  0  0
0  -8*gak/l/3  -2*gak/3  0  -8*gak/l/3  2*gak/3  0  16*gak/l/3
0
0  2*gak/3  gak*l/15-8*eiz/l/3  0  -2*gak/3  gak*l/15-8*eiz/l/3
0  0  8*gak*l/15+16*eiz/l/3  ];
```

```
% Matricea consistentă a maselor unui element
```

```
roa = dens*A*l;
roi = dens*Iz*l;
msel = ...
[ 2*roa/15  0  0  -roa/30  0  0  roa/15
0  0
0  2*roa/15  0  0  -roa/30  0  0  roa/15
0
0  0  2*roi/15  0  0  -roi/30  0  0  roi/15
-roa/30  0  0  2*roa/15  0  0  roa/15  0
0
0  -roa/30  0  0  2*roa/15  0  0  roa/15
0
0  0  -roi/30  0  0  2*roi/15  0  0  roi/15
roa/15  0  0  roa/15  0  0  8*roa/15  0
0
0  roa/15  0  0  roa/15  0  0  8*roa/15
0
0  0  roi/15  0  0  roi/15  0  0  8*roi/15
];
```

```
% Matricea de rigiditate centrifugală pentru un element
```

```
omegai = va(nod2,5); % viteza unghiulară
epsi = ac(nod2,5); % accelerația unghiulară
g1 = roa*omegai^2/15;
g2 = roa*epsi/15;
kcel = ...
[ -2*g1 -2*g2 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
2*g2 -2*g1 0 -g2/2 g1/2 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
g1/2 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
g2 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
-g1
- g 1
```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
-g2   g1/2  0      0      -2*g1 -2*g2  0      -g1
      0
-g2   -g2/2  g1/2  0      2*g2  -2*g1  0      g2      - g 1
0
0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0
-g1   -g1   -g2   0      -g1   -g2   0
-8*g1 -8*g2  0
g2   -g1   0      0      g2   -g1   0
8*g2  -8*g1  0
0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0
];

```

% Matricea de amortizare giroscopică pentru un element

```

g3 = roa*omegai/15;
cgel = ...
[ 0      -4*g3  0      0      g3      0
0      -2*g3  0      0      0      0
2*g3  4*g3  0      0      -g3      0      0
0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0
0      g3      0      0      0      -4*g3  0
0      -2*g3  0      0      0      0      0
2*g3  -g3      0      0      4*g3  0      0
0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0
0      -2*g3  0      0      0      -2*g3  0
-16*g3  0      0      0      0      0      0
2*g3  0      0      0      2*g3  0      0      16*g3
0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0
];

```

% Matricea de transformare

```

L = [ cs    sn    0
      -sn   cs    0
        0    0    1 ];
L1 = [ L      zeros(3)  zeros(3)  % matricea de
transformare
      zeros(3)  L      zeros(3)
      zeros(3)  zeros(3)  L
ksel=L1'*ksel*L1;
msel=L1'*msel*L1;
kcel=L1'*kcel*L1;
cgel=L1'*cgel*L1;
% matricile ksel, msel, kcel, cgel
% față de reperul global

```

% Complianța articulațiilor

```

for il = 1:3
    nlin = 3*il;

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

    if elem(i,il) < 0
        for j = 1:nnc
            if abs(elem(i,il)) == compl(j,1)
                gc = compl(j,2);
            end %if;
        end %for;
        kelii = ksel(nlin,nlin);
        kelii = kelii*gc;
        linie = ksel(nlin,:)/kelii;
        liniem = msel(nlin,:);
        ksel = ksel-kelii*linie'*linie;
        msel = msel+msel(nlin,nlin)*linie'*linie;
        msel = msel-(liniem'*linie+linie'*liniem);
    end % if
end % for

    % Vectorul accelerațiilor de corp rigid

vac = [    ac(nod1,2:3)'
          epsi
          ac(nod2,2:3)'
          epsi
          ac(nod3,2:3)'
          epsi          ];

    % Asamblarea matricilor

ipoz(1)=ngn*nod1-2;          % poziția termenilor matricilor
ipoz(2)=ngn*nod1-1;          % elementului de bară
ipoz(3)=ngn*nod1;           % în matricile asamblate
ipoz(4)=ngn*nod2-2;
ipoz(5)=ngn*nod2-1;
ipoz(6)=ngn*nod2;
ipoz(7)=ngn*nod3-2;
ipoz(8)=ngn*nod3-1;
ipoz(9)=ngn*nod3;
KS(ipoz,ipoz)=KS(ipoz,ipoz)+ksel;    % asamblarea matricilor
MS(ipoz,ipoz)=MS(ipoz,ipoz)+msel;
KC(ipoz,ipoz)=KC(ipoz,ipoz)+kcel;
CG(ipoz,ipoz)=CG(ipoz,ipoz)+cgel;
AC(ipoz) = vac;
end % for

K = KS + KC;

    % Adăugarea maselor concentrate suplimentare

M = MS;
nmas=size(masc);
for i=1:nmas(1)
    nn = masc(i,1);
    msc = masc(i,2);
    loc = ngn*(nn-1);
    M(loc+1, loc+1) = M(loc+1, loc+1) + msc;
    M(loc+2, loc+2) = M(loc+2, loc+2) + msc;
end % for

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

% Determinarea matricei de amortizare

CS = alf*MS+bet*KS;           % amortizarea structurală
C = CS+CG+CE;                % amortizarea totală

% Vectorul forțelor de inerție

F = -M*AC; % !!!!

% Forțele exterioare

Fex = Fex0;                   % modulul maxim al forțele exterioare

% ***

% *** Subprogramul Bara3i_n
% - Calculul matricilor K, M, C și F
% - Element finit izoparametric bară încovoiată cu trei noduri

% Coordonatele nodurilor

x = noduri(:,3:5);
xx = x(:,1);
yy = x(:,2);
if length(x(1,:)) == 3
    temp = x(:,3);
end;

% Inițializarea variabilelor

ngn = 3;                       % nr. grade de libertate / nod
nec = nnd*ngn;                 % numărul total de necunoscute
K = zeros(nec);               % matricea de rigiditate structurală +
centrifugală
KS = zeros(nec);              % matricea de rigiditate structurală
MS = zeros(nec);              % matricea maselor
CG = zeros(nec);              % matricea de amortizare giroscopică
F = zeros(nec,1);             % vectorul forțelor de inerție

for i = 1:nel
    nod1 = abs(elem(i,1));      % nodul 1
    nod2 = abs(elem(i,2));      % nodul 2 mijloc
    nod3 = abs(elem(i,3));      % nodul 3
    tm = elem(i,4);             % tipul materialului
    tp = elem(i,5);             % tipul proprietății geometrice
    E = cm(tm,1);               % modulul de elasticitate logitudinal
    G = cm(tm,2);               % modulul de elasticitate transversal
    k = cm(tm,3);
    dens = cm(tm,4);            % densitatea
    alfa = cm(tm,5);            % coeficientul de dilatație logitudinal
    A =prop(tp,1);              % aria secțiunii transversale
    Iz=prop(tp,2);              % momentul de inerție
    dx = xx(nod3)-xx(nod1);     % lungimea elementului finit
    dy = yy(nod3)-yy(nod1);
    l = sqrt(dx*dx+dy*dy);

```

# SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

% Matricea de rigiditate structurală a elementului

```

ea=E*A;
gak=G*A*k;
eiz=E*Iz;
ksel= ...
[7*ea/1/3    0    0    ea/1    0    0    -8*ea/1/3    0    0
0    7*gak/1/3    gak    0    gak/1/3    gak/6    0    -8*gak/1/3
2*gak/3
0    gak/2    2*gak*1/15+7*eiz/1/3    0    gak/6    -gak*1/30+eiz/1/30
-2*gak/3    gak*1/15-8*eiz/1/3
ea/1    0    0    7*ea/1/3    0    0    -8*ea/1/3    0    0
0    gak/1/3    gak/6    0    7*gak/1/3    -gak/2    0    -8*gak/1/3
-2*gak/3
0    -gak/6    -gak*1/30+eiz/1/3    0    -gak/2    2*gak*1/15+7*eiz/1/3
0    2*gak/3    gak*1/15-8*eiz/1/3
-8*ea/1/3    0    0    -8*ea/1/3    0    0    16*ea/1/3    0    0
0    -8*gak/1/3    -2*gak/3    0    -8*gak/1/3    2*gak/3    0
16*gak/1/3    0
0    2*gak/3    gak*1/15-8*eiz/1/3    0    -2*gak/3
gak*1/15-8*eiz/1/3    0    0    8*gak*1/15+16*eiz/1/3    ];

```

% Matricea consistentă a maselor unui element

```

roa = dens*A*l;
roi = dens*Iz*l;
msel = ...
[    2*roa/15    0    0    -roa/30    0    0    roa/15
0    0
0    2*roa/15    0    0    -roa/30    0    0    roa/15
0
0    0    2*roi/15    0    0    -roi/30    0    0
roi/15
-roa/30    0    0    2*roa/15    0    0    roa/15
0    0
0    -roa/30    0    0    2*roa/15    0    0    roa/15
0
0    0    -roi/30    0    0    2*roi/15    0    0
roi/15
roa/15    0    0    roa/15    0    0    8*roa/15
0    0
0    roa/15    0    0    roa/15    0    0    8*roa/15
0
0    0    roi/15    0    0    roi/15    0    0
8*roi/15    ];

```

% Matricea de rigiditate centrifugală pentru un element

```

omegai = va(nod2,5);           % viteza unghiulară
epsi = ac(nod2,5);            % accelerația unghiulară
g1 = roa*omegai^2/15;
g2 = roa*epsi/15;
kcel = ...
[    -2*g1    -2*g2    0    g1/2    0    0    -g1
0    0

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

-g1      2*g2  -2*g1  0          -g2/2  g1/2  0          g2
0        0      0      0          0      0      0          0
0        0      0      0          0      0      0          0
-g2      g1/2  0      0          -2*g1  -2*g2  0          - g 1
0        0      0      0          0      0      0          0
-g1      -g2/2  g1/2  0          2*g2  -2*g1  0          g2
0        0      0      0          0      0      0          0
0        -g1    -g2    0          0      -g1    -g2    -g2
0        -8*g1  -8*g2  0          0      0      0      0
0        g2     -g1    0          0      g2     -g1    -g1
0        8*g2  -8*g1  0          0      0      0      0
0        0      0      0          0      0      0      0
0        0      0      0          0      0      0      0
];

```

% Matricea de amortizare giroscopică pentru un element

```
g3 = roa*omegai/15;
```

```
cgel = ...
```

```

[      0      -4*g3  0      0      g3      0
0      -2*g3  0      0      0      0
2*g3  4*g3  0      0      -g3  0      0
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
0      0      g3  0      0      -4*g3
2*g3  -2*g3  0      0      4*g3  0      0
0      -g3  0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
0      0      -2*g3  0      0      -2*g3
0      -16*g3  0      0      2*g3  0      0
16*g3  2*g3  0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
];

```

% Matricea de transformare și derivatele acesteia

```
unghi = va(nod2,6);
```

```
u3 = at(nod1*ngn,1);
```

```
u6 = at(nod2*ngn,1);
```

```
u9 = at(nod3*ngn,1);
```

```

BL3 = [      cos(unghi+u3)  sin(unghi+u3)  0
          -sin(unghi+u3)  cos(unghi+u3)  0
          0                0                1
BL6 = [      cos(unghi+u6)  sin(unghi+u6)  0
          -sin(unghi+u6)  cos(unghi+u6)  0
          0                0                1
BL9 = [      cos(unghi+u9)  sin(unghi+u9)  0
          -sin(unghi+u9)  cos(unghi+u9)  0
          0                0                1
];

```



## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

BL = [      BL3          zeros(3)  zeros(3)  % matricea de
transformare
          zeros(3)  BL6          zeros(3)
          zeros(3)  zeros(3)  BL9          ];

u3p = atp(nod1*ngn,1);
u6p = atp(nod2*ngn,1);
u9p = atp(nod3*ngn,1);
BL3P = -u3p*[      sin(unghi+u3)  -cos(unghi+u3)  0
                  cos(unghi+u3)  sin(unghi+u3)  0
                  0                0                0
0          ];
BL6P = -u6p*[      sin(unghi+u6)  -cos(unghi+u6)  0
                  cos(unghi+u6)  sin(unghi+u6)  0
                  0                0                0
0          ];
BL9P = -u9p*[      sin(unghi+u9)  -cos(unghi+u9)  0
                  cos(unghi+u9)  sin(unghi+u9)  0
                  0                0                0
0          ];
BLP = [      BL3P          zeros(3)  zeros(3)  % derrivata întoîi
a matricei de transformare
          zeros(3)  BL6P          zeros(3)
          zeros(3)  zeros(3)  BL9P          ];

u3pp = atpp(nod1*ngn,1);
u6pp = atpp(nod2*ngn,1);
u9pp = atpp(nod3*ngn,1);
BL3PP = [      -u3pp*sin(unghi+u3)-u3p^2*cos(unghi+u3)
u3pp*cos(unghi+u3)-u3p^2*sin(unghi+u3)  0
                  -u3pp*cos(unghi+u3)+u3p^2*sin(unghi+u3)
-u3pp*sin(unghi+u3)-u3p^2*cos(unghi+u3)  0
                  0
0          ];
BL6PP = [      -u6pp*sin(unghi+u6)-u6p^2*cos(unghi+u6)
u6pp*cos(unghi+u6)-u6p^2*sin(unghi+u6)  0
                  -u6pp*cos(unghi+u6)+u6p^2*sin(unghi+u6)
-u6pp*sin(unghi+u6)-u6p^2*cos(unghi+u6)  0
                  0
0          ];
BL9PP = [      -u9pp*sin(unghi+u9)-u9p^2*cos(unghi+u9)
u9pp*cos(unghi+u9)-u9p^2*sin(unghi+u9)  0
                  -u9pp*cos(unghi+u9)+u9p^2*sin(unghi+u9)
-u9pp*sin(unghi+u9)-u9p^2*cos(unghi+u9)  0
                  0
0          ];
BLPP = [      BL3PP          zeros(3)  zeros(3)  % derrivata
a doua a matricei de transformare
          zeros(3)  BL6PP          zeros(3)
          zeros(3)  zeros(3)  BL9PP          ];

kel = BL'*(msel*BLPP+cgel*BLP+(ksel+kcel)*BL); % matricile ksel,
msel, kcel, cgel
ksel = BL'*ksel*BL;

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

msel = BL'*msel*BL;
    % față de reperul global
cgel = BL'*(2*msel*BLP+cgel*BL);

    % Complanța articulațiilor

for il = 1:3
    nlin = 3*il;
    if elem(i,il) < 0
        for j = 1:nnc
            if abs(elem(i,il)) == compl(j,1)
                gc = compl(j,2);
            end %if;
        end %for;
        kelii = kel(nlin,nlin);
        kelii = kelii*gc;
        linie = kel(nlin,:)/kelii;
        liniem = msel(nlin,:);
        kel = kel-kelii*linie'*linie;
    %?
    %?
        msel = msel+msel(nlin,nlin)*linie'*linie;
        msel = msel-(liniem'*linie+linie'*liniem);
    end % if
end % for

    % Vectorul forțelor de inerție

vac = [    ac(nod1,2:3)'
          epsi
          ac(nod2,2:3)'
          epsi
          ac(nod3,2:3)'
          epsi ];
f = -BL'*msel*vac;

    % Asamblarea matricilor

ipoz(1)=ngn*nod1-2;           % poziția termenilor matricilor
ipoz(2)=ngn*nod1-1;           % elementului de bară
ipoz(3)=ngn*nod1;             % în matricile asamblate
ipoz(4)=ngn*nod2-2;
ipoz(5)=ngn*nod2-1;
ipoz(6)=ngn*nod2;
ipoz(7)=ngn*nod3-2;
ipoz(8)=ngn*nod3-1;
ipoz(9)=ngn*nod3;
K(ipoz,ipoz)=K(ipoz,ipoz)+kel;           % asamblarea matricilor
KS(ipoz,ipoz) = KS(ipoz,ipoz)+ksel;
MS(ipoz,ipoz)=MS(ipoz,ipoz)+msel;
CG(ipoz,ipoz)=CG(ipoz,ipoz)+cgel;
F(ipoz) = f;
end % for

    % Adăugarea maselor concentrate

M = MS;
nmas=size(masc);

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

for i=1:nmas(1)
    nn = masc(i,1);
    msc = masc(i,2);
    loc = ngn*(nn-1);
    M(loc+1, loc+1) = M(loc+1, loc+1) + msc;
    M(loc+2, loc+2) = M(loc+2, loc+2) + msc;
end % for

    % Determinarea matricii de amortizare

CS = alf*MS+bet*KS;           % amortizarea structurală
C = CS+CG+CE;               % amortizarea totală

    % Forțele exterioare

Fex = Fex0;                  % modulul maxim al forțele exterioare

% ***

% *** Subprogramul ReducG
% - Reducerea dinamică a gradelor de libertate secundare

    % Determinarea nodurilor și a DOF secundare

nmaster = sort(nmaster);
nslave = [1:nmaster(1)-1];   % nodurile secundare
lnm = length(nmaster);
for i = 1:lnm-1;
    nslave = [nslave nmaster(i)+1:nmaster(i+1)-1];
end %for
nslave = [nslave nmaster(lnm)+1:nnd];
dofslv = [];
nslv = length(nslave);      % DOF secundare
for i = 1:nslv;
    nn = nslave(i);
    loc = ngn*(nn-1);
    dofslv = [dofslv loc+1:loc+ngn];
end %for;

    % Condițiile de legătură

mx = max(max(K))*1e33;
ncnd = size(condl);
for i = 1:ncnd;
    nn = condl(i,1);
    direc = condl(i,2);
    loc = ngn*(nn-1)+direc;
    K(loc,loc) = mx;
    M(loc,loc) = 0;
end %for;
mx = max(max(M));
mn = mx*1e-6;
for i = 1:nec
    if M(i,i) < mn
        dofslv = [dofslv i];
    end %if;

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

end %for
dofslv = sort(dofslv);

    % Reducerea DOF secundare

i1 = 0;
nde = [];
le = [];
Fe = [];
for is = 1:length(dofslv)
    i = dofslv(is);
    if i~=i1
        Kii = K(i,i);
        linie = K(i,:)/Kii;
        liniem = M(i,:);
        nde = [nde i];           % DOF eliminate
        le = [le
              linie];           % liniile eliminate
        K = K-Kii*linie'*linie;
        M = M+M(i,i)*linie'*linie-liniem'*linie-linie'*liniem;
        if exist('F') ~= 0
            Fe = [Fe
                  F(i,+)/Kii];
            F = F-linie'*F(i,);
        end %if;
        if exist('Fex')
            Fexe = [Fexe
                   Fex(i,+)/Kii];
            Fex = Fex-linie'*Fex(i,);
        end %if;
    end %if
    i1 = i;
end %for

ind = 0;                               % determinarea liniilor și coloanelor rămase
point = [];
for i = 1:nec
    if K(i,i) > eps
        ind = ind+1;
        point(ind) = i;
    end %if
end %for

K = K(point,point);                   % matricile reduse
M = M(point,point);
C = C(point,point);
Fex = Fex(point,);
if exist('F') ~= 0
    F = F(point,);
end %if;
if exist('F') ~= 0
    a = a(point,);
end %if;
if t == 0
    a0 = a0(point,);
    ap0 = ap0(point,);

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

end %if

neci = nec; % numărul inițial de necunoscute
nec = length(point); % numărul de necunoscute principale

% ***

% *** Subprogramul Expand
% - Calculează deplasările secundare prin retrosubstituție

a(point,:) = a;
if point(nec) ~= neci
    a(neci,1) = 0;
end %if;

    % Retrosubstituția

nl = length(nde);
for i = nl:-1:1;
    nc = nde(i);
    a(nc,:) = Fe(i,:)-le(i,:)*a+a(nc,:);
end %for;

    % Restaurarea numărului de necunoscute

nec = neci;

% ***

% *** Subprogramul Hubolt
% - Determinarea deplasărilor nodale prin metoda HUBOLT la momentul t

    % Rezolvarea sistemului de ecuații prin metoda Choleski

A = 2*M/h/h+11*C/6/h+K;
U = chol(A);
B1 = 5*M/h/h+3*C/h;
B2 = 4*M/h/h+3*C/2/h;
B3 = M/h/h+C/3/h;
for l = 1:11;
    npt = curbe(l,1);
    tablou = [curbe(l,2:2:2*npt)
              curbe(l,3:2:2*npt+1)]';
    fact(l) = table1(tablou,t);
end %for
Ft = F+Fex*fact';
Ft = Ft+B1*a(:,ip-1)-B2*a(:,ip-2)+B3*a(:,ip-3);
aa = U'\Ft;
a(:,ip) = U\aa; % deplasările nodale la momentul t

% ***

% *** Subprogramul Hubolt_r
% - Determinarea deplasărilor nodale prin metoda Hubolt

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

% Inițierea integrării

t = 0; % forțele în momentul t = 0
for l = 1:11;
    npt = curbe(l,1);
    tablou = [curbe(l,2:2:2*npt)
              curbe(l,3:2:2*npt+1)'];
    fact(l) = table1(tablou,t);
end %for;

Ft = Fex*fact'; % forțele exterioare
app0 =M\ (Ft-C*ap0-K*a0); % accelerațiile nodale inițiale
am1 = a0-h*ap0+app0*h*h/2; % determinarea deplasării
am2 = a0-2*h*ap0+app0*2*h*h; % la pasul de timp -1 și -2
a = [am2 am1 a0]; % inițializarea tabloului a

% Rezolvarea sistemului de ecuații prin metoda Choleski

A = 2*M/h/h+11*C/6/h+K;
U = chol(A);
B1 = 5*M/h/h+3*C/h;
B2 = 4*M/h/h+3*C/2/h;
B3 = M/h/h+C/3/h;
format bank;
t = 0;
for i = 4:npas;
    t = t+h;
    for l = 1:11;
        npt = curbe(l,1);
        tablou = [curbe(l,2:2:2*npt)
                  curbe(l,3:2:2*npt+1)'];
        fact(l) = table1(tablou,t);
    end %for;
    Ft = Fex*fact';
    Ft = Ft+B1*a(:,i-1)-B2*a(:,i-2)+B3*a(:,i-3);
    aa = U'\Ft; % deplasările nodale
    a(:,i) = U\aa;

    if i == 10*contor;
        disp(i/npas*100);
        contor = contor + 1;
    end %if;

end %for;

% ***

% *** Programul FrNatSsp
% - Calculul modurilor naturale de vibrație

tic;
clc;
disp('CALCULUL FRECVENȚELOR NATURALE');
disp(' Manipulatorul în repaos');
disp('-----');

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```

%      Metoda iterației pe subspații

data;           % datele de intrare
discret;       % discretizarea structurii
bara3i_r;      % calculul matricilor K, M
reducg;        % reducerea gradelor de libertate secundare

coef = 0;
U = K+coef*M;
U = chol(U);
%nval = input('Numărul de valori și vectori proprii : ');
nval = 8;
itermax = 30;
tol = 1e-3;
error = 1;
vp1 = zeros(nval,1);
iter = 0;
a = rand(nec,nval);
while error > tol & iter <= itermax
    z = M*a;
    z = U'\z;
    z = U\z;
    Uz = U*z;
    A = Uz'*Uz;
    B = z'*M*z;
    [q vp] = eig(A,B);
    vp = diag(vp);
    [vp inrc] = sort(vp);
    q = q(:,inrc);
    a = z*q;
    for i = 1:nval;
        norma = sqrt(a(:,i)'*M*a(:,i));
        a(:,i) = a(:,i)/norma;
    end;
    vv = 1-vp1./vp;
%     error = sqrt(abs(vv'*vv)/nval);
    vp1 = vp;
    iter = iter+1;
end %while
vp = sqrt(vp-coef)/2/pi;
vp = real(vp);
a = real(a);

%      Calculul coeficienților lui Rayleigh

csil = 0.001;
csi2 = 0.001;
p1 = vp(1);
p2 = vp(2);
CA = [      1 p1^2
      1 p2^2 ];
CB = [      2*csi1*p1
      2*csi2*p2 ];
AB = inv(CA)*CB;

%      Afișarea rezultatelor

```

## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

```
disp(' ')
disp('*** Frecvențele naturale');
disp('-----');
disp(' Modul          Frecvența');
disp('-----');
disp([[1:nval]' vp])
disp('-----');
disp(' Coeficientii lui Rayleigh');
disp(' Alfa [M]      Beta [K]');
disp(AB');
disp('-----');

% ***
```



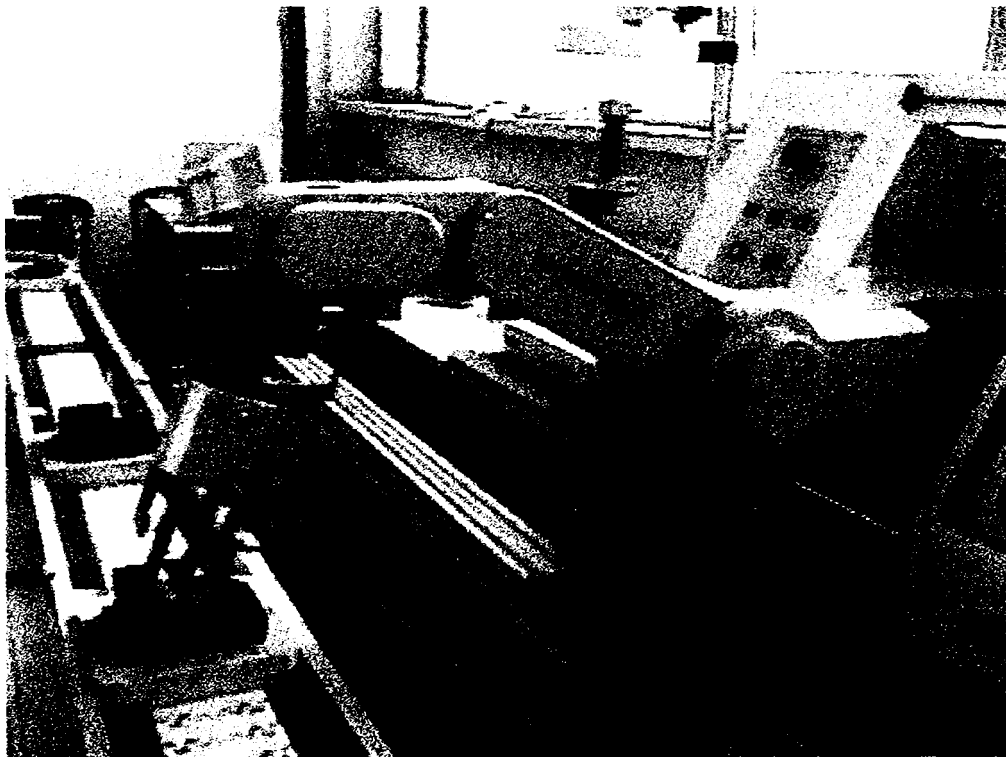
# CAPITOLUL 4

## DETERMINĂRI EXPERIMENTALE

### 4.1 CARACTERISTICILE ROBOTULUI

Pentru efectuarea unor măsurători experimentale, care să confirme sau să corecteze modelul numeric dezvoltat în capitolele 2 și 3, s-a utilizat un lanț de măsurare bazat pe un sistem de achiziție de date, cu senzori plasați pe brațele *microrobotului industrial MovemasterEX*, model RV-M1, produs de firma Mitsubishi.

Robotul RV-M1 face parte dintr-un sistem de fabricație flexibil pentru prelucrarea pieselor cilindrice denumit CIM2000, care cuprinde un modul de prelucrare conceput în jurul unui strung cu comandă numerică, un sistem de asamblare, un sistem de control al calității și un sistem de depozitare, sortare și alimentare cu piese și semifabricate. Stațiile de lucru sunt amplasate în jurul unui conveior paletizat care asigură transportul pieselor, operațiile de manipulare fiind realizate de către robot, Figura 4.1.



**Fig. 4.1 Robotul industrial RV-M1**

Caracteristicile standard ale robotului RV-MV1 sunt prezentate în Tabelul 4.1. Aceste caracteristici definesc *spațiul de lucru* și *vitezele de operare*.

Caracteristicile standard ale robotului RV-MV1

Tabelul 4.1

Caracteristica		Specificațiile	Observații
Structura mecanică		2,5 grade de libertate	Robot articulat vertical
Spațiul de lucru	Rotația taliei	300 [°] (max. 120 [°/sec])	Axa J1
	Rotația umărului	130 [°] (max. 72 [°/sec])	Axa J2
	Rotația cotului	110 [°] (max. 109 [°/sec])	Axa J3
	Articulația mâinii Rotația de supinație	±90 [°] (max. 100 [°/sec])	Axa J4
	Articulația mâinii Rotația de pronație	±180 [°] (max. 163 [°/sec])	Axa J5
Lungimea barelor	Braț	250 [mm]	
	Antebraț	160 [mm]	
Capacitatea portantă		Maximum 1,2 [kgf]	
Viteza maximă a efectorului final		1000 [mm/sec]	În punctul P din Fig. 4.2
Repetabilitatea mișcării		0,3 [mm]	În punctul P din Fig. 4.2
Greutatea robotului		Aproximativ 19 [kgf]	

Din punct de vedere cinematic robotul RV-M1 este de tipul RRRR, prima cuplă de rotație efectuând mișcarea în planul orizontal, iar celelalte trei în plan vertical. Deoarece modelul dinamic dezvoltat în capitolele anterioare se referă la manipulatorul plan, măsurătorile experimentale se vor efectua numai pentru mișcarea în planul vertical, adică rotațiile după axele  $J_2$ ,  $J_3$  și  $J_4$ , Figura 4.2.

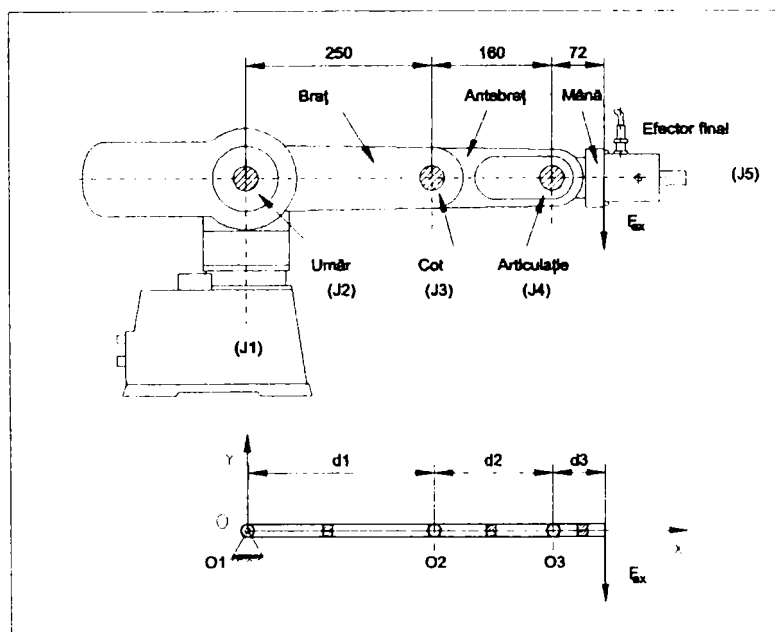


Fig. 4.2 Planul de măsurare

Principalele dimensiuni constructive și de gabarit sunt prezentate în Figura 4.3. Pe baza acestora se estimează o parte din datele de intrare necesare pentru simularea numerică, cum ar fi secțiunile barelor, greutatea barelor și a motoarelor de acționare etc. Pentru aceste aproximări se pot utiliza diferite criterii cum ar fi echivalența ariilor secțiunilor, a volumului de material sau a săgeții statice etc.

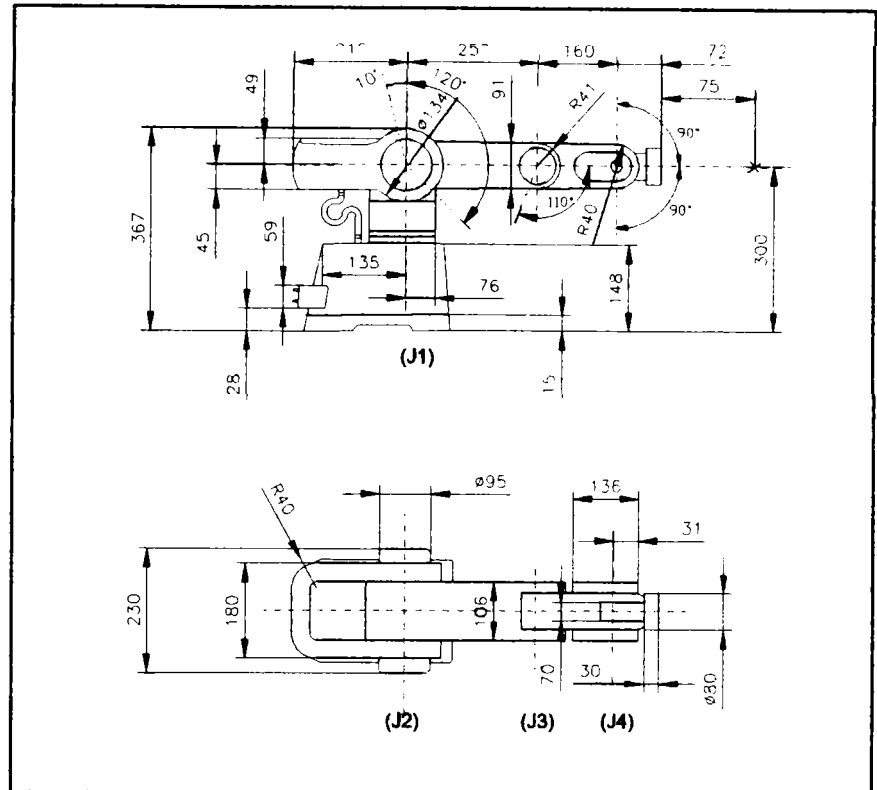


Fig. 4.3 Dimensiuni constructive

## 4.2 SISTEMUL DE ACHIZIȚIE AL DATELOR

O modalitate din ce în ce mai răspândită astăzi pentru măsurare, testare și control industrial constă în utilizarea unui calculator personal cu extensii de magistrală corespunzătoare. Obținerea unor rezultate corecte cu un sistem de achiziție a datelor cu calculator personal depinde de fiecare element al sistemului. Un astfel de sistem este compus din [82] : calculator personal, traductoare, circuite de condiționare a semnalelor, hardware de achiziție a datelor și software specializat, Figura 4.4.

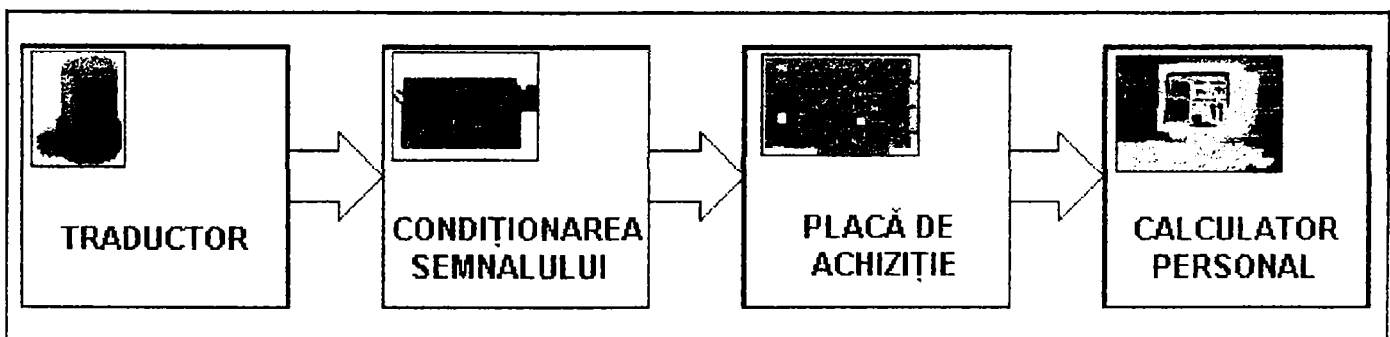


Fig. 4.4 Schema bloc a sistemului de achiziție

A) TRADUCTORUL

În principiu măsurarea vibrațiilor presupune măsurarea unuia dintre cei trei parametri caracteristici : amplitudine, viteză sau accelerație. Cunoscând unul dintre acești parametri se pot deduce ceilalți doi prin operații de derivare sau integrare. Deoarece, din punct de vedere al procesării semnalului, integrarea este mai avantajoasă decât derivarea în tehnică se preferă măsurarea accelerației. Un alt avantaj îl constituie faptul că traductoarele de accelerație sau accelerometrele nu necesită un sistem de referință.

Una dintre cele mai răspândite soluții constructive pentru accelerometre are la bază fenomenul piezoelectric, care constă în proprietatea unor cristale fără centru de simetrie de a genera sarcini electrice pe fețele acestora, când sunt supuse la solicitări de întindere sau compresiune. Cantitatea de sarcină electrică  $Q$  este proporțională cu mărimea forței  $F$  ce produce deformația rețelei cristaline.

În cadrul experimentului de măsurare a accelerației unor puncte caracteristice ale robotului în mișcare pe o traiectorie programată sau supus unor excitații de scurtă durată s-au utilizat trei accelerometre de tip KD42, produse de firma Metra Mess und Frequenztechnik, Germania. Traductorul KD42 are un sistem piezoelectric care generează sarcina electrică la solicitarea de compresiune. El este însoțit de un set de accesorii care îi asigură integrarea în lanțul de măsurare, Figura 4.5. Sensibilitatea acestuia este  $B_{qa} = 140$  [pC/g] și exprimă legătura dintre accelerația măsurată și semnalul electric generat. O altă caracteristică principală a traductorului este răspunsul în amplitudine, prezentat în Figura 4.6. Se observă domeniul de linearitate cuprins între 1 Hz și 10 KHz, interval în care trebuie să se găsească frecvențele vibrațiilor mecanice măsurate.



Fig. 4.5 Accesoriiile accelerometrului

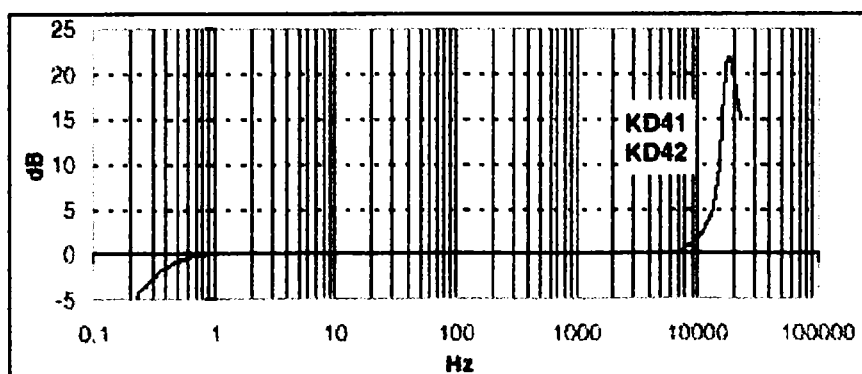


Fig. 4.6 Domeniul frecvențelor

B) CONDIȚIONAREA SEMNALULUI

Circuitele de măsurare pentru traductoarele piezoelectrice ridică o serie de probleme începând cu cablul de conectare, care introduce o rezistență de izolație și o capacitate parazită. Un alt factor perturbator este fenomenul triboelectric, prin care se produc sarcini electrice ca urmare a frecărilor dintre izolator și metal, din cauza îndoirilor, șocurilor și vibrațiilor. Filtrarea acestor zgomote printr-un amplificator de tensiune este o soluție rigidă deoarece etalonarea schemei se face numai pentru un cablu dat, iar modificarea unor parametri externi pot introduce erori importante.

Eliminarea acestor neajunsuri se face cu ajutorul unor amplificatoare de sarcină, mai exact convertoare de sarcină - tensiune, cu schema prezentată în Figura 4.7 [33]. Cele două amplificatoare operaționale au fost ecranate pentru a reduce nivelul tensiunilor perturbatoare. Tensiunea măsurată utilizând acest circuit va fi proporțională cu accelerația.

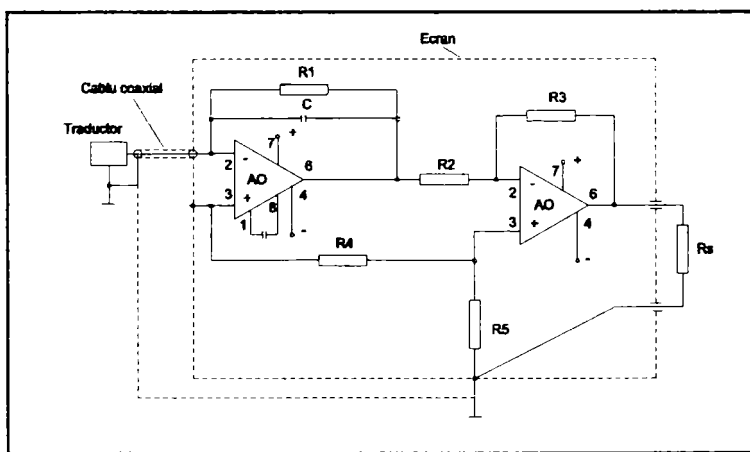


Fig. 4.7 Schema circuitului de condiționare

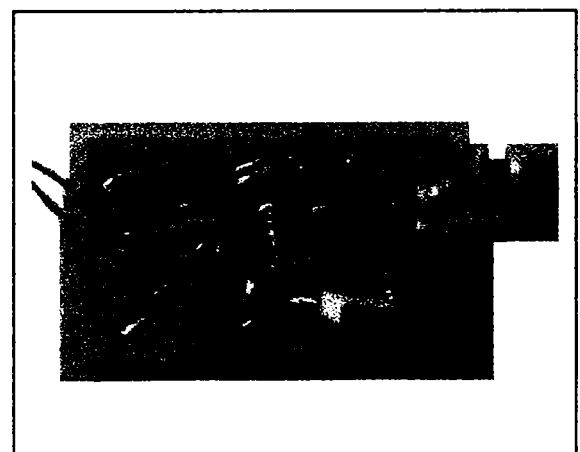


Fig. 4.8 Circuitul de condiționare

La realizarea practică a circuitului de condiționare a semnalului, Figura 4.8, trebuie avut în vedere că acesta se comportă ca și un filtru de semnal. Componentele electronice trebuie alese în așa fel încât să nu se elimine frecvențele utile, în special cele joase, corespunzătoare modurilor proprii de vibrație ale structurii mecanice a manipulatorului. Pentru circuitul din Figura 4.8 s-au utilizat următoarele componente : AO circuitul operațional de amplificare OPA27GP, rezistențele  $R1 = 40\text{ K}\Omega$ ,  $R2 = 1\text{ K}\Omega$ ,  $R3 = 39\text{ K}\Omega$ ,  $R4 = R5 = 1,8\text{ K}\Omega$  și condensatorul  $C = 0,47\text{ }\mu\text{C}$ .

Relația de legătură între accelerație și tensiunea măsurată la ieșirea din circuitul de condiționare se deduce pornind de la formula schemei scrisă în domeniul operațional

$$U(s) = \mathcal{L}\{U(t)\} = \frac{Q}{C} \frac{sR_1C}{1+sR_1C} \frac{R_3}{R_2}, \quad (4.1)$$

unde  $U(s)$  este tensiunea în domeniul operațional,  $U(t)$  tensiunea în domeniul de timp, iar  $\mathcal{L}$  este operatorul de transformare Laplace. Trecând în domeniul frecvență se obține

$$U(j\omega) = \frac{Q}{C} \frac{j\omega R_1C}{1+j\omega R_1C} \frac{R_3}{R_2}, \quad (4.2)$$

formulă în care se impune  $|j\omega R_1C| = \omega R_1C > 2,3$  pentru să satisfacă condiția de liniaritate a răspunsului în amplitudine al amplificării. Rezultă în final [34, 38]

$$U \approx \frac{Q}{C} \frac{R_3}{R_2} = \frac{B_{qa} a}{C} \frac{R_3}{R_2}. \quad (4.3)$$

Înlocuind valorile numerice în relația (4.3) se obține formula de legătură dintre amplitudinea tensiunii măsurate și amplitudinea accelerației care o determină  $a \approx 256 \cdot U$ .

### C) PLACA DE ACHIZIȚIE A DATELOR

Înregistrarea sau memorarea semnalelor continue provenite de la traductoare se poate realiza numai în mod discret, la anumiți pași de timp într-un interval de observație. Valorile discrete obținute aproximează semnalul continuu, cu o acuratețe care se exprimă prin rata de eșantionare. Transformarea semnalului continuu într-o serie de valori discrete se realizează cu ajutorul unor circuite electronice specializate numite și plăci de achiziție, care sunt de fapt convertoare analog-digitale ce se interpun între traductor și calculator.

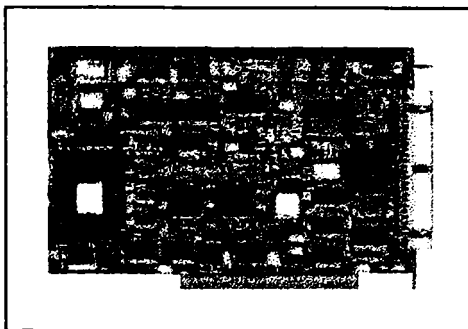


Fig. 4.9 Placa PCI-1200

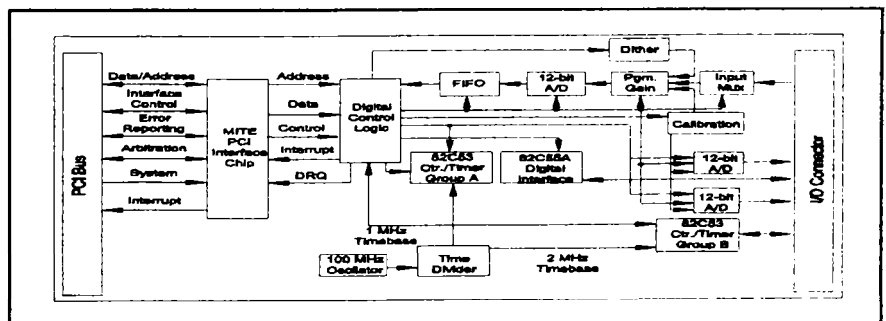


Fig. 4.10 Schema bloc a plăcii PCI-1200

Sistemul de achiziție al datelor realizat se bazează pe placa de achiziție PCI-1200, Figura 4.9, produsă de firma National Instruments. Schema bloc de funcționare a acesteia este prezentată în

Figura 4.10. Principalele caracteristici ale acestei plăci sunt : 8 canale analoge de intrare, 24 de canale de intrare digitale, convertire analog-digitală și digital-analogă cu o precizie de 12 biți, rata de eșantionare maximă 100 kS/s, domeniul semnalelor de intrare  $\pm 5$  V. Precizia de digitizare a semnalelor exprimă legătura dintre valoarea numerică naturală înregistrată de sistem și valoarea reală corespunzătoare semnalului analog. În cazul plăcii PCI-1200, precizia de aproximare este de 12 biți, ceea ce înseamnă că domeniul semnalelor  $-5V..+5V$  este divizat în  $2^{12} = 4096$  intervale cărora li se asociază o unitate digitală întreagă, cu alte cuvinte o unitate digitală înregistrată corespunde unei tensiuni de  $10/4096 = 0,00241$  [V].

#### D) CALCULATORUL ȘI PROGRAMELE

Întregul sistem de achiziție a datelor s-a constituit în jurul unui calculator personal cu microprocesor Pentium, 32 MB memorie internă și slot de extensie pentru placa de achiziție de tip PCI, rulând sub sistemul de operare Windows '95. Programul pentru citirea și memorarea valorilor măsurate a fost conceput în limbajul *Visual C*. Mediul de lucru utilizat, *Matlab*, are o serie de programe necesare prelucrării și analizei semnalului cum ar fi filtre numerice, procedura de transformare Fourier rapidă FFT, proceduri de integrare numerică etc.

### 4.3 ACHIZIȚIONAREA DATELOR EXPERIMENTALE

Lanțul de măsurare pentru achiziționarea și memorarea datelor experimentale, având componentele descrise în paragrafele anterioare, este schematizat în Figura 4.11. Cele trei bare ale manipulatorului care execută mișcări în planul vertical se găsesc în poziție orizontală fixă în spațiul de lucru. Accelerometrele sunt plasate în punctele critice ale structurii și anume în efectorul final (*EF*), pe bara  $d_3$  și cât mai aproape de articulația  $O_3$  pe bara  $d_2$  ( $O3$ ), respectiv de articulația  $O_2$  pe bara  $d_1$  ( $O2$ ). Structura mecanică este excitată printr-o forță verticală  $F_{ex}$ , aplicată în efectorul final. Semnalele electrice generate de cele trei accelerometre sunt transmise simultan în blocul de condiționare unde sunt amplificate, tensiunea rezultată la ieșire fiind proporțională cu amplitudinea accelerației măsurate. Semnalele continue ajunse în placa de achiziție sunt digitizate și memorate pe harddisk-ul calculatorului. Această operație de convertire analog-digitală este caracterizată prin *rata*



de eșantionare, adică prin numărul de valori discrete înregistrate într-o secundă pentru aproximarea semnalului continuu. În cazul experimentului s-a utilizat o rată de eșantionare de 10 Ks/s.

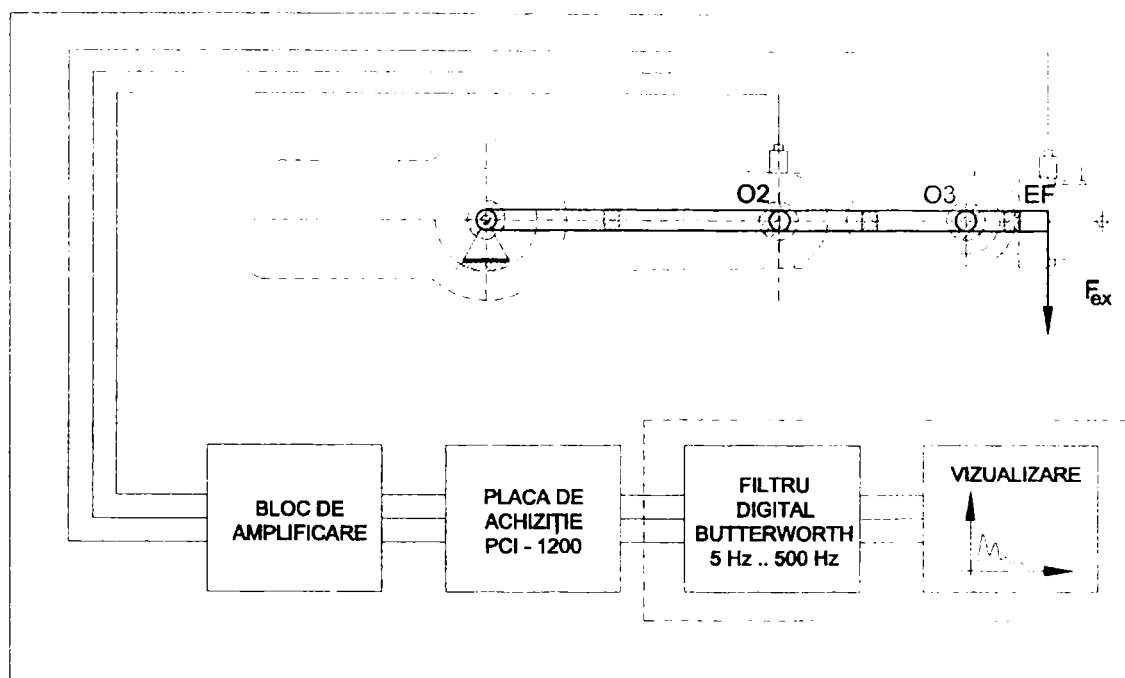


Fig. 4.11 Schema lanțului de măsurare

Mărimile înregistrate și memorate reprezintă valori ale accelerației la momente discrete de timp. Semnalul util, adică vibrațiile structurii mecanice a manipulatorului, este însă însoțit de alte semnale perturbatoare sau „zgomote”, induse de componentele lanțului de măsurare, de sursa de alimentare și de calculator. Eliminarea acestor zgomote se realizează prin utilizarea unui *filtru digital* de tip Butterworth, de ordinul cinci, care permite trecerea componentelor semnalului cu frecvența între 5 Hz și 500 Hz. În interiorul acestei benzi de trecere se vor regăsi și primele frecvențe proprii ale structurii mecanice a manipulatorului. Pentru operațiile de filtrare uzuale, acest tip de filtru este suficient de precis [74, 87].

Valorile măsurate, respectiv mărimile amplitudinii accelerației la momente discrete de timp, în intervalul de timp necesar amortizării complete a vibrației, sunt memorate după operația de filtrare a zgomotelor, în fișiere care sunt disponibile pentru prelucrări statistice ulterioare, comparare și vizualizare. Spre exemplu, în Figura 4.12 se reprezintă grafic semnalul înregistrat în efectatorul final ( $EF$ ), pentru o forță de excitație  $F_{ex} = 0,9$  daN, înainte și după operația de filtrare, iar în Figura 4.13 semnalele filtrate înregistrate concomitent de cele trei accelerometre ( $EF$ ,  $O3$ ,  $O2$ ), pentru aceeași forță de excitație  $F_{ex} = 0,9$  daN.



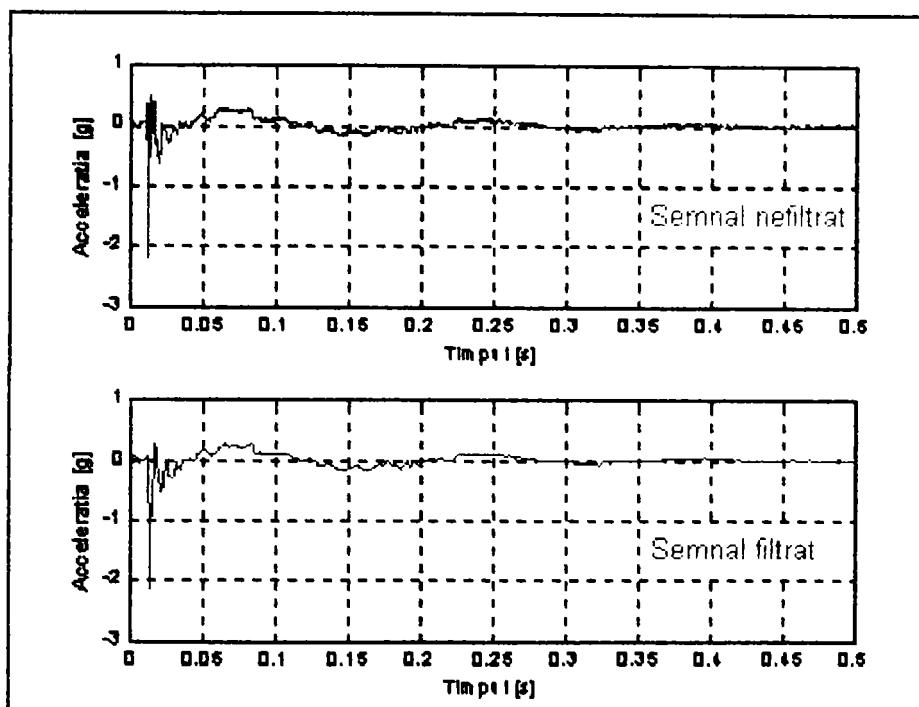


Fig. 4.12 Semnalul în punctul EF înainte și după filtrare

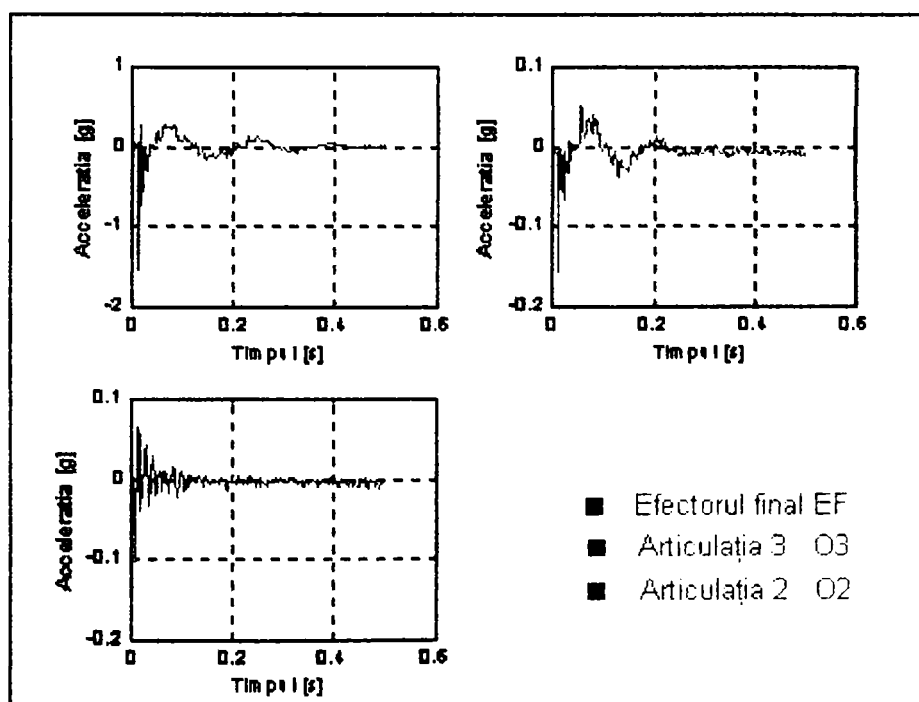


Fig. 4.13 Semnalele înregistrate în punctele EF, O3, O2

## 4.4 PRELUCRAREA STATISTICĂ A DATELOR EXPERIMENTALE

Unul din aspectele importante în studiul experimental al dinamicii structurilor este modul de alegere a mărimii sau cantității care să caracterizeze răspunsul dinamic al acestora. Această caracteristică trebuie să asigure posibilitatea comparării comportamentului dinamic a două structuri asemănătoare, precum și a repetabilității experimentului. O modalitate frecventă în literatura de specialitate este compararea amplitudinii accelerației mișcării vibratorii. Această comparare se poate face prin „nivele” de accelerație exprimate în decibeli, prin compararea amplitudinilor maxime sau mediei dintre amplitudinea maximă și cea minimă etc. Deși este răspândită în literatura de specialitate, metoda de caracterizare a comportamentului dinamic a unei structuri prin referire la amplitudinea accelerației vibrației, aceasta oferă slabe posibilități de repetabilitate a experimentului și implică dificultăți în analiza statistică a valorilor măsurate ale funcției obiectiv, care depinde de unul sau mai mulți factori sau parametri independenți. Principala dificultate constă în faptul că mărimea urmărită în experiment sau funcția obiectiv trebuie să se refere la un semnal rapid variabil într-un interval de timp, format dintr-un șir de valori ale amplitudinii determinate la momentele de eșantionare, și nu la o cantitate măsurată la un moment dat de timp. Din acest motiv se propune pentru caracterizarea vibrației structurii abaterea medie pătratică a semnalului eșantionat în intervalul de timp studiat [38], mărime calculată cu formula

$$\sigma = \left( \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u(k) - \bar{u})^2 \right)^{1/2}, \quad (4.4)$$

unde  $\bar{u}$  este valoare medie a accelerației,  $u(k)$  valoarea instantanee a accelerației la momentul  $k$  de eșantionare,  $N$  numărul de înregistrări în intervalul de timp al înregistrării.

Utilizarea abaterii standard pentru caracterizarea semnalului accelerație pare surprinzătoare la prima vedere, însă aceasta are avantajul că nu este funcție de timp și nu depinde de modul de alegere al originii domeniului timp. În plus această mărime nu este influențată de offset-ul accelerometrului, adică de intervalul inerent de înregistrare înaintea semnalului util.

Cea mai întâlnită metodă de analiză statistică a datelor experimentale este *analiza dispersională*, numită și analiză a varianței sau ANOVA. Scopul acestei analize constă în stabilirea

semnificației factorilor de influență cu acțiune simultană asupra funcției obiectiv analizate sau urmărite în experiment [16, 83]. În cazul nostru, funcția obiectiv  $\sigma$  este exprimată cantitativ prin relația (4.4), mărime calculată pentru semnalul achiziționat care, așa cum s-a argumentat anterior, poate fi utilizată pentru comparația răspunsului dinamic într-un experiment cu măsurări repetate. Factorii independenți care s-au luat în considerare sunt  $x_1 \Rightarrow$  „poziția punctului de măsurare” în cadrul structurii mecanice a manipulatorului și  $x_2 \Rightarrow$  „forța de excitație” aplicată în efectorul final,  $F_{ex}$ . Pentru factorul  $x_1$  s-au ales trei puncte caracteristice EF, O3, O2, Figura 4.11, deci acest factor va avea trei nivele, iar pentru factorul  $x_2$  s-au considerat două nivele,  $F_{ex} = 0,5$  daN, respectiv  $F_{ex} = 0,9$  daN. În concluzie, experimentul este bifactorial, cu factorul  $x_1$  pe  $I_1 = 3$  nivele, respectiv factorul  $x_2$  pe  $I_2 = 2$  nivele, adică pentru întregul experiment un număr de  $2 \times 3 = 6$  celule. S-a considerat că sunt suficiente un număr de  $n = 5$  măsurări sau replici în fiecare celulă, aceste încercări fiind făcute nerandomizat. Rezultatele experimentale sunt centralizate în Tabelul 4.2.

Datele experimentale în ordinea măsurării

Tabelul 4.2

Nr. încercare	Punctul $x_1$	$F_{ex}$ [daN] $x_2$	Abaterea $\sigma$	Nr. încercare	Punctul $x_1$	$F_{ex}$ [daN] $x_2$	Abaterea $\sigma$
1	EF	0.9	0.111610	16	O3	0.5	0.088935
2	EF	0.9	0.116670	17	O3	0.5	0.092480
3	EF	0.9	0.116660	18	O3	0.5	0.095967
4	EF	0.9	0.121510	19	O3	0.5	0.100530
5	EF	0.9	0.110260	20	O3	0.5	0.105000
6	EF	0.5	0.799040	21	O2	0.9	0.104130
7	EF	0.5	0.782570	22	O2	0.9	0.103500
8	EF	0.5	0.803270	23	O2	0.9	0.108040
9	EF	0.5	0.795880	24	O2	0.9	0.103300
10	EF	0.5	0.802590	25	O2	0.9	0.112920
11	O3	0.9	0.142250	26	O2	0.5	0.060173
12	O3	0.9	0.136570	27	O2	0.5	0.063586
13	O3	0.9	0.152740	28	O2	0.5	0.063311
14	O3	0.9	0.154230	29	O2	0.5	0.058116
15	O3	0.9	0.147840	30	O2	0.5	0.074436

Metodologia și formulele de calcul pentru diferiții parametri de natură statistică care intervin în analiza dispersională bifactorială sunt preluate din bibliografia de specialitate [16, 83]. Calculele făcute pentru stabilirea influenței factorilor  $x_1$  și  $x_2$  asupra funcției obiectiv  $\sigma$  sunt sintetizate în Tabelul 4.3, tabel numit și matrice-program al experimentului. Trebuie remarcat că factorul  $x_1$  este de natură calitativă, în timp ce  $x_2$  este un factor cantitativ.

Matricea-program a experimentului

Tabelul 4.3

Nivele factor $x_2$ (Forța [daN]), $j$	Număr încercare $n$	Nivele factor $x_1$ (Punctul), $i$			Media nivelele factorului $x_1$ $\sigma_j$
		1 $\leftrightarrow$ Punct EF	2 $\leftrightarrow$ Punct O3	3 $\leftrightarrow$ Punct O2	
1 $\leftrightarrow F_{ex} = 0,9$	1	0.272440	0.347232	0.254181	0.299792133
	2	0.284791	0.333367	0.252644	
	3	0.284767	0.372838	0.263726	
	4	0.296606	0.376475	0.252155	
	5	0.269145	0.360877	0.275638	
	media $\sigma_{1j}$	0.2815498	0.3581578	0.2596688	
2 $\leftrightarrow F_{ex} = 0,5$	1	1.950457	0.217090	0.146882	0.778822733
	2	1.910253	0.225744	0.155213	
	3	1.960782	0.234255	0.154542	
	4	1.942743	0.245394	0.141861	
	5	1.959122	0.256305	0.181698	
	media $\sigma_{2i}$	1.9446714	0.2357576	0.1560392	
Medie nivele factor $x_1$ $\sigma_i$	1.1131106	0.2969577	0.207854	<b>Media totală 0.53930800</b>	

Valorile calculate ale mărimilor statistice care intervin în analiza dispersională bifactorială, pentru a stabili dacă factorii  $x_1$  și  $x_2$  influențează semnificativ funcția obiectiv  $\sigma$ , sunt sintetizate în Tabelul 4.4. Variabilele statistice  $F_{x1}$  și  $F_{x2}$  urmează o distribuție de tip Fisher cu două grade de libertate, iar valorile calculate ale acestora trebuie să fie mai mari decât valorile tabelate ale acestei

distribuții, corespunzătoare gradelor de libertate  $\nu_1$  și  $\nu_2$  și a unui prag de siguranță a estimății  $1-\alpha$  impus. Pentru factorul  $x_1$  aceste mărimi sunt : valoarea calculată  $F_{x_1} = 11,83494$ , gradele de libertate  $\nu_1 = 2$ ,  $\nu_2 = 26$ , probabilitatea de siguranță a estimății  $1-\alpha = 0,95$ , valoarea tabelată  $F_{0,05;2;26} = 3,37$ , respectiv pentru factorul  $x_2$  avem  $F_{x_2} = 8,182575$ ,  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = 26$ ,  $1-\alpha = 0,95$ ,  $F_{0,05;1;26} = 4,23$ . Pentru ambii factori valorile calculate ale statisticilor sunt mai mari decât valorile tabelate, deci se poate concluziona că cei doi factori independenți au fost corect aleși, iar variațiile acestora influențează semnificativ mărimea  $\sigma$ , aleasă pentru caracterizarea semnalului înregistrat.

**Valorile mărimilor care intervin în analiza dispersională a experimentului Tabelul 4.4**

Sursa dispersiei	Suma pătratelor	Grade de libertate	Dispersii estimate	Criteriu statistic
Nivelele factorului $x_1$ (Punctul)	$SS_{x_1} = 0.995689$	$I_1 - 1 = 2$	$s_{x_1}^2 = 0.497845$	$F_{x_1} = s_{x_1}^2 / s_e^2 = 11.83494$
Nivelele factorului $x_2$ (Forța)	$SS_{x_2} = 0.344206$	$I_2 - 1 = 1$	$s_{x_2}^2 = 0.344206$	$F_{x_2} = s_{x_2}^2 / s_e^2 = 8.182575$
Erorile aleatoare de măsurare	$SS_e = 1.051642$	$I_1 \cdot I_2 \cdot n - I_1 - I_2 + 1 = 26$	$s_e^2 = 0.042066$	-
Dispersia totală	$SS_T = 2.391537$	$I_1 \cdot I_2 \cdot n - 1 = 29$	-	-

#### 4.5 COMPARAȚIA ÎNTRE REZULTATELE NUMERICE ȘI DATELE EXPERIMENTALE

Rezultatele numerice furnizate de programele de calcul descrise în Capitolul 3, constau în valorile amplitudinilor deplasărilor, vitezelor și accelerațiilor nodale la momente discrete timp în intervalul de observație. Datele experimentale reprezintă valorile măsurate ale accelerațiilor în trei puncte caracteristice ale structurii mecanice a manipulatorului. Analiza concordanței între cele două seturi de valori se poate face prin compararea *forme graficului accelerațiilor* deduse numeric și experimental în cele trei puncte de măsurare și prin compararea *valorile frecvențelor naturale* de vibrație determinate teoretic și deduse din datele măsurate, prin trecerea semnalului din domeniul timp în domeniul frecvență utilizând transformarea Fourier.

Pentru simularea numerică s-au utilizat următoarele date de intrare, așa cum au fost descrise în paragraful 3.8.2 :

1) Geometria structurii

- mecanism de tip RRR : trei cuple motoare, trei bare ;
- spațiul maxim de rotație al cuplelor  $\Delta\theta_i = 0.348 \text{ rad}$ ,  $i = 1,2,3$  ;
- lungimile barelor  $d_1 = 250 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 160 \text{ mm}$ ,  $d_3 = 72 \text{ mm}$  ;
- numărul de elemente finite pe fiecare bară  $nel_1 = 4$ ,  $nel_2 = 3$ ,  $nel_3 = 2$  ;

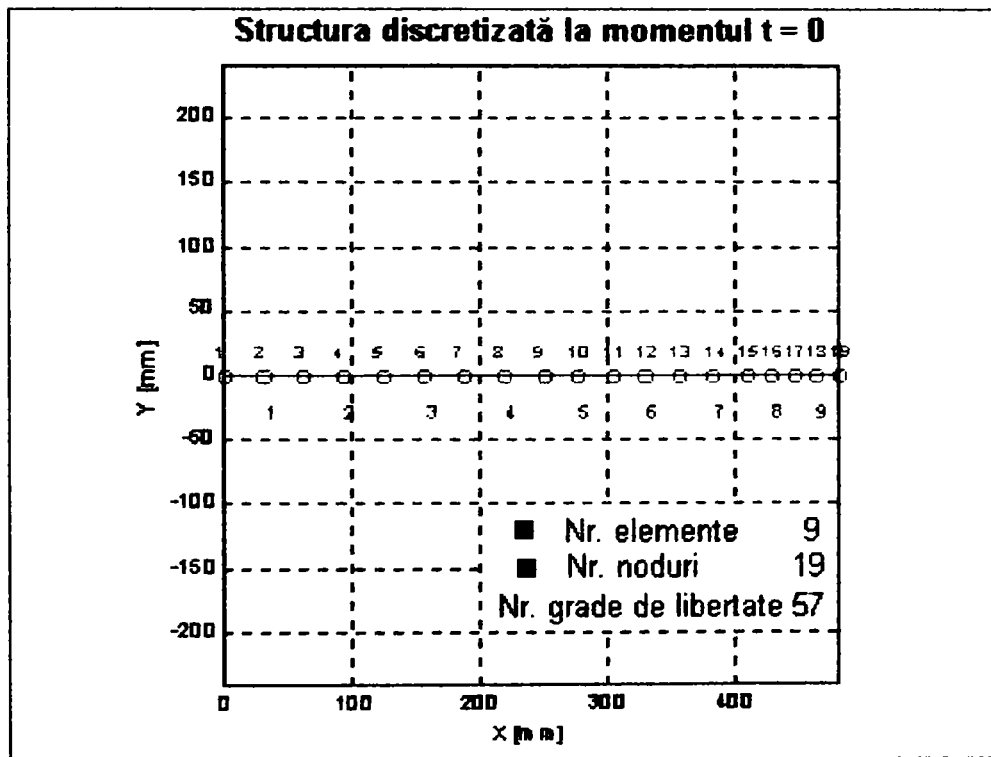


Fig. 4.14 Structura discretizată

2) Proprietățile materialelor

- modulul de elasticitate longitudinal,  $E = 2.070 \cdot 10^5 \text{ Nmm}^{-2}$  ;
- modulul de elasticitate transversal,  $G = 7.930 \cdot 10^4 \text{ Nmm}^{-2}$  ;
- coeficientul lui Timoshenko,  $k = 1.15$  ;
- densitatea,  $\rho = 7.65 \cdot 10^{-9} \text{ Ns}^2\text{mm}^{-4}$  ;
- coeficientul de dilatare termică liniară,  $\alpha = 0$  ;

3) Proprietățile geometrice ale elementelor

- aria secțiunilor transversale,  $A_1 = 196 \text{ mm}^2$ ,  $A_2 = 144 \text{ mm}^2$ ,  $A_3 = 100 \text{ mm}^2$  ;
- momentele de inerție,  $I_{z1} = 3.200 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$ ,  $I_{z2} = 1.720 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$ ,  $I_{z3} = 0.830 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$  ;

4) Condițiile de rezemare

- numărul nodului în care există legături,  $nod = 1$  ;
- direcțiile fixate, 1 direcția x, 2 direcția y, 3 direcția  $\varphi$  ;

5) Forțele exterioare

- numărul nodului în care se aplică forța,  $nod = 19$  ;
- direcția forței generalizate,  $direcție = 2$ , direcția  $y$  ;
- mărimea forței,  $F_{ex} = -9$  N ;

6) Curbe de timp pentru forțele exterioare

- număr de puncte necesar pentru descrierea variației în timp a forței exterioare,  $npt = 4$  ;
- abscisa timp,  $t_i$  [s],  $i = 1,2,3,4$  : 0.00, 0.10, 0.20, 2.00 ;
- coeficientul forței la momentul  $t_i$ ,  $i = 1,2,3,4$  : 1.00, 1.00, 0.00, 0.00 ;

7) Masele concentrate exterioare

- numărul nodurilor cu masă suplimentară (masele motoarelor din articulații și a sculei din efulorul final) : 9, 15, 19 ;
- masele concentrate din aceste noduri : 0.0015, 0.0010, 0.0008 [Ns<sup>2</sup>mm<sup>-1</sup>] ;

8) Complianta cuplelor

- numărul nodurilor cu articulație compliantă : 1, 9, 15 ;
- gradul de compliantă,  $gc$  : 1.05, 1.05, 1.05 ( rigiditatea echivalentă a cuplei 5% din rigiditatea barei).

Pe baza acestor valori de intrare, subprogramul *FrNatSsp* determină frecvențele naturale de vibrație ale structurii manipulatorului aflat în poziție fixă în spațiul de lucru, la momentul  $t = 0$ . Aceste frecvențe deduse teoretic se referă la mișcarea vibratorie neamortizată. Pentru primele 8 moduri de vibrație se obțin valorile primelor 8 frecvențe naturale, în Hz :

*** Frecvențele naturale	
Modul	Frecvența
1.00	31.47
2.00	174.78
3.00	538.93
4.00	2103.72
5.00	4499.76
6.00	5567.69
7.00	6056.38
8.00	6679.90

Pentru mișcarea reală, amortizată, identificarea pseudofrecvențelor se realizează prin descompunerea semnalului utilizând transformarea Fourier sau mai concret un algoritm de tip *FFT*, *Fast Fourier Transform*. Prin această tehnică semnalul din domeniul timp este descris în domeniul

frecvențelor. În cazul semnalului captat în efectorul final *EF*, rezultatele transformării sunt ilustrate în Figura 4.15.

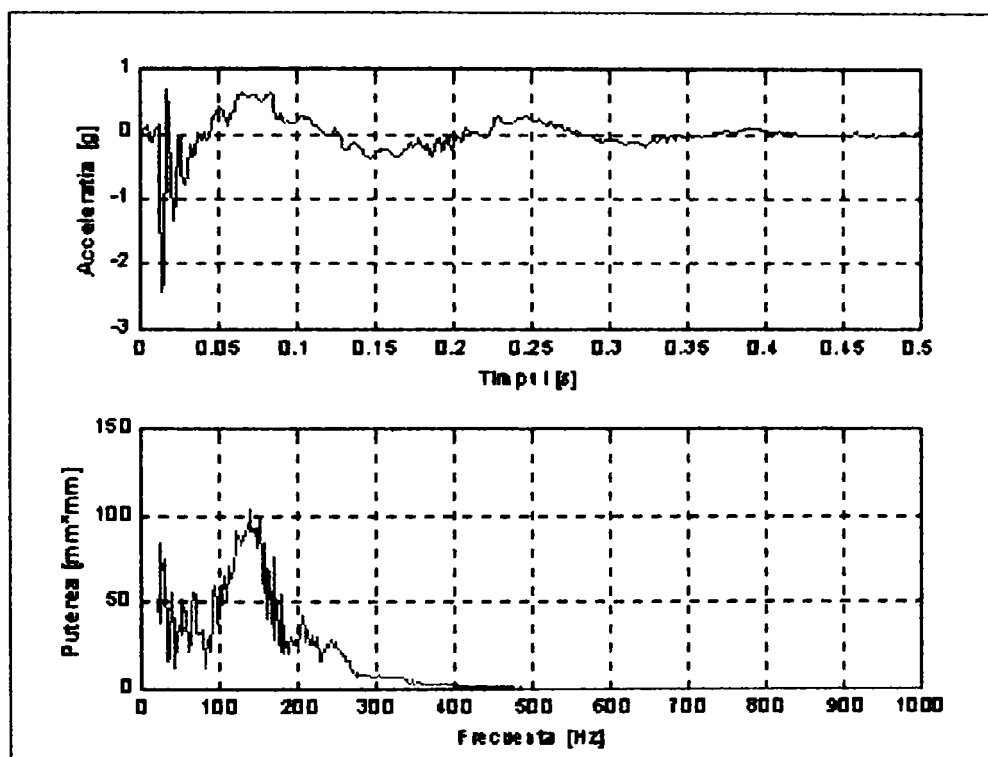


Fig. 4.15 Semnalul în domeniile timp și frecvență

În graficul densității spectrale de putere se disting două maxime situate în jurul frecvențelor de 30 Hz, respectiv 175 Hz, ceea ce reprezintă o corespondență remarcabilă între valorile obținute numeric și exepriental, pentru frecvențele primelor două moduri proprii de vibrație. Pentru identificarea mai precisă a acestor valori se analizează termenii șirurilor de valori ale puterii spectrale în jurul acestor puncte și se pun în evidență coordonatele maximelor locale, Tabelul 4.5. Prin acest procedeu se obțin valorile pseudopulsațiilor primelor două moduri proprii de vibrație,  $p_1 = 30$  Hz și  $p_2 = 168$  Hz. Utilizând formula de legătură între frecvența naturală a vibrației neamortizate și pseudopulsația vibrației reale amortizate [13, 70]

$$p_{1i} = p_i \sqrt{1 - \xi_i^2}, \quad (4.5)$$

se pot deduce coeficienții de amortizare pentru cele două moduri de vibrație. Se obțin următoarele valori :  $\xi_1 = 0.30$ ,  $\xi_2 = 0.27$ . Cu aceste valori se calculează în continuare coeficienții lui Rayleigh, formula (3.29), rezultând  $\alpha = 2.1 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 0.53 \text{ s}$ .



Tabelul 4.5

f [Hz]	P [mm <sup>2</sup> ]	f [Hz]	P [mm <sup>2</sup> ]
2.0000e+001	2.1354e+001	1.5800e+002	2.8968e+001
2.2000e+001	1.6129e+001	1.6000e+002	1.7100e+001
2.4000e+001	3.5115e+001	1.6200e+002	2.8939e+001
2.6000e+001	2.8293e+001	1.6400e+002	2.8179e+001
2.8000e+001	2.9095e+001	1.6600e+002	1.5607e+001
3.0000e+001	3.1420e+001	1.6800e+002	3.1646e+001
3.2000e+001	8.7554e+000	1.7000e+002	1.6719e+001
3.4000e+001	7.0119e+000	1.7200e+002	1.1592e+001
3.6000e+001	7.6533e+000	1.7400e+002	2.1585e+001
3.8000e+001	9.4871e+000	1.7600e+002	1.2100e+001
4.0000e+001	2.3136e+001	1.7800e+002	9.2738e+000

Rezultatele numerice pentru amplitudinile accelerațiilor obținute prin rularea programului *Deplan\_r* sunt comparate cu datele înregistrate experimental prin reprezentarea grafică a acestora, în Figura 4.16, Figura 4.17, Figura 4.18, pentru punctele de măsurare *EF*, *O3*, respectiv *O2*.

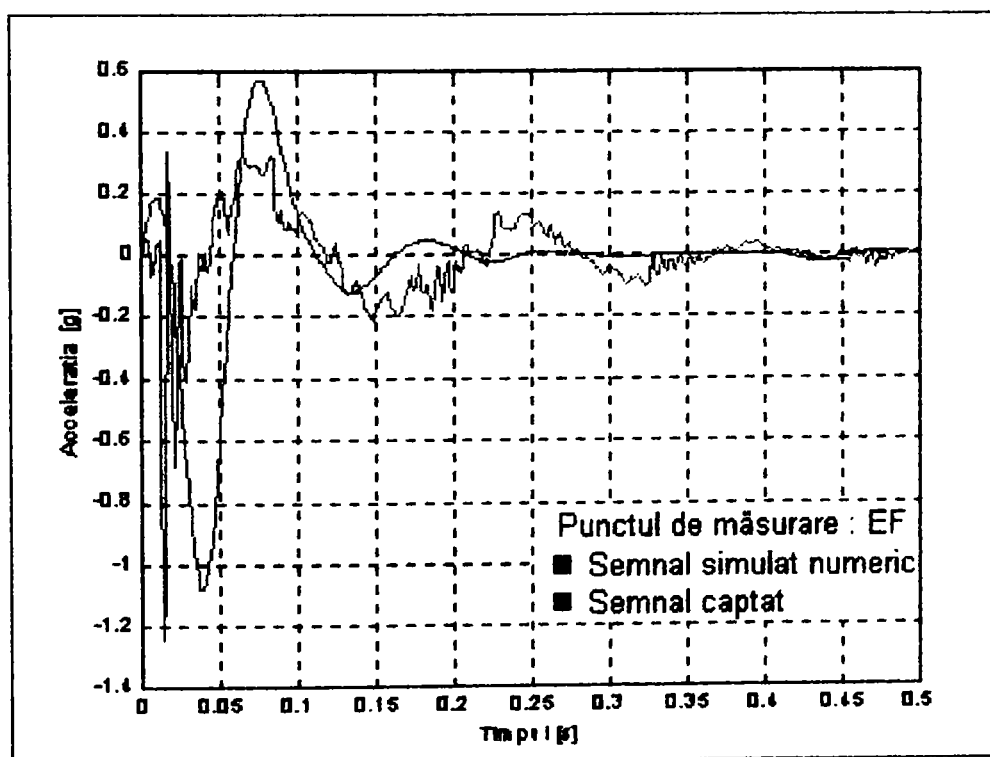


Fig. 4.16 Valori numerice - date experimentale în punctul EF

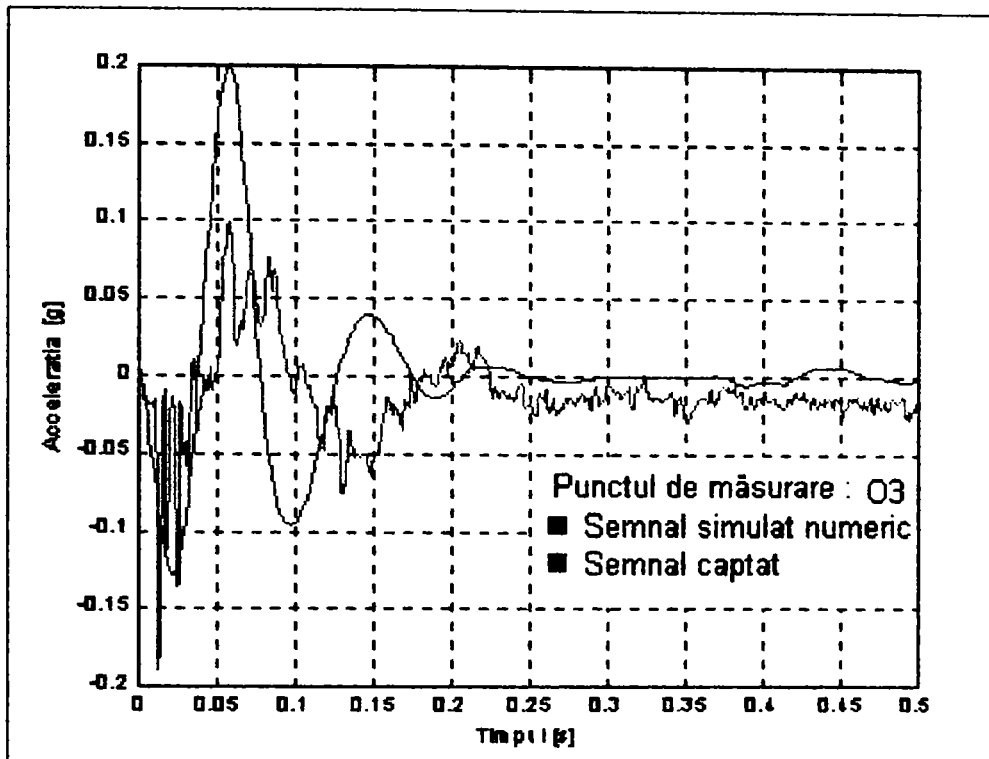


Fig. 4.17 Valori numerice - date experimentale în punctul O3

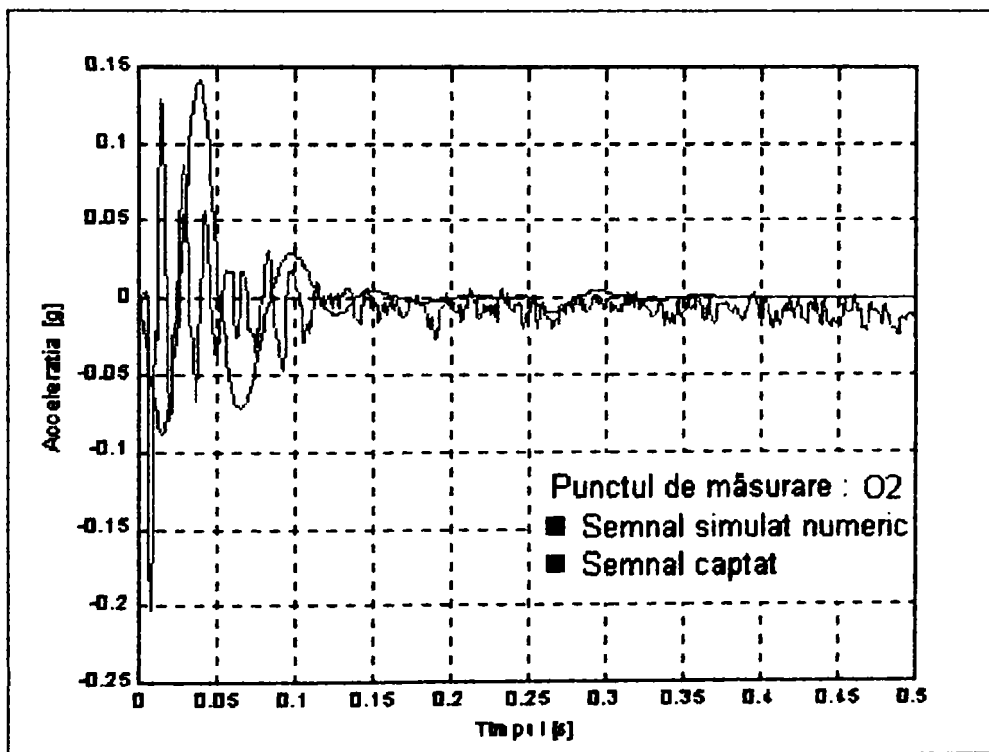


Fig. 4.18 Valori numerice - date experimentale în punctul O2

O diferență generală între formele graficelor obținute prin simulare numerică și a celor ce reflectă semnale reale constă în neregularitatea prezentă în semnalul real față de forma netedă a graficului simulat. Acest lucru se datorește faptului că simularea numerică nu ia în considerare influențele componentelor semnalului de la momente de timp imediat anterioare celui curent. Valoarea numerică simulată se poate asocia cu valoarea filtrată a semnalului real, utilizând un filtru median [90].

Amplitudinea accelerației și timpul de amortizare a vibrației sunt parametri care pot caracteriza corespondența numeric - experimental. Urmărind acești doi parametri, așa cum se reflectă în Figura 4.16, Figura 4.17 și Figura 4.18, se observă o corelație acceptabilă între valorile calculate și măsurate. Pe măsură ce punctul de măsurare se depărtează de efectatorul final  $EF$ , apar diferențe din ce în ce mai pronunțate între valorile simulate și cele determinate experimental, diferențe care sunt introduse de cuplele motoare. Un model nelinear de dependență între forță și rotație al acestora ar putea introduce erori mai mici, această observație urmând să stea la baza îmbunătățirii modelului matematic propus în Capitolul 2.

# CAPITOLUL 5

## CONTRIBUȚII, CONCLUZII ȘI PERSPECTIVE

### COMPLIANȚA STRUCTURILOR

Proiectarea unei structuri presupune calculul tensiunilor și deformațiilor produse de acțiunile la care aceasta este supusă în exploatare, pe baza cărora se evaluează răspunsul structurii în regim static sau dinamic, după care se dimensionează elementele structurale ținând cont de o funcție obiectiv, cum ar fi rezistența sub sarcină, stabilitatea, precizia de poziționare etc. În cazul structurilor clasice, formate din elemente structurale considerate rigide, simularea răspunsului static sau dinamic se poate efectua utilizând programe pentru calculator specializate. Dacă structura conține elemente ce nu mai pot fi considerate rigide, de exemplu asamblări cu jocuri, angrenaje, amortizori elastici, brațe telescopice, mecanisme spațiale ale roboților industriali etc., analiza comportamentului dinamic al structurii are la bază un model particular, care să includă aspectele specifice.

Termenul de *compliance* exprimă în mod general tendința unei structuri de a se deforma sub acțiunea forțelor exterioare. Se remarcă faptul că, în timp ce compliancea este peste tot prezentă în natură, mediul tehnic s-a limitat în general la structuri și mecanisme rigide. Efectele compliancei pot fi o sursă de inspirație pentru comunitatea inginerescă și științifică. *Proiectarea orientată spre eliminarea asamblării* este posibilă în cazul unor produse la care mișcările relative între componente sunt mici, părțile putând fi unite într-o formă monolitică de dispozitiv mecanic, care utilizează mecanisme compliantă fără articulații. *Mecanismele compliantă* sunt o categorie de mecanisme în care deformațiile elastice sunt o sursă dorită pentru mișcare și transmitere a forței, spre deosebire de mișcarea prin cuple specifică mecanismelor convenționale. *Structurile adaptive*, specifice roboților inteligenți, care reacționează și se adaptează stimulilor externi, pot de asemenea beneficia de pe urma mecanismelor compliantă.

*Robotul* este un produs mecatronic, înglobând tehnologie mecanică și electronică, și poate fi definit ca un sistem cu funcționare automată, adaptabil condițiilor de mediu complex și variabil în care acționează, prelungind sau înlocuind una sau mai multe acțiuni ale omului asupra mediului.

Componentele specifice ale structurii unui manipulator sunt *bara* și *articulația*. Bara este elementul de structură cu trei grade de libertate, care asigură în principal poziționarea, iar articulația elementul de structură cu trei grade de libertate, care asigură orientarea barei și conexiunea între două elemente succesive.

*Comportamentul dinamic* al unui manipulator este marcat de faptul că structura sa mecanică nu este rigidă, având elemente mobile și deformabile, fiind în consecință o structură compliantă. Există întotdeauna un element constructiv a cărui complianță este determinantă pentru întreaga structură. În cadrul acestei lucrări se consideră că pentru manipuloare complianța dominantă, ce va determina complianța întregii structuri, este generată de *deformațiile elastice ale barelor* și de alunecările din cuplele motoare sau *complianța articulațiilor*.

*Complianța manipuloarelor* este un element cheie în modelarea și simularea dinamicii structurii mecanice a acestora. Complianța structurală poate fi utilizată, prin control și comnadă adecvate, la îmbunătățirea performanțelor operaționale ale roboților și manipuloarelor. Rezultatele analizei dinamice a manipulatorului sunt necesare pentru corectarea mișcărilor efectorului final, cu scopul de a reduce abaterile de la traiectoria planificată, în condițiile în care vitezele de operare tind să crească în continuu.

Pentru caracterizarea rigidității dinamice și a răspunsului vibrațional se propune utilizarea funcției de transfer numită *complianță*, exprimată cantitativ prin raportul dintre amplitudinea mișcării, liniară sau unghiulară și mărimea forței aplicate în acel punct. Pentru o structură mecanică dată se obține experimental *curba de complianță*, care este reprezentată, în coordonate logaritmice, de valorile complianței în funcție de frecvență.

*Determinarea experimentală a complianței* se face cu ajutorul unei instalații care cuprinde în principal un ciocan de impact, echipat cu un traductor pentru măsurarea forței, utilizat pentru excitarea structurii, și un accelerometru pentru înregistrarea accelerației mișcării rezultate. Cele două serii de date experimentale obținute, forța și accelerația în funcție de timp, se transformă utilizând analiza frecvențială, în serii funcție de frecvență, după care valorile pentru accelerație se transformă în valori echivalente pentru deplasare și calculând raportul deplasare - forță se obține setul de puncte pentru curba de complianță. Aceste precizări referitoare la partea experimentală se concretizează în proiectarea și desfășurarea experimentului, care verifică rezultatele numerice de simulare a răspunsului dinamic al unui manipulator concret.

Studiul complianței este o temă de interes pentru cercetare prin efectele pe care le pot avea utilizarea caracteristicilor acesteia în proiectarea structurilor. În cazul manipuletoarelor, așa cum s-a prezentat în lucrare, complianța este simulată la nivelul barelor și articulațiilor. Continuarea cercetării referitoare la acest subiect ar putea avea în vedere alte moduri de surprindere ale complianței la nivelul elementelor structurale, cum ar fi deformațiile largi ale barelor de lungime mare, modelarea articulațiilor printr-un sistem echivalent cu arcuri sau prin element finit de tip articulație, în care dependența tensiuni-deformații nu mai este lineară.

### MODELUL DINAMIC

Vitezele de operare ridicate și preciziile de poziționare mari, specifice roboților de ultime generații, implică mecanisme cât mai ușoare posibil, cu scopul reducerii forțelor inerțiale și a momentelor motoare necesare acționării. Acest lucru conduce însă la creșterea *complianței structurii*, care trebuie controlată spre a nu deterioara performanțele operaționale. Chiar și în cazul roboților industriali de dimensiuni mici și aparent rigizi, este necesară luarea în considerare a deformațiilor pe care le suportă elementele componente, deoarece efectul dinamic al acestor deformații suprapus peste tactul finit, digital al controlului computerizat în timp real al acționării acestora, poate cauza probleme serioase mai ales când se încearcă creșterea vitezei de operare.

Modelul dinamic propus consideră că barele se *deformează elastic* și determină o mișcare relativă adițională, peste mișcarea de transport de corp rigid. În plus, articulațiile motoare sunt compliante, adică au o *rigiditate echivalentă* considerabil mai mică decât cea de corp rigid.

Pentru modelarea barei s-a ales *formularea lui Timoshenko*, prin care se consideră că normala la fibra medie a barei nedeformate rămâne dreaptă și după deformarea barei, dar nu mai este normală la fibra medie deformată. Secțiunea deformată se deplanează ca urmare a distribuției neuniforme a tensiunilor tangențiale, panta barei deformată având două unghiuri componente produse de momentul de încovoiere și de efortul tăietor. Modelul Timoshenko pentru bară are câteva caracteristici particulare, de exemplu în secțiunea de încăstrare rotirea nu poate fi anulată de legături, iar erorile introduse sunt mai mici decât în modelul clasic, mai ales pentru barele cu raportul dintre lungime și înălțime mai mic decât 4.

Analiza numerică a răspunsului dinamic al structuri mecanice a manipulatorului se poate efectua prin *metoda elementelor finite*. Modelul matematic dezvoltat în Capitolul 2 parcurge etapele și formalismele necesare pentru conceperea unor programe și subprograme pentru calculatoare personale, care să efectueze simularea răspunsului dinamic prin metoda elementelor finite. Formularea elementului finit trebuie să includă influențele solicitărilor axiale, de încovoiere și forfecare, care determină deformații elastice. Complianța articulațiilor, masele unităților motoare și a sculei de lucru și amortizarea externă trebuie să fie luate în considerare în formularea ecuațiilor de mișcare ale structurii discretizate cu elemente finite. Pentru a include toate aceste cerințe, se definește un *element finit izoparametric* de tip bară, cu trei noduri, având coordonatele generalizate deplasările nodale longitudinale, transversale și rotațiile. Matricea de rigiditate a unui astfel de element are în consecință dimensiunile  $9 \times 9$ .

Stabilirea parametrilor cinematici, respectiv vitezele și accelerațiile absolute în noduri se face ținând cont că elementul finit este considerat deformabil, spre deosebire de formularea clasică în care elementul finit este considerat rigid. În consecință, peste mișcarea de transport de corp rigid a barelor se suprapune o mișcare relativă datorată deformațiilor elastice. Sunt puse în evidență și se deduc relațiile pentru vitezele și accelerațiile relative, de transport și absolute, utilizând o formulare matriceală concisă, necesară analizei numerice ulterioare.

Deoarece se consideră că solicitarea la încovoiere este semnificativă pentru barele manipulatorului, forma după deformație a elementului finit va fi curbă. Această ipoteză presupune utilizarea unor funcții de interpolare sau funcții de formă de gradul II, ceea ce justifică utilizarea unui element finit izoparametric cu trei noduri. Sunt definite sistemele de coordonate specifice și sunt precizate matricile de transfer între acestea, precum și matricea iacobiană pentru elementul finit izoparametric cu trei noduri.

*Matricea de rigiditate structurală* a elementului finit,  $[K^s]$ , se deduce pornind de la energia de deformație produsă de deformațiile axiale, de încovoiere și de forfecare. Exprimarea acestor deformații în funcție de coordonatele generalizate din noduri prin intermediul funcțiilor de formă, permite calcularea derivatelor parțiale și a integralelor din expresia energiei de deformație, determinându-se astfel elementele matricei de rigiditate structurală. În mod analog se determină *matricea consistentă a maselor*,  $[M]$ , din expresia energiei cinetice produsă de vitezele absolute



axială, transversală respectiv unghiulară a unui element diferențial de masă și de moment de inerție masic.

*Ecuatiile de mișcare* ale unui element finit se obțin utilizând ecuațiile lui Lagrange, scrise pentru un sistem discret cu  $n$  grade de libertate. Explicarea termenilor acestor ecuații pune în evidență matricile de *rigiditate centrifugală*  $[K^c]$  și de *amortizare giroscopică*,  $[C^g]$ , datorate vitezelor relative și accelerațiilor Coriolis, produse de mișcarea relativă de deformare elastică, care se suprapune peste mișcarea de transport de corp rigid a barelor.

Pentru întreaga structură discretizată a manipulatorului, matricile caracteristice de rigiditate, a maselor și a forțelor se obțin prin asamblarea matricilor corespunzătoare determinate pentru un element finit. Matricea de rigiditate se corectează pentru a include complianța articulațiilor motoare. În matricea maselor, la elementele corespunzătoare se adaugă masele suplimentare ale motoarelor de acționare și ale sculei de lucru. Elementele matricei coloană a forțelor includ componentele forțelor de inerție și a forțelor externe, inclusiv datorate condițiilor inițiale. Matricea de amortizare se determină pornind de la matricea de rigiditate structurală și matricea consistentă a maselor, prin metoda de amortizare proporțională Rayleigh.

Sistemul ecuațiilor de mișcare este un ecuații diferențiale de ordinul II nelinear, deoarece valorile elementelor matricilor caracteristice  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $[C]$  se schimbă la fiecare moment de timp, datorită matricilor de rigiditate centrifugală și de amortizare giroscopică, acestea fiind funcții de vitezele și accelerațiile unghiulare ale articulațiilor motoare. Totuși ele nu depind de necunoscutele care trebuie determinate.

Considerarea deformațiilor unghiulare la nivelul unui nod, conduce la modificarea poziției sistemului local de coordonate al unui element finit, matricea de transfer de la sistemul local la sistemul global de coordonate devenind o funcție de necunoscute. Această ipoteză conduce la un *sistem nelinear de ecuații diferențiale* de ordinul II, în care valorile elementelor matricilor caracteristice devin funcții de necunoscute, nelinearitatea devenind mai puternică.

Într-o abordare viitoare, dezvoltarea modelului matematic trebuie să țină seama de rezultatele obținute experimental și, în funcție de acestea, să se propună corecții sau ipoteze suplimentare. Se pot propune noi relații pentru modelarea articulațiilor sau noi modele pentru bară, mai ales pentru cazurile cu deformații largi.



## SIMULAREA NUMERICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

Determinarea răspunsului dinamic al unei structuri presupune măsurarea sau evaluarea, în anumite puncte critice, a unor parametri variabili în timp, cum ar fi deplasări, deformații, viteze, accelerații etc. Simularea numerică a răspunsului dinamic al structurii mecanice a manipulatorului plan, utilizând metoda elementelor finite, s-a efectuat pentru *manipulatorul în poziție fixă* în spațiul de lucru și *manipulatorul în mișcare*. Pentru manipulatorul în mișcare răspunsul dinamic este influențat rigiditatea centrifugală și amortizarea giroscopică. În plus dacă se consideră că deplasările unghiulare datorate deformărilor elastice modifică poziția sistemului de referință local al elementului finit, matricea de transfer de coordonate devine funcție de necunoscute.

Funcțiile care exprimă dependența dintre spațiul parcurs și timp pentru cuplele cinematice conducătoare se numesc *funcții de conducere*. Se propune adoptarea unor funcții de conducere cu profil cicloidal, care au o formă analitică simplă și au un profil de viteze apropiat de cel trapezoidal. Întâlnit în cazurile reale.

Prin discretizarea structurii, barele care alcătuiesc manipulatorul sunt împărțite în elemente finite, fiecare element având trei noduri. În urma discretizării rezultă coordonatele geometrice ale fiecărui nod în sistemul global de coordonate, precum și un tablou de definiție al fiecărui element finit prin nodurile care îl compun. Calcularea *vitezelor și accelerațiilor* lineare și unghiulare absolute în mișcarea de corp rigid a barelor manipulatorului, în nodurile structurii, se face ținând cont că prima bară are o mișcare de rotație simplă, în timp ce pentru următoarele se combină o mișcare relativă cu o mișcare de transport datorată articulațiilor motoare anterioare.

*Răspunsul dinamic* al structurii mecanice a manipulatorului în poziție fixă poate să apară numai în condițiile existenței unor excitații datorate unor forțe exterioare de scurtă durată sau unor condiții inițiale de deplasări și viteze. Studiul răspunsului dinamic în acest caz conduce la concluzii care se referă la modurile de vibrație ale structurii, la determinarea coeficienților de amortizare a mișcării, la precizia de poziționare a efectorului final la puncte de final de cursă și la efectul considerării complianței articulațiilor.

Pentru sistemul dinamic cu mai multe grade de libertate, rezultat în urma discretizării cu elemente finite, ecuațiile de mișcare formează un sistem de ecuații diferențiale nelinare de ordinul II. *Matricile caracteristice* ale sistemului sunt modificate pentru a lua în considerare complianța

articulațiilor și masele suplimentare. Complanța articulațiilor motoare într-un nod al structurii conduce la modificarea matricei de rigiditate a elementului respectiv, printr-o *reducere parțială Gauss*. Pentru determinarea amortizării se utilizează *metoda amortizării proporționale Rayleigh*, prin care matricea de amortizare este combinație liniară a matricei maselor și a matricei de rigiditate.

*Condensarea dinamică*, numită și *reducere Guyan*, este utilizată pentru înlocuirea sistemului de ecuații de mișcare printr-un sistem echivalent, având un număr redus de necunoscute. În acest mod se elimină gradele de libertate fixate de legături, se reduc gradele de libertate care nu sunt dinamice, se reduc gradele de libertate suplimentare sau ale nodurilor interioare elementelor finite.

*Frecvențele proprii* ale vibrațiilor libere ale unei structuri nu depind de condițiile inițiale, adică forțe sau deplasări perturbatoare la momentul inițial, ci numai de rigiditate și de distribuția maselor. La întocmirea subprogramului care determină frecvențele proprii s-a optat pentru metoda iterației pe subspații, care este eficientă în cazul problemelor cu număr mare de grade de libertate.

*Ecuațiile de mișcare*, împreună cu condițiile inițiale, formează un sistem de ecuații diferențiale lineare de ordinul II, care se integrează prin *metoda Hubolt*. Avantajul major al acestei metode este stabilitatea necondiționată, ceea ce înseamnă că soluția obținută prin integrare nu crește fără limită, chiar dacă pasul de integrare este mare. Un alt avantaj al metodei Hubolt constă în faptul că, pe lângă deplasări, se determină numeric și vitezele și accelerațiile nodale.

Pentru manipulatorul în poziție fixă în spațiul de lucru, răspunsul dinamic caracterizat de deplasările nodale, este determinat în situații diferite, pentru a surprinde influențele complianței articulațiilor, amortizării și poziției nodului în cadrul structurii. Pentru manipulatorul în mișcare deplasările nodale se determină utilizând modelul pseudolinear și modelul nelinear. În cazul modelului pseudolinear deformațiile elastice de rotație nu modifică poziția sistemului de coordonate local al elementului finit. Dacă aceste deformații sunt luate în considerare, sistemul de ecuații de mișcare este puternic nelinear, rezolvarea acestuia făcându-se prin *iterații succesive*. Rezultatele numerice obținute sunt prezentate comparativ pentru a surprinde diferențele între cele două modele, în ceea ce privește valorile deplasărilor nodale, influențele complianței, ale amortizării, precum și abaterile de la traiectoria planificată a efectorului final.

Pe baza relațiilor modelelor matematic și numeric dezvoltate în lucrare, s-au întocmit trei *programe principale* pentru determinarea răspunsurilor dinamice ale manipulatorului în poziție fixă, ale manipulatorului în mișcare, modelul pseudolinear și ale maipulatorului în mișcare, modelul

## CONTRIBUȚII, CONCLUZII ȘI PERSPECTIVE

nelinear. Aceste programe principale, care rulează sub mediul de programare Matlab, apelează alte zece *subprograme* necesare pentru introducerea datelor de intrare, determinarea pozițiilor, vitezelor și accelerațiilor în nodurile structurii, determinarea matricilor caracteristice ale elementului finit, determinarea frecvențelor proprii de vibrație ale structurii mecanice a manipulatorului etc.

Analizele numerice din această secțiune pot fi continuate și ar fi interesant de urmărit care sunt diferențele sau erorile introduse de utilizarea elementele finite de tip bară cu două noduri față de cele cu trei noduri sau cum influențează rezultatele neglijarea matricilor de rigiditate centrifugală și amortizare giroscopică.

## DETERMINĂRI EXPERIMENTALE

Pentru efectuarea unor măsurători experimentale, care să confirme sau să corecteze modelul numeric dezvoltat în capitolele 2 și 3, se utilizează un sistem de achiziție de date, cu accelerometre plasate pe brațele *microrobotului industrial MovemasterEX*, model RV-M1, care face parte dintr-un sistem de fabricație flexibil pentru prelucrarea pieselor cilindrice. Caracteristicile standard ale robotului definesc spațiul de lucru și vitezele de operare. Robotul RV-M1 este de tipul RRRR, dar măsurătorile experimentale se efectuează numai pentru mișcarea în planul vertical, adică pentru trei rotații RRR.

Pentru a asigura o modalitate flexibilă pentru măsurare, s-a realizat un *sistem de achiziție a datelor* care este compus din calculator personal, accelerometre, circuite de condiționare a semnalelor, hardware de achiziție a datelor și software specializat.

Una dintre cele mai răspândite soluții constructive pentru accelerometre are la bază fenomenul piezoelectric. În cadrul experimentului de măsurare s-au utilizat trei accelerometre de tip KD42, produse de firma Metra Mess und Frequenztechnik, Germania. Sensibilitatea acestuia exprimă legătura dintre accelerația măsurată și semnalul electric generat și are un domeniu de utilizare cuprins între 1 Hz și 10 Khz.

Pentru eliminarea unor probleme datorate semnalelor parazite sau zgomotelor, s-au realizat *circuite de condiționare*, care sunt amplificatoare de sarcină sau convertoare de sarcină - tensiune. Tensiunea măsurată utilizând acest circuit va fi proporțională cu accelerația.

Înregistrarea semnalelor continue provenite de la circuitul de condiționare se realizează în mod discret. Valorile discrete obținute aproximează semnalul continuu, cu o acuratețe care se exprimă prin rata de eșantionare. Transformarea semnalului continuu într-o serie de valori discrete se realizează cu ajutorul unei *plăci de achiziție* PCI-1200 produsă de firma National Instruments, cu o rată de eșantionare de 10 Ks/s. Întregul sistem de achiziție a datelor s-a constituit în jurul unui *calculator personal* cu microprocesor Pentium, 32 MB memorie internă și slot de extensie pentru placa de achiziție de tip PCI, mediul de lucru utilizat fiind Matlab.

Accelerometrele sunt plasate în punctele critice ale structurii, pe cele trei bare ale manipulatorului, care execută mișcări în planul vertical, și anume în efortul final și cât mai aproape de articulațiile motoare. Mărimile înregistrate și memorate reprezintă valori ale accelerației la momente discrete de timp. Eliminarea zgomotelor se realizează prin utilizarea unui *filtru digital* de tip Butterworth, de ordinul cinci, care permite trecerea componentelor semnalului cu frecvența între 5 Hz și 500 Hz.

Unul din aspectele importante în studiul experimental al dinamicii structurilor este modul de alegere a mărimii sau cantității care să caracterizeze răspunsul dinamic al acestora. Această caracteristică trebuie să asigure posibilitatea comparării comportamentului dinamic a două structuri asemănătoare, precum și a repetabilității experimentului. Se propune pentru caracterizarea vibrației structurii abaterea medie pătratică a semnalului eșantionat în intervalul de timp studiat, care va fi *funcția obiectiv* în experiment. Stabilirea semnificației factorilor de influență cu acțiune simultană asupra funcției obiectiv analizate sau urmărite în experiment se face prin *analiză dispersională*, numită și analiză a varianței sau ANOVA. Factorii independenți care s-au luat în considerare sunt *poziția punctului de măsurare* în cadrul structurii mecanice a manipulatorului și *forța de excitație*. Pentru primul factor s-au considerat trei nivele, iar pentru factorul al doilea două nivele, deci experimentul este bifactorial, cu șase celule, în fiecare celulă executându-se cinci determinări nerandomizate.

Pe baza datelor de intrare, cu ajutorul subprogramului corespunzător, se determină *frecvențele naturale* de vibrație ale structurii manipulatorului aflat în poziție fixă în spațiul de lucru. Aceste frecvențe deduse teoretic se referă la mișcarea vibratorie neamortizată. Pentru mișcarea reală, amortizată, identificarea *pseudofrecvențelor* se realizează prin descompunerea semnalului utilizând un *algoritm de tip FFT*. Utilizând formula de legătură între frecvența naturală a vibrației neamortizate

și pseudopulsația vibrației reale amortizate se pot deduce *coeficienții de amortizare* pe moduri de vibrație.

Rezultatele numerice obținute pentru amplitudinile accelerațiilor se compară cu datele înregistrate experimental prin reprezentarea grafică a acestora. *Amplitudinea accelerației și timpul de amortizare* a vibrației sunt parametri care pot caracteriza corespondența numeric - experimental. Urmărind acești doi parametri, se observă o corelație bună între valorile calculate și măsurate, ceea ce confirmă validitatea modelelor dinamic și numeric propuse în cadrul tezei.

## BIBLIOGRAFIE

1. Adamiec-Wojcik, I., ș.a., *Application of a Rigid Finite Element Method in Dynamic Analysis of Plane Manipulators*, Mech. Mach. Theory, Vol. 28, No. 3, pp. 327-334, 1993
2. Ahmad A., Smaili, *A Three-node Finit Beam Element for Dynamic Analysis of Planar Manipulators with Flexible Joints*, Mech. Mach. Theory, Vol. 28, No. 2, pp. 193-206, 1993.
3. Amirouche, F.M.L., ș.a., *An Explicit Matrix Formulation of the Dynamical Equations for Flexible Multibody Systems : a Recursive Approach*, Computers and Structures, Vol 46, No. 2, pp.311-321, 1993.
4. Ananthasuresh, G., ș.a. *Designing Compliant Mechanisms*, Mechanical Engineering, pp. 93-96, November, 1995.
5. Barabas, T., *Comanda, conducerea și programarea roboților. Îndrumător de proiect*, Universitatea din Oradea, 1996.
6. Barabas, T., *Asupra structurii informaționale a mini-sistemului CIM2000*, Analele Universității din Oradea, Fascicola Electrotehnică și Sisteme de Calcul, 1998.
7. Beer, G., Watson, J.O., *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers*, John Wiley & Soons Limited, Chichester, 1992.
8. Blumenfeld, M., *Introducere în metoda elementelor finite*, Editura Tehnică, București, 1995
9. Boutaghou, Z.-E., Tamma, K.K., Erdman, A.G., *Continuous/Discrete Modeling and Analysis of Elastic Planar Multi-body Systems*, Computers & Structures, Vol 38, No. 5/6, pp 605-613, 1991.
10. Brîndeu, L., Tămășan, C., Anghelescu, V., Tămășdan, M., *Metode și tehnici de calcul în teoria vibrațiilor*, Editura M&H srl, Timișoara, 1992.
11. Brîndeu, L., ș.a., *Mecanică și vibrații. Culegere de probleme pentru calculator*, Centrul de multiplicare UTT, Timișoara, 1993.
12. Buculei, M., Rindeu, P., *Modelarea computațională a sistemelor mecanice mobile*, Editura Universitaria, Craiova, 1995.
13. Buzdugan, Gh., Fetcu, L., Radeș, M., *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Editura Academiei Române, București, 1975.
14. Buzdugan, Gh., Fetcu, L., Radeș, M., *Vibrații mecanice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
15. Buzdugan, Gh., Mihăilescu, E., Radeș, M., *Măsurarea vibrațiilor*, Editura Academiei Române, București, 1979.
16. Buzdugan, Gh., *Rezistența materialelor*, Editura Academiei Române, București, 1986

17. Cicală, E.F., *Metode de prelucrare statistică a datelor experimentale*, Editura Politehnica, Timișoara, 1999.
18. Cotet, F., *Les bases de la programmation avec LabView*, P. Renard-N.I.F., Paris, 1992.
19. Constantinescu, I., Dăneț, G.V., *Metode noi pentru calcule de rezistență*, Editura Tehnică, București, 1989.
20. Cutkosky, M.R., Kao, I., *Computing and Controlling the Compliance of a Robotic Hand*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 5, No. 2, pp. 151-165, April 1989.
21. Dally, J.W., Riley, W.F., McConnell, K.G., *Instrumentation for Engineering Measurements*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1990.
22. Davidoviciu, A., Drăgănoiu, Gh., Moangă, A., *Modelarea, simularea și comanda manipuloarelor și roboților industriali*, Editura Tehnică, București, 1986.
23. Davis, J.L., *Finite Difference Methods in Dynamics of Continuous Media*, MacMillian Publishing Company, London, 1986.
24. Dincă, G., *Metode variaționale și aplicații*, Editura Tehnică, București, 1980.
25. Dodescu, Gh., *Metode numerice în algebră*, Editura Tehnică, București, 1979.
26. Drăgulescu, D., *Dinamica roboților*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1997.
27. Fhay, K., Pérez, E., *Fast Fourier Transforms and Power Spectra in LabVIEW*, National Instruments Corporation, Application Note 040.
28. Faur, N., Dumitru, I., *Metode numerice în rezistența materialelor. Diferențe și elemente finite*, Universitatea Politehnica Timișoara, 1997.
29. Gârbea, D., *Analiză cu elemente finite*, Editura Tehnică, București, 1990.
30. Gafițeanu, M., Mihalache, N., Poterașu, V.F., *Elemente finite și de frontieră cu aplicații la calculul organelor de mașini*, Editura Tehnică, București, 1987.
31. Gafițeanu, M., ș.a., *Vibrații și zgomote*, Editura Junimea, Iași, 1980.
32. Ghinea, M., Firețeanu, V., *MATLAB. Calcul numeric-grafică-aplicații*, Editura Teora, București, 1997.
33. Griffiths, D.V., Smith, I.M., *Numerical Methods for Engineers. A Programming Approach*, Blackwell Scientific Publications, London, 1991.
34. Ignea, A., *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice*, Editura de Vest, 1996.
35. Ilea, H., *Analiză numerică și determinări experimentale în inginerie*, Transilvania Press, Cluj-Napoca, 1996.
36. Ispas, C., Simion, F.-P., *Vibrațiile mașinilor-unelte. Teorie și aplicații*, Editura Academiei Române, București, 1986.
37. Ivan, M., *Bazele calculului linear al structurilor*, Editura Facla, Timișoara, 1985.



38. Harris, C., Crede, C., *Șocuri și vibrații*, Vol. I, II, III, Editura Tehnică, București, 1968.
39. Harrison, J.C., *An Experimental Methods for Appraisal and Comparison of Vibration in High-Rise Elevator Cars*, Elevator Word, June 1998.
40. Huang, S.-J., Wang, T.-Y., *Structural Dynamics Analysis of Spatial Robots with Finite Element Approach*, Computers & Structures. Vol. 46, No. 4, pp. 703-716, 1993.
41. Marinescu, Gh., Rizzoli, I., Popescu, I., Ștefan, C., *Probleme de analiză numerică rezolvate cu calculatorul*, Editura Academiei Române, București, 1987.
42. McKerrow, P.J., *Introduction to Robotics*, Addison-Wesely Publishing Company, Sydney, 1991.
43. Moszynski, K., *Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare*, Editura Tehnică, București, 1973.
44. Munteanu, M., Aldica, C.Gh., Radu, Gh.N., *Metoda elementelor finite. Suport de curs și laborator*, Universitatea Transilvania Brașov, 1997.
45. Munteanu, M., *Metode numerice în dinamica structurilor mecanice. Suport de curs și laborator*, Universitatea Transilvania Brașov, 1998.
46. Mușat, D., Dimofte, A., *Ecuațiile lui Lagrange în cazul mișcării relative cu aplicare la elasto-dinamica mecanismelor cu bare deformabile*, St. Cerc. Mec. Apl., Tom 51, Nr. 2, p. 129-140, 1992.
47. Olgac, N., Jalili, N., *Modal Analysis of Flexible Beams with Delayed Resonator Vibration Absorber : Theory and Experiments*, Journal of Sound and Vibration, pp. 1-25, 1998.
48. Pacoste, C., Stoian, V., Dubină, D., *Metode moderne în mecanica structurilor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1988.
49. Pascariu, I., *Elemente finite. Concepții-aplicații*, Editura Militară, București, 1985.
50. Pele, A.V., *Tip de element finit pentru analiza dinamică a manipuloarelor plane*, Zilele Academice Timișorene, Subcomisia de Acustică, Timișoara, 1995.
51. Pele, A.V., *Vibrațiile barelor drepte*, Referatul 1 în cadrul doctoratului, Timișoara, 1995.
52. Pele, A.V., *Metoda elementului de frontieră și a diferențelor finite în analiza mecanicii structurilor*, Referatul 2 în cadrul doctoratului, Timișoara, 1998.
53. Pele, A.V., *Proceduri numerice în metoda elementului finit*, Referatul 3 în cadrul doctoratului, Timișoara, 1998.
54. Pele, A.V., *Modelul dinamic numeric al manipulatorului plan*, Analele Universității din Oradea, Fascicola Mecanica, p. 133-138, 1999.
55. Pele, A.V., *Răspunsul dinamic al manipulatorului plan. Modelul linear*, Analele Universității din Oradea, Fascicola Mecanica, p. 121-132, 1999.
56. Pele, A.V., *Răspunsul dinamic al manipulatorului plan. Modelul nelinear*, Analele Universității din Oradea, Fascicola Mecanica, p. 127-132, 1999.



57. Penny, A., *Scientific Instruments Go Virtual*, Scientific Computing World, pp 21-26, October 1995.
58. Popescu, H., Chiroiu, V., *Calculul structurilor optimale*, Editura Academiei Române, București, 1981.
59. Posea, N., Talle, V., Florian, V., Tocaci, E., *Mecanică aplicată pentru ingineri*, Editura Tehnică, București, 1984.
60. Posea, N., Lambrescu, I., *Procedee teoretice și determinări experimentale privind pulsațiile proprii ale cadrelor plane cu masa distribuită*, St. Cerc. Mec. Apl., Tom 53, Nr. 5, p. 479-490, 1994.
61. Poterașu, V.F., Mihalache, N., Mangeron, D., *Metode numerice în elasticitate și plasticitate*, Vol. I, Editura Academiei Române, București, 1993.
62. Poterașu, V.F., Mihalache, N., *Elemente de contur*, Editura Militară, București, 1992.
63. Roșca, G., Pele, A.V., *Analiza cu elemente finite a structurilor flexibile din bare*, Analele Universității din Oradea, Fascicula Mecanica, p. 107-118, 1995.
64. Ripianu, A., Popescu, P., Bălan, B., *Mecanică tehnică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
65. Ryu, J., Kim, S.-S., Kim, S.-S., *An Efficient Computational Method for Dynamic Stress Analysis of Flexible Multibody Systems*, Computers & Structures, Vol. 42, No. 6, pp 969-977, 1992.
66. Salvadori, M.G., Baron, M.L., *Metode numerice în tehnică*, Editura Tehnică, București, 1972.
67. Sandi, H., *Elemente de dinamica structurilor*, Editura Tehnică, București, 1983.
68. Silaș, Gh., Pele, A.V., *Simularea numerică a răspunsului dinamic al structurilor compliantă*, Buletinul celei de-a IX Conferințe de Vibrații Mecanice, pp.1-6, Timișoara, 1999.
69. Silaș, Gh. Groșanu, I., *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
70. Silaș, Gh., *Mecanică. Vibrații mecanice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1967.
71. Silaș, Gh., Rădoi, Gh., Brîndeu, L., Hegedus, A., *Culegere de probleme de vibrații mecanice*, Vol. I, II, Editura Tehnică, București, 1967, 1973.
72. Silaș, Gh., Brîndeu, L., *Sisteme vibropercutante*, Editura Tehnică, București, 1986.
73. Simionescu, I., ș.a., *Metode numerice în tehnică. Aplicații în Fortran*, Editura Tehnică, București, 1995.
74. Smith, S.W., *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, California Technical Publishing, San Diego, 1999.
75. Starețiu, I., *Sisteme de prehensiune*, Editura Lux Libris, Brașov, 1996.

## BIBLIOGRAFIE

76. Sunada, W.H., Sunada, W., *The Application of Finite Element Methods to the Dynamic Analysis of Flexible Spatial and Co-planar Linkage Systems*, Journal of Mechanical Design, Vol. 103, July, 1991.
77. Tănăsescu, T.F., Stanciu, V., Niți, S., Nițu, C., *Agenda Tehnică*, Editura Tehnică, București, 1990.
78. Teodorescu, P.P., Ilie, V., *Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile*, Vol. I, II, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1979.
79. Wilson, E.L., *Articles on Numerical Techniques used in SAP2000, ETABS and SAFE*, Computers and Structures, 1998.
80. Zieniewicz, O.C., Taylor, R.L., *La méthode des éléments finits*, ANFOR, Paris, 1991.
81. \*\*\* *An Introduction to COSMOS/M Finite Element*, Structural Research & Analysis Corporation, Santa Monica, 1989.
82. \*\*\* *Industrial Micro-Robot System Model RV-M1. Instruction Manual*, Mitsubishi Corporation, 1990.
83. \*\*\* *Data Acquisition (DAQ) Fundamentals*, National Instruments Corporation, Application Note 007.
84. \*\*\* *Design-Expert 5.0 Reference Manual*, Stat-Ease, Inc., Minneapolis, 1998.
85. \*\*\* *Frequency Analysis*, Brüel & Kjær, Nærum, 1985.
86. \*\*\* *MATLAB Reference Guide*, The MathWorks, Inc., 1992.
87. \*\*\* *MATLAB Signal Processing Toolbox User's Guide*, The MathWorks Inc., 1998.
88. \*\*\* *NEWPORT CATALOG. Research, Industry, Education*, 1990.
89. \*\*\* *PCI-1200 User Manual. Multifunctional I/O Board for PCI Bus Computers*, National Instruments Corporation, 1997.
90. \*\*\* *SIMPAK - Contributions of the Multybody Dynamics Group*, Institute of Robotics and System Dynamics, German Aerospace Center, 1996.
91. \*\*\* *RIV Revista de instrumentație virtuală*, nr. 1-7, Editura MediaMira, Cluj-Napoca, 1999.

# INDEX

## CAPITOLUL 1

compliantă	1-2, 1-7	mecanisme compliantă	1-3
activă	1-6	proiectarea orientată spre	
pasivă	1-6	eliminarea asamblării	1-3
curba de compliantă	1-7, 1-8	robotul	1-4
manipulator	1-4	structuri adaptive	1-3
mecanică computațională	1-1		

## CAPITOLUL 2

acelația	2-7	matricea	2-7
lineară	2-7	de transformare de coordonate	2-7
unghiulară	2-7	maselor concentrate	2-15
analiza	2-18	consistentă a maselor	2-15, 2-19
cvasistatică	2-18	de amortizare giroscopică	2-15, 2-20
modală	2-18	de rigiditate	2-13, 2-14
coeficientul lui Timoshenko	2-4, 2-11	de rigiditate centrifugală	2-15, 2-20
constantele lui Rayleigh	2-18	de rigiditate globală	2-17
coordonatele generalizate	2-5	de rigiditate structurală	2-19
Coriolis	2-16	forțelor	2-15
deplasări	2-6	globală a maselor	2-17
de rotație	2-6, 2-10	globală de amortizare	2-17
longitudinale	2-6, 2-10	matricile caracteristice	2-17
transversale	2-6, 2-10	metoda de amortizare proporțională Rayleigh	
ecuațiile	2-15		2-17
de mișcare	2-15	operatorul iacobian	2-11, 2-12
dinamice ale mișcării	2-16	Rayleigh	2-18
lui Lagrange	2-15	sistemul de referință	2-5
element finit	2-2, 2-5	global	2-5
de tip bară cu două noduri	2-10	local	2-5, 2-9
de tip bară cu trei noduri	2-11	natural	2-9
izoparametric	2-5, 2-9	Timoshenko	2-2, 2-4
energia	2-11	valori proprii	2-18
cinetică	2-14	viteza	2-7
de deformație	2-11	de operare	2-1, 2-2
Euler-Bernoulli	2-2, 2-4	lineară	2-7
funcții de formă	2-9, 2-10	unghiulară	2-7

## CAPITOLUL 3

acelația absolută	3-8	grade de libertate	3-16
condensare dinamică	3-16	principale	3-16
datele de intrare	3-40	secundare	3-17
diferențe finite regresive	3-23, 3-29	Guyan	3-16
ecuațiile de mișcare	3-13	iterații succesive	3-35
funcții de conducere	3-2, 3-7	matricea de transformare de coordonate	3-35
Gauss	3-16	mediul integrat de programare Matlab	3-39
grad de compliantă	3-15	metoda amortizării proporționale	3-21

metoda Hubolt .....	3-23	traectoria .....	3-31
metoda iterației pe subspații .....	3-19	planificată .....	3-31
răspuns dinamic .....	3-1	reală .....	3-31
Rayleigh .....	3-21	viteza absolută .....	3-7
retrosubstituție .....	3-18		

## CAPITOLUL 4

analiza dispersională .....	4-10	microrobotul industrial MovemasterEX .....	4-1
Butterworth .....	4-6, 4-8	placa de achiziție .....	4-6
condiționarea semnalului .....	4-5	rata de eșantionare .....	4-7
experiment bifactorial .....	4-11	sistem de achiziție a datelor .....	4-3
factorii independenți .....	4-11	spațiul de lucru .....	4-2
Fast Fourier Transform .....	4-15	traductorul .....	4-4
filtru digital .....	4-8	valorile frecvențelor naturale .....	4-13
forma graficului accelerațiilor .....	4-13	vitezele de operare .....	4-2
funcția obiectiv .....	4-11		
limbajul Visual C .....	4-7		