MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" din TIMIŞOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICĂ

DAN DĂIANU

CATEGORII CU APROXIMARE CONCRETE

Teză pentru obţinerea titlului ştiinţific de doctor în matematică

Conducător ştiinţific.
Prof.Dr.BORISLAV CRSTICI

- 1998 -

CUPRINS

INTRODUCERE

Diverse probleme din teoria semanticilor limbajelor de programare, teoria jocurilor, teoria controlului optimal, lingvistică, matematică economică, fizică, teoria percepţiei, aplicaţiile proceselor stochastice etc., au impus studiul categoriilor de mulţimi structurate, în care morfismele sunt relaţii ori corespondenţe (funcţii multivoce) compatibile cu structura (aşa numitele categorii ordonate concrete). Instrumente esenţiale în asemenea domenii s-au dovedit a fi limitele (proiective ori inductive), în special în tehnicile de aproximare, dar şi în rezolvarea ecuaţiilor de domeniu semantic pentru limbajele de programare concurente. Din păcate proprietăţile categoriale în aceste situaţii sunt sărace: categoriile ordonate concrete nu au de cele mai multe ori, egalizatori, coegalizatori, uneori nici chiar produse, ori coproduse şi, drept urmare, pentru asigurarea existenţei limitelor apar ca necesare condiţii greoaie şi restrictive, în pofida existenţei unor "candidaţi naturali" la aceste titulaturi – candidaţi care satisfac cerinţele problemelor practice (vezi [Ber.69], [Cho.58], [Hen.50], [HP.79], [HS.54], [Ma.74], [Ma.75], [Met.63], [Plo.76], [Pro.56], [Sch.69a], [Sch.69b], [St.64], [Top.72], [Vas.71], [Wan.75]). Această inadecvare a conceptelor categoriale provine din faptul că în definirea lor este preponderent punctul de vedere ecuaţional; înlocuirea relaţiilor de egalitate cu relaţii de ordine între morfisme, relaţii compatibile cu compunerea acestora, aduce o nuanţare a acestor concepte, răspunde deseori cerinţelor aplicative, dar natura extracategorială a noţiunilor generalizate astfel impune o abordare diferită de cea categorială.

Teoria categoriilor cu aproximare (a-categorii) al cărei promotor este E.M.Bertin oferă o asemenea flexibilizare a metodelor categoriale. O a-categorie concretă este o categorie ordonată concretă unde, respectând comportarea unor procese de aproximare numerică, funcţiile apar ca o clasă "ideală" de morfisme – morfismele stricte – iar functorii (implicit şi sistemele proiective, inductive, sau, mai general diagramele şi codiagramele) devin a-functori (i.e. a-functorul F respectă relaţiile de forma $F(a)F(b)\subset F(ab)$, pentru orice morfisme compozabile a şi b); în acest context, de exemplu, existenţa limitelor proiective, limite care verifică o proprietate de universalitate relativ la morfismele "ideale", nu atrage existenţa egalizatorilor, nici chiar a produselor, în schimb "candidaţii" amintiţi sunt limite proiective a-categoriale autentice. Într-o asemenea abordare sistemele proiective ori inductive analizate în lucrările anterior citate au limite, fără condiţii restrictive, iar construcţia lor este simplă şi elegantă.

Totuşi, uneori limitele proiective a-categoriale nu sunt suficient de fine în abordarea procedeelor de aproximare, nici în rezolvarea ecuaţiilor de domeniu. Defectul unei asemenea construcţii constă în lipsa unui analog al caracterizării limitelor proiective prin intermediul produselor şi egalizatorilor. E.M.J.Bertin, [Ber.75b], introduce noţiunea de limită tare a unei diagrame (mai generală decât limita categorială, dar mai restrictivă decât cea a-categorială) şi o generalizare a noţiunii de egalizator – cea de nivelator al unei **1**-diagrame. Astfel, folosind o construcţie specială – diagrama nivelată asociată unei diagrame – el introduce aşa numitele a-categorii constructive, unde este valabil analogul a-categorial al teoremei categoriale clasice de caracterizare a limitelor proiective cu produse şi egalizatori: într-o asemenea a-categorie limita proiectivă a unei diagrame se obţine ca nivelatorul diagramei nivelate asociate.

În această teză prezentăm câteva dintre rezultatele autorului privind existenţa limitelor în a-categorii concrete uzuale (vezi lista a-categoriilor analizate), posibilitatea întăririi acestora cu teoreme de constructivitate şi unele probleme conexe. Fiecare dintre cele opt paragrafe începe cu un rezumat al problematicii abordate şi o raportare la literatura domeniului.

În primul paragraf introducem terminologia utilizată şi prezentăm câteva rezultate cunoscute (fără demonstraţii) din teoria a-categoriilor necesare în următoarele secţiuni.

Tehnica obiectului iniţial în raport cu familii de obiecte şi morfisme în a-categorii bogate utilizată în [Ber.71] pentru demonstrarea existenţei limitelor proiective de subspaţii şi morfisme impune superior bicompletitudinea a-categoriilor respective, condiţie care, după cum subliniem constant pe parcursul lucrării, se realizează rar (în a-categoria mulţimilor (**Ec**, **Ef**) şi în câteva a-categorii de spaţii topologice şi corespondenţe continue). În cel de-al doilea paragraf extindem această tehnică în a-categorii prebogate (pe care se poate defini un functor izoton fidel la stânga într-o a-categorie bogată superior completă la stânga, [DK.98a]). Deoarece de regulă categoria morfismelor stricte **C'**, posedă produse care dau posibilitatea reprezentării oricărei diagrame discrete din a-categoria (**C**, **C'**), formalizăm această calitate în termenii produselor stricte, [DK.98b], arătând că într-o a-categorie cu asemenea produse se poate stabili un izomorfism de ordine între familiile invariante ale oricărei diagrame F şi familiile invariante ale diagramei nivelate G asociate acesteia, iar reprezentabilitatea diagramei G atrage reprezentabilitatea diagramei F; aceste rezultate ne facilitează punerea în evidență a unei clase largi de a-categorii cvasiconstructive: a-categoriile la stânga cu produse stricte in care 1-diagramele sunt reprezentabile. În plus, arătăm că superior tare completitudinea la stânga a unei a-categorii cu limite proiective atrage existența limitelor tari, ceea ce dă posibilitatea reprezentării diagramelor şi stabilirii unui rezultat des utilizat în continuare: orice a-categorie superior tare completă la stânga (nu neapărat concretă) cu produse stricte şi limite proiective este constructivă. Dăm de asemenea câteva condiții suficiente (din [Da.83b] şi [Da.86b]) pentru superior bicompletitudinea unor bicategorii.

De multe ori a-categoriile concrete (introduse în [Bun.85]) se scufundă izomorf şi izoton în a-categoria mulțimilor. Este motivul pentru care în paragraful al treilea am înşirat câteva proprietăți ale corespondențelor, caracterizând monomorfismele, epimorfismele, retractele şi secțiunile din categoria **Ec** prin intermediul selecțiilor stricte şi în termeni de semiunivocitate, respectiv univocitate. Am stabilit de asemenea structura limitelor proiective din **Ec** (in cazul existenței acestora) şi legătura cu limitele proiective din a-categoria (**Ec**, **Ef**) (care există întotdeauna) în cazul diagramelor conservative. În plus am analizat o clasă de a-categorii concrete care posedă un generator punctual – condiția (3.1) – față de care limitele proiective ale imaginilor diagramelor prin functorul de subiacență verifică o condiție de regularitate relativ la morfismele stricte – condiția (3.2) – (condiție necesară şi suficientă pentru existența limitelor proiective) dovedind cvasi-constructivitatea lor; adăugând celor două condiții superior completitudinea şi impunând ca functorul de subiacență să comute cu reuniunile de morfisme – condiția (3.3) – am demonstrat constructivitatea acestor a-categorii. În final, utilizând aceste rezultate am extins teoremele de existență a limitelor în a-categorii de spații măsurabile generalizate din [Ber.76], [Ber.77] şi [Bun.85], cele din [St.64], [Ber.71], [Top.72] şi [Ber.75b] pe a-categorii de spații topologice şi corespondențe continue şi cele din [DB.86a], [DB.86b] şi [DR.86a] pentru a-categorii de mulțimi ordonate şi de corespondențe izotone în sensul lui T.B. Muenzenberger şi R.E. Smithson.

În cel de-al patrulea paragraf stabilim dualele a-categoriale ale unor a-categorii la dreapta de latici distributive cu prim şi ultim element (numite aici algebre prebooleene) în conexiune cu a-categoriile la stânga de spații măsurabile generalizate (care au limite proiective, conform teoremelor 3.36. şi 3.38.) de aşa manieră încât functorii de dualitate să comute cu limitele a-categoriale. Înlocuirea funcţiilor cu corespondenţele măsurabile distruge dualitatea categorială rezultată din teoremele de reprezentare ale lui Birkhoff şi Stone din cauza comportării nesatisfăcătoare a acestor corespondenţe faţă de intersecţii şi complementări. Totuşi, renunţând la compatibilitatea standard a morfismelor laticeale în raport cu intersecţia, găsim "cele mai largi" a-categorii de algebre prebooleene, respectiv de spaţii măsurabile generalizate care au limite şi pentru care functorii uzuali de dualizare comută cu acestea. Dăm, de asemenea, teoreme constructive de existenţă a limitelor inductive în a-categoriile la dreapta de algebre prebooleene, caracterizări ale limitelor proiective în dualele a-categoriale ale acestora şi câteva exemple netriviale de aplicare a acestor rezultate.

Corespondenţele omomorfe sunt cazuri particulare de relaţii omomorfe (generalizări corespondenţiale ale omomorfismelor de algebre), relaţii al căror studiu a fost iniţiat de B.Zelinka. Aplicaţiile acestora în cele mai diverse domenii ne-au determinat să analizăm câteva a-categorii în care morfismele sunt corespondenţe omomorfe în următoarele trei secţiuni.

Paragraful al cincilea este dedicat studiului categoriei ordonate a grupurilor şi corespondenţelor de grupuri, **Gc**, respectiv al câtorva a-categorii de grupuri. Deoarece multe a-categorii la stânga în care obiectele sunt grupuri cu multioperatori se scufundă izomorf în a-categoria grupurilor (**Gc**, **Gf**), am caracterizat câteva tipuri de morfisme speciale, am dovedit existenţa coegalizatorilor, am dat condiţii necesare şi suficiente pentru existenţa egalizatorilor, condiţii de existenţă a limitelor proiective din **Gc** şi legătura lor, în situaţii speciale, cu limitele proiective din (**Gc**, **Gf**) (limite care există întotdeauna) şi am demonstrat constructivitatea acestei a-categorii. În final am caracterizat corespondenţele de grupuri ordonate şi am dat condiţii necesare şi suficiente de existenţă a limitelor proiective în a-categorii de grupuri ordonate.

În prima parte din §.6. am demonstrat constructivitatea a-categoriei la stânga a inelelor (**Rc**, **Rf**), iar în cea de-a doua parte am rezolvat următoarele probleme:

1. Fie α, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ corespondenţe între inelele asociative R şi R` astfel ca $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Să se dea condiţii pentru ca una dintre corespondenţele $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ să fie selecţie a corespondenţei α şi să se precizeze, în aceste condiţii numărul acestor selecţii.

2. Fie α, β, γ, $\delta \in Rc(R,R')$ astfel ca $\alpha=\gamma+\delta-\beta$, unde R şi R' sunt inele asociative; să se dea condiţii, pentru ca cele patru corespondenţe să admită selecţii în perechi.

Ultima problemă a fost rezolvată de A.Vesanen în cazul în care R=R' este un corp finit, α, β, γ şi δ sunt automorfisme ale acestuia, unul fiind identitatea, rezultat extins de M.Deaconescu în cazul în care α,β,γ şi δ sunt endomorfisme ale domeniului comutativ R, unul fiind automorfism. Rezultatele obţinute de noi au câteva consecinţe interesante, în special în ceea ce priveşte mulţimea punctelor fixe ale corespondenţei α în cazul R=R'.

În paragraful al şaptelea am demonstrat constructivitatea a-categoriei algebrelor universale cu operaţii finitare precizate şi a corespondenţelor de asemenea algebre în cazul în care aceste corespondenţe sunt semiunivoce folosind caracterizările acestora date de Malcev, Hajda, Duda, Lambek, Findlay, Werner, Purdea şi Virág; apoi, utilizând tehnica obiectului iniţial din §.2., extindem rezultatul principal din [CD.87b], arătând că a-categoria A-modulelor (stângi) şi a corespondenţelor de A-module este constructivă şi, la fel, a-categoria modulelor (stângi) şi a dicorespondenţelor de module, [Da.88c], respectiv a-categoria perechilor Jordan liniare, [DP.87]. În plus, demonstrăm superior tare completitudinea la stânga a a-categoriei spaţiilor local convexe şi a corespondenţelor continue [CD.87a] şi, cu ajutorul fidelităţii la stânga a functorului de subiacenţă cu valori în categoria ordonată concretă a grupurilor abeliene (via categoria ordonată concretă a $\mathbb{R}$-modulelor), argumentăm constructivitatea acesteia.

În §.8. dăm câteva exemple netriviale de a-categorii aditive, [Da.97b], şi demonstrăm constructivitatea unor a-categorii de module şi transformări a-naturale peste a-categorii aditive. În final prezentăm câteva rezultate privind structura a-categoriilor concretizabile: arătăm, de exemplu, că o asemenea a-categorie (**C**,**C'**) se scufundă izomorf în a-categoria canonică peste **C'**, că este simplă dacă şi numai dacă este echivalentă Morita cu a-inelul canonic peste un inel simplu şi că este simplă şi artiniană doar în cazul în care este echivalentă Morita cu a-inelul canonic peste un inel cu diviziune.

Exceptând exemplele date pe parcursul lucrării nu am mai inclus aici aplicaţiile obţinute de autor în domeniul aproximării. De altfel, stimulaţi de ideile lui S.Takahashi şi ale lui W.Forster, noi am arătat că teoremele clasice de tip Lax-Aubin de caracterizare a diferitelor tipuri de convergenţă prin intermediul stabilităţii şi consistenţei schemelor de aproximare (metoda "ecuaţiilor apropiate" a lui L. V. Kantorovici, a "spaţiului limită discret" a lui F.Stummel, a schemelor de aproximare date de J.L.Lions, J.P.Aubin, I.Ekeland, G.Marinescu, E.Schechter) admit o formulare generalizată a-functorială în [Da.81], [Da.82], [Da.83.b], [Da.84], [Da.84.a], [Da.85a], [Da.85b], [Da.85c], [Da.85d], [DK.85], [Da.86a] şi [DH.86].

În ultimele două decenii, prin lucrările unor Abramski, Aczel, Hennessy, Oles, Plotkin, Smyth, Rutten, Turi, etc. s-a impus tehnica coalgebrelor finale (cel mai mare punct fix al unui endofunctor definit pe o categorie ordonată concretă) şi aceea a algebrelor iniţiale (cel mai mic punct fix al unui endofunctor) în studiul soluţiilor ecuaţiilor de domeniu, tehnici care folosesc constant procedeele de trecere la limită proiectivă, respectiv inductivă, în aşa numitele sisteme de perechi "scufundare-proiecţie". Nu am inclus aici nici contribuţiile autorului - [Da.93a], [Da.93b] - legate de acest subiect.

Ţin să mulţumesc conducătorului ştiinţific al prezentei teze, prof.dr.Borislav Crstici, pentru sprijinul acordat la elaborarea acestei lucrări.

Următoarele persoane au contribuit cu observaţii şi discuţii utile la simplificarea unor demonstraţii: E.M.J. Bertin, T.Bânzaru, N.Boja, M.Deaconescu, Cs.Hatvany, I.Purdea, B.Rendi, A.I.Rus, E. Schecter; le rămân îndatorat tuturor.

Observații asupra notațiilor

$\mathbb{N}$ – mulțimea numerelor naturale;

$\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale;

$[a,b]$ – intervalul închis $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$;

(a,b) – intervalul deschis $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $a < b$;

C – clasa obiectelor categoriei **C**;

Hom**C** – clasa morfismelor categoriei **C**;

$C(A,B)$ – mulțimea morfismelor de sursă A și adresă B în categoria **C**;

$C = C(-,X)$ – hom-functorul contravariant uzual definit pe categoria **C**;

Mon**C** subcategoria monomorfismelor categoriei **C**;

Ep**C** subcategoria epimorfismelor categoriei **C**;

Bi**C** – subcategoria bimorfismelor categoriei **C**;

Re**C** – subcategoria morfismelor retractabile (secțiunilor) categoriei **C**;

Se**C** – subcategoria morfismelor secționabile (retractelor) categoriei **C**;

Iz**C** – subcategoria izomorfismelor categoriei **C**;

C' $\leq$ **C** – **C'** este subcategorie a categoriei **C**;

$1_X = id_X$ – morfismul identic din C(X,X).

§.1. PRELIMINARII

În acest paragraf prezentăm terminologia utilizată în următoarele secţiuni. Preluăm de asemenea câteva rezultate privind a-categoriile la stânga din [Ber.71], a-categoriile la dreapta din [Ber.75a], a-categoriile (cvasi-)constructive din [Ber.75b], a-categoriile concrete şi unii functori generalizaţi din [Bun.85], iar cele privind algebrele şi coalgebrele unor endofunctori din [Ole.82] şi [RT.92].

1.1. Definiţii şi convenţii. 1. Fie X şi Y două mulţimi. Numim *corespondenţă de la X la Y* o funcţie definită pe X cu valori în mulţimea părţilor nevide ale lui Y. Vom nota cu **Ec** categoria ale cărei obiecte sunt mulţimile şi ale cărei morfisme sunt corespondenţele, compunerea celor din urmă fiind cea relaţională, i.e. dacă $f\in Ec(X,Y)$ şi $g\in Ec(Y,Z)$, corespondenţa $gf\in Ec(X,Z)$ este definită prin: $x \to \bigcup_{y\in f(x)} g(y) \quad x\in X$ Uneori, dacă $f(x)=\{y\}$, vom scrie $f(x)=y$. Vom utiliza frecvent categoriile **Ef** (a mulţimilor şi a funcţiilor), **POf** (a mulţimilor preordonate şi a aplicaţiilor izotone) şi **Of** (a mulţimilor ordonate şi a aplicaţiilor izotone). Desigur, cu precizările de mai sus, **Ef≤Ec**. Dacă $(X,\leq)$, $(Y,\leq)\in Of$, vom nota, în lipsa altor precizări, tot cu simbolul "≤" ordinea indusă pe $Of\,((X,\leq), (Y,\leq))$, i.e.

$$f\leq g \Leftrightarrow [f(x)\leq g(x),\ \forall x\in X] \tag{1.1}$$

Dacă $(I,\leq)\in POf$ şi $i\in I$, vom utiliza notaţia I_i pentru mulţimea $\{j\in I \mid i\leq j\}$.

2. Categoria **C** se numeşte *ordonată (preordonată) faţă de relaţiile "⊂"*, sau o-*categorie* (*p-categorie*) dacă pentru orice $X,Y\in$ **C**, $(\mathbf{C}(X,Y), \subset)\in Of$ (POf) şi ordinea (preordinea) este *compatibilă cu compunerea morfismelor*, i.e.

$$[f,g\in \mathbf{C}(X,Y),\ f\subset g)\Rightarrow[fh\subset gh \text{ şi } kf\subset kg]$$

pentru orice morfisme compozabile h şi k.

Vom nota cu $\mathbf{C}^*$ categoria duală categoriei **C** şi cu simbolul "*" acţiunea functorului canonic de dualizare, iar pe $\mathbf{C}^*$ vom considera relaţiile de ordine (preordine) definite prin

$$f^*\subset g^* \Leftrightarrow f\subset g$$

Nu vom preciza întotdeauna explicit noţiunile şi proprietăţile duale, dar convenim ca pentru noţiunile sau afirmaţiile care apar în contextul categoriei **C** însoţite de sintagma "stânga" ("dreapta"), dualelor acestora să le asociem expresia "dreapta" ("stânga").

În continuare, în lipsa altor precizări, când afirmăm despre **C** că este o categorie ordonată, vom presupune că **C** este o-categorie faţă de relaţiile "$\subset$".

3. Fie **C** o categorie ordonată şi I o mulţime nevidă. Numim *I - familie de morfisme* orice mulţime de forma $\{f_i \in C(X,Y) \mid i \in I\}$, $X,Y \in C$; o vom nota $\{f_i\}_{i\in I}$, sau, dacă nu există pericolul unor confuzii, $\{f_i\}$. I - familia $\{f_i\}$ se numeşte *superior completă* dacă ea admite un supremum f notat $\bigcup_{i\in I} f_i$ ori $\cup f_i$, dacă, în plus $fg=\cup f_i g$, unde g este un morfism compozabil, spunem că *f este compatibil la dreapta cu g* şi că familia $\{f_i\}$ este *superior compatibilă la dreapta cu g*; dacă acest fapt se realizează pentru orice morfism compozabil g, spunem că *f este stabilă la dreapta*, iar $\{f_i\}$ este o *I-familie superior stabilă la dreapta*.

Categoria **C** se numeşte *superior I-completă* dacă orice I-familie de morfisme majorată este superior completă; dacă această proprietate are loc pentru orice mulţime nevidă I spunem că **C** este *superior completă*. Categoria **C** se numeşte *superior I-completă la dreapta* dacă este superior I-completă şi orice I-familie majorată este superior stabilă la dreapta; **C** se numeşte *superior I - bicompletă* dacă este superior I - completă la stânga şi la dreapta; în sfârşit, **C** este *superior completă la stânga (dreapta, bicompletă)* dacă ea este superior I - completă la stânga (dreapta, bicompletă) pentru orice mulţime nevidă I.

Când sintagma "superior" va fi înlocuită cu expresia "inferior", în oricare dintre definiţiile de mai sus, vom înţelege prin aceasta duala laticială a respectivei proprietăţi. De exemplu **C** este inferior I-completă dacă orice I-familie minorată $\{f_i\}$ admite un infimum notat cu $\cap f_i$. Dacă pentru orice $X,Y \in C$ orice lanţ din $C(X,Y)$ admite un majorant (minorant) spunem că **C** este *inductiv (coinductiv) ordonată*.

1.2.Exemple. 1.**POf** este o categorie preordonată, iar **Of** una ordonată faţă de relaţiile definite la (1.1). Aceste categorii se mai numesc categorii îmbogăţite prin (pre)ordine, [SP 82].

2. **Ec** este o categorie ordonată față de relațiile definite prin:

$$[f,g\in \mathbf{Ec}(X,Y), f\subset g] \Leftrightarrow [f(x)\subset g(x), \forall x\in X] \tag{1.2}$$

superior bicompletă, inductiv ordonată și inferior completă la dreapta.

1.3. Observații. 1. În limbajul hom-functorilor uzuali categoria **C** este ordonată dacă și numai dacă:

$C(X,-)(\mathbf{C}) \leq \mathbf{Of}$ și $C(-,X)(\mathbf{C}) \leq \mathbf{Of}$,

pentru orice $X\in C$; în acest caz vom considera acești functori de bază cu valori **Of** și, desigur, noțiunile de completitudine introduse la 1.1.3. se pot exprima cu ajutorul lor; de exemplu I-familia superior completă $\{f_i\}\subset C(X,Y)$ este superior stabilă la dreapta dacă și numai dacă

$C(Z, \cup f_i) = \cup C(Z, f_i)$

pentru orice $Z\in C$.

2. O categorie ordonată în care obiectele sunt mulțimi structurate, morfismele sunt corespondențe, iar compunerea morfismelor este cea din **Ec** și ordonarea este dată de (1.2) se va numi *o-categorie concretă*. În general, dacă nu este pericol de confuzie, vom identifica mulțimile structurate cu subiacentele lor.

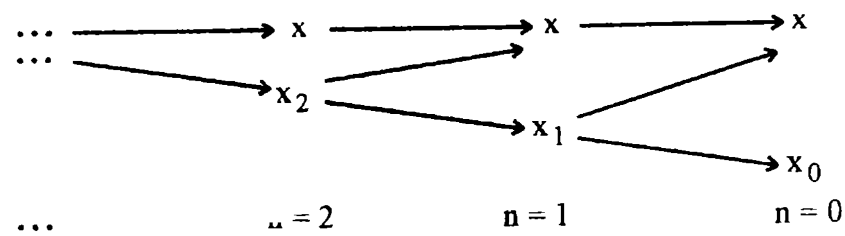
3. Dacă **C** este o categorie superior (inferior) I-completă iar $\{f_i\}$ este o I-familie de morfisme mărginită superior (inferior), atunci pentru orice morfisme compozabile f și g au loc relațiile:

$$\cup ff_i \subset f(\cup f_i), \ (f(\cap f_i) \subset \cap ff_i) \tag{1.3}$$

$$\cup f_i g \subset (\cup f_i)g, \ ((\cap f_i)g \subset \cap f_i g) \tag{1.4}$$

4. Este cunoscut faptul că **Ec** nu este o categorie cu limite proiective, nici inductive. Topsoe, în [Top.72], arată că pentru ca un sistem proiectiv să aibă limită proiectivă sunt necesare condiții foarte restrictive, în ciuda faptului că, uneori, asemenea sisteme au "candidați naturali" la această calitate. Următorul exemplu ilustrează acest fapt.

1.4. Exemplu. Fie (x_n) un șir de numere reale distincte, convergent la x, $X_n = \{x, x_n\}$, $f_{nn} = 1_{X_n}$, $f_{nm}(x)=x$ și $f_{nm}(x_m)=X_n$, pentru $n,m\in \mathbf{N}$, $n<m$. Atunci $F=(X_n, f_{nm})$ este un sistem proiectiv în **Ec** care nu are limită proiectivă.



Într-adevăr, să presupunem prin absurd că (X, f_n) este o limită proiectivă a lui F. Fie $Y=\{0\}$, $g_n, g_n' \in \mathbf{Ec}(Y,X_n)$ definite prin: $g_n(0)=x$, $g_n'(0)=X_n$, $n\in \mathbb{N}$. Cum pentru orice $n,m\in \mathbb{N}$, $n\leq m$, $f_{nm}g_m=g_n$ şi $f_{nm}g_m'=g_n'$, există exact două corespondenţe f, $f'\in Ec(Y,X)$ astfel ca $f_nf=g_n$ şi $f_nf'=g_n'$, $n\in \mathbb{N}$. Fie $a\in f(0)$; atunci $\emptyset\neq f_n(a)\subset g_n(0)=x$, deci $f_n(a)=x$, $n\in \mathbb{N}$. Din proprietatea de unicitate a lui f rezultă că $f(0)=a$. În plus, există $b\in f'(0)$ astfel ca $x_0\in f_0(b)$; dar $x_0\in f_0(b)=f_{01}f_1(b)$ şi $f_1(b)=X_1$; analog se arată că $f_n(b)=X_n$, $n\in \mathbb{N}$. Din proprietatea de uniciate a lui f' rezultă că $f'(0)=b$. Cum elementele şirului (x_n) sunt distincte, din definiţia lui F rezultă că $a\neq b$. Fie acum $f''\in Ec(Y,X)$ definit prin $f''(0)=\{a,b\}$; atunci $f_nf''=g_n'$, $n\in \mathbb{N}$, în contradicţie cu proprietatea de unicitate a lui f'.

1.5. Observaţie. "Candidatul natural" $(\{x\}, x\to x)$ la calitatea de limită a sistemului precedent se obţine în cadrul mai suplu oferit de conceptul de categorie cu aproximare la stânga. O motivare mai detaliată a introducerii sintagmei "categorie cu aproximare" este dată de promotorul teoriei a-categoriilor ("a"- de la aproximare), E.M.J.Bertin în [Ber.71].

În paragraful al treilea vom reveni asupra limitelor proiective în **Ec** şi în categorii ordonate speciale dând condiţii necesare şi suficiente pentru existenţa acestora.

1.6. Definiţii. Fie **C** o categorie ordonată.

1. Un functor $F:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$, unde **D** este o categorie ordonată se numeşte *functor izoton* dacă pentru orice morfisme comparabile f şi g:

$$f\subset g \;\Rightarrow\; F(f)\subset F(g)$$

2. Fie **D** o categorie. O funcţie F definită pe obiectele şi morfismele lui **D** cu valori în clasele corespunzătoare ale categoriei **C** astfel ca:

$FA\in C$, $F(1_A)=1_{FA}$, pentru orice $A\in D$

$F(f)\in C(FB,FA)$, pentru orice $f\in D(A,B)$ şi

$$F(f)\,F(g)\subset F(gf) \tag{1.5}$$

pentru orice morfisme compozabile f şi g din **D** se numeşte *a-functor contravariant*; în acest caz vom folosi notaţia F:**D** $\to$ **C**. Dual se defineşte un a-functor covariant, i.e. un a-functor covariant din **D** în **C***.

3. Dacă **I** este o categorie mică vom numi ***I****-diagramă în C*, sau *cu valori în C* un a-functor contravariant F:**I** $\to$ **C** şi îl vom nota $F=(X_i, F(s))$, unde $F(i)=X_i$, $i\in I$ iar s parcurge mulţimea morfismelor categoriei **I**, adesea notată cu S; dacă $s\in I(i,j)$ vom scrie uneori $j=c(s)$; în cazul în care relaţiile "$\subset$" din (1.5) sunt cele de egalitate, **I**-diagrama F se va numi *conservativă*. Vom nota cu $\mathbf{I_0}$ categoria discretă ataşată categoriei **I** şi cu F_0 restricţia lui F la $\mathbf{I_0}$. Vom nota pentru orice $X\in C$:

$$FI(X,F) = \{(g_i)\in\Pi C(X,X_i) \mid F(s)g_j\subset g_i,\ i,j\in I,\ s\in I(i,j)\}$$

şi vom considera aceste mulţimi înzestrate cu ordinea produs. Dual, dacă F este un a-functor covariant, vom nota cu

$$IN(X,F)=\{(g)\in\Pi(X_i, X) \mid g_jF(s)\subset g_i,\ i,j\in I,\ s\in I(i,j)\}$$

de asemenea înzestrată cu ordinea produs. Elementele din FI(X,F) sau din IN(X,F) le vom numi *familii invariante*. Dacă $(I,\le)$ este o mulţime preordonată, iar **I** este categoria uzuală ataşată acesteia, o **I-diagramă F** o vom numi *sistem proiectiv de bază (schemă) I*; în acest caz vom scrie $F=(X_i, f_{ij})$, unde $f_{ij}=F(s)$, s fiind unicul morfism din I(i,j), pentru orice $i,j\in I$, $i\le j$. Vom nota cu pro C_I (in C_I) clasa sistemelor proiective (inductive) de bază $(I,\le)$ cu valori în C (respectiv în **C***).

4. Fie **D** o categorie ordonată şi F, G: **D** $\to$ **C** doi a-functori contravarianţi. O funcţie H:D $\to$ Hom**C** se numeşte ***transformare a-naturală*** *la stânga din F în G* dacă $H:X \to H_X \in C(FX, GX)$, $X\in D$ şi pentru orice $f\in D(Y,X)$ diagrama:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "H_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & GX \arrow[d, "G(f)"] \\
FY \arrow[r, "H_Y"'] & GY
\end{tikzcd}$$

este *orientată la stânga*, i.e. $G(f)H_X\subset H_YF(f)$. În acest caz vom scrie H:F $\to$ G.

5. O ***reprezentare a I-diagramei*** *F în C* este un cvadruplu (L, f_i, H, J_L) unde $L\in C$ şi $(f_i)\in FI(L,F)$ astfel ca:

(L1) $J_F: \mathbf{C} \to$ **Of** este un functor contravariant construit de aşa manieră încât $J_F X = FI(X,F)$, pentru orice $X \in C$, iar $J_F g \to ((g_i) \to (g_i g))$, pentru orice $Y \in C$ şi $g \in C(Y,X)$, unde $(g_i) \in J_F X$. Evident J_F este izoton.

(L2) $(f_i) \in J_F L$

(L3) $H: J_F \to C(-,L)$ este o transformare a-naturală la stânga.

(L4) $H_L((f_i)) = 1_L$

(L5) $[(g_i) \in J_F X,\ g = H_X((g_i))] \Rightarrow (f_i g) \subset (g_i)$

1.7. Observaţie. Fie F o **I**-diagramă în categoria **C** ordonată cu relaţiile de egalitate şi presupunem că există limita inversă $\varprojlim_C F = (L,f_i)$. Fie $J_F X = FI(X,F)$ şi $H_X((g_i)) = g$, unde g este unicul morfism din $C(X,L)$ pentru care $(f_i g) = (g_i)$, pentru orice $X \in C$ şi orice $(g_i) \in J_F X$. Atunci (L, f_i, H, J_F) este o reprezentare a **I**-diagramei F în **C**. Prin urmare noţiunea de reprezentare într-o categorie ordonată este o generalizare a celei de limită proiectivă din teoria categoriilor.

Introducem în continuare conceptul de a-categorie şi generalizarea noţiunii de limită categorială în noul context.

1.8. Definiţii. Fie **C** o categorie ordonată şi $F = (X_i, F(s))$ o **I**-diagramă în C.

1. O pereche de forma $(\mathbf{C},\mathbf{C}')$ unde **C'** este o subcategorie a categoriei **C** cu $C = C'$ se numeşte *categorie cu aproximare la stânga* sau *a-categorie la stânga* dacă morfismele din C' sunt caracterizate prin:

$f \in C'(Y,Z) \Leftrightarrow [X \in C,\ g \in C'(X,Y) \Rightarrow fg$ este minimal în $C(X,Z)]$

Morfismele subcategoriei **C'** le vom numi *morfisme stricte*. Notăm cu $FIM(X,F)$ mulţimea familiilor invariante $(f_i) \in FI(X,F)$ pentru care $(f_i f)$ este element minimal în $FI(Y,F)$, pentru orice $Y \in C$ şi pentru orice $f \in C'(Y,X)$.

Cuplul $(\mathbf{C},\mathbf{C}')$ se numeşte *a-categorie la dreapta* dacă $(\mathbf{C}^*,\mathbf{C}'^*)$ este o a-categorie la stânga.

2. Perechea (X,f_i) unde $X \in C$, iar $(f_i) \in FI(X,F)$ se numeşte *limită* (*proiectivă*) a **I**-diagramei F în a-categoria la stânga $(\mathbf{C}, \mathbf{C}')$ dacă relaţiile

$C'(Y,X) \to FIM(Y,X),\ \ f \to (f_i f)$

definesc o bijecţie, pentru orice $Y \in C$. Se verifică imediat că limita, dacă există, este unică până la un izomorfism din **C'**, ceea ce legitimează notaţiile: $\varprojlim_{(C,C')} F = (X, f_i)$, $\varprojlim_{(C,C')} F = X$ ori dacă nu este pericol de confuzie, $\varprojlim F = (X, f_i)$. O limită a $\mathbf{I}_0$-diagramei F se numeşte *produs*. Se arată că produsul în **(C, C')** dacă există, coincide cu produsul în **C'**; îl vom nota cu simbolul $(\Pi X_i, p_i)$: De altfel, dacă **C=C'**, iar relaţiile de ordine sunt înlocuite cu cea de egalitate, limita proiectivă în **(C, C')** coincide cu limita proiectivă categorială.

Dacă **(C, C')** este o a-categorie la dreapta, iar $F \in$ in C_I, vom nota INM(X,Y) mulţimea FIM(X,F*); dacă $(X, f_i^*) = \varprojlim_{(C^*, C'^*)} F^*$ spunem că (X, f_i) este limita inductivă a sistemului inductiv F; vom scrie în acest caz: $\varinjlim_{(C,C')} F = \varinjlim F = (X, f_i)$.

3. Fie $G = (Y_i, G(s))$ o altă **I**-diagramă în **C**, iar (**C**, **C'**) o a-categorie la stânga o familie $(h_i) \in \Pi C'(X_i, Y_i)$ pentru care $G(s)h_j = h_i F(s)$, $i,j \in I$, $s \in I(i,j)$, se numeşte **I**-*diagramă de aplicaţii* (din F în G). Dacă $(X, f_i) = \varprojlim F$, $(Y, g_i) = \varprojlim G$ şi există un unic $h \in C'(X,Y)$ astfel ca $h_i f_i = g_i h$, pentru orice $i \in I$, atunci morfismul strict h va fi numit *limită* (proiectivă) a diagramei de aplicaţii (h_i) şi vom scrie $\varprojlim h_i = h$. Dacă pentru orice categorie mică **I**, orice **I**-diagramă din C are limită proiectivă în **(C, C')** spunem că a-categoria **(C, C')** este cu limite (proiective). Vom nota cu **pro** $\mathbf{C_I}$ categoria I-sistemelor proiective $((I, \leq) \in \mathrm{POf})$ şi a sistemelor proiective de aplicaţii; dual, vom nota cu $\mathbf{inC_I}$ categoria sistemelor inductive şi a sistemelor inductive de aplicaţii din (**C**, **C'**) (în acest caz **(C, C')** este, desigur, a-categorie la dreapta).

4. A-categoria la stânga **(C, C')** este *de tip stâng M*, unde M este o mulţime nevidă de obiecte ale categoriei **C** dacă:

(i) $C'(X,Y) = \{f \in C(X,Y) \mid f$ minimal în $C(X,Y)\}$, pentru orice $X \in M$ şi $Y \in C$

(ii) $f \neq g \Rightarrow [\exists X \in M, \exists h \in C'(X,Y): fh \neq gh]$, pentru orice $Y, Z \in C$ şi $f, g \in C(Y,Z)$

Dual se defineşte o ***a-categorie la dreapta de tip M***.

5. A-categoria la stânga **(C, C')** se numeşte *concretă* dacă **C** este o categorie ordonată concretă, iar functorul de uitare $\square$: **C** $\rightarrow$ **Ec** verifică următoarele condiţii

(i) $C'(X,Y) = C(X,Y) \cap Ef(\square X, \square Y)$

(ii) $1_X = 1_{\square X}$

pentru orice $X,Y \in C$. Simbolul "$\square$" va fi rezervat functorului de uitare.

6. Fie $(\mathbf{D},\mathbf{D'})$ şi $(\mathbf{C}, \mathbf{C'})$ două a-categorii la stânga. Un functor (covariant) $G:\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ se numeşte *echivalenţă la stânga* din$(\mathbf{C}, \mathbf{C'})$ în $(\mathbf{D}, \mathbf{D'})$ dacă:

(i) G induce un izomorfism de ordine din $C(X,Y)$ pe $D(GX,GY)$, pentru orice $X,Y \in C$.

(ii) G induce o bijecţie din $C'(X,Y)$ pe $D'(GX,GY)$, pentru orice $X,Y \in C$.

(iii) pentru orice $Y \in D$ există $X \in C$ astfel ca GX să fie izomorf cu Y în **D**.

Omitem din nou explicitarea noţiunilor duale, cum ar fi *echivalenţa la dreapta* (dintr-o a-categorie la dreapta într-o a-categorie la dreapta), *echivalenţa la stânga-dreapta* (dintr-o a-categorie la stânga într-o a-categorie la dreapta), etc.

7. Fie $(\mathbf{C}, \mathbf{C'})$ şi $(\mathbf{D}, \mathbf{D'})$ două a-categorii la stânga. Un un functor izoton $\hat{}: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ se numeşte *fidel la stânga* dacă pentru orice $F = (X_i, f_{ij}) \in \text{pro } C_I$ şi pentru orice $X,Y \in C$ sunt îndeplinite proprietăţile:

(i) $g \in C'(X,Y) \Rightarrow \hat{g} \in D'(\hat{X},\hat{Y})$

(ii) $\hat{f} \subset \hat{g} \Rightarrow f \subset g,\ f,g \in C(X,Y)$

(iii) $(g_i) \in FIM(X,F) \Rightarrow (\hat{g}_i) \in FIM(\hat{X},\hat{F})$,

unde $\hat{F} = (\hat{X}_i, \hat{f}_{ij})$.

1.9. Exemple. 1. **(Ec, Ef)** este o categorie la stânga de tip stâng $\{X_0\}$, unde $X_0 = \{x_0\}$.

2. Sistemul proiectiv F definit la 1.4. admite limită proiectivă în **(Ec, Ef)** şi $\lim_{(Ec,Ef)} F = (\{x\}, f_n)$, unde $f_n(x) = x$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

De altfel în **(Ec,Ef)** orice sistem proiectiv are limită proiectivă, [Ber.71].

1.10. Teoremă. Fie $F=(X_i,f_{ij}) \in \text{proEc}_I$, $PI(F)=\{(A_i) \mid \varnothing \neq A_i \subset X_i,\ f_{ij}A_j \subset A_i;\ \forall i \in I,\ \forall j \in I_i\}$ ordonată cu ordinea produs şi PIM(F), ori PIM, mulţimea elementelor minimale ale lui PI(F).

Atunci $\underleftarrow{\lim}_{(\mathbf{Ec},\mathbf{Ef})}F=(PIM, f_j)$, unde $f_j(A_i)=A_j$, pentru orce $j\in I$ şi orice $(A_i)\in PIM$. Dacă F este conservativ, atunci $f_{ij}A_j=A_i$, pentru orice $(A_i)\in PIM$, $i\in I$, $j\in I_i$.

1.11. Observaţie. O analiză ceva mai detaliată a proprietăţilor categoriale şi a-categoriale pentru **(Ec, Ef)** o vom face în §.3. Aici prezentăm doar o altă caracterizare a limitelor proiective de sisteme proiective în varianta din [Bun.85].

1.12. Teoremă. Fie $F=(X_i, f_{ij})\in proEc_I$ şi $X=\{(x_i)\in\Pi X_i) \mid \forall i\in I\ \exists j\in I_i$ astfel ca pentru orice $k\in I_j [p\in f_{ik}(x_j) \Rightarrow x_i\in f_{ij}(p)]\}$. Definim pe X o relaţie de echivalenţă R prin:

$(x_i)R(y_i) \Leftrightarrow [\forall i\in I\ \exists j\in I_i : \forall\ k\in I_j,\ x_i\in f_{ik}(y_k)]$ şi $g_i\in Ec(X/R,X_i)$ prin:

$A \to \{p\in X_i \mid \exists(x_i)\in A:\ x_i=p\}$,

pentru orice $i\in I$. Atunci $\underleftarrow{\lim}_{(\mathbf{Ec},\mathbf{Ef})}F=(X/R,g_i)$, iar izomorfismul $g\in Ef(X/R,PIM)$ este definit prin

$A \to (g_iA)$, $A\in X/R$, iar $\quad g^{-1}(A_i)=\{(x_i)\in\Pi X_i \mid x_i\in A_i,\ \forall i\in I\}$, $(A_i)\in PIM$.

Pentru sistemele proiective în care morfismele sunt secţionabile are loc următorul rezultat, [Ber.71]:

1.13. Teoremă. Fie **(C, C')** o a-categorie la stânga şi $F=(X_i, f_{ij})$ un sistem proiectiv conservativ de bază $(I,\le)$ dirijată la dreapta. Dacă există $G=(X_i,g_{ij})\in$ in C'_I astfel ca $f_{ij}g_{ji}=1_{X_i}$ pentru orice $i\in I$, $j\in I_i$ şi $(X,f_i)=\underleftarrow{\lim}_{(C,C')}F$, atunci pentru orice $i\in I$ există un unic $g_i\in C'(X_i,X)$ astfel ca $g_{ij}=f_jg_i$, pentru orice $j\in I_i$.

1.14. Propoziţie. [Bun.85]. Fie **(C,C')** şi **(D,D')** două a-categorii la stânga.

1. Un functor F:**C** $\to$ **D** este o echivalenţă la stânga din **(C,C')** în **(D,D')** dacă:

(a) F este o echivalenţă;

(b) restricţia lui F la **C'** realizează o echivalenţă din **C'** pe **D'**.

(c) $f\subset g \Leftrightarrow F(f) \subset F(g)$, $\forall X,Y\in C$, $f,g\in C(X,Y)$.

2. Fie G: **C** $\to$ **D** o echivalenţă la stânga şi $F\in proC_I$ care admite o limită proiectivă în **(C,C')**. Atunci $GF\in proD_I$ şi admite limită proiectivă în **(D,D')**; în plus

$$G(\underset{\longleftarrow}{\lim}_{(C,C')}F) = \underset{\longleftarrow}{\lim}_{(D,D')}GF$$

1.15. Observaţii. 1. **Rezultatele de la 1.14. admit dualizări imediate.**

2. O categorie **ordonată concretă nu admite** decât rareori limite proiective, dar noţiunea de limită proiectivă **este constructivă în sensul că aceasta, dacă există**, se obţine ca egalizatorul unei perechi **de morfisme între două produse; în categoriile abordate** aici nu există, în general, **produse** ori **egalizatori, dar există limite proiective în sens a-categorial**. În ideea obţinerii unui rezultat similar celui categorial, urmând [Ber.75b], vom introduce o noţiune mai tare decât cea de limită proiectivă într-o categorie la stânga (**C**, **C'**), dar mai slabă decât cea de limită proiectivă în **C**.

1.16. Definiţii şi observaţii.Fie (**C**,**C'**) o a-categorie la stânga şi F o **I**-diagramă în **C**.

1. O reprezentare (L, f_i, H, J_F) a lui F în **C** se numeşte *reprezentare* în (**C**, **C'**) dacă

(L6) $(f_i)\in FIM(L,F)$

(L7) $(g_i)\in FIM(X,F) \Rightarrow [(g_i)\in J_F(X)$ şi $H_X((g_i))\in C'(X,L)]$.

Se arată că dacă (L, f_i, H, J_F) este o reprezentare a lui F în (**C**, **C'**) atunci $\underset{\longleftarrow}{\lim}_{(C,C')}F=(L,f_i)$

2. Fie **1** o categorie cu un unic obiect notat 1 şi cu mulţimea morfismelor S, iar G o **1**-diagramă în **C**. O limită (L, k) în (**C**, **C'**) a lui G se numeşte *nivelator al lui* G, ori al familiei G(S). Prin abuz de limbaj dacă (L,k) este prelungibilă la o reprezentare (L,k,H_1,J_1) în (**C**, **C'**), vom spune că această reprezentare este nivelatorul lui G.

Fie $S_i=\bigcup_{j\in I} I(i,j)$, pentru orice $i\in I$ şi $S=\Pi S_i$. Se arată imediat că **1** este o categorie cu mulţimea morfismelor S, unde compunerea morfismelor $s=(s_i)$, $t=(t_i)\in S$, este definită prin $(ts)_i=t_{c(s_i)}s_i$. Să presupunem că $(\Pi X_i, p_i, H_0, J_{F_0})$ este o reprezentare $\mathbf{I}_0$ - diagramei discrete F_0 asociată diagramei F. Functorul $G:\mathbf{1} \to \mathbf{C}$ definit prin:

$$1 \to \Pi X_i,\ s \to H_0((F(s_i)p_{c(s_i)}))$$

se numeşte *diagrama nivelată a diagramei F*.

3. O limită proiectivă **(L, f_i)** în **(C,C')** a lui **F** se numeşte *limită tare* dacă pentru orice $X \in C$:

(LF1) pentru orice $(g_i) \in$ **FI(X,F) mulţimea** $\{g \in C(X,L) \mid (f_i g) \subset (g_i)\}$ este vidă sau are un cel mai mare element notat $H((g_i))$.

(LF2) $H((f_i f)) = f$ pentru orice $f \in C'(X,L)$.

O limită tare a unei **1-diagrame** se numeşte *nivelator tare*, iar o limită tare a unei **I**-diagrame discrete - *produs tare*.

4. A-categoria la stânga **(C, C')** se numeşte *cvasi-constructivă* dacă pentru orice **I**-diagramă F există o **1**-diagramă G, astfel ca:

(C1) există o reprezentare (L, f_i, H, J_F) a lui F în **(C, C')**, deci şi o reprezentare (ΠX_i, p_i, H_0, J_{F_0}) a $\mathbf{I}_0$-diagramei F_0.

(C2) $G(S) \subset C(\Pi X_i, \Pi X_i)$, unde S=Hom **1**, iar (L, k, H_1, J_G) este un nivelator al familiei G(S), unde $k = H_0((f_i))$, astfel ca $(f_i) \in J_{F_0}L$ şi $(f_i) = (p_i k)$

Vom nota cu FIM(X, F_0,G) mulţimea familiilor $(g_i) \in \Pi(X,X_i)$, $X \in C$, pentru care $H_0((g_i g))$ este un element minimal al mulţimii $H_0(J_{F_0}Y) \cap FI(Y,G)$, pentru orice $Y \in C$ şi $g \in C(Y,X)$.

5. A-categoria cvasi-constructivă **(C, C')** se numeşte *constructivă* (la stânga) dacă orice **I**-diagramă F din **C** are o limită tare (L, f_i) astfel ca:

(C3) (L, k) să fie nivelatorul diagramei nivelate a lui F.

(C4) $(f_i) \in J_{F_0}L$.

1.17. Observaţie. O serie de rezultate privind a-categoriile (cvasi-)constructive bicomplete sunt prezentate în [Ber.75b] şi sunt folosite pentru a dovedi constructivitatea a-categoriei **(Ec, Ef)** şi a unei a-categorii de spaţii topologice. Noi vom prezenta în paragrafele următoare clase de a-categorii constructive fără a impune bicompletitudinea acestora. Noi vom reproduce doar un set de rezultate din lucrarea amintită, precizând că notaţiile care vor fi utilizate sunt cele din 1.16.

1.18. Teoreme. Fie **(C, C')** o **a**-categorie la stânga şi F o **I**-diagramă în **C**.

1. Dacă (L, f_i, H, J_F) este o reprezentare a lui F în **(C, C')**, atunci:

(a) $(L, f_i) = \varprojlim_{(C,C')} F$

(b) $(g_i) \in FIM(X,F)$, $g \in C'(Y,X) \Rightarrow H(g_i g) = H((g_i))g$

(c) dacă (L', f_i', H', J_F') este o altă reprezentare a lui F în **(C, C')**, atunci $H((f'_i))$ este un izomorfism în $C'(L',L)$ al cărui invers este $H'((f_i))$.

2. Dacă **(C, C')** este cvasi-constructivă, atunci:

$g \in C(X,L)$, $H_0((f_i g)) \in J_G X \Rightarrow H((f_i g)) = H_1(H_0((f_i g)))$

3. (a), (b) $\Rightarrow$ (c), unde:

(a) orice **I** - diagramă discretă F_0 admite o reprezentare $(\Pi X_i, p_i, H_0, J_{F_0})$ în **(C, C')**

(b) dacă F_0 este **I_0**-diagrama discretă a **I**-diagramei F şi $(L, f_i) = \varprojlim_{(C,C')} F$, atunci [illegible]

(c) dacă F_0 este o **I**-diagramă discretă, $X \in C$ şi $(g_i) \in \Pi C(X,X_i)$, atunci $(g_i) \in J_{F_0}X$ şi $(g_i) = (p_i H_0((g_i)))$

4. Dacă **(C,C')** are proprietăţile (a) şi (c) de mai sus, iar G este diagrama nivelată a **I**-diagramei F, atunci (C3) este echivalentă cu oricare dintre următoarele două condiţii:

(C3') dacă $Y \in C$ şi $h \in FI(Y,G)$ atunci: $(p_i h) \in FIM(Y,F_0,G) \Leftrightarrow h \in FIM(Y,G)$

(C3") dacă $Y \in C$ şi $h \in FI(Y,G)$ atunci $[h \in FIM(Y,G)$ sau $(p_i h) \in FIM(Y,F_0,G)] \Rightarrow h = H_0((p_i h))$.

5. Fie $(L,f_i) = \varprojlim_{(C,C')} F$ şi pentru orice $X \in C$ notăm $J_F X = \{(g_i) \in FI(X,F) \mid \exists g \in C(X,L)\ (f_i g) = (g_i)\}$. Atunci (L,f_i,H, J_F) este o reprezentare în **(C,C')**, a lui F dacă şi numai dacă sunt verificate condiţiile (LF1) şi (LF2).

6. Pentru ca **a**-categoria cvasi-constructivă **(C, C')** să fie constructivă este necesar şi suficient ca ea să aibă nivelatori şi produse tari, $J_{F_0}(-) = \Pi C(-,X_i)$, pentru orice **I**-diagramă discretă F_0 şi (C3'), sau (C3") să fie verificată pentru orice diagramă nivelată a unei diagrame oarecare F din **C**. În acest caz $H((g_i)) = H_1(H_0(g_i))$, pentru orice $(g_i) \in J_F X$, $X \in C$, unde $J_F X$ este definit la 1.18.5

1.19. Definiţii. Fie **C** o categorie şi F:**C** → **C** un endofunctor covariant.

1. Obiectul M∈C se numeşte *punct fix* pentru F dacă M este izomorf cu FM. Notaţii M≅FM, sau $M \underset{j}{\overset{i}{\rightleftarrows}} FM$, unde i∈IzC(M,FM), iar $j=i^{-1}$.

2. Un cuplu (X,f), unde X∈C şi f∈C(FX,X) se numeşte *F-algebră*. Dual se defineşte noţiunea de *F-coalgebră*. Dacă notăm cu **AF** categoria F-algebrelor, i.e. categoria ale cărei obiecte sunt F-algebrele, iar morfismele sunt definite prin: f∈AF((X,g), (Y,h)) ⇔ [f∈C(X,Y) şi hF(f)=fg]; un obiect iniţial din **AF** se numeşte *F-algebră iniţială*. Dual, dacă **CF** este categoria F-coalgebrelor, un obiect final al acesteia se numeşte *F-coalgebră finală*.

1.20. Teoremă. Fie F: **C** → **C** un endofunctor covariant.

(a) Dacă (M,j) este o F-algebră iniţială, atunci M este punct fix pentru F.

(b) Dacă (N,i) este o F-coalgebră finală, atunci N este un punct fix pentru F.

1.21. Observaţie. Denumirea categorială de F-(co)algebră este rezervată uzual pentru cazul în care F este functorul unei (co-)monade, [Lan.71]. Noi am abordat aici terminologia folosită în teoria semanticilor limbajelor de programare ca în [Ole.82], [RT.92] etc.

§.2. CATEGORII CU APROXIMARE LA STÂNGA

Secțiunea este destinată prezentării unor rezultate generale, rezultate care vor fi utilizate în paragrafele următoare în studiul unor a-categorii la stânga concrete. Arătăm că rezultatele obținute în [Ber 71] relative la sisteme proiective în a-categorii la stânga superior bicomplete și bogate se pot extinde în cadrul mai general al a-categoriilor superior complete la stânga prebogate. Dăm apoi condiții suficiente pentru reprezentabilitatea unor diagrame și prezentăm o clasă de a-categorii constructive ca în [Da.98]. În final prezentăm condiții suficiente pentru superior bicompletitudinea unor bicategorii, după [Da.83a] și [Da.86b].

2.1. Lemă. Fie $(\mathbf{C},\mathbf{C}')$ o a-categorie la stânga superior I- completă, $(I,\leq)\in POf$, J o parte cofinală a lui I, $F=F_I=(X_i,f_{ij})\in$ pro C_I, $Y\in C$, $(g_i)\in FIM(Y,F)$ și F_J restricția lui F_I la J. Atunci

1. $g_i=\bigcup_{j\in J_i} f_{ij}g_j$, pentru orice $i\in I$;

2. dacă I este dirijată la dreapta și F este conservativ, $g_i=f_{ij}g_j$ pentru orice $i\in I$ și $j\in I_i$, în particular, dacă $X_i=X$, $f_{ij}=1_X$, pentru orice $i\in I$, $j\in I_i$, atunci $\underleftarrow{\lim}_{(C,C')}X_i=X$.

3. F_I are limită proiectivă dacă și numai dacă F_J are limită proiectivă (în $(\mathbf{C},\mathbf{C}')$). În acest caz $\underleftarrow{\lim}_{(C,C')}F_I=\underleftarrow{\lim}_{(C,C')}F_J$.

Demonstrație. 1. Fie $g_i'=\bigcup_{j\in J_i} f_{ij}g_j$, $i\in I$. Evident $(g_i')\subset(g_i)$ Fie $i,k\in I$, $i\leq k$. Atunci $f_{ik}g_k'\subset f_{ij}g_j$, pentru orice $j\in J_k$, deci $f_{ik}g_k'\subset\bigcup_{j\in J_k} f_{ij}g_j\subset\bigcup_{j\in J_i} f_{ij}g_j=g_j'$; prin urmare $(g_i')\in FI(Y,F)$ și cum $(g_i)\in FIM(Y,F)$ rezultă că $(g_i)=(g_i')$.

2. Fie $i\in I$ și $J=I_i$, care, evident este o parte cofinală a lui I. Din proprietatea precedentă rezultă că $g_i=\bigcup_{k\in J_i} f_{ik}g_k$; dar F este conservativ, deci: $g_i=\bigcup_{k\in J_i} f_{ij}f_{jk}g_k\subset\bigcup_{k\in J_i} f_{ij}g_j=f_{ij}g_j$; prin urmare $g_i=f_{ij}g_j$, căci $(g_i)\in FIM(Y,F)$.

3. Este suficient să argumentăm că restricția $(g_i)_I \to (g_i)_J$ definește o bijecție din $FIM(Y,F_I)$ pe $FIM(Y,F_J)$. Fie $(g_i)\in FIM(Y,F_I)$, $Z\in C$, $g\in C'(Z,Y)$ și $(h_i)\in FI(Z,F_J)$ astfel ca

$(h_i)\subset(g_ig)_J$. Fie $h_i'=\bigcup_{j\in J_i} f_{ij}h_j$, $i\in I$. Atunci $(h_i')\in FI(Z,F_I)$. Fie $i\in I$. Folosind ipoteza $h_i\subset g_ig$ şi 2.1.1

rezultă că: $h_i'\subset\bigcup_{j\in J_i} f_{ij}g_jg\subset(\bigcup_{j\in J_i} f_{ij}g_j)g=g_ig$, deci $(h_i')_I\subset(g_ig)_I$; dar $(g_i)\in FIM(Y,F_I)$, prin urmare

$(h_i')_I=(g_ig)_I$, deci şi $(h_i')_J=(g_ig)_J$, de unde $(h_i)_J=(g_ig)_J$ şi $(g_i)_J\in FIM(Y,F_J)$. In consecinţă restricţia $(g_i)_I \rightarrow (g_i)_J$ defineşte o aplicaţie din $FIM(Y,F_I)$ în $FIM(Y,F_J)$.

Pentru a demonstra surjectivitatea ei, fie $(g_i)_J\in FIM(Y,F_J)$ şi $g_i'=\bigcup_{j\in J_i} f_{ij}g_j$, pentru orice $i\in J$.

Din 2.1.1. rezultă că $g_i'=g_i$, pentru orice $i\in J$; dacă $(h_i)\in FI(Z,F_I)$ şi $g\in C'(Z,Y)$ astfel ca $(h_i)\subset(g_i'g)_I$, atunci $(h_i)_J=(g_i'g)_J$, căci $(g_i')_J=(g_i)_J\in FIM(Y,F_J)$. Fie $i\in I$. Atunci $g_ig=(\bigcup f_{ij}g_j)g=(\bigcup_{j\in J_i} f_{ij}g_j')g$, deci, pentru orice $j\in J_i$: $g_i'g \subset f_{ij}g_j'g = f_{ij}h_j \subset h_i \subset g_i'g$, prin urmare $(g_i')\in FIM(Y,F_I)$ şi $(g_i')_J=(g_i)_J$. Deci aplicaţia de referinţă este surjectivă şi cum prelungirea lui $(g_i)_J\in FIM(Y,F_J)$ la familia $(g_i')_I\in FIM(Y,F_I)$ este unică, rezultă bijectivitatea acesteia.

2.2. Definiţii. 1. A-categoria la stânga superior completă la stânga (C,C') se numeşte *bogată la stânga* dacă:

$$[f \in C(X,Y), g \in C'(Y,Z), h \in C(X,Z), h \subset gf] \Rightarrow [\exists f' \subset f \quad gf' \subset h] \qquad (2$$

2. A-categoria la stînga **(C,C')** se numeşte *prebogată la stânga* dacă pe ea se poate defini un functor fidel la stânga (definiţia 1.8.7.) cu valori într-o a-categorie bogată la stânga.

2.3. Exemplu. (Ec,Ef) este a-categorie bogată la stânga.

2.4. Observaţie. Din faptul că o a-categorie **(C,C')** bogată la stânga este superior completă la stânga rezultă că există un cel mai mare morfism $f'\in C(X,Y)$ care verifică (2

2.5. Teoremă. Fie **(C,C')** o a-categorie prebogată la stânga şi $(I,\leq)\in POf$.

1. Dacă **(C,C')** are I-limite proiective, atunci ea are I-limite proiective de aplicaţii
2. Dacă I este dirijată la dreapta şi $F=(X_i,f_{ij})\in proC_I'$ atunci:

$\lim\limits_{\longleftarrow (C,C')} F=(X,f_i) \Leftrightarrow \lim\limits_{\longleftarrow C} F=(X,f_i)$.

Demonstrație. 1. Fie $F=(X_i,f_{ij})$, $G=(Y_i,g_{ij})\in \mathrm{pro}C_I$, $\lim\limits_{\longleftarrow (C,C')} F=(X,f_i)$, $\lim\limits_{\longleftarrow (C,C')} G=(Y,g_i)$ și $(h_i)\in \mathrm{pro}C_I(F,G)$. Pentru a demonstra afirmația, conform 1.7.3., este suficient să arătăm că $(h_if_i)\in FIM(X,G)$. Fie $g\in C'(Z,X)$, $(k_i)\in FI(Y,G)$ astfel încât $(k_i)\subset(h_if_ig)$. Cum (C,C') este prebogată la stânga, cu notațiile din 1.7.7., din $\hat{k}_i\subset \hat{h}_i\hat{f}_i\hat{g}$ rezultă, conform 2.4., că există un cel mai mare morfism $s_i\in D(\hat{Z},\hat{Y}_i)$ astfel ca $\hat{h}_is_i\sqsubset\hat{k}_i$ și $s_i\sqsubset\hat{f}_i\hat{g}$. Atunci $(s_i)\in FI(\hat{Z},\hat{G})$; dar $(\hat{f}_i\hat{g})\in FIM(\hat{Z},\hat{G})$, deci $(s_i)\dashv(\hat{f}_i\hat{g})$ și $\hat{k}_i\dashv\hat{h}_i\hat{f}_i\hat{g}$; din 1.7.7. rezultă că $(h_if_ig)\dashv(k_i)$, deci $(h_if_i)\in FIM(X,G)$.

2. Este suficient să argumentăm că, $g_i\in C'(Y,X_i)$ pentru orice $i\in I$ și pentru orice $(g_i)\in FIM(Y,F)$. Fie $g\in C'(Z,Y)$ și $h\subset g_ig$. Din 2.1.2., 2.2. și 2.4. rezultă că pentru orice $j\in I$ există un cel mai mare $q_j\subset\hat{g}_j\hat{g}$ astfel ca $\hat{f}_{ij}q_j\sqsubset\hat{h}$. Definim pentru orice $j\notin I_i$ $q_j=\hat{g}_j\hat{g}$. Atunci $(q_j)\in FI(\hat{Z},\hat{F})$ și cum $(\hat{g}_i\hat{g})$ este minimală în $FI(\hat{Z},\hat{G})$ rezultă că $h=g_ig$, deci $g_i\in C'(Y,X_i)$.

2.6. Definiții. Fie (C,C') o a-categorie prebogată la stânga.

1. Cuplul (X,f) se numește ***subspațiu*** al obiectului $Y\in C$ dacă $X\in C$, $f\in C'(X,Y)$, $\hat{f}$ este monomorfism în **D** și cu notațiile din 1.7.7., pentru orice $Z\in C$, $\tilde{g}\in D'(\hat{Z},\hat{X})$ pentru care $\hat{f}\tilde{g}\in C(Z,Y)$ există $g\in C(Z,X)$ astfel ca $\tilde{g}\dashv\hat{g}$; dacă această proprietate este valabilă pentru orice $\tilde{g}\in D'(\hat{Z},\hat{X})$ spunem că (X,f) este un *subspațiu* strict al lui Y.

2. Fie $G=(Y_i,g_{ij})\in \mathrm{pro}C_I$. O familie $(X_i,h_i)_{i\in I}$ se numește *sistem proiectiv de subspații ale lui G* dacă (X_i,h_i) este subspațiu strict al lui Y_i, pentru orice $i\in I$ și (h_i) este un sistem proiectiv de aplicații dintr-un sistem $F=(X_i,f_{ij})\in \mathrm{pro}C_I$ în G. Desigur, din fidelitatea functorului rezultă ca h_i este monomorfism în **C** și, în consecință, morfismele f_{ij} sunt unic determinate.

3. Fie $(X_i)_{i\in I}$ o familie nevidă de obiecte din **C**, $\tilde{X}\in D$ și $(\tilde{f}_i)\in\Pi D(\tilde{X},\hat{X}_i)$. Un cuplu (X,f_i) unde $X\in C$ și $(f_i)\in\Pi C(X,X_i)$ se numeste *obiect inițial pentru familiile (X_i) și $(\tilde{f}_i)$ asociate*

lui $\tilde{X}$ dacă:

(i) $\hat{X}=\tilde{X}$ şi $\hat{f}_i=\tilde{f}_i$, pentru orice $i\in I$.

(ii) dacă $Y\in C$ şi $\tilde{g}\in D'(\hat{Y},\hat{X})$ astfel ca $\hat{f}_i\tilde{g}\in{}^\wedge C(Y,X_i)$, $\forall\ i\in I$ atunci există $g\in C'(Y,X$ astfel ca $\hat{g}=\tilde{g}$.

2.7. Teoremă. Fie $G=(Y_i,g_{ij})\in proC_I$, **(C,C')** fiind o a-categorie prebogată la stânga. Dacă Mon **D'**$\subset$ Mon **D**, **(C,C')** şi **(D,D')** sunt cu **I**-limite proiective, iar functorul fidel ^ conservă limitele proiective, atunci pentru orice sistem proiectiv de subspaţii (X_i,h_i) al lui G există $(\lim_{(C,C')}X_i, \lim_{(C,C')}h_i)$ şi acest cuplu este subspaţiu al lui $\lim_{(C,C')}Y_i$.

Demonstraţie. Condiţiile din 2.5.1. fiind îndeplinite există $\underleftarrow{\lim}\, h_i=h$ şi desigur, $\hat{h}=\lim$

Fie $(Y,g_i)=\lim G$ şi, ca în 2.6.2., $F=(X_i,f_{ij})$. Fie $(X,f_i)=\underleftarrow{\lim}\, F$. Atunci $h_if_i=g_ih$, pentru orice

Să arătăm că $\hat{h}$ este monomorfism în **D'**. Dacă, $\hat{h}u=\hat{h}v$ atunci, $\hat{h}_i\hat{f}_iu=\hat{h}_i\hat{f}_iv$, deci, cum este monomorfism, $\hat{f}_iu=\hat{f}_iv$; dar functorul ^ conservă limitele proiective, deci $\lim\hat{F}=(\hat{X},\hat{f}_i)$ u şi v sunt morfisme stricte, de unde $u=v$.

Fie acum $\tilde{g}\in D'(\hat{Z},\hat{X})$ astfel ca $\hat{h}\tilde{g}\in{}^\wedge C(Z,Y)$. Pentru orice $i\in I$, $\hat{g}_i h\tilde{g}=\hat{h}_i\hat{f}_i\tilde{g}\in{}^\wedge C(Z,Y_i)$, prin urmare conform ipotezei, din 2.6.1. şi 2.6.2. există $g_i\in C(Z,X_i)$ astfel ca $\hat{f}_i\tilde{g}=\hat{g}_i$, $(\hat{g}_i)\in FIM(\hat{X},\hat{F})$ şi $\tilde{g}\in D'(\hat{Z},\hat{X})$, iar ^ este fidel; deci $(g_i)\in FIM(Z,F)$ şi există $g\in C'(Z,X)$ astfel ca $\hat{g}=\tilde{g}$ şi $(g_i)=(f_ig)$.

2.8. Consecinţă. Fie F un I-sistem proiectiv într-o a-categorie prebogată la stânga. Dacă există $(\hat{X},\hat{f}_i)=\lim\hat{F}$ şi un obiect iniţial (X,f_i) pentru familiile (X_i) şi $(\hat{f}_i)$ asociate, atunci $\lim F=(X,f_i)$

2.9. Observaţie. Toate rezultatele prezentate anterior sunt valabile într-o a-categorie la stânga concretă pentru care functorul de uitare □ este fidel, deoarece a-categoria (**Ec,Ef**) este bogată la stânga, din păcate ea nu este bogată la dreapta, i.e. duala relaţiei (2.1) nu este adevărată. Într-adevăr, fie $X=Z=\{0,1\}$, $Y=\{0\}$ $g(0)=g(1)=0$, $h=1_X$ şi $f(0)=Z$; desigur $h\subset fg$ şi nu există $f'\subset f$ astfel ca $fg'\subset h$. Prin urmare, pentru a obţine rezultate analoage cazului proiectiv în a-categorii la dreapta sunt necesare instrumente mai rafinate. Acestea sunt prezentate în [Ber 75a] în termenii "divizibilităţii la dreapta", subiect pe care noi nu îl abordăm aici.

Următorul rezultat este o generalizare a teoremei 1.13. din [Da.88a].

2.10. Teoremă. Dacă **I** este o categorie mică care are un obiect final, atunci orice a-categorie la stânga are **I**-limite proiective.

Demonstraţie. Fie i_0 obiectul final al categoriei **I** şi $F=(X_i,F(s))$ o **I**-diagramă în C. Vom arăta că $\lim_{C,C'}F=(X_{i_0},F(s_i^0))$, unde $s_i^0\in I(i,i_0)$, $i\in I$. Fie $X\in C$, $g\in C'(X,X_{i_0})$ şi $s_i\in I(i,j)$. Atunci $F(s_j)F(s_i^0)g\subset F(s_j^0s_i)g = F(s_i^0)g$, deci $(F(s_i^0)g)\in FI(X,F)$. Dacă $(g_i)\in FI(X,F)$, $(g_i)\subset(F(s_i^0)g)$, atunci $(g_{i_0})\subset F(s_{i_0}^0)g=g$, şi, cum g este morfism strict, rezultă că $g_{i_0}=g$. Dacă $i\in I$, atunci $g_i\subset F(s_i^0)g\subset g_i$, deci $(g_i)=(F(s_i^0)g)$; prin urmare $(F(s_i^0)g)\in FIM(X,F)$. Am definit astfel aplicaţia

$$g\to(F(s_i^0)g),\ C'(X,X_{i_0})\to FIM(X,F) \qquad (1)$$

aplicaţie care trebuie să fie o bijecţie; din $(F(s_i^0)g)=(F(s_i^0)h)$ rezultă că $g=F(s_{i_0}^0)g=F(s_{i_0}^0)h=h$, deci aplicaţia (1) este injectivă.

Fie acum $(g_i)\in FIM(X,F)$ şi $g=g_{i_0}$. Aratăm că g este un morfism strict. Pentru aceasta fie $h\in C'(Y,X)$ şi $f\in C(Y,X_{i_0})$ astfel ca $f\subset gh$. Definim $f_{i_0}=f$ şi $f_i=g_ih$, pentru $i\in I\setminus\{i_0\}$. Atunci pentru orice $i\in I\setminus\{i_0\}$, $F(s_i^0)f_{i_0}\subset F(s_i)g_{i_0}h\subset g_ih=f_i$, iar pentru orice $s\in I(i,j)$, $i,j\in I\setminus\{i_0\}$: $F(s)f_i=F(s)g_ih\subset g_jh=f_j$, deci $(f_i)\in FI(Y,F)$, $(f_i)\subset(g_ih)$ şi, cum $(g_i)\in FIM(X,F)$, iar $h\in C'(Y,X)$, rezultă că $(f_i)=(g_ih)$, prin urmare $f=gh$ şi $g\in C'(X,X_{i_0})$. În plus $(F(s_i^0)g)\subset(g_i)\in FIM(X,F)$, deci $(F(s_i^0)g)=(g_i)$ şi aplicaţia (1) este o bijecţie; prin urmare $\lim_{\leftarrow(C,C')}F=(X_{i_0},F(s_i^0))$.

Dacă $G=(Y_i,G(s))$ este o altă **I**-diagramă în **C**, iar (h_i) este o **I**-diagramă de aplicaţii din F în G, din construcţia de mai sus şi 1.8.3. rezultă imediat că $\varprojlim h_i = h_{i_0}$.

2.11. Propoziţie. Fie $(\mathbf{C},\mathbf{C'})$ o a-categorie la stânga de tip stâng M, F o **I**-diagramă în C şi $(g_i)\in FI(Y,F)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $(g_i)\in FIM(Y,F)$

(b) $[X\in M,\ f\in C'(X,Y)] \Rightarrow [(g_if)$ este o familie minimală în $FI(X,F)]$.

Demonstraţie. (a)⇒(b) este imediată din definiţia famililor invariante minimale (vezi 1.8.1.)

(b)⇒(a). Fie $Z\in C$ şi $g\in C'(Z,Y)$. Să presupunem, prin absurd, că există $(h_i)\in FI(Z,F)$ astfel ca $(h_i)\underset{\neq}{\subset}(g_ig)$. Atunci există $j\in I$ pentru care $h_j\underset{\neq}{\subset}g_jg$, deci şi $X\in M$, $f\in C'(X,Z)$, conform 1.8.4., astfel ca $g_jgf\neq h_jf$. Dar $gf\in C'(X,Y)$ şi din ipoteza (b) rezultă că (g_igf) este minimală în $FI(X,F)$, ceea ce contrazice relaţia imediată $(h_if)\underset{\neq}{\subset}(g_igf)$.

2.12. Observaţie. În cele ce urmează ne propunem să dăm condiţii suficiente de reprezentabilitate a unor diagrame, de existenţă a unor nivelatori pentru acestea, de cvasi-constructivitate şi constructivitate a unor a-categorii la stânga $(\mathbf{C},\mathbf{C'})$. Fie F o **I**-diagramă în C şi F_0 diagrama discretă ataşată acesteia. Pentru reprezentabilitatea diagramei F_0 vom impune ca C să fie cu produse şi ca acestea să coincidă cu cele din **C'**. Această condiţie va fi suficientă pentru realizarea unui izomorfism de ordine între familiile invariante ale lui F şi cele ale diagramei nivelate G a lui F (vezi 1.16.2.), precum şi pentru construirea unei reprezentări a diagramei F prin intermediul unei reprezentări a **I**-diagramei G. Cvasi-constructivitatea a-categoriei $(\mathbf{C},\mathbf{C'})$, conform 1.18.1. şi condiţiei (C1), impune cu necesitate existenţa limitelor proiective şi posibilitatea prelungirii lor la o reprezentare în $(\mathbf{C},\mathbf{C'})$; pentru definirea functorului J_F vom folosi ideea sugerată la teorema 1.18.5.; existenţa limitelor tari conform 1.16.3., impune o condiţie specială de completitudine-superior tare completitudinea la stânga - definită mai jos. Toate aceste condiţii vor atrage posibilitatea argumentării constructivităţii a-categoriei $(\mathbf{C},\mathbf{C'})$.

2.13. Propoziţie. Fie $(\mathbf{C},\mathbf{C'})$ o a-categorie la stânga. Categoria **C'** este cu produse dacă şi numai dacă orice diagramă discretă F din **C** are limită proiectivă în $(\mathbf{C},\mathbf{C'})$

În acest caz $\varprojlim_{C} F = \varprojlim_{(C,C')} F$.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că pentru orice I-diagramă discretă din C, $FIM(X,F) = \Pi C'(X,F_{(i)})$, pentru orice $X \in C$. Egalitatea rezultă din următoarele echivalențe:

$(g_i) \in FIM(X,F) \Leftrightarrow$ [(g,f) este minimală în $FI(Y,F) = \Pi C(Y,X_i)$, pentru orice $f \in C'(Y,X), Y \in C$] $\Leftrightarrow$ [$g_i f$ este morfism minimal în $C(Y,X_i)$, pentru orice $f \in C'(Y,X)$, $Y \in C, i \in I$] $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ [$g_i \in C'(X,X_i), i \in I$] $\Leftrightarrow$ $(g_i) \in \Pi C'(X,X_i)$.

2.14. Definiție. Fie (C,C') o a-categorie la stânga. Spunem că (C,C') este cu *produse stricte* dacă orice I-diagramă discretă din C are un produs în C, $(\Pi X_i, p_i)$, unde $p_i \in C'(\Pi X_i, X_i)$ pentru orice $i \in I$.

2.15. Observație. Dacă (C,C') este cu produse stricte, atunci pentru orice I-diagramă discretă F_0 din C, $\varprojlim_{C} F = \varprojlim_{C} F_0 = \varprojlim_{(C,C')} F_0$, ceea ce rezultă din 2.14. și 2.13.

2.16. Exemplu. A-categoria (**Ec**, **Ef**) este cu produse stricte.

2.17. Lemă. Într-o a-categorie la stânga cu produse stricte (C,C') orice diagramă discretă admite o reprezentare în (C,C').

Demonstrație. Fie F_0 o I-diagramă discretă. Din 2.15 rezultă că $\varprojlim_{C} F = \varprojlim_{(C,C')} F = (\Pi X_i, p_i)$, unde $p_i \in C'(\Pi X_i, X_i)$, $i \in I$. Pentru orice $X \in C$ definim $J_{F_0} X = \Pi C(X,X_i)$ și $H_0((g_i))$ unicul morfism din $C(X,\Pi X_i)$ pentru care $(p_i H_0((g_i))) = (g_i)$. Atunci $H_0((p_i)) = 1$, $FIM(X,F_0) = \Pi C'(X,X_i) \subset J_{F_0} X$, $(p_i) \in FIM(\Pi X_i, F_0)$ și dacă $(g_i) \in FIM(X,F_0)$ atunci $H_0((g_i)) \in C'(X,\Pi X_i)$. Prin urmare, conform 1.6.5. și 1.16.1., $(\Pi X_i, p_i, H_0, J_{F_0})$ este o reprezentare în (C,C') a diagramei discrete F_0.

2.18. Observație. Conform 1.7. și 2.17., $H_0: J_{F_0} \to C(-,\Pi X_i)$ este transformare naturală. În plus, H_0 realizează un izomorfism de ordine în **Of** din $J_{F_0} X$ în $C(X,\Pi X_i)$ pentru $X \in C$.

2.19. Lemă. Fie **(C,C')** o **a-categorie** la stânga cu produse stricte, F o **I**-diagramă în C şi G diagrama nivelată a lui F. Atunci, pentru orice $X \in C$, restricţia lui H_0 la $FI(X,F)$ realizează un izomorfism în **Of** din $FI(X,F)$ pe $FI(X,G)$, unde $(\Pi X_i, p_i, H_0, J_{F_0})$ este reprezentarea $\mathbf{I}_0$-diagramei $\mathbf{F_0}$, ca în 2.17..

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm că pentru orice $(g_i) \in FI(X,F)$, $H_0((g_i)) \in FI(X,F)$ şi, conform 2.18., $H_0^{-1}(g) \in FI(X,F)$ pentru orice $X \in C$ şi $g \in FI(X,G)$. Folosim notaţiile din 2.17. şi 1.16.2..

Fie $(g_i) \in FI(X,F)$. Din demonstraţia lemei 2.17. rezultă că $(p_i H_0((g_i))) = (g_i)$ şi pentru orice $s=(s_i) \in S$: $F(s_i) g_{c(s_i)} \subset g_i$, pentru orice $i \in I$, deci $F(s_i) p_{c(s_i)} H_0((g_i)) \subset (p_i H_0((g_i)))$. Aplicând izotonia funcţiei H_0 şi definiţia 1.16.2. rezultă că: $H_0((F(s_i) p_{c(s_i)} H_0((g_i)))) = G(s) H_0((g_i)) \subset H_0((g_i))$, deci $H_0((g_i)) \in FI(X,G)$.

Fie acum $g \in FI(X,G)$ şi $s=(s_i) \in S$. Atunci: $G(s)g \subset g$, sau, $H_0(F(s_i) p_{c(s_i)} g) \subset g$, deci aplicând izotonia lui H_0^{-1} şi definiţia sa din 2.17. rezultă că: $F(s_i) p_{c(s_i)} g \subset p_i g$, pentru orice $i \in I$ şi orice $s \in S$, prin urmare $(p_i g) = H_0^{-1}(g) \in FI(X,F)$.

2.20. Lemă. Fie **(C,C')** o **a-categorie** la stânga cu produse stricte şi F o **I**-diagramă în C. Dacă există $\lim_{(C,C')} F = (L, f_i)$ atunci (L,k) este nivelatorul diagramei nivelate G a lui F, unde $k = H_0((f_i))$.

Demonstraţie. Conform lemei 2.19. este suficient să arătăm că $H_0((f_i)) \in FIM(L,G)$. Fie $s \in S$. Atunci $G(s)k = H_0((F(s_i) p_{c(s_i)} k))$ şi $(f_i) = (p_i k)$. Cum H_0 este transformare naturală din J în $C(-, \Pi X_i)$ rezultă că: $G(s)k = C(k, \Pi X_i) H_0((F_{(s_i)} p_{c(s_i)})) \subset H_0 J_{F_0}(k)((F(s_i) p_{c(s_i)})) = H_0((F(s_i) p_{c(s_i)} k)) = H_0(F(s_i) f_{c(s_i)})) \subset H_0((f_i)) = k$, deci $k \in FI(L,G)$. Să arătăm acum că $H_0((f_i)) \in FIM(L,G)$. Fie $f \in C'(X,L)$ şi să presupunem că există $g \in FI(X,G)$ astfel ca $g \subset kf$. Atunci $H_0^{-1}(g) \subset H_0^{-1}(kf) = (f_i f)$. Din lema 2.19. rezultă că $H_0^{-1}(g) \in FI(X,F)$ şi cum $(f_i f)$ este minimală în $FI(X,F)$, căci (L, f_i) este limita lui F în **(C,C')**, rezultă că $H_0^{-1}(g) = (f_i f)$, deci $g = kf$ şi $k \in FIM(X,G)$.

2.21. Lemă. Fie **(C,C')** o categorie la stânga cu produse stricte şi F o **I**-diagramă în C. Dacă diagrama nivelată G a lui F admite o reprezentare în (C,C') atunci F este reprezentabilă în **(C,C')**.

Demonstrație. Fie (L,k,H_1,J_G) o reprezentare a diagramei G în (C,C'). Din 1.18.1. rezultă că $(L,k)=\varprojlim_{(C,C')}G$. Fie $(\Pi X_i,p_i,H_0,J_{F_0})$ reprezentarea I_0-diagramei F_0, ca în lema 2.17. și $(f_i)=H_0^{-1}(k)$. Cum pentru orice $X \in C$, $J_G X \subset FI(X,G)$, din lema 2.20. rezultă că $H_0^{-1}(J_G X) \subset FI(X,F)$. Definim $J_F(X)=H_0^{-1}(J_G X)$ și, pentru orice $(g_i)\in J_F X$, $H_X((g_i))=H_1(H_0(g_i))$. Se verifică imediat că (L,f_i,H,J_F) este o reprezentare a I-diagramei F în (C,C').

2.22. Teoremă. Fie (C,C') o a-categorie la stânga cu produse stricte. Dacă orice I-diagramă din C admite o reprezentare în (C,C') atunci (C,C') este cvasi-constructivă.

Demonstrație. Fie F o I-diagramă în C și F_0 diagrama discretă asociată acesteia. Conform lemei 2.17. există o reprezentare $(\Pi X_i,p_i,H_0,J_{F_0})$ a lui F_0 în (C,C'). Din ipoteză diagrama nivelată G a lui F are o reprezentare (L,k,H_1,J_G) în (C,C') și conform lemei 2.21. (L,f_i,H,J_F) este o reprezentare în (C,C') a diagramei F. În plus $k=H_0((f_i))$, $(f_i)\in J_F L$ și $(f_i)=(p_i k)$. Prin urmare condițiile (C1) și (C2) din 1.16.4. sunt verificate; în consecință (C,C') este cvasi-constructivă.

2.23. Definiție. A-categoria la stânga (C,C') se numeste *superior tare completă la stânga* dacă pentru orice mulțime nevidă I, orice I-familie de morfisme din C este superior stabilă la stînga (vezi 1.1.3.).

2.24. Teoremă. Fie F o I-diagramă în C și $(L,f_i)=\varprojlim_{(C,C')}F$, unde (C,C') este superior tare completă la stânga. Atunci (L,f_i) este limita tare a I-diagramei F.

Demonstrație. Fie $X\in C$ și $(g_i)\in FI(X,F)$ astfel ca mulțimea $N=\{f\in C(X,L) | (f_i f)\subset(g_i)\}$ să fie nevidă (vezi 1.16.3). Conform ipotezei de completitudine tare la stînga, familia de morfisme N admite un supremum $H((g_i))$ care, conform 1.1.3., este compatibil la stînga cu f_i, pentru orice $i\in I$; prin urmare $H((g_i))$ este cel mai mare element din N și axioma (LF1) este verificată. Mai mult:

$$(g_i)\in FIM(X,F) \Leftrightarrow H((g_i))\in C'(X,L),$$

căci (L,f_i) este limita proiectivă a lui F în (C,C'). Deci pentru orice $f\in C'(X,L)$, $(f_i f)\in FIM(X,F)$

şi $H((f_if))=f$, deci (LF2) este de asemenea verificată. Din 1.16.3. rezultă că (L,f_i) este limita tare a **I**-diagramei F.

2.25. Consecinţă. Orice a-categorie superior tare completă la stînga cu limite proiective este cu limite tari.

2.26. Observaţie. Construcţia reprezentării unei **I**-diagrame F din demonstraţia următoarei teoreme va fi utilizată des în problemele de reprezentabilitate abordate în secţiunile următoare.

2.27. Teoremă. Fie **(C,C')** o a-categorie superior tare completă la stânga cu limite proiective. Atunci orice diagramă din **C** admite o reprezentare în **(C,C')**.

Demonstraţie. Fie F o **I**-diagramă în **C** şi $(L,f_i)=\underleftarrow{\lim}_{(C,C')}F$. Definim pentru orice $X\in C$ $J_FX=\{(g_i)\in FI(X,F)/\exists f\in C(X,L): (f_if)\subset(g_i)\}$ şi pentru orice $g\in C(X,Y)$, $J_F(g)((g_i))=(g_ig)$, oricare ar fi $(g_i)\in J_FX$. Atunci J_F:**C** → **Of** este un functor contravariant izoton care verifică (L1), (L2) şi (L6). Pentru orice $X\in C$ şi $(g_i)\in J_FX$ definim:

$$H_X((g_i))=\cup\{f\in C(X,L)\mid(f_if)\subset(g_i)\}$$

Atunci $H_X:J_FX\to C(X,L)$ este o aplicatie izotonă, care, conform demonstaţiei teoremei 2.24., verifică (LF1) şi (LF2). Din teorema 1.18.5. rezultă că (L, f_i, H, J_F) este o reprezentare a **I**-diagramei F în **(C,C')**.

2.28.Teoremă. Orice a-categorie superior tare completă la stânga cu produse stricte şi limite proiective este constructivă.

Demonstraţie. Verificăm condiţiile de constructivitate din teorema 1.18.6. Fie (C,C') o a-categorie care verifică ipotezele teoremei. Din 2.25. rezultă că **(C,C')** este cu produse şi nivelatori tari. Fie F o **I-diagramă** în **C**, $(L,f_i)=\underleftarrow{\lim}_{(C,C')}F$ şi $(\Pi X_i, p_i, H_0, J_{F_0})$ reprezentarea **I**-diagramei discrete F_0 asociate lui F, a cărei existenţă este asigurată de lema 2.17. Din 2.17. rezultă că

$\lim_C F_2 = \varprojlim_{(C,C')} F_2 = (\Pi X, p_i)$ şi

$FI(X, F_2) = \Pi C(X, X_i) = J_{F_2} X,$

pentru orice $X \in C$. În particular, condiţiile (a) şi (b) din teorema 1.18.3. sunt asigurate, deci este valabilă şi proprietatea (c) din aceeaşi teoremă. Conform teoremei 1.18.4. conditia (C3) este echivalentă cu (C3"), condiţie realizată, deoarece $H_0((p_i h)) = h$, pentru orice $h \in C(Y, \Pi X_i)$, conform 2.18. În consecinţă, din teorema 1.18.6., rezultă că (C,C') este o a-categorie la stânga constructivă.

2.29. Observaţie. Finalul secţiunii îl dedicăm studiului unei clase speciale de categorii preordonate şi prezentării unor condiţii suficiente pentru superior bicompletitudinea unor bicategorii după [Da.83a] şi [Da.86b].

2.30. Notaţii. Fie **C** o categorie şi $f \in C(A,B)$. Dacă A' este subobiect al obiectului A scriem $A' \subset A$, sau $u: A' \subset A$ unde, u este monomorfismul care defineşte subobiectul A'. Notăm cu $f(A')$ imaginea lui A' prin f (dacă există). Vom utiliza proprietatea:

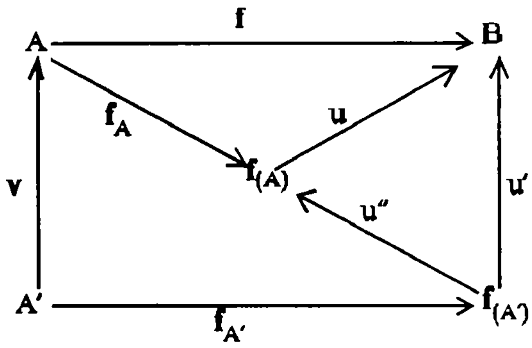
$gf(A') = g(f(A'))$ (2.2)

unde f şi g sunt morfisme compozabile. Desigur (2.2) nu este adevărată, în general. Vom construi o subcategorie cu imagini a categoriei **C** notată **ImC** prin ImC = C şi $f \in ImC(A,B) \Leftrightarrow$ relaţia (2.2) este verificată pentru orice $A' \subset A$ şi orice g morfism compozabil cu f care are imagini. Peste tot, în cele ce urmează vom considera că **C** este o categorie locală mică.

2.31. Propoziţie. **ImC** este cea mai mare subcategorie cu imagini a categoriei **C**

Demonstraţie. 1. Se verifică imediat că **Im C** $\leq$ **C**.

2. Arătăm că **Im C** este cu imagini. Pentru aceasta este suficient să arătăm că in factorizarea prin imagine din **C** : $f = uf_A$ are loc apartenenţa $f_A \in ImC(A, f(A))$, deoarece se ştie că $u \in ImC(f(A), B))$. Evident $f(A) = f_A(A)$. Fie $v: A' \subset A$ şi u, u', u", monomorfismele de definire a imaginilor ca in următoarea diagramă:



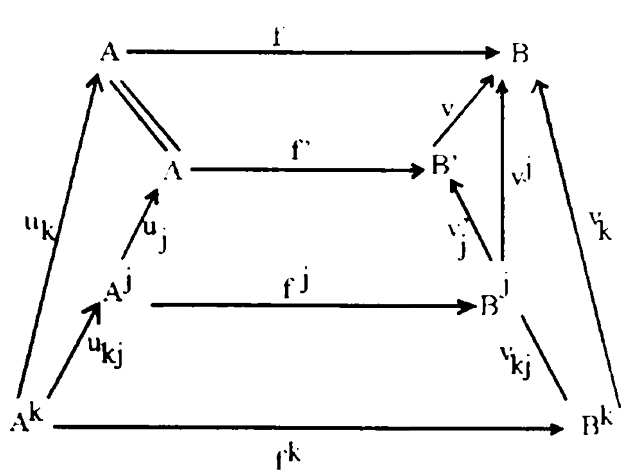
Cum $f(A')\subset f(A)\subset B$ rezultă că $u'=uu''$; dar f are imagini, deci $fv=u'f_{A'}$ şi $f=uf_A$; prin urmare $uf_Av=uu''f_{A'}$,deci $f_Av=u''f_{A'}$. Analog se verifică proprietatea de universalitate a imaginii în **ImC'**.

3. Dacă **C'** este o subcategorie cu imagini a categoriei **C**, atunci pentru orice două morfisme f şi g compozabile, relatia (2.2) are loc, prin urmare **C'≤Im C**.

2.32. Consecinţă. Dacă **C** este categorie echilibrată cu imagini epimorfice, atunci **C=ImC**.

2.33. Lemă. Fie **C** o categorie şi $A,B\in C$. Dacă pentru orice subobiect $A_j\subset B$ există un subobiect $B^j\subset B$ şi $f^j\in ImC(A^j,B^j)$ astfel ca $f^j_{A^k}=f^k$, pentru orice $A^k\subset A^j$, atunci există un unic morfism $f\in ImC(A,B)$ cu proprietatea că $f(A^j)=B^j$, pentru orice $A^j\subset A$.

Demonstraţie. Dacă u_{kj}: $A^k\subset A^j$, atunci există v_{kj}: $B^k\subset B^j$ astfel ca $f^ju_{kj}=v_{kj}f^k$, deoarece $f^j_{A^k}=f^k$, deci în diagrama :



triunghiurile şi trapezul de jos sunt comutative. Fie 1_A: $A\subset A$; atunci există v: $B'\subset B$ şi $f'\in ImC(A,B')$ astfel ca $f'_{A^j} = f^j$ pentru orice $A^j\subset A$. Fie $f=vf'$. Atunci, pentru orice u_j : $A^j\subset A$, $fu_j=v'_jf'$, unde v'_j $B^j\subset B'$, deci $fu_j=v_jf^j$. Presupunem acum că $fu_j=\overline{v}\overline{f}$ este o altă factorizare; la fel ca in demonstraţia propoziţei 2.31. se arată că $f^j(A^k)=B^k=f^k(A^k)$, deci $f^j(A^j)=f'(A^j)=B^j$; prin urmare va exista un morfism p astfel ca $v_j=\overline{v}p$. Dacă $g\in ImC(A,B)$ are proprietatea: $g_{A^j} = f^j$, atunci $f_{A'}=g_{A'}$, deci $f=g$.

2.34. Propoziţie. **ImC** este o categorie preordonată, iar scheletul său este o categorie ordonată faţă de relaţiile

$$f\sqsubseteq g \Leftrightarrow f(A')\subset g(A'),\ \text{pentru orice } A'\subset A \tag{2.3}$$

unde $f,g\in ImC(A,B)$.

Demonstraţie. Desigur ImC(A,B) este o mulţime preordonată fată de relaţiile (2.3). Dacă $f\sqsubseteq g$, $A'\subset A$, atunci:

$$fh(A')=f(h(A'))\subset g(h(A'))=gh(A'),$$

$$kf(A')=k(f(A'))\subset k(g(A'))=kg(A')$$

pentru orice morfisme compozabile h şi k din **ImC**.

Dacă $f\sqsubseteq g$ şi $g\sqsubseteq f$ atunci $f(A')=g(A')$ pentru orice $A'\subset A$; prin urmare $f_{A'}=g_{A'}$ în **ImC** şi conform lemei 2.33., f=h în scheletul lui **ImC**.

2.35. Lemă Într-o bicategorie (**C**,Mon**C**,Ep **C**) cu imagini are loc proprietatea (2.2) pentru orice morfisme compozabile.

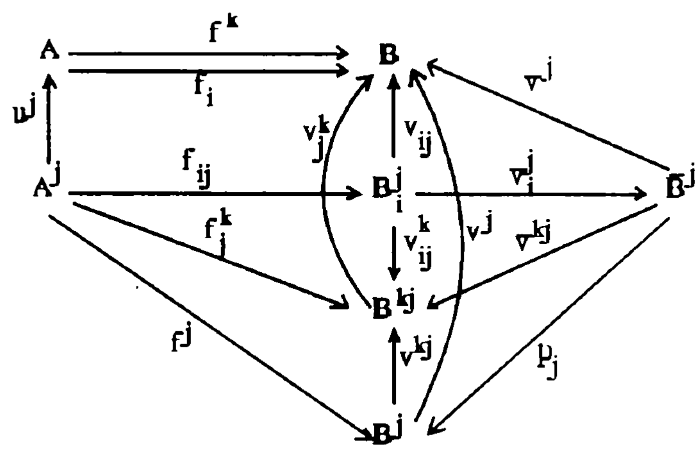
Demonstraţie. Fie $f\in C(A,B)$, $f=uf_A$ factorizarea prin imagine şi $f=vp$ descompunerea permisă în bicategorie ca în diagrama :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_A"] \arrow[ddr, "p"'] & & B \\
& f(A) \arrow[ur, "u"'] \arrow[d, "w"] & \\
& D \arrow[uur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Cum **C** are imagini, există $w \in MonC(f(A),D)$ astfel ca $u=vw$, deci $p=wf_A$;dar p este epimorfism, deci w este izomorfism;în plus **C** este echilibrată şi conform 2.32. are loc (2.2).

2.36.Teoremă. Orice bicategorie (**C**,MonC,Ep **C**) local mică la stînga, cu intersecţii şi reuniuni este superior completă faţă de relaţiile (2.3).

Demonstraţie. Fie $\{f_i\}_{i\in I}$ o familie nevidă mărginită superior din C(A,B). Fie $\{A^j \mid j\in J\}$ clasa reprezentantilor subobiectelor lui A şi $\{f^k / k\in K\}$ familia morfismelor care majorează familia $\{f_i\}$. Notăm $f_i(A^j)=B_i^j$, $f^k(A^j)=B^{kj}$ şi $\overline{B}^j=\bigcup_{i\in I} B_i^j$, $B^j=\bigcap_{k\in K} B^{kj}$. Mai notăm cu v, respectiv $\overline{v}$ monomorfismele din definiţiile intersecţiilor, respectiv reuniunilor, iar cu f indexat morfismele din factorizările prin imagini ca în următoarea diagramă :



Din definiţia imaginii prin f_i a subobiectului $u^j : A^j \subset A$:

$$f_i u^j = v_{ij} f_{ij} \qquad (1)$$

iar din definiţia imaginii prin f^k :

$$f^k u^j = v_j^k f_j^k \qquad (2)$$

Cum B^j este intersecţie, are loc :

$$v^j = v_j^k v^{kj} \qquad (3)$$

iar $\overline{B}^j$ reuniune

$$v_{ij} = \overline{v}^j v_i^j \qquad (4)$$

$$v_{ij} = v_j^k v_{ij}^k \tag{5}$$

Dar B_i este dus în B^{kj} prin 1_B şi cum $\overline{B^j} = \bigcup_{i\in I} B_i^j$ rezultă că $\overline{B^j}$ este dus prin 1_B în B^{kj}, adică

există $\overline{v^{kj}} \in C(\overline{B^j}, B^{kj})$ astfel ca:

$$\overline{v^j} = v_j^k\, \overline{v^{kj}} \tag{6}$$

Din (6) rezultă că $\overline{v^{kj}}$ este monomorfism, deci pentru orice $k\in K$, $\overline{B^j}$ este subobiect al lui B^{kj}.

În plus, din (4), (5) şi (6) rezultă:

$$v_j^k v_{ij}^k = v_{ij} = \overline{v^j}\,\overline{v_i^j} = v_j^k\, \overline{v^{kj}}\,\overline{v_i^j}$$

şi cum v_j^k este monomorfism, $v_{ij}^k = \overline{v^{kj}}\,\overline{v_i^j}$; deoarece $\overline{v^j}$ este factorizat prin v_j^k, pentru orice $k\in K$, iar $B^j = \bigcap_k B^{kj}$ rezultă că $\overline{v^j}$ este factorizat şi prin v^j, deci există un $p_j \in C(\overline{B^j}, B^j)$ astfel

ca

$$\overline{v^j} = v^j p_j \tag{7}$$

iar p_j este monomorfism. Folosind consecutiv (1) şi (5) rezultă că:

$$f_i u^j = v_{ij} f_{ij} = v_j^k v_{ij}^k f_{ij},$$

deci, pentru orice $i\in I$ şi $k\in K$, monomorfismul $f_i u^j$ este factorizat prin v_j^k; din definiţia lui B^j rezultă că morfismul $f_i u^j$ va fi factorizat prin v^j, deci va exista un morfism $f^j \in C(A^j, B^j)$ astfel ca

$$f_i u^j = v^j f^j, \text{ pentru orice } j\in J \tag{8}$$

Să arătăm acum că tripletele (A^j, f^j, B^j) verifică conditiile lemei 2.33. Fie deci $u_{j_1j_2}: A^{j_1} \subset A^{j_2}$.

Atunci pentru orice $k\in K$ există $v_{j_1j_2}^k: B^{kj_1} \subset B^{kj_2}$ unde $B^{j_1} \subset B^{j_2}$, deci $v^{j_1} = v^{j_2} v_{j_1j_2}$. În plus există:

$v_i^{j_1j_2}: B_i^{j_1} \subset B_i^{j_2}$ şi $f_{ij_2} u_{j_1j_2} = v_i^{j_1j_2} f_{ij}$. Atunci:

$v^{j_2} f^{j_2} u_{j_1j_2} = f_i u^{j_2} u_{j_1j_2} = f_i u^{j_1} = v^{j_1} f^{j_1} = v^{j_2} v_{j_1j_2} f^{j_1}$, de unde: $\quad f^{j_2} u_{j_1j_2} = v_{j_1j_2} f^{j_1}$.

În fine, dacă $\tilde{B}^{j_1}\in C$ şi $\tilde{f}^{j_1}\in C(A^{j_1},B^{j_1})$ iar $\tilde{v}_{j_1j_2}$ este un morfism pentru care: $f^{j_2}u_{j_1j_2} = \tilde{v}_{j_1j_2}\tilde{f}^{j_1}$, atunci $v^{j_2}f^{j_2}u_{j_1j_2} = v^{j_2}\tilde{v}_{j_1j_2}\tilde{f}^{j_1}$, deci $f_i u^{j_1} = v^{j_2}\tilde{v}_{j_1j_2}\tilde{f}^{j_1}$. Cum **C** este bicategorie în raport cu monomorfismele şi epimorfismele sale şi $f_i u^{j_1}$ este factorizat prin $v^{j_2}\tilde{v}_{j_1j_2}$ rezultă imediat că $f^{j_1} = \tilde{f}^{j_1}$, deci condiţiile lemei 2.33. sunt verificate. Prin urmare există $f\in C(A,B)$ pentru care B^j este tocmai imaginea lui A^j.

Să arătăm acum că $f = \bigcup_I f_i$. Fie $i\in I$ şi $j\in J$. Atunci $p_j\overline{v}_i^j$: $B_i^j\subset B^j$. Folosind consecutiv (4) şi (8) rezultă că:

$$v_{ij} = \overline{v}^j v_i^j = v^j p_j \overline{v}_i^j,$$

deci $f_i\subset f$ pentru orice $i\in I$. Dacă f^k este o majorantă a familiei $\{f_i\}$, atunci v^{kj}: $B^j\subset B^k$, pentru orice $j\in J$. Prin urmare $f = \bigcup_{i\in I} f_i$.

2.37. Teoremă. Fie (**C**,Mon**C**,Ep **C**) o bicategorie local mică, cu intersecţii, reuniuni şi imagini inverse care verifică :

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad [f_{A^j} = g_{A^j},\ \text{pentru orice } A^j\subset A] \tag{2.4}$$

unde $f,g\in C(A,B)$. Atunci **C** este o categorie superior bicompletă faţă de relaţiile (2.3).

Demonstraţie. Folosim notaţiile din 2.36. Deoarece în **C** există imagini şi imagini inverse rezultă că:

$$f(\bigcup_{J'} A^j) = \bigcup_{J'} f(A^j) \quad \text{şi} \quad f(\bigcap_{J'} A^j) = \bigcap_{J'} f(A^j),$$

pentru orice $J'\subset J$. Atunci din teorema 2.36. şi conditia (2.4) rezultă că pentru orice $g\in C(D,A)$ şi $h\in C(B,E)$ avem:

$$(\bigcup f_i)g = \bigcup f_i g \quad \text{şi} \quad h(\bigcup f_i) = \bigcup hf_i,$$

prin urmare categoria **C** este superior bicompletă.

§.3. LIMITE PROIECTIVE ŞI REPREZENTABILITATE ÎN a-CATEGORII CONCRETE

Prezentăm aici o clasă de a-categorii concrete care au un generator punctual - condiţia (3.1) - faţă de care limitele proiective în **(Ec, Ef)** verifică o axiomă de regularitate relativ la morfismele stricte - condiţia (3.2). În acest context suntem în măsură să demonstrăm existenţa limitelor proiective a-categoriale şi teoreme de cvasi-constructivitate. Teorema 2.28. va permite să dăm o clasă de a-categorii constructive şi, în particular, posibilitatea întăririi teoremelor de existenţă a limitelor proiective de sisteme proiective în a-categorii de spaţii măsurabile şi probabilistice din [Ber.76], [Ber.77] şi [Bun.85] şi generalizarea lor. Parte din rezultatele de mai jos sunt preluate din [DK.98a] şi [DK.98b].

Începem cu un inventar al unor proprietăţi speciale ale a-categoriei **(Ec, Ef)**, proprietăţi care, în anumite condiţii, sunt reflectate asupra a-categoriilor concrete **(C, C')** prin functorul de uitare □; un studiu mai detaliat în contextul mai larg al unor categorii ordonate de mulţimi şi relaţii fuzzy l-am realizat în [Da.82b], [Da.83a] şi [Da.83d]. Pentru proprietăţile corespondenţelor am folosit monografia [BGMO.84], pentru cele ale spaţiilor măsurabile [BB.85], iar pentru cele ale spaţiilor topologice [Kel.69].

În cele ce urmează vom considera că **(C,C')** este o a-categorie la stânga concretă care are proprietatea:

$\exists D'_0 \in C$ astfel ca $\square D'_0 = D_0$ şi $\quad [Z \in C,\ f \in Ec(D_0, \square Z)] \Rightarrow f \in C(D'_0, Z)$ (3.1)

unde $D_0 = \{x_0\}$, iar "□" reprezintă functorul de uitare (vezi 1.8.5.).

3.1. Definiţii Fie $f \in Ec(X,Y)$, $A \subset X$ şi $B \subset Y$. Notăm $f(A) = \bigcup_{a \in A} f(a)$ şi $f^-(B) = \{x \in X \mid f(x) \cap B \neq \emptyset\}$. Uneori în loc de f(A) vom scrie fA. Desigur $f^- \in Ec(fX, X)$; f^- se numeşte *inversa slabă* a corespondenţei f. Dacă:

$[x, y \in X,\ f(x) \cap f(y) \neq \emptyset] \Rightarrow f(x) = f(y)$,

f se numeşte *corespondenţă semiunivocă*. Dacă:

$[x, y \in X,\ f(x) \cap f(y) \neq \emptyset] \Rightarrow x = y$,

f se numeşte *corespondenţă univocă (injectivă)*. Dacă fX=Y, f se numeşte *corespondenţă* *surjectivă*. Desigur f este surjectivă dacă şi numai dacă $f^{-} \in Ec(Y,X)$. Notăm:

$f^{-1}B$ sau $f^{-1}(B)$ mulţimea $\{x \in X \mid f(x) \subset B\}$ şi $graf(f)=\{(x,y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}$;

f^{-1} se numeşte ***inversa tare*** a corespondenţei f, iar graf(f) - ***graficul*** ei. Se verifică imediat următoarele:

3.2. Proprietăţi. Fie $f \in Ec(X,Y)$, $I \in Ec$, $A_i \subset X$, $B_i \subset Y$ pentru orice $i \in I$ şi $B \subset Y$. Atunci:

(a) $f(\cup A_i)=\cup fA_i$, $f^{-}(\cup B_i)=\cup f^{-}(\cap B_i)$, $f^{-1}(\cap B_i)=\cap f^{-1}(B_i)$

(b) $f^{-}(\cap B_i) \subset \cap f^{-}(B_i)$, $\cup f^{-1}(B_i) \subset f^{-1}(\cup B_i)$

(c) $f^{-}(B^c)=(f^{-1}B)^c$

unde cu B^c am notat complementara lui B (în Y).

3.3. Propoziţie. Fie $f \in C(A,B)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) f este monomorfism

(b) $[fX=fY,\ X,Y \subset A] \Rightarrow X=Y$.

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Fie $X,Y \subset A$ astfel ca $fX=fY$. Definim $g(x_0)=X$, $h(x_0)=Y$; din (3.1), $g,h \in (D_0,A)$ şi cum $fg=fh$, din (a) rezultă că $X=Y$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Fie $g,h \in C(Z,A)$ astfel ca $fg=fh$ şi $z \in Z$, $X=g(z)$, $Y=h(z)$; atunci, din (b) rezultă că $X=Y$; deci $g=h$.

3.4. Observaţii. 1. Dacă f este univocă, atunci este şi monomorfism. Într-adevăr, dacă $fX=fY$ şi $x \in X$, atunci există $y \in Y$ astfel ca $f(x) \cap f(y) \neq \emptyset$, deci $x=y$; prin urmare $X \subset Y$ şi analog $Y \subset X$, iar din 3.3. rezultă că f este monomorfism.

Inversa afirmaţiei precedente nu este adevărată în general. De exemplu, în **Ec** considerăm $A=\{a,b\}$, $B=\{x,y,z\}$, cu elemente distincte, $f(a)=\{x,y\}$, $f(b)=\{y,z\}$, atunci $f \in MonEc(A,B)$, dar f nu este nici măcar semiunivocă.

2. Dacă $f \in Ec(A,B)$, $g \in Ec(B,C)$ sunt surjecţii, atunci $(gf)^{-}=f^{-}g^{-}$ şi $(f^{-})^{-}=f$.

3.5. Propoziţie. Dacă $f \in EpEc(A,B)$ atunci f este corespondenţă surjectivă.

Demonstraţie. Presupunem, prin absurd, că $fA \neq B$. Fie $g=1_B$, $h(x)=x$, pentru $x \in fA$, iar $h(x)=y$ pentru $x \in B \setminus fA$, unde y este un element fixat din fA. Atunci $gf=hf$, iar $g \neq h$.

3.6. Observaţie. Inversa afirmaţiei precedente nu este, în general, adevărată. De exemplu, fie f∈Ec(A,B), A={a,b,c}, B={x,y,z}, cu elemente distincte, f(a)={y,z}, f(b)={z,x}, f(c)={x,y}. Desigur f este surjectivă, dar nu este epimorfism; într-adevăr, pentru g(x)={y,z}, g(y)={z,x}, g(z)={x,y} şi h(x)=h(y)=h(z)=B se verifică imediat că gf=hf şi g≠h.

Următoarea proprietate este utilă în construcţia epimorfismelor din **Ec** care nu sunt funcţii.

3.7. Propoziţie. Dacă f∈EpEc(A,B)\Ef(A,B), atunci pentru orice a∈A pentru care există b, b'∈f(a), b≠b', există şi un a'∈f^{-}(b') astfel ca b∉f(a').

Demonstraţie. Presupunem, prin absurd, că există a∈A, b,b'∈f(a), b≠b', iar b,b'∈f(x) sau b,b'∉f(x), pentru orice x∈A. Fie g=1_B şi h(x)=x, dacă x∈B\{b,b'}, h(b')=b, h(b)=b'. Atunci hf^{-}=gf^{-} şi h≠g.

3.8. Propoziţie. Fie f∈Ec(A,B). Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) f∈EpEc(A,B)

(b) f^{-}∈MonEc(B,A).

Demonstraţie. (a) ⇒ (b). Din 3.5. rezultă că f^{-}∈Ec(B,A). Fie g,h∈Ec(C,B), astfel ca f^{-}g=f^{-}h şi D={x}∪C, unde x∉C. Definim u,v∈Ec(D,B) prin u(x)=v(x)=B, u(c)=g(c), v(c)=h(c), c∈C. Atunci u şi v sunt surjective şi f^{-}u=f^{-}v, iar din 3.4.2. şi (a) rezultă că g=h.

(b) ⇒ (a). Fie f^{-}∈MonEc(B,A). Fie g,h∈Ec(B,C) astfel ca gf=hf. Cum f este surjecţie, fără a restrânge generalitatea putem considera că g şi h sunt de asemenea surjecţii; din 3.4.2. rezultă că $f^{-}h^{-}$=$f^{-}g^{-}$, iar din (b) şi din nou 3.4.2., g=h.

3.9. Consecinţă. Fie f∈Ec(A,B). Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) f∈BiEc(A,B)

(b) f∈MonEc(A,B) şi f^{-}∈MonEc(B,A)

3.10. Propoziţie. Fie f∈C(A,B). Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) f este semiunivocă

(b) f=ff^{-}f

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Din $1_A \subset f^{\cdot}f$ rezultă că $f \subset ff^{\cdot}f$; invers, dacă $b \in ff^{\cdot}f(a)$ atunci există $b' \in f(a)$ şi $a' \in f^{\cdot}(b')$ astfel ca $b \in f(a')$; prin urmare $b' \in f(a) \cap f(a')$, iar din semiunivocitate rezultă că $b \in f(a)$, deci $f^{\cdot}ff \subset f$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Fie $b \in f(a) \cap f(a')$, $a,a' \in A$. Atunci $a,a' \in f^{\cdot}(b)$, de unde $f(a) \subset ff^{\cdot}(b) \subset ff^{\cdot}f(a') = f(a')$ şi, analog $f(a') \subset f(a)$.

3.11. Consecinţă. Dacă $f \in Ec(A,B)$ este semiunivocă atunci f este un morfism regulat (în sens Von Neumann).

Demonstraţie. $f=fgf$, unde $g(b)=f^{\cdot}(b)$, pentru $b \in fA$ şi $g(b)=A$, pentru $b \in B \setminus fA$.

3.12. Definiţie. Fie $f \in C(A,B)$ şi $f' \in C'(A,B)$. Dacă $f' \subset f$ spunem că f' este *o selecţie strictă* a lui f; notăm cu $S(f)$ mulţimea selecţiilor stricte ale corespondenţei f.

3.13. Propoziţie. Fie $f \in Ec(A,B)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $f \in ReEc(A,B)$

(b) f este univocă

(c) $S(f) \subset MonEf(A,B)$

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Fie $g \in Ec(B,A)$ astfel ca $gf=1_A$ şi $a,a' \in A$ cu proprietatea că există $x \in f(a) \cap f(a')$; atunci $g(x)=a=a'$, deci f este univocă.

(b) $\Rightarrow$ (c).Evident, dacă $f' \in S(f)$, f' este univocă, deci şi injectivă.

(c) $\Rightarrow$ (b). Dacă $a,a' \in A$ şi $x \in f(a) \cap f(a')$, există $f' \in S(f)$ astfel ca $f'(a)=f'(a')=x$, iar din (c) rezultă că $a=a'$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Fie $g(b)=f^{\cdot}(b)$, pentru $b \in fA$ şi $g(b)=x$, pentru $b \in B \setminus fA$, x fiind un element fixat din A. Atunci $gf=1_A$; într-adevăr, cum $1_A \subset f^{\cdot}f$, rezultă că $a \in gf(a)$, $a \in A$, iar dacă $a' \in gf(a)$ există $b \in f(a)$ astfel ca $a' \in f^{\cdot}(b)$; deci $b \in f(a) \cap f(a')$ şi $a=a'$.

Ţinând seama de 3.4.1. şi 3.13. rezultă că, în general $ReC(A,B) \subsetneq MonC(A,B)$. In cazul $C=Ec$ are loc următoarea caracterizare a morfismelor retractabile:

3.14. Propoziţie. Fie $f \in Ec(A,B)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $f \in ReEc(A,B)$

(b) $f \in MonEc(A,B)$ şi f este semiunivocă.

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Este imediată din 3.13..

(b) $\Rightarrow$ (a). Dacă $f(a) \cap f(a') \neq \emptyset$, cum f este semiunivocă, $f(a)=f(a')$; dar f este monomorfism, deci, conform 3.3., $a=a'$.

3.15. Observaţie. Dacă în locul categoriei **Ec** considerăm categoria **C**, atunci între afirmaţiile din 3.13. au loc implicaţiile (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c), iar între afirmaţiile din 3.14., implicaţia (a) $\Rightarrow$ (b).

3.16. Propoziţie. Fie $f \in Ec(A,B)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $f \in SeEc(A,B)$

(b) $\exists A' \subset A$ astfel ca restricţia $f_{A'} \in IzEf(A',B)$.

În acest caz:

(c) f este surjectivă şi $S(f^{\cdot}) \cap MonEf(B,A) \neq \emptyset$.

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Fie $g \in Ec(B,A)$ astfel ca $fg=1_B$. Pentru orice $b \in B$ alegem $a_b \in g(b)$ şi $A'=\{a_b \mid b \in B\}$. Cum g este retractabilă, din 3.13. rezultă că este univocă; dar $f(a_b) \subset fg(b)=\{b\}$, $b \in B$, deci $f(a_b)=b$ şi $f_{A'} \in IzEf(A',B)$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Se verifică imediat că $g=f_{A'}^{\cdot}$ este o secţiune a lui f.

(a) $\Rightarrow$ (c). Cum f este epimorfism, din 3.5. rezultă că este corespondenţă surjectivă, iar din (b), că există $A' \subset A$ astfel ca $f_{A'} \in IzEf(A',B)$. Atunci luând $g(b)=f^{\cdot}(b) \cap A'$, $b \in B$, rezultă imediat că $g \in S(f^{\cdot}) \cap MonEf(B,A)$.

3.17. Consecinţe. 1. $f \in SeC(A,B) \Rightarrow S(f) \subset EpEf(\square A, \square B)$.

2. $IzC=IzC'$.

Pentru ultima afirmaţie se folosesc 3.13. şi 3.16..

3.18. Propoziţie. Ec este o categorie perfectă.

Demonstraţie. Fie $f \in BiEc(A,B)$. Atunci

$$\exists b_a \in f(a) \setminus f(A \setminus \{a\}),\ \forall a \in A \tag{1}$$

căci, dacă nu ar fi aşa, ar exista un $a \in A$ pentru care $f(a) \subset f(A \setminus \{a\})$, iar din 3.5., că

$fA=f(A\setminus\{a\})=B$ şi din 3.13. că f nu este monomorfism.

Fixăm b_a ca în (1), pentru orice $a\in A$. Fie $B'=\{b_a \mid a\in A\}$. Din (1) rezultă că $f_{B'}^{-}(b_a)=a$, deci $f_{B'}^{-}\in EpEf(B',A)$. Mai mult, din construcţia lui B', $f_{B'}^{-}\in IzEf(B,A)$, iar din 3.16. că $f^{-}\in SeEc(B,A)$. Dar $f^{-}\in MonEc(B,A)$, conform 3.9., deci $f^{-}\in IzEc(B,A)$. În sfârşit, din 3.17.2. rezultă că $f\in IzEf(A,B)$.

3.19. Observaţie. În continuare vom aborda problema reprezentabilităţii în **(C,C')**. Înainte de aceasta, dăm câteva rezultate din a-categoria mulţimilor care vor fi utile în continuare.

3.20. Propoziţie. Fie $F=(X_i f_{ij})\in proEc_I$ şi $(PIM,f_i)=\varprojlim_{(Ec,Ef)}F$ (vezi 1.10.) Fie $i_0\in I$, $A_{i_0}\subset X_{i_0}$ şi $x\in f_{i_0}^{-}A_{i_0}$. Atunci există $j_0\geq i_0$ astfel ca pentru orice $j\geq j_0$, $f_j(x)\subset f_{i_0 j}A_{i_0}$

Demonstraţie. Fie $x=(B_i)\in PIM$. Definim $C_i=B_i\cap(f_{i_0 i}^{-}A_{i_0})^c$ pentru $i\geq i_0$ şi $C_i=B_i$ în rest. Atunci $(C_i)\subset(B_i)$, $f_{ij}C_j\subset C_i$, pentru orice $i\in I$ şi $j\in I_i$, iar $C_{i_0}=B_{i_0}\cap A_{i_0}^c\subset B_{i_0}$. Prin urmare există $j_0\in I$ astfel ca $C_{j_0}=\emptyset$, ceea ce atrage egalitatea $C_j=\emptyset$, pentru orice $j\geq j_0$, deci $f_j(x)\subset f_{i_0 j}A_{i_0}$, pentru orice $j\geq j_0$.

3.21. Observaţii. 1. **(C,C')** este o a-categorie la stânga de tip stâng $\{D'_0\}$, sau, echivalent, D'_0 este generator pentru **C** şi pentru **C'**.

2. **Ec** nu are egalizatori. De exemplu, dacă $A=\{a,b\}$, $a\neq b$, $f(a)=a$, $f(b)=A$, să presupunem că f şi 1_A au un egalizator $k\in Ec(N,A)$. Fie $g\in Ec(D_0, A)$ definit prin $g(x_0)=a$. Atunci există un unic $h\in Ec(D_0,N)$ astfel ca $g=kh$, deci un unic $n\in h(x_0)$ astfel ca $a=k(n)$ şi desigur, atunci $h(x_0)=n$.

Fie $g'\in Ec(D_0,A)$, $g'(x_0)=A$. Atunci există un unic $h'\in Ec(D_0,N)$ astfel ca $g'=kh'$. Cum morfismul k este monomorfism, din 3.3. rezultă că $h'(x_0)\neq n$ şi există $n'\in h(x_0)$, $n'\neq n$ astfel ca $b\in k(n')$, dar k este egalizator, deci $k(n')=A$, iar din proprietatea de unicitate a lui h' rezultă că $h'(x_0)=n'$.

Fie acum $h''\in Ec(D_0,N)$, $h''(x_0)=\{n,n'\}$; atunci $g'(x_0)=A=kh''(x_0)$, în contradicţie cu proprietatea de unicitate a morfismului h'.

Prin urmare Ec nu are limite proiective. Totuşi, dacă o I-diagramă conservativă din Ec are limită suntem în măsura să precizăm structura acesteia.

3.22. Propoziţie. **Dacă I-diagrama conservativă F din Ec, are are limită în Ec, atunci** $\varprojlim_{Ec} F=(PIM_c, f_i)$ **unde** PIM_c **este mulţimea elementelor minimale ale mulţimii** $PI_c=\{\Pi A_i \mid \emptyset\neq A_i\subset X_i=F(i),\ A_i=F(s)A_j,\ \forall i,j\in I$ **şi** $s\in I(i,j)\}$ **ordonată cu relaţia de incluziune,** iar $f_i(\Pi A_i)=A_i$ pentru orice $i\in I$ şi orice $\Pi A_i\in PIM_c$.

Demonstraţie. Fie $(X,f_i')=\varprojlim_{Ec} F$. Atunci legea $g\rightarrow(f_i'g)$ defineşte o bijecţie între $Ec(Y,X)$ şi mulţimea $FI_c(Y,F)=\{(g_i) \mid g_i\in Ec(Y,X_i),\ F(s)g_j=g_i,\ \forall s\in I(i,j)\}$. Conform 3.17.2 este suficient să indicăm o bijecţie f din $Ef(PIM_c,X)$ astfel că $(f_i'f)=(f_i)$. Deoarece $(f_i)\in FI_c(PIM_c,F)$, rezultă că există un unic $f\in Ec(PIM_c,X)$ astfel ca $(f_i)=(f_i'f)$. Fie $g\subset f$ şi $x=\Pi A_i\in PIM_c$. Atunci $\Pi f_i'g(x)\in PI_c$ şi $\Pi f_i'g(x)\subset\Pi f_i(x)\in PIM_c$, deci $(f_i'g)=(f_i'f)$ şi $f=g$. Prin urmare $f\in Ef(PIM_c,X)$.

Fie $Y\in Ec$, $g,g'\in Ec(Y,PIM_c)$ astfel că $fg=fg'$; atunci $(f_i'fg)=(f_i'fg')$, deci $(f_ig)=(f_ig')$, iar din definiţia morfismelor f_i, $i\in I$, rezultă că $g=g'$. Prin urmare f este monomorfism.

Fie acum $y\in X$; atunci $\Pi f_i'(y)\in PI_c$. Dacă $x=\Pi A_i\subset\Pi f_i'(y)$, unde $x\in PI_c$ atunci există un unic $h\in Ec(\{y\},X)$ pentru care $A_i=f_i'h(y)$, pentru orice $i\in I$. Fie $h'(y)=\{y\}\cup h(y)$. Atunci $f_i'(y)=f_i'h(y)$, pentru orice $i\in I$, deci $h'(y)=\{y\}$, $A_i=f_i'(y)$, iar $\Pi f_i'(y)\in PIM_c$; prin urmare f este surjectivă.

În plus, dacă $y\in Y\in Ec$, $(g_i)\in FI_c(Y,F)$ şi $g(y)=\{x\in PIM_c \mid f_i(x)\subset g_i(y),\ \forall i\in I\}$, atunci $(f_ig)=(g_i)$.

3.23. Propoziţie. **Orice I-diagramă F din Ec are limită în (Ec,Ef) şi** $\varprojlim_{(Ec,Ef)} F=(PIM,f_i)$, unde PIM **este mulţimea elementelor minimale ale mulţimii** $PI=\{\Pi A_i \mid \emptyset\neq A_i\subset X_i=F(i),\ F(s)A_j\subset A_i$, **pentru orice** $i,j\in I$ **şi** $s\in I(i,j)\}$ **ordonată cu relaţia de incluziune, iar** $f_i(\Pi A_i)=A_i$, pentru orice $i\in I$ şi orice $\Pi A_i\in PIM$.

Demonstraţie. Evident $(f_i)\in FIM(PIM,F)$. Pentru orice $g\in Ef(X,PIM)$ şi $s\in I(i,j)$, $F(s)f_jg\subset f_ig$, deci $(f_ig)\in FI(X,F)$; dacă $x\in X$, $(g_i)\in FI(X,F)$ şi $(g_i)\subset(f_ig)$, atunci $\Pi g_i(x)\in PI$.

$g(x)=\Pi f_i g(x)$ şi $\Pi g_i(x) \subset g(x) \in PIM$, deci $(g_i)=(f_i g)$; prin urmare $(f_i g) \in FIM(X,F)$, iar aplicaţia definită prin $g \to (f_i g)$ este o injecţie din $Ef(X,PIM)$ cu $FIM(X,F)$; ea este şi surjectie, căci dacă $(g_i) \in FIM(X,F)$, şi $x \in X$, atunci $A=\Pi g_i(x) \in PIM$ şi $f_i A=g_i(x)$, pentru orice $i \in I$. Prin urmare $\lim_{(Ec,Ef)} F=(PIM,f_i)$.

3.24. Observaţie. Cu notaţiile din 3.22. şi 3.23. să remarcăm faptul că dacă F este o **I**-diagramă conservativă, atunci $PI_c \subset PI$, deci nu putem afirma că limitele proiective în **Ec**, dacă există, coincid cu cele din **(Ec,Ef)**. Totuşi coincidenţa se realizează în cazul în care I este o mulţime preordonată, dirijată la dreapta şi în cazul în care F este o diagramă discretă.

3.25. Propoziţie. Fie $F=(X_i,f_{ij})$ un sistem proiectiv conservativ din **Ec** de bază I, dirijată la dreapta. Dacă există $\underleftarrow{\lim}_{(Ec)} F$, aceasta coincide cu $\underleftarrow{\lim}_{(Ec,Ef)} F$.

Demonstraţie Fie $(PIM,f_i)=\underleftarrow{\lim}_{(Ec,Ef)} F$ că în 1.10., $(A_i) \in PIM$, $i_0 \in I$ şi $j_0 \in I_i$. Atunci $J_i \cap I_i$ este nevidă, pentru orice $i \in I$. Fie $B_i=\bigcup_{k \in J_i} f_{ik} A_k$, pentru orice $i \in I$. Atunci $(B_i) \in PI$ şi $(B_i) \subset (A_i)$, deci $(B_i)=(A_i)$ şi $A_{i_0}=f_{i_0 j_0} A_{j_0}$. Fie $(Y,g_i)=\underleftarrow{\lim}_{Ec} F$. Cum pentru orice $i,j \in I$, $i \leq j$, $f_{ij} f_j = f_i$ rezultă că există un unic $g \in Ec(PIM,Y)$ astfel ca $(g_i g)=(f_i)$.

Pe de altă parte, dacă $y \in Y$, atunci $(g_i(y))$ este un element minimal în PI; într-adevăr dacă $(C_i) \in PI$, $(C_i) \subset (g_i(y))$, fie $B_i=\bigcup_{j \in I_i} f_{ij} C_j$, $i \in I$; atunci $(B_i) \in PI$ şi $f_{ij} B_j=B_i$, pentru orice $i \in I$ şi $j \in I_i$. Cum $(B_i) \subset (g_i(y))$, rezultă că $(B_i)=(g_i(y))$, deci şi $(C_i)=(g_i(y))$. Prin urmare există un unic $h \in Ef(Y,PIM)$ astfel că $(f_i h)=(g_i)$. În consecinţă $gh=1_Y$ şi $hg=1_{PIM}$, deci cele două limite coincid (pînă la un izomorfism).

3.26. Observaţie. Rezultatul precedent se poate extinde fără dificultăţi pentru cazul în care F este o **I-diagramă, unde I** este o categorie mică filtrantă la dreapta. [PR 71]

3.27. Exemple 1. Fie $F=(X_n,f_{nm})$, unde $X_n=\{k2^{-n} \mid k=\overline{0,2^n}\}$, $n\in\mathbb{N}$, $f_{nn}=1_{X_n}$ şi pentru $n<m$, $n,m\in\mathbb{N}$

$$f_{nm}(x)=\begin{cases}\{x\} & \text{, dacă } x\in X_n\\ \{k2^{-n},(k+1)2^{-n}\} & \text{, dacă } x\in X_m\cap(k2^{-n},(k+1)2^{-n})\end{cases}$$

Desigur F este un sistem proiectiv conservativ de bază $\mathbb{N}$ în **Ec**. Atunci $\underset{\longleftarrow}{\lim}_{(Ec,Ef)}F=([0,1],f_n)$, unde $f_n(x)=\{x\}$, dacă $x\in X_n$ şi $f_n(x)=\{k2^{-n},(k+1)2^{-n}\}$, dacă $x\in(k2^{-n},(k+1)2^{-n})$, oricare ar fi $x\in[0,1]$ şi $n\in\mathbb{N}$. Într-adevăr pentru orice $A=\Pi A_n\in PIM$ există două posibilităţi:

(a) există $m\in\mathbb{N}$ şi $x_m\in X_m$ astfel că $A_n=\{x_m\}$, pentru orice $n\geq m$; în acest caz identificăm A cu x_m.

(b) pentru orice $n\in\mathbb{N}$, A_n conţine exact două elemente a_n şi b_n pentru care $b_n-a_n=2^{-n}$; în acest caz există un unic $x\in[0,1]$ pentru care $a_n\leq x\leq b_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$; în acest caz identificăm pe A cu x.

Cum limita proiectivă este unică pînă la un izomorfism şi identificările de la (a) şi (b) stabilesc o bijecţie PIM $\to$ [0,1], din 3.23. rezultă că $([0,1],f_n)=\underset{\longleftarrow}{\lim}_{(Ec,Ef)}F$.

2. Fie $\varepsilon_n\searrow 0$ (în $\mathbb{R}$), (M, d) un spaţiu metric complet, $X_n=M$, $f_{nm}(x)=\{y\in M \mid d(x,y)\leq \varepsilon_n-\varepsilon_m\}$, pentru orice $n,m\in\mathbb{N}$, $n\leq m$ şi $x\in M$. Atunci $F=(X_n,f_{nm})$ este un $\mathbb{N}$-sistem proiectiv care, în general, nu este conservativ. Vom arăta folosind teorema 1.12. că $(M,g_n)=\underset{\longleftarrow}{\lim}_{(Ec,Ef)}F$, unde $g_n(x)=\{y\in M \mid d(x,y)<\varepsilon_n\}$, pentru orice $x\in M$ şi $n\in\mathbb{N}$. Desigur, cu notaţiile din 1.12., dacă $(x_n)\in X$, atunci (x_n) este un şir Cauchy, deci există $\lim x_n=x\in M$, iar $(x_n)R(y_n)$ dacă şi numai dacă $\lim x_n=\lim y_n$. Atunci corespondenţa $A\to\lim x_n=x$, unde $(x_n)\in A$, stabileşte o bijecţie din PIM pe M, iar $f_n(A)=g_n(x)$, pentru orice $(x_n)\in A\in X/R$, cu $x=\lim x_n$ defineşte familia $(f_n)\in FIM(PIM,F)$ pentru care $\underset{\longleftarrow}{\lim}_{(Ec,Ef)}F=(M,g_n)=(PIM,f_n)$.

3. Este posibil că $PIM=\varnothing$. Fie $F=(\mathbb{N},f_{nm})$, unde $f_{nm}(x)=\{x-m+n,x-m+n+1,\ldots,x\}$, dacă $x-m\geq n$ şi $f_{nm}(x)=\mathbb{N}$, pentru $x\leq m$ $(n<m)$. Am obţinut un sistem proiectiv conservativ în **Ec** pentru care $PIM=\varnothing$.

3.28. Observaţie. În continuare vom analiza existenţa limitelor proiective în a-categorii la stânga concrete **(C,C')** care verifică (3.1) şi condiţia: oricare ar fi o categorie mică **I**, pentru orice **I**-diagramă F pentru care $(L,f_i)=\underleftarrow{\lim}_{(\mathbf{Ec},\mathbf{Ef})}\Box F$ există $L'\in C$ astfel că $\Box L'=L$, $f_i\in C(L',X_i)$, $i\in I$ şi pentru orice $Y\in C$ şi orice $g\in Ef(\Box Y,L)$ are loc implicaţia:

$$[f_ig\in C(Y,X_i),\ \forall i\in I],\Rightarrow g\in C'(Y,L') \tag{3.2}$$

3.29. Teoremă. Condiţia necesară şi suficientă pentru că o a-categorie la stânga concretă **(C,C')** care verifică (3.1) să aibe limite proiective este că ea să verifice proprietatea (3.2).

Demonstraţie. Fie F o **I**-diagramă în **C**. Din (3.1) rezultă că $(g_i)\in FIM(D'_0,F)$ dacă şi numai dacă $(g_i)\in FIM(D_0,\Box F)$. Din 2.11. şi (3.1) rezultă că $(h_i)\in FIM(Z,F)$ dacă şi numai dacă $(h_i)\in FIM(\Box Z,\Box F)$, pentru orice $Z\in C$. Notăm $(L,f_i)=\underleftarrow{\lim}_{(\mathbf{Ec},\mathbf{Ef})}\Box F$, limită care există conform 3.23 şi, ca de obicei, $F(i)=X_i$, $i\in I$.

1. Necesitatea. Fie $(L',f_i')=\underleftarrow{\lim}_{(C,C')}F$. Conform observaţiei precedente, $(f_i')\in FIM(\Box L',\Box F)$, deci există o unică funcţie $h: \Box L'\to L$ pentru care $(f_ih)=(f_i')$.

Fie $x\in L$ fixat şi $k_x(x_0)=x$ ($D_0=\{x_0\}$, conform (3.1)). Atunci $(f_ik_x)\in FIM(D_0,F)$, deci există o unică funcţie $f: D_0\to L'$ astfel ca $(f_i'f)=(f_ik_x)$. Prin urmare $x'=f(x_0)$ este unicul element din L' pentru care $h(x')=x$; în consecinţă h este o bijecţie. Cum limita proiectivă în (**Ec**,**Ef**) este unică pînă la o bijecţie (vezi 3.17.2.) putem considera că $\Box L'=L$ şi $(f_i')=(f_i)$.

Fie acum $Y\in C$ şi $g\in Ef(\Box Y,L)$ astfel ca $f_ig\in C(Y,X_i)$, pentru orice $i\in I$. Conform consideraţiilor din debutul demonstraţiei, $(f_ig)\in FIM(\Box Y,\Box F)$, deci $(f_ig)\in FIM(Y,F)$. Prin urmare există un unic $g'\in C'(Y,L')$ astfel ca $(f_i'g')=(f_ig)$, deci $(f_i'g')=(f_i'g)$, de unde conform ipotezei rezultă că $g'=g$ şi $g\in C'(Y,L')$. Cu aceasta (3.2) este complet verificată.

2. Suficienţa. Din observaţia iniţială rezultă că $(f_i)\in FIM(L',F)$, unde ca în (3.2) $\Box L'=L$. Mai mult, pentru orice $Z\in C$ şi $(h_i)\in FIM(Z,F)$, există o unică funcţie $g: \Box Z\to L$ astfel că $(f_ig)=(h_i)$. Din (3.2) rezultă că $g\in C'(Z,L')$. Prin urmare $\underleftarrow{\lim}_{(C,C')}F=(L',f_i)$

3.30. Observaţie. Fie **(C,C')** o a-categorie la stânga concretă care verifică (3.1), F o I-diagramă în **C** şi ea în 3.23., $\underset{\longleftarrow}{\lim}_{(\mathbf{Ec},\mathbf{Ef})}\square F=(PIM,f_i)$. Condiţia (3.2) şi teorema 3.29. ne asigură că mulţimea PIM se poate înzestra cu structura specifică obiectelor din **C** obţinând astfel obiectul $L\in C$ astfel ca $\square L=PIM$, iar corespondenţele f_i sunt compatibile cu structura acestuia. In particular se poate arăta că **(C,C')**, în aceste condiţii, este cu produse stricte. Dacă în plus: pentru orice mulţime nevidă I, orice I-familie de morfisme $\{f_i\}$ este superior completă şi

$$\square(\cup f_i)=\cup(\square f_i) \qquad (3.3)$$

a-categoria (**C**,**C'**) devine superior tare completă (la stânga).

3.31. Teoremă. Orice a-categorie la stânga concretă care verifica (3.1), (3.2) şi (3.3) este constructivă.

Demonstraţie. Pentru a arăta că **(C,C')** este cu produse stricte, conform 3.29., este suficient să arătăm că **(Ec,Ef)** are această proprietate. Fie F o I-diagramă discretă în **Ec**; conform 3.23. şi 2.13.,

$$\underset{\longleftarrow}{\lim}_{(\mathbf{Ec},\mathbf{Ef})}F=\underset{\longleftarrow}{\lim}_{\mathbf{Ef}}F=(\Pi X_i,p_i),$$

unde p_i este proiecţia canonică a produsului ΠX_i din **Ef** pe $X_i=F(i)$, $i\in I$. Dacă $X\in Ec$ şi $(g_i)\in\Pi(X,X_i)$, atunci unicul morfism care verifică egalitatea $(p_i g)=(g_i)$ este definit prin $g(x)=\Pi g_i(x)\subset\Pi X_i$, $x\in X$; deci $\underset{\longleftarrow}{\lim}_{\mathbf{Ec}}F=(\Pi X_i,p_i)$ şi, conform 2.14, **(Ec,Ef)** este cu produse stricte.

Dacă $\{h_i\}$ este o I-familie de morfisme din C(X,Y) şi $h\in C(Y,Z)$, cum **Ec** este tare completă la stânga, din (3.3) rezultă că:

$$\cup hh_i=\cup(\square hh_i)=\cup(\square h)(\square h_i)=(\square h)(\cup\square h_i)=h(\cup h_i),$$

deci (**C**,**C'**) este superior tare completă la stânga (vezi 2.23.). În consecinţă, din 2.28. rezultă că (**C**,**C'**) este constructivă.

3.32. Consecinţă. [Ber 75b]. A-categoria **(Ec,Ef)** este constructivă.

3.33. Observaţie. Restul secţiunii îl dedicăm unor exemplificări ale teoriei făcute. Vom extinde rezultatele privind sistemele proiective în a-categorii de spaţii măsurabile generalizate din [Ber.76], [Ber.77], [Bun.85], cele din [Ber.71], [Ber.75b] şi [Top.72] pe a-categorii de spaţii topologice şi cele din [DB.86a], [DB.86b] şi [DR.86a] pentru a-categorii de mulţimi ordonate şi corespondenţe izotone în sensul lui [MS.73], [MS.74], [Smi.73], [RL.85] etc.

3.34. Definiţii. 1.Fie X o mulţime. Numim *pavare* a mulţimii X o clasă nevidă P_X de submulţimi ale acesteia; cuplul (X,P_X) îl vom numi *mulţime pavată*; dacă $Z \subset X$, pavarea $\{X' \cap Z \mid X' \in P_X\}$ a mulţimii Z o numim *urma* pavării P_X pe Z.

2. Fie (X,P_X) şi (Y,P_Y) două mulţimi pavate; $f \in Ec(X,Y)$ se numeşte *corespondenţă măsurabilă* (faţă de pavările P_X şi P_Y) dacă $f^{-}Y' \in P_X$ pentru orice $Y' \in P_Y$. Dacă $\mu: P_X \to \mathbb{R}$ şi $\nu: P_Y \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii spunem că *f conservă măsura* (faţă de μ şi ν) dacă f este măsurabilă şi:

$$Y' \in P_Y,\ f^{-}Y' \neq \emptyset \Rightarrow \nu(Y') \leq \mu(f^{-}Y')$$

Dacă f este o funcţie spunem că ea *conservă măsura strict* dacă f este măsurabilă şi $\mu(f^{-}Y') = \nu(Y')$, pentru orice $Y' \in P_Y$.

3. Vom nota cu Y_0 mulţimea punctuală $\{y_0\}$, cu B_0 mulţimea $\{\emptyset, Y_0\}$, iar cu $\mu_0: B_0 \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $\mu_0(\emptyset)=0$ şi $\mu_0(Y_0)=1$.

Fie în continuare (X,P_X) o mulţime pavată astfel ca $\emptyset$, $X \in P_X$.

4. Dacă P_X este o latice faţă de reuniune şi intersecţie, iar $\mu(\emptyset)=0$, $\mu(X)=1$, $\mu(A)+\mu(B)=\mu(A \cup B)+\mu(A \cap B)$ şi $A \subset B \Rightarrow \mu A \leq \mu B$, pentru orice $A,B \in P_X$, atunci (X,P_X) se numeşte *spaţiu semipremăsurabil*, *μ-semipreprobabilitate* pe P_X, iar(X,P_X,μ) *spaţiu semipreprobabilistic*.

5. Dacă P_X este o algebră de submulţimi ale lui X, iar μ este o semipreprobabilitate pe P_X, atunci (X,P_X) se numeste *spaţiu premăsurabil*, *μ-preprobabilitate* pe P_X, iar (X,P_X,μ) *spaţiu preprobabilistic*.

6. Dacă P_X este închisă la reuniuni şi intersecţii numărabile, μ este o preprobabilitate pe P_X astfel ca pentru orice şir crescător (A_n) şi orice şir descrescător (B_n) din P_X, $n \in \mathbb{N}$ $\mu(\cup A_n)=\sup\mu A_n$, $\mu(\cap B_n)=\inf\mu(B_n)$, atunci P_X se numeşte *semi-σ-algebră de submulţimi* (ale lui X), (X,P_X)-*spaţiu semimăsurabil*, *μ-semiprobabilitate* (pe P_X), iar (X,P_X,μ)-*spaţiu semiprobabilistic*.

7. Dacă P_X este o σ-algebră de submulţimi,iar μ este o măsură de probabilitate, atunci (X,P_X) se numeşte *spaţiu măsurabil*, iar (X,P_X,μ)-*spaţiu probabilistic*.

3.35. Notaţii şi observaţii 1. **Esp** (respectiv **Ep, Es,Em**) este categoria spaţiilor semipremăsurabile (premăsurabile, semimăsurabile, măsurabile) şi a corespondenţelor măsurabile. Dacă $C\in\{$**Esp,Ep,Es,Em**$\}$ vom nota cu **C'** categoria pentru care C'=C, ale cărei morfisme sunt funcţiile măsurabile; se verifică imediat că (**C**,**C'**) este o a-categorie la stânga concretă de tip stâng $\{(Y_0,B_0)\}$.

2. **EspP** (respectiv **EpP,EsP,EP**) este categoria ale cărei obiecte sunt spaţiile semipreprobabilistice (preprobabilistice, semiprobabilistice, probabilistice) şi ale cărei morfisme sunt corespondenţele care conservă măsura. Dacă **C**=**Esp** (respectiv **Ep,Es,Em**), vom nota **CP**=**EspP** (respectiv,**EpP,EsP,EP**), iar cu **CP'** categoria pentru care CP=CP' şi ale cărei morfisme sunt funcţiile care conservă măsura. Se verifică imediat că (**CP**,**CP'**) este o a-categorie la stânga concretă de tip stâng $\{(Y_0,B_0,\mu_0)\}$. Vom nota cu Δ: **CP**→**C** functorul de uitare.

3. În (**Esp**,**Esp'**) există morfisme minimale care nu sunt stricte. De exemplu fie $X=Y=\{x,y,z\}$,cu elemente distincte, $P_X=\{\emptyset,X,\{y\},\{x,y\},\{y,z\}\}$ şi P_Y clasa părţilor lui Y. Fie $f\in Ec(X,Y)$ definită prin: $f(x)=x$, $f(y)=\{x,z\}$, $f(z)=z$. Se verifică imediat că f este măsurabilă, iar dacă $g\subsetneq f$, atunci g nu este măsurabilă. Prin urmare $f\in$ **Esp**$((X,P_X),(Y,P_Y))$ este minimal fără a fi un morfism strict.

4. Fie $(X,P_X,\mu),(Y,P_Y,\gamma)\in$ **EP** şi $f\in$ **Em'**$((X,P_X),(Y,P_Y))$. Atunci f conservă măsura, i.e. $f\in EP'((X,P_X,\mu),(Y,P_Y,\gamma))$, dacă şi numai dacă pentru orice $Y'\in P_Y$:

$$f^{-}Y'\notin\{\emptyset,X\} \Rightarrow \mu(f^{-}Y') = \gamma(Y').$$

5. Fie P o clasă de submulţimi ale lui X. Notăm:

P_X - laticea cu prim şi ultim element generată de X, i.e. reuniunile finite de intersecţii finite şi intersecţiile finite de reuniuni finite ale elementelor din P.

R(P) - algebra de submulţimi generată de P,i.e. reuniunile de forma $\cup(A_n\setminus B_n)$, unde $A_n,B_n\in P_X$, cu mulţimile $A_n\setminus B_n$, $n\in\mathbf{N}$, mutual disjuncte.

$<P>_X$ - semi-σ-algebra generată de P;

S(P) - σ-algebra generată de P.

3.36. Teoremă. Fie $\mathbf{C}\in\{\mathbf{Esp},\mathbf{Ep},\mathbf{Es},\mathbf{Em}\}$. Atunci $(\mathbf{C},\mathbf{C}')$ este cu limite proiective.

Demonstraţie. Din 3.35.1. rezultă imediat ca a-categoria $(\mathbf{C},\mathbf{C}')$ verifică (3.1). Fie F o $\mathbf{I}$-diagramă în $\mathbf{C}$, $F(i)=(X_i,P_i), i\in\mathbf{I}$ şi $(L,f_i)=\varprojlim_{(\mathbf{Ec},\mathbf{Ef})}\Box F$. Ca în 3.35.5. considerăm cea mai mică pavare P_L a mulţimii L astfel ca $\{f_i^{-}A_i \mid A_i\in P_i,\ i\in I\}\subset P_L$ şi pentru care $(L,P_L)\in C$. Fie acum $(Y,P_Y)\in C$ şi $g\in Ef(\Box Y,L)$ astfel ca $f_i g:(Y,P_Y)\to(X_i,P_i)$ să fie măsurabilă pentru orice $i\in I$. Fie $P=\{A\subset L \mid g^{-}A\in P_Y\}$. Atunci: $(L,P_L)\in C$ şi $\{f_i^{-}A_i \mid A_i\in P_i,\ i\in I\}\subset P$, deci conform construcţiei pavării P_L, $P\subset P_L$, incluziune ce atrage imediat măsurabilitatea funcţiei g, i.e. $g\in C'((Y,P_Y),(L,P_L))$. Prin urmare $(\mathbf{C},\mathbf{C}')$ verifică şi condiţia (3.2). Conform teoremei 3.29 $(\mathbf{C},\mathbf{C}')$ este cu limite proiective.

3.37. Exemplu. Fie $\mathbf{C}$ ca în 3.36. şi $F=(X_n,f_{nm})$ sistemul proiectiv din exemplul 3.27.1. Fie P_n σ-algebra discretă a lui X_n, $n\in\mathbb{N}$. Atunci $F_1=((X_n,P_n),f_{nm})$ este un sistem proiectiv în $\mathbf{C}$, iar $\Box F_1=F$. Notăm, ca în 3.27.1., $\varprojlim_{(\mathbf{Ec},\mathbf{Ef})}\Box F_1=([0,1],f_n)$, cu B σ-algebra boreliană a lui [0,1], unde pe [0,1] am considerat topologia uzuală şi cu P mulţimea reuniunilor finite de intervale deschise din [0,1] cu marginile superioare în $\cup X_n$. Atunci:

$$\varprojlim_{(\mathbf{Esp},\mathbf{Esp}')}F_1=(([0,1],P),f_n)\quad \varprojlim_{(\mathbf{Ep},\mathbf{Ep}')}F_1=(([0,1],R(P)),f_n)\ \text{şi}$$

$$\varprojlim_{(\mathbf{Es},\mathbf{Es}')}F_1=\varprojlim_{(\mathbf{Em},\mathbf{Em}')}F_1=(([0,1],B),f_n)$$

3.38. Teoremă. Fie $\mathbf{C}\in\{\mathbf{Esp},\mathbf{Ep},\mathbf{Es},\mathbf{Em}\}$, F o $\mathbf{I}$-diagramă în $\mathbf{CP}$ şi $((X,P_X),f_i)=\varprojlim_{(\mathbf{C},\mathbf{C}')}\Lambda F$. Dacă există $\varprojlim_{(\mathbf{CP},\mathbf{CP}')}F$, atunci există o unică funcţie $\mu: P_X\to\mathbb{R}$ astfel ca $((X,P_X,\mu),f_i)=\varprojlim_{(\mathbf{CP},\mathbf{CP}')}F$.

Demonstraţie. Din 3.35.2. rezultă imediat că $(\mathbf{CP},\mathbf{CP}')$ verifică (3.1). Fie $\varprojlim_{(\mathbf{CP},\mathbf{CP}')}F=((Y,P_Y,\nu),f_i')$. Din teorema 3.29. rezultă că există o unica funcţie măsurabilă

$h\in C'((Y,P_Y),(X,P_X))$ astfel ca $(f_ih)=(f_i')$ şi h este bijecţie. Definim $\mu A=\nu(h^{-}A)$, pentru orice $A\in P_X$. Atunci $(X,P_X,\mu)\in CP$ şi $f_i\in CP((X,P_X,\mu),(X_i,P_i,\mu_i)=F(i))$, pentru orice $i\in I$. Prin urmare $(f_i')\in FIM((X,P_X,\mu),F)$, deci există o unică funcţie care conservă măsura $g\in CP'((X,P_X,\mu),(Y,P_Y,\nu))$ astfel ca $(f_i'g)=(f_i)$. Atunci $f_ihg(x)=f_i(x)$, pentru orice $i\in I$ şi $x\in X$, deci $g=h^{-1}$ şi $h\in IzCP((Y,P_Y,\nu),(X,P_X,\mu))$.

3.39. Exemplu. Fie $F_2=((X_n,P_n,\mu_n),f_{nm})$ unde $((X_n,P_n),f_{nm})=F_1$ ca în 3.37., iar μ_n este măsura Dirac la 0, i.e. $\mu_n(A_n)=1$ dacă $0\in A_n$ şi $\mu_n(A_n)=0$ în rest, $n\in\mathbb{N}$, $A_n\in P_n$. Atunci F_2 este un sistem proiectiv în **EspP (EpP,EsP,EP)**. Considerăm δ_0 măsura Dirac la 0 definită, respectiv, pe P, R(P) şi B, (vezi 3.37.). Atunci:

$$(([0,1],P,\delta_0),f_n)=\varprojlim_{(\mathbf{EspP},\mathbf{EspP'})}F_2 \text{ şi } (([0,1],B,\delta_0),f_n)=\varprojlim_{(\mathbf{EsP},\mathbf{EsP'})}F_2=\varprojlim_{(\mathbf{EP},\mathbf{EP'})}F_2$$

În schimb vom arăta că limita proiectivă în **(EpP,EpP')** nu există. Conform 3.37. $\varprojlim_{Ep,Ep'}\Delta F_2=(([0,1],R(P)),f_n)$, unde orice element din R(P) este o reuniune finită de intervale disjuncte C_k din [0,1] având marginea superioară în $\cup X_n$. Să presupunem, prin absurd, că există $\varprojlim_{EpP,EpP'}F_2=(([0,1],R(P),\mu)f_n)$, ca în 3.38.. Definim pentru orice $a\in[0,1]$ funcţia μ_a pe R(P) astfel: $\mu_aA=0$, dacă $0\notin\overline{A}$; $\mu_aA=1-a$, dacă $0\in\overline{A\setminus\{0\}}\setminus A$,; $\mu_aA=a$, dacă $0\in A\setminus\overline{A\setminus\{0\}}$, şi $\mu_aA=1$ dacă $0\in A\cap\overline{A\setminus\{0\}}$, $A\in R(P)$. Se arată uşor că $([0,1],R(P),\mu_a)\in$ **EpP**. Mai mult, pentru orice $A_n\in P_n$, $\mu_nA_n=1\Leftrightarrow 0\in A_n \Leftrightarrow [0,2^{-n})\subset f_n^-A_n\Leftrightarrow\mu_a(f_n^-A_n)=1$, deci f_n conservă măsura şi $(f_n)\in FIM(([0,1],R(P),\mu_a),F_2)$, pentru orice $a\in[0,1]$. Prin urmare $([0,1],R(P),\mu_a)$ este izomorf cu $([0,1],R(P),\mu)$, pentru orice $a\in[0,1]$ în contradicţie cu 3.38..

3.40 Observaţie. "Candidatul natural" pentru limita proiectivă în **(EpP,EpP')** a lui F_2 - $(([0,1],R(P),\delta_0),f_n)$ - nu este limita proiectivă autentică din cauza existenţei mai multor ideale maximale în R(P). De exemplu pentru a=0 şi a=1 se obţin două probabilităţi μ_0 şi μ_1 având valorile în {0,1}; lor le corespund două ideale maximale în R(P): $M(\mu_0)=\{A\in R(P):\mu_0A=0\}=\{A\in R(P)\mid 0\notin\overline{A\setminus\{0\}}\}$ şi $M(\mu_1)=\{A\in R(P):\mu_1A=0\}=\{A\in R(P)\mid 0\notin A\}$. Vom analiza acest "defect" în §.4 prin intermediul dualităţii Stone.

În continuare analizăm existenţa limitelor proiective în câteva a-categorii de spaţii topologice având drept morfisme corespondenţe continue definite prin intermediul inverselor slabe, respectiv tari (vezi 3.1.).

3.41. Definiţii. 1. Fie $(X,P_X),(Y,P_Y)$ două spaţii topologice. Corespondenţa $f\in Ec(X,Y)$ se numeste *continuă* (inferior semi-continuă) dacă $f^{\cdot}A\in P_X$ pentru orice $A\in P_Y$; f este *tare continuă* (superior semi-continuă) dacă $f^{-1}A\in P_X$ pentru orice $A\in P_Y$. Vom nota cu **Top (Topt)** categoria ale cărei obiecte sunt spaţiile topologice şi ale cărei morfisme sunt corespondenţele continue (tari continue) şi cu **Top'=Topt'** categoria spaţiilor topologice şi a funcţiilor continue. Evident **(Top,Top')** şi **(Topt,Topt')** sunt a-categorii la stânga de tip stâng $\{(Y_0,B_0)\}$; reamintim că $Y_0=\{y_0\}$ şi $B_0=\{\emptyset,Y_0\}$.

2. Notăm cu **Hausc** categoria ale cărei obiecte sunt spaţiile Hausdorff nevide şi ale cărei morfisme sunt corespondenţele tari continue cu valori compacte, iar cu **Hausc'** categoria cu aceleaşi obiecte şi cu morfismele - funcţiile continue. Desigur şi (**Hausc**, **Hausc'**) este o a-categorie la stânga concretă de tip stâng $\{(Y_0,B_0)\}$.

3.42. Observaţie. Nici una dintre categoriile **Top**, **Topt** ori **Hausc** nu este cu limite proiective, după cum s-a constatat în [Top.72]. Exemple triviale demonstrează că de fapt aceste categorii nu posedă egalizatori. În lucrarea amintită se dau condiţii foarte "tari" şi complicate de existenţă a limitelor proiective pentru anumite sisteme proiective (vezi de exemplu [Top.72, §.6]). Dacă sistemele proiective posedă aceste calităţi, limitele proiective coincid cu cele a-categoriale. În schimb, limitele proiective a-categoriale există întotdeauna Mai mult

3.43. Teoremă. Fie $C\in\{$**Top,Topt,Hausc**$\}$. Atunci **(C,C')** este constructivă.

Demonstraţie. A-categoria **(C,C')** este de tip stâng $\{(Y_0,B_0)\}$, deci condiţia (3.1) este satisfăcută. Fie F o **I-diagramă** în **C**, unde $F(i)=(X_i,T_i)$ şi $(X,f_i)=\lim_{(Ec,Ef)}\square F$

1. Dacă **C=Top**, fie T topologia generată pe X de mulţimea $\{f_i^{\cdot}D_i \mid i\in I, D_i\in T_i\}$. Condiţia (3.2) fiind satisfăcută, din 3.29. rezultă că **(Top,Top')** este cu limite proiective. Fie

$\{g_i\}$ o I-familie din Top((X,P_X),(Y,P_Y)). Atunci $\cup\square g_i$ este o corespondenţă continuă, deci(3.3) este verificată, şi, conform teoremei 3.31. rezultă că **(Top,Top')** este constructivă. În particular ((X,T),f_i)=$\underleftarrow{\lim}_{(\mathbf{Top},\mathbf{Top}')}$F.

2. Dacă **C=Topt**, luând pe X topologia T_t generată de mulţimea $\{f_i^{-1}D_i \mid i\in I, D_i\in T_i\}$, $\lim_{\mathbf{Topt},\mathbf{Topt}'}$F=((X,$T_t$),$f_i$) şi analog cazului precedent, se verifică (3.1),(3.2) şi (3.3); aplicând din nou 3.31. rezultă că **(Topt,Topt')** este constructivă.

3. Fie acum **C=Hausc**. Definim: PIC=$\{(C_i) \mid \emptyset\neq C_i\subset X_i$, C_i compactă în $X_i, i\in I$ şi pentru orice $s\in I(i,j)$, $F(s)C_i\subset C_j\}$, ordonată cu ordinea produs şi PIMc mulţimea elementelor minimale ale lui PIC. Pentru orice $i\in I$ definim $g_i((C_i))=C_i$, pentru orice $(C_i)\in$PIMc. Fie T_c topologia generată pe PIMc de $\{g_i^{-1}D_i \mid i\in I, D_i\in T_i\}$. Atunci ((PIMc,$T_c$),$g_i$)= $\underleftarrow{\lim}_{(\mathbf{Hausc},\mathbf{Hausc}')}$F. Într-adevăr, din lema lui Zorn, PIMc$\neq\emptyset$, (PIMc,T_c) este un spaţiu Hausdorff, iar $g_i\in$FI(PIMc,T_c),F). Cum **(Hausc,Hausc')** este de tip stâng $\{(Y_0,B_0)\}$, folosind 2.11., pentru orice (Y,P_Y)$\in$Hausc are loc echivalenţa

$(h_i)\in$FIM((Y,P_Y),F)$\Leftrightarrow[\forall y\in Y : (h_i(y))\in$PIMc],

deci $(g_i)\in$FIM((PIMc,T_c),F). Mai mult, pentru orice $(h_i)\in$FIM((Y,P_Y),F) există o funcţie unică $g: Y\to$PIMc astfel ca $(g_ig)=(h_i)$; cum $T=\{U\in \text{PIMc} \mid g^{-}U\in P_Y\}$ este o topologie pe PIMc care conţine mulţimea $\{g_i^{-1}D_i \mid i\in I, D_i\in T_i\}$, rezultă că $T_c\subset T$ şi h este continuă.

Prin urmare **(Hausc,Hausc')** este cu limite proiective. Din demonstraţia de mai sus rezultă că **Hausc** este cu produse; pe de altă parte, limitele proiective în **Hausc'** şi **(Hausc,Hausc')** coincid pentru diagramele discrete, conform 2.13.. Deci **(Hausc,Hausc')** este cu produse tari şi, respectând notaţiile din 1.16., $J_{F_0}(-)=\Pi$ Hausc(-,(X_i,T_i)).

Fie acum (Z,P_Z)$\in$Hausc şi J_F(Z,P_Z)=$\{(h_i)\in$FI((Z,P_Z),F) $\mid \exists h\in$Hausc((Z,P_Z),(PIMc,T_c)): $(g_ih)\subset(h_i)\}$. Presupunem că există $(h_i)\in J_F$(Z,P_Z). Pentru orice $z\in Z$ definim $H((h_i))(z)= \bigcup_{h\in N} h(z)$, unde $N=\{h\in$Hausc((Z,P_Z),(PIMc,T_c)) $\mid (g_ih)\subset(h_i)\}$. Cum pentru orice $h\in N$ şi orice $z\in Z$, h(z) este compactă, g_i fiind tare continuă, rezultă că $H((h_i))$ este cu valori compacte şi este tare continuă; în plus $(g_i,H((h_i))\subset(h_i)$, deci $H((h_i))$ este cel mai mare element din N. Din teorema 1.18.5 rezultă că ((PIMc,T_c),g_i,H,J_F) este o reprezentare a **I**-diagramei F în **(Hausc,Hausc')** şi $((PIMc,T_c),g_i)$ este limita tare a diagramei F. Din 2.20. rezultă că $((PIMc,T_c),k)$ este nivelatorul tare al diagramei nivelate a lui F, unde $k=H_0((g_i))$. Conform teoremei 1.18.6. rezultă că (**Hausc**,**Hausc'**) este constructivă.

3.44. Observaţie. În [BR.84] şi [RHR.84] se face un inventar al diferitelor noţiuni de continuitate pentru corespondenţe. Pentru fiecare tip de corespondenţe se pot introduce a-categorii la stânga concrete de tip stâng $\{(Y_0,B_0)\}$; folosind tehnici similare celor din demonstraţia precedentă se poate constata constructivitatea lor. Detalii asupra unor construcţii speciale de limite proiective în asemenea a-categorii se găsesc în [CD.87a] şi [Da.88a]

3.45. Definiţie. Fie $(H,\le)$ o mulţime preordonată (ordonată). Pe mulţimea părţilor nevide ale lui H, notată P(H), definim relaţiile:

$A\le B \Leftrightarrow [x\in A \Rightarrow \exists y\in B\colon x\le y]$ (3.4)

$A\le B \Leftrightarrow [y\in B \Rightarrow \exists x\in A\colon x\le y]$ (3.5)

3.46. Proprietăţi. Fie $(H,\le)$ o mulţime preordonată (ordonată) nevidă, I o mulţime nevidă, $A_i,B_i\in P(H)$, astfel că $A_i\le B_i$, $i\in I$, unde relaţiile "≤" sunt definite prin (3.4), prin (3.5) sau prin (3.4) şi (3.5). Atunci:

1. P(H) este o mulţime preordonată
2. $\cup A_i \le \cup B_i$;
3. $\Pi A_i \le \Pi B_i$, unde pe produsele ΠA_i, ΠB_i considerăm relaţiile de preordine (ordine) produs, notate tot cu "≤".

3.47. Definiţii. Fie $(H,\le),(H',\le)$ două mulţimi preordonate (ordonate) şi $f\in Ec(H,H')$. Dacă $[a,b\in H,\ a\le b] \Rightarrow f(a)\le f(b)$ (3.6)

unde relaţia $f(a)\le f(b)$ este definită prin (3.4), prin (3.5), sau prin (3.4) şi (3.5), f se numeşte *corespondenţă izotonă.* Notăm: POl=POr=POlr=POf şi Ol=Or=Olr=Of. Convenim că

$f\in POl((H,\le),(H',\le))$ (respectiv $f\in Ol\ ((H,\le),(H',\le))$)

dacă f verifică (3.6) faţă de relaţia (3.4).

$f\in POr((H,\le),(H',\le))$ (respectiv $f\in Or\ ((H,\le),(H',\le))$)

dacă f verifică (3.6) faţă de relaţia (3.5).

$f \in$ POlr((H,≤),(H',≤)) (respectiv $f \in$ Olr ((H,≤),(H',≤)))

dacă f verifică (3.6) faţă de relaţiile (3.4) şi (3.5).

Se verifică imediat, folosind 3.46.1. şi 3.46.2. că **POl**, **POr**, **POlr**, **Ol**, **Or** şi **Olr** sunt categorii ordonate concrete (vezi 1.3.2.) faţă de relaţiile (1.2).

Dacă **C** $\in$ {**POl**,**POr**,**POlr**} vom considera că **C'=POf**, iar dacă **C**={**Ol**,**Or**,**Olr**}, **C'=Of**. Se verifică imediat:

3.48. Proprietăţi. Fie **C**={**POl**, **POr**, **POlr**, **Ol**, **Or**, **Olr**}. Atunci:

1. (**C**,**C'**) este a-categorie la stânga concretă de tip stâng $\{D_0\}$, unde $D_0=\{x_0\}$.
2. (**C**,**C'**) este superior bicompletă;
3. (**C**,**C'**) verifică relaţia (3.1);
4. (**C**,**C'**) verifică relaţia (3.3), deci este şi superior tare completă la stânga.

3.49. Teoremă. Fie **C**={**POl**,**POr**,**POlr**}. Atunci a-categoria (**C**,**C'**) este constructivă.

Demonstraţie. Fie F o **I**-diagramă în **C** şi, ca în 3.23., $(PIM,f_i)=\underleftarrow{\lim}_{(Ec,Ef)}\square F$. Atunci $(PIM,\le)\in C$, unde relaţia "≤" este definită la 3.46.3.. Fie $(Y,\le)\in C$ şi $g\in Ef(Y,PIM)$ astfel că $f_ig\in C(Y,X_i), i\in I$. Atunci pentru orice $x,y\in Y$, $x\le y$, dacă $g(x)=\Pi A_i$, $g(y)=\Pi B_i\in PIM$, din 3.46.3.. $[f_ig(x)\le f_ig(y), i\in I] \Rightarrow [A_i\le B_i, i\in I] \Rightarrow g(x)\le g(y)$, deci $g\in C'((Y,\le),(PIM,\le))$. Prin urmare relaţia (3.2) este verificată. Atunci, din 3.48.3., 3.48.4. şi din teorema 3.29. rezultă că (**C**,**C'**) este constructivă.

3.50. Propoziţie. Fie **C**={**Ol**,**Or**,**Olr**}. Atunci (**C**,**C'**) este cu produse stricte.

Demonstratie. Cum **C'=Of** este cu limite proiective, din 2.13. rezultă că pentru orice I-diagramă discretă F din **C**: $\underleftarrow{\lim}_{(C,C')}F = \underleftarrow{\lim}_{C}F = ((\Pi X_i,\le),p_i)$, unde pe produsul ΠX_i am considerat ordinea produs "≤" (vezi 3.46.3.). Fie $(X,\le)\in C$ şi $(g_i)\in \Pi C((X,\le),(X_i,\le))$. Definim $g(x)=\Pi g_i(x)$, pentru orice $x\in X$. Din 3.46.3. rezultă că g este unicul morfism din $C(X,\Pi X_i)$ pentru care $(p_ig)=(g_i)$. Prin urmare $\underleftarrow{\lim}_{C}F=((\Pi X_i,\le),p_i)$.

3.51. Observaţie. Fie $\mathbf{C}\in\{\mathbf{Ol},\mathbf{Or},\mathbf{Olr}\}$. Notăm cu $\Delta:\mathbf{C}\to\mathbf{PC}$ functorul de uitare, unde dacă $\mathbf{C}=\mathbf{Ol}$ (respectiv $\mathbf{Or},\mathbf{Olr}$) atunci $\mathbf{PC}=\mathbf{POl}$ (respectiv $\mathbf{POr},\mathbf{POlr}$). Din 3.48.4., 3.50. şi 2.28. rezultă că pentru ca $(\mathbf{C},\mathbf{C'})$ să fie constructivă este suficient ca această a-categorie să fie cu limite proiective. Dar din 3.29. şi demonstraţia teoremei 3.49. rezultă că pentru ca o **I**-diagramă F să aibă limita proiectivă în $(\mathbf{C},\mathbf{C'})$ este necesar şi suficient ca $(PIM,\leq)\in C$, unde $((PIM,\leq),f_i)=\varprojlim_{(PC,PC')}\Delta F$, proprietate care nu are loc întotdeauna.

3.52. Exemplu. Fie $F=(\mathbf{Z},f_{nm})$ sistemul proiectiv de bază $\mathbb{N}$ în **Olr**, unde $f_{nm}(x)=2\mathbf{Z}$, dacă x este par şi $f_{nm}(x)=2\mathbf{Z}+1$, dacă x este impar, pentru orice $n<m$, $n,m\in\mathbb{N}$. Se verifică imediat că în acest caz $PIM=\{\Pi 2\mathbf{Z},\Pi(2\mathbf{Z}+1)\}$ şi evident $(PIM,\leq)\notin Olr$.

Totuşi, folosind 3.29., 3.48.4., 2.24., 2.27. şi 1.18.1. se verifică imediat:

3.53. Teoremă. Fie F o **I**-diagramă în $\mathbf{C}\in\{\mathbf{Ol},\mathbf{Or},\mathbf{Olr}\}$ şi $\varprojlim_{(PC,PC')}\Delta F=((PIM,\leq),f_i)$, ca în 3.49. Condiţia necesară şi suficientă ca F să aibă limită proiectivă în $(\mathbf{C},\mathbf{C'})$ este ca $(PIM,\leq)\in C$, în acest caz F posedă o reprezentare $((PIM,\leq),f_i,H,J_F)$ în $(\mathbf{C},\mathbf{C'})$, iar $((PIM,\leq),f_i)$ este limita tare a **I**-diagramei F.

3.54. Observaţie. Nici una dintre categoriile **POl**, **POr**, **POlr**, **Ol**, **Or**, **Olr** nu are egalizatori. Într-adevăr, din exemplele 1.4. şi 3.52. rezultă că ele nu au limite proiective, iar din 3.48. şi 3.50. că ele au produse.

§.4. DUALITATE STONE PENTRU a-CATEGORII LA DREAPTA DE LATICI

În această secţiune stabilim dualele unor a-categorii la dreapta de latrici distributive cu prim şi ultim element - pe scurt *algebre prebooleene* - în conexiune cu a - categoriile la stânga concrete analizate la 3.34. - 3.43., ca în [Da.98a] şi [Da.98b].

Reamintim că spaţiul Stone (Boole) al unei algebre Boole A poate fi construit cu ajutorul idealelor maximale, sau cu ajutorul filtrelor maximale, [PR.71]; fie HA mulţimea idealelor maximale ale lui A înzestrată cu topologia care are drept bază de mulţimi deschise clasa $\{\tilde{a} \mid a\in A\}$ unde $\tilde{a}=\{M\in HA \mid a\notin M\}$; atunci HA este spaţiu Hausdorff compact, total disconex - spaţiul Stone (Boole) al lui A, dacă $f: A \to B$ este un omomorfism de algebre Boole, atunci $H(f): HB \to HA$ este o funcţie definită prin $H(f)N=\{a\in A \mid f(a)\in N\}$, $N\in HB$; astfel, H devine o echivalenţă între categoria algebrelor Boole şi categoria spaţiilor Boole cu aplicaţiile tari continue ca morfisme. Înlocuirea funcţiilor cu corespondenţe distruge dualitatea amintită, cel puţin din cauza comportării nesatisfăcătoare a acestora relativ la operaţia de compelmentare (vezi 3.2.)

În cazul unui spaţiu semi-premăsurabil (X,P_X) (definiţia 3.34.) vom realiza construcţia spaţiului de tip Stone în două etape: întâi vom renunţa la mulţimea de bază X reţinând doar algebra prebooleană de mulţimi P_X; apoi vom înzestra mulţimea idealelor maximale ale unei algebre prebooleene $(A,\leq)$ cu o algebră prebooleană de părţi (analogul binecunoscutei teoreme de reprezentare a lui Birkhoff). Formalizăm aceşti paşi prin intermediul a doi functori contravarianţi K (functorul de uitare) şi, ca mai sus, H.

Considerăm transformarea K definită prin:

$$\begin{tikzcd}
(X, P_X) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & P_X \\
{} \arrow[r, mapsto] & {} \arrow[u, "K(f):\ B \mapsto f^{-}(B)"'] \\
(Y, P_Y) \arrow[r, mapsto] & P_Y
\end{tikzcd} \qquad (4.1)$$

pentru orice $f \in Esp((X,P_X),(Y,P_Y))$. Atunci: $K(f)\varnothing=\varnothing$, $K(f)Y=X$ şi $K(f)(B_1 \cup B_2)= K(f)B_1 \cup K(f)B_2$, în timp ce, în general, $K(f)(B_1 \cap B_2) \neq K(f)B_1 \cap K(f)B_2$ (proprietarea 3.2.), unde $B_1, B_2 \in P_Y$. Această constatare impune drept codomeniu pentru K categoria **PB** a algebrelor prebooleene $(A,\leq)$ - notăm operaţiile pe A uzual: "$\vee$","$\wedge$","0" şi "1" - şi a funcţiilor $f \in PB(A,B)$ care verifică:

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),\ a,b \in A, \tag{4.2}$$

În acest fel **PB** devine o categorie ordonată faţă de ordinea laticială indusă pe morfisme, i.e.:

$$f \leq g \Leftrightarrow [f(a) \leq g(a),\ a \in A] \tag{4.3}$$

pentru orice $f,g \in PB(A,B)$, iar K devine un functor contravariant izoton între **Esp** şi **PB**.

Peste tot în continuare B_0 va însemna algebra Boole cu exact două elemente (0 şi 1, $0 \neq 1$).

Ne propunem la început să determinăm cea mai mare a-categorie la dreapta de tip drept $\{B_0\}$ care are ca obiecte algebrele prebooleene şi ca morfisme funcţiile care verifică (4.2). Vom folosi următoarele proprietăţi imediate:

4.1. Proprietăţi şi notaţii. Fie $A \in PB$, I un ideal al lui A (i.e. $I \neq \varnothing$, $a \vee b \in I$, $\forall a,b \in I$ şi $b \in I$, $a \leq b \Rightarrow a \in I$), $B \subset A$ astfel ca $\langle B \rangle = A$ (unde $\langle B \rangle$ indică idealul generat de B în A), P un ideal prim al lui A (i.e. P este ideal propriu şi $a \wedge b \in P \Rightarrow a \in P$, sau $b \in P$) şi $f\colon A \to B_0$ o funcţie. Atunci:

1. $I \in M(A) \Leftrightarrow [b \in A \setminus I \Rightarrow \exists c \in I\colon b \vee c = 1]$.
2. $B \cap P \subset I \Rightarrow P \subset I$
3. $f \in PB(A,B_0) \Leftrightarrow f^{-1}(0)$ este ideal propriu al lui A
4. f este minimal în $PB(A,B_0) \Leftrightarrow f^{-1}(0) \in M(A)$,

unde cu M(A) am notat clasa idealelor maximale ale lui A. Vom nota cu I(a) idealul generat de elementul $a \in A \setminus \{1\}$ numit idealul principal al lui a.. În general idealul $\langle C \rangle$, unde $\varnothing \neq C \subset A$, este mulţimea: $\{a \in A \mid \exists n \in \mathbf{N},\ c_0, c_1, \ldots, c_n \in C\colon a \leq c_0 \vee \ldots \vee c_n\}$.

4.2. Lemă. Fie $A \in PB$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $[g,h \in PB(B,A),\ g \neq h] \Rightarrow [\exists f \in PB(A,B_0)$ minimal astfel ca $fg \neq fh]$

(b) $[a,b\in A,\ a<b] \Rightarrow [\exists c\in A:\ a\vee c\neq 1$ şi $b\vee c=1]$

(c) Orice ideal principal al lui A este o intersecţie de ideale maximale.

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Fie $a,b\in A$, $a<b$ şi $B=\{o,d,1\}$ un obiect din **PB** cu exact trei elemente. Definim $g,h\in PB(B,A)$ astfel ca $g(d)=a$ şi $h(d)=b$. Din (a) rezultă că există un element minimal f în $PB(A,B_0)$ astfel ca $fg\neq fh$. Desigur $f(a)=0$; $f(b)=1$, iar $f^{-}(0)\in M(A)$, conform 4.1.4., deci $a\in f^{-}(0)$ şi $b\notin f^{-}(0)$. Din 4.1.1. rezultă că există $c\in f^{-}(0)$ astfel ca $b\vee c=1$ şi $a\vee c\neq 1$, căci dacă $a\vee c=1$, atunci $f(a\vee c)=f(c)=1$ şi $f^{-}(0)$ nu ar fi maximal.

(b) $\Rightarrow$ (a). Fie $g,h\in PB(B,A)$, $g\neq h$. Atunci există $b\in B$ astfel ca $g(b)<g(b)\vee h(b)$. Din (b) rezultă că există $c\in A$ astfel ca $g(b)\vee c\neq 1$ şi $g(b)\vee h(b)\vee c=1$. Fie $I=<\{g(b),c\}>$. Cum I este ideal, propriu a lui A, din lema lui Zorn rezultă că există $M\in M(A)$ astfel ca $I\subseteq M$. Atunci $g(b)\in M$ şi $h(b)\notin M$. Fie $f\in PB(A,B_0)$ definit prin:

$f(a)=0 \Leftrightarrow a\in M$

Atunci conform 4.1.4., f este minimal în $PB(A,B_0)$ şi $fg\neq fh$, căci $fg(b)=0$ şi $fh(b)\neq 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Fie $a\in A\setminus\{1\}$. Conform lemei lui Zorn, există ideale maximale ale lui A care conţin pe I(a), fie M intersecţia acestora. Desigur M este ideal propriu al lui A şi $I(a)\subseteq M$. Presupunem că există $d\in M\setminus I(a)$. Fie $b=d\vee a$; atunci $b>a$, căci, în caz contrar, $d\in I(a)$. Din (b) rezultă că există $c\in A$ astfel ca $a\vee c\neq 1$ şi $b\vee c=1$. Fie M_c un ideal maximal care îl conţine pe I(c); atunci $c\in M_c$; dar $b\in M\subset M_c$. Prin urmare $b\vee c\in M_c$; contradicţie !

(c) $\Rightarrow$ (b). Fie $a,b\in A$, $a<b$. Dacă $b=1$, atunci (b) are loc pentru $c=1$. Fie $b<1$. Cum $a<b$ rezultă că există un ideal maximal M care îl conţine pe I(a), astfel ca $b\in A\setminus M$, iar din 4.1.1 rezultă că există $c\in M$ astfel ca $b\vee c=1$; dar $a\in M$, deci $a\vee c<1$.

4.3. Definiţie. O latice care verifică condiţia (b) de la 4.2. se numeşte *locală*. Notăm cu **PBl** categoria care are drept obiecte algebrele prebooleene locale şi ca morfisme funcţiile între latici locale care verifică (4.2), iar cu **PBl'** subcategoria categoriei **PBl** cu aceleaşi obiecte şi ale cărei morfisme sunt definite prin:

$f\in PBl'(A,B) \Leftrightarrow [N\in M(B) \Rightarrow f^{-}N\in M(A)]$.

4.4. Teoremă. **(PBl,PBl')** este cea mai mare a-categorie la dreapta de tip drept :B care are ca obiecte algebre prebooleene şi ca morfisme funcţiile care verifică (4.2).

Demonstrație. 1. Arătăm că **(PBl,PBl')** este o categorie la dreapta. Desigur $B_0 \in$ PBl, $M(B_0)=\{\{0\}\}$, iar din lema 4.2. rezultă că pentru orice $A \in$ PBl:

$$PBL'(A,B_0) = \{f \in PBl(A,B_0) \mid f \text{ minimal}\} \tag{4.4}$$

Fie $A,B \in$ PBl și $g \in$ PBl(A,B) astfel ca pentru orice $C \in$ PBl și orice $f \in$ PBl'(B,C), fg să fie minimal în PBl(A,C). Fie $M \in M(B)$. Definim funcția f_0: $B \rightarrow B_0$ prin $f_0(b) = 0 \Leftrightarrow b \in M$. Din 4.1.4. rezultă că $f_0 \in$ PBl'(B,B_0) și f_0g este minimal în PB(A,B_0); deci $(fg)^{-1}(0) \in M(A)$ și $g^{-1}M \in M(A)$. Prin urmare $g \in$ PBl'(A,B).

Invers, dacă $g \in$ PBl'(A,B) și $f \in$ PBl'(B,C), atunci fg este minimal în PBl(A,C); într-adevăr, dacă ar exista $h \in$ PBl(A,C) astfel ca h<fg, din lema 4.2 rezultă că există $f_0 \in$ PB(C,B_0) astfel ca $f_0h<f_0fg$, deci $f_0fg \in$ PBl'(A,B_0) și nu este minimal în PBl(A,B_0), în contradicție cu lema 4.2.

2. Din (4.4) și lema 4.2. rezultă că **(PBl,PBl')** este de tip drept $\{B_0\}$.

3. Demonstrăm că dacă **(C,C')** este o a-categorie la dreapta de tip drept $\{B_0\}$ unde $C \subset$ **PB**, atunci **C≤PBl** și **C'≤PBl'**. Deoarece **(C,C')** este de tip drept $\{B_0\}$, din lema 4.2 rezultă că $C \subset$ **PBl**. Din 4.1.4. rezultă că pentru orice $A \in C$:

$$C'(A,B_0)=\{f \in C(A,B_0) \mid f \text{ minimal în } C(A,B_0)=PBl(A,B_0)\} \subset PBl'(A,B_0),$$

iar din 4.2 rezultă că orice morfism din **C'** este morfism și în **PBl'**; prin urmare **C'≤PBl'**

4.5. Definiție. Morfismul $f \in$ PBl(A,B) se numește *perfect* dacă pentru orice $M \in M(B)$ $f^{-1}M$ este o intersecție de ideale maximale ale lui A.

4.6. Proprietăți. 1. Morfismele categoriei **PBl'** sunt perfecte și, în plus sunt omomorfisme de latici.

2. Dacă $f \in$ PBl(A,B) și $g \in$ PBl(B,C) sunt perfecte, atunci gf este perfect

3. Dacă A este o algebră Boole și $f \in$ PBl(A,B), atunci f este perfect și $f \in$ PBl'(A,B) $\Leftrightarrow$ f este omomorfism laticial.

Aceste proprietăți fac posibilă introducerea unei noi categorii de latici locale

4.7. Notații. Notăm cu **PBp** categoria ordonată față de relațiile (4.3) ale cărei obiecte sunt laticile locale, i.e. **PBp=PBl** și ale cărei morfisme sunt morfisme perfecte și **PBp'** = **PBl'**

4.8. Teoremă. **(PBp,PBp')** este o a-categorie la dreapta de tip drept $\{B_0\}$.

Demonstraţie. Deoarece $f\in$ PBp(A,B_0) dacă şi numai dacă $f^{-}(0)$ este o intersecţie de ideale maximale ale lui A, rezultă că f este minimal în PBp (A,B_0) dacă şi numai dacă $f\in$ PBl'(A,B_0) pentru orice $A\in$PBp. Fie $g\in$PBp(A,B). Ţinând seama de definiţia categoriei **PBp'** rezultă că

$g\in$PBp'(A,B) $\Rightarrow$ [$\forall C\in$PBl, $\forall f\in$PBl'(B,C), fg este minimal în PBl(A,C)]$\Rightarrow$[$\forall C\in$PBp, $\forall f\in$PBp'(B,C), fg este minimal în PBp(A,C)] $\Rightarrow$[$\forall f\in$PBp'(B,B_0): $fg\in$PBp'(A,B_0))] $\Rightarrow$ $g\in$PBp'(A,B), deci (**PBp**, **PBp'**) este a-categorie la dreapta, şi, evident, este de tip drept $\{B_0\}$.

4.9. Notaţii. Fie $A\in$PBl.

1. $\tilde{a} = \{M\in M(A) \mid a\notin M\}$, $a\in A$
2. $\tilde{A} = \{\tilde{a} \mid a\in A\}$
3. $\tau_A: A \to \tilde{A}$ este aplicaţia definită prin $a \to \tilde{a}$, $a\in A$.
4. $\tilde{T}_A$ - topologia generată de $\tilde{A}$ pe M(A)

Când nu există pericol de confuzii vom scrie τ în loc de τ_A şi $\tilde{T}$ în loc de $\tilde{T}_A$.

4.10. Proprietăţi. Fie $A\in$PBl. Atunci:

1. $\tau(a\vee b)= \tau(a) \cup \tau(b)$ şi $\tau(a\wedge b) = \tau(a)\cap\tau(b)$, $a,b\in A$.
2. $\tau(a)=\emptyset \Leftrightarrow a=0$; $\tau(a)=M(A) \Leftrightarrow a=1$.
3. $(M(A), \tilde{A})\in$Esp
4. $\tau\in$IzPBl'$(A,\tilde{A})$
5. $(M(A),\tilde{T})$ este un spaţiu compact T_1.

Demonstraţie. 1. Se verifică imediat.

2. Desigur, $\tau(0)=\emptyset$. Dacă $a\neq 0$, atunci $0<a$ şi, cum A este locală, există $b\in A$ astfel ca $a\vee b = 1$ şi $b\neq 1$. Fie M un ideal maximal care conţine idealul propriu generat de $\{b\}$. Atunci $M\in\tau(a)$ şi, prin urmare $\tau(a)\neq\emptyset$. Analog se verifică partea a doua a afirmaţiei.

3. Fie $a,b\in A$ astfel ca $\tilde{a} \subsetneq \tilde{b}$ şi $M\in \tilde{b}\setminus\tilde{a}$. Cum $b\notin M$, există $c\in M$ astfel ca $c \vee b = 1$.

Atunci $M \notin \tilde{c} \cup \tilde{a}$, deci $\tilde{c} \cup \tilde{b} = M(A)$, conform punctului 2., şi $\tilde{c} \cup \tilde{a} \neq M(A)$.

4. Din punctele precedente rezultă că $\tau \in PBl(A,\tilde{A})$ şi că este surjecţie. Fie $N \in M(\tilde{A})$. Atunci $\tau^{-}N$ este un ideal propriu al lui A. Vom arăta că el este chiar maximal, ceea ce va dovedi că τ este morfism strict. Presupunem că $a \in A \setminus \tau^{-}N$; atunci $\tilde{a} \notin N$, deci există $\tilde{b} \in B$ astfel ca $\tilde{a} \cup \tilde{b} = M(A)$ şi $b \in \tau^{-}N$, iar $a \vee b = 1$, conform 1. şi 2.; prin urmare $\tau^{-}N \in M(A)$.

Rămâne să arătăm că τ este injectiv. Fie $a,b \in A$, $a < a \vee b$. Atunci există $c \in A$ astfel ca $a \vee c \neq 1$ şi $a \vee b \vee c = 1$. Fie M un ideal maximal care conţine pe $a \vee c$. Atunci $M \notin \tilde{a}$, $M \in \tilde{b}$ şi prin urmare $\tau(a) \neq \tau(b)$.

5. Fie J o mulţime, $a_j \in A$ pentru orice $j \in J$, astfel ca $M(A) = \bigcup_J \tilde{a}_j$. Presupunem, prin absurd, că $M(A) \neq \bigcup_{J'} \tilde{a}_j$, pentru orice mulţime finită $J' \subset J$. Conform 1. şi 2. rezultă că pentru orice mulţime finită $J' \subset J$, $\bigvee_{J'} a_j \neq 1$. Fie I idealul generat de mulţimea $\{a_j \mid j \in J\}$. Desigur I este un ideal propriu şi el este conţinut într-un ideal maximal M. Atunci $M \in M(A) \setminus \bigcup_J \tilde{a}_j$, contradicţie ! Prin urmare $(M(A),\tilde{T})$ este spaţiu topologic compact.

Fie $M,N \in M(A)$, $M \neq N$; atunci există $a \in M$, $b \in N$ astfel ca $a \vee b = 1$, deci $M \in \tilde{b}$ şi $N \notin \tilde{b}$ (sau invers); prin urmare $(M(A),\tilde{T})$ este un spaţiu T_1.

4.11. Notaţie. Fie H transformarea definită prin:

$HA = (M(A),\tilde{A})$ - *spaţiul Stone al lui A*, $A \in PBl$

$H(f): N \to \{M \in M(A) \mid f^{-}N \subset M\}$, $N \in M(B)$, pentru orice $f \in PBl(A,B)$

4.12. Proprietăţi. Fie $A,B,C \in PBl$, $f,f' \in PBl(A,B)$ şi $g \in PBl(B,C)$. Atunci:

1. $H(f)$ este o funcţie, dacă f este morfism strict.
2. $f \leq f' \Rightarrow H(f) \subset H(f')$
3. $H(f)H(g) \subset H(gf)$; dacă g este morfism strict, atunci $H(f)H(g) = H(gf)$
4. $f \in PBp(A,B) \Rightarrow H(f) \in Esp(HB,HA)$

5. $f\in PBp(A,B)$ şi $H(f)$ este funcţie $\Rightarrow f\in PBp'(A, B)$

6. $H(f)^{-1}\tau_A(a) \subset \tau_B(f(a))$, $a\in A$

7. $H(f)$ este *închisă*, i.e. $H(f)N$ este o mulţime închisă în spaţiul $(M(A),\tilde{T}_A)$, pentru orice $N\in M(B)$.

Demonstraţie. Primele cinci afirmaţii se verifică imediat.

6. Fie $N\in H(f)^{-1}\tau_A(a)$ şi $M\in H(f)N\cap\tau_A(a)$; atunci $a\notin M$ şi $f^{-1}N\subset M$; prin urmare $f(a)\notin N$ şi $N\in\tau_B(f(a))$.

7. Fie $M\in H(f)N$ şi $a\in f^{-1}N\setminus M$: atunci pentru orice $M'\in\tau_A(a)$, $f^{-1}N\not\subset M'$; deci $M\in\bar{a}\in\tilde{T}_A$ şi $H(f)N=$ [illegible]

4.13. Observaţii. Inversa afirmaţiei 4.12.1. nu are loc întotdeauna, deci dacă $H(f)$ este funcţie, nu rezultă, în general, că f este un morfism strict. De exemplu, fie $A=\{X\subset[0,1] \mid 1\in X\setminus\mathring{X}\}$, unde $\mathring{X}$ este interiorul mulţimii X şi I idealul generat de mulţimea $\left\{\left[\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n+1}\right) \,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$; fie $f: A \to B_0$ definită prin $fX=0 \Leftrightarrow X\in I$: atunci unicul ideal maximal al lui A care conţine pe I este $M=\{X\subset[0,1] \mid 1\notin X\}$, deci $H(f)$ este o funcţie; dar $[0,1]\in M\setminus I$, deci I nu este maximal, ceea ce atrage faptul că f nu este morfism strict.

Nici inversa implicaţiei 4.12.2. nu are loc, în general; de exemplu, dacă $f': A \to B_0$ este definită prin $f'X=0 \Leftrightarrow X\in M$, în exemplul precedent, atunci $H(f) = H(f')$ şi $f\neq f'$.

Folosim acelaşi exemplu pentru a arăta că incluziunile de la 4.12.3. şi 4.12.6. pot fi stricte. Pentru $X=[0,1)\in A$, $X\in M$, deci $M\notin\tilde{X}$; $H(f)\tilde{X}=\emptyset$ şi $\tau_{B_0}(f(X)) =\tau_{B_0}(1)\neq\emptyset$. În fine, fie $B=\{\emptyset, [0, 1), [1/2, 1], [0, 1]\}$ şi $h: B \to A$ scufundarea identică. Atunci $(fh)^{-1}(0)=\{\emptyset\}$, $H(fh)(0)=\{N_1, N_2\}$, unde $N_1=\{\emptyset, [0, 1)\}$ şi $N_2 = \{\emptyset, [1/2, 1]\}$; pe de altă parte $H(h)H(f)(\{0\})=H(h)M=\{N_1\}$, deci $H(h)H(f)\subsetneq H(fh)$.

4.14. Propoziţie. Fie $f\in PBl(A,B)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $f\in PBp(A,B)$

(b) $H(f)^{\cdot}\tau_A(a)=\tau_B(f(a))$, pentru orice $a\in A$.

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Fie $a\in A$ şi $N\in\tau_B(f(a))$. Atunci $a\notin f^{\cdot}N$ şi, conform ipotezei (a), există $M\in M(A)$ astfel ca $f^{\cdot}N\subset M$ şi $a\notin M$. Atunci $M\in H(f)N\cap\tau_A(a)$, deci $N\in H(f)^{\cdot}\tau_A(a)$; ţinând seama şi de 4.12.6. rezultă (b).

(b) $\Rightarrow$ (a). Fie $N\in M(B)$ şi $a\in A\setminus f^{\cdot}N$. Atunci $N\in\tau_B f(a)$, iar din (b) rezultă că $H(f)N\cap\tau_A(a)\neq\varnothing$. Prin urmare există $M\in\tau_A(a)$ astfel ca $f^{\cdot}N\subset M$.

4.15. Observaţie. Din 4.12. rezultă că H: **PBp** $\rightarrow$ **Esp** este un a-functor contravariant izoton. Afirmaţia se poate întări cu următorul rezultat:

4.16. Propoziţie. KH este un functor covariant din **PBp** în **PBp**, iar aplicaţia $A\rightarrow\tau_A$, $A\in$ PBp, defineşte o echivalenţă naturală între functorii 1_{PBp} şi KH.

Demonstraţie. Fie $A,B\in PBp$ şi $f\in PBp(A,B)$. Atunci $KHA=\tilde{A}$, $KHB=\tilde{B}$ şi $KH(f)\colon \tilde{A}\rightarrow\tilde{B}$ este definit prin: $KH(f)(\tau_A(a)) = H(f)^{\cdot}\tau_A(a) = \tau_B(f(a))$, $a\in A$, conform 4.14. În plus, din 4.10.4., τ_A este un izomorfism în PBl'(A,KHA). Prin urmare $KH(f)\tau_A=\tau_B f$, deci $KH(f)=\tau_B f\tau_A^{-1}\in PBp(\tilde{A},\tilde{B})$. În consecinţă KH defineşte un functor covariant din **PBp** pe **PBp**, iar $\tau\colon 1_{PBp}\rightarrow KH$ este o echivalenţă naturală.

4.17. Notaţii. Fie $(X,P_X)\in Esp$. Notăm cu T_X topologia generată de P_X pe X şi convenim ca toate consideraţiile topologice pe care le facem în legătură cu spaţiul semipremăsurabil (X, P_X) să se refere la topologia T_X. Proprietăţile 4.10.5. şi 4.12.7. sugerează că pentru a obţine o comportare naturală a lui H şi HK să considerăm doar acele spaţii semipremăsurabile pentru care (X, T_X) este spaţiu compact T_1, iar ca morfisme corespondenţele închise.

4.18. Propoziţie. Fie $f\in PBp(A,B)$, $g\in PBp(B,C)$. Atunci $H(f)H(g)N=H(gf)N$, pentru orice $N\in M(C)$.

Demonstraţie. Fie $N\in M(C)$. Din 4.12.3. şi 4.12.7. rezultă că $H(f)H(g)N\subset H(gf)N$. Dacă

$M\in H(gf)N$ şi $a\in A$ astfel ca $M\in\tilde{a}$, atunci $a\notin(gf)^{\cdot}N$, deci $f(a)\notin g^{\cdot}N$. Cum g este perfect, există $M'\in M(B)$ astfel ca $f(a)\notin M'$ şi $g^{\cdot}N\subset M'$. Atunci $a\notin f^{\cdot}M'$ şi $M'\in H(g)N$. Cum şi f este perfect, există $M''\in M(A)$ astfel ca $a\notin M''$ şi $f^{\cdot}M'\subset M''$. Atunci $M''\in\tilde{a}\cap H(f)H(g)N$. Prin urmare $M\in\overline{H(f)H(g)N}$ (închiderea topologică).

4.19. Definiţii. 1. Numim *compunerea închisă* a morfismelor $f\in Esp((X,P_X),(Y,P_Y))$ şi $g\in Esp((Y,P_Y),(Z,P_Z))$ corespondenţa notată $g\cdot f$ definită prin:

$$g\cdot f(x)=\overline{gf(x)},\ x\in X$$

Remarcăm că $g\cdot f$ este cu valori închise şi este măsurabilă; într-adevăr, dacă $C\in P$ $(g\cdot f)^{\cdot}C=\{x\in X \mid \overline{gf(x)}\cap C\neq\emptyset\}=\{x\in X \mid gf(x)\cap C\neq\emptyset\}=(gf)^{\cdot}C=f^{\cdot}g^{\cdot}C$.

2. Notăm cu **ES** categoria ordonată concretă care are ca obiecte spaţiile semipremăsurabile (X,P_X) astfel ca (X,T_X) să fie spaţiu compact T_1 şi ca morfisme corespondenţele măsurabile cu valori închise, pentru care compunerea este cea definită mai sus. Cu **ES'** notăm subcategoria lui **ES** cu acelaşi obiecte şi cu funcţiile măsurabile ca morfisme.

Din 4.19., 4.18., 4.10.5., 4.12.7. şi din faptul că dacă $f\in PBp(A,B)$ atunci $H(f)\in Esp(HA,HB)$, rezultă imediat:

4.20. Propoziţie. 1. $K(fg)=K(f\cdot g)$, f şi g fiind morfisme compozabile din **Esp**.

2. (**ES**,**ES'**) este o a-categorie la stânga de tip stâng $\{(X_0,B_0)\}$.

3. H defineşte un functor contravariant din **PBp** în **ES**.

Ca în cazul clasic, [PR.71], se verifică imediat legătura dintre proprietăţile laticiale ale spaţiilor semipremăsurabile şi cele topologice ale obiectelor categoriei **ES**.

4.21. Propoziţie. Fie $(X,P_X)\in Esp$. Atunci:

1. (X, T_X) este un spaţiu T_1 dacă şi numai dacă pentru orice $x,y\in X$: $[x\neq y \Rightarrow \exists A\in P_X$: $x\in A$ şi $y\notin A]$.

2. (X,T_X) este compact dacă şi numai dacă orice ideal maximal al lui P_X este de forma $\{A\in P_X \mid x\notin A\}$, pentru un anume $x\in X$.

4.22. Definiţii. Fie $(X,P_X)\in Esp$.

1. (X,P_X) se numeşte *redus* dacă pentru orice $x,y\in X$: $x\neq y \Rightarrow \exists A\in P_X$: $x\in A$, $y\notin A$

2. (X,P_X) se numeşte *perfect* dacă: $M\in M(P_X) \Rightarrow \exists x\in X$: $M=\{A\in P_X \mid x\notin A\}$.

În general, vom nota $M_x=\{A\in P_X \mid x\notin A\}$ idealul propriu al lui P_X, pentru orice $x\in X$.

3. (X,P_X) se numeşte *local* dacă $\forall\ x\in X$ şi $\forall\ A\in P_X$: $x\in A \Rightarrow [\exists B\in P_X$: $A\cup B=X$ şi $x\notin B]$

4. (X,P_X) se numeşte *atomic* dacă: $x\in X \Rightarrow \{x\} \in P_X$

4.23. Proprietăţi. 1. Obiectele categoriei **ES** sunt spaţiile semipremăsurabile reduse şi perfecte (vezi 4.21.).

2. Fie $(X, P_X)\in Esp$. Atunci: $\{M_x \mid x\in X\}\subset M(P_X) \Leftrightarrow (X,P_X)$ este local

3. Dacă (X,P_X) este local atunci P_X este o algebră prebooleană locală de submulţimi ale lui X: inversa nu este valabilă.

4.24. Notaţie şi observaţii. Fie (X, P_X) un spaţiu semipremăsurabil local. Notăm cu $\pi_{(X,P_X)}: X \to M(P_X)$ funcţia definită prin $x \to M_x$. Uneori, când nu este pericol de confuzie, vom omite indicele (X,P_X) al funcţiei.

1. $\pi: (X,P_X)\to(M(P_X),\tilde{P}_X)$ este măsurabilă; $\pi^{\cdot}\tilde{A}=A$, pentru oricare $A\in P_X$.

2. πX este o submulţime densă în $(M(P_X),\tilde{T}_{P_X})$.

3. π este injectivă dacă şi numai dacă (X, P_X) este redus.

4. $\pi A=\tilde{A}\cap\pi X$ pentru orice $A\in P_X$.

5. Dacă, în plus, (X,P_X) este redus, atunci $\pi: (X,P_X) \to (\pi X, \tilde{P}_X\cap\pi X)$ este un izomorfism în **Esp'**; vom identifica (X,P_X) cu submulţimea densă a lui $M(P_X)$ înzestrată cu urma lui $\tilde{P}_X$ pe această submulţime.

4.25. Propoziţie. Dacă (X,P_X) este un spaţiu semipremăsurabil perfect şi redus, atunci el este şi local, iar π induce un izomorfism în **ES** din (X,P_X) pe $(M(P_X), \tilde{P}_X)$

Demonstraţie. Fie $(X,P_X)\in ES$ şi $x\in X$. Atunci, conform 4.22.2., există $y\in X$ astfel ca

$M_x = M_y \in M(P_X)$, dar (X,P_X) este redus, deci $x=y$ şi $M_x \in M(P_X)$. Prin urmare, conform 4.23.2., (X,P_X) este local. Din 4.22.2. şi 4.23.3. rezultă că π este o bijecţie din X pe $\tilde{P}_X$, iar din 4.24.1. că π şi π^{-1} sunt funcţii măsurabile.

4.26. Propoziţie. HK este un functor covariant din **ES** pe **ES** iar π este o echivalenţă naturală din 1_{ES} în HK.

Demonstraţie. K este un functor covariant **ES** $\to$ **PBp**. Într-adevăr, din 4.25., dacă $(X,P_X) \in ES$, atunci $K(X,P_X) \in PBp=PBl$. Fie $f \in ES((X,P_X),(Y,P_Y))$ şi $M_x \in M(P_X)$. Atunci $K(f)M_x = \{B \in P_Y \mid f^{-}B \in M_x\} = \{B \in P_y \mid f(x) \cap B = \emptyset\} = \{M_y \mid y \in f(x)\}$, deci $K(f) \in PBp(P_Y,P_X)$, iar din 4.20.1., K: **ES** $\to$ **PBp** este contravariant şi HK: **ES** $\to$ **ES** este functor covariant.

2. $\pi: 1_{ES} \to HK$ este o echivalenţă naturală. Într-adevăr, din 4.25., $\pi_{(X,P_X)}$ este izomorfism in **ES**, pentru orice $(X,P_X) \in ES$. Fie $f \in ES((X,P_X),(Y,P_Y))$. Arătăm că diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X, P_X) \arrow[r, "\pi_{(X, P_X)}"] \arrow[d, "f"'] & (M(P_X), \tilde{P}_X) \arrow[d, "HK(f)"] \\
(Y, P_Y) \arrow[r, "\pi_{(X, P_Y)}"'] & (M(P_Y), \tilde{P}_Y)
\end{tikzcd}$$

este comutativă. Fie $x \in X$. Atunci: $HK(f)\pi(x) = HK(f)M_x = \{M_y \mid y \in Y,\ K(f)^{-}M_x \subset M_y\} = \{M_y \mid y \in f(x)\} = \pi(f(x))$. În plus, dacă $y \in f(x)$, atunci există $B \in P_Y$ astfel ca $y \in B$, unde $B \cap f(x) = \emptyset$, căci $f(x)$ este închisă în spaţiul compact (Y,T_Y); deci $K(f)^{-}M_x \not\subset M_y$, de unde $\{M_y \mid y \in Y,\ K(f)^{-}M_x \subset M_y\} = \{M_y \mid y \in f(x)\}$; prin urmare diagrama este comutativă.

4.27. Teoremă. K: **(ES,ES')** $\to$ **(PBp,PBp')** este o echivalenţă la stânga - dreapta, iar H: **(PBp,PBp')** $\to$ **(ES,ES')** este o echivalenţă la dreapta - stânga.

Demonstraţie. Vom verifica condiţiile din 1.14. (vezi şi 1.8.6.). Din 4.26. şi 4.16. rezultă că H: **PBp** $\to$ **ES** şi K: **ES** $\to$ **PBp** sunt echivalenţe. Din definiţa (4.1) şi comentariul următor formulei (4.3) rezultă izotonia lui K, iar din 4.12. cea a lui H. Rămâne să probăm că ambii functori conservă morfismele stricte. Fie $f \in ES'((X,P_X),(Y,P_Y))$ şi $M_x \in M(P_X)$. Atunci $K(f)^{\cdot}M_x = M_{f(x)}$, deci $K(f) \in PBp'(P_Y,P_X)$. Din 4.12.1. rezultă proprietatea similară pentru H.

4.28. Consecinţă. Fie F o diagramă în **ES** care are limită proiectivă în (**ES**, **ES'**) şi G o codiagramă în **PBp** care are limită inductivă în (**PBp**, **PBp'**). Atunci:

(a) $K(\underset{\longleftarrow}{\lim}_{(ES,ES')}F) = \underset{\longrightarrow}{\lim}_{(PBp,PBp')}KF$

(b) $H(\underset{\longrightarrow}{\lim}_{(PBp,PBp')}G) = \underset{\longleftarrow}{\lim}_{(ES,ES')}HG$

4.29. Observaţie. (**ES**,**ES'**) şi (**PBp**,**PBp'**) sunt cele mai mari a-categorii pentru care K este o echivalenţă la stânga-dreapta, iar H este o echivalenţă la dreapta-stânga, în sensul că dacă (**C**,**C'**) este o a-categorie la stânga, iar (**D**,**D'**) o a-categorie la dreapta astfel ca:

(i) **D** ≤ **PBl**, **D'** ≤ **PBl'**

(ii) **C'** ⊂ **Esp**

(iii) H induce o echivalenţă la dreapta-stânga (**D**,**D'**) → (**C**,**C'**)

(iv) K induce o echivalenţă la stânga-dreapta (**C**,**C'**) → (**D**,**D'**)

atunci **D** ≤ **PBp**, **D'** ≤ **PBp'**, **C** ≤ **ES** şi **C'** ≤ **ES'**.

Demonstraţie. Din (iii) rezultă că orice obiect din **C** este izomorf în **C'** cu un spaţiu semipremăsurabil perfect şi redus şi că orice morfism din **C** este o corespondenţă închisă. Deoarece H(f) este o funcţie măsurabilă pentru orice morfism f din **D'**, rezultă că orice obiect din **C'** este izomorf în **Esp'** cu un spaţiu semipremăsurabil perfect şi redus, deci C⊂ES şi **C'** ⊂ **ES'**. Dacă f este un morfism în **C**, K(f) este un morfism în **PBp**, iar din 4.18. rezultă că în **C** compunerea morfismelor este compunerea închisă, deci **C** ≤ **ES**. Din (i) şi (iv) rezultă că **D** ≤ **PBp**, iar **D'** ≤ **PBp'**.

4.30. Observaţie. Fie F o **I**-diagramă în **Esp** astfel ca H(KF) să fie diagramă în **ES**. Vom nota în continuare $F_i=(X_i,P_i)$, pentru orice $i \in I$. Vom analiza existenţa limtei proiective a diagramei H(KF) în (**ES**,**ES'**) şi legătura cu limita proiectivă a lui F în (**Esp**,**Esp'**) (vezi teorema 3.36.). Din 4.28. rezultă că existenţa acesteia este condiţionată de existenţa limitei inductive a **I**-codiagramei **KF** în (**PBp**,**PBp'**). De aceea vom demonstra în prealabil că

(**PBp**,**PBp'**) este cu limite inductive, apoi vom da condiţii necesare şi suficiente ca $\varinjlim_{\mathbf{PBp},\mathbf{PBp'}} KF = K(\varprojlim_{(\mathbf{Esp},\mathbf{Esp'})} F)$ şi vom arăta că (**ES**,**ES'**) este cu limite proiective prezentând două caracterizări ale acestor limite.

4.31. Propoziţie. Fie F o **I**-diagramă în **Esp**.

1. H(KF) este diagramă în **ES** $\Leftrightarrow$ KF este codiagramă în **PBp**.
2. Dacă $F(i) = (X_i,P_i)$ este premăsurabil, $i\in I$, atunci KF este codiagramă în **PBp**.

Demonstraţie. 1. Rezultă din 4.27..

2. Deoarece, conform (4.1), K: **ESp** $\to$ **PB** este un functor covariant izoton, rezultă că P_i este o algebră Boole (vezi 3.34.5.), iar din 4.6.3. rezultă că F(s) este perfect, pentru orice $s\in$ Hom**I**, deci KF este o codiagramă în **PBp**.

4.32. Notaţii. Fie $F=(A_i,F(s))$ o **I**-codiagramă în **PBl**.

1. $X=\{(I_i) \mid I_i$ este ideal propriu în A_i şi $F(s)I_i\subset I_j$, pentru orice $i,j\in I$, $s\in I(i,j)\}$; pe X considerăm ordinea "$\subset$" definită prin: $(I_i)\subset(J_i) \Leftrightarrow I_i\subset J_i$, $i\in I$.
2. X_0 - mulţimea elementelor maximale ale lui X.
3. Pentru orice $i\in I$ şi $a_i\in A_i$, $f_i(a_i)=\{(I_i)\in X_0 \mid a_i\notin I_i\}$.
4. $B = \{f_i(a_i) \mid a_i\in A_i,\ i\in I\}$.
5. A - algebra prebooleană de submulţimi ale lui X_0 generată de B.
6. $M_x=\{a\in A \mid x\notin a\}$, pentru orice $x\in X_0$.

4.33. Propoziţie. (a) $(g_i)\in IN(B_0,F) \Leftrightarrow (g_i^{-}(0))\in X$

(b) $(g_i)\in INM(B_0,F) \Leftrightarrow (g_i^{-}(0))\in X_0$.

Demonstraţie. (a) este imediată, iar (b) rezultă din observaţia că dacă $(g_i),(h_i)\in IN(B_0,F)$, $(g_i)\subset(h_i)$ dacă şi numai dacă $g_i^{-}(0)\supset h_i^{-}(0)$, $i\in I$.

Următoarele proprietăţi se verifică direct.

4.34. Proprietăţi. 1. $f_i\in PB(A_i,A)$, pentru orice $i\in I$.

2. Pentru orice $x=(I_i)\in X_0$, $i\in I$, $a_i\in A_i$: $a_i\in I_i \Leftrightarrow f_i(a_i)\in M_x$.

3. $(f^{-}M_x)_i = x$, pentru orice $x\in X_0$.

4.35. Propoziție. Aplicația π definită prin $x \to M_x$ definește o bijecție $X_0 \to M(A)$.

Demonstrație. Fie $x=(I_i)\in X_0$. Desigur M_x este un ideal propriu al lui A. Fie $M\in M(A)$ astfel ca $M_x \subset M$ (Zorn). Din 4.34.3. rezultă că $I_i \subset f_i^{-}M$, $i\in I$. Dar $(f_i^{-}M)\in X$ și $(I_i)\in X_0$, deci $(f_i^{-}M)=(I_i)$. În plus, pentru orice $i\in I$ și pentru orice $a_i\in A_i$, conform 4.34.3.: $f_i(a_i)\in M \Rightarrow a_i\in I_i \Rightarrow$ $\Rightarrow f_i(a_i)\in M_x$; din 4.1.2., $M\subset M_x$, deci $M=M_x$. Prin urmare π este bine definită și surjectivă; injectivitatea sa rezultă imediat din 4.34.3..

4.36. Consecință. $(X_0,A)\in$ **ES** și $\pi\in IzES'((X_0,A), HA)$.

4.37. Teoremă. **(PBl, PBl')** este cu limite inductive; dacă F este o **I**-codiagramă în **PBl**, atunci $\varinjlim_{(PBl,PBl')} F = (A,f_i)$, unde A și f_i sunt definiți în 4.32..

Demonstrație. Din 4.24.5. și 4.23.3. rezultă imediat că $A\in PBl$, căci $(X_0,A)\in ES$. În plus, $(f_i)\in INM(A,F)$; într-adevăr, dacă $h\in PBl(A,B_0)$, din 4.35. rezultă că există $x\in X_0$ astfel ca $h^{-}(0)=M_x$ și din 4.34.3. că $((hf_i)^{-}(0))=(f_i^{-}M_x)=x$; atunci, din 4.33. rezultă că $(hf_i)\in INM(B_0,F)$.

Fie $C\in PBl$ și $(g_i)\in INM(C,F)$. Căutăm un unic $g\in PBl'(A,C)$ astfel ca $(gf_i)=(g_i)$. Fie $a\in A$. Din definiția 4.32. rezultă că există un $m\in \mathbb{N}$, $m_k\in \mathbb{N}$, $i_{ks}\in I$, $k=\overline{0,n}$, $s=\overline{0,m_k}$, $a_{i_{ks}}\in A_{i_{ks}}$ astfel ca $a=\bigcup_{k=0}^{n}\bigcap_{s=0}^{m_k} f_{i_{ks}}(a_{i_{ks}})$. Pentru a ne atinge scopul este suficient să arătăm că: $g: a \to c=\bigvee_{k=0}^{n}\bigwedge_{s=0}^{m_k} g_{i_{ks}}(a_{i_{ks}})$ definește un morfism din PBl'(A,C). Fie $a'=\bigcup_{p=0}^{r}\bigcap_{q=0}^{t_p} f_{i_{pq}}(a'_{i_{pq}})=a$ și $c'=\bigvee_{p=0}^{r}\bigwedge_{q=0}^{t_p} g_{i_{pq}}(a'_{i_{pq}})\in C$. Trebuie să arătăm că $c=c'$. Presupunem, prin absurd, că $c\neq c'$. Cum C este locală, rezultă că există $N\in M(C)$ astfel ca $c\wedge c'\in N$ și $c\vee c'\notin N$, deci $c\notin N$, sau $c'\notin N$. Să presupunem că $c'\notin N$; atunci $c\in N$. Fie $h: C \to B_0$ definit prin $h(d)=0 \Leftrightarrow d\in N$. Atunci $(hg_i)\in INM(B_0,F)$, iar din 4.33. rezultă $x=(g_i^{-}N)\in X_0$ și: $x\in f_i(a_i) \Leftrightarrow a_i\notin g_i^{-}N \Leftrightarrow g_i(a_i)\notin N$, $i\in I$, $a_i\in A_i$. Dar $c\in N$, deci există $s(k)\in\{0,\dots,m_k\}$, $k=\overline{0,n}$ astfel ca $g_{i_{ks(k)}}(a_{i_{ks(k)}})\in N$. Atunci pentru orice $k\in\{0,\dots,n\}$, $x\notin f_{i_{ks(k)}}(a_{i_{ks(k)}})$, deci $x\notin a$. Dar $c'\notin N$, deci există $p\in\{0,\dots,r\}$ astfel ca $g_{i_{pq}}(a'_{i_{pq}})\notin N$, oricare ar fi $q\in\{0,\dots,t_p\}$; deci $x\in f_{i_{pq}}(a'_{i_{pq}})$, $q=\overline{0,t_p}$ și $x\in a'$.

În concluzie $a\neq a'$, ceea ce contrazice ipoteza.

Rămâne să arătăm că $g \in PBl'(A,C)$. Fie $N \in M(C)$ şi $h: C \rightarrow B_0$ definită prin $h(c)=0$ dacă şi numai dacă $c \in N$. Atunci $x=(g_i^{-}N) \in X_0$. Este suficient să arătăm, conform 4.35., că $M_x=g^{-}N$. Fie $i \in I$ şi $a_i \in A_i$. Atunci: $f_i(a_i) \in M_x \Leftrightarrow x \notin f_i(a_i) \Rightarrow a_i \in g_i^{-}N \Rightarrow f_i(a_i) \in g^{-}N$, iar din 4.1.2. rezultă că $M_x \subset g^{-}N$ şi, prin urmare, $M_x=g^{-}N$.

4.38. Teoremă. (PBp, PBp') este cu limite inductive; dacă F este o **I**-codiagramă în **PBp** atunci $\varinjlim_{(\mathbf{PBp},\mathbf{PBp}')}F=\varinjlim_{(\mathbf{PBl},\mathbf{PBl}')}\Delta F=(A,f_i)$, unde Δ: **PBp** $\rightarrow$ **PBl** este functorul de uitare, iar A şi f_i sunt definiţi în 4.32..

Demonstraţie. Conform teoremei 4.37., este suficient să arătăm că f_i este morfism perfect (vezi 4.5.), pentru orice $i \in I$. Fie $M \in M(A)$. Atunci există $x=(I_i) \in X_0$, conform 4.35., astfel ca $M=M_x$. Fie $B_i=\cap\{M_i \in M(A_i) \mid I_i \subset M_i\}$, $i \in I$. Atunci B_i este ideal propriu al lui A_i şi, cum pentru orice $i,j \in I$, $s \in I(i,j)$, $F(s)$ este perfect, $F(s)B_i \subset B_j$, conform 4.32.1., $(B_i) \in X$, iar $x=(I_i) \sqsubset (B_i)$. Dar $x \in X_0$, deci, conform 4.32.2., $(B_i)=(I_i)$ şi f_i este perfect, pentru orice $i \in I$.

4.39.Teoremă. Fie $G=((X_i,P_i), G(s))$ o **I**-diagramă în **Esp** astfel încât KG să fie o codiagramă în **PBp** şi, ca în 3.35., $((L,P_L),g_i)=\varprojlim_{(\mathbf{Esp},\mathbf{Esp}')}G$. Dacă $P_L \in PBl$, atunci următoarele condiţii sunt echivalente:

(a) $\varinjlim_{(\mathbf{PBp},\mathbf{PBp}')}KG = (K(L,P_L),K(g_i))$

(b) $\forall J \subset I$ finită şi $\forall (A_i)_J \in \prod_J P_i$:

$$L = \bigcup_J g_i^{-}A_i \Rightarrow \exists\, k \in I:\ X_k = \bigcup\{G(s)^{-}A_i \mid i \in J,\ s \in I(i,k)\} \tag{4.5}$$

Demonstraţie. Fie $F=KG=(P_i,F(s))$, unde $F(s)=KG(s)$, pentru orice $i,j \in I$ şi $s \in I(i,j)$ şi $h_i=K(g_i)$, $i \in I$. Din teorema 4.38., $\varinjlim_{(\mathbf{PBp},\mathbf{PBp}')}F=(A,f_i)$, A şi f_i fiind definite în 4.32..

(a) $\Rightarrow$ (b). Fie $\varinjlim_{(\mathbf{PBp},\mathbf{PBp}')}F=(P_L,h_i)$. Atunci există un izomorfism $h \in PBp'(A,P_L)$ astfel ca $(hf_i)=(h_i)$. Fie J o submulţime finită a lui I, $(A_i) \in \prod_J P_i$, astfel ca $L=\bigcup_J g_i^{-}A_i=\bigcup_J h_i A_i$. Fie I_k

idealul generat de mulţimea $\cup\{F(s)A_i \mid i\in J, s\in I(i,k)\}$, $k\in I$. Pentru a demonstra (b) este suficient să arătăm că există $k\in I$ astfel ca $I_k=P_k$. Presupunem, prin absurd, că I_k este ideal propriu a lui P_k, pentru orice $k\in I$. Atunci $(I_i)\in X$ şi există, conform lemei lui Zorn un $x=(J_k)\in X_0$ astfel ca $(I_k)\subset x$. Atunci $A_i\in I_i\subset J_i$, pentru orice $i\in J$, deci $x\notin \bigcup_J f_i A_i$. Prin urmare $L\neq h(\bigcup_J f_i A_i)=\bigcup_J h_i A_i$, în contradicţie cu ipoteza.

(b) $\Rightarrow$ (a). Arătăm că $(h_i)\in INM(P_L,F)$. Fie $M\in M(P_L)$. Atunci $(h_i^{\cdot}M)\in X$. Fie $x=(J_i)\in X_0$ astfel ca $(h_i^{\cdot}M)\subset x$ şi J ideal generat de mulţimea $\{h_iA_i \mid i\in I, A_i\in J_i\}$ în P_L. Din (b) rezultă că J este ideal propriu al lui P_L. Cum pentru orice $i\in I$ şi $A_i\in P_i$, astfel ca $h_iA_i\in M$ rezultă că $A_i\in J_i$ şi $h_iA_i\in J$, din 4.1.2. rezultă că $M\subset J$, deci $M=J$. Dar $J_i\subset h_i^{\cdot}J=h_i^{\cdot}M$, $i\in I$, deci $x=(h_i^{\cdot}M)$; atunci, conform 4.33 şi 2.11., $(h_i)\in INM(P_L,F)$. Din $(h_i)\in INM(P_L,F)$ şi $(A,f_i)=\lim_{(PBp,PBp')}F$ rezultă că există un unic $h\in PBp'(A,P_L)$ astfel ca $(hf_i)=(h_i)$.

Deoarece mulţimea $\{P\in P_L \mid \exists a\in A: h(a)=P\}$ este o subalgebră prebooleană a lui P_L care conţine mulţimea $\{h_iA_i \mid i\in I, A_i\in P_i\}$, conform 4.6.1., rezultă că h este surjectivă. Pentru a proba injectivitatea, fie $a,b\in A$, $a\neq b$, $x=(I_i)\in a\setminus b$ şi J idealul lui P_L generat de mulţimea $\{h_iA_i \mid i\in I, A_i\in I_i\}$. Din (b) rezultă că J este un ideal propriu. Ca mai sus:

$i\in I$, $A_i\in P_i$, $f_iA_i\in M_x \Rightarrow [A_i\in I_i$ şi $f_iA_i\in h^{\cdot}J]$;

din 4.1.2. rezultă că $M_x\subset h^{\cdot}J$; dar J este ideal propriu, iar din 4.35., M_x este un ideal maximal, prin urmare $M_x=h^{\cdot}J$. Atunci $a\notin M_x=h^{\cdot}J$, $b\in M_x=h^{\cdot}J$, deci $h(a)\neq h(b)$. În concluzie $h\in IzPBp'(A,P_L)$

4.40. Observaţie. Condiţia (b) din teorema 4.39. este exprimată în termenii diagramei G, desigur ea este satisfăcută dacă G este conservativ şi dacă pentru orice $i\in I$, din $g_iA_i=X_i$ ... rezultă $A_i=X_i$. În rezultatele următoare vom analiza limitele proiective din **(ES,ES'')** prin intermediul echivalenţei naturale π - teorema 4.41. - şi printr-o construcţie similară celei din **(Ec,Ef)** - teorema 4.45..

4.41. Teoremă. Fie $\tilde{G}=((\tilde{X}_i,\tilde{P}_i),\tilde{G}(s))$ o **I-diagramă** în **ES**, $F=K\tilde{G}$, X_0 şi A ca in 4.32 şi $g_i: X_0 \to \tilde{X}_i$ definit prin: $g_i(I_i)=\bigcap\{A_i^c \mid A_i\in I_i\}$, $i\in I$. Atunci $((X_0,A),g_i)=\lim_{(ES,ES')}\tilde{G}$

Demonstraţie. Din 4.38. şi 4.28. rezultă că există limita proiectivă în **(ES,ES')**, a lui

$H(K\tilde{G})$ şi $\lim_{ES,ES'} H(K\tilde{G}) = (HA, H(f_i))$. Din 4.26., cum π: $1_{ES} \rightarrow HK$ este o echivalenţă naturală, rezultă că limita proiectivă a lui $\tilde{G}$ în **(ES,ES')** există şi $\lim_{ES,ES'} \tilde{G} = (HA, \pi^{-1}_{(\tilde{X}_i,\tilde{P}_i)} \circ H(f_i))$. Din 4.36. rezultă că $\underleftarrow{\lim}_{(ES,ES')} \tilde{G} = ((X_0, A), \pi^{-1}_{(\tilde{X}_i,\tilde{P}_i)} H(f_i)\pi)$. Dar, pentru orice $i \in I$ şi $x \in X_0$, $\pi^{-1}_{(\tilde{X}_i,\tilde{P}_i)} H(f_i)\pi(x) = \{\tilde{x}_i \in \tilde{X}_i \mid M_{\tilde{x}_i} \in H(f_i)M_x\} = \cap\{A_i^c \mid x \notin f_i A_i, A_i \in \tilde{P}_i\} = g_i(x)$, deci $\lim_{ES,ES'} \tilde{G} = ((X_0, A), g_i)$.

4.42. Consecinţă. Fie G o **I**-diagramă în **Esp**, $((L,P_L), f_i) = \underleftarrow{\lim}_{(Esp,Esp')} G$, ca în 3.36., astfel ca:

(i) H(KG) să fie diagramă în **ES**

(ii) $P_L \in PBI$

(iii) să fie verificată condiţia (4.5) de la 4.39.

Fie, ca în 4.41., $\underleftarrow{\lim}_{(ES,ES')} H(KG) = ((X_0,A),g_i)$. Atunci:

(a) $\lim_{PBp,PBp'} KG = (P_L, K(f_i))$

(b) $\exists g \in IzPBp'(A,P_L)$ astfel ca $(gK(g_i)) = (K(f_i))$

(c) $\exists f \in IzES'(HP_L,(X_0,A))$ astfel ca $(HK(f_i)) = (g_i f)$

Demonstraţie. Din 4.32., (i) şi (ii) rezultă că functorul KG este o codiagramă în **PBp**, iar din 4.39 rezultă (a). Din 4.28. rezultă că $(HP_L, HK(f_i)) = \underleftarrow{\lim}_{(ES,ES')} H(KG)$, de unde rezultă imediat (c). În sfârşit, cum $(A, K(g_i)) = \underrightarrow{\lim}_{(PBp,PBp')} KH(KG)$ rezultă că există un unic izomorfism $g \in PBp'(A,P_L)$ astfel ca $gK(g_i) = K(f_i)$, $i \in I$ şi condiţia (b) este verificată.

4.43. Observaţie. Dacă **I**-diagrama G din **Esp** satisface condiţiile (i) şi (ii) din 4.42., atunci din teorema 4.39. rezultă că are loc echivalenţa (4.5) $\Leftrightarrow$ (c).

Exemplul următor ilustrează modul în care pot fi întrebuinţate proprietăţile de dualitate din 4.42. şi clarifică "defectul" remarcat la 3.40..

4.44. Exemplu. Fie $F_1=((X_n,P_n),f_{nm})$ sistemul proiectiv din **Ep** construit la 3.37. şi $(([0,1],R(P)),f_n)=\varprojlim_{(\mathbf{Ep},\mathbf{Ep'})}F_1$. Desigur, F_1 satisface condiţia (4.5):

$\forall J\subset\mathbb{N}$, J finită, $\forall(A_j)_j\in\prod_J P_j$, din $[0,1]=\cup f_j^{\cdot}A_j$ rezultă că există $n\in\mathbb{N}$ astfel ca $X_n=\bigcup_{j\in J, j\le n} f_{jn}A_j$.

Fie $(M(P_n),\tilde{P}_n)$ spaţiul Stone al algebrei Boole P_n, $n\in\mathbb{N}$ şi $\tilde{f}_n:(M(X),\widetilde{R(P)})\to(M(P_n),\tilde{P}_n)$ definită prin $\tilde{f}_n N=\{M\in M(P_n)\mid\{A_n\in P_n\mid f_n^{\cdot}A_n\in N\}\subset M\}$, pentru orice $M\in M(R(P))$, $n\in\mathbb{N}$. Fie μ_0 ca în 3.38. şi 3.39.; cum $M(\mu_0)=\{A\in R(P)\mid 0\notin\overline{A\setminus\{0\}}\}$, (vezi 3.40.) rezultă că $M(\mu_0)$ este ideal maximal în R(P) şi $\tilde{f}_n M(\mu_0)=\{M_0^n,M_{2^{-n}}^n\}$ unde $M_0^n=\{A_n\in P_n\mid 0\notin A_n\}$ şi $M_{2^{-n}}^n=\{A_n\in P_n\mid 2^{-n}\notin A_n\}$, $n\in\mathbb{N}$. Atunci $(\tilde{f}_n M(\mu_0))\underset{\neq}{\supset}(M_0^n)_n$ şi $(\tilde{f}_n)$ nu este familie invariantă minimală.

4.45. Teoremă. Fie $\tilde{G}=((\tilde{X}_i,\tilde{P}_i),\tilde{G}(s))$ o **I**-diagramă în **ES**, $\widetilde{PI}=\{(B_i)\mid\emptyset\neq B_i\subset\tilde{X}_i,\ B_i=\overline{B}_i,\ \tilde{G}(s)B_i\subset B_j,\ \forall i,j\in I,\ \forall s\in I(i,j)\}$, ordonată cu ordinea produs, $\widetilde{PIM}$ mulţimea elementelor minimale din $\widetilde{PI}$, $\tilde{p}$ algebra prebooleană de mulţimi a lui $\widetilde{PIM}$ generată de mulţimea $\{\tilde{f}_i^{\cdot}B_i\mid i\in I,\ B_i\in\tilde{P}_i\}$ unde $\tilde{f}_i:\widetilde{PIM}\to\tilde{X}_i$ este definită prin $\tilde{f}_i((B_i))=B_i$.

Atunci $((\widetilde{PIM},\tilde{p}),\tilde{f}_i)=\varprojlim_{(\mathbf{ES},\mathbf{ES'})}\tilde{G}$.

Demonstraţie. Fie ca în 4.44., $\varprojlim_{(\mathbf{ES},\mathbf{ES'})}\tilde{G}=((X_0,A),g_i)$. Trebuie să dovedim existenţa unui izomorfism $f\in ES'((X_0,A),(\widetilde{PIM},\tilde{p}))$ astfel ca $(\tilde{f}_i f)=(g_i)$. Fie funcţiile $k: X\to\widetilde{PI}$ şi $h:\widetilde{PI}\to X$ definite prin: $k(I_i)=(\cap\{A_i^c\mid A_i\in I_i\})$, $h(B_i)=(\{A_i\in\tilde{P}_i\mid A_i\subset B_i^c\})$, pentru orice $(I_i)\in X$ şi $(B_i)\in\widetilde{PI}$. Se verifică imediat buna definire a lui k şi h precum şi faptul că sunt funcţii descrescătoare; în plus, dacă $(I_i)\in X_0$, atunci $hk(I_i)=(I_i)$. Prin urmare, dacă f este restricţia lui k la X_0, atunci $fX_0=\widetilde{PIM}$, şi, în consecinţă, putem considera că $f\in Of(X_0, \widetilde{PIM})$ este inversabilă şi inversa sa este restricţia lui h la $\widetilde{PIM}$. Mai mult, $(\tilde{f}_i\, f)=(g_i)$ şi f este măsurabilă; într-adevăr, $\{C\subset\widetilde{PIM} \mid f^{\cdot}C\subset A\}$ este o algebră prebooleană de submulţimi ale lui $\widetilde{PIM}$ care conţine mulţimea $\{f^{\cdot}B_i \mid i\in I,\ B_i\in \tilde{P}_i\}$; f^{-1} este de asemenea măsurabilă căci, pentru orice $i\in I$, $A_i\in \tilde{P}_i$, $f(f^{\cdot}A_i)=\{(B_i)\in\widetilde{PIM} \mid A_i\notin\{C_i\in \tilde{P}_i \mid C_i\subset B_i^c\}\}=\tilde{f}_i^{\cdot}A_i$. Prin urmare $(\widetilde{PIM}, \tilde{p})\in ES$, $f\in IzES'((X_0,A), (\widetilde{PIM}, \tilde{p}))$ şi $(\tilde{f}_i\, f)=(g_i)$.

4.46. Observaţii. 1. Orice element din $\widetilde{PI}$ conţine un element din $\widetilde{PIM}$ şi $\widetilde{PIM}\neq\emptyset$, conform lemei lui Zorn, situaţie care nu este valabilă, în general, în **(Ec,Ef)**, după cum s-a văzut la 3.27.3

2. Conform 4.24.5. un spaţiu semipremăsurabil poate fi identificat cu mulţimea densă πX a spaţiului Stone $(M(P_X), \tilde{T}_{P_X})= (\tilde{X},\tilde{T})$, înzestrată cu urma $\tilde{P}_X\cap\pi X$. Remarcăm că şi spaţiile topologice (X, T_X) şi $(\pi X, \tilde{T}\cap\pi X)$ sunt izomorfe; într-adevăr mulţimea $\{P\subset X \mid \pi P\in\tilde{T}\cap\pi X\}$ este o topologie pe X care conţine P_X şi $\{Q\subset\tilde{X} \mid \pi^{\cdot}Q\in T_X\}$ este o topologie $\tilde{X}$ care conţine mulţimea $\tilde{P}_X$, deci $\pi\colon (X,T_X) \to (\pi X, \tilde{T}\cap\pi X)$ este homeomorfism. Analog se arată că $(X, S(P_X))$ şi $(\pi X, S(\tilde{P}_X)\cap\pi X)$ sunt spaţii măsurabile izomorfe (vezi 3.35.) şi, la fel, $(X,(B(X))$ şi $(\pi X, B(\tilde{X})\cap\pi X)$, unde $B(X)$ şi $B(\tilde{X})$ sunt τ-algebrele boreliene ale lui (X,T_X), respectiv $(\tilde{X}, \tilde{T})$.

4.47. Consecinţă. Fie $G=((X_i,P_i), G(s))$ o **I**-diagramă în **Esp** şi $((L, P_L),f_i)=\varprojlim_{(Esp,Esp')}G$ astfel ca (i) şi (ii) din 4.42. să fie verificate. Dacă (X_i, P_i), $i\in I$ şi (L, P_L) sunt spaţii locale şi reduse, identificându-le ca la 4.46.2. cu spaţiile Stone corespunzătoare, notând $\tilde{G}=H(KG)$ şi, ca în 4.45., $((\widetilde{PIM},\tilde{p}),\tilde{f}_i)=\lim_{\longleftarrow (ES,ES')}\tilde{G}$ atunci există o submulţime densă Y a lui $\widetilde{PIM}$ astfel ca (L,P_L) şi $(Y,\tilde{p}\cap Y)$ să fie izomorfe în **Esp'** şi, după identificarea lui L cu Y:

$f_i(x)\subset \tilde{f}_i(x)\cap X_i$ şi $\tilde{f}_i(x) = \overline{f_i(x)}$, pentru orice $i\in I$ şi $x\in L$.

4.48. Propoziţie. Fie $G=((X_i,P_i),g_{ij})$ un $(I,\leq)$ sistem proiectiv în **Esp** şi $((L,P_L), f_i)=\lim_{Esp,Esp'}G$; presupunem că pentru orice $i\in I$, (X_i, P_i) este premăsurabil şi atomic (vezi 4.22.). Atunci (X_i, P_i), $i\in I$ şi (L, P_L) sunt spaţii locale şi reduse.

Demonstraţie. Fie $x,y\in L$, $x\neq y$. Din 3.35. rezultă că există $i\in I$ astfel ca $f_i(x)\cap f_i(y)=\varnothing$. Fie $x_i\in f_i(x)$ şi $A=f_i^{\cdot}(x_i)$. Atunci $x\in A$ şi $y\notin A$, deci (L,P_L) este redus.

Pentru a demonstra că (L, P_L) este local, fie $x\in A\in P_L$; conform construcţiei lui P_L, putem presupune că există $i\in I$ şi $A_i\in P_i$ astfel ca $f_i^{\cdot}A_i=A$. Fie $x_i\in f_i(x)\cap A_i$. Atunci $x\in f_i^{\cdot}(x_i)$, iar din 3.20. rezultă că există $j\in I$, $j\geq i$, astfel ca $f_j(x)\subset g_{ij}^{\cdot}(x_i)$. Fie $B=f_j^{\cdot}(g_{ij}^{\cdot}(x_i))^c$. Atunci $B\in P_L$ şi $A\cup B\supseteq f_i^{\cdot}f_{ij}^{\cdot}(x_i)\cup f_j^{\cdot}(f_{ij}^{\cdot}(x_i))^c=X$.

4.49. Consecinţă. Dacă $G\in proEsp_I$ verifică condiţiile din 4.48., atunci G verifică şi condiţiile (i) şi (ii) din 4.42..

§.5. A - CATEGORII DE GRUPURI

Fie **AFf** categoria algebrelor universale cu operaţiile finitare F şi a omomorfismelor de asemenea algebre. Dacă f este o operaţie n-ară ($f\in F_n$), $A\in$ AFf şi $\emptyset\neq X_k\subset A$, $k=1,\dots,n$ definim operaţiile lui Minkowsky, [BGMO.84], prin:

$$f(X_1,\dots,X_n) = \{f(x_1,\dots,x_n) \mid x_k\in X_k,\ k=1,\dots,n\} \tag{5.1}$$

Fie $A,A'\in$ AFf şi $\varphi\in Ec(\square A,\square A')$. Dacă pentru orice $n\in\mathbb{N}$, orice $f\in F_n$ şi orice $a_k\in A$, $k=1,\dots,n$

$$f(\varphi a_1,\dots,\varphi a_n)\subset\varphi(f(a_1,\dots,a_n)) \tag{5.2}$$

spunem că φ este o *corespondenţă omomorfă* sau *corespondenţă de algebre*, [Da.88b]. Se verifică imediat că algebrele cu operaţiile finitare F şi corespondenţele omomorfe între asemenea algebre formează o categorie ordonată faţă de relaţiile (1.2), categorie pe care o notăm cu **AFc**.

Corespondenţele omomorfe sunt cazuri particulare de relaţii omomorfe, relaţii al căror studiu a fost iniţiat în lucrările lui B.Zelinka în contextul teoriei toleranţelor şi dezvoltat în [Zel.70], [Zel.75], [CZ.75], [CNZ.76], [CZ.77], [Cha.77], [Cha.78], [MV.78], [MW.80], [ChD.82], [PB.82], [PB.84], [Tam.84], [PB.87], [PB.88], [MR.89], [Rad.91] etc. Interesul acordat acestui concept a fost generat de utilitatea aplicării teoriei toleranţelor în cele mai diverse domenii. Remarcăm în acest sens lucrările de pionierat în teoria percepţiei - [Zee.61], teoria automatelor şi a controlului - [Arb.66] şi [Arb.67], lingvistică - [Kal.67], [Jak.68] şi [Fis.74] şi biologie (teoria clasificării) - [Sch.68], [JS.68] şi [Sch.75]. Bibliografii complementare legate de acest subiect se găsesc în monografiile [Cha.81], [Mau.82], [BP.82], [MPV.82].

În această secţiune prezentăm o selecţie a unor rezultate privind structura, completitudinea, existenţa limitelor şi constructivitatea a-categoriei grupurilor preluate din [RD.84], [Da.85e], [DR.86b], [Da.87a], [Da.88a] şi [Da.95].

Finalul paragrafului îl dedicăm unor probleme legate de existenţa limitelor proiective în a-categoria grupurilor ordonate parţial prezentate în [Da.89].

A. Corespondențe de grupuri

Notăm cu **Gf** categoria grupurilor şi a omomorfismelor de grupuri, iar cu **Gc** categoria ordonată a grupurilor şi a corespondenţelor de grupuri; în acest caz, folosind notaţia aditivă (fără a presupune comutativitatea grupurilor), $F=(+,-,0)$, iar $\varphi\in Gc(G,G')$:

$$\varphi a+\varphi b\subset\varphi(a+b),\ -\varphi a\subset\varphi(-a)\ \text{şi}\ 0\in\varphi 0,\ \forall a,b\in G \tag{5.3}$$

Dacă $G\in Gf$ şi H este un subgrup al lui G vom scrie $H\leq G$; dacă N este un subgrup normal al lui G vom scrie $N\Delta G$; dacă $X\subset G$, simbolul $<X>$ (sau $<X>_G$) va indica subgrupul generat de X în G; $N_G(H)$ va indica normalizatorul lui H în G, iar 0 grupul trivial $\{0\}$.

5.1. Lemă. Fie $G,G'\in Gc$ şi $\varphi\in Ec(\square G,\square G')$. Atunci $\varphi\in Gc(G,G')$ dacă şi numai dacă pentru orice $x,y\in G$: $\varphi x-\varphi y\subset\varphi(x-y)$.

Demonstrație. Fie $\varphi\in Gc(G,G')$ şi $x,y\in G$; din (5.3) rezultă că $\varphi x-\varphi y\subset\varphi x+\varphi(-y)\subset\varphi(x-y)$. Invers, dacă $\varphi x-\varphi y\subset\varphi(x-y)$ pentru orice $x,y\in G$, pentru $x=y$ rezultă că $0\in\varphi 0$; dacă $u\in\varphi x$, atunci $-u\in 0-\varphi x\subset\varphi 0-\varphi x\subset\varphi(-x)$, deci $-\varphi x\subset\varphi(-x)$; cum $\varphi x+\varphi y\subset\varphi x-\varphi(-y)\subset\varphi(x+y)$, rezultă că (5.3) este verificată şi $\varphi\in Gc(G,G')$.

Se verifică uşor proprietăţile următoare:

5.2. Proprietăţi. Fie $\varphi\in Gc(G,G')$, $A\subset G$, $B\subset G'$ şi $\ker\varphi=\{x\in G\mid 0\in\varphi x\}$. Atunci

(a) $\varphi 0\Delta\varphi G\leq G'$

(b) $\ker\varphi\Delta G$

(c) $\varphi x=y+\varphi 0$, pentru orice $x\in G$ şi $y\in\varphi x$

(d) φ este semiunivocă

(e) φ este univocă dacă şi numai dacă $\ker\varphi=0$

(f) $\varphi(-x)=-\varphi x$, $\varphi(x+y)=\varphi x+\varphi y$, $\forall x,y\in G$

(g) $\varphi\varphi^{-1}\varphi A=\varphi A$, $\varphi^{-1}\varphi\varphi^{-1}B\subset\varphi^{-1}B$

(h) $\varphi\varphi^{-1}B\subset B \Leftrightarrow [b\in B \Rightarrow b+\varphi 0\subset B]$

(i) $\varphi\varphi^{-1}A=A \Leftrightarrow [a\in A \Rightarrow a+\ker\varphi\subset A]$

(k) $\varphi\in Gf(G,G') \Leftrightarrow \varphi 0=0$

5.3. Observaţie 1. În **Gc** grupul trivial 0 defineşte doar obiectul final, nu şi cel iniţial, deci **Gc** nu are obiect nul şi, în consecinţă, nici nuclee. Totuşi, vom folosi notaţia "kerφ" în sensul definiţiei de la 5.2..

2. **Gc** nu are egalizatori. Într-adevăr, dacă G este un grup netrivial, 0 este grupul trivial, $\theta\in Gf(0,G)$ este morfismul nul şi $\varphi\in Gc(0,G)$ definit prin $\varphi(0)=G$, atunci θ şi φ nu au egalizatori, căci dacă $\theta\mu=\varphi\mu$, atunci $0=\theta\mu(0)=\varphi\mu(0)=G$, în contradicţie cu alegerea lui G. Se ştie că o categorie are limite proiective dacă şi numai dacă are egalizatori şi produse, [PP.79]; prin urmare **Gc** nu are limite proiective.

5.4. Lemă. Fie $G,G'\in Gc$ şi $\varphi\in Ec(\square G,\square G')$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $\varphi\in Gc(G,G')$

(b) $\varphi^{-1}(0)\Delta G$, $\varphi(0)\Delta\varphi G\leq G'$ şi există $f_\varphi\in IzGf(G/\varphi^{-1}(0),\ \varphi G/\varphi(0))$ astfel ca $\varphi(x)=y+\varphi(0)$, unde $y\in f_\varphi(x+\varphi^{-1}(0))$, pentru orice $x\in G$.

Afirmaţia rezultă din 5.2.(a), 5.2.(b) şi prima teoremă de izomorfism. În cele ce urmează vom folosi adesea notaţiile din următoarea proprietate imediată:

5.5. Lemă. Fie $\varphi\in Gc(G,G')$, $\varphi'\in Gc(G,\varphi G)$ definită prin $\varphi'(x)=\varphi(x)$, pentru orice $x\in G$, $p'_\varphi\in Gf(\varphi G,\ \varphi G/\varphi(0))$ proiecţia canonică şi $\varphi_f\in Gc\ (\varphi G/\varphi(0),G')$ definită prin $\varphi_f(\bar{y})=y+\varphi(0)$, unde $y\in\bar{y}\in\varphi G/\varphi(0)$. Atunci diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & G' \\ \varphi G \arrow[r, "p'_\varphi"'] & \varphi G/\varphi(0) \arrow[u, "\varphi_f"'] \end{tikzcd}$$

este comutativă.

5.6. Observaţie. Dacă $\varphi,\psi\in Gc(G,G')$, atunci

$\varphi=\psi \Leftrightarrow \varphi'=\psi' \Leftrightarrow p'_\varphi=p'_\psi \Leftrightarrow \varphi_f=\psi_f \Leftrightarrow p'_\varphi\varphi' = p'_\psi\psi' \Leftrightarrow \varphi_f p'_\varphi = \psi_f p'_\psi$.

5.7. Teoremă. Fie $\varphi \in Gc(G,G')$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) φ este univocă

(b) φ este monomorfism

(c) $[g,h \in Gf(H,G),\ \varphi g=\varphi h] \Rightarrow g=h$

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Din 5.2.(d) rezultă că $0=\ker\varphi$ şi $p'_\varphi \varphi' \in IzGf(G,\varphi G/\varphi(0))$; dacă $\varphi\alpha=\varphi\beta$, atunci $p'_\varphi\varphi'_\alpha=p'_\varphi\varphi'_\beta$; prin urmare $\alpha=\beta$.

(b) $\Rightarrow$ (c) este evidentă.

(c) $\Rightarrow$ (a). Fie $g,h \in Gf(\ker\varphi,G)$ definit prin $g(a)=a$, $h(a)=0$, pentru orice $a \in \ker\varphi$. Atunci $\varphi g=\varphi h$, deci $g=h$, conform (c), prin urmare $\ker\varphi=0$, iar din 5.2.(e) rezultă (a).

5.8. Observaţie. Dacă $\varphi \in Gc(G,G')$ este surjectivă nu rezultă că φ este epimorfism în **Gc**. De exemplu dacă G' este un grup netrivial, $\varphi(x)=G'$, pentru orice $x \in G$, $\alpha=1_{G'}$, iar $\beta(y)=G'$, pentru orice $y \in G'$, atunci $\alpha\varphi=\beta\varphi$ şi $\alpha\neq\beta$.

5.9. Teoremă. Fie $\varphi \in Gc(G,G')$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) φ este epimorfism

(b) φ_f este epimorfism

(c) $\varphi \in EpGf(G,G')$

Demonstraţie. Desigur un epimorfism în **Gf**, fiind surjectiv, este epimorfism şi în **Gc**, prin urmare (c) $\Rightarrow$ (a). Din 5.5. rezultă că (a) $\Rightarrow$ (b). Presupunem că (a) este adevărată; folosind 3.4 şi 5.7. rezultă imediat că $\varphi^{\cdot} \in MonGc(\varphi G,G)$ şi $\varphi^{\cdot}$ este univocă, deci, conform 5.2., $\ker\varphi=0$ şi $\varphi 0=0$; prin urmare $\varphi \in EpGf(G,G')$; am arătat astfel că (a) $\Rightarrow$ (c). În sfârşit, să arătăm că (b) $\Rightarrow$ (c). Presupunem că φ_f este epimorfism; cum (a) $\Leftrightarrow$ (c), rezultă că $\varphi_f \in EpGf(\varphi G/\varphi 0,G')$, şi, imediat, că $\varphi 0=0$; din 5.2. rezultă că $\varphi \in Gf(G,G')$, iar din faptul că φ_f este surjecţie urmează că φ este surjecţie; în consecinţă $\varphi \in EpGf(G,G')$

5.10. Teoremă. Gc este o categorie cu coegalizatori.

Demonstraţie. Fie φ şi $\psi \in Gc(G,G')$ şi N închiderea normală a mulţimii $\bigcup_{x \in G}(\varphi x-\psi x)$.

Definim $\theta \in Gc(G',G')$ prin $\theta y=y+N$. Atunci $\theta\varphi(x)=\varphi x+N=\varphi x-\psi x+N+\psi x=\psi x+N=\theta\psi(x)$, pentru orice $x \in G$, deci $\theta\varphi=\theta\psi$. Dacă $\delta \in Gc(G',G'')$ astfel ca $\delta\varphi=\delta\psi$, atunci $0 \in \delta(\varphi x-\psi x)$, pentru orice $x \in G$, deci $N \subset \ker\delta$. Cum $\delta\theta(y)=\delta(y+N)=\delta y$, pentru orice $y \in G'$, rezultă că $\delta\theta=\delta$ şi θ

este un coegalizator pentru φ şi ψ.

S-a văzut la 5.3. că **Gc** nu are egalizatori. Dăm în continuare condiţii necesare şi suficiente pentru ca două corespondenţe de grupuri să aibă egalizatori.

5.11. Teoremă. Fie $\varphi,\psi\in Gc(G,G')$, $n=\{N\leq G \mid \varphi N=\psi N\}$ ordonată, în cazul în care este nevidă, cu relaţia "$\leq$". Următoarele condiţii sunt echivalente:

(a) φ şi ψ au egalizatori

(b) n are un cel mai mic element N_0, $N_0\Delta H'=\bigcup_{N'\in n} N'$ şi $\varphi(x+N_0)=\psi(x+N_0)$, pentru orice $x\in H'$

Demonstraţie. (a) $\Rightarrow$ (b). Fie (H,μ) un egalizator pentru φ şi ψ. Atunci $\mu(0)\Delta\mu H$ şi $\mu(0)$, $\mu H\in n$. Dacă $N\in n$, atunci $\delta(0)=N$ defineşte o corespondenţă de grupuri $\delta\in Gc(0,G)$. Mai mult, $\varphi\delta=\psi\delta$, deci există $\gamma\in Gc(0,H)$ astfel ca $\delta=\mu\gamma$, adică $N=\mu\gamma(0)$. Dar $0\in\gamma(0)$, $\mu(0)\subseteq\mu\gamma(0)=N$, deci $\mu(0)$ este cel mai mic element din n. Evident H' este cel mai mare element. Analog, definind $\delta\in Gc(0,G)$ prin $\delta(0)=H'$, există $\gamma\in Gc(0,H)$ astfel ca $\delta(0)=\mu\gamma(0)\subseteq\mu H$, deci $\mu H=H'$. Din 5.2.(a) şi din $\mu\in Gc(H,G)$ rezultă că $\mu(0)\Delta\mu H\leq H'$. Dacă $x\in H'$ atunci există $a\in H$ astfel ca $x\in\mu(a)$ şi $\varphi(x+\mu(0))=\varphi\mu(a)=\psi(x+\mu(0))$; prin urmare $N_0=\mu(0)$ are toate proprietăţile enumerate la (b).

(b) $\Rightarrow$ (a). Fie $H=H'/N_0$; definim pentru orice $x\in\bar{x}\in H$: $\mu(\mathbf{x})=x+N_0$. Deoarece $\ker\mu=0$, din 5.2.(e) şi 5.7. rezultă că μ este monomorfism. Fie $\delta\in Gc(K,G)$ astfel ca $\varphi\delta=\psi\delta$. Atunci $\delta(0)$, $\delta K\in n$, deci $N_0\leq\mu(0)\Delta\delta K\leq H'$. Din teorema a III-a de izomorfism rezultă existenţa izomorfismului canonic $f\in Gf(\delta K/\delta(0), (\delta K/N_0)/(\delta(0)/N_0))$. Notând cu $p\in Gf(\delta K/N_0, (\delta K/N_0)/(\delta(0)/N_0))$ proiecţia canonică şi cu $i\in Gf(\delta K/N_0,H)$ incluziunea, din 5.2.(i) rezultă că $p^-\in Gc((\delta K/N_0)/(\delta(0)/N_0), \delta K/N_0)$. În diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\delta K/N_0 \arrow[r, "i"] \arrow[dd, "p^-"'] & H \arrow[r, "\mu"] & G \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & G' \\
& & K \arrow[u, "\delta"'] \arrow[ul, dashed, "\gamma"] \arrow[d, "\delta'"] & \\
(\delta K/N_0)/(\delta(0)/N_0) & \delta K/\delta(0) \arrow[l, "f"] & \delta K \arrow[l, "p'_\delta"] &
\end{tikzcd}$$

considerăm $\gamma=ip^{-}fp_{\delta}'\delta'$; pentru $y\in\delta(x)$, $x\in K$, notăm $\bar{y}=y+N_0$. Atunci $\mu\gamma(x)=\mu ip^{-}fp_{\delta}'\delta'(x)=$ $=\mu ip^{-}f(\bar{y})=\mu ip^{-}(\bar{y}+\delta(0)/N_0)=\mu(y+\delta(0))=\delta(x)$, deci $\mu\gamma=\delta$. Prin urmare (H,μ) este egalizator.

Cu toate că **Gc** nu are limite proiective - vezi 5.3. - în condiţii restrictive impuse asupra categoriei de indexare a unui sistem proiectiv limitele proiective există. Prezentăm în continuare o teoremă constructivă în acest sens.

5.12. Teoremă. Dacă $(I,\leq)$ este o mulţime bine ordonată de lungime local finită atunci *Gc* are I-limite proiective.

Demonstraţie. Deoarece I satisface condiţia de lanţ a lui Jordan-Dedekind rezultă că pentru orice $i\in I$, $i>0$ - unde 0 este cel mai mic element al lui I - există un unic lanţ maximal care leagă pe 0 cu i. Fie $F=(G_i, \varphi_{ij})$ un sistem proiectiv de bază I. Dacă I este finită, atunci, conform teoremei 2.10., $\varprojlim F=(G_0, \varphi_{i0})$. Presupunem în continuare că I este infinită. Fie $H_i=\bigcap_{j} \varphi_{ij}G_j$ şi $N_i=\bigcup_{j\in I_i} \varphi_{ij}(0)$, pentru orice $i\in I$. Atunci, pentru $i\leq j\leq k$, $\varphi_{ij}(0)\subset\varphi_{ij}\varphi_{jk}(0)=\varphi_{ik}(0)$, deci

$$\varphi_{ij}N_j=N_i, \text{ pentru } i\leq j \tag{1}$$

Din (1), cu un simplu calcul se arată că $L = \{(x_i)\in\Pi H_i \mid x_i\in\varphi_{ij}x_j,\ i\in I,\ j\in I_i\}\in Gc$. Definim $\varphi_i((x_i))=x_i+N_i$, pentru orice $i\in I$ şi $(x_i)\in L$. Din 5.2.(a) rezultă că $N_i\Delta H_i$ şi se verifică imediat că $\varphi_i\in Gc(L,G_i)$ pentru orice $i\in I$, iar $\varphi_{ij}\varphi_j=\varphi_i$, pentru orice $j\in I_i$. Fie acum $g_i\in Gc(G,G_i)$ astfel ca $\varphi_{ij}g_j=g_i$, pentru orice $i\in I$ şi $j\in I_i$. Din $\varphi_{ij}(0)\subset\varphi_{ij}\, g_j(0)$ rezultă că $N_i\subset g_i(0)$, pentru orice $i\in I$, iar din $g_iG=\varphi_{ij}g_jG\subset\varphi_{ij}G_j$, oricare ar fi $j\in I_i$, rezultă că $g_iG\leq H_i$, pentru orice $i\in I$.

Fie $i\in I$, $x_i\in g_i(x)$, $x\in G$, i-1 precedentul lui i şi i+1 succesorul său. Atunci, din $g_{i-1}(x)=\varphi_{i-1,i}g_i(x)$ rezultă existenţa unui element $x_{i-1}\in\varphi_{i-1,i}(x_i)\subset g_{i-1}(x)$, iar din $g_i(x)=\varphi_{i,i+1}g_{i+1}(x)$ rezultă existenţa unui $x_{i+1}\in g_{i+1}(x)$, cu proprietatea: $x_i\in\varphi_{i,i+1}(x_{i+1})$; repetând inductiv acest procedeu găsim şirul $(x_i)\in L\cap\Pi g_i(x)$; definim $\gamma(x)=L\cap\Pi g_i(x)$; se verifică imediat că $\gamma\in Gc(G,L)$ şi că $\varphi_i\gamma=g_i$, oricare ar fi $i\in I$. Prin urmare $\varprojlim F=(L,\varphi_i)$ până la un izomorfism

Următoarea proprietate evidentă care oferă condiţii necesare şi suficiente pentru ca două corespondenţe de grupuri să fie în relaţie de ordine va fi utilizată în continuare

5.13. Lemă. Fie φ şi $\psi\in Gc(G,G')$. Următoarele condiţii sunt echivalente:

(a) $\varphi \subset \psi$

(b) $\varphi(0)\subset\psi(0)$ şi $\varphi(x)\cap\psi(x)\neq\varnothing$, oricare ar fi $x\in G$.

5.14. Teoremă. **Gc** este superior tare completă la stânga.

Demonstraţie. Fie I o mulţime nevidă şi $\varphi_i\in Gc(G,G')$, pentru orice $i\in I$. Definim: $H = <\bigcup_{i\in I}\varphi_i G>$ şi $\varphi(0) = <\{y\in H \mid \exists x\in G,\ i,j\in I\colon y\in\varphi_i(x)-\varphi_j(x)\}>_H$. Se verifică imediat că $\varphi(0)\Delta H$. Aceasta permite buna definire a corespondenţei de grupuri $\varphi\in Gc(G,G')$ prin $\varphi(x)=y+\varphi(0)$, unde $y\in\bigcup_{i\in I}\varphi_i(x)$, pentru orice $x\in G$. Desigur $\varphi=\bigcup_{i\in I}\varphi_i$. Conform 1.1.3. rămâne să arătăm că I-familia $\{\varphi_i\}$ este superior stabilă la stânga. Fie $\alpha\in Gc(G',K)$. Desigur $\cup\alpha\varphi_i\subset\alpha\varphi$ şi $\{x\in(\cup\alpha\varphi_i)G \mid \exists a\in G,\ i,j\in I\colon x\in\alpha\varphi_i(a)-\alpha\varphi_j(a)\} = \{x\in\alpha\varphi G \mid \exists a\in G,\ i,j\in I\colon x\in\alpha(\varphi_i(a)-\varphi_j(a))\}$, deci $(\cup\alpha\varphi_i)(0)=\alpha\varphi(0)$. Prin urmare, conform lemei 5.13., $\alpha\varphi=\cup\alpha\varphi_i$, iar φ este stabilă la stânga.

5.15. Observaţie. **Gc** nu este o categorie bicompletă. De exemplu, dacă $(\mathbf{Z},+)$ este grupul întregilor, $f(k)=0$, oricare ar fi $k\in\mathbf{Z}$, $g=1_Z$ şi $\theta\in Gf(0,\mathbf{Z})$ este morfismul trivial, atunci $(f\cup g)\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$, $(f\cup g)(0)=\{x\in\mathbf{Z} \mid \exists a\in\mathbf{Z}\colon x\in f(a)-g(a)\}=\mathbf{Z}$, deci $f\cup g$ este cel mai mare element din $Gc(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$; prin urmare $(f\cup g)\theta(0)=\mathbf{Z}$. Dar $f\theta(0)=0=g\theta(0)$ şi $(f\theta\cup g\theta)(0)=0$.

5.16. Propoziţie. Fie $(\varphi_i)_{i\in I}$ o familie nevidă din $Gc(G,G')$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $\exists\cap\varphi_i\in Gc(G,G')$

(b) $\cap\varphi_i(x)\neq\varnothing$, oricare ar fi $x\in G$

Demonstraţie. Din (a) rezultă imediat (b). Pentru implicaţia inversă, fie $\varphi(x)=\cap\varphi_i(x)$, $x\in G$. Dacă $y\in\varphi(x)$, $y'\in\varphi'(x')$, atunci $y-y'\in\varphi_i(x-x')$, oricare ar fi $i\in I$, deci $\varphi(x)-\varphi(x')\subset\varphi(x-x')$, pentru orice x şi x' din G; din 5.1. rezultă că $\varphi=\cap\varphi_i\in Gc(G,G')$.

5.17. Observaţii. 1. Dacă $\varphi=\cup\varphi_i$, atunci familia $U=\{\psi \mid \varphi_i\subset\psi,\ i\in I\}$ verifică 5.16.(b) şi $\varphi=\bigcap_{\psi\in U}\psi$. Mai mult, notând: $N = <\bigcup_I \ker\varphi_i>_G$, $G_\varphi = <\bigcup_I\varphi_i G>_{G'}$ şi $N' = <\bigcup_I\varphi_i N>_{G_\varphi}$, atunci

$\varphi(x) = y+N'$, unde $y\in\cup\varphi_i(x)$, pentru orice $x\in G$.

2. Folosind notațiile din 5.10. remarcăm că $\varphi\cup\psi\subset\theta\varphi=\theta\psi$. Mai mult:

$\theta\varphi=\theta\psi=\varphi\cup\psi \Leftrightarrow N_{G'}((\varphi\cup\psi)(0))=G'$.

3. În următoarele rânduri vom face unele considerații asupra structurii mulțimii $Gc(G,G')$.

5.18. Definiție. Fie $\varphi,\psi\in Gc(G,G')$. Spunem că *φ este echivalentă cu* ψ și scriem $\varphi\sim\psi$ dacă există $f\in IzGf(\varphi G/\varphi(0), \psi G/\psi(0))$ astfel ca $\psi_f f=\varphi_f$.

5.19. Lemă. Fie $\varphi,\psi\in Gc(G,G')$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) $\varphi = \psi$

(b) $\varphi \sim \psi$ și $\varphi(x)\cap\psi(x)\neq\emptyset$, oricare ar fi $x\in G$.

Demonstrație. (b) $\Rightarrow$ (a). $\varphi(0)=\psi_f f p'_\varphi\varphi'(0)=\psi_f f(\varphi(0))=\psi_f(\psi(0))=\psi(0)$, iar din 5.13 rezultă că $\varphi=\psi$. Inversa este imediată.

5.20. Teoremă. Fie $\varphi_1, \varphi_2\in Gc(G,G')$ astfel ca $\varphi_1(x)\cap\varphi_2(x)\neq\emptyset$, oricare ar fi $x\in G$. Atunci există φ_2^1, φ_1^2, $\varphi^{12}\in Gc(G,G')$ astfel încât:

(a) $\varphi_1(0) \leq \varphi_2^1(0)$, $\varphi_2(0) \leq \varphi_1^2(0)$,

$\varphi_2^1 G \leq \varphi_1 G$, $\varphi_1^2 G \leq \varphi_2 G$

$\varphi_1\cap\varphi_2\subset\varphi^{12}$, $\varphi^{12}G = \varphi_1 G \cap \varphi_2 G$

(b) $\varphi_2^1 \sim \varphi_1^2 \sim \varphi^{12}$

Demonstrație. Fie $x\in G$; definim: $\varphi_1^2(x)=\varphi_1(0)+(\varphi_1 G\cap\varphi_2 x)$, $\varphi_2^1(x)=\varphi_2(0)+(\varphi_2 G\cap\varphi_1(x))$ și $\varphi^{12}(x)=f^{12}(x)+(\varphi_1(0)\cap\varphi_2 G)+ +(\varphi_2(0)+\varphi_1 G)$, unde f^{12} este o selecție strictă a corespondenței $\bigcup(\varphi_1\cap\varphi_2)$, din teorema a II-a de izomorfism rezultă că $\varphi_2^1(0)\Delta\varphi_2^1 G$, $\varphi_1^2(0)\Delta\varphi_1^2 G$ și $\varphi^{12}(0)\Delta\varphi^{12}G$

Dacă $u\in\varphi_2^1(x)$, $v\in\varphi_2^1(x')$, există $z_u,z_v\in\varphi_1(0)$, $x_u,x_v\in G$, $y_u\in\varphi_1(x)\cap\varphi_2(x)$, $y_v\in\varphi_1(x')\cap\varphi_2(x')$ astfel ca $u=z_u+y_u$, $v=z_v+y_v$. Atunci $y_u-y_v\in\varphi_1(x_u-x_v)\cap\varphi_2(x-x')\subset\varphi_1 G$; dar $\varphi_1(0)\Delta\varphi_1 G$, deci există $z\in\varphi_1(0)$ astfel încât $y_u-y_v-z_v=z+y_u-y_v$, deci $u-v\in\varphi_1(0)+(\varphi_1 G\cap\varphi_2(x-x'))=\varphi'(x-x')$ și, în consecință, φ_2^1 este corespondență de grupuri. Analog se arată că $\varphi_1^2\in Gc(G,G')$.

Dacă $u\in\varphi^{12}(x)$, $v\in\varphi^{12}(x')$, există $z_1, z'_1 \in \varphi_1(0) \cap \varphi_2(G)$, $z_2,z'_2\in\varphi_2(0)\cap\varphi_1 G$ astfel ca

$u-v=f^{12}(x)+z-f^{12}(x')$, unde $z=z_1+z_2-z'_2-z'_1$; dar $z_2-z'_2\in\varphi_2(0)\cap\varphi_1 G$ şi $\varphi^{12}(0)\Delta\varphi^{12}G$, deci există $z'\in\varphi^{12}(0)$ astfel încât $u-v=f^{12}(x)-f^{12}(x')+z'\in\varphi^{12}(x-x')$; prin urmare φ^{12} este corespondenţă omomorfă. Cu acestea proprietăţile (a) se verifică imediat.

Din lema lui **Zassenhaus rezultă că** $\varphi_2{}^1G/\varphi_2{}^1(0) \simeq \varphi_1{}^2G/\varphi_1{}^2(0) \simeq \varphi^{12}G/\varphi^{12}(0)$, deci $\varphi_2{}^1 \sim \varphi_1{}^2 \sim \varphi^{12}$

5.21. Consecinţă. $\varphi_1\subset\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1\subset\varphi^{12} = \varphi_2{}^1\subset\varphi_1{}^2 = \varphi_2$

Demonstraţie. Deoarece $\varphi_1(0)\subset\varphi_2{}^1(0) = \varphi_1 G\cap\varphi_2(0) = \varphi^{12}(0)$ pentru orice $x\in G$: $\varphi_1{}^2(0) = \varphi_2(0)$, $\varphi_1(x) \subset \varphi_2{}^1(x)\cap\varphi_1{}^2(x)\cap\varphi^{12}(x)\cap\varphi_2(x)$ şi $\varphi_2{}^1(x) \subset \varphi_1{}^2(x)$; de aici, ţinând seama de 5.13., 5.19. şi 5.20., afirmaţia se verifică imediat.

5.22. Observaţii. 1. **(Gc, Gf)** este o categorie cu aproximare la stânga concretă. Într-adevăr, dacă $\varphi\in Gc(G,G')$ astfel ca pentru orice $f\in Gf(H,G)$ corespondenţa φf este minimală în $Gc(H,G')$, oricare ar fi $H\in Gc$, luând $H=0$, θ şi θ' morfismele triviale din $Gf(0,G)$ respectiv $Gf(0,G')$, atunci $\theta'\subset\varphi\theta$, deci $\theta'=\varphi\theta$; din 5.2.(j) rezultă că $\varphi\in Gf(G,G')$.

2. Din 5.14. rezultă că functorul $\square$: **Gc** $\to$ **Ec** nu este un functor fidel, deci nu putem afirma că **(Gc, Gf)** este prebogată; în consecinţă nu putem utiliza rezultatele din secţiunea doua privind depistarea limitelor proiective şi constructivitatea. Cu toate acestea vom da un procedeu concret de construcţie a limitelor proiective - teorema 5.23. - legătura, în cazuri speciale, cu limitele din **(Ec,Ef)** - teorema 5.24. - şi, în fine, vom demonstra că **(Gc,Gf)** este constructivă.

5.23. Teoremă. În a-categoria **(Gc,Gf)** orice sistem proiectiv are limită proiectivă.

Demonstraţie. Fie $F=(G_i\varphi_{ij})\in proGc_I$,

$N_i = \bigcup \varphi_{ij}(0)$, $H_i = N_{G_i}(N_i)$, $L = \{ (\bar{x}_i)\in\Pi H_i/N_i \mid \varphi_{ij}(\bar{x}_j)\subset\bar{x}_i,\ i\in I,\ j\in I_i\}$ şi

$\varphi_i((\bar{x}_i))=x_i+N_i$, pentru orice $(\bar{x}_i)\in L$, $i\in I$, unde $x_i\in\bar{x}_i$. Se verifică imediat că $L\in Gc$ şi $\varphi_i\in Gc(L,G_i)$, $i\in I$. Dacă $j\in I_i$, atunci $\varphi_{ij}\varphi_j((\bar{x}_i))=\varphi_{ij}((\bar{x}_j))\subset\bar{x}_i=\varphi_i((\bar{x}_i))$, deci $(\varphi_i)\in FI(L)$. Fie $G\in Gc$ şi $g\in Gf(G,L)$. Desigur $(\varphi_i g)\in FI(G)$. Fie $(g_i)\in FI(G)$ astfel ca $(g_i)\subset(\varphi_i g)$. Atunci $g_i(0)\subset\varphi_i g(0)=N_i$ pentru orice $i\in I$; dar $\varphi_{ij}(0)\subset\varphi_{ij}g_j(0)\subset g_i(0)\Delta g_i G$, deci $N_i\subset g_i(0)$, de unde $N_i=g_i(0)$, oricare ar fi $i\in I$. Din 5.2.(a) rezultă că $g_i(G)\Delta g_i(0)$, deci $g_iG\leq H_i$ şi, pentru orice $x\in G$, $g_i(x)=x_i+N_i$, unde $x_i\in g_i(x)$, $i\in I$; dar $g_i(x)\subset\varphi_i g(x)$, deci $\varphi_i g(x)=x_i+\varphi_i g(0)=x_i+\varphi_i((N_i))=x_i+N_i$; de aceea $(\varphi_i g)=(g_i)$ şi în consecinţă $(\varphi_i)\in FIM(L)$; analog se arată că $(\varphi_i g)\in FIM(G)$. Prin urmare legea $g\to(\varphi_i g)$ defineşte o aplicaţie injectivă din $Gf(G,L)$ în $FIM(G)$.

Fie acum $(g_i)\in FIM(G)$ şi $\theta\in Gf(0,G)$ morfismul trivial; ca mai sus se arată că $N_i\subset g_i(0)$, $i\in I$, definim $\theta_i\in Gc(0,G_i)$ prin $\theta_i(0)=N_i$. Dar $\varphi_{ij}N_j=\varphi_{ij}(<\bigcup_{k\in I_j}\varphi_{jk}(0)>)\subset\bigcup_{k\in I_i}\varphi_{ik}(0)$, deci: $\varphi_{ij}N_j\subset N_i$, pentru orice $i\in I$ şi $j\in I_i$; atunci $\varphi_{ij}\theta_j(0)\subset N_i=\theta_i(0)$, deci $g_i(0)=N_i$. Dar $g_i(0)\Delta g_iG$, deci $g_iG\leq H_i$ şi $(g_i(x))\in L$, pentru orice $x\in G$. Acum putem defini $g(x)=(g_i(x))$, $x\in G$ şi, desigur, $g\in Gf(G,L)$, $(\varphi_i g)=(g_i)$, ceea ce probează că $\varprojlim_{(Gc,Gf)}F=(L,\varphi_i)$, până la un izomorfism.

Fie acum $(f_i)\in proGc_I(F,F')$, $F'=(G_i',\varphi_{ij}')$ şi $(L',\varphi_i')=\varprojlim_{(Gc,Gf)}F'$. Definim $f((\bar{x}_i))==(\overline{f_i(x_i)})$, pentru orice $(\bar{x}_i)\in L$, unde $x_i\in\bar{x}_i$, $i\in I$, iar $\overline{f_i(x_i)}$ este clasa elementului $f_i(x_i)$. Dacă $N_i'=<\bigcup_{j\in I_i}\varphi'_{ij}(0)>_{G_i'}$, atunci $f_iN_i=<f_i(\bigcup_{j\in I_i}\varphi_{ij}(0))>_{G_i'}=<\bigcup_{j\in I_i}f_i\varphi_{ij}(0)>_{G_i'}=<\bigcup_{j\in I_i}\varphi_{ij}'f_j(0)>_{G_i'}=<\bigcup_{j\in I_i}\varphi_{ij}'(0)>_{G_i'}=N_i'$, prin urmare este bine definit $f\in Gf(L,L')$; mai mult, $f_i\varphi_i((\bar{x}_i))=f_i(\bar{x}_i)=\overline{f_i(x_i)}=\varphi_i'(\overline{f_i(x_i)})=\varphi_i'f((\bar{x}_i))$, pentru orice $(\bar{x}_i)\in L$, deci $f_i\varphi_i=\varphi_i'f$, oricare ar fi $i\in I$. Prin urmare $\varprojlim_{(Gc,Gf)}f_i=f$.

5.24. Teoremă. Fie $(I,\leq)\in POf$ dirijată la dreapta, $F=(G_i,\varphi_{ij})$, $F'=(G'_i,\varphi'_{ij})\in pro\ Gc_I$, $\varprojlim_{(Gc,Gf)}F=(L,\varphi_i)$, $\varprojlim_{(Gc,Gf)}F'=(L',\varphi'_i)$, $(f_i)\in proGc_I(F,F')$ şi $f=\varprojlim_{(Gc,Gf)}f_i$. Atunci $\varprojlim_{(Ec,Ef)}\square F=(\square L,\square\varphi_i)$, $\varprojlim_{(Ec,Ef)}\square F'=(\square L',\square\varphi'_i)$ şi $\varprojlim_{(Ec,Ef)}\square f_i=\square f$.

Demonstraţie. Dacă I are un element i_0 pentru care $i\leq i_0$, oricare ar fi $i\in I$, afirmaţiile rezultă imediat din 2.10.. În cele ce urmează presupunem că I nu posedă un asemenea element. Folosim notaţiile din 3.23. şi 5.23.. Remarcăm că:

$$\varphi_{ik}(0)=\varphi_{ij}\varphi_{jk}(0)\subset\varphi_{ik}(0),\ \text{pentru } i\leq j\leq k \tag{1}$$

Dacă $(a_i)\in(A_i)\in PIM=PIM(\square F)$ şi J_i este o parte cofinală a mulţimii I_i, $i\in I$, atunci

$\varphi_{ii}(\bigcup_{k\in J_i}\varphi_{ik}(a_k)) \subset \bigcup_{k\in J_i}\varphi_{ik}(a_k) \subset \bigcup_{j\in J_i}\varphi_{ij}(a_j)$, $\bigcup_{j\in J_i}(\varphi_{ij}(a_j))\in PI$ şi

$$A_i = \bigcup_{j\in J_i}\varphi_{ij}(a_j), \text{ oricare ar fi } i\in I. \tag{2}$$

Dacă $n_i\in N_i=\varphi_i(0)$, din (2) şi (1) rezultă că există $j\in I_i$ şi $k\in J_j$ astfel ca $n_i\in\varphi_{ij}(0)$, $a_i\in\varphi_{ik}(a_k)$, deci $a_i+n_i\in\varphi_{ik}(a_k)\subset A_i$, prin urmare:

$$a_i+N_i\subset A_i, \text{ oricare ar fi } i\in I \text{ şi şi } a_i\in A_i \tag{3}$$

Din (1), $N_i=\bigcup_{j\in I_i}\varphi_{ij}(0)$, iar din (3), $(N_i)\in PIM\neq\emptyset$. Dacă $x\in L$, atunci $(\varphi_i(x))\in PI$, şi, din (3), $(\varphi_i(x))\in PIM$, deci

$$L \subset PIM \tag{4}$$

Pentru $(a_i)\in(A_i)\in PIM$, notăm $J_i=\{j\in I_i \mid a_i\in\varphi_{ij}(a_j)\}$, $i\in I$. Fie $k\in I_i$. Din (2) rezultă că există $j\in J_k$ astfel ca $a_k\in\varphi_{kj}(a_j)$, deci $j\in J_i$; prin urmare J_i este o parte cofinală a mulţimii I_i, $i\in I$. Mai mult, $a_i\in\bigcap_j\varphi_{ij}(a_j)$, deci $\varphi_{ij}(a_j)=a_i+\varphi_{ij}(0)\subset a_i+N_i$, pentru orice $j\in J_i$, $A_i\subset a_i+N_i$ şi din (2), $(A_i)=(a_i+N_i)$. În consecinţă, din (4), $PIM=L$.

5.25. Teoremă. A-categoria (**Gc, Gf**) este constructivă.

Demonstraţie. Deoarece **Gf** este o categorie cu produse, din 2.13. rezultă că A-categoria (**Gc, Gf**) este cu produse stricte; conform teoremei 2.28., cum (**Gc, Gf**) este superior tare completă la stânga - teorema 5.14. - este suficient să arătăm că ea este cu limite proiective.

Fie $F=(G_i, F(s))$ o **I-diagramă** în **Gc**. Pentru orice $i\in I$ notăm, ca la 1.16.2., cu $S_i=\{s\in I(i,j) \mid j\in I\}$; fie $N_i=<\bigcup_{s\in S_i}F(s)(0)>_{G_i}$ şi H_i normalizatorul lui N_i în G_i. Se verifică imediat că $L=\{(\overline{x}_i)\in\Pi H_i/N_i \mid F(s)(\overline{x}_j)\subset\overline{x}_i,\ s\in S_i,\ i\in I\}$ este grup şi că $\varphi_i((\overline{x}_i))=\overline{x}_i$, oricare ar fi $(\overline{x}_i)\in L$ defineşte o corespondenţă de grupuri $\varphi_i\in Gc(L,G_i)$, $i\in I$.

Fie $G\in Gc$, $g\in Gf(G,L)$. Trebuie să arătăm că $(\varphi_i g)\in FIM(G,F)$. Fie $s\in S_i$; dacă $x\in G$ şi $g(x)=(\overline{x}_i)\in L$, atunci $F(s)\varphi_j g(x)=F(s)(\overline{x}_j)\subset\overline{x}_i=\varphi_i g(x)$, deci $(\varphi_i g)$ este o familie invariantă. Fie acum $f\in Gf(G',G)$ şi $(g_i)\in FI(G',F)$ astfel ca $(g_i)\subset(\varphi_i gf)$. Atunci $g_i(0)\subset\varphi_i gf(0)=\varphi_i((N_i)) = N_i$, $i\in I$.

iar dacă $s \in S_i$, atunci $F(s)(0) \subset F(s)g(0) \subset g_i(0) \Delta g_i G'$, deci $N_i = g_i(0)$, $i \in I$. Dar $g_i(0) \le G_i$, $g_i(0) \Delta g_i G'$, de unde rezultă că $g_i G' \le H_i$ şi, în consecinţă, pentru orice $x \in G'$, $g_i(x) = x_i + N_i$, unde $x_i \in g_i(x)$; dar $g_i(x) \subset \varphi_i gf(x)$, oricare ar fi $x \in G'$, iar din 5.13. rezultă imediat că $(\varphi_i gf) = (g_i)$; prin urmare $(\varphi_i g) \in FIM(G,F)$.

În acest fel corespondenţa $g \to (\varphi_i g)$ defineşte o aplicaţie din Gf(G,L) în FIM (G,F) care este evident injectivă; rămâne să justificăm surjectivitatea ei. Fie $(g_i) \in FIM(G,F)$ şi $\theta \in Gf(0,G)$ morfismul trivial. Fie $s \in I(i,j)$; atunci $F(s)(0) \subset F(s)g_j(0) \subset g_i(0) \Delta g_i G$, deci $N_i \subset g_i(0)$, $i \in I$. Definim $\theta_i \in Gc(0,G_i)$ prin $\theta_i(0) = N_i$. Cum pentru orice $s \in I(i,j)$,

$$F(s)N_j = F(s) < \bigcup_{d \in S_j} F(d)(0) > \subset < \bigcup_{d \in S_j} F(ds)(0) > \subset < \bigcup_{d \in S_i} F(d)(0) > = N_i,$$

urmează că pentru orice $i \in I$ şi $s \in I(i,j)$, $F(s)\theta_j(0) \subset N_i = \theta_i(0)$, deci $(\theta_i) \in FI(0,F)$; cum $(\theta_i) = (g_i\theta)$ şi $(g_i) \in FIM(G,F)$ rezultă că $\theta_i = g_i\theta$, deci $g_i(0) = N_i$, $i \in I$. Dar $g_i(0)\ \Delta g_i G$, deci $g_i G \le H_i$ şi $(g_i(x)) \in L$, oricare ar fi $x \in G$. Atunci $g \in Gf(G,L)$ şi $(\varphi_i g) = (g_i)$. Prin urmare $\lim_{(Gc,Gf)} F = (L, \varphi_i)$.

Din 2.28. rezultă că **(Gc,Gf)** este constructivă.

B. A-categorii la stânga concrete de grupuri ordonate.

Fie $(G, \le)$ şi $(G', \le)$ două grupuri abeliene ordonate şi $\varphi \in Gc(G,G')$. Dacă φ este o corespondenţă izotonă în sensul definiţiei 3.47. vom spune că φ este o *corespondenţă de grupuri ordonate*. Se verifică imediat că **(GOc, GOf)** este o a-categorie la stânga concretă (ca la 5.22.1.), unde **GOf** este categoria grupurilor ordonate şi a omomorfismelor de grupuri ordonate, iar **GOc** este categoria cu aceleaşi obiecte având drept morfisme corespondenţele de grupuri ordonate, ordonarea acestora fiind dată de (1.2). Detalii asupra proprietăţilor corespondenţelor izotone se găsesc în lucrările lui R.E. Smithson şi T.B. Muenzenberger.

În [DB.86a] şi [DB.86b] am dat condiţii necesare şi suficiente pentru existenţa limitelor proiective în a-categorii la stânga concrete de mulţimi ordonate şi corespondenţe izotone, iar în [DR.85] şi [DR.86a] rezultate similare în a-categorii la stânga concrete de latici. Folosind unele rezultate din [Da.89] aici vom analiza comportarea corespondenţelor de grupuri ordonate şi existenţa limitelor.

5.26. Notații 1. Dacă $G \in G0c$ vom considera implicit că ordinea pe G este notată cu "$\leq$" sau, echivalent, [Bo.64], că ordinea este dată de mulțimea elementelor nenegative P_G (sau P).

Este binecunoscut faptul că $P \subset G$ determină ordinea "$\leq$" pe G, compatibilă cu structura de grup prin:

$x \leq y,\ x,y \in G \Leftrightarrow y-x \in P$

dacă și numai dacă:

$0 \in P,\ P+P \subset P$ și $P \cap (-P)=\{0\}$ (5.4)

2. Fie $G \in G0c$. Dacă N este un subgrup izolat al lui G, [Bo.64], adică:

$0 \leq y \leq z,\ y \in G,\ z \in N \Rightarrow y \in N$ (5.5)

vom scrie $N \triangleleft G$.

5.27. Propoziție. Fie $G,G' \in G0c$ și $\varphi \in Gc(G,G')$. Următoarele condiții sunt echivalente:

(a) $\varphi \in G0c(G,G')$

(b) $a \in P_G \Rightarrow [\forall x \in \varphi(a) \exists z \in \varphi(0):\ z \leq x]$

(c) $a \in P_G \Rightarrow [\forall z \in \varphi(0) \exists x \in \varphi(a):\ z \leq x]$

(d) $a \in P_G \Rightarrow \varphi(a) \cap P_{G'} \neq \emptyset$

Demonstrație. Dacă apartenența (a) este definită prin relația (3.4) atunci (a)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(d). Dacă ea este definită prin relația (3.5), atunci (a) $\Rightarrow$ (b). Prin urmare este suficient să argumentăm implicațiile (d) $\Rightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a).

(d) $\Rightarrow$ (c). Fie $a \in P_G$ și $x' \in \varphi(a) \cap P_{G'}$. Dacă $z \in \varphi(0)$, atunci $x=z+x' \in \varphi(a)$ și $z \leq x$.

(c) $\Rightarrow$ (b). Fie x și u $\in \varphi(a)$. Cum $u-x \in \varphi(0)$, din (c) rezultă că există $v \in \varphi(a)$ astfel ca $u-x \leq v$. Atunci $z=u-v \in \varphi(0)$ și $z \leq x$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Fie $z \in \varphi(0)$ și $x' \in \varphi(a)$. Cum $x'-z \in \varphi(a)$, din (b) rezultă că există $z' \in \varphi(0)$ astfel ca $z' \leq x'-z$. Atunci $x=x'-z' \in \varphi(a)$ și $z \leq x$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Fie $a,b \in G$, $a \leq b$ și $x \in \varphi(a)$. Dacă $u \in \varphi(a-b)$, atunci există $y' \in \varphi(b)$ astfel ca $u = x-y'$. Dar $b-a \in P_G$, deci există $z \in \varphi(0)$ astfel ca $u \leq z$; deci $x \leq y$, unde $y=y'+z \in \varphi(b)$.

5.28. Observații. 1. Fie $f \in G0c(G,G')$. Atunci $f \in G0f(G,G')$ dacă și numai dacă $f(0)=0$.

2. Dacă $\varphi \in G0c(G,G')$ atunci $\varphi(0) \leq \varphi G \leq G'$. În schimb $\varphi(0)$ nu este subgrup izolat al lui φG, în general. De exemplu dacă $G \in G0c$ astfel ca el să nu aibă un subgrup izolat netrivial, dar să existe un subgrup $H \leq G$ netrivial, atunci $\psi(a)=H$, $a \in G$ definește o

corespondență $\psi\in G0c(G,G)$ pentru care $\psi(0)$ este izolat în ψG; definind $\varphi(a)=a+H$, $a\in G$, atunci $\varphi\in Gc(G,G)$, iar dacă $a\in P_G$, atunci $a\in P_G\cap\varphi(a)$, deci, din 5.27. rezultă că $\varphi\in G0c(G,G)$, iar $\varphi(0)$ nu este izolat în $G=\varphi G$.

Prin urmare grupul cât $\varphi G/\varphi(0)$ nu poate fi înzestrat, în general, cu ordinea indusă de proiecția canonică astfel ca el să devină grup ordonat, [Bo.64].

3. Dacă $\varphi\in G0c(G,G')$, $\varphi(0)$ nu este, în general reticulat. Argumentația acestui fapt este similară celei de mai sus.

4. Ca la 5.3.2. se arată că **G0c** nu are egalizatori și, prin urmare, nu are nici limite proiective.

5.29. Propoziție. Dacă $\varphi\in G0c(G,G')$ și $\varphi(0)\Delta\varphi G$ atunci ker $\varphi\Delta G$.

Demonstrație. Fie $0\leq a\leq u$, $a\in G$, $u\in\ker\varphi$. Din 5.27. rezultă că există $x\in\varphi(a)$ și $z\in\varphi(u)$ astfel ca $0\leq x\leq z$. Cum $x\in\varphi G$ și $z\in\varphi(0)\Delta\varphi G$ rezultă că $a\in\ker\varphi$, deci $\ker\varphi\Delta G$.

5.30. Consecință. Dacă $\varphi\in G0c(G,G')$ și $\varphi(0)\Delta\varphi G$, atunci $\overline{\varphi}(\bar{a})=\bar{x}$, unde $\bar{a}\in G/\ker\varphi$, $x\in\varphi(a)$ și $\bar{x}\in\varphi G/\varphi(0)$, definește izomorfism în **G0f** din $G/\ker\varphi$ pe $\varphi G/\varphi(0)$.

5.31. Propoziție. Fie F o **I**-diagramă în **G0c**, $(\gamma_i)\in FI(G,F)$ și N_i subgrupul generat de $\{\gamma_j F(s)(0) \mid s\in I(i,j), j\in I\}$, pentru orice $i\in I$. Atunci:

1. $N_i \subset \gamma_i(0)$, $i\in I$.

2. $(\gamma_i)\in FIM(G) \Leftrightarrow [N_i = \gamma_i(0), \forall i\in I]$

Demonstrație. 1. Dacă $s\in I(i,j)$, atunci $F(s)(0)\subset F(s)\gamma_j(0)\subset\gamma_i(0)$; dar $\gamma_i(0)$ este subgrup în $\gamma_i G$, deci $N_i\subset\gamma_i(0)$.

2. Dacă $(\gamma_i)\in FIM(G)$, atunci $(\gamma_i\theta)$ este familie invariantă minimală în $FI(0)$, unde $\theta\in G0f(0,G)$ este morfismul trivial. Din proprietatea precedentă rezultă imediat că $g_i(0)=N_i$, $i\in I$, definește $(g_i)\in FI(0)$ și $(g_i)\subset(\gamma_i\theta)$, prin urmare $(g_i)=(\gamma_i\theta)$ și $\gamma_i(0)=N_i$, pentru orice $i\in I$.

Invers, fie $f\in G0f(H,G)$ și $(f_i)\in FI(H)$ astfel încât $(f_i)\subset(\gamma_i f)$. Fie $i\in I$. Atunci $f_i(0)\subset\gamma_i(0)=N_i$, și, din prima proprietate rezultă că $f_i(0)=N_i$. Cum $f_i(x)\supset\cap\gamma_i f(x)\neq\emptyset$, pentru orice $x\in H$, din 5.13. rezultă că $(f_i)=(\gamma_i f)$. Prin urmare $(\gamma_i)\in FIM(G)$.

A-categoria (**GOc, GOf**) nu este cu limite proiective, după cum rezultă din următorul exemplu

5.32. **Exemplu.** Fie $I=\mathbb{N}$ cu ordinea naturală, $G_i=\mathbb{R}^2$, $i\in I$, cu ordinea produs şi

$$F(s)=\begin{cases}1_{\mathbb{R}^2}, & \text{dacă } i=j\\ \varphi, & \text{dacă } i\neq j\end{cases}$$

pentru orice $s\in I(i,j)$, unde $\varphi(x,y)=(x,y)+\mathbb{Z}^2$. Este imediat faptul că $\varphi\in GOc(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ şi $\varphi^2=\varphi$. Să presupunem că există $\lim\limits_{\leftarrow(\mathbf{G0c},\mathbf{G0f})} F=(G,\varphi_n)$. Fie $H=\mathbb{Z}^2$ cu ordinea naturală produs şi

$(n,m)\to(n\sqrt{2},m\sqrt{3})+\mathbb{Z}^2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Atunci, din 5.31., rezultă că $(\gamma_n)\in FIM(H)$ şi există $f\in G0f(H,G)$ astfel ca $\varphi f=\gamma$, iar f este monomorfism. Fie acum H'=H şi $P_{H'}=-P_H$, iar Cum $P_{H'}$ verifică (5.4) rezultă că $(H', P_{H'})\in GOc$. Dar $\gamma'(n,m)\le\gamma'(0,0)\le\gamma'(n,m)$, pentru orice $n,m\in\mathbb{Z}$, deci $\gamma'_n\in GOc(H',G_n)$ şi cum $\gamma'(0,0)=\mathbb{Z}^2$ rezultă că $(\gamma'_n)\in FIM(H')$. Unicul morfism $f'\in GOf(H',G)$ pentru care $\varphi f'=\gamma'$ este f. Dacă $(x,y)\in P_H\setminus\{(0,0)\}$ astfel ca $f(x,y)>0$, cum $-(x,y)\in P_{H'}$ rezultă că $f'(-x,-y)=-f(x,y)>0$; contradicție !

În cele ce urmează vom nota cu U: **GOc** $\to$ **Gc** functorul care omite structura de ordine a grupurilor şi cu V: **Gc** $\to$ **GOc** functorul definit prin

$G\to(G,P_G)$, $f\to f$,

unde $P_G=\{0\}$. Prezentăm câteva condiții necesare de existență a limitelor proiective în a-categoria (**GOc**, **GOf**).

5.33. **Propoziție.** Fie F o **I-diagramă** în categoria **GOc**. Dacă există $\lim\limits_{\leftarrow(\mathbf{G0c},\mathbf{G0f})} F=(G,\varphi_i)$, atunci:

1 $\lim\limits_{\leftarrow(\mathbf{Gc},\mathbf{Gf})} UF=(UG,U\varphi_i)$

2 $\cap\ker\gamma_i\ \Delta\ H$, pentru orice $(\gamma_i)\in FIM(H,F)$

Demonstrație. 1. Fie $\lim\limits_{\leftarrow(\mathbf{Gc},\mathbf{Gf})} UF=(L,\psi_i)$. Din 5.31. rezultă că $(\psi_i)\in FIM(VL,F)$, deci există un unic $f\in GOf(VL,G)$ astfel ca $(\varphi_i f)=(\psi_i)$. Pe de altă parte $(U\varphi_i)\in FIM(UG,UF)$, prin urmare există un unic $g\in Gf(UG,L)$ astfel ca $(\psi_i g)=(\varphi_i)$. Atunci $f=g^{-1}$ şi $\lim\limits_{\leftarrow(\mathbf{Gc},\mathbf{Gf})} UF=(UG,U\varphi_i)$.

2 Dacă $(\gamma_n)\in FIM(H)$, atunci există un unic $f\in GOf(H,G)$ astfel ca $(\gamma_i)=(\varphi_i f)$. Fie $h,k\in GOf(\cap\ker\gamma_n,G)$, $h(x)=f(x)$, $k(x)=0$, şi $\theta_i(x)=\gamma_i(x)=N_i$, $i\in I$, $x\in\cap\ker\gamma_i$. Din 5.31. rezultă

că $(\theta_i)\in FIM(\cap \ker \gamma_i)$, deci există un unic $\theta\in GOf(\cap\ker \gamma_n, G)$ astfel ca $(\varphi_i\,\theta)=(\theta_i)$.

Cum $(\varphi_i\, h) = (\varphi_i\, k)$ rezultă că h=k, deci f(x)=0, pentru orice $x \in \ker \cap \gamma_i$; prin urmare $\cap \ker \gamma_i \subset \ker f$; invers, dacă $x \in \ker f$, atunci $\varphi_i f(x) = N_i = \gamma_i(x)$, pentru orice $i\in I$, deci $\ker f = \cap \ker \gamma_i$, iar $\ker f \,\Delta\, H$.

5.34. Consecințe. Dacă există $(L, \varphi_i) = \lim\limits_{\leftarrow (G0c,G0f)} F$ atunci:

1. $L = \{(\bar{x}_i)\in \Pi G_i/N_i \mid F(s)X_j \subset X_i\ \forall s\in I(i,j)\}$, unde $\varphi_j((\bar{x}_i))=X_j \subset G_j$, $j\in I$ (până la un izomorfism în **Gf**);

2. oricare ar fi $(\gamma_i) \in FIM(G)$, $H = \{(\gamma_i(a)) \mid a\in G\}\in GOc$ unde $(\gamma_i(a))\in P_H \Leftrightarrow f(a) \in P_I$, f fiind unicul omomorfism din GOf(G, L) pentru care $(\varphi_i f) = (\gamma_i)$.

3. dacă $(\gamma_i)\in FIM(H)\cap FIM(H')$, unde (H, P_H), $(H', P_{H'})\in GOc$ şi H = H' atunci $P_H \cap (-P_H)$ $\ker \gamma_i$.

5.35. Observaţie. Sistemul proiectiv prezentat la 5.32. nu admite limită din cauză că $\varphi(x,y)$ conține atât elemente pozitive cât şi negative. Acest defect se poate elimina prin condiția (5.6.), eliminare care permite înzestrarea grupului limită L din **(Gc, Gf)** a **I**-diagramei F cu ordinea indusă de P_L definit la (5.7) astfel ca limita proiectivă (L, φ_i) din **(Gc, Gf)** să devină limită proiectivă în **(GOc, GOf)**. Vom nota în continuare $(L, \varphi_i) = \lim\limits_{\leftarrow (Gc,Gf)} F$, N_i ca la 5.31. şi $I_i=\{j\in I \mid I(i,j)\neq\varnothing\}$.

5.36. Teoremă. Condiția necesară şi suficientă pentru ca **I** – diagrama F din **GOc** să posede limită proiectivă în a-categoria **(GOc, GOf)** este că pentru orice $a\in L$ pentru care $\varphi_i(a)\cap P_{G_i}\neq\varnothing$, $i\in I$ să aibă loc implicația:

$$\varphi_i(a)\cap(-P_{G_i}\setminus N_i)\neq\varnothing \Rightarrow \exists j\in I_i:\ \varphi_j(a)\cap(-P_{G_j}\setminus N_j)=\varnothing \qquad (5.6)$$

În acest caz mulțimea elementelor nenegative din L este definită prin:

$$a\in P_I \Leftrightarrow \varphi_i(a)\cap P_{G_i} \neq \varnothing,\ \forall\, i\in I \qquad (5.7)$$

Demonstrație. 1. Necesitatea. Fie $(L, \varphi_i) = \lim\limits_{\leftarrow (G0c,G0f)} F$. Să presupunem, prin absurd, că există $a\in P_I$ pentru care relația (5.6.) nu este verificată. Deoarece $(\varphi_i) \in FIM(F)$ rezultă că

$$\varphi_i(a)\cap P_{G_i} \neq\varnothing,\ \text{pentru orice } i\in I \qquad (1)$$

şi există $i_0 \in I$ astfel ca:

$$\varphi_i(a) \cap (-P_{G_i} \setminus N_i) \neq \emptyset \text{, pentru orice } i \in I_{i_0} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\varphi_{i_0}(a) \neq N_{i_0}$, deci:

$$a \in P_i \setminus \{0\} \tag{3}$$

Dacă $i_0 \in I_i$ şi $s \in I(i, i_0)$, din (2) rezultă că $F(s)\ \varphi_{i_0}(a) \cap (-P_{G_i}) \neq \emptyset$, deci:

$$\varphi_i(a) \cap (-P_{G_i}) \neq \emptyset \text{, } \forall i \in I \text{ astfel ca } i_0 \in I_i \tag{4}$$

Fie H mulţimea numerelor întregi cu ordinea naturală şi pentru $k \in H$:

$$\gamma_i(k) = \begin{cases} \varphi_i(ka) & \text{, dacă } i \in I_{i_0} \text{, sau } i_0 \in I_i \\ N_i & \text{in rest} \end{cases}$$

Din (1) şi 5.31. rezultă că $(\gamma_i) \in FIM(H,F)$, deci există $f \in GOf(H,L)$ astfel ca $(\varphi_i f) = (\gamma_i)$. Cum $\ker f = \bigcap \ker \gamma_i$, din (3) rezultă că f este monomorfism şi

$$\bigcap \ker \gamma_i = \{0\} \tag{5}$$

Fie H' mulţimea întregilor înzestrată cu ordinea indusă de $P_{H'} = -P_H$. Din (2) şi (4) rezultă că $(\gamma_i) \in FIM(H', F)$, iar din 5.34.3. şi (5) urmează că $P_H = \{0\}$, în contradicţie cu alegerea $P_H = \mathbb{N}$.

2. Suficienţa. Fie $(L, \varphi_i) = \lim\limits_{\leftarrow (Gc, Gf)} UF$ şi $P = P_L \subset L$ definit la (5.7). Pentru a dovedi că $(L,P) \in GOc$ trebuie să verificăm condiţiile (5.4). Desigur P defineşte pe L o relaţie de preordine, deoarece din (5.7.) rezultă imediat că $o \in P$ şi $P+P \subset P$. Fie acum $a \in P \cap (-P)$. Din (5.7) decurge imediat că:

$$\varphi_i(a) \cap P_{G_i} \neq \emptyset \text{, şi } \varphi_i(a) \cap (-P_{G_i}) \neq \emptyset, \forall i \in I \tag{6}$$

Să presupunem că există $i \in I$ astfel încât $\varphi_i(a) \neq N_i$. Relaţia (5.6) atrage existenţa unui $j \in I_i$:

$$\varphi_j(a) \cap (-P_{G_j} \setminus N_j) = \emptyset \tag{7}$$

iar din (6) şi (7) rezultă că:

$$\varphi_j(a) \cap (-P_{N_j}) \neq \emptyset \tag{8}$$

Fie $s \in I(i,j)$: relaţia (8) atrage incluziunea $F(s)\ \varphi_j(a) \subset N_i$; deci $\varphi_i(a) = N_i$, în contradicţie cu alegerea lui $i \in I$. Prin urmare $P \cap (-P) = \{0\}$ şi $(L,P) \in GOc$.

Cum $(\varphi_i) \in FIM(UL, UF)$, din (5.7) rezultă că $(\varphi_i) \in \Pi\ GOc(L, G_i)$, iar din 5.31. deducem că $(\varphi_i) \in FIM(L, F)$.

În sfârşit, fie $(\gamma_i)\in FIM(G, F)$. Atunci $(\gamma_i)\in FIM(UG, UF)$, deci există un unic $f\in Gf(UG, UL)$ astfel ca $(\varphi_i f) = (\gamma_i)$. Fie $x\in P_G$ şi $a=f(x)$; cum $(\gamma_i)\in \Pi GOc(G, G_i)$ rezultă că $\varphi_i(a) \cap P_{G_i} \neq\emptyset$, pentru orice $i\in I$, iar din (5.7) deducem că $a\in P_L$. Prin urmare există un unic $f\in GOf(G, L)$ astfel ca $(\varphi_i f) = (\gamma_i)$. În consecinţă $\lim\limits_{\leftarrow (G0c, G0f)} F=((L,P_L), \varphi_i)$.

5.37. Consecinţă. Fie F o **I-diagramă** în **GOc** care verifică:

$$i\in I \Rightarrow \exists j\in I_i : N_j \Delta \varphi_j L \tag{5.8}$$

Atunci există $\lim\limits_{\leftarrow (G0c, G0f)} F = (L, \varphi_i)$, unde

$$a \in P_l \Leftrightarrow \varphi_j(a) \cap P_{G_j} \neq\emptyset , \quad \forall j\in J =\{j\in I \mid N_j \Delta \varphi_j L\} \tag{5.9}$$

Demonstraţie. Verificăm condiţia (5.6). Fie $a\in L$ astfel ca să existe $x_i\in\varphi_i(a)\cap P_{G_i}$, pentru orice $i\in I$. Fie $i\in I$ astfel ca $\varphi_i(a)\cap(-P_{G_i}\setminus N_i) \neq\emptyset$. Din ipoteză rezultă existenţa unui $j\in I_i$ astfel ca $N_j\Delta\varphi_j L$. Fie $s\in I(i,j)$; să presupunem că există un element $x'_j\in\varphi_j(a)\cap(-P_{G_j}\setminus N_j)$. Atunci $0\leq -x'_j\leq x_j - x'_j\in N_j$; cum $N_j\Delta\varphi_j L$, rezultă că $x'_j\in N_j$; prin urmare $\varphi_j(a)=N_j$. În plus, cum $F(s)(x_i)\in\varphi_j(a)$, iar $x_j\in N_j$ rezultă că $\varphi_i(a)=N_i$. Am arătat astfel că:

$$[\varphi_i(a)\cap P_{G_i} \neq\emptyset, \forall i\in I] \Rightarrow [\varphi_i(a)\cap(-P_{G_i}\setminus N_i)=\emptyset, \forall i\in I]$$

şi că relaţia (5.7) este echivalentă cu (5.9).

5.38. Observaţie. În cazul în care $N_i\Delta\varphi_i L$ pentru orice $i\in I$, grupul cât $\varphi_i L/\varphi_i(0)$ se poate înzestra cu ordinea indusă de $p_i(P_{G_i}\cap\varphi_i L)$, unde $p_i\in GOf(L, \varphi_i L/\varphi_i(0))$ este proiecţia canonică, iar relaţiile (5.9) definesc pe L chiar ordinea produs.

Notăm cu **GOIc** categoria grupurilor ordonate şi a corespondenţelor izotone care invariază subgrupurile izolate, i.e. $\varphi\in GOIc(G, G')$ dacă $\varphi\in GOc(G,G')$ şi pentru orice $N\Delta G$ rezultă că $\varphi N\Delta\varphi G$. Din 5.37. rezultă cu uşurinţă:

5.39. Consecinţă [Da.89]. A-categoria la stânga concretă **(GOIc, GOf)** este cu limite proiective

§.6. CONSTRUCTIVITATEA a-CATEGORIEI INELELOR. SELECȚII ȘI PUNCTE FIXE ALE CORESPONDENȚELOR DE INELE ASOCIATIVE

Fie **Rf** categoria inelelor şi omomorfismelor de inele, iar **Rc** categoria inelelor şi a corespondenţelor de inele. Conform (5.2), $\varphi \in Rc(R,R')$ dacă $\varphi \in Gc((R,+),(R',+))$ şi $\varphi(a)\varphi(b) \subseteq \varphi(ab)$ pentru orice $a,b \in R$. Ca la 5.22.1. se verifică imediat că (**Rc**, **Rf**) este o a-categorie la stânga concretă.

În prima parte a acestei secţiuni, pornind de la rezultatele legate de superior completitudinea la stânga a categoriei **Rc**, extindem teorema de existență a limitelor proiective din [Da.86c] dovedind constructivitatea a-categoriei inelelor.

Două sunt problemele pe care le rezolvăm în cea de-a doua parte:

1. Fie α, $\alpha_k \in Rc(R, R')$, $k \in \{1,..,n\}$ astfel ca $\alpha = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Să se dea condiţii suficiente pentru ca una dintre corespondențele α_1 ,..., α_n să fie selecție a corespondenței α; să se precizeze numărul maxim de selecții ale lui α dintre corespondențele α_1,..., α_n.

2. Fie α, β, γ, $\delta \in Rc(R, R')$ astfel ca $\alpha = \gamma + \delta - \beta$. Să se dea condiţii pentru ca cele patru corespondențe să admită selecţii în perechi.

Ultima problemă a fost rezolvată în [Ves.97] în cazul în care $R=R'$ este corp finit, iar α, β, γ şi δ sunt automorfisme ale acestuia, rezultat generalizat în [Dea.97] în cazul în care $R=R'$ este domeniu comutativ, α, β, γ şi δ sunt endomorfisme ale lui R, unul fiind automorfism.

A. Constructivitatea a-categoriei (Rc, Rf)

Cu Id(R) vom nota mulţimea idealelor inelului R şi cu Spec R mulţimea idealelor prime, prin $A \leq R$ vom înţelege că A este subinel al lui R.

Câteva proprietăţi elementare ale corespondenţelor de inele sunt prezentate în [RR.85a] şi [RR.85b]. Aici vom utiliza următoarele calităţi imediate ale acestora, proprietăţi utilizate curent în cele ce urmează:

6.1. Proprietăţi. Dacă $\varphi\in Rc(R, R')$, $A,B\subset R$, $A'\subset R'$, $U\in Id(R)$ şi $V\in Id(R')$, atunci:

(a) $\varphi(A-B) = \varphi A-\varphi B$, $\varphi A \cdot \varphi B \subset \varphi(AB)$

(b) $\varphi R \leq R'$, $\varphi U \in Id(\varphi R)$, $\varphi(0)\in Id(\varphi R)$, $\varphi^{-} V\in Id(R)$

(c) $\ker \varphi \in Id(R)$, unde $\ker \varphi = \{x\in R \mid 0\in\varphi(x)\}$

6.2. Observaţii. 1. Fie $A,B\in Rc$ şi $\varphi\in Ec(\square A, \square B)$. Din 6.1. rezultă imediat că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $\varphi\in Rc(A,B)$

(b) $\varphi A\leq B$, $\varphi(0)\in Id(\varphi A)$ şi $\varphi(a)\in\varphi A/\varphi(0)$, oricare ar fi $a\in A$.

2. Fie $\varphi_i\in Rc(A,B)$, $i\in I\neq\emptyset$. Notăm: $C = <\cup\varphi_i(0)>_B$ şi $V=\{x\in C \mid \exists a\in A,\ i,j\in I:\ x\in\varphi_i(a)-\varphi_j(a)\}$. Desigur $\cup\varphi_i(0)\subset V$, deci $V\neq\emptyset$. Fie $\varphi(0) = <V>_C$; se verifică imediat că $\varphi(0)\in Id(C)$, ceea ce permite buna definire, conform 6.2.1., a corespondenţei de inele $\varphi\in Rc(A,B)$ prin $\varphi(a)=x+\varphi(0)$, unde $x\in\cup\varphi_i(a)$, oricare ar fi $a\in A$. Atunci $\varphi = \cup\varphi_i$. Ca la 5.14. se arată că I-familia $\{\varphi_i\}$ este superior stabilă la stânga. Prin urmare am constatat că:

6.3. Teoremă. A-categoria **(Rc, Rf)** este superior tare completă la stânga.

6.4. Observaţie. A-categoria inelelor nu este bicompletă. Într-adevăr, dacă $\mathbb{Z}_2$ este inelul claselor de resturi modulo 2, $A=B=\mathbb{Z}_2$, θ_A este morfismul nul, iar 1_A identitatea, atunci $(\theta_A \cup 1_A)(0) = (\theta_A \cup 1_A)(1) = \mathbb{Z}_2$; fie $\theta\in Rc(0, \mathbb{Z}_2)$ morfismul trival; atunci $(\theta_A\cup 1_A)\theta(0)=\mathbb{Z}_2$ şi $\theta_A\theta \cup 1_A\theta = \theta$

În continuare extindem rezultatele privind existenţa limitelor proiective în a-categoria inelelor din [Da 88a]. Menţionăm că alte proprietăţi speciale ale clasei morfismelor au fost analizate în [Da 86c] în cazul particular al inelelor cu diviziune şi în [BD 86], [BDH 86], [BD 88] pentru corespondenţele de corpuri.

6.5. Teoremă. A-categoria **(Rc, Rf)** este constructivă.

Demonstraţie. 1. Arătăm că **(Rc, Rf)** este o a-categorie la stânga cu limite proiective. Fie $F=(A_i, F(s))$ o **I-diagramă** în **Rc**. Fie $i\in I$; ca la 5.25, notăm $S_i=\{s\in I(i,j) \mid j\in I\}$.

$\setminus \bigcup_{s \in S} F(s)(0) >_{A_i}$ şi $\mathbf{a}_i=\{A'_i \le A_i \mid N_i \in Id(A'_i)\}$. Mulţimea $\mathbf{a}_i$ este inductiv ordonată faţă de relaţia "$\le$", deci, conform lemei lui Zorn, ea posedă un element maximal; fie acesta B_i şi

$$A=\{(\mathbf{a}_i) \mid \mathbf{a}_i \in B_i/N_i,\ F(s)(\mathbf{a}_j) \subset \mathbf{a}_i,\ s \in I(i,j)\},$$

unde pe inelul cât B_i/N_i notăm operaţiile cu $\oplus$, respectiv $\otimes$ şi la fel pe produsul $\Pi B_i/N_i$. Se verifică imediat legătura dintre operaţiile pe acest produs şi operaţiile lui Minkowski:

$$(\mathbf{a}_i) \oplus (\mathbf{b}_i) = (\mathbf{a}_i) + (\mathbf{b}_i) \tag{1}$$

$$(\mathbf{a}_i)\ (\mathbf{b}_i) \subset (\mathbf{a}_i) \otimes (\mathbf{b}_i) \tag{2}$$

Fie $a_i \in N_i$, atunci a_i este o sumă finită de elemente de forma: $a_{j1}, \ldots, a_{jn}$, unde $a_{jk} \in F(s_k)(0)$, $s_k \in S$, $k=\overline{1,n}$. Fie $s \in I(i,j)$; atunci:

$$F(s)(a_{i1} \ldots a_{in}) \supset F(s)(a_{j1}) \ldots F(s)(a_{jn}) = (a_{i1} + F(s)(0)) \ldots (a_{in} + F(s)(0)),$$

unde $a_{ik} \in F(s)(a_{jk})$, $k=\overline{1,n}$; deci:

$$a_{i1} \ldots a_{in} \in F(s)(a_{j1} \ldots a_{jn}) \text{ şi } F(s)(a_{j1} \ldots a_{jn}) = a_{i1} \ldots a_{in} + F(s)(0) \subset F(s)(a_{j1}) \ldots F(s)(a_{jn}) +$$
$$+F(s)(0) \subset F(s)F(s_1)(0) \ldots F(s)F(s_n)(0)+F(s)(0) \subset F(ss_1)(0) \ldots F(ss_n)(0)+F(s)(0) \subset N_i;$$

prin urmare

$$F(s)N_j \subset N_i, \text{ pentru orice } i,j \in I \text{ şi } s \in I(i,j) \tag{3}$$

Fie acum $(a_i) \in (\mathbf{a}_i) \in A$ şi $(b_i) \in (\mathbf{b}_i) \in A$; din (1) şi 6.2. rezultă că pentru orice $s \in I(i,j)$:

$$F(s)(\mathbf{a}_j - \mathbf{b}_j) = F(s)(\mathbf{a}_j) - F(s)(\mathbf{b}_j) \subset \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i \tag{4}$$

iar din (2) şi 5.26. rezultă că:

$$F(s)(a_j b_j) = c_i d_i + F(s)(0) \subset c_i d_i + N_i = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i$$

unde am considerat că $c_i \in F(s)(a_j)$ şi $d_i \in F(s)(b_j)$, deci:

$$F(s)(\mathbf{a}_j \otimes \mathbf{b}_j) \subset \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i \tag{5}$$

Din (4) şi (5) rezultă că:

$$A \in Rc \text{ şi } A \le \Pi\, B_i/N_i \tag{6}$$

Definim, pentru orice $i \in I$:

$$\varphi_i((\mathbf{a}_i)) = a_i + N_i \subset A_i \tag{7}$$

Din (2) rezultă că: $\varphi_i((\mathbf{a}_i))\ \varphi_i((\mathbf{b}_i)) \subset a_i b_i + N_i = \varphi_i((\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i))$ şi, ţinând seama şi de (1), rezultă că $\varphi_i \in Rc(A,A_i)$, $i \in I$.

Desigur $(\varphi_i) \in FI(A,F)$, iar dacă $R \in Rc$ şi $g \in Rf(R,A)$ atunci $(\varphi_i g) \in FI(R,F)$. Fie

$(\psi_i)\in FI(R,F)$ astfel ca $(\psi_i) \subset (\varphi_i g)$. Din (7) se obține:

$$\psi_i(0) \subset \varphi_i g(0) \subset N_i,\ i\in I \tag{8}$$

şi cum, pentru orice $s\in I(i,j)$:

$$F(s)(0) \subset F(s)\ \psi_j(0) \subset \psi_i(0),$$

iar $\psi_i(0) \in Id(\psi_i R)$, din (8) rezultă că:

$$N_i \subset \psi_i(0),\quad i\in I, \tag{9}$$

de unde:

$$N_i = \psi_i(0) = \varphi_i g(0),\quad i\in I, \tag{10}$$

Dar $\psi_i R\leq A_i$, $\psi_i(0)\in Id(\psi_i R)$ deci $\psi_i R\in \mathfrak{a}_i$, oricare ar fi $i\in I$. Dacă $r\in R$ şi $a_i\in\psi_i(r)$, din (10) rezultă că:

$$\psi_i(r)=a_i+N_i \text{ şi } \varphi_i g(r)=a_i+\varphi_i g(0)=a_i+N_i=\psi_i(r),$$

deci $(\varphi_i g)=(\psi_i)$; prin urmare $(\varphi_i)\in FIM(A,F)$. Analog se arată că $(\varphi_i g)\in FIM(R,F)$, oricare ar fi $g\in Rf(R,A)$, ceea ce probează buna definire a funcției:

$$Rf(R,A) \to FIM(R), \text{ prin } g \to (\varphi_i g) \tag{11}$$

funcție care, evident, este injectivă. Rămâne să demonstrăm surjectivitatea sa. Fie, pentru aceasta, $(\psi_i)\in FIM(R)$, $\theta\in Rf(0,R)$ morfismul trivial. Ca la (9) se arată că $N_i \subset \psi_i(0)$, $i\in I$. Definim $\theta_i\in Rc(0, A_i)$ prin $\theta_i(0)=N_i$. Din (3) rezultă că pentru orice $i,j\in I$ şi $s\in I(i,j)$:

$$F(s)\theta_j\subset\theta_i,$$

deci $(\theta_i) \subset (\psi_i\theta)$ şi $(\theta_i)\in FI(0,F)$; dar (ψ_i) este familie invariantă minimală, deci:

$$(\theta_i) = (\psi_i\theta) \text{ şi } \psi_i(0) = N_i,\quad i\in I.$$

Dar $\psi_i(0) \in Id(\psi_i R)$, $\varphi_i R\leq A_i$, deci $\psi_i R\in \mathfrak{a}_i$. Atunci, pentru orice $r\in R$, $i\in I$ şi $s\in I(i,j)$:

$F(s)\psi_j(r) \subset \psi_i(r)$, deci $(\psi_i (r))\in A$, ceea ce permite definirea funcției $g\in Ef(R, A)$ prin $g(r) = (\psi_i(r))$. Dacă $r, t\in R$, $a_i\in\psi_i(r)$ şi $b_i\in\psi_i(t)$, atunci:

$$a_i - b_i \in \psi_i(r-t) \text{ şi } a_i b_i\in\psi_i(rt),$$

iar din (1), respectiv (2) urmează că:

$$g(r) \ominus g(t) = (\mathbf{a}_i) - (\mathbf{b}_i) = g(r-t) \text{ şi}$$

$$g(r) \otimes g(t) = (\mathbf{a}_i) \otimes (\mathbf{b}_i) = (\mathbf{a}_i\otimes\mathbf{b}_i) = g(rt),$$

ceea ce înseamnă că $g\in Rf(R,A)$ şi $(\psi_i)=(\varphi_i g)$; prin urmare aplicația (11) este bijectivă şi în consecință

$$\lim_{\leftarrow (\mathbf{Rc}, \mathbf{Rf})} F = (A, \varphi_i)$$

până la un izomorfism.

2. Deoarece **Rf** este o categorie cu produse, din 2.13. rezultă că a-categoria (**Rc**, **Rf**) este cu produse stricte; din 6.3. rezultă că ea este superior tare completă la stânga; aplicând acum teorema 2.28 rezultă că a-categoria (**Rc**, **Rf**) este constructivă.

6.6. Exemplu. Fie $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi, p un număr prim și $(\mathbb{N}^*, \leq)$ mulțimea numerelor naturale nenule. Pentru $i\in\mathbb{N}^*$ definim

$\varphi_{i,i+1}(n) = n + p^{i+1}\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$, $\varphi_{ii} = 1_{\mathbb{Z}}$ și $\varphi_{ij} = \varphi_{i,i+1} \ldots \varphi_{j-1,j}$, pentru $j>i$.

Atunci $F=(\mathbb{Z}, \varphi_{ij})$ este un sistem proiectiv conservativ în (**Rc**, **Rf**), $N_i = p^{i+1}\mathbb{Z}$, $B_i = \mathbb{Z}$ și $A = \{(\mathbf{n}_i) \mid n_{i+1} \equiv n_i \pmod{p^{i-1}},\ n_i\in\mathbf{n}_i,\ i\in\mathbb{N}^*\}$. Prin urmare limita $\lim\limits_{\leftarrow (\mathbf{Rc}, \mathbf{Rf})} F$ este izomorfă cu inelul întregilor p-adici.

B. Selecții în perechi de corespondențe de inele asociative.

În această secțiune R și R' sunt inele asociative. Dacă $\alpha\in Rc(R, R')$ vom nota cu $S(\alpha)$ mulțimea selecțiilor corespondenței α, i.e. $S(\alpha)=\{\beta\in Rc(R,R') \mid \beta\subset\alpha\}$. Dacă $\alpha\in Rc(R,R)$, $Fix(\alpha) = \{a\in R \mid a=\alpha(a)\}$, este mulțimea *punctelor fixe* ale corespondenței α.

Rezultatul principal, [Da.97a] stabilește legătura dintre selecțiile corespondențelor $\alpha, \beta, \gamma \in Rc(R,R')$ pentru care $\alpha=\beta+\gamma$. Mai precis, vom arăta că dacă $\alpha(0)$ este ideal prim în inelul generat de $\beta R\cup\gamma R$, atunci corespondențele α, β și γ *admit selecții în perechi*, i.e. $S(\alpha)\cap S(\beta)\neq\varnothing$, sau $S(\beta)\cap S(\gamma)\neq\varnothing$, sau $S(\gamma)\cap S(\alpha)\neq\varnothing$. Generalitatea problemei nu este afectată dacă vom presupune că $R'=\langle\beta R\cup\gamma R\rangle$.

6.7. Observație. Fie $\alpha, \beta\in Rc(R,R')$. Atunci $S(\alpha) \cap S(\beta)\neq\varnothing$ dacă și numai dacă $\alpha\cap\beta\in Rc(R, R')$.

În general, suma a două corespondențe de inele nu este corespondență de inele, iar dacă $\alpha, \beta, \gamma \in Rc(R,R')$ și $\alpha(0)$ nu este ideal prim în $\langle\beta R \cup \gamma R)\rangle$ și $\alpha = \beta+\gamma$, corespondențele

α, β, γ nu admit întotdeauna selecţii în perechi, cum rezultă imediat din exemplele de mai jos:

6.8. Exemple. 1. Fie $\beta\in Rc(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ definită prin $3k \to 6\mathbb{Z}$, $3k+1 \to 6\mathbb{Z}+4$, $3k+2 \to 6\mathbb{Z}+2$, pentru orice $k\in\mathbb{Z}$. Atunci $\alpha = \beta+1_{\mathbb{Z}}$ nu este corespondenţă de inele deoarece $\alpha(1)\alpha(1)\cap\alpha(1)=\varnothing$.

2. Dacă β este corespondenţa definită mai sus, iar $\gamma\in Rc(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ este definită prin $2k \to 6\mathbb{Z}$, $2k+1 \to 6\mathbb{Z}+3$, $k\in\mathbb{Z}$, atunci $\alpha=\beta+\gamma\in Rc(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ şi $Fix(\alpha)=\mathbb{Z}$. În acest caz $\ker\alpha = \ker\beta \cap \ker\gamma$, $\alpha(0) =\beta(0) = \gamma(0)$, dar α, β, γ nu admit selecţii în perechi; în schimb idealul $\alpha(0) = 6\mathbb{Z}$ nu este prim în $<\beta\mathbb{Z} \cup \gamma\mathbb{Z}> = \mathbb{Z}$.

3. Dacă β este corespondenţa definită mai sus, iar $\gamma\in Rc(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ este definită prin $2k \to 2\mathbb{Z}$, $2k+1 \to 2\mathbb{Z}+1$, atunci $\alpha=\beta+\gamma\in Rc(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ şi $\alpha=\gamma$; în acest caz $<\beta\mathbb{Z}\cup\gamma\mathbb{Z}>=\mathbb{Z}$ şi idealul $\alpha(0)$ este prim.

4. Dacă γ este corespondenţa definită în exemplul precedent, iar $\beta \in Rc(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ este definită prin $k \to k+3\mathbb{Z}$, atunci $\alpha=\beta+\gamma\in Rc(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ şi α este corespondenţa constatată $k \to \mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$. În acest caz corespondenţa definită prin $k \to 6\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$ este o selecţie a perechii (β, γ).

6.9. Lemă. Fie $\beta,\gamma\in Rc(R,R')$ şi $\alpha=\beta+\gamma$. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca α să fie corespondenţă de inele este:

$$\beta(a)\gamma(b) + \gamma(a)\beta(b) \subset \alpha(0), \quad a,b\in R \tag{6.1}$$

Demonstraţie. Să remarcăm întâi că α este o corespondenţă a grupurilor aditive subiacente inelelor R şi R'. Dacă (6.1) este verificată, atunci pentru arice $a,b\in R$:

$$\alpha(a)\alpha(b) \subset \beta(a)\beta(b) + \beta(a)\gamma(b) + \gamma(a)\beta(b) + \gamma(a)\gamma(b) \subset \beta(ab) + \gamma(ab) + \alpha(0) = \alpha(ab)$$

deci $\alpha\in Rc(R,R')$. Invers, dacă $\alpha\in Rc(R,R')$, atunci pentru orice $a,b\in R$, $\alpha(a)\alpha(b) \subset \alpha(ab)$, deci

$$\beta(ab) + \gamma(ab) + \beta(a)\gamma(b) + \gamma(a)\beta(b) \subset \alpha(ab) + \beta(a)\gamma(b) + \gamma(a)\beta(b) \subset \alpha(ab),$$

prin urmare condiţia (6.1) este verificată.

6.10. Lemă. Fie α, β, $\gamma \in Rc(R,R')$ astfel ca $\alpha=\beta+\gamma$. Atunci $\alpha(0)$ este ideal al inelului $R'(<\beta R\cup\gamma R>)$

Demonstraţie. Fie $a\in R$, $x\in\beta(a)$, $y\in\gamma(a)$ şi $m\in\beta(0)$. Cum $u=x+y\in\alpha(a)$ şi $m\in\beta(0)\subset\alpha(0)\in Id(\alpha R)$ rezultă că $m\,u \in\alpha(0)$; dar $m\in\beta(0)\in Id(\beta R)$, deci $m\,x\in\beta(0)$, prin urmare $m\gamma \in \alpha(0)$ şi

$$\beta(0)\gamma(a) \subset \alpha(0), \quad a\in R \tag{1}$$

Dar $\gamma(0) \in Id(\gamma R)$, deci $\gamma(0)\gamma(a) \subset \gamma(0) \subset \alpha(0)$ şi

$$\alpha(0)\gamma(a) \subset \alpha(0), \quad a\in R \tag{2}$$

Din lema 6.9. şi (1) rezultă că $\gamma(0)\beta(a) \subset \alpha(0) - \beta(0)\gamma(a) \subset \alpha(0)$, de unde:

$$\alpha(0)\beta(a) \subset \alpha(0) \quad , a\in R \tag{3}$$

Dar R' este generat de $\beta R \cup \gamma R$, iar din (2) şi (3) urmează că $\alpha(0)R' \subset \alpha(0)$ şi analog $R'\alpha(0) \subset \alpha(0)$. Prin urmare $\alpha(0) \in Id(R')$.

6.11. Observaţie. În ipotezele lemei precedente are loc următoarea "incluziune Iacobi"

$J = \alpha(a)\beta(b)\gamma(c) + \beta(a)\gamma(b)\alpha(c) + \gamma(a)\alpha(b)\beta(c) \subset \alpha(0)$, pentru orice $a,b,c\in R$.

Într-adevăr $J \subset \beta(ab)\gamma(c) + \gamma(a)\beta(b)\gamma(c) + \beta(a)\gamma(b)\beta(c) + \beta(a)\gamma(ac) + \gamma(a)\beta(bc) + \gamma(ab)\beta(c)$; din lema 6.9 rezultă că: $\beta(ab)\gamma(c) + \gamma(ab)\beta(c) \subset \alpha(0)$, $\beta(a)\gamma(bc) + \gamma(a)\beta(bc) \subset \alpha(0)$, $\gamma(a)\beta(b)\gamma(c) + \beta(a)\gamma(b)\beta(c) \subset \alpha(0) - \beta(a)\gamma(bc) - \gamma(a)\beta(bc) = \alpha(0)$; prin urmare $J\subset \alpha(0)$.

6.12. Lemă. Fie $\alpha,\beta,\gamma\in Rc(R,R')$, $\alpha=\beta+\gamma$ şi $a,b\in R$. Următoarele condiţii sunt echivalente.

(a) $\beta(a)R'\gamma(b) \subset \alpha(0)$

(b) $\beta(a)(\beta R)\gamma(b) \subset \alpha(0)$

(c) $\beta(a)(\gamma R)\gamma(b) \subset \alpha(0)$

(d) $\gamma(a)(\beta R)\gamma(b) \subset \alpha(0)$

(e) $\beta(a)(\gamma R)\beta(b) \subset \alpha(0)$

(f) $\gamma(a)(\beta R)\beta(b) \subset \alpha(0)$

Demonstraţie. Fie $c\in R$. Din lema 6.9. rezultă că: $\beta(a)\beta(c)\gamma(b)+\alpha(0) = -\beta(a)\gamma(c)\beta(b)+\alpha(0) = \gamma(a)\beta(c)\beta(b) + \alpha(0) = -\beta(a)\gamma(c)\gamma(b)+\alpha(0) = \gamma(a)\beta(c)\gamma(b)+\alpha(0)$, de unde rezultă imediat că că (b) ⇔ (e) ⇔ (f) ⇔(c) ⇔ (d). Rămâne să arătăm că aceste ipoteze echivalente implică (a). pentru aceasta este suficient să dovedim că dacă $c,d\in R$ atunci $\beta(a)\beta(c)\gamma(d)\gamma(b) \subset \alpha(0)$. Folosind consecutiv lemele 6.9., 6.10. şi (e) rezultă că: $\beta(a)\beta(c)\gamma(d)\gamma(b) \subset -\beta(a)\gamma(c)\,\beta(d)\gamma(b)+$

$+\alpha(o) = \beta(a)\gamma(c)\gamma(d)\beta(b)+\alpha(o) = \beta(a)\gamma(cd)\,\beta(b)+\alpha(o) = \alpha(0)$.

6.13. Lemă. Dacă $\alpha,\beta,\gamma\in Rc(R,R')$, $\alpha=\beta+\gamma$, atunci:

$$\beta(a)\gamma(b)(\beta(b)-\gamma(b)) \subset \alpha(0) \tag{6.2}$$

pentru orice $a,b\in R$.

Demonstrație. Fie $a,b\in R$. Din lema 6.9. rezultă:

$$\beta(a)\gamma(b^2) + \gamma(a)\beta(b^2) \subset \alpha(0) \tag{1}$$

Din (6.1) şi 6.10. rezultă că:

$$\beta(a)\gamma(b)\beta(b) + \gamma(a)\beta(b^2) \subset \alpha(0) \tag{2}$$

Cum $\gamma(0)$, $\beta(0) \subset \alpha(0)$, din (1) şi (2) rezultă (6.2).

6.14. Lemă. Fie $\alpha,\beta,\gamma \subset Rc(R,R')$, $\alpha=\beta+\gamma$. Dacă idealul $\alpha(0)$ este prim, atunci pentru orice $a\in R$

(a) $\beta(a) \subset \alpha(0)$, sau $\gamma(a)(\beta(a) - \gamma(a)) \subset \alpha(0)$

(b) $\gamma(a) \subset \alpha(0)$, sau $\beta(a)(\beta(a) - \gamma(a)) \subset \alpha(0)$

(c) $\beta(a)\gamma(a) \subset \alpha(0)$, sau $\beta(a) - \gamma(a) \subset \alpha(0)$

Demonstrație. Punând b=a în (6.2) obținem:

$$\beta(a)\gamma(a)\,(\beta(a) - \gamma(a)) \subset \alpha(0) \tag{1}$$

Pentru a demonstra afirmația (a) este suficient să arătăm că:

$$\beta(a)R'\gamma(a)\,(\beta(a) - \gamma(a)) \subset \alpha(0)$$

ceea ce rezultă imediat dacă dovedim că pentru orice $b\in R$

$$\beta(a)\gamma(b)\gamma(a)\,(\beta(a) - \gamma(a)) \subset \alpha(0) \tag{2}$$

$$\beta(a)\beta(b)\gamma(a)\,(\beta(a) - \gamma(a)) \subset \alpha(0) \tag{3}$$

Fie $b\in R$. Din 6.9. urmează că:

$$\beta(ab)\gamma(a^2) + \gamma(ab)\beta(a^2) \subset \alpha(0) \tag{4}$$

$$\beta(ab)\gamma(a) + \gamma(ab)\beta(a) \subset \alpha(0) \tag{5}$$

$$\beta(b)\gamma(a^2) + \gamma(b)\beta(a^2) \subset \alpha(0) \tag{6}$$

$$\beta(b)\gamma(a) + \gamma(b)\beta(a) \subset \alpha(0) \tag{7}$$

Din (4), respectiv (5), folosind lema 6.10. rezultă că:

$$\beta(a)\,\beta(b)\gamma(a)\gamma(a) + \gamma(a)\gamma(b)\beta(a^2) \subset \alpha(0) \text{ şi}$$

$$\beta(a)\,\beta(b)\gamma(a)\beta(a) + \gamma(a)\gamma(b)\beta(a^2) \subset \alpha(0),$$

de unde se obţine imediat (3). Folosind succesiv (6.1), (6), respectiv (7), rezultă că:

$$\beta(a)\gamma(b)\gamma(a^2) \subset -\gamma(a)\beta(b)\gamma(a^2) + \alpha(0) = \gamma(a)\gamma(b)\beta(a^2) + \alpha(0),$$

$$\beta(a)\gamma(b)\gamma(a)\beta(b) \subset -\gamma(a)\beta(b)\gamma(a)\beta(a) + \alpha(0) = \gamma(a)\gamma(b)\beta(a^2) + \alpha(0),$$

de unde decurge imediat (2).

Rămâne să demonstrăm (c). Din 6.9. obţinem:

$\gamma(a)\beta(b)\gamma(a) \subset -\beta(a)\gamma(b)\gamma(a)+\alpha(0) = -\beta(a)\gamma(ba) + \alpha(0) = \gamma(a)\beta(ba) + \alpha(0) = \gamma(a)\beta(b)\beta(a)+\alpha(0),$ deci

$$\gamma(a)\beta(b)(\beta(a)-\gamma(a)) \subset \alpha(0) \tag{8}$$

Din (6.1) şi (8) urmează că:

$$\beta(a)\gamma(b)(\beta(a)-\gamma(a)) \subset \alpha(0) \tag{9}$$

Din lema 6.10., (8), respectiv (9) şi lema 6.9 urmează:

$$\beta(a)\gamma(a)\beta(b)(\beta(a)-\gamma(a)) \subset \alpha(0) \text{ şi}$$

$$\beta(a)\gamma(a)\gamma(b)(\beta(a)-\gamma(a)) \subset \alpha(0), \quad b\in R.$$

de unde rezultă că $\beta(a)\gamma(a)R'(\beta(a)-\gamma(a)) \subset \alpha(0)$. Cum $\alpha(0)$ este ideal prim în inelul asociativ R' rezultă imediat că $\beta(a)\gamma(a) \subset \alpha(0)$, sau $\beta(a) - \gamma(a) \subset \alpha(0)$, ceea ce trebuia demonstrat.

6.15. Lemă Fie $\alpha,\beta,\gamma\in Rc(R, R')$, $\alpha=\beta+\gamma$, $B=\{a\in R|\beta(a)\subset\alpha(0)\}$, $C=\{a\in R|\gamma(a)\subset\alpha(0)\}$, $D=\{a\in R|\ \beta(a)-\gamma(a) \subset \alpha(0)\}$. Dacă idealul $\alpha(0)$ este prim, atunci una şi numai una din următoarele afirmaţii este adevărată:

(a) $R = B \neq C$

(b) $R = C \neq B$

(c) $R = D \neq B = C$

(d) $R = B = C = D$.

Demonstraţie. Fie $A=\{a\in R|\ \beta(a^2)\cup\gamma(a^2)\cup\beta(a)\gamma(a) \subset \alpha(0)\}$. Din lema 6.14. urmează că dacă $a\in R\setminus(B\cup C\cup D)$, atunci $\beta(a)(\beta(a)-\gamma(a))$, $\gamma(a)(\beta(a)-\gamma(a))$, $\beta(a)\gamma(a) \subset \alpha(0)$, de unde rezultă că $a\in A$. Prin urmare:

$$R = A \cup B \cup C \cup D \tag{1}$$

I. Dacă există $b\in B\setminus C$, atunci:

$$\beta(b) \subset \alpha(0) \text{ şi } \gamma(b) \cap \alpha(0) = \varnothing \tag{2}$$

Fie $c, a \in R$. Din 6.9. şi (2) rezultă că: $\beta(c)\beta(a)\gamma(b) \subset -\beta(c)\gamma(a)\beta(b)+\alpha(0) = \alpha(0)$, deci $\beta(c)(\beta R)\gamma(b) \subset \alpha(0)$, iar din lema 6.12. urmează că $\beta(c)R'\gamma(b) \subset \alpha(0)$; cum idealul $\alpha(0)$ este prim în inelul asociativ $R'=<\beta R \cup \gamma R>$, ţinând seama de (2) rezultă că $\beta(c) \subset \alpha(0)$, pentru orice $c \in R$, adică am demonstrat că:

$$B \setminus C \neq \varnothing \Rightarrow R = B \neq C \tag{3}$$

şi analog:

$$C \setminus B \neq \varnothing \Rightarrow R = C \neq B \tag{4}$$

2. Să considerăm că există $d \in D \setminus (B \cup C)$. Atunci:

$$\beta(d) - \gamma(d) = \alpha(0) \tag{5}$$

$$\beta(d) \cap \alpha(0) = \gamma(d) \cap \alpha(0) = \varnothing \tag{6}$$

Fie $a, b \in R$. Folosind consecutiv (5), lema 6.10. şi lema 6.9. urmează că: $\beta(a)\beta(d)\beta(d) \subset \beta(a)\beta(b)\gamma(d) + \alpha(0) = -\beta(a)\gamma(b)\beta(d) + \alpha(0) = \gamma(a)\beta(b)\beta(d) + \alpha(0)$, de unde:

$$(\beta(a) - \gamma(a))\beta(b)\beta(d) \subset \alpha(0),\ b \in R \tag{7}$$

Din (5) şi lema 6.10. se obţine $\beta(b)\beta(d) \subset -\gamma(b)\beta(d)+\alpha(0)$, iar din (7) rezultă imediat că:

$$(\beta(a) - \gamma(a))\,\gamma(b)\beta(d) \subset \alpha(0),\ b \in R \tag{8}$$

Din (7) şi (8) urmează că $(\beta(a)-\gamma(a))R'\beta(d) \subset \alpha(0)$, iar din faptul că idealul $\alpha(0)$ este prim şi din (6) rezultă că $a \in D$. Am dovedit că:

$$D \setminus (B \cup C) \neq \varnothing \Rightarrow R = D \neq B = C \tag{9}$$

3. Rămâne să analizăm cazul în care nici una dintre afirmaţiile (a), (b), sau (c) nu este adevărată. Din (3) şi (4) rezultă că $B = C$, iar din (9) că $D \subset B \cup C$. Prin urmare $B=C=D \subset A$, iar din (1) rezultă că $R=A$. Fie $a, b \in R$. Atunci:

$$\beta(a)\beta(b) + \beta(b)\beta(a) \subset \alpha(0) \tag{10}$$

deoarece $\beta(a+b)^2$, $\beta(a^2)$, $\beta(b^2) \subset \alpha(0)$; cum $\beta(a)\gamma(a) \subset \alpha(0)$, din lema 6.10 şi (10) rezultă că

$$\beta(a)\beta(b)\gamma(a) \subset \alpha(0),\ b \in R,$$

ceea ce atrage incluziunea:

$$\beta(a)(\beta R)\gamma(a) \subset \alpha(0),$$

iar, din 6.12., urmează că $\beta(a)R'\gamma(a) \subset \alpha(0)$. Cum idealul $\alpha(0)$ este prim rezultă imediat că $a \in B$. Prin urmare $R = A = B = C = D$ şi aserţiunea (d) este demonstrată.

6.16. Teoremă. Fie α, β, $\gamma \in Rc(R,R')$ astfel ca $\alpha=\beta+\gamma$. Dacă idealul $\alpha(0)$ este prim (în $R' = <\beta R \cup \gamma R>$) atunci corespondenţele α, β şi γ admit selecţii în perechi. În acest caz una şi numai una din următoarele afirmaţii este adevărată.

(a) $\beta \in S(\alpha)$ şi $\gamma \notin S(\alpha)$

(b) $\gamma \in S(\alpha)$ şi $\beta \notin S(\alpha)$

(c) $\beta \cap \gamma \in S(\beta) \cap S(\gamma)$, $\beta \notin S(\alpha)$, $\gamma \notin S(\alpha)$, ker $\alpha=R$, $B=\beta^{\cdot}\alpha(0) = \gamma^{\cdot}\alpha(0)$ şi char R/B = char $R'/\alpha(0) = 2$.

(d) $\beta \in S(\alpha)$, $\gamma \in S(\alpha)$, $\beta \cap \gamma \in S(\alpha) \cap S(\beta) \cap S(\gamma)$ şi R = ker α.

Demonstraţie. 1. Să remarcăm întâi că dacă $\beta(a) \subset \alpha(0)$, cum $\beta(a) \subset \alpha(a)-\gamma(a)$, rezultă că $\alpha(0) \subset \alpha(a)-\gamma(a)$, deci $\gamma(a) \subset \alpha(a)$; invers, dacă $\gamma(a) \subset \alpha(a)$, cum $\gamma(a) \subset \alpha(a) - \beta(a)$ şi $\beta(0) \subset \alpha(0)$, urmează că $\beta(a) \subset \alpha(0)$. Prin urmare, folosind notaţiile din lema 6.15. rezultă că:

$$R = B \Leftrightarrow \gamma \in S(\alpha) \quad (1)$$

$$R = C \Leftrightarrow \beta \in S(\alpha) \quad (2)$$

Din lema 6.15., (1) şi (2) urmează că:

$R = B \neq C \Leftrightarrow \gamma \in S(\alpha)$ şi $\beta \notin S(\alpha)$, sau:

$R = C \neq B \Leftrightarrow \beta \in S(\alpha)$ şi $\gamma \notin S(\alpha)$.

2. Să considerăm acum că $R=D$. Fie $a,b \in R$. Cum

$$\beta(a) - \gamma(a) = \alpha(0),\ a \in R \quad (3)$$

şi $\beta(a) + \gamma(a) = \alpha(a)$, rezultă imediat că:

$$\beta(2a),\ \gamma(2a) \subset \alpha(a),\ a \in R \quad (4)$$

Din 6.10. şi (4) urmează că:

$$\beta(2a)\gamma(b) \subset \alpha(a)\gamma(b) \quad (5)$$

iar din (3) şi 6.10. se obţine incluziunea:

$$\beta(a)\gamma(b) - \gamma(ab) \subset \alpha(0) \quad (6)$$

Atunci, din (5)şi (6) rezultă că:

$$\beta(2a)\gamma(b) \subset \alpha(0) \quad (7)$$

iar din (5) şi (7) urmează imediat:

$$\alpha(a)\gamma(b) \subset \alpha(0),\ b \in R \quad (8)$$

Analog se arată că:

$$\alpha(a)\beta(b) \subset \alpha(0),\ b\in R \tag{9}$$

Din (8) şi (9), cum $R'=<\beta R\cup\gamma R>$, decurge incluziunea $\alpha(a)R'\subset\alpha(0)$, de unde rezultă că:

$$R = D \Rightarrow \ker\alpha=R \tag{10}$$

deoarece idealul $\alpha(0)$ este prim.

2.1. Dacă $R = D \neq B = C$, atunci $\beta\notin S(\alpha)$ şi $\gamma\notin S(\alpha)$, conform (1) şi (2); prin urmare $\beta^{-1}\alpha(0)=B$ este ideal al lui R, inelele R/B, R/C şi $R'/\alpha(0)$ sunt netriviale, iar din (4) şi (10) rezultă că ele sunt de caracteristică 2. În plus, din (3) şi 6.7. rezultă că $\beta\cap\gamma\in Rc(R,R')$, deci $\beta\cap\gamma\in S(\beta)\cap S(\alpha)$.

2.2. Dacă R=D=B=C, din (1), (2) şi (10) urmează că: $\beta\cap\gamma\in S(\alpha)\cap S(\beta)\cap(\gamma)$ şi are loc (d)

6.17. Observaţii.. 1.Fie $\alpha,\beta,\gamma\in Rc(R,R')$ astfel ca $\alpha=\beta+\gamma$. Dacă $R=\ker\beta$, atunci $\gamma\subset\alpha$, iar dacă $R=\ker\gamma$, atunci $\beta\subset\alpha$.

2. Fie $\alpha\in Rc(K,R)$, unde K este un corp. Deoarece $\ker\alpha$ este un ideal al corpului K rezultă că $0=\ker\alpha$, sau $K=\ker\alpha$. Proprietăţi speciale ale corespondenţelor de corpuri au fost analizate în [Da.86c] şi [BD.88].

6.18. Propoziţie. Fie $\alpha\in Rc(K,R)$, unde K este corp. Dacă $0=\ker\alpha$, atunci $\alpha(0)$ este un ideal maximal complet prim (în αK).

Demonstraţie. Dacă $\alpha(0)\subset P$, iar P este ideal propriu în αK, atunci din 6.1.(b) rezultă că $\alpha^{-1}P=0$; prin urmare $P=\alpha(0)$. Pentru a arăta că $\alpha(0)$ este complet prim este suficient să dovedim că $\alpha K\setminus\alpha(0)$ este un subsemigrup al semigrupului $(\alpha K,.)$. Fie $x,y\in\alpha K\setminus\{0\}$; atunci există $a,b\in K\setminus\{0\}$ astfel ca $x\in\alpha(a)$ şi $y\in\alpha(b)$; dar $xy\in\alpha(ab)$ şi $ab\in K\setminus\{0\}$; prin urmare $xy\in\alpha K\setminus\alpha(0)$, deoarece $\ker\alpha=0$.

6.19. Teoremă. Fie $\alpha,\beta,\gamma\in Rc(K,R)$, $\alpha=\beta+\gamma$, unde K este un corp, iar α este surjectivă. Atunci $\beta\subset\alpha$, sau $\gamma\subset\alpha$.

Demonstraţie. Din 6.17. rezultă că este suficient să considerăm că $0 = \ker\alpha = \ker\beta$ $\ker\gamma$. Din 6.18. urmează că $\alpha(0)$ este ideal complet prim în R, iar din 6.16. rezultă că $\beta\subset\alpha$, sau $\gamma\subset\alpha$.

6.20. Consecință. Dacă $\alpha,\beta,\gamma \in Rc(K,R)$, K este corp, β este surjectivă și $\alpha = \beta + \gamma$, atunci $\alpha = \beta$, sau una dintre cele trei corespondențe este constantă.

Demonstrație. Să presupunem că α,β și γ nu sunt constante. Din $\alpha(0) = \beta(0) + \gamma(0)$ rezultă că

$$\beta(0) \subset \alpha(0) \tag{1}$$

Cum β este surjectivă, din 6.10. rezultă că $\alpha(0) \in Id(R)$; atunci din (1) și 6.18. urmează imediat că $\alpha(0) = \beta(0)$. Din 6.19. rezultă că $\alpha = \beta$, sau $\gamma \subset \alpha$. Să admitem, prin absurd, că $\alpha \neq \beta$. Atunci γ [illegible], deci $\beta(a) = \alpha(0)$, pentru orice $a \in K$; contradicție ! În consecință $\alpha = \beta$.

6.21. Consecință. Dacă $\alpha,\beta,\gamma \in Rc(K,R)$ sunt corespondențe neconstante, $\alpha=\beta+\gamma$, K este corp, α este surjectivă, iar γ este morfism strict, atunci $\alpha=\beta$, iar K se scufundă izomorf în inelul $\alpha(0)$.

Demonstrație. Din teorema 6.19. rezultă că $\beta \subset \alpha$, sau $\gamma \subset \alpha$, iar $\alpha(0)=\beta(0)$, deoarece γ este morfism strict. Să presupunem că γ este o selecție a corespondenței α. Atunci $\beta(a) \subset \alpha(0) = \beta(0)$, deci β este constantă; prin urmare $\beta \subset \alpha$. Fie $a \in K$. Atunci $\beta(a) \subset \alpha(a) = \beta(a) + \gamma(a) \subset \beta(a) + \alpha(0) = \beta(a) + \beta(0) = \beta(a)$, deci $\beta=\alpha$. Cum $\gamma(a) \in \alpha(0)$, iar γ este monomorfism, urmează imediat scufundarea izomorfă a corpului K la inelul $\alpha(0)$.

6.22. Consecință. Dacă inelul R' nu are divizori ai lui zero, $\alpha,\beta,\gamma \in Rf(R,R')$ și $\alpha=\beta+\gamma$ atunci $\alpha=\beta$, sau $\beta=\gamma$, sau $\gamma=\alpha$.

6.23. Consecință. Dacă $\alpha,\beta \in Rc(R,R)$, $\alpha=\beta+1_R$ și idealul $\alpha(0)$ este prim, atunci $Fix(\alpha)=R$, sau $Fix(\beta)=R$.

Demonstrație. Din teorema 6.16. rezultă că identitatea lui R este selecția strictă a corespondenței α, caz în care $Fix(\alpha)=R$, sau $\beta \subset \alpha$ și atunci $\beta=\alpha$, deoarece $\alpha(0)=\beta(0)$, deci $Fix(\alpha)=Fix(\beta)=R$, sau $\beta(a)-a=\alpha(0)$, pentru orice $a \in R$. În acest ultim caz, dacă notăm $\gamma(a)=\alpha(0)$, $a \in R$, atunci $\gamma \in Rc(R,R)$ și $\beta=\gamma+1_R$; aplicând din nou 6.16. rezultă, ca mai sus, că caz în care $\ker\beta=\ker\gamma=R$ și atunci $Fix(\alpha)=Fix(\beta)=R$, sau $Fix(\beta)=R$, sau $\gamma(a)-a=\beta(a)$, pentru orice $a \in R$; în această ultimă situație $\alpha(0)=a+\alpha(0)$, $a \in R$, deci $\ker\beta=R$ și $Fix(\beta)=R$.

6.24. Consecinţă. Fie $f\in Rf(R,R')$ un izomorfism $\alpha,\beta\in Rc(R,R')$, astfel ca idealul $\alpha(0)$ să fie prim, iar $\alpha=\beta+f$. Atunci izomorfismul f este selecţie strictă a uneia dintre corespondenţele α şi β.

Demonstraţie. Deoarece $\alpha=\beta+f$ şi f este izomorfism, urmează că $\alpha f^{-1}=\beta f^{-1}+1_R$ şi $f^{-1}(\alpha(0))$ este ideal prim al inelului R. Din 6.23. rezultă că $Fix(\alpha f^{-1})=R$, deci $f\subset\alpha$, sau $Fix(\beta f^{-1})=R$, caz în care $f\subset\beta$.

6.25. Propoziţie [Pat.61]. Dacă $A\in Id(R)$ şi f este un automorfism liber de punct fix (i.e. $f(a)=a \Leftrightarrow a=0$), astfel ca $(f-1_R)(A)=A$, atunci $\alpha(a)=f(a)+A$ defineşte o corespondenţă $\alpha\in Rc(R,R)$ şi $Fix(\alpha)=A$.

6.26. Consecinţă. Fie A un ideal prim al inelului R, $\alpha,\beta\in Rc(R,R)$, $\alpha(0)=A$ şi f un automorfism liber de punct fix astfel ca $\alpha=\beta+f$. Dacă $(f-1_R)(A)=A$ atunci $Fix(\alpha)=Fix(\beta)=A$.

Demonstraţie. Din 6.24. rezultă că $f\subset\alpha$, sau $f\subset\beta$. Dacă $f\subset\alpha$, atunci, cum $f(A)=A$, rezultă că $\alpha(a)=f(a)+A$ şi $\beta(a)=A$, pentru orice $a\in A$; prin urmare, din 6.25. urmează că $Fix(\alpha)=Fix(\beta)=A$. Dacă $f\subset\beta$, atunci din 6.25. rezultă că $Fix(\beta)=A$; în plus, dacă $a\in Fix(\alpha)$, atunci $f(2a)-a\in A$, de unde se obţine că $f(a)\in A$; prin urmare $Fix(\alpha)=A$.

6.27. Observaţie. În cele ce urmează vom căuta condiţii suficiente pentru ca, dacă $\alpha,\alpha_i\in Rc(R,R')$, $i=\overline{1,n}$, $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$, cel puţin una dintre corespondenţele α_i, $i=\overline{1,n}$, să fie selecţie a corespondenţei α. Vom nota cu $R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ inelul generat de $\alpha_1R\cup\alpha_2R\cup\ldots\cup\alpha_nR$ şi cu α'_i *extinderea lui α_i prin $\alpha(0)$*, i.e. corespondenţa definită prin $\alpha'_i(a)=\alpha_i(a)+\alpha(0)$. Din a II-a teoremă de izomorfism rezultă imediat:

6.28. Propoziţie. Fie $\alpha,\beta,\gamma\in Rc(R,R')$ astfel ca $\beta+\gamma\subset\alpha$. Dacă $\alpha(0)\in Id(R(\alpha,\beta,\gamma))$ atunci

(a) $\beta', \gamma'\in Rc(R,R')$

(b) $\alpha(0)+R(\beta,\gamma) = R(\alpha,\beta,\gamma)$

(c) $R(\alpha,\beta,\gamma)/\alpha(0) \cong R(\beta,\gamma)/(R(\beta,\gamma)\cap\alpha(0))$

6.29. Propoziție. În ipotezele de la 6.28. una şi numai una din următoarele afirmații este adevărată.

(a) $\ker\alpha \neq R$

(a1) $\beta \in S(\alpha)$ şi $\gamma \notin S(\alpha)$

(a2) $\gamma \in S(\alpha)$ şi $\beta \notin S(\alpha)$

(b) $\ker\alpha = R$

(b1) $\alpha(0)=R(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta \in S(\alpha)$ şi $\gamma \in S(\alpha)$

(b2) $\alpha(0) \neq R(\alpha,\beta,\gamma)$, $\beta \notin S(\alpha)$, $\gamma \notin S(\alpha)$ şi $\beta'=\gamma'$. În plus $B=\beta^{-}\alpha(0)=\gamma^{-}\alpha(0) \in Id(R)$ şi char R/B=char $R(\alpha,\beta,\gamma)/\alpha(0)=2$.

Demonstrație. Desigur $\alpha=\beta'+\gamma=\beta+\gamma'=\beta'+\gamma'$.

(a) Cum $R \neq \ker\alpha$, din 6.16., rezultă că are loc alternativa:

$\beta' \in S(\alpha)$ şi $\gamma \notin S(\alpha)$: în acest caz, cum $\beta \in S(\beta')$, urmează că are loc (a1);

în caz contrar $\gamma \in S(\alpha)$, iar $\beta'(a)=\alpha(0)$, $a \in R$; cum $R \neq \ker\alpha$ rezultă că $\beta \notin S(\alpha)$.

(b) Dacă $\alpha(0)=R(\alpha,\beta,\gamma)$, din 6.16.(d) urmează imediat: $\gamma \in S(\alpha)$ şi $\beta \subset \beta'=\alpha$, deci are loc (b1). Dacă $\alpha(0) \neq R(\alpha,\beta,\gamma)$, cum $\alpha=\beta'+\gamma$, din 6.16.(c) urmează că $\gamma \notin S(\alpha)$ şi

$$C = \beta'^{-}\alpha(0) = \gamma^{-}\alpha(0) \in Id(R),\ \beta' \cap \gamma \in Rc(R,R') \tag{1}$$

Analog, din $\alpha=\beta+\gamma'$, rezultă că $\beta \notin S(\alpha)$ şi

$$B = \beta^{-}\alpha(0) = \gamma'^{-}\alpha(0) \in Id(R),\ \beta \cap \gamma' \in Rc(R,R') \tag{2}$$

Din $\alpha=\beta'+\gamma'$ şi 6.16.(c) rezultă că $\beta' \cap \gamma' \in Rc(R,R')$ şi $\beta'^{-}\alpha(0) = \gamma'^{-}\alpha(0)$, iar din (1) şi (2) urmează că $B=C$ şi char R/B = char $R(\alpha,\beta,\gamma)/\alpha(0) = 2$.

6.30. Teoremă. Fie $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in Rc(R,R')$ astfel ca $\beta_1=\gamma+\delta$, $\gamma_1=\beta+\delta$, $\delta_1=\beta+\gamma \in Rc(R,R')$ şi $\alpha=\beta+\gamma+\delta$. Dacă idealul $\alpha(0)$ este complet prim în inelul $R(\beta,\gamma,\delta)$, atunci una şi numai una dintre următoarele afirmații este adevărată:

(a) $\ker\alpha \neq R$

(a1) există un unic $\theta \in \{\beta,\gamma,\delta\}$ astfel ca $\theta \in S(\alpha)$

(a2) $\beta,\gamma,\delta \in S(\alpha)$, $B=\beta^{-}\alpha(0)=\gamma^{-}\alpha(0)=\delta^{-}\alpha(0) \in IdR$ şi char R/B=char $R(\beta,\gamma,\delta)/\alpha(0)=2$.

(b) $\ker\alpha = R$

(b1) $\alpha(0)=R(\beta,\gamma,\delta)$ şi $\beta,\gamma,\delta \in S(\alpha)$

(b2) $\alpha(0)\neq R(\beta,\gamma,\delta)$ şi există un unic $\theta\in\{\beta,\gamma,\delta\}$astfel ca $\theta\in S(\alpha)$; dacă $\theta=\beta$, atunci $\gamma'=\delta'$, $B=\gamma'\alpha(0)=\delta'\alpha(0)\in Id(R)$, $R(\beta,\gamma,\delta)=R(\gamma,\delta)+\alpha(0)$ şi char $R(\beta,\gamma,\delta)/\alpha(0)=charR/B=2$.

Demonstraţie. (a). Deoarece $ker\alpha\neq R$ şi $\alpha=\beta+\beta_1$, din teorema 6.16. rezultă alternativa:

1 Sau $\beta\in S(\alpha)$; în acest caz urmează imediat că:

$$\gamma(a)+\delta(a)\subset\alpha(0),\ a\in R \tag{1}$$

Dacă $R(\gamma,\delta)\subset\alpha(0)$, din 6.29. (b1) şi (1) rezultă că $\gamma(a)\subset\alpha(0)$ şi $\delta(a)\subset\alpha(0)$, pentru orice $a\in R$; dar $ker\alpha\neq R$ deci $\gamma,\delta\notin S(\alpha)$ şi are loc afirmaţia (a1).

Dacă $R(\gamma,\delta)\not\subset\alpha(0)$, din 6.29. (b2) rezultă că:

$\gamma'=\delta'$, $B=\gamma'\alpha(0)=\delta'\alpha(0)\in Id(R)$ şi char $R/B=char(R(\gamma,\delta)+\alpha(0))/\alpha(0)=2$, iar

$$(R(\delta,\gamma)+\alpha(0))/\alpha(0)\cong R(\gamma,\delta)/(R(\gamma,\delta)\cap\alpha(0)) \tag{2}$$

ultima aserţiune rezultând din 6.28.(c). Din 6.28.(b) şi (2) rezultă imediat că:

$$R(\gamma,\delta)+\alpha(0) = R(\beta,\gamma,\delta) \text{ şi char } R(\beta,\gamma,\delta)/\alpha(0) = 2 \tag{3}$$

Să presupunem că $\gamma\subset\alpha$; cum $\gamma+\gamma_1=\alpha$, din 6.16. urmează că $\gamma_1\notin S(\alpha)$ şi

$$\beta(a)+\gamma(a)\subset\alpha(0),\quad a\in R \tag{4}$$

de unde, ţinând seama de (1) rezultă că:

$$\alpha(0)+\delta(a)=\alpha(a),\ a\in R \tag{5}$$

Din (3) şi (5) rezultă că $\delta\in S(\alpha)$, deci este valabilă aserţiunea (a2).

2 Sau $\beta_1\in S(\alpha)$. În acest caz, din 6.16. rezultă că $\beta\notin S(\alpha)$, iar din 6.29.(a) decurge aserţiunea (a2).

(b). Desigur, dacă $\alpha(0)=R(\beta,\gamma,\delta)$ rezultă imediat că $\beta,\gamma,\delta\in S(\alpha)$. Să presupunem acum că $\alpha(0)\neq R(\beta,\gamma,\delta)$. Dacă $R(\gamma,\delta)\subset\alpha(0)$, atunci $\beta R\subset\alpha(0)$, în contradicţie cu ipoteza; prin urmare

$$R(\gamma,\delta)\not\subset\alpha(0),\ R(\beta,\gamma)\not\subset\alpha(0),\ R(\beta,\delta)\not\subset\alpha(0) \tag{6}$$

Cum $\beta+\beta_1=\alpha$, are loc alternativa:

1 $R(\beta,\beta_1)\subset\alpha(0)$. Atunci conform 6.16.(d), β, $\beta_1\in S(\alpha)$. Din (6) şi 6.29.(b2) rezultă că $\delta\in S(\alpha)$, $\gamma'=\delta'$, $B=\gamma'\alpha(0)=\delta'\alpha(0)$ şi char $R/B=$ char $R(\alpha,\gamma,\delta)/\alpha(0)=2$; prin urmare este adevărată afirmaţia (b2).

2 $R(\beta,\beta_1)\not\subset\alpha(0)$. Atunci din 6.16.(c) rezultă că $\beta,\beta_1\notin S(\alpha)$, $B=\beta'\alpha(0)=\beta_1'\alpha(0)\in Id(R)$ şi char $R/B=$char $R(\alpha,\beta,\beta_1)/\alpha(0)=2$. Cum $\beta_1\notin S(\alpha)$ şi $\beta_1(0)\subset\alpha(0)$ urmează că $R\neq ker\beta'_1$, iar din

6.29.(a) rezultă că:

[$\gamma \in S(\beta'_1)$ și $\delta \notin S(\beta'_1)$], sau [$\delta \in S(\beta'_1)$ și $\gamma \notin S(\beta'_1)$]

Atunci este adevărată aserțiunea (b2). Într-adevăr, în primul caz, cum $\gamma(a) = \gamma(a)+\delta(a)+\alpha(0)$, $a \in R$, rezultă că $\delta \in S(\alpha)$; dar $\alpha=\delta+\delta_1$, iar din 6.16.(d) rezultă că $\delta_1 \in S(\alpha)$, din (6) și 6.29.(b2) urmează că $\beta,\gamma \notin S(\alpha)$, $\beta'=\gamma'$ și $\beta'\alpha(0)=\gamma'\alpha(0)=B$, iar $R(\alpha,\beta,\beta_1)=R(\alpha,\beta,\gamma)$. Analog, în cel de-al doilea caz.

6.31. Consecință. În ipotezele teoremei 3.30. are loc alternativa:

(a) $\beta,\gamma,\delta \in S(\alpha) \Leftrightarrow$ [(ker $\alpha \neq R$ și char $R(\beta,\gamma,\delta)/\alpha(0)=2$), sau (ker$\alpha$=R și char $R(\beta,\gamma,\delta)/\alpha(0) \neq 2$)]

(b) există un unic $\theta \in \{\beta,\gamma,\delta\}$ astfel ca $\theta \in S(\alpha) \Leftrightarrow$ [(ker$\alpha \neq R$ și char $R(\beta,\gamma,\delta)/\alpha(0) \neq 2$), sau (ker$\alpha$=R și char $R(\beta,\gamma,\delta)/\alpha(0)=2$)].

6.32. Teoremă. Fie $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Rc(R,R')$, $n \geq 2$, ca $\alpha_i+\alpha_j \in Rc(R,R')$ pentru $i \neq j$ și $\alpha=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$. Dacă idealul $\alpha(0)$ este complet prim în inelul $R''=R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, atunci:

(a) dacă $R \neq$ kerα există un număr impar dintre corespondențele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ care sunt selecții ale lui α.

(b) dacă R=kerα și $\alpha(0)=R''$, atunci $\alpha_i \in S(\alpha)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$.

(c) dacă R=kerα și $\alpha(0) \neq R''$, atunci:

(c1) dacă n este par există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca 2m dintre corespondențele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ să fie selecții ale lui; dacă $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m} \in S(\alpha)$, atunci $\alpha'_{2m+1}= \ldots = \alpha'_n$, $\alpha'_{2m+1}\alpha(0)=\ldots=\alpha'_n\alpha(0)=B \in Id(R)$ și char R/B=char $R''/\alpha(0)=2$.

(c2) dacă n este impar, atunci există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca 2m+1 dintre corespondențele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ să fie selecții ale lui α; dacă $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2m+1} \in S(\alpha)$ și $2m+1<n$, atunci $\alpha'_{2m+2}=\ldots=\alpha'_n$, $\alpha'_{2m+2}\alpha(0)=\ldots=\alpha'_n\alpha(0)=B \in Id(R)$ și char R/B=char $R''/\alpha(0)=2$.

Demonstrație. Pentru n=2 și n=3 teorema revine la afirmațiile din 6.16., respectiv 6.30. Să presupunem acum că teorema este adevărată pentru $k \leq n$ și să arătăm că ea este adevărată pentru k=n+1. Evident, dacă $\alpha(0)=R''$, atunci are loc varianta (b). Notăm $\beta_{n+1}=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$. Atunci $\alpha=\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}$ și să presupunem că $R''=R(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}) \neq \alpha(0)$.

1. ker$\alpha \neq$R. Din 6.16. rezultă alternativa:

1.1. $\alpha_{n+1} \in S(\alpha)$ şi $\beta_{n+1}(a) \subset \alpha(0)$, $a \in R$.

Dacă n este impar, cum $\alpha'_1(a)+\alpha_2(a)+..+\alpha_n(a)=\alpha(0)$, $a \in R$, rezultă că:

1.1.1. sau $R(\alpha_1,...,\alpha_n) \subset \alpha(0)$ şi atunci unica selecţie a corespondenţei α este α_{n+1}.

1.1.2. sau $R(\alpha_1,...,\alpha_n) \not\subset \alpha(0)$. În acest caz, din ipoteza (c2) rezultă că există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca, de exemplu:

$$\alpha_1(a),..., \alpha_{2m+1}(a) \in \alpha(0), \quad a \in R \tag{1}$$

Dacă $n=2m+1$, atunci unica selecţie a lui α este α_{n+1}, căci $R \neq \ker\alpha$. Dacă $n>2m+1$, atunci, din (1) rezultă că:

$$\alpha_{2m+2}+...+\alpha_n+\alpha'_{n+1}=\alpha$$

şi din ipoteza (a) rezultă că există un număr impar de corespondenţe dintre corespondenţele $\alpha_{2m+2},...,\alpha_n$, α'_{n+1} care sunt selecţii ale lui α.

Dacă n este par, rezultă că:

1.1.3. sau $R(\alpha_1,...,\alpha_n) \subset \alpha(0)$ şi atunci unica selecţie a corespondenţei α este α_{n+1}.

1.1.4. sau $R(\alpha_1,...,\alpha_n) \not\subset \alpha(0)$ şi atunci, din faptul că $\alpha_1(a)+...+\alpha_n(a) \subset \alpha(0)$ şi din ipoteza (c1) rezultă că există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca, de exemplu

$$\alpha_1(a),..., \alpha_{2m}(a) \subset \alpha(0), \quad a \in R \tag{2}$$

Dacă $m=0$, atunci unica selecţie a corespondenţei α este α_{n+1}. Dacă $m>0$, atunci, din (2) rezultă că:

$$\alpha=\alpha_{2m+1}+...+\alpha_n+\alpha'_{n+1},$$

iar din ipoteza inducţiei rezultă că există un număr impar dintre corespondenţele $\alpha_{2m+1},...,\alpha_n$, α_{n+1} care sunt selecţii ale lui α.

1.2. $\alpha_{n+1}(a) \subset \alpha(0)$, $a \in R$ şi $\beta_{n+1} \in S(\alpha)$. Atunci:

$$\alpha'_1+\alpha_2+...+\alpha_n=\alpha,$$

şi din ipoteza (a) rezultă că există un număr impar dintre corespondenţele $\alpha_1,...,\alpha_n$ care să fie selecţii ale lui α.

2. $\ker\alpha=R$ şi $\alpha(0) \neq R''=R(\alpha_1,...,\alpha_{n+1})$.

2.1. Dacă există $i \in \{1,2,...,n+1\}$ astfel ca $R(\alpha_i,\beta_i) \subset \alpha(0)$ atunci $\alpha_i,\beta_i \in S(\alpha)$, unde $\beta_i=\alpha_1+...+\alpha_{i-1}+\alpha_{i+1}+...+\alpha_{n+1}$. Atunci:

$$\beta'_i=\alpha'_1+...+\alpha_{i-1}+\alpha_{i+1}+...+\alpha_{n+1}=\alpha,$$

iar din $\alpha_i \sqsubset \alpha$ rezultă că:

$$R(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{n+1})=R(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1})$$

Prin urmare, din ipoteza inducției rezultă (c). Mai precis, dacă pentru cele n corespondențe $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{n+1}$ are loc ipoteza (c1) (respectiv (c2)), pentru cele n+1 corespondențe $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1}$ rezultă concluzia (c2) (respectiv (c1)).

2.2. Dacă:

$$R(\alpha_i, \beta_i) \not\subset \alpha(0),\ i \in \{1,\dots, n+1\} \tag{3}$$

cum $\alpha_i+\beta_i=\alpha$, din 6.16.(c) urmează că

$$\alpha_i, \beta_i \notin S(\alpha) \tag{4}$$

$$\alpha'_i=\beta'_i \tag{5}$$

$$B_i=\alpha'_i\alpha(0) = \beta'_i\alpha(0),\ \mathrm{char}\, R/B_i=\mathrm{char}R(\alpha_i,\beta_i)/\alpha(0)=2 \tag{6}$$

pentru orice $i \in \{1,\dots,n+1\}$. Din (6) rezultă imediat că și

$$\mathrm{char}\ R(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1})/\alpha(0)=2 \tag{7}$$

Fie $i,j \in \{1,\dots,n+1\}$, $i\neq j$ și $\alpha_{ij} = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,\, k\neq j}}^{n+1} \alpha_k$. Atunci $\alpha=\alpha_i+\alpha_j+\alpha_{ij}$. Cum $R=\ker\alpha$ și $R(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_{ij}) \not\subset \alpha(0)$ (cum rezultă din (3)), din 6.30. (b2) rezultă că $\alpha_{ij} \sqsubset \alpha$ și

$$B_i=B_j=B,\ \alpha'_i = \alpha'_j \tag{8}$$

Din (5) și ipoteza (a) rezultă că există un număr impar dintre cele n corespondențe $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{n+1}$ care sunt selecții ale lui α; ultima afirmație contrazicând (4), urmează că n trebuie să fie impar. Atunci din (5), (6), (7) și (8) rezultă aserțiunea (c1).

6.33. Observații. A. Vesanen arată [Ves.97, lemma 3] că dacă F este un corp finit și α,β,γ sunt automorfisme ale lui F astfel ca $\alpha=\beta+\gamma-id_F$, atunci unul dintre automorfismele α, β ori γ este identitatea. M. Deaconescu [Dea.97] arată că dacă R este un domeniu, iar $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sunt edomorfisme ale acestuia astfel ca $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, iar β este automorfism, atunci cele patru endomorfisme sunt egale în perechi. Noi extindem aceste rezultate arătând că dacă:

$$\alpha,\beta,\gamma,\delta \in Rc(R,R'),\ \alpha+\beta = \gamma+\delta,\ \beta(0) \subset \alpha(0) \tag{6.3}$$

$$\alpha(0) \in \mathrm{Spec}\ R'',\ \text{unde } R'' = R(\beta,\gamma,\delta) \tag{6.4}$$

$$xy-yx \in \alpha(0),\ \text{pentru orice } x,y \in R'' \tag{6.5}$$

atunci extinderile α,β',γ' şi δ' prin $\alpha(0)$ ale corespondenţelor α,β,γ, respectiv δ sunt egale în perechi. Demonstraţia o vom face fără a utiliza [HR.59] şi [Lew.67], ori [Ves.97], spre deosebire de cea din [Dea.97]. Să remarcăm că, în general $-\beta$, $\alpha+\beta$, $\gamma-\beta$, $\delta-\beta$ nu sunt corespondenţe de inele, şi, în consecinţă, chiar în condiţiile (6.3) şi (6.4), rezultatele 6.30 – 6.32. nu sunt utilizabile aici. Totuşi, cu condiţii suplimentare, rezultatul amintit rămâne valabil ca în următoarele consecinţe:

6.34. Consecinţă. Dacă $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R\subset(R,R')$, $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, $\alpha+\beta\in Rc(R,R')$ şi idealul $U=\alpha(0)+\beta(0)$ este prim în $R(\gamma,\delta)$ şi $R(\alpha,\beta)$ atunci corespondenţele α,β,γ şi δ au extinderile prin U egale în perechi.

Demonstraţie. Notăm extinderea prin U a corespondenţei α cu α', i.e. $\alpha'(a)=\alpha(a)+U$, $a\in R$.

1. Dacă $R\neq\ker(\alpha+\beta)$, atunci şi $\ker(\gamma+\delta)\neq R$, iar din 6.16. rezultă, de exemplu, că $S(\alpha+\beta)$ şi $\beta\in S(\gamma+\delta)$. În acest caz, pentru orice $a\in R$, $\alpha(a)$, $\gamma(a)\subset U$. Deci $\alpha'=\delta'$. În plus $\beta(a)=\gamma(a)+\delta(a)=\gamma'(a)$, deci $\beta'=\gamma'$.

2. Dacă $R=\ker(\alpha+\beta)$ şi $R(\gamma,\delta)\neq U$, atunci din 6.16.(c) rezultă că $\gamma'=\delta'$, iar $\alpha(a)+\beta(a)=U$, $a\in R$. Dacă $R(\alpha,\beta)=U$, atunci $\alpha(a)$, $\beta(a)\subset U$, deci $\alpha'=\beta'$, iar dacă $R(\alpha,\beta)\neq U$, atunci, din 6.16.(c) urmează că $\alpha'=\beta'$.

3. Dacă $R=\ker(\alpha+\beta)$ şi $R(\gamma,\delta)=U$, atunci $\gamma'=\delta'$. Cum $\alpha(a)+\beta(a)=U$, $a\in R$, dacă $R(\alpha,\beta)=U$, atunci $\alpha'=\beta'=\gamma'=\delta'$; dacă $R(\alpha,\beta)\neq U$, din 6.16.(c) urmează că $\alpha,\beta\notin S(\gamma')$, dar $\alpha'=\beta'$.

6.35. Consecinţă. Dacă $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in Rc(R,R')$, $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, $\gamma-\beta$, $\delta-\beta\in Rc(R,R')$ şi idealul U generat de $\alpha(0)+\beta(0)+\gamma(0)+\delta(0)$ în inelul $R(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ este complet prim, atunci corespondenţele α, β, γ şi δ au extinderile prin U egale în perechi.

Demonstraţie. Deoarece $\alpha'=\gamma+\gamma_1$, unde $\gamma_1=\delta-\beta'\in Rc(R,R')$, din 6.16. rezultă cazurile

1. $R\neq\ker\alpha'$

1.1. $\gamma\in S(\alpha)$. Atunci $\gamma'=\alpha'$ şi $\delta'=\beta'$.

1.2. $\gamma_1=\alpha'$. Atunci $\gamma(a)\subset U$, $a\in R$ şi $\delta'=\alpha+\beta'$.

1.2.1. $\ker\delta'\neq R$. În această situaţie $\alpha'=\delta'$ şi atunci $\beta(a)\subset U$, $a\in R$, adică $\gamma'=\beta'$, sau $\beta'=\delta'$ şi, analog, $\alpha'=\gamma'$

1.2.2. $\ker\delta'=R$. Cum $R(\alpha,\beta)\subset U$, din 6.16.(c) urmează că $\alpha'=\beta'$, în plus $\gamma(a)+\delta(a)=U$

$a\in R$ şi din 6.29.(b) urmează că $\gamma'=\delta'$.

2. $R=\ker\alpha'$

2.1. $R(\gamma,\gamma_1)\subset U$. Atunci $\gamma(a)\subset U$, $a\in R$, adică $\gamma'=\alpha'$ şi $\delta(a)-\beta(a)\subset U$, $a\in R$, de unde, conform 6.29 (b) rezultă că $\delta'=\beta'$.

2.2. $R(\gamma,\gamma_1)\not\subset U$. Atunci $\gamma'=\gamma_1$, de unde $\delta'=\beta'+\gamma'$. Din 6.16. rezultă situațiile:

2.2.1. $\ker\delta'\neq R$. Atunci $\beta'=\delta'$ şi $\gamma'(a)=U$, $a\in R$, deci $\gamma'=\alpha'$, sau, în caz contrar, $\gamma'=\delta'$ şi $\beta'=\alpha'$.

2.2.2. $\ker\delta'=R$ şi atunci $\beta'=\gamma'$ şi $\delta'=\alpha'$.

6.36. Lemă. În ipotezele (6.3), pentru orice $a,b\in R$:

$$(\gamma(a)-\beta(a))\,(\delta(b)-\beta(b)) + (\delta(a)-\beta(a))\,(\gamma(b)-\beta(b)) \subset \alpha(0) \tag{6.6}$$

Demonstrație. Fie $a,b\in R$, $x\in\beta(a)$, $y\in\gamma(a)$, $z\in\delta(a)$, $u\in\beta(b)$, $v\in\gamma(b)$ şi $w\in\delta(b)$. Deoarece $\alpha=\gamma+\delta-\beta$, căci $\beta(0)\subset\alpha(0)$, rezultă că:

$$(y+z-x)(v+w-u)+xu-yv-zw\in\alpha(0),$$

de unde

$$yw-yu+zv-zu-xv-xw+2xu\in\alpha(0),$$

sau, echivalent, $(y-x)(w-u)+(z-x)(v-u)\in\alpha(0)$, apartenență ce dovedeşte (6.6).

6.37. Teoremă. Fie $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in Rc(R,R')$ astfel ca $\beta(0)\subset\alpha(0)$ şi $\alpha+\beta=\gamma+\delta$. Dacă $\alpha(0)$ este ideal prim în $R''=R(\beta,\gamma,\delta)$ şi inelul $R''/\alpha(0)$ este comutativ atunci extinderile α', β', γ', δ' prin $\alpha(0)$ ale corespondențelor α, β, γ şi δ sunt egale în perechi. Mai mult, una şi numai una dintre următoarele afirmații este adevărată:

(a) $\gamma\in S(\alpha)$, $\beta,\delta\notin S(\alpha)$ şi $\beta'=\delta'$

(b) $\delta\in S(\alpha)$, $\beta,\gamma\notin S(\alpha)$ şi $\beta'=\gamma'$

(c) $\beta,\gamma,\delta\in S(\alpha)$

(d) $\beta\in S(\alpha)$, $\gamma,\delta\notin S(\alpha)$, $S(\gamma)\cap S(\delta)\neq\emptyset$, $\gamma^{\cdot}\alpha(0)=\delta^{\cdot}\alpha(0)$ şi char $R/\gamma^{\cdot}\alpha(0)=$ = char $R''/\alpha(0)=2$.

Demonstrație. Fie $B=\{a\in R|\delta(a)\subset\alpha(a)\}$, $C=\{a\in R|\gamma(a)\subset\alpha(a)\}$, $D=\{a\in R|\beta(a)\subset\alpha(a)\}$ şi $D'=\{a\in R|\beta(2a)+\gamma(a)+\delta(a)=\alpha(0)\}$. Se verifică imediat că B, C şi D sunt subinele ale lui R, iar din (6.3) rezultă că $B=\{a\in R|\beta(a)-\gamma(a)\subset\alpha(0)\}$, $C=\{a\in R|\beta(a)-\delta(a)\subset\alpha(0)\}$ și $D = \{a\in R|\alpha(2a)=\gamma(a)+\delta(a)\}$.

Să presupunem întâi că există $a\in B\setminus C$. Atunci, cum $\beta(a)-\gamma(a)\subset\alpha(0)$, din (6.6) rezultă că:

$$(\delta(a) - \beta(a)) \not\subset (\gamma(b)-\beta(b)) \subset \alpha(0),\ b\in R,$$

de unde, cum $(\delta(a) - \beta(a)) \cap \alpha(0)=\emptyset$, căci $a\notin C$ și cum $\alpha(0)$ este complet prim în R" deoarece R"$/\alpha(0)$ este comutativ, rezultă că $\gamma(b)-\beta(b)\subset\alpha(0)$, $b\in R$. Prin urmare:

$$B\setminus C\neq\emptyset \Rightarrow R = B$$

caz în care este adevărată varianta (b). Analog,

$$C\setminus B\neq\emptyset \Rightarrow R = C$$

și atunci varianta (a) este verificată.

Rămâne să analizăm cazul în care $B\setminus C=C\setminus B=\emptyset$. Atunci B=C. Dacă R=B=C, atunci, pentru orice $a\in R$, $\gamma(a)+\delta(a)=\alpha(2a)$ și $\gamma(a)+\delta(a)=\alpha(a)+\beta(a)$; prin urmare $\beta(a)\subset\alpha(a)$ și este verificată varianta (c).

Să presupunem, în sfârșit, că $B=C\neq R$. Dacă $a\in R\setminus B$, atunci din (6.6) și (6.5) rezultă că:

$$(\beta(a) - \gamma(a))\, (\beta(2b) - \delta(2b)),\ (\beta(a) - \delta(a))\, (\beta(2b) - \gamma(2b)) \subset \alpha(0),$$

iar din (6.4), cum $(\beta(a)-\gamma(a)) \cap \alpha(0) = (\beta(a)-\delta(a))\cap\alpha(0) = \emptyset$, iar $B=C=B\cap C\subset D$, urmează că:

$$\beta(2b),\ \gamma(2b),\ \delta(2b) \subset \alpha(2b),\ b\in R \qquad (1)$$

Fie acum $b = a^2$ în (6.6); folosind (6.5), după calcule rezultă că:

$$(\beta(a) - \gamma(a))\, (\beta(2a) +\gamma(a) + \delta(a))(\delta(a) - \beta(a)) \subset \alpha(0),\ a\in R,$$

sau, echivalent $R = B \cup C \cup D' = B \cup D'$. Dar (B, +) și (D', +) sunt subgrupuri ale grupului aditiv (R, +) și ca urmare ele nu pot fi, amândouă, subgrupuri proprii; cum $R\neq B$, urmează că R = D'. Fie $a\in R=D'$; atunci $\alpha(0)=\beta(2a) + \gamma(a) + \delta(a) = \beta(3a) + \alpha(a)$ și $\beta(3a) \subset \alpha(-a)$, de unde rezultă că $\beta(9a^2)\subset\alpha(a^2)$ și cum $\beta(9a^2) +\alpha(3a^2) = \alpha(4a^2)$ urmează că $\alpha(4a^2) = \alpha(0)$, deci:

$$\alpha(2a)\alpha(2a) \subset \alpha(0),\ a\in R,$$

iar din (6.4) rezultă că:

$$\alpha(2a) = \alpha(0),\ a\in R \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că inelul R"$/\alpha(0)$ este de caracteristică 2 și $D'=D=R\neq B=C$; prin urmare $\beta\in S(\alpha)$ și, desigur $\gamma'=\delta'$. În plus:

$$\gamma(a)+\delta(a) = \alpha(0),\ a\in R \qquad (3)$$

BUPT

şi γ, $\delta\notin S(\alpha)$ (deoarece $R\neq B=C$). Din 6.16. şi (3) urmează că $\gamma^{\cdot}\alpha(0)=\delta^{\cdot}\alpha(0)$ şi char $R/\gamma^{\cdot}\alpha(0)=2$. În consecință varianta (d) este complet demonstrată.

Din 6.37. şi 6.18. rezultă imediat următoarele extinderi ale rezultatului lui A. Vesanen [Ves.97]

6.38. Consecință. Dacă α, β, $\gamma\in Rc(R,R)$, $\alpha+id_R=\beta+\gamma$, $\alpha(0)\in SpecR$, iar $R/\alpha(0)$ este un inel comutativ, atunci există $\theta\in\{\alpha,\beta', \gamma'\}$ astfel ca $Fix\theta=R$, unde β' şi γ' sunt extinderile lui β, respectiv γ prin $\alpha(0)$.

6.39. Consecință. Fie K un corp comutativ, α, β, $\gamma\in Rc(K,K)$ şi $\alpha(0)=\beta(0)=\gamma(0)$, $\alpha+id_K=\beta+\gamma$. Atunci una dintre corespondențele α, β, ori γ are mulțimea punctelor fixe K.

Dacă în 6.37. impunem ca $\alpha(0)=\beta(0)=\gamma(0)=\delta(0)=0$ obținem o extindere a rezultatului din [Dea.97]:

6.40. Consecință. Fie α, β, γ, $\delta\in Rf(R,R')$ unde $R(\beta,\gamma,\delta)$ este un inel comutativ fără divizori ai lui zero. Dacă $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ atunci cele patru morfisme sunt egale în perechi.

6.41. Teoremă. Fie α, β, γ, $\delta\in Rc(R,R')$ astfel ca $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ şi $\beta(0)\subset\alpha(0)$. Atunci există trei extinderi minimale α_β, α_γ, α_δ ale lui α astfel ca $\theta\in S(\alpha_\theta)$ pentru orice $\theta\in\{\beta,\gamma,\delta\}$. Dacă, în plus, $R(\beta,\gamma,\delta)/U$ este un inel comutativ, unde U este idealul generat de $\alpha(0)$ în $R(\beta,\gamma,\delta)$ atunci $\alpha_\beta\cap\alpha_\gamma\cap\alpha_\delta\in S(\alpha')$ unde α' este extinderea lui α prin radicalul lui U.

Demonstrație. Fie $\theta\in\{\beta,\gamma,\delta\}$ şi $S_\theta=\{\varphi\in Rc(R,R')|\alpha\in S(\varphi)$ şi $\theta\in S(\varphi)\}$. Desigur $S_\theta\neq\emptyset$, căci $\varphi\in S_\theta$, unde $\varphi(a)=R(\beta,\gamma,\delta)$, $a\in R$. Atunci $\alpha_\theta=\cap S_\theta\in Rc(R,R')$, deoarece $\theta\subset\alpha_\theta$; cum $\alpha\subset\alpha_\theta$ rezultă $\alpha_\theta\in S_\theta$, adică α_θ este o extindere minimală a corespondenței α astfel ca $\theta\subset\alpha_\theta$. Fie acum $V\in SpecR(\beta,\gamma,\delta)$ astfel ca $\alpha(0)\subset V$. Atunci $U\subset V$ şi, din 6.37., rezultă că există $\theta\in\{\beta,\gamma,\delta\}$ astfel ca $\theta\subset\alpha_V$, unde cu α_V am notat extinderea lui α prin idealul V; prin urmare $\alpha_\beta(0)\cap\alpha_\gamma(0)\cap\alpha_\delta(0)\subset V$ pentru orice $V\in Spec\ R(\beta,\gamma,\delta)$, cum $\alpha\subset\alpha_\beta\cap\alpha_\gamma\cap\alpha_\delta$, urmează imediat că $\alpha_\beta\cap\alpha_\gamma\cap\alpha_\delta\in S(\alpha')$.

§.7. CONSTRUCTIVITATEA a-CATEGORIILOR DE ALGEBRE ŞI CORESPONDENŢE SEMIUNIVOCE. APLICAŢII

Fie **AFf** categoria algebrelor universale cu operaţiile finitare F şi **AFc** categoria cu aceleaşi obiecte având ca morfisme corespondenţele de algebre (care verifică (5.2)), iar **AFS** categoria algebrelor cu operaţiile finitare F şi a corespondenţelor de algebre semiunivoce. Vom arăta că dacă **AFc** = **AFS**, a-categoria algebrelor (**AFc, AFf**) este constructivă, extinzând astfel teorema 7 din [Da.88b]. Teoremele de caracterizare a varietăţilor pentru care corespondenţele de algebre sunt semiunivoce date de A.I. Malcev, J.Chajda, I.Duda, J.Lambek, G.D.Findlay, H.Werner, I.Purdea şi I.Virág oferă astfel o clasă de a-categorii constructive bogate, iar tehnica obiectului iniţial utilizată la 2.7. şi 2.8 pe a-categorii prebogate permite extinderea teoremelor de existenţă a limitelor proiective pe acestea, prin intermediul functorului de scufundare; superior tare completitudinea fiind conservată de functorul de scufundare şi teorema 2.28. facilitează demonstrarea constructivităţii acestor a-categorii prebogate. Ilustrăm acest procedeu pentru a-categoriile A-modulelor, [CD.87b], a modulelor şi dicorespondenţelor, [Da.88c], a perechilor Jordan liniare, [DP.87] şi a spaţiilor local convexe, [CD.87a].

7.1. **Propoziţie.** (**AFc, AFf**) şi (**AFS, AFf**) sunt a-categorii la stânga.

Demonstraţie. Fie $\varphi\in AFc(A,A')$ astfel ca pentru orice $B\in AFf$ şi $g\in AFf(B,A)$ corespondenţa de algebre φg să fie minimală în $AFc(B,A')$. Trebuie să arătăm că $\varphi\in AFf(A,A')$. Fie $a\in A$ şi $x\in\varphi(a)$ şi $B=<(a,x)>$ subalgebra generată de $\{(a,x)\}$ în $A\times A'$. Dacă $\{(a,x)\}=B_0$ şi $B_{k+1}=B_k \cup \{(f(a_1...a_n), f(x_1...x_n)) | (a_1,x_1),...(a_n,x_n)\in B_k, f\in F(n), n\in \mathbf{N}\}$ atunci $B=\bigcup_{k\in\mathbf{N}} B_k$. Definim $g(a', x')=a'$ şi $h(a', x')=x'$ pentru orice $(a', x')\in B$. Desigur $g\in AFf(B,A)$ şi $h\in AFf(B,A')$. Vom arăta, prin inducţie, că $h\subset\varphi g$. Pentru $k=0$, $h(a,x)=x\in\varphi g(a,x)=\varphi(a)$. Să presupunem că $h(a',x')\subset\varphi g(a',x')$, pentru orice $(a',x')\in B_k$. Este suficient să dovedim că pentru orice $f \in F(n)$, $(a_1, x_1),\ldots,(a_n,x_n) \in B_k$, $h(a',x') \subset \varphi g(a',x')$, unde $a'=f(a_1,\ldots,a_n)$ şi $x'=f(x_1,\ldots, x_n)$. Cum $x' \in f(\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_n))$, iar φ verifică (5.2) rezultă că $x' \in \varphi(f(a_1,\ldots, a_n))=\varphi(a')$. Prin urmare $h=\varphi g$ şi, în consecinţă $\varphi(a)=x$, adică $\varphi \in AFf(A,A')$ şi (**AFc**, **AFf**) este a-categorie la stânga concretă; cum compusa a două corespondenţe semiunivoce este semiunivocă, urmează imediat că şi (**AFS**, **AFf**) este o a-categorie la stânga.

7.2. **Observaţie.** **AFc** nu este, în general, o categorie cu egalizatori. Într-adevăr, dacă $A' \in$ **AFc** astfel ca să existe două subalgebre S, $S' \in S(A')$ distincte definim $\varphi,\psi \in AFc(A, A')$ prin $\varphi(a)=S$ şi $\psi(a)=S'$, pentru $a \in A$; dacă $\mu \in AFc(N,A)$ ar fi un egalizator al morfismelor φ şi ψ atunci $\varphi\eta=\psi\eta$, în contradicţie cu definiţia corespondenţelor φ şi ψ.

Vom nota, pentru $\varphi \in AFc(A,A')$:

$$\ker \varphi=\{(a,b) \in A \times A \mid \varphi(a) \cap \varphi(b) \neq \emptyset\}$$

Se verifică cu uşurinţă că "nucleul" $\ker\varphi$ este o relaţie de toleranţă compatibilă, având drept clase de toleranţă mulţimile $\varphi^{-}\varphi(a)$, unde $a \in A$.

Să remarcăm, de asemenea, că $\varphi^{-} \in AFc(\varphi(A),A)$, căci dacă $f \in F(n)$, $b_i \in \varphi(a_i)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ şi $a=f(a_1,\ldots,a_n) \in f(\varphi^{-}(b_1),\ldots, \varphi^{-}(b_n))$ atunci $f(b_1,\ldots,b_n) \in f(\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_n)) \subset \varphi(f(a))$, deci $a \in \varphi^{-}(f(b_1,\ldots,b_n))$; de aceea $f(\varphi^{-}(b_1),\ldots,\varphi^{-}(b_n)) \subset \varphi^{-}(f(b_1,\ldots,b_n))$. În plus:

$$\ker\varphi^{-}=\{(b,b') \in \varphi(A) \times \varphi(A) \mid \varphi^{-}(b) \cap \varphi^{-}(b') \neq \emptyset\}$$

este o relaţie de toleranţă ale cărei clase sunt mulţimile $\varphi\varphi^{-}\varphi(a)$ ($\neq\varphi(a)$, în general), $a \in A$. În consecinţă, ţinând seama şi de 3.10., obţinem:

7.3. **Propoziţie.** $AFS(A,A')=\{\varphi \in AFc(A,A') \mid \varphi\varphi^{-}\varphi=\varphi\}$.

Caracterizări ale varietăţilor algebrice pentru care corespondenţele de algebre sunt semiunivoce au fost obţinute de A.I.Malcev [Mal.54], J.Chajda şi J. Duda [ChD.82], J.Lambek [Lam.58], G.D.Findlay [Fin.80], H.Werner [Wer.73], I.G.Maurer, I.Purdea şi I.Virág [MPV.82], caracterizări pe care le inventariem în următoarea propoziţie.

7.4. **Propoziţie.** Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. **AFc** = **AFS**.
2. $\rho \in S(A \times B)$, $A,B \in$ **AFc** $\Rightarrow \rho$ este difuncţională.

3. $\rho \subset A \times A$, $A \in$ AFc este o relaţie compatibilă reflexivă $\Rightarrow$ ρ este o congruenţă.

4. σ, τ sunt congruenţe pe $A \in$ AFc $\Rightarrow \tau\sigma = \sigma\tau$.

5. există un polinom ternar p astfel ca $p(x,y,y)=x$ şi $p(x,x,y)=y$, pentru orice $x,y \in A$ şi $A \in$ AFc.

6. există un polinom 5-ar p astfel ca $p(x,x,y,y,z)=x$ şi $p(x,y,y,z,z)=z$, pentru orice $x,y,z \in A$ şi $A \in$ AFc.

7. $A \in$ AFc, $a,b \in A \Rightarrow <\Delta_A \cup \{(a,b)\}>$ este o relaţie compatibilă simetrică.

8. Există un polinom 7-ar p astfel ca $p(x,x,y,y,y,z,z)=x$ şi $p(x,y,y,x,z,y,z)=z$, pentru orice $x,y,z \in A$ şi orice $A \in$ AFc.

9. $A \in$ AFc, $a,b,c \in A \Rightarrow <\Delta_A \cup \{(a,b),(b,c)\}>$ este o relaţie compatibilă tranzitivă.

10. $A \in$ AFc, $a,b,c \in A \Rightarrow <\Delta_A \cup \{(a,b)\}>$ şi $<\Delta_A \cup \{(a,b), (b,c)\}>$ sunt congruenţe.

11. $A \in$ AFc, $a,b,c \in A \Rightarrow$ congruenţa şi toleranţa generate de $\{(a,b),(b,c)\}$ sunt egale.

12. $A \in$ AFc $\Rightarrow$ clasa toleranţelor pe A coincide cu aceea a congruenţelor.

13. $A \in$ AFc şi $\rho \subset A \times A$ este o relaţie compatibilă reflexivă $\Rightarrow$ ρ este o relaţie compatibilă simetrică.

14. $A \in$ AFc şi $\rho \subset A \times A$ este o relaţie compatibilă reflexivă $\Rightarrow$ ρ este o relaţie compatibilă tranzitivă.

7.5. Teoremă. Dacă **AFc = AFS** atunci a-categoria (**AFc, AFf**) este constructivă.

Demonstraţie. 1. Arătăm că (**AFc, AFf**) este o a-categorie cu limite proiective. Fie $G = (A_i, G(s))$ o **I**-diagramă în **AFc**. Notăm $\rho_i = < \bigcup_{s \in I_i} \ker G(s)^- >_{A_i^2}$, unde, ca de obicei, $I_i = \{s \in I(i,j) | j \in I\}$. Cum $id_{A_i} \in I_i$ rezultă că ρ_i este o relaţie compatibilă reflexivă, iar din propoziţia 7.4 urmează că ρ_i este o congruenţă pe A_i. Fie

$$A = \{(\bar{a}_i) \in \Pi A_i/\rho_i | G(s)(\bar{a}_j) \subset \bar{a}_i,\ i \in I,\ s \in I(i,j)\}$$

Definim $\varphi_i((\bar{a}_i)) = \bar{a}_i \subset A_i$, $i \in I$, pentru fiecare $(\bar{a}_i) \in A$. Dacă $f \in F(n)$ şi $(\bar{a}_i^1), \ldots, (\bar{a}_i^n) \in A$, fie $b_i^k \in \bar{a}_i^k$, $k \in \{1,\ldots,n\}$ şi $i \in I$. Atunci, dacă $s \in I(i,j)$:

$$G(s)f^{\cdot}(b_j^1,\ldots,b_j^n)\subset f(G(s)(b_j^1),\ldots,G(s)(b_j^n))\subset f(G(s)(\bar a_j^1),\ldots,G(s)(\bar a_j^n))\subset f(\bar a_i^1,\ldots,\bar a_i^n)=$$

$\overline{f(b_i^1,\ldots,b_i^n)}$, deci $G(s)f(\bar a_j^1,\ldots,\bar a_j^n)\subset f(\bar a_i^1,\ldots,\bar a_i^n)$ şi $f(\bar a_j^1,\ldots,\bar a_j^n)\in A_j/\rho_j$; de aceea $A\in AFc$ şi $\varphi_i\in AFc(A,A_i)$, $i\in I$. Fie $B\in AFc$, $g\in AFf(B,A)$ şi $(g_i)\in FI(B)$ astfel ca $(g_i)\subset(\varphi_i g)$. Trebuie să dovedim că $(g_i)=(\varphi_i g)$. Dacă $(a_i, a'_i)\in \ker g^{\cdot}_i$ atunci $(a_i, a'_i)\in g_i(B)\times g_i(B)\subset\varphi_i g(B)\times\varphi_i g(B)$ şi $g^{\cdot}\varphi^{\cdot}_i(a_i)\supset g^{\cdot}_i(a_i)= g^{\cdot}(a'_i)\subset g^{\cdot}\varphi^{\cdot}_i(a'_i)$; dar $g^{\cdot}\varphi^{\cdot}_i$ este semiunivocă, deci $g^{\cdot}\varphi^{\cdot}_i(a_i)= g^{\cdot}\varphi^{\cdot}_i(a'_i)$; prin urmare:

$$\ker g^{\cdot}_i\subset\ker g^{\cdot}\varphi^{\cdot}_i,\quad i\in I.$$

Fie $(a_i, a'_i)\in\ker g^{\cdot}_i$; din incluziunea precedentă urmează imediat că $(\varphi_i g)^{\cdot}(a_i) = (\varphi_i g)^{\cdot}(a'_i)$, deci $g^{\cdot}\varphi_i^{\cdot}(a_i)= g^{\cdot}\varphi_i^{\cdot}(a'_i)$. Fie $(\bar a_i)\in\varphi^{\cdot}(a_i)$, $i\in I$ fixat şi $(\bar a'_i)\in\varphi_i^{\cdot}(a'_i)$; atunci $g^{\cdot}(\bar a_i)= g^{\cdot}(\bar a'_i)$. Fie $b\in g^{\cdot}(\bar a_i)$; cum $g(b)=(\bar a_i)=(\bar a'_i)$ urmează că $\bar a_i=\bar a'_i$ şi $(a_i, a'_i)\in\rho_i$. De aceea:

$$\ker g^{\cdot}_i\subset\rho_i\cap(g_i(B)\times g_i(B)),\ i\in I.$$

Dar $\ker G(s)^{\cdot}\subset\ker g^{\cdot}_j G(s)^{\cdot}\subset\ker g^{\cdot}_i$, pentru orice $s\in I(i,j)$, deci:

$$\rho_i\cap(g_i(B)\times g_i(B))\subset\ker g^{\cdot}_i,$$

adică $\rho_i\cap(g_i(B)\times g_i(B)) = \ker g^{\cdot}_i$, $i\in I$, ceea ce atrage imediat egalitatea $(g_i)=(\varphi_i g)$. Prin urmare $(\varphi_i)\in FIM(A)$. Analog $(\varphi_i g)\in FIM(B)$ pentru orice $B\in AFc$ şi $g\in AFf(B,A)$. Rămâne să dovedim că aplicaţia definită prin:

$$AFf(B,A)\to FIM(B),\ g\to(\varphi_i g)$$

este bijectivă. Dacă $(\varphi_i g) = (\varphi_i g')$, cu $g,g'\in AFf(B,A)$ şi $g(b)=(\bar a_i)$, $g'(b)= (\bar a'_i)$, atunci pentru orice $i\in I$ $\varphi_i g(b)= \bar a_i = \bar a'_i = \varphi_i g'(b)$, adică $g=g'$. În sfârşit, fie $(g_i)\in FIM(B)$, $b\in B$, iar $\iota\in AFf(<b>, B)$ incluziunea uzuală. Cum

$$\ker G(s)^{\cdot}\subset\ker g_j^{\cdot}G(s)^{\cdot}\subset\ker g^{\cdot}_i,\ i\in I,\ s\in I(i,j)$$

urmează că

$$\rho_i\cap(g_i(B)\times g_i(B))\subset\ker g^{\cdot}_i,\ i\in I.$$

Definim $\theta_i\in AFc(<b>,A_i)$ prin:

$$\theta_i(b') = [\rho_i\cap(g_i(B)\times g_i(B))](b'),\ b'\in<b>.$$

Dar $G(s)[\rho_j\cap(g_j(B)\times g_j(B))](b')\subset[\rho_i\cap(g_i(B)\times g_i(B))](b')$, pentru orice $b'\in<b>$; de aceea $(\theta_i)\in FI(<b>)$. Cum $(\theta_i)\subset(g_i\theta)$ şi $(g_i)\in FIM(B)$ rezultă că $\theta_i=g_i\theta$, pentru orice $i\in I$ şi

$$\ker g^{\cdot}_i = \rho_i\cap(g_i(B)\times g_i(B))$$

Aceasta este suficient pentru a dovedi că:

$g(b) = (g_i(b))$, $b \in B$

defineşte $g \in$ AFf(B,A) şi că $(\varphi_i g) = (g_i)$. Prin urmare $(A, \varphi_i) = \lim\limits_{\leftarrow (\mathbf{AFc}, \mathbf{AFf})} G$.

2. Desigur orice **I-diagramă** discretă G din **AFc** are un produs $(\Pi G(i), p_i)$ şi $p_i \in$ AFf$(\Pi G(i), G(i))$ pentru orice $i \in I$, deci, conform propoziţiei 2.13., a-categoria algebrelor este un produse stricte.

3. Fie $\varphi_i \in$ AFc(A,B), $i \in I$, o familie de corespondenţe de algebre. Notăm cu $\rho_i = \{(x,y) \mid y \in \varphi_i(x),\ x \in A\}$, relaţia compatibilă asociată corespondenţei φ_i, pentru orice $i \in I$. Desigur, ρ_i este o subalgebră a algebrei produs $A \times \varphi_i(A)$. Fie $\rho = \langle \cup \rho_i \rangle_{A\times B}$ şi φ proiecţia a II-a a sa. Evident $\varphi \in$ AFc(A,B) şi $\varphi = \bigcup\limits_i \varphi_i$ în **AFc**. Dacă $\psi \in$ AFc(B,C), atunci $\psi\varphi = \bigcup\limits_i \psi\varphi_i$, deoarece, dacă θ este relaţia compatibilă asociată corespondenţei ψ, rezultă imediat că $\theta\rho = \langle \bigcup\limits_i \theta\rho_i \rangle_{A\times C}$. Prin urmare **AFc** este superior tare completă la stânga.

Aplicând acum teorema 2.28. rezultă că a-categoria (**AFc, AFf**) este constructivă.

7.6. **Observaţie.** Toleranţele compatibile coincid cu congruenţele pe grupuri, inele, module şi, în general, pe grupuri cu multioperatori. Prin urmare (**Gc, Gf**) şi (**Rc, Rf**) sunt, conform teoremei 7.5., a-categorii constructive. Pe de altă parte tehnica obiectului iniţial utilizată în 2.7. şi 2.8. pe a-categorii prebogate permite prelungirea limitelor proiective în a-categoriile scufundate. Ilustrăm, în cele ce urmează, această tehnică pentru a-categoria modulelor extinzând rezultatul principal din [CD.87b]. Vom nota cu **MAf** categoria A-modulelor (stângi) şi a omomorfismelor dintre ele şi cu **MAc** categoria A-modulelor stângi şi a *corespondenţelor de module*, i.e. $\varphi \in$ MAc(E,F) dacă $\varphi \in$ Ec(E, F) şi

$a\varphi(x) + b\varphi(y) \subset \varphi(ax + by)$, $a,b \in A$, $x,y \in E$,

unde $a\varphi(x) = \{au \mid u \in \varphi(x)\}$. Cuplul (**MAc, MAf**) formează o a-categorie la stânga concretă.

7.7. **Propoziţie**. A-categoria grupurilor abeliene (**Abc, Abf**) este bogată şi constructivă.

Demonstraţie. Conform teoremei 5.14., **Abc** este superior tare completă la stânga. Fie, ca la 2.2., $\varphi \in$ Abc(G,H), $g \in$ Abf(H,K) şi $h \in$ Abc(G,K) astfel încât $h \subset g\varphi$. Atunci f g h $\varphi \in$ Abc(G,H), $f \subset \varphi$ şi gf=h. Prin urmare **(Abc, Abf)** este o a-categorie bogată la stânga. Constructivitatea sa rezultă din teoremele 5.23. şi 2.28..

7.8. **Propoziţie.** A-categoria A-modulelor (stângi) **(MAc, MAf)** este prebogată.

Demonstraţie. Fie ^: **MAc** $\to$ **Abc** functorul de subiacenţă, i.e., dacă E este un A-modul, $\hat{E}$ este grupul subiacent lui E şi dacă $\varphi \in$ MAc(E,F) atunci $\hat{\varphi}$ este restricţia lui φ între grupurile subiacente $\hat{E}$ şi $\hat{F}$. Se verifică imediat că acest functor este fidel (definiţia 5.7.)

7.9. **Teoremă.** A-categoria A-modulelor stângi este cu limite proiective.

Demonstraţie. Fie F o **I**-diagramă în **MAc** şi $(\tilde{E}, \tilde{\varphi}_i) = \lim\limits_{\leftarrow (\mathbf{Abc}, \mathbf{Abf})} \hat{F}$. Pe grupul $\tilde{E}$ definim structura canonică de A-modul stâng, adică:

$a(\overline{x}_i) = (\overline{ax}_i)$, pentru $a \in A$ şi $(\overline{x}_i) \in \tilde{E}$.

Cu aceasta corespondenţa de grupuri $\tilde{\varphi}_i$ se extinde canonic la corespondenţa de module MAc(E, F(i)) astfel ca $\hat{\varphi}_i = \tilde{\varphi}_i$, $i \in I$.

Pe de altă parte, dacă U şi V sunt două A-module şi $\tilde{g} \in$ Abf$(\hat{U}, \hat{V})$, atunci $g(ax) = a\tilde{g}(x)$, $a \in A$, $x \in U$ defineşte $g \in$ MAf(U,V) şi $\hat{g} = \tilde{g}$. Prin urmare (E, φ_i) este, conform cu 2.6.3. un obiect iniţial pentru familiile (F(i)) şi $(\tilde{\varphi}_i)$. Atunci, din consecinţa 2.8. şi propoziţiile 7.7. şi 7.8., rezultă că:

$$\lim_{\leftarrow (\mathbf{MAc}, \mathbf{MAf})} F = (E, \varphi_i).$$

7.10. **Teoremă.** A-categoria A-modulelor stângi este constructivă.

Demonstraţie. Deoarece orice corespondenţă de grupuri subiacente unor A-module se extinde canonic la o unică corespondenţă de module, din teorema 5.14. rezultă că **MAc** este o categorie ordonată superior tare completă la stânga, cu produse stricte. Atunci din 7.9. şi 2.28. rezultă că **(MAc, MAf)** este o a-categorie constructivă.

7.11. **Definiţie**. Fie (X,A) şi (Y,B) un A-modul, respectiv B-modul (stâng). O pereche (φ, ρ) este o *dicorespondenţă de module* de la (X,A) la (Y,B) dacă $\rho \in$ Rc(A,B), $\varphi \in$ Abc(X,Y) şi $\rho(a)\varphi(x)\subset\varphi(ax)$, pentru orice $a\in A$ şi $x\in X$, unde $\rho(a)\varphi(x)=\{by|b\in\rho(a),\ y\in\varphi(x)\}$. Notăm cu **Mc** categoria ale cărei obiecte sunt modulele (stângi) şi ale cărei morfisme sunt dicorespondenţele de module în raport cu compunerea pe componente; incluziunea pe componente este o ordine faţă de care **Mc** devine o categorie ordonată, iar cuplul (**Mc, Mf**) este o a-categorie la stânga, unde morfismele din **Mf** sunt dimorfismele în sensul lui Bourbaki [Bo.61] (adică $\varphi(0)=0$ şi $\rho(0)=0$). Proprietăţi elementare ale dicorespondenţelor de spaţii liniare (stângi) sunt analizate în [Da.88c].

7.12. Teoremă. A-categoria modulelor şi a dicorespondenţelor este constructivă.

Demonstraţie. Vom utiliza tehnica obiectului iniţial, ca în 7.10. Fie F o **I**-diagramă în **Mc**. Pentru orice $i\in I$, $F(i)=(X_i, A_i)$ este un A_i-modul şi pentru orice $s\in I(i,j)$, $F(s)=(G(s), R(s))$ este o dicorespondenţă între A_j-modulul (X_j, A_j) şi A_i-modulul (X_i, A_i). De aici urmează imediat faptul că $R=(A_i, R(s))$ este o **I**-diagramă în **Rc**, iar $G=(X_i, G(s))$ este o **I**-diagramă în **Abc**. Fie

$$(A,\rho_i)=\lim_{\leftarrow (\mathbf{Rc},\mathbf{Rf})} R \text{ şi } (X,\varphi_i)=\lim_{\leftarrow (\mathbf{Abc},\mathbf{Abf})} G$$

Folosind construcţiile din teoremele 6.5. şi 5.13. se verifică ca la 7.8. că operaţia:

$$(\bar{a}_i)(\bar{x}_i)=(\overline{a_i x_i}),\ (\bar{a}_i)\in A,\ (\bar{x}_i)\in X$$

defineşte pe X o structură de A-modul astfel ca $(X,A)\in Mc$. Tot din 6.5. rezultă că:

$$\rho_i((a_i))\,\varphi_i((\bar{x}_i))\subset\varphi_i((\overline{a_i x_i})),\ i\in I$$

adică φ_i se extinde canonic la dicorespondenţa $(\varphi_i,\rho_i)\in Mc((X,A),(X_i,A_i))$, $i\in I$, astfel ca $\widehat{(\varphi_i,\rho_i)}=\varphi_i$, unde $\widehat{\ }:\mathbf{Mc}\to\mathbf{Abc}$ este functorul de subiacenţă; acest functor este fidel şi, în consecinţă, (**Mc, Mf**) este prebogată, iar $((A,X),(\varphi_i,\rho_i))$ este, în acord cu 2.6.3., un obiect iniţial pentru familiile (X_i) şi (φ_i). Din teorema 2.8. rezultă că $\lim\limits_{\leftarrow (\mathbf{Mc},\mathbf{Mf})} F=((A,X),(\varphi_i,\rho_i))$ este limită tare a **I**-diagramei F.

Să arătăm acum că (**Mc, Mf**) este superior tare completă la stânga. Vom utiliza ideea demonstraţiei teoremei 9 din [Da.88.c]. Fie $(\varphi_i,\rho_i)\in Mc((X,A),(Y,B))$, $i\in I$ o familie nevidă de dicorespondenţe. Notăm cu Z submodulul generat de mulţimea $\bigcup\limits_i \varphi_i(X)$ în B-modulul Y şi cu $\varphi(0)$ submodulul lui Z generat de mulţimea

$V = \{y \in Z \mid \exists x \in X,\ i,j \in I:\ y \in \varphi_i(x) - \varphi_j(y)\}$.

Definim $\varphi(x) = y + \varphi(0)$, unde $y \in \bigcup_i \varphi_i(x)$; φ este o corespondenţă bine definită căci dacă $y' \in \bigcup_i \varphi_i(x)$, atunci $y-y' \in V$. Fie $\rho = \bigcup_i \rho_i$ supremumul familiei de corespondenţe de inele (ρ_i) din **Rc**: acesta există, deoarece, conform teoremei 6.3., a-categoria **(Rc, Rf)** este superior tare completă la stânga. Cuplul (φ, ρ) este o dicorespondenţă de module şi anume supremumul familiei $((\varphi_i, \rho_i))$ în Mc((X,A), (Y,B)) care este superior stabilă la stânga, după cum rezultă din 6.2. şi 5.14. Prin urmare, conform teoremei 2.28., rezultă că **(Mc, Mf)** este o a-categorie constructivă.

7.13. **Observaţie.** A-categoria spaţiilor liniare (stângi) şi a dicorespondenţelor univoce **(SLc, SLf)** este, de asemenea, superior tare completă la stânga, [Da.88c]. Cu toate acestea ea nu este constructivă, deoarece **SLf** nu este o categorie cu produse. În continuare vom arăta că a-categoria perechilor Jordan liniare este constructivă utilizând proprietăţile laticeale ale corespondenţelor de asemenea perechi din [DP.87] şi tehnica obiectului iniţial; pentru detalii privind perechile Jordan liniare vezi monografia [Loo.75].

7.14. **Definiţie.** Fie K un inel unitar de caracteristică diferită de 2 şi **Jf** categoria perechilor Jordan liniare şi a omomorfismelor de asemenea perechi, [Loo.75]. Dacă $V=(V^+, V^-) \in Jf$, iar $A, C \subset V^\sigma$ şi $B \subset V^{-\sigma}$ definim operaţia Minkovski, $\{A,B,C\}_\sigma$, prin:

$\{A,B,C\}_\sigma = \{\{a,b,c\}_\sigma \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$, $\sigma = \pm$

Un cuplu $\varphi = (\varphi_+, \varphi_-)$ se numeşte *corespondenţă Jordan liniară* între perechile $V=(V^+, V^-)$ şi $W=(W^+, W^-)$ din **Jf** dacă $\varphi_\sigma \in MKc\ (V^\sigma, W^\sigma)$ şi

$\{\varphi_\sigma(x), \varphi_{-\sigma}(y), \varphi_\sigma(z)\}_\sigma \subset \varphi_\sigma(\{x,y,z\}_\sigma)$,

pentru orice $x, y \in V^\sigma$, $y \in V^{-\sigma}$, $\sigma = \pm$. În acest caz vom scrie $\varphi \in Jc(V,W)$.

7.15. **Observaţii.** **Jc**, unde Jc=Jf, este o categorie ordonată în raport cu incluziunea şi compunerea pe componente. Dacă $\varphi \in Jc(V,W)$, atunci $\varphi \in Jf(V,W)$ dacă şi numai dacă $\varphi_\sigma(0)=0$, $\sigma = \pm$. În plus, dacă $V_1 \le V$ şi $W_1 \le W$ sunt sub-perechi Jordan liniare, iar $\varphi \in Jc(V,W)$, atunci

1. $\varphi(V_1) = (\varphi_+(V_1^+), \varphi_-(V_1^+)) \leq W$

2. $\varphi^-(W_1) = (\varphi_+^-(W_1^+), \varphi_-^-(W_1^+)) \leq V$

3. $\varphi(V)/\varphi(0) = (\varphi_+(V^+)/\varphi_+(0), \varphi_-(V^-)/\varphi_-(0)) \in Jc$

4. **(Jc, Jf)** este o a-categorie la stânga numită *a-categoria perechilor Jordan liniare*.

7.16. Propoziţie. Jc(V,W) este o semilatice completă faţă de reuniune.

Demonstraţie. Fie I o mulţime nevidă şi $\varphi^i \in Jc(V,W)$, $i \in I$. Notăm cu $\varphi_\sigma(0)$ submodulul modului $<\bigcup_i \varphi_\sigma^i(V^\sigma)>$ generat de mulţimea:

$$\{u \in W^\sigma \mid \exists x \in V^\sigma, i,j \in I: u \in \varphi_\sigma^i(x) - \varphi_\sigma^j(x)\}$$

şi $\varphi_\sigma(x) = u + \varphi_\sigma(0)$, unde $u \in \bigcup_i \varphi_\sigma^i(x)$, $x \in V^\sigma$, $\sigma = \pm$. Din 5.14. rezultă, ca în demonstraţia teoremei 7.10., că $\varphi_\sigma = \bigcup_i \varphi_\sigma^i \in MKc(V^\sigma, W^\sigma)$, $\sigma = \pm$. Fie $x,z \in V^\sigma$ şi $y \in V^{-\sigma}$, $u \in \varphi_\sigma^i(x)$, $v = \varphi^i_{-\sigma}(y)$ şi $w = \varphi^i_\sigma(z)$, unde $i \in I$ este un element fixat. Atunci:

$$\{u,v,w\}_\sigma \in \{\varphi^i_\sigma(x), \varphi^i_{-\sigma}(y), \varphi^i_\sigma(z)\}_\sigma \subset \varphi^i_\sigma(\{x,y,z\}_\sigma) \subset \varphi_\sigma(\{x,y,z\}_\sigma),\ \sigma = \pm,$$

adică $(\varphi_+, \varphi_-) = \bigcup_i \varphi^i \in Jc(V,W)$.

7.17. Exemplu. Fie $K = \mathbb{Z}_n$ şi perechea Jordan liniară V unde $V^+ = V^- = M(p,q,\mathbb{Z}_n)$ este $\mathbb{Z}_n$ modulul matricilor cu p linii şi q coloane, în raport cu aplicaţiile:

$\{\ \}_\sigma\ V^\sigma \times V^{-\sigma} \times V^\sigma \to V^\sigma$, $\{x,y,z\}_\sigma = xy'z + zy'x$, cu $x,z \in V^\sigma$, $y \in V^{-\sigma}$, iar y' este transpusa matricii y. Dacă 1 şi $0 \in Jc(V,V)$ sunt identitatea, respectiv morfismul nul, din 7.16. $\varphi = 1 \cup 0$ este definit prin $\varphi_\sigma(x) = V^\sigma$, pentru orice $x \in V^\sigma$, $\sigma = \pm$. În plus, $1 o 0 \cup 0 o 0 = 0$ şi $\varphi o 0 = \varphi$, prin urmare **(Jk, Jf)** este o a-categorie superior tare completă la stânga, dar nu este bicompletă.

7.18. Teoremă. A-categoria perechilor Jordan liniare este constructivă

Demonstraţie. Functorul **Jc** $\to$ **MKc** definit prin $V \to V^+ \times V^-$ şi $\varphi \to \varphi_+ \times \varphi_-$ compus cu scufundarea **MKc** $\to$ **Abc** este fidel, deci **(Jc, Jf)** este prebogată. Fie F o **I**-diagramă în **Jc**. Atunci $(F(i)^\sigma, F(s)_\sigma)$ este o **I**-diagramă în **MKc**. Fie $(V^\sigma, \varphi'_\sigma)$ limita sa proiectivă în **(MKc, MKf)**. Dacă $(\bar{x}_i), (\bar{z}_i) \in V^\sigma$ şi $(\bar{y}_i) \in V^{-\sigma}$, atunci:

$$\{(\bar{x}_i), (\bar{z}_i), (\bar{y}_i)\}_\sigma = (\overline{\{x_i, y_i, z_i\}_\sigma})$$

defineşte aplicaţiile $\{\ ,\ ,\ \}_\sigma : V^\sigma \times V^{-\sigma} \times V^\sigma \to V^\sigma$, $\sigma=\pm$, faţă de care $V=(V^+, V^-)$ este o pereche Jordan liniară; deoarece:

$$\{\varphi^i_\sigma((\bar{x}_i)), \varphi^i_{-\sigma}((\bar{y}_i)), \varphi^i_\sigma((\bar{z}_i))\}_\sigma \subset \varphi^i_\sigma((\overline{\{x_i, y_i, z_i\}_\sigma})),$$

din 7.15. şi 7.9., $\varphi^i=(\varphi^i_+, \varphi^i_-)\in Jc(V, F(i))$. Astfel, (V, φ^i) este obiect iniţial pentru familiile $(F^+(i) \times F^-(i))$ şi $(\varphi^i_+ \times \varphi^i_-)$ în raport cu scufundarea **Jc** $\to$ **MKc** $\to$ **Abc** definită mai sus, iar din 2.8. rezultă că (V, φ^i) este **limită tare a I-diagramei** F. Acum, din 7.16. şi 2.28. rezultă că (**Jc**, **Jf**) este constructivă.

7.19. **Observaţie.** Teorema 7.18. extinde teorema 3.2. de existenţă a limitelor proiective din [DP.87]

În continuare vom utiliza tehnica obiectului iniţial pentru a demonstra constructivitatea a-categoriei spaţiilor local convexe prin intermediul teoremei de preinductivitate - teorema 4 din [CD.87a].

7.20. **Definiţie.** Fie **SLCf** categoria spaţiilor locale convexe peste corpul numerelor reale $\mathbb{R}$ şi a aplicaţiilor liniare şi continue dintre ele. Dacă X,Y∈SLCf, o corespondenţă liniară $\varphi\in M\mathbb{R}c(X,Y)$ se numeşte *corespondenţă de spaţii local convexe* dacă este *continuă*, [Ren.84], i.e. pentru orice aplicaţie continuă g: Y $\to \mathbb{R}$ pentru care $g\varphi\in Ef(\square X, \mathbb{R})$, aplicaţia $g\varphi$ este continuă; vom scrie, în acest caz: $\varphi\in SLCc(X,Y)$.

7.21. **Propoziţie.** Dacă $\varphi\in SLCc(X,Y)$, atunci:

1. $\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)$, pentru orice a,b∈X şi orice $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
2. $\varphi(X) \in$ SLCf.
3. $\varphi(0)$ este un subspaţiu închis al subspaţiului $\varphi(X)$.

Demonstraţie. Fie $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Atunci, din liniaritatea corespondenţei φ rezultă că $\alpha\varphi(0)\subset\varphi(0)$, deci $\varphi(0)\subset\alpha^{-1}\varphi(0)\subset\varphi(0)$ şi $\varphi(0)=\alpha\varphi(0)$. Fie a∈X şi $y\in\varphi(a)$; cum $\alpha y\in\varphi(\alpha a)$ rezultă că $\alpha\varphi(a)=\alpha y+\varphi(0)$, conform 5.2..

Cea de-a doua afirmaţie rezultă imediat din prima.

Fie acum $g: Y \to \mathbb{R}$ o aplicaţie continuă pentru care $g\varphi$ este funcţie. Cum φ este semiunivocă, conform 7.6., există $r \in \mathbb{R}$ astfel ca $g^{-}(r) = \varphi(0)$; cum φ este continuă şi $\varphi(X)$ este subspaţiu local convex al lui Y rezultă că $\varphi(0)$ este subspaţiu local convex al spaţiului $\varphi(X)$.

7.22. Consecinţă. Dacă $\varphi \in SLCc(X,Y)$, atunci $\varphi(X)/\varphi(0)$ este un spaţiu local convex separat, iar dacă X şi Y sunt spaţii Fréchet, atunci $\varphi(X)/\varphi(0)$ este de asemenea spaţiu Fréchet. În plus, are loc următoarea caracterizare a corespondenţelor de spaţii local convexe.

7.23. Propoziţie. Fie $X,Y \in SLCf$ şi $\varphi \in M\mathbb{R}c(X,Y)$. Atunci corespondenţa φ este continuă dacă şi numai dacă $p\varphi \in SLCf(X,Y/\varphi(0))$, unde $p: Y \to Y/\varphi(0)$ este proiecţia canonică pe spaţiul cât.

7.24. Observaţie. Dacă $\varphi \in SLCc(X,Y)$, atunci $\varphi \in SLCf(X,Y)$ dacă şi numai dacă $\varphi(0)=0$. Prin urmare restricţia relaţiei de incluziune din SLCc(X,Y) la SLCf(X,Y) este relaţia de egalitate.

7.25. Propoziţie. Cuplul **(SLCc, SLCf)** este o a-categorie la stânga.

Demonstraţie. Fie $\varphi \in SLCc(X,Y)$ şi $\psi \in SLCc(Y,Z)$ şi $f: Z \to \mathbb{R}$ o aplicaţie continuă pentru care $f\psi\varphi \in Ef(\varphi X, \mathbb{R})$. Atunci restricţia $\psi|_{\varphi(X)} \in SLCc(\varphi(X),Z)$ şi $f\psi|_{\varphi(X)} \in Ef(\varphi(X), \mathbb{R})$ deci $f\psi|_{\varphi(X)}: \varphi(X) \to \mathbb{R}$ este continuă; fie h prelungirea continuă a funcţiei $f\psi|_{\varphi(X)}$ pe Y. Atunci $h\varphi(a) = f\psi\varphi(a)$ pentru orice $a \in X$, iar $\varphi \in SLCc(X,Y)$, deci $h\varphi$ este continuă, adică $\psi\varphi \in SLCc(X,Z)$.

Fie acum $\varphi \in SLCc(X,Y)$ având proprietatea că pentru orice $f \in SLCf(Z,X)$, φf este minimal în SLCc(Z,Y). Dacă $\varphi \notin SLCf(X,Y)$, atunci $\varphi(0)$ are, conform 7.24., cel puţin două elemente, luând Z spaţiul trivial şi f morfismul nul, atunci $g \subset \varphi f$ şi $g \neq \varphi f$, unde $g \in SLCc(Z,Y)$ este morfismul nul, ceea ce contrazice minimalitatea morfismului φf; în consecinţă $\varphi(0)=0$ şi din 7.24., $\varphi \in SLCf(X,Y)$.

7.26. Propoziţie. SLCc(X,Y) este o semilatice completă faţă de reuniune.

Demonstraţie. Fie $\varphi_i \in SLCc(X,Y)$, $i \in I$ o familie nevidă de corespondenţe de spaţii local convexe şi φ supremumul ei în **MℝRc**, care există, conform demonstraţiei teoremei 7.10.. Este suficient să arătăm că φ este o corespondenţă continuă. Fie $f: Y \to \mathbb{R}$ o aplicaţie continuă pentru care compusa $f\varphi$ este o funcţie. Pentru orice $i \in I$, $f\varphi_i \subset f\varphi$, deci $f\varphi_i$ este la rândul ei o funcţie şi $f\varphi_i = f\varphi$, $i \in I$, este o aplicaţie continuă. Prin urmare $\varphi \in SLCc(X,Y)$.

7.27. **Teoremă.** A-categoria spaţiilor local convexe este constructivă.

Demonstraţie. Din 7.26. şi 7.10. rezultă că **SLCc** este superior completă la stânga şi (**SLCc**, **SLCf**) este la rândul ei o a-categorie superior tare completă la stânga. Pentru a arăta că este constructivă, este suficient, conform teoremei 2.28. să dovedim că ea admite limite proiective tari.

Să remarcăm întâi că functorul de incluziune

SLCc $\to$ **MℝRc** $\to$ **Abc**

este fidel şi conform 7.8. a-categoria spaţiilor local convexe este prebogată. Fie F o **I**-diagramă în **SLCc** şi (X, φ_i) limita sa proiectivă tare în a-categoria $\mathbb{R}$ - modulelor; din 7.9. rezultă că (X,φ_i) este obiect iniţial pentru familiile $(F(i))$ şi (φ_i) în raport cu functorul de uitare **MℝRc** $\to$ **Abc**. Pentru ca (X, φ_i) să conserve această calitate şi pentru functorul **SLCc** $\to$ **MℝRc** $\to$ **Abc** este suficient să înzestrăm $\mathbb{R}$-modulul X cu o structură de spaţiu topologic local convex pentru care corespondenţele φ_i să fie continue, $i \in I$. Conform 7.22., $\varphi_i(X)/\varphi_i(0)$ este un spaţiu local convex separat, $i \in I$. Topologia produs pe $\prod_i \varphi_i(X)/\varphi_i(0)$ induce pe X o structură de spaţiu local convex faţă de care restricţia proiecţiei canonice $p_i: X \to X_i$ este continuă şi $p_i\varphi_i$ este de asemenea continuă. Prin urmare, în acord cu propoziţia 7.23 $\varphi_i \in SLCc(X,X_i)$, iar (X,φ_i) este obiect iniţial pentru familiile $(F(i))$ şi (φ_i) în raport cu functorul **SLCc** $\to$ **Abc**. În consecinţă:

$$(X, \varphi_i) = \lim_{\overleftarrow{(\mathbf{SLCc},\mathbf{SLCf})}} F$$

iar a-categoria spaţiilor local convexe este constructivă.

§.8. A-CATEGORII ADITIVE. TEOREME DE STRUCTURĂ

În acest paragraf introducem noţiunea de a-categorie aditivă după [Da.97b]; prezentăm câteva clase de asemenea a-categorii şi dovedim constructivitatea unor a-categorii de module peste a-categorii aditive precum şi câteva aplicaţii. În final iniţiem studiul a-categoriilor aditive concretizabile (a-c-categorii) făcând o paralelă între teoria inelelor şi teoria a-categoriilor după ideile lui B.Mitchell, [Mit.72], K.Baumgartner, [Bau.87] şi R.Street [Str.95]. Arătăm de exemplu că orice a-c-categorie (**C**, **C'**) se scufundă izomorf în a-categoria canonică peste **C'**; dăm totodată câteva rezultate privind structura a-c-categoriilor simple şi artiniene.

A. A-categorii aditive

Fie **Abf** categoria grupurilor abeliene (mici) şi a omomorfismelor şi **Abc** categoria cu aceleaşi obiecte având drept morfisme corespondenţele de asemenea grupuri. Cuplul (**Abc**, **Abf**) formează o a-categorie la stânga concretă, conform 5.22.1. Aici **Abf** este o categorie aditivă, spre deosebire de **Abc**; totuşi $(Abc(G,G'),+,\subset)$ este un semigrup abelian ordonat cu elementul nul $0\in Abf(G,G')$, unde $(\alpha+\beta)(a)=\alpha(a)+\beta(a)=\{x+y \mid x\in\alpha(a),\ y\in\beta(a)\}$, $a\in G$, pentru orice $\alpha,\beta\in Abc(G,G')$. Abstractizăm proprietăţile acestei a-categorii în termenii a-categoriilor aditive, [Da.97b].

8.1. Definiţie. A-categoria la stânga (**C**, **C'**) este o *a-categorie aditivă* dacă pentru orice $X,Y,Z,U\in$ **C**, $a\in C(Y,Z)$, $b,c\in C(X,Y)$ şi $d\in C(U,X)$:

(i) $(C(X,Y),+,\subset)$ este un semigrup ordonat cu element nul $0_{XY}\in C'(X,Y)$ şi $0_{XY}d = 0_{UX}$,

(ii) **C'** este o categorie aditivă (faţă de restricţiile operaţiilor "+" din **C**);

(iii) $ab - ac \subset a(b-c)$, unde $-a = (-1_Z)a$;

(iv) $(b+c)d \subset bd + cd$.

Vom omite uneori indicii X,Y pentru elementul nul, i.e. $0_{XY}=0$, dacă nu există pericol de confuzie. În cazul în care **C** are un singur obiect, cuplul (Hom **C**, Hom **C'**) se numeşte *a-inel*.

8.2. Exemple. A-categoriile: **(Abc, Abf)** – a grupurilor abeliene şi a corespondeţelor de grupuri abeliene, **(MAc, MAf)** – a A-modulelor şi a corespondenţelor de A-module (vezi 7.8.), **(SLCc, SLCf)** – a spaţiilor local convexe şi a corespondenţelor de spaţii local convexe (vezi 7.25.) sunt a-categorii aditive concrete. De asemenea a-categoriile grupurilor preordonate, a grupurilor ordonate şi cea a grupurilor ordonate cu morfismele având imagini izolate din [Da.89] sunt a-categorii aditive concrete. Dacă notăm **GEc** categoria având drept obiecte grupurile abeliene şi ca morfisme toate corespondenţele dintre asemenea grupuri şi definim, pentru orice $\alpha,\beta \in$ GEc(G,G'), $(\alpha+\beta)(a) = \alpha(a) + \beta(a)$, $a \in G$, atunci **(GEc, GEf)** este o a-categorie aditivă concretă, unde **GEf** este categoria grupurilor abeliene şi a funcţiilor. Desigur **(Abc, Abf)** $\leq$ **(GEc, GEf)**.

Dacă R este un inel asociativ cu unitate, atunci endocorespondenţele grupului aditiv (R,+) formează un a-inel, mai precis (Abc((R,+),(R,+)), Abf((R,+), (R,+)) este un a-inel faţă de adunarea, compunerea şi incluziunea corespondenţelor de grupuri.

8.3. Exemplu. Fie R' un inel asociativ cu unitate şi $R=\{a'+A \mid a' \in R'$ şi A este ideal drept în R'$\}$. Vom introduce pe R două operaţii astfel ca (R,R') să devină a-inel. Ca de obicei, identificăm elementele minimale în raport cu incluziunea din R cu cele din R'. Dacă $a'+A$, $b'+B \in R$, atunci:

$$a'+A \subset b'+B \Leftrightarrow a'-b' \in B \text{ şi } A \subset B.$$

Definim, pe lângă adunarea uzuală $(a'+A) + (b' + B) = a' + b' + A + B$, înmulţirea "$\circ$" prin:

$$(a'+A) \circ (b'+B) = a'b' + A + a'B.$$

Axiomele (i) şi (ii) din 8.1. sunt verificate, iar (iii) este valabilă aici cu egalitate, căci: $(a'+A)\circ(b'+B) - (a'+A)\circ(c'+C) = a'b' + A + a'B - (a'c' + A + a'C) = a'(b'-c') + A + a'B + a'C = a'(b'-c') + A + a'(B+C) = (a' + A) \circ (b' - c' + B + C)$, unde $a'+A$, $b'+B$, $c'+C \in R$; cum pentru orice $d'+D \in R$, $(b'+c')D \subset b'D + c'D$, are loc şi (iv), deoarece: $(b'+c'+B+C) \circ (d'+D) \subset (b'+B) \circ (d'+D) + (c'+C) \circ (d'+D) \Leftrightarrow (b'+c')d' + B + C + (b'+c')D \subset b'd' + B + b'D + c'd' + C + c'D$. Cum restricţia operaţiei "$\circ$" la R' este, cu convenţia făcută, înmulţirea din R', rămâne să dovedim că incluziunea este compatibilă cu operaţia "$\circ$" (sau categoria asociată lui R este ordonată). Fie $a'+A \subset b'+B$, în R şi $c'+C \in R$. Atunci: $(a'+A)\circ(c'+C) \subset (b'+B) \circ (c'+C) \Leftrightarrow a'c'+A+a'C \subset b'c'+B+b'C \Leftrightarrow (a'-b')c' \in B+b'C$ şi $A+a'C \subset B+b'C$;

prima relație este adevărată, căci $a'-b' \in B$, deci $(a'-b')c' \in B$; pentru cea de-a doua, cum $A \subset B$, este suficient să arătăm că $a'C \subset b'C + B$; fie $x \in C$; atunci $a'x \in B+b'x$, deoarece $a'-b' \in B$ și B este ideal drept. În fine:

$$(c'+C) \circ (a'+A) \subset (c'+C) \circ (b'+B) \Leftrightarrow c'(a'-b') \in C+c'B \text{ și } C+c'A \subset C+c'B;$$

prima relație este adevărată, căci $a'-b' \in B$, deci $c'(a'-b') \in c'B$, iar cea de a doua rezultă din incluziunea $c'A \subset c'B$.

În cele ce urmează cuplul (R,R') va fi numit *a-inelul canonic* peste inelul R'.

8.4. Propoziție. Fie R' un inel asociativ cu unitate. Atunci a-inelul canonic (R,R') se scufundă izomorf și izoton în a-inelul endocorespondențelor grupului $(R',+)$.

Demonstrație. Definim $f: R \to Gc((R',+),(R',+))$ prin $f(a'+A)(x) = a'x+A$, pentru orice $x \in R'$ și $a'+A \in R$.

Pentru orice $x,y \in R'$, $f(a'+A)(x-y) = a'(x-y)+A = f(a'+A)(x) - f(a'+A)(y)$, deci $f(a'+A)$ este o endocorespondență a grupului $(R',+)$. Injectivitatea aplicației f rezultă imediat din faptul că R' este un inel cu unitate. Dacă $a'+A$, $b'+B \in R$, atunci $f(a'+A)+f(b'+B) = f(a'+b'+A+B)$ și dacă $x \in R'$,

$$f(a'+A)f(b'+B)(x) = f(a'+A)(b'x+B) = a'(b'x+B)+A = f((a'+A) \circ (b'+B))(x)$$

deci f este o scufundare; dacă $a'+A \subset b'+B$, atunci pentru orice $x \in R'$, $(a'-b')x \in B$ și $A \subset B$, deci $a'x+A \subset b'x+B$; prin urmare $f(a'+A) \subset f(b'+B)$ și izotonia aplicației f este probată.

8.5. Observații. Fie (R,R') a-inelul canonic peste R' și f scufundarea din propoziția 8.4.

1. Dacă $a'+A \in R$, atunci $f(a'+A)(0)=A$ este ideal (bilateral) al inelului $a'R'+A$.

2. Axioma (iii) este verificată – în a-categoria aditivă asociată a-inelului (R,R') – cu egalitate, adică

(iii') $ab - ac = a(b-c)$

pentru orice morfisme compozabile.

3. Aplicația $g: R \to Gc((R',+), (R',+))$ definită prin $g(a'+A)(x) = xa'+A$ nu este scufundare (antiizomorfă); mai precis $g(b'+B)\, g(a'+A) \not\subset g(a'b'+A+a'B)$, căci B nu este, în general, inclus în idealul drept $A+a'B$.

8.6. Exemplu. Fie **C'** o categorie aditivă. Vom defini o nouă categorie **C** cu aceleaşi obiecte, astfel ca (**C**, **C'**) să devină o a-categorie aditivă. Un **C'**-*modul* (drept) este un functor $C'^* \to$ **Abf**. Vom nota cu **MC'** categoria **C'** – modulelor şi a transformărilor naturale dintre ele. Dacă $X \in C'$, hom-functorul contravariant C'_X uzual definit prin $C'_X(Y) = C'(Y,X)$ şi $C'_X(a)(y) = ya$, pentru orice $a \in C'(Y,Z)$ şi $y \in C'(Z,X)$ defineşte un **C'**-modul. Un *X-ideal* (drept) A este un submodul (subobiect în **MC'**) al *modulului reprezentabil* C'_X; în acest caz A poate fi identificat cu o colecţie de morfisme ale categoriei **C'** având proprietatea că dacă $a, b \in A(Y) = A \cap C'(Y,X)$, iar $y \in C'(Z,Y)$, atunci $(a+b)y \in A(Z)$, [Str.95]. Definim: $C(Y,X) = \{a'+A(Y) \mid a' \in C'(Y,X)$, A este X-ideal drept în **C'**$\}$. Dacă $a'+A(Y)$, $b'+B(Y) \in C(Y,X)$, atunci $a'+b'+A(Y)+B(Y) \in C(Y,X)$, deoarece $(A+B)(Y) = A(Y)+B(Y)$ defineşte un X-ideal drept. Fie acum $a'+A(Y) \in C(Y,X)$ şi $b'+B(Z) \in C(Z,Y)$; definim:

$$(a'+A(Y)) \circ (b'+B(Z)) = a'b'+A(Z)+a'B(Z).$$

Atunci $(a'+A(Y)) \circ (b'+B(Z)) \in C(Z,Y)$, deoarece $K(Z) = A(Z) + a'B(Z)$ defineşte un X-ideal drept. Ca de obicei identificăm $C'(Y,X)$ cu mulţimea morfismelor minimale din $C(Y,X)$ faţă de relaţia de incluziune. Astfel cuplul (**C**,**C'**) devine o a-categorie care verifică axiomele (i) şi (ii). În plus este verificată şi axioma (iii); într-adevăr, dacă: $U \xrightarrow{d'+D(U)} Z \underset{c'+C(Z)}{\overset{b'+B(Z)}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{a'+A(Y)} X$ sunt morfisme în **C**, atunci $(a'+A(Y)) \circ (b'+B(Z)) -$

$-(a'+A(Y)) \circ (c'+C(Z)) = a'b'+A(Z)+a'B(Z)-a'c'+A(Z)+a'C(Z) = a'(b'-c')+A(Z)+(B+C)(Z) =$
$=(a'+A(Y)) \circ (b'-c'+(B-C)(Z))$. Deoarece:

$(b'+c'+(B+C)(Z)) \circ (d'+D(U)) = (b'+c')d'+(B+C)(U) + (b'+c')D(U) \subset (b'+B(Z)) \circ (d'+D(U))+(c'+C(Z))\circ(d'+D(U))$, pentru că $(b'+c')D(U) \subset b'D(U) + c'D(U)$, este verificată şi axioma (iv); în consecinţă (**C**,**C'**) este o a-categorie aditivă; o vom numi *a-categoria canonică* peste **C'**.

8.7. Definiţie. Fie (**C**,**C'**) şi (**D**,**D'**) două a-categorii aditive.

I. Un a-functor F: **C** → **D** se numeşte *aditiv* dacă F conservă morfismele stricte (i.e. $a \in$ Hom **C'** ⇒ $F(a) \in$ Hom**D'**) şi $F(a) - F(b) \subset F(a-b)$, pentru orice $a,b \in C(X,Y)$. Vom nota cu F': **C'** → **D'** restricţia lui F la morfismele stricte, i.e. $F'(a') = F(a')$, $a' \in$ Hom **C'**.

2. Un a-functor aditiv $\mathbf{C}^* \to \mathbf{Abc}$ va fi numit **(C, C')**-*modul* (drept), sau *a-modul*. Cu **MCs** notăm categoria **(C, C')** – modulelor şi a transformărilor a-naturale la stânga, iar cu **MCd** categoria cu aceleaşi obiecte având ca morfisme transformările a-naturale la dreapta. Dacă σ,τ: M $\to$ N sunt două asemenea transformări la dreapta (la stânga) atunci:

$$\sigma \subset \tau \Leftrightarrow \sigma_X \subset \tau_X,\ \forall X\in C$$

defineşte relaţii de ordine faţă de care **MCs**, respectiv **MCd** devin categorii ordonate. Cu **MCf** vom nota categoria **(C, C')** – modulelor şi a transformărilor naturale.

8.8. Exemplu. Fie **(C,C')** a-categoria canonică peste **C'** şi $X\in C$. Extindem C'-modulul reprezentabil C'_X la un **(C,C')** –modul C_X prin $C_X(Y) = C'_X(Y)$, $Y\in C$ şi $C_X(a'+A(Z))(Y)=ya'+A_X(Z)$, pentru $a'+A(Z)\in C(Z,Y)$ şi $y\in C'(Y,X)$, unde $A_X(Z)$ este subgrupul generat de $C'(Y,X)\cdot A(Z)$ în $C'(Z,X)$; desigur A_X este un X-ideal drept în C' deoarece A este un Y-ideal drept; dacă $y'\in C'(Y,X)$, atunci $C_X(a'+A(Z))(y) - C_X(a'+A(Z))(y') = ya' + A_X(Z) - y'a' - A_X(Z) = (y-y')a'+A_X(Z) = C_X(a'+A(Z))(y-y')$, deci $C_X(a'+A(Z))\in \mathrm{Abc}(C'(Y,X), C'(Z,X))$ şi, desigur C_X conservă morfismele stricte. Fie acum şi $b'+B(U)\in C(U,Z)$; atunci $C_X(b'+B(U))C_X(a'+A(Z))(y) = C_X(b'+B(U))(ya'+A_X(Z)) = (ya'+A_X(Z))b' + B_X(U) \subset ya'b' + A_X(U) + B_X(U) \subset ya'b' + < C'(Y,X)(A(U) + a'B(U)) = C_X((a'+A(Z)) \circ (b' + B(U)))(y)$, adică C_X este un a-functor $\mathbf{C}^* \to \mathbf{Abc}$ aditiv; îl vom numi *a-functor reprezentabil*.

8.9. Teoremă. Fie **C'** o categorie aditivă, M' şi N' două C'-module drepte şi M' $\to$ N' o transformare naturală. Dacă **(C, C')** este a-categoria canonică peste C', atunci există două extinderi canonice M şi N a **C'**-modulelor M', respectiv N', astfel ca MCd(M,N)

Demonstraţie. Fie $a'+A(Y)\in C(Y,X)$. Definim $M(a'+A(Y)) = \bigcup_{y\in A(Y)} M'(a'+y)$. Din teorema 8.14 urmează că $M(a'+A(Y))\in \mathrm{Abc}(M(X),M(Y))$, unde, desigur $M(X) = M'(X)$. Evident restricţia lui M la **C'** este chiar M' şi M este izoton; în plus, din demonstraţia teoremei 8.4 rezultă că $M(a'+A(Y))(0)= (\bigcup_{y\in A(Y)} M'(y))(0)$ şi $M(a'+A(Y))=M'(a')+\bigcup_{y\in A(Y)} M'(y)$.

Dacă $b'+B(Y)\in C(Y,X)$, atunci, cum $M(A(Y))\subset M((A+B)(Y))$ şi $M(B(Y))\subset M((A+B)(Y))$

urmează imediat din 5.2.(f) că $M(a'+A(Y))-M(b'+B(Y))=M(a'-b'+(A+B)(Y))$. Fie acum $Z \xrightarrow{b'+B(Z)} Y \xrightarrow{a'+A(Y)} X$ morfisme în **C**. Deoarece **Abc** este superior tare completă la stânga, A este un X-ideal drept, iar B este un Y-ideal drept, rezultă că:

$$M(b'+B(Z))M(a'+A(Y))= \bigcup_{y\in A(Y)} [M(b'+B(Z))M'(a'+y)] = \bigcup_{y\in A(Y)} [\bigcup_{z\in B(Z)} M(b'+z)M(a'+y)]=$$

$$\bigcup_{y\in A(Y)} [\bigcup_{z\in B(Z)} M'(a'b'+a'z+yb'+yz)] \subset \bigcup_{z\in B(Z),\, z'\in A(Z)} M'(a'b'+a'z+z') = M(a'b'+A(Z)+$$

$+a'B(Z)) = M((a'+A(Y)) \circ (b'+B(Z)))$; prin urmare M este un a-functor. Rămâne să dovedim că diagrama

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \xrightarrow{\tau_X} & N(X) \\ {\scriptstyle M(a'+A(Y))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N(a'+A(Y))} \\ M(Y) & \xrightarrow[\tau_Y]{} & N(Y) \end{array}$$

este orientată la dreapta, adică $\tau_Y M(a'+A(Y)) \subset N(a'+A(Y))\tau_X$, conform 1.6.4. Într-adevăr, deoarece $\tau: M' \to N'$ este o transformare naturală, iar **Abc** este superior completă la stânga rezultă că

$$\tau_Y M(a'+A(Y)) = \tau_Y \bigcup_{y\in A(Y)} M'(a'+y) = \bigcup_{y\in A(Y)} \tau_Y M'(a'+y) = \bigcup_{y\in A(Y)} N'(a'+y)\tau_X \subset$$

$$\bigcup_{y\in A(Y)} N'(a'+y))\tau_X = N(a'+A(Y))\tau_X.$$

8.10. Propoziție. Fie (**C**,**C'**) o a-categorie aditivă. Atunci, pentru orice $a\in C(Y,Z)$, $b, c \in C(X,Y)$:

1. $0_{YZ} \subset a - a = a0_{YY}$
2. $-a = a(-1_Y)$
3. $ab + ac \subset a(b+c)$
4. $a = a + a0$, unde $0\in C(Y,Y)$
5. $b - c = -(c - b)$
6. $b \subset c \Leftrightarrow b0 \subset b-a \subset c0$, unde $0 = 0_{XX}$
7. $b \subset c \Leftrightarrow b - c = c0$, unde $0 = 0_{XX}$
8. $(b + c)0 = b0 + c0$, unde $0\in C(X,X)$
9. $I(a) = \{x\in C'(X,Y) \mid X\in C,\ 0_{xz} \subset ax\}$ este un Z-ideal drept al categoriei **C'**

10. $xa + ya = (x+y)a + ya0_{YY}$, pentru orice morfisme compozabile x şi $y \in Hom\mathbf{C}$.

11. $b \subset c \Leftrightarrow c = b + c0_{XX} = c + b0_{XX}$

12. $a(x+y) = ax + ay$, pentru orice morfisme compozabile $x,y \in Hom\ \mathbf{C'}$

13. $a \notin Hom\ \mathbf{C'} \Leftrightarrow a0_{YY} \neq 0_{YZ}$

14. $K(a) = \{x \in C'(X,Z) \mid x \subset a0_{XY}, X \in C\}$ defineşte un Z-ideal drept în **C'**.

Demonstraţie. Notăm cu 1, respectiv 0, identitatea, respectiv morfismul nul, când nu există pericol de confuzie.

1. Din (i), (iv) şi (iii): $0 = 0a = (1-1)a \subset a - a \subset a(1-1) = a0 = a0 + 0 \subset a0 + a - a = a(0+1)-a = a-a$.

2. Din 1. şi (iii): $-a = 0 - a \subset a0 - a1 \subset a(-1)$, iar din (i): $a \subset -a(-1) \subset a$, $a = -a(-1)$ şi $-a = a(-1)$.

3. Din (iii) şi 2.: $ab + ac = ab - a(-1)c \subset a(b+c)$

4. Din 2. şi (iv): $a = a + 0 \subset a1 + a{\cdot}0 \subset a$

5. Din 2. şi (iv): $-(b-c) = (b-c)(-1) = b(-1) - c(-1) = -b + c$

6. Dacă $b \subset c$, din 1 şi (i): $b0 \subset b - b \subset b - c \subset c - c = c0$; dacă $b0 \subset b - c \subset c0$, din 4 şi 5: $b = b + b0 \subset b + c - b = c + b0 \subset c + c0 = c$.

7. Dacă $b \subset c$, din 6. şi 1.: $0 \subset c - b$, $c0 \subset c0 + c - b = c - b \subset c0$; dacă $b - c = c0$, din 1 şi 6 obţinem $b + c0 = b - c + c = c + c0 = c$ şi $b \subset b + c0 = c$.

8. Din 1. şi 5. rezultă: $(b + c)0 = b + c - (b+c) = b0 + c0$.

9. Dacă $x,y \in I(a)$, atunci $0 \subset -ax = a(-x)$, deci $-x \in I(a)$ şi $0 \subset ax + ay \subset a(x+y)$, pentru x,y morfisme compozabile. Dacă $x \in I(a)$ şi $y \in$ Hom **C'** compozabil, din $0 \subset ax$ urmează că $0 \subset axy$, deci $xy \in I(a)$.

10. $(x+y)a \subset xa + ya \subset (x + y - y)a + ya \subset (x+y)a - ya + ya \subset xa + ya + ya0 = xa + ya$

11. Dacă $b \subset c$, din 1. şi 4. rezultă că $c \subset c + b0 \subset c + c0 = c$ şi din 7.: $b + c0 = b + c = b + c + b0 = c$. Invers, din 4.: $b = b + b0 \subset c + b0 = c$, sau $b \subset b + c0 = c$

12. Din 3. şi 11., $a(x+y) = ax + ay + a(x+y)0 = ax + ay + a0 = ax + ay$

13. Dacă $0 \neq a0$, atunci $a \notin$ Hom **C'**, deoarece $0 \in$ Hom **C'** iar **C'** este categorie aditivă. Invers, să presupunem că $a \notin$ Hom **C'**, atunci există $b \in$ Hom **C'** şi $c \in$ Hom **C'** astfel ca $c \subset ab$ şi $c \neq ab$, iar $c0 \subset a0$; dacă $c0 = a0$, din 7., $ab - c = ab0 = a0 = c0$ şi $ab = c$, contradicţie !

14 Dacă $x,y \in K(0) \cap C(X,Z)$, atunci $x - y \subset a0 + a0 = a0$, iar dacă $z \in C'(U,X)$, atunci $xz \subset a0z = a0$, deci $xz \in K(a)$.

B. Constructivitatea a-categoriilor de module

8.11. Lemă. Fie E și F două I-diagrame în **Abc** și $t: E \to F$ o transformare a-naturală la stânga. Dacă $(G, \varphi_i) = \lim\limits_{\leftarrow (\mathbf{Abc}, \mathbf{Abf})} E$ și $(H, \psi_i) = \lim\limits_{\leftarrow (\mathbf{Abc}, \mathbf{Abf})} F$ atunci mulțimea corespondențelor $g \in Abc(G,H)$ pentru care $\psi_i g \subset t_i\varphi_i$ pentru orice $i \in I$ este o latice completă.

Demonstrație. Fie $E = (G_i, E(s))$ și $F = (H_i, F(s))$. Atunci

$$\varphi_i(0) = <\bigcup_{j\in I} \{F(s)(0) | s\in I(i,j)\}> \text{ și}$$

$$G = \{(\bar{x}_i) \in \Pi G_i / \varphi_i(0) \mid E(s) X_j \subset X_i,\ s\in I(i,j)\},$$

unde X_i este elementul $\bar{x}_i \in G_i / \varphi_i(0)$ considerat ca submulțime a grupului G_i, iar $\varphi_i((\bar{x}_i)) = X_i$, $i \in I$. Deoarece t este transformare a-naturală la stânga:

$$F(s)t_j \subset t_i E(s),\ s\in I(i,j) \tag{1}$$

$$U_i = <\bigcup_{j\in I} \{F(s)\, t_j(0) | s\in I(i,j)\}>\subset<\bigcup_{j\in I} \{t_i\, E(s)\, (0) | s\in I(i,j)\}>=$$

$$=<t_i \bigcup_{j\in I} \{E(s)\,(0) | s\in I(i,j)\}>= t_i\varphi_i(0) \tag{2}$$

Definim $g(0) = \{(\bar{u}_i) \in \Pi H_i/\psi_i(0) | u_i\in U_i\}$ (3)

Din proiectivitatea I-diagramei F rezultă că:

$$F(s)\varphi_j(0)=<\bigcup_{k\in I} \{F(s)\, F(r)\, t_k(0) | r\in I(j,k)\}>\subset<\bigcup_{k\in I} \{F(rs)t_k(0) | r\in I(j,k)\}>\subset$$

$$\subset<\bigcup_{k\in I} \{F(r)t_k(0) | r\in I(i,k)\}= U_i \tag{4}$$

În plus, dacă $y_i \in t_i(x_i)$, atunci:

$$t_i\varphi_i((\bar{x}_i)) = t_i(X_i) = y_i + U_i,\ i\in I,\ (\bar{x}_i)\in G \tag{5}$$

Definim $g((\bar{x}_i)) = \{(\bar{y}_i)\in H \mid y_i\in t_i(x_i),\ x_i\in X_i,\ i\in I\}$.

Din (3) rezultă imediat că $g((\bar{x}_i)) = (\bar{y}_i)+g(0)$, pentru orice $y_i\in t_i(x_i)$, $x_i\in X_i$, $i\in I$, ceea ce dovedește buna definire a corespondenței $g\in Abc(G,H)$, iar din (2), (4) și (5) rezultă că $\psi_i g \subset t_i\varphi_i$ pentru orice $i\in I$. Dacă $g' \in Abc(G,H)$ astfel ca pentru orice $i\in I$, $\psi_i g' \subset t_i\varphi_i$, atunci, pentru orice $x \in G$: $\psi_i(g-g')(x) \subset t_i\varphi_i(0)$, deci $U_i \subset \psi_i(g-g')(x)$, pentru orice $i \in I$, iar din 5.16. urmează că $g \subset g'$. Prin urmare g este cel mai mic element din Abc(G,H) pentru care $(\psi_i g) \subset (t_i \varphi_i)$. Tot din 5.16. rezultă că orice familie de asemenea corespondențe are infimum. Existența celui mai mare element este asigurată de superior completitudinea la stânga categoriei ordonate **Abc** (teorema 5.14.).

Vom nota cel mai mare element din laticea de mai sus cu $\lim\limits_{\leftarrow (\mathbf{Abc},\, \mathbf{Abf})} (t_i)$.

8.12. Propoziție. Fie **(C, C')** o a-categorie aditivă. Atunci **(MCs, MCf)** este o a-categorie, iar **(MCd, MCf)** este o a-categorie aditivă.

Demonstrație. Dacă $\tau \in$ MCf(M,N), atunci pentru orice **(C,C')** – modul L și orice $\sigma \in$ MCf(L,M), $\sigma\tau$ este o transformare a-naturală minimală, deoarece, pentru orice $X \in C$ $\tau_X\sigma_X \in$ Abf(L(X), N(X)). Invers, să presupunem că $\tau \in$ MCs(M,N) astfel ca pentru orice **(C,C')** modul L și orice $\sigma \in$ MCf(L,M), transformarea a-naturală $\tau\sigma$ este minimală în MCc(L,N). Fie L-modulul trivial, i.e. L(X) este grupul nul, iar L(f) este omomorfismul trivial, pentru orice $X, Y \in C$ și $f \in C(X,Y)$. Fie σ: L $\to$ M și θ: L $\to$ N transformările naturale nule; cum $\theta \subset \tau\sigma$, rezultă că $\theta = \tau\sigma$; deci $\theta_X(0) = \tau_X\sigma_X(0) = \tau(0) = 0$ și din 5.2.(k) rezultă că $\tau_X \in$ Abf (M(X), N(X)) pentru orice $X \in C$. În consecință $\sigma \in$ MCf(M,N). Prin urmare **(MCs, MCf)** este o a-categorie la stânga. Argumente similare dovedesc că și **(MCd, MCf)** este o a-categorie la stânga.

Fie acum $\sigma, \tau \in$ MCd(M,N). Pentru orice $X \in C$ definim $(\sigma+\tau)_X = \tau_X + \sigma_X$. Să arătăm că $\sigma + \tau$ este o transformare a-naturală la dreapta. Fie $a \in C(Y,X)$. Atunci

$\tau_Y M(a) \subset N(a)\tau_X$ și $\sigma_Y M(a) \subset N(a)\,\sigma_X$.

Din aceste relații, folosind (iv) și (iii') în a-categoria aditivă **(Abc, Abf)** urmează imediat că

$$(\tau + \sigma)_Y M(a) = (\tau_Y + \sigma_Y)M(a) \subset \tau_Y M(a) + \sigma_Y M(a) \subset N(a)\tau_X + N(a)\sigma_X = N(a)(\tau_X + \sigma_X) =$$

$N(a)(\tau + \sigma)_X$, deci $\sigma + \tau \in$ MCd(M,N). Verificarea axiomelor din 8.1. este un exercițiu de rutină.

8.13. Observație. Deoarece în **(Abc, Abf)** incluziunea (iv) este, în general, strictă (de exemplu luând b corespondență strictă și c = -b, iar d o corespondență care nu este în **Abf**) suma a două transformări a-naturale la stânga nu este o transformare a-naturală la stânga. În consecință, dacă **C** $\neq$ **C'** **(MCs, MCf)** nu este o a-categorie aditivă.

8.14. Teoremă. A-categoria modulelor drepte (**MCs, MCf**) peste o a-categorie aditivă (C, C') este constructivă.

Demonstrație. Fie F = (M_i, F(s)) o **I-diagramă** în **MCs** şi a∈C(Y,X). Atunci (M_i(X), $F(s)_X$) şi (M_i(Y), $F(s)_Y$) sunt **I-diagrame în Abc**; fie (M(X), φ^i_X) şi (M(Y), φ^i_Y) limitele lor tari, ca la 5.23., dar (M_i(a)) defineşte o transformare a-naturală la stânga între **I-diagramele** (M_i(X), $F(s)_X$) şi (M(Y), $F(s)_Y$); fie $M(a)=\lim\limits_{\leftarrow\,(\mathbf{Abc},\,\mathbf{Abf})}(M_i(a))$. Dacă b∈C(Y,X), din lema 8.11. obţinem:

$$\varphi^i_Y M(a) \subset M_i(a)\,\varphi^i_X \tag{1}$$

$$\varphi^i_Y M(b) \subset M_i(b)\,\varphi^i_X \tag{2}$$

$$\varphi^i_Y M(a\text{-}b) \subset M_i(a\text{-}b)\,\varphi^i_X \tag{3}$$

pentru orice i∈I. Cum $\varphi^i_Y(M(a)-M(b)) = \varphi^i_Y M(a)-M(b)$, din (1),(2) şi 8.10. rezultă că:

$$\varphi^i_Y(M(a)-M(b)) \subset M_i(a)\varphi^i_X - M_i(b)\varphi^i_X = (M_i(a) - M_i(b))\varphi^i_X \subset M_i(a\text{-}b)\varphi^i_X \tag{4}$$

Din (3) şi (4) rezultă că:

$$M(a) - M(b) \subset M(a\text{-}b) \tag{5}$$

Dacă a'∈C'(Y,X), cum $(\varphi^i_X) \in$ FIM(M(X),(M_i(Y), $F(s)_Y$)), iar (M(Y), $F(s)_Y$) = $\lim\limits_{\leftarrow\,(\mathbf{Abc},\,\mathbf{Abf})}(M_i(Y), F(s)_Y)$, rezultă că:

$$M(a') \in \mathrm{Abf}(M(X), M(Y)) \tag{6}$$

Din (5) şi (6) deducem că M este un (**C, C'**) – modul, iar (M, φ^i) este limita tare a **I**-diagramei F în a-categoria (**MCs, MCf**). În particular, a-categoria modulelor este cu produse stricte.

Să arătăm acum că **MCs** este superior tare completă la stânga. Fie τ^i∈MCs(M,N), i∈I. Dacă X∈C definim $\tau_X = \bigcup\limits_{i\in I} \tau^i_X$. Fie acum a∈ C(Y,X). Deoarece $N(a)\tau^i_X \subset \tau^i_Y M(a) \subset \tau_Y M(a)$, pentru orice i∈I, iar **Abc** este superior tare completă la stânga rezultă că:

$$M(a)\tau_X = \bigcup_{i\in I} N(a)\tau^i_X \subset \tau_Y M(a).$$

Superior stabilitatea familiei (τ^i) rezultă din proprietatea similară în a-categoria grupurilor abeliene. În consecinţă, din teorema 2.28. rezultă că (**MCs, MCf**) este constructivă.

8.15. Teoremă. A-categoria modulelor drepte (**MCd, MCf**) peste o a-categorie aditivă (C, C^*) este constructivă.

Demonstrație. 1. Fie $E=(G_i, E(s))$ și $F=(H_i, F(s))$ două **I**-diagrame în **Abc** și $t: E \to F$ o transformare a-naturală la dreapta, iar $(G, \varphi_i) = \lim\limits_{\leftarrow (\mathbf{Abc}, \mathbf{Abf})} E$ și $(H, \psi_i) = \lim\limits_{\leftarrow (\mathbf{Abc}, \mathbf{Abf})} F$

Atunci există o cea mai mică corespondență $g \in \mathrm{Abc}(G,H)$ astfel ca $\varphi_i t_i \subset \psi_i g$, $i \in I$. Într-adevăr, $h(x) = H$, $x \in G$ are proprietatea cerută, iar din 5.16. urmează imediat existența lui g. Vom nota $g = \lim\limits_{\leftarrow (\mathbf{Abc}, \mathbf{Abf})} (t_i)$.

2. Fie $F = (M_i, F(s))$ o **I**-diagramă în **MCd** și $a \in C(Y,X)$. Definim $M(X) \in \mathrm{Abc}$ prin $\lim\limits_{\leftarrow (\mathbf{Abc}, \mathbf{Abf})} (M_i(X), F(s)_X) = (M(X), \varphi^i_X)$ și $M(a) = \lim\limits_{\leftarrow (\mathbf{Abc}, \mathbf{Abf})} (M_i(a))$, ca mai sus. Se verifică ca la 8.14. că M este a-modul drept și că (M, φ^i) este limita tare a **I**-diagramei F.

3. Pentru a dovedi constructivitatea a-categoriei (**MCd, MCf**) este suficient, conform teoremei 2.28. să dovedim că **MCd** este o categorie superior tare completă la stânga. Fie $\tau^i \in MCd(M,N)$, $i \in I$ o familie de transformări a-naturale la dreapta. Pentru orice $X \in C$ definim

$$\tau_X = \tau^l_X + \bigcup_{i,j} (\tau^i_X - \tau^j_X)$$

unde $l \in I$ este arbitrar, dar reuniunea este realizată în **Abc**, conform teoremei 5.14. Fie $a \in C(Y,X)$. Atunci, folosind superior tare completitudinea categoriei **Abc**:

$$\tau_Y M(a) \subset \tau^l_Y M(a) + (\bigcup_{i,j} (\tau^i_Y - \tau^j_Y)) M(a) = \tau^l_Y M(a) + \bigcup_{i,j} (\tau^i_Y M(a) - \tau^j_Y M(a)) \subset$$

$$N(a)\, \tau^l_X + \bigcup_{i,j} (N(a)\, \tau^i_X - N(a)\, \tau^j_X) = N(a)\, \tau^l_X + \bigcup_{i,j} N(a)(\tau^i_X - \tau^j_X) \subset$$

$$N(a)\, \tau^l_X + N(a) \bigcup_{i,j} (\tau^i_X - \tau^j_X) = N(a)[\, \tau^l_X + \bigcup_{i,j} (\tau^i_X - \tau^j_X)] = N(a)\, \tau_X,$$

deci $\tau \in MCd(M,N)$ și $\tau = \bigcup\limits_i \tau^i$. Rămâne să arătăm că $\sigma\tau = \bigcup \sigma\tau^i$ pentru orice $\sigma \in MCd(N,P)$, ceea ce rezultă imediat din teorema 5.14.

8.16. Observație. Rezultatele 8.14. și 8.15. rămân valabile pentru a-categoriile modulelor stângi și a transformărilor a-naturale la stânga, respectiv la dreapta

8.17. Exemplu. Fie R un inel asociativ cu unitate. Atunci cuplul (R,R) formează un a-inel (față de relația de egalitate), sau, echivalent, dacă **C** este categoria cu unicul obiect X, asociată lui R, cuplul (**C, C**) este o a-categorie aditivă; pentru un (**C, C**) –modul stâng M, $M(a)\in Abf(M(X), M(X))$; vom scrie, în acest caz, în loc de $M(a)(x) \in M(X)$, ax pentru orice $x \in M(X)$. O transformare a-naturală la stânga φ: M → N va fi atunci o corespondență de grupuri $\varphi \in Abc(M(X),N(X))$ pentru care:

$a\varphi(x) - b\varphi(y) = N(a)\varphi(x)-N(b)\varphi(y) \subset \varphi M(a)(x)-\varphi M(b)(y)=\varphi(M(a)(x) - M(b)(y)) = \varphi(ax - by)$, pentru orice $a,b\in R$ și $x,y\in M(X)$. Invers, orice R-modul poate fi analog identificat cu un (**C**,**C**)-modul astfel ca orice corespondență de R-module să devină o transformare a-naturală la stânga. Prin urmare a-categoria modulelor stângi și a transformărilor a-naturale la stânga (**MCs, MCf**) este echivalentă cu a-categoria aditivă (**MRc, MRf**) definită la 7.6. Atunci duala teoremei 8.15. ne permite extinderea rezultatului principal, [Th.2.1.], din [CD.87b].

8.18. Consecință. A-categoria modulelor (la stânga, la dreapta, bilaterale) peste inelul R este constructivă.

C. Structura a-c-categoriilor

Fie (**C, C'**) o a-categorie aditivă și $X\in C$. **C'**-modulul reprezentabil C'_X nu poate fi extins la un (**C,C'**)-modul în mod uzual, adică $C_X(Y)=C(Y,X)$, deoarece, în general, C(Y,X) nu este un grup pentru orice $X,Y\in C$. În schimb, dacă (**C,C'**) este concretă, iar operația "+" este cea din **Abc**, atunci orice morfism $a\in C(Y,X)$ se poate scrie ca reuniunea selecțiilor sale stricte din **GEc**; în plus (**GEc, GEf**) este o a-categorie superior completă la stânga care verifică (iii') și astfel anomalia amintită se poate remedia considerând $C_X(Y)=GEf(Y,X)$. Sintetizăm aceste observații în termenii a-categoriilor aditive concretizabile.

8.19. Definiție. A-categoria aditivă (**C, C'**) este *concretizabilă*, sau (**C,C'**) este *a-c-categorie*, dacă există o a-categorie aditivă (**GC, GC'**) superior completă la stânga care verifică (iii') și un functor aditiv fidel la stânga G: **C** → **GC**, injectiv pe obiecte, astfel ca pentru orice $X,Y\in C$

(v) $\quad a \in C(X,Y) \Rightarrow G(a) = \bigcup_{x \in s(a)} x,$

unde $s(a) = \{x \in GC'(X,Y) \mid x \subset G(a)\}$.

8.20. Exemple. A-categoriile prezentate la 8.2., 8.3., 8.6. şi 8.17. sunt concretizabile.

8.21. Observaţii. Fie **(C, C')** o a-c-categorie.

1. **(C, C')** verifică (iii'), deoarece G este fidel la stânga.

2. Pentru orice $X,Y \in C$, $G(C'(X,Y)) = G(C(X,Y)) \cap GC'(GX, GY)$. Într-adevăr, dacă $x \in GC'(GX, GY)$ şi $a \in C(X,Y)$ astfel ca $G(a) = x$, atunci $a \in C'(X,Y)$ căci altfel, din 8.10.13., $x \subset a0$ şi $0 = G(0) \neq G(a0) = x0 = 0$.

3. Deoarece functorul G este injectiv pe obiecte şi fidel la stânga, vom considera în continuare, fără a restrânge generalitatea, că $GC'(X,Y) = \{x \in s(a) \mid a \in C(X,Y)\}$ iar $GC(X,Y)$ este totalitatea reuniunilor de morfisme stricte din $GC'(X,Y)$, pentru orice $X,Y \in C$.

4. Fie $a,b \in C(X,Y)$; dacă $x_a \in s(a)$ şi $x_b \in s(b)$, atunci, din 8.10.11 urmează că $G(a) = x_a + G(a0_{XX})$, $G(b) = x_b + G(b0_{XX})$ şi $G(a-b) = x_a - x_b + G((a-b)0_{XX})$; din 8.10.14. rezultă că $s(a0_{XX})$ şi $s(b0_{XX})$ sunt subgrupuri ale lui $GC'(GX, GY)$ şi $s(a) = x_a + s(a0_{XX})$, $s(b) = x_b + s(b0_{XX})$; ţinând seama de 8.10.8. şi (v), $s(a0_{XX}) + s(b0_{XX}) = s((a-b)0_{XX})$; prin urmare $G(a) - G(b) = G(a-b)$.

8.22. Teoremă. Orice a-c-categorie **(C,C')** se scufundă izomorf printr-un functor aditiv în a-categoria canonică peste **GC'**.

Demonstraţie. 1. Să remarcăm întâi că dacă $a \in Gc(X,Y)$, $b \in GC(Y,Z)$ şi a', respectiv b' sunt două selecţii stricte ale morfismelor a şi b, atunci $ba = (b'+b0)(a'+a0) = (b'+b0)a' + (b'+b0)a0 = b'a' + b0 + b'a0 + b0 = b'a' + b0 + b'a0$. Dar $b0 + b'a0 \subset ba0$, deci $ba = b'a' + b0 + b'a0$.

2. Pentru orice $X \in C$, definim $S(X) = G(X)$ şi pentru $a \in C(X,Y)$, $S(a) = x_a + s(a0_{XX})$ unde $x_a \in s(a)$. dacă $x \in s(a)$, atunci $x_a - x \subset G(a) - G(a) = G(a)0 = G(a0_{XX})$, iar din 8.10.14 rezultă că $S(a) \in GCc(G(X), G(Y))$, unde **(GCc, GC')** este a-categoria canonică peste categoria **GC'**

3. Fie $a \in C(X,Y)$ şi $b \in C(Y,Z)$. Cu notaţiile de la punctul 2., folosind 8.6. şi prima parte a demonstraţiei rezultă că $S(b) \circ S(a) = (x_b + s(b0_{YY})) \circ (x_a + s(a0_{XX})) = x_bx_a + s(b0_{XY})$ $x_b s(a0_{XX}) = x_bx_a + s(ba0_{XX}) = S(ba)$ şi S este un functor între categoriile **C** şi **GCc**.

4. Din 8.21.4. rezultă că pentru orice $a,b \in C(X,Y)$, $S(a) - S(b) = S(a\text{-}b)$.

5. Din definiţia 8.19. rezultă că S este injectiv pe obiecte şi fidel; în consecinţă S realizează scufundarea izomorfă a a-c-categoriei **(C,C')** în a-categoria canonică **(GCc, GC')**.

8.23. Consecinţă. A-categoria **(GC, GC')** este echivalentă cu a-categoria **(GCc, GC')**.

Demonstraţie. Din prima parte a demonstraţiei teoremei 8.22. şi din 8.10.14. rezultă că functorul definit prin $a \to a' + (K(a) \cap GC'(X,Y))$, unde $a \in GC(X,Y)$ şi a' este o selecţie strictă a morfismului a, este o echivalenţă din **GC** în **GCc**, care conservă morfismele stricte.

8.24. Consecinţă. Pentru orice $X \in GC$, GC'-modulul reprezentabil GC'_X se extinde la un (GC, GC')-modul GC_X, iar GC_XS este un **(C, C')** – modul.

Demonstraţie. Fie GC_X extinderea modului GC'_X construită la 8.6. prin intermediul izomorfismului de la 8.23.. Atunci GC_XS este un **(C, C')**-modul.

8.25. Observaţii şi definiţii. 1. Cum S este bijectiv pe obiecte, fie $A \in C$ astfel ca $S(A) = X$. Numim functorul $C_A = GC_XS$, un **(C, C')** – *modul reprezentabil*. Atunci $C_A(U) = GC'(GU,X)$ şi dacă $a \in C(U,V)$, atunci corespondenţa $C_A(a) \in Abc(C_A(V), C_A(U))$ este definită prin $C_A(a)(x) = xx_a + \cup\{y \in s(a0_{VA})\} = xx_a + G(a0_{VA})$, unde $x_a \in s(a)$ şi $x \in GC'(GV,X)$.

2. Există un functor Y_C: **C** $\to$ **MCd** numit *scufundarea Yoneda* pentru care $Y_C(X) = C_X$. Într-adevăr, luând $Y_{C'}$: **C'** $\to$ **MC'** scufundarea Yoneda uzuală, conform teoremei 8.9. pentru orice $a \in C(U,V)$ extinderea $Y_C(a) \in MCd(C_V, C_U)$ defineşte functorul Y_C.

3. Notăm cu **DC** subcategoria plină a categoriei **MCd** constând din acele module care sunt retracte de sume directe de module reprezentabile. Din teorema 5.9. rezultă că **DC** este subcategorie plină a categoriei **MCf**. Prin urmare $M \in DC$ dacă şi numai dacă hom-functorul uzual $MCf(M,-)$: **MCf** $\to$ **ABf** conservă colimitele.

4. Vom spune că două a-c-categorii **(C, C')** şi **(D, D')** sunt *echivalente Morita* dacă a-categoriile modulelor asociate acestora sunt echivalente. Din observaţia precedentă rezultă **(C, C')** şi **(D, D')** sunt echivalente Morita dacă şi numai dacă **DC** este echivalentă cu **DD**.

5. Dacă (**C**, **C'**) este un a-inel, atunci **DC** este categoria **C'**-modulelor proiective finit generate. De aceea vom spune că dacă (**C**, **C'**) este a-c-categorie, **DC** este *completarea proiectivă* a a-categoriei (**C**, **C'**); desigur, dacă **C'** are sume directe şi despică morfismele idempotente, atunci (**C**, **C'**) este proiectiv completă, adică Y_C: **C** → **DC** este echivalenţă de categorii.

6. Hom-functorul H_C: **C*⊗C** → **ABC**, unde **C*⊗C** este produsul tensorial, este un (C⊗C*, C'⊗C'*)-modul. Un submodul K al acestuia se numeşte *ideal* al a-categoriei (C, C'), prin urmare putem identifica idealul K cu totalitatea morfismelor din K(X,Y), X,Y∈C pentru care pentru orice a,b∈K(X,Y) şi orice morfisme compozabile u,v din C, u(a+b)v∈K. A-categoria (C, C') este *simplă* dacă ea are exact două ideale.

7. Un obiect X∈C este *artinian* (*noetherian*) [Bau.75] dacă orice lanţ descrescător (crescător) de subobiecte este finit. Vom numi a-c-categoria (**C**, **C'**) *artiniană* dacă C_X este artinian în **MCd**, pentru orice X∈C; în acest caz **DC** este artiniană, adică orice obiect din **DC** este artinian.

8. Un (**C**, **C'**)-modul M se numeşte *simplu* dacă are exact două submodule (0 şi M).

8.26. Exemplu. Fie (R, R') a-inelul canonic peste inelul cu diviziune R'. Atunci (**MRd**, **MRf**) nu este o a-categorie simplă. Într-adevăr, ca la 8.18., colecţia morfismelor a Hom **MRf** care au imagini de dimensiune finită formează un ideal propriu. Pe de altă parte **MCf**-modulul reprezentat de R este simplu. Într-adevăr, un submodul M al modulului MRf_R este un R'-ideal drept în **MRf** şi dacă M ar conţine un morfism nenul a: X → R' atunci a este retractă şi M = $MRf_{R'}$.

În cele ce urmează toate a-categoriile considerate vor fi a-c-categorii şi toţi a-functorii vor fi presupuşi aditivi.

8.27. Lemă. Scufundarea Yoneda Y_C: **C** → **DC** induce o bijecţie între idealele din **C'** şi cele din **DC'**.

Demonstraţie. Să remarcăm întîi că din teorema 8.18. şi construcţia functorului Y_C de la 8.25.2., restricţia lui Y_C la **C'** este chiar $Y_{C'}$, iar **DC** = **DC'**, conform teoremei 5.9. Prin urmare este suficient să arătăm că Y'_C: **C'** → **DC'** induce bijecţia amintită. Considerăm functorul Y'_C, ca fiind compunerea functorului Y'_C: **C'** → **SC'** cu incluziunea **SC'** → **DC'**

unde **SC'** este categoria **C'**-modulelor care sunt sume directe finite de **C'**-module reprezentabile. Din lema 2., [Bau.75], primul functor induce o bijecție pentru idealele categoriei **C'** şi cele ale categoriei **SC'**. Fie K un ideal în **SC'**. Acesta se extinde la un ideal L din **DC'** prin

$a \in DC'(M,N) \cap L \Leftrightarrow s\,a\,r \in K$

unde $s \in SC(N,Y)$ este o secțiune, iar $r \in SC(X,M)$ este o retractă. Extinderea este unică şi nu depinde de alegerea lui s şi r. Într-adevăr, dacă $s' \in SC(N,Y)$ este o secțiune, iar $r' \in SC(X,M)$ este o retractă astfel ca $s\,a\,r = s'a'r'$, atunci există $f \in SC(M,X)$ şi $g \in SC(Y,N)$ astfel ca $r\,f = 1_M$ şi $g\,s = 1_N$, prin urmare $a = gs'ar'f$, iar gs' şi r'f sunt izomorfisme; în consecință L este unicul ideal din **DC'** al cărei restricție la **SC'** este K.

8.28. Lemă. Dacă T este un a-functor aditiv între a-c-categoriile (**D, D'**) şi (**C, C'**) plin şi fidel la stânga astfel ca $Y_C T$: **D** → **MCd** să fie dens, atunci DT: **DD** → **DC** este o echivalență de categorii.

Demonstrație. Argumente similare celor din debutul demonstrației lemei 8.27. arată că este suficient să dovedim că DT' este echivalență. Cum $Y'_C T'$ este dens restricția la T'* este un functor H: **MC'** → **MD'**, iar extensia Kan a functorului T'* este un functor adjunct K: **MD'** → **MC'** şi $HK \cong 1$. Dar H este fidel, ceea ce atrage faptul că H este inversul lui K; în consecință DT este o echivalență de categorii.

8.29. Teoremă. A-c-categoria (**C, C'**) este simplă dacă şi numai dacă ea este echivalentă Morita cu a-inelul canonic peste un inel simplu.

Demonstrație. Dacă (R, R') este a-inelul canonic peste inelul simplu R', din lema 8.27 rezultă că DR este de asemenea simplu, iar dacă (**C, C'**) este echivalentă Morita cu (R, R'), din 8.25.4. şi din nou 8.27. rezultă că (**C, C'**) este simplă.

Invers, să presupunem că (**C, C'**) este simplă. Atunci există un obiect nenul, conform 8.25.6., $X \in C$. Fie (R,R') a-inelul canonic peste R'=C'(X,X). Vom arăta că (**C, C'**) este echivalentă Morita cu a-inelul (R, R'). Să observăm întâi că C'_X este un generator în categoria **MC'**: într-adevăr, dacă $\tau \in MC'(M,N)$, $\tau \neq 0$ trebuie să arătăm că există $\sigma \in MC'(C'_X, M)$ astfel ca $\tau\sigma \neq 0$; conform lemei lui Yoneda, este suficient să dovedim că $\tau_X \in Abf(M(X), N(X))$ este nenul; fie K imaginea lui τ; cum $\tau \neq 0$ urmează că $0 \neq K$ şi kerK={x∈Hom C'*|K(x)=0} este idealul nul căci **C'** este simplă; prin urmare K: **C'*** → **Abf** este fidel şi K(X)≠0, de unde $\tau_X \neq 0$. Pe de altă parte (R,R') este un a-inel simplu căci R' este o subcategorie plină (nenulă) a categoriei **C'**, cu unicul obiect X. Functorul de scufundare T: R → **C** are restricţia T' plină şi fidelă, iar $Y_R \cdot T'$ este un functor plin şi fidel; prin urmare imaginea lui $Y_R \cdot T'$ este o subcategorie plină a categoriei **MC'** şi conform [DS.86], $Y_R \cdot T'$ este dens, deci şi $Y_R T$ este dens. Din lema 8.28. şi 8.25.4. rezultă că (R,R') este echivalent Morita cu (**C**, **C'**).

8.30. Consecinţă. A-c-categoria (**C**, **C'**) este simplă şi artiniană dacă şi numai dacă este echivalentă Morita cu a-inelul canonic peste un inel cu diviziune.

Demonstraţie. Fie 0≠X∈C şi R'=C'(X,X). Din 8.29 rezultă că a-inelul canonic peste R' este echivalent Morita cu (**C**, **C'**). Un ideal minimal U al lui R' este un R'-modul simplu, în plus, conform 4.10.7. [PP.77], U este un R'-modul proiectiv finit generat, deci U∈DR' şi conform lemei lui Schur, D'=DR(U,U) este un inel cu diviziune. Atunci, conform lemei 8.28 (**C**, **C'**) este echivalentă Morita cu (**D**, **D'**); în plus, cum (**C**, **C'**) este artiniană, R' este un inel artinian şi deci R' are un ideal drept minimal.

Dacă (**C**, **C'**) este o a-c-categorie artiniană şi simplă, atunci **DC** este o categorie în care şirurile exacte scurte despică; din 8.25.5. şi teorema 6.8.18., [Pur.82] rezultă:

8.31. Consecinţă. Dacă a-c-categoria (**C**, **C'**) este artiniană şi simplă atunci orice (**C**, **C'**)-modul este proiectiv şi injectiv.

BIBLIOGRAFIE

[Abr 91] Abramsky S., A domain equation for bisimulation, Information and Computation, 92 (1991), p.161 – 218.

[Acz 88] Aczel P., Non-well-founded sets, Lecture Notes 14, CSLI, 1988.

[AE 87] Aubin J.P., Ekeland I., Applied nonlinear analysis, John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto and Singapore, 1987.

[AK 79] Adámek J., Koubek V., Least fixed point of a functor, J.Comp.System Sci. 19, no.2 (1979), p.163-178.

[Arb 66] Arbib M.A., Automata theory and control theory – a rapprochement, Automatica 3 (1966), p.161 – 189.

[Arb 67] Arbib M.A., Tolerance automata, Kybernetika, 3 (1967), p.223-233.

[Aub 72] Aubin J.P., Approximations of elliptic boundary value problems, New York, 1972.

[BaP 81] Bajaj N.P., Prem N., A note on metrics and tolerances, Arch.Math., Brno, 17, no.1 (1981), p.3-5.

[Bau 75] Baumgartner K., Structure of additive categories, Cahiers de topologie et géométrie différentielle, 16 (1975), p.169-213.

[Bau 87] Baumgartner K., General Wedderburn theorems and density for small categories, Preprint, Voitsberg, Austria, 1987.

[BB 85] Boboc N., Bucur Ghe., Măsură şi capacitate, Ed.Ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[BD 86] Boja N., Dăianu D., Ordered structures associated to the field extents, Proc.of the Symp. of Math. and its Appl., Timişoara (1986), p.77-80.

[BD 88] Boja N., Dăianu D., Elemente algebrice şi topologice de teoria corpurilor, Univ. Timişoara, Monografii matematice, 30, 1988.

[BDH 87] Boja N., Dăianu D., Hatvany Cs., On the boolean algebra structure of a primale extent of fields, Proc. Math. Phys. Sem., Pol. Inst. Timişoara (1987), p.84 – 92.

[Be 59] Berge C., Espaces topologiques et fonctions multivoques, Dunod, Paris, 1959.

[Ber 69] Bertin E.M.J., L'approximation des espaces harmoniques, thèse, Utrecht, 1969.

[Ber 71] Bertin E.M.J., Limites projectives et approximation. Théorie élémentaire., Comp. Math., 23/3 (1971), p. 357-378.

[Ber 75a] Bertin E.M.J., Limites projectives et approximation. Limites inductives., Comp. Math., 30/3 (1975), p.323-336.

[Ber 75b] Bertin E.M.J., Limites projectives et approximation. A-catégories constructives., Math.Inst. der Rijksuniversiteit, Utrecht, 1975.

[Ber 76] Bertin E.M.J., Limites projectives dans une catégorie d'espaces mesurables et de correspondances mesurables, C.R.Acad. Sc.Paris, t.283, série A (1976), p.809-811.

[Ber 77] Bertin E.M.J., Limites projectives dans une catégorie d'espaces probabilisés et de correspondances mesurables, C.R.Acad. Sc.Paris, t.284, série A (1977), p.49-51.

[Ber 78] Bertin E.M.J., Catégories à approximation. Correspondances et fonctions multivoques, Prep.no. 108, Univ. Utrecht, Dep.Math., 1978.

[BGMO 84] Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A. D., Obukhovskii V.V. Multivalued mappings, J.O. Soviet Math., 24/6 (1984), p.719-791.

[BKW 77] Bigard A., Keimel K., Wolfenstein S., Groups et anneaux réticulés, Lecture Notes in Mathematics, 608, 1977.

[BlPr 61] Blecher M.N., Preston G.B., Abstract linear dependence relations, Publ.Math., Debrecen, t.8., fasc.1-2 (1961), p.55-63.

[BP 82] Both N., Purdea I., Tolerances, Sem. of Alg., Univ.of Cluj-Napoca, Prep2 (1982), p.8-38.

[BP 84] Both N., Purdea I., Homomorphic relations on n-groups, Mathematica, 26 (49), No.1 (1984), p.5-8.

[BP 88] Both N., Purdea I., Independence in power algebra of an universal algebra, Sem.of Alg., Univ. of Cluj-Napoca (1988), p.2-21.

[Bo 61] Bourbaki N., Eléments de mathématique, Fasc.IV, Livre II, Algèbre, Cap 2, Herman, Paris, 1961.

[Bo 64] Bourbaki N., Eléments de mathématique, Fasc.XIV, Livre II, Algèbre, Cap 6, Herman, Paris, 1964.

[BR 84] Bânzaru T., Rendi B., Relations between various notions for continuity of multifunctions, Proc.Math.Phys. Sem., I.P.T., (Nov.1984), p.73-76.

[Bun 85] Bunje, De T., Projective systems of probability spaces and measure preserving correspondences, thesis, Utrecht, 1985.

[CV 77] Castaing C., Valadier M., Convex analysis and measurable multifunctions, Springer-Verlag, 1977.

[Cha 75] Chajda I., Systems of equations and tolerance relations, Czeck Math J., 25(100), no 2 (1975), p.302 - 308.

[Cha 76] Chajda I., A construction of tolerances on modular lattices, Časopis Pest Mat 101, no.2 (1976), p.195-198.

[Cha 77] Chajda I., Lattices of compatible relations, Arch. Math., Brno, 13, no.2 (1977), p.89 – 95.

[Cha 77a] Chajda I., A characterization on distributive lattices by tolerance relations, Arch. Math., Brno, 15, no.4 (1977), p.203-204.

[Cha 78] Chajda I., Notes on lattice congruences, Časopis Pest. Mat., 103, no.3 (1978), p.255-258.

[Cha 78a] Chajda I., On the tolerance extension property, Časopis Pest. Mat., 103, no.4 (1978), p.327-332.

[Cha 81] Chajda I., Recent results and trends in tolerances on algebras and varieties, Colloq. Math., Szeged, 28, Finite algebras and multivalued logic (1981), p.69-95.

[CDN 80] Chajda I., Dalik J., Niederle J., Vesely V., Zelinka B., How to draw tolerance lattices of finite chains, Arch.Math., Brno, 16, no.3 (1980), p.161-166.

[ChD 82] Chajda J., Duda J., Finitely generated relations and their applications to permutable and n-permutable varieties, Comment. Math., Univ.Carolinae, 23, no.1 (1982), p.41-54.

[CNZ 76] Chajda I., Niederle J., Zelinka B., On existence conditions for compatible tolerances, Czech. Math. J., 26(101), no.2 (1976), p.304-311.

[CN 80] Chajda I., Nieminen J., Atomicity of tolerance lattices, Czech. Math. J., 30(105), no.4 (1980), p.606-609.

[CN 82] Chajda I., Nieminen J., Direct decomposibility of tolerances on lattices, semilattices and quasilattices, Czech. Math. J., 32(107), no.1 (1982), p.110-115.

[CZ 74] Chajda I., Zelinka B., Tolerance relations on lattices, Časopis Pest. Mat., 99, no.4 (1974), p.394-399.

[CZ 75] Chajda I., Zelinka B., Compatible relations on algebras, Časopis Pest. Mat., 100, no.4 (1975), p.355-360.

[CZ 76] Chajda I., Zelinka B., Weakly associative lattices and tolerance relations, Czech. Math. J., 26(101), no.2 (1976), p.259-269.

[CZ 77] Chajda I., Zelinka B., Lattices of tolerances, Časopis Pest. Mat., 102, no.1 (1977), p.10-24.

[CZ 77a] Chajda I., Zelinka B., Permutable tolerances, Časopis Pest. Mat., 102, no.2 (1977), p.217-220.

[CZ 77b] Chajda I., Zelinka. B., Minimal compatible tolerances on lattices, Czech. Math. J., 27(107), no.3 (1977), p.452-459.

[CZ 78] Chajda I., Zelinka B., Metrics and tolerances, Arch.Math., Brno, 14, no.4 (1978), p.193-200.

[CZ 79] Chajda I., Zelinka B., Tolerance relations on direct products of monoids and distributive lattices, Glasnik Mat., Zagreb, 14(34), no.1 (1979), p.11-16.

BUPT

[CZ 79a] Chajda I., Zelinka B., Tolerances and convexity, Czech. Math. J., 29(104), no.4 (1979), p.584-586.

[Cho 58] Chokski J.R., Inverse limits of measure spaces, Proc. London Math.Soc., 3, VIII (1958), 321-342.

[CD 87a] Crstici B., Dăianu D., The locally convex space category with approximation, SIEFAC, Cluj Napoca, Prep.6 (1987), p.119-122.

[CD 87b] Crstici B., Dăianu D., Projective limits in a module a-category, Proc. of the Symp of Math. and its Appl., Timişoara (1987), p.201-205.

[Da 81] Dăianu, D., Categorical point of view in numerical analysis (Romanian), SIEFAC, Cluj-Napoca (1981), p.83-87.

[Da 82] Dăianu D., On convergence in approximation schemes over a-categories. (Romanian), SIEFAC, Cluj-Napoca (1982), p.75-78.

[Da 82a] Dăianu D., Morphismes speciales en catégories floues et immersions (1), Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T. (1982), p.29-32.

[Da 83] Dăianu D., Morphismes speciales en catégories floues et immersions (2), Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T. (May, 1983), p.43-46.

[Da 83a] Dăianu D., Catégories ordonnées, Proc.Math. Phys. Sem., I.P.T. (May, 1983), p.47-50.

[Da 83b] Dăianu D., On the stability and consistency in approximation schemes over a-categories (Romanian), Sem."Angheluţă", Cluj-Napoca (1983), p.83-86.

[Da 83c] Dăianu D., Morphismes speciales en catégories floues et immersions (3), Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T. (Nov., 1983), p.33-36.

[Da 84] Dăianu D., Stability and inverse stability in approximation schemes, Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T. (May, 1984), p.81-84.

[Da 84a] Dăianu D., Stability and inverse stability. Subcategories, Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T (Nov., 1984), p.59-62.

[Da 85a] Dăianu D., Functorial bistability, Nat.Conf.of Alg., Ann. Şt., Univ. "Al I Cuza", Tom XXXI, s.I-a, Iassy (1985), p.96-98.

[Da 85b] Dăianu D., Approximation schemes. Categorical point of view, Mathematica, Tome 27(50), no.2, Cluj-Napoca (May, 1985), p.107-116.

[Da 85c] Dăianu D., Functorial inverse convergence and functorial inverse stability, Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T. (1985), p.3-5.

[Da 85d] Dăianu D., Functorial biconvergence, Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T. (Nov., 1985) p.37-39.

[Da 85e] Dăianu D., Projective limits in the a-category of groups, Nat.Conf.of Alg. Timişoara (1985), p.17-20.

[Da 86a] Dăianu D., Categorical correspondences, SIEFAC, Cluj Napoca (1986), p.83-86.

[Da 86b] Dăianu D., On the completeness of some ordered categories, Proc. Math. Phys. Sem., I.P.T. (May, 1986), p.1-6.

[Da 86c] Dăianu D., The left a-category of rings, Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T. (Nov., 1986), p.5-10.

[Da 87a] Dăianu D., On the completeness of group a-category, SIEFAC, Cluj-Napoca (1987), p.123-126.

[Da 87b] Dăianu D., Properties of the group and correspondence category, Proc.Math. Phys.Sem., I.P.T. (1987), p.84-92.

[Da 88a] Dăianu D., Concrete a-categories, SIEFAC, Prep.6., Cluj-Napoca (1988), p.15-56.

[Da 88b] Dăianu D., The a-category of algebras, Proc.Nat.Conf. of Alg., Braşov (1988), p.95-100.

[Da 88c] Dăianu D., The a-category of linear spaces and dicorrespondences, Proc. of Conf. of Appl.Math. and Mec., Cluj-Napoca (1988), p.72-76.

[Da 89] Dăianu D., A-categories of ordered groups, SIEFAC, Prep.6., Cluj Napoca (1989), p.131-138.

[Da 93a] Dăianu D., On final coalgebras in complete metric space categories, Proc. of the fifth Symp. of Math. and its Appl., Timişoara (1993), p.84-92.

[Da 93b] Dăianu D., Coincidence lemma in ordered categories, Bul.Şt. şi Tehn. al U.T.T., Seria Mat.-Fiz., 38(52), (1993), p.113-120.

[Da 95] Dăianu D., The left a-category of groups is constructive, Proc. of the 6th Symp. of Math. and its Appl., Timişoara, Ed.Mirton (1995), p.51-56.

[Da 97a] Dăianu D., Selections of ring correspondence sums, Bul. Şt. al Univ. "Politehnica", Timişoara, Transactions on Math. Phys., tom.42(56), fasc.1. (1997), p.16-25.

[Da 97b] Dăianu D., A-categories over additive a-categories, Proc.of the seventh Symp.of Math. and its Appl., Timişoara (1997), p.286-290.

[Da 98] Dăianu D., Sufficient conditions for the constructiveness of an a-category, Bul. Şt. al Univ. "Politehnica", Timişoara, Transactions on Math.-Phys., tom.43(57), fasc.1 (1998), p.35-41.

[Da 98a] Dăianu D., Stone duality for right a-categories of lattices (I), Bull.for appl.and computer math., Tehn.Univ.of Budapest, 1490 (1998), LXXXV-B, p.145-154.

[Da 98b] Dăianu D., Stone duality for right a-categories of lattices (II), Bull.for appl.and computer math., Tehn.Univ.of Budapest, PC-122, va apare.

[DB 85] Dăianu D., Boja N., Categories of extensions, Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T. (May, 1985), p.1-2.

[DB 86a] Dăianu D., Boja N., Isotone correspondences, Nat. Conf. of Alg., Timişoara (1986), p.21-27.

[DB 86b] Dăianu D., Boja N., An a-category of ordered sets, Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T. (May, 1986), p.7-10.

[DH 86] Dăianu D., Hadnagy A., Some classical approximation schemes categorically approched , Proc. of Symp.of Math. and its Appl., Timişoara (1986), p.85-88.

[DK 85] Dăianu D., Krstić B., Global Lax-Aubin theorems for inverse functorial convergence, Proc. of the Symp. of Math. and its Appl. (1985), p.81-84.

[DK 98a] Dăianu D., Krstić B., Projective limits and representativeness in concrete a-categories (I), Bull.for appl.and computer math., Tehn.Univ.of Budapest, BAM.1491 (1998), LXXXV-B, p.155-164.

[DK 98b] Dăianu D., Krstić B., Projective limits and representativeness in concrete a-categories (II), Bull.for appl.and computer math., Tehn.Univ.of Budapest, PC-122, va apare.

[DP 87] Dăianu, D., Popuţa V., A-catégorie des paires Jordan linéaires, Proc. Symp. Math and Appl., Timişoara (1987), p.179-182.

[DR 86a] Dăianu, D., Rendi B., The a-category of lattices, Proc. of Nat. Conf.of Alg., Timişoara (1986), p.25-28.

[DR 86b] Dăianu, D., Rendi B., The a-category of groups, Proc. of Nat. Conf.of Alg., Cluj-Napoca (1986), p.25-27.

[Dea 97] Deaconescu M., On a lemma of Ari Vesanen, Studia, Cluj-Napoca, va apare.

[Dro 85] Droste M., Structure of partially ordered sets with transitive automorphism groups, Memoirs, AMS, 57, no.334, sept., 1985.

[DS 86] Day B.J., Street R.H., Categories in which all strong generators are dense, J.Pure Appl Algebra, 43(1986), p.235-242.

[Fei 78] Feiste U., Projective limits of finite decomposition systems, Math. Nachrichten, 81 (1978), p.289-299.

[Fin 80] Findlay G.D., Reflexive homomorphic relations, Canad. Math. Bull 3, no.2 (1980), p.131-132.

[Fis 74] Fischer W.L., k-Toleranzrelationen in Poetic und Linguistic, Poetics, 10 (1974), p.75-84

[For 74] Forster W., On the categorical notions in numerical analysis, prep., Southampton Univ., 1974

[For 80] Forster W., Theorems on the approximation of fixed points in mapping spaces, Numerical Solutions of Highly Nonlinear Problems, Publ.Comp. Amsterdam New York - Oxford (1980), p.315-327.

[Fro 82] Froda - Schechter M., Remarks on tolerances, Sem.on algebra, Prep.2 (1982), p.76-88.

[GS 58] Gratzer G., Schmidt E.T., Ideals and congruence relations in lattices, Acta Math Acad. Sci. Hung., 9 (1958), p.137-175.

[Gri 62] Grillet P., Equivalences compatibles, équivalences pré-permises, Sem.Dubreil – Pisot, Algèbre et thèorie des nombres, t.15 (1961-62), no.2.

[Hen 50] Henkin L., A problem on inverse mapping systems, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), p.224-225.

[HR 59] Haber S., Rosenfeld A., Groups as unions of proper subgroups, Amer.Math. Monthly 66 (1959), p.491-494.

[HP 79] Hennessy M.C.B., Plotkin G.D., Full abstraction for a simple parallel programming language, Lecture Notes in Comput. Sci., 74 (1979), p.108-120.

[HS 54] Higman G., Stone A.H., On inverse systems with trivial limits, Proc.Lond. Math. Soc. (2) 29 (1954), p.233-236.

[Jac 51] Jacobson N., Lecture on Abstract Algebra, Von Nostrand, Princeton, New Jersei, 1951

[Jak 68] Jakubovič, H., Axiomatic theory of similitude (Russian), Jurn. Naucn. –Tehn. Informacija, no.10, 1968.

[JS 68] Jardine N., Sibson R., A model for toxonomy, Mathematical Biosciences, 2 (1968), p.465-482.

[Kal 67] Kalmán L., Signification, synonymy, traduction (Russian), Symp. "Masperovod", Budapest, 1967.

[Kel 69] Kelley J.L., General topology, American Book - Van Nostrand - Reinhold, 1969.

[Kos 70] Koskas M., Structures algebriques multivoques. Applications, Bull.Soc.Math. France, Mémoire 23, 1970.

[Lam 58] Lambek J., Goursat's theorem and Zassenhaus lemma, Canad. J. of Math., 10, no.1 (1958), p.45-55.

[Lan 71] Mac Lane S., Categories for working mathematician, Springer Verlag, New York, 1971

[Lew 67] Lewin J., Subrings of finite index in finitely generated rings, J.Algebra 5 (1967), p.84-88.

[Loo 75] Loos O., Jordan pairs, Lect.Notes in Math., 460, Springer Verlag, 1975.

[Ma 74] Mallory D.J., Topological properties of limits of inverse systems of measures, Can.J.Math. XXVI, 6 (1974), p.1455-1465.

[Ma 75] Mallory D.J., Extension of setfunctions to measures and applications to inverse limit measures, Can.Math.Bull.18 (1975), p.547-553.

[Mal 36] Malcev A.I., On the immersion of an algebraic ring in to a field, Math.Ann. 113 (1936), p.686-691.

[Mal 54] Malcev A.I., On general theory of algebraic systems, Mat.Sbornik, 35(77), (1954), p.3-20.

[Mar 74] Marinescu G., Analiză numerică, Ed.Acad., Bucureşti, 1974.

[Mau 82] Maurer I.Gy., Topics and bibliography of tolerance relations, Sem.of Alg., Prep.2, Cluj-Napoca (1982), p.2-7.

[MPV 82] Maurer I.Gy., Purdea I., Virág I., Tolerances on algebras, Sem.of Alg., Prep.2, Cluj-Napoca (1982), p.40-75.

[MR 89] Maurer I.Gy., Radelecki S., Compatible relations on varieties of semigroups, Karachi J. of Math., vol.V (1989), p.9-15.

[MV 78] Maurer I.Gy., Virág I., Sur les classes de tolerance d'une algèbre universelle, Publ.Math., Debrecen, 25, no.3-4 (1978), p.237-240.

[Met 63] Métivier M., Limites projectives de mesures. Martingales. Applications, Ann.di Math., 63 (1963), p.225-352.

[Mit 72] Mitchell B., Rings with several objects, Advances in Math., 8 (1972), p.1-161.

[MS 73] Muenzenberger T.B., Smithson R.E., Fixed point structures, Trans. AMS., 184 (1973), p.153-173.

[MS 74] Muenzenberger T.B., Smithson R.E., Refluent multifunctions on semitrees, Proc AMS., 44, no.1 (1974), p.189-195.

[MW 80] Muir A., Warner M.W., Homogenous tolerance spaces, Czech. Math. J., 30(105) no.1 (1980), p.118-126.

[Nie 78] Niederle J., Relative bicompetents and tolerance extensions property on distributive lattices, Časopis Pest. Mat., 103, no.3 (1978), p.250-254.

[Nie 80] Niederle J., Tolerance extensions in distributive lattices, Arch.Math., Brno, 16, no.2 (1980), p.99-104.

[Nie 81] Niederle J., On atoms in tolerance lattices of distributive lattices, Časopis Pest Mat., 106, no.3 (1981), p.311-315.

[Nie 82] Niederle J., On skeletal and irreducible elements in tolerance lattices of finite distributive lattices, Časopis Pest. Mat., 107, no.1 (1982), p.23-29.

[Ni 77] Nieminen J., Tolerance relations on join-semilattices, Glasnik Mat., Zagreb, 12(32), no.2 (1977), p.243-246.

[Ni 77a] Nieminen J., Tolerance relations on simple ternary algebras, Arch.Mat., Brno, 13, no.2 (1977), p.105-109.

[Ole 82] Oles F.J., A category-theoretic approach to the semantics of programming languages, thesis, Syracuse Univ., 1982.

[Pat 61] Patterson E.M., On regular automorphism of certain class of rings, Quart J. Math 12 (1961), p.127-133.

[PB 82] Purdea I., Both.N., On the compatibility of relations, Mathematica, 24 (47) no 1-2 (1982), p.2-21.

[PB 87] Purdea I., Both N., Relations in power algebra, Mathematica, 29(52), No 2 (1987) p 177-181

[Plo 76] Plotkin G.D., A powerdomain construction, SIAM J. on Computing, vol.5 (1976), p.452-487.

[PP 77] Purdea I., Pic Ghe., Tratat de algebră modernă, vol.I, Ed.Academiei, Bucureşti, 1977

[Pop 79] Popescu N., Popescu L., Theory of categories, Ed.Acad., Bucureşti, Sijthoff Noordhoft Intern.Publ., 1979.

[PR 71] Popescu N., Radu A., Teoria categoriilor şi a fasciculelor, Ed.Şt., Bucureşti, 1971.

[Pre 70] Presic M.D., On certain formulas for equivalence and order relations, Mat.Vesnik, 7(22), no.4 (1970), p.510-513.

[Pro 56] Prokhorov Yu.V., Convergence of random processes and limit theorems in probability theory, Theory Prob.and Appl., 1 (1956), p.157-214.

[Pur 81] Purdea I., Relations de tolerance partielle, Mathematica, 23(46), no.1 (1981), p.79-83.

[Pur 82] Purdea I., Tratat de algebră modernă, vol.II, Ed.Academiei, Bucureşti, 1982.

[Rad 91] Radelecki S., Compatible tolerance on groupoids, Czech.Math.J., 41(116), (1991), p.436-445.

[Rao 71] Rao M.M., Projective limites of probability spaces, J. Multivariate Analysis, 1 (1971), p.28-57.

[RD 84] Rendi B., Dăianu D., Multimorphisms of groups (I), Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T (May, 1984), p.26-28.

[Ren 84] Rendi B., On a differential for a class of multifunctions, SIEFAC, Cluj-Napoca (1984), p.17-23.

[RL 84] Rendi B., Laziun V., Multimorphisms of lattices (I), Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T. (Nov., 1984), p.79-80.

[RL 85] Rendi B., Laziun V., Multimorphisms of lattices (II), Proc.Math.Phys.Sem., I.P.T. (May, 1985), p.23-25.

[RHR 84] Rendi D., Hatvany Cs., Rendi B., On continuous multimorphisms, Proc. Math. Phys. Sem., I.P.T. (May, 1984), p.17-19.

[RR 85] Rendi D., Rendi B., Multimorphisms of rings (I), Proc. Math. Phys. Sem., I.P.T (May, 1985), p.32-34.

[RR 85a] Rendi D., Rendi B., Multimorphisms of rings (II), Proc. Math. Phys. Sem., I.P.T (Nov., 1985), p.76-78.

[RR 85b] Rendi D., Rendi B., Multimorphisms of groups and the generalized inverse, Proc. Math. Phys. Sem., I.P.T. (Nov., 1985), p.9-10.

[Rig 48] Riguet J., Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois, Bull.Soc.Math.France, 76, no.1-4 (1948), p.114-155.

[Roz 67] Rozenberg G., Axioms for category of relations with compositions, Bull.Acad.Poll.Sc., 15 (1967), p.5-9.

[RT 92] Rutten J.J.M.M., Turi D., On the fundations of final semantics : non-standard sets, metric spaces, partial orders, Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), Report CS-R9241, 1992.

[Sch.68] Schreider J.A., Mathematical model of the classification theory (Russian), Jurn. Naucn. -Tehn. Informacija, no.10, 1968.

[Sch 75] Schreider J.A., Equality, resemblance, ordering (Russian), Izd. "Nauka", Moskva, 1971, English edition: Moskva, 1975.

[Sch.69a] Scheffer C.L., Projective limits of directed projective systems of probability spaces, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 13 (1969), p.60-80.

[Sch 69b] Scheffer C.L., Sur l'existence de la limite projective dans la catégorie d'espaces de probabilités tendus, C.R. Acad. Sci. Paris, t.269, Série A (1969), p.205-207

[Sin 82] Singer I., The projective limit of finite processes, Prep. Series in Math., 83, Inst of Math., Bucharest, 1982.

[Smi 71] Smithson R.E., Fixed points of order preserving multifunctions, Proc. AMS, 28., no.1 (1971), p.304-310.

[Smi 72] Smithson R.E., Fixed point theorems for pseudomonotone multifunctions, Colloq. Math., 24 no.2 (1972), p.157-162.

[Smi 72a] Smithson R.E., Multifunctions, Nieuw Arch. Wisk. 20, no.1. (1972), p.31-53

[Smi 73] Smithson R.E., Fixed point in partially ordered sets, Pac. J. Math., 45, no.1 (1973), p.363-367.

[SP 82] Smyth M.B., Plotkin G.D., The category-theoretic solution of recursive domain equations, SIAM J. on Computing, 11 (1982), p.761-783.

[Sta 72] Stanley R.P., Ordered structures and partitions, Memoirs of the AMS, No.119, 1972.

[St 64] Strassen V., Messfehler und Information, Z.Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 2 (1964), p.273-305.

[Str 95] Street R., Ideals, radicals, and structure of additive categories, Applied categorical structures, 3 (1995), p.139-149.

[Stu 72] Stummel F., Discrete convergence of mappings, Prep., Proc. of the Conf. on Numerical Analysis, Dublin (1972), p.285-310

[Stu 73] Stummel F., Approximation methods in analysis, Lect.Notes Series, 35 Aarhus Univ., Math.Inst., 1973.

[Tak 69] Takahashi S., Categorical analysis, Queen's Paper in Pure and Applied Math., 18, Ontario, 1969.

[Tam 84] Tamura T., Power semigroups of rectangular groups, Math. Japonica, 29, No.4 (1984), p.671-678.

[Top 72] Topsoe F., Measure spaces connected by correspondences, Math. Scand., 30 (1972), p.5-45.

[Vas 71] Vasilasch S., Direct limits of measure spaces, J. Multivariate Anal., 1 (1971), p.394-441.

[Ves 97] Vesanen A., Solvable groups and loops, J.Algebra, (1997), va apare.

[ZS 75] Zariski O., Samuel P., Commutative Algebra, vol.I,II, Springer – Verlag, 1975.

[Zee 61] Zeeman E.C., The topology of the brain and visual perception, The topology of 3-manifolds, Ed.by M.K.Fort, Prentice Hall (1961), p.240-256.

[Zel 68] Zelinka B., Tolerance graphs, Comment. Math., Univ.Carolinae, 9., no.1 (1968), p.121-131.

[Zel 70] Zelinka B., Tolelance in algebraic structures, Czech. Math.J., 20(95), no.2 (1970), p.179-183

[Zel 75] Zelinka B., Tolerance in algebraic structures (II), Czech Math.J., 25(100), no.2 (1975), p.175-178.

[Zel 75a] Zelinka B., Tolerance relations on semilattices, Comment. Math., Univ.Carolinae, 16, no.2 (1975), p.333-338.

[Zel 75b] Zelinka B., Tolerances and congruences on tree algebras, Czech. Math.J., 25(100), no.4 (1975), p.634-637.

[Zel 77] Zelinka B., Tolerance relations on periodic commutative semigroups, Czech. Math.J., 27(102), no.1 (1977), p.167-169.

[Wan 75] Wand M., Fixed point constructions in order – enriched categories, TR Computer Science Dept., Indiana Univ., 1975.

[War 70] Ward L.E.Jr., Set-valued mappings on partially ordered spaces, Lect.Notes Math., 171 (1970), p.88-99.

[Wer 73] Werner H., A Malcev condition for admissible relations, Alg.Univ. 3, no.2 (1973), p.263.

Lista a-categoriilor

(Ec, Ef):	obiecte-mulţimi, morfisme-corespondenţe, morfisme stricte – funcţii; 1.1..
(Esp, Esp'):	spaţii semipremăsurabile, corespondenţe măsurabile, funcţii măsurabile; 3.35.1..
(Ep, Ep'):	spaţii premăsurabile, corespondenţe măsurabile, funcţii măsurabile; 3.35.1
(Es, Es'):	spaţii semimăsurabile, corespondenţe măsurabile, funcţii măsurabile; 3.35.1
(Em, Em'):	spaţii măsurabile, corespondenţe măsurabile, funcţii măsurabile; 3.35.1
(EspP, EspP'):	spaţii semipreprobabilistice, corespondenţe care conservă măsura, funcţii care conservă strict măsura; 3.35.2..
(EpP, EpP'):	spaţii preprobabilistice, corespondenţe care conservă măsura, funcţii care conservă strict măsura; 3.35.2..
(EsP, EsP'):	spaţii semiprobabilistice, corespondenţe care conservă măsura, funcţii care conservă strict măsura; 3.35.2..
(EP, EP'):	spaţii probabilistice, corespondenţe care conservă măsura, funcţii care conservă strict măsura; 3.35.2..
(Top, Top'):	spaţii topologice, corespondenţe continue, funcţii continue; 3.41.1
(Topt, Topt'):	spaţii topologice, corespondenţe tari continue, funcţii continue; 3.41.1
(Hausc, Hausc'):	spaţii Hausdorf, corespondenţe tari continue cu valori compacte, funcţii continue; 3.41.2..
(POl, POl'):	mulţimi preordonate, corespondenţe izotone faţă de relaţia (3.4), aplicaţii izotone; 3.47..
(POr, POr'):	mulţimi preordonate, corespondenţe izotone faţă de relaţia (3.5), aplicaţii izotone; 3.47..
(POlr, POlr'):	mulţimi preordonate, corespondenţe izotone faţă de relaţiile (3.4) şi (3.5), aplicaţii izotone; 3.47
(Ol, Ol'):	mulţimi ordonate, corespondenţe izotone faţă de relaţia (3.4), aplicaţii izotone; 3.47..
(Or, Or'):	mulţimi ordonate, corespondenţe izotone faţă de relaţia (3.5), aplicaţii izotone; 3.47..
(Olr, Olr'):	mulţimi ordonate, corespondenţe izotone faţă de relaţiile (3.4) şi (3.5), aplicaţii izotone; 3.47
(PBl, PBl'):	algebre prebooleene locale, funcţii care verifică relaţia (4.2), funcţiile a căror inverse invariază idealele maximale; 4.3

(PBp, PBp') algebre prebooleene locale, morfisme perfecte, funcțiile a căror inverse invariază idealele maximale, 4.3..

(ES, ES') spații semipremăsurabile reduse şi perfecte, corespondențe măsurabile cu valori închise, funcții măsurabile; 4.19..

(Gc, Gf) grupuri, corespondențe de grupuri, omomorfisme de grupuri; 5.22..

(GOc, GOf) grupuri (abeliene) ordonate, corespondențe de grupuri ordonate, omomorfisme de grupuri ordonate; 5.B..

(GOlc, GOf) grupuri ordonate, corespondențe de grupuri ordonate care invariază subgrupurile izolate, omomorfisme de grupuri ordonate; 5.38..

(Rc, Rf) inele, corespondențe de inele, omomorfisme de inele; §.6..

(AFc, AFf) algebre universale cu operațiile finitare F, corespondențe de algebre, omomorfisme de algebre; §.5., 7.1..

(AFS, AFf) algebre universale cu operațiile finitare F, corespondențe de algebre semiunivoce, omomorfisme de algebre; 7.1..

(MAc, MAf) A-module stângi, corespondențe de A-module, omomorfisme de A-module; 7.6..

(Abc, Abf) grupuri abeliene, corespondențe de grupuri, omomorfisme de grupuri; 7.7..

(Mc, Mf) module stângi, dicorespondențe de module, dimorfisme de module; 7.11..

(SLc, SLf) spații liniare, dicorespondențe univoce, aplicații liniare; 7.13..

(Jc, Jf) perechi Jordan liniare, corespondențe Jordan liniare, omomorfisme de perechi Jordan liniare; 7.14..

(SLCc, SLCf) spații local convexe peste $\mathbb{R}$, corespondențe de spații local convexe, aplicații liniare şi continue; 7.20..

(GEc, GEf) grupuri abeliene, corespondențe de mulțimi, funcții; 8.2..

(MCs, MCf) (C, C') - module drepte, transformări a-naturale la stânga, transformări naturale; 8.7..

(MCd, MCf) (C, C') - module drepte, transformări a-naturale la dreapta, transformări naturale; 8.7..