

**MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA  
Facultatea de Mecanică  
Catedra de Rezistența Materialelor**

**ING. IOAN ADRIAN GHIȚIU**

**STUDIUL TENSIUNILOR  
ȘI  
DEFORMAȚIILOR  
DIN SEGMENTII  
DE PISTON**

**TEZĂ DE DOCTORAT**

**Conducător științific:**

**Prof. dr. ing. TIBERIU BABEU**

**- 1998 -**

# CUPRINS

623.742  
189 e

Introducere	1
1. Considerații generale	1
1.1. Generalități	1
1.2. Caracteristici geometrice	3
1.3. Rolul segmentilor	5
1.4. Condițiile de lucru ale segmentilor	8
1.5. Siguranța în funcționare și uzura segmentului	13
1.6. Regimul termic al segmentului	16
1.7. Vibrația segmentului	18
1.8. Frecarea și ungerea segmentului	22
1.9. Forțele care acționează asupra segmentului	24
1.10. Presiunea gazelor din jurul segmentului	27
1.11. Distribuția segmentului pe periferia segmentului	28
2. Curbe de presiune	30
2.1. Expresia distribuției presiunii radiale	30
Concluzii	33
2.2. Curbe de presiune	34
2.3. Program de calcul al valorilor presiunii elastice $p_E(\psi)$	37
2.4. Considerații asupra curbelor de presiune	53
Concluzii	63
3. Determinarea formei în stare liberă	64
3.1. Momentul încovoietor într-o secțiune	64
3.2. Determinarea formei fibrei mijlocii în stare liberă a segmentilor în coordonate polare	66
3.3. Considerații asupra formei în stare liberă a segmentilor	76
4. Determinarea experimentală a presiunii elastice	83
4.1. Presiunea elastică de contact segment – cilindru	83
4.2. Presiunea medie elastică	88
4.2.1. Metoda curbei de presiune	88
4.2.2. Metoda forței tangențiale $F_t$	90
5. Modelarea segmentului	95
5.1. Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite	95
5.1.1. Starea de tensiune. Starea de deformare. Legea lui Hooke	95
5.1.2. Ecuațiile de echilibru. Ecuația de compatibilitate	97
5.1.3. Formularea diferențială în tensiuni	99
5.1.4. Formularea diferențială în deplasări	100
5.1.5. Condiții la limită	101

5.1.6. Energia potențială asociată unei structuri .....	102
5.1.7. Teorema energiei potențiale minime .....	104
5.1.8. Aplicarea metodei elementului finit în problemele de de elasticitate în starea plană de tensiune .....	107
5.1.9. Discretizarea domeniului de analiză .....	110
5.1.10.Elementul finit axial simetric solid .....	112
5.2 Analiza cu metoda elementelor finite .....	117
6. Concluzii. Contribuții personale .....	133
6.1. Concluzii.....	133
6.2. Contribuții personale.....	135
Bibliografie .....	137

## ANEXE

- ANEXA I Program MathCAD 7 Profesional *Calculul funcției de presiune.mcd* pentru curba de presiune din fig. 2.2-5
- ANEXA II Program MathCAD 7 Profesional *Calculul funcției de presiune.mcd* pentru curba de presiune din fig. 2.2-6
- ANEXA III Program MathCAD 7 Profesional *Calculul funcției de presiune.mcd* pentru curba de presiune din fig. 2.2-7
- ANEXA IV Program MathCAD 7 Profesional *Determinarea funcției de distribuție a presiunii elastice (Sg1\_12\_a1.mcd)*
- ANEXA V Program MathCAD 7 Profesional *Calculul coeficienților B, C și D pentru curbele de presiune din fig. 2.2-4 ... 2.2-7 și fig. 2.2-1 (CoefBCD.mcd)*
- ANEXA VI Fișe de măsurători a presiunii elastice.

## INTRODUCERE

Ritmul rapid de dezvoltare a omenirii este strâns legat de dezvoltarea ramurilor industriale. Un loc bine stabilit în acest univers industrial îl are domeniul motoarelor cu ardere internă, compresoarelor cu piston și pompelor cu piston.

Problema dezvoltării și modernizării gamei de motoare cu ardere internă, compresoare cu piston și pompe cu piston, constituie un obiectiv major al multor firme și institute de cercetare-proiectare de profil.

Noile condiții ale economiei de piață a determină ca și în cadrul institutelor de învățământ superior să se desfășoare o intensă activitate de cercetare științifică în vederea obținerii unor caracteristici tehnico-economice superioare, pentru toată gama de piese componente ale mașinilor.

La mașini menționate, pentru realizarea unor performanțe tehnico-economice sporite, trebuie acordată o atenție deosebită proiectării și execuției fiecărei componente în parte. O componentă esențială a acestor motoare este segmentul de piston.

Cercetările teoretice și experimentale legate de proiectarea, calculul și încercările segmentelor de piston au avut ca rezultat obținerea de segmente cu o mai mare fiabilitate și mentenanță, care au adus la o creștere a performanțelor tehnico-economice ale motorului în ansamblul său.

Alăturându-se preocupărilor din domeniul proiectării și execuției de segmente, în cadrul prezentei teze de doctorat, autorul își aduce contribuția la studierea tensiunilor și deformațiilor din segmentul de piston.

Lucrarea de față, structurată pe șase capitole își propune să aducă contribuții la calculul, proiectarea și verificarea segmentelor de piston.

În capitolul 1 este prezentat rolul și cerințele impuse segmentului pentru buna funcționare în condițiile foarte severe din mașinile cu piston.

Capitolele 2 și 3 prezintă cu ajutorul programelor de calcul, realizate de autor în soft-ul MathCAD 7 Profesional, algoritmi de proiectare indicați la calculul curbelor de presiune ce trebuie să le realizeze segmentul atunci când sunt montați în cilindru.

Valorile calculate din capitolele 2 și 3 sunt verificate de datele experimentale, capitolul 4, și datele obținute prin modelare cu metoda elementelor finite - capitolul 5.

Concluziile și principalele contribuții personale ale autorului sunt prezentate în capitolul 6.

Prin conținutul lucrării de față, autorul își aduce contribuția la completarea și îmbunătățirea volumului de cunoștințe necesare proiectării, încercării și executării segmentelor de piston.

\*

\* \*

Autorul adresează mulțumiri deosebite conducătorului științific **Prof. dr ing. TIBERIU BABEU** specialist, de renume european, în domeniul „**Rezistența Materialelor. Elasticitate. Plasticitate**”, pentru îndrumarea și sprijinul acordat în elaborarea acestei lucrări.

De asemenea, autorul adresează mulțumiri colegilor din Catedra de Rezistența Materialelor de Universitatea „POLITEHNICA” din Timișoara, Facultatea de Mecanică, în special domnului Prof. dr. ing. I. Cristuinea, colegilor de la Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița, în special domnului Prof. dr. ing. Tiberiu Mănescu, domnului Prof. dr. ing. Mihai Hărdău de la Universitatea „TRANSILVANIA” Cluj-Napoca, care prin discuții și sugestii m-au sprijinit în elaborarea tezei.

\*

\* \*

**Dedic această lucrare soției mele SIMONA și fiicei mele CRISTINA care m-au susținut și m-au ajutat continuu.**

## 1. CONSIDERAȚII GENERALE

### 1.1 GENERALITĂȚI

La mașinile cu piston, cum sunt : (vechile) mașini cu abur, motoarele cu ardere internă, segmentul constituie unul dintre organele puternic solificate ale mașinii, datorită condițiilor de lucru [1],[7],[33].

Denumirea de „segmenti”, care se dă în mod impropriu acestor inele, își are explicația în faptul că, la început, etanșarea dintre piston și cilindru s-a făcut cu ajutorul unor piese de lemn de forma unor porțiuni de coroană circulară, care

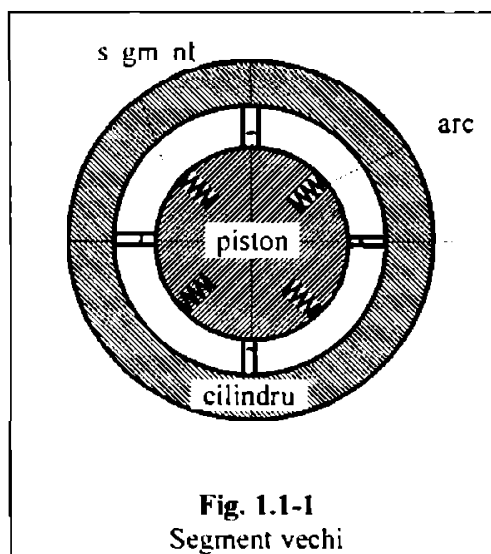


Fig. 1.1-1  
Segment vechi

erau apăstate pe pereții cilindrului de arcuri montate în spatele fiecăruia, fig.1.1-1[85]. Astfel de segmenti s-au folosit la primele mașini cu aburi pentru etanșarea pistonului.

În prezent, datorită condițiilor de lucru foarte severe, dar mai ales datorită posibilităților tehnologice avansate, segmentii se execută din materiale metalice și sunt realizați dintr-o singură bucată având forma unei porțiuni de coroană circulară cu unghiul  $\alpha$  de circa  $172^\circ$ - $174^\circ$ , ce se aseamănă foarte bine cu un inel tăiat, fig.1.1-2 [33],[37],[84].

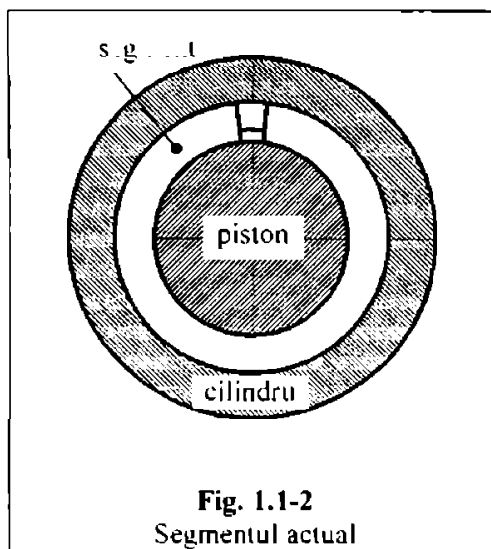


Fig. 1.1-2  
Segmentul actual

Dacă luăm în considerare denumirile corecte ale figurilor corespunzătoare cercului [1], denumirea corectă pentru segmentul de piston ar fi cea de „porțiune de coroană circulară”. Modelând segmentul doar prin una din axele caracteristice secțiunii radiale (axa fibrei neutre

sau axa fibrei mijlocii) atunci forma pe care o are un astfel de segment este cea de „arc de cerc”, fig.1.1-3a, iar dacă modelăm segmentul considerând toate dimensiunile secțiunii radiale atunci forma pe care o are segmentul este cea de „porțiune de coroană circulară”, fig.1.1-3c [88].

Figura cunoscută sub denumirea de „segment de cerc”, fig.1.1-3b, este foarte diferită de cea segmentului de piston și este total improprie celor două modelări.

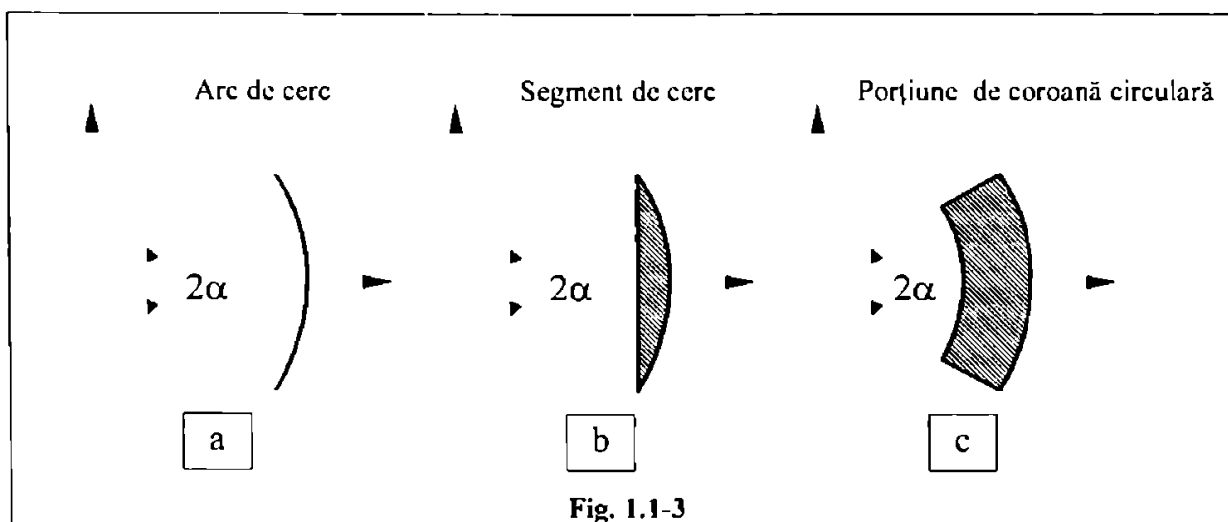


Fig. 1.1-3

Cea mai frecventă utilizare actuală a segmentelor este la mașinile cu piston, cum sunt : pompele, compresoarele și motoarele cu ardere internă.

În oricare dintre mașinile menționate, rolul principal al ansamblului piston-segment este acela de a închide etanș spațiul de lucru din cilindru, în care se află un fluid sub presiune, iar prin mișcarea pistonului, de a transmite energia termogazodinamică a fluidului sub presiune, arborelui motor, cazul mașinilor de forță - motoare, respectiv de a prelua energia mecanică a arborelui motor și a o transmite fluidului din cilindru, modificându-i starea, cazul mașinilor de lucru - pompe și compresoare. Acest proces de transfer energetic are loc în condiții foarte diferite, care variază de la o mașină la alta [32], [44], [50], [54].

Pentru o apreciere cât mai justă a acestor condiții, trebuie să se țină cont de principalii parametri, care caracterizează regimul de lucru al fiecăreia dintre mașinile menționate [33], [45]:

- presiunea și temperatura fluidului din cilindru.
- viteza medie a pistonului,
- forțele care acționează asupra pistonului,
- date cu privire la construcția segmentului.
- date cu privire la modul în care este realizată etanșarea dintre piston și cilindru.

## 1.2 CARACTERISTICI GEOMETRICE

Din punct de vedere al denumirii fețelor segmentului, raportate la direcțiile caracteristice unei bare curbe, fig.1.2-1, distingem [33], [84], [85]:

- Fața de alunecare (fața laterală)

- suprafața radială cu care segmentul rulează (freacă) pe suprafața interioară a cilindrului.

- Flancurile segmentului (fețele frontale) - suprafețe axiale, care pot fi :

flancul superior (fața frontală superioară)

- spre capul pistonului sau spre chiulasă,

flancul inferior (fața frontală inferioară)

- spre mantaua pistonului sau spre carter.

- Spatele segmentului - fața radială opusă feței de alunecare.

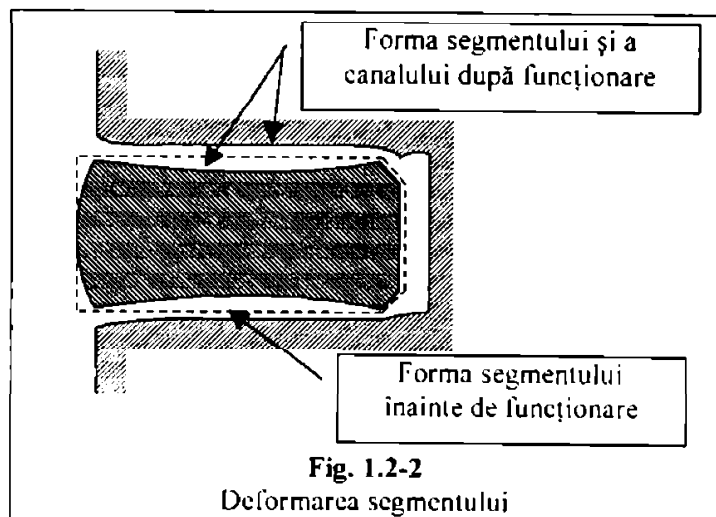
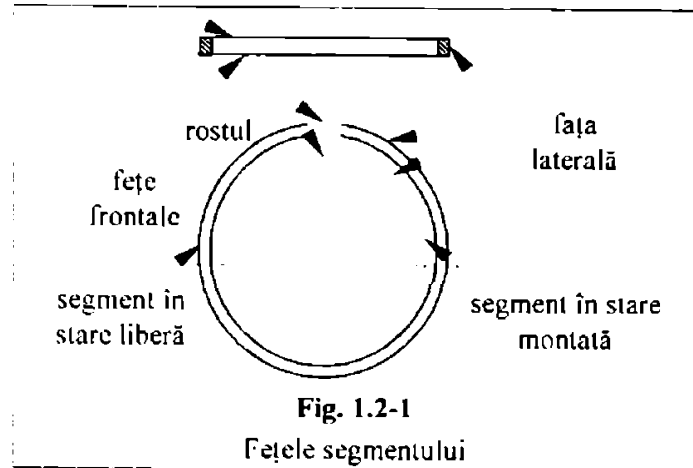
- Capetele rostului de dilatare (fantei sau jocului)

Fața laterală sau fața de alunecare este cea mai solicitată dintre toate fețele, în timpul funcționării ea suferă cele mai mari deteriorări ca urmare a frecării de cilindru. Din acest motiv, firmele producătoare de segmente aplică fie tratamente termice superficiale de durificare

sau chiar depuneri galvanice (cromări, fosfatări) și depuneri de metale dure cu plasmă.

Fețele frontale, superioară și inferioară, sunt și ele puternic solicitate ca urmare a ciocnirii și frecării cu flancurile canalului din piston.

Spatele segmentului, fața opusă feței de alunecare nu suferă deteriorări ne fiind în contact cu fundul canalului din piston, fig.1.2-2.





## 1.2 Caracteristici geometrice

Mărimile geometrice, fig.1.2-3, caracteristice segmentului corespund celor două stări pe care le poate avea acest a :

- Diametrul nominal  $D$  [mm] identic cu diametrul nominal al cilindrului (diametrul interior al cilindrului), același cu diametrul exterior pe care trebuie să-l aibă segmentul în stare montată.
- Diametrul  $D_i$  [mm] - diametrul interior al segmentului montat
- Înălțimea axială  $h$  [mm],
- Grosimea radială  $a$  [mm]

Între diametrul exterior și diametrul interior al segmentului montat există relația :

$$D_i = D - 2 \cdot a \quad (1.2-1)$$

- Rostul de dilatare (fanta sau jocul)  $s$  [mm], care poate fi :
  - a) rostul în stare montată  $s_m$  [mm] ,
  - b) rostul în stare liberă  $s_o$  [mm] ,

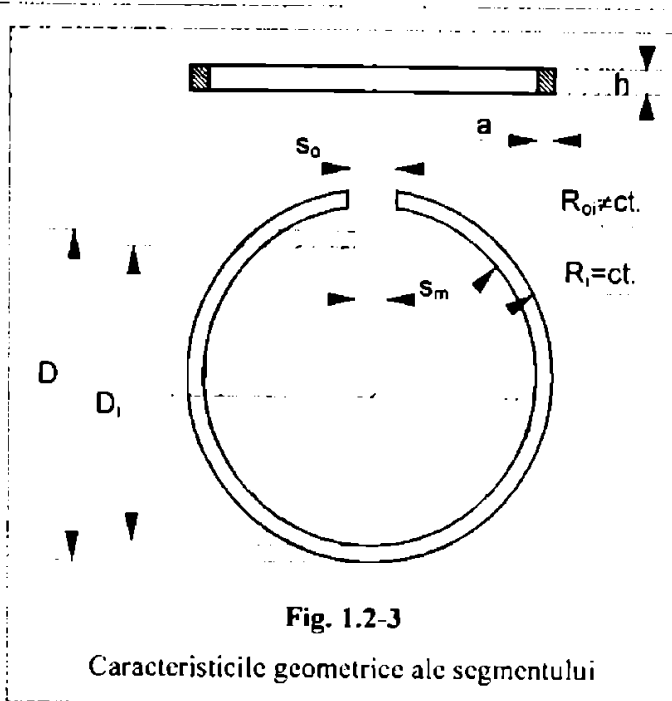


Fig. 1.2-3

Caracteristicile geometrice ale segmentului

Tabelul 1.2-1

Mărimea caracteristică	în stare liberă	în stare montată	Observații
- diametrul exterior	$D_o \neq ct.$	$D = ct.$	$D_o > D$
- diametrul interior	$D_{oi} \neq ct.$	$D_i = ct.$	$D_{oi} > D_i$
- rostul (fanta sau jocul)	$s_o$	$s_m$	$s_o > s_m$
- înălțimea (axială)	$h$		
- grosimea (radială)	$a$		

### 1.3 ROLUL SEGMENTELOR

Principala funcție a segmentului este de a etanșa cilindrul [32], [33], [50].

Cerința fundamentală pentru realizarea etanșării este ca segmentul să se așeze perfect cu suprafața laterală  $S_l$  pe oglinda cilindrului și cu una din suprafețele frontale inferioară  $S_{fi}$  sau frontală superioară  $S_{fs}$  pe unul din

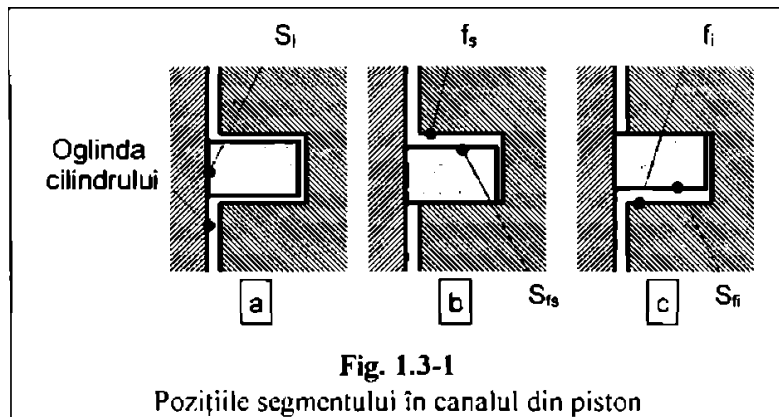


Fig. 1.3-1  
Pozițiile segmentului în canalul din piston

flancurile superior  $f_s$  respectiv inferior  $f_i$  al canalului de segment din piston (fig.1.3-1 b, c). Poziția din fig.1.3-1a este poziția intermediară nefavorabilă etanșării care permite trecerea gazelor pe după segment [7].

Menținerea unui contact permanent cu cilindrul presupune ca segmentul să exercite o anumită apăsare (preiune) pe cilindru.

Pentru aceasta, segmentul în stare liberă are diametrul exterior  $D_o$  mai mare decât diametrul exterior  $D$  din stare montată, fig.1.3-2. De aici rezultă că rostul  $f_o$  în stare liberă este mai mare decât rostul  $f_m$  în stare montată.

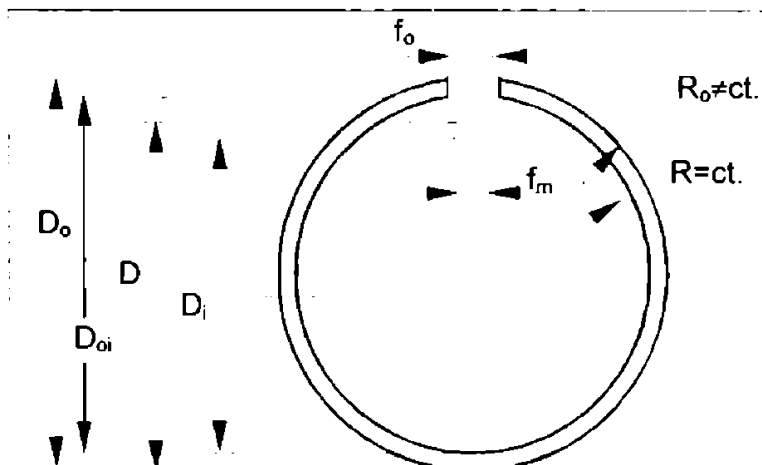


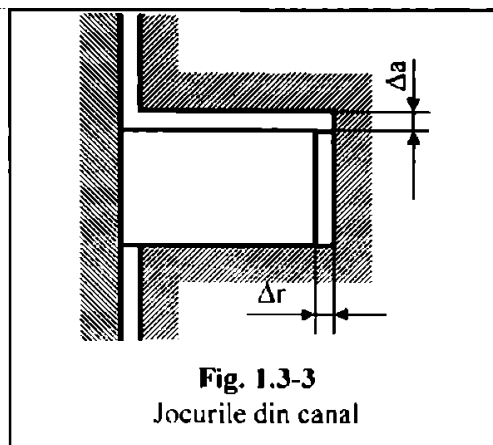
Fig. 1.3-2  
Stările caracteristice ale segmentului

La montare, segmentul va fi strâns (închis) până când diametrul  $D_o$  se va reduce la diametrul  $D$  al cilindrului, iar în fibrele exterioare vor apărea reacțiuni elastice de deschidere, datorită cărora segmentul va dezvoltata pe cilindru o presiune de contact, numită presiune elastică  $p_E$ .

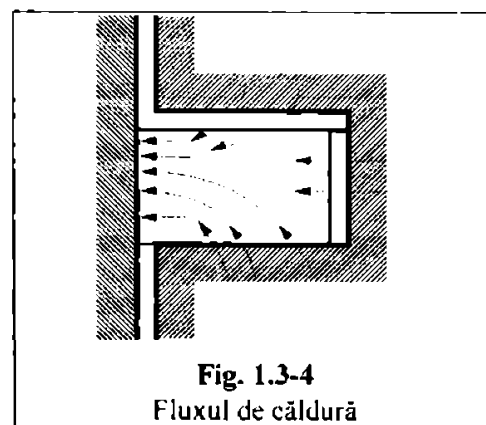
Astfel, elasticitatea segmentului se va opune tendinței de întrerupere a contactului, provocată de deformațiile de execuție, termice și de uzură ale cilindrului.

### 1.3 Rolul segmentelor

Segmentul exercită presiunea elastică  $p_E$  pe cilindru numai dacă este liber în canalul de segment din piston, deoarece numai astfel poate urmări deformațiile cilindrului. De aceea segmentul se montează în canalul din piston cu joc axial  $\Delta a$  și joc radial  $\Delta r$ , fig.1.3-3 [45], [85].



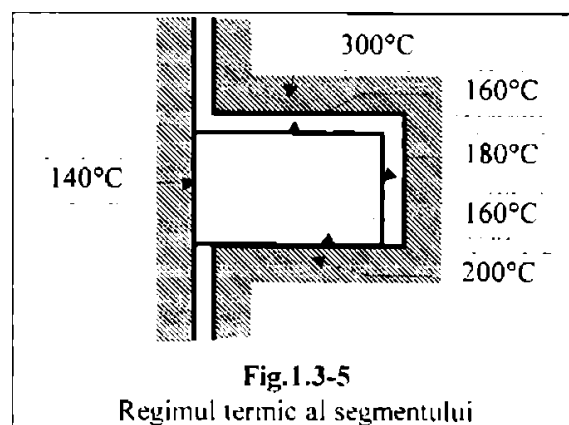
Prima funcție secundară a segmentului este de a evacua căldura înmagazinată în piston spre cilindrul răcit (cu apă sau aer) al mașinii, fig.1.3-4.



Cerința fundamentală pentru evacuarea căldurii este ca segmentul să se execute din materiale cu proprietăți termoconductoare foarte bune. Această cerință a fost una dintre cauzele care au condus la renunțarea folosirii lemnului

pentru execuția segmentelor și înlocuirea lui cu materiale metalice cu proprietăți termoconductoare foarte bune.

Astfel, temperatura unui segment metalic variază radial, având valoarea minimă pe suprafața laterală de contact cu cilindrul, fig.1.3-5. Pe direcție axială temperatura segmentului variază foarte puțin, putând fi considerată practic constantă [9], [27], [45], [85].



A doua funcție secundară a segmentului este de împiedica pătrunderea uleiului (necesar reducerii frecării dintre segment și cilindru) în camera de lucru a mașinii. Cantitatea de ulei de pe oglinda cilindrului trebuie să fie suficient de mare încât să ajungă pentru o ungere hidrodinamică, dar nu atât de mare încât să activeze fluxul de ulei spre camera de lucru. Uleiul în exces acumulat în spațiul dintre segmente ridică segmentele de pe flancurile inferioare ale canalelor, ceea ce compromite etanșarea [45], [85].

### 1.3 Rolul segmentelor

În concluzie, pentru a asigura contactul dintre segment și cilindru, segmentul trebuie să dezvolte o anumită presiune pe cilindru din care cauză trebuie să fie elastic.

Dacă segmentul de piston produce această presiune singur, ca urmare a elasticității sale proprii sau presiunea este produsă de elemente speciale de presare (arcuri) sau chiar de presiunea produsă de lichidul sau gazul asupra spatelui segmentului, se pot deosebi [45], [85]:

- segmente de piston cu elasticitate proprie ;
- segmente de piston cu elasticitate separată
- segmente de piston cu elasticitate auxiliară

Îndeplinirea simultană a celor trei roluri ale segmentului ar afecta consistent performanțele segmentului respectiv motiv pentru care segmentelor li se impune unul sau cel mult două dintre cele trei cerințe enunțate [32], [45], [85].

În funcție de rolul preponderent pe care are un segment, se disting [45],[85]:

- **segmente de piston de etanșare** sau comprimare (*segmente de compresie*) având ca rolul evident cel de etanșare, apoi cel de evacuare a căldurii din piston și în mai mică măsură cel de reglare și distribuție a uleiului, în acest din urmă caz ei având sarcina de a nu permite uleiului pătrunderea în camera de lucru a mașinii ;
- **segmente de piston de ungere** respectiv de distribuție a lubrifiantului (*segmente raclori*) la care rolul primordial este cel de reglare și distribuție a uleiului pe oglinda cilindrului pentru a reduce frecarea dintre segmentii de etanșare și cilindru, apoi, într-o mică măsură rolul de etanșare împiedicând gazele scăpate de segmentii de etanșare să treacă spre carterul mașinii, căldura preluată de la piston și transmisă cilindrului fiind neglijabilă.

În concluzie, fiecare piston se echipează totdeauna cu cele două tipuri de segmente, adică cu doi sau mai mulți segmente de compresie și cu unul sau doi segmente de ungere [45], [85].

## 1.4 CONDIȚIILE DE LUCRU ALE SEGMENTELOR

**La pompe** și compresoare se exercită asupra pistonului și segmentului presiuni foarte mari; etanșarea pistonului și a cilindrului nu implică însă rezolvarea unor probleme grele din partea segmentului în privința temperaturii.

Într-adevăr, la pompe presiunea este practic constantă pe întreaga cursă a pistonului, iar temperatura este limitată de temperatura de vapori a lichidului la presiunea de aspirație a pompei [85].

**La compresoare**, temperatura gazului crește în timpul procesului de comprimare. Nici aici nu intervin de obicei temperaturi prea înalte, datorită răcirii între trepte și limitării raportului de compresie [32].

Presiunea maximă, în cazul compresoarelor realizate și date în funcțiune, este de ordinul a 1000 at și peste 1000 at. Pentru realizarea presiunilor mari se folosesc compresoare multietajate cu 2 - 7 trepte de presiune, alegerea numărului de trepte făcându-se, practic în funcție de presiunea finală a compresorului. Raportul de compresie maxim cel mai avantajos al fiecărei trepte are valoarea 4, deoarece la un raport de compresie mai mare, din cauza temperaturii înalte, nu s-ar mai putea asigura răcirea în bune condiții a gazului și nici nu s-ar putea evita uzura exagerată a pieselor în frecare.

În ce privește viteza medie a pistonului în cilindru, aceasta este limitată, la compresoare, la 1,5 - 3,5 m/s, valoarea sa maximă nedeșășind în general 6 m/s. Aceasta înseamnă că forțele de inerție vor fi apreciabil mai mici decât la mașinile cu ardere internă.

Pistoanele pentru compresoare diferă constructiv foarte mult - după tipul compresorului și după scopul în care este folosit. În tabelul 1.4-1 este prezentată o clasificare a compresoarelor, cu indicarea puterii pentru care se folosesc și a vitezei medii a pistonului, cum și a factorului  $S \cdot n \times 10^{-3}$ , ( $S$  = cursa pistonului,  $n$  = turația arborelui) care intră în relația de calcul al forței de inerție și care **pentru** compresoare de același tip de construcție dă o indicație asupra mărimii forțelor de inerție.

Până la o anumită presiune, etanșarea dintre pistoane și cilindri se realizează prin segmente obișnuiți, eficiența etanșării după fiecare segment rezultând din diferența dintre presiunile care acționează înainte și după segmentul respectiv.

Tipul compresorului	Puterea [kW]	Viteza medie a pistonului [m/s]	Factorul $S \cdot n \cdot 10^{-3}$ [m/min <sup>2</sup> ]
Compresoare verticale fără cap de cruce, cu 1-2 trepte	până la 59	1,5 - 3 (max. 6 la construcții noi)	15 - 70 (max. 150 la construcții noi)
Compresoare verticale cu cap de cruce	37 - 259	2 - 3 (max. 4 la construcții noi)	16 - 30 (max. 50 la construcții noi)
Compresoare orizontale cu 1-2 trepte de putere mijlocie	până la 370	1,8 - 3	16 - 25
Compresoare orizontale cu mai multe trepte, de putere mijlocie și mare	370 - 3700	2,5 - 3,5 (max. 4 la construcții noi)	10 - 20

În ce privește numărul segmenților se precizează orientativ [45], [85] unele date referitoare la numărul de segmenți folosiți la compresoarele existente și anume :

- pentru o sarcină de etanșare de 5 at.....2 - 4 segmenți
- pentru o sarcină de etanșare de 5 - 30 at.....3 - 4 segmenți
- pentru o sarcină de etanșare de 30 - 120 at.....6 - 15 segmenți
- pentru o sarcină de etanșare de 120 - 350 at .....12 - 30 segmenți

Trebuie menționat că, la sarcini de etanșare foarte mari, de exemplu de la aproximativ 400 at în plus, etanșarea dintre piston și cilindru nu se mai face prin segmenți, ci se folosesc pistoane netede, prelucrate foarte precis, prevăzute cu șanțuri semicirculare pentru realizarea efectului de labirint [45], [85].

În același fel se realizează, în unele cazuri, etanșarea dintre piston și cilindru - adică fără segmenți - și în cazul unor compresoare speciale, fără ungere, în care gazul comprimat nu trebuie să fie impurificat cu urme de ulei (comprimarea oxigenului).

#### 1.4 Condițiile de funcționare ale segmentelor

**La motoarele cu ardere internă**, condițiile de lucru ale pistonului sunt mai grele decât la toate celelalte mașini cu piston, deoarece în acest caz spațiul de lucru al cilindrului constituie însăși camera de ardere. În acest spațiu se dezvoltă în timpul arderii nu numai presiuni înalte, ci și temperaturi foarte înalte [9], [32], [44], [45], [85].

Presiunea maximă  $p_{max}$ , care ia naștere în spațiul de lucru al cilindrului variază după tipul motorului cu ardere internă, și anume :

- la motoarele cu aprindere prin scântei  $p_{max} = 25...50 \text{ at}$
- la motoarele cu cap incandescent  $p_{max} = 18...25 \text{ at}$
- la motoarele cu aprindere prin comprimare staționare  $p_{max} = 45...55 \text{ at}$
- la motoarele cu aprindere prin comprimare rapide  $p_{max} = 45...100 \text{ at}$

În ce privește viteza medie a pistonului, acesta este mult mai mare decât în cazul celorlalte mașini cu piston, ea fiind de 10 m/s la motoarele grele, putând ajunge în unele cazuri chiar la 18 m/s. Viteza instantanee a pistonului atinge valori maxime de 30 m/s. Din această cauză forța de inerție ia valori importante, de ordinul de mărime al forței datorite apăsării gazelor.

Etanșarea dintre piston și cilindru se realizează exclusiv prin segmente metalici.

La toate motoarele cu ardere internă cu piston etanșarea dintre piston și cilindru se realizează fie prin segmente obișnuiți de fontă, cu arcuire proprie, fie prin elasticitatea proprie a segmentului completată de apăsarea unui inel din oțel de arc.

În ultimul timp s-au introdus și se folosesc pe scară din ce în ce mai largă la motoarele de automobile și altfel de segmente, și anume segmente din lamele subțiri de oțel. Acești segmente se folosesc cu mult succes îndeosebi la reparații, ca înlocuitori ai segmentelor de fontă uzați, montarea lor pe piston făcându-se în canalele existente de pe piston. Segmentele din lamele de oțel se folosesc atât ca segmente de etanșare cât și ca segmente de ungere, cu excepția însă a segmentului de etanșare superior, aflat în imediată apropiere a camerei de ardere, care se execută numai din fontă.

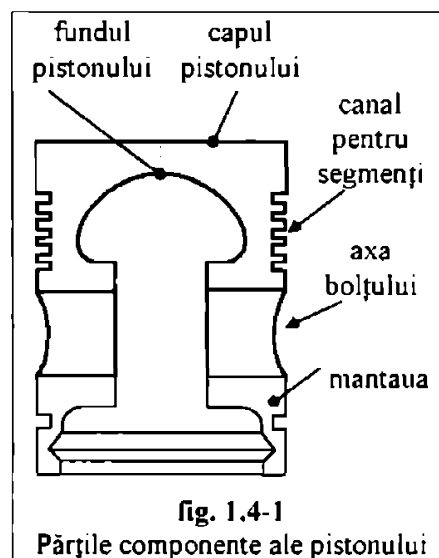
Temperatura maximă a gazelor de ardere poate ajunge la 1800 - 2000 °C scăzând la 700 - 800 °C la evacuare, ceea ce arată că pistonul este supus, pe lângă solicitările mecanice, unor însemnate solicitări termice.

Variația temperaturii în diferitele puncte ale pistonului are ca urmare o dilatare inegală a diferitelor părți ale acestuia. De acest lucru se ține seamă la construcția

pistonului prin executarea părții de etanșare de formă tronconică, cu diametrul mai mic spre fundul pistonului.

Alte măsuri constructive sunt [44], [45], [50], [54] :

- a) adoptarea unei anumite forme și a unei anumite grosimi a fundului pistonului ;
- b) protejarea segmentului superior împotriva arderii prin : execuția canalului respectiv la o anumită distanță de fundul pistonului, montarea pe pistonul de aliaj ușor a unui inel de oțel ca suport al segmentului, execuția unui canal protector pentru frânarea accesului căldurii la primul segment, protejarea pereților superiori ai canalului pentru segmentul superior printr-un inel de oțel etc.
- c) execuția de degajări pe mantaua pistonului, în dreptul axei bolțului, unde dilatarea pistonului este mai mare, sau prelucrarea eliptică a pistonului ;
- d) execuția pistoanelor din aliaje ușoare pentru automobile, cu tăieturi (ferestre), în formă de U sau T, între partea de etanșare a pistonului și manta, care permite reducerea la minimum a jocului dintre mantaua pistonului și cilindru, fără a risca griparea pistonului la temperaturi înalte.



Din cauza temperaturilor înalte ce iau naștere în cilindrul motorului cu ardere internă, condițiile de lucru ale pistonului și ale segmentelor diferă substanțial de cele întâlnite la restul mașinilor cu piston. Printre sarcinile suplimentare pe care le au segmentele motoarelor cu ardere internă, cea mai importantă este aceea de a transmite căldura de la piston la cilindru. Totodată segmentele trebuie să reziste la temperaturi înalte.

La temperaturi înalte, în unele cazuri, fonta suferă transformări structurale, din care cauză își pierde atât proprietățile elastice cât și proprietățile de antifricțiune.

Numărul segmentelor folosiți la motoarele cu ardere internă variază de la 2 la 7 segmente, între care, la motoarele în patru timpi sunt incluși 1 - 2 segmente de ungere. În legătură cu aceasta trebuie de asemenea menționate ca elemente specifice în funcționarea motoarelor cu ardere internă, mișcarea de balansare a pistonului în cilindru și modificarea formei cilindrice inițiale a suprafeței cilindrului, datorită uzurii inegale. Mișcarea de balansare se datorește forțelor normale transmise de bielă și este favorizată în mod special, în cazul motoarelor cu ardere internă, de jocul pistonului în cilindru.



#### 1.4 Condițiile de funcționare ale segmentelor

---

O dată cu balansarea pistonului în cilindru, segmentii execută și ei anumite mișcări de balans în canalele de pe piston favorizate de jocul axial dintre segmenti și pereții canalelor respective.

Uzura inegală, mai mare spre camera de ardere, determină de asemenea o deplasare radială continuă a segmentelor în canalele de pe piston.

Aceste mișcări suplimentare ale segmentelor în canalele de piston sunt specifice motoarelor cu ardere internă. Ele îngreunează buna funcționare a segmentelor și pot da naștere, în anumite condiții, la fenomene de vibrație care au ca urmare întreruperea contactului dintre segmenti și pereții cilindrului, situație în care etanșarea dintre piston și cilindru nu mai este asigurată.

## 1.5 SIGURANȚA ÎN FUNCȚIONARE ȘI UZURA SEGMENTULUI

Procesul de uzură este determinat de patru tipuri fundamentale de uzuri [44], [53], [54], [85]:

Tipul de uzură	Influența
• uzură adezivă sau de contact,	– cea mai mare (mai ales la primul segment)
• uzură corosivă	– mare
• uzură abrazivă	– mare
• uzură prin oboseală superficială.	– foarte mică

Experiența arată că primul segment suportă o uzură adezivă cu mult mai intensă decât segmentii inferiori. Aceste diferențe sunt explicate de trei cauze fundamentale :

- valoarea cea mai mare a presiunii în spatele segmentului,
- temperatura cea mai mare și
- durata regimului hidrodinamic de ungere cea mai scurtă.

Spre sfârșitul cursei de comprimare și începutul cursei de destindere, când grosimea stratului de ulei este minimă, segmentul de foc este aplicat pe cilindru de o presiune  $p$ , superioară. Regimul termic ridicat reduce vâscozitatea uleiului și ușurează apariția frecării semifluide; iar pe de altă parte, la temperaturi ridicate straturile superficiale ale materialului se oxidează, au o rezistență mecanică mai mică și sunt smulse cu ușurință de pe suprafața laterală. În fine, cantitatea mai mică de ulei care ajunge la primul segment reduce porțiunea din cursa pistonului pe care se efectuează ungerea hidrodinamică. La mărirea raportului de comprimare și a sarcinii uzura segmentului se amplifică sub acțiunea efectului de presiune a gazelor. Creșterea turației intensifică procesul de uzare, deoarece în aceeași unitate de timp segmentul traversează un număr mai mare de puncte moarte. Uzura corosivă a segmentului este provocată de unele substanțe prezente în combustibil ca sulful și tetraetilul de plumb, care, prin ardere dau combinații chimice acide. Reducerea temperaturii apei de răcire întrucât ușurează condensarea produselor acide pe oglinda cilindrului intensifică rapid uzura  $u$  a primului segment fig. 1.5-1.

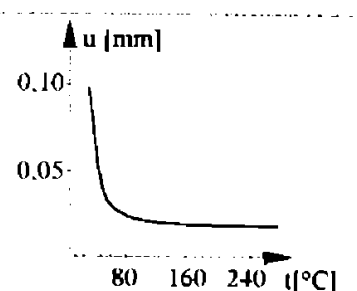


Fig. 1.5-1  
Influența temperaturii  
lichidului de răcire asupra  
uzurii

### 1.5 Siguranța în funcționare și uzura segmentelor

La aceasta tre ue a ăugat ș efectul de condensare a vaporilor de combustibil de la motoarele cu aprindere prin ăn , explică ș u. Uzura segmentului d fœc în ri aș a ș e pornire depășește de 5...10 ori uzura la funcționarea motorului în sarcină. În fine, se observă că particulele solide prezente în aer, ulei sau combustibil produc o uzură abrazivă a primului segment cu atât mai mare cu cât concentrația de praf în aer este mai mare, fig. 1.5-2 [54].

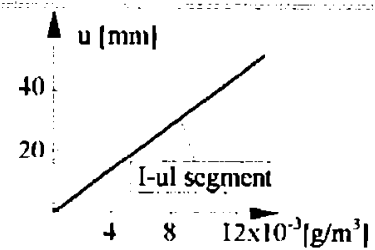
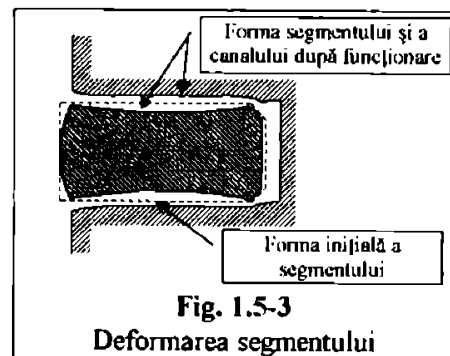


Fig. 1.5-2  
Influența particulelor solide asupra uzurii segmentului

Siguranța în funcționare este compromisă prin blocarea segmentului, care este provocată de deformările segmentului și canalului din piston, de particulele mecanice care pătrund între segment și flancuri, de substanțele consistente (lacuri) care se formează în canalele segmentului prin oxidarea uleiului, fig. 1.5-3.



Micșorarea jocurilor axiale reduce durata de funcționare a motorului până la blocarea segmentului deoarece acțiunea particulelor mecanice, a lacurilor sau a deformațiilor canalului este mai intensă. Blocarea segmentului în canal este puternic influențată de calitatea și consumul uleiului. Dacă uleiul dizolvă și îndepărtează lacurile din canal, un consum mai mare de ulei mărește durata până la care are loc blocarea segmentului. Dacă consumul de ulei este exagerat, atunci uleiul trece în camera de ardere, se transformă în calamină, iar particulele pure se întorc prin jocuri înapoi în canal și blochează segmentul [45].

În ultimii 10 ani gripajul segmentului a devenit un fenomen frecvent, îndeosebi la motoarele cu aprindere prin comprimare, datorită creșterii puterii pe cilindru. Fenomenul, care constă în formarea punctelor de sudură între suprafețele în mișcare este influențat de un mare număr de factori, grupați în șapte clase, tabelul 1.5-1, fiecare dintre ei acționând independent sau în corelație cu unul sau mai mulți dintre ceilalți factori. Enumerarea factorilor ilustrează gradul de complexitate a fenomenului dar și posibilitățile variate de limitare a lui. Ca urmare, limitarea apariției gripajului trebuie să fie rezultatul unei activități coordonate, pe diferite planuri ( proiectare, fabricație, exploatare, întreținere ).

**Tabelul 1.5-1. Factorii care produc gripajul ansamblului piston-cilindru**

Natura gripajului	Factorul de gripaj
1. Segmentul	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tipul</li> <li>- Forma</li> <li>- Materialul</li> <li>- Jocul axial</li> <li>- Jocul radial</li> <li>- Poziția pe piston</li> <li>- Distribuția de presiune</li> <li>- Rugozitatea suprafețelor</li> <li>- Natura suprafețelor</li> <li>- Stratul de protecție</li> <li>- Temperatura</li> <li>- Mișcarea</li> </ul>
2. Cilindrul	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Material</li> <li>- Rugozitate</li> <li>- Natura suprafeței</li> <li>- Stratul de acoperire</li> <li>- Temperatura</li> <li>- Deformațiile termice</li> <li>- Deformațiile mecanice</li> </ul>
3. Pistonul	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Materialul</li> <li>- Rugozitatea mantalei</li> <li>- Rugozitatea canalului</li> <li>- Deformarea canalului</li> <li>- Jocurile radiale</li> <li>- Temperatura</li> <li>- Diferențele de temperatură</li> <li>- Viteză</li> <li>- Accelerație</li> <li>- Mișcarea transversală</li> </ul>
4. Motorul	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Dimensiunile fundamentale</li> <li>- <math>\phi = S / D</math></li> <li>- Turația</li> <li>- Descrierea simultană a supapelor</li> <li>- Răcirea</li> <li>- Răcirea aerului admis</li> </ul>
5. Ungerea	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tipul uleiului</li> <li>- Vâscozitatea</li> <li>- Aditivul</li> <li>- Consumul de ulei</li> <li>- Diluarea uleiului</li> <li>- Oxidarea uleiului</li> <li>- Randamentul</li> <li>- Temperatura gazelor</li> </ul>
6. Arderca	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Viteza de creștere a presiunii</li> <li>- Presiunea maximă</li> <li>- Presiunea medie <math>p_e</math></li> <li>- Sistemul de injecție</li> <li>- Dozajul</li> </ul>
7. Regimul de funcționare	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Felul serviciului</li> <li>- Condiții atmosferice (p.a.f.)</li> <li>- Întreținerea motorului</li> <li>- Sisteme auxiliare</li> </ul>

## 1.6 REGIMUL TERMIC AL SEGMENTULUI

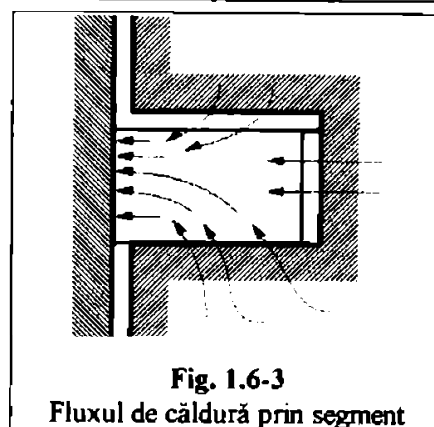
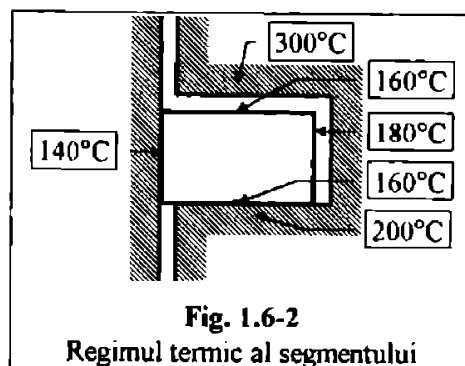
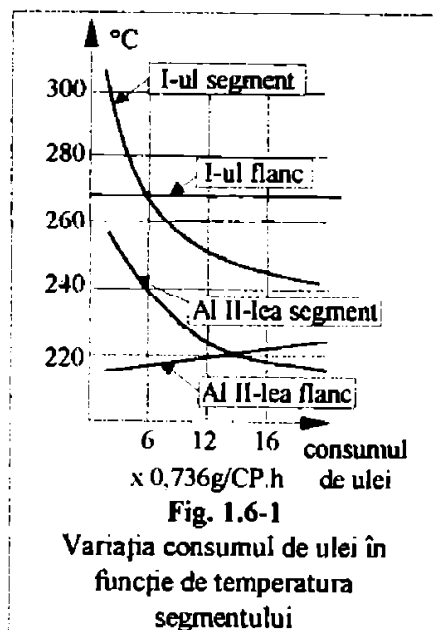
Dintre toți segmentii primul are nivelul termic cel mai ridicat, deoarece vine în contact cu gazele fierbinți și cu porțiunea cea mai caldă din piston. De aceea, primul segment se mai numește și *segment de foc*, fig.1.6-1 [27], [45].

Temperatura segmentului variază de la, în valarea și în funcție de temperatura de contact, fig.1.6-2. Pe direcția axială temperatura segmentului este practic aceeași.

Temperatura medie a segmentului de foc poate ajunge la  $150...250^{\circ}\text{C}$  și este mai mică decât temperatura flancului cu  $50...100^{\circ}\text{C}$ . Pentru motoarele care funcționează continuu cu sarcini mari, temperatura medie de  $250^{\circ}\text{C}$  trebuie considerată încă admisibilă. În regim intermitent de funcționare, temperatura segmentului de foc poate ajunge până la  $300...325^{\circ}\text{C}$ , dar este extrem de periculoasă [45], [85].

Urmărind deplasarea fluxului termic prin segment se observă, fig.1.6-3 că un rol deosebit îl joacă suprafețele de contact ale segmentului. Rezultă că variația convenabilă a căldurii evacuate din piston se obține modificând două dimensiuni principale ale segmentului: grosimea radială  $a$  și înălțimea  $h$ .

Regimul funcțional și particularitățile constructive ale motorului cu ardere internă au o influență importantă asupra temperaturii segmentului de foc. Camerele separate de vârtej conduc întotdeauna la temperaturi mai ridicate ale primului segment decât camerele unitare, deoarece gradul ridicat de turbulență intensifică transferul de căldură [53], [54].



## 1.6 Regimul termic al segmentului

Utilizarea cilindrilor cromaji din Al în locul cilindrilor de fontă reprezintă o soluție care, micșorează cu 30...50° temperatura primului segment. Dacă ungerea segmentului este insuficientă, frecarea devine atât de intensă încât temperatura segmentului depășește temperatura flancului canalului. Ungerea abundentă micșorează temperatura segmentului nu numai pentru că reduce frecarea uscată, dar și pentru că evacuează căldura din segment. O ungere abundentă nu este recomandată deoarece sporește consumul de ulci [44], [45], [85].

Descărcarea termică a regiunii port-segment se obține prin mărirea numărului de segmente sau prin ridicarea segmentului mai aproape de capul pistonului. De aceea la motoarele cu aprindere prin comprimare (Diesel) segmentul de foc se așează mult mai aproape de capul pistonului [9], [44].

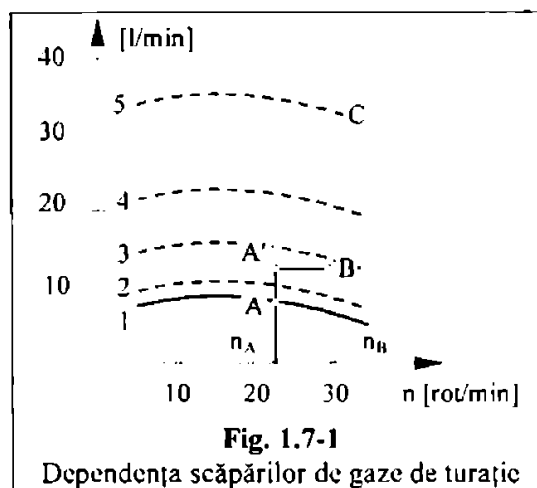
622.742/1810

## 1.7 VIBRAȚIA SEGMENTULUI

S-a observat că etanșarea la gaz este definitiv compromisă la anumite turații critice pentru segment [9], [45].

Funcționarea motorului la turația critică a segmentului este însoțită de apariția unui fum albicios la garniturile de etanșare a carterului, precum și de un zgomot scurt caracteristic.

În condiții normale de funcționare, cantitatea de gaze scăpate variază cu turația motorului după curba 1, fig. 1.7-1.



La mărirea rostului  $l_m$  dintre capetele segmentului de la 0,35 la 3,5 mm scăpările de gaz au crescut ușor, curba 2, fig. 1.7-1.

Perforarea pistonului cu mărirea treptată a secțiunii de trecere a amplificat scăpările, curbele 3,4 și 5, fig. 1.7-1.

În toate cazurile, alura de variație a curbelor a rămas nemodificată, cea ce ilustrează că perturbațiile produse sunt de aceeași natură, influențând doar cantitativ scăpările de gaze.

Cu totul altfel s-a comportat motorul în condițiile turației critice de etanșare. Astfel la turația  $n_A$  scăpările de gaze au crescut puțin dar brusc (de la A la A'), iar la o turație ceva mai mare  $n_B$ , scăpările au crescut de la 4...5 ori (de la B la D). Pierderea bruscă a funcției de etanșare la o turație determinată a fost atribuită vibrației segmentilor. În condițiile experimentale menționate au intrat inițial în vibrație grupul de segmentii inferiori; cum ei preiau o mică parte din sarcina de etanșare scăpările de gaz sunt mici. Scăpările ulterioare (până la C) sunt atribuite primului segment. Se reține că turația critică de vibrație a primului segment este mai mare. Vibrația segmentului se produce într-un plan normal pe axa cilindrului, de aceea poartă numele de vibrație radială (fiecare punct al fibrei medii oscilează după direcția razei).

Pentru a explica fenomenul de vibrație radială s-a pornit de la observația că în perioada de ungere hidrodinamică segmentul este desprins de pe oglinda cilindrului și s-a considerat că vibrația radială este determinată de forța portantă din pelicula de ulei.

### 1.7 Vibrația segmentului

Pentru o presiune  $p_E$  dată, întrucât presiunea în pelicula de ulei dintre segment și cilindru,  $p_o$ , variază cu deplasarea pistonului, starea de echilibru se realizează prin deplasări radiale variabile ale segmentului. Ca urmare segmentul suferă periodic comprimări și destinderi succesive a căror frecvență depinde de turația motorului. Când frecvența impulsurilor aplicate de forța portantă variabilă, care comprimă segmentul, devine egală cu frecvența proprie, segmentul intră în rezonanță. Amplitudinea oscilației devine acum atât de mare încât segmentul se desprinde de filmul de ulei și este scos practic din funcțiune. Comprimarea segmentului la rezonanță poate produce lovirea capetelor rostului. Astfel, pentru un segment de 100 mm diametru cu rost de dilatare la cald de 0,2 mm se obține o lungime

$$L_c = \pi \cdot D - 0,2 = 313,8 \text{ [mm]}; \quad (1.7-1)$$

dacă amplitudinea oscilației capetelor segmentului este de 0,04 [mm] lungimea segmentului va fi :

$$L_{osc} = \pi \cdot (D - 2 \cdot 0,04) = 313,75 \text{ [mm]}; \quad (1.7-2)$$

adică,  $L_{osc} < L_c$ , deci capetele se ating și segmentul va fi comprimat (la demontare, pe suprafețele capetelor rostului se observă urme de contact).

Frecvența proprie  $n_o$  a segmentului se determină în ipoteza că segmentul este o bară curbă, de secțiune constantă cu modulul de elasticitate  $E$ , identic în fiecare secțiune. Se obține [45]:

$$n_o = 30840 \cdot (\nu - 0,24)^2 \cdot \left(\frac{10}{D}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{a}\right) \quad (1.7-3)$$

unde :  $n_o$  [osc/min] – este frecvența proprie,

$a, D$  [mm] – sunt grosimea axială respectiv diametrul nominal al segmentului,

$E$  [N/mm<sup>2</sup>] – modulul de elasticitate,

$\rho$  [kg/mm<sup>3</sup>] - densitatea materialului,

$\nu$  [-] – ordinul armonicii.

Pentru un segment din fontă se obține :

$$n_o = 30840 \cdot (\nu - 0,24)^2 \cdot \left(\frac{10}{170}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{1000000}{7,3}}}{\frac{170}{3,5}}\right) = 4709 \text{ } \left[ \frac{\text{osc.}}{\text{min}} \right]$$



### 1.7 Vibrația segmentului

Se observă că frecvența proprie este invers proporțională cu raportul  $D/a$ , ceea ce explică în parte de ce la mașinile cu piston cu turație ridicată se utilizează segmenti cu valoare mai mică a raportului  $D/a$  ( $18 \div 20$  față de  $25 \div 28$ ). Frecvența excitației este :

$$n_{ex} = v_{ex} \cdot \frac{n}{2} \quad (1.7-4)$$

adică un multiplu  $v_{ex}$  ( $v_{ex} = 1, 2, 3, \dots$ ) al... de... m...ș.n., în... po.eza... că un ciclu de vibrație al segmentului se... epet... la fi... ca... i... u... m...ș.n...

Regimul de rezonanță rezultă din condiția  $n_0 = n_{ex}$  care definește turația critică  $n_{cr}$ . În fig. 1.7-2 s-a reprezentat diagrama clasică a frecvențelor aplicate în funcție de turație și a frecvențelor proprii independente de turație. Pentru... v... ii rezonanța se mărește frecvența proprie du... cum urmează.

**Presiunea medie elastică  $p_E$**  influențează echilibrul segmentului în prezența peliculei de ulei. Cu cât  $p_E$  este mai mare cu atât grosimea  $\delta_0$  a peliculei de ulei este mai mică, segmentul se desprinde mai greu de pe cilindru, ceea ce sporește turația critică a segmentului, fig. 1.7-3 [45].

**Distribuția presiunii pe periferia segmentului (curba de presiune)  $p_E(\varphi)$**  joacă un rol deosebit în posibilitatea măririi turației critice. *Mărirea presiunii elastice la capete (în vecinătatea rostului)* introduce un factor de amortizare pentru aceste secțiuni care au posibilități mai largi de deplasare. Ca urmare se observă,

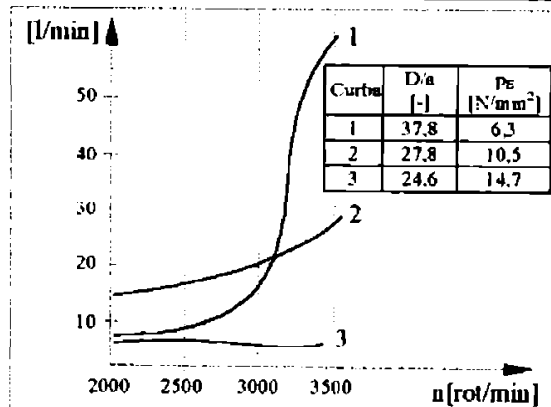
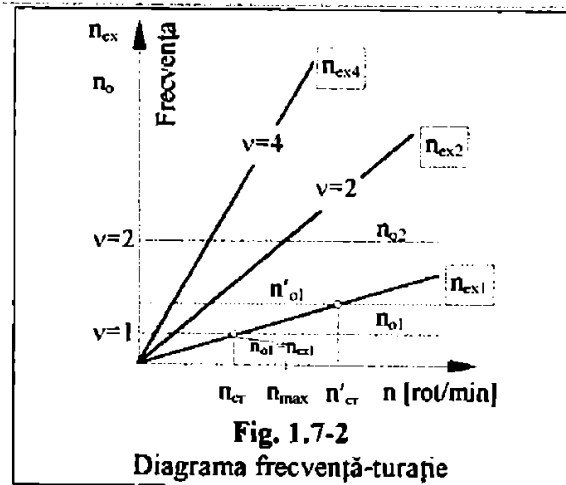


Fig. 1.7-3 Influența presiunii elastice  $p_E$  asupra scăpării de gaze

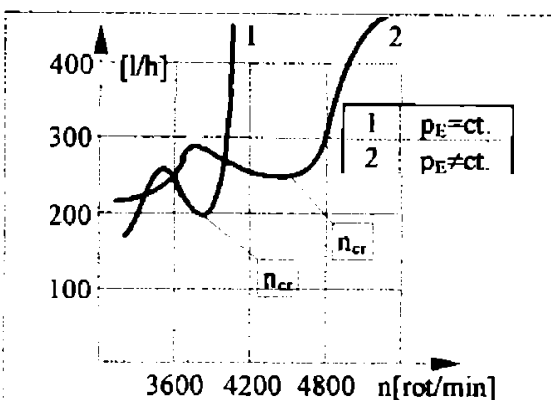


Fig. 1.7-4 Influența curbei de presiune asupra scăpării de gaze

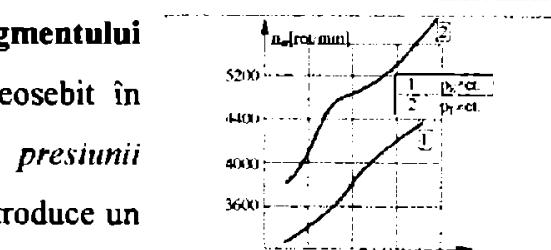
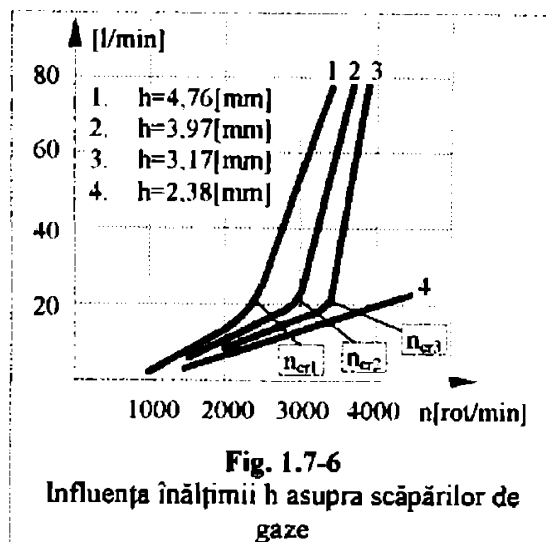


Fig. 1.7-5 Influența curbei de presiune asupra turației critice

### 1.7 Vibrația segmentului

fig. 1.7-4 și fig. 1.7-5 că turația critică a segmentului de presiune variabilă ( $p_E(\varphi) \neq \text{ct.}$ ) este sensibil mai mare ca segmentului de presiune constantă ( $p_E(\varphi) = \text{ct.}$ ) [45].

**Înălțimea segmentului h.** Segmentul de înălțime mai mică are mai puțin timp să pulsează mai rar și ca urmare păstrează mai mult timp contactul cu flancurile canalului din piston. Forța de frecare radială, dintre segment și flancul de contact, amortizează deplasarea radială. Din cauza reducerii înălțimii h, turația critică  $n_{cr}$  crește, fig. 1.7-6, până când vibrația este complet înlăturată [45].



**Modulul de elasticitate E.** Turația critică crește, tabelul 1.7-1, dacă se mărește modulul de elasticitate (uzual  $E = 120.000 \div 160.000 \text{ N/mm}^2$ ) [45].

De aceea există tendința de a utiliza materiale cu  $E = 160.000 \div 180.000 \text{ N/mm}^2$ , ceea ce permite totodată și mărirea lui  $p_E$ .

**Tabelul 1.7-1**

Felul segmentului		$n_{cr}$ [rot/min]
Segment rotund	Elasticitate normală	3500
	Elasticitate ridicată	3800
Segment nerotund	Elasticitate normală	4500
	Elasticitate ridicată	5000

**Alezajul cilindrului D** mărește turația critică atunci când are valori mai reduse, relația (1.7-3) [45].

### 1.8 FRECARA ȘI UNGEREA SEGMENTULUI

Datele experimentale acumulate în ultimii ani confirmă ipoteza că regimul de ungere al segmentului, în anumite condiții de funcționare, este hidrodinamic [32].

Pentru a obține un film de ulei sub presiune, capabil să preia presiunea de apăsare a segmentului, este necesar ca grosimea peliculei să varieze în lungul deplasării. În acest scop se confecționează segmentul cu suprafața laterală bombată, fig.1.8-1 [45].

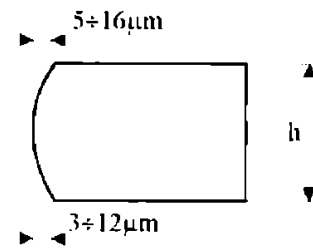


Fig. 1.8-1  
Forma suprafeței laterale

Experiența arată că atunci când suprafața laterală a segmentului este prelucrată cilindric, în timpul funcționării se produce o uzură variabilă pe înălțimea h, fig.1.8-2, care asigură peliculei de ulei forma de pană. Imaginea simplificată a ungerii hidrodinamice,

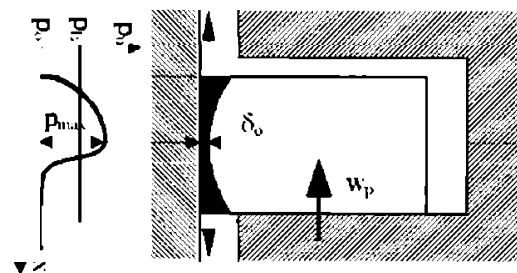


Fig. 1.8-2  
Modelul ungerii hidrodinamice

fig.1.8-2, definește grosimea minimă a peliculei de ulei  $\delta_0$  și a presiunii  $p_u$  în pelicula de ulei. În ipoteza că segmentul și oglinda cilindrului reprezintă două plăci plane de lungime infinită, care se deplasează una față de la alta cu o viteză relativă egală cu viteza pistonului  $w_p$ , se obține [45]:

$$\bar{p}_u = \frac{6 \cdot \eta_u}{\beta^2} \cdot \frac{w_p}{h} \cdot \lg \left( 1 + \frac{\beta \cdot h}{\delta_0} \right) \quad (1.8-1)$$

unde  $\bar{p}_u$   $\left[ \frac{N}{m^2} \right]$  - este presiunea medie din pelicula de ulei ;

$\eta_u$   $\left[ \frac{N \cdot s}{m^2} \right]$  - vâscozitatea dinamică a uleiului ;

$\beta$  [rad] - oblicitatea suprafeței laterale ;

$h$  [mm] - înălțimea axială ;

$\delta_0$  [mm] - jocul minim.

Relația (1.8-1) evidențiază principalii factori de care depinde presiunea pe care o poate prelua stratul de ulei.

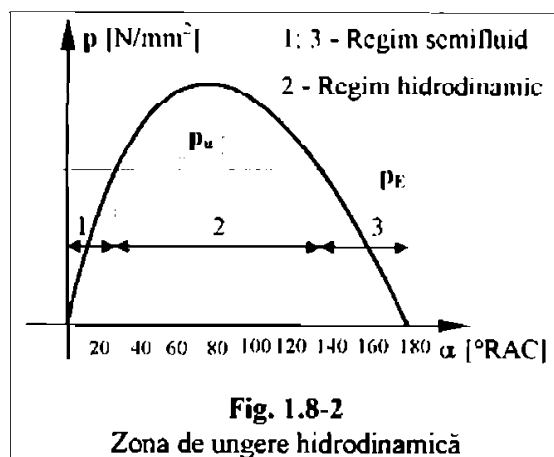
### 1.8 Frecarea și ungerea segmentului

Pentru  $\beta = 2^\circ$ ,  $h = 3 \text{ mm}$ ,  $\delta_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $\eta_u = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Ns/m}^2$  se prezintă variația presiunii  $p_u$  în funcție de unghiul de rotație  $\alpha$  al arborelui cotit, pentru o mașină cu piston cu turația  $n=500 \text{ rot/min}$  și cursa  $S = 80 \text{ mm}$ , fig. 1.8-3.

Deoarece se transcrie în aceeași diagramă și presiunea  $p_E$  este înțeles că ungerea hidrodinamică este posibilă în domeniile în care  $p_u > p_E$ . În apropierea punctelor moarte ( $0^\circ \text{RAC}$  și  $180^\circ \text{RAC}$ ), deoarece uleiul nu poate relua presiunea  $p_E$ , regimul de ungere devine semifluid.

Analizând condiția  $p_u > p_E$  se observă că extinderea porțiunii din cursa pistonului pe care se realizează ungerea hidrodinamică este posibilă prin [45]:

- micșorarea presiunii medii  $p_E$  (proiectarea unui segment moale),
- micșorarea înălțimii  $h$  a segmentului,
- reducerea înclinării  $\beta$  a suprafeței laterale a segmentului față de oglinda cilindrului,
- reducerea rugozității suprafețelor de contact, astfel încât să se poată realiza o valoare mică pentru grosimea minimă  $\delta_0$  a peliculei de ulei,
- utilizarea de uleiuri cu vâscozitate ridicată la temperatura de regim a cilindrului.



### 1.9 FORȚELE CARE ACȚIONEZĂ ASUPRA SEGMENTULUI

Se consideră segmentul în poziția de tranziție (când nu este în contact cu nici unul dintre flancurile canalului), fig.1.9-1 [45], [85].

Segmentul este supus acțiunii unor forțe care se grupează în două clase :

- forțe axiale și
- forțe radiale.

Pe direcția axială lucrează următoarele forțe :

1. **Forțele de presiune a gazelor** care acționează pe suprafața frontală superioară respectiv pe suprafața frontală inferioară și care dau o rezultantă axială  $F_{ag}$ ;

$$F_{ag} = [\pi \cdot (D - a) \cdot a] \cdot (p_1 - p_2) \quad (1.9-1)$$

Rezultanta  $F_{ag}$  își schimbă semnul în intervalul unui ciclu de lucru mai ales în cursa de admisie de la motoarele cu

aprindere prin scânteie nesupraalimentate și compresoare când presiunea  $p_1$  din cilindru este mai mică decât presiunea  $p_2$  de sub segment.

Când  $F_a$  își schimbă semnul, segmentul se deplasează axial între cele două flancuri pe distanța jocului axial  $\Delta a$ . Fenomenul de deplasare axială a segmentului se numește **ulsaia segmentului** și compromite etanșarea, întrerupe contactul dintre segment și flancul canalului iar gazele scapă prin secțiunea liberă oferită de segment, fig.1.9-2.

2. **Forța de frecare  $\pm F_{ar}$**  care lucrează pe fața laterală a segmentului (suprafața de rulare), provocată de presiunea  $p_E$  de apăsare elastică a segmentului și presiunea  $p_f$  din spatele segmentului.

$$F_{ar} = \mu_{\text{seg-cil}} \cdot \{ (\pi \cdot D \cdot h) \cdot p_E + [\pi \cdot (D - 2 \cdot a) \cdot h] \cdot p_f \} \quad [N] \quad (1.9-2)$$

Mărimea ei este variabilă, datorită presiunii  $p_f$  variabilă pe parcursul unui ciclu.

Sensul ei se schimbă odată cu schimbarea sensului de deplasare a pistonului.

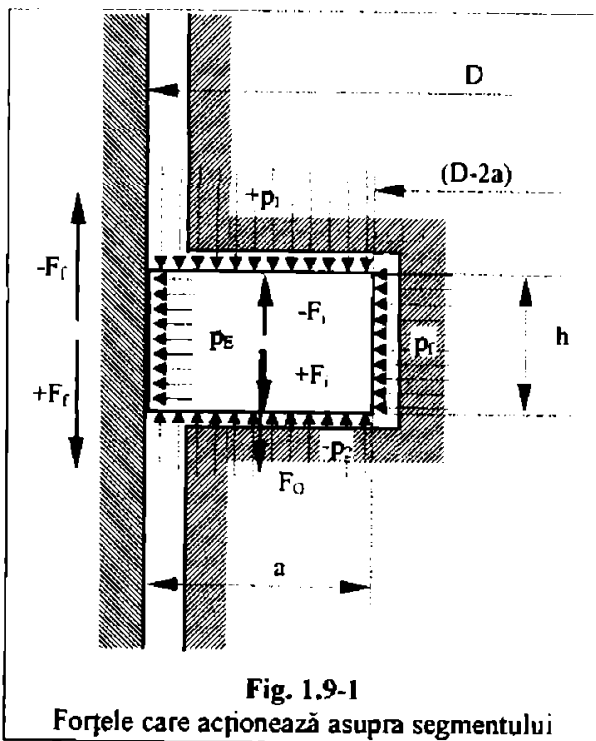


Fig. 1.9-1

Forțele care acționează asupra segmentului

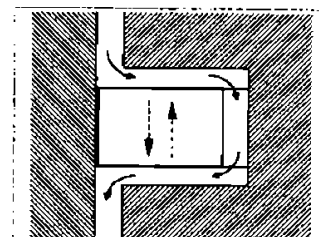


Fig. 1.9-2

Compromiterea etanșării

### 1.9 Forțele care acționează asupra segmentului

3. **Forța de inerție** a segmentului  $F_i$ , determinată în ipoteza că segmentul se deplasează cu o accelerație  $a_s$  egală cu a pistonului și, ca urmare, la rândul ei, variabilă ca mărime și sens.

Relația de calcul a forței de inerție este [45]:

$$F_i = m \cdot a_p \quad [\text{N}] \quad (1.9-3)$$

undc: 
$$m = \left[ \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot (D - 2a)^2}{4} \right] \cdot h \cdot \frac{\gamma}{g} \quad [\text{kg}] \quad (1.9-4)$$

masa segmentului ;  $\gamma$  [ $\text{N}/\text{mm}^3$ ] fiind greutatea specifică a materialului, iar  $g$  [ $\text{m}/\text{s}^2$ ] accelerația gravitațională.

$$a_p = \omega^2 \cdot R \cdot [\cos(\alpha_{\text{RAC}}) + \lambda \cdot \cos(2 \cdot \alpha_{\text{RAC}})] \quad \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (1.9-5)$$

accelerația pistonului ;  $\omega$  [ $\text{rad}/\text{s}$ ] viteza unghiulară a arborelui cotit,  $R$  [ $\text{mm}$ ] raza manivelei arborelui cotit,  $\alpha_{\text{RAC}}$  [ $\text{rad}$ ] unghiul de rotație al arborelui cotit,  $\lambda$  [-] raportul dintre lungimea bielei și cursa pistonului.

4. **Forța de greutate** a segmentului  $F_G$ , constantă ca mărime și sens ce se obține cu

relația : 
$$F_G = \left[ \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot (D - 2a)^2}{4} \right] \cdot h \cdot \gamma \quad [\text{N}] \quad (1.9-6)$$

#### Observații:

- Se consideră pozitive forțele axiale care acționează de sus în jos.
- Forța de inerție  $F_i$  va avea semnul +, în jumătatea inferioară a cursei pistonului crescând în cursa de coborâre de la zero, cât este la mijlocul cursei, până la valoarea maximă pozitivă în punctul mort exterior, după care, în cursa de urcare descrește din nou până la zero, cât este la mijlocul cursei. În mod analog forța de inerție va avea semnul -, în jumătatea superioară a cursei, valoarea maximă negativă fiind în punctul mort interior.
- Forța de frecare  $F_f$  are semnul - când pistonul este în cursa ascendentă, pe întreaga cursă și invers, are semnul + pe întreaga cursă descendentă.

**Rezultanta forțelor pe direcția axială ;**

$$F_a = \pm F_{ag} \pm F_{af} \pm F_i + F_G \quad [\text{N}] \quad (1.9-7)$$

menține, în general, segmentul pe flancul inferior, ceea ce asigură o eficiență înaltă la etanșare. Totuși,  $F_a$  își poate schimba sensul în intervalul unui ciclu, ceea ce este

### 1.9 Forțele care acționează asupra segmentului

frecvent, cu deosebire la motorul cu aprindere prin scânteie nesupraalimentat și la compresoare, în cursa de admisiune, când presiunea în cilindru este mai mică decât presiunea din spatele segmentului.

După direcția radială apar :

1. **Forța de presiune  $F_r$ , produsă de gazele infiltrate în spatele segmentului la presiunea  $p_r$  ;**

$$F_r = \pi \cdot (D - 2a) \cdot h \cdot p_r \quad [\text{N}] \quad (1.9-8)$$

2. **Forța  $F_E$ , produsă de presiunea de apăsare elastică a segmentului;**

$$F_E = \pi \cdot D \cdot h \cdot p_E \quad [\text{N}] \quad (1.9-9)$$

**Rezultanta forțelor pe direcția radială ;**

$$F_R = F_r + F_E = R_{\text{cil}} \quad [\text{N}] \quad (1.9-10)$$

este echilibrată de reacțiunea cilindrului.

Dacă se împarte relația (1.9-10) prin aria suprafeței laterale a segmentului, se obține:

$$p_s = p_E + p_f = p_E (1 + \beta) \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \quad (1.9-11)$$

unde :  $p_s$  [ $\text{N}/\text{m}^2$ ] – este presiunea totală de apăsare a segmentului pe cilindru,

$$\beta = p_r/p_E \quad [-].$$

În jurul punctului mort interior, spre sfârșitul comprimării și începutul destinderii, sarcina de etanșare a segmentului este maximă din cauza presiunilor ridicate din cilindru. Dacă  $\beta$  are valori ridicate ( $\beta = 5 \div 15$ ) se obține o valoare sporită a presiunii  $p_s$ , pe seama gazelor infiltrate în spatele segmentului, ceea ce este avantajos deoarece se poate reduce presiunea elastică de apăsare  $p_E$ .

Pe celelalte porțiuni ale ciclului, sarcina de etanșare fiind mai mică, se obține astfel o presiune  $p_s$  mai mică, deci o uzură mai redusă a cuplului segment-cilindru.

Aplicarea segmentului pe flanc și pe oglinda cilindrului fiind dependente de presiunea gazelor din jurul segmentului, se acordă o atenție deosebită cunoașterii presiunilor  $p_1$ ,  $p_2$  și  $p_r$  pe ciclu.

### 1.10 PRESIUNEA GAZELOR DIN JURUL SEGMENTULUI

Ansamblul segmentelor funcționează ca un labirint : spațiile dintre segmente servesc pentru destinderea gazelor și prelungesc drumul parcurs de ele, iar secțiunile reduse creează rezistențe gazodinamice mari. Efectul de labirint al ansamblului de segmente este ilustrat de variația presiunii în lungul regiunii port segment a pistonului (regiunea superioară a pistonului în care sunt practicate canalele pentru segmente), fig. 1.10-1 [45].

În spațiul din spatele primului segment, creat de jocul radial  $\Delta r$ ,

căderea de presiune este 25% din presiune  $p_1$ , de deasupra lui, considerată egală cu presiunea din cilindru  $p_{cil}$ , iar în spațiul de sub primul segment presiune  $p_2$  este de 75% din  $p_1$ .

Etanșarea incompletă este cauzată de imperfecțiunea contactului cu cilindrul și de rostul de dilatare de la capetele segmentului. Sarcina principală de etanșare ( $\cong \frac{1}{3}$  din  $p_1$ ) o preia întotdeauna primul segment.

Eficiența segmentelor următori este mai redusă în valori absolute, dar procentual apropiată de cea a primului segment ( $\cong 70\%$  după al doilea segment respectiv  $\cong 60\%$  după al treilea segment) motiv pentru care nu este neglijabilă.

Se consideră că eficiența de etanșare a unui sistem de segmente este normală dacă presiunea gazelor după ultimul segment este de 3...4% din presiunea  $p_1$ , iar volumul de gaze scăpate în spatele pistonului este cuprins între 0,2...2,0% din volumul de fluid proaspăt admis în cilindru. Dacă  $C_a$  este consumul orar de fluid proaspăt admis în cilindru, iar  $C_s$  debitul orar de gaze scăpate în spatele pistoanelor, eficiența sistemului de segmente este  $\eta_s = \frac{C_a - C_s}{C_a} \cdot 100$  [%] care se determină prin măsurători.

Valorile acceptate pentru o eficiență normală de etanșare a unui sistem de segmente este de :  $\eta_s = 0,990 \dots 0,998$  [%].

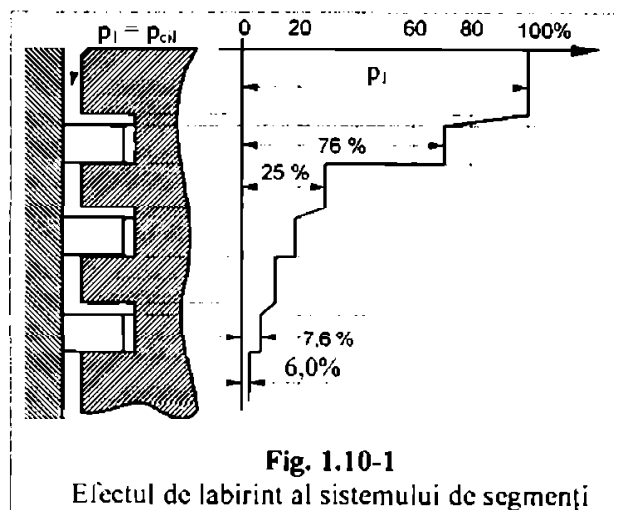


Fig. 1.10-1

Efectul de labirint al sistemului de segmente



## 1.11 DISTRIBUȚIA PRESIUNII PE PERIFERIA SEGMENTULUI

Inițial segmentii s-au confecționat pentru o distribuție constantă pe periferia lor. Aceștia au primit denumirea de **segmenti de presiune constantă**. Procesul tehnologic de fabricație a lor este simplu și ieftin. Semifabricatul obținut prin turnare are inițial formă cilindrică cu secțiunea transversală perfect rotundă. După prelucrarea, prin strunjire rotundă, până la diametrul  $D$  se taie în inele și apoi se taie rostul la valoarea  $f_m$  din stare montată și se deschide acest rost până la valoarea  $f_0$  din stare liberă folosind un dispozitiv ca în fig. 1.11-1 [33], [45], [84], [85].

Tensiunile interne create la deschiderea segmentului se fixează prin tratamentul termic numit **termofixare** sau **termosensibilizare**. La scoaterea segmentului de pe dispozitiv segmentul rămâne în stare liberă

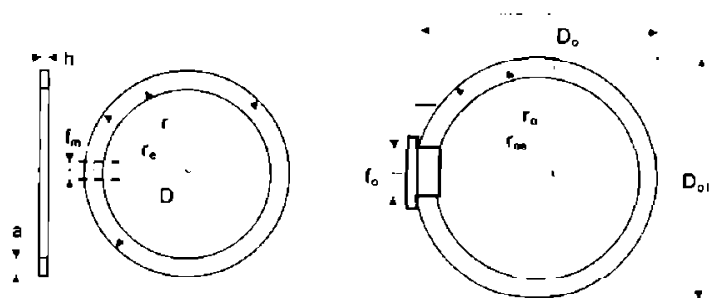


Fig. 1.11-1  
Procedeu de fabricație al segmentilor rotunzi

la un diametru  $D_0$  și  $D_{01}$  mai mari ca diametrul  $D$ . De la procesul tehnologic de fabricație sau de la modul de strunjire se atribuie acestor segmenti denumiri corespunzătoare: **segmenti termofixați** sau **segmenti rotunzi**.

Se poate confecționa segmentul cu și cu o distribuție de presiune variabilă în lungul periferiei.

În acest caz semifabricatul este tot de formă cilindrică dar după strunjire (prin copiere după camă) are în secțiunea transversală formă ovală, segmentii astfel obținuți putând denumirea de **segmenti ovali** sau **nerotunzi** - și se prelucrează numai prin copiere după o camă, fig.1.11-2. Procedeu este mai costisitor, dar asigură segmentului o eficiență și o durabilitate sporită.

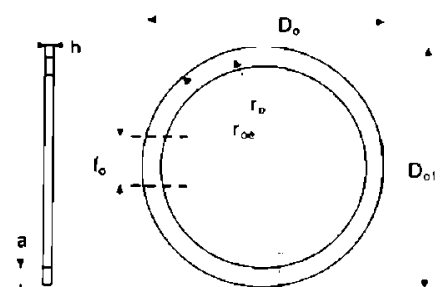


Fig. 1.11-2  
Procedeu de fabricație al segmentilor nerotunzi sau ovali

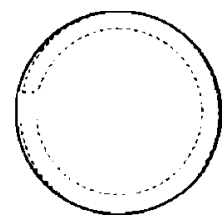


Fig. 1.11-3  
Uzura segmentului rotund termofixat

Experiența arată că segmentul de presiune constantă se

### 1.11 Distribuția presiunii pe periferie segmentului

uzează mai ales la capete, fig.1.11-3, unde acesta pierde contactul cu cilindru și etanșarea este compromisă [84].

Dacă se notează cu  $u_r$  uzura relativă a suprafeței laterale a segmentului ( $u_r = u/a$ ), iar cu  $p_r/p_s$  presiunea relativă dintre segment și cilindru după timpul de funcționare  $\tau$ , cele două mărimi au o variație specifică prezentată în fig.1.11-4a și b, de-a lungul periferiei segmentului (unghiul  $\psi$  precizează o secțiune oarecare a segmentului, în raport cu secțiunea aflată la capătul opus rostului). Se observă că, deși segmentul a avut inițial o repartitie uniformă de presiune, uzura

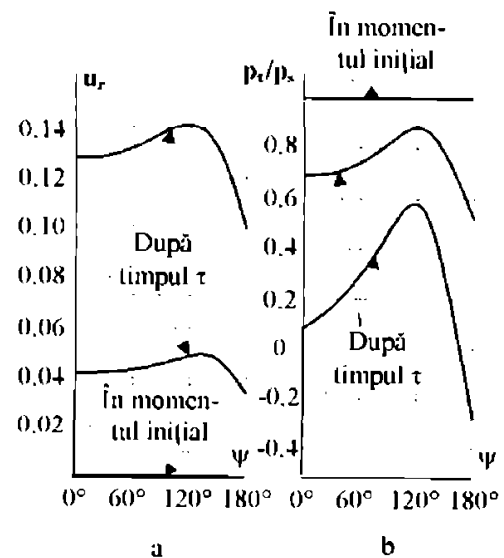


Fig. 1.11-4  
Uzura segmentului

lui a devenit diferită și a atins valoarea maximă între 120...135° fiind cu atât mai mare cu cât presiunea gazelor din spatele segmentului a fost mai mare. **Odată cu producerea neuniformă a uzurii segmentului, are loc o redistribuire a presiunii elastice care atinge valoarea cea mai mare acolo unde uzura este maximă**, în apropierea capetelor presiunea reală ia valori negative, ceea ce arată că zonele de lângă rost se desprind de pe cilindru. Astfel, repartitia de presiune se schimbă, uzura crește mai mult în regiunea situată la cca. 45° de capete unde și presiunea specifică este mai mare, deoarece rolul capetelor care nu se mai sprijină pe cilindru este preluat de secțiunile învecinate. Pornind de la aceste rezultate B.I. GHINȚBURG a propus ca repartitia inițială de presiune să fie corectată și anume să aibă valori reduse ale presiunii unde uzura a fost mare și invers, valori mărite unde uzura a fost redusă, fig. 1.11-5 [85].

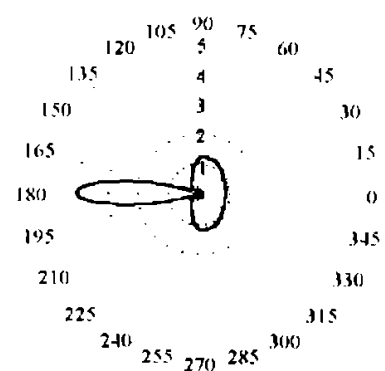


Fig. 1.11-5  
Curba de presiune  $p(\psi)$  corectată

Încercarea experimentală a segmentelor de presiune variabilă s-a încheiat cu un succes deosebit : durabilitatea segmentului (intervalul în care segmentul conservă eficiența inițială de etanșare) a crescut de câteva ori. Tehnologia de copiere nefiind

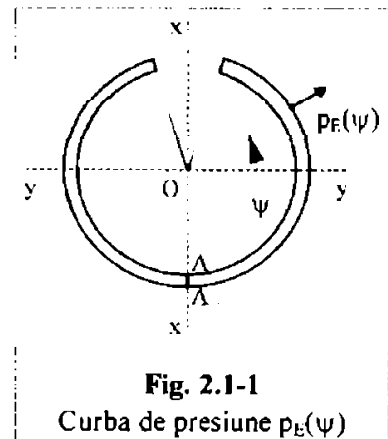
## 2. CURBE DE PRESIUNE

### 2.1 EXPRESIA DISTRIBUȚIEI PRESIUNII RADIALE

Distribuția presiuni elastice radiale pe periferia segmentului, denumită pe scurt **curba presiuni** se poate reprezenta cel mai comod și sugestiv într-un sistem de coordonate „polare” : presiune-unghi (fig.2.1-1), [45], [85].

Datorită simetriei se alege :

- drept axă de referință  $x-x$  ( $-x-x$  - simetrie) care trece prin centrul O și prin mijlocul rostului de dilatare și
- drept secțiune de referință ( $\psi$ ) se alege secțiunea situată în partea opusă rostului de dilatare (A-A).



**Fig. 2.1-1**  
Curba de presiune  $p_E(\psi)$

Presiunea într-o secțiune oarecare aflată la unghiul  $\psi$ , dezvoltată de elasticitatea proprie a segmentului, se notează  $p_E(\psi)$ .

Din cauza formei complicate a curbei de presiune legea de variație a presiunii radiale a segmentului se exprimă analitic cel mai frecvent prin intermediul seriilor trigonometrice. Aproximarea distribuției de presiune prin funcții trigonometrice conduce la o analiză armonică a distribuției, [33], [37], [45], [85].

Analiza armonică a curbei de presiune este posibilă întrucât curba reprezintă o funcție periodică de perioadă  $2\pi$ , unghiul  $\psi$  variind, în raport cu secțiunea de referință, de la  $-\pi$  la  $+\pi$ .

Expresia cea mai generală a unei funcții periodice armonice este, [45], [85] :

$$p_E(\psi) = p_0 \cdot \cos(0 \cdot \psi) + p_1 \cdot \cos(1 \cdot \psi) + p_2 \cdot \cos(2 \cdot \psi) + \dots + p_n \cdot \cos(n \cdot \psi) + q_0 \cdot \sin(0 \cdot \psi) + q_1 \cdot \sin(1 \cdot \psi) + q_2 \cdot \sin(2 \cdot \psi) + \dots + q_n \cdot \sin(n \cdot \psi) \quad (2.1-1)$$

sau, într-o formă condensată relația de mai sus se poate scrie :

$$p_{E\psi} = \sum_{\alpha=0}^{n-n} [p_\alpha \cdot \cos(\alpha \cdot \psi)] + \sum_{\beta=0}^{\beta-n} [q_\beta \cdot \sin(\beta \cdot \psi)] \quad (2.1-1a)$$

Din cauza simetriei curbei de presiune față de axa  $x-x$  rezultă, [37], [45], [85] :

$$p_E(+\psi) = p_E(-\psi) \quad (2.1-2)$$

adică :  $\sum_{\beta=0}^{\beta-n} q_\beta \cdot \sin(\beta \cdot \psi) = -\sum_{\beta=0}^{\beta-n} q_\beta \cdot \sin(\beta \cdot \psi)$  deoarece  $\sin[n \cdot (-\psi)] = -\sin(n \cdot \psi)$

## 2.1 Expresia distribuției de presiune

cea ce implică anularea sumelor sinusoidale, adică :

$$\boxed{p_0 = p_1 = p_2 = \dots = p_n} \quad (2.1-3)$$

În aceste condiții, expresia curbei de presiune devine :

$$p_E(\psi) = p_0 + p_1 \cos(1 \cdot \psi) + p_2 \cos(2 \cdot \psi) + p_n \cos(n \cdot \psi) \quad (2.1-4)$$

Expresia (2.1-4) este întâlnită în majoritatea lucrărilor de specialitate referitoare la segmente [32], [33], [45], [75], [85], în schimb pentru prelucrarea computerizată se poate folosi forma (2.1-4a),

$$p_E(\psi) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} p_{\alpha} \cdot \cos(\alpha \cdot \psi) \quad (2.1-4a)$$

Dacă  $d\psi$  este unghiul elementar și  $(R \cdot d\psi)$ , arcul elementar, fig. 2.1-2, rezultă că forța elementară de presiune  $dF_{\psi}$ , dezvoltă pe o suprafață laterală elementară  $(h \cdot R \cdot d\psi)$  va fi :

$$dF_{\psi} = p_E(\psi) \cdot h \cdot R \cdot d\psi \quad (2.1-5)$$

Pentru ca segmentul să fie în echilibru sub acțiunea presiunii ce se exercită asupra lui, este necesar ca rezultanta tuturor proiecțiilor forțelor elementare de presiune pe cele

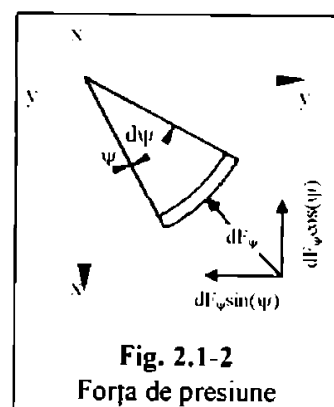


Fig. 2.1-2  
Forța de presiune

două axe să fie nulă. Astfel, condiția de echilibru după axa x-x se exprimă astfel [33], [37], [45], [85]. :

$$\sum dF_x = \int_x dF_{\psi} \cdot \cos(\psi) = \int_x p_E(\psi) \cdot h \cdot R \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi = 0 \quad (2.1-6)$$

Substituind pe  $p_E(\psi)$  din (2.1-4) și împărțind cu  $h \cdot R \neq 0$ , rezultă :

$$\begin{aligned} \sum dF_x = p_0 \cdot \int_x \cos(\psi) \cdot d\psi + p_1 \cdot \int_x \cos(1 \cdot \psi) \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi + \\ + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=n} p_{\alpha} \cdot \left( \int_x \cos(\alpha \cdot \psi) \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi \right) \end{aligned} \quad (2.1-7)$$

Întrucât ,

$$\int_x \cos(\psi) \cdot d\psi = 0, \quad \int_x \cos^2(\psi) \cdot d\psi = \frac{\pi}{2}, \quad \int_x \cos(n \cdot \psi) \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi = 0$$

Se observă că este satisfăcută condiția de echilibru dacă termenul în  $\cos(\psi)$  din expresia rezultantei după axa x-x este nul, ceea ce implică :

$$\boxed{p_1 = 0 \quad \left[ \frac{N}{m^2} \right]} \quad (2.1-8)$$

## 2.1 Expresia distribuției de presiune

În acest caz funcția de presiune ia forma :

$$p_E(\psi) = p_0 + p_2 \cos(2 \cdot \psi) + p_3 \cos(3 \cdot \psi) + \dots + p_n \cos(n \cdot \psi). \quad (2.1-9)$$

forma condensată (2.1-4a) păstrându-și valabilitatea :

$$p_E(\psi) = p_0 + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=n} p_\alpha \cos(\alpha \cdot \psi) \quad (2.1-10)$$

unde  $p_\alpha$ ,  $\alpha = 2 \dots n$  sunt amplitudinile armonicelor funcției de presiune.

Condiția de echilibru după axa y-y se exprimă astfel [33], [37], [45], [85] :

$$\sum dF_y = \int_{-\pi}^{\pi} dF_\psi \cdot \sin(\psi) = \int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot h \cdot R \cdot \sin(\psi) \cdot d\psi = 0 \quad (2.1-11)$$

Substituind pe  $p_E(\psi)$  din (2.1-10) și simplificând cu  $h \cdot R \neq 0$  rezultă :

$$\sum dF_y = p_0 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\psi) \cdot d\psi + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=n} p_\alpha \cdot \left( \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\psi) \cdot \cos(\alpha \cdot \psi) \cdot d\psi \right) \text{ și întrucât :}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\psi) \cdot d\psi = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\psi) \cdot \cos(n \cdot \psi) \cdot d\psi = 0$$

toate integralele se anulează și condiția este satisfăcută.

Pentru a defini presiunea  $p_0$  se calculează **presiunea medie elastică**  $p_E$  :

$$p_E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p_E(\psi) \cdot d\psi = \frac{1}{\pi} \left[ p_0 \cdot \int_0^{\pi} d\psi + p_2 \cdot \int_0^{\pi} \cos(2 \cdot \psi) \cdot d\psi + \dots + p_n \cdot \int_0^{\pi} \cos(n \cdot \psi) \cdot d\psi \right] \quad (2.1-12)$$

Întrucât toate integralele din paranteză cu excepția celei dintâi se anulează,

rezultă: 
$$p_E = p_0 \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad 2.1-12a$$

adică, termenul inițial din seria trigonometrică a presiuni elastice radiale este tocmai presiunea medie pe care o dezvoltă segmentul asupra cilindrului.

Expresia generală a curbei de presiune exprimată prin serii trigonometrice (Fourier), folosită în cazul segmentilor, devine [37], [45], [85] :

$$p_E(\psi) = p_E \cdot \left[ 1 + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=n} \frac{p_\alpha}{p_E} \cdot \cos(\alpha \cdot \psi) \right] \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (2.1-13)$$

unde :  $\frac{p_\alpha}{p_E}$  [-] sunt **coeficienții adimensionali** ai curbei de presiune.

În cazul segmentilor de presiune constantă coeficienții adimensionali ai curbei generale sunt nuli, în acest caz forma expresiei curbei fiind următoarea :

$$p_E(\psi) = p_E = \text{const.} \quad (2.1-14)$$

## CONCLUZII

O curbă de presiune pentru segmenti trebuie să satisfacă următoarele condiții :

a) Condiția de echilibru după axa x-x ce trece prin mijlocul rostului :

$$\sum dF_x = \int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi = 0 \quad (2.1-6)$$

ceea ce, pentru o aproximare cu serii trigonometrice (Fourier) ia forma :

$$p_E(\psi) = p_E \cdot \left[ 1 + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=n} \frac{p_\alpha}{p_E} \cdot \cos(\alpha \cdot \psi) \right] \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (2.1-13)$$

pentru că :

$$p_1 = 0 \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (2.1-8)$$

b) Condiția de echilibru după axa y-y ce trece prin mijlocul rostului :

$$\sum dF_y = \int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot \sin(\psi) \cdot d\psi = 0 \quad (2.1-11)$$

c) Valoarea medie a presiunii elastice se calculează cu formula :

$$p_E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p_E(\psi) \cdot d\psi \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (2.1-12)$$

## 2.2 CURBE DE PRESIUNE

Prin **curba de presiune** se înțelege modul cum variază presiunea elastică pe periferia segmentului. Din punct de vedere al variației presiunii elastice pe periferia segmentului se pot distinge două categorii mari de curbe de presiune [37], [45], [85] :

- curbe cu repartitie constantă** a presiunii elastice pe periferia segmentului  
 $p_E(\psi) = \text{const.}$ , fig.2.2-1, întâlnite la segmente rotunzi
- curbe cu repartitie variabilă** a presiunii elastice pe periferia segmentului  
 $p_E(\psi) \neq \text{const.}$ , fig.2.2-2 în formă de „măr” și fig.2.2-3 în formă de „pară”, întâlnite la segmente ovali.

Curba de presiune constantă a apărut din considerentul teoretic că dacă presiunea de apăsare a segmentului pe oglinda cilindrului este constantă atunci și uzura pe suprafața de frecare va fi constantă și din motivul tehnologic, că la apariția mașinilor cu piston nu exista posibilitatea tehnologică de strunjire ovală cu precizie suficientă [45], [85].

Rezultatele experimentale, susținute de datele din exploatare, au demonstrat însă că uzura este inegală pe periferia segmentului variind în limite foarte mari ceea ce a condus la ideea că ar trebui corectată repartitia presiunii elastice pe periferia segmentului rezultând segmente cu repartitie variabilă a presiunii.

Prin curbele cu presiune variabilă, propuse

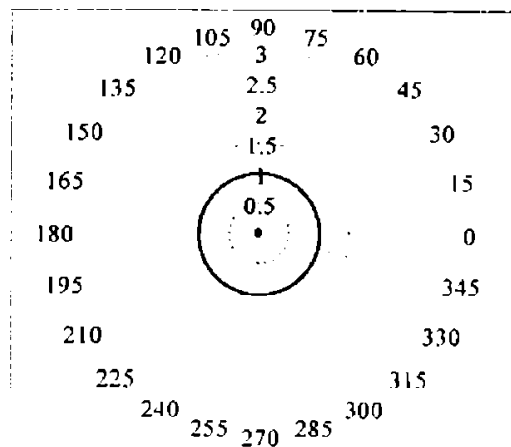


Fig. 2.2-1

Curba de presiune constantă

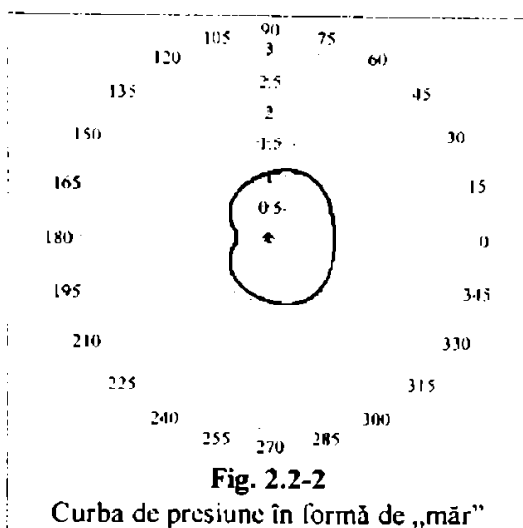


Fig. 2.2-2

Curba de presiune în formă de „măr”

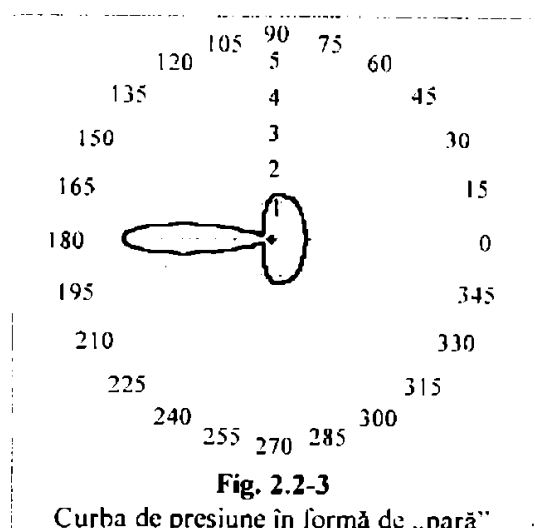


Fig. 2.2-3

Curba de presiune în formă de „pară”

## 2.2 Curbe de presiune

pentru segmenti, se urmărește ca presiunea inițială a segmentului să nu mai fie constantă ci să fie corectată.

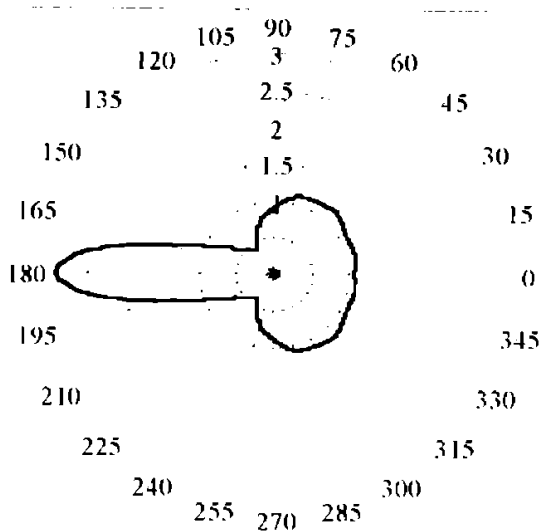
Prin modificările presiunii, inițial constante, fig. 2.2-1, fabricile de segmenti au trecut la folosirea diverselor curbe de variație a presiunii, măbind valoarea presiunii la unghiurile unde uzura era mică și diminuând valoarea presiunii acolo unde ea era mare [37], [45], [75], [85]. Astfel au apărut două categorii de curbe de presiune variabilă funcție de forma cilindrului în care lucrează segmentul :

- 1 Curbe cu **repartiție variabilă de formă „măr”**, fig. 2.2-2, întâlnite la mașinile cu piston la care cilindrul are practicate diverse orificii (ferestrele de baleiaj la motoare Diesel în doi timpi, respectiv ferestrele de aspirație și refulare la unele pompe cu piston), care au presiunea la capetele rostului mult redusă pentru a nu permite intrarea acestora în orificiile din cilindru.
- 2 Curbe cu **repartiție variabilă de formă „pară”**, fig. 2.2-3, întâlnite la mașinile cu piston la care cilindrul nu are practicate orificii (majoritatea pompelor cu piston, compresoarele, motoare Diesel în patru timpi și motoarele cu aprindere prin scânteie), la care presiunea la capetele rostului este mărită, deoarece cilindrul nu are orificii în care capetele rostului pot intra.

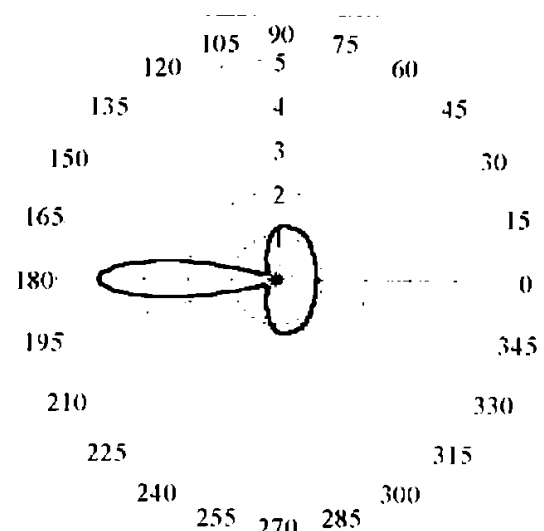


## 2.2 Curbe de presiune

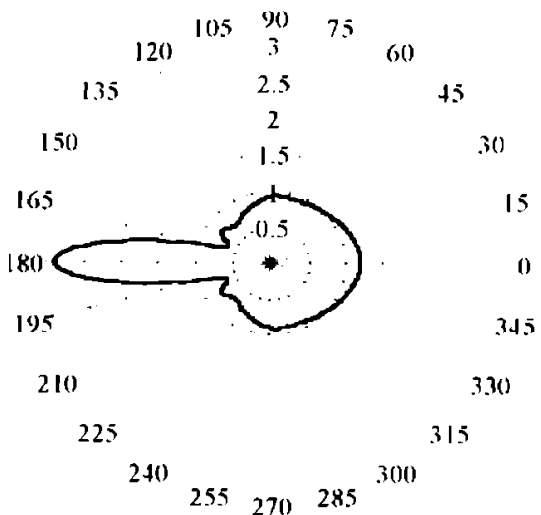
Cele mai utilizate curbe de presiune recomandate motoarelor în patru timpi sunt prezentate în fig. 2.2-4 ... 2.2-7, [45], [85].



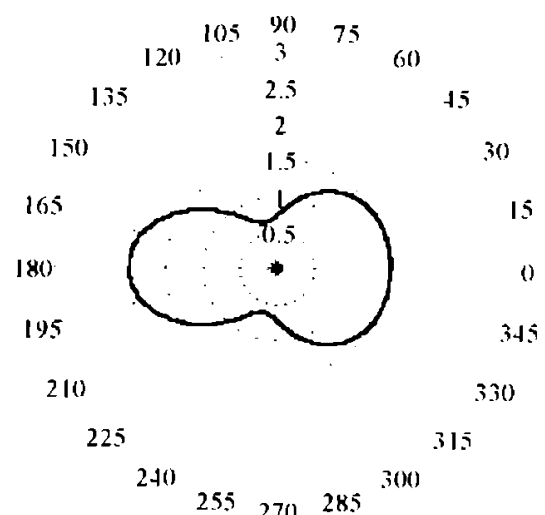
**Fig. 2.2-4**  
Curbă de presiune



**Fig. 2.2-5**  
Curbă de presiune



**Fig. 2.2-6**  
Curbă de presiune



**Fig. 2.2-7**  
Curbă de presiune

## 2.3 Program de calcul al valorilor presiunii elastice $p_E(\psi)$

### 2.3 PROGRAM DE CALCUL AL VALORILOR PRESIUNII ELASTICE $p_E(\psi)$

Pentru curba de presiune de formă „pară”, fig. 2.2-4, [45, fig.41], [85, fig.12,74a], se cunosc :

- Valorile coeficienților adimensionali  $p_\alpha/p_E$ , din expresia curbei de presiune (2.1-13)

**Tabelul 2.2-1**

Curba de presiune	$p_2/p_E$	$p_3/p_E$	$p_4/p_E$	$p_5/p_E$	$p_6/p_E$	$p_7/p_E$	$p_8/p_E$	$p_9/p_E$	$p_{10}/p_E$	$p_{11}/p_E$	$p_{12}/p_E$
[45, fig.41]	0.3029	-0.4355	0.2877	-0.1963	0.1412	-0.1087	0.0970	-0.0936	0.0797	-0.0711	0.01413
[85, fig.12.74a]	0.3029	-0.4355	0.2877	-0.1963	0.1412	-0.1087	0.0970	-0.0936	0.0797	-0.0711	0.01413

- Valorile presiunii elastice a segmentului  $p_E(\psi)$ , la unghiurile  $\psi = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$

**Tabelul 2.2-2**

Curba de presiune	Unghiul $\psi$ [°]						
	0	30	60	90	120	150	180
[45, fig. 41]	1.051	1.047	1.137	0.896	0.454	0.670	2.861
[85, fig.12.74a]	1.051	1.047	1.137	0.896	0.454	0.670	2.861

În acest caz, cu ajutorul coeficienților adimensionali  $p_\alpha/p_E$  prezentați în tabelul 2.2-1, pe baza relației (2.2-13), curba de presiune  $p_E(\psi)$  are expresia :

$$p_E(\psi) = p_E \cdot \left( \begin{array}{l} 1 + 0,3092 \cdot \cos(2 \cdot \psi) - 0,4355 \cdot \cos(3 \cdot \psi) + \\ + 0,2877 \cdot \cos(4 \cdot \psi) - 0,1963 \cdot \cos(5 \cdot \psi) + 0,1412 \cdot \cos(6 \cdot \psi) - \\ - 0,1087 \cdot \cos(7 \cdot \psi) + 0,0970 \cdot \cos(8 \cdot \psi) - 0,0936 \cdot \cos(9 \cdot \psi) + \\ + 0,0797 \cdot \cos(10 \cdot \psi) - 0,0711 \cdot \cos(11 \cdot \psi) + 0,01413 \cdot \cos(12 \cdot \psi) \end{array} \right)$$

pe baza căreia se pot calcula valorile presiunii elastice la orice unghi  $\psi$ .

Cu ajutorul programului „Detpres.mcd” realizat cu ajutorul soft-ului MathCAD 7 Profesional s-au calculat următoarele valori ale presiunii elastice  $p_E(\psi)$  :

### 2.3 Program de calcul al valorilor presiunii elastice $p_E(\psi)$

#### Determinarea presiunii elastice $p_E(\psi)$ pentru $\psi=0, 15, 30, \dots, 180$ grade

Din datele bibliografice tabelul 2.2-1 se cunosc pentru distributia din fig. 2.2-4 :

nr. de armonici - valorile coeficientilor adimensionali  $\lambda_i = p_{\alpha}/p_E$  - presiunea elastica  $p_E(\psi)$  raportata la valoarea presiunii medii  $p_E$  se noteaza cu  $p_{E,specif}(\psi)$ , relatia (2.2-13) facotrul din paranteza ;

$i = 2..12$	$i$	$\lambda_i$
	2	0.3092
	3	0.4355
	4	0.2877
	5	0.1963
	6	0.1412
	7	0.1087
	8	0.0970
	9	0.0936
	10	0.0797
	11	0.0711
	12	0.01413

$$p_{E,specif}(\psi) = 1 - \sum_{i=2}^{12} \lambda_i \cdot \cos\left(i \cdot \psi \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

- valorile presiunii elastice specifice  $p_{E,specif}(\psi)$  pentru  $\psi = 0, 30, 60, \dots, 180$  grade

$j = 0..6$	$\psi_j = j \cdot 30$	$p_{E,specif,\psi_j} = p_{E,specif}(\psi_j)$	$p_{E,specif,\psi} =$
	0		1.0237
	30		1.0776
	60		1.1096
	90		0.8687
	120		0.4275
	150		0.6725
	180		2.8341

- pentru determinarea presiunii medii  $p_E$  valorile  $p_E(\psi)$  din literatura de specialitate

trebuie impartite cu valorile  $p_{E,specif}(\psi)$ , calculate anterior,

$j = 0..6$	$p_{E,\psi_j}$	$p_{E_j} = \frac{p_{E,\psi_j}}{p_{E,specif,\psi_j}}$	$p_E =$
	1.051		1.0266
	1.047		0.9716
	1.137		1.0247
	0.896		1.0314
	0.454		1.062
	0.670		0.9963
	2.861		1.0095

## 2.3 Program de calcul al valorilor presiunii elastice $p_E(\psi)$

- considerand valoarea de la  $\psi = 30$  adevarata ;  $p_E = 1.0266$

$$p_E(\psi) = p_E \cdot \left( 1 + \sum_{i=2}^{12} \lambda_i \cdot \cos\left(i \cdot \psi \cdot \frac{\pi}{180}\right) \right)$$

- valorile presiunii elastice  $p(\psi)$  pentru  $\psi = 0, 15, 30, \dots, 180$  grade sunt :

j	0..12	$\psi_j = j \cdot 15$	$p_{E,\psi_j}$	$p_{E,\psi_j}$	$\psi =$	$p_{E,\psi} =$
		0				1.0510
		15				1.1131
		30				1.1063
		45				1.1797
		60				1.1391
		75				1.0862
		90				0.8918
		105				0.7257
		120				0.4389
		135				0.4529
		150				0.6904
		165				1.5150
		180				2.9095

### Conditile de echilibru static

- dupa axa x-x

$$\int_{\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot \cos(\psi) d\psi = 0.006167$$

- dupa axa y-y

$$\int_{\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot \sin(\psi) d\psi = 0.000$$

Curba de presiune	Unghiul $\psi$ [°]						
	0	30	60	90	120	150	180
[45, fig. 41], [85, fig.12.74a]	1.051	1.047	1.137	0.896	0.454	0.670	2.861
Calculată (Detpres.mcd)	1.0510	1.1063	1.1391	0.8918	0.4389	0.6904	2.9095
Eroarea [%]	0.00	-5.66	0.18	0.47	3.33	-3.04	-1.70

Comparând rezultatele din tabelul 2.2-3 se observă că valorile corespunzătoare unghiurilor de 30°, 120°, și 150° nu corespund cu cele din literatura de specialitate, mai mult, condiția de echilibru după axa x-x (2.1-6) nefiind îndeplinită :

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot h \cdot R \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi = 0,006167 \neq 0$$

### 2.3 Program de calcul al valorilor presiunii elastice $p_E(\psi)$

Pentru curba de presiune de formă „pară” [45,fig.42], [85,fig.12,74b], fig. 2.2-5, se cunosc :

- Valorile coeficienților adimensionali  $p_\alpha/p_E$ , din expresia curbei de presiune (2.1-13)

**Tabelul 2.2-4**

Curba de presiune	$p_2/p_E$	$p_3/p_E$	$p_4/p_E$	$p_5/p_E$	$p_6/p_E$	$p_7/p_E$	$p_8/p_E$	$p_9/p_E$	$p_{10}/p_E$	$p_{11}/p_E$	$p_{12}/p_E$
[45, fig.42]	0.205	-0.571	0.472	-0.322	0.279	-0.267	0.256	-0.214	0.187	-0.177	0.094
[85, fig.12.74b]	0.205	-0.571	0.472	-0.322	0.279	-0.267	0.256	-0.214	0.178	-0.177	0.094

- Valorile presiunii elastice a segmentului  $p_E(\psi)$ , la unghiurile  $\psi = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$

**Tabelul 2.2-5**

Curba de presiune	Unghiul $\psi$ [°]						
	0	30	60	90	120	150	180
[45, fig. 42]	0.933	1.000	1.218	1.160	0.416	0.286	4.035
[85, fig.12.74b]	0.933	1.000	1.218	1.160	0.416	0.286	4.035

În acest caz curba de presiune are expresia :

$$p_E(\psi) = p_E \cdot \left( \begin{array}{l} 1 + 0,205 \cdot \cos(2 \cdot \psi) - 0,571 \cdot \cos(3 \cdot \psi) + \\ + 0,472 \cdot \cos(4 \cdot \psi) - 0,322 \cdot \cos(5 \cdot \psi) + 0,279 \cdot \cos(6 \cdot \psi) - \\ - 0,267 \cdot \cos(7 \cdot \psi) + 0,256 \cdot \cos(8 \cdot \psi) - 0,214 \cdot \cos(9 \cdot \psi) + \\ + 0,178 \cdot \cos(10 \cdot \psi) - 0,177 \cdot \cos(11 \cdot \psi) + 0,094 \cdot \cos(12 \cdot \psi) \end{array} \right)$$

pe baza căreia se pot calcula valorile presiunii elastice la orice unghi  $\psi$ .

Cu ajutorul programului „Detpres.mcd” realizat cu ajutorul soft-ului MathCAD 7 Profesional s-au calculat următoarele valori ale presiunii elastice  $p_E(\psi)$  :

### 2.3 Program de calcul al valorilor presiunii elastice $p_E(\psi)$

#### Determinarea presiunii elastice $p_E(\psi)$ pentru $\psi=0, 15, 30, \dots, 180$ grade

Din datele bibliografice tabelul 2.2-4 se cunosc pentru distributia din fig. 2.2-5 :

nr. de armonici - valorile coeficientilor adimensionali  $\lambda_i = p_{\alpha}/p_E$  - presiunea elastica  $p_E(\psi)$  raportata la valoarea presiunii medii  $p_E$  se noteaza cu  $p_{E,specif}(\psi)$ , relatia (2.2-13) facotrul din paranteza ;

$i = 2..12$	$i$	$\lambda_i$
	2	0.205
	3	0.571
	4	0.472
	5	0.322
	6	0.279
	7	0.267
	8	0.256
	9	0.214
	10	0.178
	11	0.177
	12	0.094

$$p_{E,specif}(\psi) = 1 + \sum_{i=2}^{12} \lambda_i \cdot \cos i \cdot \psi \cdot \frac{\pi}{180}$$

- valorile presiunii elastice specifice  $p_{E,specif}(\psi)$  pentru  $\psi = 0, 30, 60, \dots, 180$  grade

$j = 0..6$	$\psi =$	$p_{E,specif}(\psi_j)$
	0	0.9330
	30	0.9993
	60	1.2195
	90	1.1600
	120	0.4155
	150	0.2857
	180	4.0350

- pentru determinarea presiunii medii  $p_E$  valorile  $p_E(\psi)$  din literatura de specialitate

trebuie impartite cu valorile  $p_{E,specif}(\psi)$ , calculate anterior,

$j = 0..6$	$p_E(\psi_j)$	$p_E = \frac{p_E(\psi_j)}{p_{E,specif}(\psi_j)}$
	0.933	1
	1.000	1.0007
	1.218	0.9988
	1.160	1
	0.416	1.0012
	0.286	1.0011
	4.035	1

### 2.3 Program de calcul al valorilor presiunii elastice $p_E(\psi)$

- considerand valoarea de la  $\psi = 30$  adevarata ;  $p_E = 1.000$

$$p_E(\psi) = p_E \cdot \left( 1 + \sum_{i=2}^{12} \lambda_i \cdot \cos\left(i \cdot \psi \cdot \frac{\pi}{180}\right) \right)$$

- valorile presiunii elastice  $p(\psi)$  pentru  $\psi = 0, 15, 30, \dots, 180$  grade sunt :

$j = 0..12$	$\psi_j = j \cdot 15$	$p_{E,\psi_j} = p_E(\psi_j)$	$\psi =$	$p_{E,\psi} =$
			0	0.9330
			15	0.9417
			30	0.9993
			45	1.1065
			60	1.2195
			75	1.2357
			90	1.1600
			105	0.7455
			120	0.4155
			135	0.2735
			150	0.2857
			165	1.1331
			180	4.0350

### Conditile de echilibru static

- dupa axa x-x

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot \cos(\psi) d\psi = 0.00199$$

- dupa axa y-y

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot \sin(\psi) d\psi = 0.000$$



Curba de presiune	Unghiul $\psi$ [°]						
	0	30	60	90	120	150	180
[45, fig. 42], [85, fig.12.74b]	0.933	1.000	1.218	1.160	0.416	0.286	4.035
Calculată (Detpres.mcd)	0,933	0,9993	1.2195	1.600	0.4155	0.2857	4.035
Eroarea [%]	0,00	0,07	0,12	0,00	0,12	0,10	0,00

Comparând rezultatele din tabelul 2.2-6 se observă că valorile tuturor unghiurilor corespund cu cele din literatura de specialitate, dar condiția de echilibru după axa x-x (2.1-6) nefiind îndeplinită :

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot h \cdot R \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi = 0,00199 \neq 0$$

### 2.3 Program de calcul al valorilor presiunii elastice $p_E(\psi)$

Pentru curba de presiune de formă „pară” [45, fig.43], [85, fig.12,74c], fig. 2.2-6, se cunosc :

- Valorile coeficienților adimensionali  $p_\alpha/p_E$ , din expresia curbei de presiune (2.1-13)

**Tabelul 2.2-7**

Curba de presiune	$p_2/p_E$	$p_3/p_E$	$p_4/p_E$	$p_5/p_E$	$p_6/p_E$	$p_7/p_E$	$p_8/p_E$	$p_9/p_E$	$p_{10}/p_E$	$p_{11}/p_E$	$p_{12}/p_E$
[45, fig.43]	0.2549	-0.1940	0.2431	-0.1846	0.1666	-0.1559	0.1589	-0.1487	0.1460	-0.1478	0.0760
[85, fig.12.74c]	0.2549	-0.1940	0.2431	-0.1846	0.1666	-0.1599	0.1589	-0.1487	0.1460	-0.1478	0.0760

- Valorile presiunii elastice a segmentului  $p_E(\psi)$ , la unghiurile  $\psi = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$

**Tabelul 2.2-8**

Curba de presiune	Unghiul $\psi$ [°]						
	0	30	60	90	120	150	180
[45, fig. 43]	1.24	1.08	0.94	0.91	0.72	0.72	<u>2.84</u>
[85, fig.12.74c]	1.24	1.08	0.94	0.91	0.72	0.72	<u>0.84</u>

În acest caz curba de presiune are expresia :

$$p_E(\psi) = p_E \cdot \left( \begin{array}{l} 1 + 0,2549 \cdot \cos(2 \cdot \psi) - 0,1940 \cdot \cos(3 \cdot \psi) + \\ + 0,2431 \cdot \cos(4 \cdot \psi) - 0,1846 \cdot \cos(5 \cdot \psi) + 0,1666 \cdot \cos(6 \cdot \psi) - \\ - 0,1599 \cdot \cos(7 \cdot \psi) + 0,1589 \cdot \cos(8 \cdot \psi) - 0,1487 \cdot \cos(9 \cdot \psi) + \\ + 0,1460 \cdot \cos(10 \cdot \psi) - 0,1478 \cdot \cos(11 \cdot \psi) + 0,0760 \cdot \cos(12 \cdot \psi) \end{array} \right)$$

pe baza căreia se pot calcula valorile presiunii elastice la orice unghi  $\psi$ .

Cu ajutorul programului „Detpres.mcd” realizat cu ajutorul soft-ului MathCAD 7 Profesional s-au calculat următoarele valori ale presiunii elastice  $p_E(\psi)$  :

### 2.3 Program de calcul al valorilor presiunii elastice $p_E(\psi)$

#### Determinarea presiunii elastice $p_E(\psi)$ pentru $\psi = 0, 15, 30, \dots, 180$ grade

Din datele bibliografice tabelul 2.2-7 se cunosc pentru distributia din fig. 2.2-6 :

nr. de armonici	- valorile coeficientilor adimensionali $\lambda_i = p_{\alpha}/p_E$	- presiunea elastica $p_E(\psi)$ raportata la valoarea presiunii medii $p_E$ se noteaza cu $p_{E, \text{specif}}(\psi)$ , relatia (2.2-13) facotrul din paranteza ;
$i = 2..12$	$\lambda_i =$	
	2	0.2549
	3	-0.1940
	4	0.2431
	5	-0.1846
	6	0.1666
	7	-0.1599
	8	0.1589
	9	-0.1487
	10	0.1460
	11	-0.1478
	12	0.0760

$$p_{E, \text{specif}}(\psi) = 1 - \sum_{i=2}^{12} \lambda_i \cdot \cos i \cdot \psi \cdot \frac{\pi}{180}$$

- valorile presiunii elastice specifice  $p_{E, \text{specif}}(\psi)$  pentru  $\psi = 0, 30, 60, \dots, 180$  grade

	0	1.2105
$j = 0..6$	30	1.0792
	60	0.9377
$\psi_j = j \cdot 30$	90	0.9105
$\psi =$	120	0.7446
	150	0.7385
	180	2.8805

- pentru determinarea presiunii medii  $p_E$  valorile  $p_E(\psi)$  din literatura de specialitate

trebuie impartite cu valorile  $p_{E, \text{specif}}(\psi)$ , calculate anterior.

$j = 0..6$	$p_{E\psi_j} =$	0.9996
	1.21	1.0007
	1.08	1.0025
	0.94	
	0.91	$p_E = 0.9995$
	0.72	0.967
	0.72	0.9749
	2.84	0.9859

$$p_{E_j} = \frac{p_{E\psi_j}}{p_{E, \text{specif}}(\psi_j)}$$

### 2.3 Program de calcul al valorilor presiunii elastice $p_E(\psi)$

- considerand valoarea de la  $\psi = 30$  adevarata ;  $p_E = 1.000$

$$p_E(\psi) = p_E \cdot \left( 1 + \sum_{i=2}^{12} \lambda_i \cdot \cos\left(i \cdot \psi \cdot \frac{\pi}{180}\right) \right)$$

- valorile presiunii elastice  $p(\psi)$  pentru  $\psi = 0, 15, 30, \dots, 180$  grade sunt :

$j = 0..12$	$\psi_j = j \cdot 15$	$p_{E,\psi_j} = p_E(\psi_j)$	$\psi =$	$p_{E,\psi} =$
			0	1.2105
			15	1.1647
			30	1.0792
			45	0.9938
			60	0.9377
			75	0.9182
			90	0.9105
			105	0.8254
			120	0.7446
			135	0.6858
			150	0.7385
			165	0.9561
			180	2.8805

#### Conditile de echilibru static

- dupa axa x-x

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot \cos(\psi) d\psi = 0.00466$$

- dupa axa y-y

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot \sin(\psi) d\psi = 0.000$$

Curba de presiune	Unghiul $\psi$ [°]						
	0	30	60	90	120	150	180
[45, fig. 43], [85, fig.12.74c]	1.24	1.08	0.94	0.91	0.72	0.72	2.84
Calculată (Detpres.mcd)	1.2105	1.0792	0.9377	0.9105	0.7446	0.7385	2.8805
Eroarea [%]	2.38	0,07	0,24	0,05	-3,42	-2,57	1,43

Comparând rezultatele din tabelul 2.2-9 se observă că valorile corespunzătoare unghiurilor  $\psi = 0^\circ$ ,  $120^\circ$  și  $150^\circ$  nu corespund cu cele din literatura de specialitate, mai mult, condiția de echilibru după axa x-x (2.1-6) nefiind îndeplinită :

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot h \cdot R \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi = 0,00466 \neq 0$$

### 2.3 Program de calcul al valorilor presiunii elastice $p_E(\psi)$

Pentru curba de presiune de formă „pară”, [45, fig. 12,74d], fig. 2.2-7 se cunosc :

- Valorile coeficienților adimensionali  $p_{\alpha}/p_E$ , din expresia curbei de presiune (2.1-13)

**Tabelul 2.2-10**

Curba de presiune	$p_2/p_E$	$p_3/p_E$	$p_4/p_E$	$p_5/p_E$	$p_6/p_E$	$p_7/p_E$	$p_8/p_E$	$p_9/p_E$	$p_{10}/p_E$	$p_{11}/p_E$	$p_{12}/p_E$
[45, fig.12.74d]	0.420	-0.180	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Valorile presiunii elastice a segmentului  $p_E(\psi)$ , la unghiurile  $\psi = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$

**Tabelul 2.2-11**

Curba de presiune	Unghiul $\psi$ [°]						
	0	30	60	90	120	150	180
[45, fig.12.74d]	1.25	1.51	1.21	0.725	0.762	1.51	2.00

În acest caz curba de presiune are expresia :

$$p_E(\psi) = p_E \cdot (1 + 0,420 \cdot \cos(2 \cdot \psi) - 0,180 \cdot \cos(3 \cdot \psi))$$

pe baza căreia se pot calcula valorile presiunii elastice la orice unghi  $\psi$ .

Cu ajutorul programului „Detpres.mcd” realizat cu ajutorul soft-ului MathCAD 7 Profesional s-au calculat următoarele valori ale presiunii elastice  $p_E(\psi)$  :

2.3 Program de calcul al valorilor presiunii elastice  $p_E(\psi)$

**Determinarea presiunii elastice  $p_E(\psi)$  pentru  $\psi=0, 15, 30, \dots, 180$  grade**

Din datele bibliografice tabelul 2.2-10 se cunosc pentru distributia din fig. 2.2-7 :

nr. de armonici - valorile coeficientilor adimensionali  $\lambda_i = p_{\alpha}/p_E$  - presiunea elastica  $p_E(\psi)$  raportata la valoarea presiunii medii  $p_E$  se noteaza cu  $p_{E.specif}(\psi)$ , relatia (2.2-13) facotrul din paranteza ;

$i = 2..12$	$i$	$\lambda_i =$
	2	0.420
	3	0.180
	4	0
	5	0
	6	0
	7	0
	8	0
	9	0
	10	0
	11	0
	12	0

$$p_{E.specif}(\psi) = \left( 1 - \sum_{i=2}^{12} \lambda_i \cdot \cos\left(i \cdot \psi \cdot \frac{\pi}{180}\right) \right)$$

- valorile presiunii elastice specifice  $p_{E.specif}(\psi)$  pentru  $\psi = 0, 30, 60, \dots, 180$  grade

$j = 0..6$	$\psi =$	$p_{E.specif,\psi_j} = p_{E.specif}(\psi_j)$	$p_{E.specif,\psi} =$
	0		1.2400
	30		1.2100
	60		0.9700
	90		0.5800
	120		0.6100
	150		1.2100
	180		1.6000

- pentru determinarea presiunii medii  $p_E$  valorile  $p_E(\psi)$  din literatura de specialitate trebuie impartite cu valorile  $p_{E.specif}(\psi)$ , calculate anterior,

$j = 0..6$	$p_{E\psi_j} =$	$p_E = \frac{p_{E\psi_j}}{p_{E.specif,\psi_j}}$
	1.25	1.0081
	1.51	1.2479
	1.21	1.2474
	0.725	1.25
	0.762	1.2492
	1.51	1.2479
	2.00	1.25

### 2.3 Program de calcul al valorilor presiunii elastice $p_E(\psi)$

- considerand valoarea de la  $\psi = 30$  adevarata ;  $p_E = 1.25$

$$p_E(\psi) = p_E \cdot \left( 1 + \sum_{i=2}^{12} \lambda_i \cdot \cos \left( i \cdot \psi \cdot \frac{\pi}{180} \right) \right)$$

- valorile presiunii elastice  $p(\psi)$  pentru  $\psi = 0, 15, 30, \dots, 180$  grade sunt :

$j = 0 \dots 12$	$\psi_j = j \cdot 15$	$p_{E,\psi_j}$	$p_{E,\psi_j} \cdot \psi =$	$p_{E,\psi} =$
	0	1.5500		
	15	1.5456		
	30	1.5125		
	45	1.4091		
	60	1.2125		
	75	0.9544		
	90	0.7250		
	105	0.6362		
	120	0.7625		
	135	1.0909		
	150	1.5125		
	165	1.8638		
	180	2.0000		

### Conditile de echilibru static

- dupa axa x-x

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot \cos(\psi) d\psi = 0.000147$$

- dupa axa y-y

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot \sin(\psi) d\psi = 0.000$$



Tabelul 2.2-12

Curba de presiune	Unghiul $\psi$ [°]						
	0	30	60	90	120	150	180
[45, fig.12.74d]	1.25	1.51	1.21	0.725	0.762	1.51	2.00
Calculată (Detpres.mcd)	1.5500	1.5125	1.2125	0.7250	0.7625	1.5125	2.0000
Eroarea [%]	24	-0,17	-0,21	0	0,06	-0,17	0

Comparând rezultatele din tabelul 2.2-12 se observă că valoarea de la unghiul de 0° nu corespunde cu cea din literatura de specialitate, condiția de echilibru după axa x-x (2.1-6) fiind îndeplinită :

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_E(\psi) \cdot h \cdot R \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi = 0,000147 \neq 0$$

Punctul actual de vedere [45] este că distribuția de presiune trebuie să prezinte variații line ale presiunii (a se compara curbele din fig. 2.2-5 și 7) și un raport :

$$\pi_s = \frac{P_{E_{max}}}{P_E} \leq 2,25 \quad [-] \quad (2.2-1)$$

Conform relației (2.2-1), doar curba din fig.2.2-7 corespunde punctului actual de vedere, tabelul 2.2-13, ea fiind de fapt de factură mai recentă.

Tabelul 2.2-13

Curba de presiune	fig. 2.2-4	fig. 2.2-5	fig. 2.2-6	fig. 2.2-7
Raportul $\pi_s$	2.834	4.035	2.881	1.6

## 2.4 CONSIDERAȚII ASUPRA CURBELOR DE PRESIUNE

Rezultatele obținute pe baza programului de calcul „*Detpres.mcd*”, prezentat în paragraful anterior, scot în evidență faptul că valorile presiunii elastice  $p_E(\psi)$  la unghiurile  $\psi = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$  nu corespund în totalitate cu cele prezentate în literatura de specialitate, tabelul 2.3-1.

Tabelul 2.3-1

Curba de presiune [45], [85]		Unghiul $\psi$ [°]						
		0	30	60	90	120	150	180
Curba fig. 2.2-4	Valori calculate	1.0510	1.1063	1.1391	0.8919	0.4389	0.6904	2.9096
	Valori din literatura de specialitate	1.0510	1.047	1.137	0.896	0.454	0.670	2.861
	Eroarea [%]	0	-1.53	-0.18	0.46	<u>3,33</u>	<u>-3,04</u>	1.7
Curba fig. 2.2-5	Valori calculate	0.9330	0.9993	1.2195	1.1600	0.4155	0.2857	4.0350
	Valori din literatura de specialitate	0.933	1.000	1.218	1.1600	0.416	0.286	4.0350
	Eroarea [%]	0	0.07	-0.12	0	0.12	0.10	0
Curba fig. 2.2-6	Valori calculate	1.2105	1.0792	0.9377	0.9105	0.7446	0.7385	2.8805
	Valori din literatura de specialitate	1.24	1.08	0.94	0.91	0.72	0.72	2.84
	Eroarea [%]	2.4	0.07	0.24	0.05	<u>-3,42</u>	-2.6	-1.4
Curba fig. 2.2-7	Valori calculate	1.5500	1.5125	1.2125	0.7250	0.7625	1.5125	2.000
	Valori din literatura de specialitate	1.55	1.51	1.21	0.72	0.76	1.51	2.000
	Eroarea [%]	0	-0.17	-0.21	0	-0.33	-0.17	0

Plecând de la aceste valori s-a realizat programul „*Calculul funcției de presiune.mcd*”, ce are ca date de intrare valorile presiunii elastice  $p_E(\psi)$  [N/m<sup>2</sup>] la unghiurile  $\psi = 0^\circ, 15^\circ, \dots, 180^\circ$  calculate cu programul „*Detpres.mcd*” și care analizează cea mai potrivită metodă de interpolare pentru găsirea funcției de presiune.

## 2.4 Considerații asupra curbelor de presiune

### Calculul funcției de presiunii (soft MathCAD 7 Profesional)

Pentru distribuția din fig. 2.2-4 se cunosc

- valorile argumentelor unghiulare „ $\psi$ ” unde se cunosc valorile funcției cautate, care se introduc în vectorul argumentelor „ $\Phi$ ”

- valorile imaginilor cunoscute ale funcției  $p(\varphi)$  cautate, care se introduc în vectorul imaginilor „ $p(\Phi)$ ”

$\Phi_i =$	$i = 0..24$	$P_i =$
0		1.0510
15		1.1131
30		1.1063
45		1.1797
60		1.1391
75		1.0862
90		0.8918
105		0.7257
120		0.4389
135		0.4529
150		0.6904
165		1.5150
180		2.9095
195		1.5150
210		0.6904
225		0.4529
240		0.4389
255		0.7257
270		0.8918
285		1.0862
300		1.1391
315		1.1797
330		1.1063
345		1.1131
360		1.0510

- se lucreaza cu unghiul în radiani, deci ; .....

$$\varphi = \varphi \cdot \frac{\pi}{180}$$

- funcția se aproximeaza pe intervalul [0;360] cu pasul unghiular de 1 grad ; .....

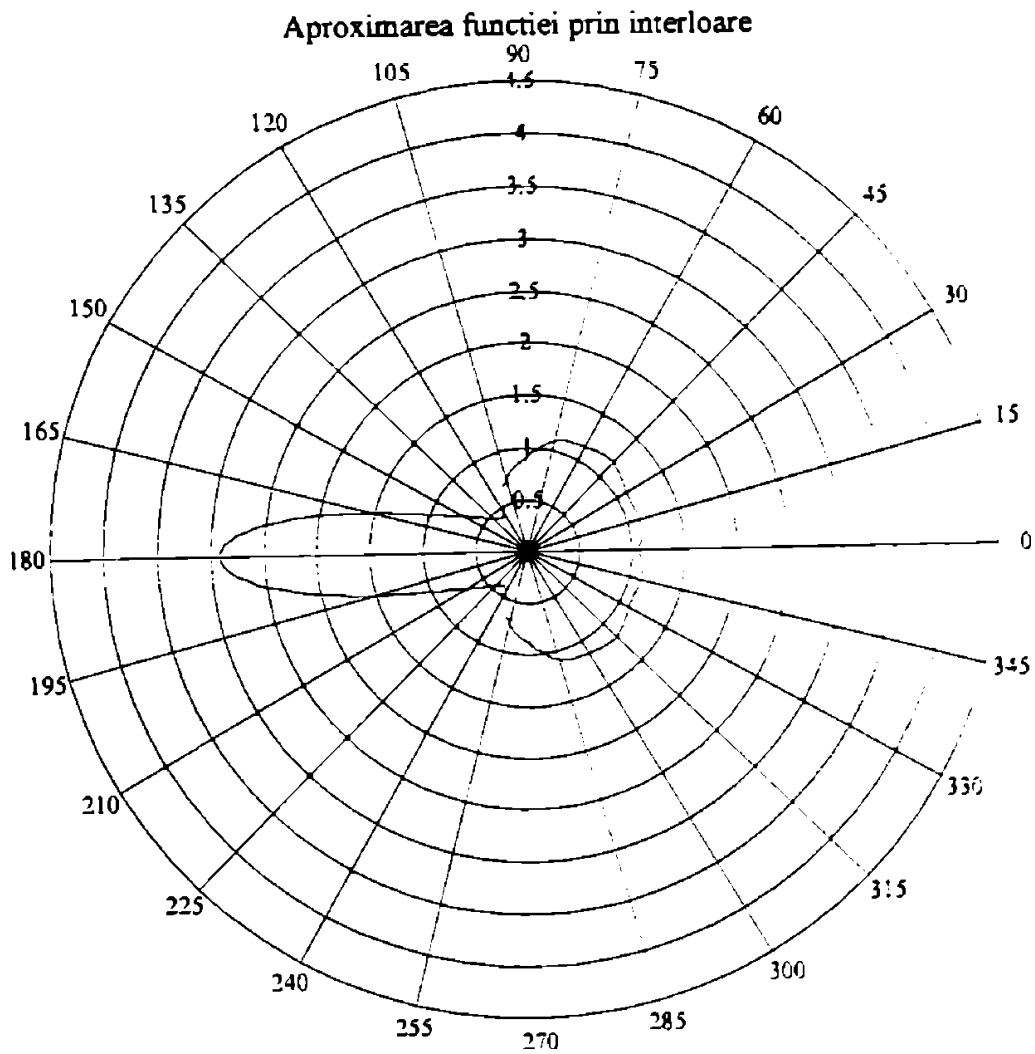
$$\psi = 0 \cdot \frac{\pi}{180}, 1 \cdot \frac{\pi}{180} \dots 360 \cdot \frac{\pi}{180}$$

## 2.4 Considerații asupra curbelor de presiune

- pentru aplicarea **algoritmului MathCAD de determinare prin interpolare** a unei funcții, se calculează :

$$ps = cspline(\varphi, p) \quad p_{interp}(\psi) = interp(ps, \varphi, p, \psi)$$

- graficul funcției  $p(\varphi)$ , în coordonate polare este :



## 2.4 Considerații asupra curbelor de presiune

- pentru determinarea prin **analiza armonică** a unei funcții, se calculează :

$$i = 1..24 \quad j = 1.. \frac{24}{2} - 1$$

- coeficienții funcției de aproximare trigonometrică (Fourier) sunt :

$$a_0 = \frac{1}{24} \cdot \sum_i p_i \quad a_j = \frac{2}{24} \cdot \sum_i p_i \cdot \cos(j \cdot \varphi_i) \quad a_{12} = \frac{1}{24} \cdot \sum_i (-1)^i \cdot p_i$$

$$b_j = \frac{2}{24} \cdot \sum_i p_i \cdot \sin(j \cdot \varphi_i)$$

0	1.0266	1.0000
0	0.0000	0.0000
0	0.3174	0.3092
0	-0.4471	-0.4355
0	0.2953	0.2877
0	-0.2015	-0.1963
0	0.1450	0.1412
0	-0.1116	-0.1087
0	0.0996	0.0970
0	-0.0961	-0.0936
0	0.0818	0.0797
0	-0.0730	-0.0711
0	0.0145	0.0141

- din cauza simetriei distribuției de presiuni.

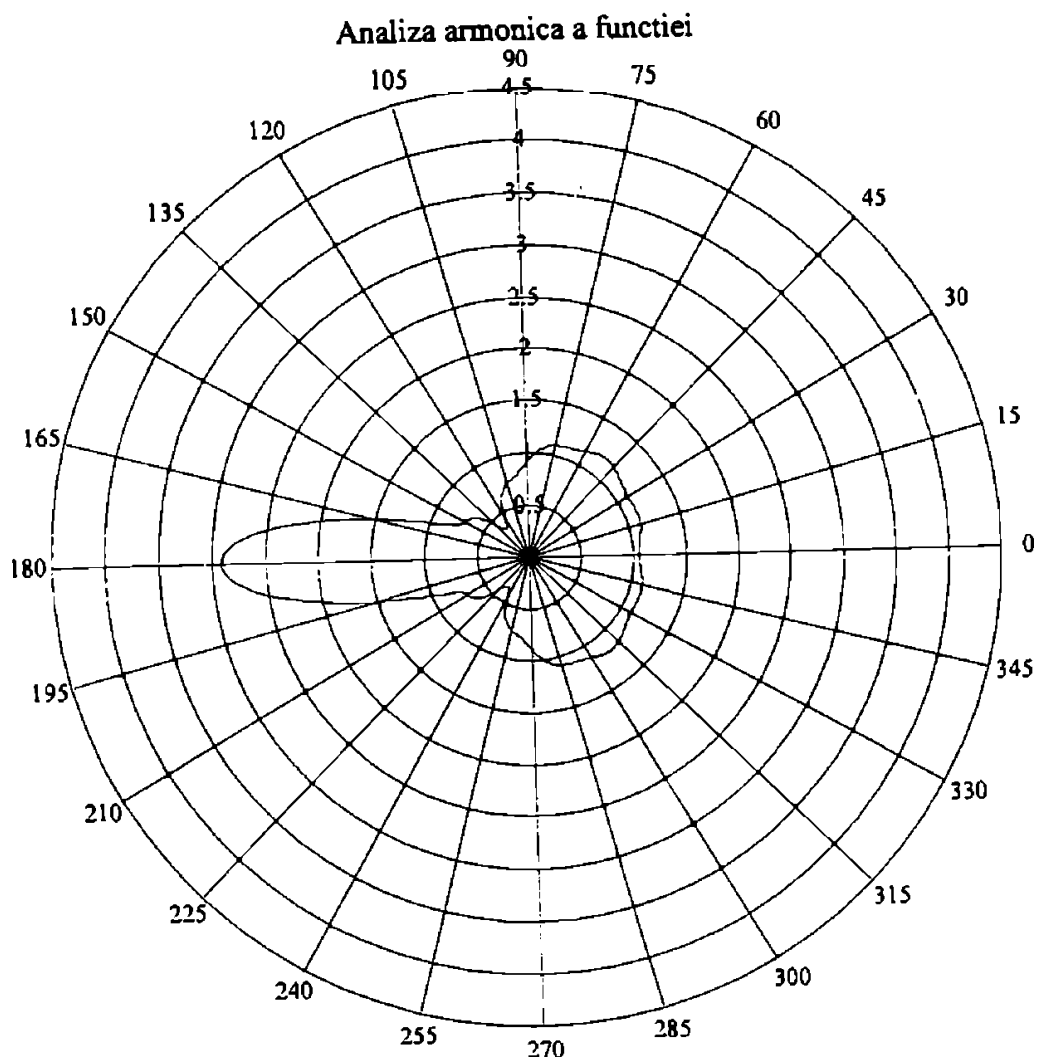
- coeficienții dezvoltării în serie Fourier

- coeficienții adimensionali ai dezvoltării în serie Fourier

- expresia funcției de aproximare Fourier se poate scrie :

$$P_{\text{Fourier}}(\psi) = a_0 \cdot \left( 1 - \sum_{i=1}^{12} \frac{a_i}{a_0} \cdot \cos(i \cdot \psi) \right) \text{ sau } P'_{\text{Fourier}}(\psi) = \sum_{i=0}^{12} a_i \cdot \cos(i \cdot \psi)$$

## 2.4 Considerații asupra curbelor de presiune



## 2.4 Considerații asupra curbelor de presiune

- din datele bibliografice [45] , [85] se cunosc pentru distribuția din fig. 2.2-4 :

- coeficienții adimensionali

$$a_j = p_j/p_E$$

$j = 2..12$	$a_j =$	$j$
	0.3029	2
	-0.4355	3
	0.2877	4
	-0.1963	5
	0.1412	6
	-0.1087	7
	0.0970	8
	-0.0936	9
	0.0797	10
	-0.0711	11
	0.01413	12

- valorile presiunii  $p_E(\varphi)$  la unghiul  $\varphi$  ;

$\varphi_i \cdot \frac{180}{\pi}$	$P_i$
15	1.1131
30	1.1063
45	1.1797
60	1.1391
75	1.0862
90	0.8918
105	0.7257
120	0.4389
135	0.4529
150	0.6904
165	1.515
180	2.9095
195	1.515
210	0.6904
225	0.4529
240	0.4389
255	0.7257
270	0.8918
285	1.0862
300	1.1391
315	1.1797
330	1.1063
345	1.1131
360	1.051

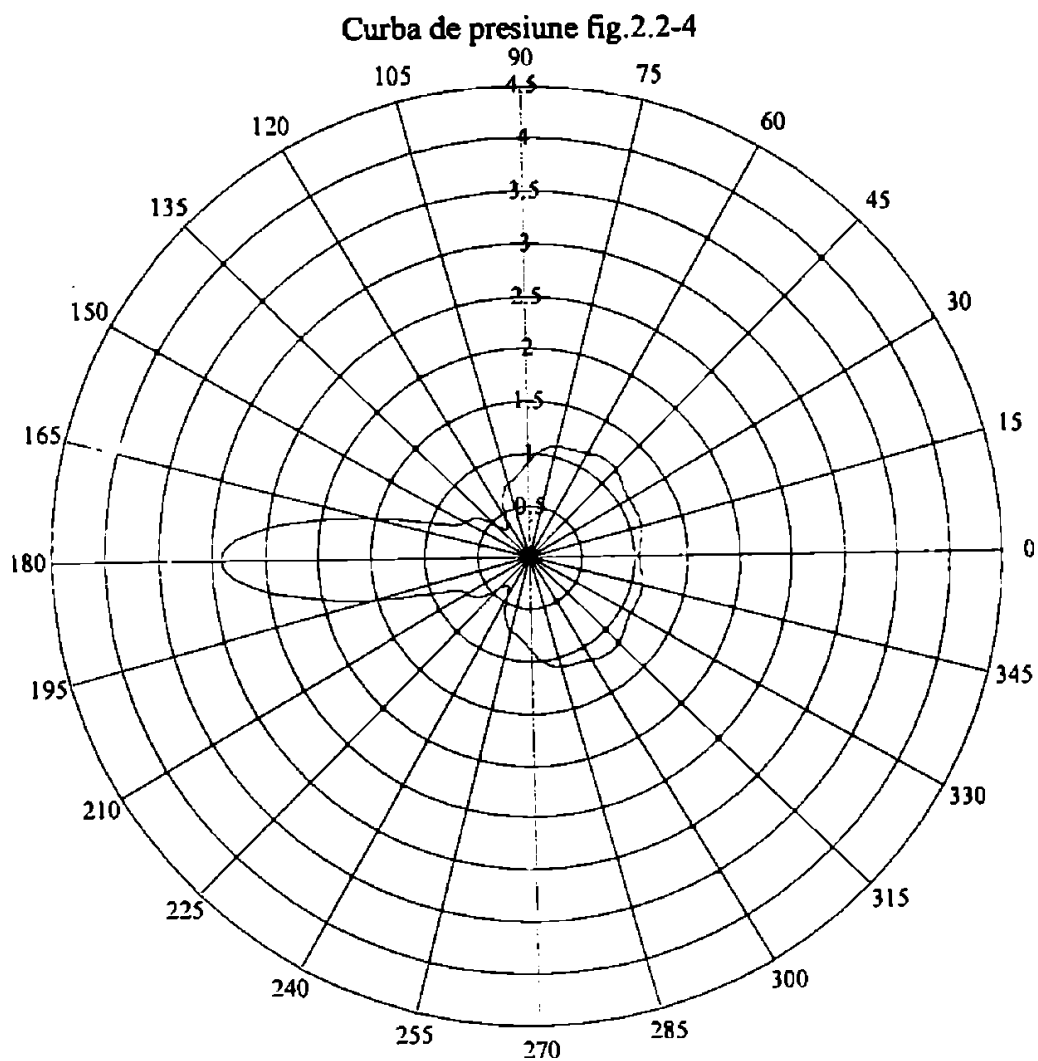
- valoarea presiunii medii elastice  $p_E$  se calculează cu relația ;

$$p_E = \frac{1}{24} \sum_i p_i \quad \text{și are valoarea ;} \quad p_E = 1.0266$$

- expresia funcției de distribuție a presiunii elastice este ;

$$P_{\text{coef.adim}}(\psi) = p_E \left( 1 - \sum_{j=2}^{12} a_j \cdot \cos(j \cdot \psi) \right)$$

## 2.4 Considerații asupra curbelor de presiune





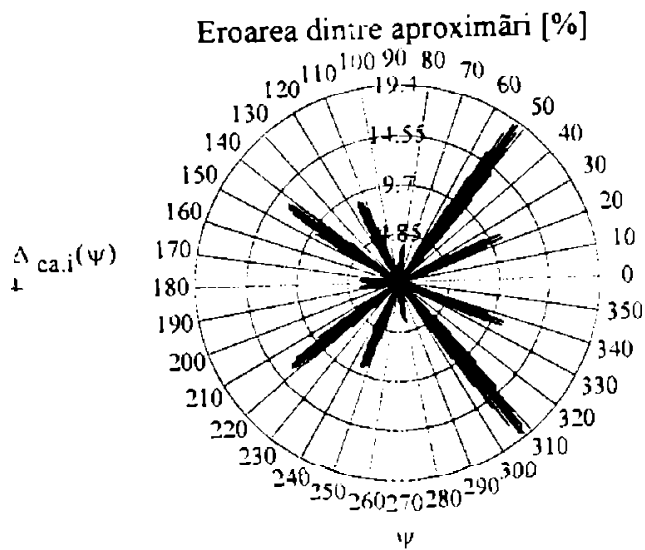
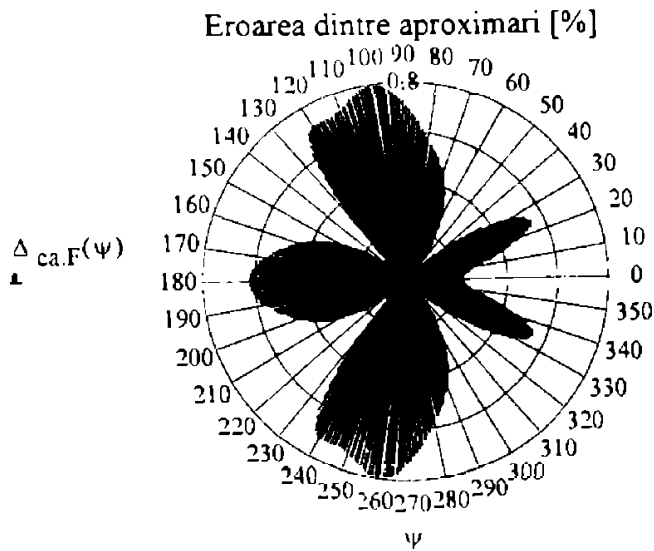
## 2.4 Considerații asupra curbelor de presiune

### Eroarea dintre aproximari

- dacă notăm ;

$$\Delta_{ca.F(\psi)} = \frac{P_{coef.adim}(\psi) - P_{Fourier}(\psi)}{P_{coef.adim}(\psi)} \cdot 100$$

$$\Delta_{ca.i(\psi)} = \frac{P_{coef.adim}(\psi) - P_{interp}(\psi)}{P_{coef.adim}(\psi)} \cdot 100$$



## 2.4 Considerații asupra curbelor de presiune

Condițiile de echilibru static sunt îndeplinite pentru formele  $p_{\text{Fourier}}$  și  $p_{\text{coef.adim}}$ , forma  $p_{\text{interp}}$  neîndeplinind condițiile de echilibru static.

$$\int_0^{\pi} p_{\text{interp}}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) d\varphi = 0.00409$$

$$\int_0^{\pi} p_{\text{Fourier}}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi} p_{\text{coef.adim}}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\cdot\pi} p_{\text{interp}}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\cdot\pi} p_{\text{Fourier}}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\cdot\pi} p_{\text{coef.adim}}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

## 2.4 Considerații asupra curbelor de presiune

Pentru **curba de presiune din fig. 2.2-4** pe baza programului „*Calculul funcției de presiune.mcd*” – soft MathCAD 7 Profesional, în care s-au folosit trei algoritmi de interpolare :

A) interpolare cu algoritmul intrinsec al softului MathCAD 7 Profesional,

B) aproximare cu ajutorul funcțiilor trigonometrice (Fourier).

s-au obținut următoarele date :

**Tabelul 2.3-2**

$P_a$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$
	1,0266	0	0,3092	-0,4355	0,2877	-0,1963	0,1412	-0,1087	0,0970	-0,0936	0,0797	-0,0711	0,01413
Lit			0,3092	-0,4355	0,2877	-0,1963	0,1412	-0,1087	0,0970	-0,0936	0,0797	-0,0711	0,01413
$p(\psi)$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$105^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$165^\circ$	$180^\circ$
	1,0510	1,1131	1,1063	1,1797	1,1391	1,0862	1,8918	0,7257	0,4389	0,4529	0,6904	1,5150	2,9095
Lit	1,051		1,047		1,137		0,896		0,454		0,670		2,861
Condițiile de echilibru static	- după axa x-x		$\int_x^x p_E(\psi) \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi = 0$										
	- după axa y-y		$\int_x^x p_E(\psi) \cdot \sin(\psi) \cdot d\psi = 0$										

Folosind același program (ANEXA I, II, III) înlocuind doar valorile presiunii elastice notate în program cu  $p_i$  și a coeficienților adimensionali  $a_j$ , se obține după cum urmează :

Pentru **curba de presiune din fig. 2.2-5** s-au obținut următoarele date :

**Tabelul 2.3-3**

$P_a$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$
	1,000	0	0,205	-0,571	0,472	-0,322	0,279	-0,268	0,256	-0,214	0,178	-0,177	0,097
Lit			0,205	-0,571	0,472	-0,322	0,279	-0,268	0,256	-0,214	0,178	-0,177	0,097
$p(\psi)$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$105^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$165^\circ$	$180^\circ$
	0,9330	0,9417	0,9993	1,1065	1,2195	1,2357	1,1600	0,7455	0,4155	0,2735	0,2857	1,1331	4,0350
Lit	0,933		1,000		1,218		1,160		0,416		0,286		4,035
Condițiile de echilibru static	- după axa x-x		$\int_x^x p_E(\psi) \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi = 0$										
	- după axa y-y		$\int_x^x p_E(\psi) \cdot \sin(\psi) \cdot d\psi = 0$										

## 2.4 Considerații asupra curbelor de presiune

Pentru curba de presiune din fig. 2.2-6 s-au obținut următoarele date :

**Tabelul 2.3-4**

$P_{\alpha}$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$
	1,000	0	0,2549	-0,1940	0,2431	-0,1846	0,1666	-0,1599	0,1589	-0,1487	0,1460	-0,1478	0,0760
Lit.			0,2549	-0,1940	0,2431	-0,1846	0,1666	-0,1599	0,1589	-0,1487	0,1460	-0,1478	0,0760
$p(\psi)$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$105^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$165^\circ$	$180^\circ$
	1,2105	1,1647	1,0792	0,9938	0,9377	0,9182	0,9105	0,8254	0,7446	0,6858	0,7385	0,9561	2,8805
Lit.	1,24		1,08		0,94		0,91		0,72		0,72		2,84
Condițiile de echilibru static	- după axa x-x		$\int_{-x}^x p_E(\psi) \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi = 0$										
	- după axa y-y		$\int_{-x}^x p_E(\psi) \cdot \sin(\psi) \cdot d\psi = 0$										

Pentru curba de presiune din fig. 2.2-7 s-au obținut următoarele date :

**Tabelul 2.3-5**

$P_{\alpha}$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$
	1,25	0	0,42	-0,18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lit.			0,42	-0,18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$p(\psi)$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$105^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$165^\circ$	$180^\circ$
	1,5500	1,5456	1,5125	1,4091	1,2125	0,9544	0,7250	0,6362	0,7625	1,0909	1,5125	1,8638	2,0000
Lit.	1,55		1,51		1,21		0,72		0,76		1,51		2,000
Condițiile de echilibru static	- după axa x-x		$\int_{-x}^x p_E(\psi) \cdot \cos(\psi) \cdot d\psi = 0$										
	- după axa y-y		$\int_{-x}^x p_E(\psi) \cdot \sin(\psi) \cdot d\psi = 0$										

## CONCLUZII

Algoritmul de aproximare al soft-ului MathCAD nu se recomandă aproximării funcțiilor de presiune elastică, deoarece nu sunt îndeplinite condițiile de echilibru static.

Precizia cea mai bună o are algoritmul de aproximare cu funcții armonice (Fourier) care satisface și condițiile de echilibru static.

### 3. DETERMINAREA FORMEI ÎN STARE LIBERĂ

#### 3.1 MOMENTUL ÎNCOVOIETOR ÎNTR-O SECȚIUNE

Presiunea  $p_E(\psi)$  exercitată de cilindru asupra segmentului este preluată de tensiunile interioare care mențin segmentul în stare de echilibru; ca urmare, fiecare segmente a segmentului este solicitată de un moment încovoietor [37], [45], [85].

Forța tăietoare elementară  $dF_m(\varphi)$  dintr-o secțiune oarecare  $\varphi$  produsă de presiunea elastică ce acționează pe arcul  $d\varphi$  aflat la același unghi  $\varphi$ , (fig. 3.1-1) aplicată în fibra medie (locul geometric al centrelor de greutate al secțiunilor radiale) a segmentului (indicele  $m$ ) se calculează cu expresia :

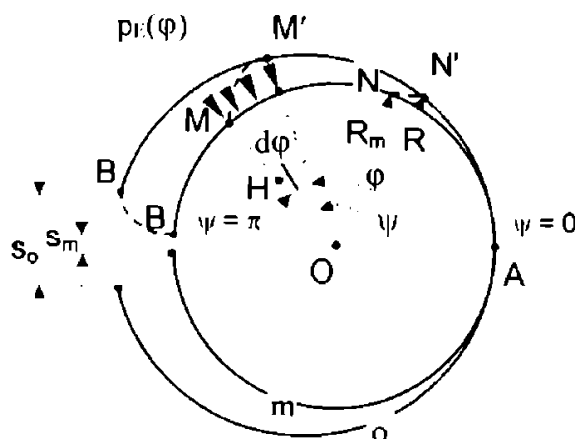


Fig. 3.1-1  
Forța elastică elementară

$$dF_m(\varphi) = p_{E_m}(\varphi) \cdot h \cdot R_m \cdot d\varphi \quad (3.1-1)$$

Întrucît forța din fibra exterioară  $dF(\varphi) = p_E(\varphi) \cdot h \cdot R \cdot d\varphi$ , unde  $R=D/2$ , trebuie să fie egală cu prima (forța tăietoare nu variază cu raza) rezultă [37], [45], [85] :

$$p_{E_m}(\varphi) = p_E(\varphi) \cdot \frac{R}{R_m} \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (3.1-2)$$

unde :  $p_E(\varphi)$  este presiunea elastică de pe exteriorul segmentului.

Momentul elementar  $dM_i(\psi)$  într-o secțiune  $\psi$  (în punctul N de pe fibra medie) produs de forța elementară  $dF_m(\varphi)$  de la unghiul  $\varphi$  este:

$$dM_i(\psi) = \overline{NH} \cdot dF_m(\varphi) \quad (3.1-3)$$

unde : segmentul  $\overline{NH}$  este distanța de la forța  $dF_m(\varphi)$  la punctul N ;

întrucît  $\overline{NH} = R_m \cdot \sin(\varphi - \psi)$  cu relația (3.1-1) și (3.1-2) rezultă:

$$dM_i(\psi) = \frac{R}{R_m} \cdot h \cdot p_E(\varphi) \cdot R_m^2 \cdot \sin(\varphi - \psi) d\varphi. \quad (3.1-4)$$

### 3.1 Momentul încovoietor într-o secțiune

Se definește următorul parametru caracteristic al segmentului [37], [45], [85] ;

$$c = h \cdot \frac{R}{R_m} = h \cdot \frac{D}{D_m} = h \cdot \frac{D}{(D-a)} = h \cdot \frac{(D/a)}{[(D/a)-1]} \quad , \quad [\text{mm}] \quad (3.1-5)$$

iar momentul încovoietor produs în secțiunea  $\psi$  de suma forțelor de pe arcul de deschidere unghiulară  $\pi-\varphi$ , din dreapta secțiunii va fi :

$$M_i(\psi) = c \cdot R_m^2 \cdot \int_{\varphi=\psi}^{\varphi=\pi} p_E(\varphi) \cdot \sin(\varphi - \psi) \cdot d\varphi \quad [\text{N} \cdot \text{mm}] \quad (3.1-6)$$

Pentru cazul general când presiunea elastică are forma (2.1-13) rezultă :

$$M_i(\psi) = c \cdot R_m^2 \cdot p_E \cdot \left[ \begin{array}{l} 1 + \cos(\psi) + \\ + \sum_{i=2}^{i=n} \left[ \frac{(-1)^{i+1}}{i^2-1} \cdot \frac{p_i}{p_E} \cdot \cos(\psi) \right] \\ - \sum_{i=2}^{i=n} \left[ \frac{1}{i^2-1} \cdot \frac{p_i}{p_E} \cdot \cos(i \cdot \psi) \right] \end{array} \right] \quad [\text{N} \cdot \text{mm}] \quad (3.1-7)$$

Expresia (3.1-7) pentru segmentii de presiune constantă  $p_E(\varphi)=p_E=ct.$ , devine :

$$M_i(\psi) = c \cdot R_m^2 \cdot p_E \cdot [1 + \cos(\psi)] \quad (3.1-7a)$$

deoarece toți coeficienții  $p_2 \dots p_n$  sînt nuli.

Grupând termenii în  $\cos(\psi)$  relația (3.1-7a) devine [37], [45], [85] :

$$M_i(\psi) = c \cdot R_m^2 \cdot p_E \cdot \left[ \begin{array}{l} 1 + \\ + (1 - \nu) \cdot \cos(\psi) - \\ - \sum_{i=2}^{i=n} \left[ \frac{1}{i^2-1} \cdot \frac{p_i}{p_E} \cdot \cos(i \cdot \psi) \right] \end{array} \right] \quad [\text{N} \cdot \text{mm}] \quad (3.1-7b)$$

unde :  $\nu = - \sum_{i=2}^{i=n} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2-1} \cdot \frac{p_i}{p_E} \quad [-]$  (3.1-8) este un coeficient ce depinde numai de

curba de presiune și care pentru segmentul de presiune constantă se anulează iar pentru segmentul de presiune variabilă ia valori în funcție coeficienții adimensionali ai curbei de presiune, tabelul 3.1-1.

**Tabelul 3.1-1**

Curba de presiune	fig. 2.2-4	fig. 2.2-5	fig. 2.2-6	fig. 2.2-7
$\nu [-]$	0,195	0,209	0,149	0,162

Relația (3.1-7) devine ;

$$M_i(\psi) = c \cdot R_m^2 \cdot p_E \cdot \left[ \begin{array}{l} 1 + (1 - \nu) \cdot \cos(\psi) - \\ - \sum_{i=2}^{i=n} \left[ \frac{1}{i^2-1} \cdot \frac{p_i}{p_E} \cdot \cos(i \cdot \psi) \right] \end{array} \right] \quad [\text{N} \cdot \text{mm}] \quad (3.1-8)$$

### 3.2 DETERMINAREA FORMEI FIBREI MIJLOCII ÎN STARE LIBERĂ A SEGMENTELOR ÎN COORDONATE POLARE

Forma pe care trebuie să o aibă fibra mijlocie a segmentului în stare liberă se determină din fig. 3.2.1, în care punctul  $N'$  de pe fibra mijlocie în stare liberă are coordonatele  $(R; \psi_0)$ , iar același punct al fibrei mijlocii, după introducerea segmentului în cilindru, se află în  $N$  și are coordonatele  $(R_m; \psi)$ . [37], [45], [85].

La trecerea din starea comprimată sau montată ( $m$ ) în starea liberă ( $o$ ) raza fibrei mijlocii crește de la valoarea  $R_m$  din stare montată la valoarea  $R$  din stare liberă, iar unghiul la  $c n$  ... p...ă...  
aceluiși punct scade de la valoarea  $\psi$  în stare montată la valoarea  $\psi_0$  în stare liberă, rezultând următoarele relații :

$$\begin{cases} R = R_m + u & [\text{mm}] \\ \psi_0 = \psi - \eta & [\text{rad}] \end{cases} \quad (3.2-1)$$

în care :  $u$  - este variația razei ;  
 $\eta$  - variația unghiulară.

Dacă se notează cu  $\rho_0$  raza de curbură a fibrei mijlocii a segmentului

într-un punct oarecare, de coordonate  $(R; \psi_0)$ , curbura  $\frac{1}{\rho_0}$  a fibrei mijlocii se exprimă sub forma [4], [5], [6], [13], [23], [26], [48], [49], [56], [88] :

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{R^2 - R \cdot \frac{d^2 R}{d\psi^2} + 2 \cdot \left( \frac{dR}{d\psi} \right)^2}{\left[ R^2 + \left( \frac{dR}{d\psi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad \left[ \frac{1}{\text{mm}} \right] \quad (3.2-2)$$

în care s-a considerat  $d\psi \equiv d\psi_0$ .

Neglijând termenii mici de ordinul 2, relația (3.2-2) devine :

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{R^2 - R \cdot \frac{d^2 R}{d\psi^2}}{R^3} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{d^2 R}{d\psi^2} \quad (3.2-3)$$

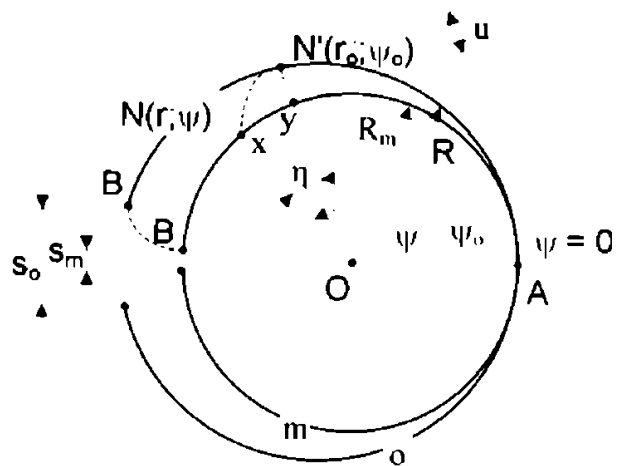


Fig. 3.2-1  
Variația coordonatelor fibrei mijlocii

### 3.2 Determinarea formei în stare liberă a segmentului

Înlocuind în această relație pe  $R$  cu valoarea lui din (3.2-1), se obține :

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{R_m + u} - \frac{1}{(R_m + u)^2} \cdot \frac{d^2(R_m + u)}{d\psi^2} \quad (3.2-4)$$

În această relație, în locul lui  $\frac{1}{R_m + u}$  și  $\frac{1}{(R_m + u)^2}$  se introduce valoarea seriilor respective, adică :

$$\frac{1}{R_m + u} = \frac{1}{R_m} \cdot \left( 1 - \frac{u}{R_m} + \frac{u^2}{R_m^2} - \dots \right)$$

și

$$\frac{1}{(r + u)^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \left( 1 - 2\frac{u}{r} + 3\frac{u^2}{r^2} - \dots \right)$$

Având în vedere că  $u$  este de ordinul de mărime  $R_m/20$ , el se poate neglija față de  $r$ , de asemenea se poate neglija și  $u^2$  față de  $R_m^2$ , precum și produsul lui  $u$  cu  $d^2u/d\psi^2$ . Se obține astfel pentru curbura expresia [6], [23], [45], [85] :

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_m^2} \cdot \left( u + \frac{d^2u}{d\psi^2} \right) \quad (3.2-5)$$

Variația  $u$  a razei vectoare  $R_m$  la trecerea segmentului din starea liberă în cea comprimată (montată) sau invers se poate exprima, ținând cont de expresia fibrei medii deformată, sub forma [4], [5], [6], [13], [23], [26], [48], [49], [56] :

$$u + \frac{d^2u}{d\psi^2} = -\frac{R_m^2 \cdot M_i(\psi)}{E \cdot I} \quad [\text{mm}] \quad (3.2-6)$$

Momentul încovoietor a fost exprimat în funcție de presiunea elastică a segmentului prin relația (3.1-7b) :

Introducând valoarea lui  $p_E(\psi)$  din relația de mai sus în relația (2.1-10), valoarea momentului încovoietor este [37], [45], [85] :

$$M_i(\psi) = c \cdot R_m^2 \cdot p_E \cdot \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi - \psi) \cdot d\varphi + \frac{P_2}{P_E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi - \psi) \cdot \cos(2\psi) \cdot d\varphi + \right. \\ \left. \frac{P_3}{P_E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi - \psi) \cdot \cos(3\psi) \cdot d\varphi + \dots + \frac{P_n}{P_E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi - \psi) \cdot \cos(n\psi) \cdot d\varphi \right\} \quad (3.2-9)$$

care prin integrare devine :



### 3.2 Determinarea formei în stare liberă a segmentului

$$M_i(\psi) = c \cdot R_m^2 \cdot p_E \cdot \left[ 1 + (1 - \nu) \cdot \cos(\psi) + \frac{1}{3} \cdot \frac{p_2}{p_E} \cdot \cos(2\psi) - \frac{1}{8} \cdot \frac{p_3}{p_E} \cdot \cos(3\psi) - \frac{1}{15} \cdot \frac{p_4}{p_E} \cdot \cos(4\psi) + \dots + \frac{1}{n^2 - 1} \cdot \frac{p_n}{p_E} \cdot \cos(n\psi) \right] \quad (3.2-10)$$

în care pentru simplificare s-a notat :

$$\nu = - \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i^2 - 1} \cdot \frac{p_i}{p_E} \quad [-] \quad (3.2-11)$$

Introducând valoarea lui  $M_i(\psi)$  [N·mm] din relația (3.1-7b) în relația (3.2-6), se obține ca soluție a ecuației diferențiale [37], [45], [85] :

$$u(\psi) = \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I} \cdot \left( 1 + \frac{1 - \nu}{2} \cdot \psi \cdot \sin(\psi) + \sum_{i=2}^n \frac{1}{(i^2 - 1)^2} \cdot \frac{p_i}{p_E} \cdot \cos(i \cdot \psi) \right) + C_1 \cdot \cos(\psi) + C_2 \cdot \sin(\psi) \quad [\text{mm}] \quad (3.2-12)$$

în care  $C_1$  și  $C_2$  sunt constantele de integrare a căror valoare se determină în funcție de condițiile la limită, respectiv, în acest caz, funcție de amplasarea originii coordonatelor.

Pentru cazul de față, când originea este pe axa de simetrie care trece prin mijlocul rostului (secțiunea A-A), la :  $\psi = 0$ , rezultă  $du/d\psi = 0$ , deci  $C_2 = 0$ .

Considerând că originea se găsește chiar la mijloc, între rost ( $\psi = 180^\circ$ ) și partea opusă rostului ( $\psi = 0$ ), rezultă pentru  $C_1$  valoarea [37], [45], [85] :

$$C_1(\psi) = - \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I} \cdot \sum_{i=2}^n \frac{1}{(i^2 - 1)^2} \cdot \frac{p_i}{p_E} \quad [\text{mm}] \quad (3.2-13)$$

În toate cazurile este important determinarea deplasării  $u$  la  $\psi = 0$ , care se notează cu  $u_0$ .

$$u_0 = \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I} \cdot (1 + z) \quad [\text{mm}] \quad (3.2-14)$$

$$\text{în care : } z = \sum_{i=2}^n \frac{1}{(i^2 - 1)^2} \cdot \frac{p_i}{p_E} \quad [-] \quad (3.2-15)$$

În acest caz relația (3.2-12) devine :

$$u(\psi) = \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I} \cdot \left( \begin{array}{l} 1 + \frac{1 - \nu}{2} \cdot \psi \cdot \sin(\psi) + \\ + \sum_{i=2}^n \frac{1}{(i^2 - 1)^2} \cdot \frac{p_i}{p_E} \cdot \cos(i \cdot \psi) - \\ - \sum_{i=3,5,7,9,11} \frac{1}{(i^2 - 1)^2} \cdot \frac{p_i}{p_E} \cdot \cos(\psi) \end{array} \right) \quad [\text{mm}] \quad (3.2-16)$$

### 3.2 Determinarea formei în stare liberă a segmentului

sau

$$\mathbf{u}(\psi) = \mathbf{D}_u \cdot \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{R}_m^4 \cdot \mathbf{p}_E}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}} \quad [\text{mm}] \quad (3.2-16a)$$

unde :

$$\mathbf{D}_u = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1-\nu}{2} \cdot \psi \cdot \sin(\psi) + \\ + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{1}{(i^2-1)^2} \cdot \frac{\mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_E} \cdot \cos(i \cdot \psi) - \\ - \sum_{i=3,5,7,9,11} \frac{1}{(i^2-1)^2} \cdot \frac{\mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_E} \cdot \cos(\psi) \end{pmatrix} \quad [-] \quad (3.2-17)$$

Pentru determinarea variației  $\eta$  a coordonatei unghiulare  $\psi$ , se determină în prealabil variația lui  $\eta$  în funcție de  $\mathbf{u}$ , pe considerentul că la trecerea segmentului din starea liberă în starea comprimată, și invers, fibra lui mijlocie nu suferă nici alungiri, nici comprimări (este o fibră neutră), eventualele tensiuni care s-ar naște datorită forței normale în diferitele secțiuni fiind neglijabile.

Se poate scrie deci că [6], [23], [45], [85] :

$$\frac{(\mathbf{R}_m + \mathbf{u}) \cdot d(\psi - \eta) - \mathbf{R}_m \cdot d\psi}{\mathbf{R}_m \cdot d\psi} = 0 \quad (3.2-18)$$

care, după neglijarea valorilor mici, ajunge la forma :

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{R}_m} \quad [-]. \quad (3.2-19)$$

Introducând în relația (3.2-19) valoarea lui  $\mathbf{u}$  din relația (3.2-12) și integrând, se obține, [6], [23], [45], [85] :

$$\eta(\psi) = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{R}_m^3 \cdot \mathbf{p}_E}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}} \cdot \begin{pmatrix} \psi - \frac{1-\nu}{2} \cdot \psi \cdot \cos(\psi) + \frac{1-\nu}{2} \cdot \sin(\psi) + \\ + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{1}{i \cdot (i^2-1)^2} \cdot \frac{\mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_E} \cdot \sin(i \cdot \psi) - \\ - \sum_{i=3,5,7,9,11} \frac{1}{i \cdot (i^2-1)^2} \cdot \frac{\mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_E} \cdot \sin(\psi) \end{pmatrix} \quad [\text{rad}] \quad (3.2-20)$$

sau

$$\eta(\psi) = \mathbf{D}_\eta \cdot \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{R}_m^3 \cdot \mathbf{p}_E}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}} \quad [\text{rad}] \quad (3.2-20a)$$

unde :

### 3.2 Determinarea formei în stare liberă a segmentului

$$D_{\eta} = \left[ \begin{array}{l} \psi - \frac{1-\nu}{2} \cdot \psi \cdot \cos(\psi) + \frac{1-\nu}{2} \cdot \sin(\psi) + \\ + \sum_{i=2}^{i_n} \frac{1}{i \cdot (i^2-1)^2} \cdot \frac{P_i}{P_E} \cdot \sin(i \cdot \psi) - \\ - \sum_{i=3,5,7,9,11} \frac{1}{i \cdot (i^2-1)^2} \cdot \frac{P_i}{P_E} \cdot \sin(\psi) \end{array} \right] [-] \quad (3.2-21)$$

în care  $C_1$  are valoarea din relația din relația (3.2-13), iar constanta  $C_2 = 0$ , ca și în cazul expresiei lui  $u$ .

În relația (3.2-20), o valoare particulară a lui  $\eta$  ar fi valoarea  $\eta_{\pi}$  când  $\psi = 180^\circ$ . Aceasta valoare este :

$$\eta_{\pi} = \frac{c \cdot R_m^3 \cdot p_E}{E \cdot I} \cdot \frac{3-\nu}{2} \cdot \pi \quad [\text{rad}] \quad (3.2-22)$$

Dacă se neglijează diferența dintre  $R_m$  și  $R_m + u$ , valoarea rostului segmentului în stare liberă  $s_o$  este [37], [45], [85] :

$$s_o = 2 \cdot R_m \cdot \eta_{\pi} = \pi \cdot (3-\nu) \cdot \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I} \quad [\text{mm}] \quad (3.2-23)$$

Aceasta înseamnă că în relația (3.2-12), primul factor, adică  $\frac{R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I}$  poate fi exprimat funcție de  $\frac{s_o}{\pi \cdot (3-\nu)}$  și, de asemenea, în relația (3.2-20), primul factor

$$\frac{R_m^3 \cdot p_E}{E \cdot I} \text{ poate fi exprimat funcție de } \frac{s_o}{\pi \cdot (3-\nu) \cdot R_m}.$$

Pe baza celor stabilite mai sus, și anume :

- că una dintre constantele de integrare este nulă ( $C_2 = 0$ ) ;
- că cealaltă constantă,  $C_1$ , ia valorile date de relația (3.2-13) ;
- că factorul  $\frac{R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I}$  respectiv,  $\frac{R_m^3 \cdot p_E}{E \cdot I}$  din relațiile (3.2-12), (3.2-13), (3.2-14), (3.2-16), (3.2-20) și (3.2-21) se poate exprima în funcție de rostul în stare liberă  $s_o$  al segmentului,

se pot deduce pentru expresiile (3.2-12) și (3.2-19) alte expresiile mai simple.

### 3.2 Determinarea formei în stare liberă a segmentului

În ipoteza că  $C_1$  are valoarea din relația (3.2-13), se poate scrie :

$$\begin{aligned} u &= (C_u + B_u) \cdot \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I} \quad [\text{mm}] ; \\ \eta &= (C_\eta + B_\eta) \cdot \frac{c \cdot R_m^3 \cdot p_E}{E \cdot I} \quad [\text{rad}] . \end{aligned} \quad (3.2-24)$$

În expresia (3.2-24) coeficienții  $C_u$  [-],  $B_u$  [-] rezultă din expresia (3.2-16) :

$$\left\{ \begin{aligned} C_u &= \left( 1 + \frac{1-\nu}{2} \cdot \psi \cdot \sin(\psi) + \frac{1}{9} \cdot \frac{p_2}{p_E} \cdot \cos(2\psi) + \frac{1}{64} \cdot \frac{p_3}{p_E} \cdot \cos(3\psi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{225} \cdot \frac{p_4}{p_E} \cdot \cos(4\psi) + \dots + \frac{1}{(n^2-1)^2} \cdot \frac{p_n}{p_E} \cdot \cos(n\psi) \right) \\ B_u &= - \left( \frac{1}{64} \cdot \frac{p_3}{p_E} + \frac{1}{576} \cdot \frac{p_5}{p_E} + \frac{1}{2304} \cdot \frac{p_7}{p_E} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6400} \cdot \frac{p_9}{p_E} + \frac{1}{14400} \cdot \frac{p_{11}}{p_E} \right) \cdot \cos(\psi) \end{aligned} \right. \quad (3.2-25)$$

iar coeficienții  $C_\eta$  [-],  $B_\eta$  [-] rezultă din expresia (3.2-20) :

$$\left\{ \begin{aligned} C_\eta &= \left( \psi - \frac{1-\nu}{2} \cdot \psi \cdot \cos(\psi) + \frac{1-\nu}{2} \cdot \sin(2\psi) + \frac{1}{18} \cdot \frac{p_2}{p_E} \cdot \sin(3\psi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{192} \cdot \frac{p_3}{p_E} \cdot \sin(4\psi) + \dots + \frac{1}{n \cdot (n^2-1)^2} \cdot \frac{p_n}{p_E} \cdot \sin(n\psi) \right) \\ B_\eta &= - \left( \frac{1}{64} \cdot \frac{p_3}{p_E} + \frac{1}{576} \cdot \frac{p_5}{p_E} + \frac{1}{2304} \cdot \frac{p_7}{p_E} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6400} \cdot \frac{p_9}{p_E} + \frac{1}{14400} \cdot \frac{p_{11}}{p_E} \right) \cdot \sin(\psi) \end{aligned} \right. \quad (3.2-26)$$

În legătură cu expresia (3.2-24) pentru  $u$  și  $\eta$ , care determină forma segmentului în stare liberă, este important de observat următoarele :

- valorile coeficienților  $C$ ,  $B$ ,  $D$  depind numai de diagrama presiunilor segmentului considerat. Ei se calculează o singură dată pentru o anumită

### 3.2 Determinarea formei în stare liberă a segmentului

diagramă, valorile lui  $u$  și  $\eta$  modificându-se numai în funcție de rostul în stare liberă  $s_0$  și de raportul  $s_0/R_m$ .

- la calculul valorilor coeficienților  $C, B, D$ , coeficienții  $p_2/p_0, p_3/p_0, p_4/p_0$  etc. se iau din expresia analitică a presiunii elastice  $p(\psi)$ .

**Segmentul cu presiune constantă** este un caz particular al segmentului cu presiune variabilă, caracterizându-se prin aceea că are coeficienții dimensionali  $p_i/p_E$  egali cu zero, [37], [45], [85] :

$$\frac{p_i}{p_E} = 0 \quad \forall \quad i = 2, 3, \dots, n$$

ceea ce implică :

- anularea coeficienților  $v$  și  $z$  :

$$v = - \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i^2 - 1} \cdot \frac{p_i}{p_E} = 0$$

$$z = \sum_{i=2}^n \frac{1}{(i^2 - 1)^2} \cdot \frac{p_i}{p_E} = 0$$

- deplasarea  $u$  de la  $\psi = 0$  de forma :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I} \cdot (1 + z) = \\ &= \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I} \quad [-] \end{aligned}$$

- deplasarea radială  $u(\psi)$  :

$$\begin{aligned} u(\psi) &= \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I} \cdot \left( \begin{aligned} &1 + \frac{1-v}{2} \cdot \psi \cdot \sin(\psi) + \\ &+ \sum_{i=2}^n \frac{1}{(i^2 - 1)^2} \cdot \frac{p_i}{p_E} \cdot \cos(i \cdot \psi) - \\ &- \sum_{i=3,5,7,9,11} \frac{1}{(i^2 - 1)^2} \cdot \frac{p_i}{p_E} \cdot \cos(\psi) \end{aligned} \right) = \\ &= \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I} \cdot \left( 1 + \frac{1-v}{2} \cdot \psi \cdot \sin(\psi) \right) \quad [\text{mm}] \end{aligned}$$

- variația unghiulară  $\eta(\psi)$  :

### 3.2 Determinarea formei în stare liberă a segmentului

$$\eta(\psi) = \frac{c \cdot R_m^3 \cdot p_E}{E \cdot I} \cdot \left( \begin{aligned} &\psi - \frac{1-\nu}{2} \cdot \psi \cdot \cos(\psi) + \frac{1-\nu}{2} \cdot \sin(\psi) + \\ &+ \sum_{i=2}^{i=n} \frac{1}{i \cdot (i^2 - 1)^2} \cdot \frac{p_i}{p_E} \cdot \sin(i \cdot \psi) - \\ &- \sum_{i=3,5,7,9,11} \frac{1}{i \cdot (i^2 - 1)^2} \cdot \frac{p_i}{p_E} \cdot \sin(\psi) \end{aligned} \right) =$$

$$= \frac{c \cdot R_m^3 \cdot p_E}{E \cdot I} \cdot \left( \psi - \frac{1-\nu}{2} \cdot \psi \cdot \cos(\psi) + \frac{1-\nu}{2} \cdot \sin(\psi) \right) \quad [\text{rad}]$$

- valoarea  $\eta_\pi$  de forma :

$$\eta_\pi = \frac{c \cdot R_m^3 \cdot p_E}{E \cdot I} \cdot \frac{3-\nu}{2} \cdot \pi =$$

$$= \frac{c \cdot R_m^3 \cdot p_E}{E \cdot I} \cdot \frac{3}{2} \cdot \pi \quad [\text{rad}]$$

- rostul în stare liberă :

$$s_o = 2 \cdot R_m \cdot \eta_\pi = \pi \cdot (3-\nu) \cdot \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I} =$$

$$= \pi \cdot 3 \cdot \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I} \quad [\text{mm}]$$

- relația (3.2-22) de forma :

$$u = (C_u + B_u) \cdot \frac{s_o}{\pi \cdot 3} \quad [\text{mm}]$$

$$\eta = (C_\eta + B_\eta) \cdot \frac{s_o}{R_m \cdot \pi \cdot 3} \quad [\text{rad}]$$

unde :

$$\begin{cases} C_u = \left( 1 + \frac{1-\nu}{2} \cdot \psi \cdot \sin(\psi) \right) \quad [-] \\ B_u = 0 \quad [-] \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} C_\eta = \left( \psi - \frac{1-\nu}{2} \cdot \psi \cdot \cos(\psi) + \frac{1-\nu}{2} \cdot \sin(2\psi) \right) \quad [-] \\ B_\eta = 0 \quad [-] \end{cases}$$

Practic, din coordonatele stabilite pentru segmentul în stare liberă, cu ajutorul relațiilor (3.2-16) și (3.2-20), în cazul segmentelor cu presiune inițială variabilă, rezultă un segment care, în stare comprimată, nu mai are o formă circulară. Într-adevăr, dacă un asemenea segment este strâns cu ajutorul unei benzi de oțel, se constată că

### 3.2 Determinarea formei în stare liberă a segmentului

diametrul măsurat pe axa deschiderii este mai mare decât diametrul perpendicular pe acea axă.

Ca valoare practică se recomandă ca diametrul care trece prin deschidere să fie cu 0,3-0,6 % mai mare decât diametrul perpendicular pe axa deschiderii, această majorare putând ajunge la 0,7-1,1 % în cazul segmentilor cu solicitare înaltă [21].

Un segment „termofixat”, cu presiunea inițială constantă, măsurat ca mai sus, nu arată nici o diferență între cele două diametre. Dacă în urma unei astfel de măsurări ar rezulta că diametrul măsurat pe axa deschiderii este mai mic decât diametrul perpendicular pe axa deschiderii, segmentul respectiv trebuie eliminat, deoarece el va apăsa asupra cilindrului cu o presiune redusă în dreptul deschiderii. Un asemenea segment nu va putea asigura etanșeitatea, deoarece va vibra la turații reduse, pierzând astfel orice contact cu cilindrul [45], [85].

În concluzie, se poate afirma că *segmentii nerotunzi cu presiune inițială variabilă după o anumită curbă de presiune, sunt superiori segmentilor „termofixați”*. Ei dau satisfacție în funcționare, compensând prin aceasta complexitatea metodei lor de fabricație. În acest sens, pentru segmentii “nerotunzi”, s-a perfecționat o nouă metodă de turnare, și anume așa-zisa turnare dublă [45], [85]. conform căreia turnarea segmentilor individuali se face atât din partea lor exterioară cât și din cea inferioară. Acest mod de turnare asigură o structură excepțional de omogenă a materialului.

Prelucrarea segmentilor turnați după această metodă se face definitiv, atât la exterior cât și la interior, în forma pe care o are segmentul în stare liberă, obținută prin turnare, astfel că, după tăierea deschiderii, segmentul este gata de utilizare, suprimându-se complet operațiile de strunjire, care necesită tensionarea segmentului prin comprimarea și strângerea lui în dispozitive, care, oricât de atent ar fi făcute, introduc totuși tensiuni nedorite în materialul segmentului.

Rezultatele obținute prin această metodă de lucru se consideră a fi deosebit de favorabile.

În ceea ce privește metodele de prelucrare, s-au făcut de asemenea anumite procese, și anume : s-au perfecționat mijloacele de copiere a conturului segmentului în stare liberă, prin crearea de dispozitive automate de copiat. Pe de altă parte, s-au elaborat și metode mai simple și mai economice pentru obținerea formei nerotunde a

### 3.2 Determinarea formei în stare liberă a segmentului

segmentilor, și anume prin presarea la rece a segmentilor turnați rotund, în matrițe conice nerotunde [23], ceea ce face posibilă realizarea de segmenti nerotunzi și în întreprinderile care nu dispun de utilaj special. Concomitent cu măsurile luate pentru perfecționarea segmentilor de fontă cu elasticitate proprie, în ultimul timp au luat o mare dezvoltare *segmenti cu expandori*; de asemenea segmentii numiți *lamelari*.

Trebuie menționată folosirea, deocamdată pe scară mică din cauza costului ridicat, a *segmentilor din materiale sinterizate* care se presează în forme la dimensiunile lor finale [37], [45], [75], [76].

În general, segmentii de fontă, cu presiune inițială variabilă după o curbă dată, se comportă bine și sunt fabricați în serii mari în marile uzine din Rusia, din alte țări, dar și la noi, în România.

Calitatea acestor segmenti este mult îmbunătățită, în special în ce privește rezistența la uzură, dacă suprafața lor exterioară se acoperă cu un strat de crom poros, cu o grosime de aproximativ 0,14 – 0,16 mm. Acoperirea segmentilor cu un strat de protecție, și în special cu un strat de crom poros, a luat o mare extindere, ea fiind aplicată și la segmentii din lamele din oțel, unele fabrici constructoare procedând la cromatizarea nu numai a primului segment și eventual a celui de-al doilea segment de etanșare, ci a tuturor segmentilor, deci inclusiv a segmentilor de ungere. Uneori s-a recurs aproape la dublarea stratului de crom, până la 0,22 – 0,23 mm, aceste măsuri tinzând a mări din ce în ce mai mult durabilitatea segmentilor [45], [75], [76].



### 3.3 CONSIDERAȚII ASUPRA FORMEI ÎN STARE LIBERĂ A SEGMENTILOR

Pentru curbele de presiune variabilă și constantă, plecând de la valorile coeficienților adimensionali  $p_{\alpha}/p_E$  (notați cu  $\lambda_i$ ), s-au calculat pe baza programului *CofcCBD2.mcd* – soft *MathCAD 7 Profesional*, următoarele :

- coeficienții  $C$  și  $B$  care intră în relațiile (3.2-24) ,
- coeficienții  $D$  care intră în relațiile (3.2-16a) și (3.2-20a).

Pentru curba de presiune conform fig. 2.2-4, plecând de la valorile coeficienților adimensionali  $p_{\alpha}/p_E$  (notați cu  $\lambda_i$ ), tabelul 3.3-1, s-au calculat coeficienții  $C$ ,  $B$  și  $D$  care sunt prezentați în tabelul 3.3-2 și 3.3-3 pentru valori ale unghiului  $\psi$  din 15° în 15°.

Tabelul 3.3-1

	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$
$\lambda_i$	1	0	0,3092	-0,4355	0,2877	-0,1963	0,1412	-0,1087	0,0970	-0,0936	0,0797	-0,0711	-0,1413

Tabelul 3.3-2

$\psi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$C_u$	1,0286	1,0528	1,1221	1,2272	1,3538	1,4841	1,5988	1,6785	1,7054	1,6640	1,5427	1,3351	1,0430
$B_u$	0,0058	0,0056	0,0050	0,0041	0,0029	0,0015	0,0000	-0,0015	-0,0029	-0,0041	-0,0050	-0,0056	-0,0058
$C_u+B_u$	1,0344	1,0583	1,1271	1,2313	1,3567	1,4856	1,5988	1,6770	1,7025	1,6599	1,5377	1,3295	1,0372
$D_u$	1,0344	1,0583	1,1271	1,2313	1,3567	1,4856	1,5988	1,6770	1,7025	1,6599	1,5377	1,3295	1,0372

Tabelul 3.3-3

$\psi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$C_{\eta}$	0,0000	0,2714	0,5552	0,8621	1,1996	1,5712	1,9753	2,4053	2,8496	3,2923	3,7139	4,0925	4,4055
$B_{\eta}$	0,0000	0,0005	0,0010	0,0014	0,0017	0,0019	0,0020	0,0019	0,0017	0,0014	0,0010	0,0005	0,0000
$C_{\eta}+B_{\eta}$	0,0000	0,2719	0,5562	0,8635	1,2014	1,5732	1,9773	2,4072	2,8513	3,2937	3,7149	4,0930	4,4055
$D_{\eta}$	0,0000	0,2719	0,5562	0,8635	1,2014	1,5732	1,9773	2,4072	2,8513	3,2937	3,7149	4,0930	4,4055

### 3.3 Considerații asupra formei în stare liberă a segmentelor

#### Calculul coeficienților B, C, și D pentru curbele de presiune din fig. 2.2-4...-7 și fig. 2.2-1

- coeficienții dimensionali  
ai curbei de presiune  $p_j/p_E = \lambda_j$

$i = 0..4$

- numărul curbei (2.2-1 respectiv 2.2-4...-7)

$j = 0..12$

- numărul coeficientului dimensional

$\lambda_{0,j} =$	$\lambda_{1,j} =$	$\lambda_{2,j} =$	$\lambda_{3,j} =$	$\lambda_{4,j} =$
1	1	1	1	1
0	0	0	0	0
0	0.3092	0.205	0.2549	0.420
0	-0.4355	-0.571	-0.1940	-0.180
0	0.2877	0.472	0.2431	0
0	-0.1963	-0.322	0.1846	0
0	0.1412	0.279	0.1666	0
0	-0.1087	-0.267	-0.1599	0
0	0.0970	0.256	0.1589	0
0	-0.0936	-0.214	-0.1487	0
0	0.0797	0.178	0.1460	0
0	-0.0711	-0.177	-0.1478	0
0	0.01413	0.094	0.0760	0

- coeficientul  $v$   
rel. (3.2-11)

$$v_i = - \sum_{j=2}^{12} \frac{(-1)^{j-1}}{j^2-1} \lambda_{i,j}$$

$$v_0 = 0$$

$$v_1 = 0.195$$

$$v_2 = 0.209$$

$$v_3 = 0.149$$

$$v_4 = 0.162$$

- coeficienții  
 $B_u$  și  $C_u$ ,  
rel. (3.2-23)

$$C_u(\psi, i) = \left[ 1 - \frac{1-v_i}{2} \psi \cdot \sin(\psi) - \sum_{j=2}^{12} \frac{1}{(j^2-1)^2} \lambda_{i,j} \cos(j \cdot \psi) \right]$$

$k = 3, 5..11$  - număr al coeficientului dimensional

$$B_u(\psi, i) = -1 \cdot \left[ \sum_{k=3}^{11} \frac{1}{(k^2-1)^2} \lambda_{i,k} \right] \cos(\psi)$$

rel. (3.2-16)

$$D_u(\psi, i) = 1 - \frac{1-v_i}{2} \psi \cdot \sin(\psi) - \sum_{j=2}^{12} \frac{1}{(j^2-1)^2} \lambda_{i,j} \cos(j \cdot \psi) - \sum_{k=3}^{11} \frac{1}{(k^2-1)^2} \lambda_{i,k} \cos(\psi)$$

### 3.3 Considerații asupra formei în stare liberă a segmentelor

$$\psi = 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180$$

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-4

$\frac{\psi}{\pi}$	$C_u(\psi,1)$	$B_u(\psi,1)$	$D_u(\psi,1)$
0	1.0286	0.0058	1.0344
15	1.0528	0.0056	1.0583
30	1.1221	0.0050	1.1271
45	1.2272	0.0041	1.2313
60	1.3538	0.0029	1.3567
75	1.4841	0.0015	1.4856
90	1.5988	0	1.5988
105	1.6785	-0.0015	1.6770
120	1.7054	-0.0029	1.7025
135	1.6640	-0.0041	1.6599
150	1.5427	-0.0050	1.5377
165	1.3351	-0.0056	1.3295
180	1.0430	-0.0058	1.0372

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-5

$\frac{\psi}{\pi}$	$C_u(\psi,2)$	$B_u(\psi,2)$	$D_u(\psi,2)$
0	1.0155	0.0072	1.0228
15	1.0411	0.0070	1.0481
30	1.1142	0.0063	1.1205
45	1.2243	0.0051	1.2294
60	1.3551	0.0036	1.3588
75	1.4874	0.0019	1.4892
90	1.6006	0	1.6006
105	1.6757	-0.0019	1.6738
120	1.6967	-0.0036	1.6931
135	1.6505	-0.0051	1.6453
150	1.5274	-0.0063	1.5211
165	1.3220	-0.0070	1.3150
180	1.0348	-0.0072	1.0276

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-6

$\frac{\psi}{\pi}$	$C_u(\psi,3)$	$B_u(\psi,3)$	$D_u(\psi,3)$
0	1.0261	0.0022	1.0283
15	1.0517	0.0021	1.0538
30	1.1252	0.0019	1.1271
45	1.2376	0.0015	1.2392
60	1.3742	0.0011	1.3753
75	1.5160	0.0006	1.5166
90	1.6412	0	1.6412
105	1.7275	-0.0006	1.7269
120	1.7545	-0.0011	1.7534
135	1.7057	-0.0015	1.7042
150	1.5702	-0.0019	1.5683
165	1.3444	-0.0021	1.3423
180	1.0331	-0.0022	1.0309

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-7

$\frac{\psi}{\pi}$	$C_u(\psi,4)$	$B_u(\psi,4)$	$D_u(\psi,4)$
0	1.0439	0.0028	1.0467
15	1.0668	0.0027	1.0695
30	1.1330	0.0024	1.1354
45	1.2345	0.0020	1.2365
60	1.3592	0.0014	1.3606
75	1.4910	0.0007	1.4918
90	1.6111	0	1.6111
105	1.6988	-0.0007	1.6981
120	1.7334	-0.0014	1.7320
135	1.6957	-0.0020	1.6937
150	1.5715	-0.0024	1.5690
165	1.3545	-0.0027	1.3518
180	1.0495	-0.0028	1.0467

- pentru curba de presiune constanta fig. 2.2-1

$\frac{\psi}{\pi}$	$C_u(\psi,0)$	$B_u(\psi,0)$	$D_u(\psi,0)$
0	1.0000	0	1.0000
15	1.0339	0	1.0339
30	1.1309	0	1.1309
45	1.2777	0	1.2777
60	1.4534	0	1.4534
75	1.6322	0	1.6322
90	1.7854	0	1.7854
105	1.8851	0	1.8851
120	1.9069	0	1.9069
135	1.8330	0	1.8330
150	1.6545	0	1.6545
165	1.3727	0	1.3727
180	1.0000	0	1.0000

### 3.3 Considerații asupra formei în stare liberă a segmentelor

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-4

$\psi \frac{180}{\pi}$	$C_{\eta}(\psi,1)$	$B_{\eta}(\psi,1)$	$D_{\eta}(\psi,1)$
0	0	0	0
15	0.2714	0.0005	0.2719
30	0.5552	0.0010	0.5562
45	0.8621	0.0014	0.8635
60	1.1996	0.0017	1.2014
75	1.5712	0.0019	1.5732
90	1.9753	0.0020	1.9773
105	2.4053	0.0019	2.4072
120	2.8496	0.0017	2.8513
135	3.2923	0.0014	3.2937
150	3.7139	0.0010	3.7149
165	4.0925	0.0005	4.0930
180	4.4055	0	4.4055

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-5

$\psi \frac{180}{\pi}$	$C_{\eta}(\psi,2)$	$B_{\eta}(\psi,2)$	$D_{\eta}(\psi,2)$
0	0	0	0
15	0.2681	0.0007	0.2688
30	0.5493	0.0013	0.5506
45	0.8548	0.0018	0.8566
60	1.1922	0.0022	1.1944
75	1.5644	0.0024	1.5669
90	1.9693	0.0025	1.9718
105	2.3992	0.0024	2.4016
120	2.8419	0.0022	2.8441
135	3.2817	0.0018	3.2835
150	3.6994	0.0013	3.7007
165	4.0742	0.0007	4.0748
180	4.3844	0	4.3844

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-6

$\psi \frac{180}{\pi}$	$C_{\eta}(\psi,3)$	$B_{\eta}(\psi,3)$	$D_{\eta}(\psi,3)$
0	0	0	0
15	0.2709	0.0002	0.2711
30	0.5549	0.0004	0.5553
45	0.8635	0.0006	0.8640
60	1.2050	0.0007	1.2057
75	1.5835	0.0008	1.5842
90	1.9973	0.0008	1.9981
105	2.4394	0.0008	2.4401
120	2.8967	0.0007	2.8973
135	3.3514	0.0006	3.3519
150	3.7822	0.0004	3.7826
165	4.1657	0.0002	4.1659
180	4.4786	0	4.4786

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-7

$\psi \frac{180}{\pi}$	$C_{\eta}(\psi,4)$	$B_{\eta}(\psi,4)$	$D_{\eta}(\psi,4)$
0	0	0	0
15	0.2753	0.0002	0.2755
30	0.5624	0.0005	0.5628
45	0.8716	0.0007	0.8723
60	1.2108	0.0008	1.2116
75	1.5839	0.0009	1.5848
90	1.9905	0.0009	1.9914
105	2.4247	0.0009	2.4256
120	2.8753	0.0008	2.8762
135	3.3260	0.0007	3.3266
150	3.7556	0.0005	3.7561
165	4.1407	0.0002	4.1409
180	4.4571	0	4.4571

- pentru curba de presiune constanta fig. 2.2-1

$\psi \frac{180}{\pi}$	$C_{\eta}(\psi,0)$	$B_{\eta}(\psi,0)$	$D_{\eta}(\psi,0)$
0	0	0	0
15	0.2648	0	0.2648
30	0.5469	0	0.5469
45	0.8613	0	0.8613
60	1.2184	0	1.2184
75	1.6226	0	1.6226
90	2.0708	0	2.0708
105	2.5527	0	2.5527
120	3.0510	0	3.0510
135	3.5428	0	3.5428
150	4.0016	0	4.0016
165	4.4000	0	4.4000
180	4.7124	0	4.7124

### 3.3 Considerații asupra formei în stare liberă a segmenților

Pentru curba de presiune conform fig. 2.2-5, plecând de la valorile coeficienților adimensionali  $p_a/p_E$  (notați cu  $\lambda_i$ ), tabelul 3.3-4, s-au calculat coeficienții  $C$ ,  $B$  și  $D$  sunt prezentați în tabela 3.3-5 și 3.3-6 pentru valori ale unghiului  $\psi$  din 15 în 15°.

Tabelul 3.3-4

	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$
$\lambda_i$	1	0	0,205	-0,571	0,472	-0,322	0,279	-0,267	0,256	-0,214	0,178	-0,177	0,094

Tabelul 3.3-5

$\psi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$C_u$	1,0155	1,0411	1,1142	1,2243	1,3551	1,4874	1,6006	1,6757	1,6967	1,6505	1,5274	1,3220	1,0348
$B_u$	0,0072	0,0070	0,0063	0,0051	0,0036	0,0019	0,0000	-0,0019	-0,0036	-0,0051	-0,0063	-0,0070	-0,0072
$C_u+B_u$	1,0288	1,0481	1,1205	1,2294	1,3588	1,4892	1,6006	1,6738	1,6931	1,6453	1,5211	1,3150	1,0276
$D_u$	1,0288	1,0481	1,1205	1,2294	1,3588	1,4892	1,6006	1,6738	1,6931	1,6453	1,5211	1,3150	1,0276

Tabelul 3.3-6

$\psi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$C_\eta$	0,0000	0,2681	0,5493	0,8548	1,1922	1,5644	1,9693	2,3992	2,8419	3,2817	3,6994	4,0742	4,3844
$B_\eta$	0,0000	0,0007	0,0013	0,0018	0,0022	0,0024	0,0025	0,0024	0,0022	0,0018	0,0013	0,0007	0,0000
$C_\eta+B_\eta$	0,0000	0,2688	0,5506	0,8566	1,1944	1,5669	1,9718	2,4016	2,8441	3,2835	3,7007	4,0748	4,3844
$D_\eta$	0,0000	0,2688	0,5506	0,8566	1,1944	1,5669	1,9718	2,4016	2,8441	3,2835	3,7007	4,0748	4,3844

Pentru curba de presiune conform fig. 2.2-6, plecând de la valorile coeficienților adimensionali  $p_a/p_E$  (notați cu  $\lambda_i$ ), tabelul 3.3-5, s-au calculat coeficienții  $C$ ,  $B$  și  $D$  sunt prezentați în tabela 3.3-6 și 3.3-7 pentru valori ale unghiului  $\psi$  din 15 în 15°.

Tabelul 3.3-5

	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$
$\lambda_i$	1	0	0,2549	-0,1940	0,2431	-0,1846	0,1666	-0,1599	0,1589	-0,1487	0,1460	-0,1487	0,0760

### 3.3 Considerații asupra formei în stare liberă a segmentelor

Tabelul 3.3-6

$\psi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$C_u$	1,0261	1,0517	1,1252	1,2376	1,3742	1,5160	1,6412	1,7275	1,7545	1,7057	1,5702	1,3444	1,0331
$B_u$	0,0022	0,0021	0,0019	0,0015	0,0011	0,0006	0,0000	-0,0006	-0,0011	-0,0015	-0,0019	-0,0021	-0,0022
$C_u+B_u$	1,0283	1,0538	1,1271	1,2392	1,3753	1,5166	1,6412	1,7269	1,7534	1,7042	1,5683	1,3423	1,0309
$D_u$	1,0283	1,0538	1,1271	1,2392	1,3753	1,5166	1,6412	1,7269	1,7534	1,7042	1,5683	1,3423	1,0309

Tabelul 3.3-7

$\psi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$C_\eta$	0,0000	0,2709	0,5549	0,8635	1,2050	1,5835	1,9973	2,4394	2,8967	3,3514	3,7822	4,1657	4,4786
$B_\eta$	0,0000	0,0002	0,0004	0,0006	0,0007	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0006	0,0004	0,0002	0,0000
$C_\eta+B_u$	0,0000	0,2711	0,5553	0,8640	1,2057	1,5842	1,9981	2,4401	2,8973	3,3519	3,7826	4,1659	4,4786
$D_\eta$	0,0000	0,2711	0,5553	0,8640	1,2057	1,5842	1,9981	2,4401	2,8973	3,3519	3,7826	4,1659	4,4786

Pentru curba de presiune conform fig. 2.2-7, plecând de la valorile coeficienților adimensionali  $p_u/p_E$ , (notați cu  $\lambda_i$ ), tabelul 3.3-8, s-au calculat coeficienții  $C$ ,  $B$  și  $D$  sunt prezentați în tabela 3.3-9 și 3.3-10 pentru valori ale unghiului  $\psi$  din 15 în 15°.

Tabelul 3.3-8

	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$
$\lambda_i$	1	0	0,420	-0,180	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabelul 3.3-9

$\psi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$C_u$	1,0439	1,0668	1,1330	1,2345	1,3592	1,4910	1,6111	1,6988	1,7334	1,6957	1,5715	1,3545	1,0495
$B_u$	0,0028	0,0027	0,0024	0,0020	0,0014	0,0007	0,0000	-0,0007	-0,0014	-0,0020	-0,0024	-0,0027	-0,0028
$C_u+B_u$	1,0467	1,0695	1,1354	1,2365	1,3606	1,4918	1,6111	1,6981	1,7320	1,6937	1,5690	1,3518	1,0467
$D_u$	1,0467	1,0695	1,1354	1,2365	1,3606	1,4918	1,6111	1,6981	1,7320	1,6937	1,5690	1,3518	1,0467

### 3.3 Considerații asupra formei în stare liberă a segmenților

Tabelul 3.3-10

$\psi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$C_\eta$	0.0000	0.2753	0.5624	0.8716	1.2108	1.5839	1.9905	2.4247	2.8753	3.3260	3.7556	4.1407	4.4571
$B_\eta$	0.0002	0.0005	0.0007	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0005	0.0002	0.0002	0.0000
$C_\eta+B_u$	0.0000	0.2755	0.5628	0.8723	1.2116	1.5848	1.9914	2.4256	2.8762	3.3266	3.7561	4.1409	4.4571
$D_\eta$	0.0000	0.2755	0.5628	0.8723	1.2116	1.5848	1.9914	2.4256	2.8762	3.3266	3.7561	4.1409	4.4571

Pentru curba de presiune constantă fig. 2.2-1, plecând de la valorile coeficienților adimensionali  $p_\alpha/p_E$  (notați cu  $\lambda_i$ ), tabelul 3.3-11, s-au calculat coeficienții  $C$ ,  $B$  și  $D$  sunt prezentați în tabela 3.3-12 și 3.3-13 pentru valori ale unghiului  $\psi$  din 15 în 15°.

Tabelul 3.3-11

	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$
$\lambda_i$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelul 3.3-12

$\psi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$C_u$	1.0000	1.0339	1.1309	1.2777	1.4534	1.6322	1.7854	1.8851	1.9069	1.8330	1.6545	1.3727	1.0000
$B_u$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$C_u+B_u$	1.0000	1.0339	1.1309	1.2777	1.4534	1.6322	1.7854	1.8851	1.9069	1.8330	1.6545	1.3727	1.0000
$D_u$	1.0000	1.0339	1.1309	1.2777	1.4534	1.6322	1.7854	1.8851	1.9069	1.8330	1.6545	1.3727	1.0000

Tabelul 3.3-13

$\psi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$C_\eta$	0.0000	0.2648	0.5469	0.8613	1.2184	1.6226	2.0708	2.5527	3.0510	3.5428	4.0016	4.4000	4.7124
$B_\eta$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$C_\eta+B_u$	0.0000	0.2648	0.5469	0.8613	1.2184	1.6226	2.0708	2.5527	3.0510	3.5428	4.0016	4.4000	4.7124
$D_\eta$	0.0000	0.2648	0.5469	0.8613	1.2184	1.6226	2.0708	2.5527	3.0510	3.5428	4.0016	4.4000	4.7124

## 4. DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A PRESIUNII ELASTICE

Comportarea elastică a segmentului este apreciată prin două mărimi caracteristice distincte [33], [45], [85].

1. Presiunea elastică de contact segment – cilindru, pe scurt presiunea elastică  $p_E(\psi)$ , care determină valoarea presiunii de contact dintre segment și cilindru la orice valoare unghiulară  $\psi$ . Ansamblul acestor valori este cunoscut și sub numele de „curba de presiuni”.
2. Presiunea medie elastică de contact segment – cilindru, pe scurt presiunea medie elastică  $p_E$ , care reprezintă valoarea medie a presiunilor de contact.

### 4.1 PRESIUNEA ELASTICĂ DE CONTACT SEGMENT – CILINDRU

Presiunea de contact  $p_E(\psi)$  cu care segmentul apasă, ca urmare a elasticității proprii, pe „oglinda” cilindrului, poate avea una dintre alurile următoare :

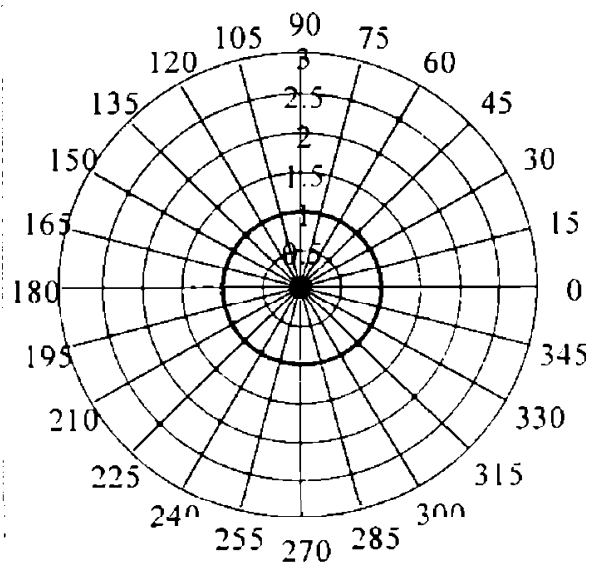


Fig. 4.1-1

Curba de presiune constantă

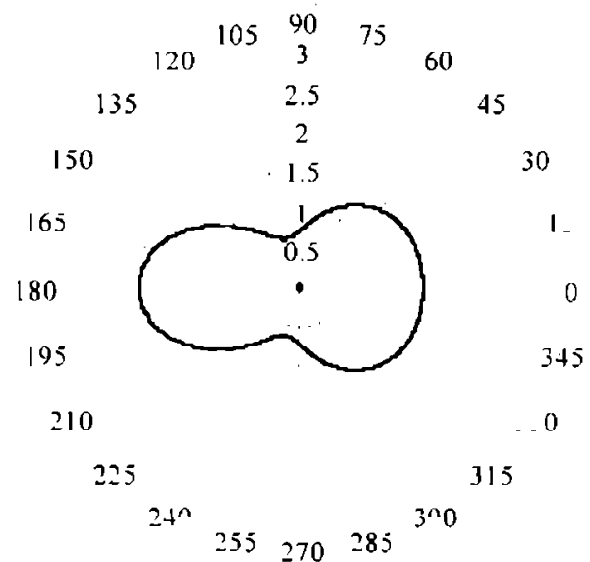


Fig. 4.1-2

Curba de presiune variabilă

a) constantă  $p_E(\psi) = ct.$ , fig. 4.1-1

b) variabilă  $p_E(\psi) \neq ct.$ , fig. 4.1-2



#### 4.1 Presiunea elastică de contact segment – cilindru

Măsurarea presiunii de contact, pe toată periferia, este deosebit de importantă dar și foarte problematică ea necesitând aparate și dispozitive deosebit de sensibile având în vedere variațiile mici ale presiunii pe contur, [45], [85].

Pentru verificarea presiunii elastice de contact pe întreg conturul segmentului s-au proiectat și s-au construit dispozitive și aparate care permit măsurarea presiunii elastice  $p_E(\psi)$  pe cale electrică, hidraulică sau mecanică.

Un aparat care execută măsurarea presiunii elastice  $p_E(\psi)$  pe cale electrică [45], [85] este prezentat în fig. 4.1-3. Aparatul este construit pe principiul piezoelectricității, bazându-se pe proporționalitatea dintre forțele aplicate unui cristal de cuarț și tensiunile electrice ce apar în momentul aplicării forței. Tensiunile electrice se măsoară cu ajutorul unui voltmetru de vârf care poate măsura valoarea maximă a tensiunii electrice produse sau, în ultimul timp, cu ajutorul unor dispozitive electronice și a interfețelor corespunzătoare când valorile măsurătorilor sunt trimise unui computer care le stochează și prelucrează.

Aparatul constă dintr-un *postament 1* pe care se află montată o *sanie 2* de care este fixat prin șuruburi un *inel – calibru 3*, al cărui diametru interior este egal cu diametrul nominal al cilindriului și corespunzător al *segmentului 4*, a cărui curbă de presiune trebuie măsurată. Inelul – calibru este decupat pe o porțiune foarte mică, în golul format introducându-se o *piesă de alunecare 5*. Pe postamentul 1 este fixat de asemenea un *suport 6*, pe care se află o *piesă de susținere 7*, a cărei poziție relativă față de postamentul 1 poate fi reglată cu ajutorul unui *șurub de reglaj 8*. În piesa de susținere 7 este introdusă *piesa port – cristal 9* conectată în circuitul unui voltmetru de vârf.

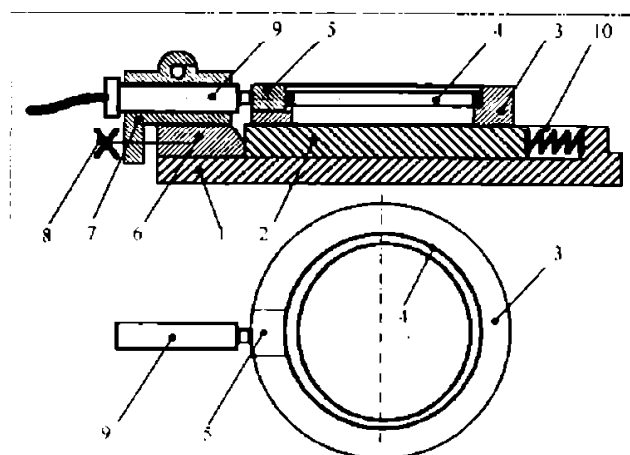


fig. 4.1-3

Dispozitiv piezoelectric pentru măsurarea presiunii elastice  $p_E(\psi)$  pe conturul segmentului

Sania 2 poate fi depășită de piesa port – cristal 9 cu ajutorul unei pârghii, fiind readusă în poziția inițială de *arc 10*, montat pe postamentul 1.

Operația de măsurare a presiunii exercitate de segmentul 4 asupra inelului – calibru 3, respectiv asupra piesei de alunecare 5, se face prin citirea indicațiilor

#### 4.1 Presiunea elastică de contact segment – cilindru

voltmetrului de vârf, indicații care reprezintă tensiunea ce se naște pe suprafața cristalului în momentul când este apăsate de piesa de alunecare 5. Înainte de începerea măsurării, aparatul trebuie reglat. Reglarea constă în aducerea vârfului cristalului în contact cu piesa de alunecare 5, în momentul când în inelul – calibrul 3 se introduce, în locul segmentului 4, o șaibă circulară simplă, care nu exercită asupra piesei de alunecare 5 nici o apăsare.

După reglarea aparatului, în inelul – calibrul 3 se introduce segmentul de măsurat 4, notându-se la voltmetrul de vârf prima citire. Citirile următoare se fac după ce segmentul se rotește succesiv cu câte un unghi de  $15^\circ$ , respectiv de  $10^\circ$ , ceea ce, pentru întregul contur al segmentului 24 respectiv 36 de citiri, care la o anumită scară reprezintă chiar valorile forței de apăsare a segmentului în punctele respective.

Un al doilea aparat, [85], a care de data aceasta execută măsurarea presiunii pe cale mecanică este prezentat în fig. 4.1-4.

Aparatul permite citirea directă a forței de apă r exercitate de segment pe pârghii, citirea făcându-se de data aceasta la un ceas comparator, în momentul când segmentul a fost comprimat cu o valoare determinată, foarte mică.

Elementele constructive ale aparatului sunt: un *postament* 1, care poate fi reglat în înălțime prin patru *șuruburi de reglaj* 2. Postamentul 1 susține un *suport* 3, pe care se află montat *inelul-calibrul* 4, în care se montează segmentul a cărui curbă de presiune urmează a se măsura. Inelul-calibrul 4 este prevăzut pe periferia sa cu un număr de ferestre, de exemplu 36, dispuse din  $10^\circ$  în  $10^\circ$  pe periferia inelului. După introducerea segmentului în inelul-calibrul 4, asupra lui va apăsa din partea exterioară un *palpator* 5, introdus în una din ferestrele inelului-calibrului și dispus la capătul unei *pârghii* 6, prevăzută cu un *braț lung gradat* 8, care poartă o *greutate* 7.

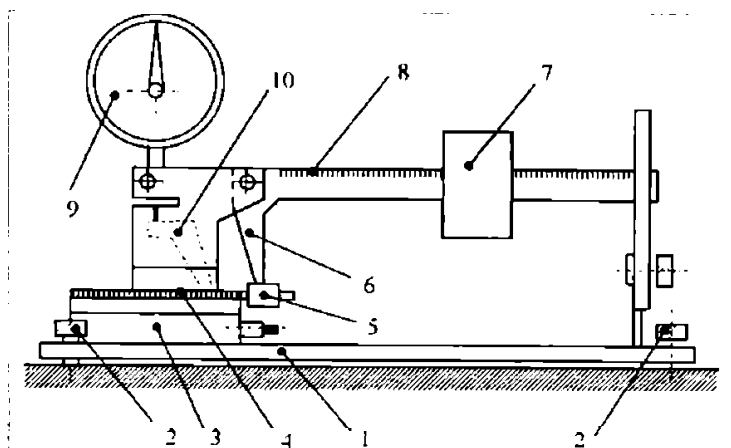


fig. 4.1-4

Dispozitiv mecanic pentru măsurarea presiunii elastice  $p_E(\psi)$  pe conturul segmentului

#### 4.1 Presiunea elastică de contact segment – cilindru

Forța de apăsare a palpatorului 5 asupra segmentului este determinată de poziția greutateii 7 pe brațul mobil 8 al pârghiei 6. Această forță se va alege astfel, încât să provoace în segment o deformare minimă, care este transmisă *comparatorului* 9, prin intermediul unei *pârghii* 10, care are unul dintre brațe în contact cu fața interioară a segmentului, punctul de contact aflându-se pe același diametru pe care se exercită apăsarea palpatorului 5 asupra segmentului. Forța de apăsare se citește pe brațul gradat 8 al pârghiei 6 în momentul în care comparatorul 9 indică o deformare mică, aleasă, de exemplu 20  $\mu\text{m}$ . Pentru măsurarea presiunii segmentului pe întregul contur, inelul-calibru 4 se rotește cu câte  $10^0$ , aducându-se astfel în mod succesiv o altă fereastră în dreptul palpatorului 5.

Pentru măsurarea presiunii elastice  $p_E(\psi)$  pe periferia segmentului s-a executat împreună cu sprijinul UCM Reșița – S.A., dispozitivul din fig. 4.1-5, care măsoară presiunea elastică folosind o balanță cu traductoare tensometrice tip UWE ESP 10K, [42]. Balanța este comandată de un procesor „INTEL” adaptat care realizează în mod automat compensarea de temperatură și reglajele de zero. Precizia balanței este de  $\pm 5\text{g}$  în domeniul 200g-10kg la temperaturi cuprinse între  $-5^\circ + 35^\circ$ .

Segmentul 1 se introduce în *inelul* 2 care are realizate fante de grosime 2mm din  $2^\circ$  în  $2^\circ$ . Inelul 2 se poate roti pe cele trei *role* 3 și se poate deplasa vertical împreună cu *sania* 4. Sa ia 4 a vertical cu ajutorul unei *manivele* 7 care prin intermediul unui sistem de roți dințate acționează un *șurub* 5 dispus vertical în *coloana* 6.

Pe sania 4 se montează prin intermediul unui suport de comparator un *ceas micrometric* 8 „JENA” cu precizia de  $1\mu\text{m}$  având domeniul de măsurare de la  $-60\mu\text{m}$  la  $+60\mu\text{m}$ . Ceasul comparator se deplasează concomitent cu inelul 2 și segmentul.

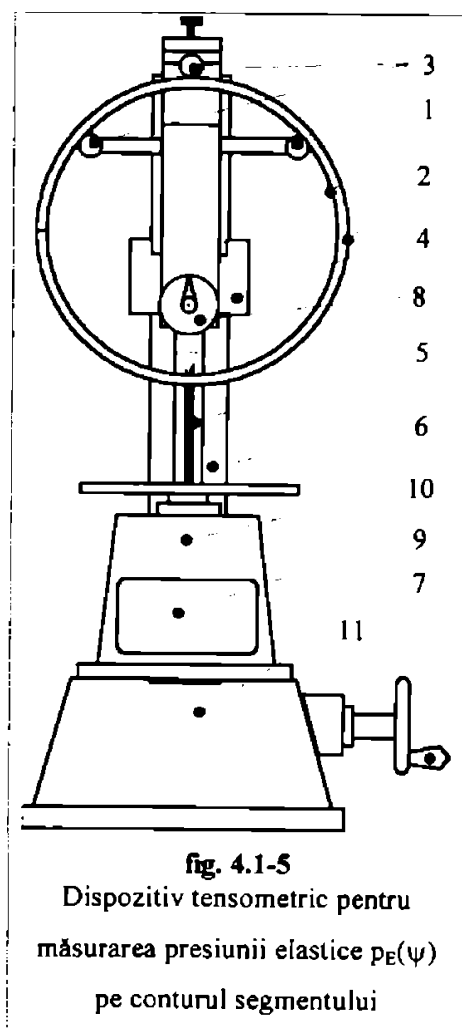


fig. 4.1-5

Dispozitiv tensometric pentru  
măsurarea presiunii elastice  $p_E(\psi)$   
pe conturul segmentului

#### 4.1 Presiunea elastică de contact segment – cilindru

În fantele inelului 2 se introduce o cală calibrată de valoare 2,00 mm, care va face contactul între segmentul din inel și *balanța 10*.

Pentru realizarea măsurătorilor de presiune se coboară inelul 2 împreună cu segmentul 1 acționând manivela 7 până când indicația ceasului micrometric va arăta o deplasare de valoare impusă (10 $\mu$ m, 30 $\mu$ m, *Fișa de măsurători - ANEXA VI.*). Pe balanța electronică se citește valoarea forței elastice în sutimi sau miimi de N introducând de la *display-ul balanței 9* o valoare de 981 respectiv 9806 corespunzătoare valorii 100·g respectiv 1000·g.

După realizarea citirii se ridică sania 4, acționând manivela 7, se rotește inelul 2 împreună cu segmentul 1 la fanta următoare și se efectuează următoarea măsurătoare.

## 4.2 PRESIUNEA MEDIE ELASTICĂ

Presiunea medie elastică a unui segment caracterizează global curba de presiuni impusă segmentului și comportarea elastică generală. Ea nu se măsoară direct ci indirect prin intermediul altor mărimi.

La ora actuală există mai multe metode de determinare a presiunii medii elastice, [33], [45], [85].

### 4.2.1 METODA CURBEI DE PRESIUNE

În general, curbele de presiune sunt funcții periodice ale căror grafice prezintă simetrie după axa ce trece prin mijlocul rostului. Forma unei astfel de funcții se stabilește prin analiza armonică, prezentată în capitolul 2, și are expresia:

$$p_E(\psi) = p_0 + \sum_{i=2}^n p_i \cdot \cos(i \cdot \psi) \quad \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (4.2-1)$$

sau

$$p_E(\psi) = p_E \cdot \left[ 1 + \sum_{i=2}^n \frac{p_i}{p_E} \cdot \cos(i \cdot \psi) \right] \quad \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (4.2-2)$$

unde:

- $p_E(\psi)$  [ $N/m^2$ ] este presiunea elastică curentă,
- $p_0 = p_E$  [ $N/m^2$ ] este presiunea elastică medie,
- $p_i/p_E$  [-] sunt coeficienții adimensionali ai dezvoltării în serie Fourier,
- $\psi$  [rad] este unghiul curent,
- $i$  [-] este numărul armonicii.

Coeficienții dezvoltării în serie Fourier  $p_i/p_E$  se calculează cu ajutorul programelor „Calculul funcției de presiune.mcd” realizate cu ajutorul soft-ului MathCAD 7 Profesional, prezentat în § 2.3 și ANEXA I, II, III.

Atunci când se cunoaște expresia funcției  $p_E(\psi)$  sau atunci când se cunosc perechile de valori presiune-unghi ( $p_E(\psi)-\psi$ ), se poate trasa curba  $p_E(\psi)$  în coordonate presiune – unghi, fig. 4.2-1, coeficientul  $p_0=p_E$  reprezintă valoarea medie a presiunii elastice  $p_E(\psi)$ , care se poate obține prin planimetrarea ariei ABCDA.

#### 4.2 Presiunea medie elastică

$$A_{\text{planimetrata}} = \int_0^{\pi} p_E(\psi) \cdot d\psi \quad (4.2-3)$$

iar presiunea elastică în acest caz se calculează cu relația :

$$p_E = \frac{A_{\text{planimetrata}}}{\pi} \cdot k_p \cdot k_u \quad (4.2-4)$$

unde:

- $k_p$  [N/m<sup>2</sup> / mm] este scara de reprezentare a presiunilor,
- $k_u$  [rad / mm] este scara de reprezentare a unghiurilor,
- $A_{\text{planimetrata}}$  [mm<sup>2</sup>] este aria determinată prin planimetrare.

Metoda planimetrării este exactă atunci când se dispune de un număr cât mai mare de măsurători, astfel încât, curba  $p_E(\psi)$  trasată prin puncte să fie cât mai apropiată de curba reală [33], [45], [85].

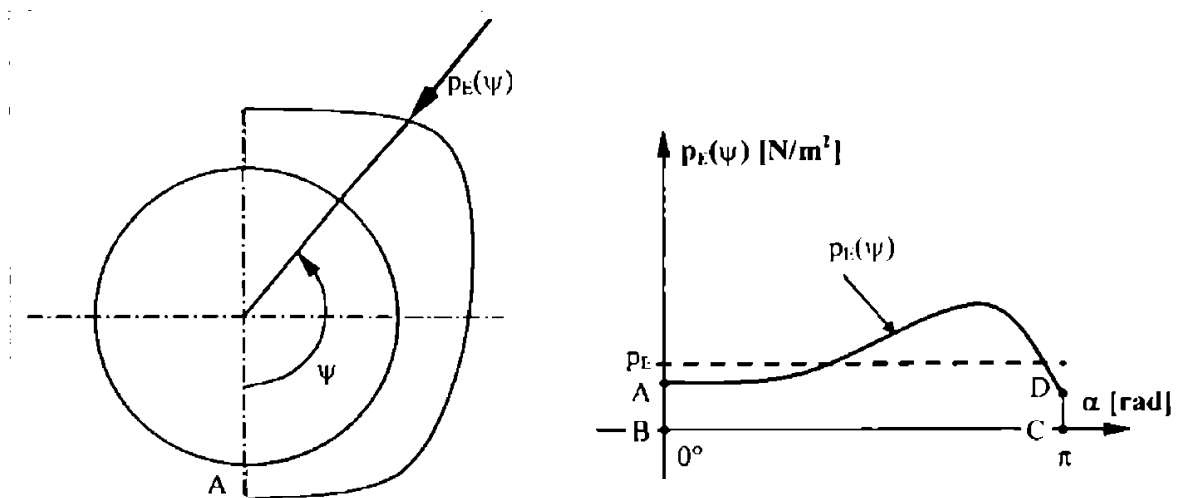


fig. 4.2-1

Curba de presiune în coordonate polare și rectangulare

Coefficientul  $p_0$ , respectiv presiunea medie elastică  $p_E$ , se poate calcula și pentru un număr mai redus de măsurători ( $n = 6, 10, 18$ ), fără a fi necesar trasarea curbei de presiune, pe baza relațiilor lui Bessel:

$$p_E = p_0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^n \left[ p_E \left( i \cdot \frac{\pi}{n} \right) \right] \quad (4.2-5)$$

unde :  $p_E(i \cdot \pi/n)$  [N/m<sup>2</sup>] - sunt presiunile elastice de la unghiurile  $i \cdot \pi/n$ ,  $i = 1 \dots n$ ,

$n$  [-] – numărul de intervale în care s-a împărțit circumferința segmentului.

Accastă a doua variantă este recomandată în procesul tehnologic, când se verifică atât curba reală de presiune  $p_E(\psi)$ , cât și presiunea medie elastică  $p_E$  pe baza unui număr redus de măsurători ale presiunii pe periferia segmentului [45], [85].

#### 4.2 Presiunea medie elastică

Cele două variante ale metodei curbei de presiune folosite pentru calculul presiunii medii elastice  $p_E$  se aplică atât segmentelor de presiune constantă cât și celor cu presiune variabilă [37], [45], [85].

Dezavantajul metodelor constă în dificultatea eliminării posibilelor erori de măsurare ce pot apărea la stabilirea curbei de presiune. Din acest motiv s-au căutat alte metode indirecte de determinare a presiunii medii elastice care să elimine acest dezavantaj.

##### 4.2.2 METODA FORȚEI TANGENȚIALE $F_t$

Această metodă permite determinarea presiunii medii elastice  $p_E$  pe baza măsurării forței tangențiale  $F_t$  aplicată la extremitățile segmentului care trebuie să reducă rostul de la valoarea din stare liberă  $s_0$  la valoarea din stare montată  $s_m$ .

Dacă se consideră o porțiune dintr-un segment introdus în cilindru, porțiune reprezentată prin arcul  $MM'$ , fig. 4.2-2, dispus simetric în raport cu axa  $x - x$ , axă care

trece prin rost, forța elementară  $dF$  a presiunii exercitate de cilindru asupra unei porțiuni de deschidere unghiulară  $d\varphi$  situată la un unghi oarecare  $\varphi$  de secțiunea de referință diametral opusă rostului, presiunea

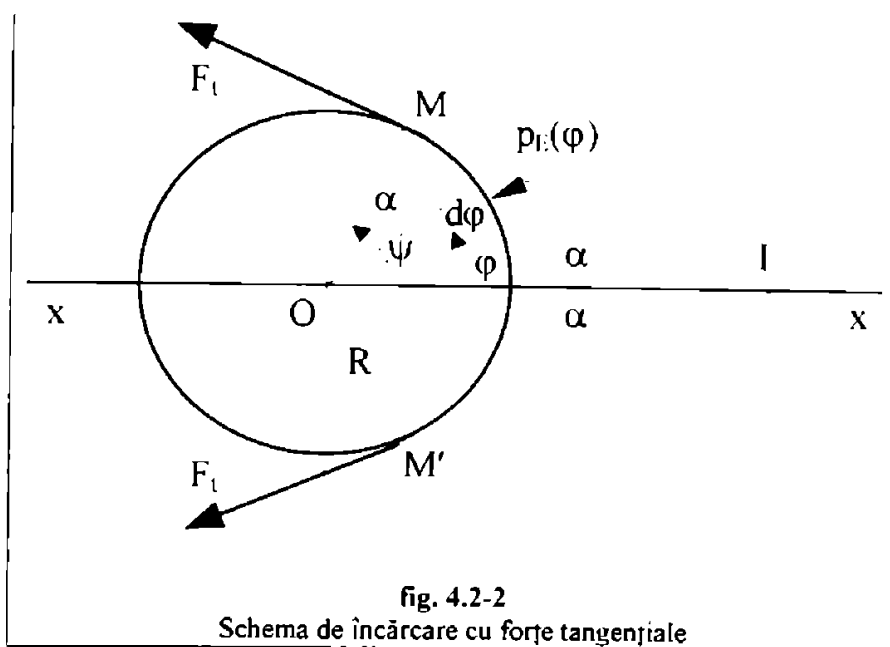


fig. 4.2-2  
Schema de încărcare cu forțe tangențiale

egală și de sens contrar presiunii elastice  $p_E(\psi)$  exercitate de segment asupra cilindrului, se poate calcula succesiv [45], [85] :

$$dF = p_E(\varphi) \cdot dA$$

$$dF = p_E(\varphi) \cdot h \cdot ds$$

$$dF = p_E(\varphi) \cdot h \cdot R \cdot d\psi \quad (4.2-6)$$

Forța rezultantă se obține prin integrare pe jumătate de circumferință :

#### 4.2 Presiunea medie elastică

$$F = 2 \cdot \int_0^{\psi} dF = 2 \cdot h \cdot R \cdot \int_0^{\psi} p_E(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi \quad (4.2-7)$$

unde: -  $dA$  este aria elementară de pe fața laterală exterioară a segmentului,

-  $h$  [mm] este înălțimea axială a segmentului montat,

-  $ds$  este arcul elementar,

-  $R$  [mm] este raza exterioară a segmentului montat,

-  $d\varphi$  este unghiul elementar.

Dacă în relația (4.2-7) se introduce expresia funcției de presiune  $p_E(\varphi)$ :

$$p_E(\varphi) = p_E \cdot \left( 1 + \sum_{i=2}^n \frac{P_i}{P_E} \cdot \cos(i \cdot \varphi) \right) \quad (4.2-8)$$

se obține:

$$F = 2 \cdot h \cdot R \cdot p_E \cdot \int_0^{\psi} \left[ \left( 1 + \sum_{i=2}^n \frac{P_i}{P_E} \cdot \cos(i\varphi) \right) \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi \right] \quad (4.2-9)$$

Dacă se presupune că la fiecare extremitate a arcului  $MM'$ , ar acționa câte o forță tangență la arc, aceste forțe ar avea asupra arcului același efect ca și forța  $F$ , deci se poate scrie:

$$F = 2 \cdot F_t \cdot \cos(\alpha) \quad (4.2-10)$$

Egalând relațiile (4.2-9) și (4.2-10), se obține:

$$h \cdot R \cdot p_E \cdot \int_0^{\psi} \left[ \left( 1 + \sum_{i=2}^n \frac{P_i}{P_E} \cdot \cos(i \cdot \varphi) \right) \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi \right] = F_t \cdot \cos(\alpha) \quad (4.2-11)$$

Valoarea presiunii medii elastice se obține cu relația [37], [45], [85] :

$$p_E = \frac{2 \cdot F_t \cdot \cos(\alpha)}{h \cdot D \cdot \int_0^{\psi} \left[ \left( 1 + \sum_{i=2}^n \frac{P_i}{P_E} \cdot \cos(i \cdot \varphi) \right) \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi \right]} \quad (4.2-12)$$

unde: -  $D$  [mm] este diametrul nominal al segmentului ( $D = 2 \cdot R$ ).

Pentru segmenții cu presiune constantă coeficienții adimensionali ai dezvoltării în serie Fourier,  $p_i / p_E$  sunt nuli, iar integrala de la numitor devine:

$$\int_0^{\psi} \left[ \left( 1 + \sum_{i=2}^n \frac{P_i}{P_E} \cdot \cos(i \cdot \varphi) \right) \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi \right] = \int_0^{\psi} \cos(\varphi) \cdot d\varphi = \sin(\psi) \quad (4.2-13)$$

În cazul segmenților de presiune variabilă, rezolvarea integralei de la numitor este:



#### 4.2 Presiunea medie elastică

$$\int_0^{\psi} \left[ 1 + \sum_{i=2}^n \frac{P_i}{P_E} \cdot \cos(i \cdot \varphi) \right] \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi =$$

$$= \int_0^{\psi} \cos(\varphi) \cdot d\varphi + \sum_{i=2}^n \frac{P_i}{P_E} \cdot \int_0^{\psi} \cos(i \cdot \varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi \quad (4.2-14)$$

Prima integrală din membrul stâng al ecuației (4.2-14), are valoarea :

$$\int_0^{\psi} \cos(\varphi) \cdot d\varphi = \sin(\psi) \Big|_0^{\psi} = \sin(\psi)$$

A doua integrală din membrul stâng al ecuației (4.2-14), se calculează succesiv după cum urmează :

$$\int_0^{\psi} \cos(i \cdot \varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi =$$

$$= \int_0^{\psi} \frac{1}{2} \cdot [\cos(i+1) \cdot \varphi + \cos(i-1) \cdot \varphi] \Big|_0^{\psi} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{i+1} \cdot \sin(i+1) \cdot \varphi \Big|_0^{\psi} + \frac{1}{i-1} \cdot \sin(i-1) \cdot \varphi \Big|_0^{\psi} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{i+1} \cdot \sin(i+1) \cdot \psi + \frac{1}{i-1} \cdot \sin(i-1) \cdot \psi \right] =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot (i^2 - 1)} \cdot [(i-1) \cdot \sin(i+1) \cdot \psi + (i+1) \cdot \sin(i-1) \cdot \psi] =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot (i^2 - 1)} \cdot [(i-1) \cdot \sin(i \cdot \psi) \cdot \cos(\psi) + (i+1) \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(i \cdot \psi) +$$

$$+ (i+1) \cdot \sin(i \cdot \psi) \cdot \cos(\psi) - (i-1) \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(i \cdot \psi)] =$$

$$\frac{1}{i^2 - 1} \cdot [i \cdot \sin(i \cdot \psi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\psi) \cdot \cos(i \cdot \psi)]$$

Integrala din relația (4.2-14) devine:

$$\int_0^{\psi} \left[ 1 + \sum_{i=2}^n \frac{P_i}{P_E} \cdot \cos(i \cdot \varphi) \right] \cdot \cos(\varphi) \cdot d\varphi =$$

$$= \sin(\psi) + \sum_{i=2}^n \left[ \frac{P_i}{P_E} \cdot \frac{i \cdot \sin(i \cdot \psi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\psi) \cdot \cos(i \cdot \psi)}{i^2 - 1} \right] \quad (4.2-15)$$

În acest caz relația (4.2-12) devine:

$$P_E = \frac{2 \cdot F_t \cdot \cos(\alpha)}{h \cdot D \cdot \left\{ \sin(\psi) + \sum_{i=2}^n \left[ \frac{P_i}{P_E} \cdot \frac{i \cdot \sin(i \cdot \psi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\psi) \cdot \cos(i \cdot \psi)}{i^2 - 1} \right] \right\}} \quad (4.2-16)$$

Relația (4.2-16) permite determinarea presiunii medii elastice  $p_E$ , pe baza a două forțe tangențiale  $F_t$  aplicate la extremitățile arcului cu deschiderea unghiulară  $\psi$ .

#### 4.2 Presiunea medie elastică

Dacă arcul are deschiderea unghiulară  $\psi = \pi$ , al doilea termen al parantezei de la numitor se anulează, relația (4.2-16) devine în acest caz:

$$p_E = \frac{2 \cdot F_t \cdot \cos(\alpha)}{h \cdot D \cdot \sin(\psi)} \quad (4.2-18)$$

și având în vedere că unghiurile  $\alpha$  și  $\psi$  sunt unghiuri complementare, putem scrie:

$$\cos(\alpha) = \sin(\psi) \quad (4.2-19)$$

relația (4.2-18) devine [45], [85]:

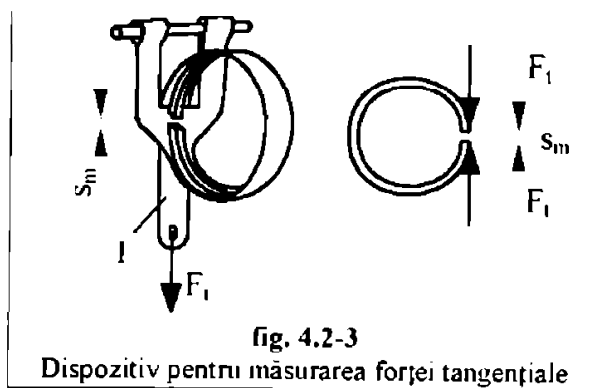
$$p_E = \frac{2 \cdot F_t}{h \cdot D} \quad (4.2-20)$$

ceea ce corespunde situației când forțele tangențiale sunt aplicate la extremitățile segmentului.

Relația (4.2-18) are aceeași formă și în cazul segmentilor de presiune constantă când, coeficienții adimensionali  $p_i / p_E$  se anulează [33], [45], [85].

Aceasta înseamnă că, în cazul segmentilor, presiunea elastică exercitată de cilindru asupra unui arc oarecare (egală, în cazul segmentilor de presiune constantă și cu presiunea medie elastică) este echivalentă ca efect cu acțiunea a două forțe tangențiale egale  $F_t$ , aplicat la extremitățile arcului, care înconvoaie arcul, deci au de a mări curbura segmentului. Se ajunge astfel la schema din fig.4.2-3. conform căreia pentru a determina presiunea medie elastică a segmentului, aceasta se strânge într-o bandă de oțel  $s$  până când rostul atinge valoarea din starea montată.

Metoda forței tangențiale este simplă și rapidă, dar transpunerea ei în practică nu corespunde considerațiilor teoretice pe care se bazează. Cu alte cuvinte, folosind dispozitive adecvate, care sunt prevăzute cu o bandă ce înfășoară segmentul, la închiderea



segmentului până la valoarea rostului în stare montată nu avem certitudinea că segmentul este astfel comprimat are forma cilindrică (circulară). deoarece rigiditatea la încovoiere a segmentului este mult mai mare decât cea a benzii de oțel.

#### 4.2 Presiunea medie elastică

Deoarece distribuția presiunilor elastice depinde esențial de forma deformată a segmentului, categoric că forța tangențială măsurată astfel nu corespunde curbei de presiune reale a segmentului montat în cilindru [45], [85].

Literatura de specialitate [33], [45], [85], recomandă această metodă doar segmentilor cu presiune constantă pe periferie unde abaterile de la forma circulară nu sunt așa de pronunțate ca în cazul segmentilor cu presiune variabilă, iar firmele producătoare de segmenti indică forța tangențială ca singurul parametru elastic tehnico-constructiv, dar îi atribuie o toleranță foarte mare, de +40% față de valoarea nominală.

#### 4.2.3 PARAMETRI NOI DE APRECIERE A COMPORTĂRII ELASTICE

La motoarele navale în doi timpi cu cursa pistonului lungă și semilungă cămașa cilindrului are o formă ușor ovală. Astfel ovalitatea cămășii cilindrului poate atinge valori până la 0,43 mm la diametre nominale cuprinse între 700 și 900 mm.

În aceste cazuri se cere segmentului să aibă o comportare conformă cu ovalitatea cămășii de cilindru, cu alte cuvinte segmentul trebuie să realizeze etanșarea și în aceste situații. Mărimea prin care se realizează această comportare se numește **conformabilitate** și este definită ca fiind diametrul superior celui nominal al unui cilindru rotund până la care se realizează etanșarea pe toată periferia.

Măsurarea conformabilității se face la fanta de lumină, introducând segmentul în calibre circulare cu diametrul nominal din ce în ce mai mare. Treptele de variație sunt de 0,25 mm.

## 5. MODELAREA SEGMENTULUI

### 5.1. MODELAREA CU AJUTORUL METODEI ELEMENTELOR FINITE

#### 5.1.1. STAREA DE TENSIUNE. STAREA DE DEFORMAȚIE. LEGEA LUI HOOKE

În cazul în care asupra unui corp deformabil acționează forțe exterioare, în orice punct al acestuia ia naștere o **stare de tensiune** care este caracterizată prin 6 componente. În fig.2.1 sunt date tensiunile normale  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  și tensiunile tangențiale  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$  [12], [15], [34], [35], [46], [59], [60], [72].

Pentru un element infinitesimal  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ , vom nota deplasările în direcțiile axelor sistemului de coordonate cu :

$u(x, y, z)$  – în direcția axei OX

$v(x, y, z)$  – în direcția axei OY

$w(x, y, z)$  – în direcția axei OZ

Aceste deplasări caracterizează poziția deformată a elementului considerat.

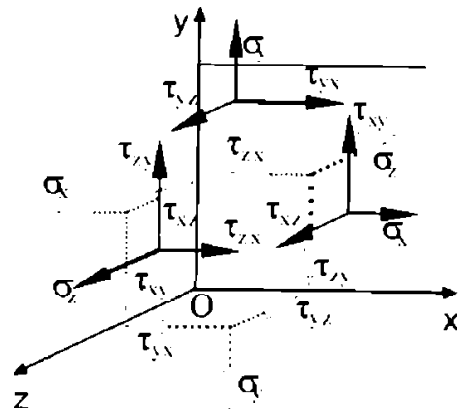


fig. 5.1-1

Starea de tensiune în jurul unui punct

**Starea de deformatie** a elementului va fi exprimată, conform teoriei liniare, cu:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \end{aligned} \quad (5.1-1)$$

în care:  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  – deformațiile specifice liniare.

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  – lunecări specifice.

**Legea lui Hooke** stabilește relația de legătură dintre deformații și tensiuni, respectiv dintre tensiuni și deformații. În ipoteza unui corp realizat dintr-un material omogen și izotrop (la care proprietățile materialului sunt identice pe orice direcție), vom avea [12], [15], [34], [35], [46], [59], [60], [69], [72]:

### 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{E} \cdot \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{E} \cdot \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{E} \cdot \tau_{zx} \end{aligned} \quad (5.1-2)$$

în care :  $E$  [N/mm<sup>2</sup>] – modulul de elasticitate longitudinal (Young)  
 $\mu$  [-] – coeficientul de contracție transversală (Poisson).

Relațiile (5.1-2) se exprimă prin aceea că fenomenul de lungire a elementului de volum pe una din direcții este întotdeauna însoțit de o contracție pe celelalte două direcții. Tensiunile tangențiale sunt proporționale cu lunecările specifice corespunzătoare, factorul de proporționalitate fiind  $G$  [N/mm<sup>2</sup>] – modulul de elasticitate transversal [12], [15], [34], [35], [46], [59], [60], [69], [72]:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (5.1-3)$$

Dacă exprimăm tensiunile în funcție de deformații, alegând forma de scriere matricială vom avea:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \mu) \cdot (1 + 2 \cdot \mu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 - \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \mu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5.1-4)$$

Există o serie de cazuri particulare [15], [46], [59], [69], [72], [73], [74]:

- starea de solicitare monoaxială;
- starea plană de tensiune;
- starea plană de deformație;
- starea de tensiune axial simetrică;
- plăci plane supuse la solicitarea de încovoiere, etc.

Pentru a ușura înțelegerea și a simplifica expunerea, în acest capitol se vor face referiri numai la starea plană de tensiune. În acest caz, tensiunea normală  $\sigma_x = 0$ , precum și tensiunile tangențiale  $\tau_{yz} = 0$  și  $\tau_{zx} = 0$ .

## 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

Relația de legătură dintre tensiuni și deformații se simplifică în mod corespunzător și se scrie matriceal [12], [15], [34], [46], [59], [60], [69], [72]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (5.1-5)$$

### 5.1.2. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU. ECUAȚIA DE COMPATIBILITATE.

În starea plană de tensiune (problemă de elasticitate bidimensională), vom considera un element de suprafață  $dA = dx \cdot dz$ , cărui îi vom aplica una din ipotezele de bază din teoria elasticității, și anume că tensiunile sunt funcții continue de coordonate  $x, y$  ale punctelor din cadrul domeniului de analiză. O consecință imediată a ipotezei asumate este că pentru laturile paralele ale elementului  $dx \cdot dz$ , creșterile tensiunilor vor fi chiar egale cu derivatele lor parțiale în raport cu variabilele respective [15], [34], [46], [59], [60].

Pentru a studia modul cum se produce această variație, este suficient a aplica ecuațiile de echilibru asupra elementului  $dx \cdot dz$  considerat, așa cum se prezintă în fig. 5.1-2. Considerând elementul de grosime constantă unitară, pentru început se va ține seama și de forțele pe unitatea de suprafață (gravitaționale)  $X, Y$  [15], [34], [60].

Proiectând toate forțele care acționează asupra elementului  $dx \cdot dy$  pe cele două axe de coordonate  $Ox$  și  $Oy$ , forțe care depind de valorile tensiunilor și de lungimile laturilor pe care acționează fiecare, se obțin următoarele ecuații de echilibru:

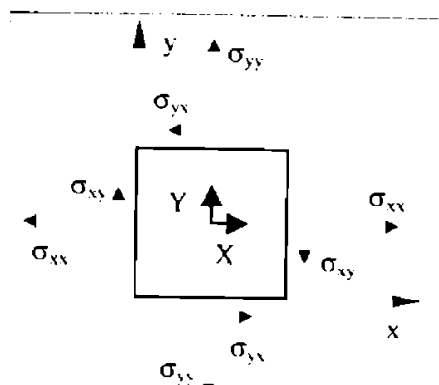


fig. 5.1-2  
Stare plană de tensiune

$$\begin{cases} \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) dy - \sigma_x \cdot dy + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \cdot dx - \tau_{xy} \cdot dx + X \cdot dx \cdot dy = 0 \\ \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \cdot dx - \sigma_y \cdot dx + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \cdot dy - \tau_{yx} \cdot dy + Y \cdot dx \cdot dy = 0 \end{cases} \quad (5.1-6)$$

## 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

Prin reducerea termenilor corespunzători și simplificarea cu factorul  $dx \cdot dy$ , ecuațiile de echilibru se obțin sub forma [15], [34], [35], [46], [59], [60], [69], [72]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \end{cases} \quad (5.1-7)$$

În absența forțelor masice  $X, Y$ , ecuațiile de echilibru pentru starea plană devin:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5.1-8)$$

Așa cum se poate ușor observa, numărul de tensiuni necunoscute în starea plană de tensiune este de 3, în timp ce deplasările necunoscute sunt în număr de două:  $u(x,y)$  și  $v(x,y)$ . Cele 3 componente ale tensiunilor nu pot fi determinate din cele numai două ecuații scrise până în prezent (5.1-8).

Este deci necesară scrierea unei a treia ecuații, numite de compatibilitate. Pentru demonstrație vom porni de la relațiile dintre deformațiile specifice și deplasări:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (5.1-9)$$

Vom deriva convenabil relațiile(5.1-9), obținând:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2};$$

Rezultă imediat ecuația de compatibilitate [15], [46] :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (5.1-10)$$

Ecuația de compatibilitate (5.1-10) reprezintă o constrângere geometrică a deformării corpului, în contrast cu constrângerile de tip forță impuse prin ecuațiile de echilibru (5.1-8). Pentru scopul propus în cadrul acestui capitol, să spunem deocamdată că ecuația (5.1-10) poate fi rapid scrisă în funcție de tensiuni, utilizând și ecuațiile de echilibru. Soluționarea problemelor de elasticitate ar conduce la calculul mai întâi al tensiunilor, deformațiilor și apoi prin integrarea relațiilor (5.1-9) se obțin deplasările.

## 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

Există însă o alternativă posibilă prin care se exprimă ecuațiile de echilibru în funcție de deplasările  $u(x,y)$  și  $v(x,y)$ . În această situație vor fi calculate mai întâi deplasările și apoi prin derivare, starea de tensiune și deformație, respectiv componentele lor.

### 5.1.3. FORMULAREA DIFERENȚIALĂ ÎN TENSIUNI

Prin particularizarea relațiilor (5.1-2) pentru starea plană de tensiune sunt valabile următoarele relații [15], [34], [35], [46], [59], [60], [69], [72]:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{E} \cdot \tau_{xy}\end{aligned}\tag{5.1-11}$$

Relațiile (5.1-11) se înlocuiesc în ecuația de compatibilitate (5.1-10), după efectuarea derivatelor parțiale:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x) = (1 + \mu) \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + (1 + \mu) \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}\tag{5.1-12}$$

Diferențiem în mod convenabil ecuațiile de echilibru:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} ; \quad \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

Prin înlocuire în relația (5.1.11) obținem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \mu + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + (1 + \mu) \cdot \left[ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right] &= 0 \\ \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} &= 0 \\ \Delta(\sigma_x + \sigma_y) &= 0\end{aligned}\tag{5.1-13}$$

în care:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{- operatorul lui Laplace.}$$

Pe baza relației (5.1-13), în mecanica structurală s-a dezvoltat metoda forțelor. Această relație ne arată că suma tensiunilor ( $\sigma_x + \sigma_y$ ) trebuie să fie o funcție armonică, în condițiile în care se respectă condițiile de echilibru elastic. Mai interesantă este



### 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

dispariția constantelor elastice  $E$ ,  $G$ ,  $\mu$ , ceea ce are importanța deosebită pentru aplicarea similitudinii în cercetările fotoelastice.

La integrarea ecuațiilor de echilibru și a ecuațiilor de compatibilitate, rezultă o serie de constante de integrare. Aceste constante sunt calculate din condițiile la limită.

#### 5.1.4. FORMULAREA DIFERENȚIALĂ ÎN DEPLASĂRI

În acest paragraf se prezintă cealaltă alternativă posibilă, și anume exprimarea ecuațiilor de echilibru în funcție de deplasări. Nu este necesar să mai facem apel la ecuația de compatibilitate. Utilizând relațiile simultane (5.1-5), vom deriva tensiunile conform cu prima ecuație de echilibru [15], [34], [35], [46], [59], [60], [69], [72]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} \cdot \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \\ \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0\end{aligned}\quad (5.1-14)$$

Se aduce la același numitor, apoi se face un mic artificiu matematic cu scopul de a ușura scrierea: astfel se adună și se scade  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Prima ecuație de echilibru, scrisă

în funcție de deplasări:

$$\begin{aligned}\text{Analog:} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{(1+\mu)}{2} \cdot \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{(1+\mu)}{2} \cdot \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]\end{aligned}\quad (5.1-14'), (5.1-14'')$$

Relațiile (5.1-14'), (5.1-14'') sunt deosebit de importante pentru apariția și dezvoltarea metodei elementului finit. Pe baza acestor relații s-a dezvoltat metoda deplasărilor.

Pentru probleme simple ale elasticității plane, până la începutul anilor '50 ai secolului nostru, practic toate problemele de elasticitate au fost rezolvate cu problema forțelor, care trata eforturile ca necunoscute fundamentale ale problemei. Aceste eforturi au fost calculate mai întâi prin aplicarea echilibrului sistemului de forțe și

## 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

compatibilității pe deformația sistemului. Deplasările s-au calculat eventual în mod suplimentar.

La sfârșitul anilor '50, inginerii de aeronautică au fost nevoiți să abandoneze metoda forțelor, deoarece s-au confruntat cu probleme de proiectare tot mai complexe ale avioanelor moderne. Aceasta a condus la o reexaminare mult mai atentă a alternativei de a determina mai întâi deplasările în cazul unei probleme de elasticitate. Astfel s-a ajuns la metoda elementului finit, de acum rezolvarea problemelor începând cu determinarea deplasărilor, preferabilă determinării tensiunilor ca necunoscute primare.

Ceea ce s-a prezentat până în prezent a avut rolul de a clarifica care este problema de rezolvat.

Cele două ecuații ale sistemului (5.1-14) reprezintă răspunsul la această întrebare în formulare diferențială în deplasări.

### 5.1.5. CONDIȚII LA LIMITĂ

La integrarea ecuațiilor sistemului (5.1-14) vor rezulta o serie de constante de integrare care se calculează din condițiile pe frontieră sau condițiile la limită. Pe frontiera  $\Gamma$  a domeniului de analiză  $A$  (fig. 5.1-3) se pot impune în principiu două tipuri de condiții la limită [15], [46], . . . :

- condiții de tip Dirichlet, când se impun valori ale deplasărilor (nule sau nenule – după caz)  $u_{\Gamma}(x,y)$  și  $v_{\Gamma}(x,y)$ ;

- condiții la limită de tip Neumann, când se impun valori ale derivatelor deplasărilor (valori ale derivatelor necunoscutelor primare) pe frontiera  $\Gamma$  a domeniului analizat.

Cum deformațiile, respectiv tensiunile sunt calculate cu ajutorul acestor derivate parțiale, rezultă că, condițiile la limită de tip Neumann, constau în impunerea tensiunilor pe frontiera domeniului.

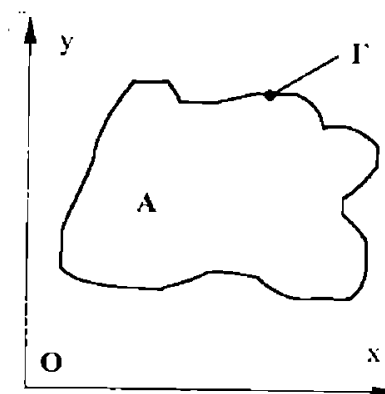


fig. 5.1-3  
Domeniul de analiză și frontiera

### 5.1.6 ENERGIA POTENȚIALĂ ASOCIATĂ UNEI STRUCTURI

Considerăm un corp elastic de o formă oarecare dată, deformat datorită forțelor pe volum și tracțiunilor pe suprafață. Energia potențială a unui asemenea corp este definită ca energia de deformație minus lucrul mecanic efectuat asupra corpului de către forțele exterioare [15], [34], [35], [46], [59], [60], [69], [72].

Acest lucru se scrie matematic:

$$\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = U(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - L_e(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (5.1-15)$$

în care:  $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  – energia potențială totală a unui corp deformat;

$U(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  – energia de deformație;

$L_e(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  – lucrul mecanic al forțelor exterioare.

În absența unei stări de deformație, respectiv de tensiune inițială, energia de deformație a unui corp elastic se definește ca:

$$U(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \cdot \int \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot dV \quad (5.1-16)$$

Pentru a da o interpretare intuitivă formulei de calcul a energiei de deformație, vom considera cazul cel mai simplu al întinderii. În figura 5.1-4 este prezentată variația tensiunii  $\sigma$  în funcție de deformația  $\varepsilon$ . În zona de deformare elastică, valoarea energiei de deformație reprezintă aria triunghiului înmulțită cu volumul barei supuse la întindere ( $A$  – aria secțiunii;  $l$  – lungimea barei).

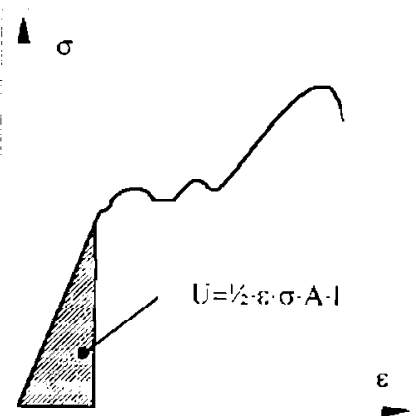


fig. 5.1-4  
Curba caracteristică de material

Lucrul mecanic al forțelor exterioare este dat de relația:

$$L_e(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int \{\mathbf{d}\}^T \cdot \{\mathbf{p}\} \cdot dV + \int \{\mathbf{d}\}^T \cdot \{\mathbf{t}\} \cdot dS + \{\mathbf{d}_n\}^T \cdot \{\mathbf{F}\} \quad (5.1-17)$$

în care:  $\{\mathbf{p}\}$  – forțe pe unitate de volum, gravitaționale, centrifugale, etc.;

$\{\mathbf{t}\}$  – acțiuni pe suprafața corpului;

$\{\mathbf{d}\}$  – vectorul deplasărilor;

$\{\mathbf{d}_n\}$  – vector ce conține deplasările punctelor unde acționează forțele concentrate  $\{\mathbf{F}\}$ .

### 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

Vom considera din nou starea plană de tensiune, fără deformații inițiale sau stare de tensiune inițială. Pe baza relațiilor dintre tensiuni și deformații, precum și a relațiilor dintre deformații și deplasări, vom calcula energia de deformație a corpului.

În acest caz:

$$\begin{aligned} \{\epsilon\}^T &= \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_{xy}\} \\ \{\sigma\} &= [D] \cdot \{\epsilon\} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \cdot \{\epsilon\} \\ \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \end{aligned} \quad (5.1-18)$$

Pentru calculul energiei de deformație vom presupune un corp de grosime constantă unitară ( $t = 1$ ). Integrala din relația (5.1-16) se va calcula acum pe suprafața  $\Lambda$  [15], [46], [59], [60], [69], [72].

$$\begin{aligned} U(u, v) &= \frac{1}{2} \cdot t \cdot \int_{\Lambda} \{\epsilon\}^T \cdot \{\sigma\} \cdot dA = \\ &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \int_{\Lambda} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} \cdot dA \end{aligned} \quad (5.1-19)$$

După efectuarea înmulțirilor, energia de deformație devine:

$$U(u, v) = \frac{E}{2 \cdot (1-\mu^2)} \cdot \int_{\Lambda} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \cdot dA \quad (5.1-20)$$

Energia de deformație calculată cu relația (5.1-20) este un număr care se calculează prin integrarea pe întregul domeniu al funcțiilor  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$ . Funcțiilor de deplasare  $u$  și  $v$  li se asociază deci o valoare numerică (energia de deformație) prin intermediul unei aplicații care se numește funcțională. Această funcțională joacă un rol fundamental în formularea metodei elementului finit pe baza unui principiu variațional în problemele de analiză structurală în stare plană de tensiune.

### 5.1.7. TEOREMA ENERGIEI POTENȚIALE MINIME

**Teoremă:** Funcțiile de deplasare  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  și  $w(x, y, z)$ , care satisfac ecuațiile diferențiale de echilibru, precum și condițiile la limită ale unei probleme date asigură o valoare *minimă* a energiei potențiale, decât orice alte funcții de deplasare care satisfac aceleași condiții la limită [15], [34], [35], [46], [59], [60], [69], [72].

Câmpul de deplasări  $u, v, w$  care minimizează energia potențială  $\Pi(u, v, w)$  și satisface toate condițiile la limită (indiferent care ar fi acestea) este **câmpul de deplasări de echilibru**. De aceea această formulare este denumită metoda deplasărilor. Ecuațiile de compatibilitate sunt de asemenea satisfăcute.

Pentru scopul propus, de introducere în MEF, vom aplica principiul enunțat la starea plană de tensiune. De fapt ne vom referi numai la minimizarea energiei de deformație, fără a ne interesa deocamdată lucrul mecanic al forțelor exterioare. Această ipoteză este valabilă în cazul în care forțele pe unitate de volum sunt neglijabile, respectiv nu ne interesează (pentru moment) modul în care a fost realizată acțiunea prin care s-a obținut deformarea corpului analizat.

**Minimizarea energiei de deformație înseamnă anularea derivatelor parțiale ale expresiei în raport cu variabilele  $u$  și  $v$ .**

Pentru demonstrație, vom da o variație a unuia din argumentele funcționalei, variație de forma  $(u + \xi \cdot h)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $h(x, y)$  – deplasare arbitrară în aceeași direcție ca și  $u(x, y)$ .

Pe cele două direcții, derivatele funcționalei (energie de deformație) sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(u, v)}{\partial u} &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{U(u + \xi \cdot h, v) - U(u, v)}{\xi} = 0 \\ \frac{\partial U(u, v)}{\partial v} &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{U(u, v + \xi \cdot h') - U(u, v)}{\xi} = 0 \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

unde :  $h'(x, y)$  – deplasare în aceeași direcție ca și  $v(x, y)$ .

### 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

Vom efectua calculul numai pentru prima derivată parțială. Pentru cea de-a doua derivată, calculele se conduc în mod analog:

$$\frac{\partial U(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{u}} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int \left[ \frac{\left[ \left( \frac{\partial(\mathbf{u} + \xi \cdot \mathbf{h})}{\partial x} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial(\mathbf{u} + \xi \cdot \mathbf{h})}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + (1-\mu) \left( \frac{\partial(\mathbf{u} + \xi \cdot \mathbf{h})}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) + \frac{(1-\mu)}{2} \left( \frac{\partial(\mathbf{u} + \xi \cdot \mathbf{h})}{\partial y} \right)^2 \right]}{\xi} \right] dA$$

$$\left[ \frac{\left[ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) + (1-\mu) \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)^2 \right]}{\xi} \right] dA$$

Putem scrie că:

$$\frac{\partial(\mathbf{u} + \xi \cdot \mathbf{h})}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \xi \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x}$$

$$\left( \frac{\partial(\mathbf{u} + \xi \cdot \mathbf{h})}{\partial x} \right)^2 = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \cdot \xi \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} + \xi^2 \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} \right)^2 \quad (5.1-23)$$

Deoarece  $\xi \rightarrow 0$ , termenul care îl conține pe  $\xi^2$  este neglijabil în raport cu primii 2 termeni. Derivata parțială a energiei de deformare, cu reducerile de termeni asemenea și cu simplificarea lui  $\xi$ , devine:

$$\frac{\partial U(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{u}} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int \left[ 2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right] \cdot dA \quad (5.1-24)$$

În expresia (5.1-24) s-a renunțat și la limită, deoarece sub expresia integralei nu mai apare numărul real  $\xi$ . Pe de altă parte, produsele din expresia energiei de deformare dată în (5.1-24) provin din expresii de forma (5.1-25):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} ; \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = -\mathbf{h} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) \quad (5.1-25)$$

Ca atare, prin înlocuirea în relația (5.1-24), energia de deformare va putea fi scrisă ca o sumă de două integrale:

$$\frac{\partial U(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{u}} = I_1 + I_2 = 0 \quad (5.1-26)$$

## 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

$$I_1 = \frac{E}{(1-\mu^2)} \cdot \int_A -h \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \cdot dA$$

$$I_2 = \frac{E}{(1-\mu^2)} \cdot \int_A \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( h \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1-\mu}{2} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( h \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right] \cdot dA \quad (5.1.27)$$

Să analizăm puțin cea de-a doua integrală din (5.1-27). Pentru transformarea ei într-o integrală pe contur vom folosi o formulă de tip Gauss – Ostrogradski. Conform figurii 5.1-5, fiecare din produsele de sub integrala  $I_2$  poate fi transformat după cum urmează:

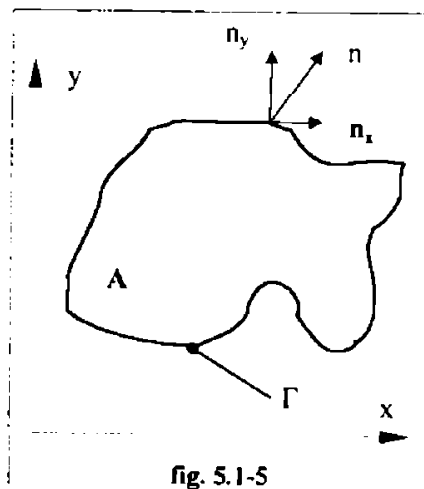


fig. 5.1-5

$$\int_A \frac{\partial}{\partial x} \left( h \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot dA = \int_{\Gamma} n_x \cdot h \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot d\Gamma \cdot I_2 = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \int_{\Gamma} \left[ n_x \cdot h \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \cdot n_x \cdot h \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \left( n_y \cdot h \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + n_y \cdot h \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \cdot d\Gamma = h \cdot \int_{\Gamma} (n_x \cdot \sigma_x + n_y \cdot \tau_{xy}) \cdot d\Gamma \quad (5.1.28)$$

Expresia (5.1-28) reprezintă tocmai condițiile la limită de tip Neumann pe frontiera domeniului analizat. În paragraful 5.1-4, formularea în deplasări a problemei de elasticitate în stare plană de tensiune a fost efectuată în absența unor condiții la limită de tip Neumann. Și acum, în absența unor asemenea condiții, integrala  $I_1$  se anulează oricare ar fi funcția  $h(x, y)$ , ceea ce înseamnă că putem scrie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = 0, \quad (5.1-29)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1+\mu}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

Ultima ecuație din (5.1-29) se numește ecuația Euler – Lagrange asociată funcționalei  $U(u, v)$  și este identică cu ecuația obținută în cadrul formulării diferențiale în deplasările, pentru proiecția pe axa  $Ox$ .

### 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

Procedând în mod analog, prin anularea derivatei parțiale a energiei de deformare în raport cu  $v$ , vom obține o ecuație identică cu cea obținută în cadrul formulării diferențiale în deplasări, pentru proiecția pe axa  $Oy$ .

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1 + \mu}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \quad (5.1-30)$$

În acest paragraf, s-a demonstrat faptul că formularea diferențială în deplasări și cea integrală pe baza principiului energiei potențiale minime, sunt echivalente.

Mai importantă de reținut este relația de calcul a energiei de deformare, care pentru starea plană de tensiune conține un număr de 6 termeni (derivate parțiale ale deplasărilor), astfel că prelucrarea în continuare prin efectuarea unor derivate va fi destul de laborioasă.

Calculul energiei de deformare se desfășoară în mod analog pentru toate cazurile particulare : elementele finite de tip bară spațială, element de placă supusă la acțiuni normale pe planul plăcii (cu comportament flexional), respectiv elementul finit axial simetric solid cu secțiune triunghiulară. În acest context, trebuie să amintim că principiul minimizării energiei de deformare se aplică în mod identic, doar expresia energiei de deformare diferă.

#### 5.1.8 APLICAREA METODEI ELEMENTULUI FINIT ÎN PROBLEMELE DE ELASTICITATE ÎN STAREA PLANĂ DE TENSIUNE

Metoda elementului finit reprezintă o cale numerică de rezolvare a problemei abordate de elasticitate în stare plană de tensiune. În principiu, funcționala (energia potențială) se va minimiza pe subdomenii de formă simplă – elemente finite – conectate între ele prin noduri [15], [46], [60], [69], [72].

Așa cum a fost descris anterior, în acest paragraf vom relua, etapă cu etapă, calculul unei structuri elastice aflate în starea plană de tensiune. De această dată, vom



### 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

introduce metoda utilizând și un aparat matematic corespunzător, dar având totuși grijă să simplificăm problema pentru a ușura înțelegerea.

Am stabilit de asemenea că pentru soluționarea unei probleme de determinare a distribuției de tensiuni și de deformații, se aplică metode de rezolvare prin aproximare, încercând de fapt să se modeleze procesul fizic cu ajutorul unor simplificări. În cazul metodei elementului finit, această modelare are loc în etapa de discretizare a domeniului (a continuumului), respectiv în modul de alegere al funcțiilor de aproximare (de interpolare) prin intermediul cărora se specifică evoluția necunoscutelor primare în interiorul elementelor finite.

Rezolvarea unei probleme de elasticitate în stare plană de tensiune, cu metoda elementului finit se face parcurgând în mod succesiv următoarele etape:

**a) Discretizarea domeniului de analiză.** Continuumul este separat prin linii imaginare (în acest caz al stării plane de tensiune) într-un număr de elemente finite. Aceste elemente finite se presupune a fi interconectate la un număr discret de puncte nodale situate, la majoritatea tipurilor de elemente finite, pe frontiera lor. Deplasările acestor puncte nodale, noduri, sunt necunoscutele de bază ale problemei.

Fără a intra acum în amănunte, mai putem preciza faptul că la unele tipuri de elemente finite, din diferite considerente, în nodurile elementului finit nu sunt alese numai deplasări drept necunoscute primare, ci pot apărea și rotații drept necunoscute primare; au fost proiectate elemente finite la care s-au introdus drept necunoscute primare nodale chiar și derivate de ordinul 2 ale deplasărilor, pentru unele cazuri speciale (ex.: plăci supuse la încovoiere).

**b) Alegerea funcțiilor de interpolare.** Un set de funcții de aproximare va fi ales pentru a defini în mod unic starea de deplasare din interiorul fiecărui element finit. Aceste funcții se exprimă în funcție de deplasările nodurilor instituite pe frontiera elementului finit. În majoritatea tratatelor privind metoda elementului finit, aceste funcții se numesc **funcții de interpolare**.

**c) Determinarea proprietăților elementelor finite.** Funcțiile de interpolare ale deplasărilor vor defini acum starea de tensiune și de deformație în elementul finit, în mod unic, exprimată în funcție de deplasările nodale. Aceste deformații, alături de orice deformație inițială și de proprietățile constructive ale materialului, vor defini o anumită stare de tensiune pe elementul finit, inclusiv pe frontiere. Un sistem de forțe

### 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

concentrate la noduri echilibrează toate tensiunile de pe frontiere și orice alte încărcări distribuite pe elementul finit. În acest stadiu, se introduce așa numita "matrice de rigiditate elementară" și se va scrie un sistem de ecuații algebrice corespunzător fiecărui element finit, având ca necunoscute deplasările elementului finit analizat. **NU SE REZOLVĂ ACESTE SISTEME ELEMENTARE.**

**d) Asamblarea proprietăților elementelor finite pentru a obține proprietățile întregului.** Disponem în acest moment de un număr de sisteme de ecuații elementare, număr care poate fi în cazul unor probleme complexe foarte mare. Aceste sisteme de ecuații elementare se assemblează pentru a reface întregul, din elementele finite componente. Rezultatul obținut în această fază este un sistem de ecuații algebrice al structurii, având ca necunoscute **toate deplasările nodale**. De asemenea în această etapă se creează "matricea de rigiditate a structurii".

**e) Rezolvarea sistemului de ecuații. Determinarea deplasărilor nodale.** Datorită proprietăților speciale ale matricei de rigiditate a structurii, care în forma în care a fost creată nu admite inversă, sistemul de ecuații algebric al structurii are numai soluție banală. În vederea rezolvării, sunt introduse o serie de condiții la limită, care conduc la modificarea formei matricei de rigiditate, permițând inversarea ei. Se aplică o serie de proceduri pentru rezolvarea unor sisteme mari, liniare sau neliniare, rezultând deplasările din nodurile structurii.

**f) Efectuarea de calcule adiționale.** Calculele adiționale se referă la determinarea componentelor de tensiuni, tensiuni echivalente, deformații, etc.

O serie de *aproximări* sunt introduse în diverse etape ale rezolvării problemei.

1. În faza de discreditare a unor domenii cu forme foarte complexe, în multe situații este dificilă reprezentarea integrală a domeniului, deoarece nu se reușește să se urmărească fidel conturul domeniului.

2. În procesul de alegere a funcțiilor de interpolare, nu pentru toate tipurile de elemente finite se poate asigura continuitatea deplasărilor pe *frontierele* dintre elementele finite adiacente. Acest lucru nu împiedică rezolvarea problemei, deoarece este violată doar condiția de compatibilitate interelementală, iar rezultatele reflectă cu mai puțină acuratețe situația din realitate. Este însă necesar să menționăm că în

### 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

interiorul fiecărui element finit, condiția de compatibilitate este în mod obișnuit satisfăcută datorită unicității deplasărilor (descrise cu ajutorul funcțiilor de interpolare). În plus, nu se pune problema să nu asigure unicitatea deplasărilor nodale.

3. În încercarea de a minimiza energia potențială calculată pentru problema de elasticitate plană, deoarece sunt utilizate funcțiile de interpolare, nu vom atinge niciodată valoarea "*minim minimorum*" a acestei funcționale. Cu cât se utilizează elementele finite de dimensiuni mai mici, apropierea de această valoare este mai bună.

4. În faza de realizare a echilibrului pe elementul finit, concentrarea forțelor echivalente la noduri conduce la asigurarea unui echilibru în sens "global". În acest fel, nu se asigură echilibrul local în interiorului fiecărui element finit, fără însă ca acest lucru să fie absolut obligatoriu.

5. Elementul finit apare ca un model de aproximare cu mai multe componente: proprietăți geometrice, fizice și funcționale. Din punct de vedere geometric, elementul finit reproduce într-o formă idealizată o parte dintr-un corp real supus analizei. Prin prisma acestei componente, elementului finit  $i$  se atașează dimensiuni. Din punct de vedere al proprietăților fizice, elementului finit  $i$  se atașează elasticitate, vâscozitate, conductibilitate termică, în raport cu tipul de aplicație care se rezolvă. Componenta funcțională conferă elementului finit proprietatea că aproximează una sau mai multe variabile ale problemei, în spațiu pe care îl ocupă din cadrul corpului real pe care îl modelază.

#### 5.1.9 DISCRETIZAREA DOMENIULUI DE ANALIZĂ

Pentru a calcula funcționala care intervine în formularea integrală a problemei (formularea variațională) vom împărți domeniul oricât de complex  $A$  în subdomenii de formă simplă, pe care se calculează integralele. Această împărțire se numește discretizare [15], [34], [35], [46], [59], [60], [69], [72].

Analistul alege, după propria dorință și experiență, pe frontiera domeniului și în interiorul acestuia, un număr de puncte numite noduri. Nodurile se vor uni cu linii imaginare, constituindu-se subdomeniile a căror reuniune va fi aproximativ egală cu domeniul inițial  $A$ .

### 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

$$A \cong \sum A^{(e)} \quad (5.1-32)$$

Numărul și dimensiunea elementelor finite este la latitudinea analistului. El alege, și este bine să o facă în cunoștință de cauză, tipul sau tipurile de elemente finite. Tipul de element finit se referă la numărul de dimensiuni (uni-, bi- sau tridimensional), la numărul de noduri și poziția acestora în cadrul elementului finit (la colțuri și pe laturi, respectiv în interiorul documentului), respectiv la funcțiile de interpolare asociate. De asemenea, elementele finite pot avea laturi rectilinii sau curbilinii.

În procesul de discretizare, se impune ca elementele finite să nu se suprapună și să nu rămână goluri în interiorul domeniului.

Pentru a face referire la nodurile din cadrul discretizării, acestea se numerotează într-o ordine arbitrară. Precizarea coordonatelor se face în raport cu un sistem de coordonate, numit **SISTEMUL DE COORDONATE GLOBAL**. Pe lângă acest sistem de coordonate, vom introduce mai târziu încă unul, propriu fiecărui element finit, în raport cu care vor fi precizate o serie de proprietăți elementale; acest sistem se numește **SISTEMUL DE COORDONATE LOCAL**.

Referirea la elementele finite se face prin numerotarea acestora, de asemenea arbitrară, și prin constituirea unui **TABEL DE CONEXIUNI**, în care sunt precizate numerele de noduri care alcătuiesc elementul finit.

Vom da un exemplu simplu, pentru care se precizează tabelul de coordonate și tabelul de conexiuni.

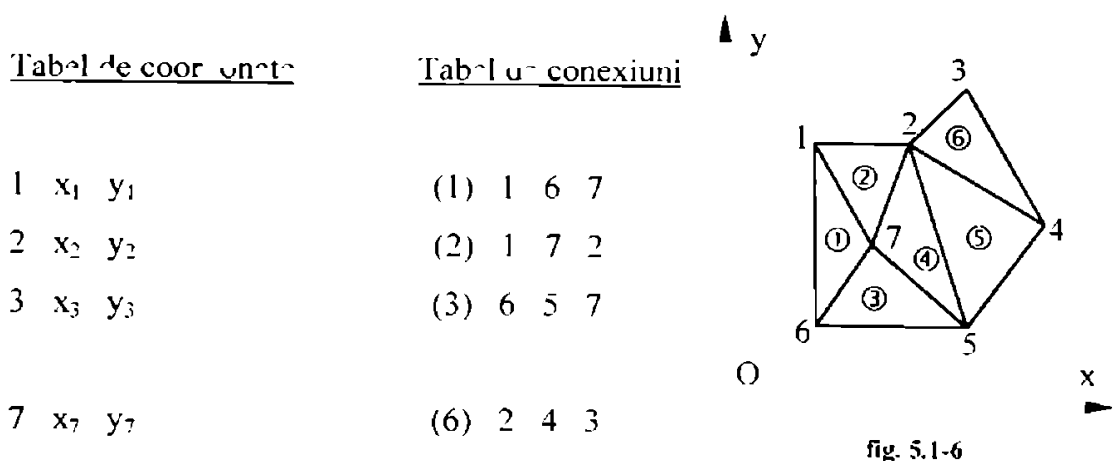


fig. 5.1-6

În tabelul de conexiuni, pentru elementele finite de formă triunghiulară, se pune condiția ca ordinea de parcurgere să fie aceeași pentru toate elementele finite (de exemplu în sens trigonometric).

### 5.1.10 ELEMENTUL FINIT AXIAL SIMETRIC SOLID

(cu secțiune triunghiulară)

Elementele finite axial simetrice sunt caracteristice corpurilor care prezintă simetrie geometrică și mecanică, în raport cu o axă numită axă de simetrie. Aceste corpuri oferă încă un exemplu de problemă de elasticitate tridimensională care poate fi descrisă de numai două variabile, astfel că tratarea se face în spațiul bidimensional [15], [46], [60], [69], [72].

Prin simetrie, cele două componente ale deplasării în orice secțiune plană în lungul axei de simetrie a corpului va defini complet starea de tensiune. Cu alte cuvinte, atunci când problemele axial simetrice sunt descrise în coordonate cilindrice  $r, z, \theta$ , toate variabilele sunt independente de  $\theta$ .

Notăm cu  $u(r, z)$  – deplasarea în direcție radială;

$w(r, z)$  – deplasare în direcția axei de simetrie ( $z$ )

Volumul de material asociat cu elementul finit triunghiular toroidal este un corp de revoluție; toate integralele se vor efectua pe acest corp. În problemele axial simetrice orice deplasare radială va induce în mod automat o deformație (respectiv o tensiune) în direcție circumferențială  $\epsilon_\theta = u / r$ : deformațiile și tensiunile în această direcție vor fi cu siguranță nenule. Devine absolut necesar ca în matricea de trecere de la tensiuni la deformații, pentru acest tip de probleme, să fie introdusă componenta circumferențială; vor exista deci patru componente de deformații.

Funcțiile de interpolare pe elementul finit triunghiular, calculate anterior sunt aplicabile și în acest caz, folosind coordonatele polare  $r, z$  rezută:

$$\begin{aligned} u(r, z) &= N_1(r, z) \cdot u_1 + N_2(r, z) \cdot u_2 + N_3(r, z) \cdot u_3 \\ w(r, z) &= N_1(r, z) \cdot w_1 + N_2(r, z) \cdot w_2 + N_3(r, z) \cdot w_3 \end{aligned} \quad (5.1-33)$$

în care:

$$N_i(r, z) = \frac{a_i + b_i \cdot r + c_i \cdot z}{2 \cdot A^{(e)}}; \quad i = \overline{1,3} \quad (5.1-34)$$

### 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

Coefficienții din relațiile (5.1-34) se determină cu relațiile:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{z}_3 & \mathbf{b}_1 &= \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 & \mathbf{c}_1 &= \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{z}_1 & \mathbf{b}_2 &= \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1 & \mathbf{c}_2 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{a}_3 &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{z}_2 & \mathbf{b}_3 &= \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 & \mathbf{c}_3 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \end{aligned} \quad (5.1-35)$$

$$2 \cdot \mathbf{A}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

Vectorul deformațiilor are următoarele componente:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T = \{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{u}{r}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right\} \quad (5.1-36)$$

Componenta  $i$  a matricii de trecere de la deformații la deplasări,  $[\mathbf{B}_i]$  se scrie acum:

$$[\mathbf{B}_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \mathbf{A}^{(e)}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i & 0 \\ 2 \cdot \mathbf{A}^{(e)} \cdot N_i & 0 \\ r & \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_i & \mathbf{b}_i \end{bmatrix} \quad (5.1-37)$$

Relația (5.1-37) arată că deformațiile, respectiv tensiunile pe elementul finit axial simetric nu mai sunt constante, așa cum s-a demonstrat în cazul elementului finit triunghiular aflat în stare plană de tensiune (sau stare plană de deformație). Această variație se datorează deformației în direcție circumferențială  $\varepsilon_\theta$ . Se pot obține totuși deformații constante, respectiv tensiuni constante, dacă deplasările  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{z})$  se impun proporționale cu  $\mathbf{r}$ .

Pentru un corp izotrop cu proprietăți identice ale materialului pe toate direcțiile) matricea  $[\mathbf{D}]$  care intervine în legea lui Hooke are forma:

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\mu) \cdot (1-2\mu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2 \cdot \frac{\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.1-38)$$

Componentele vectorului  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$  rezultă prin aplicarea legii lui Hooke:

### 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_0 \\ \sigma_z \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (5.1-39)$$

Înainte de a calcula matricea de rigiditate elementală, să observăm că integrala pe arie corespunzătoare elementului finit triunghiular plan, trebuie transformată în integrală pe volum; integralele liniare trebuie transformate în integrale pe suprafața circumferențială a elementului finit axial simetric. Aceste transformări se fac utilizând relațiile:

$$\begin{aligned} dV^{(e)} &= h \cdot dA^{(e)} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot dz \\ dS^{(e)} &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dz \end{aligned} \quad (5.1-40)$$

Matricea de rigiditate a elementului finit axial simetric rezultă cu relația :

$$[K]^{(e)} = \int_{(e)} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV^{(e)} \quad (5.1-41)$$

Folosind relațiile (5.1-37) – (5.1-41), vom scrie parte din matricea de rigiditate elementală, care corespunde unuia din nodurile elementului finit:

$$\begin{aligned} [K_i]^{(e)} &= \frac{\pi \cdot E}{2A^{(e)}(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \int_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & \frac{2 \cdot A^{(e)} \cdot N_i}{r} & 0 & c_i \\ 0 & 0 & c_i & b_i \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\mu)/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ \frac{2 \cdot A^{(e)} \cdot N_i}{r} & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \cdot r \cdot dr \cdot dz \end{aligned} \quad (5.1-42)$$

Integrala din relația (5.1-42) este mai dificil de calculat decât în cazul stării plane de tensiune, deoarece în integrand apar coordonatele axiale și radiale (la  $N_i$ ). Ca atare, această dificultate poate fi depășită prin integrare numerică sau prin efectuarea înmulțirilor și integrare termen cu termen.

Cea mai simplă metodă de integrare numerică este de a evalua matricea [B] numai în centrul elementului finit. Procedura dă rezultate corespunzătoare în general, dar această aproximare nu mai este atât de bună când este vorba de elementele finite din apropierea axei de simetrie (acolo unde raza are variație relativ mare). Oricum, la utilizarea simplificării, trebuie mai întâi determinate coordonatele centrului elementului finit și schimbate funcțiile de interpolare care se exprimă acum numai în funcție de coordonatele acestui centru.

### 5.1 Modelarea cu ajutorul metodei elementelor finite

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{1}{3} \cdot (r_1 + r_2 + r_3) \\ \bar{z} &= \frac{1}{3} \cdot (z_1 + z_2 + z_3) \\ \bar{N}_i &= \frac{1}{2 \cdot A^{(e)}} \cdot (a_i + b_i \cdot \bar{r} + c_i \cdot \bar{z})\end{aligned}\tag{5.1-43}$$

Integrala din relația (5.1-42) se poate efectua acum destul de facil, rezultând:

$$\begin{aligned} [K_i]^{(e)} &= \frac{\pi \cdot E}{2A^{(e)^2} (1 + \mu)(1 - 2\mu)} \cdot \int_{K^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & \frac{2 \cdot A^{(e)} \cdot \bar{N}_i}{\bar{r}} & 0 & c_i \\ 0 & 0 & c_i & b_i \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} 1 - \mu & \mu & \mu & 0 \\ \mu & 1 - \mu & \mu & 0 \\ \mu & \mu & 1 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - 2 \cdot \mu) / 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ \frac{2 \cdot A^{(e)} \cdot \bar{N}_i}{\bar{r}} & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \cdot r \cdot dr \cdot dz\end{aligned}\tag{5.1-44}$$

Pentru a forma matricea de rigiditate a elementului finit, după calculele efectuate pe fiecare nod, se folosește relația:

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} [K_1]^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & [K_2]^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & [K_3]^{(e)} \end{bmatrix}\tag{5.1-45}$$

În cazul problemelor axial simetrice, în privința forțelor care acționează asupra nodurilor elementului finit, trebuie făcută precizarea foarte importantă că forța nodală este expresia unui efect combinat al forței care acționează în lungul întregii circumferințe a cercului care formează “nodul”. Astfel, dacă  $F_r$  reprezintă componenta radială a forței pe unitate de lungime pe circumferința de rază  $r$ , forța care se introduce în calcule rezultă cu relația:  $2 \cdot \pi \cdot r \cdot F_r$ . În mod similar, pentru a lua în considerare efectul combinat al forțelor axiale, în calcule se introduce produsul:  $2 \cdot \pi \cdot r \cdot F_z$ .

Forțele pe unitatea de volum, pot să provină din forțe gravitaționale  $F_{vg}$  sau forțe centrifuge  $F_{ver}$ . Forțele echivalente pe un nod al elementului finit, se determină cu:

$$\{F_{vz}\}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} \rho g \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{F_{ver}\}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} \rho r \omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix}\tag{5.1-46}$$

în care:

$\rho$  - densitatea materialului;

$\omega$  - viteza unghiulară.



### Observații [15], [46], [60], [69], [72]:

1. În faza de discretizare cu elemente finite axial simetrice, pot apărea probleme la elementele finite din apropierea axei de simetrie, respectiv cele situate chiar pe axa de simetrie; se recomandă introducerea unei găuri de dimensiuni mici în jurul axei de simetrie pentru a evita apariția unor termeni infiniți la calculul integralelor. Deplasările radiale ale tuturor nodurilor situate pe generatoarea găurii se vor bloca (se vor anula); se simulează în acest fel condiția de funcționare reală, și anume că deplasările radiale din axa de simetrie sunt nule.
2. Tot în faza de discretizare, este recomandat să se evite deplasarea de noduri având aceeași coordonată radială în centrul aceluiași element finit. Această recomandare se face deoarece sunt efectuate diferențe cu coordonate radiale, astfel că erorile pot crește și unele integrale pot deveni infinite.
3. Până în prezent, am analizat corpuri axial simetrice la care atât geometria, cât și încărcările s-au considerat a avea simetrie axială. Dacă geometria corpului prezintă simetrie axială, dar încărcările nu sunt axial simetrice, trebuie aplicate proceduri speciale astfel ca analiza cu elemente finite să se poată desfășura în spațiul bidimensional. Componentele încărcării și ale deplasărilor se exprimă în acest caz prin dezvoltare Fourier, luând în considerare numai primii termeni sinus și cosinus. Termenii corespunzători sunt considerați individual, analiza desfășurându-se mai departe în manieră uzuală.

## 5.2 ANALIZA CU METODA ELEMENTELOR FINITE

Aplicațiile metodei elementelor finite se pot diviza în trei mari categorii, funcție de natura problemei care se rezolvă [15], [46], [60], [72]:

- 1 **Probleme de echilibru** sau probleme independente de timp. Cea mai mare parte a problemelor de acest tip se referă la determinarea distribuției deplasărilor sau a tensiunilor pentru o încărcare mecanică sau termomecanică.
- 2 **Probleme de valori proprii** în special în mecanica solidului deformabil. Se determină frecvențele proprii și modurile proprii de vibrație ale solidului, respectiv stabilitatea structurilor.
- 3 **Probleme de propagare** care cuprind o multitudine de fenomene dependente de timp din mecanica continuului. Se determină, spre exemplu, răspunsul dinamic al unei structuri la excitații de tip aleator.

Problema de față este o problemă de echilibru pentru că se referă la stabilirea distribuției deplasărilor pentru o încărcare mecanică.

Segmentul considerat o bară curbă cu raza de curbură variabilă este încărcat pe suprafața curbă exterioară cu presiune normală constantă – cazul segmentelor rotunzi sau cu o presiune variabilă – cazul segmentelor ovali. Presiunea, în cazul segmentelor, acționează totdeauna spre centrul segmentului.

Sub acțiunea acestei încărcări segmentul se deformează elastic, micșorându-și raza de curbură până la o valoare constantă și egală cu cea a cilindrului în care lucrează. Cu alte cuvinte, segmentul se deformează de la o formă ovală (rază de curbură variabilă) la o formă rotundă (rază de curbură constantă).

Modelarea cu ajutorul soft-urilor consacrate pe piața de computere cum ar fi : MSC-NASTRAN, ALGOR, ANSYS, COSMOS/M, QUICK FIELD, permit modelarea unui astfel de solid. Ele realizează automat discretizarea folosind optimul de elemente atât ceea ce privește tipul lor cât și în ceea ce privește dimensiunile lor, sau permit utilizatorul să aleagă el tipul și/sau dimensiunile elementelor. Varianta automată este evident ce mai agreată.

## 5.2 Analiza cu metoda elementelor finite

În ceea ce privește aplicarea unor încărcări de tip presiune pe frontieră, adică pe una sau mai multe fețe ale solidului, considerate ca entități geometrice separate, dar interdependente, se acceptă doar varianta aplicării unei presiuni de tip hidrostatic.

Pentru rezolvarea unei probleme de calcul al deplasărilor provocate de aplicarea unor presiuni variabile pe o aceeași față s-a procedat la o modelare geometrică diferită. Fața curbă exterioară a segmentului, fig. 5.2-1, a fost desenată sub forma unei suprafețe curbe canelate, fig. 5.2-2. Înălțimea pragului creat de caneluri a fost considerată de 0,2mm la o rază exterioară de 177,5mm. Ca urmare a simetriei segmentului s-a lucrat doar cu jumătate din circumferința lui fiind considerat încastrat în axa de simetrie.

Cele două modele au fost încărcate cu aceeași presiune hidrostatică normală de  $0,1026 \text{ N/mm}^2$ , corespunzătoare presiunii elastice medii de la repartiția de presiune conform fig. 2.2-4. În ambele cazuri s-a folosit discretizarea (mesh-area) cu elemente liniare.

În fig. 5.2-3 și fig. 5.2-4 sunt prezentate valorile deplasărilor totale sau rezultante („Disp\_Res”) pentru cele două cazuri prezentate anterior. Modelarea s-a realizat folosind **programul COSMOS/M Designer One integrat în softul MICROSTION MODELER.**

Comparând rezultate obținute (valorile deplasărilor rezultante) pe cele două modele se observă că eroarea este foarte mică, ceea ce conduce la concluzia că o astfel de modelare a suprafeței exterioare poate fi folosită cu succes și ea permite aplicarea unor trepte de presiune, care vor aproxima repartiția de presiune impusă. În cazul modelării efectuate, deschiderea unghiulară a unei trepte a fost  $7,5^\circ$ , iar valoarea presiunii introduse pe treaptă este egală cu valoarea medie a presiunii pe interval.

Este evident că folosirea unor trepte de deschidere unghiulară și mai mică va conduce la o apropiere și mai mare de cazul real, dar acest lucru atrage după sine, pe lângă creșterea timpului necesar desenării crenelurilor, creșterea severă a numărului de elemente în care se va discretiza solidul, putând provoca blocarea soft-ului din lipsă de memorie.

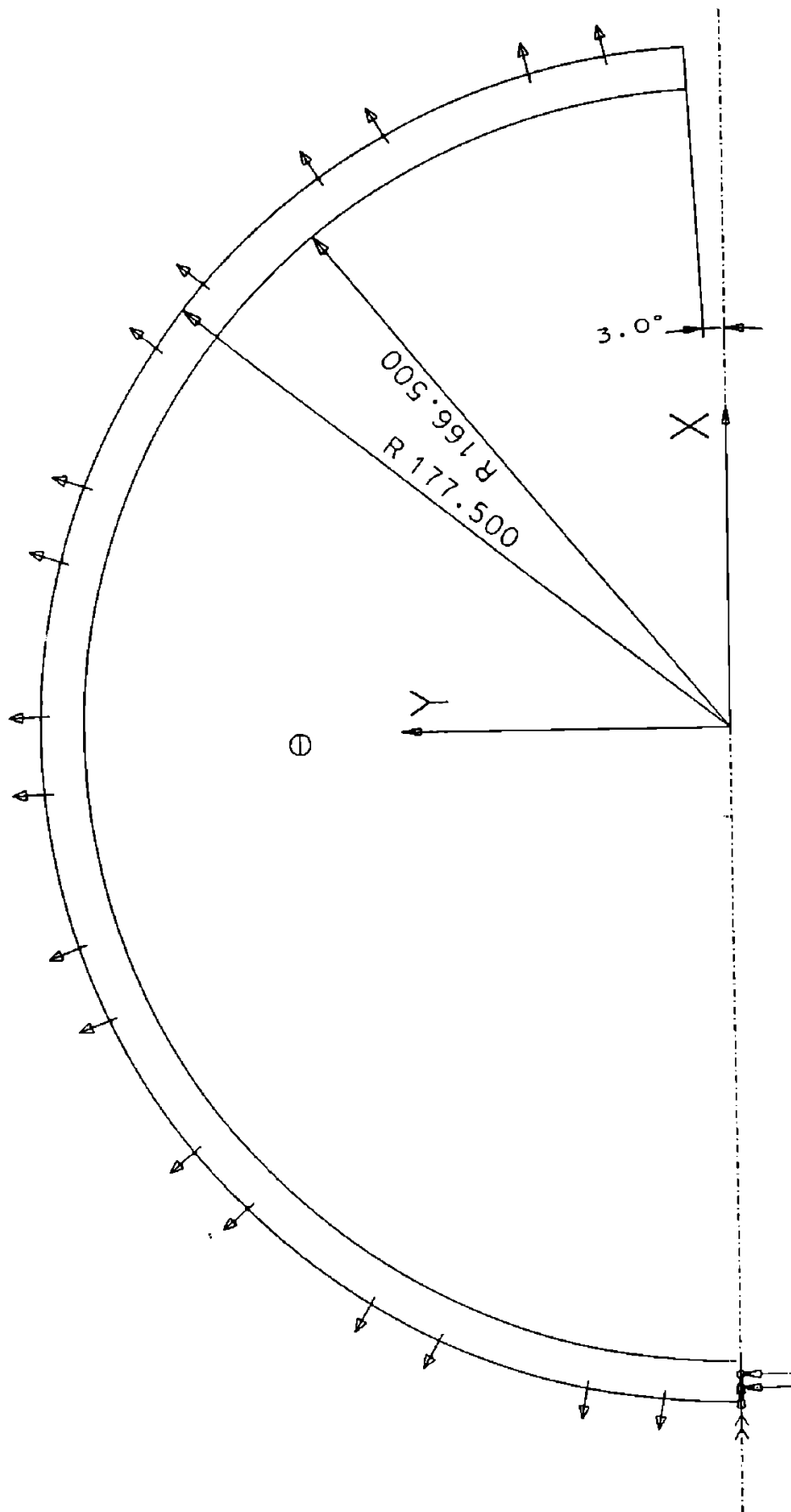


fig. 5.2-1

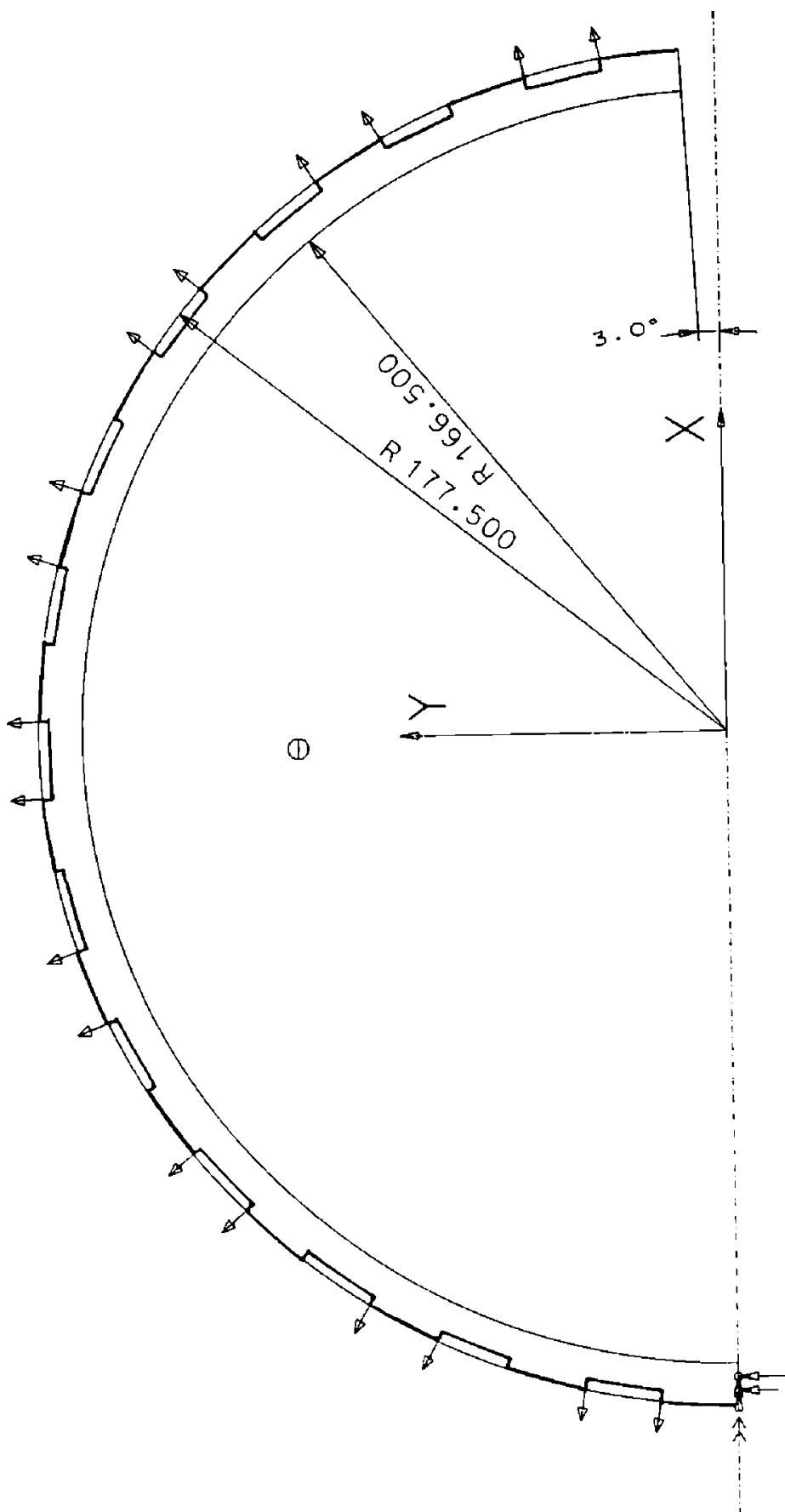


fig. 5.2-1

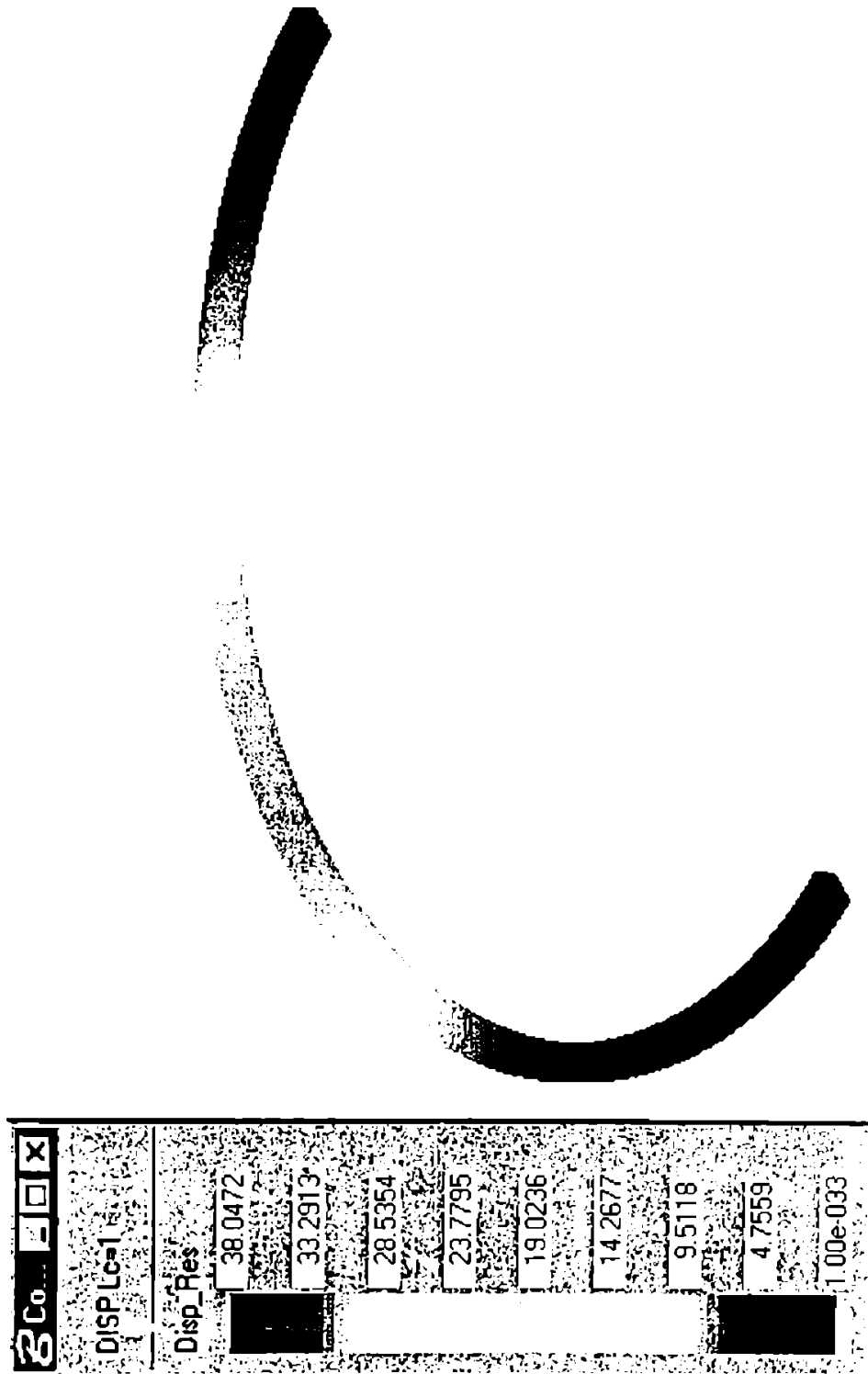


Fig. 5.2-3

## 5.2 Analiza cu metoda elementelor finite

-----  
Cosmos/FFE Static Solver for Designer One 1.75A

16-Nov-98 Page 1  
-----

Linear static analysis  
Second order elements

Number of elements = 6036  
Number of corner nodes = 1968  
Number of degrees of freedom = 34839  
  
Physical memory available = 34640 KB

-----  
Cosmos/FFE Static Solver for Designer One 1.75A

16-Nov-98 Page 2  
-----

Load Case 1

Maximum Nodal Von Mises Stress

Node: 943  
Max.: 332.91

Minimum/Maximum Displacements

	X-displ.	Y-displ.	Z-displ.
Node: 83	314	631	
Min.:	-8.6362	-0.056082	-0.0032049
Node: 488	161	647	
Max.:	13.392	35.641	0.0030410

Maximum Magnitude of Displacement

Node: 162  
Max.: 38.047

Components of Total Reaction Force

Fx	Fy	Fz
5.1078	-254.77	0.0026998

=====  
SOLUTION TIME LOG  
=====

Loading data base = 6 sec  
Assemblage of matrices = 17 sec  
Solution of equations = 275 sec  
Calculation of stresses = 6 sec  
  
TOTAL SOLUTION TIME = 304 sec

Disk space used = 6530 KB

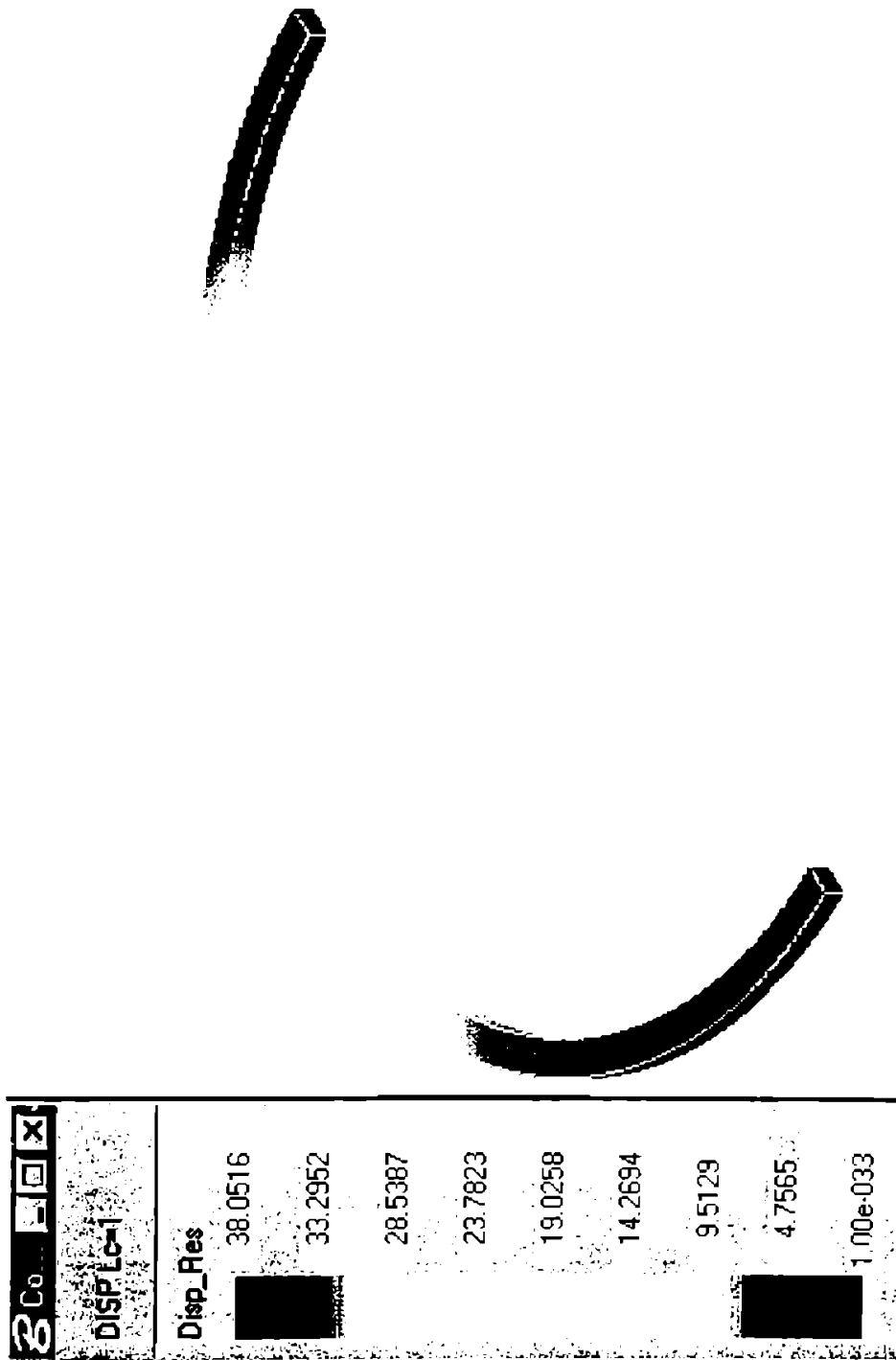


fig. 5.2-4



## 5.2 Analiza cu metoda elementelor finite

-----  
Cosmos/FFE Static Solver for Designer One 1.75A

15-Nov-98 Page 1  
-----

Linear static analysis  
Second order elements

Number of elements = 6036  
Number of corner nodes = 1968  
Number of degrees of freedom = 34839  
  
Physical memory available = 34640 KB

-----  
Cosmos/FFE Static Solver for Designer One 1.75A

15-Nov-98 Page 2  
-----

Load Case 1

Maximum Nodal Von Mises Stress

Node: 943  
Max.: 332.95

Minimum/Maximum Displacements

	X-displ.	Y-displ.	Z-displ.
Node: 11133	314	632	
Min.: -8.6364	-0.056009	-0.0032017	
Node: 488	161	647	
Max.: 13.394	35.645	0.0030416	

Maximum Magnitude of Displacement

Node: 161  
Max.: 38.052

Components of Total Reaction Force

Fx	Fy	Fz
6.2661	-254.79	0.0012797

=====  
SOLUTION TIME LOG  
=====

Loading data base = 10 sec  
Assemblage of matrices = 17 sec  
Solution of equations = 355 sec  
Calculation of stresses = 11 sec  
  
TOTAL SOLUTION TIME = 393 sec

Disk space used = 6681 KB

## 5.2 Analiza cu metoda elementelor finite

Din detaliile extrase după realizarea modelării se poate constata, următoarele:

- Numărul de elemente, a nodurilor de pe muchii (corner nodes) și numărul gradelor de libertate a rămas constant.
- Timpul de rulare a fost mai mare în cazul segmentului cu față exterioară canelată : cu 66,7% - în ceea ce privește timpul de încărcare al bazei de date, cu 29,1% - în ceea ce privește timpul de rezolvare a sistemului de ecuații, cu 83,3% - în ceea ce privește timpul de calcul al tensiunilor și deplasărilor și cu 29,3% - în ceea ce privește timpul total de rulare.
- Timpul de asamblare al matricelor a rămas constant.
- Spațiul ocupat pe disc a fost doar cu 2,3% mai mare și a avut valoarea de 6,6681 MB.

Dacă, în schimb modelarea se face folosind discretizarea cu elemente liniare și parabolice, fig. 5.2-5, caz în care rezultatele obținute sunt superioare față de folosirea elementelor liniare, diferențele sunt mult mai mari, dar, în limite acceptabile; eroarea dintre cele două modelări fiind în cazul deplasărilor de 1,8%.

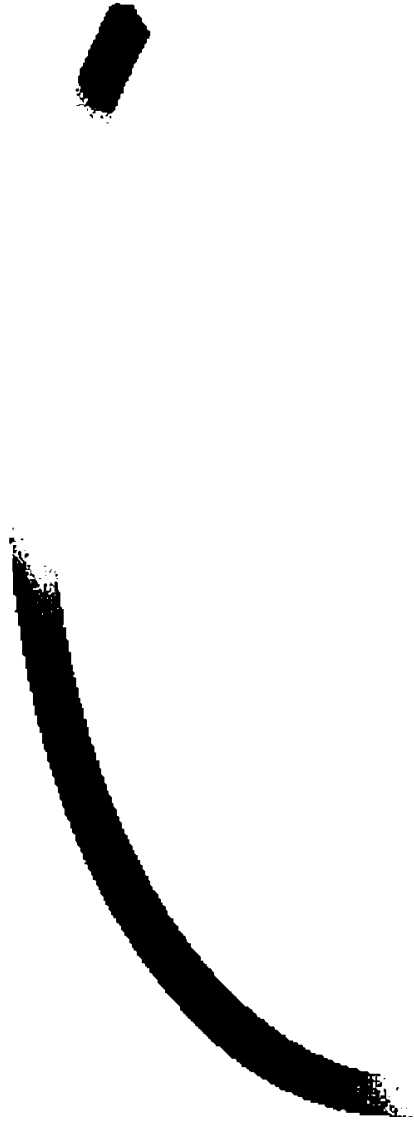
În concluzie se poate modela geometric segmentul cu suprafața exterioară canelată, cu valori foarte mici ale înălțimii canelurii, pentru a putea aplica o presiune variabilă în trepte. Cu cât deschiderea unghiulară a unei caneluri este mai mică cu atât variația de presiune este mai aproape de valoarea inițială.

Folosind această modelare geometrică, sunt prezentate deplasările totale, după direcțiile x și y din planul segmentului, pentru un segment cu presiune constantă, fig. 5.2-5, 5.2-6, 5.2-7 și același segment, fig. 5.2-8, 5.2-9, 5.2-10 dar cu presiune variabilă după curba de presiune prezentată în fig. 2.2-7.

Din examinarea rezultatelor obținute se observă că deplasarea resultantă este cu cca. 4mm mai mare în cazul segmentului cu presiune variabilă, cu toate că presiunea sa medie este egală cu cea a segmentului de presiune constantă ( $p_F=0,1\text{N/mm}^2$ ).



fig. 5.2-5



Disp_X	15.7178	12.6133	9.5089	6.4044	3.2999	0.1954	-2.9091	-6.0136	9.1181
DISP									

fig. 5.2-6

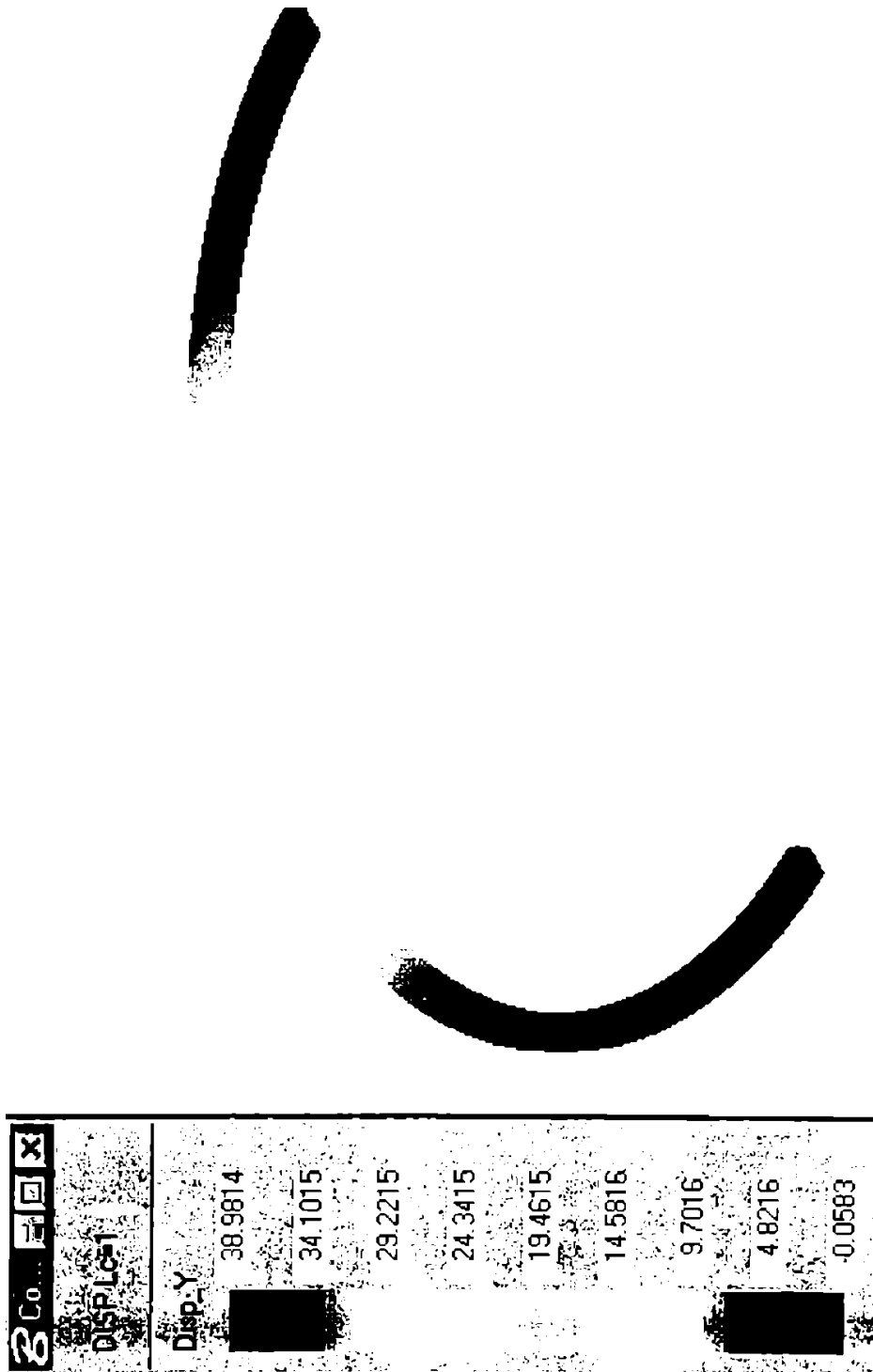


fig. 5.2-7

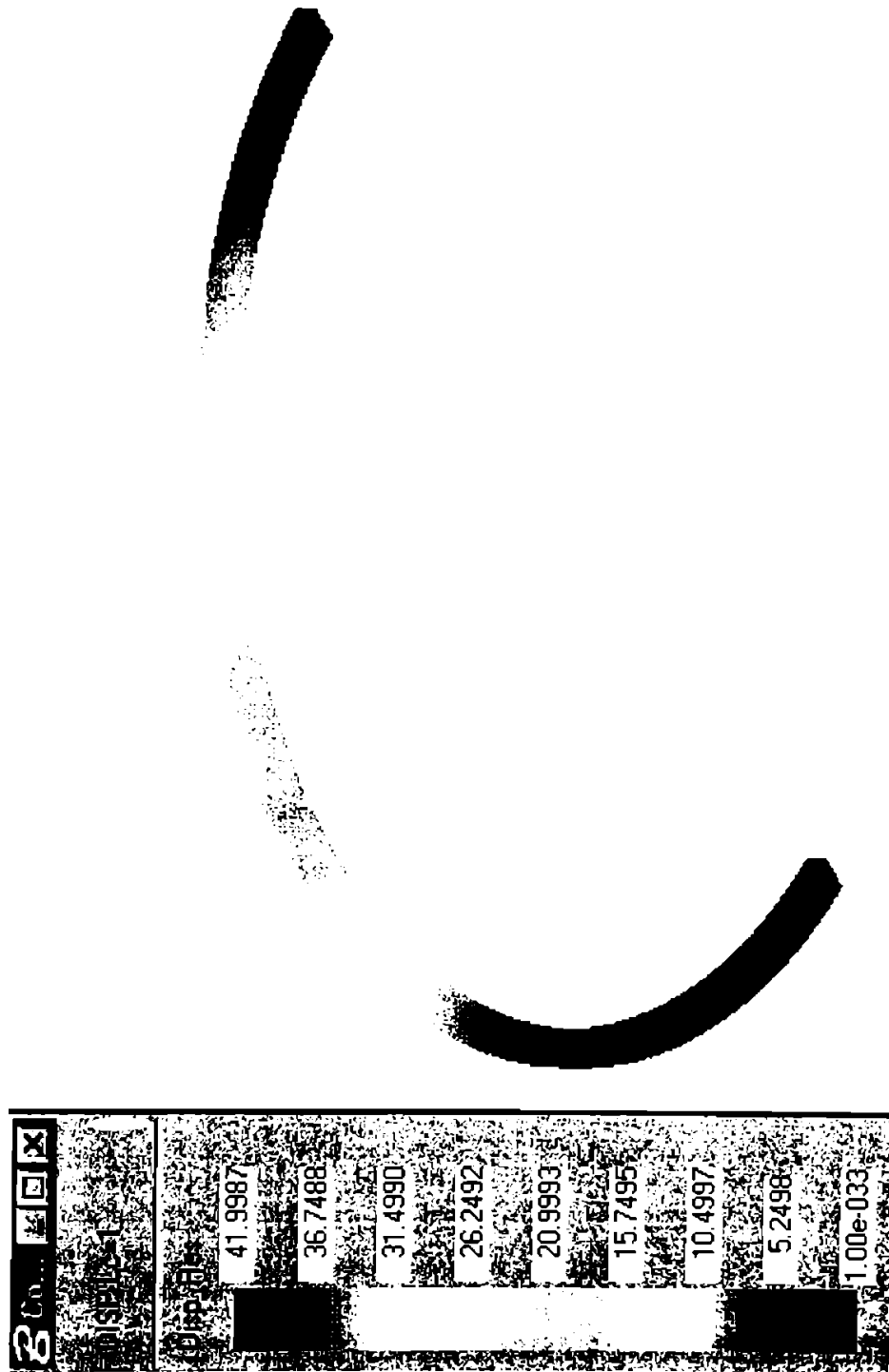


fig. 5.2-8

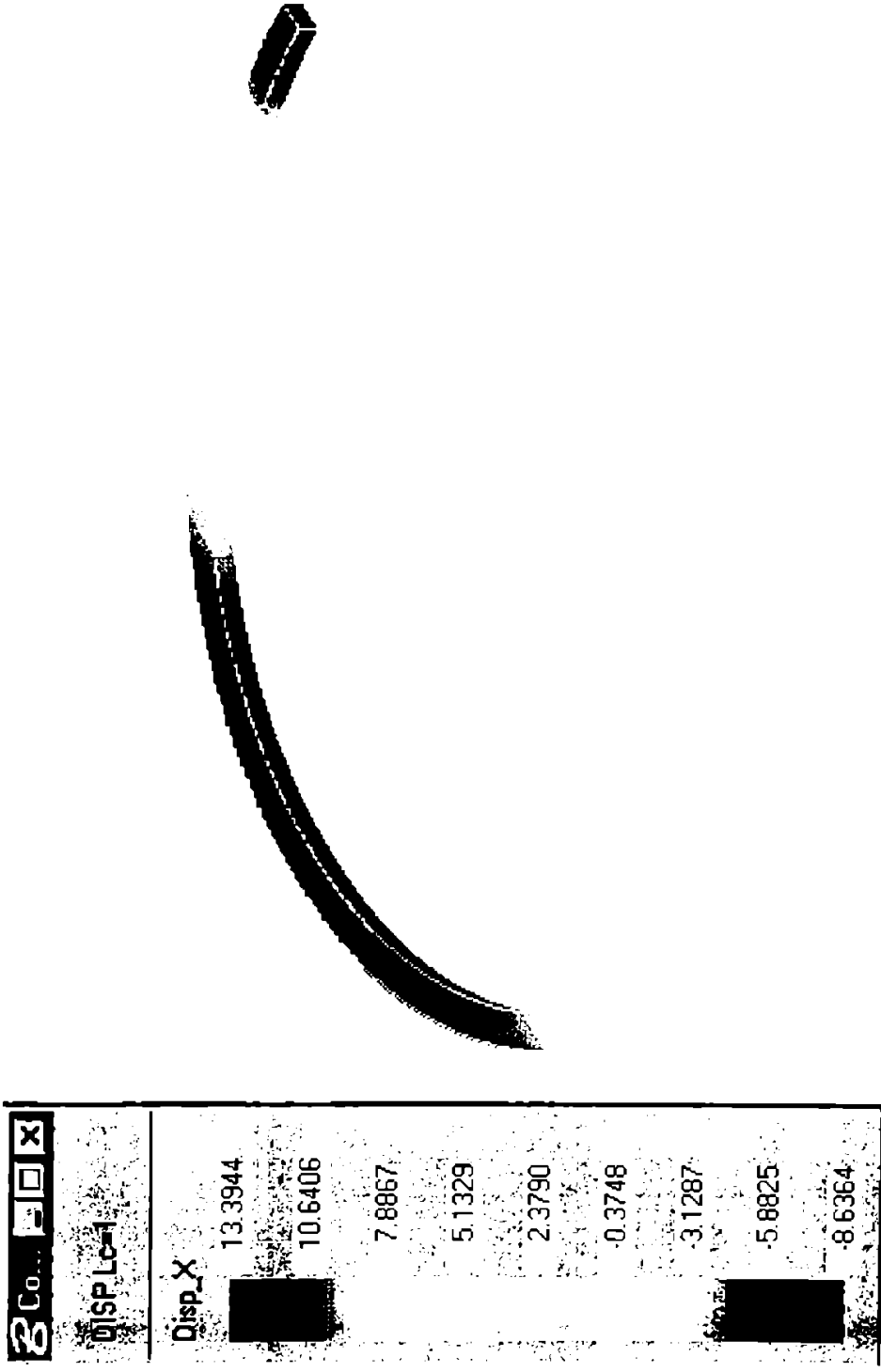


fig. 5.2-9

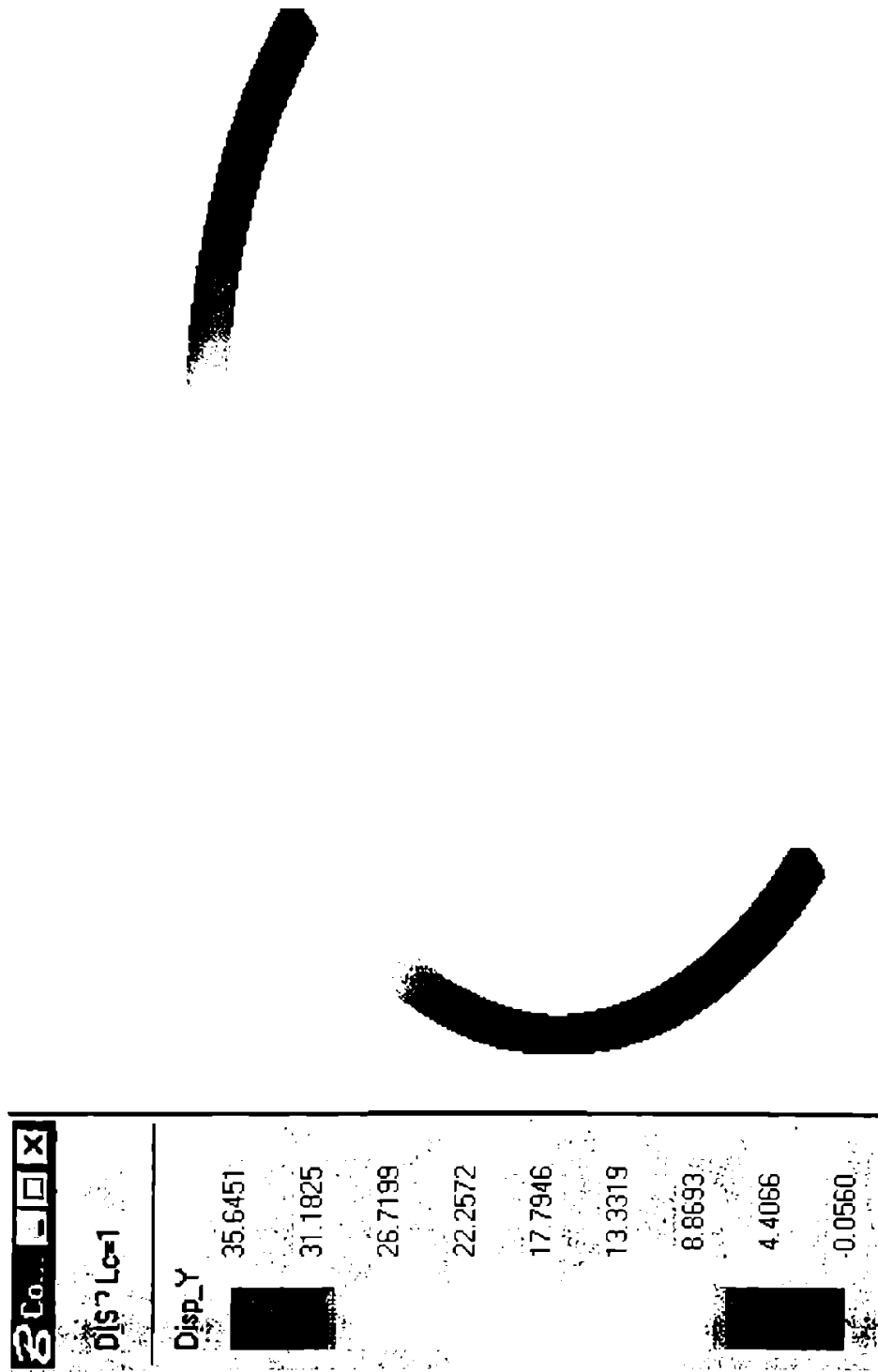


fig. 5.2-10



## 5.2 Analiza cu metoda elementelor finite

O altă particularitate a modelării efectuate și prezentate constă în faptul că s-a aplicat o presiune care deschide segmentul de la forma rotundă la forma deformată ovală, invers cazului real, când segmentul cu formă ovală este deformat de presiunea elastică aplicată pe fața exterioară pentru a-l aduce la o formă deformată circulară.

Valorile deplasărilor obținute folosind modelarea descrisă sunt utile la stabilirea formei în stare liberă a segmentului. Aceste valori vor permite realizarea camelor de copiere folosite la prelucrarea prin strunjire ovală a segmentului.

Un segment strujit oval după aceste valori va realiza, la montarea forțată în cilindru, o presiune variabilă impusă.

Valorile mici ale deplasărilor dintre segmentul cu presiune variabilă și segmentul cu presiune constantă explică de ce trebuie folosită o tehnologie de strunjire foarte precisă și îngrijită.

Tensiunile von Mises determinate de presiunile aplicate segmentelor au valori foarte mari  $333\div 356 \text{ N/mm}^2$ , peste limita admisibilă de  $85\div 120 \text{ N/mm}^2$ , indicate de firmele producătoare de segmente din fonte cu compoziții chimice asemănătoare. Pentru reducerea acestora se va impune la proiectarea segmentului o presiune medie elastică inferioară.

Valori reduse cu 20% ale presiunii medii situează valorile tensiunilor von Mises între  $97$  și  $102 \text{ N/mm}^2$ , dar diferențele dintre deplasări se reduc și mai mult.

## 6. CONCLUZII. CONTRIBUȚII PERSONALE

### 6.1 CONCLUZII

Lucrarea prezintă o sinteză a activității de cercetare desfășurată de autor pe parcursul a 10 ani, cu privire la implementarea în fabricație a segmenților de piston.

Începând cu anul 1988 în Intreprinderea Constructoare de Mașini Reșița, actualmente Uzina Constructoare de Mașini S.A. Reșița, s-a lansat un program de asimilare a segmenților de piston pentru motoarele navale produse aici.

Autorul, ca angajat al uzinei în perioada respectivă, s-a implicat împreună cu specialiști din domeniul tehnologiei și metalurgiei la asimilarea segmenților de piston pentru motoarele navale licența MAN tip KSZ 90/160 și KSZ 70/105, motoare dotate cu cilindrii ce aveau diametrul nominal de 90mm respectiv 70mm. Au urmat apoi segmenții pentru motoarele navale mai mici L 55/105 semirapide ajungându-se în prezent și la segmenții de piston pentru compresoare.

Tema tezei se înscrie în preocupările pe care amintita firmă caută să le rezolve pentru a face față concurenței dintre motoarele și compresoarele produse de ea și cele ale altor firme străine. Dintre obiectivele principale urmărite se pot enumera : realizarea de segmenți proprii care să intre în furnitura motorului sau compresorului, asigurarea unei durate de funcționare cât mai mare și a unei siguranțe în exploatare sporite.

Obiectivul principal al tezei de doctorat îl constituie perfecționarea metodelor de calcul aplicate la calculul segmenților coroborată cu aplicarea metodelor moderne de investigare și modelare a stării de deformare și tensiune.

Datorită faptului că segmentul de piston funcționează pe baza deformațiilor sale elastice provocate de constrângerile la care este supus la introducerea sa în cilindru, abordarea calculelor se face considerând deformațiile elastice ale segmentului.

Din analiza calculelor efectuate, a metodelor și algoritmilor folosiți se desprind următoarele concluzii :

1. Curbele de presiune (repartiția presiunii elastice pe care o dezvoltă segmentul pe cilindru) trebuie să fie calculate cu o precizie deosebită, recomandându-se o

## 6.1 Concluzii

- precizie de ordinul  $10^{-4}$ . Numărul de puncte de calcul de pe periferia segmentului în care se calculează valorile presiunii elastice  $p_e(\psi)$  trebuie să fie cel puțin 24 sau chiar mai mare, pentru a asigura o aproximare cât mai bună a funcției de presiune cu funcții armonice (trigonometrice). O concluzie relevantă este obținerea unor variații mai line presiunii atunci când numărul de armonici crește lucru ce corespunde punctului de vedere actual.
2. Determinarea cea mai indicată pentru aproximarea funcției de presiune este analiza armonică, în ciuda faptului că expresiile obținute au o formă complicată. Prelucrarea acestora computerizată elimină acest dezavantaj.
  3. Posibilitățile tehnologice actuale permit realizarea unor geometrii deosebit de delicate și discrete astfel încât, pe baza calculului computerizat, se poate spori precizia de calcul prin renunțarea la o serie de neglijări, în special a diferenței dintre raza medie  $R_m$  și valoarea  $R_m+u$  ( $u$  fiind deplasarea radială  $u/R_m \cong 1/20$ ).
  4. Pentru aplicarea unei presiuni variabile pe fața exterioară a segmentului se poate modela geometric segmentul cu o față curbă canelată. Înălțimea maximă a canelurii fiind de 0,2mm la un diametru de 177,5mm, adică cca. 0,125% din diametrul nominal al segmentului.
  5. Cu cât deschiderea unghiulară a canelurii este mai mică, cu atât se obține o distribuție de presiune în trepte mai apropiată de curba de presiune calculată și impusă segmentului.
  6. Măsurătorile experimentale prin cântărire cu o balanță electronică care are încorporat un traductor tensometric comandat de un procesor Intel adecvat, sunt în concordanță cu modelele de calcul analitice și cu metoda elementelor finite folosită de soft-ul COSMOS/M Designer One, încorporat în programul MICROSTATION.
  7. Folosirea dispozitivului realizat și prezentat în fig. 4.1-5, împreună cu balanța electronică, a permis reducerea considerabilă a timpului necesar efectuării măsurătorilor de presiune pe periferia segmentului, deoarece procesorul Intel încorporat realizează toate operațiile ce trebuiau executate dacă se folosea o punte tensometrică clasică (compensarea influenței temperaturii echilibrarea punții, curba de etalonare).

### 6.2 CONTRIBUȚII PERSONALE

Principalele contribuții personale ale autorului pot fi grupate după cum urmează :

#### 1. Calculul presiunii elastice

- a) Autorul, pe baza programelor realizate computerizat cu ajutorul soft-ului MathCAD 7 Profesional, face o analiză a valorilor presiunii elastice corespunzătoare diferitelor curbe de presiune aplicate segmentelor de piston, impunând verificarea valorilor obținute prin satisfacerea condițiilor de echilibru static.
- b) Corectarea valorilor presiunilor elastice pe baza celor prezentate la punctul 1.a).

#### 2. Măsurarea presiunilor elastice

- a) Adaptarea unei balanțe electronice la un dispozitiv pentru măsurarea presiunii elastice, eliminând operațiile specifice folosirii unei punți tensometrice clasice și cu consecințe evidente în ceea ce privește timpul necesar efectuării măsurătorilor.

#### 3. Efectuarea calculelor

- a) Toate calculele precum și totalitatea graficelor sunt realizate computerizat cu ajutorul a 11 programe realizate în soft-ul MathCAD 7 Profesional, ceea ce permite calculul oricărui tip de segment.

#### 4. Aplicarea metodei elementelor finite

- a) Pentru aplicarea unei presiuni variabile pe fața curbă exterioară a segmentului s-a realizat modelarea geometrică a suprafeței sub forma unei suprafețe curbe canelate.

## 6.2 Contribuții personale

- b) Înălțimea maximă a canelurii pentru asigurarea unei precizii foarte bune se limitează superior la valoarea de 0,125% din valoarea diametrului nominal al segmentului.

### 5. Metode noi de apreciere a elasticității proprii a segmentului

- a) Introducerea **conformabilității** ca metodă de apreciere calitativă a segmentului, constând în capacitatea segmentului de a urmări ovalitățile cilindrului (de a păstra contactul cu cilindrul) prin introducerea succesivă a segmentului în inele rotunde care au diametrele nominale din ce în ce mai mari, diferența dintre diametre inelelor să fie cel puțin 1/3 din ovalitatea maximă admisă cilindrului. Segmentul trebuie să păstreze contactul pe toată circumferința sa până la un diametru superior ovalității maxime a cilindrului.

### 6. Rezultatele teoretice

- a) Rezultate teoretice și experimentale se aplică tuturor segmentelor pentru piston, folosirea tehnologiei clasice de termofixare fiind în curs de eliminare.

## BIBLIOGRAFIE

1. Abăitancei, D., ș.a. – Motoare pentru automobile și tractoare. Construcție și tehnologie. București, Ed.Tehnică, 1978.
2. Adams, G.G., Bogy, D.B. – The Plane Solutions for the Elastic Contact Problem of a Semi-Infinite Strip and a Half-Plane. Trans. Of the ASME, ser. E, vol.43, 1976.
3. Arhanghelschi, V. M., ș.a. – Avtomobilnîie dviatelii. Moskva. Mașinostroenie, 1977.
4. Babeu, Tiberiu, -Rezistența materialelor, Timișoara, Institutul Politehnic "Traian Vuia" Facultatea de Mecanică, 1980.
5. Babeu, Tiberiu, - Rezistența materialelor, Vol I și II, U.T.Timișoara, 1991.
6. Babeu, Tiberiu, - Teoria elementară a rezistenței materialelor, Timișoara, Ed. MIRTON, 1998.
7. Bănărescu, M., - Motoare cu ardere internă, Vol I și II. Ed. Tehnică. București, 1959.
8. Belei, A., - Metoda elementului finit. Utilizări posibile în calculul de rezistență al motoarelor cu ardere internă, Institutul Politehnic București, Facultatea de mecanică, București, 1980.
9. Berindean, V., - Procese, caracteristici și supraalimentarea motoarelor cu ardere internă, Partea a 2-a, I. T. Timișoara, 1979.
10. Bettencourt, J. M. ș. a. , - Consistent Use of Finite Elements in Time and Various Recurrence Schemes for the Heat Diffusion Equation. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering, nr.6., iun., 1981, p. 931 – 938.
11. Bia, C., Ilie, V., Soare, M. – Rezistența materialelor și teoria elasticității, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
12. Blumenfeld, M. - Introducere în metoda elementelor finite, Ed. Tehnică, București, 1995.
13. Blumenfeld, M., - Rezistența materialelor pentru facultatea de aeronave, Institutul Politehnic, București, 1988.

14. Boleanțu, L., Dobre, I. – Aplicații ale mecanicii solidului deformabil în construcția de mașini, Ed. Facla, Timișoara, 1978.
15. Brătianu, C. – Metode cu elemente finite în dinamica fluidelor, București, Editura Academiei, 1983.
16. Brebbia, C.A., – Boundary Element Technics, Springer Verlag, Berlin, 1984.
17. Brown, D. K. – An Introduction to the Finite Element Method using BASIC
18. Brun, R., - Science et technique du moteur diesel industriel et du transport. Tom.I.Paris, Technip, 1966.
19. Buga, M., Iliescu, N. – Considerații privind evaluarea stării de tensiune în unele probleme de contact cu ajutorul fotoelasticității, Simpozion științific, Suceava, 1985.
20. Buga, M., Iliescu, N., Atanasiu, C., Tudose, T., Tiperciuc, Gh. - A Photoelastic Investigation on Pressure Distribution in Contact Area Between Tire and Ground, V.D.I., Berichte nr. 313,1978.
21. Buty, I. și Petricenko, M., - L'Attelage mobile des moteurs rapides. Paris. IFP Techip, 1964.
22. Buzdugan, Gh., ș.a., - Îndrumar de calcul în ingineria de calcul. București. Ed. Tehnică. 1996.
23. Buzdugan, Gh. – Rezistența materialelor. Ed. Academiei Române, București, 1986.
24. Buzdugan, Gh. – Rezistența materialelor. Aplicații. Ed. Academiei Române. București, 1981.
25. Buzdugan, Gh., Blumenfeld, M. – Calculul de rezistență al pieselor de mașini, Ed. Tehnică, București, 1979.
26. Caracostea, A., - Rezistența materialelor și teoria elasticității. Secțiunea III din manualul pentru calculul construcțiilor, Ed. a 2-a, București, Ed. Tehnică, 1979.
27. Casci, C. și Ferrari, G., - Analysis of the piston heat load during Knocking. The Internal Comb. Engines Conf., Bucharest, 1970.

28. Chung, K. S.,- The Fourth-Dimension Concept in the Finite Element Analysis of Transient Heat Transfer Problems, In: . In: International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17., 1981, p. 315 – 325.
29. Chung, T. J. – Finit Element Analysis in Fluid Dinamics, McGraw-Hill Internațional Book Company, New York, 1978.
30. Constantinescu, I.N. și Dăneț, G.V. – Metode noi pentru calcule de rezistență. București, Ed. Tehnică, 1989.
31. Dally, J. W. și Riley, - W. F. Experimental Stress Analisys, McGraw-Hill Book Comp., New York, Saint Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney, 1965.
32. Domșa, A., ș.a. – Pistoane. București, Ed. Tehnică, 1961.
33. Englisch, C., - Kolbenringe. Band. 1,2. Wien. Springer – Verlag, 1968.
34. Faur, N., Dumitru, I., - Diferențe finite și elemente finite în rezistența materialelor, Timișoara, Ed. MIRTON, 1997.
35. Gârbea, D., - Analiza cu elemente finite, Ed. Tehnică, București, 1990.
36. Ghințburg, B.I., - Teoria I rașciot porșnevăh koleț, Moskva, Mașghiz, 1945.
37. Ghițiu, A., - Modelarea și determinarea formei în stare liberă a segmentilor de motor în doi timpi, Timișoara, 1995.
38. Ghițiu, A., - Determinarea experimentală a elasticității segmentilor pentru motoare în doi timpi, , Timișoara, 1996.
39. Ghițiu, A., - Rezultatele experimentale în determinarea presiunilor elastice, Timișoara, 1996.
40. Ghițiu, A., - Prelucrarea diagramelor de presiune pentru segmenti. Reșița, 1992.
41. Ghițiu, A., - Calculul profilului în stare liberă a segmentului. Reșița, 1992.
42. Ghițiu, A., Babeu, T., - Dispozitiv pentru măsurarea presiunii de contact dintre segmentul de piston și cilindru, Reșița, Ed. Eftimie Murgu 1998.
43. Ghițiu, A., Babeu, T., - modelarea geometrică a segmentului pentru aplicarea unei presiuni variabile pe fața exterioară, Reșița, ed. Eftimie Murgu, 1998.
44. Giacosa, D., - Motori endotermici. Milano, Ed. U.Hoepli, 1975.



45. Grünwald, B., - Teoria, calculul și construcția motoarelor pentru autovehicule rutiere. Ediția a-II-a, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1980.
46. Hărdău, M., - Metoda elementelor Finite, Cluj-Napoca, Editura Transilvania Press, 1995.
47. Holister, G.S.- Experimental Stress Analysis. Principles and Methods, Cambridge University Press, , Cambridge, 1967.
48. Ilie, V., Bia, C., - Rezistența materialelor, Vol I, Cluj-Napoca, Institutul Politehnic, 1980.
49. Ilie, V., - Rezistența materialelor, Vol 2, Ed. a II-a revizuită, Cluj-Napoca, Institutul Politehnic, 1981.
50. Judge, A.W., - Automobile engines. 1. London. Chapman & Hall. Ltd. 1972.
51. Mănescu, T.Ș. ș.a., - Mecanică, Rezistența materialelor și Organe de mașini, București. Ed. Didactică și Pedagogică, 1982.
52. Mateescu, D., Caraba, I., - Construcții metalice. Calculul și proiectarea elementelor din oțel, București, Ed. tehnică, 1980.
53. Mateevici, V., ș.a. – Automobile ROMAN cu motoare Diesel, București. Ed. Tehnică, 1975.
54. Mărdărescu, R., Hoffman, V. și Abăitancei, D., - Motoare pentru automobile și tractoare, București. Ed. Didactică și Pedagogică 1978.
55. Mocanu, R.D., ș.a., - Analiza experimentală a tensiunilor, Vol I și II . Ed. Tehnică, București, 1976.
56. Mocanu, D. R. – Rezistența materialelor. București, Ed. Tehnică, 1980.
57. Mocanu, R.D., ș.a. – Încercarea materialelor, Ed. Tehnică, București, 1982. Vol. I, II și III.
58. Moraru, G. A., Bilichuk S.M., -Application of Singular Finite Element Method for Plane Contact Problems of Two Elastic Bodies, Lucrările celei de-a treia Conferințe Internaționale de Elemente Finite și de Frontieră, secț. 2.2, Constanța, 1995.
59. Olariu, V., Brătianu, C., -Modelare cu elemente finite, București, Ed. Tehnică, 1986.

60. Pascariu, I. – Elemente finite. Concepte-Aplicații, Editura Militară, București, 1985.
61. Petö, L. – Rezistența materialelor și metoda elementelor finite, Vol I și II, Cluj-Napoca, Ed. Complex, 1995.
62. Ponomariov, S. D., ș. a., - Calculul de rezistență în construcția de mașini, Vol I și II, București, Ed. Tehnică, 1960, 1963 și 1964.
63. Popa, B., Bătagă, N., Mădărășan, T., Adameșteanu, I., - Solicitări termice în construcția de mașini, București, Ed. Tehnică, 1978.
64. Raicov, Petru, Cornel, - Calculul structurilor cu metoda elementului finit, Timișoara, Ed. Mirton, 1998.
65. Soare, V. Mircea, ș.a. – Rezistența materialelor în aplicații, București, Ed. Tehnică, 1996.
66. Teodorescu, P. P., Ilie, V., - Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile, Vol I, II și III, Cluj – Napoca, Ed. Dacia, 1976.
67. Timošenko, S. P. – Strength of Materials. Part I, Elementary Theory and Problems. 3 rd, Ed., 1962; Part II, Advanced Theory and Problems 3 rd Ed., 1962, Princeton, New Jersey. D. Van Nostrand Company, Inc.
68. Timošenko, S. P. – Teoria plăcilor plane și curbe, Ed. Tehnică, București, 1968.
69. Timošenko, S. P. și Goodier, J. N. – Theory of Elasticity, , McGraw-Hill Book Comp., New York. 1970.
70. Tvetcov, V.T. – Motoare cu ardere internă. București. Ed. Tehnică, 1954.
71. Voinea, R., Voiculescu, D., Simion. F.P. – Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie. Editura Academiei Române, 1989.
72. Zienkiewicz, O. C., - La méthode des elements finis. Mc Grow-Hill Int., Paris. 1979.
73. Zienkiewicz, O. C., - The finite element method in engineering science. London, Mc Grow-Hill Int., 1971.
74. Zienkiewicz, O. C., - The finite element method in structural and continuum mechanics, Mc Grow-Hill Int., London, 1977.

## Bibliografie

---

75. \* \* \* - Cataloage și documentație, firma DAROS, Danemarca.
76. \* \* \* - Automobile engineer's reference book. Third Edition, London George Newnes. Ltd.
77. \* \* \* - The Mc Engine Basic Research and Test Results, MAN B&W, Diesel Teglhdmun Works, Copennagen, 1993.
78. \* \* \* - Basic Principles of Ship Propulsion, MAN B&W, A/S, Copennagen, Denmark, 1993.
79. \* \* \* - Kleine Kolbenkunde, Mahle, 1975.
80. \* \* \* - Manualul inginerului mecanic, București, Ed. Tehnică, 1974.
81. \* \* \* - Manualul inginerului mecanic. Materiale – Rezistența materialelor – Stabilitate elastică – Vibrații, Editura Tehnică, București, 1973.
82. \* \* \* - Solving Lage – Scale Problems in Mechanics. The Development and Application of Computational Solution Methods. Edited by Papadrakakis, M., John Wiley and Sons, Chichesters, 1993.
83. \* \* \* - Leichtau – Handbuch. Bände 4 / 1 und 4 / 2 – Festigkeitsberechnung, Bänd 5 – Festigkeitsversuche, Ifl., Deresden, 1987.
84. \* \* \* - Manuel des segments de piston, Goetzwerke, 1973.
85. \* \* \* - Segmenți pentru pistoane. București, Ed. Tehnică, 1959.
86. \* \* \* - Dicționar de neologisme. Ed. Academiei, București, 1989.
87. \* \* \* - Dicționarul limbii române moderne, Ed. Academiei. București, 1978.
88. \* \* \* - IIÛTTE. Manualul inginerului. Fundamente., Fundamente din limba germană după ediția 29 –a , București, Ed. Tehnică, 1989.
89. \* \* \* - Strunjirea segmenților de motor prin copiere după came, București. Institutul de documentare tehnică, 1958.
90. STAS 1963/1981 – Rezistența materialelor. Terminologie și simboluri.
91. STAS 1965/1975 – Încercările materialelor. Terminologie.
92. STAS 3160/1-1984, STAS 3160/2-1984, STAS 3160/3-1984 – Reguli de utilizare a procedeelelor și tabelor statistico-matematice pentru verificarea calității prin atribute și prin măsurare.
-

# **ANEXE**

**Calculul functiei de presiunii** (soft MathCAD 7 Profesional)

Pentru distributia din **fig. 2.2-5** se cunosc

- valorile argumentelor unghiulare „ $\varphi$ ” unde se cunosc valorile functiei cautate, care se introduc în vectorul argumentelor „ $\Phi$ ”

- valorile imaginilor cunoscute ale functiei  $p(\varphi)$  cautate, care se introduc în vectorul imaginilor „ $p(\Phi)$ ”

$\varphi_i$	$i = 0..24$	$P_i$
0		0.9330
15		0.9417
30		0.9993
45		1.1065
60		1.2195
75		1.2357
90		1.1600
105		0.7455
120		0.4155
135		0.2735
150		0.2857
165		1.1331
180		4.0350
195		1.1331
210		0.2857
225		0.2735
240		0.4155
255		0.7455
270		1.1600
285		1.2357
300		1.2195
315		1.1065
330		0.9993
345		0.9417
360		0.9330

- se lucreaza cu unghiul în radiani, deci ; .....

$0 \cdot \frac{\pi}{180}$

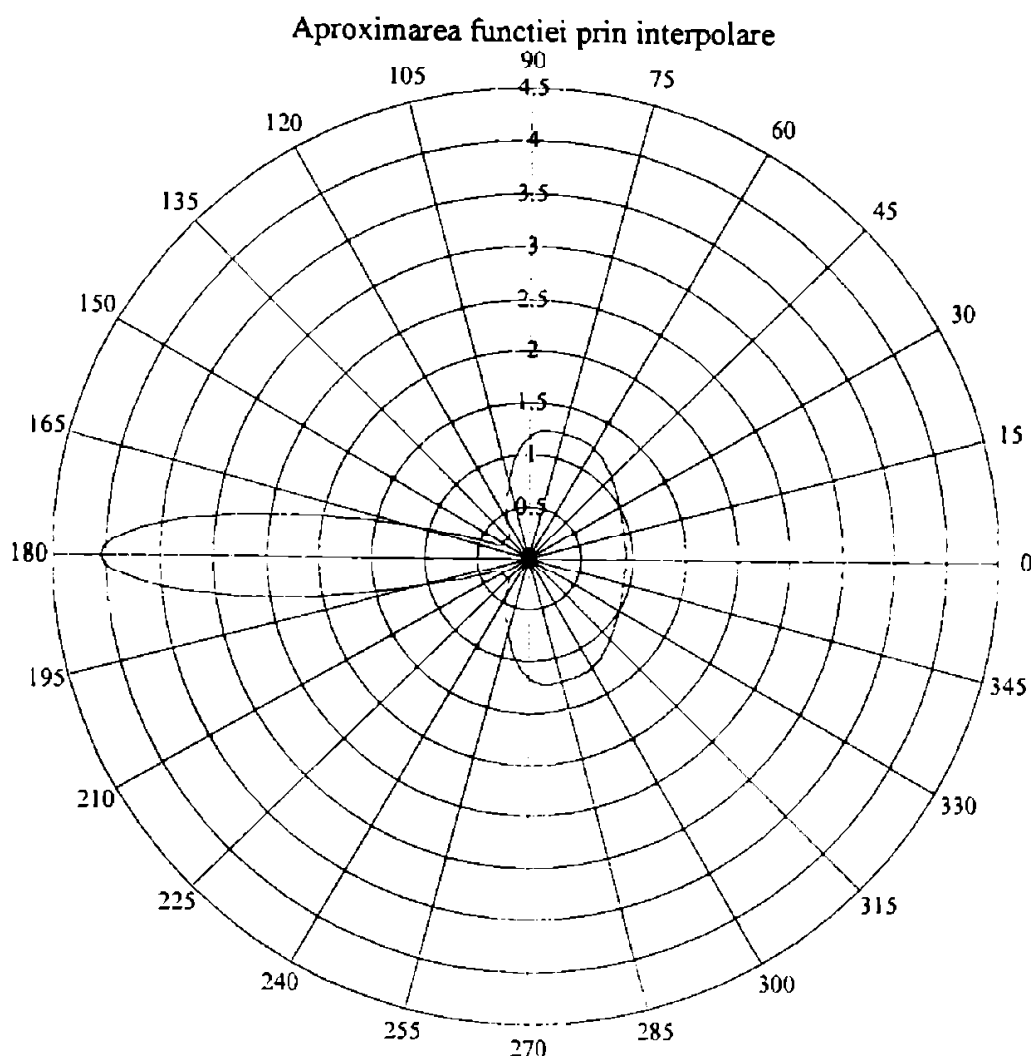
- functia se aproximeaza pe intervalul [0;360] cu pasul unghiular de 1 grad ; .....

$0 \cdot \frac{\pi}{180}, 1 \cdot \frac{\pi}{180} \dots 360 \cdot \frac{\pi}{180}$

- pentru aplicarea **algoritmului MathCAD de determinare prin interpolare** a unei functii, se calculeaza ;

$$ps = \text{cspline}(\varphi, p) \quad P_{\text{interp}}(\psi) = \text{interp}(ps, \varphi, p, \psi)$$

- graficul functiei  $p(\varphi)$ , în coordonate polare este :



- pentru determinarea prin **analiza armonica** a unei functii, se calculeaza ;

$$i = 1..24 \quad j = 1.. \frac{24}{2} - 1$$

- coeficienti functiei de aproximare trigonometrice (Fourier) sunt :

$$a_0 = \frac{1}{24} \sum_i P_i \quad a_j = \frac{2}{24} \sum_i P_i \cdot \cos(j \cdot \varphi_i) \quad a_{12} = \frac{1}{24} \sum_i (-1)^i \cdot P_i$$

$$b_j = \frac{2}{24} \sum_i P_i \cdot \sin(j \cdot \varphi_i)$$

	0	1.0000	1.0000
	0	0.0000	0.0000
	0	0.2050	0.2050
	0	0.5710	-0.5710
	0	0.4720	0.4720
b =	0	a = -0.3220	$\frac{a}{a_0} = -0.3220$
	0	0.2790	0.2790
	0	0.2670	0.2670
	0	0.2560	0.2560
	0	0.2140	0.2140
	0	0.1780	0.1780
	0	-0.1770	0.1770
		0.0940	0.0940

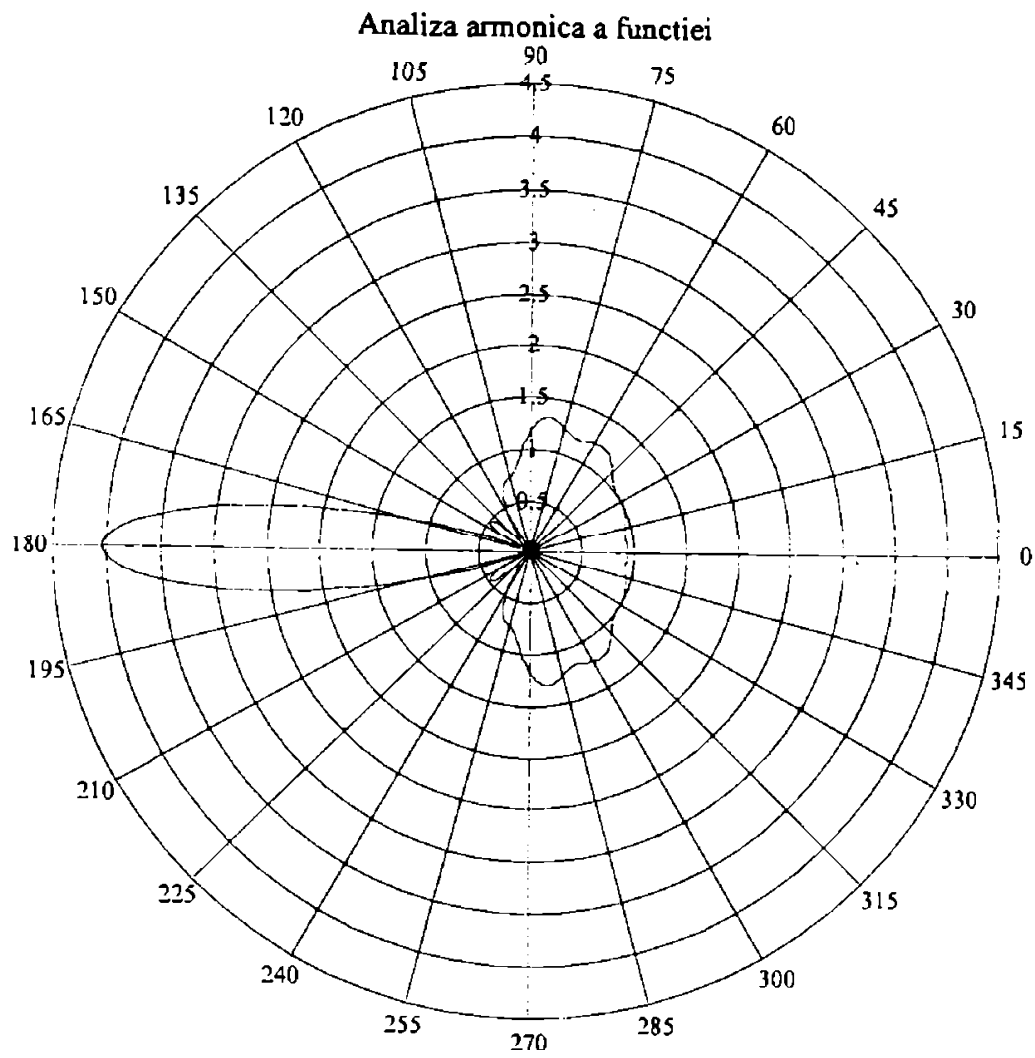
- din cauza simetriei distributiei de presiuni.

- coeficientii dezvoltarii în serie Fourier

- coeficientii adimensionali ai dezvoltării în serie Fourier

- expresia functiei de aproximare Fourier se poate scrie :

$$P_{\text{Fourier}}(\psi) = a_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^{12} \frac{a_i}{a_0} \cos(i \cdot \psi) \right) \quad \text{sau} \quad P'_{\text{Fourier}}(\psi) = \sum_{i=0}^{12} a_i \cos(i \cdot \psi)$$





- din datele bibliografice [45] , [85] se cunosc pentru distributia din fig. 2.2-5 :

- coeficientii adimensionali

$$a_j = p_j/p_E$$

j = 2..12

$a_j$	j
0.2050	2
-0.5710	3
0.4720	4
-0.3220	5
0.2790	6
-0.2670	7
0.2560	8
-0.2140	9
0.1780	10
-0.1770	11
0.0940	12

- valorile presiunii  $p_e(\varphi)$  la unghiul  $\varphi$  ;

$\varphi_i \cdot \frac{180}{\pi}$	$P_i$
15	0.9417
30	0.9993
45	1.1065
60	1.2195
75	1.2357
90	1.16
105	0.7455
120	0.4155
135	0.2735
150	0.2857
165	1.1331
180	4.035
195	1.1331
210	0.2857
225	0.2735
240	0.4155
255	0.7455
270	1.16
285	1.2357
300	1.2195
315	1.1065
330	0.9993
345	0.9417
360	0.933

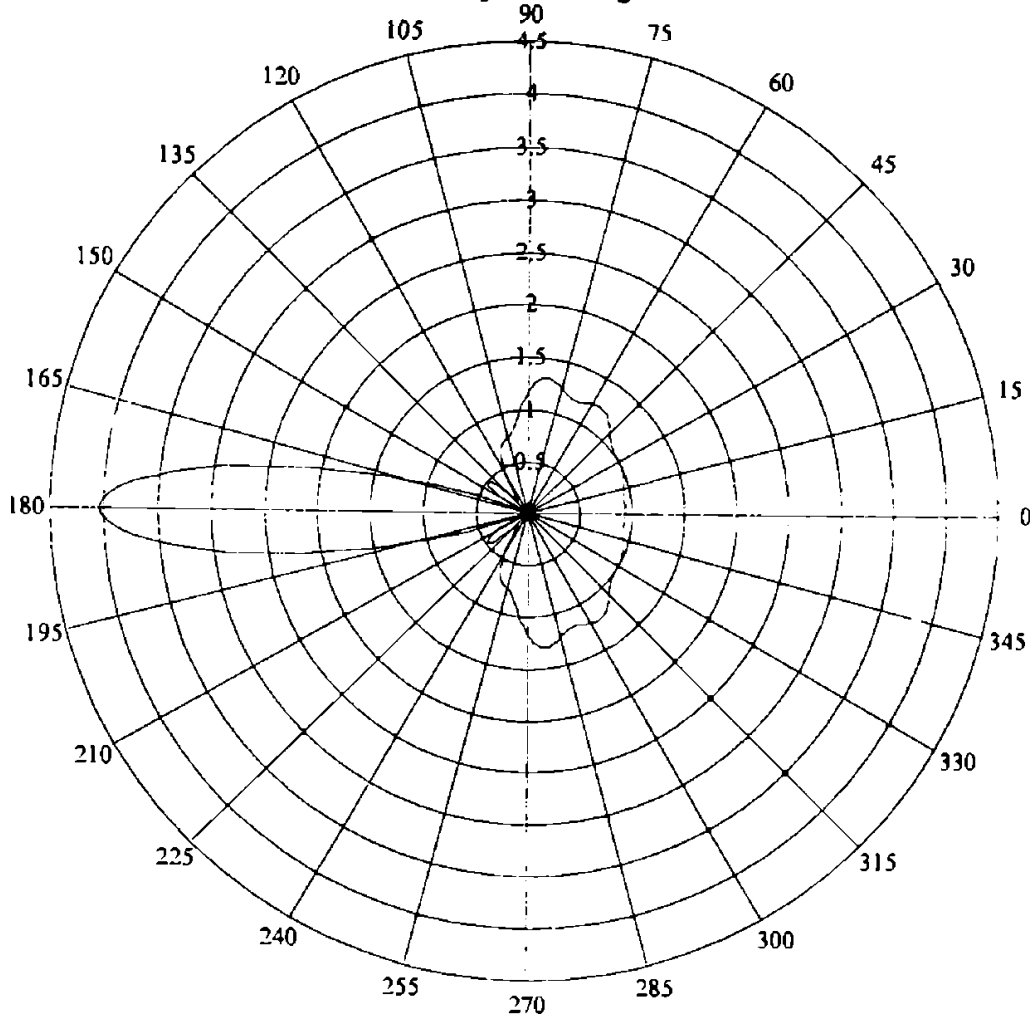
- valoarea presiunii medii elastice  $p_E$  se calculeaza cu relatia ;

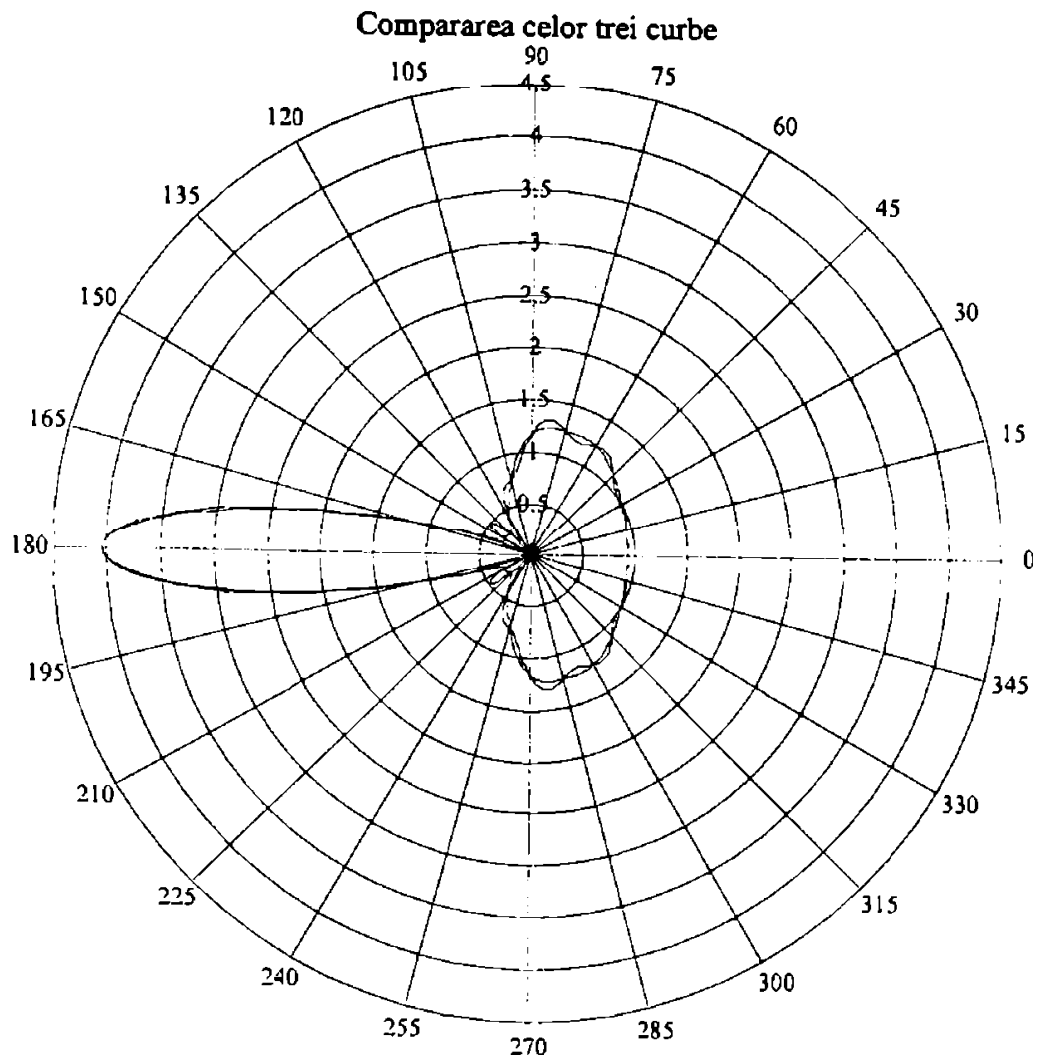
$$p_E = \frac{1}{24} \sum_i p_i \quad \text{si are valoarea ;} \quad p_E = 1$$

- expresia functiei de distributie a presiunii elastice este ;

$$P_{\text{coef.adim}}(\psi) = p_E \cdot \left( 1 - \sum_{j=2}^{12} a_j \cdot \cos(j \cdot \psi) \right)$$

Curba de presiune fig.2.2-5



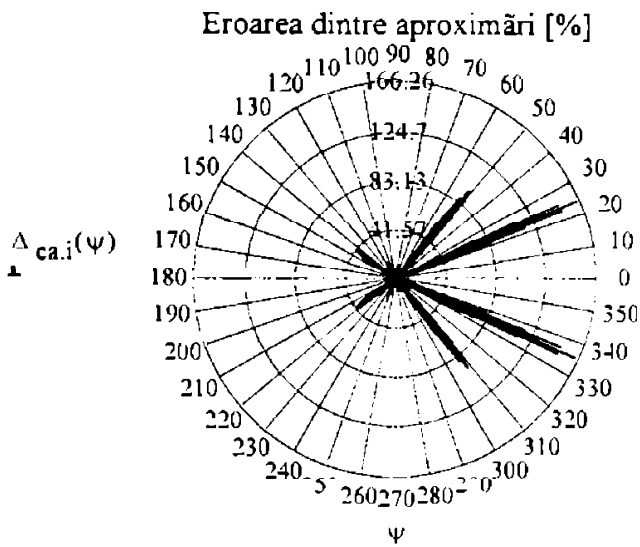
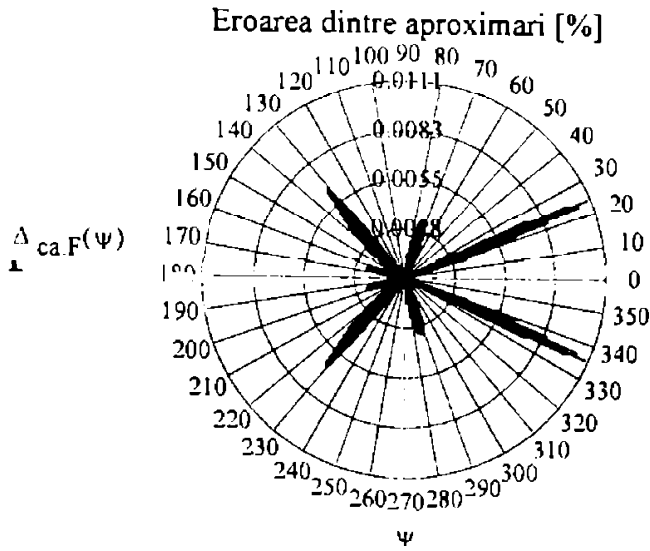


**Eroarea dintre aproximari**

- daca notam ;

$$\Delta_{ca.F(\psi)} = \frac{P_{coef.adim}(\psi) - P_{Fourier}(\psi)}{P_{coef.adim}(\psi)} \cdot 100$$

$$\Delta_{ca.i(\psi)} = \frac{P_{coef.adim}(\psi) - P_{interp}(\psi)}{P_{coef.adim}(\psi)} \cdot 100$$



Condițiile de echilibru static sunt îndeplinite pentru toate formele.

$$\int_0^{\pi} P_{\text{interp}}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2 \cdot \pi} P_{\text{interp}}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi} P_{\text{Fourier}}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2 \cdot \pi} P_{\text{Fourier}}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi} P_{\text{coef.adim}}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2 \cdot \pi} P_{\text{coef.adim}}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

**Calculul functiei de presiunii** (soft MathCAD 7 Profesional)

Pentru distributia din **fig. 2.2-6** se cunosc

- valorile argumentelor unghiulare „ $\psi$ ” unde se cunosc valorile functiei cautate, care se introduc în vectorul argumentelor „ $\Phi$ ”

- valorile imaginilor cunoscute ale functiei  $p(\varphi)$  cautate, care se introduc în vectorul imaginilor „ $P(\Phi)$ ”

$\varphi_i =$	$i = 0..24$	$P_i =$
0		1.2105
15		1.1647
30		1.0792
45		0.9938
60		0.9377
75		0.9182
90		0.9105
105		0.8254
120		0.7446
135		0.6858
150		0.7385
165		0.9561
180		2.8805
195		0.9561
210		0.7385
225		0.6858
240		0.7446
255		0.8254
270		0.9105
285		0.9182
300		0.9377
315		0.9938
330		1.0792
345		1.1647
360		1.2105

- se lucreaza cu unghiul în radiani, deci ; .....

$$\varphi = \varphi \cdot \frac{\pi}{180}$$

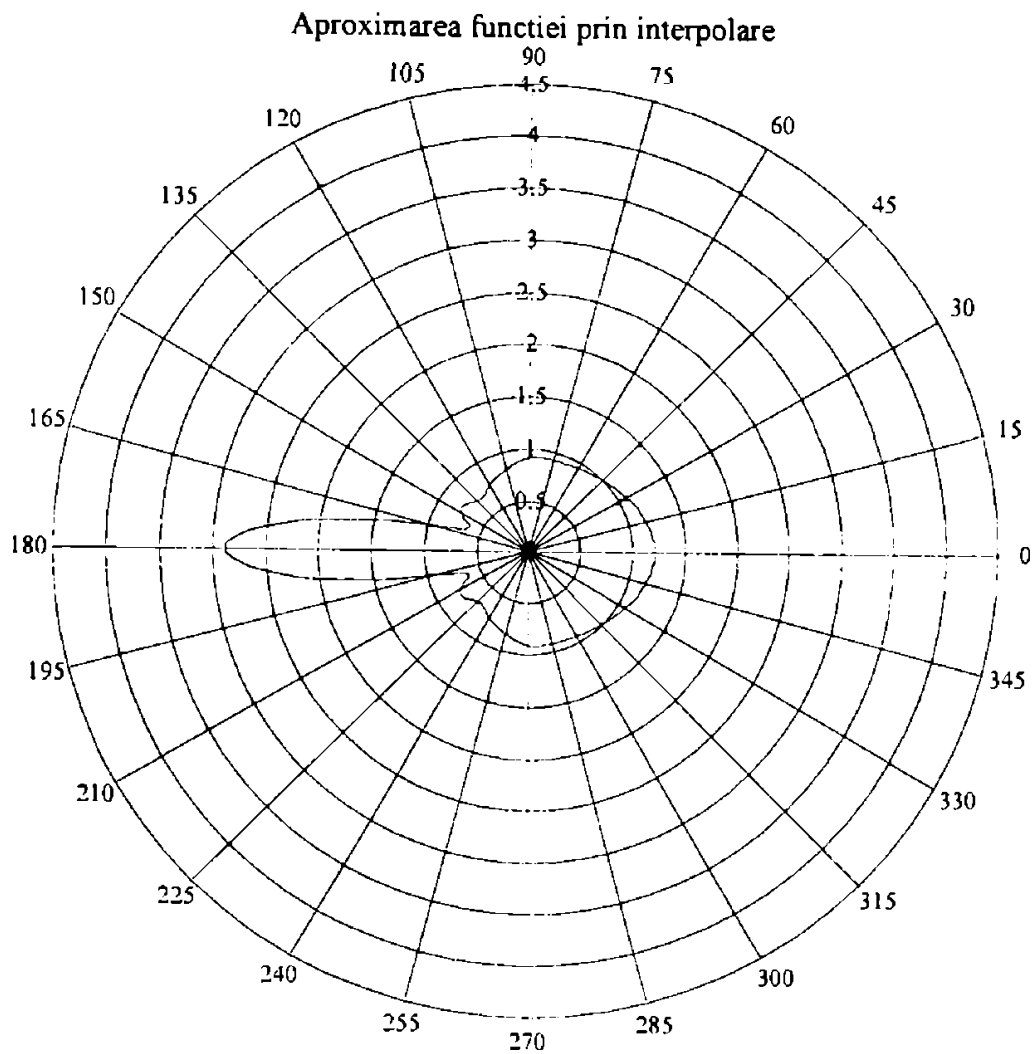
- functia se aproximeaza pe interevalul [0,360] cu pasul unghiular de 1 grad ; .....

$$\psi = 0 \cdot \frac{\pi}{180}, 1 \cdot \frac{\pi}{180} \dots 360 \cdot \frac{\pi}{180}$$

- pentru aplicarea **algoritmului MathCAD de determinare prin interpolare** a unei functii, se calculeaza ;

$$ps := cspline(\varphi, p) \quad P_{interp}(\psi) = interp(ps, \varphi, p, \psi)$$

- graficul functiei  $p(\varphi)$ , în coordonate polare este :



- pentru determinarea prin analiza armonica a unei functii, se calculeaza ;

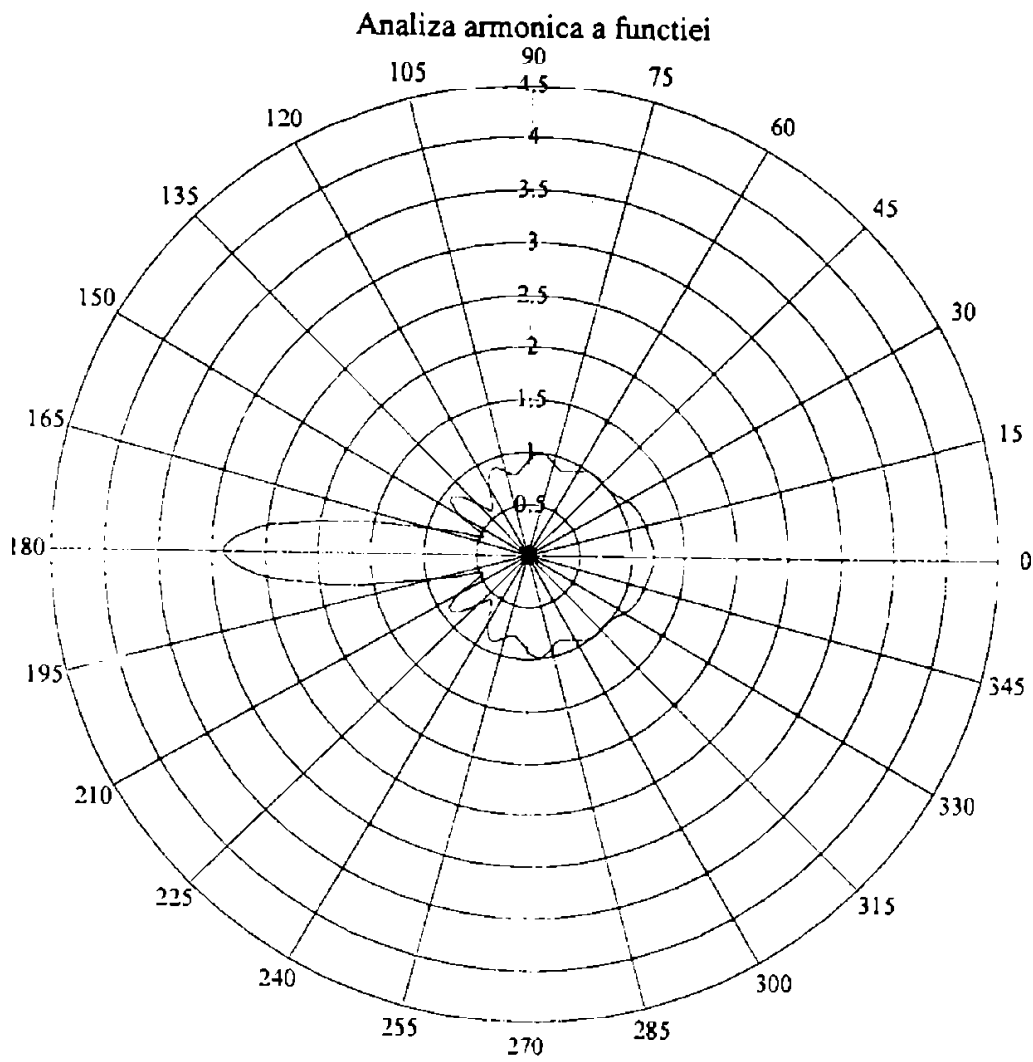
$$i = 1..24 \quad j = 1.. \frac{24}{2} - 1$$

- coeficienti functiei de aproximare trigonometrice (Fourier) sunt :

$$a_0 = \frac{1}{24} \cdot \sum_i p_i \quad a_j = \frac{2}{24} \cdot \sum_i p_i \cdot \cos(j \cdot \varphi_i) \quad a_{12} = \frac{1}{24} \cdot \sum_i (-1)^i \cdot p_i$$

$$b_j = \frac{2}{24} \cdot \sum_i p_i \cdot \sin(j \cdot \varphi_i)$$





- **din datele bibliografice** [45] , [85] se cunosc pentru distributia din fig. 2.2-6 :

- coeficientii adimensionali

$$a_j = p_j/p_E$$

- valorile presiunii  $p_e(\varphi)$  la unghiul  $\varphi$  ;

j = 2..12	$a_j =$	j	$\varphi_i \cdot \frac{180}{\pi}$	$P_i$
	0.2549	2	15	1.1647
	0.1940	3	30	1.0792
	0.2431	4	45	0.9938
	0.1846	5	60	0.9377
	0.1666	6	75	0.9182
	0.1599	7	90	0.9105
	0.1589	8	105	0.8254
	0.1487	9	120	0.7446
	0.1460	10	135	0.6858
	0.1478	11	150	0.7385
	0.0760	12	165	0.9561
			180	2.8805
			195	0.9561
			210	0.7385
			225	0.6858
			240	0.7446
			255	0.8254
			270	0.9105
			285	0.9182
			300	0.9377
			315	0.9938
			330	1.0792
			345	1.1647
			360	1.2105

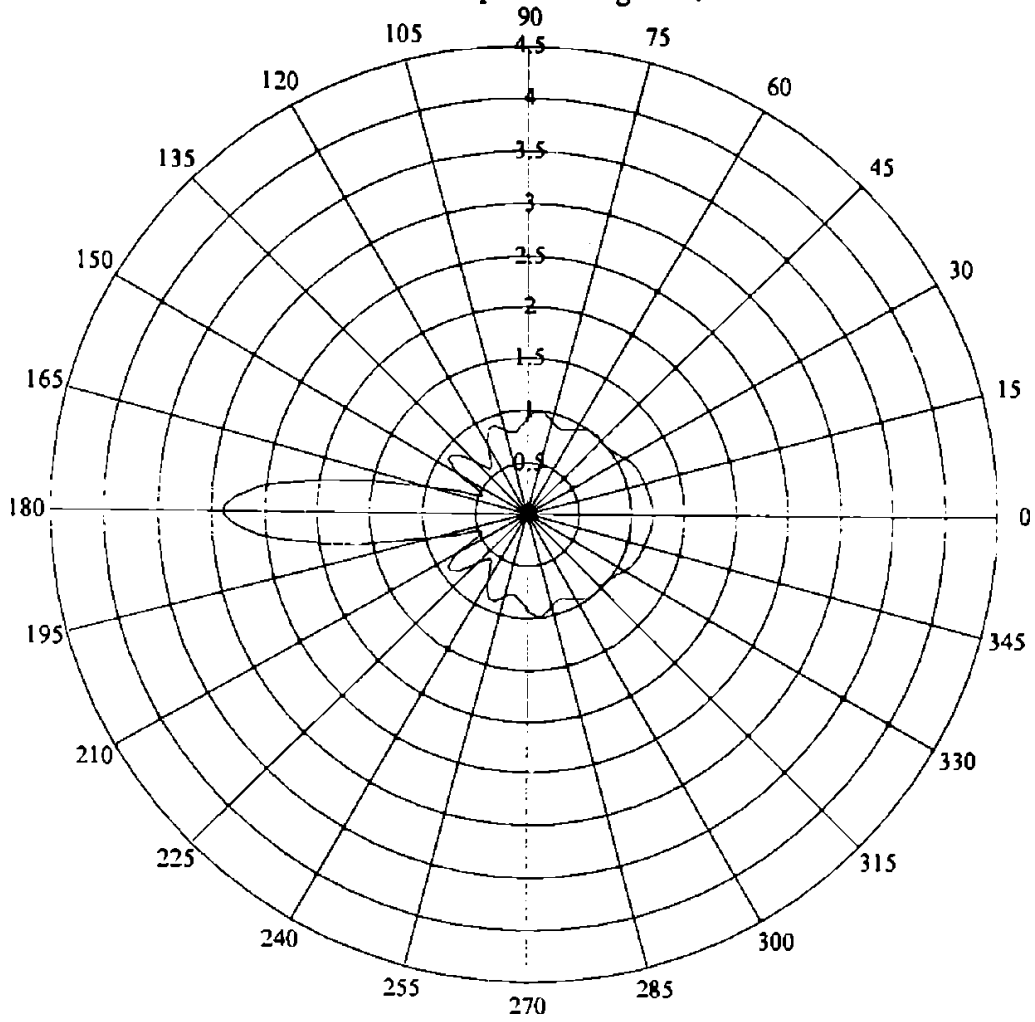
- valoarea presiunii medii elastice  $p_E$  se calculeaza cu relatia :

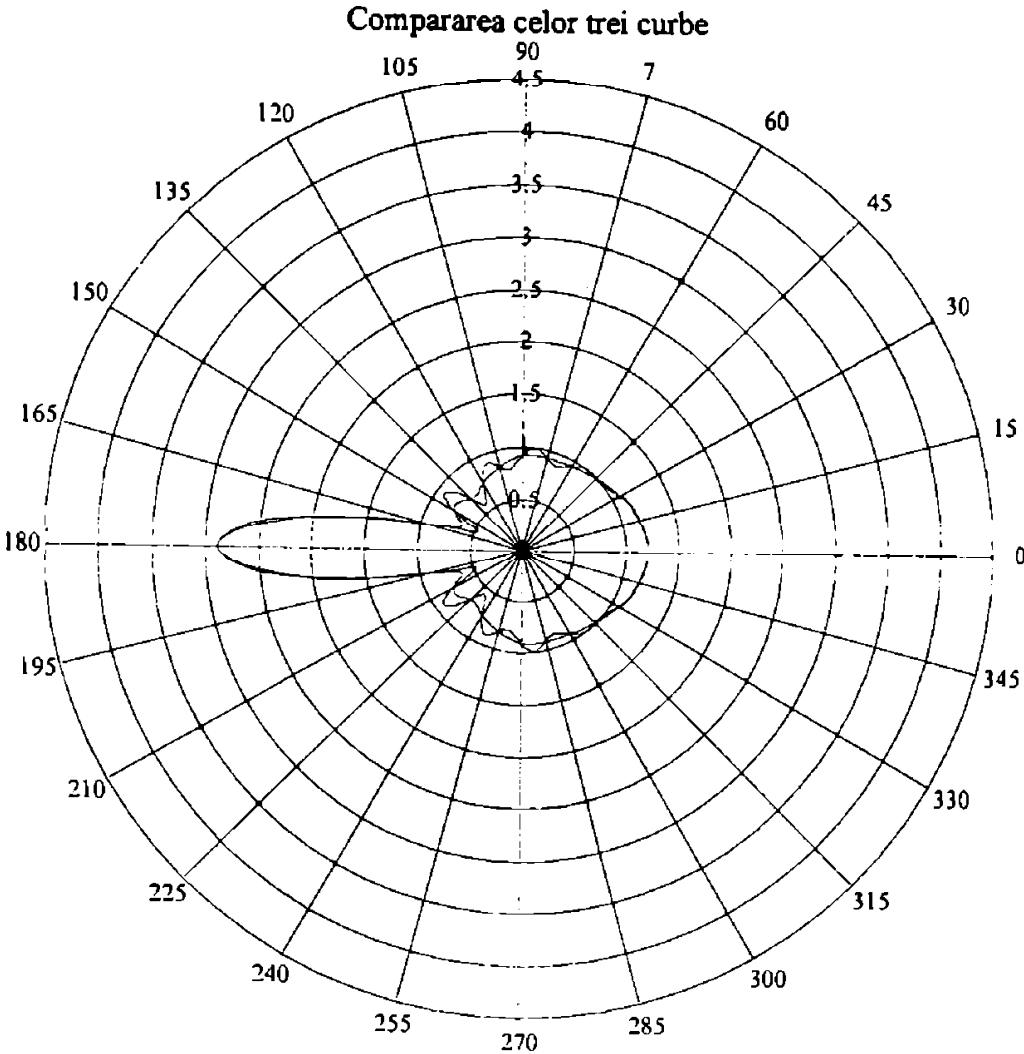
$$P_E = \frac{1}{24} \sum_1 P_i \quad \text{si are valoarea ;} \quad p_E = 1$$

- expresia functiei de distributie a presiunii elastice este ;

$$P_{\text{coef.adim}}(\psi) = P_E \left( 1 - \sum_{j=2}^{12} a_j \cdot \cos(j \cdot \psi) \right)$$

Curba de presiune fig.2.2-6



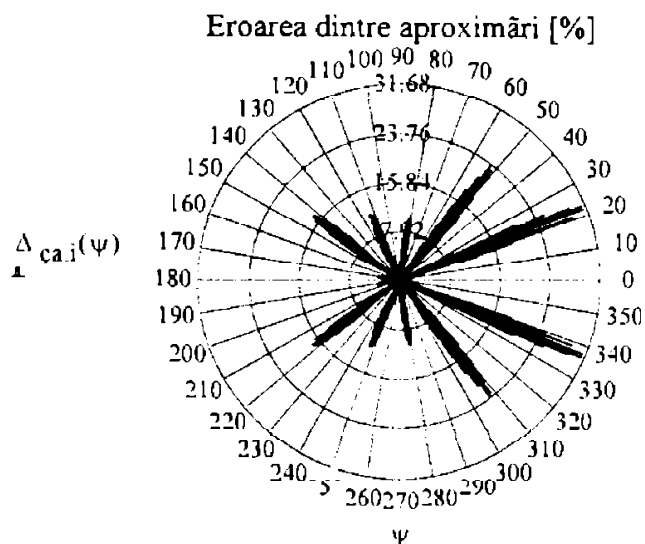
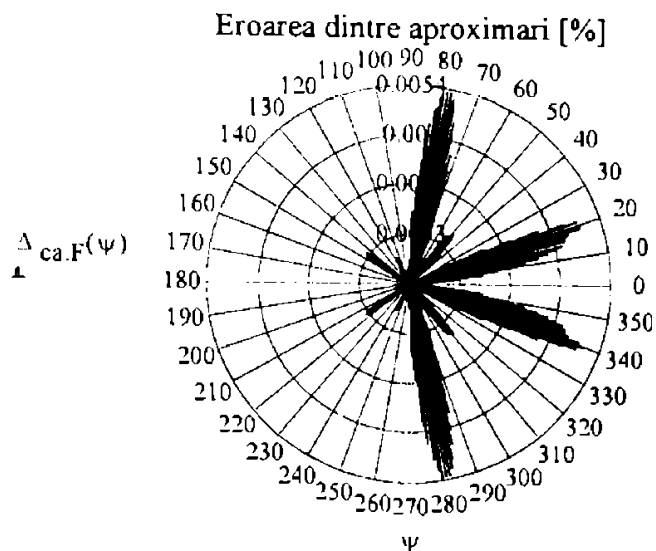


**Eroarea dintre aproximari**

- daca notam ;

$$\Delta_{ca.F(g)} = \frac{P_{coef.adim}(\psi) - P_{Fourier}(\psi)}{P_{coef.adim}(\psi)} \cdot 100$$

$$\Delta_{ca.i(\psi)} = \frac{P_{coef.adim}(\psi) - P_{interp}(\psi)}{P_{coef.adim}(\psi)} \cdot 100$$



Condițiile de echilibru static sunt îndeplinite pentru toate formele.

$$\int_0^{\pi} P_{\text{interp}}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2 \cdot \pi} P_{\text{interp}}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi} P_{\text{Fourier}}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2 \cdot \pi} P_{\text{Fourier}}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi} P_{\text{coef.adim}}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2 \cdot \pi} P_{\text{coef.adim}}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

**Calculul functiei de presiunii** (soft MathCAD 7 Profesional)

Pentru distributia din **fig. 2.2-7** :se cunosc

- valorile argumentelor unghiulare „ $\psi$ ” unde se cunosc valorile functiei cautate, care se introduc în vectorul argumentelor „ $\Phi$ ”

- valorile imaginilor cunoscute ale functiei  $p(\varphi)$  cautate, care se introduc în vectorul imaginilor „ $p(\Phi)$ ”

$\varphi_i$	$i = 0..24$	$p_i$
0		1.5500
15		1.5456
30		1.5125
45		1.4091
60		1.2125
75		0.9544
90		0.7250
105		0.6362
120		0.7625
135		1.0909
150		1.5125
165		1.8638
180		2.0000
195		1.8638
210		1.5125
225		1.0909
240		0.7625
255		0.6362
270		0.7250
285		0.9544
300		1.2125
315		1.4091
330		1.5125
345		1.5456
360		1.5500

- se lucreaza cu unghiul în radiani, deci ; .....

$$\varphi = \varphi \cdot \frac{\pi}{180}$$

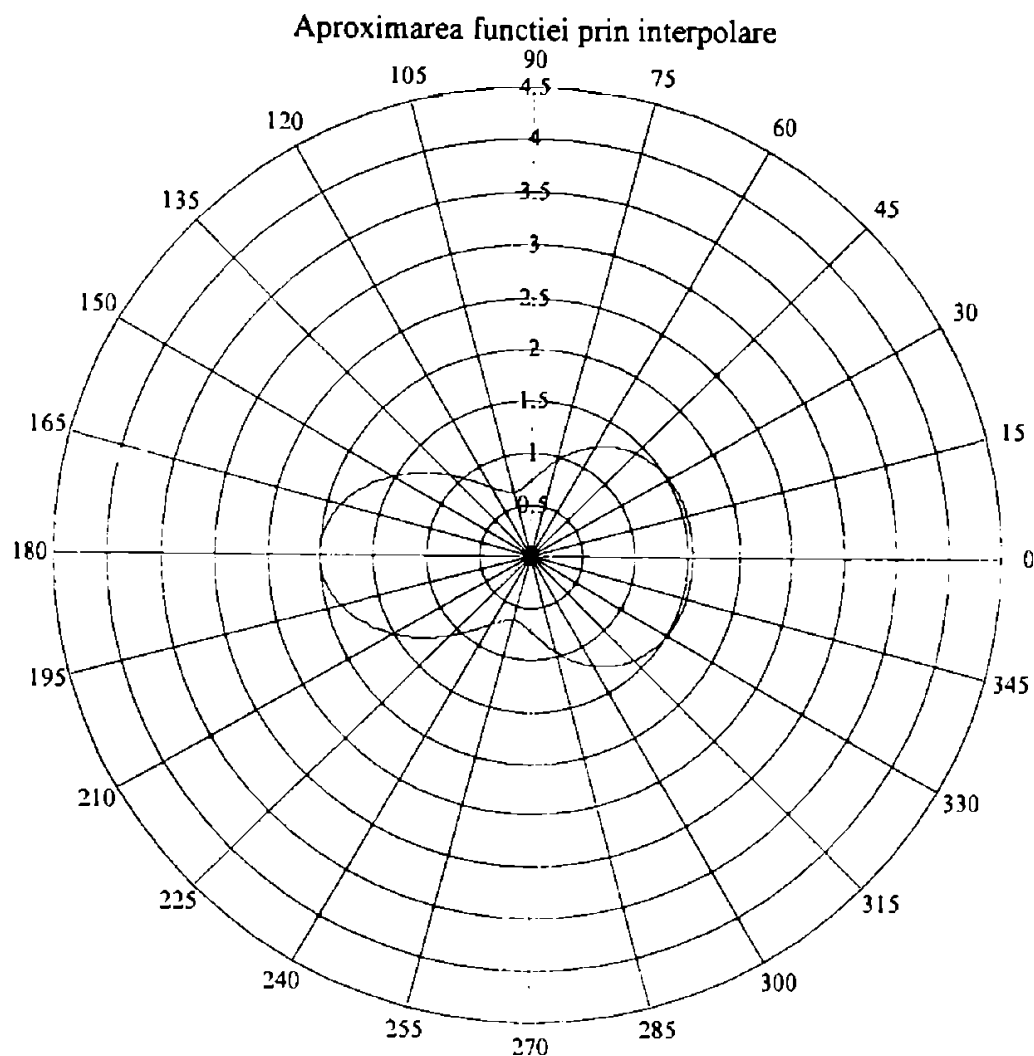
- functia se aproximeaza pe interevalul [0;360] cu pasul unghiular de 1 grad ; .....

$$\psi = 0 \cdot \frac{\pi}{180}, 1 \cdot \frac{\pi}{180} \dots 360 \cdot \frac{\pi}{180}$$

- pentru aplicarea **algoritmului MathCAD de determinare prin interpolare** a unei functii, se calculeaza ;

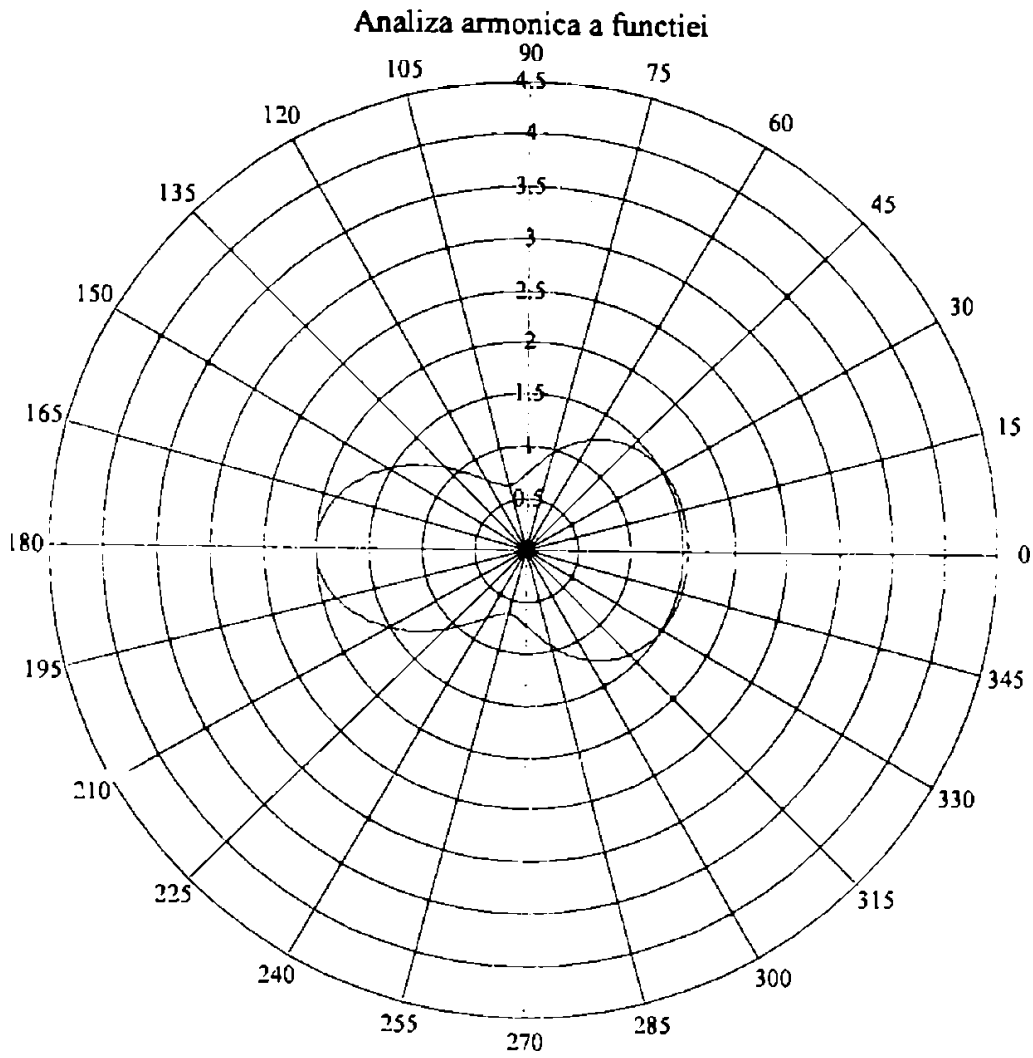
$$ps = cspline(\varphi, p) \quad p_{interp}(\psi) = interp(ps, \varphi, p, \psi)$$

- graficul functiei  $p(\varphi)$ , în coordonate polare este :









- din datele bibliografice [45] se cunosc pentru distributia din fig. 2.2-7 :

- coeficientii adimensionali

$$a_j = p_j/p_E$$

$j = 2..12$

$a_j$	$j$
0.420	2
0.180	3
0	4
0	5
0	6
0	7
0	8
0	9
0	10
0	11
0	12

- valorile presiunii  $p_E(\varphi)$  la unghiul  $\varphi$  ;

$\varphi_i$	$p_i$
15	1.5456
30	1.5125
45	1.4091
60	1.2125
75	0.9544
90	0.725
105	0.6362
120	0.7625
135	1.0909
150	1.5125
165	1.8638
180	2
195	1.8638
210	1.5125
225	1.0909
240	0.7625
255	0.6362
270	0.725
285	0.9544
300	1.2125
315	1.4091
330	1.5125
345	1.5456
360	1.55

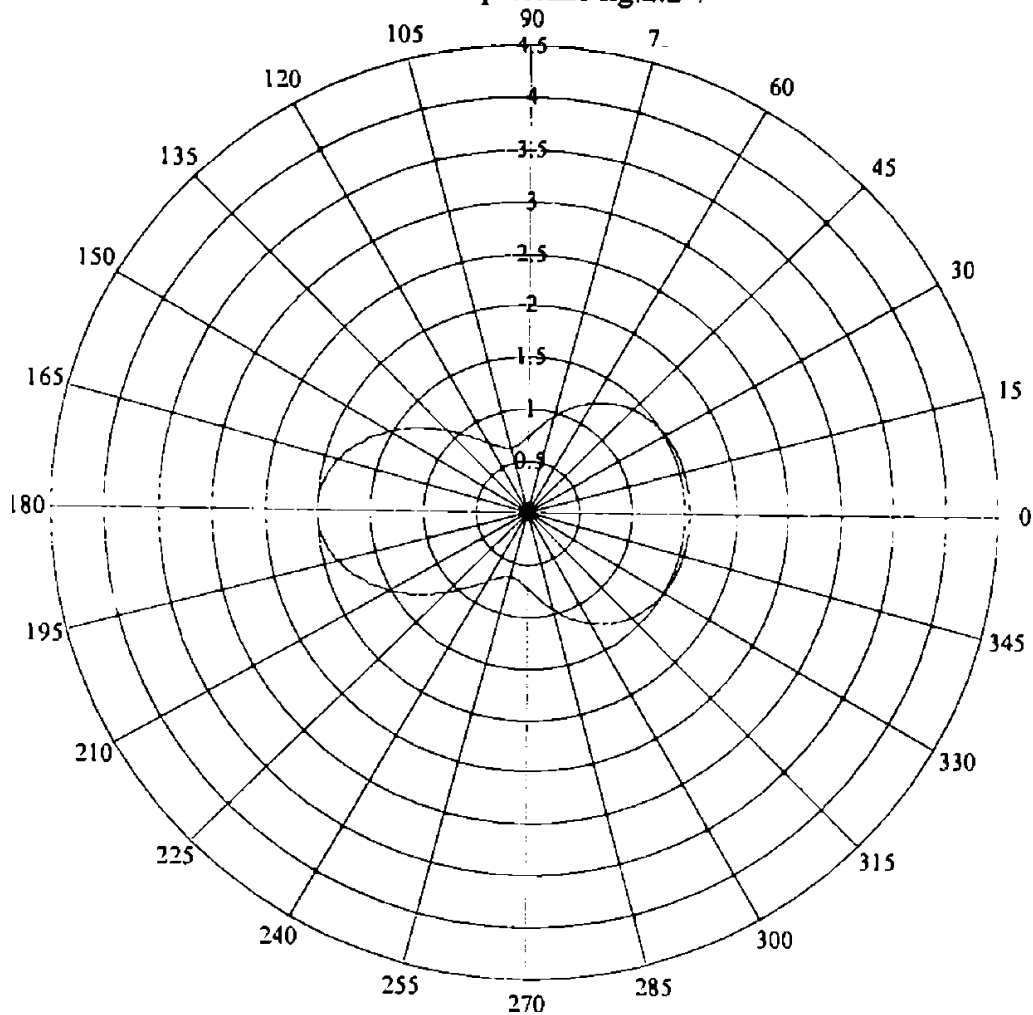
- valoarea presiunii medii elastice  $p_E$  se calculeaza cu relatia ;

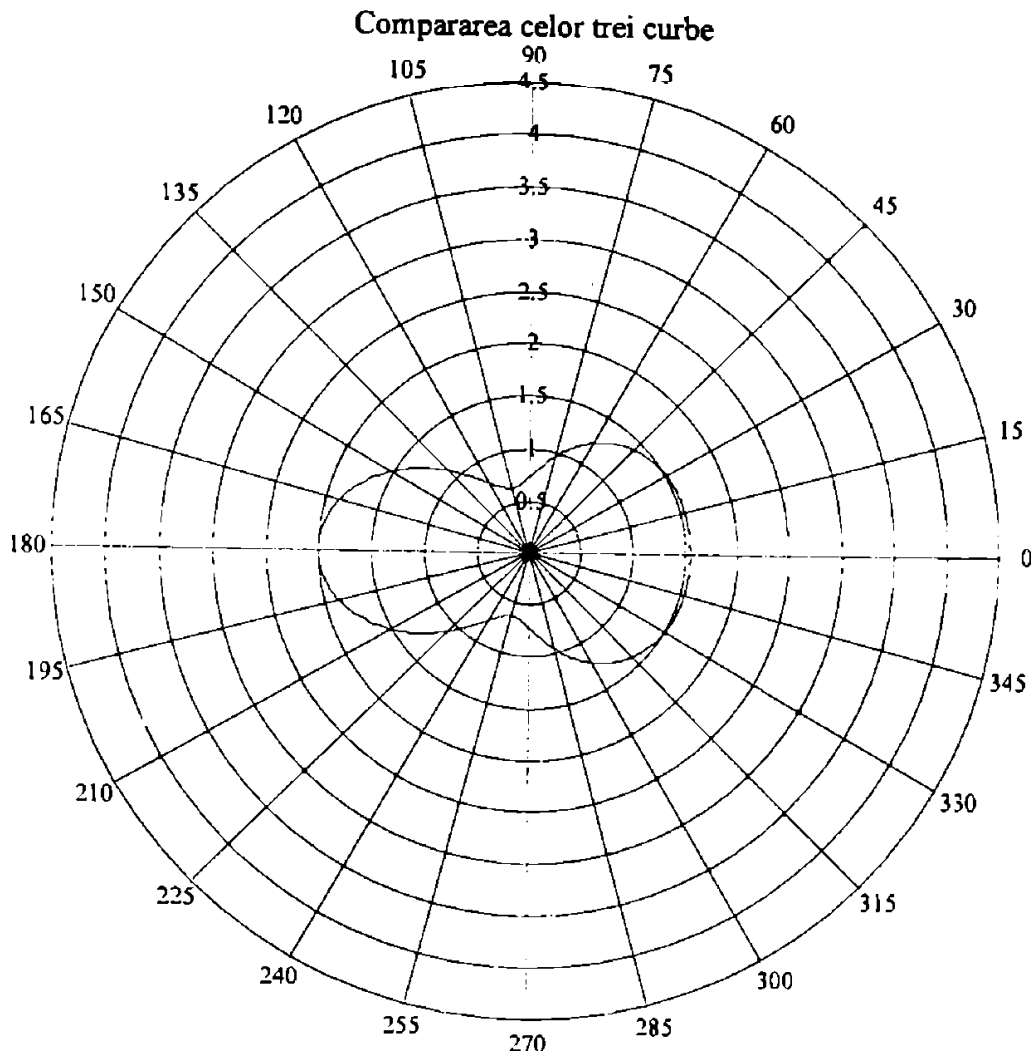
$$p_E = \frac{1}{24} \sum_i p_i \quad \text{si are valoarea ;} \quad p_E = 1.25$$

- expresia functiei de distributie a presiunii elastice este ;

$$P_{\text{coef.adim}}(\psi) = p_E \left( 1 - \sum_{j=2}^{12} a_j \cos(j \cdot \psi) \right)$$

Curba de presiune fig.2.2-7







Condițiile de echilibru static sunt îndeplinite pentru toate formele.

$$\int_0^{\pi} P_{\text{interp}}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi} P_{\text{Fourier}}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi} P_{\text{coef.adim}}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\cdot\pi} P_{\text{interp}}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\cdot\pi} P_{\text{Fourier}}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\cdot\pi} P_{\text{coef.adim}}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

**A) Determinarea functiei de distributie a presiunii elastice**

( prin interpolare soft MathCAD)

Din datele masurate (fisa de masuratori) se cunosc pentru segment :

- numărul „i” de perechi (argument-imagie functie)  $i = 0..36$ 

- argumentele unghiulare

„ $\phi$ ” unde se cunosc  
valorile functiei căutate,  
se introduc în vectorul  
argumentelor  
„vx”vx<sub>i</sub> =0  
10  
20  
30  
40  
50  
60  
70  
80  
90  
100  
110  
120  
130  
140  
150  
160  
170  
180  
190  
200  
210  
220  
230  
240  
250  
260  
270  
280  
290  
300  
310  
320  
330  
340  
350  
360- imaginile cunoscute ale  
functiei p( $\phi$ ) căutate,  
se introduc în vectorul  
imaginilor

„vy”

vy<sub>10<sub>i</sub></sub> =1.020  
1.089  
1.314  
1.442  
1.344  
1.236  
1.236  
1.206  
1.285  
1.452  
1.354  
1.265  
1.265  
1.207  
1.352  
1.413  
1.108  
0.854  
0.854  
0.981  
1.236  
1.128  
1.266  
1.206  
1.226  
1.226  
1.011  
0.971  
1.030  
1.001  
1.452  
1.334  
1.334  
1.069  
1.432  
1.452  
1.020vy<sub>30<sub>i</sub></sub> =2.845  
2.917  
2.845  
2.815  
2.806  
2.796  
2.786  
2.806  
2.796  
2.786  
2.815  
2.855  
2.835  
2.845  
2.825  
2.815  
2.502  
1.648  
1.530  
1.776  
2.256  
2.453  
2.914  
2.806  
2.796  
2.806  
2.815  
2.825  
2.847  
2.943  
2.845  
2.786  
2.796  
2.806  
2.953  
2.865  
2.845



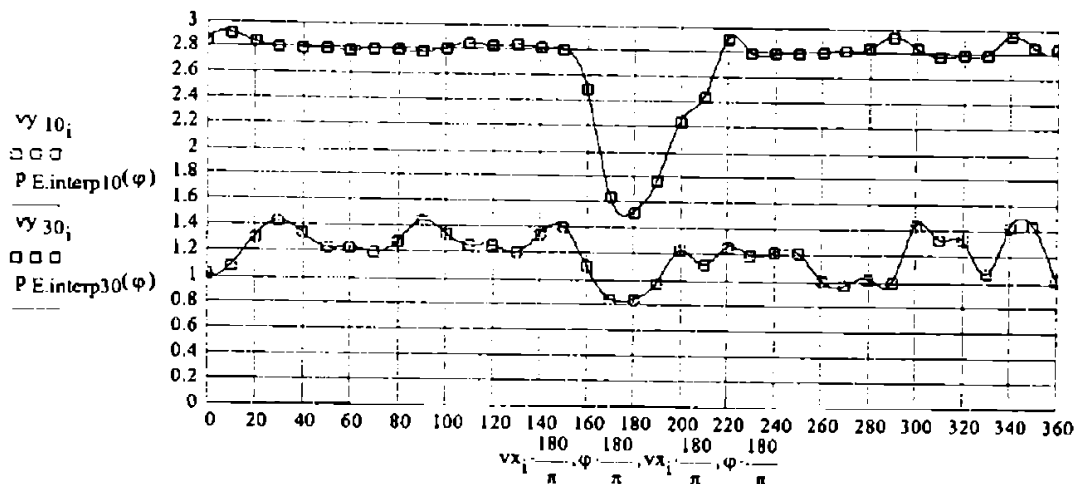
- se lucrează cu unghiul în radiani, deci ; .....  $v_x := v_x \cdot \frac{\pi}{180}$

- functia se aproximează pe intervalul [0;360] cu pasul unghiular de 1 grad ; .....  $\varphi = 0 \cdot \frac{\pi}{180}, 1 \cdot \frac{\pi}{180} \dots 360 \cdot \frac{\pi}{180}$

- se aplică algoritmul MathCAD pentru determinare interpolarea unei functii ;

$v_{y10} = \text{cspline}(v_{x10}, v_{y10})$        $P.E.\text{interp10}(\varphi) = \text{interp}(v_{y10}, v_{x10}, v_{y10}, \varphi)$

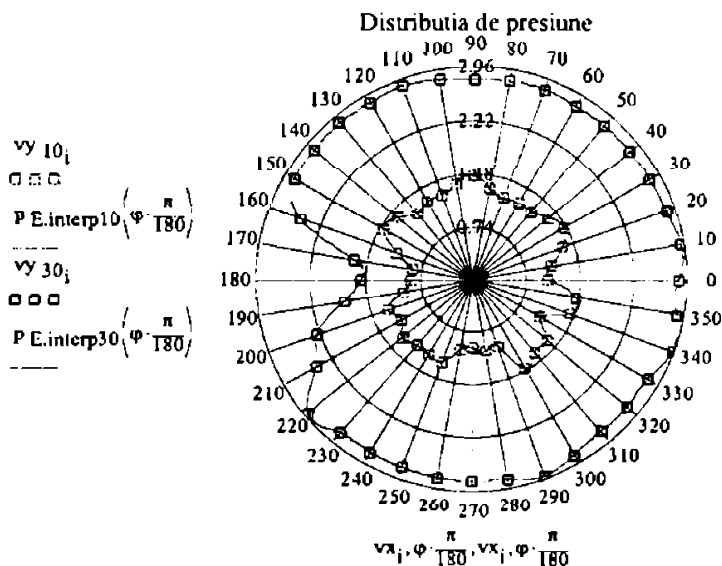
$v_{y30} = \text{cspline}(v_{x30}, v_{y30})$        $P.E.\text{interp30}(\varphi) = \text{interp}(v_{y30}, v_{x30}, v_{y30}, \varphi)$



- reprezentarea în coordonate polare (unghi- imagine functie) este mult mai comodă și sugestivă, deci ;

- pentru unghiul „φ” cu valori între [0;360] cu pasul unghiular de 1 grad       $\varphi = 0, 1 \dots 360$

- graficul functiei p(φ), în coordonate polare este :



**B) Determinarea functiei de distributie a presiunii elastice**

( prin aproximare Fourier )

Din datele masurate (Fisa de masuratori) se cunosc :

- numărul „i” de perechi (argument-imagie functie)

i = 0..36

- argumentele unghiulare

„ $\varphi$ ” unde se cunosc  
valorile functiei căutate,  
se introduc în vectorul  
argumentelor

„vx”

vx<sub>i</sub> =

0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
240
250
260
270
280
290
300
310
320
330
340
350
360

- imaginile cunoscute ale  
functiei p( $\varphi$ ) căutate,  
se introduc în vectorul  
imaginilor

„vy”

vy<sub>10<sub>i</sub></sub> =

1.020
1.089
1.314
1.442
1.344
1.236
1.236
1.206
1.285
1.452
1.354
1.265
1.265
1.207
1.352
1.413
1.108
0.854
0.854
0.981
1.236
1.128
1.266
1.206
1.226
1.226
1.011
0.971
1.030
1.001
1.452
1.334
1.334
1.069
1.432
1.452
1.020

vy<sub>30<sub>i</sub></sub>

2.845
2.917
2.845
2.815
2.806
2.796
2.786
2.806
2.796
2.786
2.815
2.835
2.835
2.845
2.825
2.815
2.502
1.648
1.530
1.776
2.256
2.453
2.914
2.806
2.796
2.806
2.815
2.825
2.847
2.943
2.845
2.786
2.796
2.806
2.953
2.865
2.845

$$i = 1..24 \quad j = 1.. \frac{24}{2} - 1$$

- coeficienti functiei de aproximare trigonometrica (Fourier) sunt :

$$a_0 = \frac{1}{24} \sum_i v_{y10_i}$$

$$a_j = \frac{2}{24} \sum_i v_{y10_i} \cdot \cos\left(j \cdot v_{x_i} \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

$$a_{12} = \frac{1}{24} \sum_i (-1)^i \cdot v_{y10_i}$$

$$b_j = \frac{2}{24} \sum_i v_{y10_i} \cdot \sin\left(j \cdot v_{x_i} \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

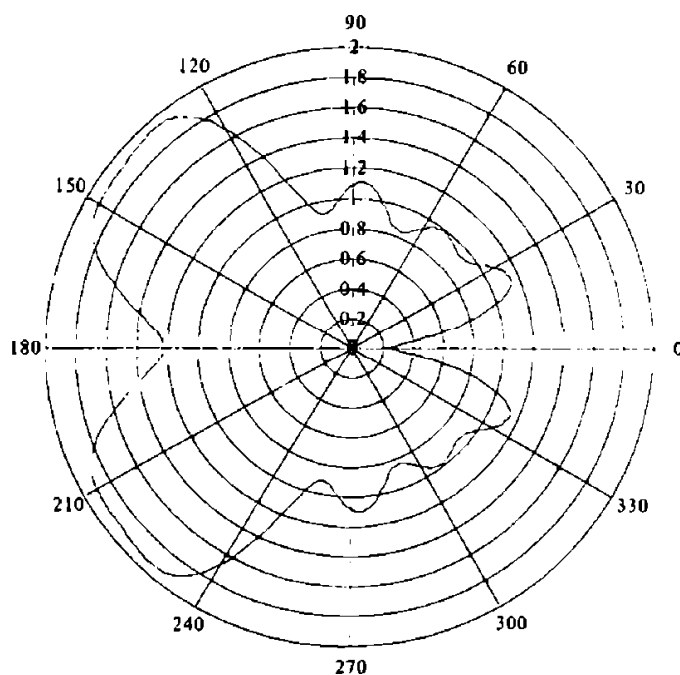
$$b^T = [ 0 \quad 0.8983 \quad 0.4813 \quad 0.0099 \quad 0.1898 \quad 0.2277 \quad 0.0027 \quad -0.0148 \quad 0.1499 \quad -0.0456 \quad 0.0184 \quad 0.0592 ]$$

$$a^T = [ 1.2216 \quad -0.4917 \quad 0.0635 \quad 0.0818 \quad -0.2813 \quad 0.0549 \quad -0.1218 \quad -0.1061 \quad -0.0427 \quad 0.0073 \quad -0.1163 \quad -0.0354 \quad 0.015 ]$$

$$\frac{a}{a_0}^T = [ 1 \quad -0.4025 \quad 0.0519 \quad 0.067 \quad -0.2302 \quad 0.0449 \quad -0.0997 \quad -0.0869 \quad -0.0349 \quad 0.006 \quad -0.0952 \quad -0.0289 \quad 0.0123 ]$$

- expresia functiei de aproximare Fourier se poate scrie :

$$\xi_{\text{Fourier}}(\varphi) = a_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^{12} \frac{a_i}{a_0} \cdot \cos(i \cdot \varphi) \right) \quad \text{sau} \quad \xi'_{\text{Fourier}}(\varphi) = \sum_{i=0}^{12} a_i \cdot \cos(i \cdot \varphi)$$



### 1. Calculul coeficientilor B, C, si D pentru curbele de presiune din fig. 2.2-4...-7 si fig. 2.2-1

- coeficientii dimensionali  
ai curbei de presiune  $p_i/p_E = \lambda_j$

$i = 0..4$

- numarul curbei (2.2-1 respectiv 2.2-4..-7)

$j = 0..12$

- numarul coeficientului adimensional

$\lambda_{0,j} =$	$\lambda_{1,j} =$	$\lambda_{2,j} =$	$\lambda_{3,j} =$	$\lambda_{4,j} =$
1	1	1	1	1
0	0	0	0	0
0	0.3092	0.205	0.2549	0.420
0	-0.4355	-0.571	-0.1940	-0.180
0	0.2877	0.472	0.2431	0
0	-0.1963	0.322	0.1846	0
0	0.1412	0.279	0.1666	0
0	-0.1087	0.267	-0.1599	0
0	0.0970	0.256	0.1589	0
0	-0.0936	-0.214	0.1487	0
0	0.0797	0.178	0.1460	0
0	-0.0711	-0.177	-0.1478	0
0	0.01413	0.094	0.0760	0

- coeficientul  $v$   
rel. (3.2-11)

$$v_i = - \sum_{j=2}^{12} \frac{(-1)^{j-1}}{j^2-1} \cdot \lambda_{i,j}$$

$$v_0 = 0$$

$$v_1 = 0.195$$

$$v_2 = 0.209$$

$$v_3 = 0.149$$

$$v_4 = 0.162$$

- coeficientii  
 $B_u$  si  $C_u$ ,  
rel (3.2-23)

$$C_u(\psi, i) = 1 - \frac{1-v_i}{2} \cdot \psi \cdot \sin(\psi) - \sum_{j=2}^{12} \frac{1}{(j^2-1)^2} \cdot \lambda_{i,j} \cdot \cos(j \cdot \psi)$$

$k = 3, 5.. 11$  - numar al coeficientului adimensional

$$B_u(\psi, i) = -1 \cdot \sum_{k=3}^{11} \frac{1}{(k^2-1)^2} \cdot \lambda_{i,k} \cdot \cos(\psi)$$

rel. (3.2-16)

$$D_u(\psi, i) = 1 - \frac{1-v_i}{2} \cdot \psi \cdot \sin(\psi) - \sum_{j=2}^{12} \frac{1}{(j^2-1)^2} \cdot \lambda_{i,j} \cdot \cos(j \cdot \psi) - \sum_{k=3}^{11} \frac{1}{(k^2-1)^2} \cdot \lambda_{i,k} \cdot \cos(\psi)$$

$$\psi = 0, \frac{\pi}{180}, 15, \frac{\pi}{180}, \dots, 180, \frac{\pi}{180}$$

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-4

$\psi \cdot \frac{180}{\pi}$	$C_u(\psi, 1)$	$B_u(\psi, 1)$	$D_u(\psi, 1)$
0	1.0286	0.0058	1.0344
15	1.0528	0.0056	1.0583
30	1.1221	0.0050	1.1271
45	1.2272	0.0041	1.2313
60	1.3538	0.0029	1.3567
75	1.4841	0.0015	1.4856
90	1.5988	0	1.5988
105	1.6785	-0.0015	1.6770
120	1.7054	-0.0029	1.7025
135	1.6640	-0.0041	1.6599
150	1.5427	-0.0050	1.5377
165	1.3351	-0.0056	1.3295
180	1.0430	-0.0058	1.0372

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-5

$\psi \cdot \frac{180}{\pi}$	$C_u(\psi, 2)$	$B_u(\psi, 2)$	$D_u(\psi, 2)$
0	1.0155	0.0072	1.0228
15	1.0411	0.0070	1.0481
30	1.1142	0.0063	1.1205
45	1.2243	0.0051	1.2194
60	1.3551	0.0036	1.3588
75	1.4874	0.0019	1.4892
90	1.6006	0	1.6006
105	1.6757	-0.0019	1.6738
120	1.6967	-0.0036	1.6931
135	1.6505	-0.0051	1.6453
150	1.5274	-0.0063	1.5211
165	1.3220	-0.0070	1.3150
180	1.0348	-0.0072	1.0276

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-6

$\psi \cdot \frac{180}{\pi}$	$C_u(\psi, 3)$	$B_u(\psi, 3)$	$D_u(\psi, 3)$
0	1.0261	0.0022	1.0283
15	1.0517	0.0021	1.0538
30	1.1252	0.0019	1.1271
45	1.2376	0.0015	1.2392
60	1.3742	0.0011	1.3753
75	1.5160	0.0006	1.5166
90	1.6412	0	1.6412
105	1.7275	-0.0006	1.7269
120	1.7545	-0.0011	1.7534
135	1.7057	-0.0015	1.7042
150	1.5702	-0.0019	1.5683
165	1.3444	-0.0021	1.3423
180	1.0331	-0.0022	1.0309

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-7

$\psi \cdot \frac{180}{\pi}$	$C_u(\psi, 4)$	$B_u(\psi, 4)$	$D_u(\psi, 4)$
0	1.0439	0.0028	1.0467
15	1.0668	0.0027	1.0695
30	1.1330	0.0024	1.1354
45	1.2345	0.0020	1.2365
60	1.3592	0.0014	1.3606
75	1.4910	0.0007	1.4918
90	1.6111	0	1.6111
105	1.6988	-0.0007	1.6981
120	1.7334	-0.0014	1.7320
135	1.6957	-0.0020	1.6937
150	1.5715	-0.0024	1.5690
165	1.3545	-0.0027	1.3518
180	1.0495	-0.0028	1.0467

- pentru curba de presiune constanta fig. 2.2-1

$\psi \cdot \frac{180}{\pi}$	$C_u(\psi, 0)$	$B_u(\psi, 0)$	$D_u(\psi, 0)$
0	1.0000	0	1.0000
15	1.0339	0	1.0339
30	1.1309	0	1.1309
45	1.2777	0	1.2777
60	1.4534	0	1.4534
75	1.6322	0	1.6322
90	1.7854	0	1.7854
105	1.8851	0	1.8851
120	1.9069	0	1.9069
135	1.8330	0	1.8330
150	1.6545	0	1.6545
165	1.3727	0	1.3727
180	1.0000	0	1.0000

- coeficientii  
 $B_{\eta}$  si  $C_{\eta}$ ,  
 rel. (3.2-24)

$$C_{\eta}(\psi, i) = \left[ \psi - \frac{1 - v_i}{2} \psi \cdot \cos(\psi) + \frac{1 - v_i}{2} \sin(\psi) - \sum_{j=2}^{12} \frac{1}{j \cdot (j^2 - 1)^2} \lambda_{i,j} \sin(j \cdot \psi) \right]$$

$k = 3, 5, \dots, 11$  - numar al coeficientului adimensional

$$B_{\eta}(\psi, i) = -1 \cdot \sum_{k=3}^{11} \frac{1}{k \cdot (k^2 - 1)^2} \lambda_{i,k} \sin(\psi)$$

rel. (3.2-19)

$$D_{\eta}(\psi, i) = \left[ \psi - \frac{1 - v_i}{2} \psi \cdot \cos(\psi) + \frac{1 - v_i}{2} \sin(\psi) - \sum_{j=2}^{12} \frac{1}{j \cdot (j^2 - 1)^2} \lambda_{i,j} \sin(j \cdot \psi) - \sum_{k=3}^{11} \frac{1}{k \cdot (k^2 - 1)^2} \lambda_{i,k} \sin(\psi) \right]$$

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-4

$\frac{\psi}{\pi} \cdot 180$	$C_{\eta}(\psi,1)$	$B_{\eta}(\psi,1)$	$D_{\eta}(\psi,1)$
0	0	0	0
15	0.2714	0.0005	0.2719
30	0.5552	0.0010	0.5562
45	0.8621	0.0014	0.8635
60	1.1996	0.0017	1.2014
75	1.5712	0.0019	1.5732
90	1.9753	0.0020	1.9773
105	2.4053	0.0019	2.4072
120	2.8496	0.0017	2.8513
135	3.2923	0.0014	3.2937
150	3.7139	0.0010	3.7149
165	4.0925	0.0005	4.0930
180	4.4055	0	4.4055

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-5

$\frac{\psi}{\pi} \cdot 180$	$C_{\eta}(\psi,2)$	$B_{\eta}(\psi,2)$	$D_{\eta}(\psi,2)$
0	0	0	0
15	0.2681	0.0007	0.2688
30	0.5493	0.0013	0.5506
45	0.8548	0.0018	0.8566
60	1.1922	0.0022	1.1944
75	1.5644	0.0024	1.5669
90	1.9693	0.0025	1.9718
105	2.3992	0.0024	2.4016
120	2.8419	0.0022	2.8441
135	3.2817	0.0018	3.2835
150	3.6994	0.0013	3.7007
165	4.0742	0.0007	4.0748
180	4.3844	0	4.3844

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-6

$\frac{\psi}{\pi} \cdot 180$	$C_{\eta}(\psi,3)$	$B_{\eta}(\psi,3)$	$D_{\eta}(\psi,3)$
0	0	0	0
15	0.2709	0.0002	0.2711
30	0.5549	0.0004	0.5553
45	0.8635	0.0006	0.8640
60	1.2050	0.0007	1.2057
75	1.5835	0.0008	1.5842
90	1.9773	0.0008	1.9781
105	2.4394	0.0008	2.4401
120	2.8967	0.0007	2.8973
135	3.3514	0.0006	3.3519
150	3.7822	0.0004	3.7826
165	4.1657	0.0002	4.1659
180	4.4786	0	4.4786

- pentru curba de presiuni fig. 2.2-7

$\frac{\psi}{\pi} \cdot 180$	$C_{\eta}(\psi,4)$	$B_{\eta}(\psi,4)$	$D_{\eta}(\psi,4)$
0	0	0	0
15	0.2753	0.0002	0.2755
30	0.5624	0.0005	0.5628
45	0.8716	0.0007	0.8723
60	1.2108	0.0008	1.2116
75	1.5839	0.0009	1.5848
90	1.9905	0.0009	1.9914
105	2.4247	0.0009	2.4256
120	2.8753	0.0008	2.8762
135	3.3260	0.0007	3.3266
150	3.7556	0.0005	3.7561
165	4.1407	0.0002	4.1409
180	4.4571	0	4.4571

- pentru curba de presiune constanta fig. 2.2-1

$\frac{\psi}{\pi} \cdot 180$	$C_{\eta}(\psi,0)$	$B_{\eta}(\psi,0)$	$D_{\eta}(\psi,0)$
0	0	0	0
15	0.2648	0	0.2648
30	0.5469	0	0.5469
45	0.8613	0	0.8613
60	1.2184	0	1.2184
75	1.6226	0	1.6226
90	2.0708	0	2.0708
105	2.5527	0	2.5527
120	3.0410	0	3.0410
135	3.5428	0	3.5428
150	4.0016	0	4.0016
165	4.4000	0	4.4000
180	4.7124	0	4.7124

**2. Calculul deplasării radiale  $u(\psi)$  și a deplasării unghiulare  $\eta(\psi)$  pentru curbele de presiune din fig. 2.2-4 ... -7 și fig. 2.2-1**

- pentru un segment cu : diametrul exterior  $D[\text{mm}]$  :  $D = 355$
- diametrul interior  $D_i[\text{mm}]$  :  $D_i = 333$
- înălțimea axială  $h[\text{mm}]$  :  $h = 7$
- modulul de elasticitate  $E[\text{N/mm}^2]$  :  $E = 110000$
- care are :
  - grosimea radială  $a[\text{mm}]$  :  $a = \frac{D - D_i}{2}$   $a = 11$
  - raza fibrei medii  $R_m[\text{mm}]$  :  $R_m = \frac{D + a}{2}$   $R_m = 172$
  - raza exterioră  $R[\text{mm}]$  :  $R = \frac{D}{2}$   $R = 177.5$
  - parametru caracteristic  $c[\text{mm}]$  :  $c = 7 \cdot \frac{R}{R_m}$   $c = 7.224$
  - presiunea elastică medie  $p_E[\text{N/mm}^2]$  :  $p_E = \frac{1.0266}{1.125}$
  - momentul de inerție axial pentru o secțiune radială dreptunghiulară  $I[\text{mm}^4]$  :  $I = \frac{h \cdot a^3}{12}$   $I = 776$
  - deplasarea radială  $u[\text{mm}]$  :  $u(\psi, l) = D_u(\psi, l) \cdot \frac{c \cdot R_m^4 \cdot p_E}{E \cdot I}$
  - deplasarea unghiulară  $\eta[\text{rad}]$  :  $\eta(\psi, l) = D_\eta(\psi, l) \cdot \frac{c \cdot R_m^3 \cdot p_E}{E \cdot I}$



- pentru curba de presiune constanta fig. 2.2-4

$\frac{\psi}{\pi}$	$u(\psi, 1)$	$\eta(\psi, 1)$
0	23.1199	0
15	23.6562	0.1201
30	25.1926	0.2457
45	27.5216	0.3815
60	30.3240	0.5308
75	33.2038	0.6951
90	35.7360	0.8737
105	37.4849	1.0636
120	38.0540	1.2598
135	37.1028	1.4553
150	34.3708	1.6414
165	29.7175	1.8085
180	23.1837	1.9465

**FIȘĂ DE MĂSURĂTORI**

Unghiul $\psi$ [°]	Segment seria 1746		Segment seria 1753	
	$F_{10\mu\text{m}}$ [N]	$F_{30\mu\text{m}}$ [N]	$F_{10\mu\text{m}}$ [N]	$F_{30\mu\text{m}}$ [N]
0	1,020	2,845	1,707	2,961
10	1,089	2,914	1,530	2,621
20	1,315	2,845	1,813	3,205
30	1,442	2,815	1,873	3,206
40	1,344	2,806	1,646	2,845
50	1,236	2,796	1,265	2,685
60	1,235	2,787	1,226	2,599
70	1,246	2,806	1,167	2,514
80	1,285	2,896	1,089	2,502
90	1,452	2,986	1,379	3,004
100	1,345	2,815	1,469	3,154
110	1,265	2,855	1,489	3,201
120	1,266	2,861	1,289	2,812
130	1,206	2,805	1,049	2,703
140	1,345	2,925	1,069	2,779
150	1,413	2,992	1,099	2,804
160	1,108	2,622	1,246	2,907
170	0,854	1,648	1,003	1,402
180	0,824	1,530	0,992	1,059
190	0,981	1,757	1,049	1,159
200	1,236	2,256	1,275	2,648
210	1,288	2,453	1,030	2,303
220	1,365	2,914	1,049	2,343
230	1,206	2,806	1,059	2,589
240	1,226	2,876	1,230	2,953
250	1,229	2,886	1,033	3,063
260	1,010	2,516	1,020	2,985
270	0,971	2,282	1,059	3,105
280	1,030	2,874	1,065	3,204
290	1,001	2,743	1,059	2,902
300	1,052	2,845	1,040	2,803
310	1,134	2,879	1,049	2,856
320	1,346	2,886	1,069	2,869
330	1,209	2,806	1,113	2,903
340	1,432	2,953	1,206	3,071
350	1,402	2,865	1,319	3,149
360	1,020	2,845	1,707	3,061

Operator ,

**FIȘĂ DE MĂSURĂTORI**

Unghiul $\psi$ [°]	Segment seria 1612		Segment seria 1703	
	$F_{10\mu\text{m}}$ [N]	$F_{30\mu\text{m}}$ [N]	$F_{10\mu\text{m}}$ [N]	$F_{30\mu\text{m}}$ [N]
0	1,031	2,836	1,650	3,091
10	1,234	2,910	1,514	2,630
20	1,715	2,830	1,414	3,320
30	1,239	2,801	1,370	3,314
40	1,657	2,803	1,240	2,813
50	1,258	2,781	1,262	2,814
60	1,117	2,753	1,221	2,715
70	1,015	2,805	1,151	2,503
80	1,215	2,783	1,017	3,014
90	1,327	2,777	1,053	3,013
100	1,267	2,811	1,055	3,130
110	1,268	2,840	1,138	2,815
120	1,014	2,820	1,014	2,797
130	1,521	2,821	1,049	2,810
140	1,748	2,823	1,017	3,001
150	1,327	2,284	1,051	3,217
160	1,115	2,499	1,007	2,514
170	0,903	1,645	0,813	1,503
180	0,915	1,528	0,785	1,407
190	0,998	1,761	0,838	1,473
200	1,258	2,249	1,017	2,053
210	1,129	2,450	1,269	2,415
220	1,273	2,910	1,015	1,950
230	1,215	2,800	1,017	2,614
240	1,230	2,793	1,051	2,920
250	1,235	2,803	1,019	3,014
260	1,015	2,814	1,014	2,863
270	0,980	2,823	1,011	2,857
280	1,037	2,869	1,018	3,007
290	1,009	2,937	1,053	3,114
300	1,068	2,969	1,007	2,831
310	1,054	2,783	1,035	2,923
320	1,108	2,889	1,041	2,955
330	1,079	2,802	1,101	2,973
340	1,158	2,948	1,212	3,076
350	1,113	2,883	1,350	3,150
360	1,031	2,838	1,650	3,090

Operator ,

*[Signature]*

**FIȘĂ DE MĂSURĂTORI**

Unghiul $\psi$ [°]	Segment seria 1641		Segment seria 1683	
	$F_{10\mu\text{m}}$ [N]	$F_{30\mu\text{m}}$ [N]	$F_{10\mu\text{m}}$ [N]	$F_{30\mu\text{m}}$ [N]
0	1,025	2,849	1,720	3,083
10	1,094	2,925	1,541	2,629
20	1,324	2,849	1,417	3,309
30	1,456	2,814	1,381	3,320
40	1,360	2,801	1,239	2,902
50	1,242	2,781	1,280	2,930
60	1,249	2,809	1,230	2,960
70	1,220	2,801	1,190	2,580
80	1,285	2,799	1,093	3,001
90	1,460	2,860	1,089	3,200
100	1,390	2,921	1,090	3,253
110	1,270	2,930	1,211	3,021
120	1,281	2,944	1,250	2,991
130	1,230	2,945	1,241	3,010
140	1,311	2,899	1,151	3,211
150	1,421	2,991	1,183	3,263
160	1,211	2,730	1,242	2,808
170	0,881	1,846	0,991	1,482
180	1,001	1,926	1,004	1,659
190	1,018	1,990	1,162	2,341
200	1,219	2,156	1,278	2,640
210	1,220	2,194	1,300	2,725
220	1,225	2,198	1,419	2,808
230	1,223	2,195	1,423	2,816
240	1,226	2,201	1,422	2,814
250	1,227	2,209	1,431	3,001
260	1,224	2,199	1,417	2,957
270	1,219	2,188	1,429	3,101
280	1,226	2,205	1,433	3,217
290	1,229	2,210	1,428	3,204
300	1,240	2,232	1,431	3,214
310	1,235	2,228	1,429	3,207
320	1,237	2,231	1,433	3,209
330	1,239	2,235	1,436	3,211
340	1,243	2,241	1,438	3,212
350	1,150	2,517	1,560	3,180
360	1,025	2,850	1,720	3,080

Operator ,