

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" TIMIȘOARA  
Facultatea de Electronică și Telecomunicații

621.762  
200 10

*DORINA ISAR*

ÎMBUNĂȚIREA RAPORTULUI  
SEMNAL PE ZGOMOT  
ÎN SISTEMELE DE TELECOMUNICAȚII

Teză de doctorat

BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"  
TIMIȘOARA

Conducător științific  
*Prof. dr. ing. IOAN NAFORNIȚĂ*

21/10/98

Timișoara - 1998



## CUPRINS

|   |    |
|---|----|
| <b>PREFAȚĂ</b> .....  | 1  |
| <b>STRUCTURA ȘI CONȚINUTUL LUCRĂRII</b> .....   | 2  |
| <b>CAPITOLUL 1</b>  |    |
| <b>INTRODUCERE</b> .....  | 5  |
| <b>CAPITOLUL 2</b>  |    |
| <b>ÎMBUNĂTĂȚIREA RSZ PRIN FILTRARE LINIARĂ</b> .....  | 18 |
| 2.1. O nouă modalitate de estimare a benzii echivalente<br>de zgomot a unor filtre trece jos realizabile .....            | 18 |
| 2.2. Utilizarea filtrelor transversale pentru prelucrarea<br>semnalelor periodice .....                                   | 29 |
| 2.3. Benzi echivalente de zgomot ale unor filtre numerice ....  | 34 |
| 2.3.1. Filtru RFI de ordinul N .....  | 34 |
| 2.3.2. Filtru RII .....   | 38 |
| 2.4. Filtre numerice echivalente filtrelor analogice transversale   | 40 |
| 2.5. Utilizarea sistemelor liniare, variabile în timp,<br>la îmbunătățirea RSZ .....                                      | 51 |
| 2.5.1. Filtre cu urmărire .....   | 52 |
| 2.5.2. Filtre adaptive .....  | 52 |
| 2.5.2.1. Conceptul de anulare adaptivă a<br>zgomotului .....  | 53 |
| <b>CAPITOLUL 3</b>  |    |
| <b>TRANSFORMAREA UNDIȘOARĂ DISCRETĂ</b> .....   | 64 |
| 3.1. Codare subbandă cu structură arborescentă .....  | 64 |
| 3.2. Decodarea în urma codării subbandă .....   | 69 |
| 3.3. Codarea subbandă cu reconstrucție perfectă folosind<br>sisteme cu structură arborescentă cu filtre realizabile ..... | 72 |
| 3.4. Meode de proiectare a filtrelor CQF .....  | 78 |
| 3.5. Legătura dintre sistemele de codare în subbenzi și<br>teoria seriilor de undișoare .....                             | 79 |

|   |            |
|---|------------|
| 3.6.Transformarea undișoară discretă TUD . . . . .  | 93         |
| <b>CAPITOLUL 4</b>  |            |
| <b>ÎMBUNĂȚIREA RAPORTULUI SEMNAL PE ZGOMOT</b>  |            |
| <b>PRIN UTILIZAREA TRANSFORMĂRII UNDIȘOARĂ</b>  |            |
| <b>DISCRETĂ . . . . .</b>   | <b>98</b>  |
| 4.1. Analiza statistică a coeficienților TUD ai unui semnal<br>aleator, staționar și ergodic . . . . .            | 98         |
| 4.2. Filtrarea adaptivă neliniară în domeniul transformatei . . .   | 108        |
| 4.3. Analiza noii metode de filtrare în domeniul transformatei  | 120        |
| <b>CAPITOLUL 5</b>  |            |
| <b>REZULTATE EXPERIMENTALE . . . . .</b>  | <b>128</b> |
| 5.1. Programe de simulare conținând metoda adaptivă<br>pentru îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot . . . . . | 128        |
| 5.2. O comparație a programului prezentat cu alte<br>programe de “de-noising” . . . . .                           | 147        |
| 5.3. O comparație a metodei propuse cu alte metode<br>de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot . . . . .     | 151        |
| 5.4. Posibilități de îmbunătățire a metodei de “de-noising”<br>adaptiv . . . . .                                  | 155        |
| <b>CAPITOLUL 6</b>  |            |
| <b>CONCLUZII . . . . .</b>  | <b>160</b> |
| <b>BIBLIOGRAFIE . . . . .</b>   | <b>164</b> |

## PREFAȚĂ

Această teză a fost realizată în cadrul colectivului condus de domnul profesor doctor inginer IOAN NAFORNIȚĂ, ale cărui calități științifice și pedagogice au contribuit în mare măsură la definitivarea prezentei teze. Alegerea acestei teme s-a concretizat la propunerea domnului profesor doctor inginer IOAN NAFORNIȚĂ, față de care doctorandul își exprimă întreaga sa recunoștință. Autoarea tezei mulțumește domniei sale pentru îndemnuri și sfaturi, exigență, solicitudine și disponibilitate, manifestate pe întreaga perioadă de pregătire a tezei.

Dotorandul mulțumește în mod deosebit profesorilor referenți, doamnei profesor doctor inginer ADELAI DA MATEESCU, domnului profesor doctor inginer VIOREL POPESCU, domnului profesor doctor inginer ALEXANDRU ȘERBĂNESCU, domnului profesor doctor inginer ALIMPIE IGNEA, pentru bunăvoința de a fi acceptat să parcurgă lucrarea și pentru aprecierile și recomandările făcute.

Dintre colegi, autoarea mulțumește în mod deosebit domnului șef lucrări Tibor Asztalos pentru ajutorul oferit la elaborarea primelor programe și soțului, conferențiar doctor inginer Alexandru Isar, pentru numeroasele discuții constructive avute pe tema tezei. Autoarea este recunoscătoare tuturor colegilor care prin amabilitate, prietenie și competență științifică au încurajat realizarea prezentei teze.

Multe mulțumiri sunt adresate soțului, părinților, socrilor și fiicei pentru sprijinul moral și ajutorul oferit cu dragoste, fără de care finalizarea acestei teze la această dată nu ar fi fost posibilă.

Autoarea este recunoscătoare tuturor profesorilor din Facultatea de Electronică și Telecomunicații din cadrul Universității "Politehnica" din Timișoara, pe care i-a avut ca dascăli și care au contribuit la formarea sa științifică.

## STRUCTURA ȘI CONȚINUTUL LUCRĂRII

În telecomunicații, procesul de transport al informației este inerent afectat de semnale nedorite suprapuse peste semnalul util. În marea majoritate a cazurilor această suprapunere este de tip aditiv. Perturbațiile sunt semnale aleatoare ce apar fie datorită unor cauze naturale (perturbații electrice atmosferice, propagarea unor unde acustice), sau ca urmare a activității omenești (semnale tranzitorii pe liniile de alimentare, impulsuri parazite provenite de la motoare electrice, etc). Astfel de perturbații afectează semnalele de tip Radar, semnalele ce se vehiculează pe cablurile de transmisie submarină, transmiterea informației pe canale de comunicație... . O altă denumire pentru perturbații este aceea de zgomote. Întotdeauna la intrarea unui receptor este prezent un amestec de semnal util și zgomot. Pentru aprecierea părților de semnal util și de zgomot din cadrul semnalului de la intrarea receptorului se folosește așa-numitul raport semnal pe zgomot, RSZ. Această mărime reprezintă raportul dintre puterea semnalului util și puterea zgomotului care compun semnalul de la intrarea în receptor.

Trebuie afirmat că și în cazul sistemelor pur numerice se utilizează noțiunea de RSZ. În acest caz zgomotul este asociat cu distorsiunile produse de sistemul de prelucrare considerat.

În cazul în care RSZ este mic este necesară creșterea sa pentru o bună separare a semnalului util de zgomot, condiție necesară pentru extragerea din semnalul util a informației pe care o poartă. Iată de ce lucrarea de față este dedicată studiului metodelor de creștere a raportului semnal pe zgomot care se utilizează sau s-ar putea utiliza în sistemele de telecomunicații. Se încearcă o prezentare sistematică și unitară a acestor tehnici. Metodele de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot prezentate sunt exemplificate sugestiv. Nu se insistă asupra rezultatelor experimentale ce se pot obține folosind aceste tehnici și nici asupra metodelor de construcție a sistemelor necesare implementării acestor tehnici, dar sunt citate de fiecare dată lucrări care prezintă aceste aspecte. Nici aplicațiile practice ale rezultatelor obținute nu fac obiectul acestei teze. Scopul lucrării de față este doar analiza metodelor de îmbunătățire a RSZ prin prisma teoriei prelucrării semnalelor.

Sistemele responsabile pentru îmbunătățirea raportului semnal pe

zgomot trebuie să se comporte selectiv, nelăsând să treacă zgomotul și lăsând să treacă semnalul util. Acesta este motivul pentru care se folosesc de obicei filtre (sisteme cu comportare selectivă în domeniul frecvență). Aceste filtre pot fi sisteme liniare invariante în timp, sisteme liniare variante în timp sau sisteme neliniare. Amestecul dintre semnalul util și zgomot poate fi aditiv, multiplicativ sau de altă natură. De obicei în studiul sistemelor de telecomunicații se utilizează modelul aditiv. Având în vedere facilitățile de calcul ale modelului de semnal de tip zgomot alb (de bandă limitată sau nu), se va folosi pentru zgomot, preponderent, acest model. Un alt model utilizat, datorită frecvenței sale apariții în practică, este cel al zgomotului în impulsuri.

În capitolul 1 sunt trecute în revistă, succint, principalele tehnici de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot cunoscute.

În capitolul 2 sunt prezentate câteva considerente asupra metodelor de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot prin filtrare liniară. Se insistă asupra noțiunii de bandă echivalentă de zgomot atât pentru filtre analogice cât și pentru filtre numerice. Se prezintă o nouă clasă de filtre numerice al căror răspuns în frecvență este o funcție periodică de perioadă diferită de  $2\pi$  și se studiază calitățile de îmbunătățire a RSZ a acestor filtre. Se studiază și cazul sistemelor liniare cu parametrii variabili în timp din punctul de vedere al creșterii RSZ.

În capitolul 3 se introduce în mod natural transformarea undișoară discretă din perspectiva teoriei codării în subbenzi. Se prezintă legătura dintre transformarea undișoară discretă și teoria seriilor de undișoare.

Capitolul 4 este dedicat metodelor de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot bazate pe utilizarea transformării undișoară discretă.

Au fost alese metodele de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot bazate pe folosirea funcțiilor undișoară deoarece acestea reprezintă cele mai spectaculoase aplicații ale teoriei funcțiilor undișoară care se dezvoltă în prezent. Există numeroase laboratoare în lume ai căror cercetători încearcă să utilizeze teoria funcțiilor undișoară în domeniul telecomunicațiilor. Se face compresie cu funcții undișoară, codare cu funcții undișoară, transmisie multirezoluție și bineînțeles îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot. Poate că principalul avantaj al metodelor de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot bazate pe funcții undișoară asupra altor metode de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot (cum sunt de exemplu cele bazate pe filtrarea adaptivă) este viteza de calcul sporită. Un alt avantaj este că metodele bazate pe utilizarea funcțiilor undișoară realizează în mod intrinsec și o compresie, ceea ce este deosebit de util, ținând seama de caracterul foarte redundant al semnalelor de telecomunicații (vorbitură, imagini).

În acest capitol este evidențiată proprietatea de decorelare pe care o are transformarea undișoară discretă. Pe baza acestei proprietăți, zgomotul care perturbă aditiv semnalul util devine în domeniul transformatei undișoară discretă un zgomot alb. De aceea în domeniul acestei transformate poate fi utilizată oricare dintre tehnicile de extragere a semnalului util din zgomot alb.

Se introduce un nou filtru neliniar adaptiv utilizat în domeniul transformatei undișoară discretă. Se analizează modul în care afectează acest sistem caracteristicile statistice ale semnalelor de la intrarea sa.

În capitolul 5 se prezintă rezultatele experimentale obținute aplicând metoda de creștere a raportului semnal pe zgomot care a fost elaborată în capitolul anterior. Se verifică și se dovedește eficiența utilizării metodei propuse în transmisii numerice și la Radar folosind semnale sintetizate. Metoda a fost verificată și utilizând semnale reale, preluate de la un echipament de testare a calității materialelor textile. Aceste semnale au fost obținute de la Universitatea din Reims Champagne-Ardenne. Rezultatele aplicării metodei propuse în această lucrare sunt comparate cu rezultatele obținute aplicând alte metode moderne de creștere a raportului semnal pe zgomot (separare de surse).

Atât pentru sintetizarea semnalelor utile și a celor patru tipuri de zgomote cât și pentru simularea metodei adaptive de îmbunătățire a RSZ au fost elaborate cinci programe complexe de simulare în limbajul C.

Ultimul capitol este dedicat prezentării concluziilor și contribuțiilor personale.

Evident chestiunea tratată va evolua în viitor dar au fost depuse eforturi ca prezentarea făcută să evidențieze majoritatea rezultatelor cunoscute la ora actuală.

Lucrarea are 179 de pagini. Pe parcursul său sunt citate 242 referințe bibliografice.



## CAPITOLUL 1. INTRODUCERE

Unul dintre dezideratele fundamentale în telecomunicații este transmiterea la o distanță cât mai mare a informației care să poată fi recepționată corect. Dar informația este transportată cu ajutorul semnalelor. În procesul de transport al informației apar inerent semnale nedorite suprapuse peste semnalul util, care afectează conținutul informațional al semnalelor utile (cele care poartă informația). O altă denumire pentru semnalele nedorite este aceea de zgomote. Întotdeauna la intrarea unui receptor este prezent un amestec de semnal util și zgomot. Pentru aprecierea părților de semnal util și de zgomot din cadrul semnalului de la intrarea receptorului se folosește așa-numitul raport semnal pe zgomot, RSZ. Această mărime reprezintă raportul dintre puterea semnalului util și puterea zgomotului care compun semnalul de la intrarea în receptor.

Raportul semnal pe zgomot este un indice global al calității semnalului de la intrarea receptorului. Este vorba de unul dintre primii indici globali utilizați în telecomunicații și este specific transmisiilor analogice.

În prezent se folosesc tot mai mult sisteme de transmisie mixte care înglobează atât subsisteme analogice cât și subsisteme numerice. În cazul transmisiilor numerice se realizează o protecție suplimentară la perturbații folosind tehnicile de codare. Eficiența acestei protecții este apreciată cu ajutorul unui alt indice global, definit ca raportul dintre numărul biților eronați și numărul total de biți, BER. În prezent se obișnuiește ca un sistem de telecomunicații să fie caracterizat de dependența indicelui BER de la ieșire de raportul RSZ de la intrare. Iată de ce și în cazul acestor sisteme este importantă noțiunea de raport semnal pe zgomot. Trebuie afirmat că și în cazul sistemelor pur numerice se utilizează noțiunea de RSZ. În acest caz zgomotul este asociat cu distorsiunile produse de sistemul de prelucrare considerat [Cla.,Mec.'85], [Duv.'91], [End. Ver.'92], [Naf.,Cam.,Isa.'95], [Wec.'89].

Astfel, RSZ are toate calitățile unui indice global : simplitate, universalitate, ușurință de calcul,... dar și toate defectele unui astfel de indice, dintre care cel mai mare este că nu caracterizează în nici un fel conținutul informațional al semnalului util. Oricum, în cazul în care RSZ este mic este necesară creșterea sa pentru o bună separare a semnalului util de zgomot,

condiție necesară pentru extragerea din semnalul util a informației pe care o poartă.

Sistemele responsabile pentru îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot trebuie să se comporte selectiv, nelăsând să treacă zgomotul și lăsând să treacă semnalul util. Acesta este motivul pentru care se folosesc de obicei filtre (sisteme cu comportare selectivă în domeniul frecvență). Aceste filtre pot fi sisteme liniare invariante în timp, sisteme liniare variabile în timp sau sisteme neliniare. Amestecul dintre semnalul util și zgomot poate fi aditiv, multiplicativ sau de altă natură. De obicei în studiul sistemelor de telecomunicații se utilizează modelul aditiv. Având în vedere facilitățile de calcul ale modelului de semnal de tip zgomot alb (de bandă limitată sau nu), se va folosi pentru zgomot, preponderent, acest model.

Tehnicile de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot prezentate vor fi exemplificate sugestiv. Nu se va insista asupra rezultatelor experimentale ce se pot obține folosind aceste tehnici și nici asupra metodelor de construcție a sistemelor necesare implementării acestor tehnici, dar vor fi citate de fiecare dată lucrări (cu predilecție personale) care prezintă aceste aspecte. Nici aplicațiile practice ale rezultatelor obținute nu fac obiectul acestei teze. Scopul lucrării de față este doar analiza metodelor de îmbunătățire a RSZ prin prisma teoriei prelucrării semnalelor.

Orice sistem analogic de telecomunicații conține câteva filtre analogice. Aceste sisteme sunt indispensabile în construcția modulatorilor, multiplexoarelor, sistemelor de eșantionare, demodulatorilor etc. Chiar și în cazul sistemelor mixte (analogice și numerice) utilizarea unor filtre analogice este indispensabilă, mai ales pentru construcția interfețelor analogice (filtre antialiasing, filtre de reconstrucție ...).

Fie semnalul  $x(t)$ , obținut prin perturbarea aditivă cu zgomot alb de bandă limitată,  $n_B(t)$ , a semnalului util,  $s(t)$ . Se consideră că banda zgomotului este  $B$  și că densitatea sa spectrală de putere este  $N_0$ .

RSZ pentru semnalul  $x(t)$  este definit cu relația :

$$RSZ_i = \frac{P_s}{P_{nB}}$$

unde cu  $P_s$  am notat puterea semnalului util iar cu  $P_{nB}$  puterea zgomotului. După cum se vede definiția este valabilă pentru semnale  $s(t)$  de energie infinită dar de putere finită.

Îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot, poate fi realizată prin filtrarea semnalului  $x(t)$ . Astfel, la ieșirea filtrului se obține semnalul  $y(t)$  exprimat cu relația :

$$y(t) = u(t) + n_{B0}(t)$$

unde  $u(t)$  reprezintă răspunsul filtrului considerat la semnalul util  $s(t)$  iar  $n_{B0}(t)$

reprezintă răspunsul aceluiași sistem dar la semnalul aleator  $n_B(t)$ . RSZ la ieșirea filtrului este :

$$RSZ_0 = \frac{P_u}{P_{nB0}}$$

Îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot se poate aprecia prin valoarea parametrului  $\chi$  definit astfel :

$$\chi = \frac{RSZ_0}{RSZ_i} \quad (1.1)$$

Admițând că filtrul este ales în așa fel încât :

$$P_u = P_s \quad (1.2)$$

valoarea îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot este :

$$\chi = \frac{P_u}{P_{nB0}}$$

Densitatea spectrală de putere a semnalului  $n_{B0}$  este legată de densitatea spectrală de putere a semnalului  $n_B$ , conform relației [Spă.'87] :

$$\Phi_{nB0} = |H(\omega)|^2 \cdot \Phi_{nB}$$

unde cu  $H(\omega)$  s-a notat răspunsul în frecvență al filtrului considerat. Deci :

$$\Phi_{nB0}(\omega) = N_0 \cdot |H(\omega)|^2$$

Rezultă valorile pentru puterea semnalului aleator de la intrare :

$$P_{nB} = \frac{1}{2\pi} \int_B \Phi_{nB}(\omega) d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \cdot \int_B d\omega = \frac{N_0 \cdot B}{2\pi} \quad (1.3)$$

și puterea semnalului aleator de la ieșire :

$$P_{nB0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_B N_0 \cdot |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \cdot \int_B |H(\omega)|^2 d\omega \quad (1.4)$$

Îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot este deci :

Deoarece  $\chi$  este adimensional, rezultă că numitorul membrului drept al ultimei relații are dimensiune de frecvență. De aceea el poartă numele de bandă echivalentă de zgomot a filtrului cu răspunsul în frecvență  $H(\omega)$ . Deci filtrul cu răspunsul în frecvență  $H(\omega)$  trebuie proiectat în așa fel încât banda de trecere a filtrului să conțină banda semnalului util  $s(t)$  (prin urmare aceasta trebuie să fie cunoscută) și să aibă o bandă echivalentă de zgomot cât mai mică.

Se observă astfel importanța cunoașterii benzii echivalente de zgomot a filtrelor analogice.

Se pune problema determinării răspunsului la impuls  $h(t)$  al aceluși sistem care maximizează RSZ la ieșirea sa la momentul  $T$  când la intrarea sa este adus semnalul :

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

unde  $n(t)$  este un zgomot staționar cu densitate spectrală de putere  $\Phi_n(\omega)$ .

Având în vedere enunțul problemei, RSZ trebuie redefinit în așa fel încât el să devină o funcție de timp. Se va considera că semnalul  $s(t)$  este de energie finită. Pentru semnalul  $y(t)$  :

$$y(t) = u(t) + n_0(t)$$

de la ieșirea filtrului cu răspunsul la impuls  $h(t)$ , se definește cu formula:

$$RSZ_0 = \frac{|u(t)|^2}{P_{n0}}$$

Pentru puterea semnalului aleator de la ieșire vom avea :

$$P_{n0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \cdot \Phi_n(\omega) d\omega$$

Expresia semnalului util de la ieșire fiind :

$$u(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

valoarea lui  $u(t)$  la momentul  $T$  este :

$$u(T) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(T - \tau) d\tau$$

sau, pe baza transformării Fourier inverse :

$$u(T) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot S(\omega) \cdot e^{j\omega T} d\omega$$

De aceea :

$$|u(T)|^2 = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot S(\omega) \cdot e^{j\omega T} d\omega \right|^2$$

iar expresia RSZ la ieșire devine :

$$RSZ_0 = \frac{\left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot S(\omega) \cdot e^{j\omega T} d\omega \right|^2}{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \cdot \Phi_n(\omega) d\omega} \quad (1.6)$$

Este binecunoscută inegalitatea lui Schwartz :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cdot B^*(\omega) d\omega \right|^2 \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 \cdot d\omega \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 \cdot d\omega \right)$$

Fie :

$$A(\omega) = H(\omega) \cdot [\Phi_n(\omega)]^{\frac{1}{2}}$$

$$B^*(\omega) = S(\omega) \cdot e^{j\omega T} \cdot [\Phi_n(\omega)]^{-\frac{1}{2}}$$

Ultima inegalitate devine :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega T} d\omega \right|^2 \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 |\Phi_n(\omega)| d\omega \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{|\Phi_n(\omega)|} d\omega \right)$$

Folosind această inegalitate, pentru relația (1.6) avem :

$$RSZ_0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{|\Phi_n(\omega)|} d\omega \quad (1.7)$$

S-a obținut în acest mod valoarea maximă a RSZ la ieșirea filtrului cu răspuns la impuls  $h(t)$ , la momentul  $T$ , pentru semnalul de intrare  $s(t)$ . După

$$RSZ_0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{|\Phi_n(\omega)|} d\omega \quad (1.7)$$

S-a obținut în acest mod valoarea maximă a RSZ la ieșirea filtrului cu răspuns la impuls  $h(t)$ , la momentul  $T$ , pentru semnalul de intrare  $s(t)$ . După cum se știe, semnul egal în inegalitatea lui Schwartz se obține pentru :

$$A(\omega) = K \cdot B(\omega)$$

unde  $K$  este o constantă. Această relație se mai scrie :

$$H(\omega) \cdot [\Phi_n(\omega)]^{\frac{1}{2}} = K \cdot S^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T} \left[ [\Phi_n(\omega)]^* \right]^{\frac{1}{2}}$$

Deci :

$$H(\omega) = \frac{K \cdot S^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T}}{\left( |\Phi_n(\omega)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

adică :

$$H(\omega) = K \cdot S^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T} \cdot |\Phi_n(\omega)|^{-1} = \frac{K \cdot S^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T}}{|\Phi_n(\omega)|}$$

S-a obținut astfel răspunsul în frecvență al filtrului care maximizează RSZ al semnalului  $y(t)$  la momentul  $T$ , cu excepția unei constante multiplicative.

După cum se vede, acest răspuns în frecvență depinde de spectrul semnalului determinist  $s(t)$  de la intrare și de densitatea spectrală de putere a zgomotului  $n(t)$  de la intrare. Cunoscând deci aceste caracteristici ale semnalului de intrare se poate determina răspunsul în frecvență  $H(\omega)$ . Sistemul cu acest răspuns în frecvență se numește filtru adaptat la semnalul  $x(t)$ .

În continuare se determină răspunsul în frecvență al unui filtru adaptat la un semnal cu componenta aleatoare zgomot alb, având densitatea spectrală de putere  $N_0$  :

$$\Phi_n(\omega) = N_0$$

Rezultă :

$$H(\omega) = \frac{K}{N_0} \cdot S^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T}$$

$$h(t) = \frac{K}{N_0} \cdot s(T - t)$$

Răspunsul acestui sistem la semnalul  $s(t)$  este :

$$u(t) = h(t) * s(t) = \frac{K}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot s(T - t + \tau) d\tau = \frac{K}{N_0} \cdot R_s(t - T)$$

și deci proporțional cu autocorelația semnalului  $s(t)$ . Deci :

$$u(T) = \frac{K}{N_0} \cdot R_s(0) \geq u(t) \quad , (\forall) t \in \mathbb{R} - \{T\}$$

Valoarea maximă a RSZ devine în acest caz :

$$RSZ_{0\max} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{N_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{E}{N_0} \quad (1.8)$$

unde cu  $E$  s-a notat energia semnalului  $s(t)$ . Dependența de timp a RSZ este în acest caz :

$$RSZ_0 = \frac{|K \cdot N_0^{-1} \cdot R_s(t - T)|^2}{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K^2 N_0^{-2} |S(\omega)|^2 \cdot N_0 d\omega} = \frac{|R_s(t - T)|^2}{N_0 \cdot E}$$

Dacă pentru constanta  $K$  se alege valoarea  $N_0$ , expresia răspunsului în frecvență al filtrului adaptat devine :

$$H(\omega) = S^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T}$$

iar răspunsul la impuls al acestui filtru este :

$$h(t) = s(t - T)$$

Pentru ca filtrul adaptat să se poată construi este necesar ca el să fie cauzal. Avem astfel :

$$h(t) \equiv 0 \quad , \quad \forall t < 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) = 0 \quad , \quad \forall t < 0 \quad (1.9)$$

Acceptând că durata semnalului determinist de intrare este  $t_0$  :

$$s(t) = 0 \quad , \quad \forall t \notin [0, t_0]$$

și ținând seama că  $R_s(t)$  se obține ca și rezultat al convoluției între  $s(t)$  și  $s(-t)$ , care au suporturile  $[0, t_0]$  și  $[-t_0, 0]$ , rezultă că suportul lui  $R_s(t)$  este  $[-t_0, t_0]$ . De aceea suportul lui  $u(t)$  este:  $[-t_0+T, t_0+T]$ . Ținând seama de condiția (1.9) rezultă că :

$$-t_0 + T > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_0 < T$$

Deci se pot construi filtre adaptate doar pentru semnale de durată limitată iar momentul la care se maximizează RSZ nu poate apare decât după terminarea semnalului  $s(t)$ . Această constatare exclude utilizarea filtrelor adaptate în aplicațiile de timp real. Motivul expus mai sus implică de obicei ca filtrele adaptate să nu poată fi construite exact, dar pot fi construite filtre ale căror caracteristici să aproximeze caracteristicile filtrelor adaptate. Filtrele adaptate se utilizează în construcția detectoarelor optime .

În continuare se va demonstra că filtrele adaptate pot fi utilizate și în scopul separării în domeniul timp a unor semnale diferite deoarece îmbunătățesc rezoluția temporală a capacității de separare a două impulsuri apropiate. Fără filtrare adaptată această rezoluție este aproximativ egală cu durata  $t_0$  a primului impuls. După filtrarea adaptată, având un semnal de tip impuls cu durata  $t_0$ , rezoluția temporală este determinată de durata autocorelației impulsului  $\tau$ , care, conform [Cou.'84], este invers proporțională cu banda efectivă a semnalului, notată cu  $B_\tau$ . Este clar că pentru semnale de bandă largă este valabilă relația:

$$\frac{1}{B_\tau} < t_0$$

Deci folosind filtrarea adaptată se poate îmbunătăți rezoluția temporală considerată, cu atât mai mult cu cât semnalul considerat este de bandă mai largă. Este de exemplu cazul semnalelor de tip "chirp" sau al celor pseudoaleatoare. Semnalul de tip "chirp" stă la baza aplicațiilor din radiolocație. Calculul valorii maxime a RSZ la ieșirea unui filtru adaptat la semnal "chirp" este prezentat în [Isa.'95].

Un exemplu de semnal des întâlnit în telecomunicații este semnalul dreptunghiular. Pentru determinarea unui filtru adaptat la impuls dreptunghiular considerăm expresia analitică a impulsului dreptunghiular având o durată  $t_0$  :

$$s(t) = A \cdot \left[ \sigma\left(t + \frac{t_0}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{t_0}{2}\right) \right]$$

Energia sa este :



$$E = A^2 \cdot t_0$$

Răspunsul la impuls al filtrului adaptat la acest semnal este pentru,  $K = 1$  :

$$h(t) = A \cdot \left[ \sigma\left(T - t + \frac{t_0}{2}\right) - \sigma\left(T - t - \frac{t_0}{2}\right) \right]$$

Dar acesta este răspunsul la impuls al unui integrator ideal care poate fi aproximat printr-un filtru trece jos RC de ordinul I, cu răspunsul în frecvență :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

având răspunsul la impuls  $h(t)$  dat de relația :

$$h(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \sigma(t)$$

Răspunsul indicial al aceluiași sistem este :

$$r(t) = \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \cdot \sigma(t)$$

De aceea răspunsul filtrului RC trece jos de ordinul I la semnalul  $s(t)$  este :

$$u(t) = A \cdot \left[ r\left(t + \frac{t_0}{2}\right) - r\left(t - \frac{t_0}{2}\right) \right]$$

Se observă că momentul la care  $|u(t)|$  este maxim este  $T = t_0/2$ , valoarea la acest moment fiind :

$$u(T) = A \cdot r(t_0) = A \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t_0}{RC}} \right)$$

De aceea :

$$|u(T)|^2 = A^2 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t_0}{RC}} \right)^2$$

Calculăm valoarea puterii zgomotului la ieșirea integratorului RC :

$$P_{n0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \cdot N_0 \, d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{RC} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} =$$

$$= \frac{N_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{RC} \cdot \operatorname{arctg} u \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{N_0}{2RC}$$

Deci valoarea maximă a RSZ la ieșirea integratorului RC rezultă :

$$RSZ_0 = \frac{A^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_0}{RC}}\right)^2}{\frac{N_0}{2RC}} = \frac{2RCA^2 \left(1 - e^{-\frac{t_0}{RC}}\right)^2}{N_0}$$

Valoarea maximă a RSZ la ieșirea filtrului adaptat la dreptunghi este conform relației (1.8) :

$$RSZ_{0\max} = \frac{E}{N_0} = \frac{A^2 \cdot t_0}{N_0}$$

Deci, făcând raportul între îmbunătățirea RSZ la ieșirea integratorului și îmbunătățirea RSZ la ieșirea filtrului adaptat, avem :

$$\frac{RSZ_0}{RSZ_{0\max}} = \frac{2RCA^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_0}{RC}}\right)^2}{N_0} \cdot \frac{N_0}{A^2 \cdot t_0} =$$

$$= 2 \cdot \frac{RC}{t_0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_0}{RC}}\right)^2$$

Conform calculelor prezentate în [Isa.'95], pentru valoarea :

$$\frac{t_0}{RC} = 1,25$$

se obține valoarea maximă a acestui raport :

$$\frac{RSZ_0}{RSZ_{0\max}} = \frac{2}{1,25} \cdot \left(1 - e^{-1,25}\right)^2 = 0,816$$

cu alte cuvinte, aproximarea filtrului adaptat la dreptunghi printr-un filtru trece

jos de ordinul I cu constanta de timp de 1,25 ori mai mică decât durata dreptunghiului conduce la o scădere a valorii maxime a RSZ la ieșire de doar 0,88 dB.

## OBSERVATII

**O1.** De obicei problema zgomotului colorat, care perturbă semnalul de intrare, poate fi redusă la problema mai simplă a zgomotului alb prin prefiltrarea semnalului de prelucrat  $x(t)$  cu un filtru de albire. Construcția unor astfel de filtre este prezentată de exemplu în [Wha.'71].

**O2.** Deși, în general, filtrele adaptate sunt nerealizabile, ele pot fi bine approximate cu filtre fizic realizabile.

**O3.** Principala aplicație a filtrelor adaptate este în detecția optimală a semnalelor de formă cunoscută, perturbate aditiv. Acest lucru se datorează faptului că la momentul  $T$  se poate lua relativ ușor decizia referitoare la prezența semnalului  $s(t)$  la intrare, deoarece RSZ la ieșire este maxim și rezoluția temporală la ieșire este superioară celei de la intrare (durata efectivă a semnalului  $u(t)$  este inferioară celei a semnalului  $s(t)$ ).

**O4.** Din păcate forma semnalului  $u(t)$  nu este de loc asemănătoare formei semnalului  $s(t)$ . În aplicațiile în care se dorește să nu se afecteze forma semnalului trebuie să se folosească altfel de filtre (Wiener, Kalman sau Bucy).

**O5.** Alte modalități de îmbunătățire a RSZ se bazează pe calculul funcției de corelație sau a "cepstrului" semnalului  $x(t)$  [Spă.'87] sau pe utilizarea intercorelatoarelor sincrone (amplificatoare sincrone) [Cou.'84].

Una dintre tendințele cele mai moderne în prelucrarea semnalelor este înlocuirea sistemelor analogice cu sisteme digitale. Sistemul analogic este înlocuit cu sistemul realizat prin conectarea în cascadă a unui convertor analog numeric cu un filtru digital și cu un convertor numeric analogic. Semnalul de prelucrat este eșantionat obținându-se secvența de la intrarea filtrului numeric. Prin creșterea RSZ (ca urmare a filtrării digitale) a semnalului în timp discret se obține o creștere a RSZ a semnalului de la ieșirea convertorului numeric analogic. Erorile specifice conversiei analog numerice (eroare de eșantionare, eroare de cuantizare) pot fi privite ca și zgomot suplimentar care afectează aditiv semnalul util. Evident că și acestea pot fi diminuate prin filtrare digitală.

Considerând problema îmbunătățirii RSZ pentru semnalele în timp discret prin filtrare numerică liniară, fie semnalul :

$$x[n] = s[n] + n_B[n]$$

unde  $s[n]$  este un semnal determinist de putere finită iar  $n_B[n]$  este un zgomot alb de bandă limitată  $B$  și de densitate spectrală de putere  $N_0$ . Prin filtrarea semnalului  $x[n]$  cu sistemul cu răspuns la impuls  $h[n]$  se obține semnalul  $y[n]$  :

$$y[n] = u[n] + n_{B0}[n]$$

unde :

$$u[n] = s[n] * h[n]$$

$$\Phi_{nB0}(\Omega) = \Phi_{nB}(\Omega) \cdot |H(\Omega)|^2$$

[Bel.'90], [Cou.'84], [DeS.,Isa.'93], [Naf.,Câm.,Isa.'95]. La intrarea filtrului avem RSZ dat de relația :

$$RSZ_i = \frac{P_s}{P_u}$$

iar la ieșire avem :

$$RSZ_0 = \frac{P_u}{P_{nB0}}$$

îmbunătățirea RSZ fiind :

$$\chi = \frac{RSZ_0}{RSZ_i} = \frac{P_u}{P_s} \cdot \frac{P_u}{P_{nB0}}$$

Dacă filtrul este proiectat astfel încât :

$$P_u = P_s$$

atunci îmbunătățirea RSZ este :

$$\chi = \frac{P_n}{P_{nB0}}$$

Dar :

$$P_{nB} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} N_0 \, d\Omega = N_0$$

$$P_{nB0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} N_0 |H(\Omega)|^2 \, d\Omega = \frac{N_0}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 \, d\Omega$$

de aceea :

$$\chi = \frac{N_0}{\frac{2\pi}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 d\Omega} = \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 d\Omega}$$

Numitorul membrului drept poartă numele de bandă echivalentă de zgomot a sistemului cu răspunsul în frecvență  $H(\Omega)$ . Similar cu considerațiile prezentate pentru un filtru adaptat la un semnalul analogic, în [Isa.'95] este rezolvată problema răspunsului la impuls  $h[n]$  al sistemului care maximizează RSZ de la ieșirea sa, la momentul  $N$ , când la intrare avem un zgomot staționar suprapus aditiv peste semnalul util. Considerând pentru zgomot un semnal aleator cu densitatea spectrală de putere  $\Phi_n(\Omega)$ , valoarea maximă a RSZ la ieșirea filtrului cu răspuns la impuls  $h[n]$  este :

$$RSZ_0 \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|S(\Omega)|^2}{\Phi_n(\Omega)} d\Omega$$

Pentru răspunsul în frecvență al filtrului care maximizează RSZ al semnalului de la intrare la momentul  $N$  vom avea :

$$H(\Omega) = K \cdot S^*(\Omega) \cdot e^{-j\Omega N} \cdot [\Phi_n(\Omega)]^{-1}$$

Dacă avem zgomot alb :

$$\Phi_n(\Omega) = N_0$$

răspunsul în frecvență al unui filtru adaptat la un semnal cu componentă aleatoare de tip zgomot alb este :

$$H(\Omega) = \frac{K}{N_0} \cdot S^*(\Omega) \cdot e^{-j\Omega N_0}$$

Alegând pentru constanta  $K$  valoarea  $N_0$ , expresia răspunsului în frecvență al filtrului adaptat devine :

$$H(\Omega) = S^*(\Omega) \cdot e^{-j\Omega N}$$

iar răspunsul la impuls al acestui filtru este :

$$h[n] = s[n - N]$$

Se cunosc numeroase exemple de filtre adaptate la semnale în timp discret. O parte din acestea sunt prezentate în [Kun.'86], [Opp.,Sch.'75] sau [DeS.,Isa.'92].

621.482  
30.6 E.

## CAPITOLUL 2. ÎMBUNĂTĂȚIREA RSZ PRIN FILTRARE LINIARĂ

Din cele prezentate în primul capitol se deduce importanța cunoașterii benzii echivalente de zgomot a filtrelor.

### 2.1. O nouă modalitate de estimare a benzii echivalente de zgomot a unor filtre trece jos realizabile

În continuare se consideră că semnalul  $s_B(t)$  este de bandă limitată și că spectrul său are o valoare nenulă la  $\omega = 0$  (adică avem un semnal de tip "trece jos"). În acest caz  $H(\omega)$  trebuie să caracterizeze un filtru trece jos. După cum se știe cel mai frecvent se utilizează filtre trece jos de tip Butterworth, Cebîșev sau Bessel.

Răspunsul în frecvență al unui filtru de tip Butterworth, cu pulsația de tăiere de 1 rad/s, de ordinul  $n$ , are proprietatea :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad (2.1)$$

În continuare se va aprecia banda echivalentă de zgomot a unor filtre de tip Butterworth de diferite ordine.

Pentru  $n = 1$  relația (2.1) devine :

$$|H_1(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

Banda echivalentă de zgomot a filtrului cu acest răspuns în frecvență este :

$$B_{z_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2} = \arctg\omega \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

În această relație s-a considerat că semnalul  $n(t)$  este un zgomot alb de bandă nelimitată. În ipotezele capitolului anterior (semnalul  $n_B(t)$  zgomot alb de bandă limitată,  $B$ ), s-ar fi obținut :

$$B_{z1} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{d\omega}{1 + \omega^2} = \arctg \omega \Big|_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} = 2 \arctg \frac{B}{2}$$

Pentru  $n = 2$ , relația (2.1) devine :

$$|H_2(\omega)| = \frac{1}{1 + \omega^4}$$

În această relație membrul drept se poate scrie :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \omega^4} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1} + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1} \end{aligned}$$

Banda echivalentă de zgomot a filtrului cu acest răspuns în frecvență este :

$$\begin{aligned} B_{z2} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{\omega d\omega}{\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1} + \frac{1}{2} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{d\omega}{\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1} + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{\omega d\omega}{\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1} + \frac{1}{2} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{d\omega}{\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1} \end{aligned}$$

Prima integrală din membrul drept se poate calcula astfel :

$$\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{\omega d\omega}{\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{(2\omega - \sqrt{2}) d\omega}{\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{d\omega}{\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1}$$

În continuare, se calculează pe rând :

$$\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{(2\omega - \sqrt{2})d\omega}{\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1} = \ln \left| \omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1 \right| \Bigg|_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} = \ln \left| \frac{B^2 - 2\sqrt{2}B + 4}{B^2 + 2\sqrt{2}B + 4} \right|$$

și :

$$\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{d\omega}{\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1} = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Bigg|_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} = \sqrt{2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\frac{B}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{B}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right]$$

Se deduce analog :

$$\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{d\omega}{\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1} = \sqrt{2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\frac{B}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \operatorname{arctg} \frac{-\frac{B}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right]$$

Ultima integrală din relația de calcul pentru  $B_{z2}$  se descompune în modul următor :

$$\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{\omega d\omega}{\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{(2\omega + \sqrt{2})d\omega}{\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{d\omega}{\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1}$$

pentru care avem :

$$\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{(2\omega + \sqrt{2})d\omega}{\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1} = \ln \left| \omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1 \right| \Bigg|_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} = \ln \left| \frac{B^2 + 2\sqrt{2}B + 4}{B^2 - 2\sqrt{2}B + 4} \right|$$

Înlocuind toate aceste rezultate în relația de calcul a benzii echivalente de zgomot, forma finală pentru aceasta este :



$$B_{z_2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{B^2 - 2\sqrt{2}B + 4}{B^2 + 2\sqrt{2}B + 4} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{B}{\sqrt{2}} - 1 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{B}{\sqrt{2}} + 1 \right)$$

Dacă se consideră că  $n(t)$  este zgomot alb de bandă nelimitată, atunci :

$$B_{z_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^4} = \lim_{B \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{B^2 - 2\sqrt{2}B + 4}{B^2 + 2\sqrt{2}B + 4} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{B}{\sqrt{2}} - 1 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{B}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right\} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Se observă astfel că dacă se crește ordinul filtrului de la 1 la 2, banda sa echivalentă de zgomot scade de  $\sqrt{2}$  ori.

Fără îndoială că  $n$  poate fi crescut în continuare dar integralele care trebuiesc calculate conduc la calcule mult mai laborioase. De aceea în continuare se prezintă niște margini (superioară și inferioară) pentru benzile echivalente de zgomot ale filtrelor Butterworth de diferite ordine. Pentru valori exacte, obținute prin integrare, se poate consulta articolul [Naf.'92].

În figura 2.1a) este prezentată caracteristica de modul a răspunsului în frecvență a unui filtru Butterworth de ordinul  $n$ .

În figura 2.1 b). este prezentat graficul funcției  $|H(\omega)|^2$ . Curbele notate cu II din cele două figuri reprezintă caracteristicile reale iar curbele notate cu I sunt caracteristicile asimptotice. Curbele notate cu III au fost obținute trasând paralele la caracteristicile asimptotice prin punctul  $(0, -3\text{dB})$  în cazul figurii 2.1a) și prin punctul  $(0, -6\text{dB})$  în cazul figurii 2.1b). Observând figura 2.1a) se poate scrie :

$$20 \log |H_1(\omega)| = \begin{cases} 0, & \omega \leq 1 \\ -20n \log \omega, & \omega > 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$20 \log |H(\omega)| \leq 20 \log |H_1(\omega)|$$

sau :

$$20 \log |H(\omega)|^2 \leq 20 \log |H_1(\omega)|^2$$

Dar pe baza relației (2.2), se poate scrie:

$$20 \log |H_1(\omega)|^2 = \begin{cases} 0, & \omega \leq 1 \\ -40n \log \omega, & \omega > 1 \end{cases}$$

astfel că  $20 \log |H_1(\omega)|^2$  reprezintă tocmai curba I din figura 2.1b).

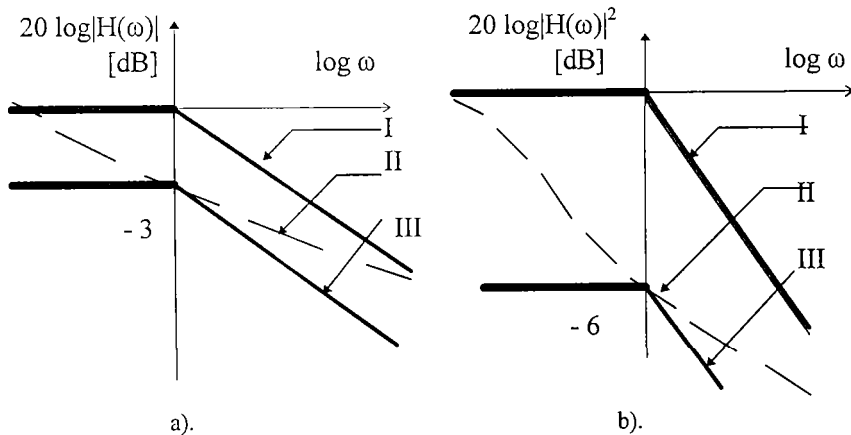


Figura 2.1 a). Caracteristica de modul a răspunsului în frecvența a unui filtru Butterworth de ordinul  $n$ ;  
 b). caracteristica  $20 \log |H(\omega)|^2$  pentru un filtru Butterworth de ordinul  $n$ .

Trec nd de la coordonatele logaritmice la coordonate liniare, constatăm :

$$|H_1(\omega)|^2 = \begin{cases} 1, & \omega \leq 1 \\ \omega^{-2n}, & \omega > 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$|H(\omega)|^2 \leq |H_1(\omega)|^2 \quad (2.4)$$

Graficele acestor funcții sunt prezentate în figura 2.2.

Pe baza rela iilor (2.3)  i (2.4) se poate scrie :

$$B_z \leq \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} |H_1(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{\frac{B}{2}} |H_1(\omega)|^2 d\omega$$

care pentru  $B > 2$  devine :

$$B_z \leq 2 \left( \int_0^1 d\omega + \int_1^{\frac{B}{2}} \omega^{-2n} d\omega \right) = 2 \left( 1 + \frac{1}{1-2n} \omega^{-2n+1} \Big|_1^{\frac{B}{2}} \right) =$$

$$= 2 \left( 1 + \frac{\left(\frac{B}{2}\right)^{-2n+1}}{1-2n} + \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{4n}{2n-1} - \frac{2\left(\frac{B}{2}\right)^{-2n+1}}{2n-1}$$

S-a obținut astfel că marginea superioară a benzii echivalente de zgomot a unui filtru trece jos Butterworth de ordinul  $n$  are expresia :

$$B_{z_{\text{sup}}} = \frac{4n}{2n-1} - \frac{2\left(\frac{B}{2}\right)^{-2n+1}}{2n-1}$$

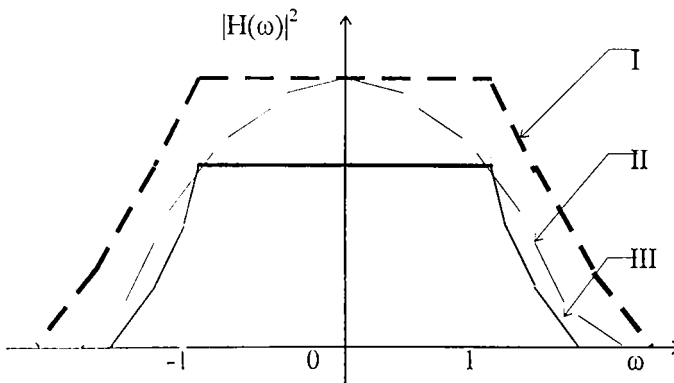


Figura 2.2. O majorantă, I și o minorantă, III, pentru caracteristica  $|H(\omega)|^2$ , notată cu II

Dacă se consideră cazul în care  $B \rightarrow \infty$  ( $n(t)$  este zgomot alb de bandă nelimitată), atunci :

$$B_{z_{\text{sup}}} = \frac{4n}{2n-1}$$

Revenind la figura 2.1a) notăm cu  $H_{III}(\omega)$  caracteristica de modul a răspunsului în frecvență a unui filtru Butterworth de ordin  $n$  ideal care minorează caracteristica de modul  $H(\omega)$  pentru filtrul real. Se observă din figură că putem scrie atât :

$$20 \log |H_{III}(\omega)| = \begin{cases} -3, & \omega \leq 1 \\ -20n \log \omega - 3, & \omega > 1 \end{cases}$$

cât și :

$$20 \log |H(\omega)| \geq 20 \log |H_{III}(\omega)|$$

sau :

$$20 \log |H(\omega)|^2 \geq 20 \log |H_{III}(\omega)|^2$$

În această ultimă relație, conform notației din relația (2.2), avem :

$$20 \log |H_{III}(\omega)|^2 = \begin{cases} -6, & \omega \leq 1 \\ -40n \log \omega - 6, & \omega > 1 \end{cases}$$

Se constată astfel că  $20 \log |H_{III}(\omega)|^2$  reprezintă tocmai curba III din figura 2.1b). Trecând de la coordonatele logaritmice la coordonate liniare, pentru ultima relație obținem :

$$|H_{III}(\omega)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \omega \leq 1 \\ \frac{\omega^{-2n}}{2}, & \omega > 1 \end{cases}$$

Se mai observă că :

$$|H_{III}(\omega)|^2 = \frac{1}{2} |H_I(\omega)|^2$$

Membrul stâng al acestei relații reprezintă curba III iar membrul drept - curba I din figura 1.2. Deci :

$$|H(\omega)|^2 \geq \frac{1}{2} |H_{III}(\omega)|^2$$

și prin urmare :

$$B_z \geq \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} |H_{III}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2} Bz_{sup}$$

S-a obținut astfel și marginea inferioară a benzii echivalente de zgomot a unui filtru trece jos Butterworth de ordinul  $n$  :

$$Bz_{inf} = \frac{1}{2} \left( \frac{4n}{2n-1} - \frac{2 \left( \frac{B}{2} \right)^{-2n+1}}{2n-1} \right)$$

Când  $B \rightarrow \infty$  expresia marginii inferioare devine :

$$Bz_{inf} = \frac{2n}{2n-1}$$

S-a demonstrat așadar că :

$$Bz_{inf} \leq Bz \leq Bz_{sup}$$

Trecând la limită în această relație pentru  $n \rightarrow \infty$ , se obține :

$$1 \leq Bz \leq 2$$

Valoarea relativ mare a lui  $Bz_{inf}$  arată că utilizarea filtrării liniare nu conduce la rezultate remarcabile atunci când RSZ al semnalului de prelucrat este mic. De aceea în aceste situații se recomandă utilizarea filtrelor neliniare [Ana., Ven. '89], [Isa., Isa. '92].

## OBSERVATII

**O1.** Dacă pulsația de tăiere a filtrului Butterworth ar fi fost  $\omega_0$  ( $\omega_0$  diferit de 1) atunci s-ar fi obținut :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}$$

$$Bz_1 = 2\omega_0 \operatorname{arctg} \frac{B}{2\omega_0}$$

$$Bz_2 = \omega_0 \left[ \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln \left| \frac{\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1}{\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1} \right| \right]_{\frac{B}{2\omega_0}}^{\frac{B}{2\omega_0}} + \frac{\omega_0}{2\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\omega}{1 - \omega^2} \left[ \frac{B}{2\omega_0} \right]_{\frac{B}{2\omega_0}}^{\frac{B}{2\omega_0}}$$

Aceste relații pot fi obținute și prin particularizările  $n = 1$  și respectiv  $n = 2$  în relația (8) din [Naf. '92].

$$Bz_s = 2 \left[ \int_0^{\omega_0} d\omega + \int_{\omega_0}^{\frac{B}{2}} \omega^{-2n} d\omega \right] = 2 \left[ \omega_0 + \frac{1}{1-2n} \cdot \omega^{-2n+1} \right]_{\omega_0}^{\frac{B}{2}}$$

$$Bz_i = \left[ \omega_0 + \frac{1}{1-2n} \cdot \omega^{-2n+1} \right]_{\omega_0}^{\frac{B}{2}}$$

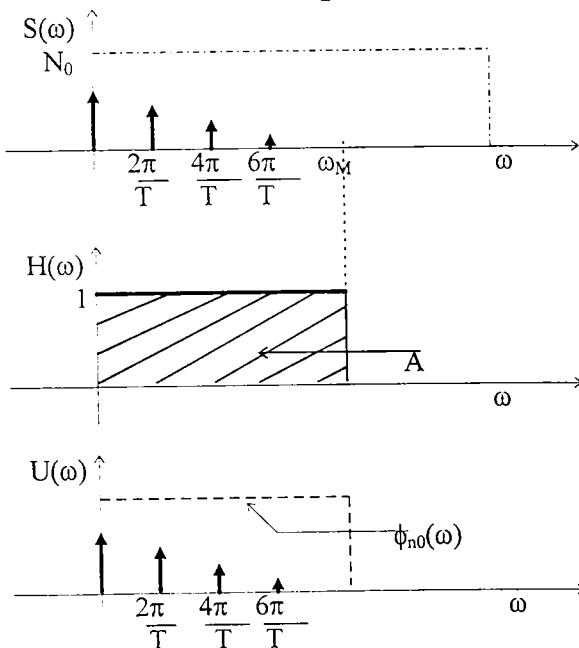


Figura 2.3. Îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot pentru un semnal periodic, prin filtrare.

**O2.** Caracteristicile asimptotice depind doar de ordinul filtrului și nu de tipul de aproximare utilizat. De aceea marginea  $Bz_s$  este aceeași și pentru filtrele de tip Bessel. Se poate determina și pentru acest tip de aproximație o margine inferioară pentru banda de zgomot, numai că expresia acestei va fi diferită de  $Bz_i$  deoarece intersecția caracteristicii reale (curba II din figura 2.1a)), în cazul aproximării de tip Bessel nu mai are coordonatele  $(0, -3\text{dB})$ , ci depinde de ordinul filtrului. Metoda propusă ar putea fi utilizată și în cazul aproximării de tip Cebîșev chiar dacă, în acest caz, caracteristica reală (curba II din figura 2.1a)) oscilează în jurul caracteristicii asimptotice (curba I) în banda de trecere. Având în vedere însă că amplitudinea oscilațiilor este mică, metoda propusă conduce la rezultate bune.

**O3.** Metoda de estimare a benzii echivalente de zgomot poate fi generalizată cu ușurință și pentru cazul filtrelor de tip trece sus, trece bandă sau oprește bandă, prin transformări de variabilă.

**O4.** O categorie de semnale deterministe de putere finită este cea formată din semnale periodice. În figura 2.3 se prezintă un exemplu de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot al unui semnal periodic, prin filtrare.

Se observă că, în exemplul considerat, relația (1.2) este satisfăcută. De asemenea avem determinată puterea semnalului aleator de la intrare conform relației (1.3) :

$$P_{n_B} = \frac{N_0}{2\pi} B$$

și puterea semnalului aleator de la ieșire corespunzător relației (1.4) :

$$P_{n_{B0}} = \frac{N_0}{2\pi} \omega_M$$

iar raportul semnal pe zgomot este :

$$\chi_3 = \frac{\frac{N_0}{2\pi} B}{\frac{N_0}{2\pi} \omega_M} = \frac{B}{\omega_M}$$

Există o categorie de filtre analogice, filtrele transversale, prin a căror utilizare raportul semnal pe zgomot poate fi îmbunătățit și mai mult. Un exemplu este prezentat în figura 2.4.

Considerând că semnalul  $x(t)$  este același ca și în cazul exemplului din figura 2.3, pentru tipul de filtru din figura 2.4, se obține :

$$\chi_4 = \frac{\frac{N_0 B}{2\pi}}{\frac{N_0 C}{2\pi}} = \frac{B}{C}$$

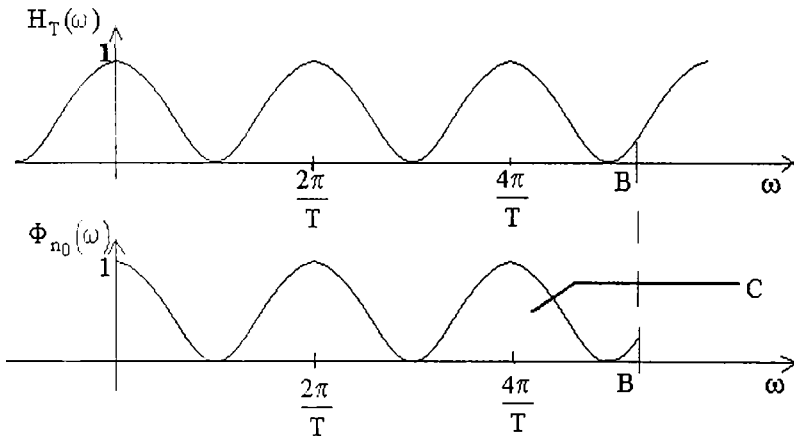


Figura 2.4. Un exemplu de utilizare a filtrelor transversale pentru îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot în cazul semnalelor periodice.

Deoarece aria hașurată în figura 2.4 (de valoare  $C$ ) este inferioară ariei dreptunghiului de bază  $B$  și înălțime  $1$ , se poate scrie :

$$C < B$$

și deci :

$$\chi_4 > \chi_3 \text{ (pentru } \omega_M = B \text{)}$$



## 2.2. Utilizarea filtrelor transversale pentru prelucrarea semnalelor periodice

După cum s-a văzut în ultima observație din paragraful precedent, în cazul semnalelor periodice filtrele transversale sunt superioare filtrelor clasice, din punct de vedere al îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot.

În figura 2.5 se prezintă schema bloc a unui filtru transversal analogic.

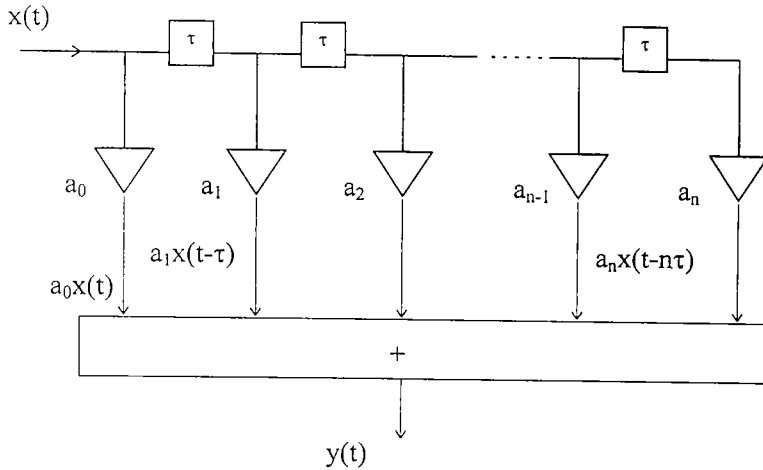


Figura 2.5. Schema bloc a unui filtru transversal.

Se cunoaște legătura dintre semnalele de intrare și de ieșire :

$$y(t) = a_0 x(t) + a_1 x(t - \tau) + a_2 x(t - 2\tau) + \dots + a_n x(t - n\tau)$$

Luând transformata Fourier în cei doi membri ai acestei relații, se obține :

$$Y(\omega) = a_0 X(\omega) + a_1 \cdot e^{-j\omega\tau} X(\omega) + \dots + a_n \cdot e^{-j\omega \cdot n\tau} X(\omega)$$

Deci răspunsul în frecvență al filtrului transversal analogic este :

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H_T(\omega) = \sum_{k=0}^n a_k e^{-j\left(\omega + \frac{2\pi}{\tau}\right)k\tau} = H_T\left(\omega + \frac{2\pi}{\tau}\right)$$

și se observă că răspunsul în frecvență al unui filtru analogic transversal este o funcție periodică (ceea ce justifică și graficele din figura 2.4). Dacă se impune condiția :

$$a_k = \frac{1}{n+1}, \quad k = \overline{0, n}$$

sistemul obținut se numește mediator analogic și are răspunsul în frecvență :

$$H_T(\omega) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n e^{-j(\omega k \tau)} = \frac{1}{n+1} \frac{1 - e^{-j\omega(n+1)\tau}}{1 - e^{-j\omega\tau}}$$

sau :

$$H_T(\omega) = \frac{1}{n+1} e^{-j\omega \frac{n}{2}\tau} \frac{\sin \left[ (n+1)\omega \frac{\tau}{2} \right]}{\sin \omega \frac{\tau}{2}} \quad (2.5)$$

Făcând notația :

$$x = \frac{\omega\tau}{2}$$

se observă că :

$$\left| H_T \left( k \frac{2\pi}{\tau} \right) \right| = \frac{1}{n+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin [(n+1)x]}{\sin x} = 1$$

Astfel spectrul de amplitudini al semnalelor periodice, de perioadă  $\tau$ , este neafectat de prelucrarea acestor semnale cu mediatorul analogic.

În cazul în care la intrarea unui astfel de sistem este adus un zgomot alb  $n_B(t)$ , de bandă limitată B și care are media nulă, la ieșirea acestui sistem se obține un semnal aleator staționar și ergodic,  $n_{B0}(t)$ . Media acestuia se calculează ținând seama că operatorul de mediere statistică  $E\{ \}$  este liniar. Rezultă :

$$E \{ n_{B0}(t) \} = E \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n n_B(t - k\tau) \right\} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n E \{ n_B(t - k\tau) \}$$

și pentru că  $n_B(t)$  este staționar avem în continuare :

$$E \{n_{B0}(t)\} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 0 = 0$$

Dispersia semnalului  $n_{B0}(t)$  este :

$$\begin{aligned} E \{n_{B0}^2(t)\} &= E \left\{ \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n n_B(t-k\tau) \right\}^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} E \left\{ \sum_{k=0}^n n_B^2(t-k\tau) + \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{l=0, \\ l \neq k}}^n n_B(t-k\tau) n_B(t-l\tau) \right\} = \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^n E \{n_B^2(t-k\tau)\} + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^n E \{n_B(t-k\tau) n_B(t-k\tau)\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

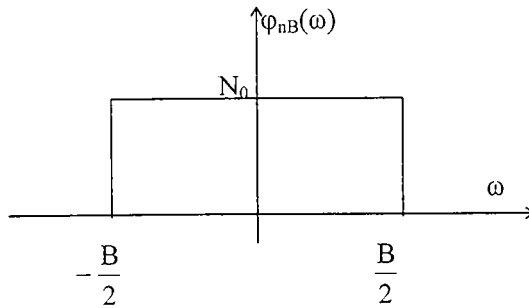


Figura 2.6. Densitatea spectrală de putere a unui zgomot alb de bandă limitată.

Dar :

$$E \{n_B^2(t-k\tau)\} = \sigma_n^2 = R_{n_B n_B}(0) = P_{n_B}$$

În figura 2.6 se prezintă densitatea spectrală de putere,  $\varphi_{n_B}$ , a semnalului  $n_B(t)$ . Autocorelația acestui semnal aleator este :

$$R_{n_B n_B}(t) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e^{j\omega t} d\omega = \frac{N_0}{2\pi j t} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} d(e^{j\omega t}) = \frac{N_0}{2\pi j t} e^{j\omega t} \Big|_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} = \frac{N_0}{2\pi j t} \left( e^{j\frac{B}{2}t} - e^{-j\frac{B}{2}t} \right) =$$

$$= \frac{N_0}{2\pi j t} 2j \sin \frac{B}{2} t = \frac{N_0}{\pi t} \sin \frac{Bt}{2} = \frac{N_0}{\pi} \cdot \frac{B}{2} \frac{\sin \frac{Bt}{2}}{\frac{Bt}{2}}$$

Se constată că :

$$R_{n_B n_B} \left( k \frac{2\pi}{B} \right) = 0 \quad (\forall) k \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad (2.7)$$

În cazul în care banda zgomotului alb,  $B$ , este un multiplu întreg al pulsației  $\omega_0 = 2\pi\tau$ , conform relației (2.3) se obține :

$$E \{ n_B(t - k\tau) n_B(t - l\tau) \} = R_{n_B n_B}((l - k)\tau) = R_{n_B n_B} \left( (l - k) \frac{2\pi}{\omega_0} \right) =$$

$$= R_{n_B n_B} \left( (l - k) p \frac{2\pi}{B} \right) = 0$$

Deci, dacă se respectă condiția :

$$B = p\omega_0, \quad p \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad (2.8)$$

atunci relația (2.6) devine :

$$P_{n_{B0}} = E \left\{ n_{B0}^2(t) \right\} = \frac{P_n}{n+1} \quad (2.9)$$

Prin urmare se poate afirma că, dacă la intrarea unui mediator analogic se aduce semnalul  $x(t)$  :

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

unde  $s(t)$  este un semnal periodic de perioadă  $\tau$  și  $n(t)$  un zgomot alb de bandă limitată,  $B$ , și se respectă condiția (2.8), atunci la ieșirea mediatorului se obține un semnal  $y(t)$  :

$$y(t) = u(t) + n_{B0}(t)$$

cu  $P_s = P_u$  și o îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot de :

$$\chi = \frac{P_{n_B}}{P_{n_{B0}}}$$

sau, folosind relația (2.9) :

$$\chi = n + 1 \quad (2.10)$$

Se constată că îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot obținută astfel este egală cu numărul liniilor de întârziere ale filtrului transversal folosit.

## OBSERVAȚII

**O1.** Având în vedere că  $p$  din condiția (2.8) poate fi orice număr întreg nenul, această condiție nu este prea restrictivă.

**O2.** Relația (2.10) arată că îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot introdusă cu metoda descrisă poate fi oricât de mare, principala limitare fiind impusă de complexitatea sistemului de filtrare obținut.

**O3.** Caracteristica de fază a mediatorului analogic (relația (2.5)) este liniară pe porțiuni. Deci o dată cu creșterea ordinului filtrului transversal va crește și întârzierea introdusă de acesta.

**O4.** Construcția unor sisteme de acest tip este dificilă datorită dificultății cu care se construiesc liniile de întârziere analogice. De obicei filtrele transversale analogice se construiesc cu ajutorul filtrelor transversale numerice [Naf., Isa.'91] sau cu ajutorul dispozitivelor de transfer de sarcină [Eze.,Jen.'92].

Liniile de întârziere pot fi realizate și cu ajutorul filtrelor trece tot.

**O5.** Filtrul transversal este una din structurile de bază folosite în construcția sistemelor cu parametri variabili în timp, ca de exemplu a filtrelor adaptive. Această observație este importantă deoarece nici un semnal întâlnit în telecomunicații nu este pur periodic. Multe semnale cvasistaționare (folosite frecvent în telecomunicații) pot fi privite însă ca o succesiune de semnale periodice pe porțiuni. Raportul semnal pe zgomot în aceste cazuri poate fi crescut prin utilizarea unor filtre transversale cu parametri variabili în timp.

**O6.** Performanța specificată de relația (2.10) este atinsă doar dacă zgomotul care trebuie înlăturat este alb. De îndată ce această condiție nu mai este îndeplinită performanțele filtrului transversal devin mai slabe.

**O7.** Este evident că, pentru construcția filtrului transversal este necesară cunoașterea perioadei semnalului  $s(t)$ ,  $\tau$ . Din păcate această mărime nu este întotdeauna cunoscută. În aceste cazuri poate fi utilizată detecția sincronă.

### 2.3. Benzi echivalente de zgomot ale unor filtre numerice

În [Isa.'95] s-au calculat benzile echivalente de zgomot pentru câteva filtre numerice cu răspuns finit la impuls (RFI) de diferite ordine. În aceeași referință bibliografică s-au propus și etape de proiectare a filtrelor RFI și s-au făcut aprecieri asupra benzilor echivalente de zgomot pentru un filtru numeric cu răspuns infinit la impuls (RII). În continuare se prezintă doar calculele pentru benzile echivalente de zgomot pentru filtrele numerice RFI de ordinul N și pentru filtrul RII de ordinul I.

#### 2.3.1. Filtru RFI de ordinul N

Ecuția cu diferențe finite care descrie funcționarea unui filtru RFI de ordinul N este cunoscută ca fiind :

$$y[n] = a_0x[n] + a_1x[n-1] + \dots + a_Nx[n-N]$$

Răspunsul în frecvență al acestui sistem va fi :

$$H(\Omega) = a_0 + a_1e^{-j\Omega} + \dots + a_Ne^{-jN\Omega}$$

adică :

$$H(\Omega) = a_0 + a_1 \cos \Omega + \dots + a_N \cos N\Omega - j(a_1 \sin \Omega + \dots + a_N \sin N\Omega)$$

și avem în continuare :

$$|H(\Omega)|^2 = (a_0 + a_1 \cos \Omega + \dots + a_N \cos N\Omega)^2 + (a_1 \sin \Omega + \dots + a_N \sin N\Omega)^2$$

ceea ce se mai poate scrie și sub forma :

$$|H(\Omega)|^2 = \left[ \sum_{k=0}^N a_k \cos(k\Omega) \right]^2 + \left[ \sum_{k=0}^N a_k \sin(k\Omega) \right]^2 \quad (2.11)$$

Calculăm separat cele două sume :

$$\left[ \sum_{k=0}^N a_k \cos(k\Omega) \right]^2 = \sum_{k=1}^N a_k^2 \cos^2(k\Omega) + \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{l=0, \\ l \neq k}}^N a_k a_l \cos(k\Omega) \cos(l\Omega)$$

$$\left[ \sum_{k=0}^N a_k \sin(k\Omega) \right]^2 = \sum_{k=1}^N a_k^2 \sin^2(k\Omega) + \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^N a_k a_l \sin(k\Omega) \sin(l\Omega)$$

și, revenind la relația (2.11), avem :

$$\begin{aligned} |H(\Omega)|^2 &= \sum_{k=0}^N a_k^2 (\sin^2 k\Omega + \cos^2 k\Omega) + \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^N a_k a_l [\cos(k\Omega)\cos(l\Omega) + \sin(k\Omega)\sin(l\Omega)] \end{aligned}$$

sau :

$$|H(\Omega)|^2 = \sum_{k=0}^N a_k^2 + \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{l=0, \\ l \neq k}}^N a_k a_l \cos(k-l)\Omega \quad (2.12)$$

Condiția de egalitate a puterilor semnalelor deterministe de la intrarea și ieșirea filtrului numeric se scrie :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 |S(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S(\Omega)|^2 d\Omega$$

sau, ținând cont de (2.12) :

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^N a_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} |S(\Omega)|^2 d\Omega + \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{l=0, \\ l \neq k}}^N a_k a_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)\Omega \cdot |S(\Omega)|^2 d\Omega \right] = P_s$$

adică :

$$R_{ss}[0] \left( \sum_{k=0}^N a_k^2 \right) + \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{l=0, \\ l \neq k}}^N a_k a_l \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(k-l)\Omega] |S(\Omega)|^2 d\Omega \right] = R_{ss}[0]$$

Dar :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S(\Omega)|^2 \cos[(k-1)\Omega] d\Omega = \\
& = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S(\Omega)|^2 e^{j(k-1)\Omega} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S(\Omega)|^2 e^{-j(k-1)\Omega} d\Omega \right\} = \\
& = \frac{1}{2} \{R_{ss}[k-1] + R_{ss}[1-k]\} = R_{ss}[k-1]
\end{aligned}$$

De aceea :

$$\left( \sum_{k=0}^N a_k^2 \right) R_{ss}[0] + \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{l=0, \\ l \neq k}}^N a_k a_l R_{ss}[k-l] = R_{ss}[0] \quad (2.13)$$

sau :

$$\left( 1 - \sum_{k=0}^N a_k^2 \right) R_{ss}[0] = \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{l=0, \\ l \neq k}}^N a_k a_l R_{ss}[k-l]$$

Banda echivalentă de zgomot a filtrului RFI de ordinul N este :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 d\Omega = 2\pi \sum_{k=0}^N a_k^2 + \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{l=0, \\ l \neq k}}^N a_k a_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)\Omega d\Omega$$

Dar :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)\Omega d\Omega = \frac{1}{k-l} \int_{-\pi}^{\pi} d[\sin(k-l)\Omega] = \frac{1}{k-l} \sin[(k-l)\Omega] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; k \neq l$$

și revenind la relația anterioară :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 d\Omega = 2\pi \sum_{k=0}^N a_k^2$$

și deci îmbunătățirea RSZ este dată de :

$$\chi_N = \frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k^2} \quad (2.14)$$



Rezultă că filtrul de ordinul  $N$  trebuie proiectat în așa fel încât să se minimizeze suma pătratelor coeficienților cu constrângerea dată de relația (2.13).

Un caz particular interesant este cel în care :  $a_0$  și  $a_N$  sunt diferiți de 0 și  $a_k = 0$  pentru  $k = 1 \div N-1$ . În această situație :

$$H(\Omega) = a_0 + a_N \cos N\Omega - j a_N \sin N\Omega$$

$$H(\Omega) = a_0^2 + a_N^2 + 2a_0 a_N \cos N\Omega$$

și în acest caz, corespunzător relației (2.13) :

$$(1 - a_0^2 - a_N^2)R_{ss}[0] = 2a_0 a_N R_{ss}[N]$$

iar relația (2.14) devine :

$$\chi_N = \frac{1}{a_0^2 + a_N^2}$$

Algoritmul de proiectare al filtrului este următorul :

1. Se calculează  $R_{ss}[0]$ ,  $R_{ss}[N]$  și  $R_N = R_{ss}[N]/R_{ss}[0]$ .
2. Se alege valoarea lui  $\chi_N$  dorită, în intervalul :

$$1 < \chi_N < R_N + 1$$

3. Valorile coeficienților  $a_0$  și  $a_N$  vor fi :

$$a_{0,N} = \frac{\sqrt{\frac{R_N + \chi_N - 1}{R_N \chi_N}} \pm \sqrt{\frac{R_N - \chi_N + 1}{R_N \chi_N}}}{2}$$

### OBSERVATII

- O1.** Acest algoritim nu se poate aplica în cazul semnalelor  $s[n]$  la care  $R_{ss}[N] = 0$ .
- O2.** Problema optimizării filtrului RFI de ordin  $N$  este una de extreme cu legături. Într-adevăr, trebuie minimizată funcționala :

$$F(a_k) = \sum_{k=0}^N a_k^2$$

cu respectarea relației (2.13).

Condiția de minim a funcționalei fiind :

$$\frac{\partial F(a_k)}{\partial a_k} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2 \sum_{k=0}^N a_k = 0$$

una dintre condițiile care merită să fie verificată în proiectarea filtrului este :

$$\sum_{k=0}^N a_k = 0 \quad (2.15)$$

**O3.** Banda echivalentă de zgomot a unui filtru RIF de ordinul N cu coeficienți  $a_k$ ,  $k = 0 \div N$  este deci :

$$B_{ZN} = \sum_{k=0}^N a_k^2$$

### 2.3.2. Filtru RII

Un filtru RII de ordinul I este descris de ecuația cu diferențe finite :

$$b_0 u[n] + b_1 u[n-1] = a_0 s[n] + a_1 s[n-1]$$

Răspunsul său în frecvență este :

$$H(\Omega) = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\Omega}}{b_0 + b_1 e^{-j\Omega}}$$

De aceea se poate scrie :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{a_0^2 + a_1^2 + 2a_0 a_1 \cos \Omega}{b_0^2 + b_1^2 + 2b_0 b_1 \cos \Omega}$$

Se obține pentru banda echivalentă de zgomot :

$$B_{zRII} = \int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2 + a_1^2 + 2a_0a_1 \cos \Omega}{b_0^2 + b_1^2 + 2b_0b_1 \cos \Omega} d\Omega$$

Făcând substituția :

$$\operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} = t$$

se obține:

$$B_{zRII} = 2 \left( \frac{a_0 - a_1}{b_0 - b_1} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 + \left( \frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1} \right)}{t^2 + \left( \frac{b_0 + b_1}{b_0 - b_1} \right)^2 t^2 + 1} dt$$

Cu notațiile :

$$\frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1} = \alpha; \quad \frac{b_0 + b_1}{b_0 - b_1} = \beta \quad \text{și} \quad \frac{a_0 - a_1}{b_0 - b_1} = \gamma$$

expresia benzii echivalente de zgomot devine :

$$B_{zRII} = 2\gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 + \alpha^2}{t^2 + \beta^2} \cdot \frac{dt}{1 + t^2}$$

Pentru aceasta se face descompunerea :

$$\frac{t^2 + \alpha^2}{(t^2 + \beta^2)(1 + t^2)} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2 - 1} \cdot \frac{1}{t^2 + \beta^2} + \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2 - 1} \cdot \frac{1}{t^2 + 1}$$

și deci :

$$B_{zRII} = 2\gamma^2 \left[ \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2 - 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \beta^2} + \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2 - 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} \right]$$

adică :

$$B_{z_{\text{RII}}} = 2\gamma^2 \left[ \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\beta^2 - 1)\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\left(\frac{t}{\beta}\right)}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2} + \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2 - 1} \operatorname{arctg}(t) \right]_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= 2\pi\gamma^2 \left[ \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\beta^2 - 1)\beta} + \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2 - 1} \right] = 2\pi\gamma^2 \frac{(\beta + \alpha^2)(\beta - 1)}{\beta(\beta^2 - 1)}$$

Deci banda echivalentă de zgomot a unui filtru RII de ordinul I este :

$$B_{z_{\text{RII}}} = 2\pi\gamma^2 \frac{(\beta + \alpha^2)}{\beta(\beta + 1)}$$

Se pot calcula, în același fel, benzile echivalente de zgomot și pentru filtre RII de ordin superior. Astfel de filtre se utilizează în construcția modulatorilor sau a demodulatorilor numerice, a multiplexoarelor numerice, a codoarelor în subbenzi, etc. Studiul acestor filtre se justifică și pentru că ele pot fi utilizate drept filtre prototip pentru filtrele digitale adaptive.

#### 2.4. Filtre numerice echivalente filtrelor analogice transversale

În paragraful 2.1 s-a prezentat modul în care se poate îmbunătăți RSZ în cazul semnalelor periodice, analogice, perturbate aditiv de zgomot alb. Au fost definite filtrele transversale analogice. Principala proprietate a acestor sisteme este periodicitatea răspunsului lor în frecvență. Datorită acestei proprietăți ele pot fi proiectate în așa fel încât răspunsul lor în frecvență să aibă maxime la pulsațiile armonicele semnalului util  $s(t)$ .

Și spectrul semnalului periodic în timp discret este discret. De aceea și în cazul semnalelor periodice în timp discret este utilă folosirea unor filtre numerice cu răspuns în frecvență periodic, de perioadă inferioară lui  $2\pi$ .

În continuare se prezintă modul în care pot fi construite filtre cu răspunsul în frecvență periodic de perioadă  $2\pi/2^N$ . Fie sistemul din figura 2.7.

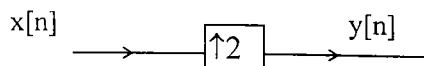


Figura 2.7. Sistem de supraeșantionare.

Legătura dintre semnalele  $x[n]$  și  $y[n]$  este :

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & \text{pentru } n:2 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Se calculează legătura dintre transformatele Fourier în timp discret ale semnalelor  $x[n]$  și  $y[n]$  :

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-jn\Omega} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} y[2p]e^{-j2p\Omega} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} y[2p+1]e^{-j(2p+1)\Omega}$$

sau :

$$Y(\Omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]e^{-j2p\Omega} = X(2\Omega)$$

Trebuie menționat faptul că semnalul  $y[n]$  se obține prin intercalarea a câte unui zero între eșantioanele succesive ale semnalului  $x[n]$ . Un exemplu pentru generarea semnalului  $y[n]$  pornind de la semnalul  $x[n]$  este prezentat în figura 2.8. Deci intercalând zerouri între eșantioanele răspunsului la impuls a unui filtru cu răspuns în frecvență  $H(\Omega)$  se obține răspunsul la impuls al unui sistem cu răspunsul în frecvență  $H(2\Omega)$ .

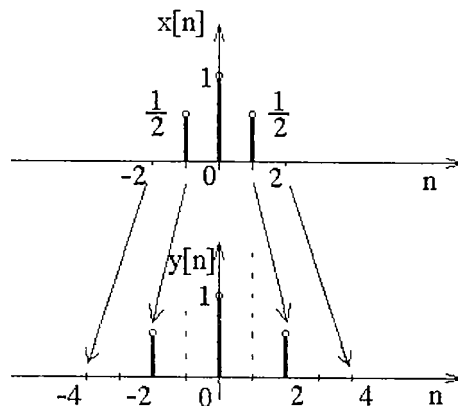


Figura 2.8. Exemplu de supraeșantionare.

În continuare se analizează sistemul obținut prin conectarea în cascadă a două sisteme de tipul celui din figura 2.7, sistem care este prezentat în figura 2.9.

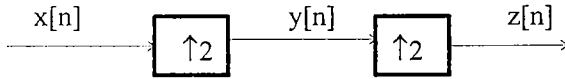


Figura 2.9. Conectarea în cascadă a sistemelor de supraeșantionare.

Se constată că :

$$z[n] = \begin{cases} y\left[\frac{n}{2}\right], & \text{pentru } n:2 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Dar :

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & \text{pentru } n:2 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

De aceea :

$$z[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{4}\right], & \text{pentru } n:4 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Legătura dintre transformatele Fourier în timp discret ale secvențelor  $x[n]$  și  $z[n]$  este :

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z[n]e^{-jn\Omega} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} z[4p]e^{-j4p\Omega} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} z[4p+1]e^{-j(4p+1)\Omega} + \\ &+ \sum_{p=-\infty}^{\infty} z[4p+2]e^{-j(4p+2)\Omega} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} z[4p+3]e^{-j(4p+3)\Omega} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]e^{-j4p\Omega} = X(4\Omega) \end{aligned}$$

Deci intercalând câte trei zerouri între eșantioanele succesive ale răspunsului la impuls al unui filtru cu răspunsul în frecvență  $H(\Omega)$  se obține răspunsul la impuls al unui filtru cu răspunsul în frecvență  $H(4\Omega)$ . Dar funcția  $H(2\Omega)$  este periodică de perioadă  $2\pi/2$  iar funcția  $H(4\Omega)$  este periodică de perioadă  $2\pi/4$ . De aceea se poate afirma că intercalând  $2^N-1$  zerouri între eșantioanele succesive ale răspunsului la impuls ale unui filtru numeric cu răspunsul în frecvență  $H(\Omega)$  se obține răspunsul la impuls al unui sistem cu răspunsul în frecvență  $H(2^N\Omega)$ , care este o funcție periodică de perioadă  $2\pi/2^N$ .

**OBSERVAȚIE.** Benzile echivalente de zgomot ale sistemelor cu răspunsurile în frecvență  $H(\Omega), H(2\Omega), \dots, H(2^N\Omega)$  sunt identice. Într-adevăr :

$$\begin{aligned}
 B_z &= \int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 d\Omega = \int_0^{2\pi} |H(\Omega)|^2 d\Omega \\
 \int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 d\Omega &= \int_{-2\pi}^{2\pi} |H(u)|^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \left[ \int_{-2\pi}^0 |H(u)|^2 du + \int_0^{2\pi} |H(u)|^2 du \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{2\pi} |H(-u)|^2 du + \int_0^{2\pi} |H(u)|^2 du \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{2\pi} |H^*(u)|^2 du + \int_0^{2\pi} |H(u)|^2 du \right] = \int_0^{2\pi} |H(u)|^2 du = B_z \\
 \int_{-\pi}^{\pi} |H(2^N\Omega)|^2 d\Omega &= \frac{1}{2^N} \int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} |H(u)|^2 du = \frac{1}{2^N} \sum_{k=-2^{N-1}}^{2^{N-1}-1} \int_{k2\pi}^{(k+1)2\pi} |H(u)|^2 du
 \end{aligned}$$

Dar :

$$H(u) = H(u - 2k\pi) \quad , (\forall) k \in Z$$

Făcând în ultima integrală schimbarea de variabilă  $v = u - 2k\pi$ , se obține :

$$\int_{k \cdot 2\pi}^{(k+1) \cdot 2\pi} |H(u)|^2 du = \int_0^{2\pi} |H(v)|^2 dv = B_z$$

De aceea :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(2^N \Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{2^N} 2^N B_z = B_z \quad (2.16)$$

Să considerăm în continuare că trebuie prelucrat, pentru a i se îmbunătăți RSZ, semnalul  $x[n]$  :

$$x[n] = s[n] + n[n]$$

În această ultimă relație  $s[n]$  este un semnal periodic în timp discret de perioadă  $M$ . Semnalul  $s[n]$  are un spectru discret, armonicile sale fiind distanțate cu  $2\pi/M$  între ele. Să presupunem că semnalul  $s[n]$  este de bandă limitată, pulsația maximă în spectrul său fiind  $P \cdot (2\pi/M)$ . Se poate construi un filtru numeric al cărui răspuns în frecvență să aibă maxime la pulsațiile  $k(2\pi/M)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Fie, în acest scop, filtrul numeric trece jos cu răspunsul în frecvență  $H(\Omega)$ . Se construiește sistemul cu răspunsul în frecvență  $H(M\Omega)$ . Se constată că la pulsațiile  $k(2\pi/M)$  valoarea răspunsului în frecvență al acestui filtru este :

$$H\left(Mk \frac{2\pi}{M}\right) = H(k2\pi) = H(0)$$

adică maximă. Fie această valoare egală cu 1. Se constată faptul că toate armonicile semnalului  $s[n]$  trec nealterate prin filtrul cu răspuns în frecvență  $H(M\Omega)$ . Notând cu  $y[n]$  semnalul obținut prin prelucrarea semnalului  $x[n]$  și acceptând că acesta este de forma :

$$y[n] = u[n] + n_0[n]$$

se constată că dacă semnalul  $s[n]$ , periodic de perioadă  $M$ , este prelucrat cu sistemul cu răspuns în frecvență  $H(M\Omega)$  atunci :

$$P_u = P_s$$

iar dacă semnalul  $s[n]$  este prelucrat cu sistemul cu răspuns în frecvență  $H(\Omega)$  atunci :

$$P_u < P_s$$

deoarece anumite armonici ale semnalului  $s[n]$  sunt atenuate de acest sistem. De aceea, în cazul sistemului cu răspuns în frecvență  $H(\Omega)$  avem :



$$\left(\frac{RSZ_0}{RSZ_i}\right)_1 = \frac{P_u}{P_{n0}} \frac{P_n}{P_s} = \left(\frac{P_u}{P_s}\right)_1 \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 d\Omega} < \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 d\Omega}$$

În cazul sistemului cu răspuns în frecvență  $H(M\Omega)$ , utilizând relația (2.16), avem :

$$\left(\frac{RSZ_0}{RSZ_i}\right)_M = \left(\frac{P_u}{P_s}\right)_M \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} |H(M\Omega)|^2 d\Omega} = \left(\frac{P_u}{P_s}\right)_M \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 d\Omega} = \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega)|^2 d\Omega}$$

Deoarece :

$$\left(\frac{RSZ_0}{RSZ_i}\right)_M > \left(\frac{RSZ_0}{RSZ_i}\right)_1$$

se constată superioritatea sistemului cu răspuns în frecvență  $H(M\Omega)$  asupra celui cu răspunsul în frecvență  $H(\Omega)$ , la prelucrarea semnalelor periodice de perioadă  $M$ , din punct de vedere al îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot, RSZ.

Să considerăm în continuare ca exemplu semnalul :

$$s[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Transformata Fourier în timp discret a acestui semnal este :

$$S(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) e^{-j\Omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) e^{-j\Omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) e^{-j\Omega n}$$

Pentru că avem următoarea pereche Fourier :

$$\cos\left(\frac{\pi}{M}n\right) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{M}n\right) e^{-j\Omega n} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\left(\frac{2\pi}{M}-\Omega\right)n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\left(\frac{2\pi}{M}+\Omega\right)n} \right]$$

rezultă :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{M}n\right) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\left(\frac{2\pi}{M}-\Omega\right)n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\left(\frac{2\pi}{M}+\Omega\right)n} \right]$$

Se cunoaște că dezvoltarea în serie Fourier a distribuției  $\delta_{2\pi}(t)$  este :

$$\delta_{2\pi}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkt}$$

Înlocuind  $t$  cu  $\frac{2\pi}{M} - \Omega$  ultima relație devine :

$$\delta_{2\pi}\left(\frac{2\pi}{M} - \Omega\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\left(\frac{2\pi}{M} - \Omega\right)n}$$

iar pentru  $t$  luând valoarea  $-\left[\frac{2\pi}{M} + \Omega\right]$  se obține :

$$\delta_{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{M} - \Omega\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\left(\frac{2\pi}{M} + \Omega\right)n}$$

De aceea :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{M}n\right) \leftrightarrow \pi \left[ \delta_{2\pi}\left(\frac{2\pi}{M} - \Omega\right) + \delta_{2\pi}\left(\frac{2\pi}{M} + \Omega\right) \right]$$

iar transformata Fourier în timp discret a semnalului  $s(t)$  este :

$$S(\Omega) = \pi \left\{ \left[ \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{8} - \Omega\right) + \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{8} + \Omega\right) \right] + \left[ \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \Omega\right) + \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \Omega\right) \right] + \left[ \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \Omega\right) + \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \Omega\right) \right] \right\}$$

Puterea acestui semnal este :

$$P_s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Transformata Fourier a răspunsului sistemului cu răspunsul în frecvență  $H(\Omega)$  la semnalul  $s[n]$  este :

$$\begin{aligned}
 U(\Omega) &= S(\Omega) H(\Omega) = \pi \left\{ H\left(\frac{\pi}{8}\right) \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{8} - \Omega\right) + H\left(-\frac{\pi}{8}\right) \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{8} + \Omega\right) + \right. \\
 &\quad + H\left(\frac{\pi}{4}\right) \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \Omega\right) + H\left(-\frac{\pi}{4}\right) \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \Omega\right) + \\
 &\quad \left. + H\left(\frac{\pi}{2}\right) \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \Omega\right) + H\left(-\frac{\pi}{2}\right) \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \Omega\right) \right\} = \\
 &= \pi \left\{ \left| H\left(\frac{\pi}{8}\right) \right| \left[ e^{j \arg\left\{ H\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\}} \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{8} - \Omega\right) + e^{-j \arg\left\{ H\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\}} \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{8} + \Omega\right) \right] + \right. \\
 &\quad + \left| H\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| \left[ e^{j \arg\left\{ H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}} \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \Omega\right) + e^{-j \arg\left\{ H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}} \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \Omega\right) \right] + \\
 &\quad \left. + \left| H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \left[ e^{j \arg\left\{ H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}} \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \Omega\right) + e^{-j \arg\left\{ H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}} \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \Omega\right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Expresia semnalului  $u[n]$ , rezultat din filtrarea lui  $s[n]$ , devine :

$$\begin{aligned}
 u[n] &= \left| H\left(\frac{\pi}{8}\right) \right| \cos\left(\frac{\pi}{8}n + \arg\left\{ H\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\}\right) + \left| H\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| \cos\left(\frac{\pi}{4}n + \arg\left\{ H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}\right) + \\
 &\quad + \left| H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \arg\left\{ H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}\right)
 \end{aligned}$$

Puterea semnalului de ieșire este :

$$P_u = \frac{1}{2} \left\{ \left| H\left(\frac{\pi}{8}\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\pi}{4}\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|^2 \right\} \quad (2.17)$$

Să considerăm că sistemul cu răspuns în frecvență  $H(\Omega)$  este un filtru de mediere cu răspunsul la impuls :

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M}, & n = 0 \div M-1 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-jk\Omega} = \frac{1}{M} \cdot \frac{1 - e^{-jM\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{1}{M} \frac{e^{-jM\frac{\Omega}{2}} \sin \frac{M\Omega}{2}}{e^{-j\frac{\Omega}{2}} \sin \frac{\Omega}{2}}$$

Deci :

$$H(\Omega) = \frac{1}{M} e^{-j(M-1)\frac{\Omega}{2}} \frac{\sin \frac{M\Omega}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}}$$

Penru  $M = 15$  se obține :

$$H(\Omega) = \frac{1}{15} e^{-j7\Omega} \frac{\sin \frac{15\Omega}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}}$$

De aceea :

$$H\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{15} e^{-j\frac{7\pi}{8}} \frac{\sin \frac{15\pi}{16}}{\sin \frac{\pi}{16}}$$

$$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{15} e^{-j\frac{7\pi}{4}} \frac{\sin \frac{15\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}}$$

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{15} e^{-j\frac{7\pi}{2}} \frac{\sin \frac{15\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

Astfel :

$$\left|H\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| = 0,023 ; \left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = 0,066 ; \left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 0,066$$

și prin urmare avem, conform relației (2.17),  $P_u = 4,62 \cdot 10^{-3}$ .

Transformata Fourier a răspunsului sistemului cu răspuns în frecvență  $H(16\Omega)$  la semnalul  $s[n]$  este :

$$\begin{aligned} U(\Omega) &= S(\Omega)H(16\Omega) = \pi \left\{ H(2\pi)\delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{8} - \Omega\right) + H(-2\pi)\delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{8} + \Omega\right) + \right. \\ &+ H(4\pi)\delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \Omega\right) + H(-4\pi)\delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \Omega\right) + \\ &+ H(8\pi)\delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \Omega\right) + H(-8\pi)\delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \Omega\right) \left. \right\} = \\ &= \pi H(0) \left\{ \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{8} - \Omega\right) + \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{8} + \Omega\right) + \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \Omega\right) + \right. \\ &+ \left. \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \Omega\right) + \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \Omega\right) + \delta_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \Omega\right) \right\} \end{aligned}$$

Expresia semnalului  $u[n]$  este :

$$u[n] = \cos\frac{\pi}{8}n + \cos\frac{\pi}{4}n + \cos\frac{\pi}{2}n$$

iar puterea sa este  $P_u = 3/2$ .

Banda echivalentă de zgomot a filtrului cu răspuns în frecvență  $H(\Omega)$  este, conform observației O3 din paragraful anterior, egală cu :

$$B_z = \sum_{k=0}^{M-1} \left(\frac{1}{M}\right)^2 = \frac{1}{M}$$

Ținând cont că valoarea lui  $M$  s-a considerat de 15, rezultă  $B_z = 1/15$ .

Considerând densitatea spectrală de putere a zgomotului  $n[n]$ ,  $N_0 = 1$  se obține pentru raportul semnal pe zgomot, RSZ al semnalului  $x[n]$  :

$$RSZ_i = \frac{\frac{3}{2}}{1} = 1,5$$

La ieșirea sistemului cu răspuns în frecvență  $H(\Omega)$  vom avea următorul RSZ :

$$RSZ_0 = \frac{4,62 \cdot 10^{-3}}{\frac{1}{30\pi}} = 30\pi 4,62 \cdot 10^{-3} = 0,435$$

Deci sistemul cu răspuns în frecvență  $H(\Omega)$  nu îmbunătățește raportul semnal pe zgomot. Pentru ieșirea sistemului cu răspuns în frecvență  $H(16\Omega)$ , RSZ este :

$$RSZ_0 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{30\pi}} = 45\pi = 141,37$$

iar îmbunătățirea RSZ realizată cu acest filtru dată de raportul :

$$\chi = \frac{RSZ_0}{RSZ_i} = \frac{141,37}{1,5} = 94,247$$

Răspunsul la impuls al acestui filtru este prezentat în figura 2.10.

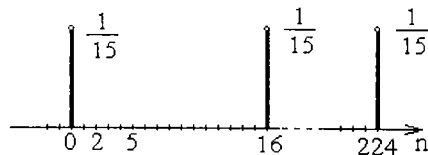


Figura 2.10. Răspunsul la impuls al unui filtru numeric "echivalent" cu un mediator analogic alunecător.

## OBSERVATII

**O1.** Filtrele din acest paragraf au fost numite echivalente cu filtre transversale analogice având în vedere că pot fi utilizate (la fel ca și filtrele analogice amintite) la prelucrarea semnalelor numerice periodice. Cele două categorii de filtre se numesc echivalente deoarece ambele au răspunsuri în frecvență periodice (cele numerice cu perioadă multiplu al lui  $2\pi$ ).

**O2.** Deși durata răspunsului în frecvență  $H(2^N\Omega)$  este de  $2^N$  ori mai mare decât durata răspunsului la impuls a filtrului prototip  $H(\Omega)$ , numărul coeficienților nenuli ai celor două sisteme este același. De aceea se poate afirma că nu apar complicații prea mari de calcul prin folosirea filtrelor propuse.

**O3.** Procedul de generare al sistemului cu răspunsul în frecvență  $H(2^N\Omega)$  poartă numele de supraeșantionare deoarece răspunsul la impuls al filtrului cu răspunsul în frecvență  $H(2^N\Omega)$  poate fi privit ca fiind obținut prin eșantionarea cu o frecvență de  $2^N$  ori mai mare decât frecvența de eșantionare folosită pentru obținerea răspunsului la impuls al sistemului cu răspunsul în frecvență  $H(\Omega)$ .

**O4.** Inserarea de zerouri este utilizată și pentru construcția filtrelor conjugate în oglindă (Quadratur Mirror Filter) folosite în codarea subbandă [Mal.'94], [Kun.'84], [Bas.,Chi.,Cho.'95], [Blu.,Uns.'98], [Bol.,Hla.,Fei.'96], [Kla.,Hol.,Flo.'97].

**O5.** Sistemul folosit ca exemplu la sfârșitul acestui paragraf se numește mediator numeric alunecător [DeS.,Isa.'92], [Asz.'93]. Exemple de semnale numerice utilizate în telecomunicații se găsesc în [Opp.'76].

**O6.** Alte proprietăți ale filtrelor prezentate în acest paragraf sunt demonstrate în [Isa.'95(1)].

## 2.5. Utilizarea sistemelor liniare, variabile în timp, la îmbunătățirea RSZ

Toate metodele de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot prezentate până acum se bazează pe utilizarea unor sisteme liniare și invariante în timp. De asemenea, semnalul util era de fiecare dată considerat un semnal determinist staționar [Spă.'87]. Orice semnal determinist este caracterizat de o familie de parametri. De exemplu, semnalele armonice care au forma  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  se caracterizează prin familia de parametri  $(A, \omega_0, \varphi_0)$ . Dacă acești parametri sunt niște constante, semnalul determinist este staționar. Dacă unii dintre acești parametri sunt variabili în timp, semnalul determinist caracterizat astfel este unul nestaționar. Dacă ei sunt lent variabili în timp atunci acesta poate fi privit ca o succesiune de semnale staționare. Un astfel de semnal se numește cvasistaționar. Pentru fiecare semnal din succesiunea amintită mai sus există un filtru adaptat, caracterizat de anumiți parametri.

Dacă există un filtru ai cărui parametri să poată lua pe rând aceste valori el poate fi considerat drept un filtru adaptat la semnalul nestaționar considerat. Un astfel de filtru poate fi construit prin comanda parametrilor unui filtru comandat. În prezent se utilizează tot mai mult filtrele comandate, fiind disponibilă o gamă largă de astfel de dispozitive. În general este vorba despre sisteme analogice comandate numeric. O alternativă de construcție a acestor sisteme este bazată pe tehnologia capacităților comutate [Mat.,Șer.'87].

### 2.5.1. Filtre cu urmărire

În cazul în care se folosește un filtru comandat având un singur parametru reglabil și anume frecvența centrală sau de tăiere, se obține un filtru comandat în frecvență. Dacă frecvența centrală a filtrului este în permanență egală cu frecvența instantanee a semnalului de la intrare atunci filtrul comandat se numește filtru cu urmărire.

Pentru aceste filtre se demonstrează unele proprietăți în [Isa.'93]. Una dintre ele este următoarea : "În banda de urmărire modulul răspunsului în frecvență al unui filtru trece bandă cu urmărire de ordinul 2 este maxim."

Conform acestei proprietăți caracteristica globală de frecvență a unui filtru cu urmărire este identică cu caracteristica de modul a filtrului adaptat la semnalul "chirp" dacă este respectată condiția (2.15). S-a demonstrat în acest mod că filtrul cu urmărire este un filtru adaptat la semnalul "chirp". De aceea îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot realizată de un filtru cu urmărire care prelucrează un semnal de tip "chirp" perturbat aditiv de zgomot alb este cea prezentată în [Isa'95].

Remarcabil pentru un astfel de filtru este faptul că el conservă la ieșire forma semnalului determinist de la intrare dacă acesta este unul modulat în frecvență cu purtător sinusoidal. Astfel de filtre sunt descrise în [Isa.'95]. O aplicație a unor astfel de filtre este prezentată în [Isa.,Isa.,Asz.'94].

O altă modalitate de construcție a filtrelor cu urmărire este bazată pe simularea unui filtru analogic printr-un filtru numeric, prin intercalarea acestuia între un CAN și un CNA. Urmărirea frecvenței instantanee a componentei deterministe a semnalului de filtrat este realizată prin eșantionarea adaptivă a semnalului de intrare. Procedeu este descris în [Naf.,Isa.'91]. O realizare practică a unui astfel de filtru este prezentată în [Naf.,Isa.'91]. Sistemele descrise în acest paragraf ar putea fi utilizate în comunicațiile cu spectru distribuit deoarece benzile lor de trecere pot fi poziționate în diferite zone, la diferite momente de timp.

### 2.5.2. Filtre adaptive

În 1959 Widrow și Hoff la Universitatea din Stanford au inventat algoritmul LMS [Wid.'75], [Wid.,Ste.'85]. Apoi Rosenblatt a construit Perceptronul său la Laboratorul Aeronautic Cornell. Aizermann și colegii săi de la Laboratorul de Automatică și Telemecanică din Moscova au construit o mașină de căutare a valorii minime a gradientului. În Marea Britanie, Gabor a dezvoltat primele filtre adaptive. În deceniul șapte munca la sistemele adaptive s-a intensificat. O aplicație comercială importantă a filtrării adaptive în comunicațiile numerice este datorată lui Lucky de la Laboratoarele Bell. În anul 1965 un sistem de anulare adaptivă a zgomotului a fost realizat la Universitatea Stanford.



### 2.5.2.1. Conceptul de anulare adaptivă a zgomotului

Pentru sistemul din figura 2.11, se consideră că zgomotul  $n_1$  este necorelat cu semnalul  $s$  dar corelat cu zgomotul  $n_0$ . Prin filtrarea zgomotului  $n_1$

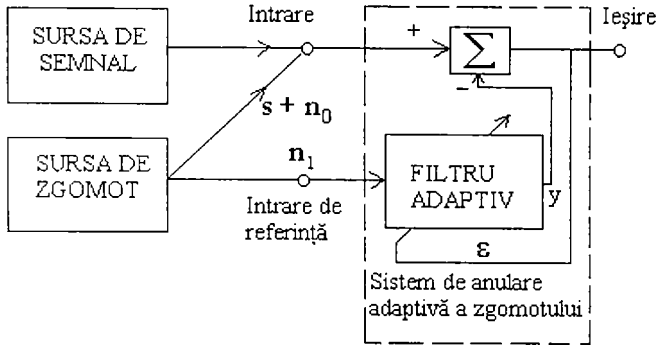


Figura 2.11. O metodă de anulare adaptivă a zgomotului.

se obține semnalul  $y$  care este asemănător zgomotului  $s + n_0 - y$ . Se consideră că filtrul adaptiv folosit în sistemul din figura 2.11 este realizat cu algoritmul LMS. Ca și semnal de eroare se folosește semnalul  $s + n_0 - y$ .

Se presupune că semnalele  $s$ ,  $n_0$ ,  $n_1$  și  $y$  sunt staționare și de valoare medie nulă. De asemenea se presupune că  $s$  nu este corelat cu  $n_0$  sau  $n_1$  și că  $n_0$  și  $n_1$  sunt corelate.

Ridicând la pătrat relația :

$$\varepsilon = s + n_0 - y \quad (2.18)$$

se obține :

$$\varepsilon^2 = s^2 + (n_0 - y)^2 + 2s(n_0 - y)$$

Luând media statistică în ambii membri ai ultimei relații, se obține :

$$E\{\varepsilon^2\} = E\{s^2\} + E\{(n_0 - y)^2\} + 2E\{s(n_0 - y)\} \quad (2.19)$$

Deoarece intercorelația semnalelor  $s$  și  $n_1$  este nulă se poate afirma același lucru și despre semnalele  $s$  și  $y$  și deci :

$$E\{\varepsilon^2\} = E\{s^2\} + E\{(n_0 - y)^2\}$$

Prin minimizarea erorii medii pătratice de la ieșire (adică termenul  $E\{\varepsilon^2\}$ ), termenul  $E\{s^2\}$  nu este afectat. De aceea :

$$E_{\min}\{\varepsilon^2\} = E\{s^2\} + E_{\min}\{(n_0 - y)^2\}$$

Deoarece semnalul  $y$  de la ieșirea filtrului adaptiv este generat astfel încât mărimea  $E\{(n_0 - y)^2\}$  să fie minimizată, se poate afirma că acest semnal reprezintă o aproximare de eroare medie pătratică minimă a semnalului  $n_0$ . Dar, conform relației (2.18):

$$n_0 - y = \varepsilon - s$$

De aceea se poate afirma că semnalul  $\varepsilon$  reprezintă aproximarea de eroare medie pătratică minimă a semnalului  $s$ . În general semnalul  $\varepsilon$  va fi suma dintre semnalul  $s$  și un anumit zgomot  $(n_0 - y)$ . Minimizând  $\varepsilon^2$  se minimizează  $E\{(n_0 - y)^2\}$  adică puterea zgomotului de la ieșirea sistemului global, în timp ce semnalul  $s$  de la ieșire își conservă puterea. De aceea se poate afirma că raportul semnal pe zgomot este minimizat la ieșirea sistemului global.

Pe baza relației (2.19) se constată că valoarea minimă a puterii de la ieșire  $E_{\min}(\varepsilon^2)$  este  $E\{s^2\}$ . Această valoare este atinsă atunci când  $E\{(n_0 - y)^2\} = 0$ . Această condiție este îndeplinită când :

$$\varepsilon = s \quad \text{a.p.t.} \quad \text{și} \quad y = n_0 \quad \text{a.p.t.}$$

În acest caz minimizarea puterii semnalului de la ieșire face ca semnalul de la ieșire să nu mai conțină deloc zgomot.

Dacă intercorelația semnalelor  $s + n_0$  și  $n_1$  este zero, semnalele  $y$  și  $s + n_0$  vor fi necorelate și va avea loc relația :

$$\begin{aligned} E\{\varepsilon^2\} &= E\{[(s + n_0) - y]^2\} = E\{(s + n_0)^2\} + \\ &+ E\{y^2\} - 2E\{(s + n_0)y\} = E\{(s + n_0)^2\} + E\{y^2\} \end{aligned}$$

sau :

$$E_{\min}\{\varepsilon^2\} = E_{\min}\{y^2\} + E\{(s + n_0)^2\}$$

Însă :

$$E_{\min}\{y^2\} = 0$$

Această condiție este îndeplinită dacă ieșirea filtrului adaptiv din structura sistemului din figura 2.11 se anulează. Aceasta se poate realiza prin anularea tuturor ponderilor acestui filtru adaptiv.

Deci, nici în cazul în care zgomotul  $n_1$  nu este corelat cu semnalul  $s + n_0$ , supresorul de zgomot nu înrăutățește raportul semnal pe zgomot al semnalului  $s + n_0$  (dar nici nu-l îmbunătățește).

Aceste considerente pot fi extinse și pentru cazul când semnalele de intrare și de referință conțin pe lângă zgomotele  $n_0$  și  $n_1$  și alte zgomote, suprapuse aditiv și necorelate între ele și nici cu semnalele  $s$ ,  $n_0$  sau  $n_1$ . La fel se analizează și cazul când  $n_0$  și  $n_1$  sunt deterministe și nu aleatoare.

Până acum nu s-a specificat nimic despre tipul filtrului adaptiv folosit. În continuare se va considera că este vorba despre un filtru adaptiv bazat pe un prototip de tip filtru transversal. Schema acestui filtru adaptiv este prezentată și în figura 2.12.

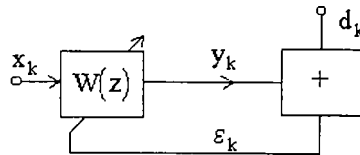


Figura 2.12. Schema bloc a filtrului adaptiv din structura supresorului de ecou.

În funcționarea filtrului adaptiv se deosebesc două etape. Prima este etapa de învățare în care coeficienții filtrului caracterizat de  $W(z)$  se modifică pentru a minimiza mărimea  $E\{\varepsilon^2\}$ . Cea de-a doua etapă este caracterizată de valori constante ale coeficienților filtrului. Acum acesta este un sistem liniar invariant în timp (un filtru transversal) cu funcția de transfer  $W^*(z)$ . În această situație :

$$E\{\varepsilon_k^2\} \cong 0$$

și deci :

$$y_k = d_k \quad \text{a.p.t.}$$

De aceea se poate scrie :

$$\Phi_{xd}(z) = \Phi_{xx}(z)W^*(z)$$

Prin urmare funcția de transfer a filtrului adaptiv este (pentru a doua etapă de funcționare) :

$$W^*(z) = \frac{\Phi_{xd}(z)}{\Phi_{xx}(z)} \quad (2.20)$$

În figura 2.13. se prezintă o formă puțin mai detaliată a schemei din figura 2.11. Se constată că :

$$n_{0k} = n_k + m_{0k} \quad ; \quad n_{1k} = n_k * h_k + m_{1k}$$

sau folosind notația :

$$u_k = n_k * h_k$$

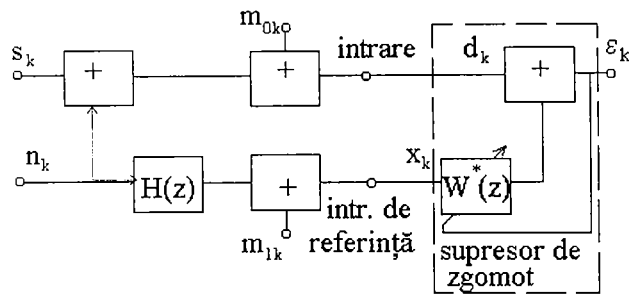


Figura 2.13. Supresor de zgomot cu filtru transversal adaptiv.

avem :

$$n_{1k} = u_k + m_{1k}$$

Se constată că  $m_{0k}$  și  $m_{1k}$  nu sunt corelate între ele și nici cu  $n_k$  sau  $s_k$ . De asemenea se păstrează celelalte ipoteze referitoare la necorelarea semnalelor  $s_k$ ,  $n_{0k}$  și  $n_{1k}$ .

Conform figurii 2.13 se poate scrie :

$$\begin{aligned} d_k &= s_k + n_k + m_{0k} \\ x_k &= u_k + m_{1k} \end{aligned}$$

În același timp :

$$\begin{aligned}\varphi_{xx}[k] &= E \{x[n] x[n+k]\} = E \{ (u[n] + m_1[n]) (u[n+k] + m_1[n+k]) \} = \\ &= E \{u_n u_{n+k}\} + E \{u_n m_{1_{n+k}}\} + E \{m_{1_n} u_{n+k}\} + E \{m_{1_n} m_{1_{n+k}}\} = \\ &= \varphi_{uuk} + \varphi_{m_1 m_1 k}\end{aligned}$$

Revenind, putem scrie :

$$\Phi_{xx}(z) = \Phi_{uu}(z) + \Phi_{m_1 m_1}(z)$$

unde vom folosi relația :

$$\Phi_{uu}(z) = \Phi_{nn}(z) |H(z)|^2$$

și avem relația pentru transformata Z a autocorelației semnalului  $x[n]$  :

$$\Phi_{xx}(z) = \Phi_{nn}(z) |H(z)|^2 + \Phi_{m_1 m_1}(z) \quad (2.21)$$

iar pentru transformata Z a intercorelației dintre  $x[n]$  și  $d[n]$  avem:

$$\Phi_{xd}(z) = Z \{ \varphi_{xd}[n] \}$$

Analog relației pentru funcția de autocorelație scriem și cea pentru funcția de intercorelație între semnalele  $x[n]$  și  $d[n]$  :

$$\begin{aligned}\varphi_{xd}[k] &= E \{x_n d_{n+k}\} = E \{ (u_n + m_{1_n}) (s_{n+k} + n_{n+k} + m_{0_{n+k}}) \} = \\ &= E \{u_n s_{n+k}\} + E \{u_n n_{n+k}\} + E \{u_n m_{0_{n+k}}\} + E \{m_{1_n} s_{n+k}\} + \\ &\quad + E \{m_{1_n} n_{n+k}\} + E \{m_{1_n} m_{0_{n+k}}\} = \varphi_{un}[k]\end{aligned}$$

Ultima egalitate a rezultat observând că termenii :

$$\begin{aligned}E \{u_n s_{n+k}\}, E \{u_n m_{0_{n+k}}\}, E \{m_{1_n} s_{n+k}\} \\ E \{m_{1_n} n_{n+k}\}, E \{m_{1_n} m_{0_{n+k}}\}\end{aligned}$$

sunt nuli. Însă :

$$\varphi_{un}[k] = u_k^v * n_k$$

unde cu  $u^v$  s-a notat semnalul obținut prin reflectarea semnalului  $u[n]$  :

$$u^v[n] = u[-n]$$

Conform acestei notații rezultă :

$$u_k^v = (n_k * h_k)^v = n_k^v * h_k^v$$

și revenind la relația care definește pe  $\phi_{un}[k]$  avem :

$$\phi_{un}[k] = (n_k^v * h_k^v) * n_k^v = n_k^v * n_k * h_k^v = \phi_{nn}[k] * h^v[k]$$

Aplicând transformata Z pentru  $\phi_{xd}[k]$  rezultă :

$$\Phi_{xd}(z) = \Phi_{nn}(z) Z\{h^v[k]\}$$

relație în care înlocuim transformata Z a lui  $h^v[k]$  :

$$h^v[k] \rightarrow \sum_p h^v[p]z^{-p} = \sum_p h[-p]z^{-p} = \sum_l h[l]z^l = H(z^{-1})$$

unde am făcut substituția  $p = -l$ , obținând astfel forma finală a transformatei Z a funcției de intercorelație între  $x[n]$  și  $d[n]$  :

$$\Phi_{xd}(z) = \Phi_{nn}(z) H(z^{-1}) \quad (2.22)$$

Pe baza relațiilor (2.20), (2.21) și (2.22) se poate scrie :

$$W^*(z) = \frac{\Phi_{nn}(z) H(z^{-1})}{\Phi_{nn}(z)|H(z)|^2 + \Phi_{m_1m_1}(z)} \quad (2.23)$$

Aceasta este expresia funcției de transfer a filtrului adaptiv din structura supresorului de zgomot. În cazul în care zgomotul  $m_1$  este identic nul expresia (2.23) devine :

$$W^*(z) = \frac{\Phi_{nn}(z) H(z^{-1})}{\Phi_{nn}(z)|H(z)|^2} = \frac{H(z^{-1})}{H(z) H(z^{-1})} = \frac{1}{H(z)}$$

Deci filtrul adaptiv poate fi utilizat și pentru caracterizarea canalului prin care se propagă zgomotul  $n_k$  spre intrarea de referință a supresorului de zgomot. Definind raportul semnal pe zgomot ca fiind raport al densităților spectrale de putere ale semnalului util și zgomotului se obține :

$$RSZ_i(z) = \frac{\Phi_{ss}(z)}{\Phi_{dd}(z)} = \frac{\Phi_{ss}(z)}{\Phi_{nn}(z) + \Phi_{m_0m_0}(z)}$$

$$RSZ_0(z) = \frac{\Phi_{ss}(z)}{\Phi_{n_0n_0}(z)}$$

unde cu  $n_0$  s-a notat zgomotul de la ieșire.

Îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot este deci :

$$\chi = \frac{RSZ_0(z)}{RSZ_i(z)} = \frac{\Phi_{ss}(z)}{\Phi_{n_0n_0}(z)} \frac{\Phi_{nn}(z) + \Phi_{m_0m_0}(z)}{\Phi_{ss}(z)} =$$

$$= \frac{\Phi_{nn}(z) + \Phi_{m_0m_0}(z)}{\Phi_{n_0n_0}(z)} \quad (2.24)$$

Zgomotul  $n_0$  este alcătuit din trei componente : prima datorată lui  $m_0$  care se suprapune direct la ieșire, a doua datorată lui  $m_1$  care se suprapune la ieșire prin intermediul sistemului cu funcția de transfer  $-W^*(z)$  și a treia datorată lui  $n$  care se propagă spre ieșire prin intermediul sistemului "echivalent" cu funcția de transfer  $1-H(z)W^*(z)$ . Din acest motiv se poate scrie :

$$\Phi_{n_0n_0}(z) = \Phi_{m_0m_0}(z) + \Phi_{m_1m_1}(z) |W^*(z)|^2 + \Phi_{nn}(z) |1-H(z)W^*(z)|^2 \quad (2.25)$$

Făcând notațiile :

$$A(z) = \frac{\Phi_{m_0m_0}(z)}{\Phi_{nn}(z)} \quad (2.26)$$

$$B(z) = \frac{\Phi_{m_0m_0}(z)}{\Phi_{nn}(z) |H(z)|^2} \quad (2.27)$$

relația (2.22) va fi :

$$W^*(z) = \frac{\frac{\Phi_{m_1 m_1}(z)}{B(z)|H(z)|^2} H(z^{-1})}{\frac{\Phi_{m_1 m_1}(z)}{B(z)|H(z)|^2} |H(z)|^2 + \Phi_{m_1 m_1}(z)}$$

adică :

$$W^*(z) = \frac{\frac{\Phi_{m_1 m_1}(z)}{B(z)} H^{-1}(z)}{\Phi_{m_1 m_1}(z) [B^{-1}(z) + 1]} = \frac{1}{H(z) [B(z) + 1]} \quad (2.28)$$

Cu aceleași notații se poate scrie și :

$$\begin{aligned} \Phi_{n_0 n_0}(z) &= \Phi_{m_0 m_0}(z) + \frac{\Phi_{m_1 m_1}(z)}{|H(z)|^2 |B(z) + 1|^2} + \Phi_{nn}(z) \left| 1 - \frac{1}{1 + B(z)} \right|^2 = \\ &= A(z) \Phi_{nn}(z) + \frac{B(z)}{|B(z) + 1|^2} \Phi_{nn}(z) + \Phi_{nn}(z) \left| \frac{B(z)}{B(z) + 1} \right|^2 = \\ &= A(z) \Phi_{nn}(z) + \frac{B(z) \Phi_{nn}(z) (1 - B^*(z))}{(1 + B(z))(1 + B^*(z))} \end{aligned}$$

Deci :

$$\Phi_{n_0 n_0}(z) = A(z) \Phi_{nn}(z) + \frac{B(z) \Phi_{nn}(z)}{1 + B(z)} \quad (2.29)$$

De aceea expresia îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot este :

$$\chi(z) = \frac{\Phi_{nn}(z) [A(z) + 1]}{\Phi_{nn}(z) \left[ A(z) + \frac{B(z)}{1 + B(z)} \right]} = \frac{[A(z) + 1][1 + B(z)]}{A(z)B(z) + A(z) + B(z)} \quad (2.30)$$

Există trei cazuri particulare semnificative :

Cazul I.  $A(z)$  este neglijabil.

În acest caz se obține :

$$\chi(z) = \frac{1 + B(z)}{B(z)}$$



și deci modulul lui  $\chi(z)$  este supraunitar.  
Cazul II.  $B(z)$  este neglijabil.  
Vom avea :

$$\chi(z) = \frac{1 + A(z)}{A(z)}$$

și în acest caz având loc o îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot.  
Cazul III.  $A(z)$  și  $B(z)$  sunt neglijabile.  
De data aceasta :

$$\chi(z) = \frac{1}{A(z) + B(z)}$$

îmbunătățirea RSZ fiind și în acest caz evidentă.

Dacă zgomotele cuplate pe cele două intrări,  $m_0$  și  $m_1$  sunt identice nule, atunci  $A(z) = B(z) = 0$  și îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot este infinită, deci la ieșire s-ar obține chiar semnalul util  $s[n]$ . Performanțele sistemului sunt însă limitate și în acest caz deoarece în calculele prezentate nu s-a ținut seama de lungimea finită a răspunsului la impuls a unui filtru realizabil și nici de zgomotul produs de estimarea gradientului, specific algoritmului adaptiv folosit.

Până aici nu s-a ținut cont de faptul că și o parte din semnalul  $s[n]$  s-ar putea regăsi la intrarea de referință a supresorului de zgomot. Acest caz este analizat în [Wid., Ste.'85]. În aceeași referință bibliografică sunt prezentate câteva aplicații în telecomunicații, cum ar fi : suprimarea ecourilor în telefonie la mare distanță sau anularea interferențelor lobilor laterali ai antenelor.

În continuare se pune problema anulării interferențelor periodice. Există numeroase situații când un semnal util de bandă largă este perturbat de interferențe periodice și nu există un semnal de referință, separat de semnalul util disponibil. Diminuarea efectului acestor interferențe poate fi realizată cu ajutorul sistemului din figura 2.14.

Întârzierea aleasă,  $s$ , trebuie să fie suficient de mare pentru ca fracțiunea semnalului de bandă largă de la intrarea de referință să fie decorelată de fracțiunea semnalului de bandă largă de la intrare. De asemenea valoarea lui  $s$  trebuie să fie superioară întârzierii totale introdusă de supresorul de ecou.

Performanțele unui astfel de supresor adaptiv de zgomot sunt prezentate în [Wid., '85].

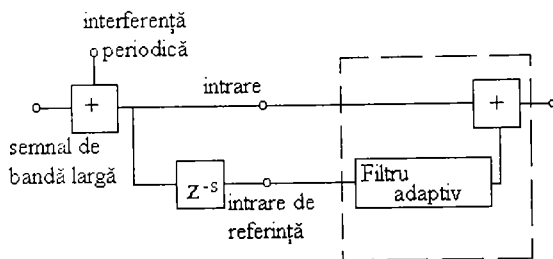


Figura 2.14. Supresor de zgomot periodic.

Sistemul din figura 2.14 poate fi folosit și pentru cazul în care semnalul util este periodic și interferența este de bandă largă. Un exemplu în acest sens este prezentat în aceeași referință bibliografică precum și în [Wid.'75]. Câteva aplicații ale filtrelor adaptive în telecomunicații :

- detectarea unei sinusoide de frecvență necunoscută înecată în zgomot,
- receptor de cod multifrecvență,
- codare MIC diferențială,
- multiplexare în frecvență
- modemuri,
- supresoare de ecou,

sunt prezentate în [Bel.'90]. De asemenea îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot pentru semnalele utile modulate în frecvență, de tip "chirp", utilizând filtrarea adaptivă (folosind algoritmi LMS sau RLS) este analizată în [Mac.'89], [Mar.,Mac.'87].

Filtrele digitale prezentate în acest paragraf sunt de tipul cu răspuns finit la impuls. O preocupare modernă în teoria prelucrării adaptive a semnalelor este înlocuirea filtrelor adaptive cu răspuns finit la impuls cu filtre adaptive cu răspuns infinit la impuls. Aceasta oferă avantaje de calcul în implementarea filtrelor adaptive. Descrierea acestor filtre adaptive este făcută în [Mac.'89].

În [Bel.'89] și [Gim.,Mat.'97] sunt prezentate și alte aplicații ale filtrării adaptive în telecomunicații :

- atenuarea sau amplificarea anumitor componente spectrale,
- codarea diferențială adaptivă,
- egalizarea și identificare canalelor de telecomunicații,
- deconvoluție adaptivă,
- prelucrarea adaptivă a semnalelor RADAR,
- antene adaptive.

O altă preocupare de actualitate în cadrul teoriei prelucrării adaptive a semnalelor este utilizarea sistemelor adaptive la prelucrarea semnalelor bidimensionale. Majoritatea rezultatelor obținute pentru semnale

monodimensionale pot fi generalizate și pentru semnale bidimensionale. Aceste generalizări sunt prezentate într-un mod unitar în lucrarea [Mal.'94]. Bineînțeles că semnalele de prelucrat sunt de această dată imagini. În această referință bibliografică se tratează problema îmbunătățirii RSZ în cazul prelucrării imaginilor.

Prelucrarea semnalelor bazată pe algoritmi adaptivi are însă un mare dezavantaj și anume faptul că necesită un volum foarte mare de calcul [Buc.'75]. Acesta este motivul pentru care se au în vedere și alte metode de prelucrare. Una dintre ele este utilizarea diferitelor transformări ortogonale asociate cu metode de filtrare în domeniul transformatei. În acest scop, în capitolele următoare se prezintă transformarea undișoară discretă ("discrete wavelet transform" sau "transformée en ondelettes discrettes") și metode (dintre care una originală) de filtrare neliniară în domeniul transformatei.

## CAPITOLUL 3. TRANSFORMAREA UNDIȘOARĂ DISCRETĂ

În acest capitol se introduce transformarea undișoară discretă în mod natural, din perspectiva teoriei prelucrării semnalelor. În acest scop se trec în revistă tehnicile de codare subbandă și teoria seriilor de undișoare. Se prezintă atât transformarea undișoară discretă clasică cât și variante mai moderne ale acesteia, din punctul de vedere al teoriei reprezentărilor timp-frecvență [Bar.,Ols.'96], [Boa.,O'Sh.,Arn.'90], [Boa.'91], [Boa.,Rei.'92], [Boa.,O'Sh.'94], [Che.,Don.,Sau.'95], [Cou.'95], [Fla.'93], [For.'92], [Hla.,Bou.'92], [Qia.,Che.'96].

În transmiterea informației se utilizează tehnicile de codare subbandă, făcându-se numeroase cercetări în domeniul teoriei bancurilor de filtre numerice. Rezultate remarcabile sunt prezentate în [Vai.'93], [Opp.,Lim'88], [Bel.'90]. În continuare se prezintă construcția bancurilor de filtre cu structură arborescentă.

### 3.1. Codare subbandă cu structură arborescentă

Se consideră sistemul din figura 3.1.b).

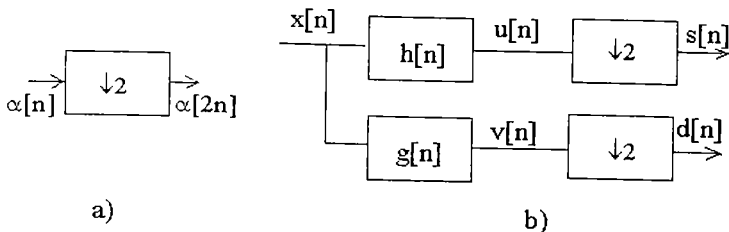


Figura 3.1. a) Simbol pentru un decimator; b) schema unui codor cu două subbenzi.

Răspunsurile în frecvență ale filtrelor numerice cu răspunsurile la impuls  $h[n]$  și  $g[n]$  sunt prezentate în figura 3.2.

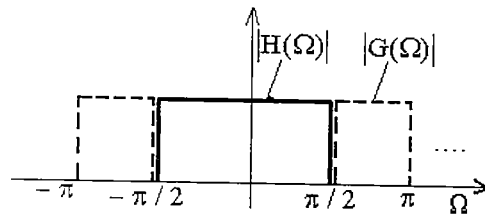


Figura 3.2. Răspunsurile în frecvență ale filtrelor din figura 3.1.

Se calculează transformatele Z ale semnalelor  $s[n]$  și  $d[n]$ . În acest scop se constată că :

$$U(z) = X(z) H(z) ; \quad V(z) = X(z) G(z)$$

Conform definiției transformatei Z :

$$S(z) = \sum_n s[n]z^{-n} = \sum_n u[2n]z^{-n}$$

$$U(z) = \sum_n u[n]z^{-n} = \sum_n u[2n]z^{-2n} + \sum_n u[2n+1]z^{-(2n-1)}$$

$$U(-z) = \sum_n u[2n]z^{-2n} - \sum_n u[2n+1]z^{-(2n+1)}$$

și se observă că putem scrie :

$$\frac{1}{2}[U(z) + U(-z)] = \sum_n u[2n]z^{-2n} = \sum_n u[2n](z^2)^{-n} = S(z^2)$$

Revenind la expresia lui  $S(z)$  :

$$S(z) = \frac{1}{2} \left[ U\left(\frac{1}{z^2}\right) + U\left(-\frac{1}{z^2}\right) \right] \quad (3.1)$$

sau :

$$S(z) = \frac{1}{2} \left[ X\left(z^{\frac{1}{2}}\right) H\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) H\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) \right] \quad (3.2)$$

În mod analog se demonstrează că :

$$D(z) = \frac{1}{2} \left[ X\left(z^{\frac{1}{2}}\right) G\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) G\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) \right] \quad (3.3)$$

Pentru a calcula spectrele semnalelor  $s[n]$  și  $d[n]$  se folosește notația simplificată:

$$X(z) = X(e^{j\Omega})$$

în relațiile (3.2) și (3.3), obținându-se :

$$S(\Omega) = \frac{1}{2} \left[ X\left(\frac{\Omega}{2}\right) H\left(\frac{\Omega}{2}\right) + X\left(\frac{\Omega}{2} + \pi\right) H\left(\frac{\Omega}{2} + \pi\right) \right]$$

$$D(\Omega) = \frac{1}{2} \left[ X\left(\frac{\Omega}{2}\right) G\left(\frac{\Omega}{2}\right) + X\left(\frac{\Omega}{2} + \pi\right) G\left(\frac{\Omega}{2} + \pi\right) \right]$$

Fie, de exemplu, spectrul  $X(\Omega)$  cel trasat în figura 3.3.

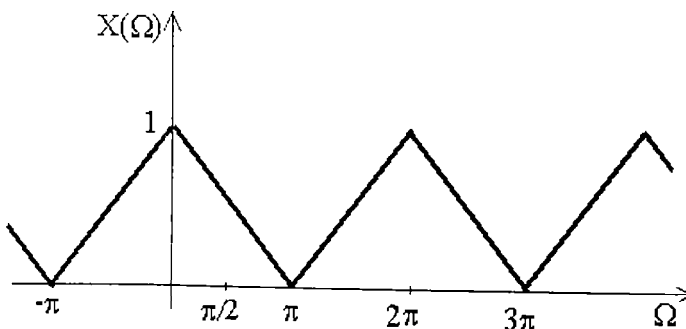


Figura 3.3. Un exemplu de spectru de semnal de intrare.

3.5. Spectrele semnalelor  $s[n]$  și  $d[n]$  sunt prezentate în figurile 3.4 și

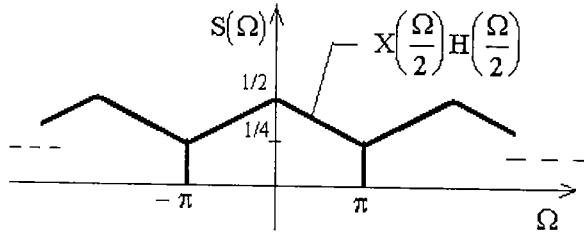


Figura 3.4. Spectrul semnalului  $s[n]$ .

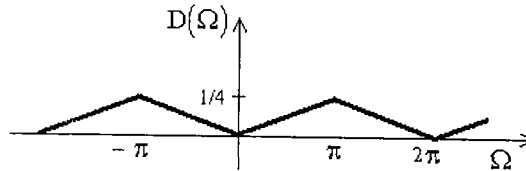


Figura 3.5. Spectrul semnalului  $d[n]$ .

Se constată că spectrul  $S(\Omega)$  este asemenea cu spectrul  $X(\Omega)$  în banda  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Se constată că porțiunea din spectrul  $D(\Omega)$  în banda  $[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$  este asemenea cu spectrul  $X(\Omega)$  în banda  $[-\pi, \pi] - [-\pi/2, \pi/2]$ .

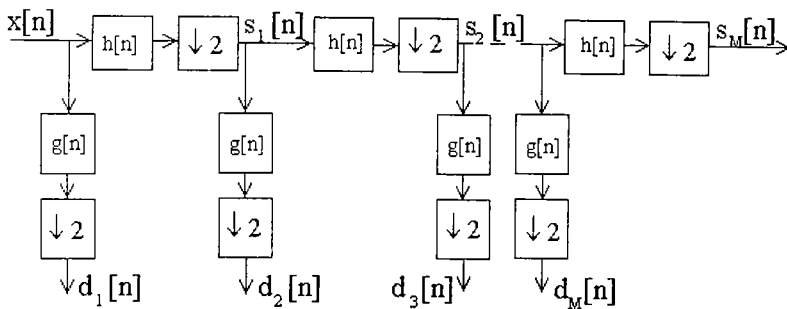


Figura 3.6. Structura arborescentă de codare în subbenzi.

Se poate deci afirma că semnalul  $x[n]$  a fost codat în două subbenzi, componentele sale de joasă frecvență regăsiindu-se în semnalul  $s[n]$  iar componentele sale de înaltă frecvență, în semnalul  $d[n]$ . Pentru a crește

numărul de subbenzi se poate utiliza o structură arborescentă așa cum se vede în figura 3.6.

Se calculează transformatele Z ale semnalelor  $s_k[n]$  și  $d_k[n]$ ,  $k = 1 \div M$ . Se observă (conform figurii 3.1) că :

$$s_1[n] = s[n] \quad ; \quad d_1[n] = d[n]$$

și astfel se poate scrie :

$$S_2(z) = \frac{1}{2} \left[ S_1\left(z^{\frac{1}{2}}\right) H\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + S_1\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) H\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) \right]$$

$$D_2(z) = \frac{1}{2} \left[ S_1\left(z^{\frac{1}{2}}\right) G\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + S_1\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) G\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) \right]$$

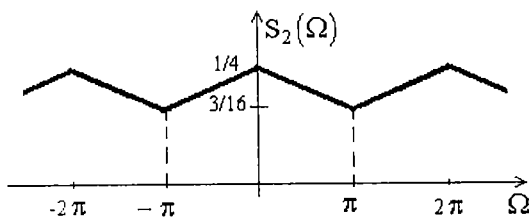


Figura 3.7. Spectrul semnalului  $s_2[n]$ .

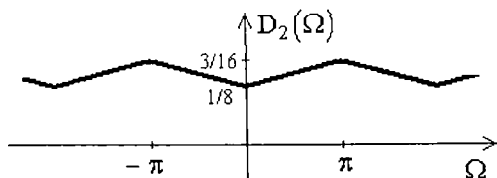


Figura 3.8. Spectrul semnalului  $d_2[n]$ .

Continuând exemplul considerat anterior, spectrele semnalelor  $s_2[n]$  și  $d_2[n]$  iau forma din figura 3.7 și 3.8.

Se constată că spectrul  $S_2(\Omega)$  este asemenea cu spectrul  $X(\Omega)$  din banda  $[-\pi/4, \pi/4]$  și că spectrul  $D_2(\Omega)$  este asemenea cu spectrul  $X(\Omega)$  din banda  $[-\pi/2, \pi/2] - [-\pi/4, \pi/4]$ .



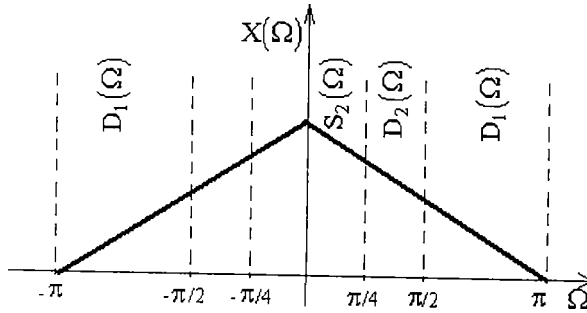


Figura 3.9. Corespondența dintre spectrul  $X(\Omega)$  și spectrele  $S_k(\Omega)$ ,  $D_k(\Omega)$ ,  $k = 1 \div 2$ .

Procedând similar se constată că spectrul  $S_M(\Omega)$  este asemenea cu spectrul  $X(\Omega)$  din banda  $[-\pi/2^M, \pi/2^M]$  și că spectrul  $D_M(\Omega)$  este asemenea cu spectrul  $X(\Omega)$  din banda  $[-\pi/(2^{M-1}), \pi/(2^{M-1})] - [-\pi/2^M, \pi/2^M]$ .

Cu alte cuvinte fâșii din banda spectrului  $X(\Omega)$  au fost puse în corespondență cu semnalele  $s_k[n]$  și  $d_k[n]$ . Această corespondență este evidențiată în figura 3.9.

Se constată că folosind sistemul din figura 3.6, banda spectrului semnalului  $x[n]$  este divizată în octave. Se poate deci afirma că sistemul cu structură arborescentă din figura 3.6 este într-adevăr un codor în subbenzi. În continuare se analizează operația de decodare.

### 3.2. Decodarea în urma codării subbandă

Se pune problema refacerii semnalului  $x[n]$  pornind de la semnalele  $s[n]$  și  $d[n]$ . Se consideră în acest scop sistemul din figura 3.10 b).

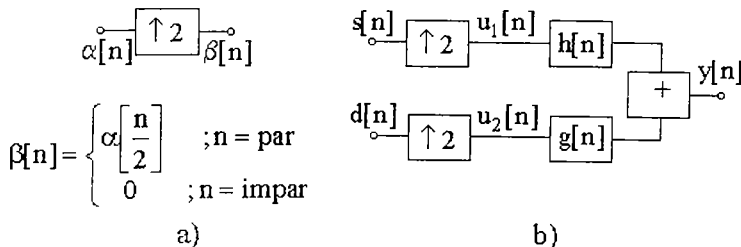


Figura 3.10. a) Interpolator și definiția semnalului de la ieșirea sa; b) sistem de decodare corespunzător celui din figura 3.1.

Se calculează transformata Z a semnalului  $b[n]$  (figura 3.10 a.) pe baza transformatei Z a semnalului  $a[n]$  :

$$\alpha(z) = \sum_n \alpha[n]z^{-n}$$

$$\begin{aligned} \beta(z) &= \sum_n \beta[n]z^{-n} = \sum_n \beta[2n]z^{-2n} + \sum_n \beta[2n+1]z^{-(2n+1)} = \\ &= \sum_n \alpha[n]z^{-2n} = \alpha(z^2) \end{aligned}$$

astfel încât se pot scrie transformatele Z pentru celelalte semnale ce apar în sistemul de codare :

$$U_1(z) = S(z^2) \quad ; \quad U_2(z) = D(z^2);$$

sau, ținând seama de relațiile (3.2) și (3.3) :

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) \frac{1}{2} [X(z)H(z) + X(-z)H(-z)] + \\ &+ G(z) \frac{1}{2} [X(z)G(z) + X(-z)G(-z)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pe baza acestei relații se determină spectrul semnalului  $y[n]$  :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= H(\Omega) \frac{1}{2} [X(\Omega) H(\Omega) + X(\Omega + \pi) H(\Omega + \pi)] + \\ &+ G(\Omega) \frac{1}{2} [X(\Omega) G(\Omega) + X(\Omega + \pi) G(\Omega + \pi)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dacă se folosesc filtrele cu răspunsurile în frecvență cu caracteristicile de modul din figura 3.2 atunci sunt valabile relațiile :

$$H(\Omega)H(\Omega + \pi) = G(\Omega)G(\Omega + \pi) = 0$$

$$H^2(\Omega) + G^2(\Omega) = 1$$

Pe baza acestor relații, (3.5) devine :

$$\begin{aligned}
 Y(\Omega) &= \frac{1}{2}X(\Omega)H^2(\Omega) + \frac{1}{2}X(\Omega)G^2(\Omega) = \\
 &= \frac{1}{2}X(\Omega)[H^2(\Omega) + G^2(\Omega)] = \frac{1}{2}X(\Omega)
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

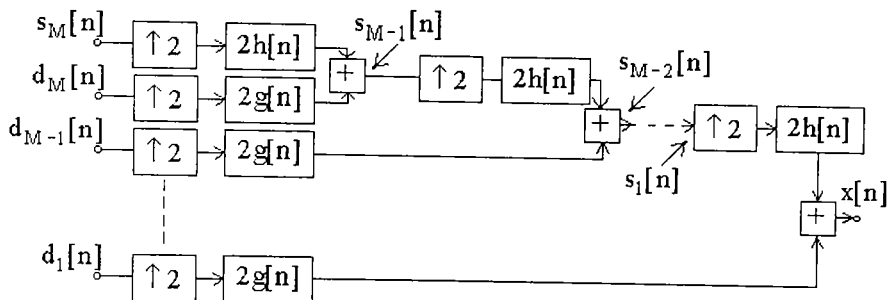


Figura 3.11. Schema unui decodor pentru semnale codate în subbenzi.

Deci, cu excepția unei constante (egală cu  $1/2$ ), semnalele  $x[n]$  și  $y[n]$  sunt identice. Se spune că sistemul de decodare din figura 3.11 este cu reconstrucție perfectă. De aceea sistemul din figura 3.11 poate fi utilizat pentru reconstrucția perfectă a semnalului prelucrat de sistemul din figura 3.6, în ipoteza că se folosesc filtrele ideale cu răspunsurile în frecvență din figura 3.2.

## OBSERVAȚII

- O1.** O analiză similară poate fi făcută și pentru cazul în care interpolarea și decimarea nu se fac folosind constanta 2 ci o alta, de exemplu,  $P$ ,  $P \in \mathbb{N}$ . În acest caz nu se va mai obține o descompunere în octave a benzii  $B$  a semnalului  $u[n]$  ci în subbenzi a căror lățime va descrește cu puteri ale lui  $P$ .
- O2.** Pentru structurile care utilizează arbori simetrici se poate face o analiză similară.
- O3.** Principala limitare a sistemelor de codare și decodare în subbenzi cu structură arborescentă prezentate până acum este că filtrele cu răspunsurile în frecvență din figura 3.2 nu sunt realizabile.

În continuare se vor determina clase de filtre realizabile care permit codarea în subbenzi, cu structură arborescentă și cu reconstrucție perfectă.

### 3.3. Codarea subbandă cu reconstrucție perfectă folosind sisteme cu structură arborescentă cu filtre realizabile

Se consideră în continuare că  $h_r[n]$  și  $g_r[n]$  sunt filtre realizabile. Un sistem, echivalent celui din figura 3.10, destinat reconstrucției perfecte, este prezentat în figura 3.12.

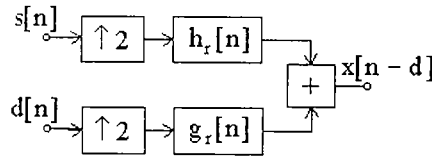


Figura 3.12. Sistemul de reconstrucție corespunzător unui codor în două subbenzi.

Conform acestei figuri rezultă că semnalul de la ieșirea decodorului este o variantă întârziată cu  $d$  a semnalului de la intrare.

Trebuie determinate răspunsurile la impuls  $h_r[n]$  și  $g_r[n]$  precum și condițiile pe care trebuie să le îndeplinească răspunsurile la impuls  $h_r[n]$  și  $g_r[n]$  pentru ca la ieșirea sistemului din figura 3.12 să se poată obține semnalul  $x[n-d]$ . În acest scop se rescrie relația (3.4) :

$$z^{-d}X(z) = H_r(z) \frac{1}{2} [X(z)H(z) + X(-z)H(-z)] + G_r(z) \frac{1}{2} [X(z)G(z) + X(-z)G(-z)] \quad (3.7)$$

sau, regrupând în membrul drept :

$$z^{-d}X(z) = X(z) \frac{1}{2} [H_r(z)H(z) + G_r(z)G(z)] + X(-z) \frac{1}{2} [H_r(z)H(-z) + G_r(z)G(-z)]$$

Această ecuație este satisfăcută și de soluțiile sistemului de ecuații :

$$H_r(z)H(z) + G_r(z)G(z) = 2z^{-d}$$

$$H(-z)H_r(z) + G(-z)G_r(z) = 0$$

În continuare se rezolvă acest sistem, considerându-se cunoscute transformatele  $z$  notate cu  $H(z)$  și  $G(z)$ . Determinantul sistemului este :

$$\Delta = \begin{vmatrix} H(z) & G(z) \\ H(-z) & G(-z) \end{vmatrix} = H(z)G(-z) - H(-z)G(z)$$

Determinanții corespunzători celor două necunoscute sunt de forma:

$$\Delta H_r = \begin{vmatrix} 2z^{-d} & G(z) \\ 0 & G(-z) \end{vmatrix} = 2z^{-d}G(-z)$$

Deci soluțiile sunt date de relațiile următoare :

$$H_r(z) = \frac{2z^{-d}G(-z)}{H(z)G(-z) - H(-z)G(z)} \quad (3.8)$$

$$G_r(z) = \frac{-2z^{-d}H(-z)}{H(z)G(-z) - H(-z)G(z)} \quad (3.9)$$

Evident, o condiție care trebuie impusă filtrelor din structura codorului este ca ecuația :

$$H(z)G(-z) - H(-z)G(z) = 0 \quad (3.10)$$

să nu aibă nici o rădăcină diferită de rădăcinile ecuației :

$$z^{-d} = 0$$

De aceea o condiție potrivită pentru filtrele cu răspunsurile la impuls  $h[n]$  și  $g[n]$  ar fi :

$$H(z)G(-z) - H(-z)G(z) = 2z^{-d} \quad (3.11)$$

În acest caz relațiile (3.8) și (3.9) devin :

$$H_r(z) = G(z) \quad (3.12)$$

$$G_r(z) = -H(-z) \quad (3.13)$$

Deci răspunsurile în frecvență ale filtrelor de reconstrucție depind de răspunsurile în frecvență ale filtrelor din structura codorului conform relațiilor :

$$H_r(\Omega) = G(\Omega + \pi) \quad (3.14)$$

$$G_r(\Omega) = -H(\Omega + \pi) \quad (3.15)$$

iar răspunsurile în frecvență ale filtrelor din structura codorului satisfac :

$$H(\Omega)G(\Omega + \pi) - H(\Omega + \pi)G(\Omega) = 2e^{-j\Omega d} \quad (3.16)$$

$H_r(z)$  și  $G_r(z)$  sunt funcțiile de transfer ale filtrelor introduse de Esteban și Galand [Smi.,Bar.'86] sub numele de "Quadrature Mirror Filters", QMF.

**OBSERVATIE** : Relația corespunzătoare lui (3.11) în domeniul timp este :

$$\sum_k h[k]g[n-k][(-1)^{n-k} - (-1)^k] = 2\delta[n-d]$$

Într-adevăr :

$$G(-z) = \sum_n g[n](-1)^n z^{-n}$$

$$H(-z) = \sum_n h[n](-1)^n z^{-n}$$

Fie :

$$g'[n] = (-1)^n g[n]$$

$$h'[n] = (-1)^n h[n]$$

atunci :

$$H(z)G(-z) \leftrightarrow h[n] * g'[n]$$

$$H(-z)G(z) \leftrightarrow h'[n] * g[n]$$

$$z^{-d} \leftrightarrow \delta[n-d]$$

și privitor la relația (3.11) vom putea scrie :

$$h[n] * g'[n] - h'[n] * g[n] = 2\delta[n - d]$$

adică :

$$\sum_k (h[k]g'[n - k] - h'[k]g[n - k]) = 2\delta[n - d]$$

sau, revenind la notațiile inițiale :

$$\sum_k (h[k](-1)^{n-k}g[n - k] - (-1)^k h[k]g[n - k]) = 2\delta[n - d]$$

Ultima relație poate fi restrânsă sub forma următoare :

$$\sum_k h[k]g[n - k] \{(-1)^{n-k} - (-1)^k\} = 2\delta[n - d] \quad (3.17)$$

Pentru valori pare a lui  $n$  această relație devine :

$$\delta[n - d] = 0$$

rezultând astfel necesitatea ca  $d$  să fie un număr natural impar.

S-a demonstrat așadar că în urma folosirii filtrelor QMF se poate realiza o reconstrucție perfectă utilizând o codare în două subbenzi, dacă filtrele de reconstrucție îndeplinesc condițiile (3.12) și (3.13) iar filtrele de sinteză (cele cu răspunsurile la impuls  $h[n]$  și  $g[n]$ ) îndeplinesc condiția (3.11) în care valoarea lui  $d$  trebuie să fie impară. Relația (3.16) este generală. Ea nu furnizează informații despre modul în care se proiectează filtrele de sinteză. Smith și Barnwell au determinat o clasă de filtre de sinteză [Smi., Bar.'86]. Este vorba despre clasa filtrelor "conjugate quadrature filters", CQF. Ei au propus următoarea legătură între răspunsurile în frecvență ale filtrelor de sinteză, presupuse ca fiind cu răspunsuri la impuls reale :

$$G(\Omega) = -e^{-j\Omega d} H^*(\Omega + \pi) \quad (3.18)$$

Folosind această condiție membrul drept al relației (3.16) devine :

$$H(\Omega)G(\Omega + \pi) - H(\Omega + \pi)G(\Omega) =$$

$$\begin{aligned}
&= -H(\Omega)[e^{-j(\Omega+\pi)d}H^*(\Omega)] + H(\Omega + \pi)[e^{-j\Omega d}H^*(\Omega + \pi)] = \\
&= e^{-j(\Omega+\pi)d} \left\{ (-1^d) |H(\Omega)|^2 + |H(\Omega + \pi)|^2 \right\} = 2 e^{-j\Omega d}
\end{aligned}$$

Astfel relația (3.16) devine, pentru  $d$  impar :

$$|H(\Omega)|^2 + |H(\Omega + \pi)|^2 = 2 \quad (3.19)$$

În acest caz răspunsurile în frecvență ale filtrelor de reconstrucție devin :

$$H_r(\Omega) = e^{-j\Omega d} H^*(\Omega) \quad (3.20)$$

$$G_r(\Omega) = -H(\Omega + \pi) \quad (3.21)$$

## COMENTARIU

1. Fie :

$$h'[n] = (-1)^n h[n]$$

Se constată că :

$$h'[n] \leftrightarrow H(\Omega + \pi)$$

Relația corespunzătoare relației (3.19) în domeniul timp este, conform relației Wiener - Hincin :

$$R_{hh}[n] + R_{h'h'}[n] = 2\delta[n] \quad (3.22)$$

De aceea se poate afirma că, din punctul de vedere al proiectării filtrelor din structura codorului, respectiv a decodorului, relația (3.19) este mai avantajoasă decât relația (3.16).

2. Cunoscându-se avantajele de implementare ale filtrelor RFI în comparație cu filtrele RII, în continuare se vor presupune ca fiind de tip RFI atât filtrele de sinteză cât și cele de analiză. Dacă filtrul cu răspuns la impuls  $h[n]$  este cauzal atunci transformata sa Fourier în timp discret este :

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n] e^{-j\Omega n}$$

iar transformata sa  $Z$  este :



$$H(z) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]z^{-n}$$

unde  $L$  reprezintă lungimea răspunsului la impuls pentru filtrul considerat.

De aceea, admițând că  $h[n]$  sunt numere reale :

$$H^*(\Omega) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]e^{j\Omega n}$$

și :

$$H^*(\Omega + \pi) = \sum_{n=0}^{L-1} (-1)^n h[n]e^{j\Omega n}$$

Conform relației (3.18) rezultă că răspunsul în frecvență al celuilalt filtru de sinteză va fi :

$$G(\Omega) = -e^{j\Omega d} \sum_{n=0}^{L-1} (-1)^n h[n]e^{j\Omega n} = - \sum_{n=0}^{L-1} (-1)^n h[n]e^{j\Omega(n-d)}$$

Pentru ca acest răspuns în frecvență să corespundă unui filtru causal este necesar ca pentru orice  $n$  cuprins între 0 și  $L-1$  (inclusiv capetele) să fie îndeplinită condiția :

$$n - d < 0$$

și deci întârzierea  $d$  trebuie să satisfacă condiția :

$$d > L - 1 \quad (3.22)$$

Dacă se respectă această condiție atunci cele două filtre de sinteză sunt ambele cauzale. Rezultă că valoarea minimă a lui  $d$  este :

$$d_{\min} = L \quad (3.23)$$

Pentru a putea reconstrui cu întârziere minimă este deci necesar ca să se folosească filtre de sinteză de lungime impară.

Pe baza relațiilor (3.20) și (3.21) se constată că dacă este respectată condiția (3.23) atunci și filtrele de reconstrucție sunt cauzale.

**3.** Toate cele patru filtre (cu răspunsurile în frecvență  $H(\Omega)$ ,  $G(\Omega)$ ,  $H_r(\Omega)$  și  $G_r(\Omega)$ ) au aceeași lungime. Cu modificări minore schema poate funcționa cu filtre de analiză de o anumită lungime și cu filtre de sinteză de altă lungime [Coh.'92], [Rio.'93].

### 3.4. Metode de proiectare a filtrelor CQF

Se face notația :

$$F(z) = H(z)H(z^{-1})$$

sau :

$$F(\Omega) = H(\Omega)H^*(\Omega) = |H(\Omega)|^2 \quad (3.25)$$

Condiția (3.20) devine :

$$F(\Omega) + F(\Omega + \pi) = 2 \quad (3.26)$$

Se proiectează sistemul cu răspuns în frecvență  $F(\Omega)$  pe baza relației (3.26). Apoi se deduce  $H(\Omega)$  pe baza relației (3.25) și în final se deduc  $G(\Omega)$ ,  $H_r(\Omega)$  și  $G_r(\Omega)$ .

În [Smi.,Bar.'86] sunt prezentate mai multe exemple de răspunsuri în frecvență  $H(\Omega)$  obținute pe baza metodei de proiectare descrise. Clasa acestor filtre poate fi restrânsă dacă se impun condiții suplimentare. De exemplu se poate impune :

- condiția de fază liniară (simetria răspunsului la impuls),
- condiția de lungime minimă a răspunsului la impuls,
- condiția ca expresiile eșantioanelor răspunsului la impuls să fie cât mai simple.

Toate aceste condiții sunt foarte importante atunci când se pune problema codării în mai multe subbenzi deoarece favorizează stabilitatea numerică a algoritmilor care implementează sistemele din figurile 3.11 și 3.16. Această stabilitate este asigurată dacă filtrele îndeplinesc o anumită condiție de regularitate [Rio.'93], [Dau.'88], [Dau.'92]. Condiția de regularitate este partea care leagă teoria sistemelor de codare subbandă de teoria undișoarelor.

### 3.5. Legătura dintre sistemele de codare în subbenzi și teoria seriilor de undișoare

Teoria seriilor de undișoare dezvoltată în [Mey.'90], [Dau.'88], [Dau.'92], [Mal.'94] are ca scop construcția unor noi baze Riesz ale spațiului  $L^2(\mathbb{R})$ . Se pornește de la definiția analizei multirezoluție.

**DEFINIȚIA 1.** se numește analiză multirezoluție a spațiului  $L^2(\mathbb{R})$ , mulțimea de subspații Hilbert închise  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  care satisfac proprietățile :

- i).  $\dots V_{m+1} \subset V_m \subset V_{m-1} \dots m \in \mathbb{Z}$
- ii).  $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = L^2(\mathbb{R}), \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}$
- iii).  $\forall f(x) \in V_m, f(2x) \in V_{m-1}$
- iv).  $\exists \varphi \in V_0$ , astfel încât mulțimea  $\{ \varphi_{m,n}(x) \} = \{ 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}x - n) \}_{n \in \mathbb{Z}}$  să formeze o bază Riesz a lui  $V_m$  pentru orice  $m$ .

Sunt prezentate numeroase exemple de analiză multirezoluție în [Mey.'90], [Aka.,Had.'92], [Dau.'88], [Mal.'89], [Mal.'94]. Funcția  $\varphi(x)$  se numește funcție de scalare. Numeroase exemple de funcții de scalare se găsesc în lucrările deja citate. Conform [Mey.'90], [Mal.'94] orice bază Riesz poate fi transformată într-o bază ortonormală.

Se va considera în continuare că mulțimea  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a spațiului  $V_0$ .

**TEOREMA 1.** În ipoteza că  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a spațiului  $V_0$ , mulțimea  $\{\varphi_{m,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a spațiului  $V_m$ .

**DEMONSTRATIE.** În primul rând se demonstrează că funcțiile  $\varphi_{m,k}(x)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sunt ortonormale. În acest scop se calculează produsul scalar :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{m,k}(x), \varphi_{m,l}(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}} \varphi(2^{-m}x - k) 2^{-\frac{m}{2}} \varphi^*(2^{-m}x - l) dx = \\ &= 2^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-m}x - k) \varphi^*(2^{-m}x - l) dx \end{aligned}$$

Făcând schimbarea de variabilă :

$$2^{-m}x = u$$

se obține :

$$\langle \varphi_{m,k}(x), \varphi_{m,l}(x) \rangle = 2^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u - k) \varphi^*(u - l) 2^m du = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u - k) \varphi^*(u - l) du$$

Tinând seama de ortogonalitatea mulțimii  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  rezultă că :

$$\langle \varphi_{m,k}(x), \varphi_{m,l}(x) \rangle = \delta[k - l]$$

și prin urmare mulțimea  $\{\varphi_{m,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  este ortonormală.

Se demonstrează completitudinea mulțimii  $\{\varphi_{m,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . În acest scop se consideră o funcție oarecare  $f(x)$  din  $V_0$ . Descompunerea acesteia în baza  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  este :

$$f(x) = \sum_k \langle f(x), \varphi(x-k) \rangle \varphi(x-k) \quad (3.27)$$

Dar funcția  $f(2^{-m}x) \in V_m$  conform proprietății iii) a analizei multirezoluție. De aceea făcând în (3.26) schimbarea de variabilă :

$$x = 2^{-m}u$$

se obține :

$$f(2^{-m}u) = \sum_k \langle f(2^{-m}u), \varphi(2^{-m}u - k) \rangle \varphi(2^{-m}u - k) \quad (3.28)$$

Această relație arată că orice element din  $V_m$  (fiind de forma  $f(2^{-m}x)$  unde  $f(x)$  este în  $V_0$ ) se poate exprima ca o combinație liniară de elemente ale mulțimii  $\{\varphi_{m,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Deci această mulțime este completă. Rezultă că ea este o bază ortonormală a spațiului  $V_m$ . Descompunerea funcției  $\varphi_{1,m}(x)$  în baza  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  este :

$$\varphi_{1,n}(x) = \sum_k \langle \varphi_{1,n}(x), \varphi(x-k) \rangle \varphi(x-k) \quad (3.29)$$

Însă :

$$\langle \varphi_{1,n}(x), \varphi(x-k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}} \varphi(2^{-1}x - n) \varphi^*(x-k) dx$$

Cu schimbarea de variabilă  $2^{-1}x - n = 2^{-1}\mu$  se obține :

$$\langle \varphi_{1,n}(x), \varphi(x-k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}} \varphi(2^{-1}\mu) \varphi^*(\mu + 2n - k) d\mu$$

Se face notația :

$$\langle \varphi_{1,n}(x), \varphi(x-k) \rangle = h^*[2n-k] \quad (3.30)$$

și revenind la relația (3.29) avem :

$$\varphi_{1,n}(x) = \sum_k h^*[2n-k] \varphi[x-k] \quad (3.31)$$

În continuare se determină proiecțiile unei funcții  $f_0(x)$  din  $V_0$  pe spațiile  $V_1, \dots, V_M$ , adică funcțiile  $f_1(x), \dots, f_M(x)$  :

$$f_1(x) = \sum_k \langle f(x), \varphi_{1,n}(x) \rangle \varphi_{1,n}(x) \quad (3.32)$$

Coeficienții acestei dezvoltări se notează cu  $s_1[n]$  și sunt dați de :

$$\begin{aligned} s_1[n] &= \langle f(x), \varphi_{1,n}(x) \rangle = \langle f(x), \sum_k h^*[2n-k] \varphi[x-k] \rangle = \\ &= \sum_k h[2n-k] \langle f(x), \varphi[x-k] \rangle \end{aligned}$$

Folosind notația :

$$\langle f(x), \varphi(x-k) \rangle = s_0[k] \quad (3.33)$$

se obține :

$$s_1[n] = \sum_k s_0[k] h[2n-k] \quad (3.34)$$

Coeficienții acestei dezvoltări se notează cu  $s_2[n]$  și sunt dați de :

$$s_2[n] = \langle f(x), \varphi_{2,n}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_{2,n}^*(x) dx \quad (3.35)$$

Dar, revenind la definiția 1, pentru  $m = 2$ , avem :

$$\begin{aligned} \varphi_{2,n}(x) &= 2^{-\frac{2}{2}} \varphi(2^{-2}x - n) = 2^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}} \varphi(2^{-1}(2^{-1}x) - n) = \\ &= 2^{-\frac{1}{2}} \varphi_{1,n}(2^{-1}x) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Făcând în relația (3.31) schimbarea de variabilă :

$$x = 2^{-1}u$$

se obține :

$$2^{-\frac{1}{2}} \varphi_{1,n}(2^{-1}u) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_k h^*[2n-k] \varphi(2^{-1}u-k)$$

sau, pe baza relației (3.36) :

$$\varphi_{2,n}(u) = \sum_k h^*[2n-k] \varphi_{1,k}(u) \quad (3.37)$$

Procedând analog se poate demonstra că pentru orice  $m$  pozitiv este valabilă relația :

$$\varphi_{m,n}(x) = \sum_k h^*[2n-k] \varphi_{m-1,k}(x) \quad (3.38)$$

Înlocuind relația (3.37) în relația (3.35) se obține :

$$\begin{aligned} s_2[n] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \sum_k h^*[2n-k] \varphi_{1,k}(x) \right)^* dx = \\ &= \sum_k h[2n-k] \langle f(x), \varphi_{1,k}(x) \rangle \end{aligned} \quad (3.39)$$

și astfel se poate scrie :

$$s_2[n] = \sum_k s_1[k] h[2n-k] \quad (3.40)$$

Se poate demonstra prin recurență că :

$$s_m[n] = \sum_k s_{m-1}[k] h[2n-k] \quad (3.41)$$

pentru orice  $m$  pozitiv.

Analizând membrul drept al relației (3.41) se constată că :

$$s_m[n] = s_{m-1}[p] * h[p] \Big|_{p=2n} \quad (3.42)$$

Cu alte cuvinte coeficienții dezvoltărilor proiecțiilor semnalului  $f_0(t)$  pe două subspații succesive  $V_{m-1}$  și  $V_m$ , adică  $s_{m-1}[n]$  și  $s_m[n]$  se pot determina prin filtrare cu filtrul cu răspuns la impuls  $h[n]$  și prin decimare.

Făcând notația :

$$s_0[n] = x[n]$$

rezultă că secvențele  $s_m[n]$ ,  $m=1 \div M$  pot fi obținute folosind sistemul din figura 3.11. Aceasta este legătura dintre sistemele de codare în subbenzi și teoria seriilor de undișoare care reprezintă subiectul acestui paragraf.

### OBSERVATII.

**O1.** Se calculează transformata Fourier în cei doi membri ai relației (3.31) :

$$\mathfrak{T}\{\varphi_{1,n}(x)\} = \hat{\varphi}_{1,n}(\omega) = \mathfrak{T}\left\{2^{-\frac{1}{2}}\varphi(2^{-1}x - n)\right\}(\omega) = 2^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-1}x - n) e^{-j\omega x} dx$$

Făcând schimbarea de variabilă  $2^{-1}x - n = u$  se obține :

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\{\varphi_{1,n}(x)\} &= 2^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-j\omega 2(u+n)} 2 du = 2^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-2j\omega u} e^{-2j\omega n} du = \\ &= 2^{\frac{1}{2}} e^{-2j\omega n} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-2j\omega u} du = 2^{\frac{1}{2}} e^{-2j\omega n} \hat{\varphi}(2\omega) \end{aligned}$$

Deci :

$$\hat{\varphi}_{1,n}(\omega) = \sqrt{2} e^{-2j\omega n} \hat{\varphi}(2\omega)$$

și relația (3.31) devine :

$$\sqrt{2}\hat{\varphi}(2\omega) = \left( \sum_k (h^*[2n - k] e^{-j\omega(k-2n)}) \right) \hat{\varphi}(\omega)$$

adică :

$$\hat{\varphi}(2\omega) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k (h^v[k - 2n] e^{-j\omega(k-2n)}) \right) \hat{\varphi}(\omega) \quad (3.43)$$

unde am făcut notația :

$$h^v[m] = h[-m]$$

Se face schimbarea de variabilă  $k-2n=p$  :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h^{v*}[k-2n] e^{-j\omega(k-2n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_p h^{v*}[p] e^{-j\omega p} \quad (3.44)$$

În continuare, dacă facem notația :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_p h^{v*}[p] e^{-j\omega p} = m_0(\omega) \quad (3.45)$$

relația (3.43) devine :

$$\hat{\phi}(2\omega) = m_0(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad (3.46)$$

Se observă că  $m_0(\omega)$  are semnificația de transformată Fourier în timp discret a secvenței  $h^{v*}[p]$ , de variabilă  $\omega$ .

În relația (3.46) se face schimbarea de variabilă  $2\omega = u$  și avem :

$$\hat{\phi}(u) = m_0\left(\frac{u}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{u}{2}\right) \quad (3.47)$$

Folosind relațiile (3.46) și (3.47) se obține :

$$\hat{\phi}(2\omega) = m_0(\omega) m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.48)$$

Procedând iterativ se poate demonstra că :

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^p}\right) \hat{\phi}(0) \quad (3.49)$$

Dar funcția de scalare reprezintă de obicei răspunsul la impuls al unui filtru trece jos. De aceea :

$$\hat{\phi}(0) = 1, \quad m_0(0) = 1, \quad \sum_p h^*[p] = 1$$

și relația (3.49) devine :



$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^p}\right) \quad (3.50)$$

În consecință, în ipoteza că produsul din membrul drept converge, rezultă că ultima relație poate fi folosită pentru construcția unei funcții de scalare. Convergența produsului din membrul drept este asigurată de satisfacerea condiției de regularitate amintită anterior (paragraful 3.1.4.).

Deci mecanismul de construcție al unei funcții de scalare este următorul :

a). Se alege un răspuns la impuls de filtru trece jos  $h[n]$ .

b). Se construiește secvența  $h^{v*}[n]$ .

c). Se calculează  $m_0(\omega)$  pe baza relației (3.45).

d). Se calculează  $\varphi(\omega)$  pe baza relației (3.50).

[Bel.,Wan.'97],[Chu.'98],[Chu.'92(1)], [Gop.,Bur.'92], [Ram.,Vet.,Her.'96].

**O2.** În [Dau.'88] se prezintă o modalitate grafică de construcție a funcției de scalare bazată pe utilizarea sistemului din figura 3.11. Pe baza acestui grafic se poate aprecia cu ușurință regularitatea funcției de scalare putându-se decide rapid dacă răspunsul la impuls  $h[n]$  a fost bine ales.

**O3.** În [Rio.'93] se prezintă conceptul de analiză multirezoluție pentru spațiul Hilbert al semnalelor în timp discret de energie finită,  $l^2(\mathbb{Z})$ . Alte generalizări sunt prezentate în [Cha.'96], [Com.,Pes.'96], [Han.'96], [Hla.,Koz.'91], [Isa.,Isa.'93], [Isa.'93], [Isa.,Isa.'97], [Jaw.,Swe.'95], [Kri.,Bro.'96], [Leb.,Vet.'97], [Lem.,Mal.'93], [Mal.'91], [Mal.'92].

În legătură cu analiza multirezoluție introdusă prin definiția 1 se poate defini complementul ortogonal al lui  $V_m$  în  $V_{m-1}$ ,  $W_m$  :

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m$$

Șirul de subspații  $\{W_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  astfel definite reprezintă o descompunere ortogonală a spațiului Hilbert al semnalelor de energie finită  $L^2(\mathbb{R})$ , [Dau.'89].

**DEFINIȚIA 2 :** Șirul de subspații Hilbert închise  $\{W_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  este o descompunere ortogonală a lui  $L^2(\mathbb{R})$  dacă sunt îndeplinite condițiile :

i).  $m \neq p \Rightarrow W_m \perp W_p$

ii).  $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} W_m = L^2(\mathbb{R})$

[Cri.'65].

În legătură cu descompunerile ortogonale ale lui  $L^2(\mathbb{R})$  se poate demonstra următoarea teoremă :

**TEOREMA 2.** În  $W_0$  există o funcție  $\Psi(x)$  astfel încât :

i) mulțimea  $\{\Psi(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  să fie o bază ortonormală a lui  $W_0$ ;

ii) mulțimea  $\{\Psi_{m,n}(x) = 2^{-m/2} \Psi(2^{-m}x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  să fie o bază ortonormală a lui  $W_m$  pentru orice  $m$  din  $\mathbb{Z}$ .

**DEMONSTRATIE :**

$$V_{-1} = V_0 \oplus W_0$$

O bază ortonormală a lui  $V_{-1}$  este mulțimea  $\{\varphi_{-1,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , conform teoremei 1. Aceasta trebuie să se poată obține prin concatenarea bazei ortonormale  $\{\varphi(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  a lui  $V_0$  cu o bază ortonormală din  $W_0$ .

Oricare ar fi semnalul  $f_{-1}(x)$  din  $V_{-1}$  el se poate exprima în forma :

$$f_{-1}(x) = f_0(x) + e_0(x)$$

unde  $f_0(x)$  reprezintă proiecția ortogonală a lui  $f_{-1}(x)$  pe  $V_0$  iar  $e_0(x)$  proiecția lui  $f_{-1}(x)$  pe  $W_0$  (eroarea de aproximare a lui  $f_{-1}(x)$  prin  $f_0(x)$ ).

În continuare se construiește funcția  $\Psi(x)$ . Pentru  $m=0$  relația (3.42) devine :

$$\varphi_{0,n}(x) = \sum_k h^*[2n-k]\varphi_{-1,k}(x) \quad (3.51)$$

Deoarece funcția  $\Psi(x)$  este în  $W_0$  ( $W_0 \subset V_{-1}$ ), și ea trebuie să se poată exprima ca și o combinație liniară a elementelor mulțimii  $\{\varphi_{-1,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Prin analogie cu (3.51) să considerăm că :

$$\psi_{0,n}(u) = \sum_k g^*[2n-k]\varphi_{-1,k}(u) \quad (3.52)$$

unde  $g[n]$  reprezintă răspunsul la impuls al filtrului cu răspunsul în frecvență dat de relația (3.18). Se calculează produsul scalar :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{0,n}(x), \psi_{0,m}(x) \rangle &= \langle \sum_k g^*[2n-k]\varphi_{-1,k}(x), \sum_l g^*[2m-l]\varphi_{-1,l}(x) \rangle = \\ &= \sum_k g^*[2n-k] \sum_l g[2m-l] \langle \varphi_{-1,k}(x), \varphi_{-1,l}(x) \rangle = \\ &= \sum_k g^*[2n-k]g[2m-k] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Luând transformata Fourier în timp discret inversă în relația (3.18) se obține :

$$g[n] = (-1)^{d-n} h[d-n] \quad (3.54)$$

și prin urmare relația (3.51) devine :

$$\langle \Psi_{0,n}, \Psi_{0,n}(x) \rangle = \sum_k h^*[d - 2n + k]h[d - 2m + k] \quad (3.55)$$

Se cunoaște că :

$$\langle \varphi_{0,-n}(x), \varphi_{0,-m}(x) \rangle = \delta[n - m] \quad (3.56)$$

și calculând membrul stâng al acestei relații, pe baza lui (3.51), se obține :

$$\langle \varphi_{0,-n}(x), \varphi_{0,-m}(x) \rangle = \sum_k h^*[-2n - k]h[-2m - k] \quad (3.57)$$

sau, făcând schimbarea de variabilă  $p = -k - d$ , se poate scrie :

$$\sum_p h^*[p - 2n + d]h[p - 2m + d] = \delta[m - n] \quad (3.58)$$

Folosind relațiile (3.55) și (3.58) rezultă că :

$$\langle \Psi_{0,n}(x), \Psi_{0,m}(x) \rangle = \delta[m - n] \quad (3.59)$$

S-a demonstrat așadar că mulțimea  $\{\Psi_{0,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este ortonormală.

### **OBSERVAȚII :**

**O1.** S-au demonstrat în același timp relațiile :

$$\sum_k g^*[2n - k]g[2m - k] = \delta[m - n] \quad (3.60)$$

$$\sum_k h^*[2n - k]h[2m - k] = \delta[m - n] \quad (3.61)$$

care sunt utile pentru descrierea comportării în domeniul timp a filtrelor cu răspunsurile în frecvență  $H(\Omega)$  și  $G(\Omega)$ . În continuare se verifică faptul că funcțiile  $\Psi_{0,n}(x)$  construite astfel nu aparțin lui  $V_0$ . Pentru aceasta se calculează produsul scalar :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{0,n}(x), \varphi_{0,m}(x) \rangle &= \left\langle \sum_k g^*[2n-k] \varphi_{-1,k}(x), \sum_l h^*[2m-l] \varphi_{-1,l}(x) \right\rangle = \\
&= \sum_k g^*[2n-k] \sum_l h[2m-l] \langle \varphi_{-1,k}(x), \varphi_{-1,l}(x) \rangle = \\
&= \sum_k g^*[2n-k] \sum_l h[2m-l] = \left( \sum_k g[2n-k] \sum_l h^*[2m-l] \right)^*
\end{aligned}$$

unde am folosit relațiile (3.51) și (3.52). Se calculează suma din membrul drept pentru schimbarea de variabilă  $2m-k=p$  și avem :

$$\sum_k g[2n-k] h^*[2m-k] = \sum_p h^*[p] g[2(n-m)+p] = R_{h^*g}[2(n-m)]$$

unde cu  $R_{h^*g}[q]$  s-a notat intercorelația secvențelor  $h^*$  și  $g$ . Dar pentru  $R_{hg}[q]$  putem scrie :

$$R_{hg}[q] \leftrightarrow H(\Omega)G^*(\Omega)$$

$$R_{hg}[2q] \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ H\left(\frac{\Omega}{2}\right)G^*\left(\frac{\Omega}{2}\right) + H\left(\frac{\Omega}{2} + \pi\right)G^*\left(\frac{\Omega}{2} + \pi\right) \right]$$

sau, ținând seama de relația (3.18) :

$$R_{h^*g}[2q] \leftrightarrow 0$$

și astfel va rezulta :

$$\langle \Psi_{0,n}(x), \varphi_{0,m}(x) \rangle = 0 \quad \forall m, n \in Z$$

Deci funcțiile  $\psi_{0,n}(x)$  sunt ortogonale pe  $V_0$ . S-a demonstrat că mulțimea  $\{\psi_{0,n}(x)\}_{n \in Z}$  este ortonormală în spațiul  $W_0$ .

**O2.** Se determină legătura în domeniul frecvență corespunzătoare relației (3.52). În acest scop se calculează transformatele Fourier ale celor doi membri ai relației (3.52) :

$$\mathfrak{F}\{\Psi(x-n)\} = \sum_k g^*[2n-k] \mathfrak{F}\left\{2^{\frac{1}{2}} \varphi(2x-k)\right\}$$

sau :

$$e^{-j\omega n} \hat{\Psi}(\omega) = \sum_k g^*[2n-k] 2^{\frac{1}{2}} \mathfrak{F}\{\varphi(2x-k)\}$$

unde, făcând schimbarea de variabilă  $2x-k=u$ , se obține :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{\varphi(2x-k)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2x-k) e^{-j\omega x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-j\omega \frac{u+k}{2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\omega}{2}k} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

și revenind la relația anterioară :

$$e^{-j\omega n} \hat{\Psi}(\omega) = \left( \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} g^*[2n-k] e^{-j\frac{\omega}{2}k} \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

de unde rezultă relația pentru transformata Fourier a lui  $\psi(x)$  :

$$\hat{\Psi}(\omega) = \left( \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} g^*[2n-k] e^{-j\frac{\omega}{2}(k-2n)} \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Cu notația :

$$m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} g^*[p] e^{-j\frac{\omega}{2}p} \quad (3.62)$$

ultima relație devine :

$$\hat{\Psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.63)$$

care este o relație analogă celei notate (3.47).

Funcția  $\psi(x)$  poartă numele de undișoară mamă iar funcțiile  $\psi_{m,k}(x)$  se numesc undișoare. Ținând seama de relația (3.49), (3.63) devine :

$$\hat{\Psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{p=2}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^p}\right) \quad (3.64)$$

Această relație permite construcția unei undișoare mamă pornind de la un anumit răspuns de tipul  $h[n]$ .

**O2.** Se observă similitudinea dintre relațiile (3.45) și (3.62). Funcția de scalare se construiește cu ajutorul filtrului cu răspunsul la impuls  $h[n]$  iar undișoara mamă cu ajutorul filtrului cu răspunsul la impuls  $g[n]$ .

Completitudinea mulțimii  $\{\Psi_{0,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este demonstrată în [Mey.'90]. Se poate deci afirma că mulțimea  $\{\Psi_{0,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormală a spațiului  $W_0$ . Afirmatia i) a teoremei 2 este deci verificată.

Demonstrația pentru verificarea afirmației ii) este practic identică cu demonstrația teoremei 1.

În continuare se stabilește legătura între proiecțiile unui semnal  $f(x)$  din  $V_0$  pe subspații succesive  $V_{m-1}$ ,  $W_m$ . În acest scop se calculează produsul scalar :

$$\langle \Psi_{1,n}(x), \varphi(x-1) \rangle \quad (3.65)$$

Conform relației (3.52) se poate scrie :

$$\Psi_{1,n}(x) = \sum_k g^*[2n-k] \varphi_{0,k}(x)$$

și astfel relația (3.65) va fi :

$$\langle \Psi_{1,n}(x), \varphi(x-1) \rangle = \langle \sum_k g^*[2n-k] \varphi_{0,k}(x), \varphi_{0,1}(x) \rangle = g^*[2n-1]$$

Vom putea scrie astfel :

$$\Psi_{1,n}(x) = \sum_l g^*[2n-1] \varphi(x-1)$$

și :

$$e_1(x) = \sum_n \langle e_1(x), \Psi_{1,n}(x) \rangle \Psi_{1,n}(x)$$

Aplicând teorema proiecției (Riesz), obținem :

$$\begin{aligned} \langle e_1(x), \Psi_{1,n}(x) \rangle &= \langle f(x), \Psi_{1,n}(x) \rangle = \langle \sum_k s_0[k] \varphi(x-k), \Psi_{1,n}(x) \rangle = \\ &= \sum_k s_0(k) \langle \Psi_{1,n}(x), \varphi(x-k) \rangle^* = \sum_k s_0[k] g[2n-k] \end{aligned}$$

Deci coeficienții dezvoltării semnalului  $e_1(x)$  în baza  $\{\psi_{1,n}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  sunt :

$$\sum_k s_0[k]g[2n-k]$$

Însă pentru acești coeficienți am făcut notația  $d_1[n]$  în figura 3.11, deci :

$$d_1[n] = \sum_k s_0[k]g[2n-k]$$

Procedând prin recurență se poate demonstra că :

$$d_m[n] = \sum_k s_{m-1}[k]g[2n-k] = \langle f(x), \Psi_{m,n}(x) \rangle \quad (3.66)$$

Cu alte cuvinte coeficienții dezvoltărilor proiecțiilor semnalului  $f(x)$  din  $V_0$  pe două subspații succesive  $V_{m-1}$  și  $W_m$ ,  $s_{m-1}[n]$  și  $d_m[n]$  se pot determina prin filtrare cu un filtru cu răspunsul la impuls  $g[n]$  și prin decimare. Se constată că pentru  $m=1, M$ , secvențele  $d_m[n]$  pot fi obținute folosind sistemul din figura 3.11.

#### **OBSERVATII :**

**O1.** În lucrarea sa [Dau.'88] Ingrid Daubechies determină toate răspunsurile la impuls de filtre RIF,  $h[n]$  și  $g[n]$  care satisfac o anumită condiție de regularitate. Alte condiții de regularitate sunt prezentate în [Rio.'93(1)], [Don.,Joh.'92], [Fro.'90], [Kov.,Vet.'93], [Mal.'90].

Aceste răspunsuri la impuls sunt tabelate și sunt clasificate după lungimea lor. De exemplu filtrul DAU2 este unul cu lungimea răspunsului la impuls egală cu 4.

Dezavantajul major al acestor filtre este că nu au caracteristici de fază liniare. Cu cât lungimea filtrelor crește, cu atât erorile de rotunjire ale coeficienților sunt mai însemnate.

**O2.** Dacă se abandonează ipoteza de ortonormalitate a mulțimii  $\{\varphi(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , considerându-se că aceasta este doar o bază Riesz, atunci teoria prezentată în acest paragraf poate fi generalizată. Această generalizare a fost făcută în lucrările [Coh.,Dau.,Fea.'92] respectiv [Coh.'92] obținându-se clasa undișoarelor biortogonale cu suport compact. Filtrele corespunzătoare sunt tot de tip FIR dar de această dată filtrele de reconstrucție au lungime diferită de filtrele de sinteză. Ele pot fi filtre cu fază liniară. Numeroase exemple de răspunsuri la impuls de filtre din această clasă sunt prezentate în lucrările citate.

**O3.** Avantajul abordării bazate pe utilizarea undișoarelor ortonormale asupra celei bazate pe undișoare biortogonale este prezentat în continuare.

Folosind notațiile utilizate până aici, putem scrie :

$$f_0(x) = f_M(x) + \sum_{m=1}^M e_m(x)$$

Astfel :

$$\begin{aligned} \|f_0(x)\|^2 &= \langle f_M(x) + \sum_{m=1}^M e_m(x), f_M(x) + \sum_{m=1}^M e_m(x) \rangle = \\ &= \langle f_M(x), f_M(x) + \sum_{m=1}^M e_m(x) \rangle + \langle \sum_{m=1}^M e_m(x), f_M(x) + \sum_{m=1}^M e_m(x) \rangle = \\ &= \langle f_M(x), f_M(x) \rangle + \langle f_M(x), \sum_{m=1}^M e_m(x) \rangle + \langle f_M(x), \sum_{m=1}^M e_m(x) \rangle^* + \langle \sum_{k=1}^M e_k(x), \sum_{m=1}^M e_m(x) \rangle^* = \\ &= \|f_M(x)\|^2 + 2\operatorname{Re} \left\{ \langle f_M(x), \sum_{m=1}^M e_m(x) \rangle \right\} + \left\| \sum_{m=1}^M e_m(x) \right\|^2 \end{aligned}$$

În această relație, deoarece avem :

$$f_M(x) \perp e_m(x), \quad \forall m = 1 \div M$$

va rezulta și :

$$f_M(x) \perp \sum_{m=1}^M e_m(x), \quad \forall m = 1 \div M$$

iar în ceea ce privește norma lui  $f_0(x)$  putem scrie:

$$\|f_0(x)\|^2 = \|f_M(x)\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^M e_k(x) \right\|^2$$

apoi, folosind proprietăți ale produsului scalar :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^M e_k(x) \right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^M e_k(x), \sum_{l=1}^M e_l(x) \right\rangle = \sum_{k=1}^M \langle e_k(x), \sum_{l=1}^M e_l(x) \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \langle e_l(x), e_k(x) \rangle = \sum_{k=1}^M \|e_k(x)\|^2 \end{aligned}$$

Revenind, se poate spune că am demonstrat că :

$$\|f_0(x)\|^2 = \|f_M(x)\|^2 + \sum_{k=1}^M \|e_k(x)\|^2 \quad (3.67)$$



Pe baza relației lui Parseval se poate scrie relația în timp discret echivalentă relației (3.67). Aceasta este :

$$\|s_0[n]\|^2 = \|s_M[n]\|^2 + \sum_{k=1}^M \|d_k[n]\|^2 \quad (3.68)$$

Relațiile (3.67) și (3.68) nu sunt valabile în cazul undișoarelor biortogonale. De aceea se poate afirma că este de preferat să se utilizeze undișoarele ortogonale atunci când sunt necesare aproximări de eroare medie pătratică minimă.

**O4.** Teoria expusă poate fi generalizată și pentru codoare în subbenzi cu structură arborescentă simetrică. Această generalizare este făcută în [Coi.,Wic.'93].

**O5.** Teoria expusă poate fi generalizată și pentru codoare în subbenzi care utilizează decimatoare și interpolatoare cu constante M diferite de 2 [Coh.'92] [DeS.,Iun.,Aub.'94].

**O6.** O altă direcție de dezvoltare a codoarelor în subbenzi este cea bazată pe utilizarea filtrelor de analiză și sinteză RII, [Vet.'92], sau a celor variabile în timp [Bar.,Sod.,Nay.'94].

**O7.** Relația (3.32) reprezintă o teoremă de eșantionare generalizată [Duf.,Sch.'52], [Jer.'87], [Lim.,Opp.'88], [Mal.'89(1)], [Naf.,Isa.,Isa.'93].

### 3.6. Transformarea undișoară discretă TUD

În paragraful anterior s-a stabilit legătura dintre seriile de undișoare și tehnica codării în subbenzi. Cu ajutorul sistemului din figura 3.11 poate fi introdusă noțiunea de transformare undișoară discretă. Acest sistem transformă secvența  $x[n]$  în secvențele  $s_M[n]$  și  $d_1[n], d_2[n], \dots, d_M[n]$ . Fie  $y[n]$  secvența obținută prin concatenarea acestor secvențe :

$$y[n] = \{s_M[n], d_1[n], \dots, d_M[n]\}$$

Operația :

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

poartă numele de transformare undișoară discretă ( TUD ). Operația :

$$y[n] \rightarrow x[n]$$

care poate fi implementată de sistemul din figura 3.16 poartă numele de transformare undișoară discretă inversă (TUDI).

Se poate demonstra că TUD este liniară și ortogonală. În continuare se prezintă pe un exemplu algoritmul de calcul al TUD [Mat.,Rad.,Sta.'96], [Nay.,Bar.,Smi.'91(1)], [Pap.,Hla.,Bou.'93], [Rio,Duh.'92], [She.'92], [Sim.,Rie.,Sch.,Nas.'97] [Sad.,Nay,Bar.'94], [Sri.,Jam.'95], [Swe.,Pie.'93], [Swe.'94] [Swe.'94(1)] [Swe.'96]. Fie X vectorul secvenței de intrare :

$$X = S_0 = \begin{bmatrix} s_0[8] \\ s_0[7] \\ \vdots \\ s_0[1] \end{bmatrix}$$

Se consideră că lungimea filtrelor  $h[n]$  și  $g[n]$  este 4. Primul pas al algoritmului este descris de relația :

$$Y_1 = M_0 X$$

unde matricea  $M_0$  este dată de relația :

$$M_0 = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & h[2] & h[3] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h[3] & h[2] & -h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h[0] & h[1] & h[2] & h[3] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h[3] & h[2] & -h[1] & h[0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h[0] & h[1] & h[2] & h[3] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h[3] & h[2] & -h[1] & h[0] \\ h[2] & h[3] & 0 & 0 & 0 & 0 & h[0] & h[1] \\ -h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & -h[3] & h[2] \end{bmatrix}$$

Se constată că se obține :

$$Y_1^T = [s_1[4] d_1[4] s_1[3] d_1[3] s_1[2] d_1[2] s_1[1] d_1[1]]$$

Prin permutări rezultă :

$$\left(Y_1^1\right)^T = [s_1[4] \ s_1[3] \ s_1[2] \ s_1[1] \ d_1[4] \ d_1[3] \ d_1[2] \ d_1[1]]$$

care este un vector obținut prin concatenarea secvențelor  $s_1[n]$  și  $d_1[n]$ . Separând aceste secvențe se obțin vectorii :

$$\begin{aligned} \left(X_1^1\right)^T &= [s_1[4] \ s_1[3] \ s_1[2] \ s_1[1]] \\ \left(X_1^2\right)^T &= [d_1[4] \ d_1[3] \ d_1[2] \ d_1[1]] \end{aligned}$$

Fie  $M_1$  matricea obținută prin restrângerea matricii  $M_0$  la sfertul său din stânga sus :

$$M_1 = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & h[2] & h[3] \\ -h[3] & h[2] & -h[1] & h[0] \\ 0 & 0 & h[0] & h[1] \\ 0 & 0 & -h[3] & h[2] \end{bmatrix}$$

Cel de-al doilea pas al algoritmului este descris de relația :

$$Y_2 = M_1 X_1^1$$

și rezultatul este :

$$Y_2^T = [s_2[2] \ d_2[2] \ s_2[1] \ d_2[1]]$$

În mod analog rezultă prin permutări :

$$\left(Y_2^1\right)^T = [s_2[2] \ s_2[1] \ d_2[2] \ d_2[1]]$$

unde dacă separăm secvențele  $s_2[n]$  și  $d_2[n]$  obținem :

$$\left(X_2^1\right)^T = [s_2[2] \ s_2[1]] \quad \text{și} \quad \left(X_2^2\right)^T = [d_2[2] \ d_2[1]]$$

Acum, cu ajutorul vectorilor  $X_2^1$ ,  $X_2^2$  și  $X_1^2$  se construiește vectorul  $Y$  :

$$Y^T = \left[ (X_2^1)^T (X_2^2)^T (X_2^3)^T \right]$$

Această relație reprezintă rezultatul aplicării transformării undișoară discrete vectorului  $X$  [Pre.,Teu.,Vet.,Fla.'95]. Analizând numărul de operații efectuate se constată că pentru primul pas al algoritmului au fost necesare 32 de înmulțiri și că pentru al doilea pas al algoritmului au fost necesare 16 înmulțiri, în total 68. Dacă vectorul  $X$  ar fi avut  $N$  elemente atunci s-ar fi efectuat un număr de înmulțiri de ordinul  $4N$  [Rio.,Vet.'91]. Dacă s-ar fi folosit filtre de lungime  $L$  atunci acest număr ar fi fost  $LN$ . Pentru  $N$  suficient de mare se constată că numărul de înmulțiri necesare este inferior lui  $N \log_2 N$ , adică transformarea undișoară discretă poate fi efectuată mai rapid decât FFT a aceleiași secvențe. Acesta este motivul pentru care această transformare se mai numește și transformarea undișoară rapidă.

Pentru calculul transformării inverse trebuie aplicate operațiile descrise anterior în ordine inversă. Bineînțeles în locul matricilor  $M_0, M_1, \dots$  trebuie să folosim matricile  $M_0^T, M_1^T, \dots$ , etc.

Ca orice transformare, care se aplică unei secvențe de durată finită, și această transformare prezintă erori la limitele intervalului de timp considerat. Pentru primele eșantioane ale secvenței  $x[n]$ , filtrele  $h[n]$  și  $g[n]$  încă nu sunt în regim permanent iar, la terminarea secvenței  $x[n]$ , filtrele folosite nu sunt încă relaxate [Ben.,Teo.'93], [Bor.'96], [Cod.'94], [Dau.'93]. Pentru diminuarea acestor erori, sunt prezentate diferite metode în [Rio.'93], [Coh.'92], [Abr.,Fla.'94]. Dacă se dorește realizarea unei TUD pe blocuri atunci, pentru diminuarea erorilor provocate de problemele de la marginile blocurilor, se poate aplica una din metodele denumite "overlap and add" sau "overlap and save" [Opp.,Sch.'86].

Transformarea TUD este caracterizată de câțiva parametri. Unul dintre aceștia este expresia răspunsului la impuls  $h[n]$ . Conform [Asz.,Isa.'94] acesta trebuie corelat cu forma semnalului  $x[n]$ . În cazul în care semnalul  $x[n]$  variază rapid este preferabil să se utilizeze un filtru cu răspuns la impuls mai scurt. Există aplicații în care este necesar ca răspunsul la impuls  $h[n]$  să se modifice pe parcursul calculului transformatei TUD [Coi.,Wic.'93], [Dau.'91], [Don.,Joh.'92], [Gop.,Bur.'95], [Her.,Kov.,Vet.'95], [Isa.'94], [Kov.,Vet.'95], [Lem.'90], [Nag.,Ike.'96], [Pho.,Kim.,Vai.,Ans.'95], [Tol.,Hol.,Kal.'95], [Vai.'93(1)], [Wic.'96], [Yao.,Cha.'94], [Zha.,Des.,Pen.'96].

Un alt parametru al transformării este constanta  $M$  (numită rezoluție). În exemplul dat pentru descrierea algoritmului de calcul al transformării s-a folosit pentru  $M$  valoarea sa maximă posibilă. Nu este însă necesar ca lungimea secvenței  $s_M[n]$  din structura vectorului  $Y$  să fie minimă (adică 2). Există aplicații în care lungimea secvenței  $s_M[n]$  din structura vectorului  $Y$  este mai mare [Coi.,Wic.'93].

În sfârșit, un ultim parametru al TUD este lungimea secvenței de intrare,  $N$ . Aceasta trebuie să fie de obicei o putere a lui 2. Pentru o alegere convenabilă este posibil să avem nevoie de o transformare pe blocuri [Asz.'96].

Pe lângă utilizarea sa la îmbunătățirea RSZ, transformarea undișoară discretă mai are și alte aplicații. Câteva dintre acestea sunt prezentate în: [Asz.'97], [Cal., Dau., Swe., Yeo.'96], [Che., Don.'94], [Cho., Wil.'89], [Coh., Dau.'93], [Don.'92 (1)], [Don.'93(2)], [Don., Joh.'93], [Don.'93 (3)], [Don.'94], [Don., Joh.'94 (1)] și [Don.'95].

## **CAPITOLUL 4. ÎMBUNĂTĂȚIREA RAPORTULUI SEMNAL PE ZGOMOT PRIN UTILIZAREA TRANSFORMĂRII UNDIȘOARĂ DISCRETĂ**

Folosirea TUD în îmbunătățirea RSZ este o tehnică foarte modernă. În ultimii ani s-au imaginat diverse aplicații în această direcție. Principalele referințe bibliografice pentru utilizarea acestei tehnici sunt [Coi.,Wic.'93], [Mou.'94], [Cam.,Mas.'94], [Don.,Joh.'91], [Don.,Joh.'92(1)], [Don.'93(1)], [Joh.'93].

În continuare se presupune că :

$$x(t) = x_u(t) + n(t)$$

unde  $x_u(t)$  este componenta utilă a semnalului de prelucrat iar  $n(t)$  este componenta sa perturbatoare. O primă problemă este efectul aplicării TUD semnalului  $x(t)$ . Pentru început acesta va fi considerat un semnal aleator și ergodic.

### **4.1. Analiza statistică a coeficienților TUD ai unui semnal aleator, staționar și ergodic**

Prin proiecție ortogonală a semnalului  $n(t)$  pe spațiile  $W_m$ ,  $m = 1 \div M$  se obțin semnale de energie finită. Coeficienții  $d_m[n]$  sunt, conform relației (3.66) :

$$d_m[n] = \langle n(t), \Psi_{m,n}(t) \rangle$$

Produsele scalare au sens pentru undișoare cu suport compact. Se poate observa că acești coeficienți reprezintă un semnal aleator în timp discret. Se calculează autocorelația statistică a acestui semnal :

$$R_{d_m}[k-1] = E\{d_m[k]d_m^*[1]\} = E\{\langle n(t), \Psi_{m,k}(t) \rangle \langle n(t), \Psi_{m,1}(t) \rangle^*\} =$$

$$= E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} n(t) \Psi_{m,k}^*(t) dt \left( \int_{-\infty}^{\infty} n(u) \Psi_{m,l}^*(u) du \right)^* \right\} = E \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} n(t) n^*(u) \Psi_{m,k}^*(t) \Psi_{m,l}(u) dt du \right\}$$

Conform teoremei lui Fubini operatorul de mediere comută cu cel de integrare și obținem :

$$R_{d_m}[k-l] = \int_{\mathbb{R}^2} E \left\{ n(t) n^*(u) \right\} \Psi_{m,k}^*(t) \Psi_{m,l}(u) dt du$$

În integrant se recunoaște ca factor autocorelația statistică a semnalului aleator  $n(t)$ . Se poate deci scrie :

$$R_{d_m}[k-l] = \int_{\mathbb{R}^2} R_n[t-u] \Psi_{m,k}^*(t) \Psi_{m,l}(u) dt du$$

unde, având în vedere că :

$$\int_{\mathbb{R}} R_n[t-u] \Psi_{m,l}(u) du = R_n(t) * \Psi_{m,l}(u)$$

rezultă :

$$R_{d_m}[k-l] = \int_{\mathbb{R}} \left( R_n(t) * \Psi_{m,l}(t) \right) \Psi_{m,k}^*(t) dt$$

Aplicând relația lui Parseval se obține :

$$R_{d_m}[k-l] = \frac{1}{2\pi_{\mathbb{R}}} \int \left( \hat{R}_n(\omega) \hat{\Psi}_{m,l}(\omega) \right) \hat{\Psi}_{m,k}^*(\omega) d\omega$$

Însă :

$$\hat{\Psi}_{m,l}(\omega) = 2^{\frac{m}{2}} e^{-j\omega 2^m l} \hat{\Psi}(2^m \omega)$$

și astfel ultima relație devine :

$$R_{d_m}[k-l] = \frac{1}{2\pi_{\mathbb{R}}} \int \hat{R}_n(\omega) 2^m \left| \hat{\Psi}(2^m \omega) \right|^2 e^{-j\omega 2^{m(l-k)}} d\omega$$

Vom face schimbarea de variabilă  $2^m \omega = u$  și revenim :

$$R_{d_m}[k-1] = \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{R}_n} \left( 2^{-m} u \right) \left| \hat{\Psi}(u) \right|^2 e^{-ju(1-k)} du$$

sau :

$$R_{d_m}[k-1] = \frac{1}{2\pi} \sum_p \int_{(2p-1)\pi}^{(2p+1)\pi} \left( 2^{-m} u \right) \left| \hat{\Psi}(u) \right|^2 e^{-ju(1-k)} du$$

O nouă schimbare de variabilă :  $\Omega = u - 2p\pi$  ne conduce la :

$$R_{d_m}[k-1] = \frac{1}{2\pi} \sum_p \int_{-\pi}^{\pi} \left( 2^{-m} (\Omega + 2p\pi) \right) \left| \hat{\Psi}(\Omega + 2p\pi) \right|^2 e^{-j(\Omega + 2p\pi)(1-k)} d\Omega$$

sau :

$$R_{d_m}[k-1] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_p \left( 2^{-m} (\Omega + 2p\pi) \right) \right) \left| \hat{\Psi}(\Omega + 2p\pi) \right|^2 e^{-j(\Omega + 2p\pi)(1-k)} d\Omega$$

Având în vedere că membrul drept reprezintă o transformare Fourier în timp discret inversă se poate scrie :

$$R_{d_m}[k-1] \leftrightarrow \sum_p \left( 2^{-m} (\Omega + 2p\pi) \right) \left| \hat{\Psi}(\Omega + 2p\pi) \right|^2 \quad (4.2)$$

Deci densitatea spectrală de putere a semnalului aleator  $d_m[k]$  depinde de densitatea spectrală de putere a semnalului  $n(t)$  prin relația (4.2). Deoarece, conform acestei relații, autocorelația secvenței  $d_m[k]$  depinde doar de diferența momentelor  $(k-1)$  putem afirma că și semnalul  $d_m[k]$  este staționar.

### OBSERVAȚII :

**O1.** Dacă semnalul  $n(t)$  este un zgomot alb atunci  $R_n(\omega)=1, \forall \omega \in \mathbb{R}$  și relația (4.2) devine :

$$R_{d_m}[k-1] \leftrightarrow \sum_p \left| \hat{\Psi}(\Omega + 2p\pi) \right|^2 \quad (4.3)$$

În continuare se calculează suma din membrul drept al acestei relații. În acest scop se pornește de la proprietatea de ortogonalitate a mulțimii  $\{\Psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  :

$$\langle \Psi(x), \Psi(x-k) \rangle = \delta[k]$$



Pe baza relației lui Parseval se obține :

$$\frac{1}{2\pi} \langle \hat{\Psi}(\omega), e^{-j\omega k} \hat{\Psi}(\omega) \rangle = \delta[k]$$

adică :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(\omega)|^2 e^{j\omega k} d\omega = 2\pi \delta[k]$$

sau :

$$\sum_p \int_{(2p-1)\pi}^{(2p+1)\pi} |\hat{\Psi}(\omega)|^2 e^{j\omega k} d\omega = 2\pi \delta[k]$$

Dacă se face schimbarea de variabilă  $\omega - 2p\pi = u$  se obține :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_p |\hat{\Psi}(u + 2p\pi)|^2 e^{juk} du = \delta[k] \quad (4.4)$$

Membrul stâng al ultimei relații reprezintă cel de-al k-lea coeficient al descompunerii în serie Fourier a unei funcții periodice de perioadă  $2\pi$ . Relația (4.4.) arată că această funcție are doar un singur coeficient Fourier nenul și anume acela cu indicele 0 (adică componenta continuă). Rezultă că funcția considerată este constantă. Având în vedere că pentru  $k=0$  relația (4.4) devine :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_p |\hat{\Psi}(u + 2p\pi)|^2 du = 2\pi$$

rezultă că valoarea acestei constante este 1 . S-a demonstrat în acest mod că :

$$\sum_p |\hat{\Psi}(u + 2p\pi)|^2 = 1 \quad (4.5)$$

În consecință relația (4.3) devine :

$$R_{d_m}[k-1] \leftrightarrow 1$$

Astfel dacă semnalul  $n(t)$  este un zgomot alb atunci și semnalul  $d_m[n]$  este un zgomot alb în timp discret. Deci la fiecare iterație a TUD (indiferent de  $m$ ) se

Astfel dacă semnalul  $n(t)$  este un zgomot alb atunci și semnalul  $d_m[n]$  este un zgomot alb în timp discret. Deci la fiecare iterație a TUD (indiferent de  $m$ ) se obține tot un zgomot alb. Rezultă că TUD nu colorează eșantioanele semnalului  $x[n]$  (de la intrarea sa) deși sunt făcute numeroase filtrări ale acestuia.

**O2.** O formulă analoagă relației (4.2) poate fi demonstrată și în cazul semnalelor  $s_m[n]$ ,  $m=1 \div M$ . Aceasta este :

$$R_{s_m}[k-l] = \sum_p \hat{R}_n \left( 2^{-m}(\Omega + 2p\pi) \right) \hat{\phi}(\Omega + 2p\pi)^2 \quad (4.6)$$

Demonstrația este identică cu cea pentru relația (4.2). Acest rezultat, pentru  $m=1$ , este prezentat și în [Coh.'92].

**O3.** Dacă în relațiile (4.2) și (4.6) se trece la limită pentru  $m \rightarrow \infty$ , atunci se constată că autocorelația semnalului în timp discret ( $s[m]$  respectiv  $d[m]$ ) tinde la :

$$L = \sum_p \hat{R}_n(0) \hat{\alpha}(\Omega + 2p\pi)^2$$

unde  $\alpha$  poate fi  $\phi$  sau  $\Psi$ . Având în vedere că și pentru  $\phi$  se poate demonstra o relație identică cu (4.5), putem scrie :

$$L = \hat{R}_n(0)$$

Cu alte cuvinte, indiferent de tipul zgomotului  $n(t)$ , coeficienții  $s_m[n]$  și  $d_m[n]$  tind asimptotic spre zgomot alb în timp discret. Această proprietate este fundamentală deoarece rezultă că sistemul de implementare al TUD poate fi privit ca un filtru de albire.

De aceea se poate utiliza oricare dintre metodele de creștere a RSZ în cazul perturbațiilor de tip zgomot alb, dacă se lucrează în domeniul transformatei.

**O4.** S-a demonstrat că :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E \left\{ d_m[k] d_m^*[l] \right\} = \delta[k-l]$$

Dar dacă se notează cu  $c[n]$  coeficienții transformării Karhunen - Loeve a semnalului  $n(t)$ , atunci:

$$E \{ c[k] c[l] \} = \delta[k-l]$$

Astfel se poate afirma că indiferent de undișoara cu suport compact folosită, TUD tinde asimptotic la transformarea Karhunen - Loeve. Acest rezultat justifică utilizarea TUD în compresii de date, [Dau.,Swe.'95], [Den.,Jaw.,Pet.,Swe.'93], [Don.'91], [Gre.'96], [Dum.'96], [Fro.'95], [Gag.,Lin.'94], [Isa.'95].

În continuare se calculează mediile și dispersiile semnalelor aleatoare  $s_m[m]$  și  $d_m[n]$ ,  $m=1 \div M$ . Astfel pentru semnalul  $d_m[n]$  :

$$E\{d_m[n]\} = E\{\langle n(t), \Psi_{m,k}(t) \rangle\} = E\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} n(t) \Psi_{m,k}^*(t) dt \right\}$$

sau, aplicând din nou teorema lui Fubini :

$$E\{d_m[k]\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{n(t)\} \Psi_{m,k}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} M_n \Psi_{m,k}^*(t) dt$$

unde cu  $M_n$  s-a notat media semnalului aleator  $n(t)$ .

Ultima relație se mai poate scrie :

$$E\{d_m[k]\} = M_n \hat{\Psi}_{m,k}^*(0)$$

Dar :

$$\hat{\Psi}_{m,k}(\omega) = 2^{\frac{m}{2}} e^{-j\omega 2^{m-1} k} \hat{\Psi}(2^m \omega)$$

și, revenind :

$$E\{d_m[k]\} = M_n 2^{\frac{m}{2}} \hat{\Psi}(0) \tag{4.7}$$

Aplicând însă relația (3.63) din capitolul precedent :

$$\hat{\Psi}(0) = m_1(0) \hat{\phi}(0) = m_1(0)$$

o formă echivalentă a relației (3.19) este :

$$|H(\Omega)|^2 + |G(\Omega)|^2 = 2 \tag{4.8}$$

unde :

$$h_n \leftrightarrow H(\Omega) \quad \text{si} \quad g_n \leftrightarrow G(\Omega)$$

Utilizând și relațiile (3.45) și (3.62) :

$$\begin{aligned} h^{v^*}[n] &\leftrightarrow \sqrt{2}m_0(\Omega) \\ \text{si } g^{v^*}[n] &\leftrightarrow \sqrt{2}m_1(\Omega) \end{aligned}$$

vom putea scrie :

$$\begin{aligned} \sqrt{2}m_0(\Omega) &= H^*(\Omega) \\ \sqrt{2}m_1(\Omega) &= G^*(\Omega) \end{aligned}$$

Relația (4.8) se va scrie, pentru  $\Omega=0$  :

$$|m_0(0)|^2 + |m_1(0)|^2 = 1 \quad (4.9)$$

Punând  $\omega=0$  în relația (3.46) :

$$m_0(0) = 1$$

și pe baza relației (4.9) vom obține :

$$|m_1(0)| = 0 \quad ; \quad \sum_p g^*[p] = 0 \quad (4.10)$$

și deci :

$$\hat{\Psi}(0) = 0$$

În final, relația (4.7) se scrie :

$$E\{d_m[k]\} = 0 \quad , \quad m = 1 \div M \quad (4.11)$$

S-a demonstrat că toate semnalele aleatoare  $d_m[n]$  sunt de medie nulă indiferent de  $m$ . Acest lucru era de așteptat având în vedere că acești coeficienți sunt obținuți prin folosirea filtrelor cu răspunsurile la impuls  $g[n]$  (care sunt filtre trece sus).

În continuare se calculează dispersiile acestor semnale. Având în vedere că media lor este nulă, se obține :

$$E\{d_m^2[k]\} = R_{d_m}[0]$$

sau, pe baza relației (4.1) :

$$E\{d_m^2[k]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{R}(2^{-m}u) |\hat{\Psi}(u)|^2 du \quad (4.12)$$

Aceasta este relația care exprimă dispersiile semnalelor  $d_m[n]$  pe baza densității spectrale de putere a semnalului aleator  $n(t)$ .

### OBSERVATII :

**O1.** Dispersiile semnalelor aleatoare  $d_m[n]$  pot fi minimizate prin alegerea judicioasă a undișoarei mamă  $\Psi(t)$  (în acord cu densitatea spectrală de putere  $R_n(\omega)$ ).

**O2.** Dacă  $n(t)$  este un zgomot alb de medie nulă și dispersie  $\sigma^2$  atunci :

$$\hat{R}_n(\omega) = \sigma^2$$

și :

$$E\{d_m^2[k]\} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \sum_p \int_{(2p-1)\pi}^{(2p+1)\pi} |\hat{\Psi}(u)|^2 du = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_p |\hat{\Psi}(u + 2p\pi)|^2 du = \sigma^2$$

Deci în cazul în care  $n(t)$  este un zgomot alb de medie nulă și dispersie  $\sigma^2$  atunci semnalele aleatoare  $d_m[n]$  sunt tot de tip zgomot alb în timp discret de medie nulă și dispersie  $\sigma^2$ . La aceeași concluzie se ajunge și în [Ama.,Vuz.'94], [Ama.,Vuz.'97], [Ama.,Vuz.'97(1)], [Ama.,Vuz.'97(2)], [Ama.,Vuz.'97(3)].

**O3.** Pentru  $m \rightarrow \infty$  relația (4.12) devine :

$$E\{d_m^2[k]\} = \hat{R}_n(0) \quad (4.13)$$

Această relație descrie comportarea asimptotică a dispersiilor semnalelor aleatoare  $d_m[n]$ .

În continuare se determină momentele de ordinul I și II ale semnalelor aleatoare  $s_m[n]$  :

$$E\{s_m[n]\} = E\{\langle n(t), \varphi_{m,k}(t) \rangle\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} n(t)\varphi_{m,k}^*(t)dt\right\}$$

adică :

$$E\{s_m[k]\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{n(t)\}\varphi_{m,k}^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} M_n\varphi_{m,k}^*(t)dt$$

unde cu  $M_n$  s-a notat media semnalului aleator  $n(t)$ .

Ultima relație se mai poate pune sub forma :

$$E\{s_m[k]\} = M_n\hat{\varphi}_{m,k}^*(0)$$

Deoarece se poate scrie :

$$\hat{\varphi}_{m,k}(\omega) = 2^{\frac{m}{2}} e^{-j\omega 2^m k} \hat{\varphi}(2^m \omega)$$

vom avea :

$$E\{s_m[k]\} = M_n 2^{\frac{m}{2}} \hat{\varphi}(0) = M_n 2^{\frac{m}{2}} \quad (4.14)$$

Deci media semnalelor  $s_m[k]$  crește cu creșterea lui  $m$ .

Dispersiile acestor semnale sunt :

$$E\{s_m^2[k]\} = R_{s_m}[0] - E^2\{s_m[k]\}$$

Pentru autocorelație avem :

$$R_{s_m}[0] = \frac{1}{2\pi_R} \int_{\hat{R}_n} \hat{R}_n(2^{-m}u) |\hat{\varphi}(u)|^2 du$$

și obținem :

$$E\{s_m^2[k]\} = \frac{1}{2\pi_R} \int_{\hat{R}_n} \hat{R}_n(2^{-m}u) |\hat{\varphi}(u)|^2 du - 2^m M_n \quad (4.15)$$

Dacă semnalul este de medie nulă atunci :

$$E\{s_m^2[k]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{R}_n(2^{-m}u) |\hat{\phi}(u)|^2 du \quad (4.16)$$

**OBSERVATII :**

**O1.** Dispersiile semnalelor aleatoare  $s_m[n]$  pot fi minimizeze prin alegerea judicioasă a funcției de scalare  $\phi(t)$  (în acord cu densitatea spectrală de putere  $R_n(\omega)$ ).

**O2.** Dacă  $n(t)$  este un zgomot alb de medie nulă și dispersie  $\sigma^2$  atunci

$$\hat{R}_n(\omega) = \sigma^2$$

și :

$$E\{s_m^2[k]\} = \frac{\sigma}{2\pi} \sum_p \int_{(2p-1)\pi}^{(2p+1)\pi} |\hat{\phi}(u)|^2 du = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{\phi}(u + 2p\pi)|^2 du = \sigma^2$$

Deci în cazul în care  $n(t)$  este un zgomot alb de medie nulă și dispersie  $\sigma^2$  atunci semnalele aleatoare  $s_m[n]$  sunt tot de tip zgomot alb în timp discret de medie nulă și dispersie  $\sigma^2$ .

**O3.** Pentru  $m \rightarrow \infty$  relația (4.16) devine :

$$E\{s_m^2[k]\} = \hat{R}_n(0)$$

Această relație descrie comportarea asimptotică a dispersiilor semnalelor aleatoare  $s_m[n]$ .

**O4.** Condiția :

$$E\{n(t)\} = 0$$

previne divergența șirurilor  $E\{s_m[k]\}$  și  $E\{s_m^2[k]\}$  când  $m \rightarrow \infty$ .

**O5.** Dacă  $n(t)$  este un semnal aleator și staționar de medie nulă atunci secvențele  $s_m[n]$  și  $d_m[n]$  converg asimptotic (pentru  $m \rightarrow \infty$ ) la semnale aleatoare de tip zgomot alb de medie nulă și dispersie  $R_n(0)$ . Această observație justifică ideea de extrapolare a tehnicilor de îmbunătățire a RSZ în domeniul TUD,

pentru semnale perturbate aditiv cu zgomot alb, prezentate în [Isa.'95(1)]. O analiză asemănătoare este prezentată în [Pas.,Gay.'95]

#### 4.2. Filtrarea adaptivă neliniară în domeniul transformatei

Una dintre tehnicile de filtrare adaptivă neliniară în domeniul transformatei a fost introdusă de Donoho [Don.'92], [Don.'93] sub numele de "wavelet shrinkage". La baza acestei metode stă transformarea neliniară :

$$d_m[i] \rightarrow \text{sgn}\{d_m[i]\} \cdot (|d_m[i]| - s) \quad (4.17)$$

unde  $s$  reprezintă un prag proporțional cu dispersia zgomotului  $n(t)$ . Se observă că este vorba despre o filtrare adaptivă, parametrul  $s$  depinzând de semnalul  $n(t)$ , prin intermediul dispersiei acestuia. Se constată că operatorul definit de relația (4.17) este unul neliniar. Având în vedere că :

$$x[k] = x_u[k] + n[k]$$

și că TUD este liniară, rezultă că :

$$d_{m_x}[k] = d_{m_u}[k] + d_{m_n}[k]$$

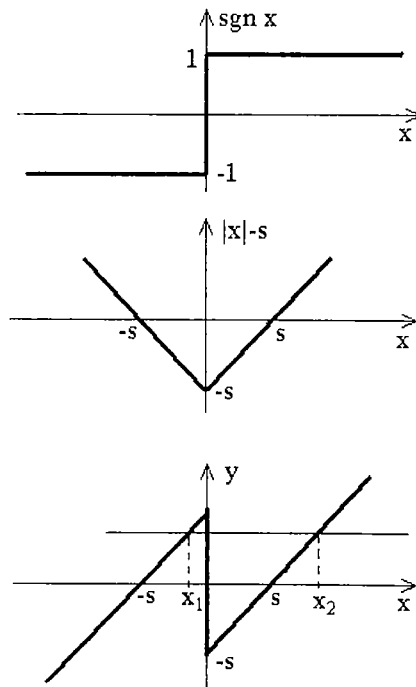


Figura 4.1. Transformarea funcțională descrisă de relația (4.17).



Aplicarea relației (4.16) coeficienților  $d_{mn}[k]$  are ca efect scăderea valorii acestora. De aici vine și denumirea metodei "wavelet shrinkage". Din nefericire sunt afectați și coeficienții  $d_{mxu}[k]$ . Conform referințelor bibliografice deja citate, metoda propusă este eficientă eliminând aproape complet zgomotul dar distorsionând și semnalul util. De aceea această metodă se aplică doar în cazul semnalelor  $x(t)$  cu raport semnal pe zgomot mare (atunci când  $s$  este neglijabil în comparație cu  $d_{mxu}[n]$ ).

În continuare se analizează metoda propusă. Relația (4.17) descrie schimbarea de variabilă aleatoare:

$$y = \text{sgn}x \cdot (|x| - s)$$

Această transformare funcțională este reprezentată grafic în figura 4.1.

Notăm cu  $X$  variabila aleatoare care descrie comportarea statistică a semnalului  $d_m[i]$  la momentul fixat  $i$ . Considerând că semnalele  $d_m[i]$  sunt de tip zgomot alb (presupunere justificată în paragraful anterior) rezultă că variabila aleatoare  $X$  este distribuită gaussian (având media 0 și dispersia  $\sigma^2$ ).

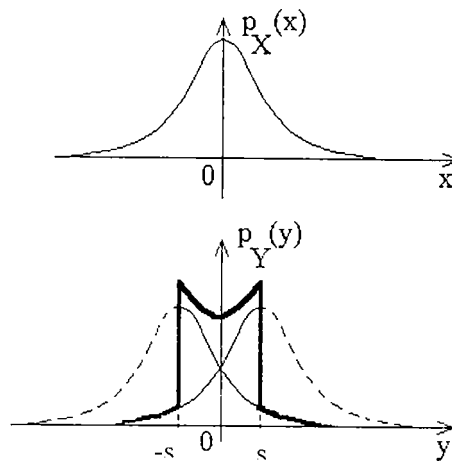


Figura 4.2. Densitățile de probabilitate ale variabilelor aleatoare  $X$  și  $Y$ .

Aplicând variabilei aleatoare  $X$  transformarea funcțională descrisă în figura 4.1 se obține variabila aleatoare  $Y$ . Se determină  $p_Y(y)$  în funcție de densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare  $X$ ,  $p_X(x)$ . Conform figurii 4.1 rezultă :

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x_1)}{\frac{dy}{dx_1}} + \frac{p_X(x_2)}{\frac{dy}{dx_2}}$$

unde :

$$x_1 \in (-\infty, 0); y = x_1 + s \Leftrightarrow x_1 = y - s;$$

$$\frac{dy}{dx_1} = 1, y \in (-\infty, s)$$

și :

$$x_2 \in (0, \infty); y = x_2 - s \Leftrightarrow x_2 = y + s;$$

$$\frac{dy}{dx_2} = 1, y \in (-s, \infty)$$

De aceea se poate scrie :

$$p_Y(y) = p_X(y-s)\sigma(s-y) + p_X(y+s)\sigma(y+s)$$

În figura 4.2 sunt prezentate cele două densități de probabilitate  $p_X(x)$  și  $p_Y(y)$ .

Se constată faptul că funcția  $p_Y(y)$  este pară. Media acestei variabile aleatoare este :

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy = 0$$

fiind integrala pe un interval simetric a unei funcții impare .

În continuare se determină valoarea dispersiei variabilei aleatoare  $Y$ ,  $\sigma_Y^2$  pe baza dispersiei variabilei aleatoare  $X$ ,  $\sigma^2$ .

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_Y(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 [p_X(y-s)\sigma(s-y) + p_X(y+s)\sigma(y+s)] dy = \quad (4.18) \\ &= \int_{-\infty}^s y^2 p_X(y-s) dy + \int_{-s}^{\infty} y^2 p_X(y+s) dy \end{aligned}$$

Se calculează cele două integrale :

$$I_1 = \int_{-\infty}^s y^2 p_X(y-s) dy$$

Se face schimbarea de variabilă  $y-s = u$  și avem :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^0 (u+s)^2 p_X(u) du = \int_{-\infty}^0 u^2 p_X(u) du + \\ &+ 2s \int_{-\infty}^0 u p_X(u) du + \int_{-\infty}^0 s^2 p_X(u) du \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dar :

$$\int_{-\infty}^0 u^2 p_X(u) du = \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^0 p_X(u) du = F_X(0) = \frac{1}{2}$$

unde cu  $F_X(x)$  s-a notat funcția de repartiție a variabilei aleatoare  $X$ . Deci relația (4.19) devine :

$$I_1 = \frac{\sigma^2}{2} + 2s \int_{-\infty}^0 u p_X(u) du + \frac{s^2}{2} \quad (4.20)$$

Urmează calculul lui :

$$I_2 = \int_{-s}^{\infty} y^2 p_X(y+s) dy$$

Se face schimbarea de variabilă  $y+s = u$  și avem :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\infty} (u-s)^2 p_X(u) du = \int_0^{\infty} u^2 p_X(u) du - \\ &- 2s \int_0^{\infty} u p_X(u) du + s^2 \int_0^{\infty} p_X(u) du = \\ &= \frac{\sigma^2}{2} - 2s \int_0^{\infty} u p_X(u) du + \frac{s^2}{2} \end{aligned}$$

Deoarece funcția  $p_X(x)$  este pară, cu schimbarea de variabilă  $u = -v$  va rezulta :

$$\int_0^{\infty} u p_X(u) du = - \int_{-\infty}^0 v p_X(-v) dv = - \int_{-\infty}^0 v p_X(v) dv$$

și astfel  $I_2$  devine :

$$I_2 = \frac{\sigma^2}{2} + 2s \int_{-\infty}^0 u p_X(u) du + \frac{s^2}{2} \quad (4.21)$$

Pe baza relațiilor (4.20 ) și (4.21 ) pentru relația (4.18) avem :

$$\sigma_Y^2 = I_1 + I_2 = \sigma^2 + 4s \int_{-\infty}^0 u p_X(u) du + s^2 \quad (4.22)$$

În continuare se calculează integrala din membrul drept al relației (4.22) :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\infty}^0 u p_X(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^0 u e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = \\ &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^0 d\left( e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \right) = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^0 = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

De aceea se obține :

$$\sigma_Y^2 = \sigma^2 - 4s \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} + s^2 \quad (4.23)$$

Trebuie determinată mulțimea valorilor lui  $s$  pentru care are loc relația :

$$\sigma_Y^2 < \sigma^2 \quad (4.24)$$

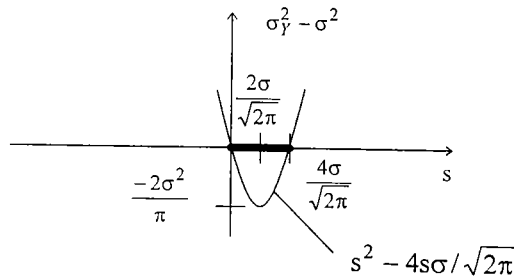


Figura 4.3. Mulțimea valorilor lui  $s$  pentru care metoda "wavelet shrinkage" este eficientă.

Pentru aceste valori, prin aplicarea transformării (4.17) se obține un nou semnal aleator (descriș de variabila aleatoare  $Y$  la momentul  $i$ ) a cărui putere este inferioară puterii semnalului  $d_m[n]$  și deci metoda propusă este eficientă.

Condițiile (4.23) și (4.24) conduc la relația :

$$s^2 - 4s \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} < 0$$

Soluțiile acestei inegalități sunt localizate ca în figura 4.3.

S-a demonstrat în acest fel că valoarea minimă a deviației standard a variabilei aleatoare  $Y$  este :

$$\sigma_{Y_{\min}} = \sqrt{\frac{\pi - 2}{\pi}} \sigma = 0,6 \sigma \quad (4.25)$$

și că această valoare este obținută pentru un prag  $s$  de valoare  $0,797 \cdot \sigma$ .

În consecință, aplicând transformarea din relația (4.17) semnalelor aleatoare  $d_m[i]$  se obțin noi semnale aleatoare de putere (dispersie) inferioară celor inițiale. De aceea se poate afirma că metoda propusă înlătură o parte din zgomotul conținut în semnalele  $d_m[i]$ . De aceea în referințele bibliografice deja citate este utilizat termenul "de-noising".

Conform relației (4.25), cea mai mare reducere posibilă a puterii de zgomot, obținabilă aplicând metoda propusă este de :

$$\frac{\sigma_{Y_{\min}}^2}{\sigma^2} = \frac{(0,6)^2 \sigma^2}{\sigma^2} = 0,36$$

De aceea, în cel mai fericit caz, se poate vorbi de o îmbunătățire a RSZ de 2,77 ori. Astfel, metoda propusă nu poate conduce la rezultate remarcabile decât în cazul unor semnale care au deja RSZ destul de mare.

Referitor la distorsionarea semnalului  $d_m[n]$  se poate afirma că acele eșantioane care au valori mari (mult mai mari decât  $s$ ) nu sunt afectate de metoda propusă dar că acele eșantioane care au valori apropiate de  $s$  sunt puternic afectate de metoda propusă.

Având în vedere că alegerea pragului  $s$  depinde de dispersia zgomotului  $n(t)$ ,  $\sigma^2$ , rezultă că "wavelet shrinkage" este o metodă de filtrare neliniară adaptivă în domeniul TUD. Este clar că aplicarea relației (4.17) presupune un volum de calcul mult inferior celui solicitat de algoritmul LMS [Isa.'94(1)], [Isa.'94(2)] sau de filtrarea Wiener multicanal [Naf.'95], [Bov.,Mar.,Qua.'94], [Che.,Lin.'94], [Shy.'92].

O altă metodă de filtrare neliniară în domeniul TUD este propusă de Moulin în [Mou.'94]. Această metodă se bazează pe o detecție de prag. Transformarea care stă la baza acestei metode este:

$$d_m[i] \rightarrow \begin{cases} d_m[i], & d_m[i] > s \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \quad (4.26)$$

Raționând ca mai sus se consideră variabila aleatoare  $X$  distribuită gaussian cu media nulă și dispersia  $\sigma^2$ . Aceasta este transformată cu ajutorul relației :

$$y = \begin{cases} x, & |x| > s \\ 0, & |x| \leq s \end{cases} \quad (4.27)$$

în variabila aleatoare  $Y$ . Se face caracterizarea statistică a acestei variabile aleatoare. Transformarea (4.27) este reprezentată grafic în figura 4.4.

Se observă că  $y$  este o funcție strict monotonă de  $x$  pe intervalele  $(-\infty, -s)$  și  $(s, \infty)$ . Din păcate această funcție nu este inversabilă, de aceea neputându-se determina  $p_Y(y)$  pe baza lui  $p_X(x)$ , folosind relația :

$$p_Y(y) = \sum_k \frac{p_X(x_k)}{\left| \frac{dy}{dx_k} \right|}$$

În continuare se determină  $p_Y(y)$  pe baza funcției de repartiție a variabilei aleatoare  $Y$ ,  $F_Y(y)$ :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

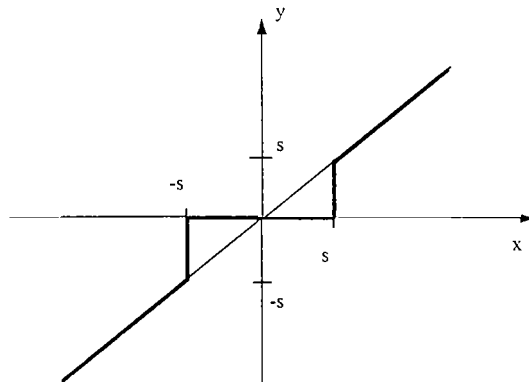


Figura 4.4. Reprezentarea grafică a transformării descrise de relația (4.27).

Pe intervalul  $(-\infty, -s)$  variabilele  $X$  și  $Y$  sunt identice. De aceea :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = F_X(y) , y \in (-\infty, -s)$$

Pe intervalul  $[-s, 0)$  variabila aleatoare  $Y$  este identic nulă și deci

$$F_Y(y) = P\{Y \leq -s\} = F_X(-s) , y \in [-s, 0)$$

Pe intervalul  $[0, s)$  variabila aleatoare  $Y$  este identic nulă și se poate deci scrie :

$$F_Y(y) = P(Y \leq s) = F_X(s) , y \in [0, s)$$

Pe intervalul  $[s, \infty)$  variabilele  $X$  și  $Y$  sunt identice. De aceea :

$$F_Y(y) = P(X \leq y) = F_X(y) , y \in [s, \infty)$$

În consecință, funcția de repartiție a variabilei aleatoare  $Y$  are graficul din figura 4.5.

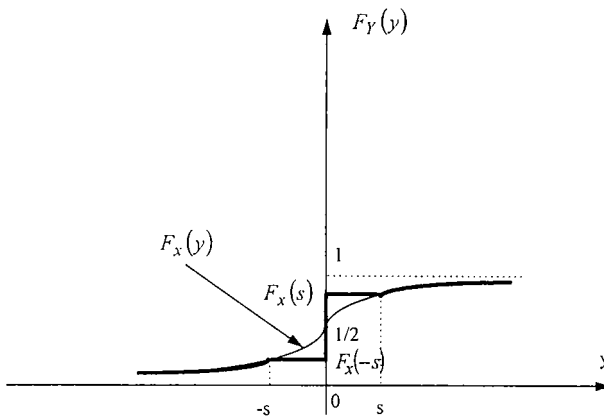


Figura 4.5. Graficul funcției de repartiție a variabilei aleatoare  $Y$ .

Întrucât densitatea de probabilitate se poate obține pe baza derivării funcției de repartiție, operând în sensul distribuțiilor, pentru  $p_Y(y)$  se obține graficul din figura 4.6.

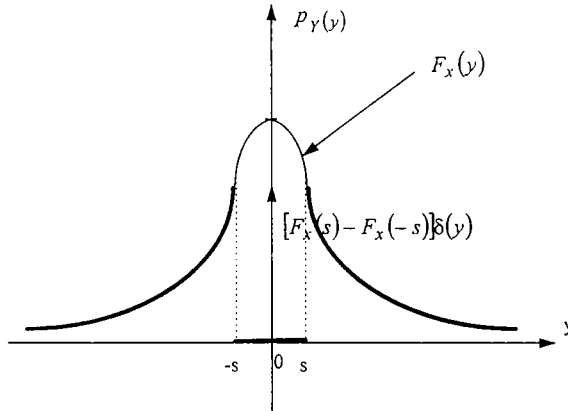


Figura 4.6. Densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare Y.

Deci :

$$p_Y(y) = p_X(y) \sigma(-y-s) + (F_X(s) - F_X(-s)) \delta(y) + p_X(y) \sigma(y-s) \quad (4.28)$$

Se determină media  $m_Y$  a variabilei aleatoare Y :

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y dy$$

Deoarece :

$$y P_Y(y) = y p_X(y) \sigma(-y-s) + y p_X(y) \sigma(y-s)$$

vom avea :

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y dy = \int_{-\infty}^{-s} y p_X(y) dy + \int_s^{\infty} y p_X(y) dy \quad (4.29)$$

relația (4.29) devenind :

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y p_X(y) dy - \int_{-s}^s y p_X(y) dy = 0$$



deoarece cele două integrale sunt nule fiind integrale de funcții impare pe intervale simetrice.

În continuare se calculează dispersia variabilei aleatoare  $Y$ .

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{-s} y^2 p_Y(y) dy + \int_{-s}^s y^2 p_Y(y) dy + \int_s^{\infty} y^2 p_Y(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{-s} y^2 p_Y(y) dy + \int_s^{\infty} y^2 p_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_Y(y) dy - \int_{-s}^s y^2 p_Y(y) dy\end{aligned}$$

sau :

$$\sigma_Y^2 = \sigma^2 - 2 \int_0^s y^2 p_X(y) dy$$

Calculăm ultima integrală :

$$\begin{aligned}\int_0^s y^2 p_X(y) dy &= \int_0^s y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma^2 \int_0^s y d\left(e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\right) = \\ &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^s - \int_0^s e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right] = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ se^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} - \int_0^s e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right] = \\ &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ se^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} \right] + \sigma^2 \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} se^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} + \sigma^2 (F_X(s) - F_X(0)) = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left( -se^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} \right) + \sigma^2 \left( F_X(s) - \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

Revenind avem :

$$\sigma_Y^2 = \sigma^2 + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} se^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} - 2\sigma^2 \left( F_X(s) - \frac{1}{2} \right)$$

În figura 4.7 se prezintă dependența de  $s$  a diferenței  $\sigma_Y^2 - \sigma^2$  dată de relația :

$$\sigma_Y^2 - \sigma^2 = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{se}^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} - 2\sigma^2 \left( F_X(s) - \frac{1}{2} \right) \quad (4.30)$$

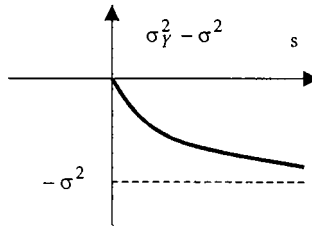


Figura 4.7. Dependența de  $s$  a diferenței  $\sigma_Y^2 - \sigma^2$ .

Analizând figura 4.7 și relația (4.30) se constată faptul că, oricare ar fi  $s$  pozitiv,  $\sigma_Y^2 - \sigma^2 < 0$ , ceea ce dovedește că metoda propusă realizează o îmbunătățire a RSZ, indiferent de pragul folosit.

Se observă de asemenea că :

$$\sigma_Y^2 - \sigma^2 \Big|_{s=0} = 0$$

relație care confirmă justetea calculului făcut, conform figurilor 4.4, 4.5 și 4.6. Se mai constată că :

$$\sigma_Y^2 - \sigma^2 \Big|_{s=\infty} = -\sigma^2$$

Cu alte cuvinte,  $\sigma_Y^2$  descrește cu creșterea lui  $s$  între  $\sigma^2$  (pentru  $s=0$ ) și 0 (pentru  $s \rightarrow \infty$ ). Deci pe baza acestei metode zgomotul  $d_{mn}[i]$  ar putea fi redus oricât de mult.

Din păcate o dată cu creșterea lui  $s$  sunt eliminate și eşantioanele utile din semnalele  $d_m [i]$ , metoda producând distorsiuni ale părții utile a semnalului de prelucrat. Pentru valori mici ale lui  $s$  aceste distorsiuni sunt nesemnificative, cea mai bună dovadă fiind aceea că această metodă este una dintre cele care se folosesc pentru compresia semnalelor în domeniul TUD

[Isa.,Asz.'94], [Asz., Isa.'94], [Nar.,Lou.,Les.,Dar.'96], [Nas.,Sap.,Saw.'97], [Nay.,Bar.,Smi.'91], [Ode.,Bur.'96].

Este util de determinat pragul  $s$  în scopul maximizării RSZ de la ieșirile celor două filtre propuse. Notând cu  $x[i]$  eșantioanele de semnal util de la intrarea filtrului neliniar și cu  $y[i]$  eșantioanele de semnal util de la ieșire se constată că :

$$E_i = \sum_{i=0}^{N-1} |x_i|^2 ; E_e = \sum_{i=0}^{N-1} |y_i|^2 ; \text{RSZ}_i = \frac{E_i}{\sigma^2} ; \text{RSZ}_e = \frac{E_e}{\sigma_y^2}$$

Dar, pentru metoda "wavelet shrinkage" :

$$E_e = \sum_{i=0}^{N-1} |x_i|^2 - 2s \sum_{i=0}^{N-1} |x_i| + s^2$$

sau, cu notația :

$$\sum_{i=0}^{N-1} |x_i|^2 = S_{N-1}$$

vom avea :

$$E_e = E_i - 2s S_{N-1} + s^2$$

De aceea, în cazul acestei metode :

$$\text{RSZ}_e = \frac{E_i - 2s S_{N-1} + s^2}{\sigma^2 - \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sigma s + s^2}$$

Se constată că pentru maximizarea acestei funcționale după parametrul  $s$  este necesară cunoașterea valorilor  $E_i$  și  $S_{N-1}$ , adică este necesară cunoașterea expresiei analitice a lui  $x[n]$ . Rezultă că pentru cazul general valoarea optimă a pragului  $s$  poate fi fixată adaptiv, având ca și criteriu de adaptare maximizarea lui RSZ. Concluzia este valabilă și pentru cea de-a doua metodă de filtrare neliniară propusă.

În consecință este de dorit ca eșantioanele  $d_m[i]$  să fie tratate diferit în funcție de valoarea lor. Cele mici ar fi util să fie prelucrate cu metoda bazată pe detecția de prag iar cele mari să fie prelucrate pe baza metodei "wavelet shrinkage". De aceea în [Isa.,Asz.,Isa.'95] se propune transformarea :

$$d_m[i] \leftrightarrow \begin{cases} 0, & \text{pentru } |d_m[i]| < s \\ \operatorname{sgn}\{d_m[i]\}(|d_m[i]| - s), & \text{pentru } |d_m[i]| \geq s \end{cases} \quad (4.31)$$

În aceeași lucrare se prezintă rezultate experimentale obținute pe baza aplicării metodei de îmbunătățire a RSZ prin filtrare neliniară în domeniul TUD, descrisă de relația (4.31).

Se constată că metoda este valabilă pentru o mare diversitate de semnale utile, că zgomotul este aproape complet înlăturat și că semnalele utile nu sunt prea distorsionate. Prezentarea detaliată a rezultatelor experimentale privind aplicarea metodei descrisă de relația (4.31) la diverse semnale este subiectul capitoului următor.

### 4.3. Analiza noii metode de filtrare în domeniul transformatei

Fie  $X$  variabila aleatoare de la intrare. Folosind estimatorul propus se obține variabila aleatoare  $Y$ . Această transformare este prezentată în figura 4.8.

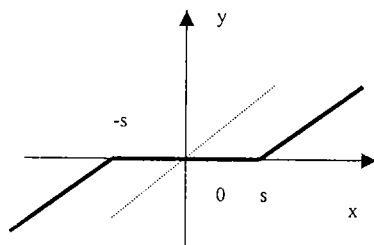


Figura 4.8. Transformarea propusă.

Legătura dintre funcțiile de repartiție ale celor două variabile aleatoare este, așa cum se arată în [Isa.,Asz.,Isa.'95] :

$$F_Y(y) = F_X(y-s)\sigma(-y) + F_X(y+s)\sigma(y)$$

Derivând această relație se obține legătura dintre densitățile de probabilitate corespunzătoare :

$$p_Y(y) = p_X(y-s)\sigma(-y) + (F_X(s) - F_X(-s))\delta(y) + p_X(y+s)\sigma(y)$$

Din acest motiv valoarea medie a variabilei aleatoare Y are valoarea:

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)dy = 0$$

În continuare se calculează dispersia acestei variabile aleatoare.

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^0 y^2 p_X(y-s)dy + \int_0^{\infty} y^2 p_X(y+s)dy$$

Dar:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 y^2 p_X(y-s)dy &= \int_{-\infty}^{-s} (u+s)^2 p_X(u)du = \\ &= \int_{-\infty}^{-s} u^2 p_X(u)du + 2s \int_{-\infty}^{-s} u p_X(u)du + s^2 F_X(-s) \end{aligned}$$

și:

$$\int_0^{\infty} y^2 p_X(y+s)dy = \int_s^{\infty} u^2 p_X(u)du - 2s \int_s^{\infty} u p_X(u)du + s^2(1 - F_X(s))$$

Deci:

$$\sigma_Y^2 = 2 \int_s^{\infty} u^2 p_X(u)du - 4s \int_s^{\infty} u p_X(u)du + s^2(1 - F_X(s) + F_X(-s))$$

Presupunând că X este o variabilă aleatoare gaussiană, având densitatea de probabilitate  $p_X(x)$ , primul termen al membrului drept al ultimei relații are valoarea :

$$\int_s^{\infty} u^2 p_X(u)du = \frac{\sigma_X^2}{\sqrt{2\pi}} s e^{-\frac{s^2}{2\sigma_X^2}} - \sigma_X^2(1 - F_X(s))$$

și:

$$\int_s^{\infty} u p_X(u)du = \sigma_X^2 p_X(s)$$

În acest caz expresia dispersiei devine :

$$\sigma_Y^2 = 2s^2(1 - F_X(s)) - 2s\sigma_X^2 p_X(s) + 2\sigma_X^2(1 - F_X(s))$$

În figura 4.9 este prezentată funcția de repartiție a variabilei aleatoare Y iar în figura 4.10 densitatea de probabilitate a acestei variabile aleatoare. În figura 4.11 este prezentată dependența dispersiei variabilei aleatoare Y de valoarea pragului s.

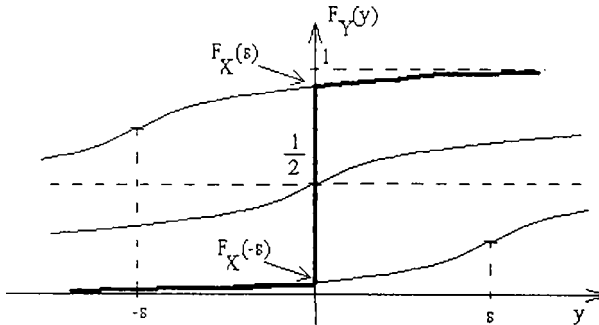


Figura 4.9. Funcția de repartiție a variabilei aleatoare Y.

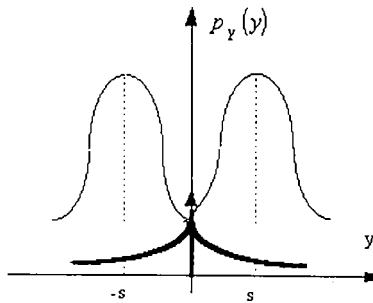


Figura 4.10. Densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare Y.

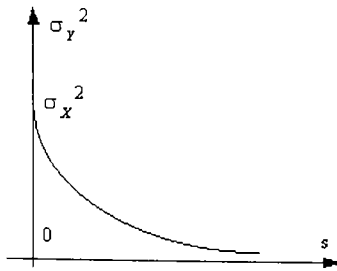


Figura 4.11. Dependența dispersiei variabilei aleatoare Y de valoarea pragului s.

Analizând ultima figură se constată că pentru orice valoare a pragului s dispersia semnalului de la ieșire este inferioară dispersiei semnalului de la intrare. Cu alte cuvinte, oricare ar fi puterea zgomotului care perturbă aditiv semnalul util, de prelucrat, la ieșire se obține un semnal util perturbat aditiv cu un zgomot cu o putere mai mică. Evident reducerea puterii zgomotului este cu atât mai importantă cu cât se folosește un prag de valoare mai mare. Pentru o valoare suficient de mare a pragului zgomotul perturbator poate fi practic rejectat. Se constată că nu există o valoare optimă a pragului (care să conducă la minimizarea puterii zgomotului de la ieșire) așa ca în cazul filtrului de tip “wavelet shrinkage” (prezentat la începutul acestui paragraf). Mai degrabă, acest al treilea filtru neliniar (care se mai numește și filtru de tipul “soft thresholding”) are o comportare mai apropiată de cea a filtrului propus de Moulin (care mai poartă și numele de filtru de tipul “hard thresholding”), permițând prelucrarea unor semnale cu raport semnal pe zgomot mult mai mic decât în cazul filtrului de tip “wavelet shrinkage”. Din nefericire odată cu creșterea valorii pragului și în cazul acestui al treilea filtru cresc și distorsiunile semnalului util de la ieșire. De aceea, în continuare, pentru aprecierea ultimului estimator propus se analizează îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot pe care o poate realiza acest filtru neliniar. Această analiză este realizată în conformitate cu [Isa.’97].

Semnalul de la intrarea filtrului de tipul “soft thresholding” este de forma:

$$x[n] = x_u[n] + z_x[n]$$

unde  $z_x[n]$  este un zgomot staționar cu puterea  $\sigma_x^2$ . Dacă semnalele  $x_u[n]$  și  $z_x[n]$  sunt necorelate atunci se poate scrie :

$$P_x = P_{x_u} + P_{z_x}$$

Raportul semnal pe zgomot la intrare este egal cu :

$$RSZ_i = \frac{P_{x_u}}{\sigma_x^2}$$

Semnalul de la ieșirea filtrului este de forma :

$$y[n] = y_u[n] + z_y[n]$$

iar RSZ la ieșire va fi :

$$RSZ_e = \frac{P_{y_u}}{\sigma_y^2}$$

Îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot realizată de filtrul de tip “soft thresholding” este :

$$\chi = \frac{RSZ_e}{RSZ_i} = \frac{P_{y_u}}{\sigma_y^2} \frac{\sigma_x^2}{P_{x_u}}$$

Făcând ipoteza că și semnalul util și zgomotul de la ieșire sunt decorelate, ultima relație devine :

$$\chi = \frac{P_y - \sigma_y^2}{P_x - \sigma_x^2} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$$

Puterile semnalelor de la intrare și de la ieșire,  $P_x$  și  $P_y$ , pot fi calculate deoarece aceste semnale sunt accesibile măsurării. Puterea zgomotului de la intrare poate fi măsurată în absența semnalului util de intrare iar puterea zgomotului de la ieșire poate fi calculată folosind formula dedusă mai sus pentru orice valoare a pragului  $s$ .

Deci îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot  $\chi$  este o funcțională de valoarea pragului  $s$ . Există posibilitatea ca această funcțională să aibă o valoare minimă pentru o anumită valoare a pragului  $s$ . Relația intrare-ieșire pentru filtrul de tip “soft-thresholding” poate fi pusă în forma :



$$y[k] = \begin{cases} x[k] - s, & x[k] > s, \\ x[k] + s, & x[k] < -s, \\ 0, & |x[k]| < s \end{cases}$$

Puterea semnalului de la ieșirea acestui filtru este :

$$P_y = \sum_{k=1}^N (y[k])^2 = \sum_{k_1=1}^{N_1} (x[k] - s)^2 + \sum_{k_2=1}^{N_2} (x[k] + s)^2$$

S-a notat cu  $N_1$  numărul de eșantioane a căror valoare este superioară lui  $s$  și cu  $N_2$  numărul de eșantioane din semnalul de ieșire a căror valoare este mai mică decât  $-s$ . Expresia puterii de la ieșire devine :

$$P_y = \sum_{k_1=1}^{N_1} x^2[k_1] + \sum_{k_2=1}^{N_2} x^2[k_2] + 2s \left( \sum_{k_2=1}^{N_2} x[k_2] - \sum_{k_1=1}^{N_1} x[k_1] \right) + (N_1 + N_2)s^2$$

Dacă valoarea pragului  $s$  este suficient de mică se pot face aproximările :

$$\sum_{k_1=1}^{N_1} x^2[k_1] + \sum_{k_2=1}^{N_2} x^2[k_2] \cong P_x \cong P_{x_u} + \sigma_X^2$$

și :

$$\sum_{k_2=1}^{N_2} x[k_2] - \sum_{k_1=1}^{N_1} x[k_1] \cong - \sum_{k=1}^N x[k]$$

notând această ultimă expresie cu  $\alpha$ . Se poate scrie, de asemenea :

$$N_1 + N_2 \cong \beta N \quad \text{cu } 0 < \beta < 1$$

Iată de ce puterea semnalului de la ieșire poate fi calculată cu formula :

$$P_y = P_x + 2s\alpha + \beta N s^2$$

Incluzând și distorsiunea semnalului util de la ieșire în categoria perturbațiilor, raportul semnal pe zgomot la ieșire poate fi calculat cu formula :

$$RSZ_e = \left| \frac{P_{x_u}}{P_y - P_{x_u}} \right| = \frac{P_{x_u}}{|\beta N s^2 + 2\alpha s + \sigma_x^2|}$$

Valoarea maximă a acestui raport se obține atunci când numitorul său este minim. Această situație apare atunci când pragul ia valoarea optimă  $s_0$  dată de relația :

$$s_0 = -\frac{\alpha}{\beta N}$$

Dacă sunt satisfăcute ipotezele făcute, atunci există o valoare optimă a pragului pentru maximizarea raportului semnal pe zgomot la ieșire, în cazul filtrului de tip “soft-thresholding”.

Din nefericire această valoare optimă este dificil de calculat înaintea efectuării filtrării deoarece constantele  $\alpha$ ,  $\beta$ , și  $N$  au valori care depind de forma de undă a semnalului util de la intrare precum și de tipul de zgomot de la intrare.

De aceea a fost conceput un algoritm adaptiv pentru alegerea pragului care maximizează raportul semnal pe zgomot de la ieșirea filtrului de tip “soft-thresholding”.

Acest algoritm reprezintă subiectul articolului [Isa.'97].

Etapele sale sunt următoarele:

1. Se calculează transformata undișoară discretă a semnalului achiziționat.
2. Se presupune cunoscută puterea semnalului util de la intrarea filtrului de tip “soft thresholding”. Această ipoteză este în acord cu formularea problemei îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot în telecomunicații (se cunoaște puterea emițătorului dar nu se cunoaște puterea zgomotului care se suprapune peste semnalul util în canalul de telecomunicații).
3. Se calculează raportul semnal pe zgomot la intrare.
4. Se efectuează filtrarea cu filtrul de tip “soft-thresholding” utilizând o valoare mică pentru prag.
5. Se calculează raportul semnal pe zgomot la ieșire. Se determină îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot realizată. Se memorează semnalul de ieșire obținut precum și valoarea îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot.
6. Se repetă etapa anterioară folosind aceeași valoare (mică) pentru prag. La intrarea filtrului este conectat de această dată semnalul obținut la ieșire în iterația anterioară. Se memorează noul semnal de ieșire precum și noua valoare obținută pentru îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot. Aceasta se calculează pe baza valorii raportului semnal pe zgomot de la intrare calculată în etapa 2.
7. Se repetă etapa anterioară atât timp cât valoarea raportului semnal pe zgomot crește de la iterație la iterație. Algoritmul se încheie de îndată ce valoarea

raportului semnal pe zgomot obținută în etapa curentă este mai mică decât valoarea aceluiași parametru obținută în etapa anterioară. Semnalul de ieșire va fi cel memorat la sfârșitul etapei anterioare. Valoarea raportului semnal pe zgomot va fi de asemenea cea înregistrată la sfârșitul etapei anterioare.

8. Se calculează transformata undișoară inversă a semnalului obținut la sfârșitul etapei anterioare. În acest mod se obține semnalul rezultat al prelucrării dedicate îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot.

Metoda propusă poate fi încă optimizată, prin selectarea acelei transformări undișoară discretă care se potrivește cel mai bine cu semnalul util de prelucrat. Unele considerente pe care se poate baza o astfel de optimizare sunt prezentate în [Isa.'97] și în [Bor.,Isa.'97]. Alte lucrări pe această temă care merită să fie amintite sunt: [Ant.,Gre.,Nas.'95], [Buc.,Don.'95], [Buc.,Don.'96], [Chi.,Kol.,Cul.'96], [Coh.,d'Al.'95], [Coh.,Kov.'96], [Coi.,Sai.'96], [Gao.'97], [Gao.'97(1)], [Gao.'97(2)], [Hil., Ogd.'97], [Kol.'96], [Lan.,Guo.,Ode.,Bur.,Wel.'95], [Nas.'94] și [Pes., Ade., Pes., Hel.'96]. Alte filtre neliniare interesante pentru prelucrarea în domeniul TUD sunt prezentate în [Pit.,Ven.'86(1)] și în [Pit.,Ven.'86(2)].

## CAPITOLUL 5. REZULTATE EXPERIMENTALE

Acest capitol este dedicat simulărilor metodei adaptive de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot propusă la sfârșitul capitolului anterior. Aceste simulări au fost realizate cu ajutorul unor programe scrise în C dedicate acestui scop.

### **5.1. Programe de simulare conținând metoda adaptivă pentru îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot**

Funcțiile acestor programe sunt:

1. Generarea unor semnale deterministe, care sunt semnalele utile de la intrarea sistemului de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot.
2. Generarea unor semnale aleatoare, adică a zgomotelor care perturbă aditiv semnalele utile la intrarea în sistem.
3. Însurarea celor două tipuri de semnale generate anterior.
4. Aplicarea algoritmului adaptiv descris la sfârșitul capitolului anterior. Se afișează raportul semnal pe zgomot la intrare, raportul semnal pe zgomot la ieșire obținut după ultima iterație și îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot obținută. Pentru funcționarea corectă a acestui program este necesară specificarea undișoarei mamă pe baza căreia se dorește calculul transformărilor undișoară discretă directă și inversă. Există și posibilitatea evidențierii distorsiunilor pe care le-a suferit semnalul util în procesul de prelucrare.
5. Identificarea deviațiilor diferiților parametri ai semnalului util apărute în procesul de prelucrare.

În continuare se va prezenta fiecare dintre aceste funcții.

1. Semnalele utile care pot fi generate cu programele care constituie subiectul acestui capitol sunt prezentate în figurile 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 și 5.5.

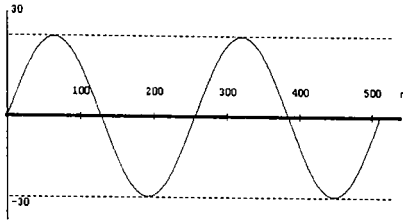


Figura 5.1. Semnal sinusoidal.

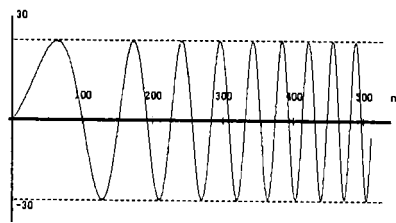


Figura 5.2. Semnal modulată în frecvență.

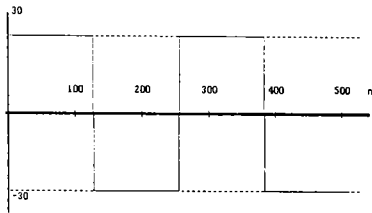


Figura 5.3. Tren de impulsuri dreptunghiulare.

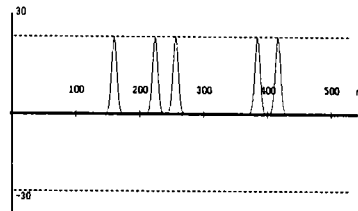


Figura 5.4. Tren de impulsuri gaussiene.

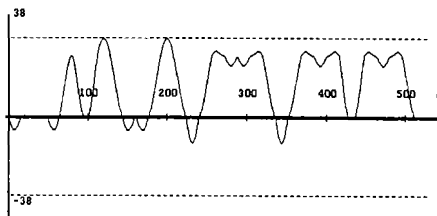


Figura 5.5. Tren de impulsuri de tip sinus cardinal.

Parametrii tuturor acestor semnale pot fi modificați prin program conform tabelului 1.

| Tipul semnalului     | Parametrii care pot fi modificați  |
|----------------------|--|
| sinusoidal           | amplitudine, frecvență   |
| modulat în frecvență | amplitudine, frecvență purtătoare, frecvență modulatorie. Modulația de frecvență este liniară. |
| Dreptunghiular       | amplitudine, frecvență, factor de umplere, polaritate  |
| gaussian             | poziție, amplitudine, formă  |
| sinus cardinal       | poziție, amplitudine, formă  |

Tabelul 1. Parametrii semnalelor utile care pot fi modificați folosind programul de generare propus.

Fiecare dintre aceste semnale este caracteristic pentru o anumită aplicație din domeniul telecomunicațiilor. De exemplu semnalul sinusoidal poate fi asociat cu modulația de fază, semnalul modulat în frecvență apare frecvent în radiolocație, semnalul de tip tren de impulsuri dreptunghiulare apare în comunicațiile de date în banda de bază, semnalul de tip tren de impulsuri gaussiene apare în comunicațiile de date fără interferență intersimbol iar semnalul de tip tren de impulsuri de tip sinus cardinal apare în comunicațiile de date cu interferență intersimbol. Se poate afirma de asemenea că fiecare din semnalele din tabelul 1 descrie câte o clasă de semnale destul de largă. Aceste clase se diferențiază între ele prin regularitatea elementelor lor, prin numărul lor de parametrii, etc.

2. Câte o realizare a semnalelor aleatoare care pot fi generate cu ajutorul acestui program este prezentată în figurile 5.6, 5.7, 5.8 și 5.9.

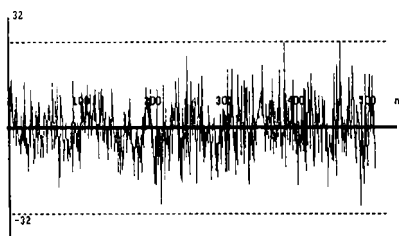


Figura 5.6. Semnal aleator de tip zgomot alb gaussian.

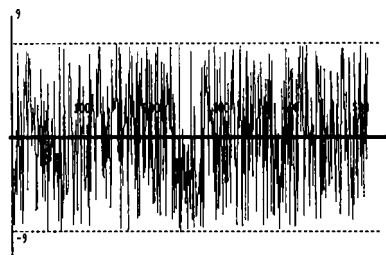


Figura 5.7. Semnal aleator de tip zgomot uniform.

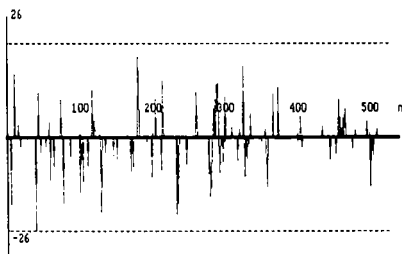


Figura 5.8. Semnal aleator de tip impuls.

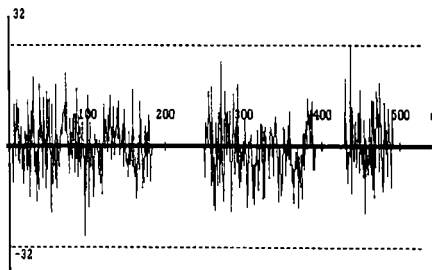


Figura 5.9. Semnal aleator de tip salve de impulsuri.

Parametrii tuturor acestor semnale pot fi modificați prin program conform tabelului 2.

| Tipul semnalului   | Parametrii care pot fi modificați                 |
|--------------------|---|
| Zgomot alb         | Dispersia. Valoarea medie este nulă.              |
| Zgomot uniform     | Dispersia   |
| Tren de impulsuri  | Dispersia. Numărul de impulsuri.                  |
| Salve de impulsuri | Dispersia. Numărul de salve. Lungimea unei salve. |

Tabelul 2. Parametrii semnalelor aleatoare perturbatoare care pot fi modificați folosind programul de generare propus.

Aceste semnale aleatoare modelează majoritatea tipurilor de zgomot care pot apărea într-un canal de telecomunicații. Modelul de tip zgomot alb este cel mai des utilizat. Prezența zgomotului alb este inerentă funcționării oricărui dispozitiv electronic. Zgomotele de tip tren de impulsuri respectiv salve de impulsuri apar de asemenea frecvent în practică [Tsi.,Nik.'97]. Este vorba mai ales de situațiile în care semnalul util este perturbat încă de la sursă (de exemplu o convorbire telefonică este perturbată de zgomotul de fond datorat trecerii unui camion prin vecinătatea cabinei telefonice).

3. În figurile 5.10, 5.11, 5.12 și 5.13 sunt prezentate exemple de perturbare aditivă a semnalelor utile din figurile 5.1, 5.2, 5.3 și 5.4 cu semnalele perturbatoare din figurile 5.6, 5.7, 5.8 și 5.9.

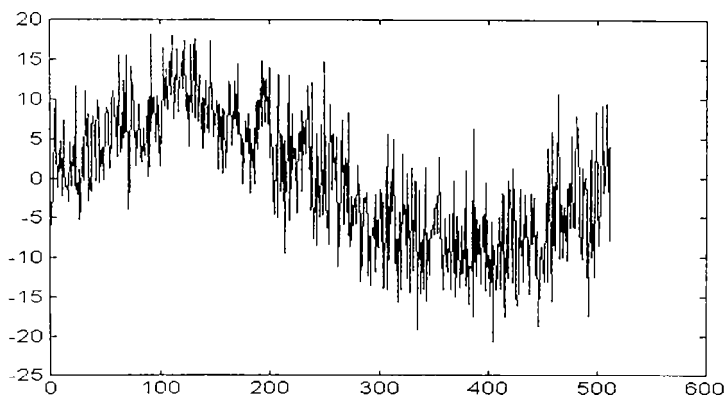


Figura 5.10. Semnal sinusoidal perturbat aditiv de zgomot alb.

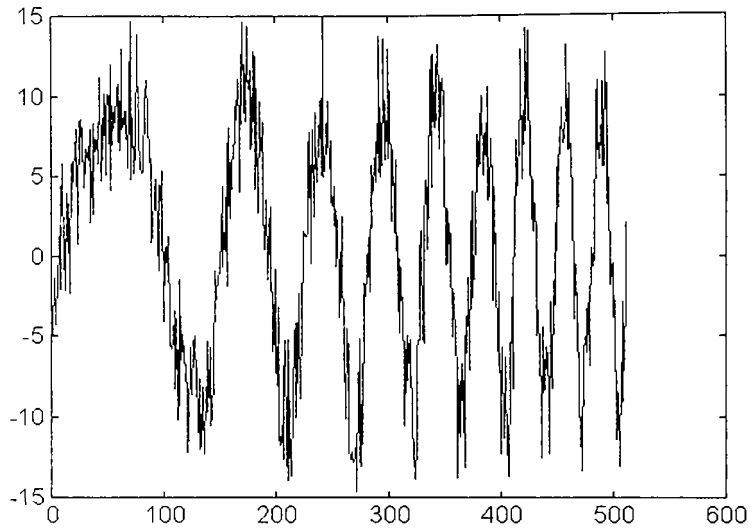


Figura 5.11. Semnal modulată în frecvență perturbată aditiv cu zgomot uniform.

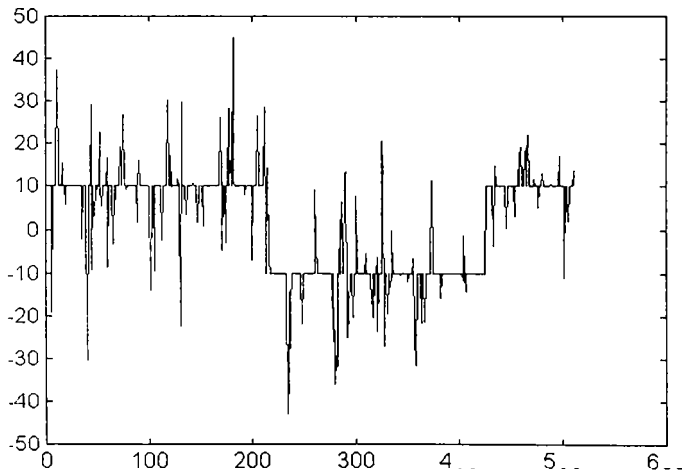


Figura 5.12. Tren de impulsuri dreptunghiulare perturbată aditiv cu zgomot de tip tren de impulsuri.



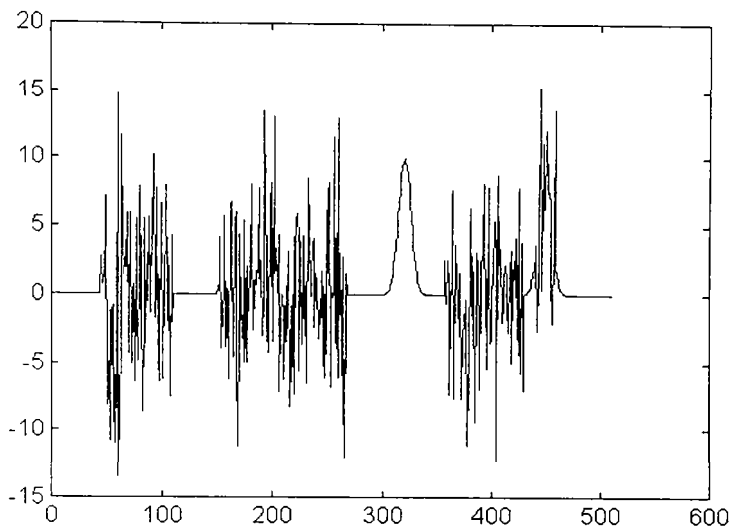


Figura 5.13. Tren de impulsuri gaussiene perturbat aditiv de zgomot în salve de impulsuri.

4. În figurile 5.14, 5.15, 5.16 și 5.17 se prezintă rezultatele aplicării metodei adaptive de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot, propusă în această lucrare, pentru semnalele din figurile 5.10, 5.11, 5.12 și 5.13.

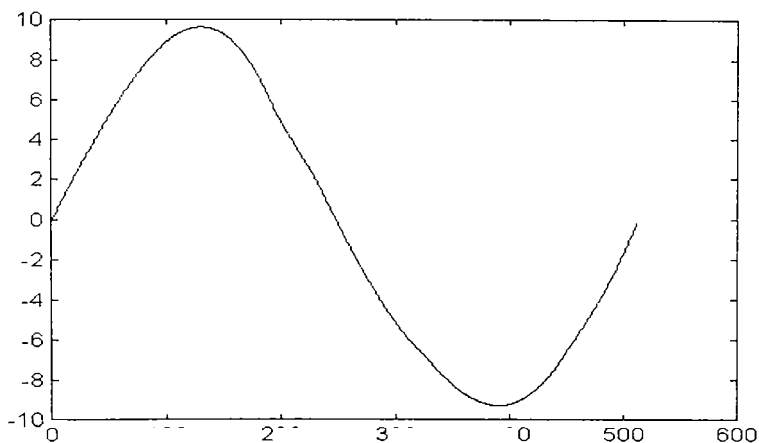


Figura 5.14. Rezultatul aplicării metodei asupra semnalului din figura 5.10.

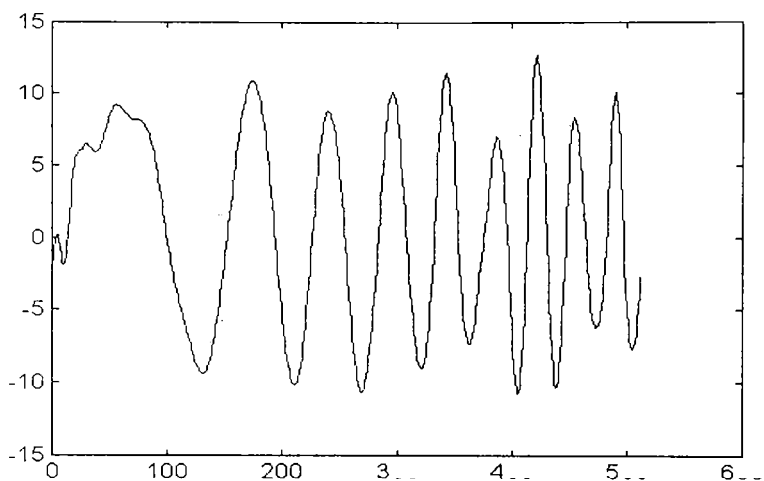


Figura 5.15. Rezultatul aplicării metodei adaptive de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot semnalului din figura 5.11.

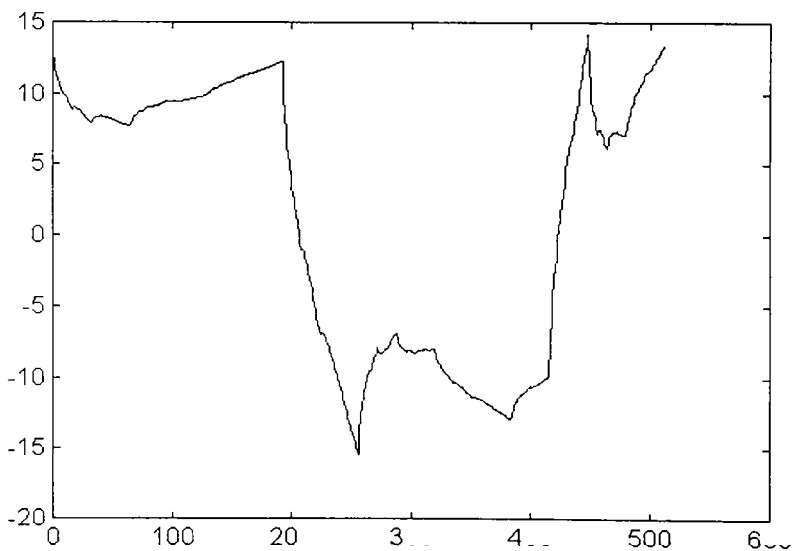


Figura 5.16. Semnalul obținut în urma aplicării metodei adaptive de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot semnalului din figura 5.12.

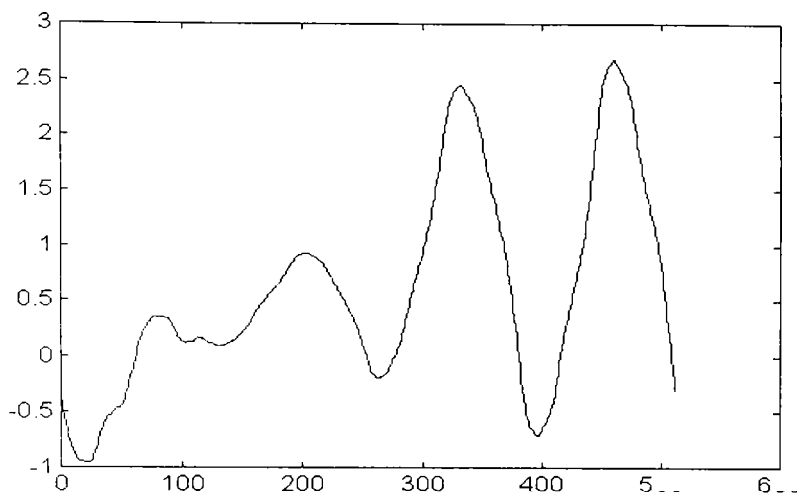


Figura 5.17. Semnalul obținut în urma aplicării metodei adaptive de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot semnalului din figura 5.13.

Analizând ultimele patru figuri se constată că deși semnalele de prelucrat (prezentate în figurile 5.10, 5.11, 5.12, 5.13) aveau rapoarte semnal pe zgomot destul de mici (în special semnalele din figurile 5.12 și 5.13) totuși zgomotul a fost complet eliminat. De aceea metoda de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot bazată pe transformarea undișoară discretă directă, filtrare cu filtru de tipul “soft-thresholding” și transformare undișoară discretă inversă este întâlnită în literatura sub denumirea “de-noising”.

Pe baza figurii 5.14 se poate afirma că semnalul sinusoidal a fost recuperat din zgomot aproape perfect.

Analizând figura 5.15 se constată că și semnalul modulat în frecvență a fost bine curățat de zgomot dar că metoda folosită a introdus o distorsiune de tipul modulație parazită de amplitudine. Totuși trebuie remarcat că poziția trecerilor prin zero ale semnalului util nu a fost afectată aproape de loc de prelucrarea efectuată.

Pe baza figurii 5.16 se poate afirma că metoda de “de-noising” utilizată nu afectează prea mult fronturile semnalului dreptunghiular. Această comportare este remarcabilă pentru o metodă de creștere a raportului semnal pe zgomot care dă rezultate bune și în cazul semnalelor netede (cum este de exemplu semnalul sinusoidal prezentat anterior). Se poate remarca și în acest caz distorsiunea de amplitudine de tipul modulație de amplitudine parazită care afectează palierele semnalului dreptunghiular. Această modulație parazită de amplitudine poate fi mult diminuată dacă se folosește o transformare undișoară discretă directă invariantă la translații [Coi.,Don.'95].

Analizând figura 5.17 se constată că metoda propusă funcționează și în cazul unor semnale perturbate intens de zgomot. Deși (așa cum se vede în figura 5.13) cel de-al doilea impuls gaussian este practic complet acoperit de zgomot totuși acesta este corect recuperat. De asemenea trebuie remarcată distorsiunea a nivelului de zero care se manifestă în partea din stânga a figurii 5.17.

Pentru o apreciere obiectivă a distorsiunilor de amplitudine introduse de metoda adaptivă de “de-noising” care constituie subiectul central al acestei lucrări se prezintă în continuare în figurile 5.18, 5.19 și 5.20 erorile de reconstrucție (diferențele de amplitudine dintre semnalele utile din structura semnalelor de la intrare și semnalele obținute la ieșire) corespunzătoare simulărilor cu rezultatele din figurile 5.14, 5.15 și 5.16. Se constată valabilitatea concluziilor prezentate mai sus.

Pentru semnalul de intrare din figura 5.10, având semnalul reconstituit din figura 5.14, se constată că valoarea maximă a distorsiunii apare la trecerea prin zero a semnalului sinusoidal și că ea reprezintă 15% din amplitudinea semnalului util de la intrare (figura 5.18).

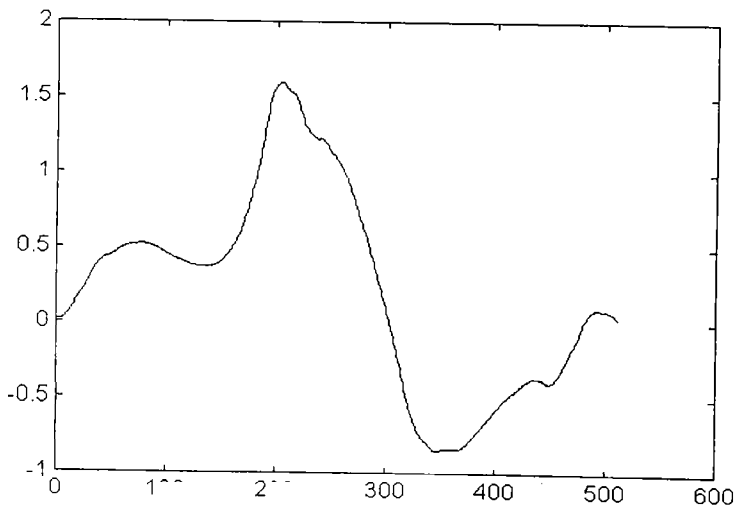


Figura 5.18. Distorsiunea de amplitudine a semnalului sinusoidal în urma extragerii sale din zgomot alb.

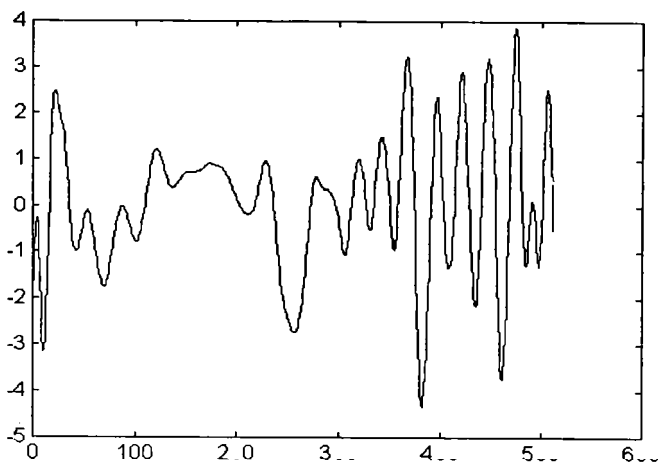


Figura 5.19. Distorsiunea de amplitudine a semnalului modulat în frecvență în urma extragerii sale din zgomot uniform.

Pentru eroarea de amplitudine prezentată în figura 5.19, deși valoarea maximă a distorsiunii reprezintă 40% din amplitudinea semnalului util de la intrare totuși și în acest caz îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot este acceptabilă.

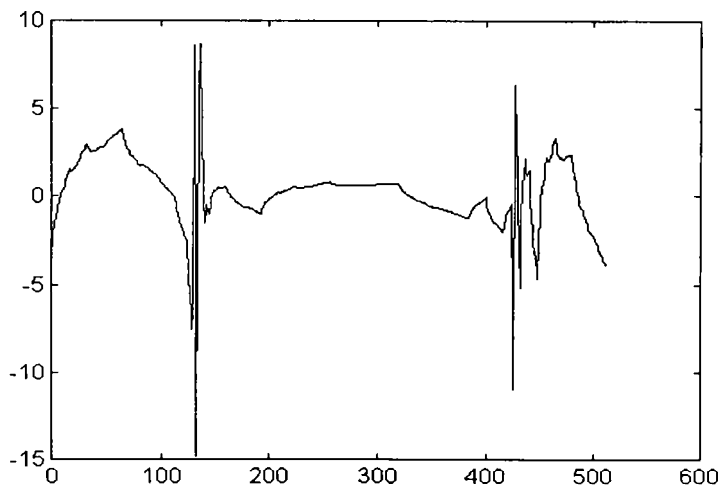


Figura 5.20. Distorsiunea de amplitudine a semnalului dreptunghiular în urma extragerii sale din zgomot în impulsuri.

Pe baza graficului din figura 5.20 se constată prezența distorsiunii de tipul modulație parazită de amplitudine pe palierele semnalului dreptunghiular. De asemenea se remarcă buna localizare a fronturilor semnalului prelucrat în structura semnalului rezultat.

5. Au fost concepute câteva programe pentru a se putea aprecia măsura în care diferiți parametri ai semnalelor utile de la intrare au fost afectați de metoda de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot propusă.

Chiar dacă la semnalele reconstituite sunt prezente erori (inerente la orice reconstrucție), în unele aplicații nu este necesară cunoașterea cu precizie a nivelului semnalului. Consider că metoda este eficace pentru :

- interpretarea corectă a nivelelor logice pentru semnalele întâlnite în transmisii de date,
- determinarea trecerilor prin zero ale semnalului util de tip sinusoidal sau modulat în frecvență.

A. Astfel s-a avut în vedere faptul că la o transmisie numerică va conta interpretarea corectă a biților de informație utilă. Simulând un transfer de date numerice, avem de fapt o succesiune de nivele de tensiune corespunzătoare nivelelor logice. O alternanță de 0 logic și 1 logic este prezentată în figura 5.21. Perturbațiile care pot apare pe un canal de comunicație sunt de obicei de tip aditiv, semnalul nedorit putând fi de tip zgomot alb (figura 5.6), semnal aleator cu distribuție uniformă (figura 5.7), semnal aleator de tip impuls (figura 5.8) sau chiar semnal aleator de tip salve de impulsuri (figura 5.9) [Tsi.,Nik.'98]

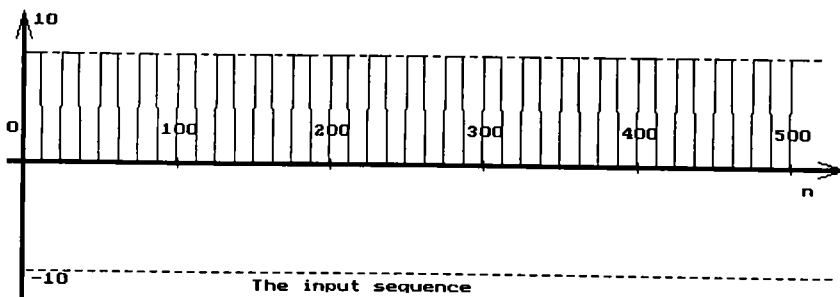
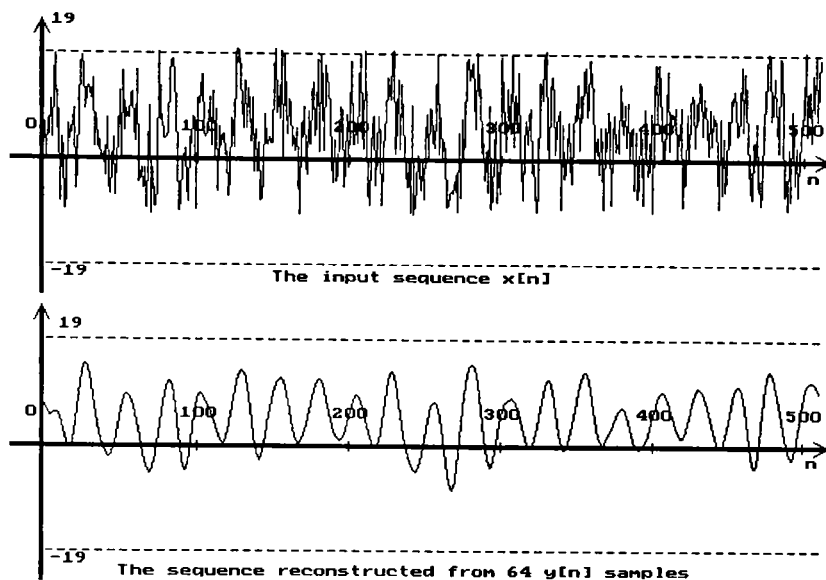


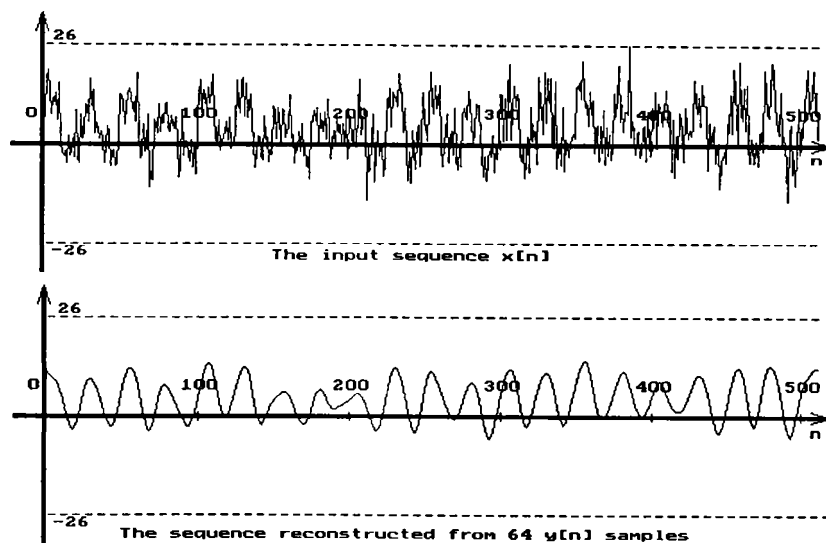
Figura 5.21. Semnalul util folosit în simulare.

Aceste perturbații, dacă nu sunt înlăturate sau cel puțin diminuate, pot da naștere la interpretări eronate ale nivelelor logice care poartă informația utilă. Metoda propusă este eficientă pentru diminuarea considerabilă a perturbațiilor de orice tip. Exemple cu realizări ale semnalelor aleatoare perturbatoare suprapuse aditiv peste semnalul util precum și semnalele rezultate

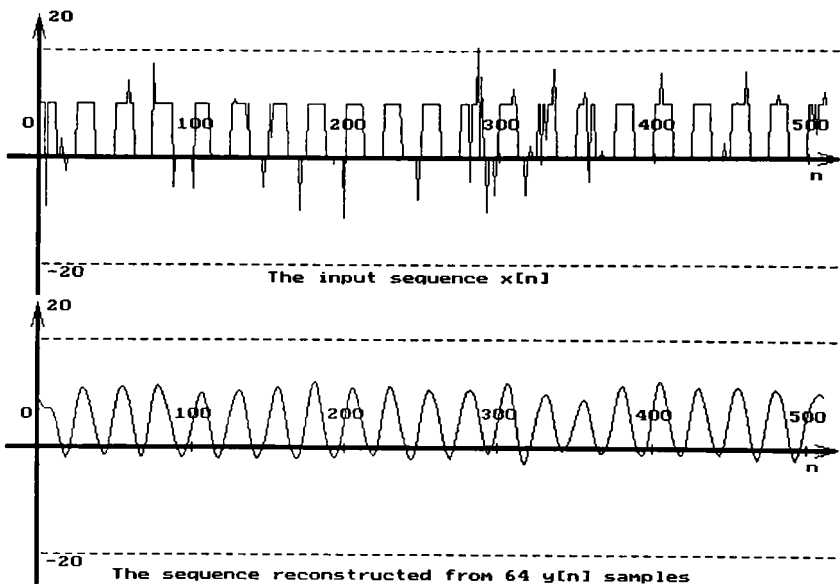
în urma prelucrării sunt prezentate în figura 5.22, semnalul util rămânând cel din figura 5.21.



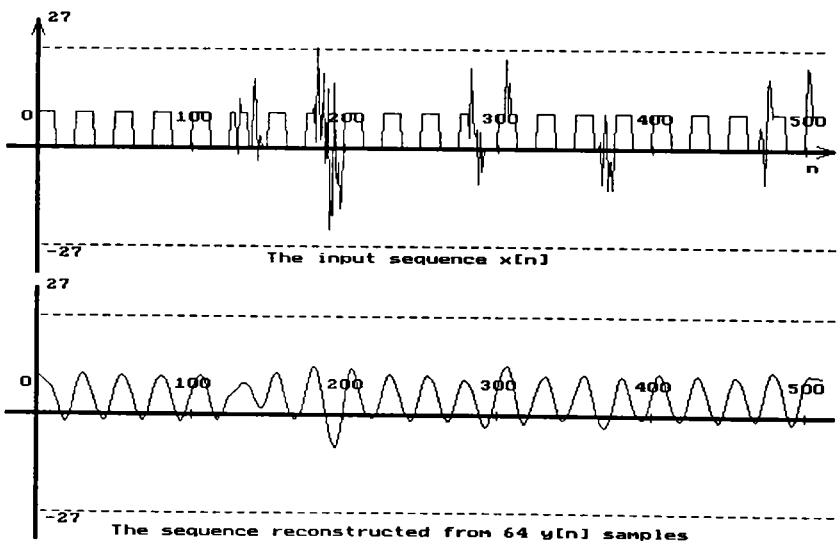
a). Semnal util cu zgomot cu distribuție normală cu un  $RSZ_i = 2$  și semnalul reconstituit.



b). Semnal util cu zgomot alb (distribuție gaussiană) cu un  $RSZ_i = 2$  și semnalul reconstituit.



c). Semnal util cu zgomot în impuls și semnalul reconstituit.



d). Semnal util cu zgomot în salve de impulsuri și semnalul reconstituit.

Figura 5.22. a). - d). Diferite perturbații cu semnale aleatoare ale semnalului util prezentat în figura 5.21 precum și semnalele rezultate în urma prelucrării.



Pentru o transmisie de date interpretarea nivelelor de tensiune, la recepție, se face eșantionând linia de date. În practică semnalul recepționat se eșantionează în funcție de poziția bitului de start, fiind permisă o abatere de  $\pm 20\%$  față de această poziție.

În continuare se analizează efectul utilizării metodei de “de-noising” la transmisia de date. Se presupune că sistemul de “de-noising” este conectat la intrarea blocului de decizie din structura receptorului.

Am realizat un program scris în limbaj C care determină punctele de eșantionare astfel :

- se determină mijlocul primei semiperioade a semnalului util,
- se determină perioada semnalului util,
- pornind de la punctul corespunzător mijlocului semiperioadei semnalului util, cu o frecvență rezultată din valoarea perioadei semnalului util, se determina punctele de eșantionare,
- în punctele astfel determinate se verifică valoarea semnalului reconstituit,
- se compară aceste valori ale semnalului reconstituit cu valorile pe care le are semnalul util în punctele respective,
- se stabilește un prag de decizie, pentru 0 logic și unul pentru 1 logic,
- dacă valoarea semnalului reconstituit, într-un punct de eșantionare, este incorectă, se înregistrează într-un fișier de tip text atât valoarea eronată cât și cumularea erorilor rezultate pentru 1.000.000 de verificări. S-au generat 25.000 de realizări independente suprapuse aditiv peste același semnal util prezentat în figura 5.21, pe fiecare realizare făcându-se 40 de determinări.

Observând realizările prezentate în figura 5.22, a), b), c) și d) se poate observa că metoda propusă înlătură perturbațiile, rezultatul fiind un semnal determinist. Acesta este o reconstrucție a semnalului util, la care însă fronturile au fost afectate. Pentru interpretarea nivelelor logice nu sunt însă probleme. Considerând ca scop interpretarea corectă a lui 0 logic și 1 logic, se observă că erorile cele mai frecvente care pot apare datorită modulației parazite în amplitudine sunt în cazul perturbațiilor de tip zgomot alb (figura 5.22 b)). Din acest motiv verificările care s-au făcut au fost pentru acest tip de perturbație.

Parametrul care a fost luat în considerare a fost RSZ. Astfel s-au obținut rezultate experimentale care pun în evidență erorile pentru 1.000.000 de verificări, generând semnale de intrare cu  $RSZ = 2$ ,  $RSZ=3$  și  $RSZ= 4$ . Erorile care au rezultat sunt înregistrate în fișiere, concluziile fiind următoarele :

- la  $RSZ_i = 2$  avem 379 erori/1.000.000 verificări, adică o valoare a ratei erorilor sub  $4 \cdot 10^{-3}$ ;
- la  $RSZ_i = 3$  avem 43 erori/1.000.000 verificări, adică o valoare a ratei erorilor sub  $5 \cdot 10^{-4}$ ;
- la  $RSZ_i = 4$  avem 3 erori/1.000.000 verificări, adică o valoare a ratei erorilor de  $3 \cdot 10^{-5}$ .

La aplicarea metodei pentru un  $RSZ_i = 5$ , după 1.000.000 verificări, nu s-a înregistrat nici o eroare.

Comparația cu erorile determinate în [Lin.,Sim.'73], pentru diverse metode clasice de transmitere a datelor, este prezentată în tabelul 3:

| RSZ    | Eroare maximă, prezentată în literatură | Eroarea metodei propuse |
|--------|---|-------------------------|
| RSZ =2 | $2,2 \cdot 10^{-2}$                     | $4 \cdot 10^{-3}$       |
| RSZ =3 | $7 \cdot 10^{-3}$                       | $5 \cdot 10^{-4}$       |
| RSZ =4 | $1,8 \cdot 10^{-3}$                     | $3 \cdot 10^{-5}$       |

Tabelul 3. Comparație între erorile obținute prin aplicarea metodei propuse cu cele prezentate în literatură.

În cazul în care nu s-ar prelucra semnalul perturbat, pentru un  $RSZ = 2$ , rezultă o medie a ratei erorilor având valoarea de  $25 \cdot 10^{-1}$ .

B. În cazul semnalelor modulate în frecvență am considerat drept semnal util un cirp prezentat în figura 5.23. Am luat în considerare cele 4 tipuri de zgomote enumerate în tabelul 2, iar figura 5.24 prezintă semnalul util afectat de perturbații, în fiecare caz apărând și forma semnalului reconstituit rezultat din aplicarea metodei propuse.

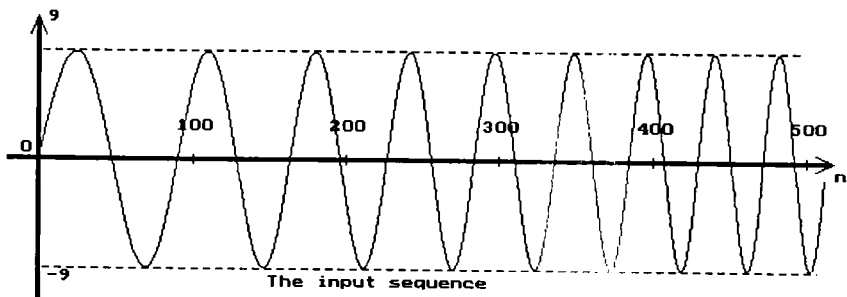
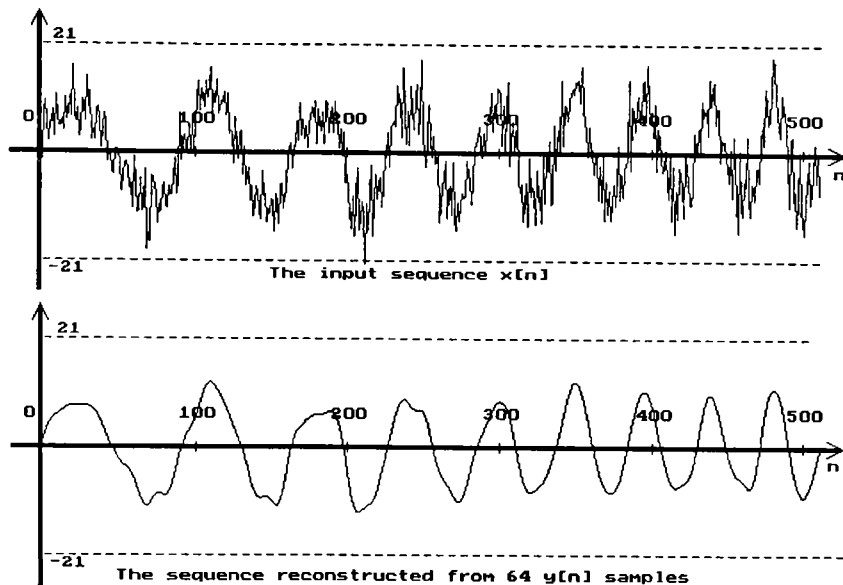
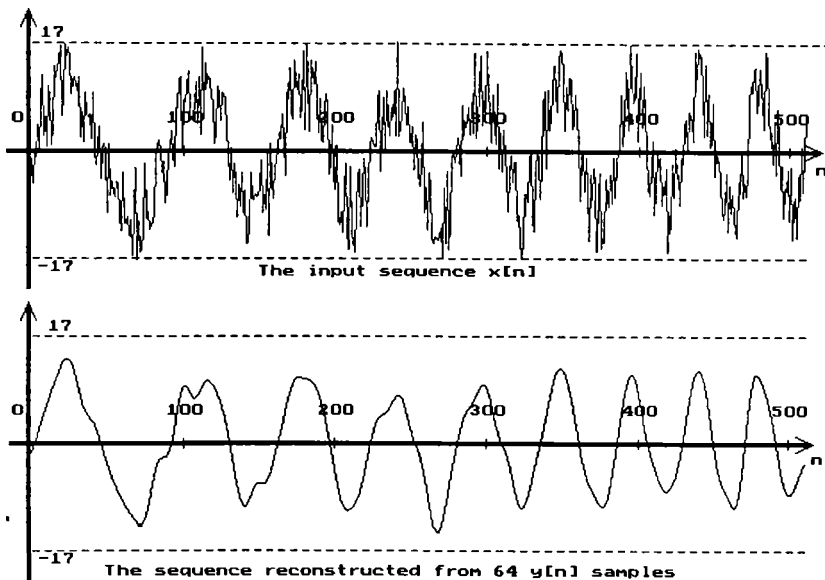


Figura 5.23. Semnal modulat în frecvență utilizat drept semnal util.

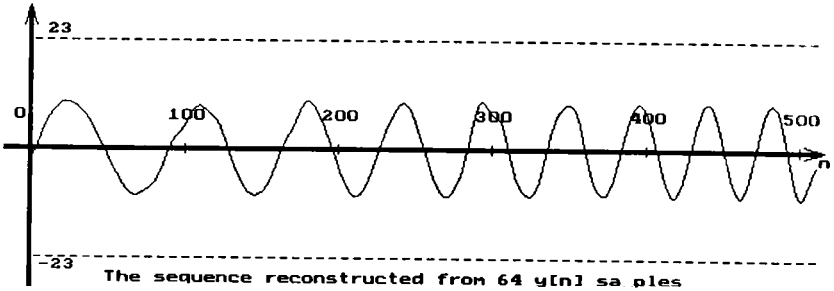
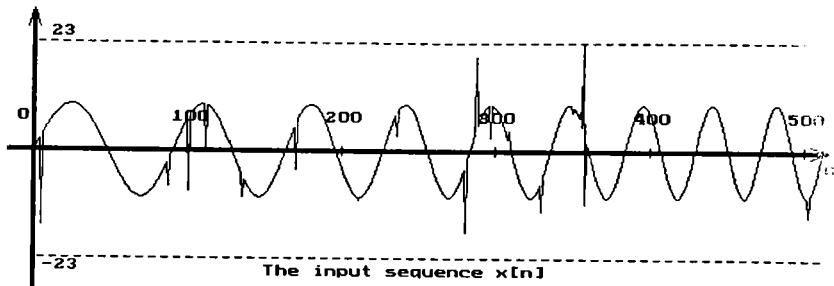
În continuare se prezintă modul în care poate fi estimată frecvența instantanee a semnalului util pe baza valorilor de antioanelor semnalului perturbat aditiv de zgomot. Frecvența instantanee se estimează cu ajutorul metodei trecerilor prin zero [Boa.,Rei.'92]. După cum se observă din figura 5.24 trecerile prin zero ale semnalului util sunt puternic afectate de zgomotul perturbator. De aceea estimarea frecvenței instantanee a semnalului modulat în frecvență, pe baza metodei amintite, pentru semnalele prezentate în figura 5.24, conduce la erori inacceptabil de mari.



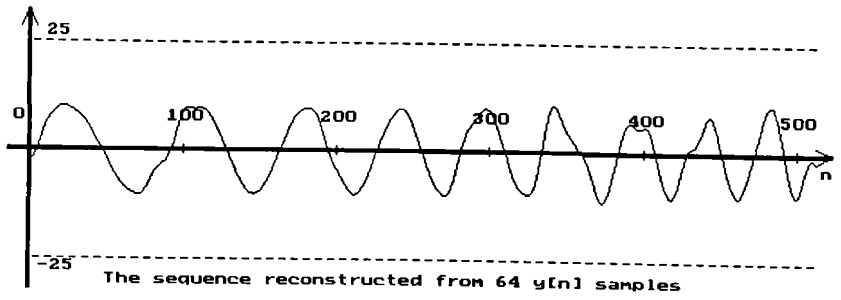
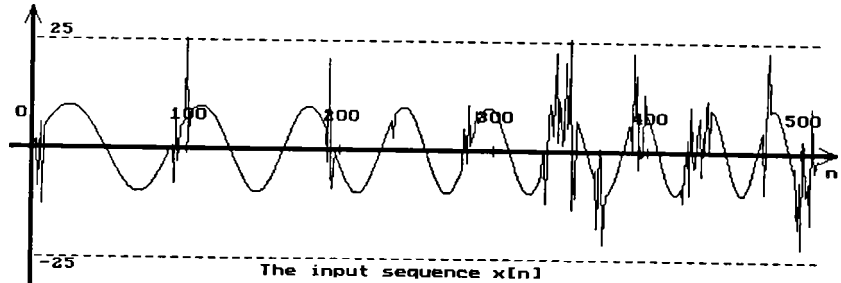
a). Semnal cirp cu zgomot gaussian având  $RSZ_i=2,7$ .



b). Semnal cirp cu zgomot uniform, având  $RSZ_i=2,37$ .



c). Semnal cîrp cu suprapuneri de tip impuls.



d). Cîrp cu salve de impulsuri.

Figura 5.24. a) - d) . Diferite perturbații cu semnale aleatoare ale semnalului util prezentat în figura 5.23 precum și semnalele rezultate în urma prelucrării.

După prelucrarea semnalelor afectate de zgomot cu metoda de “de-noising” propusă în această lucrare, am determinat erorile care apar la determinarea perioadei instantanee a fiecărui semnal în parte. Un program dedicat acestui scop determină :

- perioada instantanee (figura 5.25) a semnalului util, neafectat de perturbații, din figura 5.23;
- calculează perioada instantanee a semnalului prelucrat cu metoda propusă, pentru fiecare realizare, numărul total de realizări fiind de 16; perioada instantanee pentru o realizare este prezentată în figura 5.26;
- calculează variația în timp a erorii relative de estimare a perioadei instantanee pentru fiecare caz din cele 16 realizări; un exemplu pentru o realizare este prezentat în figura 5.27;
- calculează variația în timp a mediei aritmetice a erorilor relative de estimare a perioadei instantanee (figura 5.28).

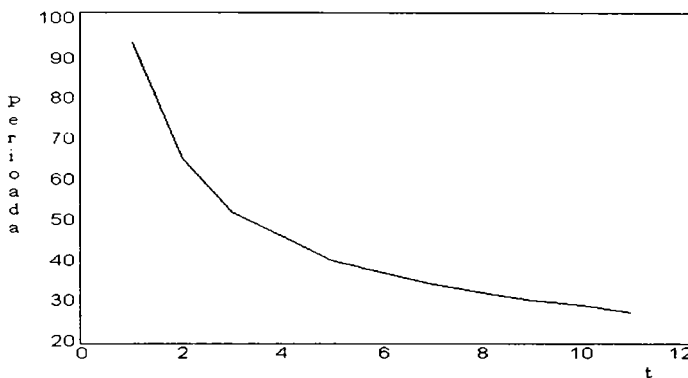
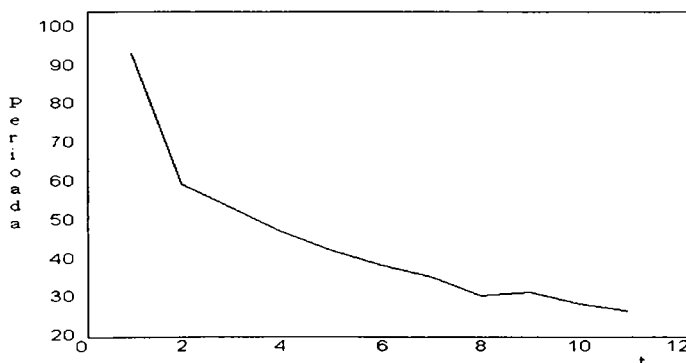


Figura 5.25. Variația temporală a perioadei instantanee a semnalului de test prezentat în figura 5.23.



5.26. Una dintre estimatele variației în timp a perioadei corespunzătoare semnalului reconstituit cu ajutorul metodei de “de-noising” propusă.

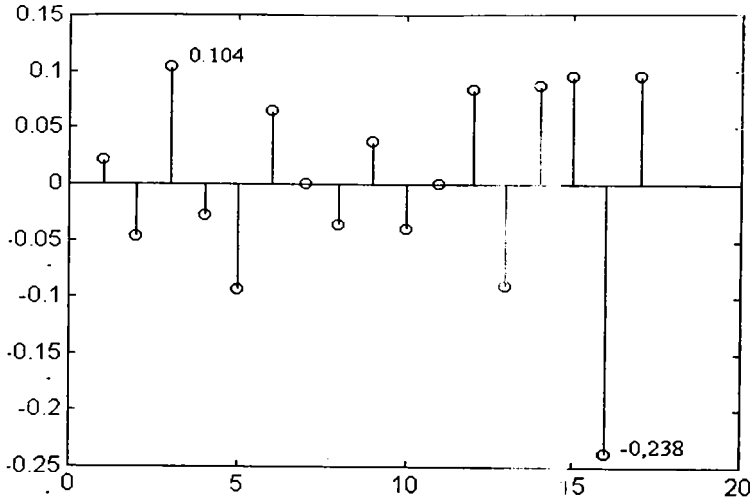


Figura 5.27. Variația în timp a erorii intermediare de estimare pentru semnalul reconstituit cu ajutorul metodei de “de-noising” propusă.

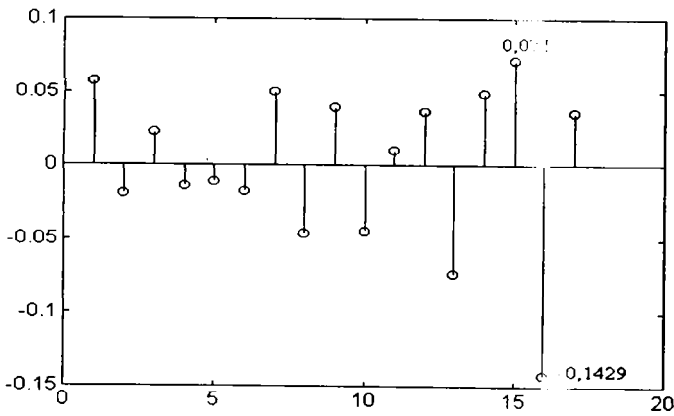


Figura 5.28. Variația în timp a erorii medii de estimare a perioadei instantanee bazată pe metoda de “de-noising” propusă. Media a fost efectuată pe 16 realizări ale semnalului reconstituit.

Această eroare medie s-a calculat ca și medie aritmetică a erorilor intermediare de determinare a perioadei instantanee a 16 realizări ale semnalului reconstituit. Eroarea maximă rezultată este de 14 %. Această valoare este inferioară valorii erorii de estimare a perioadei instantanee obținută în cazul aceluiași semnal util perturbat la fel, raportată în [Isa. 1991]. Calitățile acestei metode de estimare a perioadei instantanee se recomandă în aplicații de genul celor de prelucrare a semnalului de tip Radar.

## 5.2. O comparație a programului prezentat cu alte programe de “de-noising”

Wave Lab este o bibliotecă de subrutine MATLAB pentru analiza cu funcții undișoară, pachete de funcții undișoară și cu algoritmul "matching pursuit". Manualul de utilizare "About Wave Lab" poate fi transferat prin ftp de la adresa: <ftp://playfair.stanford.edu/pub/wavelab>.

Această bibliotecă este utilizată în activitatea didactică la universitățile Berkeley și Stanford. Instalarea bibliotecii și modul de pornire al colecției de subrutine sunt descrise în manualul de utilizare citat mai devreme. Un alt document care însoțește programul WaveLab este [Buc.,Che.,Dar.,Joh.,Sca.'95]. În acest material sunt prezentate structurile de date în care sunt organizate semnalele de analizat și rezultatele obținute în cadrul produsului soft WaveLab. Poate că cel mai util document pentru caracterizarea programului WaveLab este [Buc.,Don.'95]. În acest raport este prezentată o listă cu principalele funcții ale bibliotecii WaveLab. În continuare se vor prezenta câteva dintre aceste funcții, mai interesante pentru lucrarea de față.

### 1. Transformarea undișoară continuă

- CWT → calculează reprezentarea de tipul transformare undișoară continuă,  
Image CWT → afișează imaginea rezultatului obținut în subrutina anterioară,  
WTMM → identifică mărimile reprezentării anterioare,  
Image WTMM → Afișează imaginea care conține rezultatul anterior,  
Build Skel Map → Reprezintă rezultatul aplicării operatorului morfologic "schelet" imaginii Image CWT.

### 2. Structuri de date

#### A. Citirea datelor

- Browse Image - caută fișierul Image Datasets,  
Image Fig - fișierul de imagini obținut aplicând Browse Image,  
Read Image - încarcă un fișier din directorul Image Datasets,  
Read Signal - încarcă un fișier din directorul Signal Datasets

#### B. Generarea datelor

- Make Brownian - generează un semnal care descrie mișcarea Browniană a unei particule,  
Make Fractal - generează semnale fractale,  
Make Signal - generează un semnal,  
Make 2d Signal - generează o imagine,  
Makediag - generează o imagine descrisă printr-o matrice diagonală,  
Există liste de semnale și imagini, deja sintetizate care pot fi direct apelate.

3. Îmbunătățirea raportului semnal/zgomot (RSZ) dacă semnalul perturbator este zgomot alb :

- WaveShrink - îmbunătățirea RSZ prin detecție de prag în domeniul transformării undișoară discretă ortogonală sau biortogonală,
- WPDe Noise - îmbunătățirea RSZ prin detecție de prag în domeniul transformării undișoară discretă bazată pe pachete de funcții undișoară. Pachetul se alege prin căutarea “celei mai bune baze”,
- CPDe Noise - îmbunătățirea RSZ prin detecție de prag în domeniul transformării undișoară discretă bazată pe pachete de funcții undișoară cosinusoidale. Pachetul se alege prin căutarea “celei mai bune baze”.

În figura 5.29 este prezentat un semnal (Blocks) care poate fi generat cu ajutorul programului WaveLab.

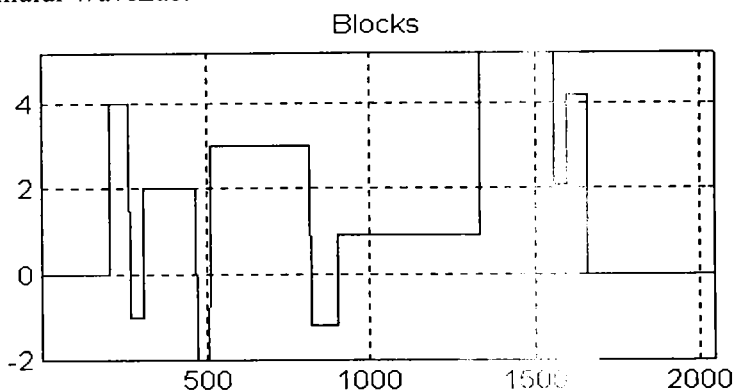


Figura 5.29. Semnalul “Blocks”.

În figura 5.30 este prezentată o variantă perturbată aditiv cu zgomot alb a aceluiași semnal.

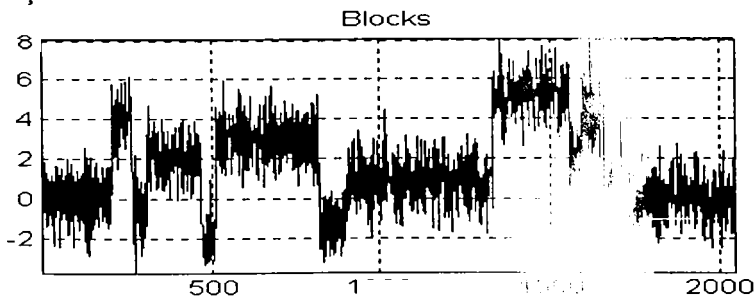


Figura 5.30. Semnalul “Blocks” perturbat aditiv cu zgomot alb.



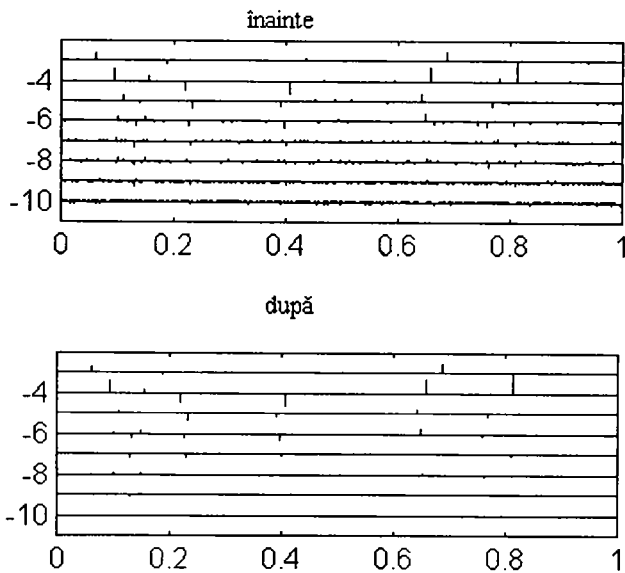


Figura 5.31. Transformatele undișoară discrete ale semnalelor de dinaintea și de după aplicarea procedurii de “de-noising”.

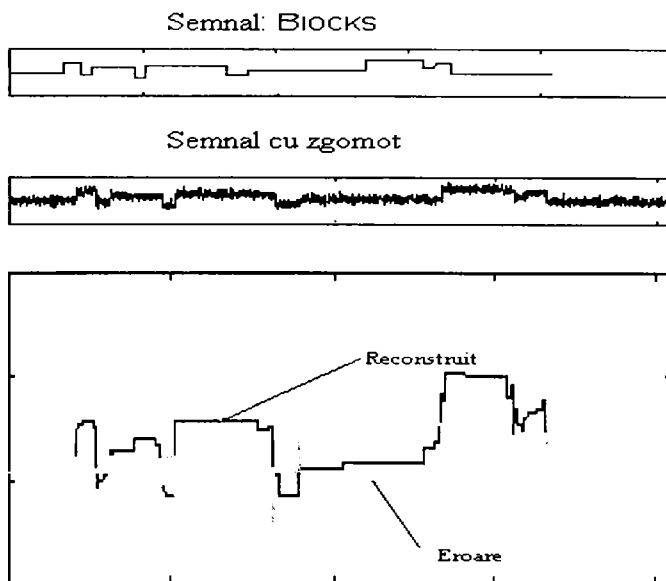


Figura 5.32. Efectul aplicării procedurii de “de-noising”.

În figura 5.31 sunt prezentate transformările undișoară discrete directe ale semnalelor inițial (din figura 5.30) și a semnalului obținut după

aplicarea procedurii de îmbunătățire a raportului semnal/zgomot ("de-noising"). S-au folosit funcțiile undișoară de tip Haar. În figura 5.32 sunt prezentate pe lângă semnalele din figurile 5.29 și 5.30 semnalul obținut în urma aplicării procedurii "de-noising" precum și eroarea de reconstrucție. În sfârșit în figura 5.33 sunt prezentate densitățile spectrale de energie ale semnalelor din figura 5.30 respectiv a semnalului reconstruit.

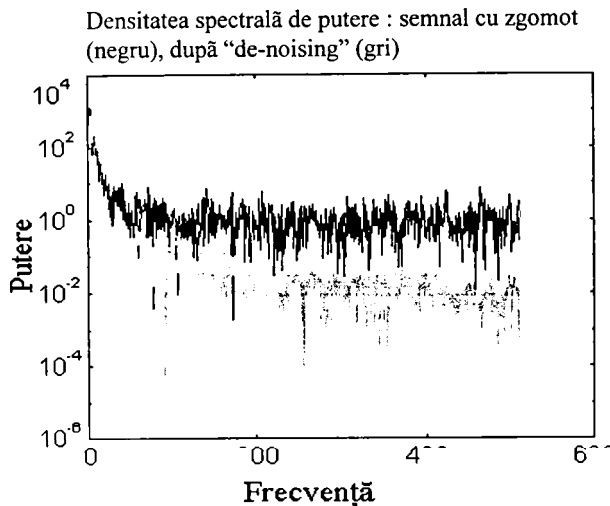


Figura 5.33. Densitățile spectrale de energie ale semnalelor de dinainte și de după aplicarea procedurii "de-noising".

#### 4. Transformări undișoară ortogonale

Transformări :

FWT\_PO

- Transformare undișoară discretă ortogonală. Problemele la margini sunt rezolvate prin periodizare,

IWT\_PO

- Transformare undișoară discretă ortogonală inversă. Problemele la margini sunt rezolvate prin periodizare,

ITWT2\_PO

- Transformare undișoară discretă ortogonală inversă pentru semnale bidimensionale.

Filtre de generare a funcțiilor undișoară :

Make ON Filter

- generează filtrele de construcție a funcțiilor undișoară de tip Daubechies, Coiflets, ...

·  
·  
·

Din această prezentare succintă se constată limitările tool-box-ului WaveLab în comparație cu programul prezentat în paragraful anterior.

Acestea sunt:

1. Fiind un program universal tool-box-ul nu se pretează foarte bine la utilizare în îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot în telecomunicații. Metoda de “de-noising” prezentată nu este adaptivă.
2. Această metodă poate fi aplicată doar dacă semnalul perturbator este de tip zgomot alb gaussian. Pentru a se putea aplica această metodă de “de-noising” este necesară cunoașterea puterii zgomotului care perturbă aditiv semnalul de prelucrat (pragul trebuie ales proporțional cu valoarea puterii zgomotului).
3. Tool-box-ul nu funcționează decât în prezența programului MATLAB.
4. Îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot realizată prin utilizarea tool-box-ului nu este mai mare decât cea care se obține când se utilizează metoda adaptivă propusă în această lucrare.
5. Timpul de calcul necesar programului care implementează metoda adaptivă (program prezentat în paragraful anterior este inferior timpului de calcul al oricărei funcții de “de-noising” din cadrul tool-box-ului.

### **5.3. Comparație a metodei propuse cu alte metode de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot**

În acest paragraf se face o comparație între metoda de “de-noising” adaptiv introdusă în această lucrare și o metodă de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot bazată pe filtrarea liniară adaptivă. Problema este prezentată în [Hue.,Nuz.,Bil.'97]. Este vorba despre reducerea zgomotului care afectează semnalele recepționate de două fotodectoare. Acestea reprezintă amestecuri instantanee a două semnale deterministe numite surse și ale unor semnale perturbatoare de tip zgomot alb gaussian. Semnalele deterministe sunt compuse din câte un semnal sinusoidal cu frecvența de 10 Hz și din câte un semnal perturbator cu frecvența de 100 Hz. Primul captor (capt 1) recepționează în principal influența sursei și mai puțin zgomotul. Cel de al doilea fotodetector (capt 2) recepționează cu preponderență zgomotul. Se vor analiza două situații: atunci când zgomotul alb este intens respectiv atunci când zgomotul alb care perturbă semnalul sursă este mai puțin intens. Prima situație este prezentată în figura 5.34 iar cea de a doua în figura 5.35. Aceste grafice au fost desenate pe baza unor fișiere de date obținute în urma unei colaborări cu Universitatea din Reims Champagne-Ardenne.

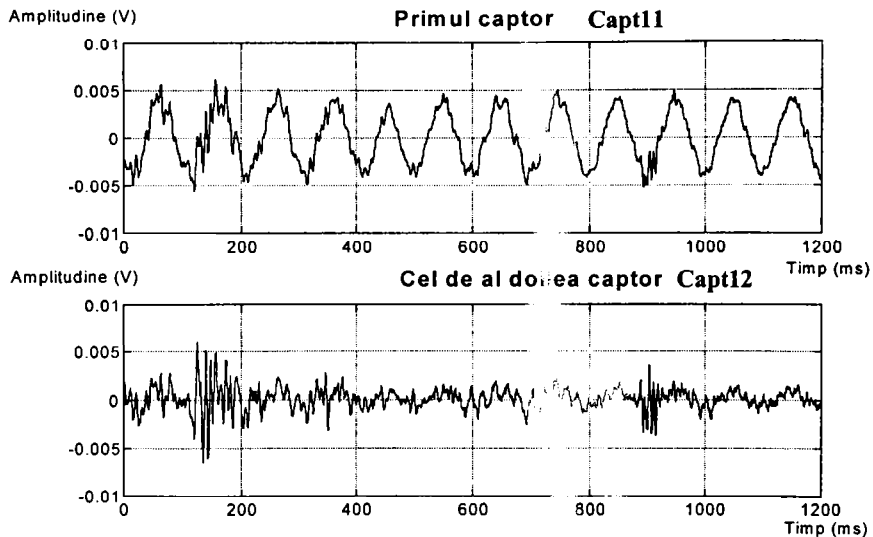


Figura 5.34. Semnalele achiziționate de cele două captoare în primul caz.

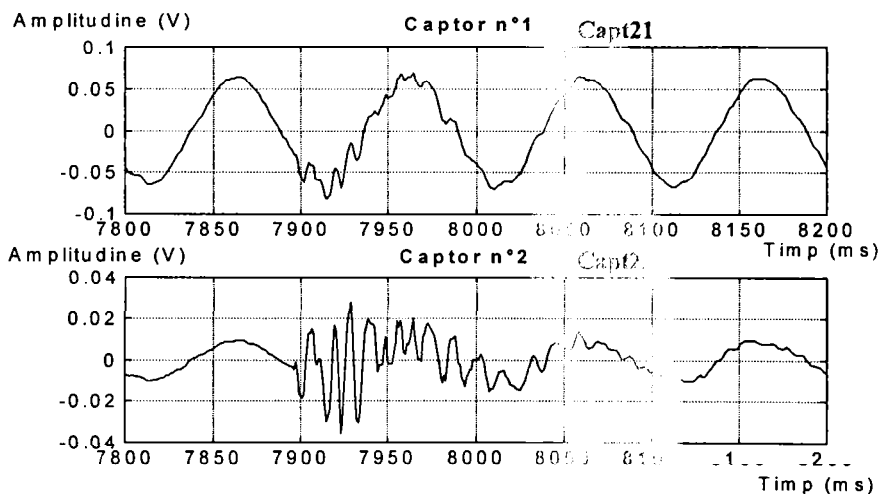


Figura 5.35. Semnalele captate de cele două captoare în cel de al doilea caz.

Semnalele de la cele două captoare sunt prelucrate cu un algoritmul de separare de surse care furnizează două semnale de ieșire: un semnal clar (sursa estimată n° 1) și zgomotul (sursa estimată n°2). S-au folosit două seturi de date care descriu desenele din figurile 5.36 și 5.37. În continuare se prezintă rezultatele obținute

folosind această metodă de creștere a raportului semnal pe zgomot în cele două situații prezentate mai sus.

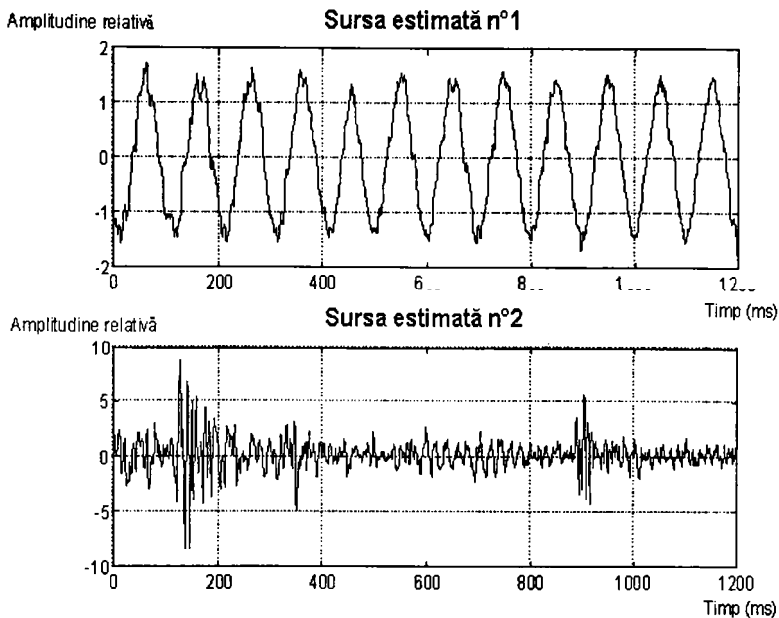


Figura 5.36. Rezultatul prelucrării semnalelor din figura 5.34 cu metoda de separare a surselor.

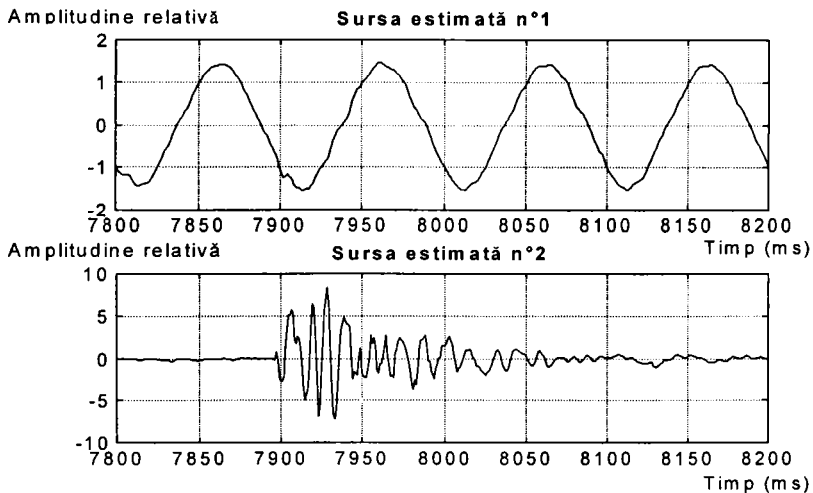


Figura 5.37. Rezultatele aplicării metodei de separare a surselor în cazul semnalelor din figura 5.35.

În figura 5.38 se prezintă rezultatul prelucrării semnalului capt 11 din fig. 5.34 cu metoda de “de-noising” adaptiv propusă în lucrarea de față.

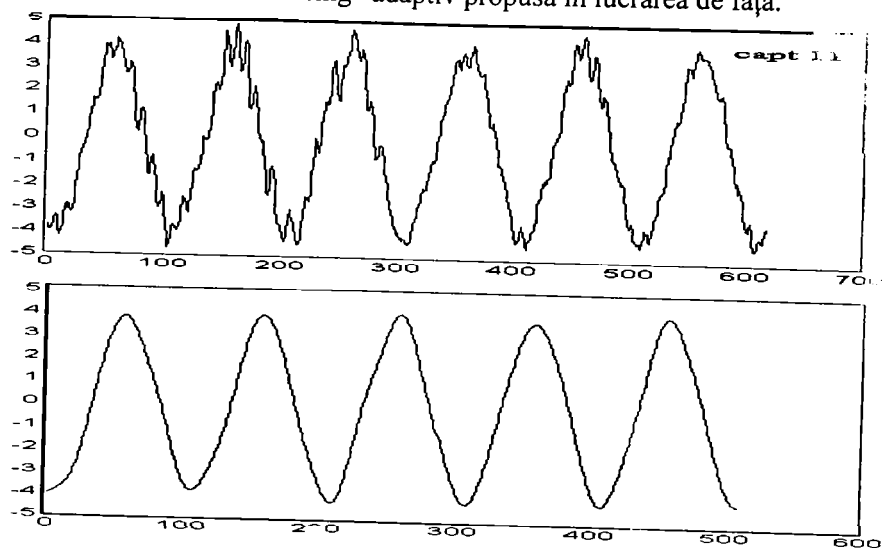


Figura 5.38. Rezultatul prelucrării unei părți a semnalului capt11 (reprezentată în partea de sus a imaginii) cu metoda de “de-noising” adaptiv propusă în lucrarea de față.

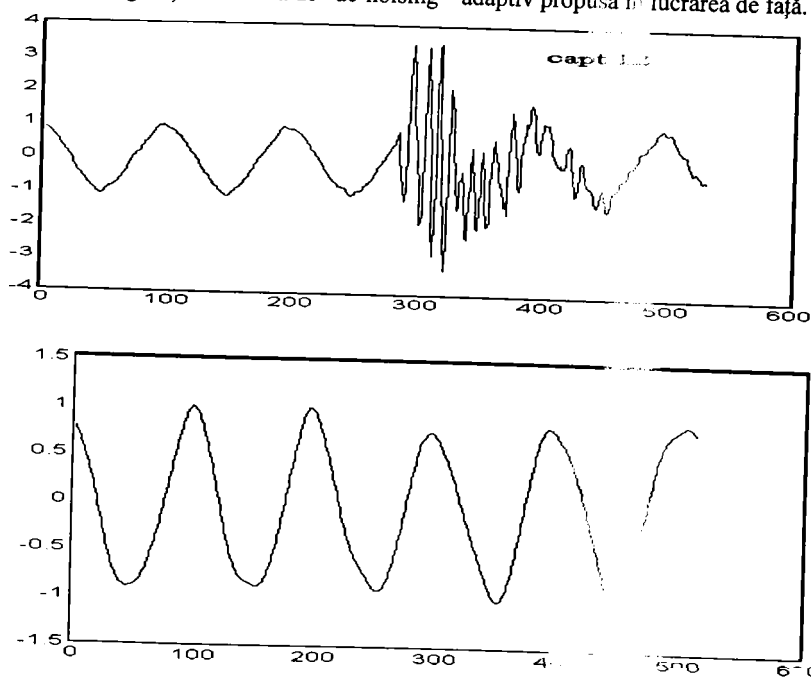


Figura 5.39. O porțiune din semnalul capt 12 din figura 5.34 și rezultatul prelucrării sale cu metoda de “de-noising” adaptivă propusă în lucrarea de față.

În figura 5.39 este prezentat rezultatul prelucrării semnalului capt 12 cu metoda de “de-noising” adaptiv propusă în lucrarea de față.

Analizând figurile 5.35 și 5.36 se constată că metoda de separare a surselor funcționează cu atât mai nesatisfăcător cu cât zgomotul alb care perturbă funcționarea captoarelor este mai intens. De aceea metoda de “de-noising” adaptivă a fost aplicată doar semnalelor capt 11 și capt 12 (din figura 5.34).

Comparând graficul de sus din figura 5.36 și graficul de jos din figura 5.38 se constată superioritatea metodei propuse în lucrarea de față asupra metodei de separare a surselor. Metoda noastră suprimă complet zgomotul alb în timp ce metoda de separare a surselor nu are această calitate. Superioritatea metodei propuse în această lucrare iese și mai bine în evidență pe baza figurii 5.39. Semnalul capt 12 are cel mai mic raport semnal pe zgomot dintre toate cele patru semnale: capt 11, capt 12, capt 21 și capt 22. Cu toate acestea, aplicând metoda de “de-noising” adaptivă propusă în această lucrare și partea utilă a semnalului capt 12 este complet extrasă din zgomot. În consecință se poate afirma că indiferent de poziția captorului, metoda propusă în lucrarea de față are rezultate superioare metodei de separare a surselor chiar dacă se utilizează un singur captor (caz în care metoda de separare a surselor nici nu ar putea să funcționeze). De asemenea trebuie remarcat că și din punct de vedere al volumului de calcul necesar metoda de “de-noising” adaptiv este superioară metodei de separare de surse.

#### **5.4. Posibilități de îmbunătățire a metodei de “de-noising” adaptiv**

Metoda prezentată determină adaptiv valoarea pragului filtrului de tip soft-thresholding utilizat. Ea nu face nici o precizare referitor la undișoara mamă care să fie folosită în cadrul transformărilor undișoară discretă directă și inversă utilizate. În toată lucrarea de față au fost utilizate doar undișoarele mamă introduse de I. Daubechies DAU 2-DAU 10. Calitatea extragerii din zgomot a fiecărui semnal util depinde și de undișoara mamă utilizată. Se poate face o armonizare între semnalul de prelucrat și undișoara mamă folosită. În continuare se studiază dependența distorsiunilor de undișoara mama folosită în cazul câtorva semnale mai des întâlnite în practică. Folosind aceași valoare pentru prag dar lucrând cu undișoare mamă diferite se obțin numere diferite de

coeficienți utilizați la reconstrucție, de la experiment la experiment. În cazul semnalului modulat în frecvență, pe care îl poate genera programul amintit la începutul acestui capitol, se obține următorul tabel:

| N  | nr. coeficienților folosiți la reconstrucție |
|----|--|
| 2  | 28   |
| 3  | 25   |
| 4  | 27   |
| 5  | 27   |
| 6  | 29   |
| 7  | 32   |
| 8  | 37   |
| 9  | 35   |
| 10 | 64   |

Tabelul 1. Dependența numărului de coeficienți care se pot folosi la reconstrucție de tipul undișoarei mamă.

S-au reprezentat grafic cazurile extreme (corespunzătoare lui  $N=3$  și  $N=10$ ) în figurile 5.40 și 5.41.  $N$  reprezintă numărul de ordine al undișoarei mamă de tip Daubechies utilizată (DAU  $N$ ).

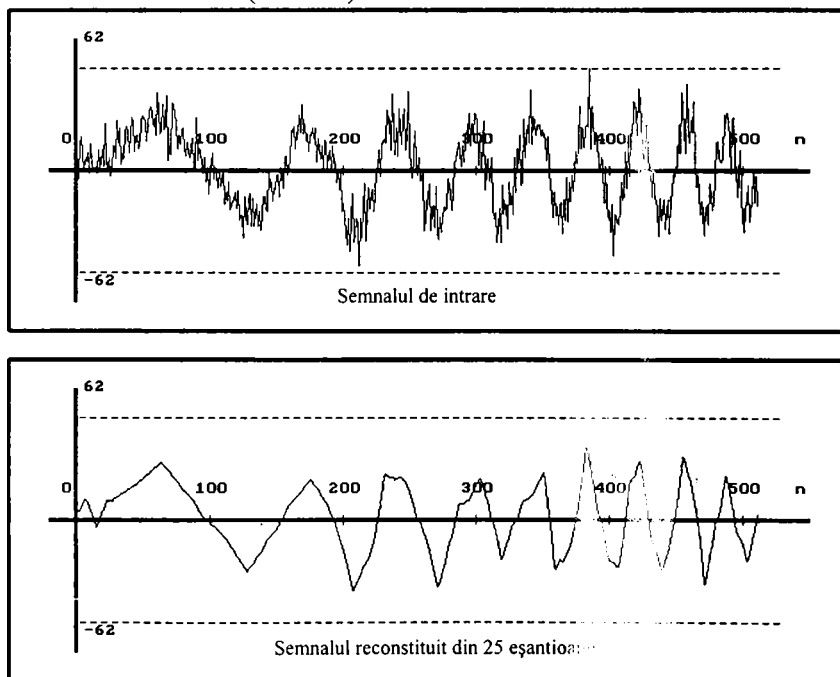


Figura 5.40. Reconstrucția cu număr minim de coeficienți.



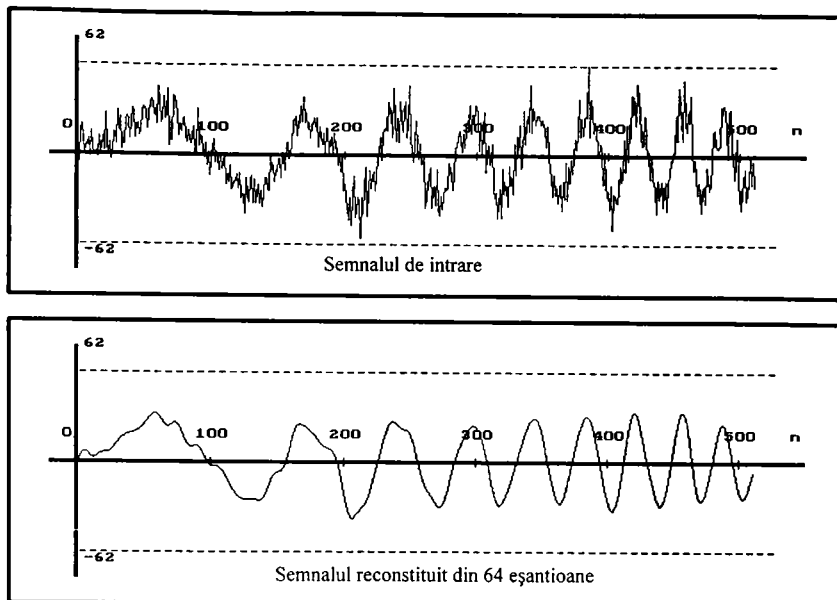


Figura 5.41. Reconstrucția cu număr maxim de coeficienți.

Se constată că distorsiunile sunt mult mai mici în cazul din figura 5.41. În cazul semnalului de tip tren de impulsuri dreptunghiulare (perturbat aditiv de zgomot uniform) se obține tabelul 2.

| N  | nr.coeficienți neanulați |
|----|--------------------------|
| 2  | 15                       |
| 3  | 16                       |
| 4  | 13                       |
| 5  | 11                       |
| 6  | 18                       |
| 7  | 19                       |
| 8  | 32                       |
| 9  | 32                       |
| 10 | 65                       |

Tabelul 2. Dependența de undișoara mamă folosită a numărului de coeficienți folosiți pentru reconstrucție.

În figurile 5.42 și 5.43 se prezintă cazurile extreme.

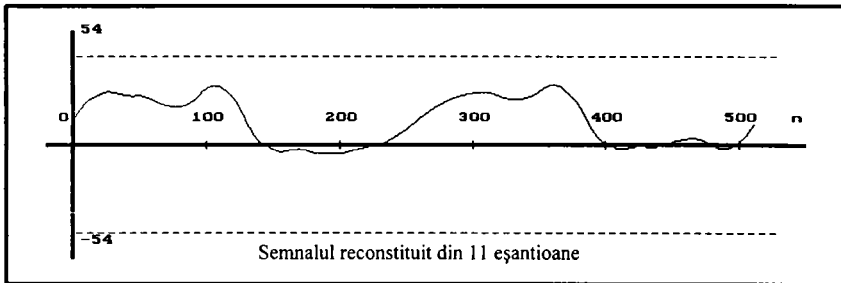
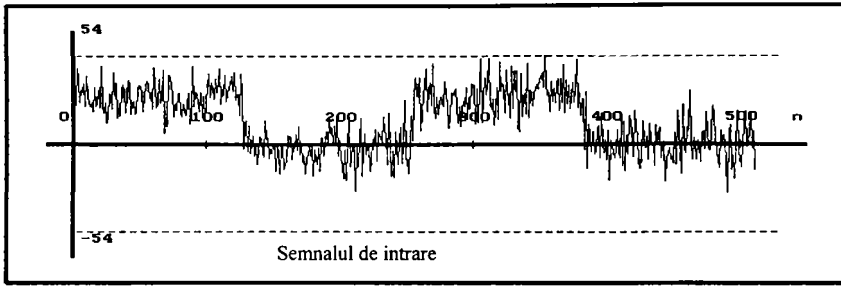


Figura 5.42. Funcționarea metodei de “de-noising” când se utilizează undișoara mamă DAU 5.

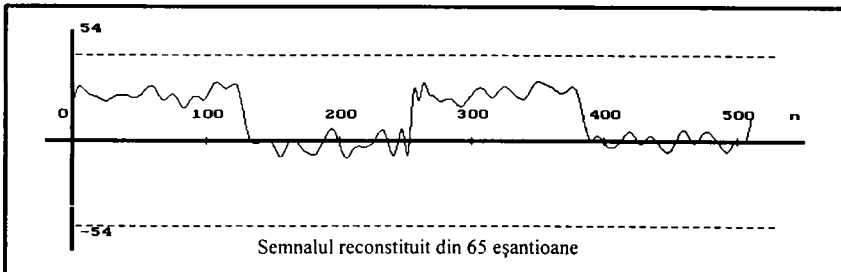
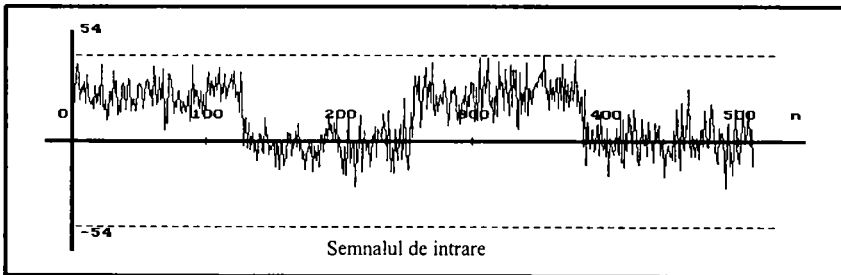


Figura 5.43. Funcționarea metodei de “de-noising” când se utilizează undișoara mamă DAU 10.

Se constată că în cel de al doilea caz distorsiunile fronturilor sunt mult mai mici. Această concluzie este identică cu cea obținută în cazul semnalului modulat în frecvență prezentat mai sus. Deci s-ar putea concepe un algoritm adaptiv care să minimizeze distorsiunile prin maximizarea numărului de coeficienți folosiți la reconstrucție. Deoarece acest număr este cu atât mai mare cu cât ordinul undișoarei mamă folosită este mai mare rezultă avantajul utilizării undișoarelor mamă de ordin superior în aplicațiile de “de-noising”. Acestea asigură și viteza maximă de convergență a zgomotului din domeniul transformatei undișoară spre un zgomot alb așa cum s-a demonstrat în [Bor., Isa.’97]. După cum s-a arătat în capitolul în care a fost introdusă transformarea undișoară discretă, aceasta are mai mulți parametri printre care și tipul undișoarei mamă. Ceilalți sunt numărul de iterații și tipul de transformare. În această lucrare s-a utilizat transformarea inspirată de algoritmul lui Mallat. Aceasta nu este invariantă la translații. Există și transformări undișoară discrete invariante la translații [Coi.,Don.’95] a căror utilizare conduce la diminuarea distorsiunilor de tip modulație de amplitudine parazită. Utilizarea unei astfel de transformări ar putea îmbunătăți calitatea metodei de “de-noising” adaptiv propusă în lucrarea de față. S-a utilizat de fiecare dată transformarea undișoară discretă cu numărul maxim de iterații posibil. Această opțiune a fost impusă de necesitatea ca zgomotul care perturbă aditiv semnalul util să aproximeze cât mai bine un zgomot alb în domeniul transformatei undișoară.

## CAPITOLUL 6. CONCLUZII

Această lucrare urmărește introducerea tehnicilor moderne de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot bazate pe utilizarea funcțiilor undișoară în aplicațiile din telecomunicații. Majoritatea acestor tehnici au fost elaborate de matematicieni și încă nu au fost utilizate în domeniul telecomunicațiilor. Având în vedere puternica dezvoltare a acestui domeniu prima întrebare care se poate pune este dacă mai este de interes să se studieze metodele de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot, în ziua de azi, când comunicațiile sunt atât de performante. Răspunsul este afirmativ din două motive :

1. Orice sistem de telecomunicații funcționează corect în parametrii în care a fost proiectat (la o anumită distanță, cu surse de informație care îndeplinesc anumite condiții de calitate a semnalului emis). De îndată ce acești parametrii nu sunt respectați (se dorește transmisia la o distanță mai mare sau sursa este perturbată mai puternic decât s-a estimat) funcționarea întregului sistem este afectată. O soluție este implementarea unei metode mai generale care să cuprindă o arie mai largă de cazuri posibile, permițând adaptabilitatea metodei de prelucrare la diverse rapoarte semnal pe zgomot pentru semnalul recepționat.

2. Ori de câte ori se fac cercetări pentru introducerea unei noi tehnologii în domeniul telecomunicațiilor există o mulțime de parametrii ale căror valori nu sunt încă specificate. Un exemplu este cazul în care este nevoie să se cunoască puterea semnalului perturbator. Pentru a avea o prelucrare eficientă este necesară utilizarea unor metode mai robuste decât cele care să cuprindă cât mai puțini parametri necunoscuți.

Lucrarea de față tratează problema îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot din punctul de vedere al celui care lucrează în domeniul prelucrării semnalelor. **Avantajele metodei sunt : adaptabilitatea la o gamă largă de tipuri de semnale perturbate și faptul că nu sunt necesare cunoștințe apriori asupra perturbațiilor, de tipul celor menționate în prezenta lucrare (zgomot alb, zgomot uniform, semnal aleator de tip impuls sau salve de impulsuri).** Astfel, se prezintă metode de prelucrare, se analizează calitatea lor, dar nu se fac recomandări tehnologice, nespecificându-se echipamentul, sau

locul în structura acestuia, în care s-ar putea utiliza o anumită tehnică de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot. Aceste sarcini sunt de competența unor cercetători care lucrează în laboratoare industriale afiliate unor companii de telecomunicații. Autoarea este gata să colaboreze în viitor cu astfel de specialiști.

Au fost alese metodele de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot bazate pe folosirea funcțiilor undișoară deoarece acestea reprezintă cele mai spectaculoase aplicații ale teoriei funcțiilor undișoară care se dezvoltă în prezent. Există numeroase laboratoare, la ora actuală, ai căror cercetători încearcă să utilizeze teoria funcțiilor undișoară în domeniul telecomunicațiilor. Se face compresie cu funcții undișoară, codare cu funcții undișoară, transmisie multirezoluție și bineînțeles îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot. Poate că principalul avantaj al metodelor de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot bazate pe funcții undișoară asupra altor metode de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot (cum sunt de exemplu cele bazate pe filtrarea adaptivă) este viteza de calcul sporită. Un alt avantaj este că metodele bazate pe utilizarea funcțiilor undișoară realizează în mod intrinsec și o compresie, ceea ce este deosebit de util ținând seama de caracterul foarte redundant al semnalelor de telecomunicații (vorbite, imagini).

În această teză este evidențiată proprietatea de decorelare pe care o are transformarea undișoară discretă. Pe baza acestei proprietăți, zgomotul care perturbă aditiv semnalul util (perturbarea aditivă este tipul de perturbare care este acceptată în modelul oricărui canal de telecomunicații) devine în domeniul transformatei undișoară discretă un zgomot alb. De aceea în domeniul acestei transformate poate fi utilizată oricare dintre tehnicile de extragere a semnalului util din zgomot alb. Totuși utilizarea filtrului de tip "soft-thresholding" pare soluția cea mai bună având în vedere performanțele remarcabile ale acestui filtru (conservarea: fronturilor, poziției trecerilor prin zero, precum și distorsiunile mici pe care le introduce). Problema majoră a acestui filtru este alegerea valorii pragului care să se folosească. În scenariul propus de David Donoho (cel care a introdus acest filtru) valoarea pragului trebuie aleasă proporțională cu dispersia zgomotului alb care perturbă semnalul în domeniul transformatei undișoară discretă. Aceasta presupune necesitatea estimării acestei dispersii (adică separarea semnalului util de zgomot în domeniul transformatei, adică cunoașterea soluției problemei îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot). Este deci necesară permanenta supraveghere a canalului de telecomunicații (care este un sistem neliniar și variabil în timp). Rezultă că sarcina estimării dispersiei zgomotului este foarte dificilă. Iată de ce în teza de față a fost elaborată metoda de "de-noising" adaptiv care ține seama de valoarea puterii semnalului emis (care este cunoscută deoarece puterea emițătorului este cunoscută) și nu necesită estimarea dispersiei zgomotului din canal pentru alegerea valorii pragului filtrului de tip "soft-thresholding" utilizat.

În continuare se prezintă **contribuțiile originale** prezentate această lucrare.

În capitolul 2 se analizează metodele de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot bazate pe filtrarea liniară. Este relevată importanța cunoașterii benzii echivalente de zgomot a filtrului liniar. Se calculează benzile echivalente de zgomot ale unor filtre Butterworth de ordinele I și II. Deoarece calculul benzilor echivalente de zgomot ale unor filtre de ordin superior este laborios, este utilă estimarea unor margini superioare respectiv inferioare ale acestor benzi echivalente. **Formulele care reprezintă aceste estimate reprezintă principala contribuție originală din capitolul 2.** O altă contribuție originală prezentată în acest capitol este studiul filtrelor transversale analogice. **Trebuie remarcat în acest sens formula pentru calculul îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot realizată de mediatorul analogic.**

Paragraful 2.3 este dedicat calculului benzilor echivalente de zgomot ale unor filtre numerice. **Formula (2.14) de calcul a îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot realizată de un filtru cu răspuns finit la impuls de ordinul N este de asemenea originală, inclusiv algoritmul de proiectare a filtrului cu răspuns finit la impuls cu maximizarea raportului semnal pe zgomot prezentat în paragraful 2.3.1. este original.** Formula de calcul a benzii echivalente de zgomot a unui filtru cu răspuns finit la impuls de ordinul I este originală. În paragraful 2.4 se prezintă modul de construcție a unor filtre numerice cu răspunsul în frecvență periodic de perioadă diferită de  $2\pi$  folosind metode multirating. Utilizând această tehnică pot fi construite filtre cu răspunsuri în frecvență având zerouri la orice frecvență. În acest mod pot fi rejectate și perturbații de tip semnal determinist. Este prezentat un exemplu în care se obține o îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot de 94,247. **Originalitatea rezultatelor prezentate în acest paragraf a fost probată prin publicarea lor în Buletinul Științific al UPT [Isa.'95 (2)].** În paragraful 2.5 sunt prezentate soluții de creștere a raportului semnal pe zgomot folosind filtre cu parametrii variabili în timp. Cele mai interesante astfel de sisteme sunt filtrele cu urmărire. O modalitate de construcție a unui astfel de filtru se bazează pe intercalarea unui filtru numeric între un convertor analog numeric și un convertor numeric analogic. Urmărirea frecvenței instantanee a componentei deterministe a semnalului de prelucrat este realizată prin eșantionarea adaptivă a semnalului de intrare. **Rezultatele obținute utilizând această metodă au fost de asemenea publicate [Naf.,Isa. 91(1)], [Naf.,Isa. 91(2)].** Astfel de filtre pot fi utilizate în comunicațiile cu spectru distribuit.

În capitolul 3 este introdusă transformarea undișoară discretă (TUD) din perspectiva tehnicilor de codare în subbenzi. **Majoritatea demonstrațiilor teoremelor prezentate în acest capitol sunt originale.**

În capitolul 4 se prezintă tehnicile de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot care utilizează TUD. Paragraful 4.1 este destinat analizei statistice a coeficienților TUD a unui semnal aleator, staționar și ergodic. Acest paragraf este în întregime original. **Rezultatele obținute în acest paragraf au**

**fost publicate în [Bor.,Isa.'97].** Practic orice semnal aleator ergodic și staționar devine prin TUD un zgomot alb. Acest efect de decorelare al TUD o face foarte atractivă, pentru aplicațiile de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot, deoarece în domeniul acestei transformate pot fi utilizate tehnicile de filtrare specifice pentru perturbația de tip zgomot alb. Paragraful 4.2 prezintă câteva filtre adaptive neliniare care se recomandă să fie utilizate în domeniul TUD. Este făcută analiza statistică a fiecărui astfel de filtru și se estimează posibilitățile lor de creștere a raportului semnal pe zgomot. Se evidențiază superioritatea filtrului de tipul “soft-thresholding” asupra celorlalte tipuri de filtre prezentate. **Toate aceste analize statistice sunt originale. Analiza filtrului de tip “soft-thresholding” a fost publicată în [Isa.'95 (3)].** Această analiză sugerează o metodă adaptivă de căutare a pragului (utilizat de acest filtru) optim pentru maximizarea raportului semnal pe zgomot. **Algoritmul inspirat de această metodă a fost publicat ,[Isa.'97].** **Convergența acestui algoritm este demonstrată în [Isa.'97].** **Această metodă de îmbunătățire a raportului semnal pe zgomot, numită “de-noising” adaptiv, reprezintă rezultatul central al acestei teze.**

Capitolul 5 este dedicat investigării performanțelor metodei de “de-noising adaptiv”. Se prezintă câteva programe elaborate pentru a face posibilă aprecierea calităților acestei metode: îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot realizată, distorsiunile introduse, gradul de degradare a unor parametri ai semnalului de prelucrat. S-a considerat cazul unei transmisii numerice de date. S-a testat metoda propusă efectuându-se 1000000 de încercări. Au fost obținute erori de transmisie (în aceleași condiții de perturbare) cu cel puțin un ordin de mărime mai mici decât cele care se obțin folosind metodele care se utilizează în prezent. Rezultă utilitatea folosirii metodei de creștere a raportului semnal pe zgomot în diferite aplicații din telecomunicații. **Se compară pe un caz inspirat din practică efectul utilizării metodei de “de-noising” adaptiv cu efectul utilizării separării de surse din punct de vedere al îmbunătățirii raportului semnal pe zgomot. Se justifică superioritatea metodei de “de-noising” adaptiv.** În finalul acestui capitol se prezintă câteva modalități de optimizare a rezultatelor obținute. **Conținutul întregului capitol este original.**

**Toate programele sursă care au fost utilizate pentru:**

- simularea semnalelor perturbate,
  - simularea diferitelor perturbații,
  - simularea metodei de “de-noising” adaptiv,
  - calculul erorilor,
- sunt originale.**

## BIBLIOGRAFIE

- [Abr.,Fla.'94] P. Abry, P. Flandrin. On the Initialization of the Discrete Wavelet Transform Algorithms. *IEEE Signal Processing Letters*, vol.1, No.2, pp32-34, February 1994.
- [Aka.,Had.'92] A. N. Akansu, R. A. Hadad. Multiresolution Signal Decomposition. *Academic Press*, New York, 1992.
- [Ama.,Vuz.'94] U. Amato, D. Vuza. Wavelet Regularization for Smoothing Data, Preprint *Istituto per Applicazioni della Matematica CNR* 1994.
- [Ama.,Vuz.'97] U. Amato, D. Vuza. Besov Regularization, Thresholding and Wavelets for Smoothing Data, Preprint *Istituto per Applicazioni della Matematica CNR*, 1997.
- [Ama.,Vuz.'97(1)] U. Amato, D. Vuza. An Alternate Proof of a Result of Johnstone and Silverman Concerning Wavelet Threshold Estimators for Data with Correlated Noise, Preprint *Istituto per Applicazioni della Matematica CNR*, 1997.
- [Ama.,Vuz.'97(2)] U. Amato, D. Vuza. Wavelet Approximation of a Function from Samples Affected by Noise, propusă la *Revista Academiei Române*.
- [Ama.,Vuz.'97(3)] U. Amato, D. Vuza. A Collection of Routines for the Wavelet Transform of Daubechies Type, Preprint *Istituto per Applicazioni della Matematica CNR*, 1997.
- [Ana.,Ven.'89] Anastasios, Venetsanopoulos. Current Developments in Signal Processing with Applications to Sonar and Radar. Part II, *University of Toronto*, Toronto 1989.
- [Ant.,Gre.,Nas.'95] A. Antoniadis, G. Gregoire, G. Nason. Density and Hazard Rate Estimation for Right Censored Data Using Wavelet Methods, Preprint *laboratoire LMC-IMAG Grenoble*, 1995
- [Asz.'93] T. Asztalos. Using Digital Transversal Filters for Analog Signal Processing. Proceedings of the International Symposium on Signals, Circuits and Systems, SCS'93, Iași, Romania, 1993.
- [Asz.,Isa.'94] T. Asztalos, A. Isar. An Adaptive Data Compression Method Based on the Fast Wavelet Transform. *Proceedings of the International Symposium Etc '94*, Timisoara, vol III, pp 37-42, Sept. 1994.



- [Asz.'96] T. Asztalos. An Algorithm for the DWT on Block Computation. *Proceedings of the International Symposium Etc'96*, Timișoara, vol II, pp.128-133, Sept. 1996.
- [Asz.'97] T. Asztalos. Tomography Imaging. Radon Transform Inversion Procedures. *Raport de stagi*, Universitatea Paris-Sud, Iulie 1997.
- [Aus.'92] P. Auscher. Wavelets with Boundary Conditions on the Interval. În *Wavelets-A Tutorial in Theory and Applications*. C. K. Chui (editor), pp.217-236, 1992.
- [Bar.'Ols.'96] R. G. Baraniuk, L. Fridtjof Wisur-Olssen. Optimal Phase Kernels for Time-Frequency Analysis. Propusa spre publicare în *IEEE Transactions on Signal Processing*, Ianuarie 1996.
- [Bar.,Sod.,Nay.'94] T.P.Barnwell III, I.Sodagar, K.Nayebi "Time-varying filter banks and wavelets", *IEEE Transactions on signal processing*, vol.42, no. 11, november 1994.
- [Bas.,Chi.,Cho.'95] S. Basu, C. H. Chiang, H. M. Choi. Wavelets and Perfect Reconstruction Subband Coding with Causal Stable IIR Filters. *IEEE Trans. On Circuits and Systems II*, vol. 42, No.1, January 1995.
- [Bel.,Wan.'97] E. Belagoy, Y. Wang. "Arbitrarily Smooth Orthogonal Nonseparable Wavelets in  $R^2$ ", *Preprint at Cornell University*, 1997
- [Bel.'90] M. Belanger. Traitement numérique du signal. *Masson* 1990.
- [Ben.,Teo.'93] J. Benedetto, A. Teolis. A Wavelet Auditory Model and Data Compression. În *Applied and Computational Harmonic Analysis*. No.1, pp.3-28, February 1993.
- [Ber.,Mac.'90] N. Bershad, O. Macchi. Comparison of LMS and RLS Algorithms for the Prediction of a Drifting Line. *Proceedings of EUSIPCO*, Barcelona, 1990.
- [Blu.,Uns.'98] T. Blu, M. Unser. Approximation Error for Quasi-Interpolators and (Multi-) Wavelet Expansions, Preprint *France Telecom*, 1998.
- [Boa.,O'Sh.,Arn.'90] B. Boashash, P. O. Shea, M. J. Arnold. Algorithms for Instantaneous Frequency Estimation: A Comparative Study. *Proceedings of SPIE California*, July 1990.
- [Boa.'91] B. Boashash. Time-Frequency Signal Analysis. În *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing*. S. Haykin (editor), pp.418-519, *Prentice Hall* 1991.
- [Boa.,Rei.'92] B. Boashash, A. Reilly. Algorithms for Time-Frequency Signal Analysis. În *Time Frequency Signal Analysis*. B. Boashash (editor), pp.141-163, *John Wiley* 1992.
- [Boa.,O'Sh.'94] B. Boashash, P. O. Shea. Polynomial Wigner-Ville Distributions and Their Relationship to Time-Varying Higher Order Spectra. *IEEE Transactions on Signal Processing*, January 1994.
- [Bol.,Hla.,Fei.'96] H. Bolcskei, F. Hlawatsch, H.G. Feingerger. Frame-Theoretic Analysis and Design of Oversampled Filter Banks, *Proceedings of ISCAS-96*, Atlanta 1996.

- [Bol.,Hla.,Fei.'96(1)] H. Bolcskei, F. Hlawatsch, H.G. Feitinger. Oversampled FIR and IIR DFT Filter Banks and Weyl-Heisenberg Frames, *Proceedings of ISCAS-96*, Atlanta 1996.
- [Bol.,Boa.'92] P. J. Boles, B. Boashash. Applications of the Cross-Wigner-Ville Distribution to Seismic Data Processing. In *Time-Frequency Signal Analysis*. B. Boashash (editor), pp.141-163, *John Wiley* 1992.
- [Bor.,Isa.'97] M. Borda, D. Isar. Whitening with Wavelets. *Proceedings of "ECCTD. 97" Conference*, Budapest, August 1997.
- [Bor.'96] B. La Borde. New Fast Discrete Wavelet, *Proceedings of TFTS'96*, pp. 41-44, Paris 1996.
- [Bov.,Mar.,Qua.'94] A.C.Bovik, P.Maragos,T.F.Quatieri "AM&FM energy detection and separation in noise using multiband energy operators", *IEEE Transactions on signal processing*, vol.41,no.12,december 1993.
- [Buc.'73] C. M. Bucur, Metode numerice, *Ed. Facla* Timișoara 1973.
- [Buc.,Don.'95] J. Buckheit, D. Donoho. Improved Linear Discrimination Using Time-Frequency Dictionaries. *Technical Report, Stanford University*, July 1995.
- [Buc.,Che.,Don.,Joh.,Sca.'95] J. Buckheit, S. Chen, D. Donoho, I. M. Johnstone, J. Scargle. About WaveLab. *Preprint, Stanford University*, November 1995.
- [Buc.,Don.'95] J. Buckheit, D. Donoho. WaveLab Architecture. *Preprint, Stanford University*, November 1995.
- [Buc.,Che.,Don.,Joh.,Sca.'95] J. Buckheit, S. Chen, D. Donoho, I. M. Johnstone, J. Scargle. WaveLab Reference Manual. *Preprint, Stanford University*, December 1995.
- [Buc.,Don.'96] J. B. Buckheit, D. Donoho, Time-Frequency Tillings which Best Expose the Non-Gaussian Behaviour of a Stochastic Process. *Proceedings of the IEEE Conference "TFTS'96"*, pp.1-4, Paris, July 1996.
- [Cal.,Dau.,Swe.,Yeo.'96] A.R.Calderbank, I. Daubechies, W. Sweldens, B.-L. Yeo. Wavelet Transforms that Map Integers to Integers, *Preprint Stanford University*, 1996.
- [Cam.,Mas.'94] S.Cambanis, E.Masry. Wavelet Approximation of Deterministic and Random Signals: Convergence Properties and Rates, *IEEE Transactions on information theory*, vol.40,no.4, july 1994.
- [Cha.'96] F. Chaplais. Algebras and Nonlinear Multiresolution Analysis that are Consistent with the Strang and Fix Conditions. *Proceedings of the IEEE Conference "TFTS'96"*, Paris, July 1996.
- [Che.,Don.'94] S. Chen, D. Donoho. Basis Pursuit, *preprint Stanford University*, 1994.
- [Che.,Don.,Sau.'95] S. S. Chen, D. L. Donoho, M. A. Saunders. Atomic Decomposition by basis Pursuit. *Technical Report 479, Stanford University*, May 1995.

- [Che.,Lin'94] B. S. Chen, C. W. Lin. Multiscale Wiener Filter for the Restoration of Fractal Signals: Wavelets Filter Bank Approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, No. 11, pp.2972-2982, November 1994.
- [Chi.,Kol.,Cul.'96] H. A. Chipman, E.D. Kolaczyk, R.E. Mc Culloch. Signal Denoising Using Adaptive Bayesian Wavelet Shrinkage, *Proceedings of TFTS'96*, pp. 225-228, Paris 1996.
- [Cho.,Wil.'89] H. I. Choi, W. J. Williams. Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponentials Kernels. *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 37, no. 6, pp.862-871, 1989.
- [Chu.'92] C. K. Chui (editor). An Introduction to Wavelets. *Academic Press*, New York 1992.
- [Chu.'92] C. K. Chui (editor). Wavelets. A Tutorial in Theory and Applications. *Academic Press*, New York 1992.
- [Cla.,Mec.'85] T.A.C.M. Claasen, W.F.G. Mecklenbrauker. Adaptive Techniques for Signal Processing in Communications. *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, no. 11, November 1985.
- [Cod.'94] M.A. Cody. The Wavelet Packet Transform Extending the Wavelet Transform, *Dr. Dobb's Journal*, April 1994.
- [Coh.,Dau.,Fea.'92] A. Cohen, I.Daubechies, J.C.Feauveau, Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets, *Comm. in Pure and Applied Math.*,vol.XLV, pp485-560, 1992.
- [Coh.'92] A. Cohen. Ondelettes et traitement numérique du signal. *Masson*, 1992.
- [Coh.,Dau.,Fea.'92] A. Cohen, I. Daubechies, J. C. Feauveau. Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets, *Communcations on Pure and Applied Mathematics*, vol. XLV, pp.485-560, 1992.
- [Coh.,Dau.'93] A. Cohen, I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets III. Better Frequency Resolution. *SIAM Journal Math. Anal.*, vol. 24, No.2, pp. 520-527, March 1993.
- [Coh.,d'Al.'95] A. Cohen, J. P. d'Ales. Nonlinear Approximation of Stochastic Processes. In Wavelets and Statistics. A. Antoniadis si G. Oppenheim (editori), *Springer Verlag*, pp.129-132, 1995.
- [Coh.,Kov.'96] A. Cohen, J. Kovacevic. Wavelets: The Mathematical Background, Proceedings of the IEEE, vol.84, no. 4, April 1996, pp.514-521.
- [Coif.,Sai.'96] R. R. Coifman, N. Saito. The Local Karhunen-Loeve Bases. *Proceedings of the IEEE Conference "TFTS' 96"*, pp.129-132, Paris, July 1996.
- [Coif.,Don.'95] R. R. Coifman, D. L. Donoho. Translation Invariant Denoising. In Wavelets and Statistics. A. Antoniadis si G. Oppenheim (editori), pp.125-150, *Springer Verlag* 1995.

- [Coi.,Wic.'93] R.R.Coifman, M.V.Wickerhauser "Wavelets and adapted waveform analysis" in *Proceedings of symposia in applied mathematics*, SIAM vol. 47, 1993, editor Ingrid Daubechies.
- [Com.,Pes.'96] P. L. Combettes. J. C. Pesquet. Convex Multiresolution Analysis. *Proceedings of IEEE Conference "TFTS'96"*, Paris, July 1996.
- [Cou.'84] F. de Coulon. Théorie et traitement des signaux. *Presses polytechniques romandes*. Lausanne 1984.
- [Cou.'95] G. Courbebaisse. Caractérisation d'un système d'injection par analyse temps-fréquence. *Traitement du signal*, vol.12, No.5, pp.509-518, 1995.
- [Cri.'65] R. Cristescu. Analiză funcțională, *Editura Didactică și Pedagogică*, București 1965.
- [Dau.'88] I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, No. 41, pp.909-996, 1988.
- [Dau.'91] I. Daubechies. The Wavelet Transform: A Method for Time-Frequency Localization, În *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing*. S. Haykin (editor), *Prentice-Hall*, New-Jersey 1991.
- [Dau.'92] I. Daubechies. Ten Lectures on Wavelets. *SIAM*, Philadelphia 1992.
- [Dau.'93] I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets II. Variations on a Theme. *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 24, No. 2, pp. 499-519, March 1993.
- [Dau.,Swe.'96] I. Daubechies, W. Sweldens. Factoring Wavelet Transforms into Lifting Steps, Preprint *Stanford University*, 1996.
- [Den.,Jaw.,Pet.,Swe.'93] B. Deng, B. Jawerth, G. Peters, W. Swelden. Wavelet Probing for Compression Based Segmentation. *Proceedings of SPIE*, San Diego, July 1993.
- [DeS.,Isa.'93] A. De Sabata, A. Isar. Semnale Circuite și Sisteme. *In drumator de laborator, Litografia UPT*, 1993.
- [DeS.,Jun.,Aub.'94] A. De Sabata, C. Iung, J. F. Aubry. A Variable Scale DWT. *Proceedings of the International Symposium ETc'94*, vol. III, pp.43-48, Timișoara Sept. 1994.
- [Don.,Joh.'91] D. Donoho, I. M. Johnstone. Minimax Estimation via Wavelet Shrinkage *Annual Meeting of the Institute of Mathematical Statistics*, Atlanta, Georgia, August 1991.
- [Don.,Joh.'92] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage. *Technical Report 400, Stanford University*, July 1992.
- [Don.,Joh.'92(1)] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Minimax Estimation via Wavelet Shrinkage. *Technical Report 402, Stanford University*, July 1992.
- [Don.'91] D. Donoho. Nonlinear Solution of Linear Inverse Problems by Wavelet-Vaguellete Decomposition, Preprint *Stanford University*, 1991.
- [Don.'92] D. L. Donoho. De-Noising via Soft Thresholding. *Technical Report 409, Stanford University*, November 1992.

- [Don.'92(1)] D. Donoho. Interpolating Wavelet Transforms, Preprint *Stanford University*, 1992.
- [Don.,Joh.'92] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Unconditional Bases are Optimal Bases for Data Compression and for Statistical Estimation. *Technical Report 410, Stanford University*, November 1992.
- [Don.'93] D. L. Donoho. Wavelet Shrinkage and W.V.D.-A Ten Minute Tour. *Technical Report 416, Stanford University*, January 1993.
- [Don.'93(1)] D. L. Donoho. Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities and Spectra from Indirect and Noisy Data, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, vol. 47, ed. I. Daubechies, pp.173-205, 1991.
- [Don.'93(2)] D. Donoho. Smooth Wavelet Decomposition with Blocky Coefficient Kernels, in *Recent Advances in Wavelet Analysis*, L. Schumaker and G. Webb (editors), pp. 1-43, 1993.
- [Don.,Joh.'93] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Adapting the Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage. *Technical Report 425, Stanford University*, June 1993.
- [Don.'93(3)] D. L. Donoho. Nonlinear Wavelet Methods for Recovering Signals, Images and Densities from Indirect and Noisy Data. *Technical Report 426, Stanford University*, July 1993.
- [Don.'94] D. L. Donoho. On Minimum Entropy Segmentation. *Technical Report 450, Stanford University*, April, 1994.
- [Don.,Joh.'94(1)] D. L. Donoho, I. M. Johnstone. Ideal De-Noising in an Orthonormal Basis Chosen from a Library of Bases. *Technical Report 461, Stanford University*, September 1994.
- [Don.'95] D. Donoho. CART and Best-Ortho-Basis: A Connection, Preprint *Stanford University*, 1995.
- [Duf.,Sch.'52] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer. A Class of Nonharmonic Fourier Series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, No. 72, pp.341-366, 1952.
- [Dum.'96] G. Dumitraş. Aplicații ale transformatei "wavelet". Realizarea compresiei imaginilor utilizând transformarea "wavelet". *lucrarea de dizertație, Departamentul de Comunicații, Facultatea de Electronică și Telecomunicații, Timișoara*, Iulie 1996.
- [Duv.'91] P. Duvaut. Traitement du signal-concepts et applications. *Hermes*, Paris 1991.
- [End.,Ver.'92] A. W. M. van den Enden, N. A. M. Verhoekx. Traitement numérique du signal. *Masson*, Paris 1992.
- [Eze.,Jen.'92] J.E. Ezell. W. K. Jenkins ș.a. Adaptive Analog Signal Processing with Acoustics Charge Transport Filters. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, San Diego, CA.*, May, 1992.
- [Fea.'92] J. C. Feauveau. Nonorthogonal Multiresolution Analysis using Wavelets. În *Wavelets- A Tutorial in Theory and Applications*. C. K. Chui (editor), *Academic Press*, pp.153-178, 1992.

- [Flan.'93] P. Flandrin. Representation temps-fréquence. *Hermes*, 1993.
- [For.'92] D. Forester. Time-Frequency Analysis in Machine Fault Detection. În *Time-Frequency Signal Analysis*. B. Boashash (editor), pp. 406-423, *J.Willey*, 1992.
- [Fro.'90] J. Froment. Traitement d'images et applications de la transformée en ondelettes. *Teza de doctorat, Universitatea Paris IX*, 1990.
- [Fro.,Par.'94] J. Froment, S. Parrino. MegaWave 2 User's Modules Library. vol. I, vol. III, *Preprint CEREMADE, Univ. Paris Dauphine*, November 1994.
- [Fro.'95] J. Froment. Introduction a la théorie des ondelettes. *curs de vara*, Timișoara, Iunie 1995.
- [Gag.,Lin.'94] L. Gagnon, J. M. Lina, B. Goulard. Application of Complex Daubechies' Wavelets to Numerical Simulation of a Nonlinear Signal Propagation Model. *Preprint of the Labo. de Phys. Nucl. Univ. de Montreal*, 1994.
- [Gao.'97] H. Y. Gao. Wavelets Shrinkage Estimate for Heteroscedatic Regression Models. *Preprint MathSoft*, 1997.
- [Gao.'97(1)] H.-Y. Gao. Threshold Selection in WaveShrink, *Preprint MathSoft*, 1997.
- [Gao.'97(2)] H.-Y. Gao. Wavelet Shrinkage Denoising Using the Non-negative Garrote, *Preprint MathSoft*, 1997.
- [Gav.,Isa.'94] P. Găvrută, A. Isar. Time-Frequency Representations. A Unitary Presentation. *Proceedings of International Symposium Etc '94*, vol. 3, pp. 25-30, Timișoara Septembrie 1994.
- [Gim.,Mat.'97] C. Giménès, A Mateescu (coordonatori). *Electronique, physique et signal pour les télécommunications*, Editura Tehnică, București, 1997.
- [Gop.,Bur.'92] R.A.Gopinath, C.S.Burrus. Wavelet Transform and Filter Banks, in *Wavelets - A Tutorial in Theory and Applications*, C.K. Chui (editor), pp. 603-654, *Academic Press*, 1992.
- [Gop.,Bur.'95] R. A. Gopinath, C.S. Burrus. Factorization Approach to Unitary Time-Varying Filter Bank Trees and Wavelets, *IEEE Trans. on S.P.* vol. 43, no. 3, March 1995, pp. 666-680.
- [Gre.'96] T. Greiner. Orthogonal and Biorthogonal Texture-matched Wavelet Filterbanks for Hierarchical Texture Analysis, *Signal Processing* 54 (1996) p. 1-23, Elsevier Science Publishers, The Netherlands.
- [Han.'96] B. Han. On Dual Wavelet Tight Frames, *Preprint University of Alberta*, 1996.
- [Her.,Kov.,Vet.'95] C. Herley, J. Kovacevic, M.Vetterli. Wavelets, Filter Banks, and Arbitrary Tilings of the Time-Frequency Plane, *Preprint AT&T Bell Laboratories*, 1995.
- [Hil.,Ogd.'97] M. L. Hilton, R. J. Ogden. Data Analytic Wavelet Threshold Selection in 2-D Signal Denoising, *IEEE Trans. on S.P.* vol. 45, no.2, February 1997, pp. 496-500.

- [Hla.,Koz.'91] F. Hlawatsch, W. Kozek. Time-Frequency Analysis of Linear Signal Spaces. *IEEE Conference ICASSP-91*, pp.2045-2048, Toronto, May 1991.
- [Hla.,Bou.'92] F. Hlawatsch, G. F. Boudreaux-Bartels. Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations. *IEEE S.P.Magazine*, pp.21-65, April 1992.
- [Hue.,Nuz.,Bil.'97] R. Huez, D. Nuzillard, A. Billot. Vers la détermination d'un profil d'humidité dans des matériaux byopolymères en utilisant une méthode de séparation de sources. *Seizieme Colloque GRETSI, Tome 1*, pp.223-226, Grenoble, 1997.
- [Isa.,Naf.'91] D. Isar, M. Naforniță. The Implementation of a Numerical Tracking Filter, *The International Conference "ICATE'91" Craiova, România, 1991*.
- [Isa.,Isa.'92] D.Isar, A. Isar : Adaptive Median Filter,*International Conference "Signals, Circuits and Systems " Iași, România, 1992*.
- [Isa.,Isa.'93] A. Isar, D. Isar. A Generalization of the W.K.S. Theorem Using Orthogonal Decomposition of  $L^2(\mathbb{R})$ . Applications in Signal Processing Theory. *Revista ATM*, anul III, pp.91-97, București, 1993.
- [Isa.'93] A. Isar. Nouvelles modalités de décomposition multirésolution. *Quatorzieme Colloque GRETSI, Juan-Les Pins*, pp.363-366, 13-16 Septembre 1993.
- [Isa.'93(1)] A. Isar. Tehnici de măsurare adaptivă cu aplicații în aparatura de măsurare numerică. *Teza de doctorat, Universitatea "Politehnica" Timișoara 1993*.
- [Isa.'94] A. Isar. L'estimation de la transformée en ondelettes avec bancs de filtres a temps continu. *Colloque TOM'94*, pp. 34.1-34.4, Lyon, 9-11 Mars 1994.
- [Isa.'94(1)] D. Isar. LMS Adaptive Filter for Frequency Modulated Signal Processing, *Proceedings of the Symposium on electronics and telecommunications* , vol.III, Timișoara, sept.29-30, 1994.
- [Isa.'94(2)] D.Isar. The study of a LMS adaptive filter, *Proceedings of the symposium on electronics and telecommunications*, vol.III, Timișoara, sept. 29-30, 1994.
- [Isa.,Asz.'94] A.Isar, T.Asztalos. Using the fast wavelet transform for data compression, *Proceedings of the symposium on electronics and telecom.*, vol.III, Timișoara, sept. 29-30, 1994.
- [Isa.'95] D.Isar. Metode convenționale de creștere a raportului semnal pe zgomot, *Referat nr. 1 în cadrul pregătirii pentru doctorat*, conducător științific Prof. dr. ing. Ioan Naforniță.
- [Isa.'95(1)] D.Isar. Metode moderne de creștere a raportului semnal pe zgomot, *Referat nr. 2 în cadrul pregătirii pentru doctorat*, conducător științific Prof. dr. ing. Ioan Naforniță.
- [Isa.,Asz.,Isa.'95] D.Isar, T.Asztalos, A.Isar : De-noising with wavelets, *International Symposium SCS'95, Iași, România, 1995*.

- [Isa.'95(2)] D. Isar. The enhancement of the signal to noise ratio using digital "comb" filters, *Buletinul Științific al Universității "Politehnica" Timișoara*, România, 1995.
- [Isa.'95(3)] D. Isar, T. Asztalos, A. Isar, "The Enhancement of the Signal to noise Ratio by Adaptive Filtering in the Discrete Wavelet Transform Domain", Simpozionul Academiei Tehnice Militare, 1995.
- [Isa.'96] D. Isar. Îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot prin filtrare neliniară în domeniul transformatei, *Scientific Communications Meeting of "Aurel Vlaicu" University, Arad*, România, 1996.
- [Isa.'97] D. Isar. De-noising adaptatif. *Seizieme Colloque GRETSI*, pp.1249-1252, Grenoble, 15-19 Septembre 1997.
- [Isa.,Isa.'97] D. Isar, A. Isar. A New Class of Identity Systems. *International Workshop on Sampling Theory and Applications, Universidad de Aveiro*, June 16-19 1997.
- [Jaw.,Swe.'95] B. Jawerth, W. Swelden. An Overwiev of Wavelet Based Multiresolution Analysis. *Preprint, Katolike Universiteit Leuven*, Belgium 1995.
- [Jer.'87] A. J. Jerry. The Shanon Sampling Theorem-its Extensions and Applications. A Tutorial. *Proc. IEEE*, 65, 11, pp.1565-1596, November 1987.
- [Joh.'93] I. M. Johnstone. Minimax Bayes, Asymptotic Minimax and Sparse Wavelets Priors, *Preprint Stanford University*, 1993.
- [Kla.,Hol.,Flo.'97] A. Kla., M. Holschneider, K. Flornes. Two-channel Perfect Reconstruction Filter Banks over Comutative Rings, propusă pentru publicare la *IEEE Transactions on Signal Processing*.
- [Kol.'96] E.D. Kolaczyk. A Method for Wavelet Shrinkage Estimation of Certain Signals Using Corrected Thresholds, articol propus la revista *Statistica Sinica*.
- [Kol.'97] E.D. Kolaczyk. Non-parametric Estimation of Gamma-ray Burst Intensities using Wavelets, în curs de publicare în revista *The Astrophysical Journal*.
- [Kov.,Vet.'93] J. Kovacevic, M. Vetterli. Nonseparable Two-and Three-Dimensional Wavelets, *Proceedings of ISCAS'93*, Chicago,1993.
- [Kov.,Vet.'95] J. Kovacevic, M. Vetterli. Perfect Reconstruction Filter Banks with Rational Sampling Factors, *Preprint at AT&T Bell Laboratories*, 1995.
- [Kri.,Bro.'96] H. Krim, D. H. Brooks. Feature-Based Segmentation of ECG Signals. *Proceedings of IEEE Conference, TFTS'96*, pp. 97-100, Paris, July 1996.
- [Kun.,Boi.'87] M. Kunt, R. Boite. Traitement de la parole. *Presses Polytechniques Romandes*, 1987.
- [Kun.'84] M. Kunt. Traitement numérique des signaux. *Traité d'Electricité de l'EPFL, vol. XX, 3-eme édition, Presses Polytechniques Romandes*, 1984.



- [Lan.,Guo.,Ode.,Bur,Wel.'95] M. Lang, H. Guo, J. E. Odegard, C. S. Burrus, R. O. Wells. Nonlinear Processing of a Shift Invariant DWT for Noise Reduction. *Proceedings of SPIE Symposium on Aerospace Sensing and Dual Photonics*, Orlando, SUA. April 1995.
- [Leb.,Vet.'97] J. Lebrun, M. Vetterli. Balanced Multiwavelets. Theory and Design, trimisă spre publicare la *IEEE Transactions on Signal Processing*, februarie 1997.
- [Lem.'90] P. G. Lemarié-Rieusset. Analyses multi-echelles et ondelettes a support compact. În *Les ondelettes en 1989*. P. G. Lemarié (editor), *Springer Verlag*, 1990.
- [Lem.,Mal.'93] P. G. Lemarié-Rieusset, G. Malgouyres. Support des fonctions de base dans une analyse multirésolution. *C. R. Acad. Sci. Paris, tome 313, serie 5*, pp.377-380, 1993.
- [Lim.,Opp.'88] J. S. Lim, A. V. Oppenheim (editori). *Advanced Topics in Signal Processing*. *Prentice Hall*, New Jersey 1988.
- [Lim.,Sim.'73] W.C. Lindsey, M. K. Simon. *Telecommunication Systems Engineering*, *Prentice-Hall*, New Jersey, 1973.
- [Mac.'89] O. Macchi. Adaptatif et non stationnaire. *Traitement du signal*, vol. 6, No.5 pp.325-387, 1989.
- [Mal.'91] G. Malgouyres. Analyse multirésolution sur l'intervalle. Algorithme rapide. *Preprint, Université Paris-Sud*, 1991.
- [Mal.'92] G. Malgouyres. Ondelettes a support compact et analyse multirésolution sur l'intervalle. *Preprint, Université Paris-Sud*, 1992.
- [Mal.'94] G. Malgouyres. Introduction a la théorie des ondelettes. *Curs de vară*, Timișoara 1994.
- [Mal.'89] S. Mallat. Multifrequency Channel Decomposition. *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 37, No.12, pp. 2091-2110, Octobre 1989.
- [Mal.'89(1)] S. Mallat. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: the Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. II, No.7, pp.674-693, July 1989.
- [Mal.,Zha.'93] S. Mallat, Z. Zhang. Matching Pursuits with Time-Frequency Dictionary. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, No.12, pp.3397-3415, December 1993.
- [Mal.'97] S. Mallat, F. Falzon. Understanding Image Transform Codes. *Proceedings of the SPIE Aerospace Conference*, Orlando, April 1997.
- [Mal.'90] H. S. Malvar. Lapped Transforms for Efficient Transform/Subband Coding. *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 38, pp.969-978, June 1990.
- [Mar.,Mac.'87] S. Marcos, O. Macchi. Tracking Capability of the Least Mean Square Algorithm: Applications to a Asynchronous Echo-Canceler, *IEEE Transactions on ASSP*, vol. 35, no.11, November 1987.
- [Mat.,Șer.'87] A. Mateescu, A. Șerbănescu. Circuite cu capacități comutate, *Ed. Militară*, București, 1987.

- [Mat.,Rad.,Sta.'96] A. Mateescu, M. Răducanu, L. Stanciu. Best Basis with Wavelet Packets for a Signal. *Proceedings of International Symposium Etc '96*, Timișoara, vol. II, pp.106-111, September 1996.
- [Mey.'90] Y. Meyer. Ondelettes, filtres miroirs en quadrature et traitement numérique de l'image. În *Les ondelettes en 1989*. P. G. Lemarié (editor), Springer-Verlag, 1990.
- [Mey.'93] Y. Meyer. Ondelettes et algorithmes concurrents. *Herman*, Paris 1993.
- [Mey.93(1)] Y. Meyer. Wavelets and Operators. În *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. I. Daubechies (editor), vol. 47, AMS,1993.
- [Mou.'94] P.Moulin. Wavelet Thresholding Techniques for Power Spectrum Estimation. *IEEE Trans. on S.P.*, vol. 42, No.11, pp. 3126-3136, November 1994.
- [Naf.,Isa.'91] M.Naforniță , D.Isar. Numerical Traking Filter, *The International Conference "ICATE '91"*, Craiova , România, 1991.
- [Naf.,Isa.,Isa.'92] M. Naforniță, A. Isar, D. Isar. A Generalization of the Sampling Theorem. *Rev. Roum. Sci. Tehn.-Electrotehn. et Energ.*, 37, pp. 177-183, Bucarest 1992.
- [Naf.'92] I. Naforniță. Banda echivalentă de zgomot a unor filtre, *Conferința națională de la Oradea*, Mai, 1992.
- [Naf.,Câm.,Isa.'93] M.Naforniță, A.Câmpeanu, D.Isar, Tehnici experimentale de analiză statistică a semnalelor aleatoare ergodice și staționare, *Conferința Națională Oradea*, România, 1993 .
- [Naf.'95] I. Naforniță, Prelucrarea adaptiva a semnalelor de telecomunicații", 1995, *note de curs*.
- [Naf.,Câm.,Isa.'95] I. Naforniță, A. Câmpeanu, A. Isar. Semnale circuite și sisteme. vol. I, *Editura UPT*, 1995.
- [Nag.,Ike.'96] T. Nagai, M. Ikehara. Design of Oversampled Perfect Reconstruction FIR Filterbanks, Preprint *Keio University Japan*, 1996.
- [Nar.,Lou.,Les.,Dar.'96] S. B. Narayanan, J. Mc. Loughlin, Les Atlas, J. Darapo. An Operator Theory Approach to Discrete Time-Frequency Distribution. *Proceedings of the IEEE Conference "TFTS'96"*, pp. 521-524, Paris 1996.
- [Nas.'94] G. P. Nason. Wavelet Regression by Cross-Validation. *Preprint University of Bristol*, March 1994.
- [Nas.,Sap.,Saw.'97] G. P. Nason, T. Sapantias, A. Sawezenko. Statistical Modeling of Time Series using Non-decimated Wavelet Representations, Preprint *University of Bristol*, 1997.
- [Nay.,Bar.,Smi.'91] K. Nayebi, T. P. Barnwell III, M.J.T. Smith. Nonuniform Filter Banks: A Reconstruction and Design Theory, Preprint *Georgia Institute of Technology*, June 1991.
- [Nay.,Bar.,Smi.'91(1)] K. Nayebi, T. P. Barnwell III, M.J.T. Smith. Time Domain Filter Bank Analysis: A New Design Theory, Preprint *Georgia Institute of Technology*, June 1991.

- [Nea.'82] V. E. Neagoie. Using Legendre Polynomials to Introduce a New Orthogonal Transform for Significant Feature Selection. *Proceedings of Pattern Recognition and Image Processing Conference*, pp.177-182, Las Vegas, June 1982.
- [Nea.,Sta.'92] V. Neagoie, O Stănășilă. Teoria recunoașterii formelor, *Editura Academiei Române*, București, 1992.
- [Ode.,Bur.'96] J. Odegard, C. S. Burrus. New Class of Wavelets for Signal Approximation, *Proceedings of ISCAS'96*.
- [O'N.,Wil.'96] J. C. O'Neill, W. J. Williams. New Properties for Discrete Bilinear Time-Frequency Distributions. *Proceedings of the IEEE Conference "TFTS'96"*, pp. 505-508, Paris 1996.
- [Opp.'76] A. Oppenheim. Applications of Digital Signal Processing, *Prentice-Hall*, 1976.
- [Opp.,Sch.'86] A. Oppenheim, R. W. Schaefer. Digital Signal Processing. *Prentice Hall*, 1986.
- [Opp.,Lim'88] A.V.Oppenheim, J.S.Lim. Advanced topics in signal processing", *Prentice Hall*, 1988.
- [Pag.,Nel.'88] R. W. Page, N. W. Nelson. Adaptive Sample Rate: A First Generation Automatic Time Base. *Hewlett Packard Journal*, February 1988.
- [Pap.,Hla.,Bou.'93] A. Papandreu, F. Hlavatsch, G. F. Boudreaux-Bartels. The Hyperbolic Class of Quadratic Time-Frequency Representations. Part I: Constant-Q Warping, the Hyperbolic Paradigm, Properties and Members. *IEEE Trans. on SP*, vol. 41, No.12, December 1993.
- [Pas.,Gon.,Bar.'96] M. Pasquier, P. Gonçalves, R. Baraniuk. Hybrid Linear/Bilinear Time-Scale Analysis. *Proceedings of IEEE Conference "TFTS'96"*, pp.513-516, Paris, July 1996.
- [Pas.,Gay.'95] D. Pastor, R. Gay. Décomposition d'un processus stationnaire du seconde ordre. Propriétés statistiques d'ordre 2 des coefficients d'ondelettes et localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes. *Traitement du signal*, vol. 12, no. 5, pp. 393-420, 1995.
- [Pen.'94] A. P. Pentland. Interpolation using Wavelet Bases. *IEEE Trans. on PAMI*, vol.16, no.4, April 1994.
- [Pes.,Ade.,Pes.,Hel.'96] L. Pesu, E. Ademovic, J.-C. Pesquet, P. Helisto. Wavelet Packet Based Respiratory Sound Classification, *Proceedings of TFTS'96*, Paris, 1996, pp. 377-380.
- [Pho.,Kim,Vai.,Ans.'95] S. M. Phoong, C. W. Kim, P. P. Vaidyanathan, R. Anseri. A New Class of Two-Channel Biorthogonal Filter Banks and Wavelet Bases. *IEEE Transactions on SP*, vol. 43, no.3, pp. 649-665, March 1995.
- [Pit.,Ven.'86(1)] I. Pitas, A. N. Venetsanopoulos. Nonlinear Mean Filters in Image Processing, *IEEE Transactions on ASSP*, vol. 14, no. 3, June 1986.
- [Pit.,Ven.'86(2)] I. Pitas, A. N. Venetsanopoulos. Edge Detectors on Nonlinear Filters, *IEEE Transactions on PAMI*, vol.8, no.4, July 1986.

- [Pit.,Wan.,Jua.'96] J. W. Pitton, K. Wang, B. H. Juang. Time-Frequency Analysis and Auditory Modeling for Automatic Recognition of Speech. *Proceedings of the IEEE*, vol. 84, no.9, pp.1199-1214, Sept. 1996.
- [Plo.,Str.'98] G. Plonka, V. Strela. From Wavelets to Multiwavelets, în *Mathematical Methods for Curves and Surfaces II*. pp. 1-25, *Vanderbilt University Press*, 1998.
- [Pop.,Naf.,Tip.,Tom.,Mih.'86,'89] E. Pop, I. Naforniță, V. Tiponuț, L.Toma, A. Mihăescu. Metode în prelucrarea numerică a semnalelor. vol I și vol II, *Ed. Facla*, Timișoara 1986 și 1989.
- [Pre.,Teu.,Vet.,Fla.'95] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. Numerical Recipes in C. *Cambridge University Press*, 1995.
- [Pre.'87] F. Preteux. Description et interprétation des images par la morphologie mathématique. Application a l'image médicale. *These de doctorat d'Etat, Université Paris VI*, 1987.
- [Qia.,Che.'96] S. Qian, D. Chen. Joint Time-Frequency Analysis. *Prentice Hall*, 1996.
- [Ram.,Sir.'88] G. Ramponi, G. Siracuza. Quadratic Digital Filters for Image Processing, *IEEE Transactions on ASSP*, vol. 36, no.6, June 1988.
- [Ram.,Vet.,Her.'96] K. Ramchandran, M. Vetterli, C. Herley. Wavelets, Subband Coding and Best Bases. *Proceedings of the IEEE* vol. 84, No. 4, pp.541-558, April 1996.
- [Raz.,Dic.,Tur.'97] J. Raz, L. Dickerson, B. Turetsky. A Wavelet Packet Model of Evoked Potentials. *Preprint of School of Public Health, Ann Arbor, Michigan*, 1997.
- [Rio.,Duh.'92] O. Rioul, P. Duhamel. Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transforms. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 28, No. 2, pp.569-586, March 1992.
- [Rio.,Vet.'91] O.Rioul, M.Vetterli. Wavelets and signal processing, *IEEE SP Magazine*, 8 (4) pp.14-38, october 1991.
- [Rio.'93] O. Rioul. A Discrete Time Multiresolution Theory. *IEEE Trans. on SP*, vol. 41, no. 8, pp. 2591-2606, August 1993.
- [Rio.'93(1)] O. Rioul. Ondelettes régulières: Applications a la compression d'images fixes. *these de doctorat, ENST Paris*, Mars 1993.
- [Rul.'80] G. Rulea. Prelucrarea optimă a semnalului radio. *Ed. Tehnică*, București 1980.
- [Ran.'87] R. B. Randall. Applications of B&K Equipment to Frequency Analysis. *B&K*, 1987.
- [Scl.,Sun,Kri.,Jas.,Sch.'92] R. J. Scwabassi, M. Sun, D. N. Krieger, P. J. Jasukitias, M.S.Scher. Time-Frequency Domain Problems in the Neurosciences. În *Time-Frequency Signal Analysis*. B. Boashash (editor), pp.498-519, *John Wiley*, 1992.
- [She.'92] M.J.Shensa. The Discrete Wavelet Transform: Weding the "A Trous" and Mallat Algorithms. *IEEE Trans. on S.P.* vol 40, No. 10, pp. 2464-2482, October 1992.

- [Shy.'92] J.J.Shynk. Frequency-domain and multirate adaptive filtering, *Signal Processing Magazine*, january 1992.
- [Sim.,Rie.,Sch.,Nos.'97] S. Simon, P. Riecher, C. Schimpfle, J.A. Nossek, Cordic Based Architectures for the Efficient Implementation of Discrete Wavelet Transforms, Preprint, *T.U. Munchen*, 1997.
- [Smi.,Bar'86] M. J. T. Smith, T. P. Barnwell III. Exact Reconstruction Techniques for Tree-Structured Subband Coders. *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 34, pp.434-441, 1986.
- [Sod.,Nay.,Bar.'94] I. Sodagar, K. Nayebi, T.P. Barnwell III. Time-Varying Filter Banks and Wavelets, *IEEE Trans. On S.P.*, vol. 42, no.11, November 1994, pp. 2983-2996.
- [Spă.'87] A. Spătaru. Fondements de la théorie de la transmission de l'information. *Presses Polytechniques Romandes*, Lausanne, 1987.
- [Sri.,Jam.'96] P. Srinivasan, L. M. Jamieson. Techniques for Variable Rate Speech Coding using Wavelet Representations. *Proceedings of the IEEE Conference "TFTS'96*, pp.109-112, Paris, July 1996.
- [Str.'91] V. Strela. A Note on Construction of Biorthogonal Multi-scaling Functions, *Contemporary Mathematics*, 1991.
- [Swe.,Pie.'93] W. Sweldens. Wavelet Sampling Techniques, *Proceedings of the Joint Statistical Meetings, San Francisco*, 1993.
- [Swe.'94] W. Sweldens. Compactly Supported Wavelets which are Biorthogonal with Respect to a Weighted Inner Product. *Preprint University of South Carolina*, 1994.
- [Swe.'94(1)] W. Sweldens. The Lifting Scheme: A Custom-Design Construction of Biorthogonal Wavelets. *Preprint University of South Carolina*, 1994.
- [Swe.'96] W. Sweldens. Wavelets and the Lifting Scheme: A 5 Minute Tour, Preprint *Bell Laboratories*, 1996.
- [Tas.'95] C. Taswell. Speech Compression with Cosine and Wavelet Packet Near-Best Bases. *Preprint, Stanford University*, 1995.
- [Tas.'96] C. Taswell. Image Compression by Parametrized-Model Coding of Wavelet Packet Near-Best Bases. *Preprint, Stanford University*, 1996.
- [Tas.'98] C. Taswell. Statisficing Search Algorithms for Selecting Near-Best Bases in Adaptive Tree-Structured Wavelet Transforms. În curs de publicare în *IEEE Transactions on Signal Processing*.
- [Tch.'93] P. Tchamitchian. Wavelets and Differential Operators. În *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. I. Daubechies (editor)*, vol. 47, *A.M.S.*, 1993.
- [Tem.'96] N. N. Temme. Asymptotics and Numerics of Zeros of Polynomials that are Related to Daubechies Wavelets. *Technical report AM-R9613, National Research Institute for Mathematics and Computer Science*, Amsterdam, 1996.

- [Tol.,Hol.,Kal.'95] L. Tolhuizen, N. Hollmann, T.A.C.M. Kalker. On the Realizability of Biorthogonal, m-Dimensional Two-Band Filter Banks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, No.3, March 1995.
- [Tsa.,Gia.'95] M.K. Tsanakis, G. B. Giannakis. Principal Component Filter Banks for Optimal Multiresolution Analysis, *IEEE Trans. on S. P.* , vol. 43, no.8 August 1995, pp. 1766-1777.
- [Tsi.,Nik.'98] G.A. Tsihrintzis, G. L. Nikias. Modeling, Parameter Estimation and Signal Detection in Radar Clutter with Alpha-Stable Distributions, Preprint Univ. of Virginia, 1998.
- [Vai.'93] P. P. Vaidyanathan. Multirate Systems and Signal Processing. *Prentice Hall, Englewood Cliffs*, 1993.
- [Vai.'93(1)] P.P.Vaidyanathan , Multiscale digital filters, filterbanks, polyphase networks and applications: A tutorial, *Proc. IEEE*, vol.78, no.1 pp59-63, july 1993.
- [Vet.'92] M.Vetterli, C.Herley, Wavelets and filter banks: Theory and design, *IEEE Transactions on signal processing* 40 (9) pp.2207-2232, september 1992.
- [Wha.'71] A.O.Whalen. Detection of Signal in Noise, *Academic Press*, New York, 1971.
- [Wec.'89] M. Wechsler. Characterization of Time Varying Frequency Behaviour using Continuous Measurement Technology. *Hewlett Packard Journal*, February 1989.
- [Wes.,Wic.'93] E. Wesfreid, M. V. Wickerhauser. Etudes des signaux vocaux par ondelettes de Malvar. *Quatorzieme Colloque GRETSI, Juan-Les-Pins*, Septembre 1993.
- [Wic.'94] M. Wickerhauser. Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software. *A. K. Peters Wesley*, 1994.
- [Wic.'96] M.V. Wickerhauser. Custom Wavelet Paket Image Compression Design, *Preprint Washington University*, 1996.
- [Wid.'75] B. Widrow, ş.a. Adaptive Noise Canceling: Principles and Applications, *Proceedings of the International Symposium on Signals and Systems*, vol.63, no.12, December 1977.
- [Wid.,Ste.'85] B. Widrow, S.D. Stearns. Adaptive Signal Processing, *Prentice Hall*, 1985.
- [Wij.,Arm.'96] W. Wijmans, P. Armbruster. Data Compression Techniques for Space Applications. Review of Current ESA/ESTEC Development, *Proceedings of DASIA '96, Rome*, May, 1996.
- [Xia.,Kuo.,Zha.'94] X. G. Xia, C. C. J. Kuo, Z. Zhang. Wavelet Coefficient Computation with Optimal Prefiltering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no.8, pp. 2191-2197, August 1994.
- [Yao.,Cha.'94] M. H. Yaou, W. T. Chang. M-Ary Wavelet transform and Formulation for Perfect Reconstruction in M-Band Filter Bank. *IEEE Transactions on Signal Processing*, pp.3508-3512, vol. 42, No.12, December 1994.

- [Zha.,Des.,Pen.'96] X.-P. Zhang, M. D. Dessai, Y.-N. Peng. Orthogonal Complex Filter Banks and Wavelets: Some Properties and Design. *Preprint University of Texas at San-Antonio*, 1996.
- [Zho.,Cai,Zha.'95] D. Zhou, W. Cai, W. Zhang. An Adaptive Wavelet Method for Nonlinear Circuit Simulation, preprint *University of North Carolina*, 1995.
- [Zho.,Cai.'95] D. Zhou, W. Cai. A Fast Wavelet Collocation Method for High-speed Circuits Simulation, preprint *University of North Carolina*, 1995.