

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" TIMIȘOARA
Facultatea de Electronică și Telecomunicații

**ÎMBUNĂTĂȚIREA RAPORTULUI SEMNAL PE
ZGOMOT ÎN CAZUL PERTURBAȚIILOR DE
BANDĂ LARGĂ PRIN PROCEDEE DE
DECORELARE**

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

TEZĂ DE DOCTORAT

Coordonator științific:
Prof. dr. ing. VASILE STOICA

Autor:
ing. BERINDE FLORIN

CAPITOLUL 1

SCENARIILE DE SEPARARE A SURSELOR DE SEMNAL

1.1. INTRODUCERE

Problema separării semnalelor provenite de la surse diferite și care se însumează la intrările receptorilor este un subiect larg tratat în literatură. Se poate spune că este o problemă clasică.

Nu există o metodă general valabilă în acest domeniu, ci mai degrabă, câte un set de metode care pot da rezultate în funcție de scenariul concret în care se studiază fenomenul.

Astfel, spre exemplu, pentru cazul cel mai simplu, al separării semnalelor provenite de la două surse, se pot imagina următoarele scenarii:

1. Semnalele care provin de la două surse sunt recepționate și însumate de un singur receptor, ca în Fig. 1.

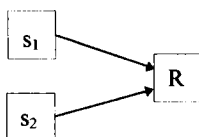


Fig. 1.1. Scenariu cu două surse și un singur receptor.

Într-un astfel de scenariu, singurele informații care pot fi valorificate pentru “reliefarea” unui semnal în raport cu celălalt, sunt cele legate de caracteristicile proprii ale acestora. De aceea, se presupune că semnalele generate de surse pot fi modelate ca ieșiri ale unor sisteme excitate de semnale cu parametri cunoscuți, de regulă zgomot alb, și metodele de separare valorifică în mod optim deosebirile dintre parametrii acestor sisteme.

Metodele de referință folosite într-un astfel de caz sunt filtrarea Wiener și filtrarea Kalman.

Rezultatele care se obțin sunt puternic influențate de caracteristicile spectrale ale semnalelor.

2. Un salt spectaculos în calitatea separării se obține în momentul în care, pe lângă informațiile referitoare la parametrii semnalelor, se poate valorifica și informația despre fenomenul de propagare al acestora de la surse la receptori. În acest caz, de referință este scenariul Widrow [1] care introduce conceptul de reducător de zgomot adaptiv, prezentat în Fig. 1.2.

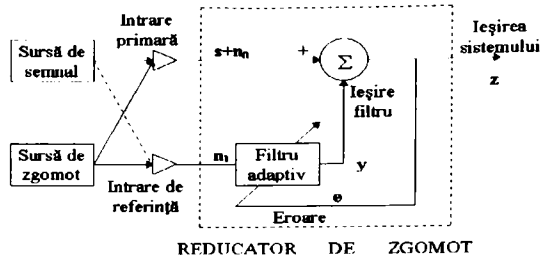


Fig. 1.2. Conceptul de reducător de zgomot adaptiv.

Un semnal s este transmis printr-un canal unui sensor, pe care îl numim *intrare primară*, care, de asemenea recepționează și un zgomot n_0 , necorelat cu semnalul s . Suma dintre semnal și zgomot, $s+n_0$, formează semnalul de la intrarea primară. Un al doilea senzor recepționează un zgomot n_1 , necorelat cu semnalul, dar corelat într-un mod necunoscut cu zgomotul n_0 . Acest senzor este numit *intrare de referință* pentru sistem. Zgomotul n_1 este filtrat pentru a produce un semnal y care se dorește a fi o replică cât mai apropiată a lui n_0 . Semnalul y este scăzut din semnalul de la intrarea primară și rezultă un semnal la ieșirea sistemului $z=s+n_0-y$.

În general, această operațiune duce la ridicarea nivelului de zgomot din semnalul de ieșire z , dar în situația folosirii unui filtru adaptiv, problema are o soluție corectă.

Se presupune că s , n_0 , n_1 , și y sunt staționare în sens larg și au medie zero.

În condițiile menționate mai sus, se cere ca filtrul adaptiv să fie guvernat de semnalul de eroare e care este egal cu z , impunându-se criteriul minimizării erorii pătratice medii. Se poate scrie:

$$z = s + n_0 - y \quad (1.1)$$

și aplicând operatorul de mediere statistică, se obține:

$$\begin{aligned} E[z^2] &= E[s^2 + (n_0 - y)^2 + 2s(n_0 - y)] = \\ &= E[s^2] + E[(n_0 - y)^2] + 2E[s(n_0 - y)] = \\ &= E[s^2] + E[(n_0 - y)^2] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Puterea semnalului $E[s^2]$ nu va fi afectată dacă filtrul este reglat să minimizeze $E[z^2]$. În consecință puterea de ieșire minimă este:

$$\min E[z^2] = E[s^2] + \min E[(n_0 - y)^2] \quad (1.3)$$

Semnalul de la ieșirea filtrului adaptiv, y , este cea mai bună estimată, în sensul minimizării erorii pătratice medii, a zgomotului primar n_0 . Mai mult, când $E[(n_0 - y)^2]$ este minimizat, $E[(z - s)^2]$ este de asemenea minimizat, întrucât din (1.1) rezultă:

$$(z - s) = (n_0 - y) \quad (1.4)$$

Adaptarea filtrului, după criteriul minimizării puterii semnalului de ieșire z , conduce la faptul că acest semnal să devină cea mai bună estimată a semnalului s pentru structura și

posibilitățile de ajustare ale filtrului adaptiv, și pentru un anumit semnal de intrare de referință, date.

Această structură de reducător de zgomot prezintă avantajul simplității. Dacă se folosește un filtru de tip F.I.R. atunci se poate aplica algoritmul L.M.S.

Prin înlocuirea criteriului de optimizare al erorii pătratic medii minime cu cel al celor mai mici pătrate, se ajunge la folosirea unor algoritmi de tip R.L.S. care au o viteză de convergență superioară algoritmului L.M.S. și pot fi folosiți cu rezultate mai bune în cazul când staționaritatea semnalelor se manifestă pe termen scurt.

Principala limitare a acestei structuri este legată de scăderea considerabilă a performanțelor de reducere a zgomotului în situația când o fracțiune a semnalului s se propagă la intrarea de referință. În acest caz, raportul densităților de putere semnal/zgomot, la ieșirea reducătorului de zgomot este egal cu inversul raportului densităților de putere semnal/zgomot de la intrarea de referință. Această limitare conduce la restrângerea ariei de aplicabilitate a structurii reducătorului de zgomot adaptiv la situații în care propagarea semnalului s la intrarea de referință este neglijabilă.

Scenariul Widrow se poate generaliza la situația când există mai multe semnale de zgomot care trebuiesc eliminate și un număr de intrări de referință linear independente care conțin mixturi de zgomote, așa cum se arată în Fig. 1.3.

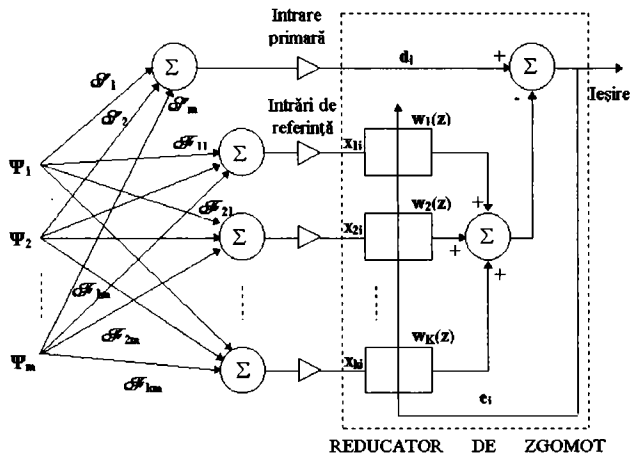


Fig. 1.3. Reducătorul de zgomot adaptiv cu referințe multiple.

În modelul prezentat în Fig. 1.3 Ψ_i reprezintă surse de semnal mutual necorelate. \mathcal{F}_i reprezintă funcțiile de transfer ale filtrelor care modelează canalele de propagare ale semnalelor Ψ_i la intrarea principală. \mathcal{F}_{ji} reprezintă funcțiile de transfer ale filtrelor care modelează canalele de propagare ale semnalelor Ψ_i la intrările de referință j .

Rezultatele de reducere a zgomotului sunt puternic influențate de funcțiile de transfer \mathcal{F}_i și \mathcal{F}_{ji} . Astfel, dacă, spre exemplu, se dorește reliefaarea semnalului provenit de la sursa Ψ_1 , atunci, pentru a se obține rezultate bune, este necesar ca funcțiile de transfer \mathcal{F}_2 la \mathcal{F}_m , precum și \mathcal{F}_{11} la \mathcal{F}_{k1} să aibă modulele neglijabile.

3. Pentru a se depăși neajunsurile principale ale scenariilor Widrow, s-au dezvoltat tehnici speciale care realizează o identificare "oarbă" a sistemelor care modelează căile de propagare ale semnalelor de la sursa de receptori și se bazează pe ipoteza că sursele sunt independente din punct de vedere statistic.

În funcție de modelul de amestec al semnalelor se identifică două categorii de tehnici:

- scenarii în care amestecul semnalelor se poate modela cu o simplă matrice de amestec care are coeficienți constanți;
- scenarii în care este necesară modelarea, cu ajutorul unor filtre, a fenomenelor de propagare ale semnalelor de la surse la receptori, unde se însumează.

În cazul a), se presupune că există N surse de semnal $s_1(n), s_2(n), \dots, s_N(n)$ independente între ele și M receptori la intrările cărora se obțin semnalele $y_1(n), y_2(n), \dots, y_M(n)$. S-a presupus că semnalele sunt numerice și n reprezintă argumentul timp.

Dacă se notează :

$$S(n) = [s_1(n) \ \dots \ s_N(n)]^T \quad (1.5)$$

și

$$Y(n) = [y_1(n) \ \dots \ y_M(n)]^T \quad (1.6)$$

atunci modelul de amestec poate fi exprimat astfel:

$$Y(n) = \mathcal{C}S(n) \quad (1.7)$$

unde \mathcal{C} este o matrice de dimensiuni $M \times N$ cu coeficienți constanți, dar necunoscuți.

În acest caz, problema care se pune este să se determine o matrice \mathcal{B} astfel ca

$$\hat{S}(n) = \mathcal{B}Y(n) \quad (1.8)$$

să fie un vector cât mai apropiat de S , dacă se poate, identic.

Acest scenariu presupune identificarea “oarbă” a matricei \mathcal{C} și tratarea sa poate fi găsită în [4], [5], de exemplu.

Principala limitare a acestui scenariu este aceea că el este aplicabil doar în cazul semnalelor care pot fi considerate de bandă îngustă sau mixarea se realizează într-un context în care fenomenul de propagare de la surse la receptori poate fi modelat printr-o simplă constantă.

În cazul b) care este aplicabil semnalelor de bandă largă, se presupune că există N surse de semnal independente între ele $s_1(n), s_2(n), \dots, s_N(n)$ și N receptori la intrările cărora se obțin semnalele $y_1(n), y_2(n), \dots, y_N(n)$. Propagarea semnalelor de la surse la receptori este modelată prin filtrele H_{ij} care au funcțiile de transfer $H_{ij}(z)$ necunoscute, adică modelul de combinare poate fi exprimat astfel:

$$Y_j(z) = \sum_{i=1}^N H_{ij}(z)S_i(z), \quad j = 1, \dots, N \quad (1.9)$$

unde $S_i(z)$ și $Y_j(z)$ sunt transformatele Z ale semnalelor $s_i(n)$ și respectiv $y_j(n)$.

Acest scenariu presupune găsirea unei metode de identificare “oarbă” a funcțiilor de transfer $H_{ij}(z)$ și de rezolvare a sistemului (1.9), în domeniul timp, în raport cu $s_i(n)$, presupunând cunoscute semnalele $y_i(n)$.

În cazul a două surse și doi receptori, scenariul de însumare al semnalelor este prezentat în Fig. 1.4, iar în cazul a N surse și N receptori scenariul de însumare este prezentat în Fig. 1.5:

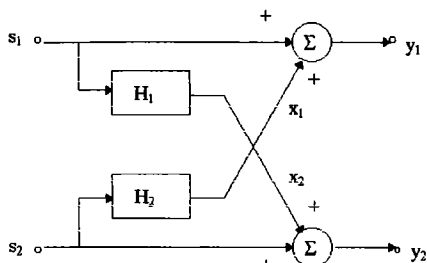


Fig. 1.4 Modelul de însumare al semnalelor provenite de la două surse.

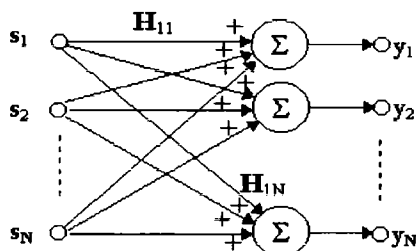


Fig. 1.5. Modelul de însumare al semnalelor provenite de la N surse.

În Fig. 1.4. H_1 și H_2 reprezintă filtrele care modelează canalele de propagare încrucișată ale semnalelor. Propagarea directă este modelată, pentru început, printr-o constantă egală cu unu.

În Fig. 1.5, săgețile care pleacă de la sursele s_i și ajung la sumatoarele Σ corespunzătoare receptorilor y_j , reprezintă filtrele H_{ij} , care modelează canalele de propagare ale semnalelor.

Se observă că, în timp ce, în timp ce, semnalele $s_i(n)$ sunt independente între ele, după însumările care au loc, semnalele $y_j(n)$ nu mai sunt independente între ele, ele devin corelate.

Sistemul care, din prelucrarea semnalelor corelate $y_j(n)$, permite obținerea unor semnale care sunt replici (eventual distorsionate) ale semnalelor $s_i(n)$, care sunt independente între ele, adică necorelate, se numește *decorelator*.

Scopul tezei este de a prezenta modalități de rezolvare a problemei puse de scenariul de la cazul b).

Se va trata separat cazul $N=2$, care prezintă o importanță deosebită în sine. Acest caz, pe lângă proprietățile cu caracter general, valabile și pentru $N>2$, mai are și altele particulare, care vor fi evidențiate. Acest caz este important și prin simplitatea sa, deoarece permite o investigare teoretică mai profundă.

În teză sunt prezentate și rezultate referitoare la cazul $N>2$. Sunt prezentate condițiile în care separarea este posibilă, precum și algoritmi de separare.

1.2. ORGANIZAREA TEZEI

Teza cuprinde două părți de bază concentrate în capitolele 2 și 3.

Capitolul 2 este destinat prezentării principiilor care stau la baza separării semnalelor provenite de la surse statistic independente, așa cum au fost studiate din bibliografia prezentată la sfârșitul lucrării.

Secțiunea 2.1 prezintă implicațiile proprietății de independență statistică a semnalelor surselor în construirea de criterii de separare a lor.

Secțiunea 2.2 prezintă schemele decorelatoarelor destinate separării semnalelor a două surse din mixturile lor recepționate de doi captatori. Se analizează proprietățile structurale ale acestor scheme.

Secțiunea 2.3 este destinată prezentării principiilor de realizare a algoritmilor de separare care folosesc criteriile analizate în Secțiunea 2.1 și schemele de decorelatoare prezentate în Secțiunea 2.2. Sunt prezentați algoritmi întâlniți în literatura studiată.

Secțiunea 2.4 prezintă algoritmi bazați pe principiul plauzibilității maxime, principiu care este o alternativă la principiul anulării cumulațiilor, prezentat în Secțiunea 2.3.

Secțiunea 2.5 prezintă un algoritm de decorelare derivat din reducătorul de zgomot adaptiv L.M.S., algoritm important prin simplitatea sa, simplitate care permite investigații matematice mai profunde asupra fenomenului de decorelare.

Capitolul 3 este destinat în întregime prezentării contribuției personale la studierea problemei separării semnalelor cu ajutorul decorelatoarelor, atât pentru cazul când numărul N al surselor de semnal este doi, cât și în cazul când $N > 2$.

Secțiunea 3.1 este destinată analizei arhitecturilor posibile de decorelatoare pentru cazul $N > 2$ și sunt prezentate limitările de natură structurală ale acestor decorelatoare. Se demonstrează că singura arhitectură posibilă de decorelator, pentru separarea a N surse statistic independente, cu $N > 2$, este cea a decorelatorului cu propagare înapoi. Din acest motiv cercetările mele s-au canalizat pe studierea unor algoritmi aplicabili acestui tip de decorelator.

Secțiunea 3.2, are cea mai mare ca întindere și prezintă algoritmul pe care l-am denumit, "algoritm cu sistem de gradienti parțiali", util în cazul separării a două semnale cu ajutorul decorelatorului cu propagare înapoi. Se aprofundează studiul acestui algoritm pentru $N=2$ deoarece dificultățile de ordin matematic sunt mai reduse decât în cazul când N este oarecare și în felul acesta este posibil să se tragă concluzii care se pot extinde și la $N > 2$. Pentru cazul $N=2$ acest algoritm se dovedește a fi competitiv. Algoritmul acesta este o contribuție proprie, nu se găsește în literatura de specialitate studiată. A fost experimentat cu semnale reale, de tip semnal vocal și muzică și s-au obținut performanțe de regim tranzitoriu de ordinul secundelor sau chiar fracțiuni de secundă.

Secțiune 3.3 este destinată prezentării formei generalizate pentru N oarecare a algoritmului cu sistem de gradienti parțiali. Acest "algoritm cu sistem de gradienti parțiali generalizat" îl consider de asemenea ca fiind o creație originală.

Capitolul 4 este destinat concluziilor și prezentării unor probleme al căror studiu și eventual rezolvare poate constitui o prelungire firească a subiectului tratat în această lucrare.

Teza se încheie cu două anexe în care sunt prezentate demonstrații matematice ale unor probleme puse în secțiunile 3.2 și 3.3 și care scoase din textul original, permit o mai fluentă prezentare a ideilor.

CAPITOLUL 2

SEPARAREA SURSELOR STATISTIC INDEPENDENTE ȘI DE BANDĂ LARGĂ -CRITERII, SISTEME DE SEPARARE, ALGORITMI-

În acest capitol sunt prezentate principalele probleme legate de separarea surselor de semnale de bandă largă, captate de mai mulți receptori, așa cum le-am întâlnit în literatură.

2.1 IMPLICAȚII ALE INDEPENDENȚEI STATISTICE A PROCESELOR ALEATOARE ÎN OBTINEREA DE CRITERII DE SEPARARE A SEMNALELOR

În această secțiune se analizează noțiunea de independență statistică a două sau mai multor procese aleatoare și se demonstrează proprietatea fundamentală a cumulațiilor de a se anula când au ca argumente procese independente. Această proprietate stă la baza algoritmilor de separare a semnalelor.

Pentru aceasta se pornește de la definiția variabilelor aleatoare independente[18]:

Definiția 1: Fie $\mathcal{F} = f(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ o familie de variabile aleatoare.

Vom spune că \mathcal{F} este o familie de variabile aleatoare independente în sensul lui

Stainhaus-Kaç dacă pentru orice parte finită $J \subset I$ de mulțimi boreliene $(B_\alpha) \subset B'$ avem:

$$P\left(\bigcap_{\alpha \in J} f_\alpha^{-1}(B_\alpha)\right) = \prod_{\alpha \in J} P(f_\alpha^{-1}(B_\alpha)) \quad (2.1.1)$$

Definiția 1 poate fi particularizată pentru cazul a două variabile aleatoare astfel:

Definiția 2: Două variabile aleatoare $f_1(\xi)$ și $f_2(\xi)$ ale aceluiași câmp de probabilitate $\{E, \mathcal{K}, P\}$ sunt independente, dacă, pentru orice pereche de mulțimi boreliene B_1 și B_2 avem:

$$P(f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2)) = P(f_1^{-1}(B_1)) \cdot P(f_2^{-1}(B_2)) \quad (2.1.2)$$

În legătură cu variabilele aleatoare independente există următoarea teoremă:

Teorema 1: Fie f și g două variabile aleatoare cu funcțiile lor caracteristice φ și respectiv ψ , și:

$$\chi(t, s) = \int_E e^{i(t \cdot f(\xi) + s \cdot g(\xi))} dP(\xi) \quad (2.1.3)$$

Variabilele aleatoare f și g sunt independente în sensul lui Stainhaus-Kaç dacă și numai dacă

$$\chi(t, s) = \varphi(t) \cdot \psi(s) \quad (2.1.4)$$

pentru orice pereche de numere reale (t, s) .

Logaritmând relația (2.1.4) se obține:

$$\log \chi(t, s) = \log \varphi(t) + \log \psi(s) \quad (2.1.5)$$

relație care trebuie să fie îndeplinită $\forall t, s \in R$.

În continuare se exprimă logaritmii din relația (2.1.5) în funcție de dezvoltările lor în serie Taylor în jurul punctului $t=0, s=0$:

$$\log \varphi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\log \varphi(t))^{(j)} \Big|_{t=0} \cdot t^j \quad (2.1.6)$$

$$\log \psi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\log \psi(s))^{(j)} \Big|_{s=0} \cdot s^j \quad (2.1.7)$$

$$\log \chi(t, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j C_j^k \frac{\partial^j}{\partial t^{j-k} \partial s^k} (\log \chi(t, s)) \Big|_{t=0, s=0} \cdot t^{j-k} \cdot s^k \quad (2.1.8)$$

Introducând (2.1.6), (2.1.7) și (2.1.8) în (2.1.5) și egalând termenii de rang j se obține:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^j C_j^k \frac{\partial^j}{\partial t^{j-k} \partial s^k} (\log \chi(t, s)) \Big|_{t=0, s=0} \cdot t^{j-k} \cdot s^k &= \\ &= \frac{\partial^j}{\partial t^j} (\log \varphi(t)) \Big|_{t=0} \cdot t^j + \frac{\partial^j}{\partial s^j} (\log \psi(s)) \Big|_{s=0} \cdot s^j \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Pentru ca relațiile (2.1.9) să fie satisfăcute $\forall t, s \in R$, este necesar și suficient ca următoarele trei relații să aibe loc simultan:

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} (\log \chi(t, s)) \Big|_{t=0, s=0} = \frac{\partial^j}{\partial t^j} (\log \varphi(t)) \Big|_{t=0}, \quad \forall j \in N \quad (2.1.10)$$

$$\frac{\partial^j}{\partial s^j} (\log \chi(t, s)) \Big|_{t=0, s=0} = \frac{\partial^j}{\partial s^j} (\log \psi(s)) \Big|_{s=0}, \quad \forall j \in N \quad (2.1.11)$$

$$\frac{\partial^j}{\partial t^{j-k} \partial s^k} (\log \chi(t, s)) \Big|_{t=0, s=0} = 0, \quad \forall j \in N, j > 1, k = 1, \dots, j-1 \quad (2.1.12)$$

Fie $\{x_1, \dots, x_N\}$ N variabile aleatoare. Plecând de la funcția caracteristică:

$$\Phi(\omega_1, \dots, \omega_N) = E[\exp(i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_N x_N))] \quad (2.1.13)$$

unde $E[\cdot]$ este operatorul de mediere statistică, și de la logaritmul acesteia:

$$\Psi(\omega_1, \dots, \omega_N) = \log \Phi(\omega_1, \dots, \omega_N) \quad (2.1.14)$$

se definesc momentele și cumulanții acestei mulțimi de variabile aleatoare, ca fiind coeficienții dezvoltărilor în serii Taylor ale funcțiilor Φ și respectiv Ψ , astfel:

$$mom(x_1^{k_1}, \dots, x_N^{k_N}) = (-i)^K \frac{\partial^K}{\partial \omega_1^{k_1} \dots \partial \omega_N^{k_N}} \Phi(\omega_1, \dots, \omega_N), \quad \sum_{l=1}^N k_l = K \quad (2.1.15)$$

$$cum(x_1^{k_1}, \dots, x_N^{k_N}) = (-i)^K \frac{\partial^K}{\partial \omega_1^{k_1} \dots \partial \omega_N^{k_N}} \Psi(\omega_1, \dots, \omega_N), \quad \sum_{l=1}^N k_l = K \quad (2.1.16)$$

În virtutea relației de definiție (2.1.16), relația (2.1.12) se poate scrie astfel:

$$cum(f^{j-k}, g^k) = 0, \quad \forall j \in N, j > 1, k = 1, \dots, j-1 \quad (2.1.17)$$

și exprimă o proprietate fundamentală a cumulanților a două variabile aleatoare independente.

Dacă, în locul unor simple variabile aleatoare f și g , se consideră două procese aleatoare $x_1(n)$ și $x_2(n)$, în contextul definițiilor de independență statistică ale variabilelor aleatoare, *procesele $x_1(n)$ și $x_2(n)$ se numesc independente, dacă relația*

$$P(x_1(n) \cap x_2(m)) = P(x_1(n)) \cdot P(x_2(m)) \quad (2.1.18)$$

are loc pentru orice pereche (n, m) .

În consecință, în cazul a două procese aleatoare independente, relațiile

$$cum(x_1^{j-k}(n), x_2^k(m)) = 0, \quad \forall j \in N, j > 1, k = 1, \dots, j-1 \quad (2.1.19)$$

au loc pentru orice pereche (n, m) .

Trebuie subliniat faptul că teoremele exprimate de relațiile (2.1.17) și respectiv (2.1.19) au și reciproce. Dacă cele două relații sunt îndeplinite $\forall j \in N, j > 1, k = 1, \dots, j-1$ și în cazul relației (2.1.19) și pentru orice pereche (n, m) , atunci variabilele aleatoare f și g , respectiv procesele aleatoare $x_1(n)$ și $x_2(m)$ sunt independente.

În continuare ne propunem să generalizăm relațiile (2.1.17) și (2.1.19) la N variabile, respectiv, procese aleatoare.

Fie $\{x_1, \dots, x_N\}$, N variabile aleatoare independente. Atunci funcția caracteristică N dimensională (2.1.13) îndeplinește următoarea condiție:

$$\Phi(\omega_1, \dots, \omega_N) = \prod_{j=1}^N \Phi_j(\omega_j) \quad (2.1.20)$$

unde

$$\Phi_j(\omega_j) = E[\exp(i \cdot x_j \cdot \omega_j)] \quad (2.1.21)$$

Procedându-se ca și în cazul $N=2$, se ajunge la următoarele relații care le generalizează pe (2.1.10) la (2.1.12):

$$\left. \frac{\partial^j}{\partial \omega_k^j} \log \Phi(\omega_1, \dots, \omega_N) \right|_{\omega_1=0, \dots, \omega_N=0} = \left. \frac{\partial^j}{\partial \omega_k^j} \log \Phi_k(\omega_k) \right|_{\omega_k=0}, \quad \forall j, \forall k = 1, \dots, N \quad (2.1.22)$$

$$\left. \frac{\partial^j}{\partial \omega_1^{j_1} \dots \partial \omega_N^{j_N}} \log \Phi(\omega_1, \dots, \omega_N) \right|_{\omega_1=0, \dots, \omega_N=0} = 0, \quad \forall j > 1, \sum_{l=1}^N j_l = j, j_l \neq j, \exists j_{l_1}, j_{l_2} \neq 0 \quad (2.1.23)$$

Din relația (2.1.23) rezultă că în cazul a N variabile aleatoare independente sunt satisfăcute toate relațiile:

$$\text{cum}(x_1^{j_1}, \dots, x_N^{j_N}) = 0, \quad \forall j > 1, \sum_{l=1}^j j_l = j, j_l \neq j, \exists j_{l_1}, j_{l_2} \neq 0 \quad (2.1.24)$$

Dacă în locul variabilelor aleatoare $\{x_1, \dots, x_N\}$ considerăm procese aleatoare, adică x_j sunt funcții de timp, relațiile (2.1.24) vor fi îndeplinite și pentru orice combinație de indici de timp, adică:

$$\text{cum}(x_1^{j_1}(n_1), \dots, x_N^{j_N}(n_N)) = 0, \quad \forall j > 1, \sum_{l=1}^j j_l = j, j_l \neq j, \exists j_{l_1}, j_{l_2} \neq 0, \forall n_1, \dots, n_N \quad (2.1.25)$$

Fie acum două mulțimi de variabile aleatoare $\{x_1, \dots, x_K\}$ și $\{x_{K+1}, \dots, x_N\}$ care au proprietatea că variabilele componente ale fiecăreia dintre mulțimi, luate în parte, pot fi dependente între ele, dar variabilele fiecăreia dintre mulțimi sunt independente în raport cu variabilele celeilalte mulțimi. În aceste condiții se poate scrie:

$$P(\{x_1, \dots, x_K\} \cap \{x_{K+1}, \dots, x_N\}) = P(\{x_1, \dots, x_K\}) \cdot P(\{x_{K+1}, \dots, x_N\}) \quad (2.1.26)$$

Se definesc funcțiile caracteristice:

$$\Phi(\omega_1, \dots, \omega_K, \omega_{K+1}, \dots, \omega_N) = E[\exp(i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_K x_K + \omega_{K+1} x_{K+1} + \dots + \omega_N x_N))] \quad (2.1.27)$$

$$\Phi_1(\omega_1, \dots, \omega_K) = E[\exp(i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_K x_K))] \quad (2.1.28)$$

$$\Phi_2(\omega_{K+1}, \dots, \omega_N) = E[\exp(i(\omega_{K+1} x_{K+1} + \dots + \omega_N x_N))] \quad (2.1.29)$$

și logaritmiile lor:

$$\Psi(\omega_1, \dots, \omega_K, \omega_{K+1}, \dots, \omega_N) = \log \Phi(\omega_1, \dots, \omega_K, \omega_{K+1}, \dots, \omega_N) \quad (2.1.30)$$

$$\Psi_1(\omega_1, \dots, \omega_K) = \log \Phi_1(\omega_1, \dots, \omega_K) \quad (2.1.31)$$

$$\Psi_2(\omega_{K+1}, \dots, \omega_N) = \log \Phi_2(\omega_{K+1}, \dots, \omega_N) \quad (2.1.32)$$

În baza relației (2.1.26) sunt valabile egalitățile:

$$\Phi(\omega_1, \dots, \omega_K, \omega_{K+1}, \dots, \omega_N) = \Phi_1(\omega_1, \dots, \omega_K) \cdot \Phi_2(\omega_{K+1}, \dots, \omega_N) \quad (2.1.33)$$

$$\Psi(\omega_1, \dots, \omega_K, \omega_{K+1}, \dots, \omega_N) = \Psi_1(\omega_1, \dots, \omega_K) + \Psi_2(\omega_{K+1}, \dots, \omega_N) \quad (2.1.34)$$

Se dezvoltă în serii Taylor în jurul punctului $\omega_1 = 0, \dots, \omega_N = 0$ funcțiile Ψ , Ψ_1 , și Ψ_2 și se obține:

$$\Psi(\omega_1, \dots, \omega_K, \omega_{K+1}, \dots, \omega_N) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left[\sum_{l=1}^N \omega_l \frac{\partial}{\partial \omega_l} \right]^j \Psi(\omega_1, \dots, \omega_K, \omega_{K+1}, \dots, \omega_N) \Bigg|_{\substack{\omega_1=0 \\ \vdots \\ \omega_N=0}} \quad (2.1.35)$$

$$\Psi_1(\omega_1, \dots, \omega_K) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left[\sum_{l=1}^K \omega_l \frac{\partial}{\partial \omega_l} \right]^j \Psi_1(\omega_1, \dots, \omega_K) \Big|_{\substack{\omega_1=0 \\ \vdots \\ \omega_K=0}} \quad (2.1.36)$$

$$\Psi_2(\omega_{K+1}, \dots, \omega_N) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left[\sum_{l=K+1}^N \omega_l \frac{\partial}{\partial \omega_l} \right]^j \Psi_2(\omega_{K+1}, \dots, \omega_N) \Big|_{\omega_{K+1}=0, \dots, \omega_N=0} \quad (2.1.37)$$

Introducând (2.1.35), (2.1.36), (2.1.37) în (2.1.34) și identificând termenii care au același monom $\omega_1^{j_1} \dots \omega_K^{j_K} \cdot \omega_{K+1}^{j_{K+1}} \dots \omega_N^{j_N}$, se obține:

$$\begin{aligned} cum(x_1^{j_1}, \dots, x_K^{j_K}, x_{K+1}^{j_{K+1}}, \dots, x_N^{j_N}) &= 0, \\ \text{unde } \forall j > 1; \sum_{l=1}^j j_l &= j; \exists j_{l_1}, j_{l_2} \neq 0; l_1 \in \{1, \dots, K\}; l_2 \in \{K+1, \dots, N\} \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

Teorema exprimată de relația (2.1.38) poate fi generalizată în felul următor:

Fie M mulțimi de variabile aleatoare $\{x_1, \dots, x_{K_1}\}, \dots, \{x_{1_M}, \dots, x_{K_M}\}$ care au proprietatea că variabilele fiecăreia dintre mulțimi, în parte, pot să nu fie independente între ele, dar oricare două variabile aleatoare care provin din mulțimi diferite, sunt independente între ele. Atunci probabilitățile acestor variabile aleatoare satisfac următoarea relație:

$$P(\{x_1, \dots, x_{K_1}\} \cap \dots \cap \{x_{1_M}, \dots, x_{K_M}\}) = \prod_{j=1}^M P(\{x_1, \dots, x_{K_j}\}) \quad (2.1.39)$$

În aceste condiții rezultă:

$$\begin{aligned} cum(x_{1_1}^{j_{1_1}}, \dots, x_{K_1}^{j_{K_1}}, \dots, x_{1_M}^{j_{1_M}}, \dots, x_{K_M}^{j_{K_M}}) &= 0; \forall j > 1; \\ \text{unde } \sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^{K_l} j_i &= j; j_i \neq j; \exists j_{i_1}, j_{i_2} \neq 0; i_1 \in \{1_m, \dots, K_m\}; i_2 \in \{1_n, \dots, K_n\}; m \neq n \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

Din relațiile (2.1.24), (2.1.38) și (2.1.40) se poate trage următoarea teoremă:

Teoremă *Toți cumulanții la care variabile aleatoare se pot grupa în cel puțin două mulțimi independente între ele, sunt nuli.*

În cazul în care variabilele aleatoare devin procese aleatoare, independența proceselor aleatoare este asigurată pentru orice combinație de indici de timp și relația (2.1.40) devine:

$$\begin{aligned} cum(x_{1_1}^{j_{1_1}}(n_{1_1}), \dots, x_{K_1}^{j_{K_1}}(n_{K_1}), \dots, x_{1_M}^{j_{1_M}}(n_{1_M}), \dots, x_{K_M}^{j_{K_M}}(n_{K_M})) &= 0; \\ \forall j > 1; \forall n_1, \dots, n_{K_1}, \dots, n_{1_M}, \dots, n_{K_M}; \\ \text{unde } \sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^{K_l} j_i &= j; j_i \neq j; \exists j_{i_1}, j_{i_2} \neq 0; i_1 \in \{1_m, \dots, K_m\}; i_2 \in \{1_n, \dots, K_n\}; m \neq n \end{aligned} \quad (2.1.41)$$

și teorema de mai sus se extinde astfel:

Teoremă *Toți cumulanții la care procesele aleatoare se pot grupa în cel puțin două mulțimi independente între ele, sunt nuli pentru toate combinațiile de indici de timp posibile.*

Se face observația, ca și în cazul a două variabile sau procese aleatoare, că teoremele exprimate de relațiile (2.1.24), (2.1.25), (2.1.38), (2.1.40), (2.1.41), (2.1.42) au și reciproce. Dacă sunt îndeplinite infinitățile de condiții referitoare la indicii de ordin și de timp, pentru care

trebuie să se anuleze cumulanții din aceste relații, atunci variabilele, respectiv submulțimile de variabile aleatoare sau procese aleatoare sunt independente.

Tratarea problemelor legate de cumulanți și polispectre poate fi găsită în [81], [82], [83], [84], [85], [86], [87].

În continuare sunt prezentate fără demonstrație și alte proprietăți ale cumulanților:

Liniaritatea:

Dacă a_1, \dots, a_n sunt constante reale, atunci:

$$\text{cum}\left((a_1 x_1)^h, \dots, (a_n x_n)^h\right) = a_1^h \dots a_n^h \text{cum}\left(x_1^h, \dots, x_n^h\right) \quad (2.1. 42)$$

Simetria:

Cumulanții sunt invarianți la o permutare arbitrară a variabilelor:

$$\text{cum}\left(x_1^h, \dots, x_n^h\right) = \text{cum}\left(x_{k_1}^h, \dots, x_{k_n}^h\right), \quad \{1, \dots, n\} = \{K_1, \dots, K_n\} \quad (2.1. 43)$$

“Cumul” de variabile independente:

Cumulantul sumei a două grupe de variabile aleatoare independente este egal cu suma cumulanților celor două grupe de variabile:

$$\text{cum}\left((x_1 + y_1)^h, \dots, (x_n + y_n)^h\right) = \text{cum}\left(x_1^h, \dots, x_n^h\right) + \text{cum}\left(y_1^h, \dots, y_n^h\right) \quad (2.1. 44)$$

Variabile aleatoare gaussiene:

Cumulanții de ordin mai mare decât doi ale variabilelor aleatoare gaussiene sunt nuli:

$$\text{cum}(x_1, \dots, x_n) = 0; \quad n > 2 \quad (2.1. 45)$$

Măsura depărtării de repartiția gaussiană:

Cumulantul reprezintă o “măsură” a depărtării de repartiția gaussiană. Dacă x este o variabilă aleatoare oarecare și y este o variabilă aleatoare gaussiană cu aceeași cumulanți de ordinul unu și doi, atunci pentru $n=3$ și $n=4$ are loc relația:

$$\text{cum}_n(x, \dots, x) = \text{mom}_n(x, \dots, x) - \text{mom}_n(y, \dots, y) \quad (2.1. 46)$$

Legea simetriei:

O variabilă aleatoare care are o lege de distribuție simetrică, are toți cumulanții de ordin impar nuli.

Reciproca nu este valabilă, întrucât există legi de repartiție asimetrice care au toți cumulanții de ordin impar nuli [19].

Legătura între momente și cumulanți:

$$\text{cum}\left(x_1^{K_1}, \dots, x_n^{K_n}\right) = \sum_{p=1}^N \sum_{\substack{J_1, \dots, J_p \\ \{1, \dots, N\}}} (-1)^{p-1} (p-1)! \prod_{j=1}^p E \left[\prod_{i \in S_j} x_i^{K_i} \right] \quad (2.1. 47)$$

Legătura dintre momente și cumulanți se poate deduce și direct din definiția cumulanților (2.1.16). Spre exemplu, în cazul a două procese aleatoare $x_1(n)$ și $x_2(n)$, pentru $K=2$ și $K=3$ rezultă:

$$\text{Pentru } K=2: \quad \text{cum}(x_1(n), x_2(m)) = E[x_1(m) \cdot x_2(m)] \quad (2.1. 48)$$

Pentru $K=3$:

$$\begin{aligned} cum(x_1^2(n), x_2(n)) &= 2E[x_2(m)] \cdot (E[x_1(n)])^2 - 2E[x_1(n)]E[x_1(n) \cdot x_2(m)] - \\ &\quad - E[x_2(m)] \cdot E[x_1^2(n)] + E[x_1^2(n)x_2(m)] \end{aligned} \quad (2.1. 49)$$

Dacă cele două procese sunt de medie nulă, adică:

$$E[x_1(n)] = 0 \quad (2.1. 50)$$

$$E[x_2(m)] = 0 \quad (2.1. 51)$$

atunci relația (2.49) se reduce la:

$$cum[x_1^2(n), x_2(m)] = E[x_1^2(n)x_2(m)] \quad (2.1. 52)$$

Pentru cumulanții la care toți exponenții variabilelor sunt egali cu unu se introduc transformatele Fourier multidimensionale, numite *polispectre*:

$$\begin{aligned} C_K(\omega_1, \dots, \omega_K) &= \\ &= \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{K-1}=-\infty}^{\infty} cum(x_0(m), x_1(m + \tau_1), \dots, x_{K-1}(m + \tau_{K-1})) \cdot \exp\left(-i \left(\sum_{j=1}^{K-1} \omega_j \tau_j\right)\right) \end{aligned} \quad (2.1. 53)$$

$$\text{unde } |\omega_j| \leq \pi; \left| \sum_{j=1}^{K-1} \omega_j \right| \leq \pi.$$

Polispectrul există dacă

$$\sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{K-1}=-\infty}^{\infty} |cum(x_0(m), x_1(m + \tau_1), \dots, x_{K-1}(m + \tau_{K-1}))| < \infty \quad (2.1. 54)$$

Sisteme LIT

Pentru cumulanții la care toți exponenții variabilelor sunt egali cu unu, relația între cumulanții de la intrarea și cei de la ieșirea unui sistem LIT cu funcția de transfer $H(z)$ și răspunsul la impulsul unitate $\{h_n\}$ este, în cazul general:

$$C_k^y(n_1, \dots, n_{k-1}) = \sum_l \dots \sum_{l_{k-1}} C_k^x(l_1, \dots, l_{k-1}) h_{n-l_1} \dots h_{n_{k-1}-l_{k-1}} \quad (2.1. 55)$$

În domeniul polispectral, această relație devine:

$$C_k^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = C_k^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) H(\omega_1) \dots H(\omega_{n-1}) H^*(\omega_1 + \dots + \omega_{n-1}) \quad (2.1. 56)$$

Din definiția polispectrului, rezultă că acesta este nul în cazul în care toți cumulanții din seria multidimensională (2.1.53) sunt nuli, adică procesele aleatoare se pot împărții în cel puțin două submulțimi independente între ele.

În concluzie, *proprietatea de anulare a cumulanților sau polispectrelor poate fi folosită pentru obținerea de criterii de lucru pentru algoritmi care sunt folosiți la separarea semnalelor provenite de la surse independente.*

Existența legăturii între momente și cumulanți face posibilă calcularea cumulanților cu ajutorul momentelor. Pe de altă parte, momentele, în cazul proceselor staționare și ergodice, pot fi calculate cu ajutorul mediilor temporale. Deci, cumulanții pot fi calculați cu ajutorul unor medii temporale ale unor semnale pe care le privim ca procese aleatoare. Dacă semnalele, care intră ca argumente ale cumulanților, trebuie să devină independente, cumulanții trebuie să se anuleze. În concluzie, *parametrii decorelatorului, de care depind semnalele folosite ca*

argumente ale cumulanților sau polispectrelor, trebuiesc astfel dimensionați, încât să conducă la anularea cumulanților sau, respectiv, a polispectrelor.

Acesta este, în esență, principiul separării semnalelor provenite de la surse independente.

Dacă s-ar putea folosi, într-un algoritm, întreaga infinitate de condiții cerute de reciproca teoremei referitoare la anularea cumulanților unor procese aleatoare independente, care se adaptează scenariului concret, atunci s-ar putea obține soluții unice pentru parametrii sistemului de separare, soluții în care într-adevăr semnalele folosite ca argumente ale cumulanților să devină independente.

Cum nici un algoritm realizabil nu poate verifica o infinitate de condiții, practic, suntem nevoiți să verificăm doar un număr finit. Acest lucru poate conduce la apariția, pe lângă soluția corectă, a unor soluții "fantomă", soluții care anulează cumulanții fără ca semnalele să devină independente, ci mai degrabă, necorelate, în sensul că anulează doar cumulanții din condițiile concrete ale algoritmului.

Unii autori preferă realizarea unor algoritmi bazați pe polispectre, tocmai din cauză că anularea polispectrului impune anularea unei infinități de cumulanți. Dar, deoarece nici polispectrele nu pot fi calculate însumând o infinitate de termeni, ci limitând seriile lor la un număr finit de termeni, fenomenul descris mai sus poate apărea și în acest caz.

O alternativă, de compromis, ar fi utilizarea unui număr de condiții în cadrul algoritmului care să fie egal sau mai mare decât numărul de parametri ai sistemului de separare, situație în care s-ar obține soluții unice. Din nou apare problema creșterii volumului de calcul necesar algoritmului, volum care prin alte fenomene, cum ar fi apariția unor situații de instabilitate, îi poate limita aplicabilitatea.

Datorită complexității relațiilor de legătură dintre cumulanți și momente, în practică, nu se folosesc cumulanți de grad mai mare decât patru. Tot pentru simplificarea relațiilor, în general, se presupun semnale de medie nulă, caz în care, așa cum s-a evidențiat și în cazul cumulantului de ordinul trei (a se vedea relațiile (2.1.50) la (2.1.52)), dat ca exemplu, calculul acestora se simplifică drastic.

Datorită proprietăților, care au fost evidențiate, (2.1.45), cumulanți de ordin mai mare decât doi nu pot fi utilizați pentru separarea semnalelor cu repartiție normală.

Cumulanții de ordin impar (de gradul trei) nu pot fi folosiți pentru separarea semnalelor cu repartiții simetrice (a se vedea "Legea simetriei").

Datorită constrângerilor evidențiate, problema separării semnalelor provenite de la surse independente se lovește de dificultăți deosebite în investigarea teoretică a fenomenelor legate de apariția soluțiilor "fantomă", a stabilității sistemelor, a domeniilor de convergență și a evoluției tranzitorii a algoritmilor.

2.2 SCHEME DE DECORELATOARE

2.2.1 SCHEME DE DECORELATOARE PENTRU DOUĂ SEMNALE

Se consideră modelul de însumare al semnalelor provenite de la două surse prezentat în Fig. 2.2.1:

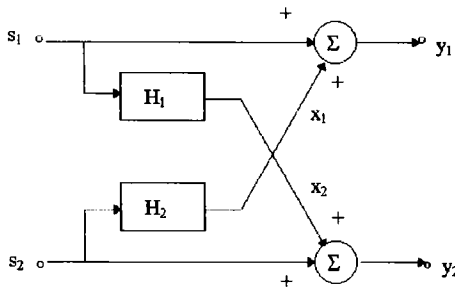


Fig.2.2.1. Modelul de însumare a semnalelor provenite de la două surse.

Semnalele s_1 și s_2 sunt numerice, independente și cu medie nulă. Pe parcursul lucrării se vor face diferite ipoteze asupra staționarității acestora.

y_1 și y_2 reprezintă semnalele provenite din s_1 și s_2 prin combinarea lor printr-un fenomen de propagare modelat de filtrele H_1 și H_2 . Pentru simplificarea modelării matematice a problemei, se presupune că acestea sunt filtre F.I.R. de grad suficient de mare. Astfel, H_1 are gradul M_1 , iar filtrul H_2 are gradul M_2 .

Dacă se notează cu $S_1(z)$, $S_2(z)$, $Y_1(z)$, $Y_2(z)$, $H_1(z)$ și $H_2(z)$ transformatele Z ale semnalelor s_1 , s_2 , y_1 , y_2 și respectiv ale răspunsurilor la impulsul unitate ale filtrelor H_1 și H_2 , se pot scrie următoarele ecuații:

$$Y_1(z) = S_1(z) + H_2(z)S_2(z) \quad (2.2.1)$$

$$Y_2(z) = S_2(z) + H_1(z)S_1(z) \quad (2.2.2)$$

Aceste ecuații definesc modelul matematic de însumare al semnalelor s_1 , s_2 prin fenomenul de propagare, modelat cu filtrele H_1 și H_2 și de obținere a semnalelor y_1 , y_2 .

În continuare se studiază câteva scheme de decorelare a două semnale.

Pentru început se consideră schema din Fig. 2.2.2 a decorelatorului cu propagare înainte care a fost prezentată pentru prima dată în [2] și [50]:

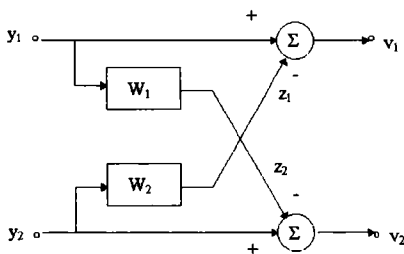


Fig. 2.2.2. Decorelator cu propagare directă.

În Fig. 2.2.2 se prezintă schema bloc a decorelatorului cu propagare directă.

Se notează cu $V_1(z)$, $V_2(z)$, $W_1(z)$ și $W_2(z)$ transformatele Z ale semnalelor v_1 și v_2 de la ieșirea decorelatorului cu propagare directă și respectiv ale funcțiilor de transfer ale filtrelor W_1 și W_2 , care trebuiesc determinate.

Semnalele y_1 și y_2 au aceeași semnificație ca în Fig.2.2.1.

Ecuațiile care guvernează sistemul, așa cum reies din Fig. 2.2.2, sunt:

$$V_1(z) = Y_1(z) - W_2(z)Y_2(z) \quad (2.2.3)$$

$$V_2(z) = Y_2(z) - W_1(z)Y_1(z) \quad (2.2.4)$$

Dacă se introduc în ecuațiile (2.2.3) și (2.2.4) $Y_1(z)$ și $Y_2(z)$ date de ecuațiile (2.2.1) și (2.2.2), atunci se evidențiază modul cum depind transformatele Z , $V_1(z)$ și $V_2(z)$, de $S_1(z)$ și $S_2(z)$:

$$V_1(z) = (1 - W_2(z)H_1(z))S_1(z) + (H_2(z) - W_2(z))S_2(z) \quad (2.2.5)$$

$$V_2(z) = (1 - W_1(z)H_2(z))S_2(z) + (H_1(z) - W_1(z))S_1(z) \quad (2.2.6)$$

Din relațiile (2.2.5) și (2.2.6) se observă că dacă printr-un mijloc oarecare se reușește să se determine filtrele W_1 și W_2 în așa fel încât să fie satisfăcute simultan egalitățile:

$$W_1(z) = H_1(z) \quad (2.2.7)$$

$$W_2(z) = H_2(z) \quad (2.2.8)$$

atunci transformatele Z ale semnalelor v_1 și v_2 devin:

$$V_1(z) = (1 - H_2(z)H_1(z))S_1(z) \quad (2.2.9)$$

$$V_2(z) = (1 - H_2(z)H_1(z))S_2(z) \quad (2.2.10)$$

În această situație semnalul v_1 depinde numai de semnalul s_1 , iar v_2 depinde numai de s_2 , fiind replici distorsionate ale acestora. Cu alte cuvinte, semnalele v_1 și v_2 devin independente și se realizează decorelarea semnalelor y_1 și y_2 .

Tot din relațiile (2.2.5) și (2.2.6) se mai deduce o situație în care se realizează decorelarea, și anume atunci când au loc simultan egalitățile:

$$W_1(z) = \frac{1}{H_2(z)} \quad (2.2.11)$$

$$W_2(z) = \frac{1}{H_1(z)} \quad (2.2.12)$$

În această situație transformatele Z ale semnalelor v_1 și v_2 devin:

$$V_1(z) = -\frac{1}{H_1(z)}(1 - H_1(z)H_2(z))S_2(z) \quad (2.2.13)$$

$$V_2(z) = -\frac{1}{H_2(z)}(1 - H_1(z)H_2(z))S_1(z) \quad (2.2.14)$$

Din relațiile (2.2.13) și (2.2.14) se observă că și în acest caz v_1 și v_2 devin replici distorsionate dar ale lui s_2 și respectiv s_1 .

Din cele expuse reiese că schema de decorelare cu propagare directă simplă prezentată în Fig. 2.2.2 poate realiza decorelarea semnalelor y_1 și y_2 , dar nu poate realiza reconstituirea fidelă a semnalelor s_1 și s_2 .

Pentru reconstituirea semnalelor s_1 și s_2 , în cazul în care se reușește obținerea egalităților (2.2.7) și (2.2.8), se propune schema de decorelare cu propagare directă cu bucle autoregresive prezentată în Fig. 2.2.3.

Ecuațiile care guvernează funcționarea decorelatorului cu propagare directă cu bucle autoregresive se obțin din cele ale decorelatorului cu propagare directă, simplu, la care se adaugă ecuațiile buclelor autoregresive.

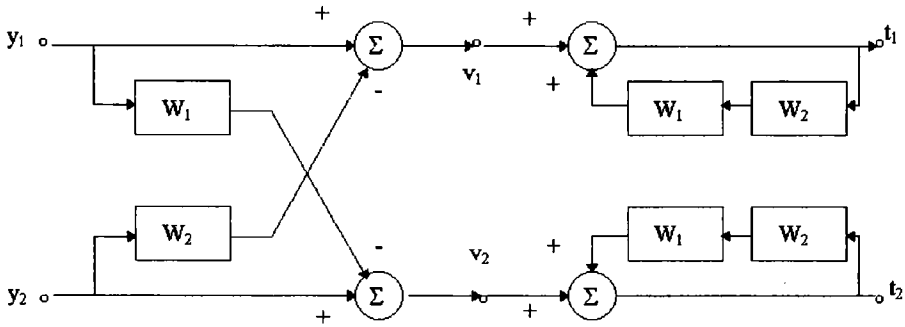


Fig. 2.2.3. Decorelator cu propagare directă cu bucle autoregresive

Primele două ecuații sunt (2.2.3) și (2.2.4). La acestea se adaugă următoarele două:

$$T_1(z) = \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} V_1(z) \quad (2.2. 15)$$

$$T_2(z) = \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} V_2(z) \quad (2.2. 16)$$

Dacă în relațiile (2.2.3) și (2.2.4) se înlocuiesc $Y_1(z)$ și $Y_2(z)$ cu valorile lor date de relațiile (2.2.1) și (2.2.2) rezultă următoarea dependență a transformatorilor Z ale semnalelor de ieșire t_1 și t_2 în raport cu transformatele semnalelor s_1 și s_2 :

$$T_1(z) = S_1(z) - \frac{W_2(z)(H_1(z) - W_1(z))}{1 - W_1(z)W_2(z)} S_1(z) + \frac{H_2(z) - W_2(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} S_2(z) \quad (2.2. 17)$$

$$T_2(z) = S_2(z) - \frac{W_1(z)(H_2(z) - W_2(z))}{1 - W_1(z)W_2(z)} S_2(z) + \frac{H_1(z) - W_1(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} S_1(z) \quad (2.2. 18)$$

Dacă se reușește obținerea egalităților (2.2.7) și (2.2.8), relațiile (2.2.17) și (2.2.18) devin:

$$T_1(z) = S_1(z) \quad (2.2. 19)$$

$$T_2(z) = S_2(z) \quad (2.2. 20)$$

cea ce ne arată că se realizează pe lângă decorelare și o refacere exactă a semnalelor s_1 și s_2 , cu alte cuvinte, t_1 și t_2 sunt replici fidele ale semnalelor s_1 și s_2 . Aceasta este o proprietate esențială a sistemului din Fig. 2.2.3 și arată că este posibilă refacerea semnalelor s_1 și s_2 cu condiția realizării egalităților (2.2.7) și (2.2.8).

Pentru reconstituirea semnalelor s_1 și s_2 în situația că se pot realiza egalitățile (2.2.11) și (2.2.12) se pornește de la următoarea schemă de decorelator din Fig.2.2.4.

Ecuațiile care guvernează funcționarea decorelatorului cu propagare directă cu bucle autoregresive și filtre de ieșire se obțin din cele ale decorelatorului cu propagare directă, simplu, la care se adaugă ecuațiile buclelor autoregresive și ale filtrelor de ieșire.

622.564 / 2001

Primele două ecuații sunt (2.2.3) și (2.2.4). La acestea se adaugă următoarele două ecuații:

$$U_1(z) = \frac{W_2(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} V_1(z) \quad (2.2. 21)$$

$$U_2(z) = \frac{W_1(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} V_2(z) \quad (2.2. 22)$$

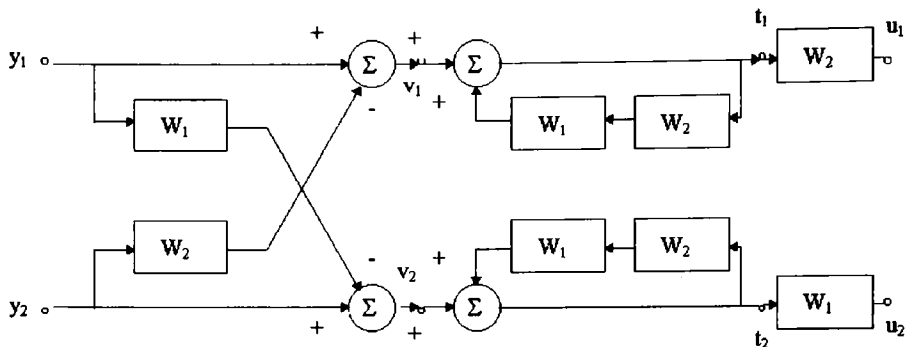


Fig. 2.2.4. Decorelator cu propagare directă cu bucle autoregresive și filtre de ieșire.

Dacă în ecuațiile (2.2.3) și (2.2.4) se înlocuiesc $Y_1(z)$ și $Y_2(z)$ cu valorile lor date de ecuațiile (2.2.1) și (2.2.2), rezultă următoarea dependență a transformatei Z ale semnalelor de ieșire u_1 și u_2 în raport cu transformatele semnalelor s_1 și s_2 :

$$U_1(z) = \frac{W_1(z)(1 - W_2(z)H_1(z))}{1 - W_1(z)W_2(z)} S_1(z) + W_1(z)W_2(z)H_2(z) \frac{W_1(z) - \frac{1}{H_2(z)}}{1 - W_1(z)W_2(z)} S_2(z) + W_1(z)H_2(z)S_2(z) \quad (2.2. 23)$$

$$U_2(z) = \frac{W_2(z)(1 - W_1(z)H_2(z))}{1 - W_1(z)W_2(z)} S_2(z) + W_1(z)W_2(z)H_1(z) \frac{W_2(z) - \frac{1}{H_1(z)}}{1 - W_1(z)W_2(z)} S_1(z) + W_2(z)H_1(z)S_1(z) \quad (2.2. 24)$$

Dacă se reușește obținerea egalităților (2.2.11) și (2.2.12), relațiile (2.2.23) și (2.2.24) devin:

$$U_1(z) = S_2(z) \quad (2.2. 25)$$

$$U_2(z) = S_1(z) \quad (2.2. 26)$$

cea ce ne arată că se realizează pe lângă decorelare și o refacere exactă a semnalelor s_1 și s_2 , dar diferită față de situația din sistemul din Fig.2.2.3. Semnalele u_1 și u_2 sunt replici fidele ale semnalelor s_2 și respectiv s_1 . Aceasta este o proprietate esențială a sistemului din Fig.2.2.4 și arată că este posibilă refacerea semnalelor s_1 și s_2 și în condițiile realizării egalităților (2.2.11) și (2.2.12).

În literatură se mai menționează și o schemă de decorelator cu propagare înapoi care este prezentată în Fig. 2.2.5.

Ecuțiile care guvernează funcționarea acestui decorelator sunt următoarele:

$$T_1(z) = \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} Y_1(z) - \frac{W_2(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} Y_2(z) \quad (2.2.27)$$

$$T_2(z) = \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} Y_2(z) - \frac{W_1(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} Y_1(z) \quad (2.2.28)$$

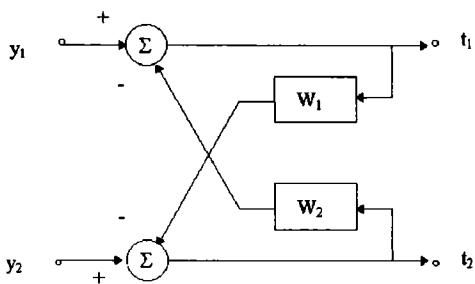


Fig. 2.2.5. Decorelator cu propagare înapoi.

Dacă în relațiile (2.2.27) și (2.2.28) se înlocuiesc $Y_1(z)$ și $Y_2(z)$ cu valorile lor date de ecuațiile (2.2.1) și (2.2.2), rezultă aceeași dependență a semnalelor t_1 și t_2 de semnalele s_1 și s_2 ca și în cazul decorelatorului cu propagare înainte cu bucle autoregresive din Fig. 2.2.3, adică dată de ecuațiile (2.2.17) și (2.2.18). Cu alte cuvinte, decorelatorul cu propagare înapoi este echivalent cu decorelatorul cu propagare înainte cu bucle autoregresive având aceeași descriere matematică.

Această arhitectură a fost prezentată pentru prima dată în [50] și a fost tratat extensiv în [51].

Dacă schemei din Fig. 2.2.5 i se adaugă la cele două ieșiri filtrele W_2 și W_1 așa cum s-a procedat cu decorelatorul cu propagare directă cu bucle autoregresive și filtre de ieșire din Fig.2.2.4, se obține schema decorelatorului cu propagare înapoi cu filtre de ieșire, care este echivalentă din punct de vedere matematic cu cea prezentată în Fig.2.2.4. Acest decorelator este prezentat în Fig.2.2.6 și realizează separarea semnalelor conform relațiilor (2.2.25) și (2.2.26):

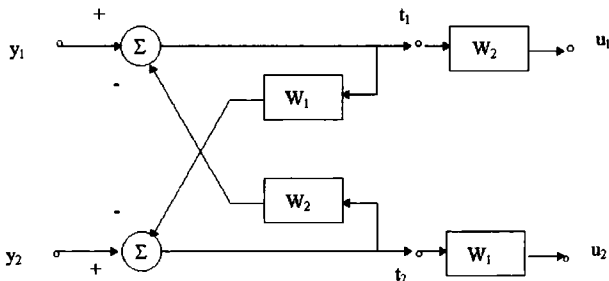


Fig. 2.2.6 Decorelator cu propagare înapoi cu filtre de ieșire.

Adoptarea unui algoritm care să se bazeze pe modelul decorelatorului cu propagare înainte, simplu, nu pune probleme deosebite din punct de vedere al stabilității sistemului în situația că ne conduce la soluția dată de relațiile (2.2.7) și (2.2.8). În acest caz, datorită faptului că filtrele H_1 și H_2 sunt stabile, rezultă că și sistemul este stabil.

În schimb, dacă algoritmul adoptat ne conduce spre soluția dată de relațiile (2.2.11) și (2.2.12), atunci, dacă filtrele H_1 și H_2 nu sunt de fază minimă, deci au și zerouri în afara

cercului unitate, atunci sistemul devine instabil, deoarece filtrele \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 devin sisteme instabile pentru că funcțiile lor de transfer au poli în afara cercului unitate.

Dacă filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 sunt de fază minimă, atunci este posibil ca sistemul să aibă două puncte de echilibru stabil. Această situație conduce la dependența soluției obținute de punctul de start al algoritmului.

Este evident faptul că în cazul în care algoritmul se bazează pe modelul decorelatorului cu propagare înainte, simplu, se obține doar decorelarea semnalelor y_1 și y_2 și nu se poate realiza reconstituirea nedistorsionată a semnalelor s_1 și s_2 .

Adoptarea modelului pentru filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 influențează în mod deosebit complexitatea și fezabilitatea algoritmului. Întrucât filtrele F.I.R. au o structură simplă, care implică o stabilitate intrinsecă și au calitatea că pot modela și sisteme care nu au fază minimă, sunt folosite pentru modelarea filtrelor \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 .

Adoptarea unui algoritm care să se bazeze pe modelul decorelatorului cu propagare înainte, cu bucle autoregresive, sau a decorelatorului cu propagare înapoi, în ideea reconstituirii fără distorsiuni a semnalelor s_1 și s_2 implică luarea în considerare a unor limitări introduse de condițiile în care sistemul este stabil.

Elementul care condiționează stabilitatea sistemului este prezența buclelor autoregresive care sunt stabile dacă este îndeplinită condiția:

$$|W_1(z)W_2(z)| < 1, \forall z, z = e^{j\omega} \quad (2.2. 29)$$

Se definește filtrul \mathbf{W} ca fiind convoluția filtrelor \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 :

$$w_k = \sum_{l=0}^k w_{1l}w_{2k-l} \quad (2.2. 30)$$

Atunci, se poate demonstra că există următoarele implicații:

$$\sum_{k=0}^{M_1+M_2} |w_k| < 1 \Rightarrow |W_1(z)W_2(z)| < 1 \forall z, z = e^{j\omega} \Rightarrow \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} \text{ stabil.} \quad (2.2. 31)$$

Deci, $\sum_{k=0}^{M_1+M_2} |w_k| < 1$ este o condiție suficientă de stabilitate a buclei autoregresive și a sistemului decorelator cu propagare înapoi.

Dacă se presupune că filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 sunt modelate cu filtre F.I.R., atunci, pentru ca buclele să-și păstreze stabilitatea, este necesar să fie menținută, permanent condiția (2.2.29) pe tot timpul adaptării. În acest caz este necesar ca și filtrele \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 să fie de tip F.I.R. și ca numitorii relațiilor (2.2.15) și (2.2.16) să nu aibă rădăcini în afara cercului unitate.

Relația (2.2.27), în condițiile în care algoritmul ne conduce spre soluțiile (2.2.7) și (2.2.8), implică ca filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 să satisfacă cerința:

$$|H_1(z)H_2(z)| < 1, \forall z, z = e^{j\omega} \quad (2.2. 32)$$

În cazul în care filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 modelează un fenomen de diafonie, care conduce la scăderea puterii semnalului transferat prin ele, atunci relația (2.2.32) este, cu siguranță, îndeplinită. În secțiunea următoare se analizează și cazul când filtrele modelează un fenomen de propagare și se va arăta în ce condiții relația (2.2.32) are loc. În aceste cazuri, relațiile (2.2.11) și (2.2.12) reprezintă un punct de funcționare instabil al algoritmului, întrucât nu poate fi satisfăcută condiția (2.2.29). Cu alte cuvinte, decorelatorul ca propagare directă cu bucle autoregresive are un singur punct stabil în care realizează decorelarea semnalelor y_1 și y_2 . Tot în acest punct se realizează reconstituirea nedistorsionată a semnalelor s_1 și s_2 .

Decorelatorul cu propagare înainte cu bucle autoregresive și cu filtre de ieșire, din punct de vedere practic, are o utilitate redusă, deoarece el devine stabil când H_1 și H_2 modelează o propagare prin care se crește puterea semnalelor la ieșirile acestora, filtrele trebuind să fie și de fază minimă. În această situație proprietățile de stabilitate sunt complementare în raport cu cele ale decorelatorului cu propagare înainte cu bucle autoregresive.

Algoritmul devine mult mai complicat datorită faptului că filtrele W_1 și W_2 devin autoregresive.

Desigur, din punct de vedere principal, este posibilă și abordarea problemei obținerii unui algoritm bazat pe modelul decorelatorului cu propagare înainte cu bucle autoregresive și cu filtre de ieșire, dar pornind de la o modelare autoregresivă a filtrelor H_1 și H_2 care ar conduce ca filtrele W_1 și W_2 să devină de tip F.I.R.. Totuși, și în acest caz, ar trebui să ne limităm la sisteme de fază minimă.

Datorită considerentelor prezentate, lucrarea tratează algoritmi care se aplică sistemelor de decorelator cu propagare înainte, simplu și celui cu bucle autoregresive, precum și celui cu propagare înapoi, și se va considera că filtrele H_1 și H_2 sunt de tip F.I.R..

Este evident faptul că modelul de însumare al semnalelor a fost ales unul simplificat, așa cum a fost întâlnit în literatura studiată. Această simplificare nu permite evidențierea unor limitări introduse de fenomenul de propagare în separabilitatea semnalelor. De aceea, în secțiunea următoare se prezintă o analiză originală asupra acestor implicații.

Mixturile de semnale care satisfac relația (2.2.32) se numesc *mixturi intrinsec stabile*, iar cele care nu o satisfac se numesc *mixturi intrinsec instabile*.

2.2.2 IMPLICAȚIILE FENOMENULUI DE PROPAGARE ASUPRA SEPARABILITĂȚII A DOUĂ SEMNALE

În această secțiune se prezintă o analiză originală a implicațiilor fenomenului de propagare asupra separabilității a două semnale provenite de la surse statistic independente și de bandă largă.

Se consideră scenariul de amplasare a surselor și receptorilor ca în Fig. 2.2.7:

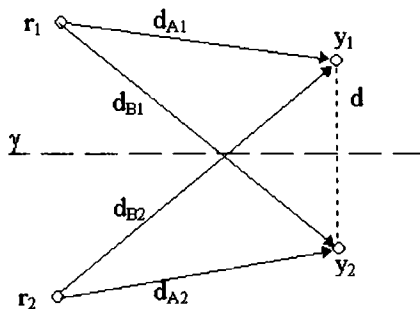


Fig. 2.2.7. Scenariul de amplasare a surselor și receptorilor.

În figură r_1 și r_2 sunt surse de semnal independente și y_1 și y_2 sunt doi receptori care captează semnalele celor două surse.

Sursa r_1 se află la distanța d_{A1} față de receptorul y_1 și la distanța d_{B1} față de y_2 .

Sursa r_2 se află la distanța d_{A2} față de receptorul y_2 și la distanța d_{B2} față de y_1 .

Distanța dintre cei doi receptori y_1 și y_2 este d . În Fig.2.2.7 este schițat și planul γ care este perpendicular pe segmentul de dreaptă care unește cei doi receptori și trece prin mijlocul acestuia. Acest plan separă spațiul în două semispații care conțin fiecare câte un singur receptor.

Fenomenele de propagare ale semnalelor pot fi modelate cu sistemul din Fig. 2.2.8.

În Fig. 2.2.8 filtrele A_1 , A_2 , B_1 și B_2 sunt de tip F.I.R., de forma:

$$A_i(z) = z^{-m_{A_i}} \cdot a_i(z) \quad (2.2.33)$$

$$A_2(z) = z^{-m_{A2}} \cdot a_2(z) \quad (2.2. 34)$$

$$B_1(z) = z^{-m_{B1}} \cdot b_1(z) \quad (2.2. 35)$$

$$B_2(z) = z^{-m_{B2}} \cdot b_2(z) \quad (2.2. 36)$$

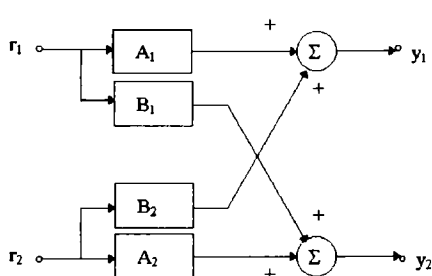


Fig. 2.2.8. Modelul de propagare și însumare al semnalelor.

în care:

$$a_1(z) = \sum_{i=0}^{M_{a1}} a_{1i} \cdot z^{-i} \quad (2.2. 37)$$

$$a_2(z) = \sum_{i=0}^{M_{a2}} a_{2i} \cdot z^{-i} \quad (2.2. 38)$$

$$b_1(z) = \sum_{i=0}^{M_{b1}} b_{1i} \cdot z^{-i} \quad (2.2. 39)$$

$$b_2(z) = \sum_{i=0}^{M_{b2}} b_{2i} \cdot z^{-i} \quad (2.2. 40)$$

unde toți coeficienții a_{1i} , a_{2i} , b_{1i} , b_{2i} sunt reali și $a_{10} \neq 0$, $a_{20} \neq 0$, $b_{10} \neq 0$, $b_{20} \neq 0$.

În relațiile (2.2.33) la (2.2.36) termenii $z^{-m_{A1}}$, $z^{-m_{A2}}$, $z^{-m_{B1}}$, $z^{-m_{B2}}$ modelează întârzierile în propagarea semnalelor. Exponenții m_{A1} , m_{A2} , m_{B1} , m_{B2} sunt proporționali, respectiv cu d_{A1} , d_{A2} , d_{B1} , d_{B2} . Termenii $a_1(z)$, $a_2(z)$, $b_1(z)$, $b_2(z)$ modelează fenomenul de atenuare datorat propagării precum și eventualele reflexii ale semnalelor r_1 și r_2 de la obiecte din mediul înconjurător. Coeficienții a_{10} , a_{20} , b_{10} , b_{20} sunt termenii care modelează de fapt atenuările, pe rutele directe, datorate mediului de transmisie. Acești coeficienți sunt invers proporționali cu pătratele distanțelor de la surse la receptori, adică:

$$a_{10} \sim \frac{1}{d_{A1}^2}; a_{20} \sim \frac{1}{d_{A2}^2}; b_{10} \sim \frac{1}{d_{B1}^2}; b_{20} \sim \frac{1}{d_{B2}^2} \quad (2.2. 41)$$

În aceste condiții, semnalele $y_1(n)$ și $y_2(n)$ au transformatele Z date de următoarele relații:

$$Y_1(z) = A_1(z)R_1(z) + B_2(z)R_2(z) \quad (2.2. 42)$$

$$Y_2(z) = A_2(z)R_2(z) + B_1(z)R_1(z) \quad (2.2. 43)$$

unde s-au notat cu $R_1(z)$ și $R_2(z)$ transformatele Z ale semnalelor $r_1(n)$ și $r_2(n)$.

Transformăm relațiile (2.2.42) și (2.2.43) într-un mod convenabil pentru a le aduce la formele (2.2.1) și (2.2.2) respectiv:

$$Y_1(z) = A_1(z)R_1(z) + \frac{B_2(z)}{A_2(z)}A_2(z)R_2(z) \quad (2.2. 44)$$

$$Y_2(z) = A_2(z)R_2(z) + \frac{B_1(z)}{A_1(z)}A_1(z)R_1(z) \quad (2.2. 45)$$

Dacă se notează

$$S_1(z) = A_1(z)R_1(z) \quad (2.2. 46)$$

$$S_2(z) = A_2(z)R_2(z) \quad (2.2. 47)$$

$$H_1(z) = \frac{B_1(z)}{A_1(z)} \quad (2.2. 48)$$

$$H_2(z) = \frac{B_2(z)}{A_2(z)} \quad (2.2. 49)$$

atunci, relațiile(2.2.44) și (2.2.45) devin:

$$Y_1(z) = S_1(z) + H_2(z)S_2(z) \quad (2.2. 50)$$

$$Y_2(z) = S_2(z) + H_1(z)S_1(z) \quad (2.2. 51)$$

Relațiile (2.2.50) și (2.2.51) sunt identice cu (2.2.1) și respectiv(2.2.2).

Se observă că $s_1(n)$ reprezintă semnalul captat de receptorul y_1 provenit de la sursa r_1 , iar $s_2(n)$ este semnalul captat de receptorul y_2 provenit de la r_2 .

Filtrul \mathbf{H}_1 modelează de fapt raportul funcțiilor de transfer ale filtrelor \mathbf{B}_1 și \mathbf{A}_1 și are funcția de transfer dată de:

$$H_1(z) = \frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{b_1(z)}{a_1(z)} \cdot z^{-(m_{B1}-m_{A1})} \quad (2.2. 52)$$

Filtrul \mathbf{H}_2 modelează raportul funcțiilor de transfer ale filtrelor \mathbf{B}_2 și \mathbf{A}_2 și are funcția de transfer dată de

$$H_2(z) = \frac{B_2(z)}{A_2(z)} = \frac{b_2(z)}{a_2(z)} \cdot z^{-(m_{B2}-m_{A2})} \quad (2.2. 53)$$

Din examinarea relațiilor (2.2.52) și (2.2.53) se trag următoarele concluzii:

1. Pentru ca filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 să fie cauzale, adică realizabile fizic, este necesar ca:

$$\begin{cases} m_{A1} \leq m_{B1} \\ m_{A2} \leq m_{B2} \end{cases} \quad (2.2. 54)$$

adică

$$\begin{cases} d_{A1} \leq d_{B1} \\ d_{A2} \leq d_{B2} \end{cases} \quad (2.2. 55)$$

Relația (2.2.55) implică un amplasament al surselor de semnal ca în Fig.2.2.7, adică r_1 în semispațiul receptorului y_1 și r_2 în semispațiul receptorului y_2 .

Singurul caz în care $m_{A1} = m_{B1}$ este când sursa r_1 se află în planul γ , deoarece atunci $d_{A1} = d_{B1}$. În această situație $H_1(z) = 1$.

Analog, singurul caz în care $m_{A2} = m_{B2}$ este acela în care sursa r_2 se află în planul γ , deoarece atunci $d_{A2} = d_{B2}$. În această situație $H_2(z) = 1$.

Dacă ambele surse se află în planul γ , atunci apare o nedeterminare întrucât relațiile (2.2.48) și (2.2.49) ar deveni identice. În acest caz la intrările ambilor receptori s-ar capta același semnal:

$$Y_1(z) = Y_2(z) = S_1(z) + S_2(z) \quad (2.2. 56)$$

În acest caz, din examinarea relațiilor (2.2.9) și (2.2.10) rezultă că decorelatorul cu propagare înainte nu scoate nici un semnal la ieșirile sale, iar decorelatorul cu propagare înapoi și cel cu propagare înainte cu buclă autoregresivă, devin instabile.

Relația (2.2.55) implică, în condițiile în care propagarea se realizează printr-un mediu omogen, că:

$$|H_1(z)| \leq 1 \text{ și } |H_2(z)| \leq 1 \quad \forall z, z = e^{j\omega} \quad (2.2. 57)$$

Din cele arătate rezultă că *decorelarea semnalelor $y_1(n)$ și $y_2(n)$ se poate realiza doar când ambele filtre H_1 și H_2 sunt strict cauzale, sau cel mult, unul cauzal și unul strict cauzal*. Aceasta înseamnă că *sursele de semnal r_1 și r_2 trebuie să fie plasate obligatoriu în semispații diferite, despărțite de planul γ* .

Observația de mai sus conduce la concluzia că în cadrul relației (2.2.57) cel mult unul dintre modulii funcțiilor de transfer ale filtrelor H_1 sau H_2 poate fi egal cu unu.

În aceste condiții relația (2.2.32) este îndeplinită.

2. Pentru ca (2.2.52) și (2.2.53) să poată fi approximate cu funcții de transfer de tip F.I.R., este necesar ca gradul acestora să se aleagă mare din următoarele motive:
 - a) Nu se cunosc cu precizie pozițiile surselor în raport cu receptorii. În acest caz este recomandabil să se considere situația cea mai dezavantajoasă când $m_{B1} \cdot m_{A1}$ și respectiv $m_{B2} \cdot m_{A2}$ sunt maxime. Acest maxim este determinat de distanța dintre receptori. Dacă se notează cu c viteza de propagare a semnalului prin mediu, cu f_c frecvența de eșantionare, fiecare filtru trebuie să aibă un grad mai mare decât

$$M_{H_1, H_2} > f_c \cdot \frac{d}{c} \quad (2.2. 58)$$

Dacă, spre exemplu, se consideră $c=340\text{m/s}$, $d=0.34\text{m}$ și $f_c=10000\text{Hz}$, rezultă $M_{H_1, H_2} > 10$.

- b) Rapoartele de polinoame în z^{-1} din expresiile lui $H_1(z)$ și $H_2(z)$ trebuie approximate cu serii trunchiate în z^{-1} . Pentru o cât mai bună aproximare, trebuie făcute truncherile la grade cât mai mari ale termenilor.
- c) Modelarea reflexiilor de la obiectele din mediul înconjurător implică folosirea unor coeficienți de ordin mult mai mare decât M_{H_1, H_2} .

Din cele arătate, rezultă că gradele filtrelor trebuie alese de la câteva zeci la câteva sute.

3. Datorită frecvenței de eșantionare finite, există zone în jurul planului γ în care ambele filtre sunt cauzale (nu strict cauzale). Dacă sursele se află în aceste zone, atunci nu pot fi separate. Aceste zone sunt cu atât mai mici cu cât frecvența de eșantionare este mai ridicată.

2.3. ALGORITMI DE DECORELARE CARE UTILIZEAZĂ FUNCTII COST BAZEATE PE CUMULANȚI ȘI POLISPECTRE

2.3.1. METODOLOGIE DE CREARE ȘI ANALIZĂ A ALGORITMILOR

2.3.1.1. Principiul metodei

În decursul timpului au fost propuse o varietate de metode și criterii pentru a rezolva problema separării semnalelor, toate bazate pe valorificarea independenței statistice. Astfel se pot aminti lucrările [2] la [15].

În această secțiune se prezintă o metodologie de tratare unitară pentru multe dintre aceste metode [16].

Se consideră decorelatorul cu propagare directă din Fig. 2.2.2.

În [15] se demonstrează că dacă se ajustează filtrele \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 astfel încât:

$$\text{cum}\left(v_1(n), v_1(n - \delta_1), \dots, v_1(n - \delta_{p-1}), v_2(n - \tau)\right) = 0, \quad \forall \delta_1, \dots, \delta_{p-1}, \tau \quad (2.3.1)$$

$$\text{cum}\left(v_2(n), v_2(n - \delta_1), \dots, v_2(n - \delta_{p-1}), v_1(n - \tau)\right) = 0, \quad \forall \delta_1, \dots, \delta_{p-1}, \tau \quad (2.3.2)$$

unde $p > 1$, atunci se obține fie soluția (2.2.7), (2.2.8), fie soluția (2.2.11), (2.2.12) presupunând că polispectrul de ordinul $p+1$ al lui $s_i(n)$, $i=1,2$ este diferit de zero.

Pentru $p=1$, (2.3.1) și (2.3.2) se reduc la o singură ecuație:

$$\text{cum}\left(v_1(n), v_2(n - \tau)\right) = E\left[v_1(n)v_2(n - \tau)\right] = 0, \quad \forall \tau \quad (2.3.3)$$

Acesta este criteriul de decorelare propus în [13]. El constă din ajustarea filtrelor de decuplare \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 astfel ca semnalele reconstituite $v_1(n)$ și $v_2(n)$ să fie statistic necorelate. Așa cum s-a arătat în [13], acest criteriu este, prin el însuși, insuficient pentru a rezolva problema, deoarece el conduce la o singură ecuație cu ajutorul căreia este necesar să se identifice ambele filtre de cuplare. Pentru acest motiv problema nu poate fi rezolvată dacă $s_1(n)$ și $s_2(n)$ au funcția de densitate de probabilitate de legătură de tip gaussian și/sau sunt utilizate numai statistici de ordinul doi.

Cu $p > 1$ relațiile (2.3.1) și (2.3.2) constituie două condiții distincte care sunt suficiente pentru rezolvarea problemei.

Pentru $p=2$ se obține un criteriu bazat pe cumulanți de ordinul trei și pentru $p=3$ se obține un criteriu bazat pe cumulanți de ordinul patru.

O observație utilă din [17] este următoarea:

Dacă $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \beta$ sunt variabile aleatoare de medie zero, atunci:

$$\text{cum}\left(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \beta\right) = E\left[f_p\left(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}\right)\beta\right] \quad (2.3.4)$$

unde $f_p\left(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}\right)$ este o funcție polinomială de ordinul p .

Astfel:

$$f_p(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) = \begin{cases} \alpha_0 & \text{pentru } p = 1 \\ \alpha_0 \alpha_1 & \text{pentru } p = 2 \\ \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 - E[\alpha_0 \alpha_1] \alpha_2 - E[\alpha_0 \alpha_2] \alpha_1 - E[\alpha_1 \alpha_2] \alpha_0 & \text{pentru } p = 3 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Utilizând această relație, relațiile (2.3.1) și (2.3.2) pot fi reprezentate sub forma:

$$E[z_1(n, \underline{\delta}, p)v_2(n - \tau)] = 0, \quad \forall \underline{\delta}, \tau \quad (2.3.6)$$

$$E[z_2(n, \underline{\delta}, p)v_1(n - \tau)] = 0, \quad \forall \underline{\delta}, \tau \quad (2.3.7)$$

unde

$$z_i(n, \underline{\delta}, p) = f_p(v_i(n), v_i(n - \delta_1), \dots, v_i(n - \delta_{p-1})) \quad i = 1, 2 \quad (2.3.8)$$

În consecință, criteriul constă în forțarea la zero a corelației dintre fiecare dintre semnalele reconstituite ($v_1(n)$ și $v_2(n)$) cu un set de funcții polinomiale, neliniare, indexate de $\underline{\delta}$, ale celui alt semnal.

Întrucât (2.3.6) și (2.3.7) sunt satisfăcute pentru toate combinațiile lui p și $\underline{\delta}$, avem un sistem de ecuații supradeterminat care poate fi utilizat pentru a obține o soluție mai robustă, raportată la situația că anumiți cumulanți/polisperectre sunt nenuli, precum și cu scopul de a îmbunătăți stabilitatea statistică (a se vedea considerațiile următoare).

Luând în considerare (2.3.1) și (2.3.2) se consideră funcțiile de corelație:

$$\mathcal{R}_{z_1 v_2}(\tau) \stackrel{\Delta}{=} E[z_1(n)v_2(n - \tau)] = 0, \quad \forall \tau \quad (2.3.9)$$

$$\mathcal{R}_{z_2 v_1}(\tau) \stackrel{\Delta}{=} E[z_2(n)v_1(n - \tau)] = 0, \quad \forall \tau \quad (2.3.10)$$

unde $\underline{z}_i(n)$ este vectorul ale cărui componente sunt $z_i(n, \underline{\delta}, p)$ pentru combinații diferite ale lui $\underline{\delta}$ și p .

În mod similar, în domeniul frecvență se definesc spectrele:

$$\mathcal{P}_{z_1 v_2}(\omega) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{\tau} \mathcal{R}_{z_1 v_2}(\tau) e^{-j\omega\tau} = 0, \quad \forall \omega \quad (2.3.11)$$

$$\mathcal{P}_{z_2 v_1}(\omega) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{\tau} \mathcal{R}_{z_2 v_1}(\tau) e^{-j\omega\tau} = 0, \quad \forall \omega \quad (2.3.12)$$

Întrucât funcțiile de corelație (2.3.9) și (2.3.10) nu sunt disponibile, ele se aproximează prin medieri pe blocuri de date conform relațiilor:

$$\hat{\mathcal{R}}_{z_1 v_2}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T z_1(n)v_2(n - \tau) - \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T z_1(n) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T v_2(n) \quad (2.3.13)$$

unde în componentele $z_i(n, \underline{\delta}, p)$ cu $p > 2$ ale lui $\underline{z}_i(n)$ se înlocuiesc așteptările prin medieri empirice, peste tot unde este necesar.

Estimările funcțiilor spectrale (2.3.11) și (2.3.12) pot fi obținute, fie prin utilizarea periodogramelor proceselor respective, sau prin:

$$\hat{\mathcal{P}}_{z_1 v_2}(\omega) = \sum_{\tau} \hat{\mathcal{Y}}(\tau) \hat{\mathcal{R}}_{z_1 v_2}(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad (2.3.14)$$

unde $\mathcal{W}(\tau)$ este o funcție fereastră preselectată, astfel ca $\mathcal{W}(0) = 1$, pentru a preveni apariția unor erori de trunchiere.

Se dorește ajustarea filtrelor de decuplare \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 astfel încât funcțiile de corelație din (2.3.9) și (2.3.10) sau funcțiile spectrale din (2.3.11) și (2.3.12) să fie cât mai apropiate posibil de zero.

Întrucât există un set de ecuații supradeterminat, se sugerează să se abordeze rezolvarea sa prin metoda celor mai mici pătrate:

$$\min_{\mathbf{W}} J = \min_{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{U}}^+ \mathbf{Q} \hat{\mathbf{U}} \quad (2.3.15)$$

unde + desemnează transpusa conjugată, sau chiar transpunerea în cazul cantităților reale, $\hat{\mathbf{U}}$ este vectorul estimatelor corelației/spectrului din (2.3.13) sau (2.3.14), \mathbf{Q} este o matrice de ponderare hermitiană, nenegativ definită, preselectată, și \mathbf{W} este vectorul parametrilor ajustabili, adică, de exemplu, coeficienții răspunsurilor la impulsul unitate ai filtrelor \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 , sau, răspunsul lor în frecvență, $W_1(\omega)$ și $W_2(\omega)$ la un set prestabilit de frecvențe.

Pentru a rezolva problema de minimizare neliniară din (2.3.15) se poate utiliza o grilă de căutare pentru localizarea grosieră a minimumului global și apoi să se aplice una dintre metodele Gauss, Newton-Raphson sau un algoritm de căutare tip gradient.

În relația (2.3.13) se utilizează medii temporale, pe o durată finită de timp, ale eșantioanelor sau produselor de eșantioane ale unor procese. Aceste medii temporale le numim așteptări empirice.

În relațiile (2.3.9) și (2.3.10) operatorul $E[\cdot]$ reprezintă o mediere statistică și rezultatul său este o valoare așteptată (cea mai plauzibilă valoare).

În ipoteza că semnalele, ale căror eșantioane se mediază, sunt ergodice, cel puțin de ordinul doi, mediile statistice, așteptările, pot fi considerate egale cu mediile temporale realizate pe o durată infinită de timp. În practică mediile temporale pot fi realizate doar pe perioade finite de timp, obținându-se astfel așteptări empirice.

Utilizarea așteptărilor empirice în locul așteptărilor exacte poate cauza apariția unor erori aleatoare.

2.3.1.2. Analiza erorilor

Vectorul \mathbf{W} care minimizează criteriul J din (2.3.15) trebuie să satisfacă :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}} = \mathbf{0} \quad (2.3.16)$$

unde $\mathbf{0}$ este vectorul zero.

Fie \mathbf{H} vectorul care reprezintă sistemul de cuplare, care este format din coeficienții răspunsurilor la impulsul unitate ai filtrelor \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 ale sistemului de mixare din Fig. 2.2.1, sau, răspunsul lor în frecvență, $H_1(\omega)$ și $H_2(\omega)$ la un set prestabilit de frecvențe.

Se presupune că \mathbf{W} este în vecinătatea lui \mathbf{H} , adică $W_1(z) \approx H_1(z)$ și $W_2(z) \approx H_2(z)$.

O analiză similară poate fi aplicată și în vecinătatea celeilalte soluții $W_1(z) \approx \frac{1}{H_2(z)}$ și

$$W_2(z) \approx \frac{1}{H_1(z)}.$$

Se poate scrie:

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{W}} \approx \frac{\partial J}{\partial \underline{W}} \Big|_{\underline{H}} + \frac{\partial^2 J}{\partial \underline{W}^2} \Big|_{\underline{H}} \cdot (\underline{W} - \underline{H}) \quad (2.3. 17)$$

Substituind (2.3.17) în (2.3.16) și presupunând că $\frac{\partial^2 J}{\partial \underline{W}^2} \Big|_{\underline{H}}$ este inversabilă, se obține :

$$\underline{W} - \underline{H} \approx - \left[\frac{\partial^2 J}{\partial \underline{W}^2} \Big|_{\underline{H}} \right]^{-1} \cdot \frac{\partial J}{\partial \underline{W}} \Big|_{\underline{H}} \quad (2.3. 18)$$

Dar

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{W}} = \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial \underline{W}} Q \hat{U} + \frac{\partial \hat{U}^T}{\partial \underline{W}} Q^* \hat{U}^* \quad (2.3. 19)$$

unde T desemnează operația de transpunere simplă, iar * operația de conjugare complexă.

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \underline{W}^2} = \frac{\partial^2 \hat{U}^*}{\partial \underline{W}^2} Q \hat{U} + \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial \underline{W}} Q \frac{\partial \hat{U}}{\partial \underline{W}} + \frac{\partial^2 \hat{U}^T}{\partial \underline{W}^2} Q^* \hat{U}^* + \frac{\partial \hat{U}^T}{\partial \underline{W}} Q^* \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial \underline{W}} \quad (2.3. 20)$$

Relațiile (2.3.19) și (2.3.20) se mai pot scrie:

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{W}} = 2 \text{Real} \left(\frac{\partial \hat{U}^*}{\partial \underline{W}} Q \hat{U} \right) \quad (2.3. 21)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \underline{W}^2} = 2 \text{Real} \left(\frac{\partial^2 \hat{U}^*}{\partial \underline{W}^2} Q \hat{U} + \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial \underline{W}} Q \frac{\partial \hat{U}}{\partial \underline{W}} \right) \quad (2.3. 22)$$

Dacă cantitățile din parantezele din (2.3.21) și (2.3.22) sunt reale, lucru care se întâmplă când vectorul \underline{U} este format din corelații, atunci aceste relații devin:

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{W}} = 2 \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial \underline{W}} Q \hat{U} \quad (2.3. 23)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \underline{W}^2} = 2 \left(\frac{\partial^2 \hat{U}^*}{\partial \underline{W}^2} Q \hat{U} + \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial \underline{W}} Q \frac{\partial \hat{U}}{\partial \underline{W}} \right) \quad (2.3. 24)$$

Se presupune că :

$$\hat{U} \Big|_{\underline{H}} \approx \underline{U} \Big|_{\underline{H}} = \underline{0} \quad (2.3. 25)$$

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \underline{W}} \Big|_{\underline{H}} \approx \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \Big|_{\underline{H}} \stackrel{\Delta}{=} \underline{D} \quad (2.3. 26)$$

unde \underline{U} este vectorul corelațiilor/spectrelor exacte și

$$D^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial u_L}{\partial w_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial w_M} & \dots & \frac{\partial u_L}{\partial w_M} \end{bmatrix} \quad (2.3.27)$$

unde u_i sunt componentele vectorului \underline{U} , despre care se presupune că are dimensiunea L , și w_j sunt componentele vectorului \underline{W} a cărui dimensiune este M .

În condițiile (2.3.25) și (2.3.26) relațiile (2.3.19) și (2.3.20) devin:

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{W}} \Big|_{\underline{H}} \approx 2D^+ Q \hat{U} \Big|_{\underline{H}} \quad (2.3.28)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \underline{W}^2} \Big|_{\underline{H}} \approx 2D^+ Q D \quad (2.3.29)$$

Substituind (2.3.28) și (2.3.29) în (2.3.18) rezultă:

$$\underline{W} - \underline{H} \approx -[D^+ Q D]^{-1} D Q \hat{U} \Big|_{\underline{H}} \quad (2.3.30)$$

De notat că dacă se utilizează iterativ această ecuație, unde \underline{H} este substituit cu valoarea precedentă a lui \underline{W} , se obține metoda Gauss pentru rezolvarea problemei celor mai mici pătrate, neliniară, din (2.3.15).

Dacă $E[\hat{U} \Big|_{\underline{H}}] = \underline{U} \Big|_{\underline{H}} = \underline{0}$ adică estimata corelației/spectrului este nedeplasată, atunci \underline{W} este o estimată nedeplasată a lui \underline{H} , și covarianța erorii este dată de:

$$\text{cov}\{\underline{W}\} \approx [D^+ Q D]^{-1} D^+ Q \Lambda Q D [D^+ Q D]^{-1} \quad (2.3.31)$$

unde

$$\Lambda = \text{cov}\{\hat{U}\} \quad (2.3.32)$$

Matricea de ponderare Q , care minimizează membrul drept al lui (2.3.31) este $Q = \Lambda^{-1}$ în care caz

$$\text{cov}\{\underline{W}\} \approx [D^+ \Lambda^{-1} D]^{-1} \quad (2.3.33)$$

Dacă Λ nu este inversabilă, atunci Λ^{-1} se înlocuiește cu pseudoinversa lui Λ .

În continuare se deduc componentele matricelor D și Λ .

Utilizând sistemul de reconstrucție dat de relațiile (2.2.3) și (2.2.4) corespunzătoare decorelatorului cu propagare directă din Fig. 2.2.2, se poate scrie:

$$v_i(t) = y_i(t) - W_j(t) \otimes y_j(t) = y_i(t) - \sum_{\tau} w_{j\tau} y_j(t - \tau) \quad (2.3.34)$$

unde $w_{j\tau}$ desemnează răspunsul la impulsul unitate asociat filtrului \underline{W}_j .

În aceste condiții sunt valabile relațiile:

$$\frac{\partial v_i(t)}{\partial w_{j\tau}} = -y_j(t - \tau) = -s_j(t - \tau) - H_i(t) \otimes s_i(t - \tau) \quad (2.3.35)$$

$$\frac{\partial v_i(t)}{\partial w_{i\tau}} = 0 \quad (2.3.36)$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \frac{\partial E \left[z_i(t, \underline{\delta}, p) v_j(t - \tau) \right]}{\partial w_{i\tau}} \Big|_{\mathbb{H}} &= \frac{\partial}{\partial w_{i\tau}} \text{cum} \left(v_i(t), v_i(t - \delta_1), \dots, v_i(t - \delta_{p-1}), v_j(t - \tau) \right) \Big|_{\mathbb{H}} = \\ &= \text{cum} \left(\frac{\partial v_i(t)}{\partial w_{i\tau}} \Big|_{\mathbb{H}}, \tilde{s}_i(t - \delta_1), \dots, \tilde{s}_i(t - \delta_{p-1}), \tilde{s}_j(t - \tau) \right) + \\ &+ \text{cum} \left(\tilde{s}_i(t), \frac{\partial v_i(t - \delta_1)}{\partial w_{i\tau}} \Big|_{\mathbb{H}}, \dots, \tilde{s}_i(t - \delta_{p-1}), \tilde{s}_j(t - \tau) \right) + \dots + \\ &+ \text{cum} \left(\tilde{s}_i(t), \tilde{s}_i(t - \delta_1), \dots, \tilde{s}_i(t - \delta_{p-1}), \frac{\partial v_j(t - \tau)}{\partial w_{i\tau}} \Big|_{\mathbb{H}} \right) = \\ &= \begin{cases} -\text{cum} \left(s_j(t - \tau'), \tilde{s}_j(t - \tau) \right); & i' = i, p = 1 \\ -\text{cum} \left(\tilde{s}_i(t), \tilde{s}_i(t - \delta_1), \dots, \tilde{s}_i(t - \delta_{p-1}), \tilde{s}_j(t - \tau') \right); & j = i' \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \quad (2.3.37) \end{aligned}$$

unde ultima linie din (2.3.37) rezultă din (2.3.35) și (2.3.36) și din faptul că procesul \tilde{s}_j este statistic independent de procesele $s_i(t)$ și $\tilde{s}_i(t)$ pentru $j \neq i$.

Procesul $\tilde{s}_i(t)$ reprezintă semnalul la ieșirea filtrului care are răspunsul în frecvență $1 - H_1(\omega)H_2(\omega)$ și este excitat de semnalul $s_i(t)$.

Se definesc:

$$\frac{\partial}{\partial W_j(\omega)} \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \text{Re}(W_j(\omega))} - j \frac{\partial}{\partial \text{Im}(W_j(\omega))} \right] \quad (2.3.38)$$

unde $\text{Re}(W_j(\omega))$ și $\text{Im}(W_j(\omega))$ desemnează părțile reală și imaginară ale lui $W_j(\omega)$. Atunci similar cu (2.3.37) se obține:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{z_i v_j}(\omega)}{\partial w_j(\omega')} \Big|_{\mathbb{H}} = \begin{cases} \mathcal{P}_{z_i \tilde{s}_j}(\omega'); & \omega = -\omega', j = j', p = 1 \\ -\mathcal{P}_{z_i \tilde{s}_i}(\omega); & \omega = \omega', i = j \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \quad (2.3.39)$$

unde $\mathcal{P}_{z_i \tilde{s}_i}(\omega)$ reprezintă interspectrul dintre $\tilde{s}_i(t)$ și $z_i(t, \underline{\delta}, p)$ definit de

$$z_i(t, \underline{\delta}, p) \Big|_{\mathbb{H}} = f_p \left(\tilde{s}_i(t), \tilde{s}_i(t - \delta_1), \dots, \tilde{s}_i(t - \delta_{p-1}) \right) \quad (2.3.40)$$

unde $f_p(\cdot)$ este definit de (4.5).

Presupunând că banda B est mult mai mică decât inversul timpului de corelație al semnalelor și mult mai mare decât $1/T$, atunci, conform cu [20] se poate scrie:

$$\begin{aligned}
T \cdot \text{cov} \left\{ \hat{\mathcal{R}}_{\underline{z}_i, \underline{v}_j}(\tau), \hat{\mathcal{R}}_{\underline{z}_{i'}, \underline{v}_{j'}}(\tau') \right\} \Big|_{\mathbb{H}} &\approx \\
&\approx \begin{cases} \sum_k E[\tilde{s}_j(t)\tilde{s}_j(t+k)] \cdot \text{cov}\{\underline{z}_i(t), \underline{z}_i(t+\tau-\tau'-k)\}; & i=i', j=j' \\ \sum_k E[\tilde{s}_i(t)\underline{z}_i(t-k)] \cdot E[\tilde{s}_j(t)\underline{z}_j(t-\tau-\tau'-k)]^+; & i=j', j=i' \end{cases} \quad (2.3.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BT \cdot \text{cov} \left\{ \hat{\mathcal{P}}_{\underline{z}_i, \underline{v}_j}(\omega), \hat{\mathcal{P}}_{\underline{z}_{i'}, \underline{v}_{j'}}(\omega') \right\} \Big|_{\mathbb{H}} &\approx \\
&\approx \begin{cases} \mathcal{P}_{\underline{s}_j \underline{s}_j}(\omega) \cdot \mathcal{P}_{\underline{z}_i \underline{z}_i}(\omega); & i=i', j=j', \omega=\omega' \\ \mathcal{P}_{\underline{z}_i \underline{s}_i}(\omega) \cdot \mathcal{P}_{\underline{s}_j \underline{s}_j}(\omega')^+; & i=j', j=i', \omega=-\omega' \end{cases} \quad (2..42)
\end{aligned}$$

$$\text{unde } \omega, \omega' \in \left\{ 2\pi Bk, -\frac{1}{2B} < k < \frac{1}{2B} \right\}.$$

Dacă este utilizat sistemul de reconstrucție al decorelatorului cu propagare înapoi, atunci în relațiile (2.3.37), (2.3.39), (2.3.41) și (2.3.42) $\tilde{s}_i(t)$ se înlocuiește cu $s_i(t)$ și $\underline{z}_i(t, \underline{\delta}, p)$ este definit de relația:

$$\underline{z}_i(t, \underline{\delta}, p) \Big|_{\mathbb{H}} = f_p(s_i(t), s_i(t-\delta_1), \dots, s_i(t-\delta_{p-1})) \quad (2.3.43)$$

Fie \underline{W} vectorul care constă din răspunsurile în frecvență $W_1(\omega)$ și $W_2(\omega)$, și \underline{U} vectorul care constă din estimatele spectrale date de (2.3.14). Atunci componentele matricei D sunt date de (2.39) și componentele matricei de covarianță Λ sunt date de (2.3.42). Utilizând acestea în (2.3.33), după calcule matriceale, pentru cazul când sunt utilizate numai statistici de ordin înalt ($p > 1$) se obține:

$$\text{var}\{W_2(\omega)\} \approx \frac{1}{BT} |1 - H_1(\omega)H_2(\omega)|^2 \frac{\mathcal{P}_{s_1 s_1}(\omega)}{\mathcal{P}_{s_2 s_2}(\omega)} \cdot \frac{1}{I_2(\omega)} \quad (2.3.44)$$

$$\text{var}\{W_1(\omega)\} \approx \frac{1}{BT} |1 - H_1(\omega)H_2(\omega)|^2 \frac{\mathcal{P}_{s_2 s_2}(\omega)}{\mathcal{P}_{s_1 s_1}(\omega)} \cdot \frac{1}{I_1(\omega)} \quad (2.3.45)$$

unde

$$B = \frac{1}{\sum_{\tau} |\mathcal{W}(\tau)|^2} \quad (2.3.46)$$

este legată de lărgimea de bandă a ferestrei, și

$$I_i(\omega) = \frac{\mathcal{P}_{s_i s_i}(\omega) \mathcal{P}_{\underline{z}_i \underline{z}_i}^{-1}(\omega) \mathcal{P}_{\underline{z}_i s_i}(\omega)}{\mathcal{P}_{s_i s_i}(\omega)} \Big|_{\mathbb{H}}; \quad i=1,2 \quad (2.3.47)$$

unde $\mathcal{P}_{s_i s_i}(\omega)$ este spectrul de putere al lui $s_i(t)$, $\mathcal{P}_{\underline{z}_i \underline{z}_i}(\omega)$ este matricea spectrului de putere al lui $\underline{z}_i(t)$ și $\mathcal{P}_{\underline{z}_i s_i}(\omega)$ este interspectrul între $\underline{z}_i(t)$ și $s_i(t)$.

Dacă se utilizează decorelatorul cu propagare înapoi, atunci când se realizează condiția $\underline{W} = \underline{H}$ se realizează reconstrucția exactă, și avem $s_i(t) = \tilde{s}_i(t)$ în care caz componentele lui $\underline{z}_i(t)$ sunt date de (2.3.43).

Dacă se utilizează decorelatorul cu propagare înainte, atunci la $\underline{W} = \underline{H}$, $v_i(t) = \tilde{s}_i(t)$ și componentele lui $\underline{z}_i(t)$ sunt date de (2.3.40).

Se poate arăta că dacă pentru fiecare p se utilizează toate combinațiile posibile ale lui $\underline{\delta}$, atunci rezultatele sunt invariante în raport cu tipul de decorelator (cu propagare directă sau inversă) folosit, întrucât $I_i(\omega)$ este invariant la transformări liniare inversabile.

Rezultate similare pot fi obținute și în cazul în care \underline{W} constă din coeficienții răspunsului la impulsul unitate ai lui \underline{W}_1 și \underline{W}_2 și \underline{U} constă din estimatele corelației date de (2.3.13).

Rezultatele din (2.3.44) și (2.3.45) se bazează pe analiza erorilor mici și de aceea ignoră complet posibilitatea convergenței la un minim local nedorit.

La simulările făcute pe calculator [16] astfel de probleme nu au apărut.

Se face remarcă că dacă $1 - H_1(\omega)H_2(\omega) = 0, \forall \omega$, atunci $y_1(t) = H_2(t) \otimes y_2(t)$ și $y_2(t) = H_1(t) \otimes y_1(t)$, caz în care $H_1(\omega) = \frac{1}{H_2(\omega)}$ și ambele sisteme pot fi identificate cu acuratețe absolută [17] chiar dacă corespunde unui caz singular și semnalele sursă $s_1(t)$ și $s_2(t)$ nu pot fi refăcute.

Raportul $\frac{\mathcal{P}_{s_1 s_1}(\omega)}{\mathcal{P}_{s_1 s_2}(\omega)}$ care apare în (4.44) poate fi interpretat ca raportul semnal/interferență când se estimează $H_2(\omega)$ și raportul $\frac{\mathcal{P}_{s_2 s_2}(\omega)}{\mathcal{P}_{s_1 s_1}(\omega)}$ care apare în (2.3.45) este raportul semnal/interferență când se estimează $H_1(\omega)$.

Canțitatea $I_i(\omega)$ reprezintă informația conținută în statisticile care sunt utilizate. Ea poate fi interpretată ca o funcție de coerență între $s_i(t)$ și $\underline{z}_i(t)$.

Utilizând inegalitatea Cauchy-Schwartz se poate arăta că $0 \leq I_i(\omega) \leq 1$. Din acest motiv, în scopul reducerii varianței este indicat ca $\underline{z}_i(t)$ să fie puternic corelat cu $s_i(t)$ astfel ca $I_i(\omega)$ să fie cât mai apropiat de unitate.

Un caz de interes special se obține dacă $s_i(t), t=1,2,\dots$ este o secvență de variabile aleatoare independente, identic distribuite. Deoarece cumulantul de legătură al variabilelor aleatoare independente statistic este nul, contribuțiile nenule la $I_i(\omega)$ rezultă din componentele $z_i(t, \underline{\delta}, p)$ cu $\underline{\delta} = \underline{0}$. În consecință, în acest caz avem:

$$I_i = \frac{E\{s_i(t)z_i(t)\} \text{cov}\{z_i(t)\}^{-1} E\{z_i(t)s_i(t)\}}{\text{var}\{s_i(t)\}} \quad (2.3.48)$$

și este o mărime independentă de variabila frecvență ω . $\underline{z}_i(t)$ conține numai componenta $z_i(t, \underline{\delta}, p)$ cu $\underline{\delta} = \underline{0}$.

Dacă se utilizează numai statistici de ordinul $(p+1)$ atunci $\underline{z}_i(t)$ devine un proces scalar și (2.3.48) se reduce la:

$$I_i = \frac{E[z_i(t)s_i(t)]^2}{\text{var}\{s_i(t)\} \cdot \text{var}\{z_i(t)\}} \quad (2.3.49)$$

care este mărimea pătratului coeficientului de corelație între $z_i(t)$ și $s_i(t)$. Prin substituirea formulei lui $z_i(t)$ în (2.3.49), sau mai general în (2.3.48), se obține o expresie de formă concisă pentru I_i ca funcție de cumulanți sau momente ale lui $s_i(t)$.

Este ideal ca $z_i(t)$ și $s_i(t)$ să fie complet corelați astfel ca $I_i=1$.

Dacă $s_i(t)$ este o variabilă aleatoare binară (cu două nivele), atunci se pot găsi totdeauna două constante a și b astfel ca

$$z_i(t) = f_p(s_i(t), \dots, s_i(t)) = a \cdot s_i(t) + b \quad (2.3.50)$$

Întrucât $z_i(t)$ și $s_i(t)$ sunt liniar legate, atunci ele sunt complet corelate și $I_i=1$, presupunând că $\text{var}\{z_i(t)\} \neq 0$, ceea ce implică că cumulantul de ordinul $(p+1)$ al lui $s_i(t)$ este diferit de zero. În acest caz I_i obține valoarea sa maximă și nu mai poate fi adusă nici o îmbunătățire prin combinarea statisticilor de ordine diferite.

Întrucât (2.3.50) are loc indiferent dacă $s_i(t)$ este i. i. d. (proces cu eșantioane independente și identic distribuite) sau nu, această relație este valabilă pentru orice proces binar.

Dacă $s_i(t)$ nu este un proces binar, atunci combinarea statisticilor de ordine diferite poate reduce semnificativ varianța erorii.

În [16] se dă un exemplu în care se arată că utilizarea simultană a statisticilor de ordinul trei și patru conduce la reduceri semnificative ale varianței erorii.

Dacă $s_i(t)$ nu este un proces i. i. d., calcularea lui $I_i(\omega)$ poate fi foarte complicată întrucât apar contribuții de la toți δ și trebuie luată în considerare posibilitatea unui vector infinit dimensional $z_i(t)$. Totuși, dacă $s_i(t)$ aparține unei clase generale de procese liniare, adică:

$$s_i(t) = F_i \otimes \xi_i(t) \quad (2.3.51)$$

unde $\xi_i(t)$ este un proces i. i. d. și F_i este un sistem L. T. I. (liniar și invariabil în timp) (vezi Fig. 2.3.1.a.) atunci calculul performanțelor care pot fi atinse poate fi încă simplificat:

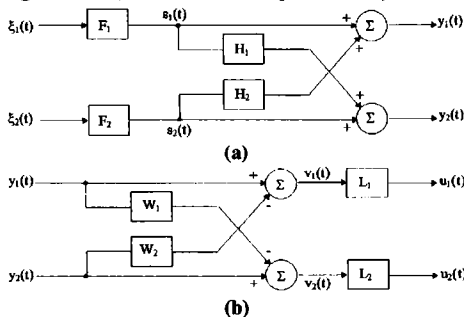


Fig. 2.3.1. (a) Procese semnal-model liniar
(b) Reconstrucția proceselor-sistem liniar

Se presupune că $F_i, i=1,2$ sunt inversabile.

Ideea euristică este ilustrată în Fig.2.3.1.b.

Fie $u_i(t) = L_i(t) \otimes v_i(t), i=1,2$, unde $L_i, i=1,2$ sunt sisteme L. T. I. inversabile arbitrare. Deoarece cumulanții/polispectrele comută cu transformările liniare, este ușor de verificat că expresia din (2.3.33) pentru varianța erorii asimptotice este invariantă la transformările liniare asupra vectorului de date. De aceea, pentru scopul evaluării performanțelor se poate utiliza $u_i(t), i=1,2$ în locul lui $v_i(t), i=1,2$. Dacă se alege

$L_i = F_i^{-1}$ este echivalent cu a calcula pe $I_i(\omega)$ utilizând $\xi_i(t)$ în locul lui $s_i(t)$. Întrucât $\xi_i(t)$ este un proces i. i. d., calculul este considerabil simplificat față de cel punctat anterior. Astfel,

ca și în cazul i. i. d., $I_1(\omega)$ nu este dependent de frecvență, și utilizând definiția lui $\underline{z}_1(t)$ aceasta se poate exprima ușor în termenii momentelor/cumulanților lui $\xi_1(t)$.

Conceptul de aplicare a operațiilor de filtrare liniară cu scopul de a produce semnale i. i. d. pentru care evaluarea performanțelor devine mai simplă, sugerează următorul algoritim în care se iterează înainte și înapoi între ajustarea lui L_1 și L_2 utilizând una dintre variatele metode pentru egalizarea/deconvoluția oarbă (de exemplu: [21], [22], [6], [23], [24], [25]) și ajustând filtrele de decuplare W_1 și W_2 utilizând criteriul propus. Utilizarea filtrelor de albire L_1 și L_2 ne permite să aplicăm criteriul de separație cu estimarea corelației/spectrului numai la $\underline{\delta} = \underline{0}$ și de aceea se reduc semnificativ calculele.

Dacă sunt incluse statistici de ordinul doi ($p=1$), atunci în loc de (2.3.44) și (2.3.45) se obțin:

$$\text{var}\{W_2(\omega)\} \approx \frac{1}{BT} |1 - H_1(\omega)H_2(\omega)|^2 \frac{\mathcal{P}_{s_1}(\omega)}{\mathcal{P}_{s_2}(\omega)} \cdot \frac{1 - I_1(\omega)}{I_1(\omega) + I_2(\omega) - I_1(\omega)I_2(\omega)} \quad (2.3.52)$$

$$\text{var}\{W_1(\omega)\} \approx \frac{1}{BT} |1 - H_1(\omega)H_2(\omega)|^2 \frac{\mathcal{P}_{s_2}(\omega)}{\mathcal{P}_{s_1}(\omega)} \cdot \frac{1 - I_2(\omega)}{I_1(\omega) + I_2(\omega) - I_1(\omega)I_2(\omega)} \quad (2.3.53)$$

unde $I_1(\omega)$ este dată tot de (2.3.47). Întrucât $0 \leq I_1(\omega) \leq 1$ expresiile (2.3.52) și (2.3.53) au valori mai mici sau egale cu (2.3.44) și (2.3.45) respectiv, indicând că varianțele erorilor pot numai să fie îmbunătățite prin includerea statisticilor de ordinul doi.

Utilizarea statisticilor de ordinul doi este deosebit de importantă când unul dintre semnale, spre exemplu $s_1(t)$ este un proces gaussian. Întrucât toți cumulanții de ordin mai mare decât doi ai unui proces gaussian sunt nuli, este ușor de verificat că $I_1(\omega)=0$ în acest caz, și expresia (4.45) a varianței lui W_1 devine infinită, indicând că H_1 nu poate fi identificat utilizând numai statistici de ordin înalt. Prin încorporarea statisticilor de ordinul doi se poate obține o varianță finită așa cum indică (2.3.53).

Un alt caz interesant este acela în care H_1 este cunoscut și se setează $W_1=H_1$. Atunci, varianța erorii în ajustarea lui W_2 , adică varianța erorii de estimare a lui H_2 este dată de:

$$\text{var}\{W_2(\omega)\} \approx \frac{1}{BT} |1 - H_1(\omega)H_2(\omega)|^2 \frac{\mathcal{P}_{s_1}(\omega)}{\mathcal{P}_{s_2}(\omega)} \quad (2.3.54)$$

când se utilizează numai statistici de ordin înalt,

$$\text{var}\{W_2(\omega)\} \approx \frac{1}{BT} |1 - H_1(\omega)H_2(\omega)|^2 \frac{\mathcal{P}_{s_1}(\omega)}{\mathcal{P}_{s_2}(\omega)} \cdot \frac{1 - I_1(\omega)I_2(\omega)}{I_2(\omega)} \quad (2.3.55)$$

când se utilizează numai statistici de ordinul doi și

$$\text{var}\{W_2(\omega)\} \approx \frac{1}{BT} |1 - H_1(\omega)H_2(\omega)|^2 \frac{\mathcal{P}_{s_1}(\omega)}{\mathcal{P}_{s_2}(\omega)} \cdot (1 - I_1(\omega)) \quad (2.3.56)$$

când se combină optim statistici de ordin înalt cu cele de ordinul doi.

Relația (2.3.56) arată că dacă $I_1(\omega)=1$, de exemplu, dacă $s_1(t)$ este un proces binar, atunci varianța lui W_2 devine zero, indicând că H_2 poate fi identificat cu acuratețe absolută (sub presupunerea erorilor mici). Trebuie remarcat că din (2.3.52) și (2.3.53) rezultă, în cazul când se utilizează statistici de ordinul doi, că se pot estima ambele filtre de cuplare și se obține o varianță zero, când semnalele de intrare sunt procese binare.

Pe de altă parte, dacă $I_1(\omega)=0$, de exemplu când $s_1(t)$ este un proces gaussian, atunci nici o îmbunătățire nu poate fi adusă prin utilizarea statisticilor de ordin înalt. De fapt se poate arăta că dacă $s_1(t)$ este gaussian, atunci membrul drept al relației (2.3.54) este marginea inferioară Cramer-Rao pentru estimarea lui \mathbf{H}_2 , indicând că utilizarea statisticilor de ordinul doi este optimă în acest caz. În particular, rezultatul din (2.3.56) arată că chiar dacă \mathbf{H}_1 este cunoscut, de exemplu $\mathbf{H}_1=0$, ca în scenariul Widrow, atunci o îmbunătățire semnificativă poate fi obținută prin încorporarea statisticilor de ordin înalt.

Un caz special, important, este dacă $H_1(\omega) = 0 \forall \omega$ și atunci modelul de combinare devine:

$$y_1(t) = s_1(t) + H_2(t) \otimes s_2(t) \quad (2.3.57)$$

$$y_2(t) = s_2(t) \quad (2.3.58)$$

care este recunoscut ca scenariul reducătorului de zgomot al lui Widrow [1] în care $y_1(t)$ și $y_2(t)$ sunt respectiv semnalele măsurate la intrările primară și de referință, $s_1(t)$ este semnalul dorit, $s_2(t)$ este semnalul de interferență și $H_2(t)$ reprezintă cuplarea semnalului de interferență la canalul primar. În acest model se presupune că nu există nici o "pierdere" a semnalului dorit la intrarea de referință. Rezultatele care apar în (2.3.54) la (2.3.56) sunt direct aplicabile acestui caz special unde se notează că $|1 - H_1(\omega)H_2(\omega)|^2 = 1$.

În [16] se arată, pe baza unui exemplu, că atunci când s_i sunt mixturi gaussiene, prin combinarea optimă a statisticilor de ordinul doi cu statistici de ordinul patru, pentru a estima ambele filtre de cuplare, se poate depăși în performanță metoda de ordinul doi care presupune cunoașterea unuia dintre filtre. Aceasta sugerează că problema apariției erorilor asociată cu scenariul Widrow când există scăpări ale semnalului dorit la senzorul de referință poate fi depășită fără creșterea varianței erorii. Când s_1 și s_2 tind să fie ambele semnale gaussiene simple, atunci varianța erorii de estimare a filtrelor tinde spre infinit și deci nu se poate realiza identificarea filtrelor de cuplare.

Condiția ca semnalele reconstruite $v_1(t)$ și $v_2(t)$ să fie statistic independente implică de fapt ca toți cumulanții de legătură să fie zero:

$$\text{cum}\left(v_1(t), v_1(t - \tau_1), \dots, v_1(t - \tau_p), v_2(t - \tau_{p+1}), \dots, v_2(t - \tau_{p+q})\right) = 0 \quad (2.3.59)$$

pentru toți întregii $p \geq 0, q \geq 1$ și pentru toți $\tau_1, \dots, \tau_{p+q}$.

Ecuatiile criteriului din (2.3.1) și (2.3.2) sunt cazuri speciale ale lui (2.3.59). Ecuția (2.3.59) sugerează să se utilizeze ecuații de criteriu adiționale într-un efort de a reduce varianța erorii. Totuși se poate arăta că varianța asociată acestor ecuații adiționale este cu un ordin de mărime mai mare și de aceea îmbunătățirea este relativ minoră.

2.3.1.3. Efectul zgomotului aditiv

Se consideră cazul când ieșirile canalelor de combinare sunt contaminate de zgomote aditive. În acest caz, semnalele observate sunt date de :

$$y_1(t) = s_1(t) + H_2(t) \otimes s_2(t) + n_1(t) \quad (2.3.60)$$

$$y_2(t) = s_2(t) + H_1(t) \otimes s_1(t) + n_2(t) \quad (2.3.61)$$

unde $n_1(t)$ și $n_2(t)$ pot reprezenta zgomotele de măsurare sau ale senzorilor, erori de modelare, etc.

Prezența zgomotului aditiv poate cauza un efect de deplasare și o creștere a varianței de eroare.

Dacă statisticile de legătură ale lui $n_1(t)$ și $n_2(t)$ sunt cunoscute a priori, sau pot fi măsurate separat, efectul de deplasare poate fi esențial eliminat prin extragerea contribuției lor. Se poate verifica ușor că relația (2.3.33) poate fi modificată pentru a îngloba efectul zgomotului aditiv asupra covarianței erorii, astfel:

$$\text{cov}\{\underline{W}\} \approx \left[D^{-1} (\Lambda + \Lambda_n)^{-1} D \right]^{-1} \quad (2.3.62)$$

unde Λ este covarianța statisticilor vectorului estimat $\hat{\underline{U}}$ în absența zgomotului și Λ_n reprezintă contribuția zgomotului la covarianța lui $\hat{\underline{U}}$. De notat că Λ_n este diferit de zero chiar dacă $n_1(t)$ și $n_2(t)$ sunt legate gaussian și utilizăm numai statistici de ordin înalt.

Această relație poate fi utilizată pentru a deduce formule concrete pentru cazuri specifice așa cum s-a procedat pentru cazul fără zgomot.

2.3.1.4. Reconstrucția semnalului

O măsură a performanței de separare poate fi raportul interferență /semnal (ISR) care este raportul spectrului de putere al semnalului de interferență la spectrul de putere al semnalului dorit. Privind pe $s_2(t)$ ca interferență la prima ieșire și $s_1(t)$ ca interferență la a doua ieșire, este ușor de verificat că rapoartele interferență /semnal de post procesare la prima și a doua ieșire, sunt date respectiv de:

$$ISR_1(\omega) = \frac{|W_2(\omega) - H_2(\omega)|^2 \cdot \mathcal{P}_{s_2 s_2}(\omega)}{|1 - W_2(\omega)H_1(\omega)|^2 \cdot \mathcal{P}_{s_1 s_1}(\omega)} \quad (2.3.63)$$

$$ISR_2(\omega) = \frac{|W_1(\omega) - H_1(\omega)|^2 \cdot \mathcal{P}_{s_1 s_1}(\omega)}{|1 - W_1(\omega)H_2(\omega)|^2 \cdot \mathcal{P}_{s_2 s_2}(\omega)} \quad (2.3.64)$$

Ignorând efectele de ordinul doi și utilizând (2.3.44) și (2.3.45) respectiv, rezultă:

$$E[ISR_1(\omega)] \approx \frac{1}{BT} \cdot \frac{1}{I_2(\omega)} \quad (2.3.65)$$

$$E[ISR_2(\omega)] \approx \frac{1}{BT} \cdot \frac{1}{I_1(\omega)} \quad (2.3.66)$$

și dacă se încorporează și statistici de ordinul doi, atunci rezultă:

$$E[ISR_1(\omega)] \approx \frac{1}{BT} \cdot \frac{1 - I_1(\omega)}{I_1(\omega) + I_2(\omega) - I_1(\omega)I_2(\omega)} \quad (2.3.67)$$

$$E[ISR_2(\omega)] \approx \frac{1}{BT} \cdot \frac{1 - I_2(\omega)}{I_1(\omega) + I_2(\omega) - I_1(\omega)I_2(\omega)} \quad (2.3.68)$$

Trebuie notat faptul că $E[ISR_i(\omega)]$ nu depinde de canalele de cuplare și nici de rapoartele interferență/semnal preprocesate. El depinde numai de cantitatea de informație conținută în statisticile care sunt utilizate prin cantitățile $I_1(\omega)$ și $I_2(\omega)$.

Autorii articolului [16] au folosit, cu bune rezultate, într-un experiment de separare a semnalului vocal sistemul decorelaturii cu propagare înainte în care filtrele \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 au fost alese de tip F.I.R. cu 129 de coeficienți, acoperind întârzieri de până la 16ms. Pentru a ajusta filtrele de decuplare a fost folosit un algoritm de căutare de tip gradient pentru a minimiza criteriul din (2.3.15) unde vectorul \hat{U} constă din corelațiile empirice (2.3.13) cu $p=1$ și $p=3$, $\hat{\delta}=\mathbf{0}$ (statistici de ordinul doi și patru) calculate utilizând $T=18000$ eșantioane de date.

În secțiunile următoare sunt prezentați algoritmi care pot fi considerați cazuri particulare ale algoritmilor prezentați în acest cadru general.

2.3.2. SEPARAREA SURSELOR UTILIZÂND STATISTICI DE ORDINUL DOI

Lindgren, Sahlin și Broman [26] au tratat problema separării surselor utilizând statistici de ordinul doi bazându-se pe funcții de intercorelație.

Pentru a păstra unitatea prezentării se vor folosi notațiile din această lucrare.

Se consideră că semnalele s_1 și s_2 sunt rezultatul transferării a două semnale de tip zgomot alb ξ_1 și respectiv ξ_2 prin două filtre de tip A.R.M.A. așa cum se prezintă în Fig. 2.3.2:

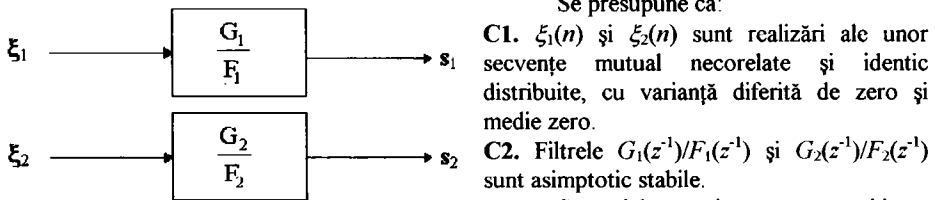


Fig. 2.3.2. Modelul semnalelor s_1 și s_2 Semnalele s_1 și s_2 sunt combinate după modelul prezentat în Fig.2.2.1 și se obțin semnalele y_1 și y_2 care constituie intrările decorelaturii cu propagare înainte prezentat în Fig 2. 2.

Algoritmul prezentat se bazează pe presupunerea că filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 sunt de tip F.I.R..

Se notează:

$$\theta = [w_{10} \quad \dots \quad w_{1M_1-1} \quad w_{20} \quad \dots \quad w_{2M_2-1}]^T = [W_1^T \quad W_2^T]^T \quad (2.3. 69)$$

$$\theta_0 = [h_{10} \quad \dots \quad h_{1N_1-1} \quad h_{20} \quad \dots \quad h_{2N_2-1}]^T = [H_1^T \quad H_2^T]^T \quad (2.3. 70)$$

unde H_1 , H_2 , W_1 și W_2 sunt vectorii coeficienților răspunsurilor la impulsul unitate ai filtrelor \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 .

C3. Se face presupunerea naturală că $M_1 \geq N_1$ și $M_2 \geq N_2$.

Cu aceste notații se pot scrie relațiile:

$$v_1(n, \theta) = y_1(n) - W_2^T Y_2^{M_2}(n) \quad (2.3. 71)$$

$$v_2(n, \theta) = y_2(n) - W_1^T Y_1^{M_1}(n) \quad (2.3. 72)$$

unde

$$Y_1^{M_1}(n) = [y_1(n) \quad y_1(n-1) \quad \dots \quad y_1(n-M_1+1)]^T \quad (2.3.73)$$

$$Y_2^{M_2}(n) = [y_2(n) \quad y_2(n-1) \quad \dots \quad y_2(n-M_2+1)]^T \quad (2.3.74)$$

Funcția cost care se minimizează prin algoritmul de gradient propus este:

$$J(\theta) = \sum_{l=-M}^M (R_{v_1 v_2}(l, \theta))^2 \quad (2.3.75)$$

unde $R_{v_1 v_2}$ este intercorelația semnalelor v_1 și v_2 , dată de relația:

$$R_{v_1 v_2}(l, \theta) = E[v_1(n-l, \theta)v_2(n, \theta)] \quad (2.3.76)$$

Dacă în locul parametrului θ se introduce parametrul θ_0 atunci se anulează funcția cost.

$$J(\theta_0) = 0 \quad (2.3.77)$$

Intercorelația din relația (2.3.76) poate fi scrisă astfel:

$$\begin{aligned} R_{v_1 v_2}(l, \theta) &= E[v_1(n-l, \theta)v_2(n, \theta)] = \\ &= E[(y_1(n-l) - W_2^T Y_2^M((n-l)))(y_2(n) - W_1^T Y_1^M(n))] = \\ &= E[y_1(n-l)y_2(n)] - W_1^T E[Y_1^M(n)y_1(n-l)] - W_2^T E[Y_2^M(n-l)y_2(n)] + \\ &\quad + W_2^T E[Y_2^M(n-l)Y_1^{MT}(n)]W_1 \end{aligned} \quad (2.3.78)$$

Se introduc notațiile:

$$R_{y_1 y_2}(l) = E[y_1(n-l)y_2(n)] \quad (2.3.79)$$

$$R_{y_1 y_1}(l) = E[y_1(n-l)y_1(n)] \quad (2.3.80)$$

$$R_{y_2 y_2}(l) = E[y_2(n-l)y_2(n)] \quad (2.3.81)$$

$$\mathbf{r}_{y_1 y_1}(l) = [R_{y_1 y_1}(l) \quad \dots \quad R_{y_1 y_1}(l+M_1-1)]^T \quad (2.3.82)$$

$$\mathbf{r}_{y_2 y_2}(l) = [R_{y_2 y_2}(l) \quad \dots \quad R_{y_2 y_2}(l+M_2-1)]^T \quad (2.3.83)$$

$$\mathbf{r}_{y_2 y_1}(l) = [R_{y_2 y_1}(l) \quad \dots \quad R_{y_2 y_1}(l+M_2-1)]^T \quad (2.3.84)$$

$$\mathbf{R}_{y_2 y_1}(l) = [\mathbf{r}_{y_2 y_1}(l) \quad \dots \quad \mathbf{r}_{y_2 y_1}(l+M_1-1)] \quad (2.3.85)$$

Cu aceste notații relația (2.3.78) devine:

$$R_{v_1 v_2}(l) = R_{y_1 y_2}(l) - W_1^T \mathbf{r}_{y_1 y_1}(l) - W_2^T \mathbf{r}_{y_2 y_2}(l) + W_2^T \mathbf{R}_{y_2 y_1}(l)W_1 \quad (2.3.86)$$

Gradientul funcției cost din relația (2.3.75) poate fi calculat astfel:

$$\nabla J(\theta) = \sum_{l=-M}^M 2 \frac{\partial R_{v_1 v_2}(l, \theta)}{\partial \theta} R_{v_1 v_2}(l, \theta) \quad (2.3.87)$$

Conform autorilor acestui articol, acest gradient transformat în gradient stohastic al algoritmului, conduce la o slabă convergență când semnalele surselor sunt similare. Pentru a crește viteza de convergență se folosește un algoritm de tip Newton.

Algoritmul Newton utilizează matricea hessiană a lui J cu scopul de a recalcula gradientul utilizat în ecuația (2.3.87).

Matricea hessiană nu este în general pozitiv definită și din această cauză căutarea poate fi dirijată în direcții opuse celei corecte. Pentru a elimina această incertitudine se folosește o matrice hessiană modificată definită astfel:

$$\tilde{\mathcal{H}} = 2 \sum_{l=-M}^M \mathcal{P}(l) \quad (2.3.88)$$

unde

$$\mathcal{P}(l) = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{v_1 v_2}(l)}{\partial W_1} \left(\frac{\partial R_{v_1 v_2}(l)}{\partial W_1} \right)^T & \frac{\partial R_{v_1 v_2}(l)}{\partial W_1} \left(\frac{\partial R_{v_1 v_2}(l)}{\partial W_2} \right)^T \\ \frac{\partial R_{v_1 v_2}(l)}{\partial W_2} \left(\frac{\partial R_{v_1 v_2}(l)}{\partial W_1} \right)^T & \frac{\partial R_{v_1 v_2}(l)}{\partial W_2} \left(\frac{\partial R_{v_1 v_2}(l)}{\partial W_2} \right)^T \end{bmatrix} \quad (2.3.89)$$

Algoritmul Newton modificat este

$$0(n) = \theta(n-1) - \mu(n) \tilde{\mathcal{H}}^{-1} \psi(n, \theta(n-1)) \quad (2.3.90)$$

S-a stabilit că pentru canale cauzale problema este una de identificare a parametrilor utilizând statistici de ordinul doi dacă sistemul canal conține cel puțin o rădăcină în fiecare canal și $1 - H_1 H_2$ este de fază minimă. Totuși aceste condiții pot fi relaxate.

Investigarea asupra proprietăților de convergență ale algoritmului dat de ecuația (2.3.90) a condus la concluziile prezentate mai jos.

Pentru semnale surse cu $F_1 = F_2 = 1$ rezultă că o condiție necesară și suficientă pentru convergență este să nu fie adevărate simultan următoarele afirmații: $1 - H_1 H_2$ este de fază liniară și sursele au culoare identică.

Problema identificării sistemului poate fi privită ca problema estimării polinoamelor G_1 , G_2 , F_1 , F_2 și a filtrelor \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 . Trebuie notat că problema separării surselor necesită numai identificarea canalelor astfel ca semnalele surselor s_1 și s_2 să poată fi refăcute. Filtrele canalelor se presupun a fi de tip A.R.M.A. cu

$$H_1 = \frac{B_1}{A_1}, \quad H_2 = \frac{B_2}{A_2} \quad (2.3.91)$$

Ecuațiile rezultante pot fi puse sub forma matriceală astfel:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{B_2}{A_2} \\ \frac{B_1}{A_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G_1}{F_1} & \frac{G_2}{F_2} \cdot \frac{B_2}{A_2} \\ \frac{G_1}{F_1} \cdot \frac{B_1}{A_1} & \frac{G_2}{F_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.92)$$

unde G_1, G_2, \dots sunt polinoame în z și semnalele y_1, y_2, \dots sunt de timp discret, A_1, A_2, F_1 și F_2 sunt monice și G_1 și G_2 sunt de fază minimă.

Se presupune că :

C4. Nu au loc anulări ale elementelor matricei spectrale $Q - E[YY^H]$ sau ale determinantului său.

În aceste condiții au loc următoarele proprietăți:

Propoziția 1: În baza presupunerii **C4**, sistemul dat de ecuația (2.3.92) este cu parametrii identificabili dacă filtrele ambelor canale au mai mulți poli decât zerouri.

Propoziția 2: În baza presupunerii **C4**, sistemul dat de ecuația (2.3.92) este cu parametrii identificabili dacă sursele sunt pur autoregresive, ambele filtre ale canalului au cel puțin un zero, și filtrul $A_1A_2-B_1B_2$ este de fază minimă, de grad mai mare decât cel al lui B_1 și B_2 .

Propoziția 3: Sistemul dat de ecuația (2.3.92) cu un canal static, este cu parametrii identificabili local cu exact două soluții dacă sursele sunt colorate diferit, adică G_1/F_1 nu este proporțional cu G_2/F_2 și produsul amplificărilor canalelor diferă de unitate.

Propoziția 4: În cazul că G_1/F_1 este proporțional cu G_2/F_2 și canalele sunt statice, sistemul dat de ecuația (2.3.92) nu mai este local identificabil.

2.3.3. ALGORITM DE GRADIENT BAZAT PE CUMULANȚI DE ORDINUL TREI

În articolul [27] se prezintă un algoritm de gradient bazat pe cumulanți de ordinul trei.

Se vor folosi, pe cât posibil, notațiile din această lucrare pentru a-i menține o formă unitară.

Se consideră decorelatorul simplu cu propagare directă prezentat în Fig. 2.2.2.

Autorul acestui articol consideră că filtrele W_1 și W_2 sunt de tip F.I.R. având gradele M_1 și respectiv M_2 . Se determină filtrele W_1 și W_2 astfel ca să fie satisfăcute simultan relațiile:

$$\text{cum}\left[v_1(k), v_1(k+t_j), v_2(k+t_k)\right] = 0 \quad (2.3.93)$$

$$\text{cum}\left[v_2(k), v_2(k+t_j), v_1(k+t_k)\right] = 0 \quad (2.3.94)$$

În condițiile în care semnalele au medie nulă, cumulantul de ordinul trei coincide cu momentul de ordinul trei, adică au loc egalitățile:

$$\text{cum}\left[v_1(k), v_1(k+t_j), v_2(k+t_k)\right] = E\left[v_1(k)v_1(k+t_j)v_2(k+t_k)\right] \quad (2.3.95)$$

$$\text{cum}\left[v_2(k), v_2(k+t_j), v_1(k+t_k)\right] = E\left[v_2(k)v_2(k+t_j)v_1(k+t_k)\right] \quad (2.3.96)$$

Algoritmul folosește următoarele două egalități evidente:

$$E\left[v_1(k)v_1(k+t_j)v_2(k+t_k)\right] = E\left[v_1(k)v_1(k+t_j)y_2(k+t_k)\right] - W_1^T E\left[v_1(k)v_1(k+t_j)Y_1^M(k+t_k)\right] \quad (2.3.97)$$

$$E\left[v_2(k)v_2(k+t_j)v_1(k+t_k)\right] = E\left[v_2(k)v_2(k+t_j)y_1(k+t_k)\right] - W_2^T E\left[v_2(k)v_2(k+t_j)Y_2^M(k+t_k)\right] \quad (2.3.98)$$

Pentru a aproxima mediile statistice se folosește o prelucrare pe blocuri a datelor și mediile statistice sunt înlocuite cu mediile temporale ale blocurilor de date.

Se fac notațiile:

$$\mathbf{R}_1(-t_k - t_{k\max}t_j)(n) = \text{cum}[v_1^*(n), v_1(n+t_j), Y_1^{M1}(n+t_k)] \quad (2.3. 99)$$

$$\mathbf{q}_1(-t_k - t_{k\max}t_j)(n) = \text{cum}[v_1^*(n), v_1(n+t_j), y_2(n+t_k)] \quad (2.3. 100)$$

$$\mathbf{R}_2(-t_k - t_{k\max}t_j)(n) = \text{cum}[v_2^*(n), v_2(n+t_j), Y_2^{M2}(n+t_k)] \quad (2.3. 101)$$

$$\mathbf{q}_2(-t_k - t_{k\max}t_j)(n) = \text{cum}[v_1^*(n), v_1(n+t_j), y_2(n+t_k)] \quad (2.3. 102)$$

$$Y_1^{M1}(n) = [y_1(n) \ \dots \ y_1(n-M1+1)]^T \quad (2.3. 103)$$

$$Y_2^{M2}(n) = [y_2(n) \ \dots \ y_2(n-M2+1)]^T \quad (2.3. 104)$$

$$V_1^{M1} = [v_1(n) \ \dots \ v_1(n-M1+1)]^T \quad (2.3. 105)$$

$$V_2^{M2} = [v_2(n) \ \dots \ v_2(n-M2+1)]^T \quad (2.3. 106)$$

Inițializarea algoritmului este următoarea:

$$W_1(0) = 0^{M1} \quad (2.3. 107)$$

$$W_2(0) = 0^{M1} \quad (2.3. 108)$$

pentru $-t_{j\max} < t_j \leq 0$, $-t_{k\max} < t_k \leq 0$:

$$\mathbf{R}_1(-t_k - t_{k\max}t_j)(0) = 0^{M1} \quad (2.3. 109)$$

$$\mathbf{q}_1(-t_k - t_{k\max}t_j)(0) = 0 \quad (2.3. 110)$$

$$\mathbf{R}_2(-t_k - t_{k\max}t_j)(0) = 0^{M2} \quad (2.3. 111)$$

$$\mathbf{q}_2(-t_k - t_{k\max}t_j)(0) = 0 \quad (2.3. 112)$$

Mărimea blocurilor de date care se prelucrează este notată cu l_b .

Iterarea algoritmului:

- Pentru $0 < i \leq l_b$

$$v_1(n-i) = y_1(n-i) - W_2^T(n-l_b)V_2^{M2}(n-i) \quad (2.3. 113)$$

$$v_2(n-i) = y_2(n-i) - W_1^T(n-l_b)V_1^{M1}(n-i) \quad (2.3. 114)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1(-t_k - t_{k \max} t_j)(n) &= (1 - \lambda) \mathbf{R}_1(-t_k - t_{k \max} t_j)(n - l_b) + \\ &+ \lambda \frac{1}{l_b} \sum_{i=0}^{l_b-1} v_1^*(n-i) v_1(n-i+t_j) Y_1^{M1}(n-i+t_k) \end{aligned} \quad (2.3. 115)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2(-t_k - t_{k \max} t_j)(n) &= (1 - \lambda) \mathbf{R}_2(-t_k - t_{k \max} t_j)(n - l_b) + \\ &+ \lambda \frac{1}{l_b} \sum_{i=0}^{l_b-1} v_2^*(n-i) v_2(n-i+t_j) Y_2^{M2}(n-i+t_k) \end{aligned} \quad (2.3. 116)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1(-t_k - t_{k \max} t_j)(n) &= (1 - \lambda) \mathbf{q}_1(-t_k - t_{k \max} t_j)(n - l_b) + \\ &+ \lambda \frac{1}{l_b} \sum_{i=0}^{l_b-1} v_1^*(n-i) v_1(n-i+t_j) y_2(n-i+t_k) \end{aligned} \quad (2.3. 117)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2(-t_k - t_{k \max} t_j)(n) &= (1 - \lambda) \mathbf{q}_2(-t_k - t_{k \max} t_j)(n - l_b) + \\ &+ \lambda \frac{1}{l_b} \sum_{i=0}^{l_b-1} v_2^*(n-i) v_2(n-i+t_j) y_1(n-i+t_k) \end{aligned} \quad (2.3. 118)$$

$$\begin{aligned} W_1(n) &= W_1(n - l_b) + \mu_1 \mathbf{R}_1(-t_k - t_{k \max} t_j)(n) \cdot \\ &\cdot \left\{ \mathbf{q}_1(-t_k - t_{k \max} t_j)(n) - W_1^T(n - l_b) \mathbf{R}_1(-t_k - t_{k \max} t_j)(n - l_b) \right\} \end{aligned} \quad (2.3. 119)$$

$$\begin{aligned} W_2(n) &= W_2(n - l_b) + \mu_2 \mathbf{R}_2(-t_k - t_{k \max} t_j)(n) \cdot \\ &\cdot \left\{ \mathbf{q}_2(-t_k - t_{k \max} t_j)(n) - W_2^T(n - l_b) \mathbf{R}_2(-t_k - t_{k \max} t_j)(n - l_b) \right\} \end{aligned} \quad (2.3. 120)$$

Teoretic, acest algoritm nu poate fi aplicat semnalelor cu distribuție simetrică deoarece o asemenea distribuție anulează toți cumulanții de ordin impar, deci și de ordinul trei.

2.3.4. ALGORITM DE DECORELARE A N SEMNALE BAZAT PE POLISPECTRE

În [45] sunt prezentați algoritmi de decorelare a n semnale bazați pe criteriile formulate cu ajutorul polispectrelor.

2.3.4.1. Formularea problemei

Fie n numărul de surse și de senzori. Se presupune că semnalele celor n surse, care sunt de bandă largă, s_j , sunt recepționate de n senzori x_i . Semnalele senzorilor sunt date de ecuațiile:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_k^{K_j} a_{ij}^{(k)} s_j(t-k) + e_i(t)$$

unde $x_i(t)$ este observația senzorialului i , $s_j(t)$ este semnalul sursei j , $\alpha_{ij}^{(k)}$ este coeficientul de ordin k al filtrului F.I.R. care cuplează sursa j și senzorialul i , respectiv, K_{ij} este gradul filtrului menționat anterior, $e_i(t)$ este zgomotul de măsurare al senzorialului i .

În vederea construirii algoritmului de decorelare, care, de data aceasta vizează reconstituirea tuturor celor n semnale provenite de la surse, se fac următoarele ipoteze:

A.1. $s_i(t)$ este un proces staționar în sens larg, de medie zero. Pentru fiecare t , $\{s_i(t), i = 1, \dots, n\}$ sunt mutual independente.

A.2. $e_i(t)$ este un proces gaussian, staționar, de medie zero. Pentru fiecare t , $\{e_i(t), i = 1, \dots, n\}$ sunt independente de $\{s_i(t), i = 1, \dots, n\}$.

A.3. Bispectrele $P_{s_j s_i^*}(\omega_1, \omega_2), \forall \omega_1, \omega_2$, există pentru toți $s_i(t)$, unde $*$ desemnează complex conjugata.

Se notează

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= [x_1(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \\ \underline{s}(t) &= [s_1(t) \ \dots \ s_n(t)]^T \\ \underline{e}(t) &= [e_1(t) \ \dots \ e_n(t)]^T \end{aligned}$$

Obiectivul identificării oarbe și separării surselor este de a estima coeficienții canalelor $\alpha_{ij}^{(k)}$ și semnalele individuale, $s_j(t)$. Pentru a ridica nedeterminarea identificării oarbe [46] se consideră:

- i) $\alpha_{1j}^{(0)} = 1, j = 1, \dots, n$;
- ii) $K_{i1} = K_{i2} = \dots = K_{in}, \forall i = 1, \dots, n$.

2.3.4.2. Criteriu și algoritm bazat pe bispectre

Se consideră transformata Fourier a observațiilor:

$$X(\omega) = A(\omega)S(\omega) + E(\omega)$$

unde $X(\omega), S(\omega), E(\omega)$ sunt transformatele Fourier ale lui $\underline{x}(t), \underline{s}(t)$ și $\underline{e}(t)$, respectiv, și

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{K_{11}} \alpha_{11}^{(k)} e^{-jk\omega} & \dots & \sum_{k=0}^{K_{1n}} \alpha_{1n}^{(k)} e^{-jk\omega} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=0}^{K_{n1}} \alpha_{n1}^{(k)} e^{-jk\omega} & \dots & \sum_{k=0}^{K_{nn}} \alpha_{nn}^{(k)} e^{-jk\omega} \end{bmatrix}$$

Se dorește eliminarea efectelor de contaminare datorate lui A prin utilizarea unui sistem de reconstrucție $n \times n$, H conform relației:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= H(\omega)X(\omega) = H(\omega)A(\omega)S(\omega) + H(\omega)E(\omega) \\ &= T(\omega)S(\omega) + H(\omega)E(\omega) \end{aligned} \quad (2.3. 121)$$

unde $T(\omega) = H(\omega)A(\omega)$, $Y(\omega)$ reprezintă transformata Fourier a vectorului semnalelor reconstruite $\underline{y}(t) = [y_1(t) \ \dots \ y_n(t)]^T$ și $H(\omega), T(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Criteriu: Se presupune că există un set de frecvențe $\{\omega^{(l)}, l = 1, \dots, L\}$ astfel ca

$$P_{s_q s_q^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}) \neq 0, l = 1, \dots, L, q = 1, \dots, n \quad (2.3. 122)$$

$$P_{s_q, s_q^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}) \neq 0; \quad l = 1, \dots, L; \quad q = 1, \dots, n \quad (2.3.123)$$

Se notează: $\Delta\omega^{(l)} = \omega^{(l+1)} - \omega^{(l)}$. Se presupune că:

$$\det T(0) \neq 0 \quad (2.3.124)$$

$$\det T(\omega^{(l)}) \neq 0; \quad l = 1, \dots, L \quad (2.3.125)$$

$$\det T(\Delta\omega^{(l)}) \neq 0; \quad l = 1, \dots, L-1 \quad (2.3.126)$$

Atunci, sub ipotezele A.1-A.3, $\{T(\omega^{(l)}), \quad l = 1, \dots, L\}$ sunt matrice de permutare generalizate

$$T(\omega^{(l)}) = P\Lambda(\omega^{(l)}) \quad (2.3.127)$$

unde P este o matrice de permutare și $\Lambda(\omega^{(l)})$ este o matrice diagonală nesingulară dacă

$$P_{y_i, y_i^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}) = 0; \quad l = 1, \dots, L. \quad (2.3.128)$$

$$P_{y_i, y_i^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}) = 0; \quad l = 2, \dots, L. \quad (2.3.129)$$

pentru toți $i, j, k=1, \dots, n; j < k$.

Se reamintește faptul că o matrice este de permutare dacă are un singur element diferit de zero pe fiecare linie și pe fiecare coloană, acel element fiind egal cu unitatea.

Justificarea acestui criteriu este următoarea:

Se explicitează bispectrul:

$$P_{y_i, y_i^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}) = \sum_{q_1} \sum_{q_2} \sum_{q_3} T_{i q_1}(0) T_{j q_2}(\omega^{(l)}) T_{k q_3}^*(\omega^{(l)}) P_{s_{q_1} s_{q_2} s_{q_3}^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}) + \\ + \sum_{q_1} \sum_{q_2} \sum_{q_3} H_{i q_1}(0) H_{j q_2}(\omega^{(l)}) H_{k q_3}^*(\omega^{(l)}) P_{e_{q_1} e_{q_2} e_{q_3}^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}) \quad (2.3.130)$$

Conform ipotezelor A.1., A.2. și condiției (2.3.128) rezultă:

$$\sum_q T_{i q}(0) T_{j q}(\omega^{(l)}) T_{k q}^*(\omega^{(l)}) P_{s_q s_q^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}) = 0 \quad (2.3.131)$$

pentru toți $i, j, k=1, \dots, n; j < k$.

Având în vedere ipoteza (2.3.122) și impunând ca pentru fiecare j și k determinantul sistemului (2.3.131) să se anuleze, se obține:

$$\prod_{q=1}^n T_{j q}(\omega^{(l)}) T_{k q}^*(\omega^{(l)}) \det T(0) = 0 \quad (2.3.132)$$

Conform cu (2.3.124) din (2.3.132) rezultă:

$$\prod_{q=1}^n T_{j q}(\omega^{(l)}) T_{k q}^*(\omega^{(l)}) = 0 \quad (2.3.133)$$

Fără a se pierde din generalitate, se presupune că $T_{j1}(\omega^{(l)}) T_{k1}^*(\omega^{(l)}) = 0$ și atunci, impunând ca sistemele (2.3.131) să aibă soluții $P_{s_q s_q^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}) \neq 0$, trebuie ca toți cofactorii elementelor de pe prima coloană a determinantului sistemului trebuie să se anuleze. În aceste condiții rezultă:

$$\prod_{q=2}^n T_{j q}(\omega^{(l)}) T_{k q}^*(\omega^{(l)}) \tilde{T}_{p1}(0) = 0; \quad p = 1, \dots, n \quad (2.3.134)$$

unde $\tilde{T}_{p1}(0)$ desemnează cofactorul elementului $T_{p1}(0)$.

Se presupune că $\prod_{q=2}^n T_{jq}(\omega^{(l)}) T_{kq}^*(\omega^{(l)}) \neq 0$, astfel că $\tilde{T}_{p1}(0) = 0$ pentru toți $p=1, \dots, n$ și

atunci rezultă: $\det T(0) = \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} T_{p1}(0) \tilde{T}_{p1}(0) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza (2.3.124).

Astfel, rezultă că:

$$\prod_{q=2}^n T_{jq}(\omega^{(l)}) T_{kq}^*(\omega^{(l)}) = 0 \quad (2.3.135)$$

În mod similar se obține că:

$$\prod_{q=r}^n T_{jq}(\omega^{(l)}) T_{kq}^*(\omega^{(l)}) = 0; \quad r = 3, \dots, n \quad (2.3.136)$$

Cu aceasta s-a demonstrat că

$$T_{jq}(\omega^{(l)}) T_{kq}^*(\omega^{(l)}) = 0; \quad j, k, q = 1, \dots, n; \quad j < k \quad (2.3.137)$$

Semnificația relațiilor (2.3.137) este că produsul oricăror două elemente de indice diferit de pe fiecare coloană a lui $T(\omega^{(l)})$ este nul. Rezultă că pe fiecare coloană există cel mult un element nenul. Întrucât se presupune valabilă condiția (2.3.125) rezultă:

$$T(\omega^{(l)}) = P(\omega^{(l)}) \Lambda(\omega^{(l)}); \quad l = 1, \dots, L \quad (2.3.138)$$

La fel cum s-au demonstrat relațiile (2.3.137) se poate demonstra, ținând cont de (2.3.123), (2.3.126) și (2.3.129), că

$$T_{jq}(\omega^{(l-1)}) T_{kq}^*(\omega^{(l)}) = 0; \quad j, k, q = 1, \dots, n; \quad j < k; \quad l = 2, \dots, L \quad (2.3.139)$$

Relația (2.3.139) demonstrează că elementele care sunt nule în cazul relației (2.3.137), sunt nule la orice frecvență, deci sunt efectiv egale cu zero. Aceasta înseamnă că matricea $P(\omega^{(l)})$ nu depinde de frecvență, deci relația (2.3.127) este demonstrată și criteriul enunțat este justificat.

Se remarcă faptul că relațiile (2.3.122) și (2.2.123) sunt satisfăcute dacă sursele au funcții de densitate de probabilitate asimetrice.

Utilizând (2.3.121), ecuațiile (2.3.128) și (2.3.129) sunt satisfăcute dacă $\forall p \in \{1, \dots, n\}$

$$\sum_{q \neq p} H_{pq}(\omega^{(l)}) P_{y_i, y_i^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}) = -H_{pp}(\omega^{(l)}) P_{y_i, y_i^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}); \quad k > p \quad (2.3.140)$$

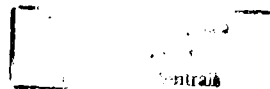
$$\sum_{q \neq p} H_{pq}^*(\omega^{(l)}) P_{y_i, y_i^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}) = -H_{pp}^*(\omega^{(l)}) P_{y_i, y_i^*}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}); \quad j < p \quad (2.3.141)$$

$$\sum_{q \neq p} H_{pq}^*(\omega^{(l)}) P_{y_i, y_i^*}(\omega^{(l-1)}, -\omega^{(l)}) = -H_{pp}^*(\omega^{(l)}) P_{y_i, y_i^*}(\omega^{(l-1)}, -\omega^{(l)}); \quad j < p \quad (2.3.142)$$

Observația 1: Întrucât obiectivul este să se obțină

$$T(\omega^{(l)}) = H(\omega^{(l)}) A(\omega^{(l)}) = P \Lambda(\omega^{(l)}); \quad l = 1, \dots, L$$

unde $\Lambda(\omega^{(l)})$ este o matrice diagonală nesingulară arbitrară, este convenabil să se presupună că $H_{pp}(\omega^{(l)}) = 1, p = 1, \dots, n$. Atunci (2.3.140), (2.3.141) și (2.3.142) sunt liniare în $H_{pq}(\omega^{(l)}), p \in \{1, \dots, n\}, q = 1, \dots, n$ și pot fi rezolvate prin procedura celor mai mici pătrate.



Observația 2: Soluția $H_{pq}(\omega^{(l)}), p \in \{1, \dots, n\}, q = 1, \dots, n$ depinde numai de $H_{jq}(\omega^{(l)}), j < p, H_{kq}(\omega^{(l)}), k > p$ și $H_{jq}(\omega^{(l-1)}), j < p, q = 1, \dots, n$, așa cum reiese din demonstrația criteriului, așa că pentru orice $H_{jq}(\omega^{(l)}), j < p, H_{kq}(\omega^{(l)}), k > p$ și $H_{jq}(\omega^{(l-1)}), j < p, q = 1, \dots, n$, date, se vor utiliza relațiile (2.3.140)-(2.3.142) pentru a rezolva $H_{pq}(\omega^{(l)}), p \in \{1, \dots, n\}, q = 1, \dots, n$ și alternând între diferiți $p = 1, \dots, n$, se obține o procedură iterativă pentru ajustarea lui $H(\omega^{(l)})$.

Din (2.3.125) și (2.3.127) rezultă:

$$H^{-1}(\omega^{(l)}) = A(\omega^{(l)})\Lambda^{-1}(\omega^{(l)})P^T = \begin{bmatrix} A_{1j_1}(\omega^{(l)})\lambda_{j_1}(\omega^{(l)}) & \dots & A_{1j_n}(\omega^{(l)})\lambda_{j_n}(\omega^{(l)}) \\ \vdots & & \vdots \\ A_{mj_1}(\omega^{(l)})\lambda_{j_1}(\omega^{(l)}) & \dots & A_{mj_n}(\omega^{(l)})\lambda_{j_n}(\omega^{(l)}) \end{bmatrix} \quad (2.3.143)$$

în care $\Lambda^{-1}(\omega^{(l)}) = \text{diag}(\lambda_{j_1}(\omega^{(l)}), \dots, \lambda_{j_n}(\omega^{(l)}))$ și $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$. Pentru a elimina scalarea necunoscută a vectorilor coloană din (2.3.143), se împart vectorii coloană prin primele lor elemente și se obține matricea:

$$\tilde{A}(\omega^{(l)}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum a_{2j_1}^{(k)} e^{-jk\omega^{(l)}}} & \dots & \frac{1}{\sum a_{2j_n}^{(k)} e^{-jk\omega^{(l)}}} \\ \frac{\sum a_{1j_1}^{(k)} e^{-jk\omega^{(l)}}}{\sum a_{2j_1}^{(k)} e^{-jk\omega^{(l)}}} & \dots & \frac{\sum a_{1j_n}^{(k)} e^{-jk\omega^{(l)}}}{\sum a_{2j_n}^{(k)} e^{-jk\omega^{(l)}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\sum a_{mj_1}^{(k)} e^{-jk\omega^{(l)}}}{\sum a_{2j_1}^{(k)} e^{-jk\omega^{(l)}}} & \dots & \frac{\sum a_{mj_n}^{(k)} e^{-jk\omega^{(l)}}}{\sum a_{2j_n}^{(k)} e^{-jk\omega^{(l)}}} \end{bmatrix}$$

Algoritm:

1. Se estimează bispectrele observațiilor $P_{x_{q_1} x_{q_2} x_{q_3}}(\omega^{(l)}, -\omega^{(l)}), P_{x_{q_1} x_{q_2} x_{q_3}}(\omega^{(l-1)}, -\omega^{(l)})$ unde $\{\omega^{(l)}, l = 1, \dots, L\}$ sunt frecvențe preselectate pentru $l = 1, \dots, L$ și $q_1, q_2, q_3 = 1, \dots, n$, folosind eventual procedura *demodulator complex* [47].
2. Se determină $H(\omega^{(l)})$ prin rezolvarea (2.3.140)-(2.3.141) și apoi $H(\omega^{(l)}), l = 2, \dots, L$ prin rezolvarea (2.3.140)-(2.3.142) în ordinea precedentă.
3. Se calculează $\tilde{A}(\omega^{(l)})$ pentru $l = 1, \dots, L$ și se estimează $a_y^{(k)}$ rezolvând seturi de ecuații liniare.
4. Se aplică transformata Fourier rapidă estimatelor $a_y^{(k)}$ și se obține $\hat{A}(\omega) = A(\omega)P^T$.
5. Se calculează $\hat{S}(\omega) - \hat{A}^{-1}(\omega)X(\omega)$ și se folosește transformata Fourier inversă pentru a reconstrui sursele.

Trebuie arătat că nedeterminarea de ordonare a vectorilor coloană ai matricei A și a surselor, nu se poate elimina fără o anumită informație adițională sau anumite constrângeri care trebuiesc introduse [48].

În [45] se afirmă că, într-un mod asemănător, s-a dezvoltat un algoritm bazat pe trispectre.

Simulările au fost realizate generându-se pe calculator trei semnale construite cu același model autoregresiv de ordinul doi, excitat de secvențe mutual independente și identic

distribuite, de variabile aleatoare cu distribuție exponențială. Coeficienții filtrelor FIR au fost aleși aleator în intervalul $[-1,1]$. S-a considerat un caz simplificat, fără zgomote adiționale. Numărul de coeficienți care trebuia determinat era de douăzeci și unu. Matricea $\tilde{A}(\omega^{(l)})$ a fost calculată la opt frecvențe date de $\omega^{(l)} = \frac{l+1}{10} \cdot \pi, l = 1, \dots, 8$.

În urma testelor s-a constatat că algoritmul converge la soluțiile dorite. Viteza de convergență este foarte mare, fiind necesare doar 3-5 iterații pentru a calcula matricea $H(\omega^{(l)})$ dorită pentru fiecare $l \in \{1, \dots, L\}$.

2.4. ALGORITMI BAZAȚI PE CRITERIUL PLAUZIBILITĂȚII MAXIME FOLOSIȚI ÎN SEPARAREA SEMNALELOR

În probleme de intensificare a semnalului dorit în prezența zgomotului, în cazul măsurătorilor cu senzori multipli, fiecare semnal recepționat va conține atât componente de la sursa de semnal cât și componente provenite de la sursa de zgomot. Întrucât sistemele care cuplează semnalul și zgomotul la senzori sunt necunoscute, problema se complică și devine una de estimare a semnalului și de identificare a sistemului.

O abordare a problemei întăririi semnalului în cazul unui sistem cu doi senzori este prezentată în [29]. În acest caz semnalul dorit (semnal vocal) este modelat ca un proces gaussian autoregresiv, zgomotul este modelat ca un proces gaussian alb și sistemele de cuplare ca filtre F.I.R. finite, invariabile în timp, liniare. Problema este formulată ca una de estimare de plauzibilitate maximă (ML), și algoritmul de soluționare este de tip estimează și maximizează (EM) iterativ. Algoritmul rezultat constă în aplicarea iterativă a filtrului Wiener datelor provenite de la cei doi senzori pentru a estima semnalul și zgomotul și utilizarea acestor estimate pentru a identifica sistemele de cuplare și parametrii spectrali ai semnalului și zgomotului.

Pentru a lucra cu semnale, zgomote și sisteme de cuplare netaționare, în [29] se sugerează ca algoritmul să fie aplicat asupra unor blocuri de date consecutive folosind o fereastră alunecătoare. Această abordare presupune două cerințe contradictorii. Pe de o parte, fereastra trebuie să fie suficient de scurtă astfel ca algoritmul să răspundă schimbărilor netaționare din statisticile semnalului și zgomotului. Pe de altă parte fereastra trebuie să fie lungă cu scopul de a îmbunătăți stabilitatea statistică a semnalului rezultat și a estimatei parametrilor. De asemenea, fereastra trebuie să fie lungă pentru a obține un algoritm în care filtrarea Wiener noncauzală în domeniul frecvență să poată fi aplicată.

O abordare alternativă este cea în domeniul timp [30]. În această abordare se modelează semnalele observate ca ieșiri ale câte unui sistem liniar, dinamic, stohastic, necunoscut și se aplică algoritmul EM pentru estimarea simultană a semnalului, zgomotului, a sistemelor de cuplare și a parametrilor spectrali ai semnalului și zgomotului. Algoritmul, asemănător celui din [29], folosește în locul filtrului Wiener noncauzal, un netezitor Kalman. În [28] netezitorul Kalman din [30] este înlocuit cu un filtru Kalman, obținându-se un algoritm secvențial care operează asupra datelor ponderate exponențial pentru a permite o bună adaptare la netaționariți. Abordarea prezentată poate fi aplicată atât la problema intensificării semnalului, când este recepționat cu un singur senzor, sau, poate fi aplicată în situații când numărul de senzori nu este în mod necesar egal cu numărul surselor de semnal.

2.4.1. FORMULAREA PROBLEMEI

Fie sistemul de amestec al semnalelor prezentat în Fig.2.4.1. Se presupune că sursa de semnal dorit, $s(t)$ și sursa de zgomot $w(t)$ se află în același mediu. Se instalează doi senzori, într-un astfel de mod, încât unul dintre ei (senzorul primar) $z_1(t)$ să măsoare semnalul dorit, iar celălalt (senzorul de referință), $z_2(t)$ să măsoare zgomotul. Semnalul și zgomotul sunt amândouă captate de fiecare dintre senzori. Propagarea zgomotului la senzorul primar este modelată cu filtrul **A** iar propagarea semnalului la senzorul de referință este modelată cu filtrul **B**. Filtrele **A** și **B** se presupun de tip F.I.R., invariabile în timp, liniare și cauzale de grade q și respectiv r .

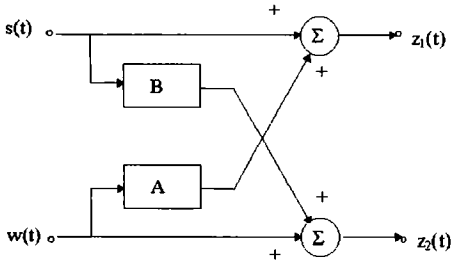


Fig. 2.4.1. Problema intensificării semnalului.

respectiv B, iar $e_1(t)$ și $e_2(t)$ sunt surse de zgomot adiționale și sunt incluse pentru a reprezenta erori de modelare, zgomotul sensorului și zgomot de măsurare. Variabila independentă t reprezintă timpul de eșantionare normalizat.

Se presupune că $e_1(t)$ și $e_2(t)$ sunt procese albe, independente statistic, de medie zero, repartizate gaussian, cu varianțele g_1 și g_2 respectiv.

Semnalul dorit, $s(t)$, este modelat ca un proces autoregresiv AR de ordinul p care satisface ecuația cu diferențe:

$$s(t) = -\sum_{k=1}^p \alpha_k s(t-k) + \sqrt{g_s} u_s(t) \quad (2.4.3)$$

și zgomotul $w(t)$ este modelat prin:

$$w(t) = \sqrt{g_w} u_w(t) \quad (2.4.4)$$

unde $u_s(t)$ și $u_w(t)$ sunt procese gaussiene, albe, normalizate (de medie zero și varianță unitate).

Se presupune că $u_s(t)$, $u_w(t)$, $e_1(t)$ și $e_2(t)$ sunt mutual independente.

Se definesc vectorii:

$$\underline{s}(t) = [s(t-r) \quad s(t-r+1) \quad \dots \quad s(t)]^T \quad (2.4.5)$$

$$\underline{w}_q(t) = [w(t-q) \quad w(t-q+1) \quad \dots \quad w(t)]^T \quad (2.4.6)$$

$$\underline{\alpha} = [\alpha_p \quad \alpha_{p-1} \quad \dots \quad \alpha_1]^T \quad (2.4.7)$$

$$\underline{a} = [a_q \quad a_{q-1} \quad \dots \quad a_0]^T \quad (2.4.8)$$

$$\underline{b} = [b_r \quad b_{r-1} \quad \dots \quad b_0]^T \quad (2.4.9)$$

Cu aceste notații, relațiile (2.4.1) și (2.4.2) pot fi scrise sub forma:

$$z_1(t) = s(t) + \underline{a}^T \underline{w}_q(t) + e_1(t) \quad (2.4.10)$$

$$z_2(t) = w(t) + \underline{b}^T \underline{s}(t) + e_2(t) \quad (2.4.11)$$

și (2.4.3) poate fi rescrisă astfel:

Semnalele $z_1(t)$ și $z_2(t)$ măsurate de cei doi senzori sunt modelate astfel:

$$z_1(t) = s(t) + \sum_{k=0}^q a_k w(t-k) + e_1(t) \quad (2.4.1)$$

$$z_2(t) = w(t) + \sum_{k=0}^r b_k s(t-k) + e_2(t) \quad (2.4.2)$$

unde $\{a_k\}_{k=0}^q$ și $\{b_k\}_{k=0}^r$ sunt coeficienții răspunsului la impulsul unitate ai filtrelor A și

$$s(t) = -\underline{\alpha}^T s_{p,1}(t-1) + \sqrt{g_s} u_s(t) \quad (2.4. 12)$$

Se notează cu $\underline{\theta}$ vectorul parametrilor necunoscuți:

$$\underline{\theta} = [\underline{\alpha}^T \quad \underline{a}^T \quad \underline{b}^T \quad g_s \quad g_w \quad g_1 \quad g_2]^T \quad (2.4. 13)$$

Trebuie remarcat faptul că anumite componente ale lui $\underline{\theta}$ pot fi cunoscute a priori, de exemplu anumite varianțe de semnal, depinzând de aplicație.

Dându-se datele observate:

$$\underline{z} = \{z_1(t), z_2(t); t = 1, 2, \dots, N\} \quad (2.4. 14)$$

se dorește să se găsească cea mai bună estimată posibilă a semnalului dorit $s(t)$. Dacă se interpretează “cel mai bun” în sensul uzual al minimizării erorii pătratice medii (m.s.e.), estimata de semnal optimă este obținută prin executarea așteptării condiționate a lui $s(t)$ dându-se datele observate \underline{z} . Această așteptare condiționată necesită cunoașterea anticipată a vectorului $\underline{\theta}$. Întrucât $\underline{\theta}$ este necunoscut, trebuie rezolvată problema mai complicată care constă în estimarea semnalului concomitent cu identificarea parametrilor.

O abordare ar fi să se calculeze estimata ML a lui $\underline{\theta}$ și să o utilizăm pentru a genera estimata semnalului. Estimata ML $\underline{\theta}_{ML}$ a lui $\underline{\theta}$ se obține rezolvând:

$$\underline{\theta}_{ML} = \arg \max_{\underline{\theta}} \log f_z(\underline{z}; \underline{\theta}) \quad (2.4. 15)$$

unde $\log f_z(\underline{z}; \underline{\theta})$ este plauzibilitatea logaritmică, adică logaritmul densității de probabilitate a datelor observate \underline{z} . Maximizarea din (2.4.15) este o optimizare multidimensională complicată care este și foarte dificil de rezolvat. Evitarea acestor greutăți se face prin utilizarea unei metode iterative eficiente, bazată pe algoritmul EM pentru rezolvarea simultană a problemei de estimare a semnalului și a parametrilor indicați mai sus.

2.4.2. UTILIZAREA ALGORITMULUI EM PENTRU INTENSIFICAREA SEMNALULUI

Algoritmul EM este de fapt o metodă iterativă pentru găsirea estimatelor parametrilor ML. El lucrează cu noțiunea de “date complete” (care vor fi definite ulterior) și iterează între estimarea plauzibilității logaritmice a datelor complete, utilizând datele observate (incomplete) și estimata parametrului curent (pasul E) și maximizarea funcției de plauzibilitate logaritmică estimată pentru a obține o nouă estimată a parametrului (pasul M).

Mai exact, fie \underline{y} datele “complete” legate de datele observate \underline{z} printr-o transformare neinvertibilă (multe la una). Fie $\underline{\theta}^{(l)}$ estimata curentă a lui $\underline{\theta}$ după l iterații ale algoritmului. Atunci următorul ciclu de iterare este specificat în doi pași astfel:

Pasul E: Calculează:

$$Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(l)}) = E_{\theta^{(l)}} \left[\log f_Y(\underline{y}; \underline{\theta}) \mid \underline{z} \right] \quad (2.4. 16)$$

Pasul M:

$$\max_{\underline{\theta}} Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(l)}) \rightarrow \underline{\theta}^{(l+1)} \quad (2.4. 17)$$

unde $\log f_Y(\underline{y}; \underline{\theta})$ este plauzibilitatea logaritmică a lui \underline{y} și $E_{\theta(t)}[|\underline{z}|]$ este așteptarea condiționată când se dă $\underline{Z}=\underline{z}$ calculat în raport cu estimata parametrului curent $\underline{\theta}^{(i)}$.

Ideia euristică este că se dorește alegerea lui $\underline{\theta}$ pentru a maximiza plauzibilitatea logaritmică a datelor complete \underline{y} . Întrucât $\log f_Y(\underline{y}; \underline{\theta})$ nu este disponibil (deoarece datele complete nu sunt disponibile), se maximizează așteptarea lor când se dau datele observate \underline{z} și estimata parametrului curent $\underline{\theta}^{(i)}$. Întrucât am utilizat $\underline{\theta}^{(i)}$ în locul valorii adevărate a lui $\underline{\theta}$, așteptarea condiționată nu este exactă. Astfel, algoritmul iterează, utilizând estimata parametrului curent pentru a îmbunătăți așteptarea condiționată asupra ciclului de iterare următor (pasul E) și astfel, să îmbunătățească estimata parametrului următor (pasul M). Dacă $Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}')$ este continuă în $\underline{\theta}$ și $\underline{\theta}'$, algoritmul converge monoton la un punct staționar al lui $\log f_Z(\underline{z}; \underline{\theta})$, adică a funcției de plauzibilitate logaritmică observată (vezi [32]), unde fiecare iterație crește valoarea plauzibilității. Desigur, se poate întâmpla, ca în toți algoritmi “de prindere a maximului”, ca punctul staționar să nu fie un maxim global, și astfel căutarea trebuie să se facă pornind din câteva puncte de start sau de pe o grilă inițială.

Pentru a aplica algoritmul EM trebuie specificate datele “complete” \underline{y} . Fie \underline{s} vectorul de dimensiune $(N+r)$ al eșantioanelor de semnal:

$$\underline{s} = \{s(t); -r+1 \leq t \leq N\} \quad (2.4.18)$$

și fie \underline{w} vectorul de dimensiune $(N+q)$ al eșantioanelor de zgomot:

$$\underline{w} = \{w(t); -q+1 \leq t \leq N\} \quad (2.4.19)$$

Se presupune că ordinele r și q ale funcțiilor de transfer ale filtrelor \mathbf{B} și \mathbf{A} sunt mai mari decât ordinul p al modelului semnalului dorit. Acesta este cazul tipic dacă, de exemplu, semnalul dorit este vocal și funcțiile de transfer modelează acustica încăperii. Sub această presupunere, vectorii \underline{s} și \underline{w} conțin toate eșantioanele de semnal și zgomot care afectează datele observate \underline{z} .

Datele “complete” \underline{y} sunt definite prin:

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{z} \\ \underline{s} \\ \underline{w} \end{bmatrix} \quad (2.4.20)$$

Conform regulii lui Bayes, rezultă:

$$\begin{aligned} f_Y(\underline{y}; \underline{\theta}) &= f_{\underline{s}, \underline{w}}(\underline{s}, \underline{w}; \underline{\theta}) \cdot f_{\underline{z}|\underline{s}, \underline{w}}(\underline{z}|\underline{s}, \underline{w}; \underline{\theta}) \\ &= f_{\underline{s}}(\underline{s}; \underline{\theta}) \cdot f_{\underline{w}}(\underline{w}; \underline{\theta}) \cdot f_{\underline{z}|\underline{s}, \underline{w}}(\underline{z}|\underline{s}, \underline{w}; \underline{\theta}) \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

unde $f_{\underline{s}}(\underline{s}; \underline{\theta})$ este funcția densitate de probabilitate a lui \underline{s} , $f_{\underline{w}}(\underline{w}; \underline{\theta})$ este funcția densitate de probabilitate a lui \underline{w} și $f_{\underline{z}|\underline{s}, \underline{w}}(\underline{z}|\underline{s}, \underline{w}; \underline{\theta})$ este funcția de densitate de probabilitate condiționată când se dau \underline{s} și \underline{w} .

Logaritmând ambii membri ai relației (2.4.21) se obține:

$$\log f_Y(\underline{y}; \underline{\theta}) = \log f_{\underline{s}}(\underline{s}; \underline{\theta}) + \log f_{\underline{w}}(\underline{w}; \underline{\theta}) + \log f_{\underline{z}|\underline{s}, \underline{w}}(\underline{z}|\underline{s}, \underline{w}; \underline{\theta}) \quad (2.4.22)$$

Din (2.4.12):

$$\log f_s(s; \underline{\theta}) = \log f(s_{p-1}(0)) - \frac{N}{2} \log 2\pi g_s - \frac{1}{2g_s} \sum_{t=1}^N [s(t) + \alpha^T s_{p-1}(t-1)]^2 \quad (2.4.23)$$

Din (2.4.4):

$$\log f_w(w; \underline{\theta}) = \log f(w_q(0)) - \frac{N}{2} \log 2\pi g_w - \frac{1}{2g_w} \sum_{t=1}^N w^2(t) \quad (2.4.24)$$

Din (2.4.10) și (2.4.11):

$$\begin{aligned} \log f_{z|s,w}(z|s, w; \underline{\theta}) = & -\frac{N}{2} \log 2\pi g_1 - \frac{1}{2g_1} \sum_{t=1}^N [z_1(t) - s(t) - \alpha^T w_q(t)]^2 - \\ & -\frac{N}{2} \log 2\pi g_2 - \frac{1}{2g_2} \sum_{t=1}^N [z_2(t) - w(t) - b^T s_r(t)]^2 \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

Substituind (2.4.23)-(2.4.25) în (2.4.22) și presupunând că $N \gg p \cdot q$ ca să se poată neglija contribuțiile termenilor $\log f(s_{p-1}(0))$ și $\log f(w_q(0))$ rezultă:

$$\begin{aligned} \log f_Y(y; \underline{\theta}) = & C - \frac{N}{2} \log g_s - \frac{1}{2g_s} \sum_{t=1}^N [s(t) - \alpha^T s_{p-1}(t-1)]^2 - \\ & - \frac{N}{2} \log g_w - \frac{1}{2g_w} \sum_{t=1}^N w^2(t) - \\ & - \frac{N}{2} \log g_1 - \frac{1}{2g_1} \sum_{t=1}^N [z_1(t) - s(t) - \alpha^T w_q(t)]^2 - \\ & - \frac{N}{2} \log g_2 - \frac{1}{2g_2} \sum_{t=1}^N [z_2(t) - w(t) - b^T s_r(t)]^2 \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

unde C este o constantă independentă de $\underline{\theta}$.

În continuare se consideră așteptarea condiționată dându-se \underline{z} la valoarea parametrului $\underline{\theta}^{(i)}$ și se obține:

$$Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(i)}) = E_{\underline{\theta}^{(i)}} [\log f_Y(y; \underline{\theta}) | \underline{z}] = C + \sum_{i=1}^4 Q_i(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(i)}) \quad (2.4.27)$$

unde

$$\begin{aligned} Q_1(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(i)}) = & -\frac{N}{2} \log g_s - \\ & - \frac{1}{2g_s} \sum_{t=1}^N \left[\overline{s^2(t)}^{(i)} + 2\alpha^T \overline{s_{p-1}(t-1)s(t)}^{(i)} + \alpha^T \overline{s_{p-1}(t-1)s_{p-1}^T(t-1)}^{(i)} \alpha \right] \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

$$Q_2(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(i)}) = -\frac{N}{2} \log g_w - \frac{1}{2g_w} \sum_{t=1}^N \overline{w^2(t)}^{(i)} \quad (2.4.29)$$

$$Q_3(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(t)}) = -\frac{N}{2} \log g_1 - \frac{1}{2g_1} \sum_{t=1}^N \left[z_1^2(t) - 2\overline{s(t)} z_1(t) + \overline{s^2(t)} - \right. \\ \left. - 2\overline{\underline{a}^T \underline{w}_q(t)} z_1(t) + 2\overline{\underline{a}^T \underline{w}_q(t) s(t)} + \overline{\underline{a}^T \underline{w}_q(t) \underline{w}_q^T(t)} \underline{a} \right] \quad (2.4.30)$$

$$Q_4(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(t)}) = -\frac{N}{2} \log g_2 - \frac{1}{2g_2} \sum_{t=1}^N \left[z_2^2(t) - 2\overline{w(t)} z_2(t) + \overline{w^2(t)} - \right. \\ \left. - 2\overline{b^T \underline{s}_r(t)} z_2(t) + 2\overline{b^T \underline{s}_r(t) w(t)} + \overline{b^T \underline{s}_r(t) \underline{s}_r^T(t)} \underline{b} \right] \quad (2.4.31)$$

unde se definește $\overline{(\cdot)} \triangleq E_{q^{(t)}}[\cdot | \underline{z}]$.

Determinarea lui $Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(t)})$ (pasul E) necesită numai calcularea lui $\overline{\underline{x}(t)}$ și $\overline{\underline{x}(t) \underline{x}^T(t)}$, unde $\underline{x}(t)$ este definit prin:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \underline{s}_r^T(t) & \vdots & \underline{w}_q^T(t) \end{bmatrix}^T = \\ = \begin{bmatrix} s(t-r) & s(t-r+1) & \dots & s(t) & w(t-q) & w(t-q+1) & \dots & w(t) \end{bmatrix}^T \quad (2.4.32)$$

Întrucât $Q_1(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(t)})$ depinde numai de $\underline{\alpha}$ și g_s , $Q_2(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(t)})$ depinde numai de g_w , $Q_3(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(t)})$ depinde numai de \underline{a} și g_1 , și $Q_4(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(t)})$ depinde numai de \underline{b} și g_2 , maximizarea lui $Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{(t)})$ (pasul M) se decuplează în maximizări ale câte unui termen din (2.4.27) în raport cu parametrii corespunzători. Mai mult, aceste maximizări pot fi rezolvate analitic. Algoritmul rezultat este:

Pasul E: Pentru $t = 1, 2, \dots, N$ se calculează:

$$\overline{\underline{x}(t)} = E_{q^{(t)}}[\underline{x}(t) | \underline{z}] \quad (2.4.33)$$

$$\overline{\underline{x}(t) \underline{x}^T(t)} = E_{q^{(t)}}[\underline{x}(t) \underline{x}^T(t) | \underline{z}] \quad (2.4.34)$$

Pasul M: Se calculează:

$$\overline{\underline{\alpha}}^{(t+1)} = - \left[\sum_{t=1}^N \overline{\underline{s}_{p-1}(t-1) \underline{s}_{p-1}^T(t-1)} \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \overline{\underline{s}_{p-1}(t-1) s(t)} \quad (2.4.35)$$

$$\overline{g_s}^{(t+1)} = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{t=1}^N \overline{s^2(t)} + \overline{\underline{\alpha}^T} \cdot \sum_{t=1}^N \overline{\underline{s}_{p-1}(t-1) s(t)} \right\} \quad (2.4.36)$$

$$\overline{g_w}^{(t+1)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \overline{w^2(t)} \quad (2.4.37)$$

$$\overline{\underline{a}}^{(t+1)} = \left[\sum_{t=1}^N \overline{\underline{w}_q(t) \underline{w}_q^T(t)} \right]^{-1} \cdot \sum_{t=1}^N \left[\overline{\underline{w}_q(t)} z_1(t) - \overline{\underline{w}_q(t) s(t)} \right] \quad (2.4.38)$$

$$\bar{g}_1 = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{t=1}^N \left[z_1^2(t) - 2\bar{s}^{(t)} z_1(t) + \bar{s}^2(t) \right] - \bar{a}^T \sum_{t=1}^N \left[\bar{w}_q(t) z_1(t) - \bar{w}_q(t) \bar{s}(t) \right] \right\} \quad (2.4.39)$$

$$\bar{b}^{(t+1)} = \left[\sum_{t=1}^N \bar{s}_r(t) \bar{s}_r^T(t) \right]^{-1} \cdot \sum_{t=1}^N \left[\bar{s}_r(t) z_2(t) - \bar{s}_r(t) \bar{w}(t) \right] \quad (2.4.40)$$

$$\bar{g}_2^{(t+1)} = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{t=1}^N \left[z_2^2(t) - 2\bar{w}(t) z_2(t) + \bar{w}^2(t) \right] - \bar{b}^T \sum_{t=1}^N \left[\bar{s}_r(t) z_2(t) - \bar{s}_r(t) \bar{w}(t) \right] \right\} \quad (2.4.41)$$

Acest algoritm are o formă intuitivă. În pasul E se utilizează estimata parametrului curent $\hat{\theta}^{(t)}$ pentru a estima statistici suficiente ale semnalului dorit și ale zgomotului. Pasul M se decuplează după cum urmează: Ecuația (2.4.35) este soluția Yule-Walker pentru parametrii AR, în care statisticile suficiente ale semnalului sunt înlocuite cu estimatele lor curente. Ecuațiile (2.4.38) și (2.4.40) sunt, respectiv, soluțiile celor mai mici pătrate pentru \bar{a} și \bar{b} bazate pe statisticile suficiente estimate. Parametrii de amplificare din (2.4.36), (2.4.37), (2.4.39) și (2.4.41) sunt medii simple ale nivelelor de putere corespunzătoare.

Dacă anumiți parametri de amplificare sunt cunoscuți a priori, ei nu mai trebuiesc estimați și se elimină ecuațiile corespunzătoare.

Întrucât algoritmul se bazează pe metoda EM, el converge monoton la estimata ML a lui θ , sau, cel puțin, la un punct staționar al funcției de plauzibilitate logaritmă. El, de asemenea furnizează estimata semnalului dorit $\bar{s}^{(t)}$, care este componenta $(r+1)$ a lui $\bar{x}^{(t)}$.

Calculul așteptărilor condiționate din (2.4.33) și (2.4.34) poate fi realizat utilizând ecuațiile de netezire Kalman. Pentru aceasta se reprezintă relațiile (2.4.10)-(2.4.12) sub o formă de ecuații de stare:

$$\bar{x}(t) = \Phi \bar{x}(t-1) + G \bar{u}(t) \quad (2.4.42)$$

$$\bar{z}(t) = H \bar{x}(t) + \bar{e}(t) \quad (2.4.43)$$

unde $\bar{x}(t)$, care este vectorul de stare, este definit în (2.4.32), iar ceilalți termeni din (2.4.42) și (2.4.43) sunt definiți prin:

$$\bar{z}(t) = [z_1(t) \quad z_2(t)]^T \quad (2.4.44)$$

$$\bar{u}(t) = [u_s(t) \quad u_w(t)]^T \quad (2.4.45)$$

$$\bar{e}(t) = [e_1(t) \quad e_2(t)]^T \quad (2.4.46)$$

$$\underline{\mu}_{t/n}^{(l)} = E_{\Theta^{(l)}} \left[\underline{x}(t) | \underline{z}(1), \underline{z}(2), \dots, \underline{z}(n) \right] \quad (2.4. 55)$$

$$P_{t/n}^{(l)} = E_{\Theta^{(l)}} \left[\left[\underline{x}(t) - \underline{\mu}_{t/n}^{(l)} \right] \left[\underline{x}(t) - \underline{\mu}_{t/n}^{(l)} \right]^T | \underline{z}(1), \underline{z}(2), \dots, \underline{z}(n) \right] \quad (2.4. 56)$$

Se notează prin $\Phi^{(l)}$, $G^{(l)}$, $H^{(l)}$, și $R^{(l)}$ matricele Φ , G , H , și R calculate cu estimata parametrului curent $\underline{\theta} = \underline{\theta}^{(l)}$. Atunci, utilizând ecuațiile de netezire Kalman, $\underline{\mu}_{t/n}^{(l)}$ și $P_{t/n}^{(l)}$ pot fi calculate în trei etape, astfel:

Ecuațiile de propagare: Pentru $t=1, 2, \dots, N$ se calculează:

$$\underline{\mu}_{t/t-1}^{(l)} = \Phi^{(l)} \underline{\mu}_{t-1/t-1}^{(l)} \quad (2.4. 57)$$

$$P_{t/t-1}^{(l)} = \Phi^{(l)} P_{t-1/t-1}^{(l)} \Phi^{(l)T} + G^{(l)} G^{(l)T} \quad (2.4. 58)$$

cu condițiile inițiale $\underline{\mu}_{0/0}^{(l)}$ și $P_{0/0}^{(l)}$.

Ecuațiile de actualizare: Pentru $t=1, 2, \dots, N$ se calculează:

$$\underline{\mu}_{t/t}^{(l)} = \underline{\mu}_{t/t-1}^{(l)} + K_t^{(l)} \left[\underline{z}(t) - H^{(l)} \underline{\mu}_{t/t-1}^{(l)} \right] \quad (2.4. 59)$$

$$P_{t/t}^{(l)} = \left[I - K_t^{(l)} H^{(l)} \right] P_{t/t-1}^{(l)} \quad (2.4. 60)$$

unde I este matricea identitate, și $K_t^{(l)}$ este câștigul Kalman dat de relația:

$$K_t^{(l)} = P_{t/t-1}^{(l)} H^{(l)T} \left[H^{(l)} P_{t/t-1}^{(l)} H^{(l)T} + R^{(l)} \right]^{-1} \quad (2.4. 61)$$

Ecuațiile de netezire: Pentru $t=N, N-1, \dots, 1$ se calculează:

$$\underline{\mu}_{t-1/t}^{(l)} = \underline{\mu}_{t-1/t-1}^{(l)} + S_{t-1}^{(l)} \left[\underline{\mu}_{t/N}^{(l)} - \Phi^{(l)} \underline{\mu}_{t-1/t-1}^{(l)} \right] \quad (2.4. 62)$$

$$P_{t-1/t}^{(l)} = P_{t-1/t-1}^{(l)} + S_{t-1}^{(l)} \left[P_{t/N}^{(l)} - P_{t/t-1}^{(l)} \right] S_{t-1}^{(l)T} \quad (2.4. 63)$$

unde

$$S_{t-1}^{(l)} = \Delta P_{t-1/t-1}^{(l)} \Phi^{(l)T} P_{t/t-1}^{(l)-1} \quad (2.4. 64)$$

Pentru a inițializa ecuațiile de netezire Kalman trebuie specificate $\underline{\mu}_{0/0}^{(l)}$ și $P_{0/0}^{(l)}$. În cazul cuplării slabe se pot utiliza datele senzorilor adică primele $(r+1)$ eșantioane ale lui $z_1(t)$ și primele $(q+1)$ eșantioane ale lui $z_2(t)$ pentru a specifica $\underline{\mu}_{0/0}^{(l)}$. Covarianța inițială $P_{0/0}^{(l)}$ poate fi evaluată prin calcularea covarianțelor eșantioanelor. Aceste estimate inițiale pot fi apoi îmbunătățite iterativ prin utilizarea estimatelor finale de la ciclul de iterare anterior, adică $\underline{\mu}_{0/0}^{(l+1)} = \underline{\mu}_{0/N}^{(l)}$ și $P_{0/0}^{(l+1)} = P_{0/N}^{(l)}$.

Algoritmul EM pentru starea de legătură și estimarea parametrului din modelele de spații de stare dinamice liniare a fost dezvoltat în [33] și [34]. Algoritmul prezentat aici poate

fi văzut ca o extensie a acestor metode la problema întăririi semnalului utilizând două canale de recepție.

Algoritmul EM converge sigur la un maxim local al funcției de plauzibilitate. De aceea, cu scopul de a asigura convergența la maximum global, trebuie utilizată o procedură bună de inițializare. Presupunând cuplarea slabă a semnalului dorit $s(t)$ la al doilea senzor (referința), se poate inițializa \underline{b} ca fiind vectorul zero, și se poate aplica metoda LMS [1] pentru a obține o estimată inițială a lui \underline{a} .

În cazul unei cuplări puternice, utilizarea metodei din [14] este sugerată pentru extragerea estimatelor inițiale atât pentru \underline{a} cât și pentru \underline{b} . Aceștia sunt parametrii cei mai importanți pentru scopul estimării, sau iterării, semnalului dorit.

Rata de convergență a algoritmului EM este determinată de partea din covarianța datelor "complete" care poate fi prezisă utilizând datele "incomplete" (observate) (vezi [35] și [36]). În problema noastră rata de convergență este determinată de nivelele de putere g_1 și g_2 ale zgomotelor aditive. De aceea, pentru a obține o convergență rapidă, este recomandabilă supraestimarea lui g_1 și g_2 la starea inițială a algoritmului.

Toți ceilalți parametri \underline{a} , g_s , și g_w pot fi inițializați calculând estimata celor mai mici pătrate a semnalului și zgomotului din datele senzorilor, în cazul unei cuplări slabe, sau pot fi inițializate arbitrar. Rezultatele experimentale au arătat că inițializarea parametrilor spectrali ai semnalului și zgomotului are un efect scăzut asupra evoluției convergenței algoritmului.

Complexitatea de calcul a algoritmului EM prezentat este determinată de ordinea $(q+1)$ și $(r+1)$ ale sistemelor de cuplare, care sunt dimensiunile vectorilor \underline{a} și \underline{b} respectiv. De exemplu, în problema întăririi semnalului vocal, sistemele de cuplare, care reprezintă funcțiile de transfer acustic din mediul camerei sunt tipic modelate ca filtre F.I.R. cu cel puțin câteva sute de coeficienți. Astfel, în pasul M al algoritmului, (2.4.38) și (2.4.40) sunt, din punct de vedere al volumului de calcul, cu cele mai mari cerințe, întrucât necesită inversarea unor matrice cu dimensiunile $(q+1) \times (q+1)$ și $(r+1) \times (r+1)$, respectiv. În pasul E al algoritmului este necesară implementarea ecuațiilor de netezire Kalman pentru estimarea unui vector de stare de dimensiune $(q+r+2)$. Ecuațiile de netezire (2.4.62) și (2.4.63) sunt din punct de vedere al volumului de calcul cu cele mai mari cerințe deoarece ele necesită inversarea matricelor de dimensiune $(q+r+2) \times (q+r+2)$. Se poate exploata structura matricelor Φ , G , H și R cu scopul de a simplifica calculele necesare (vezi considerentele următoare). De asemenea trebuie arătat că există o varietate de metode, de exemplu, algoritmul rădăcină pătrată, care pot fi utilizate pentru a implementa ecuațiile Kalman mai eficient [37].

2.4.3. ALGORITMI SECVENȚIAL/ADAPTIVI

Algoritmul din secțiunea precedentă a fost dezvoltat sub presupunerea că semnalul și zgomotul sunt procese staționare și că sistemele de cuplare sunt invariante în timp. În multe situații practice, semnalul dorit (de exemplu semnalul vocal) este mai degrabă un proces nestaționar, cu parametrii spectrali variabili în timp și parametrii α_k și b_k caracterizând filtre de cuplare care pot fi, de asemenea, variabile în timp, datorită schimbărilor în condițiile de propagare din mediu, sau datorită schimbărilor în geometria sursă-receptor în timpul intervalului de observare. În esență, există o situație în care vectorul de stare $\underline{x}(t)$, care conține eșantioanele de semnal și zgomot, depinde de vectorul parametru variabil în timp $\underline{\theta}(t)$ și se dorește un algoritm adaptiv care să fie capabil să urmărească parametrii care variază.

O abordare ar fi să se presupună că semnalele observate sunt staționare peste o fereastră de timp fixată și să se aplice algoritmul asupra blocurilor de date consecutive.

O abordare alternativă, și în mod sigur mai atractivă, este sugerată de structura algoritmului. Așa cum s-a stabilit, algoritmul iterează între starea de estimare, utilizând netezitorul Kalman, și identificarea parametrului. Pentru a obține un algoritm secvențial/adaptiv, se înlocuiește netezitorul Kalman prin filtrul Kalman, necesitând numai ecuațiile de propagare urmate de ecuațiile de actualizare. În acest fel, starea la un moment de timp particular t este estimată utilizând numai eșantioanele de date curente și trecute, și nu sunt necesare ecuații pentru netezire care sunt, din punct de vedere al volumului de calcul, mai expansive. În acest scop se sugerează încorporarea ponderării exponențiale în actualizarea estimării parametrului, pentru ca efectul eșantioanelor de date trecute relativ la datele noi să fie mai redus. Ponderarea exponențială este efectiv echivalentă cu o operație de fereastră alunecătoare. În fond, întrucât suntem interesați de un algoritm adaptiv on-line, se sugerează restricționarea numărului de cicluri de iterare. În particular, se realizează numai o iterație per eșantion de date (adică, se înlocuiește indexul de iterare printr-un index de timp). Prin aceasta se obține un algoritm complet secvențial în care estimata stării (semnalul) este generată utilizând un filtru Kalman înainte, ai cărui parametri sunt continuu actualizați.

Se notează estimatele lui $\underline{x}(t)$ și $\underline{x}(t)\underline{x}^T(t)$ bazate pe datele observate la momentul t și estimata parametrului curent $\overline{\underline{\theta}}(t)$ prin:

$$\overline{\underline{x}(t)} = E_{\theta(t)}[\underline{x}(t)|z(1), z(2), \dots, z(t)] = \underline{\mu}_{t|t} \quad (2.4.65)$$

$$\overline{\underline{x}(t)\underline{x}^T(t)} = E_{\theta(t)}[\underline{x}(t)\underline{x}^T(t)|z(1), z(2), \dots, z(t)] = \underline{\mu}_{t|t}\underline{\mu}_{t|t}^T + P_{t|t} \quad (2.4.66)$$

În plus, se notează prin $\overline{\Phi}_t$, \overline{G}_t , \overline{H}_t și \overline{R}_t matricele Φ , G , H și R calculate la $\underline{\theta} = \overline{\underline{\theta}}(t)$. Atunci, $\underline{\mu}_{t|t}$ și $P_{t|t}$ sunt calculate recursiv astfel:

Ecuațiile de propagare:

$$\underline{\mu}_{t|t-1} = \overline{\Phi}_t \underline{\mu}_{t-1|t-1} \quad (2.4.67)$$

$$P_{t|t-1} = \overline{\Phi}_t P_{t-1|t-1} \overline{\Phi}_t^T + \overline{G}_t \overline{G}_t^T \quad (2.4.68)$$

cu condițiile inițiale $\underline{\mu}_{0|0}$ și $P_{0|0}$.

Ecuațiile de actualizare:

$$\underline{\mu}_{t|t} = \underline{\mu}_{t|t-1} + \overline{K}_t [z(t) - \overline{H}_t \underline{\mu}_{t|t-1}] \quad (2.4.69)$$

$$P_{t|t} = [I - \overline{K}_t \overline{H}_t] P_{t|t-1} \quad (2.4.70)$$

unde

$$\overline{K}_t = P_{t|t-1} \overline{H}_t^T [\overline{H}_t P_{t|t-1} \overline{H}_t^T + \overline{R}_t]^{-1} \quad (2.4.71)$$

În continuare se exploatează structura matricelor Φ , G , H și R cu scopul de a calcula eficient ecuațiile de filtrare Kalman.

Fie $\underline{\mu}_{t-1|t-1}$ partiționat după cum urmează:

$$\underline{\mu}_{t-1|t-1} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_s \\ \underline{\mu}_w \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow r+1 \\ \Downarrow q+1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \\ \underline{\mu}_3 \\ \underline{\mu}_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow 1 \\ \Downarrow r \\ \Downarrow 1 \\ \Downarrow q \end{matrix} \quad (2.4.72)$$

Fie $\underline{\mu}_p$ subvectorul $(p \times 1)$ inferior al lui $\underline{\mu}_2$ (sau subvectorul $(p \times 1)$ inferior al lui $\underline{\mu}_s$):

$$\underline{\mu}_2 = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_p \end{bmatrix} \Downarrow p \quad (2.4.73)$$

Fie $P_{t-1|t-1}$ partiționată astfel:

$$P_{t-1|t-1} = \begin{bmatrix} P_{ss} & P_{sw} \\ P_{sw}^T & P_{ww} \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow r+1 \\ \Downarrow q+1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ r+1 & q+1 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} & P_{34} \\ P_{14}^T & P_{24}^T & P_{34}^T & P_{44} \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow 1 \\ \Downarrow r \\ \Downarrow 1 \\ \Downarrow q \end{matrix} \quad (2.4.74)$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ 1 & r & 1 & q \end{matrix}$$

Fie Γ_p următoarea submatrice a lui P_{22} :

$$P_{22} = \begin{bmatrix} \Gamma_p \end{bmatrix} \Downarrow r \quad (2.4.75)$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow \\ p \end{matrix}$$

și fie Γ_{pp} următoarea submatrice a lui Γ_p :

$$\Gamma_p = \begin{bmatrix} \Gamma_{pp} \end{bmatrix} \Downarrow p \quad (2.4.76)$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow \\ p \end{matrix}$$

astfel că Γ_{pp} este submatricea inferioară dreaptă de dimensiune $(p \times p)$ a submatricei P_{22} .

Fie Λ_p următoarea submatrice a lui P_{24} :

$$P_{24} = \begin{bmatrix} \Lambda_p \end{bmatrix} \Downarrow p \quad (2.4.77)$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow \\ q \end{matrix}$$

Fie \underline{a} și \underline{b} partiționați astfel:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow q \\ \Downarrow 1 \end{matrix} \quad (2.4.78)$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow r \\ \Downarrow 1 \end{matrix} \quad (2.4.79)$$

Pentru a simplifica notațiile în cadrul matricelor, se va utiliza $\underline{\theta}$ în locul lui $\overline{\theta(t)}$, și Φ , G , H și R în locul lui $\overline{\Phi}_t$, \overline{G}_t , \overline{H}_t și \overline{R}_t , respectiv.

Substituind (2.4.49) și (2.4.72) în (2.4.67) rezultă:

$$\underline{\mu}_{t|t-1} = \begin{bmatrix} \Phi_s & 0 \\ 0 & \Phi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mu}_s \\ \underline{\mu}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_s \underline{\mu}_s \\ \Phi_w \underline{\mu}_w \end{bmatrix} \quad (2.4.80)$$

unde

$$\Phi_s \underline{\mu}_s = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \underline{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_2 \\ -\underline{\alpha}^T \cdot \underline{\mu}_p \end{bmatrix} \quad (2.4.81)$$

și

$$\Phi_w \underline{\mu}_w = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \underline{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mu}_3 \\ \underline{\mu}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.82)$$

Substituind (2.4.81) și (2.4.82) în (2.4.80) se obține:

$$\underline{\mu}_{t|t-1} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_2 \\ -\underline{\alpha}^T \cdot \underline{\mu}_p \\ \underline{\mu}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow r \\ \Downarrow 1 \\ \Downarrow q \\ \Downarrow 1 \end{matrix} \quad (2.4.83)$$

Substituind (2.4.49), (2.4.74) și (2.4.47) în (2.68) rezultă:

$$\begin{aligned} P_{t|t-1} &= \begin{bmatrix} \Phi_s & 0 \\ 0 & \Phi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{ss} & P_{sw} \\ P_{sw}^T & P_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_s^T & 0 \\ 0 & \Phi_w^T \end{bmatrix} + GG^T \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_s P_{ss} \Phi_s^T & \Phi_s P_{sw} \Phi_w^T \\ \Phi_w P_{sw}^T \Phi_s^T & \Phi_w P_{ww} \Phi_w^T \end{bmatrix} + GG^T \end{aligned} \quad (2.4.84)$$

unde

$$\begin{aligned} \Phi_s P_{ss} \Phi_s^T &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \underline{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0}^T & 0 \\ I & - \\ -\underline{\alpha} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} P_{22} & -\Gamma_p \underline{\alpha} \\ -\underline{\alpha}^T \Gamma_p^T & \underline{\alpha}^T \Gamma_{pp} \underline{\alpha} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.85)$$

$$\begin{aligned} \Phi_s P_{sw} \Phi_w^T &= \begin{bmatrix} \underline{0} & I \\ 0 & \underline{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{13} & P_{14} \\ P_{23} & P_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0}^T & 0 \\ I & \underline{0} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} P_{24} & \underline{0} \\ -\underline{\alpha}^T \Lambda_p & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.86)$$

$$\begin{aligned} \Phi_w P_{ww} \Phi_w^T &= \begin{bmatrix} \underline{0} & I \\ 0 & \underline{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{33} & P_{34} \\ P_{34}^T & P_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0}^T & 0 \\ I & \underline{0} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} P_{44} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.87)$$

și GG^T este o matrice care are numai două elemente diferite de zero:

$$GG^T = \begin{bmatrix} & & & & \\ & g_s & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & g_w \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow r+1 \\ \\ \\ \leftarrow r+q+2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ r+1 & r+q+2 \end{matrix} \quad (2.4.88)$$

Substituind (2.4.85)-(2.4.88) în (2.4.84) se obține:

$$P_{t|t-1} = \begin{bmatrix} P_{22} & -\Gamma_p \underline{\alpha} & P_{24} & \underline{0} \\ -\underline{\alpha}^T \Gamma_p^T & \underline{\alpha}^T \Gamma_{pp} \underline{\alpha} + g_s & -\underline{\alpha}^T \Lambda_p & 0 \\ P_{24}^T & -\Lambda_p^T \underline{\alpha} & P_{44} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 0 & \underline{0}^T & g_w \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow r \\ \Downarrow 1 \\ \Downarrow q \\ \Downarrow 1 \end{matrix} \quad (2.4.89)$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ r & 1 & q & 1 \end{matrix}$$

unde se observă că matricea $P_{t|t-1}$ este simetrică.

Substituind (2.4.72) și (2.4.89) în (2.4.69)-(2.4.71) se obține:

$$\underline{\mu}_{t|t} = \underline{\mu}_{t|t-1} + D_t F_t^{-1} \begin{bmatrix} z_1(t) + \underline{\alpha}^T \underline{\mu}_p - \underline{a}_1^T \underline{\mu}_4 \\ z_2(t) + b_0 \underline{\alpha}^T \underline{\mu}_p - b_1^T \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} \quad (2.4.90)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - D_t F_t^{-1} D_t^T \quad (2.4.91)$$

unde D_t este definită de

$$D_t = \begin{bmatrix} -\Gamma_p \underline{\alpha} + P_{24} \underline{a}_1 & P_{22} b_1 - \Gamma_p \underline{\alpha} \cdot b_0 \\ \underline{\alpha}^T \Gamma_{pp} \underline{\alpha} + g_s - \underline{\alpha}^T \Gamma_p \underline{a}_1 & -\underline{\alpha}^T \Gamma_p^T b_1 + b_0 (\underline{\alpha}^T \Gamma_{pp} \underline{\alpha} + g_s) \\ -\Lambda_p^T \underline{\alpha} + P_{44} \underline{a}_1 & P_{24}^T b_1 - \Lambda_p^T \underline{\alpha} \cdot b_0 \\ a_0 g_w & g_w \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow r \\ \Downarrow 1 \\ \Downarrow q \\ \Downarrow 1 \end{matrix} \quad (2.4.92)$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

și F_t este o matrice simetrică 2×2 definită de relația:

$$F_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \quad (2.4.93)$$

unde

$$f_{11} = \underline{a}_1^T P_{44} \underline{a}_1 - 2\underline{a}_1^T \Lambda_p^T \underline{\alpha} + \underline{\alpha}^T \Gamma_{pp} \underline{\alpha} + g_s + a_0^2 g_w + g_1 \quad (2.4.94)$$

$$f_{22} = \underline{b}_1^T P_{22} \underline{b}_1 - 2b_0 \cdot \underline{b}_1^T \Gamma_p \underline{\alpha} + b_0^2 (\underline{\alpha}^T \Gamma_{pp} \underline{\alpha} + g_s) + g_w + g_2 \quad (2.4.95)$$

$$f_{12} = \underline{a}_1^T P_{24}^T \underline{b}_1 - b_0 \cdot \underline{a}_1^T \Lambda_p^T \underline{\alpha} - \underline{b}_1^T \Gamma_p \underline{\alpha} + b_0 (\underline{\alpha}^T \Gamma_{pp} \underline{\alpha} + g_s) + a_0 g_w \quad (2.4.96)$$

Relațiile (2.4.83) și (2.4.89) constituie ecuațiile de propagare, iar relațiile (2.4.90) și (2.4.91) constituie ecuațiile de actualizare.

În urma acestor raționalizări s-a ajuns la situația că, în loc de a avea de multiplicat matrici de dimensiune $(q+r+2) \times (q+r+2)$, așa cum s-a sugerat în ecuația (2.4.68), termenul cel mai expansiv, din punct de vedere al necesităților de calcul din implementarea eficientă, este o formă pătratică $\underline{u}^T V \underline{u}$, unde \underline{u} este un vector de dimensiune q sau r .

Pentru aplicații specifice întăririi semnalului vocal într-un mediu acustic zgomotos, subiect al efectelor de reverberație sau propagare pe căi multiple, dimensiunile r și q ale filtrelor F.I.R. ce caracterizează funcțiile de transfer acustic, tind să fie foarte mari (de ordinul a câteva sute de coeficienți), în care caz, raționalizarea ecuațiilor filtrului Kalman conduce la reduceri semnificative ale volumului de calcule.

Estimata parametrului $\overline{\hat{\theta}}(t)$ este obținută din (2.4.35)-(2.4.41) prin înlocuirea indicelui de iterare l prin indexul de timp t utilizând numai datele până la momentul curent t și încorporând ponderarea exponențială. Astfel:

$$\overline{\underline{\alpha}}(t+1) = - \left[\sum_{\tau=1}^t \gamma_s^{t-\tau} \overline{s_{p-1}}(\tau-l|\tau) \underline{s}_{p-1}^T(\tau-l|\tau) \right]^{-1} \cdot \sum_{\tau=1}^t \gamma_s^{t-\tau} \overline{s_{p-1}}(\tau-l|\tau) s(\tau|\tau) \quad (2.4.97)$$

$$\overline{g_s}(t+1) = \frac{1}{\sum_{\tau=1}^t \gamma_s^{t-\tau}} \left[\sum_{\tau=1}^t \gamma_s^{t-\tau} \overline{s^2}(\tau|\tau) + \overline{\underline{\alpha}^T}(t+1) \cdot \sum_{\tau=1}^t \gamma_s^{t-\tau} \overline{s_{p-1}}(\tau-l|\tau) s(\tau|\tau) \right] \quad (2.4.98)$$

$$\overline{g_w}(t+1) = \frac{1}{\sum_{\tau=1}^t \gamma_w^{t-\tau}} \cdot \sum_{\tau=1}^t \gamma_w^{t-\tau} \overline{w^2}(\tau|\tau) \quad (2.4.99)$$

$$\overline{\underline{a}}(t+1) = \left[\sum_{\tau=1}^t \gamma_a^{t-\tau} \overline{w_q}(\tau|\tau) \underline{w}_q^T(\tau|\tau) \right]^{-1} \cdot \sum_{\tau=1}^t \gamma_a^{t-\tau} \left[\overline{w_q}(\tau|\tau) \cdot z_1(\tau) - \overline{w_q}(\tau|\tau) s(\tau|\tau) \right] \quad (2.4.100)$$

$$\overline{g_1}(t+1) = \frac{1}{\sum_{\tau=1}^t \gamma_1^{t-\tau}} \cdot \left\{ \sum_{\tau=1}^t \gamma_1^{t-\tau} \left[z_1^2(\tau) - 2\overline{s}(\tau|\tau) \cdot z_1(\tau) + \overline{s^2}(\tau|\tau) \right] - \overline{\underline{a}^T}(t+1) \cdot \sum_{\tau=1}^t \gamma_1^{t-\tau} \left[\overline{w_q}(\tau|\tau) \cdot z_1(\tau) - \overline{w_q}(\tau|\tau) s(\tau|\tau) \right] \right\} \quad (2.4.101)$$

$$\overline{\underline{b}(t+1)} = \left[\sum_{\tau=1}^t \gamma_b^{t-\tau} \overline{\underline{s}_r(\tau\tau) \underline{s}_r^T(\tau\tau)} \right]^{-1} \cdot \sum_{\tau=1}^t \gamma_b^{t-\tau} \left[\overline{\underline{s}_r(\tau\tau)} \cdot z_2(\tau) - \overline{\underline{s}_r(\tau\tau) w(\tau\tau)} \right] \quad (2.4.102)$$

$$\overline{g_2(t+1)} = \frac{1}{\sum_{\tau=1}^t \gamma_2^{t-\tau}} \cdot \left\{ \sum_{\tau=1}^t \gamma_2^{t-\tau} \left[z_2^2(\tau) - 2 \overline{w(\tau\tau)} \cdot z_2(\tau) + \overline{w^2(\tau\tau)} \right] - \overline{b^T(t+1)} \cdot \sum_{\tau=1}^t \gamma_2^{t-\tau} \left[\overline{\underline{s}_r(\tau\tau)} \cdot z_2(\tau) - \overline{\underline{s}_r(\tau\tau) w(\tau\tau)} \right] \right\} \quad (2.4.103)$$

unde γ_s , γ_w , γ_a , γ_b , γ_1 și γ_2 sunt ponderi exponențiale reale, preselectate între 0 și 1, care specifică fereastra efectivă în estimarea diferiților parametrii.

În continuare se vor transforma relațiile (2.4.97)-(2.4.103) într-o formă recursivă pentru a se obține un algoritm complet secvențial care să fie capabil să urmărească schimbările de nestaționaritate din structura datelor.

Se definesc mărimile:

$$R_{11}(t) = \sum_{\tau=1}^t \gamma_s^{t-\tau} \overline{\underline{s}_{p-1}(\tau-1|\tau) \underline{s}_{p-1}^T(\tau-1|\tau)} = \gamma_s R_{11}(t-1) + \overline{\underline{s}_{p-1}(\tau-1|\tau) \underline{s}_{p-1}^T(\tau-1|\tau)} \quad (2.4.104)$$

$$R_{12}(t) = \sum_{\tau=1}^t \gamma_s^{t-\tau} \overline{\underline{s}_{p-1}(\tau-1|\tau) s(\tau\tau)} = \gamma_s R_{12}(t-1) + \overline{\underline{s}_{p-1}(\tau-1|\tau) s(\tau\tau)} \quad (2.4.105)$$

$$R_{22}(t) = \sum_{\tau=1}^t \gamma_s^{t-\tau} \overline{s^2(\tau\tau)} = \gamma_s R_{22}(t-1) + \overline{s^2(\tau\tau)} \quad (2.4.106)$$

$$Q_{11}(t) = \sum_{\tau=1}^t \gamma_w^{t-\tau} \overline{w^2(\tau\tau)} = \gamma_w Q_{11}(t-1) + \overline{w^2(\tau\tau)} \quad (2.4.107)$$

$$A_{11}(t) = \sum_{\tau=1}^t \gamma_a^{t-\tau} \overline{\underline{w}_q(\tau\tau) \underline{w}_q^T(\tau\tau)} = \gamma_a A_{11}(t-1) + \overline{\underline{w}_q(\tau\tau) \underline{w}_q^T(\tau\tau)} \quad (2.4.108)$$

$$A_{12}(t) = \sum_{\tau=1}^t \gamma_a^{t-\tau} \left[\overline{\underline{w}_q(\tau\tau)} \cdot z_1(\tau) - \overline{\underline{w}_q(\tau\tau) s(\tau\tau)} \right] = \gamma_a A_{12}(t-1) + \left[\overline{\underline{w}_q(\tau\tau)} \cdot z_1(\tau) - \overline{\underline{w}_q(\tau\tau) s(\tau\tau)} \right] \quad (2.4.109)$$

$$A_{22}(t) = \sum_{\tau=1}^t \gamma_a^{t-\tau} \left[z_1^2(\tau) - 2 \overline{s(\tau\tau)} \cdot z_1(\tau) + \overline{s^2(\tau\tau)} \right] = \gamma_a A_{22}(t-1) + \left[z_1^2(\tau) - 2 \overline{s(\tau\tau)} \cdot z_1(\tau) + \overline{s^2(\tau\tau)} \right] \quad (2.4.110)$$

$$B_{11}(t) = \sum_{\tau=1}^t \gamma_b^{t-\tau} \overline{\underline{s}_r(\tau\tau) \underline{s}_r^T(\tau\tau)} = \gamma_b B_{11}(t-1) + \overline{\underline{s}_r(\tau\tau) \underline{s}_r^T(\tau\tau)} \quad (2.4.111)$$

$$\begin{aligned}
B_{12}(t) &= \sum_{\tau=1}^t \gamma_b^{\tau-1} \left[\overline{s_r(\tau|\tau)} \cdot z_2(\tau) - \overline{s_r(\tau|\tau)w(\tau|\tau)} \right] = \\
&= \gamma_b B_{12}(t-1) + \left[\overline{s_r(t|t)} \cdot z_2(t) - \overline{s_r(t|t)w(t|t)} \right]
\end{aligned} \tag{2.4.112}$$

$$\begin{aligned}
B_{22}(t) &= \sum_{\tau=1}^t \gamma_b^{\tau-1} \left[z_2^2(\tau) - 2\overline{w(\tau|\tau)} \cdot z_2(\tau) + \overline{w^2(\tau|\tau)} \right] = \\
&= \gamma_b B_{22}(t-1) + \left[z_2^2(t) - 2\overline{w(t|t)} \cdot z_2(t) + \overline{w^2(t|t)} \right]
\end{aligned} \tag{2.4.113}$$

Apoi, utilizând relațiile (2.4.104)-(2.4.113) în (2.4.97)-(2.4.103) se obțin următoarele formule recursive pentru actualizarea estimatelor parametrilor:

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha(t+1)} &= -R_{11}^{-1}(t)R_{12}(t) \\
&= \overline{\alpha(t)} - R_{11}^{-1}(t) \left[\overline{s_{p,1}(t-1|t)s(t|t)} + \overline{s_{p,1}^T(t-1|t)s_{p,1}^T(t-1|t)} \cdot \overline{\alpha(t)} \right]
\end{aligned} \tag{2.4.114}$$

$$\overline{g_s(t+1)} = \frac{1-\gamma_s}{1-\gamma_s^t} \left[R_{22}(t) + \overline{\alpha^T(t+1)} \cdot R_{12} \right] \tag{2.4.115}$$

$$\overline{g_w(t+1)} = \frac{1-\gamma_w}{1-\gamma_w^t} Q_{11}(t) \tag{2.4.116}$$

$$\begin{aligned}
\overline{a(t+1)} &= A_{11}^{-1}(t)A_{12}(t) \\
&= \overline{a(t)} + A_{11}^{-1}(t) \left[\overline{w_q(t|t)} \cdot z_1(t) - \overline{w_q(t|t)s(t|t)} - \overline{w_q(t|t)w_q^T(t|t)} \cdot \overline{a(t)} \right]
\end{aligned} \tag{2.4.117}$$

$$\overline{g_1(t+1)} = \frac{1-\gamma_a}{1-\gamma_a^t} \left[A_{22}(t) - \overline{a^T(t+1)} \cdot A_{12}(t) \right] \tag{2.4.118}$$

$$\begin{aligned}
\overline{b(t+1)} &= B_{11}^{-1}(t)B_{12}(t) \\
&= \overline{b(t+1)} + B_{11}^{-1}(t) \left[\overline{s_r(t|t)} \cdot z_2(t) - \overline{s_r(t|t)w(t|t)} - \overline{s_r(t|t)s_r^T(t|t)} \cdot \overline{b(t)} \right]
\end{aligned} \tag{2.4.119}$$

$$\overline{g_2(t+1)} = \frac{1-\gamma_b}{1-\gamma_b^t} \left[B_{22}(t) - \overline{b^T(t+1)} \cdot B_{12}(t) \right] \tag{2.4.120}$$

Acesta nu mai este un algoritm EM și nu există nici o demonstrație că el converge. Totuși, întrucât algoritmul constă, în esență, dintr-un filtru Kalman ai cărui parametri sunt continuu actualizați, în condiții de staționaritate și ergodicitate este posibil să se confirme convergența. Aceasta este o problemă încă neaprofundată. Metoda expusă este numai o cale de a genera algoritmi secvențial-adaptivi. Se poate utiliza modelul spațiu de stare din (2.4.42) și (2.4.43) ca un punct de pornire și se pot aplica metodele de eroare de predicție din [38] și [39] direct pentru a obține algoritmi adaptivi și secvențiali.

2.4.4. ALGORITMI BAZAȚI PE GRADIENT

Ca o alternativă la algoritmul EM, se consideră clasa algoritmilor bazați pe gradient pentru găsirea estimatei ML a parametrului:

$$\underline{\theta}^{(l+1)} = \underline{\theta}^{(l)} + \Lambda(\underline{z}; \underline{\theta}^{(l)}) \left. \frac{\partial \log f_z(\underline{z}; \underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right|_{\underline{\theta} = \underline{\theta}^{(l)}} \quad (2.4.121)$$

unde, ca și mai înainte, $\underline{\theta}^{(l)}$ desemnează estimata lui $\underline{\theta}$ după l cicluri. Dacă $\Lambda(\underline{z}; \underline{\theta})$ este o matrice diagonală constantă, independentă de \underline{z} și $\underline{\theta}$, se obține algoritmul convențional al celei mai rapide coborâri, unde elementele diagonalei lui Λ sunt mărimile de pas utilizate pentru actualizarea estimatelor diferiților parametri în timpul iterărilor. Pentru mărimi de pas suficient de mici, algoritmul celei mai rapide coborâri converge liniar la soluția ML dorită sau, cel puțin, la un maxim local al funcției de plauzibilitate. În [40] s-a arătat că algoritmul EM are o rată de convergență lineară lângă punctul de convergență. Dacă $\Lambda(\underline{z}; \underline{\theta}) = -H^{-1}(\underline{z}; \underline{\theta})$, unde $H(\underline{z}; \underline{\theta})$ este matricea hessiană definită prin:

$$H(\underline{z}; \underline{\theta}) = \frac{\partial^2 \log f_z(\underline{z}; \underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}^2} \quad (2.4.122)$$

se obține algoritmul Newton-Raphson. Dacă $\Lambda(\underline{z}; \underline{\theta}) = J^{-1}(\underline{\theta})$, unde $J(\underline{\theta})$ este matricea de informație Fisher (FIM) definită prin:

$$\begin{aligned} J(\underline{\theta}) &= E \left[- \frac{\partial^2 \log f_z(\underline{z}; \underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}^2} \right] - \\ &= E \left[- \frac{\partial \log f_z(\underline{z}; \underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \frac{\partial \log f_z(\underline{z}; \underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right] \end{aligned} \quad (2.4.123)$$

se obține algoritmul de estimare [40]. Algoritmii Newton-Raphson și de estimare posedă o rată de convergență superliniară (pătratică); dar convergența lor poate depinde mai critic de condițiile de inițializare decât în cazul algoritmului celei mai rapide coborâri.

Calculul gradientului logaritmului plauzibilității $\partial \log f_z(\underline{z}; \underline{\theta}) / \partial \underline{\theta}$ prin diferențierea directă a funcției $\log f_z(\underline{z}; \underline{\theta})$ este foarte complicat. El conduce la așa-numitele derivate de sensibilitate care sunt efectiv ecuațiile de filtrare Kalman (adică ecuațiile de propagare și de actualizare) în raport cu parametri necunoscuți (vezi [38] și [42]). Metoda ecuațiilor de predicție din [38], [39] necesită de asemenea calcularea derivatelor de sensibilitate.

O abordare alternativă pentru calcularea estimării din modelele de stare dinamice este propusă în [43]. Ea se bazează pe identitatea lui Fisher [44]:

$$\frac{\partial \log f_z(\underline{z}; \underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} = E_{\theta_0} \left[\frac{\partial \log f_y(\underline{y}; \underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right]_{\underline{z}} \quad (2.4.124)$$

unde, ca și înainte, \underline{z} reprezintă datele "incomplete" (observate) și \underline{y} reprezintă datele "complete". Identitatea lui Fisher arată că estimata datelor observate ("incomplete") este egală cu așteptarea condiționată a datelor complete.

Substituind (2.4.26) în (2.4.124) și efectuând operațiile de diferențiere și așteptare indicate, componentele vectorului de estimare sunt date de :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\alpha}} \log f_z(\underline{z}; \theta) = -\frac{1}{g_s} \sum_{t=1}^N \left[\overline{s(t) \underline{s}_{p-1}^T(t-1)} + \alpha^T \overline{s_{p-1}(t-1) \underline{s}_{p-1}^T(t-1)} \right] \quad (2.4.125)$$

$$\frac{\partial}{\partial g_s} \log f_z(\underline{z}; \theta) = -\frac{N}{2g_s} + \frac{1}{2g_s^2} \sum_{t=1}^N \left[\overline{s^2(t)} + 2\alpha^T \overline{s_{p-1}(t-1) s(t)} + \alpha^T \overline{s_{p-1}(t-1) \underline{s}_{p-1}^T(t-1) \underline{\alpha}} \right] \quad (2.4.126)$$

$$\frac{\partial}{\partial g_w} \log f_z(\underline{z}; \theta) = -\frac{N}{2g_w} + \frac{1}{2g_w^2} \sum_{t=1}^N \overline{w^2(t)} \quad (2.4.127)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{a}} \log f_z(\underline{z}; \theta) = \frac{1}{g_1} \sum_{t=1}^N \left[z_1(t) \overline{w_q^t(t)} - \overline{s(t) w_q^t(t)} - \underline{a}^T \overline{w_q(t) w_q^t(t)} \right] \quad (2.4.128)$$

$$\frac{\partial}{\partial g_1} \log f_z(\underline{z}; \theta) = -\frac{N}{2g_1} + \frac{1}{2g_1^2} \sum_{t=1}^N \left[z_1^2(t) - 2z_1(t) \overline{s(t)} + \overline{s^2(t)} - 2\underline{a}^T \overline{w_q(t)} \cdot z_1(t) + 2\underline{a}^T \overline{w_q(t) s(t)} + \underline{a}^T \overline{w_q(t) w_q^T(t) \underline{a}} \right] \quad (2.4.129)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{b}} \log f_z(\underline{z}; \theta) = \frac{1}{g_2} \sum_{t=1}^N \left[z_2(t) \overline{s_r^T(t)} - \overline{w(t) s_r^T} - b^T \overline{s_r(t) s_r^T(t)} \right] \quad (2.4.130)$$

$$\frac{\partial}{\partial g_2} \log f_z(\underline{z}; \theta) = -\frac{N}{2g_2} + \frac{1}{2g_2^2} \sum_{t=1}^N \left[z_2^2(t) - 2z_2 \overline{w(t)} + \overline{w^2(t)} - 2b^T \overline{s_r(t)} \cdot z_2(t) + 2\underline{b}^T \overline{s_r(t) w(t)} + \underline{b}^T \overline{s_r(t) \underline{s}_r^T(t) \underline{b}} \right] \quad (2.4.131)$$

unde $\overline{(\cdot)} \stackrel{\Delta}{=} E_{\theta}[\cdot | \underline{z}]$.

Se observă că (2.4.125)-(2.4.131) depind de datele \underline{z} numai prin așteptările condiționate $\overline{x(t)} = E_{\theta}[\underline{x}(t) | \underline{z}]$ și $\overline{x(t) x^T(t)} = E_{\theta}[\underline{x}(t) \underline{x}^T(t) | \underline{z}]$. Astfel, dacă se dorește să se aplice metoda celei mai rapide coborâri, atunci, substituind (2.4.125)-(2.4.131) în (2.4.121) se obține algoritmul următor:

Estimarea semnalului: Pentru $t=1, 2, \dots, N$ se calculează

$$\overline{x(t)}^{(t)} = E_{\theta^{(t)}}[\underline{x}(t) | \underline{z}] \quad (2.4.132)$$

$$\overline{x(t) x^T(t)}^{(t)} = E_{\theta^{(t)}}[\underline{x}(t) \underline{x}^T(t) | \underline{z}] \quad (2.4.133)$$

Estimarea parametrilor:

$$\underline{\alpha}^{(t+1)} = \underline{\alpha}^{(t)} - \frac{\delta_{\alpha}}{g_s} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[\overline{s_{p-1}(t-1) s(t)}^{(t)} + \underline{s}_{p-1}(t-1) \overline{s_{p-1}^T(t-1) \underline{\alpha}}^{(t)} \right] \quad (2.4.134)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{g}}_s^{(t+1)} = & \left(1 - \frac{\delta_s}{2}\right) \overline{\mathbf{g}}_s^{(t)} + \frac{\delta_s}{2} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[\overline{s^2(t)} + 2\overline{\boldsymbol{\alpha}^T} \overline{s_{p-1}(t-1)s(t)} + \right. \\ & \left. + \overline{\boldsymbol{\alpha}^T} \overline{s_{p-1}(t-1)s_{p-1}^T(t-1)} \overline{\boldsymbol{\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (2.4.135)$$

$$\overline{\mathbf{g}}_w^{(t+1)} = \left(1 - \frac{\delta_w}{2}\right) \overline{\mathbf{g}}_w^{(t)} + \frac{\delta_w}{2} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \overline{w^2(t)} \quad (2.4.136)$$

$$\overline{\mathbf{a}}^{(t+1)} = \overline{\mathbf{a}}^{(t)} + \frac{\delta_a}{g_1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[\overline{w_q(t)} z_1(t) - \overline{w_q(t)s(t)} - \overline{w_q(t)w_q^T(t)} \overline{\mathbf{a}}^{(t)} \right] \quad (2.4.137)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{g}}_1^{(t+1)} = & \left(1 - \frac{\delta_1}{2}\right) \overline{\mathbf{g}}_1^{(t)} + \frac{\delta_1}{2} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[z_1^2(t) - 2z_1(t)\overline{s(t)} + \overline{s^2(t)} - \right. \\ & \left. - 2\overline{\boldsymbol{\alpha}^T} \overline{w_q(t)} z_1(t) + 2\overline{\boldsymbol{\alpha}^T} \overline{w_q(t)s(t)} + \overline{\boldsymbol{\alpha}^T} \overline{w_q(t)w_q^T(t)} \overline{\mathbf{a}}^{(t)} \right] \end{aligned} \quad (2.4.138)$$

$$\overline{\mathbf{b}}^{(t+1)} = \overline{\mathbf{b}}^{(t)} + \frac{\delta_b}{g_2} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[\overline{s_r(t)} z_2(t) - \overline{s_r(t)w(t)} - \overline{s_r(t)s_r^T(t)} \overline{\mathbf{b}}^{(t)} \right] \quad (2.4.139)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{g}}_2^{(t+1)} = & \left(1 - \frac{\delta_2}{2}\right) \overline{\mathbf{g}}_2^{(t)} + \frac{\delta_2}{2} \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[z_2^2(t) - 2z_2(t)\overline{w(t)} + \overline{w^2(t)} - \right. \\ & \left. - 2\overline{\mathbf{b}^T} \overline{s_r(t)} z_2(t) + 2\overline{\mathbf{b}^T} \overline{s_r(t)w(t)} + \overline{\mathbf{b}^T} \overline{s_r(t)s_r^T(t)} \overline{\mathbf{b}}^{(t)} \right] \end{aligned} \quad (2.4.140)$$

unde δ_{α} , δ_s , δ_w , δ_a , δ_b , δ_1 și δ_2 sunt mărimile de pas utilizate în algoritm.

Cea mai remarcabilă calitate a acestui algoritm este că el are aceeași formă ca și algoritmul EM specificat prin (2.4.33)-(2.4.41). El constă într-un pas de estimare a semnalului urmat de un pas de estimare a parametrului. În plus, pasul de estimare al semnalului este identic în ambii algoritmi și poate fi implementat utilizând ecuațiile netezitorului Kalman. Singura diferență constă în actualizarea estimării parametrului.

Întrucât (2.4.134)-(2.4.140) nu necesită inversări de matrice, ele pot fi mai ușor calculate, comparativ cu ecuațiile (2.4.38) și (2.4.40) ale pasului M al algoritmului EM.

Este important de notat că pe lângă algoritmul EM, a cărui rată de convergență depinde de specificarea datelor complete, viteza de convergență a algoritmului celei mai rapide coborâri depinde numai de mărimile de pas care sunt utilizate. Aici s-a utilizat noțiunea de date complete numai ca un mecanism pentru calculul gradientului log-plauzibilității.

Se poate alege pentru inițializare algoritmul EM, cu scopul de a garanta convergența monotonă, și apoi se poate continua cu algoritmul de gradient, pentru actualizarea parametrului, cu beneficiul reducerii necesităților de calcul. Se poate, de asemenea, să se încorporeze algoritmul Newton-Raphson sau de estimare cu scopul de a accelera evoluția lângă punctul de convergență. Pentru acest scop este necesar calculul hessienei sau FIM (vezi considerentele din [43]).

Ca și în cazul algoritmului EM, pentru a converti algoritmul de gradient într-un algoritm secvențial adaptiv, se sugerează înlocuirea netezitorului Kalman, utilizat pentru estimarea stării (semnalului), cu ecuațiile de filtrare Kalman (2.4.67)-(2.4.71). Apoi, pentru a

obține estimata parametrului $\overline{\theta(t)}$, se sugerează înlocuire medierilor cumulative $1/N \sum(\cdot)$, care apar în (2.4.134)-(2.4.140) prin cel mai actual termen din sumă, și înlocuirea indexului de iterație l prin indexul de timp t . Cu aceste modificări, se obțin următoarele formule recursive pentru actualizarea componentelor lui $\overline{\theta(t)}$:

$$\overline{\alpha(t+1)} = \overline{\alpha(t)} - \frac{\delta_\alpha}{g_s(t)} \cdot \left[\overline{s_{p-1}(t-1|t)s(t|t)} + \overline{s_{p-1}(t-1|t)s_{p-1}^T(t-1|t)} \cdot \overline{\alpha(t)} \right] \quad (2.4.141)$$

$$\overline{g_s(t+1)} = \left(1 - \frac{\delta_s}{2} \right) \overline{g_s(t)} + \frac{\delta_s}{2} \cdot \left[\overline{s^2(t|t)} + 2\overline{\alpha^T(t)} \cdot \overline{s_{p-1}(t-1|t)s(t|t)} + \right. \\ \left. + \overline{\alpha^T(t)} \cdot \overline{s_{p-1}(t-1|t)s_{p-1}^T(t-1|t)} \cdot \overline{\alpha(t)} \right] \quad (2.4.142)$$

$$\overline{g_w(t+1)} = \left(1 - \frac{\delta_w}{2} \right) \overline{g_w(t)} + \frac{\delta_w}{2} \cdot \overline{w^2(t|t)} \quad (2.4.143)$$

$$\overline{a(t+1)} = \overline{a(t)} + \frac{\delta_a}{g_i(t)} \cdot \left[\overline{w_q(t|t)} \cdot z_1(t) - \overline{w_q(t|t)s(t|t)} - \overline{w_q(t|t)w_q^T(t|t)} \cdot \overline{a(t)} \right] \quad (2.4.144)$$

$$\overline{g_1(t+1)} = \left(1 - \frac{\delta_1}{2} \right) \overline{g_1(t)} + \frac{\delta_1}{2} \cdot \left[z_1^2(t) - 2z_1(t)\overline{s(t|t)} + \overline{s^2(t|t)} - \right. \\ \left. - 2\overline{a^T(t)} \cdot \overline{w_q(t|t)} \cdot z_1(t) + 2\overline{a^T(t)} \cdot \overline{w_q(t|t)s(t|t)} + \overline{a^T(t)} \cdot \overline{w_q(t|t)w_q^T(t|t)} \cdot \overline{a(t)} \right] \quad (2.4.145)$$

$$\overline{b(t+1)} = \overline{b(t)} + \frac{\delta_b}{g_2(t)} \cdot \left[\overline{s_r(t|t)} \cdot z_2(t) - \overline{s_r(t|t)w(t|t)} - \overline{s_r(t|t)s_r^T(t|t)} \cdot \overline{b(t)} \right] \quad (2.4.146)$$

$$\overline{g_2(t+1)} = \left(1 - \frac{\delta_2}{2} \right) \overline{g_2(t)} + \frac{\delta_2}{2} \cdot \left[z_2^2(t) - 2z_2(t)\overline{w(t|t)} + \overline{w^2(t|t)} - \right. \\ \left. - 2\overline{b^T(t)} \cdot \overline{s_r(t|t)} \cdot z_2(t) + 2\overline{b^T(t)} \cdot \overline{s_r(t|t)w(t|t)} + \overline{b^T(t)} \cdot \overline{s_r(t|t)s_r^T(t|t)} \cdot \overline{b(t)} \right] \quad (2.4.147)$$

Din nou, estimarea semnalului este identică atât pentru algoritmul secvențial EM cât și pentru algoritmi de gradient secvențiali. Diferența constă numai în actualizarea estimatei parametrului.

2.4.5. REZULTATE EXPERIMENTALE

Algoritmi prezentați în Secțiunea 2.4., conform cu [28], au fost testați de autorul articolului în următorul context: Semnalul dorit, $s(t)$, este vocal. Semnalele $w(t)$, $e_1(t)$ și $e_2(t)$ sunt zgomote gaussiene albe generate de calculator. Sistemele de cuplare A și B simulează caracteristicile acustice ale unei camere. Acestea sunt filtre F.I.R. de ordinul 128, adică $r=q=127$: Nivelul spectral al lui $w(t)$ este setat astfel ca SNR, adică puterea medie a semnalului dorit raportată la puterea medie a semnalului rezidual, la primul senzor (primar) să fie de 0dB și la al doilea (de referință) de -26dB. Nivelele surselor de zgomot independente $e_1(t)$ și $e_2(t)$

sunt cu 34dB sub nivelul lui $w(t)$. Semnalele măsurate, $z_1(t)$ și $z_2(t)$ sunt generate utilizând ecuațiile (2.4.1) și (2.4.2).

În general, semnalul vocal este bine modelat printr-un proces AR de ordinul 10. Totuși, experimente preliminare cu diferite ordine au indicat că este suficient, și uneori preferabil, să se utilizeze modele de ordin mai scăzut. În acest experiment s-a utilizat un model autoregresiv de ordinul doi.

În aplicarea algoritmilor au fost estimați numai coeficienții răspunsului la impuls al filtrului **A** al sistemului de cuplare și parametrii semnalului dorit $\underline{\alpha}$ și g_s . Celălalt filtru al sistemului de cuplare, **B**, și nivelele spectrale ale semnalelor $w(t)$, $e_1(t)$ și $e_2(t)$ se presupun cunoscute.

Mai întâi s-a implementat algoritmul EM secvențial, care constă din estimarea stării utilizând ecuațiile de filtrare Kalman (2.4.67)-(2.4.71) și estimarea parametrilor utilizând ecuațiile (2.4.114), (2.4.115) și (2.4.117). Inversa matricei (128×128) din (2.4.117) a fost actualizată la fiecare 100 de eșantioane de date. Ponderile γ_a , γ_s , și γ_v au fost alese egale cu 0,995, corespunzând unei ferestre alunecătoare de lungime efectivă 138 ($0,995^{138} = 0,5$). Cu această setare se obține un algoritm adaptiv, care este capabil să urmărească caracteristici care variază în timp ale ambelor semnale (întrucât $\gamma_a, \gamma_s < 1$) și ale filtrului de cuplare necunoscut (întrucât $\gamma_v < 1$). Pentru inițializare s-a aplicat metoda LMS [1], (sub presupunerea că **B** este zero), utilizând primele 300 de eșantioane de date ale semnalelor $z_1(t)$ și $z_2(t)$, pentru a se obține o estimată inițială a lui $\underline{\alpha}$ și a semnalului vocal $s(t)$. O estimată inițială a lui $\underline{\alpha}$ este obținută apoi printr-o ajustare, utilizând metoda celor mai mici pătrate, a estimatei semnalului inițial la un model AR de ordinul doi. Nivelul spectral al semnalului a fost setat la valoarea inițială $g_s = 100$. Vectorul de stare inițial a fost ales utilizând primele $(r+1)$ eșantioane ale lui $z_1(t)$ și primele $(q+1)$ eșantioane ale lui $z_2(t)$, covarianța stării a fost inițial setată la o matrice diagonală ale cărei prime $(r+1)$ elemente diagonale sunt toate egale cu valoarea inițială a lui g_s și celelalte $(q+1)$ egale cu nivelul de zgomot g_w .

În urma testării algoritmului și postprocesării SNR, adică a raportului puterii medii a semnalului $s(t)$ la puterea medie a semnalului eroare $\overline{s(t)} - s(t)$, a fost 23dB, indicând o întărire de 23dB față de datele originale ale sensorului. Algoritmul a converș la o estimată curată a coeficienților filtrului în aproximativ 1000 de eșantioane de date, corespunzând la 0,1s pentru frecvența de eșantionare de 10KHz. Nivelul g_s urmărește cu fidelitate puterea semnalului vocal original.

Al doilea algoritm implementat este cel secvențial de gradient care constă în realizarea actualizării estimatei parametrilor utilizând ecuațiile (2.4.141), (2.4.142) și (2.4.144). Mărimile de pas δ_a , δ_s și δ_v au fost toate egale cu 0,995. Vectorul de stare și covarianța sa au fost inițializate ca și în cazul precedent. De data aceasta, filtrul de cuplare **A** a fost setat inițial la zero (adică $\underline{\alpha} = 0$) și estimata inițială a lui $\underline{\alpha}$ a fost obținută printr-o ajustare, utilizând metoda celor mai mici pătrate, a modelului autoregresiv de ordinul doi al lui $s(t)$, utilizând primele 300 de eșantioane ale lui $z_1(t)$. Nivelul de semnal a fost inițializat arbitrar la $g_s = 100$. În urma experimentelor, după postprocesare, s-a obținut în acest caz, SNR=8dB, care este un rezultat considerabil mai scăzut decât 23dB îmbunătățire obținută cu algoritmul EM secvențial. Totuși, o mai atentă postprocesare a SNR, folosind o fereastră alunecătoare de 100 eșantioane, arată o îmbunătățire de peste 10dB și uneori 20dB în timpul segmentelor de semnal vocal mai staționare. Algoritmul a lucrat rău în timpul perioadelor de liniște. La audierea calitativă, semnalul vocal estimat, manifestă o îmbunătățire notabilă față de datele sensorului. Zgomotul de fond a fost mai evident între cuvine, dar cuvintele propriuzise au fost clar, inteligibile. Calitatea percepută nu este atât de bună ca și cea obținută cu algoritmul EM secvențial.

Avantajul important al algoritmului de gradient secvențial constă în simplitatea sa. El nu presupune nici o inversare de matrice și în consecință , necesită numai aproximativ 2% din operațiile cu virgulă mobilă necesare pentru algoritmul EM secvențial.

Acest algoritm lucrează mai bine cu inițializare arbitrară EM secvențial. Când A a fost inițial, setat la zero, algoritmul EM secvențial a avut probleme de convergență, în timp ce algoritmul de gradient converge foarte repede în intervalul de 2000 de eșantioane.

Am prezentat aceste rezultate experimentale cu scopul de a avea termeni de comparație cu rezultatele experimentale prezentate în Capitolul 3.

2.5. AGORITM DE DECORELARE DERIVAT DIN REDUCĂTORUL DE ZGOMOT ADAPTIV LMS

2.5.1. TRANSFORMAREA ALGORITMULUI LMS AL REDUCĂTORULUI DE ZGOMOT ÎN ALGORITMUL SAD AL DECORELATORULUI SIMETRIC

Așa cum s-a arătat în Introducere, pentru reducătorul de zgomot LMS al lui Widrow [1], raportul semnal-zgomot la ieșire este, în cel mai bun caz, egal cu raportul zgomot-semnal de la intrarea de referință. În cazul procesării semnalelor provenite de la arii de senzori, acest fenomen a fost denumit *inversiunea de putere*.

Într-un articol, [49], autorul, pornind de la schema reducătorului adaptiv de zgomot, se ajunge la sistemele de decorelare simetrice, care pot realiza decorelarea utilizând algoritmi foarte asemănători LMS-ului.

Pentru o mai clară prezentare a problemelor în Fig.2.5.1 se consideră sistemul de amestec al semnalelor surselor din Fig. 2.2.1, în Fig. 2.5.2 se prezintă schema reducătorului adaptiv de zgomot, în Fig. 2.5.3 se reia schema decorelatorului simetric cu propagare înainte, iar în Fig. 2.5.4 schema decorelatorului simetric cu propagare înapoi.

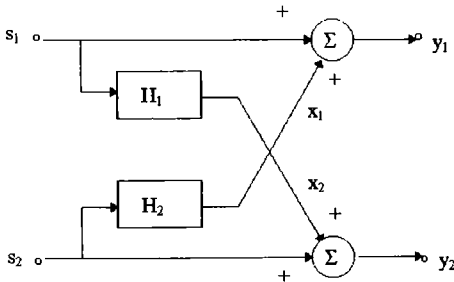


Fig.2.5.1. Modelul de însumare a semnalelor provenite de la două surse.

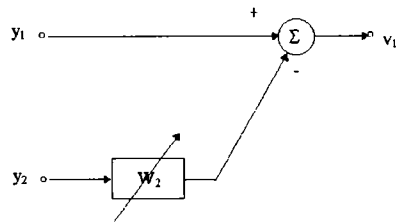


Fig. 2.5.2. Reducătorul adaptiv de zgomot

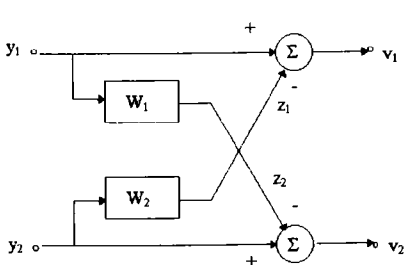


Fig. 2.5.3. Decorelator cu propagare directă.

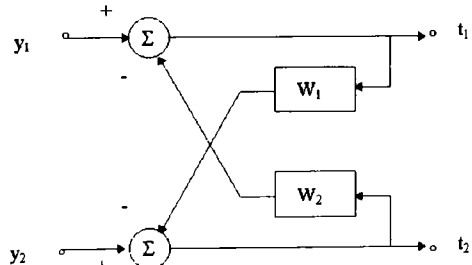


Fig. 2.5.4. Decorelator cu propagare înapoi.

În deducerea algoritmilor se vor folosi următoarele notații:
Suprafața de performanță (funcția cost): $\xi_i(k) = E[v_i^2(k)]$;

Vectorul coeficienților filtrelor: $\underline{W}_i(k) = [w_{i0}(k) \ \dots \ w_{iL_i}(k)]^T$;

Intercorelația în punctul m : $C_{yy}(m) = E[v(k)y(k-m)]$;

Vectorul intercorelație: $\underline{C}_{yy} = [C_{yy}(0) \ \dots \ C_{yy}(L)]^T$;

Interspectrul: $\Phi_{yy}(z) = \mathcal{Z}\{\underline{C}_{yy}\}$;

unde indicii $i=1,2$ desemnează numărul canalului, L_i reprezintă dimensiunile filtrelor \underline{W}_i , $E[\cdot]$ reprezintă operatorul de așteptare (mediere statistică), iar $\mathcal{Z}[\cdot]$ este transformata Z și k reprezintă indicele de timp normalizat.

Se presupune că semnalele $s_1(k)$ și $s_2(k)$ au media nulă și sunt statistic independente și deci necorelate. Pentru algoritmul SAD, care va fi dedus, este necesară numai cerința de necorelare, adică:

$$E[s_1(k)s_2(k-m)] = 0, \forall m \quad (2.5.1)$$

În această secțiune demonstrațiile sunt date pentru semnale de zgomot alb, identic distribuite, staționare, cu varianțele σ_1^2 și σ_2^2 respectiv. Cu toate acestea, ideile generale și formularea finală sunt utile și pentru semnale care nu sunt zgomote albe.

Pentru început se presupune că filtrul \mathbf{H}_1 din Fig. 2.5.1 are coeficienții răspunsului la impulsul unitate nuli și se consideră reducătorul de zgomot adaptiv din Fig. 2.5.2.

Criteriul de performanță al reducătorului de zgomot LMS clasic este de a minimiza energia $\xi_1(k)$ a estimatei semnalului $v_1(k)$. Pentru un filtru FIR adaptiv, $\xi_1(k)$ este o suprafață de eroare pătratică cu un singur optim. Minimizarea erorii în raport cu coeficienții filtrului este echivalentă cu obținerea unei condiții de necorelare între semnalul estimat, $v_1(k)$ și o referința de zgomot $y_2(k)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1(k)}{\partial w_{2m}} &= \frac{\partial E[v_1^2(n)]}{\partial w_{2m}} \\ &= 2E\left[v_1(n) \frac{\partial v_1(n)}{\partial w_{2m}}\right] \\ &= 2E\left[v_1(n) \frac{\partial (y_1(n) - \underline{W}_1^T \underline{Y}_2(n))}{\partial w_{2m}}\right] \\ &= -2E[v_1(n)y_2(n-m)] \\ &= -2C_{v_1y_2}(m), \quad m = 0, \dots, L_2 \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

În consecință, în punctul de minim avem:

$$\frac{\partial \xi_1(k)}{\partial w_{2m}} = 0 \Leftrightarrow C_{v_1y_2}(m) = 0, \quad m = 0, \dots, L_2 \quad (2.5.3)$$

Ecuatiile de mai sus sunt valabile pentru toate tipurile de semnale.

Pasul de adaptare din "gradientul coborării pe suprafața eroare" poate fi reinterpretat ca fiind "rezolvarea ecuației de anulare a intercorelației cu ajutorul algoritmului lui Newton", care pentru semnale de tip zgomot alb, devin:

$$C_{v_1y_2}(m) - (h_{2m} - w_{2m})\sigma_2^2 \quad (2.5.4)$$

$$\nabla_m = \frac{\partial C_{v_1 v_2}(m)}{\partial w_{2m}} = -\sigma_2^2 \quad (2.5.5)$$

$$w_{2m}(k+1) = w_{2m}(k) - \gamma \frac{C_{v_1 v_2}(m)}{\nabla_m} \quad (2.5.6)$$

Prin înlocuirea valorilor așteptate cu estimatele eșantioanelor instantanee și printr-o alegere corespunzătoare a lui γ ($0 < \gamma < 2 \Rightarrow 0 < \mu < \frac{2}{\sigma_2^2}$), se obține:

$$w_{2m}(k+1) = w_{2m}(k) + \mu(v_1(k)y_2(k-m)) \quad (2.5.7)$$

Căutarea lui zero prin metoda Newton este deci un algoritm de decorelare adaptiv (AD), care este identic cu algoritmul LMS.

Dacă au loc "scăpări de semnal" de la sursa primară la intrarea de referință, atunci decorelarea trebuie să fie realizată între o estimată a zgomotului necoruptă de semnal $v_2(k)$ și o estimată a semnalului necoruptă cu zgomot $v_1(k)$. Estimata zgomotului necoruptă de semnal poate fi obținută prin adăugarea unui filtru simetric W_1 așa cum este prezentat în Fig. 2.5.3. Algoritmul de decorelare adaptivă simetrică (SAD) se deduce din (2.5.7) înlocuind $y_2(k)$ cu $v_2(k)$ și adăugând formulele simetrice pentru w_{1n} :

$$w_{1n}(k+1) = w_{1n}(k) + \mu_1(v_2(k)v_1(k-n)), \quad n = 0, \dots, L_1 \quad (2.5.8)$$

$$w_{2m}(k+1) = w_{2m}(k) + \mu_2(v_1(k)v_2(k-m)), \quad m = 0, \dots, L_2 \quad (2.5.9)$$

Din punct de vedere numeric, algoritmul dat de relațiile (2.5.8) și (2.5.9) corespunde algoritmului Newton-Raphson simplificat de căutare a zerourilor intercorelațiilor, în care valorile așteptate au fost înlocuite prin estimatele eșantioanelor instantanee. Dacă setul de ecuații (2.5.8) și (2.5.9) converge, $v_1(k)$ și $v_2(k)$ vor fi decorelate în raport cu cele două filtre:

$$C_{v_1 v_2}(m) = E[v_1(k)v_2(k-m)] = 0, \quad m = 0, \dots, L_2 \quad (2.5.10)$$

$$C_{v_2 v_1}(n) = E[v_2(k)v_1(k-n)] = 0, \quad n = 0, \dots, L_1 \quad (2.5.11)$$

Nu se afirmă aici că setul de decorelare (2.5.8) și (2.5.9) converge automat la soluția corectă. Acest lucru va fi analizat ulterior.

După cum se știe, soluția corectă se obține când filtrele adaptive devin egale cu filtrele de generare, adică $W_1(z) = H_1(z)$ și $W_2(z) = H_2(z)$. Semnalele originale $s_1(k)$ și $s_2(k)$ pot fi reconstruite, printr-o postprocesare, utilizând sistemul de bucle autoregresive ca în Fig. 2.2.3, a căror funcție de transfer este dată de:

$$G(z) = \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} \quad (2.5.12)$$

Această organizare a algoritmului este numită implementare cu propagare înainte.

Un factor important este cauzalitatea filtrelor adaptive. Până acum s-a presupus că filtrele sunt cauzale, dar, de fapt, este necesar ca filtrele să fie strict cauzale. O condiție necesară pentru implementarea corectă este ca cel puțin unul dintre coeficienții de ordin zero ai filtrelor de generare și adaptive să fie egali cu zero:

$$w_{10} = h_{10} = 0 \text{ sau } w_{20} = h_{20} = 0 \quad (2.5. 13)$$

Motivele pentru care este necesară această restricție sunt următoarele:

Motivul fundamental este dependența între ecuațiile de actualizare ale coeficienților de ordin zero. Aceasta are loc deoarece L_1+L_2+2 coeficienți trebuiesc estimați cu ajutorul a numai L_1+L_2+1 ecuații de intercorelație. În (2.5.8) și (2.5.9) produsul $v_1(k)v_2(k)$, care este măsura instantanee pentru $C_{v_1v_2}(0)$, este utilizată pentru actualizarea ambilor coeficienți w_{10} și w_{20} . Aceasta conduce la o dependență liniară între coeficienți, adică traiectoria punctului $\{w_{10}, w_{20}\}$ este pe o linie dreaptă. Tangenta la această linie este determinată de raportul μ_1/μ_2 .

Pentru semnale de tip zgomot alb se deduce simplu o expresie completă pentru termenul de intercorelație de ordin zero:

$$C_{v_1v_2}(0) = \sigma_1^2(h_{10} - w_{10})(1 - h_{10}w_{20}) + \sigma_2^2(h_{20} - w_{20})(1 - h_{20}w_{10}) \quad (2.5. 14)$$

Această ecuație are un număr infinit de soluții care formează o hiperbolă în planul $\{w_{10}, w_{20}\}$. Utilizând ecuațiile (2.5.8) și (2.5.9), pentru $m=n=0$, convergența va fi pe o linie dreaptă care intersectează hiperbola, și deci, în general, nu la soluția corectă $\{h_{10}, h_{20}\}$.

Din cele relatate, rezultă că decorelarea singură nu poate rezolva o problemă de separare convolutivă cu mixări de ordin zero. Este posibil, așa cum s-a arătat în Secțiunea 2.4.3 să se folosească statistici de ordin superior pentru ridicarea nedeterminării.

Motive suplimentare care reclamă stricta cauzalitate a filtrelor se datorează posibilităților de implementare:

- În implementarea cu propagare înainte, filtrul de postprocesare din (12) trebuie să fie realizabil, adică cauzal. O condiție necesară pentru realizabilitatea acestui filtru este $w_{10}w_{20} \neq 1$. Întrucât această cerință trebuie să fie adevărată pentru orice pas de iterare, cea mai simplă cale de a asigura acest lucru este de a seta unul dintre coeficienți egal cu zero.
- În implementarea cu propagare înapoi, care va fi prezentată în continuare, se complică mult calculul estimatelor semnalelor. Calculul devine imposibil dacă $w_{10}w_{20} = 1$ și mai simplu dacă $w_{10}w_{20} = 0$.

Toate motivele prezentate mai sus conduc la aceeași concluzie: Cel puțin unul dintre filtre trebuie să fie strict cauzal. Pentru considerente de simetrie se va presupune de acum înainte că ambele relații din (2.5.13) sunt valabile. De aceea ecuațiile (2.5.8) și (2.5.9) sunt valabile pentru $n=1, \dots, L_1$ și $m=1, \dots, L_2$. De altfel, așa cum s-a arătat în Secțiunea 2.2.2, stricta cauzalitate a funcțiilor de transfer de cuplare modelează întârzierea de propagare între senzori.

O implementare alternativă a decorelatorului adaptiv simetric este cea cu propagare înapoi prezentată în Fig. 2.5.4. În acest caz estimatele semnalelor sunt direct disponibile și obținute cu mai puține calcule întrucât renormalizarea este realizată implicit în interiorul buclei. Analiza acestui algoritm este mult mai dificilă decât a versiunii cu propagare înainte.

Estimatele semnalelor sunt date de :

$$t_1(k) = y_1(k) - w_2(k) \otimes t_2(k) \quad (2.5. 15)$$

$$t_2(k) = y_2(k) - w_1(k) \otimes t_1(k) \quad (2.5. 16)$$

Ecuațiile de actualizare sunt identice cu (2.5.8) și (2.5.9) cu excepția faptului că apare $t_i(k)$ în locul lui $v_i(k)$:

$$w_{1n}(k+1) = w_{1n}(k) + \mu_1(t_2(k)t_1(k-n)); \quad n = 1, \dots, L_1 \quad (2.5. 17)$$

$$w_{2m}(k+1) = w_{2m}(k) + \mu_2(t_1(k)t_2(k-m)); \quad m = 1, \dots, L_2 \quad (2.5. 18)$$

2.5.2. STABILITATEA ALGORITMULUI SAD

În [49] se face o analiză a stabilității globale și asimptotice a algoritmului SAD.

Stabilitatea globală cuprinde două aspecte. Primul aspect este o problemă de divergență dependentă de algoritm și se datorează aproximărilor făcute în estimatele gradientelor. Al doilea aspect este stabilitatea de regim permanent.

Analiza stabilității asimptotice conduce la constrângeri fundamentale și dependente de algoritm.

2.5.2.1. Estimatele gradientelor

Examinarea mai atentă a ecuațiilor intercorelațiilor reliefează o diferență importantă între algoritmul (AD) și algoritmul (SAD) simetric în raport cu estimata gradientului. Termenii intercorelației sunt neliniari, conținând produse de tipul $w_{1n}w_{2m}$. Expresia completă este dată de

$$C_{v_1 v_2}(m) = (h_{2m} - w_{2m})\sigma_2^2 - \sum_k w_{2k} \left(\sum_l h_{1m+l-k} (h_{1l} - w_{1l}) \right) \sigma_1^2 - \sum_k w_{1k} \left(\sum_l h_{2m+l-k} (h_{2l} - w_{2l}) \right) \sigma_2^2 \quad (2.5. 19)$$

Așa cum s-a menționat, algoritmul SAD este de fapt un algoritm de căutare al lui zero Newton-Raphson simplificat. El ia în considerare numai termenii care depind de w_{2m} pentru actualizarea sa:

$$C_{v_1 v_2}(m) \approx (h_{2m} - w_{2m})\sigma_2^2 - \sum_k w_{2k} \left(\sum_l h_{1m+l-k} (h_{1l} - w_{1l}) \right) \sigma_1^2 \quad (2.5. 20)$$

Derivatele parțiale (gradientii) nu mai sunt constante (ca în cazul AD) ci depind de estimatele coeficienților celuiilalt filtru:

$$\nabla_m = -\sigma_2^2 - \sigma_1^2 \sum_l h_{1l} (h_{1l} - w_{1l}) \approx -\sigma_2^2 \quad (2.5. 21)$$

$$\nabla_n = -\sigma_1^2 - \sigma_2^2 \sum_l h_{2l} (h_{2l} - w_{2l}) \approx -\sigma_1^2 \quad (2.5. 22)$$

Aproximarea gradientului ∇_m prin $-\sigma_2^2$, așa cum s-a presupus în derivare din (2.5.8) și (2.5.9), depinde de calitatea estimării coeficientului filtrului h_{1l} . Erori mari ale coeficientului w_{1l} pot avea o influență semnificativă întrucât ∇_m poate deveni de semn opus față de cel presupus în adoptarea regulii pentru coeficientul w_{2m} . Premiza semnului corect este critică întrucât aceasta determină dacă adaptarea va avea loc în direcția corectă sau nu.

Ecuțiile $\nabla_m = 0$ și $\nabla_n = 0$ definesc două hiperplane în spațiul parametrilor. Schimbarea de semn pentru ∇_m este numai în funcție de w_{1l} și pentru ∇_n numai în funcție de w_{2l} . Hiperplanele sunt, de aceea, perpendiculare și ele împart spațiul parametrilor în diferite regiuni.

În prima regiune semnul gradientului este corect determinat pentru toți coeficienții. Atât originea cât și soluția dorită sunt totdeauna situate în interiorul ei. La prima vedere se poate concluziona că existând o regiune contiguă între punctul de start, în condiții inițiale zero,

și soluția dorită, algoritmul va converge aproape sigur spre aceasta. Acest lucru nu este adevărat. Adaptarea va porni în direcția corectă, dar o analiză mai profundă evidențiază faptul că soluția dorită poate să nu fie singura soluție de decorelare și trebuie să îndeplinească constrângeri suplimentare pentru a obține convergența și stabilitatea în jurul acesteia.

A doua regiune este aceea pentru care semnul gradientului este incorect pentru toate ponderile. Adaptarea va avea loc în mod sigur în direcție greșită și algoritmul va diverge. De aceea, algoritmul SAD are totdeauna o regiune instabilă în spațiul parametrilor lui $\{w_{1l}, w_{2l}\}$.

În regiunile a treia și a patra semnul gradientului este incorect numai pentru un set de ponderi. Întrucât direcția de adaptare este de asemenea o funcție de valorile relative ale diferiților termeni de intercorelație și de raportul constantelor de adaptare, este posibil, depinzând de poziția inițială, ca adaptarea să aibă loc spre prima regiune. Oricum, pornind din condiții inițiale diferite, coeficienții pot evolua spre regiunea instabilă și în acest caz algoritmul va fi instabil.

2.5.2.2. Stabilitatea filtrului în regim permanent

Separat de problema gradientului, cel mai important aspect al stabilității globale se referă la proprietățile funcțiilor de transfer. Condițiile care vor fi deduse sunt exprimate în termenii funcțiilor adaptive $W_l(z)$. Ele se aplică în aceeași măsură și filtrelor de generare $H_l(z)$ dacă se dorește stabilitatea soluției corecte. În implementarea cu propagare înainte, filtrul de postprocesare, care este dat în (2.5.12), trebuie să fie realizabil, adică cauzal și stabil. Causalitatea a fost discutată în Secțiunea 2.5.1. O condiție necesară (și suficientă) pentru asigurarea stabilității este ca $1 - W_1(z)W_2(z)$ să aibă toate zerourile în interiorul cercului unitate. În implementarea cu propagare înapoi, o condiție identică este impusă de amplificarea buclei de reacție inversă. Tratarea detaliată a acestor subiecte s-a făcut în Secțiunea 2.2.

2.5.2.3. Stabilitatea asimptotică

În [49] stabilitatea asimptotică este investigată prin liniarizarea algoritmului în punctul de echilibru și înlocuind produsele de semnal prin valorile lor așteptate. Instabilitățile pot apărea datorită reacției pozitive în propagarea erorii. Analiza se realizează numai în jurul soluției dorite. Valorile proprii ale algoritmului liniarizat trebuie să fie subunitare pentru o soluție stabilă.

Din cauza dificultăților de a se deduce condițiile de stabilitate asimptotică pentru semnale cu spectre oarecare și în cazul filtrelor cu mai mulți coeficienți, analiza se limitează la cazul semnalelor de tip zgomot alb cu puteri egale ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) și mărimi de pas egale ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$). Criteriul aproximativ care se va deduce este unul de suficiență întrucât el este stabilit în termenii valorilor absolute.

Se presupune că toți coeficienții filtrelor au converș până în interiorul unei vecinătăți a soluției dorite, determinată de ε . Atunci criteriul reclamă ca după următoarea iterație să aibă loc următoarea inegalitate strictă:

$$\Delta_{ii}(k) - |w_{ii}(k) - h_{ii}| \leq \varepsilon \rightarrow \Delta_{ii}(k+1) < \varepsilon \quad (2.5.23)$$

Utilizând relațiile (2.5.8) și (2.5.9) $\Delta_{ii}(k+1)$ poate fi expandat prin înlocuire estimatelor eşantioanelor semnalelor cu valorile lor aşteptate ca în relația (2.5.19). Întrucât $w_{ii}(k) \approx h_{ii}$, efectele de ordinul doi pot fi neglijate și se obține:

$$|\Delta_{ii}(k+1)| \leq \left[(1 - \mu\sigma^2) \right] \varepsilon + \gamma\mu\sigma^2\varepsilon \quad (2.5.24)$$

Termenul γ este dependent de coeficienții filtrelor \mathbf{H}_i . În funcție de γ , condițiile de stabilitate asimptotică pot acum să fie exprimate astfel:

$$0 < \gamma < 1 \quad (2.5.25)$$

$$0 < \mu < \frac{2}{(1+\gamma)\sigma^2} \quad (2.5.26)$$

Relația (2.5.25) este o restricție suplimentară care trebuie îndeplinită de filtrele de generare. Relația (2.5.26) poate fi îndeplinită printr-o alegere corectă a mărimii de pas, de exemplu $\mu < 1/\sigma^2$, independentă de γ .

Se poate demonstra că $\gamma < 2 \cdot \sum_i |h_i|$, unde $h_i = h_{i1} \otimes h_{i2}$, și deci dacă $\sum_i |h_i| < \frac{1}{2}$ atunci sigur relația (2.5.23) este îndeplinită.

De asemenea, pentru cazul când filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 au câte un singur coeficient diferit de zero, s-a demonstrat că domeniul din spațiul parametrilor, în care ambii gradienti au semne incorecte se află în afara domeniului de stabilitate.

2.5.3. SOLUȚII ALTERNATIVE

Convergența la soluția dorită nu este o chestiune sigură în cazul algoritmului SAD. Până în prezent nu s-a dat o demonstrație formală asupra unicității sau convergenței globale. Așa cum reiese din considerentele din Secțiunile 2.1 și 2.3, în general, decorelarea poate avea multiple soluții și depinde de parametrul concreți ai problemei spre care dintre soluții va converge algoritmul. Experimental se constată că, dacă constrângerile necesare pentru existența filtrelor cauzale sunt satisfăcute, $|H_1(z)H_2(z)| < 1 \forall z, z = e^{j\omega}$ și condițiile inițiale pornesc din zero, algoritmul va converge, cel mai probabil, spre soluția dorită. În aceste condiții ecuațiile de decorelare vor fi suficiente pentru o soluționare unică a problemei. Toate simulările au confirmat această evoluție.

Formularea algoritmului SAD în domeniul Z dă o imagine mai bună asupra proprietăților diferitelor soluții care sunt posibile. În domeniul Z algoritmul SAD caută zerourile interspectrului de putere:

$$\begin{aligned} \Phi_{v_1 v_2}(z) = & (1 - W_2(z)H_1(z))(H_1(z^{-1}) - W_1(z^{-1}))\Phi_{v_1 v_1}(z) + \\ & + (1 - W_1(z^{-1})H_2(z^{-1}))(H_2(z) - W_1(z))\Phi_{v_2 v_2}(z) = 0 \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

Soluția dorită $W_1(z) = H_1(z)$ și $W_2(z) = H_2(z)$ este o soluție evidentă pentru (2.5.27). Există încă două soluții alternative care pot fi deduse analitic. Primul set de soluții este dat de relațiile (2.2.11) și (2.2.12) care se rescriu și aici:

$$W_1(z) = \frac{1}{H_2(z)} \quad (2.5.28)$$

$$W_2(z) = \frac{1}{H_1(z)} \quad (2.5.29)$$

Aceasta nu este o soluție FIR. Așa cum s-a arătat în Secțiunea 2.2, în cazul constrângerilor de cauzalitate ale filtrelor de combinare, soluția devine anticauzală și deci, nu va putea fi atinsă.

Al doilea set de soluții, numit soluția “fantomă” este:

$$W_1(z) = \frac{1}{H_1(z^{-1})} \cdot \frac{\Phi_{s_2s_2}(z) + H_1(z)H_1(z^{-1})\Phi_{s_1s_1}(z)}{\Phi_{s_1s_1}(z) + H_2(z)H_2(z^{-1})\Phi_{s_2s_2}(z)} \quad (2.5.30)$$

$$W_2(z) = \frac{1}{H_2(z^{-1})} \cdot \frac{\Phi_{s_1s_1}(z) + H_2(z)H_2(z^{-1})\Phi_{s_2s_2}(z)}{\Phi_{s_2s_2}(z) + H_1(z)H_1(z^{-1})\Phi_{s_1s_1}(z)} \quad (2.5.31)$$

Aceasta depinde de filtrele de generare și de statisticile semnalelor originale. Soluția “fantomă” decorelează ieșirile, dar nu se obține separarea semnalelor. Ea este consecința luării în considerare a unui număr insuficient de condiții (ecuații) care condiționează proprietatea de independență statistică a semnalelor surselor, așa cum s-a arătat în Secțiunea 2.1. În general “soluția fantomă” nu este de tip FIR. Este posibil să se demonstreze că aceste filtre IIR sunt totdeauna cauzale dacă spectrul de putere al semnalului este rațional.

Proprietatea esențială a ambelor seturi de soluții alternative este “inversarea de stabilitate”:

$$|W_1(z)W_2(z)| = \left| \frac{1}{H_1(z)H_2(z)} \right| \forall z, z = e^{j\omega} \quad (2.5.32)$$

Combinând această proprietate cu (2.2.29) rezultă că soluțiile alternative devin stabile de îndată ce soluția dorită devine instabilă și invers.

Este cunoscut că orice filtru IIR realizabil (cauzal și stabil) poate fi aproximat printr-un filtru FIR. Teoretic, filtrul FIR are o lungime infinită, dar în multe probleme practice o lungime suficient de mare este satisfăcătoare. Filtrul FIR reprezintă atunci răspunsul la impuls, trunchiat, al filtrului IIR. Din această cauză, ne putem aștepta, ca în cazul unui algoritm SAD cu $|H_1(z)H_2(z)| > 1$, ambele filtre vor converge la aproximații FIR ale unei soluții alternative. Totuși nu este obligatoriu acest lucru. Soluția “fantomă” dată de (2.5.30) și (2.5.31) în general generează filtre IIR instabile. Acest lucru se întâmplă întrucât expresii ca $H_1(z)H_1(z^{-1})$ proiectează totdeauna polii din interiorul cercului unitate în exteriorul său și invers. Dezvoltând numitorii lui (2.5.30) și (2.5.31), este posibil să se demonstreze că pentru semnale de tip zgomot alb și orice filtre cu coeficienți multipli, soluția fantomă are poli în afara cercului unitate.

Trebuie remarcat că mai pot exista și alte seturi de soluții alternative dar până în prezent nu s-au putut da demonstrații asupra existenței și a proprietăților lor.

CAPITOLUL 3

UTILIZAREA DECORELATORULUI CU PROPAGARE ÎNAPOI PENTRU SEPARAREA SURSELOR DE BANDĂ LARGĂ STATISTIC INDEPENDENTE

Acest capitol prezintă o analiză a separabilității surselor statistic independente și de bandă largă. Sunt prezentate limitările acestui proces cât și soluții pentru rezolvarea problemei în cazul scenariilor când separarea surselor este posibilă. Analiza făcută, precum și soluțiile propuse sunt originale.

3.1. ARHITECTURI POSIBILE DE SEPARARE A N SURSE DE SEMNAL STATISTIC INDEPENDENTE

3.1.1. LIMITELE DECORELATORULUI CU DOUĂ INTRĂRI

Aproape întreaga problematică prezentată în Capitolul 2, și deci, întâlnită în literatură, a vizat separarea semnalelor provenite de la două surse independente statistic. Acesta este un caz destul de particular deoarece în situațiile practice scenariul poate fi mai complicat.

Spre exemplu, pot exista mai multe surse de semnal dintre care doar una să constituie sursa care transmite informația dorită, celelalte jucând un rol perturbator. Se pune problema dacă, într-un astfel de caz, decorelatorul simetric (cu propagare înainte sau înapoi) ne poate fi de folos.

Pentru a studia acest lucru, în Fig. 3.1.1 se propune următorul model de mixare a semnalelor provenite de la N surse.

Elementele r_{1i} și r_{2j} reprezintă sursele de semnal care sunt recepționate de cei doi receptori y_1 și y_2 . În figură este marcat planul γ , perpendicular pe segmentul de dreaptă care unește cei doi receptori și care trece prin mijlocul lui. Rolul acestui plan a fost prezentat în Secțiunea 2.2. Se reamintește faptul că el separă spațiul în două semispații care conțin fiecare câte unul dintre receptori.

Canalele de propagare dintre sursele și receptorul, care se află în același

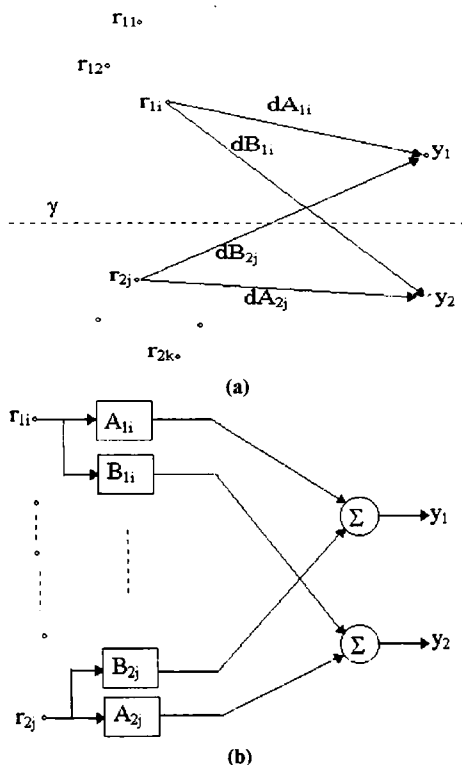


Fig. 3.1.1. Modelul de mixare a semnalelor la intrările celor doi receptori.

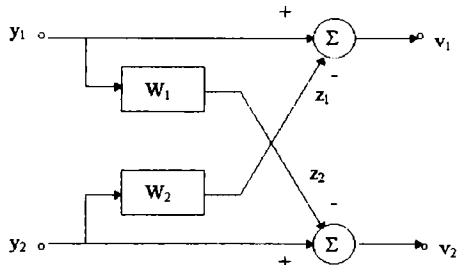
semispațiu, sunt simbolizate cu dA_{1i} și respectiv dA_{2j} . Canalele de propagare dintre sursele aflate într-un semispațiu și receptorul din celălalt semispațiu sunt simbolizate cu dB_{1i} și respectiv dB_{2j} . Se presupune că aceste canale de propagare pot fi modelate cu filtre FIR de ordin suficient de mare. Aceste filtre au fost denumite A_{1i} , A_{2j} și respectiv B_{1i} și B_{2j} , așa cum se prezintă în Fig. 3.1.1.b.

Se presupune că există N_1 surse în semispațiul receptorului y_1 și N_2 în semispațiul receptorului y_2 .

Se notează cu $R_{1i}(z)$ transformata Z a semnalului sursei r_{1i} și cu $R_{2j}(z)$ transformata Z a semnalului sursei r_{2j} . Funcțiile de transfer ale filtrelor A_{1i} , A_{2j} , B_{1i} și B_{2j} se notează respectiv cu $A_{1i}(z)$, $A_{2j}(z)$, $B_{1i}(z)$ și $B_{2j}(z)$. Transformatele Z ale semnalelor de la ieșirile receptorilor y_1 și y_2 se notează respectiv cu $Y_1(z)$ și $Y_2(z)$. În aceste condiții se poate scrie:

$$Y_1(z) = \sum_{i=1}^{N_1} A_{1i}(z)R_{1i}(z) + \sum_{j=1}^{N_2} B_{2j}(z)R_{2j}(z) \quad (3.1.1)$$

$$Y_2(z) = \sum_{j=1}^{N_2} A_{2j}(z)R_{2j}(z) + \sum_{i=1}^{N_1} B_{1i}(z)R_{1i}(z) \quad (3.1.2)$$



Pentru început, se studiază dacă se pot dimensiona filtrele decorrelatorului simetric cu propagare înainte, prezentat în Fig. 2.2.2 și reluat în Fig. 3.1.2, în așa fel încât semnalele de la ieșirile sale, v_1 și v_2 , să reprezinte, fiecare în parte, doar mixturi ale semnalelor provenite de la surse aflate într-un singur semispațiu delimitat de planul γ . Se poate scrie:

Fig. 3.1.2. Decorrelator simetric cu propagare înainte.

$$\begin{aligned} V_1(z) &= Y_1(z) - W_2(z)Y_2(z) = \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} (A_{1i}(z) - W_2(z)B_{1i}(z))R_{1i}(z) + \sum_{j=1}^{N_2} (B_{2j}(z) - W_2(z)A_{2j}(z))R_{2j}(z) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} V_2(z) &= Y_2(z) - W_1(z)Y_1(z) = \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} (B_{1i}(z) - W_1(z)A_{1i}(z))R_{1i}(z) + \sum_{j=1}^{N_2} (A_{2j}(z) - W_1(z)B_{2j}(z))R_{2j}(z) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

unde $W_1(z)$ și $W_2(z)$ sunt funcțiile de transfer ale filtrelor W_1 și respectiv W_2 .

Din examinarea relațiilor (3.1.3) și (3.1.4) se observă că se pot alege valori pentru $W_1(z)$ și $W_2(z)$ în așa fel încât la ieșirile v_1 și v_2 să se elimine unul dintre semnalele surselor.

Spre exemplu, dacă se alege $W_1(z) = \frac{B_{1i}(z)}{A_{1i}(z)}$ și $W_2(z) = \frac{B_{2j}(z)}{A_{2j}(z)}$ atunci semnalul v_1 , pentru un

anumit j , nu va mai avea componente care provin de la semnalul r_{2j} , deoarece filtrul W_2 anulează coeficientul de ponderare al lui $R_{2j}(z)$ din relația (3.1.3), și semnalul v_2 nu va mai avea

componente care provin de la semnalul r_{li} , pentru un anumit l , deoarece filtrul W_1 anulează coeficientul de ponderare al lui $R_{li}(z)$ din relația (3.1.4).

Se vede că nu se pot alege valori pentru $W_1(z)$ și $W_2(z)$, independente de semnalele surselor, în așa fel încât la ieșirile v_1 și v_2 să se elimine toate semnalele provenite de la sursele dintr-un semispațiu, așa cum s-ar fi dorit.

În cazul decorelatorului cu propagare înapoi se obțin aceleași rezultate, singura diferență constând în faptul că membrii dreپți ai relațiilor (3.1.3) și (3.1.4) sunt multiplicați cu factorul $(1/(1 - W_1(z)W_2(z)))$.

În concluzie, atunci când numărul real de surse de semnal, independente statistic, este mai mare decât doi, decorelatoarele simetrice cu două intrări și două ieșiri nu mai pot asigura separarea grupurilor de surse aflate în semispații diferite, separate de planul γ . Ca atare, se pune problema unor arhitecturi posibile de sisteme de decorelare, cu mai mulți receptori, care să conducă la separarea a N surse statistic independente, chiar dacă suntem interesați de informația uneia singure.

În Secțiunea 2.3.4 s-a prezentat un algoritm de rezolvare a problemei separării mai multor surse, dar acesta nu face în nici un fel referire la o arhitectură de decorelator, așa cum se întâmplă în cazul când N este egal cu doi. În literatura studiată nu am găsit o analiză a arhitecturilor posibile de sisteme de decorelare pentru cazul când numărul surselor este mai mare decât doi.

Este importantă stabilirea unei arhitecturi pentru decorelarea a N semnale deoarece aceasta poate sta la baza construirii unor algoritmi eficienți. De asemenea se pot stabili și limitele de aplicabilitate ale unor astfel de algoritmi.

3.1.2. PUNEREA PROBLEMEI

Se consideră N surse de semnal de bandă largă, statistic independente $s_1 \dots s_N$. Semnalele emise de aceste surse se propagă la N receptori așa cum se prezintă în Fig. 3.1.3.

Se notează cu $H_{ij}(z)$ transformata Z a funcției de transfer a filtrului care modelează mediul prin care se transmite semnalul s_i la senzorul y_j . Se consideră că $H_{ii}(z)=1$.

În Fig. 3.1.3 fiecare săgeată simbolizează un filtru care simulează transmiterea unei fracțiuni a semnalului s_i la senzorul y_j . Se presupune că la intrările senzorilor y_j semnalele provenite de la surse sunt însumate.

Se notează cu $S_i(z)$ și $Y_i(z)$ transformatele Z ale semnalelor s_i și y_i . În aceste condiții se poate scrie setul de ecuații care definesc modelul de combinare al semnalelor din Fig. 3.1.3:

$$Y_i(z) = S_i(z) + \sum_{j \neq i}^{j=1}^N H_{ji}(z)S_j(z) \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1.5)$$

Se pune problema găsirii unei arhitecturi de sistem pe scheletul căreia să se poată construi un algoritm care, prelucrând semnalele y_i , la care se presupune că avem acces, să determine filtrele H_{ij} , care se presupun necunoscute, și să reconstituie semnalele s_i , care de asemenea se presupun necunoscute, dar se știe despre ele că sunt independente statistic și eventual, au mediile nule.

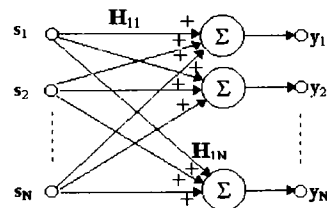


Fig. 3.1.3 Modelul de combinare al semnalelor provenite de la N surse statistice independente

3.1.3. REȚEA DE SEPARARE CU PROPAGARE ÎNAINTE

Se consideră sistemul din Fig. 3.1.4. în care semnalele y_i au semnificația din Secțiunea 3.1.2, iar v_i sunt semnalele de la ieșirea sistemului de separare.

În această rețea, semnalele y_j se propagă spre nodurile v_i prin filtrele W_{ij} , care se presupun de tip FIR, $\forall i, j = 1, \dots, N$.

În nodurile v_i se face scăderea dintre semnalele de intrare y_i și fracțiuni din celelalte semnale y_j determinate de funcțiile de transfer $W_{ij}(z)$ ale filtrelor W_{ij} . Se consideră că din punctele y_i semnalele se transmit integral în punctele v_i , adică funcțiile de transfer $W_{ii}(z)$ sunt egale cu 1.

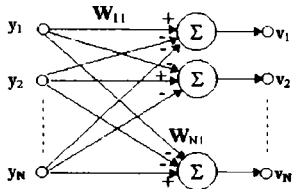


Fig. 3.1.4. Modelul rețelei cu propagare înainte.

Se notează $V_i(z)$ transformata Z a semnalului v_i .
În condițiile de mai sus se poate scrie:

$$V_i(z) = Y_i(z) - \sum_{j=1, j \neq i}^N W_{ij}(z) Y_j(z) \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1.6)$$

În relația (3.1.6) se introduce (3.1.5) și rezultă:

$$V_i(z) = S_i(z) + \sum_{j=1, j \neq i}^N (H_{ji}(z) - W_{ij}(z)) S_j(z) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1, k \neq j}^N W_{ij}(z) H_{kj}(z) S_k(z); \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1.7)$$

Se pune problema existenței unor funcții de transfer $W_{ij}(z)$, astfel ca $V_i(z)$ să fie funcție numai de $S_i(z)$, independente de transformatele $S_j(z)$ și $S_k(z)$, cu $j \neq i$. Pentru aceasta, relația (3.1.7) se rescrie astfel:

$$V_i(z) = \left(1 - \sum_{j=1, j \neq i}^N W_{ij}(z) H_{ij}(z) \right) S_i(z) + \sum_{j=1, j \neq i}^N (H_{ji} - W_{ij}(z)) S_j(z) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1, k \neq j}^N W_{ij}(z) H_{kj}(z) S_k(z); \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1.8)$$

Pentru ca problema separării surselor să fie rezolvabilă trebuie ca filtrele $W_{ij}(z)$ să fie astfel dimensionate încât suma ultimilor doi termeni din membrul drept al relației (3.1.8) să se anuleze, adică:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^N W_{ij}(z) \left(S_j(z) + \sum_{k=1, k \neq j}^N H_{kj}(z) S_k(z) \right) = \sum_{j=1, j \neq i}^N H_{ji}(z) S_j(z); \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1.9)$$

Relațiile (3.1.9) reprezintă un sistem de N ecuații liniare cu $N(N-1)$ necunoscute $W_{ij}(z)$. Soluțiile acestui sistem, care prezintă interes, trebuie să fie independente de $S_j(z)$ și de $S_k(z)$.

Se observă că pentru $N > 2$ coeficientul necunoscutei $W_{ij}(z)$ depinde de transformatele Z ale mai multor semnale, $S_j(z)$ și $S_k(z)$.

Pentru ca soluțiile $W_y(z)$ să nu depindă de $S_j(z)$ și de $S_k(z)$ este necesar și suficient să fie îndeplinite sistemele de condiții:

$$\begin{cases} \frac{\partial W_y(z)}{\partial S_j(z)} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad j \neq i \\ \frac{\partial W_y(z)}{\partial S_k(z)} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad j \neq i, \\ \quad \quad \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad k \neq i, \quad k \neq j \\ \quad \quad \quad i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.1.10)$$

Pentru a exprima derivatele parțiale din relațiile (3.1.10) se definesc următoarele funcții implicite care de fapt sunt definite de ecuațiile sistemului (3.1.9):

$$G_i(W_y(z), S_j(z), S_k(z)) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N W_y(z) \left(S_j(z) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j \\ k \neq i}}^N H_{kj}(z) S_k(z) \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ji}(z) S_j(z); \quad (3.1.11)$$

$i = 1, \dots, N.$

Aplicând teorema derivării funcțiilor implicite, derivatele parțiale din (3.1.10) se pot scrie:

$$\frac{\partial W_y(z)}{\partial S_j(z)} = \frac{\frac{\partial G_i}{\partial S_j(z)}}{\frac{\partial G_i}{\partial W_y(z)}} = \frac{W_y(z) - H_{ji}(z)}{S_j(z) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j \\ k \neq i}}^N H_{kj}(z) S_k(z)} \quad (3.1.12)$$

$$\frac{\partial W_y(z)}{\partial S_k(z)} = \frac{\frac{\partial G_i}{\partial S_k(z)}}{\frac{\partial G_i}{\partial W_y(z)}} = \frac{W_y(z) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j \\ k \neq i}}^N H_{kj}(z)}{S_j(z) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j \\ k \neq i}}^N H_{kj}(z) S_k(z)} \quad (3.1.13)$$

Introducând relațiile (3.1.12) și (3.1.13) în (3.1.10) și considerând că numitorii nu se anulează, rezultă:

$$\begin{cases} W_y(z) - H_{ji}(z) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad j \neq i \\ W_y(z) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j \\ k \neq i}}^N H_{kj}(z) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad j \neq i, \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad k \neq i, \quad k \neq j \\ \quad \quad \quad i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.1.14)$$

Se observă că în timp ce prima ecuație din (3.1.14) poate fi satisfăcută dacă:

$$W_y(z) = H_{ji}(z), \quad j = 1, \dots, N, \quad j \neq i \quad (3.1.15)$$

ecuația a doua implică:

$$W_j(z) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad j \neq i \quad (3.1.16)$$

sau:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j \\ k \neq i}}^N H_{kj}(z) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad j \neq i \quad (3.1.17)$$

Ecuția (3.1.16) nu poate fi satisfăcută deoarece s-ar anula toate căile de propagare de la y_j la y_i și sistemul ar deveni banal și inoperant.

Ecuția (3.1.17) implică condiții restrictive impuse căilor de propagare ale semnalelor de la surse la receptori, condiții care nu se întâlnesc în practică.

Deci, sistemul de ecuații (3.1.14) nu poate avea soluții, adică este incompatibil.

Pentru $N=2$ sistemul de ecuații (3.1.14) se reduce la prima ecuație, caz în care au loc relațiile (2.2.7) și (2.2.8). Analizând relația (3.1.8) se observă că în acest caz ($N=2$) separarea semnalelor se produce și când sunt satisfăcute relațiile:

$$W_{ij}(z) = \frac{1}{H_{ij}(z)}, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.1.18)$$

Nu se insistă asupra condițiilor în care soluția (3.1.18) conduce la sisteme stabile. Acest lucru s-a făcut în Secțiunea 2.1.

Având în vedere simetria relației (3.1.8) în raport cu $S_j(z)$ pe de o parte, și în raport cu $S_k(z)$, pe de altă parte, pentru $N > 2$ nu pot exista soluții $W_{ij}(z)$ care să implice o dependență a lui $V(z)$ de o singură transformată Z , $S_j(z)$ sau $S_k(z)$.

În concluzie, oricum s-ar considera dependența semnalului de ieșire de un singur semnal provenit de la o sursă independentă, arhitectura de rețea cu propagare înainte nu poate asigura, pentru $N > 2$, separarea semnalelor.

Cazul $N=2$ este singura situație în care arhitectura de rețea cu propagare înainte poate asigura separarea semnalelor.

Acest rezultat nu l-am întâlnit în literatura studiată și consider că este o contribuție personală.

3.1.4. REȚEA DE SEPARARE CU PROPAGARE ÎNAPOI

Se consideră sistemul din Fig.3.1.5 în care semnalele y_i au semnificația din Secțiunea 3.1.2.

În nodurile y_i se face scăderea dintre semnalele de intrare y_i și fracțiuni din toate semnalele t_j , cu $j \neq i$, determinate de funcțiile de transfer $W_{ij}(z)$ ale filtrelor care au intrările în punctele t_j și ieșirile în punctele y_i . Din punctele y_i semnalele se transmit în punctele t_i integral, adică funcțiile de transfer între aceste puncte au valoarea unu.

Se notează cu $Y_i(z)$ transformata Z a semnalului y_i și cu $T_j(z)$ transformata Z a semnalului t_j .

În aceste condiții se poate scrie:

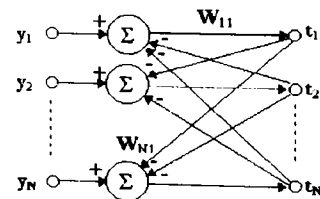


Fig. 3.1.5 Modelul rețelei de separare cu propagare înapoi

$$T_i(z) = Y_i(z) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N W_{ij}(z) T_j(z), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1.19)$$

Relația (3.1.19) se mai poate scrie sub forma:

$$\sum_{j=1}^N W_{ij}(z) T_j(z) = Y_i(z), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1.20)$$

unde s-a considerat că:

$$W_{ii}(z) = 1; \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1.21)$$

Relațiile (3.1.20) pot fi interpretate ca un sistem de N ecuații liniare cu N necunoscute, $T_j(z)$, și are soluția de forma:

$$T_j(z) = \frac{\begin{vmatrix} W_{11}(z) & \dots & W_{1j-1}(z) & Y_1(z) & W_{1j+1}(z) & \dots & W_{1N}(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{N1}(z) & \dots & W_{Nj-1}(z) & Y_N(z) & W_{Nj+1}(z) & \dots & W_{NN}(z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} W_{11}(z) & \dots & W_{1j-1}(z) & W_{1j}(z) & W_{1j+1}(z) & \dots & W_{1N}(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{N1}(z) & \dots & W_{Nj-1}(z) & W_{Nj}(z) & W_{Nj+1}(z) & \dots & W_{NN}(z) \end{vmatrix}}, \quad j = 1, \dots, N \quad (3.1.22)$$

unde simbolul $|\cdot|$ s-a folosit pentru determinant.

Se introduc relațiile (3.1.5) în (3.1.22) și determinantul de la numărătorul acestuia devine

$$\begin{vmatrix} W_{11}(z) & \dots & W_{1j-1}(z) & \sum_{k=1}^N H_{k1}(z) S_k(z) & W_{1j+1}(z) & \dots & W_{1N}(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{N1}(z) & \dots & W_{Nj-1}(z) & \sum_{k=1}^N H_{kN}(z) S_k(z) & W_{Nj+1}(z) & \dots & W_{NN}(z) \end{vmatrix} = \\ = \sum_{k=1}^N \begin{vmatrix} W_{11}(z) & \dots & W_{1j-1}(z) & H_{k1}(z) & W_{1j+1}(z) & \dots & W_{1N}(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{N1}(z) & \dots & W_{Nj-1}(z) & H_{kN}(z) & W_{Nj+1}(z) & \dots & W_{NN}(z) \end{vmatrix} S_k(z) \quad (3.1.23)$$

Dacă, printr-un procedeu oarecare, se ajunge la situația că au loc simultan egalitățile:

$$W_{ij}(z) = H_{ji}(z); \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.1.24)$$

atunci transformatele Z ale semnalelor de ieșire devin:

$$T_j(z) = S_j(z); \quad j = 1, \dots, N \quad (3.1.25)$$

deoarece toți determinanții din suma din membrul drept al fiecărei relații (3.1.23), se anulează, având câte două coloane egale, cu excepția celui din poziția j , care devine egal cu determinantul de la numitorul relației corespunzătoare din setul (3.1.22).

În consecință, problema pusă în Secțiunea 3.1.2 are sens, adică este posibilă reconstituirea semnalelor s_i din prelucrarea semnalelor y_i , utilizând modelul rețelei de separare cu propagare înapoi, indiferent de numărul de semnale și receptori N .

Trebuie remarcat că separarea semnalelor este realizabilă dacă nu se anulează determinantul de la numitorul relației (3.1.22). Mai mult, întrucât sistemul a cărui funcție de transfer este (3.1.22) trebuie să fie stabil, este necesar ca ecuația:

$$\begin{vmatrix} W_{11}(z) & \dots & W_{1N}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N1}(z) & \dots & W_{NN}(z) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.26)$$

să aibă toate rădăcinile în interiorul cercului unitate.

Având în vedere că separarea semnalelor se realizează când au loc relațiile (3.1.24) și luând în considerare faptul că (3.1.26) trebuie să respecte condiția de mai sus, rezultă că ecuația:

$$\begin{vmatrix} H_{11}(z) & \dots & H_{N1}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{1N}(z) & \dots & H_{NN}(z) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.27)$$

trebuie să aibă toate rădăcinile în interiorul cercului unitate.

Condiția, ca ecuația (3.1.27) să aibă toate rădăcinile în interiorul cercului unitate, exprimă sintetic limitele de natură fizică în cadrul cărora este posibilă separarea semnalelor cu ajutorul rețelei cu propagare înapoi.

3.1.5. CONDIȚII SUPLIMETARE NECESARE PENTRU SEPARABILITATEA SEMNALELOR

În această secțiune se studiază mai profund implicațiile fenomenelor de propagare ale semnalelor de la surse la receptoare asupra procesului de separare.

În acest scop, pentru început se prezintă modul în care poate fi echivalat un model de combinare al semnalelor provenite de la N surse și captate de N receptori în condițiile în care fenomenul de propagare de la surse la receptori este modelat cu filtre FIR, așa cum se arată în Fig. 3.1.16.

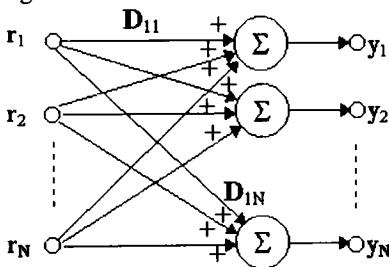


Fig. 3.1.16. Modelul combinării semnalelor la intrările receptorilor.

Dacă schema din Fig. 3.1.6 se continuă cu cea din Fig. 3.1.5, atunci se poate scrie:

$$\sum_{j=1}^N W_{ij}(z)T_j(z) = Y_i(z), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1.29)$$

unde s-a presupus că $W_{ii}(z)=1$.

În această figură D_{ij} reprezintă filtrele care modelează fenomenul de propagare de la sursele r_i la receptorii y_j . Funcțiile de transfer ale acestor filtre se notează cu $D_{ij}(z)$ și de data aceasta se consideră că $D_{ii}(z)$ sunt funcții de tip FIR și nu simple constante egale cu unu.

În aceste condiții semnalele din y_i au următoarele transformate Z:

$$Y_i(z) = \sum_{j=1}^N D_{ij}(z)R_j(z), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1.28)$$

Procedându-se ca în secțiunea precedentă, se poate demonstra că separarea semnalelor r_i are loc când sunt satisfăcute egalitățile:

$$W_{ij}(z) = \frac{D_{ji}(z)}{D_{jj}(z)}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.1.30)$$

și transformatele Z ale semnalelor la ieșirile decorelatorului devin:

$$T_j(z) = D_{jj}(z)R_j(z) \quad (3.1.31)$$

Se notează:

$$H_{ji}(z) = \frac{D_{ji}(z)}{D_{jj}(z)} \quad (3.1.32)$$

$$S_j(z) = D_{jj}(z)R_j(z) \quad (3.1.33)$$

Se observă că dacă notăm $H_{ji}(z)$ raportul dintre funcția de transfer a canalului de propagare dintre sursa r_j și receptorul y_i , și funcția de transfer a canalului de propagare directă de la sursa r_j la receptorul corespondent, y_j , și cu $S_j(z)$ transformata Z a semnalului la intrarea receptorului y_j care provine de la sursa r_j , adică s_j , reprezintă semnalul măsurat la intrarea y_j care provine de la sursa r_j , atunci concluziile din Secțiunea 3.1.4 pot fi aplicate și în cazul în care funcția de transfer de la o sursă oarecare la receptorul cu același indice $D_{ii}(z)$ este diferită de unu. Aceste observații justifică și suficiența modelului simplu de mixare a semnalelor prezentată în Fig. 3.1.3.

În concluzie, în modelul de mixare a semnalelor din Fig. 3.1.3 sursa de semnal s_j trebuie înțeleasă ca o "raportare" a sursei r_j la cel mai apropiat senzor y_j . Cu alte cuvinte, semnalul sursei s_j este fracțiunea din semnalul sursei r_j recepționată de senzorul y_j . Transformata Z a semnalului sursei s_j este dată de relația (3.1.33). De asemenea, filtrele H_{ji} nu trebuie interpretate ca modele ale fenomenelor de propagare de la surse la receptori. Funcțiile lor de transfer sunt date de (3.1.32) și reprezintă raportul dintre funcția de transfer care modelează fenomenul de propagare de la sursa r_j la receptorul y_i și funcția de transfer care modelează propagarea de la sursa r_j la cel mai apropiat receptor y_j .

În continuare se face ipoteza că mediul de propagare al semnalelor de la sursele r_j la receptorii y_i este omogen. Deci fenomenele de propagare sunt caracterizate de aceiași factori de mediu, singurele diferențe care apar datorându-se considerentelor de ordin geometric, legate de pozițiile surselor și receptorilor. În aceste condiții funcțiile de transfer ale acestora pot fi considerate de forma:

$$D_{ij}(z) = z^{-m_{ij}} d_{ij}(z) \quad (3.1.34)$$

În relația (3.1.34), termenul $z^{-m_{ij}}$ reprezintă timpul de întârziere care apare la propagarea semnalului de la sursa i la receptorul j . Termenul $d_{ij}(z)$ modelează atenuarea canalului și eventualele reflexii care pot apărea în propagarea semnalului de la sursa r_i la receptorul y_j , și se consideră o funcție de tip F.I.R. cu coeficientul de ordin zero diferit de zero.

Utilizând (3.1.34), relația (3.1.30) se rescrie astfel:

$$W_{ij}(z) = \frac{d_{ji}(z)}{d_{jj}(z)} \cdot z^{-(m_j - m_{ij})} \quad (3.1.35)$$

Relația (3.1.35) pune problema cauzalității filtrelor W_{ij} .

Pentru ca filtrul W_{ij} să fie causal, este necesar și suficient să fie îndeplinite relațiile:

$$m_{ji} > m_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.1.36)$$

adică, totdeauna distanța dintre sursa j și receptorul j să fie mai mică, cel mult egală, față de oricare altă distanță dintre sursa j și oricare alt receptor i .

De asemenea, apare și o condiție legată de atenuările de transmitere ale semnalelor de la surse la receptori. Ecuația (3.1.26) în aceste condiții devine:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{d_{21}(z)}{d_{22}(z)} \cdot z^{-(m_2 - m_1)} & \dots & \frac{d_{N1}(z)}{d_{N2}(z)} \cdot z^{-(m_N - m_1)} \\ \frac{d_{12}(z)}{d_{11}(z)} \cdot z^{-(m_2 - m_1)} & 1 & \dots & \frac{d_{N2}(z)}{d_{N1}(z)} \cdot z^{-(m_N - m_1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d_{N1}(z)}{d_{N2}(z)} \cdot z^{-(m_N - m_1)} & \frac{d_{2N}(z)}{d_{22}(z)} \cdot z^{-(m_2 - m_N)} & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.37)$$

și pentru ca sistemul să fie stabil este necesar ca rădăcinile ei să se afle în interiorul cercului unitate. În determinantul din ecuația (3.1.37) rapoartele $\frac{d_x(z)}{d_y(z)}$ se aproximează cu funcții de transfer de tip F.I.R de ordin suficient de mare.

Relația (3.1.37) introduce printre altele, la o analiză mai atentă, și o condiție mai severă decât (3.1.36), și anume impune o condiție de *strictă cauzalitate*, adică:

$$m_{ji} > m_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.1.38)$$

Acest lucru reiese din următorul fapt:

Dacă distanțele de la o sursă la doi receptori sunt egale, atunci și atenuările pot fi egale, și în consecință raportul $\frac{d_x(z)}{d_y(z)}$ devine egal cu unu și în consecință unii dintre coeficienții ecuației în z^{-1} (3.1.37) pot deveni supraunitari, caz în care pot apărea rădăcini z în afara cercului unitate. Această concluzie are și un suport practic, și anume acela că sursa s-ar afla în planul perpendicular pe axa a doi receptori și care o intersectează în punctul din mijloc. În acest caz apare o ambiguitate în alegerea corespondenței optime între surse și receptori.

Situația devine evidentă când există localizate două sau mai multe surse în același plan median a doi receptori, caz în care ambiguitatea nu poate fi rezolvată. În acest caz termenul de rang zero din dezvoltarea determinantului devine zero și atunci există cel puțin o rădăcină la infinit.

În concluzie, se poate afirma că dacă nu sunt asigurate condițiile (3.1.38) și

$$\left| \frac{d_{ji}(z)}{d_{ij}(z)} \right| < 1; \quad \forall z, z = e^{j\omega}; \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.1.39)$$

nu se poate realiza separarea surselor.

Din analizele precedente se desprinde concluzia interesantă că noțiunea de plan γ introdusă în Secțiunea 2.2.2 se generalizează ca în Fig. 3.1.8.

În această figură sunt desenate trei surse de semnal r_1, r_2, r_3 și trei receptori y_1, y_2 și y_3 . Cu linii punctate s-au desenat segmentele de dreaptă care unesc receptorii y_1 cu y_2 și respectiv y_2 cu y_3 . Planul γ_{12} este perpendicular pe segmentul y_1y_2 și trece prin mijlocul lui. Analog, planul γ_{23} este perpendicular pe segmentul y_2y_3 și trece prin mijlocul lui. Situația prezentată în Fig. 3.1.8 se poate generaliza ușor la N surse și receptori. O regulă de plasare a surselor și a receptorilor, pentru ca separarea lor să poată avea loc este următoarea:

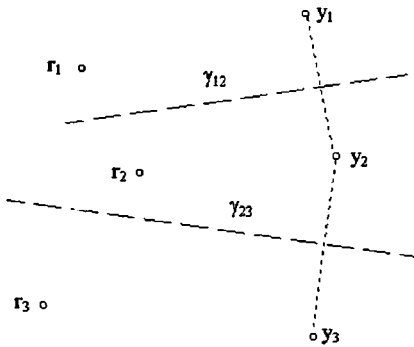


Fig. 3.1.7. Generalizarea planurilor γ

Se unesc cei N receptori prin $(N-1)$ segmente de dreaptă. Se construiesc cele $(N-1)$ planuri γ_{j+1} perpendiculare pe segmentele $y_j y_{j+1}$ și care le intersectează prin mijloc. Fiecare dintre aceste planuri, în parte, separă spațiul în două subspații situate de o parte și de alta a planului respectiv. Pentru ca sistemul de surse și receptori să poată fi decoretabil este necesar și suficient ca pentru fiecare $i=1, \dots, N$, sursa r_i și receptorul y_i trebuie să se afle în același semișpațiu în raport cu oricare dintre planurile γ_{j+1} .

Pentru a depăși, în unele situații, restricțiile evidențiate mai sus, propun o soluție care rezultă din analiza schemei de decorelare prezentate în Fig. 3.1.8 care conține în plus față de decorelatorul cu propagare înapoi din Fig. 3.1.15, filtrele Q_i , $i=1, \dots, N$, plasate între receptorii y_i și sumatoarele în care se combină semnalele t_i .

În acest caz relațiile (3.1.29), (3.1.30) și (3.1.31) devin respectiv:

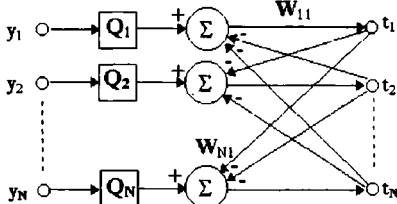


Fig. 3.1.8. Modelul rețelei de separare cu propagare înapoi care folosește filtre de intrare pentru ameliorarea performanțelor.

În acest caz relațiile (3.1.29), (3.1.30) și (3.1.31) devin respectiv:

$$\sum_{j=1}^N W_{ij}(z) T_j(z) = Q_i(z) Y_i(z), \quad i=1, \dots, N \quad (3.1.40)$$

$$W_{ij}(z) = \frac{Q_i(z)}{Q_j(z)} \cdot \frac{D_j(z)}{D_{ij}(z)}, \quad i, j=1, \dots, N \quad (3.1.41)$$

$$T_j(z) = Q_j(z) D_{jj}(z) R_j(z) \quad (3.1.42)$$

Cu notațiile (3.1.32) și (3.1.33) relațiile (3.1.41) și (3.1.42) se pot rescrie:

$$W_{ij}(z) = \frac{Q_i(z)}{Q_j(z)} \cdot H_{ij}(z); \quad i, j=1, \dots, N \quad (3.1.43)$$

$$T_j(z) = Q_j(z) S_j(z) \quad (3.1.44)$$

Dacă se consideră că toate funcțiile $Q_i(z)$ sunt egale între ele, atunci relația (3.1.43) se reduce la relația (3.1.24). Aceasta este o proprietate deosebit de interesantă care va fi exploatată în îmbunătățirea parametrilor algoritmilor.

Filtrele Q_i se pot alege astfel încât să aibă funcții de transfer de forma:

$$Q_i(z) = a_i \cdot z^{-q_i} \cdot q(z) \quad (3.1.45)$$

unde a_i este o constantă reală ne nulă, q_i este un întreg pozitiv, iar $q(z)$ o funcție de transfer de tip F.I.R. cu coeficientul de ordin zero ne nul.

Filtrele Q_i pot fi introduse cu următoarele scopuri:

1. Uneori, există posibilitatea ca în cazul în care unele filtre $W_{ij}=H_{ij}=\frac{D_j}{D_{ij}}$ nu sunt cauzale, prin introducerea filtrelor Q_i și o alegere judicioasă a exponenților q_i , acestea să devină toate cauzale.

2. Dacă ecuația (3.1.37) nu satisface condițiile de stabilitate, utilizând filtrele Q_i , elementele determinantului din afara diagonalei principale devin:

$$\frac{a_i}{a_j} \cdot \frac{d_{ji}(z)}{d_{ij}(z)} \cdot z^{-(m_j - m_i + q_i - q_j)} \quad (3.1.46)$$

În unele situații, este posibil ca printr-o alegere judicioasă a coeficienților a_i să fie aduse rădăcinile ecuației (3.1.37) în interiorul cercului unitate și deci ca sistemul să devină stabil.

3. În elaborarea algoritmilor adaptivi, care trebuie să calculeze filtrele W_{ij} , astfel încât să se realizeze separarea surselor, se ține seama de independența statistică a semnalelor s_i . Din punct de vedere practic, această proprietate este mai ușor de exploatat dacă semnalele se apropie ca proprietăți de cele de tip zgomot alb. Scopul introducerii funcției $q(z)$ în componența filtrelor Q_i este de a asigura un efect de albire a semnalelor, efect care poate juca un rol benefic, atât în asigurarea stabilității algoritmilor, cât și în reducerea duratelor regimurilor tranzitorii.

Se remarcă faptul că prezența aceleiași funcții $q(z)$ în toate filtrele Q_i nu conduce la modificarea soluțiilor $W_{ij}(z)$ care asigură separarea semnalelor.

De asemenea coeficienții a_i pot influența stabilitatea algoritmului adaptiv și folosirea lor judicioasă poate conduce la îmbunătățirea performanțelor.

De aici decurge o strategie interesantă. Prin introducerea filtrelor Q_i se obțin parametrii filtrelor W_{ij} , algoritmul fiind mai stabil și mai rapid, iar coeficienții astfel calculați pot fi folosiți pentru regăsirea semnalelor căutate t_i din y_i , fără filtrele Q_i , deoarece acestea le-ar deforma. Această soluție este prezentată în Fig. 3.1.9:

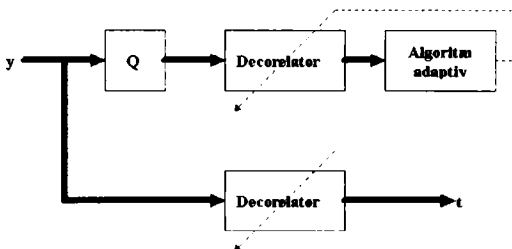


Fig. 3.1.9. Utilizarea filtrelor Q pentru îmbunătățirea performanțelor decorelatorului adaptiv.

Observațiile 1. și 2., de mai sus, sugerează faptul că filtrele Q_i pot simula, uneori, o re poziționare a surselor în raport cu sistemul de receptori, asigurându-se în acest fel îndeplinirea condițiilor de decorelare.

În cazul $N=2$ se poate demonstra că prin alegerea corectă a filtrelor Q_i sursele pot fi separate indiferent de poziția lor în spațiu, cu excepția cazului când se află

amândouă pe suprafața aceluiași hiperboloid de rotație.

3.2. DECORELATOR SIMETRIC CU PROPAGARE ÎNAPOI

3.2.1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În Secțiunea 3.1 s-a demonstrat că singura arhitectură de decorelatoare care poate asigura separarea semnalelor provenite de la N (cu $N > 2$) surse statistice independente, de bandă largă este cea cu propagare înapoi. Din acest motiv, toate studiile care urmează vizează crearea de algoritmi care să asigure acordul adaptiv al filtrelor din componența decorelatorului cu propagare înapoi în vederea obținerii efectului de separare și reconstruire a semnalelor.

În Capitolul 2 s-au evidențiat trei direcții de în care s-au dezvoltat algoritmi destinați decorelării a două semnale.

Prima direcție constă în utilizarea proprietății de anulare a cumulațiilor și a polispectrelor care au ca argumente procese aleatoare independente, procedeu care, în cazul decorelatorului cu propagare înapoi, datorită prezenței buclei de reacție, conduce la algoritmi foarte complicați. Generalizarea lor la cazul decorelării a N surse, conduce la complicații matematice greu de stăpânit, atât sub aspectul volumului de calcul, cât și sub aspectul cunoașterii proprietăților algoritmului văzut ca sistem dinamic excitat de semnale aleatoare. Gradul ridicat al ecuațiilor conduce la sisteme dinamice ale căror evoluții tranzitorii sunt aproape imposibil de prezis analitic. De fapt, algoritmul prezentat în Secțiunea 2.3.4 este un exemplu în acest sens. Din motivele enumerate, această direcție de studiu s-a oprit, practic la decorelatorul simetric cu propagare înainte, care, datorită absenței buclei de reacție, are ecuații suficient de simple pentru a conduce la algoritmi rezonabili sub aspectul volumului de calcul cât și a dificultăților de ordin matematic în analiza lor și dimensionarea optimă a parametrilor.

A doua direcție a fost cea a principiului “estimează și maximizează” care folosește criteriul verosimilității maxime. Așa cum s-a observat, acest algoritm este optim dacă semnalele dorit și perturbator corespund unor anumite modele statistice. Chiar și în cazul modelelor simple utilizate, algoritmul este foarte complicat. Totuși el are proprietatea interesantă că nu apelează la un model de decorelator ci la modelul de mixare. Datorită acestei proprietăți, algoritmul, sau o variantă generalizată a sa, poate fi gândit ca o ultimă soluție în evidențierea unui semnal corupt de mai multe zgomote, când numărul acestora este suficient de mare pentru ca mixtura obținută prin însumarea lor să poată fi considerată gaussiană. Generalizarea sa ar trebui făcută în sensul adoptării unui model de zgomot gaussian colorat. Datorită principiului folosit, performanțele de reducere a zgomotului sunt dictate de performanțele filtrării optime, performanțe puternic dependente de spectrele semnalului util și al zgomotului. Acest algoritm, cu modificările menționate, ar putea, în cazuri particulare și cu performanțe medii, să rezolve problema pusă în Secțiunea 3.1.1.

A treia direcție, cea a algoritmulor SAD, este caracterizată printr-o simplitate extremă. Algoritmul SAD al decorelatorului cu propagare înapoi este pretabil la generalizare. Prin “simplificarea” expresiei gradientului, pot apărea condiții de evoluție instabilă în cazul când modulele funcțiilor de transfer ale filtrelor H se apropie de unitate, sau, când algoritmul pornește din alte condiții inițiale decât originea. De asemenea, durata regimului tranzitoriu, relativ mare, este unul din prețurile plătite pentru simplitatea sa.

Din considerentele enumerate mai sus, studiile mele s-au focalizat pe perfecționarea unor algoritmi care să preia de la algoritmul SAD ideea simplității și absența unor medieri

empirice (temporale, pe blocuri de date), pe de o parte, și să corecteze, cât este posibil, minusurile acestui algoritm.

Ideia de a căuta soluții pentru evitarea medierilor temporale este motivată de faptul că mărimea blocului de date pe care se face medierea este, practic, un parametru dificil de optimizat. Pentru a se obține o relevanță a datelor prelucrate, este necesar, în mod logic, să se medieze un bloc mare de date. Acest aspect conduce, pe de o parte, la creșterea duratei regimului tranzitoriu, deoarece orice algoritm de optimizare a unei probleme neliniare este prin natura sa iterativ, și are nevoie de câteva iterații pentru a converge la soluția optimă. Pe de altă parte, creșterea măririi blocului de date poate conduce la neurmărirea variațiilor parametrilor semnalelor sau ai mediului. La aceste considerente se adaugă și faptul, evidențiat în [88] și confirmat experimental în [89], al unei viteze scăzute de convergență a cumulanților de ordin superior, particularitate care ne conduce la necesitatea prelucrării unor blocuri mari de date.

Pentru a ne forma o idee despre convergența cumulanților de ordinul doi, trei și patru, în continuare se prezintă un tabel cu rezultate experimentale obținute de mine și prezentate în [89], care au vizat tocmai măsurarea efectului de anulare al cumulanților când au ca argumente procese statistic independente. În cadrul acestor măsurători s-au folosit două semnale independente, semnalul “S₁” este un fragment dintr-o bucată muzicală având ca instrument solist pianul, iar semnalul “S₂” este un monolog interpretat de un actor. Ambele semnale pot fi considerate că au valoarea medie zero. Pentru a evidenția “cu aceeași unitate de măsură” proprietatea de convergență spre zero, rezultatele măsurătorilor au fost normare la varianțele semnalelor și apoi, din mărimea obținută s-a extras radical de ordin egal cu ordinul cumulantului. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul următor:

Tabelul 3.2.1

Marime\Nr. eșant.	500	5000	50000
$\sqrt{\frac{Cor(S_1, S_2)}{\sigma_{S_1} \sigma_{S_2}}}$	-0.0983	-0.1063	-0.08997
$\sqrt[3]{\frac{Cum3(S_1, S_2, S_2)}{\sigma_{S_1} \sigma_{S_2} \sigma_{S_2}}}$	-0.1637	0.3205	-0.2984
$\sqrt[3]{\frac{Cum3(S_2, S_1, S_1)}{\sigma_{S_2} \sigma_{S_1} \sigma_{S_1}}}$	0.1937	-0.2764	-0.3425
$\sqrt[4]{\frac{Cum4(S_1, S_2, S_2, S_2)}{\sigma_{S_1} \sigma_{S_2} \sigma_{S_2} \sigma_{S_2}}}$	-0.5048	0.5919	-0.1868
$\sqrt[4]{\frac{Cum4(S_2, S_1, S_1, S_1)}{\sigma_{S_2} \sigma_{S_1} \sigma_{S_1} \sigma_{S_1}}}$	0.5183	0.358	-0.408

În prima coloană a tabelului este sugcrată, sub forma unei formule, mărimea calculată pe rândul respectiv. Măsurătorile s-au făcut pentru trei dimensiuni ale blocurilor de date, de 500 de eșantioane, ceea ce corespunde statisticilor de termen scurt ale semnalului vocal, de 5000 și de 50000 de eșantioane, ceea ce corespunde statisticilor de termen lung ale semnalului vocal. Frecvența de eșantionare a fost de 11025Hz. Semnul minus din fața unor date prezentate a fost preluat de la semnul valorii cumulantului respectiv.

Din acest tabel, privit de sus în jos, se trage concluzia că proprietatea de convergență spre zero este cu atât mai corect respectată, cu cât ordinul cumulantului este mai mic.

Dacă se privește tabelul de la stânga la dreapta, se constată că nu se poate afirma o tendință evidentă de convergență spre zero a mărimilor măsurate pe măsură ce crește volumul de date prelucrat.

Măsurătorile prezentate subliniază, încă o dată, dificultatea de a alege “corect” mărimea blocurilor de date.

Datorită acestui comportament defavorabil, este necesar ca la fiecare iterație a unui algoritm bazat pe rezolvarea unor condiții de anulare a cumulanților să se prelucereze un nou bloc de date. În acest fel, prin medierea intrinsecă datorată procesului de iterare, se obțin în final rezultate care corespund ipotezei de anulare a cumulanților. La o analiză atentă a procesului de convergență a unui algoritm bazat pe prelucrări pe blocuri de date, având în vedere argumentele expuse, au loc două feluri de medieri, cea datorată operațiilor explicite de mediere pe blocul de date, și a doua, implicită, datorată procesului de iterare. În cazul algoritmilor de optimizare a unor procese neliniare (sau de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare) operația de iterare este absolut necesară și drept urmare procesul de mediere implicită, despre care s-a amintit mai sus, este inevitabil. Ba mai mult, el este, așa cum s-a arătat, chiar benefic.

Se pune problema dacă se poate profita de medierea intrinsecă datorată procesului de iterație pentru a renunța la medierea explicită datorată prelucrării pe blocuri de date, caz în care algoritmul de optimizare s-ar simplifica considerabil. Acest lucru este posibil, cu acceptarea unei evoluții relativ lente a algoritmului de optimizare, necesară pentru accentuarea efectului de mediere intrinsecă, cu condiția ca expresia iterației să conțină mărimea calculată ca efect al medierii explicite la puterea întâi. Nu sunt admise produse sau cături de termeni care provin din medieri explicite. Din acest motiv, nu pot fi construiți algoritmi bazați numai pe efectul de mediere implicit al procesului de iterare care utilizând condițiile de anulare ale cumulanților de grad trei și patru deoarece aceștia conțin produse de termeni obținuți prin mediere explicită. Singurul cumulant care conține și un singur operator de mediere explicit este intercorelația. În concluzie, algoritmi de separare a semnalelor, care nu conțin operații de mediere explicită și se bazează numai pe medierea intrinsecă a procesului de iterare, pot valorifica doar proprietatea de anulare a intercorelației unor procese aleatoare statistic independente.

Algoritmul SAD valorifică această proprietate impunând condiția de necorelare a semnalelor de ieșire. La o analiză atentă se observă că SAD cu propagare înapoi prezentat în Secțiunea 2.5, nu este un algoritm bazat pe minimizarea unei funcții cost, pozitiv definite, în raport cu coeficienții filtrelor W_1 și W_2 așa cum se procedează în cazurile clasice de optimizare și cum se sugerează și în Secțiunea 2.3. El se bazează pe faptul că, în anumite condiții de parametri statistici ai semnalelor și ale filtrelor de mixare H_1 și H_2 , soluția dorită pentru filtrele W_1 și W_2 devine punct fix al sistemului de ecuații de actualizare, iar acestea la rândul lor, devin operatori cvasineexpansivi în jurul punctului fix [90]. În aceste condiții algoritmul evoluează spre soluția dorită. Totuși această abordare a problemei conduce, pe de o parte, la dificultăți majore din punct de vedere teoretic în tratarea problemei stabilității acestui algoritm și deci în cunoașterea profundă a caracteristicilor lui, și pe de altă parte, la condiții mai restrictive impuse parametrilor semnalelor și filtrelor de mixare în care algoritmul evoluează corect.

În general, prin minimizarea unei funcții cost pozitiv definite, bazate pe cumulanți, se obțin algoritmi de decorelare în expresiile cărora apar produse de mărimi care sunt rezultatul unor medieri explicite. Acest lucru conduce la imposibilitatea de a obține algoritmi care să realizeze operațiile de mediere exclusiv implicit, prin procesul de iterare.

Din acest motiv, pentru obținerea unui algoritm generalizabil la cazul $N > 2$ propun o altă abordare a metodei de deducere a algoritmului adaptiv al decorelatorului cu propagare înapoi.

3.2.2. ALGORITM DE DECORELARE A DOUĂ SEMNALE BAZAT PE GRADIENTI PARȚIALI

În secțiunea următoare se deduce și se studiază un algoritm, neântâlnit de mine în literatură. Deși este puțin mai complicat decât SAD, acest algoritm are avantajul unor performanțe de regim tranzitoriu superioare primului, a unei comportări mai stabile și unei structuri care se pretează în mod “natural” la generalizare pentru cazul decorelării a N semnale.

Aceste rezultate se obțin ca urmare a minimizării simultane a unui sistem de funcții cost, fiecare funcție fiind minimizată numai în raport cu o submulțime a parametrilor care trebuiesc optimizați. Această abordare diferă fundamental de cazul algoritmilor care minimizează o singură funcție cost în raport cu toți parametrii de optimizat.

Se preferă, pentru început, tratarea sa în cazul separării a două semnale deoarece în acest fel i se pot evidenția mai ușor proprietățile și se pot face comparații directe cu alți algoritmi despre care am amintit.

În acest capitol problema separării a două semnale provenite de la surse statistic independente este văzută ca un caz particular al separării a N semnale provenite de la N surse, cu $N \geq 2$.

3.2.2.1. Deducerea algoritmului

Se pornește de la decorelatorul simetric cu propagare înapoi prezentat în Fig. 2.2.5 care este reluată și aici în Fig. 3.2.1.

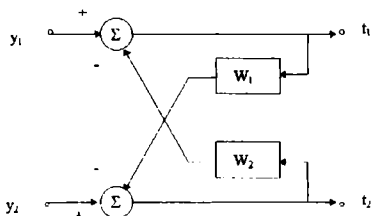


Fig. 3.2.1. Decorelator simetric cu propagare înapoi.

Se propune adoptarea unui algoritm de gradient care să minimizeze următorul sistem de funcții cost:

$$J_1 = E[t_1^2(n)] \quad (3.2.1)$$

$$J_2 = E[t_2^2(n)] \quad (3.2.2)$$

unde $E[\cdot]$ este operatorul de mediere statistică (așteptare).

Se dorește *minimizarea simultană a puterii așteptate a semnalului de la fiecare ieșire în raport cu coeficienții filtrului care dozează influența semnalului de la cealaltă ieșire asupra sa.*

Operația poate fi denumită “minimizare parțială” întrucât nu se dorește minimizarea și în raport cu filtrul de la aceeași ieșire.

Se observă că problema de optimizare pusă, nu este una clasică de optimizare, în sensul că există un sistem de funcții cost, și nu una, care fiecare poate fi interpretată geometric ca o suprafață de performanță așa cum se arată în Fig. 3.2.2. Se consideră că în spațiul multidimensional aceste suprafețe se pot reprezenta la etaje diferite ale unei figuri care are ca bază spațiul coeficienților filtrelor. Fiecare dintre aceste suprafețe poate fi văzută ca o “vale” al cărei fir este “de-a lungul coeficienților filtrului”, care are ca intrare semnalul a cărui putere se minimizează, iar “direcția transversală pe firul văii” este a coeficienților filtrului care are ca intrare celălalt semnal. Firele celor două văi sunt “perpendiculare” între ele. Se poate imagina că pe fiecare dintre aceste suprafețe se deplasează câte o bilă. Cele două bile sunt constrânse să se găsească permanent pe aceeași “verticală”. Fiecare dintre bile poate influența mișcarea doar pe o direcție perpendiculară pe firul propriei văi. Problema de minimizare constă în determinarea poziției de echilibru a verticalei comune celor două bile.

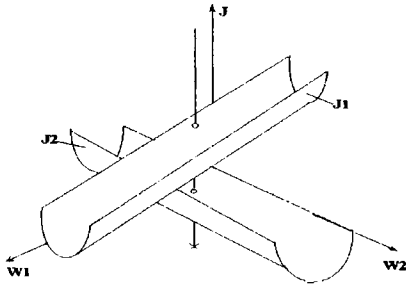


Fig. 3.2.2. Suprafețele de performanță ale problemei de optimizare

Algoritmul de gradient, în contextul menționat, este dat de relațiile:

$$\underline{W}_1(n+1) = \underline{W}_1(n) - \frac{1}{2} \mu_1 \nabla J_2 \Big|_{W_1} \quad (3.2.3)$$

$$\underline{W}_2(n+1) = \underline{W}_2(n) - \frac{1}{2} \mu_2 \nabla J_1 \Big|_{W_2} \quad (3.2.4)$$

unde n este indicele normat de timp.

$\underline{W}_1(n)$ și $\underline{W}_2(n)$ reprezintă vectorii coeficienților filtrelor W_1 și W_2 la momentul n și sunt definiți de relațiile:

$$\underline{W}_1(n) = \begin{bmatrix} w_{10}(n) \\ w_{11}(n) \\ \vdots \\ w_{1M_1-1}(n) \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

$$\underline{W}_2(n) = \begin{bmatrix} w_{20}(n) \\ w_{21}(n) \\ \vdots \\ w_{2M_2-1}(n) \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

în care s-a considerat că filtrele W_1 și W_2 sunt de tip F.I.R. și au gradele M_1 și respectiv M_2 .

$\nabla J_2 \Big|_{W_1}$ și $\nabla J_1 \Big|_{W_2}$ reprezintă "gradienții parțiali" definiți de relațiile:

$$\nabla J_2 \Big|_{W_1} = E \begin{bmatrix} \frac{\partial t_2^2(n)}{\partial w_{10}(n)} \\ \frac{\partial t_2^2(n)}{\partial w_{11}(n)} \\ \vdots \\ \frac{\partial t_2^2(n)}{\partial w_{1M_1-1}(n)} \end{bmatrix} = 2E \begin{bmatrix} t_2(n) \frac{\partial t_2(n)}{\partial w_{10}(n)} \\ t_2(n) \frac{\partial t_2(n)}{\partial w_{11}(n)} \\ \vdots \\ t_2(n) \frac{\partial t_2(n)}{\partial w_{1M_1-1}(n)} \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

$$\nabla J_1 \Big|_{W_2} = E \begin{bmatrix} \frac{\partial t_1^2(n)}{\partial w_{20}(n)} \\ \frac{\partial t_1^2(n)}{\partial w_{21}(n)} \\ \vdots \\ \frac{\partial t_1^2(n)}{\partial w_{2M_2-1}(n)} \end{bmatrix} = 2E \begin{bmatrix} t_1(n) \frac{\partial t_1(n)}{\partial w_{20}(n)} \\ t_1(n) \frac{\partial t_1(n)}{\partial w_{21}(n)} \\ \vdots \\ t_1(n) \frac{\partial t_1(n)}{\partial w_{2M_2-1}(n)} \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

μ_1 și μ_2 sunt cantități reale și pozitive numite mărimi de pas.

Se demonstrează mai întâi că algoritmul propus are ca puncte critice, în ipoteza că semnalele s_1 și s_2 sunt independente statistic, vectorii:

$$\underline{W}_1 = \underline{H}_1 \quad (3.2.9)$$

$$\underline{W}_2 = \underline{H}_2 \quad (3.2.10)$$

unde \underline{H}_1 și \underline{H}_2 sunt vectorii coeficienților filtrelor \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 ale sistemului de mixare din Fig.2.2.1. Se presupune că aceștia sunt tot filtre de tip F.I.R de grade M_1 și respectiv M_2 , constante în timp și sunt definiți de relațiile:

$$\underline{H}_1 = \begin{bmatrix} h_{1,0} \\ h_{1,1} \\ \vdots \\ h_{1,M_1-1} \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

$$\underline{H}_2 = \begin{bmatrix} h_{2,0} \\ h_{2,1} \\ \vdots \\ h_{2,M_2-1} \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

Elementele vectorilor din relațiile (3.2.7) și (3.2.8) se pot scrie în termenii transformatorilor Z sub forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_2(n)}{\partial w_{1i}} &= \frac{\partial}{\partial w_{1i}} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint T_2(z) z^n \frac{dz}{z} \right] = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{\partial T_2(z)}{\partial w_{1i}} z^n \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{\partial}{\partial w_{1i}} \left[\frac{Y_2(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} - \frac{W_1(z)Y_1(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} \right] z^n \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \left[\frac{W_2(z)Y_2(z)}{(1 - W_1(z)W_2(z))^2} z^{-i} - \frac{Y_1(z)}{(1 - W_1(z)W_2(z))^2} z^{-i} \right] z^n \frac{dz}{z} = \\ &= -\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} \left[\frac{Y_1(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} - \frac{W_2(z)Y_2(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} \right] z^{-i} z^n \frac{dz}{z} = \\ &= -\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} T_1(z) z^{-i} z^n \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\begin{aligned} t_2(n) \frac{\partial t_2(n)}{\partial w_{1i}} &= -\frac{1}{2\pi j} \oint T_2(u) u^n \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} T_1(z) z^{-i} z^n \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \oint \oint \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} T_2(u) T_1(z) z^{-i} z^n u^n \frac{dz}{z} \frac{du}{u} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

În relațiile (3.2.13) și (3.2.14) s-a omis explicitarea indicelui de timp normal n pentru coeficienții filtrelor \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 pentru simplificarea expresiilor. Această omisiune se va păstra și în continuare, indicele de timp n fiind explicitat numai în contextul în care este semnificativ.

În relațiile (3.2.13) și (3.2.14) s-au folosit expresiile (2.2.27) și (2.2.28).

Utilizând (2.2.1) și (2.2.2) în (3.2.14) se obține:

$$\begin{aligned}
 t_2(n) \frac{\partial t_2(n)}{\partial w_{1i}} = & -\frac{1}{2\pi j} \oint S_2(u) u^n \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{-i} S_1(z)}{1 - W_1(z) W_2(z)} z^n \frac{dz}{z} + \\
 & + \frac{1}{2\pi j} \oint S_2(u) u^n \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{W_2(z)(H_1(z) - W_1(z))}{(1 - W_1(z) W_2(z))^2} z^{-i} S_1(z) z^n \frac{dz}{z} - \\
 & - \frac{1}{2\pi j} \oint S_2(u) u^n \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{H_2(z) - W_2(z)}{(1 - W_1(z) W_2(z))^2} z^{-i} S_2(z) z^n \frac{dz}{z} + \\
 & + \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{W_1(u)(H_2(u) - W_2(u))}{1 - W_1(u) W_2(u)} S_2(u) u^n \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{-i} S_1(z)}{1 - W_1(z) W_2(z)} z^n \frac{dz}{z} - \\
 & - \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{W_1(u)(H_2(u) - W_2(u))}{1 - W_1(u) W_2(u)} S_2(u) u^n \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{W_2(z)(H_1(z) - W_1(z))}{(1 - W_1(z) W_2(z))^2} z^{-i} S_1(z) z^n \frac{dz}{z} + \\
 & + \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{W_1(u)(H_2(u) - W_2(u))}{1 - W_1(u) W_2(u)} S_2(u) u^n \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{H_2(z) - W_2(z)}{(1 - W_1(z) W_2(z))^2} z^{-i} S_2(z) z^n \frac{dz}{z} - \\
 & - \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{H_1(u) - W_1(u)}{1 - W_1(u) W_2(u)} S_1(u) u^n \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{-i} S_1(z)}{1 - W_1(z) W_2(z)} z^n \frac{dz}{z} + \\
 & + \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{H_1(u) - W_1(u)}{1 - W_1(u) W_2(u)} S_1(u) u^n \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{W_2(z)(H_1(z) - W_1(z))}{(1 - W_1(z) W_2(z))^2} z^{-i} S_1(z) z^n \frac{dz}{z} - \\
 & - \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{H_1(u) - W_1(u)}{1 - W_1(u) W_2(u)} S_1(u) u^n \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{H_2(z) - W_2(z)}{(1 - W_1(z) W_2(z))^2} z^{-i} S_2(z) z^n \frac{dz}{z}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.15}$$

Aplicând operatorul de mediere statistică în relația (3.1.13) se observă că primul termen este o intercorelație între s_2 și o replică întârziată și filtrată autoregresiv a semnalului s_1 . Întrucât s-a presupus că semnalele s_1 și s_2 sunt independente, această intercorelație este nulă. Toți ceilalți termeni depind de diferențele $H_1 - W_1$ și $H_2 - W_2$. În situația în care sunt satisfăcute relațiile (3.2.9) și (3.2.10), acești termeni se anulează. În concluzie gradientul $\nabla J_2|_{w_1}$ se anulează în condițiile când relațiile (3.2.9) și (3.2.10) sunt îndeplinite simultan.

Urmând calcule similare se obțin aceleași concluzii despre gradientul $\nabla J_1|_{w_2}$.

După aplicarea operatorului de mediere statistică și regruparea termenilor din (3.2.15) rezultă:

$$\begin{aligned}
 E \left[t_2(n) \frac{\partial t_2(n)}{\partial w_{1i}} \right] = & E \left[\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1 - W_1(z) H_2(z)}{1 - W_1(z) W_2(z)} S_2(z) z^n \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{W_2(z) - H_2(z)}{(1 - W_1(z) W_2(z))^2} S_2(z) z^{n-i} \frac{dz}{z} \right] + \\
 & + E \left[\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{W_1(z) - H_1(z)}{1 - W_1(z) W_2(z)} S_1(z) z^n \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1 - H_1(z) W_2(z)}{(1 - W_1(z) W_2(z))^2} S_1(z) z^{n-i} \frac{dz}{z} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.2.16}$$

Analog se deduce că:

$$E \left[t_1(n) \frac{\partial t_1(n)}{\partial w_{2i}} \right] = E \left[\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1 - W_2(z)H_1(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} S_1(z) z^n \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{W_1(z) - H_1(z)}{(1 - W_1(z)W_2(z))^2} S_1(z) z^{n-1} \frac{dz}{z} \right] +$$

$$+ E \left[\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{W_2(z) - H_2(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} S_2(z) z^n \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1 - H_2(z)W_1(z)}{(1 - W_1(z)W_2(z))^2} S_2(z) z^{n-1} \frac{dz}{z} \right] \quad (3.2.17)$$

Din examinarea relațiilor (3.2.16) și (3.2.17) se observă că sistemul dinamic descris de ecuațiile cu diferențe (3.2.3) și (3.2.4) are două puncte critice care sunt date de relațiile:

$$\begin{cases} W_1(z) = H_1(z) \\ W_2(z) = H_2(z) \end{cases} \quad (3.2.18)$$

care este soluția dorită și

$$\begin{cases} W_1(z) = \frac{1}{H_2(z)} \\ W_2(z) = \frac{1}{H_1(z)} \end{cases} \quad (3.2.19)$$

despre proprietățile căreia s-au făcut referiri în Secțiunea 2.2.1.

Pentru construirea algoritmului de calcul al filtrelor W_1 și W_2 se presupune că punctul critic dat de relația (3.2.18) este un punct de echilibru asimptotic stabil.

Analizând relațiile (3.2.13) și (3.2.14) și considerând că există relații similare și pentru mărimile corespunzătoare gradientului $\nabla J|_{w_2}$, se deduce că ecuațiile (3.2.3) și (3.2.4) pot fi scrise și astfel:

$$\underline{W}_1(n+1) - \underline{W}_1(n) + \mu_1 E[t_2(n) \underline{D}_1(n)] \quad (3.2.20)$$

$$\underline{W}_2(n+1) - \underline{W}_2(n) + \mu_2 E[t_1(n) \underline{D}_2(n)] \quad (3.2.21)$$

unde vectorii $\underline{D}_1(n)$ și $\underline{D}_2(n)$ sunt dați de relațiile:

$$\underline{D}_1(n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} T_1(z) z^n \frac{dz}{z} \\ \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} T_1(z) z^{n-1} \frac{dz}{z} \\ \vdots \\ \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} T_1(z) z^{n - M_1 + 1} \frac{dz}{z} \end{bmatrix} \quad (3.2.22)$$

$$\underline{D}_2(n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} T_2(z) z^n \frac{dz}{z} \\ \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} T_2(z) z^{n-1} \frac{dz}{z} \\ \vdots \\ \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} T_2(z) z^{n - M_2 + 1} \frac{dz}{z} \end{bmatrix} \quad (3.2.23)$$

Elementele vectorilor $\underline{D}_1(n)$ și $\underline{D}_2(n)$ se pot obține la ieșirile sistemelor prezentate în Fig. 3.2.3 și respectiv Fig. 3.2.4.

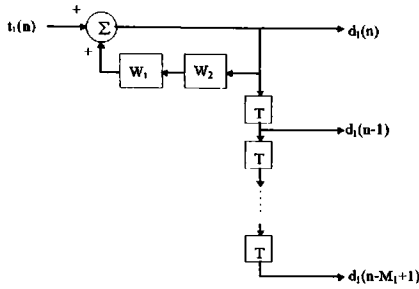


Fig. 3.2.3. Sistemul care generează elementele vectorului \underline{D}_1 .

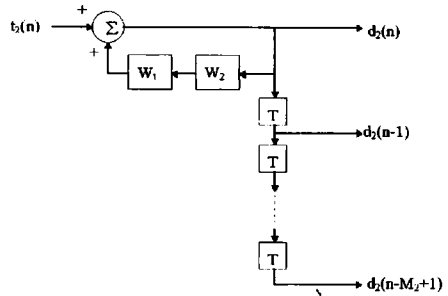


Fig. 3.2.4. Sistemul care generează elementele vectorului \underline{D}_2 .

Se observă că elementele vectorului $D_1(n)$ se obțin în ramificațiile unei linii de întârziere care are M_1-1 celule de întârziere. Fiecare celulă de întârziere decalază semnalul cu o perioadă de eșantionare.

Semnalul de la intrarea liniei de întârziere se obține de la ieșirea unui sistem autoregresiv care primește la intrare semnalul $t_1(n)$.

Bucula de reacție a sistemului autoregresiv conține cele două filtre W_1 și W_2 .

Elementele vectorului $D_2(n)$ se obțin la ieșirea unui sistem similar dar care primește la intrare semnalul $t_2(n)$.

Algoritmul dat de relațiile (3.2.20) și (3.2.21) se pretează la transformarea sa în algoritm de gradient stohastic, adică pe proprietatea de mediere intrinsecă a procesului de iterare:

$$\hat{W}_1(n+1) = \hat{W}_1(n) + \mu_1 t_2(n) D_1(n) \quad (3.2.24)$$

$$\hat{W}_2(n+1) = \hat{W}_2(n) + \mu_2 t_1(n) D_2(n) \quad (3.2.25)$$

Transformarea relațiilor (3.2.20) și (3.2.21) în relațiile (3.2.24) și (3.2.25) este posibilă datorită faptului că primele conțin doar câte un singur operator de mediere statistică (adică nu apar produse de medii).

Putem presupune, din punct de vedere euristic, că algoritmul dat de relațiile de actualizare (3.2.24) și (3.2.25) are proprietatea că evoluează, *în medie*, ca și algoritmul dat de relațiile (3.2.20) și (3.2.21) în condițiile în care μ_1 și μ_2 sunt "suficient" de mici și semnalele "suficient de albe".

Relațiile (3.2.24) și (3.2.25) prefigurează evitarea medierilor din relațiile (3.2.20) și (3.2.21), medieri care sunt consumatoare de multe calcule.

Procedeuul practic de calcul al semnalelor t_1 și t_2 rezultă dacă se analizează relațiile (2.2.27) și (2.2.28) care sunt reproduse mai jos:

$$T_1(z) = \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} Y_1(z) - \frac{W_2(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} Y_2(z) \quad (3.2.26)$$

$$T_2(z) = \frac{1}{1 - W_1(z)W_2(z)} Y_2(z) - \frac{W_1(z)}{1 - W_1(z)W_2(z)} Y_1(z) \quad (3.2.27)$$

Sistemele care au funcțiile de transfer date de relațiile (3.2.26) și (3.2.27) sunt prezentate în Fig. 3.2.5 și respectiv Fig. 3.2.6.

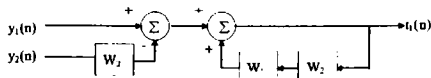


Fig. 3.2.5. Sistemul care generează semnalul $t_1(n)$.

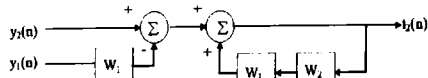


Fig. 3.2.6. Sistemul care generează semnalul $t_2(n)$.

În acest fel s-a ajuns la situația că pot fi determinate toate mărimile care intervin în ecuațiile de actualizare (3.2.24) și (3.2.25).

Pentru o reprezentare mai sistematică a algoritmului în Fig. 3.2.7 și Fig. 3.2.8 se definesc simboluri pentru bucla autoregresivă și respectiv linia de întârziere cu ramificații, elemente care sunt prezente în sistemele din Fig. 3.2.3 la Fig. 3.2.6.

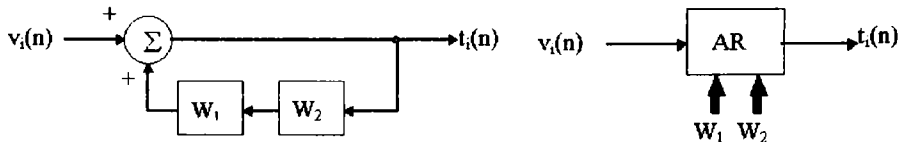


Fig. 3.2.7. Definierea simbolului pentru bucla autoregresivă.

În Fig. 3.2.7 semnalele $v_1(n)$ și $t_1(n)$ trebuie interpretate ca generice. Ințrările W_1 și W_2 simbolizează faptul că blocul are ca date de intrare și coeficienții acestor filtre.

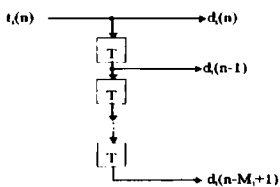


Fig. 3.2.8. Definierea simbolului pentru linia de întârziere cu ramificații.

Utilizând simbolurile din Fig. 3.2.7 și Fig. 3.2.8, în urma sistematizării relațiilor care definesc algoritmul și mărimile cu care operează, se ajunge la reprezentarea sistemică dată în Fig. 3.2.9.

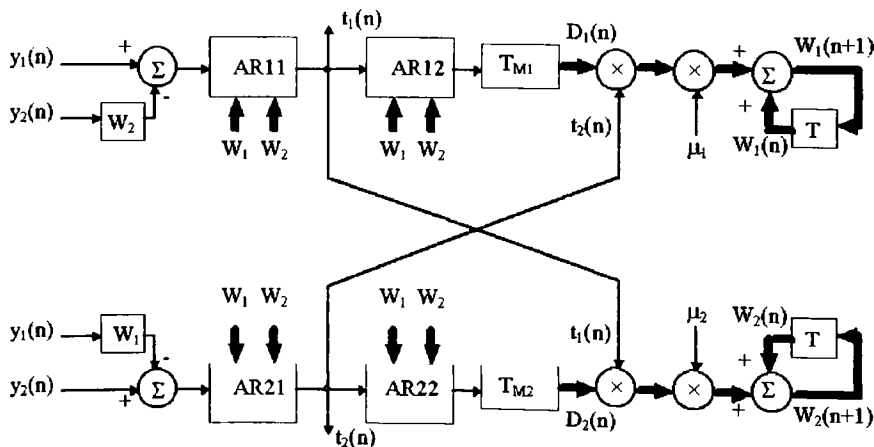


Fig. 3.2.9. Schema sistemică a algoritmului de decorelare

Se observă că algoritmul are două fluxuri de semnal corespunzătoare celor două ecuații de actualizare a coeficienților filtrelor.

Porțiunea de intrare a schemei calculează semnalele $t_1(n)$ și $t_2(n)$ conform algoritmilor reprezentați de sistemele din Fig. 3.2.5 și Fig. 3.2.6.

Porțiunea din mijloc folosește semnalele $t_1(n)$ și $t_2(n)$ pentru a calcula vectorii $\underline{D}_1(n)$ și $\underline{D}_2(n)$ conform algoritmilor reprezentați de sistemele din Fig. 3.2.3 și Fig. 3.2.4.

Porțiunea de ieșire realizează actualizarea coeficienților filtrelor utilizând semnalele $t_1(n)$ și $t_2(n)$ precum și vectorii $\underline{D}_1(n)$ și $\underline{D}_2(n)$ conform ecuațiilor (3.2.24) și (3.2.25).

Făcând o comparație între ecuațiile algoritmului SAD ale decorelatoarei cu propagare înapoi (2.5.17) și (2.5.18) și ecuațiile (3.2.24) și (3.2.25), se constată că algoritmul SAD poate fi reprezentat sistemic ca în Fig. 3.2.9 din care lipsesc blocurile funcționale ale buclelor autoregresive **AR12** și **AR22**. Acest lucru se datorează faptului că algoritmul SAD utilizează vectorii $\underline{T}_1(n) = [t_1(n) \ \dots \ t_1(n - M_1 + 1)]^T$ și $\underline{T}_2(n) = [t_2(n) \ \dots \ t_2(n - M_2 + 1)]^T$ în locul vectorilor $\underline{D}_1(n)$ și $\underline{D}_2(n)$ respectiv.

3.2.2.2. Analiza stabilității

Analiza stabilității algoritmilor numerici beneficiază de o metodă euristică numită “metoda ecuației diferențiale ordinare” (EDO) [77], [78], [79]. Această metodă stabilește următoarele:

Dacă există un algoritm adaptiv de forma:

$$\Theta(n+1) = \Theta(n) + \mu_n H(\Theta, X(n, \Theta)) \quad (a)$$

unde :

- $X(n, \Theta)$ este ieșirea unui filtru cu funcția de transfer Θ rațională, stabilă, excitat de un semnal de intrare staționar;
- $H(\Theta, X(n, \Theta))$ este o funcție “suficient de regulată”;
- μ_n este o secvență pozitivă de constante, convergentă spre zero și care satisface ipoteza fundamentală $\sum_n \mu_n = \infty$.

În condițiile menționate mai sus, pentru studiul stabilității, lui (a) i se asociază o ecuație diferențială ordinară de ordinul întâi:

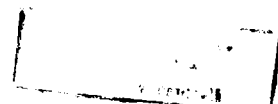
$$\frac{d\Theta}{dt} = h(\Theta) = E[H(\Theta, X(n, \Theta))] \quad (b)$$

În principiu, stabilitatea soluției ecuației diferențiale (b) poate fi studiată apoi folosindu-se teoria lui Liapunov.

Datorită buclelor de reacție, relațiile matematice care apar sunt foarte complicate, și fac, practic, imposibilă crearea unei funcții Liapunov de o formă care să permită obținerea de concluzii evidente pentru cazuri generale.

Din considerentele menționate, se preferă analiza stabilității pornind de la definiția acestei noțiuni pentru cazul sistemelor numerice.

Se presupune totuși că sunt satisfăcute condițiile în care metoda EDO poate fi aplicată, presupunere care are drept consecință valabilitatea ipotezei că sistemul descris de ecuațiile (3.2.24) și (3.2.25) evoluează în medie ca și sistemul descris de ecuațiile (3.2.20) și (3.2.21).



Analiza stabilității asimptotice locale

Se abordează problema stabilității asimptotice în jurul punctului (3.2.9)-(3.2.10).

Se introduc notațiile:

$$C_1(z) = W_1(z) - H_1(z) \quad (3.2. 28)$$

$$C_2(z) = W_2(z) - H_2(z) \quad (3.2. 29)$$

În jurul punctului critic folosind notațiile (3.2.28) și (3.2.29), sistemul de ecuații (3.2.3) și (3.2.4) se poate liniariza ținând cont de relațiile (3.2.16) și (3.2.17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial w_{1i}} &= 2E \left[t_2(n) \frac{\partial t_2(n)}{\partial w_{1i}} \right] = \\ &- 2E \left[\frac{1}{2\pi j} \oint S_2(z) z^n \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{C_2(z)}{(1 - H_1(z)H_2(z))^2} S_2(z) z^{n-i} \frac{dz}{z} \right] + \\ &+ 2E \left[\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{C_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)} S_1(z) z^n \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} S_1(z) z^{n-i} \frac{dz}{z} \right] \end{aligned} \quad (3.2. 30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial w_{2i}} &= 2E \left[t_1(n) \frac{\partial t_1(n)}{\partial w_{2i}} \right] = \\ &= 2E \left[\frac{1}{2\pi j} \oint S_1(z) z^n \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{C_1(z)}{(1 - H_1(z)H_2(z))^2} S_1(z) z^{n-i} \frac{dz}{z} \right] + \\ &+ 2E \left[\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{C_2(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)} S_2(z) z^n \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} S_2(z) z^{n-i} \frac{dz}{z} \right] \end{aligned} \quad (3.2. 31)$$

Relațiile (3.2.30) și (3.2.31) reprezintă sume de corelații între versiuni filtrate autoregresiv ale semnalelor s_1 și s_2 .

Se notează:

$$s_1'(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} S_1(z) z^n \frac{dz}{z} \quad (3.2. 32)$$

$$s_2'(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} S_2(z) z^n \frac{dz}{z} \quad (3.2. 33)$$

$$s_1''(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{(1 - H_1(z)H_2(z))^2} S_1(z) z^n \frac{dz}{z} \quad (3.2. 34)$$

$$s_2''(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{(1 - H_1(z)H_2(z))^2} S_2(z) z^n \frac{dz}{z} \quad (3.2. 35)$$

$$s_1'''(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{C_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)} S_1(z) z^n \frac{dz}{z} \quad (3.2. 36)$$

$$s_2'''(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{C_2(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)} S_2(z) z^n \frac{dz}{z} \quad (3.2.37)$$

$$s_1''(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{C_1(z)}{(1 - H_1(z)H_2(z))^2} S_1(z) z^n \frac{dz}{z} \quad (3.2.38)$$

$$s_2''(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{C_2(z)}{(1 - H_1(z)H_2(z))^2} S_2(z) z^n \frac{dz}{z} \quad (3.2.39)$$

Semnalele $s_1'(n)$, $s_2'(n)$, $s_1''(n)$, $s_2''(n)$, $s_1'''(n)$, $s_2'''(n)$, $s_1''''(n)$, $s_2''''(n)$ se obțin la ieșirile sistemelor ale căror scheme bloc se dau în figurile Fig.3.2.10 la Fig. 3.2.17, prezentate în continuare.

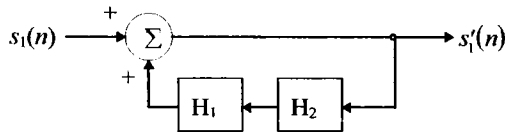


Fig. 3.2.10 Generarea semnalului $s_1'(n)$.

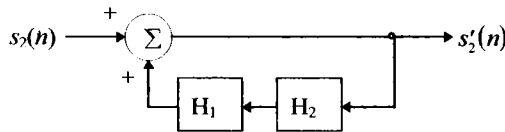


Fig. 3.2.11 Generarea semnalului $s_2'(n)$.

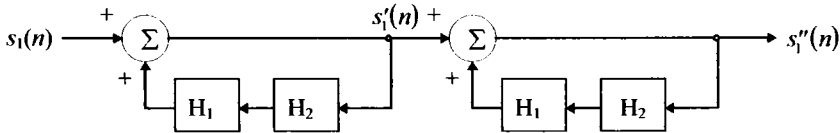


Fig. 3.2.12 Generarea semnalului $s_1''(n)$.

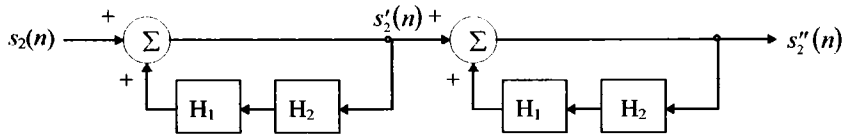


Fig. 3.2.13 Generarea semnalului $s_2''(n)$.

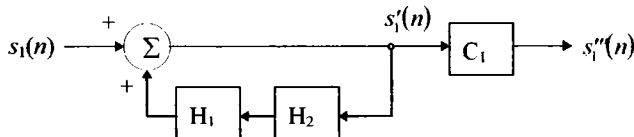


Fig. 3.2.14 Generarea semnalului $s_1'''(n)$.

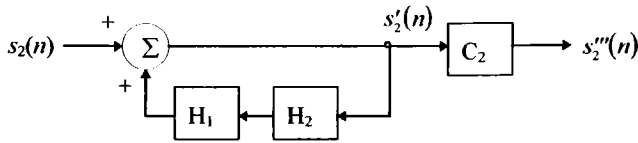


Fig.3.2.15 Generarea semnalului $s_2'''(n)$.

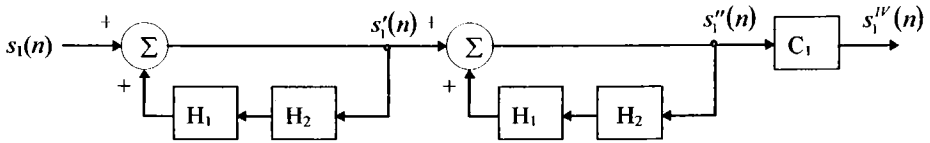


Fig. 3.2.16 Generarea semnalului $s_1''(n)$.

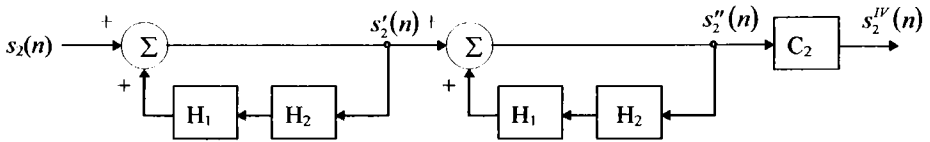


Fig. 3.2.17 Generarea semnalului $s_2''(n)$

Utilizând notațiile (3.2.32) la (3.2.39), relațiile (3.2.30) și (3.2.31) devin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial w_{1i}} &= 2E[s_2(n)s_2''(n-i)] + 2E[s_1''(n)s_1'(n-i)] = \\ &= 2E[s_2(n)\underline{S}_2''^T(n-i)]\underline{C}_2(n) + 2E[\underline{S}_1''^T(n)s_1'(n-i)]\underline{C}_1(n) \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial w_{2i}} &= 2E[s_1(n)s_1''(n-i)] + 2E[s_2''(n)s_2'(n-i)] = \\ &= 2E[s_1(n)\underline{S}_1''^T(n-i)]\underline{C}_1(n) + 2E[\underline{S}_2''^T(n)s_2'(n-i)]\underline{C}_2(n) \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

În relațiile (3.2.40) și (3.2.41) $\underline{C}_1(n)$ este vectorul de dimensiune M_1 care reprezintă diferența coeficienților răspunsurilor la impulsul unitate ale filtrelor \mathbf{W}_1 și \mathbf{H}_1 , $\underline{C}_2(n)$ este vectorul de dimensiune M_2 care reprezintă diferența coeficienților răspunsurilor la impulsul unitate ale filtrelor \mathbf{W}_2 și \mathbf{H}_2 , $\underline{S}_1''(n)$, $\underline{S}_1'(n)$, $\underline{S}_2''(n)$, $\underline{S}_2'(n)$ reprezintă vectori de dimensiune M_1 și respectiv M_2 formați din eșantioanele $s_1'(n)$, $s_1''(n)$, $s_2'(n)$, $s_2''(n)$, adică:

$$\underline{C}_1(n) = \underline{W}_1(n) - \underline{H}_1 \quad (3.2.42)$$

$$\underline{C}_2(n) = \underline{W}_2(n) - \underline{H}_2 \quad (3.2.43)$$

$$\underline{S}'_1(n) = \begin{bmatrix} s'_1(n) \\ s'_1(n-1) \\ \vdots \\ s'_1(n-M_1+1) \end{bmatrix} \quad (3.2.44)$$

$$\underline{S}'_2(n) = \begin{bmatrix} s'_2(n) \\ s'_2(n-1) \\ \vdots \\ s'_2(n-M_2+1) \end{bmatrix} \quad (3.2.45)$$

$$\underline{S}''_1(n) = \begin{bmatrix} s''_1(n) \\ s''_1(n-1) \\ \vdots \\ s''_1(n-M_1+1) \end{bmatrix} \quad (3.2.46)$$

$$\underline{S}''_2(n) = \begin{bmatrix} s''_2(n) \\ s''_2(n-1) \\ \vdots \\ s''_2(n-M_2+1) \end{bmatrix} \quad (3.2.47)$$

Utilizând relațiile (3.2.40) și (3.2.41), precum și notațiile (3.2.42) la (3.2.47) gradientii $\nabla J_2|_{w_1}$ și $\nabla J_1|_{w_2}$ devin:

$$\nabla J_2|_{w_1} = 2E \left[\underline{S}'_1(n) \underline{S}'_1{}^T(n) \right] \underline{C}_1(n) + 2E \left[s_2(n) \begin{bmatrix} \underline{S}''_2{}^{nT}(n) \\ \underline{S}''_2{}^{nT}(n-1) \\ \vdots \\ \underline{S}''_2{}^{nT}(n-M_2+1) \end{bmatrix} \right] \underline{C}_2(n) \quad (3.2.48)$$

$$\nabla J_1|_{w_2} = 2E \left[s_1(n) \begin{bmatrix} \underline{S}''_1{}^{nT}(n) \\ \underline{S}''_1{}^{nT}(n-1) \\ \vdots \\ \underline{S}''_1{}^{nT}(n-M_2+1) \end{bmatrix} \right] \underline{C}_1(n) + 2E \left[\underline{S}'_2(n) \underline{S}'_2{}^T(n) \right] \underline{C}_2(n) \quad (3.2.49)$$

Se fac următoarele notații:

$$\circ \mathcal{A}_{11} = E \left[\underline{S}'_1(n) \underline{S}'_1{}^T(n) \right] \quad (3.2.50)$$

$$\circ\mathcal{M}_2 = E \left[s_2(n) \begin{bmatrix} \underline{S}'_2{}^{nT}(n) \\ \underline{S}'_2{}^{nT}(n-1) \\ \vdots \\ \underline{S}'_2{}^{nT}(n-M_1+1) \end{bmatrix} \right] \quad (3.2. 51)$$

$$\circ\mathcal{M}_{21} = E \left[s_1(n) \begin{bmatrix} \underline{S}'_1{}^{nT}(n) \\ \underline{S}'_1{}^{nT}(n-1) \\ \vdots \\ \underline{S}'_1{}^{nT}(n-M_2+1) \end{bmatrix} \right] \quad (3.2. 52)$$

$$\circ\mathcal{M}_{22} = E \left[\underline{S}'_2(n) \underline{S}'_2{}^{nT}(n) \right] \quad (3.2. 53)$$

În relația (3.2.3) se scade din ambii membrii vectorul \underline{H}_1 , iar în relația (3.2.4) se scade din ambii membrii vectorul \underline{H}_2 și se utilizează (3.2.48) și (3.2.49) cu notațiile (3.2.50) la (3.2.53) pentru a obține următorul sistem de ecuații cu diferențe în \underline{C}_1 și \underline{C}_2 :

$$\underline{C}_1(n+1) = \underline{C}_1(n) - \mu_1 \circ\mathcal{M}_{11} \underline{C}_1(n) - \mu_1 \circ\mathcal{M}_{12} \underline{C}_2(n) \quad (3.2. 54)$$

$$\underline{C}_2(n+1) = \underline{C}_2(n) - \mu_2 \circ\mathcal{M}_{21} \underline{C}_1(n) - \mu_2 \circ\mathcal{M}_{22} \underline{C}_2(n) \quad (3.2. 55)$$

Relațiile (3.2.54) și (3.2.55) pot fi scrise sub formă de ecuație matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} \underline{C}_1(n+1) \\ \underline{C}_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{M_1} - \mu_1 \circ\mathcal{M}_{11} & -\mu_1 \circ\mathcal{M}_{12} \\ -\mu_2 \circ\mathcal{M}_{21} & \mathcal{S}_{M_2} - \mu_2 \circ\mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}_1(n) \\ \underline{C}_2(n) \end{bmatrix} \quad (3.2. 56)$$

unde \mathcal{S}_{M_1} și \mathcal{S}_{M_2} sunt matrici unitate de dimensiuni M_1 și respectiv M_2 .

Pentru ca punctul critic dat de relația (3.2.9)-(3.2.10) să fie un punct de echilibru asimptotic stabil al sistemului (3.2.3), (3.2.4) este necesar și suficient ca punctul dat de coordonatele:

$$\begin{cases} \underline{C}_1(n) = \underline{0}_{M_1} \\ \underline{C}_2(n) = \underline{0}_{M_2} \end{cases} \quad (3.2. 57)$$

să fie de asemenea un punct de echilibru stabil al sistemului dat de ecuația (3.2.57).

În relațiile (3.2.57) vectorii $\underline{0}_{M_1}$ și $\underline{0}_{M_2}$ au dimensiunile M_1 , respectiv M_2 și toate elementele nule.

Pentru ca punctul dat de relația (3.2.57) să fie punct de echilibru asimptotic stabil al sistemului (3.2.56) este necesar și suficient să aibă loc inegalitatea (3.2.58) pentru orice n :

$$\left\| \begin{bmatrix} \underline{C}_1(n+1) \\ \underline{C}_2(n+1) \end{bmatrix} \right\| < \left\| \begin{bmatrix} \underline{C}_1(n) \\ \underline{C}_2(n) \end{bmatrix} \right\| \quad (3.2. 58)$$

adică norma euclidiană a vectorului concatenat format din vectorii \underline{C}_1 și \underline{C}_2 să se micșoreze la fiecare iterație.

O relație echivalentă cu (3.2.58), dar mai ușor de utilizat este:

$$\begin{bmatrix} \underline{C}_1^T(n+1) & \underline{C}_2^T(n+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}_1(n+1) \\ \underline{C}_2(n+1) \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \underline{C}_1^T(n) & \underline{C}_2^T(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}_1(n) \\ \underline{C}_2(n) \end{bmatrix} \quad (3.2. 59)$$

Se notează matricea sistemului (3.2.56) astfel:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{M_1} - \mu_1 \mathcal{M}_{11} & -\mu_1 \mathcal{M}_{12} \\ -\mu_2 \mathcal{M}_{21} & \mathcal{I}_{M_2} - \mu_2 \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.2. 60)$$

Introducând relația (3.2.56) în (3.2.59) și ținând cont de notația (3.2.60) se ajunge la:

$$\begin{bmatrix} \underline{C}_1^T(n) & \underline{C}_2^T(n) \end{bmatrix} \left\{ \mathcal{A}^T \mathcal{A} - \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{M_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{M_2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \underline{C}_1(n) \\ \underline{C}_2(n) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.2. 61)$$

Relația (3.2.61) trebuie îndeplinită pentru orice vectori \underline{C}_1 și \underline{C}_2 . Pentru ca această proprietate să aibe loc este necesar și suficient ca matricea:

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^T \mathcal{A} - \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{M_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{M_2} \end{bmatrix} \quad (3.2. 62)$$

să fie negativ definită, aceasta fiind de fapt condiția necesară și suficientă ca algoritmul de gradient să fie asimptotic stabil.

Matricea $\mathcal{A}^T \mathcal{A}$ este dată de relația:

$$\mathcal{A}^T \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{M_1} - \mu_1 (\mathcal{M}_{11} + \mathcal{M}_{11}^T) + & -\mu_1 \mathcal{M}_{12} + \mu_1^2 \mathcal{M}_{11}^T \mathcal{M}_{12} - \\ + \mu_1^2 \mathcal{M}_{11}^T \mathcal{M}_{11} + \mu_2^2 \mathcal{M}_{21}^T \mathcal{M}_{21} & -\mu_2 \mathcal{M}_{21} + \mu_2^2 \mathcal{M}_{21}^T \mathcal{M}_{22} \\ -\mu_1 \mathcal{M}_{12}^T + \mu_1^2 \mathcal{M}_{12}^T \mathcal{M}_{11} - & \mathcal{I}_{M_2} - \mu_2 (\mathcal{M}_{22} + \mathcal{M}_{22}^T) + \\ -\mu_2 \mathcal{M}_{21} + \mu_2^2 \mathcal{M}_{22}^T \mathcal{M}_{21} & + \mu_2^2 \mathcal{M}_{22}^T \mathcal{M}_{22} + \mu_1^2 \mathcal{M}_{12}^T \mathcal{M}_{12} \end{bmatrix} \quad (3.2. 63)$$

Matricea $\mathcal{A}^T \mathcal{A}$ este evident simetrică și are ca valori proprii pătratele modulelor valorilor proprii ale matricei \mathcal{A} , care sunt pozitive.

Pe de altă parte, și matricea \mathcal{B} este simetrică și are elementele reale, deci are toate valorile proprii reale.

Pentru ca matricea \mathcal{B} să fie negativ definită este necesar și suficient să aibă toate valorile sale proprii negative.

Relația (3.2.62) mai poate fi scrisă și în termenii descompunerii în forme canonice Jordan prin transformări de similaritate ale matricelor componente:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \mathcal{S}^{-1} \Lambda_{\mathcal{A}^T \mathcal{A}} \mathcal{S} - \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{M_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{M_2} \end{bmatrix} = \\ &= \mathcal{S}^{-1} \left\{ \Lambda_{\mathcal{A}^T \mathcal{A}} - \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{M_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{M_2} \end{bmatrix} \right\} \mathcal{S} \end{aligned} \quad (3.2. 64)$$

unde $\Lambda_{\mathcal{A}^T \mathcal{A}}$ este matricea diagonală a valorilor proprii ale matricei $\mathcal{A}^T \mathcal{A}$.

Trebuie să se aibe în vedere faptul că matricea \mathcal{S} este unitară și deci inversa sa este egală cu transpusa sa.

Din relația (3.2.64) se observă clar că întrucât toate valorile proprii ale matricei $\mathcal{A}^T \mathcal{A}$ sunt reale și pozitive, iar matricea \mathcal{B} trebuie să le aibe pe toate negative, este necesar și suficient ca toate valorile proprii ale matricei \mathcal{A} să aibe modulul subunitar.

De fapt aceasta este condiția necesară și suficientă ca operatorul liniar \mathcal{A} să fie o contracție.

Matricea \mathcal{A} depinde explicit de parametrii statistici ai semnalelor $s_1'(n)$, $s_1''(n)$, $s_2'(n)$, $s_2''(n)$ și implicit de parametrii semnalelor $s_1(n)$ și $s_2(n)$. Ca să putem analiza stabilitatea algoritmului va trebui să exprimăm matricea \mathcal{A} explicit prin componentele semnalelor $s_1(n)$ și $s_2(n)$. De aceea în cele ce urmează se vor evidenția parametrii semnalelor $s_1(n)$ și $s_2(n)$ și parametrii filtrelor \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 .

Se exprimă pe rând matricele componente \mathcal{M}_{11} , \mathcal{M}_{12} , \mathcal{M}_{21} , \mathcal{M}_{22} .

$$\mathcal{M}_{11} = E \left[\left[S_1'(n) S_1'^T(n) \right] \right] = \begin{bmatrix} r_1'(0) & r_1'(-1) & \cdots & r_1'(-M_1+1) \\ r_1'(-1) & r_1'(0) & \cdots & r_1'(-M_1+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1'(-M_1+1) & r_1'(-M_1+2) & \cdots & r_1'(0) \end{bmatrix} \quad (3.2.65)$$

$r_1'(-i)$ reprezintă funcția de autocorelație a semnalului $s_1'(n)$ în punctul $-i$.

$$\mathcal{M}_{12} = E \left[s_2(n) \begin{bmatrix} S_2''^T(n) \\ S_2''^T(n-1) \\ \vdots \\ S_2''^T(n-M_1+1) \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} r_2^{0H}(0) & r_2^{0H}(-1) & \cdots & r_2^{0H}(-M_2+1) \\ r_2^{0H}(-1) & r_2^{0H}(-2) & \cdots & r_2^{0H}(-M_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_2^{0H}(-M_1+1) & r_2^{0H}(-M_1) & \cdots & r_2^{0H}(-M_1-M_2+2) \end{bmatrix} \quad (3.2.66)$$

$r_2^{0H}(-i)$ reprezintă funcția de intercorelație între semnalele $s_2(n)$ și $s_2''(n)$ în punctul $-i$.

$$\mathcal{M}_{21} = E \left[s_1(n) \begin{bmatrix} S_1''^T(n) \\ S_1''^T(n-1) \\ \vdots \\ S_1''^T(n-M_2+1) \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} r_1^{0H}(0) & r_1^{0H}(-1) & \cdots & r_1^{0H}(-M_1+1) \\ r_1^{0H}(-1) & r_1^{0H}(-2) & \cdots & r_1^{0H}(-M_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{0H}(-M_2+1) & r_1^{0H}(-M_2) & \cdots & r_1^{0H}(-M_1-M_2+2) \end{bmatrix} \quad (3.2.67)$$

$r_1^{0H}(-i)$ reprezintă funcția de intercorelație între semnalele $s_1(n)$ și $s_1''(n)$ în punctul $-i$.

$$\mathcal{M}_{22} = E \left[\left[S_2'(n) S_2'^T(n) \right] \right] = \begin{bmatrix} r_2'(0) & r_2'(-1) & \cdots & r_2'(-M_2+1) \\ r_2'(-1) & r_2'(0) & \cdots & r_2'(-M_2+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_2'(-M_2+1) & r_2'(-M_2+2) & \cdots & r_2'(0) \end{bmatrix} \quad (3.2.68)$$

$r_2'(-i)$ reprezintă funcția de autocorelație a semnalului $s_2'(n)$ în punctul $-i$.

Se notează cu \mathbf{G} sistemul buclei autoregresive, definit de funcția de transfer:

$$G(z) = \frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} \quad (3.2. 69)$$

Se notează cu $\underline{G}(n)$ vectorul răspuns la impulsul unitate al sistemului \mathbf{G} . Acest vector are dimensiune infinită.

În aceste condiții, matricele \mathcal{M}_{11} , \mathcal{M}_{12} , \mathcal{M}_{21} , \mathcal{M}_{22} se pot rescrie explicit în termenii parametrilor statistici ai semnalelor s_1 și s_2 precum și ai răspunsului la impuls al sistemului \mathbf{G} .

Elementele matricei \mathcal{M}_{11} sunt:

$$\begin{aligned} r_1'(-l) &= E[s_1'(n)s_1'(n-l)] = \\ &= E\left[\sum_{j=0}^{\infty} g_j s_1(n-j) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} g_i s_1(n-l-i)\right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} g_j g_i E[s_1(n-j)s_1(n-l-i)] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} g_j g_i r_1(-l-i+j) \end{aligned} \quad (3.2. 70)$$

Analog se deduce că elementele matricei \mathcal{M}_{22} sunt:

$$r_2'(-l) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} g_j g_i r_2(-l-i+j) \quad (3.2. 71)$$

Elementele matricei \mathcal{M}_{21} sunt:

$$\begin{aligned} r_1^{0H}(-l) &= E[s_1(n)s_1'(n-l)] = \\ &= E\left[s_1(n) \sum_{j=0}^{\infty} g_j s_1'(n-l-j)\right] = \\ &= E\left[s_1(n) \sum_{j=0}^{\infty} g_j \sum_{i=0}^{\infty} g_i s_1(n-l-j-i)\right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} g_j g_i E[s_1(n)s_1(n-l-j-i)] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} g_j g_i r_1(-l-j-i) \end{aligned} \quad (3.2. 72)$$

Analog se deduce că elementele matricei \mathcal{M}_{12} sunt:

$$r_2^{0H}(-l) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} g_j g_i r_2(-l-j-i) \quad (3.2. 73)$$

În relațiile (3.2.70) la (3.2.73) g_i sunt coeficienții răspunsului la impulsul unitate al sistemului \mathbf{G} . Cu acestea, matricele \mathcal{M}_{11} , \mathcal{M}_{12} , \mathcal{M}_{21} , \mathcal{M}_{22} devin:

$$\circledast \mathcal{M}_{11} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} g_j g_i \begin{bmatrix} r_1(-i+j) & r_1(-1-i+j) & \cdots & r_1(-M_1+1-i+j) \\ r_1(-1-i+j) & r_1(-i+j) & \cdots & r_1(-M_1+2-i+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1(-M_1+1-i+j) & r_1(-M_1+2-i+j) & \cdots & r_1(-i+j) \end{bmatrix} \quad (3.2.74)$$

$$\circledast \mathcal{M}_{12} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} g_j g_i \begin{bmatrix} r_2(-i-j) & r_2(-1-i-j) & \cdots & r_2(-M_2+1-i-j) \\ r_2(-1-i-j) & r_2(-2-i-j) & \cdots & r_2(-M_2-i-j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_2(-M_1+1-i-j) & r_2(-M_1-i-j) & \cdots & r_2(-M_1-M_2+2-i-j) \end{bmatrix} \quad (3.2.75)$$

$$\circledast \mathcal{M}_{21} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} g_j g_i \begin{bmatrix} r_1(-i-j) & r_1(-1-i-j) & \cdots & r_1(-M_1+1-i-j) \\ r_1(-1-i-j) & r_1(-2-i-j) & \cdots & r_1(-M_1-i-j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1(-M_2+1-i-j) & r_1(-M_2-i-j) & \cdots & r_1(-M_1-M_2+2-i-j) \end{bmatrix} \quad (3.2.76)$$

$$\circledast \mathcal{M}_{22} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} g_j g_i \begin{bmatrix} r_2(-i+j) & r_2(-1-i+j) & \cdots & r_2(-M_2+1-i+j) \\ r_2(-1-i+j) & r_2(-i+j) & \cdots & r_2(-M_2+2-i+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_2(-M_2+1-i+j) & r_2(-M_2+2-i+j) & \cdots & r_1(-i+j) \end{bmatrix} \quad (3.2.77)$$

Matricele din sumele care compun pe $\circledast \mathcal{M}_{11}$ și $\circledast \mathcal{M}_{22}$ sunt de fapt matricele de autocorelație de dimensiune $M_1 \times M_1$ și respectiv $M_2 \times M_2$ ale semnalelor s_1 și respectiv s_2 , pentru cazul $i=j$, și matrice obținute din acestea prin translatarea diagonalei principale în sus, pentru cazul când $j>i$ și în jos, când $j<i$.

În compunerea matricei $\circledast \mathcal{M}_{11}$ intră matricea de autocorelație a semnalului s_1 , despre care se știe că este pozitiv definită, cu o pondere egală cu $\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2$.

În mod similar, în compunerea matricei $\circledast \mathcal{M}_{22}$ intră matricea de autocorelație a semnalului s_2 , despre care se știe că este pozitiv definită, tot cu o pondere de $\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2$.

Matricele $\circledast \mathcal{M}_{11}$ și $\circledast \mathcal{M}_{22}$ sunt pozitiv definite, fiind matrice de autocorelație ale semnalelor $s_1(n)$ și respectiv $s_2(n)$.

Matricele din sumele care compun pe $\circledast \mathcal{M}_{12}$ și $\circledast \mathcal{M}_{21}$ sunt formate din autocorelații ale semnalelor s_2 și s_1 dar organizate în felul următor:

Toate elementele de pe diagonalele paralele cu diagonala secundară sunt egale între ele. Elementul care reprezintă autocorelația în punctul cel mai apropiat de origine este cel din colțul stânga-sus, iar elementul care reprezintă autocorelația în punctul cel mai depărtat de origine este în colțul dreapta-jos. Întrucât funcția de autocorelație este, în general, descrescătoare, în modul, o dată cu depărtarea de origine, rezultă că matricele din relațiile (3.2.75) și (3.2.76) au elemente care scad, în modul, pornind din colțul stânga-sus spre cel din dreapta-jos. Mai mult,

cu cât suma $i+j$ este mai mare, cu atât valoarea elementului maxim, în modul, este tot mai mică. Datorită acestui comportament, este evident că influența acestor matrice tinde să fie tot mai mică pe măsură ce crește suma $i+j$.

Analiza stabilității pornind de la matricea $\mathcal{A}^T \mathcal{A}$ de forma dată în relația (3.2.63) este extrem de dificilă. De aceea se va simplifica problema în felul următor.

Se consideră că parametrii mărime de pas se aleg egali, adică $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Din cele expuse rezultă că pentru ca algoritmul să fie asimptotic stabil este necesar și suficient ca matricea \mathcal{A} definită de relația (3.2.60) să fie o contracție.

Condiția necesară și suficientă pentru ca matricea \mathcal{A} să fie o contracție este ca matricea \mathcal{M} definită de relația (3.2.78)

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.2.78)$$

să fie pozitiv definită în condițiile în care parametrii μ_1 și μ_2 pot fi aleși oricât de mici și egali între ei.

Acest lucru este motivat de faptul că valorile proprii ale matricei \mathcal{A} sunt de forma (în ipoteza că $\mu_1 = \mu_2 = \mu$):

$$\lambda_{\mathcal{A}i} = 1 - \mu \lambda_{\mathcal{M}i} \quad (3.2.79)$$

Dacă se consideră că

$$\lambda_{\mathcal{M}i} = \sigma_i + j\gamma_i, \quad \sigma_i, \gamma_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, M_1 + M_2 \quad (3.2.80)$$

rezultă:

$$\lambda_{\mathcal{A}i} = 1 - \mu \sigma_i - j\mu \gamma_i \quad (3.2.81)$$

și

$$|\lambda_{\mathcal{A}i}|^2 = (1 - \mu \sigma_i)^2 + \mu^2 \gamma_i^2 \quad (3.2.82)$$

Impunând

$$|\lambda_{\mathcal{A}i}|^2 < 1, \quad i = 1, \dots, M_1 + M_2 \quad (3.2.83)$$

rezultă:

$$\sigma_i > \frac{\mu}{2} (\sigma_i^2 + \gamma_i^2) \quad (3.2.84)$$

Deoarece membrul drept al inegalității (3.2.84) este pozitiv, rezultă că partea reală a fiecărei valori proprii a matricei \mathcal{M} trebuie să fie pozitivă.

În consecință, matricea \mathcal{M} trebuie să fie pozitiv definită.

Deoarece, în ipoteza că \mathcal{M} este pozitiv definită, relația (3.2.84) trebuie să fie îndeplinită pentru toate valorile proprii, parametrul μ trebuie ales astfel ca să satisfacă condiția:

$$\mu < \min \left[\frac{2\sigma_i}{\sigma_i^2 + \gamma_i^2} \right], \quad i = 1, \dots, M_1 + M_2 \quad (3.2.85)$$

Se cunoaște faptul că dacă o matrice reală, pătrată, \mathcal{F} este pozitiv definită, atunci și matricea simetrică:

$$\mathcal{Y}_s = \frac{1}{2}(\mathcal{Y} + \mathcal{Y}^T) \quad (3.2.86)$$

este pozitiv definită.

Implicația este și inversă, în sensul că dându-se o matrice simetrică \mathcal{Y}_s pozitiv definită, orice matrice reală, pătrată, care o are pe \mathcal{Y}_s ca parte simetrică, va fi pozitiv definită.

În aceste condiții, este mai convenabil, ca în continuare să se lucreze cu matricea simetrică :

$$\begin{aligned} \circ\mathcal{M}_s &= \frac{1}{2}(\circ\mathcal{M}_s + \circ\mathcal{M}_s^T) = \\ &= \begin{bmatrix} \circ\mathcal{M}_{11} & \frac{1}{2}(\circ\mathcal{M}_{12} + \circ\mathcal{M}_{21}^T) \\ \frac{1}{2}(\circ\mathcal{M}_{12}^T + \circ\mathcal{M}_{21}) & \circ\mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.87)$$

În relația (3.2.87) s-a avut în vedere faptul că matricele $\circ\mathcal{M}_{11}$ și $\circ\mathcal{M}_{22}$ sunt simetrice. Se notează:

$$\circ\mathcal{M}_{12S} = \frac{1}{2}(\circ\mathcal{M}_{12} + \circ\mathcal{M}_{21}^T) \quad (3.2.88)$$

Deci, matricea $\circ\mathcal{M}_s$ se poate scrie:

$$\circ\mathcal{M}_s = \begin{bmatrix} \circ\mathcal{M}_{11} & \circ\mathcal{M}_{12S} \\ \circ\mathcal{M}_{12S}^T & \circ\mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.2.89)$$

La această concluzie, că matricea $\circ\mathcal{M}_s$ trebuie să fie pozitiv definită se ajunge și dacă se consideră că parametrii μ în (3.2.63) sunt suficienți de mici pentru ca termenii în μ^2 să devină nesemnificativi.

O condiție necesară și suficientă pentru ca matricea $\circ\mathcal{M}_s$ să fie pozitiv definită, este (conform Anexei 1) îndeplinirea simultană a următoarelor relații:

$$\circ\mathcal{M}_{11} \quad \text{să fie pozitiv definită.} \quad (3.2.90)$$

$$\circ\mathcal{M}_{22} - \circ\mathcal{M}_{12S}^T \circ\mathcal{M}_{11}^{-1} \circ\mathcal{M}_{12S} \quad \text{să fie pozitiv definită.} \quad (3.2.91)$$

$\circ\mathcal{M}_{11}$ și $\circ\mathcal{M}_{22}$ sunt matrice de autocorelație, și se poate considera că în general sunt pozitiv definite (sunt cel puțin pozitiv semidefinite).

Rămâne să se determine condițiile în care are loc (3.2.91).

Relația (3.2.91) are avantajul că operează cu matrice de dimensiuni mult mai mici decât dimensiunea lui $\circ\mathcal{M}_s$.

Se face observația că întrucât matricele $\circ\mathcal{M}_{11}$, $\circ\mathcal{M}_{22}$ și $\circ\mathcal{M}_{12S}^T \circ\mathcal{M}_{11}^{-1} \circ\mathcal{M}_{12S}$ sunt reale și simetrice și deci, valorile lor proprii vor fi reale.

Din ceea ce se cunoaște până în acest moment, se pot evidenția anumite concluzii de ordin calitativ legate de stabilitatea asimptotică locală a algoritmului.

Se poate aprecia că matricea $\circ\mathcal{M}_s$ va avea o valoare proprie minimă cu atât mai mare, cu cât influența matricelor de autocorelație din sumele lui $\circ\mathcal{M}_{11}$ și $\circ\mathcal{M}_{22}$ este mai mare și cu cât sumele de matrice din $\circ\mathcal{M}_{12}$ și $\circ\mathcal{M}_{21}$ sunt mai puțin semnificative. Aceasta se întâmplă când, pe

de o parte, $\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2$ este cât mai mare posibil față de g_0^2 și, pe de altă parte, cu cât funcțiile de autocorelație ale semnalelor s_1 și s_2 sunt mai rapid descrescătoare.

Prima cerință, aceea ca $\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2$ să fie cât mai mare față de g_0^2 , conduce la ideea că polii lui $G(z)$ să fie cât mai apropiați de cercul unitate, situație care se întâmplă atunci când funcțiile de transfer ale filtrelor H_1 și H_2 se apropie de cele ale unor linii de întârziere cu atenuări relativ mici, adică coeficienții h_{i0} , $i=1,2$, tind spre zero, iar coeficienții semnificativi h_{im} se grupează în jurul unui indice m care reprezintă întârzierea.

A doua cerință conduce la ideea că algoritmul se comportă cu atât mai bine, cu cât semnalele s_1 și s_2 sunt de bandă mai largă, adică se apropie mai mult de zgomotul alb.

Algoritmul poate deveni neconvergent dacă lucrurile se întâmplă invers. Astfel, dacă $\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2$ devine comparabil cu g_0^2 , atunci filtrele H_1 și H_2 au funcții de transfer în care partea “întârziată” a semnalului devine nesemnificativă în comparație cu partea “neîntârziată”, adică h_{i0} , $i=1,2$, devin semnificativi în comparație cu coeficienții care dictează întârzierea h_{im} .

Pe de altă parte, dacă semnalul tinde să fie constant, adică să aibă o bandă îngustă în jurul lui zero, atunci matricele din componența lui \mathcal{M}_{12} și \mathcal{M}_{21} au coeficienți cu valori semnificative întrucât funcțiile de autocorelație sunt lent descrescătoare.

În cazul în care semnalele s_1 și s_2 sunt periodice sau sunt ciclostaționare, matricele lor de autocorelație pot deveni singulare și în acest caz algoritmul este de asemenea divergent.

Un alt factor care influențează convergența algoritmului este dezechilibrul de puteri ale semnalelor s_1 și s_2 . Cu cât raportul puterilor este mai mare, cu atât trebuie să fie mai mare $\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2$ în comparație cu g_0^2 pentru ca matricele de autocorelație să compenseze efectele matricelor din componența lui \mathcal{M}_{12} și \mathcal{M}_{21} . Aceasta înseamnă că, cu cât atenuările părților “întârziate” ale semnalelor care se propagă prin H_1 și H_2 sunt mai mici, cu atât algoritmul rămâne convergent la rapoarte de puteri mai mari, în aceleași condiții de caracteristici spectrale relative ale semnalelor.

Este evident faptul că, pentru asigurarea stabilității, parametrii μ , trebuiesc aleși cât mai mici. Acest lucru influențează defavorabil viteza de convergență. Din motivele enumerate, parametrii μ se aleg în urma unui compromis.

Din păcate, așa cum se observă, complexitatea relațiilor nu permite o analiză cantitativă a stabilității asimptotice cu concluzii evidente, pentru cazul general al unor semnale care au un spectru oarecare.

Totuși pentru anumite situații limită se pot face observații cantitative asupra proprietăților de stabilitate.

În cele ce urmează se dau câteva exemple în acest sens.

Analiza stabilității asimptotice locale în cazul semnalelor de tip zgomot alb

Se consideră cazul când ambele semnale s_1 și s_2 sunt de tip zgomot alb.

Pentru simplificare se consideră că $M_1=M_2=M$.

În acest caz matricele \mathcal{M}_{11} și \mathcal{M}_{22} devin:

$$\mathcal{M}_{11} = P_1 \cdot \mathcal{M}_G \quad (3.2. 92)$$

$$\mathcal{M}_{22} = P_2 \cdot \mathcal{M}_G \quad (3.2. 93)$$

unde

$$\mathcal{M}_G = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 & \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} & \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+2} & \cdots & \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-1} \\ \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} & \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 & \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} & \cdots & \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-1} & \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-2} & \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-3} & \cdots & \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.94)$$

și $P_1 = \sigma_1^2$, puterea semnalului s_1 , iar $P_2 = \sigma_2^2$, puterea semnalului s_2 .

Matricele \mathcal{M}_{12} și \mathcal{M}_{21} devin:

$$\mathcal{M}_{12} = P_2 \cdot \begin{bmatrix} g_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.95)$$

$$\mathcal{M}_{21} = P_1 \cdot \begin{bmatrix} g_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.96)$$

Utilizând relațiile (3.2.95) și (3.2.96) matricea \mathcal{M}_{12S} devine:

$$\mathcal{M}_{12S} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot \begin{bmatrix} g_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.97)$$

Fie matricea

$$\mathcal{M}_{11}^{-1} = \frac{1}{P_1} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1M} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{M1} & m_{M2} & \cdots & m_{MM} \end{bmatrix} \quad (3.2.98)$$

Utilizând (3.2.97) și (3.2.98), matricea $\mathcal{M}_{12S}^T \mathcal{M}_{11}^{-1} \mathcal{M}_{12S}$ devine:

$$\mathcal{M}_{12S}^T \mathcal{M}_{11}^{-1} \mathcal{M}_{12S} = \frac{(P_1 + P_2)^2 g_0^4 \cdot m_{11}}{4P_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.99)$$

Elementul m_{11} este dat de relația:

$$m_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \quad (3.2.100)$$

unde Δ este determinantul matricei \mathcal{M}_G , iar Δ_{11} este complementul algebric al elementului de indice (1,1) al matricei \mathcal{M}_G .

Cu ajutorul relațiilor (3.2.100) și (3.2.99) matricea din relația (3.2.91) devine:

$$\mathcal{D} = \mathcal{M}_{22} - \mathcal{M}_{12S}^T \mathcal{M}_{11}^{-1} \mathcal{M}_{12S} =$$

$$= \begin{bmatrix} P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 - \frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1} g_0^4 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} & \cdots & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-1} \\ P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 & \cdots & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-1} & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-2} & \cdots & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.101)$$

Deoarece caracterul pozitiv definit al unei matrice nu se modifică printr-o transformare liniară a coordonatelor, prin reversarea coordonatelor se obține o matrice similară cu \mathcal{D} dată de relația:

$$\mathcal{D}_S = \begin{bmatrix} P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-1} \\ P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-1} & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-2} & \cdots & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 - \frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1} g_0^4 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \end{bmatrix} \quad (3.2.102)$$

Se cunoaște faptul că o condiție necesară și suficientă pentru ca o matrice reală și simetrică să fie pozitiv definită, este ca toți determinanții minori principali să fie pozitivi, adică:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \dots \Delta > 0 \quad (3.2.103)$$

Analizând matricea \mathcal{D}_S se observă că toți minorii principali, cu excepția determinantului matricei, sunt egali cu cei ai matricei \mathcal{M}_{22} , despre care se știe că este pozitiv definită și deci, acești minori sunt toți pozitivi. În consecință, trebuie să determinăm condițiile în care determinantul matricei \mathcal{D}_S este pozitiv.

Dezvoltând determinantul matricei \mathcal{D}_S în sumă de doi determinanți, după ultima coloană, rezultă:

$$\Delta_{\mathcal{G}_s} = \begin{vmatrix} P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 & \cdots & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-2} & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-2} & \cdots & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} \\ P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-1} & \cdots & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 & \cdots & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-2} & \cdots & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 & 0 \\ P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+M-1} & \cdots & P_2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} & -\frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1} g_0^4 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \end{vmatrix} \quad (3.2.104)$$

În relația (3.2.104), primul determinant are valoarea $P_2^M \Delta$.

Dezvoltând al doilea determinant după ultima coloană, se obține rezultatul:

$$-\frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1} g_0^4 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \cdot P_2^{M-1} \Delta_{11}.$$

În concluzie, relația (3.2.104) devine:

$$\Delta_{\mathcal{G}_s} = P_2^M \left(P_2 \Delta - \frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1} g_0^4 \frac{\Delta_{11}^2}{\Delta} \right) \quad (3.2.105)$$

După calcule elementare, se ajunge la condiția necesară și suficientă pentru ca determinantul din relația (3.2.105) să fie pozitiv:

$$\frac{1}{g_0^2} \cdot \frac{\Delta}{\Delta_{11}} > \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} + \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right) \quad (3.2.106)$$

Relația (3.2.106) este condiția de stabilitate a sistemului în cazul când semnalele s_1 și s_2 sunt de tip zgomot alb.

După cum se observă, membrul stâng al inegalității depinde numai de parametrii filtrelor \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 , iar membrul drept depinde numai de rapoartele de puteri ale semnalelor.

Se remarcă faptul că membrul drept este supraunitar, valoarea sa minimă, egală cu unu, obținându-se când puterile sunt egale.

Exemplul 1:

Pentru a se înțelege mai bine implicațiile acestei condiții de stabilitate, se exemplifică studiarea comportării unui sistem pentru care filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 au $M=2$.

În acest caz matricea $\circledast \mathcal{H}_G$ devine:

$$\circledast \mathcal{H}_G = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 & \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} \\ \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} & \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.107)$$

$$\Delta = \left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 \right)^2 - \left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} \right)^2 \quad (3.2. 108)$$

$$\Delta_{11} = \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 \quad (3.2. 109)$$

Condiția (3.2.106) devine:

$$\frac{\left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 \right)^2 - \left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} \right)^2}{g_0^2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2} > \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} + \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right) \quad (3.2. 110)$$

Pentru $M=2$ filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 au funcțiile de transfer date de relațiile:

$$H_1(z) = h_{10} + h_{11}z^{-1} \quad (3.2. 111)$$

$$H_2(z) = h_{20} + h_{21}z^{-1} \quad (3.2. 112)$$

În aceste condiții avem:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} = \\ &= \frac{1}{1 - h_{10}h_{20} - (h_{10}h_{21} + h_{11}h_{20})z^{-1} - h_{11}h_{21}z^{-2}} \end{aligned} \quad (3.2. 113)$$

Pentru a se putea lucra cu relații simple, care să poată fi interpretate, se presupune că filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 sunt identice, adică:

$$H_1(z) = H_2(z) = H(z) = h_0 + h_1z^{-1} \quad (3.2. 114)$$

În această situație $G(z)$ devine:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{1 - H(z)^2} = \frac{1}{1 - (h_0 + h_1z^{-1})^2} = \\ &= \frac{1}{2(1 + h_0)} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{h_1}{1 + h_0} \right) z^{-1}} + \frac{1}{2(1 - h_0)} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{h_1}{1 - h_0} \right) z^{-1}} = \\ &= \frac{1}{2(1 + h_0)} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{h_1}{1 + h_0} \right)^i z^{-i} + \frac{1}{2(1 - h_0)} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{h_1}{1 - h_0} \right)^i z^{-i} \end{aligned} \quad (3.2. 115)$$

În relația (3.2.115) ultima egalitate are loc dacă scriile sunt convergente, sau, altfel spus, dacă polii lui $G(z)$ sunt în interiorul cercului unitate.

Polii lui $G(z)$ sunt:

$$p_1 = \frac{h_1}{1 - h_0} \quad (3.2. 116)$$

$$p_2 = -\frac{h_1}{1+h_0} \quad (3.2.117)$$

După cum se observă, polii sunt reali și deci trebuie să satisfacă simultan condițiile:

$$\begin{cases} -1 < p_1 < 1 \\ -1 < p_2 < 1 \end{cases} \quad (3.2.118)$$

Domeniul în planul (h_0, h_1) care satisface condițiile (3.2.118) este interiorul pătratului care are vârfurile de coordonate $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ și $(0,-1)$ așa cum este prezentat în Fig.3.2.18.

Din examinarea ultimei relații din (3.2.115) se deduce că:

$$g_0 = \frac{1}{1-h_0^2} \quad (3.2.119)$$

$$g_i = \frac{1}{2(1+h_0)} \left(-\frac{h_1}{1+h_0} \right)^i + \frac{1}{2(1-h_0)} \left(\frac{h_1}{1-h_0} \right)^i ; i = 1, \dots, \infty \quad (3.2.120)$$

După calcule elementare se deduce că:

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 = \frac{1-h_0^2-h_1^2}{\left[(1+h_0)^2 - h_1^2 \right] \left[(1-h_0)^2 - h_1^2 \right] \left[1-h_0^2+h_1^2 \right]} \quad (3.2.121)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+1} = \frac{2h_0 h_1}{\left[(1+h_0)^2 - h_1^2 \right] \left[(1-h_0)^2 - h_1^2 \right] \left[1-h_0^2+h_1^2 \right]} \quad (3.2.122)$$

Utilizând relațiile (3.2.119), (3.2.121), (3.2.122), după calcule elementare, relația (3.2.110) devine:

$$\frac{1}{1-\left(\frac{h_1^2}{1-h_0^2}\right)^2} > \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} + \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right) \quad (3.2.123)$$

Se fac notațiile:

$$K = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} + \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right) \quad (3.2.124)$$

$$\rho = \sqrt{1-\frac{1}{K}} \quad (3.2.125)$$

După calcule elementare, utilizând (3.2.124) și (3.2.125), condiția (3.2.123) devine:

$$h_0^2 + \frac{h_1^2}{\rho} > 1 \quad (3.2.126)$$

Relația (3.2.126) definește un domeniu admisibil pentru valorile coeficienților h_0 și h_1 în planul (h_0, h_1) exterior unei elipse care are axele suprapuse peste axele de coordonate, semiaxa

mare egală cu unitatea poziționată pe axa $(0, h_0)$ și semiaxa mică egală cu $\sqrt{\rho}$ poziționată pe axa $(0, h_1)$.

Acest domeniu este suprapus, în Fig. 3.2.18, peste domeniul admisibil de valori care asigură poziționare polilor funcției de transfer $G(z)$ în interiorul cercului unitate.

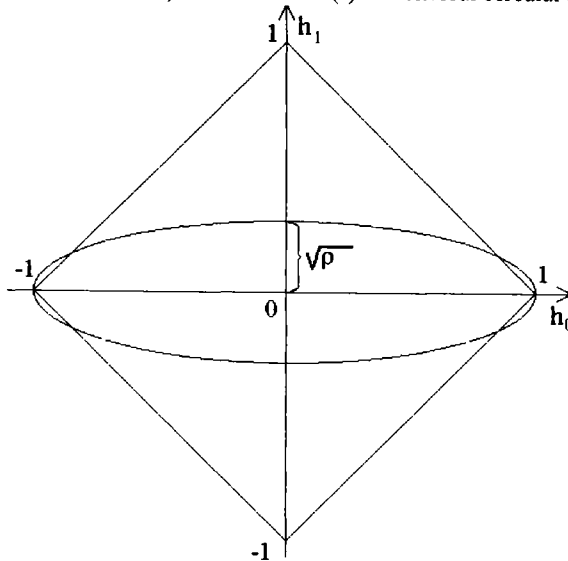


Fig. 3.2.18. Domeniul admisibil de valori ale parametrilor h_0 și h_1 care asigură convergența algoritmului

Domeniul valorilor admisibile este cuprins în porțiunile exterioare elipsei, dar interioare pătratului exclusiv liniile de contur.

În continuare se analizează câteva situații posibile de rapoarte de puteri ale semnalelor s_1 și s_2 .

Dacă $P_1 = P_2$, atunci $K=1$ și $\rho=0$. În această situație domeniul de convergență este interiorul pătratului din care se exclude porțiunea de pe axa h_0 , adică $h_1=0$.

Dacă $P_1 \gg P_2$ sau $P_2 \gg P_1$, atunci $K \rightarrow \infty$ și $\rho > 1$. În această situație elipsa se transformă într-un cerc cu raza unitate și domeniul de valori admisibile devine vid.

Spre exemplu, dacă $\frac{P_1}{P_2} = 2$ rezultă: $K \approx 1,06$; $\rho \approx 0,239$; $\sqrt{\rho} \approx 0,489$. Deci în acest caz algoritmul poate fi convergent doar pentru valori ale lui h_0 și h_1 din exteriorul elipsei care are semiaxa mică aproximativ egală cu 0,49, dar aflate în interiorul pătratului.

O concluzie deosebit de importantă este că dacă $h_1=0$ atunci algoritmul nu poate fi convergent pentru nici un raport de puteri. Cu alte cuvinte, separarea semnalelor poate avea loc numai dacă amestecul lor este rezultatul propagării celor două semnale la cei doi receptori pe drumuri diferite, adică există o diferențiere spațială între surse.

Exemplul 2:

Se consideră cazul când

$$H_1(z) = H_2(z) = H(z) = a \cdot z^{-m}, \quad |a| < 1 \quad (3.2. 127)$$

și semnalele s_1 și s_2 sunt de tip zgomot alb.

În această situație avem:

$$G(z) = \frac{1}{1 - a^2 \cdot z^{-2m}} = \sum_{i=0}^{\infty} (a^2 \cdot z^{-2m})^i \quad (3.2.128)$$

Din (3.2.128) rezultă că:

$$g_i = \begin{cases} a^{m \cdot i} & ; i = 2km, k = 1, \dots, \infty \\ 0 & ; \text{in rest} \end{cases} \quad (3.2.129)$$

În aceste condiții matricea $\circledast M_G$ dată de (3.2.94) devine:

$$\circledast M_G = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 \end{bmatrix}}_{m+1} \quad (3.2.130)$$

Sunt valabile următoarele rezultate:

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{2k})^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (a^4)^k = \frac{1}{1 - a^4} \quad (3.2.131)$$

$$\Delta_G = \left(\frac{1}{1 - a^4} \right)^{m+1} \quad (3.2.132)$$

$$\Delta_{11G} = \left(\frac{1}{1 - a^4} \right)^m \quad (3.2.133)$$

$$g_0 = 1 \quad (3.2.134)$$

În aceste condiții condiția (3.2.106) devine:

$$\frac{1}{1 - a^4} > \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} + \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right) \quad (3.2.135)$$

Pentru rapoarte mari de puteri P_1/P_2 relația (3.2.135) se poate simplifica astfel:

$$\frac{1}{1 - a^4} > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \quad (3.2.136)$$

Spre exemplu, pentru $a=0,9$ algoritmul este asimptotic stabil pentru $\frac{P_1}{P_2} < 33,8$, sau exprimat în decibeli 15,29 dB.

Exemplele 1 și 2 confirmă previziunile calitative conform cărora algoritmul îndeplinește condițiile de stabilitate asimptotică cu atât mai bine, cu cât raportul de puteri ale semnalelor se

apropie de unu. Pe de altă parte, separarea poate avea loc și la rapoarte de puteri cu atât mai mari, cu cât coeficientul părții întârziate a semnalelor prin filtrele H_1 și H_2 este mai apropiată de unu. Având în vedere considerentele prezentate în Secțiunea 2.2.2, acest lucru înseamnă că sursele trebuie să fie la o depărtare mai mare față de receptori. Deci, cu cât sursele sunt mai depărtate de receptori, cu atât crește și raportul de puteri ale semnalelor pentru care separarea este posibilă. De asemenea, din Exemplul 1 rezultă efectul negativ pe care îl are coeficientul de ordin zero, dacă este nenul, în ambele filtre ale sistemului de mixare a semnalelor. Acest lucru înseamnă, pentru reducerea valorii coeficientului de ordin zero, că sursele să nu se găsească pe planul γ ,

Analiza stabilității asimptotice locale în cazul filtrelor de mixare de tip linie de întârziere

Se presupune, în raționamentul următor, că filtrele H_1 și H_2 sunt de tip linie de întârziere, situație foarte apropiată de realitate în multe cazuri când pot fi neglijate reflexiile din mediul înconjurător.

Se consideră că sursele sunt plasate pe axa receptorilor, de o parte și de alta a acestora. Receptorii se află la o distanță d unul de celălalt.

Dacă distanța d este suficient de mare încât timpul de parcurgere a ei de către unda purtătoare de informație este mai mare decât suportul funcțiilor de autocorelație ale semnalelor s_1 și s_2 atunci forma matricelor \mathcal{M}_{11} , \mathcal{M}_{12} , \mathcal{M}_{21} și \mathcal{M}_{22} se simplifică considerabil.

Spre exemplu, o astfel de situație poate apărea dacă receptorii sunt microfoane amplasate la o distanță mai mare decât un metru. În acest caz timpul de propagare de la unul la altul, prin aer, este mai mare de 3ms. Suportul funcției de autocorelație a semnalului vocal, măsurată ca statistică de termen lung, este de aproximativ 2,5ms [80].

Considerăm că $H_1(z)$ și $H_2(z)$ sunt de forma:

$$H_1(z) = h_{1M_1} \cdot z^{-M_1} \quad (3.2. 137)$$

$$H_2(z) = h_{2M_2} \cdot z^{-M_2} \quad (3.2. 138)$$

unde M_1 și M_2 respectă condițiile ca să fie mai mari decât suporturile funcțiilor de autocorelație ale semnalelor s_1 și s_2 .

În asemenea situații, relațiile (3.2.74)-(3.2.77) devin:

$$\mathcal{M}_{11} \approx \left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 \right) \cdot \begin{bmatrix} r_1(0) & r_1(-1) & \cdots & r_1(-M_1+1) \\ r_1(-1) & r_1(0) & \cdots & r_1(-M_1+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1(-M_1+1) & r_1(-M_1+2) & \cdots & r_1(0) \end{bmatrix} \quad (3.2. 139)$$

$$\mathcal{M}_{12} \approx g_0^2 \cdot \begin{bmatrix} r_2(0) & r_2(-1) & \cdots & r_2(-M_2+1) \\ r_2(-1) & r_2(-2) & \cdots & r_2(-M_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_2(-M_1+1) & r_2(-M_1) & \cdots & r_2(-M_1-M_2+2) \end{bmatrix} \quad (3.2. 140)$$

$$\mathcal{M}_{21} \approx g_0^2 \cdot \begin{bmatrix} r_1(0) & r_1(-1) & \dots & r_1(-M_1+1) \\ r_1(-1) & r_1(-2) & \dots & r_1(-M_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1(-M_2+1) & r_1(-M_2) & \dots & r_1(-M_1-M_2+2) \end{bmatrix} \quad (3.2.141)$$

$$\mathcal{M}_{22} \approx \left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 \right) \cdot \begin{bmatrix} r_2(0) & r_2(-1) & \dots & r_2(-M_2+1) \\ r_2(-1) & r_2(0) & \dots & r_2(-M_2+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_2(-M_2+1) & r_2(-M_2+2) & \dots & r_2(0) \end{bmatrix} \quad (3.2.142)$$

În contextul relațiilor (3.2.137) și (3.2.138), avem:

$$G(z) = \frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} = \frac{1}{1 - h_{1M_1}h_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)}} = \sum_{i=0}^{\infty} (h_{1M_1}h_{2M_2})^i \cdot z^{-(M_1+M_2)i} \quad (3.2.143)$$

Din (3.2.143) se deduce că:

$$g_i = \begin{cases} (h_{1M_1}h_{2M_2})^k; & \text{daca } i = k(M_1 + M_2) \\ 0; & \text{in rest} \end{cases} \quad (3.2.144)$$

și, în consecință:

$$g_0 = 1 \quad (3.2.145)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 = \frac{1}{1 - (h_{1M_1}h_{2M_2})^2} \quad (3.2.146)$$

Utilizând (3.2.145) și (3.2.146) în (3.2.139)-(3.2.142), și acestea în condiția (3.2.91) rezultă că pentru ca algoritmul să fie asimptotic stabil trebuie să aibă loc relația:

$$\mathcal{R}_2 - \frac{\left(1 - (h_{1M_1}h_{2M_2})^2\right)^2}{4} (\mathcal{R}_2^{0T} + \mathcal{R}_1^0) \cdot \mathcal{R}_1^{-1} \cdot (\mathcal{R}_2^0 + \mathcal{R}_1^{0T}) \text{ este pozitiv definită} \quad (3.2.147)$$

unde \mathcal{R}_1 este matricea de autocorelație a semnalului s_1 care apare în membrul drept al relației (3.2.139), \mathcal{R}_1^0 este matricea care apare în membrul drept al relației (3.2.140), \mathcal{R}_2^0 este matricea care apare în (3.2.141) și \mathcal{R}_2 este matricea de autocorelație a semnalului s_2 care apare în relația (3.2.142).

Din analiza condiției (3.2.147) se observă că dacă coeficienții h_{1M_1} și h_{2M_2} au modulul apropiat de unu, efectul produsului de matrice care se scade din \mathcal{R}_2 și care este pozitiv definit, devine nesemnificativ. Deci marja de variație a parametrilor semnalelor pentru care matricea rezultantă este pozitiv definită crește și ea.

Din (3.2.144) se observă că relațiile (3.2.139)-(3.2.142) rămân valabile atâta timp cât suportul funcțiilor de autocorelație este mai mic decât suma întârzierilor prin filtrele H_1 și H_2 . În cazul exemplului luat, relațiile rămân valabile până la o distanță dintre microfoane de aproximativ 45cm. Se face observația că algoritmul poate rămâne asimptotic stabil și în cazul

când microfoanele sunt mai apropiate, dar tratarea problemei convergenței nu mai poate fi făcută cu aceste relații simplificate.

Pentru a exemplifica afirmațiile de mai sus, să considerăm că frecvența de eșantionare este de 10KHz. În acest caz, întrucât perioada dintre eșantioane este de 0,1ms, înseamnă că funcția de autocorelație are valori semnificative doar pentru indici cuprinși între 0 și 25. De aici rezultă că dacă $M_1+M_2>25$ se poate aplica teoria simplificată expusă mai sus. Din punct de vedere geometric, acest lucru înseamnă că suma diferențelor de drum ale undelor sonore care se propagă de la cele două surse la fiecare dintre receptori trebuie să fie mai mare de 85-90cm. În cazul când sursele se află pe dreapta care unește cei doi receptori, din condiția de mai sus rezultă că se poate aplica această teorie simplificată dacă distanța dintre receptori este de cel puțin 45 cm, așa cum s-a afirmat.

În cazul când h_{1M_1} și h_{2M_2} au modulul apropiat de unu, atunci se poate considera că $\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 \gg g_0^2$ și matricea \mathcal{M} se poate aproxima astfel:

$$\mathcal{M} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - (h_{1M_1} h_{2M_2})^2} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - (h_{2M_1} h_{2M_2})^2} \mathcal{R}_2 \end{bmatrix} \quad (3.2. 148)$$

În acest caz, matricea \mathcal{M} este simetrică și are toate valorile proprii reale și pozitive. Pentru acest caz simplu, din punct de vedere analitic, se pot face considerații cantitative asupra parametrului mărime de pas. Relația (3.2.85) devine:

$$\mu < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (3.2. 149)$$

unde λ_{\max} este valoarea proprie maximă a matricei \mathcal{M} .

O mărime acoperitoare pentru μ se obține majorând numitorul relației (3.2.149) la suma tuturor valorilor proprii ale lui \mathcal{M} :

$$\begin{aligned} \mu &\leq \frac{2}{tr \mathcal{M}} = \frac{2}{\frac{1}{1 - (h_{1M_1} h_{2M_2})^2} (M_1 \cdot P_1 + M_2 \cdot P_2)} = \\ &= \frac{2(1 - (h_{1M_1} h_{2M_2})^2)}{M_1 \cdot P_1 + M_2 \cdot P_2} = \\ &= \frac{2}{(M_1 \cdot P_1 + M_2 \cdot P_2) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2} \end{aligned} \quad (3.2. 150)$$

În relația (3.2.150) P_1 și P_2 reprezintă puterile semnalelor și, trebuie făcută mențiunea că, într-o primă aproximare, nu s-au făcut ipoteze simplificatoare asupra spectrelor lor.

Rezultă că parametrul mărime de pas trebuie ales invers proporțional cu puterile semnalelor, invers proporțional cu întârzierile filtrelor de mixare și invers proporțional cu energia coeficienților răspunsului la impuls a sistemului buclă autoregresivă.

Spre exemplu, dacă $P_1=P_2=1$, $h_{1M_1}=h_{2M_2}=0,9$ și $M_1+M_2=25$, din relația (3.2.150) rezultă că $\mu < 0,0072$. La prima vedere relația (3.2.150) pare excesiv de acoperitoare, dacă se

are în vedere că cele două filtre \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 , la convergență, au câte un singur coeficient. Dar există alte considerente care impun alegerea unor valori mici pentru pasul de adaptare.

Dacă luăm în considerare faptul că algoritmul pleacă dintr-un punct inițial (care poate fi originea) și că în practică nu se cunoaște exact valoarea lui M_1 și M_2 , filtrele \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 nu pot fi considerate ca având un singur coeficient, ci, pentru cazul analizat, ar trebui să aibă cel puțin treisprezece coeficienți fiecare. Regimul tranzitoriu al algoritmului se caracterizează prin faptul că toți coeficienții au o evoluție tranzitorie. Dacă valoarea lui μ nu este suficient de mică, pentru a se asigura un efect de mediere intrinsecă corespunzător, evoluând 26 de coeficienți deodată, este foarte posibil să se ajungă la situația nerespectării condiției de stabilitate a nucleii autoregresive dată de relația (2.2.29) și algoritmul să devină divergent. Evoluția acestor coeficienți este puternic influențată de caracteristicile spectrale ale semnalelor. Este posibil ca în anumite condiții, când semnalele sunt puternic colorate, evoluția tranzitorie a coeficienților să fie de așa natură, încât oricât l-am micșora pe μ , să apară un moment când relația (2.2.29) să nu mai fie satisfăcută, moment în care algoritmul devine divergent. Aceste aspecte vor fi tratate mai în amănunt în alte secțiuni ale acestui capitol.

Semnificatia punctului de echilibru asimptotic stabil al algoritmului

Procedându-se asemănător cu metoda folosită pentru liniarizarea relațiilor referitoare la gradientii în jurul punctului critic, se ajunge la:

$$J_1 = E[t_1^2(n)] \approx E[s_1^2(n)] + \underline{H}_2^T \circ \mathcal{N}_1^T \underline{C}_1(n) \quad (3.2.151)$$

$$J_2 = E[t_2^2(n)] \approx E[s_2^2(n)] + \underline{H}_1^T \circ \mathcal{N}_2^T \underline{C}_2(n) \quad (3.2.152)$$

unde \mathcal{N}_1 și \mathcal{N}_2 sunt definite de relațiile:

$$\mathcal{N}_1 = E \left[s_1(n) \begin{bmatrix} \underline{S}'_{1M_2}(n) \\ \underline{S}'_{1M_2}(n-1) \\ \vdots \\ \underline{S}'_{1M_2}(n-M_1+1) \end{bmatrix} \right] \quad (3.2.153)$$

$$\mathcal{N}_2 = E \left[s_2(n) \begin{bmatrix} \underline{S}'_{2M_1}(n) \\ \underline{S}'_{2M_1}(n-1) \\ \vdots \\ \underline{S}'_{2M_1}(n-M_2+1) \end{bmatrix} \right] \quad (3.2.154)$$

Vectorul $\underline{S}'_{1M_2}(n)$ este de dimensiune M_2 și conține ultimele M_2 eșantioane ale semnalului $s_1'(n)$, iar $\underline{S}'_{2M_1}(n)$ este de dimensiune M_1 și conține ultimele M_1 eșantioane ale semnalului $s_2'(n)$.

Din (3.2.151) și (3.2.152) rezultă:

$$E[t_1^2(n)] - E[s_1^2(n)] \approx \underline{H}_2^T \circ \mathcal{N}_1^T \underline{C}_1(n) \quad (3.2.155)$$

$$E[s_2^2(n)] - E[s_2^2(n)] \approx H^T \circ \mathcal{N}_2^T C_2(n) \quad (3.2.156)$$

Din examinarea expresiilor (3.2.155) și (3.2.156) se observă că întrucât $C_1(n)$ și $C_2(n)$ sunt vectori oarecare, membrii lor dreپتي nu au semnele bine precizate, ci depind de alegerea concretă a vectorilor abatere. În consecință punctul de echilibru asimptotic stabil al algoritmului nu este punct de extrem local pentru nici una dintre funcțiile cost J_1 și J_2 . În schimb, se observă că au loc relațiile:

$$J_1 \xrightarrow{\|C_1\| \rightarrow 0} E[s_1^2] \quad (3.2.157)$$

$$J_2 \xrightarrow{\|C_2\| \rightarrow 0} E[s_2^2] \quad (3.2.158)$$

În condițiile în care algoritmul este convergent, el tinde să conducă sistemul în așa fel încât (3.2.157) și (3.2.158) să aibă loc. Acest lucru se realizează datorită constrângerilor în evoluția sa impuse de executarea simultană a ecuațiilor de actualizare (3.2.3) și (3.2.4) și ipotezei că semnalele surselor sunt independente statistic.

Analiza stabilității asimptotice globale în cazul filtrelor de mixare de tip linie de întârziere

Până acum s-a studiat problema convergenței asimptotice locale. S-a observat că datorită complexității chiar și a relațiilor liniarizate, determinări cantitative s-au putut obține doar în cazuri limită, fie când semnalele au fost considerate de tip zgomot alb, fie când s-au considerat filtrele H_1 și H_2 de tip linie de întârziere cu un singur coeficient.

Studiul problemei convergenței asimptotice globale presupune demonstrarea micșorării normei vectorului abatere al coeficienților filtrelor la fiecare iterație, pornind din orice punct de start care satisface condițiile de stabilitate ale buclei autoregresive date de (2.2.29). Datorită acestui fapt, relațiile care descriu algoritmul nu mai pot fi liniarizate. În consecință studiul problemei pentru cazul general conduce la relații atât de complicate încât nu se pot trage concluzii într-un mod evident. De aceea se va studia doar cazul particular când filtrele H_1 , H_2 , W_1 și W_2 sunt de tip linie de întârziere și au fiecare câte un singur coeficient.

În acest caz se presupune că:

$$H_1(z) = h_{1M_1} \cdot z^{-M_1}; \quad |h_{1M_1}| < 1 \quad (3.2.159)$$

$$H_2(z) = h_{2M_2} \cdot z^{-M_2}; \quad |h_{2M_2}| < 1 \quad (3.2.160)$$

$$W_1(z) = w_{1M_1} \cdot z^{-M_1}; \quad |w_{1M_1}| < 1 \quad (3.2.161)$$

$$W_2(z) = w_{2M_2} \cdot z^{-M_2}; \quad |w_{2M_2}| < 1 \quad (3.2.162)$$

Punctul critic al algoritmului este:

$$w_{1M_1} = h_{1M_1} \quad (3.2.163)$$

$$w_{2M_2} = h_{2M_2} \quad (3.2.164)$$

Relațiile de actualizare ale coeficienților sunt următoarele:

$$w_{1M_1}(n+1) = w_{1M_1}(n) + \mu \cdot t_2(n) \cdot d_1(n - M_1) \quad (3.2.165)$$

$$w_{2M_2}(n+1) = w_{2M_2}(n) + \mu \cdot t_1(n) \cdot d_2(n - M_2) \quad (3.2.166)$$

Se face ipoteza simplificatoare, valabilă când μ este suficient de mic și când semnalele sunt suficient de albe, că algoritmul dat de (3.2.165) și (3.2.166) evoluează, în medie, ca și algoritmul descris de ecuațiile:

$$w_{1M_1}(n+1) = w_{1M_1}(n) + \mu \cdot E[t_2(n) \cdot d_1(n - M_1)] \quad (3.2.167)$$

$$w_{2M_2}(n+1) = w_{2M_2}(n) + \mu \cdot E[t_1(n) \cdot d_2(n - M_2)] \quad (3.2.168)$$

Particularizând relațiile care determină pe $t_1(n)$, $t_2(n)$, $d_1(n)$ și $d_2(n)$, se obține:

$$\begin{aligned} t_1(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)}} (Y_1(z) - w_{2M_2} \cdot z^{-M_2} \cdot Y_2(z)) \cdot z^{n-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1 - w_{2M_2} h_{1M_1} \cdot z^{-(M_1+M_2)}}{1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)}} \cdot S_1(z) \cdot z^{n-1} dz + \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{(h_{2M_2} - w_{2M_2})}{1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)}} \cdot S_2(z) \cdot z^{n-M_2-1} dz \end{aligned} \quad (3.2.169)$$

$$\begin{aligned} t_2(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)}} (Y_2(z) - w_{1M_1} \cdot z^{-M_1} \cdot Y_1(z)) \cdot z^{n-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1 - w_{1M_1} h_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)}}{1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)}} \cdot S_2(z) \cdot z^{n-1} dz + \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{(h_{1M_1} - w_{1M_1})}{1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)}} \cdot S_1(z) \cdot z^{n-M_1-1} dz \end{aligned} \quad (3.2.170)$$

$$\begin{aligned} d_1(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)}} T_1(z) \cdot z^{n-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1 - w_{2M_2} h_{1M_1} \cdot z^{-(M_1+M_2)}}{(1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)})^2} \cdot S_1(z) \cdot z^{n-1} dz + \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{(h_{2M_2} - w_{2M_2})}{(1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)})^2} \cdot S_2(z) \cdot z^{n-M_2-1} dz \end{aligned} \quad (3.2.171)$$

$$\begin{aligned} d_2(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)}} T_2(z) \cdot z^{n-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1 - w_{1M_1} h_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)}}{(1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)})^2} \cdot S_2(z) \cdot z^{n-1} dz + \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{(h_{1M_1} - w_{1M_1})}{(1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \cdot z^{-(M_1+M_2)})^2} \cdot S_1(z) \cdot z^{n-M_1-1} dz \end{aligned} \quad (3.2.172)$$

Utilizând (3.2.169)-(3.2.172) în intercorelațiile din (3.2.167) și (3.2.168), după calcule laborioase, acestea devin:

$$\begin{aligned}
E[t_2(n)d_1(n-M_1)] &= (h_{1M_1} - w_{1M_1}) \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) (w_{1M_1} w_{2M_2})^t \sum_{p=0}^{\infty} [R_1((t-p)(M_1+M_2)) - \\
&\quad - w_{2M_2} h_{1M_1} \cdot R_1((t+1-p)(M_1+M_2))] \cdot (w_{1M_1} w_{2M_2})^p + \\
&\quad + (h_{2M_2} - w_{2M_2}) \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) (w_{1M_1} w_{2M_2})^t \sum_{p=0}^{\infty} [R_2((t+1-p)(M_1+M_2)) - \\
&\quad - w_{1M_1} h_{2M_2} \cdot R_2((t-p)(M_1+M_2))] \cdot (w_{1M_1} w_{2M_2})^p
\end{aligned} \tag{3.2.173}$$

$$\begin{aligned}
E[t_1(n)d_2(n-M_2)] &= (h_{2M_2} - w_{2M_2}) \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) (w_{1M_1} w_{2M_2})^t \sum_{p=0}^{\infty} [R_2((t-p)(M_1+M_2)) - \\
&\quad - w_{1M_1} h_{2M_2} \cdot R_2((t+1-p)(M_1+M_2))] \cdot (w_{1M_1} w_{2M_2})^p + \\
&\quad + (h_{1M_1} - w_{1M_1}) \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) (w_{1M_1} w_{2M_2})^t \sum_{p=0}^{\infty} [R_1((t+1-p)(M_1+M_2)) - \\
&\quad - w_{2M_2} h_{1M_1} \cdot R_1((t-p)(M_1+M_2))] \cdot (w_{1M_1} w_{2M_2})^p
\end{aligned} \tag{3.2.174}$$

unde $R_1(\cdot)$ este funcția de autocorelație a semnalului s_1 și $R_2(\cdot)$ este funcția de autocorelație a semnalului s_2 .

În relațiile (3.2.173) și (3.2.174) avem sume de serii de serii. Stabilirea condițiilor în care aceste serii sunt absolut convergente se împarte în două etape.

În prima etapă se analizează convergența seriilor interioare care se însumează după indicele p . Utilizând criteriul de convergență al raportului (d'Alembert), pentru prima serie interioară din (3.2.173) trebuie să avem satisfăcută următoarea condiție:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{R_1((t-p-1)(M_1+M_2)) - w_{2M_2} h_{1M_1} R_1((t-p)(M_1+M_2))}{R_1((t-p)(M_1+M_2)) - w_{2M_2} h_{1M_1} R_1((t+1-p)(M_1+M_2))} \cdot w_{1M_1} w_{2M_2} \right| < 1 \tag{3.2.175}$$

Relația (3.2.175) constituie o primă condiție care trebuie îndeplinită de semnalul s_1 pentru ca să fie separabil. În condițiile relațiilor (3.2.161) și (3.2.162), în general semnalele îndeplinesc această condiție întrucât funcțiile de autocorelație sunt descrescătoare și viteza lor de variație scade și ea cu timpul. Semnalele care este posibil să nu poată îndeplini condiția (3.2.175) sunt cele periodice, a căror funcție de autocorelație este periodică și ea.

Condiții de convergență similare se găsesc și pentru celelalte serii interioare.

În a doua etapă se analizează convergența seriilor exterioare. Se notează cu $\Sigma_i(t)$ suma seriei interioare pentru indicele de sumare t al seriei exterioare. Aplicând din nou criteriul de convergență al raportului se obține condiția:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{(t+2)\Sigma_i(t+1)}{(t+1)\Sigma_i(t)} \cdot w_{1M_1} w_{2M_2} \right| < 1 \tag{3.2.176}$$

O analiză atentă a formei seriilor interioare reliefează faptul că termenii din paranteza dreaptă, pentru un t dat, sunt maximi atunci când p ia valori în jurul lui t . Crescându-l pe t , acești termeni, care sunt semnificativi, vor fi ponderați de factorul $(w_{1M_1} w_{2M_2})^p$ cu valori ale lui p tot mai mari, și deci, întrucât ponderile sunt subunitare, mărimea lor scade și în consecință se poate spune că sumele $\Sigma_i(t)$ sunt descrescătoare în modul. Datorită acestui fapt, se poate aprecia că relația (3.2.176) este îndeplinită dacă seriile interioare sunt convergente.

Se fac notațiile:

$$m_{11}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) (w_{1M_1} w_{2M_2})^t \sum_{p=0}^{\infty} [R_1((t-p)(M_1 + M_2)) -$$

$$- w_{2M_2} h_{1M_1} R_1((t+1-p)(M_1 + M_2))] (w_{1M_1} w_{2M_2})^p \quad (3.2.177)$$

$$m_{12}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) (w_{1M_1} w_{2M_2})^t \sum_{p=0}^{\infty} [R_2((t+1-p)(M_1 + M_2)) -$$

$$- w_{1M_1} h_{2M_2} R_2((t-p)(M_1 + M_2))] (w_{1M_1} w_{2M_2})^p \quad (3.2.178)$$

$$m_{21}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) (w_{1M_1} w_{2M_2})^t \sum_{p=0}^{\infty} [R_1((t+1-p)(M_1 + M_2)) -$$

$$- w_{2M_2} h_{1M_1} R_1((t-p)(M_1 + M_2))] (w_{1M_1} w_{2M_2})^p \quad (3.2.179)$$

$$m_{22}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) (w_{1M_1} w_{2M_2})^t \sum_{p=0}^{\infty} [R_2((t-p)(M_1 + M_2)) -$$

$$- w_{1M_1} h_{2M_2} R_2((t+1-p)(M_1 + M_2))] (w_{1M_1} w_{2M_2})^p \quad (3.2.180)$$

Utilizând notațiile de mai sus și relațiile de actualizare (3.2.167) și (3.2.168) se obține:

$$\begin{bmatrix} w_{1M_1}(n+1) - h_{1M_1} \\ w_{2M_2}(n+1) - h_{2M_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mu \cdot m_{11}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) & -\mu \cdot m_{12}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) \\ -\mu \cdot m_{21}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) & 1 - \mu \cdot m_{22}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{1M_1}(n) - h_{1M_1} \\ w_{2M_2}(n) - h_{2M_2} \end{bmatrix} \quad (3.2.181)$$

Pentru semnale cu funcția de autocorelație exprimabilă analitic, seriile din relațiile (3.2.177)-(3.2.180) pot fi sumate și evoluția sistemului dat de (3.2.181) poate fi studiată pornind din orice punct de start. În cazul când semnalele $s_1(n)$ și $s_2(n)$ sunt de tip zgomot alb, relațiile (3.2.177)-(3.2.180) devin:

$$m_{11}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = P_1 \cdot \frac{1 - h_{1M_1} w_{1M_1} w_{2M_2}^2}{(1 - (w_{1M_1} w_{2M_2})^2)^2} \quad (3.2.182)$$

$$m_{12}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = P_2 \cdot \frac{w_{1M_1}(w_{2M_2} - h_{2M_2})}{(1 - (w_{1M_1} w_{2M_2})^2)^2} \quad (3.2.183)$$

$$m_{21}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = P_1 \cdot \frac{w_{2M_2}(w_{1M_1} - h_{1M_1})}{(1 - (w_{1M_1} w_{2M_2})^2)^2} \quad (3.2.184)$$

$$m_{22}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = P_2 \cdot \frac{1 - h_{2M_2} w_{2M_2} w_{1M_1}^2}{(1 - (w_{1M_1} w_{2M_2})^2)^2} \quad (3.2.185)$$

unde P_1 și P_2 sunt puterile semnalelor s_1 și s_2 .

Relațiile (3.2.182)-(3.2.185) sunt valabile în condițiile în care seriile din însumarea cărora au fost deduse sunt convergente. Particularizând relațiile (3.2.175) și (3.2.176) rezultă că pentru ca aceste serii să fie convergente este necesar și suficient să aibă loc următoarea condiție:

$$|w_{1M_1} w_{2M_2}| < 1 \quad (3.2.186)$$

Relația (3.2.186) este de fapt și domeniul de valori ale coeficienților filtrelor pentru care bucla autoregresivă este stabilă.

Studiul stabilității asimptotice globale se face prin metoda planului fazelor.

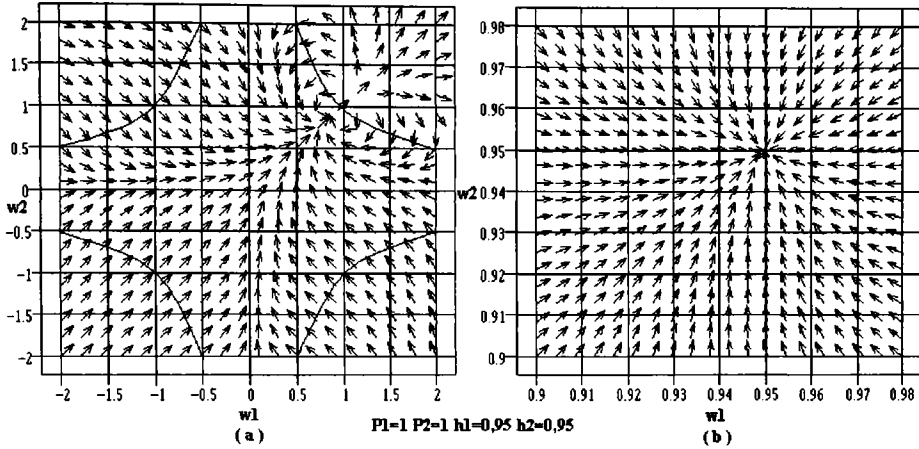


Fig. 3.2.19 Planul fazelor în cazul în care puterile semnalelor s_1 și s_2 sunt egale.
(a) Vedere de ansamblu. (b) Detaliu în jurul punctului de stabilitate asimptotică.

În Fig. 3.2.19 (a) este prezentat planul fazelor pentru un domeniu al coeficienților cuprins între -2 și 2. Cu linii continue sunt figurate și hiperbolele care delimitează valorile admisibile pentru care este asigurată valabilitatea relațiilor (3.2.182)-(3.2.185), domeniu definit de relația (3.2.186). Deci figura evidențiază corect evoluția sistemului în domeniul cuprins între toate cele patru hiperbole. Se observă că punctul (0,95 , 0,95) care reprezintă valorile coeficienților filtrelor H_1 și H_2 este punct de echilibru stabil asimptotic global.

În Fig. 3.2.19 (b) este reprezentat un detaliu în jurul punctului de echilibru care evidențiază mai pregnant afirmațiile făcute.

În Fig. 3.2.20 este reprezentat planul fazelor în situația când puterile celor două semnale sunt foarte diferite.

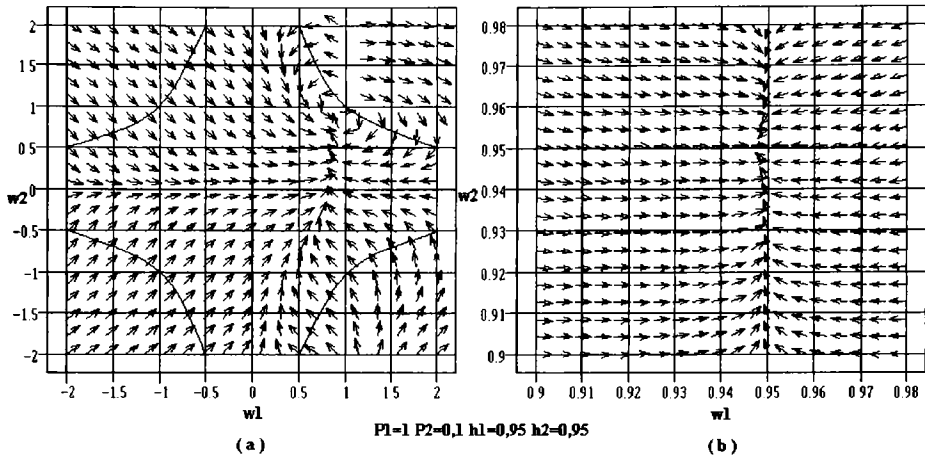


Fig. 3.2.20 Planul fazelor în cazul în care puterile semnalelor s_1 și s_2 sunt inegale.
(a) Vedere de ansamblu. (b) Detaliu în jurul punctului de stabilitate asimptotică.

Sunt valabile și în acest caz precizările asupra domeniului de valabilitate al concluziilor referitoare al relațiilor (3.2.182)-(3.2.185). De această dată se observă o puternică desimetrizare a figurilor care este evidentă, mai ales în figura de detaliu. Se observă că coeficientul filtrului W_1 este bine localizat în jurul punctului de echilibru, în timp ce coeficientul filtrului W_2 are o localizare mai difuză deoarece puterea semnalului $s_2(n)$, care îl determină în principal, este mult mai mică decât cea a celuilalt semnal. Din acest motiv, coeficientul filtrului W_1 are o durată a regimului tranzitoriu mult mai scurtă decât cea a coeficientului lui W_2 . Cu toate acestea și în acest caz punctul de echilibru este global asimptotic stabil.

În figurile (3.2.19) și (3.2.20) săgețile indică doar sensul și direcția de evoluție a punctului de funcționare, ele neindicând și mărimea gradientului. O reprezentare care să țină seama și de modulul gradientului nu este posibilă datorită diferențelor foarte mari ale valorilor acestuia în funcție de punctul de funcționare, aspect care ar conduce la o figură nelizibilă.

Din cele două figuri se observă că algoritmul rămâne asimptotic stabil în interiorul domeniului definit de relația (3.2.186). În exteriorul acestui domeniu nu se pot face precizări asupra comportării algoritmului.

3.2.2.3. Fenomenul zgomotului de adaptare

În jurul punctului de echilibru decorelatorul cu propagare înapoi are următoarele transformate Z aproximative ale semnalelor de ieșire:

$$T_1(z) \approx S_1(z) - \frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} S_2(z)C_2(z) \quad (3.2.187)$$

$$T_2(z) \approx S_2(z) - \frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} S_1(z)C_1(z) \quad (3.2.188)$$

În domeniul timp, semnalele $t_1(n)$ și $t_2(n)$ devin:

$$t_1(n) \approx s_1(n) - \underline{S}'_2(n)\underline{C}_2(n) \quad (3.2.189)$$

$$t_2(n) \approx s_2(n) - \underline{S}'^T_1(n) \underline{C}_1(n) \quad (3.2.190)$$

După cum se observă din relațiile (3.2.189) și (3.2.190), la convergență, decorelaturile realizează, cel puțin teoretic, o separare perfectă a semnalelor întrucât vectorii $\underline{C}_1(n)$ și $\underline{C}_2(n)$ devin nuli.

În cazul algoritmilor stochastici, cum este cel cu sistem de gradienti parțiali stochastici și SAD, vectorii $\underline{C}_1(n)$ și $\underline{C}_2(n)$ nu devin chiar nuli, ci devin vectori aleatori de medie zero, care au o varianță finită.

În cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali se poate aprecia că în jurul punctului de echilibru sunt valabile relațiile

$$\underline{C}_1(n) \approx \mu_1 \sum_{i=-\infty}^{n-1} s_2(i) \underline{S}'_1(i) + \mu_1 s_2(n) \underline{S}'_1(n) \quad (3.2.191)$$

$$\underline{C}_2(n) \approx \mu_2 \sum_{i=-\infty}^{n-1} s_1(i) \underline{S}'_2(i) + \mu_2 s_1(n) \underline{S}'_2(n) \quad (3.2.192)$$

Introducând (3.2.191) și (3.2.192) în (3.2.190) și respectiv (3.2.189) se obține:

$$\begin{aligned} t_1(n) &\approx s_1(n) - \mu_2 s_1(n) \underline{S}'^T_2(n) \underline{S}'_2(n) - \mu_2 \sum_{i=-\infty}^{n-1} s_1(i) \underline{S}'^T_2(n) \underline{S}'_2(i) = \\ &= s_1(n) \left(1 - \mu_2 \underline{S}'^T_2(n) \underline{S}'_2(n) \right) - \mu_2 \sum_{i=-\infty}^{n-1} s_1(i) \underline{S}'^T_2(n) \underline{S}'_2(i) \end{aligned} \quad (3.2.193)$$

$$\begin{aligned} t_2(n) &\approx s_2(n) - \mu_1 s_2(n) \underline{S}'^T_1(n) \underline{S}'_1(n) - \mu_1 \sum_{i=-\infty}^{n-1} s_2(i) \underline{S}'^T_1(n) \underline{S}'_1(i) = \\ &= s_2(n) \left(1 - \mu_1 \underline{S}'^T_1(n) \underline{S}'_1(n) \right) - \mu_1 \sum_{i=-\infty}^{n-1} s_2(i) \underline{S}'^T_1(n) \underline{S}'_1(i) \end{aligned} \quad (3.2.194)$$

În relațiile (3.2.193) și (3.2.194) se observă că apare un fenomen de distorsionare a semnalului reconstruit față de cel original la care se adaugă și un zgomot. Prin menținerea parametrilor mărime de pas la valori scăzute aceste fenomene nedorite pot fi aduse la un nivel neglijabil.

În relațiile (3.2.193) și (3.2.194) ultimii termeni reprezintă medieri în timp, medieri care datorită independenței statistice a semnalelor $s_1(n)$ și $s_2(n)$, pe de o parte, și a faptului că produsele scalare se fac între vectori cu argumente de timp diferite, pot, mai ales în cazul semnalelor de bandă largă, să conducă la valori nesemnificative. În cazul semnalelor de bandă îngustă, valorile pot deveni semnificative.

Termenii $\mu_2 \underline{S}'^T_2(n) \underline{S}'_2(n)$ și $\mu_1 \underline{S}'^T_1(n) \underline{S}'_1(n)$ din paranteze sunt cantități strict pozitive. Deci distorsionarea semnalelor $t_1(n)$ și $t_2(n)$ se realizează în sensul micșorării modulului acestora în raport cu $s_1(n)$ și respectiv $s_2(n)$. Pe lângă efectul negativ, acela de deformare a semnalului reconstruit, fenomenul are și o latură benefică asupra stabilității sistemului. Astfel, o creștere a puterii unuia dintre semnalele $s_1(n)$ și $s_2(n)$ se traduce printr-o micșorare, într-o oarecare măsură a modulului semnalului $t_2(n)$ și respectiv $t_1(n)$. Deoarece acestea, la rândul lor, intră în expresia lui $\underline{C}_1(n)$ și respectiv $\underline{C}_2(n)$, rezultatul este asemănător unei reacții negative asupra erorii filtrelor \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 . Acest fenomen îi conferă algoritmului cu sistem de gradienti parțiali o rezistență sporită la ieșirea din domeniul de stabilitate, mai ales când filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 au coeficienți situați la marginea acestui domeniu.

3.2.3. ANALIZA COMPARATIVĂ A PERFORMANTELOR ALGORITMULUI SAD CU PROPAGARE ÎNAPOI SI ALE ALGORITMULUI CU SISTEME DE GRADIENTI PARȚIALI

În această secțiune se fac comparații între performanțele algoritmului cu gradienti parțiali, prezentat în Secțiunea 3.2.2, și cele ale algoritmului SAD cu propagare înapoi, prezentat în Secțiunea 2.5.1, care are ecuațiile de actualizare (2.5.17) și (2.5.18). Folosind metodologia din Secțiunea 3.2.2, se refac analizele asupra stabilității. De asemenea, în final, pe un exemplu, se realizează o comparație a regimurilor tranzitorii ale celor doi algoritmi.

3.2.3.1. Analiza stabilității asimptotice a algoritmului SAD cu propagare înapoi

Ecuațiile de actualizare ale algoritmului SAD cu propagare înapoi (2.5.17) și (2.5.18) se rescriu sub formă vectorială astfel:

$$\hat{W}_1(n+1) = \hat{W}_1(n) + \mu_1 t_2(n) T_1(n) \quad (3.2.195)$$

$$\hat{W}_2(n+1) = \hat{W}_2(n) + \mu_2 t_1(n) T_2(n) \quad (3.2.196)$$

unde

$$T_1(n) = [t_1(n) \quad t_1(n-1) \quad \dots \quad t_1(n-M_1+1)]^T \quad (3.2.197)$$

$$T_2(n) = [t_2(n) \quad t_2(n-1) \quad \dots \quad t_2(n-M_2+1)]^T \quad (3.2.198)$$

Se presupune că pentru valori mici ale parametrilor μ_1 și μ_2 algoritmul descris de ecuațiile (3.2.195) și (3.2.196) evoluează în medie ca și algoritmul următor:

$$W_1(n+1) = W_1(n) + \mu_1 E[t_2(n) T_1(n)] \quad (3.2.199)$$

$$W_2(n+1) = W_2(n) + \mu_2 E[t_1(n) T_2(n)] \quad (3.2.200)$$

Pentru început se reia analiza stabilității asimptotice locale.

Liniazând ecuațiile (3.2.199) și (3.2.200) în jurul punctului critic $W_1=H_1$ și $W_2=H_2$, și urmând aceeași metodologie ca în Secțiunea 3.2.2, se ajunge la următorul sistem:

$$\begin{bmatrix} C_1(n+1) \\ C_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} - \mu_1 \mathcal{M}_{11} & -\mu_1 \mathcal{M}_{12} \\ -\mu_2 \mathcal{M}_{21} & \mathcal{A} - \mu_2 \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(n) \\ C_2(n) \end{bmatrix} \quad (3.2.201)$$

unde, de data aceasta matricele \mathcal{M}_{11} , \mathcal{M}_{12} , \mathcal{M}_{21} și \mathcal{M}_{22} au formele următoare:

$$\mathcal{M}_{11} = E[S_1(n) S_1'^T(n)] \quad (3.2.202)$$

$$\mathcal{M}_{12} = E \left[s_2(n) \begin{bmatrix} S_2'^T(n) \\ \vdots \\ S_2'^T(n-M_1+1) \end{bmatrix} \right] \quad (3.2.203)$$

$$\mathcal{M}_{21} = E \left[s_1(n) \begin{bmatrix} S_1'^T(n) \\ \vdots \\ S_1'^T(n-M_2+1) \end{bmatrix} \right] \quad (3.2.204)$$

$$\mathcal{M}_{22} = E[S_2(n) S_2'^T(n)] \quad (3.2.205)$$

unde $S_1'(n)$ este definit de relația (3.2.44), $S_2'(n)$ este definit de relația (3.2.45) și

$$\underline{s}_1(n) = [s_1(n) \quad s_1(n-1) \quad \dots \quad s_1(n-M_1+1)]^T \quad (3.2. 206)$$

$$\underline{s}_2(n) = [s_2(n) \quad s_2(n-1) \quad \dots \quad s_2(n-M_2+1)]^T \quad (3.2. 207)$$

Având în vedere modul cum sunt definite semnalele $s_1'(n)$ și $s_2'(n)$, matricele $\circ\mathcal{M}_{11}$, $\circ\mathcal{M}_{12}$, $\circ\mathcal{M}_{21}$ și $\circ\mathcal{M}_{22}$ iau formele următoare:

$$\circ\mathcal{M}_{11} = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \begin{bmatrix} r_1(i) & r_1(i+1) & \dots & r_1(i+M_1-1) \\ r_1(i-1) & r_1(i) & \dots & r_1(i+M_1-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1(i-M_1+1) & r_1(i-M_1+2) & \dots & r_1(i) \end{bmatrix} \quad (3.2. 208)$$

$$\circ\mathcal{M}_{12} = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \begin{bmatrix} r_2(i) & r_2(i+1) & \dots & r_2(i+M_2-1) \\ r_2(i+1) & r_2(i+2) & \dots & r_2(i+M_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_2(i+M_1-1) & r_2(i+M_1) & \dots & r_2(i+M_1+M_2-2) \end{bmatrix} \quad (3.2. 209)$$

$$\circ\mathcal{M}_{21} = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \begin{bmatrix} r_1(i) & r_1(i+1) & \dots & r_1(i+M_1-1) \\ r_1(i+1) & r_1(i+2) & \dots & r_1(i+M_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1(i+M_2-1) & r_1(i+M_2) & \dots & r_1(i+M_1+M_2-2) \end{bmatrix} \quad (3.2. 210)$$

$$\circ\mathcal{M}_{22} = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \begin{bmatrix} r_2(i) & r_2(i+1) & \dots & r_2(i+M_2-1) \\ r_2(i-1) & r_2(i) & \dots & r_2(i+M_2-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_2(i-M_2+1) & r_2(i-M_2+2) & \dots & r_2(i) \end{bmatrix} \quad (3.2. 211)$$

Este interesant să se facă o comparație între aceste matrice și cele date de relațiile (3.2.74) la (3.2.77). Se observă că de data aceasta matricele $\circ\mathcal{M}_{11}$ și $\circ\mathcal{M}_{22}$ nu mai sunt simetrice, singura matrice sigur pozitiv definită din componența lor fiind cea de ordin zero, care este matricea de autocorelație a semnalului $s_1(n)$, respectiv $s_2(n)$. De asemenea, ponderile acestor matrice de autocorelație diferă substanțial, în acest caz fiind ponderate de g_0 care, este evident, mult mai mic decât ponderea pe care o au matricele de autocorelație în cazul relațiilor (3.2.74) și (3.2.77) care este egală cu $\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2$. Aceste aspecte conduc la situația ca, în

aceleași condiții, algoritmul SAD să aibe o rezervă de stabilitate mai scăzută decât cea a algoritmului cu sisteme de gradienti parțiali. De fapt, reluând exemplele de studiu al stabilității asimptotice locale din Secțiunea 3.2.2, la o primă analiză, se constată că algoritmul SAD nu este asimptotic stabil în nici unul dintre cazuri. Această concluzie se trage deoarece metodologia de analiză presupune că filtrele \mathbf{W}_1 , \mathbf{W}_2 , \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 sunt cauzale (nu strict cauzale). Dacă se consideră că aceste filtre sunt strict cauzale, atunci analiza trebuie făcută eliminând din fiecare dintre matricele \mathcal{M}_{11} , \mathcal{M}_{12} , \mathcal{M}_{21} și \mathcal{M}_{22} prima linie și prima coloană, deoarece se consideră coeficienții de ordin zero ai filtrelor egali cu zero și, de fapt, nu se actualizează.

În acest caz, pentru o situație similară cu cea din Exemplitul 2 din Secțiunea 3.2.2.2, în care se presupun semnale de tip zgomet alb, ne conduce la sistemul de ecuații:

$$c_{1M_1}(n+1) = (1 - \mu_1 P_1) c_{1M_1}(n) \quad (3.2. 212)$$

$$c_{2M_2}(n+1) = (1 - \mu_2 P_2) c_{2M_2}(n) \quad (3.2. 213)$$

Ecuatiile (3.2.212) și (3.2.213) au fost obținute pentru un caz ceva mai general în care cele două filtre \mathbf{H} sunt tot de tip linie de întârziere, dar cu parametrii diferiți, adică: $H_1(z) = h_{1M_1} z^{-M_1}$ și $H_2(z) = h_{2M_2} z^{-M_2}$.

Dacă se consideră că filtrele \mathbf{W} sunt strict cauzale, în cazul algoritmului cu sisteme de gradienti parțiali se obțin ecuațiile:

$$c_{1M_1}(n+1) = \left(1 - \mu_1 \frac{P_1}{1 - (h_{1M_1} h_{2M_2})^2} \right) c_{1M_1}(n) \quad (3.2.214)$$

$$c_{2M_2}(n+1) = \left(1 - \mu_2 \frac{P_2}{1 - (h_{1M_1} h_{2M_2})^2} \right) c_{2M_2}(n) \quad (3.2.215)$$

Se observă că ambele seturi de ecuații (3.2.212)-(3.2.213) și (3.2.214)-(3.2.215) sunt convergente spre zero dacă se alege în mod adecvat parametrii μ_1 și μ_2 .

Trebuie remarcat faptul că matricele \mathcal{M}_{11} și \mathcal{M}_{22} date de (3.2.208) și respectiv de (3.2.211) nu sunt sigur pozitiv definite pentru orice parametri ai semnalelor și filtrelor, pe când cele date de relațiile (3.2.74) și (3.2.77) sunt sigur pozitiv definite, fiind matricele de autocorelație ale semnalelor $s'_1(n)$ și $s'_2(n)$.

S-a reluat și exemplul privind convergența asimptotică globală. Deoarece acest exemplu se referă la sisteme de mixare de tip linie de întârziere, cu un singur coeficient, pentru cazul semnalelor de tip zgomot alb, pentru algoritmul SAD cu propagare înapoi, se poate scrie:

$$\begin{bmatrix} w_{1M_1}(n+1) - h_{1M_1} \\ w_{2M_2}(n+1) - h_{2M_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mu \cdot m_{11}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) & -\mu \cdot m_{12}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) \\ -\mu \cdot m_{21}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) & 1 - \mu \cdot m_{22}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{1M_1}(n) - h_{1M_1} \\ w_{2M_2}(n) - h_{2M_2} \end{bmatrix} \quad (3.2.216)$$

unde, de data aceasta avem:

$$m_{11}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = P_1 \cdot \frac{1 - h_{1M_1} w_{1M_1} w_{2M_2}^2}{1 - (w_{1M_1} w_{2M_2})^2} \quad (3.2.217)$$

$$m_{12}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = P_2 \cdot \frac{w_{1M_1}(w_{2M_2} - h_{2M_2})}{1 - (w_{1M_1} w_{2M_2})^2} \quad (3.2.218)$$

$$m_{21}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = P_1 \cdot \frac{w_{2M_2}(w_{1M_1} - h_{1M_1})}{1 - (w_{1M_1} w_{2M_2})^2} \quad (3.2.219)$$

$$m_{22}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = P_2 \cdot \frac{1 - h_{2M_2} w_{2M_2} w_{1M_1}^2}{1 - (w_{1M_1} w_{2M_2})^2} \quad (3.2.220)$$

Urmând aceeași metodă de analiză ca și în exemplul similar din Secțiunea 3.2.2, se obține aceeași condiție, descrisă de inegalitatea (3.2.186), de stabilitate asimptotică globală.

În acest caz planul fazelor în aceleași condiții este dat în Fig. 3.2.21 și Fig. 3.2.22.

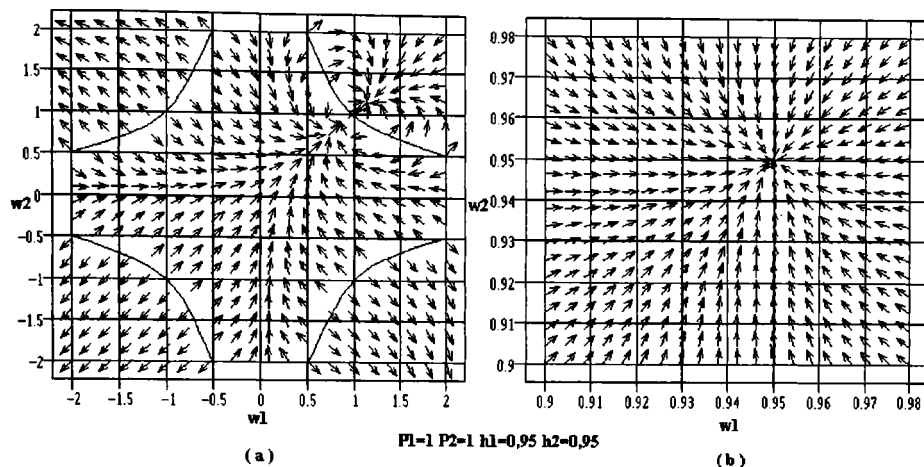


Fig. 3.2.21 Planul fazelor în cazul în care puterile semnalelor s_1 și s_2 sunt egale.
(a) Vedere de ansamblu. (b) Detaliu în jurul punctului de stabilitate asimptotică.

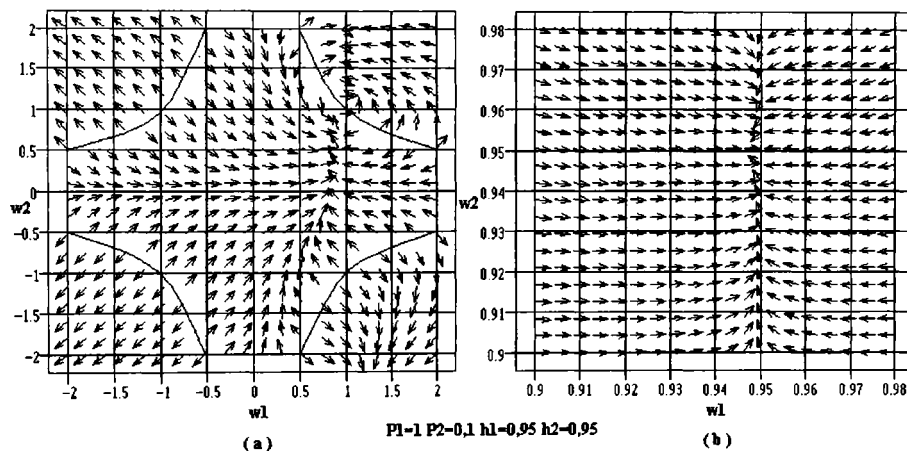


Fig. 3.2.22 Planul fazelor în cazul în care puterile semnalelor s_1 și s_2 sunt inegale.
(a) Vedere de ansamblu. (b) Detaliu în jurul punctului de stabilitate asimptotică.

Se observă că în interiorul domeniului delimitat de cele patru hiperbole algoritmul SAD cu propagare înapoi este global asimptotic stabil. Particularitățile de evoluție sunt foarte asemănătoare cu cele ale algoritmului cu sistem de gradienti parțiali.

Este evident faptul că și aici este vorba despre un caz extrem, în care s-au considerat filtrele cu un singur coeficient. În cazul mai multor coeficienți, sunt valabile considerațiile făcute în legătură cu stabilitatea asimptotică locală privind rezerva de stabilitate.

3.2.3.2. Fenomenul zgomotului de adaptare

Spre deosebire de cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, în cazul algoritmului SAD cu propagare înapoi se poate aprecia că în jurul punctului de echilibru sunt valabile relațiile

$$\underline{C}_1(n) \approx \mu_1 \sum_{i=-\infty}^{n-1} s_2(i) \underline{S}_1(i) + \mu_1 s_2(n) \underline{S}_1(n) \quad (3.2.221)$$

$$\underline{C}_2(n) \approx \mu_2 \sum_{j=-\infty}^{n-1} s_1(j) \underline{S}_2(j) + \mu_2 s_1(n) \underline{S}_2(n) \quad (3.2.222)$$

Introducând (3.2.221) și (3.2.222) în (3.2.190) și respectiv (3.2.189) se obține:

$$\begin{aligned} t_1(n) &\approx s_1(n) - \mu_2 s_1(n) \underline{S}'_2(n) \underline{S}_2(n) - \mu_2 \sum_{i=-\infty}^{n-1} s_1(i) \underline{S}'_2(n) \underline{S}_2(i) = \\ &= s_1(n) \left(1 - \mu_2 \underline{S}'_2(n) \underline{S}_2(n) \right) - \mu_2 \sum_{i=-\infty}^{n-1} s_1(i) \underline{S}'_2(n) \underline{S}_2(i) \end{aligned} \quad (3.2.223)$$

$$\begin{aligned} t_2(n) &\approx s_2(n) - \mu_1 s_2(n) \underline{S}'_1(n) \underline{S}_1(n) - \mu_1 \sum_{i=-\infty}^{n-1} s_2(i) \underline{S}'_1(n) \underline{S}_1(i) = \\ &= s_2(n) \left(1 - \mu_1 \underline{S}'_1(n) \underline{S}_1(n) \right) - \mu_1 \sum_{i=-\infty}^{n-1} s_2(i) \underline{S}'_1(n) \underline{S}_1(i) \end{aligned} \quad (3.2.224)$$

De data aceasta cantitățile $\mu_2 \underline{S}'_2(n) \underline{S}_2(n)$ și $\mu_1 \underline{S}'_1(n) \underline{S}_1(n)$ din interiorul parantezelor din relațiile (3.2.223) și (3.2.224) nu mai au un semn definit, pot fi atât pozitive cât și negative. Datorită acestui fapt, efectul de reacție negativă asupra erorilor filtrelor \mathbf{W}_1 și \mathbf{W}_2 nu se mai manifestă. Din contră, este posibil, mai ales dacă filtrele \mathbf{H}_1 și \mathbf{H}_2 au coeficienți la marginea domeniului de stabilitate, să apară chiar un efect de reacție pozitivă, efect care poate conduce algoritmul SAD cu propagare înapoi în regim divergent.

Acest fenomen explică de ce în experimente se observă că algoritmul cu sistem de gradienti parțiali rămâne convergent la valori ale parametrilor mărime de pas μ_1 și μ_2 la care algoritmul SAD este divergent.

3.2.3.3. Analiza comparativă a regimului tranzitoriu

Datorită complexității relațiilor care descriu algoritmul SAD și cel cu sistem de gradienti parțiali, o analiză cantitativă a regimului tranzitoriu nu este posibilă decât pe cazuri cu totul particulare. Chiar și în cele mai simple exemple, prezența buclei autoregresive ne obligă la o abordare aproximativă a problemei. De aceea, în această secțiune se consideră cazul în care sistemul de mixare este format din filtre F.I.R. de tip linie de întârziere, cu un singur coeficient și semnalele $s_1(n)$ și $s_2(n)$ sunt de tip zgomot alb. Conform deducțiilor făcute cu ocazia analizei stabilității asimptotice globale, pentru acest exemplu, pentru cei doi algoritmi sunt valabile următoarele relații de recurență:

- Pentru algoritmul cu sisteme de gradienti parțiali:

$$w_{1M_1}(n+1) = w_{1M_1}(n) - \mu_1 P_1 (w_{1M_1}(n) - h_{1M_1}) \cdot \frac{1 - h_{1M_1} w_{1M_1}(n) w_{2M_2}^2(n)}{\left(1 - (w_{1M_1}(n) w_{2M_2}(n))^2\right)^2} -$$

$$- \mu_1 P_2 (w_{2M_2}(n) - h_{2M_2})^2 \cdot \frac{w_{1M_1}(n)}{\left(1 - (w_{1M_1}(n) w_{2M_2}(n))^2\right)^2} \quad (3.2. 225)$$

$$w_{2M_2}(n+1) = w_{2M_2}(n) - \mu_2 P_2 (w_{2M_2}(n) - h_{2M_2}) \cdot \frac{1 - h_{2M_2} w_{2M_2}(n) w_{1M_1}^2(n)}{\left(1 - (w_{1M_1}(n) w_{2M_2}(n))^2\right)^2} -$$

$$- \mu_2 P_1 (w_{1M_1}(n) - h_{1M_1})^2 \cdot \frac{w_{2M_2}(n)}{\left(1 - (w_{1M_1}(n) w_{2M_2}(n))^2\right)^2} \quad (3.2. 226)$$

• Pentru algoritmul SAD cu propagare înapoi:

$$w_{1M_1}(n+1) = w_{1M_1}(n) - \mu_1 P_1 (w_{1M_1}(n) - h_{1M_1}) \cdot \frac{1 - h_{1M_1} w_{1M_1}(n) w_{2M_2}^2(n)}{1 - (w_{1M_1}(n) w_{2M_2}(n))^2} -$$

$$- \mu_1 P_2 (w_{2M_2}(n) - h_{2M_2})^2 \cdot \frac{w_{1M_1}(n)}{1 - (w_{1M_1}(n) w_{2M_2}(n))^2} \quad (3.2. 227)$$

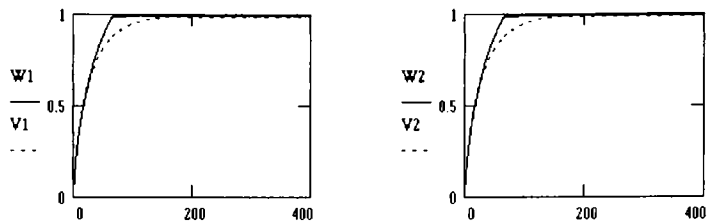
$$w_{2M_2}(n+1) = w_{2M_2}(n) - \mu_2 P_2 (w_{2M_2}(n) - h_{2M_2}) \cdot \frac{1 - h_{2M_2} w_{2M_2}(n) w_{1M_1}^2(n)}{1 - (w_{1M_1}(n) w_{2M_2}(n))^2} -$$

$$- \mu_2 P_1 (w_{1M_1}(n) - h_{1M_1})^2 \cdot \frac{w_{2M_2}(n)}{1 - (w_{1M_1}(n) w_{2M_2}(n))^2} \quad (3.2. 228)$$

Ecuatiile de actualizare (3.2.225)-(3.2.228) au fost programate în MATCAD și pentru valori diferite ale parametrilor s-au obținut figurile de mai jos. În aceste figuri s-au notat cu W1 și W2 coeficienții $w_{1M_1}(n)$ și respectiv $w_{2M_2}(n)$ ai algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu V1 și V2 coeficienții $w_{1M_1}(n)$ și respectiv $w_{2M_2}(n)$ ai algoritmului SAD cu propagare înapoi, h1 și h2 sunt coeficienții h_{1M_1} și h_{2M_2} , P1 și P2 sunt puterile semnalelor $s_1(n)$ și respectiv $s_2(n)$, iar u1 și u2 sunt mărimile de pas μ_1 și μ_2 .

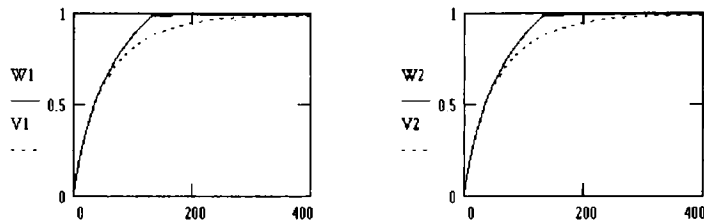
Coeficienții algoritmului cu sistem de gradienti parțiali s-a trasat cu linie continuă, iar ai algoritmului SAD cu linie punctată. Suprapunerea graficelor evoluției acestor coeficienți permite o comparare vizuală a performanțelor relative ale celor două sisteme.

Prima remarcă care se poate face urmărind Fig. 3.2.23 este că algoritmul SAD, la aceiași parametri, este mai lent decât algoritmul cu sistem de gradienti parțiali. Diferențele sunt cu atât mai evidente, cu cât produsul h1-h2 este mai apropiat, în modul, de unu. În exemplele considerate diferențele între duratele regimurilor tranzitorii sunt aproximativ de la simplu la dublu.



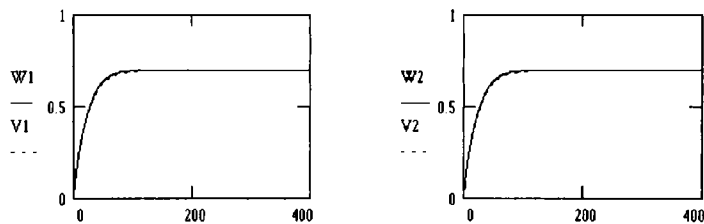
$h1=0,99$ $h2=0,99$ $P1=1$ $P2=1$ $u1=0,05$ $u2=0,05$

(a)



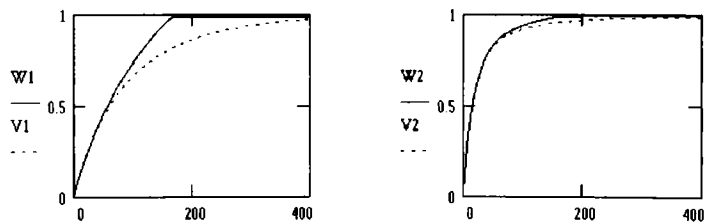
$h1=0,99$ $h2=0,99$ $P1=1$ $P2=1$ $u1=0,025$ $u2=0,025$

(b)



$h1=0,7$ $h2=0,7$ $P1=1$ $P2=1$ $u1=0,05$ $u2=0,05$

(c)



$h1=0,99$ $h2=0,99$ $P1=0,3$ $P2=1$ $u1=0,05$ $u2=0,05$

(d)

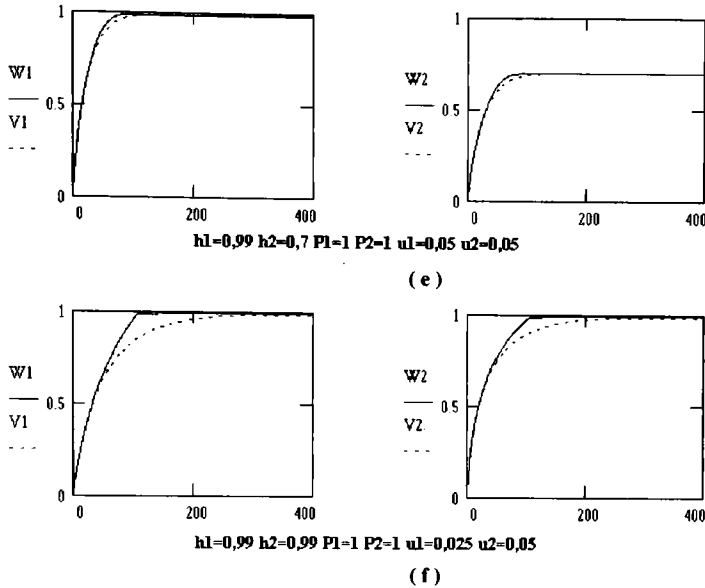


Fig. 3.2.23. Analiza comparativă a regimurilor tranzitorii.

Acest comportament se datorează diferenței dintre termenii de la numitorii din membrii drepti ai ecuațiilor de actualizare (3.2.225)-(3.2.226) pe de o parte și (3.2.227)-(3.2.228), pe de altă parte.

Se observă că algoritmi au duratele regimurilor tranzitorii cu atât mai scurte, cu cât valorile mărimilor de pas μ sunt mai mari, atât pentru cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cât și pentru cazul algoritmului SAD (figura 3.2.23 a comparată cu b). Dacă pașii μ nu sunt egali (vezi figurile 3.2.23 a, b și f) duratele regimurilor tranzitorii se reduc cu creșterea unei valori medii a celor două mărimi μ_1 și μ_2 .

Comparând figurile a și d, unde s-au luat valori diferite pentru puterile semnalelor, constatăm că la diferențe mari între puteri se obțin regimuri tranzitorii mai lungi.

Comparând figurile a și c, constatăm că pe măsură ce coeficienții filtrelor H devin mai mici evoluțiile celor doi algoritmi devin mai puțin diferite.

3.2.3.4. Analiza comparativă a stabilității globale asimptotice a celor doi algoritmi în cazul în care operează cu semnale colorate

Toate analizele efectuate până în acest moment au fost finalizate, din punct de vedere cantitativ, în cazul când semnalele surselor au fost considerate de tip zgomot alb. O analiză a calităților celor doi algoritmi nu ar fi completă dacă nu s-ar putea face și aprecieri legate de influența gradului de colorare al semnalelor surselor. Din acest motiv, se consideră cazul simplu, când funcțiile de corelație ale semnalelor $s_1(n)$ și $s_2(n)$ sunt de tip exponențial, adică:

$$r_1(l) = E[s_1(n)s_1(n-l)] = \sigma_1^2 \cdot \alpha_1^{|l|}; \quad 0 < \alpha_1 < 1 \quad (3.2.229)$$

$$r_2(l) = E[s_2(n)s_2(n-l)] = \sigma_2^2 \cdot \alpha_2^{|l|}; \quad 0 < \alpha_2 < 1 \quad (3.2.230)$$

Acest tip de funcție de corelație are calitatea că pentru $\alpha \rightarrow 0$ se apropie de funcția de corelație a semnalului de tip zgomot alb, iar pentru $\alpha \rightarrow 1$ se apropie de corelația unui semnal constant, adică de bandă zero.

Densitatea spectrală de putere este dată de relația:

$$S(z) = \frac{\sigma^2(1-\alpha^2)}{(1-\alpha \cdot z^{-1})(1-\alpha \cdot z)} \quad (3.2.231)$$

În Fig. 3.2.24 este prezentat graficul lărgimii de bandă, considerată la jumătate din puterea maximă, a spectrului de putere al unui semnal care are o funcție de corelație de tip exponențial.

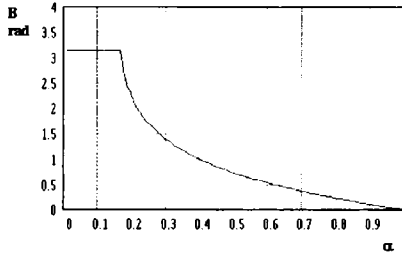


Fig. 3.2.24. Legătura între lărgimea de bandă și parametrul α în cazul semnalelor cu funcție de corelație exponențială.

Introducând (3.2.229) și (3.2.230) în (3.2.177) la (3.2.180), după însumarea seriilor, rezultă următoarele relații valabile pentru algoritmul cu sistem de gradienti:

$$m_{11}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = \sigma_1^2 \cdot \frac{1 - w_{2M_2} h_{1M_1} \alpha_1^{M_1+M_2}}{(1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \alpha_1^{M_1+M_2})^2 \left(1 - \frac{w_{1M_1} w_{2M_2}}{\alpha_1^{M_1+M_2}}\right)} + \sigma_1^2 \cdot \frac{w_{1M_1} w_{2M_2}}{(1 - w_{1M_1}^2 w_{2M_2}^2)^2} \left\{ \frac{\alpha_1^{M_1+M_2} - h_{1M_1} w_{2M_2}}{1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \alpha_1^{M_1+M_2}} - \frac{1 - h_{1M_1} w_{2M_2} \alpha_1^{M_1+M_2}}{\alpha_1^{M_1+M_2} - w_{1M_1} w_{2M_2}} \right\} \quad (3.2.232)$$

$$m_{12}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = \sigma_2^2 \cdot \frac{\alpha_2^{M_1+M_2} - w_{1M_1} h_{2M_2}}{(1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \alpha_2^{M_1+M_2})^2 \left(1 - \frac{w_{1M_1} w_{2M_2}}{\alpha_2^{M_1+M_2}}\right)} + \sigma_2^2 \cdot \frac{w_{1M_1} w_{2M_2}}{(1 - w_{1M_1}^2 w_{2M_2}^2)^2} \left\{ \frac{1 - w_{1M_1} h_{2M_2} \alpha_2^{M_1+M_2}}{1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \alpha_2^{M_1+M_2}} - \frac{\alpha_2^{M_1+M_2} - w_{1M_1} h_{2M_2}}{\alpha_2^{M_1+M_2} - w_{1M_1} w_{2M_2}} \right\} \quad (3.2.233)$$

$$m_{21}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = \sigma_1^2 \cdot \frac{\alpha_1^{M_1+M_2} - h_{1M_1} w_{2M_2}}{(1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \alpha_1^{M_1+M_2})^2 \left(1 - \frac{w_{1M_1} w_{2M_2}}{\alpha_1^{M_1+M_2}}\right)} + \sigma_1^2 \cdot \frac{w_{1M_1} w_{2M_2}}{(1 - w_{1M_1}^2 w_{2M_2}^2)^2} \left\{ \frac{1 - h_{1M_1} w_{2M_2} \alpha_1^{M_1+M_2}}{1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \alpha_1^{M_1+M_2}} - \frac{\alpha_1^{M_1+M_2} - h_{1M_1} w_{2M_2}}{\alpha_1^{M_1+M_2} - w_{1M_1} w_{2M_2}} \right\} \quad (3.2.234)$$

$$\begin{aligned}
m_{22}(w_{1M_1}, w_{2M_2}) = & \sigma_2^2 \cdot \frac{1 - h_{2M_2} w_{1M_1} \alpha_2^{M_1+M_2}}{\left(1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \alpha_2^{M_1+M_2}\right)^2 \left(1 - \frac{w_{1M_1} w_{2M_2}}{\alpha_2^{M_1+M_2}}\right)} + \\
& + \sigma_2^2 \cdot \frac{w_{1M_1} w_{2M_2}}{\left(1 - w_{1M_1} w_{2M_2}\right)^2} \left\{ \frac{\alpha_2^{M_1+M_2} - w_{1M_1} h_{2M_2}}{1 - w_{1M_1} w_{2M_2} \alpha_2^{M_1+M_2}} - \frac{1 - w_{1M_1} h_{2M_2} \alpha_2^{M_1+M_2}}{\alpha_2^{M_1+M_2} - w_{1M_1} w_{2M_2}} \right\}
\end{aligned} \tag{3.2.235}$$

Pentru cazul algoritmului SAD se obțin relații asemănătoare. Singura deosebire care apare este că parantezele ridicate la pătrat de la numitorii fracțiilor din relațiile (3.2.232) la (3.2.235), în cazul algoritmului SAD apar la puterea întâi.

Relațiile (3.2.232)-(3.2.235) și omoloagele lor pentru algoritmul SAD sunt valabile dacă este îndeplinită condiția (3.2.186).

O remarcă interesantă care trebuie făcută, este că termenii care dictează banda semnalelor α_1 și α_2 apar la puterea M_1+M_2 . Deoarece ei sunt subunitari, cu cât M_1+M_2 este mai mare, cu atât valorile rezultante sunt mai mici. Acest lucru înseamnă că pentru aceleași semnale, care nu sunt de tip zgomot alb, caracteristicile algoritmilor se apropie de cele ale obținute în cazul zgomotelor albe, cu cât suma diferențelor de drum de la surse la receptori este mai mare. Deci există o dependență între poziția relativă în spațiu a surselor în raport cu receptorii, caracteristicile spectrale ale semnalelor și parametrii procesului de decorolare.

Utilizând relațiile de mai sus, algoritmul cu sistem de gradienti și SAD se pot scrie, sub o formă concisă, astfel:

$$\begin{aligned}
w_{1M_1}(n+1) = & w_{1M_1}(n) - \mu_1 m_{11}(w_{1M_1}(n), w_{2M_2}(n)) (w_{1M_1}(n) - h_{1M_1}) - \\
& - \mu_1 m_{12}(w_{1M_1}(n), w_{2M_2}(n)) (w_{2M_2}(n) - h_{2M_2})
\end{aligned} \tag{3.2.236}$$

$$\begin{aligned}
w_{2M_2}(n+1) = & w_{2M_2}(n) - \mu_2 m_{21}(w_{1M_1}(n), w_{2M_2}(n)) (w_{1M_1}(n) - h_{1M_1}) - \\
& - \mu_2 m_{22}(w_{1M_1}(n), w_{2M_2}(n)) (w_{2M_2}(n) - h_{2M_2})
\end{aligned} \tag{3.2.237}$$

Utilizând relațiile (3.2.236) și (3.2.237) s-au trasat diagramele din planul fazelor pentru diferiți parametri α_i pentru a evidenția deosebirile de comportament ale celor doi algoritmi.

În toate testele evidențiate în figurile 3.2.25 la 3.2.28 s-au considerat coeficienții $h_{1M_1} = h_{2M_2} = 0,98$. În partea din stânga a fiecărei figuri, notată cu (a) este prezentat planul fazelor pentru algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, iar în partea dreaptă, notată cu (b), este prezentat planul fazelor pentru algoritmul SAD. De fiecare dată, în figura de sus, planul fazelor este prezentat pentru un domeniu cuprins între -2 și 2 pentru fiecare dintre coeficienții filtrelor W_1 și W_2 , iar în figura de jos, un detaliu al figurii de sus, pentru un domeniu cuprins între $0,8$ și $1,2$ pentru fiecare dintre coeficienți.

Pe fiecare figură este trasat domeniul delimitat de relația (3.2.186) în interiorul căruia sunt valabile concluziile asupra comportamentului algoritmului.

Săgețile indică numai direcția și sensul de evoluție al algoritmilor.

Din examinarea acestor figuri se pot trage concluzii asupra stabilității asimptotice globale a celor doi algoritmi.

Figurile 3.2.25 arată că în cazul semnalelor de puteri egale și de bandă largă (s-au ales parametri α mici) proprietățile de stabilitate sunt similare pentru cei doi algoritmi în domeniul de valori pentru care produsul celor doi coeficienți este subunitar. Se remarcă în mod clar punctul de echilibru global asimptotic stabil (0,98 , 0,98) prin faptul traiectoriile converg spre el. În afara domeniului delimitat de hiperbole nu avem dreptul să facem aprecieri deoarece relațiile deduse sunt valabile numai în interiorul acestuia.

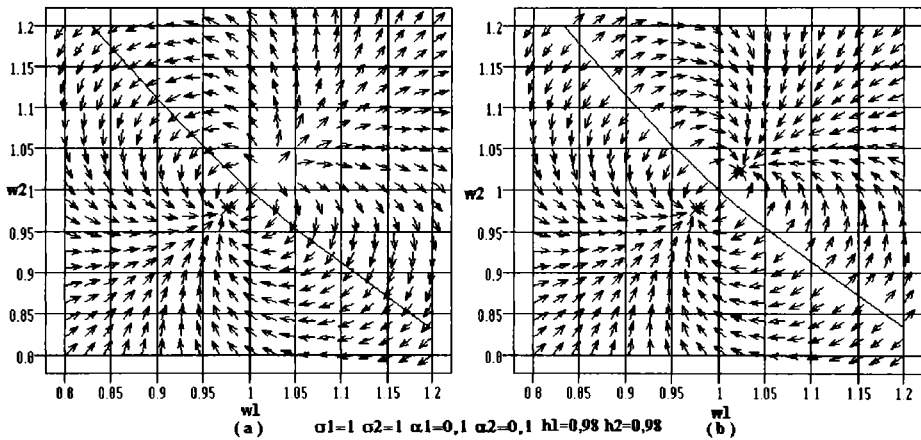
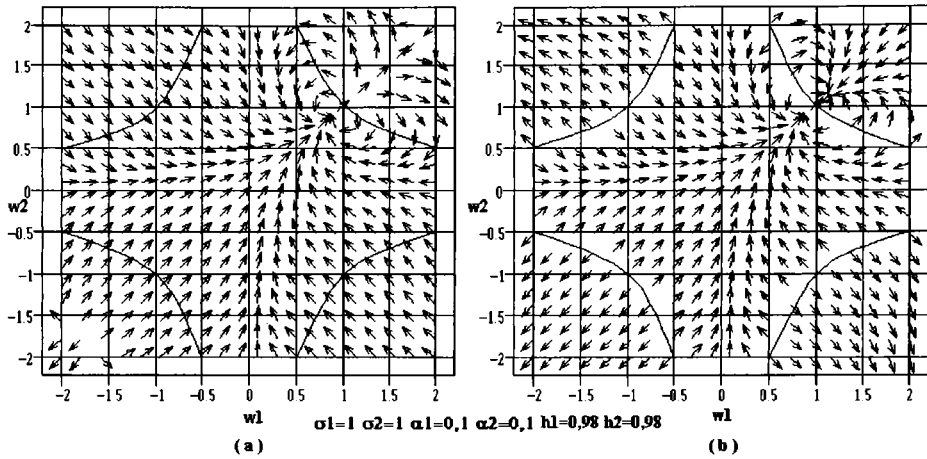


Fig.3.2.25 Planul fazelor în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali și al algoritmului SAD în cazul semnalelor de bandă largă.

Pentru semnalele de bandă largă cei doi algoritmi au comportament asemănător.

Din analiza acestor figuri se observă că în toate situațiile, ambii algoritmi sunt stabili dacă punctul de start al algoritmului se află în interiorul domeniului $|w_{1M_1} \cdot w_{2M_2}| < 1$.

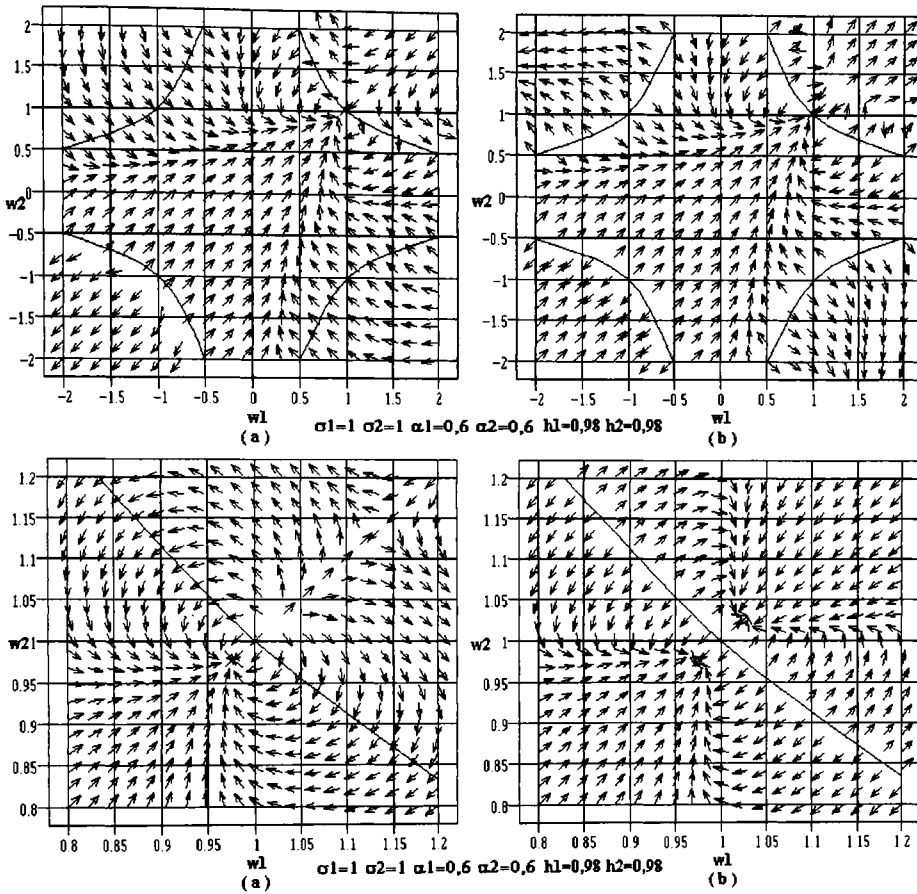


Fig. 3.2.26 Planul fazelor în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali și al algoritmului SAD în cazul semnalelor de bandă medie.

În cazul semnalelor de bandă medie situația este prezentată în Fig. 3.2.26. Și în acest caz comportarea celor doi algoritmi rămâne asemănătoare.

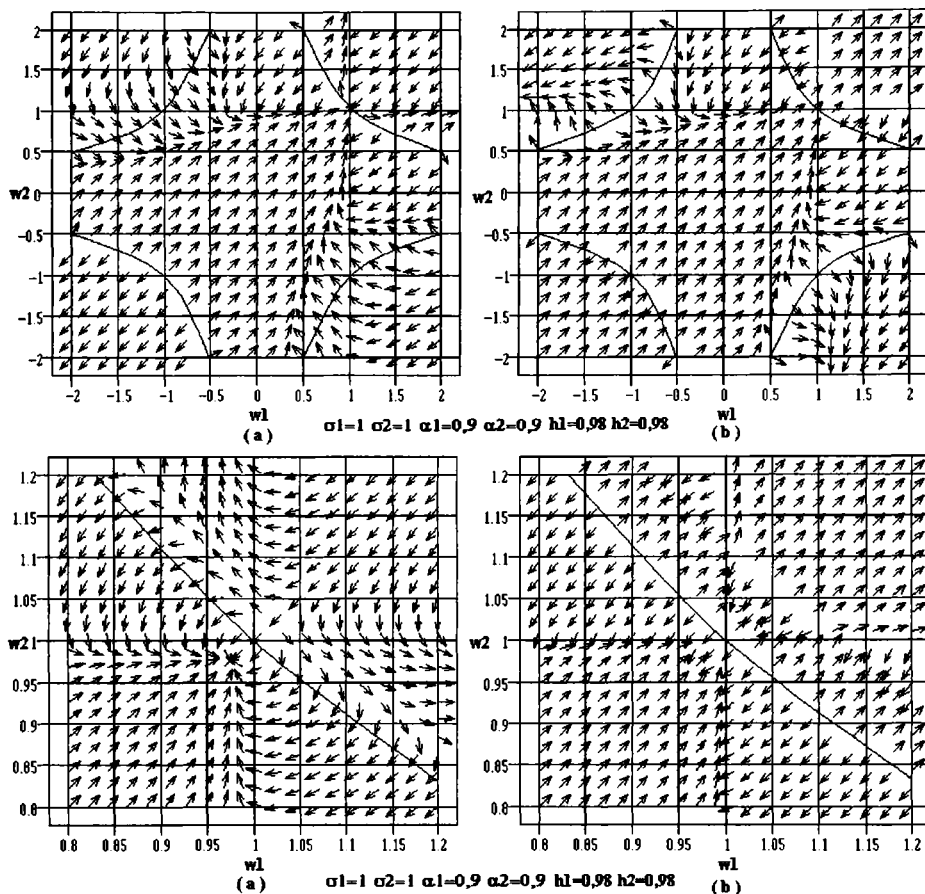


Fig. 3.2.27 Planul fazelor în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali și al algoritmului SAD în cazul semnalelor de bandă îngustă.

În cazul când se îngustează mult banda semnalelor, așa cum este cazul în Fig. 3.2.27, se păstrează domeniul de stabilitate asimptotică globală delimitat de hiperbole $|w_{1M_1} \cdot w_{2M_2}| < 1$.

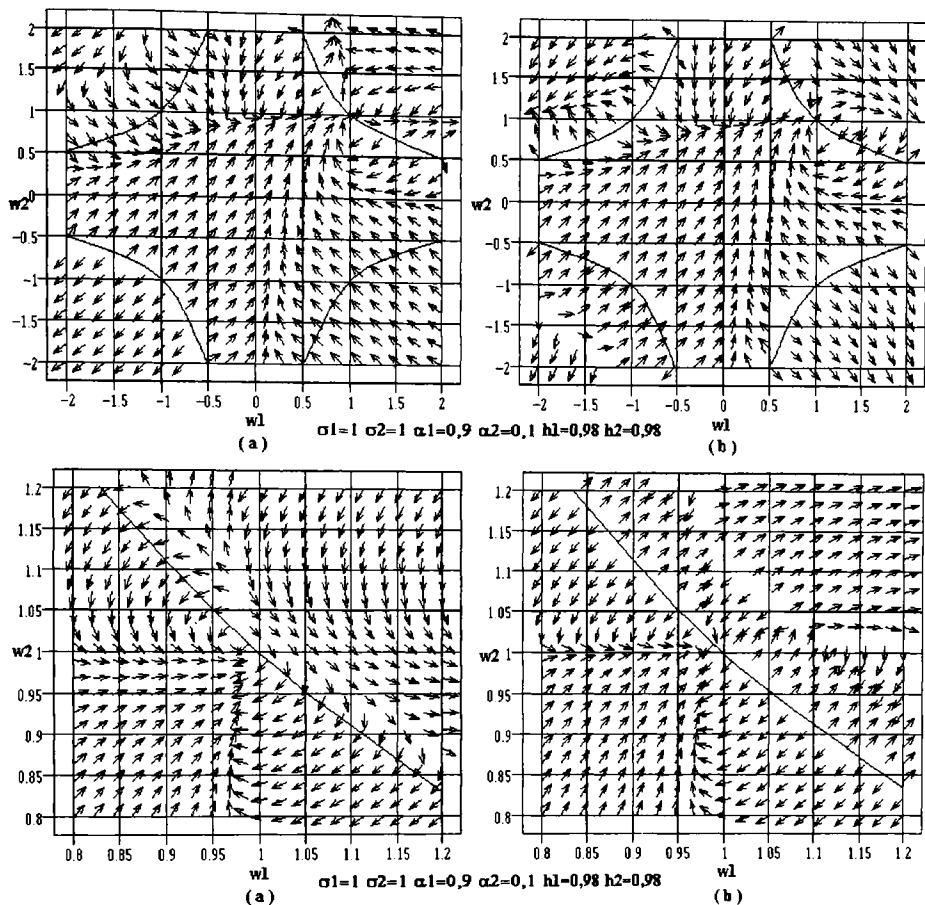


Fig. 3.2.28 Planul fazelor în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali și al algoritmului SAD în cazul când un semnal este de bandă îngustă și celălalt de bandă largă.

În cazul când unul dintre semnale este de bandă largă și celălalt este de bandă îngustă comportamentul celor doi algoritmi este evidențiat în Fig. 3.2.28.

Prima remarcă care poate fi făcută este că apare o desimetrizare a figurilor. În acest caz se poate afirma că sub diagonalele secundare ale figurilor, comportamentul tinde să se apropie de situația când ambele semnale sunt de bandă largă, iar deasupra diagonalei secundare, comportamentul tinde să fie asemănător cu situația când ambele semnale sunt de bandă îngustă.

3.2.4. REZULTATE EXPERIMENTALE ȘI METODE DE ÎMBUNĂȚIRE ALE PERFORMANȚELOR DE STABILITATE ȘI REGIM TRANZITORIU ALE ALGORITMILOR CU SISTEM DE GRADIENTI PARȚIALI ȘI SAD CU PROPAGARE ÎNAPOI

În această secțiune sunt prezentate rezultatele unor experimente de separare ale unor semnale vocale și muzicale efectuate atât cu algoritmul SAD cu propagare înapoi cât și cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali. De asemenea, utilizând concluziile din secțiunile precedente, se propun și se experimentează metode de îmbunătățire ale performanțelor de stabilitate și de regim tranzitoriu ale acestor algoritmi.

3.2.4.1. Prezentarea condițiilor experimentelor

Experimentele efectuate au fost gândite pentru a pune în evidență proprietățile algoritmilor prin varierea parametrilor geometrici de poziționare ale surselor în raport cu receptorii și prin modificarea puterilor relative ale semnalelor surselor.

În calitate de semnale ale surselor au fost alese, pentru s_1 , un fragment de muzică instrumentală care are pianul ca instrument solist, iar pentru s_2 , s-a ales un fragment dintr-un monolog interpretat de un actor într-o sală de spectacol. Cele două semnale prezintă contrast sonor, astfel încât pot fi bine sesizate auditiv în mixturi în care raportul puterilor lor este substanțial diferit de unitate. Duratele celor două semnale sunt de aproximativ 30 de secunde. Frecvența de eșantionare este de 11025Hz și cele două semnale au aproximativ 335000 de eșantioane.

S-au luat în considerare două situații de poziționare ale surselor în raport cu receptorii prezentate în Fig. 3.2.29 și Fig. 3.2.30.

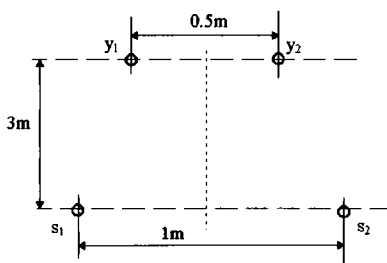


Fig. 3.2.29. Poziționarea surselor și receptorilor în cadrul testului I.

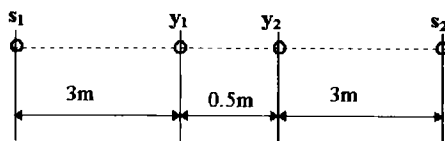


Fig. 3.2.30. Poziționarea surselor și receptorilor în cadrul testului II.

În ambele cazuri se consideră situația defavorabilă când coeficienții filtrelor sistemului de mixare depind direct proporțional cu puterea întâi a raportului distanțelor de la surse la receptori (și nu cu puterea a doua a acestui raport care conduce la valori mai mici ale coeficienților). Considerând că semnalele sunt sonore, că se propagă prin aer cu viteza de 340m/s, că frecvența de eșantionare este de 11025Hz și aproximând filtrele de mixare cu filtre F.I.R. cu un singur coeficient, se obțin următoarele funcții de transfer pentru filtrele H_1 și H_2 :

1. În cazul testului I:

$$H_1(z) = H_2(z) = 0.97 \cdot z^{-2} \quad (3.2.238)$$

2. În cazul testului 2:

$$H_1(z) = H_2(z) = 0.85 \cdot z^{-16} \quad (3.2.239)$$

Întrucât, în cazul unor situații reale nu se pot anticipa cu exactitate ordinele filtrelor W_1 și W_2 , acestea se aleg de valori acoperitoare. În cazul de față, în cadrul testului 1 s-a considerat că filtrele au ordinul patru, iar în cazul testului 2 au ordinul 20. Deci, algoritmiile vor optimiza 2×4 coeficienți pentru testul 1 și 2×20 de coeficienți pentru testul 2.

S-au considerat filtre de mixare H_1 și H_2 cu un singur coeficient pentru a se putea evidenția mai bine evoluția coeficienților filtrelor W_1 și W_2 din vecinătatea celor care trebuie să fie diferiți de zero.

În cazul unei comportări ideale a algoritmilor, filtrele W_1 și W_2 , la convergență, ar trebui să aibă aceleași funcții de transfer ca și filtrele H_1 și H_2 , respectiv date de (3.2.238) și (3.2.239).

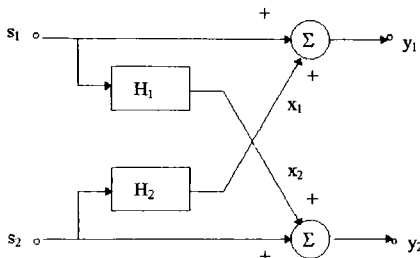


Fig. 3.2.31. Modelul de însumare al semnalelor provenite de la cele două surse.

modelului de mixare din Fig. 2.2.1 care se reproduce aici în Fig. 3.2.31.

În cadrul fiecărui test s-au considerat trei rapoarte de puteri ale semnalelor s_1 și s_2 . În primul caz s-au ales semnalele de puteri aproximativ egale, în al doilea caz semnalul s_1 are o putere de aproximativ zece ori mai mare decât s_2 , iar în al treilea caz semnalul s_1 are o putere de aproximativ zece ori mai mică decât s_2 .

Pentru fiecare dintre cele două teste și în cadrul acestora, pentru fiecare dintre rapoartele de puteri, s-au construit semnalele de la intrarea receptorilor, y_1 și y_2 conform

3.2.4.2. Testul 1

În figurile 3.2.32 la 3.2.39 sunt prezentate semnalele de test în situația când s_1 și s_2 au puteri aproximativ egale.

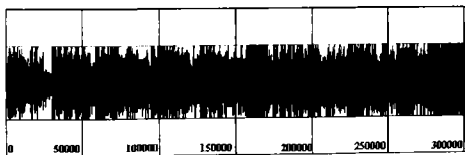


Fig. 3.2.32. Semnalul s_1 .

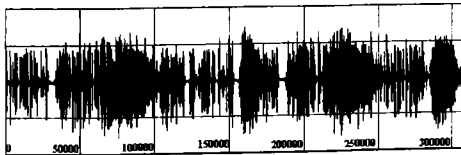


Fig. 3.2.33. Semnalul s_2 .

În Fig. 3.2.32 este prezentat semnalul s_1 , iar în Fig. 3.2.33 este prezentat semnalul s_2 . Semnalul s_1 are amplitudinile limitate la valoarea 0.5. În cazul semnalului s_2 , care este vocal, s-a ales, pe cât a fost posibil, ca amplitudinile maxime să fie tot în jurul valorii de 0.5. În partea de jos a fiecărei figuri gradațiile de timp au fost marcate în număr de eşantioane. Se observă că în timp ce semnalul muzical, s_1 , apare aproximativ ca o bandă de grosime relativ constantă, semnalul vocal, s_2 , are porțiuni de liniște, marcate ca având o amplitudine apropiată de zero, care alternează cu porțiuni în care amplitudinea

depășește valoarea de 0.5. Aceste amănunte vor fi utilizate pentru a aprecia vizual calitatea separării semnalelor.

În figurile următoare sunt prezentate semnalele y_1 și y_2 .

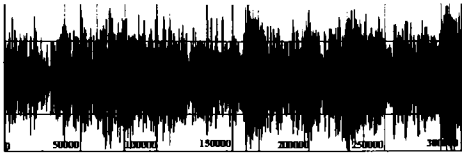


Fig. 3.2.34. Semnalul y_1 .

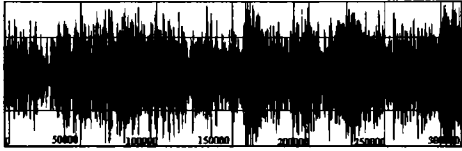


Fig. 3.2.35. Semnalul y_2 .

În Fig. 3.2.34 este prezentat semnalul y_1 , iar în Fig. 3.2.35. este prezentat semnalul y_2 . Comparându-le cu figurile precedente se observă efectul de însumare al semnalelor s_1 și s_2 . Se reamintește faptul că în cazul semnalului y_1 , acesta a fost obținut prin însumarea semnalului s_1 cu o versiune a semnalului s_2 trecută prin filtrul H_2 care are funcția de transfer dată de relația (3.2.328). În mod analog, semnalul y_2 a fost obținut prin însumarea semnalului s_2 cu o versiune a semnalului s_1 trecută prin filtrul H_1 care are funcția de transfer dată tot de relația

(3.2.328).

Pentru a se putea realiza și analize și în domeniul frecvență, în figurile următoare sunt prezentate spectrele semnalelor s_1 , s_2 , y_1 și y_2 , estimate folosind 1024 de eșantioane, pornind din punctul reprezentat de eșantionul 300000.

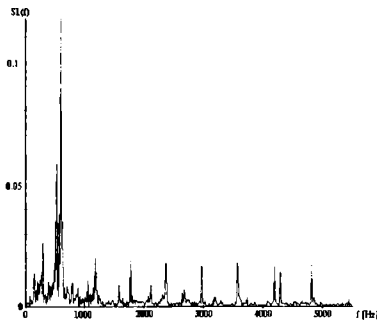


Fig.3.2.36. Spectrul semnalului s_1 în jurul punctului 300000.

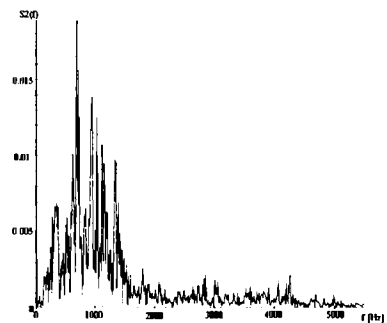


Fig.3.2.37. Spectrul semnalului s_2 în jurul punctului 300000.

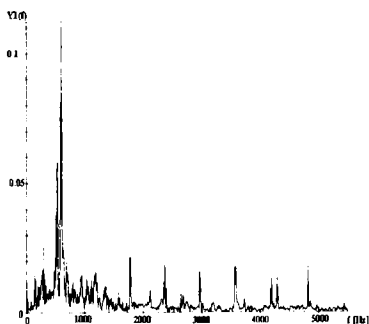


Fig. 3.2.38. Spectrul semnalului y_1 în jurul punctului 300000.

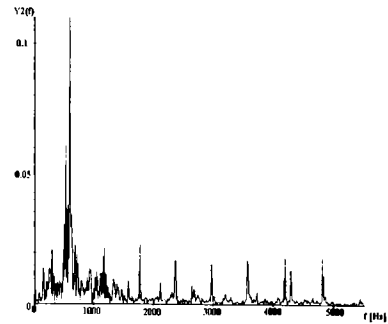


Fig. 3.2.39. Spectrul semnalului y_2 în jurul punctului 300000.

Spectrul semnalului s_1 are ca notă distinctivă prezența unei componente dominante în jurul frecvenței de 600 Hz și a armonicilor acesteia (efectul pianului).

Spectrul semnalului s_2 se caracterizează printr-un lob principal cuprins între frecvențele de 300 și 1600 Hz.

Trebuie remarcat faptul că în timp ce amplitudinea maximă a componentelor spectrale ale semnalului s_1 este egală cu 0,12, amplitudinea maximă a componentelor spectrale ale semnalului s_2 este de 0,018, adică de 6,67 ori mai mică. Această discrepanță de amplitudine este vizibilă în spectrele semnalelor y_1 și y_2 în care spectrul semnalului s_1 este dominant. Totuși în zona de frecvențe cuprinsă între 300 și 1600Hz este vizibil și lobul principal al spectrului semnalului s_2 .

Semnalele y_1 și y_2 , cu proprietățile arătate mai sus, au fost supuse unor procese de decorelare atât cu ajutorul algoritmului SAD, cât și cu ajutorul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali.

Factorii mărime de pas μ_1 și μ_2 au fost aleși în așa fel încât să aibă aproximativ valorile maxime pentru care algoritmi rămân stabili. Această valoare s-a stabilit a fi 0.001. Pentru valori ale lui μ_1 și μ_2 egale cu 0.01 algoritmi au fost divergenți.

Rezultatele obținute, în cazul aplicării celor doi algoritmi pe durata de 30 de secunde a celor două semnale, sunt evidențiate în paralel în figurile 3.2.40 la 3.2.55.

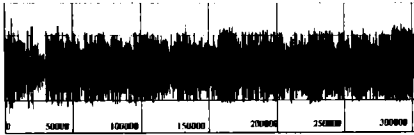


Fig. 3.2.40. Semnalul t_1 în cazul decorelării cu algoritmul SAD.

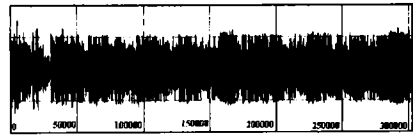


Fig. 3.2.41. Semnalul t_1 în cazul decorelării cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali.

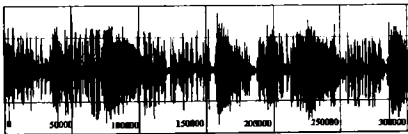


Fig. 3.2.42. Semnalul t_2 în cazul decorelării cu algoritmul SAD.

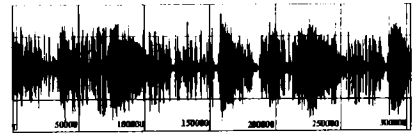


Fig. 3.2.43. Semnalul t_2 în cazul decorelării cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali.

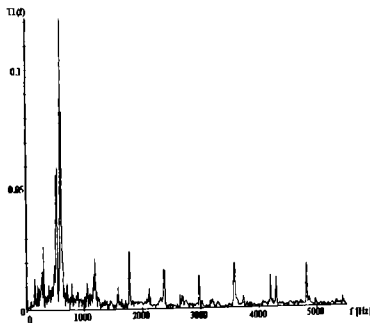


Fig. 3.2.44. Spectrul semnalului t_1 în cazul decorelării cu algoritmul SAD.

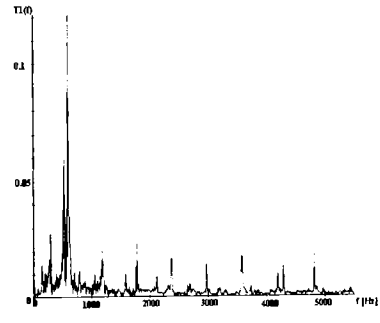


Fig. 3.2.45. Spectrul semnalului t_1 în cazul decorelării cu algoritmul cu gradienti parțiali.

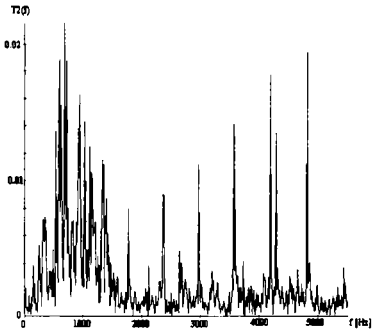


Fig. 3.2.46. Spectrul semnalului t_2 în cazul decorelării cu algoritmul SAD.

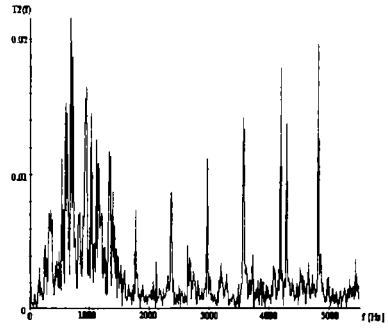


Fig. 3.2.47. Spectrul semnalului t_2 în cazul decorelării cu algoritmul de gradienti parțiali.

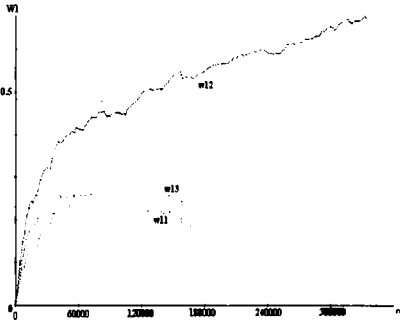


Fig. 3.2.48. Evoluția coeficienților filtrului W_1 în cazul algoritmului SAD.

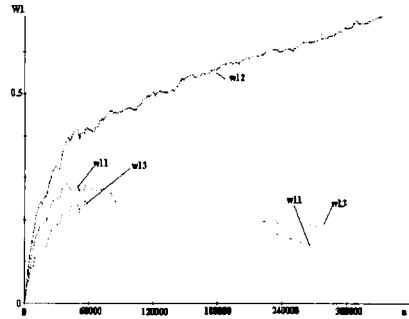


Fig. 3.2.49. Evoluția coeficienților filtrului W_1 în cazul algoritmului cu gradienti parțiali.

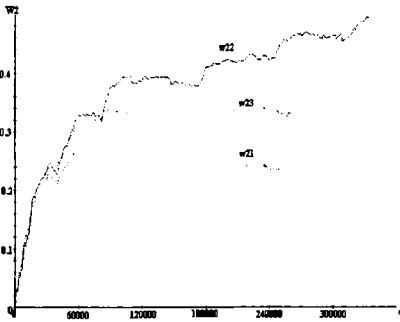


Fig. 3.2.50. Evoluția coeficienților filtrului W_2 în cazul algoritmului SAD.

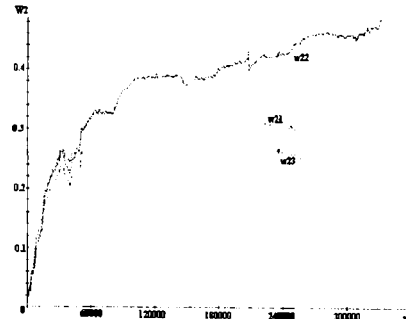


Fig. 3.2.51. Evoluția coeficienților filtrului W_2 în cazul algoritmului cu gradienti parțiali.

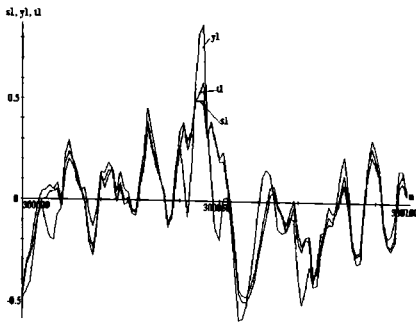


Fig. 3.2.52. Detaliu comparativ al semnalelor s_1 , y_1 și t_1 în cazul decorelării cu algoritmul SAD.

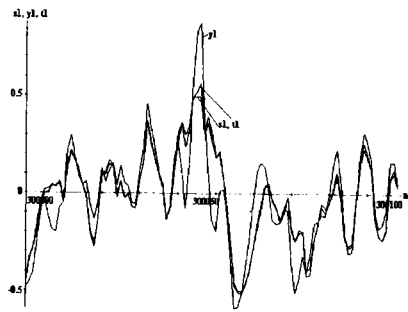


Fig. 3.2.53. Detaliu comparativ al semnalelor s_1 , y_1 și t_1 în cazul decorelării cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali.

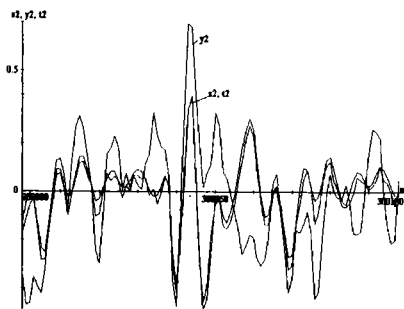


Fig. 3.2.54. Detaliu comparativ al semnalelor s_2 , y_2 și t_2 în cazul decorelării cu algoritmul SAD.

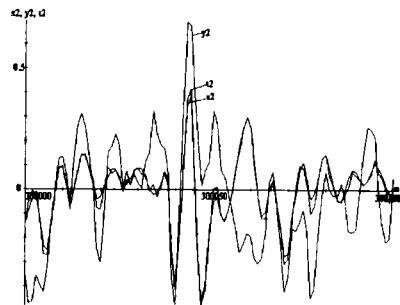


Fig. 3.2.55. Detaliu comparativ al semnalelor s_2 , y_2 și t_2 în cazul decorelării cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali.

Întrucât se constată, din figurile 3.2.48 la 3.2.51, care prezintă evoluțiile coeficienților filtrelor W_1 și W_2 , că algoritmi evoluează lent și nu ajung pe durata de 30 de secunde ca filtrele să atingă valorile optime pentru realizarea decorelării corecte, s-au rulat cei doi algoritmi într-un regim echivalent cu concatenarea de zece ori fiecare dintre fișierele semnalelor y_1 și y_2 . În acest fel s-a studiat procesul de decorelare pe o durată de aproximativ 300 de secunde. După epuizarea acestei durate, pe care am considerat-o ca fiind de regim tranzitoriu, s-au mai rulat algoritmi păstrând ca valori inițiale ale coeficienților, valorile astfel obținute, și s-au evidențiat semnalele t_1 și t_2 în acest al 11-lea ciclu de decorelare. Rezultatele astfel obținute sunt prezentate în figurile următoare:

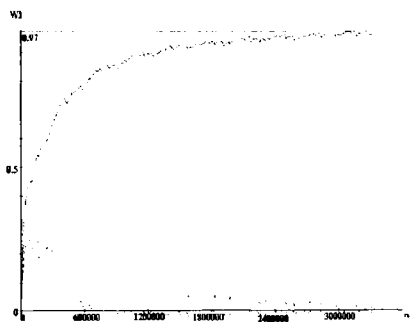


Fig. 3.2.56. Evoluția coeficienților filtrului W_1 în cazul aplicării algoritmului SAD pe o durată de 300 de secunde.

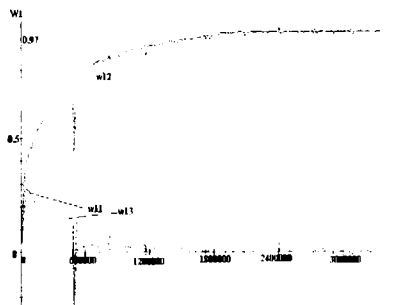


Fig. 3.2.57. Evoluția coeficienților filtrului W_1 în cazul aplicării algoritmului cu gradienti parțiali pe o durată de 300 de secunde.

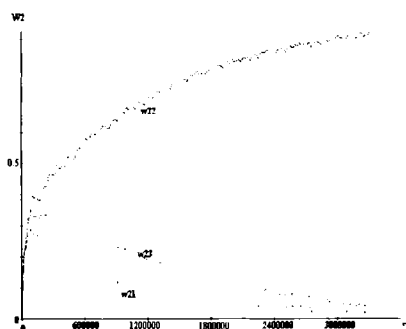


Fig. 3.2.58. Evoluția coeficienților filtrului W_2 în cazul aplicării algoritmului SAD pe o durată de 300 de secunde.

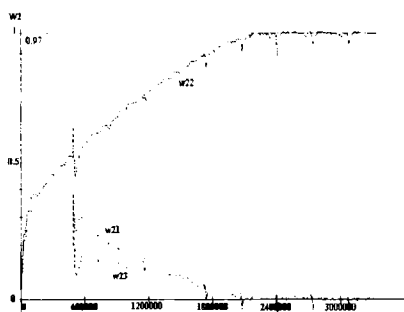


Fig. 3.2.59. Evoluția coeficienților filtrului W_2 în cazul aplicării algoritmului cu gradienti parțiali pe o durată de 300 de secunde.

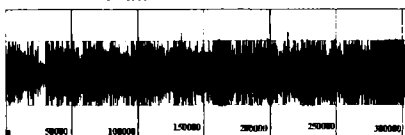


Fig. 3.2.60. Semnalul t_1 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decolare cu algoritmul SAD.

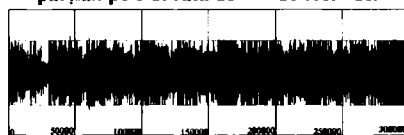


Fig. 3.2.61. Semnalul t_1 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decolare cu algoritmul cu gradienti parțiali.

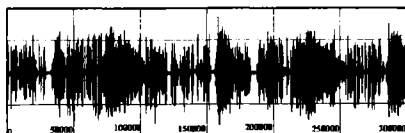


Fig. 3.2.62. Semnalul t_2 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decolare cu algoritmul SAD.

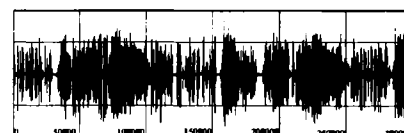


Fig. 3.2.63. Semnalul t_2 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decolare cu algoritmul cu gradienti parțiali.

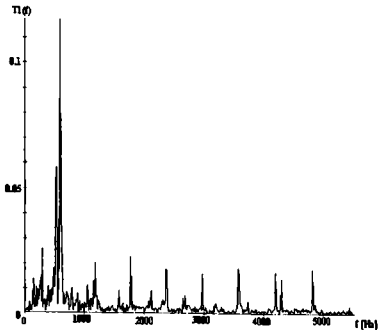


Fig. 3.2.64. Spectrul semnalului t_1 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decolare cu algoritmul SAD.

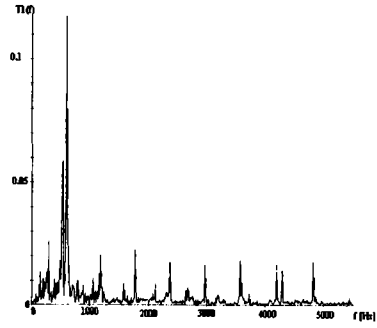


Fig. 3.2.65. Spectrul semnalului t_1 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decolare cu algoritmul cu gradienti parțiali.

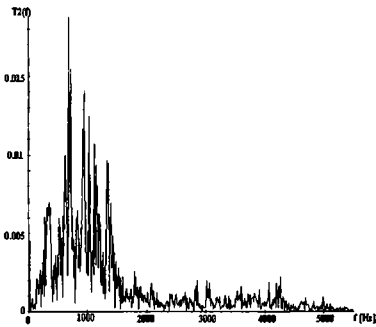


Fig. 3.2.66. Spectrul semnalului t_2 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decolare cu algoritmul SAD.

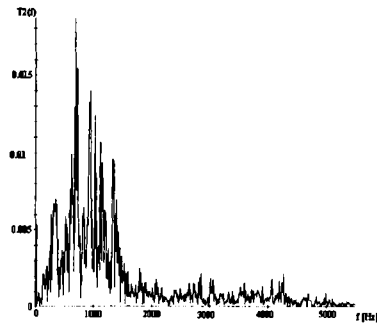


Fig. 3.2.67. Spectrul semnalului t_2 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decolare cu algoritmul cu gradienti parțiali.

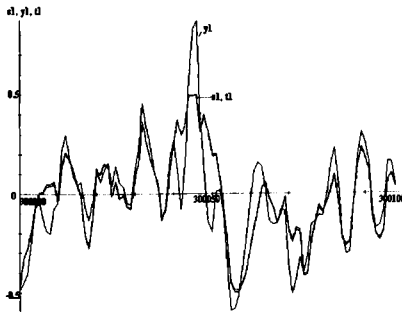


Fig. 3.2.68. Detaliu comparativ al semnalelor s_1 , y_1 și t_1 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decolare cu algoritmul SAD.

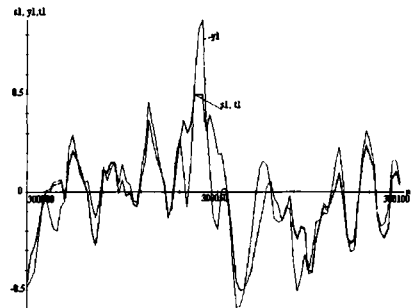


Fig. 3.2.69. Detaliu comparativ al semnalelor s_1 , y_1 și t_1 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decolare cu algoritmul cu gradienti parțiali.

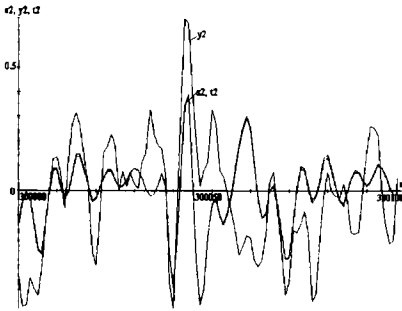


Fig. 3.2.70. Detaliu comparativ al semnalelor s_2 , y_2 și t_2 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decorelare cu algoritmul SAD.

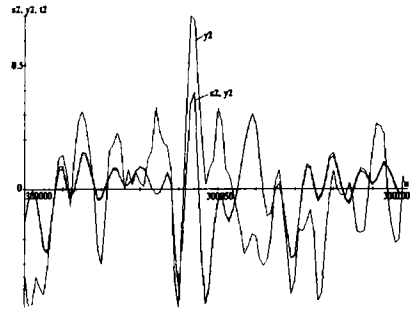


Fig. 3.2.71. Detaliu comparativ al semnalelor s_2 , y_2 și t_2 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decorelare cu algoritmul cu gradienti parțiali.

Din examinarea rezultatelor prezentate se poate aprecia că cei doi algoritmi, SAD cu propagare înapoi și algoritmul cu gradienti parțiali au o evoluția asemănătoare.

În faza inițială a procesului de adaptare, adică în primul ciclu de decorelare de 30 de secunde, evoluțiile sunt aproape identice.

În figurile 3.2.40 și 3.2.41 se prezintă influența evoluției procesului de adaptare asupra semnalului t_1 . Comparând aceste imagini cu cea din Fig. 3.2.34, pe de o parte, și cu cea din Fig. 3.2.32, pe de altă parte, se observă că semnalul t_1 are o înfășurătoare aproximativ constantă după prelucrarea primelor 50000 de eșantioane.

Influența evoluției procesului de decorelare este mai vizibilă în cazul semnalului t_2 . Comparând imaginile din figurile 3.2.42 și 3.2.43 cu imaginile din figurile 3.2.35 și 3.2.33, se observă că în momentele de pauză dintre cuvinte influența semnalului perturbator devine din ce în ce mai redusă, aspect evidențiat de reducerea amplitudinii semnalului în aceste porțiuni, amplitudine care devine apropiată de zero.

O concluzie interesantă asupra mecanismului de adaptare se desprinde din figurile 3.2.46 și 3.2.47. Pentru a înțelege corect aceste figuri este bine să se revadă relațiile (3.2.225) la (3.2.228). Deși aceste relații sunt deduse pentru condiții foarte particulare (semnale de tip zgomot alb și filtrele W_1 și W_2 cu câte un singur coeficient), ele evidențiază faptul că în apropierea punctului de convergență, influența predominantă asupra evoluției filtrului W_1 o are semnalul s_1 și influența predominantă asupra evoluției filtrului W_2 o are semnalul s_2 . Acest comportament se datorează prezenței termenului pătratic dependent de abaterea coeficienților filtrelor W_2 și respectiv W_1 față de H_2 și respectiv H_1 care ponderează influența semnalului s_2 asupra lui W_1 și respectiv, influența lui s_1 asupra lui W_2 . Examinând în acest context Fig.3.2.36, care prezintă spectrul semnalului s_1 și figurile 3.2.46 și 3.2.47, care prezintă spectrul semnalului t_2 la sfârșitul primului ciclu de decorelare, se constată că procesul de adaptare este influențat, în domeniul frecvență, de amplitudinea și poziția componentelor spectrale de putere mare ale semnalului s_1 . Figurile 3.2.46 și 3.2.47 arată ca și cum lobul principal al spectrului semnalului s_1 ar fi fost rejectat, și influența semnalului s_1 asupra lui t_2 s-ar mai manifesta doar prin armonici. Evident, o influență asemănătoare există și în cazul semnalului t_1 din partea semnalului s_2 , dar din cauza discrepanței de amplitudini ale componentelor spectrale, fenomenul este mai puțin vizibil pe figurile 3.2.44 și 3.2.45. Deci, se poate afirma că, în domeniul frecvență, viteza de adaptare depinde de puterile componentelor spectrale ale semnalelor perturbatoare, rejectând mai mult pe cele de putere mai mare.

Influența componentelor spectrale ale semnalului perturbat este mai pregnantă în faza inițială a procesului de adaptare când abaterile filtrelor față de valorile de decorelare sunt mari.

Figurile 3.2.48 la 3.2.51 prezintă evoluția coeficienților filtrelor W_1 și W_2 în primul ciclu de decorelare. Se observă că în prima fază toți coeficienții pornesc din zero și au o tendință de creștere, această tendință păstrându-se pe durata prelucrării primelor 60000-100000 de eșantioane. În această zonă și coeficienții care ar fi trebuit să fie egali cu zero ating valori importante (aproximativ 0.3). În continuare, coeficienții w_{12} și w_{22} continuă să crească, iar ceilalți să descrească lent.

Fenomenul de evoluție similară a coeficienților filtrelor în faza inițială se datorează faptului că semnalele s_1 și s_2 sunt colorate și se explică prin următorul mecanism:

În faza inițială semnalele t_1 și t_2 sunt corelate întrucât ele sunt de fapt aproximativ egale cu y_1 și y_2 (când se pornește din condiții inițiale nule). Întrucât y_1 și y_2 sunt, fiecare în parte, combinații ale semnalelor s_1 și s_2 , sunt corelate între ele. Pe de altă parte, întrucât semnalele s_1 și s_2 sunt colorate, rezultă că și semnalele y_1 și y_2 sunt colorate. Coeficienții filtrelor se actualizează cu cantități proporționale cu corelația existentă între t_1 și t_2 , și deci cu cantități aproximativ egale. Fenomenul este cu atât mai evident, cu cât semnalele s_1 și s_2 sunt mai colorate, adică există un coeficient de corelație semnificativ între eșantioanele vecine ale aceluiași semnal.

Fenomenul prin care toți coeficienții filtrelor W_1 și W_2 tind, în faza inițială a procesului de adaptare, să atingă valori semnificative, este nedorit și poate conduce la intrarea algoritmului într-un regim divergent, prin neîndeplinirea condiției de stabilitate (2.2.29) care se reproduce mai jos:

$$|W_1(z)W_2(z)| < 1; \forall z, z = e^{j\omega} \quad (3.2.240)$$

înainte ca acesta să atingă soluția de decorelare, care poate fi o soluție stabilă.

În figurile 3.2.52 la 3.2.55 sunt prezentate comparativ semnalele surselor, semnalele mixate și semnalele de ieșire din decorelator. Se observă tendința ca semnalele de la ieșirile decorelatorului să aproximeze semnalele corespunzătoare ale surselor. Întrucât procesul de adaptare nu s-a încheiat, filtrele neatingând valorile optime, aproximarea este destul de grosieră.

La testarea auditivă a semnalelor t_1 și t_2 se sesizează o diminuare semnificativă a ponderii semnalului perturbator, dar perturbația este încă sesizabilă.

Întrucât procesul de adaptare nu s-a încheiat în timpul de 30 de secunde, cât reprezintă un ciclu de prelucrare a semnalelor y_1 și y_2 , s-au realizat zece cicluri de prelucrare ale acestor semnale cu scopul de a se verifica dacă cei doi algoritmi converg sigur spre soluția optimă de decorelare. Rezultatul acestui test îl constituie figurile 3.2.56 la 3.2.59. Din analiza acestor figuri se constată că în cazul filtrului W_1 algoritmul SAD cu propagare înapoi abia atinge valorile corecte la sfârșitul intervalului de test, în timp ce algoritmul cu gradienti parțiali este de două ori mai rapid, atingând valorile optime la jumătatea intervalului de test. În cazul filtrului W_2 algoritmul SAD nu ajunge să atingă valorile optime în intervalul de test, în timp ce algoritmul cu gradienti parțiali atinge valorile optime după aproximativ două treimi din intervalul de test. Faptul că filtrul W_2 converge mai lent decât W_1 se datorează pauzelor dintre cuvinte în cadrul semnalului s_2 , porțiuni de timp în care procesul de convergență stagnează.

În concluzie, algoritmul cu gradienti parțiali este mai rapid decât algoritmul SAD cu propagare înapoi, la aceiași parametri.

Se observă, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali tendințe de intrare în regim divergent, manifestate prin abateri impulsionale, de scurtă durată, de la traiectoria normală a coeficienților filtrelor. Se remarcă totuși că algoritmul, prin fenomenul zgomotului de adaptare, a revenit pe traiectoria corectă. Tendințele de intrare în regim divergent sunt

explicabile deoarece, pe porțiunea tranzitorie, există un punct în care coeficienții filtrelor tind să nu respecte condiția (3.2.240), iar pe porțiunea stabilizată, coeficienții au valorile în jurul lui 0.97, valori foarte apropiate de limita de stabilitate. În aceste condiții abateri mici, datorate fenomenului de adaptare, pot conduce algoritmul în regim instabil.

Așa cum era de așteptat, când algoritmi au convers la valorile optime de decorelare, semnalele t_1 și t_2 au ajuns să reproducă fidel semnalele s_1 și s_2 . Figurile 3.2.60 la 3.2.71 demonstrează acest lucru.

3.2.4.3. Ameliorarea parametrilor algoritmilor de decorelare

Din examinarea rezultatelor acestui experiment se observă două dezavantaje majore ale algoritmilor examinați: sunt lenți și în faza tranzitorie filtrele W_1 și W_2 pot să nu îndeplinească condiția de stabilitate (3.2.240).

Se observă că algoritmul cu gradienti parțiali a convers după aproximativ 2000000 de eșantioane prelucrate (conform Fig. 3.2.59) în timp ce algoritmul SAD nu a atins soluția corectă de decorelare nici după 3000000 de eșantioane prelucrate.

Pe de altă parte, coeficienții de ordinul 1 și 3 ai filtrelor W_1 și W_2 , care ar fi trebuit să fie egali cu zero, au un regim tranzitoriu caracterizat printr-o creștere mare a valorilor lor, comportament care poate avea drept consecință aducerea sistemului în regim de instabilitate.

De fapt cele două aspecte evidențiate sunt legate între ele.

În cazul semnalelor s_1 și s_2 colorate, pentru a se contracara influențarea traiectoriilor coeficienților vecini ai filtrelor W_1 și W_2 , suntem nevoiți să asigurăm o durată mare de mediere, lucru care se realizează prin alegerea unor mărimi de pas foarte mici. Aceste valori mici ale mărimilor de pas sunt necesare și pentru ca deviațiile de la traiectoriile medii, datorate zgomotului de adaptare, să nu aducă filtrele în afara domeniului de stabilitate. Alegând valori mici ale parametrilor mărime de pas se ajunge în situația că algoritmi devin foarte lenți.

Pentru a se depăși aceste dezavantaje trebuie să ne adresăm cauzelor lor.

Prima cauză constă în faptul că semnalele s_1 și s_2 sunt colorate. De aceea, dacă se reușește printr-un mijloc oarecare “un efect de albire” al acestora, rezultatul va fi benefic. Pentru a atinge acest scop, așa cum s-a demonstrat în Secțiunea 3.1.5. se pot intercala la intrările semnalelor y_1 și y_2 două filtre identice Q , fără ca soluțiile de decorelare să se modifice. Aceste filtre pot fi astfel alese încât să producă un “efect de albire” al semnalelor y_1 și y_2 manifestat prin reducerea coeficientului de corelație între eșantioanele vecine. Un astfel de filtru, pe care pentru început îl denumim Q_1 poate fi ales să aibă funcția de transfer următoare:

$$Q_1(z) = 1 - z^{-1} \quad (3.2.241)$$

Desigur, se poate merge mai în profunzime cu studiul privind alegerea acestui filtru, dar așa după cum vom vedea, rezultatele obținute au condus la îmbunătățiri substanțiale ale comportamentului algoritmului.

A doua cauză constă în posibilitatea ca datorită zgomotului de adaptare, pe durata regimului tranzitoriu, valorile momentane ale coeficienților filtrelor să depășească domeniul de stabilitate. Pentru a contracara acest efect este necesară o adaptare permanentă a valorii parametrului mărime de pas, micșorând-o când filtrele W_1 și W_2 ajung la marginea domeniului de stabilitate. Cea mai simplă și directă metodă de a obține acest deziderat este intercalarea la intrările y_1 și y_2 a altor două filtre identice, pe care le denumim Q_2 , eventual în serie cu Q_1 , care să aibă următoarea funcție de transfer:

$$Q_2(z) = 1 - W_1(z)W_2(z) \quad (3.2.242)$$

În acest fel, amplitudinea semnalelor prelucrate este controlată chiar de filtrele care se adaptează (evident, în condițiile în care condiția (3.2.240) este satisfăcută).

Prin intercalarea acestor filtre la intrările y_1 și y_2 semnalele de ieșire t_1 și t_2 nu mai sunt, în situația că algoritmul a converș la soluția optimă de decorelare, replici fidele ale semnalelor surselor s_1 și s_2 , ci versiuni distorsionate ale acestora. Pentru a corecta acest dezavantaj, propun realizarea unui sistem de decorelare compus din două blocuri, unul destinat calculării adaptive a filtrelor W_1 și W_2 , care, pentru îmbunătățirea parametrilor de regim tranzitoriu utilizează filtrele Q compuse din Q_1 și Q_2 înseriate, propuse mai sus, și cel de al doilea bloc, folosește filtrele calculate de primul pentru a obține, direct din prelucrarea semnalelor y_1 și y_2 , semnalele t_1 și t_2 nedistorsionate. Această soluție este prezentată în Fig.3.2.72.

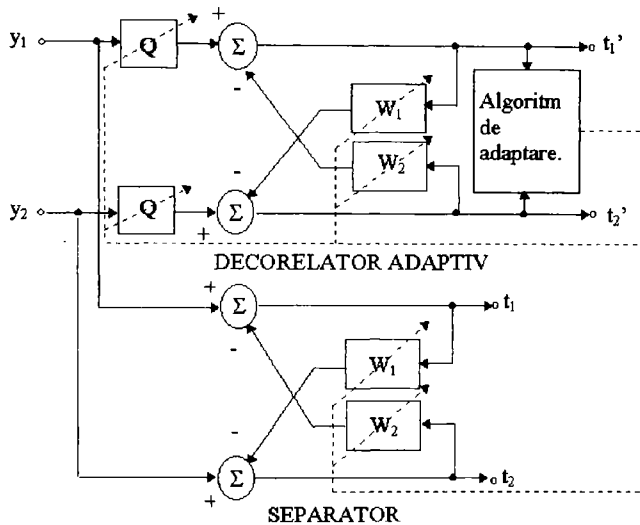


Fig. 3.2.72. Sistem de decorelare cu parametri îmbunătățiți.

Se poate demonstra, utilizând metoda descrisă în Secțiunea 3.2.2.2, că introducerea filtrelor Q_2 conduce la apariția unor comportamente diferite ale algoritmilor SAD și cu sistem de gradienti parțiali, în jurul punctului optim de decorelare.

În jurul punctului optim de decorelare, cei doi algoritmi se modelează cu sisteme de forma (3.2.56), care au matricea sistemului descrisă de (3.2.60). S-a arătat că algoritmi sunt convergenți dacă matricea \mathcal{M} dată de relația (3.2.78) este pozitiv definită. Una dintre condițiile necesare pentru ca această matrice să fie pozitiv definită era ca submatricele din componența sa \mathcal{M}_{11} și \mathcal{M}_{22} să fie pozitiv definite.

În cazul algoritmului SAD, dacă se utilizează filtrul Q_2 , cele două matrice nu mai au o formă sigur pozitiv definită, ele având ca elemente intercorelații între versiuni ale semnalelor s_1 și respectiv s_2 filtrate de filtrul Q_2 , cu semnalele s_1 și respectiv s_2 . Această formă de matrice nu mai este sigur pozitiv definită și experimental se dovedește, pentru semnalele de test utilizate, că algoritmul SAD cu propagare înapoi, este divergent dacă are filtrele Q_2 la intrare.

În cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, matricele M_{11} și M_{22} devin matricele de autocorelație ale semnalelor s_1 și respectiv s_2 , care sunt pozitiv definite în condițiile în care semnalele nu sunt strict periodice sau constante. Așa cum se va arăta în secțiunea următoare, utilizarea filtrelor Q_2 în cazul algoritmului cu gradienti parțiali îl menține stabil pentru valori ale mărimilor de pas mult mai mari, obținându-se astfel o scurtare semnificativă a duratei regimului tranzitoriu.

Introducerea filtrelor Q_1 conduce la efecte favorabile prin diminuarea creșterii coeficienților care ar fi trebuit să fie nuli.

3.2.4.4. Rezultatele testului 1 în cazul prelucrării suplimentare a semnalelor de intrare cu ajutorul filtrelor Q_1 și Q_2

Se mențin aceleași semnale s_1 , s_2 , y_1 și y_2 ca și în Secțiunea 3.2.4.2.

Pentru început sunt prezentate rezultatele obținute în urma aplicării filtrului Q_2 .

Algoritmului SAD cu propagare înapoi, așa cum s-a mai menționat, a avut o evoluție divergentă. Deci, nu i se pot aduce îmbunătățiri ale duratei regimului tranzitoriu utilizând acest filtru.

În cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, utilizarea filtrelor Q_2 a dus la menținerea unei evoluții convergente pentru valori ale parametrilor mărime de pas până la valoarea de 0,05 (față de 0,001 în cazul nefolosirii filtrelor Q_2). Evoluția coeficienților filtrelor W_1 și W_2 pentru diferite valori ale parametrilor mărime de pas μ_1 și μ_2 sunt date în figurile următoare (realizate pentru o comparație corectă tot pentru zece cicluri de decorelare):

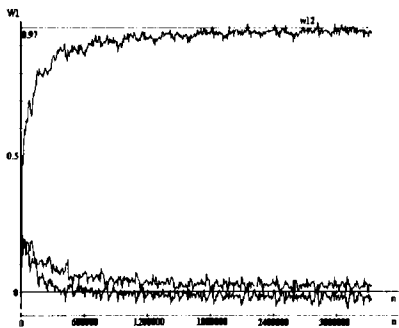


Fig. 3.2.73. Evoluția coeficienților filtrului W_1 în cazul utilizării algoritmului cu sistem de gradienti parțiali și a filtrelor Q_2 cu parametrii $\mu_1=\mu_2=0,005$.

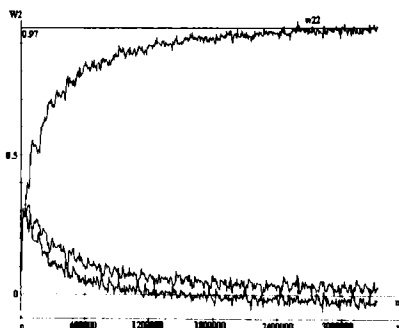


Fig. 3.2.74. Evoluția coeficienților filtrului W_2 în cazul utilizării algoritmului cu sistem de gradienti parțiali și a filtrelor Q_2 cu parametrii $\mu_1=\mu_2=0,005$.

Din examinarea figurilor 3.2.73 și 3.2.74 comparativ cu figurile 3.2.75 și 3.2.76, se observă trei aspecte importante.

În primul rând, introducerea filtrelor Q_2 a permis algoritmului cu sistem de gradienti parțiali să aibă o evoluție convergentă pentru valori ale parametrilor mărime de pas de 50 de ori mai mari decât în cazul nefolosirii acestor filtre, aspect care a dus la o semnificativă scurtare a duratei regimului tranzitoriu.

În al doilea rând a crescut în aceeași proporție zgomotul de adaptare, manifestat prin deviația valorilor coeficienților de la valoarea medie a traiectoriei acestora.

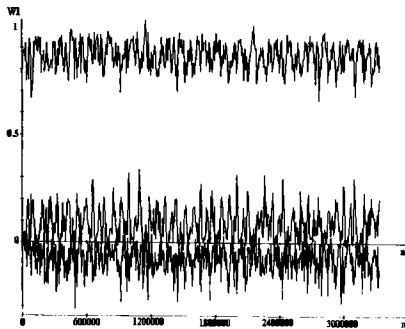


Fig. 3.2.75. Evoluția coeficienților filtrului W_1 în cazul utilizării algoritmului cu sistem de gradienti parțiali și a filtrelor Q_2 cu parametrii $\mu_1=\mu_2=0,05$.

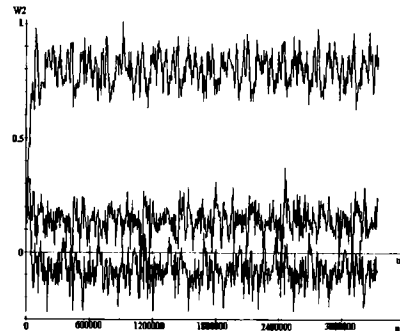


Fig. 3.2.76. Evoluția coeficienților filtrului W_2 în cazul utilizării algoritmului cu sistem de gradienti parțiali și a filtrelor Q_2 cu parametrii $\mu_1=\mu_2=0,05$.

În al treilea rând se observă o îndepărtare a valorilor medii de regim permanent ale coeficienților de valorile optime de decorelare (care sunt 0 pentru w_{11} , w_{13} , w_{21} , w_{23} și 0,97 pentru w_{12} și w_{22}) odată cu creșterea valorii mărimilor de pas μ_1 și μ_2 . Această abatere este mai pronunțată în cazul filtrului W_2 a cărei evoluție este preponderent determinată de semnalul s_2 .

De fapt, această îndepărtare a soluției de regim permanent de la valorile optime semnifică faptul că, de fapt, algoritmul converge spre o soluție fantomă, despre care, în Secțiunea 2.5.3, în cazul algoritmului SAD, s-a arătat că depinde de caracteristicile spectrale ale semnalelor s_1 și s_2 .

Este evident, din cele prezentate despre influența filtrului Q_2 , că îndepărtarea soluției de regim permanent de valorile optime de decorelare, conduce la o calitate mai scăzută a decorelării, manifestată prin persistența semnalului perturbator în semnalul reconstituit.

Utilizarea filtrului Q_1 , singur, poate fi făcută, pentru asigurarea stabilității, numai prin micșorarea valorii mărimilor de pas μ_1 și μ_2 sub valoarea maximă pentru care algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, fără filtre suplimentare la intrările y_1 și y_2 , a fost convergent. În figurile 3.2.77 și 3.2.78 sunt prezentate evoluțiile coeficienților filtrelor W_1 și respectiv W_2 tot pe o perioadă de zece cicluri de decorelare ale semnalelor y_1 și y_2 , pentru o valoare a mărimilor de pas egală cu 0,0001.

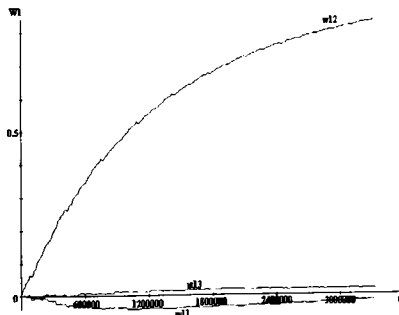


Fig. 3.2.77. Evoluția coeficienților filtrului W_1 în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali utilizând filtrele Q_1 și $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

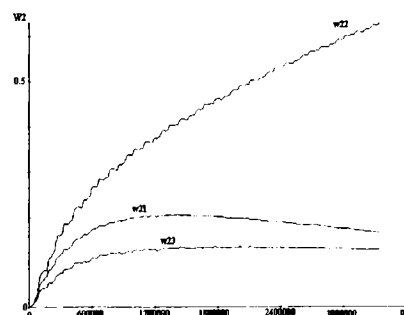


Fig. 3.2.78. Evoluția coeficienților filtrului W_2 în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali utilizând filtrele Q_1 și $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

Deoarece semnalele s_1 și s_2 sunt colorate, este normal ca puterile semnalelor diferență dintre valorile eşantioanelor de la momentul n și valorile eşantioanelor la momentul $n-1$ ale acestora să fie mai mici decât ale semnalelor originale. Din acest motiv semnalele de la ieşirile filtrelor Q_1 vor avea puteri mai mici decât cele ale semnalelor y_1 și y_2 . Aceste puteri mai mici ale semnalelor de la intrarea algoritmului de decolare, pe de o parte, și valorile mai mici ale mărimilor de pas, pe de altă parte, conduc la o evoluție mai lentă a coeficienților filtrelor W_1 și W_2 în acest caz, comparativ cu situația în care nu se folosesc filtre suplimentare la intrări.

Efectul pozitiv, vizibil în figurile 3.2.77 și 3.2.78, constă în valorile maxime mai mici pe care le iau coeficienții care trebuie să fie nuli (w_{11} , w_{13} , w_{21} și w_{23}) față de situația din figurile 3.2.57, 3.2.59, în cazul nefolosirii filtrelor suplimentare la intrare, și 3.2.73 la 3.2.76, când se folosesc filtrele Q_2 . Acest aspect arată un efect de diminuare a coeficientului de autocorelație între eşantioanele vecine ale semnalelor prelucrate.

Combinarea efectelor filtrelor Q_1 și Q_2 conduce la efecte deosebit de favorabile atât asupra duratei regimului tranzitoriu, cât și asupra diminuării efectului de îndepărtare a soluțiilor de regim permanent de valorile optime de decolare. În figurile 3.2.79 și 3.2.80 este prezentată evoluția coeficienților filtrelor W_1 și W_2 în cazul când parametrul mărime de pas μ_1 și μ_2 au valoarea 0,02, iar în figurile 3.2.81 și 3.2.82 este prezentată evoluția pentru cazul când parametrul mărime de pas au valoarea 0,1.

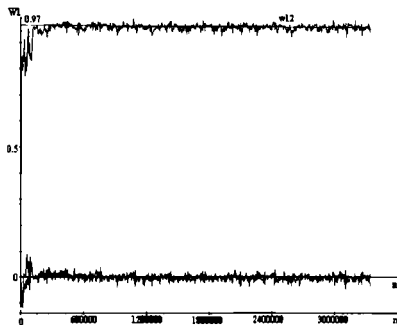


Fig. 3.2.79. Evoluția coeficienților filtrului W_1 în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali care folosește filtrele Q_1 și Q_2 , iar parametrii μ_1 și μ_2 au valoarea 0,02.

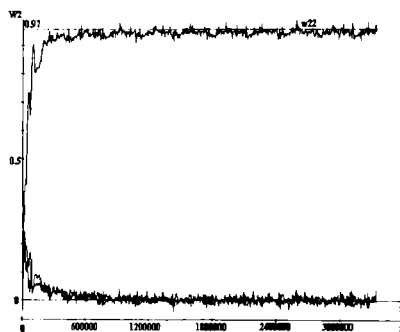


Fig. 3.2.80. Evoluția coeficienților filtrului W_2 în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali care folosește filtrele Q_1 și Q_2 , iar parametrii μ_1 și μ_2 au valoarea 0,02.

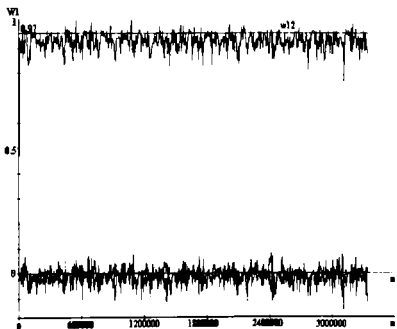


Fig. 3.2.81. Evoluția coeficienților filtrului W_1 în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali care folosește filtrele Q_1 și Q_2 , iar parametrii μ_1 și μ_2 au valoarea 0,1.

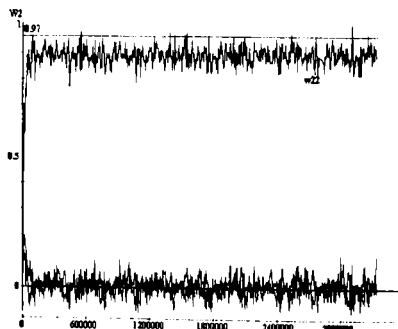


Fig. 3.2.82. Evoluția coeficienților filtrului W_2 în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali care folosește filtrele Q_1 și Q_2 , iar parametrii μ_1 și μ_2 au valoarea 0,1.

Prima remarcă pe care o facem este că efectul de îndepărtare a soluțiilor de regim permanent de valorile optime de decorelare este mult micșorat, în cazul când parametrii mărime de pas au valoarea 0,1 și, practic, absent, în cazul când au valoarea 0,02.

În cazul când parametrii mărime de pas au valoarea 0,1, doar coeficienții w_{12} și w_{22} au o deplasare de 0,03 și respectiv 0,07 de la valoarea optimă care este 0,97.

În condițiile în care s-a putut crește valoarea parametrilor mărime de pas de la 0,001, în cazul neutilizării filtrelor Q_1 și Q_2 , când convergența se realiza după aproximativ 200 de secunde, la valori de 0,02 sau chiar 0,1, în cazul folosirii acestor filtre, durata regimului tranzitoriu a scăzut de apreciazabil, astfel încât, chiar pe durata primului ciclu de decorelare se obține separarea corectă a semnalelor în aproximativ trei secunde. În figurile 3.2.83 la 3.2.98 sunt prezentate, pe durata a primelor 30 de secunde, cât reprezintă un ciclu de procesare, pentru comparație, semnalele t_1 și t_2 , spectrele lor, și evoluția coeficienților filtrelor W_1 și W_2 pentru situația când nu s-au folosit filtrele Q_1 și Q_2 , când s-a putut crește valoarea parametrilor mărime de pas la maximum 0,001, pe de o parte, și situația când s-au folosit filtrele Q_1 și Q_2 și parametrii mărime de pas au fost aleși egali cu 0,02.

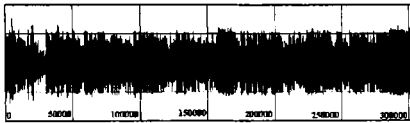


Fig. 3.2.83. Semnalul t_1 în cazul folosirii algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,001.

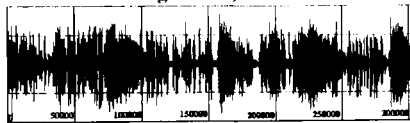


Fig. 3.2.85. Semnalul t_2 în cazul folosirii algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,001.



Fig. 3.2.84. Semnalul t_1 în cazul folosirii algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

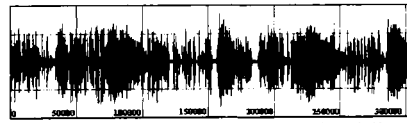


Fig. 3.2.86. Semnalul t_2 în cazul folosirii algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

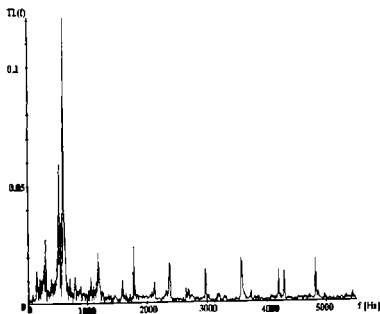


Fig. 3.2.87. Spectrul semnalului t_1 în jurul eșantionului 300000, în cazul folosirii algoritmului cu gradienti parțiali, fără filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,001.

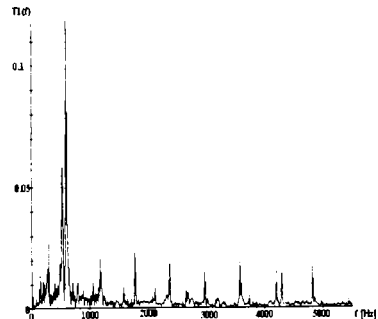


Fig. 3.2.88. Spectrul semnalului t_1 în jurul eșantionului 300000, în cazul folosirii algoritmului cu gradienti parțiali, cu filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

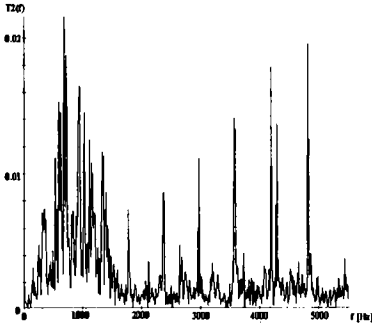


Fig. 3.2.89. Spectrul semnalului t_2 în jurul eșantionului 300000, în cazul folosirii algoritmului cu gradienti parțiali, fără filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,001.

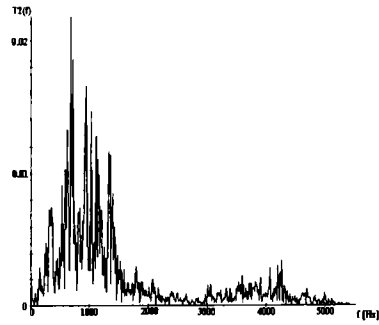


Fig. 3.2.90. Spectrul semnalului t_2 în jurul eșantionului 300000, în cazul folosirii algoritmului cu gradienti parțiali, cu filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

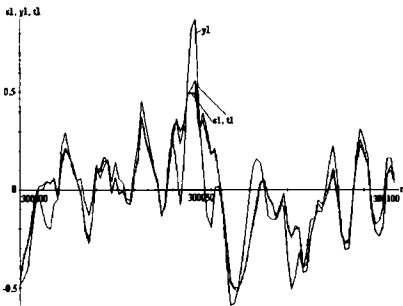


Fig. 3.2.91. Detaliu comparativ al semnalelor s_1 , y_1 și t_1 în cazul decorelării cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, fără filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,001.

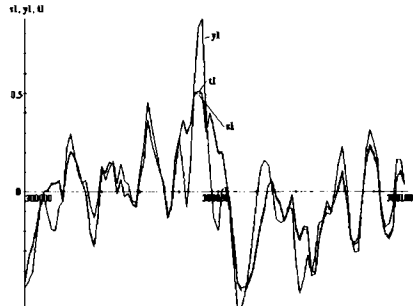


Fig. 3.2.92. Detaliu comparativ al semnalelor s_1 , y_1 și t_1 în cazul decorelării cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, cu filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

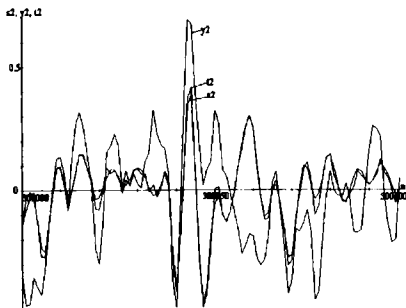


Fig. 3.2.93. Detaliu comparativ al semnalelor s_2 , y_2 și t_2 în cazul decorelării cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, fără filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,001.

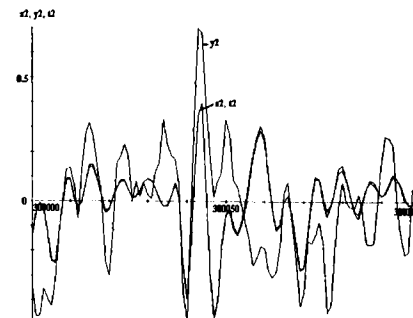


Fig. 3.2.94. Detaliu comparativ al semnalelor s_2 , y_2 și t_2 în cazul decorelării cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, cu filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

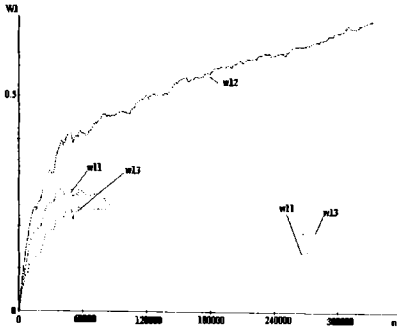


Fig. 3.2.95. Evoluția coeficienților filtrului W_1 în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,001.

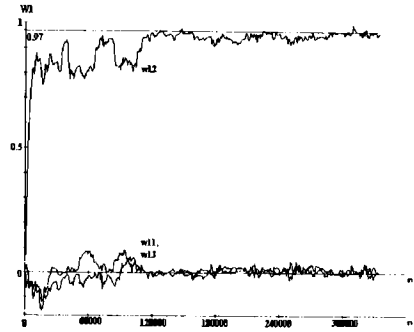


Fig. 3.2.96. Evoluția coeficienților filtrului W_1 în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

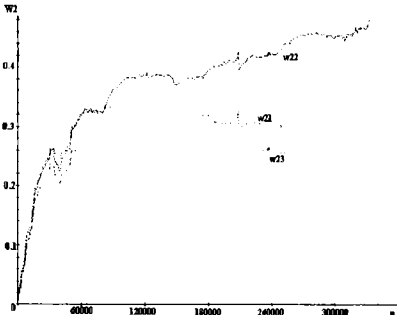


Fig. 3.2.97. Evoluția coeficienților filtrului W_2 în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,001.

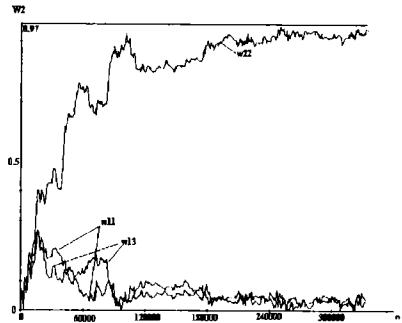


Fig. 3.2.98. Evoluția coeficienților filtrului W_2 în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu filtrele Q_1 și Q_2 , cu parametrii μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

Figurile 3.2.83 la 3.2.98 evidențiază influența deosebit de favorabilă a utilizării simultane a filtrelor Q_1 și Q_2 în procesul de decorelare a semnalelor prin utilizarea algoritmului cu sistem de gradienti parțiali. În aceleași condiții, algoritmul SAD cu propagare înapoi este divergent și deci nu permite obținerea unor performanțe de regim tranzitoriu comparabile. *Posibilitatea de a utiliza filtrele Q_1 și Q_2 pentru îmbunătățirea substanțială a performanțelor constituie principalul avantaj al algoritmului cu sistem de gradienti parțiali în comparație cu algoritmul SAD cu propagare înapoi.*

Din examinarea figurilor 3.2.83 la 3.2.94 se observă că s-a reușit, folosind filtrele Q_1 și Q_2 , pe durata primului ciclu de decorelare, obținerea unei calități a separării semnalelor comparabilă, sub toate aspectele, cu cea obținută, fără filtrele Q_1 și Q_2 , după zece cicluri de decorelare.

Pentru a putea face comparații cantitative asupra calității separării semnalelor, se definesc în continuare indici calitativi.

Notăm cu M durata intervalului de timp în care se desfășoară estimarea indicelui calitativ, exprimată în număr de eșantioane.

Notăm cu u_i , $0 \leq i < M$, eșantioanele semnalului sursei utile din intervalul de estimare.

Notăm cu v_i , $0 \leq i < M$, eșantioanele semnalului estimat al sursei utile.

Notăm cu p_i , $0 \leq i < M$, eșantioanele semnalului perturbator.

Se definește eroarea pătratică medie relativă:

$$Er = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} (v_i - u_i)^2}{\sum_{i=0}^{M-1} u_i^2} \quad (3.2.243)$$

Se definește raportul semnal/zgomot exprimat în decibeli:

$$Rsz = 10 \lg \left(\frac{\sum_{i=0}^{M-1} u_i^2}{\sum_{i=0}^{M-1} (v_i - u_i)^2} \right) \quad (3.2.244)$$

Se definește atenuarea semnalului perturbator exprimat în decibeli:

$$Ap = 10 \lg \left(\frac{\sum_{i=0}^{M-1} p_i^2}{\sum_{i=0}^{M-1} (v_i - u_i)^2} \right) \quad (3.2.245)$$

Considerând pentru canalul semnalului y_1 drept semnal util pe s_1 , semnal estimat pe y_1 , semnal perturbator pe x_1 (semnalul de la ieșirea filtrului H_2 din Fig. 3.2.31), iar pentru canalul semnalului y_2 pe s_2 drept semnal util, pe y_2 drept semnal estimat, pe x_2 (semnalul de la ieșirea filtrului H_1 din Fig. 3.2.31) drept semnal perturbator, în Tabelul 3.2.2 se dau indicii calitativi ai semnalelor de intrare ale decorelatorului.

Considerând pentru canalul semnalului de ieșire t_1 pe s_1 ca semnal al sursei utile, pe t_1 ca semnal ca semnal estimat al sursei utile și pe x_1 ca semnal perturbator, iar pentru canalul semnalului de ieșire t_2 pe s_2 ca semnal al sursei utile, pe t_2 ca semnal estimat al sursei utile și pe x_2 ca semnal perturbator, în Tabelul 3.2.3 se dau indicii calitativi ai semnalelor ieșire.

Tabelul 3.2.2.

Indice calitativ	Valoare
$Rsz(s_1, y_1, x_1)$ [dB]	1,525680
$Ap(s_1, y_1, x_1)$ [dB]	-0,002530
$Rsz(s_2, y_2, x_2)$ [dB]	0,788465
$Ap(s_2, y_2, x_2)$ [dB]	-0,033094

Tabelul 3.2.3.

Indice calitativ	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, un ciclu de decorelare, fără filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1 = \mu_2 = 0,001$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, fără filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1 = \mu_2 = 0,001$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, un ciclu de decorelare, cu filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1 = \mu_2 = 0,02$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, cu filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1 = \mu_2 = 0,02$.
0	1	2	3	4
$Rsz(s_1, t_1, x_1)$ [dB]	16,430037	29,361520	21,994601	23,599228
$Ap(s_1, t_1, x_1)$ [dB]	14,901824	27,833307	20,466388	22,071015
$Rsz(s_2, t_2, x_2)$ [dB]	15,045663	28,342892	20,917687	22,268776
$Ap(s_2, t_2, x_2)$ [dB]	16,044745	29,341974	21,916769	23,267859

Valorile indicilor calitativi din tabelele 3.2.2 și 3.2.3 au fost obținute prin prelucrarea a 1000 de eșantioane din semnalele necesare, începând de la eșantionul din poziția 300000, deci s-a surprins o porțiune de la sfârșitul ciclului de decorelare.

Comparând valorile prezentate în tabelele 3.2.2 și 3.2.3 se observă că fără folosirea filtrelor Q_1 și Q_2 , pe durata primului ciclu de decorelare, se obține o creștere a indicilor calitativi de aproximativ 15dB, iar prin folosirea filtrelor Q_1 și Q_2 , pe durata primului ciclu de decorelare s-a obținut un plus de aproximativ 5 dB pentru fiecare indice calitativ.

Desigur, valorile indicilor calitativi obținute după 11 cicluri de decorelare, fără folosirea filtrelor Q_1 și Q_2 și având mărimi de pas foarte mici, sunt excelente, dar trebuie să se țină cont de faptul că reciclarea datelor de intrare este un proces care nu poate fi efectuat în timp real.

Prin folosirea filtrelor Q_1 și Q_2 , după 11 cicluri de decorelare, și cu parametrii mărime de pas, μ_1 și μ_2 egali cu 0,02, se obține o creștere de aproximativ 1,5dB a indicilor calitativi față de situația din primul ciclu de decorelare. Această modificare mică a indicilor calitativi evidențiază faptul că la sfârșitul primului ciclu de decorelare algoritmul a ajuns, practic, în starea de regim permanent.

Pe de altă parte, rezultatele mai slabe obținute după 11 cicluri de decorelare, când s-au folosit filtrele Q_1 și Q_2 și parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 au fost egali cu 0,02, față de situația când nu s-au folosit aceste filtre și μ_1 și μ_2 au fost egali cu 0,001, se datorează zgomotului de adaptare care este mai mare în prima situație față de a doua. Fenomenul este inerent și este prețuit plătit pentru scurtarea duratei regimului tranzitoriu. De aceea, valorile din coloana a 3-a a Tabelului 3.2.3 pot fi considerate ca un compromis optim între calitatea separării semnalelor și durata regimului tranzitoriu al procesului de adaptare al algoritmului.

3.2.4.5. Rezultatele testului 1 în cazul când semnalele s_1 și s_2 sunt de puteri diferite

În continuare se prezintă rezultatele testului în cazul când semnalul s_1 are o putere de aproximativ zece ori mai mare decât puterea semnalului s_2 . S-au păstrat aceleași semnale ca și în experimentele precedente, singurul parametru modificat fiind raportul de puteri.

Graficele și semnalele s_1 , s_2 , y_1 și y_2 în această situație sunt prezentate în figurile 3.2.99 la 3.2.102.



Fig. 3.2.99. Aspectul semnalului s_1 .

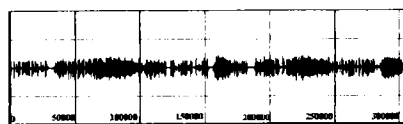


Fig. 3.2.100. Aspectul semnalului s_2 .



Fig. 3.2.101. Aspectul semnalului y_1 .

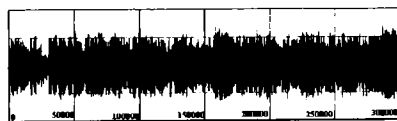


Fig. 3.2.102. Aspectul semnalului y_2 .

Se observă în Fig.3.2.100 că amplitudinile semnalului s_2 sunt de aproximativ trei ori mai mici decât cele ale semnalului s_1 .

Influența semnalului s_2 în cadrul semnalelor y_1 și y_2 este mult mai redusă decât în cazul experimentelor precedente.

În figurile următoare sunt prezentate spectrele semnalelor s_1 , s_2 , y_1 și y_2 calculate pe un bloc de 1024 de eșantioane, începând de la eșantionul cu numărul 300000, adică la sfârșitul intervalului de test.

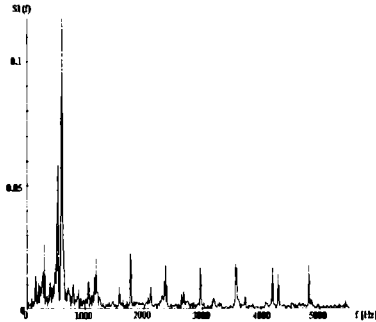


Fig. 3.2.103. Spectrul semnalului s_1 .

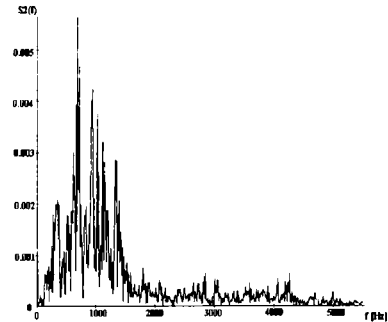


Fig. 3.2.104. Spectrul semnalului s_2 .

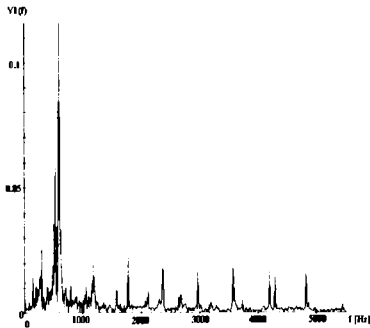


Fig. 3.2.105. Spectrul semnalului y_1 .

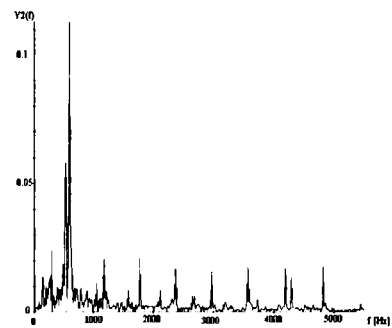


Fig. 3.2.106. Spectrul semnalului y_2 .

Comparând scalele pe axele verticale ale figurilor 3.2.37 și 3.2.104 se observă diferența de putere a semnalelor s_2 utilizate în cele două experimente. Datorită discrepanței de puteri între cele două semnale, influența lui s_2 în cadrul spectrelor semnalelor y_1 și y_2 este aproape nesimizabilă.

În figurile 3.2.107 la 3.2.122 sunt prezentate comparativ rezultatele obținute cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, în cazul nefolosirii filtrelor Q_1 și Q_2 , când a fost asigurată convergența utilizând valoarea de 0,0001 pentru parametrii mărime de pas, și în cazul folosirii acestor filtre, când parametrii mărime de pas au putut fi crescuți la valoarea 0,02 sau chiar și la valoarea 0,1.

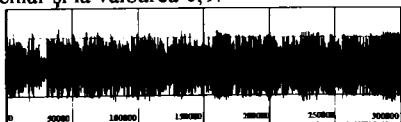


Fig. 3.2.107. Semnalul t_1 în timpul primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,0001.

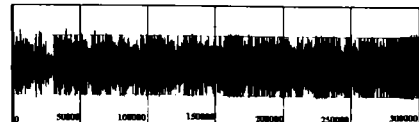


Fig. 3.2.108. Semnalul t_1 în timpul primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

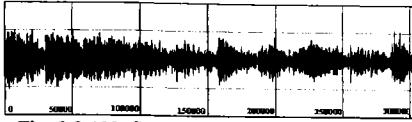


Fig. 3.2.109. Semnalul t_2 în timpul primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,0001.

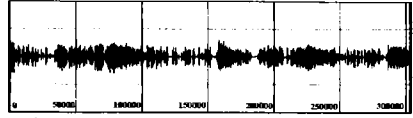


Fig. 3.2.110. Semnalul t_2 în timpul primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.



Fig. 3.2.111. Semnalul t_1 în al 11-lea ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,0001.

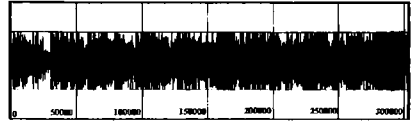


Fig. 3.2.112. Semnalul t_1 în al 11-lea ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

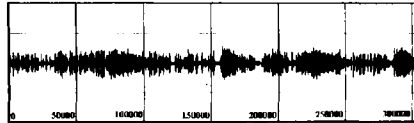


Fig. 3.2.113. Semnalul t_2 în al 11-lea ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,0001.

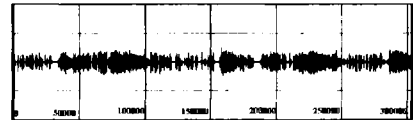


Fig. 3.2.114. Semnalul t_2 în al 11-lea ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

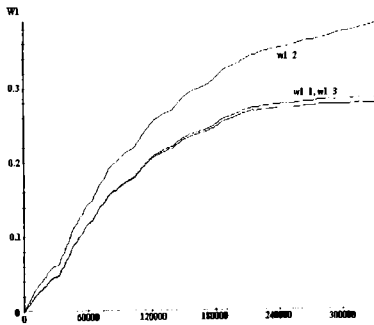


Fig. 3.2.115. Evoluția coeficienților filtrului W_1 pe durata primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,0001.

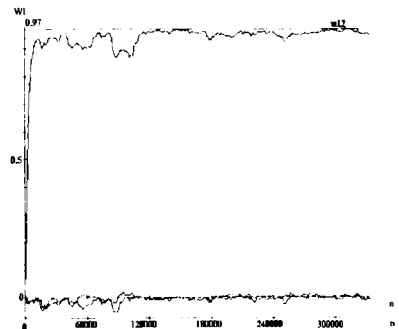


Fig. 3.2.116. Evoluția coeficienților filtrului W_1 pe durata primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

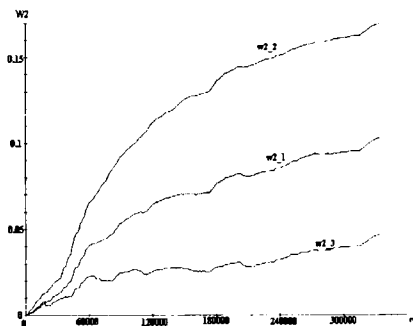


Fig. 3.2.117. Evoluția coeficienților filtrului W_2 pe durata primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,0001.

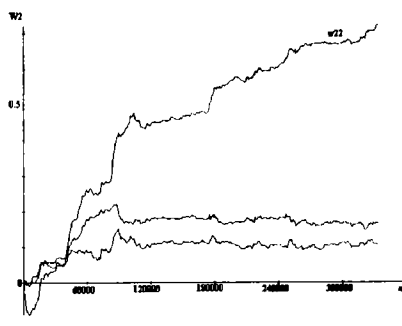


Fig. 3.2.118. Evoluția coeficienților filtrului W_2 pe durata primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

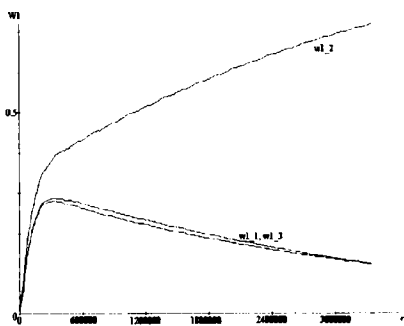


Fig. 3.2.119. Evoluția coeficienților filtrului W_1 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,0001.

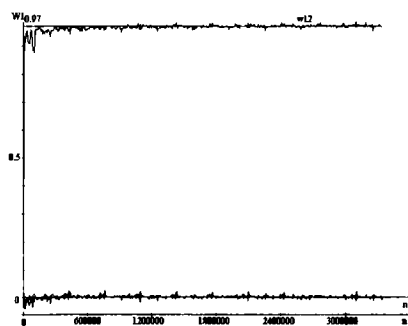


Fig. 3.2.120. Evoluția coeficienților filtrului W_1 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

Prima implicație a discrepanței de puteri a semnalelor surselor o constituie coborârea valorii maxime a parametrilor mărime de pas, pentru care algoritmul rămâne stabil de zece ori, de la 0,001 la 0,0001, în cazul nefolosirii filtrelor Q_1 și Q_2 . În consecință algoritmul are o evoluție și mai lentă decât în cazul când semnalele s_1 și s_2 ar avea puteri egale.

Prezența filtrelor Q_1 și Q_2 a permis menținerea valorilor mari ale parametrilor mărime de pas (0,02 sau chiar 0,1), lucru care a permis menținerea unei evoluții mult mai rapide a algoritmului.

A doua consecință a discrepanței de puteri ale semnalelor surselor o constituie durata diferită a regimurilor tranzitorii ale celor două filtre W_1 și W_2 , aspect valabil atât în situația că se folosesc filtrele Q_1 și Q_2 , cât și atunci când acestea nu se folosesc.

S-a arătat că evoluția filtrului W_1 este preponderent determinată de parametrii semnalului s_1 , iar evoluția filtrului W_2 este preponderent determinată de parametrii semnalului

s_2 . În consecință, în cazul de față, filtrul W_1 are o evoluție mult mai rapidă spre soluția optimă de decorelare decât filtrul W_2 .

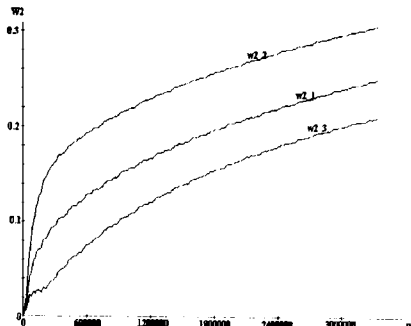


Fig. 3.2.121. Evoluția coeficienților filtrului W_2 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,0001.

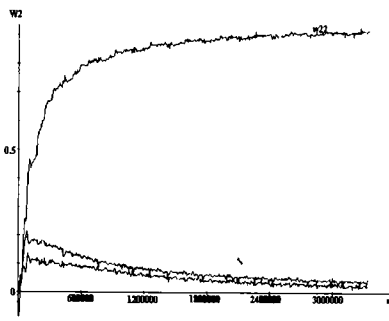


Fig. 3.2.122. Evoluția coeficienților filtrului W_2 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 egali cu 0,02.

Influența semnalului s_1 asupra semnalului t_2 este determinată de abaterea coeficienților filtrului W_1 față de cei ai filtrului H_1 , iar influența semnalului s_2 asupra semnalului t_1 este determinată de abaterea coeficienților filtrului W_2 față de cei ai filtrului H_2 .

În consecință, semnalul sursei de putere mare, este rejectat într-o proporție mai mare la ieșirea care reconstituie semnalul sursei de putere mică, decât este rejectat semnalul sursei de putere mică la ieșirea care reconstituie semnalul sursei de putere mare.

În tabelele 3.2.4 și 3.2.5 se evidențiază indicii calitativi ai procesului de separare a semnalelor în acest experiment.

Tabelul 3.2.4.

Indice calitativ	Valoare
$R_{sz}(s_1, y_1, x_1)$ [dB]	11,983255
$A_p(s_1, y_1, x_1)$ [dB]	-0,002530
$R_{sz}(s_2, y_2, x_2)$ [dB]	-11,489752
$A_p(s_2, y_2, x_2)$ [dB]	-0,033094

Tabelul 3.2.5.

Indice calitativ	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, un ciclu de decorelare, fără filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,0001$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, fără filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,0001$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, un ciclu de decorelare, cu filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,02$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, cu filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,02$.
0	1	2	3	4
$R_{sz}(s_1, t_1, x_1)$ [dB]	14,262031	21,430104	28,179795	34,608577
$A_p(s_1, t_1, x_1)$ [dB]	2,276243	9,444316	16,194006	22,622788
$R_{sz}(s_2, t_2, x_2)$ [dB]	0,200282	7,847288	16,404440	22,830995
$A_p(s_2, t_2, x_2)$ [dB]	11,656939	19,303945	27,861097	34,287652

În Tabelul 3.2.4. se observă că raportul semnal/zgomot în cazul semnalului y_2 este de aproximativ -11 dB, deci, semnalul "util", s_2 este "înecat în zgomot". De la această situație, în cazul unui singur ciclu de decorelare, se ajunge la 0,2dB când nu se utilizează filtrele Q_1 și Q_2 și la 16,4dB când se utilizează aceste filtre, adică se obțin creșteri de 11,2 și respectiv 27,4dB ale raportului semnal/zgomot. Pentru celălalt canal, y_1 , se pornește de la un raport semnal/zgomot de aproximativ 12dB, și se produc creșteri ale acestuia la valorile 14,26 și respectiv 28,18dB, de numai 2,26dB în cazul nefolosirii filtrelor Q_1 și Q_2 și de 16,18dB în cazul folosirii lor. Se poate afirma, că efectul de separare al semnalului de putere mică a fost mai pronunțat decât efectul de separare al semnalului de putere mare.

La aceeași concluzie se ajunge și din examinarea datelor referitoare la indicii calitativi obținuți după 11 cicluri de decorelare când creșterea de raport semnal/zgomot este de 18,4 și respectiv 34,3dB față de 9,5 și respectiv 22,7dB.

Efectul benefic al utilizării filtrelor Q_1 și Q_2 este evident și aici.

Trebuie menționat că datorită parametrilor mărime de pas mici și a discrepanței de valori ale puterilor semnalelor surselor, în cazul nefolosirii filtrelor Q_1 și Q_2 filtrele sunt departe de punctul de decorelare optim și după 10 cicluri de decorelare. În cazul folosirii acestor filtre, W_1 converge, practic, după primul ciclu, în timp ce W_2 ajunge la valori apropiate de optim abia după 10 cicluri de decorelare, convergența nefiind încă terminată.

În cazul când semnalul s_1 are o putere de aproximativ zece ori mai mică decât s_2 , se obțin concluzii asemănătoare, dar se schimbă rolurile semnalelor între ele.

În tabelele 3.2.6 și 3.2.7 se dau rezultatele acestor teste. Se face observația că în cazul aplicării algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără folosirea filtrelor Q_1 și Q_2 , parametrii mărime de pas au avut valoarea de 0,0005. În cazul folosirii celor două filtre, valoarea a fost 0,02, ca și în testele precedente.

Tabelul 3.2.6.

Indice calitativ	Valoare
$Rsz(s_1, y_1, x_1)$ [dB]	-8,931895
$Ap(s_1, y_1, x_1)$ [dB]	-0,002530
$Rsz(s_2, y_2, x_2)$ [dB]	9,425397
$Ap(s_2, y_2, x_2)$ [dB]	-0,033094

Tabelul 3.2.7.

Indice calitativ	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, un ciclu de decorelare, fără filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,0005$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, fără filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,0005$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, un ciclu de decorelare, cu filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,02$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, cu filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,02$.
0	1	2	3	4
$Rsz(s_1, t_1, x_1)$ [dB]	2,681344	14,466861	12,741882	23,856523
$Ap(s_1, t_1, x_1)$ [dB]	11,610705	23,396222	21,671243	32,785884
$Rsz(s_2, t_2, x_2)$ [dB]	13,581816	23,519859	21,861422	33,048238
$Ap(s_2, t_2, x_2)$ [dB]	4,123324	14,061366	12,402929	23,589746

Rezultatele prezentate în tabelele 3.2.6 și 3.2.7. evidențiază că pornind de la un raport semnal/zgomot în cazul canalului semnalului y_1 de aproximativ -9dB, după primul ciclu de decorelare, în cazul nefolosirii filtrelor Q_1 și Q_2 , se ajunge la un raport semnal/zgomot de

aproximativ 2,7dB, iar în cazul folosirii celor două filtre, se ajunge la 12,7dB, adică se obțin creșteri de 11,7 și respectiv 21,7dB. În cazul canalului semnalului y_2 se pornește de la un raport semnal/zgomot de 9,4dB și se ajunge la 13,6 și respectiv 21,86dB, adică se obțin creșteri de 4,2 și respectiv 12,26dB. Din nou se confirmă faptul că efectul de separare al semnalului de putere mică a fost mai pronunțat decât efectul de separare al semnalului de putere mare.

La aceeași concluzie se ajunge și din examinarea datelor referitoare la indicii calitativi obținuți după 11 cicluri de decorelare când creșterea de raport semnal/zgomot este de 23,3 și respectiv 33,7dB față de 14,1 și respectiv 23,6dB.

Atenuarea semnalului perturbator este mai mare pentru canalul corespunzător sursei de semnal cu putere mai mică decât pe canalul corespunzător sursei de semnal de putere mai mare.

3.2.4.6. Testul 2

Algoritmul SAD cu propagare înapoi nu poate fi folosit cu filtrele suplimentare Q_1 și Q_2 și drept urmare parametrii de regim tranzitoriu care pot fi obținuți sunt mai slabi decât cei obținuți cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, în aceleași condiții. Din acest motiv nu se mai face o prezentare a acestor rezultate în cazul testului 2 pentru algoritmul SAD.

Pentru început sunt prezentate semnalele de test s_1 și s_2 , semnalele rezultate în urma mixării acestora, y_1 și y_2 , precum și spectrele acestora, calculate folosind 1024 de eșantioane începând cu eșantionul 300000.

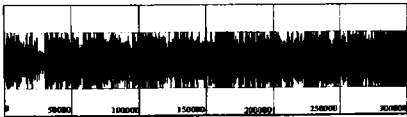


Fig. 3.2.123. Semnalul s_1 .

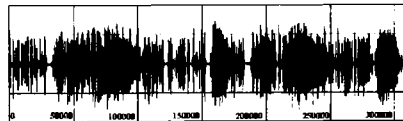


Fig. 3.2.124. Semnalul s_2 .

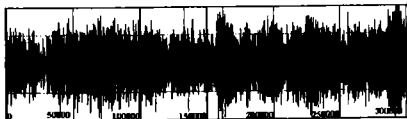


Fig. 3.2.125. Semnalul y_1 .

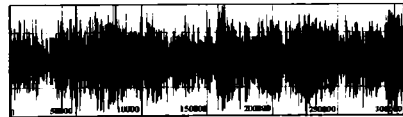


Fig. 3.2.126. Semnalul y_2 .

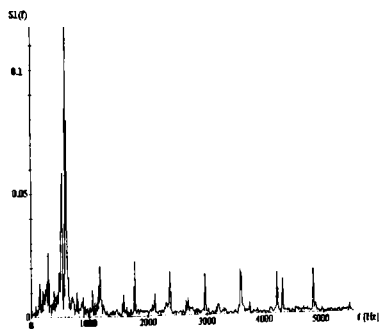


Fig. 3.2.127. Spectrul semnalului s_1 .

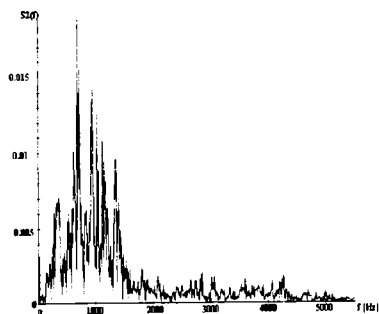


Fig. 3.2.128. Spectrul semnalului s_2 .

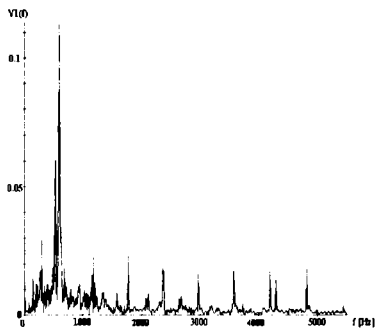


Fig. 3.2.129. Spectrul semnalului y_1 .

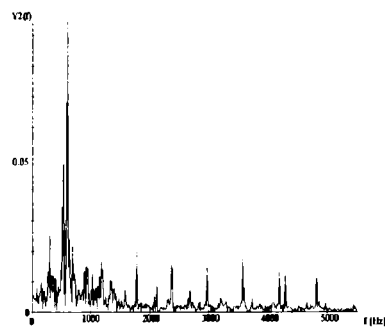


Fig. 3.2.130. Spectrul semnalului y_2 .

Semnalele y_1 și y_2 au fost obținute conform schemei prezentate în Fig. 3.2.31 în care filtrele H_1 și H_2 au funcțiile de transfer date de relația (3.2.239).

În continuare, în figurile următoare sunt prezentate rezultatele testului 2 referitor la algoritmul cu sistem de gradienti parțiali în situația că semnalele au puteri relativ egale. Sunt prezentate comparativ rezultatele obținute fără utilizarea filtrelor suplimentare Q_1 și Q_2 și cele obținute prin utilizarea acestora. În primul caz, parametrii mărime de pas maximi μ_1 și μ_2 , pentru care s-a obținut o evoluție stabilă, au avut valoarea 0,0001, iar în al doilea caz, această valoare a putut fi crescută la 0,02.

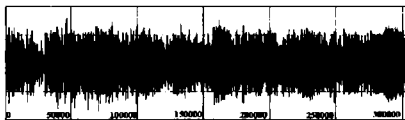


Fig. 3.2.131. Semnalul t_1 , în primul ciclu de decorelare, obținut cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

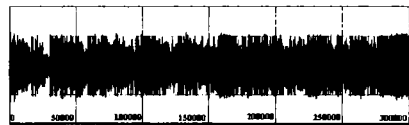


Fig. 3.2.132. Semnalul t_1 , în primul ciclu de decorelare, obținut cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

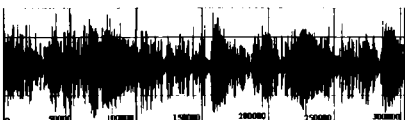


Fig. 3.2.133. Semnalul t_2 , în primul ciclu de decorelare, obținut cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

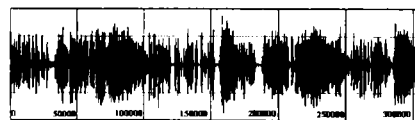


Fig. 3.2.134. Semnalul t_2 , în primul ciclu de decorelare, obținut cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

Diferențele de calitate în reconstrucția semnalului original sunt evidente.

În cazul semnalului t_1 , comparând situația din Fig.3.2.131 cu situațiile din figurile 3.2.123 și 3.2.125, pe de o parte, și cu cea din Fig. 3.2.132, pe de altă parte, se constată că procesul de separare este abia perceptibil în timp ce în situația din Fig.3.2.132 este aproape finalizat. Comparăția este și mai vizibilă în cazul semnalului t_2 . În Fig. 3.2.133 se observă că evidențierea intervalelor dintre cuvinte este un proces lent, în timp ce, în Fig. 3.2.134, aceste intervale sunt evidente după primele trei secunde.

În figurile 3.2.135 la 3.2.138 sunt prezentate comparativ semnalele t_1 și t_2 în timpul celui de al 11-lea ciclu de decorelare.

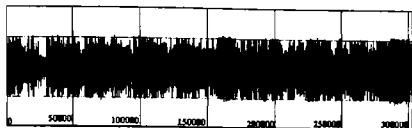


Fig. 3.2.135. Semnalul t_1 , în al 11-lea ciclu de decorelare, obținut cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

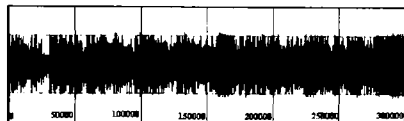


Fig. 3.2.136. Semnalul t_1 , în al 11-lea ciclu de decorelare, obținut cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

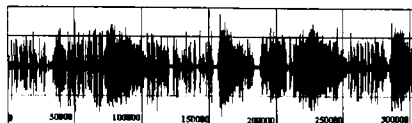


Fig. 3.2.137. Semnalul t_2 , în al 11-lea ciclu de decorelare, obținut cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.



Fig. 3.2.138. Semnalul t_2 , în al 11-lea ciclu de decorelare, obținut cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

În continuare sunt prezentate comparativ, spectrele semnalelor t_1 și t_2 estimate pe 1024 de eșantioane, începând de la eșantionul 300000.

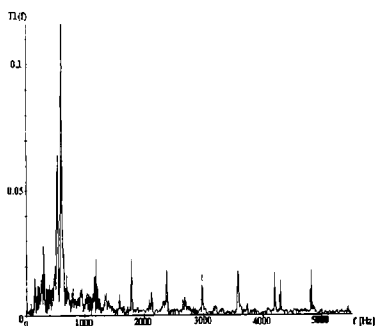


Fig. 3.2.139. Spectrul semnalului t_1 estimat în primul ciclu de decorelare, în cazul folosirii algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

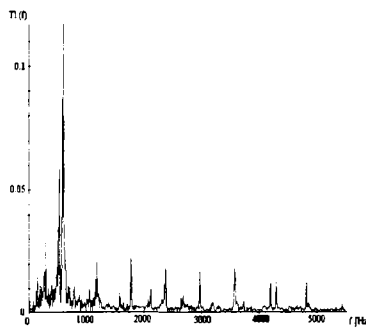


Fig. 3.2.140. Spectrul semnalului t_1 estimat în primul ciclu de decorelare, în cazul folosirii algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

În situația din Fig. 3.2.139, în jurul frecvenței de 800Hz se observă componentele spectrale provenite de la semnalul s_2 , componente care în situația din Fig. 3.2.140 sunt mult mai puțin vizibile.

În imaginea din Fig. 3.2.141 influența semnalului s_1 în cadrul semnalului t_2 este puternică, componentele spectrale ale lui s_1 depășindu-le în amplitudine pe cele ale lui s_2 . În Fig. 3.2.142, influența semnalului s_1 în cadrul semnalului t_2 nu este vizibilă. Diferențele mici care se observă, față de spectrul semnalului s_2 se datorează unui efect de filtrare, datorat

sistemului de decorelare care încă nu este perfect acordat, care accentuează puțin componentele de frecvență înaltă.

În figurile 3.2.143 la 3.2.146 sunt prezentate spectrele semnalelor t_1 și t_2 la sfârșitul celui de al 11-lea ciclu de decorelare.

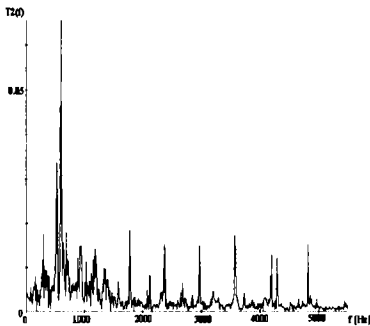


Fig. 3.2.141. Spectrul semnalului t_2 estimat în primul ciclu de decorelare, în cazul folosirii algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

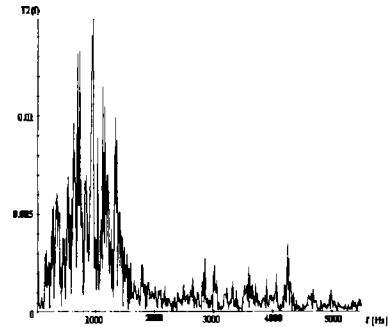


Fig. 3.2.142. Spectrul semnalului t_2 estimat în primul ciclu de decorelare, în cazul folosirii algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

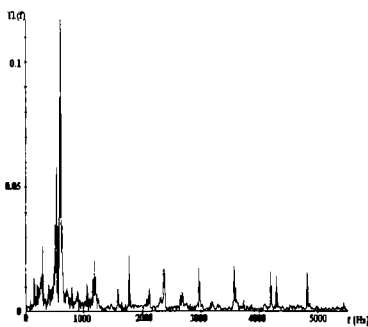


Fig. 3.2.143. Spectrul semnalului t_1 estimat la sfârșitul celui de al 11-lea ciclu de decorelare, în cazul folosirii algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

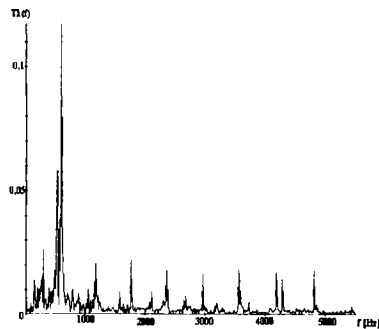


Fig. 3.2.144. Spectrul semnalului t_1 estimat la sfârșitul celui de al 11-lea ciclu de decorelare, în cazul folosirii algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

Diferențele dintre spectrele din figurile 3.2.143 și 3.2.144 sunt practic inesizabile datorită faptului că și în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor suplimentare Q_1 și Q_2 , după 11 cicluri de decorelare, sistemul a ajuns în vecinătatea punctului optim de decorelare. De asemenea, amplitudinea mică a componentelor spectrale ale semnalului s_2 comparativ cu cea a semnalului s_1 , contribuie la reducerea acestor diferențe.

În cazul figurilor 3.2.145 și 3.2.146 diferențele sunt încă semnificative. Datorită faptului că, în cazul nefolosirii filtrelor suplimentare Q_1 și Q_2 , după 11 cicluri de decorelare, sistemul de decorelare are punctul de funcționare mai depărtat de punctul optim de decorelare,

decât în cazul folosirii acestor filtre, în Fig. 3.2.145 se mai observă componente provenite de la semnalul s_1 . Fenomenul interesant, care se observă și aici, este atenuarea mai accentuată a componentelor spectrale de putere mare ale semnalului s_1 comparativ cu cele de putere mai scăzută. Acest fenomen sugerează faptul că și în domeniul frecvență viteza de adaptare este mai mare în zona componentelor spectrale de putere mai mare.

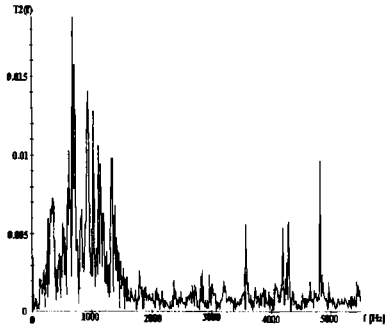


Fig. 3.2.145. Spectrul semnalului t_2 estimat la sfârșitul celui de al 11-lea ciclu de decorelare, în cazul folosirii algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

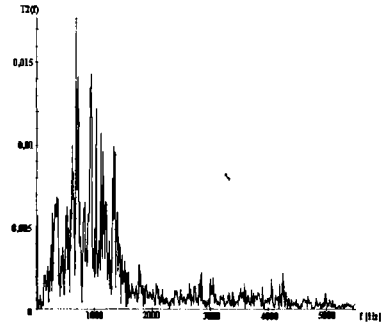


Fig. 3.2.146. Spectrul semnalului t_2 estimat la sfârșitul celui de al 11-lea ciclu de decorelare, în cazul folosirii algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

Spectrul din Fig. 3.2.146 este identic cu cel al semnalului s_2 , sugerând că s-au obținut indici de performanță foarte buni în procesul de reconstrucție al semnalului s_2 .

În figurile 3.2.147 la 3.2.162 se prezintă evoluția comparativă a coeficienților filtrelor W_1 și W_2 pe durata unui ciclu de decorelare și pe durata a 10 cicluri de decorelare, fără utilizarea filtrelor suplimentare Q_1 și Q_2 și cu utilizarea acestora.

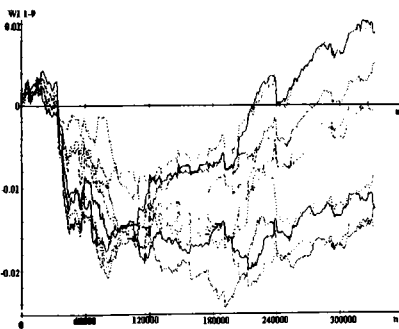


Fig. 3.2.147. Evoluția coeficienților 1÷9 ai filtrului W_1 pe durata primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

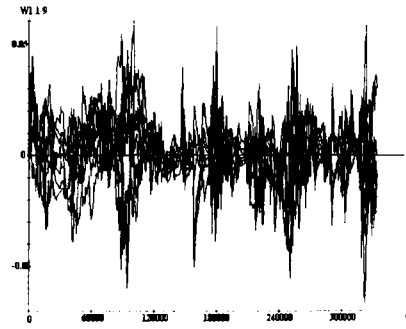


Fig. 3.2.148. Evoluția coeficienților 1÷9 ai filtrului W_1 pe durata primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

Ca și în cazul testului 1, influența benefică asupra evoluției coeficienților este evidentă deoarece la o creștere de 200 de ori a parametrului mărime de pas, abaterea maximă a

coeficienților de la valoarea lor corectă care este 0 s-a mărit doar de două ori în condițiile în care algoritmul evoluează în regim staționar.

Faptul că evoluează simultan mai mulți coeficienți decât în testul 1, a avut drept repercusiune, în cazul nefolosirii filtrelor Q_1 și Q_2 , necesitatea micșorării parametrilor mărime de pas μ_1 și μ_2 de la valoarea 0,001 la valoarea 0,0001, pentru a putea menține sistemul determinat de ecuațiile de actualizare ale algoritmului în regim de evoluție stabilă.

Prezența mai multor coeficienți a condus la necesitatea asigurării unei perioade mai mari de mediere a mărimilor care compun gradientii stohastici pentru a se putea menține condiția de stabilitate (3.2.240). Acest lucru s-a putut realiza prin micșorarea parametrilor mărime de pas.

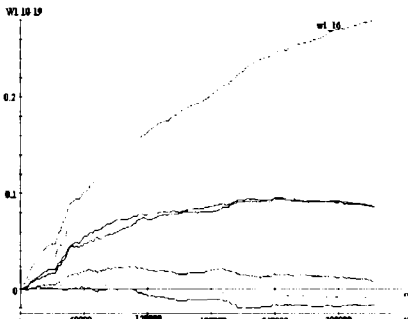


Fig. 3.2.149. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_1 pe durata primului ciclu de decolare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

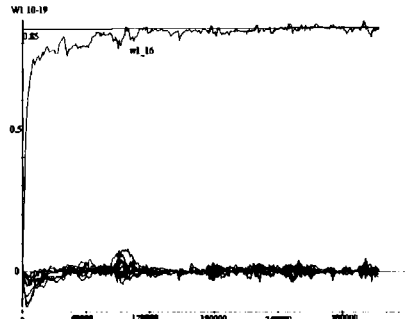


Fig. 3.2.150. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_1 pe durata primului ciclu de decolare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

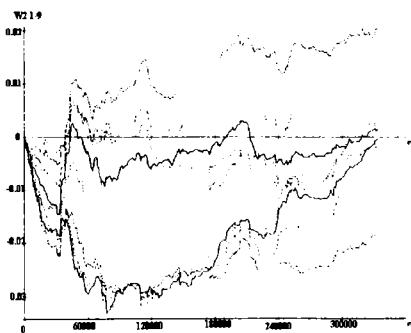


Fig. 3.2.151. Evoluția coeficienților 1÷9 ai filtrului W_2 pe durata primului ciclu de decolare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

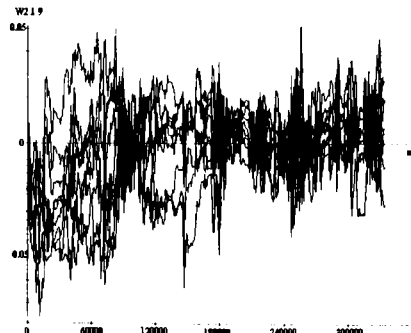


Fig. 3.2.152. Evoluția coeficienților 1÷9 ai filtrului W_2 pe durata primului ciclu de decolare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

De fapt, micșorând atât de mult parametrii mărime de pas, s-a ajuns la o evoluție extrem de lentă a algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , evoluție care pentru multe situații este nesatisfăcătoare, mai ales când parametrii sistemului de mixare și ai semnalelor sunt dinamici.

Utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , prin efectul de scădere al gradului de corelare al eșantioanelor vecine ale semnalelor, pe de o parte, și prin micșorarea amplitudinii semnalelor prelucrate în vecinătatea limitelor în care condiția (3.2.240) este îndeplinită, pe de altă parte, permit utilizarea unor parametrii mărime de pas, de 200 de ori mai mari, în acest caz. În felul acesta se obține un regim tranzitoriu suficient de rapid pentru algoritmul cu sistem de gradienti parțiali să devină utilizabil în aplicații practice.

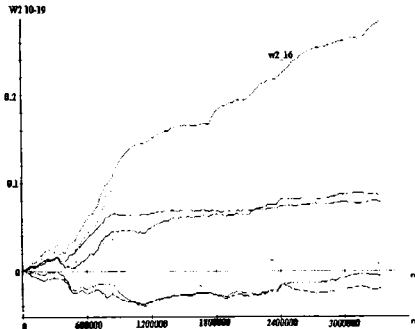


Fig. 3.2.153. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_2 pe durata primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

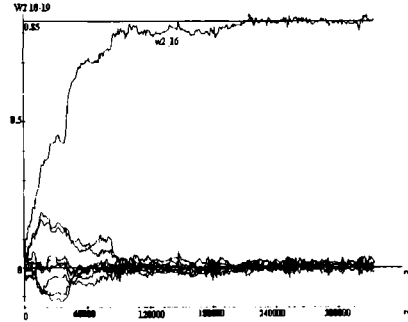


Fig. 3.2.154. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_2 pe durata primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

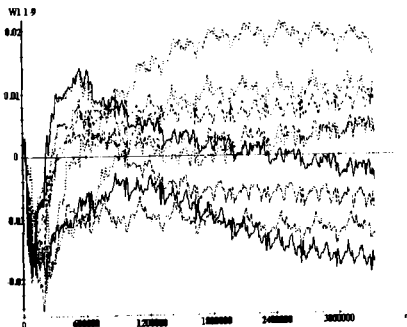


Fig. 3.2.155. Evoluția coeficienților 1÷9 ai filtrului W_1 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

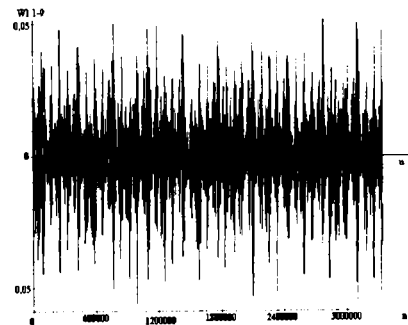


Fig. 3.2.156. Evoluția coeficienților 1÷9 ai filtrului W_1 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

Din figurile 3.2.155 la 3.2.162 se observă că dacă nu se utilizează filtrele Q_1 și Q_2 , nu se ajunge în vecinătatea soluțiilor optime nici după 10 cicluri de decorelare, adică nici după 300 de secunde. În același timp, utilizând aceste filtre, decorelarea se realizează, acceptabil, în mai puțin de 3 secunde, și cu parametrii buni, în aproximativ 10 secunde, adică după prima treime a primului ciclu de decorelare.

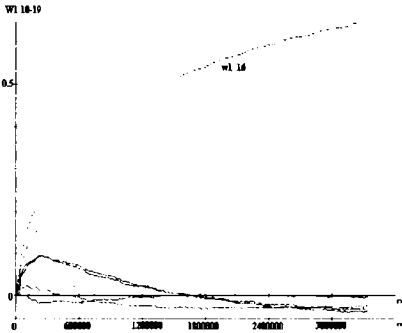


Fig. 3.2.157. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_1 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

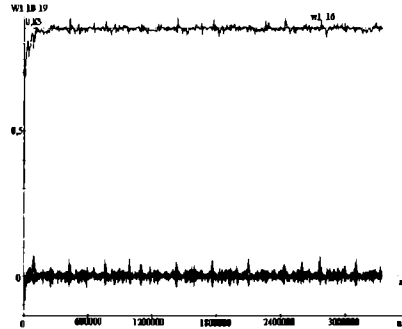


Fig. 3.2.158. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_1 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

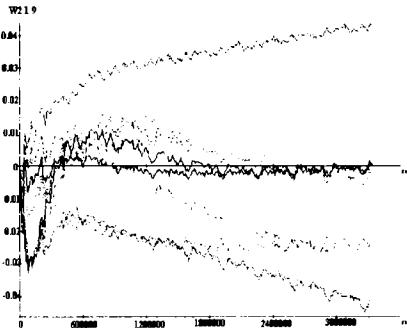


Fig. 3.2.159. Evoluția coeficienților 1÷9 ai filtrului W_2 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

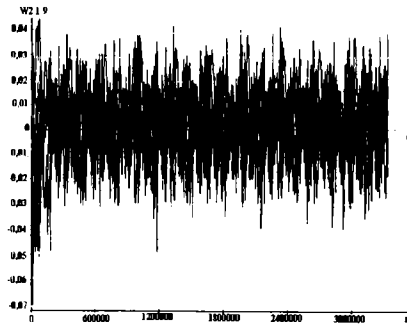


Fig. 3.2.160. Evoluția coeficienților 1÷9 ai filtrului W_2 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

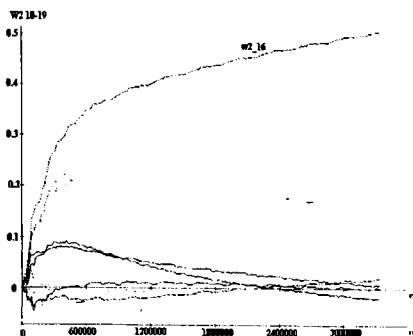


Fig. 3.2.161. Evoluția coeficienților 10+19 ai filtrului W_2 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

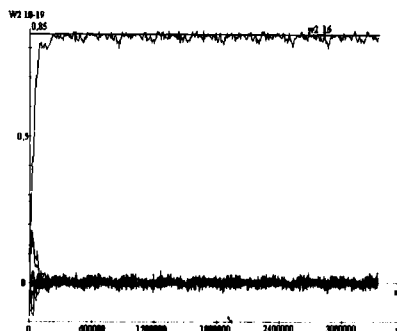


Fig. 3.2.162. Evoluția coeficienților 10+19 ai filtrului W_2 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

În tabelul 3.2.8 sunt prezentați indicii calitativi ai semnalelor de intrare y_1 și y_2 .

Tabelul 3.2.8.

Indice calitativ	Valoare
$Rsz(s_1, y_1, x_1)$ [dB]	2.610966
$Ap(s_1, y_1, x_1)$ [dB]	-0,064302
$Rsz(s_2, y_2, x_2)$ [dB]	0.112440
$Ap(s_2, y_2, x_2)$ [dB]	-0,035532

Tabelul 3.2.9 prezintă indicii calitativi ai semnalelor t_1 și t_2 obținuți în cadrul testului 2.

Tabelul 3.2.9.

Indice calitativ	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, un ciclu de decorelare, fără filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,0001$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, fără filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,0001$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, un ciclu de decorelare, cu filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,02$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, cu filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,02$.
0	1	2	3	4
$Rsz(s_1, t_1, x_1)$ [dB]	10,167354	21.678526	17.890267	17.895960
$Ap(s_1, t_1, x_1)$ [dB]	7,492085	20.414878	15,214997	15,220690
$Rsz(s_2, t_2, x_2)$ [dB]	9,792749	20.200212	17.349830	17.357254
$Ap(s_2, t_2, x_2)$ [dB]	9,644775	20,052237	17,201856	17,209280

Se observă că la sfârșitul primului ciclu de decorelare, datorită faptului că în cazul neutilizării filtrelor Q_1 și Q_2 , coeficienții filtrelor sunt depărtați de valorile optime, indicii calitativi obținuți sunt mai slabi decât dacă se utilizează aceste filtre. De fapt, în al doilea caz algoritmul alunge să evolueze în jurul punctului optim. Pe de altă parte, după 11 cicluri de decorelare, deși algoritmul nu a ajuns în vecinătatea punctului optim, în cazul nefolosirii filtrelor Q_1 și Q_2 , totuși indicii calitativi sunt mai buni decât cei obținuți prin folosirea acestor filtre, când

algoritm evoluiează în jurul punctului optim. În acest caz zgomotul de adaptare are o influență mai mare decât depărtarea coeficienților filtrelor W_1 și W_2 față de valorile optime. Zgomotul a crescut datorită faptului că există mai mulți coeficienți care își caută valorile optime, în comparație cu situația de la testul 1.

Fenomenul de creștere a zgomotului de adaptare odată cu creșterea numărului de coeficienți ai filtrelor W_1 și W_2 , pe de o parte, și îndeplinirea tot mai dificilă a condiției (3.2.240), pe de altă parte, conduc la ideea că există o limită practică în ceea ce privește dimensiunile filtrelor W_1 și W_2 pentru care algoritmii de decorelare pot fi aplicați.

În cadrul testului 2 s-au făcut și experimente în care semnalele s_1 și s_2 au puteri diferite, la fel ca la testul 1.

În cazul în care semnalul s_1 are o putere de zece ori mai mare decât cea a lui s_2 , evoluția ultimilor 10 coeficienți ai filtrelor W_1 și W_2 este prezentată comparativ, în figurile 3.2.163 la 3.2.170. Figurile din partea stângă a paginii prezintă situația în care nu s-au folosit filtrele Q_1 și Q_2 , când parametrii mărime de pas, μ_1 și μ_2 , au putut fi creșcuți până la valoarea 0,0001. Figurile din partea dreaptă a paginii prezintă situația în care s-au folosit filtrele Q_1 și Q_2 , când parametrii μ_1 și μ_2 au putut fi creșcuți până la valoarea 0,02. Evoluția este urmărită atât pe durata unui ciclu de decorelare, cât și pe durata a 10 cicluri de decorelare.

Evoluția filtrului W_1 este asemănătoare cu cea din cazul când puterile semnalelor erau egale deoarece puterea semnalului s_1 a rămas neschimbată. Evoluția filtrului W_2 este încetinită deoarece puterea semnalului s_2 este de aproximativ 10 ori mai mică decât în cazul puterilor egale. De fapt, pe durata unui singur ciclu de decorelare, în Fig. 3.2.165 nici nu se observă o tendință clară de evoluție a coeficienților.

În cazul nefolosirii filtrelor Q_1 și Q_2 , nu se ajunge în vecinătatea punctului optim de separare a semnalelor nici după 10 cicluri de decorelare. Acest lucru demonstrează încă o dată faptul că dacă nu se utilizează filtrele Q_1 și Q_2 , algoritmul devine nepractic datorită duratei excesive a regimului tranzitoriu.

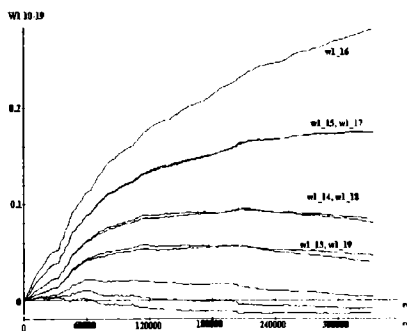


Fig. 3.2.163. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_1 pe durata primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$.

Puterea semnalului s_1 este de 10 ori mai mare decât a semnalului s_2 .

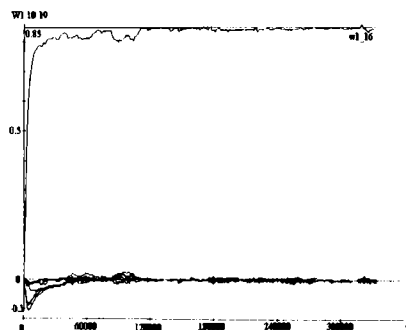


Fig. 3.2.164. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_1 pe durata primului ciclu de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$.

Puterea semnalului s_1 este de 10 ori mai mare decât a semnalului s_2 .

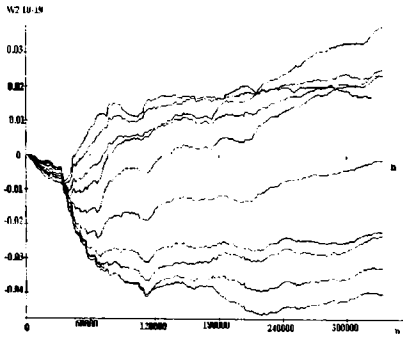


Fig. 3.2.165. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_2 pe durata primului ciclu de decolare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$. Puterea semnalului s_1 este de 10 ori mai mare decât a semnalului s_2 .

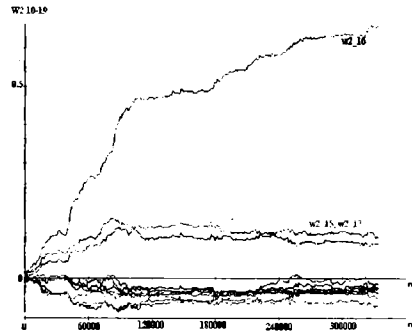


Fig. 3.2.166. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_2 pe durata primului ciclu de decolare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$. Puterea semnalului s_1 este de 10 ori mai mare decât a semnalului s_2 .

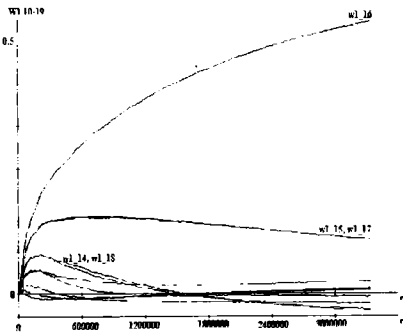


Fig. 3.2.167. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_1 pe durata a 10 cicluri de decolare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$. Puterea semnalului s_1 este de 10 ori mai mare decât a semnalului s_2 .

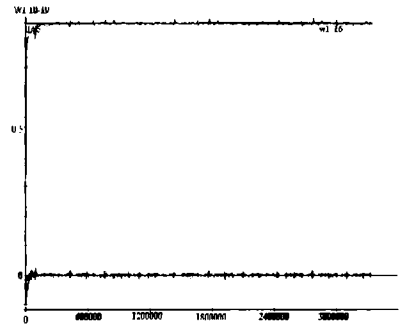


Fig. 3.2.168. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_1 pe durata a 10 cicluri de decolare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$. Puterea semnalului s_1 este de 10 ori mai mare decât a semnalului s_2 .

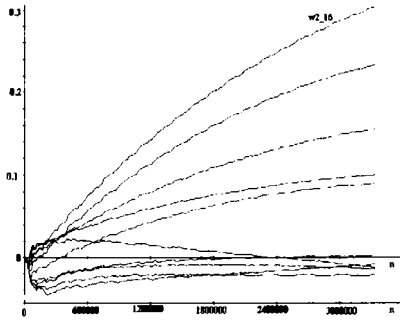


Fig. 3.2.169. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_2 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$. Puterea semnalului s_1 este de 10 ori mai mare decât a semnalului s_2 .

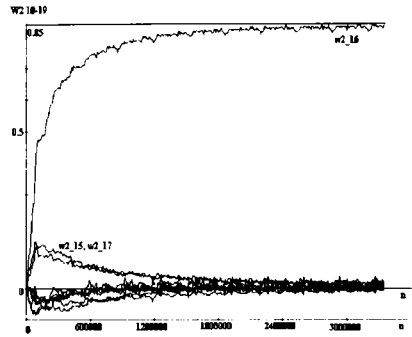


Fig. 3.2.170. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_2 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$. Puterea semnalului s_1 este de 10 ori mai mare decât a semnalului s_2 .

În tabelul 3.2.10 se dau indicii calitativi ai semnalelor y_1 și y_2 , în cazul când semnalul s_1 are o putere de zece ori mai mare decât cea a semnalului s_2 .

Tabelul 3.2.10.

Indice calitativ	Valoare
$Rsz(s_1, y_1, x_1)$ [dB]	13,0685410
$Ap(s_1, y_1, x_1)$ [dB]	-0,0643025
$Rsz(s_2, y_2, x_2)$ [dB]	-10,3451350
$Ap(s_2, y_2, x_2)$ [dB]	-0,0355329

În tabelul 3.2.11 se dau indicii calitativi obținuți pentru semnalele t_1 și t_2 obținute prin utilizarea algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, atât fără utilizarea filtrelor suplimentare Q_1 și Q_2 , cât și în situația utilizării acestora.

Tabelul 3.2.11.

Indice calitativ	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, un ciclu de decorelare, fără filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,0001$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, fără filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,0001$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, un ciclu de decorelare, cu filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,02$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, cu filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,02$.
0	1	2	3	4
$Rsz(s_1, t_1, x_1)$ [dB]	13,713206	21,579174	23,017982	25,903669
$Ap(s_1, t_1, x_1)$ [dB]	0,580360	8,446329	9,8851376	12,770824
$Rsz(s_2, t_2, x_2)$ [dB]	-0,788480	9,821255	12,462098	14,882998
$Ap(s_2, t_2, x_2)$ [dB]	9,5211209	20,130856	22,771698	25,192599

Din examinarea indicilor calitativi rezultă clar utilitatea filtrelor Q_1 și Q_2 .

Comparând creșterile indicilor calitativi ai semnalelor t_1 și t_2 comparativ cu cei ai semnalelor y_1 și respectiv y_2 , se constată o creștere mai însemnată a indicilor calitativi ai lui t_2 , adică ai celui care reconstituie semnalul sursei de putere mai mică. Fenomenul a fost explicat în cadrul prezentării rezultatelor testului 1.

În cazul în care semnalul s_2 are o putere de zece ori mai mare decât cea a semnalului s_1 , rezultatele obținute sunt simetrice. În figurile următoare se prezintă evoluția ultimilor zece coeficienți ai filtrelor W_1 și W_2 pe durata a zece cicluri de decorelare.

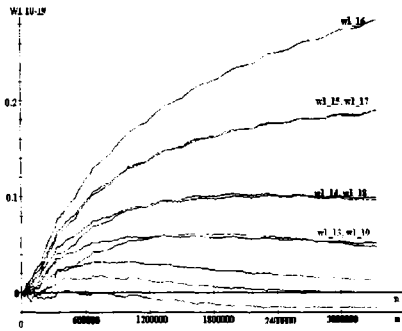


Fig. 3.2.171. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_1 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$. Puterea semnalului s_2 este de 10 ori mai mare decât a semnalului s_1 .

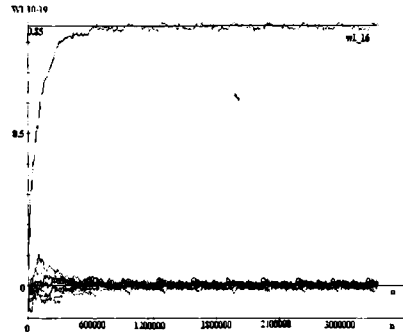


Fig. 3.2.172. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_1 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$. Puterea semnalului s_2 este de 10 ori mai mare decât a semnalului s_1 .

Așa cum era de așteptat, în acest caz filtrul W_2 evoluează mai rapid decât filtrul W_1 .

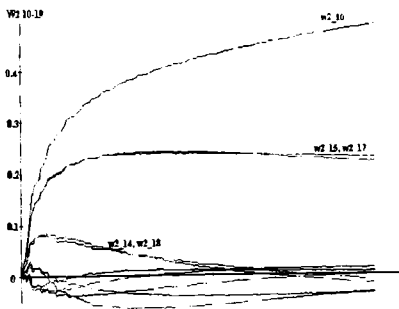


Fig. 3.2.173. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_2 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,0001$. Puterea semnalului s_2 este de 10 ori mai mare decât a semnalului s_1 .

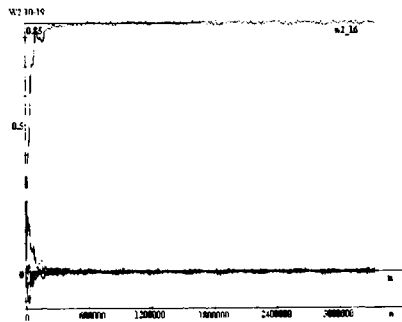


Fig. 3.2.174. Evoluția coeficienților 10÷19 ai filtrului W_2 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, cu utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , cu $\mu_1=\mu_2=0,02$. Puterea semnalului s_2 este de 10 ori mai mare decât a semnalului s_1 .

În tabelul 3.2.12 se dau indicii calitativi ai semnalelor y_1 și y_2 în această situație.

Tabelul 3.2.12.

Indice calitativ	Valoare
$Rsz(s_1, y_1, x_1)$ [dB]	-7,846608
$Ap(s_1, y_1, x_1)$ [dB]	-0,064302
$Rsz(s_2, y_2, x_2)$ [dB]	10,570015
$Ap(s_2, y_2, x_2)$ [dB]	-0,035532

Se observă că datorită valorii raportului semnal/zgomot, în acest caz semnalul s_1 , poate fi considerat ca fiind “înecat în zgomot”, spre deosebire de cazul precedent când s_2 putea fi considerat “înecat în zgomot”.

În tabelul 3.2.13 se prezintă indicii calitativi ai semnalelor t_1 și t_2 obținuți în urma acestui experiment.

Tabelul 3.2.13.

Indice calitativ	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, un ciclu de decorelare, fără filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,0001$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, fără filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,0001$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, un ciclu de decorelare, cu filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,02$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, cu filtrele Q_1 și Q_2 , $\mu_1=\mu_2=0,02$.
0	1	2	3	4
$Rsz(s_1, t_1, x_1)$ [dB]	-0.003966	11.906391	13.734161	13.690429
$Ap(s_1, t_1, x_1)$ [dB]	7,778339	19,688696	21,516466	21,472734
$Rsz(s_2, t_2, x_2)$ [dB]	3.304589	21.057323	22.972293	23.223856
$Ap(s_2, t_2, x_2)$ [dB]	-0,014029	10,451774	12,366744	12,618307

Din examinarea datelor din tabelul 3.2.13 se observă că în acest caz semnalul s_1 este mai bine separat decât s_2 , deoarece se pleacă de la un raport semnal/zgomot de -7,84dB în cazul lui y_1 și se ajunge la 13,7dB în cazul lui t_1 , deci o creștere de 21,5dB față de o creștere de aproximativ 13dB cât reprezintă creșterea raportului semnal/zgomot de la cel al semnalului y_2 la cel al semnalului t_2 .

3.2.4.7. Experiment în care unul dintre semnalele surselor este absent pentru o perioadă semnificativă de timp

Experimentele prezentate până acum au fost realizate în condițiile în care ambele semnale s_1 și s_2 erau ambele prezente pe întreaga durată studiată.

În continuare se pune problema studierii comportării algoritmului cu sistem de gradienti parțiali în situația când unul dintre semnale, s_1 sau s_2 , este absent pentru o perioadă de timp semnificativă (adică de ordinul câtorva zeci de mii de eşantioane).

Se consideră scenariul de plasare a surselor și receptorilor de la testul 1, adică sistemul de mixare are filtrele H_1 și H_2 care au funcțiile de transfer date de relația (3.2.238). Filtrele W_1 și W_2 se consideră că au gradul trei.

Se studiază două situații, în ambele semnalul s_1 fiind neîntrerupt pe toată durata experimentului. În prima situație studiată semnalul s_2 apare cu o întârziere de aproximativ 80000 de eșantioane față de semnalul s_1 , iar în a doua situație este întrerupt pe o durată similară în a doua jumătate a duratei experimentului, când filtrele sunt în apropierea soluției optime.

Se consideră că algoritmul folosește filtrele Q_1 și Q_2 și parametrii mărime de pas μ_1 și μ_2 .

În figurile următoare se prezintă rezultatele experimentului din prima situație menționată.

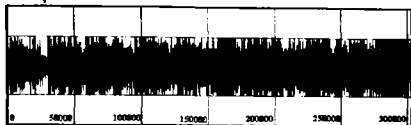


Fig. 3.2.175. Semnalul s_1 .

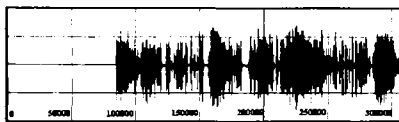


Fig. 3.2.176. Semnalul s_2 .



Fig. 3.2.177. Semnalul y_1 .

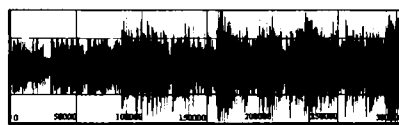


Fig. 3.2.178. Semnalul y_2 .

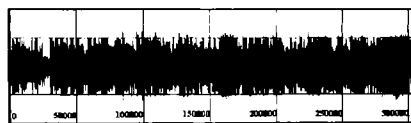


Fig. 3.2.179. Semnalul t_1 .

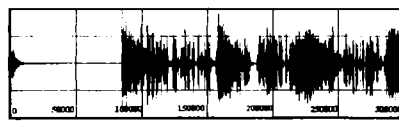


Fig. 3.2.180. Semnalul t_2 .

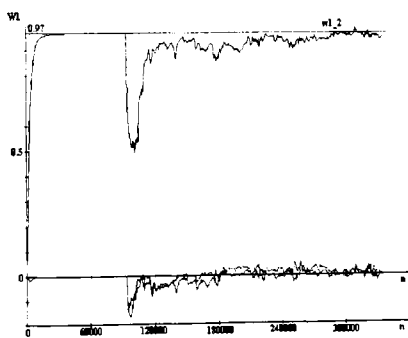


Fig. 3.2.181. Evoluția coeficienților filtrului W_1 .

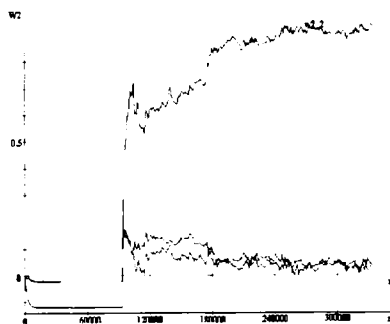


Fig. 3.2.182. Evoluția coeficienților filtrului W_2 .

În situația prezentată în Fig. 3.2.176 se observă că semnalul s_2 apare cu o întârziere de aproximativ 80000 de eșantioane. Drept urmare, în situațiile prezentate în figurile 3.2.177 și 3.2.178, semnalele y_1 și y_2 , pe perioada de început a experimentului sunt egale cu s_1 și respectiv semnalul provenit din s_1 dar transferat prin filtrul H_1 . Acest lucru este vizibil prin păstrarea caracterului de înfășurătoare limitată, caracteristică pe care o are semnalul s_1 . Când apare și semnalul s_2 , înfășurătorile semnalelor y_1 și y_2 nu mai sunt constante.

Semnalul t_1 , prezentat în Fig. 3.2.179, pe timpul absenței semnalului s_2 , este asemănător cu s_1 , prezentând caracterul de înfășurătoare limitată. După apariția semnalului s_2 se observă mici abateri de la caracterul limitat al înfășurătoarei, lucru care semnifică apariția unei mici perturbații din partea semnalului s_2 .

Semnalul t_2 , prezentat în Fig. 3.2.180 arată că algoritmul lucrează astfel încât dacă semnalul s_2 este absent, și semnalul t_2 devine zero. După o perioadă de convergență de aproximativ 10000 de eșantioane (aproximativ 0,9 secunde) semnalul t_2 devine zero.

Când apare semnalul s_2 se reface acordul filtrelor astfel încât după o perioadă tranzitorie de 30-40000 de eșantioane (adică aproximativ 3 secunde) semnalul t_2 devine asemănător cu s_2 , lucru evident mai ales în pauzele vorbirii.

Figurile 3.2.181 și 3.2.182 înfățișează evoluția coeficienților filtrelor W_1 și W_2 . Se observă că filtrul W_1 evoluează rapid, în absența semnalului s_2 , la valorile ideale ale coeficienților, unde se stabilizează. Filtrul W_2 evoluează rapid spre valori care sunt dictate de minimizarea funcțiilor cost ale algoritmului. Este important faptul că algoritmul converge spre un punct de echilibru stabil, diferit totuși de cel optim. El rămâne în acest punct de funcționare până la apariția semnalului s_2 . Când apare semnalul s_2 , algoritmul converge spre punctul de decorelare optim.

Este important de observat faptul că algoritmul a rămas stabil și s-a comportat "ideal" în această situație, adică semnalul t_2 a fost egal cu zero pe durata absenței semnalului s_2 , iar la apariția acestuia procesul de decorelare adaptivă se desfășoară corect.

În continuare, în figurile următoare se prezintă rezultatele experimentului în care semnalul s_2 se întrerupe după ce algoritmul a convers.



Fig. 3.2.183. Semnalul s_1 .

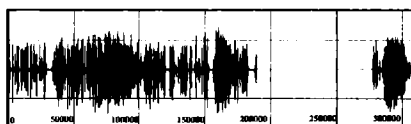


Fig. 3.2.184. Semnalul s_2 .

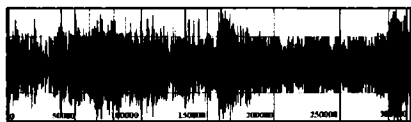


Fig. 3.2.185. Semnalul y_1 .

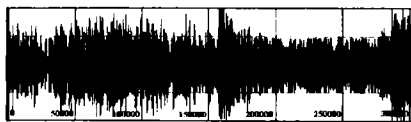


Fig. 3.2.186. Semnalul y_2 .



Fig. 3.2.187. Semnalul t_1 .

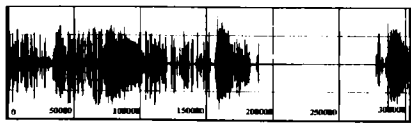


Fig. 3.2.188. Semnalul t_2 .

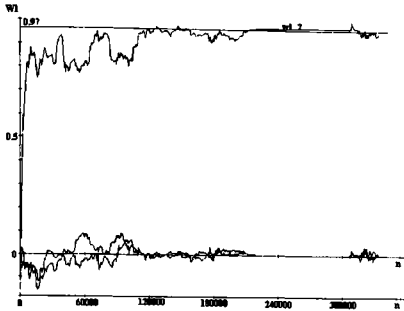


Fig. 3.2.189. Evoluția coeficienților filtrului W_1 .

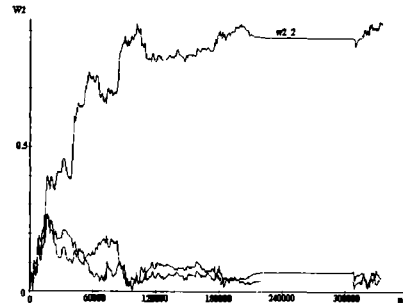


Fig. 3.2.190. Evoluția coeficienților filtrului W_2 .

Si în acest caz algoritmul se stabilizează într-un punct de funcționare în care asigură ca pe perioada absenței semnalului s_2 , semnalul de ieșire t_2 să fie egal cu zero. Din nou, coeficienții filtrului W_1 converg spre valorile ideale de decorelare, iar coeficienții filtrului W_2 spre valori determinate de minimizarea funcțiilor cost ale algoritmului.

Când sunt prezente ambele semnale, s_1 și s_2 , algoritmul evoluează normal spre soluția optimă de decorelare.

Se poate spune că și în acest caz algoritmul are un comportament “ideal”, în sensul celor explicate mai sus.

Din analiza celor două experimente, se poate trage concluzia că în cazul absenței unuia dintre semnale, algoritmul cu sistem de gradienti parțiali rămâne stabil, anulând semnalul de ieșire care ar trebui să reconstituie semnalul sursei absente.

Din punct de vedere practic, acest comportament este avantajos, deoarece nu sunt necesare metode suplimentare de pornire și oprire a algoritmului în funcție de prezența ambelor semnale ale surselor.

De asemenea, din faptul că filtrul a cărui evoluție este preponderent determinată de semnalul permanent rămâne în punctul optim de decorelare, la apariția semnalului intermitent, acesta este decorelat și evidențiat imediat, așa cum se observă din figurile 3.2.180 și 3.2.188.

3.2.4.8. Concluzii desprinse din experimentele prezentate

Din experimentele prezentate, care au constat în studierea comportamentului algoritmilor SAD și cu sistem de gradienti parțiali în cazul simulării a două situații geometrice diferite de plasarea surselor, sursele generând semnale reale de tip vocal și de muzică instrumentală, cu rapoarte de puteri diferite, se desprind următoarele concluzii:

1. La aceleași valori ale parametrilor mărime de pas μ_1 și μ_2 și la aceleași dimensiuni ale filtrelor W_1 și W_2 , algoritmul cu sistem de gradienti parțiali are o durată de regim tranzitoriu mai mică de aproximativ două ori decât cea obținută cu algoritmul SAD cu propagare înapoi.
2. Ambii algoritmi, la valori ale mărimilor de pas aflate în pragul intrării în regim divergent, pot converge spre “soluții fantomă”, soluții pentru care nu se realizează o separare corectă a semnalelor surselor. Cauza apariției acestor soluții constă în neutilizarea infinității de condiții de anulare a cumulațiilor pentru a se obține separarea corectă a semnalelor surselor.

Din punct de vedere practic, această condiție nu poate fi îndeplinită de nici un algoritm. Deci, cel puțin din punct de vedere teoretic, pentru orice algoritm de decorelare există condiții în care pot să apară “soluții fantomă”.

3. Utilizarea filtrului auxiliar Q_1 conduce la o ameliorare a evoluției coeficienților filtrelor W_1 și W_2 în sensul micșorării influenței dintre coeficienții vecini. Acest aspect care conduce la posibilitatea îndeplinirii condiției de stabilitate (3.2.240) pentru plaje mai largi ale gradului de autocorelare ale semnalelor surselor. De asemenea filtrul Q_1 are un efect benefic în întârzierea (în sensul că se pot utiliza parametrii mărime de pas mai mari) apariției fenomenului de convergență spre “soluții fantomă”, pe de o parte, și în cazul apariției lor, le apropie pe acestea de soluția corectă. Filtrul Q_1 poate fi utilizat atât cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali cât și cu algoritmul SAD. De fapt, prin efectul de autodecorelare al semnalelor surselor, utilizarea acestui filtru este utilă pentru orice algoritm de separare, chiar bazat pe cumulanți de ordin superior.
4. Utilizarea filtrului auxiliar Q_2 este posibilă numai cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali deoarece algoritmul SAD cu propagare înapoi devine instabil în prezența acestuia. Filtrul Q_2 permite creșterea valorii parametrilor μ_1 și μ_2 cu unul până la două ordine de mărime, obținându-se în acest fel regimuri tranzitorii cu durate mult mai scurte decât în cazul nefolosirii sale (micșorarea duratei regimului tranzitoriu se poate face cu ordine de mărime). Ca un dezavantaj care apare este riscul crescut ca algoritmul să converge spre “soluția fantomă” pentru valori mari ale parametrilor mărime de pas. Utilizarea simultană a filtrelor Q_1 și Q_2 corectează acest dezavantaj și permite obținerea unor parametrii de regim tranzitoriu suficient de buni pentru ca algoritmul să devină practic.
5. Creșterea zgomotului de adaptare, care se produce odată cu creșterea valorilor parametrilor μ_1 și μ_2 , pentru limitele în care algoritmul a fost stabil, nu este deranjantă întrucât, cel puțin auditiv, nu este sesizabilă la rapoartele semnal/zgomot obținute.
6. Rapoartele semnal/zgomot ale semnalelor t_1 și t_2 scad odată cu creșterea numărului de coeficienți ai filtrelor W_1 și W_2 . Din acest motiv, există o limită practică a numărului de coeficienți ai filtrelor pentru care aplicând algoritmul de decorelare, se obțin rapoarte semnal/zgomot acceptabile. Comparând datele din tabelele 3.2.3 și 3.2.9 se observă o scădere a raportului semnal/zgomot de la valori de aproximativ 23,3dB, când filtrele aveau patru coeficienți, la valori de aproximativ 17,5dB, când filtrele aveau 20 de coeficienți. Aceasta înseamnă o scădere de aproximativ 6dB pentru o creștere de cinci ori a numărului de coeficienți. Dacă considerăm ca raport semnal/zgomot “acceptabil” valoarea de 10dB, rezultă că limita practică a numărului de coeficienți ai filtrelor W_1 și W_2 se situează în jurul valorii de 100 până la maximum 200 de coeficienți. Consecința imediată este că în condițiile în care s-au efectuat testele, diferența de drum maximă de la surse la receptori nu poate depăși 2,5 până la 5 metri.
7. În situația în care semnalele surselor sunt de puteri inegale, semnalul mai puternic va determina convergența mai rapidă și cu mai mare precizie a filtrului W de același indice cu el, decât a celui alt filtru, a cărui evoluție este dictată preponderent de semnalul mai puțin puternic. În această situație, pe canalul semnalului mai slab, semnalul perturbator, care este cel puternic, este rejectat cu mai mare precizie decât este rejectat semnalul de putere mică pe canalul celui puternic. Drept urmare atenuarea semnalului perturbator este mai mare pe canalul semnalului de putere mică decât cea obținută pe canalul semnalului de putere mare. Acest fenomen conduce la o oarecare echilibrare a rapoartelor semnal/zgomot ale semnalelor t_1 și t_2 . În acest context, datele din tabelele de indici calitativi din experimentele cu semnale de puteri diferite trebuie interpretate ținându-se seama de relația de definiție a acestui raport, care conține la numitor o sumă a pătratelor abaterilor semnalului estimat în raport cu semnalul de referință, precum și de faptul că aceste abateri nu sunt în totalitate

determinate de semnalul perturbator, ci o contribuție importantă o are și efectul de distorsionare datorat modificării dinamice a coeficienților filtrelor în procesul de adaptare. Presupunând că puterea acestei distorsiuni este aproximativ egală pe ambele canale, rezultă că este normal ca raportul semnal/zgomot măsurat (pentru care nu s-a putut distinge cauza abaterii, adică ce proporție din puterea abaterii provine de la sursa perturbatoare și ce proporție provine din distorsionarea propriuzisă a semnalului util datorită modificării dinamice a coeficienților filtrelor în procesul de adaptare) să fie mai mic pe canalul semnalului mai puțin puternic deoarece se împarte o putere mai mică, cea a semnalului util, la puterea abaterii, care este aproximativ egală pe ambele canale.

8. Evoluția coeficienților filtrelor W_1 și W_2 este puternic influențată de gradul de staționaritate al semnalelor surselor. Din examinarea figurilor 3.2.32 și 3.2.33, care prezintă o înfășurătoare a semnalelor s_1 și respectiv s_2 , în domeniul timp, este evident că pentru statistici de termen lung, (adică estimări de parametrii statistici pe blocuri de mii de eșantioane) semnalul s_2 este puternic nestaționar. Acest aspect are repercursiuni asupra evoluției coeficienților filtrelor în sensul că cei ai lui W_2 au o evoluție cu abateri mai pronunțate de la traiectorii de tip exponențial.

Nestaționaritatea în domeniul timp determină, așa cum este și normal, și o nestaționaritate în domeniul frecvență. Acest aspect este vizibil în figurile 3.2.175 și 3.2.176 care sunt reprezentări timp-frecvență ale semnalelor s_1 și s_2 . Pe axele orizontale gradațiile sunt 10000 de eșantioane, pe axele verticale gradațiile sunt în număr de hertzi, iar tonurile de gri, cu cât sunt mai închise la culoare, cu atât amplitudinea componentei spectrale este mai mare.

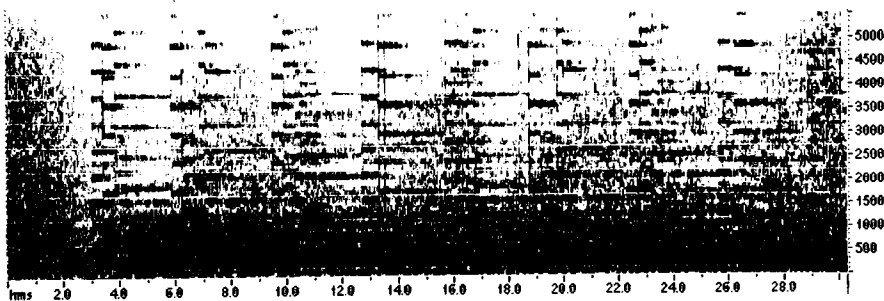


Fig. 3.2.175. Reprezentarea timp-frecvență a semnalului s_1 .

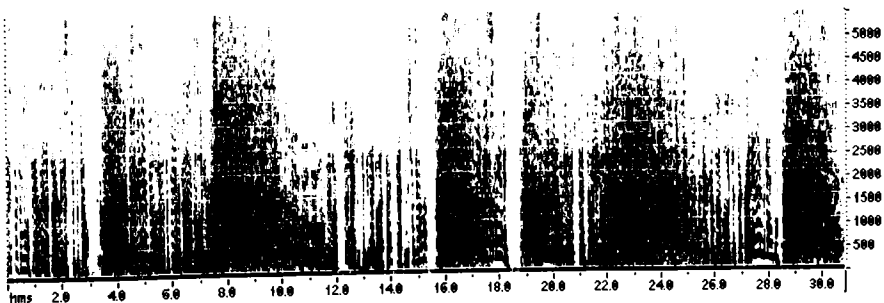


Fig. 3.2.176. Reprezentarea timp-frecvență a semnalului s_2 .

În Fig. 3.2.175 se observă că, începând de la eșantionul 30000, aspectul diagramei este aproximativ nemodificat, având majoritatea puterii concentrată într-o zonă de frecvențe cuprinsă între 0 și 1500Hz. Sunt de asemenea vizibile și armonicile sunetului pianului, prin dungi horizontale. Ca aspect general, se remarcă uniformitatea diagramei.

În contrast, în Fig.3.2.176 se observă fragmentarea în timp a puterii spectrale, în ritmul vorbirii. De asemenea în cadrul fiecărui fragment compoziția spectrală variază, de la spectre cu armonici evidente, manifestate prin dungi horizontale, la concentrări ale puterii într-un spectru continuu care are lobul principal cuprins între 200 și 2000Hz. De asemenea acești lobi principali nu au poziții riguros identice pe scara frecvențelor.

Din Fig. 3.2.47 reiese că fenomenul de adaptare al filtrelor, dacă este analizat în domeniul frecvență, evidențiază faptul că modificarea coeficienților se face după o lege care determină modificarea caracteristicilor spectrale ale sistemului preponderent în zonele unde densitatea de putere a componentelor spectrale este mai mare. Astfel se observă că componentele spectrale ale s_1 sunt mai atenuate în zona de maximă putere spectrală a lui s_1 , și sunt mai puțin atenuate în zona frecvențelor înalte unde puterea spectrală a semnalului s_1 este mai mică. Figura 3.2.47 evidențiază de fapt efectul filtrului W_1 a cărui evoluție este preponderent determinată de semnalul s_1 , care așa cum am arătat are o evoluție staționară.

Nu se poate evidenția un efect atât de vizibil în domeniul frecvență în cazul acțiunii semnalului s_2 asupra filtrului W_2 deoarece, așa cum s-a arătat, împrăștierea sa în domeniul frecvență, în timp, este mare. Din această cauză, și evoluția coeficienților este mai "dezordonată".

9. Alegerea valorilor parametrilor mărime de pas, μ_1 și μ_2 , este o problemă care, din păcate, poate fi rezolvată, numai prin testări. Valorile lor sunt determinate de mai mulți factori, care sunt, în cazuri practice, necunoscuți. Acești factori sunt legați de puterile și caracteristicile spectrale ale semnalelor surselor văzute la intrările receptorilor, coeficienții filtrelor de amestec H_1 și H_2 , pragurile valorilor lui μ_1 și μ_2 de la care sistemul converge spre "soluții fantomă", praguri care sunt și ele determinate de aceiași factori necunoscuți. Un alt aspect este legat de asigurarea unei perioade de mediere suficient de mari și a unui zgomot de adaptare suficient de mic, pentru a păstra coeficienții filtrelor W_1 și W_2 în limitele condiției de stabilitate (3.2.240) pe întreaga durată a procesului de adaptare. La acestea se adaugă și dificultăți de ordin matematic datorate modelării cu sisteme de ecuații neliniare cu diferențe finite și cu coeficienți variabili în timp a sistemului adaptiv al decorrelatorului cu propagare înapoi. Totuși, experimental, s-a stabilit că sistemul este mai stabil dacă se aleg parametrii μ_1 și μ_2 egali între ei. Din acest motiv toate experimentele au fost făcute respectând această regulă. De asemenea, ca prime valori de testare, se pot lua în considerare, când se pot aproxima puterile semnalelor, valori care sunt cu două, trei ordine de mărime mai mici decât inversele puterilor semnalelor, când nu se folosesc filtrele Q_1 și Q_2 , și cu unu, două ordine de mărime mai mici decât inversele puterilor semnalelor, când se folosesc aceste filtre.
10. Algoritmii cu sistem de gradienti parțiali evoluează stabil și în cazul absenței unuia dintre semnalele surselor. El are un comportament avantajos în absența unuia dintre semnale, evoluând astfel încât să anuleze semnalul de ieșire corespunzător semnalului sursă absent, pe de o parte, și acordând corect filtrul a cărui evoluție este determinată preponderent de semnalul prezent. Datorită acestui fapt, la apariția (sau reapariția) semnalului care a fost absent, acesta este rapid evidențiat și decorelat. Datorită acestui comportament nu sunt necesare tehnici speciale de urmărire a prezenței semnalelor celor două surse.

3.3.DECORELATOR PENTRU N SEMNALE

3.3.1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În Secțiunea 3.1 s-a demonstrat că singura arhitectură de decorelator care poate asigura separarea semnalelor provenite de la N (cu $N > 2$) surse statistic independente, de bandă largă, este cea cu propagare înapoi. Din acest motiv studiile mele s-au concentrat pentru dezvoltarea unui algoritm adaptiv adecvat acestui tip de decorelator.

În Secțiunea 3.2 a fost prezentat algoritmul de decorelare cu sistem de gradienti parțiali și s-a precizat că acesta poate fi extins și la cazul $N > 2$. Scopul acestei secțiuni este prezentarea algoritmului cu sistem de gradienti parțiali generalizat și a proprietăților acestuia evidențiate în cadrul unui experiment.

Înainte de a prezenta algoritmul cu sistem de gradienti parțiali generalizat sunt necesare unele precizări suplimentare asupra factorilor care limitează numărul N de semnale care pot fi separate.

O limitare indirectă a numărului de semnale care se pot separa este dată de condiția de stabilitate a decorelatorului exprimată sintetic de necesitatea ca ecuația (3.1.26) să aibă rădăcinile în interiorul cercului unitate. Ecuația (3.1.26) se rescrie mai jos pentru o mai bună urmărire a ideilor:

$$\begin{vmatrix} W_{11}(z) & \cdots & W_{1N}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N1}(z) & \cdots & W_{NN}(z) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.1)$$

S-a arătat tot în Secțiunea 3.1. condiția necesară ca semnalele provenite de la N surse statistic independente să fie decorelabile. Aceasta presupune ca ecuația (3.2.27), care se reproduce mai jos, să aibă toate rădăcinile în interiorul cercului unitate:

$$\begin{vmatrix} H_{11}(z) & \cdots & H_{N1}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{1N}(z) & \cdots & H_{NN}(z) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.2)$$

unde $H_{ij}(z)$ sunt funcțiile de transfer ale filtrelor sistemului de mixare.

Se poate demonstra cu ajutorul criteriului lui Nyquist modificat, dezvoltând determinantul din (3.3.2), că odată cu creșterea numărului N condițiile în care ecuația (3.3.2) are toate rădăcinile în interiorul cercului unitate sunt tot mai restrictive în sensul că modulele coeficienților filtrelor trebuie să fie tot mai mici.

Dacă filtrele H_{ij} sunt de tip linie de întârziere, cu un singur coeficient, atunci, pentru cazul $N=2$, valoarea maximă a modulului acestui coeficient este unu. Limitările de natură fizică care decurg din această condiție au fost prezentate în Secțiunea 2.2.2 și se referă la necesitatea ca modulul produsului funcțiilor de transfer ale filtrelor H_1 și H_2 să fie subunitar.

În cazul când $N > 2$ dacă filtrele H_{ij} sunt de tip linie de întârziere, cu un singur coeficient, din considerente de asigurare a stabilității sistemului, adică pentru a asigura păstrarea în interiorul cercului unitate a tuturor rădăcinilor ecuației (3.1.27), valorile maxime ale modulelor acestor coeficienți sunt mai mici decât unu și scad odată cu creșterea lui N . Spre exemplu, pentru $N=3$ modulele maxime ale acestor coeficienți se situează în jurul valorii de 0,5.

Aceasta înseamnă că se pot decorela acele combinații de semnale pentru care influența semnalelor considerate perturbatoare, care provin din canalele vecine, asupra semnalelor considerate utile, care provin de la sursele cele mai apropiate de receptor, este sub un anumit nivel, nivel care scade odată cu creșterea lui N . În acest fel se poate ajunge la situația că pentru un N mare, influențele semnalelor perturbatoare asupra semnalelor utile, pentru care este posibilă decorelarea, să fie atât de mici, încât să nu mai fie necesară această operație.

Din aceste considerente apreciez că este utilă, din punct de vedere practic, decorelarea a maximum cinci sau șase semnale.

Trebuie accentuat faptul că această limitare este independentă de algoritmul folosit, ea rezultând din considerente de păstrare a stabilității sistemului de decorelare cu propagare înapoi.

3.3.2. ALGORITMUL CU SISTEM DE GRADIENTI PARȚIALI GENERALIZAT

3.3.2.1. Deducerea algoritmului cu sistem de gradienti parțiali generalizat

Se consideră modelul rețelei de separare cu propagare înapoi din Fig. 3.1.5 care se reia mai jos în Fig. 3.3.1.

În nodurile y_i , se face scăderea dintre semnalele de intrare y_i și fracțiuni din toate semnalele t_j , cu $j \neq i$, determinate de funcțiile de transfer $W_{ij}(z)$ ale filtrelor care au intrările în punctele t_j și ieșirile în punctele y_i . Din punctele y_i , semnalele se transmit în punctele t_i , integral, adică funcțiile de transfer între aceste puncte au valoarea unu.

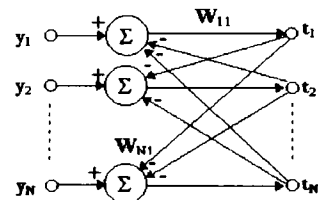


Fig. 3.3.1 Modelul rețelei de separare cu propagare înapoi

Se propune adoptarea unui algoritm de gradient care să minimizeze fiecare funcție cost

$$J_i = E[t_i^2(n)] \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3.3)$$

în raport cu toate filtrele W_{ij} , $j=1, \dots, N$, $i \neq j$, care modelează propagarea semnalelor de la nodurile t_j la nodul y_i .

Notăția $E[\cdot]$ reprezintă operatorul de mediere statistică.

Algoritmul de gradient este dat de relațiile:

$$W_{ij}(n+1) = W_{ij}(n) - \frac{1}{2} \mu_{ij} \nabla J_i \Big|_{W_{ij}} \quad i, j = 1, \dots, N; \quad i \neq j \quad (3.3.4)$$

Se face ipoteza că filtrele W_{ij} sunt de tip F.I.R. având lungimile $M_{w_{ij}}$. În acest context se consideră că și filtrele H_{ji} care modelează combinarea semnalelor provenite de la sursele necorelate s_j sunt de tip F.I.R..

Filtrele W_{ij} sunt caracterizate de vectorii $W_{ij}(n)$ ai coeficienților lor la momentul n :

$$W_{ij}(n) = [w_{ij}^0(n) \quad w_{ij}^1(n) \quad \dots \quad w_{ij}^{M_{w_{ij}}-1}(n)]^T \quad i, j = 1, \dots, N; \quad i \neq j \quad (3.3.5)$$

Pentru început se demonstrează că funcțiile cost J_i au printre punctele lor critice și pe cele date de relațiile (3.1.24), care transpuse în domeniul timp conduc la egalitățile de vectori:

$$W_y(n) = H_{ji} \quad i, j = 1, \dots, N; \quad i \neq j \quad (3.3.6)$$

unde H_{ji} reprezintă vectorii coeficienților răspunsurilor la impulsul unitate ai filtrelor care transmit semnalele s_j la senzorii y_i (a se vedea Fig.3.1.3). Vectorii H_{ji} se scriu astfel:

$$H_{ji} = [h_{ji}^0 \quad h_{ji}^1 \quad \dots \quad h_{ji}^{M_{y_j}-1}]^T \quad i, j = 1, \dots, N; \quad i \neq j \quad (3.3.7)$$

În relațiile (3.3.5) și (3.3.7) indicii superiori indică ordinea coeficientului în cadrul vectorului. Este evident că egalitățile (3.3.6) implică egalitățile:

$$M_{wy} = M_{Hji} = M_y \quad (3.3.8)$$

și

$$w_{y_j}^k(n) = h_{ji}^k \quad i, j = 1, \dots, N; \quad i \neq j; \quad k = 0, \dots, M_y \quad (3.3.9)$$

unde, pentru simplificarea notațiilor, pentru lungimea filtrelor s-a folosit simbolul M_{y_j} .

Gradienții din (3.3.4) se exprimă prin relațiile:

$$\nabla J_i|_{wy} = E \left[\left[\frac{\partial t_i^2(n)}{\partial w_{y_j}^0(n)} \quad \frac{\partial t_i^2(n)}{\partial w_{y_j}^1(n)} \quad \dots \quad \frac{\partial t_i^2(n)}{\partial w_{y_j}^{M_{y_j}-1}(n)} \right]^T \right] \quad i, j = 1, \dots, N; \quad i \neq j \quad (3.3.10)$$

Relațiile (3.3.10) se mai pot scrie:

$$\nabla J_i|_{wy} = 2E \left[\begin{array}{c} t_i(n) \frac{\partial t_i(n)}{\partial w_{y_j}^0(n)} \\ \vdots \\ t_i(n) \frac{\partial t_i(n)}{\partial w_{y_j}^1(n)} \\ \vdots \\ t_i(n) \frac{\partial t_i(n)}{\partial w_{y_j}^{M_{y_j}-1}(n)} \end{array} \right] \quad i, j = 1, \dots, N; \quad i \neq j \quad (3.3.11)$$

Derivatele parțiale din (3.3.11) se exprimă în funcție de transformatele Z ale semnalelor t_i astfel:

$$\frac{\partial t_i(n)}{\partial w_{y_j}^k(n)} = \frac{\partial}{\partial w_{y_j}^k(n)} \left[\frac{1}{2\pi j_0} \oint T_i(z) z^{n-1} dz \right] = \frac{1}{2\pi j_0} \oint \frac{\partial T_i(z)}{\partial w_{y_j}^k(n)} z^{n-1} dz \quad (3.3.12)$$

În relația (3.3.12) s-a folosit notația $j_0 = \sqrt{-1}$ pentru a nu se crea confuzii cu indicii i și j .

În vederea exprimării derivatei parțiale din ultimul membru din (3.3.12) se rescrie în mod convenabil $T_i(z)$ dată de relația (3.1.22) care se dă mai jos:

$$T_i(z) = \frac{\begin{vmatrix} W_{11}(z) & \cdots & W_{1i-1}(z) & Y_1(z) & W_{1i+1}(z) & \cdots & W_{1N}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{i1}(z) & \cdots & W_{ii-1}(z) & Y_i(z) & W_{ii+1}(z) & \cdots & W_{iN}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N1}(z) & \cdots & W_{Ni-1}(z) & Y_N(z) & W_{Ni+1}(z) & \cdots & W_{NN}(z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} W_{11}(z) & \cdots & W_{1i-1}(z) & W_{1i}(z) & W_{1i+1}(z) & \cdots & W_{1N}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{i1}(z) & \cdots & W_{ii-1}(z) & W_{ii}(z) & W_{ii+1}(z) & \cdots & W_{iN}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N1}(z) & \cdots & W_{Ni-1}(z) & W_{Ni}(z) & W_{Ni+1}(z) & \cdots & W_{NN}(z) \end{vmatrix}} \quad (3.3.13)$$

În relația (3.3.13) se dezvoltă determinanții de la numărător și numitor, fiecare, după linia i și se obține:

$$T_i(z) = \frac{\sum_{j=1}^N (-1)^{i+j} W_{ij}(z) \Delta_{ij}^{(1)} + Y_i(z) \Delta_i^{(1)}}{\sum_{j=1}^N (-1)^{i+j} W_{ij}(z) \Delta_{ij}^{(2)} + \Delta_i^{(2)}} \quad (3.3.14)$$

unde $\Delta_{ij}^{(1)}$ este minorul corespunzător elementului ij al determinantului de la numărător, iar $\Delta_{ij}^{(2)}$ este minorul corespunzător elementului ij al determinantului de la numitor. Se reamintește faptul că $W_{ii}(z) = 1$ pentru $i = 1, \dots, N$.

În aceste condiții derivata parțială din relația (3.3.12) rezultă:

$$\frac{\partial T_i(z)}{\partial w_{ij}^k(n)} = \frac{(-1)^{i+j} z^{-k} (\Delta_{ij}^{(1)} - T_i(z) \Delta_{ij}^{(2)})}{\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (-1)^{i+l} W_{il}(z) \Delta_{il}^{(2)} + \Delta_i^{(2)}} \quad (3.3.15)$$

Se analizează minorul $\Delta_{ij}^{(1)}$ în condițiile în care se introduc relațiile (3.1.5) în expresia sa și se presupun satisfăcute relațiile (3.3.6) și se obține:

$$\Delta_{ij}^{(1)} = \begin{vmatrix} W_{11}(z) & \cdots & W_{1j-1}(z) & W_{1j+1}(z) & \cdots & W_{1i-1}(z) & Y_1(z) & W_{1i+1}(z) & \cdots & W_{1N}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{i-11}(z) & \cdots & W_{i-1j-1}(z) & W_{i-1j+1}(z) & \cdots & W_{i-1i-1}(z) & Y_{i-1}(z) & W_{i-1i+1}(z) & \cdots & W_{i-1N}(z) \\ W_{i+11}(z) & \cdots & W_{i+1j-1}(z) & W_{i+1j+1}(z) & \cdots & W_{i+1i-1}(z) & Y_{i+1}(z) & W_{i+1i+1}(z) & \cdots & W_{i+1N}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N1}(z) & \cdots & W_{Nj-1}(z) & W_{Nj+1}(z) & \cdots & W_{Ni-1} & Y_N(z) & W_{Ni+1} & \cdots & W_{NN}(z) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_y^{(1)} &= \\
&= \begin{vmatrix} W_{11}(z) & \cdots & W_{1,j-1}(z) & W_{1,j+1}(z) & \cdots & W_{1,r-1}(z) & S_1(z) & W_{1,r+1}(z) & \cdots & W_{1N}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{i-11}(z) & \cdots & W_{i-1,j-1}(z) & W_{i-1,j+1}(z) & \cdots & W_{i-1,r-1}(z) & S_{i-1}(z) & W_{i-1,r+1}(z) & \cdots & W_{i-1N}(z) \\ W_{i+11}(z) & \cdots & W_{i+1,j-1}(z) & W_{i+1,j+1}(z) & \cdots & W_{i+1,r-1}(z) & S_{i+1}(z) & W_{i+1,r+1}(z) & \cdots & W_{i+1N}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N1}(z) & \cdots & W_{N,j-1}(z) & W_{N,j+1}(z) & \cdots & W_{N,r-1}(z) & S_N(z) & W_{N,r+1}(z) & \cdots & W_{NN}(z) \end{vmatrix} + \\
&+ \sum_{i=1}^N S_i(z) \begin{vmatrix} W_{11}(z) & \cdots & W_{1,j-1}(z) & W_{1,j+1}(z) & \cdots & W_{1,r-1}(z) & H_{1i}(z) & W_{1,r+1}(z) & \cdots & W_{1N}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{i-11}(z) & \cdots & W_{i-1,j-1}(z) & W_{i-1,j+1}(z) & \cdots & W_{i-1,r-1}(z) & H_{i-1i}(z) & W_{i-1,r+1}(z) & \cdots & W_{i-1N}(z) \\ W_{i+11}(z) & \cdots & W_{i+1,j-1}(z) & W_{i+1,j+1}(z) & \cdots & W_{i+1,r-1}(z) & H_{i+1i}(z) & W_{i+1,r+1}(z) & \cdots & W_{i+1N}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N1}(z) & \cdots & W_{N,j-1}(z) & W_{N,j+1}(z) & \cdots & W_{N,r-1}(z) & H_{Ni}(z) & W_{N,r+1}(z) & \cdots & W_{NN}(z) \end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.3.16}$$

Referitor la relațiile (3.3.15) și (3.3.16) se fac următoarele observații:

- Primul determinant din relația (3.3.16) nu conține $S_i(z)$.
- În condițiile când relațiile (3.3.6) sunt satisfăcute toți determinanții din suma din membrul drept al relației (3.3.16) se anulează, având câte două coloane egale, cu excepția celui pentru care $l=i$ care devine egal cu $\Delta_y^{(2)}$.
- În condițiile când sunt satisfăcute relațiile (3.3.6) au loc egalitățile (3.1.25) și în consecință $T_i(z)=S_i(z)$.
- Având în vedere ultimele două concluzii, rezultă că în condițiile când sunt satisfăcute relațiile (3.3.6), relațiile (3.3.15) nu conțin termenul $S_i(z)$.

Introducând (3.3.15) în (3.3.12) se ajunge la concluzia că derivatele parțiale ale lui $t_i(n)$, când au loc relațiile (3.3.6), nu conțin termeni în $s_i(n)$. Datorită acestui fapt, în aceleași condiții (3.3.6), fiecare element al vectorului gradient dat de relația (3.3.11) reprezintă o intercorelație între semnalul s_i și semnale provenite din s_j cu $i \neq j$. Întrucât s-a presupus că sursele sunt necorelate, rezultă că fiecare dintre aceste intercorelații sunt nule. Deci vectorii determinați de relațiile (3.3.6) sunt puncte critice ale funcțiilor cost (3.3.3).

În continuare se deduce algoritmul de decorelare cu sistem de gradienti parțiali generalizat.

Dezvoltând determinantul de la numărătorul relației (3.3.13) după elementele coloanei i , rezultă:

$$T_i(z) = \frac{\sum_{j=1}^N Y_j(z)(-1)^{j+i} \Delta_{ji}}{\Delta}
\tag{3.3.17}$$

unde Δ este determinantul de la numitorul relației (3.3.13), iar Δ_{ji} este minorul ji al aceluiași determinant.

Relația (3.3.17) sugerează faptul că semnalul t_i poate fi obținut la ieșirea sistemului din Fig. 4.4.1:

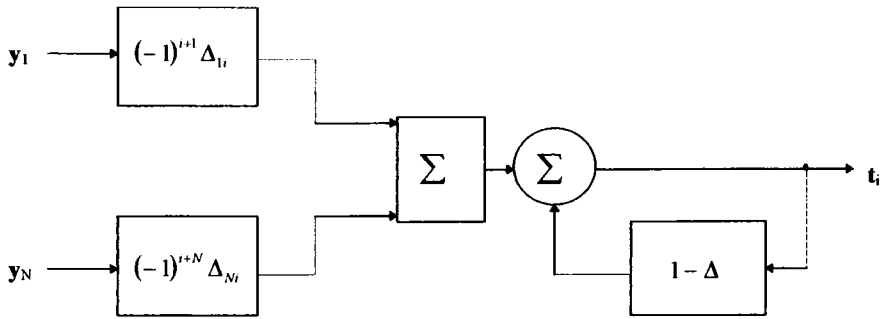


Fig. 3.3.2 Sistemul cu ajutorul căruia se obține semnalul t_i .

Relația (3.3.15) se prelucrează pentru evidențierea tuturor semnalelor care intră în expresia minorului $\Delta_y^{(1)}$. În acest scop minorul $\Delta_y^{(1)}$ se dezvoltă după coloana corespunzătoare coloanei i a determinantului Δ .

$$\Delta_y^{(1)} = \sum_{l=i}^N Y_l(z) (-1)^{li+i|l} \Delta_{li \ i|l}^{y(1)} \quad (3.3.18)$$

În relația (3.3.18) s-au folosit următoarele notații:

$$l|i = \begin{cases} l, & l < i \\ l-1, & l > i \end{cases} \quad (3.3.19)$$

$$i|j = \begin{cases} i, & i < j \\ i-1, & i > j \end{cases} \quad (3.3.20)$$

iar $\Delta_{li \ i|l}^{y(1)}$ este minorul corespunzător elementului $l|i \ i|j$ al minorului $\Delta_y^{(1)}$.

Se remarcă faptul că indicii l, i, j se consideră raportați la determinantul Δ .

Minorul $\Delta_y^{(2)}$ se descompune după coloana i corespunzătoare determinantului Δ astfel:

$$\Delta_y^{(2)} = \sum_{l=i}^N W_l(z) (-1)^{li+i|l} \Delta_{li \ i|l}^{y(2)} \quad (3.3.21)$$

unde notațiile $l|i, \ i|j$ au semnificațiile din relațiile (3.3.19) și respectiv (3.3.20), iar $\Delta_{li \ i|l}^{y(2)}$ este minorul corespunzător elementului $l|i \ i|j$ al minorului $\Delta_y^{(2)}$.

Comparând expresiile minorilor $\Delta_{li \ i|l}^{y(1)}$ și $\Delta_{li \ i|l}^{y(2)}$ din determinații de la numărătorul și numitorul relației (3.3.13), se ajunge la concluzia că sunt egali. De aceea, în continuare, se vor nota:

$$\Delta_{li \ i|l}^{y(1)} = \Delta_{li \ i|l}^{y(2)} = \Delta_{li \ i|l}^y \quad (3.3.22)$$

Utilizând (3.3.22), (3.3.21), relația (3.3.15) devine:

$$\frac{\partial T_i(z)}{\partial w_{ij}^k(n)} = (-1)^{i+j} z^{-k} \sum_{l=1}^N \sum_{l \neq i} (Y_l(z) - W_{li}(z)T_l(z)) \frac{(-1)^{l+i+l} \Delta_{l|i|ij}^y}{\Delta} \quad (3.3.23)$$

sau, comasând termenii în -1:

$$\frac{\partial T_i(z)}{\partial w_{ij}^k(n)} = z^{-k} \sum_{l=1}^N (Y_l(z) - W_{li}(z)T_l(z)) \frac{(-1)^{i+j+l+i+l} \Delta_{l|i|ij}^y}{\Delta} \quad (3.3.24)$$

Relația (3.3.24) sugerează că derivatele parțiale $\frac{\partial t_i(n)}{\partial w_{ij}^k(n)}$ se obțin ca semnale de ieșire ale sistemului din Fig.3.3.3:

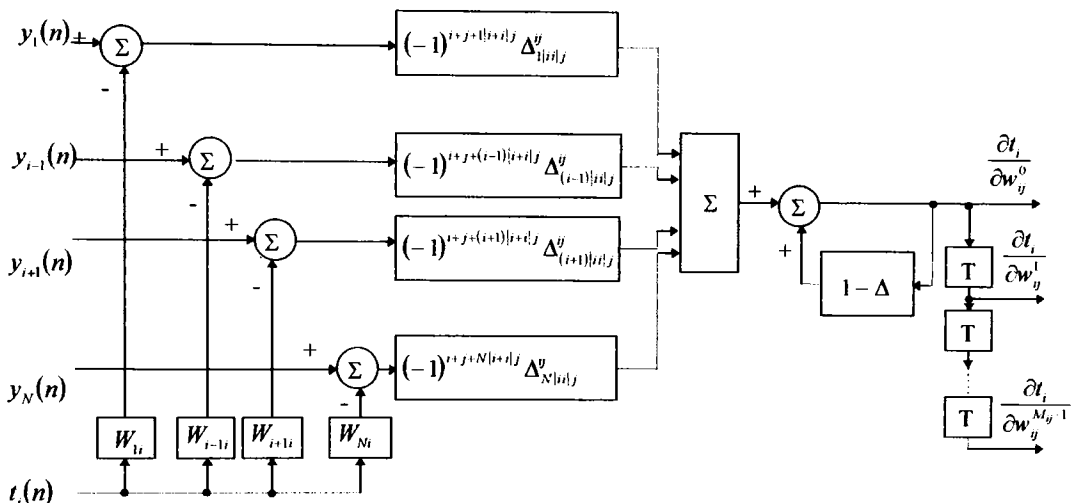


Fig.3.3.3. Sistemele cu ajutorul cărora se obțin derivatele parțiale $\frac{\partial t_i}{\partial w_{ij}^k}$.

Pentru sistemul din Fig. 3.3.2 se introduce următorul simbol:

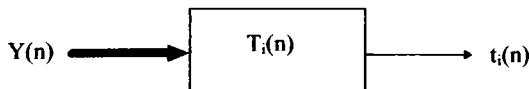


Fig.3.3.4. Simbolul sistemului din Fig. 4.4.1.

În Fig. 3.3.4, vectorul de la intrare $Y(n)$ este format din eșantioanele la momentul n ale semnalelor y_i , $i=1 \dots N$.

Pentru sistemul din Fig.3.3.3. se introduce simbolul:

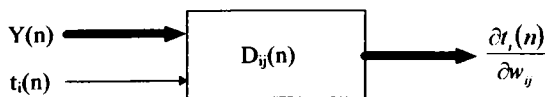


Fig. 3.3.5. Simbolul sistemului din Fig.3.3.3.

În Fig. 3.3.5. vectorul de la intrare, $Y(n)$, are aceeași semnificație ca și în cazul simbolului precedent, iar vectorul de ieșire $\frac{\partial t_i(n)}{\partial w_y}$ are dimensiunea M_{ij} a filtrului F.I.R. W_{ij} .

Utilizând simbolurile din figurile 3.3.4. și 3.3.5. gradientul din relația (3.3.11) poate fi generat cu sistemul prezentat în Fig.3.3.6:

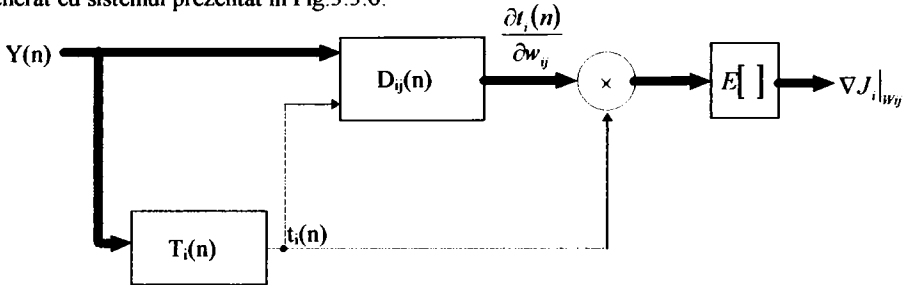


Fig. 3.3.6. Sistemul care generează gradientul $\nabla J_i|_{w_{ij}}$.

În Fig. 3.3.6 simbolul $E[]$ semnifică operatorul de mediere statistică. După cum se observă la formarea gradientului $\nabla J_i|_{w_{ij}}$ se folosește un singur bloc de mediere statistică.

În continuare se presupune că semnalele folosite sunt ergodice. În acest caz, medierea statistică poate fi aproximată cu mediere temporală, ceea ce conduce la prelucrări pe blocuri de date.

Întrucât parametrii μ_{ij} din relația (3.3.4) se aleg de valori mici, din considerente de stabilitate, se poate economisi un volum mare de calcule prin înlocuirea algoritmului de gradient cu un algoritm de gradient stohastic, caracterizat prin absența operatorului de mediere statistică. Acest algoritm are proprietatea că evoluează, în medie, ca și algoritmul de gradient.

Se notează cu $\hat{\nabla}$ operatorul de gradient statistic. În aceste condiții relația (3.3.4) se transformă în:

$$\hat{W}_y(n+1) = \hat{W}_y(n) - \frac{1}{2} \mu_y \hat{\nabla} J_i|_{w_{ij}} \quad i, j = 1, \dots, N; \quad i \neq j \quad (3.3.25)$$

unde

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} J_i|_{w_{ij}} &= \left[\frac{\partial t_i^2(n)}{\partial w_y^0(n)} \quad \dots \quad \frac{\partial t_i^2(n)}{\partial w_y^{M_{ij}-1}(n)} \right]^T = \\ &= 2 \left[t_i(n) \frac{\partial t_i(n)}{\partial w_y^0(n)} \quad \dots \quad t_i(n) \frac{\partial t_i(n)}{\partial w_y^{M_{ij}-1}(n)} \right]^T \quad i, j = 1, \dots, N; \quad i \neq j \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

iar \hat{W}_y reprezintă vectorul coeficienților filtrului W_{ij} actualizat cu algoritmul de gradient stohastic.

În cazul algoritmului de gradient stohastic, sistemul din Fig. 3.3.6 se simplifică prin eliminarea blocului de mediere statistică. În acest fel se obține pentru, pentru valori mici ale parametrilor mărime de pas μ_{ij} , un algoritm care are, în medie, o evoluție similară celui de gradient, dar cu o economie majoră de volum de calcul.

Sistemul guvernat de ecuațiile (3.3.25) este dat în Fig. 3.3.7. Această figură trebuie interpretată astfel:

Algoritmul este format din N blocuri de tipul celui prezentat în figură, câte unul pentru fiecare semnal t_i , cu $i=1, \dots, N$.

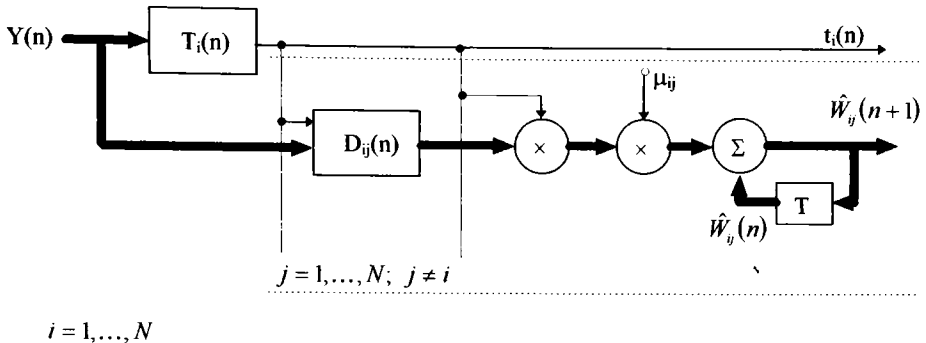


Fig. 3.3.7. Schema algoritmului de gradient stohastic.

În cadrul fiecărui bloc există $N-1$ subblocuri de actualizare a filtrelor W_{ij} , cu $j=1, \dots, N$, și $j \neq i$.

În Anexa 2 este prezentată o metodă generală de calcul a coeficienților filtrelor F.I.R. ale căror funcții de transfer sunt exprimate prin determinanți. Această metodă completează algoritmul de decorelare cu sistem de gradienti parțiali generalizat.

Întrucât în Secțiunea 3.3.1 s-a arătat că valoarea lui N , din punct de vedere practic, este maximum 5 sau 6, se obține o importantă economie de volum de calcul dacă se particularizează direct algoritmul prezentat pentru valori ale lui N egale cu 3, 4, 5 și 6, construindu-se astfel algoritmi specializați pentru fiecare dintre aceste valori.

3.3.2.2. Rezultate experimentale obținute pentru cazul $N=3$

În vederea experimentării algoritmului cu sistem de gradienti parțiali pentru cazul $N=3$ s-au considerat ca semnale sursă un fragment de muzică instrumentală care are ca instrument solist pianul, semnal pe care-l vom denumi s_0 , un monolog interpretat de un actor într-o sală de spectacole, semnal pe care-l vom denumi s_1 și un fragment de melodie de muzică ușoară interpretată de o solistă, semnal pe care-l vom denumi s_2 . Semnalele au fost astfel alese încât să aibă elemente sonore cât mai distincte pentru a fi ușor de sesizat când sunt mixate. Au duratele de aproximativ 30 de secunde și au fost eșantionate cu o frecvență de 11025Hz. De asemenea s-au ales astfel încât puterile lor să fie cât se poate de egale între ele.

Sistemul de mixare s-a considerat format din filtre de tip linie de întârziere, cu următoarele funcții de transfer:

$$H_{12}(z) = 0,5 \cdot z^{-4} \quad (3.3.27)$$

$$H_{13}(z) = 0,25 \cdot z^{-13} \quad (3.3.28)$$

$$H_{21}(z) = 0,5 \cdot z^{-4} \quad (3.3.29)$$

$$H_{23}(z) = 0,5 \cdot z^{-4} \quad (3.3.30)$$

$$H_{31}(z) = 0,25 \cdot z^{-13} \quad (3.3.31)$$

$$H_{32}(z) = 0,5 \cdot z^{-4} \quad (3.3.32)$$

În aceste condiții conform condiției de decorelare (3.3.6), la finalul procesului de adaptare trebuie să se obțină următoarele egalități:

$$W_{12}(z) = H_{21}(z) \quad (3.3.33)$$

$$W_{13}(z) = H_{31}(z) \quad (3.3.34)$$

$$W_{21}(z) = H_{12}(z) \quad (3.3.35)$$

$$W_{23}(z) = H_{32}(z) \quad (3.3.36)$$

$$W_{31}(z) = H_{13}(z) \quad (3.3.37)$$

$$W_{32}(z) = H_{23}(z) \quad (3.3.38)$$

Pentru experiment s-a considerat că filtrele W_{ij} au 16 coeficienți, numerotarea lor începând de la zero.

Pentru a îmbunătăți stabilitatea algoritmului, coeficienții de ordin zero au fost prin soft menținuți la valoarea zero.

În figurile următoare sunt prezentate înfășurătoarele semnalelor s_0 , s_1 și s_2 în partea stângă și înfășurătoarele semnalelor y_0 , y_1 și y_2 , în partea dreaptă, pentru a se putea observa mai bine rezultatul amestecului lor.

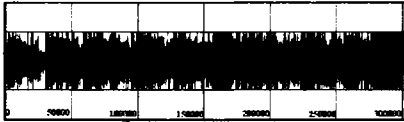


Fig. 3.3.8. Înfășurătoarea semnalului s_0 .

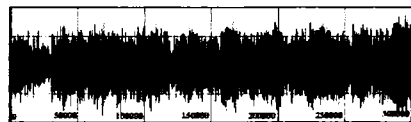


Fig. 3.3.9. Înfășurătoarea semnalului y_0 .

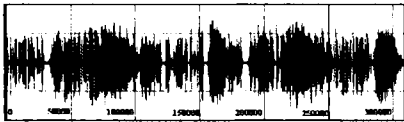


Fig. 3.3.10. Înfășurătoarea semnalului s_1 .

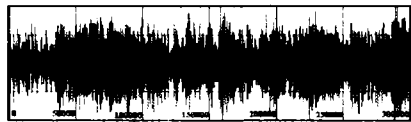


Fig. 3.3.11. Înfășurătoarea semnalului y_1 .

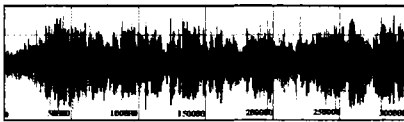


Fig. 3.3.12. Înfășurătoarea semnalului s_2 .

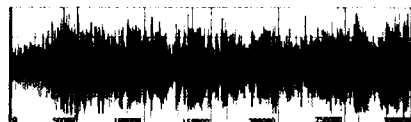


Fig. 3.3.13. Înfășurătoarea semnalului y_2 .

Se observă că semnalul s_0 are o înfășurătoare limitată, iar semnalul s_1 are pauze. Semnalul s_2 nu are elemente distinctive în forma înfășurătoarei sale.

Semnalele mixate, y_0 , y_1 și y_2 diferă semnificativ de cele ale surselor. Deși sunt corupte, totuși în forma generală a înfășurătorilor lor se poate distinge semnalul s care a fost corupt.

Ca o măsură vizuală a gradului de corupere al semnalelor poate fi considerată mulțimea de variații impulsionale ale amplitudinii înfășurătoarelor

În figurile următoare sunt prezentate spectrele semnalelor s_0 , s_1 , s_2 , y_0 , y_1 , și y_2 estimate pe câte un bloc de date de 1024 de eșantioane, începând cu eșantionul 300000, pentru fiecare semnal.

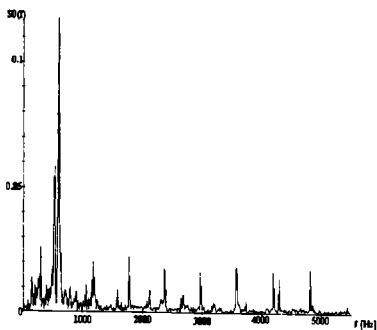


Fig. 3.3.14. Spectrul semnalului s_0 .

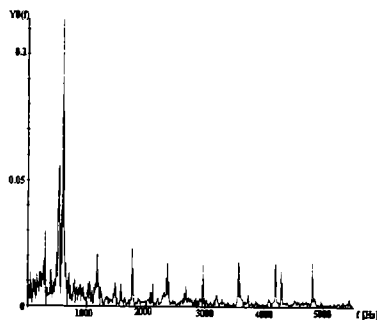


Fig. 3.3.15. Spectrul semnalului y_0 .

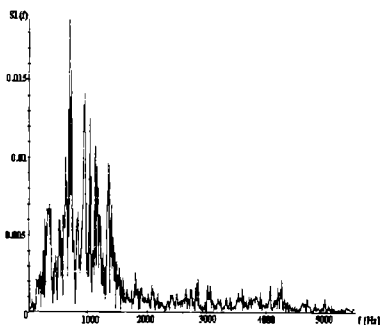


Fig. 3.3.16. Spectrul semnalului s_1 .

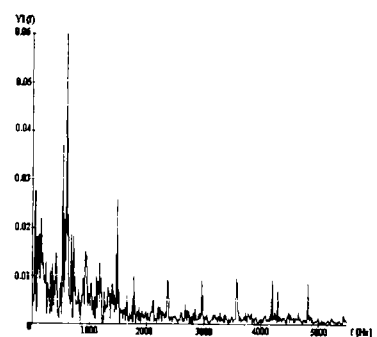


Fig. 3.3.17. Spectrul semnalului y_1 .

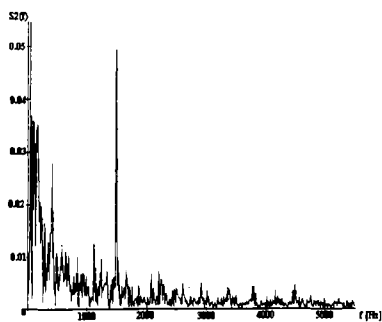


Fig. 3.3.18. Spectrul semnalului s_2 .

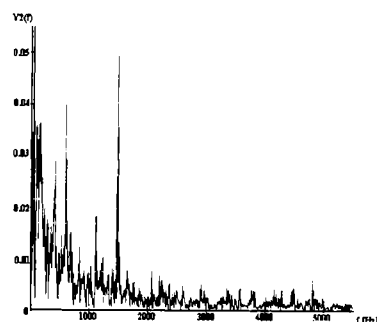


Fig. 3.3.19. Spectrul semnalului y_2 .

În figurile 3.3.8 la 3.3.13 se observă că semnalele y_i , deși păstrează alura semnalelor s_i , totuși sunt perturbate de semnalele de pe celelalte canale. Acest lucru este vizibil și în diagramele spectrale unde, pe lângă componentele spectrale caracteristice fiecărui semnal s_i al canalului respectiv, se observă și componentele spectrale aparținând celorlalte semnale, dar cu amplitudini micșorate.

Experimentele au fost făcute în următoarele condiții:

1. S-a utilizat algoritmul cu sistem de gradienti parțiali fără preprocesarea semnalelor de intrare y_i .
2. S-a utilizat algoritmul cu sistem de gradienti parțiali preprocesând semnalele y_i cu ajutorul unor filtre de tipul Q_1 a căror funcție de transfer este dată de relația (3.2.241) care se reproduce mai jos:

$$Q_1(z) = 1 - z^{-1} \quad (3.3.39)$$

3. S-a utilizat algoritmul cu sistem de gradienti parțiali preprocesând semnalele y_i cu filtre care generalizează funcția de transfer a filtrului Q_2 , pentru cazul $N=3$, adică

$$Q_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & W_{12}(z) & W_{13}(z) \\ W_{21}(z) & 1 & W_{23}(z) \\ W_{31}(z) & W_{32}(z) & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.40)$$

4. S-a utilizat algoritmul cu sistem de gradienti parțiali preprocesând semnalele y_i cu filtrele Q_1 și Q_2 montate în cascadă.

În cadrul testului de la punctul 3 nu s-a obținut o evoluție stabilă a algoritmului nici pentru valori ale parametrilor mărime de pas de zece ori mai mici decât cele folosite în celelalte teste.

S-a obținut un regim stabil de funcționare în cadrul testelor 1,2 și 4, pentru valori ale parametrilor mărime de pas mai mici sau egale cu 0,001. Din acest motiv, algoritmul are o evoluție lentă. Pentru a ajunge coeficienții filtrelor în vecinătatea punctului optim de decorelare sunt necesare cel puțin 10 cicluri de decorelare ale acestor semnale, care au o durată de aproximativ 30 de secunde, adică reluarea de 10 ori a prelucrării fișierelor semnalelor, de fiecare dată considerând ca valori inițiale ale coeficienților filtrelor, valorile lor finale din ciclul de prelucrare precedent.

În figurile următoare sunt prezentate comparativ evoluțiile coeficienților filtrelor, pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul testelor 1 și 2, adică în situația că nu se folosesc filtrele Q_1 și în situația că se folosesc aceste filtre, cu parametrii mărime de pas egali cu 0,001.

Pentru testul 3 aceste evoluții vor fi prezentate separat.

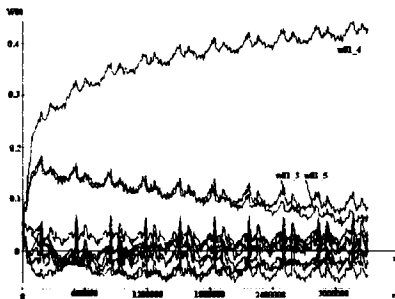


Fig. 3.3.20. Evoluția coeficienților 1÷10 ai filtrului W01 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul nefolosirii filtrului Q_1 și cu parametrii μ_i egali cu 0,001.

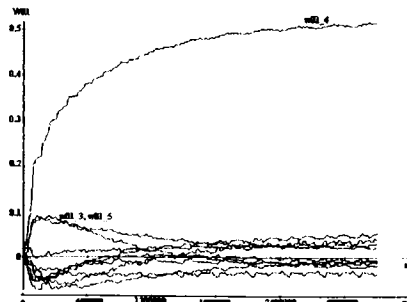


Fig. 3.3.21. Evoluția coeficienților 1÷10 ai filtrului W01 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul folosirii filtrului Q_1 și cu parametrii μ_i egali cu 0,001.

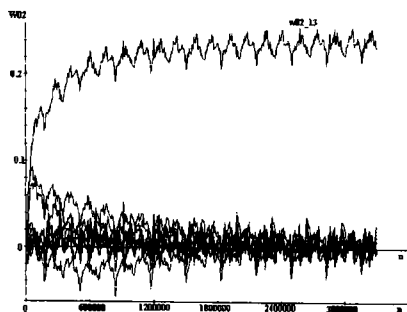


Fig. 3.3.22. Evoluția coeficienților 6÷15 ai filtrului W02 pe durata a 10 cicluri de decolare, în cazul nefolosirii filtrului Q₁ și cu parametrii μ_{ij} egali cu 0,001.

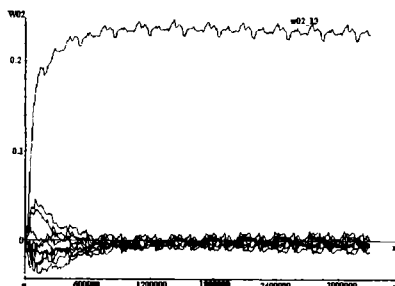


Fig. 3.3.23. Evoluția coeficienților 6÷15 ai filtrului W02 pe durata a 10 cicluri de decolare, în cazul folosirii filtrului Q₁ și cu parametrii μ_{ij} egali cu 0,001.

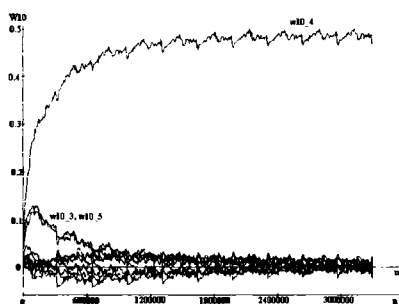


Fig. 3.3.24. Evoluția coeficienților 1÷10 ai filtrului W10 pe durata a 10 cicluri de decolare, în cazul nefolosirii filtrului Q₁ și cu parametrii μ_{ij} egali cu 0,001.

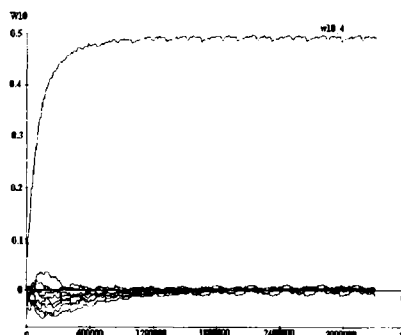


Fig. 3.3.25. Evoluția coeficienților 1÷10 ai filtrului W10 pe durata a 10 cicluri de decolare, în cazul folosirii filtrului Q₁ și cu parametrii μ_{ij} egali cu 0,001.

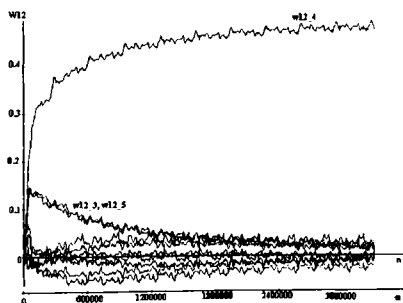


Fig. 3.3.26. Evoluția coeficienților 1÷10 ai filtrului W12 pe durata a 10 cicluri de decolare, în cazul nefolosirii filtrului Q₁ și cu parametrii μ_{ij} egali cu 0,001.

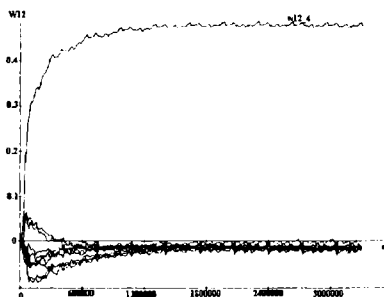


Fig. 3.3.27. Evoluția coeficienților 1÷10 ai filtrului W12 pe durata a 10 cicluri de decolare, în cazul folosirii filtrului Q₁ și cu parametrii μ_{ij} egali cu 0,001.

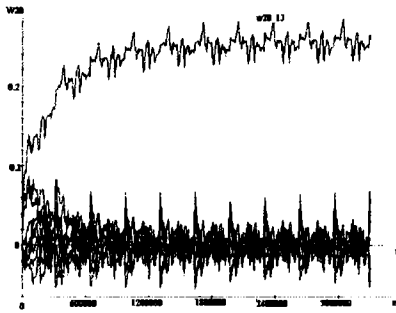


Fig. 3.3.28. Evoluția coeficienților 6÷15 ai filtrului W20 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul nefolosirii filtrului Q_1 și cu parametrii μ_{ij} egali cu 0,001.

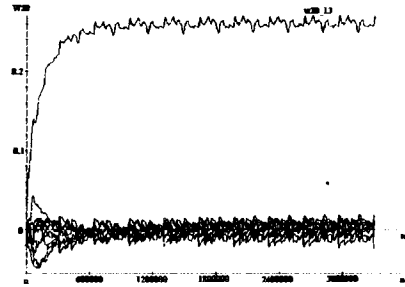


Fig. 3.3.29. Evoluția coeficienților 6÷15 ai filtrului W20 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul folosirii filtrului Q_1 și cu parametrii μ_{ij} egali cu 0,001.

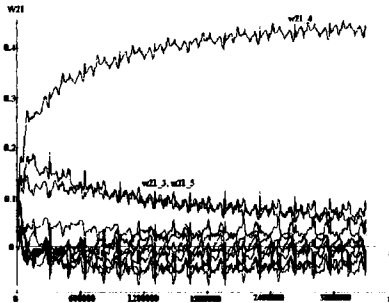


Fig. 3.3.30. Evoluția coeficienților 1÷10 ai filtrului W21 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul nefolosirii filtrului Q_1 și cu parametrii μ_{ij} egali cu 0,001.

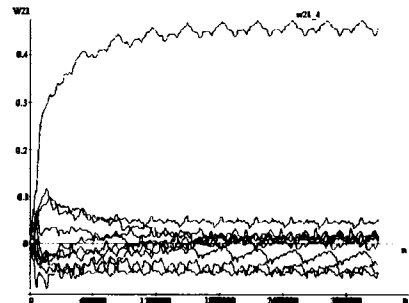


Fig. 3.3.31. Evoluția coeficienților 1÷10 ai filtrului W21 pe durata a 10 cicluri de decorelare, în cazul folosirii filtrului Q_1 și cu parametrii μ_{ij} egali cu 0,001.

Din examinarea figurilor 3.3.20 la 3.3.31 se observă efectul favorabil pe care îl are utilizarea filtrelor Q_1 pentru preprocesarea semnalelor de intrare. Prin reducerea gradului de corelare ale semnalelor de intrare s-au obținut evoluții mai rapide ale coeficienților spre valorile optime de decorelare. Astfel, coeficienții care trebuie să fie diferiți de zero ajung cam de trei ori mai repede în jurul valorilor optime, iar ceilalți coeficienți se abat mai puțin de la zero (abaterile de la zero sunt de cel puțin două ori mai mici) și evoluția spre zero este cam de trei ori mai rapidă.

În figurile următoare se dau, spre edificare, evoluțiile coeficienților filtrelor W_{01} și W_{02} în cadrul testului 4 în care s-au folosit simultan filtrele Q_1 și Q_2 .

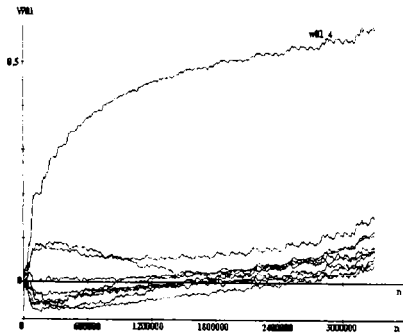


Fig. 3.3.32. Evoluția coeficienților 1÷10 ai filtrului W01 pe durata a 10 cicluri de decolare, în cazul folosirii filtrelor Q_1 și Q_2 și cu parametrii μ_{ij} egali cu 0,001.

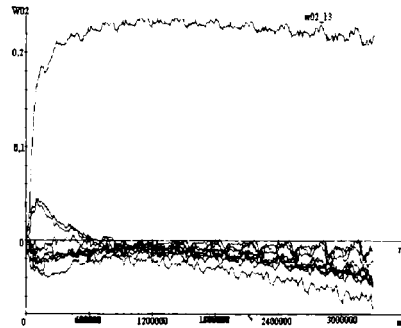


Fig. 3.3.33. Evoluția coeficienților 6: 15 ai filtrului W02 pe durata a 10 cicluri de decolare, în cazul folosirii filtrelor Q_1 și Q_2 și cu parametrii μ_{ij} egali cu 0,001.

Analizând evoluția coeficienților acestor filtre în situația când se folosesc simultan filtrele Q_1 și Q_2 , se constată că algoritmul are o tendință evidentă de a ieși din starea de evoluție stabilă, tendință manifestată prin creșterea abaterii traiectoriilor coeficienților de la valorile optime. Se observă totuși scurtarea duratei de adaptare față de situațiile precedente, dar tendința de a ieși din regimul de stabilitate face ca utilizarea filtrului Q_2 să nu fie indicată.

Algoritmul ar putea fi folosit și în acest caz, dar trebuie să se asigure o metodă de reinițializare periodică.

În continuare se vor prezenta parametrii semnalelor t_0 , t_1 și t_2 doar în cazul testelor 1 și 2.

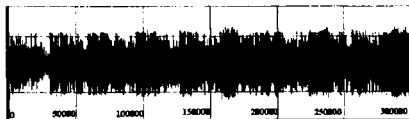


Fig. 3.3.34. Semnalul t_0 în ciclul al 11-lea de decolare în cazul testului 1.

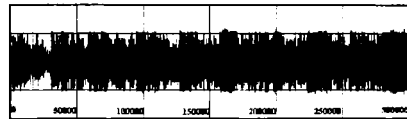


Fig. 3.3.35. Semnalul t_0 în ciclul al 11-lea de decolare în cazul testului 2.

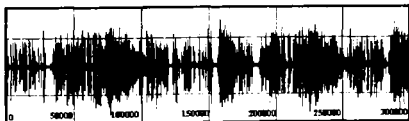


Fig. 3.3.36. Semnalul t_1 în ciclul al 11-lea de decolare în cazul testului 1.

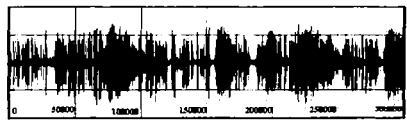


Fig. 3.3.37. Semnalul t_1 în ciclul al 11-lea de decolare în cazul testului 2.

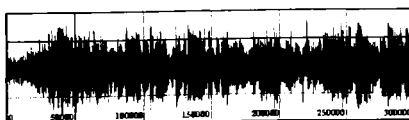


Fig. 3.3.38. Semnalul t_2 în ciclul al 11-lea de decolare în cazul testului 1.

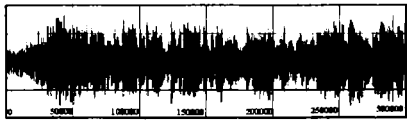


Fig. 3.3.39. Semnalul t_2 în ciclul al 11-lea de decolare în cazul testului 2.

Comparând figurile 3.3.34 la 3.3.39 se pot face următoarele observații:

1. Semnalul t_0 este mai apropiat ca formă de s_0 în cazul testului 2, aspect reliefat de abateri mai mici de ale înfășurătoarei sale de la forma de înfășurătoare limitată.
2. Semnalul t_1 este mai apropiat ca formă de s_1 în cazul testului 1, aspect reliefat de amplitudinile mai apropiate de zero ale semnalului în timpul pauzelor dintre cuvinte.
3. În cazul semnalului t_2 nu se pot face comparații evidente

Trebuie remarcat faptul că aceste rezultate s-au obținut în ciclul al 11-lea de decorelare, când algoritmul a ajuns în apropierea punctului de convergență în ambele situații.

Având în vedere faptul că prezența filtrelor Q_1 conduce la mărirea vitezei de convergență, dacă măsurătorile s-ar fi făcut într-un ciclu de decorelare cu un număr de ordine mai mic, când discrepanța dintre abaterile coeficienților filtrelor față de punctul optim de decorelare ar fi fost mai mare, calitatea refacerii semnalelor ar fi fost mai bună în cazul testului 2.

Într-un mediu nestaționar, folosirea filtrelor Q_1 conduce la rezultate mai bune tocmai datorită vitezei mai mari de convergență pe care o asigură algoritmului.

Pentru comparații mai obiective, în figurile următoare se dau analizele spectrale efectuate pe 1024 de eșantioane începând cu eșantionul 300000 ale semnalelor t_0 , t_1 și t_2 pentru cele două teste.

Spectrele semnalelor t_0 în cazul celor două teste sunt foarte asemănătoare și aproape identice cu al semnalului s_0 .

Spectrele semnalelor t_1 diferă semnificativ, în porțiunea 0÷500Hz. Spectrul semnalului t_1 este mai puternic influențat în această zonă de cel al semnalului s_2 , în cazul testului 2, deoarece filtrul Q_1 , fiind de fapt de tip trece sus, atenuază semnificativ semnalele din această bandă de frecvență. În aceste condiții semnalul provenit de la s_2 de la ieșirea filtrului Q_1 , are de fapt o putere mică în această zonă de frecvențe, și ca atare, această zonă a spectrului semnalului contribuie într-o proporție scăzută la procesul de adaptare.

Spectrele semnalelor t_2 sunt și ele asemănătoare în cazul celor două teste și aproape identice cu cel al semnalului s_2 .

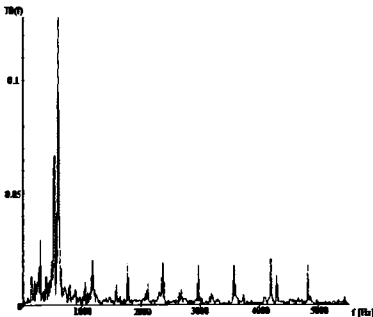


Fig.3.3.40. Spectrul semnalului t_0 în cel de al 11-lea ciclu de decorelare în cazul testului 1.

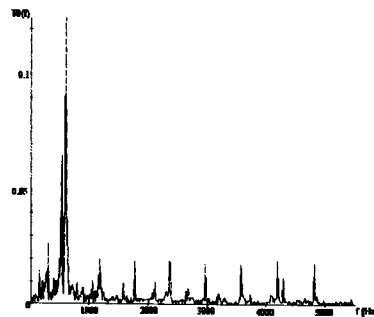


Fig. 3.3.41. Spectrul semnalului t_1 în cel de al 11-lea ciclu de decorelare în cazul testului 2.

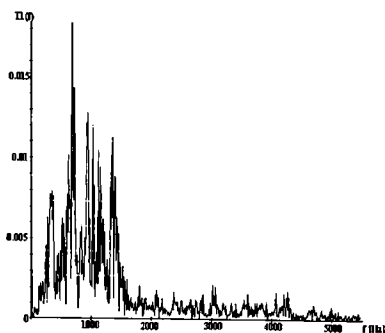


Fig. 3.3.42. Spectrul semnalului t_1 în cel de al 11-lea ciclu de decolare în cazul testului 1.

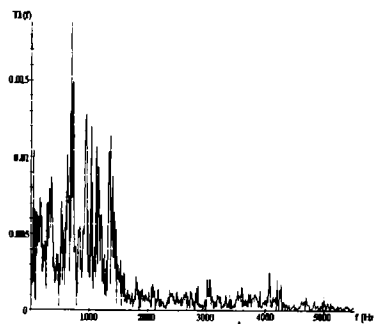


Fig. 3.3.43. Spectrul semnalului t_1 în cel de al 11-lea ciclu de decolare în cazul testului 2.

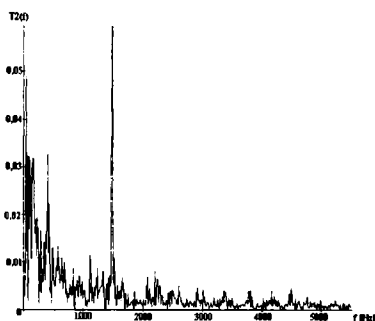


Fig. 3.3.44. Spectrul semnalului t_2 în cel de al 11-lea ciclu de decolare în cazul testului 1.

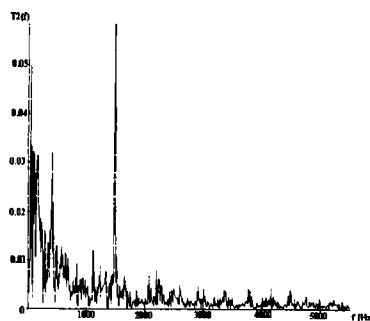


Fig. 3.3.45. Spectrul semnalului t_2 în cel de al 11-lea ciclu de decolare în cazul testului 2.

În cazul decorelării mai multor semnale consider că singurul indice calitativ care poate da o orientare cantitativă asupra eficienței procesului de separare este raportul semnal/zgomot, așa cum a fost definit de relația (3.2.244).

În tabelul 3.3.1 se dau rapoartele semnal/zgomot ale semnalelor y_0 , y_1 și y_2 de la intrarea decorelatorului considerând că ele sunt replici corupte ale semnalelor s_0 , s_1 și s_2 , respectiv.

În tabelul 3.3.2 se dau rapoartele semnal/zgomot ale semnalelor t_0 , t_1 și t_2 de la ieșirea decorelatorului considerând că ele sunt replici corupte ale semnalelor s_0 , s_1 și s_2 , respectiv, obținute în cazul testelor 1 și 2, în al 11-lea ciclu de decolare.

Datele tabelului 3.3.2 confirmă concluziile calitative referitoare la fidelitatea reconstrucției semnalelor surselor.

Rapoartele semnal/zgomot al semnalului t_0 este mai bun în cazul testului 2, raportul semnal/zgomot al semnalului t_1 este mai bun în cazul testului 1, iar raportul semnal/zgomot al semnalului t_2 este aproape egal în cazul celor două teste.

Trebuie remarcat că pentru semnalul t_1 se obține o creștere mai mare a raportului semnal/zgomot decât pentru celelalte două semnale (adică de 13,6 și respectiv 12dB, față de

9,36 și respectiv 12dB, în cazul semnalului t_0 și 11,6 și 11,32dB, în cazul semnalului t_2 . Acest fenomen se datorează faptului că semnalele perturbatoare având mai puține pauze decât semnalul s_1 , la aceeași putere, au o energie mai mare pe aceeași durată de timp și ca atare efectul lor compensator, materializat prin contribuția avută la adaptarea corectă a filtrelor, este mai pregnant.

Tabelul 3.3.1.

Indice calitativ	Valoare
$Rsz(s_0, y_0)$ [dB]	6.123923
$Rsz(s_1, y_1)$ [dB]	2.604561
$Rsz(s_2, y_2)$ [dB]	4.125018

Tabelul 3.3.2.

Indice calitativ	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, fără utilizarea filtrelor Q_1 și Q_2 , $\mu_{i1}=0,001$.	Algoritm cu sistem de gradienti parțiali, 11 cicluri de decorelare, cu utilizarea filtrului Q_1 , $\mu_{i1}=0,001$.
$Rsz(s_0, t_0)$ [dB]	15.476050	18.181834
$Rsz(s_1, t_1)$ [dB]	16.279402	14.157034
$Rsz(s_2, t_2)$ [dB]	15.720051	15.439638

3.3.2.3. Observații asupra soluțiilor fantomă

Se remarcă totuși, din experimentele făcute, mai ales în figurile 3.3.21, 3.3.27 și 3.3.31, corespunzătoare testului 2, o tendință de convergență spre soluții “fantomă”. Adică, coeficienții care ar fi trebuit să convergă spre zero converg, de fapt, spre valori apropiate de zero, dar vizibil diferite de zero, iar cu coeficienții care ar fi trebuit să convergă spre 0,5 se produce un fenomen similar. În cazul figurilor omoloage, corespunzătoare testului 1, datorită nefinalizării regimului tranzitoriu, nu se pot face afirmații despre acest fenomen.

Așa cum s-a menționat și în cazul decorelării a două semnale, apariția fenomenului de convergență spre o soluție “fantomă” se datorează fructificării doar a condiției de anulare a cumulanților de ordinul 2 (a intercorelațiilor) în loc să se valorifice toată infinitatea de condiții de anulare a cumulanților de toate ordinele posibile, pentru ca semnalele de la ieșirea decorelatorului să fie independente statistic.

În cazul semnalelor care au o repartiție de legătură de tip gaussian, condiția impusă este suficientă pentru obținerea decorelării corecte, deoarece toți cumulanții de ordin mai mare decât doi, în acest caz sunt nuli.

În cazul în care repartiția de legătură nu este gaussiană, condiția anulării doar a cumulanților de ordinul doi nu este suficientă, deoarece, cel puțin teoretic, mai există cumulanții de ordin superior, pe care algoritmul nu îi anulează.

Având în vedere faptul că am demonstrat că singura arhitectură posibilă de separator de semnale provenite din surse statistic independente este cea cu propagare înapoi, aceasta conduce la faptul că decorelatorul de ordinul N , în cazul în care filtrele componente sunt constante, văzut ca sistem prin care se prelucrează semnale, este un sistem liniar cu reacții multiple. Prezența acestor reacții conduce la implementarea deosebit de complicată, prin sisteme de ecuații cu diferențe, neliniare, a oricărui algoritm de adaptare care minimizează funcții cost bazate pe anularea cumulanților. Complexitatea matematică crește odată cu

creșterea ordinului cumulanților care sunt luați în considerare, crescând gradul ecuațiilor neliniare. În aceste condiții se pune problema inițializării unor astfel de algoritmi, care pot să aibă suprafețele performanță-eroare cu mai multe puncte de extrem local, deoarece nu orice punct de start permite algoritmului să convergă spre soluția corectă. Pe de altă parte, creșterea ordinului cumulanților implică abordarea problemei prin prisma calculării statisticilor pe blocuri de date, blocuri care trebuie să aibă mii de eșantioane. Dacă se ia în considerație și faptul că odată cu creșterea complexității ecuațiilor, singurii algoritmi matematici abordabili sunt cei de tip gradient, care necesită un număr relativ mare de iterații pentru a converge, se ajunge la regimuri tranzitorii extrem de lungi.

În plus, convergența unor astfel de algoritmi spre alte minime locale, în lipsa unei metode corecte de inițializare, poate conduce spre soluții “fantomă” depărtate de soluția corectă.

Presupunând că se reușește convergența spre minimul corect, neputându-se lua în considerare anularea unui număr infinit de cumulanți, problema convergenței spre o soluție “fantomă” nu se rezolvă, ci se poate doar îmbunătăți.

Referitor la aspectul îmbunătățirii performanțelor care se pot obține prin luarea în considerare a cumulanților de ordin superior este interesant să se revadă modul cum au fost definiți cumulanții în Secțiunea 2.1.

Cumulanții sunt de fapt părți componente ale termenilor unor serii Taylor. Gradul cumulantului este egal cu gradul termenului din seria Taylor, din care face parte. Întrucât aceste serii sunt convergente, rezultă că de la un anumit grad, ponderea termenilor devine tot mai mică și practic se poate neglija. În acest context, se poate aprecia că ponderea cumulanților de ordinul doi este mult mai mare decât cea a cumulanților de ordinul patru, spre exemplu. Acest lucru se întâmplă pe de o parte datorită componentei $\frac{1}{j!}$ a termenului de

ordinul j al seriei, precum și valorilor absolute ale cumulanților care sunt de ordinul de mărime $\sqrt{P^j}$, unde P este puterea semnalului. Cum se operează cu semnale numerice, care provin din sisteme de conversie analog-digitală, acestea sunt normate și nu pot avea puteri supraunitare, rezultă că valorile maxime ale cumulanților scad odată cu creșterea gradului.

În acest context se poate aprecia că surplusul de informație provenit din impunerea anulării unor cumulanți de ordin superior este minor, raportat la complexitatea matematică pe care o aduce după sine, și în raport cu luarea în considerare doar a cumulanților de ordinul doi.

În cazul algoritmului cu sistem de gradienti parțiali s-au avut în vedere aceste considerente și s-a preferat reducerea complexității matematice.

Soluțiile “fantomă”, obținute ca urmare a luării în considerare doar a unui număr limitat de grade de cumulanți ar fi mai corect să le numim soluții “parțiale”. Acestea sunt apropiate de soluțiile corecte deoarece provin din aproximarea cu o anumită acuratețe a condițiilor de independență statistică. Soluțiile “fantomă” care provin prin convergența algoritmului spre alte minime locale decât cel corect nu au o legătură directă cu satisfacerea condițiilor de independență statistică ale semnalelor, sunt depărtate de soluțiile corecte și le vom numi soluții “incorecte”.

Experimentele efectuate cu algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, atât în cazul $N=2$ cât și în cazul $N=3$, au arătat se produce convergența spre soluții “parțiale”.

De fapt, se poate intui acest lucru și din interpretarea principiului algoritmului care pentru cazul $N=2$ are suprafețele de performanță sugerate de Fig.3.2.2.

În concluzie, dacă repartiția de legătură dintre semnalele surselor este de tip gaussian este posibilă, din punct de vedere teoretic, separarea corectă a semnalelor și refacerea lor fidelă.

În cazul semnalelor care nu au o repartiție de legătură de tip gaussian, erorile în reconstrucție sunt dictate de diferența de pondere între cumulanții luați în considerare în construcția funcțiilor cost și cei neluați în considerare.

Datorită limitărilor menționate nu se poate realiza un algoritm care să separe corect și să reconstituie corect semnalele care nu au o repartiție de legătură gaussiană. În schimb, prin perfecționarea algoritmilor erorile pot fi micșorate.

Consider că algoritmul cu sistem de gradienti parțiali este un compromis optim sub aspectul complexității matematice pentru decorelarea a N semnale.

3.3.2.4. Observații asupra filtrelor Q_1 și Q_2

Din examinarea rezultatelor expuse se observă că alegerea filtrelor de preprocesare a semnalelor de intrare în vederea obținerii unor performanțe mai bune în decorelarea lor este o problemă deschisă.

În cazul filtrului Q_1 care este menit să reducă gradul de autocorelare al semnalelor prelucrate în vederea creșterii gradului de independență în evoluția coeficienților vecini ai filtrelor W_{ij} alegerea optimă este dependentă de spectrul semnalelor.

În această alegere trebuie să se țină seama că algoritmul, analizat în domeniul frecvență, se adaptează mai rapid și mai precis în acele zone ale spectrului în care componentele au o putere mai mare.

Al doilea element care trebuie avut în vedere este faptul că, în general, gradul de autocorelare al semnalelor scade atunci când spectrul lor tinde să aibă concentrată energia în zona frecvențelor înalte.

Al treilea element care trebuie avut în vedere este condiția de stabilitate care cere ca ecuația (3.3.1) să aibă în permanență, toate rădăcinile în interiorul cercului unitate.

Din toate experimentele prezentate în teză rezultă că menținerea algoritmului într-o evoluție stabilă este mai ușor de asigurat în cazul în care coeficienții vecini ai filtrelor W_{ij} au un grad mai mare de independență în evoluție. Acest lucru se asigură printr-un grad de autocorelare al semnalelor prelucrate mai redus, deci prin favorizarea componentelor spectrale înalte și atenuarea celor de joasă frecvență. Dacă semnalele au concentrată energia în zona frecvențelor joase, utilizarea filtrelor trece-sus cu frecvența de trecere prea înaltă poate conduce la lipsirea algoritmului de informația necesară adaptării sale corecte în zona frecvențelor joase, și ca atare la obținerea unor soluții neoptime.

Din considerentele menționate rezultă că alegerea parametrilor filtrului Q_1 , care trebuie să fie de tipul trece-sus sau de tipul trece-bandă, dar de bandă largă, trebuie optimizată în funcție de semnalele concrete prelucrate. Este posibilă chiar modificarea parametrilor în timp pentru o optimizare care ține cont de modificarea parametrilor semnalelor.

Introducerea filtrului Q_2 a fost gândită pentru a obține o modificare a semnalelor de intrare astfel încât semnalele prelucrate să-și micșoreze amplitudinea când filtrele W_{ij} au coeficienții la marginea zonei de stabilitate a algoritmului. În cazul $N=2$, utilizarea sa s-a dovedit benefică. În cazul $N=3$, acest filtru a dus la o evoluție mai rapidă, dar nu a reușit să mențină algoritmul într-un regim stabil. Acest lucru se datorează faptului că modulul funcției de transfer a filtrului Q_2 , pentru anumite combinații de coeficienți ai filtrelor W_{ij} , crește în loc să scadă, la marginea zonei de stabilitate, favorizând astfel trecerea în regim instabil.

Pentru cazul concret când $N=3$, filtrul Q_2 are următoarea funcție de transfer:

$$Q_2(z) = 1 + \begin{aligned} &+ W_{13}(z) \cdot W_{21}(z) \cdot W_{32}(z) + W_{12}(z) \cdot W_{23}(z) \cdot W_{31}(z) - \\ &- W_{13}(z) \cdot W_{31}(z) - W_{12}(z) \cdot W_{21}(z) - W_{23}(z) \cdot W_{32}(z) \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

Transformarea acestei relații în una de forma:

$$Q_2 = 1 - \begin{aligned} &- \max |W_{13}(z) \cdot W_{21}(z) \cdot W_{32}(z)|_{z=e^{j\omega}} - \max |W_{12}(z) \cdot W_{23}(z) \cdot W_{31}(z)|_{z=e^{j\omega}} - \\ &- \max |W_{13}(z) \cdot W_{31}(z)|_{z=e^{j\omega}} - \max |W_{12}(z) \cdot W_{21}(z)|_{z=e^{j\omega}} - \max |W_{23}(z) \cdot W_{32}(z)|_{z=e^{j\omega}} \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

unde Q_2 trebuie să fie o cantitate reală și pozitivă, implică, pe lângă un volum important de calcule și o restricționare suplimentară a zonei admisibile pentru coeficienții filtrelor H_{ij} , deci a domeniului de aplicabilitate al algoritmului.

În cazul $N=2$ filtrul Q_2 se poate particulariza într-un coeficient real care trebuie menținut pozitiv, de forma

$$Q_2 = 1 - \max |W_1(z) \cdot W_2(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad (3.3.43)$$

fără ca prin aceasta să se restrângă domeniul admisibil pentru coeficienții filtrelor H_1 și H_2 în cazul în care aceste filtre modelează diferențele de propagare ale semnalelor de la câte o sursă la cei doi receptori. În aceste condiții, modulele funcțiilor lor de transfer ale filtrelor H_1 și H_2 sunt subunitare.

În concluzie, aplicarea filtrului Q_2 în cazul $N>2$ presupune prudență și poate să nu conducă totdeauna la îmbunătățirea performanțelor algoritmului. Este dependentă de condițiile în care se mixează semnalele surselor. În condiții de mixare în care coeficienții filtrelor H_{ij} sunt suficient de mici, se poate aplica în locul filtrului Q_2 dat de (3.3.41), pentru $N=3$, coeficientul Q_2 dat de relația (3.3.42). În situațiile în care sistemul de mixare are coeficienții filtrelor situați la marginea zonei de stabilitate, nu este indicată folosirea filtrului Q_2 .

În cazul $N=2$, în general, aplicarea filtrului Q_2 este benefică. Când nu este posibilă aplicarea filtrului Q_2 se poate încerca utilizarea coeficientului Q_2 dat de relația (3.3.43) fără ca prin aceasta să se impună restricții suplimentare asupra sistemului de mixare.

CAPITOLUL 4

CONCLUZII ȘI PROBLEME DE VIITOR

4.1. CONCLUZII

În această lucrare s-au studiat metode de separare ale semnalelor provenite de la N surse statistic independente și de bandă largă, când sunt recepționate de N captatori.

S-a arătat că la baza unora dintre aceste metode stă criteriul anulării unor cumulanți care sunt funcții de semnalele de la ieșirea sistemului de separare, semnale care dorim să fie replici necorupte ale semnalelor surselor.

S-a demonstrat că separarea semnalelor provenite de la două surse este posibilă utilizând atât decorelatorul cu propagare înainte cât și decorelatorul cu propagare înapoi.

Algoritmii adaptivi, în acest caz, realizează minimizarea unor funcții cost bazate pe cumulanți care conțin ca argumente semnalele de la ieșirile decorelatorului.

În cazul decorelatorului cu propagare înainte, datorită simplității descrierii sale matematice, au fost propuși, de diferiți autori, numeroși algoritmi ale căror criterii de separare sunt anularea cumulanților de ordinele doi, trei și patru. Majoritatea acestor algoritmi operează pe blocuri de date. Decorelatorul cu propagare înainte, datorită absenței buclelor de reacție, este intrinsec stabil. Dar, marele său dezavantaj este că semnalele de ieșire sunt replici distorsionate ale semnalelor surselor. În momentul în care se impune condiția refacerii fidele a semnalelor surselor, trebuiesc introduse în sistem bucle autoregresive. Acestea, prin natura lor, impun restricții asupra domeniului de valori al coeficienților filtrelor de separare, în vederea menținerii stabilității sistemului.

Acuratețea separării semnalelor depinde de legea de repartiție de legătură între semnalele surselor. Dacă această lege este de tip gaussian, atunci sunt suficienți algoritmi bazați pe anularea cumulanților de ordinul doi pentru a obține o separare corectă. Dacă semnalele au o lege de repartiție de legătură negaussiană, condiția de asigurare a independenței statistice a semnalelor de la ieșirea decorelatorului presupune ca funcțiile cost ale algoritmilor de separare să conțină cumulanți de cât mai multe ordine (teoretic un număr infinit), care să fie anulați, pentru a obține soluții cât mai apropiate de cele optime.

În cazul algoritmilor bazați pe arhitectura decorelatorului cu propagare înainte, deși calculul soluției optime se bazează pe rezolvarea unui sistem de ecuații neliniare, totuși aceste ecuații sunt de tip polinomial, de un anumit grad finit, deci au un număr finit de soluții. Dacă funcția cost conține un număr suficient de cumulanți de ordine diferite, pe care trebuie să-i anuleze semnalele de la ieșirea decorelatorului, atunci se poate obține un număr corespunzător de ecuații pentru ca sistemul să fie determinat și în consecință să convergă spre soluția corectă.

Lucrul cu funcții cost bazate pe cumulanți conduce la necesitatea rezolvării unor sisteme de ecuații neliniare, de ordin înalt, de unde derivă și complexitatea matematică a algoritmilor adaptivi cu care se rezolvă de fapt aceste sisteme de ecuații. Practic, s-au construit algoritmi care anulează cel mult cumulanți de ordinul patru. Această limitare este impusă de complexitatea relației de legătură între cumulanți și momente, relații pe baza cărora se calculează de fapt cumulanții.

Dacă se adoptă aceleași funcții cost, menționate mai sus, în cazul decorelatoarei cu propagare înapoi, datorită prezenței buclelor de reacție specifice arhitecturii sale, sistemele de ecuații neliniare a căror soluție este minimul funcției cost devin extrem de complicate. Aceste ecuații nu mai sunt de tip polinomial ci de tipul unor sume de funcții raționale. Spre exemplu, pentru cazul “simplu” al algoritmului cu sistem de gradienti parțiali discutat în Secțiunea 3.2, aceste ecuații presupun egalarea cu zero a unor expresii de forma celor date în relațiile (3.2.16) și (3.2.17). Având în vedere că împărțirea numărătorilor la numitori, în astfel de relații, este echivalentă cu produsul dintre numărător și seria de puteri în care se poate dezvolta expresia inversului numitorului, se ajunge în situația că aceste ecuații sunt echivalente cu ecuații polinomiale de grad infinit. Deci, în mod logic, sunt necesare o infinitate de ecuații pentru a ne asigura că putem obține soluția corectă de ordin infinit. Acest lucru presupune necesitatea luării în considerare a unui număr infinit de cumulanți care trebuiesc anulați de către semnalele de la ieșirea decorelatoarei.

Pe de altă parte, așa cum s-a arătat și în Secțiunea 3.3.2.3, cumulanții fiind părți componente ale coeficienților unor serii Taylor, al căror ordin este egal cu ordinul termenului din seria din care face parte, contribuția lor la aproximarea condiției de independență statistică scade odată cu ordinul lor. Trebuie remarcat totuși, că cel puțin din punct de vedere teoretic, nelucrând cu criterii cu un număr infinit de condiții, soluțiile obținute pentru filtrele decorelatoarelor aproximează, de fapt, pe cele optime cu o acuratețe cu atât mai mare, cu cât se iau în considerare cumulanții care trebuie să se anuleze din cât mai mulți termeni ai seriei Taylor în care se dezvoltă logaritmul funcției caracteristice a repartiției de legătură a semnalelor surselor.

Nu numai forma complicată a acestor ecuații este impedimentul principal în soluționarea lor. Întrucât metodele de soluționare ale sistemelor de ecuații neliniare sunt de tip iterativ și se bazează pe căutarea unui extrem local, este posibil ca să ne aflăm în imposibilitatea unei inițializări corecte a algoritmilor, pentru ca aceștia să ne conducă spre soluțiile optime. Ei pot să convergă spre extreme locale pentru care soluția obținută nu este cea optimă.

Am demonstrat că pentru cazul $N > 2$, singura arhitectură de decorelator care permite separarea semnalelor este cea cu propagare înapoi. Cazul $N=2$ este singura excepție când separarea semnalelor se poate realiza și cu decorelatorul cu propagare înainte. De aceea studiile mele s-au canalizat pe aprofundarea problemelor ridicate de decorelatorul cu propagare înapoi.

Având în vedere complicațiile de natură matematică enunțate pentru cazul $N=2$, care se amplifică dacă N crește, în această lucrare am propus algoritmul cu sistem de gradienti parțiali, care, minimizând un sistem de funcții cost de tip putere medie, fiecare în raport cu o submulțime a parametrilor de care depinde, conduce la un algoritm asemănător LMS-ului, deci de o complexitate redusă în raport cu ceea ce s-a descris până aici. Acest algoritm anulează doar cumulanții de ordinul doi. Algoritmul poate fi suboptimal în sensul că se pot obține soluții “fantomă” pe care le-am numit soluții “parțiale” care sunt diferite de cele optime, dar se află în vecinătatea acestora. Motivul apariției acestor soluții a fost menționat mai sus, neanularea cumulanților de ordin superior lui doi.

În cazul $N=2$, prin utilizarea preprocesării semnalelor de intrare cu ajutorul filtrelor Q_1 și Q_2 s-a reușit obținerea unor performanțe de regim tranzitoriu pe deplin satisfăcătoare pentru aplicațiile practice.

În cazul $N > 2$, condițiile de menținere a stabilității decorelatoarei cu propagare înapoi sunt mult mai severe decât în cazul $N=2$, în sensul că valorile coeficienților filtrelor de amestec H_{ij} trebuie să aibă valori mai mici decât în cazul $N=2$, valori care se micșorează odată cu creșterea lui N . Aceasta nu este o condiție care depinde de algoritmul de decorelare adoptat, ci se datorează arhitecturii decorelatoarei cu propagare înapoi, care are bucle multiple de reacție.

Poate exista o valoare N , pentru care limitările impuse coeficienților filtrelor de mixare să fie atât de severe încât, pentru gradul de corupere al semnalelor utile, admisibil din punctul de vedere al stabilității decorelaturii, să nu mai fie necesară separarea semnalelor, deoarece indicii lor calitativi (raportul semnal-zgomot) pot fi satisfăcători și fără decorelarea lor. Apreciez că această limită a valorii lui N este în jurul valorilor 5 sau 6.

Testările efectuate pentru $N=3$ au arătat că deplasarea soluției “parțiale” față de soluția optimă se accentuează față de cazul $N=2$. Acest aspect se concretizează prin scăderea câștigului de raport semnal-zgomot de aproximativ 16÷18dB obținut pentru $N=2$, la 9÷12dB pentru $N=3$, în condițiile în care semnalele surselor erau de aproximativ aceeași putere și numărul de coeficienți ai filtrelor fiind 20 în cazul $N=2$ și 16 în cazul $N=3$.

Analizând figurile 3.3.20 la 3.3.31, care prezintă evoluția coeficienților filtrelor W_{ij} , se constată că la sfârșitul regimului tranzitoriu, valoarea medie a coeficienților care trebuie să fie diferiți de zero diferă cu mai puțin de 10% față de valoarea optimă. De asemenea, abaterile valorilor medii ai coeficienților care ar fi trebuit să fie nuli, față de zero, sunt tot sub 10% din valoarea optimă a coeficientului diferit de zero.

În Secțiunea 2.3.4, [45], s-a prezentat un algoritm bazat pe anularea polispectrelor de ordinul trei. Acest algoritm a fost experimentat, de către autorul său, tot pentru decorelarea a trei semnale, dar acestea au fost generate pe calculator ca fiind ieșirile unor sisteme autoregresive de ordinul doi, identice, excitate de semnale identic distribuite și mutual independente, cu distribuție exponențială. Filtrele sunt de gradul unu și trei. În total se calculează 21 de coeficienți. În aceste condiții mediile coeficienților calculați au o eroare de ordinul a 5% din valorile optime. Dacă se compară acest rezultat, cu cel de mai sus, unde s-au calculat 96 de coeficienți, și s-au folosit semnale reale (provenite din natură), se poate aprecia că algoritmul cu sistem de gradienti parțiali se încadrează cel puțin în aceeași clasă de precizie cu acesta, dar este mult mai simplu din punct de vedere matematic. Trebuie adăugat și faptul că algoritmul prezentat în Secțiunea 2.3.4 nu poate fi aplicat semnalelor cu lege de repartiție de legătură de tip gaussian.

Simplitatea matematică a algoritmului cu sistem de gradienti parțiali este “plătită” printr-o durată mai mare a regimului tranzitoriu decât cea declarată în [45], și prezentată în Secțiunea 2.3.4. Aprecieri corecte asupra raportului duratelor regimurilor tranzitorii în cazul celor două exemple nu se pot face întrucât în articolul menționat nu s-a precizat mărimea blocului de date. Se precizează doar că algoritmul converge în 3÷5 iterații.

În concluzie, apreciez că algoritmul cu sistem de gradienti parțiali este o alternativă care permite obținerea unor performanțe comparabile cu ceilalți algoritmi de decorelare prezenți în literatură, dar având avantajul unei complexități matematice mai reduse.

Consider, de asemenea, că am clarificat o problemă de principiu, privind arhitectura posibilă de decorelator pentru separarea a N semnale recepționate de N captatori, cu $N>2$. Din această arhitectură rezultă și limitele în separarea și reconstituirea acestor semnale.

O problemă fundamentală evidențiată în Secțiunea 3.1.1. este necesitatea de a se lua în considerare numărul real de surse statistic independente care emit într-un mediu în care suntem interesați doar de o parte dinte acestea.

Pentru cazul $N=2$, experimentele prezentate au demonstrat un comportament ideal al algoritmului în cazul în care unul dintre semnalele surselor este absent.

Cu excepția unor cazuri “de studio”, într-un mediu natural problema separării semnalelor este una de ordinul N , unde N este mai mare decât 2. Iată unul dintre motivele principale pentru care am insistat asupra decorelării mai multor semnale.

Având în vedere limitările de natură principială prezentate, înseamnă că putem separa (în limitele impuse de condiția de stabilitate) maximum 5÷6 semnale utilizând principiul decorelaturii. Peste această limită trebuie schimbat principiul metodei. Astfel se poate

considera un semnal ca fiind cel util, iar suma celorlalte ca fiind semnalul perturbator. În acest caz ambele semnale pot fi recepționate de unul sau două captatoare și se poate încerca un algoritm de tipul celui prezentat în Secțiunea 2.4. bazat pe principiul plauzibilității maxime, dar cu parametrii calitativi puternic dependenți de caracteristicile semnalelor. Acest lucru este posibil deoarece rezultatul însumării a mai mult de 6 semnale de puteri aproximativ egale poate fi considerat ca fiind un semnal cu o lege de repartiție de tip gaussian.

4.2. PROBLEME DE VIITOR

O problemă care a rămas nerezolvată (după știința mea) în domeniul separării a N semnale provenite din surse statistic independente este următoarea:

Presupunând că avem M captatoare de semnal și N surse statistic independente care sunt recepționate de aceste captatoare, cu N necunoscut, dar $M > N$, se cere construirea unui algoritm care să realizeze separarea celor N semnale.

În prezent, această problemă se poate rezolva considerând în paralel mai multe decorelatoare de ordine diferite și selectând, în mod subiectiv, decorelatorul de ordinul corect pe baza semnalelor sale de ieșire.

O altă problemă este investigarea matematică mai profundă a algoritmului cu sistem de gradienti parțiali în vederea obținerii de criterii practice de alegere a parametrilor mărime de pas, care în prezent se aleg prin tatonări.

Îmbunătățirea performanțelor de decorelare au fost obținute prin preprocesarea semnalelor de intrare în vederea micșorării gradului lor de autocorelare cu ajutorul filtrului Q_1 . Consider că sunt necesare investigații mai profunde care să conducă la alegerea optimă a acestui filtru în funcție de caracteristicile semnalelor prelucrate.

De asemenea și filtrul Q_2 se cere perfecționat pentru asigurarea menținerii algoritmului într-o evoluție stabilă pentru valori cât mai mari ale parametrilor mărime de pas.

Consider utilă o abordare în domeniul frecvență a algoritmului cu sistem de gradienti parțiali, abordare care ar putea rezolva mai bine problema micșorării gradului de autocorelare a semnalelor prelucrate, ceea ce ar putea conduce la performanțe de regim tranzitoriu mai bune.

O altă direcție interesantă este perfecționarea și extinderea la N semnale a unor algoritmi bazați pe principiul plauzibilității maxime și eventual cu luarea în considerare și a principiului independenței statistice materializat prin anularea cumulanților.

ANEXA 1

Condiție necesară și suficientă pentru ca o matrice reală și simetrică să fie pozitiv definită

Fie \mathcal{A} o matrice reală și simetrică partiționată astfel:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{12}^T & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.1})$$

unde matricele \mathcal{A}_{11} și \mathcal{A}_{22} sunt pătrate și simetrice.

Se pune problema să se stabilească condiții necesare și suficiente pe care trebuie să le îndeplinească matricele componente \mathcal{A}_{11} , \mathcal{A}_{12} , \mathcal{A}_{22} pentru ca matricea \mathcal{A} să fie pozitiv definită

Se cunoaște faptul că proprietatea ca o matrice să fie pozitiv definită este invariantă la schimbarea de coordonate. Atunci se poate construi o matrice \mathcal{B} , diagonal matriceală, echivalentă cu \mathcal{A} , astfel:

$$\mathcal{B} = \mathcal{V}^T \mathcal{A} \mathcal{V} \quad (\text{A.1.2})$$

unde

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

și \mathcal{B}_{11} , \mathcal{B}_{22} sunt simetrice de dimensiuni corespunzătoare.

Dacă se alege \mathcal{V} de forma:

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 & -\mathcal{A}_{11}^{-1} \mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.4})$$

unde \mathcal{I}_1 și \mathcal{I}_2 sunt matrice unitate de dimensiuni corespunzătoare, se obține:

$$\mathcal{B}_{11} = \mathcal{A}_{11} \quad (\text{A.1.5})$$

și

$$\mathcal{B}_{22} = \mathcal{A}_{22} - \mathcal{A}_{12}^T \mathcal{A}_{11}^{-1} \mathcal{A}_{12} \quad (\text{A.1.6})$$

Pentru ca matricea \mathcal{B} să fie pozitiv definită este necesar și suficient ca matricele \mathcal{B}_{11} , \mathcal{B}_{22} să fie amândouă pozitiv definite.

Alegându-se matricea \mathcal{V} de forma:

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 & 0 \\ -\mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{A}_{12}^T & \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.7})$$

se obține:

$$\mathcal{B}_{11} = \mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12} \mathcal{A}_{22}^{-1} \mathcal{A}_{12}^T \quad (\text{A.1.8})$$

și

$$\mathcal{B}_{22} = \mathcal{A}_{22} \quad (\text{A.1.9})$$

În concluzie, pentru ca matricea \mathcal{A} să fie pozitiv definită este necesar și suficient ca matricele \mathcal{B}_{11} , \mathcal{B}_{22} să fie amândouă pozitiv definite, fie că sunt date de setul de relații A1.5, A1.6, fie de setul A1.8, A1.9.

ANEXA 2

Calculul coeficienților filtrelor F.I.R. ale căror funcții de transfer sunt exprimate prin determinanți

În această anexă se propune un algoritm concret pentru calculul răspunsurilor la impulsul unitate ale sistemelor corespunzătoare determinantului Δ , minorilor Δ_y și $\Delta_{l_i, i, j}^y$ din sistemele din figurile 3.3.2 și 3.3.3.

Explicitarea directă, în domeniul timp, a răspunsurilor la impulsul unitate ale sistemelor ale căror funcții de transfer sunt date de Δ , Δ_y și $\Delta_{l_i, i, j}^y$, este dependentă de gradul determinantului și, nu se poate face decât pentru grade mici, datorită complexității relațiilor de dezvoltare ale determinanților.

De aceea se alege o altă modalitate de obținere a răspunsurilor la impulsul unitate care va fi explicată în continuare.

Se pornește de la faptul că dezvoltarea determinanților constă din sume de produse de N_Δ elemente, unde N_Δ este gradul determinantului. Fiecare element este o funcție de transfer a unui filtru F.I.R. de gradul M_{ij} . De aceea, sistemul rezultat, este format prin punerea în paralel a unor subsisteme alcătuite fiecare din N_Δ filtre F.I.R., de grade M_{ij} , înseriate. În consecință, sistemul rezultat este echivalent cu un filtru F.I.R. al cărui răspuns la impulsul unitate are lungimea dictată de ramura care are suma gradelor filtrelor înseriate, maximă.

Gradul filtrului F.I.R. rezultat se va nota M_Δ , $M_{\Delta y}$ sau $M_{\Delta l_i, i, j}^y$, după cum se referă la filtrele ale căror funcții de transfer sunt date de Δ , Δ_y sau $\Delta_{l_i, i, j}^y$, respectiv.

Determinantul Δ și minorii săi Δ_y și $\Delta_{l_i, i, j}^y$, așa cum apar în relațiile (3.3.17) și (3.3.24) sunt funcții de z , deci exprimabile în domeniul frecvență dacă se face substituția:

$$z = e^{j_0 2\pi f_n} \quad (\text{A.2.1})$$

unde f_n este frecvența normată dată de relația:

$$f_n = \frac{f}{f_e} \quad (\text{A.2.2})$$

în care f este frecvența, exprimată în Hz, iar f_e este frecvența de eșantionare a sistemului discret, iar $j_0 = \sqrt{-1}$.

Se aleg M frecvențe normate f_{nq} , $q=0, \dots, M-1$ (M este M_Δ , $M_{\Delta y}$ sau $M_{\Delta l_i, i, j}^y$) și se formează următorul sistem liniar de M ecuații cu M necunoscute:

$$\sum_{k=0}^{M-1} d_k e^{-j_0 2\pi k f_{nq}} = D_M \left(e^{j_0 2\pi f_{nq}} \right), \quad q = 0, \dots, M-1 \quad (\text{A.2.3})$$

În relațiile (A.2.3) d_k sunt coeficienții filtrului F.I.R. echivalent al sistemului a cărui funcție de transfer este determinantul D_M (care poate fi Δ , Δ_y sau $\Delta_{l_i, i, j}^y$) evaluat pentru $z = e^{j_0 2\pi f_{nq}}$.

Pentru simplificarea algoritmului se alege

$$f_{nq} = qf_{n0} \quad (\text{A.2.4})$$

și atunci sistemul (A.2.3) devine:

$$\sum_{k=0}^{M-1} d_k e^{-j_0 2\pi k q f_{n0}} = D_M \left(e^{j_0 2\pi q f_{n0}} \right), \quad q = 0, \dots, M-1 \quad (\text{A.2.5})$$

sau, sub formă matriceală:

$$\mathcal{F} d = D \quad (\text{A.2.6})$$

unde

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j_0 2\pi(1) f_{n0}} & \dots & e^{-j_0 2\pi(M-1) f_{n0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j_0 2\pi(1)(M-1) f_{n0}} & \dots & e^{-j_0 2\pi(M-1)(M-1) f_{n0}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.7})$$

$$d = [d_0 \quad d_1 \quad \dots \quad d_{M-1}]^T \quad (\text{A.2.8})$$

$$D = [D_M(1) \quad D_M(e^{j_0 2\pi(1) f_{n0}}) \quad \dots \quad D_M(e^{j_0 2\pi(M-1) f_{n0}})]^T \quad (\text{A.2.9})$$

Din relația (A.2.6) rezultă:

$$d = \mathcal{F}^{-1} D \quad (\text{A.2.10})$$

Se observă că în cazul în care se alege

$$f_{n0} = \frac{1}{M} \quad (\text{A.2.11})$$

matricea \mathcal{F} dată de relația (A.2.7) devine matricea unei transformări Fourier discrete. În aceste condiții, matricea transformării Fourier discrete inverse, \mathcal{F}^{-1} , este dată de relația:

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j_0 2\pi(1) \frac{1}{M}} & \dots & e^{j_0 2\pi(M-1) \frac{1}{M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j_0 2\pi(1)(M-1) \frac{1}{M}} & \dots & e^{j_0 2\pi(M-1)(M-1) \frac{1}{M}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.12})$$

În continuare se analizează problema estimării vectorului D .

Elementele sale sunt valorile pe care le ia determinantul D_M când în funcțiile de transfer ale filtrelor F.I.R., $W_{ij}(z)$ se alege $z = e^{j_0 2\pi \frac{q}{M}}$, unde $q = 0, \dots, M-1$. Valorile $W_{ij}(z)$ pentru $z = e^{j_0 2\pi \frac{q}{M}}$, unde $q = 0, \dots, M-1$, reprezintă transformatele Fourier directe discrete ale răspunsurilor la impulsul unitate ale filtrelor W_{ij} . Deoarece coeficienții acestora se presupun reali, aceste transformate Fourier directe discrete au proprietatea :

$$W_{ij}(z) \Big|_{z = e^{j_0 2\pi \frac{q}{M}}} = \overline{W_{ij}(z)} \Big|_{z = e^{j_0 2\pi \frac{M-1-q}{M}}}, \quad q = 0, \dots, M-1 \quad (\text{A.2.13})$$

adică, valorile transformatei Fourier egal depărtate de extreme sunt complex conjugate. Această proprietate se extinde și asupra valorilor determinanților $D_M \left(e^{j_0 2\pi m \frac{1}{M}} \right)$, în sensul că au loc egalitățile:

$$D_M \left(e^{j_0 2\pi \frac{q}{M}} \right) = \overline{D_M \left(e^{j_0 2\pi \frac{M-1-q}{M}} \right)}, \quad q = 0, \dots, \left[\frac{M-1}{2} \right] \quad (\text{A.2.14})$$

unde $[\cdot]$ semnifică “partea întreagă”.

Datorită acestei proprietăți, este suficient să se calculeze doar jumătate dintre elementele vectorului D , dat de relația (A.2.9), restul de elemente obținându-se în baza relațiilor (A.2.14).

BIBLIOGRAFIE

- [1.]B. Widrow & others: "*Adaptive noise concealing: Principles and applications*". Proceedings of the IEEE, vol. 63, 9-12 December 1975.
- [2.]Y. Bar-Ness and Y. Rockach: "*Cross-coupled bootstrapped interference canceller*". Proc. Int. Conf. Antennas Propagat., June 1981. (Lucrare referită în [16])
- [3.]D. H. Brandwood: "*Cross-coupled cancellation system for improving cross-polarization discrimination*". Proc. Int. Conf. Antennas Propagat., London, U. K., Nov. 1978, Part I, pp. 41-45. (Lucrare referită în [16])
- [4.]J. Cardoso: "*Source separation using higher order moments*". Proc. IEEE ICASSP, vol. 4, 1989, pp.2109-2112. (Lucrare referită în [16], [45])
- [5.]J. Cardoso and A. Souloumiac: "*An efficient technique for the blind separation of complex sources*". Proc. IEEE SP Workshop Higher Order Stat., Lake Tahoe, CA, June 1993. (Lucrare referită în [16])
- [6.]P. Comon: "*Independent component analysis, a new concept?*". Signal Processing, vol. 36, no. 3, Apr. 1994.
- [7.]P. Comon, C. Jutten, and J. Hérault: "*Blind separation of sources, Part II: Problems statement*". Signal Processing, vol.24, no. 1, pp. 11-20, July 1991.
- [8.]C. Jutten and J. Hérault: "*Blind separation of sources, Part I: An adaptive algorithm based on neuromimetic architecture*". Signal Processing, vol. 24, no. 1, pp. 1-10, July 1991.
- [9.]C. Jutten, L. N. Thi, E. Dijkstra, E. Vittoz, and J. Caelen: "*Blind separation of sources: An algorithm for separation of convolutive mixtures*". Proc. Int. Workshop Higher Order Stat., Chmrousse-France, July 1991. (Lucrare referită în [16])
- [10.]J. L. Lacoume and P. Ruiz: "*Source identification: A solution based on cumulants*". Proc. 4th ASSP Workshop Spectral Estimation Modeling, Aug. 1988, pp. 199-203. (Lucrare referită în [16])
- [11.]—, "*Separation of independent sources from correlated inputs*". IEEE Trans. Signal Processing, vol. 40, pp. 3074-3078, Dec. 1992.
- [12.]E. Sorouchyari, C. Jutten, and J. Hérault: "*Blind separation of sources, Part III: Stability analysis*". Signal Processing, vol. 24, no. 1, pp. 21-29, July 1991.
- [13.]L. Tong, V. C. Soon, Y. F. Huang, and R. Liu: "*Multiple source separation in noise*". 27th Ann. Allerton Conf. Commun. Contr. Comput., Urbana, IL, Sept. 1989.

- [14.]E. Weinstein, M. Feder, and A. V. Oppenheim: “*Multiple signal separation by decorrelation*”. IEEE Trans. Speech Audio Processing, vol.1, pp. 405-413, Oct.1993.
- [15.]D. Yellin and E. Weinstein: “*Criteria for multichannel signal separation*”. IEEE Trans. Signal Processing, vol. 42, pp.2158-2168, Aug. 1994.
- [16.]D. Yellin and E. Weinstein: “*Multichannel Signal Separation: Methods and Analysis*”. IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 44, no. 1, January 1996.
- [17.]O. Shalvi and E.Weinstein: “*System identification based on high-order statistics*”. submitted to IEEE Trans. Signal Processing. (Lucrare referită în [16])
- [18.]O. Onicescu, G. Mihoc, C. T. Ionescu Tulcea: “*Calculul probabilităților și aplicații*”. Editura Academiei R. P. R. 1956.
- [19.]P. McCullagh: “*Tensor Methods in Statistics*”. London, Chapman and Hall, 1987. (Lucrare referită în [88])
- [20.]D. R. Brillinger: “*Time Series, Data Analysis and Theory*”. San Francisco, C. A.: Holden Day, 1981. (Lucrare referită în [16])
- [21.]S. Bellini and F. Rocca: “*Asymptotically efficient blind deconvolution*”. Signal Processing, vol. 20, no.1, pp. 193-209, 1990.
- [22.]A. Benveniste, M. Goursat, and G.Ruget: “*Robust identification of a nonminimum phase system: Blind adjustment of a linear equalizer in data communication*”. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, pp.385-399, June 1980.
- [23.]D. Donoho: “*On minimum entropy deconvolution*”. Applied Time Series Analysis II, D. Findely, Ed. New York: Academic, 1981, pp. 556-608. (Lucrare referită în [16])
- [24.]D. N. Godard: “*Self recovering equalization and carrier tracking in two dimensional data communication systems*”. IEEE Trans. Commun., vol. COM-28, pp. 1867-1875, 1980. (Lucrare referită în [16])
- [25.]—: “*Super-exponential methods for blind deconvolution*”. IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 39, pp. 504-519, Mar. 1993.
- [26.]U. Lindgren, H. Sahlin and H. Broman: “*Source separation using second order statistics*”. EUSPICO 1996.
- [27.]M. Gabrea: “*A noise canceller based on higher order statistics*”. Buletinul Științific al Universității “Politehnica” din Timișoara-ROMÂNIA, Tomul 41(55) 1996 Fascicula 1.
- [28.]E.Weinstein, A. V. Oppenheim, M. Feder and J. R. Buck: “*Iterative and Sequential Algorithms for Multisensor Signal Enhancement*”. IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 42, no. 4, pp. 846-859, April 1994.

- [29.]M. Feder, A. V. Oppenheim and E. Weinstein: "*Maximum likelihood noise cancellation using the EM algorithm*". IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Processing, vol. 37, no. 2, pp. 204-216, Feb. 1989.
- [30.]E. Weinstein, A. V. Oppenheim, M. Feder: "*Signal enhancement using single and multi-sensor measurements*". RLE Techn. Rep.. No. 560, M.I.T., Cambridge, MA, Nov.1990.(Lucrare referită în [28])
- [31.]A. V. Oppenheim, E. Weinstein, K. Zangi, M.Feder and D. Gauger: "*Single sensor active noise cancellation based on the EM algorithm*". IEEE Trans. Signal Processing, Apr. 1994.
- [32.]C. F. J. Wu: "*On the convergence properties of the EM algorithm*". Annals Stat., vol. 11, pp.95-103, 1993. (Lucrare referită în [28])
- [33.]B. R. Musicus: "*Iterative algorithms for optimal signal reconstruction and parameter identification given noisy and incomplete data*". Ph.D.dissertation, Mass. Inst. Technol.,Sept. 1982. (Lucrare referită în [28])
- [34.]R. H. Shumway and D. S. Stoffer: "*An approach to time series smoothing and forecasting using the EM algorithm*". J. Time Series Anal., vol. 3, no. 4, pp.253-264, 1982. (Lucrare referită în [28])
- [35.]A. P. Dempster, N. M. Laird and D. B. Rubin: "*Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm*". J. Royal Stat. Soc., pp.1-38, 1977, ser.3g. (Lucrare referită în [28])
- [36.]J. Meilijson: "*A fast improvement to the EM algorithm on its own terms*". J. Royal Stat. Soc., vol.51, no. 1, pp. 127-138, 1989, ser. B. (Lucrare referită în [28])
- [37.]B. D. O. Anderson and J. B. Moore: "*Optimal Filtering*". Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1979. (Lucrare referită în [28])
- [38.]K. J. Åström: "*Maximum likelihood and prediction error methods*". In Trends and Progress in System Identification, (p. Eykhoff, Ed.) Oxford: Pergamon, 1981, pp. 145-168, ch.5. (Lucrare referită în [28])
- [39.]L. Ljung and T.Söderström:"*Theory and Practice of Recursive Identification*". Cambridge, MA: MIT Press, 1983. (Lucrare referită în [28])
- [40.]D. M. Titterington: "*Recursive parameter estimation using incomplete data*". J. Royal Stat. Soc., vol. 46, no. 2, pp. 257-267, 1984. (Lucrare referită în [28])
- [41.]C. R. Rao: "*Linear Statistical Inference and Its Applications*". New York: Wiley, 1973, 2nd ed. (Lucrare referită în [28])
- [42.]N. K. Gupta and R. K. Mehra: "*Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculations*". IEEE Trans. Automat. Cont., vol. AC-19, pp. 774-783, dec. 1974. (Lucrare referită în [28])

- [43.]M. Segal and E. Weinstein: “*A new method for evaluating the log-likelihood gradient (score) of linear dynamic systems*”. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 33, pp. 763-766, Aug. 1988.
- [44.]R. A. Fisher: “*Theory of statistical estimation*”. Proc. Cambridge Phil. Soc., vol. 22, pp. 700-725, 1925. (Lucrare referită în [28])
- [45.]W. Jun: “*Wideband Blind Identification and Separation of Independent Sources*”. EUSPICO-96 VIII European Signal Processing Conference, September 10-13, 1996 Trieste, Italy.
- [46.]L. Tong, V. Soon, Y. Huang and R. Liu: “*Indeterminacy and identifiability of blind identification*”. IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 38, no.5, May, 1991, pp.4999-509. (Lucrare referită în [16])
- [47.]J. M. Mendel: “*Tutorial on high-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: theoretical results and some applications*”. Proceedings of the IEEE, vol. 79, no.3, March, 1991, pp.278-305.
- [48.]L. Tong, Y. Inouye and R. Liu: “*Waveform preserving blind estimation of multiple independent sources*”. IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41,no. 7, July 1993, pp. 2461-2470.
- [49.]S. V. Gerven and D. V. Compernelle: “*Signal Separation by Symmetric Adaptive Decorrelation: Stability, Convergence, and Uniqueness*”. IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 43, no. 7, July 1995.
- [50.]R. L. Zinser, G. Mirchandani and J. B. Evans: “*Some experimental and theoretical results using a new adaptive filter structure for noise cancellation in presence of crosstalk*”. Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Processing, Mar. 1985, vol. II, pp. 208-211. (Lucrare referită în [49])
- [51.]G. Mirchandani, R. L. Zinser and J. B. Evans: “*A new adaptive noise cancellation scheme in presence of crosstalk*”. IEEE Trans. Circ. Syst. II, vol. 39, pp.681-694, Oct. 1992.
- [52.]R. T. Compton: “*The power-inversion adaptive array: Concept and performance*”. IEEE Trans. Aerospace Elect. Syst.,vol. AES-15, pp.803-814, Nov. 1979. (Lucrare referită în [49])
- [53.]D. V. Compernelle: “*Switching adaptive filters for enhancing noisy and reverberant speech from microphone array recordings*”. Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Processing, Apr. 1990, pp833-836. (Lucrare referită în [49])
- [54.]M. J. Al-Kindi and J. Dunlop: “*Improved adaptive noise cancellation in the presence of signal leakage on the noise reference channel*”. Signal Processing, vol. 17, no. 3, pp. 241-250, July 1989. (Lucrare referită în [49])

- [55.]J. Carlin, Y. Bar-Ness, and M. Steiberger: “*Bootstrapping adaptive cross pol. canceller for satellite communications*”. Proc. Int. Conf. Commun., June 1982, pp. 4F.5.1-4F.5.4. (Lucrare referită în [49].)
- [56.]Y. Bar-Ness and A. Dinç: “*Bootstrap: A fast blind adaptive signal separator*”, Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Processing, vol. II Mar. 1992, pp. 325-327.
- [57.]Y. Bar-Ness and H. Messer: “*Bootstrapped spatial separation of wideband superimposed signals*”. Signal Processing VI: Proc. EUSPICO-92, Aug. 1992, pp. 819-822. (Lucrare referită în [49].)
- [58.]P. Comon, C. Jutten, and J. Herault: “*Blind separation of sources, Part II:Problems statement*”. Signal Processing, vol. 24, no. 1, pp. 11-20, July 1991.
- [59.]H. L. Nguyen Thi, C. Jutten, and J. Caelen: “*Speech enhancement: Analysis and comparison of methods on various real situations*”. Signal Processing VI: Proc. EUSIPCO-92, Aug. 1992, pp. 303-306. (Lucrare referită în [49])
- [60.]H. L. Nguyen Thi: “*Séparation aveugle de source à bande large dans un mélange convolutif*”. Ph. D. dissertation, I.N.P.G., Grenoble, France, 1993. (Lucrare referită în [49])
- [61.]D. V. Compernelle and S. V. Gerven: “*Signal separation in a symmetric adaptive noise canceller by output decorrelation*”. Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Processing, vol. IV Mar. 1992, pp.221-224. (Lucrare referită în [63].)
- [62.]———, “*Mathematical and physical constraints in blind signal separation*”. IEEE Benelux ProRISC Proc. Workshop Circ. Syst. Signal Processing, Apr. 1992, pp. 187-192. (Lucrare la care se face referință în [49])
- [63.]S. V. Gerven and D. V. Compernelle: “*Feedforward and feedback in a symmetric adaptive noise canceller: Stability analysis in a simplified case*”. Proc.Signal Processing VI: Proc. EUSPICO-92, Aug. 1992, pp. 1081-1084.
- [64.]C. Jutten and H. Herault: “*A neuromimetic solution for the problem of source discrimination*”. Traitement du Signal, vol. 5, no. 6, pp. 389-403, 1988. (Lucrare referită în [49])
- [65.]S. V. Gerven and D.V. Compernole: “*On the use of decorrelation in scalar signal separation problems*” Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Processing, vol. III Apr. 1994, pp. 57-60.
- [66.]H. Broman, U. Lindgren, H. Sahlin, and P. Stoica: “*Source Separation: A TITO System Identification Approach*”. Technical report, CTH-TE-##, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1995. Submitted to IEEE Transactions on Signal Processing. (Lucrare referită în [26])
- [67.]U. Lindgren: “*Signal separation*”. Technical report, No. 201L (licentiate dissertation), Chalmers Universty of Technology, Göteborg, Sweden, 1995. (Lucrare referită în [26])

- [68.]U. Lindgren and H. Broman: “*On the identifiability of a mixing channel based on second order statistics*”. The Proceedings of the Radio Vetenskap och kommunikation Conference, 1996. (Lucrare referită în [26])
- [69.]U. Lindgren and H. Broman. “*Source Separation:Using a Criterion on Second Order Statistics*”. Technical Report CTH-TE-36, Chalmers Universty of Technology, Göteborg, Sweden, 1996. (Lucrare referită în [26])
- [70.]S. Bellini and F. Rocca: “*Asymptotically efficient blind deconvolution*”. Signal Processing, vol. 20, no. 1, pp. 193-209, 1990.
- [71.]A. Benveniste, M. Goursat, and G. Ruget: “*Robust identification of a nonminimum phase system: Blind adjustment of a linear equalizer in data communication*”. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, pp.385-399, June 1980. (Lucrare referită în [16])
- [72.]J. S. Lim and A. V. Oppenheim: “*All pole modeling of degraded speech*”. IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Processing, vol. ASSP-26, pp.197-210, 1978.
- [73.]J. S. Lim (Ed.): “*Speech Enhancement*”. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983. (Lucrare referită în [28])
- [74.]T. A. Lois: “*Finding the observed information matrix when using the EM algorithm*” J. Royal Stat. Soc., col. 44, no. 2, pp. 226-233, 1982,ser. B. (Lucrare referită în [28])
- [75.]M. Segal and E. Weinstein: “*A new method for evaluating the score, Hessian, and the Fisher's information matrix of discrete-time dynamic systems*”. IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 35, no. 3, pp. 682-687, May 1989.
- [76.]M. Gabrea , E. Mandridake, M. Menez, M. Najim and A. Vallauri: “*Two microphones speech enhancement system based on a double fast recursive least squares (DFRLS) algorithm*”. EUSIPCO-96 VIII European Signal Processing Conference, September 10-13, 1996, Trieste, Italy.
- [77.]L. Ljung: “*The ODE approach to the analysis of adaptive control systems - Possibilities and limitations*”. Report LiTH-ISY-I-0378, Department of Electrical Engineering, Linköping University, 1980. (Lucrare referită în [79])
- [78.]L. Ljung: “*Analysis of recursive stochastic algorithms*”. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. A.C.-22,No. 4, pp. 551-575, 1977. (Lucrare referită în [79])
- [79.]S. Călin, T. Popescu, B. Jaro, V. Sima: “*Conducerea adaptivă și flexibilă a proceselor industriale*”. Editura Tehnică, București 1988.
- [80.]R. Boite et M. Kunt: “*Traitement de la parole*”. Presses Polytechniques Ramandes, 1987.
- [81.]M. G. Kendall, A. Stuart: “*The advanced theory of statistics*”. Vol.1. London, Griffin C., 1997. (Lucrare referită în [88])

- [82.]D. R. Brillinger: "*An introduction to polyspectra*". Ann. Math. Stat., Vol. 36, 1965. (Lucrare referită în [88])
- [83.]C. L. Nikias, A. P. Petropulu: "*Higher-Order Spectra Analysis. A Nonlinear signal Processing Framework*". Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1993. (Lucrare referită în [88])
- [84.]C. L. Nikias, J. M. Mendel: "*Signal Processing with higher-order spectra*". IEEE Signal Processing Magazine, 1993. (Lucrare referită în [88])
- [85.]I. G. Zurbenko: "*Spectral Analysis of Time Series*". Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1986. (Lucrare referită în [88])
- [86.]M. R. Raghuveer, C. L. Nikias: "*Bispectrum estimation: A parametric approach*". IEEE Trans. on ASSP, Vol. 33, no. 10, 1985.
- [87.]V. Chandran, S. Elgar: "*A general procedure for the derivation of principal domains of higher-order spectra*". IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 42, no. 1, 1994.
- [88.]V. S. Grigorașcu: "*Tenseurs structuré, produits d'ordre supérieur et cumulants*". These présentée pour obtenir le grade de DCTOR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY, 6 septembre 1996.
- [89.]F. Berinde: "*Metode de separare a două surse din semnalele lor combinate, folosind procedee de decorelare cu propagare înainte*". Referat susținut la 22 octombrie 1997 în cadrul UNIVERSITĂȚII "POLITEHNICA" din TIMIȘOARA.
- [90.]Șt. Mărușter: "*Metode numerice în rezolvarea ecuațiilor neliniare*". Editura Tehnică, București, 1981.
- [91.]C. W. Therrien: "*Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*". Prentice-Hall, New Jersey 1992.
- [92.]M. Bellanger: "*Traitement numérique du signal. Théorie et pratique.*" MASSON Paris Milan Barcelone Mexico 1990.
- [93.]W. A. Gardner: "*Introduction to random processes with applications to signals and systems*". McGraw Hill, 1989
- [94.]S. Haykin: "*Adaptive filter theory*". Prentice Hall, 1991
- [95.]J. M. Mendel: "*Lessons in digital estimation theory*". Prentice Hall, 1987
- [96.]J. V. Candy: "*Signal processing - the modern approach*". McGraw Hill, 1990
- [97.]S. D. Stearns, R. A. David: "*Signal processing algorithms*". Prentice Hall, 1988
- [98.]H. Stark, J. W. Woods: "*Probability, random processes, and estimation theory for engineers*". Prentice-Hall, 1986

- [99.]F. Berinde: “*Studiu privind posibilitatea măririi raportului semnal-zgomot în cazul în care un semnal aleator, purtător de informație, este perturbat de un semnal periodic determinist*”. Comunicare susținută la Sesiunea de Comunicări Științifice a Universității “Efimie Murgu” din Reșița, 1990.
- [100.]F. Berinde: “*Metode de sinteză în domeniul frecvență a filtrelor pieptene*”. Comunicare susținută la Simpozionul “METODE, TEHNICI ȘI TEHNOLOGII ÎN TRANSMISIUNI (TELECOMUNICAȚII) la ACADEMIA TEHNICĂ MILITARĂ, București, 26 noiembrie 1992.
- [101.]F. Berinde: “*Comparative study of SAD algorithm application with feedback and feedforward for the separation of signals produced by two sources*”. BULETINUL ȘTIINȚIFIC al Universității “Politehnica” din Timișoara, Tomul 41 (55) Fascicula 1 Vol. III 1996, .pp. 221-226.
- [102.]F. Berinde, A. Mihăescu: “*Possible architectures for the separation of N signal sources that are statistical independent*”. Analele Universității Oradea, Fascicula Electrotehnică, Secțiunea B, 1998, pp. 11-16.
- [103.]F. Berinde: “*Adaptive decorrelation algorithm*” Comunicare susținută la “SIMPOSIUM OF ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS Etc. ‘98” Timișoara-România, 17-18 Septembrie, 1998.

CUPRINS

CAPITOLUL 1	SCENARIILE DE SEPARARE A SURSELOR DE SEMNAL	1
1.1.	Introducere	1
1.2.	Organizarea tezei	5
CAPITOLUL 2	SEPARAREA SURSELOR STATISTIC INDEPENDENTE ȘI DE BANDĂ LARGĂ	7
2.1.	Implicații ale independenței statistice a proceselor aleatoare în obținerea de criterii de separare a semnalelor	7
2.2.	Scheme de decorelatoare	15
2.2.1.	Scheme de decorelatoare pentru două semnale	15
2.2.2.	Implicațiile fenomenului de propagare asupra separabilității a două semnale	21
2.3.	Algoritmi de decorelare care utilizează funcții cost bazate pe cumulanți și polispectre	25
2.3.1.	Metodologie de creare și analiză a algoritmilor	25
2.3.1.1.	Principiul metodei	25
2.3.1.2.	Analiza erorilor	27
2.3.1.3.	Efectul zgomotului aditiv	35
2.3.1.4.	Reconstrucția semnalului	36
2.3.2.	Separarea surselor utilizând statistici de ordinul doi	37
2.3.3.	Algoritm de gradient bazat pe cumulanți de ordinul trei	40
2.3.4.	Algoritm de decorelare a N semnale bazat pe polispectre	42
2.3.4.1.	Formularea problemei	42
2.3.4.2.	Criteriu și algoritm bazat pe bispectre	43
2.4.	Algoritmi bazați pe criteriul plauzibilității maxime folosiți în separarea semnalelor	48
2.4.1.	Formularea problemei	48
2.4.2.	Utilizarea algoritmului E.M. pentru intensificarea semnalului	50
2.4.3.	Algoritmi secvențial/adaptivi	57
2.4.4.	Algoritmi bazați pe gradient	65
2.4.5.	Rezultate experimentale	68
2.5.	Algoritm de decorelare derivat din reducătorul de zgomot adaptiv L.M.S.	71
2.5.1.	Transformarea algoritmului L.M.S. al reducătorului de zgomot în algoritmul S.A.D. al decorelatorului simetric	71
2.5.2.	Stabilitatea algoritmului S.A.D.	75
2.5.2.1.	Estimarea gradientelor	75
2.5.2.2.	Stabilitatea filtrului în regim permanent	76
2.5.2.3.	Stabilitatea asimptotică	76
2.5.3.	Soluții alternative	77
CAPITOLUL 3	UTILIZAREA DECORELATORULUI CU PROPAGARE ÎNAPOI PENTRU SEPARAREA SURSELOR DE BANDĂ LARGĂ STATISTIC INDEPENDENTE	79
3.1.	Arhitecturi posibile de separare a N surse de semnal statistic independente	79
3.1.1.	Limitele decorelatorului cu două intrări	79
3.1.2.	Punerea problemei	81
3.1.3.	Rețea de separare cu propagare înainte	82

3.1.4. Rețea de separare cu propagare înapoi	84
3.1.5. Condiții suplimentare necesare pentru separabilitatea semnalelor	86
3.2. Decorelator simetric cu propagare înapoi	91
3.2.1. Considerații preliminare	91
3.2.2. Algoritm de decorelare a două semnale bazat pe gradienti parțiali	94
3.2.2.1. Deducerea algoritmului	94
3.2.2.2. Analiza stabilității	101
Analiza stabilității asimptotice locale	102
Analiza stabilității asimptotice locale în cazul semnalelor de tip zgomot alb	113
Analiza stabilității asimptotice locale în cazul filtrelor de mixare de tip linie de întârziere	121
Semnificația punctului de echilibru asimptotic stabil al algoritmului	124
Analiza stabilității asimptotice globale în cazul filtrelor de mixare de tip linie de întârziere	125
3.2.2.3. Fenomenul zgomotului de adaptare	130
3.2.3. Analiza comparativă a performanțelor algoritmului S.A.D. cu propagare înapoi și ale algoritmului cu sisteme de gradienti parțiali	132
3.2.3.1. Analiza stabilității asimptotice a algoritmului S.A.D. cu propagare înapoi	132
3.2.3.2. Fenomenul zgomotului de adaptare	136
3.2.3.3. Analiza comparativă a regimului tranzitoriu	136
3.2.3.4. Analiza comparativă a stabilității globale asimptotice a celor doi algoritmi în cazul în care operează cu semnale colorate	139
3.2.4. Rezultate experimentale și metode de îmbunătățire ale performanțelor de stabilitate și regim tranzitoriu ale algoritmilor cu sistem de gradienti parțiali și S.A.D. cu propagare înapoi	146
3.2.4.1. Prezentarea condițiilor experimentelor	146
3.2.4.2. Testul 1	147
3.2.4.3. Ameliorarea parametrilor algoritmilor de decorelare	156
3.2.4.4. Rezultatele testului 1 în cazul prelucrării suplimentare a semnalelor de intrare cu ajutorul filtrelor Q_1 și Q_2	158
3.2.4.5. Rezultatele testului 1 în cazul când semnalele s_1 și s_2 sunt de puteri diferite	165
3.2.4.6. Testul 2	171
3.2.4.7. Experiment în care unul dintre semnalele surselor este absent pentru o perioadă semnificativă de timp	184
3.2.4.8. Concluzii desprinse din experimentele prezentate	187
3.3. Decorelator pentru N semnale	191
3.3.1. Considerații preliminare	191
3.3.2. Algoritmul cu sistem de gradienti parțiali generalizat	192
3.3.2.1. Deducerea algoritmului cu sistem de gradienti parțiali generalizat	192
3.3.2.2. Rezultate experimentale obținute pentru cazul $N=3$	199
3.3.2.3. Observații asupra soluțiilor fantomă	208
3.3.2.4. Observații asupra filtrelor Q_1 și Q_2	210
CAPITOLUL 4 CONCLUZII ȘI PROBLEME DE VIITOR	212
4.1. Concluzii	212
4.2. Probleme de viitor	215

ANEXA 1	Condiție necesară și suficientă pentru ca o matrice reală și simetrică să fie pozitiv definită	216
ANEXA 2	Calculul coeficienților filtrelor F.I.R. ale căror funcții de transfer sunt exprimate prin determinanți	218
BIBLIOGRAFIE		221
CUPRINS		229