UNIVERSITATEA "**POLITEHNICA**" TIMIŞOARA
FACULTATEA DE MECANICĂ
CATEDRA DE REZISTENŢA MATERIALELOR

ING. MARŞAVINA LIVIU

TEZA DE DOCTORAT

METODE NUMERICE UTILIZATE ÎN CALCULUL PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII

CONDUCĂTORI ŞTIINŢIFICI:
PROF.DR.ING. BOLEANŢU LAZĂR
PROF.DR.ING. BABEU TIBERIU

1998

CUVÂNT ÎNAINTE

Această lucrare reprezintă o sinteză a activității de cercetare, depusă de autor, în domeniul utilizării metodelor numerice pentru calculul parametrilor din Mecanica ruperii.

Pe această cale doresc să aduc un omagiu regretatului Prof. Dr. Ing. Lazăr Boleanțu , cel care mi-a fost mai întâi dascăl la cursul de Rezistența Materialelor, iar apoi m-a îndrumat cu profesionalism, în calitate de conducător științific, spre domeniul atât de interesant al Mecanicii ruperii materialelor. Sfaturile sale generatoare de optimism și încredere m-au ajutat pe parcursul elaborării tezei.

Doresc să aduc mulțumirile mele domnului Prof. Dr. Ing. Babeu Tiberiu - membru al Academiei de Științe Tehnice a României, actualul conducător al tezei de doctorat, pentru încurajările și sprijinul acordat în vederea finalizării acestei lucrări. Îi mulțumesc de asemenea pentru faptul că de când am venit la Catedra de Rezistența Materialelor a fost mereu alături de mine, având înțelegerea și răbdarea să mă sfătuiască și să mă ajute ori de câte ori a fost nevoie.

Mulțumesc domnului Prof. Dr. Ing. Dumitru Ion, care cu pasiune și pricepere m-a ajutat la realizarea părții experimentale a acestei lucrări. Faptul că am lucrat împreună la câteva contracte de cercetare, mi-a deschis noi perspective privind aplicarea conceptelor Mecanicii ruperii și utilizarea metodelor numerice pentru estimarea durabilității utilajelor grele.

Le mulțumesc tuturor colegilor de la Catedra de Rezistența Materialelor a Universității POLITEHNICA din Timișoara pentru sprijinul acordat pe parcursul elaborării tezei.

Gândurile mele de mulțumire se îndreaptă spre domnul Prof. Dr. Ing. Mircea Rațiu, care cu deosebită bunăvoință mi-a dat sfaturi prețioase privind alcătuirea acestei lucrări și mi-a pus la dispoziție o bogată bibliografie în domeniul Mecanicii ruperii.

Mulțumesc domnului Prof. Dr. Ing. Iliescu Nicolae de la Universitatea POLITEHNICA din București pentru sugestiile privind determinarea experimentală a factorului de intensitate a tensiunii, primite în timpul cursului postuniversitar de Tensometrie absolvit în 1994 la București.

Exprim mulțumire domnului Prof. Dr. Ing. Mihail Hărdău de la Universitatea Tehnică Cluj-Napoca pentru sfaturile și încurajările pe care mi le-a adresat de fiecare dată când a avut ocazia.

Doresc să exprim cele mai calde mulțumiri pentru sprijinul moral și material familiei mele, căreia îi dedic această teză de doctorat.

ing. Liviu Marșavina

CUPRINS

LISTA PRINCIPALELOR NOTAŢII UTILIZATE

a	lungimea fisurii
$\mathcal{A}$	funcţia de tensiune a lui Airy
A_n	alungirea la rupere
b, h	dimensiuni
B	grosimea epruvetei
B_I, B_{II}, B_{III}	singularitate tip Buekner corespunzătoare modului I, II repectiv III de deplasare a flancurilor fisurii
[B]	matricea de transformare a deplasării în deformaţii specifice
cor	coeficentul de corelaţie
C	coeficentul din Legea lui Paris
C_{ij}	coeficient de complianţă
{d}	vectorul deplasărilor nodale
da/dN	viteza de propagare a fisurii
er.s.e.	eroarea standard a estimării
E	modul de elasticitate longitudinal
[E]	matricea constantelor elastice
f	factor adimensional de intensitate a tensiunii, funcţie de geometria şi încărcările corpului fisurat
f_σ	valoarea benzii
F	forţă, încărcare
F_{max}	forţa maximă
{f}	vectorul deplasare
G	modul de elasticitate transversal
$\mathcal{G}$	forţa de extensie a fisurii
h(a)	funcţie de pondere
J	integrala de contur J
[J]	matricea transformării coordonatelor
k	ordinul benzii
k_t	coeficent de concentrare a tensiunilor
K_I, K_{II}, K_{III}	factorul de intensitate a tensiunii corespunzător modului I, II respectiv III de deplasare a flancurilor fisurii
K_{IC}	factorul critic de intensitate a tensiunii, tenacitate la rupere
K_{IV}	tenacitate la rupere determinată pe epruvete Chevron
KV	energia consumată la rupere la încercarea de încovoiere prin şoc pe epruvete cu crestătură în V
[k]	matricea de rigiditate a elementului finit
[K]	matricea de rigiditate a structurii
n	exponentul din Legea lui Paris
N_C	număr de cicluri

$\{N\}$	matricea funcţiilor de formă
r_p	raza zonei plastice create la vârful fisurii
R	raza orificiului circular
Rd	coeficentul de determinare
R_m	rezistenţa la rupere
R_e	limita de curgere aparentă
$R_{p0,2}$	limita de curgere convenţională
Rs	coeficent de asimetrie a ciclului
$[R]$	vectorul încărcărilor
T	temperatura de încercare
u, v, w	deplasările după direcţiile x, y, z
U	energia specifică de deformaţie
z	variabilă complexă
$Z(z)$	funcţia complexă de tensiune Westergaard
Z	gâtuirea la rupere
(x, y, z)	sistemul cartezian de coordonate
(r, θ)	sistemul polar de coordonate
β	unghiul de înclinare al fisurii
δ	deplasarea de deschidere la vârful fisurii
$\{\varepsilon\}$	vectorul deformaţiilor specifice
ΔK_I	variaţia factorului de intensitate a tensiunii
ε	deformaţie specifică
$\varphi(z), \psi(z)$	funcţii de variabilă complexă
ν	coeficentul de contracţie transversală
λ	coeficentul de ecruisare
σ	tensiune normală
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	componentele tensorului tensiunii
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	tensiuni principale
σ_C	tensiunea de curgere
$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$	tensiuni exprimate în coordonate polare
$\{\sigma\}$	vectorul tensiunilor
τ	tensiune tangenţială
τ_m	tensiune tangenţială maximă
(ξ, η)	sistemul de coordonate naturale al elementelor finite izoparametrice

CAPITOLUL 1
STADIUL ACTUAL AL UTILIZĂRII METODELOR NUMERICE PENTRU CALCULUL PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII

1.1 INTRODUCERE

Ruperea este un proces complex de deformare care produce distrugerea completă într-o anumită secţiune a continuităţii unui corp solid, [6]. În urma fenomenului de rupere se separă regiuni ale materialului, iar capacitatea portantă a structurii descreşte sub acţiunea diverselor încărcări, putându-se ajunge la distrugerea parţială sau totală a structurii.

La ora actuală pe plan mondial se utilizează conceptul de "*evaluarea a încrederii în structură*", la majoritatea aplicaţiilor practice de la structurile utilizate în industria nucleară (recipienţi şi tuburi sub presiune), până la structurile de rezistenţă de tipul construcţiilor metalice (poduri, utilaje grele, etc).

Evaluarea siguranţei în exploatare a elementelor de rezistenţă necesită o abordare care să ţină cont de defectele şi neomogenităţile materialului, de acumularea defectelor datorată solicitărilor variabile în timp, de iniţierea şi propagarea fisurilor, deci o abordare pe baza principiilor **Mecanicii ruperii materialelor**. Pornind de la aceste aspecte în Figura 1.1.1 am căutat să schiţez etapele necesare în vederea *evaluării siguranţei în exploatare a elementelor de rezistenţă*.

Se observă că în prima etapă este necesară determinarea caracteristicilor de material, o analiză a încărcărilor şi determinarea dimensiunilor defectelor. Pe lângă caracteristicile de material clasice: limita de curgere σ_C, $\mathbf{R_{p0,2}}$; rezistenţa la rupere $\mathbf{R_m}$; alungirea la rupere $\mathbf{A_n}$; gâtuirea la rupere **Z**; rezilienţa **KV** etc, este necesară determinarea caracteristicilor de material din punct de vedere a Mecanicii ruperii, adică a tenacitatăţilor la rupere a materialului: $\mathbf{K_{IC}}$ - factorul critic de intensitate a tensiunii); δ_C - deplasarea critică la deschidere a fisurii; $\mathbf{J_{IC}}$ - integrala critică de contur; $\mathbf{r_p}$ - raza zonei plastice formate la vârful fisurii, etc. Metodele experimentale pentru determinarea tenacităţilor la rupere au fost prezentate pe larg în [M15]

Pentru a realiza un studiu cât mai precis trebuiesc considerate condiţiile reale în care lucrează elementul de rezistenţă (efectul variaţiilor de temperatură, a mediilor corozive, etc)

Determinarea dimensiunilor defectelor se face utilizând o metodă nedistructivă, ca de exemplu emisia acustică sau ultrasunete.

Etapa a doua constă în analiza numerică şi experimentală a tensiunilor, deformaţiilor şi a parametrilor din Mecanica ruperii (factorii de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$, $\mathbf{K_{II}}$, $\mathbf{K_{III}}$, deplasarea la deschidere a fisurii δ, integrala de contur $\mathbf{J_I}$). Această etapă este deosebit de importantă deoarece complexitatea geometrică a elementelor de rezistenţă şi interacţiunea diferitelor încărcări impun determinarea numerică sau experimentală a parametrilor de Mecanica ruperii, soluţiile analitice existente fiind inoperante în cazurile de complexitate mare. În [M16] am prezentat modul de determinare a parametrilor de Mecanica ruperii folosind trei dintre cele mai utilizate metode experimentale: fotoelasticimetria, tensometria electrică rezistivă şi metoda causticelor.

După aceste prime două etape se pot trage concluzii privind starea de tensiune şi deformaţie din elementul de rezistenţă; se pun în evidenţă zonele cu concentrări puternice ale tensiunii, zone în care se urmăreşte în timpul exploatării, prin metode nedistructive apariţia unor fisuri şi dezvoltarea acestora în timp; se poate face o primă evaluare privind posibilitatea ruperii fragile a elementului de rezistenţă, pe baza criteriilor Mecanicii ruperii. Astfel dacă parametrii determinaţi numeric sau experimental: $\mathbf{K_I}$ - pentru materiale cu comportare liniar-elastică, respectiv δ şi $\mathbf{J_I}$ - pentru materiale cu comportare elasto-plastică ating sau depăşesc valoarea tenacităţii la rupere se produce ruperea instabilă a elementului de rezistenţă.

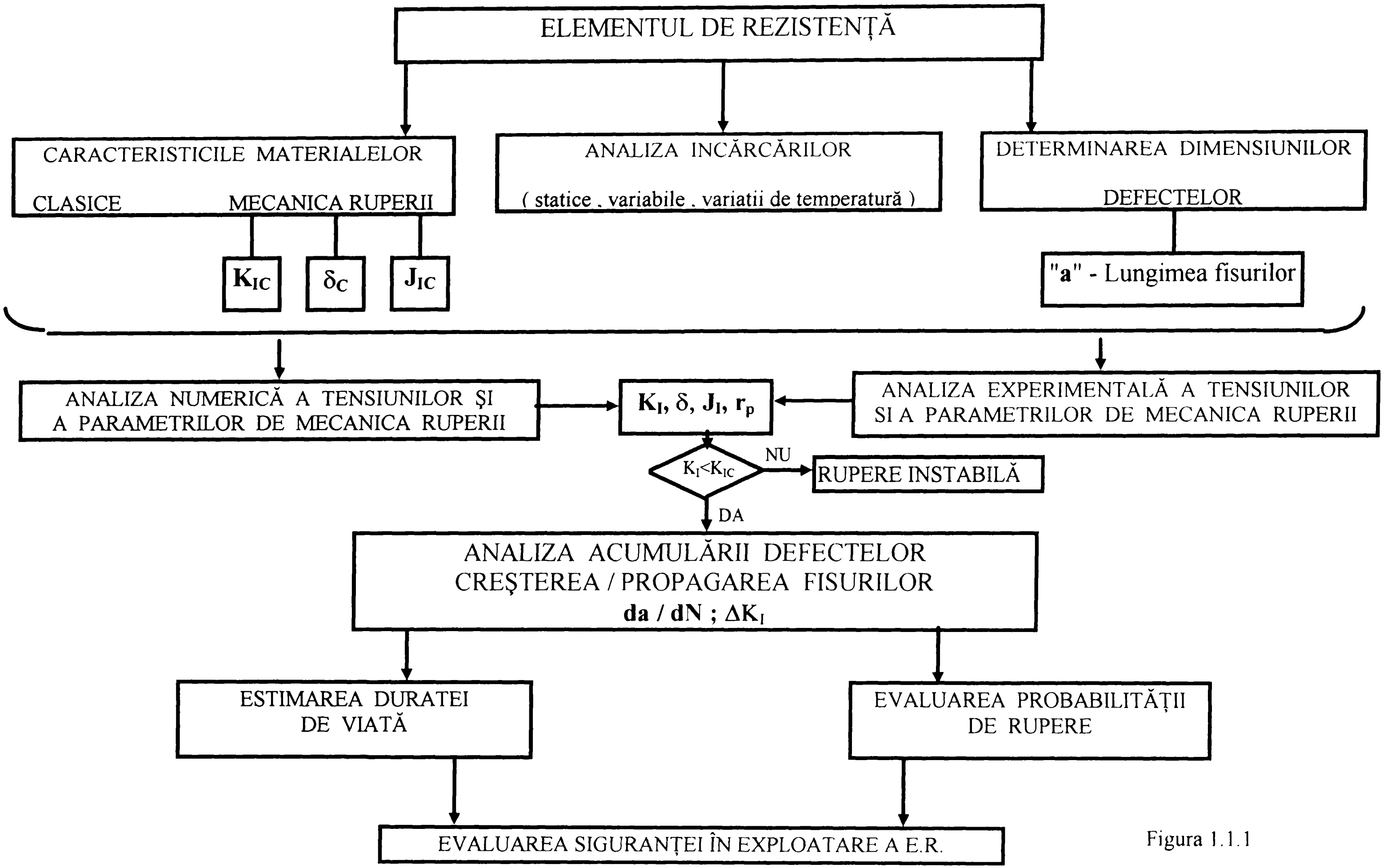

ELEMENTUL DE REZISTENȚĂ
CARACTERISTICILE MATERIALELOR
CLASICE
MECANICA RUPERII
K_{IC}
δ_C
J_{IC}
ANALIZA INCĂRCĂRILOR
(statice . variabile . variatii de temperatură)
DETERMINAREA DIMENSIUNILOR DEFECTELOR
"a" - Lungimea fisurilor
ANALIZA NUMERICĂ A TENSIUNILOR ŞI A PARAMETRILOR DE MECANICA RUPERII
K_I, δ, J_I, r_p
ANALIZA EXPERIMENTALĂ A TENSIUNILOR SI A PARAMETRILOR DE MECANICA RUPERII
$K_I<K_{IC}$
NU
RUPERE INSTABILĂ
DA
ANALIZA ACUMULĂRII DEFECTELOR
CREŞTEREA / PROPAGAREA FISURILOR
da / dN ; ΔK_I
ESTIMAREA DURATEI DE VIAȚĂ
EVALUAREA PROBABILITĂȚII DE RUPERE
EVALUAREA SIGURANȚEI ÎN EXPLOATARE A E.R.

Figura 1.1.1

Astfel aplicând criteriul de rezistență a mediilor elastice cu fisuri, exprimat prin factorul de intensitate a tensiunii, dacă:

$\mathbf{K_I < K_{IC}}$ nu se produce ruperea instabilă a elementului de rezistență,

iar dacă:

$\mathbf{K_I \geq K_{IC}}$ se produce ruperea instabilă a elementului de rezistență.

În următoarea etapă trebuie studiată acumularea defectelor, creşterea şi propagarea fisurilor sub acțiunea ciclurilor de solicitare. Parametrii caracteristici în această etapă sunt viteza de creştere a fisurii sub acțiunea ciclurilor de solicitare $\mathbf{\frac{da}{dN}}$ şi variația factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{\Delta K}$.

Pe baza rezultatelor obținute se pot trage concluzii privind numărul de cicluri până la rupere $\mathbf{N_C}$, lungimea critică a fisurii de la care se produce ruperea instabilă $\mathbf{a_C}$, adică se estimează *durata de viață a elementului de rezistență* sau apelând la un model probabilistic se poate evalua *probabilitatea de rupere a elementului de rezistență.*În final se face *evaluarea siguranței în exploatare a elementului de rezistență.*

Aşa cum se observă din Figura 1.1.1 metodele numerice pentru calculul parametrilor de Mecanica ruperii au un loc bine definit în cadrul *evaluării siguranței în exploatare a elementelor de rezistență.* Mai mult la ora actuală s-au dezvoltat programe ce utilizează metode numerice pentru calculul vitezei de propagare a fisurii $\mathbf{\frac{da}{dN}}$, a numărului de cicluri până la rupere $\mathbf{N_C}$ respectiv a lungimii critice a fisurii $\mathbf{a_C}$.

1.2 STADIUL ACTUAL AL UTILIZĂRII METODELOR NUMERICE PENTRU CALCULUL PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII

Creşterea performanțelor calculatoarelor electronice a facilitat dezvoltarea unor metode noi pentru calculul structurilor. Astfel s-a dezvoltat în ultimii 30 de ani o nouă disciplină numită în limba engleză "**Computational Mechanics**", concept introdus de Argyris [A6], care este de fapt o sinteză a mai multor discipline cu caracter teoretic şi practic dintre care trebuie amintite: mecanica teoretică şi aplicată, rezistența materialelor, teoria elasticității şi plasticității, matematica aplicată şi teoria aproximării, analiza numerică şi programarea calculatoarelor. O ramură a acestei noi discipline se numeşte "Computational Fracture Mechanics", adică în traducere Mecanica ruperii computațională, care se ocupă de modelarea şi analiza numerică a problemelor care prezintă discontinuități geometrice de forma fisurilor.

Pentru a vedea interesul manifestat pe plan mondial față de această nouă ramură, am căutat conexiunile pentru "Computational Fracture Mechanics" în rețeaua internațională de calculatoare **INTERNET**. Rezultatul căutării a fost de peste 45.000 de adrese, dintre acestea o mare parte au fost adresele principalelor universități americane Berkeley, Cornell University, Clarkson University, Lehigh University, Kansas State University, University of Illinois, etc şi ale celor mai importante institute şi laboratoare de cercetare americane (de exemplu laboratorul NASA de la Langley), dar şi ale unor universități europene de tradiție Oxford University, University of Glasgow, Wessex Institute of Technology, etc.

Cu ajutorul acestei imense resurse de informații, care este INTERNET-ul, am reuşit să constat care este nivelul actual al cercetărilor privind utilizarea metodelor numerice pentru calculul parametrilor din Mecanica ruperii. Principalele tendințe în acest sens sunt:

- utilizarea metodelor numerice pentru elaborarea unor programe cât mai performante de calcul a parametrilor de Mecanica ruperii;

- determinarea prin analiză numerică a unor soluţii pentru calculul parametrilor de rupere şi sintetizarea acestor soluţii sub forma unor baze de date care sunt puse la dispoziţia proiectanţilor şi a inginerilor, care exploatează elemente şi structuri de rezistenţă pentru efectuarea controlului în serviciu;

- Metoda Elementului Finit (MEF) este cea mai utilizată dintre metodele numerice de calcul a parametrilor din Mecanica ruperii. Totuşi la unele aplicaţii este mai eficentă utilizarea Metodei Elementelor de Frontieră (MEFr), deoarece dimensiunea problemei se reduce cu o unitate.

- calculul numeric al parametrilor din Mecanica ruperii se aplică elementelor de rezistenţă din domeniul aerospaţial şi aeronautic, din centralele nucleare şi termoelectrice, construcţiile metalice, maşinilor şi utilajelor grele din industriile constructoare de maşini, mineritului, la utilajele chimice etc.

Metoda elementelor de frontieră [P11], [P12] impune discretizarea numai a conturului domeniului problema devenind una de frontieră, care se împarte în elemente de frontieră pe care se pot aplica diferite procedee de aproximare. Construcţia ecuaţiilor integrale pe frontieră se poate face prin diferite metode în elastostatică, dintre care trebuiesc menţionate metoda singularităţilor, bazată pe teoria dislocaţiilor; metoda reziduului ponderat; metoda bazată pe formulele lui Green sau metoda bazată pe teoremele de reciprocitate ale lui Betti.

Avantajele Metodei elementelor de frontieră faţă de Metoda elementelor finite sunt:

- necesitatea discretizării numai a conturului, ceea ce duce la scăderea cu o unitate a dimensiunii problemei;

- este mult mai simplu de aplicat, deoarece nu necesită multă experienţă pentru discretizarea conturului, ca în cazul MEF;

- se obţine o precizie ridicată cu un timp de calcul mai redus;

- se pretează la determinarea concentrărilor de tensiune;

- prezintă simplitate la rezolvarea problemelor infinite;

- datele de intrare într-un program de calcul bazat pe MEFr sunt mult mai puţine decât în cazul unui program scris pe baza MEF;

- programele elaborate pe baza MEFr necesită la rulare o memorie internă mai mică în raport cu programele bazate pe MEF;

- interpretarea rezultatelor este mai simplă la MEFr;

- este mai eficentă în cazul rezolvării problemelor infinite, a problemelor de contact pe suprafeţe mici sau a problemelor elasto-dinamice.

- prezintă simplitate includerea programelor bazate pe MEFr într-un sistem de proiectare asistată de calculator.

Dintre dezavantajele acestei metode în raport cu MEF trebuiesc amintite:

- necesitatea determinării soluţiilor fundamentale ale problemei;

- proprietăţile materialelor trebuie să fie constante pe subdomenii;

- rezolvarea dificilă a problemelor neliniare;

- nu este economică utilizarea MEFr în cazul problemelor bidimensionale cu suprafeţe mari, respectiv a problemelor tridimensionale cu volum mare, deoarece rezultă o matrice nesimetrică de dimensiuni mari;

- matricea coeficenţilor de influenţă rezultată este nesimetrică, iar dimensiunile ei depind de modul de rezolvare.

Trebuie subliniat faptul că Metoda elementelor de frontieră şi Metoda elementelor finite nu se exclud reciproc, ci dimpotrivă ele se completează, putând fi cuplate într-un singur program de calcul pentru îmbinarea avantajelor fiecăreia dintre ele. Un astfel de program a fost elaborat de cercetătorii de la Wessex Institute of Technology şi se numeşte **BEASY**. Acest program conţine un modul performant pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii: factorii de intensitate a tensiunii, direcţia de propagare a fisurii şi viteza de creştere a fisurii sub acţiunea solicitărilor variabile în timp.

Aplicaţii ale utilizării MEFr pentru calculul parametrilor de Mecanica ruperii sunt prezentate în lucrările [B23], [Y3].

Metoda elementelor finite continuă să fie preferată pentru calculul parametrilor de Mecanica ruperii, motiv pentru care ea va fi tratată detaliat în Capitolul 3 al acestei teze.

1.3 PROGRAME UTILIZATE PENTRU CALCUL PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII

Dată fiind complexitatea problemelor în care apar discontinuităţi geometrice de forma fisurilor, determinarea analitică a stării de tensiune şi deformaţie, precum şi a parametrilor caracteristici Mecanicii ruperii (factorul de intensitate a tensiunii **K**, integrala de contur **J**, etc), se poate face doar într-un număr limitat de cazuri, luând în considerare unele ipoteze simplificatoare.

Pentru evaluarea parametrilor de Mecanica ruperii, la valori cât mai apropiate de situaţia reală s-au dezvoltat programe de calcul automat. În general, aceste programe sunt realizate pe baza Metodei elementelor finite sau pe baza Metodei elementelor de contur.

La ora actuală programele de analiză cu elemente finite utilizate în aplicaţiile de Mecanica Ruperii se împart în:

* Programe generale de analiză cu elemente finite, care pe lângă analiza numerică a tensiunilor au posibilitatea definirii unor fisuri, programul calculând apoi parametri caracteristici Mecanicii ruperii. Aceste programe sunt:

- **ADINA**, specializat pe analiză cu elemente finite în domeniul elasto-plastic, calculând integrala **J**, dar având şi opţiuni de modelare a propagării fisurii sub acţiunea solicitărilor variabile.

- **NASTRAN - PATRAN,** care permite determinarea factorului de intensitate a tensiunii **K** în domeniul liniar-elastic dar şi a integralei **J** în domeniul elasto-plastic. Modulul **PATRAN** permite estimarea duratei totale de viaţă prin calculul duratei pentru iniţierea fisurii, respectiv a duratei de propagare a fisurii pâna la rupere.

- **ABAQUS**, care poate fi utilizat atât în domeniul liniar-elastic cât şi în domeniul elasto-plastic. Programul poate lua în considerare efectele neliniare şi tranzitorii ce apar în timpul şocurilor termice, având şi un modul pentru studiul transferului de căldură şi a tensiunilor produse variaţii de temperatură.

- **NISA,** care este un program ce conţine un modul foarte performant pentru calculul parametrilor din Mecanicii ruperii liniar-elastice şi elasto-plastice, ce lucrează doar pe staţii grafice.

Toate aceste programe necesită resurse "hard" (spaţiu pe disc şi memorie) foarte mari şi ele nu rulează decât pe staţii grafice sub sistemul de operare UNIX.

* Programe specializate de analiză cu elemente finite a problemelor cu discontinuităţi geometrice de tipul fisurilor. Dintre acestea trebuie amintite:

- programul **WARP3D**, elaborat de Computational Fracture Mechanics Group de la University of Illinoys at Urbana-Champaign sub conducerea prof. R.H. Dodds, care este un program de analiză cu elemente finite specializat pentru calculul structurilor tridimensionale supuse solicitărilor statice sau dinamice; el permite calculul în domeniul liniar-elastic, în domeniul elasto-plastic (calculează integrala **J**), dar şi studiul creşterii fisurii. Programul rulează în sistemul de operare UNIX implementat doar pe staţii grafice CRAY, HP 9000, IBM RISC 6000, Silicon Graphics

- programul **ZIP3D,** dezvoltat la University of Georgia, este un program avansat de analiză cu elemente finite a corpurilor tridimensionale fisurate; calculul fiind posibil în domeniul liniar elastic (factorul de intensitate a tensiunii **K** prin metoda extensiei virtuale a fisurii) sau elasto-plastic (integrala **J** şi deplasarae de deschidere la vârful fisurii δ). Programul calculează parametrii de Mecanica ruperii în cazul modurilor mixte de rupere. Acest program rulează doar pe platforme CRAY.

- programul **FRANC3D**, dezvoltat de un grup de cercetători de la Cornell University având autori principali pe A.R. Ingraffea şi P. Wawrzynek, care este un program pentru calculul factorilor de intensitate a tensiunii la corpuri tridimensionale cu fisuri, în domeniul liniar-elastic. Programul are un modul care permite analiza cu elemente finite a propagării fisurilor. Programul **FRANC3D** are versiuni care rulează pe staţii grafice Silicon Graphics, Dec Alpha, IBM RISC6000 şi HP.

- programul **FRANC2DL**, este o variantă bidimensională a programului **FRANC3D**, dezvoltată la Kansas State University de prof. D. Swenson. Este singurul program din această categorie care are o versiune pe 32 biţi şi poate rula în sistemul de operare WINDOWS '95, pe un calculator personal PC, necesitând un procesor cu frecvenţă de minimum 133 MHz şi o memorie de 16 MRAM. Programul permite calculul: factorilor de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ şi $\mathbf{K_{II}}$, forţei de extensie a fisurii $\mathcal{G}_I$ şi $\mathcal{G}_{II}$ şi integralelor de contur $\mathbf{J_I}$ şi $\mathbf{J_{II}}$ la elemenete de rezistenţă plane cu fisuri, solicitate în domeniul liniar-elastic. O facilitate suplimentară a programului este că permite calculul structurilor plane multistrat cu fisuri. Programul **FRANC2DL** permite şi estimarea direcţiei de propagare a unei fisuri şi trasează variaţia factorului de intensitate a tensiunii în funcţie de lungimea fisurii, în cazul propagării acesteia prin oboseală.

*Alte programe pentru calculul parametrilor de Mecanica ruperii pe baza soluţiilor analitice:

- programul **NASRAC** (relizat de specialiştii de la NASA Marshall Space Flight Center) este unul din primele programe de calcul a parametrilor de Mecanica ruperii şi a propagării fisurii, [H4]. El are posibilitatea calculului parametilor caracteristici mediilor liniar-elastice cu fisuri (factorului de intensitate a tensiunii **K**), mediilor elasto-plastice cu fisuri (integrala **J**, modulul de rupere **T**), determinarea vitezei de creştere a fisurii sub acţiunea ciclurilor de oboseală **da/dN.** Programul conţine peste 30 de geometrii pentru care se pot calcula parametrii de Mecanica ruperii, pentru creşterea fisurii dispune de 7 modele diferite, are posibilitatea de a lua în considerare fenomenul de retardare la creşterea fisurii şi poate fi utilizat la studiul acumulării defectelor.

- programul **VATTPACK**, care determină parametrii de rupere **K** şi **J** pentru plăci, învelişuri subţiri, tuburi, recipiente care conţin defecte de suprafaţă sau interioare şi sunt supuse unor şocuri termice. Programul a fost elaborat de specialişitii de la ABB Impell, din care a făcut parte şi prof. dr. ing. M. Raţiu.

- programul **ENDURE**, elaborat de Engineering Mechanics Research Center, este un program care permite analiza parametrilor de rupere şi a duratei de viaţă a structurilor. Programul conţine mai multe modele pentru a stabili iniţierea fisurii, precum şi pentru estimarea propagării fisurii. Permite calculul factorului de intensitate a tensiunii **K**, a forţei de extensie a fisurii $\mathcal{G}$, a integralei **J** sau deplasării de deschidere a fisurii δ, pentru o serie de modele de geometrii cu fisuri care pot fi supuse la diferite tipuri de încărcări, dintre care trebuie menţionate încărcări dinamice şi aleatoare. Acest program rulează sub sistem Unix pe staţii grafice.

- programul **FASTRAN II,** elaborat la NASA Langley Research Center, pentru calculul propagării prin oboseală a fisurilor. Astfel selectând una din cele 17 modele de geometrii fisurate şi definind ciclul de solicitare care poate fi cu amplitudine constantă, cu amplitudine variabilă sau spectrul solicitării, programul trasând viteza de creştere a fisurii **da/dN** în funcţie de variaţia factorului de intentensitate a tensiunii $\Delta\mathbf{K_I}$, respectiv variaţia numărului de cicluri $\mathbf{N_C}$ în funcţie de lungimea fisurii **a.** Programul ia în considerare efectele de curgere de la vârful

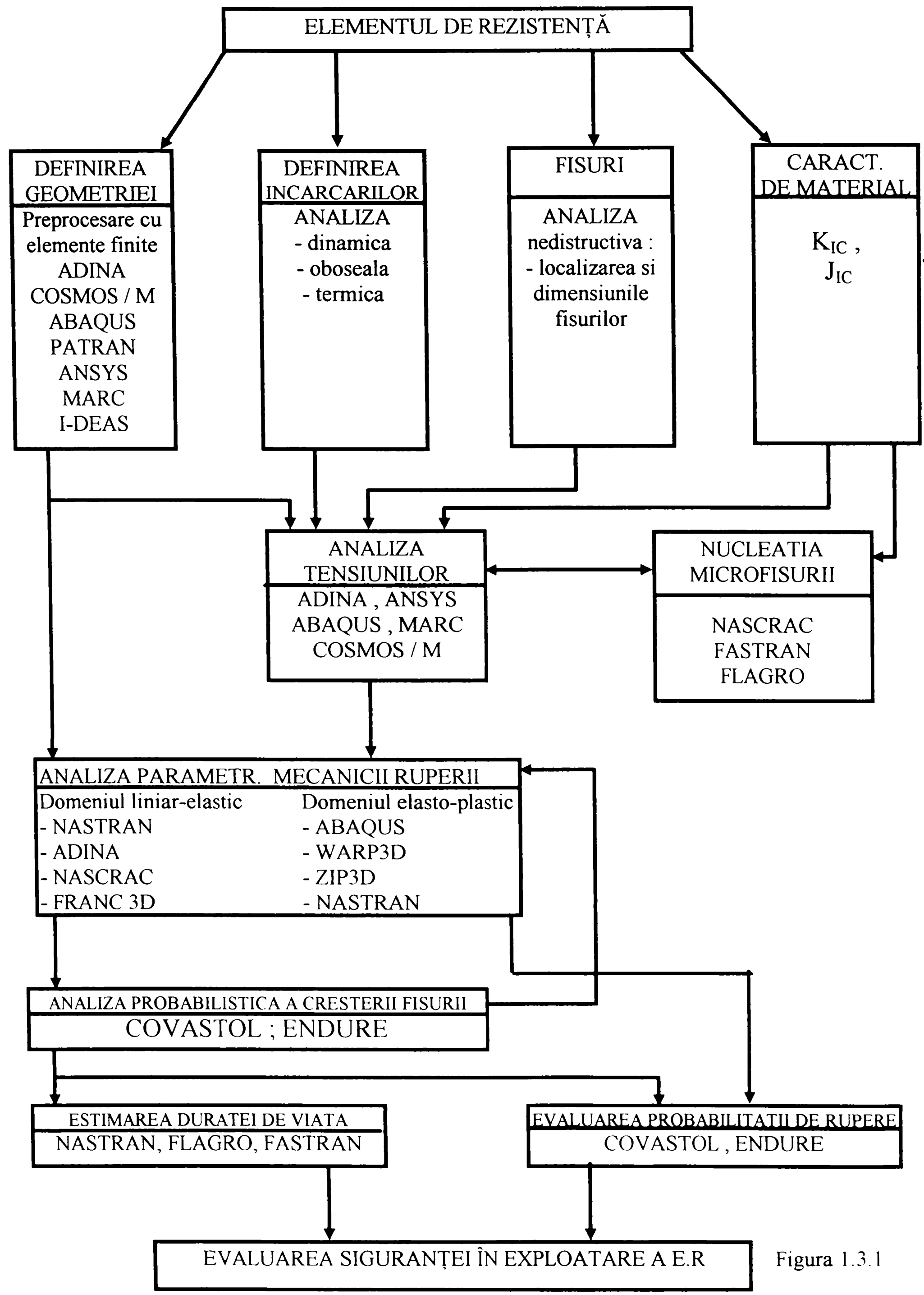

ELEMENTUL DE REZISTENȚĂ
DEFINIREA GEOMETRIEI
Preprocesare cu elemente finite
ADINA
COSMOS / M
ABAQUS
PATRAN
ANSYS
MARC
I-DEAS
DEFINIREA INCARCARILOR
ANALIZA
- dinamica
- oboseala
- termica
FISURI
ANALIZA nedistructiva :
- localizarea si dimensiunile fisurilor
CARACT. DE MATERIAL
K_{IC} ,
J_{IC}
ANALIZA TENSIUNILOR
ADINA , ANSYS
ABAQUS , MARC
COSMOS / M
NUCLEATIA MICROFISURII
NASCRAC
FASTRAN
FLAGRO
ANALIZA PARAMETR. MECANICII RUPERII
Domeniul liniar-elastic
- NASTRAN
- ADINA
- NASCRAC
- FRANC 3D
Domeniul elasto-plastic
- ABAQUS
- WARP3D
- ZIP3D
- NASTRAN
ANALIZA PROBABILISTICA A CRESTERII FISURII
COVASTOL ; ENDURE
ESTIMAREA DURATEI DE VIATA
NASTRAN, FLAGRO, FASTRAN
EVALUAREA PROBABILITATII DE RUPERE
COVASTOL , ENDURE
EVALUAREA SIGURANȚEI ÎN EXPLOATARE A E.R

Figura 1.3.1

fisurii, precum şi fenomenele de retardare sau accelerare propagării fisurii în cazul încărcărilor cu amplitudine variabilă.

- programul **NASA/FLAGRO**, realizat de specialiştii de la NASA Lockheed Engineering & Sciences Co., este un program pentru calculul duratei de viaţă a unei structuri şi a dimensiunilor critice ale unei fisuri, dimensiuni la care se produce ruperea instabilă. Programul conţine o bază de date cuprinzând soluţii cu factorul de intensitate a tensiunii pentru diferite geometrii cu fisuri şi o bază de date cuprinzând caracteristicile de material: limita de curgere σ_C, rezistenţa la rupere $\mathbf{R_m}$ şi tenacitatea la rupere $\mathbf{K_{IC}}$ pentru cele mai utilizate materiale (oţeluri, aliaje de aluminiu, etc).

- programul **COVASTOL** program specializat în analiza probabilistică a creşterii fisurii, estimarea duratei de viaţă şi evaluarea probabilităţii de rupere.

În cazul în care nu se dispune de un program care să permită calculul parametrilor de Mecanica ruperii, pentru determinarea acestora se poate utiliza un program general de analiză cu elemente finite (COSMOS/M, ANSYS, ALGOR, I-DEAS etc), în care se modelează discontinuitatea geometrică, urmând ca evaluarea parametrilor de rupere să se facă pe baza datelor de ieşire obţinute în urma rulării programului (tensiuni, deplasări, energie de deformaţie).

Trebuie menţionat că toate aceste programe sunt realizate de institute specializate de SOFT şi ele reprezintă munca a zeci de specialişti în matematică, informatică, programare şi inginerie. De asemenea trebuie subliniat faptul că aceste programe se află într-o continuă modernizare şi diversificare.

Pentru a avea o vedere generală a utilizării programelor de calcul la diferite nivele ale *evaluarii siguranţei în exploatare a elementelor de rezistenţă*, se va relua ordinograma prezentată în paragraful 1.1 printr-o prezentare din punct de vedere a programelor de calcul, Figura 1.3.1.

În concluzie la ora actuală la îndemâna inginerilor există o mare diversitate de programe, bazate pe analiza numerică, pentru calculul parametrilor din Mecanica ruperii, rolul acestora fiind de a utiliza eficent aceste programe în vederea soluţionării problemelor practice apăute în proiectare şi în exploatare.

Deoarece în prezent programele realizate pe baza Metodei elementelor finite sunt cele mai răpândite, la determinarea parametrilor din Mecanica ruperii am încercat în acestă lucrare să prezint bazele teoretice ale analizei cu elemente finite, aprofundând aspectelor specifice rezolvării problemelor cu fisuri (Capitolul 3). Utilizând MEF s-au obţinut soluţii originale ale factorului de intensitate a tensiunii pentru o platbandă cu crestătură laterală, respectiv pentru o platbandă cu orificiu circular din care se dezvoltă fisuri (Capitolul 4). Soluţiile determinate numeric sunt verificate experimental, prin metoda fotoelasticimetriei în Capitolul 5.

În Capitolul 6 sunt prezentate contribuţiile personale privind estimarea durabilităţii tiranţilor excavatoarelor pe baza principiilor Mecanicii ruperii materialelor. Pentru studiul propagării fisurii, adică pentru a determina numărul de cicluri până la rupere a tiranţilor s-a elaborat un program de calcul bazat pe legea lui Paris de propagare a fisurilor.

În Capitolul 7 se prezintă două dintre programele elaborate de autor. Programul **EXTENS** pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii prin metoda extrapolării tensiunilor, obţinute în urma analizei cu elemente finite şi programul **ProfiK** care reprezintă o bază de date conţinând soluţii ale factorului de intensitate a tensiunii pentru 21 de corpuri finite cu fisuri şi care permite calculul factorului de intensitate a tensiunii.

CAPITOLUL 2
METODE ANALITICE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII

2.1 TENSIUNI ŞI DEFORMAŢII ÎN MEDII ELASTICE CU FISURI

2.1.1 EXPRIMAREA TENSIUNIILOR ŞI DEFORMAŢIILOR FOLOSIND FUNCŢIILE DE VARIABILĂ COMPLEXĂ

Discontinuităţile geometrice de forma fisurilor şi crestăturilor adânci, ascuţite, crează dificultăţi în integrarea ecuaţiilor generale ale teoriei elasticităţii. Pentru a putea determina soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale, una dintre metode are la bază exprimarea tensiunilor şi deformaţiilor prin intermediul unor funcţii de variabilă complexă.

În lucrările [C4], [H1], [P2] s-a arătat că starea de tensiune şi deformaţie poate fi exprimată cu ajutorul funcţiilor de variabilă complexă **φ(z)** şi **ψ(z)**, unde **z = x+iy** reprezintă variabila complexă. Această soluţie, numită soluţia Kolosov-Mushelisvili, se exprimă sub forma:

$$\begin{aligned} \sigma_x + i\ \tau_{xy} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} \\ \sigma_y - i\ \tau_{xy} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \end{aligned} \qquad (2.1.1.1)$$

sau adunând, respectiv scăzând relaţiile (2.1.1.1) se obţine:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2\ [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\ Re\ [\varphi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\ \tau_{xy} &= 2\ [z\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \qquad (2.1.1.2)$$

iar componentele deplasării se pot exprima sub forma:

$$2G(u + iv) = \chi\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \qquad (2.1.1.3)$$

unde σ_x, σ_y, τ_{xy} – componentele tensorului tensiune

u, v – deplasările după direcţiile x, respectiv y

$\varphi(z)$, $\Psi(z)$ – funcţiile de variabilă complexă

χ – un coeficent în funcţie de coeficentul de contracţie transversală υ:

$\chi = 3 - 4\upsilon$ pentru starea plană de deformaţie

$\chi = (3 - \upsilon)/(1 + \upsilon)$ pentru starea plană de tensiune

Dacă se cunosc expresiile funcţiilor de variabilă complexă, **φ(z)** şi **ψ(z)** se pot determina, cu relaţiile (2.1.1.1) - (2.1.1.3), tensiuniile şi deformaţiile. Funcţiile **φ(z)** şi **ψ(z)** sunt funcţii armonice[1] şi analitice[2] pe domeniul R_z simplu conex şi mărginit de conturul C, Figura 2.1.1.1

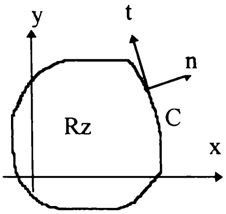


Figura 2.1.1.1

Punând condiţiile pe contur, care iau în considerare valorile particulare pe care le iau tensiunile şi deformaţiile pe anumite suprafeţe, se obţin expresiile funcţiilor complexe:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{F_x + iF_y}{2\pi(1+\chi)}\log z + (B_1 + iC_1)z + \varphi_0(z) \\ \psi(z) &= \frac{\chi(F_x - iF_y)}{2\pi(1+\chi)}\log z + (B_2 + iC_2)z + \psi_0(z) \end{aligned} \qquad (2.1.1.4)$$

unde **B_1, B_2, C_1, C_2** - sunt constante ce depind de starea de tensiune

F_x, F_y - componentele rezultantei tuturor forţelor aplicate pe contururile interioare ale corpului

$\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ - funcţii uniforme şi analitice pe întregul domeniul studiat

Cu ajutorul funcţiilor de variabilă complexă se poate exprima funcţia de tensiune a lui Airy, sub forma dată de Goursat:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}[\bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(z) + X(z) + \bar{X}(z)] \qquad X'(z) = \psi(z) \qquad (2.1.1.5)$$

Funcţia de tensiune Airy verifică ecuaţia biarmonică:

$$\Delta\Delta\mathcal{A} = 0 \qquad (2.1.1.6)$$

şi permite determinarea tensiunilor cu relaţiile.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x \partial y} \qquad (2.1.1.7)$$

---

[1] O funcţie φ uniformă, este armonică pe domeniul R_z dacă satisface ecuaţia lui Laplace $\Delta\varphi = 0$.

[2] O funcţie reală de variabile x şi y este analitică într-un domeniu R_z, dacă pentru orice punct $(x_0,y_0)\in S$ poate fi dezvoltată într-o serie dublă de puteri de forma: $\Sigma(x-x_0)^p(y-y_0)^q$, cu p,q>0

Relaţiile (2.1.1.2) şi (2.1.1.3) se pot exprima şi în coordonate polare (r,θ), cu $z=r\ e^{i\theta}$, sub forma:

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2e^{i\theta}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \\ 2G(u_r + iu_\theta) &= e^{-i\theta}[\chi\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}] \end{aligned} \tag{2.1.1.8}$$

Pentru determinarea funcţiilor complexe $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ şi implicit a stării de tensiune şi deformaţie, din jurul fisurilor, s-au dezvoltat mai multe soluţii. În cele ce urmează se vor analiza câteva dintre acestea.

2.1.2 SOLUŢIA WESTERGAARD

Pentru un corp infinit, aflat în stare plană de deformaţie, având o fisură de lungime **2a**, orientată faţă de sistemul de coordonate conform Figura 2.1.2.1, şi încărcat la infinit cu tensiunea σ, funcţiile complexe $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ se pot exprima prin intermediul unei singure funcţii complexe **Z(z)**, după cum urmează:

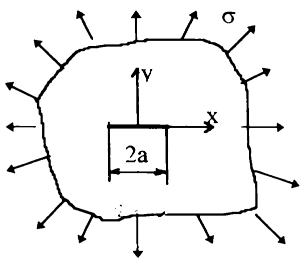


Figura 2.1.2.1

$$\begin{aligned} \varphi(z) \quad & \frac{1}{2}\int Z dz \\ \psi'(z) \quad & B - \frac{1}{2} z Z' \end{aligned} \tag{2.1.2.1}$$

Înlocuind relaţiile (2.1.2.1) în relaţiile (2.1.1.1), în urma efectuării calculelor se obţin componentele tensiunii:

$$\begin{aligned} \sigma_x \quad & ReZ - y\,ImZ' - A \\ \sigma_y \quad & ReZ \cdot y\,I'mZ \quad A \\ \tau_{xy} \quad & -yReZ' \end{aligned} \tag{2.1.2.2}$$

unde **A** este o constantă reală.

Punând condițiile la limită:

- pe conturul fisurii pentru $-a < x < a$ și $y=0$: $\sigma_y=0$, $\tau_{xy}=0$

- la infinit $|z| \to \infty$: $\sigma_x=\alpha\sigma$, $\sigma_y=\sigma$, $\tau_{xy}=0$, α fiind un coeficent

se obține expresia constantei reale **A**:

$$A = \frac{(1-\alpha)}{2}\sigma \tag{2.1.2.3}$$

respectiv expresia funcției de tensiune **Z(z)**:

$$Z(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2-a^2}} - A = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2-a^2}} - \frac{1-\alpha}{2}\sigma \tag{2.1.2.4}$$

Din relația (2.1.2.4) se observă că în cazul tracțiunii monoaxiale $\alpha=0$ iar $A=\sigma/2$, respectiv în cazul tracțiunii biaxiale $\alpha=1$ iar $A=0$.

Dacă se renunță la constanta reală **A,** din relația (2.1.2.4) expresiile tensiunilor σ_y și τ_{xy} rămân nemodificate [C4]. Cum aceste componente ale tensiunii sunt determinante în stabilirea criteriilor de rupere, funcția Westergaard poate fi definită fără această constantă, ce depinde de geometria piesei și de modul de încărcare. În acest context în dezvoltările ulterioare funcția Westergaard se va considera de forma:

$$Z^*(z) = Z(z) + A = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2-a^2}} \tag{2.1.2.5}$$

cu mențiunea că această formă este aplicabilă doar în cazul tracțiunii biaxiale.

Componentele tensiunii și deplasării se pot scrie prin intermediul funcției date de relația (2.1.2.5) după cum urmează:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= Re\,Z^* - y\,Im\,Z^{*'} - 2A \\
\sigma_y &= Re\,Z^* + y\,Im\,Z^{*'} \\
\tau_{xy} &= -y\,Re\,Z^{*'} \\
2Gu &= \frac{\chi-1}{2} Re\int Z^* dz - y\,Im\,Z^* - \frac{\chi+1}{2} A\,x \\
2Gv &= \frac{\chi+1}{2} Im\int Z^* dz - y\,Re\,Z^* + \frac{3-\chi}{2} A\,y
\end{aligned} \tag{2.1.2.6}$$

În concluzie, pentru cazul tracțiunii biaxiale a unui corp infinit având o fisură de lungime **2a**, cunoscând expresia funcției **Z*(z)** se poate determina starea de tensiune și deformație cu relațiile (2.1.2.6). Pentru alte configurații ale corpului fisurat funcția Westergaard $Z(z)$ trebuie determinată.

2.1.3 APROXIMAREA LUI IRWIN

O aproximare satisfăcătoare a distribuției tensiunilor și deformațiilor din vecinătatea vârfului fisurii poate fi obținută exprimând funcția Westergaard sub forma:

$$Z^*(z) = \frac{K}{\sqrt{2\pi z}} \tag{2.1.3.1}$$

unde **z=x+iy** iar mărimea **K** se numește **factor de intensitate a tensiunii** și depinde de încărcare, de geometria piesei și de modul de deschidere a flancurilor fisurii. Con form STAS 1963-81 factorul de intensitate a tensiunii **K**, reprezintă *"valoarea părții principale a singularității câmpului de tensiune într-un corp solid liniar-elastic, la vârful unei discontinuități de forma unei fisuri"* și are expresia:

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \qquad [N / mm^{3/2}] \tag{2.1.3.2}$$

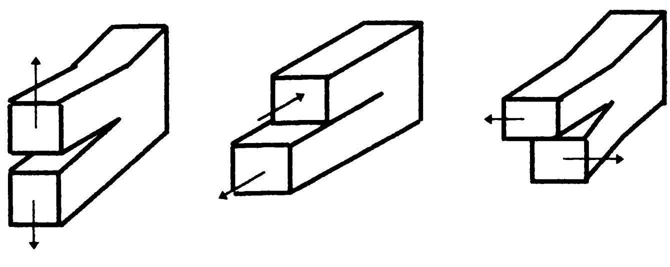
unde σ reprezintă tensiunea de la infinit ce solicită corpul iar a este semilungimea fisurii.

În cazul corpurilor finite de diferite geometrii factorul de intensitate a tensiunii este dat de relația:

$$K = \sigma\sqrt{\pi a}\, f \tag{2.1.3.3}$$

unde f este o funcție de geometria corpului fisurat, numită și factor adimensional de intensitate a tensiunii.

Considerând un corp elastic infinit, aflat în stare plană de deformație, ce conține o fisură de lungime **2a**, alegând sistemul de coordonate cu originea în vârful fisurii și cele trei moduri de deplasare a flancurilor fisurii, Figura 2.1.3.1 prin înlocuirea funcției $\mathbf{Z}^*$ dată de (2.1.3.1) în relațiile (2.1.2.6) se pot calcula tensiunile și deplasările obținându-se:



Modul I **Modul II** **Modul III**

Figura 2.1.3.1

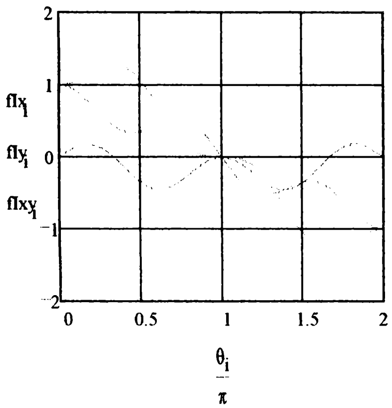


Figura 2.1.3.2

- pentru **Modul I** :

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}[1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}] \\
\sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}[1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}] \\
\sigma_z &= \nu(\sigma_x+\sigma_y) \\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\
\tau_{yz} &= \tau_{zx} = 0 \\
u &= \frac{K_I}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}[1-2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}] \\
v &= \frac{K_I}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}[2-2\nu-\cos^2\frac{\theta}{2}] \\
w &= 0
\end{aligned}
\tag{2.1.3.4}
$$

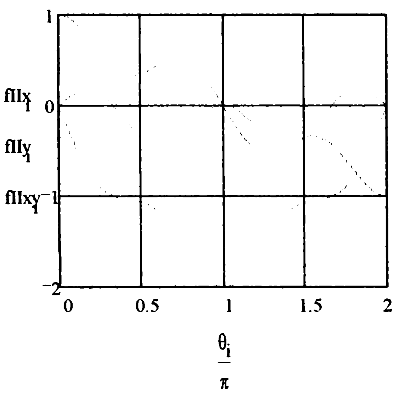


Figura 2.1.3.3

- pentru **Modul II** :

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}[2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}] \\
\sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\
\tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}[1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}] \\
\sigma_z &= \nu(\sigma_x+\sigma_y) \qquad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \\
u &= \frac{K_{II}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}[2-2\nu+\cos^2\frac{\theta}{2}] \\
v &= \frac{K_{II}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}[-1+2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}] \\
w &= 0
\end{aligned}
\tag{2.1.3.5}
$$

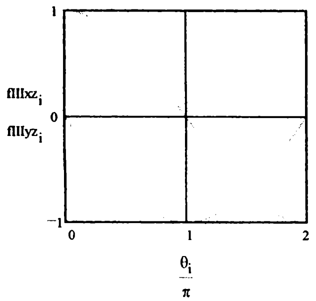


Figura 2.1.3.4

- pentru **Modul III** :

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0\\
&\tau_{zx} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\\
&\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\\
&u = v = 0\\
&w = \frac{K_{III}}{G}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{2.1.3.6}$$

În figurile 2.1.3.2 - 2.1.2.4 s-au reprezentat în MathCAD variațiile funcțiilor **f(θ)** pentru cele trei moduri de deplasare ale flancurilor fisurii corespunzător modurilor I, II şi III.

În cazul modurilor mixte (compuse) de deplasare a flancurilor fisurii tensiunile şi deplasările se pot obține prin suprapunere de efecte, însumând componentele respective.

Soluția Irwin în coordonate polare pentru modul mixt (I + II) de deplasare a flancurilor fisurii are forma dată în [H1]:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}(5\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}) - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}(5\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2})\\
\sigma_\theta &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}(3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}) - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}(3\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2})\\
\tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}(\cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2})
\end{aligned} \tag{2.1.3.7}$$

Din relațiile (2.1.3.4) - (2.1.3.7) se observă că dacă se reuşeşte determinarea factorului de intensitate a tensiunii **K**, prin metode analitice, numerice sau experimental se poate apoi cu uşurință determina câmpul de tensiune şi deformație din jurul fisurii. Trebuie subliniat că soluția Irwin este valabilă doar în vecinătatea vârfului fisurii.

2.1.4 SOLUŢII APROXIMATIVE PRIN DEZVOLTĂRI ÎN SERIE

Williams [W4] prezintă distribuţia tensiunilor şi deplasărilor sub forma unor dezvoltări în serii de puteri a funcţiilor complexe $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$, sub forma:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n/2}$$
$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^{n/2} \qquad (2.1.4.1)$$

constantele $\mathbf{A_n}$, respectiv $\mathbf{B_n}$ se determină în funcţie de condiţiile la limită, de geometrie şi de încărcare.

Înlocuind funcţiile de tensiune $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ în relaţiile Kolosov-Mushelisvili scrise în coordonate polare, (2.1.3.7), pentru cazul unei plăci infinite supusă la tracţiune monoaxială, pe direcţia oy (Figura 2.1.4.1), având o fisură semiinfinită extinsă de-a lungul porţiunii negative a axei ox, se obţin expresiile câmpului de tensiune şi deformaţie, relaţiile (2.1.4.2). Dacă se consideră valabilă aproximarea lui Irwin, adică se exprimă tensiunile şi deplasările doar în vecinătatea vârfului fisurii (z → 0) se poate considera doar primul termen al dezvoltării.

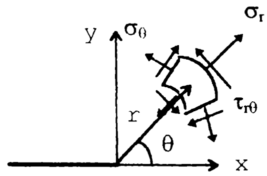


Figura 2.1.4.1

$$\sigma_r = \frac{1}{2\sqrt{r}}\left[(Re\ A_1)(3-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2} - (Im\ A_1)(3\cos\theta - 1)\sin\frac{\theta}{2}\right] + \dots$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2\sqrt{r}}\left[(Re\ A_1)(1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2} + 3(Im\ A_1)\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right] + \dots$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\left[(Re\ A_1)\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - (Im\ A_1)(3\cos\theta - 1)\cos\frac{\theta}{2}\right] + \dots \qquad (2.1.4.2)$$

$$u_r = \frac{\sqrt{r}}{4G}\left[(Re\ A_1)\left[(2\chi-1)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}\right] + (Im\ A_1)\left[(2\chi-1)\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2}\right]\right] + \dots$$

$$u_\theta = \frac{\sqrt{r}}{4G}\left[(Re\ A_1)\left[-(2\chi+1)\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right] + (Im\ A_1)\left[(2\chi+1)\cos\frac{\theta}{2} - 3\cos\frac{3\theta}{2}\right]\right] + \dots$$

Constanta $\mathbf{A_I}$ se determină din condiţiile particulare de încărcare şi ea este în general de forma:

$$A_I = Re\ A_I + i\ Im\ A_I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(K_I - i\ K_{II}) \tag{2.1.4.3}$$

unde $\mathbf{K_I}$, $\mathbf{K_{II}}$ reprezintă factorii de intensitate a tensiunii pentru modul I, respectiv modul II de deplasare a flancurilor fisurii.

În evaluarea numerică a distribuţiei tensiunilor şi deplasărilor din vecinătatea fisurilor, în particular în evaluarea factorului de intensitate a tensiunii s-a dovedit eficace utilizarea exprimării în serie Laurent a funcţiilor complexe $\varphi(\mathbf{z})$ şi $\psi(\mathbf{z})$ sub forma:

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\ z^m + b_m\ z^{-m}) \\ \frac{d\psi'(z)}{dz} &= \frac{C}{2}[c_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(c_m\ z^m + d_m\ z^{-m})] \end{aligned} \tag{2.1.4.4}$$

unde relaţiile între coeficienţii $\mathbf{a_m}$, $\mathbf{b_m}$, $\mathbf{c_m}$ şi $\mathbf{d_m}$ se determină din condiţiile pe contur.

Reprezentarea funcţiilor de tensiune sub forma unor serii de puteri prezintă avantajul că permite determinarea tensiunilor pentru modul mixt I şi II de deplasare a flancurilor fisurii.

Alte soluţii ce pentru reprezentarea câmpului de tensiuni şi deformaţii din jurul fisurilor au fost dezvoltate de Eftis [E1], Berger - Sanford [B7] etc.

2.1.5 METODA "**FUNCȚIILOR DE PONDERE**" PENTRU DETERMINAREA FACTORULUI DE INTENSITATE A TENSIUNII

Metoda dezvoltată de Buekner [B18], [B19] și Paris [P4] este un instrument relativ simplu, la îndemâna inginerilor, pentru determinarea soluțiilor factorului de intensitate a tensiunii pentru o serie de aplicații cu fisuri.

Se consideră un corp elastic având o fisură de lungime **a** și încărcat cu un sistem de forțe independente $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \ldots, \mathbf{F_N}$ (Fig.2.1.5.1).

Forța de extensie a fisurii $\mathcal{G}$, care este și ea un parametru al Mecanicii ruperii liniar-elastice, se exprimă ca fiind:

$$\mathcal{G} = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial C_{ij}}{\partial a}F_iF_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}F_i\frac{\partial u_i}{\partial a} \tag{2.1.5.1}$$

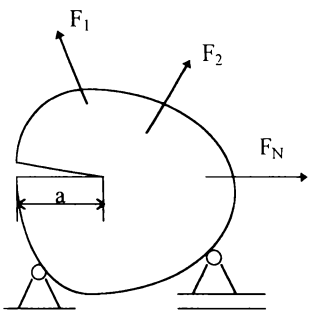


Figura 2.1.5.1

unde: **U** este energia totală de deformație a corpului fisurat,

a este lungimea fisurii,

$\mathbf{u_i}$ este deplasarea punctului de aplicare al forței $\mathbf{F_i}$, exprimată prin intermediul coeficentului complianței elastice $\mathbf{C_{ij}(a)}$:

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} u_{ij} = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}(a)\cdot F_j \tag{2.1.5.2}$$

În relația (2.1.5.2) s-a ținut cont de reciprocitatea coeficenților de complianță: $\mathbf{C_{ij} = C_{ji}}$.

Pe de altă parte ținând cont de relația dintre factorul de intensitate a tensinii **K** și forța de extensie a fisurii $\mathcal{G}$, aceasta se poate exprima:

$$\mathcal{G} = \frac{K^2}{E'} = \frac{1}{E'}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}k_i(a)\cdot k_j(a)\cdot F_i(a)\cdot F_j(a) \tag{2.1.5.3}$$

unde factorul de intensitate a tensiunii **K** se consideră liniar dependent de încărcarea **F**:

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} k_i(a)\cdot F_i \tag{2.1.5.4}$$

$\mathbf{k_i(a)}$ este o funcție dependentă de lungimea fisurii, numită și "**funcție de pondere**"
E' = E - modulul de elasticitate pentru starea plană de tensiune
E' = E/(1-ν) - modulul de elasticitate pentru starea plană de deformație,
$\mathbf{K_i}$ factorul de intensitate a tensiunii produs de încărcarea i.

Egalând expresiile lui $\mathcal{G}$ date de relațiile (2.1.5.1) și (2.1.5.3), cu mențiunea că egalitatea trebuie să se păstreze pentru orice valoare a încărcării $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \ldots, \mathbf{F_N}$, termenii sumei trebuie să fie identici:

$$\frac{k_i(a)\cdot k_j(a)}{E'}=\frac{1}{2}\frac{\partial C_{ij}(a)}{\partial a} \tag{2.1.5.5}$$

Considerând că se cunoaşte o soluţie completă pentru încărcarea $\mathbf{F_m}$, adică se cunoaşte factorul de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_m(a)}$, funcţia de complianţă $\mathbf{C_{im}(a)}$ şi deplasările în punctele de aplicare ale forţelor "i" produse de încărcarea "m": $\mathbf{u_{im} = F_m\, C_{im}}$, din relaţia (2.1.5.5) rezultă:

$$k_i(a)=\frac{E'}{2}\frac{\partial C_{im}(a)}{\partial a}\frac{1}{k_m(a)}=\frac{E'}{2}\frac{\partial C_{im}}{\partial a}\frac{F_m}{K_m} \tag{2.1.5.6}$$

Înlocuind relaţia (2.1.5.6) în (2.1.5.4) rezultă:

$$K=\sum_{i=1}^{N}k_i(a)\cdot F_i=\frac{E'}{2}\frac{F_m}{K_m}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial C_{im}(a)}{\partial a}F_i \tag{2.1.5.7}$$

În concluzie valoarea factorului de intensitate a tensiunii pentru încărcările $\mathbf{F_i}$ se poate calcula dacă se cunoaşte valoarea acestuia pentru o singură încărcare $\mathbf{F_m}$.

Dacă asupra corpului acţionează o sarcină distribuită **p(s)** pe suprafaţa **s**, în locul forţelor concentrate $\mathbf{F_i}$, Figura 2.1.5.2. relaţia (2.1.5.7) devine:

$$K=\int h_m(s,a)\cdot p(s)ds \tag{2.1.5.8}$$

unde $\mathbf{h_m(s,a)}$ reprezintă funcţia de pondere determinată pentru încărcarea m:

$$h_m(s,a)=\frac{E'}{2\cdot K_m(a)}\frac{\partial u_m(s,a)}{\partial a} \tag{2.1.5.9}$$

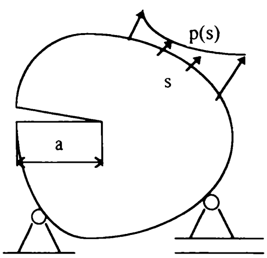


Figura 2.1.5.2

unde $\mathbf{u_m(s,a)}$ reprezintă deplasarea suprafeţei **s**, măsurată pe direcţia sarcinii **p(s)** şi produsă de încărcarea **m**, pentru care se cunoaşte soluţia completă.

Buekner [B19] propune o metodă specială pentru determinarea factorului de intensitatea tensiunii cu ajutorul funcţiilor de pondere. Se consideră un corp elastic având o fisură de lungime a în două situaţii de încărcare:

- cazul 1: încărcare cu forţele concentrate **F**, aplicate la o distanţă **b** de vârful fisurii, pentru care se cunoaşte solţia completă, Figura 2.1.5.3.a

- cazul 2 : încărcarea cu sarcina distribuită **p(s)** ce acţionează pe suprafaţa **s**, caz pentru care se doreşte determinarea factorului de intensitate a tensiunii, Figura 2.1.5.3.b

a Figura 2.1.5.3 b

Pe baza teoremei reciprocităţii energiei de deformaţie se poate scrie:

$$F \cdot u_{12} = \int p(s) \cdot u_{21} ds \tag{2.1.5.10}$$

unde **u₁₂** reprezintă deplasarea în dreptul punctului de acţionare al forţei **F**, măsurată pe direcţia lui **F** şi produsă de încărcarea **p(s);**

u_{21} reprezintă deplasarea produsă de **F** pe suprafaţa **s**.

Dacă încărcarea produsă de forţele **F** este simetrică faţă de axa fisurii, deplasarea flancurilor fisurii se face după **modul I.**

Factorul de intensitate al tensiunii produs de sarcina **p**, se va nota **K_{I2}** şi acesta trebuie determinat.

Utilizând relaţia (2.1.3.4) din soluţia Irwin, ce exprimă deplasarea în funcţie de factorul de intensitate a tensiunii, înlocuind **r = b** şi θ = π, rezultă:

$$u_{21}^{I} = 2 \cdot v \Big|_{r=b,\theta=\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{E'\sqrt{\pi}} K_{I2}\sqrt{b} \tag{2.1.5.11}$$

Înlocuind relaţia (2.1.5.11) în (2.1.5.10) se obţine:

$$K_{I2} = \frac{E'\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \frac{1}{F\sqrt{b}} \int p \cdot u_{21}^{I} ds \tag{2.1.5.12}$$

Dacă se consideră că punctele de aplicare ale forţelor **F** se apropie de vârful fisurii (b $\rightarrow$0), produsul $F\sqrt{b}$ rămâne o valoare constantă. Astfel Buekner propune notaţia:

$$B_{I} = \frac{F\sqrt{b}}{\pi} \tag{2.1.5.13}$$

Cu această notaţie ecuaţia (2.1.5.12) se poate rescrie:

$$K_{I2} = \frac{E'}{4\sqrt{2\pi}B_{I}} \int p \cdot u_{21}^{I} ds \tag{2.1.5.14}$$

Deci funcţia de pondere pentru **modul I** va fi:

$$h_I(a,s) = \frac{E' \cdot u_{21}^I(a,s)}{4\sqrt{2\pi} \cdot B_I} \tag{2.1.5.15}$$

Pentru a vedea avantajul introducerii lui $\mathbf{B_I}$ să comparăm rel. (2.1.5.13) cu funcția de tensiune Westergaard, pertinentă modului I de deplasare:

$$Z_{I1}(z) = \frac{F\sqrt{b}}{\pi(z+b)\sqrt{z}} \tag{2.1.5.16}$$

în care dacă se neglijează **b** în raport cu **z** (considerând corpul infinit) se obține:

$$Z_{I1}(z) = \frac{F\sqrt{b}}{z^{3/2}\pi} = \frac{B_I}{z^{3/2}} \tag{2.1.5.17}$$

Deci cu ajutorul lui $\mathbf{B_I}$ se poate descrie un câmp singular de ordinul $\mathbf{z}^{-3/2}$ în vecinătatea vârfului fisurii. Acest câmp local singular este cunoscut în literatura de specialitate ca un câmp singular de tip Buekner, sau mai pe scurt o singularitate tip Buekner. Avantajul introducerii acestui tip de singularitate constă în aceea că în relațiile (2.1.5.14) şi (2.1.5.15) deplasarea $\mathbf{u_{21}}$, reprezintă deplasarea produsă de introducerea câmpului singular la vârful fisurii.

Analog se pot calcula factorii de intensitate a tensiunii pentru celelalte moduri de deplasare a flancurilor fisurii: **modul II** (Fig.2.1.5.4.a) şi **modul III** (Fig.2.1.5.4.b).

a Figura 2.1.5.4. b

Pentru **modul II**:

$$K_{II2} = \frac{E'}{4\sqrt{2\pi} \cdot B_{II}} \int p(s) \cdot u_{21}^{II} ds \tag{2.1.5.18}$$

unde $\mathbf{u_{21}^{II}}$ este deplasarea produsă de câmpul singular $\mathbf{B_{II}}$, exprimat cu ajutorul funcției Westergaard astfel:

$$Z_{II1}(z) = \frac{B_{II}}{z^{3/2}} \tag{2.1.5.19}$$

Astfel funcția de pondere în acest caz va fi:

$$h_{II}(a,s) = \frac{E' \cdot u_{21}^{II}(a,s)}{4\sqrt{2\pi} \cdot B_{II}} \tag{2.1.5.20}$$

Pentru **modul III**:

$$K_{III2} = \frac{G}{2\sqrt{2\pi} \cdot B_{III}} \int p(s) \cdot u_{21}^{III} ds \tag{2.1.5.21}$$

unde **G** este modulul de elasticitate transversal iar $\mathbf{u_{21}^{III}}$ este deplasarea produsă de câmpul singular $\mathbf{B_{III}}$, exprimat cu ajutorul funcției Westergaard astfel:

$$Z_{III1}(z) = \frac{B_{III}}{z^{3/2}} \tag{2.1.5.22}$$

Astfel funcția de pondere în acest caz va fi:

$$h_{III}(a,s) = \frac{E' \cdot u_{21}^{III}(a,s)}{2\sqrt{2\pi} \cdot B_{III}} \tag{2.1.5.23}$$

Deoarece în expresiile funcțiilor de pondere (2.1.5.15), (2.1.5.20) şi (2.1.5.23), respectiv în cele ale factorilor de intensitate a tensiunii date de relațiile (2.1.5.14), (2.1.5.18) şi (2.1.5.21) apar deplasările datorate introducerii câmpului singular de tip Buekner, este utilă exprimarea acestor deplasări în funcție de **B**. Astfel dacă funcția lui Westergaard are una din expresiile (2.1.5.17), (2.1.5.19) sau (2.1.5.22), în funcție de modul de deplasare a flancurilor fisurii, componentele deplasării exprimate în coordonate polare **(r, θ)** vor fi:

- pentru **modul I**:

$$\begin{aligned} u &= \frac{B_I}{G\sqrt{r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(2\nu - 1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ v &= \frac{B_I}{G\sqrt{r}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2 - 2\nu + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \\ w &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.5.24}$$

- pentru **modul II**:

$$\begin{aligned} u &= \frac{B_{II}}{G\sqrt{r}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2 - 2\nu + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \\ v &= \frac{B_{II}}{G\sqrt{r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\nu + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ w &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.5.25}$$

- pentru **Modul III:**

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \\ w &= \frac{2 \cdot B_{III}}{G\sqrt{r}} \sin\frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{2.1.5.26}$$

Relațiile (2.1.5.24) şi (2.1.5.25) sunt scrise pentru starea plană de tensiune. Dacă se înlocuieşte ν cu $\nu/(1+\nu)$ şi $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ele devin valabile pentru starea plană de deformație.

În cazul corpurilor finite pentru determinarea funcțiilor de pondere se recomandă în [P4] alegerea funcției Westergaard sub forma:

$$Z(z) = \frac{B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \ldots}{z^{3/2}} \qquad (2.1.5.27)$$

unde $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$, .. sunt termeni adiționali care iau în seamă condițiile la limită.

Pentru determinarea funcțiilor de pondere în cazul unor geometrii mai complicate o serie de studii mai recente recomandă utilizarea "*metodei elementelor finite*" [B2].

Aplicații privind determinarea factorului de intensitate a tensiunii prin metoda funcțiilor de pondere

A). Stabilirea expresiei factorului de intensitate a tensiunii la vârfurile unei fisuri de lungime **2a** aflată într-un corp infinit, încărcat cu o sarcină distribuită oarecare **p(x)** ce acționează pe flancurile fisurii.

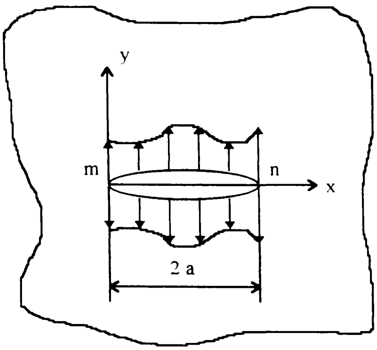


Figura 2.1.5.5

Pentru rezolvarea acestei probleme se pleacă de la soluția cunoscută pentru o placă infinită, având o fisură de lungime **2a**, solicitată la infinit de tensiunea σ, Figura 2.1.5.5:

$$K_{I1} = \sigma\sqrt{\pi a}$$

Deplasarea de deschidere a fisurii pentru acest caz este:

$$u_{21}^{I} = \pm\frac{2\sigma}{E'}\sqrt{x(2a-x)}$$

Pentru calculul funcției de pondere este necesar calculul derivatei:

$$\frac{\partial u_{21}^{1}}{\partial(2a)} = \pm\frac{2\sigma}{E'}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

Înlocuind în relația (2.1.5.9) funcția de pondere capătă forma:

$$h(x) = \frac{E'}{2K_{I1}}\frac{\partial u_{21}^{I}}{\partial(2a)} = \pm\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_0^{2a} p(x)\cdot\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx \qquad (2.1.5.28)$$

Deci factorul de intensitate a tensiunii pentru cele două vârfuri "m" şi "n" ale fisurii va fi:

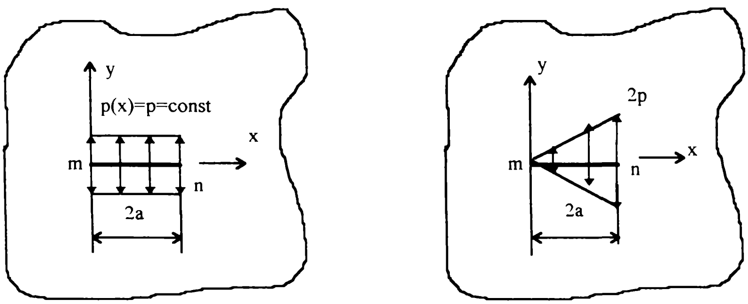
$$K_{\mathrm{Im}}(x=0)=\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_0^{2a} p(x)\sqrt{\frac{2a-x}{x}}dx$$
$$K_{In}(x=2a)=\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_0^{2a} p(x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx \qquad (2.1.5.29)$$

Dacă se introduce expresia încărcării **p(x)** şi se calculează integralele se obţin expresiile factorilor de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_{Im}}$ şi $\mathbf{K_{In}}$.

Cazuri particulare

A.1). Încărcarea constantă pe feţele fisurii: **p(x) = p = const**., Figura 2.1.5.6.
Pentru rezolvarea integralei s-a folosit schimbarea de variabilă: t = $\sqrt{x/(2a-x)}$ şi descompunerea unei funcţii raţionale în funcţii raţionale simple. După efecturea calculelor factorii de intensitate a tensiunii pentru cele două vârfuri ale fisurii devin:

$$K_{\mathrm{Im}}=K_{In}=p\sqrt{\pi a}$$



a Figura 2.1.5.6 b

A.2). Încărcarea variază după o lege liniară pe flancurile fisurii între valorile **0** şi **2p** : **p(x) = p (x/a),** Figura 2.1.5.6.b. Factorii de intensitate ai tensiunii vor avea expresiile:

$$K_{\mathrm{Im}}=\frac{1}{2}p\sqrt{\pi a}$$
$$K_{In}=\frac{3}{2}p\sqrt{\pi a}$$

Deoarece calculele analitice se complică pentru expresii ale funcţiei de încărcare **p(x)** de ordin superior autorul a elaborat un program de calcul în MathCAD 5.0 care permite rezolvarea numerică a integralelor (2.1.5.28), calculând în acelaşi timp valoarile funcţiilor de pondere şi valorile factorilor de intensitate a tensiunii pentru cele două vârfuri ale fisurii. Datele de intrare în program sunt lungimea fisurii **2a** şi expresia încărcării **p(x).** Programul permite trasarea grafică a distribuţiei încărcării.

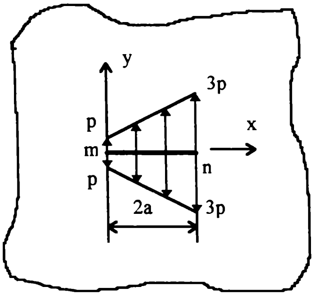
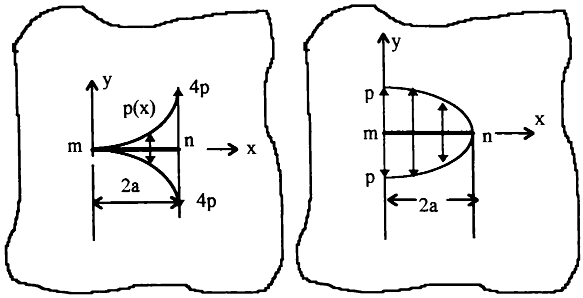


Figura 2.1.5.7



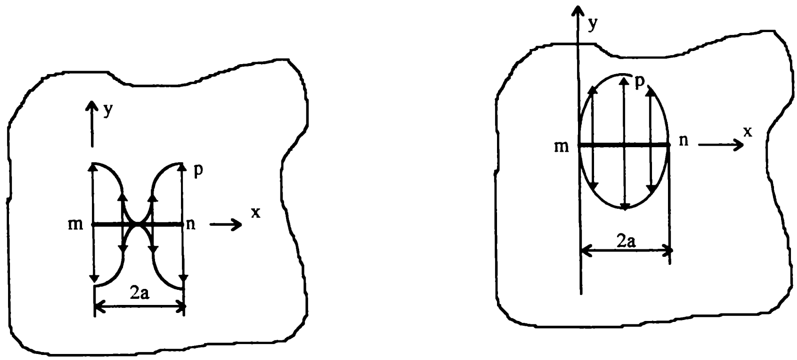
a b

Figura 2.1.5.8.

Rezultatele rulării pentru câteva tipuri de încărcări sunt prezentate în Tabelul 2.1.5.1.

Tabelul 2.1.5.1

Tipul încărcării p(x)	Schița încărcării	Factorul de intensitate a tensiunii la vârful m al fisurii	Factorul de intensitate a tensiunii la vârful n al fisurii
1. Sarcină constantă p(x) = p	Figura 2.1.5.6.a	$K_{\mathrm{Im}} = p\sqrt{\pi a}$	$K_{In} = p\sqrt{\pi a}$
2. Variație liniară 2.1. p(x) = p (x/a)	Figura 2.1.5.6.b	$K_{\mathrm{Im}} = \frac{1}{2} p\sqrt{\pi a}$	$K_{In} = \frac{3}{2} p\sqrt{\pi a}$
2.2. p(x) = p (1+x/a)	Figura 2.1.5.7.	$K_{\mathrm{Im}} = \frac{3}{2} p\sqrt{\pi a}$	$K_{In} = \frac{5}{2} p\sqrt{\pi a}$
3. Variație parabolică 3.1. $p(x) = p\,(x/a)^2$	Figura 2.1.5.8.a	$K_{\mathrm{Im}} = \frac{1}{2} p\sqrt{\pi a}$	$K_{In} = \frac{5}{2} p\sqrt{\pi a}$
3.2. $p(x) = p[1-(x/2a)^2]$	Figura 2.1.5.8.b	$K_{\mathrm{Im}} = \frac{7}{8} p\sqrt{\pi a}$	$K_{In} = \frac{3}{8} p\sqrt{\pi a}$
4. Variație după funcții trigonometrice 4.1.p(x)=p[1+cos(πx/a)]	Figura 2.1.5.9.a	$K_{Im} = 1{,}304 p\sqrt{\pi a}$	$K_{In} = 1{,}304 p\sqrt{\pi a}$
4.2. p(x)= p sin(πx/2a)	Figura 2.1.5.9.b	$K_{\mathrm{Im}} = 0{,}472 p\sqrt{\pi a}$	$K_{In} = 0{,}472 p\sqrt{\pi a}$



a Figura 2.1.5.9 b

Se evidenţiază că soluţiile obţinute prin metoda funcţiilor de pondere pentru încărcarea constantă **p(x) = p** şi pentru variaţia liniară **p(x) = p (x/a)** sunt aceleaşi cu soluţiile prezentate în [T1], dar obţinute prin alte metode. Pentru celelalte tipuri de încărcare soluţiile prezentate în Tabelul 2.1.5.1 sunt originale.

B). Stabilirea expresiei factorului de intensitate a tensiunii la vârfurile unei fisuri semiinfinite aflată într-un corp infinit, încărcat cu două forţe concentrate **F** (pe unitatea de grosime), egale şi opuse ca sens, Figura 2.1.5.10

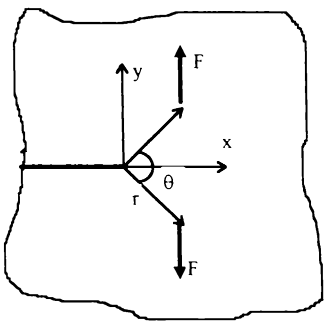


Figura 2.1.5.10

Punctele de acţionare a forţelor sunt date de coordonatele polare **(r, θ),** în sistemul ales cu originea în vârful fisurii.

Pentru rezolvarea acestei probleme am considerat la vârful fisurii o singularitate tip Buekner $\mathbf{B_I}$, relaţia (2.1.5.17), valabilă pentru orice

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Factorul de intensitate a tensiunii este dat de relaţia (2.1.5.14). Deoarece axa x este axă de simetrie iar deplasarea flancurilor fisurii se face după Modul I, integrala din relaţia (2.1.5.14) se poate scrie:

$$\int p(s)\cdot u_{21}^{I}ds = 2F\cdot v_{21}^{I}$$

unde $\mathbf{v_{21}^{I}}$ reprezintă deplasarea după axa y a flancurilor fisurii. Conform soluţiei Westergaard aceasta este:

$$2Gv_{21}^{I} = 2(1-\nu)\,\mathrm{Im}\,\overline{Z_{11}} - y\,\mathrm{Re}\,Z_{11}$$

unde funcţia lui Westergaard este dată de rel. (2.1.5.17):

$$Z_{II}(z)=\frac{B_I}{z^{3/2}} \Rightarrow \overline{Z_{II}}(z)=-\frac{2B_I}{z^{1/2}} \qquad (2.1.5.30)$$

Dacă se introduce expresia lui z în coordonatele (r,θ) rezultă:

$$\begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ \operatorname{Re} Z_{II}(z) &= \frac{B_I}{r^{3/2}}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \operatorname{Im}\overline{Z_{II}}(z) &= \frac{2B_I}{r^{1/2}}\sin\frac{\theta}{2} \end{aligned} \qquad (2.1.5.31)$$

şi deci:

$$v_{21}^{I}=\frac{B_I}{G\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}\left[2(1-\nu)-\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right] \qquad (2.1.5.32)$$

Înlocuind această relaţie în expresia factorului de intensitate a tensiunii (2.1.5.14) se obţine:

$$K_I=\frac{F}{(1-\nu)\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left[2(1-\nu)-\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right] \qquad (2.1.5.33)$$

În Figura 2.1.5.11 s-a reprezentat variaţia funcţiei adimensionale:

$$f(\theta,\nu)=\sin\frac{\theta}{2}\left[2(1-\nu)-\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right]\frac{1}{1-\nu} \qquad (2.1.5.34)$$

care intervine în expresia factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$, considerând $\nu = \mathbf{0{,}3}$.

Pe baza celor de mai sus în Figura 2.1.5.12 s-a trasat variaţia factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ în funcţie de unghiul θ pentru diferite valori ale razei polare r = 1, 5, 10, 15, 20 mm, considerând ν = 0,3 şi F=1000 N/mm

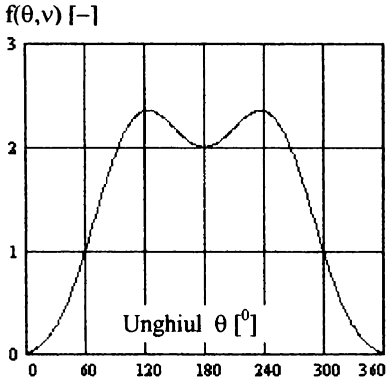


Figura 2.1.5.11

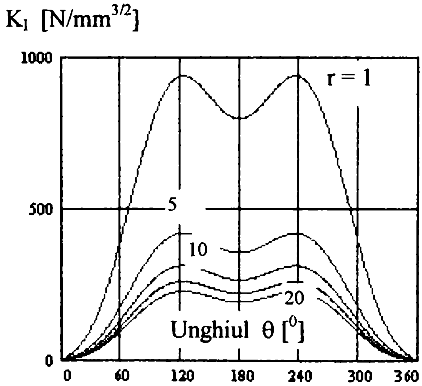


Figura 2.1.5.12

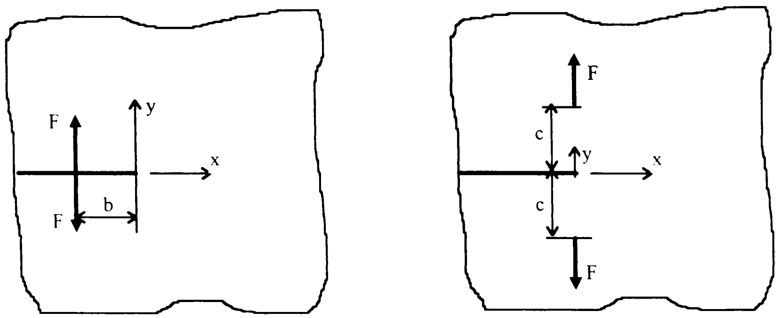
Cazuri particulare

B.1). Forțele **F** acționează pe flancurile fisurii la distanța **b** de vârful fisurii, Figura 2.1.5.13..a. Pentru **r = b** și **θ = π**, rezultă :

$$K_I = \frac{2F}{\sqrt{2\pi b}} \tag{2.1.5.35}$$

B.2). Forțele **F** acționează la o distanță **c** pe axa **y** ce trece prin vârful fisurii, Figura 2.1.5.13.b. Pentru **r = c** și **θ = π/2**, rezultă :

$$K_I = \frac{F}{\sqrt{\pi c}} \frac{5-4\nu}{4(1-\nu)} \tag{2.1.5.36}$$



a Figura 2.1.5.13. b

Studiul efectuat de autor a dovedit că soluția corespunzătoare cazului **B.1.**, relația (2.1.5.35), este identică cu cea prezentată în [T1] și obținută cu ajutorul funcției de tensiune Westergaard. Soluția obținută în cazul **B.2.**, relația (2.1.5.36), reprezintă o contribuție a autorului.

Relația (2.1.5.33) permite estimarea factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ la elemente de rezistență de tipul plăcilor de dimensiuni mari, solicitate de forțe concentrate, la care apare o fisură laterală de dimensiuni mult mai mici decât dimensiunile plăcii.

În acest paragraf s-a prezentat modul de aplicare a metodei "funcțiilor de pondere" pentru determinarea factorilor de intensitate a tensiunii. Astfel dacă pentru un corp fisurat se cunoaște, pentru o anumită încărcare, expresia factorului de intensitate a tensiunii, câmpul de tensiune și deplasările, cu ajutorul funcțiilor de pondere se poate obține factorul de intensitate a tensiunii, câmpul de tensiune și deplasările pentru orice altă încărcare.

Prin metodologia utilizării "funcțiilor de pondere", reformulată de autor pentru aplicațiile de corpuri cu fisuri, s-au tratat două cazuri de corpuri cu fisuri, obținându-se soluții originale ale factorului de intensitate a tensiunii pentru cazurile particulare studiate.

2.1.6 DETERMINAREA CÂMPULUI DE TENSIUNE ÎN VECINĂTATEA UNEI CRESTĂTURI ÎNGUSTE TERMINATĂ CU UN ORIFICIU CIRCULAR

Autorul şi-a propus în acest paragraf să determine câmpul de tensiune din vecinătatea unei crestături înguste terminată cu un orificiu circular pornind de la funcţia de tesiune a lui Airy şi utilizând exprimarea în coordonate polare a componentelor tensiunii.

Este cunoscută exprimarea cîmpului de tensiune în vecinătatea unei fisuri în coordonate polare **(r,θ)** dată de reprezentarea lui Irwin (Figura.2.1.6.1) pentru starea plană şi o încărcare plană, relaţia (2.1.3.7):

$$\sigma_r = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}(5\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}) - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}(5\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2})$$

$$\sigma_\theta = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}(3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}) - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}(3\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2}) \qquad (2.1.6.1)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}(\cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2})$$

unde $\mathbf{K_I}$, $\mathbf{K_{II}}$ reprezintă factorul de intensitate al tensiunii după **modul I** de deplasare a flancurilor fisurii respectiv **modul II**.

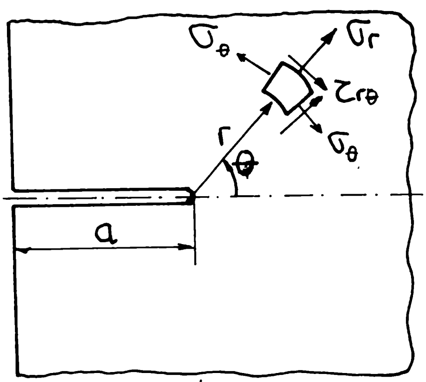


Figura 2.1.6.1

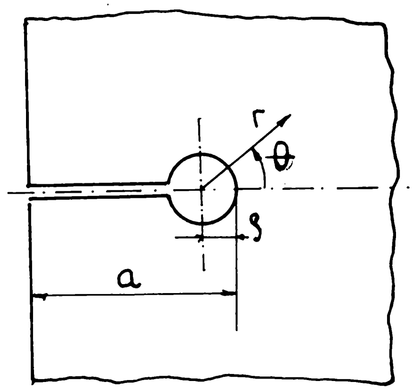


Figura 2.1.6.2

Pentru a determina cîmpul de tensiune din vecinătatea unei crestături înguste, care se termină cu un orificiu circular, de rază ρ (Fig.2.1.6.2) se foloseşte funcţia lui Airy.

Expresia funcţiei de tensiune a lui Airy pentru cazul încărcării plane este dată de Neuber în [N2], sub forma:

$$\mathcal{A} = (C_1 r^{\frac{3}{2}} + C_2 r^{\frac{1}{2}} + C_3 r^{-\frac{1}{2}}) \cos\frac{\theta}{2} + (C_4 r^{\frac{3}{2}} + C_5 r^{\frac{1}{2}} + C_6 r^{-\frac{3}{2}}) \cos\frac{3\theta}{2} + $$
$$+ (D_1 r^{\frac{3}{2}} + D_2 r^{\frac{1}{2}} + D_3 r^{-\frac{1}{2}}) \sin\frac{\theta}{2} + (D_4 r^{\frac{3}{2}} + D_5 r^{\frac{1}{2}} + D_6 r^{-\frac{3}{2}}) \sin\frac{3\theta}{2} \qquad (2.1.6.2)$$

Componentele tensiunii, în coordonate polare, se pot calcula cu relațiile:

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \theta} \quad ; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial r^2}$$
$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \theta} \qquad (2.1.6.3)$$

Pentru **modul I** de deplasare a flancurilor crestăturii din funcția lui Airy considerând doar termenii simetrici ai relației (2.1.6.2), rezultă:

$$\mathcal{A}_I = (C_1 r^{\frac{3}{2}} + C_2 r^{\frac{1}{2}} + C_3 r^{-\frac{1}{2}}) \cos\frac{\theta}{2} + (C_4 r^{\frac{3}{2}} + C_5 r^{\frac{1}{2}} + C_6 r^{-\frac{3}{2}}) \cos\frac{3\theta}{2} \qquad (2.1.6.4)$$

Derivatele funcției lui Airy în raport cu componentele sistemului polar de coordonate sunt:

$$\frac{\partial \mathcal{A}_I}{\partial r} = \left(\frac{3}{2}C_1 r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}C_2 r^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}C_3 r^{-\frac{3}{2}}\right)\cos\frac{\theta}{2} + \left(\frac{3}{2}C_4 r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}C_5 r^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}C_6 r^{-\frac{5}{2}}\right)\cos\frac{3\theta}{2}$$
$$\frac{\partial \mathcal{A}_I}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}\left(C_1 r^{\frac{3}{2}} + C_2 r^{\frac{1}{2}} + C_3 r^{-\frac{1}{2}}\right)\sin\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\left(C_4 r^{\frac{3}{2}} + C_5 r^{\frac{1}{2}} + C_6 r^{-\frac{3}{2}}\right)\sin\frac{3\theta}{2}$$

iar derivatele de ordinul doi vor fi:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}_I}{\partial r^2} = \left(\frac{3}{4}C_1 r^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}C_2 r^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}C_3 r^{-\frac{5}{2}}\right)\cos\frac{\theta}{2} + \left(\frac{3}{4}C_4 r^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}C_5 r^{-\frac{3}{2}} + \frac{15}{4}C_6 r^{-\frac{7}{2}}\right)\cos\frac{3\theta}{2}$$
$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}_I}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{4}\left(C_1 r^{\frac{3}{2}} + C_2 r^{\frac{1}{2}} + C_3 r^{-\frac{1}{2}}\right)\cos\frac{\theta}{2} - \frac{9}{4}\left(C_4 r^{\frac{3}{2}} + C_5 r^{\frac{1}{2}} + C_6 r^{-\frac{3}{2}}\right)\cos\frac{3\theta}{2}$$
$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}_I}{\partial r \partial \theta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}C_1 r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}C_2 r^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}C_3 r^{-\frac{3}{2}}\right)\sin\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}C_4 r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}C_5 r^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}C_6 r^{-\frac{5}{2}}\right)\sin\frac{3\theta}{2}$$

Înlocuind expresiile derivatelor funcției de tensiune $\mathcal{A}_I$ în relațiile (2.1.6.3) se obține:

$$\sigma_r=\left(\frac{5}{4}C_1r^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}C_2r^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}C_3r^{-\frac{5}{2}}\right)\cos\frac{\theta}{2}+\left(-\frac{3}{4}C_4r^{-\frac{1}{2}}-\frac{7}{4}C_5r^{-\frac{3}{2}}-\frac{15}{4}C_6r^{-\frac{7}{2}}\right)\cos\frac{3\theta}{2}$$

$$\sigma_\theta=\left(\frac{3}{4}C_1r^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}C_2r^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}C_3r^{-\frac{5}{2}}\right)\cos\frac{\theta}{2}+\left(\frac{3}{4}C_4r^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}C_5r^{-\frac{3}{2}}+\frac{15}{4}C_6r^{-\frac{7}{2}}\right)\cos\frac{3\theta}{2} \quad (2.1.6.5)$$

$$\tau_{r\theta}=\left(\frac{1}{4}C_1r^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}C_2r^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}C_3r^{-\frac{5}{2}}\right)\sin\frac{\theta}{2}+\left(\frac{3}{4}C_4r^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}C_5r^{-\frac{3}{2}}-\frac{15}{4}C_6r^{-\frac{7}{2}}\right)\sin\frac{3\theta}{2}$$

Pentru a determina constantele C_i, trebuiesc puse condițiile la limită. Astfel pe suprafața orificiului circular:

$$\sigma_r\big|_{r=\rho}=0\ ;\quad \tau_{r\theta}\big|_{r=\rho}=0 \quad (2.1.6.6)$$

care conduce la:

$$C_2=-C_1\rho \qquad C_3=C_1\rho^2$$
$$C_5=-\frac{3}{2}C_4\rho \qquad C_6=\frac{1}{2}C_4\rho^3 \quad (2.1.6.7)$$

Condițiile la limită de-a lungul crestăturii necesită ca σ_θ și $\tau_{r\theta}$ să se anuleze pentru $\theta=\pm\pi$

$$\sigma_\theta\big|_{\theta=\pm\pi}=0\ ;\quad \tau_{r\theta}\big|_{\theta=\pm\pi}=0 \quad (2.1.6.8)$$

Aceste condiții sunt satisfăcute pentru σ_θ, dar pentru $\tau_{r\theta}$ acestea nu sunt pe deplin satisfăcute. Pentru a avea certitudinea că pe cea mai mare parte de-a lungul fisurii tensiunea tangențială $\tau_{r\theta}$ este nulă, se consideră cazul limită $\rho/r\to 0$ obținându-se soluția fisurii ascuțite. Astfel comparând cu relațiile (2.1.6.1) se obține:

$$C_1=3C_4=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.1.6.9)$$

Înlocuind valorile constantelor C_i date de relațiile (2.1.6.7) și (2.1.6.9) în expresiile componentelor câmpului de tensiune din vecinătatea crestăturii cu orificiu circular (2.1.6.5) rezultă expresiile:

$$\sigma_r=\frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}\left\{\left[5-2\frac{\rho}{r}-3\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]\cos\frac{\theta}{2}-\left[1-\frac{7}{2}\frac{\rho}{r}+\frac{5}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\right]\cos\frac{3\theta}{2}\right\}$$

$$\sigma_\theta=\frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}\left\{\left[3+2\frac{\rho}{r}+3\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]\cos\frac{\theta}{2}+\left[1+\frac{1}{2}\frac{\rho}{r}+\frac{5}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\right]\cos\frac{3\theta}{2}\right\} \quad (2.1.6.10)$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}\left\{\left[1+2\frac{\rho}{r}-3\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]\sin\frac{\theta}{2}+\left[1+\frac{3}{2}\frac{\rho}{r}-\frac{5}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\right]\sin\frac{3\theta}{2}\right\}$$

Variațiile componentelor câmpului de tensiune în jurul crestăturii terminată cu orificiu circular de rază ρ, sunt prezentate în Figurile 2.1.6.3, 2.1.6.4 și 2.1.6.5. S-a reprezentat cu ajutorul unui program scris în MathCAD 5.0, variația raportului $\frac{\sigma_r 4\sqrt{2\pi r}}{K_I} = f(\theta;\ \frac{\rho}{r})$ în Figura 2.1.6.3; $\frac{\sigma_\theta 4\sqrt{2\pi r}}{K_I} = f(\theta;\ \frac{\rho}{r})$ în Figura 2.1.6.4 și $\frac{\tau_{r\theta} 4\sqrt{2\pi r}}{K_I} = f(\theta;\ \frac{\rho}{r})$ în Figura 2.1.6.5.

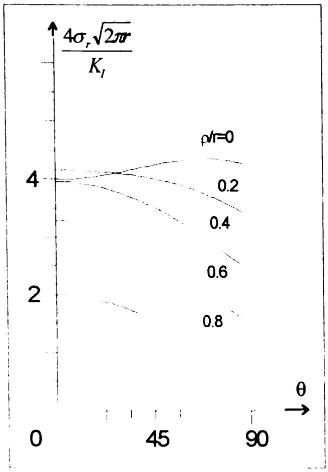


Figura 2.1.6.3

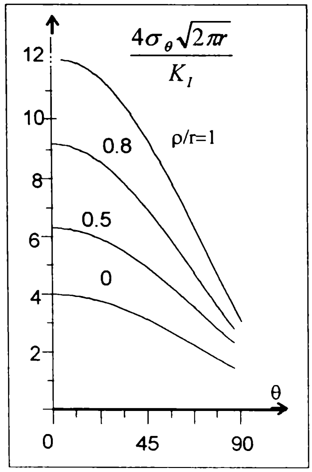


Figura 2.1.6.4

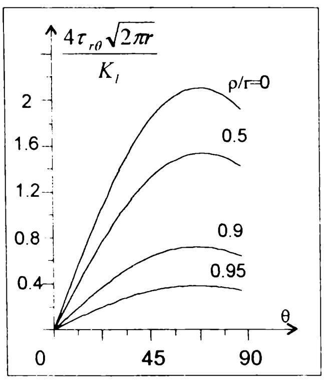


Figura 2.1.6.5

Pentru **modul II** se consideră termenii asimetrici din relația (2.1.6.2):

$$\mathcal{A}_{II} = (D_1 r^{\frac{3}{2}} + D_2 r^{\frac{1}{2}} + D_3 r^{-\frac{1}{2}})\sin\frac{\theta}{2} + (D_4 r^{\frac{3}{2}} + D_5 r^{\frac{1}{2}} + D_6 r^{-\frac{3}{2}})\sin\frac{3\theta}{2} \qquad (2.1.6.11)$$

Condițiile la limită pentru determinarea constantelor $\mathbf{D_i}$ sînt și în acest caz:
- pentru suprafața orificiului circular:

$$\sigma_r\big|_{r=\rho} = 0 \quad si \quad \tau_{r\theta}\big|_{r=\rho} = 0$$

rezultă: (2.1.6.12)

$$D_2 = -2 D_1 \rho; \quad D_3 = D_1 \rho^2; \quad D_5 = -\frac{3}{2} D_4 \rho; \quad D_6 = \frac{1}{2} D_4 \rho^2$$

- de-a lungul crestăturii:

$$\tau_{r\theta}\big|_{\theta=+-\pi} = 0 \quad si \quad \sigma_\theta\big|_{\theta=+-\pi} = 0 \qquad (2.1.6.13)$$

A doua condiție fiind doar uneori satisfăcută, se consideră și de această dată cazul limită $\rho/r \to 0$, se obține cazul fisurii ascuțite; comparând cu relația (2.1.6.1) rezultă:

$$D_1 = D_4 = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (2.1.6.14)$$

Astfel componentele câmpului de tensiune pentru modul II de deplasare vor fi:

$$\sigma_r = -\frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}\left\{\left[5 - 2\frac{\rho}{r} - 3\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]\sin\frac{\theta}{2} - \left[3 - \frac{21}{2}\frac{\rho}{r} + \frac{15}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\right]\sin\frac{3\theta}{2}\right\}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}\left\{\left[3 + 2\frac{\rho}{r} + 3\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]\sin\frac{\theta}{2} - \left[3 + \frac{3}{2}\frac{\rho}{r} - \frac{15}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\right]\sin\frac{3\theta}{2}\right\} \qquad (2.1.6.15)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}\left\{\left[1 + 2\frac{\rho}{r} - 3\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]\cos\frac{\theta}{2} + \left[3 + \frac{9}{2}\frac{\rho}{r} - \frac{15}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)\right]\cos\frac{3\theta}{2}\right\}$$

Luând în considerare și **modul II**, cu ajutorul unui program scris în MathCAD, s-a studiat variația componentelor câmpului de tensiune din vecinătatea orificiului circular de rază ρ, prin intermediul rapoartelor $\frac{\sigma_r 4\sqrt{2\pi r}}{K_{II}} = f(\theta;\ \frac{\rho}{r})$ (Figura 2.1.6.6); $\frac{\sigma_\theta 4\sqrt{2\pi r}}{K_{II}} = f(\theta;\ \frac{\rho}{r})$ (Figura 2.1.6.7) și $\frac{\tau_{r\theta} 4\sqrt{2\pi r}}{K_{II}} = f(\theta;\ \frac{\rho}{r})$ (Figura 2.1.6.8).

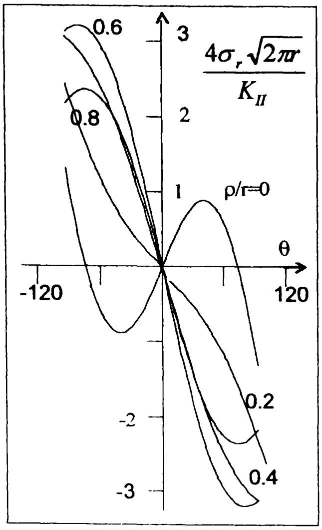


Figura 2.1.6.6

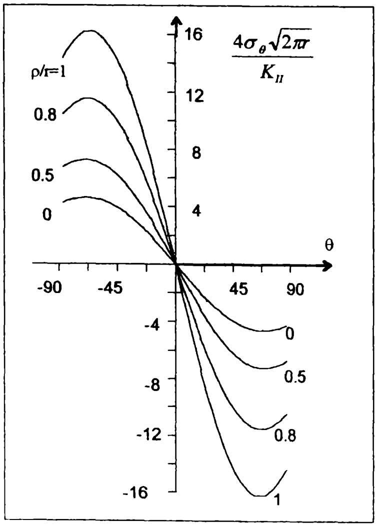


Figura 2.1.6.7

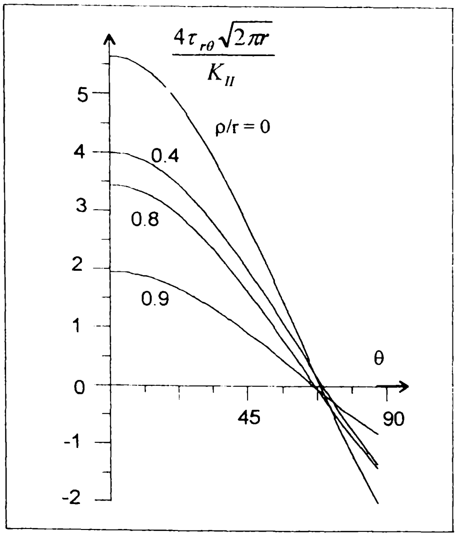


Figura 2.1.6.8

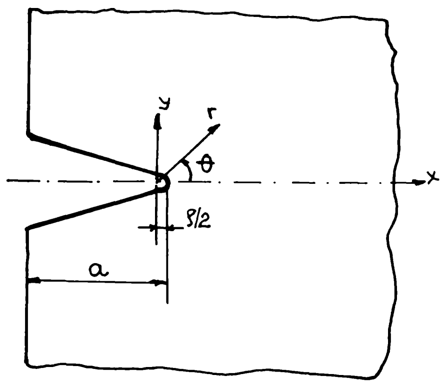


Figura 2.1.6.9

Suprapunând soluțiile (2.1.6.10) și (2.1.6.15) se poate analiza câmpul de tensiune în vecinătatea unei crestături terminate cu un orificiu circular pentru modul mixt (I și II) de deplasare a flancurilor fisurii.

Relațiile (2.1.6.10) și (2.1.6.15) reprezintă contribuții ale autorului, care diferă de soluția Irwin, relațiile (2.1.6.1), prin faptul că țin cont de raza orificiului circular de la vîrful crestăturii ρ. Astfel pentru ambele moduri de încărcare s-au trasat diagramele de variație ale componentelor tensiunilor σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ (Figurile 2.1.6.3 - 2.1.6.8) în funcție de raportul ρ/r și de unghiul θ și s-au determinat valorile maxime pentru fiecare componentă a câmpului de tensiune. Pentru aceasta s-a folosit un pas de 0.001 pentru raportul ρ/r și un pas de **1'** pentru unghiul θ, folosind un calculator personal tip IBM PC AT 486.

Valorile maxime ale componentelor tensiunii pentru ambele moduri de încărcare sînt următoarele:

- pentru **modul I** :

$$\begin{aligned}
\sigma_{r,\max} &= \sigma_r(\theta = 70{,}47^0, \rho/r = 0) = 4{,}35\frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \\
\sigma_{\theta,\max} &= \sigma_\theta(\theta = 0, \rho/r = 1) = 12\frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \\
\tau_{r\theta,\max} &= \tau_{r\theta}(\theta = 69{,}9^0, \rho/r = 1) = 2{,}148\frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}
\end{aligned} \tag{2.1.6.16}$$

- pentru **modul II** :

$$\begin{aligned}
\sigma_{r,\max} &= \sigma_r(\theta = -80^0, \rho/r = 0.539) = 3{,}247\frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \\
\sigma_{\theta,\max} &= \sigma_\theta(\theta = -67{,}08^0, \rho/r = 1) = 16{,}215\frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \\
\tau_{r\theta,\max} &= \tau_{r\theta}(\theta = 0^0, \rho/r = 0{,}42) = 5{,}645\frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}
\end{aligned} \tag{2.1.6.17}$$

Se observă că pentru ambele moduri, tensiunea maximă este σ_θ iar valorile obținute diferă considerabil de valorile tensiunilor date de reprezentarea Irwin. De aceea pentru cazurile crestăturilor terminate cu orificiu circular se recomandă folosirea ecuațiilor (2.1.6.10) și (2.1.6.15), pentru studiul cîmpului de tensiune.

Câmpul de tensiune de la vârful unei crestături cu vârful rotunjit cu raza ρ, Figura 2.1.6.9 , dat de Creager pentru modul I și II [K7] este:

- pentru **modul I**

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}\left[\left(5 - 2\frac{\rho}{r}\right)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}\right] \\
\sigma_\theta &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}\left[\left(3 + 2\frac{\rho}{r}\right)\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right] \\
\tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}\left[\left(1 + 2\frac{\rho}{r}\right)\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right]
\end{aligned} \tag{2.1.6.18}$$

- pentru **modul II:**

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}\left[\left(5+2\frac{\rho}{r}\right)sin\frac{\theta}{2}-3sin\frac{3\theta}{2}\right]\\ \sigma_\theta &= \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}\left[\left(3-2\frac{\rho}{r}\right)sin\frac{\theta}{2}+3sin\frac{3\theta}{2}\right]\\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}\left[\left(1-2\frac{\rho}{r}\right)cos\frac{\theta}{2}+3cos\frac{3\theta}{2}\right]\end{aligned} \qquad (2.1.6.19)$$

Pe baza acestor relaţii s-au reprezentat comparativ variaţia componentelor câmpului de tensiune $\frac{4\sigma_r\sqrt{2\pi r}}{K_I}$, $\frac{4\sigma_\theta\sqrt{2\pi r}}{K_I}$, $\frac{4\tau_{r\theta}\sqrt{2\pi r}}{K_I}$ date de soluţia Irwin (2.1.6.1), de soluţia Creager (2.1.6.18), (2.1.6.19), respectiv de soluţia obţinută de autor pentru crestătură terminată cu orificiu circular, relaţiile (2.1.6.10) - pentru modul I, respectiv (2.1.6.15) - pentru modul II, considerând diferite rapoarte ρ/r. Reprezentările s-au realizat pe calculator, cu ajutorul utilitarului matematic MathCAD 5.0.

Pentru modul I am reprezentat $\frac{4\sigma_r\sqrt{2\pi r}}{K_I}$ în funcţie de unghiul θ, în Figura 2.1.6.10 pentru ρ/r = 0; în Figura 2.1.6.11 pentru ρ/r = 0,3 ; în Figura 2.1.6.12 pentru ρ/r = 0,6 respectiv în Figura 2.1.6.13 pentru ρ/r = 0,9.

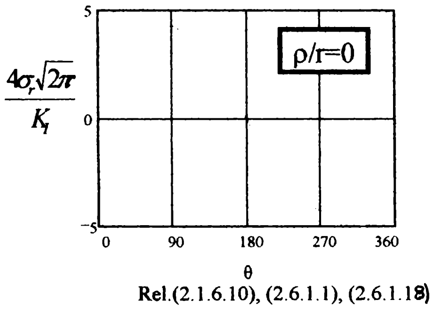


Figura 2.1.6.10

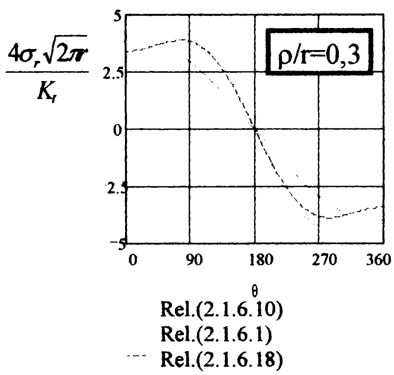


Figura 2.1.6.11

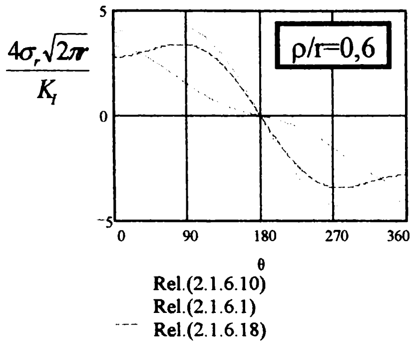


Figura 2.1.6.12

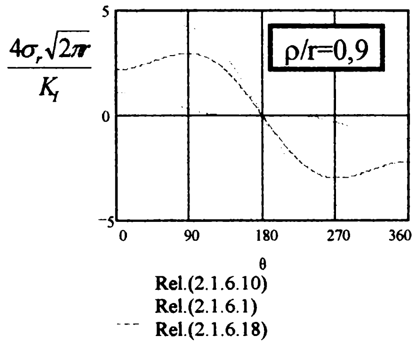


Figura 2.1.6.13

Din Figura 2.1.6.10 se observă că pentru ρ/r = 0 (adică cazul fisurii ascuţite) soluţiile Creager şi cea determinată de autor se suprapun peste soluţia Irwin. Prin aceasta se confirmă justeţea soluţiei propuse, relaţia (2.1.6.10).

În Figura 2.1.6.11 (ρ/r = 0,3), se observă că pentru unghiul θ cuprins între 0 şi 19° valorea tensiunii σ_r este mai mare pentru expresia dată de relaţia (2.1.6.10) decât cea dată de soluţia Irwin.

În Figurile 2.1.6.12 şi 2.1.6.13 se observă că pentru orice valoare a unghiului θ raportul $\dfrac{4\sigma_r\sqrt{2\pi r}}{K_I}$ are valori mai mari pentru cazul fisurii ascuţite, relaţia (2.1.6.1) faţă de soluţia determinată (2.1.6.10).

În Figurile 2.1.6.14 - 2.1.6.17 s-a reprezentat variaţia raportului $\dfrac{4\sigma_\theta\sqrt{2\pi r}}{K_I}$ în funcţie de unghiul θ pentru diferite rapoarte ρ/r.

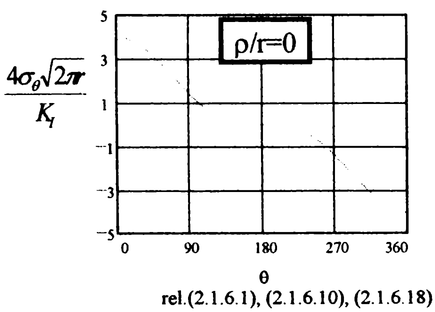


Figura 2.1.6.14

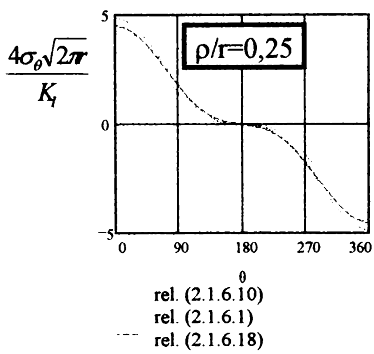
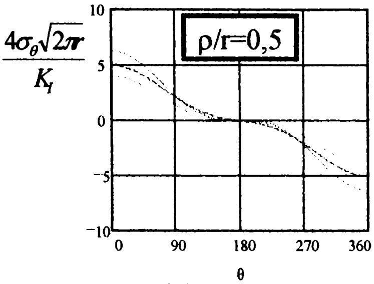
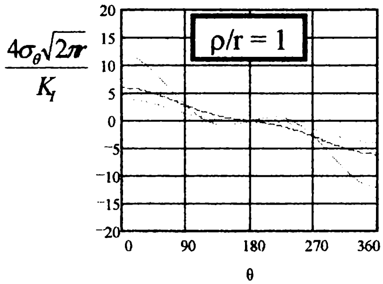


Figura 2.1.6.15



rel. (2.1.6.10)
rel. (2.1.6.1)
--- rel. (2.1.6.18)

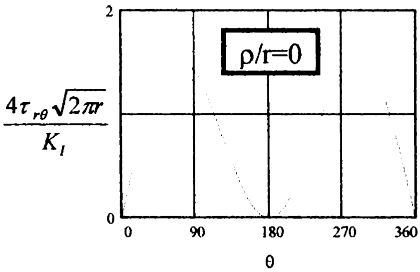
Figura 2.1.6.16



rel. (2.1.6.10)
rel. (2.1.6.1)
--- rel. (2.1.6.18)

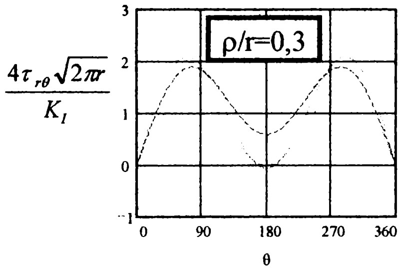
Figura 2.1.6.17

În Figurile 2.1.6.18 - 2.1.6.21 s-a reprezentat variaţia raportului $\frac{4\tau_{r\theta}\sqrt{2\pi r}}{K_I}$ în funcţie de unghiul θ pentru diferite rapoarte ρ/r.



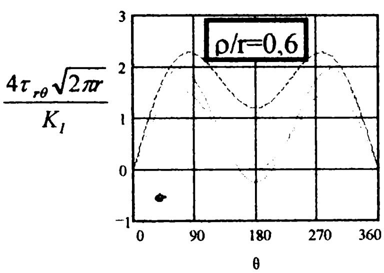
rel. (2.1.6.10), (2.1.6.1), (2.1.6.18)

Figura 2.1.6.18



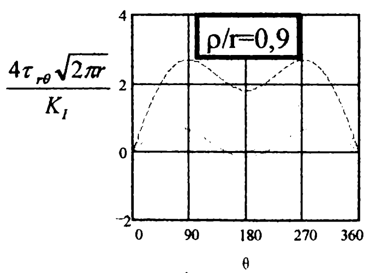
rel. (2.1.6.10)
rel. (2.1.6.1)
--- rel. (2.1.6.18)

Figura 2.1.6.19



rel. (2.1.6.10)
rel. (2.1.6.1)
--- rel. (2.1.6.18)

Figura 2.1.6.20



rel. (2.1.6.10)
rel. (2.1.6.1)
--- rel. (2.1.6.18)

Figura 2.1.6.21

Analog pentru modul II de deplasare se prezintă în Figurile 2.1.6.22 - 2.1.6.25 variaţia raportului $\dfrac{4\sigma_r\sqrt{2\pi r}}{K_{II}}$ dată de soluţia determinată, rel. (2.1.6.15); de soluţia Irwin, rel. (2.1.6.1) şi de soluţia Creager, rel. (2.1.6.19).

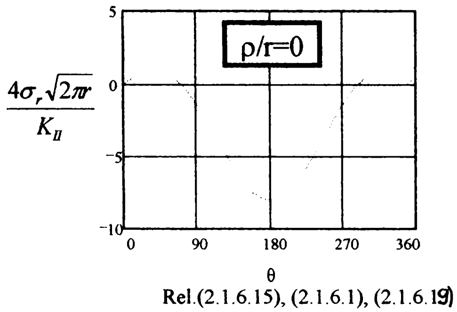


Figura 2.1.6.22

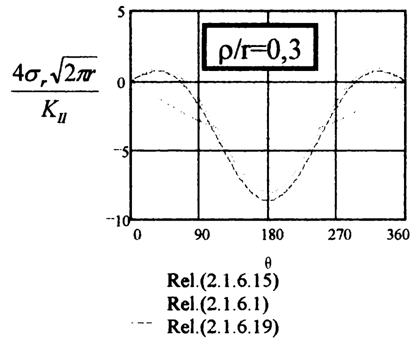


Figura 2.1.6.23

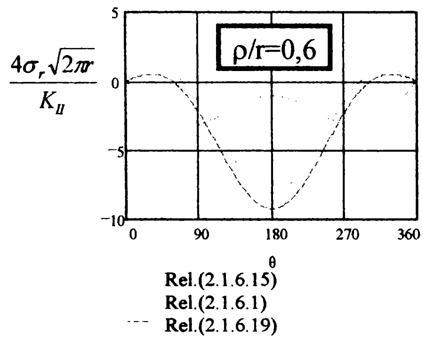


Figura 2.1.6.24

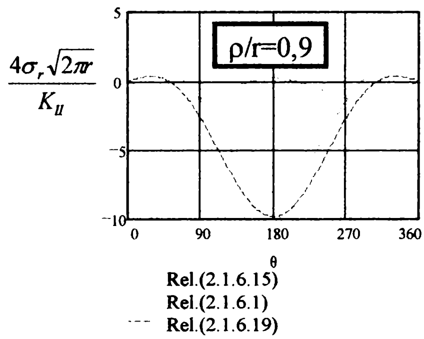


Figura 2.1.6.25

Pentru componenta σ_r şi modul II se observă din Figurile 2.1.6.23 - 2.1.6.25 că există diferenţe mari între soluţiile Irwin şi Creager şi soluţia propusă de autor.

În Figurile 2.1.6.26 - 2.1.6.29 s-a reprezentat variaţia raportului $\dfrac{4\sigma_\theta\sqrt{2\pi r}}{K_{II}}$ dată de soluţia propusă de autor, rel. (2.1.6.15); de soluţia Irwin, rel. (2.1.6.1) şi de soluţia Creager, rel. (2.1.6.19), pentru diferite valori ale raportului ρ/r.

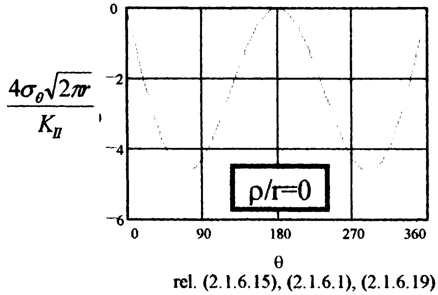


Figura 2.1.6.26

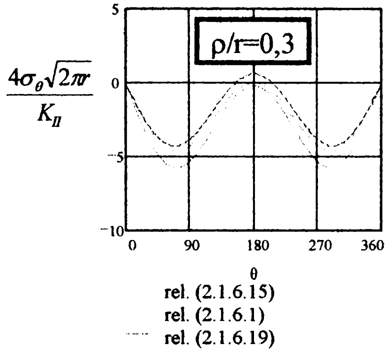


Figura 2.1.6.27

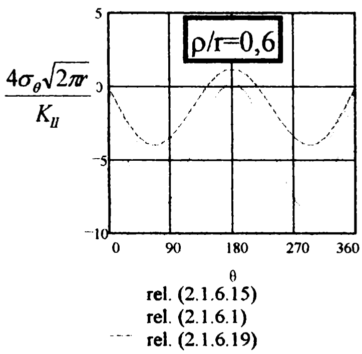


Figura 2.1.6.28

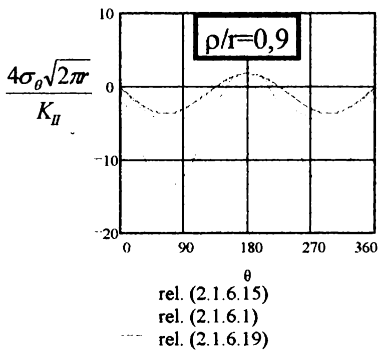


Figura 2.1.6.29

Pentru raportul $\frac{4\sigma_\theta\sqrt{2\pi r}}{K_{II}}$ trasat în Figurile 2.1.6.26-2.1.6.29 se observă că odată cu creşterea raportului ρ/r, cresc diferenţele dintre soluţia propusă (2.1.6.15) şi soluţiile Irwin, respectiv Creager.

Analog în Figurile 2.1.6.30 - 2.1.6.33 s-a reprezentat variaţia raportului $\frac{4\tau_{r\theta}\sqrt{2\pi r}}{K_{II}}$ în funcţie de unghiul θ pentru diferite rapoarte ρ/r, în cazul II de deplasare a flancurilor fisurii.

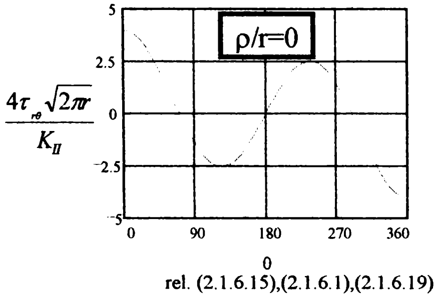


Figura 2.1.6.30

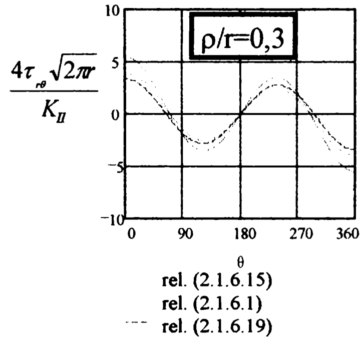


Figura 2.1.6.31

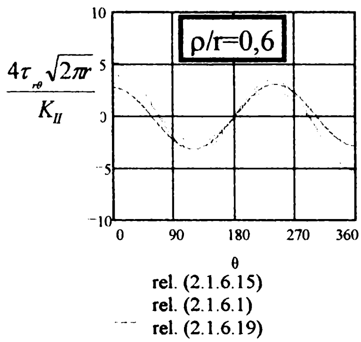


Figura 2.1.6.32

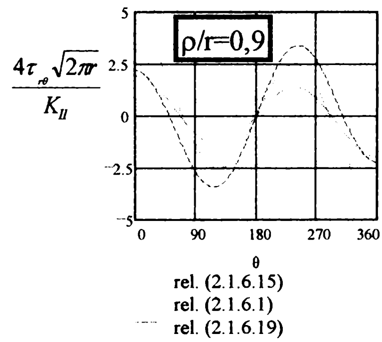


Figura 2.1.6.33

În acest paragraf autorul propune noi soluţii pentru exprimarea câmpului de tensiuni din vecinătatea unei crestături înguste terminată cu un orificiu circular. Soluţiile pentru modul I şi II s-au obţinut pornind de la expresia funcţiei de tensiune Airy, considerată sub forma unei serii de puteri. Variaţiile componentelor câmpului de tensiune, exprimate în coordonate polare, s-au reprezentat în funcţie de unghiul θ şi de raportul ρ/r, Figurile 2.1.6.3 - 2.1.6.5 pentru modul I, respectiv Figurile 2.1.6.6 - 2.1.6.8 pentru modul II.

De asemenea s-au reprezentat comparativ variaţiile componentelor câmpului de tensiune, date de soluţia Irwin, soluţia Creager şi soluţia propusă de autor. Din aceste reprezentări se pot observa diferenţele între cele trei soluţii pentru valori ale rapoartului ρ/r diferite de 0. Aceasta impune ca pentru analiza câmpului de tensiune din vecinătatea crestăturilor ascuţite terminate cu un orificiu circular să se utilizeze relaţiile propuse de autor (2.1.6.10) - pentru modul I, respectiv (2.1.6.15) - pentru modul II. Pentru valori ale raportului $\rho/r=0$, cazul fisurii, soluţiile Irwin, Creager şi cea propusă de autor coincid.

2.2 TENSIUNI ŞI DEFORMAŢII ÎN CORPURI ELASTO-PLASTICE CU FISURI

2.2.1 DEFORMAŢII PLASTICE LA VÂRFUL FISURII

Datorită concentrării puternice a tensiunilor în jurul fisurilor, tensiunile depăşesc limita de curgere a materialului, având ca efect apariţia unor deformaţii plastice în aceste zone. Forma şi mărimea enclavei plastice depinde de starea de tensiune şi deformaţie ce ia naştere în vecinătatea fisurii, fiind influenţată de geometria corpului (lungimea fisurii, grosimea corpului, etc), încărcarea aplicată şi caracteristica de deformare $\sigma-\varepsilon$ a materialului.

Cercetările experimentale au evidenţiat două moduri principale de formare a enclavei plastice la vârful fisurii, [B15], [H1]:

- la tensiuni relativ mici, enclava plastică se extinde normal pe planul fisurii, aceasta realizându-se pe toată grosimea plăcii, deformaţiile produse în acest caz confirmând formarea unei articulaţii plastice la vârful fisurii, Fig.2.2.1.1.a;

- la tensiuni relativ mari, enclava plastică se dezvoltă tot perpendicular pe planul fisurii dar planele de alunecare sunt paralele cu direcţia de propagare a fisurii, în secţiunea transversală aceste plane formând două reţele ortogonale înclinate la 45° faţă de planul fisurii. În acest caz lăţimea enclavei plastice este egală cu grosimea plăcii, Fig.2.2.1.1.b.

La tensiuni medii, enclava plastică are o configuraţie mixtă de tranziţie de la alunecare de tip articulaţie la alunecare în plane înclinate la 45°.

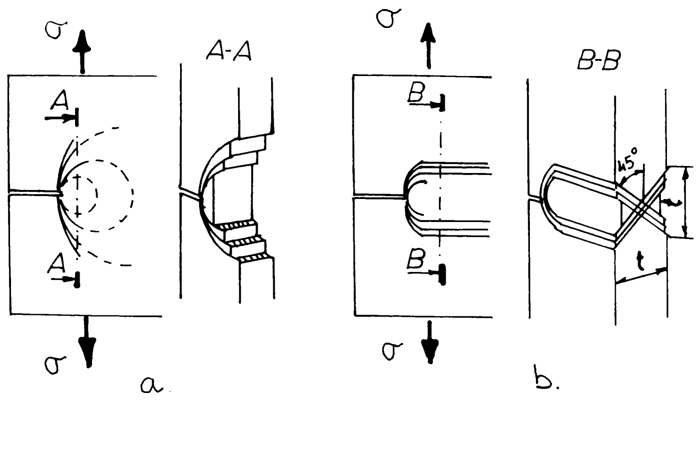


Figura 2.2.1.1

O primă aproximare pentru determinarea extinderii enclavei plastice este dată de Irwin, pe baza soluţiei elastice (2.1.3.4), punând condiţia ca tensiunea σ_y să atingă valoarea limitei de curgere σ_C : $\sigma_y = \sigma_C$, se poate obţine raza enclavei plastice :

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \Rightarrow r_p(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_c}\right)^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)^2 \quad (2.2.1.1)$$

unde $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$, reprezintă factorul de intensitate a tensiunii pentru modul I de deplasare a flancurilor fisurii.

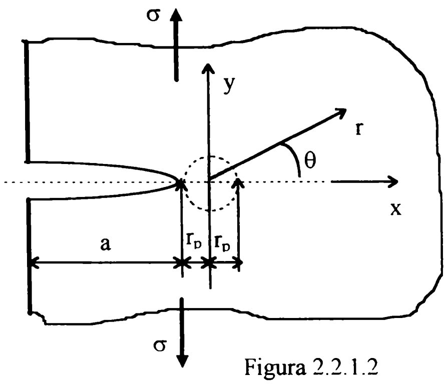


Figura 2.2.1.2

Aceste relaţii sunt valabile pentru modelulul din Figura 2.2.1.2, pentru care, în zona $a < x < a+2r_p$ tensiunile sunt considerate egale cu valoarea limitei de curgere σ_C, iar pentru $x > a+2r_p$ tensiunile variază conform soluţiei liniar-elastice a lui Irwin, dar în care lungimea fisurii, **a**, se majorează cu raza enclavei plastice r_p. În acest ultim caz expresia factorului de intensitate a fisurii va fi:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi(a+r_p)} \quad (2.2.1.2)$$

Cercetările ulterioare au evidenţiat că această aproximare este valabilă doar în cazul enclavelor plastice limitate în raport cu lungimea fisurii $r_p << a$.

În lucrarea [B13] s-a prezentat determinarea analitică a formei enclavei plastice, obţinută luând în considerare cele două criterii de plasticitate **Von Mises**:

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_y)^2+6\tau_{xy}^2+6\tau_{yz}^2+6\tau_{zx}^2=2\sigma_c^2 \quad (2.2.1.3)$$

respectiv **Tresca**:

$$\tau_m = \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) = \tau_c = \frac{\sigma_c}{2} \quad (2.2.1.4)$$

unde $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ reprezintă tensiunile principale iar τ_c tensiunea tangenţială la care se produce curgerea.

Calculele analitice s-au efectuat considerând un corp omogen şi izotrop aflat în stare plană de tensiune, respectiv de deformaţie, trasând forma enclavei plastice pentru modul I, II şi mixt (I + II) de deplasare a flancurilor fisurii.

A) Pentru **modul I** de deplasare a flancurilor fisurii, Figura 2.2.1.3, componentele vectorului tensiunii s-au înlocuit cu soluţia Irwin, rel. (2.1.3.4), obţinându-se pentru

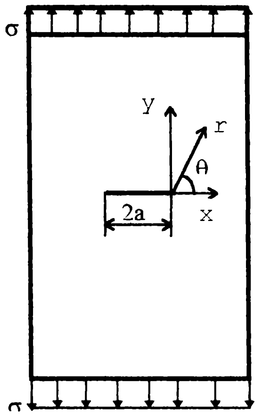


Figura 2.2.1.3

A.1) criteriul Von Mises:

- starea plană de tensiune:

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_C^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 + 3\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.2.1.5)$$

- starea plană de deformație:

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_C^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left[(1-2\nu)^2 + 3\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \quad (2.2.1.6)$$

A.2.) criteriul Tresca:

- starea plană de tensiune:

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_C^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 \quad (2.2.1.7)$$

- starea plană de deformație

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_C^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left[1 - 2\nu + \sin\frac{\theta}{2}\right]^2 \quad (2.2.1.8)$$

În Figura 2.2.1.4 s-a reprezentat forma zonei plastice sub formă adimensională $r_p^* = r_p(\theta)/(K_I/\sigma_C)^2$, calculată pe baza criteriului Von Mises pentru starea plană de tensiune, respectiv starea plană de deformație, iar în Figura 2.2.1.5 forma zonei plastice pe baza criteriului Tresca

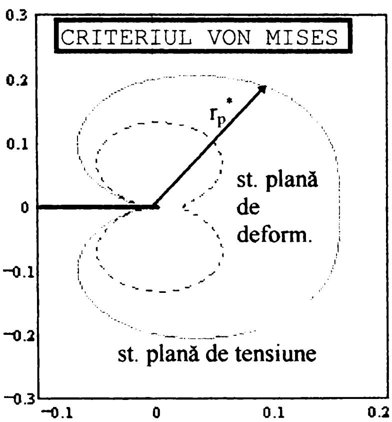


Figura 2.2.1.4

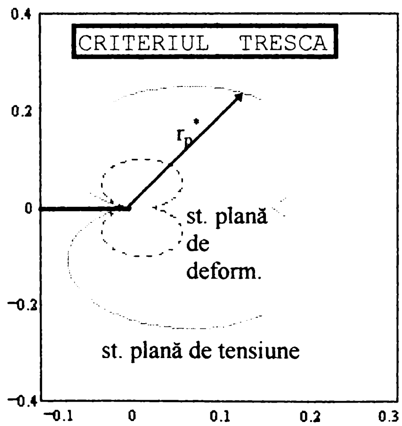


Figura 2.2.1.5

În Figurile 2.2.1.6 şi 2.2.1.7 am reprezentat variaţia raportului dintre raza zonei plastice şi semilungimea fisurii r_p/a, pentru diferite valori ale raportului dintre tensiunea aplicată σ şi limita de curgere σ_C (σ / σ_C = 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8) după criteriul Von Mises pentru starea plană de tensiune, respectiv pentru starea plană de deformaţie.

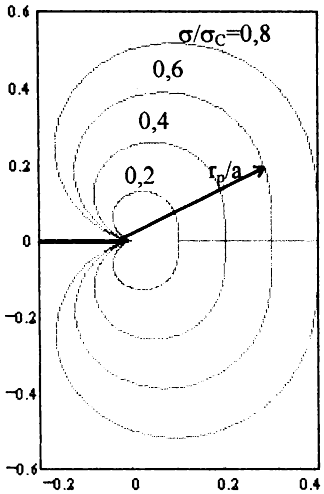


Figura 2.2.1.6

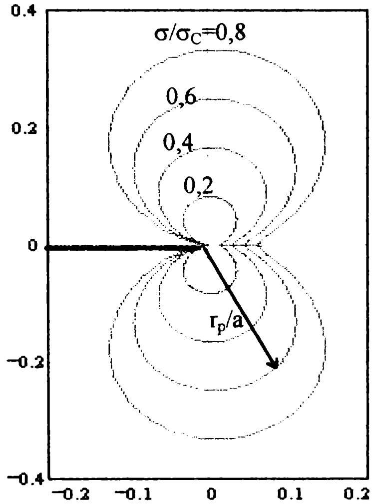


Figura 2.2.1.7

În mod analog am reprezentat variaţia raportului r_p / a pentru criteriul de plasticitate Tresca, la diferite trepte de încărcare σ / σ_C pentru starea plană de tensiune (Figura 2.2.1.8), respectiv starea plană de deformaţie, Figura 2.2.1.9.

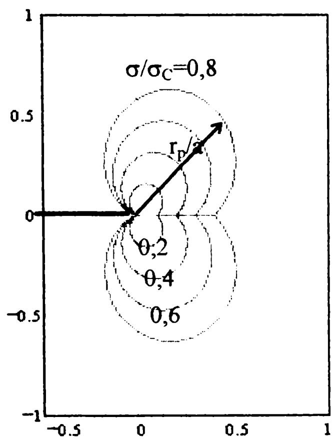


Figura 2.2.1.8

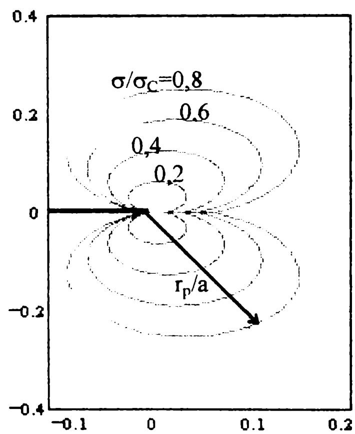


Figura 2.2.1.9

Pe baza studiului efectuat se observă că extinderea zonei plastice este mai mare pentru starea plană de tensiune decât pentru starea plană de deformație în cazul ambelor criterii de plasticitate considerate, Figurile 2.2.1.4 - 2.2.1.9. Acest fapt explică recomandarea standardelor de Mecanica ruperii care prevăd ca determinarea tenacității la rupere K_{IC} să se efectueze pe epruvete ce respectă condițiile stării plane de deformație.

B) **Modul II** de deplasare a flancurilor fisurii este bazat pe soluția Irwin dată de relațiile (2.1.3.5). Pentru o placă cu fisură centrală de lungime **2a**, solicitată de tensiunea τ factorul de intensitate a tensiunii pentru modul II este: $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$, Figura 2.2.1.10.

Pe baza criteriului de plasticitate Von Mises, exprimat de relația (2.2.1.3), am efectuat un studiu analitic pentru determinarea formei enclavei plastice de la vârful fisurii pentru modul II de deplasare a flancurilor fisurii, obținând pentru:

- starea plană de tensiune:

$$r_p(\theta) = \frac{K_{II}^2}{2\pi\sigma_C^2}\left(3 + \sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right) \qquad (2.2.1.9)$$

- pentru starea plană de deformație:

$$r_p(\theta) = \frac{K_{II}^2}{2\pi\sigma_C^2}\left[3 + (1-2\nu)^2\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right] \qquad (2.2.1.10)$$

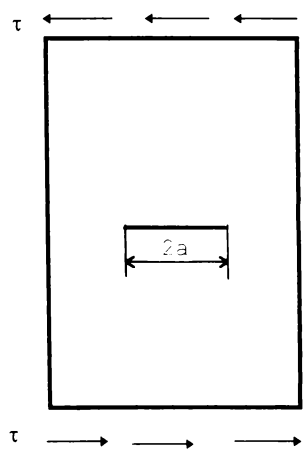


Figura 2.2.1.10

În Figura 2.2.1.11 am reprezentat în coordonate polare forma zonei plastice pentru modul II de deplasare a flancurilor fisurii, trasată pe baza criteriului Von Mises de plasticitate prin intermediul mărimii adimensionale:

$$r_p^* = r_p \ (K_{II} \ \sigma_C)^2 .$$

Din Figura 2.2.1.11 se observă că pentru modul II de deplasare a flancurilor fisurii, extensia zonei plastice este mai mare după axa **x** comparativ cu modul I la care zona plastică se dezvoltă mai mult după axa **y**.

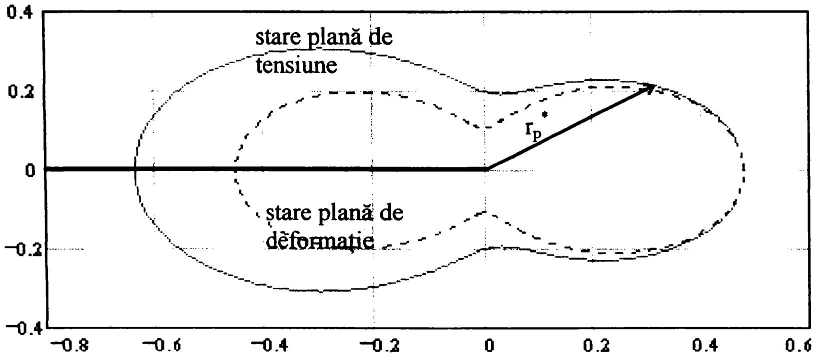


Figura 2.2.1.11

C) **Modul mixt (I + II)** de deplasare a flancurilor fisurii. S-a considerat o placă având a fisură înclinată cu unghiul β faţă de direcţia de solicitare, Figura 2.2.1.12. Starea de tensiune într-un punct din vecinătatea vârfului fisurii este dată se obţine prin suprapunerea soluţiei pentru **modul I**, relaţiile (2.1.3.4) şi **modul II**, relaţiile (2.1.3.5) de deplasare a flancurilor fisurii:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\\
\sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.2.1.11}$$

unde:

$$\begin{aligned}
K_I &= \sigma\sqrt{2\pi a}\sin^2\beta\\
K_{II} &= \sigma\sqrt{2\pi a}\sin\beta\cos\beta
\end{aligned} \tag{2.2.1.12}$$

iar β este unghiul dintre direcţia încărcării şi direcţia fisurii

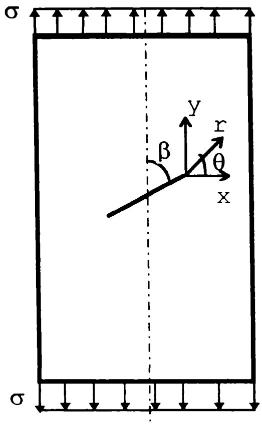


Figura 2.2.1.12

Deoarece calculele analitice se complică pentru trasarea zonei plastice am elaborat un program scris în MathCAD 5.0, pe baza criteriului de plasticitate Von Mises. Datele de intrare în program sunt unghiul dintre direcția fisurii și direcția de solicitare β și coeficentul lui Poisson ν. Programul s-a verificat pentru modurile I și II de deplasare a flancurilor fisurii, pentru care s-a determinat și soluția analitică a razei zonei plastice.

Programul permite trasarea parametrului adimensional:

$$r_p^* = \frac{r_p}{2a(\sigma/\sigma_C)^2} \qquad (2.2.1.13)$$

atât pentru starea plană de tensiune cât și pentru starea plană de deformație.

În Figurile 2.2.1.13, 2.2.1.14 și 2.2.1.15 se prezintă forma zonei plastice trasată pentru: unghiul β având valorile 30^0, 45^0, respectiv 60^0 (s-a considerat ν=0,3).

Pe baza studiului efectuat de autor și a programului de calcul întocmit s-au trasat limitele enclavei plastice de la vârful fisurii pentru modurile I, II și mixt, pe baza criteriilor de plasticitate Von Mises și Tresca ceea ce reprezintă o contribuție personală.

Diagramele (2.2.1.6) - (2.2.1.9), trasate de autor au utilitate practică deoarece permit evaluarea mărimii zonei plastice formată la vârful unei fisuri, a cărei flancuri se deplasează după modul I, aflată într-un corp supus la întindere monoaxială de tensiunea constantă σ, cunoscând limita de curgere a materialului σ_C.

Programul elaborat pentru trasarea limitelor zonei plastice pentru modul mixt de deplasare a flancurilor fisurii reprezintă de asemenea contribuția personală a autorului.

Valorile analitice obținute pentru raza plastică ce se formează la vârful fisurii sunt comparate în continuare cu rezultatele experimentale obținute prin metoda causticelor.

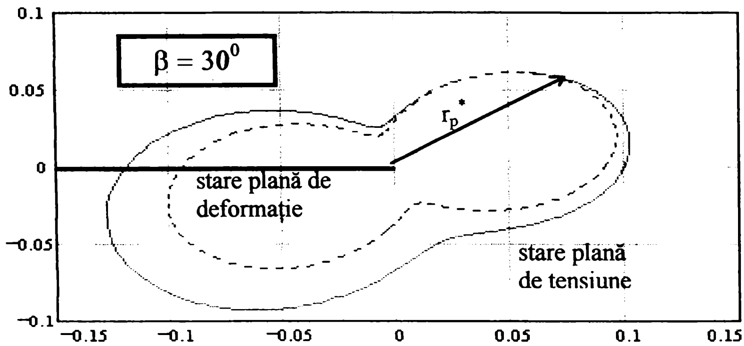


Figura 2.1.1.13

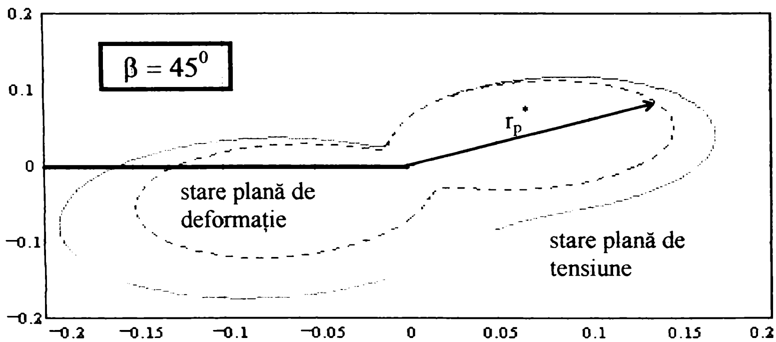


Figura 2.2.1.14

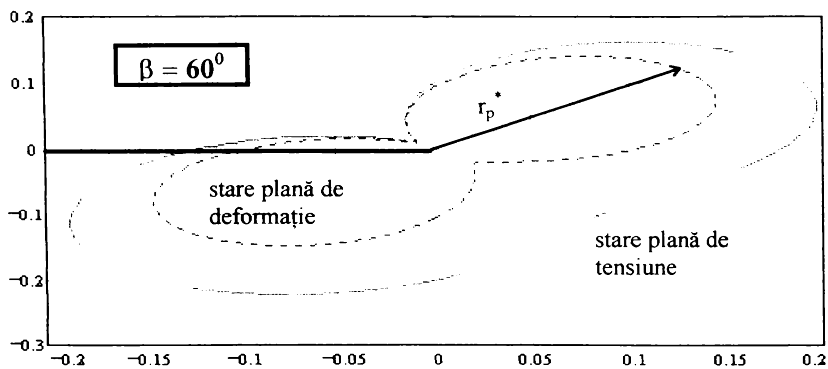


Figura 2.2.1.15

În literatură sunt prezentate rezultatele experimentale, obținute pe baza metodei causticelor, privind determinarea razei zonei plastice de la vârful unei fisuri [L3]. Determinarea parametrilor de rupere (factorul de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$, raza zonei plastice $\mathbf{r_p}$, integrala **J**) prin metoda causticelor este prezentată în lucrările [T5], [T6], [T7], respectiv particularitățile determinării razei zonei plastice sunt prezentate în [M16].

Pentru determinarea experimentală a factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ și a razei zonei plastice $\mathbf{r_p}$, s-a utilizat o epruvetă compactă din aluminiu având forma și dimensiunile din Figura 2.2.1.16 iar limita de curgere $\sigma_C = 100$ MPa, [L3]

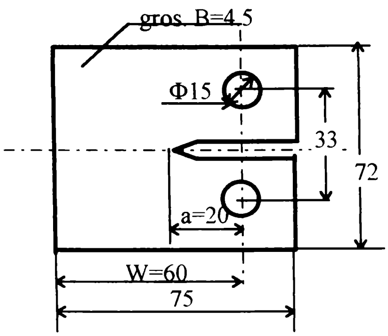


Figura 2.2.1.16

Pentru epruveta compactă expresia factorului de intensitate a tensiunii este:

$$K_I = \frac{F}{B\,W^{1/2}} f(a/W) \qquad (2.2.1.14)$$

unde **F** este încărcarea, în N
B - grosimea epruvetei, în mm
W - lățimea epruvetei, în mm
a - lungimea fisurii, în mm
f(a/W) - o funcție de geometria epruvetei

$$f(a/W) = 29{,}6\left(\frac{a}{W}\right)^{1/2} - 185{,}5\left(\frac{a}{W}\right)^{3/2} + 655{,}7\left(\frac{a}{W}\right)^{5/2} - 1017{,}0\left(\frac{a}{W}\right)^{7/2} + 638{,}9\left(\frac{a}{W}\right)^{9/2} \qquad (2.2.1.15)$$

Pentru epruveta utilizată: W=60 mm, B=20 mm, a=20 mm, f(a/W)=6,2 s-au calculat cu relația (2.2.1.14) valorile analitice ale factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$. Aceste valori sunt prezentate comparativ cu rezultatele experimentale $\mathbf{K_{I,exp}}$ obținute pentru diferite valori ale forței **F**, în Tabelul 2.2.1.1.

Tabelul 2.2.1.1

Încărcarea F [N]	Factorul de intensitate a tensiunii analitic K_I [N/mm$^{3/2}$]	Factorul de intensitate a tensiunii experimental $K_{I,exp}$ [N/mm$^{3/2}$]	Raza zonei plastice det. experimental $r_{p,exp}$ [mm]
400	71,80	73,14	0,1
800	143,58	146,28	0,5
1200	215,35	219,42	1,2
1600	287,15	292,56	2,1
1800	323,04	320,00	2,5

Diferența dintre valorile analitice și cele experimentale ale factorului de intensitate a tensiunii sunt sub 2%.

Raza zonei plastice s-a măsurat experimental pe o direcţie perpendiculară pe fisură, adică pentru unghiul $\theta = 90^0$. Valoarea zonei plastice obţinută experimental este comparată în Figura 2.2.1.17 . cu variaţiile razei zonei plastice date de soluţiile Irwin, Von Mises şi Tresca alese pentru starea plană de tensiune, dată fiind grosimea mică a epruvetei folosite.

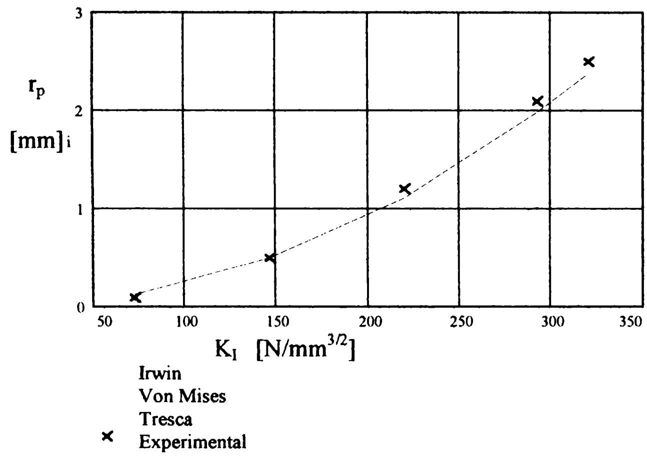


Figura 2.2.1.17

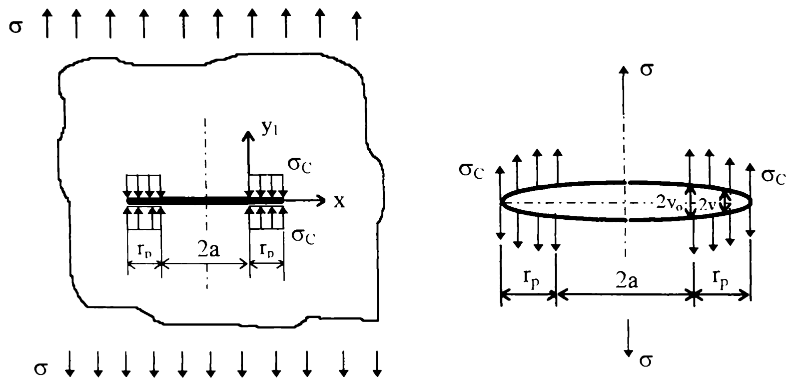
Din Figura 2.2.1.17 se observă că valorile experimentale ale razei zonei plastice sunt cele mai apropiate de valo rile razei zonei plastice, care s-a determinat analitic pe baza criteriului de plasticitate Tresca.

Se observă de asemenea că la valori relativ mici ale încărcării F < 500 N , care corespund raportului σ/σ_C < 0,2 raza zonei plastice are valori apropiate indiferent de soluţia considerată, fapt confirmat şi de determinările experimentale. Pentru valori ale raportului σ/σ_C > 0,2 determinarea razei zonei plastice trebuie făcută cu ajutorul unui criteriu de plasticitate.

Cercetările ulterioare au evidenţiat că această aproximare este valabilă doar în cazul enclavelor plastice limitate în raport cu lungimea fisurii $r_p \ll a$. Pornind de la aceasta s-a căutat introducerea unor modele care să ia în considerare câmpul de tensiuni şi deformaţii elasto-plastice care apar în zona adiacentă vârfurilor fisurilor. Un astfel de model este modelul Dugdale.

2.2.2 MODELUL DUGDALE

Enclava plastică de la vârful fisurii este simulată de un mediu rigido-plastic, cu limita de curgere σ_C, urmând criteriul Tresca de plasticitate, confirmat anterior de rezultatele experimentale. Se consideră o placă infinită ce conține o fisură de lungime **2a**, încărcată cu o tensiune omogenă σ, aplicată la infinit. Zona deformată plastic este simulată de tensiunea omogenă σ_C (egală cu limita de curgere a materialului), uniform distribuită pe porțiunea $\mathbf{r_p}$, în prelungirea fisurii, simetric față de planul fisurii, Fig.2.2.2.1.a. Comportarea materialului în exteriorul enclavei plastice se consideră liniar-elastică.



a b

Figura 2.2.2.1

Determinarea soluției se obține prin suprapunerea efectelor celor două situații studiate:

- planul elastic cu fisură de lungime **2(a+r$_p$)**, încarcat la infinit cu tensiunea omogenă σ, căruia îi corespunde factorul de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_e}$, dat în [P3]:

$$K_e = \sigma\sqrt{\pi(a + r_p)} \tag{2.2.2.1}$$

- planul elastic cu fisură de lungime **2(a+r$_p$)**, încărcat pe intervalul simetric [a, a+r$_p$], cu tensiunea uniformă σ_C, egală cu valoarea limitei de curgere. Acestei situații îi corespunde un factor de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_p}$, dat de relația [P3] :

$$K_p = 2\sigma_C\sqrt{\frac{a + r_p}{\pi}}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{a}{a + r_p}\right)\right] \tag{2.2.2.2}$$

Raza zonei plastice $\mathbf{r_p}$ se va determina din condiția ca la extremitatea fisurii să nu mai existe singularitatea câmpului de tensiune (K = 0), această condiție fiind îndeplinită dacă:

$$K_e + K_p = 0 \tag{2.2..2.3}$$

Înlocuind relațiile (2.2.2.1) şi (2.2.2.2) în ecuația (2.2.2.3) se obține raza enclavei plastice:

$$\frac{a}{a+r_p} = \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_C}\right) \Rightarrow r_p = a\left[\sec\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_c}\right) - 1\right] \tag{2.2.2.4}$$

Dezvoltând în serie ultima relație şi reținând doar primul termen al dezvoltării, se obține:

$$r_p \cong \frac{\pi^2 a}{8}\left(\frac{\sigma}{\sigma_C}\right)^2 = \frac{\pi K_e^2}{8\sigma_C^2} \tag{2.2.2.5}$$

relație valabilă doar în cazul enclavelor plastice limitate $\mathbf{r_p << a}$ şi σ/σ_C < **0,3**. În acest caz, al limitării încărcării, care asigură o extindere limitată a enclavei plastice, neglijabilă în raport cu lungimea fisurii, se defineşte stadiul de deformare plastică localizată.

Deformația plastică de la vârful fisurii fizice este caracterizată de deplasarea **v**, Fig.2.2.2.1.b. Ea se obține pe baza principiului suprapunerii efectelor cu ajutorul funcției de tensiune Westergaard, care are două componente: una elastică $\mathbf{Z_e}$, ce caracterizează corpul infinit cu fisură de lungime $\mathbf{2(a+r_p)}$, încărcat la infinit cu tensiunea σ şi o componentă plastică $\mathbf{Z_p}$, corepunzătoare aceluiaşi corp, dar încărcat de data aceasta cu tensiunea σ_C pe domeniul [a, a+r_p]; adică:

$$Z = Z_e + Z_p \tag{2.2.2.6}$$

Exprimând funcțiile de tensiune $\mathbf{Z_e}$ şi $\mathbf{Z_p}$ pentru cele două cazuri considerate şi înlocuind apoi funcția de tensiune rezultantă **Z**, în expresiile (2.1.2.6) se pot obține în urma unor calcule laborioase tensiunile şi deplasările.

Se va prezenta în continuare doar expresia tensiunii normale pe direcția de propagare a fisurii σ_y, într-un punct pe axa ox, situat la distanța $\mathbf{x > a+r_p}$:

$$\sigma_y = \sigma \left[1 + \frac{2\sigma_c}{\pi\sigma} arctg \frac{\sin \frac{\pi\sigma}{\sigma_c}}{e^{2\alpha} - \cos \frac{\pi\sigma}{\sigma_c}} \right] \qquad (2.2.2.7)$$

unde σ este tensiunea ce acţionează la infinit

σ_C este limita ce curgere a materialului

α = arcch $[x/(a+r_p)]$ un parametru în funcţie de poziţia punctului în care se calculează tensiunea, x şi de lungimea corectată a fisurii $(a+r_p)$.

De asemenea se poate exprima valoarea deplasării $\mathbf{v_o}$, pe direcţia y, în punctul $\mathbf{x = a}$, adică la vârful fisurii reale, Fig.2.2.2.1.b:

$$v_0 = \frac{4\sigma_c a}{\pi E} \ln \sec(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_c}) \qquad (2.2.2.8)$$

unde **E** este modulul de elasticitate longitudinal.

Dezvoltând în serie funcţia **ln sec** $(\pi\sigma/2\sigma_C)$ şi luând în considerare numai primul termen al dezvoltării, în ipoteza deformaţiilor plastice limitate, se obţine:

$$v_0 = \frac{\pi\sigma^2 a}{2E\sigma_C} \qquad (2.2.2.9)$$

Pe baza acestei deplasări s-a introdus un alt parametru utilizat în Mecanica ruperii materialelor şi anume **deplasarea la deschiderea vârfului fisurii,** δ (crack tip opening displacement, CTOD) :

$$\delta = 2v_0 = \frac{\pi\sigma^2 a}{E\sigma_c} = \frac{K_I^2}{E\sigma_c} \qquad (2.2.2.10)$$

Acest parametru se aplică la studierea ruperii materialelor cu comportare elasto-plastică.

Modelul Dugdale se poate aplica în principiu pentru orice fel de geometrie şi încărcare, pentru care se pot exprima funcţiile de tensiune Westergaard $\mathbf{Z_c}$ şi $\mathbf{Z_p}$. Practic, însă calculele analitice pentru geometrii şi încărcări complexe devin extrem de laborioase, ceea ce duce la imposibilitatea aplicării modelului Dugdale în aceste cazuri. Trebuie menţionat că limitările modelului sunt generate şi de ipoteza comportării rigido-plastice a materialului în enclava plastică de la vârful fisurii.

2.2.3 DETERMINAREA DEPLASĂRII LA DESCHIDERE A VÂRFULUI FISURII CU AJUTORUL FUNCȚIILOR DE PONDERE

Se consideră că pentru o anumită geometrie și încărcare se cunoaște soluția elastică (pe care o voi denumi soluție de referință), adică se cunoaște expresia factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_m}$, funcția de pondere **h(x,a)**, respectiv soluția deplasării pe direcția normală față de fisură $\mathbf{v_m}$ **(x,a)**, legate între ele prin relația:

$$h(x,a)=\frac{E'}{K_m}\frac{\partial v_m(x,a)}{\partial a} \tag{2.2.3.1}$$

Din această relație se observă că se poate calcula expresia deplasării pentru orice altă încărcare **σ(x)** sub forma:

$$v=\frac{1}{E'}\int_0^a h(x,a)K(a)da \tag{2.2.3.2}$$

relație în care **h(x,a)** reprezintă funcția de pondere iar **K(a)** factorul de intensitate a tensiunii pertinent încărcării **σ(x):**

$$K=\int_0^a \sigma(x)h(x,a)dx \tag{2.2.3.3}$$

În concluzie cunoscând funcția de pondere h(x,a) pentru o anumită geometrie se poate calcula expresia deplasarii de deschidere la vârful fisurii δ:

$$\delta=2v=\frac{2}{E'}\int_0^a h(x,a)K(a)da \tag{2.2.3.4}$$

Utilizarea funcțiilor de pondere pentru determinarea deplasării de deschidere la vârful fisurii este o metodă simplă, dacă se cunoaște pentru corpul fisurat respectiv o soluție completă pentru o anumită încărcare.

2.2.4 EXPRIMAREA CÂMPULUI DE TENSIUNI ŞI DEFORMAŢII PRIN INTERMEDIUL INTEGRALEI J

Exprimarea câmpului de tensiuni şi deformaţii din vecinătatea unei fisuri aflată într-um corp cu comportare elasto-plastică se poate face prin intermediul **integralei de contur J**, propusă de Rice [R3].

Se consideră un corp plan omogen cu caracteristica σ–ε liniară sau neliniară solicitat de un sistem de forţe exterioare ce induc în corp, în absenţa forţelor masice, tensiunile σ_x, σ_y şi τ_{xy}. Presupunând că acest corp conţine o fisură orientată după axa **ox**, a sistemului de coordonate ales (Fig.2.2.4.1), **integrala de contur J**, pentru un contur oarecare Γ, situat în interiorul corpului, se defineşte:

$$J = \int_{\Gamma} \left(U dy - \vec{p} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \right) ds \quad [N/mm] \tag{2.2.4.1}$$

unde : - **U** este energia specifică de deformaţie:

$$U = \int_0^{\varepsilon} (\sigma_x \, d\varepsilon_x + \sigma_y \, d\varepsilon_y + \tau_{xy} \, d\gamma_{xy})$$

- **p** este vectorul tensiune totală raportat la normala într-un punct de pe conturul Γ

$$\vec{p} = p_{nx} \vec{i} + p_{ny} \vec{j}$$

- **f** este vectorul deplasare raportat la normala într-un punct de pe conturul Γ

$$\vec{f} = u \vec{i} + v \vec{j}$$

- **ds** elementul de arc de pe conturul Γ

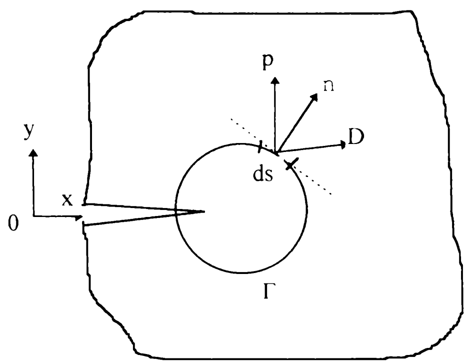


Figura 2.2.4.1

Proprietatea principală a integralei **J** este că ea nu depinde de conturul de integrare Γ, [K2]. De aceia conturul de integrare se poate alege cât mai convenabil, astfel încât valoarea integralei **J** să poată fi determinată cu uşurinţă.

Utilitatea integralei **J** în analiza stării de tensiune elasto-plastică în zona adiacentă vârfului fisurilor, constă în faptul că valoarea ei se poate determina relativ uşor pentru diferite cazuri de încărcare, configuraţii geometrice şi medii cu diferite caracteristici σ–ε.

Integrala **J** se poate considera ca parametru de rupere atât în cazul materialelor cu comportare liniar elastică, dar şi în cazul materialelor cu comportare elasto-plastică.

Astfel dacă se consideră un corp cu comportare liniar-elastică, aflat într-o stare de solicitare ce produce deplasări ale flancurilor fisurii după toate cele trei moduri, iar conturul de integrare se ia în interiorul regiunii în care componentele câmpului de tensiune şi deformaţie se exprimă prin intermediul factorului de intensitate a tensiunii **K**, Fig.2.2.4.2, rezultă:

- pentru starea plană de deformaţie

$$J=\frac{1-\nu^2}{E}(K_I^2+K_{II}^2)+\frac{1+\nu}{E}K_{III}^2 \qquad (2.2.4.2)$$

- pentru stare plană de tensiune

$$J=\frac{1}{E}(K_I^2+K_{II}^2)+\frac{1+\nu}{E}K_{III}^2 \qquad (2.2.4.3)$$

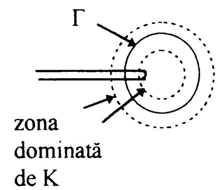


Figura 2.2.4.2

Aceste relaţii exprimă legătura dintre integrala **J** şi factorii de intensitate ai tensiunii corespunzători celor trei moduri de deplasare a flancurilor fisurii $\mathbf{K_I}$, $\mathbf{K_{II}}$ şi $\mathbf{K_{III}}$, [R3]. Relaţiile (2.2.4.2) şi (2.2.4.3) rămân valabile chiar dacă la vârful fisurii apare o curgere plastică localizată, ce produce o enclavă plastică de dimensiuni neglijabile în comparaţie cu lungimea fisurii.

Dacă materialul sub acţiunea solicitărilor capătă deformaţii plastice considerabile, valoarea integralei **J** poate fi calculată cu aproximaţie, deoarece independenţa de conturul de integrare se păstrează. Astfel, pentru un material cu o caracteristică σ–ε, sub forma relaţiei Ramberg-Osgood, Fig.2.2.4.3

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_C}=\frac{\sigma}{\sigma_C}+\alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_C}\right)^{\lambda} \qquad (2.2.4.4)$$

unde λ coeficent de ecruisare.

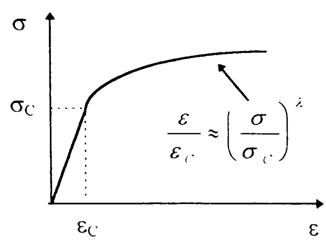


Figura 2.2.4.3

Integrala J se poate exprima sub forma, [C5]:

$$J = A(\lambda)\, K_{plastic}^{\lambda+1}$$
$$K_{plastic} = C(\lambda)\, K_{elastin}^{2/(\lambda+1)} \qquad (2.2.4.6)$$

unde **A(λ)** şi **C(λ)** sunt constante dependente de coeficentul de ecruisare al caracteristicii σ–ε.

$K_{elastic}$ este factorul de intensitate a tensiunii pertinent domeniului exterior enclavei plastice

$K_{plastic}$ este un factor plastic de intensitate a tensiunii calculat pe baza lui **$K_{elastic}$** ,a coeficentului de ecruisare λ şi a constantei **C(λ).**

Cunoscând valoarea integralei **J** câmpul de tensiuni şi deformaţii se exprimă în coordonate polare (r,θ), [K2] astfel:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \sigma_C \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_C^2 I(\lambda) r} \right)^{\frac{1}{\lambda+1}} \begin{Bmatrix} f_x(\theta,\lambda) \\ f_y(\theta,\lambda) \\ f_{xy}(\theta,\lambda) \end{Bmatrix} \qquad (2.2.4.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_C}{E} \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_C^2 I(\lambda) r} \right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \begin{Bmatrix} f_{\varepsilon x}(\theta,\lambda) \\ f_{\varepsilon y}(\theta,\lambda) \\ f_{\varepsilon xy}(\theta,\lambda) \end{Bmatrix} \qquad (2.2.4.6)$$

unde **E** este modulul de elasticitate longitudinal

I(λ) este o constantă funcţie de coeficentul de ecruisare λ

f_i(θ,λ) şi **$f_{\varepsilon i}$(θ,λ)** sunt funcţii de unghiul θ şi de coeficentul de ecruisare λ

Determinarea printr-o metodă analitică, numerică sau experimentală a valoarii integralei **J**, pentru un material cu comportare elasto-plastică, permite apoi cu ajutorul relaţiilor (2.2.4.5), (2.2.4.6) calculul componentelor câmpului de tensiune şi deformaţie.

Parametrul **integrala J** este utilizat la modelarea numerică a corpurilor fisurate. **Integrala J** poate fi folosită atât în domeniul liniar-elastic pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii K, rel. (2.2.4.2) sau (2.2.4.3), cât şi în domeniul elasto-plastic ca parametru ce caracterizează starea de tensiune şi deformaţie într-un corp fisurat cu comportare elasto-plastică.

CAPITOLUL 3
UTILIZAREA METODEI ELEMENTELOR FINITE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII

3.1 NOŢIUNI INTRODUCTIVE

Exprimarea analitică a câmpului de tensiuni şi deformaţii în jurul fisurilor se poate face doar într-un număr limitat de cazuri soluţiile fiind pertinente unor geometrii şi încărcări idealizate, [M6]. Există în realitate configuraţii geometrice de corpuri cu fisuri şi încărcări pentru care soluţia analitică nu se poate obţine. În aceste cazuri se recurge la **Metoda Elementelor Finite** (MEF), care poate furniza soluţii numerice aproximative a căror acurateţe în anumite condiţii poate fi apropiată de soluţia exactă.

Metoda elementelor finite (**MEF**) este la ora actuală cea mai utilizată metodă pentru determinarea stării de tensiune şi deformaţie din jurul fisurilor şi pentru determinarea parametrilor mecanicii ruperii (factorului de intensitate a tensiunii **K**, deplasarii la deschidere a fisurii δ sau integralei **J**). În lucrările [A1], [A2], [A4], [B5], [B12], [C3], [C8], [F2], [H3], [H10], [H11], [J1], [M4], [M9], [O2], [P5], [R4], [S2], [S3], [S19], [Z1] se prezintă, sub diferite aspecte, utilizarea MEF la diferite geometrii cu discontinuităţi geometrice de forma fisurilor. Sintetizând problematica folosirii MEF în aplicaţiile cu fisuri se disting două particularităţi faţă de aplicaţiile clasice ale MEF, şi anume <u>modelarea singularităţii vârfului fisurii</u> şi <u>determinarea parametrilor de rupere</u> în urma analizei cu elemente finite.

Metoda elementelor finite se foloseşte atât pentru probleme bidimensionale cât şi pentru probleme tridimensionale. De asemenea se pot determina prin MEF parametrii de Mecanica ruperii atât în domeniul elastic (forţa de extensie a fisurii $\mathcal{G}$, factorul de intensitate a tensiunii **K**), cât şi în domeniul elasto-plastic (deplasarea de deschidere la vârful fisurii δ, integrala **J**).

În acest capitol sunt tratate problemele specifice modelării cu elemente finite a corpurilor cu fisuri, unde autorul are mai multe contribuţii originale.

3.2 BAZELE TEORETICE ALE METODEI ELEMENTELOR FINITE

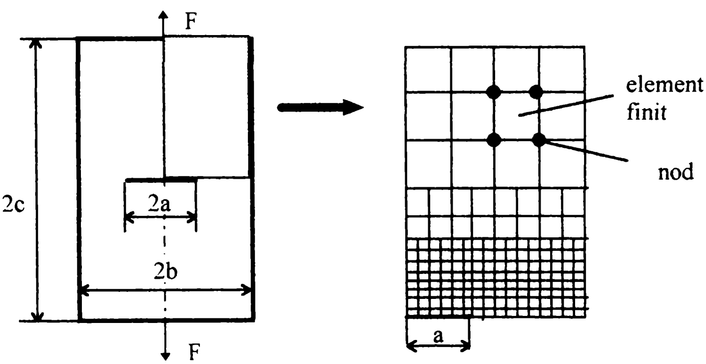


Figura 3.2.1

Metoda elementelor finite constă în discretizarea conceptuală a mediului în elemente finite de o anumită formă, conectate între ele prin nodurile rețelei de discretizare (Figura 3.2.1). Se adoptă apoi o reprezentare funcțională a deplasărilor nodurilor fiecărui element (**deplasări nodale**). Dacă funcțiile deplasărilor (**funcții de interpolare, funcții de formă**) sunt astfel alese încât asigură continuitatea pe frontiera elementelor şi în plus sunt satisfăcute condițiile impuse deplasărilor pe frontiera corpului luat în ansamblu, atunci cea mai bună aproximare a parametrilor ce intră în expresia funcțiilor de formă se obține din condiția minimizării energiei potențiale totale P a întregului corp sub constrângerile impuse.

Inițial se vor trece în revistă câteva noțiuni de teoria elasticității ce intervin în problemele plane de analiză cu elemente finite.

Astfel la aplicarea MEF necunoscutele problemei sunt deplasările nodurilor. Vectorul deplasare {f} al unui punct din interiorul unui element finit se poate exprima în raport cu deplasările nodale prin relația:

$$\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{u\ v\ w}\}^T = [\mathbf{N}]\ \{\mathbf{d}\}_e \tag{3.2.1}$$

unde **u,v,w** reprezintă deplasările pe direcțiile axelor de coordonate **x,y,z**
[**N**] matricea funcțiilor de formă
$\{\mathbf{d}\}_e$ vectorul deplasărilor nodale ale elementului finit
Relația de legătură dintre deformațiile specifice şi deplasările nodale este:

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}]\ \{\mathbf{d}\}_e \tag{3.2.2}$$

sau scrisă explicitând matricea [**B**] de transformare a deplasărilor în deformații specifice:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{3.2.3}$$

Legătura între tensiuni şi deformații specifice este dată de legea lui Hooke generalizată, care se exprimă matriceal pentru corpuri liniar elastice şi izotrope astfel:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{E}]\ \{\varepsilon\} \tag{3.2.4}$$

în care **[E]** reprezintă matricea constantelor elastice, {σ} vectorul tensiunilor iar {ε} vectorul deformațiilor specifice.

Explicitând matricea **[E]** relația (3.2.4) se poate scrie:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \qquad (3.2.5)$$

în relația (3.2.5) **E** reprezintă modulul de elasticitate longitudinal iar ν coeficentul lui Poisson.

Particularizând legea lui Hooke pentru starea plană de tensiuni, respectiv starea plană de deformații, aceasta se poate scrie sub formă concentrată astfel:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (3.2.6)$$

în care avem:

a) pentru starea plană de tensiuni

$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ și $\varepsilon_z = -\upsilon\,(\sigma_x + \sigma_y)\,/\,E$

matricea **[E]** are forma:

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (3.2.7)$$

b) pentru starea plană de deformații

$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ și $\sigma_z = \upsilon\,(\sigma_x + \sigma_y)$

matricea **[E]** are forma:

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (3.2.8)$$

3.3 PRINCIPIUL METODEI ELEMENTELOR FINITE

Pentru determinarea parametrilor din Mecanica ruperii la corpurile cu fisuri prin MEF, se folosesc procedee energetice sau reziduale. Cea mai utilizată metodă energetică este cea bazată pe teorema energiei potenţiale minime. Metodele energetice utilizează principii variaţionale, potrivit cărora ecuaţiile integrale, ce exprimă starea de echilibru a structurii, se obţin prin minimizarea unei mărimi funcţionale. În cazul folosirii teoremei energiei potenţiale minime, funcţionala care trebuie minimizată este energia potenţială sau potenţialul elementului finit.

Teorema energiei potenţiale minime se enunţă astfel: "*dintre toate configuraţiile posibile pentru deplasări, ce satisfac compatibilitatea internă şi condiţiile la limită, numai cele pentru care energia potenţială are o valoare staţionară, minimă, corespund poziţiei de echilibru*".

Energia potenţială totală Π_p, a unui sistem elastic este formată din energia de deformaţie **U** şi potenţialul forţelor exterioare W_p:

$$\Pi_p = U + W_p \tag{3.3.1}$$

Dacă în relaţia (3.3.1) în locul potenţialului forţelor exterioare se introduce lucrul mecanic al forţelor exterioare $W = - W_p$, se obţine:

$$\Pi_p = U - W \tag{3.3.2}$$

Energia de deformaţie U_e, corespunzătoare unui element finit de volum V_e, se exprimă conform teoriei elasticităţii sub forma:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{V_e} \{\varepsilon\}^T [E]\{\varepsilon\} dV \tag{3.3.3}$$

în care $\{\varepsilon\}$ este vectorul deformaţiilor specifice, iar $[E]$ matricea constantelor elastice.

Forţele exterioare ce produc lucru mecanic pot fi forţe de volum (de exemplu greutatea) $\{F\}^T = \{F_x\ F_y\ F_z\}$, forţe de suprafaţă (de exemplu sarcinile distribuite, presiunile) $\{Q\}^T = \{Q_x\ Q_y\ Q_z\}$ sau forţe concentrate ce acţionează în nodurile elementului finit $\{p_n\}$.

Forţele de volum şi de suprafaţă sunt proiectate pe direcţia componentelor deplasărilor $\{f\}^T = \{u\ v\ w\}$, pe când forţele ce acţionează în noduri sunt dirijate în direcţia deplasărilor nodale $\{d\}_e$. Lucrul mecanic al forţelor exterioare pentru un element finit va fi:

$$W_e = \int_{V_e} \{f\}^T \{F\}\, dV + \int_{S_e} \{f\}^T \{Q\}\, dS + \{d\}_e^T \{p_n\} \tag{3.3.4}$$

În relaţia (3.3.4), prima integrală reprezintă lucrul mecanic pe volumul elementului efectuat de forţele de volum, cea de a doua integrală reprezintă lucrul mecanic al forţelor de suprafaţă, iar ultimul termen este lucrul mecanic al forţelor ce acţionează în nodurile elementului finit.

Introdunând relaţiile (3.3.3) şi (3.3.4) în relaţia (3.3.2) se obţine funcţionala energiei potenţiale totale pentru un element finit:

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \int_{Ve} \{e\} [E] \{e\} dV - \int_{Ve} \{f\}^T \{F\} dV - \int_{Se} \{f\}^T \{Q\} dS - \{d\}_e^T \{p_n\} \qquad (3.3.5)$$

Introducând în (3.3.5) deplasările nodale, prin funcțiile de formă, relația (3.2.1) și vectorul {ε} prin relația (3.2.2) se obține:

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \{d\}_e^T \left(\int_{Ve} [B]^T [E] [B] dV \right) \{d\} + \qquad (3.3.6)$$
$$+ \{d\}_e^T \int_{Ve} [N]^T \{F\} dV - \{d\}_e^T \int_{Se} [N]^T - \{d\}_e^T \{p_n\}$$

Astfel pentru întreaga structură energia potențială va fi suma energiilor potențiale a tuturor celor m elemente finite:

$$\Pi_p = \sum_1^m \Pi_{pe} \qquad (3.3.7)$$

sau

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\{d\}^T \left(\sum_1^m \int_{Ve} [B]^T [E][B] dV \right) \{d\} -$$
$$- \{d\}^T \sum_1^m \left(\int_{Ve} [N]^T \{F\} dV - \int_{Se} [N]^T \{Q\} dS \right) - \{d\}^T \{P\} \qquad (3.3.8)$$

În funcționala (3.3.8), care reprezintă energia potențială a întregii structuri **{d}** = Σ **{d}$_e$** reprezintă deplasările nodale ale întregii structuri iar **{P}** = Σ **{p$_n$}** forțele nodale pentru întreaga structură.

Aplicarea teoremei energiei potențiale minime înseamnă minimizarea funcționalei (3.3.8) a potențialului structurii, adică anularea derivatei energiei potențiale totale în raport cu toate deplasările nodale:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial (d_i)} = 0\ ;\ cu\ i = 1,\dots,n \quad sau$$
$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial d_1} = \frac{\partial \Pi_p}{\partial d_2} = \dots = \frac{\partial \Pi_p}{\partial d_n} = 0 \qquad (3.3.9)$$

unde n reprezintă numărul gradelor de libertate ale structurii.

Se obține un sistem liniar de m ecuații de forma:

$$\left(\sum_1^m \int_{Ve} [B]^T [E] [B] dV \right) \{d\} = \sum_1^m \left(\int_{Ve} [N]^T \{F\} dV + \int_{Se} [N]^T \{Q\} dS \right) + \{P\} \qquad (3.3.10)$$

Membrul stâng al relației (3.3.10) reprezintă matricea de rigiditate a structurii, notată **[K]:**

$$[K] = \sum_{1}^{m} \int_{Ve} [B]^T [E] [B] dV = \sum_{1}^{m} [k_i] \tag{3.3.11}$$

ea se poate exprima în funcţie de matricile de rigiditate ale fiecărui element finit:

$$[k] = \int_{Ve} [B]^T [E] [B] dV \tag{3.3.12}$$

Membrul drept al relaţiei (3.3.10) reprezintă vectorul forţelor sau încărcărilor, având componentele:

$\int_{Ve} [N]^T \{F\}$ - vectorul forţelor de volum pe elementul finit

$\int_{Se} [N]^T \{Q\}$ - vectorul forţelor de suprafaţă pe elementul finit

$\{P\}$ - vectorul forţelor aplicate în nodurile structurii

Se utilizează o scriere concentrată a membrului drept al relaţiei (3.3.10) sub forma:

$$\{R\} = \sum_{1}^{m} \{r_i\} + \{P\} \tag{3.3.13}$$

în care

$$\{r_i\} = \int_{Ve} [N]^T \{F\} dV + \int_{Se} [N]^T \{Q\} dS \tag{3.3.14}$$

Astfel sistemul structurii (3.3.10) se scrie concentrat:

$$\left(\sum_{1}^{m} [k_i] \right) \{d\} = \sum_{1}^{m} \{r_i\} + \{P\} \tag{3.3.15}$$

sau

$$[K] \{d\} = \{R\} \tag{3.3.16}$$

Relaţia (3.3.15) stă la baza rezolvării aplicaţiilor prin Metoda elementelor finite. Însumarea din relaţia (3.3.15) a matricelor de rigiditate ale elementelor finite $[k_i]$ şi a vectorilor forţelor pe elementele finite $\{r_i\}$ se face prin operaţia de asamblare.

Rezolvarea sistemului de ecuaţii dat de relaţia (3.3.16), având ca necunoscute componentele vectorului deplasare $\{d\}$, permite cunoaşterea deplasărilor nodale ale structurii. Apoi cu ajutorul relaţiei (3.2.2) se pot calcula deformaţiile specifice $\{\varepsilon\}$, iar apoi prin intermediul legii lui Hooke generalizată, relaţia (3.2.4), componentele vectorului tensiunilor $\{\sigma\}$. Calculul parametrilor din Mecanica ruperii se face pe baza rezultatelor obţinute în urma analizei cu elemente finite: componentele vectorului deplasare $\{d\}$, componentele vectorului tensiunilor $\{\sigma\}$, etc.

Specific rezolvării prin MEF a corpurilor fisurate este modelarea singularităţii vârfului fisurii şi determinarea parametrilor de Mecanica ruperii pe baza rezultatelor numerice obţinute. Aceste aspecte vor fi tratate în continuare.

3.4 MODELAREA SINGULARITĂŢII VÂRFULUI FISURII

Studiile iniţiale, de analiză cu elemente finite în probleme de Mecanica ruperii, au utilizat elemente finite convenţionale (triunghiulare în deosebi, [W1], [P4]), iar pentru obţinerea unei precizii adecvate a câmpurilor singulare de tensiune şi deformaţie de la vârful fisurii a fost necesară o discretizare extrem de fină în jurul vârfului fisurii. Dezvoltările ulterioare au impus utilizarea elementelor finite speciale [H6], [H10], prin care s-au obţinut precizii superioare utilizând o discretizare mai grosieră.

S-au evidenţiat în timp două procedee distincte pentru modelarea singularităţii câmpului de tensiune şi deformaţie de la vârful fisurii şi anume:

I.) - prin alegerea unor funcţii de interpolare speciale pentru aproximarea deplasărilor;

II.) - prin schimbarea poziţei unor noduri, astfel încât pentru unul din nodurile elementului să se obţină o singularitate a deformaţiilor.

Primul procedeu se aplică în general elementelor finite triunghiulare cu 6 noduri, funcţiile de interpolare alegându-se astfel încât la unul din noduri deformaţiile specifice să prezinte o singularitate de forma r^{-p}. În lucrările [Y2], [S19], [F2] sunt prezentate astfel de elemente.

Studiile recente, [A1], [F2], [S2], au reliefat că pentru a găsi o soluţie numerică eficentă, în cazul problemelor cu discontinuităţi geometrice de forma fisurilor, este avantajoasă utilizarea unor elemente izoparametrice speciale la vârful fisurii, obţinute prin deplasarea nodurilor de la mijlocul laturilor (la elementele izoparametrice cu 8 noduri) spre nodul în care se doreşte obţinerea singularităţii. Aceste elemente modelează direct singularitatea câmpului elastic de deformaţie $1/\sqrt{r}$, în vecinătatea vârfului fisurii, prin intermediul matricii de transformare a coordonatelor.

3.4.1 MODELAREA SINGULARITĂŢII VÂRFULUI FISURII UTILIZÂND ELEMENTE FINITE TRIUNGHIULARE

Primele încercări de modelare a problemelor de Mecanica ruperii cu elemente finite au folosit elementele finite triunghiulare cu 3 sau 6 noduri. Singularitatea câmpului de deformaţie de la vârful fisurii s-a realizat prin alegerea unor funcţii de interpolare speciale.

ELEMENTUL TRIUNGHIULAR CU 3 NODURI

În anul 1971 Tracey, propune pentru modelarea singularităţii de la vârful fisurii utilizarea elementelor triunghiulare cu 3 noduri de forma celui din Figura 3.4.1.1, [O2].

Pentru a obţine o singularitate de ordinul $\mathbf{r^{-p}}$ Tracey propune următoarele expresii pentru funcţiile de interpolare, $\mathbf{N_i}$:

$$N_1 = 1-\xi^p \quad , \quad N_2 = \xi^p(1-\eta) \quad , \quad N_3 = \xi^p\eta \qquad (3.4.1.1)$$

unde ξ, η reprezintă coordonatele naturale ale elementului.

Cu expresiile (3.4.3.1) ale funcţiilor de interpolare câmpul de deplasare în interiorul elementului se exprimă :

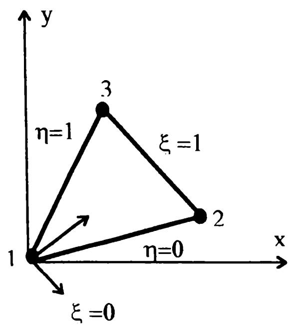


Figura 3.4.1.1

$$u=(1-\xi^p)u_1+\xi^p(1-\eta)u_2+\xi^p\eta u_3$$
$$v=(1-\xi^p)v_1+\xi^p(1-\eta)v_2+\xi^p\eta v_3 \quad (3.4.1.2)$$

$\mathbf{u_i}$, $\mathbf{v_i}$ (cu i = 1,2,3) reprezintă deplasările nodale ale elementului.

Această reprezentare crează o singularitate de ordinul r^{-p} în nodul 1.

Deoarece obținerea unor precizii acceptabile la estimarea parametrilor de Mecanica ruperii necesită determinarea unui număr sporit de informații cu privire la câmpul de deplasări şi tensiuni din vecinătatea vârfului fisurii, elementele triunghiulare cu 3 noduri nu satisfac această condiție. Astfel utilizarea elementelor triunghiulare cu 3 noduri impune o discretizare extrem de fină în jurul vârfului fisurii.

O cale convenabilă de eliminare a acestui dezavantaj constă în utilizarea elementelor triunghiulare cu 6 noduri.

ELEMENTUL TRIUNGHIULAR CU 6 NODURI

Swenson în lucrarea [S19] prezintă metodologia de utilizare a elementelor triunghiulare cu 6 noduri în cazul problemelor de Mecanica ruperii.

În Figura 3.4.1.2 se prezintă un element triunghiular cu 6 noduri.

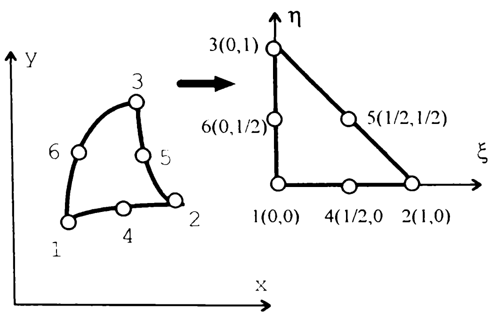


Figura 3.4.1.2

Elementul din Figura 3.4.1.2 este reprezentat mai întâi în sistemul global **(x,y)**, iar apoi în sistemul natural având coordonatele (ξ,η), considerând nodurile 4, 5 şi 6 dispuse la mijlocul laturilor corespunzătoare.

Funcţiile de interpolare **N_i (ξ,η)** (cu i = 1,...,6) exprimate în coordonate naturale, precum şi derivatele acestor funcţii în raport cu coordonatele naturale ξ, η sunt prezentate în Tabelul 3.4.1.1.

Pe baza acestora şi a coordonatelor nodurilor **x_i, y_i** se pot exprima coordonatele globale **x, y**:

$$x=\sum_{i=1}^{6} N_i\, x_i \quad , \quad y=\sum_{i=1}^{6} N_i\, y_i$$

Tabelul 3.4.1.1

NOD	$N_i(\xi,\eta)$	$\dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}$	$\dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}$
1	$2\xi^2-\xi$	$4\xi-1$	0
2	$2\eta^2-\eta$	0	$4\eta-1$
3	$2\xi^2+2\eta^2+4\xi\eta-3\xi-3\eta+1$	$4\xi+4\eta-3$	$4\eta+4\xi-3$
4	$4\xi\eta$	4η	4ξ
5	$4\eta-4\xi\eta-4\eta^2$	-4η	$4-4\xi-8\eta$
6	$4\xi-4\xi\eta-4\xi^2$	$4-4\eta-8\xi$	-4ξ

Câmpul de deplasare se aproximează prin intermediul funcţiilor de interpolare **N_i** şi a deplasărilor nodale **u_i, v_i**, cu i = 1,...,6:

$$u=\sum_{i=1}^{6} N_i\, u_i \quad , \quad v=\sum_{i=1}^{6} N_i\, v_i \tag{3.4.1.3}$$

Deformaţiile specifice se exprimă în cazul stării plane de deformaţie sub forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{3.4.1.4}$$

iar pentru cazul stării plane de tensiune: $\varepsilon_z = \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$

Ţinând cont de relaţiile (3.4.1.3), expresiile deformaţiilor specifice (3.4.1.4) se pot rescrie:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 & N_{5,x} & 0 & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} & 0 & N_{5,y} & 0 & N_{6,y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} & N_{5,y} & N_{5,x} & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

unde $N_{i,x} = \dfrac{\partial N_i}{\partial x}$, $N_{i,y} = \dfrac{\partial N_i}{\partial y}$ $cu \quad i = 1,\ldots,6$

Exprimarea derivatelor funcţiilor de interpolare în raport cu coordonatele **x,y** se face prin intermediul matricii de transformare a coordonatelor **[J]:**

$$\begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix}$$

sau : (3.4.1.5)

$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix}$$

Coeficenţii din matricea transformării se determină pe baza derivatelor funcţiilor de interpolare date în Tabelul 3.4.1.1. cu relaţia:

$$[J(\xi,\eta)] = \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} [x_i \quad y_i] \tag{3.4.1.6}$$

rezultând:

$$\begin{aligned} J_{11} &= 4\xi(x_1 + x_3 - 2x_6) + 4\eta(x_3 + x_4 - x_5 - x_6) - x_1 - 3x_3 + 4x_6 \\ J_{12} &= 4\xi(y_1 + y_3 - 2y_6) + 4\eta(y_3 + y_4 - y_5 - y_6) - y_1 - 3y_3 + 4y_6 \\ J_{21} &= 4\xi(x_3 + x_4 - x_5 - x_6) + 4\eta(x_2 + x_3 - 2x_5) - x_2 - 3x_3 + 4x_5 \\ J_{22} &= 4\xi(y_3 + y_4 - y_5 - y_6) + 4\eta(y_2 + y_3 - 2y_5) - y_2 - 3y_3 + 4y_5 \end{aligned} \tag{3.4.1.7}$$

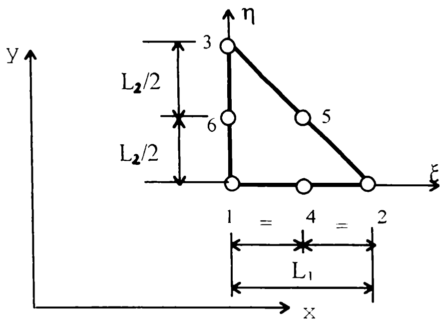
Pentru elementul triunghiular cu laturi drepte şi nodurile 4,5,6 situate la mijlocul laturilor corespunzătoare, coeficenţii matricii transformării devin constanţi pe element:

$$J_{11} = x_1 - x_3 \ , J_{12} = y_1 - y_3 \ , J_{21} = x_2 - x_3 \ , J_{22} = y_2 - y_3$$

reducându-se foarte mult volumul de calcule.

Pentru a demonstra apariţia singularităţii deformaţiei în nodul 1 se consideră elementul din Figura 3.4.1.3.

Exprimând coordonata x pe latura 1-2, unde $\eta = 0$ se obţine:



$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3$$

unde :

$$x_1 = 0 \ , x_2 = L_1 \ , x_4 = L_1 / 2$$

Figura 3.4.1.3.

Înlocuind expresiile funcţiilor de interpolare date în Tabelul 3.4.1.1 se obţine:

$x = \xi^2 L_1$ sau exprimând coordonata naturală ξ: $\xi = \sqrt{\dfrac{x}{L_1}}$ (3.4.1.8)

Expresia deplasării după direcţia x se exprimă pentru latura 1 - 2, conform relaţiei (3.4.1.3)

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_4 u_4 = (2\xi^2 - \xi) u_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = (4\xi - 1) u_1 \qquad (3.4.1.9)$$

iar deformaţia specifică:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(4\sqrt{\frac{x}{L_1}} - 1\right) u_1 \frac{1}{2\sqrt{L_1}}\frac{1}{\sqrt{x}} = \left(\frac{2}{L_1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{L_1 x}}\right) u_1 \qquad (3.4.1.10)$$

Din relaţia (3.4.1.10) se observă că pentru x – 0 , în nodul 1 deformaţia specifică ε_x prezintă o singularitate de ordinul $x^{-1/2}$. Analog se poate arăta că şi celelalte deformaţii specifice ε_y şi γ_{xy} prezintă singularităţi de acelaşi ordin în nodul 1.

Utilizarea acestui tip de element finit este este mai eficentă decât utilizarea elementului finit triunghiular cu trei noduri.

Diverşi cercetători au fost preocupaţi de găsirea altor funcţii de interpolare pentru elementul triunghiular cu 6 noduri (Figura 3.4.1.4), pentru modelarea singularităţii vârfului fisurii. În lucrările [H6], [O2] sunt prezentate astfel de funcţii de interpolare. În Tabelul 3.4.1.2 se prezentă o sinteză a acestora.

Tabelul 3.4.1.2

Nod	Funcţia de interpolare	Blackburn - 1973	Hellen - 1977	Stern, Becker - 1978
1	N_1	1	1	1
2	N_2	ξ	ξ	ξ
3	N_3	η	η	η
4	N_4	$\frac{\xi}{\sqrt{\xi+\eta}}$	$\frac{\xi}{\sqrt{\xi+\eta}}$	$\frac{\xi}{\sqrt{\xi+\eta}}$
5	N_5	$\frac{\eta}{\sqrt{\xi+\eta}}$	$\frac{\eta}{\sqrt{\xi+\eta}}$	$\frac{\eta}{\sqrt{\xi+\eta}}$
6	N_6	$\frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi+\eta}}$	$\frac{\xi\eta}{\xi+\eta}$	$\frac{3}{2}\frac{\xi\eta}{\xi+\eta}$

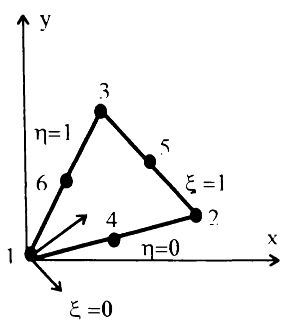


Figura 3.4.1.4

Oricare din elemente triunghiulare cu 3, respectiv 6 noduri prezentat anterior, permite modelarea singularităţii vârfului fisurii prin alegerea unor funcţii de interpolare speciale care să aproximeze deplasările elementului.

Cu ajutorul acestor elemente s-au dezvoltat programe speciale de calcul care modelează singularitatea câmpului de deformaţie şi deplasare la elementele din jurul vârfului fisurii.

3.4.2 ELEMENTE FINITE IZOPARAMETRICE

Elementele finite izoparametrice se pot utiliza cu succes în problemele de Mecanica ruperii. Exprimarea funcţiilor de interpolare ale acestora se face în coordonate naturale. Prin coordonate naturale se înţelege exprimarea coordonatelor nodurilor elementelor finite în două sisteme de coordonate unul global pentru întregul domeniu discretizat şi unul local pentru fiecare element în parte, Figura 3.4.2.1. Originea sistemului local se alege de obicei în centrul de greutate al elementului iar coordonatele naturale se obţin prin raportarea coordonatelor globale la mărimile caracteristice ale elementului finit (lungimi sau arii), practic aceste coordonate pot fi asimilate ca şi coordonate normalizate.

Dacă se utilizează coordonatele naturale iar originea sistemului coincide cu centrul de greutate al elementului finit, domeniul de variaţie al coordonatelor naturale asociate elementului respectiv este [-1; 1].

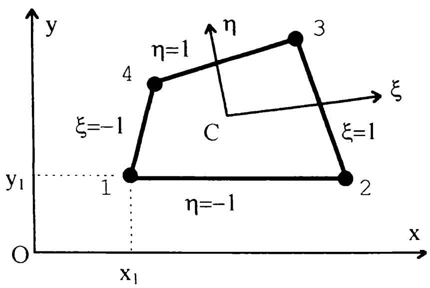


Figura 3.4.2.1

Se va considera în continuare un element patrulater oarecare, utilizat în cazul problemelor plane bidimensionale. Pentru acesta relaţiile dintre coordonatele globale **(x,y)** şi cele naturale **(ξ,η)** sunt date de expresiile:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{4}\left[(1-\xi)(1-\eta)x_1 + (1+\xi)(1-\eta)x_2 + (1+\xi)(1+\eta)x_3 + (1-\xi)(1+\eta)x_4\right] \\
y &= \frac{1}{4}\left[(1-\xi)(1-\eta)y_1 + (1+\xi)(1-\eta)y_2 + (1+\xi)(1+\eta)y_3 + (1-\xi)(1+\eta)y_4\right]
\end{aligned}
\qquad (3.4.2.1)
$$

unde x_1, y_1, ... reprezintă coordonatele nodurilor exprimate în sistemul de coordonate global.

Într-o scriere concentrată relaţiile (3.4.2.1) se pot exprima:

$$
x = \sum_{i=1}^{4} N_i\, x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{4} N_i\, y_i \qquad (3.4.2.2)
$$

în care funcţiile de aproximare au expresia generală:

$$
N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) \qquad (3.4.2.3)
$$

iar **(x_i,y_i)** sunt coordonatele nodului **i** în sistemul **xOy**, respectiv **(ξ,η)** sunt coordonatele nodului **i** în sistemul ξCη (ξ_i, $\eta_i = \pm 1$).

Relația (3.4.2.3) este valabilă pentru elementele izoparametrice cu 4 noduri, Figura 3.4.2.2.a, numite şi elemente izoparametrice 2D liniare [S17].

Un alt tip de element izoparametric este cel cu 8 noduri, Fig.3.4.2.2.b, pentru care forma funcțiilor de aproximare este, conform [S6]:

- pentru nodurile 1 - 4 cu $\xi_i, \eta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1)$$

- pentru nodurile 5,7 la $\xi_i = 0,\ \eta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \tag{3.4.2.4}$$

- pentru nodurile 6,8 la $\xi_i = \pm 1,\ \eta_i = 0$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)$$

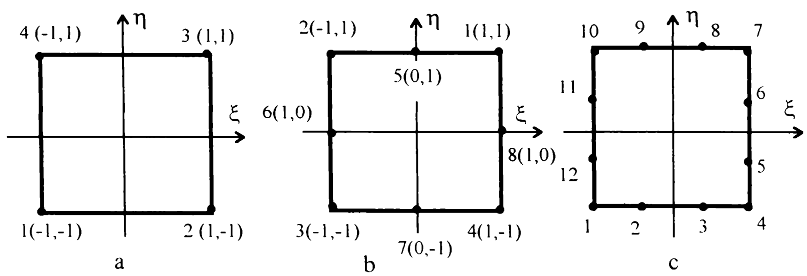


Figura 3.4.2.2

Iar pentru elementul izoparametric cu 12 noduri, Fig.3.4.2.2.c, expresiile funcțiilor de aproximare sunt:

- pentru nodurile $1,4,7,10$ *cu* $\xi_i, \eta_i = \pm 1$:

$$N_i = \frac{1}{32}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)[9(\xi^2+\eta^2)-10]$$

- pentru nodurile $5,6,11,12$ *cu* $\xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm\frac{1}{3}$:

$$N_i = \frac{9}{32}(1-\xi\xi_i)(1-\eta^2)(1+9\eta\eta_i) \tag{3.4.2.5}$$

- pentru nodurile $2,3,8,9$ *cu* $\xi_i = \pm\frac{1}{3}, \eta_i = \pm 1$:

$$N_i = \frac{9}{32}(1 \quad \eta\eta_i)(1-\xi^2)(1+9\xi\xi_i)$$

Se consideră elementul patrulater cu 4 noduri din Fig.3.4.2.2.a având 8 grade de libertate : deplasările $\mathbf{u_i}$, $\mathbf{v_i}$ ale fiecărui nod **i** (i=1,2,3,4). În sistemul de coordonate naturale $\xi C \eta$ funcțiile de aproximare au forma dată de relația (3.4.2.3):

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\ ;\ N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\ ;\ N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{3.4.2.6}$$

iar componentele vectorului deplasare se exprimă prin intermediul acestora în funcție de deplasările nodale $\mathbf{u_i}$, $\mathbf{v_i}$:

$$u(\xi,\eta) = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4$$
$$v(\xi,\eta) = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 + N_4v_4 \tag{3.4.2.7}$$

Într-o formă concentrată vectorul deplasare devine:

$$f(\xi,\eta) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ . \\ . \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.4.2.8)$$

Trecerea de la sistemul de coordonate global **xOy** la sistemul natural **ξCη** este dată de relația (3.4.2.2), care se poate scrie concentrat:

$$\begin{Bmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ . \\ . \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (3.4.2.9)$$

Pentru calculul matricei de rigiditate și vectorului încărcării elementului este necesară exprimarea matricei de legătură dintre deformații specifice și deplasări, **[B]** în sistemul natural **ξCη**. Relațiile dintre derivatele deplasărilor în sistemele **ξCη** și **xOy** sunt date de:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.4.2.10)$$

Utilizând notațiile **( ),$_\xi$** derivata parțială în raport cu ξ, respectiv **( ),$_x$** derivata parțială în raport cu **x** etc, relațiile dintre derivatele parțiale pot fi scrise sub forma matriceală:

$$\begin{Bmatrix} ()_{,\xi} \\ ()_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ()_{,x} \\ ()_{,y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} ()_{,x} \\ ()_{,y} \end{Bmatrix} \quad (3.4.2.11)$$

Matricea **[J]** din relația (3.4.2.11) este matricea Jacobianului transformării. Ținând cont de relația (3.4.2.9) matricea Jacobianului transformării se poate scrie sub forma:

$$[J(\xi,\eta)] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (3.4.2.12)$$

care se poate explicita cu uşurinţă ţinând seama de (3.4.2.6).

Prin inversarea relaţiei (3.4.2.11) se pot exprima derivatele în raport cu **x** şi **y** în funcţie de derivatele în raport cu ξ şi η:

$$\begin{Bmatrix} (),_x \\ (),_y \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} (),_\xi \\ (),_\eta \end{Bmatrix} \tag{3.4.2.13}$$

Cu ajutorul relaţiei (3.4.2.13) se determină derivatele deplasărilor **u** şi **v**:

$$\begin{Bmatrix} u,_x \\ u,_y \\ v,_x \\ v,_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} \\ 0 & 0 & J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u,_\xi \\ u,_\eta \\ v,_\xi \\ v,_\eta \end{Bmatrix} \tag{3.4.2.14}$$

în care derivatele de forma $\mathbf{u,_x}$ sunt direct calculabile din relaţia (3.4.2.8):

$$\begin{Bmatrix} u,_\xi \\ u,_\eta \\ v,_\xi \\ v,_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{3.4.2.15}$$

În continuare ţinând cont de relaţia dintre deformaţiile specifice şi deplasări, relaţia (3.2.3), care se poate scrie sub forma:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u,_x \\ u,_y \\ v,_x \\ v,_y \end{Bmatrix} \tag{3.4.2.16}$$

obţinând astfel matricea **[B(ξ,η)]** prin înlocuirea relaţiilor (3.4.2.14) şi (3.4.2.15) în (3.2.2).Această operaţie se realizează numeric fiind uşor de programat pe calculator.

Având calculată matricea **[B(ξ,η)]** şi expresia matricei **[E]** (cu una din formele (3.2.7) sau (3.2.8) în funcţie de ipoteza de calcul), se poate calcula matricea de rigiditate a elementului finit **[k]:**

$$[k] = \int_{V_e} [B(\xi,\eta)]^T [E][B(\xi,\eta)] dV \tag{3.4.2.17}$$

În continuare trebuie calculați vectorii datorați încărcărilor exterioare: vectorul forțelor de volum **{F}** este uzual constant pe domeniul elementului finit iar vectorul forțelor de suprafață se calculează admițând ipoteza că variația presiunii pe o latură a elementului finit este descrisă tot de funcțiile de aproximare **[N_i N_j]** și de valorile presiunii p_i, p_j în noduri:

$$\{Q(\xi,\eta)\} = \left[N_i(\xi,\eta) \quad N_j(\xi,\eta)\right]\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} \tag{3.4.2.18}$$

în care **i** și **j** sunt nodurile ce definesc latura încărcată.

Astfel se obțin integrale, în care **F(ξ,η)** reprezintă o matrice sau un vector, **det [J(ξ,η)]** determinantul matricei lui Jacobi de trecere de la elementul de arie **dx dy** la elementul de arie **dξ dη,** de forma:

$$\begin{aligned} &\int_{Se} F(\xi,\eta)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\det[J(\xi,\eta)d\xi d\eta \\ &[k] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B(\xi,\eta)]^T[E][B(\xi,\eta)]\det[J(\xi,\eta)d\xi d\eta \end{aligned} \tag{3.4.2.19}$$

Aceste integrale se efectuează numeric, conform cuadraturii lui Gauss. Aceasta este o metodă numerică de evaluare a integralelor, care aproximează o integrală printr-o sumă de arii de forma:

$$I \quad \int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi \cong \sum_{i=1}^{n} H_i\, f(a_i)$$

unde H_i se numesc ponderi sau coeficenți de pondere Gauss iar a_i sunt coordonatele punctelor Gauss.

De exemplu integrarea matricei de rigiditate **[k],** relația (3.4.2.17), se face cu relația:

$$[k] \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i \; H_j [B(\xi_i,\eta_j)]^T [E][B(\xi_i,\eta_j)] \det[J(\xi_i,\eta_j)] \tag{3.4.2.20}$$

În cazul problemelor plane ce folosesc elemente izoparametrice plane elementul de volum **dV = h dx dy**, cu **h** reprezentând grosimea elementului.

După evaluarea numerică a integralelor **[k]** se trece la asamblarea matricii de rigiditate a sistemului **[K]** și apoi la rezolvarea sistemului de ecuații; obținându-se valorile deplasărilor nodale.

Identic se procedează și în cazul folosirii elementelor izoparametrice cu 8 noduri sau cu 12 noduri, ținând cont de expresiile corespunzătoare ale funcțiilor de aproximare (relațiile (3.4.2.4), respectiv (3.4.2.5)) și de numărul gradelor de libertate ale elementului.

Utilizarea acestor tipuri de elemente finite în problemele de Mecanica ruperii este la ora actuală destul de restrânsă, deoarece nu realizează o singularitate a câmpului de tensiuni și deformații. Totuși folosind o discretizare suficent de fină în jurul vârfului fisurii se poate pune în evidență puternica concentrare a tensiunilor din jurul fisurii și chiar determinarea parametrilor de rupere prin metoda extrapolării deplasărilor sau tensiunilor, respectiv prin metoda integralei **J**.

3.4.3 MODELAREA SINGULARITĂŢII VÂRFULUI FISURII UTILIZÂND ELEMENTE FINITE IZOPARAMETRICE SPECIALE

Introducerea unor elemente finite izoparametrice speciale, care să modeleze singularitatea câmpului de deformaţie şi tensiune de la vârful fisurii, a fost necesară deoarece discretizarea structurii, a trebuit făcută într-un număr mare elemente finite "convenţionale", ceea ce a dus la sisteme algebrice cu foarte multe ecuaţii, pentru rezolvarea cărora s-a impus necesitatea utilizării unor calculatoare cu o memorie foarte mare şi cu o viteză de lucru adecvată. Avantajul principal al elementelor ce pot modela singularităţile de la vârful fisurii, este că prin utilizarea lor scade considerabil numărul de elemente finite în care se discretizează structura. Aceste elemente speciale sunt tratate pe larg în lucrarea [O2] iar mulţi cercetători sunt preocupaţi astăzi de găsirea unor noi astfel de elemente (de exemplu lucrările [A1], [C3], [R1], [S3], etc.).]

O cale convenabilă de introducere a unei singularităţi de forma $1/\sqrt{r}$ într-un element dreptunghiular izoparametric cu 8 noduri, constă în schimbarea poziţiei nodurilor de la mijlocul laturilor.

ELEMENT IZOPARAMETRIC CU 8 NODURI LA CARE SINGULARITATEA CÂMPULUI DE DEFORMAŢIE SE OBŢINE PRIN DEPLASAREA NODURILOR DE LA MIJLOCUL LATURILOR, ADIACENTE VÂRFULUI FISURII, LA O DISTANŢĂ DE 1/4 DIN LUNGIMEA LATURII SPRE NODUL CORESPUNZĂTOR VÂRFULUI FISURII.

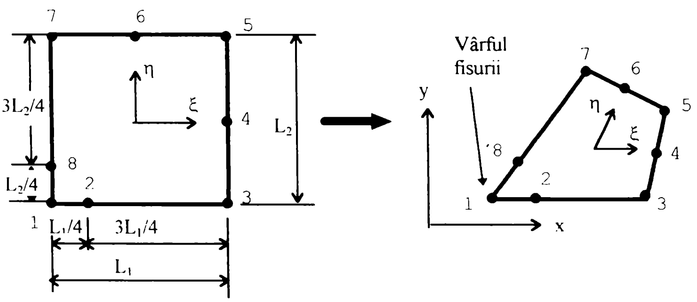


Figura 3.4.3.1

Se consideră un element izoparametric dreptunghiular, având 8 noduri, Figura 3.4.3.1 Singularitatea dorită se poate obţine prin deplasarea nodurilor 2 şi 8 din poziţia de la mijlocul laturilor 1-3, respectiv 1-7, la o distanţă de 1/4 din laturile respective faţă de nodul 1. Considerând latura 1-3 definită de η= -1 funcţiile de interpolare, date de relaţiile (3.4.2.4), pentru nodurile situate pe această latură vor fi:

$$N_1 = -1/2\ \xi\ (1-\xi)$$
$$N_2 = 1-\xi^2 \qquad (3.4.3.1)$$
$$N_3 = 1/2\ \xi\ (1+\xi)$$

Apoi cu relația (3.4.2.2) coordonata x, pentru latura 1-3 a elementului se poate scrie:

$$x = \sum_{i=1}^{3} N_i\ x_i = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)x_1 + (1-\xi^2)x_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)x_3 \qquad (3.4.3.2)$$

O expresie analitică similară obținându-se și pentru coordonata y. Localizând originea în nodul 1 și notând lungimea laturii cu L_1, rezultă : $x_1 = 0$, $x_2=L_1/4$ și $x_3 = L_1$.

Din relația (3.4.3.2) se obține:

$$x = 1/2\ \xi\ (1+\xi)L_1 + (1-\xi^2)\ L_1/4 \qquad (3.4.3.3)$$

sau

$$\xi = -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L_1}} \qquad (3.4.3.4)$$

În determinantul lui Jacobi dat de relația (3.4.2.12) termenul de forma $\partial x/\partial\xi$ se calculează pe baza relațiilor (3.4.3.3), (3.4.3.4) astfel:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L_1}{2}(1+\xi) = \sqrt{\frac{x}{L_1}} \qquad (3.4.3.5)$$

Astfel determinantul lui Jacobi este singular în nodul 1 unde x = 0. Variația deplasării de-a lungul laturii 1-3 este dată de relația (3.4.2.7) astfel:

$$u = \sum_{i=1}^{3} N_i\ u_i = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)u_1 + (1-\xi^2)u_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)u_3 \qquad (3.4.3.6)$$

Înlocuind pe ξ cu expresia dată de (3.4.3.4) se obține:

$$u = -\frac{1}{2}(-1+2\sqrt{\frac{x}{L_1}})(2-2\sqrt{\frac{x}{L_1}})u_1 + 4(\sqrt{\frac{x}{L_1}} - \frac{x}{L_1})u_2 + \frac{1}{2}(-1+2\sqrt{\frac{x}{L_1}})(2\sqrt{\frac{x}{L_1}})u_3 \qquad (3.4.3.7)$$

Deformația specifică pe direcția x va fi :

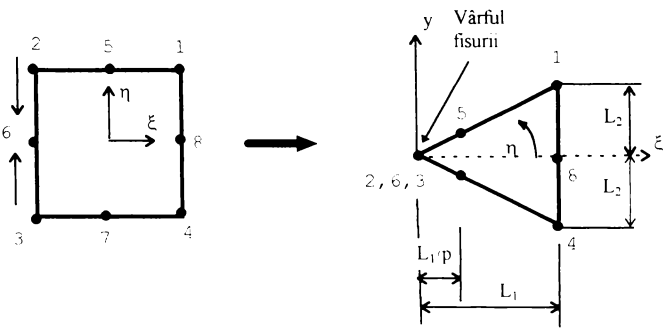
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi} = \tag{3.4.3.8}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{xL_1}}-\frac{4}{L_1}\right)u_1+\left(\frac{2}{\sqrt{xL_1}}-\frac{4}{L_1}\right)u_2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{xL_1}}+\frac{4}{L_1}\right)u_3$$

Se observă că variația deformației specifice ε_x, exprimată de-a lungul laturii 1-3, rel. (3.4.3.8) prezintă o singularitate de ordinul $1/\sqrt{x}$, sau exprimând în funcție de raza polară de ordinul $1/\sqrt{r}$, în nodul 1. Aceiași variație a deformației specifice radiale se obține și pentru componenta ε_y. Întrucât variația deformațiilor specifice radiale pe razele din interiorul elementului, ce pornesc din nodul 1, nu este de ordinul $1/\sqrt{r}$, acest dezavantaj poate fi înlăturat utilizând un element izoparametric special, ce va fi prezentat în continuare.

ELEMENT IZOPARAMETRIC SPECIAL OBȚINUT PRIN SUPRAPUNEREA A TREI NODURI ȘI DEPLASAREA NODURILOR DE LA MIJLOCUL LATURILOR ADIACENTE NODULUI CE MODELEAZĂ VÂRFUL FISURII

Pentru realizarea singularității câmpului de deformație în nodul 2, pe toate razele polare ce pornesc din acest nod Schmitt în lucrarea [S2] propune utilizarea unui element triunghiular, care se obține din elementul dreptunghiular cu 8 noduri, prin suprapunerea nodurilor 2, 6 și 3, Fig.3.4.3.2 și în acest caz nodurile 7 și 5 aparținând laturilor 3-4, respectiv 1-2 se deplasează de la mijlocul acestora la un sfert din latura L_1, spre nodul 2. În acest caz coordonatele naturale ξ și η devin chiar coordonate polare (r,θ).



a. Figura 3.4.3.2 b.

Pornind de la recomandările lui Schmitt, s-a realizat un studiu privind poziția nodurilor adiacente vârfului fisurii, care constituie o contribuție a autorului. În acest scop am introdus parametrul **p**, care definește poziția nodurilor adiacente vârfului fisurii, în funcție de care se va studia crearea singularității de la vârful fisurii.

Expresiile funcțiilor de interpolare sunt date de relația, [S2]:

$$\begin{aligned} N_i(\xi,\eta) &= (1+\xi)^2\frac{\eta_i^2}{4}(1+\eta\eta_i)(3\xi_i^2-2)+ \\ &+(1+\xi)\left\{\frac{\eta_i^2}{4}(1+\eta\eta_i)(2-3\xi_i^2)+\frac{\xi_i^3}{4}\left[\eta_i^2(\eta\eta_i+\eta^2)+2(1-\eta^2)(1-\eta_i^2)\right]\right\}+ \\ &+\frac{\xi_i^2}{4}(1-\xi_i)\left[\eta_i^2(\eta\eta_i+\eta^2)+2(1-\eta^2)(1-\eta_i^2)\right] \end{aligned} \qquad (3.4.3.9.)$$

După cum rezultă din Figura 3.4.3.2.a, coordonatele naturale ale nodurilor ξ_i,η_i sunt date în Tabelul 3.4.3.1

Tabelul 3.4.3.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8
ξ_i	1	-1	-1	1	0	-1	0	-1
η_i	1	1	-1	-1	1	0	-1	0

Pentru elementul degenerat obținut prin suprapunerea nodurilor 2, 6, 3, Figura 3.4.3.2.b și deplasarea nodurilor 5 și 7 la distanța $\mathbf{L_1/p}$ coordonatele nodurilor în sistemul global sunt date în Tabelul 3.4.3.2.

Tabelul 3.4.3.2

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	L_1	0	0	L_1	L_1/p	0	L_1/p	L_1
y	L_2	0	0	$-L_2$	L_2/p	0	$-L_2/p$	0

Conform relațiilor (3.4.2.2) coordonatele **x, y** exprimate cu ajutorul funcțiilor de interpolare $\mathbf{N_i(\xi,\eta)}$ și de coordonatele nodurilor $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{y_i}$ devin:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta)x_i = \frac{L_1}{2}\left[(1+\xi)^2\left(1-\frac{2}{p}\right)-(1+\xi)\left(1-\frac{4}{p}\right)\right] \\ y &= \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta)y_i = \frac{L_2\eta}{2}\left[(1+\xi)^2\left(1-\frac{2}{p}\right)-(1+\xi)\left(1-\frac{4}{p}\right)\right] \end{aligned} \qquad (3.4.3.10)$$

Expresiile funcțiilor de interpolare $\mathbf{N_i(\xi,\eta)}$ precum și derivatele acestora în raport cu ξ, η $\partial N_i(\xi,\eta)/\partial\xi$ și $\partial N_i(\xi,\eta)/\partial\eta$ sunt prezentate în Tabelul 3.4.3.3.

Tabelul 3.4.3.3

i	$N_i(\xi,\eta)$	$\dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}$	$\dfrac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta}$
	$\frac{1}{4}(1+\xi)^2(1+\eta)+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\eta-2)$	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1+\eta)+\frac{1}{4}(1+\eta)(\eta-2)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)^2+\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta-1)$
2	$\frac{1}{4}(1+\xi)^2(1+\eta)-\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\eta+2)+\frac{1}{2}(\eta+\eta^2)$	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1+\eta)-\frac{1}{4}(1+\eta)(\eta+2)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)^2-\frac{1}{4}(1+\xi)(3+2\eta)+\frac{1}{2}(1+2\eta)$
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)^2(1-\eta)+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\eta-2)+\frac{1}{2}(-\eta+\eta^2)$	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta)+\frac{1}{4}(1-\eta)(\eta-2)$	$-\frac{1}{4}(1+\xi)^2+\frac{1}{4}(1+\xi)(3-2\eta)+\frac{1}{2}(-1+2\eta)$
4	$\frac{1}{4}(1+\xi)^2(1-\eta)-\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\eta+2)$	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta)-\frac{1}{4}(1-\eta)(\eta+2)$	$-\frac{1}{4}(1+\xi)^2+\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta+1)$
5	$-\frac{1}{2}(1+\xi)^2(1+\eta)+(1+\xi)(1+\eta)$	$-(1+\xi)(1+\eta)+(1+\eta)$	$-\frac{1}{2}(1+\xi)^2+(1+\xi)$
6	$-\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)+(1-\eta^2)$	$-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$(1+\xi)\eta-2\eta$
7	$-\frac{1}{2}(1+\xi)^2(1-\eta)+(1+\xi)(1-\eta)$	$-(1+\xi)(1-\eta)+(1-\eta)$	$\frac{1}{2}(1+\xi)^2-(1+\xi)$
8	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\eta$

Exprimând coordonatele polare **(r,θ)**, se obține:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{L_1^2+L_2^2\eta^2}\,(1+\xi)\left[(1+\xi)\left(1-\frac{2}{p}\right)-\left(1-\frac{4}{p}\right)\right]$$
$$tg\theta=\frac{y}{x}=\frac{L_2\eta}{L_1} \qquad (3.4.3.11)$$

Deformațiile specifice date de relațiile (3.4.2.16), se pot exprima:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (3.4.3.12)$$
$$\gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

În relațiile (3.4.3.12) apar derivatele $\frac{\partial \xi}{\partial x},\frac{\partial \xi}{\partial y},\frac{\partial \eta}{\partial x},\frac{\partial \eta}{\partial y}$, care se calculează pe baza matricei transformării coordonatelor **[J]**:

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix}$$

Componentele matricii transformării coordonatelor sunt:

$$J_{11}=\frac{\partial x}{\partial \xi}=L_1\left[(1+\xi)\left(1-\frac{2}{p}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{p}\right)\right]$$
$$J_{21}=\frac{\partial x}{\partial \eta}=0$$
$$J_{12}=\frac{\partial y}{\partial \xi}=L_2\eta\left[(1+\xi)\left(1-\frac{2}{p}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{p}\right)\right]=\frac{L_2\eta}{L_1}J_{11} \qquad (3.4.3.13)$$
$$J_{22}=\frac{\partial y}{\partial \eta}=\frac{L_2}{2}\left[(1+\xi)^2\left(1-\frac{2}{p}\right)-(1+\xi)\left(1-\frac{4}{p}\right)\right]=\frac{rL_2}{\sqrt{L_1^2+L_2^2\eta^2}}$$

Deoarece în relațiile (3.4.3.12) apar derivatele $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$ este necesară calcularea inversei matricei [J]:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{J_{11}J_{22}}\begin{bmatrix} J_{22} & J_{12} \\ J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{J_{11}J_{22}}\begin{bmatrix} J_{22} & J_{12} \\ 0 & J_{11} \end{bmatrix} \qquad (3.4.3.14)$$

În continuare exprimând componentele deplasării prin intermediul funcțiilor de interpolare, date în Tabelul 3.4.3.3 și de deplasările nodale $\mathbf{u_i}$, $\mathbf{v_i}$ (cu i = 1...8):

$$u = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta) u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta) v_i$$

se pot exprima derivatele deplasării în raport cu coordonatele naturale ξ,η:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{1+\xi}{2}\left[(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 2u_5 - 2u_7) + \eta(u_1 + u_2 - u_3 - u_4 - 2u_5 - 2u_7)\right] + \\ &+ \frac{1+\eta}{4}\left[(\eta - 2)u_1 - (\eta + 2)u_2 + 4u_5\right] + \frac{1-\eta}{4}\left[(\eta - 2)u_3 - (\eta + 2)u_4 + 4u_7\right] + \frac{1-\eta^2}{2}(u_8 - u_6) = \\ &= a_0 + a_1(1+\xi)\end{aligned}$$

$$(3.4.3.15)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{(1+\xi)^2}{4}\left[u_1 + u_2 - u_3 - u_4 - 2u_5 + 2u_7\right] + \frac{1}{2}\left[(2\eta + 1)u_2 + (2\eta - 1)u_3 - 4\eta u_6\right] \\ &+ \frac{1+\xi}{4}\left[(2\eta - 1)u_1 - (3 + 2\eta)u_2 + (3 - 2\eta)u_3 + (2\eta + 1)u_4 + 4u_5 + 4\eta u_6 - 4u_7 - 4\eta u_8\right] = \\ &= b_0 + b_1(1+\xi) + b_2(1+\xi)^2\end{aligned}$$

unde $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{b_0}$, $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$ sunt coeficenți funcție de deplasările nodale $\mathbf{u_i}$ și de coordonata naturală η.

Analog se pot exprima și derivatele deplasării v în raport cu ξ, η:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \xi} &= c_0 + c_1(1+\xi) \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} &= d_0 + d_1(1+\xi) + d_2(1+\xi)^2\end{aligned} \qquad (3.4.3.16)$$

Deoarece constantele $\mathbf{a_0,...,d_2}$ sunt exprimate prin deplasările nodale $\mathbf{u_i}$, $\mathbf{v_i}$ şi coordonata η, ele sunt în general diferite de zero. Constantele $\mathbf{b_0}$ şi $\mathbf{d_0}$:

$$b_0 = \frac{1}{2}\left[(2\eta+1)u_2 + (2\eta-1)u_3 - 4\eta u_6\right]$$

$$d_0 = \frac{1}{2}\left[(2\eta+1)v_2 + (2\eta-1)v_3 - 4\eta v_6\right]$$

sunt dependente numai de deplasările nodurilor care modelează vârful fisurii. Aceste noduri fiind suprapuse pentru elementul degenerat rezultă că ele trebuie să aibe aceleaşi deplasări:

$$u_2 = u_3 = u_6 \quad \text{şi} \quad v_1 = v_3 = v_6$$

de unde $\qquad b_0 = 0 \qquad$ şi $\qquad d_0 = 0$

Înlocuind în relaţiile deformaţiilor specifice (3.4.3.12) expresiile (3.4.3.15) şi ţinând cont de relaţiile (3.4.3.14) şi de faptul că $\mathbf{J_{22}}$ este proporţional cu raza polară măsurată de la vârful fisurii $\mathbf{r}$, se obţine:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \left[a_0 + a_1(1+\xi)\right]\frac{\partial\xi}{\partial x} + \left[b_0 + b_1(1+\xi) + b_2(1+\xi)^2\right]\frac{\partial\eta}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{J_{11}J_{22}}\left\{J_{22}\left[a_0 + a_1(1+\xi)\right] + J_{12}\left[b_0 + b_1(1+\xi) + b_2(1+\xi)^2\right]\right\} \qquad (3.4.3.17)\\ &= \frac{a_0}{J_{11}} + \frac{a_1(1+\xi)}{J_{11}} + \frac{b_0'\eta}{r} + \frac{b_1'\eta(1+\xi)}{r} + \frac{b_2'\eta(1+\xi)}{r}\end{aligned}$$

unde $b_j' = \frac{b_j}{L_1}\sqrt{L_1^2 + L_2^2\eta^2}$, cu j = 0, 1, 2.

Analog se pot exprima şi celelalte deformaţii specifice:

$$\varepsilon_y = \frac{d_0'}{r} + \frac{d_1'(1+\xi)}{r} + \frac{d_2'(1+\xi)^2}{r}$$

$$(3.4.3.18)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{c_0'}{J_{11}} + \frac{c_1'(1+\xi)}{J_{11}} + \frac{e_0'}{r} + \frac{e_1'(1+\xi)}{r} + \frac{e_2'(1+\xi)^2}{r}$$

unde $d_j' = \frac{d_j}{L_2}\sqrt{L_1^2 + L_2^2\eta^2}$ cu j = 0, 1, 2

$c_j' = \frac{c_j}{2}$ cu j = 0, 1

$e_j = \frac{1}{2}\sqrt{L_1^2 + L_2^3\eta^2}\left(\frac{b_j}{L_2} + \frac{d_j}{L_1}\eta\right)$ cu j = 0, 1, 2

În continuare s-a studiat modul de realizare a singularității câmpului de deformație în funcție de poziția nodurilor 5 și 7.

a). Pentru cazul **p = 2**, adică nodurile 5 și 7 se află la mijlocul laturilor.
Înlocuind în expresiile (3.4.3.11) și (3.4.3.13) rezultă:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{L_1^2 + L_2^2\eta^2}\,(1+\xi) \tag{3.4.3.19}$$

și

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{L_1}{2} \\ J_{12} &= \frac{L_2\eta}{L_1} J_{11} = \frac{L_2\eta}{2} \\ J_{22} &= \frac{rL_2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2\eta^2}} \end{aligned} \tag{3.4.3.20}$$

Componentele deformațiilor specifice vor avea expresiile:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{b_0'\eta}{r} + (a_0' + b_1'\eta) + (a_1' + b_2'\eta)r \\ \varepsilon_y &= \frac{d_0'}{r} + d_1' + d_2' r \\ \gamma_{xy} &= \frac{e_0'}{r} + e_1' + e_2' r \end{aligned} \tag{3.4.3.21}$$

În acest caz dacă nodurile 2, 3, 6 de la vârful fisurii sunt suprapuse rezultă:

$$b_0' \quad d_0' \quad e_0' \quad 0$$

iar componentele deformației nu prezintă singularitate la vârful fisurii.

Dacă nodurile 2, 3, 6 au deplasări independente atunci deformațiile specifice prezintă o singularitate $\mathbf{r^{-1}}$, dar și aceasta dispare pentru deformația ε_x atunci când $\eta = \mathbf{0}$, adică pe axa de simetrie a elementului finit.

În concluzie elementele finite izoparametrice, pentru care p = 2 nu pot realiza singularitatea dorită la vârful fisurii.

b). Pentru cazul **p = 4** adică nodurile 5 şi 7 se deplasează la 1/4 din lungimea laturii L_1 spre nodurile 2, 3, 6 care se află la vârful fisurii. Acest element este consacrat în literatura de specialitate (lucrările [O2], [H6], [H10]), fiind numit şi elementul Barsoum.

În acest caz raza polară este dată de expresia:

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{L_1^2 + L_2^2\eta^2}\,(1+\xi)^2 \qquad (3.4.3.22)$$

iar componentele matricii transformării coordonatelor vor avea expresiile:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \frac{L_1}{2}(1+\xi) = \frac{L_1}{\sqrt[4]{L_1^2 + L_2^2\eta^2}}\sqrt{r} \\
J_{12} &= \frac{L_2\eta}{L_1}J_{11} = \frac{L_2\eta}{2}(1+\xi) = \frac{L_2\eta}{\sqrt[4]{L_1^2 + L_2^2\eta^2}}\sqrt{r} \\
J_{22} &= \frac{L_2}{2}(1+\xi)^2 = \frac{L_2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2\eta^2}}\,r
\end{aligned} \qquad (3.4.3.23)$$

Înlocuind în relaţiile (3.4.3.17), respectiv (3.4.3.18) se obţin expresiile deformaţiilor specifice sub forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{b_0''\eta}{r} + \frac{b_1''}{\sqrt{r}} + b_2'' \\
\varepsilon_y &= \frac{d_0''}{r} + \frac{d_1''}{\sqrt{r}} + d_2'' \\
\gamma_{xy} &= \frac{e_0''}{r} + \frac{e_1''}{\sqrt{r}} + e_2''
\end{aligned} \qquad (3.4.3.24)$$

Se observă că pentru **η = 0**, corespunzător axei de simetrie a elementului deformaţia specifică $\varepsilon_x = \frac{b_1''}{\sqrt{r}} + b_2''$ prezintă o singularitate de forma $\mathbf{r^{-1/2}}$.

Pentru cazul când nodurile 2, 3, 6 sunt suprapuse adică

b_0'' d_0'' e_0'' 0 toate cele trei componente ale câmpului de deformaţie prezintă o singularitate de forma $r^{-1/2}$:

$$\varepsilon_x = \frac{b_1''}{\sqrt{r}} + b_2''$$
$$\varepsilon_y = \frac{d_1''}{\sqrt{r}} + d_2'' \qquad (3.4.3.25)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{e_1''}{\sqrt{r}} + e_2''$$

Relațiile (3.4.3.25), identice cu cele date Barsoum în [O2], arată că pentru elementul degenerat având nodurile 2, 3, 6 suprapuse și nodurile 5 și 7 fiind deplasate la 1/4 din latura L_1 spre nodul care modelează vârful fisurii, se obține o singularitate de ordinul -1/2 pentru toate componentele câmpului de deformație, respectiv ale câmpului de tensiune, Figura 3.4.3.2.

c). Pentru cazul general când $\mathbf{p \neq 2}$ și $\mathbf{p \neq 4}$ ecuațiile care definesc expresiile deformațiilor specifice sunt cele generale date de (3.4.3.17) și (3.4.3.18).

Așa cum am mai arătat mai sus coeficenții $b_0' = d_0' = e_0' = 0$ sunt nuli dacă nodurile 2, 3, 6 sunt suprapuse. În aceste condiții, în expresiile (3.4.3.17) și (3.4.3.18) rămân dominanți termenii care au în componența lor expresiile $\mathbf{1 / J_{11}}$ și $\mathbf{(1+\xi) / r}$. Pentru a studia dependența acestor termeni de **r** s-a realizat trecerea la limită:

$$\lim_{(1+\xi)\to 0} \frac{1}{J_{11}} = -\frac{2}{L_1\left(1-\frac{4}{p}\right)} \quad \text{pentru} \quad p \neq 2, \quad p \neq 4$$

$$\lim_{(1+\xi)\to 0} \frac{1+\xi}{r} = -\frac{2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2\eta^2}\left(1-\frac{4}{p}\right)} \quad \text{pentru} \quad p \neq 2, \quad p \neq 4$$

Se observă că termenii conținând $1/J_{11}$ și $(1+\xi)/r$ nu prezintă pentru cazul $p \neq 2$ și $p \neq 4$ o singularitate a deformațiilor în vârful fisurii, unde r = 0.

Luând în considerare numai prima ecuație din (3.4.3.13) și exprimând termenul $(1+\xi)$ rezultă:

$$1+\xi = \left[\frac{J_{11}}{L_1} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{p}\right)\right]\frac{1}{1-\frac{2}{p}}$$

înlocuind în continuare în (4.3.4.11), rezultă:

$$J_{11}^2 = \frac{2L_1^2\left(1-\frac{2}{p}\right)(r-r_0)}{\sqrt{L_1^2+L_2^2\eta^2}} \quad \text{unde} \quad r_0 = -\frac{1}{8}\sqrt{L_1^2+L_2^2\eta^2}\,\frac{\left(1-\frac{4}{p}\right)^2}{\left(1-\frac{2}{p}\right)} \tag{3.4.3.26}$$

Din relaţia (3.4.3.26) se observă că pentru $\mathbf{r} = \mathbf{r_0}$ termenul $\mathbf{1/J_{11}}$ are o singularitate de ordinul $\mathbf{r^{-1/2}}$.

Asemănător se poate arăta că şi termenul $\mathbf{(1+\xi)/r}$ poate prezenta o singularitate. Astfel notând:

$$t = \frac{r}{1+\xi} = \frac{1}{2}\sqrt{L_1^2+L_2^2\eta^2}\left[(1+\xi)\left(1-\frac{2}{p}\right)-\left(1-\frac{4}{p}\right)\right]$$

şi înlocuind în relaţia (3.4.3.11) se obţine:

$$t - t_0 = \sqrt{r-r_0} \quad \textit{unde} \quad t_0 = -\frac{1}{4}\sqrt{L_1^2+L_2^2\eta^2}\left(1-\frac{4}{p}\right)$$

unde r_0 este dat de relaţia (3.4.3.26).

Deci înlocuind în relaţiile (3.4.3.17) şi (3.4.3.18) termenii $\mathbf{(1+\xi)/J_{11}}$, $\mathbf{(1+\xi)/r}$ şi $\mathbf{(1+\xi)/r}$ în funcţie de $\mathbf{r-r_o}$, pentru $\mathbf{p \neq 2}$ şi $\mathbf{p \neq 4}$ acestea capătă forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{a\eta}{r} + \frac{b+c\eta}{\sqrt{r-r_0}} + \ldots \\
\varepsilon_y &= \frac{a}{r} + \frac{b}{\sqrt{r-r_0}} + \ldots \\
\gamma_{xy} &= \frac{a}{r} + \frac{b}{\sqrt{r-r_0}} + \ldots
\end{aligned} \tag{3.4.3.27}$$

Dacă nodurile 2, 3, 6 sunt suprapuse la vârful fisurii, atunci coeficentul $\mathbf{a = 0}$ deci singularitatea $\mathbf{r^{-1}}$ dispare. Se observă din relaţiile (3.4.3.27) că alegând în mod corespunzător poziţia nodurilor 5 şi 7, astfel încât $\mathbf{r - r_0}$ să se anuleze, se obţine şi în acest caz o singularitate de ordinul $\mathbf{r^{-1/2}}$ a deformaţiilor specifice.

În concluzie pentru elementul izoparametric cu 8 noduri degenerat prin suprapunerea nodurilor 2, 3, 6 se poate obţine singularitatea deformaţiile specifice prin alegerea corespunzătoare a poziţiei nodurilor 5 şi 7. Astfel:

a) Dacă $p = 2$, nodurile 5 şi 7 fiind poziţionate la mijlocul laturilor 1-2, respectiv 2-4 câmpul de deformaţie nu prezintă singularitate, conform relaţiilor (3.4.3.21).

b) Dacă $p = 4$, nodurile 5 şi 7 fiind poziţionate la un sfert din laturile 1-2, respectiv 2-4 spre nodurile care modelează vârful fisurii, toate componentele câmpului de deformaţie prezintă o singularitate de ordinul $r^{-1/2}$ în nodurile suprapuse 2, 3, 6, conform relaţiei (3.4.3.25).

c) Dacă $p \neq 2$ şi $p \neq 4$ se poate obţine o singularitate de ordinul $r^{-1/2}$ alegând poziţia nodurilor 5 şi 7 astfel încât diferenţa $r - r_0$ să se anuleze, conform relaţiilor (3.4.3.27).

ELEMENT IZOPARAMETRIC SPECIAL OBȚINUT DIN ELEMENTUL IZOPARAMETRIC CU 12 NODURI PRIN SUPRAPUNEREA A PATRU NODURI

Recent Agnihotri în lucrarea [A1] prezintă utilizarea elementelor izoparametrice triunghiulare "degenerate" cu 12 noduri, provenite din elementul izoparametric dreptunghiulur cu 12 noduri, Fig.3.4.3.3

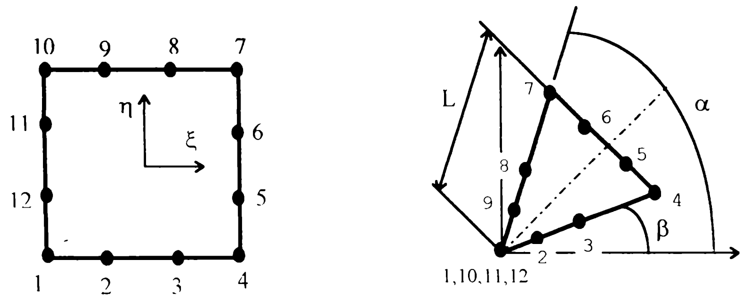


Figura 3.4.3.3

Expresiile componentelor deplasării, după axele x și y, sunt:

$$u = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi,\eta)\,u_i \;;\; v = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi,\eta)\,v_i \qquad (3.4.3.28)$$

unde u_i, v_i sunt deplasările nodale ale punctului i iar N_i (ξ,η) funcțiile de interpolare corespunzătoare nodului i care au expresia:

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{256}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)[-10+9(\xi^2+\eta^2)][-10+9(\xi_i^2+\eta_i^2)] + \frac{81}{256}(1+\xi\xi_i)(1+9\eta\eta_i)(1-\eta^2)(1-\eta_i^2)+\frac{81}{256}(1+\eta\eta_i)(1+9\xi\xi_i)(1-\xi^2) \qquad (3.4.3.29)$$

Particularizând pentru elementul din Fig.3.4.3.3 se obțin funcțiile de aproximare în coordonatele naturale (ξ,η) pentru cele 12 noduri după cum urmează:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]$$

$$N_2 = \frac{9}{32}(1-\eta)(1-\xi^2)(1-3\xi)$$
$$N_3 = \frac{9}{32}(1-\eta)(1-\xi^2)(1+3\xi)$$
$$N_4 = \frac{1}{32}(1+\xi)(1-\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]$$
$$N_5 = \frac{9}{32}(1-\eta^2)(1+\xi)(1-3\eta)$$
$$N_6 = \frac{9}{32}(1-\eta^2)(1+\xi)(1+3\eta) \qquad (3.4.3.30)$$
$$N_7 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1+\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]$$
$$N_8 = \frac{9}{32}(1+\eta)(1-\xi^2)(1+3\xi)$$
$$N_9 = \frac{9}{32}(1+\eta)(1-\xi^2)(1-3\xi)$$
$$N_{10} = \frac{1}{32}(1-\xi)(1+\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]$$
$$N_{11} = \frac{9}{32}(1-\eta^2)(1-\xi)(1+3\eta)$$
$$N_{12} = \frac{9}{32}(1-\eta^2)(1-\xi)(1-3\eta)$$

Pentru a crea singularitatea de-a lungul laturii $\eta=-1$ se consideră expresiile coordonatei x şi a deplasării u pe latura 1 - 4 sub forma:

$$x = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3$$
$$u = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 \qquad (3.4.3.31)$$

în care a_i şi b_i sunt constante ce se evaluează având în vedere că în nodurile 1, 2, 3, 4:

$$\xi = -1, -1/3, 1/3 \text{ şi } 1 \quad : \quad x = 0, \alpha L, \beta L, L$$

$$u = u_1, u_2, u_3, u_4$$

Astfel se obţine:

$a_0 = L(-1+9\alpha+9\beta)/16$; $a_1 = L(-1-27\alpha+27\beta)/16$
$a_2 = 9L(1-\alpha-\beta)/16$; $a_3 = 9L(1+3\alpha-3\beta)/16$
$b_0 = (-u_1+9u_2+9u_3-u_4)/16$; $b_1 = (u_1-27u_2+27u_3-u_4)/16$
$b_2 = 9(u_1-u_2-u_3+u_4)/16$; $b_3 = 9(-u_1+3u_2-3u_3+u_4)/16$

Pentru a obține singularitatea deformațiilor în punctul **x = 0** **(ξ = -1)**, termenul din matricea lui Jacobi $\partial x/\partial\xi$ trebuie să se anuleze.

Derivând ecuația (3.4.3.31) în raport cu ξ se obține:

$$\partial x/\partial\xi = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^3 \qquad (3.4.3.32)$$

Condiția ca la $\xi = -1$, $\partial y/\partial\xi = 0$ conduce la

$$\beta = 2\alpha + 2/9 \qquad (3.4.3.33)$$

Pentru a avea o singularitate de forma $1/\sqrt{r}$ pentru deformația specifică $\varepsilon_x = \partial u/\partial x$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{b_1+2b_2\xi+3b_3\xi^2}{\frac{\partial x}{\partial\xi}}$$

unde ξ trebuie să fie o funcție de forma $\mathbf{x}^{1/2}$. Rezultă:

$$a_3 = 0 \quad \text{sau} \quad 1 + 3\alpha - 3\beta = 0 \qquad (3.4.3.34)$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (3.4.3.33) și (3.4.3.34) se obțin unghiurile

$$\alpha = 1/9 \text{ și } \beta = 4/9$$

Înlocuind aceste valori în expresiile constantelor $\mathbf{a_i}$, respectiv $\mathbf{b_i}$ și introducând apoi în (3.4.3.31) rezultă:

$$x = \frac{L}{4}(1+\xi)^2 \quad \text{sau} \quad \xi = -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}} \qquad (3.4.3.35)$$

Agnihotri în lucrarea [A1] arată că modelarea cu astfel de elemente poate fi realizată cu un număr relativ mic de elemente eroarea maximă față de soluția analitică fiind de maximum 3%. Acesta fiind avantajul principal al utilizării elementelor finite izoparametrice speciale, ce modelează singularitatea de la vârful fisurii

3.5 CALCULUL PARAMETRILOR MECANICII RUPERII LINIAR ELASTICE

În programele de analiză cu elemente finite utilizate la aplicaţiile de Mecanica ruperii după determinarea deplasărilor, deformaţiilor specifice şi a tensiunilor se necesită calculul parametrilor specifici Mecanicii ruperii. Parametrii care se utilizează în domeniul Mecanicii ruperii liniar elastice sunt factorul de intensitate a tensiunii **K** şi forţa de extensie a fisurii $\mathcal{G}$.

La ora actuală factorul de intensitate a tensiunii este unanim acceptat ca parametru ce caracterizează câmpurile de deformaţii şi tensiuni din jurul fisurilor aflate în medii liniar elastice. Pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii sunt utilizate în programele de analiză cu elemente finite diferite metode, [C3], [O2], [R4], [S2], [M6], [S16], [H6]. Cele mai utilizate metode vor fi tratate în continuare.

3.5.1 METODA EXTRAPOLĂRII DEPLASĂRII

Considerând cunoscute deplasările nodale, în urma rezolvării sistemului algebric de ecuaţii, pe baza acestor deplasări şi a soluţiei Irwin de reprezentare a tensiunilor şi deplasărilor în jurul fisurii se poate trece la determinarea factorului de intensitate a tensiunii.

Să considerăm că discretizarea s-a realizat cu elemente izoparametrice de tipul celor din Figura 3.4.3.1., pentru care deplasarea de-a lungul laturii 1-3 este dată de relaţia (3.4.3.7), care scrisă în funcţie de raza polară **r** devine:

$$u = u_1 + (4u_2 - u_3 - 3u_1)\sqrt{\frac{r}{L}} + (2u_3 + 2u_1 - 4u_2)\frac{r}{L} \qquad (3.5.1.1)$$

Similar se poate arăta că şi pentru deplasarea pe direcţia verticală **v** se obţine o expresie de forma (3.5.1.1).

Soluţia analitică a lui Irwin care dă expresiile deplasării în vecinătatea unei fisuri în funcţie de factorul de intensitate a tensiunii **K** şi coordonatele polare **(r,θ)** este:

$$\begin{aligned} u &= \frac{K_I}{4G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2\chi-1)\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\right] - \frac{K_{II}}{4G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2\chi+3)\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right] \\ v &= \frac{K_I}{4G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2\chi+1)\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2}\right] - \frac{K_{II}}{4G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2\chi-3)\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}\right] \end{aligned} \qquad (3.5.1.2)$$

unde K_I, K_{II} reprezintă factorii de intensitate a tensiunii corespunzători modurilor I, respectiv II de deplasare a flancurilor fisurii

G modulul de elasticitate transversal

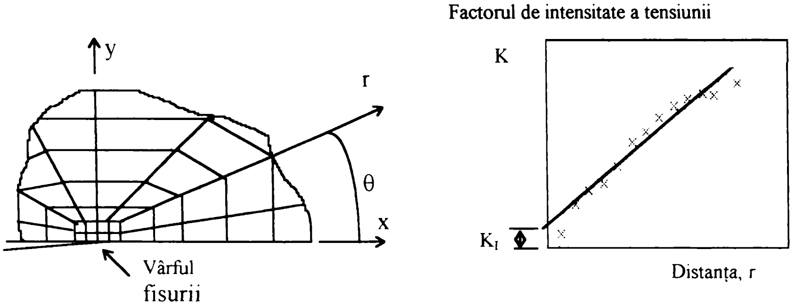
$\chi = (3-\upsilon)/(1+\upsilon)$ pentru starea plană de tensiune

$\chi = 3-4\upsilon$ pentru starea plană de deformaţie

υ coeficentul lui Poisson

Din relațiile (3.5.1.2) se pot exprima factorii de intensitate a tensiunii, după cum urmează:

$$
\begin{aligned}
&K_I\begin{Bmatrix}(2\chi-1)\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{3\theta}{2}\\ (2\chi-1)\sin\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{3\theta}{2}\end{Bmatrix}=4G\sqrt{\dfrac{2\pi}{r}}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}\\
&K_{II}\begin{Bmatrix}-(2\chi+3)\sin\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{3\theta}{2}\\ (2\chi-3)\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{3\theta}{2}\end{Bmatrix}=4G\sqrt{\dfrac{2\pi}{r}}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.5.1.3}
$$



a. b.

Figura 3.5.1.1

Înlocuind valorile deplasărilor **u, v** din nodurile considerate de-a lungul unei direcții radiale ce pornește din vârful fisurii, care face unghiul θ cu direcția x, se poate trasa variația factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ sau $\mathbf{K_{II}}$ în funcție de raza polară **r**, Figura 3.5.1.1.a Variația factorului de intensitate a tensiunii în funcție de distanța r se poate asimila ca fiind liniară. Apoi prin extrapolare pentru **r=0** se obține valoarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful fisurii, Figura 3.5.1.1.b.

În lucrarea [C11] se prezintă un studiu al preciziei estimării factorului de intensitate a tensiunii prin metoda extrapolării deplasării, studiu în care se prezintă limitele acestei metode precum și valorile unghiului θ pentru care se obține o bună precizie la determinarea factorului de intensitate a tensiunii.

Dintre avantajele acestei metode trebuiesc amintite simplitatea ei, faptul că utilizează ca mărimi de calcul deplasările nodale care se obțin în urma analizei cu elemente finite, permite calculul factorilor de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ și $\mathbf{K_{II}}$, putând fi utilizată în cazul aplicațiilor la care apare modul mixt de deplasare a flancurilor fisurii. Dezavantajele acestei metode constau în faptul că pentru aplicarea ei este necesară cunoașterea soluției câmpului de deplasări din vecinătatea vârfului fisurii (aceste soluții nefiind cunoscute în cazul anumitor materiale compozite, la interfața dintre materialele multistrat, etc.), iar precizia estimării este influențată de finețea discretizării, de alegerea direcției după care se face extrapolarea, de numărul și poziția nodurilor considerate.

3.5.2 METODA EXTRAPOLĂRII TENSIUNILOR

Pornind de la metoda extrapolării deplasării am căutat să utilizez aceeaşi metodologie pentru a determina factorul de intensitate a tensiunii folosind exprimarea componentelelor câmpului de tensiune în funcţie de factorul de intensitate a tensiunii, relaţiile (2.1.3.4), (2.1.3.5).

Astfel cunoscând valorile tensiunilor σ_x, σ_y, τ_{xy}, obţinute după analiza cu elemente finite, în nodurile având raza polară r_i de pe o direcţie care face unghiul θ cu axa **x** se pot calcula valorile factorului de intensitate a tensiunii cu relaţiile:

$$K_I \begin{Bmatrix} \cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \\ \cos\frac{\theta}{2}(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} = \sqrt{2\pi r}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$K_{II} \begin{Bmatrix} \sin\frac{\theta}{2}(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}) \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \end{Bmatrix} = \sqrt{2\pi r}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.5.2.1}$$

Reprezentând apoi valorile factorului de intensitate a tensiunii calculat cu relaţia (3.5.2.1) în funcţie de distanţa de la vârful fisurii a nodului respectiv r_i, se obţine de asemenea o dependenţă liniară de forma celei din Figura 3.5.2.1.

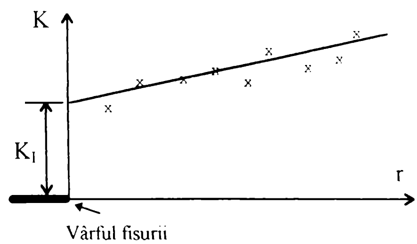


Figura 3.5.2.1

Se determină apoi pe baza perechilor de puncte (r_i, K_i) dreapta de regresie; iar prin extrapolare, intersecţia dreptei de regresie cu axa **K**, adică punctul de la vârful fisurii pentru care **r = 0**, reprezintă valoarea factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$

Pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii prin această metodă am elaborat un program în QBASIC, care este prezentat în **subcapitolulul 7.2.**

Metoda propusă de autor are avantajul că permite determinarea factorilor de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ şi $\mathbf{K_{II}}$, putând fi utilizată şi în cazul modului mixt (I şi II) de deplasare a flancurilor fisurii. De asemenea se remarcă uşurinţa de a estima valoarea factorului de intensitate a tensiunii utilizând tensiunile rezultate în urma analizei cu elemente finite. Deoarece într-un program de analiză cu elemente finite valorile tensiunilor sunt calculate pe baza deplasărilor nodale, metoda propusă este mai puţin precisă decât metoda extrapolării deplasărilor. Precizia estimării factorului de intensitate a tensiunii este influenţată de modul de discretizare şi anume de tipurile de elemente finite utilizate de fineţea discretizării, de alegerea direcţiei după care se face extrapolarea, de numărul şi poziţia nodurilor luate în considerare pentru a determina ecuaţia dreptei de regresie.

3.5.3 METODA FORŢEI DE EXTENSIE A FISURII

Forţa de extensie a fisurii, $\mathcal{G}$ este un alt parametru al Mecanicii ruperii în domeniul liniar-elastic. Dacă se consideră că o fisură de lungime **a**, avansează sub acţiunea încărcărilor exterioare cu o cantitate infinitezimală **da**, în acelaşi timp producându-se o eliberare a energiei elastice de deformaţie **dU**, forţa de extensie a fisurii se defineşte:

$$\mathcal{G} \quad \frac{dU}{da} \qquad [\mathrm{N/mm}] \qquad (3.5.3.1)$$

Această mărime se mai numeşte şi rata de eliberare a energiei de deformaţie. Legătura dintre forţa de extensie a fisurii $\mathcal{G}$ şi factorul de intensitate a tensiunii **K** este dată în Mecanica ruperii liniar-elastice, [C5] sub forma:

$$K_I \quad \left(\frac{8\,G\,\mathcal{G}_I}{1+\chi}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad K_{II} \quad \left(\frac{8\,G\,\mathcal{G}_{II}}{1+\chi}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.5.3.2)$$

unde $\mathbf{K_I}$, $\mathbf{K_{II}}$ sunt factorii de intensitate ai tensiunii corespunzători modurilor I, respectiv II de deplasare a flancurilor fisurii;

$\mathcal{G}_I$, $\mathcal{G}_{II}$ forţele de extensie a fisurii corespunzătoare modurilor I şi II de deplasare a flancurilor fisurii;

G modulul de elasticitate transversal

χ un coeficent în funcţie de starea plană de tensiune sau de deformaţie a modelului.

Pentru evaluarea factorului de intensitate al tensiunii prin această metodă se consideră două lungimi diferite ale fisurii **a** şi **a+da**, Figura 3.5.3.1 calcuându-se energia specifică de deformaţie pentru ambele cazuri $\mathbf{U_1}$, respectiv $\mathbf{U_2}$. Apoi se calculează variaţia energiei specifice de deformaţie:

$$dU = U_1 - U_2 \qquad (3.5.3.3)$$

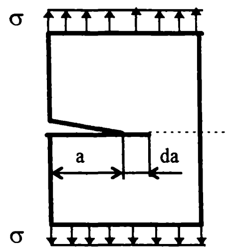


Figura 3.5.3.1

Energia specifică de deformație se calculează pe baza vectorului deplasărilor totale **{f}** și a matricei de rigiditate a structurii **[K]** după rezolvarea sistemului algebric de ecuații:

$$U = \{f\}^T [K] \{f\} \qquad (3.5.3.4)$$

Cu relația (3.5.3.1) se calculează apoi forța de extensie a fisurii $\mathcal{G}$, iar corespunzător modului de deplasare a flancurilor fisurii cu una din relațiile (3.5.3.2) se poate determina valoarea factorului de intensitate a tensiunii **K**.

Avantajul principal al acestei metode este că obținerea unei precizii ridicate a estimării factorului de intensitate a tensiunii nu este influențată de finețea discretizării, mai mult metoda dând rezultate bune și dacă nu se utilizează elemente finite singulare.

Trebuie subliniat că această metodă necesită rezolvarea numerică a problemei pentru două lungimi diferite ale fisurii **a** și **a+da**, ceea ce duce la dublarea volumului de calcul, acesta fiind un mare dezavantaj al metodei. Un alt dezavantaj al metodei este acela că permite calculul factorilor de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$, respectiv $\mathbf{K_{II}}$ doar separat, nu și în cazul modului mixt (I și II) de deplasare a flancurilor fisurii.

Aplicarea acestei metode a fost prezentată de autor în lucrarea [M6] pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ la o placă solicitată la tracțiune monoaxială, având o crestătură laterală ascuțită. Analiza cu elemente finite am realizat-o în programul COSMOS/M, care dă în fișierul datelor de ieșire energia specifică de deformație **U**.

3.5.4 METODA EXTENSIEI VIRTUALE A FISURII

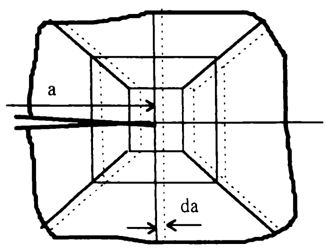


Figura 3.5.4.1

Aceasta este o variantă a metodei precedente. Și în acest caz analiza cu elemente finite se realizează inițial pentru o configurație cu fisură inițială și se calculează energia de deformație. Fisura se extinde apoi, după cum se observă în Figura 3.5.4.1, deplasând nodurile rețelei de discretizare, din zona vârfului fisurii, cu o distanță infinitezimală **da** pe direcția axei fisurii.

Energia de deformație se calculează ca la metoda precedentă apoi cu relațiile (3.5.3.1) și (3.5.3.2) se poate determina forța de extensie a fisurii $\mathcal{G}$, respectiv factorul de intensitate a tensiunii **K**.

Este interesant de semnalat că în lucrarea [O2] se menţionează că este posibilă o evaluare convenţională a energiei de deformaţie asociate numai elementelor de la vârful fisurii (**dU**), cu relaţia (3.5.3.3), ceea ce micşorează considerabil volumul de calcule faţă de metoda precedentă.

Prin luarea în considerare, la calculul factorului de intensitate a tensiunii, doar a elementelor adiacente vârfului fisurii, scade semnificativ volumul de calcule ceea ce reprezintă principalul avantaj al metodei. De asemenea precizia estimării este ridicată şi nu este inflenţată de fineţea discretizării.

Dintre dezavantajele metodei trebuie amintit faptul că nu permite calculul factorilor de intensitate a tensiunii pentru cazul în care deplasarea flancurilor fisurii se produce după modul mixt (I şi II), ci doar dacă flancurile fisurii se deplasează după modul I sau II independent.

3.5.5 EVALUAREA FACTORULUI DE INTENSITATE A TENSIUNII PE BAZA INTEGRALEI J

Dacă se consideră un contur de integrare Γ ca în Figura 3.5.5.1, care să înconjoare vârful fisurii, având punctele de plecare şi sfârşit pe cele două feţe ale fisurii, s-a arătat de către Rice [R3] că următoarea integrală este independentă de contur pentru orice contur Γ ce respectă condiţiile de mai sus, relaţia (2.2.4.1):

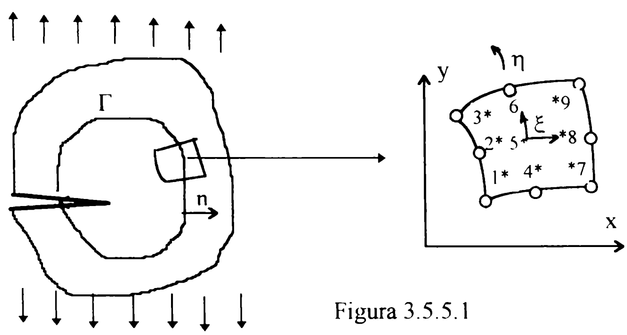


Figura 3.5.5.1

$$J = \int_\Gamma \left(U\,dy - \vec{p}\,\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\,ds\right) \quad [N/mm] \qquad (3.5.5.1)$$

Exprimarea mărimilor ce intervin în relaţia (3.5.5.1) a fost realizată în **paragraful 2.2.4**.

Pentru materiale cu comportare liniar-elastică integrala **J** este egală cu forţa de extensie a fisurii $\mathcal{G}$ deci relaţiile (3.5.3.2) se pot scrie înlocuind $\mathcal{G}$ cu **J**.

Astfel factorii de intensitate a tensiunii corespunzători modurilor I şi II vor fi:

$$K_I = \left(\frac{8\,G\,J_I}{1+\chi}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad K_{II} = \left(\frac{8\,G\,J_{II}}{1+\chi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.5.5.2}$$

Câteva observații asupra utilizării integralei **J** pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii:

* integrala **J** pentru un contur închis (fără vârf de fisură) este 0
* conturul de integrare **Γ** se poate descrie element cu element

Micşorând conturul **Γ** din Figura 3.5.5.1, până devine foarte mic, astfel încât el să înconjoare vârful fisurii, al doilea termen din relația (3.5.5.1) devine extrem de mic, el putându-se neglija. Rezultă astfel că:

$$J = \int_{\Gamma} U dy \tag{3.5.5.3}$$

Deci integrala **J** caracterizează energia înmagazinată la vârful fisurii, iar datorită independenței sale de contur ea se poate calcula într-o zonă convenabilă, chiar îndepărtată de zona singularității de la vârful fisurii.

Pentru a exemplifica modul cum se determină integrala **J** se consideră un element izoparametric dreptunghiular cu 8 noduri asemănător celui din Figura 3.4.3.1. Deoarece integrala **J** este independentă de conturul de integrare, acesta se poate alege convenabil astfel încât să coincidă cu linia $\xi=\xi_p$=**constant**, Figura 3.5.5.1.

În primul rând trebuie definit vectorul normal unitar **n**, în fiecare punct de pe conturul de integrare Γ. Pentru aceasta se consideră vectorii **{A}** şi **{B}** de-a lungul direcțiilor ξ=**const**. şi η=**const**. :

$$\begin{aligned} \{A\}^T \quad & \left[\frac{\partial x}{\partial \eta} \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad 0\right] \\ \{B\}^T \quad & \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad 0\right] \end{aligned} \tag{3.5.5.4}$$

Vectorul **{C}** care este normal pe planul elementului este determinat de produsul vectorial vectorilor **{A}** şi **{B}** :

$$\{C\} = \{A\} \times \{B\}$$

$$C^T = \left[0 \quad 0 \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\right] \tag{3.5.5.5}$$

Un vector **{D}** normal pe direcția $\xi=\xi_p$ se poate obține prin produsul vectorial dintre **{C}** şi **{A}**:

$$\{D\} = \{C\} X \{A\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial y}{\partial \eta}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \end{matrix} \right\} \tag{3.5.5.6}$$

Vectorul normal $\{\mathbf{n}\}$ va fi:

$$\{n\}^T = [n_1 \quad n_2 \quad 0] = \begin{bmatrix} \frac{D_1}{N} & \frac{D_2}{N} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.5.5.7}$$

$$cu \quad N = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$$

Lungimea arcului ds de-a lungul direcției $\xi=\xi_p$ este dată de :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \eta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \eta})^2}\, d\eta \tag{3.5.5.8}$$

$$unde \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

Pentru probleme plane energia de deformație se poate scrie:

$$U = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + 2\tau_{xy}\gamma_{xy}\right) \tag{3.5.5.9}$$

Iar vectorul $\{\mathbf{p}\}$ se poate exprima:

$$\{p\} = \left\{ \begin{matrix} \sigma_x n_1 + \tau_{xy} n_2 \\ \tau_{xy} n_1 + \sigma_y n_2 \\ 0 \end{matrix} \right\} \tag{3.5.5.10}$$

Atunci al doilea termen din integrala $\mathbf{J}$ va fi:

$$\{p\} \frac{\partial \{f\}}{\partial x} = (\sigma_x n_1 + \tau_{xy} n_2)\frac{\partial u}{\partial x} + (\tau_{xy} n_1 + \sigma_y n_2)\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.5.5.11}$$

În fine înlocuind relațiile (3.5.5.8), (3.5.5.9), (3.5.5.10) și (3.5.5.11) în (3.5.5.1) se obține contribuția dată de un element, la valoarea integralei **J** :

$$J_e = \int_{-1}^{1} [\frac{1}{2}[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y}] \frac{\partial y}{\partial \eta} - \tag{3.5.5.12}$$

$$-[(\sigma_x n_1 + \tau_{xy} n_2)\frac{\partial u}{\partial x} + (\tau_{xy} n_1 + \sigma_y n_2)\frac{\partial v}{\partial x}]\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \eta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \eta})^2}\, d\eta = \int_{-1}^{1} I d\eta$$

Integrarea din relația (3.5.5.12) se face numeric pe baza cuadraturii lui Gauss într-un număr **q** de puncte gaussiene (ca în Figura 3.5.5.1), astfel:

$$J_e = \sum_{j=1}^{q} I(\xi_p, \eta_j) H_j \tag{3.5.5.13}$$

în care integrantul **I** se calculează în punctele de coordonate ξ_p, η_j iar $\mathbf{H_j}$ reprezintă ponderea corespunzătoare coordonatelor $\mathbf{h_j}$.

În relația (3.5.5.12) derivatele carteziene ale componentelor deplasării sunt date de :

$$\frac{\partial u, v}{\partial x} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial x}(u_i, v_i) \quad ; \quad \frac{\partial u, v}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial y}(u_i, v_i) \tag{3.5.5.14}$$

Valoarea totală a integralei **J** se obține însumând contribuția tuturor elementelor ce formează conturul de integrare iar în final factorul de intensitate a tensiunii **K** se calculează cu relațiile (3.5.5.2) în funcție de modul de deplasare a flancurilor fisurii.

Avantajul acestei metode este precizia ridicată obținută, care nu este influențată de finețea discretizării. Calculul factorului de intensitate a tensiunii prin această metodă nu impune utilizarea elementelor singulare pentru modelarea vârfului fisurii.

Metoda permite calculul integralei J în cazul materialelor cu comportare elasto-plastică.

Principalul dezavantaj al metodei este complexitatea sa și dificultățile legate de implementarea sa într-un program de calcul.

3.6 CALCULUL PARAMETRILOR MECANICII RUPERII ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC

Efectul de concentrare a tensiunilor la vârfurl fisurilor face ca acestea să depăşească limita de curgere a materialului. În aceste situaţii conceptele Mecanicii ruperii liniar-elastice nu mai sunt valabile. Astfel s-au dezvoltat noi concepte valabile în domeniul elasto-plastic, noi criterii de rupere şi noi parametrii ce caracterizează tenacitatea la rupere, respectiv câmpul de tensiuni şi deformaţii din jurul fisurilor. Aceşti parametrii sunt:

- integrala de contur, J

- deplasarea de deschidere la vârful fisurii δ (CTOD), deplasarea de deschidere la marginea fisurii CTOM, respectiv unghiul de deschidere la vârful fisurii Ψ (CTOA)

- modulul de rupere, T

În programele specializate de analiză cu elemente finite a câmpului de tensiuni şi deformaţii din jurul fisurilor aflate în medii elasto-plastice, au fost unanim acceptaţi ca parametrii de rupere integrala de contur **J** şi deplasarea de deschidere de la vârful fisurii δ.

Pentru că cel mai utilizat parametru din Mecanica ruperii elasto - plastice este integrala de contur **J** în continuare se va prezenta modul de calcul numeric al acesteia.

În paragraful 2.2.4 s-a prezentat modul în care se poate descrie câmpul de tensiuni şi deformaţii prin intermediul integralei **J** în medii elasto - plastice, acceptând legătura dintre deformaţii şi tensiune pe baza legii Ramberg - Osgood, având coeficentul de ecruisare **λ**, relaţiile (2.2.4.5), (2.2.4.6).

Integrala **J** din expresiile (2.2.4.5), respectiv (2.2.4.6) a fost definită ca parametru de rupere în paragraful 2.2.4. De asemenea s-a arătat în paragraful 3.5.5 algoritmul de calcul al integralei **J**, în medii elastice cu fisuri, în vederea evaluării factorului de intensitate a tensiunii, **K**.

Utilizarea integralei J în aplicaţiile elasto-plastice se fundamentează pe următoarele argumente:

- conceptul independenţei de contur a integralei **J** este valabil şi pentru materiale cu comportare neliniar-elastică
- materialele neliniar-elastice au o comportare după o anumită lege între deformaţiile plastice şi tensiuni
- conceptul integralei **J** este riguros aplicabil numai dacă corpul este supus încărcări monotone (nu apar descărcări). În acest caz integrala **J** se poate utiliza pentru monitorizarea avansării fisurii sub acţiunea încărcării monotone.

Considerând respectate ipotezele de mai sus, integrala **J** se poate determina analitic pentru diferite geometrii ale corpurilor. Totuşi uneori aceste ipoteze nu sunt respectate, de exemplu prin apariţia fenomenului de ecruisare. De aceia utilizarea unei analize numerice pentru evaluarea cu precizie a integralei **J**, devine necesară.

Pentru materialele cu comportare elasto-plastică singura cale de calculare a integralei **J** este prin exprimarea energiei specifice de deformaţie **U** în două componente una elastică:

$$U_{el} = \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\;\varepsilon_{ij,el} \qquad (3.6.1)$$

şi una plastică:

$$U_{pl} = \int_{0}^{\varepsilon_{pl}} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon}_{pl} \tag{3.6.2}$$

unde σ şi ε_{pl} reprezintă tensiunile efective, respectiv deformaţiile plastice efective date de criteriile de plasticitate Tresca sau Von Mises.

Deci energia specifică de deformaţie va fi:

$$U = U_{el} + U_{pl} \tag{3.6.3}$$

Pornind de la definiţia integralei **J** şi ţinând cont de componenta plastică, expresia integralei **J** pentru un element va fi:

$$J_e = \int_{-1}^{1} \Big\{ \Big[\frac{1}{2}\big(\sigma_x \varepsilon_{x,el} + \sigma_y \varepsilon_{y,el} + \tau_{xy}\gamma_{xy,el}\big)\frac{\partial y}{\partial \eta} + U_{pl}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \Big[(\sigma_x n_1 + \tau_{xy} n_2)\frac{\partial u}{\partial x} + (\tau_{xy} n_1 + \sigma_y n_2)\frac{\partial v}{\partial x}\Big]\sqrt{\Big(\frac{\partial x}{\partial \eta}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial \eta}\Big)^2}\Big\} d\eta \tag{3.6.4}$$

şi în acest caz s-a considerat conturul de integrare $\xi=\xi_p$=const pe elementele vecine vârfului fisurii, la fel ca în paragraful 3.5.5.

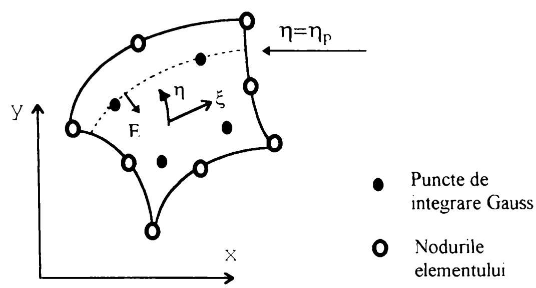


Figura 3.6.1

Integrarea numerică se face prin cuadratura lui Gauss.

În mod analog se poate calcula integrala **J** pe un contur de integrare având $\eta=\eta_p$=const, Figura 3.6.1.

Vectorul {**E**} normal pe linia de integrare $\eta=\eta_p$=const. este dat de:

$$\{E\} = \{C\}x\{B\} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\left(\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} - \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right) \\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\left(\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} - \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.6.5}$$

unde vectorii **{C}** şi **{B}** sunt daţi în relaţiile (3.5.5.5) , (3.5.5.4) din paragraful 3.5.5.

Vectorul unitar corespunzător lui **{E}** este:

$$n^T = \{n_1\ n_2\ 0\} = \left\{\frac{E_1}{L}\ \ \frac{E_2}{L}\ \ 0\right\} \quad , \quad cu \quad L = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \tag{3.6.6}$$

Lungimea incrementală a elamentului de-a lungul conturului de integrare $\eta = \eta_p$ este:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}\, d\xi \tag{3.6.7}$$

iar $dy = \dfrac{\partial y}{\partial \xi} d\xi$

Înlocuind relaţiile (3.6.5), (3.6.6) şi (3.6.7) în relaţia (3.5.5.12) se obţine expresia contribuţiei unui element la valoarea integralei de contur J:

$$J_e \quad \int_{-1}^{1}\Big\{ / \frac{1}{2} / \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \tau_{xy}\Big(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\Big) \cdot \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} / \frac{\partial y}{\partial \xi} + U_{pl}\frac{\partial y}{\partial \xi} -$$

$$- / (\sigma_x n_1 \cdot \tau_{xy} n_2)\frac{\partial u}{\partial x} \cdot (\tau_{xy} n_1 \cdot \sigma_y n_2)\frac{\partial v}{\partial x} / \sqrt{\Big(\frac{\partial x}{\partial \xi}\Big)^2 \cdot \Big(\frac{\partial y}{\partial \xi}\Big)^2}\Big\} d\xi \tag{3.6.8}$$

Relaţia (3.6.8), valabilă pentru un contur având $\eta = \eta_p =$ const., este similară cu relaţia (3.6.4) cu scrisă pentru un contur având $\xi = \xi_p =$ const.

Dacă se consideră că discretizarea în jurul unei fisuri se face cu elemente izoparametrice, sub forma dată în Figura 3.6.2, în care am trasat şi conturul de integrare, se observă în conturul de integrare curbe având $\xi = \xi_p =$ const, $\eta = \eta_p =$ const şi elemente de "colţ" care fac legătura între cele două. În acest caz integrala **J** este suma integralelor pe contururile fiecărui element component al conturului de integrare. Dacă considerăm conturul de integrare format din **P** elemente la care integrarea se face pe conturul $\xi = \xi_p =$ const, relaţia (3.6.4), **Q** elemente la care integrarea se face pe conturul $\eta = \eta_p =$ const, relaţia (3.6.8) şi **R** elemente de colţ valoarea totală a integralei **J** va fi:

$$J=\sum_{e=1}^{P} J_{e,}(\xi=\xi_p)+\sum_{e=1}^{Q} J_{e,}(\eta=\eta_p)+\sum_{e=1}^{R} J_{e,}(colt) \tag{3.6.9}$$

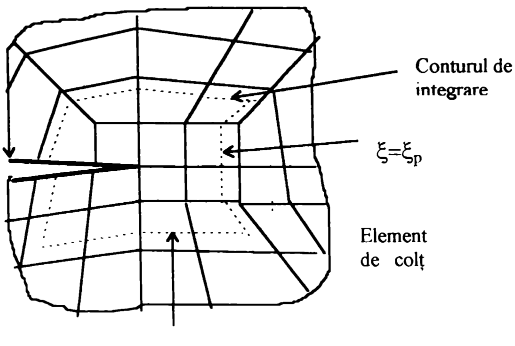


Figura 3.6.2

Integralele pentru elementele de colț se fac tot cu relațiile (3.6.4) sau (3.6.8), adică integrarea se face pe întregul element, dar aceste valori se înmulțesc cu un factor de scară S care se calculează în funcție de poziția punctelor de integrare Gauss P_G. Există două situații posibile pentru contururile de integrare ale elementelor de colț.

Pentru cazul conturului de integrare la elementul de colț din Figura 3.6.3.a factorul de scară $S = (1+P_G) / 2$, iar pentru cazul din Figura 3.6.3.b. factorul de scară este $S = (1-P_G) / 2$.

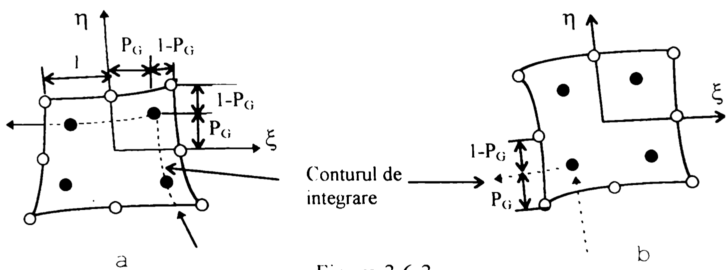


Figura 3.6.3

Cu ajutorul factorilor de scară se calculează cel de-al treilea termen din relația (3.6.9), înlocuind:

$$J_e(colt) = S\,.J_e \tag{3.6.10}$$

integrala J_e fiind calculată pentru întregul element, considerând conturul de integrare $\xi = \xi_p$ sau $\eta = \eta_p$.

Modul de evaluarea numerică a integralei J, precum şi aplicații al utilizării acesteia pentru caracterizarea fenomenului de rupere în medii elasto - plastice cu fisuri sunt prezentate în lucrările [O2], [S3], [Y1], [N4], [N5] şi [D2].

3.7 ETAPELE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR DE MECANICA RUPERII PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE

În continuare se vor prezenta etapele ce trebuiesc parcurse pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii prin Metoda Elementelor Finite.

3.7.1 MODELAREA GEOMETRIEI

Modelarea geometriei trebuie făcută astfel încât modelul să reproducă cât mai fidel structura reală. Precizia rezultatelor obținute în urma analizei cu elemente finite este puternic influențată de modelul ales.

De asemenea este foarte importantă cunoașterea și introducerea în programul de calcul cu elemente finite, a proprietăților materialului: modul de elasticitate longitudinal **E**; transversal **G**; coeficentul de contracție transversală ν ; a coeficentului de dilatare termică α_t (la probleme în care apar variații de temperatură); etc.

3.7.2 ALEGEREA TIPULUI DE ELEMENTE FINITE.

Elementele finite diferă între ele prin forma lor geometrică, prin caracteristicile fizice ale materialului din care sunt alcătuite și prin numărul deplasărilor independente care se atașează nodurilor. Pentru determinarea caracteristicilor unui element finit se acceptă o lege convențională de variație a deplasărilor (câmp de deplasări) sau a tensiunilor (câmp de tensiuni) pe element. Aceste legi se aleg de preferință sub forma unor polinoame, ce introduc un număr de coeficenți arbitrari și care se determină din condiții de compatibilitate. Întrucât câmpul de deplasări sau de tensiuni ales nu reprezintă exact variația reală a deplasărilor sau tensiunilor pe domeniul elementului finit, aceasta constituie cauza principală a aproximațiilor pe care le introduce MEF. De aceea, alegerea tipului de element finit se corelează cu modul în care se face discretizarea structurii și va avea în vedere următoarele aspecte:

- Modelul de calcul în care se discretizează structura reală să fie cât mai apropiat de aceasta
- Alegerea tipului de element finit trebuie făcută ținând cont că o precizie mărită a rezultatelor se repercutează în mărirea cantității de calcule.
- Forma structurii poate impune utilizarea simultană a mai multor tipuri de elemente finite.

Pentru modelarea problemelor de Mecanica ruperii, în jurul fisurii trebuiesc definite elemente finite care să permită modelarea singularității vârfului fisurii, de forma celor prezentate în **subcapitolul 3.4.**

3.7.3. DISCRETIZAREA STRUCTURII.

Structura reală se discretizează în elemente finite numerotate de la 1 la NE, precizându-se apartenența fiecărui element la mulțimea nodurilor sale de conexiune. În această etapă se definește topologia modelului pe care se conduce calculul. Alegerea numărului de elemente finite în care se discretizează structura reală rămâne la latitudinea inginerilor urmărindu-se obținerea unui optim care să țină seama că o discretizare cât mai fină conduce la obținerea unor precizii ridicate, dar și de faptul că un număr foarte mare de elemente finite duce la mărirea timpului de rezolvare a sistemului (3.3.16) sau chiar la depășirea capacității calculatorului pe care se rulează aplicația.

3.7.4 ALCĂTUIREA MATRICELOR DE RIGIDITATE A ELEMENTELOR FINITE.

Odată precizat tipul elementelor finite şi câmpul de deplasări sau tensiuni definit, se poate trece la alcătuirea matricei de rigiditate a elementului finit. Aceasta are forma generală dată de relaţia (3.3.12) în care **[E]** este matricea constantelor elastice având forma (3.2.7) pentru starea plană de tensiuni sau (3.2.8) pentru starea plană de deformaţii. Matricea **[B]** de transformare a deplasărilor nodale în deformaţii specifice este specifică tipului de element finit ales.

Alcătuirea matricelor de rigiditate se poate face prin mai multe metode:

a) Metoda directă, care are avantajul simplităţii, dar aplicarea ei este limitată doar la calculul mecanic al structurilor alcătuite din elemente simple.

b) Metoda variaţională, prezentată în **subcapitolul 3.3,** care este cea mai utilizată la ora actuală pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii.

c) Metoda reziduurilor, folosită în general atunci când metoda variaţională nu se poate aplica deoarece nu se cunoaşte o mărime funcţională

3.7.5 DETERMINAREA FORŢELOR PE ELEMENTUL FINIT.

Aşa cum am arătat trebuiesc evaluate contribuţiile forţelor de volum **{F}**, de suprafaţă **{Q}** şi forţelor ce acţionează pe nod **{p_n}**, asupra elementelor finite. Contribuţia tuturor încărcărilor este dată de vectorul forţelor generalizate **{R}**, relaţia (3.3.13).

3.7.6 ASAMBLAREA ECUAŢIILOR ELEMENTELOR ŞI REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAŢII A STRUCTURII.

Comportarea structurii se obţine prin "asamblarea" rigidităţilor elementelor finite **$[k]_e$** ,ceea ce matematic revine în a combina ecuaţiile matriceale ce exprimă comportarea elementelor finite în parte şi în obţinerea ecuaţiei matriceale ce exprimă comportarea întregii structuri. În urma operaţiei de asamblare se obţine matricea de rigiditate a sistemului **[K].**

La baza acestei operaţii stă faptul că, într-un nod comun mai multor elemente finite valoarea deplasării este aceiaşi pentru toate elementele cuplate în acel nod. Înainte de a trece la rezolvarea sistemului de ecuaţii algebrice astfel obţinut, acesta se modifică în funcţie de condiţiile la limită pe care trebuie să le respecte structura.

Se obţine sistemul de ecuaţii al structurii, dat de relaţia (3.3.16)

Rezolvarea sistemului de ecuaţii obţinut se face prin una din metodele de rezolvare a sistemelor de ecuaţii algebrice: metoda Gauss, metoda Gauss cu pivotare, metoda Choleski, metoda Jacobi, metoda Gauss-Seidel, sau metoda frontală; prezentate detaliat în [O1], [B20].

Prin rezolvarea sistemului de ecuaţii se obţin valorile deplasărilor nodurilor structurii.

3.7.7. CALCULUL CELORLALTE MĂRIMI.

Soluţiile sistemului de ecuaţii, adică deplasările nodale se folosesc la determinarea ulterioară deformaţiilor specifice respectiv a tensiunilor. Deformaţiile specifice se determină cu ajutorul relaţiei (3.2.2).

Cunoscând deformațiile specifice se pot determina cu relația (3.2.5) componentele vectorului tensiunilor în sistemul global de coordonate.

În continuare de expemplu pentru o problemă plană se pot calcula, cu relațiile cunoscute,

- tensiunile principale :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \qquad (3.7.7.1)$$

- tensiunile tangențiale maxime:

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad (3.7.7.2)$$

- direcțiile principale:

$$tg\, 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} \qquad (3.7.7.3)$$

Programele moderne de analiză elemente finite (ca de exemplu NASTRAN, COSMOS/M, ANSYS, ABAQUS) au în componența lor module performante de postprocesare a mărimilor obținute în urma rulării programului . Astfel se reprezintă grafic starea de tensiune și deformație, sub forma unor linii sau benzi de egală tensiune sau deformație. Reprezentarea se poate face pe modelul analizat sau pe deformata modelului, unele programe având și facilități de animație a deformațiilor structurilor.

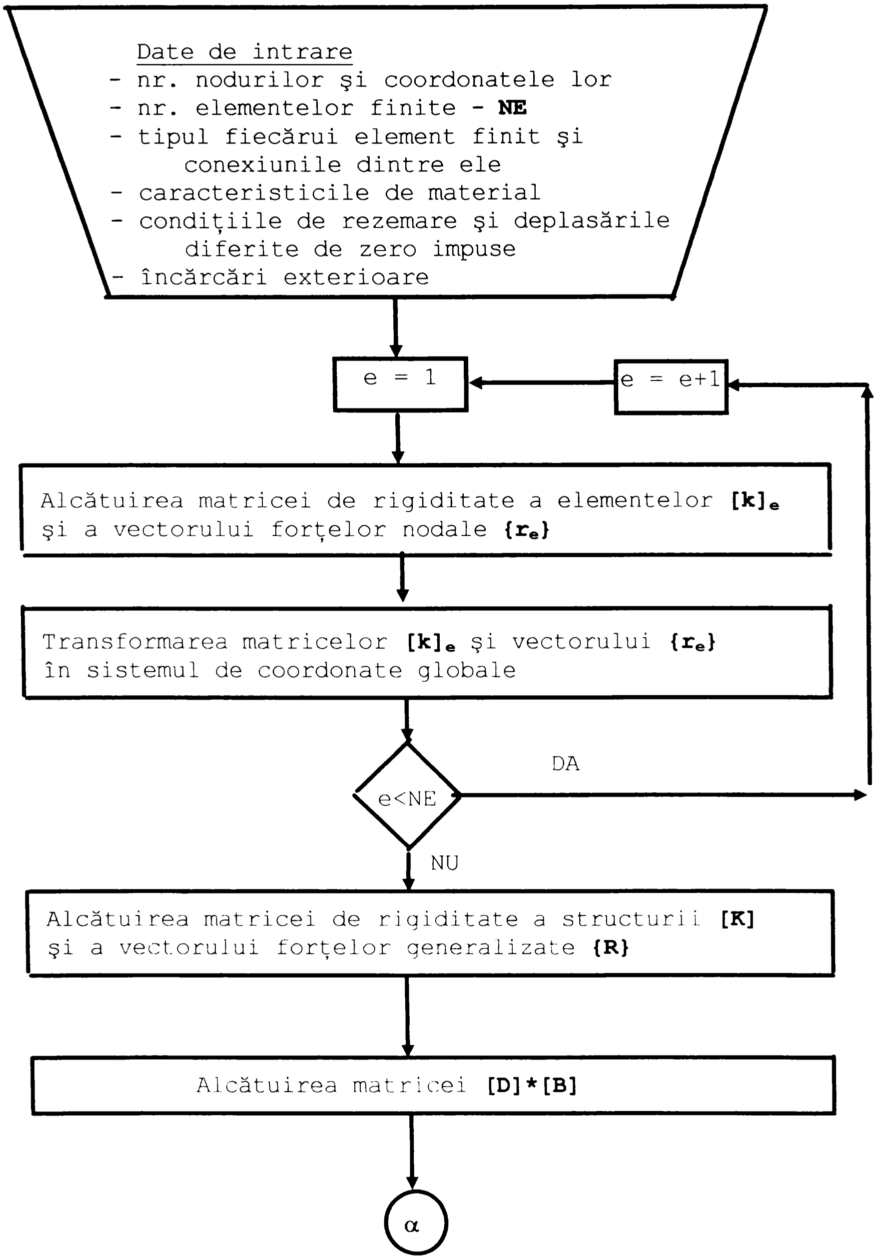
3.7.8. CALCULUL PARAMETRILOR DE MECANICA RUPERII

Pentru elementele de rezistență ce prezintă discontinuități geometrice de forma fisurilor în această etapă se calculează parametrii definiți în Mecanica ruperii. Pentru structurile elastice parametrul ce caracterizează starea de tensiuni și deformație în vecinătatea vârfului fisurii este *factorul de intensitate a tensiunii K*. Metodele de evaluare a factorului de intensitate a tensiunii prin MEF au fost prezentate în **subcapitolul 3.5.**

Parametrii Mecanicii ruperii utilizați pentru materiale cu comportare elasto - plastică sunt integrala **J,** deplasările de deschidere a fisurii δ, unghiul de deschidere la vârful fisurii Ψ. Modul de evaluare numerică a acestora este prezetat în **subcapitolul 3.6.**

În Figura 3.7.1 am prezentat etapele descrise sub forma unei scheme logice pentru un program de calcul cu elemente finite a parametrilor de Mecanica ruperii.

La programele recente FRANC2DL și FRANC3D, specializate pentru analiza cu finite a parametrilor de Mecanica ruperii, etapele de rezolvare sunt diferite față de programele clasice de analiză cu elemente finite. Astfel se modelează geometria, se discretizează cu elemente izoparametrice clasice, se rezolvă sistemul de ecuații și se calculează mărimile de ieșire fără a ține cont de discontinuitățile geometrice de forma fisurilor. Apoi se definesc fisurile, programul șterge elementele învecinate fisurii și rediscretizează cu elemente singulare, care modelează singularitatea vârfului fisurii și cu elemente de legătură intre acestea și elementele inițiale. Această modelare se bazează pe elemente de topologie matematică. Apoi rezolvă din nou sistemul de ecuații, se recalculează deformațiile specifice, tensiunile și apoi parametrii de Mecanica ruperii. Aceste programe au incorporate și subrutine pentru studiul cu elemente finite a propagării fisurii, astfel pentru fiecare nouă lungime a fisurii programul rediscretizează zona adiacentă vârfului fisurii, rezolvă sistemul e ecuații și calculează parametrii de rupere. Rularea acestor programe necesită calculatoare cu procesoare de viteză foarte mare și cu suficentă memorie.


Date de intrare
- nr. nodurilor şi coordonatele lor
- nr. elementelor finite - NE
- tipul fiecărui element finit şi conexiunile dintre ele
- caracteristicile de material
- condiţiile de rezemare şi deplasările diferite de zero impuse
- încărcări exterioare
e = 1
e = e+1
Alcătuirea matricei de rigiditate a elementelor [k]e şi a vectorului forţelor nodale {re}
Transformarea matricelor [k]e şi vectorului {re} în sistemul de coordonate globale
e<NE
DA
NU
Alcătuirea matricei de rigiditate a structurii [K] şi a vectorului forţelor generalizate {R}
Alcătuirea matricei [D]*[B]
α

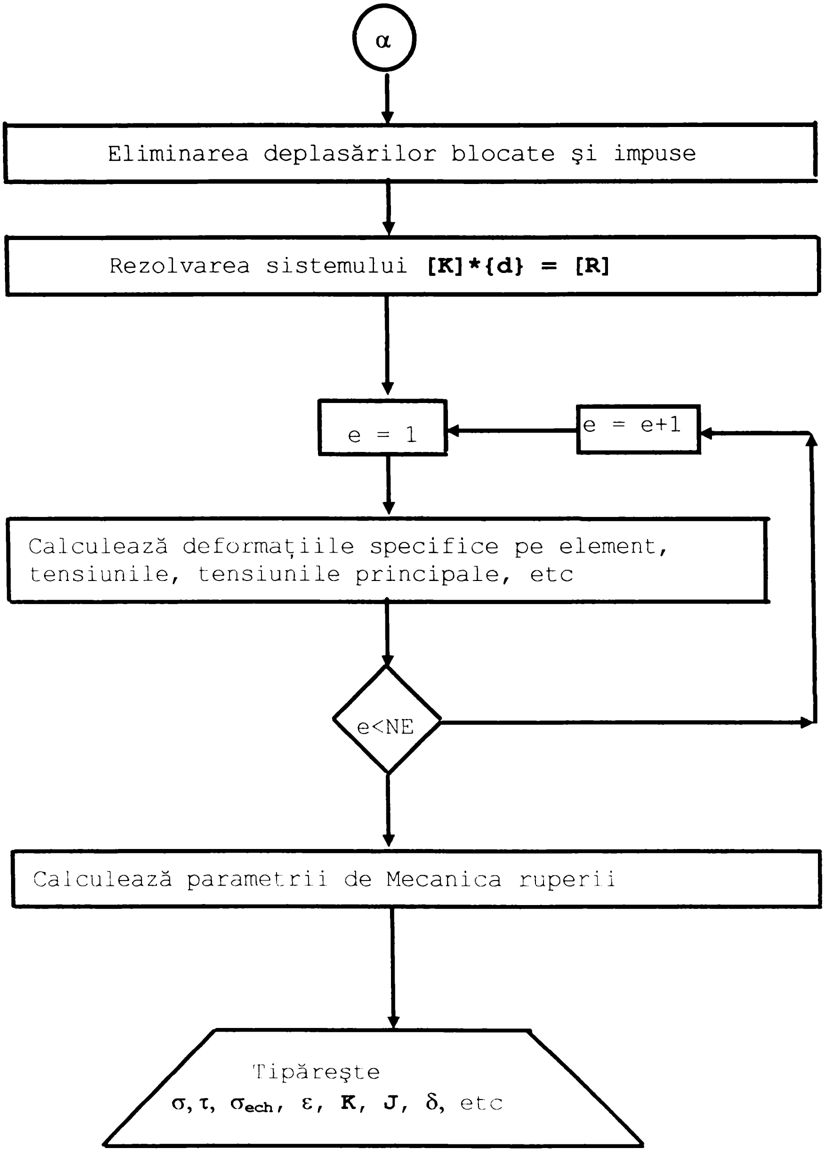

α
Eliminarea deplasărilor blocate şi impuse
Rezolvarea sistemului [K]*{d} = [R]
e = 1
e = e+1
Calculează deformaţiile specifice pe element, tensiunile, tensiunile principale, etc
e<NE
Calculează parametrii de Mecanica ruperii
Tipăreşte
σ, τ, σech, ε, K, J, δ, etc

Figura 3.7.1

CAPITOLUL 4
APLICAŢII ALE UTILIZĂRII ANALIZEI CU ELEMENTE FINITE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII

În acest capitol vor fi prezentate câteva rezultate obţinute de autor pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii **K** prin Metoda elementelor finite. Aplicaţiile considerate se referă la geometrii pentru care nu am găsit în literatura de specialitate soluţiile analitice ale factorului de intensitate a tensiunii. Pentru modelarea vârfului fisurii s-au considerat elemente finite de tipul celor prezentate în **subcapitolul 3.4.** iar pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii s-au utilizat metodele prezentate în **subcapitolul 3.5.** Determinarea factorului de intensitate a tensiunii s-a realizat un program elaborat de autor în **QBASIC,** bazat pe metoda extrapolării tensiunilor.

4.1 DETERMINAREA FACTORULUI DE INTENSITATE A TENSIUNII LA VÂRFUL UNEI CRESTĂTURI LATERALE

În ultima perioadă tot mai mulţi cercetători au fost preocupaţi de extinderea conceptelor de Me canica ruperii la elemente de rezistenţă cu concentratori de tensiune de forma crestăturilor. Cunoaşterea parametrilor caracteristici Mecanicii ruperii pentru piese cu concentratori de tensiune permite extinderea criteriilor de Mecanica ruperii la aceste tipuri de elemente de rezistenţă, putându-se apoi efectua studii privind iniţierea, respectiv propagarea prin oboseală a ruperii.

Distribuţia tensiunilor în vecinătatea unei crestături poate fi determinată prin metode analitice, experimentale sau numerice.

Şi pentru cazul crestăturilor se defineşte, ca parametru ce caracterizează distribuţia tensiunilor factorul de intensitate a tensiunii la vârful crestăturii.

Un studiu al metodelor analitice pentru calculul factorului de intensitate a tensiunilor la vârful crestăturilor este prezentat în lucrarea [B21]. Expresia factorului de intensitate a tensiunii pentru crestătură ascuţită, fără rază de racordare (ρ = **0**) la vârful crestăturii este de forma, [B21]:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{r \to 0} \left[r^{2-n} \sigma_0(r,0) \right] \tag{4.1.1}$$

unde **(r,θ)** reprezintă coordonatele sistemului polar cu originea în vârful crestăturii, Figura 4.1.1.

σ_0 tensiunea normală circumferenţială,

n ≥ **1,5** un exponent în funcţie de unghiul crestăturii β

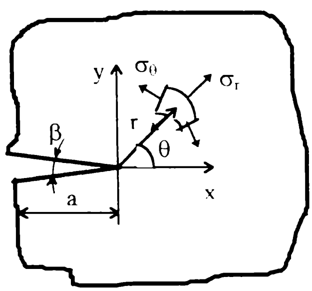


Figura 4.1.1

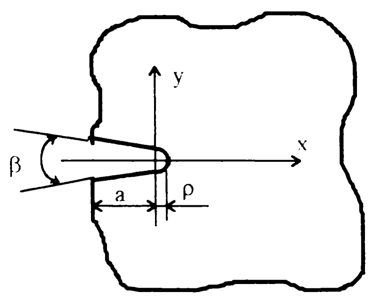


Figura 4.1.2

Pentru cazul unei crestături de lungime **a**, având o rază de racordare la vârful fisurii ρ, Figura 4.1.2, Creager dă soluția factorului de intensitate a tensiunii sub forma, [C12]:

$$K_I = \sigma_y(a)\sqrt{\pi a}\,\frac{\left(2+\frac{\rho}{a}\right)^{3/2}}{2\left(1+\frac{\rho}{a}\right)} \tag{4.1.2}$$

unde σ_y**(a)** este valoarea componentei după direcția **y** a tensiunii în dreptul lungimii crestăturii **a**.

Distribuția tensiunilor σ_θ, σ_y din jurul crestăturilor se poate stabili prin metode analitice, numerice sau experimentale.

Din relațiile (4.1.1) și (4.1.2) se obține expresia factorului de intensitate a tensiunii pentru o fisură, ca un caz particular pentru: $\beta = \mathbf{0}$; $\rho = \mathbf{0}$.

O altă metodă analitică pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei crestături este dată de Fett în lucrarea [F3]. El consideră o crestătură având unghiul β și adâncimea **a**, aflată într-o placă semiinfinită, Figura 4.1.3.

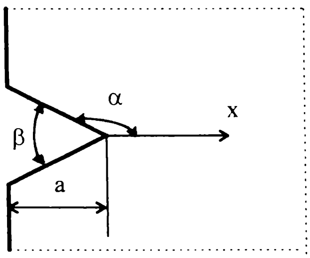


Figura 4.1.3

Factorul de intensitate a tensiunii la vârful crestăturii este pentru acest caz:

$$K_{I,\beta} = \sigma\sqrt{\pi}a^{\omega}\, f(\beta) \tag{4.1.3}$$

unde σ reprezintă tensiunea ce acționează la asupra plăcii,

a adâncimea crestăturii

ω este un exponent funcție de unghiul crestăturii, fiind prima rădăcină a ecuației:

$$\sin[2(\omega-1)\alpha]+(\omega-1)\sin 2\alpha = 0 \tag{4.1.4}$$

În Tabelul 4.1.1 se prezintă valorile exponentului ω și a funcției **f(β)** pentru câteva valori ale unghiului β.

Tabelul 4.1.1

Unghiul β [°]	**Exponentul ω** [-]	$f(\beta) = \dfrac{K_{I,\beta}}{\sigma\sqrt{\pi}a^{\omega}}$
0	0,499	1,122
20	0,498	1,128
40	0,500	1.140
60	0,504	1.172
90	0,500	1.272
120	0,495	1.468
140	0,500	1.467
160	0,505	1.750
180	0,504	1.414

Cu ajutorul relației (4.1.3) se poate determina factorul de intensitate a tensiunii la vârful unei crestături ascuțite aflată într-o placă semiinfinită.

Metodele analitice de determinare a factorului de intensitate a tensiunii la vârful crestăturii sunt greu de aplicat la piese având geometrii finite. De aceia am utilizat pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei crestături ascuțite metoda elementului finit. Am considerat că factorul de intensitate a tensiunii pentru o placă cu o crestătură laterală având unghiul **β**, (Figura 4.1.3) este de de forma:

$$K_{I,\beta} = \sigma\sqrt{\pi a}\, f(\beta) \tag{4.1.5}$$

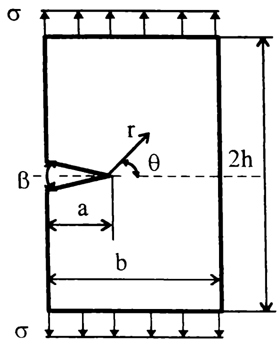


Figura 4.1.4

unde **σ** este tensiunea ce acționează asupra plăcii,
a este adâncimea crestăturii,
f(β) este o funcție de unghiul crestăturii β.

Determinarea factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_{I,\beta}}$ s-a realizat prin metoda extrapolării tensiunii σ_y, descrisă în paragraful 3.5.2, cu ajutorul unui program elaborat de autor în **QBASIC**.

Analiza cu elemente finte am realizat-o cu programul COSMOS/M, utilizând elemente finite izoparametrice cu 8 noduri. Decizia de alegerea a elementelor izoparametrice cu 8 noduri a fost luată pe baza unui studiu al discretizării, folosind elemente triunghiulare cu 3 noduri, 6 noduri, elememente izoparametrice cu 4, respectiv 8 noduri. Cea mai fidelă reprezentare a câmpului de tensiuni din vecinătatea vârfului crestăturii s-a obținut când s-au utilizat elemente izoparametrice cu 8 noduri. De asemenea folosirea acestor elemente mi-a furnizat un număr suficent de date pentru analiza prin regresie liniară a tensiunilor și aplicarea metodei extrapolării tensiunii pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii.

Am considerat o platbandă având lațimea b = 60 mm, lungimea 2h = 120 mm, adâncimea crestăturii a = 24 mm și diferite unghiuri pentru crestătură. Elementele de rezistență de forma platbenzilor cu crestături laterale ascuțite apar în construcțiile tiranților mașinilor grele.

Modul de discretizare este prezentat în Figura 4.1.5, pentru unghiul $\beta = 30^{\circ}$, discretizarea efectuându-se în 154 elemente, legate între ele prin cele 521 noduri. Am considerat o încărcare monoaxială, constantă cu tensiunea σ=15,33 MPa.

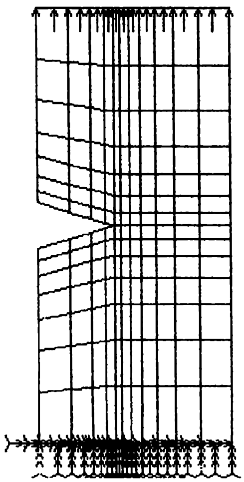
În Tabelul 4.1.2 sunt prezentate o parte din rezultatele obținute în urma rulării (care a durat 76 secunde) și anume variația tensiunii σ_y pe două direcții $\theta = 0^{\circ}$ și $\theta = 90^{\circ}$. Alegerea acestor direcții pentru extrapolarea deplasărilor s-a făcut pe baza considerentelor că pe aceste direcții sunt un număr suficent de noduri pentru a trasa dreapta de regresie și pe observațiile din lucrările [S11] și [S12] care indică pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii prin extrapolare direcția $\theta = 90^{\circ}$.

Metoda extrapolării tensiunii presupune determinarea factorului de intensitate a tensiunii pe baza dreptei de regresie $K_i = f(r)$, unde :

$$\mathbf{K}_i = \frac{\sigma_{yi}\sqrt{2\pi \mathbf{r}_i}}{\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)} \tag{4.1.6}$$

unde θ reprezintă direcția după care se face extrapolarea,

r_i este distanţa de la vârful crestăturii până la nodul i considerat, măsurată pe direcţia θ,
σ_{yi} este valoarea tensiunii după direcţia y în nodul i



Modelul considerat
b = 60 mm
2h = 120 mm
a = 24 mm
a/b = 0,4
grosimea 5 mm
β = 30°
σ = 15,33 MPa

Discretizare
Tip element PLANE2D,
cu 8 noduri pe element
Număr elemente = 154
Număr noduri = 521

Figura 4.1.5

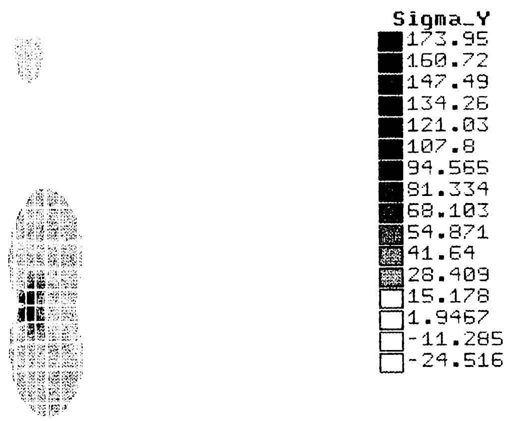


Figura 4.1.6

În Figura 4.1.6 este prezentată variaţia tensiunii σ_y, obţinută în urma rulării.

Tabelul 4.1.2

$\theta = 0^o$				$\theta = 90^o$			
Nodul	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]	K_i [N/mm$^{3/2}$]	Nodul	r_i [mm]	σ_{yi} [MPa]	K_i [N/mm$^{3/2}$]
361	1,02	123,9	313,662	120	1,69	115,70	355,460
362	2,17	64,02	236,393	129	3,62	60,03	269,921
363	3,47	54,82	255,973	134	5,79	52,60	299,115
364	4,95	46,55	259,605	143	8,25	42,97	291,680
365	6,62	39,92	257,460	148	11,04	37,34	293,206
366	8,51	32,96	241,014	157	14,19	31,51	280,513
367	10,65	28,37	232,073	162	17,76	28,56	284,442
368	13,08	23,60	213,947	171	21,79	25,44	280,646
369	15,82	19,21	191,523	176	26,34	23,59	286,121
370	18,92	14,82	161,584	185	31,53	21,64	287,166
371	22,43	9,51	112,898	190	37,39	21,51	310,836
$K_{I,extrap}$	294,998			$K_{I,extrap}$	300,477		
$K_{I,mediu}$	297,737						

În Tabelul 4.1.2 se prezintă şi valorile calculate cu relaţia (4.1.6) ale lui K_i, cu programul elaborat, precum şi rezultatele extrapolării după cele două direcţii considerate, adică valoarea factorului de intensitate a tensiunii $K_{I,extrap}$ şi media celor două valori $K_{I,med}$.

Pentru $\theta = 0^o$, în Figura 4.1.7 am reprezentat variaţia tensiunii σ_{yi} în funcţie de distanţa de la vârful crestăturii $\mathbf{r_i}$, iar în Figura 4.1.8 am reprezentat variaţia lui $\mathbf{K_i}$ în funcţie de $\mathbf{r_i}$, precum şi dreapta de regresie. Analog pentru $\theta = 90^o$ am reprezentat $\sigma_{yi} = f(r_i)$, în Figura 4.1.9 şi $K_i = f(r_i)$ în Figura 4.1.10. Figurile 4.1.7. - 4.1.10. s-au trasat pe calculator cu utilitarul matematic MathCAD.

În Figurile 4.1.7 şi 4.1.9 se observă fenomenul de puternică concentrare a tensiunii σ_y din vecinătatea vârfului crestăturii, ceea ce confirmă abordarea acestor probleme prin intermediul factorului de intensitate a tensiunii de la vârful crestăturii.

Valorile obţinute ale factorului de intensitate a tensiunii după cele două direcţii considerate diferă cu 1,8%. Am găsit că o precizie ridicată în determinarea factorului de intensitate se obţine ca valoare medie a celor două determinări. Astfel, pentru cazul fisurii, pentru care este cunoscută soluţia analitică, [T1], când unghiul crestăturii $\beta = 0^0$, eroarea cea mai mică a factorului de intensitate a tensiunii se obţine pentru valoarea medie:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{I,mediu}} = \frac{\mathbf{K}_{\mathbf{I,extrap0}} + \mathbf{K}_{\mathbf{I,extrap90}}}{2} \qquad (4.1.7)$$

$K_{I,extrap\,0}$ - valoarea factorului de intensitate a tensiunii obţinută luând în considerare nodurile de pe direcţia $\theta = 0^0$

$K_{I,extrap\,90}$ - valoarea factorului de intensitate a tensiunii obţinută luând în considerare nodurile de pe direcţia $\theta = 90^0$

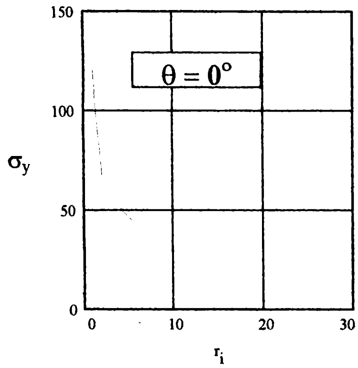


Figura 4.1.7: $\sigma_{yi} = f(r_i)$

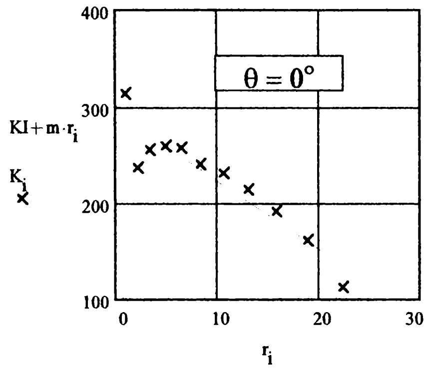


Figura 4.1.8: $\mathbf{K_i = 294{,}998 - 7{,}413\ r_i}$
$\mathbf{K_I = 294{,}998\ N/mm^{3/2}}$

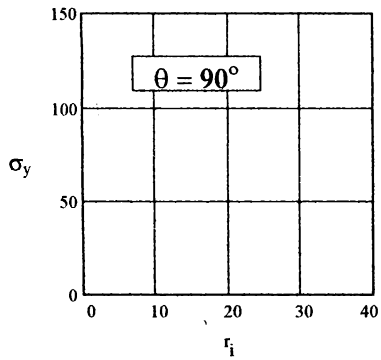


Figura 4.1.9: $\sigma_{yi} = f(r_i)$

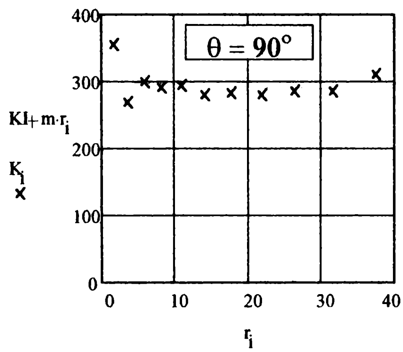
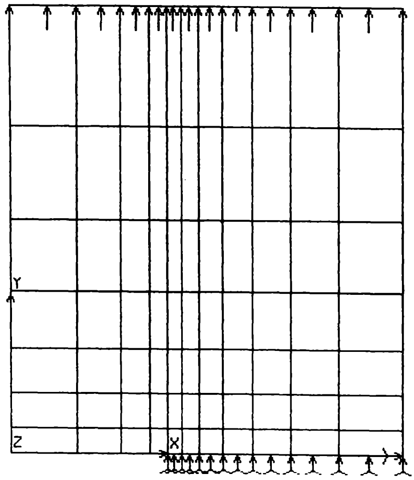


Figura 4.1.10: $\mathbf{K_i = 300{,}477 - 0{,}367\ r_i}$
$\mathbf{K_I = 300{,}477\ N/mm^{3/2}}$

Pentru cazul unei fisuri laterale am modelat jumătate din platbandă cu elemente izoparametrice cu 8 noduri, folosind aceiaşi parametrii de discretizare ca în cazul precedent (număr noduri, număr elemente, mărimea elementelor), Figura 4.1.11.

Condiţiile de rezemare impuse au fost blocarea deplasării pe direcţia **y** a nodurilor din axa de simetrie şi blocarea deplasării după direcţia **x** a nodului extrerior, Figura 4.1.11.

În urma rulării, care a durat 58 secunde, s-a obţinut deformata platbandei cu fisură laterală, prezentată în Figura 4.1.12 comparativ cu poziţia nedeformată, respectiv distribuţia distribuţia tensiunii σ_y, prezentată în Figura 4.1.13.



Modelul considerat
$b = 60$ mm
$h = 60$ mm
$a = 24$ mm
$a/b = 0,4$
grosimea 5 mm
$\beta = 0^{\circ}$
$\sigma = 15,33$ MPa

Discretizare
Tip element PLANE2D,
cu 8 noduri pe element
Număr elemente = 77
Număr noduri = 268

Figura 4.1.11

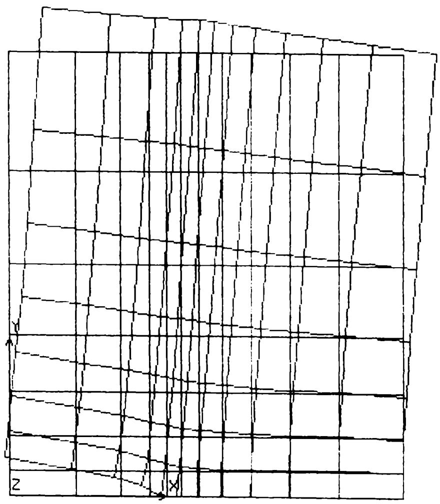


Figura 4.1.12

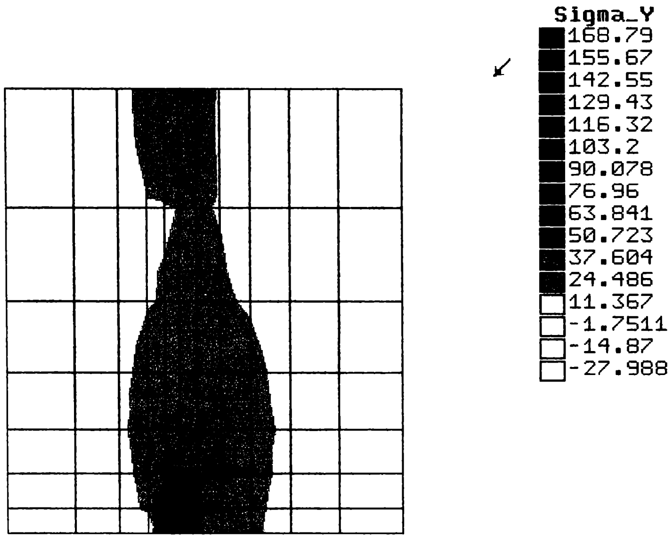
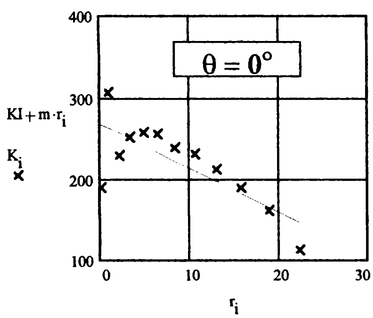


Figura 4.1.13

Pe baza distribuţiei tensiunii obţinută în urma analizei cu elemente finite am determinat cu ajutorul programului propriu EXTENS, factorul de intensitate a tensiunii la vârful fisurii, $\mathbf{K_I}$. În Figurile 4.1.14 şi 4.1.15 se prezintă variaţiile lui $K_i = f(r_i)$ pentru cele două direcţii considerate: $\theta = 0°$ şi $\theta = 90°$.



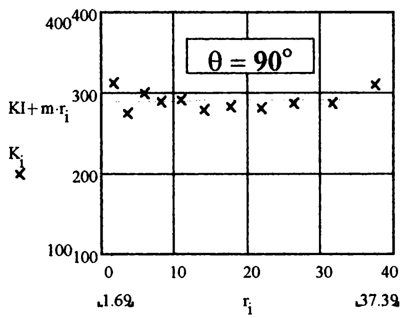


Figura 4.1.14: $\mathbf{K_i = 268{,}239 - 5.38\ r_i}$
$\mathbf{K_I = 268{,}239\ N/mm^{3/2}}$

Figura 4.1.15: $\mathbf{K_i = 289{,}998 + 0{,}055\ r_i}$
$\mathbf{K_I = 289{,}926\ N/mm^{3/2}}$

Rezultatele obţinute pentru cazul fisurii laterale (pentru unghiul crestăturii β=0) sunt prezentate în Tabelul 4.1.3 şi comparate cu valoarea analitică dată în [T1]:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\, f(a/b) \quad (4.1.8)$$

Pentru σ = 15,33 MPa, a = 24 mm, b = 60 mm, a/b = 0,4, 2h = 120 mm şi grosimea 5 mm

$$\mathbf{f(a/b)} = 1{,}12 - 0{,}231(\mathbf{a/b}) + 10{,}55(\mathbf{a/b})^2 - 21{,}72(\mathbf{a/b})^3 + 30{,}39(\mathbf{a/b})^4 = 2{,}103 \quad (4.1.9)$$

rezultă $K_{I,analitic}$ = 279,938 $N/mm^{3/2}$.

Tabelul 4.1.3

$\beta = 0^o$	$K_{I,extrap}$ ($\theta = 0^o$)	$K_{I,extrap}$ ($\theta = 90^0$)	$K_{I,mediu}$	$K_{I,analitic}$, [T1]
K_I [$N/mm^{3/2}$]	268,239	289,926	279,083	279,938
Eroarea [%]	-4,2	3,5	0,3	-

Din Tabelul 4.1.3 se observă că abaterea minimă faţă de valoarea analitică a factorului de intensitate a tensiunii $K_{I,\ analitic}$, calculată pe baza relaţiilor (4.1.8) şi (4.1.9), se obţine dacă se consideră valoarea medie $K_{I,\ mediu}$, calculată pe baza celor două valori obţinute prin extrapolare $K_{I,extrap}$, cu relaţia (4.1.7).

De asemenea, comparând dreptele de regresie trasate pentru cele două valori ale unghiului θ (0^o şi 90^0), se observă că ambele tind spre valoarea factorului de intensitate a tensiunii $K_{I,analitic}$. Valoarea factorului de tensiune analitic $K_{I,analitic}$ aflându-se între cele două valori determinate prin extrapolarea tensiunilor.

În concluzie valoarea cea mai precisă a factorului de intensitate a tensiunii este valoarea medie, $K_{I,mediu}$ a celor două valori obţinute prin extrapolarea tensiunilor $K_{I,extrap}$.

În continuare am determinat, prin analiză cu elemente finite şi prin metoda extrapolării tensiunii, expresia factorului de intensitate a tensiunii la vârful crestăturii $\mathbf{K_{I,\beta}}$ şi funcţia $\mathbf{f(\beta)}$ pentru diferite valori ale unghiului β.

S-au considerat aceleaşi dimensiuni ale plăcii:

a = 24 mm, b = 60 mm, a/b = 0,4, 2h = 120 mm şi grosimea 5 mm

Încărcarea s-a considerat monoaxială şi constantă cu tensiunea σ = 15,33 MPa.

Discretizarea s-a realizat identic cu cea prezentată în Figura 4.1.5 în 154 elemente izoparametrice cu 8 noduri, conectate în 521 noduri.

Valorile factorilor de intensitate a tensiunii $K_{I,\beta}$ şi a funcţiei $\mathbf{f(\beta)} = \dfrac{\mathbf{K_{I,\beta}}}{\sigma\sqrt{\pi \mathbf{a}}}$ obţinute pentru 9 valori diferite ale unghiului β sunt prezentate în Tabelul 4.1.4.

Tabelul 4.1.4

β [^{0}]	$\mathbf{K_{I,\beta} = K_{I,mediu}}$ [$N/mm^{3/2}$]	$f(\beta) = \dfrac{K_{I,\beta}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ [-]
0	279,083	2,097
15	287,925	2,613
30	297,737	2,237
45	305,230	2,293
60	314,414	2,362
75	320,405	2,407
90	327,593	2,461
105	345,296	2,594
120	400,800	3,011

Cu valorile din Tabelul 4.1.4 am încercat găsirea unei corelaţii a funcţiei f(β). În acest scop am elaborat un program pentru interpolare polinomială, bazat pe metoda celor mai mici pătrate. Programul a fost scris în utilitarul matematic MathCAD. Astfel pentru placa considerată s-a obţinut:

$$\mathbf{f(\beta) = 2{,}096+0{,}006\,\beta-1{,}856\;10^{-4}\,\beta^2+5{,}975\;10^{-6}\,\beta^3-7{,}863\;10^{-8}\,\beta^4+3{,}533\;10^{-10}\,\beta^5} \quad (4.1.10)$$

Relaţia (4.1.10) permite determinarea funcţiei **f(β)**, respectiv a factorului de intensitate a tensiunii la vârful crestăturii pentru orice valoare a unghiului **β**, cuprinsă între 0° şi 120°.

Precizia estimării funcţiei **f(β)** este dată parametrii estimării: coeficentul de determinare Rd=0,99989, coeficentul de corelaţie cor=0,99978 şi eroarea standard a estimării er.s.e.=0,67 %.

În Figura 4.1.16 am reprezentat variaţia funcţiei **f(β)**, găsită prin interpolare polinomială (trasată cu linie continuă), precum şi valorile funcţiei **f(β)** calculate pe baza factorilor de intensitate a tensiunii determinaţi prin extrapolarea tensiunilor rezultate în urma analizei cu elemente finite (marcate cu x).

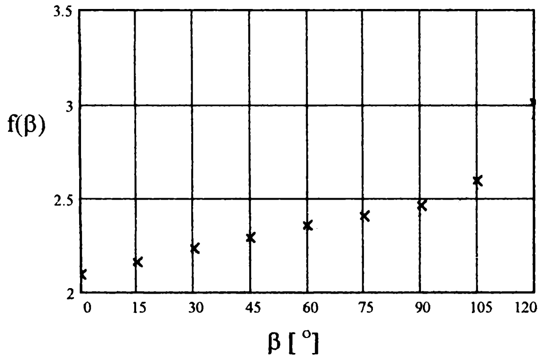


Figura 4.1.16

Obţinerea funcţiei **f(β)** reprezintă o contribuţie originală a autorului, privind determinarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei crestături cu unghiul **β**.

Importanţa soluţiei obţinute de autor constă în faptul că aceasta permite determinarea factorului de intensitate a tensiunii de la vârful unei crestături ascuţite aflată într-o platbandă, ale cărei dimensiuni satisfac rapoartele **2h/b = 2** şi **a/b = 0,4**. Din diagrama de variaţie a funcţiei **f(β)** sau prin calcul din relaţia (4.1.10) se poate estima valoarea funcţiei **f(β)** pentru orice unghi β cuprins între 0^0 şi 120^0, iar apoi cu ajutorul relaţiei (4.1.5) se poate calcula valoarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful crestăturii ascuţite.

4.2 DETERMINAREA FACTORULUI DE INTENSITATE A TENSIUNII PENTRU O PLATBANDĂ CU UN ORIFICIU CIRCULAR DIN CARE SE DEZVOLTĂ FISURI.

4.2.1 FISURI DEZVOLTATE DIN ORIFICII CIRCULARE.

Cazul platbandelor ce conțin orificii circulare este des întâlnit în practică. Realizarea unor orificii circulare în elementele de rezistență de forma platbandelor, este necesară în scopul asamblării prin şuruburi, bolțuri sau nituri, precum şi în scop tehnologic, de exemplu găuri de acces, orificii pentru trecerea sau asamblarea conductelor. Platbandele, având orificii circulare intră în componența structurilor de rezistență de tipul tiranților. Prezența acestor orificii produce concentrări ale tensiunilor în vecinătatea lor şi chiar apariția unor fisuri care se dezvoltă de pe suprafața orificiilor. Pentru aprecierea siguranței în exploatare a unor astfel de elemente de rezistență pe baza principiilor Mecanicii ruperii materialelor este necesară cunoaşterea factorilor de intensitate a tensiunii.

Pentru o platbandă cu orificiu circular şi fisură, Figura 4.2.1.1 expresia generală a factorului de intensitate a tensiunii este:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\, f(a, D, b, h) \qquad (4.2.1.1)$$

unde σ este tensiunea ce solicită platbanda la tracțiune monoaxială,

a lungimea fisurii,

f (a, D, b, h) este o funcție de geometria platbandei.

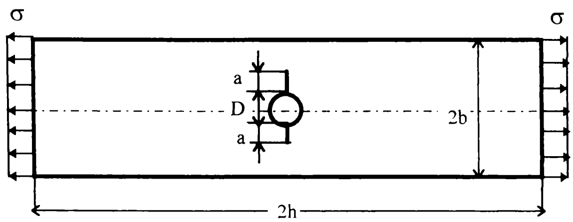


Figura 4.2.1.1

O primă estimare a factorului de intensitate a tensiunii este dată în [B15], pentru cazul când lungimea fisurii **a** este comparabilă cu diametrul orificiului **D**. Această aproximare inginerească, aşa cum este denumită în [B15] consideră o fisură efectivă $\mathbf{a_{ef}}$ având lungimea egală cu lungimea fisurii **a** plus diametrul orificiului circular **D**. Astfel:

- pentru cazul când din orificiu se dezvoltă o singură fisură, Figura 4.2.1.2.a,

$$2\,a_{ef} \quad D \cdot a$$

rezultă:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a_{ef}} = \sigma\sqrt{\pi a}\sqrt{\frac{D}{2a}+\frac{1}{2}} = \sigma\sqrt{\pi a}\, f_1\!\left(\frac{a}{D}\right) \qquad (4.2.1.2)$$

cu $f_1\!\left(\frac{a}{D}\right) = \sqrt{\frac{D}{2a}+\frac{1}{2}}$

- pentru cazul când din orificiu se dezvoltă două fisuri simetrice, Figura 4.2.1.2.b,

$$2\,a_{ef} = D + 2\,a$$

rezultă:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a_{ef}} = \sigma\sqrt{\pi a}\sqrt{\frac{D}{2a}+1} = \sigma\sqrt{\pi a}\,f_2\left(\frac{a}{D}\right) \qquad (4.2.1.3)$$

cu $f_2\left(\frac{a}{D}\right) = \sqrt{\frac{D}{2a}+1}$.

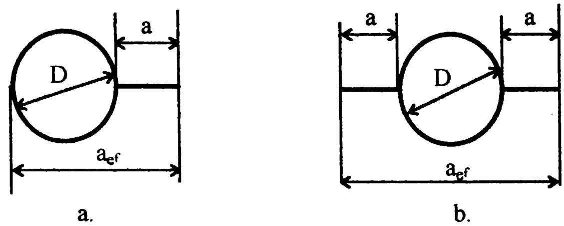


Figura 4.2.1.2

Variaţia funcţiilor **f_1(a/D)**, respectiv **f_2(a/D)** este trasată în Figurile 4.2.1.3.a respectiv 4.2.1.3.b.

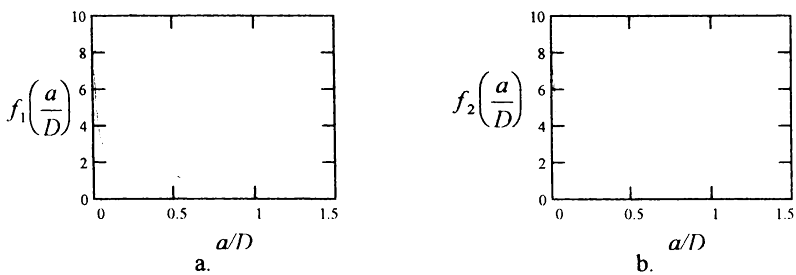


Figura 4.2.1.3

Soluţia factorului de intensitate a tensiunii obţinută considerând orificiul circular ca o fisură, dată de relaţiile (4.2.1.2) şi (4.2.1.3), este valabilă doar pentru cazul fisurilor de lungime mare.

Newman determină factorul de intensitate a tensiuni al unei platbenzi de dimensiuni finite având un orificiu circular din care se dezvoltă două fisuri simetrice, de forma celei din Figura 4.2.1.1, prin metoda colocaţiei. Influenţa geometriei platbenzii este luată în considerare prin intermediul funcţiei: f(a/b, R/b, h/b), unde R = D/2 reprezintă raza orificiului circular.

Rezultatele obţinute de Newman sunt prezentate sub formă grafică în lucrarea [T1] şi reproduse în Figura 4.2.1.4.

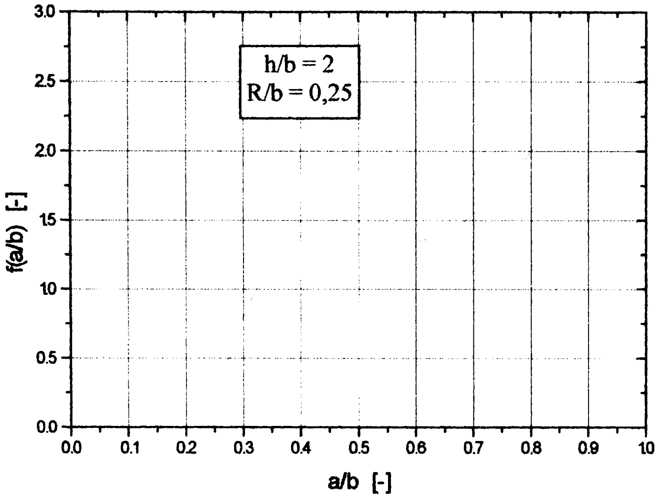


Figura 4.1.2.4

Precizia pentru soluţia lui Newman este estimată în [T1], ca fiind afectată de erori mai mici de 0,1%. Dezavantajul acestei soluţii este că nu se prezintă sub o formă matematică care să permită introducerea ei într-un program de calcul al factorului de intensitate a tensiunii.

În bibliografia studiată nu am găsit o soluţie analitică pentru orificiu circular din care se dezvoltă o singură fisură perpendicular pe direcţia încărcării, respectiv pentru o fisură care face un anumit unghi cu direcţia încărcării. La acest din urmă caz deplasarea flancurilor fisurii realizându-se după modul mixt (I şi II). De aceia am apelat la Metoda elementului finit pentru a determina o soluţie numerică a factorului de intensitate a tensiunii. Pentru determinarea numerică a factorului de intensitate a tensiunii am utilizat programul **FRANC2D/L** (FRacture ANalysis Code).

4.2.2. PROGRAMUL **FRANC2D/L**

Programul **FRANC2D** este specializat pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii, la vârful unor discontinuităţi geometrice de forma fisurilor, bazat pe Metoda elementului finit. El a fost elaborat de un grup de cercetători (Computational Fracture Group) de la Cornell University, SUA sub conducerea Prof. Anthony Ingraffea şi a Dr. Paul Wawrzynek. Acest program rulează numai pe staţii grafice în sistemul de operare UNIX de tipul Sun, DEC Alpha, Silicon Graphics, IBM RS6000, Hewtett Packard.

La Kansas State University, SUA Prof. Daniel Swenson şi cercetătorul Mark James au dezvoltat o variantă a acestui program, numită FRANC2D/L, care are în plus facilităţii de calcul a structurilor multistrat şi o variantă pentru calculatoare compatibile IBM PC. Această versiune pentru PC lucrează pe 32 biţi şi realizarea ei a fost posibilă după apariţia sistemului de operare WINDOWS'95. Rularea acestui program necesită resurse hardware considerabile şi anume un procesor cu o frecvenţă de minimum 133 MHz şi o memorie de minimum 16 MRAM, recomandabil fiind 32 MRAM.

Am obținut programul FRANC2D/L prin INTERNET, pe baza unui acord primit din partea Prof. D. Swenson de la Kansas State University.

Programul FRANC2D/L realizează analiza liniar elastică cu elemente finite pentru elemente de rezistență, aflate în stare plană de tensiune sau deformație și axial simetrice, având posibilitatea definirii unor fisuri și a determinării factorului de intensitate a tensiunii pentru acestea, [S20].

Datele de intrare în programul FRANC2D/L sunt fișiere (cu extensia *.inp) în care se dau:

- numărul de straturi, numărul de materiale care compun elementul de rezistență;
- tipul problemei: stare plană de tensiune, de deformație, axialsimetrică;
- tipul de material: izotrop, anizotrop;
- caracteristicile de material: modulele de elasticitate, coeficentul lui Poission pentru fiecare material;
- tenacitatea la rupere K_{IC};
- grosimea straturilor;
- numărul de elemente finite în care se face discretizarea structurii;
- numărul de noduri al structurii;
- topografia discretizării: definirea nodurilor pentru fiecare element, poziția nodurilor.

Programul FRANC2D/L acceptă numai elemente izoparametrice cu 6 (pentru structuri solicitate la încovoiere) și 8 noduri, de forma celor descrise în **paragraful 3.4**. Datele referitoare la discretizarea structurii se introduc fără a ține cont de prezența fisurilor, acestea urmând a fi definite în sesiunea de lucru cu FRANC. Avantajul acestui mod de introducere a discretizării este că ea poate fi efectuată într-un program general de analiză cu elemente finite, ca de exemplu COSMOS/M, NASTRAN, ANSYS sau într-un preprocesor special numai pentru discretizare, ca de exemplu CASCA și importată în FRANC.

Preprocesarea în FRANC constă în introducerea rezemărilor, a încărcărilor, permite modificarea constantelor de material și a tipului problemei (stare plană de tensiune, de deformație sau axialsimetric).

Rezemările se pot defini pentru noduri sau pe anumite porțiuni ale laturilor. De asemenea este posibilă impunerea unor deplasări pe anumite noduri sau porțiuni din contur.

Tipurile de încărcări acceptate sunt: încărcări cu forțe concentrate; încărcări cu sarcini distribuite, care pot fi constante, liniare sau pătratice; încărcări masice la care se dă accelerația; încărcări termice la care se specifică distribuția temperatirii.

Apoi se poate face analiza cu elemente finite a piesei. Programul FRANC2D/L are posibilitatea de a rezolva sistemul de ecuații caracteristic prin două metode :

- metoda de eliminare a lui Gauss
- metoda relaxării dinamice a lui Underwood.

După rulare postprocesarea rezultatelor constă în posibilitatea vizualizării **tensiunilor** σ_x, σ_y, τ_{xy}; a tensiunilor principale σ_1, σ_2; a tensiunii tangențiale maxime τ_m ; a deformatei, a deplasărilor **u, v** și a deformațiilor specifice ε_x , ε_y , γ_{xy}. Rezultatele pot fi afișate sub formă de text sau reprezentate sub formă de benzi sau linii.

Determinarea parametrilor de Mecanica ruperii se face definind una sau mai multe fisuri. Acestea pot fi interne sau laterale, pornind de la una din marginile piesei. După definirea fisurilor programul FRANC2D/L șterge elementele din vecinătatea fisurii și rediscretizează creând la vârful fisurilor singularitatea câmpului de deformație și tensiune. Aceasta discretizare poate fi modificată de utilizator sau acceptată soluția dată de program.

Se rulează din nou programul iar ca date de ieșire, pe lângă cele amintite anterior, se pot obține factorii de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ și $\mathbf{K_{II}}$ calculați prin trei metode diferite:

- extrapolarea deplasărilor;
- pe baza forței de extensie a fisurii, $\mathcal{G}_I$ și $\mathcal{G}_{II}$ afișându-se și valorile acesteia;
- pe baza integralei $\mathbf{J_I}$ și $\mathbf{J_{II}}$, de asemenea afișându-se și valorile acestora.

Programul are opţiune pentru propagarea unei fisuri existente prin repoziţionarea vârfului fisurii; aceasta se poate face prin introducerea noilor coordonate ale vârfului fisurii de către utilizator sau automat de către program.

În cazul opţiunii de propagare a fisurii prin oboseală, aceasta se face după legea lui Paris, iar programul necesită introducerea coeficentului şi a exponentului din legea lui Paris. Propagarea fisurii se realizează automat, direcţia de propagare fiind direcţia tensiunii tangenţiale maxime din jurul fisurii. Există şi posibilitatea de a se impune de către operator direcţia de propagare a fisurii.

De asemenea se poate obţine o "istorie" a evoluţiei factorului de intensitate a tensiunii în funcţie de lungimea fisurii pe parcursul propagării fisurii, precum şi variaţia lungimii fisurii în funcţie de numărul de cicluri de oboseală.

Analiza propagării fisurii se face prin rediscretizarea şi rularea după fiecare creştere incrementală a fisurii. Aceasta necesită un timp de rulare foarte mare care impune rularea pe calculatoare cu viteză de lucru mare şi memorie cât mai mare.

4.2.3 DETERMINAREA FACTORULUI DE INTENSITATE A TENSIUNII PENTRU O PLATBANDĂ CU ORIFICIU CIRCULAR DIN CARE SE DEZVOLTĂ DOUĂ FISURI SIMETRICE.

Am considerat o platbandă cu un orificiu circular având forma şi geometria ca în Figura 4.2.3.1

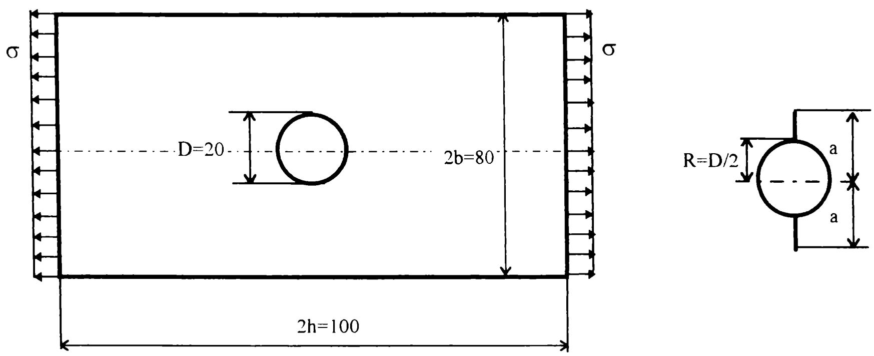


Figura 4.2.3.1

Dimensiunile platbenzii s-au considerat: lungimea 2h = 100 mm; lăţimea 2b = 80 mm, grosimea 5 mm iar diametrul orificiului circular D=2R=20 mm, deci raportul R/b=0,25.

Ţinând cont de simetria placii am modelat cu ajutorul programului CASCA numai o jumătate din placă.

Discretizarea s-a realizat în 248 de elemente izoparametrice cu 8 noduri, legate între ele în 829 noduri. Geometria discretizată, precum şi constantele de material (modulul de elasticitate alngitudinal $E=2,1\ 10^5$ MPa şi coeficentul lui Poisson $\nu = 0,3$) le-am salvat într-un fişier cu date de intrare pentru FRANC2D/L: **orif.inp**

Discretizarea s-a importat în FRANC2D/L, apoi s-au definit rezemările (blocând deplasările după direcţiile x şi y a porţiunii inferioare a platbenzii şi blocând deplasarea pe direcţia x a marginii, în axa de simetrie a platbenzii cu orificiu, pe baza considerentului că nodurile respective sunt legate în axa de simetrie de nodurile celeilalte jumătăţi a platbenzii) şi încărcarea cu o tensiune liniar distribuită având valoarea σ = 10 MPa.

În urma rulării programului FRANC s-a obţinut deformata, Figura 4.2.3.2 şi variaţia tensiunii σ_y, reprezentată în Figura 4.2.3.3. sub formă de benzi de tensiune. În Figura 4.2.3.3 se observă fenomenul de concentrare a tensiunilor în jurul orificiului circular.

Pe baza rezultatelor obţinute, tensiunea maximă la frontiera orificiului σ_{max}= 31,93 MPa am calculat coeficentul de concentrare a tensiunilor:

$$k_{t,MEF} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = \frac{31{,}93}{10} = 3{,}193$$

Valoarea analitică a coeficentului de concentrare a tensiunii, dată în [P13] este pentru R/b = 0,25 : $k_{t,teor}$ = 3,24. Între valoarea analitică a coeficentului de concentrare a tensiunii $k_{t,teor}$ şi cea determinată prin analiză cu elemente finite există o abatere de 1,45%.

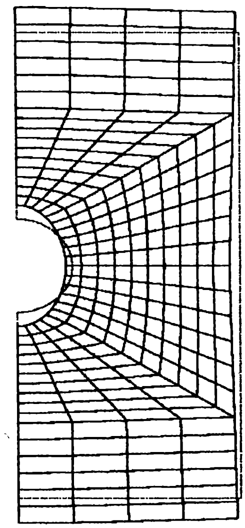


Figura 4.2.3.2

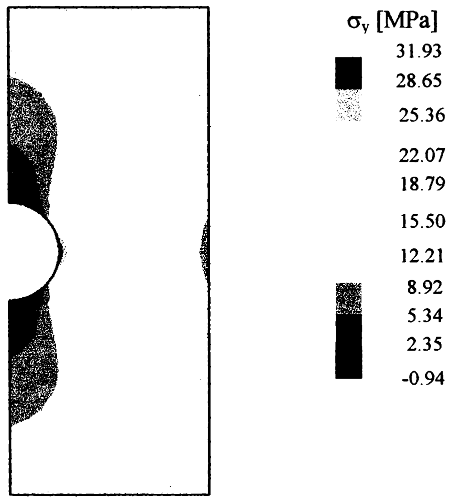


Figura 4.2.3.3

Am definit apoi o fisură având lungimea de 2 mm pornită din orificiul circular, adică **a = 12 mm.** Programul FRANC a şters în mod automat elementele din jurul vârfului fisurii definite şi a rediscretizat zona respectivă, Figura 4.2.3.5.a Singularitatea corespunzătoare vârfului fisurii s-a creat prin introducerea unor elemente izoparametrice degenerate şi prin deplasarea nodurilor de la mijlocul laturilor la un sfert din lungimea laturilor spre vârful fisurii, procedură descrisă în paragraful 3.4.

Rulând s-a obţinut variaţia tensiunii σ_y din jurul vârfului fisurii ca în Figura 4.2.3.5.b., iar cu ajutorul opţiunii de calcul a factorului de intensitate a tensiunii s-a obţinut valoarea factorului de intensitate a tensiunii pentru modul I de deplasare a flancurilor fisurii: K_I = 68,22 MPa $mm^{1/2}$. Valoarea factorului de intensitate a tensiunii s-a calculat prin metoda de extrapolare a deplasărilor.

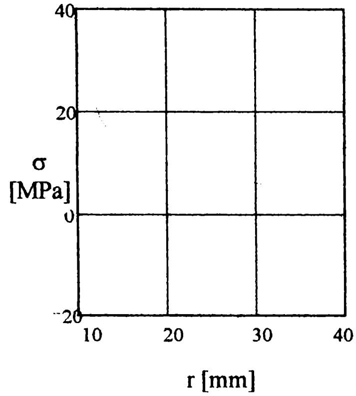


Figura 4.2.3.4

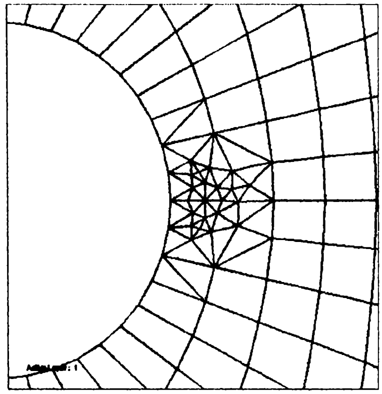


Figura 4.2.3.5.a

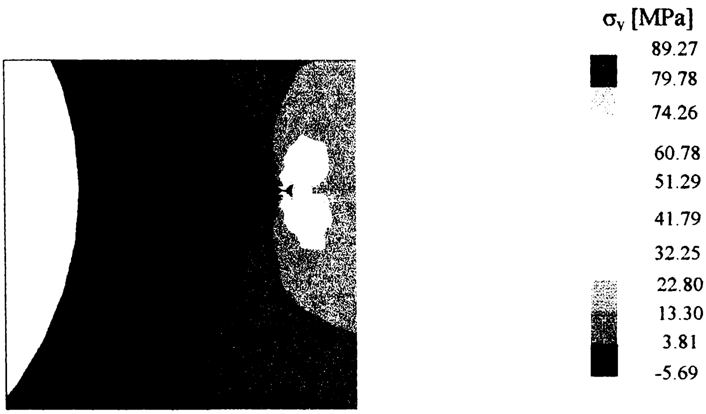


Figura 4.2.3.5.b

Am reluat problema pentru alte lungimi ale fisurii de la 14 mm la 36 mm cu un pas de 2 mm, păstrând nemodificate rezemările şi încărcarea, efectuând rediscretizarea şi rulând programul FRANC2D/L pentru fiecare lungime a fisurii. Pentru fiecare lungime a fisurii **a**, s-a obţinut valoarea factorului de intensitate a tensiunii $K_{I,MEF}$, prin metoda extrapolării tensiunii. Cu această valoare s-a calculat factorul adimensional de intensitate a tensiunii f(a/b, R/b).

Datele obţinute sunt prezentate în Tabelul 4.2.3.1 comparativ cu valorile analitice prezentate în [T1], pentru funcţia f_T(a/b, R/b).

Tabelul 4.2.3.1

Nr.crt	Lungime fisură a [mm]	Raportul a/b [-]	Factorul de intensitate a tensiunii, MEF $K_{I,MEF}$ [MPa mm$^{1/2}$]	Funcţia $f(\frac{a}{b},\frac{R}{b})=\frac{K_{I,MEF}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ [-]	Funcţia după Tada $f_T(a/b,R,b)$ [-]	Abaterea Δ [%]
1	10	0,25	0	0	0	-
2	12	0,30	68,22	1,111	1,10	-1,00
3	14	0,35	77,90	1,175	1,18	0,28
4	16	0,40	86,15	1,215	1,22	0,41
5	18	0,45	93,75	1,247	1,26	1,03
6	20	0,50	102,70	1,296	1,30	0,31
7	22	0,55	113,40	1,364	1,35	-1,05
8	24	0,60	122,17	1,407	1,40	-0,50
9	26	0,65	138,20	1,529	1,52	-0,59
10	28	0,70	149,30	1,592	1,60	0,50
11	30	0,75	163,33	1,682	1,70	1,06
12	32	0,80	193,11	1,926	1,93	0,21
13	34	0,85	228,65	2,212	2,22	0,36
14	36	0,90	279,60	2,629	2,65	0,79

Din Tabelul 4.2.3.1 se observă că diferenţele dintre valoarea analitică a funcţiei f(a/b, R/b) şi valoarea determinată prin analiză cu elemente finite sunt în jur de 1,00 %, ceea ce validează modelarea cu elemente finite.

În Figura 4.2.3.6 se prezintă discretizarea din zona învecinată fisurii de lungime 32 mm. În Figura 4.2.3.7 este dată distribuţia tensiunii pentru fisura de lungime 32 mm iar în Figura 4.2.3.8 deformata platbenzii pentru cazul fisurii de lungime 32 mm.

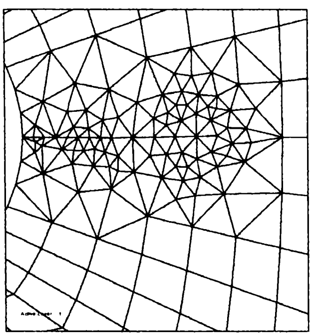


Figura 4.2.3.6

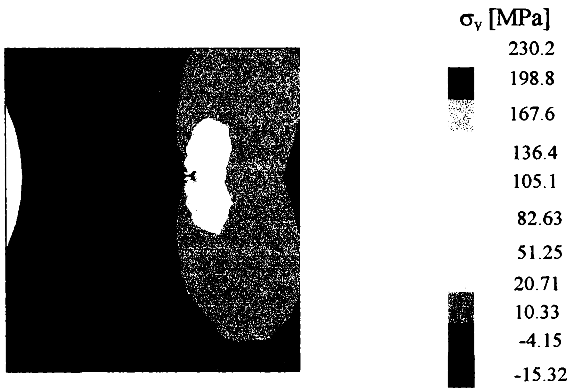


Figura 4.2.3.7

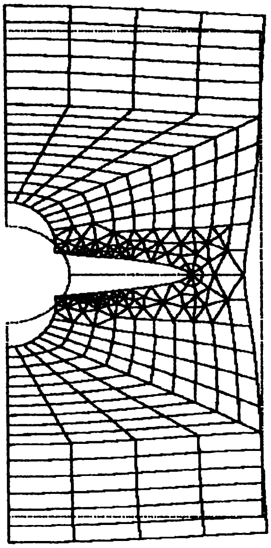


Figura 4.2.3.8

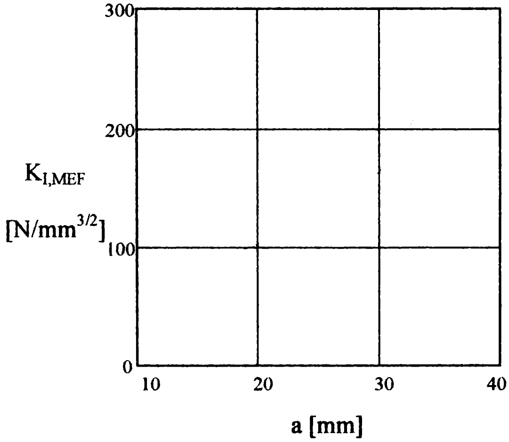


Figura 4.2.3.9

În Figura 4.2.3.9 s-a trasat variaţia factorului de intensitate a tensiunii obţinut prin metoda elementului finit $\mathbf{K_{I,MEF}}$ în funcţie de lungimea fisurii **a.**

S-a încercat determinarea prin interpolare polinomială a expresiei funcţiei **f(a/b),** pe baza rezultatelor obţinute în urma analizei cu elemente finite. Interpolarea polinomială s-a realizat cu ajutorul unui program de interpolare polinomială bazat pe metoda celor mai mici pătrate şi scris în MathCAD. Astfel s-a obţinut expresia funcţiei **f(a/b)** sub forma:

$$\mathbf{f(a/b) = 2{,}332 - 12{,}127\,(a/b) + 41{,}744\,(a/b)^2 - 58{,}307\,(a/b)^3 + 30{,}336\,(a/b)^4} \qquad (4.2.1.4)$$

Pentru funcţia determinată parametrii ce caracterizează precizia estimării sunt: coeficentul de determinare **Rd** = 0,99913; coeficentul de corelaţie **cor** = 0,99826 iar eroarea standard a estimării este de 2,29 %. Trebuie menţionat că soluţia originală obţinută, dată de relaţia (4.2.1.4) este valabilă pentru o platbandă cu orificiu circular, la care dimensiunile respectă rapoartele **h/b = 2** iar **R/b = 0,25**, iar raportul între lungimea fisurii şi lăţimea platbenzii, **a/b** este cuprins în intervalul [0,3...0,9].

În Figura 4.2.3.10 s-a reprezentat funcţia **f(a/b)** obţinută prin interpolare polinomială (cu linie continuă), precum şi punctele pe baza cărora s-a efectuat interpolarea (■). Aceste puncte reprezintă valorile funcţiei f(a/b) obţinute prin analiză cu elemente finite.

Soluţia obţinută de autor prin interpolare polinomială se bazează pe valorile funcţiei **f(a/b)** rezultate în urma analizei cu elemente finite. Avantajul exprimării sub formă polinomială a funcţiei **f(a/b),** faţă de exprimarea sub formă grafică din Figura 4.1.2.4, dată în [T1], constă în aceea că soluţia propusă de autor poate fi introdusă într-un program de calcul în scopul determinării factorului de intensitate a tensiunii.

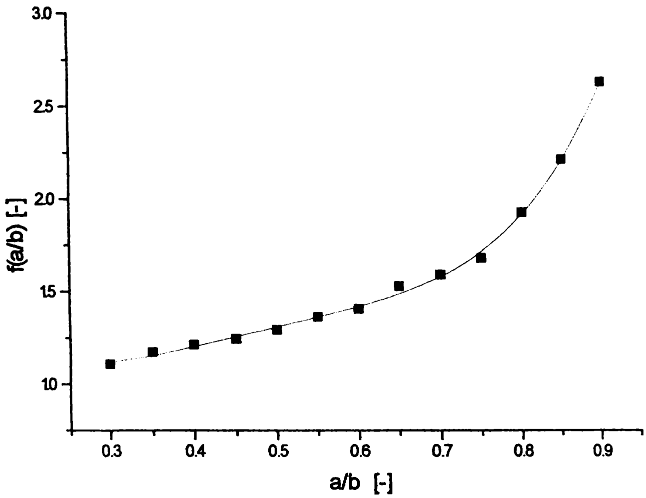


Figura 4.2.3.10

Pentru a studia precizia estimării în Tabelul 4.2.3.2 sunt prezentate comparativ pentru diferite valori ale raportului **a/b**, valorile funcției **f(a/b)** obținute prin analiză cu elemente finite, cu soluția propusă de autor și cele analitice date în [T1]. Se observă că erorile față de soluția analitică [T1] sunt de până la 2%, ceea ce confirmă valabilitatea soluției determinată de autor prin interpolare pe baza rezultatelor obținute prin analiză cu elemente finite.

Tabelul 4.2.3.2

Nr.crt	Raportul **a/b** [-]	Funcția după analiză MEF f_{MEF} [-]	Funcția după interp. f_{interp} [-]	Funcția după Tada f_T [-]	Abaterea Δ [%]
1	0,25	0	0	0	-
2	0,30	1,111	1,122	1,10	-2,00
3	0,35	1,175	1,157	1,18	1,95
4	0,40	1,215	1,205	1,22	1,22
5	0,45	1,247	1,258	1,26	0,16
6	0,50	1,296	1,312	1,30	-0,92
7	0,55	1,364	1,364	1,35	-1,03
8	0,60	1,407	1,421	1,40	-1,50
9	0,65	1,529	1,489	1,52	2,04
10	0,70	1,592	1,582	1,60	1,12
11	0,75	1,682	1,718	1,70	-1,06
12	0,80	1,926	1,919	1,93	0,57
13	0,85	2,212	2,212	2,22	0,36
14	0,90	2,629	2,628	2,65	0,83

4.2.4. DETERMINAREA FACTORULUI DE INTENSITATE A TENSIUNII PENTRU O PLATBANDĂ CU ORIFICIU CIRCULAR DIN CARE SE DEZVOLTĂ O FISURĂ

Dacă pentru cazul platbenzii cu orificiu circular din care se dezvoltă două fisuri simetrice se găseşte în bibliografie [T1], [B15] soluţia pentru factorul de intensitate a tensiunii, nu am întâlnit în bibliografia studiată soluţia pentru cazul unei singure fisuri care se dezvoltă din orificiul circular.

De asemenea în acest paragraf voi prezenta o soluţie originală a expresiilor factorilor de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ şi $\mathbf{K_{II}}$ determinată pentru modul mixt de deplasare a flancurilor fisurii, în cazul în care fisura face un unghi β . Soluţiile sunt determniate prin Metoda elementelor finite cu ajutorul programului FRANC2DL.

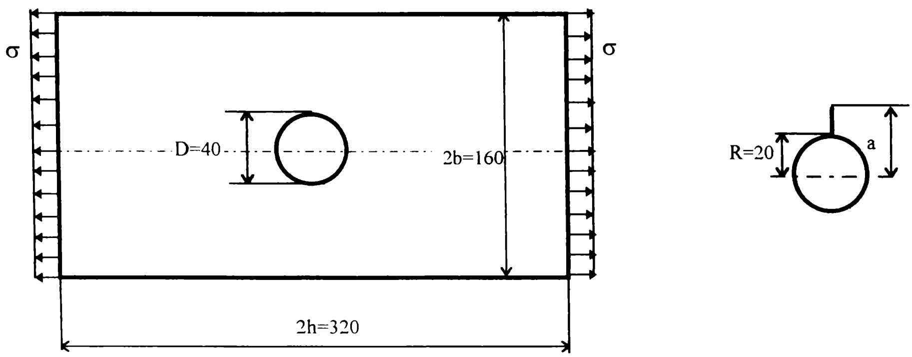


Figura 4.2.4.1

S-a considerat o placă având forma şi dimensiunile din Figura 4.2.4.1.

În prima etapă s-a determinat variaţia factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ în funcţie de lungimea fisurii pentru diferite valori ale lungimii fisurii **a**. În acest scop am modelat în preprocesorul CASCA geometria plăcii cu orificiu circular şi am realizat discretizarea, Figura 4.2.4.2. Discretizarea plăcii s-a realizat cu 400 de elemente izoparametrice cu 8 noduri, conectate între ele prin 1280 noduri. Această discretizare s-a importat în programul FRANC2DL, s-au definit rezemările şi o încărcare monoaxială cu tensiune constantă σ = 10 MPa. Apoi s-a definit o fisură ce se dezvoltă din orificiul circular având fungimea a = 22 mm. Programul a rediscretizat zona din vecinătatea vârfului fisurii, creând elemente singulare, conform Figurii 4.2.4.3. Rulând programul FRANC2DL am obţinut valoarea factorului de intensitate a tensiunii K_I = 89,04 MPa $mm^{1/2}$. Am reluat problema pentru alte 11 valori ale lungimii fisurii valorile obţinute sunt prezentate în Tabelul 4.2.4.1.

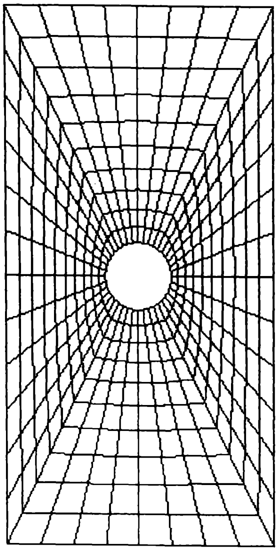


Figura 4.2.4.2

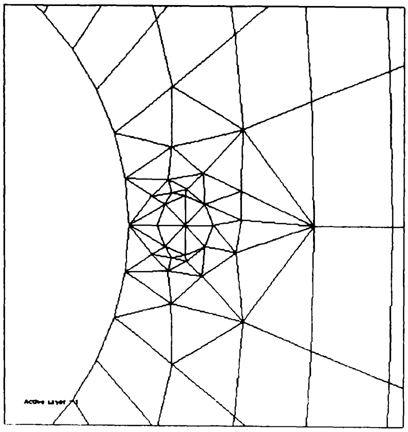


Figura 4.2.4.3

Tabelul 4.2.4.1

Lungimea fisurii **a** **[mm]**	**Raportul** **a/b** **[-]**	**Factorul de intensitate a tensiunii** K_I **[MPa mm$^{1/2}$]**	**Funcția** $f(a/b)=\dfrac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ **[-]**
22	0,275	89.04	1,071
24	0,300	93.20	1,073
28	0,350	101,72	1,084
32	0,400	109,21	1,089
36	0,450	116,13	1,091
40	0,500	122,69	1,094
44	0,550	129,40	1,101
48	0,600	136,42	1,111
52	0,650	143,40	1,122
56	0,700	155,01	1,169
60	0,750	170,04	1,238
64	0,800	213,81	1,508

În Figura 4.2.4.4 am reprezentat variaţia factorului de intensitate a tensiunii K_I în funcţie de lungimea fisurii, rezultate obţinute în urma rulării cu programul FRANC2DL.

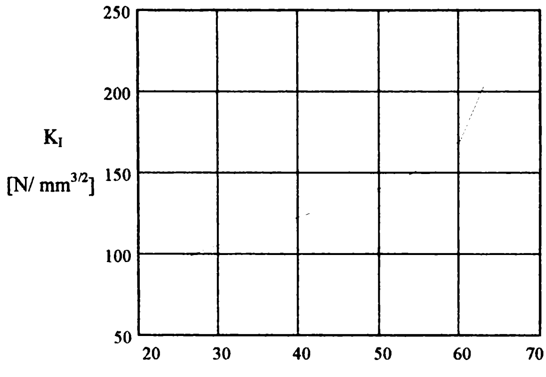


Figura 4.2.4.4

Pentru a găsi o soluţie analitică care să exprime funcţia **f(a/b),** numită şi factorul de intensitate a tensiunii adimensional, definit de relaţia:

$$f(a/b) = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}} \tag{4.2.4.1}$$

s-a realizat o interpolare polinomială, a rezultatelor obţinute prin analiză cu elemente finite, cu ajutorul unui program ce utilizează metoda celor mai mici pătrate, scris în utilitarul matematic **MathCAD 5.**

Luând în considerare perechile de valori care reprezintă raportul **a/b** şi funcţia **f(a/b),** date în Tabelul 4.2.4.1 am obţinut prin interpolare polinomială expresia funcţiei **f(a/b)** sub forma unui polinom de ordinul 4:

$$f(a/b) = 3{,}087 - 19{,}032\frac{a}{b} + 64{,}793\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 94{,}191\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 49{,}781\left(\frac{a}{b}\right)^4 \tag{4.2.4.2}$$

Precizia estimării este dată de parametrii: coeficentul de determinare Rd=0,99295; coeficentul de corelaţie cor=0.98595 şi eroarea standard a estimării er.s.e = 1,8%.

În Figura 4.2.4.5 am reprezentat cu linie continuă funcţia găsită iar cu "x" punctele din Tabelul 4.2.4.1 pe baza cărora s-a efectuat interpolarea:

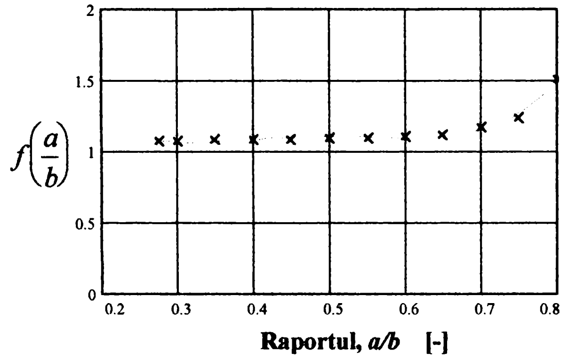


Figura 4.2.4.5

Soluţia propusă în relaţia (4.2.4.2) este originală şi poate fi utilizată pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii pentru o placă având un orificiu circular din care se dezvoltă o fisură.

În cazul când fisura nu porneşte din orificiul circular astfel încât ea să fie perpendiculară pe direcţia încărcării (Figura 4.2.4.1), ci formează un anumit unghi β, Figura 4.2.4.6, ruperea se produce după modurile I şi II. Parametrii de rupere care trebuiesc determinaţi în acest caz sunt factorii de intensitate a tensiunii corespunzători celor două moduri de deplasare a flancurilor fisurii, adică $\mathbf{K_I}$ şi $\mathbf{K_{II}}$. Determinarea acestor parametrii s-a efectuat prin analiză cu elemente finite utilizând programul FRANC2DL.

S-au considerat aceleaşi dimensiuni ale plăcii ca în Figura 4.2.4.1. şi am modelat fisuri înclinate cu unghiul β = 0; 5^0; 10^0;...; 90^0. Lungimea fisurii s-a considerat aceeiaşi pentru toate înclinările fisurii a=40 mm, adică **a/b = 0,5**.

Pentru fiecare geometrie cu fisură înclinată am păstrat aceeaşi încărcare σ = 10 MPa şi aceeaşi rezemare.

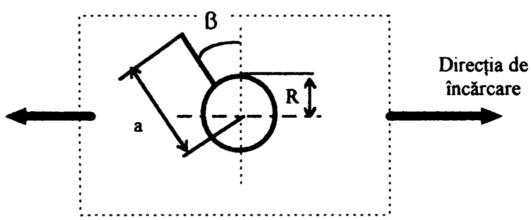


Figura 4.2.4.6

Discretizările zonei învecinate vârfului fisurii pentru înclinarea fisurii cu unghiul β de 10^0, respectiv 45^0 sunt prezentate în figurile 4.2.4.7, respectiv 4.2.4.8.

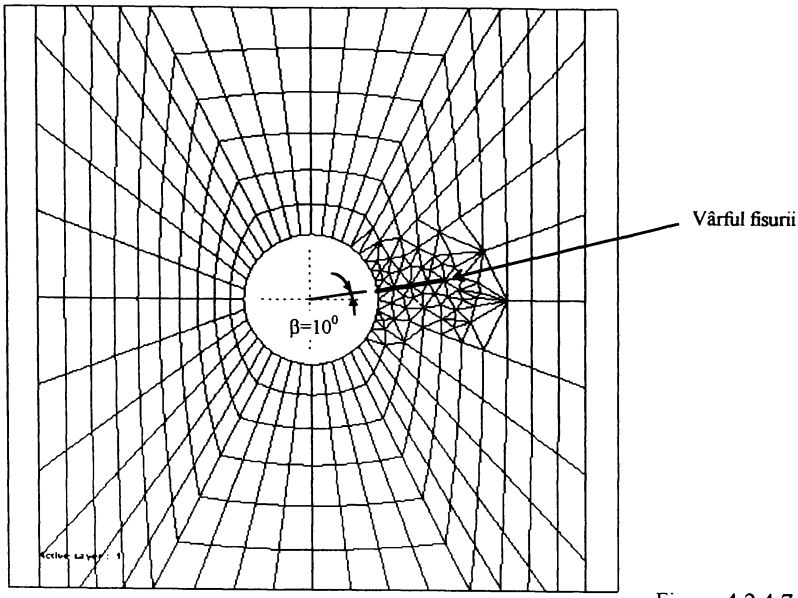


Figura 4.2.4.7

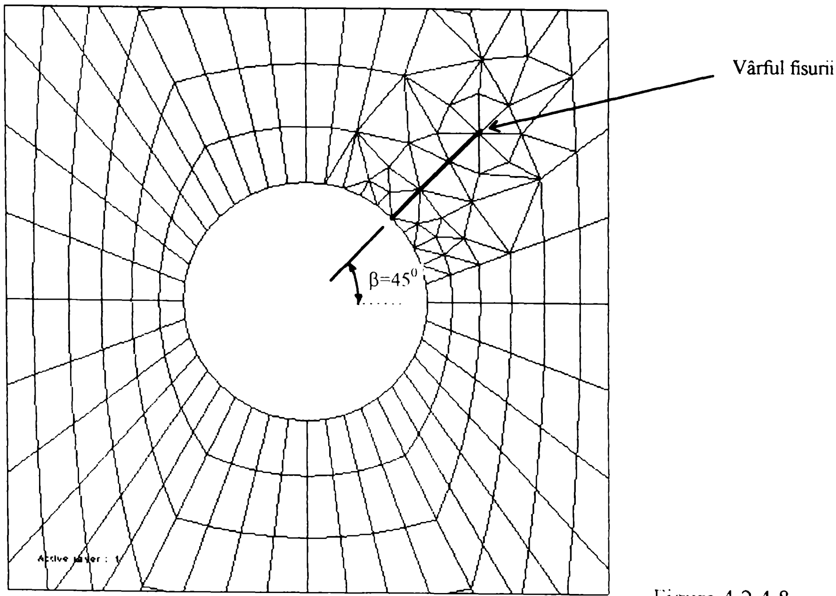


Figura 4.2.4.8

Rezultatele obținute în urma analizei cu elemente finite sunt prezentate în Tabelul 4.2.4.2

Tabelul 4.2.4.2

Unghiul β [^{0}]	**Factorul de intensitate a tensiunii K_I [N/mm$^{3/2}$]**	**Factorul de intensitate a tensiunii K_{II} [N/mm$^{3/2}$]**	**Funcția** $f_I(\beta)=\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ [-]	**Funcția** $f_{II}(\beta)=\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ [-]
0	122,69	0,00	1,094	0,000
5	116,44	9,75	1,039	0,087
10	110,75	21,41	0,988	0,191
15	108,07	31,70	0,964	0,283
20	104,81	41,93	0,935	0,374
25	98,20	52,67	0,876	0,470
30	92,58	64,14	0,826	0,572
35	89,47	72,19	0,798	0,644
40	83,04	77,90	0,741	0,695
45	77,70	86,75	0,693	0,774
50	70,28	93,38	0,627	0,833
55	62,00	99,20	0,553	0,885
60	54,25	105,04	0,484	0,937
65	44,39	109,97	0,396	0,981
70	34,86	114,57	0,311	1,022
75	27,35	118,71	0,244	1,059
80	18,72	119,38	0,167	1,065
85	8,41	121,40	0,075	1,083
90	0,00	122,75	0,000	1,095

Variația factorilor de intensitate a tensiunii K_I și K_{II} în funcție de unghiul de înclinare al fisurii β este prezentată în Figura 4.2.4.9.

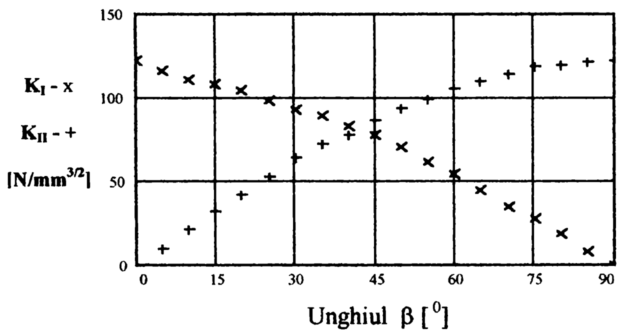


Figura 4.2.4.9

Cu ajutorul valorilor funcţiilor $\mathbf{f_I(\beta)}$ şi $\mathbf{f_{II}(\beta)}$ obţinute prin analiză cu elemente finite am încercat să găsesc o soluţie originală care să exprime funcţiile adimensionale $\mathbf{f_I(\beta)}$ şi $\mathbf{f_{II}(\beta)}$. Această soluţie s-a obţinut prin interpolarea polinomială cu metoda celor mai mici pătrate. În acest scop am folosit un program scris în utilitarul matematic **MathCAD 5** şi rulat pe un calculator PC486. Expresiile funcţiilor $\mathbf{f_I(\beta)}$ şi $\mathbf{f_{II}(\beta)}$ obţinute prin interpolare sunt:

$$
\begin{aligned}
f_{I,int}(\beta) &= 1{,}088 - 0{,}011\cdot\beta + 1{,}849\cdot10^{-4}\beta^2 - 4{,}431\cdot10^{-6}\beta^3 + 2{,}426\cdot10^{-8}\beta^4 \\
f_{II,int}(\beta) &= 0{,}02\cdot\beta - 1{,}43\cdot10^{-5}\beta^2 - 1{,}26\cdot10^{-6}\beta^3 + 4{,}995\cdot10^{-9}\beta^4
\end{aligned}
\tag{4.2.4.3}
$$

În figurile 4.2.4.10 şi 4.2.4.11 am reprezentat variaţiile funcţiilor $\mathbf{f_I(\beta)}$ şi $\mathbf{f_{II}(\beta)}$ obţinute prin interpolare polinomială şi valorile funcţiilor respective pe baza cărora s-a realizat interpolarea.

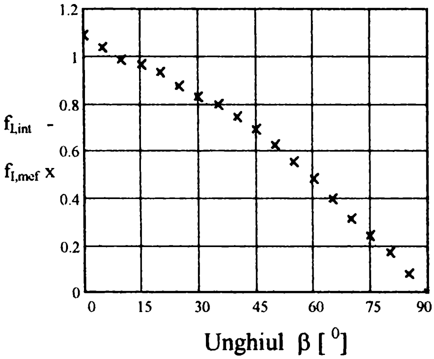


Figura 4.2.4.10

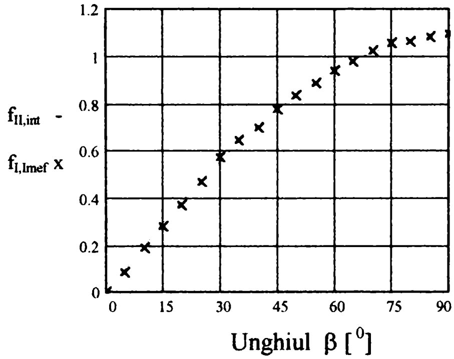


Figura 4.2.4.11

Calculul parametrilor ce caracterizează precizia estimării au indicat că soluţia obţinută este foarte precisă, astfel pentru determinarea funcţiei $\mathbf{f_I(\beta)}$ coeficentul de determinare **Rd**=0,99977, coeficentul de corelaţie **cor**=0,99954 şi eroarea standard a estimării **se.s.d**=0,84 % iar pentru funcţia $\mathbf{f_{II}(\beta)}$ coeficentul de determinare **Rd**=0,99978, coeficentul de corelaţie **cor**=0,99957 şi eroarea standard a estimării **se.s.d**=0,85 %.

În concluzie soluţiile date de:

- relaţia (4.2.4.2) pentru platbandă cu orificiu circular din care se dezvoltă o fisură perpendicular pe direcţia de încărcare, valabilă pentru platbenzi cu orificiu circular la care dimensiunile respectă rapoartele **h/b = 2** , **R/b = 0,25** şi pentru valori ale raportului **a/b** cuprinse în intervalul [0,275...0,8]
- relaţiile (4.2.4.3) pentru platbandă cu orificiu circular din care se dezvoltă o fisură sub un unghi β, la care **h/b = 2** , **R/b = 0,25** şi **a/b = 0,5**

reprezintă contribuţii originale ale autorului.

CAPITOLUL 5
DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII

5.1 INTRODUCERE

Pe lângă metodele analitice şi numerice, pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii şi a câmpurilor de tensiune şi deformaţie din vecinătatea fisurilor se utilizează şi metode experimentale.

Adaptarea metodelor de analiză experimentală a tensiunilor pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii a preocupat în ultimii 30 de ani foarte mulţi cercetători.

Dintre metodele experimentale utilizate la calculul parametrilor de mecanica ruperii trebuiesc amintite:

- metoda fotoelasticimetriei,
- metoda causticelor,
- metoda tensometriei electrice rezistive,
- metode interferometrice şi holografice,
- metoda lacurilor casante,
- metode combinate.

Metoda fotoelesticimetriei este cea mai utilizată, preocuparea în acest sens fiind de a găsi algoritmi de interpretare a datelor fotoelastice în parametrii de Mecanica ruperii, [B14], [C9], [C10], [E2], [G3], [H12], [I3], [S6].

Metoda causticelor dezvoltată de P.S.Teocharis în [T2], [T3], [T4] propune determinarea parametrilor de Mecanica ruperii: factorul de intensitate a tensiunii, raza zonei plastice, ordinul singularităţii câmpului de tensiune din vecinătatea unei fisuri pe baza analizei curbei caustice. Ulterior metoda causticelor a fost utilizată şi pentru determinarea experimentală a valorii integralei J la materiale cu comportare elasto-plastică, [L3]. Exemple ale utilizării metodei causticelor pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii sunt prezentate în lucrările: [F1], [G2], [T5], [T6], [T7].

Tensometria electrică rezistivă fiind o metodă experimentală foarte precisă, având o mare sensibilitate, măsurătorile efectuându-se în condiţii reale de funcţionare direct pe structura reală este o altă metodă utilizată la determinarea parametrilor de mecanica ruperii. Ca şi în cazul fotoelesticimetriei, s-au dezvoltat diferite procedee de estimare a parametrilor de rupere pe baza măsurătorilor tensometrice. Berger [B6], [B7], Dally [D1] şi Sanford [S1] au dezvoltat diferite metode de determinare a factorului de intensitate a tensiunii folosind traductoare electrice rezistive. De asemenera Itoh şi Murakami, în [I4] propun determinarea factorului de intensitate a tensiunii prin metoda extrapolării deformaţiilor, măsurătorile realizându-se cu ajutorul unei rozete speciale.

Bazele utilizării interferometriei şi holografiei pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii au fost puse de Post şi Dudderar în anii '70. Totuşi aceste metode nu s-au impus deoarece densitatea mare a franjelor la vârful fisurilor, datorită puternicii concentrări a tensiunilor face imposibilă numărarea acestor franje, deci evaluarea parametrilor de rupere se face cu erori mari. În lucrările [H5], [T11], [T12] sunt prezentate aplcaţii ale interferometriei pentru determinarea parametrilor de mecanica ruperii.

Metoda lacurilor casante descrisă în [M6] este o metodă calitativă care permite localizarea zonelor cu puternice concentrări ale tensiunilor, la sarcini mult sub încărcarea reală a structurii. Ea este utilizată ca metodă nedistructivă pentru localizarea apariției fisurilor. Prin această metodă este dificilă determinarea cantitativă a stării de tensiune, respectiv a parametrilor de Mecanica ruperii.

S-a încercat combinarea metodelor experimentale pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii, ca de exemplu fotoelasticimetrie cu tensometrie electrică rezistivă, [I3] sau fotoelesticimetrie cu interferometrie [S8], [S11], [S12], [S13], astfel încât estimarea parametrilor de Mecanica ruperii să se facă cu o precizie cât mai ridicată.

5.2 METODA FOTOELASTICIMETRIEI

Fotoelasticimetria a fost una din primele metode experimentale cu care s-a încercat determinarea stării de tensiune şi deformaţie din vecinătatea fisurilor. Primele încercări aparţin lui Irwin, prelucrarea datelor fotoelastice bazându-se pe soluţia aproximativă a lui Irwin.

Dacă metoda fotoelasticimetriei este deja o metodă experimentală clasică, aplicarea ei la studiul stării de tensiune din jurul fisurilor şi la estimarea parametrilor de mecanica ruperii este de strictă actualitate. În lucrările: [E2], [A5], [B8], [B14], [L5], [M1], [M5], [S6], [S9], [S10], [R2], [T9], [W1], [P10] sunt prezentate aplicaţii ale metodei fotoelasticimetriei pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii.

Fotoelasticimetria este o metodă optică de analiză experimentală a stării de tensiune, care se bazează pe proprietatea de birefringenţă accidentală a unor materiale transparente, omogene şi izotrope din punct de vedere optic în stare nesolicitată, dar care solicitate devin optic active. Practic birefringenţa accidentală constă în descompunerea unui fascicol de lumină polarizată (liniar sau circular), la trecerea printr-o placă birefringentă, în două fascicole polarizate, paralele cu direcţiile tensiunilor principale.

5.3 INTERPRETAREA DATELOR FOTOELASTICE

Primele investigaţii fotoelastice pentru determinarea parametrilor din mecanica ruperii, în special a factorului de intensitate a tensiunii K, s-au făcut de către Post şi Wells în anii '50. Ulterior Irwin a arătat că factorul de intensitate a tensiunii, corespunzător modului I de deplasare a flancurilor fisurii, K_I poate fi determinat dintr-o singură izocromată ce apare pe modelul fotoelastic cu fisură.

De-a lungul anilor mulţi cercetători au încercat să dea metode proprii de transformare a datelor fotoelastice în parametrii ai mecanicii ruperii. În continuare voi prezenta câteva dintre cele mai folosite astfel de metode la ora actuală.

5.3.1 METODA IRWIN

Pentru a lua în considerare tensiunile nesingulare ce apar datorită condiţiilor de încărcare şi rezemare, Irwin introduce pe lângă factorul de intensitate a tensiunii K_I, o tensiune nesingulară orientată de-a lungul direcţiei ox, paralelă cu direcţia tensiunii σ_{0x}[1].

[1] Metodele care utilizează ca parametrii factorul de intensitate a tensiunii K şi tensiunea nesingulară σ_{0x}, sunt cunoscute în bibliografie ca metode biparametrice

Introducând tensiunea nesingulară σ_{0x} în soluția Irwin dată de ecuațiile (2.1.3.4), aceasta se poate rescrie, pentru modul I de deplasare a flancurilor fisurii, având o placă semiinfinită fisurată supusă unei încărcări monoaxiale, sub forma:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-\sigma_{0x}\\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\end{aligned} \tag{5.3.1.1}$$

Tensiunea tangențială maximă τ_m exprimată cu ajutorul tensiunilor σ_x, σ_y și τ_{xy} este:

$$(2\tau_m)^2 = (\sigma_1-\sigma_2)^2 = (\sigma_x-\sigma_y)^2+(2\tau_{xy})^2 \tag{5.3.1.2}$$

Înlocuind în relația (5.3.1.2) tensiunile cu expresiile (5.3.1.1) se obține:

$$(2\tau_m)^2 = \frac{K_I^2}{2\pi r}\sin^2\theta + \frac{2\sigma_{0x}K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\theta\sin\frac{3\theta}{2} + \sigma_{0x}^2 \tag{5.3.1.3}$$

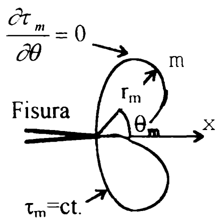


Figura 5.3.1.1

Apoi Irwin, studiind geometria izocromatei obținute, a observat că punctul **m** corespunde poziției extreme a franjei izocromate, Figura 5.3.1.1 adică pentru $r = r_m$, $\theta = \theta_m$:

$$\frac{\partial\tau_m}{\partial\theta} = 0 \tag{5.3.1.4}$$

Astfel, derivând expresia tensiunii tangențiale maxime τ_m în raport cu unghiul θ și înlocuind $\theta = \theta_m$ și $r = r_m$, se obține:

$$\sigma_{0x} = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_m}}\cdot\frac{\sin\theta_m\cos\theta_m}{\cos\theta_m\sin\frac{3\theta_m}{2}+\frac{3}{2}\sin\theta_m\cos\frac{3\theta_m}{2}} \tag{5.3.1.5}$$

Cei doi parametri necunoscuți K_I și σ_{0x} se determină rezolvând sistemul format din ecuațiile (5.3.1.3) și (5.3.1.4), în funcție de tensiunea tangențială maximă τ_m, obținând:

$$\sigma_{0x} = \frac{-2\,\tau_m \cos\theta_m}{\cos\frac{3\,\theta_m}{2}\left(\cos^2\theta_m + \frac{9}{4}\sin^2\theta_m\right)^{1/2}}$$

$$K_I = \frac{2\,\tau_m\,\sqrt{2\pi\, r_m}}{\sin\theta_m}\,\left[1+\left(\frac{2}{3tg\,\theta_m}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2tg\frac{3\,\theta_m}{2}}{3tg\,\theta_m}\right) \tag{5.3.1.6}$$

Practic, dacă în urma încărcării unui model fotoelastic, pe imaginea din analizor se obţine o izocromată, pe care se poate măsura raza maximă $\mathbf{r_m}$, respectiv unghiul θ_m şi ţinând cont de legea cantitativă a fotoelasticimetriei:

$$\tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{k\,f_\sigma}{2} \tag{5.3.1.7}$$

unde **k** este ordinul franjei izocromate iar $\mathbf{f_\sigma}$ constanta fotoelastică a modelului , se poate determina tensiunea tangenţială maximă τ_m. Apoi cu relaţiile (5.3.1.5) şi (5.3.1.6) se pot calcula factorul de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ şi a tensiunea nesingulară σ_{0x} pe baza datelor fotoelastice.

Studiind variaţia parametrilor $\mathbf{K_I}$ şi σ_{0x} în funcţie de unghiul maxim al izocromatei θ_m dintr-un model fotoelastic cu fisură se desprind următoarele concluzii:

- reprezentând raportul $\sigma_{0x}/(2\tau_m)$ - Figura 5.3.1.2, respectiv $K_I\,/\,(2\tau_m\sqrt{2\pi r_m})$ - Figura 5.3.1.3, în funcţie de unghiul de înclinare al izocromatei θ_m se observă că din punct de vedere fizic metoda Irwin este aplicabilă pentru valori ale unghiului θ_m cuprinse între (69,4°-148,8°)

- mai mult, pentru valori ale unghiului θ_m cuprinse între (73,5°-134°), abaterea în estimarea valorii $\mathbf{K_I}$ este de ±2%.

- precizia măsurării unghiului θ_m, respectiv a razei $\mathbf{r_m}$ influenţează semnificativ precizia determinării parametrilor $\mathbf{K_I}$ şi σ_{0x}.

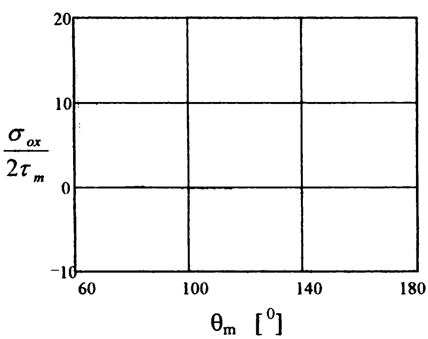


Figura 5.3.1.2

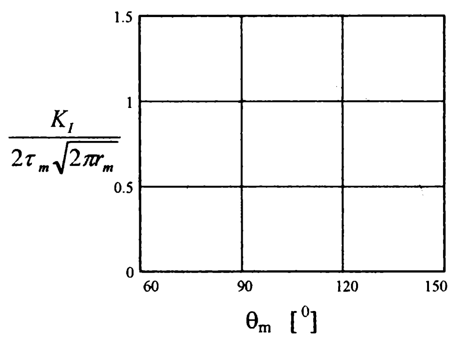


Figura 5.3.1.3

5.3.2 METODA BRADLEY - KOBAYASHI

Ulterior Bradley şi Kobayashi în lucrările [B14], [K5] şi [K6], studiind starea de tensiune într-un model fotoelastic, în timpul încărcării dinamice prin intermediul unei pene, pentru a reduce influenţa unghiului θ_m asupra preciziei de determinare a factorului de intensitate a tensiunii, consideră componenta nesingulară a tensiunii de forma:

$$\sigma_{ox} = \alpha\sigma = \alpha\frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \tag{5.3.2.1}$$

unde σ este tensiunea aplicată asupra modelului perpendicular pe direcţia fisurii
α un coeficent, în cazul particular $\alpha=1 \Rightarrow \sigma_{0x}=\sigma$
a lungimea fisurii
K_I factorul de intensitate a tensiunii

Folosind această substituţie în expresia tensiunii tangenţiale maxime (5.3.1.3) se obţine:

$$(2\tau_m)^2 = \frac{K_I^2}{2\pi r}\left(\sin^2\theta + 2\alpha\sqrt{\frac{2r}{a}}\sin\theta\sin\frac{3\theta}{2} + \frac{2r\alpha^2}{a}\right) \tag{5.3.2.2}$$

Derivând această ecuaţie în raport cu unghiul θ şi anulând această derivată pentru $r = r_m$ şi $\theta = \theta_m$, (condiţia (5.3.1.4)), se obţine:

$$\alpha\sqrt{\frac{2r_m}{a}} = \frac{-\sin\theta_m\cos\theta_m}{\cos\theta_m\sin\frac{3\theta_m}{2} + \frac{3}{2}\sin\theta_m\cos\frac{3\theta_m}{2}} \tag{5.3.2.3}$$

Din relaţia (5.3.2.2) factorul de intensitate a tensiunii se poate exprima sub forma:

$$K_I = \frac{2\tau_m\sqrt{2\pi r_m}}{\left(\sin^2\theta_m + 2\alpha\sqrt{\frac{2r_m}{a}}\sin\theta_m\sin\frac{3\theta_m}{2} + \frac{2r_m\alpha^2}{a}\right)^{1/2}} \tag{5.3.2.4}$$

înlocuind în această expresie relația (5.3.2.3), în urma efectuării calculelor se obține expresia factorului de intensitate a tensiunii sub forma:

$$K_I = \frac{\pm 2\,\tau_m \sqrt{2\pi r_m}}{\sin\theta_m}\left(1+\frac{2tg\frac{3\theta_m}{2}}{3tg\,\theta_m}\right)\left[1+\left(\frac{2}{3tg\,\theta_m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.3.2.5}$$

unde valoarea pozitivă corespunde domeniului $69,4° < \theta_m < 148,8°$.

Comparând expresiile factorului de intensitate a tensiunii date de metoda Irwin, relația (5.3.1.6) și de metoda Bradley-Kobayashi, relația (5.3.2.5), se observă că ele sunt identice.

Ca și la metoda precedentă înlocuind $2\tau_m = kf_\sigma$, conform legii cantitative a fotoelasticimetriei, se poate determina cu relația (5.3.2.5) valoarea factorului de intensitate a tensiunii K_I.

Bradley și Kobayashi au studiat erorile produse în determinarea factorului de intensitate a tensiunii K_I, când unghiul θ_m se apropie de valorile 69,4°, respectiv 148,8°. În aceste zone mici erori în măsurarea unghiului θ_m, produc mari erori în evaluarea factorului de intensitate a tensiunii K_I. Pentru a minimaliza aceste erori cei doi autori propun în [B14] folosirea a două franje izocromate. În acest caz, se încarcă modelul până la nivelul la care în imaginea din analizor se obțin două franje izocromate. Scriind ecuația (5.3.2.2) pentru cele două franje și efectuând diferența dintre acestea se obține:

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}\,(\tau_{m1}-\tau_{m2})\sqrt{r_1 r_2}}{f_2\sqrt{r_1}-f_1\sqrt{r_2}} \tag{5.3.2.6}$$

unde r_1, r_2 sunt razele celor două izocromate

τ_{m1}, τ_{m2} tensiunile tangențiale maxime corespunzătoare celor două izocromate

k_1, k_2 ordinul izocromatei

f_σ valoarea benzii

$$f_i = \left[\sin^2\theta + 2\alpha\sqrt{\frac{2r_i}{a}}\sin\theta\sin\frac{3\theta}{2} + \frac{2r_i\alpha^2}{a}\right]^{1/2} \qquad i = 1,2 \tag{5.3.2.7}$$

Astfel, factorul de intensitate a tensiunii K_I se determină utilizând izocromatele având ordinele de bandă k_1 și k_2, respectiv cu tensiunile tangențiale $\tau_{m1} = k_1\, f_\sigma/2$ și $\tau_{m2} = k_2\, f_\sigma/2$.

Studiind variația parametrului $\alpha\sqrt{(2r_m/a)}$ în funcție de unghiul de înclinare al izocromatei θ_m, Figura 5.3.2.1, Bradley și Kobayashi au arătat că pentru $82° < \theta_m < 113°$, acest parametru are o valoare mică (mai mică de 0,2), ceea ce reflectă că variația acestui parametru în domeniul menționat, este aproape insensibilă la variația unghiului θ_m. Deci, dacă se fac erori la măsurarea unghiului θ_m în domeniul amintit, aceste erori nu vor influența esențial valoarea factorului de intensitate a tensiunii K_I, ceea ce prezintă un mare avantaj în comparație cu metoda Irwin.

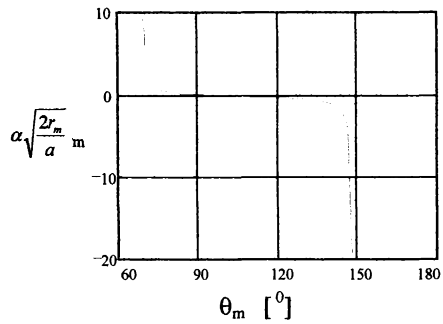


Figura 5.3.2.1

5.3.3 METODA SCHROEDEL - SMITH

În lucrarea [S24], autorii acesteia propun, pentru interpretarea datelor fotoelastice, utilizarea ordinului benzii franjelor izocromate pe o dreaptă perpendiculară pe direcţia fisurii, adică $\theta = 90°$. Introducând această valoare a unghiului θ în relaţia (5.3.1.3) se obţine:

$$(2\,\tau_m)^2 = \frac{K_I^2}{2\pi r} + \frac{K_I\,\sigma_{0x}}{\sqrt{\pi r}} + \sigma_{0x}^2 \qquad (5.3.3.1)$$

Ecuaţia (5.3.3.1) poate fi asimilată unei ecuaţii de gradul doi în K_I, sub forma:

$$\frac{K_I^2}{2\pi r} + \frac{K_I\,\sigma_{0x}}{\sqrt{\pi r}} + \sigma_{0x}^2 - 4\,\tau_m^2 = 0 \qquad (5.3.3.2)$$

care are rădăcina pozitivă:

$$K_I = \sqrt{\pi r}\,[(8\,\tau_m^2 - \sigma_{0x}^2)^{1/2} - \sigma_{0x}] \qquad (5.3.3.3)$$

Smith în lucrarea [S8], simplifică relaţia (5.3.3.3) neglijând termenul σ_{0x}^2 în comparaţie cu $8\tau_m^2$, obţinând în final:

$$K_I = \sqrt{\pi r}\,(2\sqrt{2}\,\tau_m - \sigma_{0x}) \qquad (5.3.3.4)$$

Separarea parametrilor $\mathbf{K_I}$ şi σ_{0x} se face adoptând tehnica diferenţei a lui Bradley-Kobayashi, adică considerând două franje izocromate i şi j, Figura 5.3.3.1, la care se măsoară distanţele $\mathbf{r_i}$, respectiv $\mathbf{r_j}$, perpendicular pe direcţia fisurii (θ=90°) şi se calculează tensiunille tangenţiale maxime corespunzătoare: $2\tau_{mi} = k_i\ f_\sigma$, respectiv $2\tau_{mj} = k_j\ f_\sigma$

Dacă se scrie ecuaţia (5.3.3.4) pentru cele două franje i şi j şi se elimină tensiunea nesingulară σ_{0x}, se obţine expresia factorului de intensitate a tensiunii sub forma:

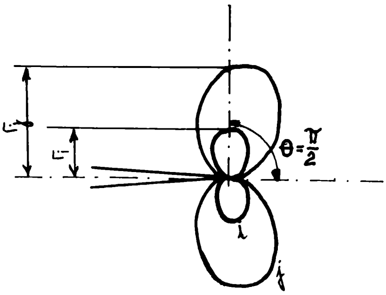


Figura 5.3.1.1

$$K_I \quad \sqrt{2\pi r_i}\ \frac{2\tau_{mi} - 2\tau_{mj}}{1 - \sqrt{\frac{r_i}{r_j}}} \qquad (5.3.3.5)$$

Determinând valorile factorului de intensitate a tensiunii K_I cu relaţia (5.3.3.5) pentru toate combinaţiile posibile ale perechilor de franje izocromate (i,j), care apar pe model în urma încărcării, se obţine un set de valori K_{Ii}, care este supus apoi analizei statistice. Aceasta constă în determinarea

- mediei aritmetice

$$\overline{K}_I \quad \frac{1}{n} \sum_{i\ 1}^{n} K_{Ii} \qquad (5.3.3.6)$$

- abaterii medii pătratice

$$s_{K_I} \quad \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i\ 1}^{n} n_i \left(K_{Ii} - \overline{K}_I\right)^2} \qquad (5.3.3.7)$$

unde n este numărul de perechi pentru care se determină factorul de intensitate a tensiunii K_{Ii}.

Pentru creşterea preciziei determinării se elimină apoi din setul de date K_{Ii}, cu $i \in [1,n]$, cele m valori care depăşesc intervalul $K_I \div s_{Ki}$, iar cu valorile rămase se recalculează valoarea medie:

$$\overline{K}_{Imed} \quad \frac{1}{n-m} \sum_{i\ 1}^{n-m} K_{Ii} \qquad (5.3.3.8)$$

Utilizând această prelucrare statistică erorile în estimarea factorului de intensitate a tensiunii nu depăşesc ± 5%, dacă razele r_i şi r_j se măsoară fără erori şi ordinele de bandă k_i, k_j se determină cât mai precis, deobicei utilizând procedeele de compensare Tardy sau de multiplicare a ordinului de bandă Post.

5.3.4 METODA SMITH

C.W. Smith propune în lucrările [S6], [S7], [S8], [S11], [S14] utilizarea unui alt algoritm pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii în vecinătatea unei fisuri, pe baza datelor obţinute în urma analizei fotoelastice.

Smith exprimă tensiunea tangenţială maximă, dată de relaţia (5.3.3.1) şi scrisă pentru $\theta=90°$, sub forma:

$$\tau_m = \frac{K}{\sqrt{8\pi r}} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{8}} \tag{5.3.4.1}$$

unde $\sigma_o/\sqrt{8}$ reprezintă influenţa tensiunii nesingulare asupra tensiunii tangenţiale maxime.

Apoi defineşte factorul de intensitate a tensiunii aparent:

$$K_{AP} = \tau_m \sqrt{8\pi r} \tag{5.3.4.2}$$

şi împarte ecuaţia (5.3.4.1) cu $\sigma\sqrt{\pi a}$, unde σ reprezintă tensiunea cu care se realizează încărcarea, **a** este lungimea fisurii pentru fisuri marginale sau semilungimea fisurii pentru fisuri înglobate în corp. Se obţine:

$$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = \frac{K}{\sigma\sqrt{\pi a}} + \frac{\sigma_0}{\sigma}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.3.4.3}$$

Reprezentând ecuaţia (5.3.4.3), adică $K_{AP}/\sigma\sqrt{\pi a}$ în funcţie de $(r/a)^{1/2}$, Figura 5.3.4.1.b, se obţine o dreaptă ce are panta σ_0/σ. Prin extrapolare pentru $(r/a)^{1/2}=0$ se obţine valoarea factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$, pentru modul I de deplasare a flancurilor fisurii, corespunzător singularităţii câmpului de tensiune, creată la vârful fisurii.

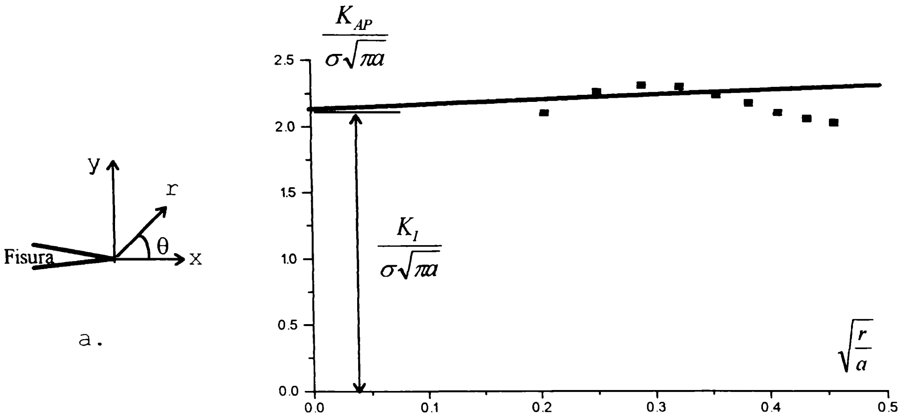


Figura 5.3.4.1 b.

Experienta a arătat că precizia maximă în evaluarea factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ prin această metodă, se obține dacă se iau în considerare doar punctele cuprinse în intervalul $(r/a)^{1/2} \in [0,2..0,4]$. Explicația acestui fenomen este reliefată în Figura 5.3.4.2., în care s-a reprezentat variația tensiunii σ_y în funcție de distanța de la vârful fisurii. Se observă trei zone distincte:

- zona 1 puternic deformată, în care tensiunile depășesc limita de curgere, reprezintă enclava plastică ce se formează la vârful fisurii.
- zona 2 în care sunt valabile conceptele mecanicii ruperii liniar-elastice, reprezentând regiunea în care singularitatea câmpului de tensiune este predominantă. Smith a arătat că zona 2 se extinde în intervalul $0,2 \leq (r/a)^{1/2} \leq 0,4$ [S6], [S13].
- zona 3 care este afectată puternic de condițiile de încărcare și rezemare și este caracterizată de tensiunea nesingulară σ_0

În concluzie, trasând dreapta de ecuație (5.3.4.3) și luând în considerare doar datele ce se încadrează în zona 2, cu măsurarea coordonatei r perpendicular pe direcția fisurii, se poate determina apoi atât valoarea tensiunii nesingulare σ_0 din panta dreptei trasate, cât și valoarea factorului de intensitate a tensiunii K_I la intersecția dreptei de regresie cu axa $K_{AP}/\sigma\sqrt{\pi a}$, adică pentru r = 0.

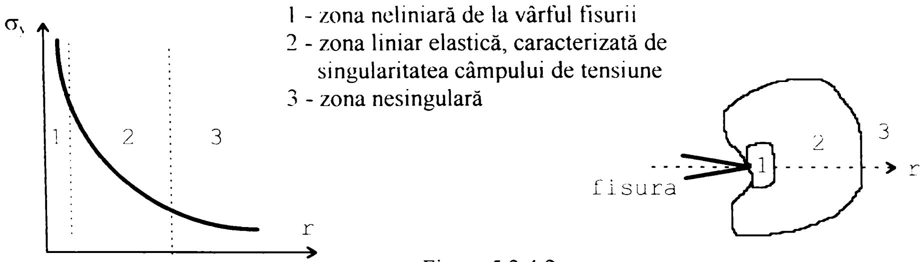


Figura 5.3.4.2

5.4 DETERMINĂRI EXPERIMENTALE ALE FACTORULUI DE INTENSITATE A TENSIUNII K_I

Pentru verificarea experimentală a soluțiilor factorului de intensitate a tensiunii obținute prin Metoda elementelor finite s-a utilizat metoda fotoelasticimetriei.

5.4.1 DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ CU METODA FOTOELASTICITĂȚII PRIN REFLEXIE, A FACTORULUI DE INTENSITATE A TENSIUNII LA VÂRFUL UNEI CRESTĂTURI LATERALE, AFLATĂ ÎNTR-O PLATBANDĂ

În paragraful 4.1. s-a prezentat soluția factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei crestături ascuțite, cu unghiul β , crestătură aflată într-o platbandă. Valorile factorului de intensitate a tensiunii au fost determinate numeric prin Metoda elementului finit. În continuare se vor prezenta determinările experimentale efectuate prin metoda fotoelasticității prin reflexie, în vederea verificării valorilor obținute prin Metoda elementelor finite.

Experimentul

Pentru determinările experimentale s-a folosit un polariscop cu reflexie produs de firma VISHAY, seria 030. Epruveta s-a confecționat din folie fotoelastică tip PS -1C, cu grosime de 1,06 mm, de fabricație VISHAY. Una din fețele foliei are depus un strat reflectorizant. Caracteristicile fotoelastice ale foliei indicate de producător sunt: coeficentul de deformație optică a foliei C = 0,15; constanta fotoelastică de deformație a foliei f_ε = 1,8 μm/mm franjă; modulul de elasticitate E = 2600 MPa; coeficentul de contracție ν = 0,4. Deoarece în algoritmul Smith de interpretare a datelor fotoelastice apare constanta fotoelastică de tensiune a foliei f_σ acesata se poate calcula cu relația, [M10] :

$$f_\sigma = \frac{E}{1+\nu} f_\varepsilon \qquad (5.4.1.1)$$

Înlocuind în relația (5.4.1.1) se obține constanta fotoelastică de tensiune a foliei f_σ = 3,358 MPa/franjă.

Din folia fotoelastică s-a confecționat o epruvetă având forma dată în Figura 5.4.1.1 și dimensiunile: lungime 2h = 120 mm, b = 60 mm.

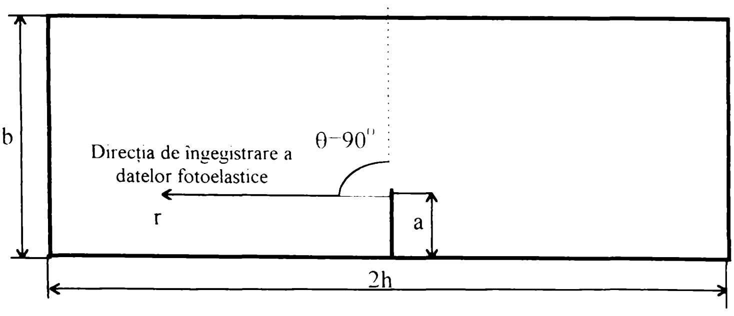


Figura 5.4.1.1

În epruvetă s-a tăiat în primă fază o fisură laterală de lungime a = 24 mm în planul de simetrie al epruvetei. Operaţia de tăiere efectuându-se cu o pânză de grosime 0,2 mm.

Epruveta s-a încărcat la tracţiune într-un dispozitiv prevăzut cu încărcare directă cu greutăţi etalonate, Figura 5.4.1.2.

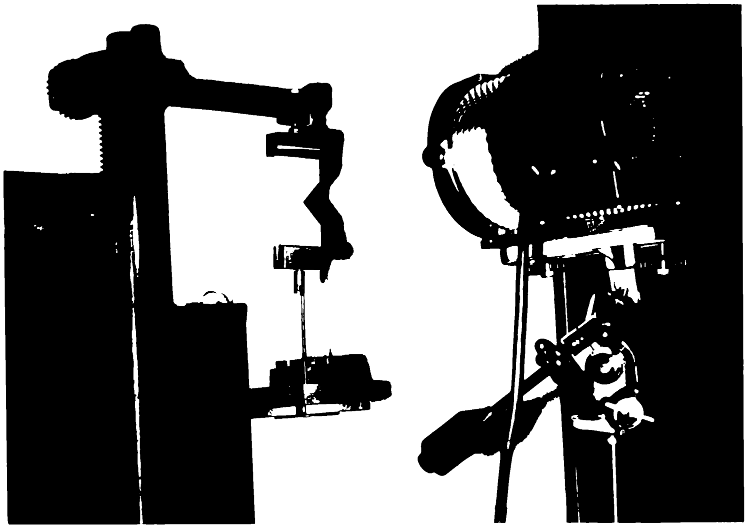


Figura 5.4.1.2

Modelul fotoelastic, montat în dispozitivul de încărcare, a fost iluminat cu un polariscop cu reflexie arătat în Figura 5.4.1.2. Pentru fiecare crestătură încărcarea epruvetei s-a realizat la trei nivele diferite cu tensiunea σ de 0,6 MPa; 0,751 MPa şi 0,925 MPa.

Apoi succesiv s-au tăiat în modelul fotoelastic crestături laterale ascuţite cu unghiurile $\beta = 30^0$, 60^0, 90^0.

Imaginea obţinută în analizor a fost simetrică faţă de planul fisurii, ceea ce confirmă că deplasarea flancurilor fisurii s-a realizat după **modul I**.

Imaginea din analizor a fost fotografiată, câteva din aceste fotografii fiind prezentate în Figura 5.4.1.3 pentru fisură, Figura 5.4.1.4 pentru crestătură cu unghiul $\beta = 30^0$, Figura 5.4.1.5 pentru crestătură cu unghiul $\beta = 60^0$, respectiv în Figura 5.4.1.6 pentru crestătură cu unghiul $\beta = 90^0$. La toate fotografiile încărcarea epruvetei fiind $\sigma = 0,925$ MPa.

Figura 5.4.1.3
$\beta = 0^0$, $\sigma = 0{,}925$ MPa

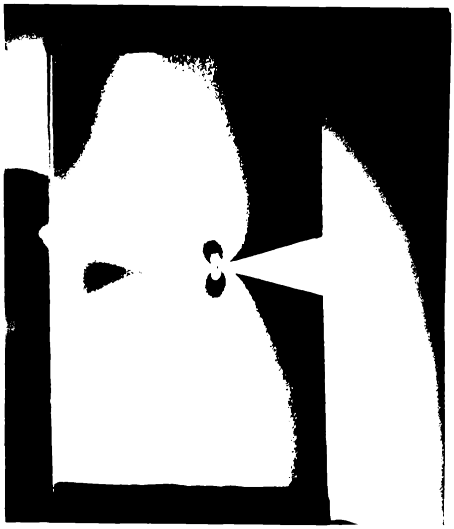


Figura 5.4.1.4
$\beta = 30^0$, $\sigma = 0{,}925$ MPa

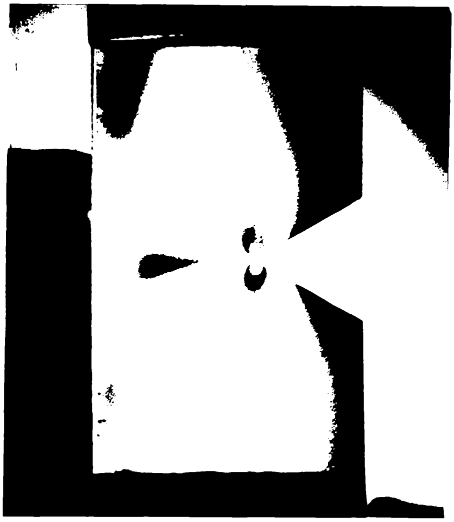


Figura 5.4.1.5
$\beta = 60^0$, $\sigma = 0{,}925$ MPa

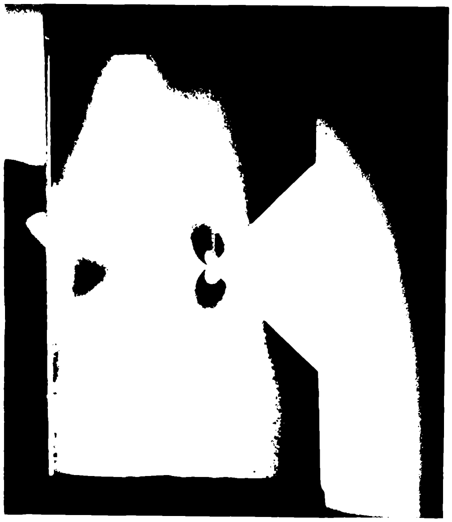


Figura 5.4.1.6
$\beta = 90^0$, $\sigma = 0{,}925$ MPa

Înregistrarea datelor fotoelastice

Deoarece pentru interpretarea datelor fotoelastice s-a utilizat metoda Smith, prezentată în paragraful 5.3.4., înregistrarea datelor fotoelastice s-a realizat pe o direcție perpendiculară pe vârful crestăturii, corespunzătoare unghiului $\theta = 90^0$. Pentru a aplica metoda Smith pe suprafața epruvetei şi pe direcția $\theta = 90^0$ s-au realizat marcaje din milimetru în milimetru în scopul determinării ordinului benzii.

Pentru măsurarea ordinului fracționar al benzii, în punctele marcate pe epruvetă, s-a utilizat metoda de compensare Babinet-Soleil, care constă în introducerea în câmpul polariscopului cu lumină polarizată circular a unei surse de birefringență suplimentară, [M10].

În urma solicitării epruvetei, s-au determinat cu ajutorul compensatorului valorile ordinului fracționar al benzii $\mathbf{k_i}$ în puncte marcate pe epruvetă, $\mathbf{r_i}$. Rezultatele măsurătorilor sunt prezentate în Tabelul 5.4.1.1 pentru fisură, în Tabelul 5.4.1.2. pentru crestătură cu unghiul $\beta = 30^0$, în Tabelul 5.4.1.3 pentru crestătură cu unghiul $\beta = 60^0$ şi în Tabelul 5.4.1.4 pentru crestătură cu unghiul $\beta = 90^0$.

Tabelul 5.4.1.1

FISURĂ ($\beta = 0^0$)			
Distanța de la vârful crestăturii r [mm]	Ordinul benzii k [franje]		
	σ = 0,600 MPa	σ = 0,751 MPa	σ = 0,925 MPa
1	1,30	1,63	2,00
2	1,00	1,20	1,68
3	0,80	1,00	1,32
4	0,60	0,80	1,10
5	0,50	0,60	0,90
6	0,38	0,50	0,80
7	0,32	0,44	0,70

Tabelul 5.4.1.2

CRESTĂTURĂ CU UNGHIUL $\beta = 30^0$			
Distanța de la vârful crestăturii r [mm]	Ordinul benzii k [franje]		
	σ = 0,600 MPa	σ = 0,751 MPa	σ = 0,925 MPa
1	1,42	1,75	2,10
2	1,15	1,40	1,75
3	0,90	1,15	1,45
4	0,75	0,94	1,20
5	0,60	0,76	1,05
6	0,50	0,66	0,90
7	0,45	0,62	0,80

Tabelul 5.4.1.3

CRESTĂTURĂ CU UNGHIUL $\beta = 60^0$			
Distanța de la vârful crestăturii r [mm]	Ordinul benzii k [franje]		
	σ = 0,600 MPa	σ = 0,751 MPa	σ = 0,925 MPa
1	1,42	1,86	2,20
2	1,12	1,50	1,80
3	0,90	1,20	1,50
4	0,70	0,93	1,20
5	0,55	0,75	1,00
6	0,40	0,60	0,85
7	0,35	0,50	0,75

Tabelul 5.4.1.4

CRESTĂTURĂ CU UNGHIUL $\beta = 90^0$			
Distanța de la vârful crestăturii r [mm]	Ordinul benzii k [franje]		
	σ = 0,600 MPa	σ = 0,751 MPa	σ = 0,925 MPa
1	1,55	1,94	2,38
2	1,30	1,60	2,00
3	1,05	1,30	1,65
4	0,85	1,10	1,40
5	0,70	0,95	1,20
6	0,54	0,80	1,00
7	0,45	0,70	0,90

Rezultatele experimentale prezentate în Tabelele 5.4.1.1 - 5.4.1.2., și anume variația ordinului benzii k_i în funcție de distanța de la vârful crestăturii, pentru cele trei încărcări, sunt prezentate sub formă grafică în Figurile 5.4.1.7 - 5.4.1.10.

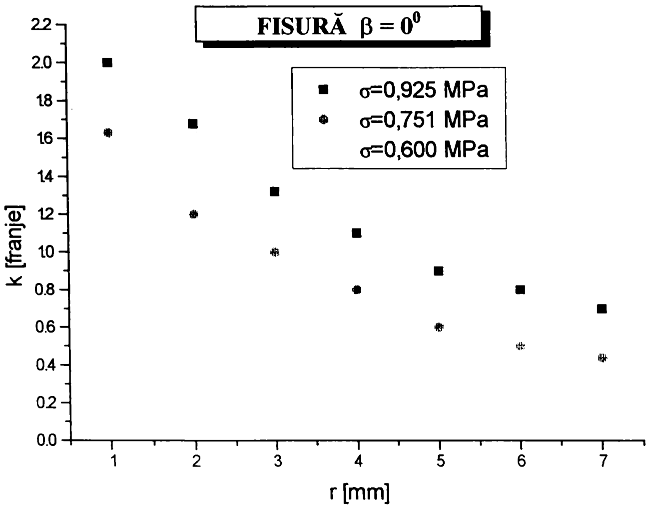


Figura 5.4.1.7

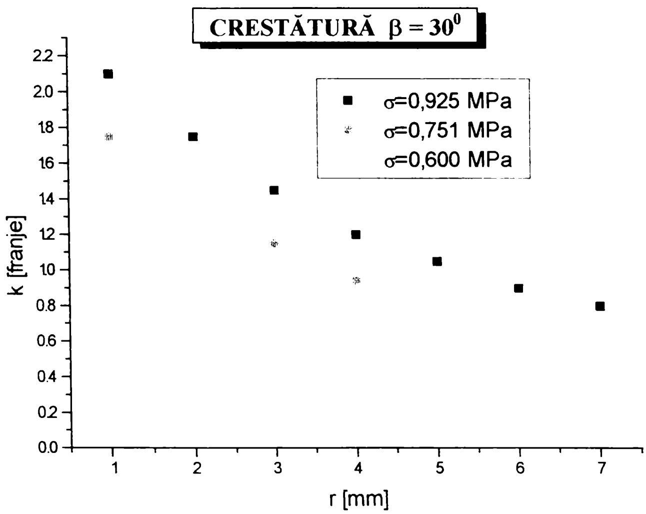


Figura 5.4.1.8

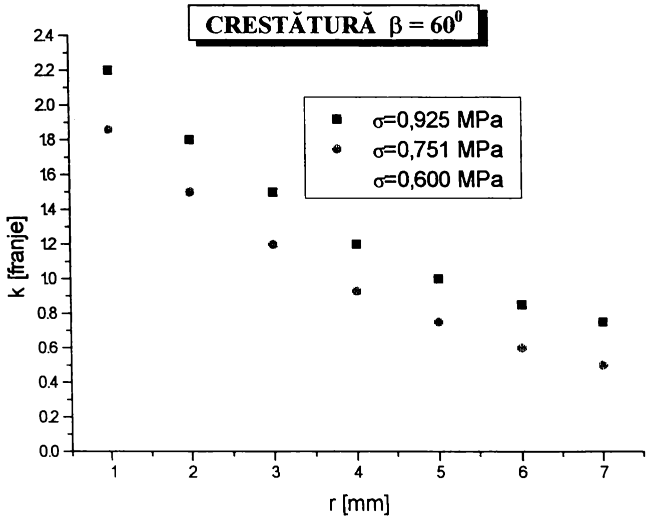


Figura 5.4.1.9

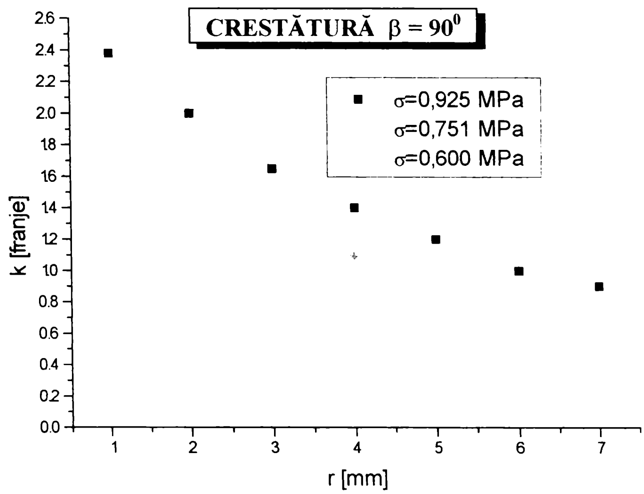


Figura 5.4.1.10

Pe baza valorilor ordinului de bandă obținute experimental s-a determinat, cu ajutorul programului de interpolare polinomială scris de autor în utilitarul matematic MathCAD, legea de variație a ordinului de bandă **k** în funcție distanța de la vârful fisurii, **r**. S-a ales un polinom de ordinul 3 pentru legile de variație **k = f(r)**, care sunt prezentate în Tabelul 5.4.1.5. împreună cu paramertii ce caracterizează precizia determinării: coeficentul de determinarea **Rd**, coeficentul de corelație **cor** și eroarea standard a estimării **er.s.e.**

Tabelul 5.4.1.5

Unghiul crestăturii β [°]	Tensiunea σ [MPa]	Variația ordinului benzii **k** în funcție de distanța **r** **k = f(r)**	Coef. de determi-nare **Rd** [-]	Coef. de corelație **cor** [-]	Eroarea standard estimării **er.s.e** [%]
0	0,600	$k=1{,}657-0{,}400\,r+0{,}041\,r^2-0{,}001\,r^3$	0,9994	0,9989	1,66
	0,751	$k=2{,}074-0{,}518\,r+0{,}056\,r^2-0{,}0025\,r^3$	0,9977	0,9950	1,41
	0,925	$k=2{,}431-0{,}450\,r+0{,}029\,r^2-2{,}49\,10^{-18}\,r^3$	0,9992	0,9983	2,68
30	0,600	$k=1{,}753-0{,}360\,r+0{,}029\,r^2-5{,}55\,10^{-4}\,r^3$	0,9996	0,9993	1,32
	0,751	$k=2{,}128-0{,}412\,r+0{,}028\,r^2-6{,}18\,10^{-18}\,r^3$	0,9997	0,9994	1,37
	0,925	$k=2{,}543-0{,}480\,r+0{,}043\,r^2-0{,}0014\,r^3$	0,9998	0,9996	1,33
60	0,600	$k=1{,}734-0{,}340\,r+0{,}020\,r^2-3{,}64\,10^{-18}\,r^3$	0,9995	0,9990	1,71
	0,751	$k=2{,}281-0{,}450\,r+0{,}030\,r^2-2{,}78\,10^{-4}\,r^3$	0,9999	0,9998	0,89
	0,925	$k=2{,}643-0{,}474\,r+0{,}029\,r^2-1{,}93\,10^{-18}\,r^3$	0,9998	0,9996	1,40
90	0,600	$k=1{,}841-0{,}302\,r+0{,}012\,r^2+2{,}78\,10^{-4}\,r^3$	0,9997	0,9995	1,26
	0,751	$k=2{,}391-0{,}500\,r+0{,}054\,r^2-0{,}0025\,r^3$	0,9998	0,9996	1,33
	0,925	$k=2{,}840-0{,}494\,r+0{,}037\,r^2-8{,}33\,10^{-4}\,r^3$	0,9997	0,9995	1,75

Determinarea funcțiilor **k=f(r)** date în Tabelul 5.4.1.5 a permis calculul valorilor ordinului benzii în orice punct de pe direcția $\theta = 90^0$.

Interpretarea rezultatelor

Determinarea experimentală a factorului de intensitate a tensiunii la vârful crestăturii s-a realizat pe baza metodei Smith. Astfel pentru fiecare încărcare, s-au determinat valorile ordinelor de bandă k_i cu funcțiile k=f(r), într-un număr suficent de puncte pe direcția perpendiculară pe axa crestăturii. Apoi pe baza legii cantitative a fotoelasticimetriei am calculat tensiunea tangențială maximă în fiecare din punctele considerate $\tau_{mi} = (k_i \ f_\sigma)/2$.

În continuare, conform algoritmului Smith (paragraful 3.5.4), s-au calculat valoarile factorului de intensitate a tensiunii aparent $K_{APi} = \tau_{mi}\sqrt{8\pi r_i}$ și valoarea normalizată cu $\sigma\sqrt{\pi a}$ a factorului de intensitate a tensiunii aparent $\dfrac{K_{APi}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$. Valorile calculate pentru erpruveta cu fisură (β=0) și solicitată cu tensiunea σ = 0,600 MPa sunt prezentate în Tabelul 5.4.1.6

Tabelul 5.4.1.6

Punctul i	Distanța r_i [mm]	Ordinul benzii k_i [franje]	Te nsiunea tangențială maximă $\tau_{mi} = \dfrac{k_i f_\sigma}{2}$ [N/mm²]	Factorul de intensitate a tensiunii aparent $K_{APi} = \tau_{mi}\sqrt{8\pi r_i}$ [N/mm$^{3/2}$]	Raportul $(r_i/a)^{1/2}$ [-]	Raportul $\dfrac{K_{APi}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ [-]
1	1,0	1,30	2,183	10,944	0,204	2,100
2	1,5	1,14	1,914	11,752	0,250	2,256
3	2,0	1,01	1,696	12,023	0,289	2,308
4	2,5	0,90	1,511	11,978	0,323	2,299
5	3,0	0,80	1,343	11,663	0,354	2,238
6	3,5	0,72	1,209	11,338	0,382	2.176
7	4,0	0,65	1,091	10,942	0,408	2,100
8	4,5	0,60	1,007	10,713	0,433	2,056
9	5,0	0,56	0,940	10.540	0,456	2,023
10	5,5	0,53	0,890	10,462	0,479	2,008
11	6,0	0,52	0,873	10,721	0,500	2,057

Valorile raportului $\dfrac{K_{APi}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ s-au reprezentat în funcție de raportul $(r_i/a)^{1/2}$, Figura 5.4.1.11.

Metoda Smith propune trasarea unei drepte de regresie a cărei intersecție cu axa y, obținută prin extrapolare, permite determinarea factorului de intensitate a tensiunii, [S6], [S13] Pentru trasarea dreptei de regresie s-au luat în considerare doar punctele pentru care valorile raportului $(r_i/a)^{1/2}$ sunt cuprinse în intervalul [0,2...0,4], [S13] Determinările experimentale efectuate au validat raționamentul, conform căruia trasarea dreptei de regresie trebuie făcută doar pe baza punctelor corespunzătoare zonei în care este predominantă singularitatea câmpului de tensiune, descrisă prin parametrul "factor de intensitate a tensiunii".

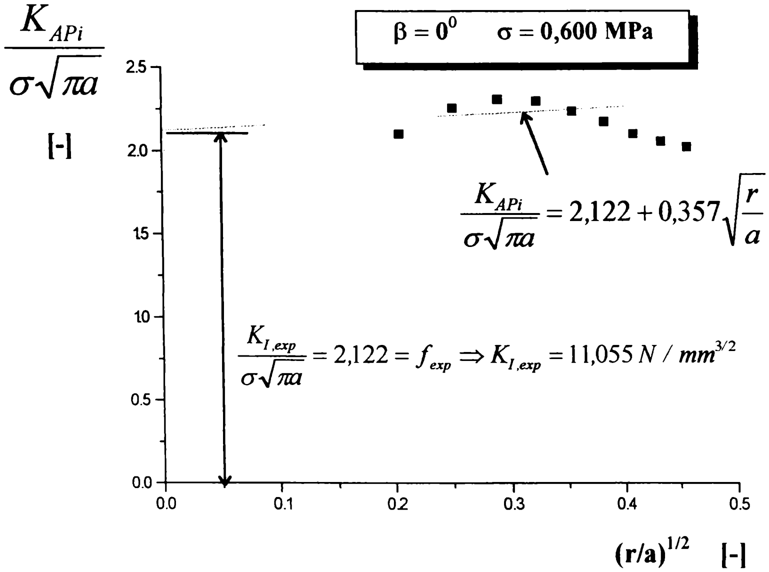


Figura 5.4.1.11

Ecuația dreptei de regresie obținută este:

$$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 2,122 + 0,357\sqrt{\frac{r}{a}}$$

iar prin extrapolare la vârful fisurii r = 0, se obține valoarea factorului de intensitate a tensiunii $K_{I,exp}$:

$$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 2,122 + 0,357\sqrt{\frac{r}{a}} \Rightarrow \frac{K_{I,exp}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = f_{exp} = 2,122 \Rightarrow K_I = 11,055\ N/mm^{3/2}$$

După cum se observă ordonata la origine a dreptei de regresie reprezintă valoarea factorului adimensional de intensitate a tensiunii, obținut prin fotoelasticimetrie $f_{exp} = \frac{K_{I,exp}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$

Determinarea experimentală a factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_{I,exp}}$ și a factorului adimensional de intensitate a tensiunii $\mathbf{f_{exp}}$, s-a făcut pentru fiecare unghi al crestăturii β la trei încărcări diferite σ = 0,600 MPa ; 0,751 MPa ; 0,925 MPa. S-a calculat apoi valoarea medie a factorului adimensional de intensitate a tensiunii $\overline{f_{exp}}$. Rezultatele obținute pentru cazul fisurii (β = $\mathbf{0^0}$) sunt prezentate în Tabelul 5.4.1.7.

Tabelul 5.4.1.7

FISURĂ ($\beta = 0^0$)				
Tensiunea σ [MPa]	Ecuaţia dreptei de regresie $\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = f\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)$	Factorul de intensitate a tensiunii $K_{I,exp}$ [N/mm$^{3/2}$]	Factorul adimensional de intensitate a tensiunii f_{exp} [-]	Factorul adimensional de intensitate a tensiunii mediu $\overline{f_{exp}}$ [-]
0,600	$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 2{,}122 - 0{,}357\sqrt{\frac{r}{a}}$	11,055	2,122	
0,751	$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 2{,}271 - 0{,}348\sqrt{\frac{r}{a}}$	14,809	2,271	2,160
0,925	$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 2{,}086 - 0{,}841\sqrt{\frac{r}{a}}$	16,755	2,086	

În Tabelul 5.4.1.8 sunt prezentate rezultatele experimentale obţinute pentru crestătura cu unghiul $\beta = 30^\circ$, în Tabelul 5.4.1.9 pentru crestătura cu unghiul $\beta = 60^\circ$, iar în Tabelul 5.4.1.10 pentru crestătura cu unghiul $\beta = 90^\circ$.

Tabelul 5.4.1.8

CRESTĂTURĂ CU UNGHIUL $\beta = 30^0$				
Tensiunea σ [MPa]	Ecuaţia dreptei de regresie $\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = f\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)$	Factorul de intensitate a tensiunii $K_{I,exp}$ [N/mm$^{3/2}$]	Factorul adimensional de intensitate a tensiunii f_{exp} [-]	Factorul adimensional de intensitate a tensiunii mediu $\overline{f_{exp}}$ [-]
0,600	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
0,751	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,925	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

Tabelul 5.4.1.9

CRESTĂTURĂ CU UNGHIUL $\beta = 60^0$				
Tensiunea σ [MPa]	Ecuația dreptei de regresie $\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = f\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)$	Factorul de intensitate a tensiunii K_{Iexp} [N/mm$^{3/2}$]	Factorul adimensional de intensitate a tensiunii f_{exp} [-]	Factorul adimensional de intensitate a tensiunii mediu $\overline{f_{exp}}$ [-]
0,600	$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 2{,}317 + 0{,}527\sqrt{\frac{r}{a}}$	12,071	2,317	
0,751	$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 2{,}363 + 0{,}867\sqrt{\frac{r}{a}}$	15,409	2,363	2,312
0,925	$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 2{,}257 + 1{,}105\sqrt{\frac{r}{a}}$	18,128	2,257	

Tabelul 5.4.1.10

CRESTĂTURĂ CU UNGHIUL $\beta = 90^0$				
Tensiunea σ [MPa]	Ecuația dreptei de regresie $\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = f\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)$	Factorul de intensitate a tensiunii K_{Iexp} [N/mm$^{3/2}$]	Factorul adimensional de intensitate a tensiunii f_{exp} [-]	Factorul adimensional de intensitate a tensiunii mediu $\overline{f_{exp}}$ [-]
0,600	$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 2{,}692 + 0{,}335\sqrt{\frac{r}{a}}$	14,025	2,692	
0,751	$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 2{,}503 + 0{,}963\sqrt{\frac{r}{a}}$	16,322	2,503	2,535
0,925	$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = 2{,}409 + 1{,}450\sqrt{\frac{r}{a}}$	19,349	2,409	

Valoarea experimentală a factorului adimensional de intensitate a tensiunii, pentru cazul platbandei cu crestătură laterală (cu raportul a/b = 0,4) este comparată cu valoarea obținută numeric prin metoda elementelor finite, dată în subcapitolul 4.1, iar pentru cazul fisurii și cu valoarea analitică, dată în [T1], Tabelul 5.4.1.11

Tabelel 5.4.1.11

Unghiul crestăturii β [°]	Factorul adimensional de intensitate a tensiunii **analitic**, [T1] **f(a/b)** [-]	Factorul adimensional de intensitate a tensiunii **numeric**, (scap. 4.1) f_{MEF} [-]	Factorul adimensional de intensitate a tensiunii, **experimental** f_{exp} [-]	Eroarea față de soluția analitică $\Delta = \frac{f - f_{exp}}{f} 100$ [%]	Eroarea față de soluția numerică $\Delta_{MEF} = \frac{f_{MEF} - f_{exp}}{f_{MEF}} 100$ [%]
0 (fisură)	2,103	2,097	2,122	- 0,90	- 1,19
30	-	2,237	2,247	-	- 0,45
60	-	2,362	2,312	-	2,12
90	-	2,461	2,535	-	- 3,00

Concluzii

În acest pargraf s-au prezentat rezultatele determinăriilor experimentale ale factorului de adimensional de intensitate a tensiunii f_{exp} la vârful unei crestături laterale, aflate într-o platbandă, ale cărei dimensiuni respectă rapoartele **h/b =1** și **a/b = 0,4** . Scopul măsurătorilor experimentale a fost verificarea soluției numerice obținute prin metoda elementelor finite în subcapitolul 4.1.

Pentru determinarea experimentală a factorului de intensitate a tensiunii la vârful crestăturii, s-a utilizat metoda fotoelasticimetriei prin reflexie

Adaptarea metodei fotoelasticimeriei prin reflexie, împreună cu metoda Smith pentru interpretarea datelor fotoelastice în scopul determinării factorului adimensional de intensitate a tensiunii la vârful unei crestături ascuțite reprezintă contribuția autorului.

Pe baza rezultatelor experimentale obținute și prezentate în Tabelul 5.4.1.11 se observă că:

- valoarea experimentală a factorului adimensional de intensitate a tensiunii pentru cazul fisurii prezintă o eroare de 0,9% față de soluția analitică [T1], ceea ce confirmă corectitudinea metodei utilizate.

- erorile valorilor experimentale ale factorului adimensional de intensitate a tensiunii, față de cele obținute numeric, prin Metoda elementelor finite (subcapitolul 4.1) sunt de maximum 3%. În acest caz se observă că rezultatele experimentale validează soluția numerică.

Precizia determinării factorului de intensitate a tensiunii prin metoda Smith este influențată de numărul punctelor luate în considerare pentru trasarea dreptei de regresie $\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = f\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)$ și de domeniul de variație al raportului $\sqrt{\frac{r}{a}}$. Autorul a adus îmbunătățiri metodei Smith în scopul creșterii preciziei determinării. Astfel pentru a avea cât mai multe puncte în care să se calculeze factorul aparent de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_{APi}}$ am determinat prin regresie polinomială, pe baza datelor fotoelastice, variația ordinului benzii $\mathbf{k_i}$ în funcție de distanța de la vârful crestăturii $\mathbf{r_i}$. Cu ajutorul funcției $\mathbf{k_i = f(r_i)}$ s-au determinat prin interpolare, valorile benzii în puncte intermediare punctelor de măsurare.

Studiul efectuat asupra domeniului punctelor luate în considerate pentru trasarea dreptei de regresie a confirmat recomandările lui Smith [S6],[S13], conform căruia precizia maximă se obține dacă se iau în considerare punctele ce aparțin intervalului: $0{,}2 \le \sqrt{\frac{r}{a}} \le 0{,}4$.

Avantajul utilizării metodei fotoelasticimetriei prin reflexie constă în aceea că studiile se pot extinde pe piese reale cu fisuri sau crestături, prin lipirea foliei fotoelastice, permițând astfel determinarea experimentală a factorului de intensitate a tensiunii în condițiile impuse de exploatare.

5.4.2 DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ PRIN METODA FOTOELASTICIMETRIEI A FACTORULUI DE INTENSITATE A TENSIUNII PENTRU O PLATBANDĂ CU ORIFICIU CIRCULAR DIN CARE SE DEZVOLTĂ O FISURĂ

Metoda fotoelasticimetriei s-a utilizat pentru a verifica experimental soluția factorului adimensional de intensitate a tensiunii pentru o platbandă cu orificiu circular din care se dezvoltă o fisură, soluție determinată prin metoda elementelor finite.

Experimentul

S-a utilizat o epruvetă din Araldyt având forma şi dimensiunile din Figura 5.4.2.1 (lungime 2h = 110 mm, lățime 2b = 55 mm, grosime g = 10 mm), în care s-a executat un orificiu circular având diametrul d = 2R = 13,75 mm.

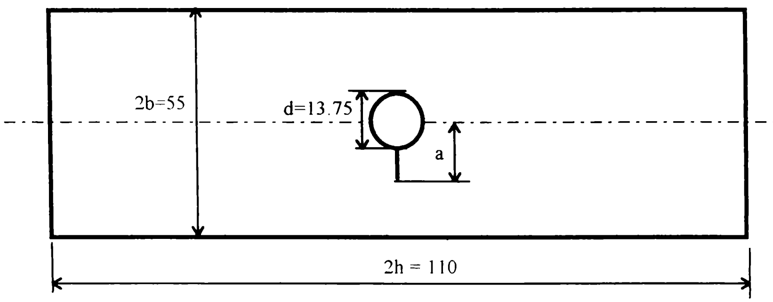


Figura 5.4.2.1

Valoarea benzii materialului s-a determinat prin etalonare pe aceiaşi epruvetă, dar înainte de realizarea orificiului circular. Operația de etalonare s-a efectuat solicitatând modelul la încovoiere pură, obținându-se valoarea benzii **f_σ = 1,875 MPa/franjă**.

Epruveta s-a încărcat la tracțiune într-un dispozitiv de solicitare, Figura 5.4.2.2 Dispozitivul de solicitare a fost proiectat de autor, fiind compus dintr-o ramă metalică 2 care se montează între polarizorul şi analizorul unui polariscop cu lumină polarizată circular. Încărcarea modelului fotoelastic 1 se realizează prin intermediul pârghiei orizontale 3, care este articulată în rama metalică. Încărcarea se face prin intermediul greutăților G. La celălalt capăt al pârghiei greutatea G_1 are rolul de a compensa greutatea pârghiei. Transmiterea încărcării de la pârghie la epruvetă se face prin intermediul tijelor 4, 5 şi a bolțurilor, sistem ce asigură o centrare cât mai bună a modelului. În partea superioară modelul este susținut de rama metalică prin intermediul tijelor 6 şi 7, articulate cu bolțuri.

În primă fază s-a determinat coeficentul de concentrare a tensiunilor pentru platbanda cu orificiul circular ale cărei dimensiuni au rapoartele: h/b = 2 şi R/b=0,25.

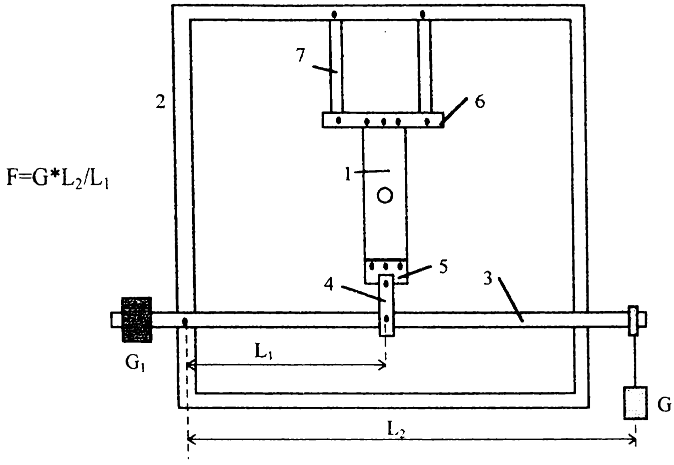


Figura 5.4.2.2

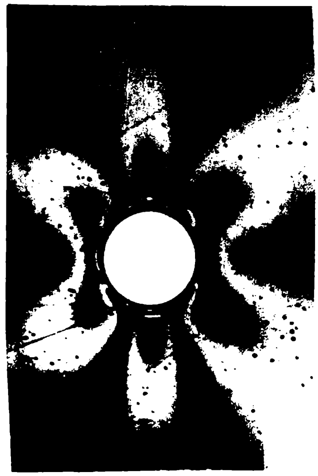


Figura 5.4.2.3

Rezultatele obţinute în urma încărcării modelului sunt prezentate în Tabelul 5.4.2.1.

Tabelul 5.4.1

Nr.crt.	Încărcarea **F** [N]	Tensiunea nominală $\sigma_n = F / A$ [MPa]	Ordinul benzii **k** [franje]	Tensiunea maximă $\sigma_{max} = k\, f_\sigma$ [MPa]	Coeficentul de concentrare a tensiunilor $k_{t,exp} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$	$\overline{k_{t,exp}}$
1	475,41	0,576	1	1,875	3,255	3,254
2	633,88	1,152	2	3,750	3,255	
3	950,95	1,729	3	5,625	3,253	
4	1267,91	2,305	4	7,500	3,254	

În continuare s-a tăiat o fisură de diferite lungimi (a = 8,25 ; 11 ; 13,75 ; 16,5 , 19,25 ; 22 mm) cu ajutorul unei pânze de grosime 0,2 mm. La fiecare lungime a fisurii s-a solicitat la tracţiune epruveta cu diferite valori ale forţei şi s-a fotografiat imaginea din analizor. S-a observat că imaginea obţinută în analizor a fost simetrică faţă de planul fisurii, ceea ce confirmă faptul că deplasarea flancurilor fisurii s-a realizat după modul I.

O parte din fotografiile realizate sunt prezentate în Figurile 5.4.2.3 - 5.4.2.9. Imaginea obţinută în analizor a fost simetrică faţă de planul fisurii ceea ce confirmă că deplasarea flancurilor fisurii s-a realizat după modul I.

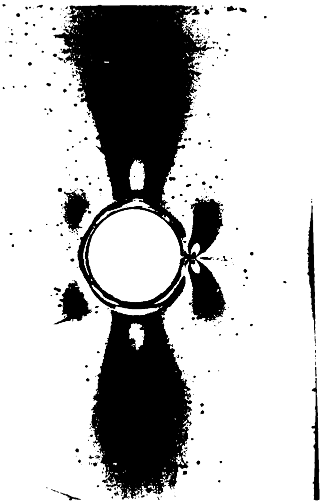


Figura 5.4.2.4 : a 8,25 mm
a/b 0,3 ; σ=1,152 MPa

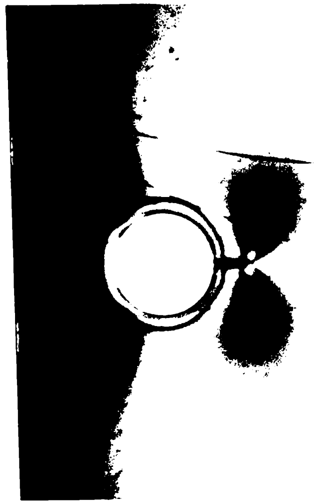


Figura 5.4.2.5 : a 11 mm
a/b 0,4 ; σ=0,576 MPa

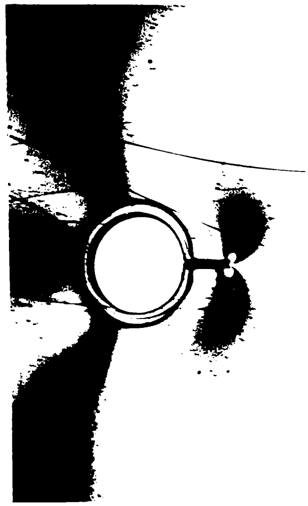


Figura 5.4.2.6 : a 13,75 mm
a/b 0,5 ; σ=0,576 MPa

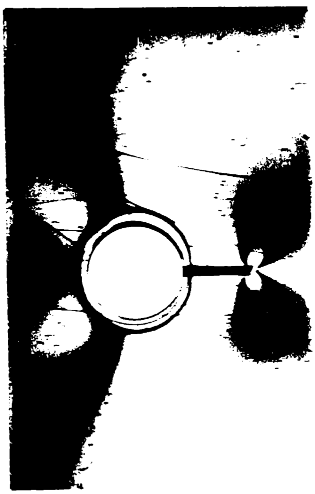


Figura 5.4.2.7 : a 16,5 mm
a/b 0,6 ; σ=0,576 MPa

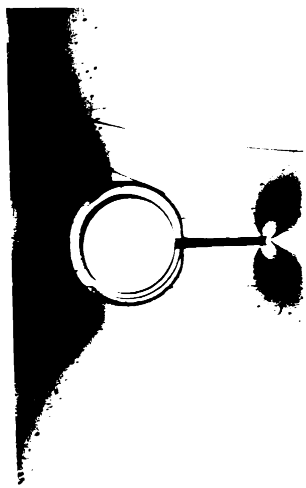


Figura 5.4.2.8 : a 19,25 mm
a/b 0,7 ; σ=0,576 MPa

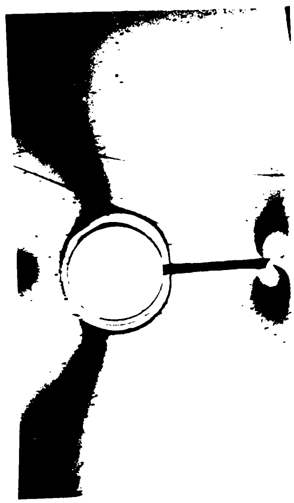


Figura 5.4.2
a/b 0,8 ; σ=0,576 MPa

Interpretarea rezultatelor prin metoda Irwin

Pentru a determina valoarea factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_{I,exp}}$ pe baza datelor fotoelastice obținute am utilizat metoda Irwin, descrisă în **paragraful 5.3.1**. De pe fiecare fotografie s-a determinat punctul corespunzător mijlocului franjei izocromate, cel mai îndepărtat de vârful fisurii **m,** ținând cont de factorul de mărire. Pentru acest punct s-au măsurat coordonatele $\mathbf{x_m}$, $\mathbf{y_m}$, Figura 5.4.2.10. Măsurarea coordonatelor punctului **m** ($\mathbf{x_m}$, $\mathbf{y_m}$) s-a făcut în scopul diminuării erorilor de măsurare directă a unghiului $\boldsymbol{\theta_m}$, erori ce influențează în mare măsură precizia determinării factorului de intensitate a tensiunii.

Apoi s-au calculat coordonatele polare ale punctului **m:**

$$r_m = \sqrt{x_m^2 + y_m^2}$$

$$\theta_m = \operatorname{arctg}\frac{y_m}{x_m}$$

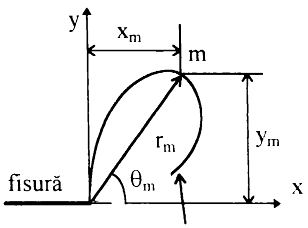


Figura 5.4.2.10

Valorile $\mathbf{r_m}$, $\boldsymbol{\theta_m}$ s-au utilizat pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii $K_{I,exp}$, calcul realizat cu un program elaborat de autor în MathCAD. Datele de intarare în program sunt valoarea încărcării **F** [N], ordinul benzii **k** [franje], valoarea benzii $\mathbf{f_\sigma}$ [MPa], raza maximă $\mathbf{r_m}$ [mm], unghiul maxim θ_m [^{0}], programul calculând valoarea tensiunii σ [MPa], tensiunea tangențială maximă $\tau_m = k\, f_\sigma/2$ [MPa], tensiunea nesingulară σ_{0x} [MPa] și factorul de intensitate a tensiunii determinat experimental $\mathbf{K_{I,exp}}$ [N/mm$^{3/2}$] cu rel. (5.3.1.6), factorul adimensional de intensitate a tensiunii determinat experimental $\mathbf{f_{exp}}$.

Pentru fiecare lungime a fisurii s-au efectuat mai multe încărcări în scopul determinării unei valori medii a factorului adimensional de intensitate a tensiunii. La valorile mici ale lungimii fisurii au fost necesare încărcări mai mari pentru a putea măsura coordonatele punctului de pe izocromată cel mai îndepărtat de vârful fisurii. La valorile mari ale lungimii fisurii încărcările au trebuit limitate deoarece la aceste valori franja izocromată este deformată datorită efectelor de margine.

Rezultatele obținute experimental pentru factorul de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_{I,exp}}$ și pentru factorul adimensional de intensitate a tensiunii $\mathbf{f_{exp}}$ sunt prezentate în Tabelul 5.4.2.2.

În Figura 5.4.2.11 s-a reprezentat variația factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_{I,exp}}$ determinat prin fotoelasticimetrie în funcție de lungimea fisurii pentru diferite valori ale încărcării.

Tabelul 5.4.2.2

Nr. crt	Lungimea fisurii **a** [mm]	Raportul **a/b** [-]	Forţa **F** [N]	Tensiunea σ [MPa]	Raza maximă r_m [mm]	Unghiul maxim θ_m [°]	F.I.T experimental $K_{I,exp}$ [$N/mm^{3/2}$]	Funcţia exp. $f_{exp} = \frac{K_{I,exp}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ [-]	Valoarea medie $\overline{f_{exp}}$ [-]
1	8.25	0.3	475.41	0.864	2.30	76.2	4.646	1.049	1.058
2	8.25	0.3	554.64	1.008	3.05	76.5	5.442	1.060	
3	8.25	0.3	633.88	1.152	3.97	76.6	6.254	1.066	
4	11.00	0.4	316.94	0.576	5.00	72.12	3.726	1.100	1.077
5	11.00	0.4	396.17	0.720	9.08	71.83	4.605	1.088	
6	11.00	0.4	475.41	0.864	15.93	71.70	5.536	1.150	
7	11.00	0.4	554.64	1.008	19.25	71.66	6.335	1.069	
8	11.00	0.4	633.88	1.152	22.00	71.60	7.164	0.979	
9	13.75	0.5	237.70	0.432	1.42	74.50	3.067	1.080	1.088
10	13.75	0.5	316.94	0.576	3.28	73.67	4.159	1.098	
11	13.75	0.5	396.17	0.720	6.82	72.86	5.191	1.096	
12	13.75	0.5	475.41	0.864	10.55	72.64	6.159	1.084	
13	13.75	0.5	554.64	1.008	13.74	72.80	7.276	1.098	
14	13.75	0.5	633.88	1.152	16.82	72.84	8.118	1.072	
15	16.50	0.6	237.70	0.432	2.76	73.20	3.538	1.137	1.127
16	16.50	0.6	316.94	0.576	6.04	72.66	4.681	1.128	
17	16.50	0.6	396.17	0.720	11.75	72.15	5.759	1.110	
18	16.50	0.6	475.41	0.864	18.65	72.05	7.154	1.134	
19	19.25	0.7	158.47	0.288	1.98	72.51	2.590	1.156	1.213
20	19.25	0.7	237.70	0.432	5.55	72.10	3.903	1.161	
21	19.25	0.7	316.94	0.576	10.50	72.27	5.621	1.246	
22	19.25	0.7	396.17	0.720	16.81	72.33	7.220	1.289	
23	22.00	0.8	158.47	0.288	1.19	75.60	3.154	1.317	1.448
24	22.00	0.8	237.70	0.432	3.17	76.00	5.351	1.484	
25	22.00	0.8	316.94	0.576	5.32	76.50	7.186	1.486	
26	22.00	0.8	396.17	0.720	8.15	76.70	9.027	1.507	

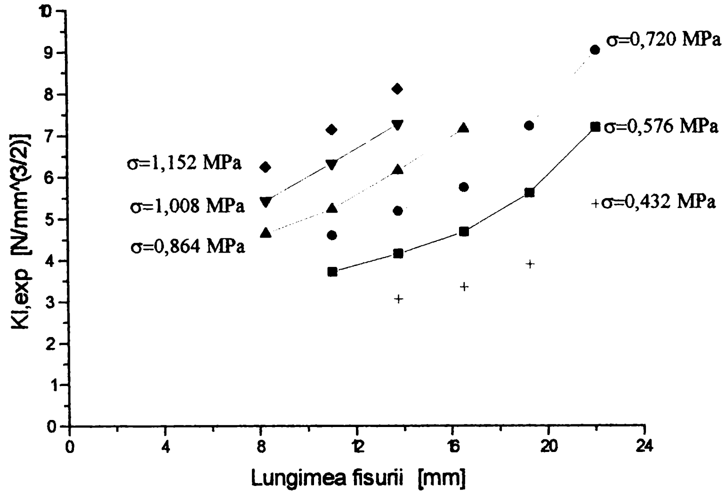


Figura 5.4.2.11

Concluzii

Comparând valorile coeficentului de concentrare a tensiunii k_t obținute teoretic [P13], numeric (paragraful 4.2.4) și experimental pentru platbanda cu orificiul circular, ale cărei dimensiuni respectă rapoartele h/b=2 și R/b=0,25, se observă buna concordanță a acestora, Tabelul 5.4.2.3.

Tabeleu 5.4.2.3

Dimens. platbandă	Coef. de concentrare a tensiunii teoretic k_t [-]	Coef. de concentrare a tensiunii numeric $k_{t,MEF}$ [-]	Coef. de concentrare a tensiunii experimental $k_{t,exp}$ [-]	Eroarea la determinarea numerică $\Delta_{MEF} = \frac{k_t - k_{t,MEF}}{k_t} 100$ [%]	Eroarea la determinarea experimentală $\Delta_{exp} = \frac{k_t - k_{t,exp}}{k_t} 100$ [%]
h/b = 2 R/b = 0,25	3,240	3,193	3,254	1,45	- 0,43

Determinarea pentru punctul **m** de pe izocromată cel mai îndepărtat de vârful fisurii a coordonatelor polare r_m, θ_m prin măsurarea coordonalelor x_m, y_m reprezintă contribuția autorului în scopul creșterii preciziei estimării factorului de intensitate a tensiunii K_{Iexp}.

Analizând valorile unghiului θ_m (din Tabelul 5.4.2.2.) se observă că acestea se încadrează în domeniul de valabilitate corespunzător metodei Irwin 69,4 < θ_m< 148,8, (paragraful 5.3.1).

Metoda Irwin de interpretare a datelor fotoelastice a permis trasarea variației factorului de intensitate a tensiunii $K_{I,exp}$ în funcție de lungimea fisurii **a** pentru diferite valori ale încărcării σ, Figura 5.4.2.11.

În Tabelul 5.4.2.4. se prezintă comparativ, pentru o platbandă cu orificiu circular, din care se dezvoltă o fisură, soluțiile pentru factorul adimensional de intensitate a tensiunii, reprezentat de funcția $f = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ obținute prin metoda elementului finit (paragraful 4.2.4) respectiv prin metoda fotoelasticimetriei.

Tabelul 5.4.2.4

Nr.crt.	Raportul **a/b** [mm]	Funcția f_{MEF} [-]	Funcția f_{exp} [-]	Abaterea $\Delta = \frac{f_{MEF} - f_{exp}}{f_{MEF}} 100$ [%]
1	0,3	1,073	1,058	1,4
2	0,4	1,089	1,077	1,1
3	0,5	1,094	1,088	0,6
4	0,6	1,111	1,127	-1,4
5	0,7	1,169	1,213	-3,8
6	0,8	1,508	1,448	4,0

Valorile experimentale obținute pentru factorul adimensional de intensitate a tensiunii f_{exp} au abateri mici față de valorile obținute prin metoda elementelor finite, Tabelul 5.4.2.4.

Erorile mai mari obținute pentru valorile raportului **a/b** de 0,7 și 0,8 se explică prin faptul că la lungimi mari ale fisurii aceasta se apropie de marginea modelului, iar izocromata este deformată datorită efectelor de margine.

Prin determinările experimentale ale factorului de intensitate a tensiunii K_{Iexp} și ale factorului adimensional de intensitate a tensiunii f_{exp} autorul a căutat să valideze soluția numerică, obținută prin analiză cu elemente finite, propusă în paragraful 4.2.4 pentru cazul unei platbenzi care conține un orificiu circular din care se dezvoltă o fisură (cu dimensiunile h/b = 2 ; R/b=0,25). Se poate aprecia că determinările experimentale confirmă corectitudinea soluției numerice propusă.

CAPITOLUL 6
CONTRIBUȚII PRIVIND ESTIMAREA DURABILITĂȚII TIRANȚILOR EXCAVATOARELOR PE BAZA PRINCIPIILOR MECANICII RUPERII

6.1 INTRODUCERE

Excavatoarele care lucrează în exploatările miniere sunt utilje grele ce funcționează în condiții deosebite de exploatare. Un astfel de utilaj este **excavatorul ERC-1300**, Figura 6.1.1.

Tirantul unui astfel de excavator este unul din elementele cele mai importante din cadrul structurii metalice, Figura 6.1.2. Tirantul susține elinda pe care se află montat rotorul port cupe. Sarcinile variabile în timp asociate cu apariția unor fisuri pot conduce la ruperea tirantului fapt ce poate determina distrugerea structurii metalice, favorizând în același timp și apariția unor grave accidente.

Ca urmare se impune după anumite perioade de funcționare efectuarea unor inspecții prin care să se verifice starea tiranților.

Programul de evaluare a durabilității tiranților trebuie să cuprindă evaluarea după anumite perioade de exploatare a caracteristicilor clasice și caracteristicilor de Mecanica ruperii, ambele evidențiind modul în care evoluează în timp proprietățile de material. Pe lângă acestea un rol important revine analizei stării de tensiune și a distribuției defectelor care coroborate permit o analiză a interacțiunii defecte - tensiuni, [B22], [M13], [M14].

În acest sens am abordat problema durabilității tiranților pe baza conceptelor Mecanicii ruperii. Pentru acest studiu s-a pornit inițial cu analiza stării materialului debitat dintr-un tirant care a funcționat 12 ani.

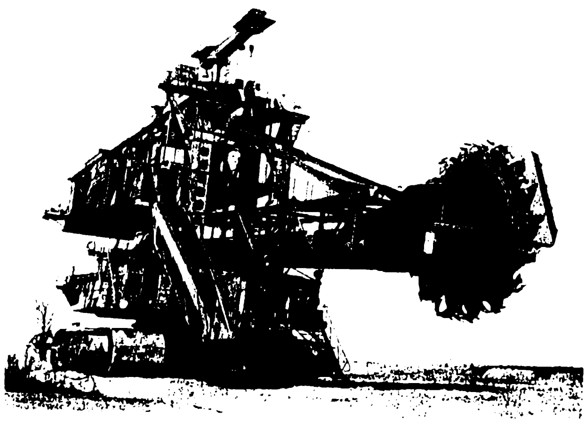


Figura 6.1.1

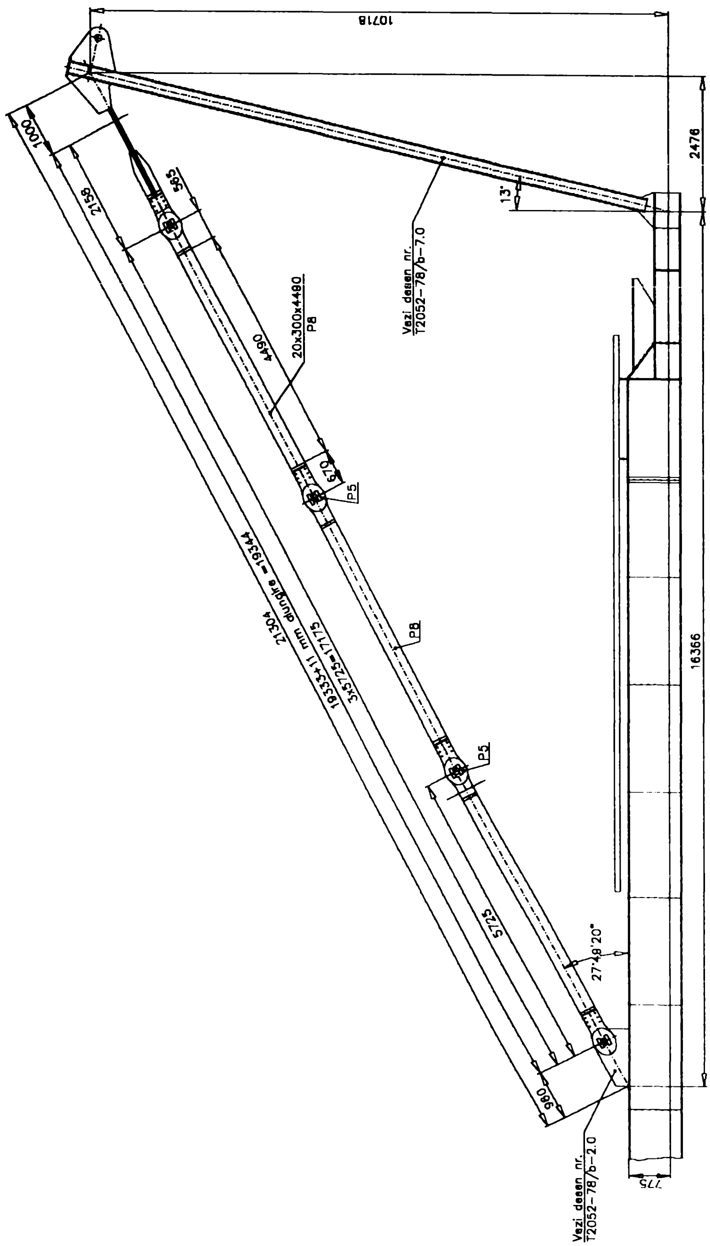

10718
2476
13°
16366
1000
2158
565
4490
20x300x4480
P8
670
P5
P8
P5
5725
27°48'20"
960
775
Vezi desen nr.
T2052-78/b-7.0
Vezi desen nr.
T2052-78/b-2.0

Figura 6.1.2

6.2 COMPOZIŢIA CHIMICĂ

Materialul din care este executat tirantul este St 52-3 sau OL 52.

Înainte de a efectua încercările de material s-a efectuat analiza chimică a oţelului St 52-3 şi a oţelului OL 52 din platbenzile sudate.

În tabelul 6.2.1 este prezentată compoziţia chimică a oţelului St 52-3 comparativ cu cea indicată pentru acelaşi material în lucrarea [S22].

Tabelul 6.2.1

Elemente chimice	C [%]	Si [%]	Mn [%]	P [%]	S [%]	Al [%]	N [%]	Fe [%]
St 52-3 (prin analize)	0,173	0,572	1,77	0,075	0,024	0,015	-	Rest
St 52-3 (bibliografie [22])	0,190	0,42	1,10	0,020	0,029	0,037	0,007	Rest

În Tabelul 6.2.2 este indicată compoziţia chimică a oţelului OL 52 obţinută în urma analizei şi cea indicată conform standardelor în vigoare.

Tabelul 6.2.2

Elementele chimice	C [%]	Mn [%]	Si [%]	P [%]	S [%]	Alte elemente [%]
OL 52-4K (prin analiză)	0,176 - 0,197	1,62 - 1,79	0,344 - 0,348	0,011 - 0,013	0,019 - 0,028	Al 0,063-0,065
OL 52 (STAS-500)	0,18 - 0,22	1,10 - 1,50	0,50	0,035 - 0,055	0,040 - 0,055	Al.min. 0,025

6.3. CARACTERISTICI STATICE.

Principalele caracteristici mecanice ale oţelului St 52-3 au fost obţinute prin încercări la tracţiune statice conform STAS 200-75 [9] şi STAS 10290-75 [10]. Încercările s-au efectuat pe o maşină de tracţiune de **100 kN,** utilizând epruvete de secţiune circulară, [9].

În Figura 6.3.1 este indicată curba caracteristică $\sigma - \varepsilon$ obţinută pentru oţelul St 52-3 până la atingerea limitei de curgere. Trebuie menţionat că încercările la tracţiune au evidenţiat existenţa unei limite de curgere aparente. Apoi după atingerea acesteia s-a demontat extensometru şi s-a continuat încercarea până la rupere înregistrându-se forţa maximă pe baza căruia s-a calculat rezistenţa la rupere $\mathbf{R_m}$.

În Tabelul 6.3.1 sunt indicate valorile medii ale principalelor caracteristici (rezistenţa la rupere $\mathbf{R_m}$, limita de curgere $\mathbf{R_{p0,2}}$, alungirea la rupere $\mathbf{A_n}$, gâtuirea la rupere **Z**), obţinute prin încercarea la tracţiune.

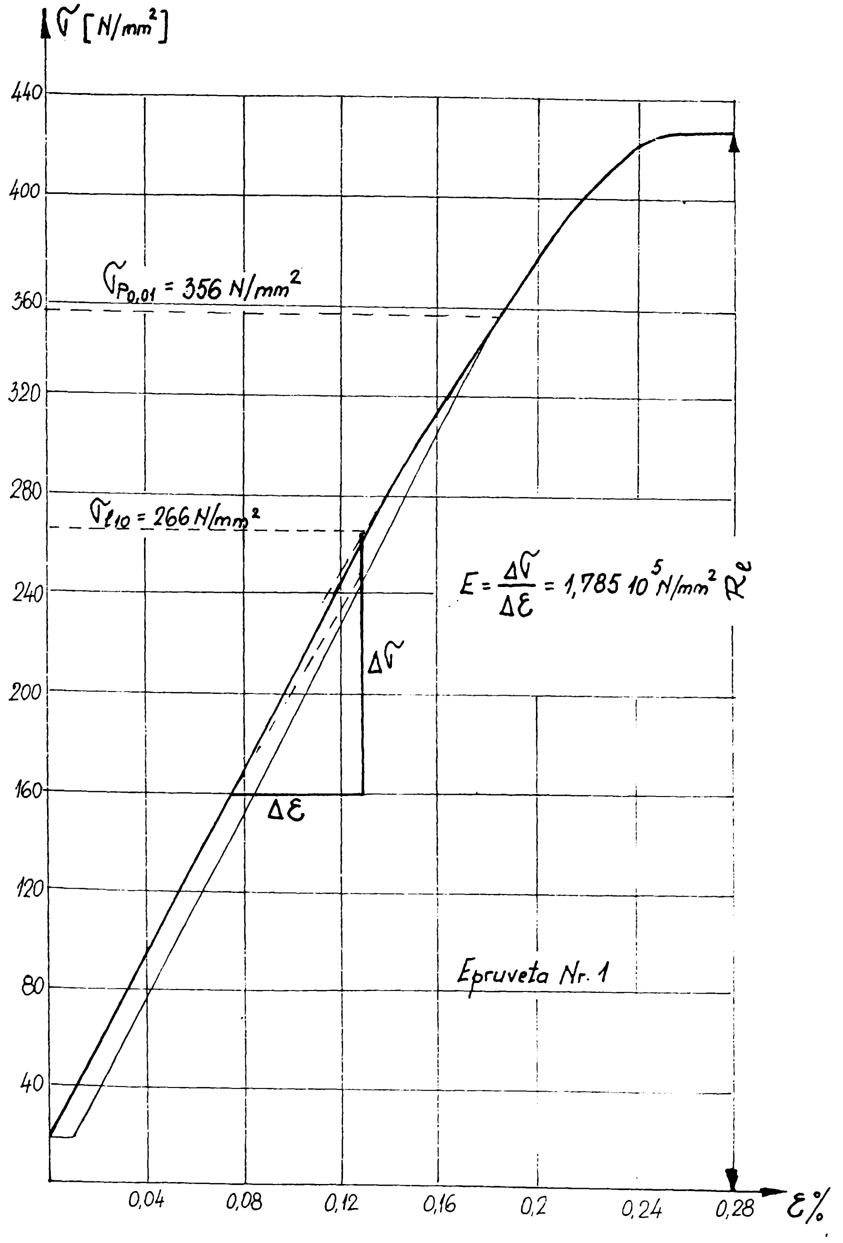

σ [N/mm²]
440
400
360
320
280
240
200
160
120
80
40
σP0,01 = 356 N/mm²
σl10 = 266 N/mm²
E = Δσ/Δε = 1,785 10⁵ N/mm²
Re
Δσ
Δε
Epruveta Nr. 1
0,04
0,08
0,12
0,16
0,2
0,24
0,28
ε%

Figura 6.3.1

Tabelul 6.3.1

Materialul	**Rezistența la rupere R_m [MPa]**	**Limita de curgere $R_{p0,2}$ [MPa]**	**Alungirea la rupere A_n [%]**	**Gâtuirea la rupere Z [%]**
St 52-3 (prin încercări)	567	434	20	56,6
St 52-3 (bibliografie [S22])	590	410	27	66
Ol 52 4K (STAS 500)	520-620	350-360	22	-
A 533 (SUA, bibl.[B4])	585	427	28	72

Pentru comparație în Tabelul 6.3.1 s-au prezentat aceleași caracteristici și pentru alte oțeluri de aceași calitate dar de producție diferită.

Pe lângă aceste caracteristici mecanice uzuale în Figura 6.3.1 s-au determinat, pentru oțelul St 52-3 și limita de proporționalitate σ_{110}, limita de elasticitate $\sigma_{p0,01}$ precum și modulul de elasticitate longitudinal **E**, Tabelul 6.3.2

Tabelul 6.3.2

Materialul	Limita de proporționalitate σ_{110} [MPa]	Limita de elasticitate $\sigma_{p0,01}$ [MPa]	Modulul de elasticitate E MPa]
St 52-3 (prin încercări)	272	360	$1{,}78\ 10^5$

Prelucrarea statistică a datelor experimentale obținute pe un număr mare de epruvete a permis o comparație între caracteristicile mecanice și de deformabilitate ale materialului utilizat și cel din [S22]. S-a evidențiat astfel că în urma exploatării materialul s-a durificat, micșorându-se în același timp caracteristicile de deformabilitate.

Comparând caracteristicile mecanice obținute prin încercări ale oțelului St 52-3 cu cele indicate în lucrarea [S22] pentru același oțel, se constată o tendință de reducere a rezistenței la rupere și o diminuare a caracteristicilor de deformabilitate respectiv a alungirii la rupere $\mathbf{A_n}$ și a gâtuirii la rupere **Z**. În schimb limita de curgere a manifestat o tendință de creștere.

Din Tabelul 6.3.1 se observă, de asemenea că valorile obținute pentru caracteristicile mecanice ale oțelului St 52-3 se încadrează în limitele indicate de STAS-500 pentru oțelul OL 52 de producție românească.

În Figura 6.3.2 sunt indicate aspectele microfractografice ale ruperii la tracțiune.

Figura 6.3.2

6.4 STUDIU PRIVIND COMPORTAREA LA SOLICITĂRI VARIABILE A MATERIALULUI TIRANTULUI.

Încercările la solicitări variabile s-au făcut pe epruvete din oțel St 52-3, debitate din tirant și pe epruvete din oțel OL 52 în construcție sudată.

S-au folosit epruvete plate debitate în lungul plăcilor prelevate din tirant. Epruvetele au respectat grosimea produsului și calitatea suprafețelor acestuia și au respectat condițiile impuse de STAS 8027-78, Figura 6.4.1.

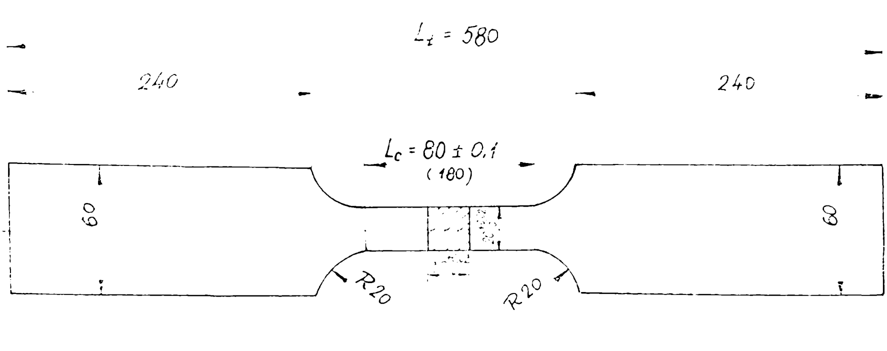


Figura 6.4.1

Încercările s-au făcut pe o maşină de tracţiune de **1000 kN** prevăzută cu pulsator activat hidraulic pentru cicluri oscilante pozitive la solicitări de tracţiune, compresiune.

Ciclurile de solicitare atât pentru epruvetele din St 52-3 cât şi pentru cele OL 52 în construcţie sudată s-au caracterizat prin aceiaşi tensiune minimă σ_{min} = 73,6 MPa. Conform înregistrărilor din exploatare, această tensiune este determinată de greutatea proprie a subansamblurilor susţinute de tirant, Figura 6.4.2

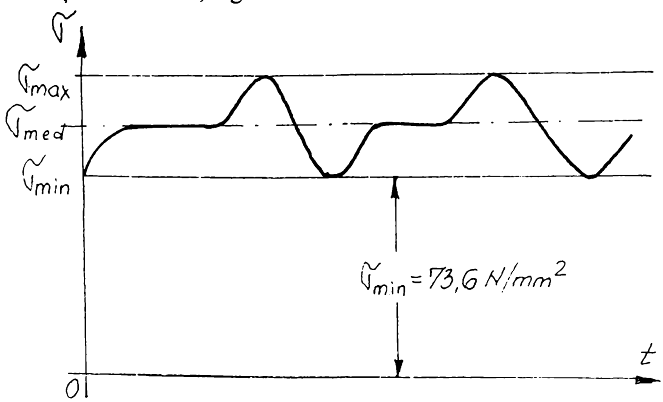


Figura 6.4.2.

Rezultatele încercărilor obţinute la solicitări variabile pe epruvete fără concentrator, sunt prezentate în Tabelul 6.4.1 şi reprezentate prin puncte în Figura 6.4.3 . În Figura 6.4.3 curbele I şi II au fost preluate din lucrarea [H14] şi se referă la oţelul St 52-3, deci acelaşi oţel cu cel analizat.

Tabelul 6.4.1

Epruveta	Material	Tensiunea minimă σ_{min} **[MPa]**	Tensiunea maximă σ_{max} **[MPa]**	Coeficent de asimetrie $R_S=\sigma_{min}/\sigma_{max}$ [-]	Număr de cicluri până la rupere N **[cicluri]**
O 1	St 52	73,6	283,0	0,260	50.800
O 2	St 52	73,6	245,3	0,300	376.200
O 3	St 52	73,6	147,2	0,500	5.100.000
O 4	St 52	73,6	157,3	0,468	823.700
O 5	St 52	73,6	96,8	0,760	11.381.000
O 6	St 52	73,6	130,0	0,566	6.152.000
O 7	St 52	73,6	200,0	0,368	638.100
O 8	St 52	73,6	263,0	0,280	61.000
O 9	OL 52	73,6	400,0	0,184	9.300
O10	OL 52	73,6	283,0	0,260	178.500
O11	OL 52	73,6	147,2	0,500	1.286.000
O12	OL 52	73,6	245,3	0,300	432.000

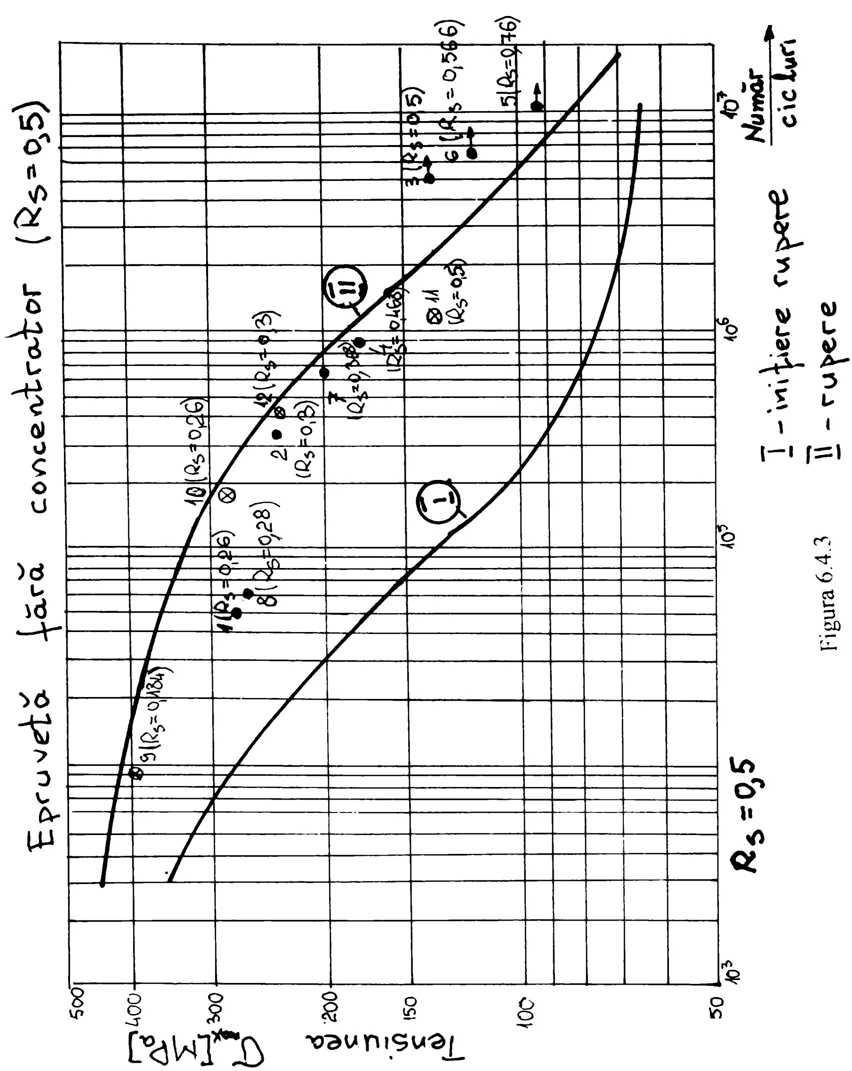

Epruvetă fără concentrator (Rs=0,5)
Tensiunea σmax [MPa]
Număr cicluri
I - inițiere rupere
II - rupere
Rs=0,5

Figura 6.4.3

Curba I corespunde inițierii ruperii prin oboseală și curba II corespunde ruperii prin oboseală, corespunzător gradului de asimetrie Rs = 0,5. Punctele 1,2,3,4,5,6,7 și 8 corespund încercărilor la oboseală a epruvetelor din oțel St 52-3 iar punctele 9, 10, 11 și 12 încercărilor la oboseală a epruvetelor din OL 52 în construcție sudată.

Comparând rezultatele obținute pentru σ_{min} = 73,6 MPa la diferite grade de asimetrie cu cele caracterizate prin Rs = 0,5 se constată că pentru tensiuni maxime σ_{max} > 150 MPa, rezultatele obținute se plasează în jurul curbei de oboseală. Excepție au făcut două dintre epruvete, corespunzător lui σ_{max} = 275 MPa și 263 MPa (punctele 1 și 8 din Figura 6.4.3). Pentru tensiuni σ_{max}<150 MPa durabilitățile epruvetelor încercate au depășit durabilitatea indicată pentru Rs = 0,5. Punctele marcate cu săgeți reprezintă epruvetele care nu s-au rupt și la care încercările au fost oprite.

Se remarcă, că o dată cu creșterea coeficentului de asimetrie a ciclului Rs, crește și durabilitatea. Faptul că durabilitatea epruvetelor sudate (punctul 10 și 12 Figura 6.4.4) a depășit durabilitatea oțelului St 52-3 se explică prin aceea că epruveta din OL 52 din construcție sudată a fost debitată dintr-un material nesolicitat anterior. Analizând modul de rupere al epruvetelor sudate s-a constatat următoarele:

- la epruveta O10 corespunzătoare lui σ_{max} = 283 MPa, inițierea fisurii s-a făcut în sudură, dar continuarea rupturii s-a efectuat în zona influențată termic.
- la epruvele O9, O11 și O12, ruperea s-a făcut în sudură.

În Figura 6.4.4 este indicată una dintre epruvetele rupte prin oboseală iar în Figura 6.4.5 aspectul secțiunii de rupere în cele două zone și anume zona lucioasă care corespunde ruperii prin oboseală și zona cu aspect fibros care corespunde ruperii finale. Din Figura 6.4.5 se observă că inițierea ruperii prin oboseală se produce într-unul din colțurile epruvetei, propagarea fisurii de oboseală extinzându-se pe aproximativ 20-25% din secțiune.

În Figura 6.4.6 este indicată microfractografia ruperii prin oboseală corespunzătoare epruvetei O1, Figura 6.4.4 cu σ_{max} = 283 MPa și la care numărul de cicluri până la rupere a fost N = 50.800 cicluri.

Figura 6.4.7 indică aceleași microfractografie pentru epruveta O2, solicitată cu σ_{max} = 245,3 MPa și la care numărul de cicluri până la rupere a fost N = 376.200 cicluri.

Microfractografiile din Figurile 6.4.6 și 6.4.7 au fost făcute în zona corespunzătoare propagării fisurii de oboseală.

Aspectele microfractografice din zona ruperii prin oboseală pun în evidență prezența striațiunilor, distanța dintre acestea reprezentând viteza de propagare a fisurii și care este determinată de nivelul tensiunii maxime.

Pentru a studia influența concentrării tensiunilor asupra durabilității materialului s-au confecționat din materialul St 52 epruvete de oboseală de forma celor indicate în Figura 6.4.4, în care s-a executat un orificiu circular cu diametrul de 5 mm. Coeficentul teoretic de concentrare a tensiunilor, corespunzător acestui caz este pentru d/B = 5/20 = 0,25 este k_t = 3,24, [P13]. În Tabelul 6.4.2 sunt prezentate rezultatele obținute în urma încercărilor iar în Figura 6.4.8 rezultatele experimentale sunt comparate cu curbele de oboseală trasate pentru o epruvetă cu orificiu circular pentru care coeficentul de concentrare a tensiunilor a fost k_t= 2,5 iar coeficentul de asimetrie Rs=0,5 [H14].

Figura 6.4.4

Figura 6.4.5

Figura 6.4.6

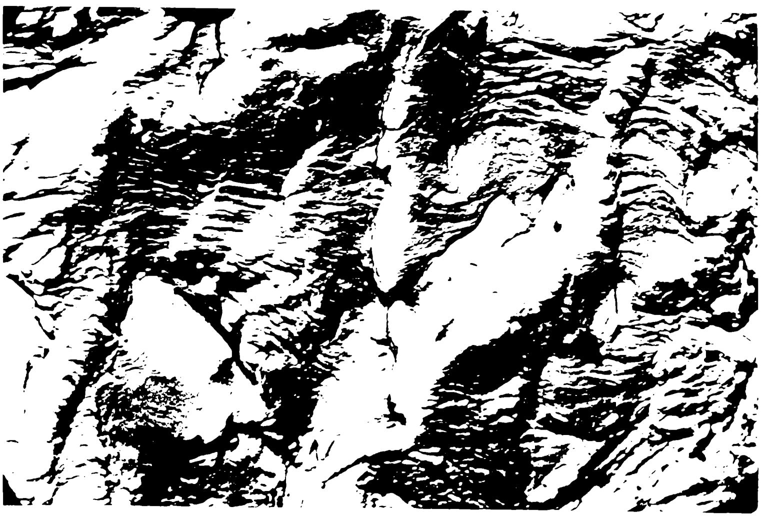


Figura 6.4.7

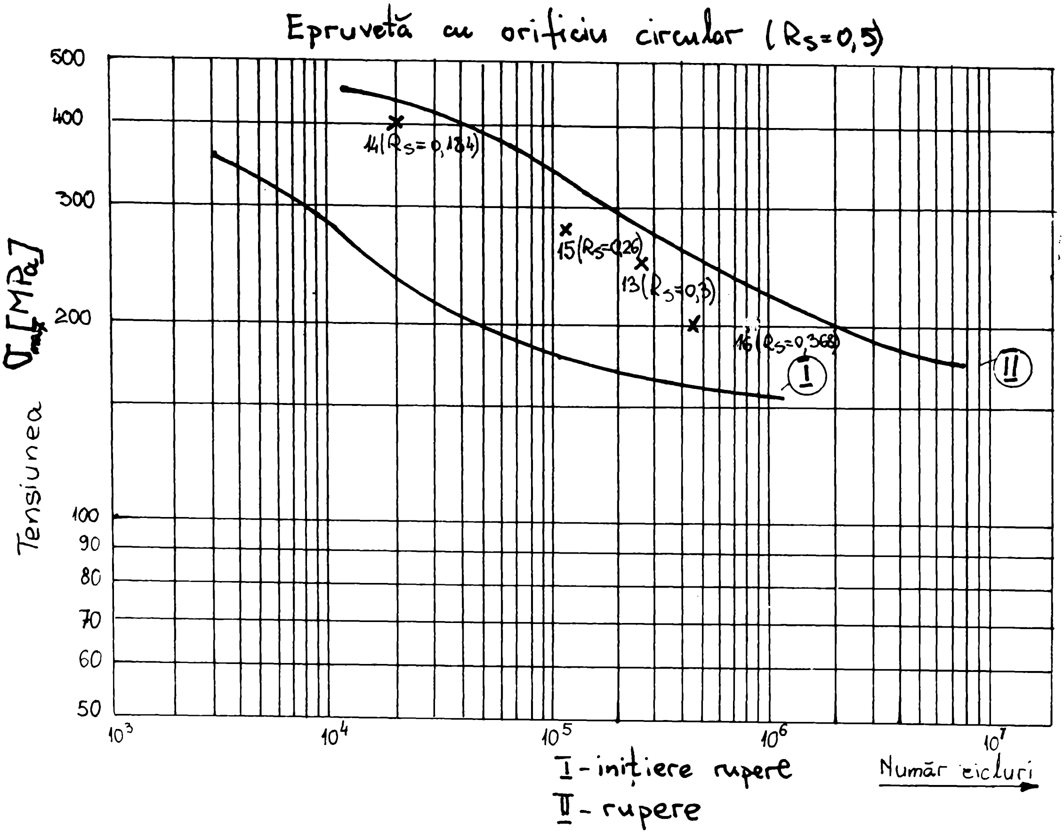


Figura 6.4.8

Tabelul 6.4.2

Epruveta	Material	Tensiunea minimă σ_{min} **[MPa]**	Tensiunea maximă σ_{max} **[MPa]**	Coeficent de asimetrie $R_S=\sigma_{min}/\sigma_{max}$ **[-]**	Număr de cicluri până la rupere **N** **[cicluri]**
O13	St 52	73,6	245,3	0,300	268.000
O14	St 52	73,6	400,0	0,184	21.800
O15	St 52	73,6	283,0	0,260	135.000
O16	St 52	73,6	200,0	0,368	452.800

Din Figura 6.4.8 se observă că numărul de cicluri până la rupere pentru epruvetele cu concentarator de tensiune se află sub curba de durabilitate dată în [H14] pentru același material. Aceasta poate avea două explicații: coeficenții de asimetrie ai ciclurilor, folosiți la încercările efectuate (Rs = 0,184 - 0,368), au fost mai mici decât Rs=0,5 considerat în [H14], iar coeficentul de concentrare a tensiunilor k_t a fost mai mare la epruvetele încercate de autor (3,24 față de 2,5 în [H14].

6.5 ÎNCERCĂRI DE REZILIENȚĂ

Determinarea rezilienței s-a efectuat pe epruvetele cu crestătură V, conform STAS 7511-81. Încercarea s-a realizat pe un ciocan Charpy la diferite temperaturi. Temperaturile scăzute obținându-se prin imersarea și menținerea epruvetei într-un vas adiabatic de răcire ce a conținut un amestec de azot lichid și acetonă.

Rezultatele încercărilor la reziliență pentru oțelul St 52-3 la diferite temperaturi sunt indicate în Tabelul 6.5.1.

Tabelul 6.5.1

Marcaj epruvetă	Temperatura de încercare	Energia la rupere [J]	
		Valori individuale	Media
V1 V2 V3	$+20^0$	67 68 64	66,3
V4 V5 V6	0	66 68 69	67,6
V7 V8 V9	-20^0	66 68 68	67,3
V10 V11 V12	-30^0	66 66 69	67
V13 V14 V15	-40^0	60 59 61	60

Analizând rezultatele prezentate în Tabelul 6.5.1 se constată că la toate temperaturile de încercare energia de rupere este mult superioară valorii critice corespunzătoare ruperii fragile de 27 J, ceea ce indică că materialul mai are rezervă pentru a-și păstra capacitatea de deformație.

De asemenea analizând secțiunea de rupere se observă că aspectul ruperii este mixt și nu apare fenomenul de fragilizare în intervalul de temperaturi studiate [$-40^0C ... \div 20^0C$].

6.6 CERCETĂRI PRIVIND COMPORTAREA LA SOLICITĂRI AXIALE CU ŞOC

Deoarece în timpul funcţionării excavatoarelor apar foarte des şocuri, am considerat că este necesar un studiu al comportării materialului din care este confecţionat tirantul la solicitări axiale cu şoc.

Aspectele legate de comportarea unor oţeluri la viteze mari de deformaţie în cazul şocurilor longitudinale sunt prezentate în [D8].

Încercările la tracţiune prin şoc s-au efectuat pe un ciocan Chapy cu rezerva de energie maximă $W_0 = 750$ J care a fost adaptat special pentru încercări la tracţiune dinamică, Figura 6.6.1. Epruvetele folosite s-au confecţionat din oţel St 52-3. Forma epruvetelor folosite la încercări este indicată în Figura 6.6.2. Trebuie menţionat că epruvetele au avut marcate pe porţiunea calibrată o serie de repere situate la distanţa $\Delta x = 2$ mm (Figura 6.6.1 Detaliu A). Măsurând după rupere, distanţele între repere, s-a putut reprezenta variaţia deformaţiilor specifice pe lungimea calibrată.

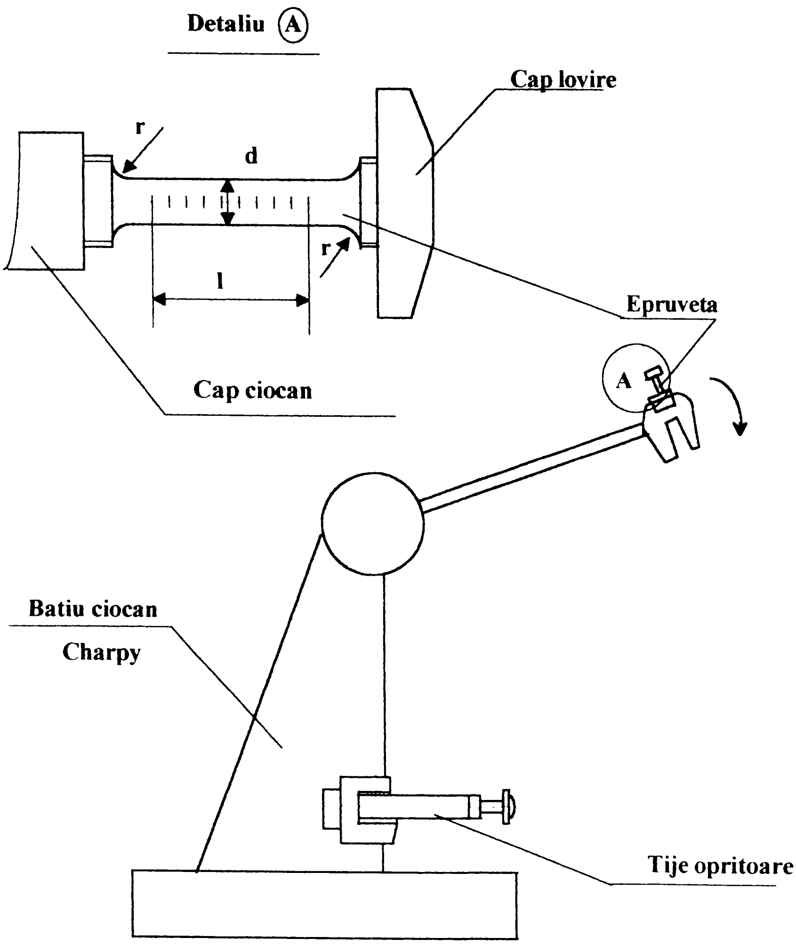


Figura 6.6.1

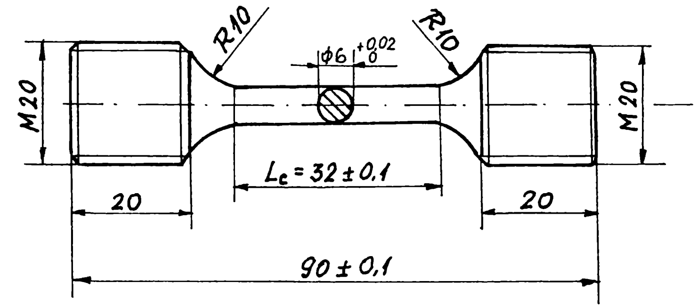


Figura 6.6.2

S-au efectuat încercări la şase viteze de deformaţie diferite.

În Figurile 6.6.3 şi 6.6.4 este indicată variaţia energiei consumată pentru ruperea epruvetelor **W** în funcţie de energia totală $\mathbf{W_0}$, respectiv în funcţie viteza de impact **v**.

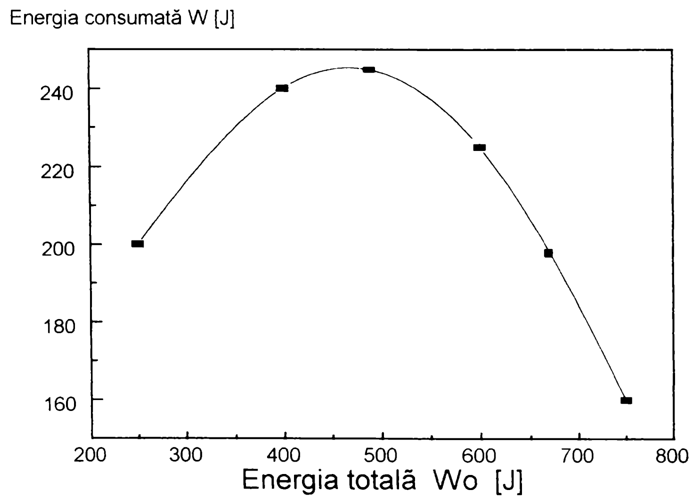


Figura 6.6.3

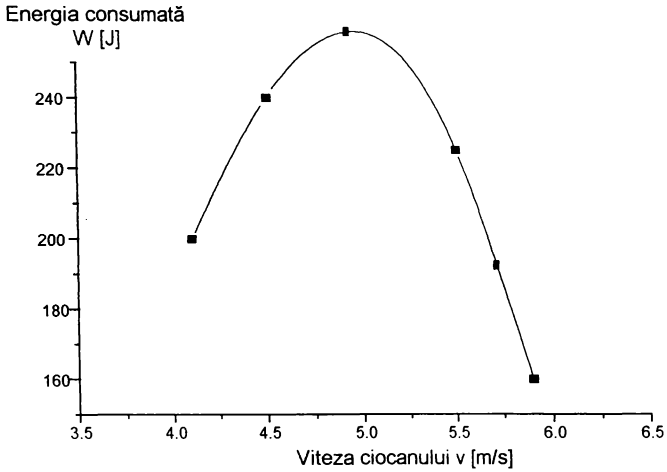


Figura 6.6.4

Cercetările efectuate la viteze de impact cuprinse între 4...6 m/s au evidențiat că oțelul St 52-3 poate înmagazina o energie maximă la viteza de 4,85 m/s. După depășirea acestei viteze energia de deformație înmagazinată scade simțitor.

Măsurând alungirile Δl_i fiecărui interval l_i = **2 mm** marcat pe zona calibrată a epruvetei s-a calculat deformația specifică a fiecărui interval:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_i} \bullet 100 \qquad [\%] \qquad (6.6.1)$$

Apoi s-au calculat deformațiile specifice cumulate:

$$\varepsilon_{i\,cum} = \frac{\sum_i \Delta l_i}{\sum_i l_i} \bullet 100 \qquad [\%] \qquad (6.6.2)$$

În Figurile 6.6.5 și 6.6.6 s-au reprezentat variațiile deformațiilor specifice ε și a deformațiilor specifice cumulate ε_{cum}, corespunzătoare vitezei de impact v = 5,5 m/sec. În ambele cazuri se remarcă tenacitatea ridicată a materialului la această viteză de impact.

Repartiția deformațiilor specifice ε (Figura 6.6.5) și deformațiilor specifice cumulate ε_{cum} (Figura 6.6.6) este neuniformă pe lungimea calibrată a epruvetei. Această repartiție este influențată în principal de viteza de deformație, dar și de condițiile de rezemare ale epruvetei.

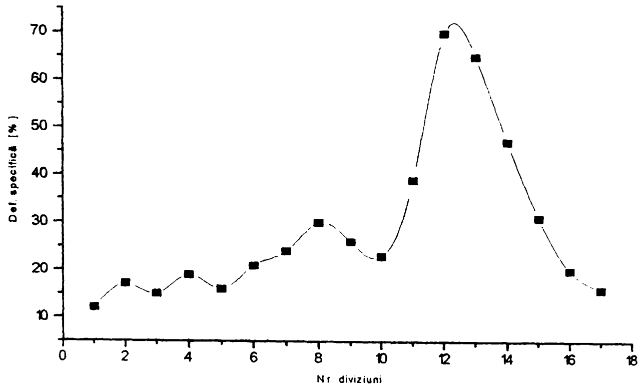


Figura 6.6.5

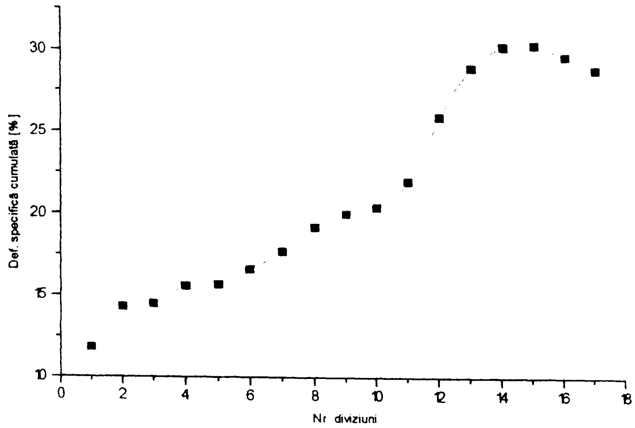


Figura 6.6.6

6.7 DETERMINAREA TENACITĂŢII LA RUPERE

6.7.1 DETERMINAREA FACTORULUI CRITIC DE INTENSITATE A TENSIUNII PRIN METODA CHEVRON

Aprecierea tenacităţii la rupere a materialului se poate face pe baza valorii critice a factorului de intensitate al tensiunii, $\mathbf{K_{IC}}$. Deoarece pentru materialul studiat grosimea minimă a epruvetei impusă de STAS 9760-84, [7] este mult mai mare decât grosimea plăcii debitată din tirant s-a adoptat metoda Chevron pentru determinarea tenacităţii la rupere.

Valoarea critică a factorului de intensitate a tensiunii s-a obţinut prin încercări pe epruvete de tip Chevron, Figura 6.7.1.1. S-a efectuat determinarea tenacităţii la rupere pe epruvete Chevron, deoarece această metodă prezintă câteva avantaje notabile faţă de metoda $\mathbf{K_{IC}}$ de determinare a tenacităţii la rupere, [S23], [B23]. Dintre acestea cele mai importante sunt respectarea stării plane de deformaţie pe epruvete de dimensiuni mult mai mici faţă de metoda $\mathbf{K_{IC}}$, datorită formei epruvetei; aceste epruvete nu necesită o prefisurare prin oboseală; cost redus faţă de metoda $\mathbf{K_{IC}}$, o bună repetabilitate şi o precizie ridicată, evidenţiată prin abaterea medie pătratică, care este mult mai mică decât la metoda K_{IC}, [B23].

Folosirea epruvetelor Chevron asigură respectarea condiţiilor stării plane de deformaţie, datorită formei epruvetei, care asigură şi menţinerea fisurii în planul de rupere, ce conţine crestătura.

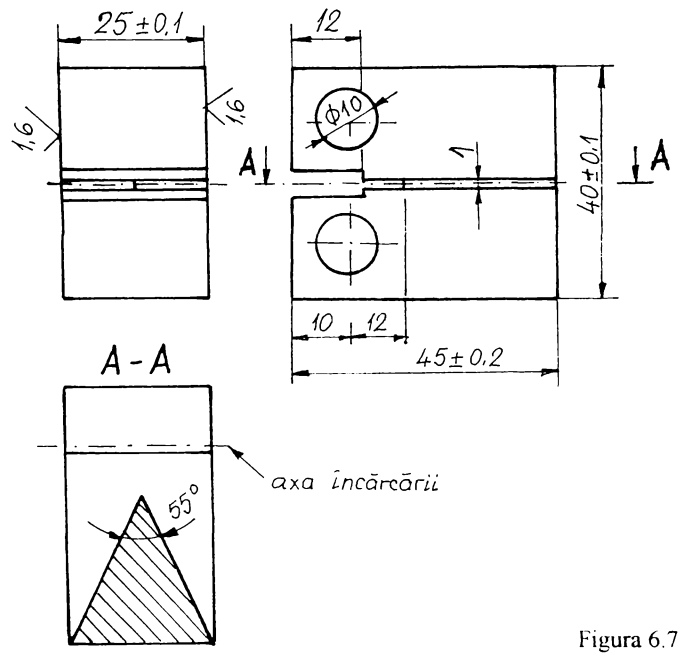


Figura 6.7.1.1

În Figura 6.7.1.2 este prezentată, după [B23], corelaţia dintre valoarea tenacităţii la rupere determinată pe epruveta Chevron $\mathbf{K_{IV}}$ şi valoarea tenacităţii determinată după metoda $\mathbf{K_{IC}}$.

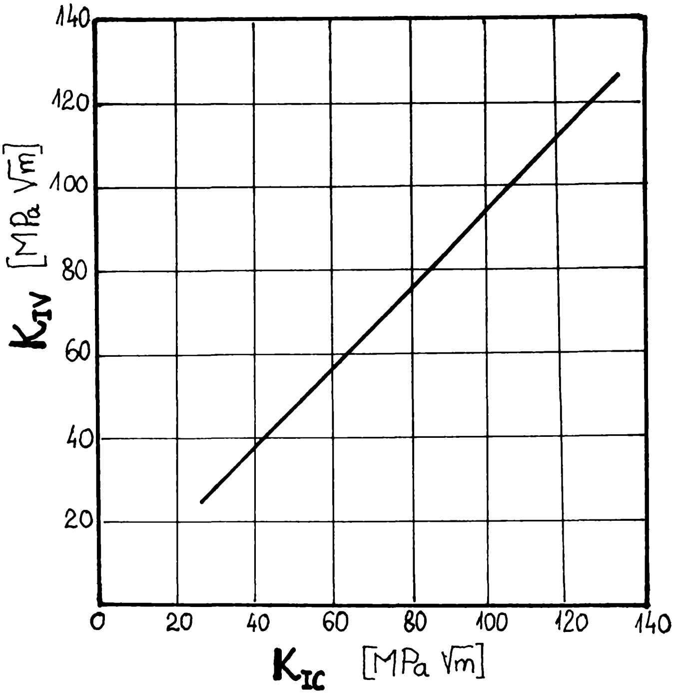


Figura 6.7.1.2

Încercarea s-a realizat pe o maşină de încercat la tracţiune adaptată pentru încercările de Mecanica ruperii. Schiţa încercării este prezentată în Figura 6.7.1.3. Forţa s-a măsurat prin intermediul unui traductior de forţă (doză tensometrică), iar deplasarea de deschidere a orificiului epruvetei, am măsurat-o cu ajutorul unui traductor de deplasare inductiv.

Sarcina s-a aplicat lent, continuu, progresiv şi fără şocuri.

Tenacitatea la rupere pe epruvete Chevron, $\mathbf{K_{IV}}$ s-a determinat cu relaţia:

$$K_{IV} = A \cdot \frac{F_{max}}{B^{3/2}} \qquad [N/mm^{3/2}] \qquad (6.7.1.1)$$

unde **A** - un coeficent în funcţie de tipul epruvetei.

A 22,0 pentru epruveta dreptunghiulară folosită, [B23];

$\mathbf{F_{max}}$ - este forţa maximă din înregistrarea forţă deplasare;

B - grosimea epruvetei.

La toate epruvetele analizate inițierea fisurării s-a produs la vârful crestăturii, iar ruperea a rămas în planul crestăturii.

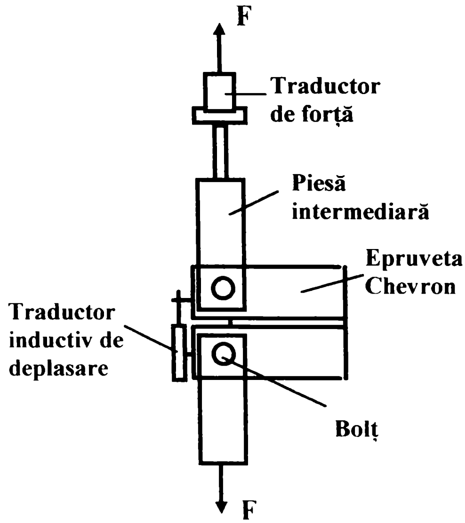


Figura 6.7.1.3

Una din diagramele forță - deplasare ridicată la încercarea epruvetei CV5 este prezentată în Figura 6.7.1.4

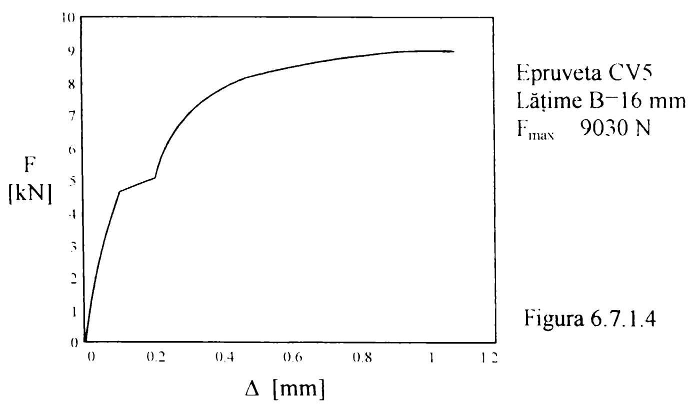


Figura 6.7.1.4

S-a determinat experimental tenacitatea la rupere K_{IV} pe 3 epruvete din materialul tirantului St 52-3, după 12 ani de funcţionare şi pe 3 epruvete din OL 52-4K, construcţie sudată.

Rezultatele obţinute la temperatura de 20^{0}C sunt prezentate în Tabelul 6.7.1.1

Tabelul 6.7.1.1

Materialul	Epruveta	Lăţimea epruvetei **B** **[mm]**	Forţa maximă **F_{max}** **[N]**	Tenacitatea la rupere **K_{IV}** **[N/mm$^{3/2}$]**	Tenacitatea la rupere medie $\overline{K_{IV}}$ **[N/mm$^{3/2}$]**
St 52-3	**CV1**	25	18710	3292,96	3297,65
St 52-3	**CV2**	25	19100	3361,60	
St 52-3	**CV3**	25	18400	3238,40	
OL 52-4K	**CV4**	16	8500	2921,87	3036,45
OL 52-4K	**CV5**	16	9030	3104,06	
Ol 52-4K	**CV6**	16	8970	3083,44	

Valoarea medie obţinută în urma încercării unui număr de 3 epruvete pentru fiecare material a fost :

- pentru materialul St 52-3 : $\overline{K_{IV}} = 3297{,}65\ N/mm^{3/2}$

- pentru materialul OL 52-4K: $\overline{K_{IV}} = 3036{,}45\ N/mm^{3/2}$

Conform corelaţiei dată în Figura 6.7.1.2, din [B23], se poate obţine valoarea tenacităţii la rupere **$K_{IC} = K_{IV} / 0{,}95$.**

În Tabelul 6.7.1.2 se prezintă comparativ valorile tenacităţii la rupere obţinute experimental pentru cele două oţeluri şi valorile indicate în bibliografie pentru oţelul St 52-3 şi pentru oţelul american A533, care are compoziţia chimică şi caracteristicile mecanice apropiate de cele ale oţelurilor studiate.

Tabelul 6.7.1.2

Materialul	Tenacitatea la rupere **K_{IV}** **[N/mm$^{3/2}$]**	Tenacitatea la rupere **$K_{IC} = K_{IV} / 0{,}95$** **[N/mm$^{3/2}$]** **[MPa mm$^{1/2}$]**	Tenacitatea la rupere **K_{IC}** **[MPa m$^{1/2}$]**
St 52 - 3 (analizat)	3297,65	3471,21	109,76
St 52 - 3 (bibliografie [S22])	-	-	100 - 110
OL 52 - 4K construcţie sudată (analizat)	3036,45	3196,26	101,07
A533 (bibliografie [B4])	-	-	100

Se observă, pentru materialul St 52-3 că valoarea determinată experimental, a tenacităţii la rupere K_{IC} se încadrează în limitele prescrise în bibliografie [S22]. Valoarea tenacităţii K_{IC} obţinută pe epruvete prelevate din tirantul unui excavator, care a funcţionat 12 ani, indică faptul că nu apare fenomenul de fragilizare al materialului datorită exploatării

6.7.2 DETERMINAREA FACTORULUI CRITIC DE INTENSITATE A TENSIUNII PE BAZA CORELĂRII CU CELELALTE CARACTERISTICI DE MATERIAL.

În literatură există o serie de încercări privind corelarea tenacității la rupere K_{IC} cu celelalte caracteristici de material: limita de curgere a materialului σ_C (**$R_{P0,2}$**), respectiv energia consumată la rupere, **KV** determinată la încercarea de încovoiere prin şoc a epruvetelor cu crestătură în V.

Importanţa acestor corelaţii este că la ora actuală există un volum mare de date experimentale pentru caracteristicile de material clasice, valori estimate prin analize statistice complexe, dar mult mai puţine valori ale tenacităţii la rupere.

O astfel de corelaţie propusă de Rolfe-Novak-Barsoum pertinentă mărcii de oţel americană A533, care are compoziţia chimică şi caracteristicile statice apropiate de cele ale oţelurilor studiate, este prezentată în [B4] sub forma:

$$\left(\frac{K_{IC}}{\sigma_C}\right)^2 = 4\left(\frac{KV}{\sigma_C} - 0,05\right) \qquad (6.7.2.1)$$

în care **K_{IC}** este factorul critic de intensitate a tensiunii, corespunzător stării plane de deformaţie, în $ksi\sqrt{inch}$

KV este energia consumată la rupere la încercarea de încovoiere poin şoc pe epruvete cu crestătură în V, în *ft-lb*

σ_C este limita de curgere a materialului, în *ksi*

Ţinând cont de conversia unităţilor de măsură:

$1\ Joule = 0,737\ ft\text{-}lb$; $1\ MPa = 0,145\ ksi$; $1\ MPa\sqrt{m} = 0,91\ ksi\sqrt{inch}$

şi introducând valorile medii ale caracracteristicilor de material obţinute experimental pentru oţelul St 52 - 3:

σ_C = 410 *MPa* 59,465 *ksi*
KV = 66,3 *J* = 48,9 *ft-lb*

din relaţia (6.7.2.1) se obţine valoarea factorului critic de intensitate a tensiunii:

$K_{IC.cor} = 104,52\ ksi\sqrt{inch} = 114,86\ MPa\sqrt{m}$

Între valoarea factorului critic de intensitate a tensiunii obţinută prin coralaţia cu celelalte caracteristici de material $K_{IC.cor} = 114,86\ MPa\sqrt{m}$ şi cea obţinută experimental prin încercăile de Mecanica ruperii pe epruvete Chevron $K_{IC.exp} = 109,76\ MPa\sqrt{m}$ (conform Tabelului 6.7.1.2) există o bună concordanţă. Abaterea relativă dintre valoarea obţinută experimental şi cea corelată fiind de:

$$\Delta = \frac{K_{IC.cor} - K_{IC.exp}}{K_{IC.cor}} 100 = 4,44\ \%$$

6.7.3 DETERMINAREA TENACITĂȚII LA RUPERE LA TEMPERATURI SCĂZUTE.

Întrucât utilajele grele, de forma excavatoarelor lucrează și în condiții de temperaturi scăzute mi-am propus determinarea tenacității la rupere la temperaturi scăzute și găsirea unei corelații între valoarea tenacității la rupere $\mathbf{K_{IV}}$ și temperatura de lucru **T** în intervalul de temperaturi [-30^{0}C ... 20^{0}C] .

În acest scop răcirea epruvetelor s-a efectuat într-un vas adiabatic, cu un amestec de azot lichid și acetonă. Apoi metodologia de încercare și de interpretare a rezultatelor a fost identică cu cea de la încercarea de determinare a tenacității la rupere la temperatura ambiantă, utilizând epruvete Chevron. Epruvetele utilizate au fost prelevate dintr-un tirant aflat în exploatare o durată 12 ani și confecționat din material St 52-3. Forma și dimensiunile epruvetelor este cea din Figura 6.7.1.1. (epruvetele au avut grosimea de 25 mm).

Valorile experimentale ale tenacității la rupere obținute cu relația (6.7.1.1) atât la temperaturi scăzute cât și la temperatura ambiantă sunt prezentate în Tabelul 6.7.3.1.

Tabelul 6.7.3.

Epruveta	Temperatura **T** **[^{0}C]**	Forța maximă **F** **[kN]**	Tenacitatea la rupere $\mathbf{K_{IV}}$ **[MPa mm$^{1/2}$]**	Tenacitatea la rupere $\mathbf{K_{IV}}$ **[MPa m$^{1/2}$]**	Tenacitatea la rupere medie $\overline{\mathbf{K_{IV}}}$ **[MPa m$^{1/2}$]**
CV1	20	18,71	3292,96	104,13	
CV2	20	19,10	3361,60	106,30	104,28
CV3	20	18,40	3238,40	102,41	
CV7	0	19,65	3458,40	109,36	
CV8	0	20,80	3660,80	115,76	110,88
CV9	0	19,32	3400,32	107,53	
CV10	-20	21,06	3706,56	117,21	
CV11	-20	21,73	3824,48	120,94	120,45
CV12	-20	22,14	3896,64	123,22	
CV13	-30	22,75	4004,00	126,61	
CV14	-30	23,15	4074,40	128,84	127,69
CV15	-30	22,93	4035,68	127,62	

Pentru a găsi o corelație între tenacitatea la rupere $\mathbf{K_{IV}}$ și temperatura **T**, valabilă în intervalul de temperaturi [-30^{0}C...20^{0}C] am trasat dreapta de regresie K_{IV} = f(T) pe baza valorilor experimentale obținute, Figura 6.7.3.1.

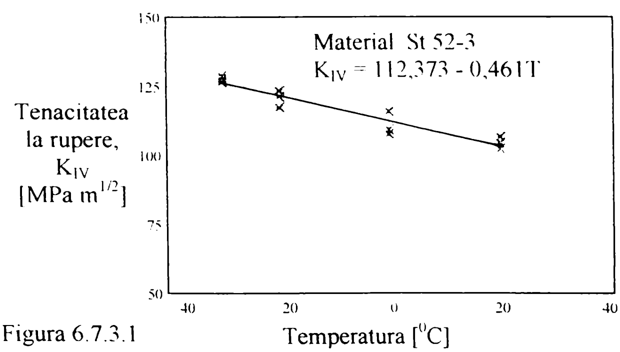


Figura 6.7.3.1

Pentru intervalul de temperatură considerat [-30^{0}C...20^{0}C] am obținut următoarea corelație:

$$\mathbf{K_{IV} = 112{,}373 - 0{,}461\ T \quad [MPa\ m^{1/2}]} \qquad (6.7.3.1)$$

Din Tabelul 6.7.3.1 precum și din Figura 6.7.3.1 se constată că la temperaturi cuprinse între [-30^{0}C...20^{0}C] nu se produce fenomenul de fragilizare a oțelului St 52-3, respectiv temperatura de tranziție ductil-fragil nu este cuprinsă în intervalul de temperaturi considerat.

În lucrarea [B4] este prezentată curba de variație a tenacității la rupere K_{IC} în funcție de temperatura **T** pe un domeniu mai larg de temperaturi [-100^{0}C...20^{0}C], pentru oțelul A533 care are compoziția chimică și caracteristicile mecanice apropiate de oțelul studiat. Am reprodus această curbă în Figura 6.7.3.2.

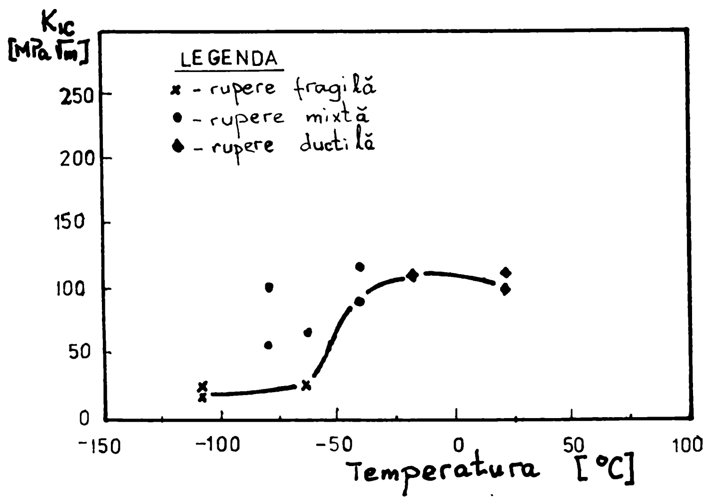


Figura 6.7.3.2

Din Figura 6.7.3.2 se observă că pentru oțelul A533 tranziția ductil - fragil se produce în jurul temperaturii de -60^{0}C. De asemenea se remarcă și la oțelul A533 că pe intervalul de temperaturi [-30^{0}C...20^{0}C] tenacitatea la rupere prezintă o ușoară tendință de scădere. Aceeași tendință fiind obținută și pentru oțelul St 52-3 studiat.

6.8 CONTRIBUŢII LA ESTIMAREA DURABILITĂŢII TIRANŢILOR EXCAVATOARELOR ÎN IPOTEZA APARIŢIEI UNOR FISURI

Presupunând că în tirant apare, un defect de forma unei microfisuri aceasta se poate dezvolta sub acţiunea solicitărilor variabile, la care este supus tirantul. Pornind de la acest aspect s-a făcut un studiu asupra durabilităţii tirantului în diferite ipoteze corespunzătorare dispunerii fisurilor şi dimensiunilor acestora.

Conform metodologiei privind evaluarea siguranţei în exploatare a elementelor de rezistenţă, paragraful 1.1, o analiză a propagării prin oboseală a fisurii trebuie să se facă ţinând cont de caracteristicile de material stabilite de autor prin încercări de materiale, de geometria structurii şi de ciclurile de solicitare efective. Rezultatele obţinute sunt exprimate în număr de cicluri până la rupere, Figura 6.8.1.

Figura 6.8.1

Analiza propagării prin oboseală a fisurii s-a făcut pe baza conceptelor Mecanicii ruperii liniar elastice. Ruperea tirantului se poate produce dacă:

- factorul de intensitate a tensiunii maxim $\mathbf{K_{Imax}}$ atinge valoarea tenacităţii la rupere $\mathbf{K_{IC}}$, producându-se ruperea instabilă;

- fisura a străbătut întreaga lăţime a tirantului.

Este cunoscută corelaţia dintre variaţia factorul de intensitate a tensiunii: $\mathbf{\Delta K_I = K_{imax} - K_{Imin}}$ şi viteza de propagare a fisurii de oboseală **da/dN** pe baza legii lui Paris [B4]:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K_I^n \qquad [\text{mm/ciclu}] \qquad (6.8.1)$$

unde **C** este un coeficent iar **n** un exponent specifici fiecărui material, care se determină experimental prin încercări de oboseală.

Pentru materialul studiat St 52-3 şi pentru coeficentul de asimetrie a ciclului $\mathbf{Rs = \sigma_{min} / \sigma_{max} = 0{,}5}$ în lucrarea [S22] se dau:

C = 3,92 10^{-10} $mm^{2,5}$/nr. cicluri şi n = 2,82.

Întrucât spectrul de solicitare al tirantului în anumite regimuri se caracterizează prin coeficent de asimetrie $\mathbf{Rs \neq 0{,}5}$ în calcule am utilizat o formă corectată a relaţiei (6.8.1), care să ţină cont de coeficentul de asimertre al ciclului;

$$\frac{da}{dN} = C \frac{\Delta K_I^n}{\sqrt{1 - Rs}} \qquad (6.8.2)$$

Calculul factorului de intensitate a tensiunii maxim $\mathbf{K_{Imax}}$, respectiv minim $\mathbf{K_{Imin}}$ s-a făcut cu relaţia:

$$K_{I\max,\min} = \sigma_{\max,\min}\sqrt{\pi a}\, f(a/b) \qquad [\mathrm{N/mm^{3/2}}] \qquad (6.8.3)$$

unde $\sigma_{\max,\min}$ este tensiunea maximă, respectiv minimă [MPa],

a lungimea sau semilungimea fisurii [mm],

f(a/b) un coeficent ce ţine seama de modul de dispunere al fisurii; **a** fiind lungimea sau semilungimea fisurii iar **b** lăţimea sau semilăţimea tirantului.

Pentru studiul durabilităţii tirantului au fost considerate trei ipoteze de calcul în funcţie de modul de dispunere a fisurii de oboseală.

A) Tirantul cu fisură centrală (Figura 6.8.2), [T1], pentru care:

$$f(a/b) = \frac{1 - 0{,}5(a/b) + 0{,}37(a/b)^2 - 0{,}044(a/b)^3}{\sqrt{1-(a/b)}} \qquad (6.8.4)$$

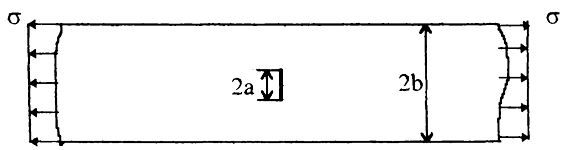


Figura 6.8.2. Tirant cu fisură centrală

B) Tirantul cu fisură laterală (Figura 6.8.3), [T1], pentru care:

$$f(a/b) = 1{,}12 - 0{,}231\left(\frac{a}{b}\right) + 10{,}55\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21{,}72\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30{,}39\left(\frac{a}{b}\right)^4 \qquad (6.8.5)$$

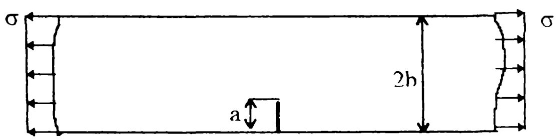


Figura 6.8.3. Tirant cu fisură laterală

C) Tirantul cu două fisuri laterale simetrice (Figura 6.8.4), [T1], pentru care:

$$f(a/b) = \frac{1{,}122 - 0{,}561(a/b) - 0{,}015(a/b)^2 + 0.091(a/b)^3}{\sqrt{1-(a/b)}} \qquad (6.8.6)$$

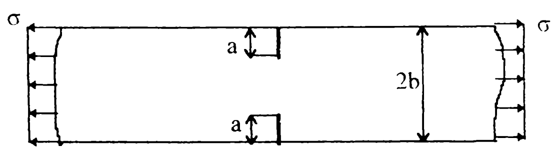


Figura 6.8.4. Tirant cu două fisuri laterale simetrice

Deoarece materialul St 52-3 prezintă o rupere mixtă precum şi datorită nivelului încărcării, σ_{max} şi concentrării puternice a tensiunii în jurul vârfului fisurii se formează o zonă plastică limitată.

Pentru a lua în considerare enclava plastică ce se formează la vârful fisurii am calculat pe baza criteriului de plasticitate Von Mises (paragraful 2.2.1), raza zonei plastice de la vârful fisurii, $\mathbf{r_p}$:

$$r_p = \frac{1}{6\pi}\left(\frac{K_{Imax}}{\sigma_C}\right)^2 \tag{6.8.7}$$

Ţinând cont de raza zonei plastice am recalculat factorii de intensitate a tensiunii maxim $\mathbf{K_{imax,cor}}$ şi minim $\mathbf{K_{imin,cor}}$, înlocuind lungimea fisurii cu o lungime corectată egală cu lungimea fisurii plus raza zonei plastice:

$$a_{cor} = a + r_p \quad \Rightarrow \quad K_{Imax,min} = \sigma_{max,min}\sqrt{\pi(a + r_p)}f(a/b) \tag{6.8.8}$$

Pentru studiul propagării prin oboseală a fisurilor, care reprezintă un proces iterativ de integrare a relaţiei (6.8.2), la diferite creşteri ale lungimii fisurii **da** am realizat un program de calcul, numit **DURABIL.** Programul este scris în QBASIC şi a fost rulat pe un calculator PC 486. Datele de intrare în program sunt:

- Încărcările: tensiunile maximă σ_{max} şi minimă σ_{min}, în [MPa]

- Caracteristicile de material: limita de curgere σ_C,în [MPa]; tenacitatea la rupere $\mathbf{K_{IC}}$, în [N/mm$^{3/2}$]; constanta din legea lui Paris **C**, în [mm$^{-2.5}$/ciclu] şi exponentul din legea lui Paris **n**

- Geometria tirantului: modul de dispunere al fisurii (centrală, laterală sau două fisuri laterale); lăţimea tirantului **b**, în [mm]; lungimea fisurii **a**,în [mm]; creşterea fisurii **da**, în [mm].

Programul calculează iniţial funcţia de formă **f(a/b),** factorii de intensitate ai tensiunii iniţiali $\mathbf{K_{Imax,ini}}$, $\mathbf{K_{Imin,ini}}$, variaţia iniţială factorului de intensitate al tensiunii $\mathbf{\Delta K_{I,ini}}$, raza zonei plastice iniţială $\mathbf{r_{p,ini}}$; iar apoi prin iteraţii valorile funcţiei de formă **f(ai/b);** factorilor de intensitate ai tensiunii $\mathbf{K_{Imax,i}}$, $\mathbf{K_{Imin,i}}$; variaţia factorilor de intensitate ai tensiunii $\mathbf{\Delta K_{I,ini}}$; raza zonei plastice $\mathbf{r_{pi}}$; recalculează valorile corectate ale factorilor de intensitate a tensiunii $\mathbf{\Delta K_{Imax,cor}}$, $\mathbf{\Delta K_{Imin,cor}}$ ţinând cont de zona plastică formată la vârful fisurii; numărul de cicluri **Ni** după care se realizează o creştere a fisurii **da** impusă.

Programul se opreşte în momentul în care fisura de oboseală a străbătut întreaga lăţime a tirantului **b** sau când factorul de intensitate a tensiunii maxim $\mathbf{K_{imax,fin}}$ a atins valoarea tenacităţii la rupere $\mathbf{K_{IC}}$. Datele de ieşire din program sunt: raza zonei plastice finale $\mathbf{r_{p,fin}}$; factorii de intensitate ai tensiunii finali $\mathbf{K_{imax,fin}}$, $\mathbf{K_{imin,fin}}$, variaţia finală a factorului de intensitate al tensiunii $\mathbf{\Delta K_{I,fin}}$, lungimea fisurii la care se produce ruperea tirantului $\mathbf{a_{fin}}$ şi numărul de cicluri la care se produce ruperea **N**.

De asemenea programul trasează:

- variaţia factorului maxim de intensitate al tensiunii $\mathbf{K_{Imax}}$ în funcţie lungimea fisurii $K_{Imax} = f(a)$

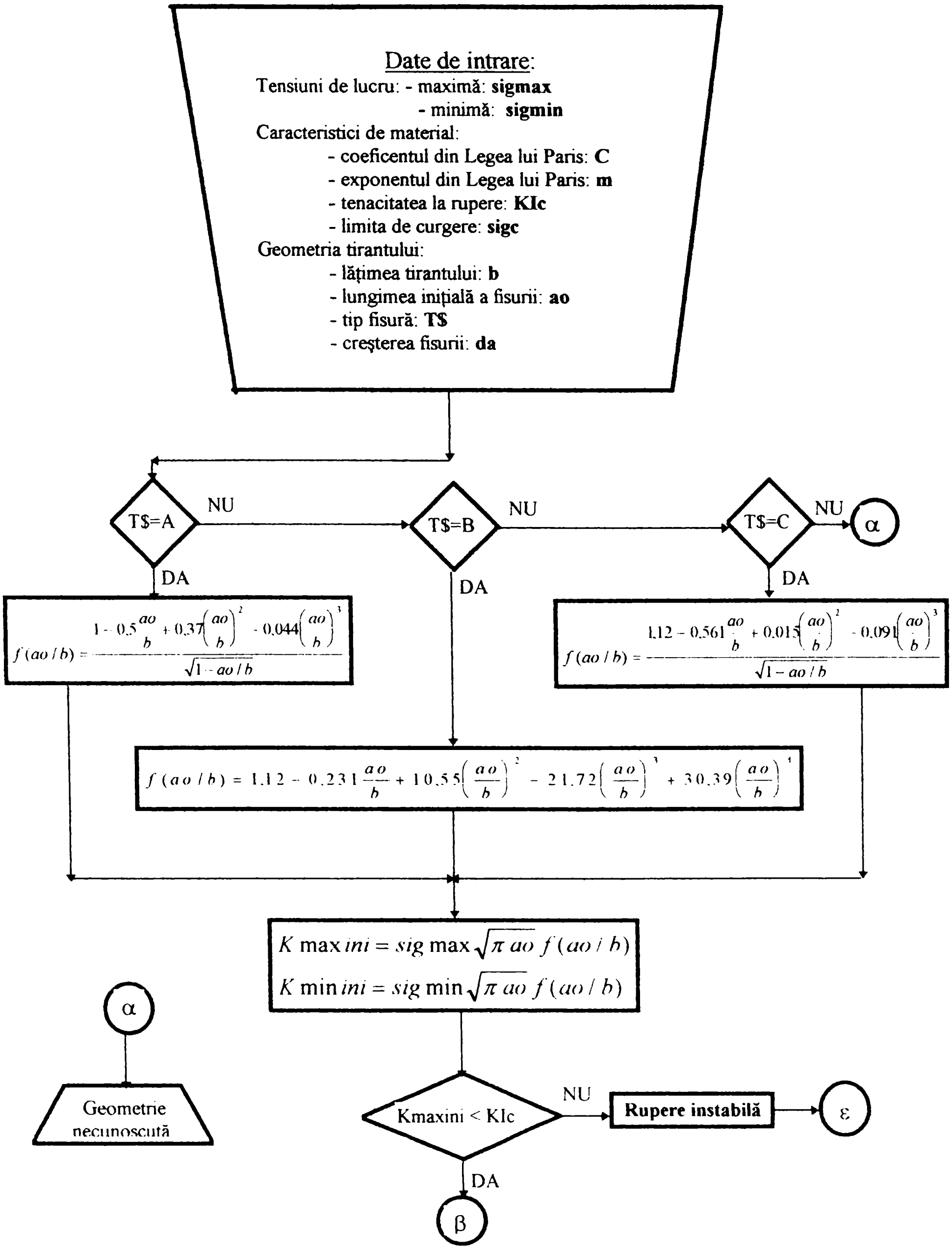
- variaţia lungimii fisurii în funcţie de numărul total de cicluri a = f(N).

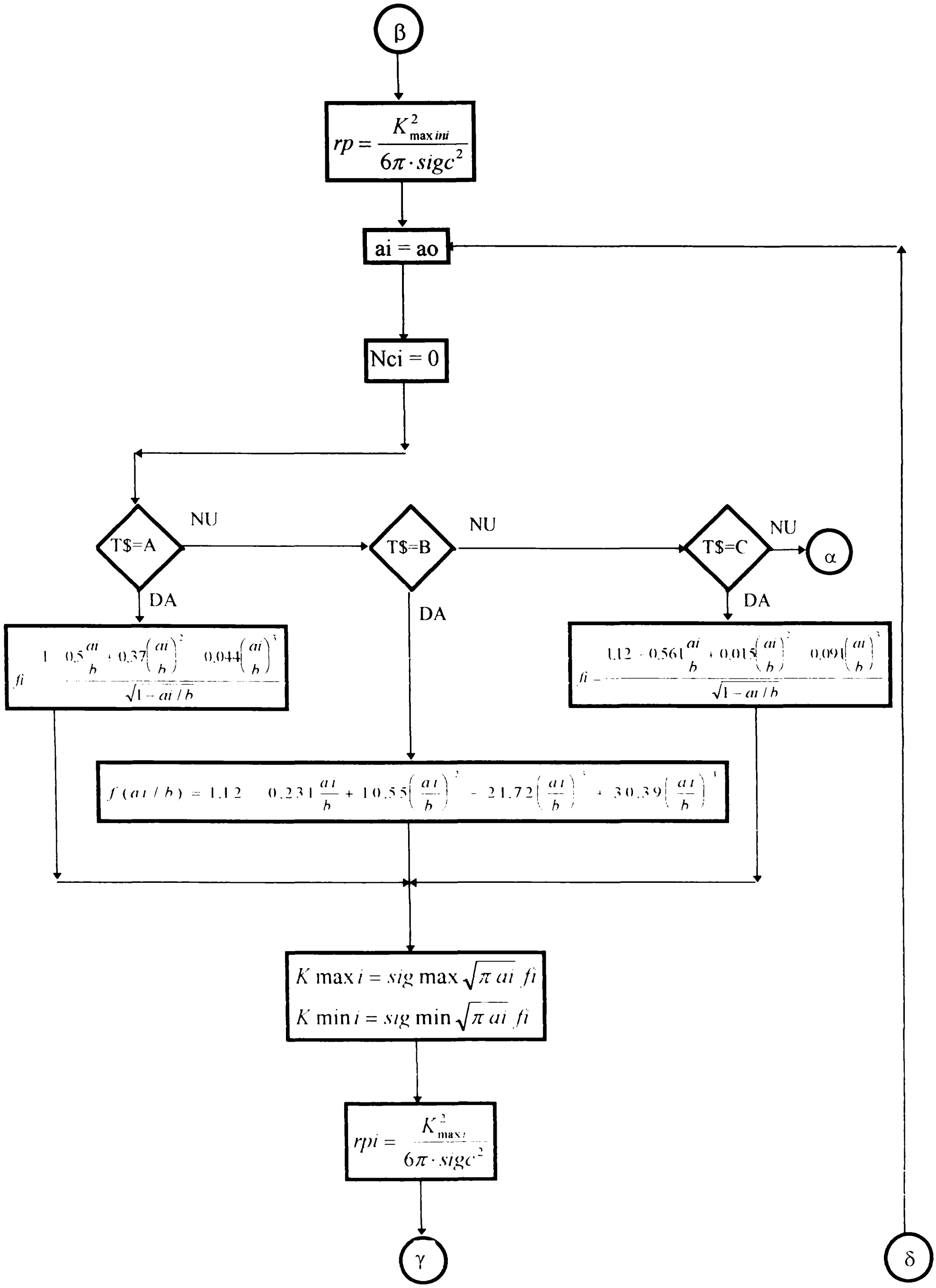
Schema logică a programului este prezentată în Figura 6.8.5.

Rezultatele obţinute pentru câteva rulări, considerându-se pentru fiecare din cele trei tipuri de dispunere (A, B şi C) a fisurii patru lungimi diferite ale fisurii iniţiale (2, 5, 10 şi 15 mm) sunt prezentate în Tabelul 6.8.1.

În Figurile 6.8.6 - 6.8.12 se prezintă variaţiile a = f(N) şi K_{Imax} = f(a) trasate pentru cele trei tipuri de fisuri (A - centrală, B - laterală şi C - două fisuri laterale), pornind în fiecare caz de la o lungime iniţială a fisurii a = 2 mm.

SCHEMA LOGICĂ A PROGRAMULUI **DURABIL** PENTRU DETERMINAREA NUMĂRULUI DE CICLURI PÂNĂ LA RUPERE, DATORATĂ PROPAGĂRII PRIN OBOSEALĂ A UNEI FISURI




β
$rp = \frac{K^2_{max\,ini}}{6\pi \cdot sigc^2}$
ai = ao
Nci = 0
T$=A
NU
DA
T$=B
NU
DA
T$=C
NU
DA
α
$fi = \frac{1 - 0{,}5\frac{ai}{b} + 0{,}37\left(\frac{ai}{b}\right)^2 - 0{,}044\left(\frac{ai}{b}\right)^3}{\sqrt{1 - ai/b}}$
$fi = \frac{1{,}12 - 0{,}561\frac{ai}{b} + 0{,}015\left(\frac{ai}{b}\right)^2 - 0{,}091\left(\frac{ai}{b}\right)^3}{\sqrt{1 - ai/b}}$
$f(ai/b) = 1.12 - 0.231\frac{ai}{b} + 10.55\left(\frac{ai}{b}\right)^2 - 21.72\left(\frac{ai}{b}\right)^3 + 30.39\left(\frac{ai}{b}\right)^4$
$K\max i = sig\max\sqrt{\pi\, ai}\; fi$
$K\min i = sig\min\sqrt{\pi\, ai}\; fi$
$rpi = \frac{K^2_{max\,i}}{6\pi \cdot sigc^2}$
γ
δ

BUPT

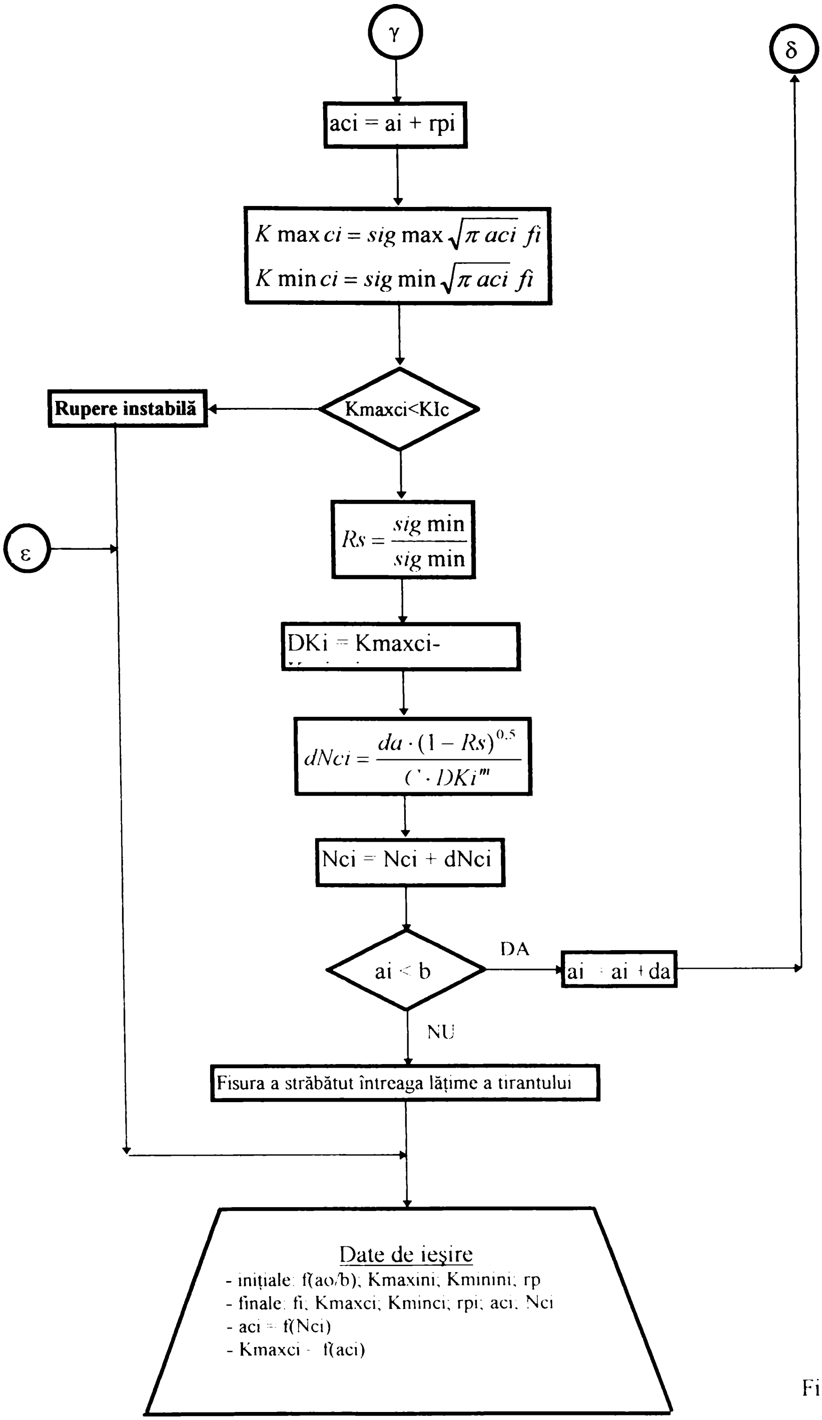

γ
δ
aci = ai + rpi
$K\max ci = sig\max\sqrt{\pi\, aci}\; fi$
$K\min ci = sig\min\sqrt{\pi\, aci}\; fi$
Rupere instabilă
Kmaxci<KIc
ε
$Rs = \frac{sig\min}{sig\min}$
DKi = Kmaxci-
$dNci = \frac{da\cdot(1-Rs)^{0.5}}{C\cdot DKi^{m}}$
Nci = Nci + dNci
ai < b
DA
NU
Fisura a străbătut întreaga lățime a tirantului
Date de ieșire
- inițiale: f(ao/b); Kmaxini; Kminini; rp
- finale: fi; Kmaxci; Kminci; rpi; aci; Nci
- aci = f(Nci)
- Kmaxci = f(aci)

Figura 6.8.5

Tabelul 6.8.1

Tip fisură	Lung. inițială fisură a mm	Funcția f(a/b)$_{ini}$ -	F.i.t. maxim inițial $K_{Imax.ini}$ $N/mm^{3/2}$	F.i.t. minim inițial $K_{Imin.ini}$ $N/mm^{3/2}$	Raza plastică inițial $r_{P.ini}$ mm	Funcția f(a/b)$_{fin}$ -	F.i.t. maxim final $K_{Imax.fin}$ $N/mm^{3/2}$	F.i.t. minim final $K_{Imin.fin}$ $N/mm^{3/2}$	Raza plastică final $r_{p.fin}$ mm	Lung. critica a fisuri a_C mm	Nr. de cicluri până la rupere N cicluri
A	2	1,0001	248,93	184,50	0,019	1,756	3400,06	2520,09	3,541	120,95	37877,9
A	5	1,0006	393,78	291,86	0,049	1,756	3400,06	2520,09	3,541	120,95	22442,9
A	10	1,0023	557,85	413,47	0,092	1,756	3400,05	2520,08	3,541	120,94	14080,7
A	15	1,0052	685,23	507,89	0,148	1,756	3400,04	2520,08	3,541	120,95	10208,3
B	2	1,1189	278,51	206,43	0,024	1,855	3400,05	2520,08	3,529	108,44	26517,9
B	5	1,1198	440,38	326,41	0,061	1,855	3400,05	2520,08	3,529	108,44	15301,6
B	10	1,1232	625,17	463,37	0,123	1,855	3400,04	2520,07	3,529	108,44	9233,1
B	15	1,1323	771,85	572,08	0,188	1,855	3400,04	2520,07	3,529	108,44	6451,1
C	2	1,1220	279,27	206,99	0,025	1,703	3400,11	2520,12	3,548	128,47	28187,0
C	5	1,1221	441,63	327,37	0,061	1,704	3401,65	2521,30	3,548	128,46	17064,9
C	10	1,1226	624,83	463,11	0,123	1,704	3400,11	2520,12	3,548	128,46	11076,4
C	15	1,1235	765,84	567,63	0,185	1,703	3400,15	2520,11	3,548	128,46	8216,2

S-au considerat:
- încărcările : σ_{max} = 99,3 MPa , σ_{min} = 73,6 MPa
- constantele de material : K_{IC} = 3400 $N/mm^{3/2}$, σ_C = 410 MPa , C = 3,92 10^{-10} , n = 2,82
- lățimea tirantului: b = 300 mm
- creșterea fisurii da = 0,01 mm

Tirant cu fisură centrală

Date de intrare:
σ_{max} = 99.3 MPa
σ_{min} = 73.6 MPa
σ_C = 410 MPa
K_{IC}=3400 N/mm$^{3/2}$
C = 3.92 10^{-10}
n = 2.82
b = 150 mm
a = 2 mm
Fisura tip A

Date de iesire:
- initiale:
f(a/b)$_{fin}$ = 1,0001
$K_{Imax,fin}$ = 248.93 N/mm$^{3/2}$
$K_{Imin,fin}$ = 184.50 N/mm$^{3/2}$
r_p = 0.019 mm
- finale:
f(a/b)$_{fin}$ = 1,756
$K_{Imax,fin}$ = 3400.06 N/mm$^{3/2}$
$K_{Imin,fin}$ = 2520.09 N/mm$^{3/2}$
r_p = 3.541 mm
a_C = 120.95 mm
N = 37877.9 cicluri

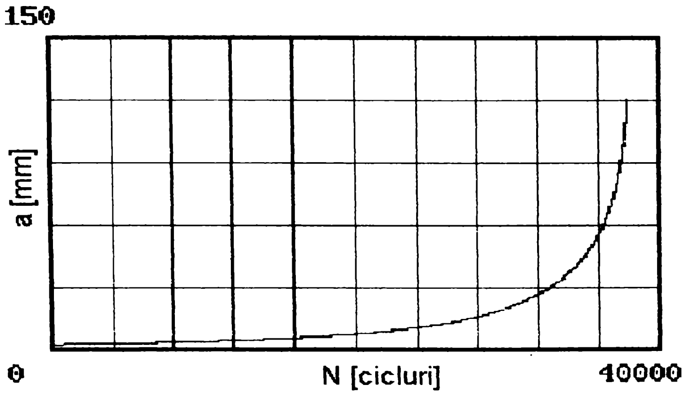


Figura 6.8.6

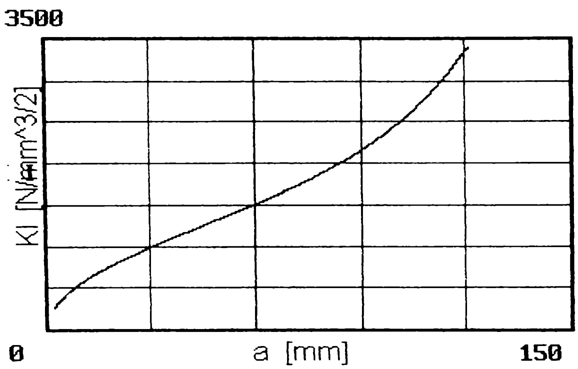


Figura 6.8.7

Tirant cu fisură laterală

Date de intrare:
σ_{max} = 99.3 MPa
σ_{min} = 73.6 MPa
σ_C = 410 MPa
K_{IC}=3400 N/mm$^{3/2}$
C = 3.92 10^{-10}
n = 2.82
b = 300 mm
a = 2 mm
Fisura tip B

Date de iesire:
- initiale:
f(a/b)$_{fin}$ = 1,1189
$K_{Imax,fin}$ = 278.51 N/mm$^{3/2}$
$K_{Imin,fin}$ = 206.43 N/mm$^{3/2}$
r_p = 0.024 mm
- finale:
f(a/b)$_{fin}$ = 1,855
$K_{Imax,fin}$ = 3400.05 N/mm$^{3/2}$
$K_{Imin,fin}$ = 2520.08 N/mm$^{3/2}$
r_p = 3.529 mm
a_C = 108.44 mm
N = 26517.9 cicluri

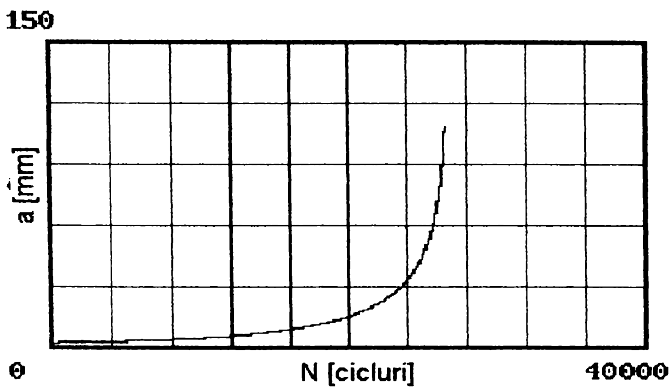


Figura 6.8.9

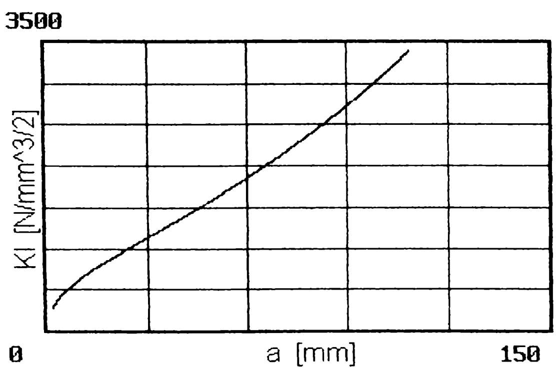


Figura 6.8.10

Tirant cu două fisuri laterale

Date de intrare:
σ_{max} = 99.3 MPa
σ_{min} = 73.6 MPa
σ_C = 410 MPa
K_{IC}=3400 $N/mm^{3/2}$
C = 3.92 10^{-10}
n = 2.82
b = 150 mm
a = 2 mm
Fisura tip C

Date de iesire:
- initiale:
$f(a/b)_{fin}$ = 1,1220
$K_{Imax,fin}$ = 279.51 $N/mm^{3/2}$
$K_{Imin,fin}$ = 206.99 $N/mm^{3/2}$
r_p = 0.025 mm
- finale:
$f(a/b)_{fin}$ = 1,703
$K_{Imax,fin}$ = 3400.11 $N/mm^{3/2}$
$K_{Imin,fin}$ = 2520.12 $N/mm^{3/2}$
r_p = 3.548 mm
a_C = 128.47 mm
N = 28187.0 cicluri

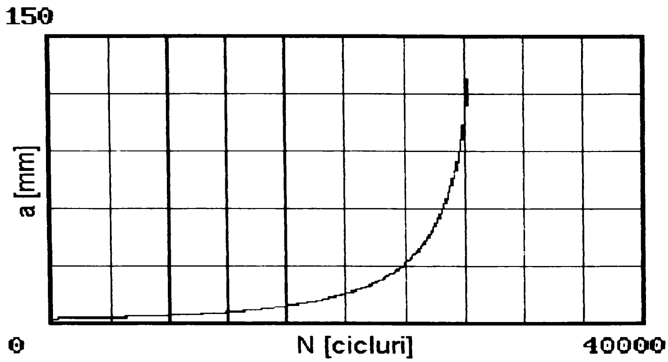


Figura 6.8.11

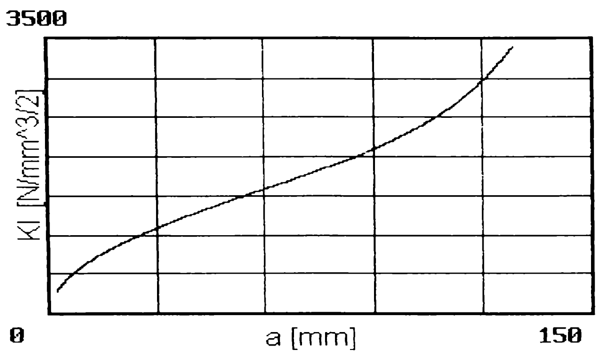
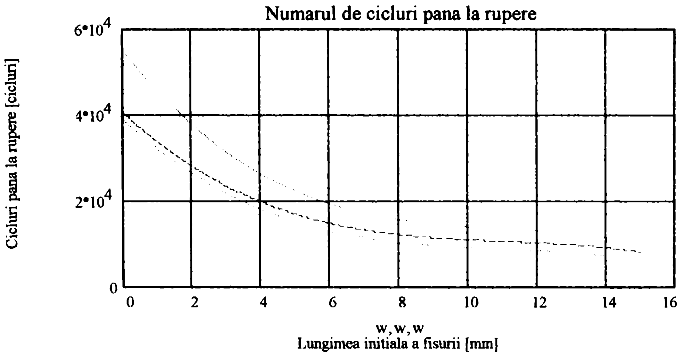


Figura 6.8.12

În Figura 6.8.13 se prezintă variaţia numărului de cicluri până la rupere în funcţie de lungimea iniţială a fisurii pentru cele trei cazuri considerate.



Fisura Tip A
Fisura Tip B
Fisura Tip C

Figura 6.8.13

Programul **DURABIL** realizat de autor precum şi diagramele din Figurile 6.8.6 .. 6.8.13 pot fi utilizate direct pentru evaluarea durabilităţii tiranţilor. Astfel dacă printr-o anumită metodă se detectează în tirant o fisură, cu ajutorul programului realizat, sau cu ajutorul diagramelor de mai sus se poate estima numărul de ciculuri până la ruperea tirantului.

În aceast paragraf s-a prezentat un model matematic de estimare a durabilităţii unui tirant în cazul în care după o anumită perioadă de funcţionare apare o fisură. Această metodologie se bazează pe conceptele Mecanicii ruperii materialelor.

La calculul durabilităţii tirantului s-a ţinut cont şi de enclava plastică care se formează la vârful fisurii.

Analizând cele trei cazuri studiate se remarcă că indiferent de lungimea iniţială a fisurii pentru un anumit mod de dispunere a acesteia, lungimea critică a fisurii de la care se produce ruperea instabilă este aceiaşi, $\mathbf{a}_C$.

Cea mai defavorabilă situaţie corespunde apariţiei în tirant a unei fisuri laterale (Figura 6.8.3).

Se observă că apariţia unor fisuri în tirant diminuează considerabil durata de viaţă în comparaţie cu numărul de cicluri până la rupere obţinut prin încercările la oboseală, în care se include şi perioada de incubnaţie a fisurii.

Se recomandă efectuarea unor investigaţii nedistructive pe tirant după anumite numere de cicluri, care împreună cu metodologia prezentată mai sus să poată furniza informaţii privind durabilitatea tirantului.

6.9 CONTRIBUȚII LA DETERMINAREA STĂRII DE TENSIUNE ŞI A PARAMETRILOR DE MECANICA RUPERII DIN ELEMENTELE DE ÎMBINARE ALE TIRANTULUI UNUI EXCAVATOR

6.9.1 INTRODUCERE

Tirantul unui excavator este realizat din mai multe tronsoane rigidizate prin elemente de îmbinare. Cercetările teoretice şi experimentale au dovedit că în zonele de îmbinare apare un puternic efect de concentrare al tensiunilor, fapt ce poate conduce la apariția unor fisuri sau ruperi.

Un astfel de element de legătură, este urechea de prindere, prezentată în Figura 6.9.1.1.

Aplicarea metodei elementelor finite a permis modelarea stării de tensiune din urechile de prindere ale tirantului, unde solicitările de contact asociate cu o serie de condiții de lucru specifice utilajelor miniere favorizează apariția fisurilor, care au condus în unele cazuri la ruperea tiranților. S-a utilizat metoda elementelor finite şi pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii considerând o fisură, care se dezvoltă din orificiul circular al urechii. În final s-a efectuat, tot cu ajutorul metodei elementelor finite un studiu al propagării fisurii, datorită solicitărilor variabile.

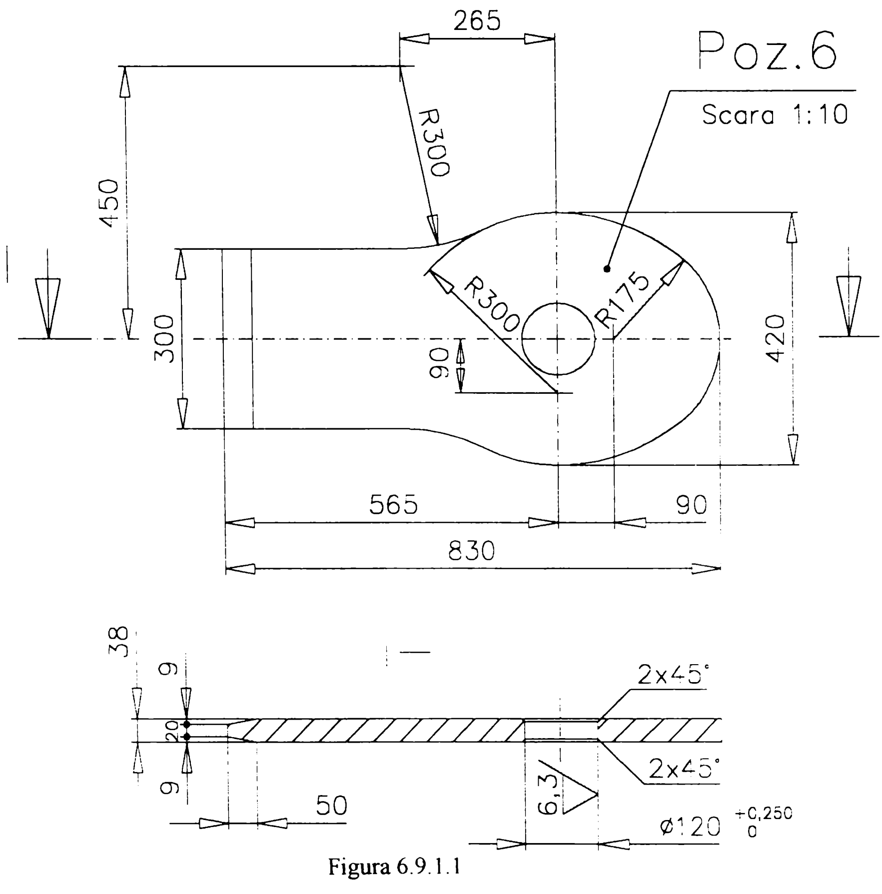
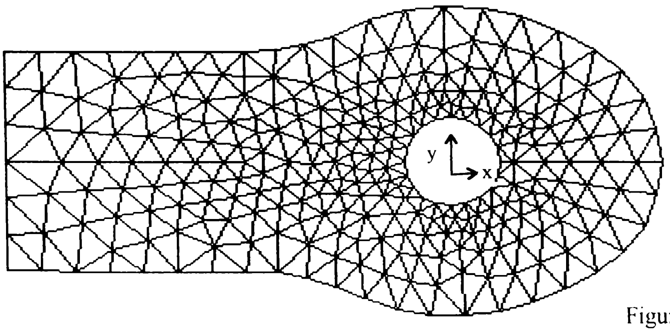


Figura 6.9.1.1

6.9.2. DETERMINAREA PRIN ANALIZĂ CU ELEMENTE FINITE A STĂRII DE TENSIUNE DIN URECHEA TIRANTULUI UNUI EXCAVATOR

S-a efectuat analiza stării de tensiune, din urechea având geometria dată în Figura 6.9.1.1 cu ajutorul programului FRANC2DL. Preprocesarea s-a realizat cu programul CASCA. Astfel după definirea geometriei, a constantelor de material şi a constantelor geometrice (în acest caz grosimea urechii 38 mm), am realizat discretizarea utilizând elemente finite triunghiulare cu 6 noduri pe element de tip placă SHELL3. Discretizarea s-a făcut în 493 de elemente conectate în 1055 noduri, Figura 6.9.2.1



Discretizare
Tip element SHELL3
Număr elemente = 493
Număr noduri = 1055
Grosime element 38mm

Figura 6.9.1.2

După discretizare s-a trecut la definirea rezemărilor şi încărcărilor. Astfel am blocat deplasările pe direcţiile **x** şi **y** ale nodurilor din partea stângă a urechii, partea rigidizată cu tirantul. Pentru a modela cât mai exact încărcarea care se transmite urechii, datorită îmbinării cu bolţ, am considerat următoarele ipoteze:

- calculul urechii s-a efectuat pe baza valoarii maxime a încărcării tirantului în timpul exploatării, corespunzătoare tensiunii maxime σ_{max} 99,3 MPa. Ţinând cont că la capetele fiecărui tirant există două urechi de prindere rezultă $\sigma_{max,ureche} = 49{,}65$ MPa.

- întrucât transmiterea sarcinii se realizează prin intermediul unui bolţ, s-a considerat că încărcarea se face cu sarcină distribuită, normală pe suprafaţa orificiului, iar variaţia acesteia este după o lege parabolică, Figura 6.9.2.2.

- definirea încărcării s-a făcut pe jumătate din suprafaţa orificiului astfel: având valoarea 0 la extremităţi şi valoarea p_{max} la mijloc. Expresia valorii maxime a încărcării p_{max}, este dată în [S20] de relaţia:

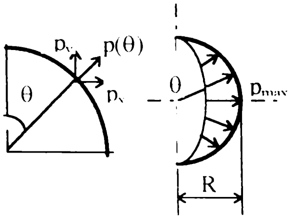


Figura 6.9.2.2

$$p_{max} = \frac{F\,\pi^2}{16\,R\,t} \qquad (6.9.2.1)$$

unde:

F reprezintă forţa axială transmisă de ureche:

F = $\sigma_{max,ureche}\,A_{ureche} = 49{,}65 \times 300 \times 38 = 566010$ N

R = 60 mm raza orificiului urechii

t = 38 mm grosimea urechii

Rezultă : $p_{\max} = \dfrac{566010 \cdot \pi^2}{16 \cdot 60 \cdot 38} = 153{,}13 \quad MPa$

În Figura 6.9.2.3 se prezintă variația tensiunii σ_x obținută în urma rulării programului FRANC2DL,

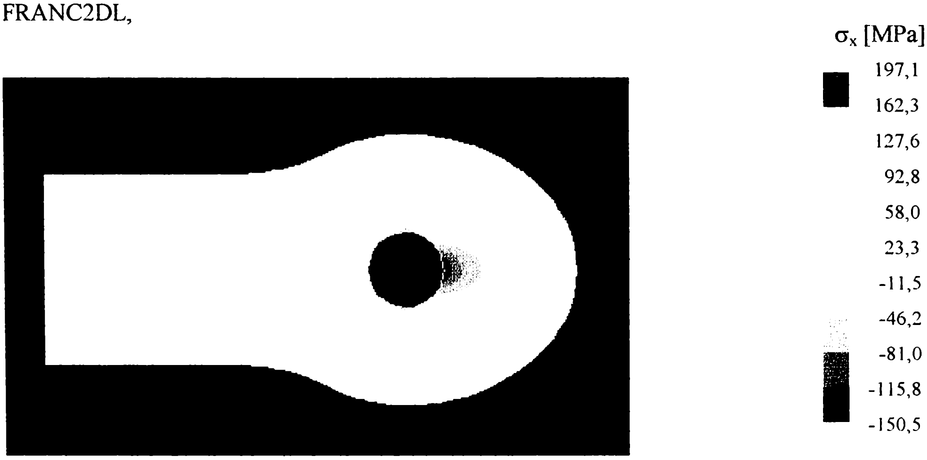


Figura 6.9.2.3

iar în Figura 6.9.2.4 variația tensiunii σ_y.

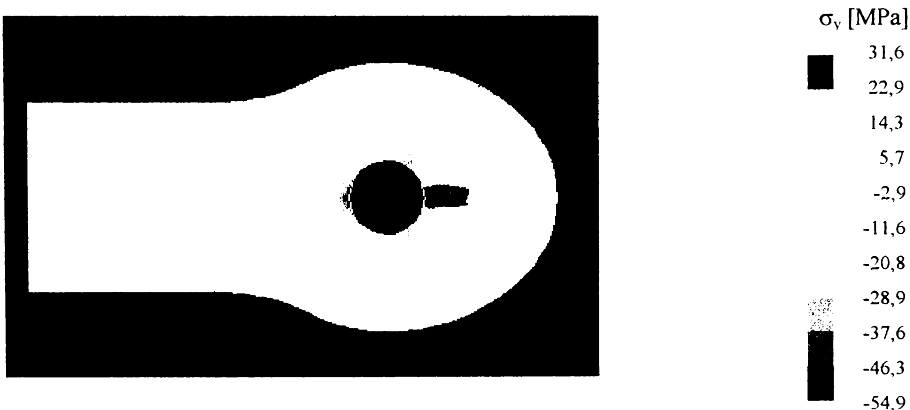


Figura 6.9.2.4

Din Figurile 6.9.2.3. și 6.9.2.4 se observă fenomenul de concentrare a tensiunilor, în jurul orificiului circulare.

În Tabelul 6.9.2.1 se prezintă variaţia tensiunilor σ_x şi σ_y pe direcţia x, pornind de la suprafaţa orificiului circular spre extremitatea urechii.

Tabelul 6.9.2.1

NOD	DISTANŢA DE LA MARGINEA ORIFICIULUI x [mm]	TENSIUNEA σ_x [MPa]	TENSIUNEA σ_y [MPa]
65	0,00	-147,89	27,24
1028	10,33	-119,47	30,84
70	18,60	-102,31	30,81
913	37,20	-72,51	27,98
71	53,73	-50,70	24,56
765	70,26	-38,87	22,70
72	86,80	-28,66	21,82
617	105,04	-20,89	21,00
73	126,07	-14,59	20,86
474	148,80	-9,19	20,86
74	171,53	-4,77	20,76
283	188,07	-2,45	20,85
1	205,00	-0,64	20,95

În Tabelul 6.9.2.2 se prezintă variaţia tensiunilor σ_x şi σ_y pe direcţia y, pornind de la suprafaţa orificiului circular spre extremitatea urechii.

Tabelul 6.9.2.2

NOD	DISTANŢA DE LA MARGINEA ORIFICIULUI y [mm]	TENSIUNEA σ_x [MPa]	TENSIUNEA σ_y [MPa]
50	0,00	204,45	-3,31
934	10,81	118,44	9,19
104	21,62	87,19	12,18
642	35,52	58,91	10,72
640	47,88	52,15	8,93
499	63,33	42,19	5,69
497	80,32	34,53	3,23
316	98,86	26,58	1,62
314	126,66	15,22	0,20
50	150,00	3,91	0,07

În Figurile 6.9.2.5 şi 6.9.2.6 am reprezentat variaţiile tensiunilor σ_x şi σ_y pe direcţiile **x**, respectiv **y** care pornesc din orificiul circular.

Direcţia x

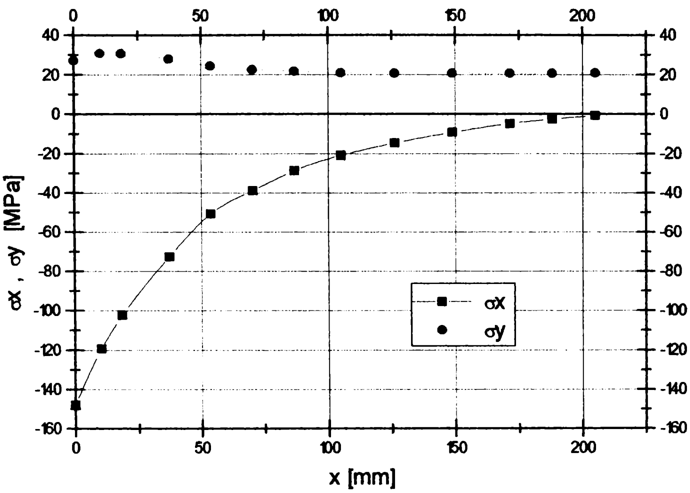


Figura 6.9.2.5

Direcţia y

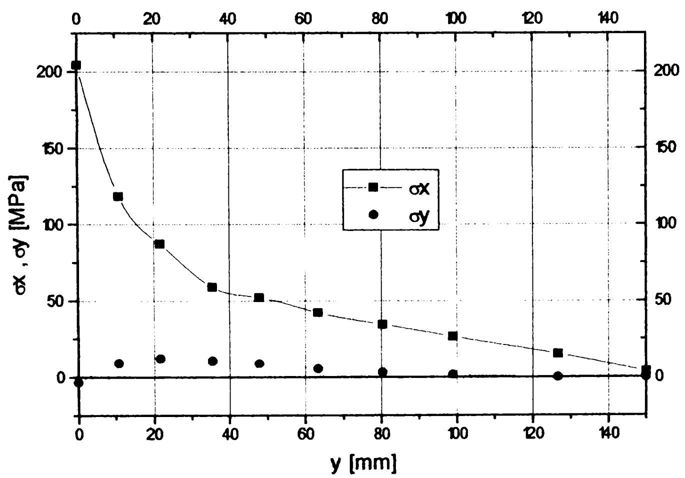


Figura 6.9.2.6

Se observă că tensiunea maximă σ_x se obține pe conturul orificiului, pe direcția y: σ_x**=204,45 MPa.** Pe baza acestei valori s-a calculat coeficentul teoretic de concentrare a tensiunilor k_t, obținut în urma analizei cu elemente finite:

$$k_t = \frac{\sigma_{max,orificiu}}{\sigma_{max,ureche}} = \frac{204,45}{49,65} = 4,118 \qquad (6.9.2.2)$$

6.9.3 DETERMINAREA FACTORULUI DE INTENSITATE A TENSIUNII PENTRU O FISURĂ CE SE DEZVOLTĂ DIN ORIFICIUL CIRCULAR

În continuare s-a determinat variația factorului de intensitate a tensiunii K_I, în funcție de lungimea unei fisuri, care se dezvoltă din orificiul circular

Pentru a studia variația factorului de intensitate a tensiunii K_I în funcție de lungimea fisurii **a** am definit în programul FRANC2DL fisuri cu lungimi de 10, 15, 30,..., 135 mm, programul a rediscretizat zona adiacentă fisurii, creând singularitatea la vârful acesteia, apoi pentru fiecare lungime a fisurii am rulat programul, înregistrând valoarea factorului de intensitate a tensiunii, obținut prin metoda extrapolării deplasărilor. Pentru exemplificare în Figura 6.9.3.1 se prezintă zona adiacentă fisurii pentru lungimea fisurii **a=15 mm**, iar în Figura 6.9.3.2 distribuția tensiunii în vecinătatea fisurii. De asemenea în Figura 6.9.3.3 am prezentat deformata zonei din vecinătatea fisurii pentru lungimea maximă a fisurii **a=135 mm**.

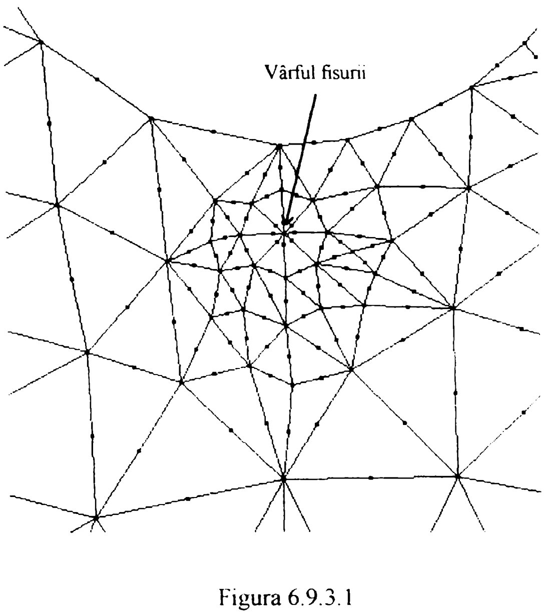


Figura 6.9.3.1

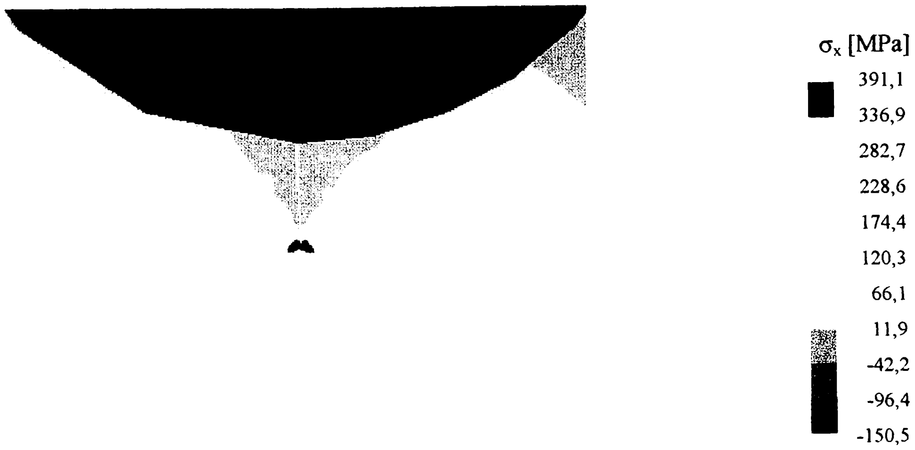


Figura 6.9.3.2

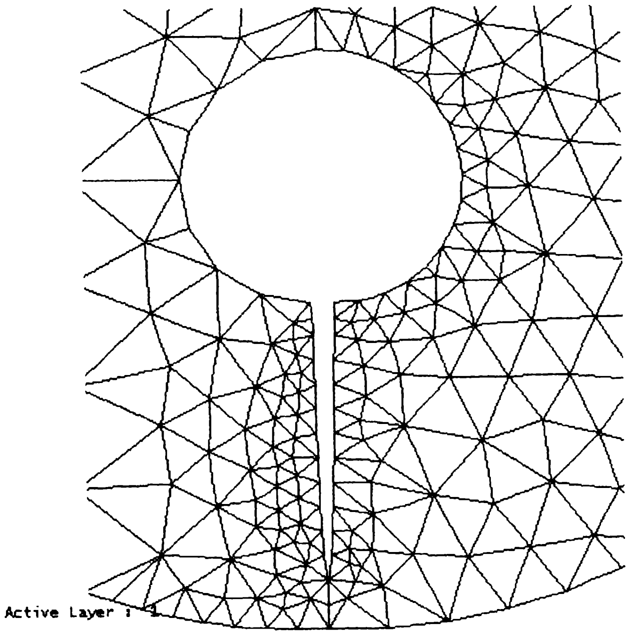


Figura 6.9.3.3

Rezultatele obținute în urma rulărilor sunt prezentate în Tabelul 6.9.3.1 iar variația factorului de intensitate a tensiunii K_I în funcție de lungimea fisurii a este prezentată în Figura 6.9.3.4.

Tabelul 6.9.3.1

Lung. fisura **a** mm	10	15	30	45	60	75	90	105	120	135
F.i.t K_I $\frac{N}{mm^{3/2}}$	845,8	910,5	951,1	967,0	997,2	1029	1087	1175	1326	1615

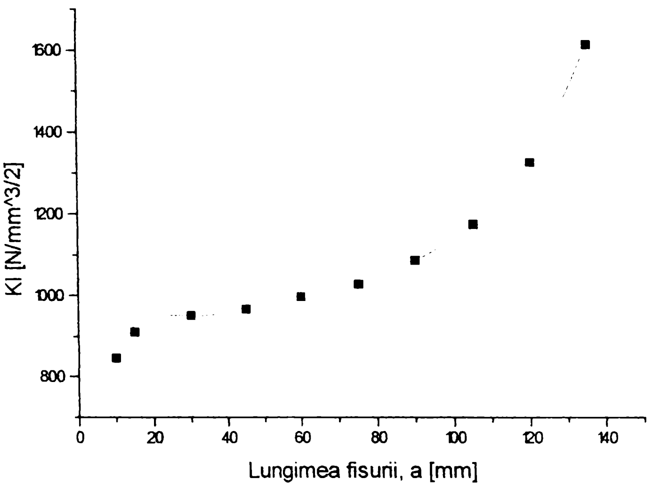


Figura 6.9.3.4

Comparând valorile factorului de intensitate a tensiunii K_I pentru fisura ce se dezvoltă din orificiul circular al urechii de prindere cu valoarea tenacității la rupere pentru oțeleul St52-3 din care este confecționată urechea: K_{IC} = 3471,21 N/mm$^{3/2}$ (paragraful 6.7.1), se poate aprecia că pentru toate lungimile fisurii $K_I < K_{IC}$, adică factorul de intensitate a tensiunii nu atinge valoarea tenacității la rupere, deci nu apare pericolul ruperii instabile a urechii datorită dezvoltării unei fisuri din orificiul circular.

6.9.4 DETERMINAREA DURABILITĂŢII URECHII SUB ACŢIUNEA SARCINILOR VARIABILE

Problema care s-a pus în continuare a fost determinarea creşterii lungimii unei fisuri dezvoltate din orificiul circular al urechii de prindere sub acţiunea ciclurilor de oboseală şi care este numărul de cicluri până la rupere .

Determinarea numărului de cicluri în funcţie de lungimea fisurii s-a efectuat cu opţiunea PROPAGATE a programului **FRANC2DL**. Pentru studiul propagării fisurii, cu ajutorul metodei elementelor finite, programul rediscretizează şi rezolvă sistemul de ecuaţii pentru fiecare creştere a fisurii, fapt ce a condus la o durată de 73 minute pentru efectuarea întregii analize.

Programul **FRANC2DL** calculează pentru fiecare creştere a fisurii direcţia de propagare aacesteia. Pentru cazul studiat direcţia de propagare a fost perpendiculară pe axa longitudinală.

Deoarece studiul propagării fisurii se realizează pe baza legii lui Paris, relaţia (6.8.1), trebuiesc introduşi ca şi constante de material: coeficentul din legea lui Paris, **C;** exponentul din legea lui Paris, **n** şi tenacitatea la rupere, K_{IC} Deoarece urechea este confecţionată din acelaşi material ca şi tirantul, adică St 52-3 am folosit valorile: $\mathbf{C = 3{,}92\ 10^{-10}}$ $mm^{2,5}$/nr. cicluri şi $\mathbf{n = 2{,}82}$

Analiza propagării fisurii s-a efectuat pornind de la o lungime iniţială a fisurii $\mathbf{a_0 = 10}$ mm iar propagarea s-a realizat în 70 de paşi, pentru fiecare pas considerându-se o creştere a fisurii **da=2** mm. Variaţia tensiunii care produce solicitarea variabilă s-a considerat:

$$\Delta\sigma = \sigma_{max,ureche} - \sigma_{min,ureche} = \mathbf{49{,}65 - 36{,}8 = 12{,}85}\ \text{MPa}$$

Rularea a durat 73 minute în final obţinând variaţia numărului de cicluri **N** în funcţie de lungimea fisurii **a,** Figura 6.9.4.1

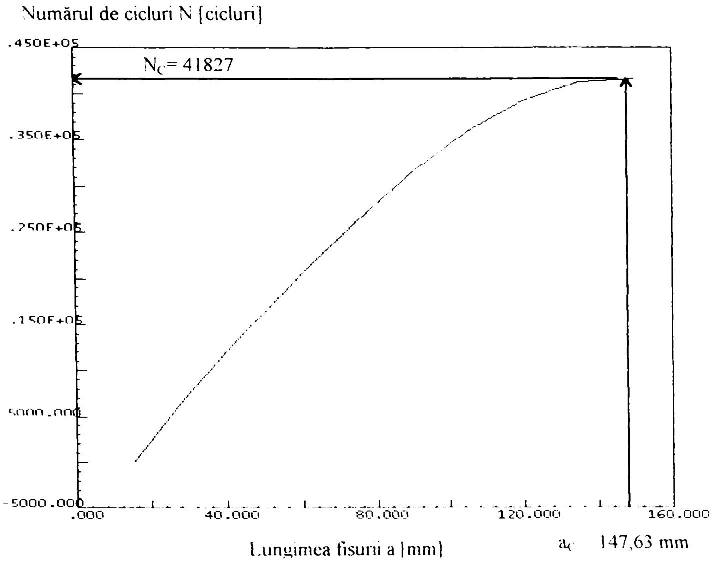


Figura 6.9.4.1

De asemenea programul **FRANC2DL** permite şi vizualizarea variaţiei factorului maxim de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_{Imax}}$ în funcţie de lungimea fisurii **a**, Figura 6.9.4.2.

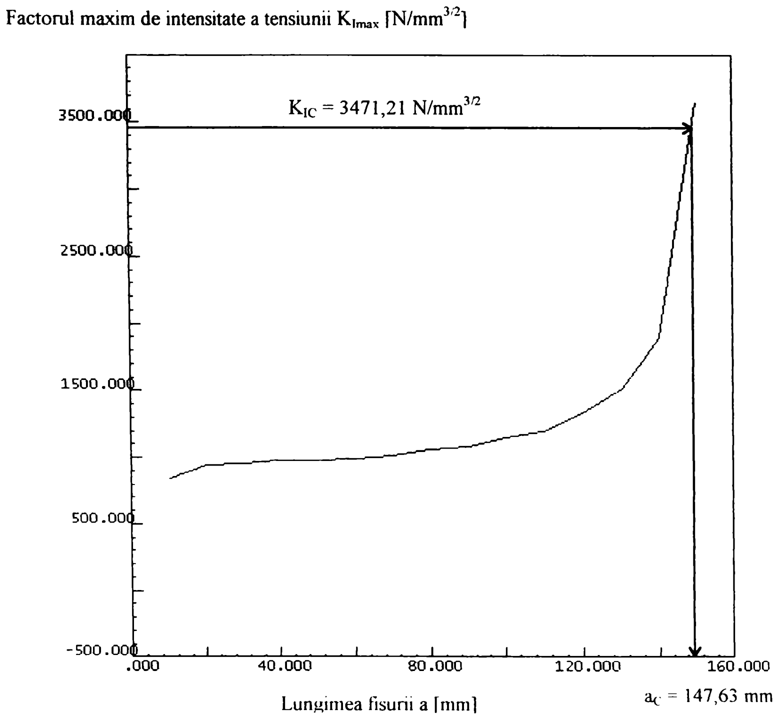


Figura 6.9.4.2

După cum se observă din Figura 6.9.4.2, curba care reprezintă variaţia factorului maxim de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_{Imax}}$ în funcţie de lungimea fisurii **a** la propagarea prin oboseală a fisurii are aceiaşi alură ca şi variaţia factorului de intensitate a tensiunii trasată pe baza analizei cu elemente finite, Figura 6.9.3.4.

Comparând valoarea tenacităţii la rupere a materialului St 52-3, determinată experimental (paragraful 6.7.1): $\mathbf{K_{IC} = 3471,21\ N/mm^{3/2}}$ cu curba de variaţie a factorului maxim de intensitate a tensiunii se poate determina lungimea critică a fisurii $\mathbf{a_C}$ la care $\mathbf{K_{Imax} = K_{IC}}$, rezultând:

$$\mathbf{a_C = 147,63\ mm}$$

Cunoscând lungimea critică a fisurii, $\mathbf{a_C}$, din Figura 6.9.4.2 se poate determina numărul de cicluri până la rupere. Astfel pentru ca fisura iniţială (de lungime a=15 mm) să ajungă la lungimea critică a_C = 147,63 mm sunt necesare un număr de cicluri $\mathbf{N_C}$ = **41827 cicluri**.

6.10 CONCLUZII

Pe baza studiului efectuat asupra durabilității tiranților excavatoarelor se desprind următoarele concluzii:

I.) - Caracteristicile mecanice la tracțiune ale oțelului St 52-3 nu prezintă modificări importante față de oțelul similar St 52-3 și se încadrează în limitele prescrise pentru OL 52 -4K.

II.) - Încercările la oboseală la diferite grade de asimetrie ale ciclurilor, caracterizate prin σ_{min} = 73,6 N/mm^2 au evidentiat urmatoarele:

a) la epruvetele confecționate din St 52-3 pentru tensiuni σ_{max} > 150 MPa rezultatele experimentale se plasează în jurul curbei de rupere prin oboseală obținute la R = 0,5 ; ceea ce este satisfacator, deoarece la grade de asimetrie R<0,5 rezistența la oboseală scade.

b) pentru tensiuni maxime σ_{max} < 150 MPa durabilitățile epruvetelor au depășit durabilitatea corespunzătoare gradului de asimetrie R = 0,5, încercările fiind oprite înainte de rupere.

c) încercările pe epruvetele sudate din OL 52-4K au dovedit de asemenea o comportare bună la solicitări variabile corespunzătoare gradului de asimetrie R = 0,184 și R = 0,26. Deși epruvetele au suduri și gradele de asimetrie au fost mai mici decât R = 0,5 punctele s-au plasat foarte aproape de curba de rupere la oboseală a oțelului St 52-3 nesudat.

d) încercările pe epruvete cu concentrator de tensiune, de forma orificiului circular au evidențiat o scădere a durabilității. Astfel durabilitățile tuturor epruvetelor încercate, la diferite grade de asimetrie ale ciclurilor, s-au situat sub curba de rupere prin oboseală.

Comportarea la solicitări variabile relevă faptul că ruperea epruvetelor s-a făcut în jurul curbei de durabilitate atât pentru epruvetele confecționate din materialul tirantului St 52-3 cât și pentru epruvetele sudate confecționate din OL 52-4K. De exemplu pentru un ciclul de solicitare având σ_{max} = 245 MPa și Rs=0,3 rezultatele experimentale sunt prezentate comparativ în Tabelul 6.10.1, respectiv în Figura 6.10.1.

Tabelul 6.10.1

Tip epruvetă	Material	Număr cicluri		
		inițiere rupere[H14]	rupere [H14]	rupere (experimental)
Plată	St 52-3	24.000	500.000	376.200
Cu orif. circular	St 52-3			268.000
Sudată	OL 52-4K			432.000

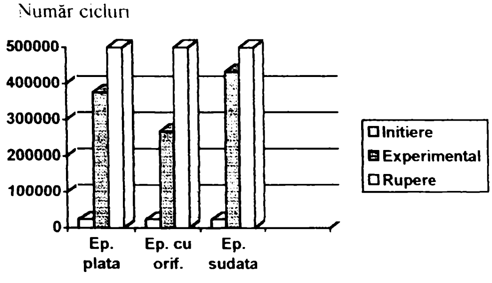


Figura 6.10.1

III.) - Încercările de rezilienţă pentru oţelul St 52-3 la toate temperaturile au evidenţiat că energia de rupere este mult superioară valorii limită de 27 J, ceea ce indică că acest oţel mai are rezervă pentru a-şi păstra capacitatea de deformare.

IV.) - Încercările la întindere dinamică au dovedit existenţa unui punct de maxim în ceea ce priveşte energia consumată la rupere corespunzătoare vitezei de şoc v_0 = 4,85 m/sec. La depăşirea acestei viteze de impact scade capacitatea de absorbţie a energiei de rupere la tracţiunea prin şoc.

V.) - Încercările de mecanica ruperii pentru determinarea lui K_{IC} au evidenţiat următoarele:

a) valoarea tenacităţii la rupere a oţelului St 52-3 determinată la temperatura ambiantă s-a plasat în limitele prescrise în literatură pentru oţeluri cu compoziţie chimică şi caracteristici mecanice statice asemănătoare.

b) tenacitatea la rupere a oţelului St 52-3 obţinută în condiţii de temperatură scăzute până la -30^0C nu a evidenţiat fenomenul de fragilizare. Autorul propune pentru intervalul de temperaturi studiat [-30^0C....$+20^0$C] o corelaţie între tenacitatea la rupere şi temperatură.

VI.) - Pe baza tenacităţii la rupere determinată experimental se propune un model de calcul al durabilităţii la oboseală a unui tirant pe baza conceptelor mecanicii ruperii. Modelul de calcul se bazează pe legea lui Paris, care exprimă corelaţia dintre viteza de propagare a fisurii de oboseală **da/dN** şi variaţia factorului de intensitate a tensiunii ΔK_I, dar ţine cont şi de coeficenţii de asimetrie ai ciclurilor. De asemenea modelul propus de autor ia în considerare raza zonei plastice care se formează la vârful fisurii, pe baza criteriului de plasticitate Von Mises.

Calculul durabilităţii tiranţilor se face cu ajutorul unui program elaborat de autor, care ia în considerare trei moduri diferite de dispunere a fisurilor în tirant.

Prezenţa unor fisuri detectate prin metode nedistructive asociate cu această metodă de calcul permite estimarea durabilităţii la solicitări variabile.

VII.) - Studiul cu elemente finite a urechii de prindere a tirantului a evidenţiat:

a) efectul de concentrare a tensiunilor datorat orificiului circular, exprimat prin coeficentul teoretic de concentrare a tensiunilor, având valoarea $\mathbf{k_t = 4,118}$.

b) variaţia factorului de intensitate a tensiunii maxim $\mathbf{K_{Imax}}$ în funcţie de lungimea unei fisuri ce se dezvoltă din orificiul circular.

c) studiul propagării prin oboseală a fisurii a permis determinarea lungimii critice a fisurii la care urechea tirantului se rupe $\mathbf{a_c}$**=147,63 mm** şi numărul de cicluri până la rupere N_C = **41827 cicluri.** Comparând această valoare a numărului de cicluri până la rupere a urechii cu valorile durabilităţii tirantului cu fisură, prezentate în **Tabelul 6.8.1** se remarcă faptul că durabilitatea urechii este mai mare decât cea a tirantului. În Figura 6.10.2 se prezintă comparativ durabilităţile tirantului, respectiv a urechii în ipoteza existenţei unei fisuri iniţiale de lungime $\mathbf{a_0 = 10}$ **mm**.

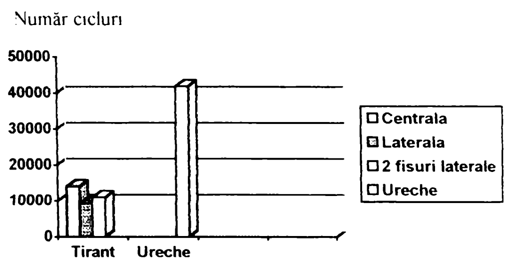


Figura 6.10.2

CAPITOLUL 7
PROGRAME REALIZATE PENTRU CALCULUL PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII

Pentru calculul parametrilor din MECANICA RUPERII am realizat mai multe programe, unele dintre acestea au fost scrise în utilitarul matematic **MathCAD,** altele mai complexe au necesitat scrierea lor într-un limbaj de programare: **QBASIC** şi **Visual BASIC.** Dintre aceste programe, programul **DURABIL** elaborat pentru calculul durabilităţii tiranţilor a fost prezentat în capitolul 6, paragraful 6.8. În acest capitol sunt prezentate alte două programe realizate.

7.1 PROGRAMUL **EXTENS** PENTRU DETERMINAREA FACTORULUI DE INTENSITATE A TENSIUNII PRIN METODA EXTRAPOLĂRII TENSIUNILOR

Interpretarea rezultatelor analizei cu elemente finite şi estimarea parametrilor de Mecanica ruperii pe baza datelor de ieşire se poate face prin mai multe metode, prezentate detaliat în paragraful 3.5. O astfel de metodă, pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii, este metoda extrapolării tensiunii (paragraful 3.5.2). Determinarea factorului de intensitate a tensiunii prin această metodă necesită utilizarea unei drepte de regresie, trasată pe baza tensiunilor obţinute în urma rulării unui program de analiză cu elemente finite. Valoarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful fisurii $\mathbf{K_I}$, reprezintă ordonata la origine obţinută prin extrapolarea dreptei de regresie, Figura 7.1.1.

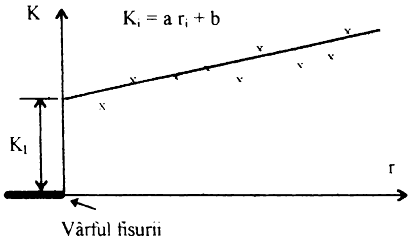


Figura 7.1.1

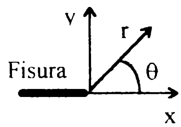


Figura 7.1.2

Coordonatele punctelor, marcate cu "x" în Figura 7.1.1, ($\mathbf{r_i}$, $\mathbf{K_i}$), reprezintă:

- $\mathbf{r_i}$ poziţia nodurilor pe direcţia considerată, respectiv
- $\mathbf{K_i}$ valoarea factorului de intensitate a tensiunii calculat cu relaţia (7.1.1), pe baza tensiunii σ_{yi} conform sistemului polar de coordonate, ales cu originea la vâful fisurii, Figura 7.1.2:
- $\mathbf{i = 1,...,N}$, unde $\mathbf{N}$ este numărul de noduri pe direcţia considerată

$$K_i = \frac{\sigma_{yi}\sqrt{2\pi r_i}}{\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)} \qquad (7.1.1)$$

Pentru trasarea dreptei de regresie programul foloseşte metoda celor mai mici pătrate. Această metodă se bazează pe minimizarea sumei pătratelor abaterilor, [D7]. Astfel dacă se cunosc în $\mathbf{N}$ noduri de coordonate ($\mathbf{r_i}$, θ) valorile tensiunii σ_{yi} se caută o dreaptă de regresie de forma:

$$K_i = a\,r_i + b \tag{7.1.2}$$

unde **a** - este panta dreptei de regresie,

b = K_I este ordonata la origine a dreptei de regresie, adică valoarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful fisurii.

Calculul parametrilor dreptei de regresie **a, b** se face minimizând suma pătratelor abaterilor

$$d_i = K_i - a\,r_i - b \tag{7.1.3}$$

dintre valoarea calculată cu relația (7.1.1) și valoarea interpolată a lui $\mathbf{K_i}$ dată de relația (7.1.2):

$$S = \sum_{i=1}^{N} d_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (K_i - a\,r_i - b)^2 \tag{7.1.4}$$

Pentru minimizarea sumei pătratelor abaterilor se egalează cu zero derivatele în raport cu **a** și **b**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= \sum_{i=1}^{N} 2(a\,r_i^2 + b\,r_i - r_i\,K_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= \sum_{i=1}^{N} 2(a\,r_i + b - K_i) = 0 \end{aligned} \tag{7.1.5}$$

Ordonând relațiile din (7.1.5) se obține sistemul liniar cu necunoscutele **a** și **b**:

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{N} r_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} r_i &= \sum_{i=1}^{N} r_i K_i \\ a\sum_{i=1}^{N} r_i + N\,b &= \sum_{i=1}^{N} K_i \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

care are soluțiile:

$$\begin{aligned} a &= \frac{N\sum_{i=1}^{N} r_i K_i - \sum_{i=1}^{N} r_i \sum_{i=1}^{N} K_i}{N\sum_{i=1}^{N} r_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} r_i\right)^2} \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^{N} r_i^2 \sum_{i=1}^{N} K_i - \sum_{i=1}^{N} r_i \sum_{i=1}^{N} r_i K_i}{N\sum_{i=1}^{N} r_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} r_i\right)^2} \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

Programul eleborat calculează și parametrii regresiei: - coeficentul de determinare, **Rd**:

$$Rd = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} r_i K_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i \sum_{i=1}^{N} K_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} K_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} K_i\right)^2} \tag{7.1.8}$$

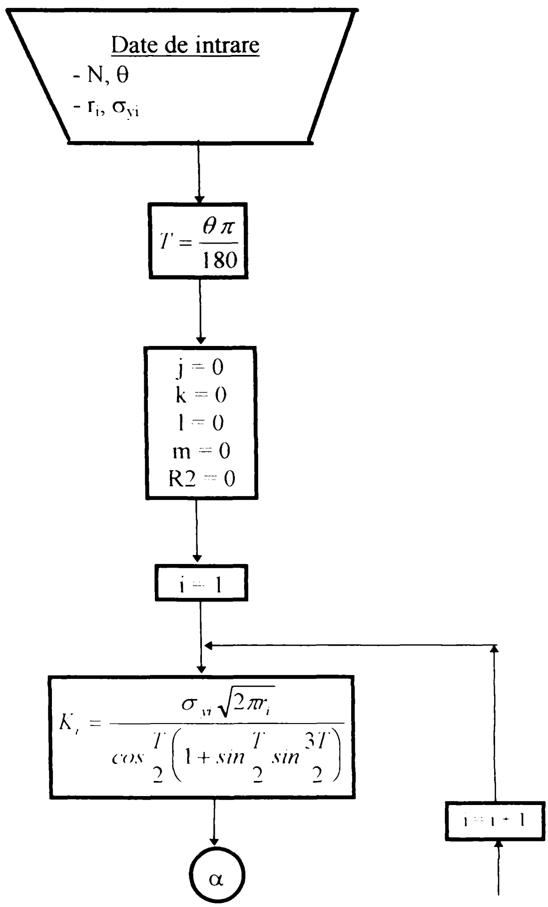
- coeficentul de corelație, **cor**:

$$cor = \sqrt{Rd} = \frac{\sum_{i=1}^{N} r_i K_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i \sum_{i=1}^{N} K_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} K_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} K_i\right)^2}} \tag{7.1.9}$$

- eroarea standard a estimării, **er.s.e**:

$$er.s.e. = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} K_i^2 - a\sum_{i=1}^{N} K_i - b\sum_{i=1}^{N} r_i K_i}{N-2}} \tag{7.1.10}$$

Schema logică a programului **EXTENS** este prezentată în Figura 7.1.3.



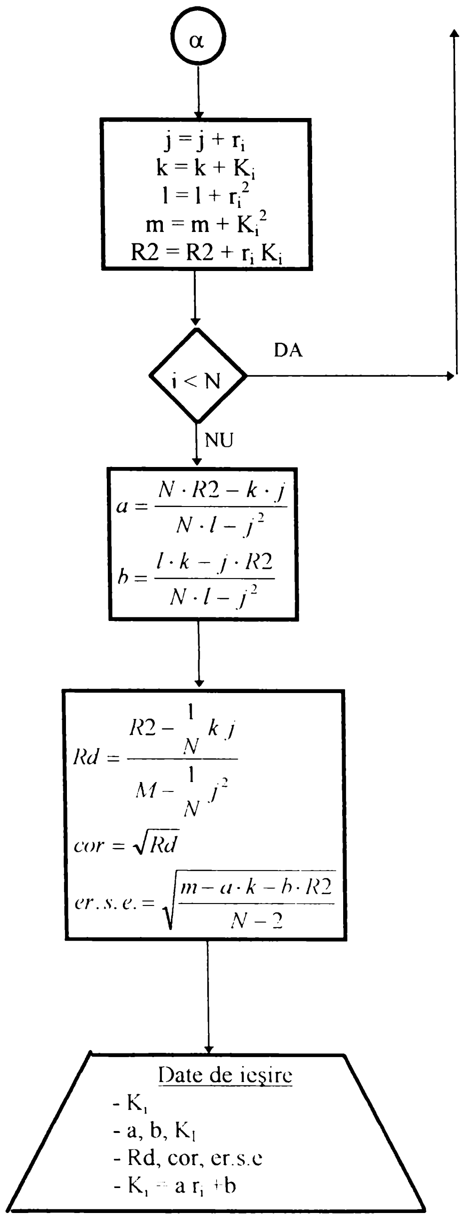

α
$j = j + r_i$
$k = k + K_i$
$l = l + r_i^2$
$m = m + K_i^2$
$R2 = R2 + r_i K_i$
$i < N$
DA
NU
$a = \frac{N \cdot R2 - k \cdot j}{N \cdot l - j^2}$
$b = \frac{l \cdot k - j \cdot R2}{N \cdot l - j^2}$
$Rd = \frac{R2 - \frac{1}{N} k j}{M - \frac{1}{N} j^2}$
$cor = \sqrt{Rd}$
$er.s.e. = \sqrt{\frac{m - a \cdot k - b \cdot R2}{N - 2}}$
Date de ieşire
- K_i
- a, b, K_l
- Rd, cor, er.s.e
- $K_i = a r_i + b$

Figura 7.1.3

Datele de intrare în program sunt:
- numărul de noduri, **N**
- unghiul după care se face extrapolarea, θ
- perechile de puncte : raza polară $\mathbf{r_i}$, tensiunea σ_{yi} (obținută în urma analizei cu elemente finite)

Rezultatele obținute în urma rulării programului sunt:
- valorile $\mathbf{K_i}$
- ecuația dreptei de regresie: $\mathbf{K_i = a\ r_i + b}$
- valoarea factorului deintensitate a tensiunii $\mathbf{K_I = b}$, ordonata la origine a dreptei de regresie
- coeficentul de determinare, **Rd**
- coeficentul de corelație, **cor**
- eroarea standard a estimării, **er.s.e.**
- reprezentarea grafică a dreptei de regresie.

Programul **EXTENS** a fost utilizat pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii la o platbandă cu crestătură laterală, având diferite unghiuri β (paragraful 4.1).

Un exemplu de rulare, pentru o platbandă cu crestătură laterală ascuțită cu unghiul $\beta=30^0$ este prezentat în continuare:

Date de intrare:
- numărul de puncte N = 11
- unghiul $\theta = 0^0$
- perechile de puncte (r_i, $sigy_i$) date în Tabelul 7.1.1

Tabelul 7.1.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_i **[mm]**	1,02	2,17	3,47	4,95	6,62	8,51	10,65	13,08	15,82	18,92	22,43
σ_{yi} **[MPa]**	123,90	64,02	54,82	46,55	39,92	32,96	28,37	23,60	19,21	14,82	9,51

Rezultatele obținute în urma rulării sunt:

Tabelul 7.1.2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{K_i}$ **[N/mm$^{3/2}$]**	313,66	236,39	255,97	259,6	257,46	241.01	232,07	213,9	191,5	161,58	112,90

- Ecuația dreptei de regresie: $\mathbf{K_i = -7{,}143\ r_i + 294{,}998}$

- Factorul de intensitate a tensiunii: $\mathbf{K_I = 294{,}998}$

- Coeficentul de determinare: **Rd = 0,8713**

- Coeficentul de corelație: **cor = 0,9334**

- Eroarea standard a estimării: **er.s.e. = 12,48 %**

- Reprezentarea dreptei de regresie, Figura 7.1.4:

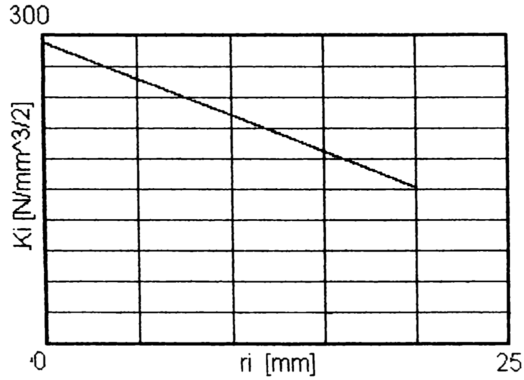


Figura 7.1.4

În concluzie programul **EXTENS** permite determinarea factorului de intensitate a tensiunii K_I prin metoda extrapolării tensiunii σ_y. El poate fi utilizat pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii K_I preluând rezultatele obținute în urma rulării unui program de analiză cu elemente finite (unghiul θ, pozițiile nodurilor r, tensiunile σ_y). Pe lângă valoarea factorului de intensitate a tensiunii K_I, programul calculează parametrii ce caracterizează precizia estimării: coeficentul de determinare **Rd**, coeficentul de corelație **cor** și eroarea standard a estimării **er.s.e.**

Programul realizat poate fi utilizat pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii atunci când programele de analiză cu elemente finite nu dispun de facilități pentru calculul parametrilor de Mecanica ruperii.

Avantajele programului realizat sunt:

- originalitatea lui,
- precizia ridicată pentru estimarea factorului de intensitate a tensiunii, deoarece folosește metoda celor mai mici pătrate pentru determinarea dreptei de regresie,
- calculul parametrilor ce caracterizează precizia estimării: coeficentul de determinare **Rd**, coeficentul de corelație **cor** și eroarea standard a estimării **er.s.e.**

Acest program a fost utilizat de autor pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei crestături laterale aflată într-o platbandă, paragraful 4.1.

7.2 PROGRAMUL **ProfiK** PENTRU CALCULUL FACTORILOR DE INTENSITATE A TENSIUNII

Pentru sintetizarea soluțiilor de calcul a factorilor de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$, $\mathbf{K_{II}}$ și $\mathbf{K_{III}}$, luând în considerare cele mai întâlnite geometrii și încărcări am elaborat programul **ProfiK** Programul este realizat în **VisualBASIC** și rulează în mediul **WINDOWS 3.x** sau **WINDOWS 95**.

Programul **ProfiK** se constituie ca o bază de date cu soluții pentru determinarea factorilor de intensitate a tensiunii, sintetizând soluții consacrate în bibliografie dar și soluții originale propuse în această lucrare. Programul este realizat sub forma multifereastră caracteristică mediului WINDOWS.

La realizarea programului **ProfiK** am introdus corpuri cu fisuri având geometrii finite, acestea fiind cele mai întâlnite în aplicațiile practice. Tipurile de geometrii introduse în program se pot împărții în 4 mari grupe:

- **epruvete** disc, de încovoiere, de tracțiune utilizate la determinarea tenacității la rupere $\mathbf{K_{IC}}$, conform standardului român de Mecanica ruperii, [7].
- **platbande** cu fisură centrală, laterală (solicitate la încovoiere, respectiv la tracțiune), cu două fisuri laterale simetrice, cu crestătură laterală, cu orificiu circular din care se dezvoltă o fisură perpendicular pe direcția de încărcare sau o fisură înclinată;
- **plăci** cu fisură înclinată sau cu orificiu circular din care se dezvoltă două fisuri coliniare simetrice, solicitate la tracțiune monoaxială sau biaxială;
- **bare de secțiune circulară** cu fisură circumferențială, cu fisură interioară sau cu fisură eliptică exterioară, solicitate la încovoiere, tracțiune sau torsiune.

Varianta 2.0 a programului **ProfiK** conține un număr de 21 de geometrii distincte.

Fiecare din cele patru tipuri de geometrii este prezentat sub forma unui meniu "pull down" care conține geometriile și încărcările aferente. Meniul principal care apare la lansarea programului mai conține un meniu **File**, în care este opțiunea **Exit** pentru ieșirea din program. Meniul principal al programului **ProfiK** este prezentat în Figura 7.2.1

După selectarea uneia din geometrii programul afișează trei ferestre, Figura 7.2.2, astfel:

- prima fereastră conține descrierea geometriei, metoda prin care s-a obținut soluția, precizia soluției și bibliografia de unde s-a extras soluția;
- a doua fereastră conține schița geometriei și a încărcării, precum și relațiile pentru calculul factorilor de intensitate a tensiunii;
- a treia fereastră permite calculul factorilor de intensitate a tensiunii. Ea conține casete pentru introducerea datelor de intrare (mărimile caracteristice ale geometriei și încărcarea) și casete pentru afișarea rezultatelor (coeficenții $\mathbf{f_I}$, $\mathbf{f_{II}}$, $\mathbf{f_{III}}$ funcție de geometrie și încărcare, respectiv factorii de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$, $\mathbf{K_{II}}$, $\mathbf{K_{III}}$). Introducerea datelor se face de la tastatură, trecerea dintr-o casetă de introducere a datelor în alta realizându-se cu "mouse"-ul sau cu tasta "**Tab**". Tipărirea rezultatelor în casetele pentru afișarea rezultatelor, care se selectează tot cu "mouse"-ul sau cu "**Tab**", se face prin apăsarea tastei "**Space**".

Dimensiunile celor trei ferestre pot fi modificate, minimizate sau maximizate în funcție de opțiunile utilizatorului. Dacă se dorește fereastra cu descrierea geometriei, Figura 7.2.3 se închid sau se minimizează ferestrele conținând geometria, respectiv fereastra de calcul. Dacă se dorește vizualizarea geometriei și a relațiilor de calcul, Figura 7.2.4 se închide sau se minimizează fereastra de calcul a factorilor de intensitate a tensiunii. Secvențele din program din Figurile 7.2.2.; 7.2.3; 7.2.4 se referă la epruveta de tracține.

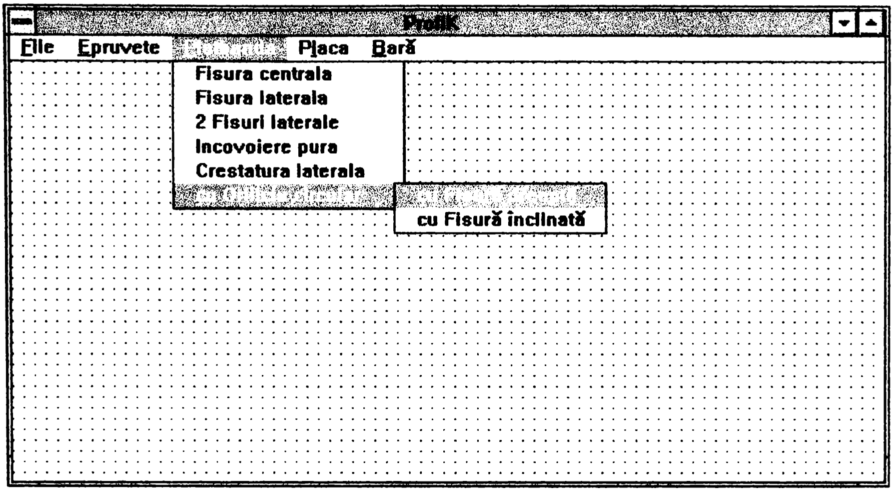


Figura 7.2.1

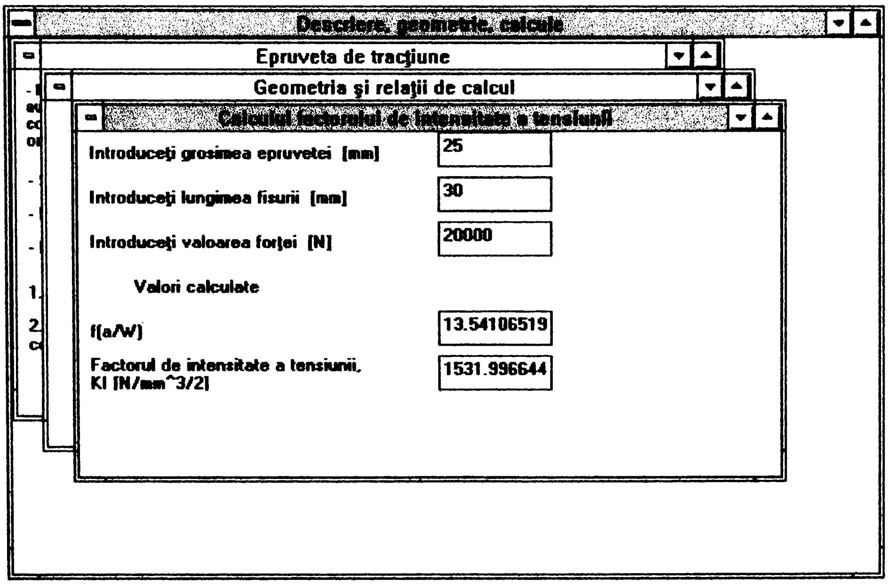


Figura 7.2.2

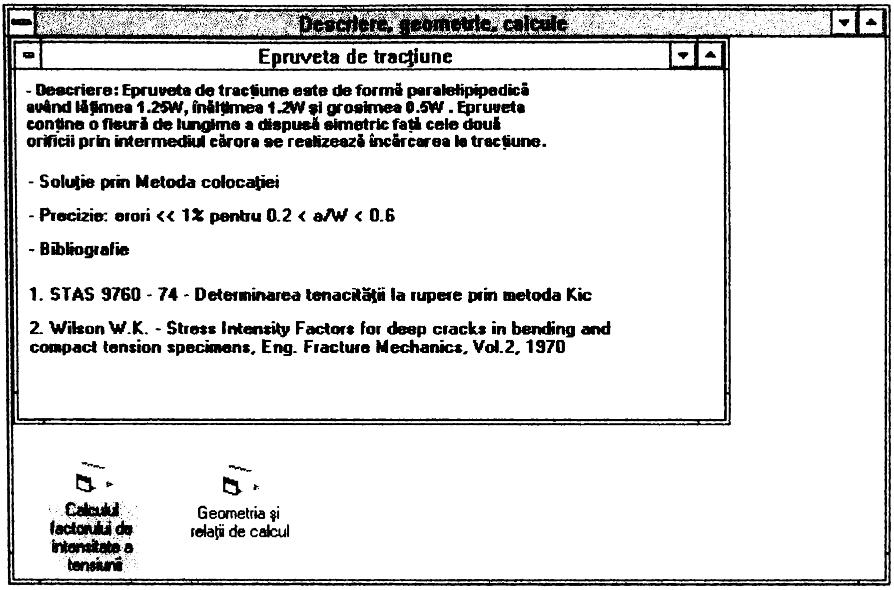


Figura 7.2.3

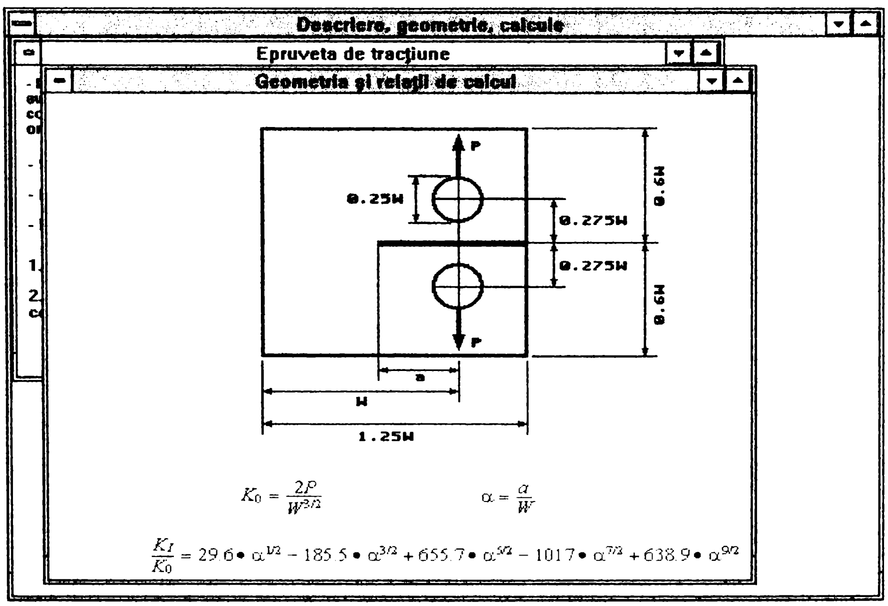


Figura 7.2.4

Schema logică a programului **ProfiK** este prezentată în Figura 7.2.5.

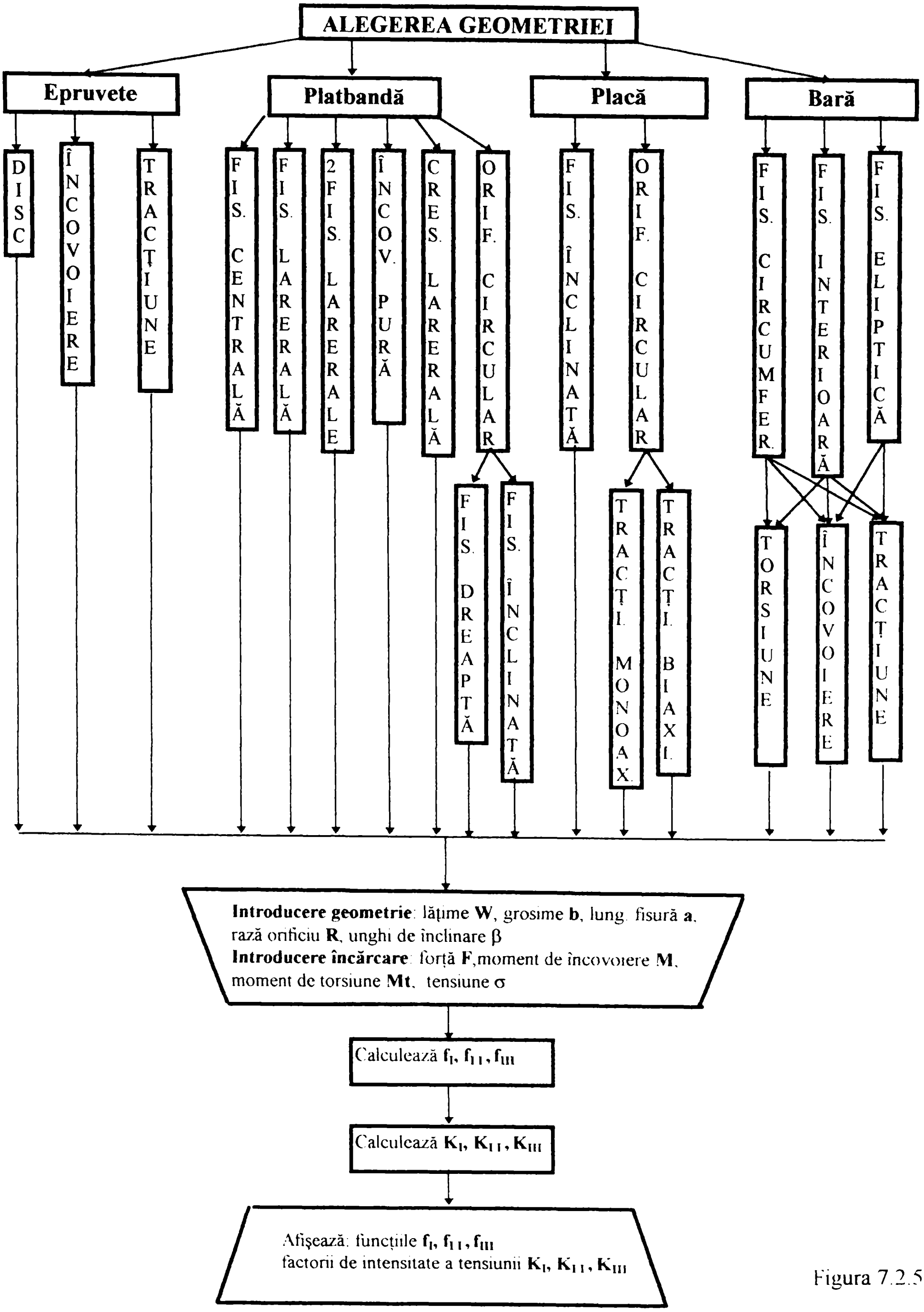

ALEGEREA GEOMETRIEI
Epruvete
Platbandă
Placă
Bară
DISC
ÎNCOVOIERE
TRACȚIUNE
FIS. CENTRALĂ
FIS. LATERALĂ
2 FIS. LATERALE
ÎNCOV. PURĂ
CRES. LATERALĂ
ORIF. CIRCULAR
FIS. DREAPTĂ
FIS. ÎNCLINATĂ
FIS. ÎNCLINATĂ
ORIF. CIRCULAR
TRACȚI. MONOAX.
TRACȚI. BIAXI.
FIS. CIRCUMFER.
FIS. INTERIOARĂ
FIS. ELIPTICĂ
TORSIUNE
ÎNCOVOIERE
TRACȚIUNE
Introducere geometrie: lățime **W**, grosime **b**, lung. fisură **a**, rază orificiu **R**, unghi de înclinare β
Introducere încărcare: forță **F**,moment de încovoiere **M**, moment de torsiune **Mt**, tensiune σ
Calculează f_I, f_{II}, f_{III}
Calculează K_I, K_{II}, K_{III}
Afişează: funcțiile f_I, f_{II}, f_{III}
factorii de intensitate a tensiunii K_I, K_{II}, K_{III}

Figura 7.2.5

Pentru cazurile platbenzii cu orificiu circular din care se dezvoltă o fisură înclinată şi a plăcii cu fisură înclinată, programul **ProfiK** calculează funcţiile f_I şi f_{II}, respectiv factorii de intensitate a tensiunii K_I şi K_{II} pertinenţi modului mixt de deplasare a flancurilor fisurii. Pentru bara de secţiune circulară, cu fisură circumferenţială sau interioară, solicitată la torsiune programul calculează factorul de intensitate a tensiunii K_{III}, corespunzător modului III de deplasare a flancurilor fisurii.

Programul conţine trei soluţii originale pentru calculul factorilor de intensitate a tensiunii, pe care le-am prezentat în această teză şi anume: platbanda cu crestătură laterală (subcapitolul 4.1), platbandă cu orificiu circular din care se dezvoltă o fisură perpendiculară pe direcţia de încărcare, respectiv o fisură înclinată cu unghiul β (subcapitolul 4.2).

Programul realizat de autor constituie o bază de date pentru calculul "**factorului de intensitate a tensiunii**" şi poate fi utilizat:

- în laboratoarele care efectuează încercări de Mecanica ruperii pentru calculul rapid a factorului de intensitate a tensiunii K_I, respectiv la determinarea tenacităţii la rupere K_{IC};
- la proiectarea structurilor de rezistenţă pe baza principiilor de mecanica ruperii;
- la stabilirea duratei de viaţă a unor utilaje, la ale căror elemente de rezistenţă se constată apariţia unor fisuri;

Prin concepţia multifereastră a programului acesta este foarte uşor de utilizat, operatorul având posibilitatea apelării ferestrei de descriere şi a celei care prezintă geometria şi relaţiile de calcul.

Datorită multitudinii de geometrii şi ferestre programul ocupă aproximativ 14Mbytes pe Hard Disk şi necesită pentru rulare mediul WINDOWS şi "librăria dinamică" **vbrun300.dll** .

CAPITOLUL 8
SINTEZA LUCRĂRII. CONTRIBUŢII PERSONALE.

8.1 SINTEZA LUCRĂRII

Lucrarea de faţă se încadrează în domeniul de mare actualitate al metodelor numerice aplicate în Mecanica ruperii materialelor. Lucrarea reprezintă o sinteză a activităţii de cercetare desfăşurată de autor pe parcursul a peste 7 ani, asupra utilizării metodelor numerice pentru calculul parametrilor din Mecanica ruperii. Cercetările privind calculul parametrilor din Mecanica ruperii în vederea estimării durabilităţii utilajelor grele, au făcut obiectul unor contracte de cercetare între Catedra de Rezistenţa Materialelor a Universităţii "POLITEHNICA" Timişoara şi S.C. PROMT S.A Timişoara.

Lucrarea conţine 8 capitole.

În Capitolul 1 **"STADIUL ACTUAL AL UTILIZĂRII METODELOR NUMERICE PENTRU CALCULUL PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII"** (8 pagini) se prezintă locul şi importanţa metodelor numerice în conceptul de *evaluare a siguranţei în exploatare a elementelor de rezistenţă* pe baza principiilor Mecanicii ruperii materialelor. Se face o analiză critică a stadiului utilizării metodelor numerice pentru calculul parametrilor din Mecanica ruperii, subliniind tendinţele actuale în acest domeniu. De asemenea sunt prezentate programele existente pentru calculul numeric al parametrilor din Mecanica ruperii şi este reluat conceptul de de *evaluare a siguranţei în exploatare a elementelor de rezistenţă* prin prisma programelor de calcul numeric.

Capitolul 2 intitulat **"METODE ANALITICE PENTRU DETERMNIAREA PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII"** (50 pagini) este împărţit în două subcapitole, care abordează metodele analitice de exprimare a tensiunilor şi deformaţiilor în medii elastice, respectiv elasto-plastice cu fisuri, introducând parametrii Mecanicii ruperii (în domeniul liniar elastic: factorul de intensitate a tensiunii **K**, forţa de extensie a fisurii $\mathcal{G}$, respectiv în domeniul elasto-plastic: deplasarea la deschidere a vârfului fisurii **δ**, integrala de contur **J**).

În cadrul subcapitolului 2.1 se prezintă o sinteză a soluţiilor analitice de exprimare a tensiunilor şi deformaţiilor în medii elastice cu fisuri, folosind funcţiile de variabilă complexă, soluţiile Kolosov- Mushelisvili, Goursat, Westergaard, aproximarea Irwin şi soluţia Williams.

Metoda funcţiilor de pondere a fost reformulată de autor pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii şi aplicată la două cazuri concrete de corpuri elastice cu fisuri.

Pornind de la exprimarea tensiunilor cu funcţia Airy, autorul propune o soluţie originală, a câmpului de tensiune din vecinătatea unei crestături înguste terminată cu un orificiu circular.

În subcapitolul 2.2 se analizează extinderea zonei plastice, ce se formează la vârful fisurii. Luând în considerare criteriile de plasticitate Tresca şi Von Mises sunt prezentate expresii originale ale razei zonei plastice pentru modul I, II şi mixt de deplasare a flancurilor fisurii. Valorile razei zonei plastice, obţinute analitic, sunt comparate cu rezultate experimentale obţinute prin metoda causticelor. Tot în acest subcapitol se prezintă modul de exprimare a tensiunilor şi deformaţiilor din vecinătatea fisurilor aflate în medii elasto-plastice pe baza parametrilor Mecanicii ruperii: deplasarea la deschidere a vârfului fisurii δ şi integrala de contur **J**.

În Capitolul 3 **"UTILIZAREA METODEI ELEMENTELOR FINITE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII"** (51 pagini) sunt tratate problemele specifice modelării cu elemente finite a corpurilor cu fisuri, la care autorul are importante contribuţii personale. După o succintă prezentare a bazelor teoretice ale Metodei elementelor finite (subcapitolul 3.2) şi a principiului Metodei elementelor finite (subcapitolul 3.3), se abordează cele două probleme specifice calculului numeric al parametrilor din Mecanica ruperii:

- modelarea singularităţii corespunzătoare vârfului fisurii (subcapitolul 3.4);
- determinarea parametrilor Mecanicii ruperii pe baza rezultatelor obţinute în urma analizei cu elemente finite (subcapitolele 3.5 şi 3.6).

Autorul face o analiză critică a elementelor finite utilizate pentru modelarea singularităţii vârfului fisurii. La elementul izoparametric cu 8 noduri degenerat se prezintă un studiu original privind poziţia nodurilor adiacente vârfului fisurii, de la care prin particularizări se obţin elemente finite consacrate în literatura de specialitate.

Autorul prezintă o sinteză a metodelor de determinare a factorului de intensitate a tensiunii K şi a integralei J pe baza rezultatelor analizei cu elemente finite. **Metoda extrapolării tensiunii** pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii, este o metodă originală pe baza căreia autorul a elaborat un program de calcul, cu care s-a determinat factorul de intensitate a tensiunii la vârful unei crestături laterale ascuţite.

În subcapitolul 3.7 este prezentată schema logică cuprinzând etapele, care trebuie parcurse, pentru calculul parametrilor din Mecanica ruperii prin Metoda elementelor finite.

Capitolul 4 **"APLICAŢII ALE UTILIZĂRII ANALIZEI CU ELEMENTE FINITE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII"** (27 pagini) prezintă rezultatele obţinute de autor, în urma analizei cu elemente finite, pentru câteva geometrii de corpuri fisurate pentru care în bibliografia studiată nu s-au găsit soluţii ale factorului de intensitate a tensiunii.

În subcapitolul 4.1 autorul propune o soluţie originală pentru calculul factorului adimensional de intensitate a tensiunii la vârful unei crestături ascuţite laterale, aflată într-o platbandă. Pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii s-a utilizat programul EXTENS elaborat de autor pe baza metodei extrapolării tensiunii şi la care datele de intrare sunt preluate după analiza cu elemente finite realizată cu programul COSMOS/M. Soluţia obţinută oferă posibilitatea extinderii conceptelor Mecanicii ruperii asupra platbandelor cu concentratori de tesiune de forma crestăturilor laterale.

În subcapitolul 4.2 se studiază cazul platbandelor cu orificii circulare din care se dezvoltă fisuri. Studiul s-a efectuat cu programul FRANC2DL, care la ora actuală este unul din cele mai performante programe specializate de modelare cu elemente finite a problemelor cu fisuri. Pentru cazul a două fisuri simetrice dezvoltate din orificiul circular soluţia propusă de autor este comparată cu soluţia lui Newman, obţinută analitic prin metoda colocaţiei. Considerând geometria cu o singură fisură dezvoltată din orificiul circular autorul propune soluţii originale atât pentru cazul când aceasta se dezvoltă perpendicular pe direcţia de încărcare, cât şi pentru cazul când între direcţia de încărcare şi fisură se formează unghiul $(90^0-\beta)$. În acest ultim caz apare modul mixt de deplasare a flancurilor fisurii iar relaţiile propuse permit calculul factorului adimensional de intensitate a tensiunii pentru ambele moduri (I şi II) de deplasare a flancurilor fisurii.

În Capitolul 5 **"DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII"** (31 pagini) după o tecere în revistă a metodelor experimentale utilizate pentru determinarea parametrilor din Mecanica ruperii, se prezintă o analiză critică a metodelor de interpretare în factor de intensitate a tensiunii a datelor fotoelastice: metoda Irwin, Bradley-Kobayashi, Schroedel-Smith şi Smith. Apoi prin metoda fotoelasticimetriei autorul verifică experimental, soluţiile numerice propuse în capitolul anterior.

Astfel pentru verificarea soluţiei factorului adimensional de intensitate a tensiunii de la vârful unei crestături laterale, autorul foloseşte metoda fotoelasticimetriei prin reflexie, asociată cu metoda Smith de determinare a factorului de intensitate a tensiunii. Metodei Smith autorul i-a adus unele modificări prin reprezentarea variaţiei ordinului benzii în funcţie de distanţa de la vârful fisurii pe baza unei funcţii de regresie polinomială în vederea creşterii preciziei determinării. Erorile dintre soluţia numerică şi valorile experimentale determinate pentru patru valori diferite ale unghiului crestăturii ($\beta = 0^0, 30^0, 60^0, 90^0$) este de până la 3%.

Pentru cazul platbenzii cu orificiu circular din care se dezvoltă o fisură, perpendicular pe direcţia de încărcare, soluţia obţinută prin analiză cu elemente finite este comparată cu măsurătorile experimentale realizate prin fotoelasticimetrie. De data aceasta pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii experimental se utilizează metoda Irwin. Determinările experimentale confirmă corectitudinea soluţiei numerice.

Capitolul 6 intitulat **"CONTRIBUŢII PRIVIND ESTIMAREA DURABILITĂŢII TIRANŢILOR EXCAVATOARELOR PE BAZA PRINCIPIILOR MECANICII RUPERII"** (47 pagini) prezintă studiile şi analizele efectuate în vederea estimării durabilităţii unui tirant de excavator, confecţionat din St 52-3, care a funcţionat o durată de 12 ani. S-au determinat compoziţia chimică, caracteristicile statice ale materialului, comportarea la solicitări variabile a materialului, rezilienţa la temperatura ambiantă şi la temperaturi scăzute şi comportarea la solicitări axiale cu şoc. Apoi s-au determinat valorile tencităţii la rupere pe epruvete Chevron la temperaturi cuprinse în intervalul [-30^{0}C...20^{0}C], pe baza acestor valori s-a realizat estimarea durabilităţii tiranţilor în ipoteza apariţiei unor fisuri.

Pentru estimarea durabilităţii autorul a elaborat programul **DURABIL**, care ia în considerare trei dispuneri diferite ale fisurii (centrală, laterală, respectiv două fisuri laterale) în tirant. Programul se bazează pe legea lui Paris, ce exprimă legătura dintre viteza de creştere a fisurii **da/dN** şi variaţia factorului de intensitate a tensiunii ΔK_I ţinând cont de coeficentul de asimetrie al ciclurilor de solicitare şi de raza zonei plastice formate la vârful fisurii. Programul este construit astfel încât el se opreşte atunci când fisura a străpuns întreaga lăţime a tirantului sau când factorul maxim de intensitate a tensiunii K_{Imax} atinge valoarea tenacităţii la rupere K_{IC}. Programul afişează valo rile factorilor de intensitate a tensiunii atât pentru fisura iniţială cât şi pentru momentul ruperii instabile a tirantului, valoarea razei zonei plastice, lungimea critică a fisurii şi numărul de cicluri până la rupere şi permite trasarea variaţiei lungimii fisurii în funcţie de numărul de cicluri şi a variaţiei factorului de intensitate a tensiunii în funcţie de lungimea fisurii.

În subcapitolul 6.9 s-a realizat un studiu al durabilităţii unei urechi de legătură a tirantului. Studiul s-a efectuat cu metoda elementelor finite atât pentru determinarea stării de tensiune din elementul de rezistenţă, cât şi pentru determinarea variaţiei factorului de intensitate a tensiunii în funcţie de lungimea fisurii, respectiv pentru determinarea numărului de cicluri până la rupere.

Capitolul 6 se încheie cu concluziile rezultate în urma studiului privind durabilitatea tiranţilor excavatoarelor.

În Capitolul 7 intitulat **"PROGRAME REALIZATE PENTRU CALCULUL PARAMETRILOR DIN MECANICA RUPERII"** (11 pagini) sunt prezentate alte două programe realizate de autor. Programul **EXTENS** calculează factorul de intensitate a tensiunii K_I prin metoda extrapolării tensiunii. Datele de intrare în program sunt poziţiile nodurilor de-a lungul unei direcţii şi tensiunile din nodurile respective. Programul trasează o dreaptă de regresie prin metoda celor mai mici pătrate, iar apoi prin extrapolarea dreptei de regresie la vârful fisurii se determină valoarea factorului de intensitate a tensiunii. Pe lângă ecuaţia dreptei de regresie şi valoarea factorului de intensitate a tensiunii programul calculează şi parametrii ce caracterizează precizia estimării: coeficentul de determinare **Rd**, coeficentul de corelaţie **cor** şi eroarea standard a estimării **er.s.e.**

Programul **ProfiK** reprezintă o bază de date cu soluţii pentru calculul factorilor de intensitate a tensiunii, conţinând 21 de geometrii de corpuri cu fisuri. Pe lângă soluţiile consacrate în literatura de specialitate autorul a introdus şi soluţiile originale prezentate în a ceastă lucrare (pentru platbandă cu crestătură ascuţită laterală, platbandă cu orificiu circular din care se dezvoltă fisuri). Programul este realizat în **Visual BASIC** sub formă multifereastră pentru rulare sub mediul WINDOWS. Pentru fiecare geometrie sunt deschise trei ferestre una pentru descrierea geometriei, metodei prin care s-a determinat soluţia, precizia soluţiei şi bibliografia, una pentru figura corpului şi relaţiile de calcul, iar cea de-a treia pentru introducerea datelor şi afişarea rezultatelor. Datele de intrare sunt elementele geometriei şi încărcările, iar ca date de ieşire programul afişează valoarea factorului adimensional de intensitate a tensiunii, care este o funcţie de încărcare şi geometrie şi valoarea factorului de intensitate a tensiunii. Programul este util în laboratoarele în care se efectuează încercări de Mecanica ruperii, deoarece conţine epruvetele folosite la determinarea tenacităţii la rupere, la proiectarea structurilor de rezistenţă pe baza principiilor de Mecanica ruperii la stabilirea durabilităţii unor elemente de rezistenţă la care se constată apariţia unor fisuri.

Capitolul 8 **"SINTEZA LUCRĂRII. CONTRIBUŢII PERSONALE."** prezintă sinteza lucrării şi principalele contribuţii ale autorului la calculul numeric al parametrilor din Mecanica ruperii.

Lucrarea elaborată conţine un număr de:
- 48 tabele
- 226 figuri din care: 18 fotografii
  4 scheme logice
- 209 titluri bibliografice

Pe lângă cele trei programe realizate de autor şi prezentate în cadrul lucrării, pentru elaborarea tezei s-au folosit următoarele softuri:
- utilitarele matematice MathCAD 5.0 şi ORIGIN,
- programele de analiză cu elemente finite COSMOS/M şi FRANC2DL împreună cu preprocesorul CASCA
- limbajele de programare QBASIC şi Visual BASIC,
- editoarele de text AmiPro 3.0 şi Word 6.0
- programele de desenare şi grafică AutoCAD 13, Paint Shop Pro 4.0, GhostView

Desenele, programele realizate, tehnoredactarea computerizată şi tot ce conţine lucrarea de faţă au fost realizate integral de autor.

8.2 CONTRIBUŢII PERSONALE

1.) Prezentarea locului şi importanţei metodelor numerice în conceptul de *evaluare a siguranţei în exploatare a elementelor de rezistenţă* şi reconsiderarea acestui concept prin prisma programelor de analiză numerică utilizate la ora actuală pentru calculul parametrilor din Mecanica ruperii.

2.) Sinteza metodelor analitice pentru exprimarea tensiunilor şi deformaţiilor în jurul fisurilor aflate în medii cu comportare liniar-elastică.

3.) Reformularea metodei funcţiilor de pondere pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii şi a deplasării la deschidere a vârfului fisurii. Utilizarea metodei funcţiilor de pondere pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii pentru două cazuri concrete de corpuri cu fisuri. Expresiile factorului de intensitate a tensiunii pentru cazurile particulare analizate reprezintă soluţii originale ale autorului.

4.) Soluţia propusă de autor pentru câmpul de tensiuni din vecinătatea unei crestături înguste terminată cu un orificiu circular, obţinută pe baza funcţiei de tensiune Airy şi compararea acesteia cu soluţiile consacrate Irwin şi Creager.

5.) Studiul privind extinderea zonei plastice, care se formează la vârful fisurii. Soluţiile originale propuse de autor, bazate pe criteriile de plasticitate Tresca şi Von Mises, sunt calculate pentru modul I, II, iar modul mixt (I şi II) de deplasare a flancurilor fisurii. Calculul razei zonei plastice pentru modul mixt de deplasare a flancurilor fisurii s-a realizat pe baza criteriului de plasticitate Von Mises, cu un program de calcul scris în MathCAD. Valorile calculate analitic ale razei zonei plastice sunt comparate cu rezultatele experimentale obţinute prin metoda causticelor. Valorile experimentale confirmă validitatea soluţiilor propuse de autor, respectiv necesitatea utilizării criteriilor de plasticitate Tresca sau Von Mises pentru calculul razei zonei plastice de la vârful fisurii.

6.) Analiza critică a elementelor finite utilizate pentru modelarea singularităţii vârfului fisurii şi studiul privind poziţia nodurilor adiacente vârfului fisurii, de la care prin particularizări se obţin elemente finite consacrate în literatura de specialitate.

7.) Sinteza metodelor de determinarea a parametrilor din Mecanica ruperii: factorului de intensitate a tensiunii (pentru mediile liniar-elastice cu fisuri), respectiv integralei J (pentru mediile elasto-plastice cu fisuri), pe baza rezultatelor obţinute în urma analizei cu elemente finite. Autorul propune pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii o nouă metodă şi anume metoda extrapolării tensiunilor.

8.) Stabilirea etapelor pentru determinarea parametrilor din Mecanica ruperii, prin metoda elementelor finite şi prezentarea acestora sub forma unei scheme logice.

9.) Autorul propune o soluţie originală pentru calculul factorului adimensional de intensitate a tensiunii la vârful unei crestături laterale ascuţite, aflată într-o platbandă. Soluţia s-a determinat prin metoda extrapolării tensiunii cu ajutorul programului EXTENS elaborat de autor, ca date de intrare în program utilizând rezultatele analizei cu elemente finite obţinute după rularea programului COSMOS/M. Valoarea factorului de intensitate a tensiunii se calculează ca medie a valorilor obţinute după două direcţii pe care se face extrapolarea ($\theta = 0^0$ şi 90^0), prin această metodologie obţinându-se precizia maximă a estimării. Importanţa soluţiei propusă constă în aceea că pe baza acesteia se pot extinde conceptele Mecanicii ruperii la platbenzile cu crestături laterale ascuţite.

10.) Utilizarea metodei elementelor finite în vederea determinării factorului de intensitate a tensiunii pentru o platbandă cu orificiu circular din care se dezvoltă fisuri. Pentru cazul când din orificiul circular se dezvoltă două fisuri simetrice soluţia propusă de autor este comparată cu soluţia obţinută de Newman prin metoda colocaţiei şi prezentată sub formă grafică în [T1], erorile dintre cele două soluţii fiind de maximum 1%. Pentru cazul când din orificiul circular se dezvoltă o singură fisură sunt analizate două situaţii: fisură perpendicular pe direcţia de încărcare, respectiv fisură înclinată cu unghiul β faţă de direcţia de încărcare, la care deschiderea flancurilor fisurii se face după modul mixt I şi II. Soluţiile propuse de autor pentru ambele situaţii sunt originale. Analiza cu elemente finite s-a realizat cu programul FRANC2DL, unul dintre cele mai performante softuri specializate pentru calculul parametrilor din Mecanica ruperii.

11.) Analiza critică a metodelor de determinare experimentală a factorului de intensitate a tensiunii pe baza datelor experimentale obţinute în urma încercărilor fotoelastice, cu precizarea domeniului de valabilitate şi preciziei metodei.

12.) Verificarea experimentală a soluţiei factorului adimensional de intensitate a tensiunii la vârful unei crestături ascuţite aflate într-o platbandă, obţinută pe baza analizei cu elemente finite. Pentru determinarea experimentală a factorului de intensitate a tensiunii s-a utilizat metoda fotoelasticimetriei prin reflexie, asociată cu metoda Smith de interpretare a datelor fotoelastice. Metoda Smith a fost modificată de autor, în vederea creşterii preciziei, prin determinarea variaţiei ordinului benzii în funcţie de distanţa de la vârful crestăturii sub forma unei regresii polinomiale. Erorile dintre soluţia numerică şi valorile experimentale ale factorului adimensional de intensitate a tensiunii determinate pentru unghiul crestăturii $\beta = 0^0$; 30^0; 60^0; 90^0 sunt de $\pm 3\%$, determinările experimentale confirmând valabilitatea soluţiei numerice.

13.) Pentru o platbandă cu orificiu circular din care se dezvoltă o fisură perpendicular pe direcţia de încărcare s-au determinat experimental variaţia factorului de intensitate a tensiunii în funcţie lungimea fisurii şi valorile factorului adimensional de intensitate a tensiunii. S-a utilizat metoda fotoelasticimetriei iar interpretarea datelor fotoelastice s-a realizat pe baza metodei Irwin. Valorile experimentale obţinute sunt în bună concordanţă cu soluţia numerică determinată prin metoda elementelor finite, erorile dintre valorile numerice şi cele experimentale fiind de maximum 4%.

14.) Pentru estimarea durabilităţii tiranţilor excavatoarelor pe baza principiilor Mecanicii ruperii autorul are mai multe contribuţii dintre care se menţionează: stabilirea compoziţiei chimice şi a caracteristicilor statice ale materialului prelevat din titantul unui excavtor care a funcţionat 12 ani; studiul privind comportarea la solicitări variabile a materialului tirantului; încercările de rezilienţă efectuate la temperatura ambiantă şi la temperatuti scăzute; studiul privind comportarea la solicitări axiale cu şoc; determinarea tenacităţii la rupere prin metoda Chevron la temperatura ambiantă şi la temperaturi scăzute; elaborarea unui model matematic pentru calculul durabilităţii tirantului. Estimarea durabilităţii tirantului s-a efectuat cu programul DURABIL, elaborat de autor, care ia în considerare trei dispuneri diferite ale fisurii în tirant. Programul se bazează pe legea lui Paris, care exprimă viteza de creştere a fisurii în funcţie de variaţia factorului de intensitate a tensiunii, ţinând cont de coeficentul de asimetrie al ciclurilor variabile şi de raza zonei plastice care se creează la vârful fisurii.

15.) Pentru elementele de îmbinare ale tirantului, de tipul urechilor de prindere, autorul a realizat, cu ajutorul metodei elementelor finite, un studiu privind starea de tensiune, variaţia factorului de intensitate a tensiunii în funcţie de lungimea fisurii şi propagarea prin oboseală a unei fisuri dezvoltate din orificiul urechii de prindere, stabilind durabilitatea urechii.

16.) Programul **EXTENS** pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii $\mathbf{K_I}$ prin metoda extrapolării tensiunilor, datele de intrare în program fiind poziţiile nodurilor, de-a lungul unei direcţii şi tensiunile din aceste noduri, rezultate în urma analizei cu elemente finite. Pe lângă valoarea factorului de intensitate a tensiunii programul trasează dreapta de regresie prin metoda celor mai mici pătrate şi calculează parametrii ce caracterizează precizia estimării: coeficentul de determinare **Rd**, coeficentul de corelaţie **cor** şi eroarea standard a estimării **er.s.e.**

17.) Realizarea programului **ProfiK,** care se constituie într-o bază de date cu soluţii pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii. Programul a fost elaborat în Visual BASIC şi este destinat lucrului sub mediul WINDOWS. Pentru fiecare geometrie cu fisură programul activează trei ferestre una cuprinzând descrierea geometriei, metoda de obţinere a soluţiei, precizia soluţiei şi bibliografia de unde s-a extras soluţia; cea de-a doua fereastră conţine figura corpului şi relaţiile de calcul iar cea de-a treia fereastră este destinată introducerii datelor şi afişării rezultatelor. Programul calculează valorile factorului adimensional de intensitate a tensiunii şi a factorului de intensitate a tensiunii.

18.) Pe lângă programele menţionate autorul a mai conceput o serie de programe în utilitarul matematic MathCAD 5.0, dintre care amintesc: programul de interpolare polinomială pentru determinarea soluţiilor factorului adimensional de intensitate a tensiunii; programul pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii prin metoda funcţiilor de pondere; programul pentru calculul razei zonei plastice pentru modul mixt de deplasare a flancurilor fisurii, bazat pe criteriul de plasticitate Von Mises; programul pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii pe baza datelor fotoelastice, utilizând metoda Irwin; alte programe pentru trasarea anumitor funcţii.

BIBLIOGRAFIE

A1. AGNIHOTRI, G - "Stress Analysis Of A Crack Using The Finite Element Method", Engineering Fracture Mechanics, vol.44, No.1, 1993, pag.109-125

A2. AKIN, J - "Computer - Assisted Mechanical Design", Prentice Hall, New Jersey, 1990

A3. ANDERSON, T.L - "Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications", CRC Press, Boca Raton, 1991

A4. ANNIGERI, B.S; CLEARY, M.P - "Quasi-Static Fracture Propagation Using The Surface Integral Finite Element Hybrid Method", Computational Fracture Mechanics, PVP-Vol.85, 1984, pag.45-64

A5. ARADYA, K.S.S; SRIANTH, L.S - "Stress Distribution Around Surface Crack - A Scattered Light Photoelastic Investigation", Engineering Fracture Mechanics, vol.25, nr.4, 1986, pag.457-501

A6. ARGYRIS, J. H. - "Energy Theorems and Structural Analysis", Butterworth, 1960

B1. BABEU, T; MARŞAVINA, L - "Determination of Mode I Stress Intensity Factor by Photoelasticity", V Krajowa Konferencja Mechaniki Rekania, Kielce, POLONIA, 1995, pag. 123-128

B2. BANKS-SILLS, L ; MAKEVET, E - "A Numerical mode I weight function for calculating stress intensity factors of three-dimensional cracked bodies", International Journal of Fracture, Nr. 76, 1996, pag. 169-191

B3. BARQUINS, M; PETIT, J-P; MAUGIS, D - "Path and Kinetics of Branching from Defects Under Uniaxial and Biaxial Compressive Loading", Int. Journal of Fracture, vol. 54, 1992, pag.139-163

B4. BARSOM, J.M; ROLFE,S.T - "Fracture and Fatigue Control in Structures. Application of Fracture Mechanics", Prentice-Hall Inc, New Jersey, 1987

B5. BASS, B.R; BRYSON, J.W - "ORNL Analysis Method and Computer Codes", NRC Vessel Integrity Review Group Meeting, Fracture Models and Analysis Methods, Oak Ridge, 1986

B6. BERGER, J.R; DALLY, J.W - "An Overdeterministic Approach For Measuring The Opening Mode Stress Intensity Factor Using Strain Gages", Proceedings of SEM, 1986, pag. 597-602

B7. BERGER, J.W; DALLY, J.W; SANFORD, R.J - "Extent Of Validity of Three-Parameter Crack-Tip Strain Fields", Proceeding of SEM, 1991, pag.572-578

B8. BERKOVITS, A; BETSER ,A.A; ASSA, A - "Photoelastic Analysis of the Stress Field Surrounding a Fatigue Crack", Experimental Mechanics, February 1974, pag.64-68

B9. BLAUEL, J.G; BEINERT, J; WENK, M - "Fracture-mechanics Investigations of Cracks in Rotating Disks", Experimental Mechanics, March 1977, pag.106-112

B10. BLUMENAUER,H; PUSCH,G - "Bruckmechanick", Verlag, Leipzig, 1973

B11. BOLEANŢU, L.; DOBRE I - "Aplicaţii ale Mecanicii solidului deformabil în construcţia de maşini", Editura Facla, Timişoara, 1978

B12. BOLEANŢU, L. ; MARŞAVINA, L - "Tipuri de elemente finite pentru modelarea singularităţilor câmpului de tensiune şI deformaţie", Acta Universitias Cibiniensis, Vol. XIII, Seria Tehnică, Mecanică Aplicată, Sibiu, 1995, pag. 1 - 6

B13. BOLEANŢU, L ; MARŞAVINA, L - "Consideraţii privind raza zonei plastice de la vârful fisurii", Al VII-lea Simpozion Naţional de TENSOMETRIE cu participare internaţională, Vol. III, Suceava, 1996, pag.125-132

B14. BRADLEY,W.B; KOBAYASHI,A.S - "An Investigation of Propagating Cracks by Dynamic Photoelasticity", Experimental Mechanics, March 1970, pag.106-113

B15. BROEK, D - "Elementary engineering Fracture Mechanics", Martinus Nijhoof Publishers, Dordrecht, 1986

B16. BUCUR, C.M - "Metode numerice", Ed. Facla, Timişoara, 1983

B17. BUCHHOLTZ, F-G; DIEKMANN, P - "3D Finite Element Analysis Of a Compact Tension Specimen Under In-Plane Mixed Mode Loading", The 9th Biennial European Conference On Fracture", Varna, 1992, pag.795-800

B18. BUECKNER, H.F - "A Novell Principle for the Computation of Stress Intensity Factors", ZAMM, Nr.50, 1970, pag. 529-546

B19. BUECKNER, H.F - "Weight Fun ctions for Notched Bar", ZAMM, Nr.51, 1971, pag. 97-109

B20. BLUMENFELD, M. - "Introducere în metoda elementelor finite", Editura Tehnică, Bucureşti, 1995

B21. BOUKHAROUBA, T.; TAMINE, T., NIU, L.; CHEHIMI, C.; PLUVINAGE, G. - "The Use of Notch Stress Intensity Factor as a Fatigue Crack Initiation Parameter", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 52, Nr. 3, 1995, pag. 503 - 512.

B22. BABEU, T.; BOLEANŢU. L.; DUMITRU I.; MARŞAVINA. L. - "Elaborarea unor metode de analiză a stării de îmbătrânire, oboseală şi rupere fragilă a elementelor de rezistenţă critice din construcţia utilajelor grele", Contract: beneficiar S.C. PROMT SA, 1995

B23. BROWN, K.R. - "The Chevron Notched Fracture Toughness Test", ASTM STANDARDIZATION NEWS, NOVEMBER 1988, pag. 66 - 69

B24. BESKOS, D.E. - "Boundary Element Method in Mechanics", vol. 3, Computational Methods in Mechanics, North - Holland, 1987

B25. BREBBIA, C.A.; WALKER, S. - "Boundary Elament Techniques in Engineering", Newness - Butterworths, 1980

C1. CAI SHUTAO; XU YIGEN - "Approximate Expression of Maximum Value of Stress Intensity Factor of Nozzle Corner Cracks", Int. Journal of Pressure Vessles and Piping, vol.35, nr.5, 1988, pag.411-422

C2. CHIARELLI, M; FREDIANI, A - "A Computation Of The Three-Dimensional J-Integral For Elastic Materials with A View To Applications In Fracture Mechanics", Engineering Fracture Mechanics, Vol.44, No.5, 1993, pag.763-788

C3. CHIEN, W-Z; XIE, Z-C - "The Superposition Of The Finite Element Method On The Singularity Terms In Determing The Stress Intensity Factor", Engineering Fracture Mechanics, Vol.16, No.1, 1982, pag.95-103

C4. CHISHOLM, D.B; JONES, D.L - "An Analytical and Experimental Stress Analysis of a Practical Mode II Fracture Test Specimen"; Experimental Mechanics, January 1977, pag.7-13

C5. CIOCLOV, D - "Mecanica Ruperii Materialelor", Ed. Academiei, Bucureşti, 1977

C6. CONSTANTINESCU, D.M; PASTRAMĂ, ŞT.; STOICA, M.O. - "On How Easy It Is To Calculate a Wrong Value of Stress Intensity Factor", Lucrările celei de a 3-a Conferinţe Internaţionale de Elemente Finite şi de Frontieră, Secţiunea 1, Constanţa, 1995, pag. 85 - 92.

C7. CRUSE, T.A; VANBUREN, W - "Three Dimensional Elastic Stresss Analysis of a Fracture Specimen with an Edge Crack", Int. Journal of Fracture Mechanics, vol.7, nr.1, 1971, pag.1-15

C8. CUTEANU, E - "Metoda elementelor finite în proiectarea structurilor", Ed. Facla, Timişoara, 1980

C9. CHEN Z. - "A New Photoelastic Procedure to Determine SIF of Mode I Crack", International Journal of Fracture, Nr.69, 1995, pag. R89 - R82

C10. CHEN Z., WANG D. - "An Over-Deterministic Photoelastic Procedure for Mode I Crack Problems", International Journal of Fracture, Nr.67, 1994, pag. R93 - R98

C11. CONSTANTINESCU, D. M. - "Contribuţii la studiul stării de tensiune în zona fisurii în plăci elastice subţiri", Rezumatul Tezei de Doctorat, UPB, Bucureşti, 1997

C12. CREAGER, M.; PARIS P.C - "Elastic Field Equations for blunt cracks", International Journal of Fracture Mechanics, No. 13, pag. 247-252, 1967

C13. CARPINTERI, A. - "Size and Scale Effects in Fracture Parameters", Lecture Notes, CISM Course, Udine, Italy, 1997

D1. DALLY, J.W; BERGER, J.R - "A Strain Gage Method for Determining K_I and K_{II} in a Mixed Mode Stress Field", Proceedings of SEM, 1985, pag.603-612

D2. DAWICKE, D. S.; SUTTON, M. A.; NEWMAN. JR. J.C., BIGELOW, C.A. - "Measurement and Analysis of Critical CTOA for an Aluminium Alloy Sheet", NASA Technical Memorandum 109024, September 1993, Langley Research Center, Hampton, Virginia, USA

D3. DERBALIAN, G; LANGE, C - "J-Integral Estimation With the Stiffness Gradient Method for Power Law Hardening Materials", Fatigue and Fracture Assesment By Analysis and Testing, PVP-Vol.103, ASME, 1986, pag.49-54

D4. DESJARDINS, J.L.; BURNS, D.J., THOMPSON, J.C. - "A Weight Function Technique for Estimating Stress Intensity Factors for Cracks in High Pressure Vessels", High Pressure Technology, PVP - Vol. 148, 1988, pag. 55-64.

D5. DEMPSEY, J.P.; ADAMSON, R.M.; DEFRANCO, S.J. - "Fracture Analysis of Base - edge - cracked Reverse - tapered plates", International Journal of Fracture, Nr. 69, 1995, pag. 281-294.

D6. DOWD, N. P. - "Applications of two parameter approaches in elastic - plastic fracture mechanics", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 52, No. 3, 1995, pag. 445 - 466

D7. DORN, W.S.; Mc CRACKEN, D.D. - "Metode numerice cu programe în FORTRAN", Editura Tehnică, Bucureşti, 1976

D8. DUMITRU, I.; FAUR, N.; LAICHICI, P.; POPA, M. - "Cercetări privind comportarea unor oţeluri la viteze mari de deformaţie', A VIII Conferinţă de Vibraţii Mecanice, Timişoara, 1996, pag. 153 - 158

D9. DUMITRU, I ; MARŞAVINA, L - "Consideraţii asupra durabilităţii tirantului unui excavator aplicând conceptele mecanicii ruperii", A VIII Conferinţă de Vibraţii Mecanice, Timişoara, 1996, pag. 59 - 64

E1. EFTIS, J - "On the Fracture Stress For the Inclined Crack Under Biaxial Load", Engineering Fracture Mechanics, vol.26, nr.1, 1987, pag.105-125

E2. ETHERIDGE, J.M; DALLY, J.W - "A Critical Review of Methods for Determining Stress Intensity Factors from Isocromatic Fringes", Experimental Mechanics, July 1977, pag.248-254

F1. FREUND, L.B; DUFFY,J; ROSAKIS,A.J - "Dynamic Fracture Initiation In Metals and Preliminary Results On the Method of Caustics for Crack Propagation Measurements", ASME, March 1982

F2. FURGIUELE, F.M; LUCHI, M.L - "A Note On Some Crack Tip Elements Employed In Two-Dimensional Elasto-Plastic Fracture Mechanics", Engineering Fracture Mechanics, Vol.33, No.5, 1989, pag.831-837

F3. FETT, T. - "Weight Functions for Cracks at Sharp Notches and Notch Intensity Factors", International Journal of Fracture, Nr.77, 1996, pag. R27 - R33

G1. GÂRBEA, D - "Analiză cu Elemente Finite", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990

G2. GDOUTOS, E.E; AIFANTIS, E.C - "The Method of Caustics In Environmental Cracking, Engineering Fracture Mechanics, vol.23, nr.2, 1986, pag.423-430

G3. GDOUTOS, E.E; PAPAKALIATAKIS, G - "Photoelastic Study of a Bimaterial Plate With A Crack Along The Interface", Engineering Fracture Mechanics, vol.16, nr.2, 1982, pag.177-187

G4. GEORGIADIS, H.G; PAPADOPOULOS, G.A - "On the Method of Dynamic Caustics In Crack Propagation Experiments", Int. Journal of Fracture, nr.54, 1992, pag.R19-R22

H1. HAHN, H.G - "Spannungsverteilung an Rissen in festen Korpen", VDI-Verlag, Dusseldorf, 1970

H2. HAJDU, I ; MARŞAVINA, L - "Normal Stress Analysis from Dangerous Cross Section of a Plane Curved Bar Subject to Tension", Twelfth Danubia - Adria Symposium on Experimental Methods in Solid Mechanics", Sopron, UNGARIA, 1995, pag. 127-128

H3. HAFER, C; DAHL, W - "Investigation on the Influence of Component Geometry On Stress State Using 3D Elastic-Plastic Finite Element Analysis", The 9th Biennial European Conference on Fracture, Varna, 1992, pag.911-916

H4. HARRIS, D.O; BIANCA, C.J - "NASCRAC - A Computer Code for Fracture Mechanics Analysis of Crack Growth", AIAA 28th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Monterey, California, 1987, pag.662-667

H5. HETENYI, M - "Handbook of Experimental Stress Analysis", New York, 1954

H6. HEYMANN, F.J - "A Review of the Use Of Isoparametric Finite Elements For Fracture Mechanics", Engineering Applications of Fracture Analysis, Proceedings of the First National Conference on Fracture, Johannesburg, 1979, pag.371-385

H7. HILTON, P.D; PEIRCE, D.C - "The Enriched Element Formulation 3-D Combined Mode Elastic Crack Problems", Computational Fracture Mechanics, PVP-Vol.85, 1984, pag. 65-76

H8. HOEPPNER, D; DANFORD, V; PETTIT, D.E - "A New Technique for Viewing Deformation Zones at Crack Tips, Experimental Mechanics, June 1971, pag.280-283

H9. HOLLESTEIN, T - "Experimentelle untersuchungen zum Verhalten von Rissen bei Elasto-Plastichen Werkstoffverformugen", Darmstad, 1981

H10. HORVATH, F - "Application of Finite Element Method For The Solution of Some Problems In Fracture Mechanics", The Proceedings of the 10th Congress on Material Testing, vol.I, Budapest, pag.273-278

H11. HU, W; LIU, H.W - "Crack Tip Strain - A Comparison of Finite Element Method Calculations and Moire Measurement", ASTM STP 601, 1976

H12. HYDE, T.H; WARRIOR, N.A - "An Improved Method For The Determination Of Photoelastic Stress Intensity Factors Using The Westergaard Stress Function", Int. Journal Mechanical Sciences, vol.32, 1990, pag.265-273

H13. HĂRDĂU, M.- "Metoda Elementelor Finite", Transilvania Press, Cluj-Napoca, 1995

H14. HANEL, J.J. - "Schwingfestigkeit und Rißfortschreitung von eigenspannungsbehaften Rißstaben aus St 52 unter Einstufenbelastung", Technisschen Hochschule Darmstad, 1972

I1. ILIESCU, N; CONSTANTINESCU, D.M; JIGA, G; PASTRAMĂ, St - "Photoelastic Determination of the Mode I Stress Intensity Factor", "POLITECHNICA" Scientific Bulletin, 1994

I2. ILIESCU, N.; NĂSTĂSESCU, V - "Contribuţii privind determinarea factorului de intensitate a tensiunilor la vârful fisurii unei plăci cu crestături", Simpozion Naţional de Mecanica Ruperii, Midia, 1996, pag. 95 - 100

I3. ILIESCU, N.; CONSTANTINESCU, D.M.; PASTRAMĂ, St. - "Cercetări privind estimarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei fisuri centrale străpunse", "POLITECHNICA" Scientific Bulletin, 1994

I4. ITOH, Y.Z; MURAKAMY, T; KASHIWAYA, H - "Proportional Extrapolation Techniques for Determining Stress Intensity Factors", Engineering Fracture Mechanics, vol.31, nr.2, 1988, pag.297-308

I5. ILIE, L.; STEMATIU, D.; ALDEA, C. - "Finite Approach in Fracture Mechanics Applied to Mass Concrete", Lucrările celei de a 3-a Conferinţe Internaţionale de Elemente Finite şi de Frontieră, Secţiunea 1, Constanţa, 1995, pag. 113 - 124.

I6. INGRAFFEA, A. - "Finite Element Method for Discrete Crack Modelling", Lecture Notes, CISM Course, Udine, Italy, 1997

J1. JALOBEANU, C.; RAŞA, I. - "Probleme de calcul numeric şi statistic în MATHCAD", Ed. Albastră, Cluj - Napoca, 1995

J2. JOCH, J; PTAK, S - "On Stress Intensity Factor Computation By FEM under Mixed-Mode Loading Conditions", Engineering Fracture Mechanics, Vol.34, No.1, 1989, pag.169-177

K1. KALTHOFF, J.F; COLLISON, P; VOYVODA, J; DAHMEN, H - "On the Influence of Higher Order Terms of the Stress Field Equation in Transient Fracture Problems", The 9th Biennial European Conference On Fracture, Varna, 1992, pag.891-898

K2. KIM, K.S; ORANGE, T.W - "A Review of Path-Independent Integrals in Elastic-Plastic Fracture Mechanics", Fracture Mechanics: Eighteenth Symposium, ASTM STP 945, 1988, pag.713 - 729

K3. KLEIN, G - "Spannungsfaktoren eines Riesses in der Umgebung eines Kreisloches und ihr Einflub auf des Bruchverhalten", Journal of Materials Technology, Heft 1, 1975, pag.30-34

K4. KOBAYASHI, A.S; ENGSTROM, W.L; SIMON, B.R - "Crack Opening Displacements and Normal Strains in Centrally Notched Plates", Experimental Mechanics, April 1969, pag.163-170

K5. KOBAYASHI, A.S; WADE, B.G; MAIDEN, D.E - "Photoelastic Investigation on the Crack-arrest Capability of a Hole"; Experimental Mechanics, January 1972, pag.32-37

K6. KOBAYASHI, A.S; MALL, S; LEE, M.H - "Fracture Dynamics of Wedge Loaded Double Catilever Beam Specimen", ASTM STP 601, 1976, pag.274-290

K7. KULLMER, G - "Elastic Stress Field in the Vecinity Of A Narrow Hotch With Circular Root", The 9th Biennial European Conference On Fracture, Varna, 1992, pag.905-910

L1. LABBENS, R; HELIOT, J; PELLISSTER - TANON, A - "Weight Functions for Three-Dimensional Symetrical Crack Problems", Cracks and Fracture, ASTM STP 601, 1976, pag.448-470

L2. LABBENS, R; PELLISSTER - TANON, A; HELIOT, J - "Practical Method for Calculating Stress - Intensity Factors Through Weight Functions", Mechanics of Crack Growth, ASTM STP 590, 1976, pag. 368-384

L3. LEE, O.S; HONG, S.K - "Determination Of Stress Intensity Factors And J-Integrals Using The Method Of Caustics"; Engineering Fracture Mechanics, vol.44, nr.6, 1993, pag.981-989

L4. LEMAITRE, J - "Local Approach Of Fracture", Engineering Fracture Mechanics", vol.25, nr.5/6, 1986, pag.523-537

L5. LOVAS, E - "Evaluation of Fracture Mechanics Characteristics by Photoelasticity", 7th Congress on Material Testing, Budapest, 1978, pag.611-616

M1. MARLOFF, R.H; LEVEN, M.M - "Photoelastic Determination of Stress Intensity Factors", Experimental Mechanics, December 1971, pag.529-539

M2. MARŞAVINA, L; POPA, M - "Determinarea câmpului de tensiune în vecinătatea unei crestături înguste terminată cu un orificiu circular", Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Mecanică, 1993, pag.62 - 68

M3. MARŞAVINA, L - "Calculul factorului de intensitate a tensiunii pentru o placă cu un orificiu eliptic terminat cu două fisuri coliniare la extremităţi", Sesiunea de Comunicări Ştiinţifice, Secţiunea II, Reşiţa, 1993

M4. MARŞAVINA, L - "Studiul singularităţilor câmpului de tensiune din jurul unei fisuri", A II-a Sesiune de Comunicări Ştiinţifice a Universităţii "Aurel Vlaicu" Arad, Secţiunea Inginerie Mecanică, 1994, pag.103 - 108

M5. MARŞAVINA, L - "Determinarea fotoelastică a factorului de intensitate a tensiunii K_I prin Metoda Irwin", Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Mecanică, vol. I 1995, pag.62 - 68

M6. MARŞAVINA, L ; BOLEANŢU L. - "Metode numerice de evaluare a factorului de intensitate a tensiunii", Acta Universitias Cibiniensis, Vol. XIII, Seria Tehnică, Mecanică Aplicată, Sibiu, 1995, pag. 111 - 116

M7. MARŞAVINA, L; DUMITRU, I - "Model matematic pentru estimarea duratei de viaţă a tiranţilor excavatoarelor",Seminar ştiinţific: Metode pentru determinarea rezervei de viaţă la utilajele grele mobile, Timişoara, 1996

M8. MISKIOGLU, I - "Stress Intensity Factors For Near Edge Cracks By Digital Image Analysis", Engineering Fracture Mechanics, vol.21, nr.3, 1985, pag.547-557

M9. MISHRA, A; SINGH, M.C - "Finite Elements For The Determination Of Plastic Zone and Mouth Opening Displacement Values of an Edge Cracked Thin Plate", Engineering Fracture Mechanics, Vol.28, No.5, 1988, pag.609-631

M10. MOCANU, D.R - "Analiza experimentală a tensiunilor", vol.I-II, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1977

M11. MURTHY, N.S; RAO, P.R - "Determination of Mode I Notch Stress Intensity Factor By The Photoelastic Technique", Engineering Fracture Mechanic, vol.21, nr.3, 1985, pag.557-562

M12. MUSHELISVILI, N.I - "Câteva probleme fundamentale ale teoriei matematice a elasticităţii", Editura Academiei, Bucureşti, 1965

M13. MARŞAVINA. L; DUMITRU, I.; BOLEANŢU, L. - "Analize şi încercări asupra materialelor utilajelor grele cu durata de exploatare expirată", Contract: beneficiar S.C. PROMT S.A., 1996

M14. MARŞAVINA, L; DUMITRU, I.; BOLEANŢU, L. - "Analize şi încercări asupra materialelor excavatorului Erc - 1300 din cariara Tismana", Contract: beneficiar S.C. PROMT S.A., 1996

M15. MARŞAVINA, L. - "Metode experimentale în Mecanica ruperii", Referat nr.1 al Tezei de doctorat, Universitatea POLITEHNICA Timişoara, 1993

M16. MARŞAVINA, L. - "Analiza experimentală a tensiunilor şi deformaţiilor în jurul fisurilor", Referat nr.2 al Tezei de doctorat, Universitatea POLITEHNICA Timişoara, 1994

M17. MARŞAVINA, L. - "Programe de calcul automat a parametrilor din Mecanica ruperii", Referat nr.3 al Tezei de doctorat, Universitatea POLITEHNICA Timişoara, 1994

N1. NĂSTĂSESCU, V; FUIOREA, I - "Analiza câmpului tensiunilor în vecinătatea concentratorului de tip crestătură cu fisură, prin Metoda elementelor finite", Simpozion Naţional de Mecanica Ruperii, Midia, 1996, pag. 107 - 112

N2. NEUBER, H. - "Kerbspannungslehre", Springer Verlag, Berlin, 1985

N3. NEWMAN. JR. J.C - "Fracture Analysis of Stiffened Panels Under Biaxial Loading with Widespread Crackeng", NASA Technical Memorandum 110197, October 1995, Langley Research Center, Hampton, Virginia, USA

N4. NEWMAN. JR. J.C; BOOTH, B.C.; SHIVAKUMAR, K. N. - "An Elastic - Plastic Finite Element Analysis of the J - Resistance Curve Using a CTOD Criterion", Fracture Mechanics: Eighteenth Symposium, ASTM STP 945, Philadelphia, 1988, pag. 665-685.

N5. NEWMAN. JR. J.C.; DAWICKE, D. S.; SUTTON, M. A.; BIGELOW, C.A. - "A Fracture Criterion for Widespread Cracking in Thin - Sheet Aluminium Alloys", ICAF, 17th Symposium. Durability and Structural Integrity of Airframes, June 9-11, 1993, Stockolm, Sweden, pag. 443 - 467

N6. NEWMAN. JR. J.C.; DAWICKE, D. S.; BIGELOW, C.A - "Finite - Element Analysis and Fracture Simulation in Thin - Shnnt Aluminium Alloy", NASA Technical Memodandum 107662, August 1992, Langley Research Center, Hampton, Virginia, USA

N7. NICKOLA, W.E - "Failure Prevention Via Experimental Stress Analysis", Failure Prevention and Reliability, The Design Engineering Technical Conference, Chicago, 1977, pag.225-244

N8. NURSE, A.D; PATTERSON,E.A - "A Photoelastic Technique To Predict The Direction Of Edge Crack Extension Using Blunt Cracks", Int. Journal Mechanical Sciences, vol.32, 1990, pag.253-264

O1. OLARIU, V; BRĂTIANU, C - "Modelare numerică cu Elemente Finite", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1986

O2. OWEN, D.R.J; FAWKES, A.J - "Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications", Pineridge Press Ltd., Swansea, 1983

P1. PACOSTE, C; STOIAN, V; DUBINĂ, D - "Metode moderne în calculul structurilor", Ed. ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1988

P2. PANĂ,T - "Aplicaţii inginereşti ale Mecanicii Ruperii", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1974

P3. PANĂ, T - "Mecanica Ruperii Materialelor", Ed. T.Pană & Co, Bucureşti, 1992

P4. PARIS, P.C; McMEEKING, R.M; TADA, M - "The Weight Function Method For Determining Stress Intensity Factors", Cracks and Fracture, ASTM STP 601, 1976, pag.471-489

P5. PARSONS, I.D; HALL, J.F - "A Finite Element Investigation Of The Elastostatic State Near A Three Dimensional Edge Crack", Engineering Fracture Mechanics, Vol.33, No.1, 1989, pag.45-63

P6. PARTON, V.Z; MOROZOV, E.M - "Elastic-Plastic Fracture Mechanics", MIR Publishers, Moscow, 1978

P7. PARTON, V.Z; PERLIN, P.I - "Mathematical Methods of the Theory of Elasticity", MIR Publishers, Moscow, 1984

P8. PARTON, V.Z; MOROZOV, E.M - "Elastic-Plastic Fracture Mechanics", Mir Publishers, Moscow, 1978

P9. PASCARIU, I - "Elemente Finite", Ed. Militară, Bucureşti, 1985

P10. PESTI, L - "Evaluation of J-Integral By Photoelasticity", 7th Congress On Material Testing, Budapest, 1978, pag.633-636

P11. POTERAŞU, V.F; MIHALACHE, N - "Elemente de contur", Ed. Militară, Bucureşti, 1992

P12. POTERAŞU, V.F; MIHALACHE, N; MANGERON, D - "Metode numerice în elasticitate şi plasticitate, vol.I, Ed. Academiei Române, Bucureşti, 1993

P13. PETERSEN, R.E. - "Stress Concentration Factors", John Wiley & Sons, New York, 1974

R1. RAJU, I.S - "Calculation Of Strain-Energy Release Rates With Higher Order and Singular Finite Elements", Engineering Fracture Mechanics, Vol.28, No.3, 1988, pag.257-274

R2. RAO, G.J; NARAYANAN, R - "Photoelastic Analysis Of Mode I Stress Intensity Factor By Two Parameter Methods", Engineering Fracture Mechanics, vol.33, nr.5, 1989, pag.733-744

R3. RICE, J.R. - "Mechanics of Crack Tip Deformation and Extension by Fatigue", Fatigue Crack Propagation, ASTM STP 415, 1967, pag.247-311

R4. ROBINSON, J - "Integrated Theory of Finite Element Methods", John Wiley & Sons, London, 1973

S1. SANFORD, R.J; KIRK, M.T - "A Comparation of Boundary and Global Collocation Solutions for K_I and CMOD Calibration Functions", Experimental Mechanics, March 1991, pag. 52-59.

S2. SCHMITT, W - "Anwendung der Metode der Finiten Elemente in der Bruckmechanik unter besonderer Berucksichtigung dreidimensioneler und elastisch-plastischer Probleme", Erlangung des Gudes eines Doktor-Ingenieurs, Dissertation, Darmstad, 1981

S3. SCHMITT, W - "Three Dimensional Finite Element Simulation Of Post-Yield Fracture Experiments", Computational Fracture Mechanics, PVP-Vol.85, 1984, pag.119-131

S4. SEDMAK, S - "ESIS Recomandations for Use of Finite Element Method in Fracture Mechanics", The 9th Biennial European Conference On Fracture, Varna, 1992, pag.841-846

S5. SHANYI DU; LEE, J.D - "Finite Element Analysis Of Slow Crack Growth"; Engineering Fracture Mechanics, Vol.16, No.2, 1982, pag.229-245

S6. SMITH, C.W; SMITH, D.G - "A Photoelastic Evaluation of the Influence of Closure and Other Effects Upon the Local Bending Stresses in Cracked Plates", Int. Journal of Fracture Mechanics, vol.6, nr.3, 1970, pag.305-317

S7. SMITH, C.W - "Use The Three Dimensional Photoelasticity in Fracture Mechanics", Experimental Mechanics, December 1973, pag.539-544

S8. SMITH, C.W; Mc GOWAN, J.J; JOLLES, M - "Effects of Artificial Cracks and Poisson's Ratio Upon Photoelastic Stress Intensity Determination", Experimental Mechanics, May 1976, pag.188-193

S9. SMITH , C.W; EPSTEIN, J.S - "An Assessment Of Far Field Effects On The Photoelastic Determination Of Mixed Mode Stress Intensity Factors", Engineering Fracture Mechanics", vol.16, nr.5, 1982, pag.605-612

S10. SMITH, C.W - "Stress-Fringe Signatures For Propagating Cracks", Engineering Fracture Mechanics, vol.23, nr.1, 1986, pag.229-236

S11. SMITH, C.W - "Analitical and Experimental Studies of the Surface Flaw", SEM Fall Conference on Experimental Mechanics, Keystone, Colorado, 1987

S12. SMITH, C.W; THEISS, T.J; REZVANI, M - "Intersection Of Surface Flaws With Free Surface. An Experimental Study", ASTM STP 1020, 1989, pag.317-326

S13. SMITH, C.W - "Optical Methods Of Stress Analysis Applied to Cracked Components"; Springer Verlag, Berlin, 1991

S14. SMITH, C.W - "Experimental Determination of Fracture Parameters in Three Dimensional Problems", ASTM STP 1131, 1992, pag.5-18

S15. SMITH, C.W - "Use Of Frozen Stress In Extracting Stress Intensity Factor Distributions In Three Dimensional Cracked Body Problems", Proceedings of 7th International Congress On Experimental Mechanics, Las Vegas, 1992, pag.530-536

S16. SOUCHET, R - "Solution Of Two-Dimensional Elastic Crack Problems Using A Localized Finite Element Method", Engineering Fracture Mechanics, Vol.20, No.1, 1984, pag.169-177

S17. STEMATIU, D - "Calculul structurilor hidrotehnice prin Metoda Elementelor Finite", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1982

S18. STOK, B; KOC, P - "Finite Element Stress Concentration Investigations of Infinite Domains With Cracks", Proceedings of the 10th Congress on Material Testing, Vol.I, Budapest, 1991, pag.291-296

S19. SWENSON, D.V. - "Modeling Mixed - Mode Dynamic Crack Propagation Using Finite Elements", PhD. Thesis, Department of Structural Engineering Report, Nr. 85-10, Cornell University, 1985

S20. SWENSON, D.; JAMES M. - "FRANC2D/L: A Crack Propagation Simulator for Plane Layered Structures", User's Guide, Manhattan, Kansas, 1996

S21. SWELLAM, M.H.; AHMAD, M.F.; DODDS, R.H.; LAWRENCE, F.V. - "The Stress Intensity Factors of Tensile - Shear Spot Welds", Computing Systems in Engineering, Vol.3, Nos. 1-4, pag. 487 - 200, 1992

S22. SAAL, H. - "Der Einfluβ von Formzahl und Spannungsverhaltnis auf die Zeit - und Dauerfestigkeiten und Riβfortschreitungen bei Flachstaben aus St 52", Technischen Hochschule Darmstad, 1971.

S23. SHERMAN, D.H. - "Fracture Toughness Testing Using Chevron - Notched Specimens", Metals Handbook, Ninth Edition, Vol. 8, Mechanical Testing, ASM, Ohio, 1985

S24. SCHEIBER, E.; LIXĂNDROIU, D. - MathCAD", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1994

S25. SAOUMA V. E. - "Fracture Mechanics", Lecture Notes, University of Colorado, Boulder, 1997

T1. TADA, H; PARIS, P; IRWIN, G - "The Stress Analysis Of Cracks Handbook", Second Edition, St. Louis, 1985

T2. THEOCARIS, P.S - "A New Teccchnique for Viewing Deformation Zones at Crack Tips", Experimental Mechanics, May 1972, pag.247-249

T3. THEOCARIS, P.S; GDOUTOS, E.E - "The Size of Plastic Zones in Cracked Plates Mode of Polycarbonate", Experimental Mechanics, May 1975, pag.169-176

T4. THEOCARIS, P.S - "The Reflected-Shadow Method For The Study Of The Constrained Zones In Cracked Birefringent Media", Journal Of Strain Analysis, vol.7, nr.2, 1972, pag.75-83

T5. THEOCARIS, P.S; PHILIPPIDIS, T.P - "Plastic Stress Intensity Factors In Out-of-Plane Shear By Reflected Caustics"; Engineering Fracture Mechanics, vol.27, nr.3, 1987, pag.299-314

T6. THEOCARIS, P.S; PETROU, L - "Inside And Outside Bounds Of Validity Of The Method Of Caustics In Elasticity", Engineering Fracture Mechanics, vol.23, nr.4, 1986, pag.681-693

T7. THEOCARIS, P.S; PHILIPPIDIS, T.P - "The Exact Modes Of Formation Of Near-Field Reflected Caustics"; Engineering Fracture Mechanics, vol.33, nr.5, 1989, pag.719-732

T8. THEOCARIS, P.S - "The Topography Around An Internal Crack: Differences Between Exact and Two-Therm Solutions", Engineering Fracture Mechanics, vol.33, nr.5, 1989, pag.707-717

T9. THEOTOKOGLOU, E.N; TSAMASPHYROS, G.J; SPYROPOULOS, C.P - "Photoelastic Study Of a Crack Approaching The Bonded Half-Plates Interface", Engineering Fracture Mechanics, vol.34, nr.1, 1989, pag.31-42

T10. THROOP, J.F; FUJCZAK, R.R - "Stress, Strain and Deflection of Cracked C-Shaped Specimens"; Experimental Mechanics, August 1977, pag.290-296

T11. TIPPUR, H.V; ROSAKIS, A.J - "Optical Mapping Of Crack Tip Deformations Using The Methods Of Transmission and Reflention Choerent Gradient Senssing: A Study Of Crack Tip K-dominance", Int.Journal of Fracture, nr.52, 1991, pag.91-117

T12. TRIPA, P; MARŞAVINA, L - "Estimarea siguranţei în exploatare a conductelor de abur intermediar fisurate utilizând conceptele mecanicii ruperii", Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Mecanică, Vol. I, 1995, pag.

T13. TRIPA, P; MARŞAVINA, L - "Estimarea siguranţei în exploatare a conductelor de abur viu fisurate utilizând conceptele mecanicii ruperii", Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Mecanică, Vol. I, 1995, pag.

T14. TRIPA, P; MARŞAVINA, L - "Influenţa ciclurilor de solicitare asupra factorului de intensitate a tensiunii şi a propagării prin oboseală a unei fisuri longitudinale nestrăpunse dintr-o conductă de abur viu supusă la presiune interioară", Simpozion Naţional de Mecanica Ruperii, Midia, 1996, pag. 220-225

T15. TRIPA, P; MARŞAVINA, L - "Computer CODE for calculating the factor of safety against fracture and the fatigue crack propagation", 11th European Conference on Fracture, Poitiers, FRANŢA, 1996

T16. TRIPA, P. - "Cercetări asupra tenacităţii unor oţeluri utilizate la conductele de abur din centralele termoelectrice", Teza de Doctorat, UPT, Timişoara, 1997

Ţ1. ŢÎRCOMNICU, R.; BĂLAŞA, B. ; BLUMENFELD, M. - "An Expert System for Crack Initiation and Propagation", Lucrările celei de a 3-a Conferinţe Internaţionale de Elemente Finite şi de Frontieră, Secţiunea 1, Constanţa, 1995, pag. 230 - 237.

V1. VAN DER SLUYS - "Application of Finite Element Techniques to Fracture Mechanics Analysis", The Babcock & Wilcox Company, Ohio, 1971

V2. VASIU, L. - "Visual Basic 3.0", Ed. Tehnicş, Seria Microsoft, Bucureşti. 1996

V3. VOLTA, G; LUCIA, A.C - "Results of the Pretests Analysis and Start-up of the JRC Ispra Pressurized Thermal Shock Experiment: Nozzle Corner Crack Behavior", Int.Journal of Pressure Vesseles and Piping, vol.33, nr.3, 1988, pag.165-196

W1. WADE, B.G; KOBAYASHI, A.S - "Photoelastic Investigation on the Crack-arrest Capability of a Pretensioned Stiffened Plate", Experimental Mechanics, January 1975, pag.1-9

W2. WANG, W. - "Visual Basic 3 pentru toţi", Ed. Teora, Bucureşti, 1996

W3. WNUK, P.M - "Fundamental Concepts of Damage Tolerant Design", 9^{th} Biennial European Conference on fracture, Varna, 1992, pag. 687 - 715

W4. WILLIAMS, M.L. - "On Stress Distribution at the Base of Stationary Crack, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.24, pag.109-114, 1957

W5. WAWRZYNEK, P.A ; INGRAFFEA, A.R. - "Discrete Modelling of Crack Propagation: Theoretical Aspects and Implementation Issues in Two and Three Dimensions", Cornell University, Raport PYI 8351914, Ithaca, New York, 1991

Y1. YAGAWA, G; UEDA, H; TAKAHASHI, Y - "Numerical and Experimental Study On Ductile Fracture Of Plate With Surface Crack"; Fatigue and Fracture Assesment By Analysis and Testing, PVP-Vol.103, ASME, 1986, pag.43-48

Y2. YOUN, S.; RUDOLPHI, T.J. -"On Dual Boundary Integral Equations for Crack Problems", Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 12, No.10, October 1995

Y3. YU, I.-W; WILSON, W.K - "Generation of Singular Elements for the Analysis of Cracked Bodies", 78-1E7-NESPD-P1, Westinghouse R&D Center, Pittsburg, 1978

Z1. ZIENKIEWICZ, O.C - "The Finite Element Method", 3rd Edition, Mc Graw-Hill, New York, 1977

1. * * * - MSC/NASTRAN for Windows Installation and Application Manual, Version 2.0, The MacNeal-Schwendler Corporation, 1995

2. * * * - ASME BOILER AND PRESSURE VESSEL CODE, SECTION XI, Rules for Inservice Inspection of Nuclear Power Plant Components, New York, 1995 Edition

3. * * * - "Katalog 500", Micro-Measurements Division, Measurements Group Vishay

4. * * * - "Operating and Instruction Manual For Model 080 Series Photoelastic Teaching Polariscope System", Photoelastic Inc.

5. * * * - "Recommedations for use of FEM in fracture mechanics", ESIS Newsletter, Technical commitee 8 for Numerical Methods,Nr.15, 1991

6. STAS 1963 - 81 - "Rezistenţa materialelor. Terminologie şi simboluri"

7. STAS 9760 - 84 - "Determinarea tenacităţii la rupere în condiţiile stării plane de deformaţie. Metoda K_{IC}"

8. STAS E 12803-90 - "Determinarea deplasării la deschidere a fisurii"

9. STAS 200 - 75 - "Încercările metalelor. Încercarea la tracţiune"

10. STAS 10290- 75 - "Încercările metalelor. Încercarea la tracţiune. Determinarea caracteristicilor elastice"

11. STAS 7511 - 81 - "Încercările metalelor. Încercarea de încovoiere prin şoc pe epruvete cu crestătură în V"

12. STAS 6833 - 79 - "Încercările metalelor. Încercarea de încovoiere prin şoc la temperaturi scăzute"

13. ASTM E 616-89 - "Standard Terminology relating to Fracture Testing"

14. ASTM E 813-87 - "Standard Test Method for J_{IC} a Measure of Fracture Toughness"

15. ASTM E 1290-89 - "Standard Test Method for Crack-Tip Opening Displacement (CTOD) Fracture Toughness Measurement"

16. ASTM E 647-86 - "Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates"

17. BS 7488: Part I: 1991 - "Fracture Mechanics Toughness Tests; Part I. Method for determination of K_{IC}, critical CTOD and critical J values of metallin materials"