

181 Lit. C

UNIVERSITATEA „POLITEHNICA” TIMIȘOARA
FACULTATEA DE MECANICĂ

inginer : Gilbert Rainer Gillich

**STUDIUL TEORETIC ȘI EXPERIMENTAL AL
TENSIUNILOR ȘI DEFORMAȚIILOR LA RECIPIENTE
SUB PRESIUNE LA TEMPERATURI JOASE**

Teză pentru obținerea titlului științific de doctor inginer

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC :
PROF.DR.ING. TIBERIU BABEU

1998

CUPRINS

023. f. 33
181

Introducere	1-4
Cap.1. Stadiul actual al metodelor analitice de studiu a învelitorilor elastice subțiri de revoluție	5-26
1.1. Elemente geometrice și ipoteze simplificatoare în studiul învelitorilor subțiri de revoluție	5-7
1.2. Starea tensiunii în învelitori	7-9
1.3. Ecuatiile de echilibru în învelitori	9-12
1.4. Starea de deplasări și deformații în învelitori	12-13
1.4.1. Determinarea deformației specifice circumferențiale	13-14
1.4.2. Determinarea deformației specifice în direcția mediană	14
1.4.3. Determinarea alunecării specifice $\gamma_{\theta\phi}$	14-15
1.4.4. Variația curburii	15-16
1.4.5. Deformații la nivelul suprafeței paralele distanțate radial cu z de suprafața mediană	16-17
1.5. Comportarea liniar elastică a învelitorilor subțiri de revoluție	17-19
1.6. Sistem de ecuații pentru determinarea completă a problemei învelitorilor elastice subțiri de revoluție	19-21
1.7. Învelitori solicitate axial-simetric	22-24
1.8. Învelitori în stadiu de membrană	24-25
1.9. Concluzii	25-26
Cap.2. Aplicații ale calculului numeric la stadiul analitic al învelitorilor elastice subțiri de revoluție	27-67
2.1. Învelitori sferice	28-29
2.1.1. Învelitoare sferică în stadiul de membrană încărcată prin greutatea proprie	30-32
2.1.2. Învelitoare sferică în stare de membrană încărcată hidrostatic	33-35
2.1.3. Învelitoare sferică supusă la încărcări pe margine	35-49
2.1.4. Învelitori sferice de rază mare	50-53
2.2. Învelitori elipsoidale	53-54
2.3. Învelitori cilindrice circulare	54-63

2.3.1. Înelitori cilindrice circulare în stadiul de membrană	57-58
2.3.2. Înelitori cilindrice circulare încărcate axial simetric	58-63
2.4. Înelitori toroidale	63-65
2.5. Concluzii privind aplicațiile calculatorului numeric la studiul analitic al înelitorilor elastice subțiri de revoluție	65-67
Cap.3. Aplicații ale calculului numeric la studiul joncțiunilor înelitorilor subțiri	67-121
3.1. Înelitoare compusă din cilindru și sferă	67-70
3.2. Înelitoare coaxială cilindru-elipsoid	71-72
3.3. Penetrații în învelitori subțiri	72-77
3.4. Aplicarea metodei elementelor finite la studiul învelitorilor simple și compuse	78-83
3.5. Discretizarea în elemente finite	83-120
3.6. Contribuții la studiul învelitorilor elastice subțiri	120-121
Cap.4. Înelitori subțiri supuse temperaturilor joase	122-171
4.1. Înelitori cilindrice și sferice subțiri supuse la temperaturi joase	122-124
4.1.1. Înelitori cilindrice cu pereți subțiri supuse temperaturilor joase	122-123
4.1.2. Înelitori sferice cu pereți subțiri supuse la temperaturi joase	123-124
4.2. Înelitori subțiri de revoluție supuse la tensiuni termice solicitate axial simetric	124-126
4.3. Comportarea mecanică a materialelor la temperaturi joase	126-135
4.3.1. Oțeluri carbon slab aliate	129-130
4.3.2. Oțeluri aliate	130-132
4.3.3. Oțeluri turnate	132-133
4.3.4. Recomandări privind utilizarea materialelor la temperaturi negative	133-134
4.4. Contribuții la studiul învelitorilor subțiri supuse la temperaturi joase	135
Cap.5. Analiza experimentală a tensiunilor	136-168
5.1. Abordarea statistică a rezultatelor măsurătorilor	136-141
5.1.1. Calculul principalilor parametri statistici	136-138
5.1.2. Verificarea normalității datelor	138-140
5.1.3. Prelucrarea șirurilor multidimensionale. Corelație și regresie.	140-141

5.2. Prelucrarea rezultatelor măsurărilor efectuate la un distribuitor în zona unor concentratori de tensiune	142-145
5.3. Prelucrarea datelor măsurărilor pe probe prelevate de pe un recipient sub presiune	145-150
5.4. Încercări experimentale la temperaturi scăzute	150-156
5.5. Estimarea siguranței în funcționare a unor elemente cilindrice încărcate cu presiune interioară.	158-167
5.5.1. Încercarea la tracțiune	158-159
5.5.2. Aplicarea mecanicii ruperii la evaluarea siguranței în funcționare a conductelor	159-163
5.5.3. Interpretarea rezultatelor	163-167
5.6. Concluzii asupra analizei experimentale a tensiunilor	167-168
Cap.6. Sinteza lucrării și principalele contribuții ale autorului	169-172
Bibliografie	173-178
Anexe	179-201

Introducere

Componente esențiale în instalațiile tehnologice din industria chimică și energetică, în construcții aerospațiale, precum și în alte domenii ale tehnicii de vârf, recipientele sub presiune au constituit și constituie preocupări susținute sub aspectul cerințelor generate de parametrii funcționali (presiune, temperatură, activitatea mediilor) exacerbați până la limitele permise de materialele specifice generației actuale de tehnologii de prelucrare .

Dezvoltarea fără precedent în această direcție, s-a datorat în deosebi demersurilor asidue de cercetare efectuate în ultimii ani asupra teoriei învelitorilor subțiri sau groase, de consistență elastică, plastică sau visco-plastică, teoriei structurale a materialelor, tehnicii analizei și simulării mecanice, precum și a tehnicii experimentale a stării de deformație și tensiune.

Datorită particularităților pe care le prezintă, la proiectarea și construirea recipientelor sub presiune, trebuie respectate pe lângă condițiile general valabile pentru orice utilaj, o serie de condiții specifice, comune instalațiilor care lucrează sub presiune, având ca deziderat îndeplinirea unui număr optim de măsuri tehnice care să asigure un nivel corespunzător privind siguranța în funcționare a acestora.

Factorii care impun încadrarea recipientelor în categorii superioare celor din care fac parte, dacă sunt considerate numai din punct de vedere al presiunii și temperaturii sunt :

- prezența unor elemente rămase parțial sau total nedeterminate prin calcul, provenite din tipul construcției, modul de execuție sau din natura exploatării ;
- corozivitatea deosebită a fluidelor conținute de recipient și degradarea prematură a pereților și organelor anexe ;
- încălzirea excesivă a recipientelor, direct sau sub acțiunea focului, a gazelor foarte calde sau electric ;
- pericolul de inflamabilitate, agresivitate, explozivitate și toxicitate a fluidului, în cazul punerii sale în libertate ca urmare a defectării unui element al recipientului ;
- posibilitatea dezvoltării unei presiuni sau temperaturi foarte înalte în timpul funcționării recipientului, cu mult mai mare decât cea normală în exploatare ;
- eliberarea unei energii deosebit de mari de către fluidul aflat sub presiune în recipient, prin defectarea unui element al acestuia. Energia eliberată ca urmare a unei destinderi bruște a fluidului, nu depinde numai de presiune și temperatură , ci și de volumul recipientului.

Recipientele care lucrează sub presiune se pot clasifica după diferite criterii. În cazul clasificării după formă există două variante :

- recipiente axial-simetrice ;

- recipiente nesimetrice.

Recipientele axial-simetrice pot fi cilindrice, sferice, conice sau toroidale, primele două tipuri fiind cel mai des utilizate datorită avantajelor care le prezintă la nivelul proiectării, execuției și exploatării.

În cazul clasificării după natura fluidului conținut de recipient se disting :

- recipiente cu gaz sub presiune ;
- recipiente cu lichid sub presiune ;
- recipiente cu gaz și lichid sub presiune.

Din punct de vedere geometric învelitorile elastice subțiri, reprezintă o categorie de învelitori cel mai des întâlnite în construcția recipientelor sub presiune. În acest sens prezintă interes și clasificarea pe baza criteriului dimensional a învelitorilor, cu luarea în considerare a razei suprafeței mediane a acestora R și grosimea h a peretelui și conturului liber pe care îl pot avea :

- învelitori cu perete subțire sau învelitori subțiri : $\max (h/R) < 1$;
- învelitori cu perete de grosime medie : $\max (h/R)^{1/2} < 1$;
- învelitori cu perete gros sau învelitori groase, la care nu sunt îndeplinite condițiile anterioare.

Solicitarea de bază a recipientelor sub presiune este presurizarea uniformă sau neuniformă interioară sau exterioară în cazul raportării la o configurație închisă a recipientului. Pe lângă presiune recipientul poate fi solicitat și de forțe și momente aplicate pe suprafața interioară sau exterioară a acestuia sau de sarcini aplicate în volumul elementelor care materializează recipientul.

Recipientele pot fi supuse acțiunilor termice prin fluxuri calorice care induc gradienti de temperatură conducând astfel la dilatări și deformații neuniforme. Constrângerea dilatării sau contracției termice poate induce tensiuni prin efecte termice, stării de tensiune fiindu-i asociată o stare de deformație și reciproc.

Din interacțiunea complexă care poate să existe între natura acțiunii externe și răspunsul materialului, rezistența recipientului sub presiune poate fi raportată la diferitele stări fizice ale materialului în procesul de deformare, definind astfel stările limită ale recipientului.

La temperaturi normale și încărcări moderate, rezistența recipientelor poate fi evaluată prin nivelul tensiunilor și deformațiilor elastice. La încărcări globale mai mari sau în condițiile existenței unor concentrări locale de tensiune se pot dezvolta deformații plastice, rezistența recipientelor raportându-se la nivelul încărcării care inițiază deformarea plastică local sau în toată întinderea.

În anumite proporții geometrice și moduri de încărcare poate surveni pierderea stabilității recipientelor, intensitatea încărcării asociate acestui fenomen marcând o stare limită.

Pentru evaluarea rezistenței recipientelor sub presiune pe baza conceptului de stare limită, este esențială precizarea fenomenului fizic asociat cedării cât și nivelul limită al încărcării. Abordarea acestei probleme este posibilă atât prin metode analitice cât și prin metode experimentale.

Axat pe analiza și rezolvarea importantei problematici vizând proiectarea, construcția și exploatarea recipientelor sub presiune, prezenta lucrare este orientată spre studiul recipientelor ca învelitori subțiri de revoluție și conceperea unor modalități originale de soluționare a ecuațiilor care stabilesc legături între eforturi, momente, deplasări și deformații cât și a validării prin experiment a conceptelor propuse.

Învelitorile elastice subțiri, reprezentând o categorie de învelitori cel mai des întâlnite în construcția recipientelor sub presiune, studiul acestora constituie opțiunea prevalentă a tezei de doctorat.

În cadrul analizei învelitorilor de acest tip, studiul este concentrat asupra învelitorilor de revoluție pentru care se dezvoltă o pertinentă analiză a stărilor de tensiune, condițiilor de echilibru, deplasării și deformațiilor, respectiv a comportării liniar elastice a învelitorilor.

Analiza învelitorilor de revoluție subțiri cu luarea în considerare a relațiilor care generează starea de tensiune, condițiile de echilibru, deplasările și deformațiile precum și relațiile fizice între tensiuni și deformații a condus la sistematizarea legăturilor dintre necunoscutele problemei sub forma unor sisteme de ecuații diferențiale specifice diferitelor tipuri de învelitori.

Pentru soluționarea acestor sisteme de ecuații s-au elaborat programe de calcul adecuate fiecărui tip de sistem conceput.

Studiul învelitorilor elastice subțiri, sub aspectul formei acestor învelitori este cantonat preponderent asupra învelitorilor întâlnite frecvent în practică, cum sunt cele axial simetrice sau în stare de membrană cu geometrie sferică, cilindrică, elipsoidală sau toroidală pentru care se prezintă ecuațiile dintre eforturi unitare, momente, deplasări și deformații respectiv modul de soluționare a ecuațiilor în cauză.

Învelitorile compuse, constând dintr-o învelitoare sferică și una cilindrică, respectiv penetrațiile, cazuri de învelitori frecvent întâlnite în practica industrială sunt analizate separat și prezentate soluții pentru rezolvarea problemei stării de tensiune și deformații din aceste învelitori.

Un capitol aparte este destinat studiului învelitorilor elastice subțiri supuse la temperaturi joase pentru care analiza s-a efectuat în condițiile luării în considerare a constrângerilor provocate de acest parametru.

Demersul teoretic întreprins este validat într-un capitol de experimentări în care pe baza unor măsurători s-au determinat valorile tensiunilor în cazul unor recipiente sub presiune, valori care se abat în mod nesemnificativ față de valorile rezultate din calcul.

* * *

Profund recunoscător pentru competența îndrumare și orientare în clarificarea problematicei abordate, autorul prezentei lucrări, își exprimă cu acest prilej considerația și respectul deosebit față de domnul prof.dr.ing. Babeu Tiberiu de la Facultatea de Mecanică a Universității "Politehnica" Timișoara.

Adresez mulțumiri colectivului Catedrei de rezistența materialelor a Facultății de Mecanică din Timișoara, și în mod deosebit domnilor: prof.dr.ing. Cristuinea Constantin, prof.dr.ing. Dobre Ionel, , prof.dr.ing. Dumitru Ion, prof.dr.ing. Neguț Nicolae și profesor consultant dr.ing. Hajdu Iosif pentru discuțiile utile purtate în elucidarea unor probleme specifice domeniului abordat.

Pentru sprijinul acordat în facilitarea desfășurării părții experimentale a lucrării aduc mulțumiri conducerii "Universității Eftimie Murgu" Reșița, Facultății de Inginerie precum și domnilor : prof.dr.ing. Mănescu Tiberiu Ștefan și lect.univ. Praisach Vilhelm Ion.

Capitolul 1. Stadiul actual al metodelor analitice de studiu a învelitorilor elastice subțiri de revoluție

Recipientele sub presiune, componente esențiale în domenii de vârf ale tehnicii, constituie exemple reprezentative care trebuiesc supuse analizei stării de tensiune și deformație specifice învelitorilor elastice subțiri.

Forma constructivă este preponderent axial-simetrică, pentru asigurarea unei soluții optimizate între necesitatea unei rezistențe cât mai mari la un consum minim de material și în subsidiar pentru executarea acestora cu procedee tehnologice avantajoase.

Supuse presurizării ca solicitare de bază, recipientele sub presiune pot fi deasemeni solicitate suplimentar de acțiuni mecanice sau termice prin influxuri calorice care induc gradienti de temperaturi ce provoacă dilatări sau contractări neuniforme.

Tensiunile, ca forțe interioare dezvoltate prin efectele reactive ale materialului din care este confecționată structura de rezistență a recipientului, echilibrează acțiunea mecanică exterioară sau de volum, respectiv a tensiunii induse prin efect termic datorată constrângerii dilatării sau contracției termice.

Tratarea rezistenței recipientilor sub presiune se efectuează funcție de stările limită, dintre care, cea elastică de tensiune și deformație, reprezintă prima stare limită analizată în multe lucrări ale literaturii de specialitate [5], [9], [20], [39], [64], [101], [107], [116], [123], [133].

Analiza stării limită la inițierea deformării plastice și la începerea curgerii plastice instabile [20], [64], [123], [133] și a stării limită la fluaj [12], [95], [102] cât și a stării limită la rupere fragilă și prin oboseală respectiv a influenței ambientale [17], [18] reprezintă deasemeni preocupări de prim ordin în literatura de specialitate, aferente analizei stării de tensiune și deformație în învelitori subțiri.

1.1. Elemente geometrice și ipoteze simplificatoare în studiul învelitorilor subțiri de revoluție

Suprafața mediană obținută prin rotirea unei curbe plane (curbe mediane) în jurul unei axe situate în planul care conține curba (plan median) este egal depărtată de fețele exterioare care mărginesc peretele învelitorii (figura 1.1).

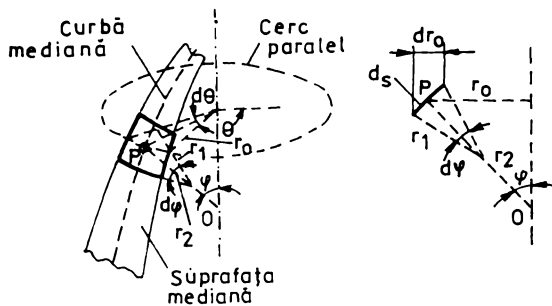


Fig.1.1. Elementele geometrice ale unei învelitori subțiri de revoluție : a.- reprezentare în spațiu; b.- secțiune în plan meridian.

Elementele geometrice ale învelitorii subțiri de revoluție sunt reprezentate tridimensional în figura 1.1.a. și în secțiune plan meridiană în figura 1.1.b., unde :

- P – punct pe suprafața meridiană reprezentând intersecția dintre o curbă meridiană și cercul paralel de rază r_0 ,
- θ - unghi de definiție pentru planul meridian măsurat de la un plan oarecare de referință,
- φ - unghi de definiție a poziției cercului paralel făcut de normala principală OP la suprafața învelitorii cu axa de rotație,
- r_1 – raza de curbură aflată în plan meridian,
- $r_2=OP$ – raza de curbură în planul perpendicular pe planul meridian ,
- ds – element de arc pe curba meridiană în vecinătatea punctului P.

Relațiile între mărimile geometrice reprezentate în figura 1.1. sunt următoarele :

$$r_0 = r_2 \sin \varphi; dr_0 = ds \cos \varphi; ds = r_1 d\varphi; \frac{dr_0}{d\varphi} = r_1 \cos \varphi \quad (1.1)$$

Aria dA a elementului de învelitoare asociat punctului P și materializat de două curbe meridiene și două cercuri paralele infinit vecine punctului P este dată de relația :

$$dA = (r_1 d\varphi)(r_0 d\theta) = r_1 r_2 \sin \varphi d\varphi d\theta \quad (1.2)$$

Calculul de rezistență a învelitorii depinde de grosimea (h) a peretelui învelitorii. În cazul când raportul dintre grosimea peretelui învelitorii și cea mai mică rază de curbură este neglijabil comparativ cu unitatea, învelitoarea se consideră cu pereți subțiri. Unii autori [36],[85] consideră învelitorile cu pereți subțiri când acest raport este sub 0,1 iar alții [81],[107] când este mai mic de 0,05.

Considerarea învelitorii cu pereți subțiri conduce la simplificări importante justificate de următoarele ipoteze :

I. Punctele situate pe o normală la suprafața mediană înainte de deformare rămân pe o dreaptă normală la aceasta suprafață și după deformare fapt ce induce o generalizare a ipotezei secțiunilor plane adoptate în rezolvarea problemei încovoierii barelor într-o aproximație de prim ordin.

II. Tensiunile și deformațiile normale pe suprafața mediană se pot neglija în comparație cu cele care acționează în planul suprafeței medianei, ceea ce conferă proprietatea de invarianță a distanței dintre două puncte de pe o normală la suprafața mediană, ipoteză care reduce studiul stării de tensiune și deformație într-o secțiune de învelitoare subțire, la studiul acestei stări în planul meridian.

III. Comparativ cu dimensiunile caracteristice ale învelitorii, deformațiile sub sarcină sunt mici, ipoteză care neglijează termenii neliniari ai ecuațiilor pentru componentele tensiunii și ai ecuațiilor de echilibru, permițând astfel aplicarea principiului superpoziției în explicitarea stării de tensiune și deformație în învelitori subțiri, cu forme geometrice descompozabile în forme mai simple.

1.2. Starea de tensiune în învelitori

Sub influența forțelor exterioare pe unitatea de suprafață, de componente p_θ, p_φ, p_r , apar în învelitori forțe interioare de natura unor reacțiuni care acționează în plan tangent la suprafața mediană (conform ipotezei II din subcapitolul 1.1.)

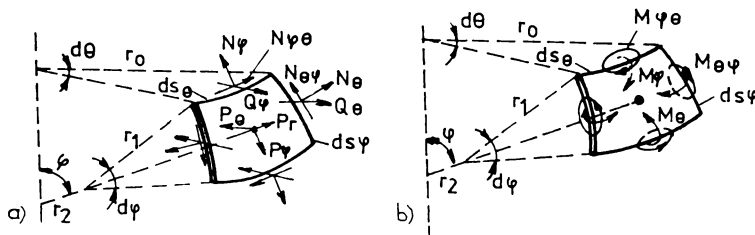


Fig.1.2. Forțele exterioare, eforturile (a) și momentele (b) ce acționează asupra unui element de învelitoare subțire.

În figura 1.2. sunt prezentate forțele exterioare respectiv forțele și momentele interioare care acționează în secțiunea unui element din suprafața mediană limitat de două plane meridiene și două plane paralele infinit vecine, ceea ce permite detașarea acestuia din învelitoare și studierea ca un corp liber aflat în echilibru. Semnificația notațiilor $\theta, \varphi, r_0, r_1, r_2$ este aceeași ca în figura 1.1. Pentru forțele exterioare respectiv forțele și momentele interne aferente unui arc de lungime unitară s-au adoptat notațiile următoare :

- p_{θ} - componenta forței exterioare care acționează tangențial dirijată în sens circumferențial,
- p_{φ} - componenta forței exterioare care acționează tangențial dirijată în sens meridian,
- p_r - componenta forței exterioare dirijată normal de elementul de suprafață,
- N_{θ} - efortul unitar normal pe secțiunea elementului dirijat în sens circumferențial,
- N_{φ} - efortul unitar normal pe secțiunea elementului dirijat în sens meridian,
- $N_{\theta\varphi}$ - efortul unitar în plan tangent la element, aferent secțiunii limitate de arcul dS_{θ} și dirijat median,
- $N_{\varphi\theta}$ - efortul unitar în plan tangențial la secțiunea limitată de arcul meridian (dS_{φ}) și este dirijată în sens circumferențial,
- Q_{θ} - efortul tăietor unitar care acționează asupra suprafeței elementului aferente arcului dS_{θ}
- Q_{φ} - efortul tăietor unitar care acționează asupra suprafeței elementului aferente arcului dS_{φ}
- M_{θ} - momentul de încovoiere în plan circumferențial care acționează în secțiunea elementului aferentă arcului dS_{θ} ,
- M_{φ} - momentul de încovoiere în plan meridian care acționează în secțiunea elementului aferentă arcului dS_{φ} ,
- $M_{\theta\varphi}$ - momentul de răsucire în plan meridian care acționează în secțiunea elementului, aferentă arcului dS_{φ} ,
- $M_{\varphi\theta}$ - momentul de răsucire în plan meridian care acționează în secțiunea elementului aferentă arcului dS_{θ} .

Considerând forțele și momentele uniform distribuite pe lungimea elementelor de arc circumferențială dS_{θ} și meridiană dS_{φ} între intensitățile acestora și tensiunile normale în direcția circumferențială σ_{θ} și meridiană σ_{φ} respectiv tensiunile tangențiale $\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi\theta}$, există legături evidente. Astfel, în cazul efortului unitar normal circumferențial N_{θ} și tensiunea σ_{θ} există relația :

$$N_{\theta} = \frac{1}{dS_{\varphi}} \int_A \sigma_{\theta} dA \quad (1.3)$$

Pentru un element de arie dA de grosime dz și lungime $dS_{\theta z}$ situat pe o suprafață paralelă cu suprafața mediană la distanță z de suprafața mediană se va exprima prin relația (1.4) :

$$dA = \left(1 + \frac{z}{r_1} \right) dz dS_{\varphi} \quad (1.4)$$

Relația (1.4) are loc din considerente geometrice, generate de efectele de curbura care stabilesc între arcul $dS_{\theta z}$ și dS_{φ} , relația :

$$dS_{\theta z} = dS_{\varphi} (r_1 + z) / r_1 \quad (1.5)$$

În consecință pentru o învelitoare de grosime h , efortul unitar normal circumferențial N_{θ} va fi dat

de relația :

$$N_{\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta} \left(1 + \frac{z}{r_1} \right) dz \quad (1.6)$$

Similar se obține relația pentru efortul normal meridian și anume :

$$N_{\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\varphi} \left(1 + \frac{dz}{r_2} \right) dz \quad (1.7)$$

Pentru eforturile unitar tangențiale vor rezulta relațiile :

$$N_{\theta\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta\varphi} \left(1 + \frac{z}{r_1} \right) dz \quad N_{\varphi\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\varphi\theta} \left(1 + \frac{z}{r_2} \right) dz \quad (1.8)$$

iar pentru forțele tăietoare unitare :

$$Q_{\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta} \left(1 + \frac{z}{r_1} \right) dz \quad Q_{\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\varphi} \left(1 + \frac{z}{r_2} \right) dz \quad (1.9)$$

Admițând, conform teoriei încovoierii și răsucirii că tensiunile au o distribuție astfel încât se anulează pe suprafața mediană, atunci se pot exprima momentele prin relațiile următoare :

$$M_{\theta} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta} z \left(1 + \frac{z}{r_1} \right) dz \quad , \quad M_{\theta\varphi} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta\varphi} \cdot z \left(1 + \frac{z}{r_1} \right) dz \quad (1.10)$$

$$M_{\varphi} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\varphi} z \left(1 + \frac{dz}{r_2} \right) dz \quad , \quad M_{\varphi\theta} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\varphi\theta} \cdot z \left(1 + \frac{z}{r_1} \right) dz \quad (1.11)$$

Semnul minus se datorează convenției ca pe partea interioară învelitorii, la distanță, $z=h/2$, să existe tensiuni normale de tracțiune și tensiuni tangențiale pozitive pentru orientarea momentelor din figura 1.2. Termenii z/r_1 și z/r_2 fiind mici comparativ cu unitatea, se pot neglija în aplicațiile practice.

1.3. Ecuațiile de echilibru în învelitori

Condițiile de echilibru în învelitori subțiri de revoluție se pot deduce pentru un element de suprafață (figura 1.3) pe baza ipotezelor simplificatoare adoptate în subcapitolul 1.1. În acest element de suprafață, la trecerea de la o secțiune la alta infinit apropiată, eforturile și momentele au creșteri infinitezimale. Eforturile și momentele care acționează în secțiunile elementului de suprafață trebuie să stea în echilibru static cu forțele exterioare.

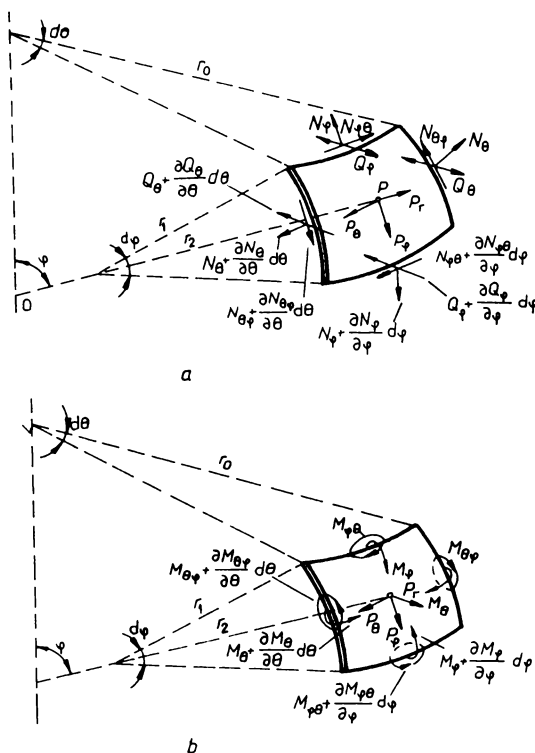


Fig.1.3. Variația într-o învelitoare cu pereți subțiri a eforturilor (a) și momentelor (b).

Pe direcția φ (direcție tangentă la meridian) acționează pe fețele elementelor următoarele forțe normale:

- $r_0 N_\varphi d\theta$ - pe fața superioară,
- $\left(N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left(r_0 + \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\theta$ - pe fața inferioară

Rezultanta acestor forțe pe direcția φ , când se neglijează produsele infinitezimale de ordin superior este :

$$\left(N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left(r_0 + \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\theta - r_0 N_\varphi d\theta = \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) d\theta d\varphi \quad (1.12)$$

Rezultanta pe direcția φ a forței tangențiale $N_{\theta\varphi}$ este :

$$\left(N_{\theta\varphi} + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} d\theta \right) r_1 d\varphi - r_1 N_{\theta\varphi} d\varphi = r_1 \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} d\theta d\varphi \quad (1.13)$$

Componentele efortului circumferențial și a forței tăietoare sunt prezentate în figurile 1.4. (a,b,c).

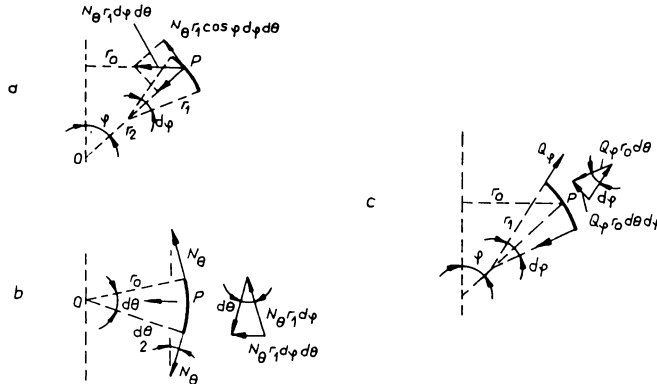


Fig.1.4. Componentele efortului circumferențial (a,b) și a forței tăietoare (c).

Forța normală $r_1 N_{\theta} d\varphi$, care acționează pe fața laterală a elementului de suprafață are drept componente :

- $r_1 N_{\theta} d\varphi d\theta$ - după direcția razei cercului paralel r_0 (figura 1.4.a.)
- $r_1 N_{\theta} \cos \varphi d\varphi d\theta$ - după direcția meridiană.

Forțele tăietoare Q_{φ} , care acționează pe fețele de sus și de jos ale elementului într-un plan perpendicular pe învelitoare, au după direcția φ componenta $-Q_{\varphi} r_0 d\theta d\varphi$.

În elementul de suprafață reprezentat în figura 1.3, condiția de echilibru impune ca suma forțelor componente după direcția meridiană să fie nulă. Luând în considerare și componenta forțelor exterioare pe direcția meridiană ($p_{\varphi} r_0 r_1 d\varphi d\theta$), va rezulta următoarea ecuație de echilibru :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\varphi}) + r_1 \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_1 N_{\theta} \cos \varphi - r_0 Q_{\varphi} + r_0 r_1 p_{\varphi} = 0 \quad (1.14)$$

Din condiția de echilibru a proiecției forțelor pe direcția circumferențială θ , rezultă următoarea ecuație de echilibru :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\theta\varphi}) + r_1 \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + r_1 N_{\theta\varphi} \cos \varphi - r_1 Q_{\theta} \sin \varphi + r_0 r_1 p_{\theta} = 0 \quad (1.15)$$

Ecuația de echilibru, din condiția de echilibru a proiecției forțelor pe direcția radială r este :

$$r_1 N_\theta \sin \varphi + r_0 N_\varphi + r_1 \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 Q_\varphi) - r_0 r_1 P_r = 0 \tag{1.16}$$

Condiția de echilibru pentru momente (figura 1.3) conduce la următoarele ecuații de echilibru:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 M_\varphi) + r_1 \frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_1 M_\theta \cos \varphi - r_0 r_1 Q_\varphi = 0 \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 M_{\varphi\theta}) + r_1 \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + r_1 M_{\theta\varphi} \cos \varphi - r_0 r_1 Q_\theta = 0 \tag{1.18}$$

$$r_0 r_1 (N_{\theta\varphi} - N_{\varphi\theta}) - r_1 M_{\theta\varphi} \sin \varphi + r_0 M_{\varphi\theta} = 0 \tag{1.19}$$

Necunoscutele din cele 6 ecuații de echilibru fiind în număr de 10 ($N_\theta, N_\varphi, N_{\theta\varphi}, N_{\varphi\theta}, Q_\theta, Q_\varphi, M_\theta, M_\varphi$), se impune explicitarea unor ecuații suplimentare, (din legătura fizică între eforturi și deformații) astfel ca numărul ecuațiilor să fie egal cu cel al necunoscutelor.

1.4. Starea de deplasări și deformații în învelitori

Rezolvarea problemei învelitorilor subțiri în cazul cel mai general implică, în afara stabilirii condițiilor de echilibru static între forțele exterioare și eforturile induse în învelitori, explicitarea relațiilor existente între deformații specifice și deplasările punctuale ale învelitorii, precum și legătura între variațiile de curbură și deplasări.

Adoptând ipotezele din subcapitolul 1.1, relațiile între deformații și deplasări rezultă din caracteristicile geometrice ale învelitorii.

Considerând un punct P situat pe suprafața mediană a unei învelitori (figura 1.5) definit de coordonatele θ și φ , deplasările acestuia se notează cu: - u - după direcția circumferențială, - v - după direcția meridiană, - w - după direcția radială.

Pentru deformații se adoptă următoarele notații: - ϵ_θ - pe direcția circumferențială, - ϵ_φ - pe direcția mediană. Alunecarea specifică în planul tangent în punctul P al învelitoarei se notează cu $\gamma_{\theta\varphi}$.

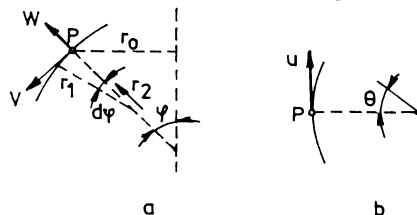


Fig.1.5. Componentele deplasărilor punctuale pe o învelitoare : a.- în secțiune meridiană; b.- în secțiune circumferențială.

Elementul de suprafață sub formă de patrulater rectangular care conține punctul P, mărginit înainte de deformare de arcele $PS = dS_\theta$ și $PQ = dS_\varphi$, își schimbă dimensiunile astfel încât, PS devine $P'S'$ și PQ devine $P'Q'$ (figura 1.6.).

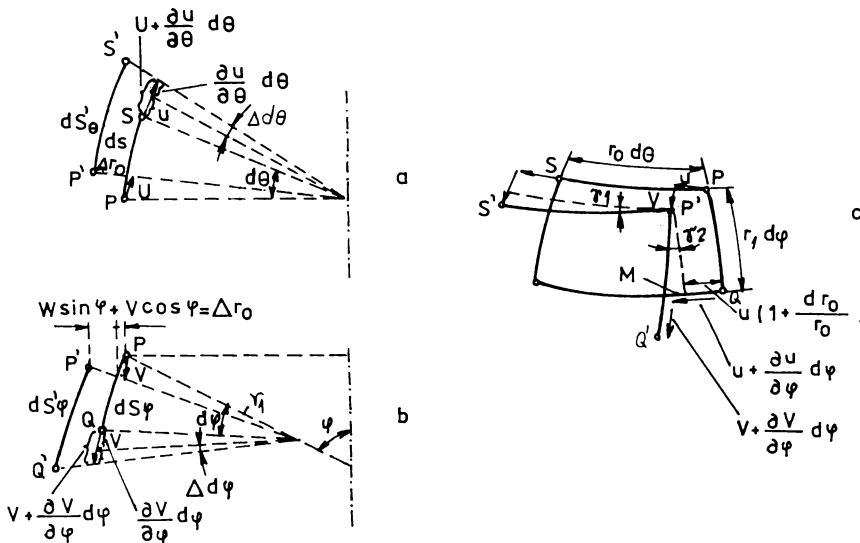


Fig.1.6. Elementele geometrice care definesc legătura între deformații specifice și deplasări : a.- în secțiune circumferențială; b.- în secțiune meridiană; c.- în vedere radială.

1.4.1. Determinarea deformației specifice circumferențiale

Deformația specifică circumferențială ϵ_θ se definește prin relația :

$$\epsilon_\theta = (dS'_\theta - dS_\theta) / dS_\theta$$

unde: $dS_\theta = PS = r_0 d\theta$

$$dS'_\theta = P'S' = (r_0 + \Delta r_0)(d\theta + \Delta d\theta)$$

Din figura 1.6.b. se observă că : $r_0 \Delta\theta = (\partial u / \partial \theta) \partial\theta$ iar deplasarea radială δ a cercului paralel este:

$$\delta = \Delta r_0 = v \cos \varphi + w \sin \varphi \tag{1.20}$$

Înlocuind în relația lui ϵ_θ elementele de arc dS'_θ , dS_θ și deplasarea radială δ cu expresiile acestora obținute din condițiile geometrice, rezultă în final:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\Delta d\theta}{d\theta} + \frac{\Delta r_0}{r_0} = \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + v \cos \varphi + w \sin \varphi \right) \quad (1.21)$$

1.4.2. Determinarea deformației specifice în direcția meridiană

Analog definirii deformației specifice ε_{θ} , se definește și deformația specifică în direcție meridiană

ε_{φ} . Astfel, relația de deformație va fi :

$$\varepsilon_{\varphi} = (dS'_{\varphi} - dS_{\varphi}) / dS_{\varphi} \quad (1.22)$$

Elementele de arc dS'_{φ} și dS_{φ} se pot explicita din condițiile geometrice în felul următor (figura 1.6.b) :

$$dS_{\varphi} = PQ = r_1 d\varphi \quad (1.23)$$

$$dS'_{\varphi} = P'Q' = (r_1 + \Delta r_1)(d\varphi + \Delta d\varphi)$$

Observând că $r_1 \Delta d\varphi = (\partial v / \partial \varphi) d\varphi$ și aproximând fără a face o eroare semnificativă, că

$\Delta r_1 \cong w$, va rezulta în final pentru deformația specifică în direcția meridiană expresia :

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} + \frac{\Delta r_1}{r_1} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{dv}{d\varphi} + \frac{w}{r_1} \quad (1.24)$$

1.4.3. Determinarea alunecării specifice $\gamma_{\theta\varphi}$

Din figura 1.6.c. se poate observa că punctele P, S, Q care determină un unghi drept în punctul P înainte de deformare, devin puncte P', S', Q' după deformare, unghiul drept cu vârful în P micșorându-se cu :

$$\gamma_{\theta\varphi} = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Pentru γ_1 rezultă din figura 1.6.c. următoarea expresie :

$$\gamma_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta}{r_0 d\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta} \cong \frac{1}{r_0} \cdot \frac{dv}{d\theta} \quad (1.25)$$

Determinarea unghiului γ_2 se efectuează cu relația (1.26) :

$$\gamma_2 = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi - QM}{r_1 d\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi} \cong \frac{1}{r_1} \cdot \frac{du}{d\varphi} - \frac{u}{r_1 r_0} \cdot \frac{dr_0}{d\varphi} \quad (1.26)$$

unde: $QM = u(r_0 + dr_0)/r_0$ - este segmentul determinat de meridianul PM (figura 1.6.c) iar punctele Q

și M se află pe cercul de rază $r_0 + dr_0$.

Cunoscând din relația (1.1) că : $dr_0 = ds \cos\varphi = r_1 \cos\varphi$ și adăunând unghiurile γ_1 și γ_2 , va rezulta pentru explicitarea alunecării specifice $\gamma_{\theta\varphi}$, relația următoare :

$$\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r_1} \frac{du}{d\varphi} - \frac{u}{r_0} \cos\varphi + \frac{1}{r_0} \frac{dv}{d\theta} \quad (1.27)$$

1.4.4. Variația curburii

Variația curburii după direcția meridiană (χ_φ) și circumferențială (χ_θ), respectiv răsucirea unui element de învelitoare ($\chi_{\theta\varphi}$) se pot explicita cu ajutorul rotirii tangentei la meridian a unghiului V într-un punct P, datorate deformației elementului de învelitoare.

În figura 1.7 este prezentată această rotire prin unghiul V, rezultat din intersecția tangențelor la meridian în punctele P și P'.

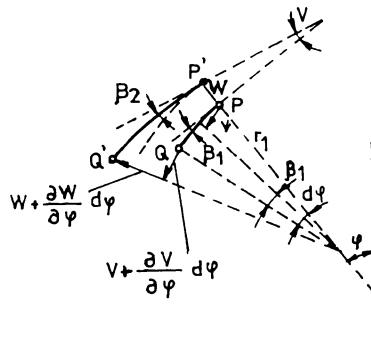


Fig.1.7. Elemente geometrice care definesc legătura între rotirea tangentei la meridian și deplasările în plan meridian.

Un punct pe meridian Q, vecin punctului P, în urma deformării va ajunge în punctul Q' iar arcul P'Q' materializează arcul meridian PQ după deformație.

Unghiul V, conform figurii 1.7, poate fi determinat ca diferență dintre unghiurile β_2 și β_1 a căror valoare, neglijând variațiile diferențiale de ordin superior în raport cu φ ale deplasării v și razei r_1 este:

$$\beta_2 \cong \text{tg}\beta_2 = \frac{\frac{\partial w}{\partial \varphi} d\varphi}{r_1 d\varphi} = \frac{1}{r_1} \frac{dw}{d\varphi} , \beta_1 = \text{tg}\beta_1 = \frac{v}{r_1} \quad (1.28)$$

În consecință pentru determinarea unghiului V, va rezulta relația :

$$V = \frac{1}{r_1} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) \quad (1.29)$$

Variația curburii χ_φ în direcție meridiană φ , definită ca raportul dintre variația rotirii $\frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi$ și

lungimea arcului elementar $dS_\varphi = r_1 d\varphi$ va fi dată de relația :

$$\chi_\varphi = \frac{1}{r_1} \frac{dV}{d\varphi} \quad (1.30)$$

Înlocuind pe V cu expresia din membrul drept a relației (1.29), rezultă pentru determinarea lui χ_φ relația :

$$\chi_\varphi = \frac{1}{r_1^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) \quad (1.31)$$

Variația curburii după direcția circumferențială χ_θ este exprimată de unii autori [36],[107] funcție de deplasări prin relația :

$$\chi_\theta = \frac{1}{r_0^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \frac{1}{r_0 r_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg}\varphi}{r_1 r_2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) \quad (1.32)$$

respectiv, răsucirea unui element de învelitoare $\chi_{\theta\varphi}$, prin relația :

$$\chi_{\theta\varphi} = \frac{1}{r_0 r_1} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{r_0^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{2 r_0 r_2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \frac{\text{uctg}\varphi}{2 r_1 r_2^2} (r_2 - 2 r_1) \quad (1.33)$$

Deformațiile și deplasările dezvoltate în paragrafele 1.4.1- 1.4.4 s-au localizat la nivelul suprafeței mediane a învelitorii.

1.4.5. Deformații la nivelul suprafeței paralele distanțate radial cu z de suprafața mediană

Deformațiile specifice la nivelul suprafeței distanțate radial cu z de suprafața mediană, se explicitează potrivit ipotezei conform căreia normala la suprafața mediană își păstrează normalitatea și rectiliniaritatea și după deformație (subcapitolul 1.1.).

Un element de învelitoare prezentat în figura 1.8. este astfel solicitat încât marginile laterale aflate în planul (θr) se rotesc în jurul segmentului dS_θ încât unghiul $d\varphi$ devine $d\varphi - \Delta d\varphi$.

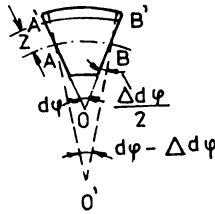


Fig.1.8. Schema de calcul a deformațiilor specifice datorită rotirii marginilor unui element de învelitoare ($AB=dS_\varphi$; $A'B'= dS_{\varphi z}$; $OA= r_1$; $O'A= r'_1$).

Elementul de arc $A'B'$, situat la distanța z de AB , de lungime $dS_{\varphi z} = (1 + z/r_1)ds$ se scurtează cu $z\Delta d\varphi$ iar alungirea specifică la nivelul z va fi :

$$(\epsilon_\varphi)_z = \frac{z\Delta d\varphi}{\left(1 + \frac{z}{r_1}\right)dS_\varphi} \tag{1.34}$$

Cum însă $\Delta d\varphi = -dS_\varphi(1/r'_1 - 1/r_1)$, unde r'_1 este raza de curbură r_1 după deformare, rezultă pentru explicitarea deformației specifice $(\epsilon_\varphi)_z$ relația :

$$(\epsilon_\varphi)_z = -\frac{z}{(1 + z/r_1)}\left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{1.35}$$

Cu neglijarea raportului z/r_1 față de unitate și luând în considerare expresia deformației la nivelul planului meridian ϵ_φ rezultă pentru deformația specifică totală la nivelul z relația :

$$(\epsilon_\varphi)_z = \epsilon_\varphi - z\chi_\varphi \tag{1.36}$$

În mod analog se obțin relațiile pentru determinarea deformației specifice totale la nivelul z în direcție circumferențială $(\epsilon_\theta)_z$ și a alunecării totale $(\gamma_{\theta\varphi})_z$ în plan tangent la suprafața aflată la distanța z , de suprafața mediană și anume:

$$\begin{aligned} (\epsilon_\theta)_z &= \epsilon_\theta - z\chi_\theta \\ (\gamma_{\theta\varphi})_z &= \gamma_{\theta\varphi} - z\chi_{\theta\varphi} \end{aligned} \tag{1.37}$$

1.5. Comportarea liniar elastică a învelitorii

Prin neglijarea componentei radiale a tensiunii în învelitorile subțiri de revoluție, starea de tensiune are un caracter plan și luarea în considerare a proprietății de elasticitate liniară a materialului

bu Fe
10/10

din care sunt confecționate aceste învelitori permite aplicarea relațiilor fizice de tip Hooke între tensiuni și deformații.

Conform acestor ipoteze în suprafața mediană învelitorii, sunt valabile relațiile :

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta} - \nu\sigma_{\varphi}) + \alpha_T T \quad (1.38)$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{E}(\sigma_{\varphi} - \nu\sigma_{\theta}) + \alpha_T T \quad (1.39)$$

$$\gamma_{\theta\varphi} = \frac{\tau_{\theta\varphi}}{G} \quad (1.40)$$

- unde: - E - modulul de elasticitate longitudinal,
 - G - modulul de elasticitate transversal,
 - ν - coeficientul de contracție transversală,
 - α_T - coeficientul de dilatare termică.

În virtutea relației : $E = 2(1 + \nu)G$ se pot explicita relațiile pentru tensiuni în planul meridian al învelitorii și anume :

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_{\theta} + \nu\varepsilon_{\varphi} - (1 + \nu)\alpha_T T] \quad (1.41)$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_{\varphi} + \nu\varepsilon_{\theta} - (1 + \nu)\alpha_T T] \quad (1.42)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = \frac{E}{1 - \nu} \gamma_{\theta\varphi} \quad (1.43)$$

Expresia tensiunilor în învelitoarea situată la distanța z de suprafața mediană se obține din conjuncția relațiilor (1.36), (1.37) cu relațiile (1.41)-(1.43) vor rezulta în consecință relațiile :

$$(\sigma_{\theta})_z = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_{\theta} + \nu\varepsilon_{\varphi} - z(\chi_{\theta} + \nu\chi_{\varphi}) - (1 + \nu)\alpha_T T] \quad (1.44)$$

$$(\sigma_{\varphi})_z = \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_{\varphi} + \nu\varepsilon_{\theta} - z(\chi_{\varphi} + \nu\chi_{\theta}) - (1 + \nu)\alpha_T T] \quad (1.45)$$

$$(\tau_{\theta\varphi})_z = \frac{E}{2(1 + \nu)} (\gamma_{\theta\varphi} - 2z\chi_{\theta\varphi}) \quad (1.46)$$

Prin înlocuirea relațiilor (1.44), (1.45), (1.46) în relațiile (1.6), (1.7), (1.8), (1.10) și (1.11), respectiv neglijarea cantității mici z/r_1 în raport cu unitatea rezultă :

$$N_{\theta} = K[\varepsilon_{\theta} + \nu\varepsilon_{\varphi} - \alpha_T(1+\nu)T_0] \quad (1.47)$$

$$N_{\varphi} = K[\varepsilon_{\varphi} + \nu\varepsilon_{\theta} - \alpha_T(1+\nu)T_0] \quad (1.48)$$

$$N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} = \frac{K(1-\nu)}{2}\gamma_{\theta\varphi} \quad (1.49)$$

$$M_{\theta} = D[\chi_{\theta} + \nu\chi_{\varphi} - \alpha_T(1+\nu)T_1] \quad (1.50)$$

$$M_{\varphi} = D[\chi_{\varphi} + \nu\chi_{\theta} - \alpha_T(1+\nu)T_1] \quad (1.51)$$

$$M_{\theta\varphi} = M_{\varphi\theta} = D(1-\nu)\chi_{\theta\varphi} \quad (1.52)$$

$$\text{unde: } K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad T_0 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T(z)dz, \quad T_1 = -\frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} zT(z)dz$$

Neglijând efectul de temperatură și luând în considerare (1.44)-(1.46) respectiv relațiile (1.47)-(1.52) rezultă expresia tensiunilor în învelitoarea situată la distanța z de suprafața mediană și anume :

$$(\sigma_{\theta})_z = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{N_{\theta}}{K} - \frac{M_{\theta}}{D} z \right) = \frac{N_{\theta}}{h} - \frac{12M_{\theta}}{h^3} z \quad (1.53)$$

$$(\sigma_{\varphi})_z = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{N_{\varphi}}{K} + \frac{M_{\varphi}}{D} z \right) = \frac{N_{\varphi}}{h} - \frac{12M_{\varphi}}{h^3} z \quad (1.54)$$

Deplasarea radială δ în planul cercului paralel funcție de eforturile normale N_{θ} și N_{φ} se determină cu relația :

$$\delta = r_0 \varepsilon_{\theta} = \frac{r_0}{Eh} (N_{\theta} - \nu N_{\varphi}) + r_0 \alpha_T T_0 \quad (1.55)$$

1.6. Sistem de ecuații pentru determinarea completă a problemei învelitorilor elastice de revoluție

Analiza pertinentă a relațiilor care guvernează starea de tensiune, condițiile de echilibru, deplasările și deformațiile, precum și relațiile fizice între tensiuni și deformații în învelitorile elastice de revoluție, pune în evidență următoarele constatări:

- termenii z/r_1 și z/r_2 fiind mici în comparație cu unitatea pot fi neglijați în aplicațiile tehnice;
- neglijarea termenilor z/r_1 și z/r_2 exclude utilizarea relației (1.19) care devine inadecvată pentru definirea condițiilor de echilibru ;
- prin înlocuirea relațiilor (1.47)-(1.52) a deformațiilor specifice ε_{θ} , ε_{φ} , $\gamma_{\theta\varphi}$ și a variațiilor curburilor χ_{θ} , χ_{φ} , $\chi_{\theta\varphi}$ cu expresiile aferente acestor eforturi și variații se obțin 6 ecuații care conțin 9 necunoscute (N_{θ} , N_{φ} , $N_{\theta\varphi}$, M_{θ} , M_{φ} , $M_{\theta\varphi}$, u , v , w);

- adăugând acestor relații ecuațiile de echilibru (1.15)-(1.18) se obțin 11 ecuații cu 11 necunoscute, (N_θ , N_φ , $N_{\theta\varphi}$, M_θ , M_φ , $M_{\theta\varphi}$, u , v , w , Q_θ , Q_φ) care conferă determinare sistemului de ecuații ales.

Sistemul de 11 ecuații cu 11 necunoscute rezultat din analiza relațiilor prezentate este :

$$K \left[\frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + v \cos \varphi + w \sin \varphi \right) + v \left(\frac{1}{r_1} \frac{dv}{d\varphi} + \frac{w}{r_1} \right) - \alpha_T (1+v) T_0 \right] - N_\theta = 0 \quad (1.56)$$

$$K \left[\frac{1}{r_1} \frac{dv}{d\varphi} + \frac{w}{r_1} + \frac{v}{r_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + v \cos \varphi + w \sin \varphi \right) + v \left(\frac{1}{r_1} \frac{dv}{d\varphi} + \frac{w}{r_1} \right) - \alpha_T (1+v) T_0 \right] - N_\varphi = 0 \quad (1.57)$$

$$\frac{K(1-v)}{2} \left(\frac{1}{r_1} \frac{du}{d\varphi} - \frac{u}{r_0} \cos \varphi + \frac{1}{r_0} \frac{dv}{d\theta} \right) - N_{\theta\varphi} = 0 \quad (1.58)$$

$$D \left[\frac{1}{r_0^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \frac{1}{r_0 r_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg} \varphi}{r_1 r_2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) + \frac{v}{r_1^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) - \alpha_T (1+v) T_1 \right] - M_\theta = 0 \quad (1.59)$$

$$D \left[\frac{1}{r_1^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) + v \left[\frac{1}{r_0} \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \frac{1}{r_0 r_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg} \varphi}{r_1 r_2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) \right] - \alpha_T (1+v) T_1 \right] - M_\varphi = 0 \quad (1.60)$$

$$D(1-v) \left[\frac{1}{r_0 r_1} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{r_0^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{2 r_0 r_1} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \frac{u \cdot \text{ctg} \varphi}{2 r_1 r_2^2} (r_2 - r_1) \right] - M_{\theta\varphi} = 0 \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) + r_1 \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_1 N_\theta \cos \varphi - r_0 Q_\varphi + r_0 r_1 p_\varphi = 0 \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\theta\varphi}) + r_1 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} - r_1 N_{\theta\varphi} \cos \varphi - r_1 Q_\theta \sin \varphi + r_0 r_1 p_\theta = 0 \quad (1.63)$$

$$r_1 N_\theta \sin \varphi + r_0 N_\varphi + r_1 \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 Q_\varphi) - r_0 r_1 p_r = 0 \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 M_\varphi) + r_1 \frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_1 M_\theta \cos \varphi - r_0 r_1 Q_\varphi = 0 \quad (1.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 M_{\theta\varphi}) + r_1 \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + r_1 M_{\theta\varphi} \cos \varphi - r_0 r_1 Q_\theta = 0 \quad (1.66)$$

Rezolvarea explicită pe cale matematică a sistemului de ecuații diferențiale rezultat din relațiile stării de tensiune a condițiilor de echilibru, a deplasărilor și deformațiilor, respectiv a relațiilor fizice între

tensiuni și deformații, constituie un demers foarte dificil.

În absența efectelor de temperatură relațiile lui Hooke se simplifică, prin dispariția ultimului termen din partea dreaptă a relațiilor (1.38)-(1.39). Astfel deformațiile specifice ε_θ , ε_φ , $(\varepsilon_\theta)_z$, $(\varepsilon_\varphi)_z$ devin și acestea mai simple iar sistemul de ecuații va avea următoarea formă:

$$K \left[\frac{1}{r_0} \left(\frac{du}{d\theta} + v \cos \varphi + w \sin \varphi \right) + \nu \left(\frac{1}{r_1} \frac{dv}{d\varphi} + \frac{w}{r_1} \right) \right] - N_\varphi = 0 \quad (1.67)$$

$$K \left[\frac{1}{r_1} \frac{dv}{d\varphi} + \frac{w}{r_1} + \frac{\nu}{r_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + v \cos \varphi + w \sin \varphi \right) \right] - N_\varphi = 0 \quad (1.68)$$

$$\frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{1}{r_1} \frac{du}{d\varphi} - \frac{u}{r_0} \cos \varphi + \frac{1}{r_0} \frac{dv}{d\theta} \right) - N_{\theta\varphi} = 0 \quad (1.69)$$

$$D \left[\frac{1}{r_0^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \frac{1}{r_0 r_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg} \varphi}{r_1 r_2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) + \frac{\nu}{r_1^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) \right] - M_\theta = 0 \quad (1.70)$$

$$D \left[\frac{1}{r_1^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) + \nu \left[\frac{1}{r_0} \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \frac{1}{r_0 r_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg} \varphi}{r_1 r_2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) \right] \right] - M_\varphi = 0 \quad (1.71)$$

$$D(1-\nu) \left[\frac{1}{r_0 r_1} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{r_0^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{2r_0 r_1} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \frac{u \cdot \text{ctg} \varphi}{2r_1 r_2^2} (r_2 - r_1) \right] - M_{\theta\varphi} = 0 \quad (1.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) + r_1 \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_1 N_\theta \cos \varphi - r_0 Q_\varphi + r_0 r_1 p_\varphi = 0 \quad (1.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\theta\varphi}) + r_1 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} - r_1 N_{\theta\varphi} \cos \varphi - r_1 Q_\theta \sin \varphi + r_0 r_1 p_\theta = 0 \quad (1.74)$$

$$r_1 N_\theta \sin \varphi + r_0 N_\varphi + r_1 \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 Q_\varphi) - r_0 r_1 p_r = 0 \quad (1.75)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 M_\varphi) + r_1 \frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_1 M_\theta \cos \varphi - r_0 r_1 Q_\varphi = 0 \quad (1.75)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 M_{\theta\varphi}) + r_1 \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + r_1 M_{\theta\varphi} \cos \varphi - r_0 r_1 Q_\theta = 0 \quad (1.76)$$

Pornind de la acest sistem de ecuații se vor analiza în continuare diverse forme de învelitori subțiri de revoluție.

1.7. Înelitori solicitate axial simetric

Frecvent în practica industrială, apar recipiente sub presiune solicitate axial simetric, ceea ce implică : $p_\theta = 0$, $Q_\theta = 0$, $N_{\phi\theta} = 0$, $M_{\phi\theta} = 0$ iar efortul unitar N_θ și momentul M_θ sunt independente în raport cu unghiul θ . Este de precizat că se adoptă în literatura de specialitate [20], [21] și relația $N_{\phi\theta} = 0$, deși acest efort, poate avea o distribuție axial simetrică. Întrucât în studiul solicitării vaselor sub presiune, solicitarea de tensiune în jurul axei de rotație indusă de acest efort nu este importantă, se poate neglija și considera ca valabilă relația $N_{\phi\theta} = 0$.

În contextul acestor precizări, sistemul de ecuații care guvernează starea de tensiune, condițiile de echilibru, deformațiile și relațiile fizice între tensiuni și deformații în învelitori elastice de revoluție solicitate axial simetric, cu neglijarea efectului temperaturii, va fi mai simplu comparativ cu cazul general (1.56) - (1.66).

Pentru astfel de învelitori, expresia deformațiilor specifice din suprafața mediană, care funcție de deplasările v și w se exprimau prin relațiile (1.22), (1.24), se simplifică devenind :

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r_2} (\text{vctg}\phi + w) \quad (1.78)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{r_1} \left(\frac{dv}{d\phi} + w \right)$$

Relațiile care definesc curburile în cazul recipientelor solicitate axial simetric vor fi :

$$\chi_\phi = \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dw}{d\phi} - v \right) \quad (1.79)$$

$$\chi_\theta = \frac{\text{ctg}\phi}{r_1 r_2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dw}{d\phi} - v \right) \quad (1.80)$$

Luând în considerare implicațiile precizate, privind învelitorile subțiri de revoluție solicitate axial simetric și neglijând influența temperaturii sistemul de ecuații (1.56)-(1.66) va deveni :

$$K \left[\frac{1}{r_2} (\text{vctg}\phi + w) + \frac{v}{r_1} \left(\frac{dv}{d\phi} + w \right) \right] - N_\theta = 0 \quad (1.81)$$

$$K \left[\frac{1}{r_1} \left(\frac{dv}{d\phi} + w \right) + \frac{v}{r_2} (\text{vctg}\phi + w) \right] - N_\phi = 0 \quad (1.82)$$

$$D \left[\frac{\text{ctg}\phi}{r_1 r_2} \left(\frac{dw}{d\phi} - v \right) + \frac{v}{r_1^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dw}{d\phi} - v \right) \right] - M_\theta = 0 \quad (1.83)$$

$$D \left[\frac{1}{r_1^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dw}{d\phi} - v \right) + \frac{\text{vctg}\phi}{r_1 r_2} \left(\frac{dw}{d\phi} - v \right) \right] - M_\phi = 0 \quad (1.84)$$

$$\frac{d}{d\varphi}(r_0 N_\varphi) - r_1 N_\theta \cos \varphi - r_0 Q_\varphi + r_0 r_1 p_\varphi = 0 \tag{1.85}$$

$$\frac{d}{d\varphi}(r_0 Q_\varphi) + r_1 N_\theta \sin \varphi + r_0 N_\varphi - r_0 r_1 p_r = 0 \tag{1.86}$$

$$\frac{d}{d\varphi}(r_0 M_\varphi) - r_1 M_\theta \cos \varphi - r_0 r_1 Q_\varphi = 0 \tag{1.87}$$

Sistemul de ecuații (1.81)–(1.87) este de complexitate mai scăzută, atât ca număr de ecuații cât și ca formă a acestora. Necunoscutele care intervin în sistemul de ecuații (1.81) - (1.87) sunt : N_θ , N_φ , M_θ , M_φ , v , w și Q_φ .

Din analiza ecuațiilor (1.85) și (1.86), se observă că necunoscuta N_θ poate fi eliminată, rezultând ecuația :

$$\frac{d}{d\varphi}(r_0 N_\varphi \sin \varphi) + \frac{d}{d\varphi}(r_0 Q_\varphi \cos \varphi) = r_0 r_1 (p_r \cos \varphi - p_\varphi \sin \varphi) \tag{1.88}$$

Prin integrare se obține:

$$r_0 (N_\varphi \sin \varphi + Q_\varphi \cos \varphi) = \int r_0 r_1 (p_r \cos \varphi - p_\varphi \sin \varphi) d\varphi = \frac{\mathfrak{R}}{2\pi} \tag{1.89}$$

unde \mathfrak{R} este sarcina totală care acționează asupra porțiunii de învelitoare mărginită inferior de cercul cu rază r_0 (figura 1.9).

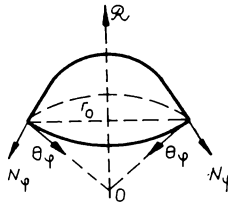


Fig. 1.9. Schema de echilibru a eforturilor axial simetrice

Sistemul de ecuații în cazul încărcării pe margini a învelitorilor subțiri și o soluție cu un grad de aproximație acceptabil pentru majoritatea cazurilor practice, sunt prezentate în literatura de specialitate [9], [76] într-o aplicație în care se adoptă ca variabilă independentă arcul s pe meridian în loc de unghiul φ . După un număr de transformări și neglijaarea unor termeni, se ajunge la expresia eforturilor unitare și momentelor sub forma matriceală :

$$\begin{bmatrix} Q_\varphi \\ N_\varphi \\ N_\theta \\ M_\varphi \\ M_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{r_2} & \frac{f_2}{r_2} & \frac{f_3}{r_2} & \frac{f_4}{r_2} \\ \frac{f_1}{r_2} \operatorname{ctg}\varphi & \frac{f_2}{r_2} \operatorname{ctg}\varphi & \frac{f_3}{r_2} \operatorname{ctg}\varphi & \frac{f_4}{r_2} \operatorname{ctg}\varphi \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ \frac{g_2}{2\rho^2} & -\frac{g_1}{2\rho^2} & -\frac{g_4}{2\rho^2} & \frac{g_3}{2\rho^2} \\ \frac{G_2}{2\rho^2} & -\frac{G_1}{2\rho^2} & -\frac{G_4}{2\rho^2} & \frac{G_3}{2\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

unde: - h - grosimea învelitorii

- f_i - funcții reale independente ($i = 1, \dots, 4$)

- f'_i - derivata funcțiilor f_i în raport cu s

$$g_i = f'_i - \left(\frac{v \operatorname{ctg}\varphi}{r_2} \right) f_i$$

$$G_i = v f'_i + \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r_2} f_i$$

- C_i - constante reale determinabile din cunoașterea condițiilor de încărcare pe margini a învelitorilor

- $\rho^2 = \sqrt{3(1 - v^2)}/h$

Expresia matriceală a deplasărilor este :

$$\begin{bmatrix} \delta \\ V \end{bmatrix} = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} r_0 h_1 & r_0 h_2 & r_0 h_3 & r_0 h_4 \\ 2\rho^2 f_2 & -2\rho^2 f_1 & -2\rho^2 f_4 & 2\rho^2 f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (1.91)$$

unde: $h_i = f'_i - (v \operatorname{ctg}\varphi / r_2) f_i$.

După unele aproximații și transformări se explicitază f_i și f'_i prin partea reală, respectiv imaginară a unor funcții de tip Bessel și Kelvin.

1.8. Învelitori în stadiul de membrană

Învelitorile cu pereți subțiri care nu prezintă salturi bruște în forma învelitorii, sau consolidări rigide și care nu sunt solicitate prin forțe și cupluri, au comportamentul stadiului de membrană în care se pot neglija forțele tăietoare, momentele încovoietoare și de răsucire. În astfel de învelitori :

$Q_\varphi = Q_\theta = 0$, $M_\varphi = M_\theta = M_{\theta\varphi} = M_{\varphi\theta} = 0$, solicitările exterioare fiind echilibrate numai de eforturile care acționează în plane tangente la suprafețe mediane a învelitorilor (N_φ , N_θ , $N_{\theta\varphi}$ și $N_{\varphi\theta}$).

Sistemul de ecuații generale de echilibru pentru acest tip de învelitoare va fi:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) + r_1 \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_1 N_\theta \cos \varphi + p_\varphi r_0 r_1 = 0 \quad (1.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\varphi\theta}) + r_1 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + r_1 N_{\theta\varphi} \cos \varphi + p_\theta r_0 r_1 = 0 \quad (1.93)$$

$$r_1 N_\theta \sin \varphi + r_0 N_\varphi - p_r r_0 r_1 = 0 \quad (1.94)$$

$$N_{\theta\varphi} - N_{\varphi\theta} = 0 \quad (1.95)$$

Cele patru necunoscute (N_φ , N_θ , $N_{\theta\varphi}$ și $N_{\varphi\theta}$) se pot determina prin soluționarea sistemului de ecuații (1.92)-(1.95). Este de precizat că eforturile unitare în astfel de forme de învelitori, se pot determina din cele patru ecuații de echilibru, nefiind necesar a se recurge la ecuații suplimentare rezultate din condițiile de deformare ale învelitorilor.

Pentru cazul particular al încărcării axial simetrice, sistemul de ecuații aferent învelitorii în stadiu de membrană, se simplifică devenind :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) - r_1 N_\theta \cos \varphi + p_\varphi r_0 r_1 = 0 \quad (1.96)$$

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = p_r \quad (1.97)$$

Din analiza acestui sistem de ecuații, rezultă că în stadiul de membrană, în învelitorile subțiri de revoluție încărcate axial simetric, acționează numai eforturile N_φ și N_θ . Aceste eforturi se pot determina din ecuațiile (1.96) și (1.97) care conduc la relația :

$$r_0 N_\varphi \sin \varphi = \int r_0 r_1 (p_r \cos \varphi - p_\varphi \sin \varphi) d\varphi = \frac{\mathfrak{R}}{2\pi} \quad (1.98)$$

unde \mathfrak{R} este suma forțelor aplicate învelitori deasupra cercului paralel de rază r_0 .

Este de precizat că la învelitorile subțiri de revoluție în stadiul de membrană, reacțiile la marginile învelitorii se impun a fi în planul tangent la direcția meridiană iar condițiile de rezemare să fie astfel realizate încât să nu restrângă deplasările și rotațiile. Dacă nu sunt respectate aceste condiții, apar forțe tăietoare și momente încovoietoare care perturbă stadiul de membrană, ceea ce face ca relațiile (1.92)-(1.95) să fie insuficiente pentru determinarea tensiunilor induse de eforturi și a celor induse de încărcările de încovoiere pe margini. În acest caz se va apela la sistemul de ecuații (1.81)-(1.87) aferent învelitorilor solicitate axial simetric.

1.9. Concluzii privind studiul analitic al învelitorilor elastice subțiri de revoluție

Analiza învelitorilor elastice subțiri de revoluție, categorie de învelitori în care se pot încadra practic recipientele sub presiune, a condus la evidențierea unor ipoteze simplificatoare care permit soluționarea problematicii tensiunilor, momentelor și deplasărilor ce apar ca urmare a forțelor externe

ce acționează asupra acestor recipiente.

Domeniul de studiu al învelitorilor elastice subțiri de revoluție s-a axat cu prioritate asupra stării de tensiune în învelitori, condițiilor de echilibru, deplasărilor și deformațiilor în învelitori, precum și comportării liniar elastice a învelitorilor.

Categorisirea de către autorul prezentei lucrări, a recipientelor sub presiune ca parte integrantă a învelitorilor elastice subțiri de revoluție, a făcut posibilă luarea în considerare la studierea acestora a generalizării ipotezei secțiunilor plane adoptate în rezolvarea problemei încovoierii barelor, admiterii cu eroare nesemnificativă a invarianței distanței dintre două puncte de pe o normală la suprafața mediană și neglijarea termenilor neliniari ai ecuațiilor pentru componentele tensiunii respectiv cei ai ecuațiilor de echilibru.

Aceste ipoteze simplificatoare cât și alte considerații pertinente au condus la exprimarea matematică a tensiunilor și momentelor respectiv deducerea condițiilor de echilibru sub forma unui sistem de 6 ecuații cu 10 necunoscute, insuficient însă pentru conferirea unui caracter determinist sistemului de ecuații în cauză.

Această nedeterminare a obligat orientarea demersului și asupra analizei deplasărilor și deformațiilor în învelitori cu punerea în evidență în mod explicit a deplasărilor după cele trei direcții (circumferențială, meridiană și radială), deformațiilor pe direcția circumferențială și meridiană, alunecării specifice în planul tangent la învelitoare într-un punct P , respectiv variația curburii și răsucirii.

Întru-cât nici aceste explicitări nu sunt suficiente pentru alcătuirea unui sistem determinat de ecuații s-a inclus în studiul învelitorii și proprietățile de elasticitate liniară a materialului, care permit aplicarea relațiilor fizice de tip Hooke între tensiuni și deformații și conferirea unui caracter determinist demersului de alcătuire a unui sistem de ecuații a cărui soluționare să fie posibilă.

Sistemul de 11 ecuații cu 11 necunoscute este principal soluționabil însă o soluție completă nu a fost dezvoltată decât pentru învelitori sferice solicitate neaxial-simetric. Soluționarea problemei învelitorilor solicitate axial simetric și a celor în stare de membrană pe cale analitică, este posibilă și este tratată de altfel în acest capitol al tezei.

Metodele analitice utilizate în studiul învelitorilor elastice subțiri de revoluție pot fi completate prin asocierea acestora cu mijloacele moderne de calcul numeric pe care autorul le utilizează în continuare.

Capitolul 2. Aplicații ale calculului numeric la studiul analitic al învelitorilor elastice subțiri de revoluție

Metodele analitice de calcul, folosite în studiul învelitorilor subțiri de revoluție, conjugate cu tehnica numerică de calcul măresc semnificativ sfera posibilităților de investigare, conferind utilizatorului un plus de informații cu caracter conceptual.

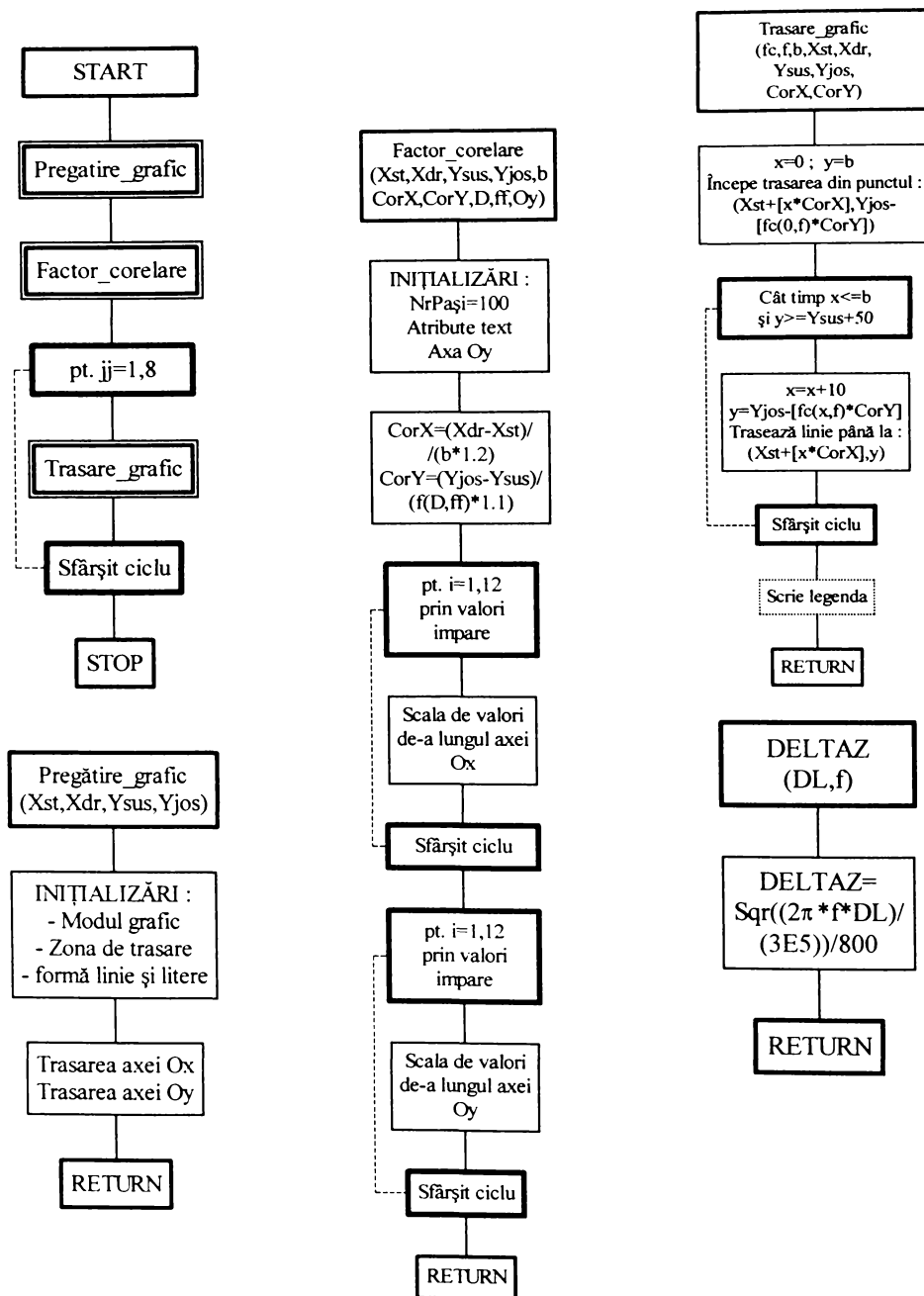
Abordarea într-un astfel de demers al studiului învelitorilor subțiri de revoluție este îndreptată spre cele mai reprezentative tipuri de învelitori, care prezintă interes în analiza recipientelor sub presiune, cum sunt învelitorile sferice, elipsoidale, cilindrice și toroidale.

În acest sens, autorul prezentei lucrări a elaborat un program de calcul denumit PROGRAF care permite trasarea tridimensională și prin afișare punctuală a valorilor curbelor și suprafețelor pentru diferite funcții care au cunoscută expresia analitică. Ordinograma acestui program este prezentată în figura 2.1.

Programul a fost realizat în limbaj Turbo Pascal iar rezultatele au fost confirmate folosind programele Mathcad și Matlab , 4.2 for Windows și 5.0 for Windows. Structura modulară a programului înlesnește întreținerea și actualizarea lui, asigurând un grad sporit de generalitate și o lizibilitate mai bună. În cadrul programului au fost definite trei proceduri :

1. **Pregătire grafic** – în care se delimitează zona (fereastra) rectangulară de pe ecran unde se va trasa graficul. Realizarea acesteia este posibilă prin următoarele etape : comutarea în model grafic, stabilirea coordonatelor ferestrei, stabilirea zonei de trasare din cadrul ferestrei definite anterior, stabilirea atributelor textului și ale limitelor folosite la trasarea graficului, trasarea efectivă a axelor de coordonate.
2. **Procedura factor-corelare** – cu realizarea pregătirii ferestrei în care se va trasa graficul, constând în : stabilirea scalelor celor două axe, pentru ca graficul să se încadreze dimensional în zona stabilită în procedura anterioară, trasarea efectivă a scalelor de valori de-a lungul axelor.
3. **Procedura trasare-grafic** – prin care se obține trasarea efectivă a graficului funcției folosind parametrii din procedurile anterioare. Trasarea se realizează prin linii poligonale, unindu-se punctele obținute pe baza unei diviziuni echidistante a intervalului studiat.

Fig.2.1 Ordinograma programului PROGRAF



2.1. Înelitori sferice

O formă particulară de învelitori o reprezintă învelitorile sferice cu pereți subțiri. Raționalitatea construirii acestui tip de recipient sub presiune, constă în faptul că prin presurizarea învelitorii, stadiul de membrană este generat în întreg ansamblul recipientului.

O consecință importantă a stării de tensiune induse în stadiul de membrană (biaxialitatea și omogenitatea), constă în solicitarea integrală și uniformă a materialului din care este construit recipientul, ceea ce face posibil ca aceeași încărcare să fie preluată de recipientul sferic, la o grosime mai mică a învelitorii, comparativ cu celelalte forme de învelitori în stadiul de membrană. Problema care se pune însă la această formă de învelitoare, este rigiditatea mai scăzută la încovoiere, fapt ce implică o concepție de așa natură, încât să fie perturbat cât mai puțin stadiul de membrană.

Simetria sfericității conduce la : $r_1 = r_2 = R$ (2.1)

$N_\varphi = N_\theta$ (2.2)

iar relația (1.97) devine : $N_\varphi = N_\theta = p R/2$ (2.3)

Prin p s-a notat presiunea interioară uniformă la care este supus recipientul.

Starea de tensiune biaxială omogenă, care se instalează în pereții sferici de grosime h , conduce la relația :

$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = pR / 2h$ (2.4)

În absența efectelor de temperatură, starea de deformație este de asemeni biaxială omogenă, ecuațiile de tip Hooke devenind :

$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{(1 - \nu)pR}{2Eh}$ (2.5)

Alte două cazuri elementare de încărcare în stadiul de membrană a învelitorilor sferice sunt (figura 2.2) : - încărcarea prin greutate proprie, - încărcarea hidrostatică.

În continuare se vor analiza cele două cazuri de încărcări ale învelitoarelor sferice în stadiul de membrană.

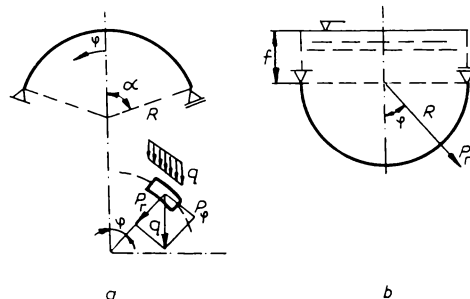


Fig.2.2. Segment de învelitoare sferică : a.- încărcare prin greutate proprie , b.- încărcare hidrostatică

2.1.1. Înelitoare sferică în stadiul de membrană încărcată prin greutate proprie

Segmentul de învelitoare sferică prezentat în figura 2.2.a. este încărcat prin greutate proprie cu intensitatea q pe unitatea de suprafață. La nivelul unghiului φ componentele acestei încărcări sunt:

$$p_r = -q \cos \varphi ; p_\varphi = q \sin \varphi ; p_\theta = 0 \quad (2.6)$$

Pe baza relației (1.98) stabilite pentru învelitorile în stadiul de membrană, rezultă după integrare următoarea expresie pentru N_φ :

$$N_\varphi = -\frac{qR}{1 + \cos \varphi} \quad (2.7)$$

Efortul dirijat în sens circumferențial N_θ se obține din relația (1.97), în care se înlocuiește N_φ cu expresia prezentată în membrul drept al egalității (2.7). Rezultă în consecință, pentru N_θ următoarea relație :

$$N_\theta = qR \left(\cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) \quad (2.8)$$

Din egalitățile : $N_\theta = K(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\varphi)$, $N_\varphi = K(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\theta)$ - valabile în absența variației temperaturilor - și egalitățile (2.7) (2.8), se obține un sistem de ecuații a cărei rezolvare conduce la determinarea deformațiilor ε_φ și ε_θ .

Astfel din sistemul de ecuații :

$$K(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\theta) = -\frac{qR}{1 + \cos \varphi} \quad (2.9)$$

$$K(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\varphi) = qR \left(\cos \varphi + \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) \quad (2.10)$$

se obțin :

$$\varepsilon_\varphi = \frac{qR}{Eh} \left(\frac{\nu - 1}{1 + \cos \varphi} - \nu \cos \varphi \right) \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{qR}{Eh} \left(\frac{\nu - 1}{1 + \cos \varphi} + \cos \varphi \right) \quad (2.12)$$

Pentru determinarea deplasărilor v , w se pornește de la ecuațiile (2.11),(2.12) care definesc expresiile deformațiilor φ . Exprimând deformațiile ε_φ și ε_θ funcție de deplasări rezultă :

$$v \cos \varphi + w = \frac{qR^2}{Eh \sin \varphi} \left(\frac{\nu - 1}{1 + \cos \varphi} + \cos \varphi \right) \quad (2.13)$$

$$\frac{dv}{d\varphi} + w = \frac{qR^2}{Eh} \left(\frac{\nu - 1}{1 + \cos \varphi} - \nu \cos \varphi \right) \quad (2.14)$$

Din acest sistem de ecuații se obține ecuația diferențială :

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \operatorname{ctg}\varphi = \frac{qR^2}{Eh} \left[\frac{v-1}{1+\cos\varphi} \left(1 - \frac{1}{\sin\varphi} \right) - v \cos\varphi - \operatorname{ctg}\varphi \right] \quad (2.15)$$

a cărei rezolvare conduce la cunoașterea deplasării v și apoi a deplasării w .

Este de remarcat că, pentru sistemul de rezemare din figura 2.2.a, efortul N_φ este de compresiune, pentru orice valoare a unghiului φ , în timp ce efortul N_θ este de compresiune, numai pentru valori mici ale acestui unghi ($\varphi < 51^\circ 50'$).

Pe baza programului PROGRAF au fost ridicate diagramele eforturilor N_φ și N_θ , funcție de unghiul φ pentru un caz particular ($R=2000\text{mm}$; $\nu=0,3$; $\gamma = 7,7 \cdot 10^{-6} \text{ daN/mm}^3$; $h=10\text{mm}$; $p=0,1 \text{ daN/mm}^2$, $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/mm}^2$) de învelitoare sferică în stadiu de membrană încărcată prin greutate proprie.

În figurile 2.3 și 2.4 sunt prezentate aceste dependențe rezultând :

- efortul în direcție meridiană N_φ are semn negativ pe întreg domeniul de definiție și scade pe măsura creșterii unghiului φ (figura 2.3);
- efortul în direcție circumferențială N_θ este pozitiv pe prima parte a domeniului de definiție $[0, \pi/2]$ și se anulează pentru $\varphi=51^\circ 49' 38''$ iar de la acest punct își schimbă semnul, crescând ca valoare absolută cu creșterea unghiului φ .

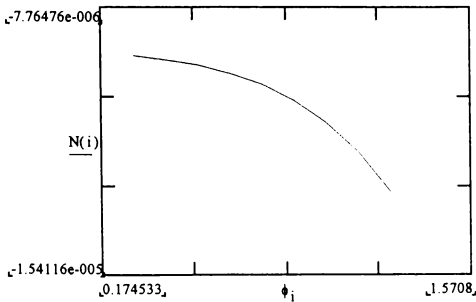


Fig.2.3. Dependența efortului N_φ de unghiul φ

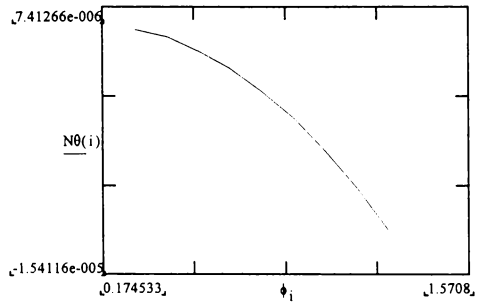


Fig.2.4. Dependența efortului N_θ de unghiul θ .

Pentru același caz particular, însă în condiții de variație a presiunii (p), utilizând programul PROGRAF, s-au trasat suprafețele aferente deformațiilor ϵ_φ (figura 2.5) și ϵ_θ (figura 2.6) iar în figura 2.7 se prezintă dependența variației deplasării în direcție meridiană v și în direcție radială w în funcție de unghiul φ .

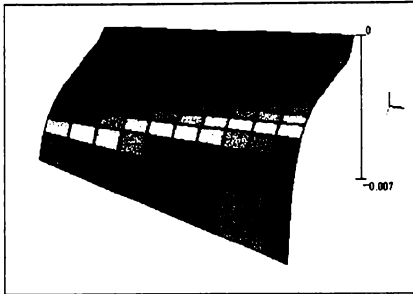


Fig. 2.5. Dependența deformației ε_φ de unghiul φ pentru diferite valori ale presiunii p .

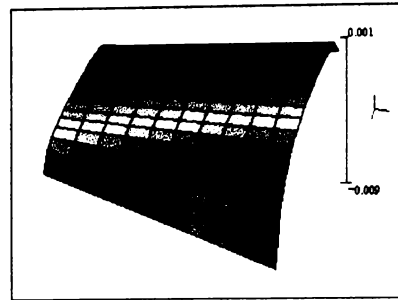


Fig. 2.6. Dependența deformației ε_θ de unghiul θ pentru diferite valori ale presiunii p .

Din analiza figurilor 2.5, 2.6 și 2.7 rezultă următoarele aspecte :

- deformațiile ε_φ și ε_θ sunt foarte mici în comparație cu unitatea și în consecință cu dimensiunile geometrice ale învelitorii, validând ipoteza simplificatoare care se adoptă atunci când acestea se neglijează față de dimensiunile învelitorii în operațiile de aditivitate;
- deformațiile ε_φ au semn negativ pe întreg domeniul de definiție în timp ce deformațiile ε_θ pe o parte a domeniului de definiție $[0, 51^\circ 49' 38'']$ sunt pozitive iar pe restul domeniului de definiție sunt negative (în concordanță cu semnul eforturilor N_φ și N_θ);
- deplasarea v păstrează semnul plus pe întreg intervalul de definiție (figura 2.7) având valoare minimă la începutul domeniului de definiție și o creștere monotonă aproape în tot restul domeniului;
- diagrama deplasării în funcție de unghiul φ , pune în evidență pentru această deplasare un semn negativ pe întreg domeniul de definiție și un minim în prima parte a domeniului.

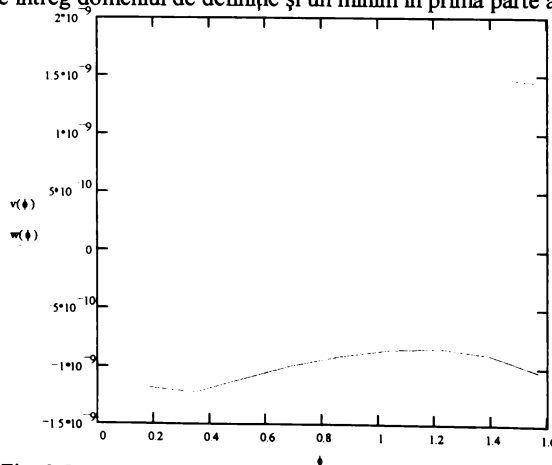


Fig. 2.7. Dependența deplasărilor v și w în funcție de unghiul φ .

2.1.2. Înelitoarea sferică în stadiu de membrană încărcată hidrostatic

Pentru învelitorile semisferice încărcate prin presiune hidrostatică (figura 2.2.b), la nivelul unghiului φ apar următoarele componente ale presiunii :

$$p_r = \rho_l (f + R \cos \varphi) \quad ; \quad p_\varphi = p_\theta = 0 \quad (2.16)$$

unde : - ρ_l - greutatea specifică a lichidului

- f - nivelul lichidului deasupra diametrului de rezemare.

Luând în considerare relațiile (2.16), ecuația (1.98) devine :

$$r_0 N_\varphi = \int r_0 R \rho_l (f + R \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (2.17)$$

Cunoscându-se că : $r_0 = R \sin \varphi$, ecuația (2.37) va avea următoare formă :

$$R \sin^2 \varphi N_\varphi = \int R \rho_l \sin \varphi (f + R \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (2.18)$$

iar valoarea lui N_φ va fi dată de relația :

$$N_\varphi = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \int \rho_l \sin \varphi (f + R \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (2.19)$$

În urma integrării va rezulta :

$$N_\varphi = \frac{\rho_l R^2}{6} \left(\frac{3f}{R} - \frac{2 \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \right) \quad (2.20)$$

Înlocuind pe N_φ în ecuația (2.19), se va obține relația pentru determinarea efortului unitar N_θ și anume :

$$N_\theta = \frac{\rho_l R^2}{6} \left(\frac{3f}{R} + \frac{6 \cos \varphi - 4 \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \right) \quad (2.21)$$

Din relațiile (2.20) (2.21) și ecuațiile $N_\varphi = K(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\theta)$, $N_\theta = K(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\varphi)$ rezultă pentru deformațiile ε_φ , ε_θ următoarele expresii :

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\rho_l R^2}{6Eh} \left[\left(\frac{3f}{R} - \frac{2 \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \right) - \nu \left(\frac{3f}{R} + \frac{6 \cos \varphi - 4 \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \right) \right] \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\rho_l R^2}{6K} \left[(1 + \nu^2) \left(\frac{3f}{R} + \frac{6 \cos \varphi - 4 \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \right) - \nu \left(\frac{3f}{R} - \frac{2 \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \right) \right] \quad (2.23)$$

Determinarea deplasărilor v , w se poate efectua prin soluționarea sistemului de ecuații (2.24)-(2.25) :

$$v \operatorname{ctg} \varphi + w = \frac{\rho_1 R^3}{Eh \sin \varphi} \left[\left(\frac{3f}{R} - \frac{2 \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \right) - \nu \left(\frac{3f}{R} + \frac{6 \cos \varphi - 4 \cos^2 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \right) \right] \quad (2.24)$$

$$\frac{dv}{d\varphi} + w = \frac{\rho_1 R^3}{6K} \left[\left(\frac{3f}{R} + \frac{6 \cos \varphi - 4 \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \right) - \nu \left(\frac{3f}{R} - \frac{2 \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \right) \right] \quad (2.25)$$

Înlocuind w obținut din relația (2.24) în relația (2.25) se obține o ecuație diferențială de grad I a cărei soluționare conduce la cunoașterea deplasării v și apoi la determinarea deplasării w .

Utilizând programul PROGRAF s-au ridicat diagramele eforturilor unitare (N_φ și N_θ), deformațiilor (ε_φ și ε_θ), și deplasărilor (v , w) pentru un caz particular de învelitoare sferică în stadiu de membrană încărcată hidrostatic ($p=0,1 \text{ daN/mm}^2$, $R=2000\text{mm}$, $\rho_1=1 \cdot 10^{-6} \text{ daN/mm}^3$, $\nu=0,3$, $h=10\text{mm}$).

În figurile 2.8 și 2.9 sunt reprezentate diagramele eforturilor unitare N_φ și N_θ din care rezultă următoarele :

- efortul unitar N_φ , având semn negativ pe întreg domeniul de definiție, prezintă în valoare absolută un maxim în prima parte domeniului și tinde rapid spre valoarea zero;
- efortul unitar N_θ este pozitiv pe întreg intervalul de definiție și are deasemenea valori maxime pentru unghiuri φ mici.

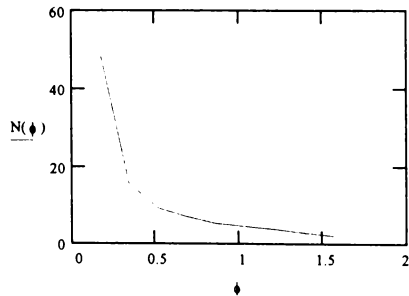
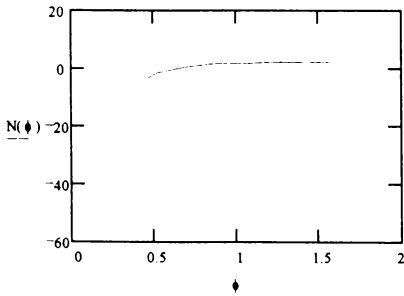


Fig.2.8. Dependența efortului N_φ de unghiul φ . Fig.2.9. Dependența efortului N_θ de unghiul θ .

Variația deformațiilor ε_φ și ε_θ funcție de unghiul φ (figurile 2.10 și 2.11) este similară cu cea a eforturilor (N_φ și N_θ) prezentând creșteri respectiv descreșteri în valoare absolută pentru începutul domeniului de definiție și se apropie de zero în continuare.

Corelat cu aceste variații se observă în figura 2.12 că și deplasările (v , w) prezintă variații brusce în prima parte a domeniului de definiție, cu valori mari la început și mărimi nesemnificative pentru $\varphi > \frac{\pi}{4}$.

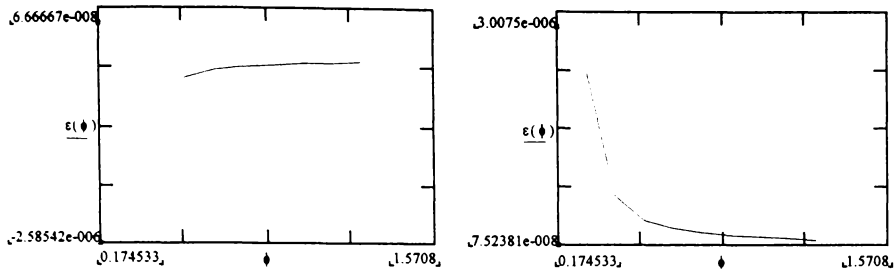


Fig.2.10. Dependența deformației ε_φ de unghiul φ . Fig.2.11. Dependența deformației ε_θ de unghiul θ .

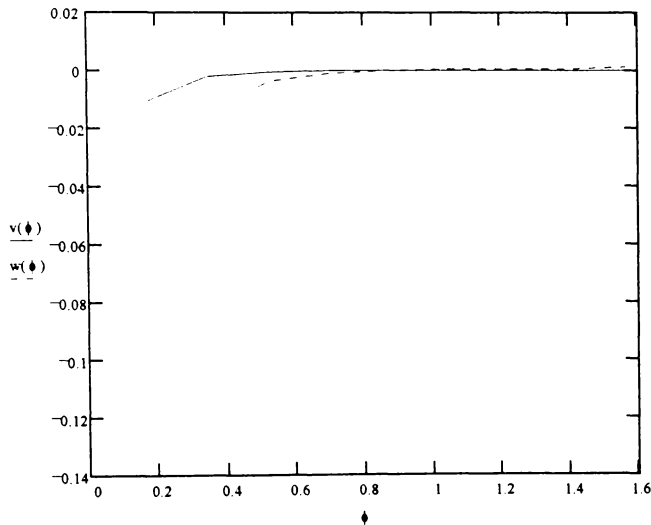


Fig. 2.12. Dependența deplasării v și w de unghiul φ .

2.1.3. Învêlitoarea sferică supusă la încărcări pe margini

Soluționarea problemei învelitorii sferice supuse la încărcări pe margini se efectuează pe baza sistemului de ecuații (1.81)-(1.89), particularizat la cazul sferei ($r_1=r_2=R$) care se va prezenta astfel :

$$\frac{dv}{d\varphi} + v \operatorname{ctg}\varphi + (1 + \nu)w - \frac{R}{K} N_\theta = 0 \tag{2.26}$$

$$\frac{dv}{d\varphi} + \nu v \operatorname{ctg}\varphi + (1 + \nu)w - \frac{R}{K} N_\varphi = 0 \tag{2.27}$$

$$\nu \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) + \operatorname{ctg}\varphi \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) - \frac{R^2}{D} M_\theta = 0 \tag{2.28}$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) + v \operatorname{ctg} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) - \frac{R^2}{D} M_\varphi = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{d}{d\varphi} (\sin \varphi N_\varphi) - N_\theta \cos \varphi - \sin \varphi Q_\varphi + R \sin \varphi \cdot p\varphi = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{d}{d\varphi} (\sin \varphi Q_\varphi) + N_\theta \sin \varphi + N_\varphi \sin \varphi - R \sin \varphi \cdot p\varphi = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{d}{d\varphi} (\sin \varphi M\varphi) - M_\theta \cos \varphi - R \sin \varphi \cdot Q_\varphi = 0 \quad (2.32)$$

O rezolvare analitică a problemei este dată de unii autori [2],[7], care pornind de la particularitățile sferei ca învelitoare subțire de revoluție, încărcată axial simetric, ajung la ecuațiile :

$$\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} - (\operatorname{ctg}^2 \varphi - v) Q_\varphi = -EhV \quad (2.33)$$

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{dV}{d\varphi} - (\operatorname{ctg}^2 \varphi + v) V = \frac{R^2 Q_\varphi}{D} \quad (2.34)$$

unde : $V = \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right)$, reprezintă rotirea tangentei într-un punct P situat pe sferă iar v și w sunt deplasările reprezentate în figura 1.6.

Dacă se notează cu L operatorul din relația :

$$L = \frac{d^2}{d\varphi^2} (\dots) + \operatorname{ctg} \varphi \frac{dV}{d\varphi} - \operatorname{ctg}^2 \varphi V - vV = -EhV \quad (2.35)$$

și se aplică ecuațiilor (2.33) și (2.34) rezultă :

$$L(Q_\varphi) + vQ_\varphi = -EhV \quad (2.36)$$

$$L(V) - vV = \frac{R^2 Q_\varphi}{D} \quad (2.37)$$

Din aplicarea lui L asupra relației (2.36) se obține :

$$LL(Q_\varphi) + vL(Q_\varphi) = -EhL(V) \quad (2.38)$$

Relația (2.37) se mai poate scrie sub forma :

$$L(V) = \frac{R^2 Q_\varphi}{D} + vV = \frac{R^2 Q_\varphi}{D} \cdot \frac{v}{Eh} (L(Q_\varphi) + vQ_\varphi) \quad (2.39)$$

Această expresie a lui L(v) introdusă în relația (2.38) conduce la :

$$LL(Q_\varphi) + vL(Q_\varphi) = -Eh \left[\frac{R^2 Q_\varphi}{D} - \frac{v}{Eh} L(Q_\varphi) - v^2 Q_\varphi \right] \quad (2.40)$$

După unele operații de regrupare și simplificare se obține relația :

$$LL(Q_\varphi) + \left[\frac{EhR^2}{D} - v^2 \right] Q_\varphi = 0 \quad (2.41)$$

Notând cu :

$$\mu^4 = \frac{EhR^2}{D} - \nu^2 = \frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2} - \nu^2$$

rezultă :

$$LL(Q_\varphi) + \mu^4 Q_\varphi = 0 \tag{2.42}$$

Similar se obține și ecuația în V, respectiv :

$$LL(V) + \mu^4 V = 0 \tag{2.43}$$

Ecuația (2.38) se poate scrie în una din următoarele forme :

$$L[L(Q_\varphi) + i\mu^2 Q_\varphi] - i\mu^2 [L(Q_\varphi) + i\mu^2 Q_\varphi] = 0 \tag{2.44}$$

sau :

$$L[L(Q_\varphi) - i\mu^2 Q_\varphi] + i\mu^2 [L(Q_\varphi) - i\mu^2 Q_\varphi] = 0 \tag{2.45}$$

Aceste ecuații arată că soluțiile ecuațiilor de gradul doi :

$$L(Q_\varphi) \pm i\mu^2 Q_\varphi = 0 \tag{2.46}$$

sunt și soluțiile ecuației (2.38).

Prima ecuație din (2.46) :

$$L(Q_\varphi) + i\mu^2 Q_\varphi = 0$$

se poate scrie și sub forma :

$$\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} - \text{ctg}^2 \varphi Q_\varphi + 2i\rho_0^2 Q_\varphi = 0 \tag{2.47}$$

unde s-a notat :

$$\rho_0^2 = \sqrt{\frac{3R^2}{h}(1-\nu^2) - \frac{\nu^2}{4}}$$

Notând $x = \sin^2 \varphi$ și $y = Q_\varphi / \sin \varphi$, ecuația (2.47) va deveni :

$$x(x-1) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{5}{2}x - 2\right) \frac{dy}{dx} + \frac{1-2i\rho_0^2}{4} y = 0 \tag{2.48}$$

Introducând în ecuația (2.48) parametrii :

$$\gamma_0 \leq 2 \quad ; \quad \alpha_0 = \frac{3 \pm \sqrt{5 + 8i\rho_0^2}}{4} \quad ; \quad \beta_0 = \frac{3 \pm \sqrt{5 + 8i\rho_0^2}}{4}$$

se va obține ecuația diferențială gaussiană (hipergeometrică) :

$$x(1-x)y'' + [\gamma_0 - (\alpha_0 + \beta_0 + 1)x]y' - \alpha_0\beta_0 y = 0 \tag{2.49}$$

Se cunoaște [100] că pentru $\gamma_0 \neq 0, -1, -2$ ecuația (2.49) are ca soluție o serie de puteri de

forma $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Pentru coeficienții acestei serii de puteri formula de recurență este :

$$(n+1)(n+\gamma_0) = (n+\alpha_0)(n+\beta_0)$$

În consecință ecuația (2.49) va avea ca soluție :

$$y = a_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha_0}{1!} \cdot \frac{\beta_0}{\gamma_0} x + \frac{\alpha_0(\alpha_0 + 1)}{2!} \cdot \frac{\beta_0(\beta_0 + 1)}{\gamma_0(\gamma_0 + 1)} x^2 + \dots \right\} \quad (2.50)$$

Folosind notația :

$$\delta_0^2 = 5 + 8i\rho_0^2 = 5 + 4i\sqrt{\frac{12R^2(1-\nu^2)}{h^2} - \nu^2}$$

se obține drept soluție a ecuației (2.48) :

$$y_1 = a_0 \left\{ 1 + \frac{3^2 - \delta_0^2}{16 \cdot 1 \cdot 2} x + \frac{(3^2 - \delta_0^2)(7^2 - \delta_0^2)}{16^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} x^2 + \dots \right\} \quad (2.51)$$

care conține numai o singură constantă arbitrară a_0 .

Altă soluție a ecuației (2.48) se poate scrie [20] sub forma :

$$y_2 = y_1 \ln x + \frac{1}{x} \varphi(x) \quad (2.52)$$

unde $\varphi(x)$ este o serie de puteri convergente pentru $|x| < 1$. Întrucât această soluție devine infinit pentru $x=0$ (în creștetul sferei) nu poate fi luată în considerare în cazul când există gaură în creștetul sferei.

Limitând studiul la cazul învelitorii sferice fără gaură în creștet, se ia în considerare numai soluția y_1 . Luând în considerare expresia lui δ_0 și introducând-o în relația (2.51) va rezulta după împărțirea în partea reală și partea imaginară, următoarea relație :

$$y_1 = S_1 + iS_2 \quad (2.53)$$

unde S_1 și S_2 sunt serii de puteri convergente când $|x| < 1$. Soluția corespunzătoare pentru prima ecuație va rezulta din :

$$Q_\varphi = AI_1 + BI_2 \quad (2.54)$$

unde A și B sunt constante care urmează a fi determinate din două condiții de-a lungul marginii învelitorii sferice.

Cunoscându-se expresia pentru Q_φ se poate obține expresia variabilei V după înlocuirea lui Q_φ în ecuația (2.34). Astfel va rezulta pentru V relația :

$$V = \frac{1}{EH} \left[(A\nu - BR\mu^2)I_1 + (AR\mu^2 + B\nu)I_2 \right] \quad (2.55)$$

Se observă că și necunoscuta V este reprezentată de seriile I_1 și I_2 . Din sistemul de ecuații (2.54), (2.55) se pot determina valorile constantelor A și B din două condiții de-a lungul marginii învelitorii.

Cunoscându-se Q_φ din $Q_\varphi = y_1 \sin \varphi$ se poate determina V și pe baza acestora eforturile N_φ și N_θ , momentele M_φ și M_θ , deplasările v și w , deformațiile în suprafața mediană a învelitorii (ε_φ , ε_θ) respectiv deplasarea δ în planurile cerurilor paralele. Aplicațiile practice devin mai mult sau mai puțin facile funcție de gradul de convergență al seriei hipergeometrice care depinde îndeosebi de mărimea cantității ρ_0 .

Din calcule [89] rezultă că pentru $\rho_0 < 10$ convergența seriei este satisfăcătoare și toate mărimile necesare se pot determina cu ușurință pentru diferite condiții de margine. Expresia mărimii ρ_0 , dacă se neglijează v^2 în comparație cu unitatea, devine :

$$\rho_0 \approx \sqrt[4]{3} \sqrt{\frac{R}{h}}$$

și mărimea ρ_0 va depinde de rădăcina pătrată a raportului R/h .

În figura 2.13 este prezentată variația mărimii ρ_0 (pentru $\nu=0,3$) funcție de h la diverse valori ale razei R . Din familia de curbe ρ_0 se poate observa că pe măsură ce grosimea plăcii devine din ce în ce mai mică, la aceeași rază R , raportul R/h crește și convergența seriei hipergeometrice (2.52) devine slabă, impunându-se luarea în calcul a mai multor termeni ai acestei serii.

Este de menționat că în literatura de specialitate [20], [30] se precizează că pentru $R/h=62,5$ se impune luarea în considerare în calcule a cel puțin 18 termeni ai seriei.

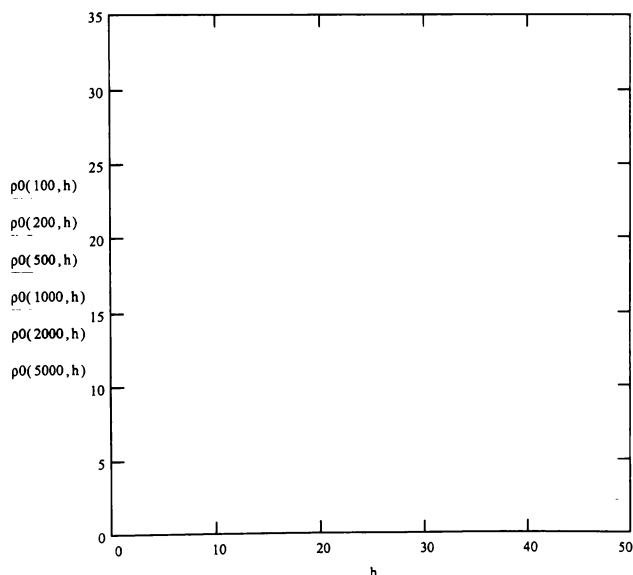
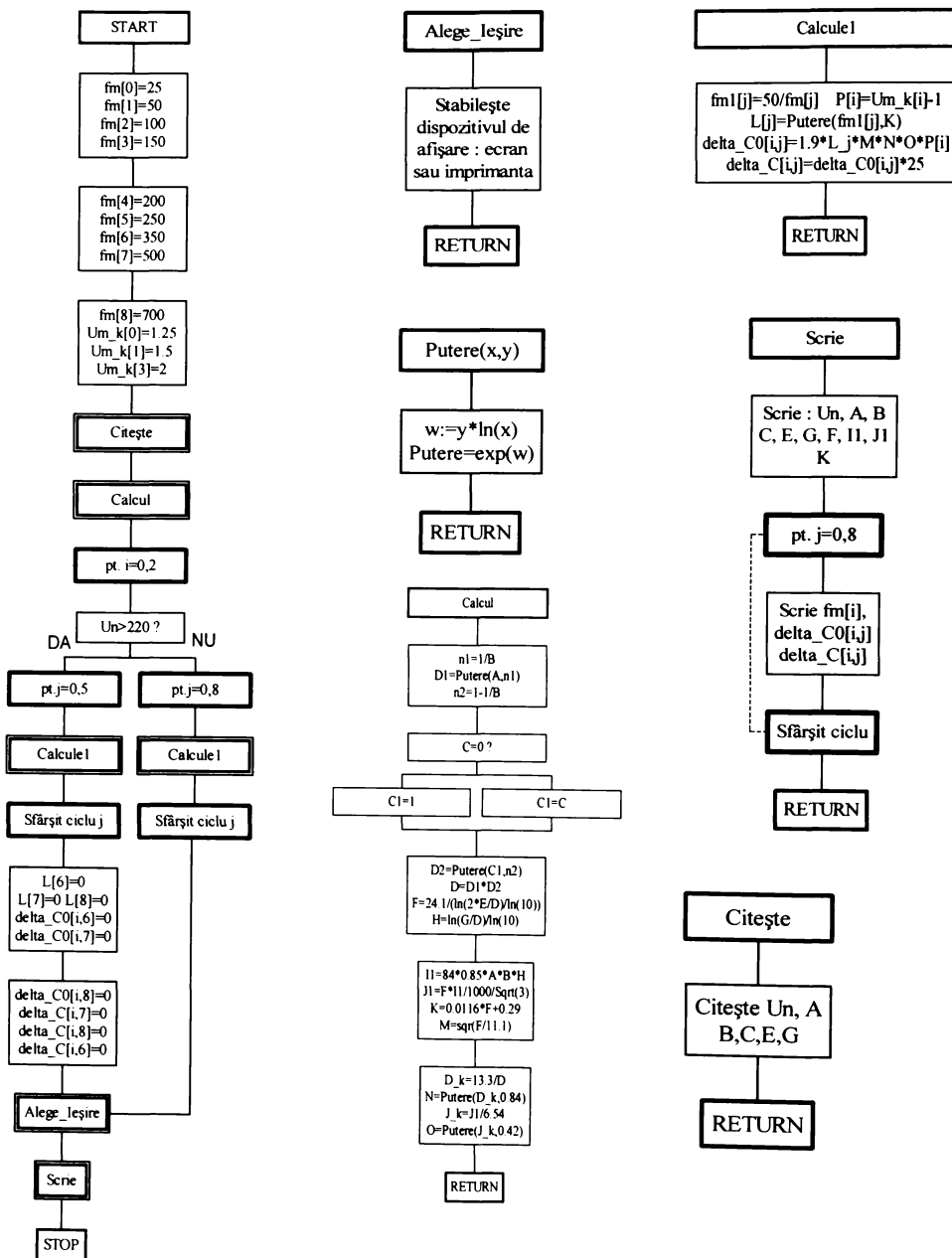


Fig.2.13. Dependenta mării ρ_0 funcție de grosimea h pentru diferite valori ale razei învelitorii sferice (pentru $\nu=0,3$).

Fig.2.14. Ordinograma pentru programul SERII-HG



Programul de calcul SERII-HG elaborat de autor, pe baza căruia s-au ridicat familiile de curbe ρ_0 (funcție de h și R) are ordinograma prezentată în figura 2.14. Acest program reprezintă un instrument eficace în definirea domeniului de utilizare a seriilor hipergeometrice pentru soluționarea problemei învelitorilor sferice de grosime h constantă.

Pentru soluționarea problemei învelitorilor sferice, se poate recurge la o metodă aproximativă satisfăcătoare. Pornind de la ecuațiile (2.33) și (2.34) și neglijând termenii în Q_φ și $dQ_\varphi/d\varphi$ față de $d^2Q_\varphi/d\varphi^2$, respectiv V și $dV/d\varphi$ față de $d^2V/d\varphi^2$ rezultă :

$$\frac{d^2Q_\varphi}{d\varphi^2} = -EhV, \quad \frac{d^2V}{d\varphi^2} = \frac{R^2Q_\varphi}{d\varphi^2} \quad (2.56)$$

Neglijarea acestor termeni este admisibilă în cazul învelitorilor subțiri, întrucât rigiditatea la încovoiere a acestora este mică iar efectele de încovoiere ale eforturilor aplicate pe margini și în consecință și deplasările (rotirile) se anulează repede.

Este de menționat că neglijarea termenilor care conțin factorul $\text{ctg}\varphi$, este admisibilă doar pentru valori mari ale unghiului φ ($\varphi > 30^\circ$)

În aceste condiții sistemul de ecuații (2.56) conduce la o singură ecuație diferențială de ordinul patru și anume :

$$\frac{d^4Q_\varphi}{d\varphi^4} + 4\lambda^4 Q_\varphi = 0 \quad (2.57)$$

$$\text{unde: } \lambda^4 = \frac{EhR^2}{4D} = 3(1-\nu^2) \left(\frac{R}{h}\right)^2 \quad (2.58)$$

Ecuația diferențială (2.57) are următoarea soluție generală :

$$Q_\varphi = e^{-\lambda\varphi} (A_1 \cos \lambda\varphi + A_2 \sin \lambda\varphi) + e^{-\lambda\varphi} (A_3 \cos \lambda\varphi + A_4 \sin \lambda\varphi) \quad (2.59)$$

Din condițiile de margine ale învelitoarei se pot determina constantele A_1, A_2, A_3, A_4 . Eforturile unitare N_φ și N_θ funcțiile de Q_φ în cazul învelitorii sferice sunt date de relațiile :

$$N_\varphi = -Q_\varphi \text{ctg}\varphi \quad (2.60)$$

$$N_\theta = -\frac{dQ_\varphi}{d\varphi} \quad (2.61)$$

Pentru rotirea tangentei V și pentru momentele M_φ, M_θ rezultă relațiile :

$$V = -\frac{1}{Eh} \cdot \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} \quad (2.62)$$

$$M_\varphi = \frac{D}{R} \left(\frac{dV}{d\varphi} + \nu V \operatorname{ctg} \varphi \right) \quad (2.63)$$

$$M_\theta = \frac{D}{R} \left(\nu \frac{dV}{d\varphi} + V \operatorname{ctg} \varphi \right) \quad (2.64)$$

Acceptând neglijarea termenilor în V , comparativ cu cei în $dV/d\varphi$, valabilă în cazul $\varphi > 30^\circ$, vor rezulta pentru M_φ și M_θ următoarele expresii :

$$M_\varphi = \frac{D}{R} \cdot \frac{dV}{d\varphi} \quad (2.65)$$

$$M_\theta = \frac{\nu D}{R} \cdot \frac{dV}{d\varphi} = \nu M_\varphi \quad (2.66)$$

Cunoscând eforturile N_θ , N_φ și neglijând Q_φ față de $dQ_\varphi / d\varphi$, se obține :

$$\delta = -R \frac{\sin \varphi}{Eh} \cdot \frac{dQ}{d\varphi} \quad (2.67)$$

Este de remarcat de asemeni, că în relație ce definește soluția dată de (2.58) se poate considera $A_3 = A_4 = 0$, întrucât efectele de încovoiere descresc rapid, pe măsură ce descresște φ , iar factorul $e^{-\lambda\varphi}$, crește odată cu descresțerea unghiului φ .

În cazul segmentului de învelitoare sferică prezentată în figura 2.15, dacă se face schimbarea de variabilă : $\psi = \alpha - \varphi$, atunci soluția generală pentru Q_φ devine :

$$Q_\varphi = A e^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi + \beta_1) \quad (2.68)$$

în care constantele A și β_1 se explicitează funcție de condițiile încovoierii pe margine.

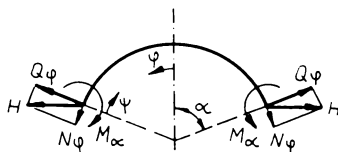


Fig.2.15. Eforturile și momentele care acționează pe marginile unui segment de învelitoare sferică.

Luând în considerare relația (2.68) va rezulta :

$$N_\varphi = -Ae^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi + \beta_1) \operatorname{ctg}(\alpha - \psi) \quad (2.69)$$

$$N_\theta = -\sqrt{2}\lambda Ae^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi + \beta_1 - \pi/4) \quad (2.70)$$

$$V = \frac{2\lambda^2 A}{Eh} \cdot e^{-\lambda\psi} \cos(\lambda\psi + \beta_1) \quad (2.71)$$

$$M_\varphi = \frac{RA}{\lambda\sqrt{2}} \cdot e^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi + \beta_1 + \pi/4) \quad (2.72)$$

$$M_\theta = \frac{\nu RA}{\lambda\sqrt{2}} \cdot e^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi + \beta_1 + \pi/4) \quad (2.73)$$

$$\delta = -\frac{\sqrt{2}RA\lambda}{Eh} \cdot e^{-\lambda\psi} \sin(\alpha - \psi) \sin(\lambda\psi + \beta_1 - \pi/4) \quad (2.74)$$

Condițiile de contur fiind : $\varphi = \alpha$ ($\psi = 0$), $M_\varphi = M_\alpha$; $N_\varphi = H\cos\alpha$; $Q_\varphi = H\sin\alpha$, relațiile (2.69) - (2.74) vor deveni :

$$N_\varphi = -A \sin \beta_1 \operatorname{ctg}\alpha \quad (2.75)$$

$$N_\theta = -\sqrt{2}A \sin(\beta_1 - \pi/4) \quad (2.76)$$

$$V = \frac{2\lambda^2 A}{Eh} \cos\beta_1 \quad (2.77)$$

$$M_\varphi = \frac{RA}{\lambda\sqrt{2}} \sin(\beta_1 + \pi/4) \quad (2.78)$$

$$M_\theta = \frac{\nu RA}{\lambda\sqrt{2}} \sin(\beta_1 + \pi/4) \quad (2.79)$$

$$\delta = -\frac{\sqrt{2}RA\lambda}{Eh} \sin \alpha \cdot \sin(\beta_1 - \pi/4) \quad (2.80)$$

Pentru $\psi = 0$, relația (2.72) devine $Q_\varphi = A \sin\beta_1$, iar relațiile (2.75)-(2.80) se pot scrie astfel :

$$N_\varphi = -A \sin \beta_1 \operatorname{ctg}\alpha \quad (2.81)$$

$$N_\theta = -\lambda Q_\varphi (1 - \operatorname{ctg}\beta_1) \quad (2.82)$$

$$V = \frac{2\lambda^2}{Eh} Q_\varphi \operatorname{ctg}\beta_1 \quad (2.83)$$

$$M_\varphi = \frac{R}{2\lambda} Q_\varphi (1 + \operatorname{ctg}\beta_1) \quad (2.84)$$

$$M_\theta = \frac{\nu R}{2\lambda} Q_\varphi (1 + \operatorname{ctg}\beta_1) \quad (2.85)$$

$$\delta = -\frac{R\lambda}{Eh} \sin \alpha Q_\varphi (1 - \operatorname{ctg}\beta_1) \quad (2.86)$$

Pentru diferite combinații de date aferente încărcărilor pe margini H și M_α , respectiv δ și V, valorile constantelor A și β_1 sunt :

- pentru : H- dat și $M_\alpha=0 \rightarrow A = \sqrt{2}H \sin \alpha$, $\beta_1 = -\pi/4$

- pentru : H- dat și $M_\alpha=0 \rightarrow A = \sqrt{2}H \sin \alpha$, $\beta_1=-\pi /4$

- pentru : M_α - dat și $H=0 \rightarrow A = \frac{2M_\alpha \lambda}{R}$, $\beta_1=0$

- pentru : δ - dat și $V=0 \rightarrow A = -\frac{\delta E h}{R \lambda \sin \alpha}$, $\beta_1=\pi /2$

- pentru : V - dat și $\delta=0 \rightarrow A = \frac{E h v}{\sqrt{2} \lambda^2}$, $\beta_1=\pi /4$

Este de menționat faptul că atunci când acționează forța H și momentul M_α sau sunt impuse pe margini deplasări δ și rotații V se aplică în calculul eforturilor respectiv a deplasărilor principiul superpoziției cu luarea în considerare a relațiilor (2.68)-(2.74).

Soluțiile stabilite fiind în ipoteza absenței forțelor exterioare, la acestea trebuie adăugate și cele corespunzătoare încărcării exterioare. Astfel în cazul recipientului sferic supus unei presiuni interne uniforme (încercare comparabilă cu stadiul de membrană) la eforturile și deplasările determinate din soluția încovoierii pe margini trebuie adăugate și cele corespunzătoare relației (2.3).

Metoda aproximativă utilizată pentru soluționarea sistemului de ecuații (2.33), (2.34) s-a bazat pe neglijarea funcțiilor necunoscute Q_ϕ și V, respectiv a primelor derivate ale acestora din ecuațiile amintite. O aproximare mai bună se poate realiza în cazul introducerii variabilelor :

$$Q_1 = Q_\phi \sqrt{\sin \phi} \quad , \quad V_1 = V \sqrt{\sin \phi} \tag{2.87}$$

Prin aceste schimbări de variabile ecuațiile (2.33),(2.34) devin :

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \phi^2} - \frac{\text{ctg}^2 \phi - \nu}{\sqrt{\sin \phi}} Q_1 = -E h V_1 \tag{2.88}$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \phi^2} - \frac{\text{ctg}^2 \phi + \nu}{\sqrt{\sin \phi}} V_1 = \frac{R^2 Q_1}{D} \tag{2.89}$$

În sistemul de ecuații (2.88),(2.89) dispar primele derivate ale lui Q_1 și V_1 , urmând a se neglija numai termenii conținând mărimile Q_1 și V_1 . Prin neglijarea acestor termeni sistemul de ecuații (2.88),(2.89) se va scrie sub forma :

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \phi^2} = -E h V_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial \phi^2} = \frac{R^2 Q_1}{D} \tag{2.90}$$

Sistemul de ecuații (2.90) are o soluție similară sistemului (2.56), rezultând pentru Q_ϕ expresia :

$$Q_\phi = A \frac{e^{-\lambda \psi}}{\sqrt{\sin(\alpha - \psi)}} \sin(\lambda \psi + \beta_1) \tag{2.91}$$

Utilizând expresia (2.91) pentru determinarea mărimii Q_φ , vor rezulta în consecință și relațiile aferente eforturilor unitare (N_φ, N_θ), momentelor (M_φ, M_θ), rotirii tangentei la meridian (V) și deplasărilor (δ). Astfel relațiile (2.69)-(2.74) vor deveni :

$$N_\varphi = -\frac{Ae^{-\lambda\psi}}{\sqrt{\sin(\alpha - \psi)}} \operatorname{ctg}(\alpha - \psi) \sin(\lambda\psi + \beta_1) \quad (2.92)$$

$$N_\theta = \frac{\sqrt{2}Ae^{-\lambda\psi}}{2\sqrt{\sin(\alpha - \psi)}} [2 \cos(\lambda\psi + \beta_1) - (K_1 + K_2) \sin(\lambda\psi + \beta_1)] \quad (2.93)$$

$$M_\varphi = \frac{A Re^{-\lambda\psi}}{2\lambda\sqrt{\sin(\alpha - \psi)}} [K_1 \cos(\lambda\psi + \beta_1) + \sin(\lambda\psi + \beta_1)] \quad (2.94)$$

$$M_\theta = \frac{A Re^{-\lambda\psi}}{4\nu\lambda\sqrt{\sin(\alpha - \psi)}} \left\{ (1 + \nu^2)(K_1 + K_2) - 2K_2 \right\} \cos(\lambda\psi + \beta_1) + 2\nu^2 \sin(\lambda\psi + \beta_1) \quad (2.95)$$

$$\delta = \frac{AR\lambda \sin(\alpha - \psi) e^{-\lambda\psi}}{Eh\sqrt{\sin(\alpha - \psi)}} [\cos(\lambda\psi + \beta_1) - K_2 \sin(\lambda\psi + \beta_1)] \quad (2.96)$$

$$V = \frac{2\lambda^2 A e^{-\lambda\psi}}{Eh\sqrt{\sin(\alpha - \psi)}} \cos(\lambda\psi + \beta_1) \quad (2.97)$$

unde :

$$K_1 = 1 - \frac{1 - 2\nu}{2\lambda} \operatorname{ctg}(\alpha - \psi)$$

$$K_{21} = 1 - \frac{1 + 2\nu}{2\lambda} \operatorname{ctg}(\alpha - \psi)$$

Condițiile de contur fiind $\varphi = \alpha$ ($\psi = 0$), $M_\varphi = M_\alpha$, $N_\varphi = H \cos \alpha$, $Q_\varphi = H \sin \alpha$, vor rezulta pentru diferite combinații date aferente încărcărilor pe margini (H și M_α , respectiv δ și V) următoarele valori ale constantelor A și β_1 :

- pentru : H - dat și $M_\alpha = 0 \rightarrow A = \sqrt{2}H \sin^{\frac{3}{2}} \alpha$, $\beta_1 = -\pi/4$

- pentru : M_α - dat și $H = 0 \rightarrow A = \frac{2M_\alpha \lambda}{R} \sqrt{\sin \alpha}$, $\beta_1 = 0$

- pentru : δ - dat și $V = 0 \rightarrow A = -\frac{K_2 \delta E h}{R \lambda} \sin^{\frac{3}{2}} \alpha$, $\beta_1 = \pi/2$

- pentru : V - dat și $\delta = 0 \rightarrow A = \frac{E h \nu}{\sqrt{2} \lambda^2} \sqrt{\sin \alpha}$, $\beta_1 = \pi/4$

Metodele aproximative de calcul analizate prin luarea în considerare a ecuațiilor (1.41) respectiv a relațiilor (2.87) și ecuațiilor (2.88),(2.89) reprezintă variante de rezolvare recomandate de literatura de specialitate [1], [7] în cazul raportului $R/h < 60$ și valori ale unghiului $\varphi > 30^\circ$. Recurgerea la una din aceste metode aproximative, generată adeseori de slaba convergență a serie hipergeometrice (2.50) se impune a fi atent analizată din mai multe motive și anume :

- în stadiul actual de performanță al calculatoarelor, limita raportului R/h și în consecință ρ_0 , pot fi extinse, slaba convergență a seriei hipergeometrice fiind mai puțin importantă, soluționarea problemei învelitorilor sferice subțiri cu ajutorul acestor serii devine posibilă și pentru valori ale lui ρ_0 mult mai mari;
- când se utilizează metodele aproximative de studiu, opțiunea pentru metoda cea mai potrivită este condiționată în mare măsură de unghiul α și φ ;
- alegerea metodei de studiu a eforturilor în plăcile sferice subțiri de grosime constantă depinde și de mărimea erorii acceptate în demersul întreprins.

Pe baza programului de calcul SERII-HG elaborat de autor se poate stabili numărul de termeni ai seriei hipergeometrice (funcție de R și h) care se necesită a fi luat în considerare pentru soluționarea problemei, condiționat de precizia de calcul impusă.

În anexele 1, 2, 3, 4, 5 sunt prezentate valorile sumelor S_{1N} , S_{2N} pentru N termeni la valoarea raportului R/h dat (10, 50, 100, 200, 500), din care se poate observa gradul de convergență al seriei hipergeometrice, grad evident în scădere cu creșterea raportului R/h . pentru ν s-a ales valoarea 0,3, valoare frecvent utilizată în cazul recipientelor sub presiune. Deasemenea s-a calculat eroarea procentuală a seriei formate din N termeni comparativ cu cea formată din $N-1$ termeni. Calculul s-a făcut pentru solicitarea $p=0,2daN/mm^2$.

Gradul de precizie al determinării eforturilor și momentelor funcție de deschiderea α în cazul metodei de rezolvare exactă (cu serii hipergeometrice) și celor aproximative rezultă din figurile 2.16-2.19. Din analiza graficelor reprezentând dependența eforturilor unitare Q_φ și momentelor M_φ de unghiul φ pentru valorile din anexele 6-11 ($\alpha=45^\circ, 35^\circ, 20^\circ$) rezultă următoarele :

- în cazul unor valori mari ale unghiului α valorile efortului unitar Q_φ și momentului M_φ calculate prin metodele aproximative, față de cele calculate prin metoda exactă (cu serii hipergeometrice) diferă nesemnificativ;
- a doua aproximație este mai bună decât prima fiind recomandată a fi luată în considerare pentru unghiuri $\alpha > 30^\circ$;
- pentru unghiuri $\alpha=45^\circ$ ambele aproximări sunt foarte apropiate de metoda exactă și poate fi luată în considerare prima aproximație în calculul eforturilor și momentelor.

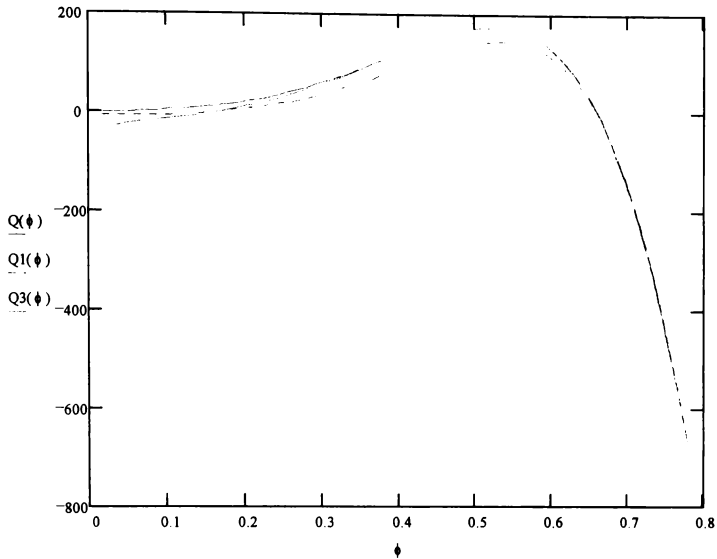


Fig. 2.16. Dependența efortului Q_ϕ de unghiul ϕ în cazul $\alpha=45^\circ$, utilizând : Q- metoda seriilor hipergeometrice, Q1 - prima aproximație, Q3 - a doua aproximație.

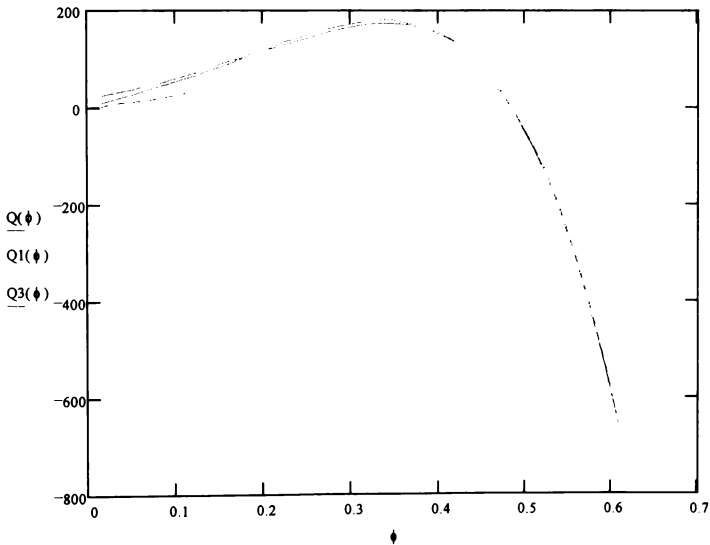


Fig. 2.17. Dependența efortului Q_ϕ de unghiul ϕ în cazul $\alpha=35^\circ$, utilizând : Q - metoda seriilor hipergeometrice, Q1 - prima aproximație, Q3 - a doua aproximație.

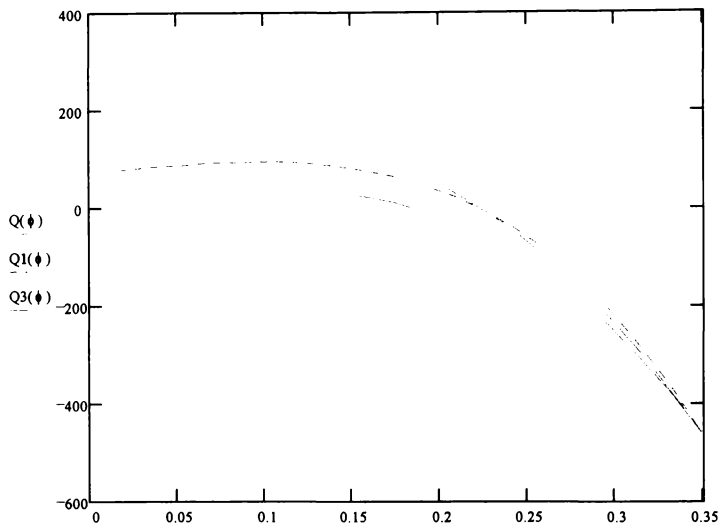


Fig. 2.18. Dependența efortului Q_ϕ de unghiul ϕ în cazul $\alpha=20^\circ$, utilizând : Q - metoda seriilor hipergeometrice, Q1 - prima aproximație, Q3 - a doua aproximație.

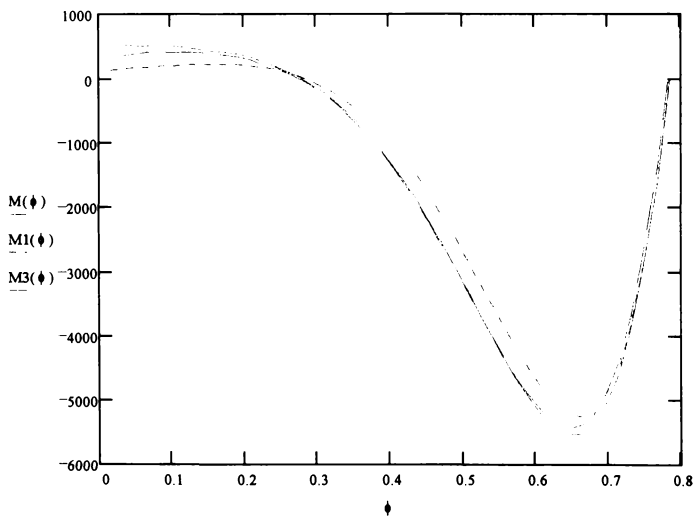


Fig. 2.19. Dependența momentului M_ϕ de unghiul ϕ în cazul $\alpha=45^\circ$, utilizând : Q - metoda seriilor hipergeometrice, --- prima aproximație, --- a doua aproximație.

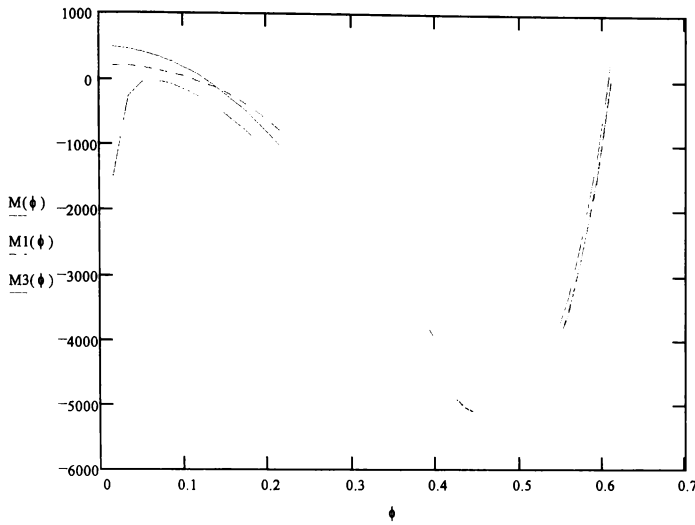


Fig.2.20. Dependența momentului M_ϕ de unghiul ϕ în cazul $\alpha=35^\circ$, utilizând : Q - metoda seriilor hipergeometrice, --- prima aproximație, --- a doua aproximație.

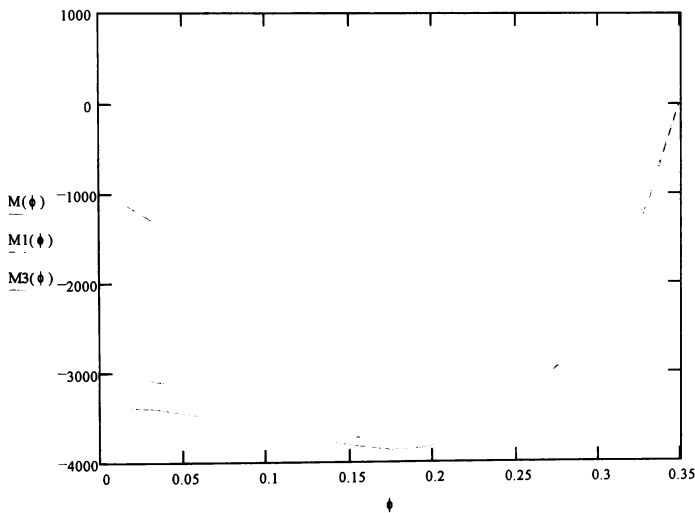


Fig.2.21. Dependența momentului M_ϕ de unghiul ϕ în cazul $\alpha=20^\circ$, utilizând : Q - metoda seriilor hipergeometrice, --- prima aproximație, --- a doua aproximație.

2.1.4. Învélitori sferice de rază mare (pleoștite).

În cazul învelitorilor sferice de rază mare ($\varphi < 30^\circ$) negliizarea termenilor care conțin $\text{ctg}\varphi$ nu este acceptabilă. Asemenea învelitori figura 2.22 au o deschidere mică la centru respectiv o valoare mică a raportului între înălțimea l a învelitorii și raza cercului de bază. Raportul acestor mărimi este mai mic de $1/8-1/10$.

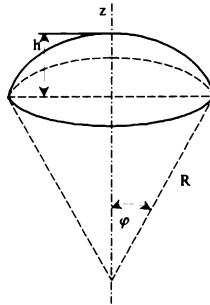


Fig.2.22. Elementele geometrice ale unui segment de învelitoare sferică de deschidere unghiulară mică.

Adoptând ca variabilă raza cercului de bază ($r_0=r$) în locul variabilei unghiulare φ și notând eforturile, momentele și sarcinile : $N_\varphi, M_\varphi, M_{\theta\varphi}, Q_\varphi, p_\varphi$ cu $N_r, M_r, M_{\theta r}, Q_r, p_r$, se obțin pentru ecuațiile de echilibru (1.81)-(1.87) prezentate în capitolul 1, următoarele relații :

$$\frac{\partial}{\partial r}(rN_r) + \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} - N_\theta - \frac{r}{R}Q_r + rp_r = 0 \tag{2.98}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rN_{r\theta}) + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + N_{r\theta} - \frac{r}{R}Q_\theta + rp_\theta = 0 \tag{2.99}$$

$$\frac{r}{R}N_\theta + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{r}{R}N_r + \frac{\partial}{\partial r}(rQ_r) - rp = 0 \tag{2.100}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) + \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} - M_\theta - rQ_r = 0 \tag{2.101}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_{r\theta}) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - M_{\theta r} - rQ_\theta = 0 \tag{2.102}$$

La scrierea ecuațiilor de echilibru s-a luat în considerare faptul că pentru sferă există relația : $r_1=r_2=R$. De asemenea s-a admis pentru învelitorile subțiri de deschidere mică $dr/d\varphi=R\cos\varphi \approx R$. Presiunea internă notată în relația (1.86) cu p_r s-a notat cu p .

Dependența deformațiilor de deplasări devine :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{2.103}$$

$$\gamma_{\theta r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \quad , \quad \chi_r = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (2.104)$$

$$\chi_{\theta} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \quad (2.105)$$

$$\chi_{\theta r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \quad (2.106)$$

Este de menționat că în relațiile (2.104), (2.105), (2.106) s-au neglijat termenii în deplasările u și v , fiind nesemnificativi în comparație cu cei în w [20], [107].

Considerând solicitarea învelitorii ca axial simetrică ($Q_{\theta} = N_{r\theta} = M_{\theta r} = 0$) ecuațiile (2.98)–(2.102) se simplifică devenind :

$$\frac{d}{dr} (rN_r) - N_{\theta} - \frac{r}{R} Q_r + rp_r = 0 \quad (2.107)$$

$$\frac{d}{dr} (rQ_r) + \frac{r}{R} (N_r + N_{\theta}) - rp_r = 0 \quad (2.108)$$

$$\frac{d}{dr} (rM_r) - M_{\theta} - rQ_r = 0 \quad (2.109)$$

Cu observația că în învelitori sferice subțiri de deschidere unghiulară mică termenul rQ_r/R din ecuația (2.107) are o pondere neglijabilă și considerând că sarcina exterioară p_r derivă dintr-un potențial de sarcină Z ($p_r = -dZ/dr$), ecuația (2.107) este identic satisfăcută dacă eforturile N_r și N_{θ} se exprimă sub forma :

$$N_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{dF}{dv} + Z \quad , \quad N_{\theta} = \frac{d^2 F}{dv^2} + Z \quad (2.110)$$

iar prin conjugarea ecuațiilor (2.103) cu $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ se ajunge la următoarea ecuație de continuitate :

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \cdot \frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr} \right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varepsilon_r}{dr} - \frac{1}{R} \nabla^2 w = 0 \quad (2.111)$$

În relațiile (2.110) F este o funcție de eforturi similară funcției Airy din teoria elasticității iar ∇^2 din ecuația (2.111) reprezintă un operator de forma :

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \quad (2.112)$$

Luând în considerare relațiile care fac legătura între deformații și eforturi de forma :

$$\varepsilon_r = \frac{1}{Eh} (N_r - \nu N_{\theta}) \quad , \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{Eh} (N_{\theta} - \nu N_r) \quad (2.113)$$

respectiv relațiile (2.110), va rezulta pentru ecuația de continuitate (2.111) expresia :

$$\nabla^2 \nabla^2 F - \frac{Eh}{R} \nabla^2 w = (1 - \nu) \nabla^2 z \quad (2.114)$$

Înlocuind Q_r din relația (2.113) în relația (2.112) se obține :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr} (rM_r) - M_\theta \right] + \frac{r}{R} (N_r + N_\theta) - r p = 0 \quad (2.115)$$

Pe baza relațiilor (2.105), (2.106) se pot exprima (neglijând efectele de temperatură) momentele M_r și M_θ astfel :

$$M_r = D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.116)$$

$$M_\theta = D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \quad (2.117)$$

Prin înlocuirea momentelor M_r și M_θ date de relațiile (2.116) și (2.117) respectiv eforturile N_r și N_θ exprimate prin relațiile (2.110) ecuația (2.111) devine :

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{RD} \nabla^2 F = \frac{p}{D} - \frac{2Z}{RD} \quad (2.118)$$

Sistemul de ecuații diferențiale (2.114) , (2.118) în care necunoscutele sunt F și w guvernează starea de tensiune și deformație în cazul general de încovoiere axial simetrică a învelitorilor sferice subțiri de grosime constantă și deschidere unghiulară mică.

În cazul ipotezei absenței forțelor exterioare ($p=p_r=Z=0$) prin luarea în considerare numai a sistemului omogen format din ecuațiile (2.114), (2.118) este posibilă integrarea simultană a celor două ecuații care printr-un artificiu de calcul se pot scrie sub forma :

$$\nabla^2 \nabla^2 (w - \lambda F) + \frac{\lambda Eh}{R} \nabla^2 \left(w + \frac{E}{\lambda h D E} \right) = 0 \quad (2.119)$$

unde : $\lambda^2 = -1/hDE$.

Prin introducerea lungimii caracteristice a învelitorii $l = \sqrt{Rh} / \sqrt[4]{12(1-\nu)}$, ecuația (2.119) se poate exprima ca ecuație omogenă în $w - \lambda F$.

Soluționarea acestei ecuații conduce în final la :

$$w = C_1 \text{ber} \left(\frac{r}{l} \right) + C_2 \text{bei} \left(\frac{r}{l} \right) + C_3 \text{ker} \left(\frac{r}{l} \right) + C_4 \text{kei} \left(\frac{r}{l} \right) + C_5 \quad (2.120)$$

$$F = \frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[C_1 \text{bei} \left(\frac{r}{l} \right) - C_2 \text{ber} \left(\frac{r}{l} \right) + C_3 \text{kei} \left(\frac{r}{l} \right) - C_4 \text{ker} \left(\frac{r}{l} \right) + C_6 \lg \left(\frac{r}{l} \right) \right] \quad (2.121)$$

unde : $C_1 \dots C_6$ sunt constante arbitrare determinabile din condițiile de contur.

Este de menționat că în relația (2.120) s-a omis un termen proporțional cu $\ln(r/l)$ ca fiind nesemnificativ în soluția problemei, dar care trebuie luat în seamă când la polul învelitorii este practicat un orificiu.

Determinate fiind constantele $C_1 \dots C_6$ din condițiile de contur, rezultă N_r și N_θ din relațiile (2.110), respectiv M_r și M_θ din relațiile (2.116) și (2.117). Expresia forței tăietoare Q_r va rezulta din conjuncția relațiilor (2.109) cu relațiile (2.116) și (2.117) și anume :

$$Q_r = D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \tag{2.122}$$

Eforturilor astfel determinate din soluția încovoierii pe margini li se adaugă și cele induse de forțele exterioare considerate separat atunci când încărcarea este compatibilă cu stadiul de membrană.

2.2. Învelitori elipsoidale

Utilizate ca învelitori de capăt în vasele de presiune cu corp cilindric învelitorile elipsoidale sunt frecvente în practica industrială. În figura 2.23. sunt prezentate elementele geometrice ale unei învelitori semieliptice.

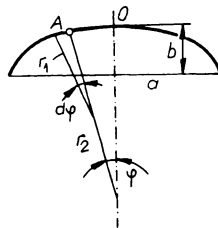


Fig.2.23. Elementele geometrice ale unei învelitori semieliptice.

Pentru un punct A, definit de unghiul φ razele principale de curbură sunt :

$$r_1 = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin \varphi + b^2 \cos \varphi)^2}, \quad r_2 = \frac{a^2}{(a^2 \sin \varphi + b^2 \cos \varphi)^2} \tag{2.123}$$

unde : a este semiaxa mare a elipsei iar b este semiaxa mică a elipsei.

Sistemul de ecuații pentru o învelitoare elipsoidală subțire, derivă din cele aferente învelitorilor solicitate axial simetric (1.81)-(1.87), pentru care mărimile r_1 și r_2 , se înlocuiesc cu expresiile prezentate în relațiile (2.123). Modul de soluționare a sistemului de ecuații diferențiale este analog celui prezentat în subcapitolul 1.7.

Pentru un caz particular de învelitoare elipsoidală supusă unei presiuni interioare uniforme p, se prezintă în literatura de specialitate [20], [21] relațiile pentru determinarea eforturilor N_φ , N_θ și a

deplasării radiale δ . În condițiile stării de membrană, ținând seama că: $\mathfrak{R} = \pi r_0 p$ și de relația (1.98), rezultă :

$$N_\varphi = p \left(r_2 - \frac{r_2^2}{2r_1} \right) \tag{2.124}$$

$$N_\theta = r_2 p - \frac{r_2}{r_1} \tag{2.125}$$

$$\delta = \frac{p r_2^2 \sin \varphi}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2} - \frac{r_2}{2r_1} \right) \tag{2.126}$$

Din relațiile (2.124)-(2.126) rezultă pentru conturul ecuatorial ($\varphi = \pi/2$; $r_1 = b^2/a$; $r_2 = a$) următoarele expresii ale eforturilor N_φ , N_θ și a deplasării δ :

$$N_\varphi = \frac{pa}{2}, \quad N_\theta = pa \left(1 - \frac{a^2}{2b^2} \right) \tag{2.127}$$

$$\delta = \frac{pa^2 \sin \varphi}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2} - \frac{a^2}{2b^2} \right) \tag{2.128}$$

Eforturile N_φ , N_θ , la polul zero al învelitorii ($\varphi = 0$, $r_1 = r_2 = a^2/b$) se vor exprima cu relația :

$$N_\varphi = N_\theta = \frac{pa^2}{2b} \tag{2.129}$$

Din relațiile (1.20), (1.21) deplasarea δ reprezentând creșterea razei cercului paralel va fi :

$$\delta = r_2 \sin \varphi \varepsilon_\theta = \frac{p r_2^2 \sin \varphi}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2} - \frac{r_2}{2r_1} \right) \tag{2.130}$$

iar pentru $\varphi = \pi/2$:

$$\delta = \frac{pa^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2} - \frac{a^2}{2b^2} \right) \tag{2.131}$$

Pentru învelitorile elipsoidale încărcate axial simetric, s-au prezentat soluții în literatura de specialitate [20], [85] prin particularizarea metodologiei la condițiile geometrice ale acestui tip de învelitori.

2.3. Învelitorile cilindrice circulare

Învelitorile cilindrice circulare constituie cazul particular de învelitori cilindrice cel mai frecvent utilizat în construcția recipientelor sub presiune. Studiul învelitorii cilindrice circulare, pentru ușurința analizei, se efectuează în raport cu un sistem de coordonate cilindrice (x, θ, r), față de care se raportează eforturile și momentele din schimbarea unui element de învelitoare (figura 2.24).

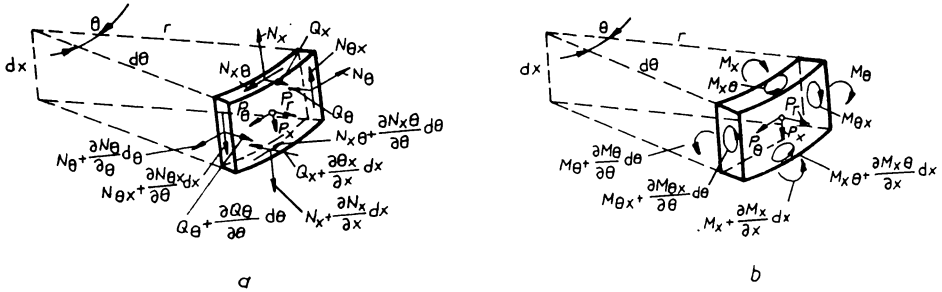


Fig. 2.24. Variația locală a eforturilor unitare (a) și momentelor (b) într-un element de învelitoare cilindrică circulară.

Între acest sistem de coordonate (x, θ, r) și cel adoptat ca în capitolul 1 există următoarele legături :

$$r_0 = r_2 = r, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad r_1 d\varphi = dx \tag{2.132}$$

Inițialele direcției meridiene φ , se înlocuiesc cu indicele x al direcției după generatoare. În aceste condiții ecuațiile generale de echilibru se scriu sub forma :

$$r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + r p_x = 0 \tag{2.133}$$

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - Q_\theta + r p_\theta = 0 \tag{2.134}$$

$$\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_\theta - r p_r = 0 \tag{2.135}$$

$$\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - r Q_\theta = 0 \tag{2.136}$$

$$r \cdot \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - r Q_x = 0 \tag{2.137}$$

$$r N_{x\theta} - r N_{\theta x} + M_{\theta x} = 0 \tag{2.138}$$

Expresiile deformațiilor specifice $\epsilon_x, \epsilon_\theta, \gamma_{\theta x}$ cu condițiile notațiilor din figura 2.25 (notații u și w intervertite pentru păstrarea tradiției notațiilor în teoria învelitorilor cilindrice) vor fi :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r}, \quad \gamma_{\theta x} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.139}$$

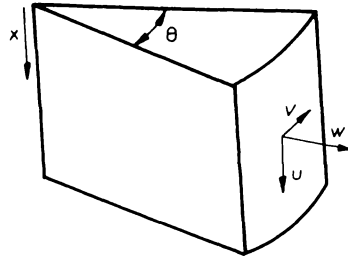


Fig.2.25. Componentele deplasării punctuale pe o învelitoare cilindrică.

Variația curburii și răsucirea în coordonate cilindrice pentru învelitoarea cilindrică circulară, va avea următoarele expresii :

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \chi_\theta = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), 2\chi_{\theta x} = \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.140)$$

Relațiile fizice între eforturi și momente pe de o parte și deformații specifice, variații de curbura și răsuciri sau deplasări pe de altă parte, omițând efectul temperaturii, sunt:

$$N_\theta = K(\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} + \nu \frac{du}{dx} \right) \quad (2.141)$$

$$N_x = K(\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu \frac{w}{r} \right) \quad (2.142)$$

$$N_{\theta x} = K \frac{1-\nu}{2} \gamma_{\theta x} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.143)$$

$$M_\theta = D(\chi_\theta + \nu \chi_x) = \frac{D}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.144)$$

$$M_x = D(\chi_x + \nu \chi_\theta) = \frac{D}{r} \left(r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.145)$$

$$M_{\theta x} = D(1-\nu)\chi_{\theta x} = (1-\nu) \frac{D}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \quad (2.146)$$

La determinarea ecuațiilor momentelor (2.141)-(2.146) s-a adoptat ipoteza propusă în lucrările [20],[81], conform căreia este neglijată contribuția termenilor în deplasarea v în expresiile variației curburii χ_θ , $\chi_{\theta x}$, respectiv a forței Q_θ în ecuația de echilibru (2.142).

Explicitând relațiile de echilibru în deplasările u, v, w se obține următorul sistem de ecuații diferențiale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2r} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{p_x}{K} = 0 \quad (2.147)$$

$$\frac{1+\nu}{2r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{p_\theta}{K} = 0 \quad (2.148)$$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} + \frac{h^2}{12} \left(r \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{r p_r}{K} \right) = 0 \quad (2.149)$$

Soluția acestui sistem rezolvă integral problema învelitorilor cilindrice circulare încărcate cu sarcinile p_x , p_θ , p_r și cu condițiile specifice pe marginile învelitorii.

Formula Donnell [20], [26] a ecuațiilor (2.147)-(2.149) scrisă compact, în cazul $p_r=p_\theta=p_x=0$ se prezintă astfel :

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{r^2 h^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (2.150)$$

$$\nabla^4 v + \frac{2+\nu}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} = 0 \quad (2.151)$$

$$\nabla^4 u + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} = 0 \quad (2.152)$$

unde : $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

Constantele de integrare conținute de soluția sistemului de ecuații (2.150)-(2.151) se determină din condițiile de încărcare pe marginile învelitorii. Cunoscute fiind deplasările u, v, w se pot determina complet din relațiile (2.141)-(2.146) eforturile și momentele din învelitoare. Pentru sistemul Donnell a fost dată de Hoff [70] o soluție explicită.

2.3.1. Învelitori cilindrice circulare în stadiul de membrană

Stadiul de membrană a învelitorilor cilindrice circulare presupune $M_\theta = M_x = M_{x\theta} = M_{\theta x} = 0$ și implicit : $Q_x = Q_\theta = 0$. Ecuațiile de echilibru (2.141)-(2.146) în cazul unei încărcări axiale simetrice ($p_\theta=0$, $N_{x\theta}=N_{\theta x}=M_{x\theta}=Q_\theta=0$ iar M_θ și N_θ sunt independente de Q_θ) se vor prezenta sub următoarea formă :

$$\frac{dN_x}{dx} + p_x = 0 \quad (2.153)$$

$$r \frac{dQ_x}{dx} + N_\theta - r p_r = 0 \quad (2.154)$$

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \quad (2.155)$$

În stadiul de membrană $M_x=Q_x=0$ și în consecință rezultă următoarele ecuații de echilibru :

$$\frac{dN_x}{dx} + p_x = 0 \quad (2.156)$$

$$N_\theta - rp_r = 0 \quad (2.157)$$

Pentru un recipient cilindric cu pereți subțiri încărcat la o presiune interioară uniformă $p=p_r=p_x$, efortul N_θ va fi $N_\theta=rp$. Întrucât efortul N_x este constant în raport cu x ecuația (2.156) este improprie pentru determinarea acestuia. Pentru soluționare se recurge la ecuația (2.20) particularizată la sistemul de coordonate cilindrice în care caz : $\varphi= \pi/2$, $r = r_0$, $\mathcal{R} = \pi r^2 p$ și $N_\theta = N_x$. Va rezulta pentru efortul N_x relația $N_x = rp/2$.

Cu aceste relații pentru eforturi se obțin în continuare expresiile tensiunilor σ_θ și σ_x pentru învelitoarea cilindrică circulară în formă de membrană de grosime h :

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{h} \quad (2.158)$$

$$\sigma_x = \frac{pr}{2h} \quad (2.159)$$

2.3.2. Învelitori cilindrice circulare încărcate axial simetric

În multe cazuri ale recipientilor sub presiune, încărcarea pereților se efectuează axial simetric cu o presiune pr , iar încărcarea $p_x=0$. Din ecuația (2.153) rezultă $N_x=0$. Datorită simetriei axiale rezultă că și deplasarea circumferențială $v=0$, relațiile dintre deformații și deplasarea devenind :

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.160)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{w}{r} \quad (2.161)$$

Luând în considerare relațiile (2.160), (2.161) și relațiile (2.141) (2.142) se obține :

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = -\frac{v w}{r} \quad (2.162)$$

$$N_\theta = \frac{Ehw}{r} \quad (2.163)$$

Din ecuațiile (2.144), (2.145) se pot determina expresiile momentelor M_x , M_θ și anume :

$$M_x = D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.164)$$

$$M_\theta = \nu M_x \quad (2.165)$$

Prin eliminarea lui Q_x din ecuațiile de echilibru (2.145)-(2.146) rezultă :

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = p_r - \frac{N_\theta}{p_r} \quad (2.166)$$

Exprimând momentul M_x și efortul M_θ funcție de deplasare w , se obține următoarea ecuație diferențială :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + 4D\beta^4 w - p_r = 0 \quad (2.167)$$

unde :

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4Dr^2} = \frac{3(1-\nu^2)}{r^2 h^2}$$

Starea de eforturi și deplasări în învelitori cilindrice circulare încărcate axial simetric este complet rezolvată de ecuația diferențială (2.167), ecuație valabilă și pentru învelitori a căror grosime h este variabilă funcție de x .

În cazul unei grosimi (h) constante ecuația (2.167) se reduce la :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w - \frac{p_r}{D} = 0 \quad (2.168)$$

iar soluția acestei ecuații este :

$$w = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x) \quad (2.169)$$

unde : $f(x)$ reprezintă o soluție particulară a ecuației (2.169) iar constantele C_1, \dots, C_4 se determină din condițiile încărcării sau deplasărilor impuse pe marginile învelitorilor.

Dacă $p_r=0$ ecuația (2.168) este omogenă și soluția acestei ecuații este soluția încovoierii pe marginile învelitorii, exprimată prin relația (2.170) în care $f(x)=0$.

Un exemplu de asemenea învelitoare îl reprezintă cilindrul suficient de lung din figura 2.26 încărcat pe marginea cu $x=0$ cu forța tăietoare Q_0 și momentul M_0 uniforme distribuite pe circumferință.

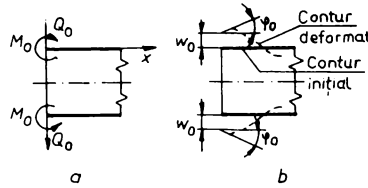


Fig.2.26. Efecte de încovoiere pe marginile unei învelitori cilindrice circulare. a. schema încărcării ; b. schema deplasărilor și rotirilor.

În acest caz soluția ecuației diferențiale $d^4w/dx^4 + \beta^4w=0$ (întrucât $p_r=0$) va fi :

$$w = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (2.170)$$

Forțele Q_0 și momentul M_0 aplicate pe marginea $x = 0$ induc deplasări radiale w_0 și unghiulare φ_0 . Caracterul localizat al deplasărilor de pe margini conduce la amortizări rapide ale acestora, fapt ce permite neglijarea coeficienților C_1 și C_2 asociați factorului $e^{\beta x}$ (specific deplasărilor pentru valori mari ale lui x).

În aceste condiții expresia deplasării w va fi dată de relația :

$$w = e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (2.171)$$

Din relațiile $M_x=D(d^2w/dx^2)$ și $Q_x=(dM_x/dx)$ rezultă pe baza egalității (2.171) pentru $x=0$ următoarele valori ale constantelor C_3 și C_4 :

$$C_3 = \frac{1}{2\beta^3 D}(Q_0 + \beta M_0) , \quad C_4 = -\frac{M_0}{2\beta^2 D} \quad (2.172)$$

Expresia deplasării w după înlocuirea relațiilor (2.171) în (2.172) va fi :

$$w = e^{-\beta x} \left(\frac{Q_0 + \beta M_0}{2\beta^3 D} \cos \beta x - \frac{M_0}{2\beta^2 D} \sin \beta x \right) \quad (2.173)$$

Introducând notațiile :

$$\varphi_{\beta x} = e^{-\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x) ; \psi_{\beta x} = e^{-\beta x}(\cos \beta x - \sin \beta x) \quad (2.174)$$

$$\theta_{\beta x} = e^{-\beta x} \cos \beta x; \zeta_{\beta x} = e^{-\beta x} \sin \beta x \quad (2.175)$$

rezultă pentru deplasare (w), rotirea tangentei (V), momentul (M_x), forța tăietoare (Q_x) și a efortului N_θ următoarele expresii :

$$w = \frac{1}{2\beta^3 D} (\beta M_0 \varphi_{\beta x} + Q_0 \theta_{\beta x}) \tag{2.176}$$

$$V = \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2\beta^2 D} (2\beta M_0 \theta_{\beta x} + Q_0 \varphi_{\beta x}) \tag{2.177}$$

$$M_x = D \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{\beta} (\beta M_0 \varphi_{\beta x} + 2Q_0 \xi_{\beta x}) \tag{2.178}$$

$$Q_x = D \cdot \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_0 \psi_{\beta x} - 2\beta M_0 \zeta_{\beta x} \tag{2.179}$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{r} \cdot w \tag{2.180}$$

Dependența funcțiilor $\varphi_{\beta x}$, $\psi_{\beta x}$, $\theta_{\beta x}$, $\zeta_{\beta x}$ de argumentul βx sunt ilustrate în figura 2.27.

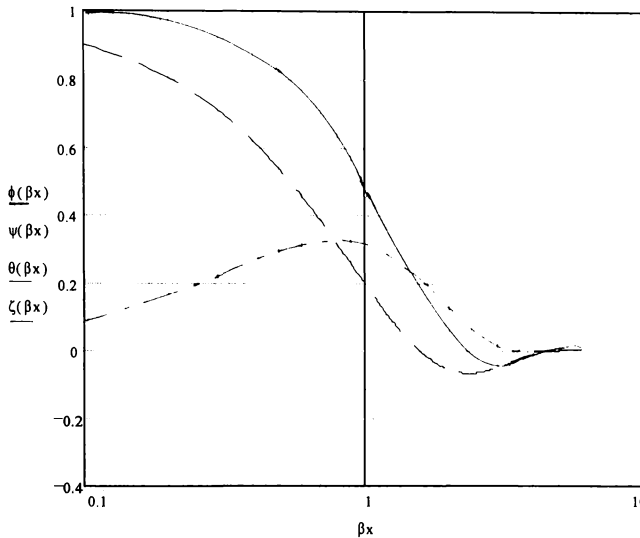


Fig.2.27. Valorile funcțiilor $\varphi_{\beta x}$, $\psi_{\beta x}$, $\theta_{\beta x}$, $\zeta_{\beta x}$.

Este de observat că pentru $\beta x > \pi$, valorile funcțiilor sunt neglijabile, ceea ce de fapt atestă caracterul local al încovoierii pe margini, indusă de efortul Q_0 și momentul M_0 , respectiv validează opțiunea pentru neglijarea constantelor C_1 , C_2 în soluția generală dată de relația (2.170).

Din graficele reprezentate în figura 2.27 rezultă că atunci când apar efecte de margine la o distanță $x > \pi/\beta$ (în înveltoarea cilindrică circulară de lungime mică) efectele încovoierii marginale se interferează iar soluția problemei include și aportul constantelor C_1 și C_2 la soluția generală (2.170).

Pentru diferite cazuri de încărcare pe marginile învelitorii cilindrice circulare lungi, rezultă :

- cazul când este dat Q_0 :
 - $w(x) = \frac{Q_0}{2\beta^3 D} \theta_{\beta x}$, $w_0 = \frac{Q_0}{2\beta^3 D}$
 - $\frac{dw(x)}{dx} \equiv \varphi(x) = -\frac{Q_0}{2\beta^2 D} \varphi_{\beta x}$, $\varphi_0 = -\frac{Q_0}{2\beta^2 D}$
 - $M(x) = \frac{Q_0}{\beta} \xi_{\beta x}$
 - $Q(x) = Q_0 \psi_{\beta x}$
- cazul când este dat M_0 :
 - $w(x) = \frac{M_0}{2\beta^2 D} \psi_{\beta x}$, $w_0 = \frac{M_0}{2\beta^2 D}$
 - $\frac{dw(x)}{dx} \equiv \varphi(x) = -\frac{M_0}{\beta D} \theta_{\beta x}$, $\varphi_0 = -\frac{M_0}{\beta D}$
 - $M(x) = M_0 \varphi_{\beta x}$
 - $Q(x) = -2\beta M_0 \xi_{\beta x}$
- cazul când este dat w_0 :
 - $w(x) = w_0 \varphi_{\beta x}$
 - $\frac{dw(x)}{dx} \equiv \varphi(x) = -2\beta w_0 \xi_{\beta x}$
 - $M(x) = -2D\beta^2 \psi_{\beta x}$, $M_0 = -2D\beta^2$
 - $Q(x) = 4D\beta^2 w_0 \theta_{\beta x}$, $Q_0 = 4D\beta^3 w_0$
- cazul când $w_0=0$:
 - $w(x) = \frac{\varphi_0}{\beta} \xi_{\beta x}$
 - $\varphi(x) = \varphi_0 \psi_{\beta x}$
 - $M(x) = -2D\beta \varphi_0 \theta_{\beta x}$, $M_0 = -2D\beta \varphi_0$
 - $Q(x) = 4D\beta^3 \varphi_0 \theta_{\beta x}$, $Q_0 = 4D\beta^3 \varphi_0$

În cazul învelitorilor cilindrice circulare presurizate interior se poate considera ca soluție particulară a ecuației (2.171) următoarea expresie .

$$f(x) = -\frac{p}{4\beta^4 D} = -\frac{pr^2}{Eh} \quad (2.181)$$

Determinarea deplasărilor, rotirilor, eforturilor și momentelor pentru asemenea învelitori (de lungime l între reazeme) poate fi abordată pornind de la soluția generală, luând ca origine pentru axa x mijlocul învelitorii. Din motive de simetrie va rezulta $C_2=C_3=0$ iar soluția generală (2.169) va deveni :

$$w = C_1 \sin \beta x \cdot \text{sh} \beta x + C_4 \cos \beta x \cdot \text{ch} \beta x - \frac{p}{4\beta^4 D} \quad (2.182)$$

Determinarea constantelor C_1 și C_2 se efectuează corelat cu condițiile de încărcare la capăt a învelitorii și anume :

- pentru învelitoarea încastrată la ambele capete condițiile pe margine sunt anularea deplasării radiale și rotirii date de relațiile :

$$(w)_{x=\frac{l}{2}} = 0 \quad \text{și} \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=\frac{l}{2}} = 0 \quad (2.183)$$

- pentru învelitoarea simplu rezemată condițiile pe margini sunt anularea deplasării radiale și a momentului, exprimate prin relațiile :

$$(w_x)_{x=\frac{l}{2}} = 0 \quad \text{și} \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=\frac{l}{2}}^2 = 0 \quad (2.184)$$

Pe baza relațiilor (2.183), (2.184) și cu luarea în considerare a relațiilor (2.176)-(2.180) se pot determina deplasările, rotirile, efortul și momentele în orice secțiune a învelitorii. Literatura de specialitate [20], [64] prezintă în cadrul teoriilor liniare de încovoiere a învelitorilor cilindrice subțiri, soluții pentru o mare varietate de încărcări axial simetrice și condiții de rezemare.

2.4. Învelitori toroidale

Obținută prin rotirea unui cerc de rază r_1 în jurul unei axe (figura 2.28), învelitoarea toroidală are proprietatea potrivit căreia o normală la această suprafață intersectează învelitoarea în două puncte. În cazul unei astfel de geometrii a învelitorii coordonata φ nu mai definește în mod univoc un punct de pe învelitoare.

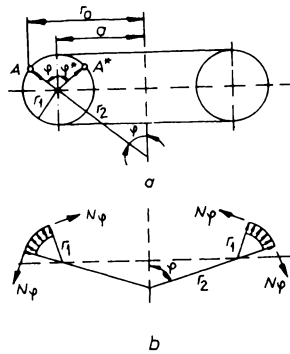


Fig.2.28. Îneltoare toroidală. a. elemente geometrice; b. schema de încărcare în secțiune mediană.

Cu notațiile din figura 2.28. vor rezulta pentru raza de curbură (r_2) și raza cercului paralel (r_0) următoarele expresii :

$$r_2 = \frac{(a + r_1 \sin \varphi)}{\sin \varphi} \tag{2.185}$$

$$r_0 = a + r_1 \sin \varphi \tag{2.186}$$

Când învelitoarea toroidală este supusă unei presurizări uniforme aceasta se comportă ca o membrană. Din ecuațiile de echilibru rezultă pentru presiunea uniformă p următoarea relație :

$$2\pi r_0 N_\varphi \sin \varphi = \pi p (r_0^2 - a^2) \tag{2.187}$$

și în consecință :

$$N_\varphi = \frac{pr(r_0 + a)}{2r_0} \tag{2.188}$$

Din relația (1.97) rezultă pentru efortul circumferențial N_θ expresia :

$$N_\theta = \frac{pr_1}{2} \tag{2.189}$$

Pe baza relațiilor (1.55) va rezulta în absența constrângerilor de temperatură, următoarea expresie pentru deplasarea radială δ :

$$\delta = \frac{pr_1}{2Eh} [a(1 - 2\nu) + r_1 \sin \varphi(1 - \nu)] \tag{2.190}$$

În cazul învelitorii toroidale literatura de specialitate [20], [123] relevă faptul că soluția de membrană nu rezolvă cu suficientă acuratețe starea de eforturi pentru unghiurile φ mici. Condiția unei acuratețe acceptabile este dată de relația :

$$\sin^2 \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \geq h / 4r_1 \quad (2.191)$$

Pentru învelitorile la care se impune și luarea în considerare a soluției încovoierii pe margini prin încărcări distribuite axial simetric pe margini, se utilizează ecuațiile (1.90), (1.91) în condițiile de aproximare specifice pentru această soluție.

2.5. Concluzii privind aplicațiile calculului numeric la studiul analitic al învelitorilor elastice subțiri de revoluție

Dedicat studiului celor mai reprezentative forme de recipiente sub presiune, capitolul 2 al prezentei lucrări analizează învelitorile sferice, elipsoidale, cilindrice și toroidale având ca suport demersul analitic conjugat cu tehnica numerică de calcul.

Prin elaborarea programului de calcul PROGRAF în limbaj Turbo-Pascal se oferă utilizatorului posibilitatea trasării tridimensională și prin afișarea punctuală a valorilor curbelor și suprafețelor pentru diferite funcții care au cunoscută expresia analitică.

În subcapitolul 2.1 (învelitori sferice) s-a analizat pe baza acestui program dependența eforturilor N_φ , N_θ și a deplasărilor v și w pentru cazul încărcării învelitorii în stadiul de membrană prin greutate proprie respectiv hidrostatică. Graficele ridicate prin procedurile specifice programului oferă utilizatorului informații pertinente privind variația funcție de unghiul φ a parametrilor analizați.

Metoda inedită de studiu utilizată în cazul învelitorilor sferice încărcate în stadiul de membrană a fost extinsă și în cazul învelitorilor sferice supuse la încărcări pe margine. S-a luat în considerare încărcarea axial simetrică a învelitorii subțiri de revoluție, încărcare specifică recipientelor sub presiune.

Studiul învelitorilor sferice încărcate axial simetric s-a făcut cu ajutorul seriilor hipergeometrice, soluție mai puțin tratată în literatura de specialitate din cauza slabei convergențe în cazul raportului $R/h > 60$. Elaborând programul de calcul SERII-HG autorul oferă un mijloc de rezolvare cu ajutorul acestor serii pentru o valoare mult mai mare a raportului R/h , lărgind astfel domeniul de utilizare a metodei seriilor hipergeometrice în condițiile de eroare prestabilită.

S-au analizat deasemeni două metode aproximative de soluționare a problemei învelitorilor încărcate axial simetric, aplicabile în cazul unghiurilor $\varphi > 30^\circ$. Pe baza programului de calcul SERII-HG și PROGRAF s-au pus în evidență grafic variația funcție de unghiul φ a efortului unitar Q_φ și momentului M_φ pentru un caz particular de învelitoare sferică încărcată axial simetric din care au rezultat cu claritate domeniile în care pot fi acceptate metodele aproximative de soluționare a problemei acestor învelitori.

Au fost analizate în continuare învelitorile de tip elipsoidal, cilindric și toroidal pentru care nu s-au dat exemple de studiu pe baza programului de calcul PROGRAF, program aplicabil și în cazul acestor forme de învelitori.

Contribuția autorului la soluționarea problemei diferitelor forme de învelitori elastice subțiri de revoluție constă în :

- elaborarea programului de calcul denumit PROGRAF având o structură modulară care asigură un grad sporit de generalitate a cărui rezultate au fost confirmate și prin utilizarea programelor Mathcad și Matlab 4.2 for Windows și 5.0 for Windows;
- elaborarea programului de calcul SERII-HG pe baza căruia se poate aplica metoda seriilor hipergeometrice la un domeniu lărgit de învelitori sferice încărcate axial simetric;
- analiza pertinentă pe baza programelor PROGRAF și SERII-HG a domeniilor de aplicabilitate a metodei seriilor hipergeometrice (metodă exactă) și a celor aproximative în condițiile de eroare admisă, cu delimitarea porțiunilor de domenii de variație a unghiului φ în care una din cele două metode de calcul aproximative poate fi adoptată.

Capitolul 3. Aplicații ale calcului numeric la studiul joncțiunilor învelitorilor subțiri

În practica industrială apar frecvent joncțiuni între învelitori cu geometrie diferită care conduc la efecte de sincronizare perturbatoare a stadiului de membrană generate de solicitarea exterioară. În figura 3.1. este prezentată o astfel de joncțiune cu punerea în evidență a efortului transversal Q_0 și a momentului M_0 care produce efecte de încovoiere.

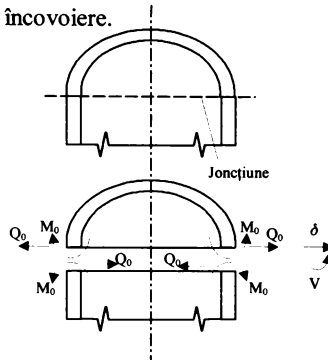


Fig.3.1. Efecte de încovoiere pe joncțiunea învelitorilor cu geometrie diferită.

Analizate separat de încărcarea exterioară, eforturile Q_0 și momentele M_0 induc în învelitorile care se întâlnesc în joncțiune, solicitări și deformații conform soluției încovoierii pe margini.

Determinarea mărimilor Q_0 și M_0 din joncțiune, se efectuează pe baza condiției fizice de continuitate a deplasării radiale δ și a rotirii unghiulare V , în secțiunea care materializează joncțiunea. Această condiție implică egalitatea deplasărilor și rotirilor dintre cele două învelitori. Cunoscute fiind mărimile Q_0 și M_0 se calculează tensiunile și deformațiile pe joncțiune și în zonele adiacente. Admițând tensiunile și deformațiile de membrană induse de încărcarea exterioară se obține în final starea globală de tensiune și deformație pe joncțiune și în vecinătatea ei. În continuare se vor analiza unele dintre cele mai uzuale joncțiuni de acest tip.

3.1. Învelitoarea compusă din cilindru și semisferă

În ansamblul format dintr-un cilindru și o sferă de aceeași rază r și grosime h presurizate cu o mărime p - considerat ca două învelitori detașate prin joncțiune - deplasările pe marginile învelitorilor se pot exprima conform relațiilor (2.5), (2.158), (2.159) prin :

$$\delta_c = r\epsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_x) = \frac{pr^2}{2Eh}(2 - \nu) \tag{3.1}$$

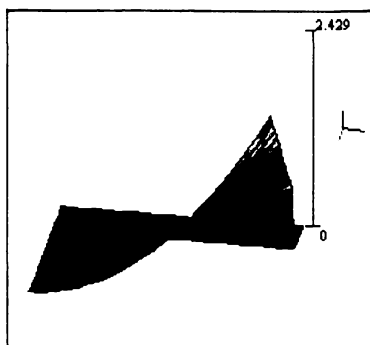
$$\delta_s = \frac{pr^2}{2Eh}(1 - \nu) \tag{3.2}$$

unde: - δ_c - deplasarea radială pe marginea învelitorii cilindrice;

- δ_s - deplasarea radială pe marginea învelitorii sferice.

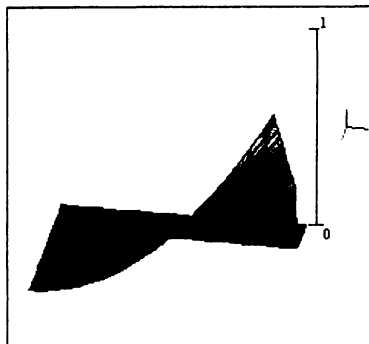
Deplasările radiale δ_c și δ_s , nefiind egale se impune (din condiții de continuitate) ca în secțiunea joncțiunii să acționeze efortul Q_0 și eventual momentul M_0 (figura 3.1) care induc o deplasare egală și de sens opus cu diferența $\delta_c - \delta_s = pr^2 / (2Eh)$.

Pentru joncțiuni cilindru-sferă având parametrii : $p = 0,5 \dots 1,5 \text{ daN/mm}^2$, $R = 200 \dots 2000 \text{ mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/mm}^2$, $h = 10 \text{ mm}$, variația deplasărilor δ_c și δ_s sunt reprezentate în figurile 3.2.a și b iar diferența : $\delta_c - \delta_s$ în figura 3.2.c.



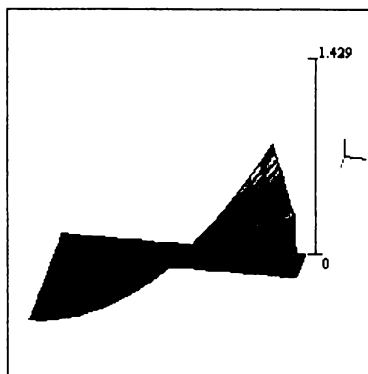
Mc

Fig.3.2.a.



Ms

Fig.3.2.b.



Mdif

Fig.3.2.c.

Fig.3.2. Variația deplasărilor δ_c și δ_s și a diferenței $\delta_c - \delta_s$ funcție de presiunea p la diferite valori ale razei R .

Prin luarea în considerare a efortului Q_0 și a momentului M_0 expresia deplasării δ_c și a rotirii V_c în joncțiune (pe partea cilindrică) va fi conform relațiilor (2.175)-(2.176) :

$$\delta_c = \frac{Q_0}{2\beta^3 D} + \frac{M_0}{2\beta^2 D} + \frac{pr^2}{2Eh}(2-\nu) \quad (3.3)$$

$$V_c = -\left(\frac{Q_0}{2\beta^2 D} + \frac{M_0}{\beta D} \right) \quad (3.4)$$

Pe baza relațiilor (2.54)-(2.59) în cazul semisferei ($\alpha=\pi/2$) rezultă pentru deplasarea δ_s și rotirea V_s următoarele expresii :

$$\delta_s = \frac{2\lambda^2 M_0}{Eh} - \frac{2\lambda r Q_0}{Eh} + \frac{pr^2}{2Eh}(1-\nu) \quad (3.5)$$

$$V_s = \frac{4\lambda^3 M_0}{Erh} - \frac{2\lambda^2 Q_0}{Eh} \quad (3.6)$$

Condițiile de continuitate a deplasărilor radiale ($\delta_c=\delta_s$) și a rotirilor ($V_c=V_s$) conduce la :

$$Q_0 = -\frac{p}{8\beta} \quad , \quad M_0 = 0 \quad (3.7)$$

Cu aceste mărimi Q_0 și M_0 se poate determina starea de tensiune în învelitoarea cilindrică și cea sferică. Astfel, pentru învelitoarea cilindrică rezultă :

$$N_\theta = -\frac{pr}{4} \cdot e^{-\beta x} \cos \beta x \quad (3.8)$$

$$N_x = \frac{pr}{2} \quad (3.9)$$

$$M_x = -\frac{p}{8\beta^2} \cdot e^{-\beta x} \sin \beta x \quad (3.10)$$

$$M_\theta = -\frac{p\nu}{8\beta^2} \cdot e^{-\beta x} \sin \beta x \quad (3.11)$$

Corespunzător acestor eforturi și momente rezultă următoarea stare de tensiune biaxială în învelitoarea cilindrică :

$$\sigma_x = \mp \frac{6M_x}{h^2} + \frac{N_x}{h} = \pm \frac{3p}{4\beta^2 h^2} \cdot e^{-\beta x} \sin \beta x + \frac{pr}{2h} \quad (3.12)$$

$$\sigma_\theta = \mp \frac{6M_\theta}{h^2} + \frac{N_\theta}{h} = \pm \frac{3\nu p}{4\beta^2 h^2} e^{-\beta x} \sin \beta x + \frac{pr}{4h} e^{-\beta x} \cos \beta x + \frac{pr}{h} \quad (3.13)$$

Este de precizat că primul semn se aplică suprafeței exterioare.

Starea de eforturi în învelitoarea semisferică este dată de relațiile (2.54)-(2.59) în care $\alpha = \pi/2$ iar constantele A și β se determină din condițiile de încărcare pe margine. Conform acestor relații eforturile și momentele în învelitoarea semisferică vor fi :

$$N_{\theta} = \frac{pr}{4} \cdot e^{-\lambda\psi} \cos \lambda\psi + \frac{pr}{2} \tag{3.14}$$

$$N_{\varphi} = \frac{pr}{2} \tag{3.15}$$

$$M_{\varphi} = -\frac{prh}{8\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot e^{-\lambda\psi} \sin \lambda\psi \tag{3.16}$$

$$M_{\theta} = -\frac{\nu prh}{8\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot e^{-\lambda\psi} \sin \lambda\psi \tag{3.17}$$

În baza relațiilor (3.14)-(3.17) starea de tensiune indusă în învelitoarea semisferică se va exprima astfel :

$$\sigma_{\varphi} = \mp \frac{6M_{\varphi}}{h^2} + \frac{N_{\varphi}}{h} = \mp \frac{3pr}{4h\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot e^{-\lambda\psi} \sin \lambda\psi + \frac{pr}{2h} \tag{3.18}$$

$$\sigma_{\theta} = \mp \frac{6M_{\theta}}{h^2} + \frac{N_{\theta}}{h} = \frac{pr}{4h} \cdot e^{-\lambda\psi} \left(\cos \lambda\psi \mp \frac{3\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sin \lambda\psi \right) + \frac{pr}{h} \tag{3.19}$$

Analog învelitorii cilindrice, primul semn se referă la suprafața exterioară a înveltoarei semisferice.

Variația tensiunilor totale σ_x (σ_{φ}) și σ_{θ} în porțiunea cilindrică și semisferică este prezentată în figura 3.3.

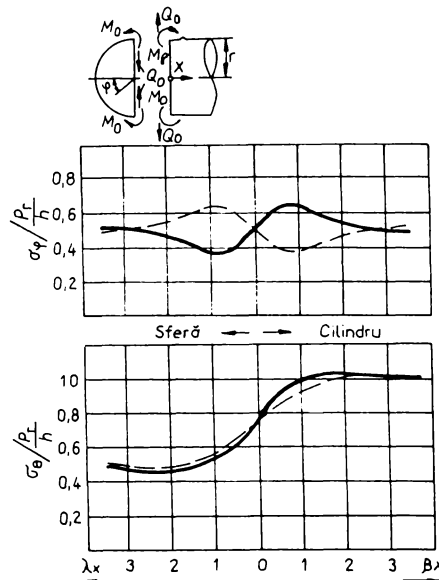


Fig.3.3. Variația tensiunilor în vecinătatea joncțiunii cilindru - sferă presurizată interior.

3.2. Înelitoare coaxială cilindru - elipsoid

Un alt exemplu de învelitoare compusă, întâlnită frecvent este cea realizată prin joncțiunea coaxială a unei virole cilindrice de rază r cu o învelitoare elipsoidală de aceeași grosime (h) ale cărei margini pe joncțiune corespund unui unghi meridian de $\varphi=\pi/2$. Se consideră că învelitoarea compusă în acest mod, este supusă unei presiuni interioare uniforme (p).

Relația (2.116) stabilită în capitolul 2 al prezentei lucrări pentru deplasarea radială pe marginile învelitorii elipsoidale, se scrie (în condițiile în care $r = a$) astfel :

$$\delta_e = \frac{pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2} - \frac{r^2}{2b^2} \right) \quad (3.20)$$

unde: - r - raza cilindrului,

- a - semiaxa mare a elipsei,

- b - semiaxa mică a elipsei.

Determinarea deplasării radiale δ_e a marginilor cilindrului se efectuează cu ajutorul relației (3.1). Similar joncțiunii cilindrului-sferă, rezultă că momentul M_0 pe joncțiune este nul. În consecință forța tăietoare Q_0 se poate determina pornind de la diferența $\delta_c - \delta_e$, care în cazul joncțiunii coaxiale cilindru-elipsoid devine :

$$\delta_c - \delta_e = \frac{pr^2}{Eh} \cdot \frac{r^2}{2b^2} \quad (3.21)$$

Condiția care se impune este ca suma valorilor numerice ale deplasărilor marginale ale celor două învelitori să fie egală cu diferența $\delta_c - \delta_e$. Încovoierea prin Q_0 pe marginile învelitorii având un caracter local se poate considera (cu aproximație acceptabilă) ca fiind cilindrică cu rază r . Cu această aproximație se poate aplica relația (3.10), care la $x=0$ și $M_0=0$, va deveni pentru învelitoarea cilindrică :

$$\frac{\delta_c - \delta_e}{2} = w_{(x=0)} = -\frac{Q_0}{\beta^3 D} \quad (3.22)$$

Luând în considerare relațiile (3.70) și (3.71) rezultă :

$$Q_0 = -\frac{pr^2}{8\beta b^2} \quad (3.23)$$

Pentru porțiunea cilindrică eforturile unitere și tensiunile se determină cu relațiile (2.161)-(2.165). Soluția pentru porțiunea elipsoidală adiacentă joncțiunii, este cea a sistemului de ecuații (2.124)-(2.126).

O soluție cu aproximație acceptabilă este dată în literatura de specialitate [20],[83] (nerecurgându-se la rezolvarea prin diferențe finite) iar rezultatele experimentale [33] au confirmat concordanța satisfăcătoare între aceste două soluții.

3.3. Penetrații în învelitori subțiri

Învelitoare compusă poate fi considerată și joncțiunea dintre un cilindru de rază r suficient de lung și o sferă de rază R , figura 3.4.

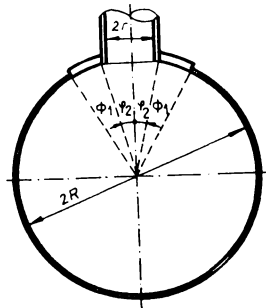


Fig.3.4. Ștuț cilindric pe o învelitoare sferică cu întărire.

Notând cu φ_2 unghiul sub care cilindrul intersectează sfera aceasta va fi :

$$\varphi_2 = 2 \arcsin \frac{r}{R} \tag{3.24}$$

Din cauza tensiunilor mărite datorată efectelor de concentrare provocate de penetrație, învelitoarea sferică este întărită pe o deschidere $2\Phi_1$. Analiza ansamblului cilindru-sferă supus la o presiune interioară p se efectuează considerând porțiunea cilindrică detașată de cea sferică așa cum se ilustrează în figura 3.5.

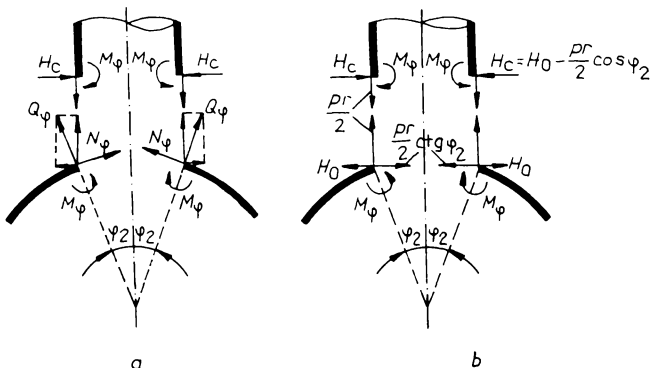


Fig.3.5. Încărcarea pe joncțiunea ștuț cilindric - învelitoare sferică.

Pe învelitoarea sferică la deschidere $2\varphi_2$ acționează efortul unitar meridian N_φ și efortul unitar tăietor Q_φ respectiv momentul M_φ . Relația dintre eforturile unitare N_φ și Q_φ în condițiile de echilibru, pe cercul paralel de rază r pe sferă (figura 3.5.a) este următoarea :

$$N_\varphi = -Q_\varphi \operatorname{ctg}\varphi_2 + p \frac{R}{2} \quad (3.25)$$

Din condiția de echilibru interior pe joncțiune, proiecția pe orizontală a eforturilor unitare pe marginea învelitorii sferice, trebuie să fie egală cu componenta orizontală H_c aplicată pe marginea cilindrului ceea ce conduce la :

$$H_c = Q_\varphi \sin \varphi_2 - N_\varphi \cos \varphi_2 = \frac{Q_\varphi}{\sin \varphi_2} - p \frac{R}{2} \cos \varphi_2 = H_0 - \frac{pr}{2} \operatorname{ctg}\varphi_2 \quad (3.26)$$

unde H_c este forța tăietoare orizontală.

Pentru satisfacerea condiției de echilibru în joncțiunea cilindrului forța orizontală : $H_0 - (pr/2) \operatorname{ctg} \varphi_2$ are orientarea spre interior (figura 3.5.b).

Luând în considerare relația (3.24) și relațiile (3.25) (3.26) rezultă, pentru proiecția pe verticală a eforturilor pe marginea sferei, relația :

$$Q_\varphi \cos \varphi_2 + N_\varphi \sin \varphi_2 = \frac{pr}{2} \quad (3.27)$$

Satisfacerea condițiilor de echilibru ale momentului implică aplicarea momentului M_φ pe marginea cilindrului. Mărimile necunoscute M_φ și H_0 se determină din condițiile de continuitate pe joncțiune și anume:

$$\delta_c = \delta_s \quad , \quad V_c = V_s \quad (3.28)$$

Deplasarea δ_c se determină prin însumarea deplasărilor datorate presiunii interne uniforme. forței tăietoare unitare H_c uniform distribuite și momentului unitar uniform distribuit. Rotirea V se determină de asemeni sub acțiunea aceluiași factori (p , H_c , M_φ).

În cazul cilindrului, coeficienții de influență asupra deplasărilor δ_c și rotirii V_c sub acțiunea presiunii interioare (p), forței tăietoare (H_c) și momentului (M_φ) se exprimă prin relațiile [20] :

$$\delta_{p_c} = \frac{pr^2}{2Eh_c} (2 - \nu) \quad v_{p_c} = 0 \quad (3.29)$$

$$\delta_{h_c} = \frac{1}{2D\beta^3} \quad v_{h_c} = \frac{1}{2D\beta^2} \quad (3.30)$$

$$\delta_{M_c} = \frac{1}{2D\beta^2} \quad v_{M_c} = \frac{1}{D\beta} \quad (3.31)$$

Prin însumarea efectelor produse de presiune, forța tăietoare și momentul M_φ vor rezulta următoarele relații pentru determinarea deplasării totale (δ_c) și a rotației cilindrului pe joncțiunea cu învelitoarea sferică :

$$\delta_c = \frac{pr^2}{2Eh_c}(2-\nu) - \left(H_0 - \frac{pr}{2} \operatorname{ctg}\varphi_2 \right) \frac{1}{2D\beta^2} + \frac{M_\varphi}{2D\beta^3} \quad (3.32)$$

$$V_c = \left(H_0 - \frac{pr}{2} \operatorname{ctg}\varphi_2 \right) \frac{1}{2D\beta^2} - \frac{M_\varphi}{\beta D} \quad (3.33)$$

Se consideră deplasarea δ pozitivă când este spre exterior iar rotirea V când tangenta se rotește în sens invers sensului trigonometric.

Pentru deplasarea (δ_s) și rotirea (V_s) pe marginea deschiderii din învelitoarea sferică rezultă relațiile :

$$\delta_s = \delta_{H_s} H_0 + \delta_{M_s} M_\varphi + \delta_{p_s} \quad (3.34)$$

$$V_s = v_{H_s} H_0 + v_{M_s} M_\varphi + v_{p_s} \quad (3.35)$$

Coefficienții de influență datorită presiunii (δ_{p_s} și v_{p_s}) sunt dați de relațiile :

$$\delta_{p_s} = \frac{pR^2}{2Eh}(1-\nu)\sin\varphi_2 \quad (3.36)$$

$$v_{p_s} = 0 \quad (3.37)$$

Pentru cazuri particulare, cum este cel al învelitorilor cu deschidere la pol pe segmenti de învelitoare sferice, la care lungimea meridianului este suficient de mare pentru ca perturbațiile pe marginea segmentului să nu se intercondiționeze, au fost stabilite expresiile coeficienților din influență în lucrarea [82].

Geometriile și încărcările complexe ale penetrațiilor în recipienți sub presiune, comparativ cu cazul analizat, conduc la mari dificultăți în obținerea soluțiilor generale a stării de eforturi și deplasare. Întăririle aplicate în jurul penetrațiilor pentru compensarea efectului detașării de material din învelitoare, constituie un exemplu semnificativ în acest sens.

În figura 3.6.a este prezentată o construcție tipică de întărire sudată în jurul unui ștuț cilindric.

În lucrările [40], [79] este prezentată analiza numerică și experimentală prin tensometrie electrică rezistivă pentru o astfel de configurație. Este de precizat însă, că atât în ștuțul cilindric, cât și în întăriri, concentrările puternice determinate prin analiza numerică nu sunt regăsite pe cale experimentală, concluzie la care au ajuns și alți cercetători [113].

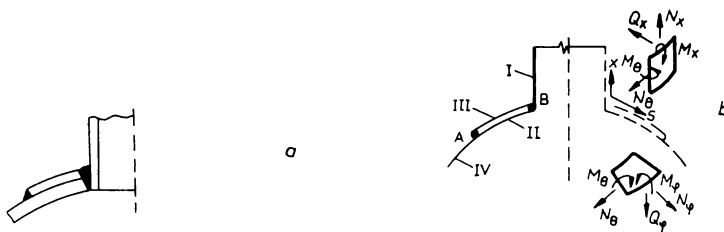


Fig.3.6. Geometria joncțiunii ștuț-cilindric, învelitoare sferică cu întărire: a.- schema de îmbinare prin sudare; b. - schema de calcul.

Tensiunile maxime apar în general pe joncțiune în învelitoarea sferică, atât în direcția circumferențială, cât și meridiană.

În întăritură și în porțiunea învelitorii de sub întăritură, tensiunile circumferențiale sunt considerabil mai mari decât tensiunea de membrană în învelitoarea sferică. Un efect de concentrare mai accentuat se produce pentru tensiunile meridiane pe joncțiunea întăriturii cu învelitoarea sferică. Esențial din punct de vedere al rezistenței, sunt tensiunile de tracțiune, al căror maxim apare în joncțiune pe partea exterioară.

Estimarea globală a tensiunilor pe joncțiune, utilizând noțiunea de coeficient de concentrare al tensiunii α_p , este preferată analizei teoretice și experimentale a stării de tensiune în jurul penetrațiilor.

Coeficientul de concentrare a tensiunii α_p , este definit prin relația :

$$\alpha_p = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_m} \tag{3.38}$$

unde : - σ_{max} - tensiunea maximă pe joncțiune

- σ_m - tensiunea de membrană.

Tensiunea de membrană σ_m în sfera de rază R și grosime h' , supusă la presiunea p, este dată de relația :

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h'} \tag{3.39}$$

Trebuie precizat că grosimea h' , corespunde întăririi care este suficient extinsă în jurul penetrației, pentru a considera că penetrația pătrunde într-o sferă cu grosimea h' , pe toată întinderea.

În lucrarea [106] a fost analizată pe calculator, soluția pentru o penetrație cilindrică într-o sferă prezentată. Dependența coeficientului de concentrare α_p în raport cu parametrul adimensional

$\rho = \frac{r}{R} \sqrt{\frac{R}{h'_s}}$, pentru diferite valori ale raportului grosimilor h_c/h'_s este prezentată în figura 3.7.

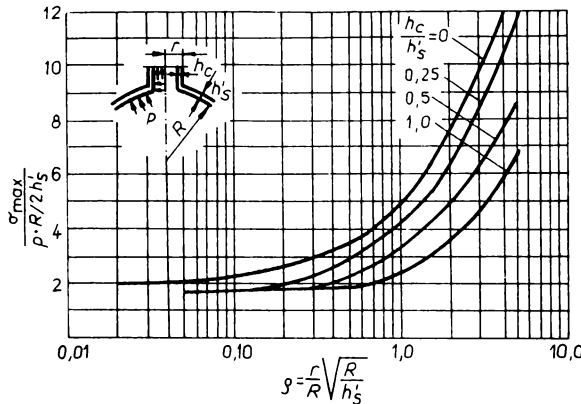


Fig.3.7. Tensiunile maxime principale în sferă adiacent joncțiunii cu un șunt cilindric. Încărcarea cu presiune interioară.

Pentru o încărcare axială P, uniform distribuită pe circumferința ștuțului, dependența coeficientului α_p de parametrul ρ este ilustrată în figura 3.8.

Coeficientul α_p se raportează la tensiunea convențională:

$$\sigma_{m.c} = \frac{p}{h'_s} \sqrt{\frac{R}{h'_s}} \tag{3.40}$$

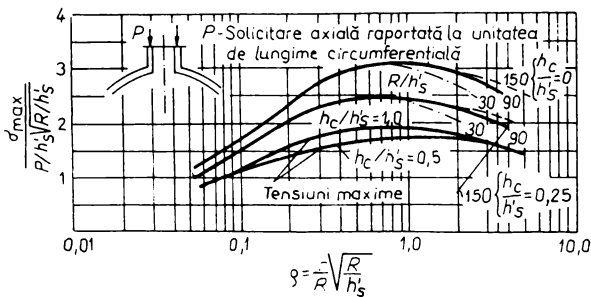


Fig.3.8. Tensiunile maxime principale în sferă adiacent joncțiunii cu șunt cilindric. Încărcarea axială uniform distribuită pe circumferința ștuțului.

Este de remarcat că în acest caz de încărcare, pentru valorile parametrului $h_c/h'_s=0$ și $0,25$, rezultă o departajare suplimentară a curbelor în raport cu parametrul (R/h'_s) .

Când asupra ștuțului cilindric acționează un moment exterior total M , considerat față de punctul de intersecție între axa cilindrului și a sferei, coeficientul de concentrare al tensiunii α_m se determină cu relația :

$$\alpha_m = \frac{\sigma_{\max}}{\frac{\bar{P}}{h_s} \sqrt{\frac{R}{h_s}}} \quad (3.41)$$

$$\text{Unde : } \bar{P} = \frac{M}{\pi r^2}$$

În cazul când pe joncțiune acționează o forță tăietoare T , coeficientul de concentrare α_t se calculează cu relația :

$$\alpha_t = \frac{\sigma_{\max}}{\pi r T} \quad (3.42)$$

O estimare acoperitoare a tensiunii maxime pe joncțiunea ștuț cilindric-învelitoare sferică, în cazul acțiunii sarcinilor combinate, se obține prin adunarea tensiunilor maxime în fiecare caz, indiferent dacă au semnificația unei tensiuni meridiane (σ_ϕ) sau circumferențiale (σ_θ).

Configurația geometrică ștuț cilindric penetrând neradial în învelitoarea sferică, prezintă deasemeni un interes practic fiind analizată în lucrări de specialitate [63],[112] cu ajutorul calculatorului.

Analiza cu ajutorul calculatorului a mai multor geometrii și încărcări pe penetrații ștuț cilindric-învelitoare sferică a relevat că maximum tensiunilor σ_ϕ și σ_θ apare pe joncțiune, tensiunea σ_θ fiind în general mai mare (cu excepția cazurilor când $h_c/h'_1 > 0,75$).

Studiul penetrației cilindru-învelitoare cilindrică este tratat în multe lucrări ale literaturii de specialitate [84],[86],[132],[134]. Prin corelarea unui număr mare de rezultate experimentale în lucrarea [82] se relevă că, valoarea coeficientului de concentrare elastică a tensiunii pe intersecția cilindru-cilindru poate fi calculată în limitele unei aproximații de $\pm 10\%$ cu ajutorul relației :

$$\lg \alpha = 0,2042 \lg \frac{r^2}{h_c^2} \cdot \frac{h_c}{R} + 0,3979 \quad (3.43)$$

Studiul stării de tensiune efectuat asupra penetrațiilor în învelitori subțiri, bazat pe aproximațiile din teoria acestor învelitori, conduce la rezultate cu semnificația unor tensiuni medii pe secțiune, neputând cuprinde detaliile concentrării tensiunii chiar în secțiunile joncțiunii.

Evidențierea și a acestor concentrări, a condus la o analiză specializată în cadrul teoriei elasticității tridimensionale [110], [122] a cărei grad de aproximare se înscrie în ecartul $\pm 5\%$.

3.4. Aplicarea metodei elementelor finite la studiul învelitorilor simple și compuse.

Rezolvarea ecuațiilor analizei clasice sau a celor care intervin în domenii apropiate matematicii (fizica, mecanica, științele tehnice, economia, etc.) se poate efectua adeseori numai prin metode ale analizei funcționale [89]. Metodele de rezolvare a unor asemenea ecuații prin aproximări fiind cele mai apropiate de cerințele actuale ale științei sunt inspirate de procedeele de calcul efectiv și au menirea să dea o bază riguroasă analizei numerice.

Rezolvarea problemelor din fizică, matematică sau din științele tehnice cu ajutorul analizei numerice presupune reducerea în final a acestor probleme la ecuații algebrice cu o structură oarecare [88].

Metodele și tehnicile numerice de aproximație au fie un suport matematic formal, fie unul de natură fizică, fiind legate de principii variaționale. S-a constatat însă că formulările rezidului ponderat sunt mai generale decât principiile variaționale, principii aplicabile numai unui anumit tip de operator.

Tehnicile variaționale, elementele finite, elementele de frontieră și alte metode de aproximare (Rayleigh-Ritz, Galerkin, corelației, celor mai mici pătrate) pot fi privite ca fiind cazuri speciale ale metodelor rezidului ponderat, situația reciprocă nefiind în general adevărată [104].

În figura 3.9. este prezentată o clasificare a metodelor și tehnicilor de aproximație din care rezultă cu claritate rolul deținut de metode rezidului ponderat în ansamblul metodelor de aproximație.

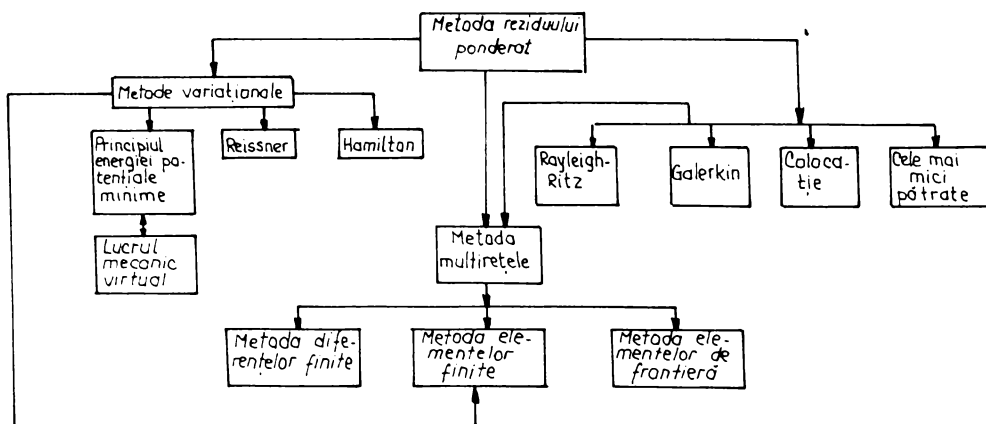


Fig.3.9. Clasificarea metodelor și tehnicilor de aproximație.

Indiferent de tipul metodei de aproximație utilizate aceasta are scopul reducerii ecuației diferențiale sau integrale, care simulează un sistem fizic cu o infinitate de grade de libertate

(împreună cu condițiile de contur) la un sistem de ecuații algebrice, deci un sistem cu un număr finit de grade de libertate. Problemele din mecanică și din alte domenii ale fizicii aproape în totalitate satisfac următoarele ecuații diferențiale :

$$L_1(\Phi) + q_1 = 0 \quad ; \quad \text{în domeniul } \Omega \quad (3.44)$$

$$L_2(\Phi) + q_2 = 0 \quad ; \quad \text{pe frontiera } S$$

- unde :
- L_1, L_2 – operatori;
 - q_1, q_2 – funcții vectoriale cunoscute;
 - Φ - funcția vectorială necunoscută.

Funcția vectorială necunoscută Φ se aproximează cu ajutorul funcțiilor linear independente N_i și a coeficienților necunoscuți Φ_i în forma :

$$\Phi \cong \bar{\Phi} = \sum_{i=1}^n \Phi_i N_i \quad (3.45)$$

Ecuațiile algebrice de aproximație sunt obținute prin considerarea formelor rezidului ponderat (forme slabe) sau variaționale:

$$\int_{\Omega} w_j^T [L_1(\Phi) + q_1] d\Omega + \int_S \bar{w}_j^T [L_2(\Phi) + q_2] dS = 0 \quad (3.46)$$

unde: - $j=1, 2, \dots, n$

- w_j, \bar{w}_j - funcții de ponderare .

Possibilitățile pentru alegerea funcțiilor de formă și a funcțiilor de ponderare sunt numeroase. la definirea acestor funcții se pun anumite restricții (completitudine și integrabilitate) pentru obținerea unei convergențe și aproximări mai bune.

Metoda elementelor finite reprezintă un caz particular al relației (3.44) și are ca trăsături principale :

- studiul domeniilor neomogene prin considerarea separată a elementelor finite respective;
- încorporarea naturală a condițiilor de contur;
- introducerea comportării neliniare a elementului;
- necesitatea asamblării ecuațiilor finale;
- aproximarea ecuațiilor prin “mediere” și nu printr-un procedeu discontinuu “punctual”.

Principalele etape în rezolvarea unei probleme prin metoda elementelor sunt cinci și vor fi prezentate în cele ce urmează.

I. Discretizarea domeniului de analiză în elemente finite și alegerea funcției de aproximație $\bar{\Phi}$:

$$\bar{\Phi} = [N]\{\Phi\}_e \quad (3.47)$$

unde : - $[N]$ – matricea funcției de formă;

- $\{\Phi\}_e$ - vectorul funcțiilor nodale pe elementul finit.

II. Construirea ecuațiilor elementelor finite al căror număr este egal cu numărătorul gradelor de libertate pe element. Aceste ecuații se pot deduce pe mai multe căi : direct, pe cale variațională, prin metoda reziduală, prin metoda bilanțului energetic.

Prin aplicarea oricărei din aceste metode se obține un sistem de ecuații de forma :

$$[k]\{\Phi\}_e = \{q\} \quad (3.48)$$

în care : - $[k]$ – matricea caracteristicilor fizico-geometrice ale materialului elementului finit (matricea de rigiditate);

- $\{\Phi\}_e$ - vectorul funcțiilor nodale necunoscute pe element;

- $\{q\}$ – vectorul încărcărilor (mecanic, termic, etc.) pe elementul finit.

III. Asamblarea ecuațiilor elementale în sistemul de ecuații al structurii analizate sub forma :

$$[K]\{\Phi\} = \{Q\} \quad (3.49)$$

unde : - $[K]$ – matricea de rigiditate a structurii rezultate din asamblarea matricilor de rigiditate $[k]$ ale elementelor finite;

- $\{Q\}$ – vectorul încărcării pe toată structura obținut prin asamblarea vectorilor încărcărilor pe elementele $\{q\}$.

IV. Rezolvarea sistemului de ecuații al structurii prin procedeele obișnuite (eliminarea Gauss sau descompunerea Choleski) care conduc la obținerea valorilor funcțiilor sau gradelor de libertate în noduri, denumite necunoscute primare sau de ordinul întâi.

V. Efectuarea de calcule suplimentare pentru determinarea necunoscutelor secundare. În cazul problemelor mecanice de elasticitate nu este suficientă doar determinarea necunoscutelor primare (deplasări nodale) ci și cele secundare care sunt deformațiile specifice și tensiunile.

Ecuațiile de echilibru (3.48) ale elementului finit se pot obține cu ajutorul teoremelor variaționale care minimizează expresia funcționalei energiei, obținute pe baza principiului lucrului mecanic virtual. În cazul când problemele fizice nu pot fi reprezentate printr-o funcțională dar sunt modelate matematic prin ecuații diferențiale liniare sau neliniare, metodele variaționale de soluționare devin inadecvate și se impune utilizarea metodei rezidurilor ponderate.

În cazul învelitorilor elastice subțiri se pot aplica metodele energetice bazate pe teoremele variaționale energetice cunoscute cum sunt :

- teorema energiei potențiale minime (în funcție de deplasări);

- teorema energiei complementare minime (în funcție de tensiuni);
- teorema Hellinger-Reissner (formulare mixtă cu deplasări și tensiuni).

Pentru recipientii sub presiune și în general pentru învelitori elastice se utilizează cu precădere metoda energiei potențiale minime în analizele deformațiilor și tensiunilor. Conform acestei metode se recurge la minimizarea funcționalei π , care este potențialul total al unui sistem elastic exprimat prin relația :

$$\pi = U + W_p \tag{3.50}$$

- în care :
- U – energia potențială de deformare
 - W_p – potențialul forțelor exterioare.

Între lucrul mecanic al forțelor exterioare W și potențialul acestora W_p existând relația :

$W = -W_p$, expresia potențialului total π va fi :

$$\pi = U - W \tag{3.51}$$

Energia potențială de deformare (U) este dată de relația :

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_0\} \right) dV \tag{3.52}$$

- unde :
- $\{\varepsilon\}^T$ - transpusa vectorului deformațiilor;
 - $[E]$ - matricea constantelor elastice;
 - $\{\sigma_0\}$ - vectorul coloană al tensiunilor inițiale;
 - $\{\varepsilon_0\}$ - vectorul coloană al deformațiilor inițiale.

În cazul unor stări inițiale de tensiune și deformare unde relația (3.52) se simplifică iar expresia energiei potențiale devine :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} dV \tag{3.53}$$

Potențialul forțelor exterioare (W_p) este cauzat de :

- forțele de volum $\{p\} = \{p_x \ p_y \ p_z\}$;
- forțele de tracțiune pe contur $\{g\} = \{g_x \ g_y \ g_z\}$;
- sarcinile concentrate în noduri $\{R\} = \{R_x \ R_y \ R_z\}$.

Compunerea sarcinilor $\{p\}$, $\{g\}$, $\{R\}$ se mișcă dealungul deplasărilor $\{f\} = \{u \ v \ w\}$, lucrul mecanic (W) efectuat de aceste sarcini fiind dat de relația :

$$W = \int_V \{f\}^T \{p\} dV + \int_S \{f\}^T \{g\} dS + \{d\}^T \{R\} \tag{3.54}$$

unde : - $\{d\}$ – vectorul parametrilor nodali (deplasări și rotații nodale).

Între $\{f\}$ și $\{d\}$ există relația :

$$\{f\} = [N]\{d\} \quad (3.55)$$

în care : - $[N]$ – matricea funcțiilor de interpolare.

Deformațiile $\{\epsilon\}$ sunt deasemeni exprimate prin intermediul funcțiilor de interpolare, ca de exemplu :

$$\{\epsilon\} = [B]\{d\} \quad (3.56)$$

Pe baza relațiilor (3.55), (3.56) și a relațiilor :

$$\begin{aligned} \{f\}^T &= ([N]\{d\})^T = \{d\}^T [N]^T \\ \{\epsilon\}^T &= ([B]\{d\})^T = \{d\}^T [B]^T \end{aligned}$$

expresia funcționalei potențialului total devine :

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \{d\}^T \int_V [B]^T [E] [B] dV \cdot \{d\} + \{d\}^T \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV - \{d\}^T \int_V [B]^T [E] \{\epsilon_0\} dV - \\ & - \{d\}^T \int_V [N]^T \{p\} dV - \{d\}^T \int_S [N]^T \{g\} dS - \{d\}^T \{R\} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Luând în considerare relația (3.51) va rezulta conform teoremei energiei potențiale minime :

$$\delta\pi = \delta U - \delta W \quad (3.58)$$

În relația (3.58) $\delta\pi$ și δU sunt notații variaționale iar δ asociat cu aceste notații poate fi considerat ca un operator similar.

Relația (3.57) aferentă tuturor elementelor finite conținute în discretizare se poate aplica și elementului finit individual. În această situație volumul (V) este al elementului finit, aria (S) este a suprafeței pe care sunt distribuite forțele $\{g\}$ pe element iar vectorul forțelor nodale $\{R\}$ trebuie individualizat la elementul respectiv.

Notând cu π_e funcționala aferentă elementului finit și aplicând acestui element principiul variațional reprezentat prin relația (3.58) rezultă :

$$\begin{aligned} \pi_e = & \{\delta d\}^T \left(\int_V [B]^T [E] [B] dV \cdot \{d\} + \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV - \int_V [B]^T [E] \{\epsilon_0\} dV - \right. \\ & \left. - \int_V [N]^T \{p\} dV - \{d\}^T \int_S [N]^T \{g\} dS - \{R_e\} \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

în care δd este notația variațională a deplasărilor nodale asociate cu elementul finit respectiv iar $\{R_e\}$, vectorul forțelor concentrate nodale individualizate pe element.

Valoarea $\{\delta d\}$ fiind arbitrară rezultă că paranteza din membrul drept al relației (3.59) trebuie să fie egală cu zero. se obțin astfel ecuațiile de echilibru pentru un element finit de forma :

$$[k]\{d\} = \{q\} \quad (3.60)$$

Conform relației (3.59) matricea de rigiditate $[k]$ este definită de :

$$[k] = \int_V [B]^T [E] \cdot [B] dV \tag{3.61}$$

iar vectorul funcțiilor nodale $\{q\}$ are expresia :

$$\{q\} = - \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV + \int_V [B]^T [E] \{\varepsilon_0\} dV + \int_V [N]^T \{p\} dV + S + \{R_e\} \tag{3.62}$$

Este de precizat că asamblarea ecuațiilor de echilibru este generată de ecuația :

$$[K]\{D\} = \{Q\} \tag{3.63}$$

În această ecuație intervin :

- $[K] = \sum_1^m [k]$ - matricea globală a ansamblului structural;
- $\{D\}^T = [u_1, v_1, w_1, u_2, \dots, w_n]$ - vectorul necunoscutelor (deplasările nodale generalizate);
- $\{Q\} = \sum_1^m \{r\} + \{R\}$ - vectorul forțelor nodale
- m – numărul elementelor finite;
- n – numărul nodurilor.

3.5. Discretizarea în elemente finite

Învelitorile elastice subțiri de formă cilindrică sunt adeseori întâlnite în construcția recipientelor sub presiune motiv pentru care autorul a abordat studiul cu elemente finite pentru rezolvarea problemei staționare în domeniul acestui continuu deformabil.

Deoarece cilindrul are simetrie geometrică și mecanică, devine avantajos ca, în loc de o discretizare în întregime să adoptăm numai o optime din această învelitoare pentru modelarea prin elemente finite (figura 3.10).

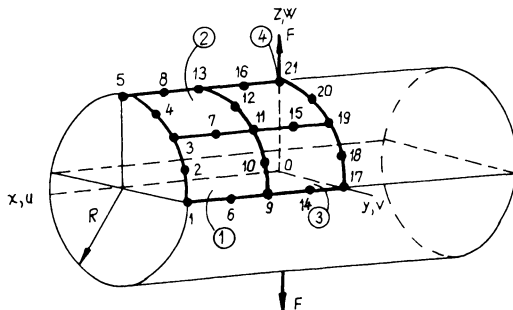


Fig.3.10. Modelarea cilindrului prin elemente finite.

Există un mare număr de elemente finite ce ar putea fi folosite, ca de exemplu modele izoparametrice, hibride, mixte, subparametrice și superparametrice fiecare opțiune având avantaje și dezavantaje specifice.

Adoptarea elementului tridimensional cu 60 grade de libertate (20 de noduri cu câte trei grade de libertate în fiecare nod) nu este adecvată pentru modelarea octandului cilindricului, în schimb este indicat elementul finit superparametric, cu un total de 40 grade de libertate (8 grade cu câte cinci grade de libertate în fiecare nod).

Avantajul opțiunii pentru elementul finit superparametric constă în aceea că problemele tridimensionale ale carcaselor și plăcilor subțiri și groase sunt formulate astfel încât soluțiile sunt practic printre cele mai economice. Economia rezultă ca urmare a reducerii numărului de puncte Gauss ale integrării numerice, când se construiește matricea de rigiditate, cât și a neglijării deformațiilor specifice pe direcția normală la suprafața mediană, fără ca prin aceasta să fie compromisă convergența soluțiilor.

În figura 3.11.a. este prezentat hexaedrul original de tip cuadratic din care a fost derivat elementul finit superparametric curb adecvat modelării cilindricului (figura 3.11.b). În cazul hexaedrului deplasarea de-a lungul grosimii are o variație parabolică, în timp ce la elementul superparametric variația deplasării este liniară, astfel încât grosimile sunt reprezentate prin linii drepte. Rezultă că perechi de puncte i_q și i_p definesc profilul acestuia.

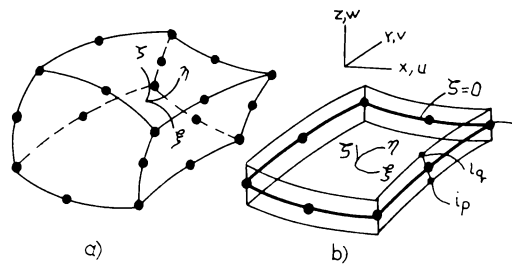


Fig.3.11. a. Hexaedrul original ; b. Elementul finit superparametric.

Fie ξ și η două coordonate curbilunii în planul median al elementului și ζ o coordonată liniară în direcția grosimii. Între coordonatele carteziene xyz și cele curbilunii $\xi\eta\zeta$ ale unui punct oarecare se poate scrie o relație de forma :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{1+\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_{iq} \\ y_{iq} \\ z_{iq} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{1-\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_{ip} \\ y_{ip} \\ z_{ip} \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

în care : - $x_{iq}, \dots, x_{ip} \dots$ - coordonatele celor 16 noduri cu $\zeta=1$ și respectiv $\zeta=-1$,

- $N_i(\xi, \eta)$ – funcțiile de interpolare de tip quadratic.

Pe suprafața mediană, cu $\zeta=0$, coordonatele nodurilor sunt :

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{Bmatrix} x_{iq} \\ y_{iq} \\ z_{iq} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_{ip} \\ y_{ip} \\ z_{ip} \end{Bmatrix} \right) \quad (3.65)$$

În figura 3.12 sunt arătați trei vectori $\bar{V}_{1i}, \bar{V}_{2i}, \bar{V}_{3i}$ reciproc perpendiculari, deplasările nodale u_i, v_i, w_i ale unui punct i aflat pe suprafața mediană și care sunt considerate de-a lungul coordonatelor x, y, z ale sistemului global, precum și rotirile α_i, β_i ale unei linii normale la suprafața mediană și care se produc în jurul a două axe paralele cu această suprafață.

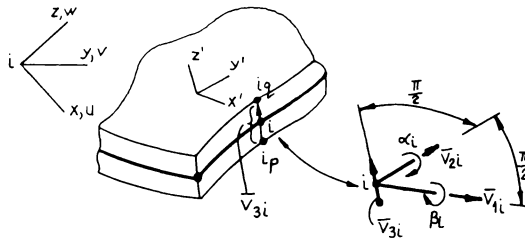


Fig.3.12. Sistemul vectorilor.

Vectorii $\bar{\beta}_i, \bar{\alpha}_i$ sunt coliniari cu vectorii \bar{V}_{1i} și respectiv \bar{V}_{2i} . Vectorul \bar{V}_{3i} este definit de :

$$\bar{V}_{3i} = \begin{Bmatrix} x_{iq} \\ y_{iq} \\ z_{iq} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_{ip} \\ y_{ip} \\ z_{ip} \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

astfel încât rotirile β_i și α_i pot fi privite ca fiind ale vectorului nodal \bar{V}_{3i} în jurul a două direcții ortogonale normale pe acest vector și care împarte grosimea elementului finit în două părți egale. Cosinusurile directoare ale celor două direcții ortogonale sunt :

$$[\mu_i] = [\bar{v}_{1i} - \bar{v}_{2i}] = \begin{bmatrix} l_{1i} & -l_{2i} \\ m_{1i} & -m_{2i} \\ n_{1i} & -n_{2i} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

în care l, m, n se definesc prin :

$$\begin{Bmatrix} l_{1i} \\ m_{1i} \\ n_{1i} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{v}_{1i}}{|\bar{v}_{1i}|} ; \quad \begin{Bmatrix} l_{2i} \\ m_{2i} \\ n_{2i} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{v}_{2i}}{|\bar{v}_{2i}|} \quad (3.68)$$

unde \bar{v}_{1i} și \bar{v}_{2i} sunt vectori unitari

Pentru a obține vectorii unitari este suficient ca vectorii $\bar{V}_{1i}, \bar{V}_{2i}, \bar{V}_{3i}$ să fie divizați prin lungimile lor scalare.

Înlocuind relațiile (3.65) și (3.66) în relația (3.64) se obține :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} \bar{V}_{3i} \quad (3.69)$$

Relația (3.69) definește geometria oricăruia dintre cele patru elemente finite în care a fost discretizat octandul din figura 3.10.

În privința câmpului deplasărilor este de observat, mai întâi, că datorită rotirilor α_i și β_i un punct situat la distanța ζ pe vectorul \bar{V}_{3i} are deplasările :

$$\begin{aligned} u_i' &= \frac{1}{2} h_i \alpha_i \zeta \\ v_i' &= -\frac{1}{2} h_i \beta_i \zeta \end{aligned} \quad (3.70)$$

în care h_i este grosimea învelitorii în nodul i .

Aceste două deplasări se produc de-a lungul direcțiilor ale căror cosinusuri directe sunt date de (3.67) și au următoarele componente pe axele xyz :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \zeta \frac{h_i}{2} [\mu_i] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

În mod analog cu relația (3.69), următoarea relație definește câmpul celor 24 deplasări și rotiri nodale din fiecare element finit .

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{h_i}{2} [\mu_i] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

În centrul fiecărui element finit au fost introduse câte trei grade de libertate nenodale adiționale date de :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{ad} = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \begin{Bmatrix} u_c \\ v_c \\ w_c \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

în care : - u_c, v_c, w_c - deplasările punctului central de coordonate $\xi=\eta=\zeta=0$,

- $N_9=(1-\xi^2)(1-\eta^2)$ - funcția de interpolare pentru aceste deplasări.

Elementul finit astfel adoptat are 43 grade de libertate dar cele trei deplasări nodale urmează să fie condensate înainte de asamblare.

Programul denumit PROELFIN a fost scris în limbaj Turbo Pascal conceput în opt subrutine: MAIN, INDAT, FORMK, SHAPE, ASAMB, SIVEL, SOLVE, TENS și este listat în continuare.

```

{
Acesta este programul principal, cel care lanseaza in executie procedurile continute in unitatea el_fin.
}
Program main;
uses el_fin,Crt;
begin
  ClrScr;
  Nume:='Testare - Forta pe axa Z';
  ReadLn(fis_date,NuNod);
  ReadLn(fis_date,NumEl);
  ReadLn(fis_date,MSiz);
  if NuNod>0
  then begin
    ReWrite(fis_rezultate);
    WriteLn(fis_rezultate,Nume);
    WriteLn(fis_rezultate,'Analiza prin elemente finite a tensiunilor si deformatiilor');
    WriteLn(fis_rezultate,'DATE');
    WriteLn(fis_rezultate,'Numarul de puncte nodale....',NuNod);
    WriteLn(fis_rezultate,'Numarul de elemente finite...',NumEl);
    WriteLn(fis_rezultate,'**MSiz*****',MSiz);
    WriteLn('Acum lucreaza procedura InDat');
    InDat(IFlag);
    MBand:=45;
    if IFlag-1<=0 {Cand IFlag, transferat din InDat=0, programul e gata}
    then begin
      NBand:=(MSiz div MBand) div 2; {Se calculeaza lungimea a 1 si 2 blocuri}
      NSiz2:=2*NBand; {component al matricei globale de rigiditate}
      NDis:=6000-43*44;
      if NSiz2*(MBand+1)-NDis>0 {Cand spatiul ocupat de 2 blocuri depaseste}
      then begin {memoria destinata acestui scop, programul se opreste}
        WriteLn(fis_rezultate,'Eroare, capacitatea lui Bloc1 este depasita');
        Halt
      end
    else begin
      WriteLn('Acum lucreaza procedura Formk');
      Formk;
      WriteLn('Acum lucreaza procedura Asamb');
      Asamb;
      Append(fis_rezultate);
      WriteLn('Acum lucreaza procedura Solve');
      Solve;
      WriteLn('Acum lucreaza procedura Tens');
      Tens;
    end {if NSiz2}
  end {if IFlag}
end; {if NuNod}
Close(fis_date);
Close(fis_rezultate)
end.

```

{
 Aceasta este unitatea de program el_fin, care contine procedurile si toate definitiile de tipuri si constante, precum
 si declaratiile de variabile, care se folosesc in programul main.
 }

```

unit el_fin;
{$N+}
Interface
Const
  MaxEl=10000;
  S_lin_max=40;
  S_col_max=50;
  Se_lin_max=43;
  Se_col_max=44;
  Kode_lin_max=21;
  Kode_col_max=5;
  ID_lin_max=4;
  ID_col_max=8;
  B0_lin_max=6;
  B0_col_max=44;
  B1_lin_max=6;
  B1_col_max=17;
  Vect_max=21;
  Vect1_max=3;
  R_max=120;
  V_lin_max=3;
  V_col_max=3;
  V_et_max=21;
  D_lin_max=6;
  D_col_max=6;
  Vect2_max=9;
Type
  Mat_S=Array[1..S_lin_max,1..S_col_max] of Real;
  Mat_Se=Array[1..Se_lin_max,1..Se_col_max] of Real;
  Mat_Kode=Array[1..Kode_lin_max,1..Kode_col_max] of LongInt;
  Mat_ID=Array[1..ID_lin_max,1..ID_col_max] of Integer;
  Mat_B0=Array[1..B0_lin_max,1..B0_col_max] of Real;
  Mat_B1=Array[1..B1_lin_max,1..B1_col_max] of Real;
  Vect=Array[1..Vect_max] of Real;
  Vect_R=Array[1..R_max] of Double;
  Mas_V=Array[1..V_lin_max,1..V_col_max,1..V_et_max] of Real;
  Vect1=Array[1..Vect1_max] of Real;
  Mat_D=Array[1..D_lin_max,1..D_col_max] of Real;
  Vect2=Array[1..Vect2_max] of Real;
var MSiz:integer;{Capacitatea disponibila a memoriei evaluata in cuvinte}
  IFlag:integer;{Parametru care opreste programul la erori al datelor}
  NDis:integer;{Parametru de control privind depasirea capacitatii}
  {memoriei prin adoptarea unei valori neadecvate pentru MSiz}
Var
  fis_date:text;{in loc de a citi de la tastatura}
  fisRezultate:text;{in loc de a afisa pe ecran}
  S:Mat_S;
  Se:Mat_Se;
  Kode:Mat_Kode;{Codurile conditiilor limita}
  X,Y,Z:Vect;{Coordonatele nodului}
  ID:Mat_ID;{Numele celor 8 noduri apartinand unui element finit}
  R:Vect_R;{Sirul sarcinilor actinand in cele 5 directii din fiecare nod}
  B0:Mat_B0;
  B1:Mat_B1;

```



```

MBand:integer;{Latimea maxima a semibenzii matricei globale de rigiditate}
NumEl:integer;{Numarul elementelor finite obtinute prin discretizare}
NSize:integer;{Numarul necunoscutelor nodale nenule}
NuNod:Integer;{Numarul nodurilor structurii}
V:Mas_V;{V[3,,] sunt componentele pe axele x,y,z ale normalei V3}
  {V[1,,] sunt componentele pe axele x,y,z ale tangentei V1}
Gros:Vect;{Grosimea in nodul n}
LC:Vect1;{Cosinusurile directoare fata de axa x intr-un anumit punct Gauss al vectorilor V1, V2 si V3}
MC:Vect1;{Cosinusurile directoare fata de axa y}
NC:Vect1;{Cosinusurile directoare fata de axa z}
D1,D2,Dum2,Dum3:Real;
G:Real;{Modulul de elasticitate trasversal in daN/cm2}
Zp:Vect;{Presiunea laterala in nod pe directia +z, cauzata de vant,
  greutatea proprie}
Temp1:Vect;{Temperatura pe suprafata cu +V3 in nod}
Temp2:Vect;{Temperatura pe suprafata cu -V3 in nod}
RP:Vect;{Presiunea normala in nod, pozitiva pe directia vectorului V3}
D:Mat_D;
P:Vect2;
Dejac:Real;
Temp:Real;{Temperatura de baza}
Ax,Ay:Real;{Coeficientii de dilatare a materialului in directiile x si y}
Fz,Fr:Real;
Fator:Real;{Factor de ajustare a coeficientilor de rigiditate de pe diagonala principala asociati gradelor nodale
de libertate. Acest factor este egal cu 1+e, unde e este mic, de exemplu 0,003}
NBand:integer;{Lungimea unuia dintre blocurile matricei de rigiditate}
NSiz2:integer;{Lungimea a doua blocuri ale matricei globale de rigiditate}
NrPar,NP0:Integer;
Nume:string;{Tipul sarcinii aplicate structurii}
NPC:integer;
procedure InDat(var IFlag:integer);
procedure Shape(var M,Ix,Iy,IFlag:integer;JFlag:Integer);
procedure Formk;
procedure Sivel(var Ivel:vect;var NLin1,NLin2:integer);
procedure Asamb;
procedure Solve;
procedure Tens;
Implementation
{
  PROCEDURA INDAT
}
procedure InDat;
Label 2;
var
  BCon:Array[1..Kode_lin_max,1..Kode_col_max] of Real;{Valorile sarcinilor concentrate nodale: in fiecare
nod pe primele trei sunt fortele concentrate actionand de-a lungul axelor x,y,z, iar urmatoarele doua sunt ale cuplurilor
concentrate avand vectorii paraleli cu vectorii a si a}
  KK:Array[1..R_max] of LongInt;{Identificator asociat celor 40 de grade de libertate nodale ale unui anumit
element finit si reprezinta numarul de ordine pe care fiecare necunoscuta nodala a elementului il ocupa in sirul
necunoscutelor diferite de zero ale intregii structurii}
  Nn,N,i,j,m,L,Ii,jj:integer;
  E:Real;{Modulul de elasticitate longitudinal in daN/cm2}
  PMiu:Real;{Coeficientul lui Poisson}
  Dum:Real;
  Max,Min,NDif:LongInt;
  NDof:Integer;{Numarul total al gradelor de libertate al structurii}
  V13:Real;{produsul scalar al V1 si V3. C13=0 inseamna ca unul din vectori e nul sau unghiul dintre ei este
multiplu de 90.}

```

```

begin
  for i:=1 to R_Max do R[i]:=0;
  for i:=1 to Se_lin_max do
    for j:=1 to Se_col_max do
      Se[i,j]:=0;
2:WriteLn(fis_rezultate,'D A T E L E N O D A L E');
WriteLn(fis_rezultate,'_____');
WriteLn(fis_rezultate,' Nr. Cod C.L.   Coord. punctelor nodale',';6,'Gro-',';30,'Vect.Unit. ');
Write(fis_rezultate,' Nod X Y Z A B',';6,'X',';9,'Y',';9,'Z',';9,'Simea',';4);
WriteLn(fis_rezultate,'V3X',';8,'V3Y',';7,'V3Z',';7,'V1X',';6,'V1Y',';7,'V1Z');
  for Nn:=1 to NuNod do
    begin
      ReadLn(fis_date,N);
      for i:=1 to Kode_col_max do
        begin
          ReadLn(fis_date,Kode[N,i]);
        end;
      ReadLn(fis_date,X[N]);
      ReadLn(fis_date,Y[N]);
      ReadLn(fis_date,Z[N]);
      ReadLn(fis_date,Gros[N]);
    end;
  for Nn:=1 to NuNod do
    begin
      ReadLn(fis_date,N);
      for j:=1 to V_Col_Max do
        begin
          ReadLn(fis_date,V[3,j,N]);
        end;
      for j:=1 to V_Col_Max do
        begin
          ReadLn(fis_date,V[1,j,N]);
        end;
      end;
  for Nn:=1 to NuNod do
    begin
      ReadLn(fis_date,N);
      for i:=1 to Kode_Col_Max do
        begin
          ReadLn(fis_date,Bcon[N,i]);
        end;
      ReadLn(fis_date,Zp[N]);
      ReadLn(fis_date,Rp[N]);
      ReadLn(fis_date,Temp1[N]);
      ReadLn(fis_date,Temp2[N]);
    end;
  ReadLn(fis_date,Temp);
  ReadLn(fis_date,Ax);
  ReadLn(fis_date,Ay);
  for N:=1 to Kode_lin_max do
    begin
      Write(fis_rezultate,N:4,Kode[N,1]:4);
      for i:=2 to Kode_col_max do Write(fis_rezultate,Kode[N,i]:2);
      Write(fis_rezultate,X[N]:10:4,Y[N]:10:4,Z[N]:10:4,Gros[N]:10:4);
      for j:=1 to V_col_max do Write(fis_rezultate,V[3,j,N]:7:4);
      for j:=1 to V_col_max do Write(fis_rezultate,V[1,j,N]:7:4);
      WriteLn(fis_rezultate)
    end;
end;

```

```

Write(fis_rezultate,'FORTE SI MOMENTE NODALE /);
WriteLn(fis_rezultate,' PRESIUNI SI TEMPERATURI);
WriteLn(fis_rezultate,":9,'Fortele concentrate'," :11,'Momente'," :11,'Presiuni'," :11,'Temperaturi');
Write(fis_rezultate,'Nod.';" :5,'X'" :9,'Y'" :9,'Z'" :8,'ALPHA'" :5,'BETA'" :6);
WriteLn(fis_rezultate,'Lateral'" :3,'Radial'" :3,'Exterior'" :2,'Interior');
for j:=1 to NuNod do
begin
  Write(fis_rezultate,j:5);
  for i:=1 to Kode_col_max do Write(fis_rezultate,BCon[j,i]:10:4);
  WriteLn(fis_rezultate,Zp[j]:10:4,Rp[j]:10:4,Temp1[j]:10:4,Temp2[j]:10:4);
end;
WriteLn(fis_rezultate,'Indicii elementelor si nodurilor conexe');
WriteLn(fis_rezultate,' Nr.'" :16,'Nodurile conexe');
Write(fis_rezultate,'Elem.'" :4);
for i:=1 to ID_col_max do Write(fis_rezultate,i:1," :4);
WriteLn(fis_rezultate);
for Nn:=1 to NumEl do
begin
  ReadLn(fis_date,N);
  for i:=1 to ID_col_max do
  begin
    ReadLn(fis_date,ID[N,i]);
  end;
end;
for N:=1 to NumEl do
begin
  Write(fis_rezultate,N:4);
  for i:=1 to ID_col_max do Write(fis_rezultate," :2,ID[N,i]:5);
  WriteLn(fis_rezultate);
end;
WriteLn(fis_rezultate);
ReadLn(fis_date,E);
ReadLn(fis_date,PMiu);
ReadLn(fis_date,G);
ReadLn(fis_date,Fator);
WriteLn(fis_rezultate,'Caracteristicile mecanice');
WriteLn(fis_rezultate,'Modulul de elasticitate *E*',E:15:7);
WriteLn(fis_rezultate,'Coeficientul lui Poisson.....',PMiu:10:4);
WriteLn(fis_rezultate,'Modulul de elasticitate *G*',G:15:7);
WriteLn(fis_rezultate,'Factorul de ajustare * Fator*',Fator:15:7);
WriteLn(fis_rezultate,'Caracteristicile termice');
WriteLn(fis_rezultate,'*Temperatura de baza.....',Temp:15:7);
WriteLn(fis_rezultate,'*Coeficientul de dilatare.....Ax=',Ax:15:7);
WriteLn(fis_rezultate,'*Coeficientul de dilatare.....Ay=',Ay:15:7);
{Se calculeaza expresiile Dum, D1, D2.
D1 si D2 sunt folosite in procedurile Shape si Tens}
Dum:=1-sqr(PMiu);
D1:=E/Dum;
D2:=PMiu*D1;
{Codurile conditiilor limita stabilite initial prin valorile unu si zero sunt recodificate in zerouri si respectiv
numerele de ordine ale necunoscutelor nodale nenule}
NSize:=0;
MBand:=0;
for N:=1 to NuNod do
  for i:= 1 to Kode_col_max do
    if Kode[N,i]<0 then goto 2
    else if Kode[N,i]=0
    then begin

```

```

    Inc(NSize);
    Kode[N,i]:=NSize
  end
  else Kode[N,i]:=0;
{Se determina NSize si MBand}
for m:=1 to NumEl do
begin
  L:=0;
  for i:=1 to ID_col_max do
  begin
    li:=ID[m,i];
    for j:=1 to Kode_col_max do
    begin
      Inc(L);
      KK[L]:=Kode[li,j]
    end {for j}
  end; {for i}
  Max:=0;
  Min:=100000;
  for i:=1 to S_lin_max do
  if KK[i]<0
  then begin
    if KK[i]-Max>0 then Max:=KK[i];
    if KK[i]-Min<0 then Min:=KK[i];
  end; {if, for i}
  NDif:=Max-Min+1;
  if NDif-MBand>0 then MBand:=NDif
end;{for m}
MBand:=45;
WriteLn(fisRezultate,'Parametrii ecuatiilor');
WriteLn(fisRezultate,'Nr. de ecuatii.....',NSize:5);
WriteLn(fisRezultate,'Latimea benzii.....',MBand:5);
{Se formeaza sirul R(li) al componentelor fortelor si cuplurilor concentrate actionand de-a lungul directiilor
x,y,z (in cazul fortelor concentrate) si respectiv de-a lungul vectorilor ai si ai (pentru cuplurile concentrate) din fiecare
nod} a
  NDof:=Kode_col_max*NuNod;
  for i:=1 to NDof do R[i]:=0;
  for i:=1 to NuNod do
  for j:=1 to Kode_col_max do
  begin
    li:=Kode[i,j];
    if li>0 then R[li]:=BCon[i,j];
  end; {for i, for j}
  {Se formeaza componentele pe axele x,y,z ale vectorului V2, respectiv V(2,j,N) cu j=1,3 in nodul N=1,NuNod.
  Se calculeaza produsul V3xV1, observand ca unghiul dintre ei este 90}
  for i:=1 to NuNod do
  begin
    V[2,1,i]:=V[3,2,i]*V[1,3,i]-V[3,3,i]*V[1,2,i];
    V[2,2,i]:=V[3,3,i]*V[1,1,i]-V[3,1,i]*V[1,3,i];
    V[2,3,i]:=V[3,1,i]*V[1,2,i]-V[3,2,i]*V[1,1,i];
    {Se redefinesc valorile componentelor pe axele x,y,z ale vectorului V(1,j,N) ca o masura suplimentara de a
    tine sub control ortogonalitatea celor trei vectori V1, V2 si V3}
    V[1,1,i]:=V[2,2,i]*V[3,3,i]-V[2,3,i]*V[3,2,i];
    V[1,2,i]:=V[2,3,i]*V[3,1,i]-V[2,1,i]*V[3,3,i];
    V[1,3,i]:=V[2,1,i]*V[3,2,i]-V[2,2,i]*V[3,1,i];
    {Se calculeaza cosinusuri directe, respectiv cate trei valori pentru
    fiecare din vectorii V1, V2 si V3}
    for j:=1 to V_lin_max do

```

```

begin
  Dum:=Sqrt(Sqr(V[j,1,i])+Sqr(V[j,2,i])+Sqr(V[j,3,i]));
  for jj:=1 to V_col_max do V[j,j,i]:=V[j,j,i]/Dum;
end; {for j}
{Se calculeaza scalarul V13 care trebuie sa fie nul cand datele initiale
privind vectorii V1 si V3 sunt stabilite fara erori in faza discretizarii
structurii}
V13:=V[3,1,i]*V[1,1,i]+V[3,2,i]*V[1,2,i]+V[3,3,i]*V[1,3,i];
{Se cerceteaza daca valoarea scalarului V13 este nula in fiecare nod.
Cand V13>0,01, un mesaj de eroare este dat privind evaluarea
componentelor vectorilor V1 si V3 in nodul respectiv, dupa care
rulara programului este oprita}
if V13-0.01>0
then begin
  WriteLn(fis_rezultate,'Este gresit vectorul de intrare la nodul ',i:5);
  IFlag:=1;
end {if}
end {for i}
end;

{
  PROCEDURA SHAPE
}

procedure Shape;
Const
  XII:array[1..Vect2_max] of Real=(-1,0,1,1,1,0,-1,-1,0);
  Etal:array[1..Vect2_max] of Real=(-1,-1,-1,0,1,1,1,0,0);
  GP:array[1..Vect1_max-1] of Double=(0.57735026918963,0.57735026918963);
var
  PXI,PET:array[1..Vect2_max] of Real;
  XJac,XJacI,DC:array[1..Vect1_max,1..Vect1_max] of Real;
  TM:array[1..D_lin_max,1..D_col_max] of Real;
  T1,T2,RPG,ZPG,Dum,Dum1,Dum4,Dum5:Double;
  K,L,Mm,Ii,Ij,i1,i2,j1,j2,i,j,N,N1:integer;
begin
  {IFlag=0 Exista gradient de temperatura
  IFlag=1 Nu exista gradient de temperatura
  IFlag=2 Se calculeaza numai cosinusurile directeare
  JFlag=0 Se calculeaza ultima coloana din B0 si din B1}
  if IFlag<2 {Daca IFlag=2, subrutina Shape va furniza numai valorile
  cosinusurilor directeare. Daca IFlag<2, se continua calculele}
  then begin
    {Se calculeaza valorile functiilor de interpolare cat si ale
    derivatelor acestora}
    Dum1:=1-Sqr(GP[Iy]);
    Dum2:=1-Sqr(GP[Ix]);
    for i:=1 to Vect2_max-1 do
      begin
        Dum3:=1+GP[Iy]*Etal[i];
        Dum4:=1+GP[Ix]*XII[i];
        case i of
          1,3,5,7:begin
            P[i]:=0.25*(Dum3*Dum4-Dum2*Dum3-Dum1*Dum4);
            PXI[i]:=0.25*((XII[i]+2*GP[Ix])*Dum3-XII[i]*Dum1);
            Pet[i]:=0.25*((Etal[i]+2*GP[Iy])*Dum4-Etal[i]*Dum2);
          end;
          2,6:begin

```

```

P[i]:=0.5*Dum2*Dum3;
PXI[i]:=-GP[1x]*Dum3;
Pet[i]:=0.5*EtaI[i]*Dum2;
end;
4,8:begin
  P[i]:=0.5*Dum1*Dum4;
  PXI[i]:=XII[i]*Dum1*0.5;
  Pet[i]:=-GP[ly]*Dum4;
end;
end;
{Se calculeaza valorile functiei de interpolare asociata centrului
elementului finit si ale derivatelor acesteia, in punctul Gauss}
P[Vect2_max]:=Dum1*Dum2;
PXI[Vect2_max]:=-2*GP[1x]*Dum1;
Pet[Vect2_max]:=-2*GP[ly]*Dum2;
{Sunt anulate sirurile XJac ;i XJacI}
for i:=1 to Vect1_max do
  for j:=1 to Vect1_max do
    begin
      XJac[i,j]:=0;
      XJacI[i,j]:=0
    end;
  end;
{Se calculeaza elementele matricei jacobiene, functiile de interpolare
si derivatelor acestora}
for i:=1 to ID_col_max do
begin
  N:=Id[M,i];
  XJac[1,1]:=XJac[1,1]+PXI[i]*X[N];
  XJac[1,2]:=XJac[1,2]+PXI[i]*Y[N];
  XJac[1,3]:=XJac[1,3]+PXI[i]*Z[N];
  XJac[2,1]:=XJac[2,1]+PET[i]*X[N];
  XJac[2,2]:=XJac[2,2]+PET[i]*Y[N];
  XJac[2,3]:=XJac[2,3]+PET[i]*Z[N];
  XJac[3,1]:=XJac[3,1]+P[i]*V[3,1,N]*Gros[N]/2;
  XJac[3,2]:=XJac[3,2]+P[i]*V[3,2,N]*Gros[N]/2;
  XJac[3,3]:=XJac[3,3]+P[i]*V[3,3,N]*Gros[N]/2;
end;
{Dejac este valoarea determinantului matricei jacobiene}
Dejac:=XJac[1,1]*(XJac[2,2]*XJac[3,3]-XJac[2,3]*XJac[3,2])-
XJac[1,2]*(XJac[2,1]*XJac[3,3]-XJac[2,3]*XJac[3,1])+
XJac[1,3]*(XJac[2,1]*XJac[3,2]-XJac[2,2]*XJac[3,1]);
{Se face inversarea matricei jacobiene, identificatorii XJacI avand
pozitiile matriceale}
XJacI[1,1]:=(XJac[2,2]*XJac[3,3]-XJac[2,3]*XJac[3,2])/Dejac;
XJacI[1,2]:=(-XJac[2,1]*XJac[3,3]+XJac[2,3]*XJac[3,1])/Dejac;
XJacI[1,3]:=(XJac[2,1]*XJac[3,2]-XJac[2,2]*XJac[3,1])/Dejac;
XJacI[2,1]:=(XJac[1,3]*XJac[3,2]-XJac[1,2]*XJac[3,3])/Dejac;
XJacI[2,2]:=(-XJac[1,3]*XJac[3,1]+XJac[1,1]*XJac[3,3])/Dejac;
XJacI[2,3]:=(XJac[1,2]*XJac[3,1]-XJac[1,1]*XJac[3,2])/Dejac;
XJacI[3,1]:=(XJac[1,2]*XJac[2,3]-XJac[1,3]*XJac[2,2])/Dejac;
XJacI[3,2]:=(-XJac[1,1]*XJac[2,3]+XJac[1,3]*XJac[2,1])/Dejac;
XJacI[3,3]:=(XJac[1,1]*XJac[2,2]-XJac[1,2]*XJac[2,1])/Dejac;
{Se inlocuieste matricea jacobiana prin inversul ei}
for i:=1 to Vect1_max do
  for j:=1 to Vect1_max do
    XJacI[i,j]:=XJacI[j,i];
  end; {if IFlag<>2}

```

```

{Se calculeaza 9 cosinusuri directoare ale vectorilor V1, V2 si V3
intr-unul din cele 4 puncte ale cuadraturii Gauss definit de valorile
variabilelor lx si ly din cadrul apelarii subrutinei Shape. In acest scop
se folosesc valorile in punctele Gauss ale functiilor de interpolare Ni
asociate cu nodurile elementului finit.}
for j:=1 to Vect1_max do
begin
  {Sunt egalate cu zero valorile sirurilor LC,MC,NC}
  LC[j]:=0;
  MC[j]:=0;
  NC[j]:=0;
  {Sunt aplicate formule de interpolare pentru a calcula 3 cosinusuri
  directoare ale vectorilor V1, V2 si V3 fata de una din axele x, y, z}
  for i:=1 to ID_col_max do
  begin
    {Sunt identificate numerele nodurilor ce apartin unui anumit element
    finit considerate in ordinea i=1,8 in sens antiorar, incepand cu nodul
    din stanga-jos al elementului}
    N:=ID[M,i];
    LC[j]:=LC[j]+P[i]*V[j,1,N];
    MC[j]:=MC[j]+P[i]*V[j,2,N];
    NC[j]:=NC[j]+P[i]*V[j,3,N];
  end{for j}
end{for i}
{Se calculeaza 9 vectori unitari divizand valorile LC(i), MC(i), NC(i)
prin lungimea scalara DUM, a vectorului al carui componente sunt LC(i),
MC(i) si NC(i)}
for i:=1 to Vect1_Max do
begin
  Dum :=Sqrt(Sqr(LC[i])+Sqr(MC[i])+Sqr(NC[i]));
  LC[i]:=LC[i]/Dum;
  MC[i]:=MC[i]/Dum;
  NC[i]:=NC[i]/Dum;
end; {for i}
{Daca IFlag=2, urmeaza intoarcerea in subrutina Formk, altfel se continua}
if IFlag=2 then exit;
{Sirurile vectorilor unitari LC, MC ;i NC sunt transferate in matricea DC}
for i:=1 to Vect1_max do
begin
  DC[i,1]:=LC[i];
  DC[i,2]:=MC[i];
  DC[i,3]:=NC[i];
end; {for i}
{Se construiesc matricea de transformare TM cu dimensiunile 6x6. Matricea
TM este folosita pentru transformarea matricei E' asociata cu sistemul de
coordonate locale x'y'z' in matricea E asociata cu sistemul global de
coordonate xyz. Sistemul de coordonate x'y'z' are aceleasi directii ca si
vectorii V1, V2, V3 a caror orientare in punctele Gauss se schimba de la
un element finit la altul}
for i:=1 to Vect1_max do
begin
  i1:=3+i;
  i2:=i+1;
  if i=3 then i2:=1;
  for j:=1 to Vect1_max do
  begin
    j1:=3+j;
    j2:=j+1;

```

```

if j=3 then j2:=1;
TM[i,j]:=Sqr(DC[i,j]);
TM[i,1]:=DC[i,j]*DC[i,2];
TM[i,1,j]:=2*DC[i,j]*DC[i,2,j];
TM[i,1,j1]:=DC[i,j]*DC[i,2,j2]+DC[i,2,j]*DC[i,j2]
end {for j}
end; {for i}
{Se calculeaza matricea E avand dimensiunile 6x6 si identificatorii D(i,j).
Factorii D1, D2 si G sunt transmisi ca variabile globale, declarate in
sectiunea Interface a unitatii de program.}
for i:=1 to D_lin_max do
for j:=1 to D_col_max do
D[i,j]:=TM[1,j]*TM[1,i]*D1+TM[2,j]*TM[1,i]*D2+TM[1,j]*TM[2,i]*D2+
TM[2,j]*TM[2,i]*D1+TM[4,j]*TM[4,i]*G+TM[5,j]*TM[5,i]*G+
TM[6,j]*TM[6,i]*G;
{Matricea E devenita matricea D este simetrizata}
for i:=2 to D_lin_max do
for j:=1 to i do
D[i,j]:=D[j,i];
{Sunt egalate cu zero valorile elementelor matricei B0(li,lj), avand
dimensiunile 6*44 si ale matricei B1(li,lj) cu dimensiunile 6*17}
for li:=1 to B0_lin_max do
for lj:=1 to B0_col_max do
B0[li,lj]:=0;
for li:=1 to B1_lin_max do
for lj:=1 to B1_col_max do
B1[li,lj]:=0;
{Se calculeaza elementele matriceale B0(li,lj) si B1(li,lj)}
for N:=1 to ID_col_max do
begin
{Se identifica numarul unui anumit nod}
N1:=ID[m,n];
Dum1:=XJac[1,1]*PXI[n]+XJac[1,2]*Pet[n];
Dum2:=XJac[2,1]*PXI[n]+XJac[2,2]*Pet[n];
Dum3:=XJac[3,1]*PXI[n]+XJac[3,2]*Pet[n];
Dum4:=P[n]*Gros[N1]/2;
Dum5:=Gros[N1]/2;
Mm:=5*N;
L:=Mm-1;
K:=Mm-2;
J:=Mm-3;
I:=Mm-4;
B0[1,i]:=Dum1;
B0[1,L]:=XJac[1,3]*V[1,1,N1]*Dum4;
B0[1,Mm]:=-XJac[1,3]*V[2,1,N1]*Dum4;
B0[2,j]:=Dum2;
B0[2,L]:=XJac[2,3]*V[1,2,N1]*Dum4;
B0[2,Mm]:=-XJac[2,3]*V[2,2,N1]*Dum4;
B0[3,k]:=Dum3;
B0[3,L]:=XJac[3,3]*V[1,3,N1]*Dum4;
B0[3,Mm]:=-XJac[3,3]*V[2,3,N1]*Dum4;
B0[4,i]:=Dum2;
B0[4,j]:=Dum1;
B0[4,L]:=(XJac[2,3]*V[1,1,N1]+XJac[1,3]*V[1,2,N1])*Dum4;
B0[4,Mm]:=(-XJac[2,3]*V[2,1,N1]-XJac[1,3]*V[2,2,N1])*Dum4;
B0[5,j]:=Dum3;
B0[5,k]:=Dum2;
B0[5,L]:=(XJac[3,3]*V[1,2,N1]+XJac[2,3]*V[1,3,N1])*Dum4;

```



```

B0[5,Mm]:=(-XJac[3,3]*V[2,2,N1]-XJac[2,3]*V[2,3,N1])*Dum4;
B0[6,i]:=Dum3;
B0[6,k]:=Dum1;
B0[6,L]:=(XJac[3,3]*V[1,1,N1]+XJac[1,3]*V[1,3,N1])*Dum4;
B0[6,Mm]:=(-XJac[3,3]*V[2,1,N1]-XJac[1,3]*V[2,3,N1])*Dum4;
Mm:=2*N;
L:=2*N-1;
B1[1,L]:=Dum1*V[1,1,N1]*Dum5;
B1[1,Mm]:=-Dum1*V[2,1,N1]*Dum5;
B1[2,L]:=Dum2*V[1,2,N1]*Dum5;
B1[2,Mm]:=-Dum2*V[2,2,N1]*Dum5;
B1[3,L]:=Dum3*V[1,3,N1]*Dum5;
B1[3,Mm]:=-Dum3*V[2,3,N1]*Dum5;
B1[4,L]:=(Dum2*V[1,1,N1]+Dum1*V[1,2,N1])*Dum5;
B1[4,Mm]:=-(Dum2*V[2,1,N1]+Dum1*V[2,2,N1])*Dum5;
B1[5,L]:=(Dum3*V[1,2,N1]+Dum2*V[1,3,N1])*Dum5;
B1[5,Mm]:=-(Dum3*V[2,2,N1]+Dum2*V[2,3,N1])*Dum5;
B1[6,L]:=(Dum3*V[1,1,N1]+Dum1*V[1,3,N1])*Dum5;
B1[6,Mm]:=-(Dum3*V[2,1,N1]+Dum1*V[2,3,N1])*Dum5;
end; {for n}
B0[1,B0_col_max-3]:=XJac[1,1]*PXI[9]+XJac[1,2]*Pet[9];
B0[2,B0_col_max-2]:=XJac[2,1]*PXI[9]+XJac[2,2]*Pet[9];
B0[3,B0_col_max-1]:=XJac[3,1]*PXI[9]+XJac[3,2]*Pet[9];
B0[4,B0_col_max-3]:=B0[2,B0_col_max-2];
B0[4,B0_col_max-2]:=B0[1,B0_col_max-3];
B0[5,B0_col_max-2]:=B0[3,B0_col_max-1];
B0[5,B0_col_max-1]:=B0[2,B0_col_max-2];
B0[6,B0_col_max-3]:=B0[3,B0_col_max-1];
B0[6,B0_col_max-1]:=B0[1,B0_col_max-3];
{
    Efectele termice si ale presiunilor
}
{Considerand IFlag=0 se face ipoteza ca ar putea exista gradient de
temperatura. Se evita astfel o valoare falsa IFlag=1 ce ar putea ramane
din ciclurile anterioare}
IFlag:=0;
{Dum1, Dum2 si Dum3 sunt grosimea invelitorii, temperatura Temp1 si Temp2
evaluate in fiecare punct Gauss folosind functiile de interpolare.
Marimile ZPG si RPG sunt presiunea laterala si respectiv presiunea normala
evaluate in fiecare punct Gauss utilizand functiile de interpolare}
Dum1:=0;
DUM2:=0;
Dum3:=0;
ZPG:=0;
RPG:=0;
for i:=1 to ID_col_max do
begin
    j:=ID[M,i];
    ZPG:=ZPG+ZP[j]*P[i];
    RPG:=RPG+RP[j]*P[i];
    Dum1:=Dum1+P[i]*Gros[j];
    Dum2:=Dum2+P[i]*Temp1[j];
    Dum3:=Dum3+P[i]*Temp2[j];
end; {for i}
{Daca Dum2=Dum3, se consemneaza IFlag=1, insemnand ca intre fetele
invelitorii nu exista gradient de temperatura incat nu va fi cazul
ulterior sa fie evaluate deformatiile specifice datorate unor efecte
termice (Vezi ultimul if IFlag)}

```

```

if Dum2=Dum3 then IFlag:=1;
{FZ si FR sunt fortele totale aplicate pe fata elementului finit datorate
presiunii laterale si respectiv celor 4 normale. Aceste forte rezulta in
urma integrarii numerice folosind 4 puncte Gauss. Este de observat ca in
evaluarea fortelor FZ si Fr cuadratura Gauss este efectuata in raport cu
csi si eta, in timp ce determinantul matricei jacobiene DeJac ramana 3x3
adica raportat la axele csi, eta, zeta. Aceasta justifica divizarea
expresiilor ZPG si RPG prin DUM1/2 in punctele Gauss, unde DUM1 este
grosimea invelitorii in acele puncte.}
FZ:=FZ+ZPG*2/DUM1*DeJac;
FR:=FR+RPG*2/DUM1*DeJac;
{Daca JFlag=1 calculele in subrutina Shape sunt terminate. Aceasta
situatie apare numai cand apelarea se face din subrutina Tens. Daca
JFlag=0 se continua calculele in Shape. Cazul JFlag>1 este fictiv.}
If JFlag=1 then exit;
if JFlag>1 then
begin
  WriteLn('IFlag=',IFlag);
  Halt(1)
end;
{Cand nu se prescrie vreo temperatura de baza, adica Temp=0, nu se
calculeaza termeni cu valori constante ale deformatiilor specifice
initiale. In acest caz mersul calculelor este transferat la instructiunea
if IFlag=1 (ultimul if) pentru determinarea unor eventuale efecte termice
de inconvoiere datorate variatei de temperatura pe directia coordonatei
zeta. In cazul Temp<0 se calculeaza deformatiile specifice initiale
constante care se inglobeaza in coloana aditionala a matricei B0. Calculul
se face tinand seama de diferenta dintre temperatura de baza si valoarea
medie a temperaturii finale a invelitorii. Ori de cate ori prin datele
initiale se prescrie valoarea temperaturii de baza, in mod obligatoriu se
prescriu si temperaturile nodale Temp1(N) si Temp2(N)}
if Temp<0
then begin
  T1:=Ax*((Dum2+Dum3)/2-Temp);
  T2:=Ay*((Dum2+Dum3)/2-Temp);
  B0[1,B0_col_max]:=T1*sqr(LC[1])+T2*sqr(LC[2]);
  B0[2,B0_col_max]:=T1*sqr(MC[1])+T2*sqr(MC[2]);
  B0[3,B0_col_max]:=T1*sqr(NC[1])+T2*sqr(NC[2]);
  B0[4,B0_col_max]:=2*T1*MC[1]*LC[1]+2*T2*MC[2]*LC[2];
  B0[5,B0_col_max]:=2*T1*MC[1]*NC[1]+2*T2*MC[2]*NC[2];
  B0[6,B0_col_max]:=2*T1*NC[1]*LC[1]+2*T2*NC[2]*LC[2];
end;
{Daca IFlag=1 nu exista variatie de temperatura pe directia coordonatei
zeta, astfel incat se intoarce in subrutina apelanta. Cand IFlag<1 se
parcurge etapa de calcul a termenilor deformatiei initiale de inconvoiere
care se inglobeaza in coloana aditionala a matricei B1. Atat valorile B0
cat si valorile B1 sunt concepute in coordonate globale x,y, in timp ce
valorile T1 si T2 coincid cu axele locale x',y'. Schimbarea de axe este
efectuata utilizand matricea de transformare}
if IFlag=1 then exit;
T1:=Ax*(Dum2-Dum3)/2;
T2:=Ay*(Dum2-Dum3)/2;
B1[1,B1_col_max]:=T1*sqr(LC[1])+T2*sqr(LC[2]);
B1[2,B1_col_max]:=T1*sqr(MC[1])+T2*sqr(MC[2]);
B1[3,B1_col_max]:=T1*sqr(NC[1])+T2*sqr(NC[2]);
B1[4,B1_col_max]:=2*T1*MC[1]*LC[1]+2*T2*MC[2]*LC[2];
B1[5,B1_col_max]:=2*T1*MC[1]*NC[1]+2*T2*MC[2]*NC[2];
B1[6,B1_col_max]:=2*T1*NC[1]*LC[1]+2*T2*NC[2]*LC[2];

```

```

end;

{
    PROCEDURA FORMK
}

procedure Formk;
type inregistrare=array[1..SE_lin_max div 2+2,1..SE_col_max] of Real;
    fisier=file of inregistrare;
var AA:array[1..SE_lin_max,1..D_col_Max] of Real;
    N,NR02,NR01,NC02,NC01,L,k,i1,i2,j1,j2,IFlag,lx,Iy,i,j,M,IPNT,IPNT1:
        integer;
    Tmp: fisier;
    DUM,DUM1: Double;
    linie: inregistrare;
begin
    {Se asociaza variabila de tip fisier cu fisierul fizic. Apoi se deschide.}
    Assign(Tmp,'Tmp.$$$');
    Rewrite(Tmp);
    {Se calculeaza numarul de partitii NPC care trebuie sa ia parte la
    prelucrarea completa a unei partitii-pivot. Parametrul NPC este folosit
    in subrutinele ASAMB si Solve, astfel incat aceasta instructiune ar putea
    fi transferata in Asamb.}
    NPC:=(Mband+Nband-2) div Nband;
    WriteLn(fis_rezultate,'Faza 1 de generare a matricelor de rigiditate a elementelor finite');
    {Se initializeaza indicatia contorului calculatorului}
    IPNT:=1;
    {Se initializeaza indicatia contorului algoritmului programului}
    IPNT1:=0;
    {Ciclu este repetat pentru fiecare element finit in parte spre a-i forma
    matricea de rigiditate. Elementele acestei matrice au identificatorii SE}
    for M:=1 to NumEl do
        begin
            {Este pozitionat contorul IPNT1 cu numarul inregistrarii primei portiuni
            din matricea de rigiditate aflata in lucru. Fiecare matrice de rigiditate
            are 43x44=1892 elemente ce ocupa in fisierul auxiliar tot atatea unitati
            de memorie (cuvinte de sase octeti). }
            Inc(IPNT1);
            {Se scrie numarul elementului finit aflat in lucru. Aceasta indicatie
            este utila pentru a putea urmari evolutia stadiului in care se afla
            executia unui program cu multe elemente finite.}
            WriteLn(fis_rezultate,'Elementul ',M:5);
            {Elementele matricei SE anterior calculata sunt anulate. In acest fel
            este pregatit in memoria spatiul pe care-l va ocupa o noua matrice de
            rigiditate}
            for i:=1 to Se_lin_max do
                for j:=1 to Se_col_max do
                    SE[i,j]:=0;
            {Se pozitioneaza capul de citire-scriere a unitatii de discuri pe care
            se afla fisierul in dreptul cilindrului ce este astfel asociat cu
            inregistrarea avand numarul dat de IPNT1. In acest mod se mareste viteza
            de executie a instructiunilor cu acces direct de tipul Write(tmp)
            plasate la sfarsitul subrutinei Formk}
            Seek(tmp,IPNT1);
            {Valorile fortelor identificate prin FZ si FR calculate la elementul
            finit precedent sunt anulate. In acest fel este initializata evaluarea
            acestor forte pentru noul element finit aflat in lucru}
            FZ:=0;
            FR:=0;
        end;
    end;

```

```

{Se face apel, de patru ori, la subrutina Shape pentru evaluarile
preliminare necesare formarii matricei de rigiditate. Fiecare apelare
corespunde unui anumit punct Gauss al integrarii numerice}
for lx:=1 to 2 do
  for ly:=1 to 2 do
    begin
      WriteLn('Acum lucreaza procedura Shape');
      Flush(fisRezultate);
      Shape(M,lx,ly,IFlag,0);
      {Se efectueaza produsul dintre transpusa matricei B0 avand dimen-
      siunile 43x6 si matricea D cu dimensiunile 6x6 reprezentand pe E in
      sistemul global de coordonate xyz. Ambele matrice sunt transmise din
      procedura SHAPE. Matricea rezultata este AA}
      for i:=1 to SE_lin_max do
        for j:=1 to D_col_max do
          begin
            AA[i,j]:=0;
            for k:=1 to D_lin_max do
              AA[i,j]:=AA[i,j]+B0[k,i]*D[k,j]
            end; {for k,j,i}
          }
      {Se efectueaza triplul produs matriceal 2B0T*D*B0*det(J). SE(i,j)
      reprezinta elementele matricei de rigiditate pozitionate deasupra
      diagonalei principale si care sunt datorati matricei B0. Se poate
      observa ca este destul sa fie calculat doar triunghiul superior al
      matricei, incat s-a luat j=i,43, ulterior efectuandu-se operatia de
      umplere a intregii matrice ca urmare a structurii simetrice a ei.}
      for i:=1 to SE_lin_max do
        begin
          for j:=i to SE_col_max-1 do
            for k:=1 to D_col_max do
              SE[i,j]:=SE[i,j]+AA[i,k]*B0[k,j]*2*DeJac;
            {end for k,j}
          }
      {Daca TEMP=0 se continua calculul elementelor matriceale SE(i,j)
      conform cu observatia precedenta. Daca TEMP<0 se determina fortele
      nodale echivalente datorate deformatiilor initiale constante.
      Produsul B0T*D formeaza tabloul AA(i,j), iar deformatiile csi0 se
      afla in sirul B0(L,44). Valoarea determinantului matricei jacobiene
      este date de DeJac si ramana raportata la axele csi, eta zeta.
      Valorile fortelor nodale echivalente sunt pozitionate in coloana
      SE(i,44)}
      if TEMP<0 then
        for L:=1 to D_col_max do
          SE[i,SE_col_max]:=SE[i,SE_col_max]+AA[i,L]*B0[L,B0_col_max]*
          2*DeJac;
        {end for L, if TEMP<0 then}
      end; {for i}
      {Se efectueaza produsul dintre matricea B1T, avand dimensiunile 16x6
      si matricea constantelor elastice in coordonate globale D, cu dimen-
      siunile 6x6. Ambele matrice sunt formate in subrutina SHAPE, de unde
      sunt transferate prin ca variabile globale. Identificatorii matricei
      rezultate sunt AA(i,j). In prealabil valorile acestor identificatori
      calculate anterior sunt anulate, pregatindu-se spatiul necesar}
      for i:=1 to B1_col_max-1 do
        for j:=1 to B1_lin_max do
          begin
            AA[i,j]:=0;
            for k:=1 to D_lin_max do
              AA[i,j]:=AA[i,j]+B1[k,i]*D[k,j];

```

```

end; {for k,j,i}
{Se calculeaza produsul dintre valoarea 2/3 si determinantul
matricei jacobiene det J caruia i se atribuie identificatorul DUM.}
DUM:=DeJac*2/3;
{Se efectueaza tripul produs matriceal 1/3*B1T*D*B1*det(J). In cadrul
ciclului elementele triplului produs sunt formate si insumate la
contributiile matricei B0 obtinute anterior. Se incheie astfel una
din cele patru runde ale integrarii numerice comandate prin Ix
for Iy privind formarea matricei de rigiditate k ciclul trebuie
repatat de 4 ori.}
for i:=1 to (B1_col_max-1) div 2 do
begin
  I2:=2*i;
  I1:=I2-1;
  NR02:=5*I;
  NR01:=NR02-1;
  for j:=1 to (B1_col_max-1) div 2 do
  begin
    J2:=2*j;
    J1:=J2-1;
    NC02:=5*j;
    NC01:=NC02-1;
    for k:=1 to B1_lin_max do
    begin
      SE[NR01,NC01]:=SE[NR01,NC01]+AA[I1,K]*B1[k,j1]*DUM;
      SE[NR01,NC02]:=SE[NR01,NC02]+AA[I1,K]*B1[k,j2]*DUM;
      SE[NR02,NC01]:=SE[NR02,NC01]+AA[I2,K]*B1[k,j1]*DUM;
      SE[NR02,NC02]:=SE[NR02,NC02]+AA[I2,K]*B1[k,j2]*DUM;
    end; {for k}
  end; {for j}
  {Daca IFlag=1 se continua calculul elementelor matriceale din [k].
  Altfel, se determina fortele nodale echivalente datorate deforma-
  tiilor initiale variabile. Calculul se face tinand seama ca
  temperatura variaza in directia coordonatei zeta. Produsul B1T*D
  este reprezentat de AA, iar deformatiile epsiloNC in sirul
  B1(k,17). Valorile fortelor nodale echivalente mentionate sunt
  insumate in sirul SE(1,44) cu i=4,5,9,10, etc. asociate gradelor
  de libertate ai si ai din cele 8 noduri ale elementului finit.}
  if IFlag<>1 then
  for k:=1 to B1_lin_max do
  begin
    SE[NR01,SE_col_max]:=SE[NR01,SE_col_max]+
      AA[I1,k]*B1[k,B1_col_max]*DUM;
    SE[NR02,SE_col_max]:=SE[NR02,SE_col_max]+
      AA[I2,k]*B1[k,B1_col_max]*DUM;
  end; {for k, if IFlag}
end; {for i}
end; {for Ix, Iy}
{Se calculeaza fortele nodale echivalente datorate fortelor totale
aplicate pe suprafata elementului finit FZ si FR. Fortele echivalente
din fiecare nod al elementului finit sunt considerate fractiuni din
valorile fortelor totale mentionate, admitandu-se astfel ipoteza ca
elementul finit ar avea fete dreptunghiulare plane. In cadrul ciclului
sunt calculate si totodata insumate aceste forte nodale in coloana 44 a
sirului valorilor SE(i,44), cu I,1,2,3 apoi 6,7,8, asociate astfel
gradelor de libertate translationale ui, vi, wi din cele 8 noduri}
for N:=1 to ID_col_max do
begin

```

```

I:=5*N-4;
J:=I+1;
K:=I+2;
{Se identifica numarul unui anumit nod al elementului finit.}
L:=ID[M,n];
if odd(N) then DUM1:=-1/12 else DUM1:=1/3;
SE[i,SE_col_max]:=SE[i,SE_col_max]+V[3,1,L]*FR*DUM1;
SE[j,SE_col_max]:=SE[j,SE_col_max]+V[3,2,L]*FR*DUM1;
SE[k,SE_col_max]:=SE[k,SE_col_max]+(V[3,3,L]*FR+FZ)*DUM1;
end;{for N}
{Se calculeaza valorile functiilor de interpolare NC,N1,...,N8 in
centrul elementului finit avand csi=eta=0}
P[1]:=-0.25;
P[2]:=0.5;
for i:=3 to Vect2_max-1 do if odd(i) then P[i]:=P[1] else P[i]:=P[2];
{Procedur Shape este apelata pentru a furniza numai valorile
cosinurilor directe ale vectorilor V1,V2 si V3 din centrul
elementului finit. Apelarea este facuta cu IFlag=2. Valorile dorite se
afla in sirul LC(3), MC(3) si NC(3) si se obtin prin interpolare}
IFlag:=2;
WriteLn('Acum lucreaza din nou Shape');
Shape(M,lx,ly,IFlag,0);
{Se revine la valoarea IFlag=0, pregatind astfel lucrul la un nou
element finit}
IFlag:=0;
{Sunt calculate fractiunile 4/9 din forta totala FZ si respectiv FR ce
se asociaza gradelor de libertate uc, vc si wc din centrul elementului
finit. Valorile mentionate sunt pozitionate pe ultimele trei linii ale
coloanei avand 43 valori SE(i,44)}
SE[SE_lin_max-2,SE_col_max]:=SE[SE_lin_max-2,SE_col_max]+LC[Vect1_max]*
FR*4/9;
SE[SE_lin_max-1,SE_col_max]:=SE[SE_lin_max-1,SE_col_max]+MC[Vect1_max]*
FR*4/9;
SE[SE_lin_max,SE_col_max]:=SE[SE_lin_max,SE_col_max]+(NC[Vect1_max]*FR+
FZ)*4/9;
{Se efectueaza umplerea matricei de rigiditate in partea inferioara, ca
urmare a simetriei sale.}
for i:=2 to SE_lin_max do
for j:=1 to i do
SE[i,j]:=SE[j,i];
{Se ajusteaza cele trei elemente matriceale de pe diagonala principala a
matricei de rigiditate [k] asociate cu gradele de libertate nenodale din
centrul elementului finit. Acestea sunt SE[41,41], SE[42,42], SE[43,43]}
for i:=SE_lin_max-2 to SE_lin_max do SE[i,i]:=SE[i,i]*Fator;
{Se efectueaza condensarea statica a triunghiului inferior al matricei
de rigiditate pentru a inlatura gradele de libertate nenodale uc,v,wc,
dupa care in se completeaza prin simetrie triunghiul superior. Se obtine
astfel o matrice de 40x40 in loc de 43x43. Totodata, au fost condensate
si fortele echivalente asociate cu gradele de libertate nenodale din
centrul elementului finit, astfel incat coloana 44 a sirului SE(L,44)
s-a redus la 40 de linii. Este de observat ca programul prevede
conservarea pe disc a ecuatiilor asociate cu necunoscutele condensate
spre a putea fi folosite ulterior la calculul tensiunilor in rocedura
TENS. Aceasta conservare este necesare daca in TENS sunt calculate
tensiunile in alte puncte decat in nodurile elementului finit.}
for k:=1 to 3 do
begin
j:=SE_lin_max-k;

```

```

i:=SE_col_max-k;
for L:=1 to j do
begin
  DUM:=SE[i,L]/SE[i,i];
  for l1:=1 to L do SE[L,l1]:=SE[L,l1]-SE[i,l1]*DUM;
  SE[L,SE_col_max]:=SE[L,SE_col_max]-SE[i,SE_col_max]*DUM;
end {for L}
end; {for k}
for i:=1 to SE_lin_max do
  for j:=i to SE_lin_max do
    SE[i,j]:=SE[j,i];
  {Se afiseaza numarul inregistrarii ce urmeaza a fi scrisa in fisier}
  WriteLn(fis_rezultate,'IPNT1=',IPNT1:2);
  {Se scrie in fisier primul bloc al matricei de rigiditate}
  for i:=1 to SE_lin_max div 2 -1 do
    for j:=1 to SE_col_max do linie[i,j]:=SE[i,j];
    Write(tmp,linie);
  {Indicatia contorului programului este marita cu o unitate, obtinandu-se
  numarul inregistrarii celui de-al doilea bloc al matricei de rigiditate}
  Inc(IPNT1);
  Seek(tmp,IPNT1);
  {Se afiseaza numarul de inregistrare al celui de-al doilea bloc al
  matricei de rigiditate}
  WriteLn(fis_rezultate,'IPNT1=',IPNT1:2);
  {Se scrie in fisier ce de-al doilea bloc al matricei de rigiditate}
  for i:=SE_lin_max div 2 to SE_lin_max do
    for j:=1 to SE_col_max do linie[i+1-SE_lin_max div 2,j]:=SE[i,j];
    Write(tmp,linie);
  {Se reia de la capat executia ciclului pentru a forma matricea de
  rigiditate a urmatorului element finit}
  end; {for M}
  {Se inchide fisierul de pe disc}
  Close(tmp)
end;

{
  PROCEDURA ASAMB
}

procedure Asamb;
label 5;
type inregistrare=array[1..SE_lin_max div 2+2,1..SE_col_max] of Real;
  fisier=file of inregistrare;
  fisier1=file of Real;
  fisier2=file of LongInt;
  fisier3=file of integer;
  fisier4=file of double;
var
  tmp_double: fisier4;
  linie: inregistrare;
  tmp: fisier; tmp_real: fisier1; tmp_int: fisier3; tmp_long: fisier2;
  KK: array[1..R_max] of integer;
  lVel: Vect;
  NPAR2, NPAR0, NPAR1, Jj, li, KL, L, M, i, j, NLin1, NLin2, NP, IPNT2, IPNT, IPNT1: integer;
begin
  {Se asociaza variabila de tip fisier cu fisierul fizic. Apoi se deschide.}
  Assign(Tmp,'Tmp.$$$');
  ReSet(Tmp);

```

```

{Se calculeaza numarul total al partiilor in care se divizeaza matricea
globala de rigiditate}
5:NrPar:=(NSize+NBand-1) div NBand;
for i:=1 to Vect_max do IVel[j]:=0;
{Se scrie titlul fazei din program executate de Asamb si Sivel}
WriteLn(fisRezultate,' Faza 2 - Asamblarea');
{Se calculeaza numarul blocurilor ce au fost depuse pe fisier in cadrul
executarii subrutinelor Formk si Shape}
IPNT2:=2*NumEl;
{Incep ciclurile de formare a seturilor de cate doua partitii ale matricei
globale de rigiditate }
NP:=1;
while NP<=NrPar do
begin
  {Se calculeaza numarul primei linii din set, NLin1, cat si numarul
  ultimei linii a setului, NLin2. Parametrul NSiz2=2*NBand are valoarea 32
  si a fost stabilit in programul principal (main). Astfel, primul set are
  NLin1=1 si NLin2=32, setul al doile are NLin1=33 si NLin2=64, etc. Se
  poate observa ca in cazul structurii analizate cel de-al treilea set,
  care este si ultimul set, are NLin1=65 si NLin2=96, desi s-ar parea ca
  ultima linie ar trebui sa fie NSize=75. Liniile matriceale suplimentare
  trebuie acceptate ca virtuale.}
  NLin1:=(NP-1)*NBand+1;
  NLin2:=NLin1+NSiz2-1;
  {Se calculeaza numarul de ordine al inregistrarii din fisier a primei
  partitii a unui set. Spre exemplu, prima partitie a primului set va avea
  numarul de inregistrare IPNT2=9, urmand sa se gaseasca in fisier imediat
  dupa spatiul ocupat de cele opt blocuri ale matricelor de rigiditate ale
  elementelor finite.}
  Inc(IPNT2);
  {Se anuleaza S(i,j) calculati in ciclul precedent, corespunzand
  spatiului ocupat de doua partitii}
  for i:=1 to NSiz2 do
    for j:=1 to MBand do
      S[i,j]:=0;
  {Se initializeaza contorul calculatorului si contorul programului}
  IPNT:=1;
  IPNT1:=0;
  {Se apeleaza la subrutina Sivel pentru a preciza matricele care au
  contributii la formarea setului aflat in lucru. Daca IVel=0 matricea
  respectiva nu are contributie. Mesajul IVel=1 indica existenta unor
  contributii ale matricei avand un anumit numar de ordine.}
  WriteLn('Acum lucreaza procedura SIVEL');
  Sivel(IVel,NLin1,NLin2);
  {Incep ciclurile de asamblare propriu-zisa a matricelor indicate de
  procedura SIVEL ce au contributii la formarea unui anumit set aflat in
  lucru}
  for M:=1 to NumEl do
  begin
    {Daca IVel=0, matricea elementului M nu are contributie la formarea
    setului astfel incat calculul este transferat pentru a mari cu doua
    unitati cifra de control a inregistrarilor blocurilor. Daca IVel=1 se
    continua calculele, matricea elementului M avand contributii.}
    if IVel[M]<0 then goto 5;
    if IVel[M]>0
    then begin
      {Inregistrarea contorului programului este marita cu o unitate. Numarul
      de inregistrare obtinut serveste la indicarea primului bloc al matricei

```


de rigiditate aparținând elementului finit M ce urmează a fi extrasă de pe fișier și adusă în memoria operativă. La imprimantă se scrie numărul primei partiții din set și numărul matricei de rigiditate al elementului finit M având contribuții.}

```
Inc(IPNT1);
```

```
WriteLn(fis_rezultate,'Partitia ',NP:3,',':5,'Elementul ',M:3);
```

{Se anulează identificatorii precedentei matrice de rigiditate aflați în memoria operativă, pregătind astfel spațiul ce va fi ocupat de o nouă matrice $[k]$ din memoria auxiliara.}

```
for i:=1 to SE_lin_max do
```

```
  for j:=1 to SE_col_max do
```

```
    SE[i,j]:=0;
```

```
  {end for i for j}
```

```
Seek(tmp,IPNT1);
```

{În șirul $KK(L)$ corespunzând celor 40 grade de libertate ale elementului finit sunt transferate fie valorile zero asociate cu gradele de libertate nule, fie numerele de ordine pe care le au gradele de libertate nenule (necunoscutele nodale) în șirul $1..NSize$.}

```
L:=0;
```

```
for i:=1 to ID_col_max do
```

```
begin
```

```
  KL:=ID[M,i];
```

```
  for j:=1 to KODE_col_max do
```

```
    begin
```

```
      Inc(L);
```

```
      KK[L]:=KODE[KL,j];
```

```
    end {for j}
```

```
end; {for i}
```

{Sunt extrase din fișier și introduse în memoria operativă două blocuri alcătuirând matricea de rigiditate a elementului M .}

```
Read(tmp,linie);
```

```
for i:=1 to SE_lin_max div 2 - 1 do
```

```
  for j:=1 to SE_col_max do
```

```
    SE[i,j]:=linie[i,j];
```

```
Inc(IPNT1);
```

```
Seek(tmp,IPNT1);
```

```
Read(tmp,linie);
```

```
for i:=SE_lin_max div 2 to SE_lin_max do
```

```
  for j:=1 to SE_col_max do
```

```
    SE[i,j]:=linie[i+1-SE_lin_max div 2,j];
```

{Dacă elementul finit M este ultimul, se merge la instrucțiunea al cărei rol este la observatia a 8-a din procedura FORMK. Dacă $M < NumEl$ se continuă calculele. Cazul $M > NumEl$ este virtual.}

```
if NumEl=M then Seek(tmp,IPNT2);
```

{În setul de două partiții ale matricei globale de rigiditate se assemblează contribuțiile matricei elementului finit M . Totodată vectorul R al forțelor și cuplurilor concentrate nodale este suplimentat cu forțele nodale echivalente continute în coloana 44 atasată matricei de rigiditate a elementului finit. Principiile de asamblare în tabloul $S(II-NLin1+1, JJ)$ și în șirul valorilor forțelor $R(II)$. După încheierea asamblării matricei elementului finit M se repetă ciclul pentru un alt element finit dacă $M < NumEl$ și dacă elementele finite rămase au contribuții în setul respectiv.}

```
for i:=1 to SE_lin_max-3 do
```

```
begin
```

```
  li:=KK[i];
```

```
  if li <> 0 then
```

```
    if li >= NLin1 then
```

```

    if li<=NLin2
    then begin
        R[li]:=R[li]+SE[i,SE_col_max];
        for j:=1 to SE_lin_max-3 do
            begin
                if KK[j]>=li
                then begin
                    Jj:=KK[j]-li+1;
                    S[li-NLin1+1,Jj]:=S[li-NLin1+1,Jj]+SE[i,j];
                end {if KK}
            end {for j}
        end {if li}
    end {for i}
    end {if lVel then}
    else Inc(IPNT1,2);
end; {for m}
{Se introduce in fisier setul a doua partitii complet formate, dupa care
se repeta ciclul pentru formarea unui nou set, daca a mai ramas vreo
partitie neformata din numarul total NrPar. Este de retinut ca sirul
valorilor fortelor nodale R(li) ramane in memoria operativa.}
Seek(tmp,IPNT2);
for i:=1 to NBand do
    for j:=1 to MBand do linie[i,j]:=S[i,j];
Write(tmp,linie);
if NP<>NrPar
then begin
    Inc(IPNT2);
    for i:=1 to NBand do
        for j:=1 to MBand do linie[i+NBand,j]:=S[i+NBand,j];
    Seek(tmp,IPNT2);
    Write(tmp,linie);
end; {if NP}
Inc(NP,2) {Se incrementeaza cu 2 NP pentru reluarea ciclului}
end; {Se incheie ciclul while}
{Dupa transferarea in memoria auxiliara a tuturor partițiilor seturilor
succesive formand matricea globala de rigiditate, se egaleaza cu zero
identificatorii a unei partitii avand dimensiunile NBand*MBand. Se obtine
astfel o partitie virtuala necesare unor transferuri de partitii virtuale.}
for i:=1 to NBand do
    for j:=1 to MBand do
        S[i,j]:=0;
{Se introduc pe disc NPC partitii virtuale, fiecare cu dimensiunile NBand*
MBand si avand rol important in procedura urmatoare. Dupa incheierea
asamblarii, bilantul inregistrarii in fisier este urmatorul:8 inregistrari
(2*NumEl) ale blocurilor matriceale de rigiditate, 5 inregistrari (NrPar)
ale partițiilor ce compun matricea globala de rigiditate si 3 inregistrari
virtuale (NPC). Ultima inregistrare are numarul de ordine 16, adica
(2xNumEl+NrPar+NPC).}
NPar1:=NrPar+1;
NPar2:=NrPar+NPC;
NPar0:=NPar1;
while NPar0<=NPar2 do
begin
    Inc(IPNT2);
    Seek(tmp,IPnt2);
    for i:=1 to NBand do
        for j:=1 to MBand do linie[i,j]:=S[i,j];
    Write(tmp,linie);

```

```

if NPar0<>NPar2
then begin
  Inc(IPnt2);
  Seek(tmp,IPnt2);
  for i:=1 to NBand do
    for j:=1 to MBand do linie[i,j]:=S[i,j];
  Write(tmp,linie);
end; {if NPar0<>NPar2}
Inc(Npar0,2) {Se incrementeaza NPar0 pentru reluarea ciclului.}
end; {while}
Close(tmp);
flush(fis_rezultate);
{N-am ce face !!}
Assign(tmp_real,'Fis_real.dat');
Rewrite(tmp_real);
Assign(tmp_int,'Fis_int.dat');
Rewrite(tmp_int);
Assign(tmp_long,'Fis_long.dat');
Rewrite(tmp_long);
Assign(tmp_double,'Fis_dub.dat');
ReWrite(tmp_double);
for i:=1 to S_lin_max do
  for j:=1 to S_col_max do
    Write(tmp_real,S[i,j]);
for i:=1 to Se_lin_max do
  for j:=1 to Se_col_max do
    Write(tmp_real,Se[i,j]);
for i:=1 to Kode_lin_max do
  for j:=1 to Kode_col_max do
    Write(tmp_long,Kode[i,j]);
for i:=1 to Vect_max do
  Write(tmp_real,X[i]);
for i:=1 to Vect_max do
  Write(tmp_real,Y[i]);
for i:=1 to Vect_max do
  Write(tmp_real,Z[i]);
for i:=1 to ID_lin_max do
  for j:=1 to ID_col_max do
    Write(tmp_int,ID[i,j]);
for i:=1 to R_max do
  Write(tmp_double,R[i]);
for i:=1 to B0_lin_max do
  for j:=1 to B0_col_max do
    Write(tmp_real,B0[i,j]);
for i:=1 to B1_lin_max do
  for j:=1 to B1_col_max do
    Write(tmp_real,B1[i,j]);
Write(tmp_int,MBand);
Write(tmp_int,NumEl);
Write(tmp_int,NSize);
Write(tmp_int,NuNod);
for i:=1 to V_lin_max do
  for j:=1 to V_col_max do
    for ii:=1 to V_et_max do
      Write(tmp_real,V[i,j,ii]);
for i:=1 to Vect_max do
  Write(tmp_real,Gros[i]);
for i:=1 to Vect1_max do

```

```

Write(tmp_real,LC[i]);
for i:=1 to Vect1_max do
Write(tmp_real,MC[i]);
for i:=1 to Vect1_max do
Write(tmp_real,NC[i]);
Write(tmp_real,D1);
Write(tmp_real,D2);
Write(tmp_real,Dum2);
Write(tmp_real,Dum3);
Write(tmp_real,G);
for i:=1 to Vect_max do
Write(tmp_real,Zp[i]);
for i:=1 to Vect_max do
Write(tmp_real,Temp1[i]);
for i:=1 to Vect_max do
Write(tmp_real,Temp2[i]);
for i:=1 to Vect_max do
Write(tmp_real,Rp[i]);
for i:=1 to D_lin_max do
for j:=1 to D_col_max do
Write(tmp_real,D[i,j]);
for i:=1 to Vect2_max do
Write(tmp_real,P[i]);
Write(tmp_real,Dejac);
Write(tmp_real,Temp);
Write(tmp_real,Ax);
Write(tmp_real,Ay);
Write(tmp_real,Fz);
Write(tmp_real,Fr);
Write(tmp_real,Fator);
Write(tmp_int,NBAnd);
Write(tmp_int,NSiz2);
Write(tmp_int,NrPar);
Write(tmp_int,NP0);
Write(tmp_int,NPC);
Write(tmp_int,MSiz);
Write(tmp_int,IFlag);
Write(tmp_int,NDis);
Close(tmp_real);
Close(tmp_int);
Close(tmp_long);
Close(tmp_double)
end;

```

```

{
PROCEDURA SIVEL
}

```

```

procedure Sivel;
label 50;
var
KK:array[1..R_max] of integer;
li,j,L,KL,M,i:integer;
begin
{Incep ciclurile de identificare a matricelor care au contributii la
formarea unui set de doua partitii componente ale matricei globale de
rigiditate. Prima linie a unui astfel de set are numarul NLIN1, iar ultima
linie a setului are numarul NLIN2.}

```

```

for M:=1 to NumEl do
begin
  {Acest ciclu are acelasi rol ca si cel de la observatia a 15-a din
  procedura ASAMB, incat ar fi putut fi folosite aceleasi instructiuni.}
  for i:=1 to ID_col_max do
  begin
    KL:=ID[M,i];
    L:=5*i;
    for j:=1 to Kode_col_max do
      KK[L-j+1]:=KODE[KL,KODE_col_max-j+1];
    {end for j}
  end; {for i}
  {Se efectueaza procesul de identificare a eventualelor contributii din
  partea matricei elementului finit M. Daca numarul de ordine al gradului
  de libertate din elementul finit M este cuprins intre liniile NLIN1 si
  NLIN2 variabilei IVEL(M) i se atribuie valoarea 1, dupa care se repeta
  ciclul cu un alt element finit.}
  for i:=1 to SE_lin_max-3 do
  begin
    if KK[i]=0 then continue; {continua fortat din ciclul for i.}
    if KK[i]>0
    then begin
      li:=KK[i];
      if li>=NLin1 then
        if li<=NLin2 then
          for j:=1 to SE_lin_max-3 do
          begin
            if KK[j]>=li
            then begin
              IVEL[M]:=1;
              goto 50; {iese fortat din ciclul for j}
            end {if KK[j]}
          end; {for j}
          {end if li<=NLin2}
          {end if li>=NLin1}
        end; {if KK[i]>0 then}
      end; {for i}
      {Daca nici unul dintre numerele de ordine ale gradelor de libertate nu
      este cuprins intre liniile NLIN1 si NLIN2 variabilei IVEL(M) i se da
      valoarea zero, dupa care se repeta ciclul cu un alt element finit.}
      IVEL[M]:=0;
50: end; {for M}
    for M:=1 to NumEl do
      Write(fis_rezultate,' ',IVEL[M]:4:0);
      WriteLn(fis_rezultate);
    end;

  {
    PROCEDURA SOLVE
  }

  procedure Solve;
  label 1;
  type inregistrare=array[1..SE_lin_max div 2+2,1..SE_col_max] of Real;
  fisier=file of inregistrare;
  fisier1=file of Real;
  fisier2=file of LongInt;
  fisier3=file of integer;

```

```

    fisier4=file of double;
var
    tmp_double: fisier4;
    linie: inregistrare;
    tmp: fisier; tmp_real: fisier1; tmp_int: fisier3; tmp_long: fisier2;
    W: vect_R;
    i,j,IPar3,IPar2,IPar1,IPar,IPNT1,IPNT2,NLIN,NLINI,NLIN1,NLIN2,NRing,NP1,
    Nr,M,LBan1,NP,LBan2,k,Ii,L1,L2,N,L: integer;
    C: Real;
begin
{N-am ce face !!}
    Assign(tmp_real,'Fis_real.dat');
    ReSet(tmp_real);
    Assign(tmp_int,'Fis_int.dat');
    ReSet(tmp_int);
    Assign(tmp_long,'Fis_long.dat');
    ReSet(tmp_long);
    Assign(tmp_double,'Fis_dub.dat');
    ReSet(tmp_double);
    for i:=1 to S_lin_max do
        for j:=1 to S_col_max do
            Read(tmp_real,S[i,j]);
    for i:=1 to Se_lin_max do
        for j:=1 to Se_col_max do
            Read(tmp_real,Se[i,j]);
    for i:=1 to Kode_lin_max do
        for j:=1 to Kode_col_max do
            Read(tmp_long,Kode[i,j]);
    for i:=1 to Vect_max do
        Read(tmp_real,X[i]);
    for i:=1 to Vect_max do
        Read(tmp_real,Y[i]);
    for i:=1 to Vect_max do
        Read(tmp_real,Z[i]);
    for i:=1 to ID_lin_max do
        for j:=1 to ID_col_max do
            Read(tmp_int,ID[i,j]);
    for i:=1 to R_max do
        Read(tmp_double,R[i]);
    for i:=1 to B0_lin_max do
        for j:=1 to B0_col_max do
            Read(tmp_real,B0[i,j]);
    for i:=1 to B1_lin_max do
        for j:=1 to B1_col_max do
            Read(tmp_real,B1[i,j]);
    Read(tmp_int,MBand);
    Read(tmp_int,NumEl);
    Read(tmp_int,NSize);
    Read(tmp_int,NuNod);
    for i:=1 to V_lin_max do
        for j:=1 to V_col_max do
            for ii:=1 to V_et_max do
                Read(tmp_real,V[i,j,ii]);
    for i:=1 to Vect_max do
        Read(tmp_real,Gros[i]);
    for i:=1 to Vectl_max do
        Read(tmp_real,LC[i]);
    for i:=1 to Vectl_max do

```

```

Read(tmp_real,MC[i]);
for i:=1 to Vect1_max do
  Read(tmp_real,NC[i]);
Read(tmp_real,D1);
Read(tmp_real,D2);
Read(tmp_real,Dum2);
Read(tmp_real,Dum3);
Read(tmp_real,G);
for i:=1 to Vect_max do
  Read(tmp_real,Zp[i]);
for i:=1 to Vect_max do
  Read(tmp_real,Temp1[i]);
for i:=1 to Vect_max do
  Read(tmp_real,Temp2[i]);
for i:=1 to Vect_max do
  Read(tmp_real,Rp[i]);
for i:=1 to D_lin_max do
  for j:=1 to D_col_max do
    Read(tmp_real,D[i,j]);
for i:=1 to Vect2_max do
  Read(tmp_real,P[i]);
Read(tmp_real,Dejac);
Read(tmp_real,Temp);
Read(tmp_real,Ax);
Read(tmp_real,Ay);
Read(tmp_real,Fz);
Read(tmp_real,Fr);
Read(tmp_real,Fator);
Read(tmp_int,NBand);
Read(tmp_int,NSiz2);
Read(tmp_int,NrPar);
Read(tmp_int,NP0);
Read(tmp_int,NPC);
Read(tmp_int,MSiz);
Read(tmp_int,IFlag);
Read(tmp_int,NDis);
Close(tmp_real);
Close(tmp_int);
Close(tmp_double);
Close(tmp_long);
{Se asociaza variabila de tip fisier cu fisierul fizic. Apoi se deschide.}
Assign(Tmp,'Tmp.$$$');
ReSet(Tmp);
1:WriteLn(fis_rezultate,":3,'Faza 3 - Substitutie Gauss');
{Valoarea constantei NP1 este folosita in etapa returului substitutiei.}
NP1:=NrPar-1;
{NRing reprezinta numarul inregistrarilor necesare pentru inregistrarea
unei partiitii (bloc) in memoria auxiliara.}
NRing:=(NBand*MBand+(SE_lin_max div 2+2)*SE_col_max-1) div
((SE_lin_max div 2+2)*SE_col_max);
{Se initializeaza contorul programului la valoarea ce precede numarul
inregistrarilor partiitiilor componente ale matricei globale de rigiditate.
Rezulta IPNT1=8.}
IPNT1:=2*NumEl;
{Se afiseaza titlul noii faze de lucru a programului:Eliminare gaussiana.}
WriteLn(fis_rezultate,":3,'Eliminare Guassiana');
{Se initializeaza parametrul NLIN folosit ulterior la identificarea unui
termen R(i) asociat cu o anumita linie a matricei globale de rigiditate.}

```

```

NLIN:=0;
{Incep ciclurile primei etape Gauss: eliminarea partiala a necunoscutelor
nodale.}
for IPar:=1 to NrPar do
begin
  {Se introduce si se initializeaza cinci parametri dupa cum urmeaza :
  - IPNT1, ce reprezinta numarul de inregistrare a unei partitii pivot
  dintr-un set de doua partitii introduse in memorie. In cazul IPAR=1,
  primul set de doua partitii se afla al IPNT1=9.
  - IPNT2 are valoarea inregistrarii celei de-a doua partitii a setului.
  Ca valoare initiala se ia IPNT2=IPNT1.
  - NLIN1 reprezinta numarul de ordine al primei linii a fiecarei din cele
  NPC partitii ce se asociaza succesiv cu partitia pivot dintr-un ciclu.
  In cazul structurii analizate, cele trei valori succesive ale parametrului
  NLIN1 sunt : 1, 17,33.
  - NLIN1 si NLIN2 reprezinta numerele de ordine ale primei linii si
  respectiv ultimei linii din fiecare NPC+1 partitii ale unui ciclu. In
  cazul structurii analizate cele patru valori succesive sunt: 1,17,33,49,
  pentru NLIN1 si respectiv 16,32,48,64 pentru NLIN2.}
  Inc(IPNT1);
  Seek(tmp,IPNT1);
  IPNT2:=IPNT1;
  NLIN1:=1;
  NLIN2:=1;
  NLIN2:=NLIN1+2*NBand-1;
  {Se extrage de pe disc partitia pivot avand numarul de inregistrare
  IPNT1 si se introduce aceasta repartitie in memorie. In continuare, se
  scrie la imprimanta numarul de ordine al partitiei pivot. La primul
  ciclu acest mesaj este PARTITIA1, la al doilea ciclu mesajul este
  PARTITIA 2, etc., ultimul mesaj fiind PARTITIA 5.}
  Seek(tmp, IPNT1);
  Read(tmp,linie);
  for i:=1 to NBand do
    for j:=1 to MBand do S[i,j]:=linie[i,j];
  WriteLn(fisRezultate,'Partitia ',IPAR:4);
  flush(fisRezultate);
  {Parametrul IPar2 reprezinta numarul de ordine al primei partitii din
  sirul celor NP0 partitii care sunt introduse succesive in memorie si
  cuplate cu partitia pivot. La primul ciclu avem IPAR=2. Parametrul IPAR3
  reprezinta numarul de ordine al ultimei partitii din sirul celor NP0
  partitii. La primul ciclu avem IPAR3=4. Prin ciclul for IPAR1=IPar2 to
  IPAR3 se executa ciclurile de prelucrare completa a partitiei pivot.}
  IPar2:=IPar+1;
  IPar3:=IPar+NP0;
  for IPar1:=IPar2 to IPar3 do
  begin
    {Contorul IPNT2 se mareste cu o unitate. Apoi se extrage din fisier si
    se introduce in memorie partitia avand inregistrarea IPNT2.}
    Inc(IPNT2);
    Seek(tmp,IPNT2);
    Read(tmp,linie);
    for i:=1 to NBand do
      for j:=1 to MBand do S[i+NBand,j]:=linie[i,j];
    {Prin comanda urmatoare se executa ciclurile de prelucrare a partitiei
    pivot folosind datele din setul a doua partitii aflate simultan in
    memorie.}
    for N:=1 to NBand do
  begin

```



```

{Valorile parametrilor L1 si L2 indica prima si respectiv ultima
coloana dintr-o linie N a partitiei pivot intre care au loc prelu-
crari ale elementelor matriceale in baza comenzilor for N=1 to NBand
... for L=L1 to L2. La incheierea prelucrarii unui set de doua par-
titii fiecare linie a partitiei pivot este incomplet prelucrata,
ramanandu-i ciclului sa asigure completarea procesului de eliminare
Gauss pentru pivot. Daca in memorie ar exista spatiu disponibil
pentru prezenta simultana a patru partitii, in loc de doua, comenzi-
le mentionate ar deveni for N=1 to NBand ... for L=2 to MBand, adica
toate elementele matriceale ale liniei de ordinul N din partitia
pivot sunt complet prelucrate in cadrul celor doua cicluri. Nu mai
este nevoie de un ciclu de completare a prelucrarilor. In sfarsit,
daca memoria are spatiu disponibil pentru intreaga matrice globala
format banda, comenzile devin for N=1 to NSize ... for L=2 to MBand.
In acest caz nu mai este nevoie de impartirea matricei banda in par-
titii. Liniile matriceale sunt prelucrate in intregime.}
if NLIn1-N+1>2 then L1:=NLIn1-N+1 else L1:=2;
if NLIn2-N+1>MBand then L2:=MBand else L2:=NLIn2-N+1;
if L2>=L1
then begin
  {Se efectueaza eliminarea partiala Gauss a necunoscutelor nodale,
de-a lungul unei singure linii, intre coloanele L1 si L2.}
  for L:=L1 to L2 do
  begin
    i:=N+L-1;
    if S[N,L]<>0
    then begin
      li:=i-NLIN1+1;
      if S[N,1]>=1E-5
      then begin
        C:=S[N,L]/S[N,1];
        j:=0;
        for k:=L to MBand do
        begin
          Inc(j);
          S[li,j]:=S[li,j]-C*S[N,k];
        end; {for k}
        S[N,L]:=C;
        R[i+NLIN]:=R[i+NLIN]-C*R[N+NLIN];
      end {if S[N,1]}
    end {if S[N,L]}
  end {for L}
end {if L2>L1}
end; {for N}
{La incheierea ciclului cea de-a doua partitie din set urmeaza a fi
transferata in fisier la inregistrarea IPNT2 unde-i este locul. Cu
instrucțiunea seek(tmp,IPNT2) este comandata cautarea pozitiei de pe
disc a locului indicat de IPNT2.}
Seek(tmp,IPNT2);
{Se dau noi valori parametrilor NLIN1 si NLIN1}
NLin1:=NLin1+NBand;
NLin1:=NLin1+NBand;
{Daca IPar1=IPar2, ceea ce are loc dupa primul ciclu, valoarea
parametrului NLin1 se mareste cu NBand, L structura analizata se
obține NLin1=33, dupa care partitia avand inregistrarea IPNT2 este
depusa la locul sau in fisier.}
if IPar1=IPar2 then NLin1:=NLin1+NBand;
for i:=1 to NBand do

```

```

    for j:=1 to MBand do linie[i,j]:=S[i+NBand,j];
  Write(tmp,linie);
  {Se calculeaza o noua valoare pentru NLin2. La structura analizata
  avem acum NLin2=48 pentru IPar1=3, ceea ce corespunde celei de-a
  doua partitii din sirul NP0, respectiv a treia in sirul NP0+1.}
  if NSize<NLin2+NBand then NLin2:=NSize else NLin2:=NLin2+NBand;
end; {for IPar1}
{Se prelucreaza sirul valorilor R(N+NLIN) apartinand partitiei pivot. La
prima partitie pivot avem NLin=0, iar N=1,NBand. La cea de-a doua parti-
tie ca pivot avem NLin=16, la a treia partitie ca pivot NLin=32, etc.}
for N:=1 to NBand do
  if S[N,1]>0 then R[N+NLin]:=R[N+NLin]/S[N,1];
{end for N}
{Partitia pivot prelucrata complet este transferata la loc pe disc.}
Seek(tmp,IPNT1);
for i:=1 to NBand do
  for j:=1 to MBand do linie[i,j]:=S[i,j];
  Write(tmp,linie);
  {Parametrului NLin i se atribuie o noua valoare, dupa care se repeta
  ciclul pana la epuizarea efectelor comenzii respective. Este important
  de observat ca pentru IPAR=NRPAR avem IPAR2=6 si IPAR3=8, partitiile
  6-8 fiind virtuale.}
  NLin:=NLin+NBand;
end; {for IPAR}
{Incepe cea de-a doua faza a substitutiei Gauss. Contorul IPNT1 este
initializat la valoarea IPNT1=13, ceea ce corespunde cu numarul de inre-
gistrare al ultimei partitii componente a matricei globale de rigiditate.}
IPNT1:=(NrPar-1)*NRing+1+2*NumEl;
{Se initializeaza valoarea parametrului LBan2=11, ce reprezinta numarul
liniilor din ultima partitie componenta a matricei globale de rigiditate.}
if NBand<NSize-(NrPar-1)*NBand
  then LBan2:=NBand
  else LBan2:=NSize-(NrPar-1)*NBand;
{Se citeste ultima partitie mentionata la mai sus si se introduce pe
locul al doilea al setului de doua partitii rezervat in memorie.}
Seek(tmp,IPNT1);
Read(tmp,linie);
for i:=1 to LBan2 do
  for j:=1 to MBand do S[i+NBand,j]:=linie[i,j];
  {Se afiseaza titlul noi etape de lucru : CALCULUL DEPLASARILOR.}
  WriteLn(fis_rezultate,":3,'Calculul deplasarilor');
  {In cadrul ciclurilor sunt citite in memorie cate doua partitii succesive,
  incapand cu ultima partitie componenta a matricei de rigiditate. Prin
  ciclurile for M se face atat prelucrarea seturilor de doua partitii, cat
  si a vectorului constantelor R(NR). Dupa terminarea prelucrarii partitiei
  aflata pe locul al doilea al setului, constantele R(NR) asociate cu aceasta
  partitie au valorile deplasarilor nodale cautate, astfel incat partitia
  respectiva poate fi distrusa. Pe locul al doilea al setului este transfe-
  rata prima partitie a steului (vezi ciclurile for i for j) incomplet pre-
  lucrata, dupa care pe primul loc este introdusa urmatoarea partitie si
  incepe o noua prelucrare. La incheierea ciclurilor sirul constantelor R(NR)
  are valorile tuturor necunoscutelor nodale nenule ale intregii structuri.}
  for NP:=1 to NP1 do
  begin
    NLin1:=(NP1-NP)*NBand;
    LBan1:=NBand;
    NLin:=LBan2;
    {Se determina valoarea de inregistrare a unei noi partitii ce este

```

```

extrasa din fisier si introdusa pe primul loc al setului rezervat in
memorie. Se afiseaza numarul de ordine al partitiei ce urmeaza sa fie
complet prelucrata.}
IPNT1:=IPNT1-NRring;
Seek(tmp,IPnt1);
Read(tmp,linie);
for l:=1 to LBan1 do
  for j:=1 to Mband do S[i,j]:=linie[i,j];
WriteLn(fis_rezultate,'Partitia ',NP:4);
if NP=NP1 then NLIN:=NLIN+LBan1;
{Ciclurile fac prelucrarea completa a partitiei aflata pe locul doi
din set.}
for M:=1 to NLIN do
begin
  {Se calculeaza numerele de ordine ale constantelor din sirul R(NR)
asociate cu liniile partitiei de pe locul doi.}
N:=LBan1+LBan2+1-M;
Nr:=N+NLIN1;
{Ciclurile calculeaza valorile din sirul R(NR).}
for L:=2 to Mband do
  if S[N,L]<>0
  then begin
    K:=Nr+L-1;
    if R[k]<>0 then
      R[NR]:=R[NR]-S[N,L]*R[k];
    end {if S[N,l]}
  {end for L}
end; {for M}
if NP<>NP1
then begin
  {Ciclurile fac transferul partiitilor de pe locul unu pe locul doi din
set dupa incheierea unei runde a ciclurilor for NP.}
for i:=1 to LBan1 do
  for j:=1 to Mband do S[i+LBan1,j]:=S[i,j];
  LBan2:=LBan1;
end {if NP}
end; {for NP}
{Sirul valorilor necunoscutelor nodale R(i) este transferata in sirul W(i)}
for i:=1 to NSize do W[i]:=R[i];
L:=0;
{In cadrul ciclurilor urmatoare deplasari generalizate nodale nenule
W(Ii) sunt plasate in sirul R(L) cu L=1,5*NuNod. In cazul structurii ana-
lizate avem 75 valori nenule in sirul W(Ii) si respectiv 105 valori in
sirul R(L), din care 30 sunt valorile nule ale deplasariilor generalizate
restrictionate impuse prin conditiioe la limita. In cadrul acestei reor-
donari a deplasariilor sunt intercalate valori nule in sirul R(L) ori de
cate ori identificatorul KODE(i,j) are valoarea zero.}
for i:=1 to NuNod do
  for j:=1 to KODE_col_max do
  begin
    Inc(L);
    li:=KODE[i,j];
    if li<0 then goto 1;
    if li=0 then R[L]:=0;
    if li>0 then R[L]:=-W[li];
  end; {for j for i}
WriteLn(fis_rezultate,'Rezultate');
WriteLn(fis_rezultate,',',6,'Coordonate nodale',',',19,'deplasari',',',21,'Rotatii');

```

```

WriteLn(fis_rezultate,'Nodului',"4,'X',"9,'Y',"9,'Z',"11,'X',"14,'Y',"14,
      'Z',"12,'Alfa',"11,'Beta');
{Prin comenzile de scriere date in cadrul ciclurilor se afiseaza valorile
deplasarilor generalizate (translatii si rotatii) in fiecare nod al
structurii.}
for N:=1 to NuNod do
begin
  M:=5*N;
  Write(fis_rezultate,N:4,X[n]:12:4,Y[n]:10:4,Z[n]:10:4);
  for i:=KODE_col_max downto 1 do
    Write(fis_rezultate,R[M-i+1]:15:7);
  WriteLn(fis_rezultate)
end; {for N}
Close(tmp)
end;

{
      PROCEDURA TENS
}

Procedure Tens;
type inregistrare=array[1..SE_lin_max div 2+2,1..SE_col_max] of Real;
  fisier=file of inregistrare;
Const
  XII:array[1..ID_col_max] of Real=(-1,0,1,1,1,0,-1,-1);
  Etal:array[1..ID_col_max] of Real=(-1,-1,-1,0,1,1,1,0);
  XI:array[1..ID_lin_max] of Real=(-1,1,1,-1);
  EI:array[1..ID_lin_max] of Real=(-1,-1,1,1);
  Sig_lin_max=4;
  Sign_lin_max=3;
  Sign_col_max=2;
var
  RR:array[1..ID_lin_max] of Double;
  GX:array[1..2] of Double;
  E0,E0T,E1T,E1:array[1..B0_lin_max] of Double;
  DIS:array[1..SE_lin_max] of Double;
  SIGN:array[1..Sign_lin_max,1..Sign_col_max] of Double;
  SIG:array[1..Sig_lin_max,1..Sign_lin_max,1..Sign_col_max] of Double;
  linie:inregistrare;
  tmp:fisier;
  Ik,Ii,J2,J1,Nr01,NR02,IFlag,NGP,IY,IX,I,j,k,M,IPNT1:integer;
  SIG11,SIG12,SIG22,SIG21,DUM1,DUM4,DUM5,DUM6:Double;
  XTrap:Double;
begin
  {Se asociaza variabila de tip fisier cu fisierul fizic. Apoi se deschide.}
  Assign(Tmp,'Tmp.$$$');
  ReSet(Tmp);
  {Se afiseaza titlurile tabeli ce cuprinde rezultatele calcului tensiuni-
  lor in nodurile fiecarui element finit M.}
  WriteLn(fis_rezultate,'TENSIUNI');
  WriteLn(fis_rezultate,'Nr. Nr.':"11,'Coordonate',"15,'Tensiuni (Prima linia-',
    'exterior, Linia a doua-interior)');
  WriteLn(fis_rezultate,'Elem. nod.':"6,'X',"9,'Y',"9,'Z',"7,'Sigma-X',"8,
    'Sigma-T',"9,'Tau-XT',"8,'Sigma-1',"8,'Sigma-2');
  IPNT1:=0;
  {Acest if poate lipsi. Cazul NumEl>10000 este fictiv}
  if NumEl<=MaxEl then
  begin

```

```

{Ciclurile includ toate instructiunile din subrutina Tens. In cadrul
fiecarii ciclu sunt calculate tensiunile dintr-un element finit avand
numarul de ordine M.}
for M:=1 to NumEl do
begin
  {Contorul IPNT1 are valoarea numarului de ordine al elementului finit
  ce se va afla in lucru in ciclul respectiv.}
  Inc(IPNT1);
  Seek(tmp,IPNT1);
  {Ciclurile pregatesc in memorie spatiul ce va fi ocupat de matricea de
  rigiditate a elementului finit cu numrul de ordine M.}
  for i:=1 to SE_lin_max do
    for j:=1 to SE_col_max do
      SE[i,j]:=0;
  {Ciclurile transfera din R(k), avand k=1,NuNod in DIS(j) cu j=1,40
  valorile deplasarii nodale generalizate apartinand celor opt noduri
  ale elementului finit cu numarul de ordine M.}
  for i:=1 to ID_col_max do
    begin
      j:=5*i;
      k:=ID[M,i]*5;
      for l:=0 to 4 do DIS[j-l]:=R[K-l];
    end; {for i}
  {Se extrag din fisier in memorie blocurile ce formeaza matricea de
  rigiditate a elementului finit cu numrul de ordine M.}
  Read(tmp,linie);
  for i:=1 to SE_lin_max div 2 -1 do
    for j:=1 to SE_col_max do SE[i,j]:=linie[i,j];
  Inc(IPNT1);
  Seek(tmp,IPNT1);
  read(tmp,linie);
  for i:=SE_lin_max div 2 to SE_lin_max do
    for j:=1 to SE_col_max do SE[i,j]:=linie[i+1-SE_lin_max div 2,j];
  {Se calculeaza deplasariile uc,vc,wc din centrul elementului finit.
  Calculul este efectuat cu datele conservate in coloanele 41-44 rezul-
  tate in urma procesului de condensare aplicat fiecarei matrice de ri-
  giditate in subrutina FORMK.}
  for j:=SE_lin_max-2 to SE_lin_max do
    begin
      DUM1:=0;
      K:=j-1;
      for i:=1 to k do DUM1:=DUM1+SE[j,i]*DIS[i];
      DIS[j]:=(SE[j,SE_col_max]-DUM1)/SE[j,j];
    end; {for j}
  {Variabila NGP variaza de la 1 la 4 si reprezinta cele 4 puncte Gauss
  in care urmeaza sa fie calculate tensiunile in ordinea 1,2,4,3. Aceste
  tensiuni sunt calculate in cadrul celor 4 cicluri for.}
  NGP:=0;
  for IY:=1 to 2 do
    for IX:=1 to 2 do
      begin
        Inc(NGP);
        if NGP=3 then NGP:=4;
        if NGP=5 then NGP:=3;
        {Se initializeaza valorile din sirurile E0 si E1}
        for i:=1 to B0_lin_max do
          begin
            E0[i]:=0;

```

```

E1[i]:=0;
end; {for i}
{Procedura Shape este apelata pentru a furniza termenii matricelor
B0 si B1 asociate unui adin cele 4 puncte Gauss de integrare numerica}
Shape(M,IX,IY,IFlag,1);
{In cadrul ciclurilor se calculeaza intr-unul din cele 4 puncte
Gauss cate 6 valori E0 si E1 reprezentand componentele deformati-
ilor specifice in sistemul global de axe xyz si cate trei valori
E0T si E1T formand componentele deformatiilor specifice in siste-
mul local de axe x'y'z' paralele cu vectori V1,V2,V3.}
for L:=1 to B0_lin_max do
begin
for j:=1 to B0_col_max-1 do
E0[L]:=E0[L]+B0[L,j]*DIS[j];
for j:=1 to B1_col_max div 2 do
begin
Nr02:=5*j;
Nr01:=Nr02-1;
J2:=2*j;
J1:=J2-1;
E1[L]:=E1[L]+B1[L,J1]*DIS[NR01]+B1[L,J2]*DIS[NR02];
end; {for j}
for i:=1 to 2 do
begin
ii:=i+1;
IK:=3+i;
E1T[i]:=Sqr(LC[i])*E1[1]+Sqr(MC[i])*E1[2]+Sqr(NC[i])*E1[3]+
LC[i]*MC[i]*E1[4]+MC[i]*NC[i]*E1[5]+LC[i]*NC[i]*E1[6];
E0T[i]:=Sqr(LC[i])*E0[1]+Sqr(MC[i])*E0[2]+Sqr(NC[i])*E0[3]+
LC[i]*MC[i]*E0[4]+MC[i]*NC[i]*E0[5]+LC[i]*NC[i]*E0[6];
if Ik>5
then begin
E1T[ik]:=2*LC[i]*LC[ii]*E1[1]+2*MC[i]*MC[ii]*E1[2]+2*NC[i]*
NC[ii]*E1[3]+(LC[i]*MC[ii]+LC[ii]*MC[i])*E1[4]+
(MC[i]*NC[ii]+MC[ii]*NC[i])*E1[5]+(LC[i]*NC[ii]+
LC[ii]*NC[i])*E1[6];
E0T[ik]:=2*LC[i]*LC[ii]*E0[1]+2*MC[i]*MC[ii]*E0[2]+2*NC[i]*
NC[ii]*E0[3]+(LC[i]*MC[ii]+LC[ii]*MC[i])*E0[4]+
(MC[i]*NC[ii]+MC[ii]*NC[i])*E0[5]+(LC[i]*NC[ii]+
LC[ii]*NC[i])*E0[6];
end {if Ik}
end {for i}
end; {for L}
{Din valorile sirului 't' al deformatiilor specifice se scad de-
formatiile initiale datorate temperaturii.}
if TEMP<0
then begin
E0T[1]:=E0T[1]-AX*((DUM2+DUM3)/2-TEMP);
E0T[2]:=E0T[2]-AY*((DUM2+DUM3)/2-TEMP)
end; {if TEMP}
if IFlag<1
then begin
E1T[1]:=E1T[1]-AX*(DUM2-DUM3)/2;
E1T[2]:=E1T[2]-AY*(DUM2-DUM3)/2
end; {if IFlag}
{Se calculeaza tensiunile  $\sigma'$  rezultand cate 3 tensiuni pe fata
exteriora si respectiv interioara a carcasei. Variabila NGP re-
prezinta unul dintre cele 4 puncte Gauss. Indicele de pe coloana

```

a doua a indentificatorului SIG, acesta putand fi 1, 2 sau 3, este codul de recunoastere a tensiunii ce se calculeaza, respectiv $\square x'$, $\square y'$ sau $\text{taux}'y'$. Indicele de pe coloana a treia a lui SIG este codul prin care se identifica fata exterioara-1 sau interioara-2}

$$\text{SIG}[\text{NGP},1,1]=\text{D1}*(\text{E0T}[1]+\text{E1T}[1])+\text{D2}*(\text{E0T}[2]+\text{E1T}[2]);$$

$$\text{SIG}[\text{NGP},1,2]=\text{D1}*(\text{E0T}[1]-\text{E1T}[1])+\text{D2}*(\text{E0T}[2]-\text{E1T}[2]);$$

$$\text{SIG}[\text{NGP},2,1]=\text{D2}*(\text{E0T}[1]+\text{E1T}[1])+\text{D1}*(\text{E0T}[2]+\text{E1T}[2]);$$

$$\text{SIG}[\text{NGP},2,2]=\text{D2}*(\text{E0T}[1]-\text{E1T}[1])+\text{D1}*(\text{E0T}[2]-\text{E1T}[2]);$$

$$\text{SIG}[\text{NGP},3,1]=\text{G}*(\text{E0T}[4]+\text{E1T}[4]);$$

$$\text{SIG}[\text{NGP},3,2]=\text{G}*(\text{E0T}[4]-\text{E1T}[4])$$

end; {for IY, for IX}

{Prin extrapolare se calculeaza tensiunile \square' in cele 8 noduri ale elementului finit folosind valorile tensiunilor $\square x'$, $\square y'$, $\text{taux}'y'$ evaluate in cele 4 puncte Gauss ale elementului.}

XTrap:=1/0.57735026918963;

for i:=1 to ID_col_max do

begin

for k:=1 to Sign_lin_max do

for L:=1 to Sign_col_max do

Sign[k,L]:=0;

GX[1]:=XTrap*XII[i];

GX[2]:=XTrap*ETA[i];

for k:=1 to Sig_lin_max do

RR[k]:=0.25*(1+XI[k]*GX[1])*(1+EI[k]*GX[2]);

for k:=1 to Sign_lin_max do

for L:=1 to Sign_col_max do

for j:=1 to Sig_lin_max do

Sign[k,L]:=Sign[k,L]+Sig[j,k,L]*RR[j];

{In cadrul ciclurilor sunt calculate tensiunile normale principale $\square 1$ si $\square 2$ in fiecare nod al elementului finit, pe fata exterioara si cea interioara a invelitorii. SIG11 si SIG12 reprezinta tensiunea normala principala $\square 1$ pe fata exterioara si respectiv interioara a invelitorii, iar SIG21 si SIG22 identifica tensiunea $\square 2$.}

DUM1:=(SigN[1,1]+SigN[2,1])/2;

DUM2:=(SigN[1,2]+SigN[2,2])/2;

DUM3:=(SigN[1,1]-SigN[2,1])/2;

DUM4:=(SigN[1,2]-SigN[2,1])/2;

DUM5:=Sqrt(Sqr(DUM3)+Sqr(SigN[3,1]));

DUM6:=Sqrt(Sqr(DUM4)+Sqr(SigN[3,2]));

SIG11:=DUM1+DUM5;

SIG21:=DUM1-DUM5;

SIG12:=DUM2+DUM6;

SIG22:=DUM2-DUM6;

K:=ID[M,i];

{Urmatoarele valori sunt afisate pe doua linii :

Prima line :

- Numarul de ordine al elementului finit M
- Numarul nodului pentru care se dau marimile determinate K
- Coordonatele nodului X(k),Y(k) si Z(k)
- Tensiunile $\square x'$, $\square y'$, $\text{taux}'y'$ pe fata exterioara a carcasei SigN(j,1) cu j=1,3
- Tensiunile $\square 1$, $\square 2$ pe fata exterioara SIG11 si SIG21 ;

A doua linie :

- Tensiunile $\square x'$, $\square y'$, $\text{taux}'y'$ pe fata interioara a carcasei SigN(j,2) cu j=1,3
- Tensiunile $\sigma 1$, $\sigma 2$ pe fata interioara SIG12 si SIG22.

Coordonatele nodurilor sunt date in cm,iar tensiunile in daN/cm².)

Write(fisRezultate,M:5,k:5,X[k]:12:5,y[k]:10:4,z[k]:10:4);

```

for j:=1 to Sign_lin_max do Write(fis_rezultate,Sign[j,1]:15:7);
WriteLn(fis_rezultate,SIG11:15:7,SIG21:15:7);
Write(fis_rezultate,":41);
for j:=1 to Sign_lin_max do Write(fis_rezultate,Sign[j,2]:15:7);
WriteLn(fis_rezultate,SIG12:15:7,SIG22:15:7);

    end {for i}
end {for M}
end; {if NumEl}
flush(fis_rezultate);
Close(tmp)
end;

begin
Assign(fis_date,'date');
Assign(fis_rezultate,'rezultat');
ReSet(fis_date);
end.

```

3.6. Contribuții la studiul învelitorilor elastice subțiri.

Joncțiunile între învelitori cu geometrie diferită, fiind frecvente în construcția recipientelor sub presiune, s-au analizat în capitolul 3 cele mai reprezentative joncțiuni de acest gen. Orientarea analizei a fost îndreptată spre învelitorile compuse din cilindru și sferă, învelitorile coaxiale cilindru-elipsoid și penetrațiile în învelitori subțiri.

Studiul joncțiunilor compuse s-a efectuat pe baza condiției fizice de continuitate a deplasării radiale δ și a rotirii unghiulare v în secțiunea care materializează joncțiunea, condiție ce implică egalitatea deplasărilor și rotațiilor dintre cele două învelitori. Admițându-se tensiunile și deformațiile de membrană induse de încărcarea exterioară s-a obținut în final starea globală de tensiune și deformațiile pe tipul de joncțiune analizat și în vecinătatea acesteia.

În cazul joncțiunii cilindru-sferă, aplicând principiul continuității, s-a luat în considerare efortul (Q_0) și momentul (M_0) care apare pentru a induce o deplasare egală și de sens opus cu diferența dintre deplasarea radială pe marginea învelitorii cilindrice (δ_c) și deplasarea radială pe marginea învelitorii sferice (δ_s). Funcție de aceste mărimi (Q_0 , M_0) au fost explicitate : deplasarea (w), rotirea tangentei (v), momentul (M_x), forța tăietoare (Q_x) și efortul (N_θ) pentru marginea învelitorii cilindrice respectiv a deplasării δ_s și rotirii V_c în cazul luării în considerare a presiunii interioare p .

Pentru învelitoarea sferică cu un unghi $\alpha > 30^\circ$, s-au dedus, pe baza unor ipoteze simplificatoare acceptabile, expresiile aferente eforturilor (N_φ , N_θ), rotirii tangentei (v), momentelor (M_φ , M_θ) și deplasării (δ) în diverse condiții de contur, obținându-se în final expresiile deplasării δ_c și rotirii V_s , funcție de Q_0 și M_0 , care de altfel sunt mărimile Q_φ și M_φ atunci când $\varphi = \pi/2$.

Din egalitatea deplasărilor radiale ($\delta_c = \delta_s$), respectiv a rotațiilor ($V_c = V_s$) s-a obținut $Q_0 = -\frac{p}{4\beta}$ și $M_0 = 0$. Cu aceste expresii ale mărimilor Q_0 și M_0 , s-au determinat eforturile momentele și starea de tensiune în cele două învelitori la suprafața de contact.

Similar s-a procedat în cazul studierii joncțiunii coaxiale cilindru-elipsoid pentru care au fost prezentate expresiile deplasării radiale pe marginea învelitorii elipsoidale (δ_e), a deplasării radiale (δ_c) pe marginea cilindrului și a diferenței dintre cele două deplasări ($\delta_c - \delta_e$), care a condus la

$$Q_0 = -\frac{pr^2}{8\beta b^2} \text{ și } M_0 = 0.$$

Penetrațiile în învelitori subțiri au constituit obiectul subcapitolului 3.3. O dezvoltare amplă s-a acordat penetrațiilor ștuț cilindric-învelitoare sferică întărită, pentru care au fost stabilite expresiile deplasărilor și rotirii în ipoteza supunerii învelitorii compuse la o presiune interioară p . Deasemenea a fost efectuată o estimare globală a tensiunilor pe joncțiune utilizând noțiunea de coeficient de concentrare în diverse ipostaze de solicitare a învelitorii compuse (presiune interioară, încărcare axială uniform distribuită pe circumferința ștuțului, acțiunea unei forțe exterioare).

Contribuțiile autorului în demersul întreprins cu privire la studiul învelitorilor compuse, constau în :

- selectarea și analiza pertinentă acelor mai reprezentative joncțiuni de învelitori cu geometrie diferită, întâlnite în construcția recipientelor sub presiune;
- determinarea relațiilor care explicitează eforturile, momentele și starea de tensiune în învelitorile compuse;
- extrapolarea prin adaptarea în cazul învelitorilor compuse a rezultatelor obținute în capitolele anterioare privind soluționarea problematicii stării de tensiune, deplasărilor și deformațiilor, respectiv a legăturii fizice dintre tensiuni și deformații pe baza unor programe de calcul elaborate de autor.
- elaborarea unui program de calcul pentru analiza învelitorilor cilindrice prin metoda elementului finit.

Capitolul 4. Înelitori subțiri supuse temperaturilor joase

Într-un solid deformabil constrângerea datorată temperaturii generează tensiuni termice. Deformațiile termice ale corpului deformabil diferă de la un punct la altul al acestuia, când în corp se instalează un gradient de temperatură. Consecință continuității solidului, se instituie în asemenea stări ale corpului un sistem de deformații specifice de origine termică cu tensiuni termice asociate. Gradientul de temperatură, geometria corpului și modul de rezemare (legături) ale acestuia influențează în mod hotărâtor distribuția și intensitatea tensiunilor termice.

Prezentul capitol va trata în continuare metodele pentru estimarea tensiunilor termice în recipienti cu pereți subțiri supuși la temperaturi joase.

4.1. Înelitori cilindrice și sferice subțiri supuse la temperaturi joase

În practica industrială sunt frecvent întâlniți recipienti sub presiune supuși temperaturilor scăzute cu variații liniare la temperatură pe direcție radială a peretelui învelitorii temperatura interioară (T_1) fiind mai mică decât cea exterioară (T_2). Pentru astfel de solicitări termice cu variație liniară a temperaturii de-a lungul grosimii peretelui (radial) se pot determina tensiunile care apar în învelitori.

4.1.1. Înelitori cilindrice cu pereți subțiri supuse temperaturilor joase

În cazul când temperatura variază liniar după raza peretelui cilindrului iar în punctele situate la distanțe suficient de mari de capete încovoierea este neglijabilă, tensiunile în direcție axială x și circumferențială θ pot fi calculate cu ajutorul relației :

$$\sigma_x = \sigma_\theta = \pm \frac{E\alpha_T(T_1 - T_2)}{2(1 - \nu)} \quad (4.1)$$

Semnul (+) este asociat feței exterioare (cu temperatura T_2) pe care tensiunea este de compresie ($T_1 < T_2$).

Tensiunile termice totale în apropierea marginilor cilindrului unde se induce o încovoiere a pereților învelitorii se obțin din suprapunerea tensiunilor date de relația (4.1) cu cele rezultate din satisfacerea condițiilor pe margine.

Când marginile cilindrului sunt libere tensiunea σ_x se calculează cu relația (4.1) iar pentru momentul M_{x0} în punctul $x = 0$ rezultă :

$$M_{x0} = \frac{\sigma_x h^2}{6} = \frac{E\alpha_T(T_1 - T_2)}{12(1 - \nu)} h^2 \quad (4.2)$$

Condiția fizică potrivit căreia σ_x se anulează pe margine impune suprapunerea unui moment egal cu M_{x0} și de semn opus ($-M_{x0}$), marginea învelitorii fiind liberă.

Pe marginea învelitorii în direcția circumferențială activează conform relației (2.150) momentul $(M_\theta)_{x=0}$:

$$(M_\theta)_{x=0} = -\nu M_{x0} = -\frac{\nu E \alpha_T (T_1 - T_2)}{12(1-\nu)} h^2 \quad (4.3)$$

Efortul circumferențial $(M_\theta)_{x=0}$ va fi conform relațiilor (2.105), (2.10) :

$$(N_\theta)_{x=0} = \frac{Eh}{r} (w)_{x=0} = \frac{Eh}{r} \cdot \frac{M_0}{2\beta^2 D} = \frac{Eh \alpha_T (T_1 - T_2)}{2\sqrt{3}(1-\nu)} \sqrt{1-\nu^2} \quad (4.4)$$

unde r este raza învelitorii cilindrice.

Tensiunile termice maxime pe marginea învelitorii acționează în direcția circumferențială și se obțin din însumarea tensiunilor date de relația (4.1) cu tensiunile induse de momentul M_θ și cu N_θ .

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{E \alpha_T (T_1 - T_2)}{2(1-\nu)} \left(1 - \nu + \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \right) \quad (4.5)$$

Este de precizat că pentru $\nu=0,3$ tensiunea termică circumferențială pe marginea învelitorii este cu aproximativ 25% mai mare decât cea rezultată din relația (4.1), valabilă pentru o zonă suficient de îndepărtată de marginile libere.

4.1.2. Învelitori sferice cu pereți subțiri supuse temperaturilor scăzute

În cazul când acest tip de învelitoare are temperatura uniform distribuită pe fața interioară și cea exterioară, respectiv o variație liniară în direcție radială, încovoierea produsă de diferența de temperatură este preluată de momente încovoietoare constante, a căror expresie este identică cu cea rezultată în cazul încovoierii sferice a plăcilor plane.

Pentru o sferă completă tensiunile maxime sunt date de relația :

$$(\sigma_\phi)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\max} = \frac{E \alpha_T (T_1 - T_2)}{2(1-\nu)} \quad (4.6)$$

Este de menționat că în cazul unei calote sferice de unghi 2α cu marginile rezemate alunecător, tensiunile termice totale se obțin din însumarea tensiunilor date de relația (4.6) cu cele induse de momentele M_α uniform distribuite de-a lungul conturului calotei având expresia :

$$M_\alpha = -\frac{\alpha_r (T_1 - T_2) D (1-\nu)}{h} \quad (4.7)$$

Încărcarea pe margine cu momentul M_α induce tensiuni în învelitoare a căror determinare se face conform relațiilor prezentate în subcapitolul 1.5.

4.2. Învelitori subțiri de revoluție supuse la tensiuni termice axial simetrice

Considerând în învelitoare gradientul de temperatură $T(\varphi, z)$ cu distribuție distinctă atât după grosimea z , cât și după unghiul meridian φ (funcție decompozabilă după direcția z normală la suprafața mediană) se poate scrie cu aproximație acceptabilă :

$$T(\varphi, z) = \bar{T}(\varphi) + zT^*(\varphi) \quad (4.8)$$

Aproximația este cu atât mai bună cu cât grosimea z a învelitorii este mai mică.

În cazul existenței unui gradient de temperatură T relațiile Hooke se prezintă astfel :

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_\varphi) + \alpha_T T \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_\theta) + \alpha_T T \quad (4.10)$$

Pe baza relațiilor (4.8)-(4.10) și a celor prezentate în capitolul 1 rezultă relațiile :

$$N_\theta = K \left[\frac{1}{r_2} (\nu \text{ctg} \varphi + w) + \frac{\nu}{r_1} \left(\frac{dv}{d\varphi} + w \right) - \alpha_T (1 + \nu) \bar{T} \right] \quad (4.11)$$

$$N_\varphi = K \left[\frac{1}{r_1} \left(\frac{dv}{d\varphi} + w \right) + \frac{\nu}{r_2} (\text{ctg} \varphi + w) - \alpha_T (1 + \nu) \bar{T} \right] \quad (4.12)$$

$$M_\theta = D \left[\frac{1}{r_2} \nu \text{ctg} \varphi + \frac{\nu}{r_1} \frac{dV}{d\varphi} + \alpha_T (1 + \nu) T^* \right] \quad (4.13)$$

$$M_\varphi = D \left[\frac{1}{r_1} \frac{dV}{d\varphi} + \frac{\nu}{r_2} \nu \text{ctg} \varphi + \alpha_T (1 + \nu) T^* \right] \quad (4.14)$$

Modul de soluționare al problemei tensiunilor termice axial simetrice, în condițiile valabilității dezvoltării gradientului de temperatură conform relației (4.6) se efectuează analog celui cuprins în capitolul 1 al prezentei lucrări. Este de menționat însă că ecuațiile diferențiale analizate în capitolul 1 se completează cu termenii în \bar{T} respectiv T^* . Sistemul particularizat pentru diferite forme de învelitori a fost soluționat în lucrarea [96].

În cazul învelitorii sferice ($r_1 = r_2 = R$) sistemul de ecuații va fi următorul :

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \text{ctg} \varphi \frac{dv}{d\varphi} - (\text{ctg}^2 \varphi + \nu) v = \frac{R U}{h D} - \alpha_T (1 - \nu) R \frac{dT^*}{d\varphi} \quad (4.15)$$

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \text{ctg} \varphi \frac{dU}{d\varphi} - (\text{ctg}^2 \varphi - \nu) U = E h R \left(\nu - \alpha_T \frac{dT_0}{d\varphi} \right) \quad (4.16)$$

unde U și V au semnificațiile din capitolul 1.

Pentru învelitorile cilindrice ($\varphi = \pi/2$; $r_1 d\varphi = dx$; $r_1 \rightarrow \infty$ și $r_2 = r$) sistemul de ecuații este :

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{Q_\varphi}{D} - \alpha(1 + \nu) \frac{dT^*}{dx} \quad (4.17)$$

$$\frac{d^2 Q_\varphi}{dx^2} = -\frac{Eh}{r} \left(\frac{V}{r} - \alpha \frac{dT^*}{dx} \right) \quad (4.18)$$

unde: $V = dw/dx$.

În astfel de învelitori expresia eforturilor și momentelor sunt date de relațiile :

$$N_\varphi = N_x = 0 \quad (4.19)$$

$$N_\theta = -r \frac{dQ_\varphi}{dx} \quad (4.20)$$

$$M_\varphi = M_x = D \left[\frac{dV}{dx} + \alpha_T (1 + \nu) T^* \right] \quad (4.21)$$

$$M_\theta = D \left[\nu \frac{dV}{dx} + \alpha_T (1 + \nu) T^* \right] \quad (4.22)$$

Când temperatura pe peretele interior ($z = -h/2$) este dată de funcția $f_1(x)$ iar cea de pe peretele exterior ($z = +h/2$) de funcția $f_2(x)$, exprimabile prin polinoame de grad m în variabila x , atunci funcțiile : $\bar{T}(x) = (f_1 + f_2)/2$ și $T^*(x) = (f_1 - f_2)/h$ se pot pune deasemeni sub formă de polinom de grad m și anume :

$$\bar{T}(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^n \quad (4.23)$$

$$T^*(x) = \sum_{n=0}^m b_n x^n \quad (4.24)$$

Exprimând deasemenea rotirea V și efortul Q_φ sub formă polinomială, se poate scrie :

$$V = \alpha_T \sum_{n=1}^m A_n x^{n-1} \quad (4.25)$$

$$Q_\varphi = \frac{\alpha_T Eh}{r} \sum_{n=1}^m B_n x^{n-1} \quad (4.26)$$

Din relațiile (4.23)-(4.26) și relațiile (4.19)-(4.22) se obține un sistem iterativ de ecuații care se poate rezolva prin iterație pentru toate valorile indicelui până la $n = m$.

Un caz particular îl constituie forma de variație a funcțiilor $\bar{T}(x)$ și $T^*(x)$ de tipul :

$$\bar{T}(x) = be^{-\omega x} \quad (4.27)$$

$$T^*(x) = ce^{-\omega x} \quad (4.28)$$

Adoptând pentru V și Q_φ expresii de aceeași formă, va rezulta :

$$V = \alpha_T A e^{-\omega x} \quad (4.29)$$

$$Q_\varphi = \frac{\alpha_T E}{R} B e^{-\omega x} \quad (4.30)$$

Constantele A și B se pot explicita luând în considerare relațiile (4.19)-(4.22), în care V și Q_φ sunt înlocuite cu expresiile date de egalitățile (4.29) și (4.30).

Expresia constantelor A și B este dată de relațiile :

$$A = -(1 + \nu)\omega r \frac{12(1 - \nu)b - rh^2\omega^2c}{12(1 - \nu^2) + r^2h^2\omega^4} \quad (4.31)$$

$$B = -\omega rh^2 \frac{(1 + \nu)c + r\omega^2b}{12(1 - \nu^2) + r^2h^2\omega^4} \quad (4.32)$$

Din relațiile (4.19)-(4.22) care dau expresia eforturilor și momentelor vor rezulta:

$$w = -\frac{\alpha_T A}{\omega} \cdot e^{-\omega x} \quad (4.33)$$

$$N_\theta = \alpha_T E h \omega B \cdot e^{-\omega x} \quad (4.34)$$

$$M_x = -\alpha_T D [\omega A - (1 + \nu)c] \cdot e^{-\omega x} \quad (4.35)$$

$$M_\varphi = -\alpha_T D [\nu \omega A - (1 + \nu)c] \cdot e^{-\omega x} \quad (4.36)$$

și prin aceasta explicitarea completă a stării de tensiune și deformații în învelitoarea cilindrică pentru cazul particular analizat.

4.3. Comportarea mecanică a materialelor la temperaturi joase

Studiul recipientelor sub presiune supuse temperaturilor joase nu poate fi disociat de analiza comportării mecanice în condițiile de criogenie a materialelor din care sunt confecționate aceste recipiente. Analiza se impune din mai multe motive, dintre care sunt de subliniat următoarele [49], [121] :

- majoritatea materialelor devin fragile și neadecvate pentru a prelua solicitări mecanice accidentale sub o anumită temperatură, conducând la scoaterea din serviciu a recipientului respectiv;
- scăderea temperaturii conduce la schimbări în proprietățile mecanice ale materialelor ceea ce de fapt reprezintă o manifestare macroscopică a unui mecanism de răspuns al modificărilor microscopice ale materialului;
- mecanismul de răspuns al materialelor sub influența temperaturii determină modificarea comportării acestor materiale la scăderea temperaturii.

În cazul recipientelor supuse temperaturilor joase (-10 până la - 200°C) cum sunt cele din instalațiile de lichefiere a diferitelor gaze și cele destinate transportului și stocării sau altor scopuri,

se pune problema stabilirii materialelor din care sunt construite, materialele ce pot fi folosite la temperaturi joase.

Caracteristicile mecanice ale materialelor sunt influențate de scăderea temperaturii. Astfel, limitele de elasticitate și de curgere, rezistența la deformare plastică cresc cu scăderea temperaturii. În unele cazuri se constată și creșterea durtății, a rezistenței la oboseală, respectiv a modulului de elasticitate a materialului, odată cu scăderea temperaturii.

Importanță deosebită la temperaturi negative, o prezintă ductilitatea (tenacitatea) care se micșorează sensibil la scăderea temperaturii și tendința de rupere fragilă. Ductilitatea și fragilitatea sunt influențate atât de conținutul de elemente de aliere și de gradul de deformare, cât și de tratamentele termice aplicate materialelor folosite la temperaturi joase.

Scăderea ductilității cu coborârea temperaturii, deși specifică unor materiale nu este valabilă pentru toate și în orice domeniu de temperatură. Variația funcției de temperatură a limitei de curgere și a rezistenței la rupere conduce la modificarea ductibilității corelate cu această variație.

Natura ductilă sau fragilă a ruperii materialelor, depinde de valorile limitei de curgere și rezistență de rupere și anume :

- dacă ruperea este precedată de curgere atunci are un caracter ductil, conferind suprafeței de separație un aspect mat, fibros;
- în cazul când ruperea nu este precedată de deformație plastică (curgere) aceasta are un caracter fragil cu aspect lucios (cristalin) al suprafeței de separație.

Energia consumată în procesul ruperii și înclinarea planului suprafeței de separație față de direcția de solicitare este specifică naturii ruperii [19], [46], [102], [121]. Astfel :

- în procesul ruperii ductile se consumă o energie mare care susține un proces intens de deformare plastică, cu gătuirea materialului într-o anumită zonă, determinând separarea pe fețe înclinate la 45° față de direcția de solicitare;
- ruperii fragile îi corespund deformații plastice neglijabile și deci un consum mic de energie iar suprafața de separație este perpendiculară pe direcția de solicitare.

În afară de aceste două tipuri de rupere, se întâlnesc adeseori ruperi mixte, în care suprafața de rupere este parțial cristalină, parțial fibroasă. Funcție de ponderea pe care o deține suprafața de rupere (cristalină sau fibroasă) în totalul suprafeței de rupere, se poate categorisi tendința materialului spre ruperea fragilă sau ductilă.

Cunoașterea fenomenului ruperii fragile este esențială în dimensionarea elementelor de rezistență, pentru evitarea pericolului ce poate apărea, de rupere fragilă în cazul unei supradimensionări a acestor elemente.

Studiul atent al materialelor utilizate în construcția recipientelor sub presiune supuse temperaturilor joase se impune deci pentru asigurarea execuției acestora în condiții de siguranță și costuri de fabricație cât mai mici. Pendinte de comportamentul materialelor la temperaturi joase, sub aspectul ductilității sau fragilității acestora, se pot evidenția următoarele materiale :

- cuprul, aluminiul, nichelul și aliajele acestora, oțelul austenitic cu mai mult de 7 % Ni, materiale având rețeaua cristalină de tip cubic cu fețe centrate, care rămân ductile până la temperaturi sub 4K, în cazul că sunt ductile la temperatura normală;
- oțelul carbon, fierul și oțelurile carbon slab aliate având rețeaua de tip cubic cu volum centrat, care devin fragile la temperaturi joase;
- titanul pur și zirconiu având rețeaua de tip hexagon compact, care rămân ductile la temperaturi joase;
- zincul care deși are rețeaua cristalină de tip hexagon compact se comportă fragil la temperaturi scăzute;
- materialele plastice cu excepția teflonului care devin fragile la temperaturi joase.

Creșterea rezistenței mecanice a materialelor, simultan cu scăderea temperaturii, este un fenomen aproape general. Oțelurile carbon și slab aliate de rezistență joasă, prezintă creșteri de 3-5 ori a limitei energiei la rupere și o scădere de un ordin de mărime a găturii la rupere, în condițiile scăderii temperaturii de la +20°C la -196°C.

Oțelurile aliate cu structură austenitică, sunt puțin sensibile la acțiunea factorilor de solicitare. Scăderea temperaturii conduce la creșterea cu 1,3-2 ori a limitei de curgere și scăderea cu 5-30 % a lungimii de rupere.

Întrucât mișcarea dislocațiilor în metale, produce vibrație termică în rețeaua cristalină, este evidentă creșterea rezistenței mecanice odată cu reducerea energiei termice provocate de scăderea temperaturii. Excepție de la acest fenomen apare atunci când, sub solicitare se formează alte faze solide.

Unele oțeluri austenitice datorită eforturilor și temperaturii se transformă parțial, din material cu rețea cubică cu fețe centrate la început, în rețea hexagon compactă și apoi în rețea cubică cu volum centrat, conferind materialului o rigiditate mult mai mare decât cea inițială.

Transformarea structurii rețelei atinge punctul maxim la aproximativ 200 K descreșcând apoi cu scăderea temperaturii.

Corelat cu această modificare structurală rezistența mecanică a materialului crește cu scăderea temperaturii până la punctul de maxim al transformării după care urmează o descreștere a rezistenței mecanice concomitent cu descreșterea în continuare a temperaturii.

În realitate, evoluția este mai complexă iar relația dintre cele două fenomene nu conduce la coincidența punctului de maxim al rezistenței mecanice, cu cel al transformării de fază.

Oțelurile rezistente la temperaturi joase se pot clasifica funcție de structura lor în:

- oțeluri carbon sau slab aliate și aliate cu Ni, denumite și oțeluri feritice;
- oțelurile Cr-Ni și Cr-Mn, denumite oțeluri austenitice.

În continuare se prezintă o serie de oțeluri utilizate la construcția recipientelor care funcționează la temperaturi joase [1], [16], [22], [46], [65], [139].

4.3.1. Oțeluri carbon slab aliate

Oțelurile cu conținut de carbon 0,05-0,2% și conținut scăzut de elemente de aliere, denumite ferito-perlitice, au tenacitatea dependentă de raportul ferită (eminamente ductilă) / perlită (dură). Cu creșterea ponderii conținutului de perlită în structura oțelului se reduce dimensiunea grăunților de ferită, ceea ce conduce la creșterea limitei de curgere (σ_c). Corelat cu această tendință de rupere prin separare, provocate de creșterea perlitiei în structura oțelului, scade tenacitatea acestuia. Sub 0,03% carbon, perlita se prezintă sub formă nodulară neinfluențând semnificativ tenacitatea. La valori care depășesc acest conținut de carbon se înregistrează o scădere a tenacității cu creșterea cantității de perlită.

Tratamentele cu răciri lente a oțelurilor ferito-perlitice facilitează precipitarea carburilor de fier, la limita grăunților de ferită, cu consecințe notabile de scădere a tenacității. Astfel se explică faptul că, tratamentul de călire cu apă, comparativ cu tratamentul de normalizare sau recoacere conferă o tenacitate mai mare oțelurilor ferito-perlitice.

Dintre oțelurile ferito-perlitice, oțelurile de calitate inferioară și intermediară, cu conținut de fosfor și sulf sub 0,05% (fiecare) se pot utiliza la temperaturi joase până la -20°C .

Oțelurile carbon de calitate superioară, calmate cu aluminiu și eventual mangan (1,2-1,6%), însă cu fosfor sub 0,04%, pot fi utilizate la temperaturi de -20°C până la -40°C iar în solicitări statice până la -60°C . Asemenea oțeluri se pot exemplifica ca fiind: OCS44...58 (STAS 9021-80) și OLT35(45)R (STAS 10392-80).

Referitor la structura oțelurilor se recomandă o finețe cât mai mare și un tratament termic constând în :

- normalizarea la $640 - 680^{\circ}\text{C}$;
- călire în apă de la $680 - 950^{\circ}\text{C}$;
- revenire la $640-680^{\circ}\text{C}$ cu răcire în aer.

Alierea cu elemente a oțelurilor carbon are drept consecință :

- în general o finisare a granulației;

- creșterea limitei de curgere;
- micșorarea dependenței de temperatură a tenacității în cazul alierii cu mangan și nichel.

Se impune precizarea că, la depășirea limitei de solubilitate a acestor elemente influența asupra tenacității este mai scăzută predominând în influență redistribuirea carburilor și nitruilor.

Utilizarea manganului la elaborarea oțelului este recomandată, întrucât este dezoxidant și leagă sulfurul în sulfuri de mangan, prevenind pericolul de fisurare la cald. Ușorul efect de fragilizare a oțelului, datorată utilizării manganului ca element de aliere, este contrabalansat de capacitatea acestuia de finisare a structurii de ferită și perlită, simultan cu inhibarea tendinței de precipitare a cementitei la limita grăunților.

O creștere a conținutului de mangan în oțelurile cu cca. 0,05% carbon, are ca efect global scăderea pronunțată a temperaturii de tranziție ductil-fragil, fapt ce subliniază eficiența manganului ca element de aliere. În cazul oțelurilor normalizate cu conținut mai mare de carbon (peste 0,15%), mărirea procentului de mangan, conduce la îmbunătățirea caracteristicilor de tenacitate, ca urmare a facilității transformării la răcire a austenitei în structuri bainitice inferioare.

Dintre oțelurile slab aliate utilizabile până la -80°C , se pot exemplifica oțelurile carbon (0,17%C) aliate cu mangan (1,25%) siliciu și vanadiu (în stare recoaptă) respectiv oțelurile conținând aluminiu.

Introducerea în structura ferito-perlitică a oțelului manganos, a unei cantități de nichel, element ce determină finisarea granulației și reduce azotul liber, are drept consecință creșterea tenacității oțelului. Este suficient un conținut de 0,5-0,8%Ni, pentru a micșora tendința de rupere fragilă a oțelului. Dintre oțelurile carbon (cca. 0,12%C) aliate cu nichel și mangan, cele cu 0,75%Ni și 1,25-1,5%Mn, sunt utilizate la execuția recipientelor sub presiune (sudate), în construcția de nave și a recipientelor pentru transportat și depozitat gaze lichefiate.

În stare călită oțelurile slab aliate de tipul 33MoCr11(STAS 791-80) se pot utiliza în tehnica frigului până la -120°C , sub formă de șuruburi și bolțuri iar cele care conțin și 0,1%Ni se pot utiliza până la -185°C .

Tenacitate suficientă, până la temperaturi cuprinse între -120°C și -160°C , prezintă oțelul carbon (0,18%C) slab aliat cu maxim 1,6%Ni și conținutul de crom de 0,9%, de molibden 0,65%, respectiv 0,14% vanadiu, călit în ulei și revenit la duritatea de 25-30 HRC și $R_m=100-210\text{daN/mm}^2$.

4.3.2. Oțeluri aliate

Oțeluri aliate cu nichel. Nichelul în procent de 2-10%, determină formarea unei structuri austenitice fine și apariția martensitei tenace (Fe-Ni). Oțelurile aliate cu nichel, între 3,2-3,8%, cum sunt 10Ni35 și 20(17)MoNi35, sunt utilizate la temperaturi cuprinse între -60°C și -100°C iar cele

aliate cu 4,5-5,5%Ni, pot fi folosite la temperaturi de -100°C până la -150°C. În cazul temperaturilor de -200°C, este indicată utilizarea oțelurilor cu 8,5-9,5%Ni (tabelul 4.1).

Tabelul 4.1.

Calitate	Tratament termic	Proprietăți mecanice									
		R _m [daN/mm ²]		R _{p2} [daN/mm ²]		A [%]		Z [%]		KCU [J/cm ²]	
		20°C	(*)	20°C	(*)	20°C	(*)	20°C	(*)	20°C	(*)
10 Ni 35; STAS 10382-80	Normalizare 870°C/aer+revenire620°C. Călire 880°C/apă sau ulei +revenire620°C/aer	45	-	27	-	24	18	50	40	180	60
Oțel cu 5%Ni	Dublă normalizare 850°C/aer+revenire600°C/aer Călire 800-850°C/apă +revenire620°C/aer.	55	-	37	-	19	18	50	40	230	60
Oțel cu 9%Ni	Dublă norm. 880-920°C/aer +revenire 550-600°C. Călire 790-820°C/apă +revenire550-600°C/aer.	69	110	60	100	32	30	-	-	95	45

(*) – reprezintă (-196°C).

Oțelurile aliate cu nichel sunt utilizabile după o prealabilă călire în ulei sau aer. Caracterul structurii oțelului (ferito-perlitic, bainitic sau martensitic) depinde de conținutul de nichel. De conținutul de nichel și tratamentul aplicat acestor oțeluri, depind proprietățile lor mecanice.

Buna sudabilitate a acestor oțeluri (cele cu Cr și 1,5-3,5%Ni sudabile cu electrozi aliați cu 3,5%Ni iar cele cu până la 9%Ni, sudabile cu electrozi multi-aliați cu Ni, Cr, Fe, Mo) le fac utilizabile pentru confecționarea conductelor și recipientelor sub presiune (sudate), a celor pentru transportul și stocarea gazelor lichefiate, cât și în instalații și mașini frigorifice.

Oțeluri aliate cu crom și nichel. Tenacitate foarte ridicată, până la temperaturi apropiate de zero absolut, o prezintă oțelurile austenitice cu carbon sub 0,1% aliate cu crom (16-26%) și nichel (3,5-22%). Prezența unor adaosuri mai ridicate de nichel și a molibdenului, îmbunătățește sensibil rezistența relativ scăzută la solicitări statice a oțelurilor de tip 18-8, care reprezintă aproximativ 50% din cea a oțelurilor aliate cu 9%Ni.

Oțelurile cu 18-19%Cr, 12-16%Ni conținând molibden și azot, își găsesc din ce în ce mai largă utilizare. Este de precizat că prezența în oțel a unui conținut de 0,1N echivalează cu efectul a 2%Ni. Astfel de oțeluri pot fi utilizate în urma aplicării de obicei a unei normalizări la 900°C, călirii de punere în soluție (la 1050-1200°C), urmată de revenire.

În tabelul 4.2. sunt prezentate caracteristicile mecanice la 20°C și -269°C ale unor oțeluri austenitice aliate cu crom și nichel. De remarcat este buna comportare a oțelurilor aliate cu crom și nichel la sudarea prin procedee electrice, fapt ce conduce la utilizarea acestora în construcția recipientelor sub presiune ce funcționează la temperaturi joase.

Tabelul 4.2.

Marca (STAS 3583-80 și STAS 11523-80)	Starea	Proprietățile mecanice							
		R _m [daN/mm ²]		R _{p0,2} [daN/mm ²]		A ₅ [%]		Z [%]	E [daN/mm ²]
		20°C	-269°C	20°C	-269°C	20°C	-269°C		-269°C
12(2)NiCr180(185)	Călit	55	157	24	26	63	37	56	20380
10(12)TiNiCr180	Călit	60	160	25	45	40	28	55	-
10TiMoNiCr175 Oțel cu 19%Cr 16%Ni Mo și N(0,04%C)	Călit	60	148	28	76	45	48	65	22500
2MoNiCr175	Călit deformat	112	224	104	201	15	12	25	22530
2MoNiCr175		122	253	121	225	11	6	36	21650

Oțeluri aliate cu crom și mangan. Oțelurile austenitice cu mangan și în deosebi cele cu crom-mangan, având conținut de : 13-17%Mn și 14-16%Cr sau 18-20Mn și 9-13%Cr, respectiv 18-22%Mn și 2-4%Cr pot fi utilizate în locul celor aliate cu crom și nichel pentru economisirea nichelului.

4.3.3. Oțeluri turnate

Din categoria oțelurilor turnate, cele slab aliate cu CrMo, CrNi și CrNiMo în stare călită sunt adeseori utilizate în cazul temperaturilor joase. Astfel :

- oțelul cu conținut de crom de cca. 1% are comportare satisfăcătoare până la - 60°C;
- oțelul cu 0,2%C, 4%Cr și adaos de molibden are utilizare până la - 100°C.

În tabelul 4.3 sunt prezentate temperaturile negative limită pentru unele oțeluri utilizabile la temperaturi joase.

Tabelul 4.3.

Marca	STAS	R_m [daN/mm ²]	Temperatura limită de utilizare [°C]	Diametrul maxim [mm]
35MoCrNi40	11500/2-80	115	-110	200
13CrNi30	791-80	100	-80	40
15Cr08		80	-50	10
18MnCr10		100	-30	30
38MoCrAl09		100	-80	60
34MoCrNi15		110		70
40Cr10		100	-60	25
OLC 35		70		15
OLC 45		90	-50	20
20Mn10	11513-80	50	-70	10

4.3.4. Recomandări privind utilizarea materialelor la temperaturi negative

Utilizarea materialelor la temperaturi negative implică o analiză atentă și a altor solicitări la care sunt supuse aceste materiale ca urmare a condițiilor complexe la care se expun aceste materiale.

Astfel pentru materialele metalice utilizate preponderent la confecționarea recipientelor sub presiune, temperaturile minime admisibile stabilite pe baza unei reziliențe minime de 305J/cm² sunt indicate în tabelul 4.4.

În cazul gazelor lichefiate cum sunt heliul, hidrogenul, oxigenul, azotul, argonul, propanul, etanul și altele la presiune atmosferică, materialele recomandate a fi utilizate sunt cele cuprinse în tabelul 4.5.

Evident că sinteza prezentată a materialelor utilizabile la temperaturi joase în tabelele 4.4 și 4.5 nu este exhaustivă, ci orientativă fiind conformă cu practica industrială.

Tabelul 4.4.

Temperatura minimă [°C] Solicitare		Materiale utilizabile
Statică	Dinamică	
-25	-10	Oțeluri carbon STAS 500/2-80, clasa calitate 2 Oțeluri nealiat, cu tendință spre îmbătrânire pentru cazane și recipiente;
-60	-40	Oțeluri nealiat stabile la îmbătrânire și aliate, pentru cazane și recipiente; Oțeluri pentru țevi fără cusătură; Oțeluri carbon STAS 500/2-80, clasa de calitate 3; Oțeluri turnate
-80	-60	Oțeluri carbon de calitate (OLC15X-STAS 880-80 și Mn (-Al), normalizate.
-120 -185		Oțeluri Cr-Mo, îmbunătățite; Oțeluri cu $\geq 5\%$ Ni; pentru Ni $\leq 8,5\%$ călite în ulei sau apă; pentru Ni $\geq 8,5\%$: îmbunătățite (revenite).

Tabelul 4.5.

T [°C]	R _m [daN/mm ²]				Utilizare
	35	45	53	≤70	
	KV(J)				
	14	18	21	28	
≤-35	-	OL42...50	-		NH ₃
≤-50	-		OL52*	OL52(60)**	Propan
≤-100	-	13CrNi30	-	-	CO ₂ ; C ₂ H ₂ ; Etan
≤-200	-	-	Oț. Inox. (C≤0,1%)	Oț.** cu 9%Ni sau 9%+4%Co	CH ₄ ; Ar; O ₂ ; N ₂

* Normalizat; ** Călit și revenit

4.4 Contribuții la studiul învelitorilor subțiri supuse la temperaturi joase.

Recipientele sub presiune supuse temperaturilor joase sunt frecvent întâlnite în exploatare, motiv pentru care studiul asupra învelitorilor subțiri funcționând în asemenea condiții a constituit obiectul prezentei lucrări.

Primul subcapitol tratează învelitorile cilindrice și sferice subțiri supuse la temperaturi scăzute în condițiile variației liniare a temperaturii pe direcția radială a peretelui învelitorii. Atât pentru învelitorile sferice, cât și cele cilindrice au fost puse în evidență relațiile care definesc eforturile, momentele și tensiunile din astfel de învelitori.

Învelitorile subțiri de revoluție supuse la tensiuni axial simetrice au constituit obiectul celui de al doilea subcapitol și au fost studiate în condițiile când gradientul de temperatură pe grosimea învelitorii are o distribuție distinctă atât după grosime cât și după unghiul meridian. Au fost studiate și în cazul acestor tipuri de învelitori starea de tensiune și deformațiile, subliniindu-se posibilitatea extrapolării soluțiilor problemei tratate în subcapitolul 2 la condițiile specifice din capitolul 4.

Comportarea mecanică a materialelor la temperaturi joase în condiții de criogenie, a constituit obiectul celui de al treilea subcapitol, prezentându-se caracteristicile mecanice a unor oțeluri utilizate în construcția recipientelor sub presiune exploatare la temperaturi joase.

Contribuțiile autorului la studiul recipientelor sub presiune supuse la temperaturi joase sunt următoarele :

- soluționarea problemei stării de tensiune și deformare din învelitorile subțiri (în care se încadrează aceste recipiente) prin extrapolarea rezultatelor obținute în capitolul 2 al prezentei lucrări ;
- analiza pertinentă asupra comportării mecanice a materialelor din care sunt confecționate recipientele sub presiune funcționând la temperaturi joase;
- elaborarea unor recomandări privind utilizarea diferitelor oțeluri la construcția recipientelor funcție de temperatura de exploatare.

Capitolul 5. Analiza experimentală a tensiunilor.

Recipientele sub presiune fiind supuse în exploatare unor solicitări mecanice se impune o analiză pe bază de experiment a deformațiilor și tensiunilor care apar în materialul acestor structuri.

Pentru a conferi analizei un grad de încredere ridicat autorul a elaborat un program de calcul pentru prelucrarea pe principiul statisticii matematice a datelor obținute din măsurători.

5.1. Abordarea statistică a rezultatelor măsurătorilor.

Repetând în condiții identice măsurarea unei mărimi, se constată că rezultatele aleatorii x_i ale măsurării sunt caracterizate de o lege de repartiție bine determinată. În calculele ingineresti cel mai des se utilizează repartiția normală (Gauss-Laplace), definită prin funcția densitate de probabilitate de forma :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.1)$$

unde : - m – valoarea mediei

- σ^2 – dispersia (mărimi ale căror formule de definiție vor fi prezentate ulterior).

Prelucrarea statistică a rezultatelor își propune să facă estimări ale adevăratelor valori ale mărimilor și să formuleze unele concluzii asupra preciziei metodei folosite. Toate aceste concluzii se bazează pe ipoteza că datele supuse prelucrării au o repartiție normală, motiv pentru care trebuie verificată concordanța datelor cu legea repartiției normale.

5.1.1. Calculul principalilor parametrii statistici

Parametrii statistici principali care se calculează pe baza datelor provenite din măsurători pot fi în general de grupare sau de împrăștiere.

I. Parametrii de tendință (de grupare) sunt definiți în cele ce urmează :

- media aritmetică (m ; \bar{x}) :

$$m = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (5.2)$$

- mediana (M_e) : - pentru un număr de date n impar reprezintă valoarea care ocupă poziția centrală în șirul de date, respectiv cea al cărei număr de ordine este $n+1/2$.

- pentru un număr de date n par se calculează cu formula :

$$M_e = \frac{\frac{x_n}{2} + \frac{x_{n+1}}{2}}{2} \quad (5.3)$$

- modulul, moda (M_0) – valoarea observată care are frecvența absolută (sau relativă) cea mai mare. Pentru repartiții normale acesta se poate calcula cu relația :

$$M_0 = \bar{x} + 3(M_e - m) \quad (5.4)$$

- momentul de ordinul r (M_r) calculat cu relația :

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i^r \quad (5.5)$$

- momentul centrat de ordinul r (μ_r) :

$$\mu_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - m)^r \quad (5.6)$$

- mediile de ordinul r (η_r) :

$$\eta_r = (M_r)^{1/r} \quad (5.7)$$

II. Parametrii de împrăștiere :

- abaterea medie pătratică (σ^*) sau abaterea standard :

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - m)^2} \quad (5.8)$$

- dispersia (σ^{*2}) calculată cu relația :

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - m)^2 \quad (5.9)$$

- coeficientul de asimetrie β_1 :

$$\beta_1 = \frac{(\mu_3)^2}{(\sigma^{*2})^3} \quad (5.10)$$

- coeficientul de boltire β_2 :

$$\beta_2 = \frac{(\mu_4)^2}{(\sigma^{*2})^4} \quad (5.11)$$

unde : - μ_3, μ_4 – momentele centrate de ordinul 3 respectiv 4;

- σ^{*2} – dispersia.

- excesul (E), indicator definit prin relația :

$$E = \beta_2 - 3 \quad (5.12)$$

În cazul unei repartiții normale $\beta_2=3$.

Cu excepția coeficienților de asimetrie, boltire și a excesului, toți parametrii statistici menționați mai sus se exprimă în aceleași unități de măsură ca și datele măsurate.

5.1.2. Verificarea normalității datelor.

Verificarea normalității repartiției datelor se poate face prin mai multe metode, dintre care se amintesc următoarele :

- prezentarea frecvențelor relative cumulate ale valorilor în rețeaua de probabilitate, care deși este rapidă prezintă dezavantajul caracterului aproximativ;
- verificarea valorilor unora dintre parametrii statistici principali, metoda fiind mai mult calitativă;
- aplicarea testelor de verificare a normalității.

Deoarece aplicarea ultimei metode conferă un caracter cantitativ analizei cât și o validare calitativă, autorul prezentei teze a optat pentru utilizarea testului χ^2 pentru verificarea normalității datelor experimentale, elaborând în acest sens un program de calcul PARAM- χ^2 care permite totodată și calculul următorilor parametrii : media aritmetică, abaterea medie pătratică, dispersia, diferiți coeficienți.

Testul χ^2 este cel mai important și mai des folosit test pentru verificarea normalității unui șir de date experimentale și are ca primă etapă calcularea valorii :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i} \quad (5.13)$$

în care : - n_i – numărul de valori al clasei i ;

- $N = \sum_{i=1}^k n_i$;
- k – numărul claselor ;
- p_i – probabilitatea teoretică corespunzătoare frecvenței de apariție a valorii x_i , în cazul unei repartiții normale.

Valoarea χ^2 calculată cu relația (5.13) se compară cu o valoare χ^2 critică, determinată funcție de un parametru ν numit grad de libertate și pentru un nivel de încredere α . dacă valoarea calculată depășește valoarea critică $\chi^2_{\nu, \alpha}$ atunci cu o certitudine având probabilitatea α se poate considera că funcția de repartiție a datelor experimentale urmează o repartiție normală. În caz contrar, nu sunt suficiente dovezi pentru a valida o astfel de concluzie.

Se recomandă ca la aplicarea testului χ^2 să fie îndeplinite următoarele condiții :

$$N \geq 50 ; n_i \geq 5 ; 10 \leq k \leq 20 \quad (5.14)$$

Dacă clasele extreme au mai puțin de cinci valori fiecare, atunci aceste clase se contopesc cu cele alăturate lor și numărul gradelor de libertate este egal cu numărul claselor, minus 3. Dacă una din clasele extreme are mai puțin de cinci date, atunci această clasă se contopește cu cea alăturată și numărul gradelor de libertate este egal cu numărul claselor, minus 2. Când toate clasele au mai mult de 5 date fiecare, atunci numărul gradelor de libertate este egal cu numărul claselor, minus 1.

Pentru calculul efectiv al sumei (5.13) se procedează după cum urmează :

- se calculează media aritmetică m și abaterea medie pătratică σ^* utilizând relațiile (5.2) respectiv (5.8);
- se calculează pentru fiecare clasă i , valoarea :

$$t_i = \frac{x_i - m}{\sigma^*} \quad (5.15)$$

în care x_i este limita superioară a clasei i .

- se calculează probabilitățile teoretice p_i cu relația :

$$p_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}) \quad (5.16)$$

pentru care se va avea în vedere că :

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt \quad (5.17)$$

este funcția de probabilitate integrală și că $\Phi(+\infty) = 0,5$ și $\Phi(-t) = -\Phi(t)$.

Valorile funcției $\Phi(t)$ se pot obține prin integrare numerică pe calculator sau pot fi luate din tabele.

- se calculează suma (5.13) ;
- se caută în tabele valoarea χ^2 critică, corespunzătoare numărului gradelor de libertate ν stabilit așa cum s-a arătat mai sus și unui nivel de încredere α , convenabil ales.
- se compară valoarea χ^2 calculată cu relația (5.13) cu valoarea critică și se formulează o concluzie privind acceptarea sau respingerea ipotezei de normalitate, pe baza criteriului enunțat anterior.

Referitor la aplicarea testului χ^2 în literatura de specialitate [18] se fac următoarele observații :

- când nu există suficiente argumente pentru a respinge ipoteza normalității repartiției datelor, se acceptă această ipoteză ; o valoare mică a sumei (5.13) nu poate constitui o demonstrație a normalității;
- cu cât numărul măsurătorilor este mai mare , certitudinea concluziei pe baza testului χ^2 crește;
- eficiența testului χ^2 crește dacă în fiecare din clasele de grupare a datelor se află aproximativ același număr de date.

5.1.3. Prelucrarea șirurilor multidimensionale. Corelație și regresie.

Dependența statistică este consecința acțiunii unor factori multipli de diferite intensități și sensuri de influență, care nu se manifestă în fiecare caz în parte, ci numai în general și în medie, pentru un număr mare de cazuri observate.

Metodele de prelucrare a rezultatelor măsurărilor considerate ca șiruri statistice de valori ale unei variabile aleatoare multidimensionale urmăresc obținerea de informații asupra :

- interdependenței dintre diverși parametri;
- influenței pe care o are cunoașterea valorilor luate de unii parametri asupra valorii celorlalți parametri.

Dacă în cazul unui fenomen studiat experimental știm că y este o funcție de x și alte variabile necunoscute, aplicând metoda de analiză a corelației se poate determina dependența lui y de x cu un anumit nivel de încredere. Corelația se utilizează când dependența reciprocă dintre diverși factori sau caracteristici este parțială.

Studiul influenței pe care o are cunoașterea valorii pe care a luat-o variabila y asupra valorilor variabilei x se face cu ajutorul regresiei.

Deși premisele care stau la baza calculului de corelație (în sensul strâns al termenului) și a celor de regresie sunt diferite, totuși cele două metode de analiză a dependenței statistice în ansamblu se împletesc atât de strâns încât prezintă interes să fie aplicate împreună.

$$R_{x,y} = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum y_i)(\sum x_i)}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}} \quad (5.18)$$

unde : - x_i , y_i – perechile de valori determinate experimental;

- n – numărul acestor perechi.

Valorile limită ale $R_{x,y}$ sunt +1, -1 și 0. Cu cât valoarea coeficientului de corelație e mai apropiată de 1, cu cât legătura dintre cele două variabile este mai puternică și invers, dacă valoarea

$R_{x,y}$ se apropie de zero. Un coeficient de corelație negativ este de fapt, un coeficient pozitiv pentru corelația inversă.

Dacă în urma analizei corelației rezultă că între variabilele studiate există o dependență statistică, se pune în continuare problema determinării legii care guvernează această dependență printr-o ecuație de regresie.

În esență, problema regresiei constă în a determina în ce măsură se schimbă în medie valoarea lui y ca urmare a variației cu o unitate a lui x . Soluția ce se caută este o funcție de regresie care să exprime dependența variabilei y în raport cu variabila x care să elimine într-o măsură cât mai mare influențele factorilor aleatorii neidentificați, nemăsurabili sau cu o contribuție neînsemnată în desfășurarea fenomenului.

Estimarea parametrilor funcțiilor de regresie se face cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate în care se presupune apriorii forma funcției $y(x)$.

În prezenta analiză autorul a utilizat forma binomială și liniară pentru funcția de regresie, date de relațiile :

$$y = a_1x + a_2x^2 \quad (5.19)$$

$$y = a_1x \quad (5.20)$$

Valorile coeficienților a_1 și a_2 se calculează pe baza relațiilor :

- cazul dependenței binomiale

$$a_1 = \frac{\sum x_i y_i \sum x_i^4 - \sum x_i^2 y_i \sum x_i^3}{\sum x_i^2 \sum x_i^4 - (\sum x_i^3)^2} \quad (5.21)$$

$$a_2 = \frac{\sum x_i^2 y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i^3}{\sum x_i^2 \sum x_i^4 - (\sum x_i^3)^2}$$

- cazul dependenței liniare

$$a_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad (5.22)$$

În cadrul acestui studiu autorul a realizat un program de calcul COREG care permite calculul coeficientului de corelație $R_{x,y}$ având schema logică prezentată în Anexe.

5.2. Prelucrarea rezultatelor măsurătorilor efectuate la un distribuitor în zona unor concentratoare de tensiune.

Pentru măsurarea alungirilor și tensiunilor la un distribuitor în zona unor concentratoare de tensiune se utilizează metoda cu traductoare tensometrice rezistive datorită în special diferitelor condiții de aplicabilitate : exploatare, probă, suprasarcină, avarie, etc.

Deoarece măsurările efectuate cu traductoare tensometrice rezistive au unele particularități care se manifestă în datele experimentale ce se prelucrează, este necesară cunoașterea acestor particularități, legate de elaborarea unei metodologii de lucru și care vor expuse în cele ce urmează.

Prin principiul de funcționare, traductoarele rezistive determină variații ale stărilor de sollicitare ale structurii, față de o stare de referință, considerată convențional ca stare cu sollicitare nulă. Aceasta înseamnă că alungirile specifice ϵ ce se măsoară, când structura este sollicitată cu un sistem de sarcini a cărui intensitate este definită de un parametru θ , pot fi interpretate ca fiind o funcție $\epsilon(\theta)$ care au proprietatea :

$$\epsilon(0) = 0 \quad (5.23)$$

În cazul nostru parametrul θ este valoarea presiunii din interiorul unui recipient.

Determinările datelor experimentale efectuate cu puntea tensometrică se vor numi citiri iar cele corespunzătoare stării de referință se numesc “citiri de zero”.

Se pune problema determinării funcției $\epsilon(\theta)$ pentru variația lui în limite bine definite, deci ϵ devine o variabilă independentă iar θ este variabila independentă, respectiv presiunea interioară p ($\epsilon(p)$).

În vederea determinării formei dependenței $\epsilon(p)$, măsurarea deformațiilor specifice se face pentru un număr cât mai mare de valori ale lui p , realizându-se astfel cicluri de încărcare-descărcare. prin ciclul de încărcare-descărcare se definește variația sistemului de sarcini între două treceri succesive prin starea de referință.

În continuare se analizează cazul unui distribuitor sollicitat la presiune interioară la care se efectuează măsurători în zona unui concentrator de tensiune de tipul ștuț.

S-au utilizat cinci rozete dreptunghiulare cu câte trei traductoare, cu baza 6 mm, tip 6/120 RE11, fabricație Hottinger Baldwin Messtechnik și o punte Vishay tip P-350 A, cu două cutii de comutare echilibrare tip SB-2.

Citirile la puntea tensometrică pentru două cicluri de încărcare-descărcare sunt definite prin presiunile :

$$0 - 22,8 - 42,8 - 22,8 - 0 - 22,8 - 0 \quad (\text{Atm})$$

citiri care sunt prezentate în tabelul 5.1.

Tabelul 5.1.

Punct măsurare	Traductor nr.	Citiri la puntea tensometrică [μm/m]						
		Presiunea [atm]						
		0	22,8	42,8	22,8	0	22,8	0
1	1.1	255	436	590	449	251	435	247
	1.2	148	189	222	190	145	186	145
	1.3	234	154	92	154	236	157	235
2	2.1	144	203	253	204	145	202	145
	2.2	120	135	147	137	121	135	121
	2.3	75	44	11	36	68	39	68
3	3.1	141	182	219	184	141	182	140
	3.2	120	153	178	154	120	151	120
	3.3	91	106	117	110	93	107	93
4	4.1	161	222	273	222	160	221	161
	4.2	177	257	318	256	172	250	175
	4.3	171	250	310	247	164	246	162
5	5.1	193	284	365	290	188	248	189
	5.2	139	189	239	194	135	190	131
	5.3	117	123	131	125	117	125	117

O primă etapă în prelucrarea datelor a constat în aplicarea programului COREG pentru a determina coeficientul de corelație $R_{x,y}$ între mărimile specifice, rezultatele fiind prezentate în tabelul 5.2.

Tabelul 5.2.

Trad.nr	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3
R(%)	99,9	99,8	-99,9	100	99,6	-99,7	100	99,9	99,4
Trad.nr	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3			
R(%)	100	99,8	99,8	100	99,8	99,9			

Pentru lua în considerare efectele neliniare ale elementelor de etanșare nemetalică, ale jocurilor și frecărilor din reazemele distribuitorului și conductei forțate cu care aceste este asamblat, deși materialul a fost solicitat în stadiu elastic, s-a adoptat pentru funcția $\epsilon(p)$ o formă binomială (relația (5.19)).

Deoarece numărul de citiri pentru fiecare traductor este foarte mic, nu se pot îndeplini condițiile pentru fiecare traductor în parte și prelucrarea datelor s-a făcut pentru toate traductoarele, concluziile ce se vor formula fiind aprecieri globale calitative și cantitative asupra măsurătorii în ansamblu.

În acest scop s-au determinat pentru fiecare traductor abaterile relative ξ_i ale valorilor ϵ_i , citite la presiunea p_i , față de valorile corespunzătoare de pe parabola (5.19).

$$\xi_i = \left(\frac{y_i}{a_1 x_i + a_2 x_i^2} - 1 \right) 100 \quad (\%) \tag{5.24}$$

De asemenea s-au definit abaterile relative ξ_i^0 ale citirilor de zero (pentru $p=0$):

$$\xi_j^0 = \left(\frac{C_j^0 - C_{j+1}^0}{a_1 p_{\max j} + a_2 p_{\max j}^2} \right) 100 \quad (\%) \quad (5.25)$$

în care : - C_j^0 și C_{j+1}^0 - citirile de zero pentru ciclul j de încărcare-descărcare;

- P_{\max} – valoarea maximă a presiunii p, la care s-au făcut măsurări în decursul ciclului j;

- a_1, a_2 – parametrii parabolei $\varepsilon(p)$.

Definind un ciclu de încărcare-descărcare ca ansamblul treptelor de aplicare a sarcinilor (pentru care s-au făcut citiri la puntea tensometrică) între două citiri de zero, atunci pentru fiecare citire la puntea tensometrică se determină două valori ale abaterii ξ_j : una față de citirea de zero inițială (abaterea ξ_j^I la încărcare) și una față de citirea de zero finală (abaterea ξ_j^F la descărcare). Abaterile citirilor de zero se determină câte una pentru fiecare ciclu, pentru fiecare traductor.

Citirile la puntea tensometrică pentru care au rezultat abateri ξ și ξ_0 în afara intervalului $\pm 15\%$ s-au considerat afectate de erori grosolane și au fost eliminate. Apoi s-au recalculat parametrii a_1 și a_2 ai parabolilor $\varepsilon(p)$ și abaterile ξ_i, ξ_j^0 față de noua parabolă. Calculul s-a repetat până când pentru toate citirile rămase și pentru toate traductoarele abaterile s-au încadrat în limitele $\pm 15\%$.

Etapele de calcul prezentate mai sus au stat la baza elaborării unui program de calcul în limbaj Turbo Pascal denumit COEFPAR, prezentat în Anexe iar rezultatele sunt sintetizate în tabelul 5.3 cu observația că au fost eliminate 10 abateri din totalul de 150 date inițiale. În aceste condiții prelucrarea s-a făcut pentru un număr de 140 valori ale abaterilor rămase.

Tabelul 5.3.

Nr.	a_1	a_2	Nr.	a_1	a_2	Nr.	a_1	a_2
1.1	8,70073	-0,01932	2.3	-1,22781	-0,00434	4.2	3,71786	-0,00853
1.2	1,96241	-0,00464	3.1	1,84889	-0,00062	4.3	3,86964	-0,01262
1.3	-3,71554	0,00875	3.2	1,52122	-0,00388	5.1	4,12798	-0,00119
2.1	2,58519	-0,00117	3.3	0,74201	-0,00369	5.2	2,47674	-0,00219
2.2	0,70205	-0,00194	4.1	2,74459	-0,00271	5.3	0,37798	-0,00119

În acest fel se pot calcula pentru fiecare traductor deformațiile specifice pentru valorile dorite ale lui p. Se pot determina deasemenea în fiecare punct de măsurare deformațiile specifice principale ale solicitării și tensiunile principale.

Verificarea normalității repartiției abaterilor s-a realizat prin aplicarea testului χ^2 prin aplicarea programului de calcul PARAM- χ^2 prezentat anterior rezultând valoarea $\chi^2=8,6558$ care comparată cu valoarea critică 14,9 cunoscută pentru $v=4$ grade de libertate și un nivel de încredere

$\alpha=0,996$ rezultă că repartiția este normală. De asemenea cu ajutorul programului au fost calculați pentru șirul abaterilor și următorii parametri : media aritmetică, moda, valoarea centrală, abaterea medie pătratică și dispersia.

5.3. Prelucrarea datelor măsurătorilor pe probe prelevate de pe un recipient sub presiune.

În acest subcapitol se va analiza influența geometriei cusăturii sudate asupra distribuției tensiunilor în corpul unui recipient tip acumulator de aer, fabricat de Sovrometal Reșița în anul 1951, care a fost în funcțiune în cadrul stației de aer comprimat din Combinatul Siderurgic Reșița până în anul 1997. Dintre datele constructive se pot aminti : diametrul exterior al mantalei – 1764 mm, lungimea mantalei cilindrice – 4000mm, lungimea peste funduri – 4610mm, grosimea mantalei – 18mm, grosimea fundurilor – 20mm, construcție sudată cu sudură în V.

În vederea cercetării și investigării experimentale a zonelor concentratorilor de tensiune se apelează la metoda tensometriei electrice, ca instrument de largă utilizare, cu ajutorul căreia se măsoară deformațiile specifice ca mărimi asociate tensiunilor.

Testul experimental s-a realizat pe patru bare din oțel OL 37 (figura 5.1 și 5.2), la dimensiunile: 400x30x18mm pentru cele sudate cu sudura în mijloc iar la cele din materialul de bază la dimensiunea : 380x30x18mm.

S-au aplicat cinci traductoare electrotensoметриce rezistive în trei puncte, în zona sudurii cap la cap și câte un traductor la distanța de aproximativ 100mm de centrul rozetei. Suprafața barelor a fost curățată prin prelucrare mecanică, degresare chimică și s-a realizat protejarea electrică și mecanică.

Traductoarele din rozetă sunt de tip RY41, tip Hottinger, cu rezistența electrică de 120 $\Omega \pm 0,2\%$ iar constanta de sensibilitate este $k=1,96\% \pm 1\%$. Traductoarele simple sunt de tip M120, cu rezistența electrică de 120 $\Omega \pm 0,5\%$ și constanta de sensibilitate este $k=2,05\% \pm 1\%$.

În vederea măsurării deformațiilor specifice s-a utilizat o instalație electrotensometrică de tip PHILIPS, PR9307, unde de la traductoare semnalele s-au preluat cu cabluri ecranate la unitatea de comutare și echilibrare rezistivă și capacitivă de tip PT2266/01/02. Deformațiile specifice s-au măsurat cu amplificatorul de măsură și înregistrare PR9307, cu frecvența purtătoare de 5kHz și domeniu de măsură între 100-200000 $\mu\text{m/m}$.

Standul pentru măsurători experimentale este prezentat în figura 5.3.

Probele s-au supus la solicitare de tracțiune la o mașină de tip Amsler de 50 tone forță, în cicluri de încărcare și descărcare de : 3000; 6000; 9000, 12000 daN iar pentru fiecare treaptă de solicitare s-au măsurat deformațiile de la cele cinci traductoare.

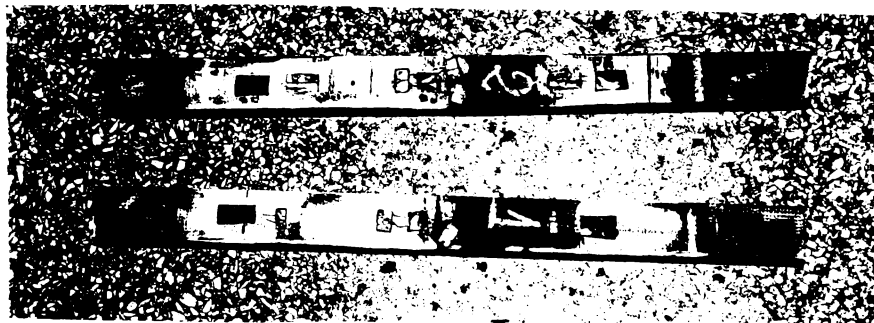


Fig.5.1



Fig.5.2.

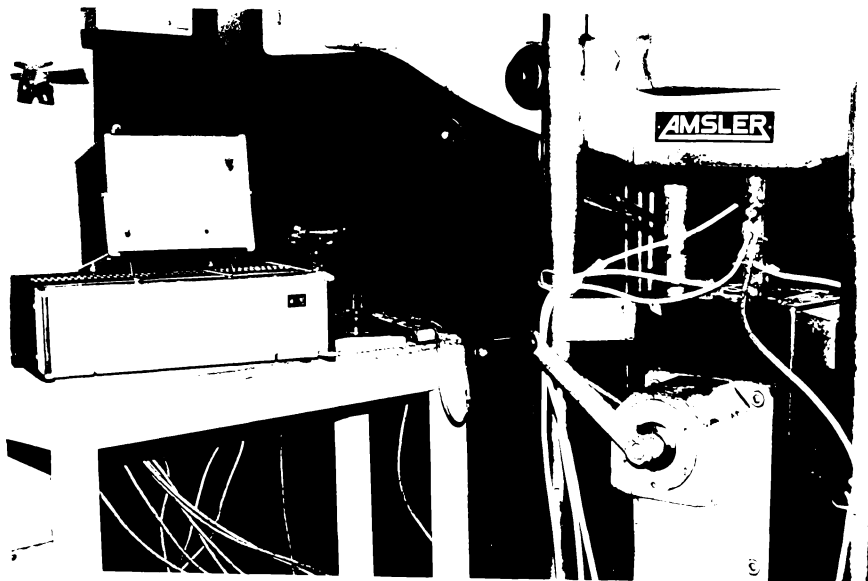


Fig.5.3. Standul pentru determinări experimentale.

În vederea prelucrării datelor experimentale s-au utilizat în cazul traductoarelor simple legea lui Hooke :

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \tag{5.26}$$

Pentru rozetele de la traductoare la care unghiul dintre ele este de 120°, s-au utilizat următoarele relații de calcul :

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{E}{1-\nu} A \pm \frac{E}{1-\nu} \sqrt{B^2 + C^2} \tag{5.27}$$

unde : - E – modulul de elasticitate care pentru oțel are valoarea $2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/mm}^2$;

- ν - coeficientul lui Poisson (0,285).

$$A = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} ; B = \varepsilon_1 - A ; C = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\sqrt{3}} \tag{5.28}$$

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctg \frac{B}{C} ; \tau_{\max} = \frac{E}{1+\nu} \sqrt{B^2 + C^2} \tag{5.29}$$

$$\sigma_{\text{echiv}} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + \sigma_{\min}^2} - \sigma_{\max} \cdot \sigma_{\max} \tag{5.30}$$

În tabelele 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, se prezintă o parte din rezultatele obținute la solicitarea barelor prelevate din recipient, proba I fiind prelevată din materialul de bază iar probele II, III și IV având îmbinarea sudată în zona centrală.

Tabelul 5.4.

Proba	For;a [daN]	Trad.	Deformații specifice [μm/m]			Media def.spec.	Def. datorită diferenței de temperatură	Deformații dat. constantei de sensibilitate
			Ciclul I	Ciclul II	Ciclul III			
I.	3000	1.1	300	350	300	316,666	336,666	343,536
		1.2	12	80	12	34,666	54,666	55,781
		1.3	17	45	17	26,333	46,333	47,278
		1.4	315	400	320	345,000	365,000	372,448
		1.5	174	200	180	184,666	204,666	208,842
	6000	2.1	610	700	650	653,333	673,333	687,074
		2.2	- 21	- 60	- 25	- 35,333	55,333	56,462
		2.3	10	59	60	43,000	63,000	64,285
		2.4	565	600	600	588,333	6,333	620,747
		2.5	375	375	400	383,333	403,333	411,564
	9000	3.1	900	800	900	866,666	886,666	904,761
		3.2	38	40	40	39,333	59,333	60,543
		3.3	- 51	- 40	- 40	- 43,666	- 63,666	- 64,965
		3.4	760	800	780	780,000	800,000	816,326
		3.5	630	650	700	660,000	680,000	693,877
12000	4.1	1100	1200	1200	1166,666	1186,666	1210,883	
	4.2	10	20	20	16,666	36,666	37,414	
	4.3	76	76	76	76,000	96,000	97,959	
	4.4	850	850	860	853,333	873,333	891,156	
	4.5	840	850	850	846,666	866,666	884,353	

Tabelul 5.5.

Proba	Forța [daN]	Trad.	Deformații specifice [μm/m]			Media def.spec.	Def.dat. diferenței de temperatură	Deformații dat. constante de sensibilitate
			Ciclul I	Ciclul II	Ciclul III			
II	3000	2.1	275	300	280	285,000	305,000	311,224
		2.2	60	100	90	83,333	103,333	105,441
		2.3	115	190	180	161,666	181,666	185,373
		2.4	345	510	500	451,666	471,666	481,291
		2.5	120	200	190	170,000	190,000	193,877
	6000	2.1	540	590	560	563,333	583,333	594,897
		2.2	80	90	80	83,333	103,333	105,441
		2.3	75	77	76	76,000	96,000	97,959
		2.4	550	760	450	586,666	606,666	619,046
		2.5	420	450	425	431,666	451,666	460,883
	9000	2.1	820	975	850	881,666	901,666	920,067
		2.2	100	88	84	57,333	77,333	78,911
		2.3	100	110	100	103,333	123,333	125,849
		2.4	750	970	665	795,000	815,000	831,632
		2.5	550	670	650	623,333	643,333	656,462
	12000	2.1	1170	1120	1170	1153,333	1173,333	1197,278
		2.2	90	90	90	90,000	110,000	112,244
		2.3	90	90	90	90,000	110,000	112,244
		2.4	1120	900	1125	1048,333	1068,333	1090,135
		2.5	900	900	900	900,000	920,000	938,775

Tabelul 5.6.

Proba	Forța [daN]	Trad.	Deformații specifice [μm/m]			Media def. specifice	Def.dat. diferenței de temperatură	Def.dat. constante de sensibilitate
			Ciclul I	Ciclul II	Ciclul III			
III	3000	3.1	410	600	280	430,000	450,000	459,183
		3.2	36	36	36	36,000	56,000	57,142
		3.3	- 50	- 50	- 50	- 50,000	- 70,000	71,428
		3.4	470	500	420	463,333	483,333	493,196
		3.5	270	420	225	305,000	325,000	331,632
	6000	3.1	560	620	600	593,333	613,333	625,849
		3.2	- 90	- 100	- 75	88,333	108,333	110,543
		3.3	80	50	75	68,333	88,333	90,135
		3.4	680	510	700	596,666	616,666	629,250
		3.5	420	465	460	448,333	468,333	477,890
	9000	3.1	1100	920	910	976,666	996,666	1017,006
		3.2	110	110	100	106,666	126,666	129,251
		3.3	50	60	90	66,666	86,666	88,434
		3.4	790	800	995	841,666	861,666	879,250
		3.5	610	700	700	670,000	690,000	704,081
	12000	3.1	1150	1200	1200	1183,333	1103,333	1125,849
		3.2	90	90	150	110,000	130,000	132,653
		3.3	110	110	150	123,333	143,333	146,258
		3.4	790	1250	1250	1096,666	1116,666	1139,455
		3.5	770	770	950	830,000	850,000	867,346

Tabelul 5.7.

Proba	Forța [daN]	Trad.	Deformații specifice [μm/m]			Media def. specifice	Def.dat. diferenței de temperatură	Def.dat. constantei de sensibilitate
			Ciclul I	Ciclul II	Ciclul III			
IV	3000	4.1	200	300	350	283,333	303,333	309,523
		4.2	53	120	120	97,666	117,666	120,067
		4.3	- 40	- 45	- 60	- 48,333	- 68,333	69,727
		4.4	240	225	230	228,333	248,333	253,401
		4.5	200	295	300	265,000	285,000	290,816
	6000	4.1	400	455	425	428,333	448,333	457,482
		4.2	- 47	- 115	- 50	- 70,666	- 90,666	92,516
		4.3	- 39	- 50	- 25	- 38,000	- 58,000	59,183
		4.4	460	450	470	460,000	480,000	489,795
		4.5	450	525	470	481,666	501,666	511,904
	9000	4.1	610	740	750	693,333	713,333	727,890
		4.2	- 50	- 93	- 50	6333	84,333	86,054
		4.3	50	50	50	50,000	70,000	71,428
		4.4	660	700	760	706,666	726,666	741,495
		4.5	700	755	760	738,333	758,333	773,809
	12000	4.1	900	910	910	906,666	926,666	945,577
		4.2	+ 67	+ 67	+ 67	+ 67,000	+ 87,000	+ 88,775
		4.3	15	15	15	15,000	35,000	35,714
		4.4	960	960	960	960,000	980,000	999,999
		4.5	1000	1000	1000	1000,000	1020,000	1040,816

În tabelul 5.8. sunt prezentate tensiunile rezultate la probele de tracțiune în zona rozetelor iar tabelul 5.9. cuprinde valorile deformațiilor medii ale probelor.

Tabelul 5.8.

Proba	Forța [daN]	Tensiunea max. σ_{\max} [daN/mm ²]	Tensiunea min. σ_{\min} [daN/mm ²]	Tensiunea echiv. σ_{echiv} [daN/mm ²]	Tensiunea tangențială σ_{tang} [daN/mm ²]	Unghiul φ_{\max}
I.a.	3000	7,55625	1,19808	7,03415	3,17909	0,0237732
	6000	14,73499	1,08209	14,22484	6,82645	-0,0108209
	9000	19,25302	0,91964	18,81006	9,16669	-0,0078776
	12000	25,61984	0,73976	25,25808	12,44008	-0,0459199
II.a.	3000	11,72788	12,15321	20,68272	18,04715	-0,2415954
	6000	13,18835	2,4423	12,15267	5,37302	0,0131509
	9000	19,93039	2,09369	18,97039	8,91835	-0,0497721
	12000	25,73873	2,09944	24,75587	11,81964	0,0000000
III.a.	3000	10,05797	1,45033	9,30577	4,30386	0,0389682
	6000	13,81948	2,3639	12,80228	5,72779	0,0336701
	9000	21,98807	2,1872	20,25257	9,90044	0,0389682
	12000	24,49698	3,00826	23,13998	10,74436	-0,0119586
IV.a.	3000	7,27415	2,50248	6,40095	2,38584	0,2033431
	6000	10,1329	1,70425	9,36558	4,16933	0,0757255
	9000	15,73897	1,58927	15,73936	7,07485	0,0200284
	12000	20,11112	0,83956	19,70473	9,63577	0,05202

Tabelul 5.9.

Forța [daN]	Proba I.a.	Proba II.a.	Proba III.a.	Proba A.s.	Proba B.n.
3000	343,536	311,224	459,183	371,314	309,523
	55,781	105,441	57,142	72,788	120,067
	47,278	185,373	71,428	101,359	69,727
	372,448	481,291	493,196	448,978	253,401
	208,842	193,877	331,632	244,783	290,816
6000	687,047	594,897	625,849	635,931	457,482
	56,462	105,441	110,543	100,815	92,516
	64,285	97,959	90,135	84,126	59,183
	620,747	619,046	629,25	623,014	489,795
	411,564	460,883	477,89	450,112	511,904
9000	904,761	920,067	1017,006	947,278	727,89
	60,543	78,911	129,251	89,568	86,054
	64,965	125,849	88,434	93,082	71,428
	816,326	831,632	879,25	842,403	741,495
	693,877	656,462	704,081	684,806	773,809
12000	1210,883	1197,278	1125,849	1178,003	945,577
	37,414	112,244	132,653	94,103	-88,775
	97,959	112,244	146,258	118,82	35,714
	891,156	1090,135	1139,455	1040,248	999,999
	884,353	938,775	867,346	896,824	1040,816

Solicitările cu 3000; 6000; 9000 și 12000 daN, s-au produs în domeniul elastic. Tensiunile induse de geometria cusăturii și de abaterile de la liniaritate a virolelor cilindrice se încadrează în limitele date de literatura specialitate. Materialul de bază și cusătura sudată nu au suferit modificări ale caracteristicilor mecanice, acestea încadrându-se în limitele date de fabricant respectiv proiectant. Se poate concluziona pe baza determinărilor experimentale efectuate, că recipientele din această serie, ținând cont și de coeficienții mari de siguranță și adaosurile de coroziune mari, pot funcționa în condiții de siguranță.

5.4. Încercări experimentale la temperaturi scăzute.

În concordanță cu cele prezentate în capitolul 4, materialele utilizate la construcția recipientelor sub presiune supuse temperaturilor scăzute, se impune a fi analizate sub aspectul comportării acestora la astfel de temperaturi.

Prezentul capitol tratează încercările mecanice efectuate pe probe de material care să reziste la temperaturi scăzute. În acest sens s-au efectuat :

- încercări mecanice la tracțiune pe un material din care se confecționează recipientele sub presiune funcționând la -20°C ;
- încercări de mecanica ruperii pe un material din care se execută recipientele sub presiune cu temperaturi de funcționare până la -60°C .

Încercările la temperaturi scăzute s-au efectuat pe probe sudate cap la cap de grosimi δ diferite ($\delta=12; 14; 20\text{mm}$). Simbolul RKCUC reprezintă încercarea la încovoiere prin șoc (Reziliența) a îmbinărilor sudate cap la cap în X cu creștătura în U (STAS 5540/4-86, STAS 1400-75).

Pentru încercările dinamice au fost adoptate 2 tipuri de epruvete de reziliență. Cu creștătura în U (STAS 1400-75) figura 5.4.a și cu creștătura în V (STAS 7511-81) figura 5.4.b.

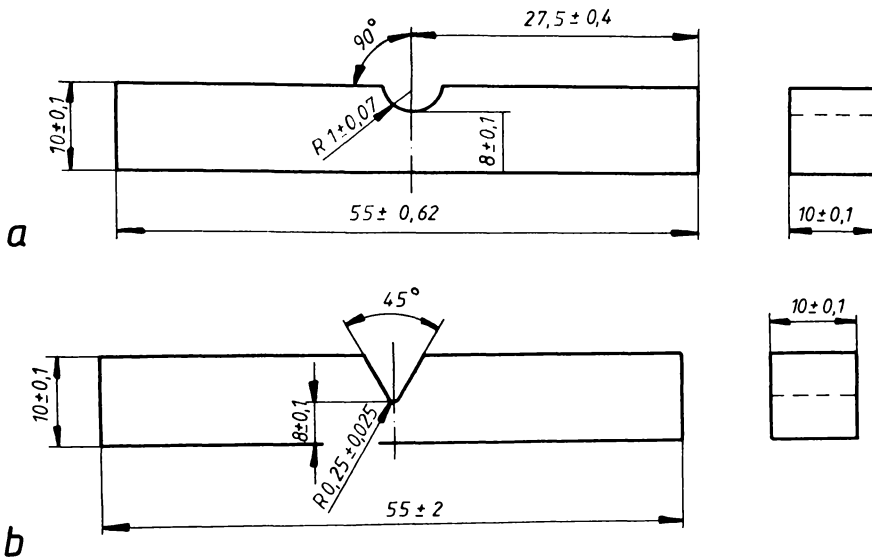


Fig.5.4. Tipuri de epruvete de reziliență : a. cu creștătura în U; b. cu creștătura în V.

Conform literaturii de specialitate cifra de reziliență D.V.M. și Messenger arată capacitatea metalului (îmbinării sudate) de a se opune la formarea și propagarea unei fisuri. Cifrele de reziliență Charpy V arată capacitatea metalului de a se opune la propagarea unei fisuri formate. Din acest motiv o îmbinare la care reziliența Charpy V are valori apropiate de reziliență D.V.M. sau Messenger, se consideră a fi puțin sensibilă la încreștări. Din contră, dacă reziliența Charpy V este foarte mică în comparație cu reziliență D.V.M. sau Messenger, metalul respectiv se consideră sensibil la încreștări, adică la fisuri sau microfisuri.

Încercarea de reziliență cea mai semnificativă a îmbinărilor sudate se face pe epruvete cu creștătura plasată către mijlocul epruvetei, astfel încât creștătura să poată fi tăiată în cusătura sau în zona influențată termic.

Influența aplicării sudurii asupra rezilienței îmbinării cap la cap se urmărește în mod sistematic printr-o serie de epruvete cu creștături plasate în diferite zone ale îmbinării (figura 5.5) după metoda lui Cabelka.

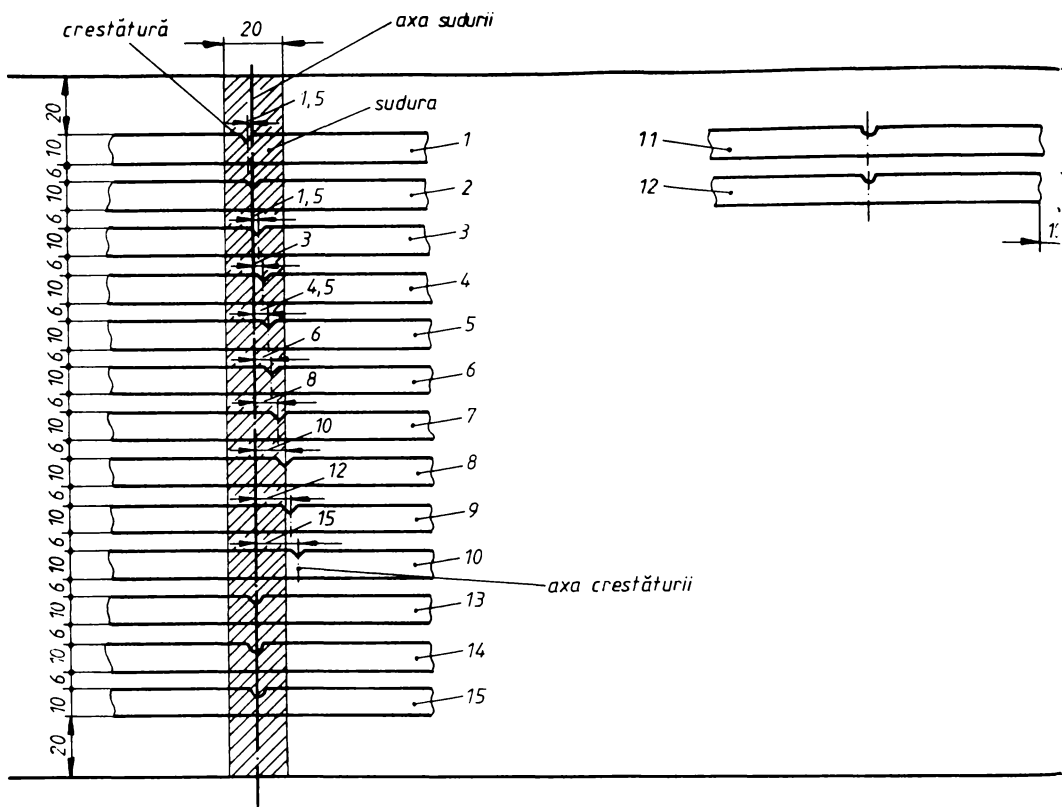


Fig.5.5. Epruvete cu creștături plasate în diferite zone ale îmbinării.

Epruvetele încercate la -30° după metoda lui Cabelka au fost epruvete de reziliență cu creștătură în V în număr de 2×10 (din 2 table) de grosimi diferite $\delta=12; 14; 20$ mm, deci în total s-au încercat 60 de epruvete la -30°C .

Încercările la temperaturi scăzute de -30°C , s-au executat conform STAS 6833-79. Răcirea epruvetelor s-a realizat într-un recipient special cu amestec de acetonă și bioxid de carbon.

Rezultatele încercărilor obținute sunt trecute în tablele 5.10.a ($\delta=12\text{mm}$), 5.10.b. ($\delta=14\text{mm}$), 5.10.c. ($\delta=20\text{mm}$).

Pentru a se examina comportarea materialelor de bază și a cordonului de sudură cu încercarea de încovoierie prin șoc la temperatura mediului ambiant ($+20^{\circ}\text{C}$) s-au încercat un număr de 2×5 (din table de grosimi diferite $\delta = 12; 14; 20$ mm, deci în total 30), epruvete cu creștătura în U conform figurii 5.5. (notate cu (1)-11 ... (1)-15; (1)11... (1)15; (2)15; 2(11)...2(15); 3(11)...(3)15; 3(11)...(3)15 în care (1) și (I) reprezintă cele două table de grosime $\delta=12$ mm; (2) și (2) pentru $\delta=14$ mm, (3) și (3) pentru $\delta = 20$ mm). Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul 5.11

Tabelul 5.10.a.

Nr. crt.	Marcaj epruvetă	Temperatura [°C]	Reziliență KV [J]			Conf. CSIO	Fibrozitate [%]
			Det.exp	Conform STAS	Bibliografie[141]		
1	1.1	- 30°	38	STAS 500/2-80 28 J	$\delta < 25\text{mm}$ KV =184,2 J la 0°C	KV=37 J la -30° max. 96 min. 11	5
2	1.2	- 30°	36				5
3	1.3	- 30°	44				10
4	1.4	- 30°	24				10
5	1.5	- 30°	32				5
6	1.6	- 30°	49				20
7	1.7	- 30°	36				20
8	1.8	- 30°	24				5
9	1.9	- 30°	31				5
10	1.10	- 30°	35				20
11	1.1	- 30°	16				5
12	1.2	- 30°	77				20
13	1.3	- 30°	12				5
14	1.4	- 30°	67				20
15	1.5	- 30°	25				10
16	1.6	- 30°	38				5
17	1.7	- 30°	28				5
18	1.8	- 30°	22				5
19	1.9	- 30°	27				5
20	1.10	- 30°	18				5

Tabelul 5.10.b.

Nr. crt	Marcaj epruvetă	Temperatura [°C]	Reziliență KV [J]			Conf. CSIO	Fibrozitate %
			Det.exp	Conform STAS	Bibliografie [141]		
1	2.1	- 30°	37	STAS 500/2-80 28 J	$\delta < 25\text{mm}$ KV =184,2 J la 0°C	KV=37 J la -30° max. 96 min. 11	5
2	2.2	- 30°	42				5
3	2.3	- 30°	62				10
4	2.4	- 30°	66				10
5	2.5	- 30°	defect				-
6	2.6	- 30°	defect				5
7	2.7	- 30°	52				-
8	2.8	- 30°	defect				-
9	2.9	- 30°	30				20
10	2.10	- 30°	10				-
11	2.1	- 30°	defect				5
12	2.2	- 30°	36				5
13	2.3	- 30°	21				-
14	2.4	- 30°	18				10
15	2.5	- 30°	21				5
16	2.6	- 30°	18				2
17	2.7	- 30°	defect				5
18	2.8	- 30°	defect				5
19	2.9	- 30°	35				-
20	2.10	- 30°	47				-

Tabelul 5.10.c.

Nr. crt	Marcaj epruvetă	Temperatura [°C]	Reziliență KV [J]			Conf. CSIO	Fibrozitate în %
			Det.exp	Conform STAS	Bibliografie [141]		
1	3.1	- 30°	25	$\delta < 25\text{mm}$ STAS 500/2-80 28 J	$\delta < 25\text{mm}$ KV = 1842 J la 0°C	KV=37 J la- 30° max. 9,6 min. 1,1	20
2	3.2	- 30°	defect				-
3	3.3	- 30°	54				25
4	3.4	- 30°	42				25
5	3.5	- 30°	37				20
6	3.6	- 30°	defect				-
7	3.7	- 30°	85				30
8	3.8	- 30°	76				30
9	3.9	- 30°	80				30
10	3.10	- 30°	defect				-
11	3.1	- 30°	24				20
12	3.2	- 30°	18				10
13	3.3	- 30°	16				10
14	3.4	- 30°	74				30
15	3.5	- 30°	73				30
16	3.6	- 30°	34				20
17	3.7	- 30°	58				25
18	3.8	- 30°	76				30
19	3.9	- 30°	defect				-
20	3.10	- 30°	defect				-

Tabelul 5.11.

Nr. Crt.	Marcaj epruvete	Temperatura [°C]	Reziliența KCU 300/2/10 [J/cm ²]	Media KCU 30/2/10 [J/cm ²]	Observații	KCU Conform STAS 500/2-80
1	1.11	20°	112	122,8	tablă de 12 mm	70 J/cm ²
2	1.12	20°	112			
3	1.11	20°	135			
4	1.12	20°	131,5			
5	1.13	20°	283	276,6	tablă de 12 mm	70 J/cm ²
6	1.14	20°	298			
7	1.15	20°	261			
8	1.13	20°	250			
9	1.14	20°	298			
10	1.15	20°	270			
11	2.11	20°	175	134,2	tablă de 14 mm	70 J/cm ²
12	2.12	20°	155			
13	2.11	20°	54,4			
14	2.12	20°	52,4			
15	2.13	20°	270	192	tablă de 14 mm	70 J/cm ²
16	2.14	20°	276			
17	2.15	20°	218			
18	2.13	20°	138			
19	2.14	20°	132			
20	2.15	20°	120			
21	3.11	20°	138	146	tablă de 20 mm	60 J/cm ²
22	3.12	20°	155			
23	3.11	20°	158			
24	3.12	20°	135			
25	3.13	20°	190	180,8	tablă de 20 mm	60 J/cm ²
26	3.14	20°	155			
27	3.15	20°	190			
28	3.13	20°	180			
29	3.14	20°	175			
30	3.15	20°	195			

Tabelul 5.12.

Nr. Crt.	Marcaj epruvete	Orientarea	Temperatura [°C]	Reziliența KCU 3 0/2/10 [J/cm ²]	Media KCU 30/2/10 [J/cm ²]
1	6.12	L	-30	176	146
2	7.12	L	-30	159	
3	8.12	L	-30	152	
4	9.12	L	-30	162	
5	10.12	L	-30	79	
6	1.12	T	-30	145	173
7	2.12	T	-30	187,5	
8	3.12	T	-30	175	
9	3.12	T	-30	171	
10	5.12	T	-30	183	
11	1.16	L	-30	175	141,5
12	2.16	L	-30	161	
13	3.16	L	-30	164	
14	4.16	L	-30	164	
15	5.16	L	-30	43,6	
16	6.16	T	-30	181	157,5
17	7.16	T	-30	152	
18	8.16	T	-30	156	
19	9.16	T	-30	152	
20	10.16	T	-30	145	
21	1.20	L	-30	32	47,4
22	2.20	L	-30	65	
23	3.20	L	-30	34	
24	4.20	L	-30	22,6	
25	5.20	L	-30	83,5	
26	6.20	T	-30	80	64,4
27	7.20	T	-30	86	
28	8.20	T	-30	77,4	
29	9.20	T	-30	57,8	
30	10.20	T	-30	20,8	

Pentru a se arăta influența orientării creștăturii (longitudinale sau transversale) asupra valorii rezilienței RCU s-au încercat o parte din epruvete (de la 1...5) care au avut orientarea creștăturii paralelă cu direcția cordonului de sudură (conform STAS 5540/4-86) figura 5.6.a iar celelalte 5 epruvete (notate de la 6...10) cu creștătură orientată perpendicular pe cordonul de sudură (conform STAS 5540/4-86) figura 5.6.b.

S-au debitat astfel 10 epruvete din fiecare tablă de grosimi diferite ($\delta=12; 14; 16$ mm, deci în total 30 epruvete notate cu 1.12...10.12 pentru table de grosime $\delta=12$ mm; 1.14...10.14 pentru $\delta=14$ mm și 1.20...10.20 pentru $\delta=20$ mm) figura 5.7.

Debitarea epruvetelor s-au făcut cu ajutorul unor freze cu turație mică și răcire abundentă pentru a se evita eventualele modificări structurale datorită încălzirii.

Rezultatele încercărilor obținute sunt trecute în tabelul 5.12.

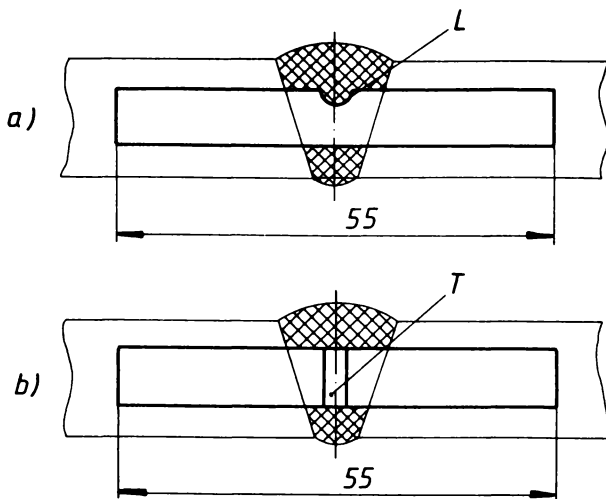


Fig.5.6. Epruvete având orientarea creștăturii : a. paralel cu direcția cordonului de sudură; b. perpendicular pe cordonul de sudură.

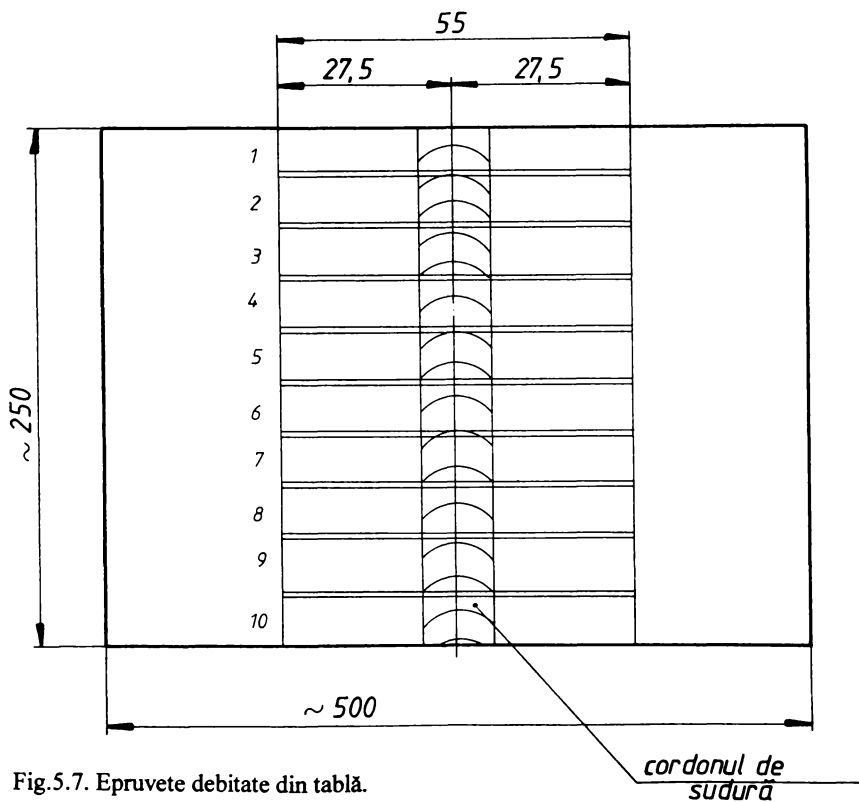


Fig.5.7. Epruvete debitate din tablă.

La toate cele 3 încercări de reziliență efectuate epruvetele au fost rectificat asigurându-se toleranțele prescrise de standardele STAS 1400-75 STAS 554074-86 și STAS 7511-81.

Încercările la temperaturi scăzute de -30°C s-au executat conform STAS 6833-79. Răcirea epruvetelor s-a realizat într-un recipient special cu amestec de acetonă și bioxid de carbon.

Încercarea epruvetelor cu creștătura în U și în V la temperatura mediului ambiant și la temperatura de -30°C au fost efectuate la un ciocan pendul Charpy corespunzător energiei de lovire 300 J cu cadran divizat în lucru mecanic fabricat de VEB Werkstoffprüfmaschine Leipzig.

Rezultatele obținute pentru încercarea de încovoiere prin șoc sunt centralizate în tabelele 5.10.a, 5.10.b și 5.10.c (KCU 300/2/10-creștătura în U - este dat în J/cm^2 ; KV - creștătura în V - este dat în J).

Pentru a compara și aprecia caracterul tenace la rupere a unei epruvete s-a trecut în % și fibrozitatea determinată prin măsurarea dimensiunilor de rupere fragilă. Valorile măsurate s-au rotunjit la multipli de 0,5 mm.

În baza încercărilor efectuate se fac următoarele observații finale:

- ◆ Conform STAS 500/2-80 pentru oțel OL 37 k clasa de calitate 3 se prevede pentru energia de rupere KV la 0°C valoarea 28 J, aceasta reprezentând media minimă a 3 rezultate admitând un singur rezultat de minimum 21 J. Pentru OL 37 k calitatea 4 aceleași valori se prevăd pentru temperatura de -20°C , -30°C sau -40°C .
- ◆ Se menționează că pentru OL 37 k calitatea 2 se prevăd următoarele valori minime ale rezilienței KCU la temperatura de $+20^{\circ}\text{C}$.
- ◆ Pentru table de grosime $a < 16$ mm $\text{KCU} = 70 \text{ J}/\text{cm}^2$, iar pentru $a \geq 16$ mm $\text{KCU} = 60 \text{ J}/\text{cm}^2$.
- ◆ Din examinarea tabelului 5.11 se constată că pentru temperatura de $+20^{\circ}\text{C}$ atât materialul de bază cât și cordonul de sudură satisfac condiția de reziliență prevăzută conform STAS 500/2-80.
- ◆ Se constată că la temperatura de -30°C (conform tabelului 5.12) cu deosebirea îmbinările sudate ale tablelor de 20 mm reziliență KCU satisface condiția de reziliență prevăzută în STAS 500/2-80.
- ◆ Pentru tabla de 20mm reziliența KCU atât în cazul creștăturii orientate longitudinal și transversal coboară până la valorile $47,4 \text{ J}/\text{cm}^2$ și $64,4 \text{ J}/\text{cm}^2$.
- ◆ Valorile rezilienței KCU în cazul orientării creștăturii transversal (așa cum reiese din tabelul 5.12) sunt mai mari ca în cazul orientării creștăturii longitudinal.
- ◆ Valorile rezilienței KV în cazul încercărilor efectuate după metoda lui Cabelka la -30°C se poate observa din tabelele 5.11, 5.12, 5.13 că sunt cuprinse între 12 J și 80 J.

5.5. Estimarea siguranței în funcționare a unor elemente cilindrice încărcate cu presiune interioară.

Fenomenul de sudare modifică tenacitatea la rupere a materialului din zona influențată termic. Nepătrunderile ce apar în timpul procesului de sudare a recipientelor și conductelor cauzează apariția unor concentrări de tensiune, respectiv joacă rolul unor fisuri circumferențiale. Un calcul al durabilității recipientelor și conductelor trebuie să țină seama de defectele de tipul nepătrunderilor, care favorizează inițierea unor fisuri și de posibilitatea de propagare a acestor fisuri sub acțiunea solicitărilor variabile.

Evaluarea siguranței în exploatare a elementelor de rezistență necesită o abordare care să țină cont de defectele și neomogenitățile materialului, de acumularea defectelor datorată solicitărilor variabile în timp, de inițierea și propagarea fisurilor, deci o abordare pe baza încercărilor clasice din rezistența materialelor, principiilor mecanicii ruperii materialelor și control nedistructiv.

În acest context, au fost expertizate cele trei conducte destinate transportului oxigenului de la Fabrica de oxigen a Combinatului Siderurgic Reșița la Secția Oțelărie a combinatului, conducte având următoarele caracteristici dimensionale și de material :

- Pentru conductele I și II :
 - Diametrul exterior, $D_e=273\text{mm}$;
 - Grosimea peretelui $h=8\text{mm}$;
 - Presiunea de lucru $p=0,15\text{daN/mm}^2$;
 - Presiunea de încercare $p_i=0,225\text{daN/mm}^2$;
- Pentru conducta III :
 - Diametrul exterior, $D_e=168\text{mm}$;
 - Grosimea peretelui $h=6\text{mm}$;
 - Presiunea de lucru $p=0,15\text{daN/mm}^2$;
 - Presiunea de încercare $p_i=0,225\text{daN/mm}^2$.

Conductele sunt executate din OIT 35 iar îmbinarea s-a realizat prin sudură cap la cap cu rost în V.

5.5.1. Încercarea la tracțiune

Din eșantioanele de material prelevate din conductă s-au efectuat epruvete plate de tracțiune din materialul de bază, respectiv epruvete cu cordon de sudură în secțiunea calibrată, conform STAS 200-75. Din fiecare conductă s-au executat 5 epruvete: 3 din materialul de bază și 2 în construcție sudată.

La confecționarea epruvetelor în construcție sudată s-au observat nepătrunderile cordonului de sudură între 1-3,5 mm.

La fiecare epruvetă s-a măsurat grosimea a_0 și lățimea b_0 , calculându-se aria inițială $S_0 = a_0 \cdot b_0$. Apoi pe epruvete s-a marcat lungimea calibrată $L_0 = 70$ mm.

Încercarea la tracțiune s-a efectuat pe o mașină de încercat universală WE 60 Nr.71/79, cu scările 02-120 kN, 30-300 kN, 60-6000 kN. Încărcarea s-a efectuat lent și fără șocuri, urmărindu-se valoarea forței maxime F_{max} . În timpul încercării nu a putut fi evidențiată forța corespunzătoare curgerii aparente F_e .

$$R_m = \frac{F_{max}}{S_0} \quad (5.31)$$

Iar apoi măsurându-se dimensiunile epruvetelor după încercare a_u , b_u și L_u s-au calculat aria ultimă $S_u = a_u \cdot b_u$, respectiv:

- alungirea la rupere A_n [%] :

$$A_n = \frac{L_u - L_0}{L_0} 100 \quad (5.32)$$

- gătuirea la rupere Z [%] :

$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} 100 \quad (5.33)$$

Rezultatele experimentale obținute sunt prezentate în tabelele 5.13-5.16.

5.5.2. Aplicarea mecanicii ruperii la evaluarea siguranței în funcționare a conductelor

Inițierea, respectiv propagarea fisurilor este influențată de tensiunea circumferențială σ_θ , dată de relația :

$$\sigma_\theta = \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 + \frac{R_e^2}{r^2} \right) p \quad [\text{daN/mm}^2] \quad (5.34)$$

având tensiunea maximă la interiorul conductei $r = R_i$:

$$\sigma_{\theta, \max} = \frac{R_e^2 + R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} p \quad [\text{daN/mm}^2] \quad (5.35)$$

unde : - R_i , R_e sunt razele interioară și exterioră a conductei, [mm];

- p - presiunea interioară, [daN/mm²].

Tabelul 5.13.

Epruveta nr.	Dimensiuni inițiale				Forța maximă F_{max} [kN]	Rezistența la rupere		Dimensiuni finale				Alungirea la rupere A_n [%]	Gătuirea la rupere Z [S]
	Grosime a_0 [mm]	Lățime b_0 [mm]	Lungime L_0 [mm]	Arie S_0 [mm ²]		R_m [daN/mm ²]	medie $R_{m,med}$ [daN/mm ²]	Grosime a_n [mm]	Lățime b_n [mm]	Lungime L_n [mm]	Arie S_n [mm ²]		
1	8,6	20	70	172	81	50,013	5,5	14	88,8	77	26,9	55,2	
2	9,1	20,1	70	182,91	99,5		7,7	13,7	91	105,49	30	42,3	
3	8,6	20	70	172	83,5		5,6	14	88	78,4	25,7	54,4	
4sud	10,5	20	70	210	68	25,425	10	20	71,7	200	2,4	4,8	
5sud	11,1	20	70	222	41		11	20	72,2	220	3,1	0,9	

Tabelul 5.14.

Epruveta nr.	Dimensiuni inițiale				Forța maximă F_{max} [kN]	Rezistența la rupere		Dimensiuni finale				Alungirea la rupere A_n [%]	Gătuirea la rupere Z [S]
	Grosime a_0 [mm]	Lățime b_0 [mm]	Lungime L_0 [mm]	Arie S_0 [mm ²]		R_m [daN/mm ²]	medie $R_{m,med}$ [daN/mm ²]	Grosime a_n [mm]	Lățime b_n [mm]	Lungime L_n [mm]	Arie S_n [mm ²]		
6	9,8	20	70	196	100,5	50,948	6,4	14	90,7	89,6	29,6	54,3	
7	9,8	20	70	196	102,2		6,5	13,8	88,1	89,7	25,9	54,2	
8	8,7	20	70	174	86		6,6	14,1	88	93,06	25,7	46,5	
9sud	11	20	70	220	61	32,614	10,8	20	71,9	216	2,7	1,8	
10sud	8	20	70	160	60		7,9	20	73,2	158	4,6	1,3	

Tabelul 5.15.

Epruveta nr.	Dimensiuni inițiale				Forța maximă F_{max} [kN]	Rezistența la rupere		Dimensiuni finale				Alungirea la rupere A_n [%]	Gâtuirea la rupere Z [%]
	Grosime a_0 [mm]	Lățime b_0 [mm]	Lungime L_0 [mm]	Arie S_0 [mm ²]		R_m [dnN/mm ²]	medie $R_{m,med}$ [daN/mm ²]	Grosime a_u [mm]	Lățime b_u [mm]	Lungime L_u [mm]	Arie S_u [mm ²]		
11	9,5	20	70	190	54,211	49,378	6,5	14,3	87,7	92,95	25,3	51,1	
12	8,7	20	70	174	47,701		6,3	14,7	87,8	92,61	25,4	46,8	
13	8,6	20	70	172	46,221		5,6	14,2	88,9	79,52	27	53,8	
14sud	9,1	20	70	182	35,989	31,824	6,7	17,1	75,8	114,57	8,3	37	
15sud	9,4	20	70	188	27,66		9	20	72	180	2,9	4,3	

Tabelul 5.16.

Epruveta nr.	Dimensiuni inițiale				Forța maximă F_{max} [kN]	Rezistența la rupere		Dimensiuni finale				Alungirea la rupere A_n [%]	Gâtuirea la rupere Z [%]
	Grosime a_0 [mm]	Lățime b_0 [mm]	Lungime L_0 [mm]	Arie S_0 [mm ²]		R_m [dnN/mm ²]	medie $R_{m,med}$ [daN/mm ²]	Grosime a_u [mm]	Lățime b_u [mm]	Lungime L_u [mm]	Arie S_u [mm ²]		
16	8,4	20	70	168	47,321	49,181	6	14,4	86,4	86,4	23,4	48,6	
17	10	20	70	200	53,75		6,8	13,7	87,8	93,16	25,4	53,4	
18	8,5	20	70	170	46,471		6,4	14,3	84,8	91,52	21,1	46,2	
19sud	8,1	20	70	162	40,123	36,937	6,2	18,9	76	117,18	8,6	27,7	
20sud	8	20	70	160	33,75		7,8	20	72	156	2,9	2,5	

Variația tensiunii circumferențiale este prezentată în figura 5.8.

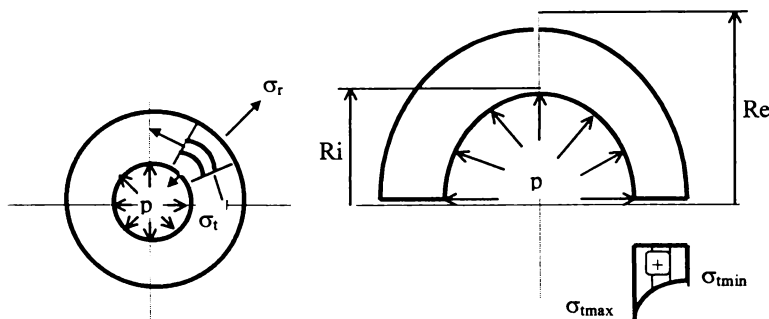


Fig. 5.8.

Nepătrunderile datorate sudării incomplete, prezente la fiecare îmbinare sudată a acestor conducte, pot fi considerate ca fisuri circumferențiale. Aceste nepătrunderi au fost sesizate vizual pe eşantioanele prelevate din conducte și măsurate printr-o metodă nedistructivă (ultrasonic), în acest sens pentru exemplificare în anexa 15 fiind prezentată o fișă de măsurători.

Aprecierea inițierii ruperii instabile a conductei datorită nepătrunderii trebuie făcută pe baza mecanicii ruperii materialelor, cu ajutorul parametrului factorul de intensitate a tensiunii. Expresia factorului de intensitate a tensiunii pentru o conductă cu fisură circumferențială este :

$$K_I = \sigma_\theta \sqrt{af(a/h)}$$

$$f(a/h) = \frac{2 - 0,625(a/h) + 3,5896(a/h)^2 - 0,9689(a/h)^3 - 2,732(a/h)^4}{(1 - a/h)^{1/2}} \quad (5.36)$$

unde : - K_I - factorul de intensitate a tensiunii [$\text{daN}/\text{mm}^{3/2}$]

- σ_θ - tensiunea circumferențială corespunzătoare nepătrunderii, [daN/mm^2];
- a - adâncimea nepătrunderii, [mm];
- h - grosimea peretelui conductei, [mm];
- $f(a/h)$ - o funcție de geometria conductei fisurate.

Ruperea instabilă a conductei se produce dacă factorul de intensitate K_I a tensiunii atinge o valoare critică K_{IC} , numită și tenacitate la rupere.

Tenacitatea la rupere a materialului este o caracteristică de material și reprezintă valoarea parametrului de rupere căreia îi corespunde prima extindere sesizabilă a fisurii. Pentru cazul materialelor cu comportare liniar - elastică tenacitatea la rupere se consideră valoarea factorului critic de intensitate a tensiunii K_{IC} determinat în condițiile stării plane de deformație. Dacă nu sunt respectate condițiile stării plane de deformație tenacitatea la rupere se notează K_C . Pentru materiale

cu comportare elasto-plastică tenacitatea la rupere se consideră valoarea deplasării critice de deschidere la vârful fisurii δ_C sau a integralei critice J_{IC} .

Pentru materialele utilizate la confecționarea conductelor se prescriu valorile tenacității la rupere pentru materialul de bază respectiv pentru zona influențată termic prezentate în tabelul 5.17.

Tabelul 5.17.

Material	Tenacitatea la rupere, K_{IC} [daN/mm ^{3/2}]
Conducta	250
Zona influențată termic	170

Pe baza datelor obținute în urma analizei nedistructive cu ajutorul ultrasunetelor, îmbinărilor sudate de la trei conducte, s-a efectuat un calcul analitic al factorului de intensitate a tensiunii.

Calculule s-au efectuat pentru presiunea de probă $p=0,225$ daN/mm², presiunea de lucru fiind $p_1 = 0,15$ daN/mm². Rezultatele obținute în urma calculului sunt prezentate în tabelul 5.18 - pentru conducta I, în tabelul 5.19 - pentru conducta II și în tabelul 5.20 - pentru conducta III.

5.5.3. Interpretarea rezultatelor

Din tabelele 5.13 - 5.16 se observă că rezistența la rupere a materialului de bază și a îmbinării sudate este superioară tensiunii maxime din conducte, ceea ce validează ipoteza siguranței în funcționare a conductelor. Calculul coeficientului de siguranță se face cu relația :

$$c = \frac{R_m}{\sigma_{max}} \quad (5.37)$$

unde : - R_m - rezistența la rupere a epruvetelor în construcție sudată.

- σ_{max} - tensiunea maximă din conductă.

Pentru : - conducta I : $R_m = 25,425$ daN/mm², iar $\sigma_{max} = 3,73$ daN/mm², rezultă: $c = 6,74$

- conducta II : $R_m = 32,614$ daN/mm², iar $\sigma_{max} = 4,041$ daN/mm², rezultă: $c = 8,07$

-conducta III : $R_m = 31,824$ daN/mm², iar $\sigma_{max} = 2,592$ daN/mm², rezultă: $c = 12,28$

Valorile maxime ale factorului de intensitate a tensiunii, extrase din tabelele 5.18-5.20, sunt:

- pentru conducta I la sudurile 16; 52; 58; 66; 69,
nepătrundere : $a = 5,3$ mm , $K_{I_{max}} = 31,087$ daN/mm^{3/2}
- pentru conducta II la sudurile 20; 25; 37; 44; 47; 50; 55,
nepătrundere : $a = 4,8$ mm , $K_{I_{max}} = 27,665$ daN/mm^{3/2}
- pentru conducta III la sudurile 83; 100; 107; 115; 120
nepătrundere : $a = 4,1$ mm , $K_{I_{max}} = 15,605$ daN/mm^{3/2}

Tabelul 5.18- Conducta I

Sudura nr.	Diametrul exterior conductă D _e [mm]	Grosime perete h [mm]	Grosime pătrundere s [mm]	Adâncime nepatr. a [mm]	Oscilograma	Tensiunea circumf. max. σ_{max} [daN/mm ²]	Tensiunea circumf. σ_p [daN/mm ²]	Factorul de intensit. a tensiunii K _{t1} [N/mm ^{3/2}]
1;4;7;10;14; 17	273	7,8 - 8,2	7,8	0,4	1	3,636	3,624	4,648
110;115;113; 121	273	8,0	6,0	2,0	2	3,730	3,67	12,239
107;111;116;118;122	273	7,8-8,2	7,8	0,4	3	3,636	3,624	4,648
3;12;20;23;26;	273	8,0	5,7	2,3	4	3,730	3,661	13,651
32;37;41; 45;48								
8;11;15;22;24;	273	7,5-8,4	6,7-7,2	1,2	5	3,547	3,512	8,229
33;38;40; 43								
18;29;31;34;	273	7,6-8,3	5,2	3,1	6	3,591	3,502	16,856
42;46;51;54;57								
75;78;86;89;95; 99	273	8,0	6,3	1,7	7	3,730	3,678	10,888
67;81;90;92;96;101;	273	7,9-8,5	7,5	1,0	8	3,504	3,475	7,304
106;109;112								
2;6;9;16;21;25; 27;30;36	273	8,0-8,4	4,5	3,9	9	3,547	3,475	20,958
102;108;114; 120	273	8,0	3,8	4,2	10	3,730	3,606	24,812
103;119;123	273	7,6-8,0	6,0	2,0	11	3,730	3,670	12,239
35;44;47;50;53; 60;62;65	273	8,0	3,7	4,3	12	3,730	3,604	25,523
16;52;58;66;69	273	8,0-8,3	3,0	5,3	13	3,591	3,443	31,087
56;59;61;64;68;71;73;76;80;84	273	8,0-8,3	6,2	2,1	14	3,591	3,530	12,103
74;79;83;85;87;	273	8,0-8,6	7,0	1,6	20	3,462	3,417	9,574
91;94;97;100;105								

Tabelul 5.19. - Conducta II

Sudura ntr.	Diametrul exterior conductă D_e [mm]	Grosime perete h [mm]	Grosime pătrundere s [mm]	Adâncime nepătr. a [mm]	Oscilograma	Tensiunea circumf. max. σ_{max} [daN/mm ²]	Tensiunea circumf. σ_y [daN/mm ²]	Factorul de intensit. a tensiunii K_t [N/mm ^{-3/2}]
3,8;12;18;23;28;34; 39	273	7,7-8	6,0	1,8	1	3,828	37,72	11,7
1,2;7;10;14;19	273	7,2-7,5	5,8	1,7	2	3,986	39,81	11,799
4,9;15;17;22;26;33	273	6,8-7,6	4,5	3,1	3	3,932	3,835	19,315
6,11;16;24;29;30;32 36;38;42;45	273	7,8-7,5	5,5	2,0	4	3,986	3,922	13,319
20;25;37;40; 44;47; 50;55	273	7,2-8,4	3,6	4,8	5	3,547	3,412	27,665
27;35;41;46;49; 53;57;61;65	273	7,0-7,4	5,0	2,4	6	4,041	3,964	15,775
51;52;56;60;63;67; 69	273	7,8-8,2	4,5	3,7	7	3,636	3,529	20,59
54;59;62;64;68	273	7,3-7,9	4,8	3,1	8	3,778	3,685	18,182
66;70;72;75;77;78;79;80;81	273	7,2-7,8	6,0	1,8	9	3,828	3,773	11,7
73;84;87;88;92;94	273	8,0-8,4	3,8	4,6	10	3,547	3,419	25,395
74;83;85;86;91;95	273	7,8-8,2	5,8	2,4	11	3,636	3,566	13,665
89;93;97	273	7,6-8,0	5,0	3,0	12	3,73	3,641	17,271
98;100;103;105	273	7,6-8,4	6,0	2,4	13	3,547	3,478	13,222
99;101;106;109	168	7,8-8,0	5,2	2,8	14	2,256	2,169	9,627
102;108	168	7,6-8,2	4,8	3,4	15	2,198	2,096	11,156
110;114;116;120	168	8,0-8,2	7,0	1,2	16	2,198	2,16	5,875
112;113;117;123	168	7,5-8,2	5,0	3,2	17	2,198	2,101	10,506
115;119;128	168	7,6-8,0	7,0	1,0	18	22,55	2,236	4,696
121;126;129	168	7,4-8,0	7,0	1,4	19	25,08	2,476	5,23
118;124;125;127	168	7,5-8,4	7,0	1,6	20	21,43	2,1	5,415

Tabelul 5.20. - Conducta III

Sudura nr.	Diametrul exterior conductă D _e [mm]	Grosime perete h [mm]	Grosime pătrundere s [mm]	Adâncime nepătr. a [mm]	Oscilograma	Tensiunea circumf. max. σ_{max} [daN/mm ²]	Tensiunea circumf. σ_{θ} [daN/mm ²]	Factorul de intensit. a tensiunii K _t [N/mm ^{3/2}]
3;6;10;15;17;23;32; 38	168	7,4-8,2	4,2	4,0	1	2,1,98	2,079	13,263
1;7;12;20;26;31;37;40;45	168	7,0-7,8	6,0	1,8	2	2,316	2,258	7,003
4;14;22;28;29;36;43	168	7,0-7,4	5,0	2,4	3	2,446	2,367	9,419
2;1;18;25	168	7,0	4,5	2,5	4	2,592	2,505	10,602
9;16;39;44	168	7,2-7,8	4,0	3,8	5	2,316	2,198	13,652
8;24;27;35;50	168	7,5	4,0	3,5	6	2,412	2,305	13,327
19;53;65;69;77	168	7,0-7,6	3,5	4,1	7	2,379	2,25	15,605
41;55;60;64;66;70; 75;76;82	168	7,4-7,6	5,5	2,1	8	2,379	2,311	8,125
34;47;52;56;61;63; 68	168	7,0-7,3	4,2	3,1	9	2,481	2,378	12,251
49;51;62;71;74;81; 87	168	6,8-7,6	4,2	3,4	10	2,379	2,271	12,633
54;79;86;92;95;98	168	7,0-8,0	3,8	4,2	11	2,255	2,129	14,647
57;73;80;99;102; 108	168	7,2-7,5	4,3	3,2	12	2,412	2,309	12,115
83;100;107;115;120	168	6,8-7,2	3,5	3,7	13	2,517	2,394	15,224
89;101;105;112;118	168	7,4	4,0	3,4	14	2,447	2,335	13,208
85;97;121;124;128;130	168	7,6-8,0	5,8	2,2	15	2,256	2,187	7,862
88;94;106;114;123;127	168	7,4-7,8	5,0	2,8	16	2,316	2,227	10
90;103;116	168	7,0-7,8	4,8	3,0	17	2,316	2,222	10,672
109;119;122;126	168	7,6	6,0	1,6	18	2,379	2,327	6,668
93;111;125	168	8,0	6,0	2,0	19	2,255	2,193	7,313
113;117;129	168	7,6	5,6	2,0	20	2,379	2,314	7,828

Comparând aceste valori cu valorile tenacității la rupere din tabelul 5.17 se observă că : $K_I < K_{IC}$ deci nu există pericolul ruperii instabile a conductelor. Coeficientul de siguranță față de ruperea fragilă a conductelor se calculează ca raport între tenacitatea la rupere în zona influențată termic K_{IC} (tabelul 5.17) și factorul de intensitate a tensiunii maxim $K_{I_{max}}$ cu expresia:

$$c_{s,fr} = \frac{K_{IC}}{K_{I_{max}}} \quad (5.38)$$

având valorile:

- pentru conducta I : $c_{v,fr,I} = 170 / 31,087 = 5,47$
- pentru conducta II : $c_{v,fr,II} = 170 / 27,665 = 6,14$
- pentru conducta III: $c_{v,fr,I} = 170 / 15,605 = 10,89$

În concluzie, deoarece coeficienții de siguranță au valori mai mari decât 5 se poate aprecia că, conductele expertizate pot funcționa în continuare fără riscul de apariție a ruperii fragile a acestora.

5.5. Concluzii asupra analizei experimentale a tensiunilor.

Analiza experimentală a tensiunilor s-a înscris ca un demers orientat spre completarea studiului întreprins asupra recipientelor sub presiune în general, cu accent asupra celor care funcționează la temperaturi scăzute, cât și pentru validarea unor observații asupra comportării materialelor din care sunt confecționași aceste recipiente.

În debutul acestui demers sunt prezentate elementele de statistică matematică și programele de calcul elaborate de autor pentru aplicarea acestora la determinările experimentale, conferindu-se astfel rezultatelor experimentale un grad de încredere ridicat.

Programele de calcul au fost astfel elaborate încât să permită analiza statistică și pentru estimarea neliniarităților care apar adeseori în structurile din care fac parte recipientele sub presiune. Aceste programe s-au aplicat unui exemplu din literatura de specialitate [129], validându-se prin acest proces de analiză și utilizat în continuare în cazul concret al determinărilor experimentale efectuate.

Analiza experimentală a tensiunilor a fost în final îndreptată spre aplicarea mecanicii ruperii la unele materiale din care sunt confecționate recipientele sub presiune supuse la temperaturi scăzute de funcționare. S-au făcut determinări la temperaturi de -20°C și -60°C care susțin aprecierile efectuate în capitolul 4, cu privire la comportarea acestor materiale la temperaturi joase.

În finalul capitolului 5 este prezentată estimarea siguranței în funcționare a unor elemente cilindrice încărcate cu presiune interioară. S-a analizat siguranța în exploatare pentru cazul concret

al celor trei conducte destinate transportului oxigenului de la Fabrica de oxigen a Combinatului Siderurgic Reșița la Oțelărie.

Expertiza abordată pe baza încercărilor clasice din rezistența materialelor, principiilor mecanicii ruperii și controlului nedestructiv a condus la aprecierea că aceste conducte pot funcționa în continuare fără riscul de apariție a ruperii fragile.

Concluzia la care s-a ajuns pe baza acestei expertizări privind siguranța în funcționare a conductelor în cauză și interpretarea rezultatelor, prezintă o mare importanță economică pentru Combinatului Siderurgic Reșița care va realiza importante economii la nivelul investițiilor prin menținerea în funcțiune a conductelor existente pentru transportul oxigenului de la noua Fabrică de oxigen la Oțelărie.

Din analiza experimentală a tensiunilor efectuată în acest capitol al tezei se pot evidenția următoarele contribuții ale autorului :

- investigarea experimentală cu ajutorul statisticii matematice având ca bază programe de calcul elaborate de autor, aplicabile atât pentru estimare parabolică, cât și liniară;
- aplicarea tensometriei electrice în studiul experimental al recipientelor sub presiune;
- confirmarea prin experiment a considerentelor teoretice privind comportarea materialelor din care sunt confecționate recipientele sub presiune supuse la temperaturi joase.
- estimarea siguranței în funcționare a conductelor de transport a oxigenului la Oțelăria Combinatului Siderurgic Reșița, pe baza încercărilor la tracțiune și aplicării principiilor mecanicii ruperii.

Capitolul 6. Sinteza lucrării și contribuții personale.

Teza de doctorat “Studiul teoretic și experimental al tensiunilor și deformațiilor la recipiente sub presiune la temperaturi joase” reprezintă o lucrare inedită ca mod de abordare a problemei și mijloacelor de investigație utilizate, cu suport preponderent al studiului asistat de calculator.

Subliniindu-se în introducere contextul în care se înscrie prezenta lucrare și demersul teoretic întreprins în literatura de specialitate privind problematica recipientelor sub presiune, respectiv orientările spre care se îndreaptă acest demers, se evidențiază totodată direcțiile posibile de acționat pentru a conferi studiului note originale de analiză și predicție.

În capitolul 1 al lucrării sunt prezentate succint metodele analitice clasice de studiu al învelitorilor subțiri de revoluție, învelitori din categoria cărora fac parte recipientele sub presiune.

Pentru studiul acestor învelitori s-au adoptat ipotezele simplificatoare, acceptate în literatura de specialitate, potrivit cărora : punctele situate pe o normală la suprafața mediană înainte de deformare rămân pe o dreaptă normală la suprafață și după deformare; distanța dintre două puncte situate pe o normală la suprafața mediană este invariantă în procesul deformării respectiv neglijarea termenilor neliniari ai ecuațiilor aferente componentelor și deformațiilor care permite astfel aplicarea stării de tensiune și deformație.

Pornind de la aceste simplificări au fost determinate ecuațiile care exprimă starea de tensiune în învelitori și ecuațiile de echilibru. De asemenea s-au determinat expresiile pentru deformațiile specifice în direcție circumferențială și mediană ale alunecării specifice și ale variației curburii.

Completate aceste determinări cu ecuațiile rezultate din analiza comportării elastice a învelitorilor subțiri de revoluție s-a reușit formarea unui sistem pentru determinarea completă a problemei învelitorilor elastice de revoluție. Au fost studiate învelitori solicitate axial simetric și în stadiul de membrană întrucât asemenea învelitori apar frecvent în practica industrială respectiv în funcționarea recipientelor sub presiune. Pentru asemenea învelitori sistemul de ecuații se simplifică și devine adeseori abordabil spre rezolvare prin metodele analitice clasice.

Capitolul 2 al lucrării reprezintă un demers original în care studiul învelitorilor subțiri de revoluție se efectuează cu ajutorul metodelor analitice clasice conjugate cu tehnica numerică de calcul mărindu-se semnificativ sfera posibilităților de investigație. Se

conferă totodată utilizatorului un plus de informație cu caracter conceptual. Analiza întreprinsă sub această formă este îndreptată spre cele mai reprezentative tipuri de învelitori (sferice, elipsoidale, cilindrice, toroidale) care prezintă interes în studiul recipientelor sub presiune.

Programul de calcul PROGRAF elaborat de autor se înscrie ca o contribuție inedită în trasarea tridimensională și afișarea punctuală a valorilor curbelor și suprafețelor pentru diferite funcții și care au cunoscută expresia analitică. La realizarea programului s-a utilizat limbajul Turbo Pascal iar rezultatele au fost confirmate folosind programele Mathcad și Matlab 4.2. for Windows și 5.0 for Windows.

Învelitorile sferice au fost analizate în două ipostaze încărcare în stare de membrană (încărcată prin greutate proprie sau hidrostatic) respectiv supusă la încărcări pe margini. În cazul încărcării pe margini a unor învelitori elastice de grosime constantă h s-a studiat atât metoda exactă cât și metoda aproximativă de calcul aplicabile în cazuri particulare ($\varphi > 30^\circ$). Prin elaborarea de autor a programului SERII-HG s-a extins domeniul de aplicație al metodei seriilor hipergeometrice, metodă care deși este exactă, este mai puțin utilizată din cauza slabei convergențe a seriilor pentru raport $R/h > 60$.

Pe baza programelor de calcul SERII-HG și PROGRAF se pot pune în evidență grafic variația efortului Q și a momentelor M funcție de unghiul φ respectiv domeniile în care pot fi acceptate metodele aproximative de soluționare a problemei învelitorilor elastice subțiri sferice de grosime h constantă, încărcate pe margini. De asemenea au fost analizate învelitorile toroidale.

Dedicat aplicațiilor calculului numeric la studiul joncțiunilor învelitorilor subțiri de revoluție, capitolul 3 tratează învelitorile compuse : cilindru-semisferă, învelitoarea coaxială cilindru-elipsoid și penetrațiile în învelitori subțiri, joncțiuni frecvent întâlnite la recipiente sub presiune.

În studiul acestor tipuri de învelitori s-a utilizat programul de calcul PROGRAF iar pentru învelitorile cilindrice s-a aplicat metoda elementului finit, elaborându-se un program de calcul PROELFIN, utilizabil în analiza stării de tensiune și deformație a componentelor joncțiunilor care au forma cilindrică (reprezentative pentru recipientele sub presiune).

Capitolul 4 tratează învelitorile subțiri supuse temperaturilor joase. În debutul acestui capitol sunt analizate învelitorile cilindrice și sferice subțiri supuse la temperaturi joase și se prezintă un studiu detaliat asupra învelitorilor subțiri de revoluție supuse la tensiuni termice axial simetrice.

În cazul învelitorilor subțiri cilindrice și sferice analiza a fost efectuată în ipoteza variației liniare a temperaturii între cele două fețe ale peretelui învelitorii. Studiul învelitorilor subțiri de revoluție supuse la tensiuni termice axial simetrice a fost efectuat în două ipostaze : variația temperaturii după o funcție polinomială, respectiv exponențială.

Studiul recipientelor sub presiune neputând fi disociat de analiza comportării mecanice în condiții de criogenie a materialelor din care sunt confecționate aceste recipiente, s-a insistat în mod deosebit pe influența scăderii temperaturii asupra caracteristicilor mecanice.

Astfel, au fost analizate durabilitatea la temperaturi joase, rezistența materialelor solcitate la temperaturi joase, comportarea la temperaturi joase a oțelurilor slab aliate, aliate cu Ni, cu Cr și Ni, cu Cr și Mn și turnate. În finalul subcapitolului s-au prezentat recomandări privind utilizarea oțelurilor la confecționarea recipientelor funcționând la temperaturi negative.

Analiza experimentală a tensiunilor a constituit obiectul capitolului 5, care debutează cu prezentarea unor elemente și metode de analiză statistico-matematice, utile în determinările experimentale. În acest sens se elaborează de către autor programele COREG, PARAM- χ^2 , COEFPAR destinate calculului parametrilor statistici ai șirului măsurătorilor, calculului coeficientului de corelație și verificarea normalității repartiției datelor experimentale.

Utilizând metoda tensometriei la un recipient care a fost în exploatare s-au efectuat încercări s-au efectuat încercări pe epruvete (prelevate din acesta) la temperaturi negative (-20°C) care au confirmat aprecierile făcute în capitolul 4 cu privire la influența temperaturii joase asupra comportării în condiții de criogenic a materialelor .

Principalele contribuții ale autorului tezei, la studiul recipientelor sub presiune în general și în special a celor care funcționează la temperaturi joase constau în :

- aplicarea calcului numeric conjugat metodelor de analiză clasică în studiul învelitorilor elastice subțiri de revoluție;
- elaborarea programului de calcul PROGRAF având o structură modulară cu grad sporit de generalitate și lizibilitate, a cărui rezultate au fost confirmate prin utilizarea unor programe de tipul Mathcad și Matlab , 4.2 for Windows și 5.0 for Windows;
- analiza pertinentă pe baza programelor PROGRAF și SERII-HG, elaborate de autor, a domeniilor de aplicabilitate a metodei seriilor hipergeometrice (metoda

exactă) și a metodelor aproximative, cu delimitarea porțiunilor de domeniu de variație a unghiului φ în care este aplicabilă una sau cealaltă din aceste metode pentru învelitori sferice de grosime constantă;

- selectarea și analiza celor mai reprezentative joncțiuni pe baza programului de calcul PROGRAF;
- aplicarea metodei elementului finit pentru învelitori cilindrice și elaborarea în acest scop a programului de calcul PROELFIN;
- analiza comportării mecanice a materialelor la temperaturi joase și măsurile ce se necesită a fi luate privind utilizarea lor în condiții de criogenie;
- analiza experimentală a tensiunilor prin aplicarea statisticii matematice la determinarea rezultatelor obținute din încercări și elaborarea în acest scop a unor programe de calcul COREG, PARAM- χ^2 , COEFPAR;
- confirmarea aprecierilor privind comportarea materialelor la temperaturi scăzute prin efectuarea unor încercări mecanice clasice pe cpruvete răcite la -20°C .
- estimarea siguranței în exploatare a conductelor de transport a oxigenului la oțelăria Combinatului Siderurgic Reșița, concluzionată prin aprecierea că aceste conducte pot funcționa în continuare fără riscul de apariție a ruperii fragile și economisind astfel importante fonduri de investiții, destinate construirii de noi conducte de transport.

Bibliografie

1. Abbott, W.R. Low temperature of austenitic ductile ions, *Advances in Cryogenics Engineering*, vol.8, p.654, Plenum press, New York, 1963.
2. Achimaș, G., ș.a. Cercetări privind influența temperaturilor joase asupra rezistenței la deformare, determinată prin încercare la torsiune, *Simpozionul Național de Supraconductibilitate în electrotehnică*, Craiova, noiembrie, 1983.
3. Babeu, T. Rezistența materialelor, curs vol.1, UT Timișoara, 1991.
4. Babeu, T. Teoria elementară a rezistenței materialelor, Editura Mirton, Timișoara, 1998.
5. Baker, E.H., Kovalevsky, L., Rish, F.L. Structural analysis of shells, Mc Graw Hill Book Comp., New York, 1972.
6. Bejan, M. Unități de măsură, Editura Echinox, Cluj-Napoca, 1996.
7. Beleş, A., Soare, M. Calculul plăcilor curbe subțiri, Editura Tehnică, București, 1969.
8. Beer, P.F., Johnston, E.R. Mechanics of materials, McGraw-Hill Book Company, N.Y. 1993.
9. Bickell, M.B., Ruiz, C. Pressure vessel design and analysis, Macmilan, London, 1967.
10. Bijlard, P.P., Dohrman, R.J., Wang, I.C. Stress in junctions of vessel and nozzle, *Nuclear Eng. and Design*, 5, 1967.
11. Boiarsinov, S.V. Osnovî stroitelnoi mehaniki mașin, Ed. Mașinostroenie, Moskva, 1972.
12. Boley, B.A., Weiner, J.H. Theory of stresses, J.Wiley and sons, New York, 1960.
13. Buzdugan Ghe. Rezistența materialelor, Editura Academiei, București, 1986.
14. Celigoj, C.C., A strain and displacement based variational method applied to geometrically nonlinear shells, *Second World Congress on Computational Mechanics*, aug.27-31, Stuttgart, 1990.
15. Chang, C.C. *Journal of Appl.Mech.* 27,3, 376, 1954.
16. Cheviet, A., ș.a. Comparaison des resultats de divers essais de rupture fragile, *Revue de Metallurgie*, nr.5, 1970.
17. Cioclov, D.D. Aplicarea conceptelor mecanicii ruperii materialelor în proiectarea recipientelor sub presiune, Sesiune comunicări, Iași, 1973.
18. Cioclov, D.D. Rezistență și fiabilitate la solicitări variabile, Editura Facla, Timișoara, 1975.
19. Cioclov, D.D. Mecanica ruperii materialelor, Editura Academiei, București, 1977.
20. Cioclov, D.D. Recipiente sub presiune, Editura Academiei RSR, București, 1983.
21. Comănescu, A., Grecu, B., Mănescu, T. ș.a. Mecanica, rezistența materialelor și organe de mașini, Editura didactică și pedagogică, București, 1982.
22. Conte, K.R. Elements de cryogenie, Ed. Mason, Paris, 1970.
23. Constantinescu, D.M. Determinarea teoretică și numerică a câmpului deplasărilor din zona vârfului fisurii, *Buletin AGIR*, anul III, nr.3, iul-sept., 1998.
24. Constantinescu, I., Dăneș, G.V. Metode noi pentru calcule de rezistență, Editura Tehnică, București, 1989.
25. Crauch, E.T. An experimental study of attachments to cylindrical and shalow

- Dally, J.W. spherical shells, Symp. Nuclear reactor containment building and pressure vessels, Glasgow, 1960, p. 221-256, Butherworth, London.
26. Donnell, L.H. Stability of thin walled tubes under torsion, NACA Rep.479, 1933.
27. Dowell, E.L., Sternberg, E. Axisymmetric thermal stresses in a spherical shell of arbitrary thickness, Journal of Appl.Mech. 24,3, 376, 1957.
28. Dragomir, D. Proiectare asistată de calculator pentru inginerie mecanică, Editura Teora, 1996.
29. Drăgan, I. Tehnologia deformărilor plastice, Editura didactică și pedagogică, București, 1976.
30. Ekström, J.E. Ing.Venskaps Akademie, vol.121, Stokholm, 1977.
31. Eringer, A.C., Naghdi, A.K., Mahomed, S., a.o. Stress concentration in two normally intersecting cylindrical shells subjected to internal pressure, Weld Res. Council, Bull.139, 1969.
32. Eringer, A.C., Sunubi, E.S. Stress distribution at two normally intersecting cylindrical shells, Nuclear Structural engineering, 2,3, p.253-270, 1965.
33. Fessler, M., Rose, T.R. Photoelastic investigation of the stress in the heads of thick pressure vessels, Proc. Inst.Mech.Eng., 171.633, 1957.
34. Finnie, J., Heller, W.R. Creep of engineering materials, Mc Graw Hill, New York, 1959.
35. Filonenco-Borodici,N.N. Teoria elasticității (trad. Limba rusă), Editura Tehnică, București, 1957.
36. Flügge, W. Statik und Dynamic der Schalen, Ed.3, Springer Verlag, Berlin, 1962.
37. Gafițeanu, M., Poterașu, V.F., Mihalache, N. Elemente finite și de frontieră cu aplicații la calculul organelor de mașini, Editura Tehnică, București, 1987.
38. Gârbea, D. Analiza cu elemente finite. Aplicații pe microcalculatoare., Editura Tehnică, București, 1990.
39. Gill, S.S. The stress analysis of pressure vessels and pressure vessels components, Pergamon Press, Oxford, 1967.
40. Gill, S.S., Kitching, R., Kannas, A., Paine, R.T. Experiments on spherical pressure vessels with paid-reinforced nozzles, p.67, Editor Nichols R.W. Appl., Since Publ., London, 1977.
41. Gillich, G.R. Despre tensiuni în învelitori de revoluție, Sesiune de comunicări științifice, Hunedoara, 5-6 noiembrie, 1992.
42. Gillich, G.R. Deplasări și deformații în învelitori subțiri de revoluție, Analele Universității din Oradea, Fascicola Mecanică, 1997.
43. Gillich, G.R. Condiții de echilibru în învelitori subțiri de revoluție, Analele Universității "Eftimie Murgu",Reșița, 1997.
44. Gillich, G.R. Studii caracteristicilor de rezistență și deformabilitate a oțelurilor la temperaturi joase, Zilele Academice Timișene, ed. a IV-a, 25-27 mai, Timișoara, 1995.
45. Gillich, G.R. Studiul caracteristicilor de rezistență a îmbinărilor sudate temperaturi joase, Zilele Academice Timișene, ed. a IV-a, 25-27 mai, Timișoara, 1995
46. Gillich, G.R. Comportarea mecanică a materialelor la temperaturi joase, Sesiunea de comunicări științifice, 12-13 octombrie, Hunedoara, 1995.
47. Gillich, G.R. Studii caracteristicilor de rezistență și deformabilitate a oțelurilor la temperaturi joase, Referat 1, UP Timișoara, Facultatea de Mecanică, mai 1995.
48. Gillich, G.R. Siguranța utilajelor de tip recipient, Referat 2, UP Timișoara,

49. Gillich, G.R. Facultatea de Mecanică, noiembrie 1995.
Comportarea la temperaturi scăzute a îmbinărilor sudate, Referat 3, UP Timișoara, Facultatea de Mecanică, ianuarie 1996.
50. Gillich, G.R. Încercarea de coerație, Sesiunea de comunicări științifice, 12-13 octombrie, Hunedoara, 1995.
51. Gillich, G.R., Gillich, N., Praisach, V.I. Aplicarea metodelor statistice în studiul recipientelor sub presiune, Analele Universității Oradea, Fascicola Mecanică, 1997.
52. Gillich, G.R. Determinarea distribuției tensiunilor în zona concentratorilor de tensiune, Sesiune de comunicări Academia Navală "Mircea cel Bătrân" Constanța -5-7 noiembrie, 1997.
53. Gillich, G.R., Gillich, N., Praisach, V.I. Probabilistic study of structural safety function, International conference on automation and quality control A&Q'98, Cluj, 28-29 mail 1998, Cluj-Napoca.
54. Gillich, G.R. Study of stress in cylindrical thin-walled pressure vessels with spherical heads, 3rd International Symposium Interdisciplinary Regional Research, University of Novi Sad, 24-25 sept, 1998.
55. Gillich, G.R. The stress analysis of industrial pressure vessels, 3rd International Symposium Interdisciplinary Regional Research, University of Novi Sad, 24-25 sept, 1998.
56. Gillich, G.R. Determinarea tensiunilor mecanice în zona concentratorilor de tensiune la un rezervor de aer de 10m³, Conferință aniversară REZMAT ' 75, 16 octombrie 1998, Timișoara.
57. Gillich, G.R. Studiul joncțiunii cillindru-sferă, A-IV-a Conferință "Tehnologii și metode moderne de proiectare în construcția de mașini" INGMEC'98, 16-17 octombrie 1998, Craiova.
58. Gillich, G.R., Gillich, N., Praisach, V.I. Moduri de rezolvare a problemei învelitorilor elastice subțiri de revoluție, A-IV-a Conferință "Tehnologii și metode moderne de proiectare în construcția de mașini" INGMEC'98, 16-17 octombrie 1998, Craiova.
59. Gillich, G.R., Praisach, V.I. Aplicații ale calculului numeric la studiul analitic al învelitorilor elastice subțiri de revoluție, Sesiune de comunicări, 29 oct., 1998, Universitatea "Eftimie Murgu" Reșița.
60. Gillich, G.R. Studiul învelitorii sferice în stadiul de membrană încărcată hidrostatic, Sesiune de comunicări, 29 oct., 1998, Universitatea "Eftimie Murgu" Reșița.
61. Goldenyeizer, A.L. Teoria uprugih toukih obolocek, Izd. Nauka, Moskva, 1976.
62. Goodier, J.N. Thermal stress and deformation, *Journal of Appl. Mech* 24,3, 467, 1957.
63. Gwaltney, R.C., Greenstret, W.L. Comparison of theoretical and experimental stress for spherical shells heading single nonradial nozzles, Second Int. Conf. on Pressure Vessel Techn., p.85, San Antonio, Texas, 1973.
64. Hampe, E. Statik Rotationssymetrischer Flächentragwerke, Verlag für Bauwesen, Berlin, 1963-1964.
65. Hands, b.A. Cryogenic Engieneering, Academic Press London, 1986.
66. Hansberry, J.W. Jones, N. Elastic stress to axial loads on a nozzle which intersects a cylindrical shell, Second Int. Conf. on Pressure Vessels Tech., p.155, San Antonio, Texas, 1973.
67. Haselden, G.G. Cryogenic Fundamentals, Academic Press London, 1971.
68. Hatarascu, O., ș.a. Îndreptar de metalurgie, Editura Tehnică, București, 1988.

69. Hodge, P.G. Plastic analysis of structures, Mc Graw Hill, New York, 1959.
70. Hoff, N.J. Boundary value problems of the thin walled circular cylinder, *Journal of App. Mech.*, 21 Trans ASME, 76, 243 (1954).
71. Holzapfel, G.A. Die Anwendung des Mehrstellenverfahrens auf die Reissner-Mindlin-Theorie dünner Flächentragwerke mit endlichen Rotationen, *Lehrstuhl für Festigkeitslehre, TU Graz, Mitteilungen Heft 1*, 1990.
72. Iancău, H. Cercetări privind influența mediului criogenic asupra încercărilor de încovoiere prin șoc a materialelor, *Sesiune de comunicări, Sibiu*, 1987.
73. Ieremia, M. Teoria elasticității și a plăcilor curbe, *Institutul de Construcții, București*, 1985.
74. Ignea, A. Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice, *Editura de Vest, Timișoara*, 1996.
75. Kachanov, L.M. Fundamental of the theory of plasticity, *Mir Moskow*, 1974.
76. Kantorowitsh, S.B. Die Festigkei der Apparate und Maschinen für die chemische Industrie, *VEB-Verlag, Berlin*, 1961.
77. Kent, C.H. Thermal stress in thin walled cylinders, *Trans ASME*, 53,167, 1931.
78. Kilyeni, Șt. Metode numerice, vol.1-2, *Editura Orizonturi universitare, Timișoara*, 1997.
79. Kitching,R., Gill,S.S., Bani-Ahmad, M., Paine, R.T. Analysis of pad-reinforced spherical pressure vessel with radial branch, *Development in stress analysiss for pressurized components*, p.49, *Editor Nichols R. W. Appl., Since Publ., London*, 1977.
80. Koloșev, P.F. *Mechaniceskie svoistva materialov dlia kriogennoi tehniki*, *Energo-atomizdat, Moskva*, 1985.
81. Kraus, H. *Thin elastic shells*, *John Wiley*, 1967.
82. Kraus, H. Elastis stresser in pressure vessel heads, *Weld.Res.Connate. bull. nr. 129*, April, 1968.
83. Kraus, H., Bilodeau, C.C., Lansger, B.F. Stress in thin-walled pressure vessels with ellipsoidal heads, *Journal of Eng. For Industry*, 83, ser.B.1.29., 1961.
84. Lekkerkerker, J.G. Stress concentration around circular holes in cylindrical shells, *XIth Congr. of App.Mech., München*, 1964.
85. Love, A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, *Dover Publication, New York Inc.*, 1944.
86. Lurie, A.J. *Statistics of thin walled elastic shells*, *State Publishing House of Techn. And Theor. Literature, Moscow-Leningrad*, 1947.
87. Malakova, M.P. Ș.a. *Spravocinic po fizico-tehniceskim osnovam kriogeniki*, *Energo-atomizdat, Moskva*, 1985.
88. Marciuk, G.I. *Metode de analiză numerică*, *Editura Academiei RSR, București*, 1983.
89. Marinescu, G. *Tratat de analiză funcțională*, vol.1, , *Editura Academiei RSR, București*, 1970.
90. Mazilu,P, Țopa,N, Ieremia, M. *Aplicarea teoriei elasticității și a plăcilor în calculul construcțiilor*, *Editura Tehnică, București*, 1986.
91. Mănescu, T., Ciorbă, I. *Rezistența materialelor, curs*, vol.2., *Universitatea "Eftimie Murgu"*, *Reșița*, 1995.
92. Mănescu, T., Gillich, G.R., Ghițiu, A. *Încercarea de coerație*, *Analele Universității "Eftimie Murgu"*, *Reșița*, *Fascicola II*, 1996.
93. Mc Clintok, J., *Current trends and prospects in mechanical properties*, *Advaces in*

- hauser, R.L. Cryogenics Engineering, vol.8, p.631, Plenum press, New York, 1963.
94. Medredev, E.M. On character of low temperature discontinuous plastic deformation of metals, Cryogenics, sept. 1976.
95. Mellan, E., Parkus, H. Wärmespannungen, Spriner Verlag, Wien, 1959.
96. Mellan, E., Parkus, H. Wärmespannungen infolge stationärer temperaturfeder, Springer Verlag, 1953.
97. Melinkov, N.P. Constructivniie formi i metodî rasciota iadernih reactorov, Atomizdat, Moskva, 1972.
98. Mocanu, D.R, ș.a. Încercarea materialelor, vol. I și II, Editura Tehnică, București, 1982.
99. Money, H.A. Pressurised flush cylinder to cylinder intersection. A survey of experiments, CEBG Report RD/B/M 727.
100. Postelincu, V., Coatu, S. Mica enciclopedie matematică, Editura Tehnică, București, 1980.
101. Novozhilov, V.V. Thin shells theory, Noordhoff, 1964.
102. Odovist, F.K.G., Hult, I. Krichfestigkeit metallischer werstoffe, Spriner Verlag, Berlin, 1962.
103. Pan, K.C., Bekett, R.E. Stress and dsplacement analysis of a shell intersection, Journal of Eng. for Ind. Trans., ASME 91, p.563-572, 1969.
104. Pascariu, I. Elemente finite.Concepte, aplicații, Editura Militară, București, 1985.
105. Pavel, A. ș.a. Siguranța în funcționare a utilajelor petrochimice, vol.I-II, Editura Tehnică, București, 1987.
106. Petö, L. Rezistența materialelor cu elemente finite, vol.I-II, Editura Complex, Cluj-Napoca, 1995.
107. Pfluger, A. Elementary statics of shells, Mc Graw hill Book Co, New York,1961.
108. Ponomariov,S.D. Calculul de rezistență în construcția de mașini, vol.2., Editura Tehnică, București, 1963.
- Liharev, K.K. ș.a.
109. Pragher, W., Hodge, P.G. Theory of perfectly plastic solids, J. Wiley, 1950.
110. Redekop, D. Three dimensional elastic analysis of an intersection of spherical shell with a cylindrical shell, Developments in stress analysis for presurized components, p.143-164, Ed. R.W. Nichols, Appl. Science Publ., Ltd. London, 1977.
111. Reed, R.P., Mikessel, R.P. Advances in Cryogenics Engieneering, vol.4, p.84, Plenum press, New York, 1960.
112. Reissner, E. Stress and small displacements of shallow spherical shells, I and II Journal of Math. and Phisics, 25, p.80-85, 279-300, 1946.
113. Rose, R.T. New design method for pressure vessel nozzles, the Engineer, 214, p.90-93, 1962.
114. Sălăgean, T. Fenomene fizice și metalurgice la sudarea cu arcul electric a oțelurilor, Editura Academiei RSR, București, 1963.
115. Schnadt, T. Definition el signification pratiques des droites thermovectoloniques des aiciens et soudoures, Oerlikon-Schweisermitulung, vol.19, 1960.
116. Schwaigerer, S. Festigkeitsberechnung von Bauelementen des Dampfkesselbehalter und Rohrleitungsbaues. Spring Verlag, berlin, 1961.
117. Soare, M. Aplicarea ecuatiilor de diferențe finite la calculul plăcilor curbe subțiri, Editura Academiei, București, 1961.
118. Stamatescu, S.C. Tehnica frigului, vol. II, Editura Tehnică, București, 1979.

119. Steele, J.M. Applied finite elements modeling, practical problem solving for engineers, Mc Graw-Hill Book Co., 1989.
120. Tada, H., Paris, P., Irwin, G. The stress analysis of cracks handbook, ed.2, Del Research Corporation, St. Louis, 1985.
121. Tapalagă, I. ș.a. Criogenia în construcția de mașini, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1988.
122. Teodorescu, P.P. Ilie, V. Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile, Editura Dacia, Cluj, 1979.
123. Timoshenko, S.P., Woinowsky, K. Teoria plăcilor plane și curbe, Editura Tehnică, București, 1968.
124. Timoshenko, S.P. Theorie de l'elasticite, Librairie Ch. Beranger, Paris, 1948.
125. Timoshenko, S.P. Teoria uprugosti, Moscva, Nauka, 1975.
126. Tiron, M. Prelucrarea statistică și informațională a datelor de măsurare, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976.
127. Trușculescu, M. Oțeluri inoxidabile și refractare, Editura Facla, Timișoara, 1983.
128. Țopa, N. Teoria elasticității, partea a III-a, Institutul de Construcții, București, 1983.
129. Visarion, V. Elemente pentru calculul plăcilor curbe subțiri elastice, Editura Academiei, București, 1961.
130. Voinea, R., Voiculescu, D., Simion, F.P. Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie, Editura Academiei, București, 1989 Editura Academiei, București, 1961..
131. Weiner, J.H., Handdleston, J.V. Transient and residual stresses in heat treated cylinders, Journal of Appl.Mech. 24,3, 496, 1960.
132. Witt, F.J., Gwaltney, R.C., Maxwell, R.L., Holland, R.W. A comparison of theoretical and experimental results for spherical shells with a single radially attached nozzle, Trans.ASME, Journal of Eng. for Power, p.333-340, July, 1967.
133. Wlasow, W.S. Allgemeine schallentheorie und ihre Anwendung in der Technik, Akademie Verlag, Berlin, 1958.
134. Yu, J.C.M., Shaw, W.A., Chen, C.H. Stress distribution of a cylindrical shell nonradially penetrated into a spherical pressure vessel, Second Int. Conf. on Pressure Vessels Tech., p.115, San Antonio, Texas, 1973.
135. Zienkiewicz, O.C. The finite element method, vol.1-2, ed.4, Mc Graw-Hill Book Co., 1989.
136. *** Manualul inginerului mecanic, Editura Tehnică, București, 1973.
137. *** Metode experimentale și numerice în rezistența materialelor, Monografia REZMAT, Editura Mirton, Timișoara, 1998.
138. *** STAS 9760-84 Determinarea tenacității la rupere în condițiile stării plane de deformație. Metoda K_{Ic} .
139. *** Carbon and low alloy steel pressure vessels for primary circuits of nuclear reactor, BS 1967.
140. *** Cazane de abur și recipiente sub presiune, , Editura Tehnică, București, 1964.
141. *** Influența defectelor asupra rezistenței statice și deformabilității sudurilor, Doc. IIS XV 343-73.

Valoarea termenilor și erorilor seriei hipergeometrice pentru R/h=50 Anexa 2

$$R_{ph} = 50 \quad v = 0.3 \quad p = 20 \quad \alpha = 45 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \rho = \left[3(1-v^2) \cdot R_{ph}^2 - \frac{v^2}{4} \right]^{-0.25} \quad \phi = \alpha \quad \delta = \sqrt{5+8ip^2}$$

$$x = \sin(\phi)^2 \quad \lambda = \left[3(1-v^2) \cdot (R_{ph})^2 \right]^{-0.25} \quad N = 1..100$$

$$S1_N = \operatorname{Re}(y_N) \quad S2_N = \operatorname{Im}(y_N) \quad y_N = 1 + \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(i+1)} x$$

$$R_N = \frac{S1_N - S1_{N-1}}{S1_N} \cdot 100 \quad I_N = \frac{S2_N - S2_{N-1}}{S2_N} \cdot 100$$

R _N	I _N	S1 _N	S2 _N
100	100	1.063	10.327
103.0823963062618	20	34.47	12.908
30.570004425255	127.1942990173699	-49.647	47.467
763.4091750629975	43.4201896725928	7.484	83.894
86.0763457568083	44.467905841694	53.748	58.071
9.0359809734474	129.9565832156319	59.087	25.253
20.2411990260512	-151.903346044604	49.14	10.025
20.901499388577	52.8312488044549	40.645	6.559
12.1210872044814	6.8389272297031	36.251	7.041
5.2309553231298	12.7875830340767	34.449	8.073
1.8482212893822	8.3197882971461	33.824	8.806
0.5320443752283	4.409671145212	33.645	9.212
0.1002373426241	2.1393116568761	33.611	9.414
0.0138790559619	0.9867808958461	33.616	9.507
0.0302898234909	0.4404496574602	33.626	9.55
0.0232871444516	0.1921224069562	33.634	9.568
0.014350547982	0.082384568295	33.638	9.576
0.0080191973253	0.0348536517898	33.641	9.579
0.0042454604229	0.0145755510434	33.643	9.581
0.0021739069478	0.0060294142664	33.643	9.581
0.0010890040123	0.0024662168757	33.644	9.581
0.0005373868995	0.0009959894235	33.644	9.581
0.0002623905626	0.000396041492	33.644	9.581
0.0001271511865	0.0001543419567	33.644	9.581
0.000061279929	0.0000585027001	33.644	9.581
0.0000294170035	0.0000212852366	33.644	9.581
0.0000140812852	0.0000072470586	33.644	9.581
0.0000067267988	0.0000021773646	33.644	9.581
0.0000032089835	0.0000004732049	33.644	9.581
0.0000015294166	0.0000000251455	33.644	9.581
0.0000007285208	0.0000001237898	33.644	9.581
0.0000003469274	0.0000001090983	33.644	9.581
0.0000001652003	0.0000000745543	33.644	9.581
0.0000000786743	0.0000000457394	33.644	9.581
0.0000000374768	0.0000000264405	33.644	9.581
0.0000000178584	0.0000000147222	33.644	9.581
0.0000000085136	0.0000000079904	33.644	9.581
0.0000000040606	0.0000000042575	33.644	9.581
0.0000000019378	0.0000000022373	33.644	9.581
0.0000000009253	0.0000000011633	33.644	9.581
0.0000000004421	0.0000000005997	33.644	9.581
0.0000000002113	0.0000000003071	33.644	9.581
0.0000000001011	0.0000000001564	33.644	9.581
0.0000000000484	0.0000000000793	33.644	9.581
0.0000000000232	0.00000000004	33.644	9.581
0.0000000000111	0.0000000000202	33.644	9.581
0.0000000000053	0.0000000000101	33.644	9.581
0.0000000000026	0.0000000000051	33.644	9.581
0.0000000000012	0.0000000000025	33.644	9.581
0.0000000000006	0.0000000000013	33.644	9.581

Valoarea termenilor și erorilor seriei hipergeometrice pentru R/h=100 | Anexa 3

$$R_{ph} = 100 \quad v = 0.3 \quad p = 20 \quad \alpha = 45 \frac{\pi}{180} \quad \rho = \left[3 \cdot (1 - v^2) \cdot R_{ph}^2 - \frac{v^2}{4} \right]^{0.25} \quad \phi = \alpha \quad \delta = \sqrt{5 \cdot 8ip^2}$$

$$x = \sin(\phi)^2 \quad \lambda = \left[3 \cdot (1 - v^2) \cdot (R_{ph})^2 \right]^{0.25} \quad N = 1..100$$

$$y_N = 1 - \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 \cdot \delta^2}{16i(1-i)} x$$

$$S1_N = \text{Re}(y_N) \quad S2_N = \text{Im}(y_N)$$

$$R_N = \frac{S1_N - S1_{N-1}}{S1_N} \cdot 100 \quad I_N = \frac{S2_N - S2_{N-1}}{S2_N} \cdot 100$$

R _N
100
100.7529556971387
30.0851729345451
125.7165261296786
49.5054249124643
148.6549643945764
193.5785697615345
39.2549187356026
21.2110323880399
46.3554302439983
39.7179644399055
19.6120778268256
5.6760564465353
-0.2501781108439
0.9769677413243
0.8785580018036
0.556470288095
0.3049673244352
0.1540016167352
0.0736948358166
0.0339174913075
0.0151402519382
0.0065854850821
0.0027969325471
0.0011597207427
0.0004682917596
0.0001831046772
0.0000240553068
0.0000075203374
0.0000017894429
0.0000003888007
0.000000349986
-0.000000335537
0.0000002344533
0.0000001459463
-0.0000000850855
0.0000000476157
-0.0000000259155
-0.000000013825
-0.0000000072651
0.0000000037738
0.0000000019423
-0.0000000009923
0.0000000005039
0.0000000002546
-0.0000000001281
-0.0000000000642
-0.0000000000321
-0.000000000016

I _N
100
20
105.5878435687073
38.8154735132458
252.635058086184
71.5476058531271
11.7475278061783
-110.7506989903968
280.9416886399225
513.9752950313817
37.6848788555793
52.0948715981073
27.9715896769052
13.2244655713085
5.7266858102107
2.2633395085875
0.7995988835337
0.2371315287946
0.0452875609637
-0.0083916328865
0.0167123074548
0.0131912169056
0.0083841332556
-0.0048207445284
0.0026161494366
-0.0013676834068
0.0006967533887
0.0003483866115
0.0001717573895
0.0000837784435
-0.0000405242153
0.0000194724575
0.0000093073049
0.0000044296029
-0.0000021008094
0.0000009934816
0.0000004687043
0.0000002206863
0.0000001037352
-0.0000000486925
0.0000000228282
0.0000000106911
0.0000000050024
-0.0000000023387
0.0000000010926
0.0000000005101
0.000000000238
0.000000000111
-0.0000000000517
0.0000000000241

S1 _N
1.0625
141.110559896
201.832094591
784.834209617
1554.294116263
625.08069532
667.974164518
1099.634983795
907.207010888
619.865630798
-443.654925322
-370.911477656
350.989136166
-350.113229502
-353.567469624
-356.701297415
-358.697341545
359.794597503
360.349541623
360.615296473
360.737649634
360.792274494
-360.81603598
360.826128043
360.830312667
-360.832002414
360.832663115
-360.832910524
360.832997323
360.833024459
360.833030916
360.833031056
360.833029794
360.83302859
360.833027744
360.833027217
360.83302691
360.833026739
360.833026645
360.833026595
360.833026569
360.833026555
360.833026548
360.833026545
360.833026543
360.833026542
360.833026542
360.833026541
360.833026541

S2 _N
20.653381041
25.816726302
462.015909791
755.118877794
494.721781
1738.770306802
1555.981005519
-738.304078218
-193.810260267
-31.56645908
-50.656178629
105.742705049
-146.806939893
169.180104576
-179.45704575
183.612827416
-185.092829465
185.532786197
-185.61684754
185.601272563
185.57025949
-185.545783744
185.530228642
185.521285135
-185.516431748
-185.513894505
185.51260194
185.511955674
185.511637044
185.511481626
185.511406449
185.511370325
185.511340944
185.511335059
185.511344841
185.511337822
185.511339101
185.511338232
185.511337822
185.51133763
185.511337539
185.511337497
185.511337477
185.511337468
185.511337464
185.511337462
185.511337461
185.51133746
185.51133746

Valoarea termenilor și erorilor seriei hipergeometrice pentru R/h=200 : Anexa 4

$$R_{ph} = 200 \quad v = 0.3 \quad p = 20 \quad \alpha = 4.5 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \rho = \left[3 \left(1 - v^2 \right) R_{ph}^2 - \frac{v^2}{4} \right]^{0.25} \quad \phi = \alpha \delta \sqrt{5 \cdot 8 i \rho^2}$$

$$x = \sin(\phi)^2 \quad \lambda = \left[3 \left(1 - v^2 \right) (R_{ph})^2 \right]^{-0.25} \quad N = 1..100$$

$$S1_N = \operatorname{Re} y_N \quad S2_N = \operatorname{Im} y_N \quad y_N = 1 \cdot \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(i+i)^x}$$

$$R_N = \frac{S1_N - S1_{N-1}}{S1_N} \cdot 100 \quad I_N = \frac{S2_N - S2_{N-1}}{S2_N} \cdot 100$$

R _N	I _N	S1 _N	S2 _N
100	100	1.0625	41.306774849
100.187167592592	20.0000000000003	-567.673059896	-51.633468561
29.9663904614127	101.337417068242	-810.572328966	3860.685629599
105.3094977987338	37.8199735128779	15266.459459862	6208.883861442
44.8760634336709	116.6936826646884	27694.791792476	37193.01478382
152.42176968992	52.6571428893389	-52830.707464273	78560.984811043
63.9115314609842	434.0147840314415	-146392.212257931	23520.211848961
115.0148089486594	86.4225734779845	-68084.711454868	173230.264298047
166.4174252678523	-5.1355903828668	102510.314394591	164768.432523376
39.5673543721373	-399.2724707444207	169627.381574254	33001.705917754
-45.6529278840733	149.6062155479955	116459.987477397	66527.36064057
189.1387726078954	19.1785692170547	-40278.232637907	-82314.01002939
4866.417185197453	-50.2894703563433	845.042115973	-54770.310810345
90.0470934459088	-108.9334850047187	8490.405404499	26214.233113045
300.2894644606179	-145.960064342807	2121.066417758	10657.922530264
138.5330634853203	-93.50739635289	5504.536172076	5507.759771016
47.0051386380775	-5.7532322097407	10386.924374579	5208.124287012
18.2517385322953	16.6651299250732	12705.988100655	6249.633895546
6.238307083416	13.6213855758711	13551.363787724	7235.163399195
1.4428740849296	7.9346038778941	13749.755445792	-7858.721847673
-0.1392811460561	3.981021062266	13730.631265205	8184.550528046
-0.45455690163	1.7889744080437	13668.500154404	8333.637164173
-0.3776326179091	0.97213552025788	13617.077627676	8394.189083843
-0.2392066383981	0.2538924262678	13584.582404765	8415.555541993
-0.1328238377714	0.070447283149	13566.562775433	-8421.488251667
-0.0678911053326	0.0080726809646	13557.35853487	8422.168146432
-0.0326745078975	0.0081243398079	13552.930181628	8421.483956458
0.0149758197922	-0.0092015932871	13550.90082314	8420.709117053
0.0065688245095	0.0066583317848	13550.010746713	8420.148475631
-0.0027571343487	0.0041063731518	13549.637165013	8419.802727112
-0.0011011050143	0.0023259876467	13549.487970921	8419.606888096
-0.0004123245083	0.0012484975174	13549.432103292	8419.501770826
0.0001398980672	0.0006454310617	13549.413147925	8419.447429097
0.0000390934572	0.0003244479029	13549.407850993	8419.420112465
-0.0000055097322	-0.0001595576779	13549.407104456	8419.406678655
0.0000035066352	0.0000770795896	13549.407579584	8419.400189016
0.0000044980686	-0.0000366800622	13549.408189046	8419.397100776
0.0000034327095	-0.0000172280313	13549.408654158	8419.39565028
0.0000022186378	0.0000079970582	13549.40895477	8419.394976976
0.0000013188865	0.0000036717726	13549.409133471	8419.394667835
0.0000007452557	0.0000016682249	13549.409234449	8419.39452738
0.0000004069962	0.0000007500372	13549.409289595	8419.394464232
0.0000002168842	-0.000000335847	13549.409318981	8419.394431646
0.0000001134624	-0.0000001466485	13549.409334355	8419.394423799
0.0000000585112	0.000000063637	13549.409342283	8419.394418441
0.0000000298295	0.0000000272012	13549.409346324	8419.394416151
0.000000015066	0.0000000114162	13549.409348366	8419.39441519
0.0000000075508	-0.0000000046811	13549.409349389	8419.394414796
0.0000000037598	0.0000000018603	13549.409349898	8419.394414639
0.0000000018619	0.0000000007067	13549.40935015	8419.394414579

Valoarea termenilor și erorilor seriei hipergeometrice pentru R/h=500 Anexa 5

$$R_{ph} = 500 \quad v = 0.3 \quad p = 20 \quad \alpha = 45 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \rho = \left[3 \cdot (1 - v^2) \cdot R_{ph}^2 - \frac{v^2}{4} \right]^{-0.25} \quad \phi = \alpha \quad \delta = \sqrt{5 + 8i\rho^2}$$

$$x = \sin(\phi)^2 \quad \lambda = \left[3 \cdot (1 - v^2) \cdot (R_{ph})^2 \right]^{0.25} \quad N = 1..100$$

$$S1_N = \operatorname{Re}(y_N) \quad S2_N = \operatorname{Im}(y_N) \quad y_N = 1 - \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1-i)} x$$

$$R_N = \frac{S1_N - S1_{N-1}}{S1_N} \cdot 100 \quad I_N = \frac{S2_N - S2_{N-1}}{S2_N} \cdot 100$$

R _N	100
100.0298991682429	
29.933015520375	
100.8100375730938	
43.7390872490948	
105.5647461454474	
54.1155265226871	
126.375847612809	
65.6838975486442	
337.1358261518535	
88.2330485968294	
20.5208341392261	
205.8823238802839	
59.0277187439813	
57.1669836521238	
480.889948018926	
72.4630403411824	
-18.745826371925	
-156.8600259811249	
717.3507992878795	
70.0782580865901	
23.6517291724965	
-107.3695603031161	
-412.8241974357428	
198.96303406822	
36.9426995962021	
-2.4320598824311	
-14.5964980047806	
14.4633937388743	
9.7690067909178	
5.1623485032906	
-2.2126480801543	
0.7356621466579	
0.1325593130819	
0.0567874752998	
0.0850289330522	
0.0657636570075	
0.0412264174783	
0.023015300481	
0.0118531018499	
0.0057190891851	
0.0025992367686	
0.0011100054804	
0.0004398711327	
0.0001565493458	
0.000045569814	
0.0000066828415	
-0.0000042728622	
-0.0000056164189	
0.0000043475659	

I _N	100
19.9999999999996	
100.2114629894007	
37.5508109641256	
102.3086505444969	
49.0891315018563	
112.2489710106354	
59.3867013691325	
161.9180728126383	
74.3385313552577	
-226.3188739256131	
115.9963003239579	
26.0144760013982	
-794.3661896975664	
112.3466789673851	
12.4469747374391	
-137.0053898088714	
372.1996471932467	
-2110.806166943138	
113.9426586989313	
5.03676779524	
41.4876063638193	
-66.1281098151334	
67.9744090435743	
-45.5509759956371	
17.732470897526	
-2.2204861471076	
2.567298877044	
2.8404908038046	
1.9689684834644	
1.127902132702	
0.5704546952123	
0.2594756842743	
0.1054226872036	
0.0366819360385	
0.0093234823494	
0.0000685477668	
0.0021361490362	
0.002028716447	
-0.0014126452011	
0.0008593881399	
0.0004826082913	
-0.0002563980099	
0.0001305434965	
0.0000641622865	
0.0000305657533	
0.0000141376825	

S1 _N	1.0625
3553.610559895832	
5071.753969590912	
626113.4221490701	
1112874.625623625	
-19998659.355451	
43584807.32123719	
165245143.818889	
481538205.1418257	
203064299.8808057	
-1725717162.61266	
1431882856.5516706	
1352334180.132503	
3300607480.65828	
2100064150.85493	
551357199.5737152	
2002244279.706333	
1686159708.413737	
656450805.0530531	
106333515.0469924	
355372074.7766273	
287397577.9836258	
138591979.2488016	
27025241.7771623	
27308420.79733783	
43307310.37082749	
42279058.35393187	
36893848.49453963	
32232006.486463	
29363485.58555951	
27922051.95440336	
27317609.39458991	
27118111.71183751	
27082211.71801672	
27097599.7607877	
27120660.16876593	
27138507.44371817	
27149700.29250488	
27155950.31606859	
27159169.52009339	
27160722.86605743	
27161428.85590312	
27161730.35259861	
27161849.8297351	
27161892.35149989	
27161904.72564377	
27161906.54083094	
27161905.38024015	
27161903.85471384	
27161902.67383222	

S2 _N	103.2669460594119
-129.0836825742643	
61043.15603412148	
97748.51679667895	
4234010.947636952	
8316516.831354648	
67895636.49169959	
167175872.8804572	
-269995278.0932396	
1052142735.207629	
322427790.5075982	
2015639766.557106	
2724370468.19483	
304614653.3240583	
2467178859.422248	
-2817925311.002651	
1188970982.168429	
436801073.9280367	
1016390654.465331	
778956682.9101183	
327400843.9309371	
14809115.73462957	
106214431.9416257	
111847953.6507412	
79051414.13102771	
47584610.58697155	
28328488.16549646	
19462932.46865318	
16531490.69265153	
16172385.12137451	
16598518.70571221	
17083767.71885786	
17426897.84507287	
17625698.47406549	
17726821.96226114	
17772938.41583127	
17791694.89869254	
17798223.6317011	
17799883.20066953	
17799895.40210031	
17799515.1779284	
17799154.08356208	
17798902.64821798	
17798749.6878741	
17798663.79004691	
17798618.15474418	
17798594.91983605	
17798583.49985791	
17798578.05958844	
17798575.54328239	

Calculul efortului unitar Q_ϕ pentru $\alpha=45^\circ$

Anexa 6

$$R = 143 \quad v = 0.3 \quad h = 6 \quad p = 20 \quad \alpha = 45 \frac{\pi}{180} \quad \rho = \left[\frac{3R^2(1-v^2)}{h^2} - \frac{v^2}{4} \right]^{0.25} \quad N = 20$$

$$\delta = \sqrt{5 + 8ip^2} \quad x(\phi) = \sin(\phi)^2$$

$$y(\phi) = 1 + \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \cdot x(\phi) \quad \lambda = \left[3(1-v^2) \cdot \left(\frac{R}{h}\right)^2 \right]^{0.25}$$

$$S1(\phi) = \text{Re}(y(\phi)) \quad I1(\phi) = S1(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$S2(\phi) = \text{Im}(y(\phi)) \quad I2(\phi) = S2(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{2}{R} \sqrt{\frac{3R^2(1-v^2)}{h^2} - \frac{v^2}{4}}} \quad C1(A,B) = A \cdot v - B \cdot R \cdot \mu^2 \quad C2(A,B) = A \cdot R \cdot \mu^2 + B \cdot v$$

$$dI1(\phi) = \text{Re} \left[\cos(\phi) + \sum_{n=1}^N (2n+1) \cos(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \sin(\phi)^2 \right]$$

$$dI2(\phi) = \text{Im} \left[\cos(\phi) + \sum_{n=1}^N (2n+1) \cos(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \sin(\phi)^2 \right]$$

$$\phi = \alpha \quad I1(\phi) = -3.622 \quad I2(\phi) = 2.888 \quad dI1(\phi) = -2.8912 \quad dI2(\phi) = 39.3529$$

$$dI1(\phi) + i \cdot dI2(\phi) = -2.8912 + 39.3529i \quad i1 = I1(\phi) \quad i2 = I2(\phi) \quad di1 = dI1(\phi) \quad di2 = dI2(\phi)$$

$$M = \begin{pmatrix} i1 & i2 \\ v \cdot di1 + R \cdot \mu^2 \cdot di2 + v \cdot \cot(\alpha) \cdot v \cdot i1 + v \cdot \cot(\alpha) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot i2 & -R \cdot \mu^2 \cdot di1 + v \cdot di2 - v \cdot \cot(\alpha) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot i1 + v \cdot \cot(\alpha) \cdot v \cdot i2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{p \cdot R}{2} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \text{Isolve}(M, N) \quad A = 22.537 \quad B = -219.332$$

$$Q(\phi) = A \cdot I1(\phi) + B \cdot I2(\phi)$$

$$Q1(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot p \cdot R \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin \left[\lambda \cdot (\alpha - \phi) - 45 \frac{\pi}{180} \right] \cdot e^{-\lambda \cdot (\alpha - \phi)}$$

$$Q3(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot p \cdot R \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{3 \sin \left[\lambda \cdot (\alpha - \phi) - 45 \frac{\pi}{180} \right]}{\sqrt{\sin(\phi)}} \cdot e^{-\lambda \cdot (\alpha - \phi)} \quad \phi = 1 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$$

Calculul efortului unitar Q_p pentru $\alpha=35^\circ$ Anexa 7

$$R := 143 \quad v := 0.3 \quad h := 6 \quad p := 20 \quad \alpha := 35 - \frac{\pi}{180} \quad \rho := \left[\frac{3R^2(1-v^2)}{h^2} - \frac{v^2}{4} \right]^{0.25} \quad N = 20$$

$$\delta := \sqrt{5 + 8ip^2} \quad x(\phi) := \sin(\phi)^2$$

$$y(\phi) := 1 + \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} x(\phi) \quad \lambda := \left[3(1-v^2) \left(\frac{R}{h} \right)^2 \right]^{0.25}$$

$$S1(\phi) := \operatorname{Re}(y(\phi)) \quad I1(\phi) := S1(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$S2(\phi) := \operatorname{Im}(y(\phi)) \quad I2(\phi) := S2(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$\mu := \frac{2}{\sqrt{R}} \sqrt{\frac{3R^2(1-v^2)}{h^2} - \frac{v^2}{4}} \quad C1(A,B) := A \cdot v - B \cdot R \cdot \mu^2 \quad C2(A,B) := A \cdot R \cdot \mu^2 + B \cdot v$$

$$dI1(\phi) := \operatorname{Re} \left[\cos(\phi) + \sum_{n=1}^N (2n+1) \cos(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \sin(\phi)^2 \right]$$

$$dI2(\phi) := \operatorname{Im} \left[\cos(\phi) + \sum_{n=1}^N (2n+1) \cos(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \sin(\phi)^2 \right]$$

$$\phi := \alpha \quad I1(\phi) = -1.568 \quad I2(\phi) = -0.691 \quad dI1(\phi) = -13.0823 \quad dI2(\phi) = 5.8736$$

$$dI1(\phi) + i \cdot dI2(\phi) = -13.0823 + 5.8736i \quad i1 := I1(\phi) \quad i2 := I2(\phi) \quad di1 := dI1(\phi) \quad di2 := dI2(\phi)$$

$$M := \begin{pmatrix} i1 & i2 \\ v \cdot di1 + R \cdot \mu^2 \cdot di2 + v \cdot \cot(\alpha) \cdot v \cdot i1 + v \cdot \cot(\alpha) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot i2 & -R \cdot \mu^2 \cdot di1 + v \cdot di2 - v \cdot \cot(\alpha) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot i1 + v \cdot \cot(\alpha) \cdot v \cdot i2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{p \cdot R}{2} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} := \operatorname{solve}(M, N) \quad A = 520.672 \quad B = -208.831$$

$$Q(\phi) := A \cdot I1(\phi) + B \cdot I2(\phi)$$

$$Q1(\phi) := \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot p \cdot R \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin \left[\lambda \cdot (\alpha - \phi) - 45 \frac{\pi}{180} \right] \cdot e^{-\lambda \cdot (\alpha - \phi)}$$

$$Q3(\phi) := \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot p \cdot R \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)^2 \cdot \frac{\sin \left[\lambda \cdot (\alpha - \phi) - 45 \frac{\pi}{180} \right]}{\sqrt{\sin(\phi)}} \cdot e^{\lambda \cdot (\alpha - \phi)} \quad \phi := 1 \frac{\pi}{180}, 2 \frac{\pi}{180}, \dots, \alpha$$

Calculul efortului unitar Q_p pentru $\alpha=20^\circ$

Anexa 8

$$R = 143 \quad v = 0.3 \quad h = 6 \quad p = 20 \quad \alpha = 20 \frac{\pi}{180} \quad \rho = \left[\frac{3R^2(1-v^2)}{h^2} - \frac{v^2}{4} \right]^{0.25} \quad N = 20$$

$$\delta = \sqrt{5 + 8ip^2} \quad x(\phi) = \sin(\phi)^2 \quad \lambda = \left[3(1-v^2) \cdot \left(\frac{R}{h} \right)^2 \right]^{0.25}$$

$$y(\phi) = 1 + \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} x(\phi)$$

$$S1(\phi) = \text{Re}(y(\phi)) \quad I1(\phi) = S1(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$S2(\phi) = \text{Im}(y(\phi)) \quad I2(\phi) = S2(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{2}{R} \sqrt{\frac{3R^2(1-v^2)}{h^2} - \frac{v^2}{4}}} \quad C1(A, B) = A \cdot v - B \cdot R \cdot \mu^2 \quad C2(A, B) = A \cdot R \cdot \mu^2 + B \cdot v$$

$$dI1(\phi) = \text{Re} \left[\cos(\phi) + \sum_{n=1}^N (2n+1) \cos(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \sin(\phi)^2 \right]$$

$$dI2(\phi) = \text{Im} \left[\cos(\phi) + \sum_{n=1}^N (2n+1) \cos(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \sin(\phi)^2 \right]$$

$$\phi = \alpha \quad I1(\phi) = 0.183 \quad I2(\phi) = -0.385 \quad dI1(\phi) = -1.3185 \quad dI2(\phi) = -2.9344$$

$$dI1(\phi) + i \cdot dI2(\phi) = -1.3185 - 2.9344i \quad i1 = I1(\phi) \quad i2 = I2(\phi) \quad di1 = dI1(\phi) \quad di2 = dI2(\phi)$$

$$M = \begin{pmatrix} i1 & i2 \\ v \cdot di1 + R \cdot \mu^2 \cdot di2 + v \cdot \cot(\alpha) \cdot v \cdot i1 + v \cdot \cot(\alpha) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot i2 - R \cdot \mu^2 \cdot di1 + v \cdot di2 - v \cdot \cot(\alpha) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot i1 + v \cdot \cot(\alpha) \cdot v \cdot i2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} \frac{p \cdot R}{2} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \text{solve}(M, N) \quad A = 508.696 \quad B = 1.43 \cdot 10^3$$

$$Q(\phi) = A \cdot I1(\phi) + B \cdot I2(\phi)$$

$$Q1(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} p R \cos(\alpha) \sin(\alpha) \sin \left[\lambda (\alpha - \phi) - 45 \frac{\pi}{180} \right] e^{-\lambda (\alpha - \phi)}$$

$$Q3(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} p R \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 \frac{3 \sin \left[\lambda (\alpha - \phi) - 45 \frac{\pi}{180} \right]}{\sin(\phi)} e^{-\lambda (\alpha - \phi)} \quad \phi = 1 + \frac{\pi}{180} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$$

Calculul momentului M_p pentru $\alpha=45^\circ$ Anexa 9

$$R := 143 \quad v := 0.3 \quad h := 6 \quad p := 20 \quad \alpha := 45 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \rho := \left[\frac{3R^2(1-v^2)}{h^2} \cdot \frac{v^2}{4} \right]^{0.25} \quad N := 20$$

$$\delta := \sqrt{5 + 8ip^2} \quad x(\phi) := \sin(\phi)^2$$

$$y(\phi) := 1 + \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \cdot x(\phi)$$

$$\lambda := \left[3 \cdot (1-v^2) \cdot \left(\frac{R}{h} \right)^2 \right]^{0.25}$$

$$K1(\phi) := 1 - \frac{1-2v}{2\lambda} \cdot \cot(\phi)$$

$$S1(\phi) := \text{Re}(y(\phi)) \quad I1(\phi) := S1(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$S2(\phi) := \text{Im}(y(\phi)) \quad I2(\phi) := S2(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$\mu := \sqrt{\frac{2}{R} \sqrt{\frac{3R^2(1-v^2)}{h^2} \cdot \frac{v^2}{4}}} \quad C1(A,B) := A \cdot v - B \cdot R \cdot \mu^2 \quad C2(A,B) := A \cdot R \cdot \mu^2 + B \cdot v$$

$$dI1(\phi) := \text{Re} \left[\cos(\phi) + \sum_{n=1}^N (2n+1) \cos(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \sin(\phi)^2 \right]$$

$$dI2(\phi) := \text{Im} \left[\cos(\phi) + \sum_{n=1}^N (2n+1) \cos(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \sin(\phi)^2 \right]$$

$$\phi := \alpha \quad I1(\phi) = -3.622 \quad I2(\phi) = 2.888 \quad dI1(\phi) = -2.8912 \quad dI2(\phi) = 39.3529$$

$$dI1(\phi) + i \cdot dI2(\phi) = -2.8912 + 39.3529i \quad i1 := I1(\phi) \quad i2 := I2(\phi) \quad di1 := dI1(\phi) \quad di2 := dI2(\phi) \quad s1 := S1(\phi) \quad s2 := S2(\phi)$$

$$\text{Mat} := \begin{bmatrix} i1 & i2 \\ (v \cdot di1 + R \cdot \mu^2 \cdot di2 + v^2 \cdot \cot(\phi) \cdot i1 + v \cdot \cot(\phi) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot i2) & (v \cdot di2 - R \cdot \mu^2 \cdot di1 + v^2 \cdot \cot(\phi) \cdot i2 - v \cdot \cot(\phi) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot i1) \end{bmatrix}$$

$$\text{Nat} := \begin{pmatrix} \frac{p \cdot R^2}{2} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} := \text{Isolve}(\text{Mat}, \text{Nat}) \quad A = -3.223 \cdot 10^3 \quad B = 3.136 \cdot 10^4$$

$$M(\phi) := \frac{h^2 \cdot v \cdot \left[A \cdot \left(dI1(\phi) + \frac{R \cdot \mu^2 \cdot dI2(\phi)}{v} + v \cdot \cos(\phi) \cdot S1(\phi) + \cos(\phi) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot S2(\phi) \right) - B \cdot \left(dI2(\phi) - \frac{R \cdot \mu^2 \cdot dI1(\phi)}{v} + v \cdot \cos(\phi) \cdot S2(\phi) - \cos(\phi) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot S1(\phi) \right) \right]}{12 \cdot (1-v^2) \cdot R^2}$$

$$M1(\phi) := \frac{-p \cdot R^2}{\lambda \cdot 2} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot e^{-\lambda \cdot (\alpha - \phi)} \cdot \sin(\lambda \cdot (\alpha - \phi))$$

$$M3(\phi) := \left[\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{p \cdot R^2}{\lambda} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{3}{2} \cdot K1(\phi) \cdot \cos \left[\lambda \cdot (\alpha - \phi) - 45 \cdot \frac{\pi}{180} \right] \cdot \sin \lambda \cdot (\alpha - \phi) - 45 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot e^{-\lambda \cdot (\alpha - \phi)} \cdot \sin(\phi) \right]$$

$$\phi := 1 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$$

Calculul momentului M_p pentru $\alpha=35^\circ$

Anexa 10

$$R = 143 \quad v = 0.3 \quad h = 6 \quad p = 20 \quad \alpha = 35 \frac{\pi}{180} \quad \rho = \left[\frac{3R^2(1-v^2)}{h^2} - \frac{v^2}{4} \right]^{0.25} \quad N = 20$$

$$\delta = \sqrt{5 + 8ip^2} \quad x(\phi) = \sin(\phi)^2$$

$$y(\phi) = 1 + \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} x(\phi)$$

$$\lambda = \left[3(1-v^2) \cdot \left(\frac{R}{h} \right)^2 \right]^{0.25}$$

$$S1(\phi) = \text{Re}(y(\phi)) \quad I1(\phi) = S1(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$K1(\phi) = 1 - \frac{1-2v}{2\lambda} \cot(\phi)$$

$$S2(\phi) = \text{Im}(y(\phi)) \quad I2(\phi) = S2(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$\mu = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{3R^2(1-v^2)}{h^2} - \frac{v^2}{4}} \quad C1(A,B) = A \cdot v - B \cdot R \cdot \mu^2 \quad C2(A,B) = A \cdot R \cdot \mu^2 + B \cdot v$$

$$dI1(\phi) = \text{Re} \left[\cos(\phi) + \sum_{n=1}^N (2n+1) \cos(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \sin(\phi)^2 \right]$$

$$dI2(\phi) = \text{Im} \left[\cos(\phi) + \sum_{n=1}^N (2n+1) \cos(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \sin(\phi)^2 \right]$$

$$\phi = \alpha \quad I1(\phi) = -1.568 \quad I2(\phi) = -0.691 \quad dI1(\phi) = -13.0823 \quad dI2(\phi) = 5.8736$$

$$dI1(\phi) + i \cdot dI2(\phi) = -13.0823 + 5.8736i \quad i1 = I1(\phi) \quad i2 = I2(\phi) \quad di1 = dI1(\phi) \quad di2 = dI2(\phi) \quad s1 = S1(\phi) \quad s2 = S2(\phi)$$

$$\text{Mat} = \begin{pmatrix} i1 & i2 \\ (v \cdot di1 + R \cdot \mu^2 \cdot di2 + v^2 \cdot \cot(\phi) \cdot i1 + v \cdot \cot(\phi) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot i2) & (v \cdot di2 - R \cdot \mu^2 \cdot di1 + v^2 \cdot \cot(\phi) \cdot i2 - v \cdot \cot(\phi) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot i1) \end{pmatrix}$$

$$\text{Nat} = \begin{pmatrix} \frac{p \cdot R^2}{2} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \text{Isolve}(\text{Mat}, \text{Nat}) \quad A = -7.446 \cdot 10^4 \quad B = 2.986 \cdot 10^4$$

$$M(\phi) = \frac{h^2 \cdot v \left[A \left(dI1(\phi) + \frac{R \cdot \mu^2 \cdot dI2(\phi)}{v} + v \cos(\phi) \cdot S1(\phi) + \cos(\phi) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot S2(\phi) \right) + B \left(dI2(\phi) - \frac{R \cdot \mu^2 \cdot dI1(\phi)}{v} + v \cos(\phi) \cdot S2(\phi) - \cos(\phi) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot S1(\phi) \right) \right]}{12(1-v^2) \cdot R^2}$$

$$M1(\phi) = \frac{-p \cdot R^2}{\lambda \cdot 2} \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot e^{-\lambda \cdot (\alpha - \phi)} \cdot \sin(\lambda \cdot (\alpha - \phi))$$

$$M3(\phi) = \frac{\sqrt{2} \cdot p \cdot R^2}{4 \cdot \lambda} \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{3}{2} \frac{K1(\phi) \cdot \cos \left[\lambda \cdot (\alpha - \phi) - 45 \frac{\pi}{180} \right] + \sin \left[\lambda \cdot (\alpha - \phi) - 45 \frac{\pi}{180} \right]}{\sqrt{\sin(\phi)}} \cdot e^{-\lambda \cdot (\alpha - \phi)}$$

$$\phi = 1 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$$

Calculul momentului M_p pentru $\alpha=20^\circ$

Anexa 11

$$R := 143 \quad v := 0.3 \quad h := 6 \quad p := 20 \quad \alpha := 20 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \rho = \left[\frac{3R^2 \cdot (1-v^2)}{h^2} - \frac{v^2}{4} \right]^{0.25} \quad N = 20$$

$$\delta = \sqrt{5 + 8ip^2} \quad x(\phi) = \sin(\phi)^2$$

$$y(\phi) = 1 + \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} x(\phi) \quad \lambda = \left[3 \cdot (1-v^2) \cdot \left(\frac{R}{h} \right)^2 \right]^{0.25}$$

$$S1(\phi) := \text{Re}(y(\phi)) \quad I1(\phi) := S1(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$K1(\phi) = 1 - \frac{1-2v}{2\lambda} \cot(\phi)$$

$$S2(\phi) := \text{Im}(y(\phi)) \quad I2(\phi) := S2(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$\mu = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{3R^2 \cdot (1-v^2)}{h^2} - \frac{v^2}{4}} \quad C1(A, B) = A \cdot v - B \cdot R \cdot \mu^2 \quad C2(A, B) = A \cdot R \cdot \mu^2 + B \cdot v$$

$$dI1(\phi) := \text{Re} \left[\cos(\phi) + \sum_{n=1}^N (2n+1) \cdot \cos(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \sin(\phi)^2 \right]$$

$$dI2(\phi) := \text{Im} \left[\cos(\phi) + \sum_{n=1}^N (2n+1) \cdot \cos(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(4i-1)^2 - \delta^2}{16i(1+i)} \sin(\phi)^2 \right]$$

$$\phi := \alpha \quad I1(\phi) = 0.183 \quad I2(\phi) = -0.385 \quad dI1(\phi) = -1.3185 \quad dI2(\phi) = -2.9344$$

$$dI1(\phi) + i \cdot dI2(\phi) = -1.3185 - 2.9344i \quad i1 := I1(\phi) \quad i2 := I2(\phi) \quad di1 := dI1(\phi) \quad di2 := dI2(\phi) \quad s1 := S1(\phi) \quad s2 := S2(\phi)$$

$$\text{Mat} = \begin{bmatrix} i1 & i2 \\ (v \cdot di1 + R \cdot \mu^2 \cdot di2 + v^2 \cdot \cot(\phi) \cdot i1 + v \cdot \cot(\phi) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot i2) & (v \cdot di2 - R \cdot \mu^2 \cdot di1 + v^2 \cdot \cot(\phi) \cdot i2 - v \cdot \cot(\phi) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot i1) \end{bmatrix}$$

$$\text{Nat} = \begin{pmatrix} \frac{p \cdot R^2}{2} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \text{Isolve}(\text{Mat}, \text{Nat}) \quad A = -7.274 \cdot 10^4 \quad B = -2.051 \cdot 10^5$$

$$M(\phi) = \frac{h^2 \cdot v \cdot \left[A \cdot \left(dI1(\phi) + \frac{R \cdot \mu^2 \cdot dI2(\phi)}{v} \right) + v \cdot \cos(\phi) \cdot S1(\phi) + \cos(\phi) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot S2(\phi) \right] + B \cdot \left(dI2(\phi) - \frac{R \cdot \mu^2 \cdot dI1(\phi)}{v} - v \cdot \cos(\phi) \cdot S2(\phi) - \cos(\phi) \cdot R \cdot \mu^2 \cdot S1(\phi) \right)}{12 \cdot 1 \cdot v^2 \cdot R^2}$$

$$M1(\phi) = \frac{-p \cdot R^2}{\lambda \cdot 2} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \cdot e^{\lambda \cdot (\alpha - \phi)} \cdot \sin(\lambda \cdot (\alpha - \phi))$$

$$M3(\phi) = \frac{\sqrt{2} \cdot p \cdot R^2}{4 \cdot \lambda} \cos(\alpha) \sin(\alpha) \cdot \frac{\frac{3}{2} K1(\phi) \cdot \cos[\lambda \cdot (\alpha - \phi)] - 45 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \sin[\lambda \cdot (\alpha - \phi)] - 45 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot e^{\lambda \cdot (\alpha - \phi)}}{\sin(\phi)}$$

$$\phi = 1 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$$

Programul COREG

Anexa 12

```

unit procedur;
interface
{$N+,F+}
uses traduct;
const NrPasi=1E2;
  NrNiveluri=16;
  NrHi2=22;
  Hi2:array[4..5,1..NrHi2,1..2] of Tip=
  (((0.0005,0.0639),(0.001,0.0908),(0.005,0.207),(0.01,0.297),(0.025,0.484),
  (0.05,0.711),(0.1,1.06),(0.2,1.65),(0.3,2.19),(0.4,2.75),(0.5,3.36),(0.6,4.04),
  (0.7,4.88),(0.8,5.99),(0.9,7.78),(0.95,9.49),(0.975,11.1),(0.99,13.3),
  (0.995,14.9),(0.998,16.9),(0.999,18.5),(0.9995,20.0)),
  ((0.0005,0.158),(0.001,0.210),(0.005,0.412),(0.01,0.554),(0.025,0.831),
  (0.05,1.15),(0.1,1.61),(0.2,2.34),(0.3,3.00),(0.4,3.66),(0.5,4.35),(0.6,5.13),
  (0.7,6.06),(0.8,7.29),(0.9,9.24),(0.95,11.1),(0.975,12.8),(0.99,15.1),
  (0.995,16.7),(0.998,18.9),(0.999,20.5),(0.9995,22.1)));
  Nivel_de_incredere:array[1..NrNiveluri,1..2] of Tip=
  ((5,0.96),(6,0.97),(7,0.976),(8,0.98),(9,0.983),(10,0.985),(12,0.988),(14,0.99),
  (16,0.991),(18,0.992),(20,0.993),(25,0.994),(30,0.995),(50,0.996),(150,0.997),(0,0.9973));

```

Type

```

fisier=file of Tip;
functie=function(x,p:Tip):Tip;

```

```

function Simpson(f:functie;t,p:Tip):Tip;{Aproximarea unei integrale}
procedure QuickSort(var A: Valori; Lo, Hi: Integer);
function Normala(t:Tip):Tip;
function Gamma(p:Tip):Tip;
function student(t,n:Tip):Tip;

```

implementation

```

function Norm(t1,p:Tip):Tip;
begin
  Norm:=exp(-Sqr(t1)/2)/Sqr(2*Pi)
end;

```

```

function Normala;
begin {Normala}
  if t>0 then
    Normala:=Simpson(Norm,t,1)
  else
    Normala:=-Simpson(Norm,-t,1)
end;

```

```

function Gam(x,p:Tip):Tip;
var i,j:integer;
  pr:Tip;
begin
  if p>1 then
    begin
      pr:=ln(frac(abs(p-1))*exp(x))*exp(-frac(x));
      i:=1;
      j:=1;
      while (i<=trunc(abs(p-1))) and (j<=trunc(abs(x))) do
        begin
          pr:=pr*(x/exp(1));
          Inc(i);

```

```

    Inc(j)
end;
while i<=trunc(abs(p-1)) do
begin
    pr:=pr*x;
    Inc(i);
end;
while j<=trunc(abs(x)) do
begin
    pr:=pr/exp(1);
    Inc(j)
end;
Gam:=pr;
end
else Gam:=exp(-x)
end;

function Gamma;
begin {Gamma}
    Gamma:=Simpson(Gam,9,p)
end;

function stud(x,n:Tip):Tip;
begin {stud}
    stud:=Gamma((n+1)/2)/(sqrt(n*pi)*Gamma(n/2)) * exp(-(n+1)/2*ln(1+Sqr(x)/n))
end;

function student;
begin
    student:=Simpson(stud,t,n)
end;

function Simpson;
var i:LongInt;
    h,Integrala,l1,fi,t1:Tip;
begin
    if t=0 then
        Simpson:=0
    else
        begin
            i:=0;
            t1:=0;
            h:=t/NrPasi;
            fi:=f(t1,p);
            Integrala:=fi;
            While t1+h<=t do
                begin
                    fi:=f(t1+h,p);
                    if odd(i+1) then Integrala:=Integrala+4*fi
                    else Integrala:=Integrala+2*fi;
                    Inc(i);
                    t1:=t1+h
                end;
            if odd(i) then Integrala:=Integrala-2*fi
            else Integrala:=Integrala-fi;
            Simpson:=Integrala*h/3
        end
    end;
end;

```

```

procedure QuickSort;
{sortarea unui sir de numere prin metoda QuickSort Lo este rangul elementului cu
care (Encepe sortarea, iar Hi cu care se sfrseste)
procedure Sort(l, r: Integer);
var
  i, j: integer;
  x,y:Tip;
begin
  i := l; j := r; x := a[(l+r) DIV 2];
{Elementul initial are rangul l, ultimul are rangul r. Se (Encepe cautarea primului
element cu cel de la mijlocul sirului)
  repeat {Se muta acel element p/fna c/fnd ajung (En pozitia finala (adica toate)
    while a[i] < x do i := i + 1; {elementele din stfnga sa sunt mai mici ca el}
    while x < a[j] do j := j - 1; {iar cele din dreapta sa mai mari ca el}
    if i <= j then
      begin
        y := a[i]; a[i] := a[j]; a[j] := y;
        i := i + 1; j := j - 1;
      end;
    until i > j;
  if l < j then Sort(l, j); {Se aranjeaza bucata din stfnga sirului}
  if i < r then Sort(i, r); {Se aranjeaza bucata din dreapta sirului}
end;

begin {QuickSort};
  Sort(Lo,Hi);
end;
end.

```

Programul PARAM χ^2

Anexa 13

```

{$N+}
unit hipatrat;

interface
uses Treduct;
function max(x:Valori;dim:integer):Tip;
{Calculeaza elementul maxim al unui sir x cu dim elemente}
function min(x:Valori;dim:integer):Tip;
{Calculeaza elementul minim al unui sir x cu dim elemente}
function valoarea_centrala(var y:Tip;dim:integer):Tip;
{Calculeaza valoarea centrala a unui sir x cu dim elemente}
function amplitudinea(x:Valori;dim:integer):Tip;
{Calculeaza amplitudinea unui sir x cu dim elemente}
function media_aritmetica(var y:Tip;dim:integer):Tip;
{Calculeaza media aritmetica a unui sir x cu dim elemente}
function dispersia(x:Valori;m:Tip;n:NrEl;dim,NrK:integer):Tip;
{Calculeaza dispersia unui sir de dim valori, ce (Encep cu y}
function abaterea_medie(x:Valori;m:Tip;n:NrEl;dim,NrK:integer):Tip;
{Calculeaza abaterea medie patratice a unui sir de dim valori ce (Encep cu y}
function coeficientul_de_variatie(x:Valori;m:Tip;n:NrEl;dim,NrK:integer):Tip;
{Calculeaza coeficientul de variatie al unui sir de dim valori, ce (Encep cu y}

implementation
function max;
{Calculeaza maximul unui sir de numere}
var i:integer;

```



```

    maxim:Tip;
begin
    maxim:=x[1];
    for i:=1 to dim do if x[i]>maxim then maxim:=x[i];
    max:=maxim
end;

function min;
{Calculeaza minimul unui sir de numere}
var i:integer;
    minim:Tip;
begin
    minim:=x[1];
    for i:=1 to dim do if x[i]<minim then minim:=x[i];
    min:=minim
end;

function valoarea_centrala;
var x:Valori absolute y;
begin
    valoarea_centrala:=(min(x,dim)+max(x,dim))/2
end;

function media_aritmetica;
var s:Tip;
    i:integer;
    x:Valori absolute y;
begin
    s:=0;
    for i:=1 to dim do s:=s+x[i];
    media_aritmetica:=s/dim
end;
function dispersia;
var i,k:integer;
    s:Tip;
begin
    s:=0;
    i:=1;
    for k:=1 to NrK do
    begin
        s:=s+n[k]*Sqr(x[k]-m);
        Inc(i)
    end;
    dispersia:=s/dim
end;
function abaterea_medie;
begin
    abaterea_medie:=Sqrt(dispersia(x,m,n,dim,NrK))
end;
function amplitudinea;
begin
    amplitudinea:=max(x,dim)-min(x,dim)
end;
function coeficientul_de_variatie;
begin
    coeficientul_de_variatie:=abaterea_medie(x,m,n,dim,NrK)/m
end;

end.
```

Programul COEFFPAR

Anexa 14

```

{$N+}
program coefpar;
uses procedur,Crt,tract,hipatrat,tabele;
var i,j,P0:integer;
  {Indici. De obicei i va indica traductorul, j va indica a numarul de ordine
  al citirii curente, iar P0 va indica pozitia ultimei citiri de zero}
  R_xy:array[1..15] of Tip;
  {Coeficientul de corelatie al sirului de presiuni cu sirul de citiri}
  a:array[1..2,1..15] of Tip;
  {coeficientii calculati prin metoda celor mai mici patrate pentru curba
  ce aproximeaza citirile de la puntea tensiometrica}
  eps,Sx,Sy,y2,xy,x4,x2y,x3,x2:Tip;
  {eps - valorile curbei obtinute prin metoda celor mai mici patrate.
  Celelalte sunt variabile de lucru (diferite sume)}
  y_1,y_2,y_0:Matrice;
  {y_1 reprezinta citirile relative la citirea de zero de incarcare.
  y_2 reprezinta citirile relative la citirea de zero de descarcare.
  y_0 reprezinta citirile absolute.
  Din fiecare sir se vor elimina unele valori, prin anulare.}
  schimbare:boolean;
  {Se foloseste pentru a indica reluarea calculului coeficientilor a1 si a2,
  En cazul unor modificari asupra sirurilor y_1, y_2 sau y_0.}
  csi:Valori;
  {Valorile calculate ale abatelor relative ale citirilor si}
  NrCsi:integer;
  {Numarul de abateri ramase dupa eliminarea celor nedorite}
  f_r,f_a,f_xi,f_v:text;{fisierile ce contin tabelele cu valori}
  NrK:integer;{Numarul de clase}
  n:NrEl;{Tablou cu numarul de elemente din fiecare clasa}
  val:valori;{valoarea medie a fiecarei clase}
  m,amp,am:Tip;{media, amplitudinea si abaterea medie}
  p:valori;{Probabilitatile teoretice}
  hi_patrat:Tip;{Valoarea calculata pentru testul hi patrat}
  NivIncr:Tip;{Nivelul de incredere}
begin {program}
  Assign(f_r,'Corelat.dat');
  Assign(f_a,'Coef.dat');
  Assign(f_xi,'xi.dat');
  Assign(f_v,'valori.dat');
  ClrScr;
  y_0:=y;{Citirile de zero, inainte de a elimina vreuna}
  {Se construiesc valorile relative pe baza citirilor}
  for i:=1 to NrTrad do
  begin {for i}
  {Mai intai cele fata de citirea de zero de incarcare, y_1}
  for j:=1 to NrMaxX do {for j}
    if x[j]=0 then
    begin
      y_1[i,j]:=0;{Citirile de zero sunt interpretate ca zerouri}
      P0:=j {Pozitia citirii de zero de incarcare}
    end
    else
      y_1[i,j]:=y[i,j]-y[i,P0];
    {Celelalte sunt valori relative la citirile de zero fata de citirea de incarcare}
  {Apoi cele fata de citirea de zero de descarcare, y_2}
  for j:=NrMaxX downto 1 do
    if x[j]=0 then
    begin

```

```

    y_2[i,j]:=0;{Citirile de zero sunt interpretate ca zerouri}
    P0:=j      {Pozitia citirii de zero de descarcare}
  end
  else
    y_2[i,j]:=y[i,j]-y[i,P0];{Celelalte sunt valori relative la citirile}
  end; {for i, for j}      {de zero fata de citirea de descarcare}
}
{
Ciclul prin care se elimina valorile cu abateri prea mari
}
repeat {Se reia totul pana cand nu mai apar abateri mai mari decat cea admisa}
{
Capul de tabel pentru fisierul cu coeficientii de corelatie
}
  Rewrite(f_r);
  WriteLn(f_r,' Coeficientii de corelatie');
  WriteLn(f_r,' -----');
  WriteLn(f_r);
  {Randul de sus}
  Write(f_r,SSusSp);
  for j:=1 to 17 do Write(f_r,OSp);
  for i:=1 to NrTrad do
  begin
    Write(f_r,MSusSp);
    for j:=1 to 5 do Write(f_r,OSp)
  end;
  WriteLn(f_r,DSusSp);
  {Randul cu denumirile traductoarelor}
  Write(f_r,VSp,'Traductor numarul');
  for i:=1 to NrTrad do Write(f_r,VSp,(((i-1) div 3+1) *10)+(i-1) mod 3+1:5);
  WriteLn(f_r,VSp);
  {Randul despartitor}
  Write(f_r,MSSp);
  for j:=1 to 17 do Write(f_r,OSp);
  for i:=1 to NrTrad do
  begin
    Write(f_r,CruceSp);
    for j:=1 to 5 do Write(f_r,OSp)
  end;
  WriteLn(f_r,MDSp);
  Write(f_r,VSp,'Coef. corel. (%) ');
}
{
Capul de tabel pentru fisierul cu coeficientii a1 si a2
}
  Rewrite(f_a);
  WriteLn(f_a,' Coeficientii curbei ce aproximeaza citirile facute');
  WriteLn(f_a,' -----');
  WriteLn(f_a);
  {R/ndul de sus}
  Write(f_a,SSusSp);
  for j:=1 to 9 do Write(f_a,OSp);
  for i:=1 to 2 do
  begin
    Write(f_a,MSusSp);
    for j:=1 to 8 do Write(f_a,OSp)
  end;
  WriteLn(f_a,DSusSp);
  {R/ndul titlu}
  Write(f_a,VSp,'Trad. nr. ');
  for i:=1 to 2 do Write(f_a,VSp,'a':4,i,"":3);

```

```

WriteLn(f_a,VSp);
{Randul despartitor la fisierul cu coeficientii a1 si a2}
Write(f_a,MSSp);
for j:=1 to 9 do Write(f_a,OSp);
for i:=1 to 2 do
begin
  Write(f_a,CruceSp);
  for j:=1 to 8 do Write(f_a,OSp)
end;
WriteLn(f_a,MDSp);
schimbare:=false; {Se porneste de la premisa ca nu se mai fac schimbări}
for i:=1 to NrTrad do {Calculul coeficientilor Rxy si a1, a2}
begin {for i}
  xy:=produs(x,y_1[i],y_2[i],NrMaxX,1,1);
  x4:=suma(x,y_1[i],NrMaxX,4)+suma(x,y_2[i],NrMaxX,4);
  x2y:=produs(x,y_1[i],y_2[i],NrMaxX,2,1);
  x3:=suma(x,y_1[i],NrMaxX,3)+suma(x,y_2[i],NrMaxX,3);
  x2:=suma(x,y_1[i],NrMaxX,2)+suma(x,y_2[i],NrMaxX,2);
  y2:=suma(y_1[i],y_2[i],NrMaxX,2);
  Sx:=suma(x,y_1[i],NrMaxX,1)+suma(x,y_2[i],NrMaxX,1);
  Sy:=suma(y_1[i],y_2[i],NrMaxX,1);
  R_xy[i]:=((NrX[1,i]+NrX[2,i])*xy-Sy*Sx)/sqrt(((NrX[1,i]+NrX[2,i])*x2-Sqr(Sx))*((NrX[1,i]+NrX[2,i])*y2-
Sqr(Sy)));
  {Coeficient de corelatie}
  a[1,i]:=(xy*x4-x2y*x3)/(x2*x4-Sqr(x3)); {Coeficientii curbei aproximative}
  a[2,i]:=(x2y*x2-x2y*x3)/(x2*x4-Sqr(x3)); {obtinuti cu metoda c.m.m.p}
{Randul cu coeficientii de corelatie}
  Write(f_r,VSp,R_xy[i]*100:5:1);
{Randul cu coeficientii a1 si a2}
  WriteLn(f_a,VSp,(((i-1) div 3+1) *10)+(i-1) mod 3+1:6,VSp:4,a[1,i]:8:5,VSp,a[2,i]:8:5,VSp);
  if i<NrTrad then
{Randul despartitor la fisierul cu coeficientii a1 si a2}
  begin {if i}
    Write(f_a,MSSp);
    for j:=1 to 9 do Write(f_a,OSp);
    for P0:=1 to 2 do
    begin
      Write(f_a,CruceSp);
      for j:=1 to 8 do Write(f_a,OSp)
    end;
    WriteLn(f_a,MDSp)
  end {if i ... then}
  else
{Ultimul randul la fisierul cu coeficientii a1 si a2}
  begin {if i ... else}
    Write(f_a,SJosSp);
    for j:=1 to 9 do Write(f_a,OSp);
    for P0:=1 to 2 do
    begin
      Write(f_a,MJosSp);
      for j:=1 to 8 do Write(f_a,OSp)
    end;
    WriteLn(f_a,DJosSp)
  end {if i ... else}
end; {for i}
WriteLn(f_r,VSp);
{Ultimul rand din fisierul cu coeficientii de corelatie}
Write(f_r,SJosSp);
for j:=1 to 17 do Write(f_r,OSp);

```

```

for i:=1 to NrTrad do
begin
  Write(f_r,MJosSp);
  for j:=1 to 5 do Write(f_r,OSp)
end;
WriteLn(f_r,DJosSp);
{
Capul de tabel pentru fisierul cu abaterile relative ale citirilor
}
ReWrite(f_xi);
WriteLn(f_xi,'      Tabel cu erorile relative ale citirilor');
WriteLn(f_xi,'      -----');
WriteLn(f_xi);
{Rfndul de sus}
Write(f_xi,SSusDb);
for j:=1 to 6 do Write(f_xi,ODb);
for i:=1 to NrMaxX-1 do
begin
  Write(f_xi,MSusDb);
  if x[i]=0 then P0:=9 else p0:=2*9+1;
  for j:=1 to P0 do Write(f_xi,ODb)
end;
WriteLn(f_xi,DSusDb);
{Rfndul cu valorile presiunilor}
Write(f_xi,VDb);
Write(f_xi,'Tradp');
for i:=1 to NrMaxX-1 do
begin
  Write(f_xi,VDb);
  if x[i]=0 then Write(f_xi,0:5,":4) else Write(f_xi,x[i]:11:1,":8)
end;
WriteLn(f_xi,VDb);
{Rfndul despartitor}
Write(f_xi,MSDb);
for j:=1 to 6 do Write(f_xi,ODb);
for i:=1 to NrMaxX-1 do
begin
  Write(f_xi,CruceDb);
  if x[i]=0 then
    for j:=1 to 9 do Write(f_xi,ODb)
  else
    begin
      for j:=1 to 9 do Write(f_xi,ODb);
      Write(f_xi,MSusODbVSp);
      for j:=1 to 9 do Write(f_xi,ODb)
    end;
end;
WriteLn(f_xi,MDDb);
{
Calculul abaterilor xi
}
NrCsi:=0;{Se incepe numaratoarea abaterilor}
for i:=1 to NrTrad do
begin {for i}
  Write(f_xi,VDb,(((i-1) div 3+1) *10)+(i-1) mod 3+1:4,":2);
  for j:=1 to NrMaxX-1 do
  begin {for j}
    eps:=a[1,i]*(x[j])+a[2,i]*Sqr(x[j]);
    {Se calculeaza valoarea curbei obtinute, pentru presiunea curenta}

```

```

if x[j]<>0 then {Daca nu e o citire de zero}
begin {if x[j]<>0}
  {Se analizeaza abaterea fata de citirea de incarcare}
  if y_1[i,j]<>0 then {Daca valoarea citita nu a fost eliminata}
  begin {if y_1[j]<>0}
    Inc(NrCsi);{Se mai gaseste o abatere}
    Csi[NrCsi]:=xi(y_1[i,j],eps);{Se calculeaza abaterea}
    if abs(Csi[NrCsi])>=eroare then {Daca depaseste valoarea admisa se elimina}
    begin
      Write(f_xi,VDb,'ò':3,eroare,'%',"");
      Dec(NrX[1,i]);{Se micsoreaza numarul de abateri fata de citirea de incarcare}
      Dec(NrCsi);{Se micsoreaza numarul de abateri}
      schimbare:=true;{Se semnaleaza modificarea, deci calculele se reiau}
      y_1[i,j]:=0{Se elimina, prin anulare, aceasta valoare}
    end
  else Write(f_xi,VDb,Csi[NrCsi]:9:5)
  end {if y_1[j]<>0}
  else
    Write(f_xi,VDb,'ò':3,eroare,'%',"");
    {Se analizeaza abaterea fata de citirea de descarcare}
    if y_2[i,j]<>0 then {Daca valoarea citita nu a fost eliminata}
    begin {if y_2[j]<>0}
      Inc(NrCsi);{Se mai gaseste o abatere}
      Csi[NrCsi]:=xi(y_2[i,j],eps);{Se calculeaza abaterea}
      if abs(Csi[NrCsi])>=eroare then {Daca depaseste valoarea admisa se elimina}
      begin
        Write(f_xi,VSp,'ò':3,eroare,'%',"");
        Dec(NrX[2,i]);{Se micsoreaza numarul de abateri fata de citirea de descarcare}
        Dec(NrCsi);{Se micsoreaza numarul de abateri}
        schimbare:=true;{Se semnaleaza modificarea, deci calculele se reiau}
        y_2[i,j]:=0{Se elimina, prin anulare, aceasta valoare}
      end
    else Write(f_xi,VSp,Csi[NrCsi]:9:5)
    end {if y_2[j]<>0}
  else
    Write(f_xi,VSp,'ò':3,eroare,'%',"");
  end {if x[j]<>0 then}
  else {Daca a fost o citire de zero}
  if y_0[i,j]<>0 then {Daca valoarea citita nu a fost eliminata}
  begin {if y_0[i,j]<>0}
    Inc(NrCsi);{Se mai gaseste o abatere}
    Csi[NrCsi]:=xi0(x,y_0[i,j],NrMaxX,a[1,i],a[2,i]);{Se calculeaza abaterea}
    if abs(Csi[NrCsi])>=eroare then {Daca depaseste valoarea admisa se elimina}
    begin
      Write(f_xi,VDb,'ò':3,eroare,'%',"");
      Dec(NrCsi);{Se micsoreaza numarul de abateri}
      schimbare:=true;{Se semnaleaza modificarea, deci calculele se reiau}
      y_0[i,j]:=0{Se elimina, prin anulare, aceasta valoare}
    end
  else Write(f_xi,VDb,Csi[NrCsi]:9:5)
  end {if y_0[i,j]<>0, if x[j]<>0 else}
  else
    Write(f_xi,VDb,'ò':3,eroare,'%',"");
  end; {for j}
  WriteLn(f_xi,VDb);
  if i<NrTrad then
  {R/ndul despartitor}
  begin
    Write(f_xi,MSOSpVDb);

```

```

for j:=1 to 6 do Write(f_xi,OSp);
for P0:=1 to NrMaxX-1 do
begin
  Write(f_xi,CruceOSpVDb);
  if x[P0]=0 then
    for j:=1 to 9 do Write(f_xi,OSp)
  else
    begin
      for j:=1 to 9 do Write(f_xi,OSp);
      Write(f_xi,CruceSp);
      for j:=1 to 9 do Write(f_xi,OSp)
    end;
  end;
  WriteLn(f_xi,MDOSpVDb)
end
else
{R/ndul de sf/rsit}
begin
  Write(f_xi,SJosDb);
  for j:=1 to 6 do Write(f_xi,ODb);
  for P0:=1 to NrMaxX-1 do
    begin
      Write(f_xi,MJosDb);
      if x[P0]=0 then
        for j:=1 to 9 do Write(f_xi,ODb)
      else
        begin
          for j:=1 to 9 do Write(f_xi,ODb);
          Write(f_xi,MJosODbVSp);
          for j:=1 to 9 do Write(f_xi,ODb)
        end
      end;
      WriteLn(f_xi,DJosDb)
    end
  end; {for i}
until not schimbare;{Se repeta calculele, pana nu se mai fac modificari}
Close(f_r);
Close(f_a);
Close(f_xi);
{
Se aranjeaza vectorul cu abateri Ćn ordine crescatoare, cu metoda QuickSort
}
QuickSort(csi,1,NrCsi);
m:=media_aritmetica(Csi[1],NrCsi);
amp:=amplitudinea(Csi,NrCsi);
NrK:=round(1+ln(NrCsi)/ln(2));{Numarul de clase}
j:=1;{j precizeaza elementul care se prelucraza}
for i:=1 to NrK do
begin
  n[i]:=0;{Se numara elementele din clasa i}
  while (j<=NrCsi) and (Csi[j]<=min(Csi,NrCsi)+i*amp/NrK) do
  begin
    {se imparte sirul de valori Ćn NrKclase}
    Inc(n[i]);{Se creste numarul de elemente din clasa}
    Inc(j){Se trece la urmatorul element}
  end
end;
repeat {Contopirea ultimei clase, pana la obtinerea a cel puțin 5 elemente}
  schimbare:=false;
  if n[NrK]<5 then

```

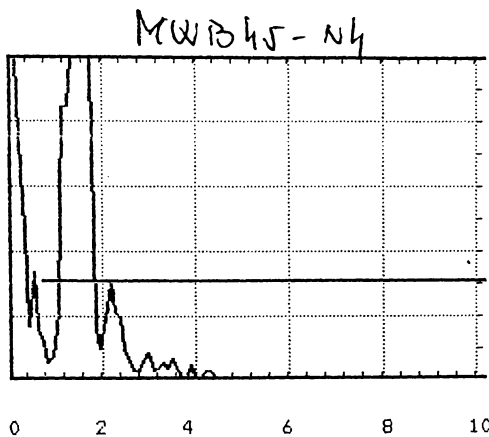
```

begin
  n[NrK-1]:=n[NrK-1]+n[NrK];
  Dec(NrK);
  schimbare:=true
end
until not schimbare;
repeat {Contopirea primei clase, pana la obtinerea a cel putin 5 elemente}
  schimbare:=false;
  if n[1]<5 then
  begin
    n[1]:=n[1]+n[2];
    for j:=2 to NrK-1 do n[j]:=n[j+1];
    Dec(NrK);
    schimbare:=true
  end
until not schimbare;
p0:=1;{Se calculeaza reprezentatul clasei i}
for i:=1 to NrK do
begin
  val[i]:=media_aritmetica(csi[p0],n[i]);
  p0:=p0+n[i]
end;
am:=abaterea_medie(val,m,n,NrCsi,NrK);
ReWrite(f_v);
WriteLn(f_v,'Media aritmetica este : ',m:7:5,^M);
WriteLn(f_v,'Valoarea centrala este : ',valoarea_centrala(Csi[1],NrCsi):7:5,' %',^M);
WriteLn(f_v,'Abaterea medie patratica este : ',am:7:5,' %',^M);
WriteLn(f_v,'Dispersia este : ',Dispersia(val,m,n,NrCsi,NrK):7:5,' (%)',^M);
WriteLn(f_v,'Amplitudinea este : ',amp:7:5,' %',^M);
WriteLn(f_v,'Coeficientul de variatie este : ',Coeficientul_de_variatie(val,m,n,NrCsi,NrK):7:5,^M);
{Calculul probabilitatilor teoretice}
p[1]:=Normala((Csi[n[1]]-m)/am)+0.5;
p0:=n[1];
for i:=2 to NrK-1 do
begin
  p0:=p0+n[i];
  p[i]:=Normala((Csi[p0]-m)/am)-Normala((Csi[p0-n[i]]-m)/am)
end;
p[NrK]:=0.5-Normala((Csi[p0]-m)/am);
{Testul Hiý}
Hi_patrat:=0;
for i:=1 to NrK do
  hi_patrat:=hi_patrat+Sqr(n[i]-NrCsi*p[i])/(NrCsi*p[i]);
WriteLn(f_v,'Hiý=' ,Hi_patrat:7:5,^M);
WriteLn(f_v,'Numarul de grade de libertate este : ',NrK-1,^M);
i:=1;{Se calculeaza Nivelul de incredere}
while (i<=NrNiveluri) and (NrCsi>Nivelul_de_incredere[i,1]) do Inc(i);
  if i>1 then NivIncr:=Nivelul_de_incredere[i-1,2]
  else NivIncr:=Nivelul_de_incredere[1,2];
WriteLn(f_v,'Nivelul de incredere : ',NivIncr:7:5,^M);
i:=1;
while (i<=NrHi2) and (NivIncr>=Hi2[NrK-1,i,1]) do
  Inc(i);
if ((i<=NrHi2) and (i>1)) or ((i=22) and (NivIncr>Hi2[NrK-1,i,1])) then Dec(i);
WriteLn(f_v,'Hiýcritic=' ,Hi2[NrK-1,i,2]:7:5,^M);
if Hi_Patrat<=Hi2[NrK-1,i,2] then WriteLn(f_v,'Se verifica ipoteza de normalitate')
else WriteLn(f_v,'Nu se verifica ipoteza de normalitate');
Close(f_v)
end

```

end

USK 7 D - Inspection Report



HEIGHT 102 % DEPTH 5.4 MM RPD -7.6 MM

Instrument adjustment:

GAIN	57.5 DB	PULSER	0 LOW	aTHRSH	30 %
RANGE	120 MM	REJECT	0 %	aSTART	9.0 MM
MTVEL	3897 M/S	FREQ	0 1-5	aWIDTH	595 MM
DELAY	4.0 US				
DATA-#	18	DSPLAY	0 FULL	PRF	1 MED
ZERO	6.35 US	ECHO	0 1.	MODE	2 ANGL
ANGLE	45 GRD	THICK	45 MM	X-VAL	13 MM

Inspection data:

Job number:	Test object:	Material:
Specification:	Test class:	Probe:
Instruction:		

Notății

a	- semiaxa mare a elipsei
a_n	- termen al polinomului $\bar{T}(x)$
b	- semiaxa mică a elipsei
b'	- modulul funcției $\bar{T}(x)$ când aceasta are o variație exponențială
b_n	- termen al polinomului $T^*(x)$
c'	- termen funcției $T^*(x)$ când aceasta variază exponențial
d_0	- diametrul epruvetei
dA	- element de suprafață infinit vecină punctului P
dS_φ	- element de arc pe curba meridiană infinit vecin punctului P
dS'_φ	- lungimea arcului dS_φ după deformare
$dS_{\varphi z}$	- lungimea elementului de arc la distanța z orientat în direcție meridiană
dS_θ	- element de arc circumferențial în vecinătatea punctului P
dS'_θ	- lungimea arcului dS_θ după deformare
$dS_{\theta z}$	- lungimea elementului de arc la distanța z orientat în direcție circumferențială
f	- nivelul lichidului în rezervorul sferic deasupra diametrului de rezemare
f_i	- funcții reale independente ($i=1, \dots, 4$)
f'_i	- derivata funcției f_i
g_i	- funcții dependente de f_i , f'_i , ν și φ/r_2
h	- grosimea învelitorii
h_s'	- grosimea învelitorii inclusiv a întăriturii în zona de penetrație
k	- factor de intensitate a tensiunii
k_c	- factor de intensitate statică a tensiunii
k_{Ic}	- factor de intensitate statică a tensiunii pentru nodul I de rupere
k_{IIc}	- factor de intensitate statică a tensiunii pentru nodul II de rupere
k_{IIIc}	- factor de intensitate statică a tensiunii pentru nodul III de rupere
k_D	- factor de intensitate dinamică a tensiunii
k_{ID}	- factor de intensitate dinamică a tensiunii pentru nodul I
k_{IID}	- factor de intensitate dinamică a tensiunii pentru nodul II
k_{IIID}	- factor de intensitate dinamică a tensiunii pentru nodul III
l	- lungimea epruvetei
p	- forță exterioară
p_φ	- componenta forței exterioare care acționează tangențial și este dirijată în sens meridian
p_θ	- componenta forței exterioare care acționează tangențial și este dirijată în sens circumferențial
p_r	- componenta forței externe dirijată normal la elementul de suprafață
p_x	- componenta forței externe pe direcția x
q	- intensitatea greutății proprii pe unitatea de suprafață a calotei sferice
r	- raza învelitorii cilindrice
r_c	- raza epruvetei
r_0	- raza cercului paralel al învelitorii de revoluție
r_2	- raza de curbură în planul perpendicular pe planul meridian
t_f	- timpul până la inițierea fisurii

u	- deplasarea circumferențială
v	- deplasarea meridiană
v_f	- viteza de creștere a forței până în momentul inițierii fisurii
v_D	- valoarea de deformare plastică
v_{pc}	- coeficient de influență asupra rotirii V_c datorată efortului p
v_{Hs}	- coeficient de influență asupra rotirii V_c datorată efortului H_c
v_{Mc}	- coeficient de influență asupra rotirii V_c datorată efortului M_c
v_{Hs}	- coeficient de influență asupra rotirii V_s datorată efortului p
v_{Hs}	- coeficient de influență asupra rotirii V_s datorată efortului H_s
v_{Ms}	- coeficient de influență asupra rotirii V_s datorată efortului M_s
w	- deplasarea radială
z	- distanța de la suprafața mediană la altă suprafață paralelă cu suprafața mediană
A	- constantă determinabilă din condițiile de margine ale învelitorii
A_i	- constantă determinabilă din condițiile de margine ($i=1, \dots, 4$)
A_n	- coeficient al funcției V când această funcție variază polinomial
B_n	- coeficient al funcției Q_φ când această funcție variază polinomial
A'	- coeficient al funcției V când această funcție variază exponențial
B'	- coeficient al funcției Q_φ când această funcție variază exponențial
C_i	- constante reale ($i=1, \dots, 4$)
D	- constantă dependentă de E , h^2 și ν^2
E	- modul de elasticitate longitudinală
F	- valoarea maximă a forței de forfecare
F_d	- valoarea forței în momentul inițierii ruperii
F_{max}	- forța tăietoare maximă
G	- modulul de elasticitate transversală
G_i	- funcție de f_i , F_i , ν , $\text{ctg } \varphi$ și r_2
H	- componentă a efortului care acționează în planul paralel al învelitorii încărcate axial simetric
H_c	- forța tăietoare orizontală pe cilindru la penetrarea în sferă
H_0	- forța orizontală pe sferă în zona de penetrare a cilindrului
I_p	- momentul de inerție polar al secțiunii
J	- valoarea integralei de deformare în vecinătatea fisurii
J_c	- valoarea a integralei J corespunzătoare nivelului deplasării punctului de aplicare a forței la care a început propagarea instabilă a fisurii
K	- constantă dependentă de E , h^2 și ν^2
M_c	- momentul limitei de curgere
M_e	- momentul limitei de elasticitate
M_{tmax}	- momentul de tensiune maximă aplicată
M_{trup}	- momentul când se produce ruperea
M_0	- momentul care produce încovoiere pe marginea $x=0$ a unui cilindru suficient de lung.
M_x	- moment pe învelitoarea cilindrică în planul care conține generatoarea și este perpendicular pe învelitoare
M_{x0}	- moment care produce încovoiere pe marginile libere ale unui cilindru supus la temperaturi joase
M_α	- moment distribuit dealungul conturului calotei
M_φ	- moment de încovoiere în plan circumferențial care acționează

	asupra secțiunii mărginită de arcul dS_φ
$M_{\theta x}$	- moment de răsucire în planul generatoarei x care acționează asupra secțiunii delimitate de segmentul dx
M_φ	- moment de încovoiere în plan meridian care acționează asupra secțiunii mărginită de arcul dS_θ
$M_{\theta\varphi}$	- moment de răsucire în plan meridian care acționează asupra secțiunii elementului mărginită de arcul dS_θ
$M_{\varphi\theta}$	- moment de răsucire în plan circumferențial care acționează asupra secțiunii elementului mărginită de arcul dS_φ
$(M_\theta)_{x=0}$	- moment pe marginea liberă a învelitorii cilindrice supuse temperaturii joase și situat în plan circumferențial
N_x	- efort normal pe secțiunea elementului de suprafață mărginită de arcul dS_θ la cilindru
N_θ	- efort normal pe secțiunea elementului de suprafață mărginită de arcul dS_φ
N_φ	- efort normal pe secțiunea elementului de suprafață mărginită de arcul dS_θ
$N_{\theta\varphi}$	- efort în planul tangențial al elementului de suprafață mărginit de arcul dS_φ
$N_{\varphi\theta}$	- efort în planul tangențial al elementului de suprafață mărginit de arcul dS_θ
$N_{x\theta}$	- efort în planul tangențial al secțiunii mărginite de arcul dS_θ
$N_{\theta x}$	- efort în planul tangențial al secțiunii mărginite de segmentul dx
	- efortul circumferențial pe marginea unei învelitori cilindrice
$(N_\theta)_{x=0}$	
P	- punct pe suprafața mediană la intersecția unei curbe meridiane cu planul cercului paralel de rază r_0
P'	- poziție ocupată de punctul P după deformare
P_c	- forță uniform distribuită circular pe circumferința cilindrului care penetrează calota sferică
\bar{p}	- forța distribuită pe secțiunea cilindrului care penetrează sfera și este supus unui moment exterior total M
Q	- punct în vecinătatea punctului P și situat pe arcul dS_θ
Q'	- poziția ocupată de punctul Q după deformare
Q_θ	- efortul tăietor care acționează asupra secțiunii mărginite de arcul dS_φ
Q_φ	- efortul tăietor care acționează asupra secțiunii mărginite de arcul dS_θ
Q_x	- efortul tăietor care acționează asupra secțiunii mărginite de arcul dS_θ și se află în planul circumferențial al învelitorii cilindrice
Q_0	- forță tăietoare pe marginea unui cilindru suficient de lung
$(Q_x)_{x=0}$	- forță tăietoare pe marginea unui cilindru suficient de lung pentru $x=0$
R	- raza învelitorii sferice
R_f	- rezistența de forfecare
R_{c0}	- raza la vârful unei fisuri
S	- punct pe arcul dS_θ infinit vecin punctului P
S_f	- secțiune de forfecare pură

S'	- poziția punctului S după deformare
T	- temperatura în K
T_0	- integrală definită a funcției $T(z)$
T_1	- integrală dublă a funcției $zT(z)$
$T(\varphi, z)$	- gradient de temperatură
$\bar{T}(\varphi)$	- primul termen al gradientului $T(\varphi, z)$
$\bar{\bar{T}}(\varphi)$	- al doilea termen al gradientului $T(\varphi, z)$
T_a	- antitemperatură
U	- tenacitate la rupere
V	- rotirea tangentei la meridian în punctul P
V_c	- rotirea tangentei pe joncțiune la cilindru
V_e	- rotirea tangentei pe joncțiune la elipsă
V_s	- rotirea tangentei pe joncțiune la sferă
\mathfrak{R}	- sarcina totală care acționează asupra porțiunii de învelitoare mărginită inferior de cercul de rază r_0
α	- jumătatea unghiului calotei sferice
α_T	- coeficient de dilatare liniară
α_p	- coeficient de concentrare a tensiunii asupra cilindrului penetrat axial simetric
α_m	- coeficient de concentrare a tensiunii când asupra cilindrului penetrat acționează un moment M
α_t	- coeficient de concentrare a tensiunii când asupra cilindrului penetrat acționează o forță tăietoare T
β	- valoare dependentă de ν^2, r^2 și h^2
β_1	- unghiul dintre tangenta în punctul P și arcul dS_φ
β_2	- unghiul dintre tangenta în punctul P' și arcul dS'_φ
γ_1	- unghiul dintre arcul dS'_φ și arcul dS_φ
γ_2	- unghiul dintre tangenta în punctul P' și arcul dS'_φ
γ_{max}	- alunecarea specifică maximă
$\gamma_{\varphi p}$	- alunecarea specifică în planul tangent învelitorii în punctul P
$(\gamma_{\varphi p})_z$	- alunecarea specifică totală la nivel z în planul tangent învelitorii
$\gamma_{\theta x}$	- răsucirea în planul tangent în P al învelitorii cilindrice
δ	- deplasarea radială a cercului paralel
δ_c	- deplasarea pe marginea învelitorii cilindrice a unei joncțiuni
δ_e	- deplasarea pe marginea învelitorii eliptice a unei joncțiuni
δ_s	- deplasarea pe marginea învelitorii sferice a unei joncțiuni
δ_{pc}	- coeficient de influență a deplasării la învelitoarea cilindrică sub acțiunea presiunii uniforme p_c
δ_{Hc}	- coeficient de influență a deplasării la învelitoarea cilindrică sub acțiunea forței tăietoare uniform distribuite H_c
δ_{Mc}	- coeficient de influență a deplasării la învelitoarea cilindrică datorită momentului unitar uniform distribuit M_c
δ_{ps}	- coeficient de influență a deplasării la învelitoarea sferică datorită presiunii uniforme p_s
δ_{Hs}	- coeficient de influență a deplasării la învelitoarea sferică datorită forței tăietoare uniform distribuite H_s
δ_{Ms}	- coeficient de influență a deplasării la învelitoarea sferică datorită momentului unitar uniform distribuit M_s

ε_{θ}	-	deformația specifică circumferențială
ε_{φ}	-	deformația specifică în direcție meridiană
ε_r	-	alungirea de rupere
ε_x	-	deformația specifică în direcția x
$(\varepsilon_{\theta})_z$	-	deformația specifică totală la nivelul z după direcția circumferențială
$(\varepsilon_{\varphi})_z$	-	deformația specifică totală la nivelul z după direcția meridiană
ζ_{β}	-	funcție de forma $e^{-\beta x} \cos \beta x$
λ	-	valoare dependentă de ν^2 , R^2 și h^2
ν	-	coeficient de contracție transversală Poisson
ρ	-	valoare dependentă de r, R și h_s
ρ_l	-	greutate specifică a lichidului din rezervorul sferic
σ_c	-	limita de curgere
σ_m	-	tensiune pe membrană
σ_{max}	-	tensiune maximă pe joncțiune
σ_x	-	tensiune pe direcție axială
σ_{φ}	-	tensiune pe direcție meridiană
σ_{θ}	-	tensiune pe direcție circumferențială
$(\sigma_{\varphi})_z$	-	tensiune pe direcție meridiană la nivelul z
$(\sigma_{\theta})_z$	-	tensiune pe direcție circumferențială la nivelul z
τ_f	-	rezistența la forfecare
τ_{max}	-	tensiunea maximă la forfecare
$\tau_{maxreal}$	-	tensiunea maximă reală la forfecare
τ_{real}	-	tensiunea reală la forfecare
$\tau_{\varphi\theta}$	-	tensiune tangențială la secțiunea mărginită de arcul dS_{φ}
$\tau_{\theta\varphi}$	-	tensiune tangențială limitată de arcul dS_{θ} , orientată în direcție meridiană
χ_x	-	variația curburii pe direcția axială
χ_{φ}	-	variația curburii după direcția meridiană
χ_{θ}	-	variația curburii după direcția circumferențială
$\chi_{\theta x}$	-	răsucirea elementului de învelitoare cilindrică
$\chi_{\theta\varphi}$	-	răsucirea elementului de învelitoare
φ	-	unghiul de definiție a poziției cercului paralel făcut de normala principală OP la suprafața învelitorii de rotație
φ_2	-	unghiul sub care cilindrul penetrant intersectează sfera
$\Phi_{\beta x}$	-	funcție de forma $e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$
Ψ	-	diferența dintre unghiul α și φ
$\Psi_{\beta x}$	-	funcție de forma $e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)$
ω	-	coeficient de amortizare al funcțiilor $\bar{T}(x)$, $T^*(x)$
θ	-	unghi definit pe planul meridian măsurat de la un plan oarecare de referință
$\theta_{\beta x}$	-	funcție de forma $e^{-\beta x} \cos \beta x$
ϕ_1	-	jumătate din deschiderea în jurul penetrației pe care învelitoarea sferică este întărită