MINISTERUL INVATAMANTULUI
UNIVERSITATEA POLITEHNICA DIN TIMISOARA
FACULTATEA DE MECANICA

ING. LIVIU BERETEU

CERCETARI PRIVIND CONTROLUL VIBRATIILOR SISTEMELOR MECANICE SLAB AMORTIZATE

Teza de doctorat

CONDUCATOR STIINTIFIC
Cerc.st.princ.grad I Dr.ing.TITUS GH. CIOARA

1996

CUPRINS

INTRODUCERE

Scopul principal al controlului comportării dinamice a unei structuri mecanice este, în general, de a-i îmbunătăţi performanţele în toate condiţiile de solicitări, astfel încât tensiunile, în orice secţiune a sa, să rămână mai joase decât valorile limită admise.

Reducerea nivelelor de vibraţii la structurile de maşini, utilaje şi construcţii industriale preocupă de foarte mult timp specialiştii din domeniu. La început aceste probleme se rezolvau, de către analişti, pe baza unor soluţii tehnice intuitive date pentru modele simplificate. Teoriile dezvoltate de matematică au deschis un câmp larg de aplicabilitate în acest domeniu fascinant al mecanicii.Dar, numai dezvoltarea electronicii şi tehnicii de calcul a mărit coniderabil posibilităţile de investigare şi analiză experimentală. La ora actuală posibilităţile teoretice şi experimentale permit rezolvarea celor mai complexe probleme de reducere a nivelelor de vibraţii ale structurilor mecanice.In literatura de specialitate această problemă este cunoscută sub denumirea de control al vibraţiilor şi include o serie de procedee [117]:diminuarea perturbaţiilor, izolarea antivibratorie, introducerea unor elemente disipative pasive şi semiactive sau a unor elemente active, toate acestea constituind modificări dinamice structurale.

In majoritatea cazurilor structurile de maşini, utilaje şi construcţii industriale au o capacitate internă de amortizare foarte redusă, aceasta facilitând amplificarea nivelelor de vibraţii şi solicitări dinamice în regimuri rezonante. Din acest motiv această lucrare se axează pe controlul vibraţiilor unor astfel de structuri, asupra cărora prin intervenţii minore se pot obţine rezultate spectaculoase. Modificările necesare vizează optimizarea unor parametri, pentru care am dezvoltat o serie de metode a căror generalitate permite o largă aplicabilitate.

Realizarea unei comportări dorite se urmăreşte încă din faza de proiectare. Proiectarea unei structuri sigure necesită satisfacerea a trei cerinţe: informaţii exacte asupra forţelor aplicate, informaţii asupra comportării şi rezistenţei materialelor din care se realizează şi, respectiv, metode exacte pentru analiză şi proiectare. Aceasta înseamnă că structurile mecanice necesită a fi supuse, în fiecare etapă a proiectării, unei analize dinamice.

Prima problemă a analizei dinamice o constituie simplificarea structurii mecanice care, în general, este foarte complexă, şi obţinerea unui model fizic. Următorul pas îl constituie stabilirea modelului matematic, sub forma unui sistem de ecuaţii diferenţiale care să guverneze mişcarea mecanică. In sfârşit, ultima fază a analizei dinamice o constituie determinarea răspunsului structurii.

Revenind la alegerea modelului, acesta trebuie să fie, după părerea unui mare specialist în domeniu, prof. H. G. Natke [116], "atât de simplu cât este posibil şi atât de complex cât este necesar". Modelarea trebuie să ţină cont de domeniul de frecvenţă în care poate să fie excitată structura.

Pentru frecvenţele joase răspunsul poate fi descris folosind un număr mic de moduri proprii şi este, deci, cazul cel mai frecvent de utilizare a analizei modale. Pentru domeniul frecvenţelor medii răspusul poate fi descris numai folosind un număr mare de moduri proprii. Este limita la care se poate aplica încă metoda analizei modale. In domeniul frecvenţelor înalte trebuie folosite funcţiile de răspuns în frecvenţă.

Prin urmare, analiza structurilor începe cu modelarea, iar modelul acceptat trebuie să fie validat prin informaţii independente de cele care au dus la crearea modelului, de exemplu pe cale experimentală. Se constată că parametrilor modali le-a crescut importanţa în proiectarea structurilor mecanice, deoarece, în acest pas al dimensionării este necesar a se verifica conformitatea structurii în raport cu comportarea dinamică impusă. In acest context prima proiectare nu va duce la rezultatele dorite. De aceeea, în proiectare se folosesc încă diferiţi coeficienţi de siguranţă. Totuşi, proiectantul poate să schimbe câteva elemente ale structurii şi să repete calculele în noile condiţii. Aceasta reprezintă o reanaliză a structurii.

Dacă se fac câteva modificări în structură acestea se vor reflectă în matricele de inerţie, de rigiditate şi de amortizare şi vor influenţa, prin intermediul parametrilor modali, comportărea structurii. Se poate pune şi problema inversă, adică să se determine modificărilor necesare pentru ca structura mecanică să aibă o comportare dorită.

Progresele realizate în proiectare prin îmbunătăţirea continuă a metodelor de analiză, cum ar fi metoda elementelor finite, metoda elementelor de frontieră sau metodelor experimentale de analiză (metoda analizei modale experimentale), prin realizarea unor materiale noi, cu o comportare controlabilă, toate acestea au dus la creşterea flexibilităţii structurilor. Structurile suple, cu o flexibilitate mărită, sunt cunoscute sub numele de structuri slab amortizate, aceasta datorită faptului că factorii de amortizare modali au valori foarte mici şi, prin urmare, timpul de anulare a unei vibraţii libere este foarte mare. Practic, orice structura prezinta câteva grade de libertate rezultate din partile flexibile (cabluri, tiranti, cuplaje, etc.) chiar daca cea mai mare parte a componentelor se consideră alcătuită din elemente rigide. In multe aplicaţii, cum ar fi: agregatele aeroelectrice, excavatoarele miniere, maşinile de transport şi ridicat, maşinile de haldat, antenele telescopice, braţele roboţilor, conductele de gaze, etc., deformaţiile structurale sau modificarea geometriei sunt nedorite.

Efectele rezonante sunt de cele mai multe ori distrugătoare. Din punct de vedere energetic aceste efecte se explică prin incapacitatea structurii elastice de a disipa, prin ea însăşi, energia introdusă de sursa perturbatoare. Surplusul de energie conduce la deplasări şi deformaţii periculoase pentru structură.

Apare, astfel, evidentă necesitatea controlului vibraţiilor structurilor mecanice pentru a le asigura acestora funcţionalitatea şi siguranţa în exploatare, iar uneori se pune şi problema asigurării unui anumit confort. O abordare sistematică a problemei controlului vibraţiilor necesită trei etape. Prima etapă cuprinde: definirea problemei, identificarea surselor de vibraţii şi stabilirea limitelor acceptabile a nivelelor de vibraţii. A doua etapă cuprinde o analiză profundă a problemei, în care trebuie luaţi în considerare factori tehnici (comportarea dinamică), economoici, legali şi sociali. Luarea în considerare a tuturor acestor factori sau numai a unora depinde de importanţa problemei. In sfârşit, în ultima etapă trebuie făcute recomandări şi date soluţii tehnice. Controlul vibraţiilor poate fi făcut folosind mecanisme pasive, semi-active sau active.

Mecanismele de control activ prevăd existenţa unui sistem auxiliar de control al forţelor. Un mecanism de control activ lucrează numai dacă acestuia i se furnizează continuu energie din exterior. El este foarte costisitor, dar este capabil sa controleze răspunsul în deplasări, viteze sau acceleraţii, acestea din urmă fiind responsabile de confortul uman. In cazul unor structuri importante se justifica şi din punct de vedere economic folosirea mecanismelor de control activ [1].

Un mecanism de control pasiv lucrează fără aport de energie externă, de aceea este mai puţin costistor şi este capabil a controla răspunsul unei structuri până la o anumită limită, impusă de lipsa de energie capabilă să genereze forţe mari. Energia pe care o are structura la dispoziţie este energia potenţială generată de răspunsul structurii. Modificările structurale conduc la creşterea disipării de energiei introduse în structură prin vibraţii mecanice sau la redistribuirea acesteia.

Mecanismele de control semi-active intră în acţiune în urma unor comenzi care, fie că se fac pe bază inerţială, şi prin urmare nu este necesară energie suplimentară, fie că se fac în urma unui aport minim de energie. Aşa este cazul unor tipuri de amortizoare hidraulice care au posibilitatea de a-şi mări deschiderile orificiilor de curgere a fluidului, în funcţie de nivelul vibraţiilor. In mod real aceste sisteme au nevoie de un minim de energie necesară aparatelor de măsură şi control. Au însă avantajul functionării ca sisteme pasive, dacă dispozitivele de măsură şi control sunt scoase din funcţiune.

In urma unei experinţe bogate în cadrul Laboratorului de Vibraţii şi Vibropercuţii, cercetările privind controlul vibraţiilor în structurile slab amortizate mi le-am orientat spre metodele pasive şi semi-active, metode care, nefiind atât de costisitoare, au putut fi aplicate şi pentru care am putut proiecta şi realiza dispozitive speciale. Pornind de la acestă problematică, având în vedere şi situaţiile practice întâlnite în cadrul unor contracte de cercetare [48→55], am căutat să structurez această lucrare în ordinea cerută de rezolvărea unei probleme de control asupra comportării dinamice a unei structuri mecanice.

Pe parcursul desfăşurării primelor şase capitole s-au definit problemele puse de comportarea dinamică a unor structuri de maşini şi utilaje având amortizări interne foarte slabe. S-au dat exemple concrete şi edificatoare de structuri pentru care s-au stabilit modelele dinamice. S-au formulat criterii de optimizare a controlului vibraţiilor, în sensul reducerii nivelelor acestora. De asemenea, s-au realizat algoritmi şi programe de calcul pentru optimizare. Din aceste motive, în mod logic, pentru încheierea lucrării, în Capitolul VII se dau soluţii constructive, concrete, pentru dispozitive speciale de control al vibraţiilor, ataşate structurilor de maşini. Soluţiile sunt originale, prezentând elemente brevetabile.

În capitolul de încheiere sunt scoase în evidenţă obiectivele avute în vedere la elaborarea acestei lucrări, limitările impuse datorită unor ipoteze simplificatoare şi principalele contribuţii originale.

*****

Acest studiu a fost elaborat în cadrul Laboratorului de Vibraţii şi Vibropercuţii al Catedrei de Mecanică din Universitatea "Politehnica" Timişoara.

Imi exprim întreaga recunoştinţă d-lui prof. dr. doc. ing. Gheorghe Silaş, membru corespondent al Academiei Române, pentru observaţiile făcute şi sprijinul acordat în finalizarea acestei lucrări.

Mulţumesc sincer conducătorului ştiinţific, d-l dr. ing. Titus Gh. Cioară, cercetător ştiinţific principal gradul I, pentru ajutorul acordat pe tot parcursul elaborării acestei teze şi pentru încurajările date în depăşirea unor momente mai dificile.

CAPITOLUL I

NECESITATEA REDUCERII NIVELELOR DE VIBRATII PE STRUCTURI DE MASINI SI UTILAJE

Structurile de maşini şi utilaje, în special cele metalice, sunt în majoritatea cazurilor structuri mecanice complexe cu o foarte slabă amortizare internă. Din acest motiv, sub acţiunea perturbaţiilor externe sau interne, de natură tehnologică sau netehnologică, pot să apară mişcări vibratorii de deformare dinamică a structurii care sa atingă nivele de dezvoltare ale unor tensiuni dinamice periculoase pentru insăşi integritatea ei. Chiar nivelele mici de vibraţii pot să influenţeze asupra calităţii produselor. Astfel, vibraţiile relative dintre sculă si piesă, la o maşină unealtă, duc la mărirea rugozităţii suprafeţei prelucrate, abateri dimensionale şi uzură prematură a sculei. De aceea, în proiectarea unei maşini unelte se acordă o mare importanţă evitării regimurilor autooscilante, în zonele de turaţii şi avansuri disponibile. În cazul în care aceste regimuri nu pot fi evitate se recurge la proiectarea unor absorbitori dinamici de vibraţii. Este cazul barelor port sculă, în consolă, de la maşinile de găurit şi alezat orizontale, la care se folosesc amortizoare de tip Lanchaster.

Structurile cu amortizare slabă sunt foarte numeroase şi în domeniul construcţiilor, cum sunt podurile cu deschideri foarte mari, ale căror frecvenţe proprii sunt foarte joase, între 0.2-2Hz, favorizând excitarea lor chiar şi pentru circulaţia pietonală. Este cazul des citat, al excitării modului fundamental al unui pod, prin acordarea cadenţei paşilor cu frecvenţa acestuia si crearea condiţiilor de rezonanţă care au dus la distrugerea lui. Un alt caz, des citat în literatură, este cel al podului Tachoma la care efectul de rezonanţă distrugător a fost întreţinut de vârtejele alternante ce se crează în anumite condiţii de amplasare a unui profil în calea unui curent de fluid. Dacă profilul plasat în calea fluidului este o structură elastică, atunci pulsaţiile de presiune create de efectul amintit, il pot duce la rezonanţă şi, deci, la distrugerea sa. În această lucrare se vor analiza câteva structuri mecanice de o importanţă deosebită şi a căror comportare a fost obiectul unor contracte de cercetare [48→55].

1.1. Agregatul aeroelectric cu ax orizontal

In optimizarea proiectarii unei structuri se are în vedere ca spectrul perturbaţiilor inevitabile, care lucrează asupra sa, să nu aibă vârfuri în vecinătatea frecvenţelor proprii ale modurilor naturale. Chiar dacă acest lucru este imposibil de realizat, în toate cazurle practice, se pot lua unele măsuri de disipare a energiei vibraţiilor structurii prin amplasarea unor disipatori locali sau de redistribuire a acesteia în urma unor modificări structurale. Un exemplu edificator, în sensul celor de mai sus, îl constituie agregatul de vânt cu ax orizontal (Fig.1.1).

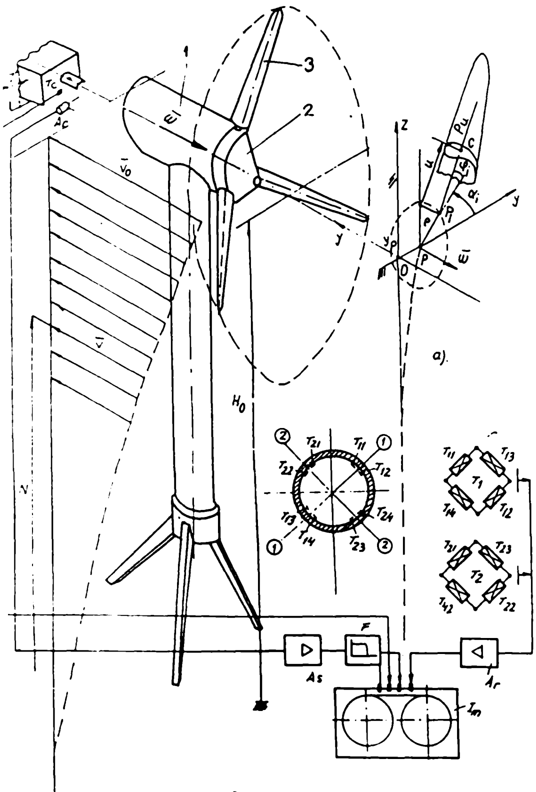

Fig.1.1.

Ansamblul agregatului este format din : nacela 1, rotorul 2, pe care sunt plasate un set de trei palete 3 şi turnul de susţinere. Prin construcţie, din motive economice, atât turnul de susţinere cât şi ansamblul paletat sunt structuri foarte slab amortizate, iar sistemul dinamic al ansamblului este un sistem giroscopic cu excitaţie de tip parametrică. Acest fapt duce inevitabil la un răspuns dinamic după frecvenţele modurilor naturale de vibraţii.

Ilustrativ, în acest sens, este semnalul de acceleraţii de efort dinamic prezentat in Fig.1.2, inregistrat la agregatul experimental de 300 Kw instalat pe amplasamentul Semenic. La un regim staţionar al agregatului, la turaţia de 30 rot/min (.5 Hz), regim marcat printr-un semnal de impuls, dat la fiecare rotaţie de un traductor de contact, măsurând frecvenţa vibraţiilor cu ajutorul unui accelerometru la nivelul turnului (semnalul a(t)) sau măsurând

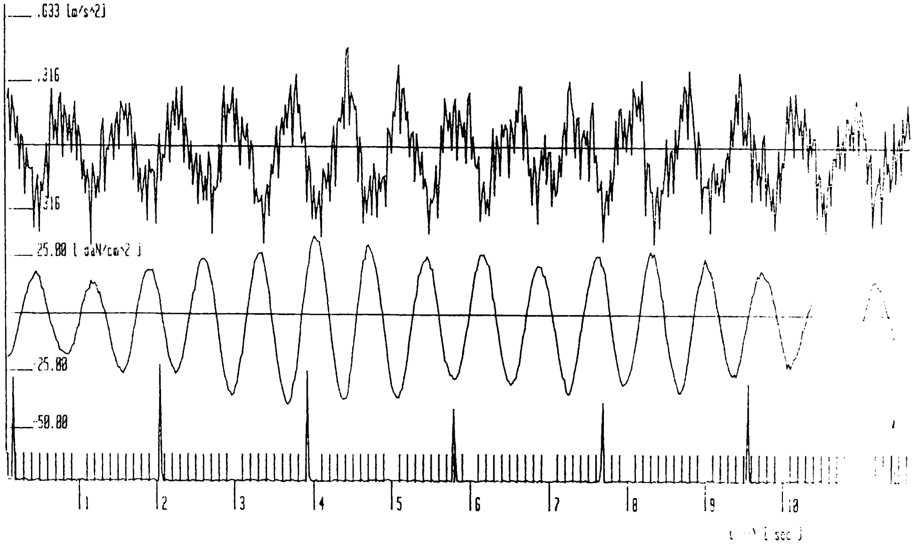

Fig.1.2.

efortul σ(t), cu ajutorul unui traductor rezistiv plasat la baza turnului, în ambele semnale este prezentă frecvenţa de 1,4 Hz.

Deci un dezechilibru dinamic al rotorului paletat este cel

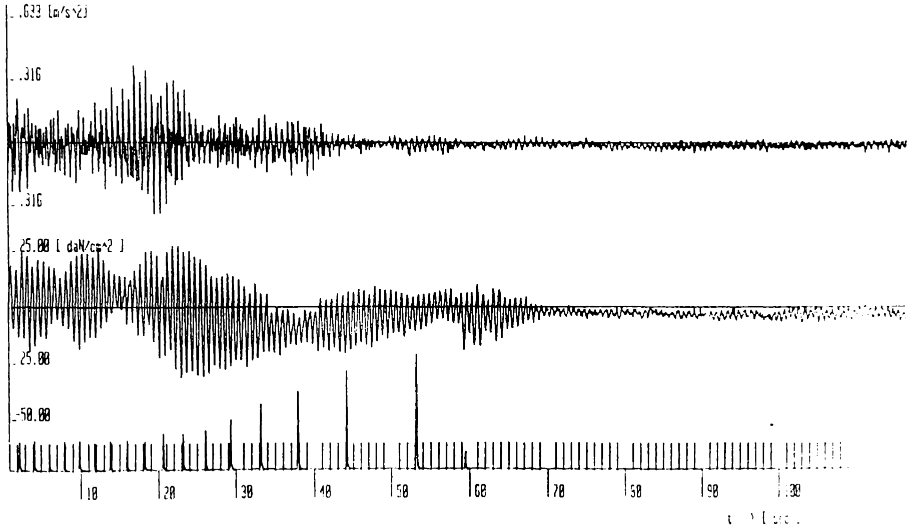

Fig.1.3.

care excită vibraţiile agregatului. Pentru un regim tranzitoriu, de oprire a agregatului, înregistrat pe un interval de 153 s (Fig.1.3.) se constată aceeaşi frecvenţă în cele două semnale. Acest lucru demonstrează că în timpul funcţionării agregatului, acesta este excitat preponderent pe un singur mod de vibrație, modul de încovoiere al turnului, având frecvența proprie de 1,4 Hz.

După modul lent în care se sting vibrațiile, se poate aprecia că amortizarea modală este extrem de mică, fapt ce reclamă introducerea unui sistem de disipare a vibrațiilor. Pentru edificarea asupra ordinului de mărime a amortizării, dau în continuare câteva rapoarte de amortizare modale: ζ_1 = 0,006, ζ_2 = 0,0105, ζ_3 = 0,0015, ζ_4 = 0,0019 și ζ_5 = 0,0032, obținute în [48].

1.2. Cazan de abur pentru termocentrală

O altă problemă, abordată în activitatea de cercetare, a fost aceea a controlului nivelelor de vibrații ce apar pe structura cazanelor de abur de la termocentrale. Lucrările experimentale au fost făcute pe structurile cazanelor de la termocentrala Anina.

Pentru a da posibilitate dilatării termice libere, datorită

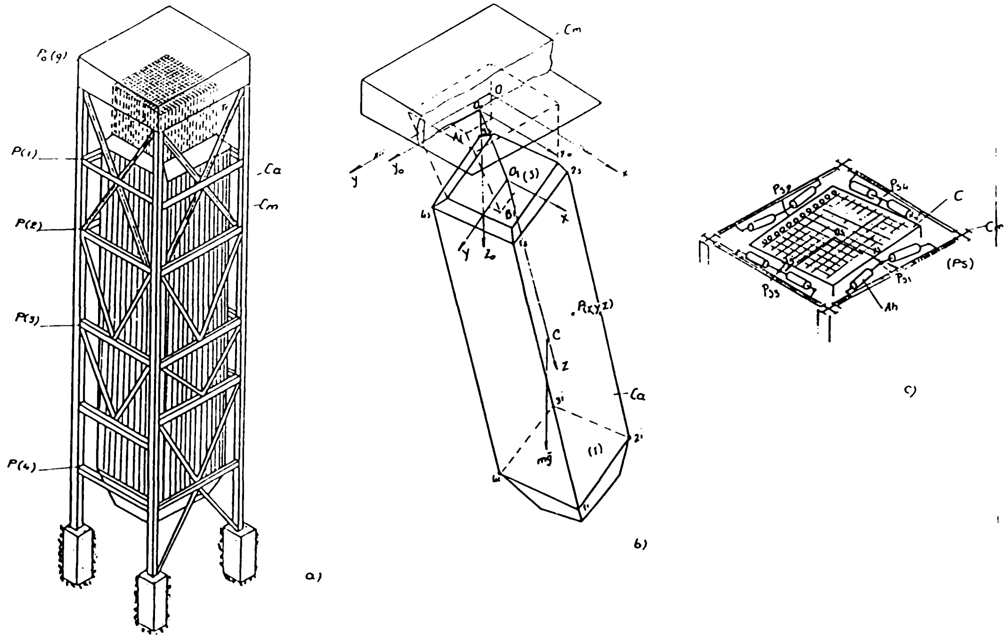

Fig.1.4.

variațiilor mari de temperatură, cazanul C_a este fixat doar la un capăt (Fig.1.4.). Fixarea la ambele capete ar duce la împiedicarea unei dilatări termice de 1,5-2 m. Această dilatare rezultă din lungimea sa care este de peste 90 m, dilatare care ar duce la distrugerea cazanului, o construcţie metalică suplă din profile uşoare şi o tubulatură de abur şi fum. Prinderea se face la nivelul superior al cazanului prin intermediul unui numar mare de tiranţi, distribuiţi uniform pe suprafaţa capătului superior al cazanului. Tensiunile din tiranţi sunt reglate a fi egale între ele pentru a se păstra o poziţie verticală a cazanului suspendat prin tiranţi, ca un pendul. Reglarea fiecărui tirant se face prin intermediul unor mecanisme cu şurub.

Din punct de vedere dinamic interesează cazul în care o undă seismică, ce se transmite la cazan prin construcţia metalică de sustinere şi tiranţii T_t, poate provoca elongaţii mari ale cazanului care, în anumite zone, să ia contact cu construcţia metalică provocând deteriorări locale sau chiar avarierea instalaţiei tehnologice. Problema s-a pus pentru prima dată la cazanul ce-a echipat centrala Anina unde exista posibilitatea excitării sistemului prin unde seismice provocate de exploziile din cariera de şist aflată în imediata apropiere a centralei. Problema se poate pune în general pentru toate cazurile în care apar excitaţii seismice. Pentru diminuarea nivelelor mişcărilor vibratorii proiectantul a ales o soluţie de introducere a unor legături vâscoase între puncte ale cazanului şi puncte ale construcţiei metalice de susţinere C_m. Aceste legături sunt asigurate prin amortizoarele hidraulice A_h, care disipează energia vibraţiilor relative între punctele de prindere a lor. Problema care se pune este de a efectua o proiectare optimală a cilindrilor hidraulici disipatori de energie C_h (Fig.1.4.), plasaţi în plane situate la cotele P_4(+12m), P_3(+41m), P_2 (+57m) şi P_4 (+72m), în aşa fel încât să se obţină o atenuare optimă a nivelelor de vibraţii relative între structura cazanului de abur şi construcţia metalica de susţinere a lui. Se va presupune o excitaţie de tip undă seismică având o intensitate prognozată ca maximă în zona în care este amplasată termocentrala.

1.3. Sisteme de conducte pentru transport fluide

Minimalizarea răspunsului de vibraţii ale unor structuri de maşini şi agregate se poate face prin introducerea unor legături rigide, a unor legături cu frecare vâscoasă sau uscată, în anumite

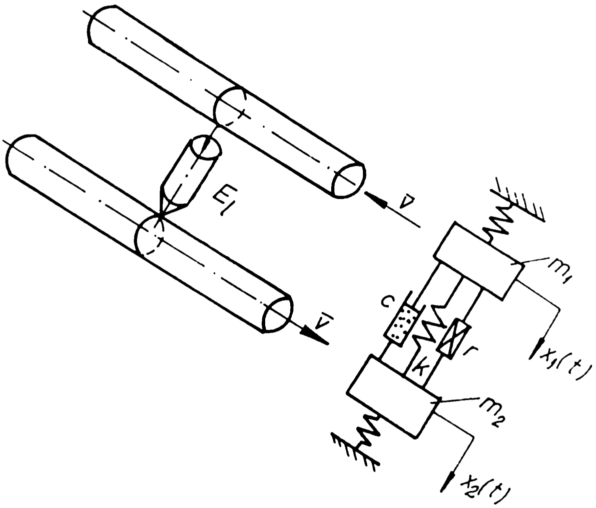

Fig.1.5.

condiţii impuse de mişcarea relativă. Această problemă are aplicaţii la controlul vibraţiilor în situaţiile în care apar variaţii rapide ale forţelor sau deplasărilor relative ale unor puncte din structură şi se întâlnesc în cazul generatoarelor de abur, conductelor forţate din industria chimică, conductelor de răcire a lagărelor de alunecare de la termocentrale, etc. Datorită complexităţii traseelor conductelor, de la distribuitor la consumator, domeniul de excitaţie al pulsaţiilor de presiune a pompelor interferează cu cel al frecvenţelor proprii ale modurilor naturale de vibraţii, şi este imposibil de evitat efectele rezonante pe diverse porţiuni de conducte, aceste efecte ducând la ruperi frecvente de conducte sau a stâlpilor de susţinere. În combinatele chimice se practică utilizarea unor suporţi de fixare a conductelor, problemă care se rezolvă prin tatonări, şi care poate să reducă nivelul vibraţiilor doar pentru un regim de lucru al pompelor, regim care se schimbă datorită procesului tehnologic. Rezolvarea problemei se poate face prin elemente de tip arestor (Fig.1.5.) care au rolul de disipare de energie prin elemente vâscoelastice sau de frecare uscată sau de rigidizare a elementului de legătură în momentul în care nivelul vibraţiilor relative, $x_1(t)-x_2(t)$, dintre cele două conducte depăşeşte anumite nivele periculoase. Prin aceasta se realizează o modificare structurală a ansamblului de conducte, ceea ce are drept efect mutarea frecvenţei proprii excitate. În momentul în care nivelul vibraţiilor scade, legătura rigidă se întrerupe automat şi astfel rămâne în funcţiune legătura vâscoelastică.

1.4. Masini de transportat şi ridicat

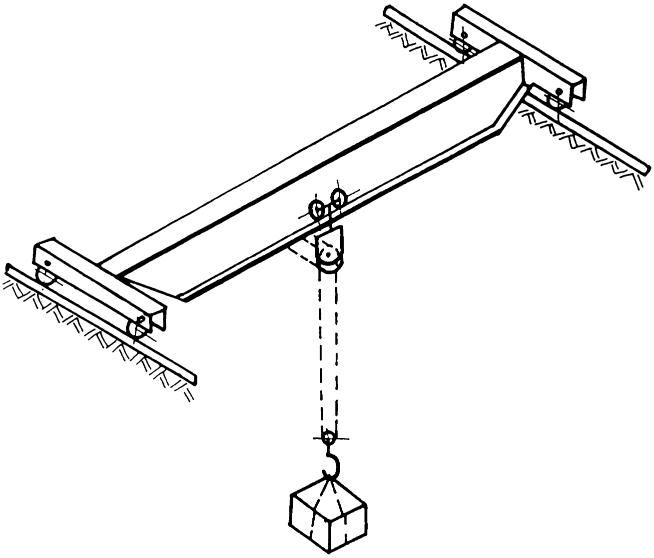

Fig.1.6

O categorie aparte de probleme de control al vibraţiilor structurilor mecanice este cea a căror excitaţie este produsă prin sistemul de acţionare a maşinii şi agregatului. Este vorba de efectele tranzitorii ale acţionării, efecte des întâlnite în cazul maşinilor de ridicat. Astfel, o grindă rulantă (Fig.1.6.), prezintă în faza de ridicare sau de depunere a sarcinii, vibraţii ale căror elongaţii depind foarte mult de diagrama de acţionare a motorului. In sistemul dinamic intră masele, rigidităţile distribuite ale grinzii, elasticitatea cablului precum şi masa sarcinii. Dereglarea treptelor de turaţie prin regimuri de pornire, nepotrivit alese, duce la efecte dinamice puternice ce pot atrage desprinderea grinzii de calea de rulare, cazuri întâlnite în practică. Efectul dinamic este amplificat şi datorită faptului că, şi în acest caz, amortizarea internă este foarte scăzută. Din acest motiv la unele grinzi rulante ale podurilor ce deservesc liniile de laminoare, unde, din motive tehnologice, vitezele de manevrare a lingourilor trebuie să fie mari, se practică introducerea unor sisteme de disipare a energiei la nivelul grinzii rulante.

Tot în sfera acţionărilor care au influenţă mare în comportarea dinamică a structurilor de maşini, se pot da ca exemplu macaralele turn şi portuare (Fig.1.7.). Structurile lor sunt foarte slab amortizate, iar frecvenţa fundamentală este foarte joasă, în domeniul 1.5-2 Hz. Din acest motiv perioadele mişcărilor vibratorii

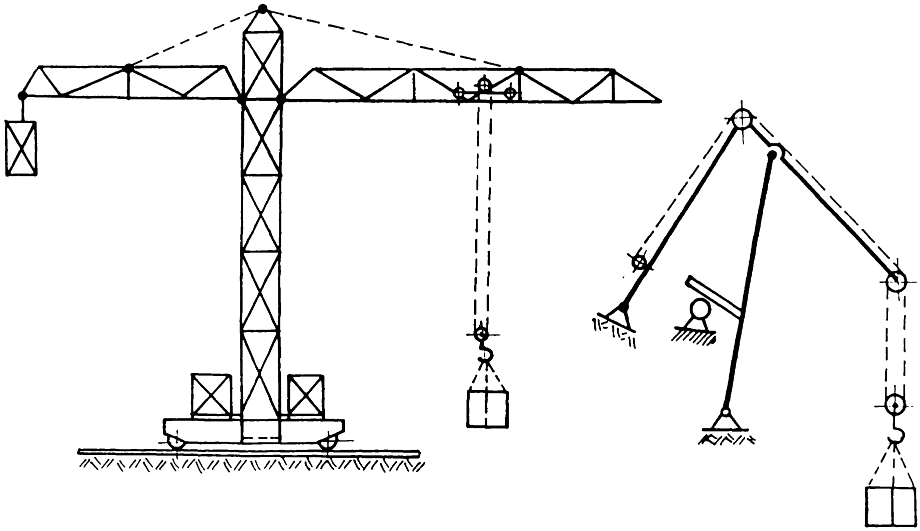

Fig.1.7

ale structurilor au valori apropiate de cele ale acţionării forţelor motoare tranzitorii. In timpul experimentelor efectuate, prin măsurători tensometrice şi de vibraţii, pe structura unor macarale turn pliante, la o operaţie de rotire urmată de o acţionare necorespunzătoare a frânării rotirii, efectul dinamic al maselor aflate în mişcare de rotaţie a dus la torsionarea turnului, până la zona de deformare plastică, după care a urmat pierderea stabilităţii şi distrugerea ei. La punerea în funcţiune a unor macarale portuare s-a constatat că deplasarea pe orizontală a sarcinii nu putea fi controlată, sarcina având mişcări de pendulare cu amplitudini foarte mari. S-a întâmplat că sarcina s-a lovit de structura macaralei. In urma experimentelor efectuate s-a constatat o proastă reglare a actionării mecanismului de translaţie de tip cremalieră ce acţiona asupra mecanismului patrulater al macaralei. Condiţia ca sarcina din cârlig să nu penduleze este impusă de deplasarea ciocului macaralei pe orizontală, lucru ce se realizează din mecanismul patrulater al macaralei. Condiţia ca sarcina să nu penduleze este asigurată şi printr-o deplasare cu viteză constantă a ciocului macaralei, adică asigurarea unor acceleraţii şi deceleraţii minime.

1.5. Excavatorul cu cupe

Probleme deosebite se pun în momentul de faţă în industria minieră de suprafaţă, unde utilajele tehnologice au dimensiuni gigantice, au o uzură pronunţată, unele fiind cu durata de funcţionare prescrisă depăşită. Se pune problema reevaluării rezervelor pentru a mai putea lucra în siguranţă. Deorece starea de uzură a unui utilaj este corelată cu creşterea nivelelor de vibraţii se prevăd stabilirea unor metode de corelare cantitative între cauză (uzura) şi efect (vibraţii). Astfel, un escavator de suprafaţă cu roată cu cupă (Fig.1.8.) este o construcţie metalică din grinzi cu zăbrele ancorate cu susţinere de cabluri. Agregatul se compune dintr-un şasiu pe şine **1** pe care se află fixată o structură de rezistenţă **2** ce se roteşte faţă de saşiu în jurul unei axe verticale OZ pe un rulment plan **3**. Pe structura de rezistenţă sunt amplasate principalele subansamble ale agregatului: braţul **4** al roţii cu cupe **5** şi mecanismul troliu de ridicare a braţului format din tamburul de cablu **6**, având două ramuri R_1 şiR_2 şi scripeţii **7** şi **8**. Rolele scripetelui 7 sunt amplasate la capătul liber al unui stâlp **9** articulat de structură după axa $X_2O_2X_2$. Poziţia stâlpului este fixată la unghiul α_2 faţă de orizontală de doi tiranţi din cablul **10**, fixaţi la un capăt de structura **2** prin intermediul a două urechi de cablu U_{r1} şi U_{r2}, iar la celălalt capăt de două urechi circulare sudate de stâlpul **9**. Pentru echilibrarea statică a ansamblului excavatorului în camera structurii **2** este amplasată o masă balast **11**, din care se aduce poziţia centrului de greutate al ansamblului, în perimetrul de sprijin pe şenile. Roata cu cupe este acţionată de la un motor electric M_e prin intermediul unei transmisii cardanice T_r şi un reductor R_d, avansul de excavare realizându-se atât prin rotirea structurii 2 în jurul axei OZ cât şi prin rotirea braţului port roată cu cupe. Excavatorul este deservit de două benzi transportoare, una B_{t1} amplasată de-a lungul braţului şi alta B_{t2} care asigură transferul cărbunelui la linia de benzi ce alimentează depozitul de cărbune.

In procesul de lucru al excavatorului apar perturbaţii dinamice complexe. Principala sursă de perturbaţii este dată de procesul de excavare: fluctuaţii ale forţelor de tăiere în stratul neuniform de cărbune, uzuri neegale ale dinţilor pe cele 9 cupe de excavare sau în multe cazuri lipsa unor grupe de dinţi. Pentru ca nivelele forţelor tăietoare pe dinte să nu depăsească anumite

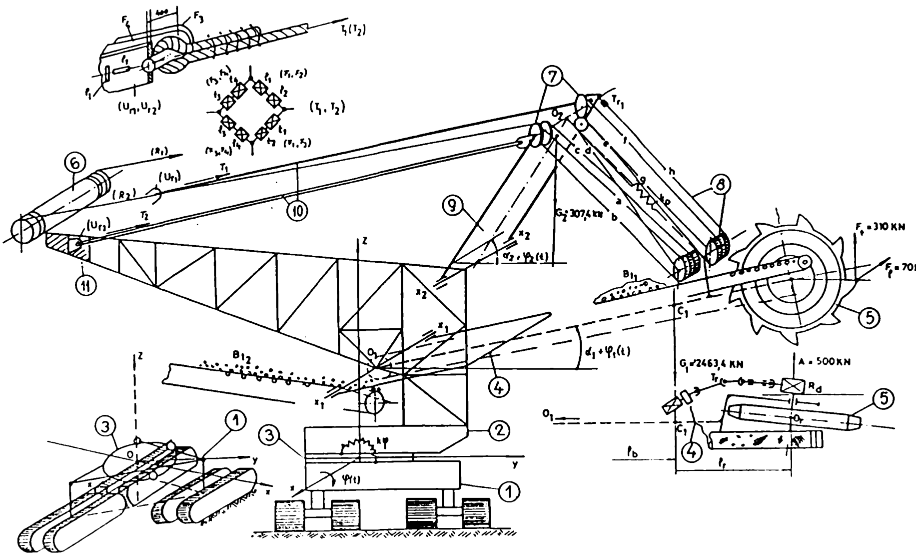

Fig.1.8

valori impuse (forța tangențială la roata F_t = 310 kN și forța laterală F_l = 70 kN), la capetele de prindere ale ramurilor R_1 și R_2 de stâlpul 9 s-a fixat câte un traductor hidraulic T_h cu indicare manometrică și posibilitatea decuplării automate în cazul atingerii nivelelor de avarie. Aceste indicatoare de forțe dau posibilitatea echilibrării, la montaj, a forțelor de lucru de pe cele două ramuri și verificarea lor în timpul funcționării.

În practică s-a constatat că acest sistem de monitorizare nu este suficient pentru a elimina posibilitatea apariției unor avarii dinamice, putând să apară chiar avarii majore de răsturnare a utilajului. S-a constatat că nivelele de vibrații ale excavatorului cresc odată cu durata de exploatare a utilajului, punându-se problema corelării acestora cu gradul de uzură a unor subansamble și evaluarea duratei de viață în condiții de siguranță.

În vederea analizei dinamice a structurii excavatorului s-au considerat tiranții 10 ca elemente elastice care preiau sarcinile statice și dinamice, datorită mișcărilor relative care iau naștere între punctele de prindere de structura 2 și stâlpul 9. In semnalele tensiunilor T_1 și T_2 din cei doi tiranți se cumulează componentele modurilor naturale de vibraţii ale ansamblului elastic al excavatorului. Cele două tensiuni T_1 şi T_2 s-au evaluat prin intermediul unui montaj complex de traductori electrorezistivi, câte unul montat pe fiecare din urechile U_{r1} şi U_{r2}. Timbrele electrorezistive s-au montat în punte completă pentru ca din semnalul de ieşire să fie eliminate atât componentele parazitare, date de încovoierea urechilor de prindere, cât şi pentru reducerea devierii semnalelor, dată de variaţia temperaturii. În apropierea urechilor de prindere a tiranţilor s-a plasat şi câte un traductor seismic de acceleraţii, al cărui semnal este proporţional cu legea de acceleraţie a mişcării vibratorii.

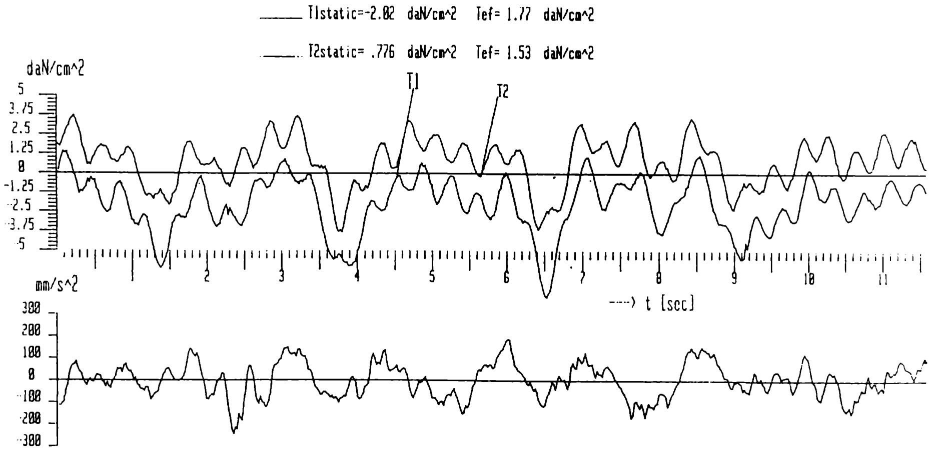

Fig.1.9.

În Fig.1.9. se prezintă numai o secvenţă din cele 35 înregistrate în timpul funcţionării excavatorului în regimuri şi manevre uşoare de lucru. Aceste diagrame reprezintă semnalele eforturilor T_1, T_2 şi respectiv de acceleraţie. Semnalele de răspuns relevă atât prezenţa componentelor răspunsului liber între intrări succesive ale cupelor în strat cât şi componente aleatoare datorate forţelor tăietoare dependente de caracteristicile materialului excavat şi realizării unei legături suplimentare în punctul de atac al stratului. Diagramele tensiunilor din urechile de prindere arată că raportul valorilor efective T_{1ef}/T_{2ef} =1.1-1.3, sunt aproximativ egale, ceea ce arată că preponderente sunt mişcările în plan vertical.

Pentru aceste secvenţe se constată, conform spectrelor din Fig.1.10., prezenţa unui mod de vibraţii al ansamblului

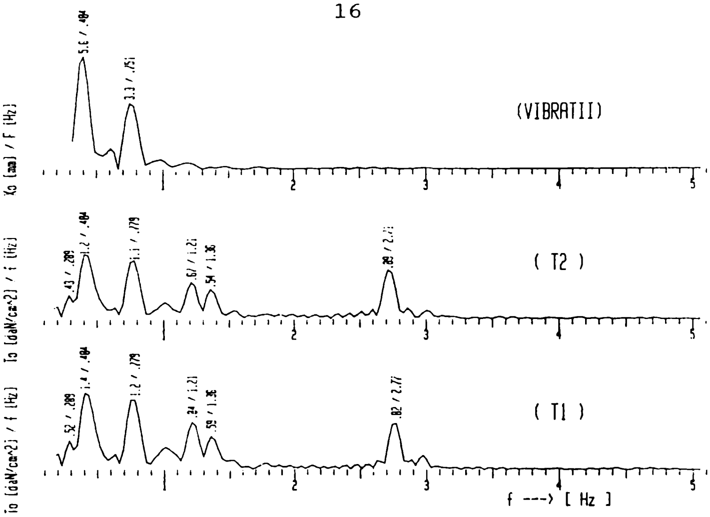

Fig.1.10.

excavatorului având frecvenţa proprie de 0.404 Hz, atât în semnalele celor două secvenţe cât şi în semnalul de acceleraţie. Se poate aprecia că acest mod natural de vibraţii corespunde unei mişcări lente de balans a întregului ansamblu rotitor al excavatorului, având ca sprijin zona de interfaţă cu rulmentul de rotire. Diagramele vibraţiilor structurii arată prezenţa a numeroase moduri proprii în domeniul 0-5 Hz ceea ce este firesc având în vedere masivitatea structurii.

1.6. Maşina de haldat

Un alt exemplu de structură slab amortizată este maşina de haldat (Fig.1.11.). Maşina de haldat analizată este o construcţie metalică suplă formată dintr-un braţ deversor B_{rd} de 120m şi un contrabraţ de echilibrare C_b, fixat de un şasiu rotitor S_r.

Întregul ansamblu, format din braţul deversor B_{rd}, contrabraţul C_b şi şasiul S_r se poate roti pe un rulment plan R_p în jurul unei axe verticale OY, faţă de un şasiu pe şenile. Sterilul care trebuie depozitat în haldă, este preluat de o instalaţie cu bandă I_{ba}, fixată la capătul de alimentare pe un şasiu cu şenile iar la celălalt capăt dublu articulat pe şasiul rotitor S_r. De aici sterilul este preluat de banda deversoare B_d şi deversat pe haldă, la capătul braţului. Pentru a avea un spaţiu de lucru cât mai mare, pe orizontală, braţul se roteşte împreună cu contrabraţul C_d şi şasiul rotitor S_r cu un unghi de 210° iar pe verticală braţul se

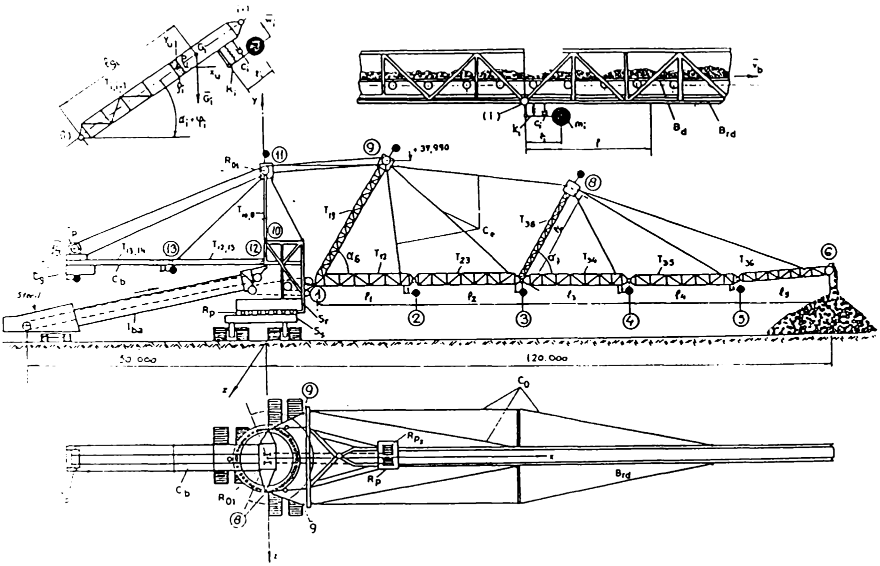

Fig.1.11.

poate roti în jurul unui ax OX orizontal, cu ajutorul unui palan format din toba palanului T_p, cu două ramuri, şi rolele R_{o1} si R_{o2} ale palanului cu câte patru ramuri.

Pentru a obţine o construcţie uşoară la o deschidere de 120 m, braţul este confecţionat dintr-un număr de 5 tronsoane T_{12}, T_{23} ...T_{56}, construite din grinzi spaţiale cu zăbrele, prinse între ele. De-a lungul braţului, prin interiorul grinzilor, este alimentată banda transportoare de deversare. Pentru susţinerea braţului, constituit din tronsoane, sunt introduşi, în construcţia braţului, doi stâlpi T_{17} şi T_{38} înclinaţi la unghiurile α_6 şi α_7 faţa de orizontală. Stâlpii sunt articulaţi în articulaţiile plane 1 si 3. Capetele acestor stâlpi, având o construcţie metalică cu zăbrele, sunt ancorate de tronsoanele braţului. Unul dintre cabluri este prins între capetele stâlpilor T_{17} şi T_{38}. Se formează astfel, în plan vertical, un esafodaj de susţinere a braţului, prins articulat de saşiul rotativ S_r în articulaţia plană 1. Aşa cum s-a arătat, ridicarea braţului maşinii de haldat se face prin intermediul unui palan T_p şi mecanismului de antrenare aferent:

motor, reductor, şi se află la capătul liber al contrabraţului C_b, zonă în care este fixată şi contragreutatea C_g, cu ajutorul caruia se aduce centrul de greutate pe axa de rotaţie. Tot din motive de reducere a greutăţii, contrabraţul este format din două tronsoane $T_{11,12}$ şi $T_{12,13}$ de care este prinsă contragreutatea C_g. Ambele tronsoane sunt ancorate prin două perechi de cabluri unite pe un catarg $T_{10,8}$, prins articulat la celălalt capăt prin articulaţia plană 11 de şasiul S_r. Catargul este ancorat de asemenea printr-o pereche de cabluri fixate de punctele 9 ale şasiului rotativ. Pentru rigidizare braţului, în plan orizontal, se utilizează un eşafod de cabluri C_o plasate în plan orizontal.

Datorită legăturilor cu cabluri de lungimi mari între 20 m şi 50 m, întreg ansamblul, braţ-contarabraţ este elastic, având o amortizare internă foarte slabă, astfel încât vibraţiile ce iau naştere sub acţiune diverselor perturbaţii se sting intr-un timp foarte lung, după întreruperea excitaţiei (2-3 min). În exploatare s-a constatat că principalele surse de perturbaţii sunt: variaţia neuniformă a încărcării benzii cu steril, regimurile tranzitorii de punere în funcţiune şi deplasarea pe şenile a întregului ansamblu. În acest caz, ca soluţie de atenuare a nivelelor de vibraţii, se pot ataşa pe ansamblu braţului şi contrabraţului sisteme inerţiale masă-legătură vâscoelastică, acordate în aşa fel încât sa producă o cât mai bună disipare de energie sau un transfer energetic cât mai bun. Sistemele ataşate se introduc în punctele de elongaţii maxime ale structurii. Astfel, dacă tronsoanele braţului se consideră corpuri rigide, pentru domeniul frecvenţelor joase ale modurilor de vibraţii ale ansamblului, nivelele de vibraţii maxime vor fi la capetele de tronsoane, deci în articulaţii.

Din punct de vedere tehnic se poate apela la o construcţie simplă de sisteme ataşate, un sistem pendular articulat de tronsonul $T_{j,j+1}$. La capătul unui braţ de lungime l_i se fixează o masă m_i, fiind legat de structura tronsonului printr-un arc de constantă elastică k_i şi un element de disipare vâscoasă având constanta de amortizare c_i. Din punct de vedere dinamic acest mecanism se reduce la un sistem vibrant axat pe direcţie perpendiculară pe tronsonul $T_{j,j+1}$ având masa m_{ai} şi constantele elasice şi de amortizare k_{ai} si c_{ai}. Se pot ataşa sisteme disipative şi la capetele stâlpilor de ancorare T_{38}, T_{19} si catargul $T_{10,11}$.

1.7. Echipamente electrotehnice

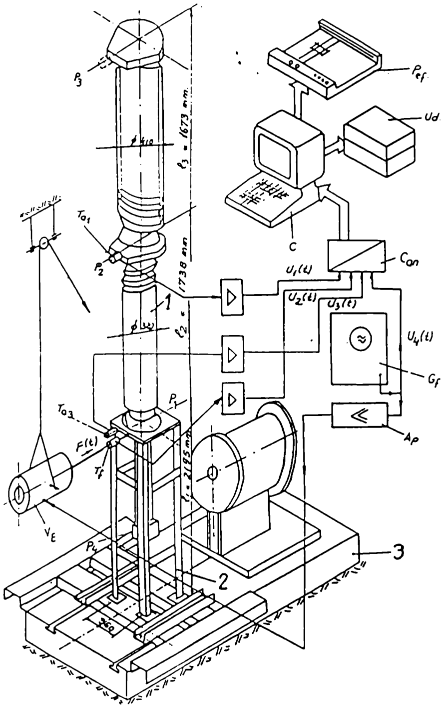

Fig.1.12

Comportarea vibratorie a unui pol de întrerupător tip FA1-123-40, este determinată de cadrul metalic deformabil prin care întrerupătorul este fixat pe o fundaţie rigidă din beton, încastrată la rândul ei în sol. Testele experimentale efectuate asupra întrerupătorului au arătat că, în domeniul 0-40 Hz, al excitaţiilor seismice posibile, corpul propiu zis al acestuia nu se deformează, el comportându-se ca un corp rigid. Structura metalică de susţinere a întrerupătorului este foarte elastică şi pentru a permite încovoierea, ceea ce nu ar permite materialele ceramice izolatoare. Problema care se pune este aceea ca acest aparat electric să nu declanşeze în cazul accidental al apariţiei unor nivele mari de vibraţie.

CAPITOLUL II

PROBLEME DINAMICE ALE STRUCTURILOR SLAB AMORTIZATE

2.1. Modelarea funcţiilor energetice disipative

Proprietăţile unei structuri mecanice de disipare a energiei sunt cunoscute sub numele de amortizare. Această disipare poate să apară în cadrul unui volum ca parte distinctă a structurii, în acest caz amortizarea se numeşte internă, sau ca urmare a frecarii între părţi distincte ale acesteia, şi în acest caz amortizarea se numeşte amortizare în sistem. In timp ce amortizarea în sistem poate să apară ca rezultat al frecării columbiene, al frecării lubrifiante (frecare vâscoasă) sau într-un strat de separaţie (amortizare vâscoelastică), amortizarea internă poate fi asociată unor mecanisme, cum ar fi alunecarea plastică, mişcările dislocaţiilor, efecte magnetomecanice etc.

Intr-o constructie mecanică, un material cu o amortizare mare poate fi de dorit sau de evitat, în funcţie de aplicaţia în cauză. Astfel, ea este de dorit pentru limitarea eforturilor maxime şi pentru mărirea duratei la oboseală a elementelor structurale şi a organelor de maşini supuse solicitări ciclice de rezonanţă şi, este de nedorit în materialele care intră în componenţa arcurilor mecanismelor ceasornic sau a altor aparate de măsură, a coardelor vibrante etc., care trebuie să vibreze fără o pierdere prea mare de energie. Deoarece aria buclei de histereză tensiune-deformaţie este o măsură a energiei pierdute pe ciclu, ea este egală cu energia de amortizare disipată.

Amplitudinea vibraţiei la rezonanţă, aşa cum se va vedea în pragraful 2.2 depinde de eficacitatea amortizării. Amortizarea se introduce de obicei pentru a reduce amplitudinea la rezonanţă.

Din păcate, proprietăţile amortizoare ale materialelor, spre deosebire de cele de inerţie sau de rigiditate, datorită şi multitudinii de factori de care depind, nu au încă o abordare unitară şi din acest punct de vedere în modelarea structurilor se înţâmpină cele mai mari dificultăţi. In cele ce urmează se va face o discuţie critică a câtorva concepte acceptate pentru amortizarea internă.

2.1.1. Modelul vâscos de amortizare

Cel mai simplu şi mai utilizat model pentru amorizările mici îl constituie modelul vâscos. Acest model presupune o forţă de amortizare proporţională cu viteza şi independentă de frecvenţa şi amplitudinea vibraţiei. In realitate acest punct de vedere nu este confirmat. Pentru a ilustra acest fapt se poate folosi metoda energetică de egalizare a lucrului mecanic dat de forţa exterioară cu lucrul mecanic dat de forţa de amortizare. Acest fapt poate fi pus în evidenţă considerând un amortizor asupra căruia acţionează o fortă armonică, pentru care se poate scrie

$$E_F = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(t)\,dx = \pi F_0 X_0, \quad E_d = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_d dx = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c\dot{x}^2 dt = \pi c\omega X_0^2 \tag{2.1}$$

$$\beta = \frac{F_0}{X_0} = c\omega$$

Din ecuaţia (2.1) se poate trage concluzia că pentru un coeficient de amortizare constant, raportul ß va fi proporţional cu frecvenţa. Totuşi, în multe cazuri raportul ß măsurat ca rapotul amplitudinii forţei armonice perturbatoare şi amplitudinea vibraţiilor nu este proporţional cu frecvenţa. Rezultă că în aceste cazuri, coeficientul de amortizare variază cu fecvenţa vibraţiei [103,115].

2.1.2. Modelul de amortizare structurală

Frecările interne, spre deosebire de frecările vâscoase, nu sunt proporţionale cu vitezele. In acest caz, o măsură pentru amortizarea internă se consideră energia disipată pe ciclu. Evident, bucla de histereză este o măsură directă şi uşor de interpretat pentru energia de amortizare. In acest caz energia disipată se consideră proporţională cu patratul amplitudinii deplasării

$$E_d = \alpha X_0^2 \tag{2.2}$$

α este o mărime ce depinde de frecvenţa oscilaţiilor armonice. Pentru caracterizarea proprietătii de amortizare a unui material se introduce o mărime adimensională egală cu raportul energiilor de disipare şi respectiv de deformaţie elastică, numită factor de pierdere. O modalitate des folosită pentru înţelegerea proprietăţilor de amortizare a materialelor este modulul complex. Ea este folosită pentru materialele a căror comportare este descrisă de legea constitutivă

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(0) + \int_0^t E(t-\tau)\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

unde E(t) este funcţia de relaxare a materialului, reprezentând raspunsul în efort la aplicarea unei deformaţii unitare la momentul t=0. Considerând o deformaţie sinusoidală aplicată la momentul t=0 unui sistem unidimensional descris de ecuaţia constitutivă (2.3)

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 Re\{e^{i\omega t}\} \tag{2.4}$$

şi folosind transformarea în spaţiul Laplace a funcţiei E(t), răspunsul poate fi scris

$$\sigma(t) = Re\{E^*(\omega)\varepsilon_0 e^{i\omega t}\} \tag{2.5}$$

unde cantitatea "$i\omega E(i\omega)$" este numita modul complex şi a fost notată cu $E^*(\omega)$. Modulul complex poate fi scris alternativ

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) = |E^*|e^{i\varphi} \tag{2.6}$$

unde

$$|E^*| = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2}, \quad tg\varphi = \frac{E''}{E'} \tag{2.7}$$

unghiul φ este numit unghi de pierdere. Efortul staţionar va fi

$$\sigma(t) = |E^*|\varepsilon_0 Re\{e^{i(\omega t+\varphi)}\} = E'\varepsilon_0 \sin\omega t + E''\varepsilon_0 \cos\omega t \tag{2.8}$$

Lucrul mecanic care a produs această mişcare se poate scrie în variabila adimensională ωt, astfel

$$L(\omega t) = \int_{\omega t_0}^{\omega(t+t_0)} \sigma(\omega t)\dot{\varepsilon}(\omega t)d(\omega t) \tag{2.9}$$

Presupunând ωt_0 un multiplu întreg de 2π, calculul integralei va da

$$L(\omega t) = \frac{1}{2}E'\varepsilon_0^2\sin^2\omega t + \frac{1}{2}E''\varepsilon_0^2\sin\omega t\cos\omega t + \frac{1}{2}E''\varepsilon_0^2\omega t \tag{2.10}$$

unde ultimul termen reprezintă energia disipată în material şi care, spre deosebire de primii doi termeni, nu se mai se regăseşte în material la sfârşitul unui ciclu. Modulul complex poate fi comparat cu un sistem serie arc-amortizor, în care

$$\sigma = k\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \tag{2.11}$$

care, în cazul unei deformaţii sinusoidale, are părţile reală şi respectiv imaginară date de

$$E'(\omega) = k, \quad E''(\omega) = \omega c \tag{2.12}$$

In lipsa amortizorului, sistemul are o comportare pur elastică, fără disipare de energie. Lucrul mecanic efectuat asupra sistemului este

$$L(\omega t) = \frac{1}{2}k\varepsilon_0^2\sin^2\omega t \tag{2.13}$$

iar valoarea maxima energiei înmagazinate în arc este

$$E_e = \frac{1}{2}k\varepsilon_0^2 = \frac{1}{2}E'\varepsilon_0^2 \tag{2.14}$$

Pentru energia disipată pe ciclu se obţine

$$E_d = 2\pi\frac{1}{2}E''\varepsilon_0^2 \tag{2.15}$$

de unde se obţine factorul de pierdere

$$\eta = \frac{E_d}{E_e} = 2\pi\frac{E''}{E'} \tag{2.16}$$

Considerând acum din nou un sistem cu un grad de libertate supus unei excitaţii armonice, atunci energia disipată este dată în (2.1). Dacă sitemul cu un grad de libertate este constituit dintr-un material vâscoelastic atunci energia disipată este

$$E_d = [\int_0^{2\pi/\omega} \sigma d\varepsilon] V = \frac{E''A}{l}X_0^2\pi \tag{2.17}$$

Echivalând energiile disipate se obţin coeficientul de amortizare, respectiv raportul de amortizare

$$c = \frac{E''}{\omega}\frac{A}{l}, \quad \zeta = \frac{E''}{\omega^2}\frac{A}{2ml} \tag{2.18}$$

Dar, în cazul materialelor vâscoelastice se constată că modulul pierdut (partea imaginară a modulului complex) este constant într-un domeniu larg de frecvenţă, ceea ce înseamnă că coeficientul de amortizare şi raportul de amortizare daţi de (2.18) se vor schimba mai mult sau mai puţin cu $1/\omega$ sau $1/\omega^2$.

Echivalând lucrul mecanic al forţei perturbatoare cu energia disipată, ţinând cont şi de ecuaţia (2.1) se obţine

$$\frac{F_0}{X_0} = \beta = \frac{E''A}{l} \qquad (2.19)$$

Acum se poate crede că E" nu este proporţional cu ω.

Problema modelării amortizării devine şi mai dificilă dacă se consideră un sistem cu mai multe grade de libertate. Acceptarea unor amortizări vâscoase duce la obţinerea unei matrice de amortizare simetrică, iar în analiza sistemelor mecanice se utilizează modurile complexe.

De multe ori se utilizează modelul vâscos în care matricea amortizărilor este proporţională cu matricea de inerţie, de rigiditate sau o combinaţie liniară de acestea. Acest tip de amortizare are avantajul că modurile reale ale sistemului [M]-[K] sunt vectori proprii şi ai sistemului amortizat. Această amortizare, de tip Rayleigh este uşor de definit, pe baza a două rapoarte de amortizare, obţinute de exemplu pe cale experimentală. Dezavantajul constă în faptul că ea nu poate defini amortizarea reală a unei structuri [65].

2.2. Parametrii ce determină efectele dinamice ale unei structuri supuse unor tipuri excitaţii

In scopul controlului raspunsului unei structuri trebuie cunoscuti parametrii care pot influenţa acest raspuns. In acest paragraf se va arăta care sunt parametrii ce influenţează răspunsul structurii, cum pot fi controlaţi acesti parametri si prin ce mijloace pot fi creaţi. Pentru uşurinţa manipulării ecuaţiilor diferenţiale cât şi a întelegerii modului în care intervin diferiţi parametri ai structurii în răspuns, se va aborda acest punct de vedere prin analiză modală.

Analiza dinamică a unei structuri constă, în primul rând, în determinarea variatiei în timp a legilor de miscare, a diferitelor puncte ale sale, din care se poate apoi deduce direct starea de tensiune.

2.2.1. Răspunsul prin reprezentări modale pentru sisteme mecanice neamortizate

In sistemele mecanice în care nici o substructură nu se află in miscare de rotaţie si amortizările se neglijează ecuaţia diferenţială matriceală are următoarea formă

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F(t)\} \tag{2.20}$$

Acesta este modelul matematic cel mai frecvent folosit în analiza dinamică pe baza metodei elementelor finite (MEF). Matricea [M] este simetrică şi pozitiv definită, iar matricea [K] este simetrică şi semipozitiv definită când există moduri de corp rigid, respectiv pozitiv definită în caz contrar.

Problema de valori proprii şi vectori proprii este

$$(\lambda^2[M] + [K])\{x\} = \{0\} \tag{2.21}$$

Valorile proprii sunt pur imaginare şi se pot scrie sub forma

$$\lambda_r = j\omega_r,\quad \lambda_r^* = -j\omega_r,\quad r = 1,2,\ldots,n \tag{2.22}$$

Pătratele valorilor proprii reprezintă pătratele pulsaţiilor naturale. Vectorul propriu corespuzător {x} este real şi identic pentru cele două valori proprii.

Setul de ecuaţii omogene

$$([K] + \omega_r^2[M])\{x_r\} = \{0\} \tag{2.23}$$

este nedeterminat, ceea ce înseamnă că forma vectorului propriu este unică, dar nu este unică amplitudinea.

Dacă se introduce matricea modală

$$[X] = [\{x_1\},\{x_2\},\ldots,\{x_n\}] \tag{2.24}$$

şi matricea diagonală a pulsaţiilor proprii

$$[\Omega] = diag(\omega_1^2,\omega_2^2,\ldots,\omega_n^2) \tag{2.25}$$

Se pot scrie cunoscutele relaţii de ortogonalitate, pe baza cărora se poate decupla sistemul de ecuaţii (2.20).

$$\begin{aligned}[X]^T[M]\,[X]^T &= [m] = diag(m_1,m_2,\ldots,m_n)\\ [X]^T[K]\,[X]^T &= [k] = diag(k_1,k_2,\ldots,k_n)\end{aligned} \tag{2.26}$$

Masa modală, m_r şi rigiditatea modală k_r sunt legate prin pulsaţia proprie $k_r/m_r = \omega_r^2$.

Deoarece vectorii modali sunt determinaţi până la un factor constant, aceştia se normalizează. Cel mai fecvent procedeu de normalizare este dat prin relaţiile

$$[X]^T[M][X] = [I], \quad [X]^T[K][X] = [\Omega] \tag{2.27}$$

unde [I] este o matrice unitate n×n.

Folosind transformarea de coordonate

$$\{q\} = [X]\{z\} \tag{2.28}$$

în ecuaţia (2.20) după înmulţirea la stânga cu $[X]^T$ aceasta devine

$$[I]\{\ddot{z}\} + [\Omega]\{z\} = [X]^T\{F\} \tag{2.29}$$

şi este echivalentă cu un sistem decuplat de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi

$$\ddot{z}_r + \omega_r^2 z_r = P_r(t), \quad P_r(t) = \{x_r\}^T\{F(t)\}, \quad r = 1,2,\dots,n \tag{2.30}$$

Pentru oricare ecuatie de mai sus răspunsul in timp este de forma

$$z_r(t) = z_r(0)\cos\omega_r t + \frac{\dot{z}_r(0)}{\omega_r}\sin\omega_r t + \frac{1}{m_r\omega_r}\int_0^t P_r(\tau)\sin\omega_r(t-\tau)\,d\tau \tag{2.31}$$

unde

$$z_r(0) = \{x_r\}^T[M]\{q(0)\}, \quad \dot{z}_r(0) = \{x_r\}^T[M]\{\dot{q}(0)\} \tag{2.32}$$

Revenirea la coordonatele fizice se face pe baza transformării (2.28), astfel că răspunsul intregului sistem va fi

$$\{q\} = \sum_{r=1}^{n}\{x_r\}\{x_r\}^T[M]\{q(0)\}\cos\omega_r t + \sum_{r=1}^{n}\frac{\{x_r\}\{x_r\}^T[M]\{\dot{q}(0)\}}{\omega_r}\sin\omega_r t + \sum_{r=1}^{n}\int_0^t\frac{\{x_r\}\{x_r\}^T\{F(\tau)\}}{m_r\omega_r}\sin\omega_r(t-\tau)\,d\tau \tag{2.33}$$

In anumite conditii de forte perturbatoare sau conditii iniţiale se poate obţine răspunsul sistemului după un singur mod propriu. Daca structura vibrează după un mod propriu toate punctele sale mişcă in fază sau antifază.

Răspunsul sistemului in condiţii iniţiale nenule, este obţinută sub forma (2.33) din care se poate concluziona ca pulsatiile naturala ω_r si fortele perturbatoare F(t) decid răspunsul sistemului. Controlul pulsatiilor naturale se poate face prin controlul maselor modale m_r si/sau a rigiditatilor modale k_r, care sunt parametrii ce depind de insasi matricea de inerţie respectiv de matricea de rigiditate a structurii. Modificarea acestor parametri se poate face din faza de proiectare si eventual in faza de testare sau chiar in perioada de functionare. Pe de alta parte, interventia asupra fortei perturbatoare ar trebui facută instantaneu, ceea ce, de cele mai multe ori, este foarte dificil sau chiar imposibil de realizat. Dar, după cum se va vedea în paragrafele următoare, nivelul răspunsului depinde şi de localizarea punctului în care forţa perturbatoare acţionează asupra structurii. Pentru a sublinia aceste concluzii, trebuie urmarita comportarea structurii in cazul diferitelor tipuri de forte excitatoare. Deoarece răspunsul sistemelor liniare este o suprapunere de n mişcări corespunzătoare celor n moduri proprii, devine interesant a se studia comportărea sistemul presupunând excitat un mod oarecare.

2.2.1.1. Raspunsul modal al sistemului vibrant la o forta tip treapta instantanee

Considerând cazul aplicarii, brusc, asupra unui sistem, a unei forte constante pe o durata limitata de timp t_d, variatia in timp a coordonatei modale r este data de

$$\begin{aligned} z_r(t) &= \frac{P_r}{k_r}[\cos\omega_r(t - t_d) - \cos\omega_r t], \quad t > t_d \\ z_r(t) &= \frac{P_r}{k_r}(1 - \cos\omega_r t), \quad 0 \le t \le t_d \end{aligned} \tag{2.34}$$

Pentru urmarirea raspunsului dinamic este convenabil a se introduce o marime adimensionala, numita factor dinamic modal de sarcina, si definita ca fiind raportul dintre deplasarea dinamica a coordonatei modale si "deplasarea statica" a aceleaşi coordonate produsa de valoarea maxima a fortei modale $P_r(t)$, adica

$$R_r(t) = \frac{z_r(t)}{z_{rst}} = \frac{k_r z_r(t)}{(P_r(t))_{\max}} \tag{2.35}$$

Problema care se pune este a urmari efectul duratei de actionare a fortei, asupra factorului dinamic modal al sistemului

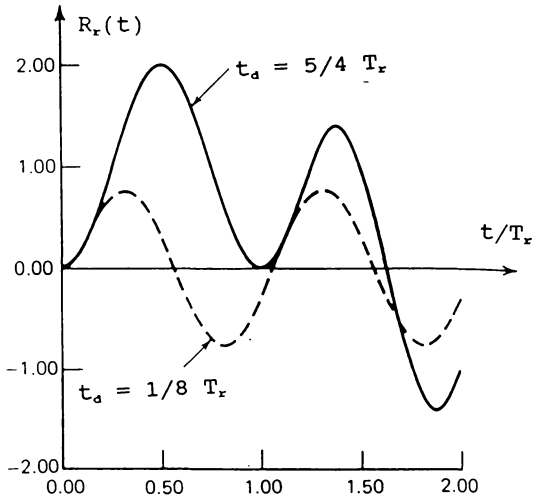

Fig.2.1

neamortizat. In figura 2.1 este reprezentat factorul modal dinamic pentru doua cazuri: $t_d > T_r/2$ si $t_d < T_r/2$, unde T_r este perioada corespunzătoare modului r. Se poate observa ca daca $t_d \geq T_r/2$ maximumul factorului dinamic de sarcina se atinge in perioada vibratiilor fortate, adica inainte de t_d, in timp ce maximumul atins de acest raport este dupa t_d daca $t_d < T_r/2$. Se pot determina expresiile celor doua maxime in fiecare caz.

In primul caz au loc vibratii fortate in intervalul de timp $0 \leq t \leq t_d$, si prin urmare

$$R_{1r}(t) = 1 - \cos\omega_r t, \qquad 0 \leq t \leq 0 \qquad \textbf{(2.36)}$$

iar valoarea maxima este

$$(R_{1r}(t))_{\max} = R_{1r}(T_r/2) = 2 \qquad \textbf{(2.37)}$$

Astfel, in cazul aplicarii instantanee a unei forte constante, unui sistem mecanic neamortizat, deplasarea maxima a coordonatei modale obtinuta este de doua ori mai mare decât deplasarea statica. Acesta este motivul pentru care, in mod frecvent, coeficientul de siguranta in proiectarea structurilor supuse unor forte aplicate rapid, se alege mai mare decât 2.

In cel de-al doilea caz, deoarece pentru $t > t_d$ raspunsul sistemului este liber, in conditiile "initiale" date de $R_{1r}(t_d)$ si $\dot{R}_{1r}(t_d)$, ecuatia (2.36) poate fi scrisa in urmatoarea forma

$$R_{2r}(t) = R_{1r}(t_d)\cos\omega_r(t-t_d) + \left[\frac{\dot{R}_{1r}(t_d)}{\omega_r}\right]\sin\omega_r(t-t_d), \qquad t > t_d \qquad \textbf{(2.38)}$$

Amplitudinea acestui raspuns este

$$R_{2max} = \sqrt{R_{1r}(t_d)^2 + \left[\frac{\dot{R}_{1r}(t_d)}{\omega_r}\right]^2} \qquad (2.39)$$

adica

$$(R_{2r})_{max} = 2\sin\left(\pi\frac{t_d}{T_r}\right) \qquad (2.40)$$

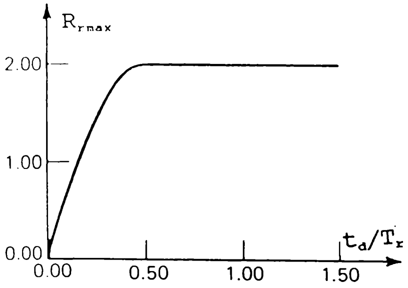

Fig.2.2

In figura 2.2 se arata mximumul factorului dinamic modal ca functie de durata de actionare a fortei aplicate. Din figura sau din ecuatia (2.40) se poate observa ca orice forta constanta de durata mai lunga decât $T_r/6$ va cauza o deplasare mai mare decât deplasarea statica, si ca pentru orice forta constanta care actioneaza mai mult decat $T_r/2$, deplasarea maxima va fi de doua ori mai mare decat "deplasarea statica".

Este interesant de urmărit şi timpul după care se atinge valoarea maximă a factorului dinamic de sarcină. Din ecuaţiile (2.36) şi (2.39) se obţine

$$\frac{t_m}{T_r} = \frac{1}{2}, \qquad 0 \le t \le t_d$$

$$\frac{t_m}{T_r} = \frac{1}{2}\frac{t_d}{T_r} + \frac{1}{4}, \qquad t > t_d \qquad (2.41)$$

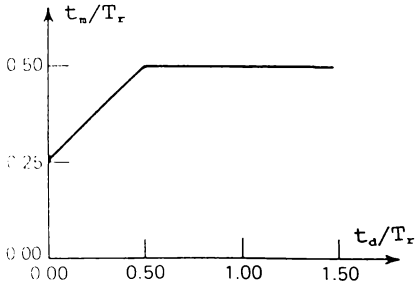

Fig.2.3

unde t_m reprezinta timpul, masurat din momentul aplicarii fortei, dupa care raportul dinamic atinge valoarea maxima. Aceste expresii sunt reprezentate grafic in figura 2.3.

2.2.1.2. Raspunsul modal al sistemului la o forta de tip rampa

In realitate, fortele nu sunt aplicate instantaneu si este interesant a investiga un caz in care fortele sunt aplicate un timp sub forma de "dinte de ferestrau" după care rămân constante. Factorul dinamic modal este dat de

$$R_r(t) = \frac{1}{t_r}\left[1 - \frac{\sin\omega_r t}{\omega_r}\right], \qquad 0 \le t \le t_r$$
$$R_r(t) = 1 + \frac{1}{\omega_r t_r}(\sin\omega_r(t - t_r) - \sin\omega_r t), \qquad t \ge t_r \tag{2.42}$$

unde t_r este timpul de variaţie liniară a forţei aplicate

In figura 2.4 se prezintă factorul dinamic modal pentru un timp de variaţie liniară a fortei $t_r > T_r$ cât şi pentru un timp $t_r < T_r$. Din ecuaţia (1.42) se determină expresia factorului dinamic de sarcina maxim

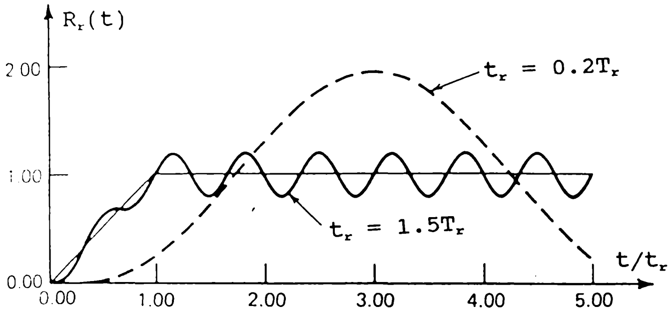

Fig.2.4

$$(R_r(t))_{max} = 1 + \frac{T_r}{\pi t_r}\sin\frac{\pi t_r}{T_r} \tag{2.43}$$

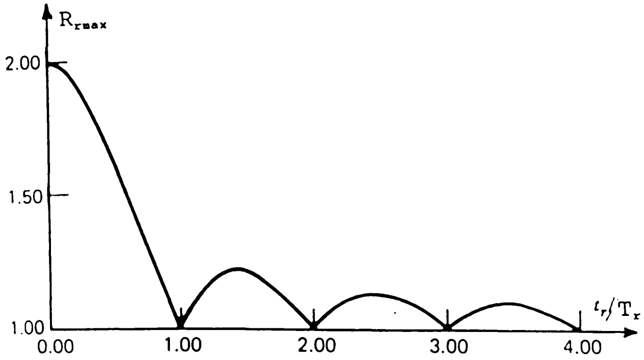

Fig.2.5

In figura 2.5 este reprezentat factorul dinamic maxim in functie de timpul de crestere liniara t_r. Se poate observa ca factorul dinamic modal maxim are valoarea R_{rmax} = 2 pentru o forta treapta, adica pentru $t_r = 0$. Pentru o rampa cu $t_r \gg T_r$ vor exista mici supraelongatii si sistemul va oscila in jurul deplasarii "pseudostatice"

$$(z_r)_{pst} = \left(\frac{t}{t_r}\right)\left(\frac{P_r}{k_r}\right) \tag{2.44}$$

si respectiv in jurul "deplasarii statice" pentru $t \geq t_r$.

Se constata ca factorul dinamic modal devine minim daca raportul t_r/T_r este un numar intreg. Acest raport poate fi modificat sa fie intreg doar prin modificarea din nou a perioadei T_r, adica prin modificari structurale care sa schimbe masa si/sau rigiditatea sistemului. Astfel, se poate considera ca forta este aplicata "lent" si efectele sale dinamice pot fi, in general, neglijate, daca $t_r > 3T_r$. Tot de aici de poate trage o concluzie importantă în modelarea sistemelor dinamice: dacă forţa este aplicată "lent" sunt excitate numai frecvenţele joase şi în analiza modală se poate da răspunsul luându-se în considerare numai puţine moduri, în schimb dacă forţa este aplicată "impulsiv" se vor excita şi modurile înalte cea ce face ca o analiză modală să nu fie satisfăcătoare, fiind necesar funcţiile de răspuns în frecvenţă.

1.4 Raspunsul modal al sistemului supus unei forte armonice

Dacă forţele perturbatoare sunt armonice de forma $\{F(t)\} = \{F_0\}$ sin ωt, acest tip de forte sunt de mare interes deoarece multe forte intâlnite in practica pot fi considerate de acest tip. Asa este cazul structurilor ce suporta masini rotitoare, podurilor de cale ferata etc. Legea de variaţie a unei coordonate modale, obtinuta din ecuatia (2.31), in prezenta acestui tip de forte este data de

$$z_r(t) = C_1 \sin\omega_r t + C_2 \cos\omega_r t + \frac{P_r \sin\omega t}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)} \tag{2.45}$$

unde constantele C_1 si C_2 se determina din conditiile initiale. Pentru cazul conditiilor initiale nule ecuatia (2.45) devine

$$z_r(t) = \frac{P_r}{m_r}\left[\frac{\sin\omega_r}{\omega_r^2 - \omega^2} - \frac{\omega}{\omega_r}\frac{\sin\omega_r t}{\omega_r^2 - \omega^2}\right] \tag{2.46}$$

de unde se poate obtine factorul dinamic modal

$$R_r(t) = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_r^2}\left[\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_r}\sin\omega_r t\right] \tag{2.47}$$

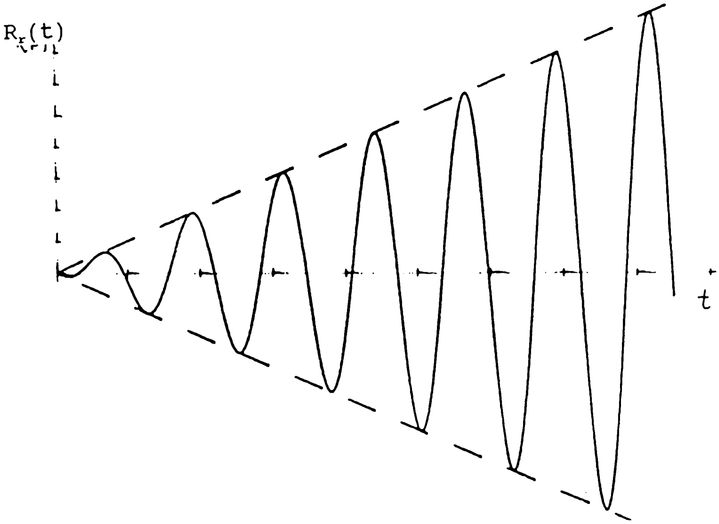

Fig.2.6

Primul termen din factorul dinamic de sarcina reprezinta partea corespunzatoare vibratiei fortate iar cel de-al doilea termen reprezinta contributia vibratiilor libere. Poate fi observat ca raportul ω/ω_r joaca un rol important in raspunsul sistemului. De exemplu, pentru cazul rezonantei, pentru care $\omega = \omega_r$, factorul dinamic modal este

$$(R_r(t))_{\omega=\omega_r} = \frac{1}{2}[\sin\omega t - \omega t\cos\omega t] \tag{2.48}$$

Ecuatia (2.48) arata ca dupa multe cicluri de vibratii care pot fi atinse in scurt timp, factorul dinamic modal creste foarte mult, aşa cum este arătat in figura 2.6. Si în acest caz raportul ω/ω_r poate fi controlat prin schimbări structurale în sistemul mecanic.

2.2.2. Răspunsul prin reprezentări modale pentru sisteme mecanice amortizate

Aceste sisteme presupun o simplă modificare prin apariţia amortizării structurale. In modelele matematice cu amortizare structurală vectorii proprii reali ai sistemului neamortizat sunt şi vectorii proprii ai sistemului [M]-[C]-[K]. In acest caz, mişcările punctelor structurii într-un mod propriu sunt în fază sau antifază, modurile proprii reprezentând unde stationare, deşi de data aceasta sunt mişcări vibratorii amortizate.

Pentru ca ecuaţia matriceală

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F(t)\} \tag{2.49}$$

să poată fi decuplată de vectorii reali ai sistemului [M]-[K], este necesar ca [149]

$$[C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C] \tag{2.50}$$

Valorile proprii sunt perechi complex conjugate

$$\lambda_r = -\sigma_r + jp_r, \quad \lambda_r^* = -\sigma_r - jp_r \tag{2.51}$$

unde p_r si σ_r sunt pulsaţia proprie şi factorul de amortizare corespunzătoare modului r. Folosind şi de această dată transformarea modală (2.28) ecuaţia matriceală (2.49) se decuplează intr-un set de n ecuaţii diferenţiale de ordinul doi de forma

$$m_r\ddot{z}_r + c_r\dot{z}_r + k_r z_r = P_r(t), \quad r = 1,n \tag{2.52}$$

unde m_r, c_r, k_r şi $P_r(t)$ reprezintă masa modală, amortizarea modală, rigiditatea modală, respectiv forţa perturbatoare modală şi care sunt date de expresiile

$$m_r=\{x_r\}^T[M]\{x_r\},\ c_r=\{x_r\}^T[C]\{x_r\},\ k_r=\{x_r\}^T[K]\{x_r\},\ P_r(t) = \{x_r\}^T\{F(t)\} \tag{2.53}$$

Introducând raportul de amortizare modal $\zeta_r = c_r/c_{r\,crt}$ sistemul de ecuaţii (2.52) devine

$$\ddot{z}_r + 2\zeta_r\omega_r\dot{z}_r + \omega_r^2 z_r = \frac{1}{m_r}P_r(t), \quad r = 1,n \tag{2.54}$$

Răspunsul modal va fi de forma

$$z_r(t) = \frac{z_r(0)e^{-\zeta_r\omega_r t}}{\sqrt{1-\zeta_r^2}}\cos\left(\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}\,t-\varphi_r\right)+\frac{\zeta_r(0)e^{-\zeta_r\omega_r t}}{\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}}\sin\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}\,t + \\ + \frac{1}{m_r\omega_r}\int_o^t e-\zeta_r\omega_r(t-\tau)P_r(\tau)\sin\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}\,t \tag{2.55}$$

unde

$$p_r = \omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}, \quad \tan\varphi = \frac{\zeta_r}{\sqrt{1-\zeta_r^2}} \tag{2.56}$$

Revenirea la coordonatele fizice se face pe baza transformării (2.28)

2.2.2.1. Factorul dinamic modal pentru pentru sisteme mecanice amortizate supus unei forţe constante

Dacă forţa perturbaroare este constantă, ecuatia de miscare este

$$m_r\ddot{z}_r + c_r\dot{z}_r + k_r z_r = P_r, \quad P_r = \{x_r\}^T\{F_0\} \tag{2.57}$$

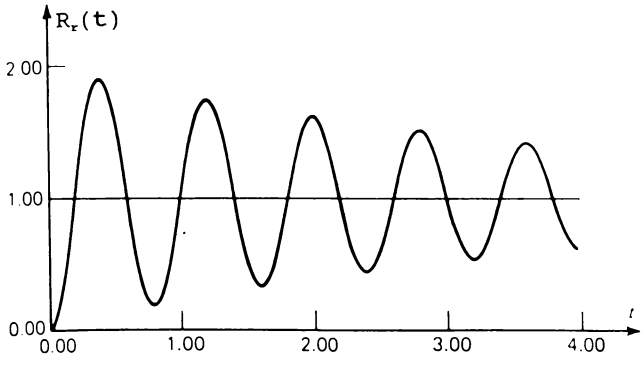

Fig.2.7

Presupunând sistemul in conditii initiale nule si in plus cazul sistemului subamortizat ($\zeta < 1$), factorul dinamic modal are expresia

$$R_r(t) = 1 - e^{-\zeta_r\omega_r t}\left[\cos p_r t + \left(\zeta_r \frac{\omega_r}{p_r}\right)\sin p_r t\right] \tag{2.58}$$

unde

$$p_r = \omega_r\sqrt{1 - \zeta_r^2}, \quad \zeta_r = \frac{c_r}{c_{cr}} = \frac{c_r}{2\sqrt{m_r k_r}} \tag{2.59}$$

p_r reprezintâd pseudopulsaţia proprie a modului r iar ζ_r raportul de amortizare modală. În reprezentarea grafică a factorului dinamic modal, figura 2.7, R(t) = 1 corespunde deplasării statice. Deoarece forţa este aplicată instantaneu, va exista o supraelongaţie, şi sistemul se apropie de pozitia de echilibru static dupa un număr de cicluri de oscilaţii amortizate. Nivelul amortizării din sistem, dată aici prin raportul de amortizare modală ζ_r, este un nou parametru prin care se poate controla mărimea supraelongaţiei, viteza de descreştere a acesteia cât şi numărul de cicluri în jurul poziţiei de echilibru static.

2.2.2.2. Factorul dinamic modal pentru pentru sisteme mecanice amortizate supuse unor forţe armonice

Dacă se ia în consideraţie ca asupra sistemului mecanic acţionează forţe perturbatoare armonice de aceiaşi pulsaţie soluţia ecuaţiei (2.54) este de forma

$$z_r(t) = e^{-\sigma t}\left[\frac{\dot{z}_r(0) + \sigma z_r(0)}{p_r}\sin p_r t + z_r(0)\cos p_r t\right] + \frac{1}{m_r p_r}\int_0^t P_r(\tau)\, e^{-\sigma(t-\tau)}\sin p_r(t - \tau)\, d\tau \tag{2.60}$$

în care $\sigma_r = c_r/2m_r$ este factorul de amortizare modal. Poate fi constatat ca vibratiile libere descresc exponential in timp ca rezultat al amortizarii. Amortizarea are de asemenea un important efect asupra vibratiilor fortate asa cum rezulta din termenul integral al solutiei (2.60).

Efectul amortizarii poate fi foarte bine pus in evidenta daca forta perturbatoare este armonica. In acest caz factorul dinamic modal este dat de

$$R_r(t) = \frac{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)\sin\omega t - 2\left(\sigma_r \frac{\omega}{\omega_r^2}\right)\cos\omega t\right]}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 + 4\left(\sigma_r \frac{\omega}{\omega_r^2}\right)^2\right]} \tag{2.61}$$

La rezonanţă, factorul dinamic de sarcină, obţinut din (2.61) este de forma

$$(R_r)_{\max} = \frac{1}{2\zeta_r} \tag{2.62}$$

Trebuie remarcat că dacă la rezonanţă, în cazul sistemelor neamortizate, factorul dinamic modal creşte la infinit, în cazul sistemelor amortizate acesta este finit. Incă odată este pusă în evidenţa efectul parametrilor structurii, de data aceasta prin rapotul de amortizare. Se constată că factorul dinamic modal maxim este tocmai factorul de calitate.

2.3. Legătura dintre eforturile dinamice şi vibraţii

Când o structură mecanică este supusă la vibraţii în fiecare element al structurii vor apare eforturi alternante. In elementele elastice ale structurii vor apare perechi de eforturi autoechilibratoare, prin urmare acestea pot fi exprimate, în cazul modelelor liniare, pe baza deplasărilor relative dintre capetele elementului (nodurile succesive, pentru cazul în care modelul este constituit pe bază de elemente finite). Se poate scrie o relaţie matriceală între eforturi şi deplasări de forma

$$\{S\} = [\rho]\{q\} \tag{2.63}$$

unde $\{S\}$ este vectoriul eforturilor dinamice, iar $[\rho]$ este o matrice ce conţie elemente elasice, dar este diferită de matricea de rigiditate a întregii structuri.

Presupunând comportarea dinamică a structurii guvernată de sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi (2.20), răspunsul sistemului, pe baza analizei modale, se obţine prin suprapunerea modurilor proprii

$$\{q\} = \sum_{i=1}^{n} \{x_r\} z_r = [X]\{z\} \tag{2.64}$$

unde [X] reprezintă matricea modală formată cu vectorii proprii iar {z} reprezintă vectorul coordonatelor modale. Pentru transformarea de coordonate (2.64) ecuaţia (2.20) se decuplează într-un sistem de n ecuaţii diferenţiale independente şi a căror soluţii sunt uşor de determinat.

Pentru structuri complexe numărul ecuaţiilor diferenţiale este enorm şi de aceea se reţin numai un număr acceptabil de moduri, dar care să dea acurateţe rezultatelor.

Având în vedere scopul urmărit: determinarea eforturilor dinamice pe baza analizei modale, adică pe baza legilor de mişcare ale punctelor din structură, trebuie ţinut seama că există structuri mecanice având aşa numitele mişcări de corp rigid. Mişcările de corp rigid sunt acele mişcări în care nici un element elastic al structurii nu este deformat. In acest caz energia potenţială de deformaţie a sistemului mecanic este semipozitiv definită, iar [K] este o matrice singulară şi, prin urmare, se pot scrie următoarele relaţii

$$[K]\{z\}_r = \{0\}, \quad r = 1, 2, \ldots, n_R \tag{2.65}$$

unde n_R reprezintă numărul modurilor de corp rigid.

Pentru cazul existenţei mişcărilor de corp rigid, ecuaţia de superpoziţia a modurilor proprii (2.33), aceasta se poate scrie într-o formă partiţionată

$$\{q(t)\} = [X]\{z\} = \left[\,[X]_R \quad [X]_E\right] \begin{Bmatrix} \{z\}_R \\ \{z\}_E \end{Bmatrix} = [X]_R\{z\}_R + [X]_E\{z\}_E \tag{2.66}$$

unde $[X]_R$ şi $[X]_E$ sunt matricele modale corespunzătoare modurilor de corp rigid, respectiv modurilor de corp elastic. Inlocuind această transformare în ecuaţia de mişcare (2.20), prin înmulţirea la stânga cu matricea partiţionată $[X]^T$ se obţin ecuaţiile

$$\begin{aligned} [X]_R^T[M]\,[X]_R\{\ddot{z}\}_R + [X]_R^T[K]\,[X]_R\{z\}_R &= [X]_R^T\{F(t)\} \\ [X]_E^T[M]\,[X]\{\ddot{z}\}_E + [X]_E^T[K]\,[X]_E\{z\}_E &= [X]_E^T\{F(t)\} \end{aligned} \tag{2.67}$$

Ţinând cont şi de relaţiile (2.65), ecuaţiile (2.67) se scriu

$$[m]_R\{\ddot{z}\}_R = [X]_R^T\{F(t)\}$$
$$[m]_E\{\ddot{z}\}_E + [k]_E\{z\}_E = [X]_E^T\{F(t)\} \qquad (2.68)$$

Primele n_R ecuaţii dau legile de mişcare de corp rigid, iar ultimele, $n-n_R$ ecuaţii, dau legile de mişcare de corp elastic.

Inlocuind (2.63) in vectorul vectorul deplasărilor obţinut pe baza analizei modale, se obţine

$$\{S\} = [\rho][X]\{z\} = [\sigma]\{z\} = \sum_{r=1}^{n}\{\sigma\}_r z_r \qquad (2.69)$$

unde vectorul $\{\sigma\}_r$ reprezintă contribuţia la vectorul eforturilor {S} datorată unei deplasări modale unitare. In cazul în care structura are şi mişcări de corp rigid, deplasările sale se determină pe baza ecuaţiei (2.67), dar trebuie avut în vedere că mişcările de corp rigid nu duc la creşterea eforturilor dinamice. Deci, se poate scrie

$$\{S\} = [\sigma]_E\{z\}_E = \sum_{r=1}^{N_E}\{\sigma\}_{rE} z_{rE} \qquad (2.70)$$

ceea ce reprezintă o exprimare a eforturilor dinamice pe baza analizei modale. În lucrările [13,16] sunt date aplicaţii şi exemple numerice.

CAPITOLUL III

MODELE DINAMICE REPREZENTATIVE PENTRU STRUCTURI DE MASINI

3.1. Forma generala a modelului dinamic pentru o structură mecanică

Modelul dinamic discret al unei structuri mecanice de maşina sau utilaj are forma generala

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F(t)\} + \{g(\dot{q}, q, t)\} \tag{3.1}$$

unde {q} este vectorul celor n legi de mişcare care definesc poziţia structurii maşinii, la un moment dat.

Matricea [M] este matricea de inerţie a structurii şi poate fi scrisa ca o suma

$$[M] = [M_0] + [M(t)] \tag{3.2}$$

unde matricea $[M_0]$ este o matrice cu elemente constante, corespunzatoare marimilor inerţiale: mase, momente statice şi momente de inerţie ale substructurilor care au sau nu au mişcari impuse. Matricea [M(t)] are elemente variabile în timp, ciclice, cu perioade egale cu cele ale mişcarii mecanismelor aflate în mişcări impuse, cum ar fi mecanismul biela manivela, substructuri aflate în mişcari de rotatie, etc., aşa cum se va arăta în paragraful 3.2.4.

Matricea [C] denumită, matricea de amortizare, poate sa fie scrisă, în contextul de mai sus, ca o sumă

$$[C] = [C_0] + [G] + [C(t)] \tag{3.3}$$

unde $[C_0]$ este o matrice patratica simetrica, n × n, având elementele sale constante. Matricea $[C_0]$ este greu de modelat corect mai ales în cazul structurilor de maşini care au subansamble în mişcare impusa; cuplele cinematice constituind disipatori concentraţi de energie. Mişcarile impuse fac sa apară un alt termen [C(t)], variabil în timp, periodic cu perioada mişcărilor mecanismelor. În cazul în care mecanismul executa o mişcare de rotaţie cu axa fixa apare, ca efect al cuplului giroscopic, înca un termen dat de matricea antisimetrica [G], numita matrice giroscopică. Fiind o matrice antisimetrică duce la complicaţii în formularea unei dezvoltari modale şi în determinarea raspunsului structurii la o excitaţie cunoscută.

Matricea de rigiditate [K] poate fi şi ea scrisa sub forma sumei

$$[K] = [K_0] + [K(t)] \tag{3.4}$$

elementele matricei $[K_0]$ fiind constante şi reprezentând rigiditaţi ale parţilor din structura de maşina care nu au mişcari impuse. Partile din structura care au mişcari impuse de execuţia unor operaţii tehnologice îşi reflecta prezenţa în matricea de rigiditate prin termenii periodici ai matricei $[K(t)]$.

Vectorul forţelor perturbatoare $\{F(t)\}$ poate fi scris şi el ca o suma de vectori de excitaţie

$$\{F(t)\} = \{F_p(t)\} + \{F_i(t)\} \tag{3.5}$$

unde vectorul $\{F_p(t)\}$ este vectorul forţelor perturbatoare exterioare care provin din procesul tehnologic, iar $F_i(t)$ este un vector al forţelor perturbaroare care provin din forţele inerţiale ale mecanismelor de execuţie.

In multe cazuri modelarea dinamica a cuplelor cinematice necesita introducerea unor termeni neliniari, funcţiuni neliniare de viteze, poziţie şi timp şi care se vor afla în vectorul $\{g(q,\dot{q},t)\}$. Prin aceste funcţii sunt modelate jocurile în mecanisme şi frecarile, printre care şi frecarea columbiana. Acestea din urma sunt de forma $-R_0 \mathrm{sign}\{\dot{q}_r\}$, fiind de sens contrar vitezei relative dintre suprafeţele de alunecare ale mecanismului respectiv.

Tendinţele actuale în construcţia megastructurilor pun câteva probleme referitoare la siguranţă, confort şi durată de funcţionare. Controlul comportării dinamice furnizează soluţii acestor probleme, iar pentru studiul comportării trebuie stabilit un model dinamic. Câteva modele dinamice a unor structuri de mare importanţă sunt deduse în cele ce urmează.

3.2. Exemple de modele dinamice

3.2.1. Maşina de haldat (Fig.1.11)

În prima fază a abordării acestei probleme, se va considera un model dinamic atât de "simplificat cât este posibil".

Deoarece centrul de greutate al ansamblului braţ-contrabraţ trece prin axa OY de rotaţie a ansamblului se poate face următoarea simplificare : deplasarile pe verticală ale saşiului rotativ S_r

sunt nesemnificative fața de elongațiile mișcărilor vibratorii ale punctelor de pe ansamblu braț-contrabraț.

Pentru scrierea ecuațiilor diferențiale de mișcare ale ansamblului, aplicăm metoda ecuațiilor lui Lagrange, pentru care trebuie scrise expresiile energiilor cinetice, potențiale și de disipare și ale lucrului mecanic virtual al forțelor date.

Pentru tronsonul $T_{i,i+1}$ expresia energiei cinetice are forma

$$E_{ci} = \frac{1}{2}\int_0^{l_i} (\dot{x}_u^2 + \dot{y}_u^2)\,\rho u du \tag{3.6}$$

unde $x_u(t)$ și $y_u(t)$ sunt legile de mișcare vibratorii absolute ale unui punct P_u de pe axa tronsonului $T_{i,i+1}$ la cota **u** față de articulația ***i***. Tronsonul $T_{i,i+1}$, intr-o anumită poziție a brațului, reglată prin troliul de acționare, are unghiul α_i față de orizontală și oscilează fața de aceste poziții în jurul articulației **i** după legea de rotație $\varphi_i(t)$. Conform legii de distribuție a mișcărilor vibratorii

$$\begin{aligned} x_u &= x_i + u\cos(\alpha_i + \varphi_i) \\ y_u &= y_i + u\sin(\alpha_i + \varphi_i) \end{aligned} \tag{3.7}$$

care, în urma derivării în raport cu timpul, introduse în (3.6) și tinând cont că elongațiile sunt mici, se va transforma în următoarea expresie

$$E_{ci} = \frac{1}{2}m_{Ti}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \frac{1}{2}J_i\dot{\varphi}_i^2 + S_i\dot{\varphi}_i(\dot{y}_i\cos\alpha_i - \dot{x}_i\sin\alpha_i) \tag{3.8}$$

unde J_i și S_i sunt: momentul de inerție, respectiv momentul static al tirantului $T_{i,i+1}$ în raport cu axa orizontală ce trece prin articulatia ***i***.

$$J_i = \int_0^{l_i} u_i^2 \rho_{u_i} du_i, \quad S_i = \int_0^{l_i} u_i \rho_{u_i} du_i \tag{3.9}$$

Legile de mișcare ale articulației ***i*** se pot scrie sub forma sumelor

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} l_k\cos(\alpha_k + \varphi_k), \quad y_i = \sum_{j=1}^{i-1} l_k\sin(\alpha_k + \varphi_k) \tag{3.10}$$

unde l_k este lungimea tirantului $T_{k,k+1}$ din lanțul până la articulația *i*. Derivând relaţia (3.10) în raport cu timpul şi introducând în (3.8) se obţine

$$E_{ci}=\frac{1}{2}J_i\dot{\varphi}_i^2+S_i\dot{\varphi}_i\sum_{k=1}^{i-1}\dot{\varphi}_k l_k\cos(\alpha_k-\alpha_i)+\frac{1}{2}m_{Ti}\sum_{k=1}^{i-1}l_k^2\dot{\varphi}_k^2+ \\ +m_{Ti}\sum_{k=1,s=1}^{i-1}l_k l_s\dot{\varphi}_s\dot{\varphi}_k\cos(\alpha_k-\alpha_s) \qquad (3.11)$$

Cum braţul are 5 tronsoane şi 2 stâlpi de ancorare :T_{12} şi T_{36},iar energiile cinetice de forma generală (3.11), se poate construi un sistem de ecuaţii diferenţiale cu 10 grade de libertate, având legile de mişcare: φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 pentru tronsoanele T_{12},....T_{56}; φ_6, φ_7 pentru stâlpii T_{19} şi T_{38}; φ_8 pentru catargul $T_{10,11}$ şi respectiv φ_9, φ_{10} pentru contrabraţele $T_{12,13}$ şi $T_{13,14}$. Vectorul legilor de mişcare ale braţului va fi

$$\{q_b\}=\{\varphi_1,\varphi_2,.....,\varphi_{10}\}^T \qquad (3.12)$$

pentru care energia totală a braţului va fi

$$E_{cb}=\frac{1}{2}\{\dot{q}_b\}^T[M_b]\{\dot{q}_b\} \qquad (3.13)$$

unde $[M_b]$ este matricea de inertie a braţului.

Elementele matricei $[M_b]$ pot fi deduse prin următorul algoritm, pe baza relaţiei generale (3.11), pentru i=1,2,...,10.

Pentru i=1

$$E_{c1}=\frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 \qquad (3.14)$$

rezultând în program, linia

$$M_b(1,1)=M_b(1,1)+J_1 \qquad (3.15)$$

Pentru i=2,

$$E_{c2}=\frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2+S_2\dot{\varphi}_2 l_1\dot{\varphi}_1\cos(\alpha_2-\alpha_1)+\frac{1}{2}m_{T2}l_1^2\dot{\varphi}_1^2 \qquad (3.16)$$

rezultând linia din program:

$$M_b(1,1) = M_b(1,1) + m_{T2}l_1^2,$$

$$M_b(2,1) = M_b(2,1) + S_2 l_1 \cos(\alpha_2-\alpha_1), \tag{3.17}$$

$$M_b(2,2) = J_2$$

Pentru i=3,

$$E_{c3} = \frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}_3^2 + S_3\dot{\varphi}_3(\dot{\varphi}_1 l_1\cos(\alpha_3-\alpha_1)+\dot{\varphi}_2 l_2\cos(\alpha_3-\alpha_2)) + $$
$$+ \frac{1}{2}m_{T3}(l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2) + m_{T3}l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\alpha_2-\alpha_1) \tag{3.18}$$

rezultând următoarele linii

$$M_b(j,j)=M_b(j,j)+m_{T3}l_j^2,\ M_b(3,j)=M_b(3,j)+S_3 l_j\cos(\alpha_3-\alpha_j)$$
$$(j=1,2) \tag{3.19}$$
$$M_b(1,2)=M_b(1,2)+m_{T3}l_1 l_2\cos(\alpha_2-\alpha_1),\ M_b(3,3)=M_b(3,3)+J_3$$

Repetând aceleași etape, pentru i=4, se obtine

$$M_b(j,j)=M_b(j,j)+m_{T4}l_j^2, M_b(4,j)=M_b(4,j)+S_4 l_j\cos(\alpha_4-\alpha_j)$$
$$(j = 1,2,3)$$
$$M_b(1,j)=M_b(1,j)+m_{T4}l_1 l_j\cos(\alpha_j-\alpha_1),\ (j=2,3) \tag{3.20}$$
$$M_b(2,3)=M_b(2,3)+m_{T4}l_2 l_3\cos(\alpha_3-\alpha_2), M_b(4,4)=M_b(4,4)+J_4$$

Pentru i=5, se pot scrie liniile

$$M_b(j,j)=M_b(j,j)+M_{T5}l_j^2, M_b(5,j)=M_b(5,j)+S_5 l_j\cos(\alpha_5-\alpha_j)$$
$$(j = 1,2,3,4)$$
$$M_b(1,j)=M_b(1,j)+m_{T5}l_1 l_j\cos(\alpha_j-\alpha_1),\ (j = 2,3,4) \tag{3.21}$$
$$M_b(2,j) = M_(2,j)+m_{T5}l_2 l_j\cos(\alpha_j-\alpha_2),\ (j = 3,4)$$
$$M_b(3,4)=M_b(3,4)+m_{T5}l_3 l_4\cos(\alpha_4-\alpha_3), M_b(5,5)=M_b(5,5)+J_5$$

Pentru stâlpul T_{10}

$$M_b(6,6) = M_b(6,6) + J_6 \tag{3.22}$$

unde J_6 este momentul de inerție al stâlpului în raport cu articulația 1.

Pentru stâlpul T_{38}, având masa m_{T7} şi momentul de inerţie J_7 respectiv momentul static S_7 se pot scrie liniile

$$M_b(j,j)=M_b(j,j)+m_{T7}l_j^2, M_b(7,j)+M_b(7,j)+S_7 l_j\cos(\alpha_7-\alpha_j) \quad (j=1,2) \tag{3.23}$$
$$M_b(1,2)=M_b(1,2)+m_{T7}l_1 l_2\cos(\alpha_2-\alpha_1), M_b(7,7)=M_b(7,7)+J_7$$

Pentru catargul $T_{10,11}$,

$$M_b(8,8)=J_8 \tag{3.24}$$

Pentru tirantul $T_{12,13}$, se obţine

$$M_b(9,9)=J_9 \tag{3.25}$$

iar pentru tirantul $T_{13,14}$ se poate scrie

$$M_b(9,9)=M(9,9)+m_{T10}l_9^2,\quad M_b(9,10)=M_b(9,10)+ \tag{3.26}$$
$$+S_{10}l_9\cos(\alpha_{10}-\alpha_9),\quad M_B(10,10)=M_b(10,10)+J_{10}$$

Aşa cum s-a mai arătat, pentru atenuarea nivelelor de vibraţii pe structura ansamblului braţ-contrabraţ, se ataşează sistemele seismice S_i care introduc câte un grad sau două grade de libertate pentru fiecare sistem ataşat (conform soluţiei tehnice 7.3). Fie $w_i(t)$ legea de mişcare relativă a masei ataşate m_{ai}, faţa de articulaţia $i+1$ a tronsonului $T_{i,i+1}$, si perpendicular pe axa acestuia. Viteza absolută a masei m_{ai} este dată de proiecţiile pe axele sistemului fix

$$\dot{x}_{si}=\dot{x}_{i+1}+\dot{w}_i\sin\alpha_i \tag{3.27}$$
$$\dot{y}_{si}=\dot{y}_{i+1}-\dot{w}_i\cos\alpha_i$$

Energia cinetică a acestei mase va fi

$$E_{cai}=\frac{1}{2}m_{ai}(\dot{x}_{si}^2+\dot{y}_{si}^2) \tag{3.28}$$

Legile de mişcare ale articulaţiei $i+1$ sunt de forma

$$x_{i+1}=\sum_{k=1}^{i} l_k\cos(\alpha_k+\varphi_k) \tag{3.29}$$
$$y_{i+1}=\sum_{i=1}^{i} l_k\sin(\alpha_k+\varphi_k)$$

Prin derivare în raport cu timpul, pentru amplitudini mici, se obţin legile vitezei

$$\dot{x}_{i+1}=-\sum_{k=1}^{i} l_k\dot{\varphi}_k\sin(\alpha_k+\varphi_k)=-\sum_{k=1}^{i} l_k\dot{\varphi}_k\sin\alpha_k$$
$$\dot{y}_{i+1}=\sum_{k=1}^{i} l_k\dot{\varphi}_k\cos(\alpha_k+\varphi_k)=\sum_{k=1}^{i} l_k\dot{\varphi}_k\cos\alpha_k. \tag{3.30}$$

După înlocuire în expresia energiei cinetice corespunzătoare masei adiţională, se obţine

$$E_{cai} = \frac{1}{2}m_{ai}\dot{w}_i^2+m_{ai}\sum_{k=1,s=1}^{i} l_k l_s\dot{\varphi}_k\dot{\varphi}_s\cos(\alpha_k-\alpha_s)+\frac{1}{2}m_{ai}\sum_{k=1}^{i} l_k^2\dot{\varphi}_k^2$$
$$+ m_{ai}\dot{w}_i\sum_{k=1}^{i} l_k\dot{\varphi}_k\cos(\alpha_k+\alpha_i). \tag{3.31}$$

In aceiaşi manieră se poate deduce energia cinetică totală a sistemului seismic ataşat structurii, care se poate scrie condensat

$$E_{ca} = \frac{1}{2}\{\dot{q}_b\}^T[M_{ba}]\{\dot{q}_b\} + \{\dot{q}_b\}^T[M_{aw}]\{\dot{w}\} + \frac{1}{2}\{\dot{w}\}^T[M_w]\{\dot{w}\}. \tag{3.32}$$

Energia cinetică totală a sistemului va fi

$$E_c = \frac{1}{2}\{\dot{q}_b\}^T[M_s]\{\dot{q}_b\} + \{\dot{q}_b\}^T[M_{aw}]\{\dot{w}\} + \frac{1}{2}\{\dot{w}\}^T[M_w]\{\dot{w}\}. \tag{3.33}$$

Energia potenţială a ansamblului va avea trei componente

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} + E_{p3}. \tag{3.34}$$

Energia E_{p1} derivă din deformaţia cablului de ancorare, între punctele de prindere. Cablul dintre **4** şi **8** va avea constanta

$$k_{4,8} = \frac{A_{4,8}E}{l_{4,8}} \tag{3.35}$$

unde A_{48} si l_{48} sunt aria secţiunii cablului de ancorare şi respectiv lungimea cablului, iar E modulul de elasticitate al cablului. Energia potenţială înmagazinată în acest cablu va fi

$$E_{p1,48} = \frac{1}{2}k_{48}(\Delta l_{48})^2 \tag{3.36}$$

unde Δl_{48} este alungirea cablului la un moment dat faţă de poziţia neîncărcată a sistemului braţ contrabraţ. Valoarea Δl_{48} este o mărime mică în raport cu lungimea cablului l_{48}, de aceea geometria triunghiului 3, **4** şi **8** se schimbă puntin în timpul vibraţiilor.

Mişcările relative ale punctelor **4** şi **8** sunt date de

$$x_{48} = l_3\cos(\alpha_3+\varphi_3)-l_7\cos(\alpha_7+\varphi_7)$$
$$y_{48} = l_3\sin(\alpha_3+\varphi_3)-l_7\sin(\alpha_7+\varphi_7). \tag{3.37}$$

Distanţa dintre ele fiind

$$l_{48}=\sqrt{x_{48}^2+y_{48}^2}=\sqrt{l_3^2+l_7^2-2l_3l_7\cos(\alpha_3-\alpha_7+\varphi_3-\varphi_7)} \tag{3.38}$$

fiind, deci, funcţii de legile de mişcare φ_3, φ_7, care pentru elongaţii mici ($\varphi < 5^{\circ}$) se poate dezvolta în serie Taylor

$$l_{48}=l_{48}^{(0} + \varphi_3\left(\frac{\partial l_{48}}{\partial\varphi_3}\right)_0 +\varphi_7\left(\frac{\partial l_{48}}{\partial\varphi_7}\right)_0 \tag{3.39}$$

unde

$$l_{48}^{(0} = \sqrt{l_3^2+l_7^2-2l_3l_7\cos(\alpha_3-\alpha_7)} \tag{3.40}$$

şi

$$\left(\frac{\partial l_{48}}{\partial\varphi_3}\right)_0 = \frac{l_3l_7}{l_{48}^{(0}}\sin(\alpha_3-\alpha_7)$$
$$\left(\frac{\partial l_{48}}{\partial\varphi_7}\right)_0 = -\frac{l_3l_7}{l_{48}^{(0}}\sin(\alpha_3-\alpha_7). \tag{3.41}$$

Variaţia lungimii cablului la momentul t va avea expresia

$$\Delta l_{48} = \frac{l_3l_7}{l_{48}^{(0}}(\varphi_3-\varphi_7)\sin(\alpha_3-\alpha_7) \tag{3.42}$$

Deci energia înmagazinată în acest cablu poate fi pusă sub forma

$$E_{pl,48} = \frac{1}{2}k_{48}\Delta_{48}(\varphi_3-\varphi_7)^2 \tag{3.43}$$

unde,

$$\Delta_{4,8} = \left(\frac{l_3l_7}{l_{48}^{(0}}\sin(\alpha_3-\alpha_7)\right)^2. \tag{3.44}$$

Inlocuind toate energiile înmagazinate în cabluri, se obţine

$$E_{p1} = \frac{1}{2}\{q_b\}^T[K_c]\{q_b\}. \tag{3.45}$$

Al doilea termen al relaţiei (3.34) corespunde energiilor de deformaţie înmagazinate în arcurile sistemelor seismice ataşate. Pentru cel de-al j-lea sistem se obţine

$$E_{p2j} = \frac{1}{2}k_{jj}w_j^2, \tag{3.46}$$

iar energia totală va fi

$$E_{p2} = \frac{1}{2}\{w\}^T[K_a]\{w\}, \tag{3.47}$$

unde $[K_a]$ este o matrice diagonală.

Ultimul termen al expresiei (3.34) se obţine din energia potenţială a sarcinilor de greutate a tronsoanelor. Astfel, pentru tronsonul $T_{3,8}$ va fi

$$E_{p3,8} = -G_6(l_1\sin(\alpha_1+\varphi_1)+l_2\sin(\alpha_2+\varphi_2)+l_{6g}(\sin_6+\varphi_6)), \tag{3.48}$$

unde l_{69} este cota centrului de masă al tirantului.
Termenii corespunzători, în ecuaţiile lui Lagrange, se obţin prin derivarea expresiilor de forma (3.48)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{p3,8}}{\partial\varphi_1} &= -G_6 l_1(\cos\alpha_1-\varphi_1\sin\alpha_1),\\
\frac{\partial E_{p3,8}}{\partial\varphi_2} &= -G_6 l_2(\cos\alpha_1-\varphi_2\sin\alpha_2),\\
\frac{\partial E_{p3,8}}{\partial\varphi_6} &= -G_6 l_{6g}(\cos\alpha_6-\varphi_6\sin\alpha_6).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Însumând toţi termenii, se ajunge la forma energiei potenţiale

$$E_{p3} = \frac{1}{2}\{q_b\}^T[K_g]\{q_b\}, \tag{3.50}$$

unde $[K_g]$ este o formă diagonală.
Din dezvoltările (3.49) va rezulta şi un vector $\{F_{g0}\}$ al forţelor generalizate provenite din greutăţi, având expresii de forma $G_6l_1\sin\alpha_1$. Soluţia particulară a sistemului de ecuaţii diferenţiale va da poziţia de echilibru static a ansamblului.

3.2.2. Modelul dinamic al unui excavator cu cupe

Un model dinamic cât mai real al structurii mecanice a excavatorului (Fig.1.8.) este extrem de greu de elaborat, datorită faptului că acesta este o structură elastică cu o configurație variabilă prin poziția subansamblelor. Sprijinirea sa se face pe un mediu vâscoelastic cu proprietăți diferite, în poziții de lucru diferite. Probleme deosebite ridică modelarea procesului de tăiere a cărbunelui şi mai ales modelarea unor subansamle: lagărele de rotație, după axele X_1OX_1 şi X_2OX_2 care sunt deformabile, dar mai ales zona interfață dintre structura **2** şi şasiul **1**, unde rulmentul **3** trebuie considerat ca o structură elastică. La dimensiunile mari ale rulmentului, 10 m în diametru, fiecare sprijin pe cele **140** de bile are o rigiditate diferită, iar în cazul existenței unor uzuri pe sectoarele căii de rulare, distribuția sarcinii axiale pe bile este extrem de greu de modelat. Pot apare condiții în care grupuri de bile să nu preia nici o sarcină.

Având în vedere caracterul de investigare a dinamicii agregatului în domeniul frecvențelor joase, se poate considera un model simplificat al structurii, care să dea calitativ formele posibile ale mişcărilor vibratorii. Acest model are în vedere mişcările vibratorii ale structurii, numai în planul vertical OYZ, considerând ansamblu format din structura rigidă **2**, sprijinită pe o articulație în O şi împiedicată elastic la o mişcare de balansare de unghi, în jurul axei OX, de către interfața cu rulmentul 3, având constanta elastică K. Atât brațul **4** cât şi stâlpul **9** se pot considera ca structuri rigide, pentru mişcări vibratorii de joasă frecvență (sub 5 Hz), care sunt în echilibru static şi dinamic, prin intermediul tiranților **10**, de constantă elasică K_t şi a ramurilor palanului de ridicare a brațului **4**, acestea având constanta elastică K_p.

Pentru formularea ecuațiilor de mişcare, se utilizează ecuațiile lui Lagrange. Se consideră sistemul cu trei grade de libertate. Pentru aceasta este necesar a se calcula expresiile energiei cinetice totale, energiilor date de deformațiile elastice ale elementelor de legătură, energiile potențiale ale substructurilor şi ale lucrului mecanic al forțelor de tăiere.

Energia cinetică totală se compune din trei termeni

$$E_c = E_{c2} + E_{c4} + E_{c9} \tag{3.51}$$

unde E_{c2} este energia cinetică a structurii 2 considerată rigidă şi care execută mişcăre de balans în jurul punctului O în planul vertical Oyz, sistemul de axe Oxyz fiind un sistem inerţial. Legea de mişcare a oricărui punct de pe structura 2 va fi dată prin coordonatele y şi z

$$\begin{aligned} y &= Y\cos\varphi - Z\sin\varphi \\ z &= Y\sin\varphi + Z\cos\varphi \end{aligned} \tag{3.52}$$

unde Y şi Z sunt coordonatele curente ale punctului faţă de sistemul de axe OXYZ legat de structura 2.
Energia cinetică E_{c2} are expresia

$$E_{c2} = \int_V (\dot{y}^2 + \dot{z}^2)\, dm \tag{3.53}$$

care din 2, prin derivare în raport cu timpul devine

$$E_c = \frac{1}{2} J\dot{\phi}^2 \tag{3.54}$$

unde

$$J = \int_V (Y^2 + Z^2)\, dm \tag{3.55}$$

este momentul de inerţie al structurii 2 în raport cu axa OX.

Energia cinetică a braţului port roată cu cupe, incluzând-o şi pe aceasta, se calculează cu expresia

$$E_4 = \frac{1}{2}\int_o^l (\dot{y}_u^2 + \dot{z}_u^2)\, \rho(u)\, du \tag{3.56}$$

considerând că masa este distribuită de-a lungul braţului de lungime l_4. Componentele mişcării absolute y_u şi z_u ale unui punct situat la cota *u* de axa de articulaţie pot fi exprimate prin relaţiile

$$\begin{aligned} y_u &= Y_1\cos\varphi - Z_1\sin\varphi + u\cos(\alpha_1 + \varphi_1) \\ z_u &= Y_1\sin\varphi + Z_1\cos\varphi + u\sin(\alpha_1 + \varphi_1) \end{aligned} \tag{3.57}$$

unde Y_1 şi Z_1 sunt coordonatele punctului O_1 faţă de sistemul OXYZ legat de corpul 2, α fiind unghiul de înclinare al braţului şi care se fixează în funţie de regimul de excavare, între 22° şi 25°, iar

φ este legea absolută de oscilaţie a braţului în jurul axei O_1X_1
Efectuând calculele, se obţine

$$E_4=\frac{1}{2}J_{11}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2+2\dot{\varphi}\dot{\varphi}_1 S_1(Y_1\cos(\alpha_1+\varphi_1-\varphi)+Z_1\sin(\alpha_1+\varphi_1-\varphi)) \quad (3.58)$$

unde s-au notat

$$J_{11} = (Y_1^2 + Z_1^2)\int_0^l \rho(u)\,du = (Y_1^2 + Z_1^2)m_4 \quad (3.59)$$

m_4 fiind masa totală a braţului **4** împreună cu roata

$$J_1 = \int_0^l u^2\rho(u)\,du \quad (3.60)$$

momentul de inerţie al braţului **4** în raport cu axa O_1X_1, iar

$$S_1 = \int_0^l u\rho(u)\,du \quad (3.61)$$

fiind momentul static al braţului **4** în raport cu axa O_1X_1.
In aceiași modalitate se poate calcula energia cinetică a stâlpului **9**, articulat în O_2, obţinându-se

$$E_9=\frac{1}{2}J_{12}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2+2\dot{\varphi}\dot{\varphi}_2 S_2(Y_2\cos(\alpha_2+\varphi_2-\varphi)+Z_2\sin(\alpha_2+\varphi_2-\varphi)) \quad (3.62)$$

unde J_2, J_{12} şi S_2 au aceleaşi semnificaţii ca şi la braţul **2**.

Pentru calculul energiei de deformaţie se ia în considerare deformaţiile din cablurile palanului şi a tiranţilor

$$E_d = E_{pl} + E_t + E_{dr} \quad (3.63)$$

unde

$$E_{pl} = \frac{1}{2}K_{pl}(\Delta l_{34})^2 \quad (3.64)$$

iar Δl_{34} reprezintă deformaţia dinamică dintre punctele O_3 şi O_4. Pentru calculul expresiei distanţei dintre punctele O_3 şi O_4 se determină coordonatele acestor puncte relativ la mişcarea corpului **2**

$$
\begin{aligned}
Y_3 &= Y_1 + a_3\cos(\alpha_1+\varphi_1-\varphi) - b_3\sin(\alpha_1+\varphi_1-\varphi)\\
Z_3 &= Z_1 + a_3\sin(\alpha_1+\varphi_1-\varphi) + b_3\cos(\alpha_1+\varphi_1-\varphi)\\
Y_4 &= Y_2 + a_3\cos(\alpha_2+\varphi_2-\varphi)\\
Z_4 &= Z_2 + a_4\sin(\alpha_2+\varphi_2-\varphi).
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

Distanţa dintre puncte se poate calcula pe baza coordonatelor cu relaţia

$$|O_3O_4| = \sqrt{(Y_3 - Y_4)^2 + (Z_3 - Z_4)^2}. \tag{3.66}$$

Având în vedere că mişcările vibratorii ale punctelor O_3 şi O_4 sunt deplasări mici, ca funcţii de unghiurile φ, φ_1 şi φ_2, se poate face o aproximare de ordinul întâi prin dezvoltare în serie Taylor a distanţei $|O_3O_4|$ în jurul valorilor de zero ale acestor unghiuri

$$|O_3O_4| = |O_3O_4|_0 + \varphi\left(\frac{\partial|O_3O_4|}{\partial\varphi}\right)_0 + \varphi_1\left(\frac{\partial|O_3O_4|}{\partial\varphi_1}\right)_0 + \varphi_2\left(\frac{\partial|O_3O_4|}{\partial\varphi_2}\right)_0 + \ldots \tag{3.67}$$

unde $|O_3O_4|_0$ este valoarea statică a distanţei $|O_3O_4|$. Deformaţia dinamică va avea expresia,

$$\Delta l_{34} = |O_3O_4| - |O_3O_4|_0 \tag{3.68}$$

care poate fi pusă sub forma liniară

$$\Delta l_{34} = e_0\varphi + e_1\varphi_1 + e_2\varphi_2 \tag{3.69}$$

unde coeficienţii e_i $(i = 0,1,2)$ vor avea expresiile

$$e_i = \frac{\partial|O_3O_4|}{\partial\varphi_i} = \frac{(Y_3-Y_4)\left(\frac{\partial Y_3}{\partial\varphi_i} - \frac{\partial Y_4}{\partial\varphi_i}\right) + (Z_3-Z_4)\left(\frac{\partial Z_3}{\partial\varphi_i} - \frac{\partial Z_4}{\partial\varphi_i}\right)}{\sqrt{(Y_3-Y_4)^2 + (Z_3-Z_4)^2}} \tag{3.70}$$

$$\varphi_i = \varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2$$

Derivatele parţiale ale coordonatelor Y_3, Y_4, Z_3 şi Z_4 în raport cu unghiurile φ, φ_1 şi φ_2 sunt

$$\frac{\partial Y_3}{\partial \varphi} = a_3 \sin\alpha_1 + b_3 \cos\alpha_1, \quad \frac{\partial Y_4}{\partial \varphi} = a_4 \sin\alpha_2$$

$$\frac{\partial Z_3}{\partial \varphi} = -a_3 \cos\alpha_1 + b_3 \sin\alpha_1, \quad \frac{\partial Z_4}{\partial \varphi} = -a_4 \cos\alpha_2$$

$$\frac{\partial Y_3}{\partial \varphi_1} = -a_3 \sin\alpha_1 - b_3 \cos\alpha_2, \quad \frac{\partial Y_4}{\varphi_1} = 0$$

$$\frac{\partial Z_3}{\partial \varphi_1} = a_3 \cos\alpha_1 - b_3 \sin\alpha_2, \quad \frac{\partial Z_4}{\partial \varphi_1} = 0 \tag{3.71}$$

$$\frac{\partial Y_3}{\partial \varphi_2} = 0, \quad \frac{\partial Y_4}{\partial \varphi_2} = -a_4 \sin\alpha_2$$

$$\frac{\partial Z_3}{\partial \varphi_2} = 0, \quad \frac{\partial Z_4}{\partial \varphi_2} = a_4 \cos\alpha_2 .$$

Constanta elastică K_{pl} a palanului se poate exprima cu ajutorul constantei elastice K_c a cablului înmulţită cu numărul de ramuri n, care lucrează ca nişte arcuri legate în paralel

$$K_{pl} = nK_c \tag{3.72}$$

unde constanta elastică a cablului are expresia

$$K_c = \frac{E_c . A_c}{|O_3 O_4|_0} \tag{3.73}$$

unde E_c este constanta de elasticitate a cablului, iar A_c este aria transversală a cablului. Modulul de elasticitate a cablului este 3/8 E, unde E este modulul de elasticitate al oţelului (E = 2,1 10^{11} N/m^2).

In final, energia de deformaţie a cablului palanului va fi de forma

$$E_{pl} = \frac{1}{2} K_{pl} (e_0 \varphi + e_1 \varphi_1 + e_2 \varphi_2)^2 . \tag{3.74}$$

In acelaşi mod se poate scrie expresia energiei de deformaţie a tiranţilor

$$E_t = \frac{1}{2} K_t \Delta l_{57}^2 \tag{3.75}$$

unde

$$\Delta l_{57} = |O_5O_7| - |O_5O_7|_0, \tag{3.76}$$

iar $|O_5O_7|$ este distanţa dintre punctele O_5 şi O_7. În urma dezvoltării în serie Taylor şi luând numai termenii liniari, deformaţia dinamică se poate scrie

$$\Delta l_{57} = f_0\varphi + f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 \tag{3.77}$$

unde coeficienţii f_i se calculează cu relaţiile

$$f_i = \frac{\partial|O_5O_7|}{\partial\varphi_i} = \frac{(Y_7-Y_5)\dfrac{\partial Y_7}{\partial\varphi_i} + (Z_7-Z_5)\dfrac{\partial Z_7}{\partial\varphi_i}}{\sqrt{(Y_7-Y_5)^2 + (Z_7-Z_5)^2}} \tag{3.78}$$

$$\varphi_i = \varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,$$

în care s-a ţinut cont de faptul că coordonatele punctului O_5, de prindere a celor doi tiranţi, sunt constante. Derivatele parţiale din (3.78) sunt

$$\frac{\partial Y_7}{\partial\varphi} = a_7\sin\alpha_2,\quad \frac{\partial Z_7}{\partial\varphi} = -a_7\cos\alpha_2$$
$$\frac{\partial Y_7}{\partial\varphi_2} = -a_7\sin\alpha_2,\quad \frac{\partial Z_7}{\partial\varphi_2} = a_7\cos\alpha_2 \tag{3.79}$$

unde a_7 este distanţa dintre punctele O_7 şi O_2 de pe stâlpul **9**.

Constanta elastică a unui singur tirant se calculează cu formula

$$K_{t1} = \frac{E_t \cdot A_t}{|O_5O_7|_0} \tag{3.80}$$

unde E_t este modulul de elasticitate al tirantului, A_t este aria secţiunii transversale a tirantului. Modulul de elasticitate al tirantului se va lua şi în acest caz ca fiind E_t = 3/8 E. In paralel cu tiranţii intră şi arcul echivalent al celor două ramuri dintre tamburul palanului şi grupul de role de pe stâlpul **9**.

Al treilea termen al energiei potenţiale de deformaţie corespunde deformării din zona rulmentului, care se scrie sub forma

$$E_{dr} = \frac{1}{2}K_\varphi\varphi^2 \tag{3.81}$$

unde K_φ este constanta elastică echivalentă a reazemului elastic cu rulment axial-radial care realizează pivotarea. Ea este foarte dificil de calculat şi poate fi determinată pe cale experimentală, prin măsurarea diferitelor înclinaţii în procesul de echilibrare statică a excavatorului.

In echilibrul energetic al dinamicii excavatorului trebuie ţinut cont şi de energia potenţială de poziţie, dată de greutăţile celor trei elemente rigide: **2**, **4** şi **9**.

$$E_p = m_2 g z_{2C} + m_4 g z_{4C} + m_9 z_{9C} \tag{3.82}$$

unde z_{2C}, z_{4C} şi z_{9C} sunt cotele centrelor de greutate ale celor trei elemente. Acestea au următoarele expresii

$$\begin{aligned} z_{2C} &= Y_{2C}\sin\varphi + Z_{2C}\cos\varphi \\ z_{4C} &= Y_1\sin\varphi + Z_1\cos\varphi + l_{C4}\sin(\alpha_1+\varphi_1) \\ z_{9C} &= Y_2\sin\varphi + Z_2\cos\varphi + l_{C9}\sin(\alpha_2+\varphi_2) \end{aligned} \tag{3.83}$$

unde l_{4C} şi l_{9C} sunt lungimile în lungul elementelor **4** respectiv **9** din articulaţii până la centrele de greutate.

Se poate trece la calculul termenilor ecuaţiilor lui Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{\varphi}_i} = F_{\varphi_i} \tag{3.84}$$

unde $F_{\varphi i}$ sunt forţele generalizate ce provin din forţele de excavaţie şi pot fi deduse din lucrul mecanic virtual

$$\delta L = P_y \delta y_P + P_z \delta z_P \tag{3.85}$$

unde P_y şi P_z sunt componentele rezultantei forţelor de tăiere după cele două axe. Punctul P de acţionare al rezultantei este situat la raza R_c a roţii cu cupe. Poziţia punctului P, dat prin unghiul β, depinde de procesul de excavare şi de configuraţia stratului de cărbune. Coordonatele y_P şi z_P pot fi exprimate cu relaţiile

$$\begin{aligned} y_P &= Y_1\cos\varphi - Z_1\sin\varphi + l_c\cos(\alpha_1+\varphi_1) + \cos(\beta+\varphi_1) \\ z_P &= Y_1\sin\varphi + Z_1\cos\varphi + l_c\sin(\alpha_1+\varphi_1) + R_c\sin(\beta+\varphi_1) \end{aligned} \tag{3.86}$$

care prin diferenţiere duce la relaţiile

$$\delta y_P=(-Y_1\sin\varphi-Z_1\cos\varphi)\delta\varphi-(l_c\sin(\alpha_1+\varphi_1)+R_c\sin(\beta+\varphi_1))\delta\varphi_1$$
$$\delta z_P=(Y_1\cos\varphi-Z_1\sin\varphi)\delta\varphi+(l_c\cos(\alpha_1+\varphi_1)+R_c\cos(\beta+\varphi_1))\delta\varphi_1. \tag{3.87}$$

Forţele generalizate pot fi deduse prin identificarea relaţiei (3.85) cu lucrul mecaic sub forma

$$\delta L = F_\varphi\delta\varphi + F_{\varphi_1}\delta\varphi_1 + F_{\varphi_2}\delta\varphi_2. \tag{3.88}$$

Ecuaţiile de mişcare obţinute din (3.84) se pot scrie sub forma matriceală

$$[M]\{\ddot{\varphi}\} + [K]\{\varphi\} = \{F\} \tag{3.89}$$

unde [M] este matricea de inerţie şi are elementele

$$\begin{bmatrix} J_1+J_{11}+J_{12} & S_1(Y_1\cos\alpha_1+Z_1\sin\alpha_1) & S_2(Y_2\cos\alpha_2+Z_2\sin\alpha_2) \\ S_1(Y_1\cos\alpha_1+Z_1\sin\alpha_1) & J_1 & 0 \\ S_2(Y_2\cos\alpha_2+Z_2\sin\alpha_2) & 0 & J_2 \end{bmatrix} \tag{3.90}$$

Matricea de rigiditate este dată de suma

$$[K] = [K_{pl}] + [K_t] + [K_p] \tag{3.91}$$

unde $[K_{pl}]$, $[K_t]$, $[K_r]$ şi $[K_p]$ reprezintă matricele de rigiditate corespunzătoare palanului, tiranţilor, interfeţei rulmentului de pivotare, respectiv provenită din energia potenţială de poziţie a forţelor de greutate. Aceste matrice au următoarele expresii

$$[K_{pl}] = K_{pl}\begin{bmatrix} e_o^2 & e_0e_1 & e_0e_2 \\ e_0e_1 & e_1^2 & e_1e_2 \\ e_0e_2 & e_1e_2 & e_2^2 \end{bmatrix},\quad [K_t] = K_t\begin{bmatrix} f_0^2 & f_0f_1 & f_0f_2 \\ f_0f_1 & f_1^2 & f_1f_2 \\ f_0f_2 & f_1f_2 & f_2^2 \end{bmatrix}$$
$$[K_r] = \begin{bmatrix} K_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} -mg(z_{2C}+z_1+z_2) & 0 & 0 \\ 0 & -mgl_{4c}\sin\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & -mgl_{9c}\sin\alpha_2 \end{bmatrix} \tag{3.92}$$

Matricea coloană a forţelor generalizate este

$$\{F\} = \{P_zY_1-P_yZ_1,\, P_{zl_c}\cos\alpha_1+P_{zR_c}\cos\beta-P_{yl_c}\sin\alpha_1-P_yR_c\sin\beta,\, 0\}^T \tag{3.93}$$

3.2.3. Cazan de termocentrală

Prinderea cazanului de construcţia metalică (Fig.1.4.) este nerigidă, ea fiind pendulară, prin tiranţi şi cu legături vâscoase, prin cilindri hidraulici amplasaţi câte 8 în fiecare din cele patru plane P_1-P_4. In contextul unor cuplaje "moi" se poate considera un model la care cazanul se comportă, din punct de vedere dinamic, ca un corp rigid. Structura metalica de susţinere a cazanului, se deformeaza dinamic după primele moduri naturale de vibraţii, unul de încovoiere pe verticală după axa Ox având forma modală $f_x(z)$ şi celălalt tot de încovoiere după o direcţie perpendiculară, după axa Oy, având forma modală $f_y(z)$. Construcţia metalica de susţinere a cazanului este prevăzută cu contravântuiri diagonale astfel ca rigiditatea de torsiune a ei este mare şi de aceea primele moduri naturale de vibraţii la torsiune se pot considera a avea domeniul frecvenţelor proprii înafară de domeniul de frecvenţă al excitaţiei seismice.

In acest sens, mişcările vibratorii ale unui punct situat în planul P_s (s=1,2,..5) de pe construcţia metalică, va avea legile de mişcare

$$x_s(t) = x(t)\,f_x(z_s)\,, \quad y_s(t) = y(t)\,f_y(z_s) \tag{3.94}$$

unde x(t) şi y(t) sunt legile de mişcare ale punctelor din planul P_0 (92 m) de fixare a tiranţilor T_r. Rezultă pentru $z_s = 0$, $f_x(0) = 1$, $f_y(0) = 1$. Tânând cont de faptul că structura cazanului se consideră o structură rigidă cu saşe grade de libertate la care se mai adaugă două ale structurii de susţinere, sistemul de ecuaţii diferenţiale care guvernează mişcările vibratorii ale ansamblului va fi format din 8 ecuaţii. Pentru a defini cele 6 legi de mişcare ale cazanului se are în vedere că prinderea cazanului, de construcţia metalică, se face prin tiranţi de lungime l care se deformeaza în timpul mişcării cazanului. Tirantul central O_0O_1, leagă centrele perimetrelor patratelor de fixare a capetelor tiranţilor. Pentru scrierea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării vibratorii ale cazanului se utilizează ecuaţiile lui Lagrange. Energia cinetică a construcţiei metalice va fi

$$E_{cm} = \frac{1}{2}\int_{V_{cm}} (\dot{X}_s^2(t) + \dot{Y}_s^2(t))\,dm \tag{3.95}$$

care ţinând cont de (3.94) va deveni

$$E_{cm} = \frac{1}{2}m_x\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_y\dot{y}^2 \tag{3.96}$$

unde

$$m_x = \int_{V_{cm}} f_x^2 dm, \quad m_y = \int_{V_{cm}} f_y^2 dm \tag{3.97}$$

Energia cinetica a cazanului se scrie ca cea pentru un corp rigid

$$E_{ca} = \frac{1}{2}m_a\{\dot{r}_c\}^T\{\dot{r}_c\} + \frac{1}{2}\{\dot{\varphi}\}^T[J]\{\dot{\varphi}\} \tag{3.98}$$

unde $x_c(t)$, $y_c(t)$ şi $z_c(t)$ sunt legile de mişcare ale centrului masei C al cazanului în raport cu sistemul de axe Oxycz, [J] fiind tensorul momentelor de inerţie în raport cu sistemul de axe $Cx_cy_cz_c$, legat de cazan,.

Legile de mişcare ale unui punct material oarecare al structurii cazanului este data prin

$$\overrightarrow{r_P} = \overrightarrow{OO_0} + \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1P} \tag{3.99}$$

care proiectata pe sistemul de axe fix Oxyz va da

$$\{r_P\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{Bmatrix} + (l+z(t))\begin{Bmatrix} \varphi_{Oy} \\ -\varphi_{Ox} \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \tag{3.100}$$

unde X,Y şi Z sunt coordonatele punctului P în raport cu sistemul de axe O_1XYZ, l şi z(t) sunt lungimea şi respectiv deformaţia tirantului central fixat între punctele O_0 şi O_1, φ_{Ox} şi φ_{Oy} fiind unghiurile de rotaţie în raport cu axele O_0X_0 şi O_0Y_0 legate de planul superior P_0 de prindere a tiranţilor pe construcţia metalică. Particularizând pentru punctul C, centrul de masă al cazanului va rezulta, derivând în raport cu timpul

$$\{\dot{r}_C\} = [D_c]\{\dot{q}\} \tag{3.101}$$

unde

$$\{q\} = \{x(t), y(t), z(t), \varphi_{Ox}, \varphi_{Oy}, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}^T \tag{3.102}$$

este vectorul coloană al legilor de mişcare ale ansamblului cazan-construcţie metalică, iar $[D_c]$ este o matrice dreptunghiulară (3×8).

$$[D_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & Z_c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -Z_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & Y_c & -X_c & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.103)$$

Formulele energiilor cinetice date de (3.96) şi (3.98) vor avea forma

$$E_{cm} = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T [M_{xy}] \{\dot{q}\} \qquad (3.104)$$

unde matricea $[M_{xy}]$ (8×8) are forma

$$[M_{xy}] = \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}, \quad [m] = \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{bmatrix} \qquad (3.105)$$

iar

$$E_{ca} = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T [M_a] \{\dot{q}\} \qquad (3.106)$$

unde matricea pătrată $[M_a]$ (8×8) este

$$[M_a] = m_a [D_c]^T [D_c] + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [J] \end{bmatrix} \qquad (3.107)$$

Energia potenţială are două componente, una din deformarea construcţiei metalice şi cealaltă din deformaţia tiranţilor. Energia potenţială din deformaţia construcţiei metalice va fi

$$E_{p1} = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 \qquad (3.108)$$

unde k_x şi k_y sunt constantele elastice ale constructiei metalice după axele Ox şiOy.

A doua componenta este cea derivată din deformaţiile longitudinale ale tiranţilor date de legile de deformaţie z_i

$$E_{p2} = \frac{1}{2}k_t \sum_{i=1}^{n_t} z_i^2 \qquad (3.109)$$

unde k_t este constanta elastica a unui tirant. Deformaţia z_i a tirantului i se poate determina din egalitatea vectorială

$$\overrightarrow{O_0A_i} + \overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1B_i} \qquad (3.110)$$

A_i şi B_i fiind punctele de prindere ale capetelor tirantului *i* de construcţia metalică şi respectiv de cazan. Punctele A_i şi B_i au coordonatele x_i şi respectiv y_i, aceleaşi pentru planurile $O_0x_0y_0$ şi Oxy. Pentru calcule algebrice se proiecteaza egalitatea pe sistemul $O_0x_0y_0z_0$ sub formă matriceală

$$\{O_0A_i\} + [T_i]^T\{A_iB_i\} = [T_0]^T\{O_0O_1\} + [T]^T\{O_1B_i\} \qquad (3.111)$$

Matricea $[T_i]$ este matricea de trecere de la sistemul $O_0x_0y_0z_0$ la un sistem $A_ix_iy_iz_i$ legat de tirantul ***i*** între punctele A_i şi B_i, axa A_iB_i fiind coliniară cu axa A_iz_i a sistemului. La fel matricea $[T_0]$ este matricea de trecere dintre sistemul $O_0x_0y_0z_0$ şi un sistem de axe $O_0x_1y_1z_1$ axa O_0z_1 fiind coliniară cu axa O_0O_1 a tirantului central. Matricea de trecere [T] de la sistemul de axe $O_0x_0y_0z_0$ la sistemul O_1XYZ legat de cazan are forma

$$[T] = [T_x]\,[T_y]\,[T_z] \qquad (3.112)$$

rezultată din trei rotaţii succesive în jurul axelor Ox, Oy si Oz

$$[T_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & \sin\varphi_x \\ 0 & -\sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{bmatrix}, \quad [T_y] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_y & 0 & -\sin\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{bmatrix}$$

$$[T_z] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_z & \sin\varphi_z & 0 \\ -\sin\varphi_z & \cos\varphi_z & o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.113)$$

Deorece tiranţii sunt coliniari cu axele O_0z_1 şi A_iz_i poziţia lor în spaţiu faţă de sistemul $O_0x_0y_0$ se determină prin două rotaţii

$$[T_0] = [T_{ox}]\,[T_{oy}]\,, \qquad [T_i] = [T_{ix}]\,[T_{iy}] \qquad (3.114)$$

considerând că rotaţiile relative, între sistemele de referinţa, sunt de valori mici se obţin din (3.111)

$$\varphi_{yi} = \varphi_{yo} - \frac{Y_i}{l}\varphi_z,\ \varphi_x = \varphi_{xo} - \frac{X_i}{l}\varphi_z,\ z_i = z - X_i\varphi_y + Y_i\varphi_x \qquad (3.115)$$

Inlocuind în forma (3.108) a energiei potenţiale se obţine

$$E_{p2} = \frac{1}{2}k_t(n_t z^2 + \varphi_x^2\sum_{i=1}^{n_t} Y_i^2 + \varphi_y^2\sum_{i=1}^{n_t} X_i^2) \qquad (3.116)$$

In această sumă nu apar termeni de forma $z\varphi_x$, $z\varphi_y$ şi $\varphi_x\varphi_y$ deorece datorita simetriei reţelei de tiranţi $\sum X_i = \sum Y_i = 0$.
Energia potenţială totala va fi

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{1}{2}\{q\}^T[K]\{q\} \tag{3.117}$$

unde

$$[K] = diag[k_x, k_y, n_t k_t, 0, 0, k_t\sum_{i=1}^{n_t} X_i^2, k_t\sum_{i=1}^{n_t} Y_i^2, o] \tag{3.118}$$

Singura forţa ce lucrează asupra sistemului este greutatea cazanului ce acţionează în centrul de greutate. Lucrul mecanic virtual al acestei forţe va fi

$$\delta L = m\vec{g}.\delta\vec{r_c} \tag{3.119}$$

unde r_C este vectorul de poziţie al centrului C în raport cu originea O a sistemului de axe fixe. Forţa mg este echilibrată static de tensiunile din cei n_t tiranţi prinşi între punctele A_i şi B_i. Astfel, se poate considera că în mg intră o cotă parte din G_i prin tirantul *i*. Deci

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n_t}\vec{G_i}\delta\vec{r_c}, \quad \sum_{i=1}^{n_t}\vec{G_i} = m\vec{g} \tag{3.120}$$

Vectorul de poziţie r_C poate fi scris sub forma

$$\vec{r_c} = \vec{r_{1i}} + \vec{r_{2i}} \tag{3.121}$$

unde

$$\vec{r_{1i}} = \vec{OO_0} + \vec{O_0A_i} + \vec{A_iB_i}, \quad \vec{r_{2i}} = \vec{B_iO_1} + \vec{O_1O_C} \tag{3.122}$$

In acest caz lucrul mecanic se poate scrie

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 \tag{3.123}$$

unde

$$\delta L_1 = \sum_{i=1}^{n_t}\vec{G_i}\delta\vec{r_{1i}}, \quad \delta L_2 = \sum_{i=1}^{n_t}\vec{G_i}\delta\vec{r_{2i}} \tag{3.124}$$

Sub formă matriceală relaţiile (3.124) devin

$$\delta L_1 = \sum_{i=1}^{n_t}\{G_i\}^T\{\delta r_{1i}\}, \quad \delta L_2 = \sum_{i=1}^{n_t}\{G_i\}^T\{\delta r_{2i}\} \tag{3.125}$$

unde

$$\{r_{1i}\} = \{OO_0\} + \{O_0A_i\} + [T_i]^T\{A_iB_i\}$$
$$\{r_{2i}\} = [T]^T(\{B_iO_1\} + \{O_1C\}) \tag{3.126}$$

care se pot scrie şi sub următoarele forme explicite

$$\{OO_0\} = \{x, y, 0\}^T, \quad \{O_0A_i\} = \{X_i, Y_i, 0\}^T,$$
$$\{A_iB_i\} = \{0, 0, l+z_i\}^T, \quad \{B_iO_1\} + \{O_1C\} = \{-X_i, -Y_i, Z_C\}^T \tag{3.127}$$

In calculul deplasărilor virtuale elementare $\{\delta r_{1i}\}$ şi $\{\delta r_{2i}\}$ intervin derivate de tipul $\delta([T]^T)$ şi $\delta([T_i]^T)$. Pentru matricea [T] de trecere de la sistemul de axe fixe Oxyz la sistemul OXYZ legat de cazan, prin diferentierea relaţiei (3.112), ţinând cont şi de (3.113), se obţine

$$\delta[T]^T = [D_x]\delta\varphi_x + [D_y]\delta\varphi_y + [D_z]\delta\varphi_z \tag{3.128}$$

unde

$$[D_x] = [T_z]^T[T_y]^T\frac{\partial([T_x]^T)}{\partial\varphi_x}, \quad [D_y] = [T_z]^T\frac{\partial([T_y]^T)}{\partial\varphi_y}[T_x]^T,$$
$$[D_z] = \frac{\partial([T_z]^T)}{\partial\varphi_z}[T_y]^T[T_x]^T \tag{3.129}$$

care pentru elongaţii mici ale rotaţiilor φ_x, φ_y şi φ_z devin

$$[D_x] = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_y & \varphi_z \\ 0 & -\varphi_x & -1 \\ 0 & 1 & -\varphi_x \end{bmatrix}, \quad [D_y] = \begin{bmatrix} -\varphi_y & \varphi_x & 1 \\ 0 & 0 & \varphi_z \\ -1 & 0 & -\varphi_y \end{bmatrix}, \quad [D_z] = \begin{bmatrix} -\varphi_z & -1 & \varphi_x \\ 1 & -\varphi_z & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.130}$$

calculele se vor face în mod similar şi pentru $[T_i]$ unde se va ţine cont că $[D_{zi}] = [0]$.

Lucrul mecanic elementar virtual δL_1 va fi de forma

$$\delta L_1 = \sum_{i=1}^{n_t}\{G_i\}^T(\delta\{OO_0\} + \delta\{O_0A_i\} + \delta[T_i]^T\{A_iB_i\} + [T_i]^T\delta\{A_iB_i\}) \tag{3.131}$$

Termenii $\{G_i\}^T\delta\{OO_0\}$, $\{G_i\}^T\delta\{O_0A_i\}$ sunt nuli, deoarece vectorii corespunzători deplasarilor virtuale rămân în planul orizontal, iar $\{G_i\}$ este un vector vertical, prin urmare produsele scalare sunt nule. După efectuarea calculelor se obţine

$$\delta L_1 = \sum_{i=1}^{n_t} (-lG_i\varphi_{xi}\delta\varphi_{xi}+lG_i\varphi_{yi}\delta\varphi_{yi}+G_i\delta z_i) \tag{3.132}$$

Al doilea termen al lucrului mecanic virtual va fi

$$\delta L_2 = \sum_{i=1}^{n_t} \{G_i\}^T([D_x]\delta x+[D_y]\delta y+[D_z]\delta z)\begin{Bmatrix}-X_i\\-Y_i\\Z_C\end{Bmatrix} \tag{3.133}$$

care devine

$$\delta L_2 = \sum_{i=1}^{n_t} (-G_iY_i-G_iZ_C\varphi_x)\delta\varphi_x+(G_{iX_i}-G_{iZ_C}\varphi_y)\delta\varphi_y \tag{3.134}$$

In expresia (3.132) variaţiile $\delta\varphi_{xi}$ $\delta\varphi_{yi}$ şi $\delta\varphi_{zi}$ trebuie exprimate ca functii de $\delta\varphi_{xo}$, $\delta\varphi_{yo}$, $\delta\varphi_x$ $\delta\varphi_y$ $\delta\varphi_z$ şi δ_z. Relaţiile de legătură se obţin din (3.115)

$$\delta\varphi_{yi} = \delta\varphi_{yo}-\frac{Y_i}{l}\delta\varphi_z, \quad \delta\varphi_{xi} = \delta\varphi_{xo}-\frac{X_i}{l}\delta\varphi_z$$
$$\delta z_i = \delta z-X_i\delta\varphi_y+Y_i\delta\varphi_x \tag{3.135}$$

care, introduse impreună cu (3.115) în ecuaţia (3.130), va duce la expresia lucrului mecanic virtual δL_1

$$\delta L_1 = -\{q\}^T[K_{g1}]\{\delta q\} + \{F_g\}^T\{\delta q\} \tag{3.136}$$

elementele matricei $[K_{g1}]$ sunt

$$K_{g1}(4,4)=K_{g1}(5,5)=mgl, \quad K_{g1}(4,8)=K_{g1}(8,4)=-\sum_{i=1}^{n_t} g_iY_i$$
$$K_{g1}(5,8) = -\sum_{i=1}^{n_t} G_1X_i, \qquad K_{g1}(8,8) = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n_t} G_i(X_i^2+Y_i^2) \tag{3.137}$$

Celelalte elemente ale matricei fiind nule.
Vectorul $\{F_{g1}\}$ are următoarea formă

$$\{F_{g1}\} = \{0,0,m_ag,\sum_{i=1}^{n_t} G_iY_i,-\sum_{i=1}^{n_t} G_iX_i,0,0,0\}^T \tag{3.138}$$

La fel şi pentru lucrul mecanic virtual δL_2

$$\delta L_2 = -\{q\}^T[K_{g2}]\{\delta q\} + \{F_{g2}\}^T\{\delta q\} \tag{3.139}$$

unde matricea $[K_{g2}]$ are următoarele elemente

$$K_{g2}(6,6) = K_{g2}(7,7) = m_a g z_C, \tag{3.140}$$

restul elementelor fiind nule.
Vectorul $\{F_{g2}\}$ are următoarea formă

$$\{F_{g2}\} = \{0,0,0,0,0,-\sum_{i=1}^{n_t} G_i Y_i, \sum_{i=1}^{n_t} G_i Z_i, 0\}^T \tag{3.141}$$

Cu acestea, matricea de rigiditate totală va fi

$$[K] = [K_0] + [K_{g1}] + [K_{g2}]. \tag{3.142}$$

De menţionat, aici, ca ecuaţia de echilibru static dată de vectorul $\{q_{st}\}$ va fi de forma

$$[K]\{q_{st}\} = \{F_{g1}\} + \{F_{g2}\} \tag{3.143}$$

Examinând vectorii $\{F_{g1}\}$ şi $\{F_{g2}\}$ se constată existenţa elementelor nenule care, însă nu dau cupluri care să producă rotiri unghiulare statice ale cazanului, numai în cazul în care toate eforturile din tendoane sunt egale, deci

$$G_i = \frac{mg}{n_t}, \quad \sum_{i=1}^{n_t} G_i X_i = G_i \sum_{i=1}^{n_t} = 0, \tag{3.144}$$

deorece amplasarea reţelei de tiranţi este simetrică faţă de axa O_1z a cazanului.

3.2.4. Mişcările vibratorii ale structurilor mecanice cu rotori

Foarte multe structuri de maşini şi utilaje conţin subansamble în mişcare de rotaţie cu axă fixă faţa de structura maşinii, mişcare impusă de cinematica maşinii destinată executării unui anumit proces tehnologic. In timpul funcţionării maşinii apar o serie de efecte dinamice specifice, legate de modul de compunere a mişcărilor cinematice impuse, cu mişcările vibratorii rezultate din efectele dinamice produse.

In practică, se pot considera două cazuri distincte:

a) Pe o structură de maşină S_t fixată de un postament, care constituie sistemul fix, prin intermediul unor elemente elastice sau de disipaţie, se află una sau mai multe substructuri S_i având mişcari de rotaţie cu vitezele unghiulare $\vec{\omega}_i$. Axele de rotaţie sunt fixe, relativ la structura S_t. Perturbaţiile exterioare şi cele rezultate din efectele dinamice ale substructurilor S_i produc mişcări vibratorii ale structurii S_t, în jurul poziţiei sale de echilibru dată de acţiunea forţele statice. In cazul în care mişcarea structurii S_t este una de corp rigid, legile mişcării vibratorii de transport sunt în număr de 6, adică trei translaţii şi trei rotaţii.

b) Structura S_t execută mişcări de transport impuse, care în cazul corpului rigid sunt trei translaţii şi trei rotaţii. In acest caz substructurile S_i sunt legate elastic sau/şi prin elemente disipative. Problema care se pune este determinarea mişcărilor vibratorii ale substructurii S_i relative la structura S_t.

Intrucât în literatura de specialitate problemele de dinamica structurilor mecanice, având mişcări relative de rotaţie impuse faţă de structura de transport, sunt mai puţin abordate, în cadrul acestei lucrări acestor probleme li se va acorda o atenţie specială.

3.2.4.1. Dinamica structurilor mecanice cu substructuri având mişcări relative impuse faţă de structura de transport

Se consideră substructurile rigide S_i $(i=1,2,\ldots,N)$, N fiind numărul substructurilor aflate în mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\vec{\omega}_i$ în jurul unor axe fixe (O_ix_i).

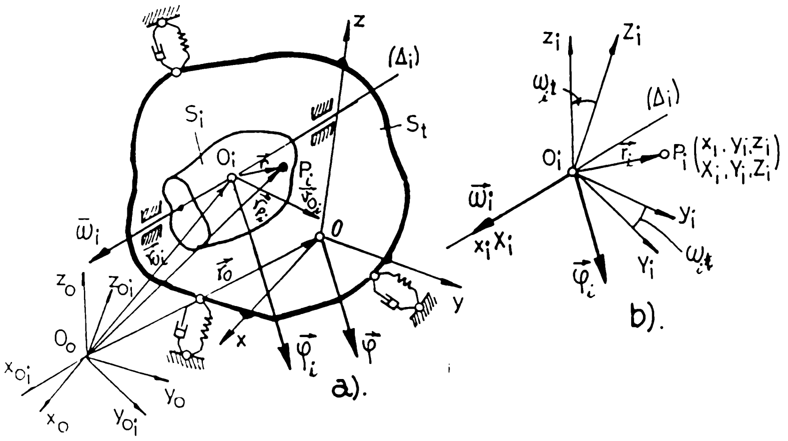

Fig.3.1.

Axele de rotaţii sunt fixate rigid de structura de transport S_t. Pentru studiul mişcării structurii S_t împreună cu sistemul de corpuri ataşate de aceasta şi având mişcări cinematice impuse se vor alege următoarele sisteme de referinţă: sitemul de referinţă global fix $O_0X_0Y_0Z_0$, sistemul de referinţă global OXYZ legat de structura de transport S_t, sistemele de referinţă locale $O_iX_iY_iZ_i$, având originile O_i situate pe structurile S_i şi axele O_iX_i de-a lungul axelor de rotaţii Δ_i (Fig. 3.1). Se mai consideră de asemenea sistemele de referinţă locale fixe, $O_{0i}X_{0i}Y_{0i}Z_{0i}$ având axele paralele, în poziţie de echilibru static, cu axele sistemelor de referinţă locale legate de structura de transport S_t. In sfârşit, pentru fiecare structură S_i se alege un sistem de referinţă $O_ix_iy_iz_i$, solidar legat de acestea.

Din punct de vedere dinamic se dau legile de rotaţie relativă în jurul axelor O_iX_i, având vectorul viteză unghiulare $\vec{\omega}_i$, forţele F_j, direct aplicate asupra structurii S_t sau chiar asupra substructurilor S_i, şi se pune problema determinării legilor mişcării vibratorii ale structurii de transport S_t, legi date prin vectorul de poziţie a originii sistemului de referinţă global local, $\vec{r}_0(t)$, respectiv vectorul de rotaţie definit prin $\vec{\varphi}(t)$.

Fiind vorba de un sistem mecanic este convenabil să se folosească ecuaţiile lui Lagrange pentru deducerea ecuaţiilor dinamice ale mişcării

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\{\dot{q}\}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial\{q\}} + \frac{\partial E_p}{\partial\{q\}} + \frac{\partial E_d}{\partial\{\dot{q}\}} = \{F\} \tag{3.145}$$

unde $\{q\}^T = \{r_{0X}, r_{0Y}, r_{0Z}, \varphi_X, \varphi_Y, \varphi_Z\}$, reprezintă vectorul coordonatelor generalizate, date de componentele vectorului $r_0(t)$, a originii sistemului de referinţă global legat de structura S_t pe sistemul de referinţă global fix, respectiv componentele vectorului instantaneu de rotaţie $\vec{\varphi}(t)$ pe sistemul de axe global mobil (legat de structura S_t). E_c, E_p şi E_d reprezintă energia cinetică, potenţială si de disipare, iar $\{F\}$ reprezintă vectorul forţelor generalizate pentru sistemul dat.

Energia cinetică a sistemului mecanic este suma

$$E_c = E_{ct} + \sum_{i=1}^{N} E_{ci} \tag{3.146}$$

unde E_{ct} este energia cinetică a structurii de transport S_t, iar E_{ci} este energia cinetică a substructurii S_i.

3.2.4.2. Calculul energiei cinetice a structurii ce efectuează mişcarea de transport

Energia cinetică E_{ct} a structurii ce efectuează mişcarea de transport se determină din

$$E_{ct} = \frac{1}{2}\int_{S_t}\{v_t\}^T\{v_t\}dm \tag{3.147}$$

vectorul $\{v_t\}$ este vectorul coloană al componentelor vitezei absolute a unui punct curent P_t, de pe structura de transport şi se obţine prin derivarea în raport cu timpul a vectorului de poziţie $\{r_t\}$ raportat la sistemul global fix

$$\{v_t\} = \{\dot{r}_O\} + [\dot{T}_0]\{r\} = \{\dot{r}_O\} + [R_t]\{\dot{\phi}\} \tag{3.148}$$

unde $\{v_t\}$ şi $\{\dot{r}_o\}$ sunt matricele coloană ale proiecţiilor vectorilor $\vec{v}_t$ şi $\vec{v}_o$ pe sistemul de axe fixe $O_oX_oY_oZ_o$, iar $[T_o]$ reprezintă matricea de trecere de la sistemul de transport OXYZ la sistemul fix $O_oX_oY_oZ_o$, care pentru vibraţii mici are forma

$$[T_o] = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_Z & \varphi_Y \\ \varphi_Z & 1 & -\varphi_X \\ -\varphi_Y & \varphi_X & 1 \end{bmatrix} = [\Phi] + [I] \tag{3.149}$$

unde $[I]$ este o matrice unitate 3×3, iar $[\Phi]$ este matricea antisimetrică de rotaţie, iar vectorii coloana $\{r_o\}$, $\{\varphi\}$ şi matricea $[R_t]$ au expresiile

$$\{\dot{r}_O\} = \{\dot{r}_{OX}, \dot{r}_{OY}, \dot{r}_{OZ}\}, \quad \{\dot{\phi}\} = \{\dot{\phi}_X, \dot{\phi}_Y, \dot{\phi}_Z\}^T, \quad [R_t] = \begin{bmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{bmatrix} \tag{3.150}$$

unde $\dot{\varphi}_X$, $\dot{\varphi}_Y$ şi $\dot{\varphi}_Z$ fiind proiecţiile vectorului viteză de rotaţie $\dot{\vec{\varphi}}$ pe sistemul de axe OXYZ, iar X, Y şi Z fiind coordonatele punctului curent P_t faţă de acelaşi sistem.

Introducând (3.148) în (3.147), se obţine expresia energiei cinetice a structurii ce execută mişcarea de transport

$$E_{ct} = \frac{1}{2}\int_{S_t}\{\dot{r}_O\}^T\{\dot{r}_O\}dm + \frac{1}{2}\int_{S_t}\{\dot{\phi}\}^T[R_t]^T[R_t]\{\dot{\phi}\}dm + \frac{1}{2}\int_{S_t}2\{\dot{r}_O\}[R_t]\{\dot{\phi}\}dm =$$
$$= \frac{1}{2}m_t\{\dot{r}_O\}^T\{\dot{r}_O\} + \frac{1}{2}\{\dot{\phi}\}^T[J_t]\{\dot{\phi}\} + \{\dot{r}_O\}^T[S_t]\{\dot{\phi}\} \tag{3.151}$$

unde matricele $[J_t]$ şi $[S_t]$ sunt matricele momentelor de inerţie respectiv ale momentelor statice a structurii S_t şi au expresiile

$$[J_t] = \int_{S_t}[R_t]^T[R_t]\,dm = \begin{bmatrix} J_X & -J_{XY} & -J_{XZ} \\ -J_{XY} & J_Y & -J_{YZ} \\ -J_{XZ} & -J_{YZ} & J_Z \end{bmatrix},$$

$$[S_t] = \int_{S_t}[R_t]\,dm = \begin{bmatrix} 0 & S_{XOY} & -S_{XOZ} \\ -S_{XOY} & 0 & S_{YOZ} \\ S_{XOZ} & -S_{YOZ} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.152}$$

3.2.4.3. Calculul energiilor cinetice ale substructurilor aflate în mişcare de rotaţie

Scrierea energiilor cinetice ale substructurilor S_i, aflate în mişcare de rotaţie cu vitezele unghiulare $\vec{\omega}_i$ se va face tinând cont de modul în care s-au ales sistemele de referinţă şi de mişcările compuse la care sunt supuse acestea. Coordonatele unui punct curent P_i, de pe structura dată, faţă de sistemul de referinţă fix $O_{0i}X_{0i}Y_{0i}Z_{0i}$, se pot exprima prin vectorul coloană $\{r_{Pi}\}$, astfel

$$\{r_{Pi}\} = \{r_{Oi}\} + [T_{0i}]\,[T_i]\{r_i\} \tag{3.153}$$

unde $\{r_{Oi}\}$ este vectorul coloană al coordonatelor originii comune a sistemelor de referinţă $O_iX_iY_iZ_i$ şi $O_ix_iy_iz_i$, origine situată pe axa de rotaţie (Δ_i). Vectorul $\{r_i\}$ reprezintă vectorul coloană al coordonatelor punctului P_i faţă de sistemul de referinţă $O_ix_iy_iz_i$. Matricele $[T_{0i}]$ reprezintă matricele de trecere dintre sistemele de referinţă $O_iX_iY_iZ_i$ şi $O_{0i}X_{0i}Y_{0i}Z_{0i}$, iar matricele $[T_i]$ reprezintă matricele de trecere dintre sistemele de referinţa $O_ix_iy_iz_i$ şi $O_iX_iY_iZ_i$, acestea fiind simple matrice de rotaţie în jurul axei O_iX_i, având formele

$$[T_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_i t & -\sin\omega_i t \\ 0 & \sin\omega_i t & \cos\omega_i t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \tag{3.154}$$

Matricele $[T_{0i}]$ vor fi de forma (3.149) şi pe aceleaşi considerente se poate scrie

$$[T_{0i}] = [I] + [\Phi_i]\,, \quad [\dot{T}_{0i}] = [\dot{\Phi}_i] \tag{3.155}$$

Din relaţiile (3.151) prin derivare în raport cu timpul, se obţine

$$\{\dot{r}_{P_i}\} = \{\dot{r}_{O_i}\} + [\Phi_i]\,[T_i]\{r_i\} + ([\dot{T}_i] + [\Phi_i]\,[\dot{T}_i])\{r_i\} \qquad (3.156)$$

Energiile cinetice ale substructurilor S_i, ţinând cont şi de relaţiile (3.156), va fi suma

$$E_{ci} = \frac{1}{2}\int_{S_i}\{\dot{r}_{Pi}\}^T\{\dot{r}_{Pi}\}dm = \sum_{j=1}^{8} E_{ci}^{(j} \qquad (3.157)$$

Cei opt termeni ai energiei cinetice a substructurii S_i se calculează după cum urmează:

$$E_{ci}^{(1} = \frac{1}{2}\int_{S_i}\{\dot{r}_{O_i}\}^T\{\dot{r}_{O_i}\}dm = \frac{1}{2}m_i\{\dot{r}_{O_i}\}^T\{\dot{r}_{O_i}\} \qquad (3.158)$$

unde m_i este masa substructurii S_i.

$$\begin{aligned} E_{ci}^{(2} &= \frac{1}{2}\int_{S_i}([\dot{\Phi}_i]\,[T_i]\{r_i\})^T([\dot{\Phi}_i]\,[T_i]\{r_i\})\,dm = \\ &= \frac{1}{2}\int_{S_i}\{\dot{\varphi}_i\}^T[R_i]^T[R_i]\{\dot{\varphi}_i\}dm = \frac{1}{2}\{\dot{\varphi}_i\}^T[J_{Oi}]\{\dot{\varphi}_i\} \end{aligned} \qquad (3.159)$$

Facându-se notaţiile

$$\{X_i, Y_i, Z_i\}^T = [T_i]\{r_{Pi}\}, \quad [R_i] = \begin{bmatrix} 0 & Z_i & -Y_i \\ -Z_i & 0 & X_i \\ Y_i & -X_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$[J_{Oi}] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy}c+J_{xz}s & -J_{xy}s-J_{xz}c \\ J_{xz}s-J_{xy}c & \frac{J_y+J_z}{2}+\frac{J_y-J_z}{2}c2+J_{yz}s2 & \frac{J_y-J_z}{2}s2-J_{yz}c2 \\ -J_{xy}s-J_{xz}c & \frac{J_y-J_z}{2}s2-J_{yz}c2 & \frac{J_y+J_z}{2}+\frac{J_z-J_y}{2}c2-J_{yz}s2 \end{bmatrix} \qquad (1.160)$$

unde $(X_i, Y_i, Z_i)^T$ sunt coordonatele puctului curent P_i faţă de sistemul $O_iX_iY_iZ_i$ iar $[J_{Oi}]$ reprezintă matricea de inerţie relativ la punctul O_i şi sistemul de referinţă $O_iX_iY_iZ_i$. S-au mai făcut notaţiile de prescurtare : $\sin \omega_i t = s$, $\cos \omega_i t$, $\sin 2\omega_i t = s2$ şi $\cos 2\omega_i t = c2$.

$$E_{ci}^{(3} = \frac{1}{2}\int_{S_i}\{r_i\}^T[\dot{T}_i]^T[\dot{T}_i]\{r_i\}dm = \frac{1}{2}J_{x_i}\omega_i^2 \qquad (3.161)$$

$$E_{ci}^{(4} = \frac{1}{2}\int_{S_i}2\{\dot{r}_{Oi}\}^T[\dot{\Phi}_i]\,[T_i]\{r_i\}dm = \int_{Si}\{\dot{r}_{Oi}\}^T[R_i]\{\dot{\varphi}_i\} = \{\dot{r}_{Oi}\}^T[S_{Oi}]\{\dot{\varphi}_i\} \qquad (3.162)$$

unde matricea $[S_{Oi}]$ reprezintă matricea momentelor statice în raport cu punctul O_i şi sistemul de referinţă $O_iX_iY_iZ_i$ şi are expresia

$$[S_{Oi}] = \begin{bmatrix} 0 & S_{xOz}s+S_{xOy}c & -S_{xOz}c+S_{xOy}s \\ -S_{xOz}s-S_{xOy}c & 0 & S_{yOz} \\ S_{xOz}c-S_{xOy}s & -S_{yOz} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.163}$$

$$E_{ci}^{(5} = \frac{1}{2}\int_{S_i} 2\{\dot{r}_{Oi}\}^T[\dot{T}_i]\{r_i\}dm = \int_{Si}\{\dot{r}_{Oi}\}^T[R_i]\{\omega_i\}dm = \{\dot{r}_{Oi}\}^T[S_{Oi}]\{\omega_i\} \tag{3.164}$$

$$E_{ci}^{(6} = \frac{1}{2}\int_{S_i} 2\{\dot{r}_{Oi}\}^T[\Phi_i]\;[\dot{T}_i]\{r_i\}dm = \int_{S_i}\{\dot{r}_{Oi}\}^T[\dot{R}_i]\{\varphi_i\}dm = \{\dot{r}_{Oi}\}^T[\dot{S}_{Oi}]\{\varphi\} \tag{3.165}$$

$$\begin{aligned} E_{ci}^{(7} &= \frac{1}{2}\int 2\,(\,[\dot{\Phi}_i]\;[T_i]\{r_i\})^T[\dot{T}_i]\{r_i\}dm = \int_{Si}\{\dot{\varphi}_i\}^T[R_i]^T[R_i]\{\omega_i\}dm \\ &= \{\dot{\varphi}_i\}^T[J_{Oi}]\{\omega_i\} \end{aligned} \tag{3.166}$$

$$\begin{aligned} E_{ci}^{(8} &= \frac{1}{2}\int_{S_i} 2\,(\,[\dot{\Phi}_i]\;[T_i]\{r_i\})^T[\Phi_i]\;[\dot{T}_i]\{r_i\}dm = \int_{Si}\{\dot{\varphi}_i\}^T[R_i]^T[\dot{R}_i]\{\varphi_i\}dm \\ &= \{\dot{\varphi}_i\}^T\left(\int_{Si}[R_i]^T[\dot{R}_i]\,dm\right)\{\varphi_i\} = \{\dot{\varphi}_i\}^T[G_{Oi}]\{\varphi_i\} \end{aligned} \tag{3.167}$$

In calculul ultimului termen al energiei cinetice matricea notată $[G_{Oi}]$, numită şi matrice giroscopică [23], este dată de

$$[G_{Oi}] = \omega_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ J_{yz}s+J_{xz}c & \frac{J_z-J_y}{2}s2+J_{yz}c2 & \frac{J_x}{2}+\frac{J_y-J_z}{2}c2+J_{yz}s2 \\ -J_{yz}c+J_{xz}s & -\frac{J_x}{2}-\frac{J_y-J_z}{2}c2+J_{yz}s2 & \frac{J_y-J_z}{2}s2-J_{yz}c2 \end{bmatrix} \tag{3.168}$$

Energia cinetica a substrucurii S_i se poate scrie acum sub forma

$$\begin{aligned} E_{ci} &= \frac{1}{2}m_i\{\dot{r}_{Oi}\}^T\{\dot{r}_{Oi}\} + \frac{1}{2}\{\dot{\varphi}_i\}^T[J_{Oi}]\{\dot{\varphi}_i\} + \frac{1}{2}J_{x_i}\{\omega_i\}^T\{\omega_i\} + \{\dot{r}_{Oi}\}^T[S_{Oi}]\{\dot{\varphi}_i\} \\ &+ \{\dot{r}_{Oi}\}^T[S_{Oi}]\{\omega_i\} + \{\dot{r}_{Oi}\}^T[\dot{S}_{Oi}]\{\varphi_i\} + \{\dot{\varphi}_i\}^T[J_{Oi}]\{\omega_i\} + \{\dot{\varphi}_i\}^T[G_{Oi}]\{\varphi_i\} \end{aligned} \tag{3.169}$$

3.2.4.3. Deducerea ecuaţiilor dinamice pentru cazul în care o singură substructură se află în mişcare de rotaţie

Având explicitaţi toţi termenii energiei cinetice corespunzători substructurii S_i, aflată în mişcare de rotaţie în jurul axei (Δ_i), fixată de structura de transport S_t, se poate trece la determinarea ecuaţiilor diferenţiale. Interpretarea fizică a ecuaţiilor diferenţiale este mai uşoră dacă mişcarea substructurii S_i este raportată mai întâi în funcţie de vectorii legilor de mişcare $\{r_{oi}\}$ şi $\{\varphi_i\}$ raportaţi la sistemele de axe locale $O_iX_iY_iZ_i$ şi $O_{oi}X_{oi}Y_{oi}Z_{oi}$.

In această situaţie se pot scrie ecuaţiile lui Lagrange, obtinându-se un sistem de ecuaţii diferenţiale de echilibru dinamic al substructurii S_i supusă la legături cu structura de transport

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{ci}}{\partial\{\dot{q}_i\}}\right) - \frac{\partial E_{ci}}{\partial\{q_i\}} = \{F_i\} + \{F_{1i}\}, \qquad \{q_i\}^T = \{\{r_{oi}\}^T\{\varphi_i\}^T\} \tag{3.170}$$

unde $\{F_i\}$ şi $\{F_{1i}\}$ sunt vectorii forţelor generalizate aplicate direct substructurii S_i şi vectorul forţelor generalizate de legătură din reazeme. In ecuaţiile (3.170) nu s-au luat în consideraţie termenii din energia potenţială şi de disipare, considerându-se disiparea şi câmpul de forţe potenţiale numai la nivelul structurii de transport.

Efectuând calculele din (3.170) şi ordonând termenii după vectorul legilor de mişcare se obţine

$$[M_i]\begin{Bmatrix}\{\ddot{r}_{oi}\}\\ \{\ddot{\varphi}_i\}\end{Bmatrix} + [G_i]\begin{Bmatrix}\{\dot{r}_{oi}\}\\ \{\dot{\varphi}_i\}\end{Bmatrix} + [K_i]\begin{Bmatrix}\{r_{oi}\}\\ \{\varphi_i\}\end{Bmatrix} = \{Q_i\} + \}Q_{1i}\} \tag{3.171}$$

unde

$$[M_i] = \begin{bmatrix}[m_i] & [S_{oi}]\\ [S_{oi}]^T & [J_{oi}]\end{bmatrix},\ [G_i] = \begin{bmatrix}[0] & 2[\dot{S}_{oi}]\\ [0] & [G_{oi}]-[G_{oi}]^T+[\dot{J}_{oi}]\end{bmatrix},\ [K_i] = \begin{bmatrix}[0] & [\ddot{S}_{oi}]\\ [0] & [\dot{G}_{oi}]\end{bmatrix} \quad 3.172$$

Din dezvoltările date de ecuaţiile lui Lagrange se obţin şi termeni liberi care vor fi trecuţi în membrul drept al ecuaţiilor diferenţiale şi se vor cumula în vectorul de excitaţie $\{F_i\}$ care, în cazul în care nu conţine şi forţe generalizate direct aplicate, va avea numai termeni daţi de perurbaţiile inerţiale

$$\{F_i\} = -[\dot{S}_{oi}]\{\omega_i\} - [\dot{J}_{oi}]\{\omega_i\} = \{F_{ci}\}\cos\omega_i t + \{F_{si}\}\sin\omega_i t \tag{3.173}$$

unde

$$\{F_{ci}\}=\omega_i^2\{0\,,S_{xOz}\,,S_{xOy}\,,0\,,-J_{xz}\,,J_{xy}\}^T=\omega_i^2\{0\,,m_i y_{ci}\,,m_i z_{ci}\,,0\,,-J_{x_i z_i}\,,J_{x_i y_i}\}^T,$$

$$\{F_{si}\}=\omega_i^2\{0\,,-S_{xOy}\,,S_{xOz}\,,0\,,-J_{xy}\,,-J_{xz}\}^T=\omega_i^2\{0\,,-m_i z_{ci}\,,m_i y_{ci}\,,0\,,-J_{x_i y_i}\,,-J_{x_i z_i}\}^T \tag{3.174}$$

iar x_{ci}, y_{ci} şi z_{ci} sunt coordonatele centrului de masă C_i al substructurii S_i faţă de sistemul $O_i x_i y_i z_i$. Se constată că în cele trei matrice apar termeni periodici cu perioada $T_i = 2\pi/\omega_i$ sau cu perioada $T_i = \pi/\omega_i$.

3.2.4.4. Asamblarea ecuaţiilor de mişcare pentru întregul sistem mecanic, structură de transport şi substructurile aflate în mişcări relative

In paragraful 3.2.4.3. s-a analizat cazul în care o singură substructură se află în mişcare de rotaţie. Dacă sistemul mecanic conţine mai multe substructuri S_i, având mişcări relative de rotaţie în jurul unor axe (Δ_i), amplasate arbitrar în spaţiul structurii de transport (axe neconcurente şi neparalele), se pune problema scrierii ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării pentru întreg sistemul mecanic. Vectorul mişcărilor de rotaţie $\{\varphi\}$, a structurii de transport, apare în fiecare sistem de ecuaţii (3.171) corespunzătoare echilibrului dinamic al structurii S_i, sub forma proiecţiilor sale pe sistemele de axe locale $O_i X_i Y_i Z_i$, adică prin componentele vectorului coloană $\{\varphi_i\}$. Proiecţiile aceluiaşi vector, care este un vector liber, pe axele sistemului global de referinţă OXYZ sunt date în vectorul coloană $\{\varphi\}$. Intre aceşti doi vectori se poate scrie relaţia de transformare

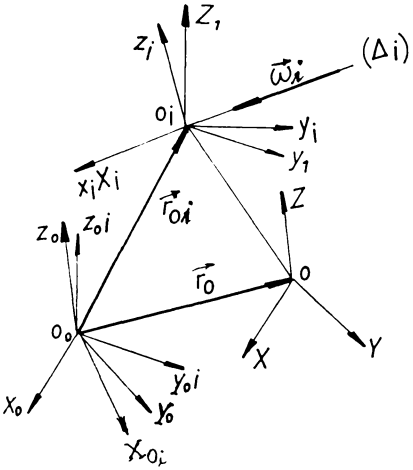

Fig.3.2

$$\{\varphi_i\} = [A_i]\{\varphi\} \tag{3.175}$$

unde $[A_i]$ este matricea de trecere de la sistemul OXYZ la sistemul $O_i X_i Y_i Z_i$. Ambele sisteme sunt legate de structura de transport S_t si de aceea ea ramâne constanta în tot timpul miscarii, deci invariabilă în timp , deci derivările în raport cu timpul a relaţiei (3.175) necomplicând dezvoltările ce urmează. In aceiaşi manieră şi vectorul coloană $\overrightarrow{r_{oi}}$ conţine proiecţiile vectorului de mişcare $\{r_{oi}\}$ pe sistemul inerţial $O_oX_{oi}Y_{oi}Z_{oi}$ care are axele sale rotite cu unghiurile mici $\varphi_{xi}, \varphi_{yi}, \varphi_{zi}$ faţă de sistemul de axe $OX_iY_iZ_i$. Vectorul viteză $\dot{\overrightarrow{r_{oi}}}$ poate fi scris sub forma cunoscută a distribuţiei vitezelor unui corp rigid

$$\dot{\vec{r}}_{oi} = \dot{\vec{r}}_o + \dot{\vec{\varphi}} \times \vec{OO}_i \tag{3.176}$$

care poate fi scrisă şi sub formă matriceală

$$\{\dot{r}_{oi}\} = [A_i]\,(\{\dot{r}_o\} + [R_{oo_i}]\{\dot{\varphi}\}), \tag{3.177}$$

unde $\{\dot{r}_o\}$ este vectorul coloană al proiecţiilor vectorului viteză r_o pe sistemul global fix $O_oX_oY_oZ_o$, iar $[R_{ooi}]$ este matricea antisimetrică corespunzătoare vectorului de poziţie OO_i proiectat pe sistemul global OXYZ, legat de structura S_t

$$[R_{oo_i}] = \begin{bmatrix} 0 & Z_{oo_i} & -Y_{oo_i} \\ -Z_{oo_i} & 0 & X_{oo_i} \\ Y_{oo_i} & -X_{oo_i} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.178}$$

Cum punctele O şi O_i sunt puncte ale structurii de transport, considerată ca rigidă, elementele matricei (3.178) sunt constante, deci nu variază în timp. Relaţiile (3.175) şi (3.177) pot fi unificate intr-o singură relaţie

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{r}_{o_i}\} \\ \{\dot{\varphi}_i\} \end{Bmatrix} = [D_i] \begin{Bmatrix} \{\dot{r}_o\} \\ \{\dot{\varphi}\} \end{Bmatrix} \tag{3.179}$$

unde

$$[D_i] = \begin{bmatrix} [A_i] & [A_i]\,[R_{oo_i}] \\ [0] & [A_i] \end{bmatrix} \tag{3.180}$$

elementele matricei $[D_i]$ sunt, de asemenea, elemente constante se pot scrie şi următoarele relaţii

$$\begin{Bmatrix} \{r_{O_i}\} \\ \{\varphi_i\} \end{Bmatrix} = [D_i] \begin{Bmatrix} \{r_O\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \{\ddot{r}_{O_i}\} \\ \{\ddot{\varphi}_i\} \end{Bmatrix} = [D_i] \begin{Bmatrix} \{\ddot{r}_O\} \\ \{\ddot{\varphi}\} \end{Bmatrix} \tag{3.181}$$

Tinând cont de relaţiile de transformare definite anterior, şi ţinând seama de echilibru energetic, sistemul de ecuaţii diferenţiale de echilibru dinamic al structurii S_i (3.171), vor fi de forma

$$[M_{ai}] \begin{Bmatrix} \{\ddot{r}_O\} \\ \{\ddot{\varphi}\} \end{Bmatrix} + [G_{ai}] \begin{Bmatrix} \{\dot{r}_O\} \\ \{\dot{\varphi}\} \end{Bmatrix} + [K_{ai}] \begin{Bmatrix} \{r_O\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix} = \{Q_{ai}\} + \{Q_{a1i}\}, \quad (i=1,2,..,N) \tag{3.182}$$

unde

$$\begin{gathered} [M_{ai}] = [D_i]^T [M_i] [D_i], \qquad [G_{ai}] = [D_i]^T [G_i] [D_i] \\ [K_{ai}] = [D_i]^T [K_i] [D_i], \quad \{F_{ai}\} = [D_i]^T \{F_i\}, \quad \{F_{a1i}\} = [D_i]^T \{F_{1i}\} \end{gathered} \tag{3.183}$$

Deci pentru toate cele N substructuri S_i care au mişcări de rotaţie cu axe fixe pe structura de transport S_t se poate scrie câte un sistem de ecuaţii (3.182). Pentru studiul complet al dinamicii întregului ansamblu, se mai adaugă şi sistemul de echilibru dinamic al structurii de transport, care va fi de forma

$$[M_t] \begin{Bmatrix} \{\ddot{r}_O\} \\ \{\ddot{\varphi}\} \end{Bmatrix} + [C_t] \begin{Bmatrix} \{\dot{r}_O\} \\ \{\dot{\varphi}\} \end{Bmatrix} + [K_t] \begin{Bmatrix} \{r_O\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix} = \{F_t\} + \sum_{i=1}^{N} \{F_{ti}\} \tag{3.184}$$

Prin însumarea celor N sisteme de ecuaţii (3.182) cu sistemul (3.184) se obţine sistemul ecuaţiilor dinamice ale întregului ansamblu

$$[M] \begin{Bmatrix} \{\ddot{r}_O\} \\ \{\ddot{\varphi}\} \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \{\dot{r}_O\} \\ \{\dot{\varphi}\} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} \{r_O\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix} = \{F\} \tag{3.185}$$

unde

$$\begin{gathered} [M] = [M_t] + \sum_{i=1}^{N} [M_{ai}], \quad [C] = [C_t] + \sum_{i=1}^{N} [G_{ai}] \\ [K] = [K_t] + \sum_{i=1}^{N} [K_{ai}], \qquad \{F\} = \{F_t\} + \sum_{i=1}^{N} \{F_{ai}\} \end{gathered} \tag{3.186}$$

Suma

$$\sum_{i=1}^{N} (\{F_{ti}\} + \{F_{ali}\}) = \{0\} \qquad (3.187)$$

se anulează deoarece cei doi vectori sunt vectorii forţelor de legătură interioare, care sunt egale în modul şi de semne contrare.

Deci, pentru rezolvarea problemei dinamice se formează, în primul rând, pe baza relaţiilor (3.186→3.187) matricele [M], [C] şi [K] şi vectorul forţelor de excitaţie, apoi se trece la găsirea soluţiilor sistemului de ecuaţii diferenţiale (3.185) care definesc legile de răspuns ale sistemului date prin vectorul coloană $\{\{r_o\}^T, \{\varphi\}^T\}^T$. Dacă este necesar a se calcula şi reacţiunile dinamice în lagărele de rotaţie ale structurii S_i, componentele lor se calculează din sistemul (3.182), explicitând vectorul coloană $\{F_{ali}\}$

3.2.4.5. Cazuri particulare

3.2.4.5.1 Substructuri, corpuri de revoluţie având centrul de greutate pe axa de rotaţie

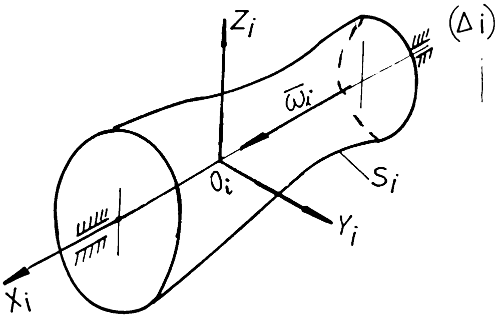

Fig. 3.3

Se consideră ca structura S_i, este un corp de revoluţie (Fig. 3.3.) având axa de rotaţie (Δ_i). Centrul de masă a substructurii este situat în punctul O_i pe axa de rotaţie. Datorită simetriei substructurii faţa de axa de rotaţie O_ix_i,şi faptului că aceasta este un corp de revoluţie, axele sistemului $O_ix_iy_iz_i$ sunt axe principale de inerţie pentru care $J_{x_iy_i} = J_{x_iz_i} = J_{y_iz_i} = 0$. Corpul fiind de revoluţie, exista o particularitate în plus şi anume $J_{y_i} = J_{z_i}$.

Pentru acest caz sistemul de ecuaţii diferenţiale (3.171) raportat la substructura S_i va fi de forma

$$[M_i]\begin{Bmatrix}\{\ddot{r}_{Oi}\}\\ \{\ddot{\varphi}_i\}\end{Bmatrix} + [G_i]\begin{Bmatrix}\{\dot{r}_{Oi}\}\\ \{\dot{\varphi}_i\}\end{Bmatrix} + [K_i]\begin{Bmatrix}\{r_{Oi}\}\\ \{\varphi_i\}\end{Bmatrix} = \{Q_i\} + \{Q_{i1}\} \qquad (3.188)$$

Matricele $[M_i]$ $[G_i]$ şi $[K_i]$ nu mai conţin termeni periodici, deci sistemul nu mai este cu excitaţie parametrică. Prin particularizarile de mai sus, acestea au următoarele forme

$$[M_i] = \begin{bmatrix}[m_i] & [0]\\ [0] & [J_{0i}]\end{bmatrix},\quad [J_{Oi}] = \begin{bmatrix}J_{x_i} & 0 & 0\\ 0 & J_{y_i} & 0\\ 0 & 0 & J_{y_i}\end{bmatrix},\quad [m_i] = m_i[I]$$

$$[G_i] = 2\omega_i\begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [0] & [J_{gi}]\end{bmatrix},\quad [J_{gi}] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}J_{x_i}\\ 0 & -\frac{1}{2}J_{x_i} & 0\end{bmatrix},\quad [K_i] = [0] \qquad (3.189)$$

Vectorul perturbaţiilor inerţiale se va anula, $\{Q_i\} = \{0\}$.

In continuare se pot aplica transformările date de (3.185), (3.186) şi (3.187) prin care sistemul dinamic al substructurii S_i este asamblat la sistemul global al structurii de transport.

3.2.4.5.2. Substructura nu este un corp de revoluţie, dar este centrată după axele principale de inerţie

Un caz interesant este acela în care substructura este centrată după axele principale de inerţie, dar prezintă particularitatea că $J_{yi} = J_{zi}$. Este cazul unor substructuri rotitoare de formă plană (Fig.3.4).

In acest caz sistemul de ecuaţii diferenţiale se scrie sub forma

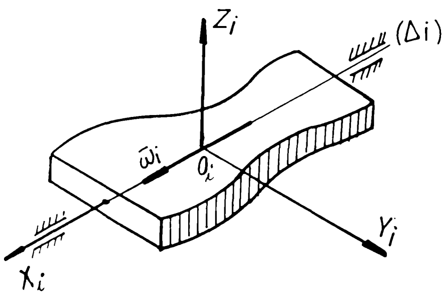

Fig.3.4

$$\left([M_0]+[M_{c2}]\cos 2\omega_i t+[M_{s2}]\sin 2\omega_i t\right)\begin{Bmatrix}\{\ddot{r}_{Oi}\}\\\{\ddot{\varphi}_i\}\end{Bmatrix}+[G_i]\begin{Bmatrix}\{\dot{r}_{Oi}\}\\\{\dot{\varphi}_i\}\end{Bmatrix}+$$
$$+\left([K_{c2}]\cos 2\omega_i t+[K_{s2}]\sin 2\omega_i t\right)\begin{Bmatrix}\{r_{Oi}\}\\\{\varphi_i\}\end{Bmatrix}=\{F_i\}+\{F_{i1}\} \qquad (3.190)$$

punându-se în evidenţă termenii care au perioada $T_i = \pi/\omega_i$ atât la matricele locale de inerţie cât şi la cele rigiditate. Matricele $[M_{c2}]$ şi $[M_{s2}]$ respectiv $[K_{c2}]$ şi $[K_{s2}]$ vor avea formele

$$[M_{c2}] = \begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [0] & [J_{c2}]\end{bmatrix},\quad [M_{s2}] = \begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [0] & [J_{s2}]\end{bmatrix}$$
$$[K_{c2}] = \omega_i^2\begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [0] & -[J_{c2}]\end{bmatrix},\quad [K_{s2}] = \omega_i^2\begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [0] & -[J_{s2}]\end{bmatrix} \qquad (3.191)$$

unde

$$[J_{c2}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & J_{y_i}-J_{z_i} & 0\\ 0 & 0 & J_{z_i}-J_{y_i}\end{bmatrix},\quad [J_{s2}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & J_{y_i}-J_{z_i}\\ 0 & J_{y_i}-J_{z_i} & 0\end{bmatrix} \qquad (3.192)$$

Celelalte matrice $[M_0]$ şi $[G_i]$ rămân de aceiaşi formă (3.189), cu excepţia $[J_{Oi}]$ care în condiţiile $J_{yi} = J_{zi}$ va deveni

$$[J_{Oi}] = \begin{bmatrix}J_{x_i} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}(J_{y_i}+J_{z_i}) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(J_{y_i}+J_{z_i})\end{bmatrix} \qquad (3.193)$$

3.2.4.5.3. Substructura este un rotor dezaxat unghiular

Substructura S_i este un rotor a cărui axă de rotaţie Δ_i (O_ix_i) este descentrată cu unghiul β_i faţă de axa de simetrie a rotorului. Cazul este des întâlnit în practică, când rotorul se calează pe arbore, alezajul fiind executat defectuos, oblic pe rotor. Se consideră că axele principale de inerţie sunt rotite cu unghiul β_i în jurul axei O_iy_i.

Matricele de inertie necesare formării sistemului de ecuaţii dinamice locale ale substructurii S_i, raportate la sisteme $O_ix_iy_iz_i$, se pot scrie în funcţie de matricele de inerţie raportate la sistemul $O_i x_{di} y_{di} z_{di}$ care are axele sale, axe principale de inerţie. La trecerea de la sistemul de coordonate $O_i x_{di} y_{di} z_{di}$ la sistemul $O_i x_i y_i z_i$, printr-o rotaţie simpla de unghi β_i în jurul axei $O_i y_i$ se va ţine seama de relaţia de trecere

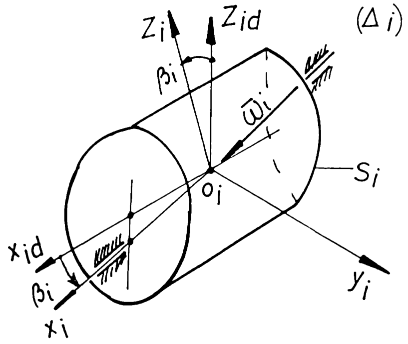

Fig.3.5

$$[J_{Oi}] = [B_i]^T [J_{Oid}] [B_i] \qquad (3.194)$$

unde $[J_{Oid}]$ este tensorul de inerţie corespunzător sistemului de axe principale de inerţie relative la punctul O_i, $[J_{Oi}]$ este matricea de inertie relativă la punctul O_i corespunzătoare sistemului de referinţă $O_i x_i y_i z_i$, iar $[B_i]$ este matricea de trecere dintre dintre cele două sisteme

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \cos\beta_i & 0 & -\sin\beta_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta_i & 0 & \cos\beta_i \end{bmatrix} \qquad (3.195)$$

Pe baza relaţiilor (3.194) şi (3.195) se pot determina momentele de inerţie

$$J_{x_i} = \frac{J_{z_{id}} + J_{x_{id}}}{2} + \frac{J_{x_{id}} - J_{z_{id}}}{2}\cos 2\beta_i,$$

$$J_{z_i} = \frac{J_{z_{id}} + J_{x_{id}}}{2} + \frac{J_{z_{id}} - J_{x_{id}}}{2}\cos 2\beta_i \qquad (3.196)$$

$$J_{y_i} = J_{y_{id}},\ J_{x_i y_i} = 0,\ J_{y_i z_i} = 0,\ J_{x_i z_i} = \frac{J_{z_{id}} - J_{x_{id}}}{2}\sin 2\beta_i$$

In acest caz, deoarece $J_{y_i} = J_{z_i}$, sistemul de ecuaţii diferenţiale locale este de forma (3.190) la care se mai adaugă termenii periodici cu perioada $T_i = 2\pi/\omega_i$ în componenţa matricelor de inerţie, rigiditate şi giroscopici. Astfel, temenii inerţiali sunt

$$[M_i]=\begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [0] & [J_{Oi}]\end{bmatrix},\ [J_{Oi}]=\begin{bmatrix} J_x & J_{xz}S & -J_{xz}C\\ J_{xz}S & \dfrac{J_y+J_z}{2}+\dfrac{J_y-J_z}{2}c2 & \dfrac{J_y-J_z}{2}s2\\ -J_{xz}C & \dfrac{J_y-J_z}{2}s2 & \dfrac{J_y+J_z}{2}+\dfrac{J_z-J_y}{2}c2\end{bmatrix} \quad \textbf{(3.197)}$$

Termenii giroscopici sunt

$$[G_i]=\begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [0] & [G_{Oi}]-[G_{Oi}]^T+[\dot J_{Oi}]\end{bmatrix},$$

$$[G_{Oi}]-[G_{Oi}]^T+[\dot J_{Oi}]=\omega_i\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 2J_{xz}C & (J_z-J_y)\,s2 & (J_y-J_z)\,c2+J_x\\ 2J_{xz} & (J_y-J_z)\,c2-J_x & (J_y-J_z)\,s2\end{bmatrix} \quad \textbf{(3.198)}$$

Termenii corespunzători rigidității sunt

$$[K_i]=\begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [0] & [\dot G_{Oi}]\end{bmatrix},\quad [\dot G_{Oi}]=\omega_i^2\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ J_{xz}C & (J_z-J_y)\,c2 & (J_z-J_y)\,s2\\ J_{xz}C & (J_y-J_z)\,s2 & (J_y-J_z)\,c2\end{bmatrix} \quad \textbf{(3.199)}$$

Apar și termeni perturbatori inerțiali periodici cu perioada $T_i = 2\pi/\omega_i$ care trec în vectorul coloană al forțelor generalizate

$$\{F_i\}=-[\dot J_{Oi}]\{\omega_i\}=\{F_{ci}\}\cos\omega_i t+\{F_{si}\}\sin\omega_i t \quad \textbf{(3.200)}$$

de unde vor rezulta componentele vectorilor $\{F_{ci}\}$ și $\{F_{si}\}$

$$\{F_{ci}\}=\omega_i^2\{0,0,0,0,-J_{xz},0\}^T,\quad \{F_{si}\}=\omega_i^2\{0,0,0,0,0,-J_{xz}\}^T \quad \textbf{(3.201)}$$

Alți termeni suplimentari pot să apară în cazul în care centrul de greutate nu se afla pe axa de rotație (Δ_i).

Cu formulările generale prezentate în această lucrare se pot scrie ecuațiile dinamice pentru orice configurație de substructuri în rotație. Aceste formulări pot fi extinse și pentru cazul regimurilor tranzitorii când vitezele unghiulare ω_i nu sunt constante. Este cazul regimurilor de pornire sau de oprire a agregatelor.De asemenea, ecuațiile dinamice se pot generaliza și pentru cazul în care substructurile S_i sunt elastice pentru care se poate introduce vectorul de deformare relativă față de sistemul $O_ix_iy_iz_i$, considerat legat de structura S_i în stare nedeformată.

Analiza dinamică a cazurilor posibile de substructuri în rotații dă posibilitatea găsirii unor soluții de amplasare a unor sisteme de rotori, pe o structură dată, care vor acţiona ca "absorbitori virtuali" de vibraţii fără disipare de energie. Cuplurile giroscopice ale rotorilor se opun mişcărilor de rotaţii ale structurilor acolo unde soluţiile cu absorbitori clasici de vibraţii nu dau rezultate, în special în domeniul vibraţiilor de frecvenţe joase, de exemplu al modurilor de rotaţii la platforme sprijinite pe reazeme elastice. Se pot găsi pentru acestea soluţii optimale de reducere a nivelelor de vibraţii prin amplasarea pe ele a unei reţele de rotori cu axe neparalele si neconcurente. Parametrii de optimizat sunt: momentele de inerţie în raport cu axele lor de rotaţie, vitezele unghiulare de rotaţie si poziţiile lor pe platforma.

CAPITOLUL IV

METODE CLASICE IN CONTROLUL NIVELELOR DE VIBRATII LA STRUCTURI MECANICE

4.1 Probleme generale

Asa cum s-a aratat în Capitolul I, controlul vibratiilor structurilor mecanice, în sensul diminuarii lor sau al micsorarii numarului de cicluri de nivele periculoase pentru structura se poate face prin introducerea suplimentara în sau pe structura a unor elemente amortizoare sau aplicarea unor tratamente speciale "de suprafata" cu materiale avand proprietati vibroabsorbante. Toate mijloacele prin care se urmareste diminuarea nivelelor de vibratii, fara aport de energie din exterior, sunt cunoscute sub denumirea generica de control pasiv. In cazul unor instalatii pretentioase, de cele mai multe ori aceasta metoda nu este satisfacatoare, de aceea se utilizeaza controlul activ al vibratiilor. Aceasta metoda implica introducerea de energie din exterior.

Folosind dispozitive hidraulice, pneumatice sau electrice si un sofisticat sitem de control se poate introduce energie in sistem fiind posibil a realiza un control activ care să dea performanţe superioare controlului pasiv [1,2,4,81,133]. Dar acestea sunt în general foarte complexe, foarte costisitoare şi mult mai puţin fiabile decât cele pasive [10].

Un compromis intre sistemele de control, active şi pasive, sunt sistemele semi-active. Aceste sisteme, în mod real, nu necesită energie din exterior. Forţele dorite se realizează prin modularea deschiderii orificiilor amortizoarelor. Totuşi, ca şi sistemele active acestea necesită instrumente de măsură şi control. Este cunoscut faptul că un sistem semi-activ poate să producă performanţe superioare celor pasive fără costuri ridicate şi complexitatea sistemelor active [9,139]. In plus, aceste sisteme pot să lucreze, în lipsa dispozitivelor de măsură şi control, ca şi sisteme pasive. Pentru a arăta performanţele şi modul de abordare pentru cele trei tipuri de sisteme, se dă în continuare un exemplu simplu de izolare a vibraţiilor.

4.1.1 Izolarea pasivă

In figura 4.1 se dă un model simplu al unui vehicol a cărui izolare se face prin elemente pasive, active şi semi-active

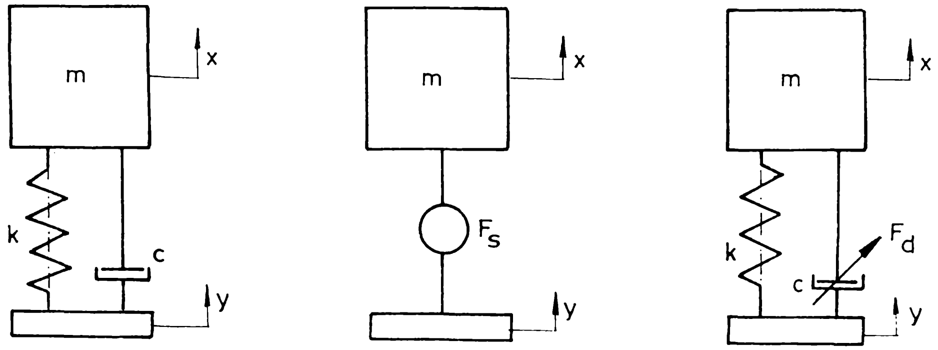

Fig.4.1

Ecuţia diferenţială a mişcării este

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n(\dot{x} - \dot{y}) + \omega_n^2(x - y) = 0, \quad \omega_n^2=k/m, \quad \zeta=c/2\sqrt{k/m} \tag{4.1}$$

Caracterizarea izolării vibraţiilor este dată prin transmisibilitatea

$$T = \frac{\sqrt{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \tag{4.2}$$

In figura 4.2 sunt trasate transmisibilitătile pentru diferite valori ale raportului de amortizare.

Se poate observa ca amortizarea slabă asigură o bună izolare pentru frecvenţe înalte dar, o slabă comportare la rezonanţă. Pe de altă parte o amortizare mare asigură izolare bună la rezonanţa duce la o creştere a transmisibilităţii dincolo de rezonanţă.

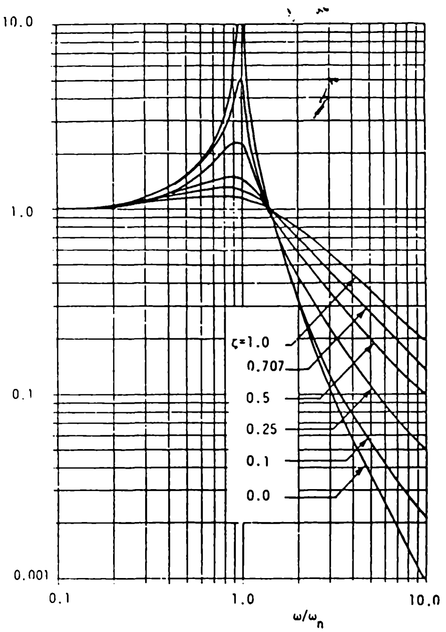

Fig.4.2

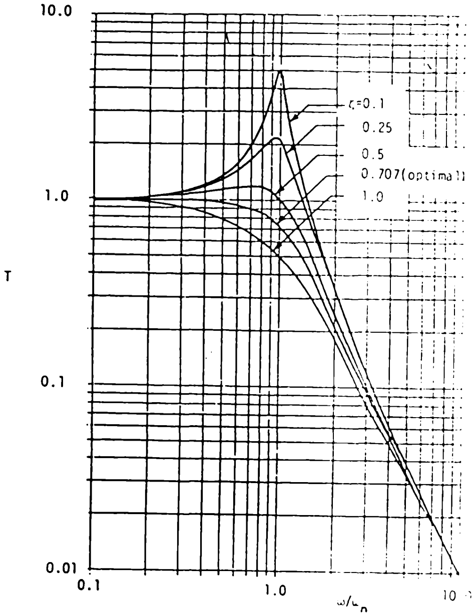

Fig.4.3

4.1.2 Izolarea activă

Teoria controlului optimal aşa cum este arătat în [106] dă pentru forţa ce trebuie să fie generată următoarea expresie

$$F_g/m = -2\zeta\omega_n\dot{x} - \omega_n^2(x-y) \tag{4.3}$$

pentru care ecuaţia diferenţială a mişcării este

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2(x - y) = 0 \tag{4.4}$$

Transmisibilitatea acestui sistem este dată de

$$T = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \tag{4.5}$$

Curbele de transmisibilitate sunt arătate in figura 4.3

Trebuie arătat că pentru o transmisibilitate optimă nu există amplificare la rezonanţă ($\zeta = 0.707$), şi că performanţele sale sunt superioare izolatorului pasiv pe întregul domeniu de frecvenţă.
Implementarea acestui tip de izolator necesită acurateţe în măsurători precum şi servovalvă şi putere din exterior.

4.1.3 Izolarea semi-activă

Izolararea semi-activă este un compromis între izolarea pasivă şi activă. Conceptul de izolare semi-activă a fost introdus in 1973 de Crosby şi Karnopp [57]. Acest sistem nu necesită putere hidraulică sau de alt tip. Forţele de control sunt generate în amortizoare prin modificarea orificiilor de curgere a fluidului.

Forţele de amortizare au expresia

$$\begin{aligned} F_d/m &= 2\zeta\omega_n\dot{x}, \quad && \dot{x}(\dot{x}-\dot{y})>0 \\ F_d/m &= 0, && \dot{x}(\dot{x}-\dot{y})<0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Această schemă necesită o servovalvă de bandă largă cât şi acurateţe în măsurarea vitezei absolute şi relative. Pentru simularea pe calculator trebuie avut în vedere că ecuaţia are discontinuitati şi astfel este neliniară de acea in procesul de integrare necesită tratament special.

4.2 Metoda controlului activ

Asa cum s-a amintit, introducerea unor amortizari suplimentare in/pe structura nu poate rezolva toate cazurile, cum ar fi cazul vibratiilor tranzitorii sau aleatorii, unde se pot controla numai numarul de cicluri de nivele mari, nu si nivelele acestora.

Pentru structuri speciale, cum ar fi cele din domeniul aeronauticii, se apeleaza la un mijloc de control mai puternic, controlul activ al vibratiilor

In fig. **4.4** se prezinta o schema generala pentru controlul activ al vibratiilor unei structuri complexe. Controlul se face prin amplasarea pe structura a unor elemente active, care introduc forte direct aplicate pe structura sau forte interne prin legaturi intre substructuri.

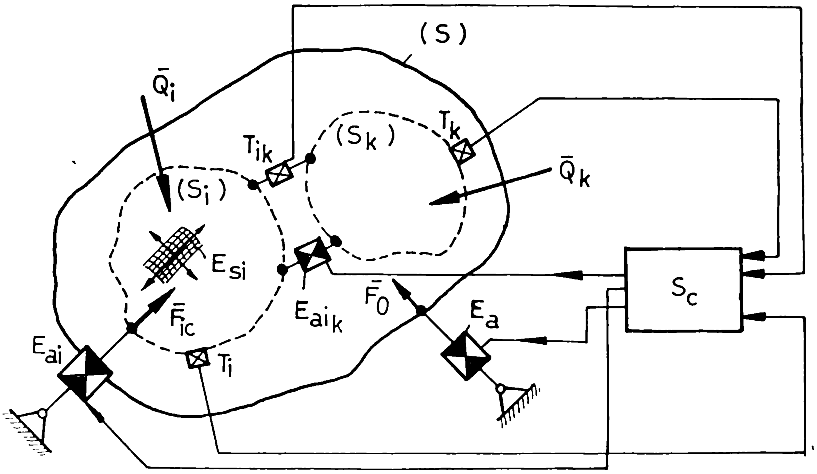

Fig.4.4

Astfel, elementul E_{ai} introduce o forta de control F_{ci} direct aplicata asupra unui punct al substructurii (S_i), iar elementul E_{aik} introduce o forta de legatura intre doua puncte apartinand substructurilor (S_i) si (S_k). Aceste forte de control se materializeaza prin dispozitive actionate electrodinamic, electomagnetic, electrohidaulice sau electropneumatice, comandate prin sistemul de control S_c care primeste semnale despre legile de miscare absolute de la traductorii T_i sau despre miscarile relative intre punctele substructurii, prin intermediul traductorilor T_{ik}. Aceste semnale vor da informatii (de acceleratii, viteze sau deplasari) din punctele caracteristice ale structurii şi care vor fi prelucrate de sistemul de comanda, dupa un criteriu impus de problema ce trebuie rezolvata. Pe baza acestui criteriu sunt determinati parametrii de control in bucle de reactie cu elemente de executie.

In ultimul timp, pentru resolvarea problemelor de reducere a vibratiilor unor structuri de tip suprafete sau bare subtiri, se utilizeaza elemente active de suprafata E_{si} [110,112] . Aceste elemente sunt constituite din folii piezoelectrice reversibile (capabile de traducerea direct si invers semnal-forta), aplicate pe suprafata structurii, care sub actiunea semnalelor de comanda date de sistemul de control creaza forte pe element, si care sunt transmise tot prin acesta structurii. Fortele piezoelectrice pot fi de intindere, de compresie, de incovoiere sau de de forfecare, dupa cum este polarizat elementul piezoelectric.

Transpusa intr-o forma clasica, schema bloc a controlului activ a vibratiilor este ca in Fig. 4.5.

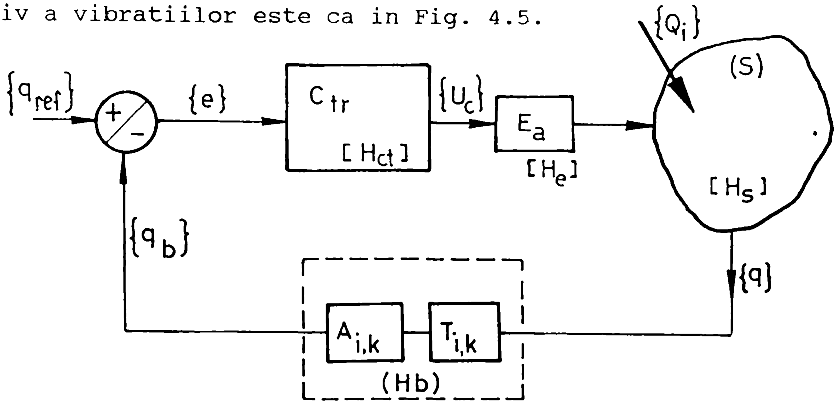

Fig.4.5

In scopul reducerii nivelelor de vibratii se impun anumite valori de referinta, de exemplu vectorul $\{q_{ref}\}$ a carui elemente, în cazul unor regimuri armonice, pot fi amplitudinile maxime admise in anumite puncte ale structurii, sau valori instantanee de deplasare, viteze sau acceleraţii ce nu trebuie depăşite. Vectorul $\{q\}$, de raspuns al structurii sub actiunea excitaţiei $\{F\}$, este transformat prin intermediul traductoarelor T_i si amplificatoarelor A_i intr-un vector $\{q_b\}$ al semnalelor de bucla (reactie) care se compara cu vectorul semnalelor de referinta impuse dând un vector de eroare (abatere) $\{e\}$.

Trecând in spatiul Laplace de variabila complexa s se pot scrie urmatoarele relatii:

$$\{u_c(s)\} = [H_{ctr}(s)]\{e(s)\} \qquad \textbf{(4.7)}$$

unde $\{u_c(s)\}$ este vectorul imagine al semnalelor de comanda $\{u_c(t)\}$ dat de controlerul C_{tr} care realizează functiile de reglaj şi are matricea funcţiilor de transfer $[H_{ctr}(s)]$. Aplicând transformata Laplace asupra erorii se poate scrie relaţia

$$\{e(s)\} = \{q_{ref}(s)\} - \{q_b(s)\} \qquad \textbf{(4.8)}$$

unde $\{q_b(s)\}$ este imaginea vectorului semnalelor de reacţie a buclei având matricea funcţiilor de transfer $[H_b(s)]$

$$\{q_b(s)\} = [H_b(s)]\{q(s)\} \qquad \textbf{(4.9)}$$

Se mai pot scrie urmatoarele relatii de transformare

$$\{u_c(s)\} = [H_{ctr}(s)]\{e(s)\}$$
$$\{u_e(s)\} = [H_e(s)]\{u_c(s)\} \quad (4.10)$$

şi

$$\{q(s)\} = [H_s(s)]\,(\{u_p(s)\} + \{F(s)\}) \quad (4.11)$$

care exprimă imaginile, în spaţiul Laplace, ale semnalelor de comandă $\{u_c\}$ date de controlerul C_{tr} în functie de imaginea vectorului abatere $\{e(s)\}$, imaginea semnalelor de forţa $\{u_e(s)\}$ ale elementelor de executie (actuatori) având matricea funcţiilor de transfer $[H_e(s)]$ in funcţie de imaginea vectorului de control $\{u_c(s)\}$.

Din relaţiile de mai sus se poate determina răspunsul structurii

$$\{q(s)\} = ([I] + [H_s(s)][H_c(s)][H_b(s)])^{-1}[H_s(s)]\times$$
$$\times([H_c(s)]\{q_{ref}(s)\} + \{F(s)\}) \quad (4.12)$$

unde s-a notat

$$[H_c(s)] = [H_e(s)][H_{ctr}(s)] \quad (4.13)$$

si reprezinta matricea de transfer a sistemului de control, controler-elemente de executie.

Matricea de transfer a structurii are forma

$$[H_s(s)] = ([M]s^2 + [C]s + [K])^{-1} \quad (4.14)$$

care se regaseşte in analiza modala sub forma sumei

$$[H_s(s)] = \sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\{x_r\}\{y_r\}^T}{s-\lambda_r} + \frac{\{x_r\}^*\{y_r\}^{*T}}{s-\lambda_r^*}\right) \quad (4.15)$$

cu valorile proprii

$$\lambda_r = -\sigma_r + j\omega_r;\quad \lambda_r^* = -\sigma_r - j\omega_r \quad (4.16)$$

avand partile reale negative, sistemul fiind disipativ. Răspunsul lui va fi

$$\{q(s)\} = [H_s(s)]\{F(s)\} \quad (4.17)$$

fiind dictat de fortele date şi de condiţiile de amplificare rezonantă.

Orice element al matricei de transfer poate fi pus sub forma unor fracţii de produse polinomiale

$$H_s^{ij} = \prod \frac{A_{ij}(s - a_r)(s - a_r^*)}{(s - \lambda_r)(s - \lambda_r^*)} \tag{4.18}$$

unde a_r si a_r^* sunt asa numitele zerouri care corespund in cazul in care excitatia este armonica unor puncte de minim a raspunsului structurii. De notat ca pentru toate elementele matricei de transfer corespund aceleasi zerouri si aceiasi poli (valori proprii)

Orice functie de transfer corespunzatoare unor sisteme liniare poate fi adusa la forma de mai sus. Prin controlul activ al vibratiilor polii sistemului structura-elemente de control se vor deplasa in asa fel incat sa indeplineasca conditiile impuse raspunsului.

4.2.1. Exemplu pentru sistemul cu un grad de libertate

Pentru exemplificare se poate lua cazul raspunsului sistemului vibrant cu un singur grad de libertate având ecuaţia diferenţiala a mişcării de forma

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F(t) \tag{4.19}$$

Considerand conditiile initiale nule q(0) = q(0) =0 si aplicand o forta treapta de nivel F_o = ct., imaginea raspunsului in spatiul Laplace va fi de forma

$$q(s) = \frac{F_0}{ms}\frac{1}{(s - \lambda)(s - \lambda^*)} \tag{4.20}$$

unde $\lambda = -\sigma + jp$; $\lambda^* = -\sigma - jp$ sunt radacinile ecuatiei caracteristice. Descompunand in factori simpli (4.20) devine

$$q(s) = \frac{F_0}{m(\sigma^2 + p^2)s} - \frac{F_0}{2m(\sigma^2+p^2)p}\left(\frac{-p+j\sigma}{s-\lambda} - \frac{p+j\sigma}{s-\lambda^*}\right) \tag{4.21}$$

Aplicând transformata inversa Laplace se obtine răspunsul

$$q(t) = \frac{F_0}{m(\sigma^2+p^2)} - \frac{F_0 e^{-\sigma t}}{2m(\sigma^2+p^2)}\left(\cos pt + \frac{\sigma}{p}\sin pt\right) \tag{4.22}$$

in care primul termen este raspunsul static

$$q_{st} = \frac{F_0}{m(\sigma^2+p^2)} = \frac{F_0}{k} \tag{4.23}$$

iar următorul termen exprimă răspunsul liber amortizat, stingerea vibratiilor depinzând de factorul de amortizare $\sigma = c/2m$.

Se presupune acum ca se introduce in sistem, printr-un element de execuţie, o forţa proporţionala cu integrala de deplasare

$$F_e = u_e = -G\int xdt \tag{4.24}$$

In acest caz imaginea raspunsului in spatiul Laplace va fi de forma

$$q(s) = \frac{F_0}{m(s^3 + 2\sigma s^2 + (p^2 + \sigma^2)s + g)} \tag{4.25}$$

unde $g = G/m$

Ecuaţia caracteristică are expresia

$$s^3 + 2\sigma s^2 + (p^2 + \sigma^2)s + g = 0 \tag{4.26}$$

va avea rădăcinile diferite faţă de valorile proprii (4.26). Valorile lor pot fi influenţate prin **g** care poate fi reglat prin controler în aşa fel incât sistemul să fie stabil şi stingerea oscilaţiilor să fie rapidă după aplicarea forţei treaptă.

Presupunând rădăcinile astfel încât stabilitatea sistemului să fie asigurată, adică având părtile reale negative, ele sunt de forma

$$s_1 = -\sigma_1; \quad s_2 = -\sigma_2 + j\omega_2; \quad s_3 = -\sigma_2 - j\omega_2 \tag{4.27}$$

pentru care (4.21) devine

$$q(s) = \frac{F_0}{m((\sigma_2-\sigma_1)^2+\omega_2^2)(s-s_1)} + \frac{F_0(\omega_2+j(\sigma_2-\sigma_1))}{2m\omega_2((\sigma_2-\sigma_1)^2+\omega_2^2)(s-s_2)} + \frac{F_0(\omega_2-j(\sigma_2-\sigma_1))}{2m\omega_2((\sigma_2-\sigma_1)^2+\omega_2^2)(s-s_3)} \tag{4.28}$$

asupra căreia aplicând transformata inversă Laplace conduce la raspunsul in timp al sistemului care după unele transformări se poate scrie sub forma

$$q(t) = \frac{F_0 e^{-\sigma_1 t}}{m((\sigma_2-\sigma_1)^2+p_2^2)} + \frac{F_0 e^{-\sigma_1 t}}{m((\sigma_2-\sigma_1)^2+\omega^2)}\left(\cos\omega_2 t + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{p_2}\sin\omega_2 t\right) \tag{4.29}$$

Diferenţele dintre răspunsul la o excitaţie treaptă, fără control activ dat de dezvoltarea (4.22), şi răspunsul sistemului prin control activ dat de dezvoltarea (4.29) sunt următoarele:

- la controlul activ răspunsul static tinde asimptotic la zero datorita termenului de amortizare $\exp(-\sigma_1 t)$
- se pot realiza amortizari puternice care sting extrem de rapid vibratiile sistemului. Practic controlerul calculeaza parametrul g necesar pentru obtinerea amortizarii impuse. Legatura dintre parametrul g si valorile impuse pentru: σ_1, σ_2 si p_2 se poate deduce din ecuatia caracteristica scrisa sub forma

$$(s-s_1)(s-s_2(s-s_3) = 0 \qquad \textbf{(4.30)}$$

care prin radacinile (4.27) conduce la

$$s^3 + (\sigma_1+2\sigma_2)s^2 + (\sigma_2^2+\omega_2^2+2\sigma_1\sigma_2)s + \sigma_1(\sigma_2^2+\omega_2^2) = 0 \qquad \textbf{(4.31)}$$

Din compararea ecuatiilor (4.31) si (4.26) rezulta

$$g = \sigma_1(\sigma_2^2+\omega_2^2) \qquad \textbf{(4.32)}$$

Intr-o prima aproximatie se poate considera ca pseudopulsatia sistemului activ nu difera mult de pulsatia proprie a sistemului real, iar σ_1 se apropie de valoarea σ si prin urmare se poate calcula **g** impreuna cu factorul de amortizare dorit, σ_2.

4.3 Metoda controlului optimal

Una dintre metodele moderne de control a vibratiilor structurilor, care se poate aplica atât pentru controlul activ cât si pentru controlul pasiv, este controlul optimal. Prin controlul pasiv intelegandu-se controlul prin elemente mecanice, care nu sunt generatoare de energie, spre deosebire de controlul activ, în care elementele de control de tip servo, introduc energie în sistem pentru controlul vibratiilor.

Pornind de la sistemul de ecuatii diferentiale (2.49) prin transformarea

$$\{z\} = \{\{q\}^T\ \{\dot{q}\}^T\}^T \qquad \textbf{(4.33)}$$

se trece în sistemul de ecuatii de stare

$$\{\dot{z}\} = [A]\{z\} + [B]\{u\} \qquad \textbf{(4.34)}$$

in care .

$$[A]=\begin{bmatrix}[0] & [I]\\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C]\end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix}[0]\\ [M]^{-1}\end{bmatrix},\{u\}=\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{u_e\}+\{F(t)\}\end{Bmatrix} \tag{4.35}$$

unde $\{u_e\}$ este vectorul semnalelor de control în forţa iar $\{F(t)\}$ este vectorul fortelor perturbatoare.

La baza controlului optimal stă o funcţionala care se formeaza cu ajutorul vectorului de stare $\{z\}$ si a vectorului de control $\{u\}$, numita functie de cost. Cunoscuta si sub numele de functie de reglare liniar patratica (Liniar Quadratic Regulator LQR) funcţia de cost este dată de următoarea funcţională

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(\{z\}^T[S]\{z\}+\{u\}^T[R]\{u\})\,dt \tag{4.36}$$

unde [S] si [R] sunt doua matrice de ponderare ce se impun de analizator.

Produsul scalar $\{z\}^T[S]\{z\}$ este o forma patratica pozitiv definita si contine termeni energetici, prin urmare, exprima starea energetica globala a structurii. In mod asemanator si produsul scalar $\{u\}^T[B]\{u\}$ este o forma patratica. Cele doua matrice, [S] si [R], care pondereaza produsele scalare se numesc matrice restrictiva de stare (state penalty matrix) respectiv matrice restrictiva de efort al controlului (control effort penalty matrix).

In sensul minimalizarii optimale, atât a starii energetice a structurii (nivele de vibratii mari) cât şi a efortului sistemului de control, se impune minimalizarea funcţiei de cost J.

Se demonstrează în [11] că soluţia optimală este de forma

$$\{u(t)\}=-[R]^{-1}[B]^T[P]\{z\}=-[G]\{z\} \tag{4.37}$$

unde [P] este o solutie a ecuatiei matriceale

$$[P][A]+[A]^T[P]+[S]-[P][B][R]^{-1}[B]^T[P]=[0] \tag{4.38}$$

Matricea [G] este matricea de control a buclei de reactie, elementele sale fiind elemente de comanda in sectiunea controlerului, care poate fi analogic sau digital.

In cazul utilizarii configuratiei de elemente pasive, atasate structurii, atunci controlul vibratiilor se face prin fortele de legătură introduse de elemente. Metoda este aplicabilă pentru reglarea caracteristicilor de răspuns (reglarea intr-un anumit domeniu, realizabil, ai coeficientilor de amortizare ai amortizoarelor hidraulice).

In cazul in care se doreste răspunsul optim intr-un anumit domeniu de frecventa, se poate face controlul la nivelul unui anumit mod. In acest caz ecuatia de stare se trece intr-o forma modala, echivalenta unui singur grad de libertate. Daca se doreste controlul vibratiilor unei anumite parti a structurii, in functia de cost se va introduce un vector de stare al substructurii.

4.4 Controlul modal

Presupunând o structura slab amortizată, vectorii proprii ai acesteia se pot considera vectori in faza, ceea ce permite determinarea ecuatiei diferentiale a unui mod r de vibratie

$$\ddot{z} + 2\sigma_r \dot{z}_r + \omega_{nr}^2 z_r = \frac{1}{m_r}\{x_r\}^T\{F(t)\} \tag{4.39}$$

unde z_r este cooordonata modala al celui de-al r-lea mod al structurii. Raspunsul structurii este o superpozitie a raspunsurilor modale.

Daca excitatia $\{F(t)\}$ este o excitaţie periodică, având una din armonici plasată in vecinatatea unei pulsaţii proprii ω_r, atunci controlul vibratiilor in vederea reducerii nivelelor lor, se poate face in doua moduri: marirea factorului de amortizare modal sau modificarea pulsatiei propri ω_{nr}. Practic aceste modificări se pot face prin introducerea unor legături cu cuplaj vâscoelastic, care intr-o exprimare modala poate fi scris prin intermediul unei forte de control modal

$$F_{cr} = -g_r z_r - h_r \dot{z}_r \tag{4.40}$$

care adaugata ecuatiei diferentiale (4.39), unde se înlocuieşte forţa perturbatoare modala $(1/m_r)\{x_r\}^T\{F(t)\}$, prin forţa modala de control $F_r(t)$, astfel ecuaţia diferenţială devine

$$\ddot{z}_r + (2\sigma_r + h_r)\dot{z}_r + (\omega_{nr}^2 + g_r) z_r = 0 \tag{4.41}$$

a carei ecuaţie caracteristică

$$\lambda^2 + (2\sigma_r + h_r)\lambda + (\omega_{nr}^2 + g_r) = 0 \tag{3.42}$$

dă valorile proprii

$$\lambda_{cr} = -\sigma_{cr} + j\omega_{cr}, \quad \lambda^{*}_{cr} = -\sigma_{cr} - j\omega_{cr} \tag{4.43}$$

unde noul factor de amortizare modal va avea valoarea

$$\sigma_{cr} = \sigma_r + \frac{h_r}{2} \tag{4.44}$$

iar pulsaţia se va obţine din ecuaţia

$$\sigma^2_{cr} + \omega^2_{cr} = \omega^2_{nr} + g_r = \sigma^2_r + \omega^2_{nr} + g_r \tag{4.45}$$

In sensul rezolvarii problemei de control se presupun noii poli (se alocă) prin parametrii modali σ_{cr} si ω_{cr}, apoi se caută configuraţia fizică a forţelor de control introduse în structură. Inseamnă ca pentru a controla un anumit mod, în sensul modificării parametrilor săi modali, va trebui ca vectorul forţelor de control $\{F_c(t)\}$ introduse pe structură, prin elemente pasive şi active să verifice ecuaţia

$$-g_r z_r - h_r \dot{z}_r = \frac{1}{m_r}\{x_{cr}\}^T\{F_c(t)\} \tag{4.46}$$

unde $\{x_{cr}\}$ este noul vector propriu al sistemului modificat prin introducerea noilor legaturi. In urma acestor modificări, păstrând numărul gradelor de libertate ale sistemului, ecuaţia diferenţială a micării va fi

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] + [C_c])\{\dot{q}\} + ([K] + [K_c])\{q\} = \{0\} \tag{4.47}$$

unde $[C_c]$ si $[K_c]$ sunt maticele de amortizare si de rigiditate care se introduc prin noile legaturi impuse prin condiţiile de control al nivelelor de vibraţii. Având in vedere că noile legături disipative sunt concentrate în configuraţia de puncte ale structurii, aleasă pentru amplasarea lor, amortizarea ei nu va mai fi uniform distribuită, ci concentrată în aceste puncte, astfel că sistemul valorilor proprii va avea moduri complexe. Aceasta chiar şi în situaţia în care amortizarea iniţială era de tip Raylegh (proporţională). Pentru noile moduri se pot scrie relaţiile de tip Rayleigh [14]

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\,\frac{\{x_{cRr}\}^T([C]+[C_c])\{x_{cRr}\} + \{x_{cIr}\}^T([C] + [C_0])\{x_{cIr}\}}{\{x_{cRr}\}^T[M]\{x_{cRr}\} + \{x_{cIr}\}^T[M]\{x_{cIr}\}} \tag{4.48}$$

Problema controlului pasiv al vibratiilor se rezolvă în cazul în care se cunosc valorile elementelor matricelor $[C_c]$ si $[K_c]$.

$$\sigma_r^2 + \omega_r^2 = \frac{\{x_{cRr}\}^T([K]+[K_c])\{x_{cRr}\} + \{x_{cIr}\}^T([K]+[K_c])\{x_{cIr}\}}{\{x_{cRr}\}^T[M]\{x_{cRr}\} + \{x_{cIr}\}^T[M]\{x_{cIr}\}} \qquad (4.49)$$

Configuraţia lor se cunoaşte prin faptul că se impun punctele structurii intre care se aplica legaturile, se cunosc elementele de control a căror constante fizice se regleaza inaintea montării lor pe structură.

Rezolvarea problemei conduce la un proces iterativ de calcul. Ca date initiale se dau structura modelului fizic initial, caracteristicile de amorizare si elastice ale elementelor de comandă, configuraţia lor pe structură şi domeniul de reglaj ai parametrilor lor.

Primul pas va fi calculul valorilor proprii si a vectorilor proprii ai sistemului initial. Matricele $[C_c]$ si $[K_c]$ pot fi considerate ca nişte perturbaţii ale matricelor $[C]$ si $[K]$. Relaţiile (4.48) si (4.49) se pot scrie sub forma unor ecuaţii

$$\begin{aligned}\{x_{cRr}\}^T[C_c]\{x_{cRr}\} + \{x_{cIr}\}^T[C_c]\{x_{cIr}\} &= 2\sigma_r(\{x_{cRr}\}^T[M]\{x_{cRr}\} + \\ +\{x_{cIr}\}^T[M]\{x_{cRr}\}) &- (\{x_{cRr}\}^T[C]\{x_{cRr}\} + \{x_{cIr}\}^T[C]\{x_{cIr}\})\end{aligned} \qquad (4.50)$$

$$\begin{aligned}\{x_{cRr}\}^T[K_c]\{x_{cRr}\} + \{x_{cIr}\}^T[K_c]\{x_{cIr}\} &= \omega_{cr}^2(\{x_{cRr}\}^T[M]\{x_{cRr}\} + \\ + \{x_{cIr}\}^T[M]\{x_{cIr}\}) &- (\{x_{cRr}\}^T[K]\{x_{cRr}\} + \{x_{cIr}\}^T[K]\{x_{rIr}\})\end{aligned} \qquad (4.51)$$

in care necunoscutele sunt elementele matricelor $[C_c]$ si $[K_c]$. Daca toate elementele de control ataşate structurii au aceleaşi caracteristici, atunci cele două matrice pot fi scrise de forma

$$[C_c] = c_e[E], \quad [K_c] = k_e[E] \qquad (4.52)$$

unde $[E]$ va fi o matrice ce depinde numai de configuratia sistemului de elemente. Intr-o prima aproximaţie se pot determina constantele c_e si k_e pe baza relaţiilor (4.48) si (4.49). Următorul pas al iteraţiei va fi recalcularea vectorilor proprii si valorilor proprii ai sistemului de ecuatii, dupa care se recalculeaza noile valori ale c_e si k_e. Procesul iterativ se termina in momentul in care valorile c_e si k_e cat si vectorii proprii converg spre valorile impuse sistemului dorit prin modificarea polilor.

Dacă se urmăreşte optimizarea controlului pentru mai multe moduri naturale de vibratii, atunci se pot considera că constantele caracteristice c_e si k_e se pot regala diferit intre anumite limite.

In această situaţie ecuaţiile (4.50) si (4.51) devin un sistem de două ecuaţii liniare cu N_e necunoscute, N_e reprezentând numarul de elemente controlate.

Pentru optimizarea controlului se impun alte condiţii cum ar fi valorile maxime ale eforturilor din anumite puncte ale structurii să nu depăşească anumite valori limită impuse, care pot provoca deteriorări locale.

4.5. Analiză asupra metodelor analitice de calcul ale sistemelor ataşate unei structuri

4.5.1. Analiza comportării unui model simplificat de agregat aeroelectric în urma ataşării unui absorbitor dinamic

Deorece excitările de tip rezonant nu pot fi evitate trebuie luate unele măsuri de modificări structurale care să faciliteze disiparea de energie. Rezultate foarte bune se pot obţine prin ataşarea de sisteme vibrante acordate. Pentru exemplificare se va considera agregatul de vânt cu ax orizontal, unde se poate folosi cu succes un amortizor acordat după frecvenţa modului natural depistată în semnalul măsurat.

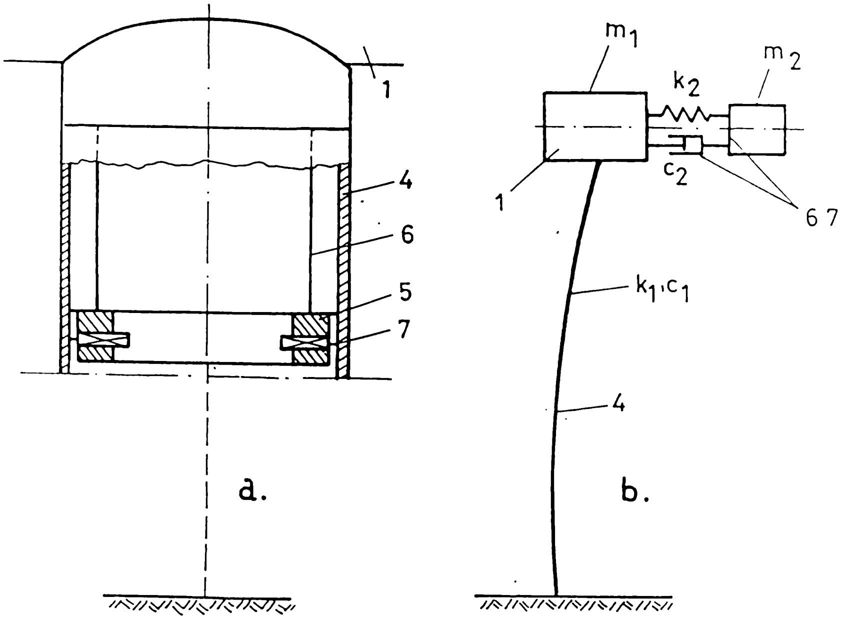

Fig.4.6

Astfel, se va considera modelul dinamic simplificat al agregatului aeroelectric, având un singur grad de libertate, cu masa redusă m_1 (Fig.4.6 a) la nivelul nacelei. Sistemul acordat poate fi constituit dintr-un inel masiv **5** de masă m_2 plasat în interiorul stâlpului tubular **4** și suspendat pendular printr-o rețea de cabluri **6**. Prin lungimea firelor se realizează lungimea pendulului şi deci constanta elastică k_2.

Pentru realizarea disipării de energie se consideră amortizorul 7 conectat între tubul **4** şi inelul **5**.

Pentru controlul vibrațiilor sistemului, în sensul reducerii la maximum a nivelelor de vibrații, se cere optimizarea parametrilor sistemului ataşat m_2, c_2 şi k_2. Considerându-se structura foarte slab amortizața se va neglija amortizarea proprie a acesteia.

Pentru sistemul din Fig.4.6 b se pot stabili relații analitice de optimizare cunoscute în literatura de specialitate [119] şi rezultate în urma analizării sistemului de ecuații diferențiale

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.53}$$

unde F(t) reprezintă forta generalizată perturbatoare corespunzătoare excitațiilor.

Considerând forța perturbatoare armonică de forma $F(t) = F\,e^{j\omega t}$ atunci răspunsul sistemului va fi de forma

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t} \tag{4.54}$$

unde vectorul $\{a_1,\ a_2\}^T$ reprezintă vectorul amplitudinilor complexe.

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.55}$$

Criteriul care se pune aici este acela al realiazării unei transmibilități complexe $T = k_1.a_1/F$ minime în domeniul de frecvență dat. Rezolvarea ei pare simplă dar abordarea pe cale analitică este destul de greoaie şi necesită unele transformări date prin formulele

$$p_o = \sqrt{k_1(m_1+m_2)}, \quad p_a = \sqrt{k_2/m_2}, \quad \Omega = \omega/p_o, \quad n = p_a/p_o$$

$$\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \zeta = \frac{c_2}{m_2 p_o}, \quad R_1 = n^2 - \Omega^2, \quad I_1 = \Omega\zeta \tag{4.56}$$

$$R_2 = \mu\Omega^2 - (1 + n^2)\Omega^2 + n^2, \quad I_2 = \Omega\zeta(1 - \Omega^2)$$

cu ajutorul cărora transmisibilitatea are valoarea absolută

$$|T| = \sqrt{(R_1^2 + I_1^2)/(R_2^2 + I_2^2)} \tag{4.57}$$

care se discută pe bază grafică prin curbele de variaţie, considerând ca parametrii pulsaţia adimensională Ω şi raportul de amortizare ζ.

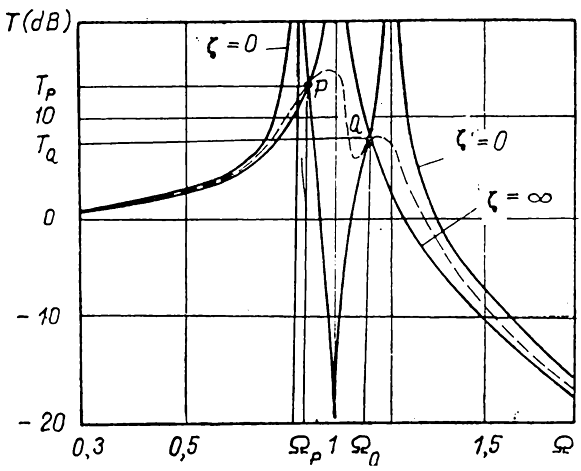

Fig.4.7

Trasând două curbe corespunzătoare pentru două valori ale $\zeta = 0$ când lipseşte disipatorul de energie şi $\zeta = \infty$ când practic masa m_2 se ataşează rigid de sistemul iniţial, se constată că cele două curbe se intersectează în doua puncte fixe P şi Q care rămân fixe şi pentru alte valori ale amortizării. Se notează cu Ω_P şi respectiv cu Ω_Q pulsaţiile adimensionale corespunzătoare celor două puncte.

Pentru optimizarea controlului nivelelor de vibraţii se fac în continuare o serie de particularizări.

Printr-un studiu grafic al curbelor de transmisibilitate se consideră că absorbitorul este optim acordat atunci când în punctele P şi Q transmisibilitatea are aceiaşi valoare ($T_P = T_Q$), condiţie ce duce la relaţiile

$$\Omega_P^2 + \Omega_Q^2 = 2, \quad \Omega_{P,Q} = 1 \mp \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}}, \quad T_{P,Q} = \sqrt{\frac{1 + \mu}{1 - \mu}} \tag{4.58}$$

Relaţiile de mai sus sunt obţinute în urma unor simplificări ce s-au putut efectua pe parcursul dezvoltărilor anlitice.

Opimizarea pe baza celui mai mic răspuns maxim duce la dezvoltări mult mai complicate. Pentru valori ale raportului maselor $\mu \geq .5$ se ajunge la o formulă aproximativă de calcul a raportului de amortizare optim

$$\zeta_{opt} = \sqrt{3\mu(1-\mu)/2} \tag{4.59}$$

Pentru cazul în care se ia în considerare și amortizarea sistemului primar formulele de mai sus nu mai sunt valabile și pentru optmizarea se ajunge la o soluționare grafică greoaie.

Formularile se complică și mai mult dacă amplitudinea forței perturbatoare este proporțională cu patratul pulsației, caz des întâlnit în practică, când excitația structurii este dată de mase neechilibrate în mișcare de rotație [154].

Pentru sisteme cu mai multe grade de libertate se fac o serie de simplificări pentru a putea fi rezolvate analitic, sub o formă aproximativă. În primul rând toate forțele perturbatoare trebuie să fie considerate în fază sau antifază. Se ajunge și aici la concluzia că există valori ale frecvenței forței excitatoare pentru care amplitudinea mișcării relative este independentă de amortizarea absorbitorului simplu. Aceasta este valabilă pentru orice masă și orice mișcare relativă. Teoria punctelor fixe este dedusă numai pentru cazul în care amortizarea structurii este neglijabilă.

In cazul atașării sistemului secundar la o structură considerată mediu elastic continuu, calculele analitice sunt și mai complicate. Chiar și-n cazul discretizării structurii apar complicatii datorită faptului că este necesar a se ține cont de locul de amplasare a absorbitorului în structură, acesta aparând în factorul de participare. Astfel, prin factorul de participare vor interveni funcțiile de formă, deci și poziția de amplasare a absorbitorului.

4.5.2. Analiza dinamică a unui model de agregat aeroelectric apropiat de cel real

Revenind la problema amortizării structurii unui agregat aeroelectric cu ax orizontal, pentru proiectarea unui sistem atașat este necesar luarea în considerare a unui model dinamic mai aproape de realitate care să țină seama că cele trei palete în procesul de

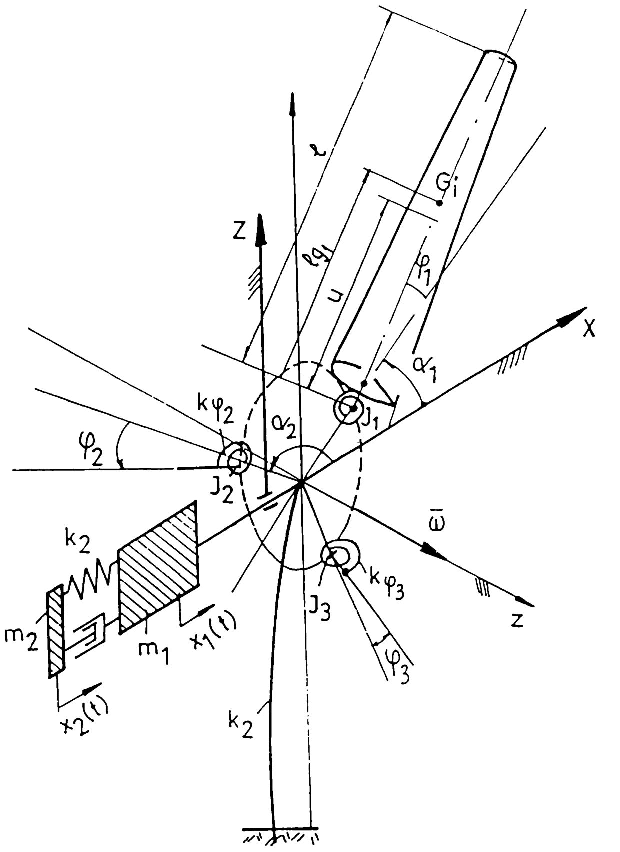

Fig.4.8

rotire se comportă ca nişte substructuri încastrate faţa de rotor având constantele elastice $K_{\Phi i}$ pentru deflexiile unde deflexiile Φ_1, Φ_2, Φ_3 sunt măsurate faţă de axele flanşelor de prindere a paletelor (Fig.4.8). Se consideră ca turnul efectuează o mişcare orizontală după axa Ox la nivelul axei rotorului având legea de mişcare $x_1(t)$ şi masa redusă la acest nivel m_1. La acelaşi nivel se consideră plasat sistemul mecanic ce trebuie acordat ca absorbitor de vibraţii, având masa m_2, constanta elastică k_2, şi constanta de amortizare c_2. Sistemul vibrant astfel considerat are cinci grade de libertate, pentru care se consideră legile de mişcare $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ şi $\varphi_3(t)$. Pentru deducerea cuaţiilor diferenţiale ale mişcării sistemului vibrant se utilizează ecuaţiile lui Lagrange, pentru care se calculează energiile cinetică, potenţialşi respectiv de disipare. Energia cinetică a sistemului considerat este dată de formula

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\int_0^l\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\dot{x}_{ui}^2 + \dot{y}_{ui}^2\right)\right)\rho\,(u)\,dm \qquad (4.60)$$

unde x_{ui} şi y_{ui} sunt coordonatele, faţă de sistemul fix OXY, ale unui punct situat pe paleta i la cota u față de rotor, cota flanșei față de axa rotorului fiind e. Tinând seama de poziția unghiulară a unei palete la momentul t

$$\alpha_i = \omega t + (i - 1)\frac{2\pi}{3} \tag{4.61}$$

și de deflecția unghiulară φ_i se pot scrie coordonatele unui punct curent de pe paletă

$$\begin{aligned} x_{ui} &= x_1 + e\cos\alpha_i + u\cos(\alpha_i + \varphi_i) \\ y_{ui} &= e\sin\alpha_i + u\sin(\alpha_i + \varphi_i), \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \tag{4.62}$$

legile vitezei vor fi

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ui} &= \dot{x}_1 - \omega e\sin\alpha_i - (\omega + \dot{\varphi}_i)u\sin(\alpha_i + \varphi_i) \\ \dot{y}_{ui} &= \omega e\sin\alpha_i + (\omega + \dot{\varphi}_i)u\cos(\alpha_i + \varphi_i) \end{aligned} \tag{4.63}$$

Primii doi termeni din ecuațiile lui Lagrange, în urma unor dezvoltări și liniarizări a pentru elongații mici, rezultă sub forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1}\right) &= \left(m_1 + \sum_{i=1}^{3} m_{pi}\right)\ddot{x}_1 - \sum_{i=1}^{3} m_{pi}e\omega^2\cos\alpha_i - \sum_{i=1}^{3} J_i\ddot{\varphi}_i\sin\alpha_6 i - \sum_{i=1}^{3} S_i\omega^2\cos\alpha_i \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_2}\right) &= m_2\ddot{x}_2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) &= J_i\ddot{\varphi}_i - \ddot{x}_1 S_i\sin\alpha_i - \dot{x}_i S_i\omega\cos\alpha_i \\ \frac{\partial E_c}{\partial x_1} &= \frac{\partial E_c}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial E_c}{\partial \varphi_i} &= -\dot{x}_1\omega S_i\cos\alpha_i + \varphi_i e\omega^2 S_i \end{aligned} \tag{4.64}$$

unde

$$m_{pi} = \int_0^l \rho(u)\,du, \quad S_i = \int_0^l u\rho(u)\,du, \quad J_i = \int_0^l u^2\rho(u)\,du \tag{4.65}$$

sunt masa paletei i, momentul său static în raport cu o axă paralelă cu axa de rotaţie a agregatului, axă ce trece prin planul flanşei de prindere a paletei, J_i fiind momentul de inerţie în raport cu aceiaşi axă.

Pentru calculul energiei potenţiale sunt necesari a se calcula patru termeni

$$E_{p1} = \frac{1}{2}k_1x_1^2, \quad E_{p2} = \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2,$$
$$E_{p3} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} K_{\varphi_i}\varphi_i^2, \quad E_{p4} = -\sum_{i=1}^{3} m_i g y_{G_i} \tag{4.66}$$

unde E_{p1} rezultă din deformaţia elastică a turnului, a cărui constantă echivalentă este k_1, E_{p2} este energia potenţială acumulată datorită deformaţiei arcului echivalent al sistemului ataşat, E_{p3} este energia potenţială inmagazinată în prinderea elastică a paletelor în flanşe, iar E_{p4} este energia potenţială dată de forţele gravitaţionale. Poziţia centrului de masă faţă de sistemul fix OXY este

$$y_{G_i} = e\sin\alpha_i + l_{gi}\sin(\alpha_i + \varphi_i) \tag{4.67}$$

unde l_{gi} este cota centrului de masfaţă de flanşa de prindere.

Termenii din ecuaţiile lui Lagrange daţi de energia potenţială sunt

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2), \quad \frac{\partial E_p}{\partial x_2} = -k_2(x_1 - x_2)$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_i} = K_{\varphi_i}\phi_i - m_{pi}g\, l_{gi}\cos\alpha_i + m_{pi}g\, l_{gi}\varphi_i\sin\alpha_i \tag{4.68}$$

Considerand agregatul de vânt ca o structură foarte slab amortizată, aşa cum se vede şi din constatările experimentale, se poate considera că disiparea de energie se va face numai prin dispozitivele sistemului ataşat, de aici

$$E_d = \frac{1}{2} c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \tag{4.69}$$

de unde se obţin termenii proveniţi din energia de disipare

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_1} = c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_2} = -c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \tag{4.70}$$

Fortele direct aplicate sistemului sunt cele din vânt.Calculul lor se face ţinând cont de profilul paletelor, de gradientul de distribuţiei de viteze, calcul care depăşeşte cadrul studiului calitativ de faţă. In vectorul fortelor generalizate {F} vor apare şi elemente perturbatoare de natură mecanică şi care au fost calculaţi mai sus.

CAPITOLUL V

FORMULARI PENTRU OPTIMIZAREA RASPUNSULUI DINAMIC AL STRUCTURILOR

Optimizarea comportării dinamice a unei structuri este un calcul de sensibilitate şi, dacă se face pe un model ce se abate foarte mult de la modelul real, atunci calculul va optimiza acest sistem si nicidecum pe cel real. Aceasta este motivaţia pentru care în cadrul Capitolului III s-a acordat importanţă deosebită modelării dinamice a unor structuri mari (megastructuri) şi pe baza cărora se poate trece la formulări de control optimal.

5.1. Problema generală a formulărilor optimale privind reducerea nivelelor de vibraţii la structuri

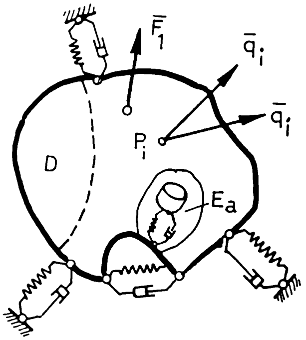

Fig.5.1

Se consideră o structură de maşina S (Fig.5.1) care sub acţiunea unor forţe perturbatoare execută mişcări vibratorii definite prin legile de mişcare date de vectorii $\{q_i\}$ ai punctelor P_i. Problema reducerii nivelelor de vibraţii este de a executa modificari minime ale structurii (S), prin ataşarea unor elemente inerţiale (E_a) şi/sau de legatura vâscoelastica, în zone date ale structurii sau între structură şi baza sa de sprijin (fundaţie). Prin aceste modificări structurale se urmăreşte reducerea nivelelor de vibraţii pe întreaga structura sau numai într-un anumit domeniu (D_a) al structurii, unde se află aparataj de comandă de mare sensibilitate la vibraţii sau amplasarea operatorului (cazul cabinelor autovehicolelor, tractoarelor, eilicoptere, etc.).

Punându-se problema obţinerii unei soluţii optime este necesar a se defini o funcţie globală de consistenţă energetica, numită funcţie criteriu sau funcţie de cost şi care poate fi definită în mai multe feluri.

În cazul în care răspunsul structurii este în domeniul timp această funcţie are forma

$$f(\{p\}) = \frac{1}{2}\int_0^T (\{\ddot{q}\}^T[Q_a]\{\ddot{q}\} + \{\dot{q}\}^T[Q_v]\{\dot{q}\} + \{q\}^T[Q_d]\{q\})dt \tag{5.1}$$

unde vectorul $\{p\}$ reprezintă vectorul parametrilor care urmează a fi modificaţi în structură, iar matricele $[Q_a]$, $[Q_v]$ şi $[Q_d]$ sunt trei matrice de ponderare corespunzătoare obiectivelor urmărite. Astfel, în cazul în care se urmăreşte numai reducerea nivelelor de vibraţii in relaţia (5.1) va fi prezentă numai matricea de ponderare $[Q_d]$. In cazul în care se pun şi probleme de optimizare a confortului, va apare şi matricea $[Q_a]$. Aceste matrice de ponderare au mai multe roluri. In primul rând ele asigură ca funcţia obiectiv să fie o funcţie pătratică pozitiv definită. In al doilea rând asigură selectarea acelor coordonate a căror nivele de vibraţie trebuie să fie optimizate. Aceasta se face, în cazul în care se urmăreşte reducerea vibraţiilor numai în anumite zone din structură, prin alegerea elementelor de pe diagonala principală diferite de zero, numai pentru acele coordonate care sunt puse sub control. In al treilea rând prin alegerea unor valori diferite pentru elementele nenule de pe diagonala principală se realizează o optimizare ponderală.

În cazul în care se urmăreşte controlul vibraţiilor globale ale structurii, se poate face o optimizare în domeniul frecvenţă unde vectorul $\{q\}$ se exprimă, pentru un regim armonic de excitaţie $\{F(t)\} = \{F\}\exp(j\omega t)$

$$\{q\} = (\{X\} + j\{Y\})e^{j\omega t} \tag{5.2}$$

În acest caz funcţia obiectiv va fi de forma

$$f(\{p\}) = \frac{1}{2}\int_{\omega_1}^{\omega_2} (\{X\}^T[Q]\{X\} + \{Y\}^T[Q]\{Y\})\,d\omega \tag{5.3}$$

vizând un anumit domeniu de frecvenţă sau chiar mai multe în cazul în care funcţia obiectiv se urmăreşte a fi minimalizată pe benzi de frecvenţe.

În scopul reducerii timpului de integrare, în cazul în care se foloseşte un algoritm de programare, se poate impune numai condiţia de minimalizare a maximumului de amplitudine existent intr-o bandă de frecvenţă impusă

unde vectorul $\{Z\}$ conţine atât părtile reale cât şi părţile

$$f(\{p\}) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\{X\}\\\{Y\}\end{Bmatrix}^T [Q]\begin{Bmatrix}\{X\}\\\{Y\}\end{Bmatrix}_{\max\omega_1\omega_2} = \frac{1}{2}\{Z\}^T[Q]\{Z\} \qquad (5.4)$$

imaginare ale răspunsului complex.

Dacă în domeniul de frecvenţă dat sunt prezente mai multe moduri naturale de vibraţii, atunci în algoritm se va alege valoarea amplitudinii vârfului celui mai înalt din domeniul $\omega_1 \to \omega_2$ al spectrului de răspuns al structurii.

In multe cazuri este mai uşoară utilizarea unor reprezentari modale ale răspunsului dinamic al structurii, care pentru un model linear conduce la sistemul valorilor proprii

$$\left([M]\lambda_r^2 + [C]\lambda_r + [K]\right)\{X_r\} = \{0\} \qquad (5.5)$$

unde λ_r este valoarea proprie corespunzatoare modului natural r careia îi corespunde vectorul modal $\{X_r\}$. Ecuatia caracteristica ataşata sistemului (5.5) are radacini complex conjugate

$$\lambda_r = -\sigma_r + j\omega_r, \quad \lambda_r^* = -\sigma_r - j\omega_r \qquad (5.6)$$

unde σ_r şi ω_r reprezinta factorul de amortizare respectiv pulsaţia proprie corespunzatoare celui de-al r-le mod natural. Acestor valori proprii le corespund vectorii modali complecşi

$$\{X_r\} = \{X_{rR}\} + j\{X_{rI}\}, \quad \{X_r\}^* = \{X_{rR}\} - j\{X_{rI}\} \qquad (5.7)$$

În sens fizic elementele complexe ale vectorului $\{X_r\}$ reprezinta forma spaţiala a modului natural de vibraţie a structurii. Optimizarea constă aici, tocmai în modificarea formei modului în aşa fel încât în zona dorita să existe un domeniu nodal.

Pentru aceasta forma, functia de cost va fi de forma

$$f(p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\{X_r\}^T[Q_r]\{X_r\} \qquad (5.8)$$

urmarindu-se un optimizarea structurii numai pentru un numar N de moduri de vibraţii din cele n.

5.1.1. Minimalizarea funcţiei cost

Funcţia obiectiv f({p}) definită în diversele ei forme, se obţine analitic prin integrarea sistemului (3.1) şi obţinerea răspunsului {q(t)} în timp, sau a răspunsului în frecvenţă {Z}.

Aceasta va fi o funcţie de un număr dat de parametrii care vor intra în elementele constitutive ale matricelor [M], [C] şi [K]. Sunt luaţi în considerare ca parametrii numai acele elemente care sunt disponibile de a fi modificate pe modelul fizic al structurii ce urmeaza fi optimizată. Deci funcţia obiectiv poate fi considerată ca o funcţie de aceşti parametri şi care constituie elementele vectorului {p}.

$$\{p\} = \{\{m\}^T \vdots \{c\}^T \vdots \{k\}^T\}^T \tag{5.9}$$

unde vectorii {m}, {c} şi {k} sunt constituiţi din acele elemente ale matricelor [M], [C] şi [K] care modifică matricele iniţiale. In scopul optimizării structurii se aleg un număr de parametrii care pot fi realizaţi fizic.

Prin intermediul acestor parametrii funcţia obiectiv poate fi dată intr-o formă explicită

$$f(\{p\}) = f(p^{(1}, p^{(2}, \ldots, p^{(N)}) \tag{5.10}$$

Din punct de vedere fizic, optimizarea răspunsului structurii, in sensul reducerii la maximum posibil a nivelelor de vibraţii, se face printr-un proces de căutare a minimumului funcţiei f{p} care este o funcţie pătratică de elongaţii sau de amplitudinile mişcării. Minimalizarea funcţiei pătratice în acest caz impune condiţiile

$$\frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial\{p_i\}} = \{0\} \tag{5.11}$$

Se consideră un proces iterativ de căutare a minimumului de forma

$$\{p_{i+1}\} = \{p_i\} + l_i\{d\} \tag{5.12}$$

unde $\{p_{i+1}\}$ este vectorul parametrilor actuali, $\{p_i\}$ este vectorul parametrilor iniţiali, l_i este un scalar, iar {d} este un vector a cărui directie trebuie determinată astfel încât procesul iterativ să fie condus spre minimalizarea funcţiei obiectiv.

Pentru a arăta cum se pot alege astfel de vectori se dezvoltă funcţia obiectiv în serie Taylor, în jurul punctului de start al procesului iterativ

$$f(\{p\}) = f(\{p_i\}) + l_i\{\nabla f(\{p_i\})\}^T\{d\} + \frac{1}{2}l_i^2\{d\}^T[H(\{p_i\})]\{d\} + \dots \tag{5.13}$$

unde vectorul gradient are forma

$$\{\nabla f(\{p_i\})\} = \left\{\frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial p^{(1}}, \frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial p^{(2}}, \dots\dots\dots, \frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial p^{(N}}\right\}^T \tag{5.14}$$

N fiind numărul parametrilor care se modifică în structură. Matricea $[H(\{p_i\})]$ constituie hessianul funcţiei obiectiv şi are forma

$$[H(\{p_i\})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\{p_i\})}{\partial p^{(1}\partial p^{(1}} & \frac{\partial^2 f(\{p_i\})}{\partial p^{(1}\partial p^{(2}} & \dots & \frac{\partial^2 f(\{p_i\})}{\partial p^{(1}\partial p^{(N}} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial^2 f(\{p_i\})}{\partial p^{(N}\partial p^{(1}} & \frac{\partial^2 f(\{p_i\})}{\partial p^{(N}\partial p^{(2}} & \dots & \frac{\partial^2 f(\{p_i\})}{\partial p^{(N}\partial p^{(N}} \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

Pentru valori mici ale scalarului l_i, pentru care termenul al treilea şi următorii se pot neglija, dezvoltarea în serie Taylor poate fi aproximată cu primii doi termeni

$$f(\{p\}) = f(\{p_i\}) + l_i\{\nabla f(\{p_i\})\}^T\{d\} \tag{5.16}$$

Cum funcţia obiectiv este pozitiv definită, pentru ca procesul iterativ să conveargă spre un minim local din vecinătatea punctului reprezentativ al hipersuprafeţei (5.3) din spaţiul R^N, trebuie ca cel de-al doilea, termen al dezvoltării Taylor să fie strict negativ. Deci

$$l_i\{\nabla f(\{p_i\})\}^T\{d\} < 0 \tag{5.17}$$

După cum se constată din (5.17) există o infinitate de vectori {d} care să satisfacă această inegalitate. Această metodă, în care se aleg astfel de vectori care să minimalizeze funcţia obiectiv şi să satisfacă inegalitatea (5.17) este cunoscută sub numele de metoda paşilor descendenţi [122,129].

Evident că, unul din modurile cele mai practice de alegere a vectorului {d} este

$$\{d\} = -\{\nabla f(\{p_i\})\} \tag{5.18}$$

care conduce la procesul iterativ de forma

$$\{p_{i+1}\} = \{p_i\} - l_i\{\nabla f(\{p_i\})\} \tag{5.19}$$

Această metodă este cunoscută in literatura de specialitate [122,129] sub numele de metoda de gradient si care asigură ocoborâre cu pantă maximă.

Problema care se pune aici este valoarea scalarului l_i care intră în procesul iterativ. Alegerea arbitrară a acestui scalar poate duce la creşterea termenilor superiori din dezvoltarea în serie Taylor şi ca atare să nu mai fie suficientă reţinerea a numai doi termeni din această dezvoltare. Mai mult, se poate întâmpla ca inegalitatea (5.17) să nu mai fie verificată şi ca atare procesul iterativ să fie divergent. Este evident că în unele cazuri parametrii care se modifică în structură nu au sens fizic dacă valorile lor nu sunt pozitive. Este cazul modificărilor structurale prin ataşari de substructuri. In alte cazuri, cum este echilibrarea dinamică, valorilor negative le corespunde scoaterea de masă. Când procesul de estimare ajunge in apropierea soluţiei optime, adică abaterea dintre două iteraţii succesive este mai mică decât o valoare impusă, vectorul parametrilor $\{p_{i+1}\}$ reprezintă soluţia numerică care minimalizează funcţia obiectiv şi pentru care derivatele (5.11) se anulează.

Dezvoltarea în serie Taylor în jurul $\{p_i\}$ va fi

$$f(\{p\}) = f(\{p_i\}) + \{\nabla f(\{p_i\})\}^T(\{p\} - \{p_i\}) + \frac{1}{2}\{\{p\}-\{p_i\}\}^T[H(\{p_i\})]\{\{p\}-\{p_i\}\}+\cdot \tag{5.20}$$

şi că pentru minim sunt îndeplinite condiţiile din (5.19) va rezulta din (5.20)

$$\{\nabla f(\{p_i\})\} + [H(\{p_i\})]\{\{p\} - \{p_i\}\} = \{0\} \tag{5.21}$$

de unde se deduce algoritmul de iterare

$$\{p_{i+1}\} = \{p_i\} - [H(\{p_i\})]^{-1}\{\nabla f(\{p_i\})\} \tag{5.22}$$

cunoscut sub numele de metoda Newton-Raphson. Acest algoritm are un dezavantaj creeat de calculul hessianului.

Pentru ca procesul iterativ să fie cât mai eficient se poate alege lungimea pasului iterativ l_i cât mai mic, aceasta duce la un volum mare de calcule numerice, de aceea prin program se poate schimba lungimea pasului iterativ impunându-se verificarea inecuaţiei (5.17).

Dacă valorile unor parametri din vectorul $\{p_i\}$ ajung la valori negative, pentru cazul ataşării de substructuri aceştia nu mai au semnificaţie fizică. Pentru cazul unor modificări structurale intr-o structură dată, aceste valori negative reprezintă de fapt scoaterea din structură a acestor parametri, de cele mai multe ori imposibil de realiza. Trebuie menţionat un aspect important: o funcţie obiectiv de acest tip nu are o soluţie unică. Acesta este cazul general al problemei inverse în cazul modificărilor strucurale. Din aceste motive algoritmul de optimizare trebuie folosit secvenţial în prezenţa unei funcţii obiectiv modificate.

5.1.2 Metode de calcul optimal al modificarilor structurale

In scopul acordării parametrilor $\{p_i\}$ unei structuri guvernate de sistemul de ecuaţii (3.1) este necesar a se calcula valorile gradientului şi valorile hessianului. Calculul analitic, chiar şi pentru sisteme cu un număr mic de grade de libertate, devine foarte anevoios. Abordarea analitică a optimizării structurilor duce la nişte calcule deosebit de complicate deorece trebuie calculate formele analitice ale vectorului răspuns $\{q(t)\}$ în funcţie de parametrii $\{p\}$, apoi calculate derivatele $\{\dot{q}(t)\}$ şi $\{\ddot{q}(t)\}$ ca în final să se obţină funcţia scalară $f(\{p\})$ care prin derivări succesive în rapor cu fiecare element al vectorului $\{p\}$ va duce la un sistem de N ecuaţii neliniare ale cărui soluţii va optimiza structura.

Din acest motiv s-au conceput algoritmi numerici de rezolvare a problemei enunţate anterior.

5.1.2.1 Algoritm de gradient pentru raspunsul sistemului vibrant în domeniul timp

Răspunsul în timp $\{q(t)\}$ al sistemului de ecuaţii diferenţiale (3.1), la o excitaţie impusă prin vectorul $\{F(t)\}$ al forţelor perturbatoare generalizate sau al unor perturbaţii rezultate în urma modificărilor matricelor [M], [C] şi [K] sunt variabile în timp. Obţinerea pe cale numerică a acestui răspuns se poate face aplicând unul dintre algoritmii cunoscuţi: Euler, Adams şi variante ale algoritmului Runge-Kutta.

La momentul considerat $t_s = s\Delta t$, unde Δt este incrementul de timp al procesului de integrare, se obţin vectorii răspuns $\{q(t_s)\}$, viteză $\{q(t_s)\}$ şi acceleraţie $\{q(t_s)\}$. Aceştia introduşi în ecuaţia (3.1) care determină funcţia de cost la momentul t_s. Deorece interesează şi valorile derivatelor

$$\frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial\{p_i\}} = \{D_{p_i}\} \tag{5.23}$$

vor trebui calculaţi încă un set de vectori derivaţi în raport cu parametrii vectorului $\{p\}$. Problema nu are soluţia dată de primul set de valori ale acestor parametrii deorece acestea nu pot fi anticipate în minimalizarea funcţiei obiectiv.

Aceste inconveniente pot fi înlăturate prin următoarele căi de rezolvare numerică [44]: Se porneşte de la sistemul de ecuaţii (3.1) care guvernează mişcarea vibratorie a structurii. Acesteia i se aplică o derivare în raport cu unul dintre parametrii vectorului $\{p\}$ şi se obţine

$$\begin{aligned}[M]\{\ddot{D}_1\} + [C]\{\dot{D}_1\} + [K]\{D_1\} &= -\left(\left[D_m^{(1}\right]\{\ddot{q}\} + \left[D_c^{(1}\right]\{\dot{q}\} + \left[D_k^{(1}\right]\{q\}\right) + \\ &+ \left[\frac{\partial g}{\partial\{\dot{q}\}}\right]\{\dot{D}_1\} + \left[\frac{\partial g}{\partial\{q\}}\right]\{D_1\}\end{aligned} \tag{5.24}$$

unde

$$\begin{aligned}&\{D_1\} = \frac{d\{q\}}{dp^{(1}},\quad \{\dot{D}_1\} = \frac{d\{\dot{q}\}}{dp^{(1}} = \frac{d\{D_1\}}{dt},\quad \{\ddot{D}_1\} = \frac{d\{\ddot{q}\}}{dp^{(1}} = \frac{d^2\{D_1\}}{dt^2} \\ &\left[D_m^{(1}\right] = \frac{d[M]}{dp^{(1}},\quad \left[D_c^{(1}\right] = \frac{d[C]}{dp^{(1}},\quad \left[D_k^{(1}\right] = \frac{d[K]}{dp^{(1}},\quad \frac{d\{F(t)\}}{dp^{(1}} = 0\end{aligned} \tag{5.25}$$

şi

$$\left[\frac{\partial\{g\}}{\partial\{\dot{q}\}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \dot{q}_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \dot{q}_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \dot{q}_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial \dot{q}_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial g_n}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial g_n}{\partial \dot{q}_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

$$\left[\frac{\partial\{g\}}{\partial\{q\}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial q_1} & \frac{\partial g_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial q_1} & \frac{\partial g_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial q_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial g_n}{\partial q_1} & \frac{\partial g_n}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial q_n} \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

In procesul de derivare de mai sus s-a ţinut cont de faptul că vectorul de excitaţie $\{F(t)\}$ este independent de parametrii vectorului $\{p\}$.

Cele două sisteme de ecuaţii (3.1) şi (5.24) se pot rezolva pe cale numerică obtinându-se legile de mişcare $\{q(t)\}$ şi variaţiile lor în raport cu parametrii $p^{(l}$ necesari în construirea componentei l din gradient, componentă ce se obţine din derivarea funcţiei obiectiv

$$\frac{\partial f(\{p\})}{\partial p_i^{(l}} = \int_0^T \left(\{\ddot{q}\}^T[Q_a]\{\ddot{D}_l\} + \{\dot{q}\}^T[Q_v]\{\dot{D}_l\} + \{q\}^T[Q_d]\{D_l\}\right)dt \tag{5.28}$$

cu ajutorul căreia se poate calcula valoarea parametrului $p^{(l}$ în următorul pas iterativ

$$p_{i+1}^{(l} = p_i^{(l} - l_i\frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial p_i^{(l}}, \quad l = 1,2,\ldots\ldots,N \tag{5.29}$$

după care ciclu se reia.

In apropierea valorii minime a funcţionalei $f(\{p_i\})$ se poate trece, aşa cum s-a arătat la aplicarea algoritmului Newton-Raphson pentru care se cere calculul elementelor hessianului

$$H_{jl} = \frac{\partial^2 f(\{p_i\})}{\partial p^{(j}p^{(l}} \tag{5.30}$$

care se pot determina cu ajutorul unui sistem obţinut din (5.24) printr-o nouă derivare în raport cu parametrul $p^{(j}$

$$\begin{aligned}[M]\{\ddot{D}_{lj}\} + [C]\{\dot{D}_{lj}\} + [K]\{D_{lj}\} &= -\left([D_m^{(lj}]\{\ddot{q}\} + [D_c^{(lj}]\{\dot{q}\} + [D_k^{(lj}]\{q\}\right) - \\ &-\left([D_m^{(j}]\{\ddot{D}_l\} + [D_c^{(j}]\{\dot{D}_l\} + [D_k^{(j}]\{D_l\}\right) - \left([D_m^{(l}]\{\ddot{D}_j\} + [D_c^{(l}]\{\dot{D}_j\} + [D_k^{(l}]\{D_j\}\right)\end{aligned} \tag{5.31}$$

unde

$$\left[D_m^{(rj)}\right] = [0], \quad \left[D_c^{(rj)}\right] = [0], \quad \left[D_k^{(rj)}\right] = [0] \tag{5.32}$$

deorece matricele $[D_m^{(l}]$, $[D_c^{(l}]$ si $[D_k^{(l}]$ au toate elementele nule afară de acelea în care sunt poziţionaţe elementele $p^{(l}$ care vor fi 1 sau -1 şi prin urmare printr-o nouă derivare vor avea toate elementele nule. In membrul drept mai apar simplificări şi prin faptul că patru din matricele $[D_m^{(l}]$, $[D_c^{(l}]$, $[D_k^{(l}]$ $[D_m^{(j}]$, $[D_c^{(j}]$, si $[D_k^{(j}]$ vor fi nule deorece parametrul $p^{(r}$ este prezent numai în două din aceste matrice. Având toate elementele hessianului calculate se poate trece la calculul elementelor vectorului iterativ (5.22)

5.1.2.2 Algoritm de gradient pentru răspunsul în frecvenţă

In multe cazuri practice se analizează răspunsul sistemului vibrant în domeniul frecvenţă la un regim armonic staţionar la care se calculează vectorul amplitudinilor complexe sau regimuri staţionare aleatorii pentru care răspunsul se dă prin funcţiile densităţilor spectrale de putere. Modul de abordare este similar in ambele cazuri.

Dacă se notează

$$\{q(t)\} = (\{X\} + j\{Y\})\, e^{j\omega t} \tag{5.33}$$

răspunsul complex al sistemului dinamic (3.1) supus la o excitaţie armonică, se obţine sistemul liniar în amplitudini

$$\begin{aligned} [A]\{X\} - [B]\{Y\} &= \{F\} \\ [B]\{X\} + [A]\{Y\} &= \{0\} \end{aligned} \tag{5.34}$$

unde

$$[A] = -\omega^2([M]+[M_a])+[K]+[K_a], \quad [B] = \omega([C]+[C_a]) \tag{5.35}$$

Pentru obţinerea elementelor vectorului gradient este necesar să fie derivat sistemul (5.34) în raport cu cei N parametri rezultând următorul sistem

$$\begin{aligned}
&[A]\frac{\partial\{X\}}{\partial p^{(l}} - [B]\frac{\partial\{Y\}}{\partial p^{(l}} = -\frac{\partial[A]}{\partial p^{(l}}\{X\} + \frac{\partial[B]}{\partial p^{(l}}\{Y\} \\
&[B]\frac{\partial\{X\}}{\partial p^{(l}} + [A]\frac{\partial\{Y\}}{\partial p^{(l}} = -\frac{\partial[B]}{\partial p^{(l}}\{X\} - \frac{\partial[A]}{\partial p^{(l}}\{Y\}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

sau intr-o formă compactă

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial[A]}{\partial p^{(l}} & -\dfrac{\partial[B]}{\partial p^{(l}} \\ \dfrac{\partial[B]}{\partial p^{(l}} & \dfrac{\partial[A]}{\partial p^{(l}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{Y\} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} [A] & -[B] \\ [B] & [A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\{X\}}{\partial p^{(l}} \\ \dfrac{\partial\{Y\}}{\partial p^{(l}} \end{Bmatrix} \tag{5.37}$$

Făcând următoarele notaţii

$$[S^{(l}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial[A]}{\partial p^{(l}} & -\dfrac{\partial[B]}{\partial p^{(l}} \\ \dfrac{\partial[B]}{\partial p^{(l}} & \dfrac{\partial[A]}{\partial p^{(l}} \end{bmatrix}, \{Z\} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{Y\} \end{Bmatrix}, \; [G] = -\begin{bmatrix} [A] & -[B] \\ [B] & [A] \end{bmatrix}, \{w^{(l}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\{X\}}{\partial p^{(l}} \\ \dfrac{\partial\{Y\}}{\partial p^{(l}} \end{Bmatrix} \tag{5.38}$$

Cu acestea se pot calcula componentele vectorului gradient

$$\frac{\partial f(p)}{\partial p^{(l}} = \{Z\}[Q]\{w^{(l}\} \tag{5.39}$$

Simplificări se pot aduce în continuare ţinând cont de faptul că vectorul parametrilor {p} se poate scrie sub forma

$$\{p\} = \{m_1, m_2, \ldots, m_{N1}, c_1, c_2, \ldots, c_{N2}, k_1, k_2, \ldots, k_{N3}\}^T \tag{5.40}$$

pentru care derivatele celor două matrice [A] şi [B] conduc la următoarele forme derivative

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial[A]}{\partial m_q} = -\omega^2\frac{\partial[M_a]}{\partial m_q}, \quad \frac{\partial[B]}{\partial m_q} = [0], \quad q = 1, N_1 \\
&\frac{\partial[A]}{\partial c_r} = [0], \quad \frac{\partial[B]}{\partial c_r} = \omega\frac{\partial[C_a]}{\partial c_r}, \quad r = 1, N_2 \\
&\frac{\partial[A]}{\partial k_s} = \frac{\partial[K_a]}{\partial k_s}, \quad \frac{\partial[B]}{\partial k_s} = [0], \quad s = 1, N_3.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

5.1.2.3. Algoritm pentru optimizarea raspunsului modal

Plecând de la sistemul valorilor proprii (5.5) şi ţinând cont de relaţiile (5.6) si (5.7) se obţin, separând parţile reale si imaginare, doua sisteme de ecuaţii algebrice

$$\left((\sigma_r^2 - \omega_r^2)[M] - \sigma_r[C] + [K]\right)\{x_{Rr}\} + (2\omega_r\sigma_r[M] - \omega_r[C])\{x_{Ir}\} = \{0\}$$
$$(-2\omega_r\sigma_r[M] + \omega_r[C])\{x_{Rr}\} + \left((\sigma_r^2 - \omega_r^2)[M] - \sigma_r^2[C] + [K]\right)\{x_{Rr}\} = \{0\} \tag{5.42}$$

Pentru formarea termenului iterativ de variaţie a unui parametru ß, în sensul optimizarii sistemului, este necesară derivarea funcţiei de cost, care pentru răspunsul modal a fost definită prin forma (5.8). In urma derivarii se obţine

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{N} \{X_r\}\,[Q_r]\left\{\frac{\partial X_r}{\partial \beta}\right\} \tag{5.43}$$

Vectorii complecşi $\{X_r\}$ se obţine printr-o subrutina aflata în biblioteca matematica. Ceea ce trebuie determinat este derivata vectorului complex $\{X_r\}$ în raport cu parametrul ß.

$$\frac{\partial\{X_r\}}{\partial \beta} = \frac{\partial\{X_{Rr}\}}{\partial \beta} + j\frac{\partial\{X_{Ir}\}}{\partial \beta} \tag{5.44}$$

Valorile derivatelor $\partial\{X_{Rr}\}/\partial ß$ şi $\partial\{X_{Ir}\}/\partial ß$ se obţin prin derivarea sistemului (5.42) în rapot cu ß. Dar si parametrii σ_r şi ω_r sunt funcţii de parametrul ß. Se obţine astfel 2N ecuatii cu 2N+2 necunoscute $\partial\{X_{Rr}\}/\partial ß$, $\partial\{X_{Ir}\}/\partial ß$, $\partial\sigma_r/\partial ß$ şi $\partial p_r/\partial ß$.
Pentru completarea cu ecuaţii este necesar a se folosi şi următoarele relaţii, deduse pentru sisteme cu amortizare [14]

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\,\frac{\{x_{Rr}\}^T[C]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[C]\{x_{Ir}\}}{\{x_{Rr}\}^T[M]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[M]\{x_{Ir}\}} \tag{5.45}$$

şi

$$\sigma_r^2 + p_r^2 = \frac{\{x_{Rr}\}^T[K]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[K]\{x_{Ir}\}}{\{x_{Rr}\}^T[M]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[M]\{x_{Ir}\}},\quad r = 1,n \tag{5.46}$$

In cazul structurilor slab amortizare se poate considera ca formulele modale date prin vectorii modali nu difera prea mult fata de formele modale în cazul sistemelor fara amortizare, şi de aceea în prima faza se poate considera sistemul valorilor şi vectorilor proprii ce rezulta din

$$(-\omega_r^2[M] + [K])\{x_r\} = \{0\} \tag{5.47}$$

căruia i se ataşeaza relaţia lui Rayleigh

$$\omega_r^2 = \frac{\{x_r\}^T[K]\{x_r\}}{\{x_r\}^T[M]\{x_r\}}, \qquad r = 1,2,\ldots,n \tag{5.48}$$

Prin derivare în raport cu ß în (5.45) şi (5.46) se obţine un sistem cu N+1 necunoscute conţinute în vectorul $\partial\{X_r\}/\partial\beta$ şi $\partial\omega_r/\partial\beta$. Din (5.45) prin derivare se obţine

$$-2\omega_r\frac{\partial\omega_r}{\partial\beta}[M]\{X_r\}+(-\omega^2[M]+[K])\frac{\partial\{X_r\}}{\partial\beta}=(-\omega^2\frac{\partial[M]}{\partial\beta}-\frac{\partial[K]}{\partial\beta})\{X_r\}$$

(5.49)

$$2\omega_r\frac{\partial\omega_r}{\partial\beta}\{X_r\}^T[M]\{X_r\}+2\{X_r\}^T(\omega_r^2[M]-[K])\frac{\partial\{X_r\}}{\partial\beta}=\{X_r\}^T(-\omega_r^2\frac{\partial[M]}{\partial\beta}+\frac{\partial[K]}{\partial\beta})\{X_r\}$$

Daca se elimina necunoscuta $\partial\omega_r/\partial\beta$ între relaţiile din (5.49) se obţine un sistem liniar în care necunoscut este vectorul $\partial\{X_r\}/\partial\beta$ pe baza caruia se poate determina componenta $\partial f/\partial\beta$ necesara procesului iterativ

$$\beta_{i+1}=\beta_i-l_i\frac{\partial f}{\partial\beta_i^{(l}}, \qquad (l=1,2,\ldots,N) \tag{5.50}$$

Observaţie

Daca prima ecuaţie din (5.49) se înmulţeşte la stânga cu $\{X_r\}^T$ şi se aduna cu cea de-a doua ecuaţie din (5.49) se obţine

$$\{X_r\}^T(-\omega^2[M]+[K])\frac{\partial\{X_r\}}{\partial\beta} = 0 \tag{5.51}$$

5.2. Optimizarea parametrilor unui absorbitor ataşat unei structuri

5.2.1. Determinarea răspunsului unei structuri supuse unei excitaţii armonice

Intr-un sens mai general, comportarea dinamica a unei structuri este dedusa dintr-un sistem de ecuatii diferentiale liniare de odinul doi cu coeficienti constanti.

Presupunand fortele perturbatoare armonice si de aceiasi pulsatie, folosind reprezentarea in complex, si separând părţile reale şi imaginare, se obţine ecuatia matriceala

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [M] & -\omega [C] \\ \omega [C] & [K] - \omega^2 [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{Y\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \qquad (5.52)$$

unde {X} si {Y} reprezinta vectorii corespunzatori partilor reale respectiv imaginare ale vectorului raspuns {Z}.

Ecuatia matriceala (5.52) se poate scrie intr-o forma condensata

$$[D]\{Z\} = \{F_0\} \qquad (5.53)$$

din care se poate obtine răspunsul structurii

$$\{Z\} = [G]\{F_0\} \qquad (5.54)$$

unde [G] este o matrice patratica de dimensiune 2n×2n, fiind inversa matricei [D].

5.2.2. Minimalizarea raspunsului folosind o metoda de gradient

După cum s-a văzut in paragraful 5.1.2.2. metoda de gradient furnizeaza algoritmi de calcul pentru rezolvarea problemelor de optim. In cadrul problemei puse in aceasta lucrare, se urmareste minimalizarea unei functii obiectiv (criteriu de performanta), in care in mod evident se va reflecta raspunsul punctelor structurii a caror vibratii trebuie sa fie reduse prin modificari structurale.

Fie {p}, vectorul parametrilor structurali ce urmeaza a fi modificati

$$\{p\} = \{m_a, c_a, k_a\}^T \qquad (5.55)$$

unde m_a, c_a si k_a reprezinta vectorii parametrilor dati de masa absorbitorului, constanta de amortizare si respectiv rigiditatea sa.

Considerand frecventa de excitatie constanta, se poate construi functia obiectiv

$$f(\{p\}) = \frac{1}{2}\{Z\}^T[Q]\{Z\} = \frac{1}{2}\{F_0\}^T[G]^T[Q]\,[G]\{F_0\} \qquad (5.56)$$

unde matricea [Q] este o matrice de selectare a partilor reale si imaginare corespunzatoare aceluiasi punct al structurii, cat si o matrice care permite obtinerea unei functii obiectiv patratice. Totodata matricea [Q] poate fi considerata si ca o matrice de ponderare. Prin urmare elementele matricei [Q] vor fi 0 si 1 cand raspunsurile minimalizate se considera cu pondere egala, dar, elementele de pe diagonala principala pot sa difere de unitate cand se urmareste o optimizare ponderata.

In rezolvarea problemei puse se va folosi un proces iterativ de forma (5.19).

5.2.3. Exemplu numeric pentru proiectarea unui absorbitor dinamic optim

Dacă o structură are pulsaţiile proprii distincte si relativ larg separate, pentru optimizarea vibraţiilor acesteia se poate proiecta un absorbitor dinamic, acordat cu modul care se doreşte a fi controlat. Se va considera cazul în care absorbitorul dinamic, format din m_a, k_a si c_a, este atasat unei structuri reprezentata in Fig.5.2 prin masa modală M_r si respectiv rigiditatea modală K_r, corespunzatoare modului r.

Deoarece, chiar şi pentru o structură simplă, unidimensională, locul modurilor proprii este luat de functiile modale, în scrierea ecuatiilor de miscare trebuie ţinut cont de locul de plasare a absorbitorului prin functiile care dau formele modurilor [19].

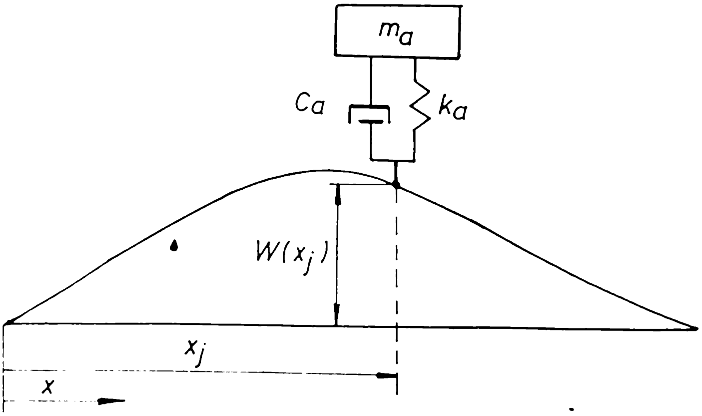

Fig.5.2

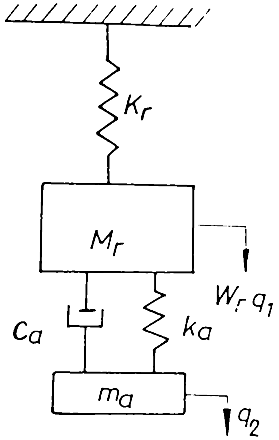

Fig.5.3

În figura este aratată forma primului mod pentru o bară articulată la capete. Pentru a da o semnificatie fizică forţelor modale generalizate $P_r(t)$, acestea trebuie văzute ca fiind produsul dintre o forta ce variaza in timp si o funcţie care descrie amplitudinea si faza fortei F(t) in fiecare punct x_j al structurii.

Ecuaţiile diferenţiale ale miscării sistemului din Fig.5.3 sunt de forma

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} = \{P\} \tag{5.57}$$

unde

$$[m] = \begin{bmatrix} M_r W_r^2(x_j) & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix}; \quad [c] = \begin{bmatrix} c_a W_r^2(x_j) & -c_a W_r(x_j) \\ -c_a W_r(x_j) & c_a \end{bmatrix}$$
$$[k] = \begin{bmatrix} (K_r + k_a) W_r^2(x_j) & -k_a W_r(x_j) \\ -k_a W_r(x_j) & k_a \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

Concluzii

In acest exemplu numeric, folosind procedeul de iteratie dat de metoda de gradient, s-a cautat determinarea parametrilor optimi ai absorbitorului dinamic, adica acei parametri pentru care raspunsul maxim al structurii, corespunzator modului fundamental, sa fie minim. Presupunând că atât amortizorul cât si forţa perturabatoare modală acţionează intr-un ventru al formei modale, factorii de participare vor fi $W_1(x_j) = 1$.

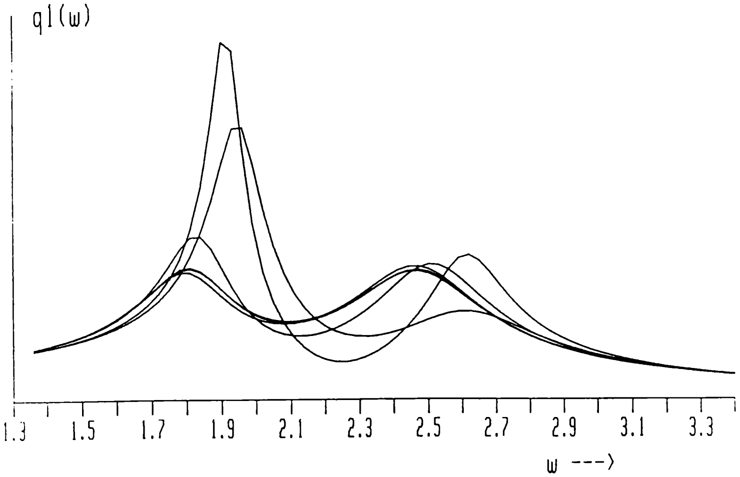

Fig.5.4

In figura 5.4 este dat răspunsul structurii pentru cazul în care datele iniţiale sunt : K_1 = 5N/m, M_1 = 1Kg, k_a = 0.5N/m, c_a =

0.03Ns/m, m_a = 0.09Kg, adică amortizorul este supraacordat (p_a > p_1). Se constată că prin această metodă amortizorul se acordeaza, având parametrii finali: k_a = 0.4875 N/m, c_a = 0.08168 Ns/m, m_a = 0.1224 Kg.

În figura 5.5 este dat răspunsul structurii pentru cazul în care datele inițiale sunt: K_1 = 5N/m, M_1 = 1Kg, k_a = 0.5N/m, c_a = 0.03Ns/m, m_a = 0.15Kg, adică amortizorul este subacordat (p_a < p_1). Se constată că și de această dată amortizorul se acordează modului fundamental, având parametrii finali: k_a = 0.50497N/m, c_a = 0.07912Ns/m, m_a = 0.1275Kg.

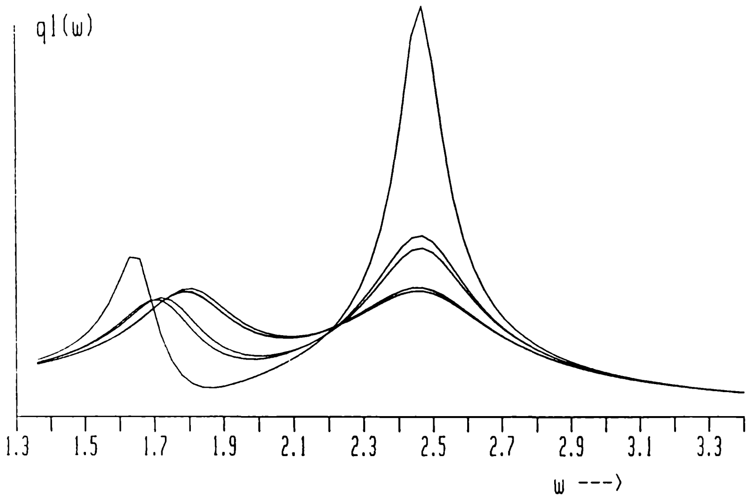

Fig.5.5

Răspunsurile sunt date pentru o excitație armonică, corespunzătoare unui număr de 6 rapoarte de amortizare, după care se constată că diagramele se suprapun, procedeul fiind rapid convergent [38]. De notat că pentru datele considerate se obtine răspunsul minim, si care corespunde cu valoarea calculata pe baza minimalizarii răspunsului maxim. În cazul unor sisteme foarte mari, formulele analitice pentru determinarea răspunsului diferitelor puncte din structură, devin foarte complicate, astfel încât, problema "adaugării de amortizare" și altor moduri naturale prin intermediul unui singur amortizor devine foarte laborioasa.

Marele avantaj al optimizarii vibratiilor prin metoda de gradient, constă tocmai in aceea ca, prin algoritmul dat de aceasta metodă, se poate trece, dupa cunoașterea, pe baza Analizei Modale

Experimentale, a câtorva moduri, la determinarea unui amortizor optim care să minimalizeze răspunsul maxim intr-un anumit loc al structurii. Pentru structurile cu mai multe grade de libertate nu există o soluţie analitică simplă, aşa cum există pentru amortizorul dinamic, de aceea aceasta metodă devine foarte puternica, daca se are in vedere alegerea pasului de iteraţie astfel ca funcţia obiectiv sa se indrepte mereu spre valori mai mici, adică să fie indeplinită condiţia obţinută în (5.17).

5.2.4. Minimalizarea răspunsului staţionar al unui sistem cu două grade de libertate, prin ataşarea unui absorbitor dinamic

În acest paragraf se va descrie o tehnică de minimizare a răspunsului staţionar al unui sistem cu două grade de libertate prin ataşarea unui absorbitor dinamic şi aplicând metoda de gradient [35]. Presupunând forţele perturbatoare armonice şi de aceiaşi pulsaţie se obţine o ecuaţie de forma (5.52) iar funcţia obiectiv este de forma (5.56).

Pentru rezolvarea acestei probleme, utilizând metoda de gradient, se urmăreşte procesul iterativ (5.19) care în termenii unui singur parametru se scrie

$$p_{i+1}^{(l} = p_i^{(l} - l_i \frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial p^{(l}} \tag{5.59}$$

Cea mai importantă parte a procesului iterativ, care începe în punctul $\{p_i\}$, este determinarea gradientului funcţiei obiectiv

$$\{\nabla f(\{p_i\})\} = \left\{\frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial p^{(1}}, \frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial p^{(2}}, \frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial p^{(3}}, \ldots, \frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial p^{(N}}\right\} \tag{5.60}$$

unde

$$\frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial p^{(l}} = \{Z\}^T[Q]\frac{\partial\{Z\}}{\partial p^{(l}}, \quad l = 1,N \tag{5.61}$$

iar din ecuaţia (5.29) urmează că

$$\left\{\frac{\partial\{Z\}}{\partial p^{(l}}\right\} = -[G][S^{(l}]\{Z\} \tag{5.62}$$

unde

$$[S^{(l}] = \frac{\partial[D]}{\partial p^{(l}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial[\Delta K]}{\partial p^{(l}} - \omega^2 \frac{\partial[\Delta M]}{\partial p^{(l}} & -\omega \frac{\partial[\Delta C]}{\partial p^{(l}} \\ \omega \frac{\partial[\Delta C]}{\partial p^{(l}} & \frac{\partial[\Delta K]}{\partial p^{(l}} - \omega^2 \frac{\partial[\Delta M]}{\partial p^{(l}} \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

Derivatele matricelor de mai sus sunt uşor de calculat. Acestea, şi unele aplicaţii ale acestor derivări sunt date în [17]. Astfel, dacă matricele de inerţie şi de amortizare nu se schimbă, aceasta înseamnă că l = s, atunci

$$\frac{\partial[\Delta M]}{\partial p^{(l}} = [0]\,,\quad \frac{\partial[\Delta C]}{\partial p^{(l}} = [0]\,,\quad \frac{\partial[\Delta K]}{\partial p^{(l}} = [E_{ij}] \tag{5.64}$$

unde $[E_{ij}]$ este matricea cu toate elementele zero, exceptând cele de pe linia i şi coloana i, linia j şi coloana j care sunt 1, respectiv linia i şi coloana j, linia j şi coloana i care sunt -1. Acum, cu matricea $[S^{(l}]$, componentele vectorului gradient sunt

$$\frac{\partial f(\{p_i\})}{\partial p^{(l}} = -\{F\}^T[G]^T[Q]\,[G]\,[S^{(l}]\,[G]\{F\} \tag{5.65}$$

Pentru un sistem simplu, cu două grade de libertate, ca cel din Fig. 5.6, folosind o funcţie obiectiv de forma (5.56) se poate obţine minimalizarea răspunsului pentru prima şi a doua coordonată. În acest caz un sistem masă-arc-amortizor poate să lucreze ca un absorbitor acordat pe primul mod al sistemului cu două grade de libertate.

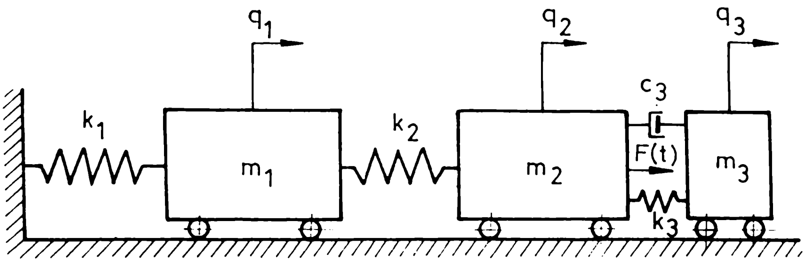

Fig.5.6

Parametrii modelului din figura 3.6 sunt : m_1 = 1 kg, m_2 = 1.5kg, k_1 = k_2 = 5 N/m, iar parametrii iniţiali ai sistemului ataşat sunt : m_3 = 0.1 Kg, k_3 = 0.45 N/m, c_3 = 0.02 Ns/m. Parametrii finali ai sistemului ataşat, în cazul când acesta lucrează ca un absorbitor acordat pe primul mod, au următoarele valori: m_3'

0.0965 Kg, $c_3' = 0.0266$ Ns/m, $k_3' = 0.12229$ N/m

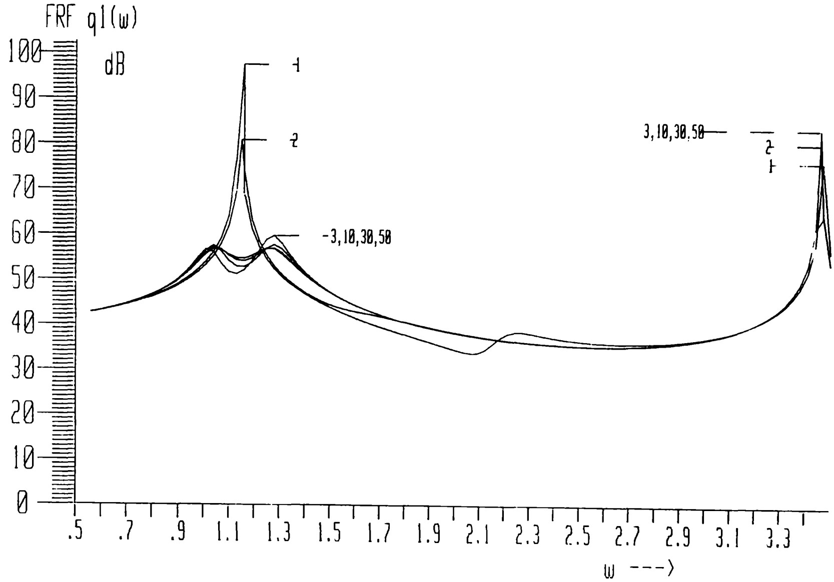

Fig.5.7

Din raspunsul în fecvenţă pentru prima coordonată (Fig. 5.7),

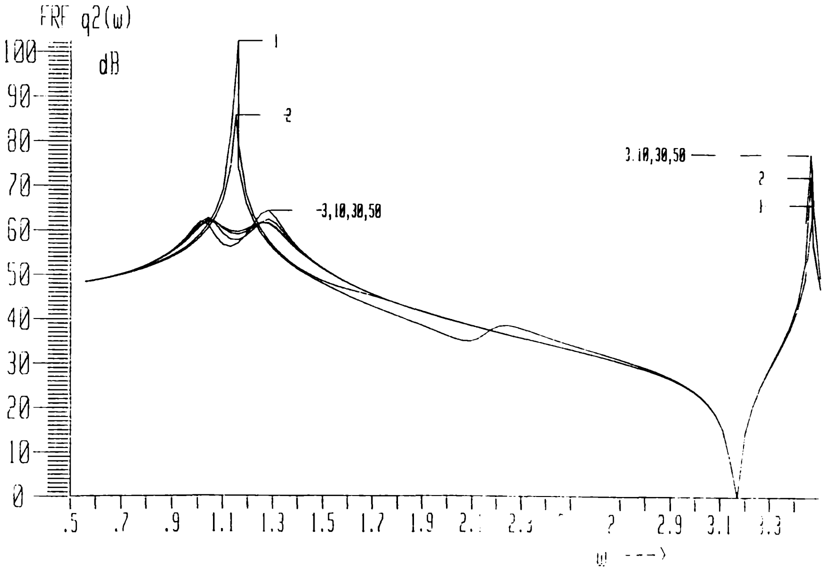

Fig.5.8

dacă absorbitorul este acordat pe primul mod propriu al sistemului se constată o diminuare a nivelului de vibraţie de la 98 dB la 58 dB, adică o micsorare de 100 de ori.

Se poate observa din răspunsul în frecvenţă pentru cea de-a doua coordonată (Fig. 5.8), că şi pentru aceasta are loc o reducere a nivelului de vibraţie de la 101 dB la 61 dB.

5.3. Atenuarea nivelelor de vibraţii la structuri mecanice prin disipatori cu frecare uscată şi vâscoasă

In literatura de specialitate există numeroase lucrări dedicate atenuării nivelelor de vibraţii la structuri mecanice prin sisteme de disipare a energiei vibraţiilor prin disipatori vâscoelastici la care componentele de natură vâscoasă, a forţelor de legătură sunt proporţionale cu viteza relativă a punctelor de prindere a elementului de disipare, [5,9,90,91,112]. În Fig.5.9 a, elementul de disipare vâscoasă a energiei vibraţiilor, de construcţie hidraulică E_h, este prins între două puncte ale structurii s şi l, având legile de mişcare absolute $u_s(t)$ şi $u_l(t)$. Intre punctele s şi l apar forţe de legătură interioare datorită cuplajului vâscos de forma

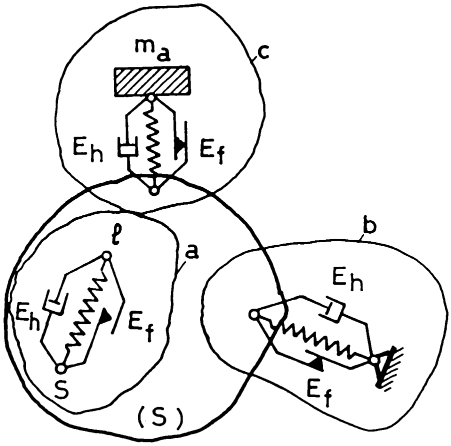

Fig.5.9

$$F_{ls} = -c_{ls}(\dot{u}_l - \dot{u}_s) \;; F_{ls} = -F_{sl} \tag{5.66}$$

In cazul regimurilor rezonante, componenta frecvenţei de rezonanţa devine atât de mare, încât în raport cu ea toate celelalte comoponente sunt neglijabile. Se poate considera că structura are miscare după un singur mod iar punctele s şi l în aşa fel încât ele să se găsească pe suprafeţe de forme modale având ventre în opoziţie de fază. In această situaţie viteza relativă are valoare maximă, forţa de legătură interioară de disipare F_{ls} are şi ea valoare maximă creându-se posibilitatea unei disipări eficiente a energiei. Pentru regimurile rezonante vibraţiile punctelor structurilor se apropie de forma armonică, datorită efectului de filtru de bandă al modului natural. Se pot scrie următoarele relații

$$u_1(t) = u_{01}\cos(\omega_r t-\varphi_1), \quad u_s = u_{0s}\cos(\omega_r t-\varphi_s) \tag{5.67}$$

unde ω_r este pulsația de excitație a regimului armonic, iar φ_1 și φ_s sunt fazele mișcării celor două puncte 1 și s.

In acest context forța de legătură interioară F_{1s} are expresia

$$F_{1s} = -c_{1s}\omega_r u_o\cos(\omega_r t-\varphi) \tag{5.68}$$

Se constată că amplitudinea forței de frecare vâscoasă depinde prin u_0 și ω de amplitudinile punctelor de prindere și de fazele de mișcare ale acestora. Ea variază liniar și cu frecvența. De aici rezultă că în procesul de amortizare a vibrațiilor libere, modurile de vibrații cu frecvețe mai înalte dispar în general mai repede decât modul fundamental. Pentru a avea forțe de disipare mari trebuie ca produsul $c_{1s}\omega_r u_0$ să aibă valori mari. Acest lucru dezavantajează situația în care regimurile excitate sunt în domeniul frecvențelor joase, pentru care valoarea ω_r este mică iar pentru realizarea unei forțe de amortizare eficiente ar însemna mărirea coeficientului de amortizare. Acest fapt atrage după sine mărirea dimensiunilor elementului de amortizare hidarulică E_h, a caror gabarite nu pot să fie oricât de mari. Disiparea energiei vibrațiilor prin elemente, în care forțele de legătură sunt proporționale cu vitezele punctelor de prindere, se bazează pe un număr mare de mecanisme. Cel mai cunoscut este mecanismul hidraulic sau amortizorul hidraulic, dezvoltat în multe variante în industria autovehicolelor, unde principalul scop este mărirea confortului [77,78,79]. De fapt, se are în vedere reducerea transmisibilității vibrațiilor la pasageri. In acest scop s-au definit și indici de confort ale căror valori limită sunt prescrise prin standarde sau norme de fabricație.

In timpul transportului unor mărfuri, gradul de confort nu este atât de important și de aceea atenuarea vibrațiilor prin dispozitive de amortizare trebuie să asigure numai limitarea nivelelor de vibrații astfel încât să nu fie posibilă deteriorarea mecanică. Aici se folosesc arcuri cu foi multiple care, în urma încovoierii produc alunecări relative, energia disipându-se prin forțele de frecare uscată. Mecanismul disipării energiei este destul de complex și de aceea caracteristicile de amortizare sunt date numai global.

Dezvoltarea metodelor numerice, și în special a puterii de

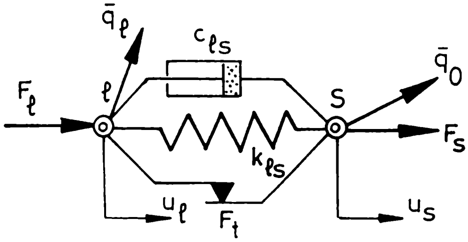

Fig.5.10

calcul, uşurează posibilităţile de analiză dinamică a unui sistem complex, aşa cum este cazul sistemelor care au disipare de energie prin frecare uscată. Elemente disipative cu forţe de frecare uscată (coulombiană) pot fi utilizate în toate cele trei cazuri prezententate în Fig.5.10. Ele se pot realiza prin soluţii constructive mult mai simple decât cele hidraulice sau electrodinamice.

Pentru a urmări modul de lucru al unui dispozitiv de disipare prin frecare uscată, se consideră că acesta este amplasat între punctele l şi s. Deplasării relative dintre punctele l şi s se opun forţa elastic $-k_{ls}(u_l-u_s)$, de amortizare vâscoasă $-c_{ls}(u_l-u_s)$ şi o forţă de legătură introdusă de dispozitivul de frecare uscată F_f. Toate aceste forţe sunt interioare şi de aceea echilibrul lor în punctele l şi s se scrie sub forma

$$\begin{aligned} F_l - k_{ls}(u_l-u_s) - c_{ls}(\dot{u}_l-\dot{u}_s) + F_f = 0 \\ F_s - k_{ls}(u_s-u_l) - c_{ls}(\dot{u}_s-\dot{u}_l) - F_f = 0 \end{aligned} \tag{5.69}$$

unde F_l şi F_s sunt proiecţiile pe direcţia ls ale rezultantei forţelor de inerţie reduse în punctele l şi s şi ale proiecţiilor forţelor de legătură ale celor două puncte cu alte puncte ale sistemului. Prin introducerea cuplajului de frecare uscată, având forţa de aderenţă R_{ls}, între punctele l şi s va apare o forţă de legătură F_f

$$F_f = -R_{ls} sign(\dot{u}_l-\dot{u}_s), \quad sign(\dot{u}_l-\dot{u}_s) = \begin{cases} 1, pentru\ \dot{u}_l-\dot{u}_s>0 \\ 0, pentru\ \dot{u}_l-\dot{u}_s=0 \\ -1, pentru\ \dot{u}_l-\dot{u}_s<0 \end{cases} \tag{5.70}$$

Pentru orice altă forţă de legătură F_f rezultată din echilibru dinamic având valoarea absolută

$$|F_f|<R_{ls} \tag{5.71}$$

nu va fi capabilă să rupă legătura dintre s şi l. Trecerea de la o stare de mişcare la o stare de repaus relativ se poate face numai în momentul în care viteza relativă trece prin zero, forţa de frecare de aderenţă schimbându-şi brusc sensul, apărând şi un salt în acceleraţie. Variaţia bruscă a acceleraţiei va produce o discontinuitate şi în ecuaţiile de echilibru dinamic (5.69), putând să apară condiţia (5.71). Repausul relativ se va face acum şi în cazul în care $u_1 = u_s$, adică $u_1 = u_s + u_{1s}$, căruia îi corespunde o forţă de pretensionare a arcului de legătură dintre punctele 1 şi s şi a carei valoare este $k_{1s}u_{1s}$. Continuând mişcarea cele două puncte se pot desprinde din nou în momentul în care condiţia (5.71) este îndeplinită şi care se va scrie acum sub forma

$$F_1 = -R_{1s}sign(\dot{u}_1-\dot{u}_s) - k_{1s}u_{1s} \tag{5.72}$$

u_{1s} fiind deplasarea relativă în momentul în care a avut loc rigidizarea precedentă.

Cele două situaţii, de mişcare relativă şi de rigidizare a legăturii, constituie modificări structurale, mişcările punctelor sistemului fiind guvernată de două sisteme de ecuaţii diferenţiale diferite.

Pentru cazul miscării relative dintre punctele legate prin dispozitivul de frecare uscată, sistemul va avea forma

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F(t)\} - R_{s1}sign(\dot{u}_1-\dot{u}_s)\{e\} \tag{5.73}$$

La scrierea vectorului {e} se ţine cont de faptul că vectorul forţei de legătură F_f este după direcţia 1s, având cosinuşii directori e_1, e_2 şi e_3 faţă de sistemul la care este raportat vectorul legii de mişcare {q}. Dacă discretizarea sistemului se face pe baza elementelor finite, atunci pentru o mişcare plană în punctele s şi 1 vom avea trei grade de libertate. Vectorul {e} se va forma ţinând cont de poziţiile legilor de mişcare ca elemente ale vectorului {q}.

$$\begin{aligned}\{q\}^T &= \{q_1, q_2, \ldots, q_{11}, q_{21}, q_{31}, \ldots, q_{1s}, q_{2s}, q_{3s}, \ldots, q_n\} \\ \{e\}^T &= \{0, 0, \ldots, e_1, e_2, e_3, \ldots, -e_1, -e_2, -e_3, \ldots, 0, 0\}\end{aligned} \tag{5.74}$$

In cazul în care apare rigidizarea legăturii cele şase coordonate ale punctelor 1 şi s nu mai sunt independente, existând legatura

$$\dot{u}_1 - \dot{u}_s = \sum_{i=1}^{3} e_i(\dot{q}_{i1} - \dot{q}_{is}) = 0 \tag{5.75}$$

Relaţia (5.75),scrisă in cazul micilor oscilaţii, când axele mişcărilor vibratorii q_1 şi q_s rămân aproape neschimbate, rămâne valabilă şi pentru deplasări şi acceleraţii. Pentru deplasări se poate scrie ,

$$e_1(q_{1l}-q_{1s}) + e_2(q_{2l}-q_{2s}) + e_3(q_{3l}-q_{3s}) = u_{ls} \qquad (5.76)$$

unde u_{ls} s-a introdus datorită condiţiilor iniţiale rămase de la precedenta rigidizare. Prin eliminarea unei coordonate din ecuaţia de legătură (5.76) se obţine un nou vector al legilor de mişcare, redus cu un grad de libertate. Între vechiul vector al legilor de mişcare şi noul vector se poate scrie relatia de legătură

$$\{q\} = [D_r]\{q_r\} \qquad (5.77)$$

unde elementele matricei $[D_r]$ se formează pe baza relaţiei (5.76) Introducând relaţia (5.77) în ecuatia matriceală (5.73) se obţine

$$[M_r]\{\ddot{q}_r\} + [C_r]\{\dot{q}_r\} + [K_r]\{q_r\} = \{F_r(t)\} \qquad (5.78)$$

unde

$$\begin{aligned} [M_r] &= [D_r]^T[M][D_r], \quad [C_r] = [D_r]^T[C][D_r], \\ [K_r] &= [D_r]^T[K][D_r], \quad \{F_r(t)\} = [D_r]^T\{F(t)\} \end{aligned} \qquad (5.79)$$

5.3.1. Aplicaţie

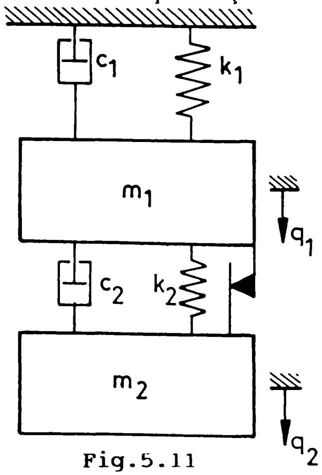

Fig.5.11

Pentru a exemplifica modelele dinamice fundamentate în paragraful precedent, se consideră un sistem simplu cu două grade de libertate, pe care se studiază de fapt o gamă mare de probleme ale vibraţiilor incluzând: studiul amortizorului dinamic acordat, studiul transmisibilităţii, etc. Mişcările vibratorii ale celor două mase sunt determinate prin legile de mişcare unidirecţionale q_1 şi q_2, prin urmare $e_1 = 1$, $e_2 = e_3 = 0$.

Sistemul de ecuaţii diferenţiale pentru situaţia în care cele două mase au mişcări vibratorii independente este de forma

$$[M]\begin{Bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{Bmatrix} + [C]\begin{Bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{Bmatrix} + [K]\begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}F_1(t)\\ 0\end{Bmatrix} - R_{12}sign(\dot{q}_1-\dot{q}_2)\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix} \qquad (5.80)$$

unde

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \tag{5.81}$$

Ecuaţiile de echilibru dinamic (5.69) se scriu sub forma unei singure ecuaţii

$$-m_2\ddot{q}_2 - k_2(q_2-q_1) - c_2(\dot{q}_2-\dot{q}_1) - F_f = 0 \tag{5.82}$$

sau, dacă se explicitează deplasarea relativă $q_2 = q_1 + q_r$

$$m_2\ddot{q}_r = -m_2\ddot{q}_1 - k_2(q_2-q_1) - c_2(\dot{q}_2-\dot{q}_1) - F_f \tag{5.83}$$

unde F_f este dată de (5.70) numai dacă există mişcare relativă între cele două corpuri.

Sistemul de ecuaţii corespunzător cazului în care legătura dintre cele două corpuri se rigidizează, se obţine din (5.78), prin transformarea

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = [D_r]\,q_1, \quad [D_r] = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{5.84}$$

Astfel, din sistemul (5.78) rezultă o singură ecuaţie

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + c_1\dot{q}_1 + k_1 q_1 = F(t) \tag{5.85}$$

cu ecuaţia de legătură

$$q_2 = q_1 + q_{12} \tag{5.86}$$

unde q_{12} este deplasarea statică relativă a celor două mase m_2 faţă de m_1, în momentul rigidizării legăturii. Pentru această situaţie, datorită echilibrului relativ, relaţia de legătură (5.83) va deveni

$$-m_2\ddot{q}_1 - k_2 q_{12} - F_f = 0 \tag{5.87}$$

cu condiţia ca să se păstreze inegalitatea $|F_f| < R_{t}$. In momentul în care sub rezultanta forţei de ineţie de transport $-m_2 q_1$ şi a forţei elastice remanente $k_2 q_{12}$ va deveni egală cu forţa de aderenţă, cele două mase se desprind din nou mişcându-se independent, după soluţiile sistemului (5.80), iar urmărirea valorii forţei de legătură se va face după relaţia (5.83). Condiţia de rigidizare a legăturii dintre cele două corpuri impune ca vitezele lor să devină egale. Deci, aceste fenomene de cuplare şi de decuplare a celor două corpuri nu sunt de natură impulsivă.

Variaţii de salt apar numai în acceleraţii în momentul în care se schimbă semnul forţei de frecare uscată.

5.3.2. Exemplu numeric

In figurile 5.12 se prezintă vibrogramele rezultate în urma simulării dinamice a unui sistem vibrant cu două grade de libertate având configuraţia din Fig.5.11. Pentru a scoate în evidenţă efectul forţei de frecare uscată R_{12} s-a considerat situaţia unei structuri foarte slab amortizate. In model aceasta înseamnă ca $c_1 = c_2 = 0$. Pentru a simula funcţionarea unui amortizor dinamic acordat la frecvenţe joase, cum este şi cazul agregatelor de vânt cu ax orizontal, a carui model mai complex este prezentat in paragraful 4.5.2, se va considera m_1 = 10.000 Kg ca fiind masa redusă a nacelei, o constantă elastică echivalentă a turnului k_1 = 600.000 N/m ceea ce dă o frecvenţă proprie $f_1 = 1/2\pi\sqrt{k_1/m_1} = 1,23$ Hz, apropiată de cea corespunzătoare modului fundamental şi măsurată pe agregatul de 300 Kw de pe Semenic. Vom presupune că sistemul ataşat are aceiaşi frecvenţă proprie, deci este acordat cu sistemul primar. Acesta are masa m_2 = 200 Kg. ceea ce reprezinta 2% din masa m_1, deci de cinci ori mai mică decât valorile prescrise în literatura de specialitate pentru amortizoarele dinamice ataşate sistemului prin frecare vâscoasă. Constanta elasică a acestuia este k_2 = 12 000 N/m. Sistemul se consideră perturbat prin condiţiile iniţiale la $t = 0$ $q_1 = q_2 = 40$ mm. In lipsa amortizării şi dacă masele m_1 şi m_2 ar fi unite s-ar obţine o vibraţie armonică sau, în cazul unei slabe amorizări, vibraţia se stinge foarte încet.

Pentru a se vedea influenţa mărimii forţei de aderenţă R_{12} asupra atenuării nivelelor de vibraţii se analizează vibrogramele rezultate în urma integrării numerice prin metoda Runge-Kutta a sistemului de ecuaţii diferenţiale.

In figura 5.12.a, unde R_{12} = 60 N stingerea vibraţiilor libere se face după 17 sec., în condiţiile iniţiale date, după care cele două mase se unesc vibrând neamortizat, deorece amortizarea din sistem s-a neglijat iar dispozitivul de frecare uscată s-a blocat. Deşi raportul maselor m_2/m_1 este de numai 2% amplitudinile finale ale vibraţiilor q_{10f} şi q_{20f} vor fi numai 8,17% din amplitudinile iniţiale $q_1(0) = q_2(0) = 40$ mm, deci o reducere a nivelului de vibraţie de 91,83% Elongaţiile dispozitivului ataşat ating valori mari de până la $6\times q_1(0) = 240$ mm, ceea ce este greu de realizat din

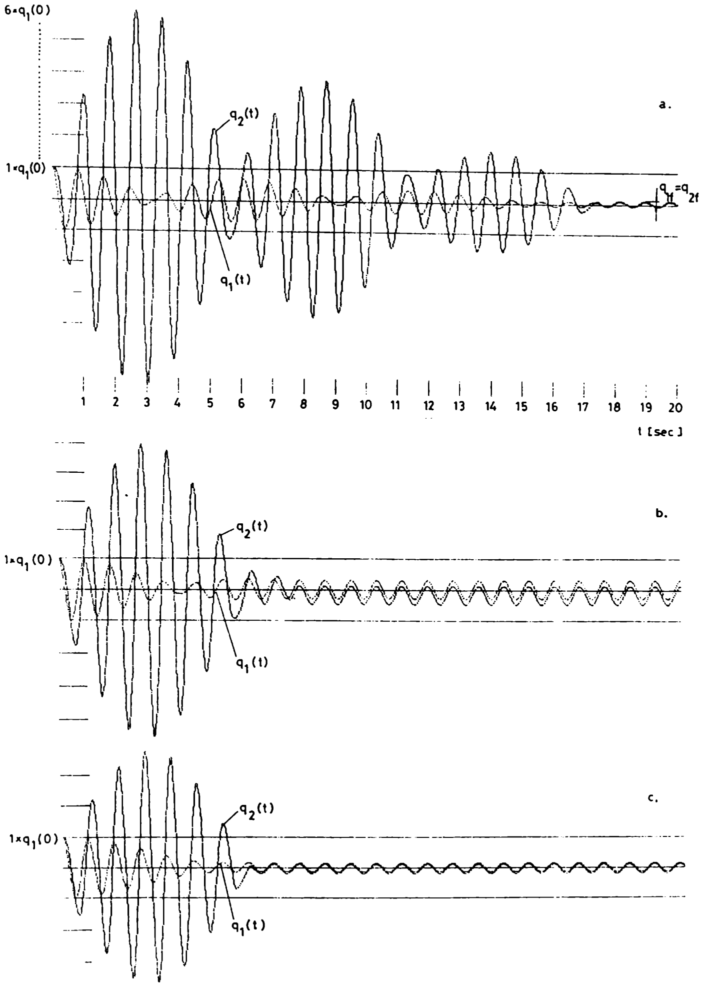

Fig.5.12

punct de vedere practic. In proiectarea unui astfel de dispozitiv trebuie avut în vedere şi gabaritul în care se poate încadra, fiind necesar un spaţiu liber de oscilaţie. De asemenea se constată că timpul de stingere a vibraţiilor este relativ mare (17 sec.), incluzând şi un număr mare de cicluri. Pentru diferite valori ale forţei de aderenţă R_{12}, se obţine următorul set de valori

Tabelul 1

R12 (N)	100	110	120	140	150	160	170	175	180	190	200
Niv.reduc. %	90,5	85	77	73	71	80,3	82,3	83,2	84,8	84,6	80,8

Din valorile de mai sus se observă micşorarea uşoară a gradului de atenuare până la R_{12} = 130 N, la care gradul de atenuare este 71%. Pentru această valoare a forţei R_{12} timpul de stingere a oscilaţiiilor este 5,5 sec., valorile mxime ale elongaţiilor scad la 180 mm. Valoare optimă pentru forţa de aderenţă este de 180 N Fig.12. b, pentru care gradul de atenuare este de 84,8%, timpul de stingere este de 6 sec., iar valoarea elongaţiei maxime ale masei m_2 nu depăşeşte 140 mm. Mărind în continuare forţa de aderenţă, până la valoarea de 300 N, se poate realiza în 5,5 sec. o atenuare de 43%,vibrograma din Fig.12.c şi elongaţiile maxime pentru masa m_2 de numai 60 mm. Programul de calcul care s-a realizat pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale şi obţinerea vibrogramelor este realizat pentru un sistem de n grade de libertate în care se pot introduce legături cu comportament neliniar şi forţe perturbatoare care au legi de variaţie în timp, oricât de generale.

CAPITOLUL VI

APLICAŢII PRIVIND OPTIMIZAREA RĂSPUNSULUI DINAMIC AL STRUCTURILOR MECANICE

6.1 Modificări structurale

Sistemele de control activ ale vibraţiilor, deşi asigură cele mai perfomante rezultate, datorită costurilor ridicate şi fiabilitaţii mai scăzute decât a sistemelor pasive, a determinat reorientarea problemei de optimizare a comportării dinamice a structurilor în favoarea celor din urmă. Tehnicile de analiză modală sunt astazi cele mai frecvent utilizate metode in studiul şi analiza comportării dinamice ale unei structuri. Imbunătăţirea caracteristicilor modale au o mare importanţă încă din faza de proiectare a unei structuri mecanice. Pasul de dimensionare este strict necesar pentru a pune sub control corespondenţa dintre structură şi comportarea dinamică impusă. Rareori se ajunge din faza de proiectare la obţinerea rezultatelor dorite. Prin schmbarea unor proprietăţi structurale se ajunge la a repeta alte calcule cu noile proprietaţi, acest proces iterativ devenind anevoios, rapid amplificat, mai ales în cazul sistemelor mari.

O alternativă la acest calcul convenţional o reprezintă reanaliza modală. Aceasta presupune ca pe baza cunoaşterii caracteristicilor modale iniţiale şi modificările făcute să se determine comportarea structurii. Aceasta constituie problema directă pusă in modificările structurale.

Modificările structurale au posibilitatea luării în considerare şi impunerea comportării dinamice a structurilor existente. In acest context, probema inversă a modificărilor structurale, se pune in felul următor: Dându-se caracteristicile modale ale structurii şi caracteristicile modale dorite pentru structură, este necesar a se determina modificările ce trebuie făcute pentru a se asigura aceste noi caracteristici. Ataşarea de substructuri, cum este cazul absorbitorilor de vibraţii, poate fi abordată ca o modificare structurală. Evident că, în acest caz, numărul gradelor de libertate ale structurii se va modifica corespunzător cu numarul gradelor de libertate "aduse" prin cuplarea sa de alte substructuri.

6.1.1. Ecuaţiile de mişcare pentru o structură modificată

In paragrafele precedente s-a analizat posibilitatea optimizării unei structuri prin modificări structurale. Pentru realizarea programelor de calcul este necesară o cunoaştere completă nu numai a parametrilor elementelor care se ataşează structurii, ci mai ales locul de amplasare în structură, şi prin aceasta cunoaşterea elementelor matricelor de asamblare.

Considerând încă o dată ecuaţiile de mişcare pentru un sistem dinamic cu n grade de libertate scrise sub forma

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F(t)\} \tag{6.1}$$

şi că toate modificările în structură se fac fără schimbarea numărului gradelor de libertate, în urma acestor modificări sistemul de ecuaţii (6.1) devine

$$([M] + [M_a])\{\ddot{q}\} + ([C] + [C_a])\{\dot{q}\} + ([K] + [K_a])\{q\} = \{F(t)\} \tag{6.2}$$

unde $[M_a]$, $[C_a]$ şi $[K_a]$ sunt matricele de inerţie, de amortizare şi de rigiditate asamblate, corespunzătoare tuturor elementelor ataşate structurii.

Pasul următor îl constituie deducerea acestor matrice asamblate pentru care se va analiza, pe rând, fiecare element introdus în structură.

Pentru obţinerea matricei de inerţie a elementelor ataşate se va considera, în primul caz, că fiecare masă m_q este concentrată într-un nod corespunzător coordonatei q. Matricea elementară, corespunzătoare acestei modificări, poate fi exprimată în următoarea formă

$$[\Delta M_q] = m_q\{e_q\}\{e_q\}^T = m_q\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

unde

$$\{e_q\}^T = \{0,0,0,\ldots\ldots,1,0,\ldots,0\} \tag{6.4}$$

Elementul nenul corespunde coordonatei q. Matricea de inerţie asamblată va rezuta prin însumarea tuturor matricelor elementare

$$[M_a] = \sum_{q=1}^{N_1} [\Delta M_q] \tag{6.5}$$

Este evident că această matrice va avea toate elementele nule exceptând cele de pe diagonala principală corespunzătoare celor N_1 coordonate in care se ataşează mase.

In cazul în care în structură se introduce un disipator local, între două puncte ale acesteia, matricea elementară de amortizare corespunzătoare acestei modificări va avea forma

$$[\Delta C_r] = c_r\{e_{ij}\}\{e_{ij}\}^T = c_r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & -1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & -1 & 0 & . & . & 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

unde

$$\{e_{ij}\} = \{0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0\} \tag{6.7}$$

elementele nenule din vectorul $\{e_{ij}\}$ corespund coordonatelor i şi j între care se plasează disipatorul.

In mod asemănător, pentru o modificare de rigiditate k_r intre două coordonate i şi j, matricea de rigiditate elementară va avea forma

$$[\Delta K_s] = k_s\{e_{ij}\}\{e_{ij}\}^T = k_s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & -1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & -1 & 0 & . & . & 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

Cu aceste matrice elementare se pot găsi matricele asamblate corespunzătoare

$$[C_a] = \sum_{r=1}^{N_2} [\Delta C_r], \quad [K_a] = \sum_{s=1}^{N_3} [\Delta K_s] \qquad (6.9)$$

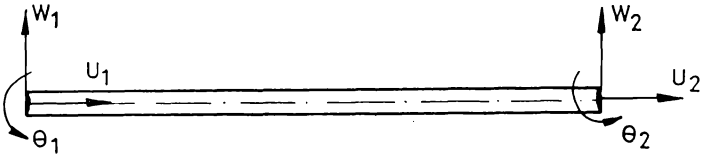

Fig.6.1

Pentru cazul în care elementele de modificare sunt de tip bară (Fig.6.1), dacă matricea coloană a gradelor de libertate, pentru cele două noduri şi o mişcare plană, este aranjată astfel

$$\{q\}^T = \{u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2\} \qquad (6.10)$$

matricea elementară de rigiditate este

$$[\Delta K_b] = [\Delta K_i] + [\Delta K_l] \qquad (6.11)$$

unde matricele $[\Delta K_i]$ şi $[\Delta K_l]$ sunt contribuţiile date separat de încovoiere şi respectiv de întindere. Expresiile celor două matrice sunt

$$[\Delta K_i] = \frac{EI}{(1+\Gamma)\, l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4(1+\Gamma/4)\, l^2 & 0 & -6l & 2(1-\Gamma/2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2(1-\Gamma/2)\, l^2 & 0 & -6l & 4(1+\Gamma/4)\, l^2 \end{bmatrix} \qquad (6.12)$$

$$[\Delta K_l] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (6.13)$$

In mod asemănător se poate scrie şi matricea de inerţie corespunzătoare elementului de bară

$$[\Delta M_b] = [\Delta M_t] + [\Delta M_r] + [\Delta M_l] \tag{6.14}$$

unde matrice $[\Delta M_t]$ corespunde inerţiei datorate deplasării transversale, matricea $[\Delta M_r]$ inerţiei de rotaţie, iar matricea $[\Delta M_l]$ corespunde inerţiei date de deplasarea axială. Cele trei matrice au următoarele expresii

$$[M_t]=m_t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35}(1+\frac{49}{26}\Gamma) & \frac{11}{210}(1+\frac{7}{4}\Gamma)l & 0 & \frac{9}{70}(1+\frac{7}{3}\Gamma) & -\frac{13}{420}(1+\frac{63}{26}\Gamma)l \\ 0 & \frac{11}{210}(1+\frac{7}{4}\Gamma)l & \frac{1}{105}(1+\frac{7}{4}\Gamma)l^2 & 0 & \frac{13}{420}(1+\frac{63}{26}\Gamma)l & -\frac{1}{140}(1+\frac{7}{3}\Gamma)l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70}(1+\frac{7}{3}\Gamma) & \frac{13}{420}(1+\frac{63}{26}\Gamma)l & 0 & \frac{13}{35}(1+\frac{49}{26}\Gamma) & -\frac{11}{210}(1+\frac{7}{4}\Gamma)l \\ 0 & -\frac{13}{420}(1+\frac{63}{26}\Gamma)l & -\frac{1}{140}(1+\frac{7}{3}\Gamma)l^2 & 0 & -\frac{11}{210}(1+\frac{7}{4}\Gamma)l & \frac{1}{105}(1+\frac{7}{4}\Gamma)l^2 \end{bmatrix}$$

$$[M_r]=\frac{\rho l I}{(1+\Gamma)^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{1}{10}(1-5\Gamma)l & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10}(1-5\Gamma)l \\ 0 & \frac{1}{10}(1-5\Gamma)l & \frac{2}{15}(1+\frac{5}{4}\Gamma)l^2 & 0 & -\frac{1}{10}(1-5\Gamma)l & -\frac{1}{30}(1+5\Gamma)l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10}(1-5\Gamma)l & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10}(1-5\Gamma)l \\ 0 & \frac{1}{10}(1-5\Gamma)l & -\frac{1}{30}(1+5\Gamma)l^2 & 0 & -\frac{1}{10}(1-5\Gamma)l & \frac{2}{15}(1+\frac{5}{4}\Gamma)l^2 \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

$$[M_l] = \frac{\rho A l}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

unde $\Gamma = 12EI\alpha/GAl^2$ şi prin care se ţine cont de efectul forţelor tăietoare, α fiind o constantă ce depinde de forma secţiunii, $m_t = \rho Al/(1+\Gamma)^2$

Aceste expresii sunt deduse în raport cu un sistem de coordonate local. Pentru a putea fi asamblate în matricele $[M_s]$ si

$[K_n]$ trebuie raportate la sistemul global de coordonate. Dacă se notează cu $[T]$ matricea de transformare ce conţine cosinuşii directori ai elementului de bară în plan, faţă de sistemul global, atunci matricele elementare din sistemul global vor fi

$$[\Delta K_{bg}] = [T]^T[\Delta K_b][T], \quad [\Delta M_{bg}] = [T]^T[\Delta M_b][T] \qquad (6.17)$$

In unele cazuri, includerea deformaţiei date de forţele tăietoare este de nedorit sau aduce modificări nesemnificative, astfel că matricele se simplifică dacă se pune Γ egal cu zero. In acelaşi mod, în mod frecvent se neglijează efectul inerţiei de rotaţie şi în acest caz se ia $[M_r] = [0]$.

Se constată că parametrii care vor intra în calculul optimizării comportării dinamice a structurilor, odată stabiliţi coeficienţii de material ρ, E şi G, sunt elemente geometrice, în special cele legate de secţiunea barei.

Un caz frecvent de probleme legate de modificările structurale este cel al comportării dinamice a unei structuri rezultate din doua sau mai multe substructuri. Ca un caz particular, aici se poate încadra şi absorbitorul dinamic. Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării unei structuri rezultate din cuplarea a două substructuri se poate scrie

$$\begin{bmatrix}[M_p] & [0]\\ [0] & [M_s]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\ddot{q}_p\}\\ \{\ddot{q}_s\}\end{Bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}[C_p] & [0]\\ [0] & [C_s]\end{bmatrix}+[C_c]\right)\begin{Bmatrix}\{\dot{q}_p\}\\ \{\dot{q}_s\}\end{Bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}[K_p] & [0]\\ [0] & [K_s]\end{bmatrix}+[K_c]\right)\begin{Bmatrix}\{q_p\}\\ \{q_s\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F_p(t)\}\\ \{F_s(t)\}\end{Bmatrix} \qquad (6.18)$$

Pentru determinarea matricelor $[C_c]$ şi $[K_c]$, care reprezintă matricea de amortizare de cuplare respectiv matricea de rigiditate de cuplare a celor două substructuri se pun aceleaşi probleme ca şi în cazurile tratate mai sus. Dacă s-a notat cu n_p numărul gradelor de libertate ale structurii principale iar n_s numărul gradelor de libertate ale structurii secundare, atunci numărul gradelor de libertate ale structurii rezultate va fi $n = n_p + n_s$.

6.1.2. Aplicaţii ale modificărilor structurale

6.1.2.1. Deducerea unor relaţii noi între parametrii modali

Se consideră ecuaţia diferenţială a vibraţiilor forţate ale unui sistem cu n grade de libertate în prezenţa amortizării vâscoase dată de (6.1). Sistemul algebric al valorilor proprii şi vectorilor proprii este

$$(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K])\{x\} = \{0\} \tag{6.19}$$

care este verificat de n perechi de valori proprii complex conjugate

$$\lambda_r = -\sigma_r + j\omega_r, \quad \lambda_r^* = -\sigma_r - j\omega_r, \quad r = 1,n \tag{6.20}$$

cărora le corespund n perechi de vectori proprii complecsi conjugaţi

$$\{x_r\} = \{x_{Rr}\} + j\{x_{Ir}\}, \quad \{x_r\}^* = \{x_{Rr}\} - j\{x_{Ir}\}, \quad r = 1,n \tag{6.21}$$

Inlocuind (6.20) si (6.21) în (6.19) si separând parţile reale si imaginare se obţin doua sisteme de ecuaţii algebrice

$$\begin{aligned} &\big((\sigma_r^2 - \omega_r^2)[M] - \sigma_r[C] + [K]\big)\{x_{Rr}\} + (2\omega_r\sigma_r[M] - \omega_r[C])\{x_{Ir}\} = \{0\} \\ &(-2\omega_r\sigma_r[M] + \omega_r[C])\{x_{Rr}\} + \big((\sigma_r^2 - \omega_r^2)[M] - \sigma_r^2[C] + [K]\big)\{x_{Rr}\} = \{0\} \end{aligned} \tag{6.22}$$

Valorile proprii λ_r, care contin factorii de amoritzare σ_r, pulsatiile ω_r, si vectorii complecsi conjugati se pot determina pe baza analizei modale experimentale a răspunsului sistemului.

In continuare se pot deduce cateva relaţii importante între parametrii modali [14]. Dacă se multiplică la stânga prima ecuaţie din (6.22) cu $\{x_{Ir}\}^T$ iar a doua ecuaţie cu $\{x_{Rr}\}^T$ se obţine

$$\begin{aligned} &\{x_{ir}\}^T\big((\sigma_r^2-\omega_r^2)[M]-\sigma_r[C]+[K]\big)\{x_{Rr}\}+\{x_{Ir}\}^T(2\omega_r\sigma_r[M]-\omega_r[C]) = \{0\} \\ &\{x_{Rr}\}^T(-2\omega_r\sigma_r[M]+\omega_r[C])\{x_{Rr}\}+\{x_{Rr}\}^T\big((\sigma_r^2-\omega_r^2)[M]-\sigma_r[C]+[K]\big)\{x_{Ir}\} = \{0\} \end{aligned} \tag{6.23}$$

in care ţinând cont de faptul că matricele [M], [C] si [K] sunt matrice patratice şi simetrice există, este asigurată comutativitatea produsului scalar

$$\{x_{Ir}\}^T\cdot[M]\cdot\{x_{Rr}\} = \{x_{Rr}\}^T\cdot[M]\cdot\{x_{Ir}\} \tag{6.24}$$

şi inca doua analoage pentru matricele [C] si [K]. Prin scaderea relatiilor (6.23) se ajunge la ecuaţia

$$\{x_{Ir}\}^T(2\omega_r\sigma_r[M] - \omega_r[C])\{x_{Ir}\} - \{x_{Rr}\}^T(-2\omega_r\sigma_r[M] + \omega_r[C])\{x_{Rr}\} = 0 \quad (6.25)$$

care mai departe duce la explicitarea coeficientului de amortizare modală

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\frac{\{x_{Rr}\}^T[C]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[C]\{x_{Ir}\}}{\{x_{Rr}\}^T[M]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[M]\{x_{Ir}\}} \quad (6.26)$$

relaţie foarte importantă pentru determinarea modificărilor parametrilor modali în urma unor modificări structurale şi pentru verificarea acurateţii procesului de identificare a modelului fizic al structurii.

O a doua relatie foarte importanta se poate obtine tot din ecuatiile (6.22) daca se inmulteste prima ecuatie cu $\{x_{Rr}\}^T$ iar a doua cu $\{x_{Ir}\}^T$ obţinându-se

$$\begin{aligned} &\{x_{Rr}\}^T\left((\sigma_r^2-\omega_r^2)[M]-\sigma_r[C]+[K]\right)\{x_{Rr}\}+\{x_{Rr}\}^T(2\omega_r\sigma_r[M]-\omega_r[C])\{x_{Ir}\} = 0 \\ &\{x_{Ir}\}^T(-2\omega_r\sigma_r[M]+\omega_r[C])\{x_{Rr}\}+\{x_{Ir}\}^T\left((\sigma_r^2-\omega_r^2)[M]-\sigma_r[C]+[K]\right)\{x_{Ir}\} = 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

care prin sumare dă ecuaţia

$$\{x_{Rr}\}^T\left((\sigma_r^2-\omega_r^2)[M]-\sigma_r[C]+[K]\right)\{x_{Rr}\}+\{x_{Ir}\}^T\left((\sigma_r^2-\omega_r^2)[M]-\sigma_r[C]+[K]\right)\{x_{Ir}\} = 0 \quad (6.28)$$

în care se înlocuieşte din (6.27) suma $\{x_{Rr}\}^T[C]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[C]\{x_{Ir}\}$, obţinându-se

$$\sigma_r^2 + \omega_r^2 = \frac{\{x_{Rr}\}^T[K]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[K]\{x_{Ir}\}}{\{x_{Rr}\}^T[M]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[M]\{x_{Ir}\}}, \quad r = 1,n \quad (6.29)$$

care reprezintă o a doua relatie importanta în determinarea modificărilor parametrilor modali in urma unor modificări structurale şi în verificarea procesului de identificare a modelului fizic al structurii.

In cazul teoretic al unei structuri pentru care amortizarile sunt neglijabile ($[C] = [0]$) rezultă din (6.20) $\sigma_r = 0$, vectorii proprii sunt reali, conţinând numai componentele $\{x_{Rr}\}$ (componentele imaginare fiind nule, $\{x_{Ir}\} = \{0\}$), iar din relatia (6.29) se obţin pulsatiile naturale ω_r

$$\omega_r^2 = \frac{\{x_r\}^T[K]\{x_r\}}{\{x_r\}^T[M]\{x_r\}}, \quad r = 1,n \tag{6.30}$$

o relaţie cunoscută sub numele de relaţia lui Rayleigh [128].

6.1.2.2. Influenta unor modificări structurale asupra parametrilor modali

Dacă într-o structură dată se fac câteva mici modificări structurale, matricea de inerţie devine [M] +[ΔM], matricea de rigiditate devine [K] + [ΔK], iar matricea de amortizare [C] + [ΔC]. Parametrii modali se vor schimba şi ei in felul următor: pulsaţiile devin $\omega_r + \Delta\omega_r$, factorii de amortizare devin $\sigma_r + \Delta\sigma_r$ iar componentele reale şi imaginare ale vectorilor proprii complecşi se schimbă în $\{x_{Rr}\} + \{\Delta x_{Rr}\}$ şi respectiv în $\{x_{Ir}\} + \{\Delta x_{Ir}\}$. Inlocuind toate aceste modificări în relaţia (6.26), se obţine:

$$\begin{aligned}
&2(\sigma_r+\Delta\sigma_r)(\{x_{Rr}\}+\{\Delta x_{Rr}\})^T([M]+[\Delta M])(\{x_{Rr}\}+\{\Delta x_{Rr}\})+\\
&2(\sigma_r+\Delta\sigma_r)(\{x_{Ir}\}+\{\Delta x_{Ir}\})^T([M]+[\Delta M])(\{x_{Ir}\}+\{\Delta x_{Ir}\}) = \\
&(\{x_{Rr}\}+\{\Delta x_{Rr}\})^T([C]+[\Delta C])(\{x_{Rr}\}+\{\Delta x_{Rr}\})+(\{x_{Ir}\}+\{\Delta x_{Ir}\})^T([C]+C])(\{x_{Ir}\}+\{\Delta x_{Ir}\})
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Neglijând termenii de ordinul doi ecuaţia (6.31) conduce la următoarea relatie

$$\begin{aligned}
\sigma_r^* = &\frac{1}{2}\,\frac{\{x_{Rr}\}^T[\Delta C]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[\Delta C]\{x_{Ir}\}}{\{x_{Rr}\}^T[M]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[M]\{x_{Ir}\}} + \\
&+ \sigma_r\left(1 - \frac{\{x_{Rr}\}^T[\Delta M]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[\Delta M]\{x_{Ir}\}}{\{x_{Rr}\}^T[M]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[M]\{x_{Ir}\}}\right)
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Aplicând acelaşi procedeu pentru relaţia (6.29), se obţine relaţia(6.33), unde σ_r^*, ω_r^* sunt factorii de amortizare modali, respectiv pulsaţiile proprii ale structurii în urma modificărilor structurale.

$$\omega_r^* = \omega_r + \frac{1}{2\omega_r} \frac{\{x_{Rr}\}^T[\Delta K]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[\Delta K]\{x_{Ir}\} - \omega_r^2(\{x_{Rr}\}^T[\Delta M]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[\Delta M]\{x_{Ir}\}}{\{x_{Rr}\}^T[M]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[M]\{x_{Ir}\}}$$

$$+ \frac{\sigma_r}{2\omega_r} \frac{\{x_{Rr}\}^T[\Delta C]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[\Delta C]\{x_{Ir}\}}{\{x_{Rr}\}^T[M]\{x_{Rr}\} + \{x_{Ir}\}^T[M]\{x_{Ir}\}} \tag{6.33}$$

Considerând cazul amortizării structurale sau amortizărilor proporţionale, pentru care vectorii proprii reali ai sistemului [M]-[K] sunt şi vectori proprii ai sistemului amortizat, relaţiile de mai sus devin

$$\sigma_r^* = \frac{1}{2} \frac{\{x_r\}^T[\Delta C]\{x_r\}}{\{x_r\}^T[M]\{x_r\}} + \sigma_r\left(1 - \frac{\{x_r\}^T[\Delta M]\{x_r\}}{\{x_r\}^T[M]\{x_r\}}\right) \tag{6.34}$$

şi respectiv

$$\omega_r^* = \omega_r + \frac{1}{2\omega_r} \frac{\{x_r\}^T[\Delta K]\{x_r\} - \omega_r^2\{x_r\}^T[\Delta M]\{x_r\}}{\{x_r\}^T[M]\{x_r\}}$$

$$+ \frac{\sigma_r}{2\omega_r} \frac{\{x_r\}^T[\Delta C]\{x_r\}}{\{x_r\}^T[M]\{x_r\}} \tag{6.35}$$

Pentru sistemele neamortizate şi în care nu se fac modificări structurale prin amortizări se obţine relaţia

$$\omega_r^* = \omega_r + \frac{1}{2\omega_r} \frac{\{x_r\}^T[\Delta K]\{x_r\}}{\{x_r\}^T[M]\{x_r\}} - \frac{1}{2}\omega_r \frac{\{x_r\}^T[\Delta M]\{x_r\}}{\{x_r\}^T[M]\{x_r\}}. \tag{6.36}$$

6.1.2.3. Modificări ale parametrilor modali în cazul unor defecte în structuri

Punerea în evidenţa a unor modificări în parametrii modali ai unei structuri în urma unor deteriorări, poate deveni o metodă nedistructivă foarte puternică pentru verificarea integrităţii acesteia prin analiza modală. Mărimea schimbărilor in frecventele proprii şi in factorii de mortizare modală depinde de locul şi mărime deteriorării în structură. In urma unor deteriorări într-o structură dată, în general matricea de inerţie nu se schimbă $[\Delta M] = [0]$, prin urmare modificările în parametrii modali sunt date de formulele

$$\sigma_r^* = \sigma_r - \frac{1}{2}\frac{\{X_{Rr}\}^{T}C]\{X_{Rr}\} + \{X_{Ir}\}^{T}[\Delta C]\{X_{Ir}\}}{\{X_{Rr}\}^{T}[M]\{X_{Rr}\} + \{X_{Ir}\}^{T}[M]\{X_{Ir}\}} \tag{6.37}$$

$$\omega_r^* = \omega_r - \frac{1}{2\omega_r}\frac{\{X_{Rr}\}^{T}[\Delta K]\{X_{Rr}\} + \{X_{Ir}\}^{T}[\Delta K]\{X_{Ir}\}}{\{X_{Rr}\}^{T}[M]\{X_{Rr}\} + \{X_{Ir}\}^{T}[M]\{X_{Ir}\}} - \frac{\sigma_r}{2\omega_r}\frac{\{X_{Rr}\}^{T}[\Delta C]\{X_{Rr}\} + \{X_{Ir}\}^{T}[\Delta C]\{X_{Ir}\}}{\{X_{Rr}\}^{T}[M]\{X_{Rr}\} + \{X_{Ir}\}^{T}[M]\{X_{Ir}\}} \tag{6.38}$$

Pentru sistemele cu amortizare clasică se obţine

$$\sigma_r^* = \sigma_r - \frac{1}{2}\frac{\{X_r\}^{T}[\Delta C]\{X_r\}}{\{X_r\}^{T}[M]\{X_r\}} \tag{6.39}$$

$$\omega_r^* = \omega_r - \frac{1}{2\omega_r}\frac{\{X_r\}^{T}[\Delta K]\{X_r\}}{\{X_r\}^{T}[M]\{X_r\}} - \frac{\sigma_r}{2\omega_r}\frac{\{X_r\}^{T}[\Delta C]\{X_r\}}{\{X_r\}^{T}[M]\{X_r\}} \tag{6.40}$$

In cazul sistemelor slab amortizate, modificările date de defecte structurale se vor simţi numai în pulsaţiile proprii

$$\omega_r^* = \omega_r - \frac{1}{2\omega_r}\frac{\{X_r\}^{T}[\Delta K]\{X_r\}}{\{X_r\}^{T}[M]\{X_r\}}. \tag{6.41}$$

Prin urmare, modificările structurale duc la modificarea parametrilor modali. Dacă aceste modificări sunt făcute în scopul obţinerii unei comportări dinamice dorite, atunci problema rămâne în identificarea acelor elemente din structură care pot avea influenţa hotărâtoare in comportarea sa. În cazul în care acestea apar ca deteriorări, se pune problema cât de semnificative sunt acestea în parametrii modali. În general, în structurile slab amortizate, este greu de pus în evidenţă modificările rezultate prin defecte mai ales în factorii de amortizare. In situaţia în care există în structură suprafeţe tratate prin straturi amorizoare se pot pune în evidenţă desprinderile dintre straturi. Modificările sunt însă bine puse în evidenţa in pulsaţiile proprii.

6.1.2.4. Modificări ale parametrilor modali în cazul introducerii sau scoaterii din funcţiune a unei legături

Pentru simplificarea problemei se va considera cazul unei legături elastice de tipul unui oscilator simplu cu un grad de libertate care se poate cupla în anumite condiţii la o structură aflată în miscare vibratorie.

Legea de mişcare a unui punct curent P din structură, neglijând amortizările, poate fi scrisă sub forma [104]

$$u(P,t) = \sum_{r=1}^{N} U_r(P)\cos(\omega_r t+\varphi_r) \tag{6.42}$$

unde $U_r(P)$ sunt funcţiile modale.

Considerând că mişcarea structurii are loc după un singur mod, modul *r*, legea de mişcare a unui punct curent P va fi

$$u(P,t) = U_r(P)\cos(\omega_r t + \varphi_r) \tag{6.43}$$

Considerând condiţiile iniţiale ale structurii nemodificate ca fiind

$$u(P,0) = U_r(P), \quad \partial u(0,t)/\partial t = 0 \tag{6.44}$$

atunci legea de mişcare a unui punct particular P_0 este

$$u(P_0,t) = U_r(P_0)\cos\omega_r t \tag{6.45}$$

Presupunând legătura ca fiind un model de oscilator masa-arc, dacă pulsaţia proprie a acestui sistem este egală cu pulsaţia proprie a modului *r*, legea de mişcare a oscilatorului, în condiţiile iniţiale $u(0) = u(P_0)$ şi $\dot{u}(0) = 0$, este identică cu cea a punctului P_0 din structură. Prin urmare, prin conectarea acestei legături la structură, în condiţiile în care vibraţiile punctului P_0 din structură şi oscilatorul au vibraţii codirecţionale, nu va avea nici un efect asupra mişcării după modul natural *r*.

Intradevăr, considerând această ataşare ca o mică modificare structurală, pulsaţia proprie a oscilatorului se poate scrie

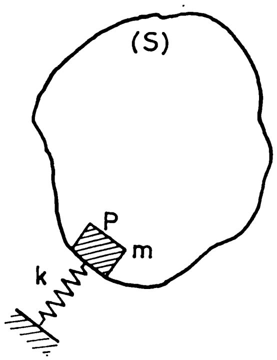

Fig.6.2

$$\omega_r^2 = \frac{\{x_r\}^T[\Delta K]\{x_r\}}{\{x_r\}^T[\Delta M]\{x_r\}} \tag{6.46}$$

care se poate înlocui în (6.36) obţinându-se $\omega_r^* = \omega_r$. Deci prin aceasta modificare structurală pulsaţia proprie corespunzătoare modului r nu se schimbă.

Dacă pulsatia proprie a oscilatorului este diferită de pulsaţia proprie corespunzătoare modului r, atunci din (6.47),

$$\omega_r^* = \omega_r + \frac{1}{2\omega_r}\left[\frac{\{x_r\}^T[\Delta K]\{x_r\} - \omega_r^2\{x_r\}^T[\Delta M]\{x_r\}}{\{x_r\}^T[M]\{x_r\}}\right] \tag{6.47}$$

se poate trage concluzia că prin cuplarea structurii cu această legătură, pulsaţiile proprii mai mici decât cea a oscilatorului vor creşte şi invers, pulsaţiile proprii ale structurii mai mari decât cea a legăturii cuplate vor scădea.

Observaţie. În proiectarea sistemelor de protecţie antiseismică cu autoacordare a structurilor, se iau în considerare nu numai acţiunile seismice, ci şi cele din vânt, care spre deosebire de cele seismice se caracterizează, de regulă, prin predominanţa în spectru a frecvenţelor joase. Una dintre cele mai eficiente metode de autoacordare este variaţia parametrilor structurilor care se poate realiza prin legături care iniţial măresc rigiditatea şi apoi, în cazul atingerii unui prag al amplitudinilor sau tensiunilor, ies din funcţiune.

Efectul ieşirii legăturilor din funcţiune se poate discuta pe baza relaţiei (6.41). După ieşirea din lucru, la un anumit nivel al încărcarii seismice, rigiditatea structurii se reduce, prin urmare şi pulsaţiile proprii se schimbă conform relaţiei (6.41). Evident că legăturile ieșite din lucru trebuie refăcute. Este important de urmărit ce se întâmplă cu structurile mecanice in cazul unor replici. Dacă spectrul miscării seismice a fost de joasă frecvenţă şi legăturile n-au ieşit din lucru, deorece structura iniţială avea fecvenţele proprii înalte, vibraţiile produse de replici vor acţiona în acelaşi mod şi legăturile nu ies din lucru.

Daca spectrul excitaţiei seismice a fost de înaltă frecvenţă şi legăturile, ca urmare a efectelor de rezonanţă, au ieşit din lucru, replicile, având în mod obişnuit tot spectrul de înaltă frecvenţă, va acţiona asupra structurii modificate având frecvenţele proprii mai joase şi, de asemenea, nu va prezenta pericol.

6.2. Metode de modificare a structurilor de maşini cu sisteme de amortizare ataşate

In paragrafele precedente s-au definit criteriile optimale de modificare structurala ale unei maşini, în sensul reducerii nivelelor sale de vibraţii, pe întreaga sa structura sau numai pe anumite zone de interes. Ataşarea la structură dată a unui sistem care să reducă nivelul de vibraţii se poate face în mai multe feluri:

-Atasarea de mase distribuite optimal pe structură

-Legături vâscoelastice disipative de energie

-Sistme inerţiale: masa, legătură vâscoelasică

-Elemente inerţiale în rotaţie cu axa fixă pe structură.

Ataşarea unor mase distribuite optimal pe structura se practică în anumite cazuri speciale cum este cel al maşinilor unelte unde batiul se supradimensionează nu numai din considerentul asigurării unor rigidităti mari, dar şi datorită atenuării inerţiale a vibraţiilor. Pentru construcţii mecanice de susţinere a unor agregate tehnologice, cum sunt cazanele de abur de la centrale termoelectrice se pune problema reducerii încărcărilor pe structurile de sprijin şi de aceea sunt posibile mişcări vibratorii ale cazanului datorită unor mişcări seismice. Atenuarea acestor miscări se face prin amplasarea unor elemente vâscoelastice aşa cum sunt sistemele de amortizare de la autovehicole şi material rulant. În unele cazuri nu este posibilă introducerea unor legături suplimentare pe structură. In această situaţie se ataşează de structură sisteme inerţiale maşa - legătură vâscoelastică, mărindu-se numărul gradelor de libertate ale sistemului vibrant. Aceste sisteme se pot întâlni la clădirile foarte înalte la care se atasează un sistem pendular acordat pe primul mod natural al structurii, astfel încât în timpul unor mişcări seismice o parte din energia undei este absorbită de acesta.

Un alt mijloc de reducere a nivelelor de vibraţii este înlocuirea unor legături rigide cu altele elastice. Este cazul separării elastce a unui motor de maşina de execuţie.

Toate aceste probleme vor fi abordate pe larg în paragrafele următoare.

6.2.1. Problema dimensionării optimale a amortizoarelor hidraulice în vederea reducerii nivelelor de vibraţii pe structura ansamblului cazan-construcţie metalică

Pentru obţinerea sistemul de ecuaţii diferenţiale care guvernează mişcarea vibratorie a ansamblului cazan structură-metalică trebuie calculată energia de disipare din elementele de legătură vâscoasă.

Se consideră o amplasare simetrică a 8 elemente de disipare vâscoasă în patru plane P_1 - P_4, realizate prin amortizoarele hidraulice A_h. Ele se prind prin articulaţii sferice aţit de construcţia metalică cât sâ de cazan, aceasta pentru a nu impedica dilatarea termică a cazanului la trecerea sa din starea rece în starea de lucru. Energia de disipare prin amortizori hidraulici Ah la nivelul planului P_s este

$$E_{ds}=\frac{1}{2}c_s[(\dot{y}_{s1}-\dot{y}_s)^2+(\dot{y}_{s2}-\dot{y}_s)^2+(\dot{x}_{s3}-\dot{x}_s)^2+(\dot{x}_{s4}-\dot{x}_s)^2] \tag{6.48}$$

unde c_s este coeficientul de amortizare al unui tandem de doi amortizori hidraulici care au aceiasi caracteristica reglată la o unică valoare, deorece o desimetrizare a forţelor vâscoase va duce la o desimetrizare a distribuţiei mişcărilor vibratorii şi nivelelor de vibraţii pe structura cazanului. Legile de mişcare ale cazanului sunt date prin (3.94), iar prin derivare în raport cu timpul se obţin vitezele

$$\dot{x}_s(t) = \dot{x}(t)f_x(s), \quad \dot{y}_s(t) = \dot{y}(t)f_y(s) \tag{6.49}$$

Legile de mişcare ale unui punct P_{sr} sunt date prin (3.100) şi se pun sub forma

BUPT

$$\begin{Bmatrix} X_{sP} \\ Y_{sP} \end{Bmatrix} = [D_{sP}]\{q\}, \quad [D_{sP}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & l & 0 & Z_{sP} & -Y_{sP} \\ 0 & 1 & 0 & -l & 0 & -Z_{sP} & 0 & X_{sP} \end{bmatrix} \qquad (6.50)$$

unde datorită simetriei în planul $O_sX_sY_s$ va rezulta

$$X_{s1} = x,\ X_{s2} = -x,\ Y_{s1} = Y_{s2} = 0,\ X_{s3} = X_{s4} = 0,$$
$$Y_{s3} = y,\ y_{s4} = -y,\ Z_{s1} = z_{s2} = Z_{s3} = Z_{s4} = Z_s \qquad (6.51)$$

Înlocuind în (3.146) legile de mişcare, se obţine expresia energiei cinetice la un nivel P_s

$$E_{ds} = \frac{1}{2}c_s\{\dot{q}\}^T[C_s]\{\dot{q}\} \qquad (6.52)$$

unde matricea $[C_s]$ este o matrice simetrică având elemente nenule

$$C_s(1,1)=f_{xs}^2,\ C_s(2,2)=f_{ys}^2, C_s(4,4)=C_s(5,5)=l^2$$
$$C_s(6,6)=C_s(7,7)=Z_s^2,\ C_s(8,8)=X_s^2+Y_s^2,$$
$$C_s(1,5)=C_s(5,1)=lf_{xs},\ C_s(1,7)=C_s(7,1)=Z_sf_{xs}, \qquad (6.53)$$
$$C_s(2,4)C_s(4,2)=lf_{ys},\ C_s(2,6)=C_s(6,2)=-Z_sf_{ys}$$
$$C_s(4,6)=C_s(6,4)=lZ_s,\ C_s(7,8)=C_s(8,7)=lZ_s$$

Ecuaţiile care guverneză miscarea sunt

$$[M]\{\ddot{q}\}+ (\sum_{i=1}^{4} c_s[C_s])\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{F_{g1}\} + \{F_{g2}\} + \{F_e\} \qquad (6.54)$$

unde $[M] = [M_a]+[M_{xy}]$.
In aceste ecuaţii, pe lângă vectorii forţelor statice $\{F_{g1}\}$ şi $\{F_{g2}\}$, care determină poziţia de echilibru static, acţionează şi vectorul de excitaţie $\{F_e\}$ care provine dintr-o undă seismică ce se propagă prin sol, mai periculoasă fiind o undă orizontală a cărei legi de mişcare sunt $x_a(t)$ şi $y_a(t)$.
In acest caz

$$\{q\} = \{x, y, z, \varphi_{xo}, \varphi_{yo}, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}^T \qquad (6.55)$$

reprezintă un vector al mişcarilor relative deoarece sistemul Oxyz legat de sol, execută o mişcare de transport având legile de mişcare $x_e(t)$ şi $y_e(t)$. Aceste componente ale mişcării vor modifica expresiile energiei cinetice ale cazanului şi construcţiei metalice. Astfel, pentru energia cinetică a construcţiei metalice se poate scrie

$$E_{cm} = \frac{1}{2}\int_{V_{cm}} [(\dot{x}_e(t) + \dot{x}f_x)^2 + (\dot{y}_e(t) + \dot{y}f_y)^2]\, dm \qquad (6.56)$$

După efectuarea calculelor se obţine

$$E_{cm}=\frac{1}{2}m_x\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_y\dot{y}^2+\frac{1}{2}m_a(\dot{x}_e^2+\dot{y}_e^2)+(m_{xe}\dot{x}\dot{x}_e+m_{ye}\dot{y}\dot{y}_e) \qquad (6.57)$$

unde

$$m_{xe} = \int_{V_{cm}} f_x dm, \quad m_{ye} = \int_{V_{cm}} f_y dm \qquad (6.58)$$

Energia cinetică a construcţiei metalice poate fi scrisă sub formă matriceală, astfel

$$E_{cm} = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[M_{xy}]\{\dot{q}\} + \frac{1}{2}\{\dot{q}_e\}^T[m_{cm}]\{\dot{q}_e\} + \{\dot{q}\}^T[M_{me}]\{\dot{q}_e\} \qquad (6.59)$$

unde vectorul de excitaţie $\{q_e\}$ şi $[M_{me}]$ sunt

$$\{q_e\} = \{x_e, y_e\}^T, \quad [M_{me}] = \begin{bmatrix} m_{xe} & 0 \\ 0 & m_{ye} \\ \multicolumn{2}{c}{[0]} \end{bmatrix} \qquad (6.60)$$

matricea $[M_{me}]$ este de dimensiune 8×2.

Energia cinetică a cazanului va avea şi ea forma modificată

$$E_{ca} = \frac{1}{2}m_a[(\dot{x}_C+\dot{x}_e)^2+(\dot{y}_C+\dot{y}_e)^2+\dot{z}_C^2] + \frac{1}{2}\{\dot{\varphi}\}^T[J]\{\dot{\varphi}\} \qquad (6.61)$$

Punând vectorul centrului de masă sub forma

$$\begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} = [D_{ce}]\{q\} \qquad (6.62)$$

unde matricea

$$[D_{ce}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & z_C & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -z_C & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (6.63)$$

In final energia cinetică a cazanului va fi

$$E_{ca} = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[M_a]\{\dot{q}\} + \frac{1}{2}\{\dot{q}_e\}^T[m_a]\{\dot{q}_e\} + \{\dot{q}\}^T[M_{ae}]\{\dot{q}_e\} \qquad (6.64)$$

unde

$$[M_{ae}] = m_a[D_{ce}]^T \qquad (6.65)$$

In urma aplicării ecuaţiilor lui Lagrange asupra celor două forme ale energiei cinetice (6.64) şi (6.59) conduce la forma vectorului de excitaţie

$$\{F_e\} = -([M_{me}] + [M_{ae}])\{\ddot{q}_e\} \qquad (6.66)$$

In ecuaţiile sistemului (6.54) prin vectorul {q} este reprezentat răspunsul sistemului faţă de sistemul Oxyz fixat de pământ şi asupra căruia acţionează vectorul de excitaţie $\{F_e\}$

Problema dimensionării optimale a amortizorilor hidraulici se pune în următorul mod: Să se stabilească constantele de amortizare la nivelul celor patru plane P_1-P_4 în aşa fel încât elongaţiile maxime ale punctelor de pe structura cazanului să nu depăşească un anumit nivel, la care cele două structuri pot intra în contact şi în urma căruia se poate produce avarierea.

Asa cum s-a mai amintit în cadrul prezentei lucrări, alegerea modificărilor structurale, amplasarea lor cât si condiţiile ce se impun funcţiei criteriu sunt diferite de la caz la caz şi comportă o analiză inginerească complexa. In cazul ansamblului analizat se are în vedere comportarea de corp rigid a cazanului şi ca urmare distribuţia mişcărilor vibratorii prezintă maxime la capetele acestuia. De aceea se vor alege în cele două plane, superior S (OXY) si inferior I, câte patru puncte 1_s, 2_s, 3_s şi 4_s respectiv 1_i, 2_i, 3_i şi 4_i pentru care se calculează vectorul elongaţiilor relative

$$\{X_{ks}\} = [D_{ks}]\{q\}, \quad \{X_{ki}\} = [D_{ki}]\{q\}, \quad (k = 1,2,3,4) \qquad (6.67)$$

unde

$$[D_{kw}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & Z_{kw} & -Y_{kw} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -Z_{kw} & 0 & X_{kw} \end{bmatrix} \qquad (6.68)$$

$$(k = 1,2,3,4); \quad w = i,s)$$

X_{kw}, Y_{kw} şi Z_{kw} fiind coordonatele punctului k din planul w (I sau S), faţa de sistemul de axe legat de cazan.

Acum se poate construi funţia criteriu,

$$f(C_1, C_2, C_3, C_4) = \max\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(\{x_{ks}\}^T\{x_{ks}\} + \{x_{ki}\}^T\{x_{ki}\})\right], \quad (0 < t < T)$$

$$(6.69)$$

care este o funcţie a valorilor maxime a elongaţiilor relative din intervalul de timp 0-T de estimare a undei sismice.

Procesul de iteraţie pentru calculul parametrilor optimi c_u

$$c_{u,j+1} = c_{u,j} - l_j\left(\frac{\partial f}{\partial c_u}\right)_j \qquad (6.70)$$

necesită calculul derivatei

$$\frac{\partial f}{\partial c_u} = \sum_{k=1}^{4}\left(\{X_{ks}\}^T\frac{\partial\{X_{ks}\}}{\partial c_u} + \{X_{Ki}\}^T\frac{\partial\{X_{ki}\}}{\partial c_u}\right) \qquad (6.71)$$

Mai departe din (6.67) rezultă prin derivare în raport cu parametrul c_u

$$\frac{\partial\{X_{ks}\}}{\partial c_u} = [D_{ks}]\frac{\partial\{q\}}{\partial c_u}, \quad \frac{\partial\{X_{ki}\}}{\partial c_u} = [D_{ki}]\frac{\partial\{q\}}{\partial c_u} \qquad (6.72)$$

Notând

$$\{D_s\} = \frac{\partial\{q\}}{\partial c_u}, \quad (s = 1,2,3,4) \qquad (6.73)$$

Derivând în raport cu un parametru c_u sistemul de ecuaţii (6.54) se obţin sistemele auxiliare

$$[M]\{\ddot{D}_s\}+(\sum_{s=1}^{4} c_s[C_s])\{\dot{D}_s\}+[K]\{D_s\}=-[C_s]\{\dot{q}\},\qquad s=1,2,3,4 \tag{6.74}$$

ale căror soluţii vor determina vectorii (6.73).

6.2.2. Ataşarea unor sisteme inerţiale masă-legătură disipativă

Energiile cinetice şi potenţiale introduse în şistem de masele adiţionale şunt date de (3.32) şi (3.47). La acestea se adaugă energiile de disipare introduse în ansamblu prin sistemele ataşate, care sunt de forma

$$E_d = \frac{1}{2}\{\dot{w}\}^T[C_a]\{\dot{w}\} \tag{6.75}$$

unde $[C_a]$ este o matrice diagonală având ca elemente coeficienţii de amortizare c_i ai sistemelor ataşate.

Cu aceste dezvoltări se poate scrie sistemul de ecuaţii diferenţiale ale ansamblului braţ contrabraţ şi sistemele inerţiale ataşate

$$\begin{gathered}([M_a]+[M_{ba}])\{\ddot{q}_b\}+[M_{aw}]\{\ddot{w}\}+([K_c]+[K_q])\{q_b\}=\{F_{g0}\}+\{F\}\\ [M_{aw}]^T\{\ddot{q}_b\}+[M_w]\{\ddot{w}\}+[C_a]\{\dot{w}\}+[K_a]\{w\}=\{0\}\end{gathered} \tag{6.76}$$

unde {F} este un vector al excitaţiilor dinamice a ansamblului, rezultat din multiplele excitaţii posibile din procesul de lucru al maşinii de haldat.

Condiţia de obţinere a unei atenuări optime a nivelelor de vibraţii la o excitaţie dată de vectorul {F} conduce la construirea unei funcţii criteriu

$$f(p) = \int_0^T \{q_b\}^T[Q]\{q_b\}dt \tag{6.77}$$

unde vectorul parametrilor care se aleg optimal este

$$\{p\}=\{m_{a1},m_{a2},..,m_{a9},k_{ai},ka2,..,k_{a9},c_{a1},c_{a2},..,c_{a9}\}^T \tag{6.78}$$

deci un număr de 27 de paramtri. Matricea de ponderare va fi diagonală şi cu elemente egale, daca nu exista diferenţieri în alegerea coordonatelor.

Sistemele auxiliare pentru rezolvarea problemei de optim se obţine prin derivarea sistemului (6.76). Din punct de vedere al calculelor s-a preferat forma partiţionată (6.76) deorece aici sunt matricele $[M_b]$, $[K_c]$ şi $[K_g]$ care nu conţin parametrii din (6.78) şi prin urmare derivatele lor vor fi nule.

6.2.3. Izolarea elastică a motorului de maşini vibratoare

Procesul de stabilizare dimensională prin vibraţii se desfăşoară la regimuri rezonante reglate după frecvenţele proprii ale modurilor naturale de vibraţii ale structurii, regimuri pentru care apar nivele de vibraţii mari, atât pe structura ce este supusă tratamentului vibrator, cât şi pe structura vibratorului inerţial cu excentrice. În scopul reducerii nivelelor de vibraţii s-a ales o soluţie de separare elastică dintre corpul vibratorului şi motorul electric.

În figura 6.3 se prezintă un vibrator inerţial cu excentrice utilizat la stabilizarea dimensională prin vibraţii mecanice a structurilor sudate sau turnate. Acţionarea arborelui motor **9** al vibratorului facându-se prin intermediul unui cuplaj elastic **8**. Aceasta "interfatare" elastica a structurii motorului **1** la corpul vibratorului **A**, permite ca motorul sa poata executa, datorita deformarilor inelului elastic **5**, mişcari vibratorii independente de mişcările vibratorii ale corpului **A** al vibratorului. Daca prinderea motorului 1 de corpul vibratorului se face rigida atunci nivelul de vibraţii se transmit motorului electric distribuţia nivelelor de vibraţii de-a lungul corpului sau fiind cu nivele mari în zona de capat liber unde este amplasat colectorul cu perii.

Nivelele de vibratii mari la periile colectoare produc desprinderi de colector şi o intensificare a efectului de flama ce duce la încalzirea pronunţata a înfaşurarii motorului de c.c. şi chiar la arderea lui, după un numar relativ mic de ore de funcţionare. Din acest motiv, foarte puţini fabricanţi din lume reuşesc sa realizeze motoare electrice de c.c. cu turaţie variabilade la 0-9 000 rot/min. care sa fie fiabile pentru

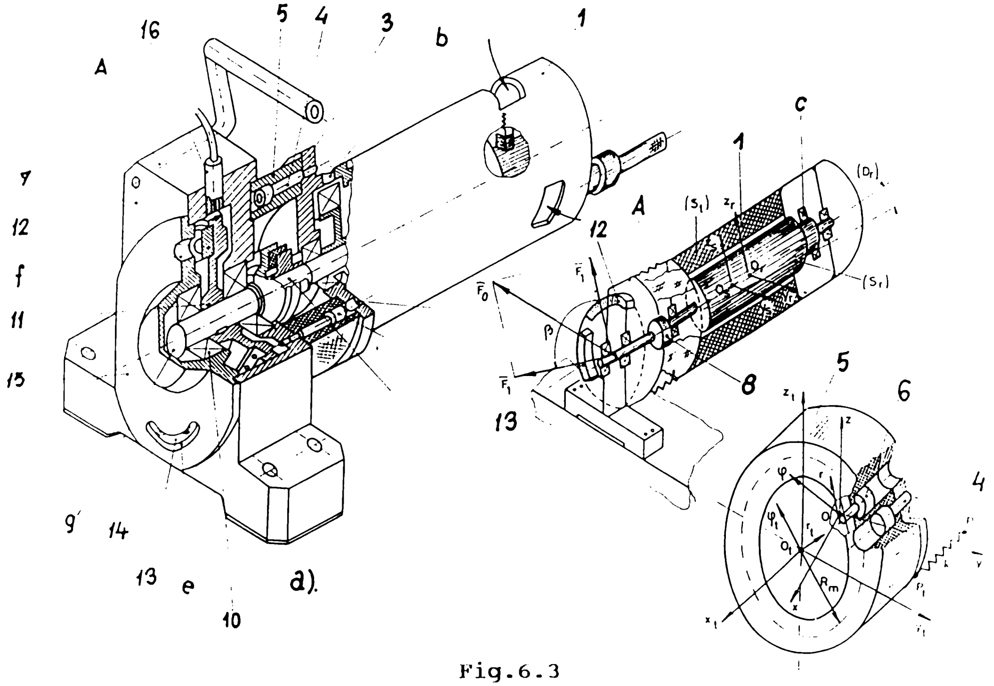

Fig.6.3

acţionarea vibratoarelor inerţiale utilizate în stabilizarea dimensionala a structurilor sudate şi turnate. Rotorul motorului de curent continuu poate fi considerat ca o structura în rotaţie cu axa fixa având turaţie mare. Prin compunerea mişcărilor de rotaţie şi vibratorii apar efecte inerţiale de tip giroscopic care încarca suplimentar lagarele cu rulmenţi ale motorului şi care duc la uzura rapida a acestora.

Pentru reducerea nivelelor de vibraţii pe structura motorului 1 este necesara o proiectare optimala a inelului elastic 5 care este din cauciuc, având ca date de proiectare, nivelul limita admisibil de vibraţii pe corpul motorului 1 şi domeniul de frecventa al vibratorului, practic între 25-150 Hz.

6.2.3.1. Ecuaţiile de mişcare ale motorului electric

Din punct de vedere dinamic, motorul electric 1 (Fig.6.3) este un ansamblu mecanic compus din structura de transport S_t care este compusa din statorul şi carcasa motorului şi o substructura S_r, rotorul ce se roteşte în jurul axei sale cu viteza unghiulara ω.

Pentru studiul mişcarilor vibratorii ale ansamblului se considera urmatorele sisteme de axe. Un sistem $O_r x_r y_r z_r$ legat de rotor având originea pe axa (Δ_r), în centrul de masa al rotorului. Axele acestui sistem sunt axe principale de inerţie având momentele J_{xr}, J_{yr} şi J_{zr}. Un al doilea sistem de referinţa $O_r X_r Y_r Z_r$ este legat de de corpul motorului având axa $O_r X_r$ coliniara cu axa de rotaţie Δ_r. Un al treilea sistem este CXYZ, paralel cu sistemul $O_r X_r Y_r Z_r$, C fiind centrul de masa al corpului motorului va include statorul (S_t), carcasa 1, scuturile, flanşa de prindere 3. Sistemul CXYZ datorita simetriei fata de axa CX a rotorului şi corpului motorului (ambele corpuri de revoluţie) se poate alege paralel cu sistemul de axe $O_r X_r Y_r Z_r$, ambele fixe de corpul motorului. Deci matricea de trecere va fi o matrice unitate.

Conform formulelor deduse în [42], [43], ecuaţiile diferenţiale ale mişcarii absolute ale centrului de masa a rotorului, date prin vectorul coloana $\{r_r\}$, corespunzator la trei translaţii şi $\{\varphi\}$ ale rotaţiilor sistemului de axe $O_r X_r Y_r Z_r$, fixat de corpul motorului (ansamblul nerotitor), se poate scrie sub forma

$$[M_{0r}]\begin{Bmatrix}\{\ddot{r}_r\}\\ \{\ddot{\varphi}\}\end{Bmatrix} + [G_{0r}]\begin{Bmatrix}\{\dot{r}_r\}\\ \{\dot{\varphi}\}\end{Bmatrix} = \{F_{r1}\} \qquad (6.79)$$

unde matricele de inerţie $[M_{0r}]$ şi giroscopica $[G_{0r}]$ au urmatoarele forme,

$$[M_{0r}] = \begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [0] & [J_{0r}]\end{bmatrix}, \quad [G_{0r}] = 2\omega\begin{bmatrix}[0] & [0]\\ [0] & [J_{gr}]\end{bmatrix} \qquad (6.80)$$

unde

$$[m_r] = m_r\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad [J_{0r}] = \begin{bmatrix}J_{xr} & 0 & 0\\ 0 & J_{yr} & 0\\ 0 & 0 & J_{zr}\end{bmatrix}, \quad [J_{gr}] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & J_{xr}\\ 0 & -J_{xr} & 0\end{bmatrix} \qquad (6.81)$$

şi $J_{yr} = J_{zr}$

Vectorul coloana $\{F_{r1}\}$ este vectorul forţelor şi momentelor generalizate de legatura din cele doua lagare cu rulmenţi, ale motorului şi din cuplajul 8 de transmisie a cuplului motor la corpul vibrator A.

Sistemul de ecuaţii diferenţiale de echilibru dinamic al ansamblului nerotitor este de forma

$$[M_{Or}]\begin{Bmatrix}\{\ddot{r}_s\}\\ \{\ddot{\varphi}\}\end{Bmatrix} = \{F_{ls}\} \tag{6.82}$$

unde $\{r_s\}$ este vectorul coloana al legilor de mişcare vibratorie O_s al ansamblului nerotativ. El este raportat la un sistem de referinţa fix, care în poziţie de echilibru static a ansamblului nerotitor se suprapune peste sistemul $O_sX_sY_sZ_s$ legat de ansamblu, sistem paralel cu sistemul $O_rX_rY_rZ_r$.

Vectorul coloana $\{F_{ls}\}$ al forţelor şi momentelor de legatura generalizate are trei termeni

$$\{F_{ls}\} = \{F_{es}\} + \{F_{ds}\} + \{F_{rs}\} \tag{6.83}$$

unde vectorul coloana $\{F_{es}\}$ provine din energia de deformaţie elasica, $\{F_{ds}\}$ din energia de disipare şi $\{F_{rs}\}$ din legaturile în lagarele cu rulmenţi ale motorului electric.

Deformaţiile şi disipaţiile de energie se produc la nivelul inelului elastic 5. Pentru determinarea energiilor de deformaţie şi de disipare este necesară cunoaşterea legilor de mişcare ale planelor de fixare a inelului elastic. Pentru aceasta se vor considera sistemele de referinţă : OXYZ, paralel cu sistemele $O_sX_sY_sZ_s$ şi $O_rX_rY_rZ_r$ şi un sistem $O_tX_tY_tZ_t$ legat de corpul **A** al vibratorului. Legile de mişcare ale celor doua feţe ale inelului de fixare sunt date de vectorii coloană: $\{\{r\}^T,\{\varphi\}^T\}^T$ şi $\{\{r_t\}^T,\{\varphi_t\}^T\}^T$ unde r este vectorul de translaţie a punctului O situat pe axa de rotaţie a motorului si φ vectorul de rotaţie al flanşei de prindere a inelului pe motorul electric, respectiv r_t este vectorul de mişcare a originii sistemului $O_tX_tY_tZ_t$ legat de corpul **A** al vibratorului. Prin deplasarea relativă a planelor OXY şi $O_tX_tY_t$ se produce deformarea inelului de cauciuc. Două puncte P şi P_t având aceleaşi valori ale coordonatelor Y şi Z, în planele lor, vor avea următoarele legi de mişcare

$$\{r\} = \{r_O\} + [\Phi]\begin{Bmatrix}0\\Y\\Z\end{Bmatrix},\quad \{r_t\} = \{r_{O_t}\} + [\Phi_t]\begin{Bmatrix}0\\Y\\Z\end{Bmatrix} \tag{6.84}$$

care după axele OX sau O_tX_t, aproape paralele, vor da componentele

$$r_X = r_{OX} + Z\varphi_Y - Y\varphi_Z, \quad r_{X_t} = r_{OX_t} + Z\varphi_{Y_t} - Y\varphi_{Z_t} \qquad (6.85)$$

Deci mişcarea relativă între punctele P şi P_t va fi

$$r_X - r_{X_t} = r_{OX} - r_{OX_t} + Z(\varphi_Y - \varphi_{Y_t}) - Y(\varphi_Z - \varphi_{Z_t}) \qquad (6.86)$$

Dacă se consideră o rigiditate medie de arc $R_m d\alpha$, unde R_m este raza medie a inelului, iar $d\alpha$ este unghiul elementar, atunci energia de deformaţie elementară poate fi pusă sub forma

$$E_{d1} = \frac{1}{2}k_u(r_X - r_{X_t})^2 R_m d\alpha \qquad (6.87)$$

Introducând în (6.86) relaţia (6.85), se obţine

$$dE_{d1} = \frac{1}{2}k_u R_m (r_{OX}-r_{OX_t})^2 d\alpha + \frac{1}{2}k_{ur_m} z^2 (\varphi_y-\varphi_{Y_t})^2 d\alpha$$

$$+\frac{1}{2}k_u R_m Y^2 (\varphi_Z-\varphi_{Z_t})^2 d\alpha + k_u R_m Z(r_{OX}-R_{OX_t})(\varphi_Y-\varphi_{Y_t}) \qquad (6.88)$$

$$-k_u R_m Y_m (r_{OX}-r_{OX_t})(\varphi_Z-\varphi_{Z_t}) - k_u YZ(\varphi_Y-\varphi_{Y_t})(\varphi_Z-\varphi_{Z_t})$$

unde Y şi Z sunt coordonateleale punctelor P şi P_t situate pe circumferinţa medie a inelului având raza medie R_m, şi se pot exprima sub forma

$$Y = R_m\cos\alpha, \quad Z = R_m\sin\alpha \qquad (6.89)$$

unde α este unghiul razei vectoare la punctul P sau P_t faţă de axa OX sau O_tX_t. Cu aceste notaţii, energia de deformaţie a inelului de cauciuc se deduce din (6.88) sub forma

$$E_{d1} = \frac{1}{2}k_a(r_{OX}-r_{OX_t})^2 + \frac{1}{4}k_a R_m^2(\varphi_Y-\varphi_{Y_t})^2 + \frac{1}{4}k_a R_m^2(\varphi_Z-\varphi_{Z_t})^2 \qquad (6.90)$$

unde k_a este constanta de deformare axială a inelului

$$k_a = 2\pi k_u R_m \qquad (6.91)$$

Luând în considerare proprietăţile elastice transversale de forfecare la alunecare, în planele OXY şi $O_tX_tY_t$ şi respectiv de torsionare faţa de axa inelului, mai trebuie adăugată la energia de deformaţie totală încă un termen

$$E_{d1}=\frac{1}{2}k_\tau(r_{OY}-r_{OY_t})^2+\frac{1}{2}k_\tau(r_{OZ}-r_{OZ_t})^2+\frac{1}{2}k_t(\varphi_X-\varphi_{X_t})^2 \qquad (6.92)$$

Sub forma matriceală energia de deformaţie totală este de forma

$$E_{d_2}=\frac{1}{2}\left(\begin{Bmatrix}\{r_O\}\\ \{\varphi\}\end{Bmatrix}^T-\begin{Bmatrix}\{r_{O_t}\}\\ \{\varphi_t\}\end{Bmatrix}^T\right)[K_d]\left(\begin{Bmatrix}\{r_O\}\\ \{\varphi\}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\{r_{O_t}\}\\ \{\varphi_t\}\end{Bmatrix}\right) \qquad (6.93)$$

unde matricea $[K_d]$ este matricea de rigiditate şi este

$$[K_d] = diag\{k_a, k_\tau, k_\tau, k_t, k_a R_m^2, k_a R_m^2\} \qquad (6.94)$$

deci o formă simplă diagonală. În realitate există cuplaje multiple, matricea $[K_d]$ fiind o formă nondiagonală, dar simetrică. Configuraţia ei se poate determina numai experimental.

Pentru asamblarea celor două ecuaţii diferenţiale (6.79) şi (6.82) va trebui ca vectorii legilor de mişcare $\{\{r_r\}^T,\{\varphi_r\}^T\}^T$ şi $\{\{r_s\}^T,\{\varphi_s\}^T\}^T$ să fie raportaţi la acelaşi sistem de referinţa. Este mai convenabil să se aleagă sistemul OXYZ, unde OYZ este planul de interfaţare al inelului elastic de flanşa de prindere a motorului electric. In acest context vectorii $\{r_s\}$ şi $\{r_r\}$ pot fi exprimaţi prin legile

$$\begin{aligned}\{r_{r,s}\} &= \{r_O\} + [R_{r,s}]\{\varphi_{r,s}\}\\ \{\varphi_r\} &= \{\varphi_s\}\end{aligned} \qquad (6.95)$$

unde matricea de poziţie este

$$[R_{r,s}] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x_{r,s}\\ 0 & -x_{r,s} & 0\end{bmatrix} \qquad (6.96)$$

Relaţiile precedente se pot scrie comasat, într-o singură ecuaţie

$$\begin{Bmatrix}\{r_{r,s}\}\\ \{\varphi\}\end{Bmatrix} = [D_{r,s}]\begin{Bmatrix}\{r_O\}\\ \{\varphi\}\end{Bmatrix}, \qquad [D_{r,s}] = \begin{bmatrix}[I] & [R_{r,s}]\\ [0] & [I]\end{bmatrix} \qquad (6.97)$$

Tinând cont de formulele de transformare (6.97) sistemele de ecuaţii (6.79) si (6.82) se pot scrie

$$[M_r]\begin{Bmatrix}\{\ddot{r}_O\}\\ \ddot{\varphi}\end{Bmatrix} + [G_r]\begin{Bmatrix}\{\dot{r}_O\}\\ \{\dot{\varphi}\}\end{Bmatrix} = \{F_{r1}\}_O \tag{6.98}$$

$$[M_s]\begin{Bmatrix}\{\ddot{r}_O\}\\ \{\ddot{\varphi}\}\end{Bmatrix} = \{F_{1s}\}_O + \{F_{ds}\}_O + \{F_{rs}\}_O \tag{6.99}$$

unde

$$\begin{gathered}[M_r] = [D_r]^T[M_{0r}]\,[D_r], \quad [M_s] = [D_s]^T[M_{0s}]\,[D_s],\\ [G_r] = [D_r]^T[G_{0r}]\,[D_r]\end{gathered} \tag{6.100}$$

Vectorii forţelor de legătura din lagărele cu rulmenţi ce lucrează asupra rotorului $\{F_{r1}\}_O$ şi asupra corpului motorului $\{F_{rs}\}_O$ au expresiile

$$\{F_{r1}\}_O = [D_r]^T\{F_{r1}\},\ \{F_{rs}\}_O = [D_s]^T\{F_{rs}\},\ \{F_{r1}\}_O = -\{F_{rs}\}_O \tag{6.101}$$

fiind egale şi de sens contrar. Vectorul forţelor şi momentelor elastice se obţine din energia de deformaţie (6.93).

$$\begin{gathered}\{F_{es}\} = -\frac{\partial E_d}{\partial\{q\}} = -[K_d]\left(\begin{Bmatrix}\{r_O\}\\ \{\varphi\}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\{r_{Ot}\}\\ \{\varphi\}\end{Bmatrix}\right)\\ \{q\} = \{\{r_O\}^T, \{\varphi\}^T\}^T\end{gathered} \tag{6.102}$$

Vectorul forţelor şi momentelor de legătură rezultat din disipaţia de energie în inelul de cauciuc, ţinând cont de modelul reologic întâlnit în literatură poate fi pus sub forma

$$\{F_{ds}\}_O = -j\eta\{F_{es}\}_O \tag{6.103}$$

unde η este factorul de pierdere.

Prin cumularea sistemelor (6.98) şi (6.99) se obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale ale ansamblului

$$[M]\begin{Bmatrix}\{\ddot{r}_O\}\\\{\ddot{\varphi}\}\end{Bmatrix}+[G_r]\begin{Bmatrix}\{\dot{r}_O\}\\\{\dot{\varphi}\}\end{Bmatrix}+(1-j\eta)\ [K_d]\begin{Bmatrix}\{r_O\}\\\{\varphi\}\end{Bmatrix}=(1-j\eta)\ [K_d]\begin{Bmatrix}\{r_{Ot}\}\\\{\varphi_t\}\end{Bmatrix} \quad (6.104$$

$$[M] = [M_r] + [M_s]$$

Modelul de mai sus, în scopul studierii vibraţiilor libere se poate pune sub forma

$$[M]\begin{Bmatrix}\{\ddot{r}_O\}\\\{\ddot{\varphi}\}\end{Bmatrix}+([G_r]+\eta\,[K_d])\begin{Bmatrix}\{\dot{r}_O\}\\\{\dot{\varphi}\}\end{Bmatrix}+[K_d]\begin{Bmatrix}\{r_O\}\\\{\varphi\}\end{Bmatrix}=\{0\} \quad (6.105)$$

6.2.3.2. Rezultate experimentale şi concluzii

Pentru a scoate în evidenţă influenţa efectului giroscopic introdus de rotorul motorului electric s-a realizat o expeienţă simplă. S-au înregistrat vibraţiile lbere ale corpului motorului electric excitat la capătul liber în două situatii: motorul electric nu se află în mişcare de rotaţie, respectiv cu motorul în mişcare de rotaţie, având o rotaţie de 7360 rot./min.

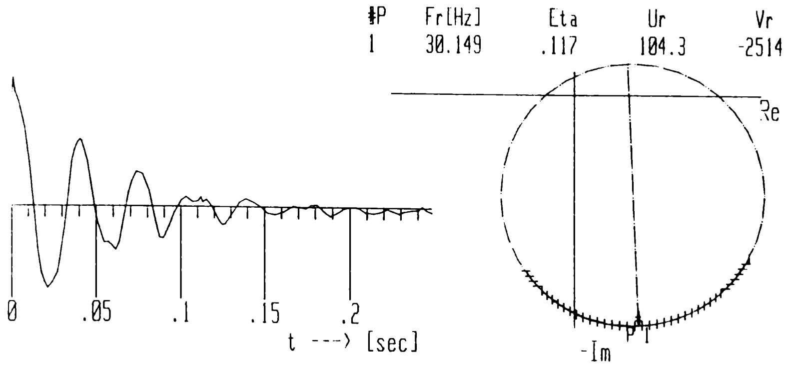

Fig.6.4

Semnalele de vibraţii au fost achiziţionate pe calculator în două fişiere de date. Vibrogramele celor două situaţii sunt prezentate în Fig.6.4 şi Fig 6.5. Se poate observa din vibrograma dată în figura 6.5 supraunerea, peste vibraţiile libere, a vibraţiilor forţate provenite din dezechilibrul masic al rotorului, corespunzător frecvenţei de 122.65 Hz.

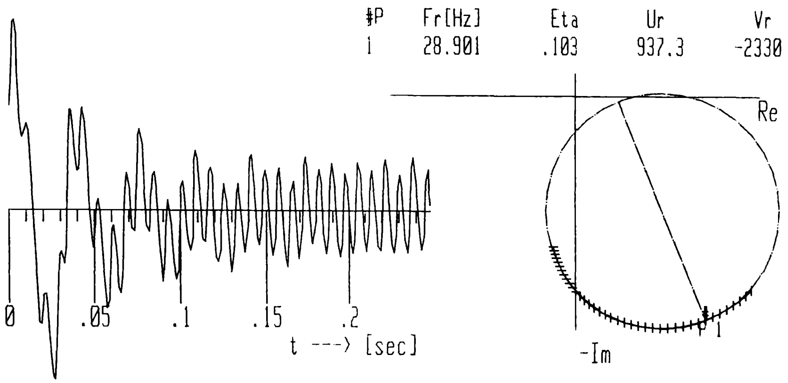

Fig.6.5

Se poate demonstra că aplicând asupra semnalelor de vibraţii libere transformata Fourier, se obţine un spectru similar unei excitaţii armonice. Acest răspuns se pretează la determinarea parametrilor modali utilizând metoda diagramelor polare: pulsaţiile proprii şi rapoartele modale de amortizare. In acest scop s-a apelat la o subrutină a algoritmului [30], obţinându-se, pentru cele două situaţii, diagramele polare din Fig. 6.4 şi Fig. 6.5. Analizând valorile parametrilor modali tabelaţi pe diagrame :Fr (frecvenţa proprie) şi Eta (raportul de amortizare), se constată o scădere a pulsaţiei fundamentale de la 30.149 Hz pentru cazul în care motorul era în repaus, la 28.901 Hz pentru cazul rotirii lui. Acest fapt se explică prin mărirea aportului inerţial, în sistem, datorită produsului $J_{xr}\omega$. Faţă de aceste valori, se poate trage concluzia că la frecvenţa de lucru a vibratorului, la peste 70 Hz, pericolul efectului de rezonanţă este eliminat.

6.3. Efecte ale neregularităţilor structurale în sisteme mecanice cu simetrii ciclice

6.3.1. Consideraţii şi formulări generale

Structurile mecanice cu simetrii ciclice sunt frecvent întâlnite în analiza dinamică a sistemelor: discurile şi rotoarele paletate fiind cele mai frecvente aplicaţii. Este convenabil să se facă presupuneri asupra periodicităţii structurii, totuşi acestea devin adevărate numai dacă toate paletele sunt identice şi discul este simetric şi omogen. Din păcate, simetria ciclică este, adesea, întreruptă prin mici diferenţe, diferenţe care rezultă fie din procesul de fabricaţie, fie din toleranţa materialelor între proprietăţile structurale şi care produc diferenţe între modurile de vibraţii ale fiecărei palete.

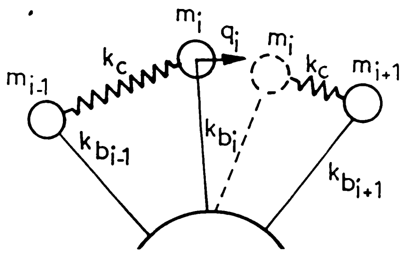

Fig.6.6

În mai multe lucrări [120,126,31] sunt prezentate efectele neregularităţilor structurale, asupra comportării dinamice a discurilor paletate, în structurile cu simetrii ciclice.

În lucrările care se investighează efectele unor mici neregularităţi structurale, asupra comportării dinamice a structurilor cu simetrii ciclice, se consideră modelul simplificat din figura 6.6 [120,126]. Vibraţiile libere ale sistemului neamortizat din figura 6.6 sunt date de ecuaţiile

$$\ddot{q}_i + \omega_{bi}^2 q_i + 2\omega_c^2 q_i - \omega_c^2 q_{i-1} - \omega_c^2 q_{i+1} = 0, \quad i=1,2..,N \qquad (6.106)$$

unde $q_{N+1} = q_1$. Se definesc

$$\omega_{bi}^2 = \omega_b^2(1 + \Delta f_i), \quad R^2 = \omega_c^2/\omega_b^2 \qquad (6.107)$$

unde ω_b este pulsaţia naturală individuală a unei palete iar ω_c este pulsaţia de cuplaj. În aceste ecuaţii, se presupune că diferenţierile între palete îsi au originea în pulsatiile proprii individuale ale fiecărei palete şi în mod special între rigidităţile paletelor.

Ecuaţiile (6.106) pot fi scrise în forma matriceală

$$\{\ddot{q}\} + \omega_b^2[A]\{q\} = \{0\} \qquad (6.108)$$

unde

$$[A]=\begin{bmatrix} 1+2R^2+\Delta f_1 & -R^2 & 0 & . & . & & -R^2 \\ -R^2 & 1+2R^2+\Delta f_2 & -R^2 & 0 & . & & \\ . & . & & & & . & . \\ -R^2 & 0 & & . & . & -R^2 & 1+2R^2+\Delta f_N \end{bmatrix} \tag{6.109}$$

În aceste ecuaţii apar doi parametri adimensionali: abaterea Δf_i care caracterizează de fapt abaterea de rigiditate a paletei *i* faţă de rigiditatea nominală, iar R^2 caracterizează cuplajul dintre substructuri. Considerând cuplajul slab, ca ordin de mărime apropiat de abaterea adimensională, în urma aplicării metodei perturbaţiilor pentru analiza modurilor proprii se constată că fiecare mod este puternic localizat în jurul unei palete. Prin urmare există diferenţe mari între între două structuri ciclice în cele două situaţii: când substructurile nu prezintă neregularităţi şi respectiv când prezintă aceste neregularităţi. O comportare dramatică au aceste structuri în cazul vibraţiilor forţate, apărând fenomenul de localizare a vibraţiilor. O astfel de localizare conduce la concentrarea energiei într-o regiune mică a structurii, adică închiderea ei pe o cale scurtă, între sursa de excitaţie şi structura. Localizarea vibraţiilor duce la limitarea posibilităţii de disipare a energiei acestora, şi aşa destul de mica. Prin urmare, acest fenomen atrage după sine creşterea amplitudinilor, adică o localizare a eforturilor dinamice, şi în final o distrugere a acesteia.

În cele ce urmează se vor da câteva preocupări avute în acest domeniu.

6.3.2. Metode de testare pentru verificarea unor abateri geometrice, de rigiditate şi de masă ale paletelor unei turbine de agregat de vânt [31,34,37].

Se consideră un set de trei palete (Fig.6.7) montate prin flanşe pe un rotor, la 120° între ele. Turbinele de 300 Kw sunt structuri mari, numai lungimile paletelor depăşesc 14 m, şi de aceea este foarte dificil ca din procesul de fabricaţie cele trei palete să aibă valori identice ale maselor, poziţiei centrelor de masă, rigidităţilor şi chiar ale axelor geometrice. Aceste mici diferenţe pot să apară din abateri dimensionale aleatorii între materialele constitutive, cum sunt tuburile metalice, plăcile sau

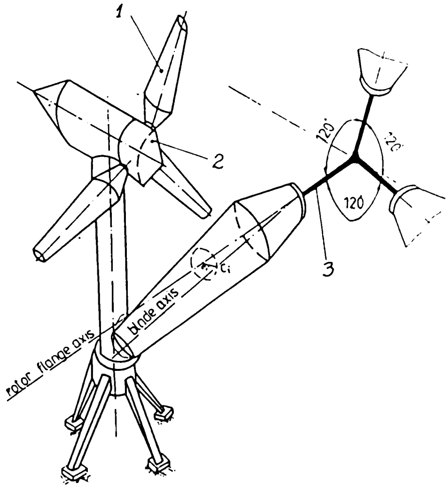

Fig.6.7

materiale compozite de acoperire şi din operaţiile tehnologice, cum sunt prelucrările mecanice sau sudurile. La aceste diferenţe se mai adaugă şi deviaţiile unghiulare ale axelor palatelor în raport cu axele flanşelor, care conduc la o excentricitae suplimentară e_i. Toate aceste abateri sunt prezente în rezultanta forţelor de inerţie care în mod ideal se presupune a fi nulă. Amplitudinea acestei forţe depinde de abaterea axelor paletelor de la 120°, de dezechilibru masic şi de nealinierea dintre axele paletelor şi axele flanşelor de prindere a acestora pe rotor. În timpul funcţionării turbinei efectul dezechilibrului masic este mixat cu efecte datorate săgeţilor de încovoiere ale paletelor, devierii turnului, toate conducând la o structură cu excitaţie parametrică care poate să ducă la regimuri instabile. Nivelele de vibraţii sunt strâns legate de nivelul abaterilor discutate. În situ, chiar şi echilibrarea dinamică este foarte dificil de realizat, deoarece este necesar a se realiza separarea, din semnalele complexe de vibraţii sau de tensiuni, a componentei date de dezechilibru masic, acestea fiind mixate cu alte componente rezultate din rafale de vânt sau din "umbră" de turn. În aceste condiţii este mult mai avantajos ca aceste abateri să fie corectate înainte de montarea paletelor pe turn.

6.3.3. Metode experimentale şi de prelucrare a datelor

6.3.3.1 Determinarea abaterilor masice

Pentru operaţile de echilibrare masică este folosit standul din Fig.6.8 constând dintr-un suport metalic 1 fixat într-un corp masiv rigid 2. Paleta este prinsă pe stand în acelaşi fel în care ea este fixată pe rotorul turbinei: încastrată în flanșa 3 a arborelui rotativ **4** care este axat prin doi rulmenți 5 pe suportul metalic **1**. Poziția rotită a paletei se realizează manual printr-un angrenaj elicoidal. Pentru a estima masa paletei m_b și poziția centrului de masă este necesar a se măsura trei parametri: momentul static al paletei în raport cu planul OYZ, momentul static de basculare datorat dezaxării e și poziția unghiulară a paletei.

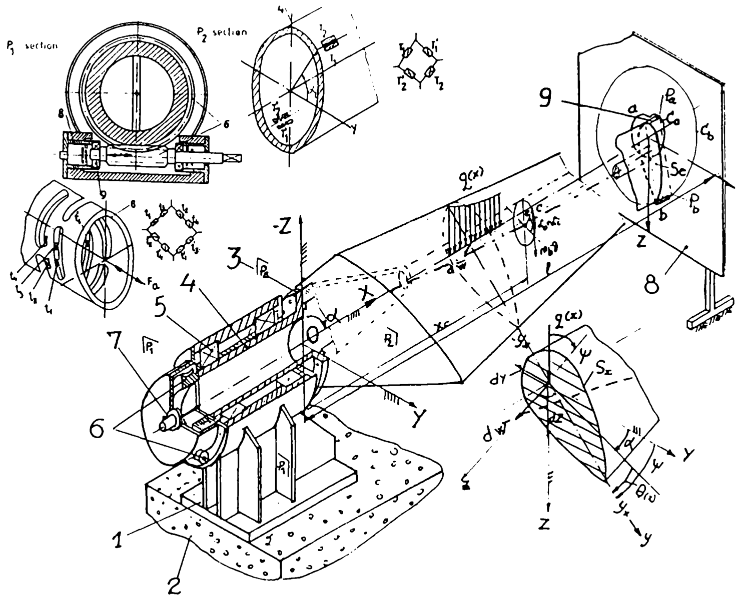

Fig.6.8

Pentru măsurarea momentelui static, pe arborele tubular **4** este aplicată o punte tensometrică completă $T_1 \rightarrow T_4$. Poziția unghiulară α_i este măsurată printr-un encoder 7 conectat mecanic cu arborele tubular **4**. Momentul de balansare $m_b g e.\cos(\alpha_1+\alpha_0)$ este măsurat prin forța axială F_a printr-o punte formată din opt timbre tensometice $t_1 \rightarrow t_4$ și $t'_1 \rightarrow t'_4$.

Pentru o poziția unghiulară arbitrară a paletei, dată prin unghiul α_i, semnalele date de cele două punți sunt

$$U_{si} = K_s m_b X_c g \sin\alpha_i + U_{s0} \qquad (6.110)$$

pentru momentul static, iar

$$U_{fi}=K_f m_b e\cos(\alpha_i+\alpha_0)-K_f M_f sign(\cos(\alpha_i+\alpha_0))+U_f \qquad (6.111)$$

pentru semnalul forţei axiale F_a. În ecuaţiile de mai sus U_{s0} şi U_{f0} sunt două semnale iniţiale constante, iar K_s şi K_f reprezintă constantele traductorilor. Momentul de frecare M_f, apare în rulmenţi şi poate fi considerat constant. Totuşi, ecuaţia (6.111) este adevărată numai pentru condiţia $|Mf| < |m_b eg\cos(\alpha_i+\alpha_0)|$. Diagrama semnalului U_{fi} pentru o rotaţie completă este dată în Fig.6.9. Luând în considerare un număr mare de poziţii unghiulare succesive, pentru care se măsoară cele două semnale date de traductori, U_{si} şi U_{fi}, se obţin două sisteme de ecuaţii algebrice care conduc, prin algoritmul celor mai mici pătrate, la cele mai bune valori aproximative pentru m_b, X_c, e şi α_0. Pentru testele experimentale şi achiziţiile de date s-a folosit un sistem de achiziţie analog/digital pentru PC.

6.3.3.2. Abateri geometrice şi de rigiditate.

Pentru scrierea ecuaţiei de deformare a paletei se consideră modelul unei bare zvelte în consolă. În acest caz ecuaţia de deformare la încovoiere în secţiunea S_x a paletei este

$$EI_y(x)\,\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} = -M_{yy}(x) \qquad (6.112)$$

unde $EI_y(x)$ este rigiditatea la flexiune, $M_{yy}(x)$ este momentul de încovoiere dat de greutate a cărei distribuţie este q(u) şi poate fi scris

$$M_{yy} = M(x)\cos\psi = [-\int_0^{l-x} q(u)\,u\,du]\cos\psi \qquad (6.113)$$

unde ψ este poziţia unghiulară a axei y_x-y_x în starea deformată şi este suma

$$\psi = \alpha + \theta(x) \qquad (6.114)$$

Unghiul α este o poziţie arbitrară a capătului încastrat iar $\theta(x)$ este unghiul de răsucire a paletei în secţiunea situată la distanţa x de capătul încastrat. Vectorul de încovoiere dw fiind perpendicular pe axa y_x-y_x, deplasările elementare dZ şi dY în lungul axelor OZ şi OY sunt

$$dZ = dw\cos\psi;\quad dY = -dw\sin\psi \tag{6.115}$$

Din ecuaţiile (6.111), (6.112) şi (6.115) se obţin ecuaţiile diferenţiale ale deformării axei neutre

$$\begin{aligned}\frac{d^2Y}{dx^2}+\frac{dY}{dx}\frac{d\theta}{dx}\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\theta)} &= \frac{M(x)}{2EI_y}\sin2(\alpha+\theta)\\ \frac{d^2Z}{dx^2}+\frac{dZ}{dx}\frac{d\theta}{dx}\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} &= \frac{M(x)}{2EI_y}(1+\cos2(\alpha+\theta))\end{aligned} \tag{6.116}$$

care prin intregare conduce la ecuaţiile parametrice $Y = Y(x,\alpha)$,şi $Z = Z(x,\alpha)$. Unghiul de răsucire $\psi(x)$ variază încet cu distanţa x aşa că derivată $d\theta/dx$ poate fi neglijată în ecuaţiile (6.116) şi acestea devin

$$\begin{aligned}\frac{d^2Y}{dx^2} &= -\frac{M(x)}{2EI_y}(\sin2\theta\cos2\alpha + \cos2\theta\sin2\alpha)\\ \frac{d^2Z}{dx^2} &= \frac{M(x)}{2EI_y}(1 + \cos2\theta\cos2\alpha - \sin2\theta\sin2\alpha)\end{aligned} \tag{6.117}$$

care prin intregare, ţinând cont de condiţiile de frontieră : pentru $x=0$, $Z=Y=dZ/dx=dY/dx=0$, dau ecuaţiile parametrice ale axei neutre. În secţiunea S_e, la capătul liber al paletei acestea sunt

$$\begin{aligned}Y_e(\alpha) &= -a_2\cos2\alpha - b_2\sin2\alpha\\ Z_e(\alpha) &= a_0 + b_2\cos2\alpha - a_2\sin2\alpha\end{aligned} \tag{6.118}$$

unde a_0, a_2 şi b_2 sunt trei constante care se obţin din condiţiile de frontieră date mai sus. Ecuaţia orbitei corespunzătoare celor două ecuaţii este un cerc, care la capătul liber al paletei are raza $R_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$. Ecuaţiile parametrice (6.118) au perioada π, deci punctul reprezentativ, la o rotatie completă a paletei, descrie curba de două ori.

Dacă paleta ar fi o structură rigidă orbita descrisă de orice punct dintr-o secţiune transversală ar fi un cerc a cărui rază depinde de depărtarea la care se găseşte faţă de axa paletei iar la o rotaţie completă acesta este parcurs o singură dată. Prin urmare dacă axa paletei are o abatere geometrică, față de axa flangei de prindere, considerând paleta nedeformabilă aceasta va descrie acelaşi cerc. Acum, prin cumularea efectelor se obţin următoarele ecuaţii parametrice

$$
\begin{aligned}
Y_e(\alpha) &= -a_1\cos\alpha - b_1\sin\alpha - a_2\cos 2\alpha - b_2\sin 2\alpha \\
Z_e(\alpha) &= a_0 - a_1\sin\alpha + b_1\cos\alpha + b_2\cos 2\alpha - a_2\sin 2\alpha
\end{aligned}
\qquad (6.119)
$$

Curbele C_a şi C_b descrise de două puncte din secţiunea de capăt a paletei nu sunt cercuri, dar sunt curbe închise, prin urmare reprezintă funcţii periodice şi pot fi descompuse în serii trigonometrice. Deci, printr-o simplă analiză a curbelor obţinute experimental pot fi identificate conţinutul în armonici.

6.3.3.3. Rezultate experimentale

Pentru controlul industrial al fabricaţiei paletelor este necesar să se determine momentele statice $S_l = m_b X_G g$ şi $S_r = m_b e g$ şi poziția unghiulară a vectorului excentricităţii. După ce sunt determinate aceste valori se pot calcula două mase adiţionale m_{a1} şi m_{a2} prin care se poate obţine operaţia de echilibrare. Pentru un cuplu de trei palete testate în cadrul laboratorului nostru, s-au obţinut următoarele valori: S_{l1} = 58530 Nm; S_{l2} = 58330 Nm; S_{l3} = 58730 Nm şi S_{r1} = 635 Nm; S_{r2} = 628 Nm; S_{r3} = 652 Nm.

Pentru abaterile geometrice şi de rigiditate măsurătorile sunt făcute pentru două puncte P_a şi P_b din capătul liber al secţiunii S_c. În tabelul 2 sunt date componentele armonice pentru două orbite ale unei palete acoperită cu fibră de sticlă.

Tabelul 2

Curba	Valorile razelor armonicelor [mm]				
	R1	R2	R3	R4	R5
Ca	19.9	34.6	0.56	0.31	0.85
Cb	324	33.7	2.05	0.72	2.85

Se poate observa că numai primele două armonice au valori semnificative. Această observaţie este în concordanţă cu presupunerile teoretice mai sus menţionate, componentele armonicelor de ordinul 3, 4 şi 5 putând fi neglijabile. O altă validare a rezultatelor teoretice este şi aceea că valoarea armonicei a doua (dată de rigiditate) este aceiaşi în cele două curbe. Valorile experimentale, pentru un set de trei palete învelite metalic, care au fost testate înainte de montare sunt date în Tabelul 3.

Tabelul 3

Razele armonicelor	Paleta 1 [mm]	Paleta 2 [mm]	Paleta 3 [mm]
R1(Ca)/R1(Cb)	425/101.	450/114	402/17
R2(Ca)/R2(Cb)	14.4/15.5	17.3/16.2	18.6/16.7

Se observă că paletele acoperite metalic sunt mai rigide decât paletele cu fibră de sticlă cu toate că scheletul metalic era acelaşi. In Tabelul 3 pot fi constatate mici deviaţii pentru armonicele de ordinul doi. Acestea pot fi datorate şi de erorile de măsurători, care pot să apară datoritäa faptului că pentru înregistrarea orbitelor s-a folosit un simplu creion. Metode precise de trasare a curbelor pot elimina aceste neconcordanţe.

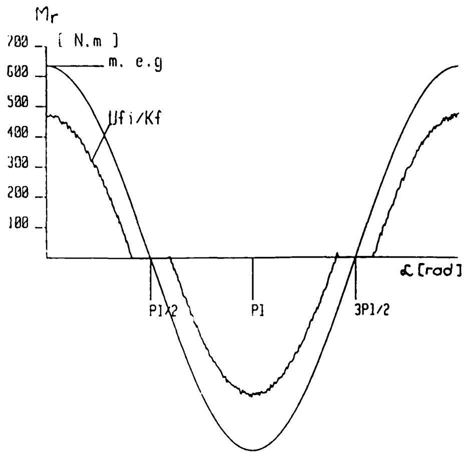

Fig.6.9

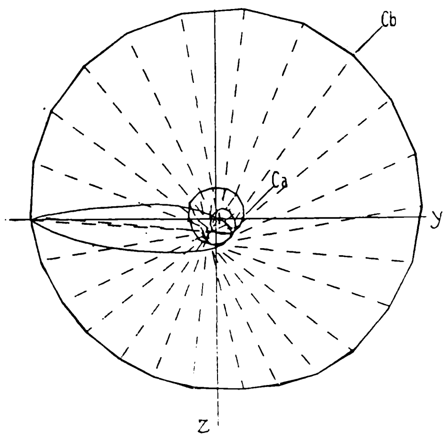

Fig.6.10

Metodele expuse mai sus sunt procedee expeditive şi sunt recomandate în diferite faze ale procesului de fabricaţie, ca operaţii de control în cuplarea unui set de trei palete. Aceste metode arată şi gradul de cuplare care poate să apară între palete.

CAPITOLUL VII

SOLUŢII CONSTRUCTIVE PENTRU DISPOZITIVE DE CONTROL A VIBRAŢIILOR, ATAŞATE STRUCTURILOR MECANICE

7.1. Sistem seismic de amortizare pentru agregat aeroelectric

Aşa cum s-a arătat în Capitolul I, agregatul de vânt cu ax orizontal este o structură slab amortizată. Având mase în mişcare de rotaţie, chiar şi pentru modele dinamice simplificate se obţin ecuaţii diferenţiale cu excitaţii parametrice a căror soluţii sunt greu de exprimat pe cale analitică. In paragraful de faţă se vor discuta două soluţii tehnice ale sistemului de atenuare a vibraţiilor agregatului.

7.1.1. Dispozitiv pendular ancorat prin cabluri

In alegerea soluţiei constructive a sistemului ataşat la structura agregatului se va avea în vedere construcţia tubulară a turnului (Fig.1.1). In interiorul acestuia se va plasa masa (Fig.7.1) seismică constituită dintr-un inel 2 de masă m_2 suspendat prin trei cabluri, fiecare de lungime l. Cablurile sunt prinse în trei puncte A_1, A_2 şi A_3 situate pe corpul turnului pe circumferinţa de raza R şi decalate la 120° între ele. La celălalte capete cablurile sunt prinse în trei puncte B_1, B_2 şi B_3 pe inelul **2**.

S-a ales o varianta constructivă care permite preluarea mişcărilor vibratorii în plan orizontal. Poziţia planului de rotaţie al paletelor depinde de direcţia vântului, deci şi directia de vibraţie fiind, atfel, într-o poziţie arbitrară pentru un anumit regim de lucru. Inelul are, de asemenea, posibilitatea de a se roti, ceea ce permite disiparea energiei oscilaţiilor de torsiune ale turnului. Disiparea energiei vibraţiilor se poate face prin intermediul a trei dispozitive fixate articulat între puntele C_1, C_2 şi C_3 acuplate pe corpul turnului la 120° şi punctele B_1', B_2' şi B_3' situate pe inelul 2 la 120°.

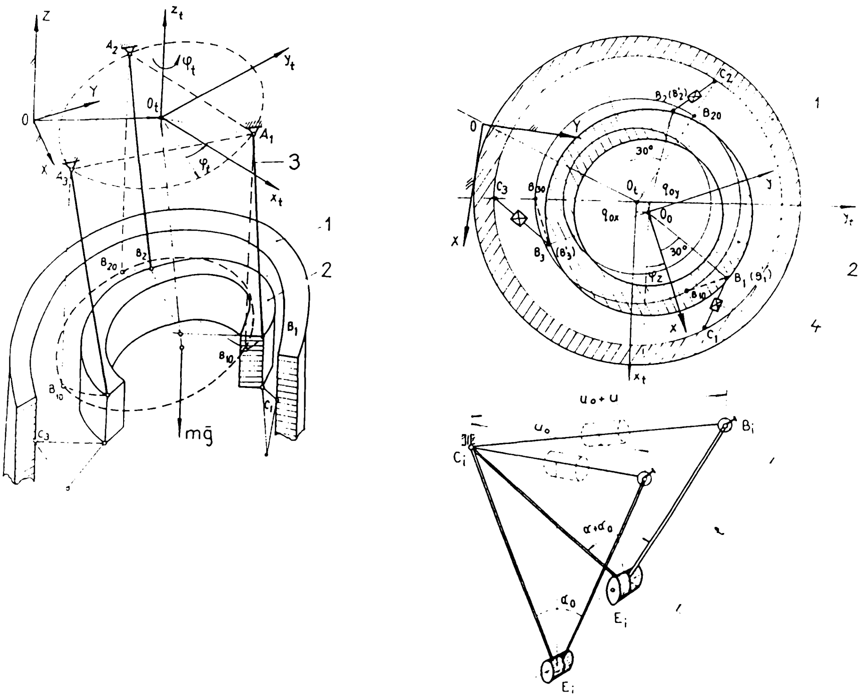

Fig.7.1

7.1.1.1. **Modelul dinamic**

Pentru studiul dinamicii sistemului pendular se are în vedere că inelul 2 este suspendat pe trei cabluri 3 de lungimi egale cu l, deci există trei legături restrictive ceea ce implică o reducere a numărului de grade de libertate ale inelului la trei. Pentru studiul mişcărilor se consideră următoarele sisteme de referinţă: sistemul de referinţă fix OXYZ, sistemul de referinţă $O_tX_tY_tZ_t$ legat de turn, având axa verticală O_tZ_t paralelă cu axa verticală OZ. Matricea de trecere de la sistemul $O_tX_tY_tZ_t$ legat de turn la sistemul fix este notată cu $[T_t]$ şi are forma

$$[T_t] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_t & \sin\varphi_t & 0 \\ -\sin\varphi_t & \cos\varphi_t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

Originea O_t, de pe axa turnului, execută o mişcare în planul orizontal OXY având legile de mişcare $q_{tx}(t)$ după axa OX şi $q_{ty}(t)$ după axa OY. Planul transversal, de care sunt suspendate cele trei fire, poate executa o mişcare de răsucire după axa O_tZ_t având legea de mişcare φ_t. Aceată mişcare de torsiune s-a pus în evidenţă în determinările experimentale efectuate pe agregatele montate pe Semenic. Efectul de torsiune se explică prin faptul că planul de amplasare a palelor nu trece prin axa turnului, iar acestea în timpul rotaţiei constituie surse de perturbaţii care vor da momente dinamice de torsiune. Al treilea sistem de referinţă este O_0xyz, legat de inelul 2 unde O_0 este centrul de masă al inelului. Matricea $[T_0]$ este matricea de trecere de la sistemul de axe O_0xyz la sistemul $O_tX_tY_tZ_t$. Matricea $[T_0]$ se formează prin trei rotaţii succesive care pot fi alese în ordine convenabilă, de exemplu

$$[T_0] = [T_{0z}]\,[T_{0y}]\,[T_{0x}] \tag{7.2}$$

Deorece, inelul, în mişcarea sa, este supus unor legături date de cele trei cabluri, se aleg trei sisteme de referinţă $A_ix_iy_iz_i$ legate de cabluri. Se notează cu $[T_i]$ matricea de trecere de la un sistem de axe $A_ix_iy_iz_i$, legat de cablurile 3, la sistemul legat de turn. Privit ca un corp unidimensional, cablul are deja o axă fixată, prin urmare, luând axele A_iz_i de-a lungul cablurilor, poziţia acestor sisteme de referinţă faţă de sistemul legat de turn este dată prin două unghiuri. Cele două rotaţii succesive, după axele A_ix_i şi A_iy_i dau relaţia matriceală

$$[T_i] = [T_{ix}]\,[T_{iy}]\,, \quad i = 1,2,3 \tag{7.3}$$

Scriind relaţiile vectoriale evidente

$$\overrightarrow{O_tO_0} + \overrightarrow{O_0B_i} = \overrightarrow{O_tA_i} + \overrightarrow{A_iB_i}, \quad i=1,2,3 \tag{7.4}$$

egalităţi ce se pot transpune matriceal intr-o formă simplă

$$\{q_0\} + [T_0]\{r_i\} = \{r_i^*\} + [T_i]\{l_i\} \tag{7.5}$$

unde

$$\{l_i\} = \{0,0,-l\}^T, \quad \{q_0\} = \{q_{0x}, q_{0y}, q_{0z}\}^T, \quad \{r_i\} = \{X_i, Y_i, 0\} \tag{7.6}$$

unde X_i şi Y_i sunt coordonatele punctelor A_i faţă de sistemul de transport $O_tX_tY_tZ_t$, şi care corespund cu cele ale punctelor omoloage B_i făţă de sistemul O_0xyz, exceptând cota Z_0. Relaţiile matriceale (7.5) constituie un sistem de 9 ecuaţii neliniare, având 12 necunoscute: legile de mişcare ale inelului q_{0x}, q_{0y}, q_{0z}, φ_x φ_y şi φ_z, respectiv legile care dau poziţiile cablurilor faţă de corpul turnului φ_{ix} φ_{iy} (i = 1,2,3). In cazul mişcărilor de elongaţii mari ecuaţiile (7.5) reprezintă ecuaţiile legăturilor şi pot fi puse sub forma unui vector

$$\{f_k(q_{0x}, q_{0y}, q_{0z}, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_{1x}, \varphi_{1y}, \varphi_{2x}, \varphi_{2y}, \varphi_{3x}, \varphi_{3y})\} = \{0\} \qquad k = 1,2,\ldots,9 \tag{7.7}$$

Acestea reprezintă legături olonom-scleronome. Pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale care descriu mişcarea sistemului se utilizează metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Pentru aplicarea acestei metode la expresiile energiilor cinetice şi potenţiale date de (4.60) şi (4.66) trebuie adăugate energia cinetică, potenţială şi de disipare dată de dispozitivul proiectat.

Energia cinetică a inelului **2** de masă m_2 este determinată prin integrala

$$E_{ca} = \frac{1}{2}\int_V \{\dot{r}_P\}^T\{\dot{r}_P\}dm \tag{7.8}$$

unde $\{r_P\}$ este vectorul de poziţie al unui punct curent P al inelului. Tinând seama de mişcările compuse la care participă acesta, în raport cu sistemele de referinţă considerate, vectorul $\{r_P\}$, raportat la sistemul de referinţă fix este dat de

$$\{r_P\} = \{q_t\} + [T_t]\{q_0\} + [T_t][T_0]\{r\} \tag{7.9}$$

unde

$$\{q_t\} = \{q_{tx}, q_{ty}, 0\}^T, \qquad \{r\} = \{x, y, z\}^T \tag{7.10}$$

iar x, y şi z sunt coordonatele unui punct curent din inel în raport cu sistemul de referinţă legat de acesta. Prin derivare în raport cu timpul a relaţiei (7.9) se obţine vectorul viteză

$$\{\dot{r}_P\} = \{\dot{q}_t\} + \dot{\varphi}_t[D_t]\{q_0\} + [T_t]\{\dot{q}_0\} + (\dot{\varphi}_t[D_t][T_0] + [T_t][T_0][\dot{\Phi}])\{r\} \tag{7.11}$$

unde

$$[\dot{T}_t] = \dot{\varphi}_t[D_t] = \dot{\varphi}_t\begin{bmatrix} -\sin\varphi_t & \cos\varphi_t & 0 \\ -\cos\varphi_t & -\sin\varphi_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\dot{T}_0] = [T_0][\dot{\Phi}] \tag{7.12}$$

Prin înlocuire în expresia (7.8) se obţin pentru amortizor următorii termeni ai energiei cinetice

$$E_{ca1} = \frac{1}{2}\int_V \{\dot{q}_t\}^T\{\dot{q}_t\}dm = \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_{tx}^2 + \dot{q}_{ty}^2) \tag{7.13}$$

$$E_{ca2} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_t^2\int_V \{q_O\}^T[D_t]^T[D_t]\{q_O\}dm = \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_t^2(q_{Ox}^2 + q_{Oy}^2) \tag{7.14}$$

$$E_{ca3} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_t^2\int_V \{\dot{q}_O\}^T[T_t]^T[T_t]\{\dot{q}_O\}dm = \frac{1}{2}m_2\{\dot{q}_O\}^T\{\dot{q}_O\} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned}E_{ac4} &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}_t^2\int_V \{r\}^T[T_O]^T[D_t]^T[D_t]\,[T_O]\{r\}dm = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_t^2\int_V \{r\}^T[a_t]\{r\}dm = \\ &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}_t^2(J_{yoz}a_{11} + J_{xoz}a_{22} + J_{xoy}a_{33})\end{aligned} \tag{7.16}$$

Matricea $[a_t]$ are următoarele elemente

$$[a_t] = \begin{bmatrix} c_y^2+s_x^2s_y^2 & s2_xs_y & -s2_yc_x^2 \\ s2_xs_y & c_x^2 & s2_xs_y \\ -s2_xc_y^2 & s2_xc_y & s_y^2+s_x^2c_y^2 \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

unde s-au folosit prescurtările $s_{x,y} = \sin\varphi_{x,y}$ $c_{x,y} = \cos\varphi_{x,y}$ $s2_{x,y} = \sin2\varphi_{x,y}$ $c2_{x,y} = \cos2\varphi_{x,y}$. Termenul următor al energiei cinetice va fi

$$E_{ac5} = \frac{1}{2}\int_V \{r\}^T[\dot{\Phi}]^T[T_O]^T[T_t]^T[T_t]\,[T_O]\,[\dot{\Phi}]\{r\}dm = \frac{1}{2}\{\dot{\varphi}\}[J]\{\dot{\varphi}\} \tag{7.18}$$

unde matricea de inerţie $[J]$ are numai elementele de pe diagonală, deorece axele sistemul de referinţă O_oxyz sunt axe de simetrie pentru inel, iar

$$\{\dot{\varphi}\}^T = \{\dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z\} \tag{7.19}$$

Termenul al 6-lea va fi de forma

$$\begin{aligned}E_{ac6} &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}_t\int_V \{r\}^T([T_O]^T[D_t]^T[T_t]\,[T_O]\,[\dot{\Phi}]\{r\}dm + \\ &+ \frac{1}{2}\dot{\varphi}_t^2\int_V \{r\}^T[\dot{\Phi}]^T[T_O]^T[T_t]\,[D_t]\,[T_O]\{r\}dm = \frac{1}{2}\int_V \{r\}^T[b_t]\{r\}dm\end{aligned} \tag{7.20}$$

Dezvoltarea termenilor se simplifică ţinând seama de următoarea relaţie care se poate verifica uşor

$$[D_t]^T[T_t] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

Efectuând calculele, se obține

$$E_{ac6} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_t^2(J_{yoz}b_{11} + J_{xoz}b_{22} + J_{xoy}b_{33}) \qquad (7.22)$$

unde b_{11}, b_{22} și b_{33} sunt elementele diagonale ale matricei

$$[b_t] = 2\begin{bmatrix} c_x c_y \dot{\varphi}_z - s_x c_x \dot{\varphi}_y & s_x c_y \dot{\varphi}_x & c_x c_y \dot{\varphi}_x \\ 2 s_y \dot{\varphi}_y & -c_x c_y \dot{\varphi}_z + 2 s_y \dot{\varphi}_x & c_x c_y \dot{\varphi}_y \\ -2 s_y \dot{\varphi}_z & s_x c_y \dot{\varphi}_z & -s_x c_y \dot{\varphi}_y - 2 s_y \dot{\varphi}_x \end{bmatrix} \qquad (7.23)$$

Ultimul termen al energiei cinetice se poate scrie sub forma

$$E_{ac7} = m_2(\dot{\varphi}_t\{\dot{q}_t\}^T[D_t]\{q_o\} + \{\dot{q}_t\}^T[T_t]\{\dot{q}_o\} + \dot{\varphi}_t\{q_o\}^T[T_t]\{\dot{q}_o\}) \qquad (7.24)$$

Un calcul simplu pentru acordarea unui amortizor pendular la modul fundamental al agregatului eolian (f_1=1,3 Hz) dă o lungime a firului de aproximativ 17 cm. Pentru a da posibilitate unor deplasări mai mari, dar în cadrul unor unghiuri mici, se va lua lungimea firelor constructiv, la 1m. Păstrarea acordării se va face tot constructiv prin introducerea unor arcuri de torsiune în articulațiile dispozitivelor de legătură **4**. Dispozitivele de legătură sunt legate între punctele B_i' aflate pe inel și C_i de pe structura tubulară a turnului. In poziție de echilibru static axele turnului și inelului coincid, distanțele dintre punctele B_i' și C_i fiind: u_o = R-r. Mecanismul de legătură **4** fiind constituit din două bare articulate de lungime l_m și în această poziție unghiul de deschidere va fi

$$\alpha_0 = 2\arcsin\left(\frac{u_0}{2l}\right) \qquad (7.25)$$

Intr-o altă poziție a punctului B_i' dată de mișcarea inelului

$$\alpha_0 + \alpha_i = 2\arcsin\left(\frac{u_0 + u_i}{2l}\right) \qquad (7.26)$$

unde $u_i + u_o$ este distanța dintre punctele C_i și B_i'

Dacă în punctele E_i se introduce o legătură elastică de torsiune având constanta elastică de torsiune K_α, atunci energia de deformație este de forma

$$E_\pi = \frac{1}{2}K_\alpha \alpha^2 = \frac{1}{2}K_\alpha\left(2\arcsin\left(\frac{u_0+u_i}{2l}\right)-\alpha_0\right)^2 \qquad (7.27)$$

Forţa de legătură elastică introdusă între punctele B_i' şi C_i corespunzătoare deplasării relative u_i va fi

$$F_{li} = -\frac{\partial E_{Pi}}{\partial u_i} = K_\alpha\left(\alpha_0 - 2\arcsin\left(\frac{u_0+u_i}{2l}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{4l^2-(u_0+u_i)^2}} \qquad (7.28)$$

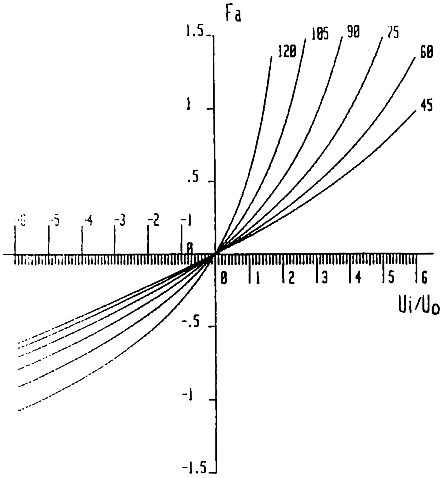

Fig.7.2

deci o funcţie neliniară de deplasarea u_i. Forma caracteristicii neliniare poate fi controlată prin alegerea unghiului de deschidere α_0 a mecanismului în poziţia de echilibru static al ansamblului. In Fig.7.2 sunt reprezentate grafic variaţia forţei de legătură adimensională F_a, ca funcţie de deplasarea adimensională u_i/u_0 pentru diferite valori ale parametrului α_0.

$$F_a = \frac{F_{li}l}{K_\alpha} = f\left(\frac{u_i}{u_0},\alpha_0\right) \qquad (7.29)$$

Forma neliniară este asimetrică panta curbelor caracteristice fiind mai mică la valori negative ale forţei F_a. După cum se observă valoarea deschiderii α_0 influenţează esenţial modificarea caracteristicii, deci acesta poate fi un parametru de reglaj. Pe ansamblu cele trei forţe de legătură ce lucrează între punctele B_i' şi C_i, având 120° între ele va da o rezultantă cu o caracteristică neliniară simetrică. Dacă între aceste puncte se introduce şi un mecanism a cărui energiei de disipare este de natură vâscoasă, având expresia

$$E_{dvi} = \frac{1}{2}c_\alpha\dot{\alpha}^2 = 2\frac{\dot{u}_i^2}{4l^2 - (u_0+u_i)^2} \qquad (7.30)$$

Forţa de amortizare corespunzătoare are expresia

$$F_{vi} = -\frac{\partial E_{dvi}}{\partial \dot{u}_i} = \frac{\dot{u}_i}{l^2 - \left(\frac{u_0 + u_i}{2}\right)^2} \tag{7.31}$$

care are un caracter neliniar mai puţin pronunţat decât forţa elastică.

Un alt mecanism care se pretează pentru disiparea energiei este mecanismul cu frecare columbiană plasat tot în articulaţia plană E_i. Energia de disipaţie elementară dE_{dfi} va fi egală cu lucrul mecanic elementar al momentului forţelor de frecare uscată

$$dE_{dfi} = dL_i = M_{ri} d\alpha_i \, sign d\dot{\alpha}_i \tag{7.32}$$

unde M_{ri} este momentul forţelor de aderenţă în raport cu axa cuplei plane în E_i, iar

$$sign d\dot{\alpha}_i = sign \dot{\alpha}_i = \begin{cases} >0 & pentru \quad \dot{\alpha}_i > 0 \\ =0 & pentru \quad \dot{\alpha}_i = 0 \\ <0 & pentru \quad \dot{\alpha}_i < 0 \end{cases} \tag{7.33}$$

Din (7.25) se deduce

$$dE_{dfi} = \frac{M_{ri} du_i \, sign \dot{u}_i}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{u_0 + u_i}{2}\right)^2}} \tag{7.34}$$

unde s-a ţinut cont că: sign α_i = sign u_i. Forţa de legătură echivalentă pe direcţia punctelor C_i şi B_i'va fi

$$F_{dfi} = -\frac{\partial E_{dfi}}{\partial u_i} = \frac{-M_r \, sign \dot{u}_i}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{u_0 + u_i}{2}\right)^2}} = -R_i \, sign \dot{u}_i \tag{7.35}$$

Si în acest caz forţa de aderenţă echivalentă pe direcţia celor două puncte va fi funcţie de u_0 şi u_i

$$R_i = \frac{M_r}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{u_0 + u_i}{2}\right)^2}} \tag{7.36}$$

Se observă că şi forţa R_i poate fi reglată din mecanismul dispozitivului de legătură. In calculul energiei potenţiale a ansamblului studiat trebiue să se aibă în vedere şi mişcarea pe verticală a centrului de masă. Aceasta va fi

$$E_{po} = -m_2\overline{g}\,\overline{OO_0} \tag{7.37}$$

unde vectorul de poziţie a centrului de masă se determină din

$$\overline{OO_0} = \overline{OO_t} + \overline{O_tO_0} \tag{7.38}$$

de unde, ţinând cont de faptul că m_2g este perpendicular pe vectorul OO_t, va rezulta pentru energia potenţială forma matriceală

$$E_{po} = \{0,0,-m_2g\}[T_t]\{q_o\} \tag{7.39}$$

legile de mişcare q_{ox}, q_{oy} şi q_{oz} sunt legile de mişcare ale centrului de masă în raport cu sistemul de axe de transport $O_tX_tY_tZ_t$, axa O_tZ_t fiind paralelă cu greutatea. Având determinate energiile de deformaţie şi disipative din cele trei legături se poate trece la asamblarea sistemului de ecuaţii diferenţiale ale ansamblului agregatului. Cuplarea se va face la sistemul de la modelul din paragraful 4.5.1, care va fi mărit cu încă trei grade de libertate. Considerând sistemul neliniar, trebuie adăugate şi ecuaţiile legăturilor, iar ecuaţiile de mişcare se vor obţine prin aplicarea ecuaţiilor lui Lagrange cu multiplicatori. O problemă deschisă pentru cercetările următoare rămâne cea a blocării pentru un interval de timp dat a unei legături disipative, prin forţa de aderenţă.

7.1.1.2. Mecanismul dispozitivului de legături elasto-disipative

In figura 7.3 se prezintă soluţia tehnică originală a mecanismului dispozitivului de legături elasto-disipative. Cele două braţe de deschidere l_m sunt fixate în punctul C_1 pe turn prin intermediul a două articulaţii plane perpendiculare între ele pe bolţurile **3** şi **4**. La capătul B_1' al dispozitivului, pe braţul **2** se găsesc două articulaţii în plane perpendiculare constituite pe bolţurile **5** şi **6**. Cele două balamale **8** şi **9**, de ancorare a dispozitivului pe corpul turnului respectiv pe inelul sistemului pendular, vor îngrădi un grad de libertate. Pentru a nu produce tendinţa de torsionare a bratelor mecanismului, braţul **2** este prevăzut cu bolţul de rotaţie **7**.

Articulaţia elasto-disipativă este materializată prin următoarea soluţie: In carcasa **10** a dispozitivului este fixat un ax pe doi rulmenţi, realizându-se în acest fel articulaţia plană

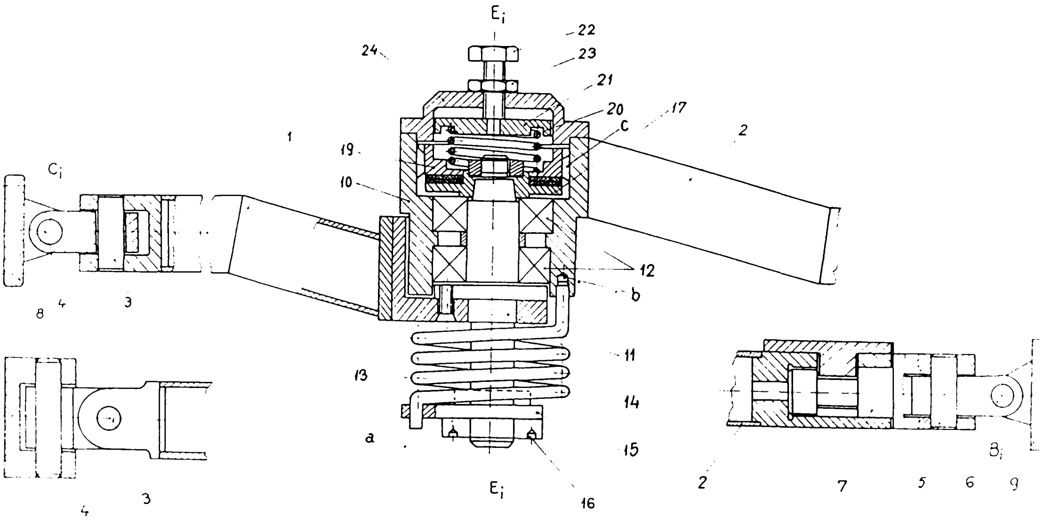

Fig.7.3

E_i, sau linia E_iE_i (Fig.7.3). De acest ax este prins braţul 1 prin intermediul unui suport de legătură 13 demontabil prin şuruburi. Ca element elastic în articulaţia E_i se utilizează un arc elicoidal fixat la un capăt în orificiul a al unei piuliţe 15 calată pe porţiunea filetata a axului 11. Blocarea piuliţei 15 deci rigidizarea ei pe axul 11 făcându-se prin contrapiuliţa 16. Celălalt capăt al arcului este introdus în orificiul **b** al carcasei 10. Armarea arcului, înainte de montarea sa pe ansamblu, se face în exterior prin introducerea unei legături (o tijă) de lungime u_0 intre articulaţiile C_i şi B_i', a cărui forţa se poate măsura prin traductorul de forţă cu care tija de reglat poate fi prevăzut. Apoi, din piuliţa 15, prin rotirea ei se armează arcul până ce forţa de legătură indicată de traductor va fi cea prescrisă, după care piuliţa 15 se rigidizează de axul 11 prin contrapiuliţa 16. Disiparea energiei se face prin frecare uscată. Mecanismul de disipare este următorul: de axul 11 este prins la capătul său conic o flanşă plană 17 placată cu inel ferodou 18. Aceiaşi placare cu inel ferodou este aplicată inelului 19 concentric cu flanşa 17, inel ce este blocat la rotaţie faţă de carcasa 10 de canelurile c. Valoarea momentului de frecare la aderenţă ce apare între cele două inele ferodou 18 se reglează prin arcul de compresiune 20. Reglarea forţei de apăsare axială a arcului se face prin prezonul filetat

22 care prin filetare în capacul **24** comprimă prin intermediul talerului **21** arcul **20**. Blocarea prezonului **22** se realizează prin contrapiuliţa **27**.

7.1.2. Variantă constructivă cu pendul sferic pentru sistem seismic ataşat la agregatul aeroelectric cu ax orizontal

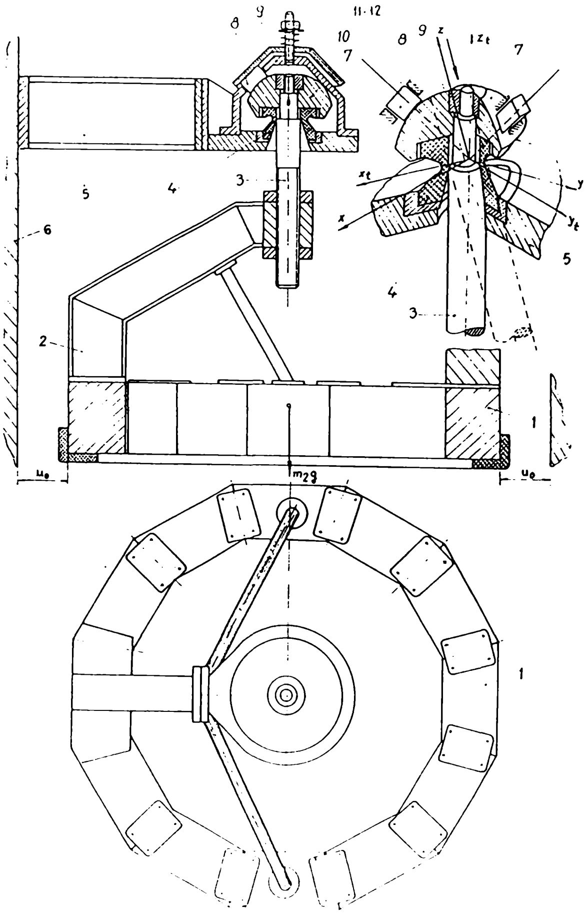

Fig.7.4

In Fig.7.4 se dă o variantă constructivă de realizare a sistemului seismic ataşat la agregatul de vânt cu ax orizontal care să asigure disiparea energiei vibraţiilor periculoase pentru integritatea structurii cât şi pentru funcţionarea unor aparate plasate în nacelă. Si pentru această variantă masa seismică m_2 este un inel circular **1** format dintr-un număr de sectoare ca în figura rigidizarea între ele prin eclise cu şuruburi. Această soluţia este mai economică decât prima variantă deorece este mai uşor de prelucrat, din piese de dimensiuni reduse, decât un inel în diametru de aproximativ doi metri. De asemenea este mult mai comod a asambla, direct pe turn, un inel din piese de greutăti reduse. Un inel de 600 Kg va avea sectoare de câte 50 Kg uşor de asamblat fără dispozitive speciale de ridicat sarcini. Inelul 1 este prins pendular prin cadrul 2 şi tirantul rigid 3, prin care se reglează lungimea pendulului (poziţia centrului de masă O_0 suspendat pe o maşa sferică elastodisipativă, amplasată pe o consolă 5 rigidizată de corpul tubular al turnului 6. Articulaţia elasto-disipativă se realizează printr-un lagăr elastic **4** din cauciuc fixat pe suportul conic 5 căruia îi transmite sarcina statică şi dinamică, transmise prin tirantul 3 de la ansamblu seismic. Preluarea sarcinilor se face prin intermediul unei calote sferice 7. Corpul lagărului elasic este profilat dublu tronconic cu secţiunea minimă în planul $O_tX_tY_t$ ceea ce-i coferă posibilitatea de rotire sferică cu centrul instantaneu de rotaţie în vecinătatea punctului O_t. Totodată lagărul permite şi mişcări torsionale în jurul axului tirantului O_tz. Impedecarea elastică a lagărului elastic trebuie sa formeze în acest caz rigidităţi mari pentru mişcări de translaţie şi rigidităţi mici pentru mişcari de rotaţie, aceasta pentru a păstra centrul instantaneu de rotaţie cât mai aproape de O_t. In acest caz, în timpul mişcărilor unghiulare ale tirantului 3, punctele calotei vor executa mişcări sferice. Pentru disiparea energetica vibraţiilor se utilizează trei patine **8** din ferodou care sunt amplasate în trei lăcaşuri situate pe aceiaşi paralelă, decalate cu 120°, pe carcasa **9** .

Un alt avantaj al acestei soluţii, faţă de soluţia ancorării masei seismice prin cabluri, îl constituie faptul că sistemul de disipare a energiei vibraţiilor se face printr-un mecanism mult mai simplu. De asemenea şi cuplajul elastic se realizează printr-un singur element de deformaţie, lagărul de cauciuc. Problemele dificile se ridică la proiectarea lagărului elastic de cauciuc, al cărui calcul este mai anevoios. In acest caz este necesar a se realiza cîteva tipodimensiuni şi pe bază experimentală, de laborator, să se determine caracteristicile de răspuns la solicitări complexe, rezultate din mişcări pe mai multe direcţii.

7.2 Dispozitive cu legături de autoblocare

Una din cele mai simple şi mai economice metode de realizare practică a variaţiei parametrilor modali ai unei structuri este aplicarea unor dispozitive cu legături de autoblocare. In accepţia cea mai generală, prin dispozitive cu legături de autoblocare sau de tip "arestor" se înteleg acele elemente constructive care în stadiul iniţial nu au un efect sesizabil în comportarea structurii, dar intră în lucru la atingerea unui prag al amplitudinii vibraţiilor sau la un anumit nivel al acceleratiei.

7.2.1. Dispozitive de legătură elasto-disipative cu funcţie de autoblocare

Dispozitivele de tip arestor, categorie din care fac parte şi legăturile elasto-disipative, se fixează între două puncte care au mişcări vibratorii şi care la un moment dat, când acceleraţia relativă dintre aceste punte atinge un nivel stabilit, această legătură se rigidizează.

Pentru exemplificare se consideră sistemul cu două grade de libertate din figura 7.5 a, în care, între masele m_1 şi m_2 se fixează un dispozitiv arestor. Între punctele sale de prindere va exista nivelul de acceleraţie relativă

$$\ddot{x}_r = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 \tag{7.40}$$

Intre cele două mase mase va apare brusc o legătură rigidă care dispare în momentul în care nu mai există condiţia de nivel al acceleraţiei relative.

Un astfel de mecanism este şi cel dat în figura 7.5 b. Mişcarea vibratorie relativă $x_r(t)$ este preluată printr-un mecanism cremalieră roată dinţată şi transformătă într-o mişcare de rotaţie

$$\varphi_r(t) = \frac{2x_r(t)}{mz} \tag{7.41}$$

unde m şi z sunt modulul şi respectiv numărul de dinţi ai roţii dinţate. Pe axul 2 pe care este calată şi roata dinţată este fixată, la celălalt capăt, o furcă **3** care este în contact cu capetele a şi b ale unui arc elicoidal de torsiune **4** în punctele P_a şi P_b. Arcul de torsiune **4** este centrat liber cu un joc **s** pe un cilindru 5 solidarizat cu carcasa **6** a dispozitivului. Pe axul 2 este calat liber un disc **7** si care este solidarizat cu o a doua furcă **8** pe care se sprijină capetele **a** şi **b** ale arcului în punctele P_{1a} şi P_{1b}.

Atâta timp cât mişcarea relativă $x_r(t)$ este uniformă sau

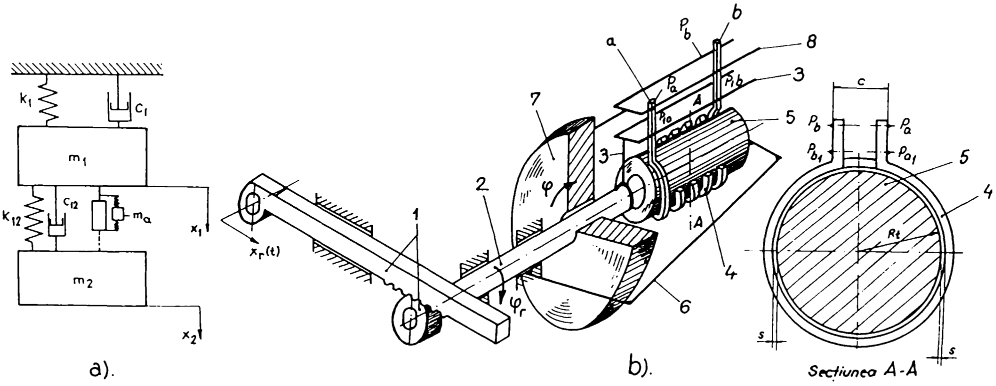

Fig.7.5

accelerată dar de nivele foarte joase,are loc antrenarea discului 7 în mişcare de rotaţie dată prin legea φ(t). Această mişcare pe ax se poate face la valori mici ale forţei de legătură, fiind necesar a fi învinse doar forţele de frecare din angrenaj şi lagăre. Acest fapt permite deplasarea relativă liberă, a punctelor de fixare a dispozitivului, aceasta în condiţiile în care maşina sau instalaţia pe care este fixat dispozitivul suferă deplasări mari datorită dilatării termice. Această situaţie se întâlneşte frecvent în instalaţii termice sau chimice. Dilatările termice crează deplasări relative mari dar de acceleraţii foarte mici. Datorită inerţiei termice aceste efecte au loc într-un timp mare si prin urmare acceleraţiile sunt neglijabile. Uneori peste aceste mişcări lente se suprapun mişcări vibratorii relative de nivele mari, cum este cazul regimurilor rezonante, imposibil de evitat în cazul unor conducte forţate din instalaţii termice şi chimice, ale căror perturbaţii îsi modifică spectrul în funcţie de parametrii de lucru ai instalaţiei. In aceste condiţii mişcarea de rotaţie $\varphi(t)$ a discului nu va mai fi identică cu mişcarea axului dată prin $\varphi_r(t)$.

Legea de mişcare a discului $\varphi(t)$ va fi dată de ecuaţia

$$J\ddot{\varphi} = -K(\varphi - \varphi_r) - M_s \tag{7.42}$$

unde K este constanta elastică a arcului de torsiune 4, iar M_s este momentul de prestrângere a arcului între furcile 3 şi 8. J este momentul de inerţie al discului în raport cu axa de rotaţie. Mişcarea relativă a discului 7 faţa de axul 2 are loc numai în momentul în care cuplul de inerţie este mai mare decât valoarea momentului de prestrângere. In această condiţie este valabilă şi ecuaţia (7.42). In orice sens s-ar roti axul 2 forţele de contact ce iau naştere între cele două capete a sau b ale arcului, duc la comprimarea acestuia, deorece legăturile în punctele de contact P_a, P_b, P_{1a} şi P_{1b} sunt puncte de sprijin unilateral. In cazul mişcării independente a discului 7 faţă de axul 2, mişcare care rezultă pe baza ecuaţiei (7.42), contactele rămân într-un sens în punctele P_a şi P_{1b} iar în celălalt sens în punctele P_b şi P_{1a}. Deformaţia unghiulară maximă φ_s, a arcului 4, până în momentul blocării pe tamburul 5 este

$$\varphi_s = \frac{2\pi sn}{R_t+s+d/2} \tag{7.43}$$

unde n este numărul de spire ale arcului, R_t raza tamburului, d diametrul spirei arcului elicoidal cu secţiune dreptunghiulară. Secţiunea dreptughiulară asigură un contact de aderenţă mai bun decât un arc cu secţiune circulară, unde contactul se face pe o linie în loc de o suprafaţă. Deci condiţia de blocre este ca

$$\varphi - \varphi_r = \varphi_s \tag{7.44}$$

care introdusă în (7.42) va da

$$J\ddot{\varphi}_r = -K\varphi_s - M_s \tag{7.45}$$

Iar acceleraţia de blocare a mişcării cremalierei va fi

$$\ddot{x}_{rb} = \frac{mz}{2J}\left(\frac{K\pi sn}{2R_t+2s+d} - M_s\right) \tag{7.46}$$

La proiectarea dispozitivului de tip arestor, se impune acceleraţia x_r şi sarcina maximă de blocare pe care o poate prelua dispozitivul fără a suferi deteriorări. Revenind la modelul cu două grade de libertate din figura 7.5.a se poate explica procesul de blocare scriind sistemul de ecuaţii diferenţiale care guvernează mişcarea maselor m_1 şi m_2

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_{12} & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_{12}+k_l & -k_{12}-k_l \\ -k_{12}-k_l & k_{12}+k_l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (7.47)$$

unde k_l este rigiditatea dispozitivului care are două valori, una k_{0l} de valoare neglijabilă în raport cu rigiditatea k_{12} a arcului ce acţionează în paralel cu dispozitivul. In momentul blocării, la acceleraţia x_r, valoarea rigidităţii k_l va creşte brusc depăşind cu mult rigiditatea k_{12}. În acel moment sistemul vibrant are o pulsaţie proprie corespunzătoare unuia dintre cele două moduri, care sunt mult mai mici decât cea corespunzătoare sistemului cuplat. In acest caz condiţia de blocare $|x_1 - x_2| = x_{rb}$ dispare rapid şi dacă condiţiile se repetă acest dispozitiv poate intra din nou în funcţiune. Procesul de blocare a dispozitivului este mult mai complex şi va trebui să se ţină cont de faza de înfăşurare a arcului **4** pe tamburul 5, această înfăşurare se face ca a unui fir elastic supus la încovoiere în timp ce se înfăşoară cu frecare pe un tambur. Problematica acestui studiu depăşeşte obiectivul acestei lucrări.

Mecanismul prezentat mai sus conform cu figura 7.5.b este materializat în soluţia tehnică din figura 7.6 unde subansamblele echivalente funcţional din cele două figuri s-au notat cu aceleaşi numere de ordine. Soluţia tehnică conţine câteva funcţii suplimentare : introducerea unei disipări de energie prin introducerea unei pelicule de ulei **9** în interstiţiul dintre discul **7** şi carcasa **6**, care prin mişcarea relativă dintre cele două suprafeţe disipează o parte din energia vibraţiilor. Se prevede o peliculă de ferofluid care este păstrată în interstiţiu de către două inele magnetice **10**. De asemenea se vizează disiparea unei cote din energia vibraţiilor în angrenajul cremalieră roată dinţată. Aceiaşi funcţie arestor o are şi dispozitivul din Fig.7.7. acesta fiind fixat între cele două urechi **1** şi **2**.

Mişcarea relativă x_r este preluată de axul tubular **3** de care este fixat o piuliţă **4** a carei filet cu mai multe începuturi are un pas **p** mare, ceea ce permite rotirea cinematică a şurubului 5, fără autoblocare, atunci când piuliţa **4** se deplasează axial cu legea de mişcare $x_r(t)$. Surubul 5, care se roteşte după legea

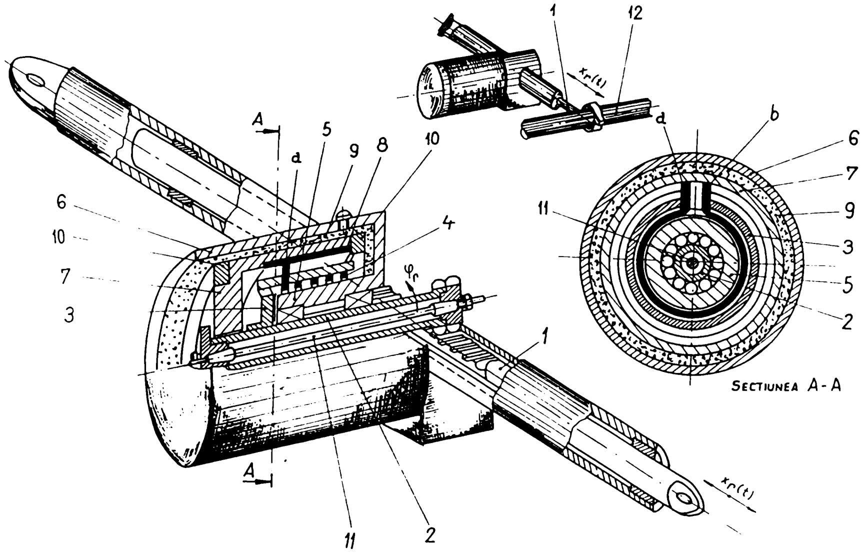

Fig.7.6

$$\varphi_r(t) = \frac{2\pi}{p} x_r(t) \tag{7.48}$$

antrenează un disc **6** fixat de el. Un al doilea disc **7** identic cu **6** este cuplat elastic prin trei arcuri **8** cu discul **6**. Acesta este rigidizat de un ax tubular **9** coaxial cu şurubul **5** . La capătul tubului **9** este amplasată o piuliţă **10** care se înşurubează pe axul tubular 3. Filetul asamblării filetate având acelaşi pas **p** cu cel al ansamblului piuliţă **4** şurub **5**. Diametrul asamblării filetate piuliţa 10 cu axul 3 fiind mai mare decât cel al celeilalte asamblări. In stare statică, sau de mişcare lină, această asamblare filetată este cu un joc s care face ca flancurile spirelor piuliţei **10** să nu se atingă cu spirele filetului de pe axul **3**. La un moment dat când acceleraţia $x_r(t)$ atinge o valoare limită datorită cuplajului elastic prin arcurile **8** şi al inerţiei de rotaţie a discului 7, axului tubular **9** şi a piuliţei **10**, solidare între ele, se produce şi aici un decalaj $\varphi_r(t) - \varphi(t)$ care prin intermediul celor două ansamble va consuma jocul **s**, filetul axului 3 luând contact cu filetul piuliţei **10** şi cum în această asamblare filetată

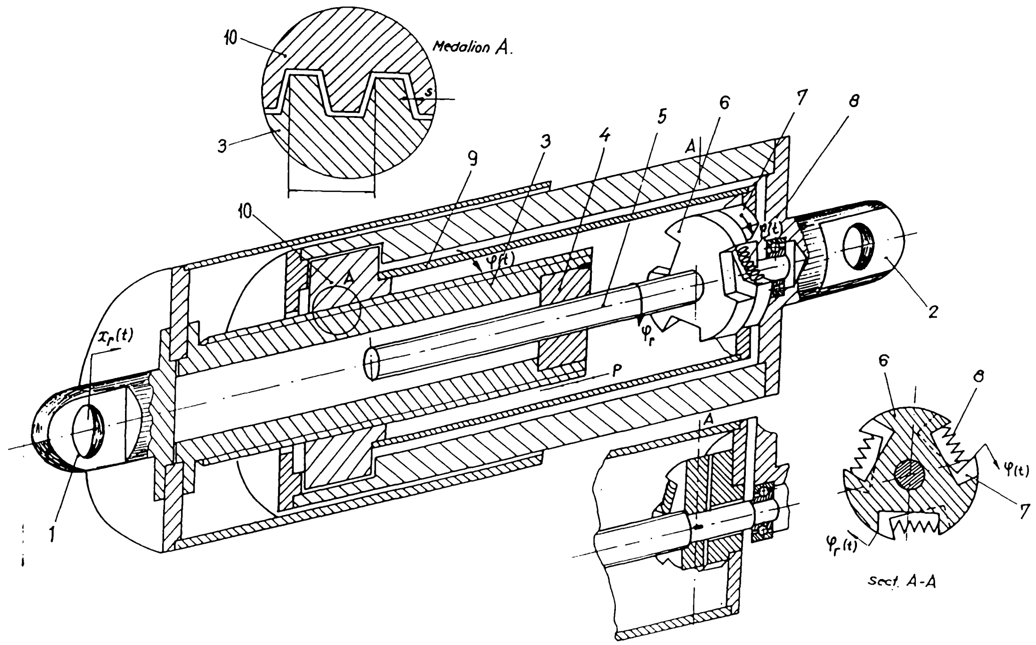

Fig.7.7

există condiţia de autoblocare, mişcarea reversibilă de translaţie rotaţie nu mai este posibilă dispozitivul blocându-se, deci devenind "arestor". Deblocarea se va face în aceleaşi condiţii ca la mecanismul prezentat deja. Cele două soluţii prezentate mai sus au rolul esenţial de dispozitiv "arestor" şi mai puţin de amortizor adică de disipare de energiei vibraţiilor.

7.2.2. Dispozitiv de legătură elasto-disipativ cu frecare uscată şi funcţie de autoblocare

Utilizarea dispozitivelor de tip arestor este limitată la structuri vibrante care deplasări mari dar frecvenţe joase. Componentele vibraţiilor de frecvenţă mai înaltă vor fi atenuate în momentul în care elongaţiile de acceleraţie ating nivelul de blocare a dispozitivului. Procesul de blocare instantaneu este de durată foarte scurtă şi nu este însoţit aţât de o disipare de energie cât de un transfer energetic între modurile proprii sau în alte zone ale structurii.

In acest sens, pentru a mări gradul de disipare al energiei

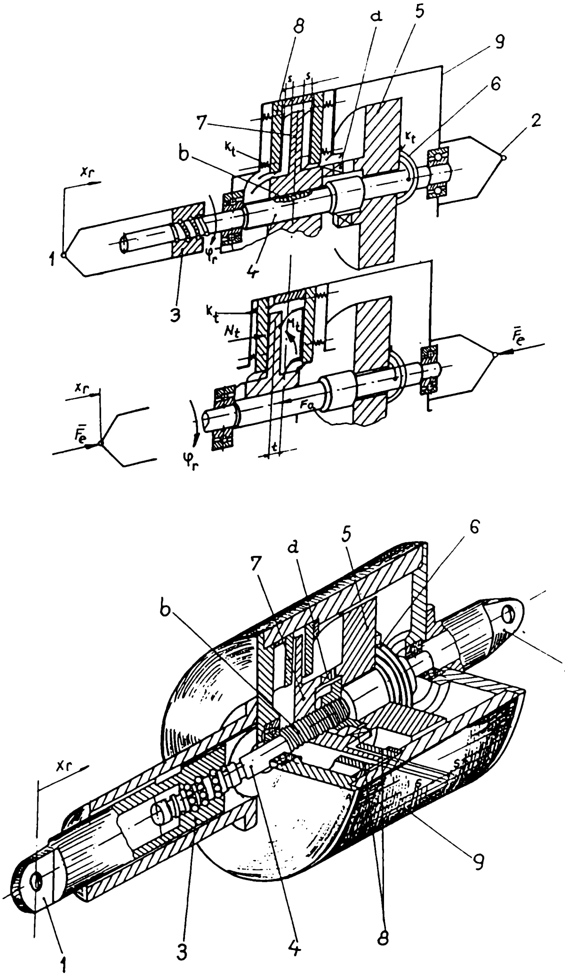

Fig.7.8

vibraţiilor în momentul blocării dispozitivului am elaborat în cadrul prezentei lucrări următoarea soluţie tehnică, în curs de brevetare. Astfel, mişcarea de translaţie $x_r(t)$ a tijei **1**, prinsă articulat de un punct al structurii, este transformată într-o mişcare de rotaţie $\varphi_r(t)$ prin mecanismul piuliţă 3, şurub cu bile de pe axul **4** pe care este calat liber, cu joc, un volant 5, între volant şi axul **4** fiind fixat un arc spiral de torsiune **6** Si aici datorită inerţiei volantului **5** apare o mişcare relativă, $\varphi(t)$ - $\varphi_r(t)$ între volant şi axul **4.** Această mişcare se transmite printr-un cuplaj a la un disc **7** care este calat pe axul **4** pe un filet **b**, asamblarea filetată fiind cu autoblocare. Mişcarea relativă de rotaţie $\varphi(t)$- $\varphi_r(t)$ a volantului 5 se transforma intr-o mişcare de inşurubare a discului 7, care se va deplasa axial pe filetul **b**, într-un sens sau altul până în momentul în care se consumă jocul **s** dintre discul **7** şi unul din inelele **8** fixate de carcasa **9** a dispozitivului, cu care va lua contact. In acest moment poziţia relativă **t** a discului **7** pe axul filetat **4** va fi egală cu s. Dupa ce discurile **6** şi **7** iau contact deplasarea **t** continuă, prin forţarea elastică a arcurilor **6** şi **7** a căror constantă echivalentă este K_s. Va lua naştere o forţă de contact care va avea expresia

$$N_t = N_0 + K_t t \tag{7.49}$$

unde prin N_0 se poate considera ca o forţă de prestrângere iniţială pe un limitator. Forţa axială N_t va fi uniform repartizată pe suprafaţa de contact având raza medie R_t. Volantul 5 fiind încă în rotaţie faţă de carcasa 9 cu legea $\varphi(t)$ va apare un cuplu de forţe de frecare

$$M_{tf} = \mu N_t R_t \tag{7.50}$$

şi ţinând cont de (7.49) şi de relaţia geometrică din asamblarea filetată de pas p_b

$$t = \frac{p_b}{2\pi}(\varphi - \varphi_r) \tag{7.51}$$

acesta va avea expresia

$$M_{tf} = \mu\left(N_0 + \frac{K_t p_b}{2\pi}(\varphi - \varphi_r)\right) \tag{7.52}$$

unde μ este coeficientul de frecare dintre suprafeţele în contact. Ecuaţia diferenţială a mişcării volantului va fi

$$J\ddot{\varphi} = -K_\varphi(\varphi - \varphi_r) - M_{tf}\,sign(\dot{\varphi}) \tag{7.53}$$

K_φ fiind constanta elastică a arcului. Valoarea cuplului dat de arcul K_φ este mică în comparaţie cu cuplul de frecare M_{tf} şi de aceea mişcarea absolută a volantului $\varphi(t)$, se opreşte într-un interval de timp scurt, discul 7 blocându-se de inelul 8. Forţa normală N_t va fi echilibrată de forţa axială din asamblarea filetată a având raza medie a spirei r_a.

$$F_a = N_t = \frac{M_{fa}}{r_a tg(\alpha_a + \varphi_\mu)} \tag{7.54}$$

unde M_{fa} este momentul forţelor de frecare din asamblarea filetată, α_a este unghiul de înclinare al spirei filetului, iar φ_μ = arctgμ este unghiul de frecare. Dacă asamblarea filetată prin şurubul cu bile are unghiul de înfăşurare al spirei α_b şi unghiul de frecare este neglijabil, datorită frecării de rostogolire, atunci forţele de legătură ce acţionează între punctele 1 şi 2 ale dispozitivului vor fi

$$F_l = \frac{M_{fa}}{r_a tg\alpha_b} \qquad (7.55)$$

In momentul în care forţă F_1 schimbă de sens, se schimbă şi sensul de rotire φ_r al axului **4** ceea ce va produce o destrângere a ansamblului filetat **4** şi în continuare o micşorare a forţei de contact N_t la o elongaţie mai mare contactul dintre discurile **7** şi **8**, arcul **6** aducând discul **8** în poziţie mediană la momentul iniţial.

Avantajul acestei soluţii faţă de soluţia prezentată anterior este acela că forţa de legătură F_1 are o funcţie disipativă şi timpul de acţionare este mult mai lung, relativ la cel al dispozitivelor prezentate anterior, unde legătura rigidă intră în acţiune numai pentru un moment extrem de scurt.

Dispozitivul a fost conceput ca o necesitate pentru a fi utilizat la atenuarea vibraţiilor de joasă frecvenţă, 0.4 Hz, ale excavatorului ERC 1400, Fig.1.8 a cărui model dinamic a fost prezentat în paragraful 1.5. In cadrul unui contract, în curs de derulare, se studiază cea mai bună soluţie de amplasare a acestor dispozitive la nivelul rulmentului plan de rotaţie a excavatorului.

7.3. Dispozitive seismice masă-arc-disipator ataşate structurilor mecanice

În Capitolul I, s-a arătat că există situaţii în care introducerea unor legături disipative legate de structură, între două puncte ale ei situate în zone ventrale în antifază sau între două structuri necuplate elastic, este imposibil de realizat din punct de vedere tehnic. Este vorba de megastructuri desfăşurate pe înălţimi sau/şi lungimi mari aşa cum sunt structurile maşinilor de haldat sau excavatoarele miniere de mare capacitate ale căror modele dinamice s-au formulat în paragrafele 1.5 şi 1.7 şi în lucrările [38,39]. In alegerea variantei constructive un rol important îl au variaţiile de temperatură, umiditate, praf etc., care pot duce la uzura rapidă a acestora sau la ieşirea din parametrii optimi pentru care au fost realizate.

Maşina de haldat este un utilaj care lucrează în condiţii foarte grele, în aer liber, la temperaturi ce variază între -20^o iarna şi 39^o vara şi în mediu de praf abraziv. Modurile naturale de vibraţii, ca şi în cazul excavatorului, au frecvenţele proprii foarte joase. În figura 7.9 se prezintă o secvenţă reprezentând

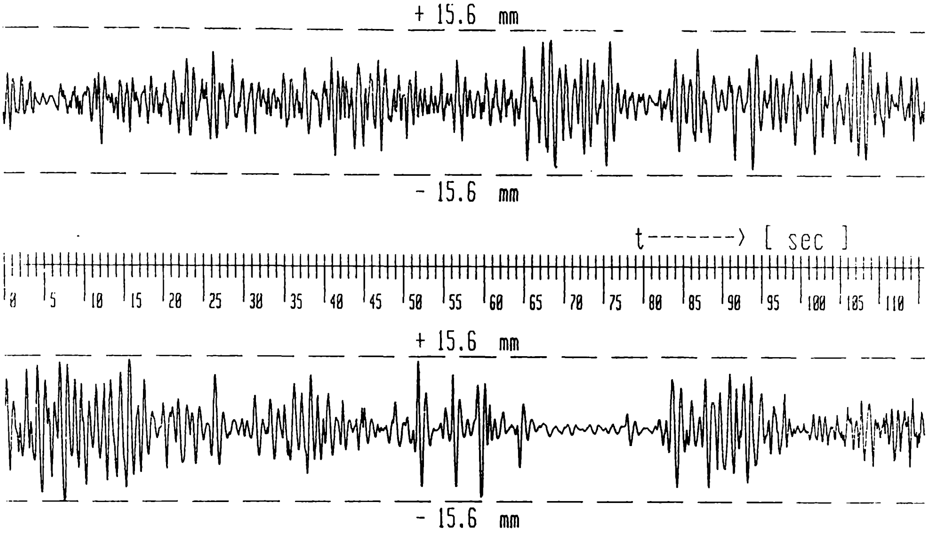

Fig.7.9

vibraţiile verticale, într-un punct plasat pe braţul maşinii de haldat, proiect T3890/I-84/C-0, având braţul de 120m. Excitaţia vibraţiilor este de tip aleator provenite din încărcarea neuniformă a benzii transportoare, existând porţiuni din bandă neîncărcate. În aceste condiţii nivelele de vibraţii sunt totuşi semnificative, până la 16 mm.

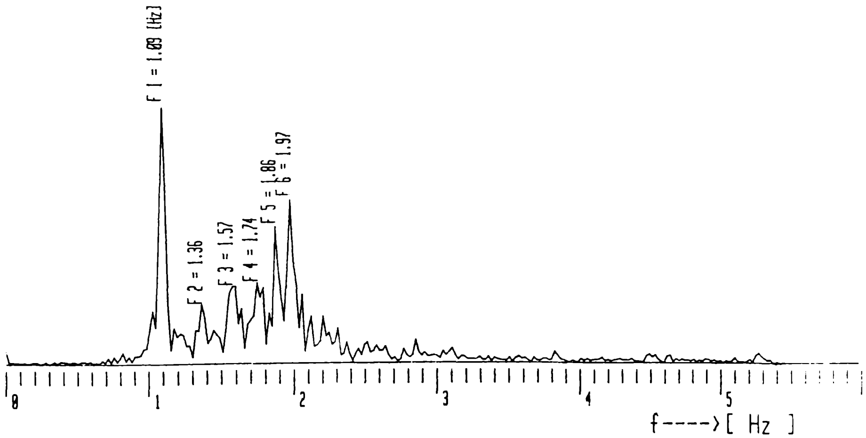

Fig.7.10

Spectrul vibraţiilor este filtrat de modurile naturale de vibraţii, localizate în domeniul 1-2 Hz, după cum se vede din Fig.7.10. Nivele mari.de vibraţii pot să apară la oprirea brusca benzii, care se întâmplă decâte ori se rupe aceasta, sau în cazul rotirii braţului. Deci, pentru a preveni apariţia unor nivele de vibraţii periculoase pentru structură, este recomandabil folosirea unor sisteme absorbante de vibraţii acordate în domeniul frecvenţă detectat. Pentru maşina de haldat se consideră că cea mai optimă soluţie este sistemul masă-arc-disipator ataşat structurii. În Fig.7.11 se prezintă o soluţie tehnică.

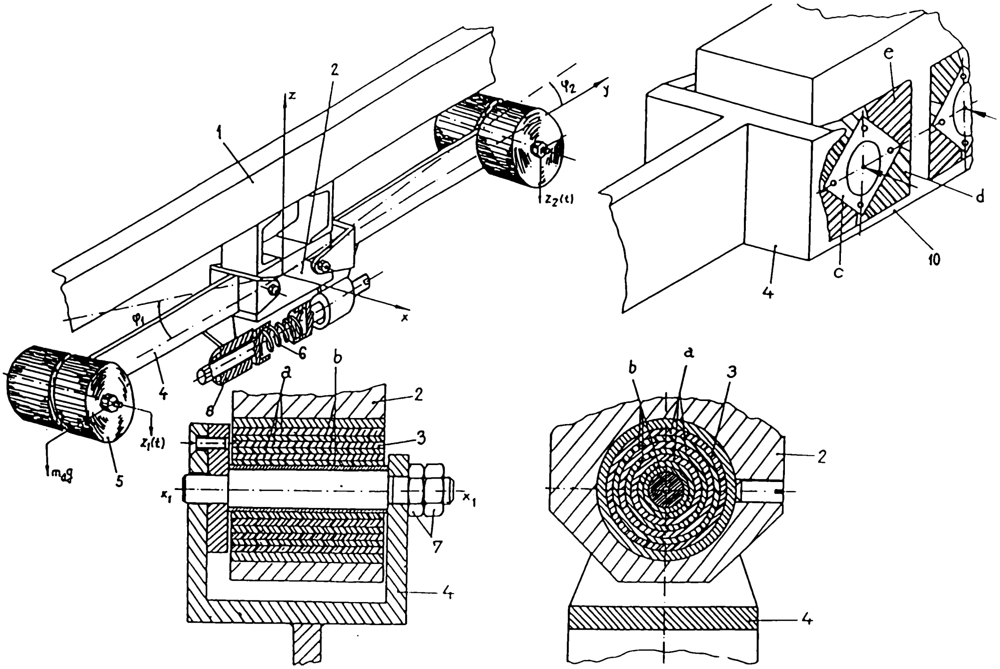

Fig.7.11

De o grindă transversală **1** a braţului se fixează un suport **2** pe care sunt montate separat două elemente elastice **3**, de formă cilindrică, formate din straturi cilindrice subţiri, alternativ cauciuc **a** şi metal **b**. Rigiditatea radială a acestor elemente este mare şi de aceea ele pot constitui reazeme articulate pentru două braţe orizontale **4** la capetele orizontale fiind prevăzute cu două greutăţi **5**. Mişcările de rotaţie φ_1 şi φ_2 după axele x_1-x_1 şi x_2-x_2 ale braţului sunt impedicate de momentul de torsiune elastic cauzat de forţele de forfecare dintre straturile metalice şi cele de cauciuc, cosiderate a avea constanta elastică echivalentă K_a. Această structură compozită asigură pe lângă o elasticitate foarte bună, cu o comportare liniară extinsă, în comparaţie cu straturile

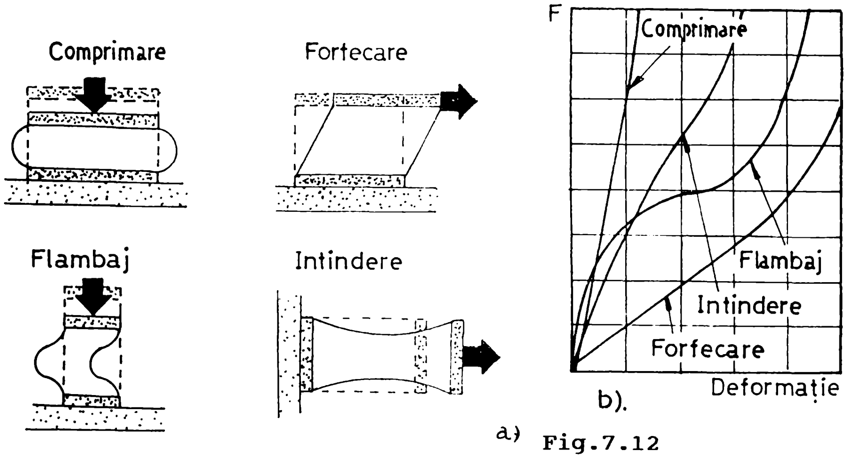

Fig.7.12

de cauciuc supuse la întindere sau compresiune Fig.7.12, [155].Ele au o foarte bună disipare de energie prin forfecarea stratului de cauciuc **a** între bucşele metalice rigide **b.** Cauciucul aderă de suprafeţele metalice prin vulcanizare sau lipire.

Cele două sisteme vibrante, formate din masele 5, braţele pendulare **4** şi elementele 3, trebuie să fie acordate cu modurile naturale de vibraţii ale braţului deversor al maşinii de haldat, calculate sau determinate experimental. Acordarea la frecvenţe joase în jur de 1Hz, cum este cazul maşinii de haldat necesită săgeţi statice (deplasarea pe verticală în poziţie statică a greutăţii 5) de $x_{st} = g/(2\ \pi f)^2 = 249$ mm, ceea ce la o deschidere a braţului l = 500 mm ar corespunde o rotaţie statică de $\varphi_{st} = 25^0$. Această deflexie statică ar aduce punctul de lucru pe caracteristică de răspuns a elementului elastic de torsiune în zona neliniară, unde pe lângă mărirea rigidităţii, se preizează în literatura de specialitate, că materialele vâscoelastice îşi pierd din proprietăţile de amortizare [114]. Pentru a înlătura această deficienţă s-a introdus, între cele două braţe, un arc elicoidal **6** care să preia sarcinile statice înainte ca elementele elastice **3** să fie solicitate. Cu ajutorul a două mecanisme cu şurub **8** legate de braţ la cota z_0, se aduc braţele **4** în poziţie orizontală, poziţie în care se cuplează şi elementele elasice strângându-se piuliţa şi contrapiuliţa 7. În acest caz arcul echivalent al elementului **3** lucrează numai pe porţiunea liniară, asigurând şi o bună amortizare.

Pentru această aplicaţie se pot utiliza şi elemente de construcţie **10** comercializate de firma ROSTA - WERK AG Elveţia

[155]. Aceste elemente se bazează pe o compoziţie specială de cuciuc e care se introduce între o prismă paralelipipedică c şi un lăcaş paralelipipedic d, realizându-se elemente de torsiune elastică, cu unghiuri de rotaţie de ± 30° şi un raport de amortizare η = 20 - 30 %, asigurându-se o funcţionare perfectă într-un domeniu larg de temperaturi.

Pentru copletarea modelului dinamic al structurii braţului deversor al maşinii de haldat cu sistemul de amortizare ataşat, este necesară scrierea energiilor cinetice, potenţiale şi de disipaţie

$$E_{ca} = \frac{1}{2}m_a(\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)) \tag{7.56}$$

unde $z_1(t)$ şi $z_2(t)$ sunt legile mişcării absolute ale greutăţilor 5

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z(t) + l\varphi_1(t) \\ z_2(t) &= z(t) + l\varphi_2(t) \end{aligned} \tag{7.57}$$

unde z(t) este legea de mişcare a braţului în punctul de prindere a dispozitivului. Energia cinetică va deveni

$$E_{ca} = \frac{1}{2}m_a\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_a l^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + m_a l\dot{z}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \tag{7.58}$$

Energia de deformaţie are două componente

$$E_{p1} = \frac{1}{2}K_\varphi(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \tag{7.59}$$

înmagazinată în elementele 3 şi

$$E_{p2} = \frac{1}{2}K_0(\varphi_1 + \varphi_2)^2 \tag{7.60}$$

unde K_0 este constanta arcului elicoidal 6 plasat la cota z_0 faţă de planul axelor elementelor elastice

$$E_d = \frac{1}{2}\eta K_\varphi(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \tag{7.61}$$

unde η este factorul de pierdere şi asigurat de firma ROSTA între 0,25 şi 0,3.

Modelele reologice pentru materiale de tip cauciuc nu satisfac nici modelul histeretic şi nici cel vâscos, fiind deficitare, aşa cum s-a arătat în paragrafele 2.1 şi 7.4, respectiv în lucrările

[80,114], caracteristicile de răspuns, atât elastică cât şi de disipaţie depinzând de o serie de factori, ca nivelul de elongaţie, temperatură, frecvenţă, etc. Pentru cazul unui model vâscos ecuaţiile de mişcare a ansamblului ataşat sunt

$$\begin{aligned} m_a l^2\ddot{\varphi}_1 + C_\varphi\dot{\varphi}_1 + (K_\varphi+KZ_0^2)\varphi_1 + KZ_0^2\varphi_2 &= -m_a l\ddot{z} \\ m_a l^2\ddot{\varphi}_2 + C_\varphi\dot{\varphi}_2 + KZ_0^2\varphi_1 + (K_\varphi+KZ_0^2)\varphi_2 &= -m_a l\ddot{z} \end{aligned} \tag{7.62}$$

sistem cuplat prin arcul **6** de legătură între braţele **4**. Decuplarea celor două ecuaţii se poate face simplu, prin relaţiile de transformare

$$\alpha_1 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \alpha_2 = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{7.63}$$

pentru care se obţin ecuaţiile

$$\begin{aligned} m_a l^2\ddot{\alpha}_1 + C_\varphi\dot{\alpha}_1 + (K_\varphi + 2KZ_0^2)\alpha_1 &= -2m_a l\ddot{z} \\ m_a l^2\ddot{\alpha}_2 + C_\varphi\dot{\alpha}_2 + K_\varphi\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \tag{7.64}$$

Deci, modul pentru care masele oscilează în antifază având pulsaţia proprie $\omega_1 = \sqrt{K_\varphi/m_a l^2}$ se va amortiza în mişcarea de răspuns al ansamblului, rămânând numai modul pentru care mişcarea braţelor se face în fază şi pentru care pulsaţia proprie este $\omega_2 = \sqrt{(K_\varphi + 2KZ_o^2)/m_a l^2}$, mai mare decât ω_1. Dacă cele două mase nu sunt identice, sau se fac modificări, atunci cele două pulsaţii proprii vor fi diferite iar cele două moduri nu se vor decupla. Apropierea celor două pulsaţii proprii în domeniul de frecvenţă ale modurilor naturale ale vibraţiilor braţului deversor, este în avantajul atenuării vibraţiilor acesteia, vibraţii ce au un caracter aleator, aşa cum se observă din vibrograma (Fig.7.9) şi spectrul semnalului înregistrat (Fig.7.10). Acest fapt este echivalent situaţiei în care s-ar plasa doi absorbitori de vibraţii acordaţi pe două pulsaţii de valori apropiate, în banda de frecvenţă a excitaţiei, în cazul de faţă pentru domeniul 1-2 Hz.

7.4. Dispozitive disipative speciale de natură hidraulică

Cel mai cunoscut dispozitiv disipativ este amortizorul hidraulic, unde forţa de legătură F_1 este asigurată prin rezistenţa hidraulică pe care o întâmpină pistonul **1** (Fig.13.a) la deplasarea lui în interiorul cilindrului **2**, datorită ştrangulării curentului

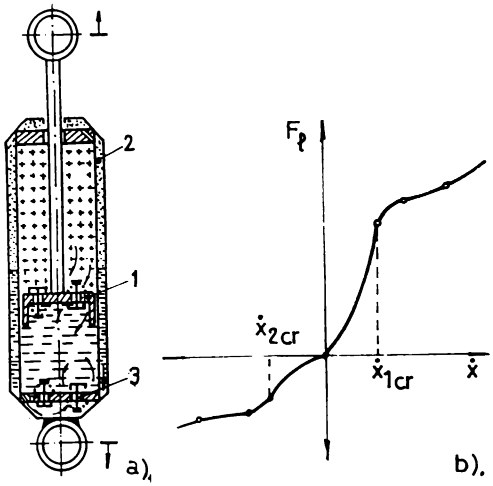

Fig.7.13

de ulei obligat să treacă prin orificiile 3, practicate în piston. Deschiderea supapelor se face la anumite viteze critice $\dot{x}_{cr1}$ și $\dot{x}_{cr2}$, (Fig.13.b) ceea ce face caracteristica amortizorului să fie trunchiată și nesimetrică. Această caracteristică este bine studiată de constructorii de automobile [60], ea fiind corelată cu destinația automobilului, natura drumurilor, condiții de mediu, etc. De menționat că această caracteristică nu este liniară nici pe porțiuni, de aceea forța de legătură răspunde proporțional cu pătratul vitezei relative. Inconvenientul principal al acestor dispozitive, altfel foarte bine studiate până în prezent, este că utilizează o cantitate relativ mare de fluid. Pierderea de lichid, iminentă după un timp mare de funcționare, datorită deteriorării garniturilor de etanșare care se uzează, ducă la abaterea caracteristicilor de la forma impusă, amortizoarele nu mai corespund condițiilor impuse. Din acest motiv una din probele importante care se cer autovehicolelor este testarea stării tehnice a amortizoarelor.

Din punct de vedere practic, pentru alte utilizări este mult mai avantajos de a se utiliza o disipare prin forfecarea unui strat vâscos de fluid având grosimea t, situat între două suprafețe ce au mișcare relativă una față de cealaltă.

Astfel, dacă cilindrul C_1 (Fig.7.14) de rază R_1 este introdus pe lungimea l în cilindrul C_2 având un joc $2t_1$ în care se introduce un lichid vâscos, având vâscozitatea dinamică μ, atunci la o rotație relativă φ_r se crează un cuplu de forțe al frecărilor vâscoase având forma

$$M_f = c_r \dot{\varphi}_r \qquad (7.65)$$

unde coeficientul de frecare de amortizare are expresia cunoscută

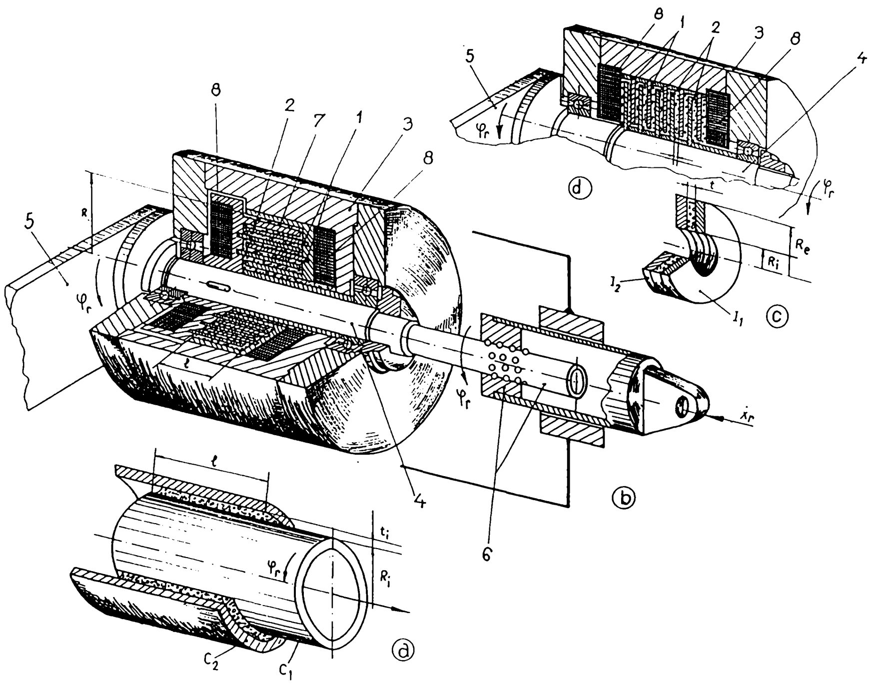

Fig.7.14

din literatură [80]

$$c_r = \frac{2\pi R_i^3 l\mu}{t_i} \tag{7.66}$$

Dacă suprafeţele de contact sunt plne de tip inelar (Fig.7.14.c) având razele R_e şi R_i atunci coeficientul de amortizare are expresia

$$c_r = \frac{\pi\mu}{2t}\left(R_e^4 - R_i^4\right) \tag{7.67}$$

In scopul măririi acestui coeficient am conceput soluţii originale Fig.7.14.b şi Fig.7.14.c, care cuprind suprafeţe multiple în mişcare relativă materializate prin cilindrii **1**, de tip bucşe, fixate de corpul **3** al dispozitivului, între care se introduc pe lungimea l bucşele **2**, fixate de axul **4** care primeşte mişcarea de rotaţie $\varphi_r(t)$ sau din mişcare de translaţie $x_r(t)$ prin mecanismul piuliţă surub cu bile **6**.

Păstrarea filmului de fluid vâscos **7** de grosime t_i, între suprafeţele cilindrice aflate în mişcare relativă se rezolvă prin utilizarea ca fluid, un lichid magnetic care este polarizat de doi magneţi permanenţi inelari 8.

Aceiaşi construcţie a dispozitivului permite materializarea soluţiei în care suprafeţele fixate de axul 4 (Fig. 7.14.d) sunt inele plane 2 între care se interpun, formând şirul de interstiţii inelare de grosime t, inelele disc 1, fixate de corpul 3 al dispozitivului.

Soluţiile prezentate mai sus sunt construcţii mecanice compacte şi sigure în exploatare, fără pierderi de lichid, care este bine protejat de câmpul magnetic. De asemenea, lichidul magnetic, fiind un lichid coloidal cu particole magnetice, are vâscozitatea dinamică mult mai mare decât a uleiurilor obişnuite, datorită frecării dintre particolele în amestec cu lichidul de bază şi datorită polarizării acestor particole.

Coeficientul de amortizare echivalent în cazul primei soluţii cu suprafeţe cilindrice va fi

$$c_r = 2\pi l\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i^3}{t_i} \tag{7.68}$$

unde n este numărul de interstiţii umplute cu lichid magnetic. Pentru cea de-a doua soluţie coeficientul de amortizare c_r va fi

$$c_r = \frac{n\pi\mu}{2t}\left(R_e^4 - R_i^4\right) \tag{7.69}$$

Alegerea celei mai bune soluţii dintre cele două variante, se poate face numai după un calcul de rezistenţă al elementelor care intră în componenţa lor.

Rezultate foarte încurajatoare, privind aplicaţiile lichidelor magnetice în atenuarea vibratiilor la structuri mecanice, au obţinut cercetătorii japonezi: Nakatsuka K., şi Yokoyama H.,în [114], care au realizat un amorizor hidraulic liniar, utilizat pentru amortizarea vibraţiilor joase pentru o platformă de lucru cu suspensie elastică pneumatică. Dispoztivul amortizor (Fig.7.15.a) se compune dintr-un piston 1 având diametrul d = 9,7 mm. din aluminiu, introdus într-un cilindru 2 având un joc 2t = 0,8 mm. In interstiţiu se introduce lichid magnetic 3 pe bază de soluţie de glicerol-apă. Atât pistonul cât şi carcasa sunt din materiale diamagnetice, din aluminiu.

Între carcasa cilindrică 2 şi o altă carcasă 4 sunt aşezate alternativ un număr de inele magnetice din ferită 5 şi inele din oţel slab aliat 6. Inelele de ferită polarizate axial sunt aşezate

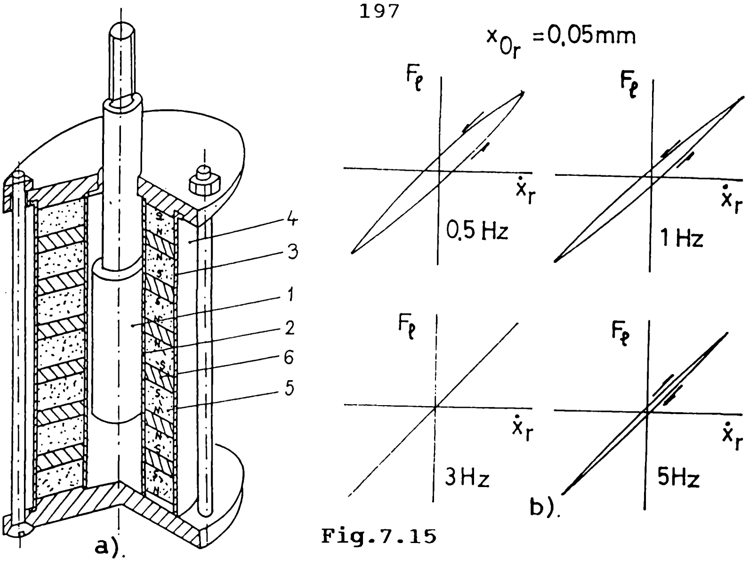

Fig.7.15

cu polii în sens de respingere N-N şi S-S, astfel că interacţiunea câmpului magnetic cu soluţia coloidală de ferofluid crează forţe magnetice care au ca rezultat pe de o parte, centrarea pistonului 1 după axa carcasei cilindrice 2, iar pe de altă parte măreşte vâscozitatea dinamică a soluţiei coloidale. În absenţa câmpului magnetic lichidul are o vâscozitate dinamică de 166.10^{-3} Ns/m², iar în prezenţa unui câmp magnetic de 10 KOe vâscozitatea este 270 10^{-3} Ns/m². Interesante sunt rezultatele obţinute la testarea dispozitivului cu o fortă armonică a căror caracteristici de răspuns funcţie de x_r sunt date în Fig 7.15.b. Se dau patru cazuri. În prmul caz frecvenţa fortei perturbatoare este 0,5 Hz, şi o amplitudine a deplasării de x_{or} = 0.05 mm. Bucla de histereză evidenţiază prin suprafaţă şi o disipare de energie mai mare decât în celelalte cazuri unde, păstrându-se aceiaşi amplitudine a deplasării iar frecvenţele de 1Hz, 3Hz şi 5Hz suprafaţa scade. La 3 Hz suprafaţa buclei de histereză ajunge aproape de zero după care începe să crească din nou. În toată literatura consultată nu s-a întâlnit confirmarea experimentală a relaţiei liniare dintre forţa de legătură şi viteza relativă ceea ce face a se pune la îndoială formula frecvent utilizată pentru frecarea vâscoasă: $F_l = -cx_r$. Utilizând patru dispozitive de amortizare cu lichid magnetic, pentru izolarea unei mese de 100 Kg, s-au obţinut rezultatele date în răspusul în frecvenţă. Rezultatele sunt evidente în favoarea folosirii dispozitivului cu ferofluid.

7.5. Dispozitive stabilizatoare ale mişcărilor vibratorii prin rotori giroscopici

Probleme deosebite privind reducerea nivelelor de vibraţii se pun în cazul structurilor masive utilizate ca suporţi de lucru pentru efectuarea unor experienţe de mare precizie, cum ar fi masele holografice, la care perturbaţiilor provenite din mediul exterior prin suporţii de fixare pe un planşeu, pot cauza erori în timpul experienţelor. Ideal ar fi să se realizeze o platformă de rigiditate infinită şi care să fie perfect izolată de perturbaţiile exterioare, ceea ce înseamnă o transmisibilitate nulă. Acest lucru este imposibil de realizat dar se fac eforturi mari pentru a se obţine transmisibilităţi cât mai mici. După cum se va exemplifica în prezentul paragraf, se caută soluţii cât mai sofisticate, indiferent de cost, pentru realizarea acestui deziderat.

Problema izolării de perturbaţiile transmise prin mediu suportului rigid este foarte importantă şi în seismologie. Cu cât frecvenţa proprie ale masei seismice sprijinite elastic este mai mică cu ătât se obţine o mai mare acurateţe a mişcărilor seismice înregistrate.

Probleme similare se pun şi pentru radiotelescope, unde antenele parabolice sunt fixate pe blocuri rigide uriaşe prin intermediul unor sisteme sofisticate de izolare a vibraţiilor transmise prin pământ, care devin surse de perturbaţii în captarea undelor radio emise din Univers.

Aceleaşi probleme se pun şi în tehnica militară, în problema păstrarii direcţiei de ţintire. Tehnica militară utilizează cu succes sistemele giroscopice dar numai ca elemente de sesizare a deviaţiilor unghiulare şi traducerea lor prin senzori electrici în semnale de reacţie pentru comanda servomecanismelor de control activ, sistem deosebit de scump.

Plecând de la faptul că în momentul de faţă se pot realiza maşini rotative de mare turaţie, extrem de silenţioase, se pune problema ca acestea să constituie unităţi giroscopice de valori mari ale momentelor cinetice $J_{gx}\omega$ care să asigure o bună stabilizare a mişcărilor unghiulare ale unui suport rigid. Ideea nu este nouă dar, până în prezent, s-a limitat la stabilizarea mişcărilor de tangaj şi ruliu.

Aşa cum s-a arătat în paragraful, pe o platformă rigidă pot fi amplasaţi unul sau mai mulţi rotori care, de data aceasta, se caută a fi folosiţi în scopul stabilizării mişcării platformei.

Să considerăm un rotor a cărui axă este înclinată faţă de sistemul de axe fixat de platforma rigidă. Mişcarea platformei este dată prin legile de mişcare ale originii O a sistemului şi respectiv prin vectorul de rotaţie $\{\varphi\}$. Având cunoscute viteza unghiulară a rotorului ωi, şi momentul de inerţie în raport cu axa de rotaţie $O_i x_i$, J_{xi} se poate obţine matricea giroscopică scrisă faţă de sistemul de axe OXYZ $O_i x_i y_i z_i$

$$[G_{ai}] = 2\omega_i \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [J_{agi}] \end{bmatrix} \tag{7.70}$$

unde

$$[J_{agi}] = [A_i]^T [J_{gi}] [A_i] \tag{7.71}$$

în care matricea $[J_{gi}]$ este

$$[J_{gi}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{J_{xi}}{2} \\ 0 & -\dfrac{J_{xi}}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{7.72}$$

Matricea de trecere de la sistemul OXYZ la sistemul $Ox_i y_i z_i$ este deforma

$$[A_i] = [T_{yi}] [T_{zi}] \tag{7.73}$$

unde

$$[T_{yi}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{yi} & 0 & -\sin\alpha_{yi} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_{yi} & 0 & \cos\alpha_{yi} \end{bmatrix}; \quad [T_{zi}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{zi} & \sin\alpha_{zi} & 0 \\ -\sin\alpha_{zi} & \cos\alpha_{zi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.74}$$

obţinându-se din (7.72), matricea

$$[J_{agi}] = \omega_i J_{xi} \begin{bmatrix} 0 & -\sin\alpha_{yi} & -\sin\alpha_{zi}\cos\alpha_{yi} \\ \sin\alpha_{yi} & 0 & \cos\alpha_{yi}\cos\alpha_{zi} \\ \sin\alpha_{zi}\cos\alpha_{yi} & -\cos\alpha_{yi}\cos\alpha_{zi} & 0 \end{bmatrix} \tag{7.75}$$

care este o matrice antisimetrică. Dacă axa Oixi este paralelă cu axa Ox, $\alpha_{yi} = \alpha_{zi} = 0$, această matrice are forma

$$[J_{agi}] = \omega_i J_{xi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (7.76)$$

Dacă axa O_ix_i este paralelă cu una din axele OY respectix OZ atunci matricele au expresiile

$$[J_{agi}] = \omega_i J_{xi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [J_{agi}] = \omega_i J_{xi} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (7.77)$$

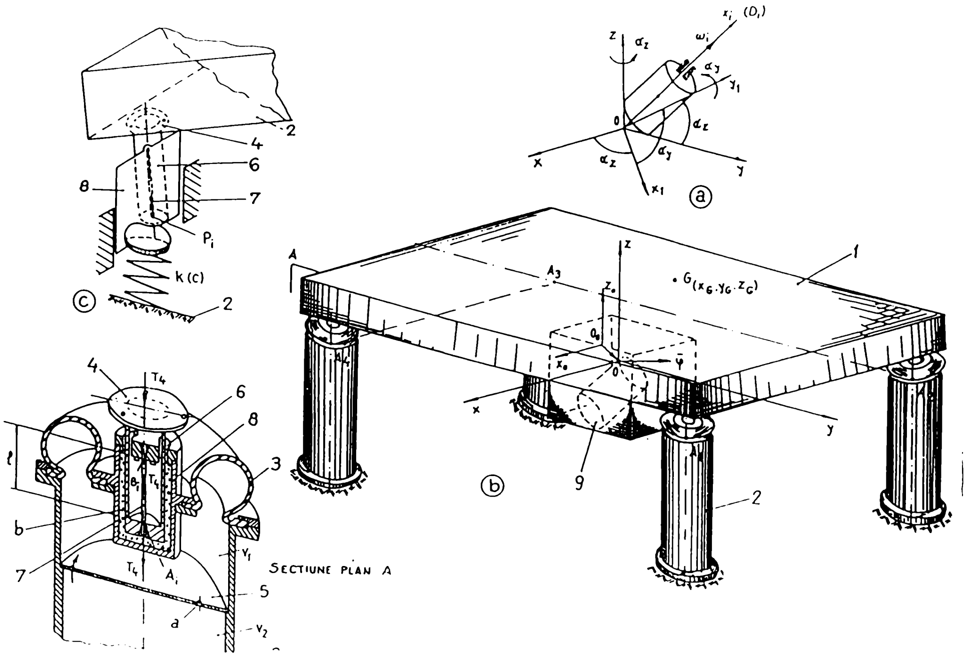

Fig.7.16

Să considerăm o aplicaţie posibilă. În Fig.7.16 se prezintă o masa seismică utilizată pentru experienţe în tehnica laserilor şi holografiei sau pentru cântăriri de mare precizie, acolo unde operaţiile sau montajele ce sunt fixate de masă trebuie să aibă un grad înalt de izolare faţă de vibraţiile ce se transmit din mediul înconjurător. Masa seismică se compune dintr-un bloc masiv 1 deosebit de rigidavând peimele moduri de vibraţii la frecvenţe foarte înalte. Blocul se sprijină pe pardosea prin intermediul a patru picioare 2. În scopul micşorării transmisibilităţii vibrațiilor la masa de lucru, se folosește următoarea soluție: între pltformă și picioare se amplasează suspensii pneumatice compuse din câte un tor din cauciuc 3 care închide volumul V_1 din interiorul picioarelor tubulare. Torul este alimentat cu aer comprimat la presiunea p_1 care asigură atât sustentația masei prin intermediul flanșei de prindere **4**, cât și o rigiditate k. Rigiditatea arcului echivalent este mică pentru a asigura o frecvență proprie de translație pa verticală sub 1,5 Hz.

Un al doilea volum V_2, delimitat de V_1 printr-un ecran 5, asigură prin laminarea aerului la trecerea prin orificiile a, disiparea energetică a vibrațiilor verticale, având o constantă echivalentă de amortizare c.

Flanșa **4** este legată rigid de conturul torului 3, cum se practică și la suspensiile de automobile, aceasta asigurând o rigiditate mărită, pe direcția radială, în comparație cu rigiditatea verticală. Pentru a obține o rigiditate micșorată și în plan orizontal, care să asigure o frecvență proprie de corp rigid sub 1,5 Hz, propun următoarea soluție, brevetabilă. Flanșa **4** este prinsă rigid de un cilindru **6** care este introdus în altul **8**, care este prins de torul de cauciuc prin flanșe. Legătura de transmitere a forței de sprijin P_i (i =1,2,3,4) de la flansa **4** la cilindru **8** se face prin intermediul cablului **7**, care preia forța P_i prin tensiunea T_i, cu care se echilibrează. Frecvența proprie naturală de corp rigid, în plan orizontal, se poate regla prin lungimea pendulului format de cele patru fire și platformă. Pentru amortizarea mișcărilor pendulare în interstițiul **b** dintre cilindrii tamburului **6** și **8** se introduce lichid amortizor. O utilizare a lichidelor feromagnetice constituie și aici o soluție elegantă.

Această suspensie dublă, care asigură o transmisibilitate foarte mică a vibrațiilor ridică o problemă de care trebuie să se țină cont. Pentru poziții înalte ale centrului de greutate al mesei **1**, la care se adaugă și masele echipamentelor care se fixează de ea, se poate ajunge la instabilitatea sistemului pendular. Pentru înlăturarea agestei deficiențe se poate utiliza un sistem giroscopic, cu un rotor **9** atașat mesei **1**. Această nouă soluție tehnică poate fi realizată ușor cu motoare electrice cu silențiozitate foarte mare și o turație de 20-30 000 rot/min. O mărire suplimentară a silențiozității se poate face printr-o izolare antivibratorie și fonică care sunt ușor de realizat pentru vibrații de frecvențe înalte (300-500 Hz). Pentru scrierea ecuaţiilor de mişcare ale ansamblului se ia un sistem de axe OXYZ cu origine în centrul dreptunghiului $O_1O_2O_3O_4$. Acestea sunt punctele de sprijin ale mesei 1 prin cablurile de lungime l. Sistemul vibrant are şase grade de libertate trei translaţii definite prin mişcările absolute ale punctului O, şi trei rotaţii

$$\{r_O\}^T = \{q_{Ox}(t), q_{Oy}(t), q_{Oz}(t)\}, \quad \{\varphi\}^T = \{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\} \tag{7.78}$$

Energia cinetică este de forma

$$E_c = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\{\dot{r}_O\}\\ \{\dot{\varphi}\}\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}[m] & [S]\\ [S]^T & [J]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\dot{r}_O\}\\ \{\dot{\varphi}\}\end{Bmatrix} \tag{7.79}$$

unde [m] = diag(m), m fiind masă ansamblului, platformă şi echipament de măsură, [S] este matricea momentelor statice, iar [J] este matricea de inerţie.

Energia potenţială a structurii este formată din energia de deformaţie a suspensiei pneumatice şi din energia de poziţie a centrului de masă.

Tinând cont că perturbaţiile mediului înconjurător se transmit mesei inerţiale prin suporţii de sprijin 2 şi sistemul de suspensie, având legea de mişcare $z_s(t)$, aceiaşi pentru toate reazemele, energia potenţială dată de suspensie este

$$E_{p1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} K_i(z_i - z_s)^2 \tag{7.80}$$

unde K_i este constanta elastică după direcţia z a celor patru suporţi elastici. Constantele K_i sunt diferite doarece centrul de greutate nu se găseşte pe axa de simetrie, reazemele fiind încărcate diferit, astfel că pentru menţinerea poziţiei de echilibru static al mesi în poziţie orizontală, presiunile p_i din suspensiile pneumatice sunt diferite. Poziţia punctului B_i de suspensie a cablului 7 dată prin coordonata Z^i, mobilă pe verticală şi X_i şi Y_i constante, raportate la sistemul inerţial de axe $OX_oY_oZ_o$ şi se determină din relaţia

$$\overline{O_oB_i} = \overline{O_oO} + \overline{OA_i} + \overline{A_iB_i} \tag{7.81}$$

care într-o transpunere matriceală, raportată la sistemul de axe $O_oX_oY_oZ_o$ devine

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + [T_o]\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ 0 \end{Bmatrix} + [T_i]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{7.82}$$

unde x, y şi z sunt coordonatele centrului dreptunghiului $A_1A_2A_3A_4$, $[T_o]$ este matricea de trecere de la sistemul OXYZ legat de masa la sistemul inerţial $O_oX_oY_oZ_o$ conţinând trei rotaţii φ_x, φ_y şi φ_z, iar $[T_i]$ este matricea de trecere de la un sistem de la un un sistem legat de firul 7, axa A_iz_i fiind coliniară cu el. Matricea $[T_i]$ este formată prin intermediul a două rotaţii, φ_{xi} şi φ_{yi}. Pentru elongaţii de nivele mici din (7.82), se obţine

$$\begin{aligned} Z_i &= z - X_i\varphi_y + Y_i\varphi_i \\ \varphi_{yi} &= -\frac{X}{l} + \varphi_z\frac{Y_i}{l} \\ \varphi_{xi} &= \frac{Y}{l} + \varphi_z\frac{X_i}{l} \end{aligned} \tag{7.83}$$

Tinând cont de simetria punctelor A_i, va rezulta

$$\varphi_{x1}=\varphi_{x4},\quad \varphi_{x2}=\varphi_{x3},\quad \varphi_{y1}=\varphi_{y2},\quad \varphi_{y3}=\varphi_{y4} \tag{7.84}$$

Înlocuind în (7.80) relaţiile (7.82) ordonând după vectorul coordonatelor corespunzătoare gradelor de libertate energia potenţială se poate scrie

$$E_{p1} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \{r_o\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix}^T [K_1]\begin{Bmatrix} \{r_o\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{r_o\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix}^T \{F_s\} \tag{7.85}$$

unde elementele nenule ale matricei $[K_1]$ şi ale vectorului forţe perturbatoare au următoarele formule

$$\begin{aligned} &K_1(3,3)=\sum_{i=1}^{4} k_i,\ K_1(3,4)=K_1(4,3)=\sum_{i=1}^{4} k_iY_i,\ K_1(4,4)=\sum_{i=1}^{4} k_iY_i^2 \\ &K_1(3,5)=K_1(5,3)=-\sum_{i=1}^{4} k_iX_i,\ K_1(4,5)=K_1(5,4)=-\sum_{i=1}^{4} k_iX_iY_i \\ &K_1(5,5)=\sum_{i=1}^{4} k_iX_i^2,\ F_s(3,1)=z_s\sum_{i=1}^{4} k_i, \\ &F_s(4,1)=-z_s\sum_{i=1}^{4} k_iY_i,\ F_s(5,1)=z_s\sum_{i=1}^{4} k_iX_i \end{aligned} \tag{7.86}$$

Energia potenţială corespunzătoare greutăţii mesei se exprimă cu jutorul coordonatei centrului de masă

$$\{x_G\ y_G\ z_G\}^T=\{x\ y\ z\}^T + [T_O]\{X_G\ Y_G\ Z_G\}^T \tag{7.87}$$

unde x_G, y_G şi z_G sunt coordonatele centrului de masă G în raport cu sistemul fix $O_oX_oY_oZ_o$ iar X_G, Y_G şi Z_G sunt coordonatele aceluiaşi punct faţă de sistemul OXYZ. Termenii ecuaţiilor lui Lagrange, derivaţi din energia potenţială E_{p2} trebuie obţinuţi din diferenţierea acesteia. Pentru aceasta se diferenţiază ecuaţia (7.87), obţinându-se

$$\begin{Bmatrix}\delta x_G\\ \delta y_G\\ \delta z_G\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \varphi_y & -\varphi_x & 1\\ \varphi_z & -1 & -\varphi_x\end{bmatrix}\delta\varphi_x + \begin{bmatrix}-\varphi_y & 0 & -1\\ \varphi_x & 0 & 0\\ 1 & \varphi_z & -\varphi_y\end{bmatrix}\delta\varphi_y + \right.$$
$$\left. + \begin{bmatrix}-\varphi_z & 1 & 0\\ -1 & -\varphi_z & 0\\ \varphi_x & \varphi_y & 0\end{bmatrix}\delta\varphi_z\right)\begin{Bmatrix}X_G\\ Y_G\\ Z_G\end{Bmatrix} \tag{7.88}$$

de unde se obţine δz_G . În urma calculelor şi ordonării se obţine

$$E_{p2} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\{r_O\}\\ \{\varphi\}\end{Bmatrix}^T [K_2]\begin{Bmatrix}\{r_O\}\\ \{\varphi\}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\{r_O\}\\ \{\varphi\}\end{Bmatrix}^T \{F_G\} \tag{7.89}$$

unde termenii nenuli ai matricei $[K_2]$ şi vectorului forţe perturbatoare sunt

$$K_2(4,4)=K_2(5,5)=-mgZ_g,\ K_2(4,6)=K(6,4)=mgX_G$$
$$K_2(5,6)=K_2(6,5)=mgY_G,\ F_G(3,1)=mg,\ F_G(4,1)=-mgY_G \tag{7.90}$$
$$F_G(5,1) = mgY_g$$

Pentru cea de-a treia componentă a energiei potenţiale, datorată mişcării de balans prin suspensia pe firele 7, se consideră greutatea mg descompusă în forţe paralele aplicate în punctele A_i, pentru care se pot scrie relaţiile

$$\sum_{i=1}^{4} G_i = mg,\ \sum_{i=1}^{4} G_iX_i=mgX_g,\ \sum_{i=1}^{4} G_iY_i=mgY_G \tag{7.91}$$

Energia potenţială dată de forţele G_i, ca urmare a rotirilor firelor cu unghiurile φ_{ix}, φ_{iy} se poate scrie

$$E_{p3} = \sum_{i=1}^{4} \{0 \ \ 0 \ \ -G_i\}[T_i]\begin{Bmatrix}0\\0\\l\end{Bmatrix} = -\sum_{i=1}^{4} G_i l \cos\varphi_{xi}\cos\varphi_{yi} \qquad (7.92)$$

Diferenţiind relaţia (7.92) şi ţinând cont de relaţiile (7.84) se poate exprima energia potenţială într-o transpunere matriceală

$$E_{p3} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\{r_o\}\\\{\varphi\}\end{Bmatrix}^T [K_3]\begin{Bmatrix}\{r_o\}\\\{\varphi\}\end{Bmatrix} \qquad (7.93)$$

unde elementele nenule ale matricei $[K_3]$ sunt

$$\begin{aligned}
&K_3(1,1)=K_3(2,2)=\sum_{i=1}^{4}\frac{G_i}{l}=\frac{mg}{l},\\
&K_3(1,6)=K_3(6,1)=-\sum_{i=1}^{4}\frac{G_i l}{l}=-\frac{mg}{l}Y_G\\
&K_3(6,6)=\sum_{i=1}^{4}G_i(X_i^2+Y_i^2)=\frac{mg}{l}(X^2+Y^2),\\
&K_3(2,6)=K_3(6,2)=\sum_{i=1}^{4}\frac{G_{i}x_i}{l}=\frac{mg}{l}X_G
\end{aligned} \qquad (7.94)$$

Disiparea de energie se face atât la nivelul suspensiei pneumatice prin laminare capilară de aer dintre volumele V_1 şi V_2, cât şi în lichidul vâscos introdus în interstiţiile ***b*** dintre cilindrii tubului **6** şi **8**. Energia de disispare în suspensiile pneumatice poate avea o formă asemănătoare cu cea a energiei potenţiale (7.80)

$$E_{di}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} c_i(\dot z_i-\dot z_s) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\{\dot r_o\}\\\{\dot\varphi\}\end{Bmatrix}^T [C_1]\begin{Bmatrix}\{\dot r_o\}\\\{\dot\varphi\}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\{\dot r_o\}\\\{\dot\varphi\}\end{Bmatrix}^T\{F_{ds}\} \qquad (7.95)$$

unde c_i este coeficientul de amortizare în suspensia *i*. După dezvoltări similare ca în expresia (7.80), elementele nenule ale matricei $[C_1]$ şi respectiv ale vectorului forţelor perturbatoare provenite prin excitaţii seismice datorate prezenţei suspensiei pneumatice sunt

$$C_1(3,3)=\sum_{i=1}^{4} c_i,\quad ,C_1(3,4)=C_1(4,3)=\sum_{i=1}^{4} c_i Y_i,$$

$$C_1(3,5)=C_1(5,3)=\sum_{i=1}^{4} -c_i X_i Y_i,\quad C_1(4,4)=\sum_{i=1}^{4} c_i Y_i^2,$$

$$C_1(4,5)=C_1(5,4)=\sum_{i=1}^{4} -c_i X_i Y_i,\quad C_1(5,5)=\sum_{i=1}^{4} c_i X_i^2 \tag{7.96}$$

$$F_{ds}(3,1)=\dot z_s\sum_{i=1}^{4} c_i,\quad F_{ds}(4,1)=-\dot z_s\sum_{i=1}^{4} c_i Y_i,\quad F_{ds}=\dot z_s\sum_{i=1}^{4} c_i X_i$$

Energia de disipare în interstiţii dintre cilindri tubulari 6 şi 8 este de forma

$$E_{d2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} c_{ci}(\dot x_i^2+\dot y_i^2) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\{\dot r_O\}\\ \{\dot\varphi\}\end{Bmatrix}^T [C_2]\begin{Bmatrix}\{\dot r_O\}\\ \{\dot\varphi\}\end{Bmatrix} \tag{7.97}$$

unde x_i şi y_i sunt legile vitezelor punctelor A_i, în plan orizontal. Ele se obţin din legea de distribuţie

$$\{\dot r_i\} = \{\dot r_O\} + [R_i]\{\dot\varphi\},\quad \{r_i\}=\{x_i, y_i, 0\}^T,\quad [R_i]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & Y_i\\ 0 & 0 & -X_i\\ -Y_i & X_i & 0\end{bmatrix} \tag{7.98}$$

În forma matriceală (7.97) matricea $[C_2]$ are elementele nenule date de

$$C_2(1,1)=C_2(2,2)=\sum_{i=1}^{4} c_{ci},\quad C_2(1,6)=C_2(6,1)=\sum_{i=1}^{4} Y_i c_{ci}$$

$$C_2(2,6)=C(6,2)=\sum_{i=1}^{4} -X_i c_{ci},\quad C_2(6,6)=\sum_{i=1} c_{ci}(X_i^2+Y_i^2) \tag{7.99}$$

Asamblând sistemul de ecuaţii diferenţiale se va obţine forma

$$[M]\begin{Bmatrix}\{\ddot r_O\}\\ \{\ddot\varphi\}\end{Bmatrix} + [C]\begin{Bmatrix}\{\dot r_O\}\\ \{\dot\varphi\}\end{Bmatrix} + [K]\begin{Bmatrix}\{r_O\}\\ \{\varphi\}\end{Bmatrix} = \{F(t)\} \tag{7.100}$$

unde

$$[C]=[C_1]+[C_2],\quad [K]=[K_1]+[K_2]+[K_3],\quad \{F\}=-\{F_s\}-\{F_G\}-\{F_{ds}\} \tag{7.101}$$

Problema, aşa cum s-a pus la începutul paragrafului, este de a reduce nnivelele de vibraţii pe suprafaţa de lucru a masei 1 sub limitele impuse de standarde şi norme corespunzătoare unor experimente optice, cântaririlor de mare precizie, în acelaşi timp asigurându-se şi o stabilitate a echilibrului în condiţiile în care centrul de greutate al ansamblului se află la cota Z_G faţă de planul punctelor A_i Pentru a evalua aproximativ stabilitatea se poate apela la analiza elementelor diagonale ale matricei de rigiditate [K] ştiind că instabilitatea mişcării poate să apară în momentul în care unul din aceştia tinde să aibă valori negative. Se constată că în numite condiţii elementele

$$K(4,4) = \sum_{i=1}^{4} k_i Y_i^2 - mgZ_G, \quad K(6,6) = \sum_{i=1}^{4} k_i X_i^2 - mgZ_G \qquad \textbf{(7.102)}$$

pot deveni negative. Deci instabilitatea mişcării poate să apară după rotaţii în jurul axelor ox şi oy.

Introducând efectul giroscopic prin intermediul unui rotor de turatie foarte mare se poate mări stabilitatea sistemului şi reducerea nivelelor de vibraţii.

Pentru a observa modul în care efectul giroscopic influenţează mişcările vibratorii ale masei inerţiale se dă în continuare un exemplu numeric pe un caz simplificat : masa seismică din figura 7.16 este simetrică cu centrul, cu centrul de masă G în originea sistemului OXYZ legat de masa 1 . Faţă de acest sistem momentele de inerţie $J_x = J_y = 200$ Kgm², elementele K(4,4) = K(5,5) = 10.000 Nm, celelalte elemente ale matricei [K] fiind nule, deci ecuaţiile 4 şi 5 din sistemul (7.100) sunt decuplate pe linia rigidităţii. Acelaşi lucru se întâmplă şi cu matriceade amortizare în cazul anulării elementelor antisimetrice din efectul giroscopic. Considerând o amortizare slabă C(4,4) = C(5,5) = 140 Nms şi o excitaţie cu un moment de perturbaţii armonic $M_x = M_o e^{j\omega t}$. În Fig.7.17, se prezintă pentru cazul în care nu există efect giroscopic, $J\omega = 0$, o diagramă de rezonanţă adimensională $A_x(f)$~f, a sistemului oscilant cu un grad de libertate, sistemul având frecvenţa proprie de balans a masei 1, după axa OX şi OY $f_n = 1,125$ Hz, deci o frecvenţă joasă caracteristică suspensilor meselor seismice destinate experienţelor de laborator cu montaje laser. Ecuaţiile 4 şi 5 ale sistemului (7.100) fiind decuplate, mişcarea de balans după axa OY nu este perturbată, deci ea nu există după această axă. La valoarea coeficientului de amortizare C(4,4) = 140 Nms, factorul de calitate este $Q = 1/2\eta = 10,1$, deci sistemul este cu o amortizare relativ mică. Aici trebuie făcută următoarea precizare: Din punct de vedere tehnic este dificil a se realiza mecanisme de disipaţie care asigură valori mari ale constantelor de amortizare, chiar şi cu soluţia din figura 7.16 (secţiune plan-A). În cazul excitării masei seismice prin picioarele de sprijin 2, de la planşeul pe care masa este fixată, nici nu este de dorit o valoare mare a acestei constante deoarece ea duce la creşterea transmisibilităţii.

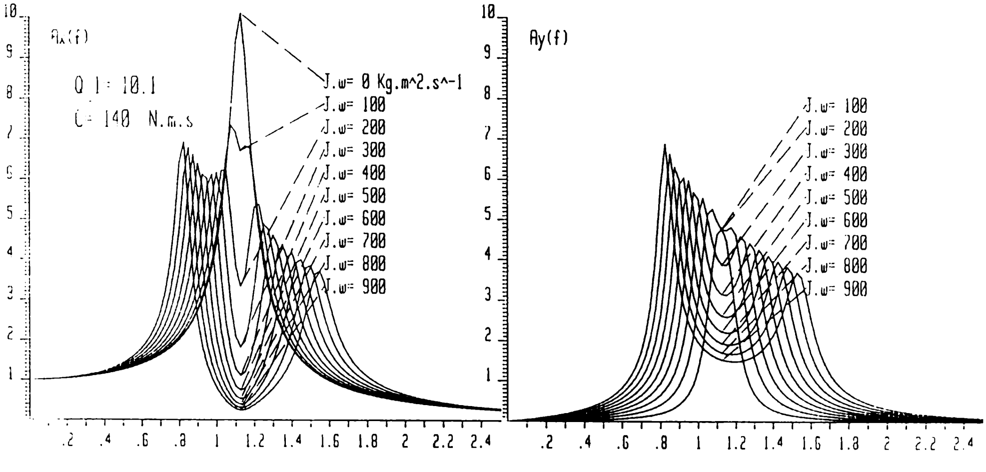

Fig.7.17

În continuare, ataşând mesei seismice un rotor 9 cu axa de rotaţie verticală, având momentul cinetic $J\omega$ se constantă, pentru prima valoare $J\omega$ = 100 Kgm^2s^{-1}, o descreştere a amplitudinii la rezonanţă cu 25%, dar şi un cuplaj prin termenii matricei giroscopice, a ecuaţiilor **4** şi **5** din sistemul (7.100), fapt ce face ca prin intermediul cuplului giroscopic să fie perturbată şi axa OY. Se obţine, astfel, răspusul în frecvenţă a căror diagrame sunt date în figura 7.17. Deci, se constată că scăderea cu 25% a vârfului de rezonanţă, se datorează transferului unei cote de energie, prin intermediul efectului giroascopic, vibraţiilor de balans, după axa OY perpendiculară pe axa OX. Acest rezultat este normal, deoarece matricelor antisimetrice le corespund forţe sau momente care nu introduc şi nu disipă energie. Mărind valoarea momentului cinetic $J\omega$, cuplajul dintre ecuaţiile 4 şi 5 se măreşte, fapt ce duce la apariţia a două vârfuri în ambele diagrame, $A_x(f)$ ~f şi A_y (f)~f, care se deplasează la stânga şi la dreapta vârfului central corespunzător frecvenţei 1,125 Hz. Valorile maxime ale amplitudinilor adimensionale $A_x(f)$ şi A_y (f) nu pot scădea sub 0,65 din valoarea corespunzătoare cazului $J\omega$ = 0, fap care nu justifică introducerea efectului giroscopic.

Dacă rotorul 9 este prins de masa seismică 1 prin intermediul unei cuple de rotaţie având axa paralelă cu axa OY, introducându-se un grad de libertate în plus. Mai mult, axa sa va fi o axă a mişcării de balans φ_r.

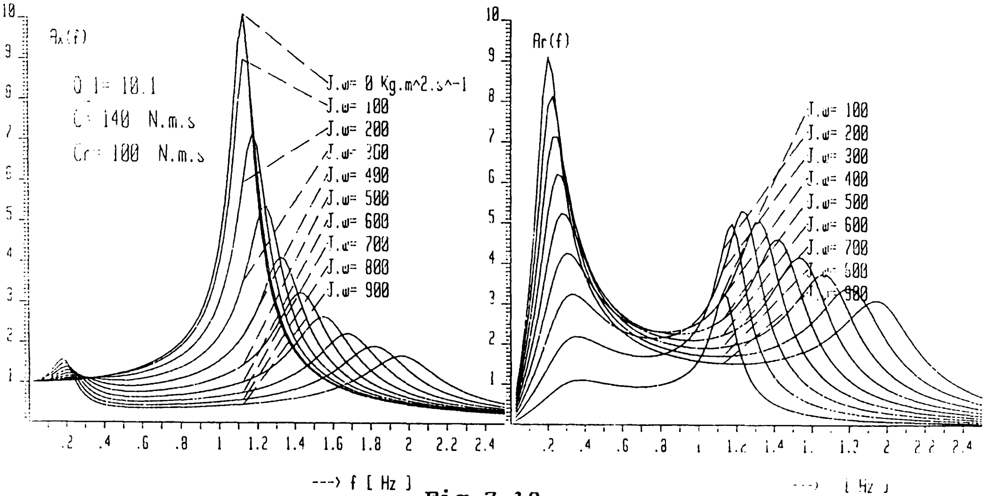

Fig.7.18

Considerând că momentul de inerţie al giroscopului, împreună cu cadrul de balans, în raport cu axa de balans, este $J_r = 0.02*J$, deci 2% din momentul de inerţie în raport cu axele principale OX şi OY, si un cuplaj elastovâscos, având rigiditatea $K_r = 0,02*K(4,4)$ şi un coeficient de amortizare de C_r. În acestă situaţie, pentru o amortizare slabă Cr = 100 Nms, din figura 7.18. a şi b a diagramelor amplitudine frecvenţă $A_x(f)$~f şi $A_r(f)$~f (acestea din urmă reprezentând mişcarea de balans după axa de rotaţie) se observă o evidentă eficacitate a mecanismului disipativ de energie relizat prin intermediul efectului giroscopic.

Amplitudinea maximă $A_x(f)$ scade în jurul frecvenţei de 1,125 Hz, dar apare o creştere la o frevenţă foarte joasă a miscării de balans rotorului, de 0,2 Hz. Mărind valoarea constantei de amortizare Cr, la Cr = 300 Nms sau Cr = 500 Nms se poate observa, din diagramele Fig.7.19 şi Fig.7.20, o atenuare optimă a mişcării de balans după axa OX, a mesei seismice. Acest grad de atenuare nu se poate obţine cu nici un alt mecanism disipativ. Din acest motiv soluţia de atenuare a vibraţiilor pe această cale se caută a fi extinsă în continuare în diferite aplicaţii practice.

Pentru atenuarea mişcărilor de balans după axă OY ar trebui

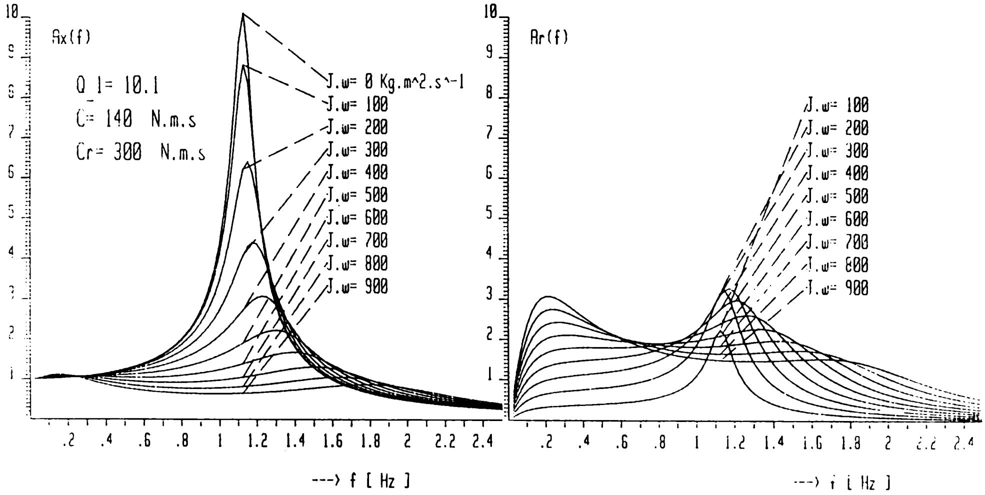

Fig.7.19

utilizat un al doilea rotor care să fie fixat de masa seismică 1 prin intermediul unei cuple de rotaţie având axa de rotaţie de-a lungul axei OX.

Este interesant de studiat cazul folosirii unui singur rotor care nu este axat nici după axa OX nici după axa OY, şi face un unghi de 45° în planul OXY. De fapt, scopul principal al utlizării acestui efect giroscopic este "de a alimenta" masa de balans cu energie din sistem şi transmiterea ei unui mecanism disipator de energie.

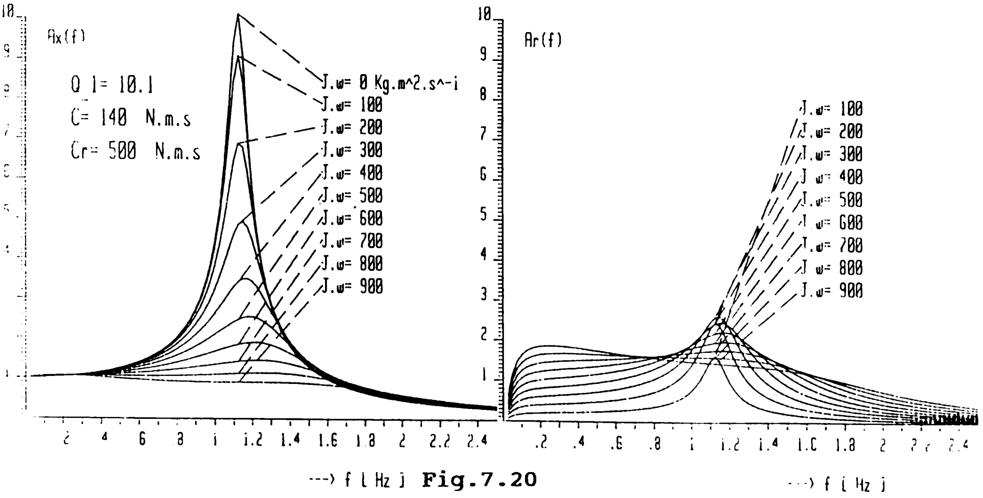

Fig.7.20

Din cele expuse mai sus, se poate concluziona că, şi-n acest caz, avem de-a face cu modificări structurale care sunt date de locul de amplasare al motoarelor şi de valorile mărimilor cinetodinamice ale acestora.

Efectul giroscopic, văzut din punctul de vedere al optimizării controlului vibraţiilor, în sensul celor arătate în paragraful 5.1, se încadrează perfect în acest context, el punând la dispoziţie un număr mult mai mic de parametri care să intre în procesul de calcul optimal. Aceşti parametri sunt: momentul cinetic al rotorului, momentul de inerţie al sistemului de balans şi coeficientul de amortizare din dispozitivul de amortizare introdus în sistemul de balans.

CONCLUZII SI CONTRIBUTII ORIGINALE

Aşa cum s-a arătat în capitolul introductiv, lucrarea abordează problema controlului vibraţiilor structurilor slab amortizate, cu aplicaţii multiple la maşini, utilaje şi instalaţii industriale. Cea mai mare parte dintre acestea fiind structuri mecanice, foarte slab amortizate, chiar şi sub acţiunea unor excitaţii de nivele energetice joase, pot apare mişcări vibratorii şi deformaţii dinamice de nivele mari.

Din acest motiv, în Capitolul I se face o trecere în revistă a câtorva probleme de vibraţii la maşini şi utilaje, asupra cărora colectivul de cercetare al Catedrei de Mecanică a efectuat numeroase studii teoretice şi experimentale. Între acestea sunt incluse: agregatele de vânt cu ax orizontal, excavatoarele miniere, maşinile de haldat (maşinile de stivuit cărbune), structurile de cazane pentru abur, aparatajul electrotehnic, utilajul petrolier, etc., structuri de dimensiuni mari, având o amortizare internă foarte mică. Comportare dinamică a acestora a făcut obiectul unor teme de cercetare [48→55]. Sunt prezentate şi comentate o serie de diagrame experimentale, din care, prin prelucrare, reiese gradul foarte slab de amortizare al structurilor şi domeniul frecvenţelor de excitaţie.

În Capitolul II se face o prezentare sintetică a principalelor metode de modelare a amortizărilor din structuri. Deşi s-a consultat un foarte mare număr de lucrări, citate în lucrare, se constată că în problema modelării amortizărilor interne ale unor structuri nu există o tratare unitară. Tot în acest capitol s-au stabilit, folosind metoda analizei modale, parametrii care determină comportarea dinamică a structurilor şi modul în care aceştia pot fi folosiţi în modificarea răspunsului dinamic. Pentru aceasta, s-a definit factorul dinamic modal de sarcină, pe baza căruia este analizat răspunsul modal, în condiţii de excitaţii diferite. În continuare se prezintă şi se discută, utilizând reprezentările modale, legătura dintre răspunsul în deplasări şi eforturile dinamice care iau naştere în structură.

În Capitolul III sunt reluate problemele de dinamică ale structurilor maşinilor şi utilajelor prezentate. De data aceasta sunt formulate modelele dinamice caracteristice pentru fiecare structură în parte. Formulările sunt date sub formă sintetică, cu un grad mare de algoritmizare, ceea ce dă posibilitatea realizării unei programări uşoare. O atenţie specială se acordă, în acest capitol, dinamicii structurilor mecanice ce conţin rotori. Aceasta este motivată de faptul că în majoritatea maşinilor şi utilajelor există subansamble în mişcare relativă de rotaţie, faţă de mişcarea vibratorie a structurii, compunerea acestor mişcări introducând efecte dinamice care deseori sunt ignorate. Efectul giroscopic care apare în cazul acestor mişcări, poate fi folosit, aşa cum se arată în Capitolul VII, în sisteme de disipare a energiei vibraţiilor pentru frecvenţe foarte joase.

Capitolul IV este dedicat metodelor clasice utilizate în controlul nivelelor de vibraţii ale structurilor mecanice. Se face o analiză critică a metodelor clasice de control: activ, semiactiv şi pasiv, atât sub aspectul cazurilor de aplicabilitate, cât şi sub aspectul economic, avându-se în vedere că, în cazul controlului activ sau semiactiv, costurile sunt foarte mari.

Din punct de vedere al optimizării controlului pasiv şi activ sunt analizate formele pătratice ale funcţiei de cost care, în forma funcţiei de reglare liniar pătratică (Liniar Quadratic Regulator) conduc la o ecuaţie matriceală neliniară, cunoscută sub numele de ecuaţia lui Ricatti, a cărei soluţie se poate determina [11]. Controlul modal simplifică abordarea controlului vibraţiilor. Folosind metoda analizei modale, se pot determina prin calcul componentele forţelor modale de control. Revenirea, prin intermediul transformărilor modale, la sistemul dinamic fizic, este destul de dificil de realizat, punându-se problema localizării traductorilor şi actuatorilor (elementelor de execuţie). Abordarea analitică sau experimentală a acestei probleme, implică acelaşi grad de dificultate ca şi cazul identificării structurilor, mai ales în cazul în care modelele dinamice sunt neliniare sau ecuaţiile de mişcare au coeficienţii funcţii de timp.

Aceleaşi probleme se ridică şi-n cazul abordării analitice a problemei controlului vibraţiilor, chiar şi prin metode pasive, când se pune problema minimalizării răspunsului maxim. Pentru acest caz se prezintă un model dinamic destul de simplificat, al unui agregat de vânt cu ax orizontal, a cărui structură este extrem de slab amortizată, aşa cum s-a arătat în paragraful 1.1. Se prezintă dificultăţile, şi în cele mai multe cazuri, imposibilitatea rezolvării pe cale analitică a acestui model, căruia i se ataşează un absorbitor dinamic acordat. Se arată că, chiar pentru modelul clasic, al sistemului cu două grade de libertate, acordarea optimală este destul de greoi formulată prin metode analitice.

Avându-se în vedere concluziile din capitolul precedent, Capitolul V este dedicat unor formulări pentru optimizarea răspunsului dinamic al structurilor, în sensul controlului nivelelor de vibraţii. Pentru aceasta se definesc câteva forme ale funcţiei de cost, prin intermediul unor matrice de pondere. Se analizează cazurile de optimizare a răspunsului structurii în domeniul timp, în domeniul frecvenţă şi respectiv al reprezentărilor modale. Minimalizarea funcţiei de cost conduce la utilizarea metodei de gradient, metodă iterativă deosebit de eficientă şi care nu cere determinarea analitică a răspunsului, ci numai explicitarea lui şi a derivatelor sale, în funcţie de parametrii prin care se urmăreşte modificarea structurală. Dacă raspunsul sistemelor liniare poate fi determinat analitic derivatele sale, în raport cu parametrii structurali, sunt imposibil de determinat. Aici s-a introdus o metodă originală care simplifică foarte mult calculul: sistemul de ecuaţii diferenţiale, ce guvernează comportarea dinamică a structurii se derivează în raport cu parametrii structurali şi pe baza proprietăţii de inversare a ordinii de derivare se obţine, astfel, pentru fiecare parametru destinat a fi modificat, în sensul optimizării răspunsului, câte un sistem de ecuaţii diferenţiale suplimentar, de acelaşi ordin ca cel al răspunsului structurii. Metoda se poate aplica cu uşurinţă şi modelelor dinamice neliniare, sistemele de ecuaţii diferenţiale pretându-se la rezolvarea pe cale numerică. Această metodă originală este deosebit de utilă, deoarece nu impune restricţii asupra ordinului sistemului de ecuaţii diferenţiale şi nici nu se limitează doar la sisteme liniare. O serie de rezultate ale acestei metode, pentru comparaţie cu alte metode, au fost publicate în lucrările [12,35,38,44]. Pe baza acestei metode, s-au întocmit programe de calcul cu subrutine generale de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale şi a formei derivate în raport cu parametrii impuşi. Exemplele numerice date în lucrare au confirmat generalitatea metodei pentru optimizarea structurilor mecanice.

În categoria sistemelor cu comportament neliniar intră şi structurile cărora li se ataşează sisteme de legături cu frecare uscată. De aceea, în paragraful final al Capitolului V se discută modelul dinamic al unei structuri, având asemenea legături disipative, cu particularităţile date de posibilitatea apariţiei fenomenului de cuplare, prin legătură, a unor mase ale sistemului. S-a elaborat un program general de calcul al răspunsului unui asemenea sistem. Cu ajutorul programului de calcul s-a simulat răspunsul dinamic al unui sistem cu un grad de libertate, căruia i s-a ataşat un sistem cu legătură prin frecare uscată, transformându-se astfel, într-un sistem cu două grade de libertate.

Formulările generale ale optimizării răspunsului structurilor îşi au aplicaţii în Capitolul VI. Aici sunt date formele ecuaţiilor diferenţiale ale mişcărilor structurii obţinute în urma modificărilor structurale impuse. Se deduc formule generale de tip Rayleigh pentru parametrii modali ai sistemelor dinamice precum şi variaţiile acestor parametrii modali, la mici modificări ale parametrilor structurali. În majoritatea cazurilor, problemele de reducere a nivelelor de vibraţii se pun după ce maşina a intrat în funcţiune şi nu în faza de proiectare, când aceste modificări structurale se pot realiza cu uşurinţă. După ce structura a fost realizată este greu de efectuat modificări structurale majore. Paragraful 6.2 este dedicat metodelor de modificare a structurilor de maşini prin: sisteme de amortizare ataşate structurii cu mase distribuite optimal pe structură, legături vâscoelastice disipative de energie şi sisteme inerţiale masă-arc-legătură vâscoelastică. Se revine, şi în cadrul acestui capitol, asupra structurii cazan de abur-structură metalică de susţinere, căreia i se ataşează legăturile disipative prin amortizori hidraulici. Se formulează sistemul de ecuaţii diferenţiale, în forma cerută de optimizarea răspunsului, prin metoda expusă în Capitolul V.

Paragraful 6.2.3 prezintă o soluţie tehnică de izolare antivibratorie a unui motor electric, ce antrenează un vibrator destinat stabilizării dimensionale prin vibraţii a structurilor sudate şi turnate. S-a formulat modelul dinamic al sistemului constituit dintr-un motor electric fixat elastic de structura vibratorului, unde s-a ţinut cont şi de efectul cuplului giroscopic, care contribuie la reducerea nivelelor de vibraţii, fapt confirmat şi de rezultatele experimentale prezentate în lucrarea [43]. Finalul Capitolului VI este consacrat efectelor dinamice care pot să apară în structuri cu simetrii ciclice, în cazul în care aceste simetrii sunt întrerupte de unele neregularităţi structurale, cauzate de abateri masice, geometrice sau de rigiditate. În cazul vibraţiilor forţate, aceste structuri au o comportare dramatică, apărând fenomenul de localizare a vibrațiilor. O astfel de localizare conduce la concentrarea energiei într-o regiune mică a structurii, adică închiderea ei pe o cale scurtă,între sursa de excitație și structură.Au loc,deci,și concentrări ale tensiunilor dinamice. Ca aplicații ale acestor considerente s-au dezvoltat câteva metode originale pentru determinarea unor abateri geometrice, de rigiditate și de masă ale paletelor unei turbine de agregat aeroelectric. Metodele și rezultatele experimentale au fost publicate în lucrările științifice [31,34,37].

In Capitolul VII sunt date soluții constructive pentru controlul vibrațiilor prin dispozitive speciale atașate structurilor de mașini. Se revine la agregatul aeroelectric, pentru care se dă o soluție tehnică de sistem seismic acordat după frecvența modului fundamental al ansamblului agregatului. Soluția tehnică este originală și propusă pentru brevetare. Ea include o masă seismică, plasată în interiorul turnului și suspendată prin cabluri, prin care se poate realiza condiția de acordare. Disiparea de energie se face prin trei elemente de legătură cu disipare prin frecare uscată. Mecanismul elementului de legătură este de asemenea brevetabil. Și în acest caz, sunt deduse ecuațiile diferențiale ale sistemului atașat structurii agregatului, scrise sub formă neliniară, pentru elongații mari, care pot să apară în cazul limită de solicitare a agregatului. În această fază sistemul ansamblului agregat-sistem atașat, poate fi optimizat după metoda fundamentată în Capitolul V. O a doua soluție constructivă, pentru sistemul atașat structurii agregatului aeroelectric, se dă în paragraful 7.1.2 și este reprezentată de un sistem pendular cu disipare de energie prin frecare uscată.

Paragraful 7.2 este dedicat unor dispozitive de legătură speciale, care se blochează la atingerea unor valori impuse accelerației relative dintre punctele de fixare ale acestora. Pentru acest moment ele se blochează, și de aceea, în literatura tehnică, sunt denumite "arestori". Se exemplifică funcționarea unui dispozitiv "arestor" montat între masele unui sistem cu două grade de libertate. Sunt prezentate și două soluții tehnice de realizare a acestor dispozitive. Mergând pe ideea disipării energiei vibrațiilor prin frecare uscată, în paragraful 7.2.2 se prezintă un dispozitiv cu frecare uscată și funcție de "arestor".

În paragraful 7.3 se prezintă o soluție tehnică de realizare a unui dispozitiv seismic masă-arc-disipator atașat structurilor mecanice, cu aplicaţie la reducerea vibraţiilor mecanice ale braţului maşinii de haldat. Particularitatea acestei soluţii originale, brevetabilă şi ea, este aceea că, pentru acordarea elastică se folosesc arcuri metalice în combinaţie cu arcuri de cauciuc, soluţie aleasă pentru eliminarea preluării de către arcurile de cauciuc a sarcinilor statice. Sunt formulate şi ecuaţiile dinamice de mişcare ale acestui dispozitiv, ecuaţii ce se ataşează modelului matematic al braţului maşinii de stivuit cărbune putându-se, astfel, aplica criteriul de optimizare.

Una dintre deficienţele majore ale amortizorilor hidraulici o reprezintă pierderea de lichid, datorită uzurilor elementelor aflate în mişcare. Eliminarea acestor deficienţe se poate face prin două soluţii originale, prezentate la paragrafrul 7.4, în care disiparea de energie are loc prin forfecarea straturilor înguste de peliculă de lichid magnetic.

Paragraful 7.5 este dedicat controlului vibraţiilor de basculare (unghiulare) cu aplicaţii în seismometrie şi pentru mese, folosite pentru experienţe speciale în tehnica holografiei laser şi în tehnici militare. Suspensia unei asemenea mese nu asigură în totalitate amortizarea oscilaţiilor de balans. De aceea, se dă în acest caz o soluţie posibilă: utilizarea unui rotor de turaţii mari. Parametrul prin care se face controlul vibraţiilor în acest caz este momentul cinetic corespunzător efectului giroscopic. Prin modelarea numerică, a unei astfel de soluţii, s-au obţinut rezultate deosebit de promitătoare în utilizarea acestui efect.

Rezultatele cercetărilor prezentate în această teză sunt publicate în reviste de specialitate sau în lucrările unor conferinţe naţionale şi internaţionale.

Tema abordată este de actualitate şi reprezintă preocuparea multor specialişti din domeniul vibraţiilor mecanice. Ea este înscrisă în tematica programului naţional de cercetare, finanţat prin Ministerul Invăţământului şi Ministerul Cercetării şi Tehnologiei (Grant 847/1995 şi Contr.487B/1995). De asemenea, unele probleme legate de tematica acestei lucrări au fost abordate în contractele cu S.C.PROMT SA Timişoara, S.C.ICMET SA Craiova şi PETROSTAR SA Ploieşti.

Pentru realizarea prezentei teze au fost consultate un număr de 158 referinţe bibliografice.

Principalele contribuţii originale

Din lucrarea elaborată se pot enumera o serie de contribuţii teoretice şi practice originale.

Contribuţii teoretice

T.1. -stabilirea unor limite de aplicabilitate, pe baza unor analize critice, ale metodelor de modelare a amortizărilor în structurile mecanice.

T.2. -prezentarea unei analize sintetice a parametrilor care determină comportarea dinamică a unei structuri;

T.3. - stabilirea unei legături dintre vectorul eforturilor dinamice şi vectorul legilor de mişcare de corp elastic determinat pe baza metodei analizei modale.

T.4. -stabilirea modelelor dinamice pentru câteva structuri mari: agregate aeroelectrice, excavatoare miniere de mare capacitate, cazane de abur pentru termocentrale, maşini de haldat, etc., adevărate megastructuri.

T.5. -stabilirea unor formulări matematice generale pentru scrierea ecuaţiilor dinamice ale oricărei configuraţii de substructuri aflate în miscare de rotaţie pe o structură dată, a cărei mişcăre poate fi cauzată fie din perturbaţii externe fie din efectele dinamice ale substructurilor.

T.6. -prezentarea unei viziuni proprii privind abordare metodei controlului activ al vibraţiilor mecanice.

T.7.-abordarea unei viziuni proprii asupra controlului modal.

T.8.-elaborarea unor algoritmi şi programe pentru optimizarea răspunsului unei structuri în urma unor modificări structurale.

T.9.-elaborarea, plecând de la metoda Runge Kutta de ordinul 4, a unui algoritm şi a unui program de determinare a răspunsului unui sistem vibrant, pentru cazul cel mai general de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi care pot să apară în descrierea mişcării unei structuri mecanice.

T.10.-deducerea unor relaţii originale între parametrii modali ai unei structuri care are moduri naturale complexe.

T.11.-deducerea unor formule originale prin care se obţin noii parametri modali ai unei structuri în urma unor mici modificări structurale.

T.12.-obţinerea unor relaţii matematice pe baza cărora se poate arăta ca efectele date de dezaxarea, respectiv de modificărea de rigiditate ale unei palete sunt prezente în primele două componente ale unei serii Fourier.

T.13.-stabilirea unor metode de verificare a unor abateri geometrice, de rigiditate şi de masă ale paletelor unei turbine de agregat electric de vânt.

T.14.-stabilirea unei metode de studiu prin care sunt puse în evidenţă efectele giroscopice ale rotoarelor, aflate pe o structură vibratoare, asupra nivelelor de vibraţii ale acestei structuri.

Contribuţii practice şi experimentale

P.1.-realizarea unui stand experimental pentru studiul izolării antivibratorii a unui motor electric de acţionare a unei structuri de maşină vibratoare.

P.2.-realizarea unui stand experimental pentru verificarea abaterilor geometrice, de rigiditate şi de masă ale paletelor unei turbine de agregat electric de vânt.

P.3.-elaborarea unei soluţii pentru un sistem de amortizare pendular ancorat prin cabluri pentru un agregat aeroelectric.

P.4.-elaborarea unei variante constructive cu pendul sferic pentru sistem seismic ataşat la agregatul aeroelectric cu ax orizontal.

P.5.-elaborarea unei soluţii constructive pentru un dispozitiv de tip arestor pentru disiparea energiei vibraţiilor, soluţie brevetabilă.

P.6.-elaborarea unei variante constructive de dispositiv de tip arestor pentru disiparea energiei vibraţiilor prin frecare uscată.

P.7. elaborarea unei soluţii constructive de dispozitiv seismic ataşat braţului unei maşini de haldat şi acordat pe două frecvenţe între care se află şi banda de frecvenţe a excitaţiei.

P.8. proiectarea unor dispozitive disipative speciale de natură hidraulică în care se folosesc lichidele magnetice pentru amortizarea vibraţiilor de joasă frecvenţă.

P.9. conceperea unor dispozitive stabilizatoare ale mişcărilor vibratorii folosind rotori giroscopice.

Prin modul în care s-a desfăşurat rezolvarea problemelor, teza generează o serie de idei pentru dezvoltări ulterioare în domeniul reducerii nivelelor de vibraţii la maşini, utilaje şi instalaţii industriale. Dintre acestea, cele mai importante sunt:

a. dezvoltarea unor aplicaţii industriale pentru reducerea nivelelor de vibraţii pe baza efectului giroscopic, aplicaţii ce se impun în primul rând în staţiile de turbocompresoare din instalaţiile petroliere;

b. extinderea studiului şi cercetărilor asupra comportării mediilor fluide cu proprietăţi magneto şi electroreologice şi aplicaţii ale acestora în tehnica controlului activ şi semiactiv al suspensiilor autovehiculelor.

B I B L I O G R A F I E

[1] Abdel-Rohman M., Contributions to Automatic Control of Structures, Ph.Thesis,University of Waterloo, Ontario, 1979.

[2] Abdel-Rohman M., Leipholz H.H., Active Control of Flexible Structures, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.104, pp.1251-1266, 1978.

[3] Abdel-Rohman M., Leipholz H.H., General Approach to Active Structural Control, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.105, pp.1007-1023, 1979.

[4] Abdel-Rohman M., Leipholz H.H., Automatic Active Control of Structures, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.106, pp.663-667, 1980.

[5] Adali S., Sadek., Distributed Control of Layered Orthotropic Plates with Damping, Optimal Control Applications & Methods, Vol. 9, pp.1-17, 1988.

[6] Agrawal Om. P., Dynamic Analysis of Multibody System Using Component Modes, Computers and Structures, Vol. 21, No. 6, pp.1303-1312, 1985.

[7] Agrawal Om.P., Shabana A. A., Fang Lu You, Application of Perturbation Techniques to Flexible Multibody System Dynamics, Computers and Structures, Vol. 27, No. 5, pp. 631-637, 1987.

[8] Aizenberg I. M., Construcţii cu structură autoadaptabilă la solicitări seismice, Editura tehnică, Bucureşti, 1982

[9] Alanoly A., Sankar S., A New Concept in Semi-Active Vibration Isolation, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol.86, pp.1-6, 1986.

[10] Bals J., Aktive Schwingungsdämpfung flexibler Strukturen, Dissertation,Technische Universität Karlsruhe, November 1989.

[11] Belea C., Vartolomei M., Metode algebrice şi algoritmi de sinteză optimală a sistemelor dinamice, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1985.

[12] **Bereteu L.**, Cioară T. Gh., The Dynamic Behavior Optimization of a Vibratory System by Structural Modification, Analele Universităţii din Oradea, pp.247-253, 1994.

[13] **Bereteu L.**, Determinarea eforturilor dinamice prin analiză modală, Analele Universităţii din Oradea, p. 255-260, 1994.

[14] **Bereteu L.**, Cioară T. Gh., Dragomir D.D., Modal Parameters Modification by Changing Mass, Stiffness and Damping, Buletinul Ştiinţific şi Tehnic al U.T. Timişoara, pp.14-19, tom 39(53), 1994.

[15] **Bereteu L.**, Cioară T. Gh., A Method for Modifying Structural Dynamic Parameters of Mechanical Systems Using Minimization Techniques Response, Conferinţa a XVIII-a de mecanica solidelor, Constanţa, pp.65-70, 1994.

[16] **Bereteu L.**, Utilizarea metodei analizei modale în determinarea eforturilor dinamice, Simpozion Jubiliar Rezistenţa materialelor p. 24-29, 1993.

[17] **Bereteu L.**, Derivări matriceale şi câteva aplicaţii în optimizarea structurilor mecanice, Conferinţa a XVIII-a de mecanica solidelor, Constanţa, p. 101-110, 1994.

[18] **Bereteu L.**, Determinarea răspunsului unei structuri slab amortizate în urma unor modificări structurale prin disipatori locali, A II-a sesiune de comunicări ştiinţifice, Arad, p. 95-100, 1994.

[19] **Bereteu L.**, Cioară, T. Gh., Dragomir, D. D., Controlul vibraţiilor prin modificări structurale utilizând metoda paşilor descendenţi, A II-a sesiune de comunicări ştiinţifice, Arad, p. 100-107, 1994.

[20] **Bereteu L.**, Smicală I., Vibraţii mecanice cu aplicaţii, Editura Mirton, Timişoara, 1993.

[21] Berkovsky B. M., Medvedev V. E., Krakov M. S., Magnetic Fluids, Engineering Applications, Oxford Univ. Press,1993.

[22] Boileau P.E., Rakheja S., Vibration Attenuation Performance of Suspension Seats for Off-Road Forestry Vehicles, International Journal of Industrial Ergonomics, Vol.5 pp.275-291, 1990.

[23] Brigret R., Vibration des machines tournantes et des structures,Tom I-IV, Technique et Documentation, Paris, 1980.

[24] Brîndeu L., **Bereteu, L.**, Rheologische Modelle des Festkörpers gestört durch Schwingungen, Conferinţa a VI-a de vibraţii în construcţia de maşini, Vol. II, p.75-79, Timişoara, 1988.

[25] Bucher I., Braun S., An Exact Solution for Inverse Problem of Structural Modification, 17th International Seminar on Modal Analysis, pp. 1497-1512, Leuven, 1992.

[26] Buculei M., Băgnaru D., Nanu G., Marghitu D., Metode de calcul în analiza mecanismelor cu bare, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1986.

[27] Buzdugan Gh., Fetcu L., Radeş M., Vibraţii mecanice, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.

[28] Buzdugan Gh., Izolarea antivibratorie, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1993.

[29] Chiriacescu S. G., Stabilitatea în dinamica aşchierii metalelor, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1984.

[30] Cioară T.Gh., On a Curve-Fitting Algorithm for Modal Parameter Estimation, Proceedings of 6th International Modal Analysis Conference, pp.717-723, Orlando, 1988.

[31] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Dragomir D. D., Ground Test Mass Balancing for the Blades of One 300 kW. Horizontal Wind Turbine, The 13th International Conf. Force and Mass Measure, Helsinki, Finland, 1993.

[32] Cioară T. Gh., Gligor Tr., **Bereteu L.**, Dragomir D.D., Experimental Method for Multycylinder Compressor Massive Foundation Vibration Analysis, The 6th International Conf. Soil Dynamics & E.E. Southampton, UK, 1993.

[33] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Dragomir D. D., Ball and Roller Bearing Manufacturing Control by Vibration Diagnosis,The 10th International F.A.S.E.Symposium,pp.57-62,Bucharest, 1993.

[34] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Dragomir D. D., Method and Equipment for Flexibility and Geometric Deviation Measurement for the Blades, The 25th Israel Conference, pp. 729-731, Haifa, 1994.

[35] Cioară T. Gh.,**Bereteu L.**, Optimal Structural Modifications for Vibration Level Minimization Using Gradient Methods,Buletinul Ştiinţific şi Tehnic al UT.Timişoara, pp.6-13,tom 39(53),1994.

[36] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Dragomir D. D., Studiul comportării dinamice a unui pol întreruptor, A III-a conferinţă de tehnologii, Craiova, 1994.

[37] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Dragomir D. D., Testing Methods for Mass Balancing Geometrical and Elasticity Deviation Verified of the Blades, E.W.C Thessaloniki, pp. 100-103,1994.

[38] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Dragomir-Dăescu D., Modificări structurale, într-o structură dată, pentru obţinerea unei comportări dinamice dorite, Buletinul Conferinţei de Dinamica Maşinilor, Supliment al Buletinului Ştiinţific al Universităţii Transilvania, Braşov, p. 81-88, 1994.

[39] Cioară T. Gh., Cireş I., **Bereteu L.**, Cercetări experimentale privind mişcările vibratorii ale unui excavator cu cupe, Partea I, Investigaţii experimentale, A VII-a Conferinţă internaţională de inginerie managerială şi tehnologică, p.179-186, Timişoara, 1995.

[40] Cioară T. Gh., Cireş I., **Bereteu L.**, Cercetări experimentale privind mişcările vibratorii ale unui excavator cu cupe, Partea a II-a, Dinamica excavatorului cu cupe, A VII-a Conferinţă internaţională de inginerie managerială şi tehnologică, p.187-195, Timişoara, 1995.

[41] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, D. D. Dăescu, Teste experimentale pentru determinarea parametrilor modali ai unui pol-intreruptor, A VII-a Conferinţă internaţională de inginerie managerială şi tehnologică, p.143-148, Timişoara, 1995.

[42] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Mişcări vibratorii ale sistemelor mecanice cu rotori,A XXVI-a Sesiune de Comunicări Ştiinţifice, Academia Tehnică Militară, Bucureşti, p. 271-286, 1995.

[43] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Truşculescu D., Izolarea elastică a motorului de acţionare a unei maşini vibratoare, A XXVI-a Sesiune de Comunicări Ştiinţifice, Academia Tehnică Militară, p. 263-270, Bucureşti, 1995.

[44] Cioară T. Gh.,**Bereteu L.**,An Analytical Gradient Algorithm for Optimal Structural Modification,The 14th International Modal Analysis Conference, Dearborn, Michigan, pp.1173-1177,1996.

[45] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Dragomir D. D., Modal Decomposition for a General Gyroscopic Vibratory System, Conferinţa a VII-a de vibraţii mecanice, pp. 161-166, Timişoara, 1993.

[46] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Un algoritm de multiplicare a densităţii liniilor spectrale la transformata discretă Fourier, Conferinţa a VII-a de vibraţii mecanice, p. 155-160, Timişoara, 1993.

[47] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Consideraţii privind transferul energetic excitator-structură la testarea ei după un regim armonic rezonant, Conferinţa a VII-a de vibraţii mecanice, p. 261-267, Timişoara, 1993.

[48] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Cercetări privind optimizarea paletelor turbinelor eoliene, Raport de cercetare la contractul Nr. 44/4391/1992.

[49] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Dragomir D. D., Studii şi cercetări experimentale în domeniul vibraţiilor structurilor mecanice utilizând metode şi tehnici de analiză modală, Raport de cercetare la contractul M.I.S. Nr. 2.280/1992.

[50] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Dragomir D. D., Studii şi cercetări experimentale în domeniul vibraţiilor structurilor mecanice utilizând metode şi tehnici de analiză modală, Raport de cercetare la contractul M.I. Nr. 1082/B/1993.

[51] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Dragomir D. D., Analiza combinată, experimentală şi teoretică a echipamentelor electrotehnice de medie şi înaltă tensiune, Raport de cercetare Nr. 81/1993.

[52] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Dragomir D. D., Studii şi cercetări experimentale în domeniul vibraţiilor structurilor mecanice utilizând metode şi tehnici de analiză modală, Raport de cercetare la contractul M.I. Nr. 3004/1994.

[53] Cioară T. Gh., Gligor T. , **Bereteu L.**, D. D. Dragomir, Studii şi cercetări experimentale privind elaborarea de noi metode şi echipamente pentru : reducerea nivelelor de vibraţii şi diagnoză prin vibraţii la maşini şi utilaje, testarea la vibraţii a produselor industriale, Raport de cercetare la contractul M.C.T. Nr. 475B/1994.

[54] Cioară T. Gh., Dragomir D. D., **Bereteu L.**, Măsurarea tensiunilor dinamice în cablul de ridicare a braţului port cupe şi a jocurilor axiale în rulmentul de rotire de la excavatorul cu cupe ERC 1400-30/7, Raport de cercetare la contractul cu PROMT SA, Nr. 58/1994.

[55] Cioară T. Gh., **Bereteu L.**, Dragomir D. D., Studii şi cercetări experimentale privind elaborarea de noi metode şi echipamente pentru : reducerea nivelelor de vibraţii şi diagnoză prin vibraţii la maşini şi utilaje, testarea la vibraţii a produselor industriale, Raport de cercetare la contractul M.C.T. Nr. 487B/1995.

[56] Collins A.S.,Miller D.W., Piezopolymer Spatial Filters for Active Structural Control, Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration, Blacksburg, 1991.

[57] Crosby M. J., Karnopp D. C., Vibration Control Using Semi-Active Force Generators, ASME Journal of Engineering for Industry pp. 619-626, 1974.

[58] Done G.T.S., Ragacharyulu M.A.V., Use of Optimization in Helicopter Vibration Control by Structural Modification, Journal of Sound and Vibration, Vol.74, pp.507-518, 1981.

[59] Done G.T.S., Hughes A.D., The Response of a Vibrating Structure as a Function of Structural Parameters, Journal of Sound and Vibration, Vol.38, pp.255-266, 1975.

[60] Derbaremdiker A. D., Ghidravliceskie amortizatorî avtomobilei, Izdatelistvo "Maşinostroenie", Moskva, 1969.

[61] Egeland O., Lunde E., Balchen J., Dynamic Control of Kinematically Redundant Robotic Manipulators, Modeling, Identification and Control, Vol. 8, No. 3, pp. 159-171, 1987.

[62] Egeland O., Cartesian Trajectory Tracking for Manipulators Using Optimal Control Theory, Modeling, Identification and Control, Vol. 8, pp. 137-147, 1987.

[63] Egeland O., On the Robustness of Computed Torque Technique in Manipulator Control, Modeling, Identification and Control, Vol. pp. 149-158, 1987.

[64] Ewins D.J., Gleeson P.T., A Method for Modal Identification of Lightly Damped Structures,Journal of Sound and Vibration, Vol.84, pp.57-79 1982.

[65] Ewins D. J., Modal Testing: Theory and Practice, John Wiley & Sons, Chichester, 1987.

[66] Finberg L., Larson R., Optimizing-What's That?,Transaction of Society of Automotive Engineers, pp. 1-8, February, 1976.

[67] Foster C.D., Mottershead J.E., A Method for Improving Finite Element Models by Using Experimental Data: Application and Implications for Vibration Monitoring, Int. J. Mech. Sci., Vol.32 pp.191-203, 1990.

[68] Gafiţanu M ., Diagnosticarea vibroacustică a maşinilor şi utilajelor, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[69] Gladwell G. M. L., Willms M. B., The Reconstruction of a Tridiagonal System from its Frequency Response at an Interior Point, Inverse Problems, No. 4, pp. 1013-1024, 1988.

[70] Gladwell G. M. L., Hods S. R. A., Uniform Transmission Synthesis Using Inverse Eigenvalue Analysis, IEEE Transaction on Circuits and Systems, Vol. 35, No.6, pp 654-666, 1987.

[71] Gladwell G. M. L., Inverse Problems in Vibration, Applied Mechanics Reviews, Vol. 39, No. 7, pp.1013-1017, 1986.

[72] Gladwell G. M. L., Examples of Reconstruction of Vibrating Rods from Spectral Data, Journal of Sound and Vibration, Vol. 119(2), pp. 267-276, 1987.

[73] Gladwell G. M. L., The Inverse Mode Problem for Lumped-Mass System, Quarterly J. I. Mech. Appl. Math., Vol.39, pp. 297-307, 1986.

[74] Gladwell G. M. L., Gbadeyan J. A., On the Inverse of the Vibrating String or Road, Quarterly J. I. Mech. Appl. Math., Vol.38, pp. 169-174, 1985.

[75] Guyan R. J., Reduction of Stiffness and Mass Matrices, AIAA Journal, Vol. 3, pp 380-383, 1965.

[76] Hagedorn P., Non-Linear Oscillations, Clarendon Press, Oxford, 1988

[77] Hać A., Adaptive Control for Vehicle Suspension, Vehicle System Dynamics, Vol.16. pp. 57-74, 1987.

[78] Hać A., Suspension Optimization of a 2-DOF Vehicle Model Using a Stochastic Optimal Control Technique, Journal of Sound and Vibration, Vol. 100, pp. 343-357, 1985.

[79] Hać A., Stochastic Optimal Control of Vehicles with Elastic Body and Active Suspension, ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 108, pp. 106-110, 1986.

[80] Harris C. M., Crede C. E., Şocuri şi vibraţii, Editura tehnică, Vol. I-III, Bucureşti, 1969

[81] Hassibi J., Control and Systems of Structures, Ph. Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1980.

[82] Hemami H., Wyman B.F., Indirect Control of the Forces of Constraint in Dynamic System, ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 101, pp. 355-360, 1979.

[83] Hemami H., Brinker J.L., Henristi A., Study of Relegation of Control in Constrained Robotic Systems, ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 109, pp. 224-231, 1987.

[84] Hu A., Skelton R.E., Yang T.Y., Modeling and Control of Beam-Like Structures,Journal of Sound and Vibration, Vol.117, 475-496, 1987.

[85] Johns D.J., Milsted M.G., Vibration Models of Steel Chimneys with Added Damping, Int. J. Earthq. Eng. Struct. Dyn., pp.305-314,1979.

[86] Krall A.M., Ghen G., Modeling, Stabilization and Control of Serially Connected Beams, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 25, pp. 526-546, 1987.

[87] Kliem W., Pommer C., On the Stability of Linear Nonconservative Systems, Quarterly of Applied Math., Vol. 43, pp. 456-463, 1986.

[88] Levitskii N.I., Kolebania vî mehanizmah, Nauka, Moskva, 1988.

[89] Lalanne M., Berthier P., DerHagopian J., Mechanical Vibrations for Engineers, John Wiley and Sons, New York, 1984.

[90] Leipholz H.H.E., On Some Developments Indirect Methods of the Calculus of Vibrations, Applied Mechanics Reviews, Vol.40, pp. 1379-1392, 1987.

[91] Lekie F. A., Lindsberg D.,The Effect of Lumped Parameters on Beam Frequencies, Aeronautical Quarterly, Vol. 14, pp. 224-240, 1963.

[92] Liu S., Improvement of Analytical Dynamic Models Using Complex Modal Test Data, Int., J., Mech., Sci., Vol., 34 pp. 817- 829

[93] Lunden R., Optimum Distribution of Additive Damping for Vibrating Beams, Journal of Sound and Vibration, Vol.66 pp.25-37, 1979.

[94] Lunden R., Optimum Distribution of Additive Damping for Vibrating Frames, Journal of Sound and Vibration , Vol.72 pp.391-402, 1980.

[95] MacMartin D.G., Miller D.W., Steven R.H., Structural Control Using Active Broadband Impedance Matching, Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration, Virginia Polytechnical Institute and State University, Blacksburg, April 1991.

[96] Mace B.R., Active Control of Flexural Vibrations, Journal of Sound and Vibration, Vol.114, pp.253-270, 1987.

[97] Mace B.R., Wawe Reflection and Transition in Beams, Journal of Sound and Vibration, Vol.97, pp.237-246, 1984.

[98] Margolis D.L., Tylee J.L., Hrovay D., Heave Mode Dynamics of a Tracked Air Cushion Vehicle with Semiactive Airbag Secondary Suspension, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol.75, pp.1-9, 1976.

[99] Margolis D.L., Semi-Active Heave and Pitch Control for Ground Vehicles, Vehicle System Dynamics Vol.11, pp.31-42, 1982.

[100]Margolis D.L., Semi-Active Control of Wheel Hop in Ground Vehicles, Vehicle System Dynamics Vol.12, pp.317-330, 1983.

[101]Markovskyi A., Development and Application of Ill-Posed Problems in the USSR, Appl.Mech.Rev.,Vol.41,pp.247-256,1988.

[102]Masuda K., A Parametric Study of Robot Arm Vibrations by Simulations Analysis, Advanced Robotics, Vol.1, No.4, pp.325-342, 1986.

[103]McTavish D.J.,The Mini-Oscillator Technique: A Finite Element Method for the Modeling of Linear Viscoelastic Structures, UTIAS Report No.323, 1988.

[104]Meirovitch L., Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill Book Co., New-York, 1975.

[105]Meirovitch L., Computational Methods in Structural Dynamics, Sijthoff and Noordhoff, Rokville, Maryland, 1980.

[106]Meirovitch L., Introduction to Dynamics and Control, John Wiley and Sons, New York, 1988.

[107]Meirovitch L., Baruch H., Parameter Identification in Distributed Systems, Journal of Sound and Vibration, Vol.1014 pp. 551-564, 1985.

[108]Meirovitch L., Some Problems Associated with the Control of Distributed Structures, Journal of Optimization and Applications, Vol.54, No. 1, pp.1-21, 1987.

[109]Meirovitch L., Narris M. A., A Perturbation Technique for Parameter Identification in Distributed Structures, Applied Math. Modelling, Vol.12, pp.167-174, 1988.

[110]Miller D.W.,de Luis J., Crawley E.F., Dynamics and Control of Multipayload Platforms, 41th Congress of the International Astronautical Federation, Dresden, pp.192-209, October, 1990.

[111]Miller D.W., von Flotow A., A Travelling Wave Approach to Power Flow in Structural Networks, Journal of Sound and Vibration, Vol.128, pp. 145-162, 1989.

[112]Miller D.W., Hall S.R., von Flotow A., Optimal Control of Power Flow at Structural Junctions, Journal of Sound and Vibration, Vol.140,pp.475-479, 1990.

[113]Miller D.W., van Schoor M.C., Formulation of Full State Feedback for Infinite Order Structural Systems, Proceedings of the 31th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, Long Beach, pp 1-28, April 1990.

[114]Nakatsuka K.,Yokoyama H.,Shimoiizaka J., Damper Application of Magnetic Fluid for a Vibration Isolating Table, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 65, pp.359-362, 1987.

[115]Nashif A., Jones D.I.G., Henderson J. P., Vibration Damping, John Wiley & Sons, Chichester, 1985.

[116]Natke H.G., The Future of Structural System Analysis, 17th International Seminar on Modal Analysis, pp.1-28, Leuven,1992.

[117]Norton M.P., Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[118]Ozguven H. N., A New Method for Harmonic Response of Nonproportionally Damped Structures Processing Undamped Modal Data,Journal of Sound and Vibration,Vol.117,pp.313-328,1987.

[119]Pană T., Absorbitori dinamici de vibraţii, Editura tehnică, Bucureşti, 1984.

[120]Pierre C., Dowell E.H., Localization of Vibration by Structural Irregularity, Journal of Sound and Vibration, Vol.114, pp.549-564, 1987.

[121]Plaut R.H., Husein J.C., Non-Linear Structural Vibrations Involving a Time Delay in Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol. 117, pp.497-510, 1987.

[122]Pshenichny B. M., Danilin Yu. M., Numerical Methods in Extremal Problems, Mir Publishers, Moscow, 1979.

[123]Radeş M., Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1979.

[124]Rakheja S., Sankar S., Suspension Design to Improve Tractor, Transactions of Society of Automotive Engineers, pp.4.1096-4.1112, 1984.

[125]Ram Y. M., Blech J.J., The Dynamic Behavior of a Vibratory System after Modification, Journal of Sound and Vibration, pp.357-370, 1991.

[126]Ramamurti V., An Equation Solver for Eigenvalue Problems of Cyclic Symmetric Structures, Computers and Structures, Vol.26, pp.667-672, 1987.

[127]Rao S.S., The Finite Element Method in Engineering, Pergamon Press, Oxford, 1982.

[128]Rayleigh L., Theory of Sound (Volume 1), Dover Publication, Second Edition, New York, 1945.

[129]Schnabel R. B., Dennis J. E., Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1988.

[130]Silaş Gh., Mecanica. Vibraţii mecanice, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1967.

[131]Silaş Gh., Toader M., **Bereteu L.**, Remarks Concerning Some Approximate Methods of Determining Blade Pulses of Wind Aggregates, Conferinţa a V-a de vibraţii în construcţia de maşini, Vol I, p. 57-63, 1985.

[132]Silaş Gh., Cioară T.Gh., Gligor Tr., Toader M., On the Eigenpulsations of a Unit Consisting of a Boiler and its Haged Metal Structure, Conferinţa a VI-a de vibraţii mecanice, pp. 27-37, Timişoara, 1988.

[133]Schorn G., Feedback Control of Structures, Ph. Thesis, University of Waterloo, Ontario, 1980.

[134]Schweitzer G., Modelling and Control of Flexible Rotor with Magnetic Bearings. Conference on Vibration in Rotating Machinery, New York, 1984.

[135]Sharp R.S., Brooks P.C., Applications of Eigenvalue Sensitivity Theory to the Improvment of the Design of Linear Dynamic Systems, Journal of Sound and Vibration, Vol.114, pp.19-32, 1987.

[136]Sharp R.S., Brooks P.C., A Computational Procedure Based on Eigenvalue Sensitivity Theory Applicable to Linear System Design, Journal of Sound & Vibration, Vol.114, pp.13-18, 1987.

[137]Skelton R.E., Hughes P.C., Hablani H.B., Order Reduction for Models of Space Structures Using Modal Cost Analysis, AIAA, Vol.5, pp.351-357, 1982.

[138]Skelton R.E., Hughes P.C., Modal Cost Analysis for Linear Matrix-Second Order Systems, J. of Dynamic Systems Measurement and Control, Vol.102, pp.151-158, 1980.

[139]Sankar S., Alanoly J., A New Concept in Semi-Active Vibration Isolation, Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol.26, pp.1-4, 1986.

[140]Sadek I.S., Sloss J.M., Bruch J.C., Adali S., Optimal Distributed Control of Beam with Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol. 117, pp. 207-218, 1987.

[141]Sadek I.S., Variational Method for the Distributed Control of Vibrating Beam, Optimal Control and Appllications Methods, Vol.9, pp.79-85, 1988.

[142]Sadek I.S., Sloss J.M., Bruch J.C., Adali S., Structural Control to Minimize the Dynamic Response of Mindlin-Timoshenko Plates, Journal of the Franklin Institute,Vol.324, No.1, pp. 97-111, 1987.

[143]Shabana A.A., Dynamics of Multibody Systems with Variable Kinematic Structure, J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol.108, pp.167-175, 1986.

[144]Shabana A.A., Dynamics of Inertia-Variant Flexible Systems Using Experimentally Identified Parameter, J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design,Vol.108,pp.358-366, 1986.

[145]Suarez L., Singh S., A Method for Dynamic Coupling with Nonclassical Damping Effect, Journal of Sound and Vibration, Vol.120, pp.539-555, 1988.

[146]Suarez L., Singh S., An Exact Component Mode Synthesis Approach, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.16 pp.293-310, 1988.

[147]Tanaka N., Kikushima Y., Active Control of Impact Vibration Using Feedforward Control Method, Journal of Vibration, Stress, and Reliability in Design, Vol.111, pp. 53-60, 1989.

[148]Tanaka N., Kikushima Y., On the Hybrid Vibration Isolation Method, Journal of Vibration, Stress, and Reliability in Design, Vol.I11, pp. 61-70, 1989.

[149]Thomson W.T.,Theory of Vibration, Unwin Hyman Ltd.,London,1989

[150]Urbaniec K., Optimal Design of Process Equipment, Ellis Horwood Ltd. & John Wiley & Sons, 1986.

[151]Viderman Z., Porat I., An Optimal Control Method for Passage of Flexible Rotor Through Resonances, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control,Vol.109, pp.216-223, 1987.

[152]Voinea R., Voiculescu D., Simion F. P., Introducere în mecanica solidelor, Editura Academiei R.S.R, Bucureşti, 1986.

[153]Zienkiewicz O.C., The Finite Element Method, McGraw-Hill, London, 1983.

[154]Walshaw A.C., Mechanical Vibration with Applications, John Wiley and Sons, New York, 1984.

[155]***The Rosta Anti-Vibration Mountings, Rosta Werk Ltd., Catalog, 1993.

[156]***Lord Kinematics, Vibration, Shock, Noise Control Products, Elastomeric Flexible Couplings, Lord Corporation Ltd.,Catalog, 1980.

[157]*** Pacific Scientific Compensating Struts, Pacific Scientific Inc., Prospects, 1985-1987.

[158]*** Production Laser & Optics Products for Research, Newport, Catalog 1990.