

UNIVERSITATEA TEHNICA TIMISOARA

Facultatea de Electronică și Telecomunicații

**Eșantionare adaptată la proprietățile locale
ale semnalelor și reconstrucție on-line**

TEZA DE DOCTORAT
ing. Voicu Filimon

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

Conducător științific:
Prof. Dr. Ing. Vasile Stoica

Timișoara 1994

Cuprins

Notații	3
Introducere	4
Capitolul 1. Teorema eșantionării la intersecția mai multor domenii.	7
1.1. Scurt istoric	7
1.2. Teorema eșantionării și dualitatea continuu discret	8
1.3. Teorema eșantionării și interpolarea funcțiilor complexe	14
1.4. Generalizare a Teoremei eșantionării utilizând teoria funcțiilor complexe.	20
1.5. Teorema eșantionării și spațiile Hilbert	23
1.6. Rezumat și concluzii.	26
Capitolul 2. Algoritmi adaptivi și baze oblice în descrierea și refacerea semnalelor eșantionate neregulat.	27
2.1. Introducere	27
2.2. Baze oblice.	28
2.2.1. Construcție. Operatorul bazei oblice și dualul său	28
2.2.2. Determinarea bazei oblice duale prin aplicarea unui algoritm iterativ.	32
2.2.3. Utilizarea bazelor oblice la descrierea semnalelor eșantionate neregulat.	35
2.2.4. Condiții în care translatatele unei funcții formează o bază oblică într-un spațiu dat	41
2.3. Algoritm LMS în regim de urmărire.	44
2.3.1. Calculul erorii de urmărire	44
2.3.2. Rezultate experimentale	47
2.4. Reconstrucția on-line a semnalelor staționare din eșantioane prelevate neregulat, utilizând algoritmul LMS.	49
2.4.1. Algoritm LMS ponderat	49
2.4.2. Rezultate experimentale.	53

2.5. Rezumat și concluzii.	55
Capitolul 3. Metodă de eșantionare adaptivă și reconstrucție on-line a semnalelor din l^2 utilizând baze oblice de undișoare.	57
3.1. Introducere	57
3.2. Construcția bazelor oblice și ortonormate de undișoare cu suport compact	58
3.2.1. Baze oblice și metode de ortonormare	58
3.2.2. Baze ortonormate de undișoare cu suport compact	64
3.2.3. Filtraj multicanal în analiza și reconstrucția semnalelor. Baze de undișoare generalizate.	75
3.2.3.1. Sisteme bicanal	75
3.2.3.2. Filtrare multicanal	78
3.3. Algoritm de eșantionare adaptivă și reconstrucție on-line a unui semnal pe baza analizei cu o bază ortonormată de undișoare.	83
3.3.1. Algoritm de eșantionare cu adaptare la conținutul local în frecvență al semnalului.	83
3.3.2. Reconstrucția on-line a semnalelor după eșantionarea adaptivă, printr-o metodă iterativă.	94
3.4. Rezultate experimentale	99
3.5. Rezumat și concluzii	107
Capitolul 4. Contribuții și direcții de dezvoltare viitoare	109
4.1. Contribuții	109
4.2. Direcții de dezvoltare	113
Bibliografie	115
Anexă	121

Notații

FIR	filtru cu răspuns finit la impuls
IIR	filtru cu răspuns infinit la impuls
TFD	transformata Fourier Discretă
TF	transformata Fourier
TUD	transformata undișoară Discretă
AMR	analiză multirezoluție
FWT	transformată undișoară rapidă
LMS	algoritmul minimizării erorii patratice medii
Bob	bază oblică
BON	bază ortonormată
L^2	mulțimea funcțiilor de energie finită definite pe R
l^2	mulțimea șirurilor discrete de energie finită definite pe Z
$\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle$	produs scalar
$x * y$	produs de convoluție $= \int x(t)y(\tau-t)dt$ domeniul continuu $= \sum_n x(n)y(m-n)$ domeniul discret $= \sum_n x(n)y(t-n)$ continuu-discret
H'	operatorul adjunct lui H : $\langle Hx, y \rangle = \langle x, H'y \rangle$
Θ'	transformata Fourier a lui Θ
χ_I	funcția caracteristică a intervalului I în domeniul timp
l_I	funcția caracteristică a intervalului I în domeniul frecvență
h'	oglinzita lui h față de 0: $h'(t) = h(-t)$ (Cap. 2 și 3)
f'	derivata lui f (Cap. 1)
δ_{nm}	1 pentru $n=m$ și 0 în rest
δ_n	δ_{n0}
$\downarrow M$	decimare cu M ($y(k) = x(kM)$)
$\uparrow M$	interpolare cu M ($y(kM+i) = 0$, pentru $i=1, M-1$, $y(kM) = x(k)$)
E	operatorul de mediere statistică

Introducere

Lucrarea de față abordează Teorema eșantionării (TE), un subiect care ține de domeniul mai larg al comunicațiilor și al prelucrării de semnale. Subiectul poate pare desuet pentru că TE s-a încetățenit de câteva decenii în practica transmiterii de informație, însă el revine în actualitate (sau n-a părăsit-o după cum se poate constata din bibliografie) deoarece în forma ei clasică TE nu conține de fapt nici un criteriu de optimalitate: fiind cunoscută banda de frecvență a unui semnal TE oferă o relație de calcul pentru rata de eșantionare necesară recuperării complete a semnalului. A cunoaște banda de frecvență înseamnă cunoașterea suportului transformatei Fourier care reprezintă o transformare globală a semnalului, în sensul că nu oferă nici o informație despre comportarea acestuia în timp. Deci utilizând TE în forma ei clasică se obține o rată de eșantionare constantă care este nesatisfăcătoare ținând cont de faptul că majoritatea semnalelor din practică sînt nestaționare, avînd la diferite momente de timp, diferite localizări în frecvență. Nestaționaritatea este ilustrată de exemplul clasic [30] al semnalului audio provenit de la un instrument, pentru care partitura constituie o hartă a localizării în frecvență a semnalului în funcție de timp. În plus pentru determinarea corectă a transformatei Fourier este necesară cunoașterea în totalitate a semnalului, ceea ce este imposibil în realitate.

De aceea găsirea unui algoritm de eșantionare cu posibilitatea adaptării la proprietățile locale ale semnalelor, implementabil practic, este un obiectiv justificat. Acesta, împreună cu un algoritm de refacere a semnalului on-line, adică pe măsură ce sosesc eșantioanele la recepție, ar constitui un răspuns la problema eșantionării adaptive și implicit și o modalitate de compresie.

În prezent există aparate care realizează o compresie în următorul mod [123]: semnalul este preeșantionat obținîndu-se o densitate de eșantionare considerată suficientă, apoi cu aceste eșantioane se face o estimare a suportului în frecvență și pe această bază se procedează la decimare, reducînd astfel numărul de eșantioane memorate. Însă nu există deocamdată un aparat care pe parcursul transmiterii semnalului (eventual după o preeșantionare) să ia o decizie asupra faptului că un eșantion trebuie transmis sau

nu -fără să se cunoască semnalul care urmează momentului deciziei, decît eventual doar o porțiune limitată- și apoi la recepție să refacă complet semnalul cunoscînd din nou doar cîteva eșantioane aparținînd unui interval finit, limitat de timp, refacerea făcîndu-se deci on-line. Lucrarea de față propune o astfel de metodă de eșantionare adaptivă, autorul demonstrînd teoretic valabilitatea metodei, pe care o verifică apoi experimental.

Pentru a face acest lucru se pornește de la plasarea TE în contextul matematic adecvat, necesar obținerii unei perspective asupra problemei și mai ales util pentru a se putea decide ce este realizabil și ce nu. În capitolul 1 se prezintă TE d.p.d.v. al dualității continuu-discret, al teoriei funcțiilor complexe -de care autorul leagă și un rezultat propriu- și al spațiilor de tip Hilbert. Această ultimă abordare va fi utilizată în capitolele următoare, deoarece în prezent prelucrările de semnale se fac cu ajutorul sistemelor discrete iar L^2 : spațiul șirurilor de energie finită , are structura unui spațiu Hilbert.

În capitolul 2 TE este transferată din domeniul continuu în cel discret iar pentru descrierea semnalelor este utilizat și introdus conceptul de bază oblică. Se arată că bazele oblice constituie un mod natural de descriere a semnalelor eșantionate neuniform și deasemenea se arată că problema recuperării semnalelor din eșantioane este echivalentă cu determinarea bazei oblice duale. Pe această bază se propune utilizarea unui algoritm adaptiv pentru refacerea on-line a semnalelor, și autorul utilizează algoritmul minimizării erorii pătratice medii (Least Mean Square) cunoscut pentru stabilitatea sa numerică. Proprietățile de urmărire ale algoritmului LMS sînt studiate de autor în cazul clasic al identificării sistemelor liniare variabile în timp (LTV), obținîndu-se o relație pentru calculul a priori al erorii de urmărirea, apoi algoritmul este aplicat la recuperarea semnalelor prin proiecții în spațiul semnalelor de bandă limitată. Se arată avantajele algoritmului adaptiv în raport cu metoda utilizată în literatură de determinare a bazei oblice duale prin calculul unei pseudoinverse. Această metodă este aplicabilă doar cînd semnalul este cunoscut în întregime, deci off-line și datorită complexității de calcul, doar pentru un număr restrîns de eșantioane.

În capitolul 3 se dezvoltă descrierea semnalelor prin baze oblice, generînd baza cu ajutorul grupului transformărilor afine

(translații și scalări) aplicate unei singure funcții, numită undișoară, ajungînd astfel la analiza semnalelor cu baze ortonormate de undișoare. Undișoara este astfel construită încît versiunile sale scalate despart spațiul imagine în fișii cu factor de calitate constant (Q constant), avînd în plus proprietatea de a avea suport compact. De aceea bazele de undișoare conduc la un compromis util pentru localizarea atât în timp cît și în frecvență a semnalelor (care conform principiului incertitudinii nu poate fi perfectă). Pe baza acestei observații autorul construiește un algoritm de eșantionare adaptivă găsind o relație biunivocă între spațiul semnalului și cel al coeficienților Fourier ai Transformatei undișoară discretă (TUD). Deoarece acești coeficienți descriu local în frecvență semnalul, eșantionînd în conformitate cu informația dată de TUD, se obține o compresie de semnal. Relația găsită fiind biunivocă semnalul poate fi reconstituit complet și autorul găsește și demonstrează convergența unui algoritm iterativ care realizează refacerea semnalului. Deoarece undișoara care stă la baza analizei semnalului este cu suport compact, atât procedeul de analiză cît și cel de sinteză pot fi implementate on-line, ele fiind experimentate în final de către autor.

În acest mod se răspunde problemei puse în momentul în care această cercetare a fost începută.

Autorul dorește pe aceasta cale să mulțumească în mod deosebit conducătorului științific d-lui profesor Vasile Stoica care i-a fost mereu alături și l-a îndrumat cu competență și înțelegere pe parcursul anilor care au avut ca rezultat această lucrare. De asemenea dorește să mulțumească d-lui profesor Eugen Pop pentru discuțiile avute care au condus la clarificarea multor aspecte.

În același timp autorul își exprimă recunoștința față de colegii săi dr. Gernot Kubin și dr. Werner Kozek cercetători la Technische Universität Wien cu care a colaborat pe parcursul stagiului de specializare în anul universitar 1991-1992, perioadă în care a pus bazele acestei lucrări. Autorul dorește să mulțumească în final tuturor acelor colegi care l-au sprijinit în perioada de realizare a lucrării.

Capitolul 1. Teorema eșantionării la intersecția mai multor domenii.1.1. Scurt istoric

Problema reconstrucției unei funcții din eșantioanele sale a constituit obiectul cercetării matematice începând din secolul trecut, iar odată cu dezvoltarea sistemelor de transmitere a informației și cu recunoașterea valorii practice a principiului matematic, o multitudine de articole au fundamentat, generalizat și explorat posibilitățile și limitele izvorâte din teorema eșantionării. Atribuită în general lui Shannon- Whittaker-Kotel'nikov, teorema exprimă faptul că un semnal limitat în bandă poate fi recuperat din eșantioanele sale prelevate la intervale constante de timp, dacă aceste intervale sînt mai mici decît jumătate din inversul frecvenței componente de frecvența maximă din semnal. Altfel spus fie un semnal $f(t)$ cu transformata Fourier $F(\omega)$ dată de:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad f \in C_{\mathbb{R}} \cap L_{\mathbb{R}}^1 \quad (1.1)$$

($C_{\mathbb{R}}$: clasa funcțiilor uniform continue și marginite pe \mathbb{R} , $L_{\mathbb{R}}^1$: clasa funcțiilor de modul integrabil pe \mathbb{R}), cu proprietatea

$F(\omega) = 0$, pentru $|\omega| > \pi w$. Atunci $f(t)$ poate fi reconstruită complet din eșantioane distanțate la $1/w$ pe axa timpului cu ajutorul relației:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{w}\right) \frac{\sin \pi (wt - k)}{\pi (wt - k)} = \sin \pi wt \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{w}\right) \frac{(-1)^k}{\pi (wt - k)} \quad (1.2)$$

Studii consacrate teoremei eșantionării pot fi găsite deja la sfîrșitul secolului trecut în lucrările matematicianului Emile Borel. Printre alți matematicieni [14], [55], [59] care s-au ocupat de subiect îi regăsim pe Whittaker - preocupări în domeniul seriilor cardinale, Valiron - generalizări ale seriilor de interpolare, Hardy

- eșantionare în contextul spațiilor Hilbert, dar există indicii că preocupările legate de această teoremă sînt chiar mai vechi, ea apărînd sub formă deghizată în lucrări ale lui Cauchy și Poisson.

În inginerie [59], teorema eșantionării a fost introdusă de Shannon în 1940 , (publicată în 1949), dar independent și de Kotel'nikov în URSS (1933) și Someya în Japonia (1949). Subiectul a fost preluat și dezvoltat în deceniile următoare, printre contribuitori găsindu-se nume consacrate ca Nyquist, Gabor, Raabe, Kramer.

Avînd aplicații în domeniul clasic al transducerii semnalelor cu multiplexare în timp, Teorema Eșantionării aparține unui domeniu interdisciplinar al analizei Fourier, interpolării, teoriei aproximării și al ingineriei telecomunicațiilor. Acest fapt este relevat și în diferitele abordări ale acestei teoreme, fiecare metodă punînd în evidența aspecte importante.

1.2. Teorema esantionarii si dualitatea continuu discret

Probabil cea mai sugestivă metodă în demonstrarea Teoremei Eșantionării, 'metoda δ ' [55], pune în evidența faptul că o descriere naturală a procesului fizic de eșantionare a semnalului $f(t)$ la momentele echidistante $n\tau$ ($n \in \mathbb{Z}$) este următoarea:

$$f_s(t) = f(t) \sum_n \delta(t - n\tau) = \sum_n f(n\tau) \delta(t - n\tau) \quad (1.3)$$

unde $f_s(t)$ este obținut la ieșirea unui circuit ideal de eșantionare. Ecuația (1.3) sugerează că $f(t)$ însăși poate fi obținut sub forma:

$$f(t) = \sum_n f(n\tau) g(t - n\tau) \quad (1.4)$$

unde g este o funcție de reconstrucție independentă de f . Pentru a găsi funcția g , se observă că (1.4) poate fi scrisă:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u) \sum_n \delta(u - n\tau) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u) \frac{1}{\tau} \sum_n e^{-2\pi j n \frac{u}{\tau}} du \quad 1.5$$

unde $\sum \delta$ a fost dezvoltat în serie Fourier. Aplicând transformata Fourier în (1.5) rezultă:

$$F(\omega) = \frac{1}{\tau} \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\{g(t)\} \mathcal{F}\left\{\sum_n f(t) e^{-jn\frac{2\pi}{\tau}t}\right\} = \frac{1}{\tau} \sqrt{2\pi} G(\omega) \sum_n F\left(\omega + \frac{2\pi n}{\tau}\right) \quad 1.6$$

Ecuatia (1.6) exprimă faptul că eșantionarea semnalului $f(t)$ a produs repetarea spectrului său în domeniul frecvența. Dacă $F(\omega)$ e limitat la $[-\pi w, \pi w]$ și dacă $\tau=1/w$, atunci replicile spectrului $F(\omega)$ au suporturi disjuncte. În stînga ecuației (1.6) fiind o singură replică a spectrului $F(\omega)$, trebuie ca $\frac{1}{\tau} \sqrt{2\pi} G(\omega)$ să fie o "fereastră" prin care să se vadă această unică replică. Deci $G(\omega) = \chi_{[-\pi w, \pi w]} / \sqrt{2\pi w}$ (cu χ_L funcția caracteristică a intervalului L), prin urmare:

$$g(t) = \frac{\sin \pi w t}{\pi w t}$$

care, introdus în (1.4) va genera formula (1.2).

Deși rigoarea lasă de dorit, metoda are calități precum rezultă din următorul citat (Higgins [55]):

"What does the lack of rigour matter when one has at one's disposal such a thoroughly, healthy, rugged outdoor method of derivation like this."

Pusă corect prin prisma dualității continuu-discret, problema care trebuie rezolvată este aceea de a arăta că seria de eșantionare din relația (1.2) reprezintă o versiune discretizată a integralei de convoluție. Formula de însumare Poisson (PSF) oferă o justificare elegantă a acestui fapt, ea reprezentînd o legătură între transformata Fourier a unei funcții din $L^1_{\mathbb{R}}$ și transformata Fourier a unei funcții din L^1_{λ} (spațiul funcțiilor periodice de perioadă λ , integrabile pe o perioadă).

Dacă $f \in L^1_{\mathbb{R}}$, să notăm cu f^* funcția periodizată a lui f , definită în modul următor:

$$f^*(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \sum_k f(t + \lambda k), f^*(t) \in L^1_{\lambda}$$

Atunci f^* poate fi scrisă, conform formulei de însumare Poisson, ca serie Fourier, dacă f este absolut continuă și $f' \in L^1_{\mathbb{R}}$ deci:

$$f^*(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \sum_k f(t + \lambda k) = \sum_k F\left(\frac{2\pi k}{\lambda}\right) e^{j\frac{2\pi}{\lambda}kt} \quad (1.7)$$

adică coeficienții Fourier ai funcției periodizate f^* sînt tocmai eșantioanele distanțate cu $\frac{2\pi}{\lambda}$ ale transformatei Fourier a semnalului inițial, după cum se vede din fig.1.1

$$X(\omega) = \sqrt{2\pi} \sum_k a_k \delta(\omega - k\omega_0) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$$

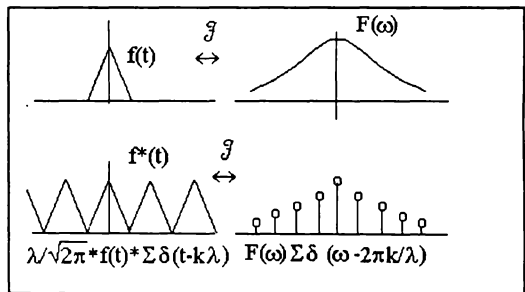


fig.1.1: aplicarea formulei de însumare Poisson unei funcții periodizate

Cu ajutorul PSF se obține pentru o funcție g cu banda limitată la $2\pi w$, și $g \in L^1_{\mathbb{R}}$, cu $\lambda = 1/w$, $t=0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi w}} \sum_k g\left(\frac{k}{w}\right) = G(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \quad (1.8)$$

deoarece (relatia Bernstein): $|g'| \leq 2\pi w |g|$ deci $g' \in L^1_{\mathbb{R}}$ iar termenii

$G(2\pi wk)$ din afara intervalului $(-2\pi w, 2\pi w)$ sînt nuli conform ipotezei. Dacă în (1.8) se face înlocuirea $g = f_1(.)f_2(t-.)$, care este o funcție cu spectrul limitat la $2\pi w$, atunci cînd f_1 și f_2 au spectrul limitat la πw , se obține:

$$(f_1 * f_2)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi w k}} \sum f_1\left(\frac{k}{w}\right) f_2\left(t - \frac{k}{w}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi w k}} \sum f_1\left(t - \frac{k}{w}\right) f_2\left(\frac{k}{w}\right) \quad (1.9)$$

a doua egalitate datorîndu-se comutativității produsului de convoluție.

De fapt ecuația (1.9) spune că integrala de convoluție a două funcții limitate în bandă poate fi calculată ca sumă discretă de convoluție, care nu este altceva decît suma Riemann în nodurile k/w aferentă integralei. Dacă în ecuația (1.9) se înlocuiește $f = f_1$ și sinc $w t = \sin(\pi w t) / \pi w t = f_2$, se obține:

$$\sum_k f\left(\frac{k}{w}\right) \text{sinc}(w t - k) = \sum_k f\left(t - \frac{k}{w}\right) \text{sinc}(k) = f(t) \quad (1.10)$$

adică o demonstrație scurtă și elegantă a Teoremei Eșantionării bazată pe proprietatea de interpolare a funcției sinc:

$$\text{sinc}(k) = \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} = \delta_{k0}$$

PSF mai poate fi utilizată pentru demonstrarea Teoremei Eșantionării într-un mod [15] care pune în evidența o margine superioară pentru eroarea de aliere (eroarea care se datorează suprapunerii replicilor de spectru rezultate în urma eșantionării), subliniind din nou dualitatea continuu-discret.

Aplicînd formula (1.7), de data aceasta transformatei Fourier periodizate, se obține pentru $F^*(\omega) = \sqrt{w} \sum_k F(2\pi k w - \omega)$, cu observația

că $\mathcal{F}\{F(-\omega)\} = f(t)$ următoarea relație:

$$F^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi W}} \sum_k f\left(\frac{k}{W}\right) e^{jk\frac{\omega}{W}}$$

Multiplicînd cu $e^{-j\omega t}$ și integrînd termen cu termen (cea ce nu afectează convergența seriei, $e^{-j\omega t}$ fiind marginită), rezultă:

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi W}} \int_{-\pi W}^{\pi W} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \sum_k f\left(\frac{k}{W}\right) \text{sinc}(Wt-k) \quad (1.11)$$

deoarece

$$\frac{1}{2\pi W} \int_{-\pi W}^{\pi W} e^{-j\omega t} e^{j\frac{k}{W}\omega} d\omega = \frac{\sin\pi(Wt-k)}{\pi(Wt-k)}$$

Înlocuind în (1.11) expresia lui $F^*(\omega)$ și schimbînd suma cu integrala (posibil datorită convergenței), se obține (cu $2\pi k W - \omega - \omega$)

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k e^{-j2\pi k W t} \int_{(2k-1)\pi W}^{(2k+1)\pi W} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Pe de alta parte:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \int_{(2k-1)\pi W}^{(2k+1)\pi W} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Aceasta conduce pentru eroarea de aliere $(R_w f)(t) = |f(t) - S(t)|$ la relația:

$$(R_w f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k (1 - e^{-j2\pi k W t}) \int_{(2k-1)\pi W}^{(2k+1)\pi W} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

sau

$$(R_w f)(t) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \neq 0} \int_{(2k-1)\pi W}^{(2k+1)\pi W} |F(\omega)| d\omega = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\omega| \geq \pi W} |F(\omega)| d\omega \quad (1.12)$$

Dacă $F(\omega)$ este nulă în afara intervalului $[-\pi w, \pi w]$, atunci integrala din (1.12) devine nulă și $f(t) = S(t)$, adică (1.11) exprimă tocmai Teorema Eșantionării.

În acest mod se sugerează faptul că Teorema Eșantionării este un caz particular al PSF. De fapt se poate arăta [15] că într-un plan mai general Teorema Eșantionării, PSF și formula integrală a lui Cauchy pentru funcțiile complexe, adică:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)} d\zeta, & z \in \text{interior } \mathbb{C} \\ 0, & z \in \text{exterior } \mathbb{C} \end{cases}$$

(f olomorfa pe C) sînt echivalente, deși provin din domenii diferite - Analiza Fourier, teoria semnalelor, teoria funcțiilor complexe.

Ideea de a extinde o funcție periodic în domeniul frecvență stă și la baza următoarei demonstrații fundamentate de formula generalizată a lui Parseval, demonstrație care pune din nou în evidența dualitatea continuu-discret. Notînd extensiile periodice cu perioada $2\pi w$ ale funcțiilor $F(v)$ și e^{-jvt} , de la $[-\pi w, \pi w]$ la \mathbb{R} , cu g_1 respectiv g_2 , se obtine (cu observația că g_1 și g_2 aparțin lui $L^2_{2\pi w}$):

$$[g_1]_{2\pi w}^\wedge(k) = \frac{1}{2\pi w} \int_{-\pi w}^{\pi w} F(v) e^{-j\frac{k}{w}v} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} f\left(-\frac{k}{w}\right)$$

$$[g_2]_{2\pi w}^\wedge(k) = \frac{1}{2\pi w} \int_{-\pi w}^{\pi w} e^{-jvt} e^{-j\frac{k}{w}v} dv = \text{sinc}(wt+k)$$

unde $[g_1]_{2\pi w}^\wedge(k)$ și $[g_2]_{2\pi w}^\wedge(k)$ reprezintă coeficienții dezvoltării în serie Fourier ai funcțiilor $F(v)$ respectiv e^{-jvt} . Din formula generalizată a lui Parseval pentru funcții λ periodice

$$\frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} g_1(u) \overline{g_2(u)} du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [g_1]_{\lambda}^\wedge(k) \overline{[g_2]_{\lambda}^\wedge(k)}, \quad (g_1, g_2 \in L^2_{\lambda})$$

se obtine prin inlocuirea cu cele doua functii considerate initial:

$$\frac{1}{2\pi w} \int_{-\pi w}^{\pi w} F(v) e^{jvt} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{k}{w}\right) \text{sinc}(wt+k)$$

adica tocmai teorema esantionarii.

1.3. Teorema Esantionării și interpolarea funcțiilor complexe

Relația între funcțiile de pătrat integrabil pe \mathbb{R} , de bandă limitată și funcțiile complexe este dată de Teorema Paley- Wiener:

Pentru ca o funcție pătratic integrabilă $f(x)$ să poată fi pusă sub forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} dx \quad (1.14)$$

cu $F(\omega) \in L_2(-\alpha, \alpha)$, e necesar și suficient ca $f(x)$ să poată fi prelungită în planul complex $z = x + iy$ la o funcție întreagă de grad $\leq \alpha$. O funcție întreagă (olomorfă în întreg planul z) de grad finit (sau de tip exponențial) α este acea funcție care satisface relația:

$$|f(z)| \leq M e^{\alpha |Im(z)|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, M < \infty \quad (1.15)$$

Dacă în plus restricția funcției $f(z)$ la axa reală este o funcție de pătrat integrabil ($f|_{\mathbb{R}} \in L^2_{\mathbb{R}}$) vom spune de aici înainte că

$f \in B^2_{\alpha}$. În cazul în care f nu este și integrabilă pe \mathbb{R} ($f \notin L^1_{\mathbb{R}}$), relația (1.14) va fi înțeleasă ca limită în medie, adică transformata Fourier a funcției f : $F(\omega)$ va fi acea funcție de pătrat integrabil, care verifică relația:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega, N) - F(\omega)|^2 d\omega = 0 \quad (1.16)$$

cu

$$F(\omega, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N f(x) e^{-j\omega x} dx \quad (1.17)$$

În acest caz $F(\omega)$ este transformata Fourier a lui f în clasa $L^2_{\mathbb{R}}$ și se poate calcula de exemplu cu formula:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-j\omega x} - 1}{-jx} dx \quad (1.18)$$

în acele puncte în care $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$ nu există.

În acest cadru problema eșantionării poate fi tratată drept problemă de interpolare cu funcții întregi de grad finit [20].

Fie date punctele $f(z_n) = b_n$ în \mathbb{C} astfel încât sirul $\{z_n\}$ să nu aibă alte puncte de acumulare decât ∞ , și în plus $|z_{n+1}| > |z_n|$. Funcția $\varphi(z)$ întregă care are ca zerouri chiar multimea $\{z_n\}$ se numește funcție canonică a mulțimii $\{z_n\}$. Metoda de interpolare Lagrange care pornește de la funcția canonică φ , conduce la o soluție de forma:

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \varphi(z)}{\varphi'(z_n) (z - z_n)} \quad (1.19)$$

unde

$$\varphi(z_n) = 0, \quad \varphi'(z_n) \neq 0,$$

Numind funcție compozită, funcția Θ dată de:

$$\theta_n(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z_n)(z-z_n)} \quad (1.20)$$

se obține: $\theta_n(z_m) = \delta_{nm}$ și $\psi(z_m) = b_m$, adică ψ este o soluție pentru f . De fapt orice funcție de tip $\chi(z) = \psi(z) + \gamma(z)\varphi(z)$, cu $\gamma(z)$ o funcție întregă, este o soluție pentru f .

Fie $\{z_n\}$ o mulțime de puncte echidistante pe axa reala: $z_n = n\Delta$, $n \in \mathbb{Z}$

Această mulțime are funcția canonică:

$$\varphi(z) = \sin\left(\frac{\pi}{\Delta}z\right) = \sin(\alpha z), \quad \alpha = \frac{\pi}{\Delta}$$

Din (1.19) rezultă:

$$\psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}z\right)}{\frac{\pi}{\Delta} \cos\left(\frac{\pi}{\Delta}z_n\right)(z-n\Delta)} \quad (1.21)$$

deci:

$$\psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{\sin\alpha\left(z - \frac{\pi}{\alpha}n\right)}{\alpha\left(z - \frac{\pi}{\alpha}n\right)} \quad (1.22)$$

Dacă b_n sînt esantioanele unei funcții f : $b_n = f(n\Delta)$ s-ar putea ca $\psi(z)$ să fie identică cu $f(z)$. Cînd este unică această soluție la problema interpolării? Pentru aceasta trebuie restrînsa clasa de funcții f . Teorema eșantionării se va enunța astfel:

Fie $f(z)$ întregă, marginită pe \mathbb{R} , de grad $\beta < \alpha$, atunci:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) \frac{\sin \alpha \left(z - \frac{\pi}{\alpha} k\right)}{\alpha \left(z - k \frac{\pi}{\alpha}\right)} \quad (1.23)$$

și seria din 1.23 este uniform convergentă în orice domeniu finit iar problema interpolării are soluție unică. Demonstrația se găsește în [20].

Teorema în forma de mai sus se referă la funcțiile mărginite pe \mathbb{R} . Dacă restricția funcției f la axa reală este în plus și pătratic integrabilă, atunci se poate considera la limită și cazul $\beta = \alpha$. În acest caz teorema eșantionării se poate enunța astfel [20]:

Dacă $f(z)$ aparține lui $L^2_{\mathbb{R}}$ când z aparține de \mathbb{R} , și $\text{grad } f \leq \alpha$, atunci relația (1.23) este valabilă iar soluția f la problema interpolării este unică.

Un aspect care se clarifică prin această abordare a teoremei eșantionării este acela al eșantionării semnalelor periodice (sau așa-zisa TE a semnalelor periodice). În cazul unui semnal periodic cu k componente armonice nu e nevoie de $N \geq 2k+1$ eșantioane într-o perioadă, ci doar de $N > 2k$, aceasta fiind o consecință a relației $\text{grad } f < \alpha$ din enunțul TE și a faptului că armonica k : $\sin(kz)$ este o funcție de grad k , semnalul periodic fiind un exemplu de funcție complexă cu restricția la axa reală mărginită. Altfel spus pentru a eșantiona un semnal periodic nu e nevoie să suplimentăm cu un eșantion numărul de eșantioane din fiecare perioadă, ci este suficient să introducem un eșantion suplimentar o dată la un număr oarecare de perioade.

Utilitatea teoriei funcțiilor complexe în studiul TE este relevată și de modul în care poate fi ocolită următoarea capcană ce se deschide celui ce dorește să studieze metode de eșantionare adaptivă:

Să încercăm a aproxima o funcție oarecare (posibil de bandă nelimitată) cu o funcție de bandă limitată la o valoare cât mai mic posibilă, procedură ce ar putea fi urmată de o eșantionare cu un număr mai restrâns de eșantioane, în conformitate cu banda de frecvență a funcției care aproximează. Acest lucru ar părea posibil, deoarece o teoremă din analiza matematică (Weierstrass) afirmă că o funcție poate fi aproximată, pe un interval finit oricât de bine

cu un polinom. Altfel spus, fie $g(t)$ oarecare în intervalul finit $[-T, T]$, atunci conform Weierstrass $\forall \epsilon > 0$ există n , astfel încît

$$|g(t) - P_n(t)| < \epsilon, \text{ pentru } t \in [-T, T]$$

unde $P_n(t)$ este un polinom de grad n . Polinoamele sînt funcții întregi de grad zero (ordin mai mic ca 1), spectrul lor fiind concentrat în zero:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j\omega z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k f^{(k)}(0)}{k!} \delta^k(\omega) \right) d\omega$$

unde $f(z)$ este extensia în planul \mathbf{C} a polinomului $P_n(z)$. Din această cauză teorema lui Weierstrass poate fi ușor extinsă, astfel încît să fie gasita o funcție care să aparțină clasei B^2_{α} , cu α oricît de mic, care să aproximeze oricît de bine funcția $g(t)$ inițială într-un interval finit. Fie spre exemplu $f_0(t) \in B^2_{\alpha_0}$ de forma:

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} e^{\frac{-1}{\alpha_0 - \omega} - \frac{1}{\alpha_0 + \omega}} e^{j\omega t} d\omega$$

Se observă că TF a lui f_0 : $F(\omega) = e^{\frac{-1}{\alpha_0 - \omega} - \frac{1}{\alpha_0 + \omega}}$ este derivabilă de o

infinitate de ori, ceea ce înseamnă că $f_0(t) \rightarrow 0$ cînd $t \rightarrow \infty$ mai repede decît orice putere a lui t . În consecință și funcția f_1 :

$$f_1(t) = f_0(t) P_n(t)$$

aparține clasei B^2_{α} , pentru un $\alpha_0 < \alpha$, indiferent de valoarea lui n . Dar $f_1(t)$ poate fi făcut oricît de apropiat lui $g(t)$ pe un interval finit, deoarece afirmația:

$$|f_1(t) - g(t)| = |f_0(t) P_n(t) - g(t)| < \epsilon \text{ pe } [-T, T]$$

cu condiția $|f_0(t)| > d > 0$ pe $[-T, T]$

este echivalenta cu următoarea afirmație:

$$|P_n(t) - \frac{g(t)}{f_0(t)}| < \frac{\epsilon}{|f_0(t)|} < \frac{\epsilon}{d} < \epsilon_1 \text{ pe } [-T, T]$$

care este adevărata datorită teoremei lui Weierstrass. Astfel pentru orice funcție $g(t)$ continuă într-un interval finit $[-T, T]$, posibil de bandă nelimitată am găsit o funcție limitată în bandă la valoarea α (și α poate fi făcut oricît de mic) care pe intervalul

finit $[-T, T]$ să se deosebească oricât de puțin de $g(t)$. Această constatare spune un lucru aparent paradoxal, dar adevărat, și anume că o funcție limitată în bandă se poate modifica oricât de mult (sau de repede) într-un interval dat. Insa acest lucru nu înseamnă ca $g(t)$ poate fi recuperat din mai putine esantioane. Modificarea rapidă a funcției $f_1(t)$ cu păstrarea benzii α se face pe seama creșterii pronunțate a energiei semnalului aproximator. Astfel

pentru o funcție din B^2_α : $f_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} F_\epsilon(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ rezultă:

$$f'_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} F_\epsilon(\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega$$

și deci

$$|f'_\epsilon(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\alpha}^{\alpha} |F_\epsilon(\omega)|^2 d\omega} \int_{-\alpha}^{\alpha} \omega^2 d\omega \leq \sqrt{\frac{\alpha^3}{3\pi}} \sqrt{E}$$

unde $E = \int_{-\alpha}^{\alpha} |F_\epsilon(\omega)|^2 d\omega$ reprezintă energia semnalului aproximator. Se

observă că dacă $f_1(t)$ trebuie să urmeze cu o eroare maxima ϵ , o creștere de valoare A a lui $g(t)$ în intervalul de durată D (vezi figura 1.2):

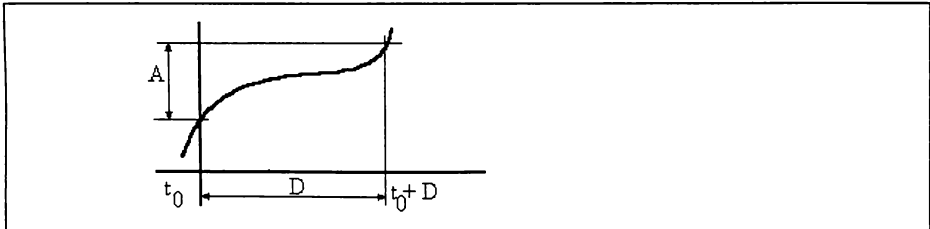


fig.1.2: ilustrarea vitezei de variație a funcției aproximatoare

atunci există un $t_1 \in (t_0, t_0+D)$ astfel încât $|f'_1(t_1)| > (A-2\epsilon)/D$. Prin urmare dacă variațiile lui $g(t)$ cresc (adică A crește și D scade),

cu un ε fixat aceasta atrage după sine creșterea valorii modulului derivatei lui $f_1(t)$, deci și a energiei semnalului $f_1(t)$, dacă dorim ca banda semnalului aproximativ să rămână constantă. O legătură între valoarea maximă a derivatei unui semnal din clasa B^2_α și valoarea maximă a aceluiași semnal este dată de teorema lui Bernstein, care afirmă că pentru aceste semnale:

$$|f'(t)| < \alpha \sup_{\tau} |f(\tau)|$$

Acest lucru face ca aproximarea unei funcții oarecare g cu o funcție de bandă limitată la α , care în plus să verifice o condiție de limitare a energiei sau - ceea ce este echivalent în acest caz datorită relației lui Bernstein - o condiție de mărginire pe axa reală, nu este posibilă la o valoare a devierii ε oricât de mică. Deci chiar dacă în intervalul $[-T, T]$ am reușit o reducere a numărului de eșantioane, acest lucru va trebui compensat printr-o mărire a numărului de eșantioane prelevate în afara acestui interval. Aceasta deoarece acele eșantioane vor tinde la valori foarte mari, și nu vor mai putea fi neglijate într-un eventual proces de reconstrucție chiar în interiorul intervalului considerat.

În concluzie, dacă semnalul este cunoscut pe întreaga axă reală, o îmbunătățire a ratei de eșantionare sub limita dată de TE nu este posibilă.

1.4 Generalizare a Teoremei eșantionării utilizând teoria funcțiilor complexe.

Utilizând teoria funcțiilor complexe prezentată mai sus, autorul face în acest paragraf o primă trecere la eșantionarea neuniformă printr-o generalizare proprie a TE:

Fie (1): funcția întreagă $A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ astfel încât restricția ei la \mathbb{R} : $A|_{\mathbb{R}} = a$ este continuă și $a'(x) > 0$ pe \mathbb{R} . Funcția fiind monotonă să notăm $A(u_k) = k\pi$, construind astfel o mulțime ordonată de puncte (u_k) .

(2): funcția întreagă $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ astfel încât există $M > 0$ cu $|f(x)| \leq M$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și

$$|f(z)| \leq M \cdot \exp[1/2 \cdot |A(z)| \cdot |\sin(\arg(A(z)))|] \text{ pt. orice } z \in \mathbb{C}$$

(3): notăm

$$(\sin, A, k)(z) = \frac{\sin(A(z))}{(z - u_k) [\sin(A(z))]'|_{z=u_k}}$$

Teorema 1.1: În condițiile (1), (2), (3) funcția f verifică relația:

$$f(z) = \sum_{k \in Z} f(u_k) \cdot (\sin, A, k)(z)$$

Se observă că dezvoltarea de mai sus reprezintă o teoremă de esantionare neregulată, punctele u_k depinzind de alegerea funcției A .

Demonstratie [43]: Fie B_n bila cu centrul în 0 și care cuprinde n dintre punctele mulțimii $\{u_k\}$ și:

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{B_n} \frac{f(u) du}{(u-z) \cdot \sin(A(u))} \quad (1.24)$$

Calculînd reziduurile integrandului vom avea:

$$\text{rez}(u_k) = \lim_{u \rightarrow u_k} \frac{f(u) (u-u_k)}{(u-z) \sin(A(u))} = \frac{f(u_k)}{(u_k-z) A'(u_k) \cos(A(u_k))}$$

deoarece:

$$\lim_{u \rightarrow u_k} \frac{\sin(A(u))}{u-u_k} = \lim_{u \rightarrow u_k} \frac{\sin(A(u)) - \sin(A(u_k))}{u-u_k} = (\sin(A(u)))'_{u=u_k}$$

și

$$\text{rez}(f(z)) = \frac{f(z)}{\sin(A(z))}$$

Din teorema reziduurilor și deoarece u_k este diferit de u_{k+1} , funcția $a(\cdot)$ fiind strict crescătoare deducem:

$$I_n(z) = \sum_{u_k \in B_n} \frac{f(u_k)}{(u_k-z) \cdot A'(u_k) \cdot \cos(A(u_k))} + \frac{f(z)}{\sin(A(z))} \quad (1.25)$$

Parametrizînd conturul lui B_n în mod standard : $u(\theta) = re^{j\theta}$, r : raza bilei B_n obținem:

$$\begin{aligned} 2\pi |I_n(z)| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{j\theta}) r j e^{j\theta} d\theta}{(re^{j\theta}-z) \cdot \sin(A(re^{j\theta}))} \right| \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{j\theta})| d\theta}{|e^{j\theta} - \frac{z}{r}| |\sin(A(re^{j\theta}))|} \end{aligned}$$

Se știe că (vezi [20]): $\exp(r|\sin \theta|) < 4|\sin(re^{i\theta})|$, pt. orice θ în \mathbb{R} și r suficient de mare, în particular:

$$\frac{1}{|\sin(A(re^{j\theta}))|} < \frac{4}{\exp[|A(re^{j\theta})| \cdot |\sin(\arg(A(re^{j\theta})))|]} \quad (1.26)$$

deci:

$$2\pi |I_n(z)| \leq 4 \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{j\theta})| d\theta}{|e^{j\theta} - \frac{z}{r}| \exp[|A(re^{j\theta})| \cdot |\sin(\arg(A(re^{j\theta})))|]}$$

Dar deoarece $\lim_{r \rightarrow \infty} |e^{i\theta} - z/r| = 1$ rezultă că pentru r suficient de mare avem: $|e^{i\theta} - z/r| > 0.5$ deci:

$$2\pi |I_n(z)| \leq 8 \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{j\theta})| d\theta}{\exp[|A(re^{j\theta})| \cdot |\sin(\arg(A(re^{j\theta})))|]}$$

Folosind punctul (2) din ipoteza obținem

$$2\pi |I_n(z)| \leq 8 \int_0^{2\pi} \exp[-\frac{1}{2}|A(re^{j\theta})| \cdot |\sin(\arg(A(re^{j\theta})))|] d\theta$$

Deci pentru $n \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ rezultă că și $I_n(z) \rightarrow 0$ uniform pe orice B_n . Deci seria din (1.25) converge uniform și:

$$\frac{f(z)}{\sin(A(z))} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{f(u_k)}{(z - u_k) \cdot A'(u_k) \cdot \cos(A(u_k))}$$

sau altfel spus:

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(u_k) \cdot (\sin, A, k)(z)$$

q.e.d.

Prin alegerea funcției A obținem diferite distribuiri ale momentelor de eșantionare pe axa reală, probînd astfel forța și eleganța abordării problemei cu ajutorul funcțiilor complexe, în particular se obțin relații de tipul celor din [21] [49] (vezi [44]).

1.5. Teorema Esanționării și spațiile Hilbert

Înlocuind în paragraful 1.3 pe α cu πw , se constata că spațiile $B^2_{\pi w}$ și $L^2_{(-\pi w, \pi w)}$ sînt izometric izomorfe prin intermediul transformatei Fourier (TF) [15], [100]. Aceasta rezultă pe de o parte din teorema Paley-Wiener care afirmă că orice funcție din $B^2_{\pi w}$ are o reprezentare de forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi w}^{\pi w} g(u) e^{jux} du \quad \text{unde } g(u) \in L^2_{[-\pi w, \pi w]} \quad (1.27)$$

și pe de altă parte din faptul că TF este o izometrie, adică:

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \langle f, f \rangle = \langle g, g \rangle = \int_{-\pi w}^{\pi w} |g(u)|^2 du = \|g\|^2 \quad (1.28)$$

conform teoremei lui Parseval. Cum $L^2_{(-\pi w, \pi w)}$ este un subspațiu al lui $L^2_{\mathbb{R}}$ care se constituie într-un spațiu Hilbert cu produs scalar dat

de $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi w}^{\pi w} f(x) \overline{g(x)} dx$ și normă $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$, rezultă că și $B^2_{\pi w}$ este

un spațiu Hilbert.

Se observa că funcțiile $\{\varphi_k(u)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, cu $\varphi_k(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} e^{-j\frac{k}{w}u}$

formează un sistem ortonormal total în $L^2_{(-\pi w, \pi w)}$. Aceasta deoarece:

$$\int_{-\pi w}^{\pi w} \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} e^{-j\frac{k}{w}u} \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} e^{j\frac{n}{w}u} du = \frac{\sin \pi(n-k)}{\pi(n-k)} = \delta_{nk}$$

Deasemenea $\int_{-\pi w}^{\pi w} f(u) \overline{\varphi_k(u)} du = 0$ pentru $f \in L^2_{(-\pi w, \pi w)}$ și pentru toți $k \in \mathbb{Z}$,

implică $f \equiv 0$ (vezi dezvoltarea lui f' conform PSF). Deoarece

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin \pi(wt-k)}{\pi(wt-k)}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} e^{-j\frac{k}{w}v}, & |v| \leq \pi w \\ 0, & |v| > \pi w \end{cases}$$

și deoarece conform relației lui Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) \overline{F_2(u)} du = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(v) \overline{F_2(v)} dv$$

rezultă că sistemul de funcții $\{\sqrt{w} \operatorname{sinc}(wt-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este ortonormal complet în $B^2_{\pi w}$. În acest caz se pot aplica rezultatele cunoscute referitoare la spațiile Hilbert, și anume că pentru orice funcție f din $B^2_{\pi w}$ expresia :

$$E = \|f(t) - \sum_{k=-N}^N \gamma_k \sqrt{w} \operatorname{sinc}(wt-k)\|_{L^2_{\mathbb{R}}}$$

are valoarea minimă dacă γ_k sînt coeficienții Fourier ai lui f în raport cu sistemul $\{\sqrt{w} \operatorname{sinc}(wt-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, adică:

$$\gamma_k = \langle f, \varphi_k \rangle = \langle \mathcal{F}(f), \overline{\varphi_k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} \int_{-\pi w}^{\pi w} \mathcal{F}(f)(v) e^{j\frac{k}{w}v} dv = \frac{1}{\sqrt{w}} f\left(\frac{k}{w}\right)$$

sau altfel spus:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f(t) - \sum_{k=-N}^N f\left(\frac{k}{w}\right) \operatorname{sinc}(wt-k)\|_{L^2_{\mathbb{R}}} = 0 \quad (1.29)$$

Se poate arata că din convergența în normă în relația (1.29) rezultă și convergența absolută. Ecuația lui Parseval în spațiul $B^2_{\pi w}$ are următoarea formă:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 = \frac{1}{w} \sum_k f^2\left(\frac{k}{w}\right)$$

Aceasta înseamnă că pentru $f = \operatorname{sinc}(wt-n)$ se obține:

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}^2(wt-n) dt = \frac{1}{w} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{sinc}^2(n-k) = \frac{1}{w}$$

Deci conform inegalității lui Cauchy-Buniakowski-Schwartz rezultă:

$$\left| \sum_{|k| > N} f\left(\frac{k}{W}\right) \text{sinc}(wt-k) \right|^2 \leq \sum_{|k| > N} \left| f\left(\frac{k}{W}\right) \right|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(n-k) \leq \sum_{|k| > N} f^2\left(\frac{k}{W}\right)$$

Deoarece $f \in L^2_{\mathbb{R}}$, ultima serie tinde la 0 cind N tinde la ∞ (ca rest al unei sume Riemann al unei funcții integrabile), rezultă că seria din (1.29) este și uniform convergentă în $L^1_{\mathbb{R}}$ și are o limită g . Cum în $B^2_{\pi w}$ seria este convergentă la f , rezultă că $f \equiv g$ a.p.t. (adică

$$\int_{\mathbb{R}} (f-g)^2 dt = 0) \text{ deci teorema eșantionării este demonstrată.}$$

Am văzut că TE rezultă dintr-o problemă de minimizare a distanței în spațiul $B^2_{\pi w}$ între o funcție f și descompunerea ei după o bază ortonormată $\{\sqrt{w} \text{sinc}(wt-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Problema se poate pune și invers: fiind dați coeficienții $f(k/w)$, să se găsească acel sistem de funcții $s_k(t, w)$, care să minimizeze:

$$d_N(s_k) = \sup_{\|f\|=1} \left| f(t) - \sum_{k=-N}^N f\left(\frac{k}{W}\right) s_k(t, w) \right|$$

Dar

$$\begin{aligned} d_N(s_k) &= \sup_{\|f\|=1} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi w}^{\pi w} F(v) e^{jvt} dv - \sum_{k=-N}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi w}^{\pi w} F(v) e^{j\frac{k}{w}v} s_k(t, w) dv \right| \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \\ &\leq \sqrt{2\pi w} \|e^{jvt} - \sum_{k=-N}^N e^{j\frac{k}{w}v} s_k(t, w)\|_{L^2_{2\pi w}} \end{aligned}$$

Deoarece $\{e^{jkv/w}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este un sistem ortonormal complet în $L^2_{(-\pi w, \pi w)}$, rezultă că pentru minimizarea lui d_N trebuie ca s_k să fie coeficienții Fourier ai lui e^{jvt} în baza $\{e^{jkv/w}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, aceștia fiind chiar funcțiile $\text{sinc}(wt-k)$. Din nou rezultatul este tocmai Teorema Esantionării.

Această deducere a TE conduce la concluzia importantă pentru generalizări, și anume că seria din TE este de fapt proiecția funcției f (care nu trebuie neaparat să fie în spațiul $B^2_{\pi w}$) pe spațiul $B^2_{\pi w}$. Acest lucru se vede din faptul că dacă $\tau_k = \langle f, \text{sinc}(wt-k)$

$k) \rangle$, atunci $\langle f - \sum \tau_k \text{sinc}_k, \text{sinc}_k \rangle = \langle f, \text{sinc}_k \rangle - \langle \sum \tau_k \text{sinc}_k, \text{sinc}_k \rangle = \tau_k - \tau_k = 0$, deci diferența între f și proiecția sa este perpendiculară pe ansamblul funcțiilor $\text{sinc}_k(\omega t) = \text{sinc}(\omega t - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ ce formează baza spațiului $B^2_{\pi\omega}$.

1.6. Rezumat și concluzii.

Deși par a nu ține de tehnică, diversele abordări matematice ale TE pun în evidență diferite aspecte importante ale acesteia, susceptibile de a conduce la generalizări utile, sau, ceea ce este la fel de important, îndepărtează pericolul căutării în direcții lipsite de perspectivă. În capitolul 1 autorul prezintă trei direcții din care se poate privi TE. Astfel formula de însumare Poisson subliniază dualitatea care există între spațiul semnalelor continue și cel al celor discrete, stipulând condițiile în care o integrală de convoluție poate fi înlocuită cu o sumă de convoluție. Teorema Paley- Wiener leagă clasa semnalelor de bandă finită de clasa funcțiilor întregi de ordin finit, transferind problema recuperării funcțiilor din eșantioane în aceea a determinării unei funcții întregi în planul complex (o problemă algebrică de interpolare). Cu mijloacele teoriei funcțiilor complexe se face o discuție a posibilității de a aproxima o funcție oarecare (posibil cu viteza de variație foarte mare) cu o funcție de banda limitată. Deasemenea pe aceeași bază autorul construiește o generalizare proprie a TE în par. 1.4 [43]. Teoria spațiilor Hilbert, în care sînt incluse și spațiile $L^2_{[-\pi, \pi]}$ și B^2_{π} , oferă instrumente puternice în studierea aproximării semnalelor prin serii de funcții, punînd la îndemîna operatori de proiecție a semnalelor în spații de interes, rezultatele extinzîndu-se apoi și în spațiul L^1_R prin intermediul unor nuclee reproducătoare mărginite. Prin generalizări ale anumitor aspecte teoretice se obțin forme ale TE, care referindu-se la eșantionare neuniformă sau tinzînd prin alte metode la o economie de eșantioane, pot conduce la o eșantionare adaptată la forma semnalului. Ceea ce reiese însă cu claritate din expunere și din bibliografie este faptul că avînd cunoștiință de întreg semnalul ce trebuie eșantionat, nu se poate coborî în medie prin nici un procedeu sub limita Nyquist pentru rata de eșantionare. Dar o eșantionare adaptivă este posibilă atunci cînd semnalul se prelucrează în timp real, adică atunci cînd nu este cunoscut decît parțial, acest fapt fiind exploatat în continuare în lucrare.

Capitolul 2. Algoritmi adaptivi și baze oblice în descrierea și refacerea semnalelor eșantionate neregulat.

2.1 Introducere

În acest capitol se extinde abordarea din cap.1 în care TE este privită ca o descompunere a semnalelor după o bază ortogonală a spațiului Hilbert al semnalelor de energie finită, extinderea făcându-se prin înlocuirea acestei baze cu o bază oblică (eng.:frame, franc.:base obliqué), în scopul descrierii semnalelor eșantionate neregulat. Aceasta abordare ne va permite în cap.3 trecerea la baze de undișoare.

Deasemenea se introduc algoritmi adaptivi în refacerea on-line a semnalelor eșantionate neregulat, privind această refacere ca pe o proiecție ortogonală a semnalelor într-un anumit subspațiu al semnalelor de energie finită. În acest capitol subspațiul va fi cel al semnalelor de bandă limitată, pentru ca în capitolul următor el să fie adaptat chiar semnalului. Au fost aleși doi algoritmi adaptivi. Primul este algoritmul minimizării erorii pătratice medii LMS (Least Mean Square), pentru care se studiază funcționarea în regim de urmărire, respectiv eroarea de refacere. Al doilea este algoritmul de găsire a inversului unui operator prin metoda von Neumann (care cuprinde de fapt ca și caz particular algoritmul LMS), și care va fi introdus în acest capitol legat de problema găsirii bazei oblice duale unei baze oblice date în procesul de refacere a semnalului din eșantioane neregulate, dar care va fi folosit mai ales în capitolul următor.

Autorul a extins în acest capitol refacerea semnalelor din eșantioane prelevate aleator, abordată în literatură [38], [115] pentru un număr finit de puncte, la un procedeu on-line bazat pe o metodă iterativă, ale cărui proprietăți în regim de urmărire sînt fundamentate teoretic și experimental (par. 2.3 și 2.4). Deasemenea problema a fost transpusă din domeniul continuu în cel discret (par. 2.2.3), pentru că oricum soluțiile propuse sînt implementate cu filtre digitale (chiar în literatură exemplele fiind de fapt simulări în domeniul discret). O eventuală eroare de aliere a semnalului nu are semnificație aici pentru că prelucrarea se face în domeniul discret, semnalul sursă și cel rezultat fiind discrete.

2.2. Baze oblice.2.2.1. Construcție. Operatorul bazei oblice și dualul sau

În general o baza oblică (Bob) $\{h_i\}_{i \in I}$ într-un spațiu Hilbert \mathcal{H} oarecare este o mulțime de vectori indexată după o mulțime I pentru care există $A > 0$ și $B < \infty$ care verifică relația ([16], [53], [75]):

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle x, h_i \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad (2.1)$$

A și B numindu-se marginile Bob.

Dacă se definește operatorul $H: \mathcal{H} \rightarrow l^2_{(I)}$ asociat lui $\{h_i\}_{i \in I}$ prin:

$$(Hx)_i = \langle x, h_i \rangle \text{ pentru toți } i \in I$$

atunci:

$$\sum_{i \in I} |\langle x, h_i \rangle|^2 = \sum_{i \in I} |(Hx)_i|^2 = \|Hx\|^2 \quad (2.2)$$

adică

$A\|x\|^2 \leq \|Hx\|^2 \leq B\|x\|^2$ și deci H este un operator mărginit și continuu, deoarece $\|Hx\| \leq \sqrt{B}\|x\|$. Relația (2.1) este de fapt o generalizare a relației lui Parseval aplicabilă în cazul bazelor ortonormale.

Relația (2.1) mai poate fi scrisă:

$$A\langle x, x \rangle \leq \langle Hx, Hx \rangle \leq B\langle x, x \rangle$$

Notînd cu H' adjunctul operatorului H (cel care verifică $\langle Hx, y \rangle = \langle x, H'y \rangle$) rezultă:

$$0 < A \text{ id} \leq H^*H \leq B \text{ id} \quad (2.3)$$

unde id reprezintă operatorul identitate. În acest fel H^*H este un operator mărginit, pozitiv definit, autoadjunct, care în consecință are un invers la rîndul lui mărginit $(H^*H)^{-1} \leq 1/A \text{ id}$. H și H' pot fi reprezentați ca în figura 2.1.

Adjunctul lui H , H' va fi definit pe $l^2_{(I)}$ cu valori în \mathcal{H} :

$$H^*c = \sum_{i \in I} c_i h_i; \quad c = (c_i) \in l^2_{(I)} \quad (2.4)$$

În consecință se poate defini un nou operator S , numit operator al

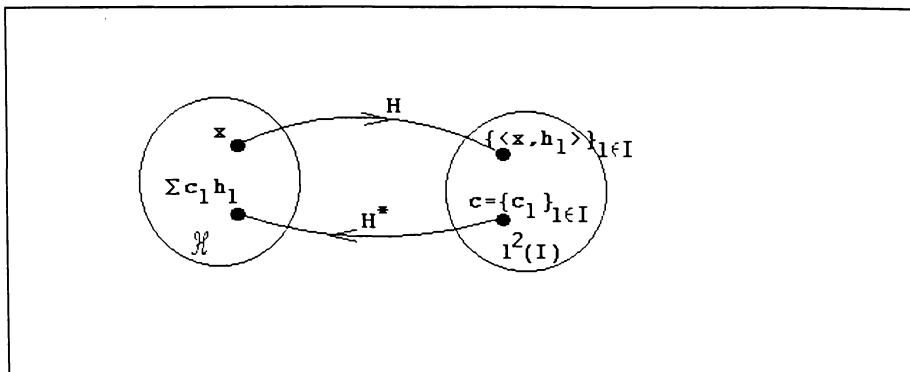


fig.2.1: acțiunea operatorului H și a dualului său asupra șirurilor din l^2

Bob în următorul mod:

$$Sx = H^* Hx = H^* (Hx) = \sum_I (H(x))_l h_l = \sum_I \langle x, h_l \rangle h_l \tag{2.5}$$

Operatorul este autoadjunct ($S^* = S$), pozitiv definit, deoarece verifică relația:

$$0 < A \text{ id} \leq S \leq B \text{ id}$$

și inversabil, cu inversul mărginit:

$$B^{(-1)} \text{ id} \leq (H^* H)^{-1} = S^{-1} \leq A^{-1} \text{ id} \tag{2.6}$$

ăstfel încît din (2.5) rezulta:

$$x = S^{-1} Sx = (H^* H)^{-1} \sum_I \langle x, h_l \rangle h_l = \sum_I \langle x, h_l \rangle (H^* H)^{-1} h_l$$

Definind:

$$g_l = (H^* H)^{-1} h_l, \text{ pentru } \forall l \in I \tag{2.7}$$

se obține:

$$x = \sum_I \langle x, h_l \rangle g_l \tag{2.8}$$

Adică o relație de analiză/sinteză în care baza de sinteză g_l se obține din baza de analiză h_l conform formulei (2.7). De fapt $\{g_l\}$

este de asemenea o bază oblică, numită duala lui $\{h_i\}$, și are loc [75]:

$$1/B\|f\|^2 \leq \sum_1 |\langle g_1, f \rangle|^2 \leq 1/A\|f\|^2$$

pentru orice f din \mathcal{H} . (justificarea rezultă din 2.6)

Notînd cu G operatorul:

$G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $f \rightarrow \langle f, g_1 \rangle g_1$, G se numește operatorul dual lui H .
În acest caz, deoarece $(H^*H)^{-1}$ este autoadjunct:

$$\langle f_1, G^*Gf_2 \rangle = \langle Gf_1, Gf_2 \rangle = \sum_1 \langle f_1, g_1 \rangle \langle f_2, g_1 \rangle =$$

$$= \sum_1 \langle f_1, (H^*H)^{-1}h_1 \rangle \langle f_2, (H^*H)^{-1}h_1 \rangle = \sum_1 \langle (H^*H)^{-1}f_1, h_1 \rangle \langle (H^*H)^{-1}f_2, h_1 \rangle$$

Dar $\{\langle (H^*H)^{-1}f_1, h_1 \rangle\}_1 = H(H^*H)^{-1}f_1$ conform definiției lui H , deci rezultă:

$$\langle f_1, G^*Gf_2 \rangle = \langle H(H^*H)^{-1}f_1, H(H^*H)^{-1}f_2 \rangle = \langle H^*H(H^*H)^{-1}f_1, (H^*H)^{-1}f_2 \rangle$$

și deci:

$$G^*G = (H^*H)^{-1} \quad (2.9)$$

Se constată că denumirea de bază duală este bine aleasă, deoarece conform relației (2.7) rezultă duala lui g_1 ca fiind:

$$g_1' = (G^*G)^{-1}g_1 = (H^*H)(H^*H)^{-1}h_1 = h_1$$

Operatorul dual G mai verifică relațiile:

$$\begin{aligned} G^*H &= \sum_1 \langle \cdot, h_1 \rangle g_1 = id \\ \text{și} \\ H^*G &= \sum_1 \langle \cdot, g_1 \rangle h_1 = id \end{aligned} \quad (2.10)$$

Demonstrație (1) (prima relație):

Din:

$$G^*Hf = G^*\{\langle f, h_1 \rangle\}_1 = \sum_1 \langle f, h_1 \rangle g_1$$

și din:

$$\begin{aligned} \langle f_1, G^*Hf_2 \rangle &= \langle f_1, \sum_1 \langle f_2, h_1 \rangle g_1 \rangle = \sum_1 \langle f_1, g_1 \rangle \langle f_2, h_1 \rangle = \\ &= \sum_1 \langle f_1, (H^*H)^{-1}h_1 \rangle \langle f_2, h_1 \rangle = \sum_1 \langle (H^*H)^{-1}f_1, h_1 \rangle \langle f_2, h_1 \rangle = \\ &= \sum_1 \langle (H^*H)^{-1}f_1, \langle f_2, h_1 \rangle h_1 \rangle = \langle (H^*H)^{-1}f_1, H^*Hf_2 \rangle \end{aligned}$$

și deoarece H^*H e autoadjunct rezultă:

$\langle f_1, G^* H f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle$
 și deci (2.10).
 q.e.d

Din definiția operatorilor duali G și H se poate deduce legătura între aceștia, constatînd că:

$$(Gx)_i = \langle x, g_i \rangle = \langle x, (H^*H)^{-1} h_i \rangle = \langle H^*H^{-1}x, h_i \rangle$$

Dar ultimul produs scalar este chiar $(H(H^*H)^{-1}x)_i$ (din definiția lui H), în consecință:

$$G = H(H^*H)^{-1} \tag{2.11}$$

În acest moment există o formulă de reconstrucție dublă, anume:

$$x = \sum_i \langle x, h_i \rangle g_i = \sum_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

astfel încît h_i și g_i pot juca pe rînd rolul de bază de analiză, respectiv sinteză, rol care era jucat în cazul bazelor ortonormale (de exemplu sinc_1) de o singură mulțime de vectori, aceasta fiind chiar baza ortonormală.

Dacă se utilizează notația din formula (2.5) se obține forma uzuală a formulei de analiză/sinteză (cu $S = H^*H = (G^*G)^{-1}$):

$$\begin{aligned} g_i &= S^{-1}h_i \\ \text{și} \quad x &= \sum_i \langle x, h_i \rangle S^{-1}h_i = \sum_i \langle x, Sg_i \rangle g_i \end{aligned} \tag{2.12}$$

Pentru a caracteriza complet construcția bazelor oblice duale vom mai observa că: HG^* este proiecția P_H din $l^2(I)$ în codomeniul operatorului $H:H(\mathcal{H})$, iar G^*H este proiecția P_G din $l^2(I)$ în codomeniul operatorului $G:G(\mathcal{H})$.

Demonstrație (2)(puțin diferit și în 30): din 2.10 rezulta:

$$\text{id} = G^*H = G^*P_H H \Rightarrow G^* = G^*P_H \Rightarrow HG^* = HG^*P_H$$

Dar pentru $\forall c \in l^2(I)$, $\exists f \in \mathcal{H}$ astfel încît $Hf = P_H c$. Deci:

$$HG^*c = HG^*P_H c = HG^*Hf = Hf = P_H c$$

q.e.d.

Din afirmația de mai sus rezultă:

$$P_H H = H, \quad P_H P_H = P_H, \quad \text{iar } P_H = HG^* = H(H^*H)^{-1}H^*$$

Observație: operatorul $G^* = (H^*H)^{-1}H^*$ (din 2.9 și 2.11) are o frumoasă proprietate de "minim", anume:

- dacă se notează cu $A(\mathcal{H})$ complementul ortogonal al lui $H(\mathcal{H})$ în $l^2(I)$, adică $A(\mathcal{H}) = H(\mathcal{H})^\perp$ sau dacă $c \in A(\mathcal{H}) \Rightarrow c \perp d, \forall d \in H(\mathcal{H})$, atunci

$G'c=0$.

Deci dintre toate inversele la stînga ale lui H , G' este cea care calculează proiecția unui vector din $l^2(I)$ în $H(\mathcal{H})$. Dacă $c \in l^2(I)$, $c=c_H+c_A$, $c_H \perp c_A$, cele două componente aparținînd lui $H(\mathcal{H})$, respectiv $A(\mathcal{H})$, atunci $HG'c=HG'P_Hc=HG'c_H=H(H'H)^{-1}H'c_H=P_Hc_H=c_H$.

Cu aceasta G' , care se mai numește și pseudoinversa lui H , reprezintă soluția minimizării distanței între $c \in l^2(I)$ și subspațiul $H(\mathcal{H})$. Cele spuse mai sus sînt ilustrate în fig. 2.2:

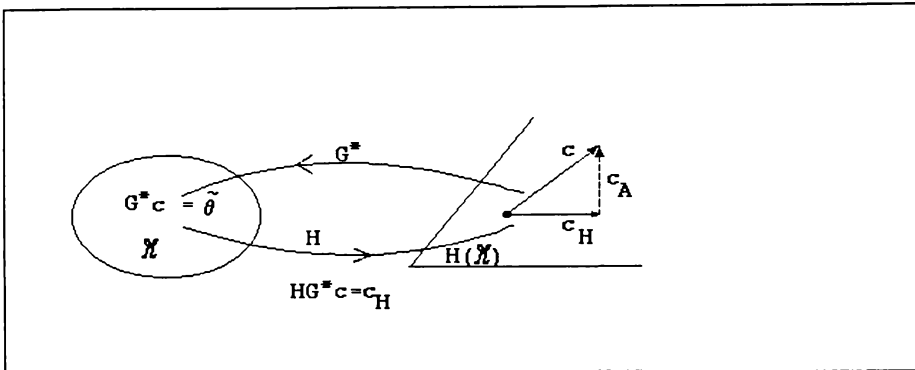


fig.2.2: acțiunea pseudoinversei G' a operatorului H asupra vectorilor din afara codomeniului lui H

2.2.2 Determinarea bazei oblice duale prin aplicarea unui algoritm iterativ.

Bazele oblice sînt o generalizare naturală a bazelor ortonormate. Acest fapt este pus în evidență de cîteva tipuri particulare de baze oblice:

1° o bază oblică se numește exactă, dacă prin excluderea unui vector din bază oblică restul vectorilor nu mai acoperă elementele spațiului \mathcal{H} . Conform [9] și [53], există următoarea caracterizare pentru o bază oblică exactă:

- $\{h_i\}$ este o bază oblică exactă d.ș.n.d. este o bază Riesz, adică dacă există un izomorfism L de la \mathcal{H} la \mathcal{H} astfel încît $Lh_i = u_i$, unde $\{u_i\}$ este o bază ortonormală.

- $\{h_i\}$ este o bază oblică exactă d.ș.n.d. baza oblică duală este biortogonală lui $\{k_i\}$, adică dacă:

$$\langle h_i, S^{-1}h_k \rangle = \langle h_i, g_k \rangle = \delta_{ik} \quad 1, k \in I$$

Bazele oblice biortogonale oferă proprietăți interesante pentru descompunerea și reconstrucția semnalelor, datorită posibilității de implementare cu filtre multicanal cu reconstrucție perfectă (cap.3)

2° o bază oblică se numeste strînsă, dacă marginile Bob sînt egale, $A=B$

- pentru baze oblice strînse se verifică:

- $S=A \text{ id}$, $S^{-1}=1/A \text{ id}$, unde S e dat de relația (2.5), iar din (2.1) rezultă:

$$A\|x\|^2=A\langle x, x \rangle=A\langle x, \sum \langle x, h_1 \rangle h_1 \rangle = \sum (\langle x, h_1 \rangle \cdot \langle x, h_1 \rangle) = \sum |\langle x, h_1 \rangle|^2$$

$$- h_1=S^{-1}g_1=1/Ag_1$$

$$- x=1/A \sum \langle x, g_1 \rangle g_1 = \sum \langle x, h_1 \rangle h_1$$

Se observă că pentru bazele oblice strînse găsirea bazei oblice duale este simplă, aceasta fiind chiar egală cu baza oblică inițială în afara unui factor.

In general pentru determinarea Bob duale trebuie gasit dualul lui H din rel. (2.11). Acest lucru poate fi deosebit de dificil dacă domeniul lui H este chiar L^2 , iar dacă domeniul este l^2 , adică H este o matrice, dificultatea crește cu numărul de linii (coloane) adică cu numărul și lungimea funcțiilor care formează baza.

In par.2.3. vom vedea ca teoria Bob se aplică la descrierea semnalelor (șirurilor) de energie finită. Funcțiile din bază vor fi funcții de tip sinus cardinal discret, egale ca lungime cu semnalul supus prelucrării astfel încît calculul pseudoinversei devine prohibitiv.

Dacă se dorește evitarea calcului pseudoinversei, Bob duală se poate obține pe baza unui procedeu iterativ și anume calculînd inversul operatorului S cu ajutorul seriei von Neumann:

- Dacă C este un operator liniar, continuu pe \mathcal{H} , și $\|C\| < 1$ atunci operatorul $(id-C)$ are inversă care verifică relația:

$$(id-C)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} C^n \tag{2.14}$$

Aplicînd aceasta relație operatorului $S=H'H$ rezulta din (2.3):

$$\begin{aligned}
& -2Bid \leq -2S \leq -2Aid \quad | + (A+B)id \\
& (A-B)id \leq (A+B)id - 2S \leq (B-A)id \\
& \frac{A-B}{A+B}id \leq id - \frac{2S}{A+B} \leq \frac{B-A}{A+B}id
\end{aligned}$$

deci:

$$\left\| id - \frac{2S}{A+B} \right\| \leq \frac{B-A}{A+B} < 1$$

Aplicînd relația (2.14), se obține:

$$S^{-1} = \frac{2}{A+B} \left(id - \left(id - \frac{2S}{A+B} \right) \right)^{-1} = \frac{2}{A+B} \sum_{n=0}^{\infty} \left(id - \frac{2S}{A+B} \right)^n \quad (2.15)$$

sau direct din (2.12) baza oblică duală:

$$g_1 = S^{-1}h_1 = \frac{2}{A+B} \sum_{n=0}^{\infty} \left(id - \frac{2S}{A+B} \right)^n h_1 \quad (2.16)$$

De fapt relația (2.14) stă la baza unui procedeu iterativ de găsire a unui vector f cînd se cunoaște imaginea lui f : Kf . Fie K un operator mărginit într-un spațiu Hilbert care satisface pentru un $\gamma < 1$ relația:

$$\|f - Kf\| < \gamma \|f\| \quad (2.17)$$

atunci K e inversabil și f poate fi redobîndit din Kf prin următorul algoritm iterativ:

$$f_{n+1} = f_n + K(f - f_n) \quad (2.18)$$

Acest fapt [38] rezulta din relația (2.17) care se mai scrie $\|id - K\| < \gamma < 1$, deci se poate aplica relația (2.14) cu $C = id - K$. Rezultă:

$$K^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (id - K)^n$$

deci

$$f = K^{-1}Kf = \sum_{n=0}^{\infty} (id - K)^n Kf$$

Notînd cu $f_n = \sum_{k=0}^n (id - K)^k Kf$, se obține prin inducție chiar formula (2.18). Dacă $f_0 = Kf$, condiția inițială este verificată, iar din $f_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (id - K)^k Kf$ rezultă:

$$f_{n+1} = Kf + \sum_{h=1}^{n+1} (id - K)^h Kf = Kf + (id - K) \sum_{h=0}^n (id - K)^h Kf = Kf + (id - K) f_n$$

deci $f_{n+1} = f_n + K(f - f_n)$.

Observație (1): Se poate utiliza un astfel de algoritm de reconstrucție al unui semnal din eșantioanele sale dacă se găsește un operator K , care să depindă doar de eșantioanele semnalului f și care prin operarea asupra lui f , să-l individualizeze (în așa fel încît acesta să fie unic determinat dacă se cunosc eșantioanele de care depinde K). În plus K trebuie să verifice o relație de tipul (2.17). Un astfel de operator va fi exemplificat în paragraful 2.2.3. pentru semnale discrete de banda limitată, respectiv în par. 3.3.2 pentru semnale oarecare.

Relația (2.16) este de fapt de tipul (2.18) deoarece:

$$\|id - \frac{2}{A+B} S\| < 1 \text{ deci } \|(id - \frac{2}{A+B} S) f\| = \|f - \frac{2S}{A+B} f\| < \|f\|$$

astfel încît g_1 poate fi obținut în modul următor:

$$\begin{aligned} g_1^0 &= \frac{2}{A+B} S g_1, \quad l \in I \\ \text{și} \quad g_1^{n+1} &= g_1^n + \frac{2}{A+B} S (g_1 - g_1^n); \quad (\text{cu } \frac{2}{A+B} S g_1 = h_1 \text{ cunoscut}) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Rămîne să vedem cînd o mulțime de puncte de eșantionare (prelevate în general neregulat) poate conduce la o bază oblică, astfel încît semnalul inițial să poată fi reconstruit eventual pe baza bazelor oblice duale. Acest lucru va reieși din următoarele două paragrafe.

2.2.3 Utilizare a bazelor oblice la descrierea semnalelor eșantionate neregulat.

În [115] se pune problema refacerii unui semnal din eșantioane neregulate prin proiecția în spațiul semnalelor de banda limitată.

Se utilizează pentru aceasta descompunerea operatorului care descrie proiecția în valori singulare (de fapt se calculează dualul operatorului fără a se specifica acest lucru). Procedeele este aplicat în domeniul continuu pentru un număr finit, mic de puncte (din cauza complexității calculului $N=8$). Vom extinde această problemă la un număr infinit de puncte (adică vom obține o reconstrucție on line), transpunând în prealabil problema în domeniul discret, deoarece procedeele practice de reconstrucție din eșantioane neregulate pe care le vom studia vor fi implementate cu sisteme discrete (filtre digitale), astfel încât reconstrucția se va referi tot la semnale discrete. Deasemenea vom înlocui calculul dualului prin descompunerea în valori singulare (în cazul discret aceasta revine la calculul pseudoinversei) prin procedeele iterative prezentate în par. 2.2.2.

Fiind dat un semnal $\theta(n)$, $\theta \in l^2(\mathbb{Z})$, prin eșantioanele sale la momentele $t_n, t_n \in T \subset [0, N]$. Problema reconstrucției perfecte se referă la găsirea lui $\theta(n)$ pentru $0 \leq n < N$, $N \in \mathbb{Z}$. Această problemă poate fi tratată în completă analogie cu reconstrucția semnalelor de bandă limitată pe \mathbb{R} . Fie

$$\theta(h) = \sum_{n=0}^{N-1} \theta(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

transformata Fourier discretă (TFD) a secvenței $\theta(n)$. Spațiul semnalelor de bandă limitată la $W < N/2$ se poate scrie:

$$B_W = \{\theta \in C^N \mid \hat{\theta}(k) = 0 \text{ pentru } |k| > W\}$$

Să considerăm că eșantioanele cunoscute sînt cuprinse într-un vector de observații $y = [y(t_1) \dots y(t_M)]^T$ cu $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_M < N$ și să încercăm să obținem reconstrucția semnalului inițial θ din care provin eșantioanele y , astfel încât θ să verifice o condiție suplimentară (altfel problema interpolării ar avea o multitudine de soluții), de exemplu aceea de a fi limitat în bandă.

Fie matricea H (echivalentul operatorului H din paragraful 2.2.1) dată de:

$$H = \left[\frac{1}{N} \frac{\sin(2W+1)(t_i - j) \frac{\pi}{N}}{\sin(t_i - j) \frac{\pi}{N}} \right]_{ij} \quad i = \overline{1, M}; \quad j = \overline{1, N} \quad (2.20)$$

Atunci o soluție posibilă pentru θ ar fi dată implicit de ecuația:

$$Y = H\theta \tag{2.21}$$

deoarece dacă $\theta \in B_w$ și observînd că h_i (liniile matricii H), $i=1, M$ sînt în B_w , rezultă:

$$\begin{aligned} y_i = \langle h_i, \theta \rangle &= \frac{1}{N} \langle TFDh_i, TFD\theta \rangle = \frac{1}{N} \langle e^{-j\frac{2\pi}{N}t_i} \cdot 1_{[-w, w]}, \theta \rangle = \\ &= \frac{1}{N} \sum_n \theta(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}t_i n} = \theta(t_i) \end{aligned}$$

Formează $\{h_i\}_{i=1}^M$ o bază oblică în C^N (N -uple cu valori în corpul numerelor complexe)? Deoarece numărul punctelor de eșantionare este $M < N$ în mod cert acest lucru nu este adevărat. Din relația (2.6) rezultă că $0 < \lambda_{\min}(H^*H) < \lambda_{\max}(H^*H) \leq B$, deci $\lambda_{\min}(H^*H) > 0$, adică $\text{rang } H = \text{rang}(H^*H) = N$. Deci $\{h_i\}_{i=1}^M$ trebuie să conțină cel puțin N vectori liniar independenți, adică $M \geq N$.

Chiar dacă în C^N liniile matricii H nu constituie o bază oblică, în subspațiul B_w acest lucru s-ar putea să fie adevărat. Prin intermediul transformării Fourier discrete, spațiul B_w este izomorf cu C^w , iar dacă $\{e_{t_i}\}_{i=1}^M$ constituie o bază oblică în C^w unde

$$e_{t_i}(k) = e^{-j\frac{2\pi}{N}t_i k}; \quad k = \overline{1, N}; \quad i = \overline{1, M}$$

atunci și $\{h_i\}_{i=1}^M = \{e_{t_i}\}_{i=1}^M$ reprezintă o bază oblică în B_w . Dar acest lucru este adevărat dacă $M > w$ și dacă $\{e_{t_i}\}$ sînt liniari independenți, deoarece în cazul spațiilor cu dimensiuni finite orice mulțime de vectori care generează spațiul constituie o bază oblică.

Dorim să determinăm soluția θ care aparține subspațiului B_w . Pentru aceasta ar trebui să calculăm pseudoinversa matricii H , dar H^*H din expresia pseudoinversei din paragraful anterior nu mai este inversabilă.

(În cazul finit dimensional operația de transpunere conduce la adjunctul operatorului definit de matricea H cu elemente reale

$$\langle H\theta, Y \rangle = \langle \theta, H^*Y \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \theta_i h_{ij} y_j$$

Să observăm [90] că pseudoinversa $G^T = (H^T H)^{-1} H^T$ provine în cazul $M < N$ întradevăr din minimizarea expresiei:

$$e^2 = \|y - H\theta\|^2 = \langle y - H\theta, y - H\theta \rangle$$

prin:

$$\frac{\partial e^2}{\partial \theta} = (y - H\theta)^T (y - H\theta) = 2H^T (H\theta - y) = 0, \text{ cu } \frac{\partial g}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial g}{\partial \theta_1} \dots \frac{\partial g}{\partial \theta_M} \right]^T$$

unde $H^T H \theta = H^T y$, rezultă $\theta = (H^T H)^{-1} H^T y$, unde θ reprezintă estimatul cel mai bun din punct de vedere al erorii patratice pentru soluția ecuației $y = H\theta$, care de regulă nu are soluție (sistem supradeterminat).

Ce se întâmplă când H nu mai este injectiv ca în expresia (2.20), adică atunci când $y = H\theta$ are mai multe soluții posibile? Pentru a găsi estimatul θ care provine din acoperirea convexă a liniilor matricii H (adică din spațiul $B_w \subset \mathbb{R}^2$) să arătăm că acest estimat este unic:

Demonstrație: Prin absurd, dacă ar exista $\theta_1, \theta_2 \in B_w$, astfel încât $H\theta_1 = H\theta_2$ atunci rezultă: $H(\theta_1 - \theta_2) = 0$ cu $\theta_1 - \theta_2 = \theta \in B_w$, deci $\langle h_i, \theta \rangle = 0$ pentru $i=1, M$. Prin relația Parseval acest produs scalar conduce la $\langle e_{r_i}, \theta \rangle = 0$ pentru $i=1, M$, dar deoarece $\{e_{r_i}\}_{i=1}^M$ este o bază oblică în C^M și deoarece $\theta \in C^M$ rezultă că acest lucru e posibil doar dacă $\theta = 0$ și deci $\theta = 0$ ($\langle e_{r_i}, \theta \rangle = 0$, $i=1, M$ este un sistem supradeterminat). Deci soluția ecuației $H\theta = y$ în subspațiul B_w este unică și o notăm cu θ_w . Dar această soluție este în același timp și soluția de normă minimă a ecuației (14), deoarece fie θ^1 astfel încât $H\theta^1 = y$. Atunci θ^1 poate fi scris ca fiind format din 2 componente $\theta^1 = \theta_w + \theta_u$, cu θ_u în afara lui B_w , astfel încât $H\theta^1 = H\theta_w + H\theta_u = y$, de unde rezultă $H\theta_u = 0$, adică $\langle \theta_u, h_i \rangle = 0$ pentru $i=1, M$. Dar cum θ_w este în subspațiul generat de $\{h_i\}_{i=1}^M$ rezultă că $\langle \theta_w, \theta_u \rangle = 0$ și deci

$$\|\theta^1\|^2 = \|\theta_w\|^2 + \|\theta_u\|^2 \geq \|\theta_w\|^2, \forall \theta^1.$$

q.e.d.

Rezultă că în acest caz pseudoinversa operatorului H are semnificația soluției de normă minimă pentru ecuația (2.21), deoarece se va obține minimizînd norma lui θ : $1/2 \theta^T \theta$ în ipoteza existenței legăturii $H\theta - y = 0$. Egalînd cu zero lagrangeanul și rezolvînd pentru θ , se obține [90]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} \theta^T \theta - (H\theta - y)^T \lambda \right) = 0 \rightarrow \theta = H^T \lambda \quad (2.22)$$

iar legătura este satisfăcută pentru $H\theta = HH^T\lambda = y$, adică pentru $\lambda = (HH^T)^{-1}y$, deci pentru:

$$\theta = H^T(HH^T)^{-1}y \tag{2.23}$$

Relația (2.23) reprezintă soluția de normă minimă e ecuației (2.21), iar:

$$H^{\#} = G^T = H^T(HH^T)^{-1} \tag{2.24}$$

este pseudoinversa matricii H , θ rezultând ca o combinație liniară a liniilor lui G . Relația între H și G rezultă mai clar din figura 2.3.

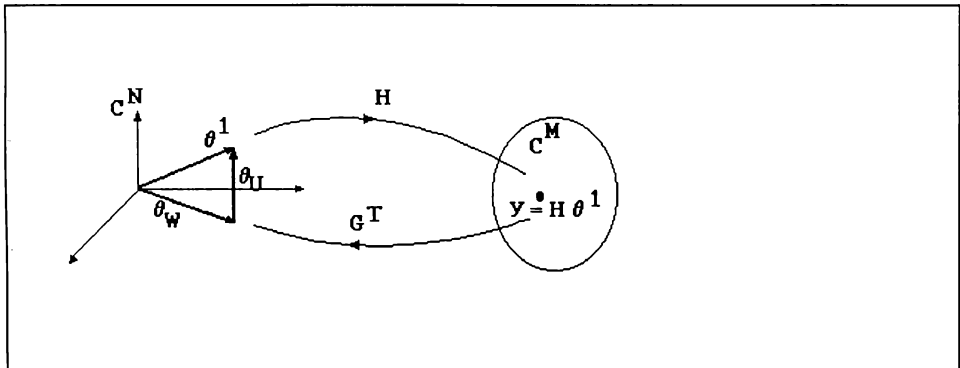


fig.2.3 Proprietatea de normă minimă a soluției dată de pseudoinversă în rezolvarea ecuației $y = H\theta$ în raport cu θ

Relațiile între operatorii H și G sînt în acest caz din (2.7): $HG^T = GH^T = I$ și $(HH^T)^{-1} = (GG^T)$ (deoarece $GG^T = GH^T(HH^T)^{-1}$).

Cu aceste considerații orice θ din B_w poate fi scris în modul următor:

$$\theta = \sum_{i=1}^M \langle \theta, h_i \rangle g_i = \sum_{i=1}^M \langle \theta, g_i \rangle h_i$$

unde g_i sînt liniile matricii G sau, altfel spus, G este operatorul

care oricărui θ din C^N îi pune în corespondență pe $\langle \theta, g_i \rangle_{i=1}^M$ din C^M . Un exemplu de eșantionare neregulată care produce o bază oblică conform relației (2.20) și o bază oblică duală conform relației (2.24) este dat în figurile 2.4...2.7.

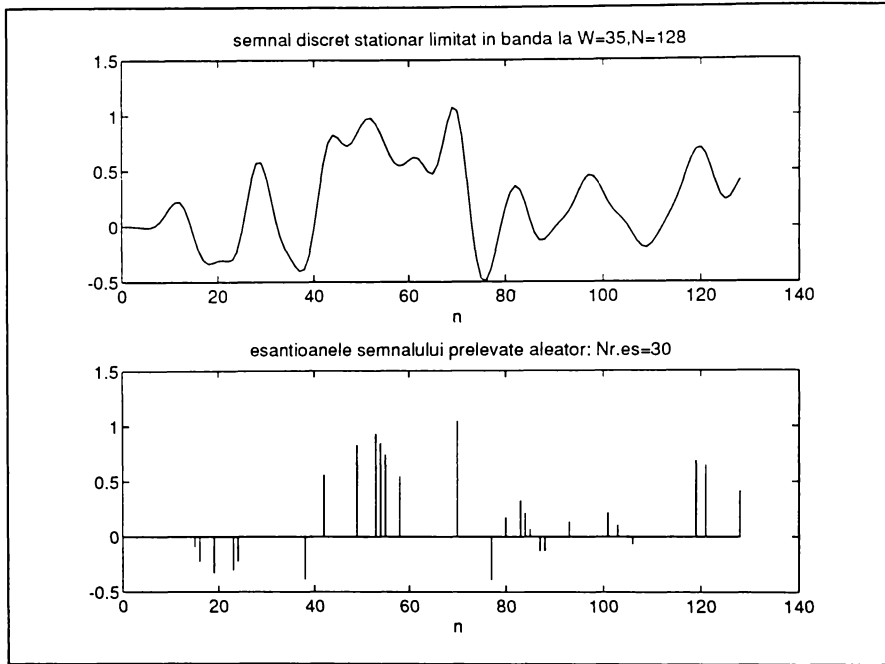


fig.2.4 fig.2.5: semnal discret de lungime $N=128$ și esantioanele sale prelevate aleator

Fig. 2.4 prezintă un semnal aleator (zgomot alb filtrat trece jos) iar în fig.2.5 sînt prezentate eșantioanele păstrate din semnal în urma unei eșantionări aleatoare neuniforme. Fig. 2.6 arată liniile matricii H din rel 2.20 care formează baza oblică h_i , iar fig 2.7 arată coloanele matricii G (rel 2.24), care formează baza duală g_i . Determinarea soluției ecuației (2.23) cînd se cunoaște vectorul valorilor eșantioanelor y este însă dificil de realizat în sistemele de calcul, dacă N are o valoare mare (numărul de înmulțiri și împărțiri este proporțional cu N^3). Deasemenea nu este posibilă o determinare "on line" a semnalului θ din care au provenit eșantioanele deoarece se pornește de la ideea că toate eșantioanele sînt cunoscute. Dar dacă ținem seama de faptul că (2.23) este soluția de normă minimă a ecuației (2.20), atunci știm că această

soluție poate fi determinată cu ajutorul unui algoritm de minimizare a erorii pătratice medii (Least Mean Square Algorithm, LMS).

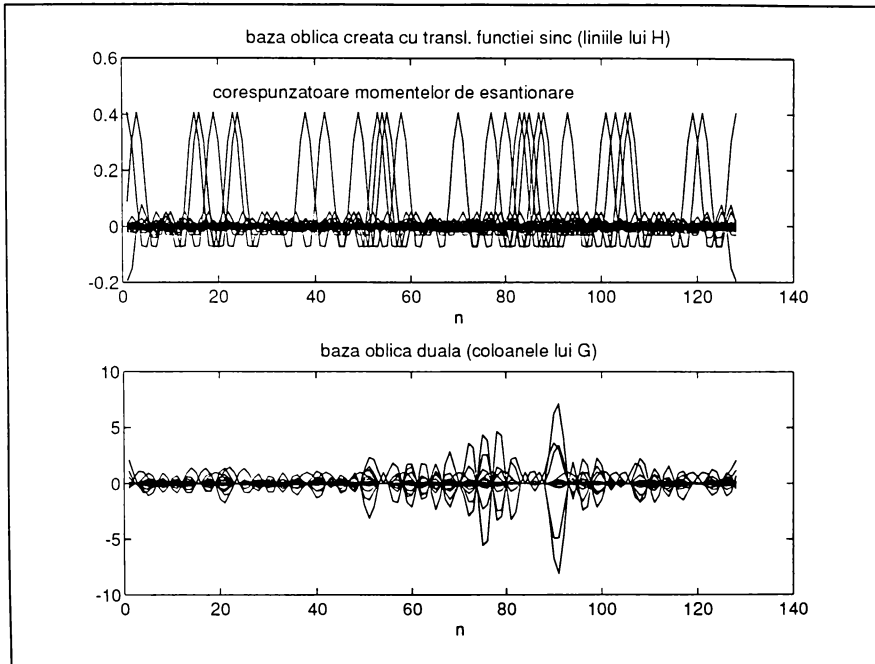


fig.2.6 fig.2.7: baza oblică și baza oblică duală cores-
punzătoare eșantionării neuniforme din fig.2.5

Vom utiliza acest algoritm iterativ în paragraful 2.4 pentru a reconstrui "on line" semnalul θ .

2.2.4 Condiții in care traslatatele unei funcții formeaza o baza oblică într-un spatiu dat

Ca un ultim punct la paragraful 2.2 să amintim câteva condiții în care un set de funcții formeaza o Bob într-un spațiu dat. În particular ne interesează când traslatatele unei anumite funcții (de exemplu $\sin(\pi wt)/\pi wt = \text{sinc}(wt)$ sau oricare altă funcție) formează o bază oblică pentru $B^2_{\pi w}$. Pentru domeniul continuu în [10] se determină condițiile în care perturbațiile $1/\sqrt{2\pi} e^{-j\pi t_n x}$ ale unei baze ortonormale $1/\sqrt{2\pi} e^{-j\pi x}$ formează o bază oblică exactă (bază Riesz) în $L^2_{(-\pi, \pi)}$. Rezultatul poate fi scris astfel:

Propoziția 1: Dacă punctele de eșantionare $t_n, n \in \mathbb{Z}$ satisfac:

$$\sup |t_n - n| \leq L < 1/4$$

atunci $1/\sqrt{2\pi} e^{-j t_n \omega}$ sînt o bază Riesz pentru spațiul $L^2_{(-\pi, \pi)}$, și există o bază oblică $\{h_n\}$ biortonormală la $1/\sqrt{2\pi}(e_{-n})$ astfel încît $\forall f \in B^2_\pi$ să fie adevărata relația:

$$f(t) = \sum_n f(t_n) h_n(t) = \sum_n \langle f, h_n \rangle \text{sinc}(t - t_n)$$

iar mulțimile $\{h_n\}$ și $\{\text{sinc}_{t_n}(t)\}$ sînt baze oblice exacte biortogonale pentru B^2_π , care satisfac:

$$\langle h_n(\cdot), \text{sinc}_{t_k}(\cdot) \rangle = \delta_{nk}$$

Afirmațiile reies din faptul că datorită izometriei reprezentate de transformata Fourier, bazele oblice biortogonale în $L^2_{(-\pi, \pi)}$ au drept correspondent Fourier tot baze oblice biortogonale în B^2_π , astfel încît:

$$f = \sum_n \langle f, \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j t_n \omega}\right\} \rangle \mathcal{F}^{-1}(f_n(\omega))$$

și rezultă relațiile din propoziția 1. Greutatea rezidă în calculul secvenței ortonormale $\{h_n\}$. Pentru reconstrucția lui f din $\{f_{t_n}\}$ se utilizează aproximația:

$$Af = \sum_n f(n) \text{sinc}_{t_n}$$

Deoarece $f = \sum_n f(n) \text{sinc}_n$, se poate arăta că în ipoteza $|n - t_n|$ suficient de mic, $\|f - Af\| \leq \gamma \|f\|$ pentru $\forall f \in B^2_\pi$ și un $|\gamma| < 1$.

Atunci, folosind operatorul adjunct $A^* f = \sum_n f(t_n) \text{sinc}_n$, rel. 2.18 furnizează o metodă iterativă de reconstrucție a lui f din $A^* f$, adică din eșantioanele sale [17].

Observație(2): A^* este adjunctul lui A , deoarece

$$\begin{aligned} \langle f_1, Af_2 \rangle &= \langle f_1, \sum_n \langle f_2, \text{sinc}_n \rangle \text{sinc}_{t_n} \rangle = \\ &= \sum_n \langle f_1, \text{sinc}_{t_n} \rangle \langle f_2, \text{sinc}_n \rangle = \langle \sum_n \langle f_1, \text{sinc}_{t_n} \rangle \text{sinc}_n, f_2 \rangle = \langle A^* f_1, f_2 \rangle \end{aligned}$$

Propoziția 1 permite doar variații slabe în jurul pozițiilor de eșantionare regulată. O altă abordare (mai puternică) se găsește în [38].

Propoziția 2: Presupunînd că există constantele $0 < \epsilon < 1$, $\alpha, L > 0$ astfel încît mulțimea punctelor de eșantionare $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ satisface

$$|x_n - x_m| \geq \alpha > 0, \text{ pentru } n \neq m \text{ și}$$

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n - \epsilon n| \leq L < \infty \quad (2.25)$$

atunci se pot găsi constantele $0 < A \leq B$ depinzînd doar de ϵ , α , L astfel încît pentru $\forall f \in B_\pi^2$ să aiba loc:

$$A \|f\|^2 \leq \sum |f(x_n)|^2 \leq B \|f\|^2$$

Deoarece $f(x_n) = \langle f(\cdot), \text{sinc}_{x_n}(\cdot) \rangle$, relația de mai sus este echivalentă cu a spune că $\{\text{sinc}_{x_n}\}$ este o bază oblică pentru B_π^2 . Reconstrucția semnalului f se face prin intermediul operatorului:

$$S_\lambda f = \lambda \sum f(x_n) \text{sinc}_{x_n}$$

Deoarece constantele A și B nu sînt date explicit, în practică se utilizează un coeficient de relaxare λ , găsit eventual prin încercări, pentru a se asigura convergența algoritmului.

Fie $n(r)$ numărul minim de eșantioane într-un interval de lungime r , atunci din (2.25) se obține pentru densitatea de eșantionare:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r} = \frac{1}{\epsilon} > 1$$

În [9] se caracterizează complet secvențele de eșantionare care generează baze oblice, demonstrîndu-se o teoremă generală, care afirmă că o secvență $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ generează o bază oblică $\{\text{sinc}_{x_n}\}$ pentru B_π^2 d.ș.n.d.:

$$|x_n - x_m| \geq \alpha > 0, \quad \alpha \text{ fixat}, \quad n \neq m \quad \text{și} \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r} > 1$$

Ăceste rezultate sînt obținute pentru domeniul continuu dar noi vom utiliza echivalența lor din domeniul discret (care sînt imediate ținînd cont de prezentarea făcută în acest paragraf). Să considerăm un semnal discret de lungime N , limitat în bandă la intervalul $[-W, W]$, parcurs de o fereastră de lungime t . Atunci are loc:

Teorema 2.1: Liniile matricii H din rel 2.20 formează o Bob în spațiul B_w dacă este satisfăcută relația:

$$M(t)/t > 2W/N$$

unde $M(t)$ este numărul de eșantioane în intervalul de lungime t .

Demonstrație: din relația de mai sus rezultă că într-un interval de lungime $N/2$ există mai mult de W eșantioane. Atunci

$$e_{t_i}(k) = e^{-j\frac{2\pi}{N}t_i k}; k=\overline{1, N}; i=\overline{1, M}$$

constituie o bază oblică în C^W , și aplicînd transformata Fourier discretă obținem afirmația din enunț.

În continuare vom studia posibilitatea utilizării algoritmului LMS în regim de urmărire (echivalent aici cu on-line) pentru început în cazul general al sistemelor staționare iar apoi pentru refacerea semnalelor din eşantioane prelevate neregulat, prin proiectarea lor în spațiul semnalelor limitate în bandă, cu condiția ca eşantioanele să fie suficient de dese pentru a permite această reconstrucție, adică în cazul în care condiția din Teorema 2.1 este îndeplinită.

2.3 Algoritmul LMS în regim de urmărire.

2.3.1 Calculul erorii de urmărire

Ne interesează eroarea de urmărire într-un proces de adaptare pe baza algoritmului LMS. Să considerăm [41] un sistem liniar variabil în timp (LVT) caracterizat de un vector de ponderi (răspuns la impuls) dependent de timp $w_k(n)$:

$$(Hx)(n) = \sum_{k=0}^{M-1} w_k(n) x(n-k)$$

unde $x(n)$ este semnalul de intrare și (Hx) cel de ieșire, numărul de celule de întârziere fiind M . Gradul de nestaționaritate al sistemului poate fi caracterizat cu ajutorul funcției de variație $S_H(k, \phi)$ definită ca TF a răspunsului la impuls în raport cu variabila timp n :

$$S_H(k, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} w_k(n) e^{-j\phi n}$$

astfel încît funcția de variație caracterizează sistemul în mod unic prin relația de intrare-ieșire:

$$(Hx)(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{M-1} S_H(k, \phi) x(n-k) e^{j\phi n} \frac{d\phi}{2\pi}$$

Avantajul reprezentării sistemului LVT ca mai sus rezidă în faptul că funcția de variație reflectă direct informația apriori despre sistem, dar reprezentarea este globală în timp și nu poate servi pentru o procedură de estimare recursivă. Să considerăm că $w_k(n)$ este un proces staționar în sens larg, bidimensional, și funcția sa de autocorelație cvadri-dimensională este de fapt bidimensională adică de tipul:

$$E\{w_k(n) w_{k'}(n')\} = R_H(n-n', k-k') \quad (2.26)$$

Atunci funcția de autocorelație e în relație Fourier cu funcția de împrăștiere a sistemului:

$$R_H(m, k) = \int_{-\pi}^{\pi} C_H(k, \phi) e^{j\phi m} \frac{d\phi}{2\pi} \quad (2.27)$$

unde funcția de împrăștiere a sistemului este definită în 2.28 ea fiind deasemenea bidimensională.

$$E\{S_H(k, \phi) S_H(k', \phi')\} = C_H(k-k', \phi-\phi') \quad (2.28)$$

Funcția de împrăștiere are relevanță fizică, în sensul că de exemplu în cazul canalelor de telefonie mobilă, unde presupunerea de bidimensionalitate de mai sus este reală [8], ea reflectă proprietățile de întârziere în timp și efect Doppler (alunecare în frecvență) ale acestora. În plus din punctul nostru de vedere funcția de împrăștiere are o semnificație directă în procesul de identificare a sistemului variabil în timp printr-un proces LMS: cu cât $C_H(k, \phi)$ are un suport mai mare cu atât problema identificării (a urmăririi) devine mai dificilă: Acest lucru va reieși direct din calculul erorii de urmărire, pe baza funcției de împrăștiere, și din prezentarea rezultatelor experimentale.

Problema identificării este expusă în fig.2.8:

\hat{H} este sistemul real LVT ce trebuie urmărit, H este sistemul adaptiv guvernat de algoritmul LMS, $\eta(n)$ este un zgomot alb de putere σ^2 , iar secvența de intrare (de antrenare) $x(n)$ este de asemenea un zgomot alb. Eroarea de identificare va fi definită ca:

$$J = \sum_{k=0}^{M-1} E\{|\hat{w}_k(n) - w_k(n)|^2\} \quad (2.29)$$

(E= operatorul de mediere statistică) unde $w_k(n)$ sînt estimările coeficienților $w_k(n)$, calculate în mod adaptiv (global) cu algoritmul :

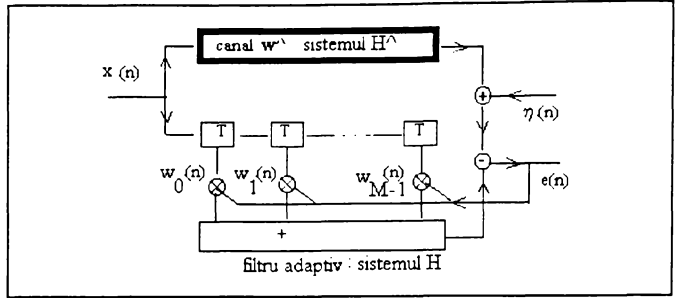


fig.2.8

$$w(0) = 0, \quad w(n+1) = w(n) + \mu x(n)e(n) \quad (2.30)$$

iar $e(n) = \mathbf{x}(n)\hat{\mathbf{w}}(n) - \mathbf{x}(n)\mathbf{w}(n)$, \mathbf{w} și \mathbf{x} fiind vectori cuprinzînd M valori succesive: $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-M+1)]^T$, $\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \dots \ w_{M-1}(n)]^T$.

Eroarea de identificare are două componente. Prima este eroarea datorată zgomotului, care conform teoriei standard [113], revine la:

$$J1 = \frac{\sigma^2 \mu M}{2 - \mu MR(0)} = \frac{\mu M}{2 - \mu M} \cdot \frac{1}{RSZ} \quad (2.31)$$

unde $R = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}(n)^T\}$, și am considerat ca x semnalul de intrare este un zgomot alb cu densitate de putere 1 astfel încît $\sigma^2 = 1$ /raport semnal zgomot, iar R devine din această cauză o matrice unitate. A doua este eroarea de urmarire $J2$ pe care o vom calcula în continuare. Înlocuind în 2.30 pe $\mathbf{x}(n)\mathbf{x}(n)^T$ cu $E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}(n)^T\}$ și aplicînd transformata Fourier obținem (pentru fiecare componenta $k=0 \dots M-1$):

$$S_H(k, \phi) = S_{\hat{H}}(k, \phi) \cdot \frac{\mu}{e^{j\phi} - 1 + \mu} \quad (2.32)$$

Sistemul eroare $H_e = H - \hat{H}$, introdus formal, va avea și el o funcție de împrăștiere bidimensională și din 2.32 rezultă:

$$C_{H_e}(k, \phi) = \left| 1 - \frac{\mu}{e^{j\phi} - 1 + \mu} \right|^2 C_{\hat{H}}(k, \phi) \quad (2.33)$$

Dar funcția de împrăștiere este (cf.2.27) densitatea spectrală de putere a procesului de variație a coeficienților astfel încît :

$$E\{|\hat{w}(n, k) - w(n, k)|^2\} = \int_{-\pi}^{\pi} C_{H_0}(k, \phi) \frac{d\phi}{2\pi}$$

și în final obținem eroarea de urmărire în forma:

$$J_2 = \sum_{k=0}^{M-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1 - e^{j\phi}}{e^{j\phi} - 1 + \mu} \right|^2 C_R(k, \phi) \frac{d\phi}{2\pi} \quad (2.34)$$

adică în funcție de funcția de împrăștiere a procesului bidimensional staționar, așa cum ne-am propus.

2.3.2 Rezultate experimentale

Relația 2.34 ne permite calculul a priori al erorii efectuate de un algoritm LMS în procesul de urmarire al unui sistem LTV. În continuare vom prezenta câteva rezultate în care eroarea totală $J = J_1 + J_2$, calculată cu formulele 2.31 și 2.34, este comparată cu eroarea obținută experimental prin antrenarea unui sistem LVT afectat de zgomot alb, cu un zgomot alb, (ambele generate independent) și urmărirea sistemului inițial cu un sistem adaptiv, adaptarea făcându-se cu algoritmul LMS. Eroarea obținută a fost mediată pe un ansamblu de 10 încercări diferite. Întregul domeniu de variație pentru parametrul de relaxare μ a fost baleiat: de la $\mu=0$ la limita de convergență a algoritmului $\mu_{max} = 2/\text{tr}(R)$, unde $\text{tr}(R) =$

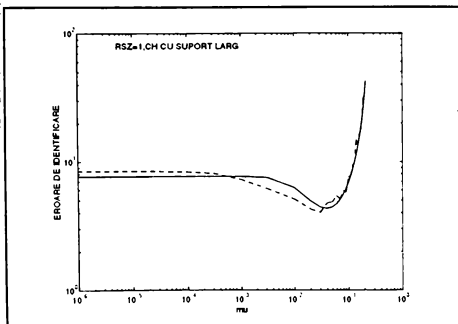


fig.2.9: variația erorii de identificare în funcție de μ
teorie:— experiment:----

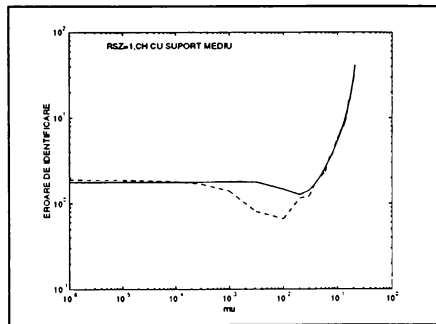


fig.2.10: variația erorii de identificare în funcție de μ
teorie:— experiment:----

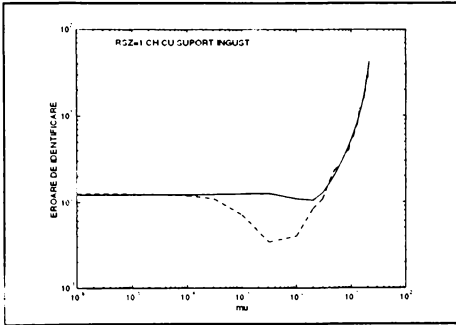


fig.2.11: Variația erorii de identificare funcție de μ
teorie: — experiment: ----

urma matricii de autocorelație a semnalului de antrenare \mathbf{x} , în cazul nostru $\mu_{m,x}=0.25$ deoarece modelul a fost ales cu $M=8$ (celule de întârziere). În fig. 2.9, 2.10, 2.11 se prezintă încercări efectuate la un raport semnal/zgomot $RSZ=1$ (adică raportul între puterea semnalului de antrenare $x(n)$ și a zgomotului $\eta(n)$, fig.2.8). Una dintre curbe

reprezintă relația $J=J_1+J_2$ ca funcție de μ , iar cealaltă este reprezentarea rezultatului experimental. Se observă concordanța foarte bună între teorie și practică. La μ foarte mic doar componenta J_2 joacă un rol, sistemul adaptiv nefiind în stare să urmărească sistemul țintă (cf. rel.2.30). Cu creșterea lui μ , la un moment dat eroarea de neurmarire începe să scadă pînă cînd există un echilibru între aceasta și eroarea J_1 datorată zgomotului, care conform rel.2.31, crește la creșterea lui μ . În continuare eroarea crește pînă cînd μ depășește limita de convergență a algoritmului. Cele trei figuri se deosebesc prin mărimea suportului funcției de împrăștiere a carei lungime determină întârzierea în timp, iar lățimea deplasarea în frecvență (efectul Doppler). În cele trei experimente funcția de împrăștiere a avut forma $C_{\mu}(k,m)=(k+m)^{-a}$, (C_{μ} a fost discretizat în simulările pe calculator pe $N=512$ puncte în intervalul $-\pi,\pi$) unde a este în ordine 1,2,3. Se observă că dacă C_{μ} este îngustă (fig. 2.11), pentru $a=3$ (adică \hat{w} nu variaza rapid) minimul erorii este atins la un μ mai mic, ceea ce era de așteptat, și în general eroarea de neurmarire și cea totală sînt mai mici față de situațiile din fig.2.10 și 2.9. În figurile 2.12, 2.14, 2.15, se prezintă același experiment dar la un raport semnal pe zgomot $RSZ=100$. Din nou teoria este foarte bine verificată în practică și tendințele din primele trei figuri sînt evidente și aici, doar că puterea mult mai mică a zgomotului implică o eroare J_1 mai mică, deci un μ optim mai mare pentru care eroarea totală să fie minimă (adică algoritmul LMS poate face pași mai rapizi, deci J_2 devine mai mic, fără ca J_1 să devină deranjant). Și acest lucru se observă comparînd cele două seturi de figuri pentru aceeași mărime a suportului funcției de împrăștiere. Subrutinele

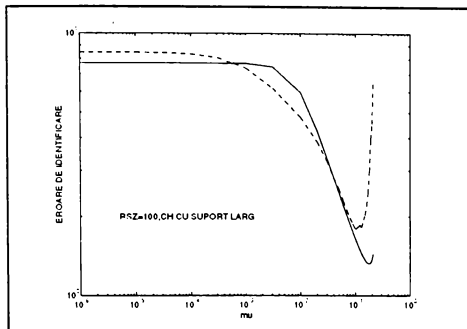


fig.2.12: variația erorii de identificare funcție de μ
teorie:— experiment:----

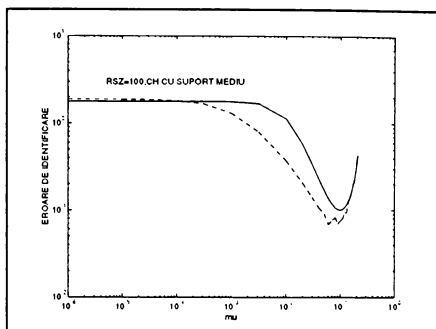


fig.2.14: Variația erorii de identificare funcție de μ
teorie:— experiment:----

MATLAB care au servit la efectuarea experimentelor de mai sus sînt prezentate (cele mai importante) în anexă.

Experimentele probează odată în plus că relația 2.34 este corectă, deci putem cu ajutorul ei să calculăm (prevedem) eroarea de urmărire în cazul în care algoritmul LMS lucrează în regim dinamic la identificarea unui

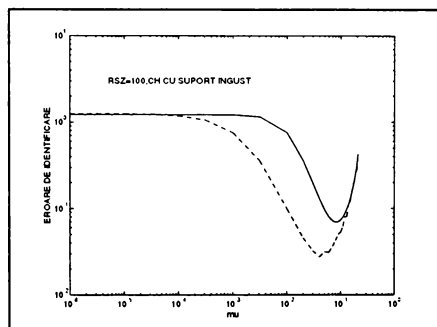


fig.2.15: Variația erorii de identificare funcție de μ
teorie:— experiment:----

sistem variabil în timp. Dar acest lucru este posibil și dacă algoritmul LMS lucrează la reconstrucția unui semnal cu condiția ca acesta să respecte rel 2.26, 2.28. Vom utiliza teoria dezvoltată în acest paragraf tocmai în acest scop.

2.4 Reconstrucția on-line a semnalelor staționare din eşantioane prelevate neregulat, utilizind algoritmul LMS .

2.4.1 Algoritmul LMS ponderat

Să încercăm să rezolvăm în continuare problema pusă în paragraful 2.2, aceea de a găsi un semnal discret $\theta \in \mathbb{R}^N$ dintr-un set de eşantioane ale sale cuprinse în vectorul $y = \{y(t_i)\}_{i=1, M}$, $M < N$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_M \leq N$, în ipoteza că densitatea de eşantionare e suficient de mare pentru ca din eşantioane să poată rezulta o bază oblică în

B_w , conform T2.1

Proiecția lui θ în spațiul semnalelor de bandă limitată la $W: B_w$ este dată implicit de ecuația:

$$Y = H\theta \quad (2.35)$$

unde H este operatorul (matricea) din ecuația (2.20), iar θ rezultă conform celor expuse în par 2.2 drept:

$$\theta = H^T (HH^T)^{-1} Y = G^T Y = \sum_{i=1}^M \langle \theta, h_i \rangle g_i \quad (2.36)$$

Pseudoinversa G a operatorului H e greu de calculat pentru un N mare și deasemenea necesită cunoașterea tuturor eşantioanelor, adică cunoașterea completă a vectorului Y , nepermițînd astfel o soluție on line pentru θ . Totuși, observînd că θ este soluția de normă minimă a ecuației (2.35), putem aplica un algoritm iterativ de tip LMS pentru determinarea lui, ceea ce este echivalent cu a aplica algoritmul descris în paragraful 2.2.2. ecuația (2.19) pentru determinarea bazei oblice duale g_i , în care $2/(A+B)$ se înlocuiește cu μ , iar $S = H^T H$, unde $H\theta = Y$ este cunoscut ($\langle \theta, h_i \rangle = y(t_i)$ fiind cunoscute). Avantajul algoritmului iterativ este acela că putem introduce o funcție de "uitare", care să ne permită tratarea pe porțiuni a semnalului pe măsură ce acesta sosește, eşantioanele "vechi" fiind atenuate, iar cele "noi" amplificate. Să presupunem că dimensiunea ferestrei este $k \ll M < N$, și că la momentul t în intervalul $(t, t+k-1)$ sînt $M(t)$ eşantioane. Atunci o matrice de atenuare convenabilă ar fi F de dimensiune $M(t) * M(t)$:

$$F = \text{diag}\{1/M(t)\}_{i=1, \dots, M(t)} \quad (2.37)$$

Noul algoritm va fi algoritmul LMS ponderat cu ponderile din fereastra F . Soluția θ la ecuația (2.35) va fi găsită prin minimizarea normei lui θ în ipoteza existenței legăturii (2.35), ponderată cu fereastra F :

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{2} \theta^T \theta - (H\theta - Y)^T F \lambda \right\} = 0 \quad (2.38)$$

deci: $\theta = H^T F \lambda$

dar $H\theta = HH^T F \lambda = Y$ deci $\lambda = (HH^T F)^{-1} Y = (H(FH)^T)^{-1} Y$ deoarece F este o matrice simetrică. Rezultă:

$$\theta = H^T F (H(FH)^T)^{-1} Y \quad (2.39)$$

Soluția din ecuația (2.39) poate fi obținută iterativ, minimizând distanța ponderată între Y și $H\theta$ prin calcularea gradientului funcției eroare

$$J = (Y - H\theta)^T F (Y - H\theta) \quad (2.40)$$

$$\text{grad} J = \frac{\partial}{\partial \theta} (Y - H\theta)^T F (Y - H\theta) = -H^T F Y - (Y^T F H)^T + 2H^T F H \theta$$

$$\text{deci grad } J = -2[H^T F Y - H^T F H \theta]. \quad (2.41)$$

Vom utiliza acest algoritm pentru a recupera pe θ gradual într-o fereastră de lungime k , care se deplasează în sensul pozitiv pe axa timpului minimizând funcția eroare:

$$J_1 = (Y_1 - H_1 \theta_1)^T F (Y_1 - H_1 \theta_1) \quad (2.42)$$

Aici θ_1 este vectorul de dimensiune $(k \times 1)$ ce cuprinde semnalul în intervalul $(t, t+k-1)$, Y_1 este vectorul de dimensiune $(M(t) \times 1)$ ce cuprinde eșantioanele semnalului în același interval, F este matricea diagonală $(M(t) \times M(t))$ ce conține ponderile iar H_1 este matricea de dimensiune $(M(t) \times k)$ construită conform rel. (2.20) și care este reactualizată la fiecare pas.

Conform cu rel. (2.41) algoritmul iterativ va fi:

$$\begin{aligned} (\theta_1)_0 &= 0 \\ (\theta_1)_{n+1} &= (\theta_1)_n + \mu (H_1)^T F (Y_1 - (H_1) (\theta_1)_n) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Presupunând că fereastra F se deplasează în sens pozitiv pe axa reală, ceea ce corespunde sosirii eșantioanelor, pentru un k suficient de mare, algoritmul are timpul necesar pentru convergență, el lucrând de fapt în regim de urmărire a secvenței $F \cdot Y_1$, care se modifică prin apariția noilor eșantioane.

Dacă θ este un semnal staționar, eroarea de urmărirea se poate determina pe baza teoriei dezvoltate în paragraful 2.3. Să observăm că și în acest caz relațiile de tip 2.26 și 2.28 sînt valabile, adică funcțiile cvadri-dimensionale de autocorelație și deci densitate de putere pentru vectorul θ_1 sînt bidimensionale :

$$E(\theta_1(n, i)\theta_1(n', i')) = R_\theta(n+i-n'-i') = R_\theta(n-n', i-i'), \quad i, i' = \overline{1, K} \quad 2.44$$

cu R_θ și C_θ legate de relația:

$$R_\theta(n, i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_\theta(i, \omega) e^{j\omega n} d\omega, \quad n = \omega$$

(indicele 1 se poate lăsa la o parte deoarece θ_1 este o porțiune din θ deci relația 2.44 e corectă)

Pentru a determina eroarea trebuie să calculăm ca și în par. 2.3 funcția de transfer a algoritmului LMS. Notînd cu $A = E(H_1^T F H_1)$, parametrul μ satisface (conform teoriei algoritmului LMS [113])

$$\mu < \frac{2}{\lambda_{\max}}, \quad \lambda_i = \text{valori proprii pt. } A \quad (2.45)$$

pentru ca algoritmul să fie convergent. Deoarece $H_1^T F H_1$ este o matrice simetrică și A este la fel, deci poate fi diagonalizată în modul următor: $A = Q \Lambda Q^T$, Q fiind o matrice ortonormată (unitară) și Λ fiind matricea diagonală ce conține valorile proprii ale lui A . Rotind în (2.43) pe θ_1 cu matricea Q , deci $\theta^- = Q^T \theta_1$, vom obține:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{n+1, i} &= \tilde{\theta}_{n, i} + \mu \lambda_i (\tilde{\theta}_i - \tilde{\theta}_{n, i}), \quad i = \overline{1, K}, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_i) \\ \text{sau } \tilde{\theta}_{n+1, i} - \tilde{\theta}_{n, i} + \mu \lambda_i \tilde{\theta}_{n, i} &= \mu \lambda_i \tilde{\theta}_i \end{aligned}$$

unde $\tilde{\theta}_{n, i}$ se referă la componenta i din vectorul θ^- la momentul n , iar valoarea $\tilde{\theta}_i$ este valoarea dorită (urmărită) pentru această componentă.

Notînd $S_i(\omega)$ transformata Fourier a lui $\tilde{\theta}_{n, i}$ și $S_i^*(\omega)$ transformata Fourier a lui $\tilde{\theta}_i$, rezultă:

$$S_i^*(\omega) (e^{j\omega} - 1 + \mu \lambda_i) = \mu \lambda_i S_i(\omega)$$

deci:

$$\tilde{S}_i(\omega) - S_i(\omega) = \left(\frac{1 - e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 1 + \mu \lambda_i} \right) S_i(\omega), \quad i = \overline{1, K}$$

Privind algoritmul LMS ca pe un filtru digital cu intrarea $\tilde{\theta}_i$ și ieșirea $\tilde{\theta}_i(n) - \tilde{\theta}_i$ funcția de transfer a acestui filtru este:

$$G_i(\omega) = \frac{\tilde{S}_i(\omega) - S_i(\omega)}{S_i(\omega)} = \frac{1 - e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 1 + \mu\lambda_i}, \quad i = \overline{1, k}$$

Dacă semnalul de la intrarea în algoritmul LMS are densitatea de putere $C_\theta(i, \omega)$, atunci puterea erorii la ieșirea din acest sistem va fi chiar puterea erorii de neurmărire adică în cazul nostru puterea erorii de reconstrucție:

$$P = \sum_{i=1}^k E\{|\theta_{n,i} - \tilde{\theta}_i|^2\} = \sum_{i=1}^k \int_{-\pi}^{\pi} |G_i(\omega)|^2 C_\theta(i, \omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

Cum rotirea cu matricea unitara Q nu modifică puterea semnalului (adică $\|Q^T \theta\| = \|\theta\|$, înseamnă că puterea P de mai sus este chiar puterea care ne interesează. Trebuie însă să determinăm pe $C_\theta(i, \omega)$ în funcție de $C_\theta(i, \omega)$. Notînd cu q_i coloanele matricii unitare Q care rotește pe θ obținem:

$$R_{\theta_i} = E\{q_i^T \theta \theta^T q_i\} = q_i^T R_\theta q_i$$

sau, trecînd în domeniul frecvență:

$$C_\theta(i, \omega) = |q_i(\omega)|^2 C_\theta(i, \omega)$$

unde $q_i(\omega)$ sînt tocmai filtrele proprii ale transformării Q . Cu aceasta relația de determinare a puterii erorii de neurmărire devine:

$$P = \sum_{i=1}^k \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1 - e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 1 + \mu\lambda_i} \right|^2 |q_i(\omega)|^2 C_\theta(i, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.46)$$

Semnificația relației 2.46 este aceea că în cazul în care se cunosc distribuția momentelor de eșantionare (adică baza oblică în care este descompus semnalul), tipul ferestrei de uitare și proprietățile statistice ale semnalului se poate determina apriorii eroarea cu care algoritmul LMS alunecător reface semnalul.

2.4.2 Rezultate experimentale.

Algoritmul LMS a fost aplicat la reconstrucția unor semnale staționare din eșantioane prelevate neregulat. În fig.2.16 se

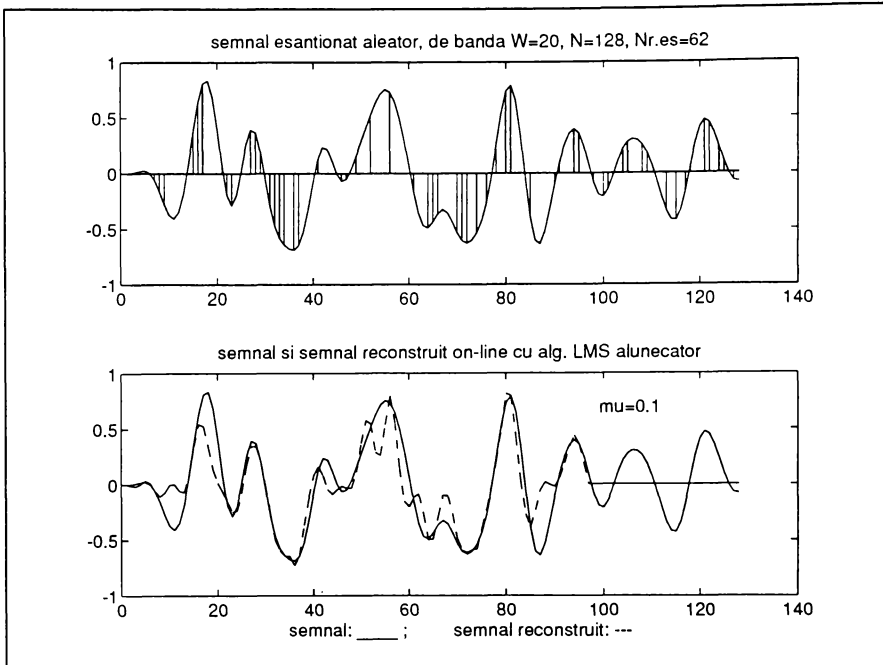


fig.2.16 fig.2.17

prezintă un semnal cu lărgimea de bandă $W=20$ (zgomot alb filtrat) ($N=128$) eșantionat aleator în $Nr.es=62$ puncte, astfel încât condițiile din Teorema 2.1 (par.2.2.4) sînt respectate și liniile matricii H din rel. 2.20 constituie o bază oblică pentru spațiul B_w .

Semnalul inițial și semnalul reconstruit sînt reprezentate în fig.2.17 și se observa buna concordanță între cele doua semnale. Valoarea parametrului μ a fost 0.1 iar lungimea ferestrei F alunecatoare a fost de 32 (ceea ce se poate observa la sfîrșitul reconstrucției, aceasta facîndu-se on-line). În fig 2.18 se prezintă un nou semnal de bandă mai largă $W=35$ ($N=128$) care a fost eșantionat într-un numar insuficient de puncte $Nr.es=54$. De data aceasta se observa că reconstrucția nu mai poate avea loc, punctele de eșantionare nemaiconducînd la o bază oblică în spațiul din care provine semnalul. În fig. 2.20 procesul de reconstrucție a fost simulat variînd în matricea H (rel. 2.20) parametrul W (lărgimea de bandă în care se face reconstrucția, proiecția) iar eroarea de reconstrucție a fost determinată experimental și deasemenea calculată cu rel. 2.46. Se observă o bună concordanță între teorie și experiment. La o lărgime de bandă W mică eroarea care se face

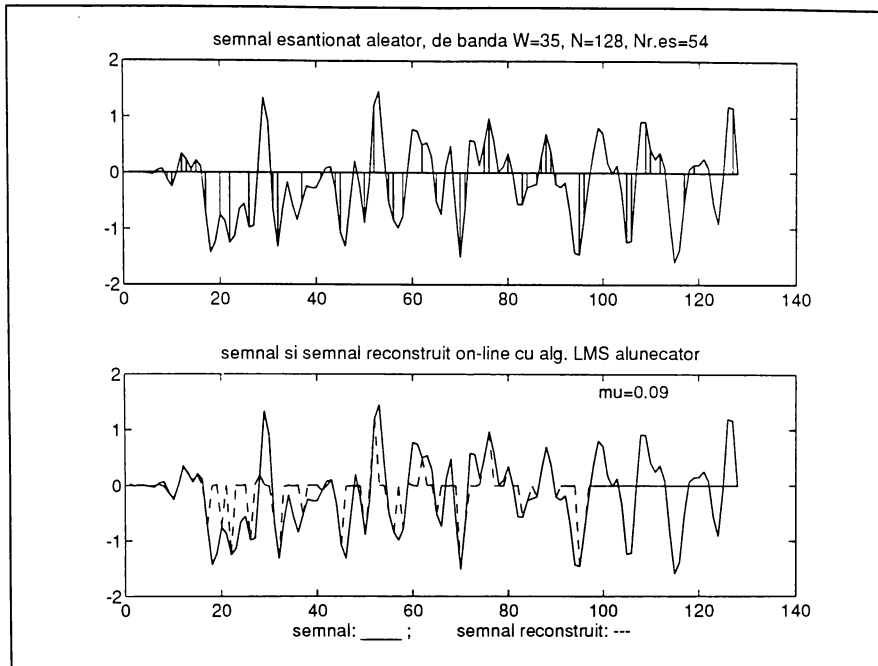


fig.2.18 fig.2.19

este mare deoarece se obține doar proiecția semnalului în banda W a semnalului, iar la valori mari pentru W eroarea crește din nou datorită faptului că liniile matricii H nu mai constituie o bază oblică în spațiul în care dorim reconstrucția. Rezultatele din acest paragraf constituie de fapt verificarea directă a teoremei 2.1 din paragraful 2.2.4. Subrutinele utilizate la experimentare aparțin limbajului MATLAB și sînt prezentate (cele mai importante) în Anexă.

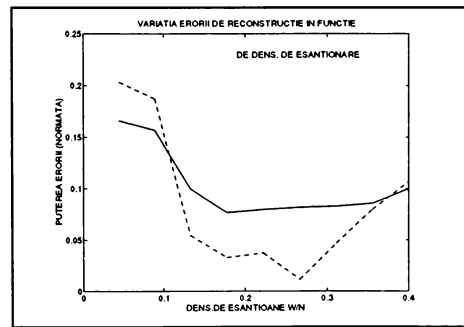


fig.2.20: eroarea de reconstrucție a unui semnal din eşantioane prelevate aleator, funcție de dens. de eşantionare
teorie:— experiment:----

2.5 Rezumat și concluzii.

Acest capitol prezinta o extindere a Teoremei WKS în sensul

luării în considerare a posibilității de refacere a semnalului din eșantioane prelevate în mod neregulat. Utilizând teoria spațiului Hilbert și observînd că atât $L^2(\mathbb{R})$ cît și $L^2(\mathbb{Z})$ precum și subspațiile lor conținînd semnale de bandă limitată au structura acestui tip de spațiu, se introduce noțiunea de baza oblică ca suport al descrierii semnalelor eșantionate neregulat. Autorul transpune problema refacerii semnalului din domeniul continuu, unde ea este studiată pentru un număr finit, mic de puncte de eșantionare, în domeniul discret (par 2.2.3), prelucrările de semnal făcîndu-se oricum în acest domeniu. Se face observația că reconstrucția unui semnal revine la a calcula baza oblică duală și se prezintă un tip de aplicație liniară (matrice) ale carei linii formează o astfel de bază, cu ajutorul căreia reconstrucția se face în spațiul semnalelor de bandă limitată. Observînd că pseudoinversa acestei matrici se poate obține cu ajutorul unui algoritm iterativ de tip LMS autorul studiază proprietățile algoritmului în regim de urmărire calculînd expresia erorii de urmărirea în funcție de proprietățile statistice ale semnalului staționar (funcția de împrăștiere) și urmărind validitatea acestei expresii în cazul clasic al identificării sistemelor liniare variabile în timp (par.2.3). Autorul aplică apoi acest algoritm la refacerea on-line a semnalelor din eșantioane prelevate neregulat depășind astfel problema care apare în general în literatură datorată necesității cunoașterii tuturor eșantioanelor înainte de începerea procedurii de refacere (par.2.4). Aspectele prezentate în paragrafele amintite constituie subiectul a două lucrări publicate în SUA la IEEE 5'th Digital Signal Proc. Workshop, Starved Rock Lodge, Illinois. Sept 1992 respectiv la IEEE Internat. Conference on Acoustics Speech and Signal Proc., aprilie 1993, Minneapolis, [40] și [41].

Experimentele realizate arată utilitatea algoritmului iterativ propus și concordanța cu aspectele teoretice, precum și posibilitatea efectivă a reconstrucției on-line. Procedeu aplicat în acest capitol semnalelor staționare și metodele de descriere a semnalelor studiate aici vor fi extinse în capitolul următor pentru semnale oarecare, prin adoptarea unor baze oblice mai generale: baze de undișoare.

Capitolul 3. Metoda de eșantionare adaptivă și reconstrucție on-line a semnalelor din L^2 utilizând baze oblice de undișoare.

3.1. Introducere

Scopul acestui capitol este de a construi un algoritm de eșantionare adaptivă, adaptarea făcându-se la comportarea locală în frecvență a semnalului. De asemenea va fi construit și algoritmul de reconstrucție on-line (în timpul recepției) a semnalului eșantionat în mod neregulat.

În capitolul 2 ne-am rezumat la a reconstrui semnale din eșantioane prelevate neregulat, aleator, singura condiție pusă fiind aceea ca densitatea de eșantionare să fie suficient de mare astfel încât translatatele funcției $(\sin(2w+1)t_n\pi/N)/\sin(t_n\pi/N)$, $t_n \in \mathbb{Z}$ să constituie o baza oblică în spațiul B_w al șirurilor limitate în bandă la w . Această condiție nu e suficientă însă pentru a conduce la un criteriu de eșantionare adaptivă, chiar și pentru faptul că funcția de mai sus conform principiului incertitudinii fiind foarte bine localizată în frecvență, este slab localizată în timp. De aceea în cele ce urmează vom utiliza baze oblice și baze ortonormate construite pe baza unei funcții ce realizează un compromis mai bun între localizarea în frecvență și în timp. Această funcție notată cu ψ , cu suport compact, este numită undișoară pentru faptul că $\int \psi dt = 0$, adică oscilează un anumit timp finit, fiind apoi amortizată. Aplicând translații, scalări și modulări acestei funcții obținem așazisele descompuneri atomare ale spațiului funcțiilor de energie finită [38]. Noi ne vom rezuma însă doar la grupul transformărilor afine (translatare și scalare) care va constitui un cadru natural pentru o eșantionare adaptivă, deoarece scalatele funcției undișoară vor explora (prin intermediul produsului scalar) detalii din ce în ce mai fine ale semnalului de analizat. De fapt există undișoare care pot sta la baza construcției unei baze ortonormate pentru $L^2_{(R)}$ formate din funcții cu suport compact, astfel încât vom putea realiza în acest capitol reconstrucția "on line" a unui semnal din eșantioanele sale extrase neregulat, tocmai din cauza limitării în timp a funcțiilor care

formează baza de descompunere. Avantajul undișoarelor rezidă în faptul că există o modalitate rapidă de a calcula coeficienții Fourier ai descompunerilor (algoritmul Fast Wavelet Transform FWT) la diferite scări prin iterarea unor bănci de filtre. Filtrarea multicanal va oferi o metodă de construcție atât a bazelor ortonormale, cât și a acelor oblice de undișoare.

Construcția bazelor de undișoare din paragraful 3.2 este conformă cu [1], [29], [51], [109], dar conține și demonstrații proprii (umpleri de goluri) și observații făcute de autor, scoase în evidență prin numerotare și caractere grafice deosebite. În par. 3.3 autorul construiește pe baza teoriei prezentate un algoritm de eșantionare adaptivă împreună cu algoritmul iterativ de recuperare a semnalului din eșantioane, amîndouă originale, verificînd experimental performanțele algoritmului. Se dovedește și în acest mod justetea afirmațiilor făcute.

3.2 Construcția bazelor oblice și ortonormate de undișoare cu suport compact

3.2.1 Baze oblice și metode de ortonormare

Subspațiul din L^2 generat de combinațiile liniare ale traslatatelor funcției sinc: $\text{sinc}_n(x) = \sin \pi(x-n) / \pi(x-n)$, $n \in \mathbb{Z}$ este subspațiul ("fișia") funcțiilor limitate în bandă la π , B_π^2 . Să notăm acest subspațiu cu V_0 :

$$V_0 = \{ v : v(x) = \sum_k c(k) \text{sinc}(x-k), c \in l_2 \}$$

Atunci seria cardinală are de fapt semnificația aproximării patratice minime (least square LS) a spațiului L^2 în V_0 (de fapt a proiecției ortogonale ale lui L^2 în V_0):

$$g_0(x) = \sum_k (g * \text{sinc})(k) \text{sinc}(x-k)$$

unde g_0 este proiecția lui $g \in L^2$ în V_0

Să utilizăm în loc de sinc, o funcție generatoare oarecare ϕ numită funcție scară. Subspațiul V_0 generat de această funcție va fi:

$$V_0(\varphi) = \{ v: v(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \varphi(x-k), c \in L_2 \}$$

În mod evident în spațiul V_0 , $\varphi \in L^2$ generează o bază oblică: $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\varphi_k(x) = \varphi(x-k)$ cu proprietatea că baza este formată din translatatele unei singure funcții. Pentru a calcula proiecția g_0 a unei funcții g în spațiul V_0 trebuie determinată baza duală lui $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Propoziția 3.1 [1]: Baza oblică cautată este formată din

$$\begin{aligned} \text{translatatele funcției: } \varphi^0(x) &= ((\varphi^* \varphi')^{-1} * \varphi)(x) \\ (\varphi'(t) &= \varphi(-t)) \end{aligned}$$

Demonstrație (1):

Să considerăm următorul operator:

$$(Hf)_{k \in \mathbb{Z}} = \langle f(\cdot), \varphi(\cdot - k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}} = \int f(x) \varphi(x-k) dx = h(k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

H fiind chiar operatorul bazei oblice $\{\varphi_k\}$. Dar

$$f(x) * \varphi'(x) = f(x) * \varphi(-x) = \int f(\tau) \varphi(\tau - x) d\tau = h(x)$$

$$\Rightarrow (Hf)_{k \in \mathbb{Z}} = \langle f(\cdot), \varphi(\cdot - k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}} = (f * \varphi')(k) \text{ și } Hf = f * \varphi'$$

Adjunctul lui H se determină din $\langle Hf_1, f_2 \rangle = \langle f_1, H^* f_2 \rangle$, deci

$$(f_1 * \varphi') * f_2 = f_1 * (\varphi * f_2) \Rightarrow H^* f = f * \varphi$$

Cu aceasta din (2.7) rezultă că baza duală $\{\varphi^0\}_k$ poate fi determinată prin:

$$\varphi^0 = (H^* H)^{-1} \varphi$$

Însă $(H^* H)^{-1} f = (\varphi * \varphi')^{-1} * f$, unde prin a^{-1} înțelegem acea funcție care satisface relația $((a^{-1} * a)(t) = \delta(t))$. Acest fapt rezultă din:

$$(H^* H)^{-1} H^* H f = (\varphi * \varphi')^{-1} * \varphi * \varphi' * f = f$$

Din aceste considerații rezultă formula de reconstrucție a unei funcții oarecare g în spațiul V_0 :

$$g_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (g * \varphi^0')(k) \varphi(x-k) \tag{3.1}$$

Formula (3.1) ne permite să interpretăm proiecția lui g în fișia V_0 ca o prefiltrare a lui g cu funcția răspuns la impuls $\varphi^0(-x)$ urmată de eșantionare. Eșantioanele $(g * \varphi^0')(k)$ permit apoi aflarea aproximării în sensul LS a lui g în V_0 cu ecuația (3.1), adică prin filtrare cu funcția răspuns la impuls $\varphi(x)$.

Funcției scară φ i se conferă încă o proprietate suplimentară, și anume aceea de a genera o analiză multirezoluție. Așa cum a fost definită în [29] [73] [73], o structură multirezoluție (AMR) pentru L^2 este o succesiune de subspații V_j care satisfac relațiile:

- a) $V_j \subset V_{j-1}$
 b) $\bigcup V(j) = L^2$, $\bigcap V(j) = 0$
 c) $f(x) \in V(j) \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j-1}$
 d) $f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x-k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$
 e) \exists o funcție $\varphi(x) \in V_0$ a.f. $\{\varphi(x-h)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ să fie o Bob. exactă pt. V_0

(Ultima condiție mai poate fi pusă și sub forma: există un izomorfism de la V_0 la l^2 astfel încât $T: V_0 \rightarrow l^2$, $T(e_k) = \varepsilon_k$, cu $\varepsilon_k = 1$ în k și 0 în rest, (e_k) Bază oblică din V_0 .)

Relativ la o astfel de structură, o analiză multirezoluție $\{\dots, s(-1), s(0), s(1), \dots\}$ a unui semnal s din L^2 constă din proiecțiile ortogonale (aproximările în sens LS) ale semnalului s în spațiile V_j . Dacă $i < j$, s_i poate fi privit ca o aproximare mai fină decât s_j , astfel încât alegînd un spațiu suficient de larg V_j , putem aproxima semnalul s cu acuratețea dorită. Un rezultat important în [29] spune că $\{2^{-j/2} \varphi(2^{-j} x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este o bază oblică exactă pentru V_j . Vectorii

bazei sînt obținuți prin dilatarea și translatarea unui singur vector. Asociat spațiului V_j este spațiul undișoarelor W_j care este definit ca fiind complementul ortogonal al lui V_j în V_{j-1} :

$$W_j \oplus V_j = V_{j-1} \quad (3.2)$$

Similar cu V_j , W_j poate fi generat de o bază oblică exactă indusă de undișoara $\psi: \{2^{-j/2} \psi(2^{-j} x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, unde ψ depinde de funcția scară φ

într-un mod expus ulterior în propoziția 3.2. Conform construcției din formula (3.2), rezultă că diferența dintre aproximările succesive s_j și s_{j-1} ale unei funcții s este dată de proiecția ortogonală a lui s în W_j . Înseamnă că $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ constituie o sumă directă a spațiului L_2 :

$$L^2 = \bigoplus_j W_j = \dots \oplus W_1 \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus \dots \quad (3.3)$$

Deci o funcție din L^2 poate fi reprezentată prin coeficienții proiecțiilor în spațiile $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, aceasta constituind cea ce se

numește Transformata Undișoară Discretă (TUD). Dacă analiza începe de la o anumită rezoluție, atunci conform formulei (3.2) relația (3.3) poate fi înlocuită cu:

$$L^2 = V_j \oplus W_j \oplus W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-3} \oplus \dots \quad (3.4)$$

Este evident că nu orice funcție scară dă naștere la o AMR. Pentru aceasta, o funcție λ trebuie să satisfacă relația $V_0 \subset V$, adică:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \sum C_n \lambda(2x-n) \\ \text{adica } \lambda(x) &= (C * \lambda)(2x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dacă pentru început nu interesează ca funcția λ să dea naștere unei baze ortonormale pentru V_0 , ci doar unei baze oblice, construcția lui λ poate porni de la o secvență c_n cu transformata Fourier

$$\hat{c}(\omega) = \sum_k C_k e^{-j\omega k} . \text{ Conform relației (3.5):}$$

$$\hat{\lambda}(\omega) = \hat{c}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\lambda}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

și iterînd această relație, rezultă:

$$\hat{\lambda}(\omega) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \hat{c}\left(\frac{\omega}{2^i}\right) \right) \hat{\lambda}(0) \quad (3.6)$$

Normînd funcția $\lambda(x)$ în sensul $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x) dx = \hat{\lambda}(0) = 1$ și introducînd

o condiție de regularitate pentru $\hat{\lambda}(\omega)$:

$$\hat{\lambda}(\omega) = O(|\omega|^{-1-\epsilon})$$

astfel încît $\lambda(x)$ să fie o funcție continuă (deoarece din $\omega \hat{\lambda}(\omega) \rightarrow 0$ pentru $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \hat{\lambda}(\omega)$ este integrabilă $\Rightarrow f(t)$ este continuă) se obține din (3.6) o funcție scară care dă naștere unei AMR, fără ca $\{\lambda\}_k$ să fie o bază ortonormală pentru subspațiul V_0 . De fapt funcția scară λ nu este singura care generează "fișia" V_0 . Orice funcție scară obținută prin convoluția lui λ cu un operator de convoluție

inversabil, $p(k)$ pe l_+ , conduce tot la aceeași AMR: $V_i(\lambda) = V_i(\varphi)$, unde

$$\varphi(x) = (p * \lambda)(x) \quad (3.7)$$

Observatie: Dacă construcția lui λ e dată de:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \lim_{l \rightarrow \infty} y_l(x) \\ y_l(x) &= \sum_{n=-l}^l c(n) y_{l-1}(2x-n) \\ Y_0 &= \mathcal{X}_{[-1/2, 1/2]} \end{aligned}$$

ceea ce corespunde cu ecuația (3.6), pentru că

$$\hat{\lambda}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\omega}{2^n}}{\frac{\omega}{2^n}} = 1$$

atunci, utilizînd pentru $c(n)$ o secvență finită, se obține drept funcție scară o funcție cu suport compact, deoarece atît y_0 cît și c_n au suport compact [29]. Considerînd că $h(n)$ are valori cuprinse între N_- și N_+ , iar pentru limitele lui y_0 notate cu $N_{0-} = -1/2$, $N_{0+} = 1/2$, rezultă $N_{l-} = 1/2(N_{l-1-} + N_-)$ și $N_{l+} = 1/2(N_{l-1+} + N_+)$ de unde

$$N_{l-} \rightarrow N_- \text{ , iar } N_{l+} \rightarrow N_+ \text{ .}$$

O bază formată din elemente cu suport compact are o deosebită importanță pentru reconstrucția "on line" perfectă a semnalului eșantionat, deoarece astfel un eșantion are o influență limitată la suportul vectorului din bază, permițînd reconstrucția semnalului pe măsura ce eșantioanele ajung la recepție, fără a fi nevoie de toate eșantioanele pentru a obține local semnalul, ca în cazul bazelor formate din funcții ce se extind de la minus la plus infinit, cum sîr fi $\text{sinc}(x)$.

Relația (3.7) reprezintă de fapt o relație de echivalență, două funcții scară fiind în aceeași clasă de echivalență atunci cînd generează aceeași AMR. Printre aceste funcții se poate găsi una care generează o bază ortonormală pentru V_0 . Fie p inversul operatorului radical din funcția de autocorelație $a(k)$ a lui φ [1]:

$$p(k) = (a)^{-1/2}(k)$$

unde $a(k) = (\lambda * \lambda')(k)$ și $a(k) = (a^{1/2} * a^{1/2})(k)$. Pentru acest p în relația (3.7) se obține o funcție scară, ale cărei translate generatează o bază ortonormată în V_0 :

$$\varphi(x) = (p * \lambda)(x) \tag{3.8}$$

Demonstratie (2) (a): Să arătăm că $\langle \varphi(\cdot), \varphi(-k) \rangle = \delta_k$. Dar:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\cdot), \varphi(-k) \rangle &= (\varphi * \varphi')(k) = (p * \lambda * p' * \lambda')(k) = \\ &= (p * p' * \lambda * \lambda')(k) = [(\lambda * \lambda')^{-1/2} * (\lambda' * \lambda)^{-1/2} * (\lambda * \lambda')] (k) = \delta_k \end{aligned}$$

Demonstratie (b) (după o idee din [25]): O formă alternativă lui (3.8), mai propice determinării funcției scară cu proprietăți de ortogonalitate, se obține cu ajutorul formulei lui Poisson:

$$\mu \sum_k f(x + \mu k) = \sqrt{2\pi} \sum_k \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{\mu}\right) e^{j\frac{2\pi}{\mu} kx}$$

Trecînd de la f la f^\wedge (adică de la x la ω) și luînd un produs de două funcții în loc de f , obținem cu $F=f^\wedge, G=g^\wedge, \mu=2\pi$:

$$\sum_k F(\omega + 2k\pi) G(\omega + 2k\pi) = \sum_k (f * g)(k) e^{j\omega k}$$

punînd $f=\lambda, g=\lambda'$ și deoarece pentru λ real $\lambda^\wedge(\omega) = \lambda^\wedge(-\omega)$ rezultă:

$$\sum_k |\hat{\lambda}(\omega + 2k\pi)|^2 = \sum_k \langle \lambda(\cdot), \lambda(\cdot - k) \rangle e^{j\omega k} = \sum_k (\lambda * \lambda')(k) e^{j\omega k} \tag{3.10}$$

Deoarece $\lambda * \lambda'$ este o funcție pară, din (3.11) și aplicînd transformata Fourier relației (3.10) rezultă cu $P(\omega) = \sum_k p_k e^{-j\omega k}$

$$P(\omega)^2 \sum_k |\hat{\lambda}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

Deci o dată găsită o funcție scară printr-o relație de tipul (3.6), o funcție scară echivalentă care să genereze același spațiu V_0 poate fi determinată conform relației (3.8) prin:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\hat{\lambda}(\omega)}{\sqrt{\sum_k |\hat{\lambda}(\omega + 2k\pi)|^2}} \tag{3.11}$$

q.e.d.

De fapt condiția (e) din definiția AMR care spune că $\exists \varphi$ astfel încît

$$c_1 (\sum |\alpha_k|^2)^{1/2} \leq \|\sum \alpha_k \varphi(x-k)\| \leq c_2 (\sum |\alpha_k|^2)^{1/2} \tag{3.12}$$

este echivalentă [35], dacă se consideră $m(\omega) = \sum \alpha_k e^{-jk\omega}$, cu:

$$c_1 \left(\int_{2\pi} |m(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \leq \int_R |\sum \alpha_k e^{-j\omega k}|^2 |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \leq c_2 \int_{2\pi} |m(\omega)|^2 d\omega$$

Deoarece $m(\omega)$ e periodic cu 2π rezultă:

$$c_1 \|m\| \leq \sqrt{\sum_k \int_{2\pi} |m(\omega)|^2 |\phi(\omega + 2k\pi)|^2 d\omega} \leq c_2 \|m\|$$

Alegînd în mod particular $m(\omega)$ de exemplu: $m(\omega) = m_1(\omega - \omega_0)$ cu

$$m_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{0 \leq k < N} e^{j\omega k}, \quad \text{se obține notînd } |m_1(\omega)|^2 = k_1(\omega), \quad (\text{deoarece}$$

$$\|m\|^2 = 1)$$

$$c_1 \leq \sqrt{k_N} \sum |\phi(\omega + 2k\pi)|^2 \leq c_2$$

iar pentru $N \rightarrow \infty$ rezultă:

$$c_1 \leq (\sum |\phi(\omega + 2k\pi)|^2)^{1/2} \leq c_2 \quad (3.14)$$

Se observă că dacă $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este o bază ortonormală pentru V_0 , atunci

$$c_1 = c_2 = 1 \text{ în (3.12) și deci } \sum_k |\phi(\omega + 2k\pi)|^2 = 1, \text{ ceea ce este adevărat}$$

pentru ϕ din relația (3.10).

Să vedem în paragraful următor cum se construiește o AMR și funcțiile scară și undișoară aferente, astfel încît să obținem proprietățile de ortogonalitate a bazelor și suport compact pentru funcția generatoare.

3.2.2. Baze ortonormate de undișoare cu suport compact

În [29] se descrie găsirea unei funcții scară ϕ cu proprietăți de ortogonalitate în spațiul V_0 , care să genereze o AMR definită în paragraful anterior (condițiile (a)-(e)) pe baza relațiilor de incluziune $V_0 \subset V_{-1}$ și $V_0 \oplus W_0 = V_{-1}$.

Propoziție 3.2: (I. Daubechies)

Fie $h(n)$ o secvență din l^2 astfel încît:

- (i) $\sum_n |h(n)| n^\epsilon < \infty$ pentru un $\epsilon > 0$ oarecare
- (ii) $\sum_n h(n-2k)h(n-2l) = \delta_{kl}$
- (iii) $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$

și fie $m_0(\omega) = (1/\sqrt{2}) \sum_n h(n) e^{-jn\omega}$ cu

(iv) $m_1(\omega) = [1/2(1+e^{-j\omega})]^N [\sum_n f(n) e^{-jn\omega}]$ cu

(v) $\sum_n |f(n)| n^\epsilon < \infty$ pentru un $\epsilon > 0$

(vi) $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\sum_n f(n) e^{-jn\omega}| = B < 2^{N-1}$

(Observație: În loc de (iv) (v) (vi) putem pune mai simplu $\sum |h(n)| n^\epsilon < \infty$ pentru a asigura doar continuitatea lui $\phi(x)$.)

Definind:

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\omega) \quad (3.15)$$

atunci e adevărată relația:

$$\hat{\phi}(x) = \sqrt{2} \sum_n h(n) \hat{\phi}(2x-n) \quad (3.16)$$

și luind o secvență $g(n)$ în următorul mod:

$$g(n) = (-1)^n h(1-n) \quad (3.17)$$

și definind cu ajutorul acesteia o nouă funcție (undișoară):

$$\hat{\psi}(x) = \sqrt{2} \sum_n g(n) \hat{\phi}(2x-n) \quad (3.18)$$

atunci aplicînd operatorii de scalare și translație lui $\hat{\psi}$ și $\hat{\phi}$ se obțin familiile de funcții:

$$\{\phi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{2^{-j/2} \phi(2^{-j}x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{acoperire } \{\phi_{jk}\} = V_j \quad (3.19)$$

$$\{\psi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{2^{-j/2} \psi(2^{-j}x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{acoperire } \{\psi_{jk}\} = W_j \quad (3.20)$$

astfel încît ϕ_{jk} definesc o AMR pe L^2 și ψ_{jk} sînt baza ortonormală cu undișoare asociată. Faptul că ϕ_{jk} și ψ_{jk} au suport compact am văzut că se datorează faptului că $h(n)$ și deci $g(n)$ sînt de lungime finită, adică reprezintă răspunsul la impuls al unui filtru cu răspuns finit la impuls (FIR). Să vedem ce semnificație au celelalte condiții din Propozitia 3.2.

Relația (3.15) exprimă faptul că în cazul în care produsul infinit din $m_0(2^{-j}\omega)$ există, atunci funcția ϕ satisface o relație de recurență între două rezoluții, de tipul relației (3.16) (în ipoteza

că $\hat{\varphi}(0) = (1/\sqrt{2\pi}) \int \varphi(x) dx = 1/\sqrt{2\pi}$, deoarece din relația (3.16) rezultă:

$$\hat{\varphi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

care iterată conduce la relația (3.15). Relațiile (iv) (v) și (vi) introduc o proprietate de regularitate pentru funcția φ . Și anume [29] rezultă că:

$$\left| \prod_{i=1}^N m_0(2^{-i}\omega) \right| \leq C(1+|\omega|)^{-N \log_2 B}$$

adică pentru un $B < 2^{N-1}$, $\hat{\varphi}(\omega)$ este integrabilă cel puțin, adică $\varphi(t)$ este cel puțin continuă și mărginită în L^2 . Cu cât N este mai mare (cu cât sînt mai multe zerouri în $\omega = \pi$), cu atît $\omega^p \hat{\varphi}(\omega) \rightarrow 0$ pentru

un p mai mare și deci va crește gradul de regularitate al lui $\hat{\varphi}(t)$. ($\varphi(t) \dots \varphi'(t)$ sînt deasemenea continue.) Proprietatea de regularitate a funcției scară φ nu este însă o condiție neaparat necesară în domeniul strict al prelucrării digitale a semnalelor, unde de fapt lucrăm doar cu coeficienții dezvoltării semnalelor după baza generată de φ .

Deoarece din (3.18) și (3.17) avem:

$$|\hat{\varphi}(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n |h_n| \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|$$

rezultă că odată cu φ și ψ are aceleași proprietăți de regularitate, adică este mărginită, uniform continuă și aparține lui $L^1 \cap L^\infty \Rightarrow \varphi, \psi \in L^2$.

Proprietățile ce rezultă din condițiile puse sînt prezentate în continuare [29], [35], [109]. Condiția (ii) din prop. 3.2 se mai scrie:

$$\begin{aligned} \sum_n h(n-2k) h(n-2l) &= \sum_n h(n) h(n-2m) = \langle h(\cdot), h(\cdot) \rangle (2m) = \\ &= (h * h')(2m) = R(2m) = \delta_m \end{aligned} \quad (3.21)$$

unde R este funcția de autocorelație a secvenței h . Notînd cu $S(\omega)$

Transformata Fourier a funcției de autocorelație R și ținând cont de faptul că secvența pară a unei secvențe numerice are drept TF:

$$R(2m) = \frac{S(\omega) + S(\omega + \pi)}{2} = \frac{1}{2} (\sum R(n) e^{-jn\omega} + \sum R(n) e^{-jn\omega} e^{-j\pi n})$$

aplicând TF relației (3.21) se obține:

$$(S(\omega) + S(\omega + \pi)) / 2 = 1 \Rightarrow m_0(\omega) m_0^*(\omega) + m_0(\omega + \pi) m_0^*(\omega + \pi) = 1$$

deci:

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \tag{3.22}$$

Aceasta este de fapt relația de definiție a secvenței $h(n)$, relație care conduce la găsirea diverselor soluții pentru $h(n)$ (de fapt a parametrizării lui $h(n)$). Se observă că $m_0(0) = 1/\sqrt{2} \sum h(n) = 1$ (aici intervine condiția (iii)) și deci din (3.22) $m_0(\pi) = 0$, adică π este rădăcină pentru m_0 , deci m_0 e cel puțin divizibil cu $(1 + e^{-j\omega})$ ceea ce conferă o urmă de regularitate lui φ . De asemenea $m_0(\pi) = 0$ implică:

$$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g(n) = 0$$

adică, aplicând TF relației (3.18), rezultă $\psi^*(\omega) = \varphi^*(\omega) \sum_n g(n) e^{-jn\omega}$, deci $\psi^*(0) = 0$ sau $\int \psi(x) dx = 0$, tocmai proprietatea de undișoară amintită în introducere. m_0 este de fapt un filtru trece jos, cu $|m_0(\omega)| \leq 1 \ \omega \in (0, 2\pi)$. $g(n)$ produce o filtrare trece sus, deoarece:

$$m_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_n e^{-jn\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_{1-n} (-1)^n e^{-jn\omega} = e^{-j\omega} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{jn\omega} e^{j\pi n} \Rightarrow m_1(\omega) = e^{-j\omega} m_0^*(\omega + \pi) \tag{3.23}$$

De aici se poate deduce o relație de ortogonalitate între secvențele g și h în modul următor:

$$m_0(\omega) m_1^*(\omega) + m_0(\omega + \pi) m_1^*(\omega + \pi) = e^{-j\omega} m_0(\omega) m_0^*(\omega + \pi) + e^{-j(\omega + \pi)} m_0(\omega + \pi) m_0^*(\omega) = C$$

și utilizând transformata Fourier:

$$\sum_n g(n-2k) h(n-2l) = 0 \tag{3.24}$$

Cum relația (3.22) este adevărată și pentru m_1 (datorită relației

3.23 între m_1 și m_2 avem deasemenea:

$$\sum_n g(n-2k) g(n-2l) = \delta_{kl} \quad (3.25)$$

Cea de-a patra relație de legătură între h și g , de fapt o relație de reconstrucție care de asemenea provine doar din condiția (ii) și relația (3.17) este:

$$\sum_k [h(n-2k) h(m-2k) + g(n-2k) g(m-2k)] = \delta_{nm} \quad (3.26)$$

Demonstrație (3): să observăm că suma de mai sus se poate scrie cu $n-2k=t$:

$$\sum_{t=\text{par sau } t=\text{impar}} [h(t) h(t+n-m) + g(t) g(t+n-m)] = \delta_{nm}$$

respectiv:

$$\sum_{t \in \mathbb{Z} \text{ sau } t \in \mathbb{Z}+1} [h(t) h(t+m) + g(t) g(t+m)] = \delta_m$$

Aplicînd transformata Fourier relației de mai sus, unde termenul din stînga reprezintă funcția de autocorelație a subsirurilor pare respectiv impare ale lui h respectiv g , și notînd cu $H(\omega)$ și $G(\omega)$ transformatele Fourier ale lui h și g , obținem:

$$\frac{H(\omega) \pm H(\omega + \pi)}{2} \cdot \frac{H^*(\omega) \pm H^*(\omega + \pi)}{2} + \frac{G(\omega) \pm G(\omega + \pi)}{2} \cdot \frac{G^*(\omega) \pm G^*(\omega + \pi)}{2} = 1$$

(\pm în funcție de t par sau impar), deci din (3.23):

$$\frac{1}{2} [(m_0(\omega) \pm m_0(\omega + \pi)) (m_0^*(\omega) \pm m_0^*(\omega + \pi)) + e^{-j\omega} (m_0^*(\omega + \pi) \mp m_0^*(\omega)) e^{j\omega} (m_0(\omega + \pi) \mp m_0(\omega))] = 1$$

dar acest lucru este evident conform relației (3.22).

q.e.d.

Relațiile (ii), (3.17), (3.24), (3.25) și (3.26), împreună cu relațiile de definiție (3.16) și (3.18) stau la baza construcției unei AMR pe baza unei funcții φ ale cărei versiuni dilatate sau contractate (într-un cuvînt scalate) constituie baze ortonormate (prin intermediul translatatelor lor) în spațiile V_j .

Să considerăm că $V_j = \text{acoperire}\{2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$; atunci conform relațiilor (3.16), (3.18), (3.19), (3.20) rezultă:

$$\varphi_{jk} = \sum_n h(n-2k) \varphi_{j-1, n} \quad (3.27)$$

$$\psi_{jk} = \sum_n g(n-2k) \varphi_{j-1, n} \quad (3.28)$$

iar din aceste două relații, împreună cu relația (3.26) rezultă

(prin înlocuire directă):

$$\sum_k [h(m-2k) \varphi_{jk} + g(m-2k) \psi_{jk}] = \varphi_{j-1,m} \quad (3.29)$$

ultimele trei relații permițînd circulația între spațiile V_j și V_{j-1} .
Din relația (3.22) și (3.16) se deduce:

$$\sum_k |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

(demonstrația mai generală în cazul bazelor biortogonale se găsește în [25]), ceea ce, conform paragrafului 3.2.1. înseamnă că $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $k \in \mathbb{Z}$ constituie o bază ortonormată pentru V_0). Din relația (ii) și (3.27) rezultă:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{jk} \varphi_{jk'} \rangle &= 2^{-j} \int \varphi(2^{-j}x-k) \varphi(2^{-j}x-k') dx = \int \varphi(x) \varphi(x-k'+k) dx = \\ &= \delta_{kk'} = \sum_n h(n-2k) h(n-2k') \end{aligned} \quad (3.30)$$

adică pentru toate rezoluțiile (nivelele de analiză a semnalului: j) $\{\varphi_{jk}\}_k$ este o bază ortonormată pentru V_j .

Din relațiile (3.28) și (3.24) rezultă:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{jk}, \varphi_{jk'} \rangle &= \sum_{m,n} g(n-2k) h(m-2k') \langle \varphi_{j-1,n}, \varphi_{j-1,m} \rangle = \\ &= \sum_n g(n-2k) h(n-2k') = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

iar din (3.28) și (3.25):

$$\begin{aligned} \langle \psi_{jk}, \psi_{jk'} \rangle &= \sum_{m,n} g(n-2k) g(m-2k') \langle \varphi_{j-1,n}, \varphi_{j-1,m} \rangle = \\ &= \sum_n g(n-2k) g(n-2k') = \delta_{kk'} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Astfel relațiile (3.27) și (3.28) exprimă faptul că $V_j \subset V_{j-1}$, $W_j \subset V_{j-1}$, iar relația (3.29) împreună cu relația (3.31) conduc la concluzia: $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ și $V_j \perp W_j$. Deoarece $W_{j-1} \perp V_{j-1}$, deci $W_{j-1} \perp W_j$ și deoarece $\{\psi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază ortonormată în W_j , rezultă că $\{\psi_{jk}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}$ formează o bază ortonormată în $\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$. Dacă această sumă acoperă dens tot L^2 , atunci $\{\psi_{jk}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}$ sînt o bază ortonormată în L^2 , formată din translatele și scalatele unei singure funcții, construcția făcîndu-se pornind de la propozitia 3.2, de fapt prin găsirea

secvenței $h(n)$ sau echivalent, a polinomului trigonometric $m_*(\omega)$, care să satisfacă relația (3.22). În [29] se găsește demonstrația faptului că $\{\psi_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$ acoperă dens L^2 , deci că formează o bază oblică strânsă în L^2 , cu marginile $A=B=1$, adică $\forall f \in L^2$:

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{ij}, f \rangle|^2 = \|f\|^2$$

În acest moment f poate fi descompus în baza $\{\psi_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{F}}$ conform rel.3.3

$$f = \sum_j \sum_k \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk} = \sum_{j,k} b_{jk} \psi_{jk} \quad (3.33)$$

respectiv, conform relației 3.4:

$$f = \sum_k \langle f, \phi_{jk} \rangle \phi_{jk} + \sum_{i=j}^M \sum_k \langle f, \psi_{ik} \rangle \psi_{ik} = \sum_k c_{jk} \phi_{jk} + \sum_{i=j}^M \sum_k b_{ik} \psi_{ik} \quad (3.34)$$

Deasemenea proiecția ortogonală a lui f în spațiul $V_{j:-M} = V_j + W_j + W_{j-1} + W_{j-2} + \dots + W_{j-M}$ (deci cea mai bună aproximare LS a lui f în spațiul $V_{j:-M}$) se poate scrie:

$$f = \tilde{f} = \sum_k c_{jk} \phi_{jk} + \sum_{i=j}^{j-M} \sum_k b_{ik} \psi_{ik} \quad (3.35)$$

Figurile (3.1), (3.2) prezintă o bază ortonormată de undișoare incompletă, formată din $\phi_0, \psi_0, \psi_{-1}, \psi_{-2}, \psi_{-3}$, împreună cu spațiile $V_0, W_0, W_{-1}, W_{-2}, W_{-3}$, generate de acestea, cu ϕ_0 determinată pe baza lui $h(n) = 1/(4\sqrt{2}) [1 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$

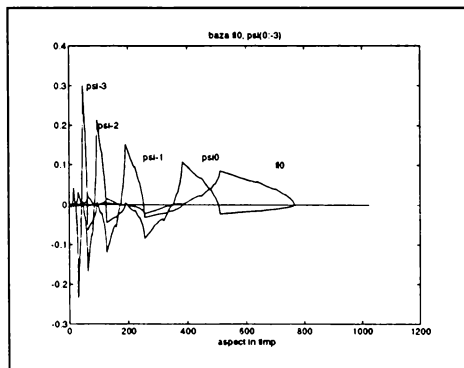


fig.3.1.: bază ortonormată de undișoare incompletă, formată din $\phi_0, \psi_0, \psi_{-1}, \psi_{-2}, \psi_{-3}$,

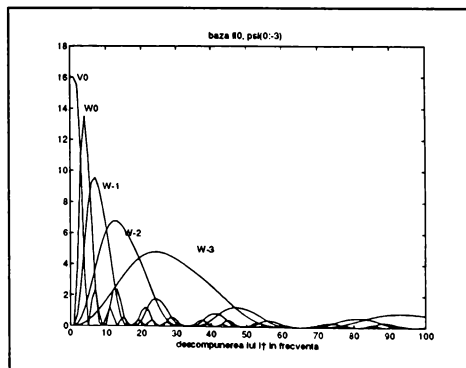


fig.3.2: descompunerea în frecvență a spațiului L^2 în subspații generate de undișoare

Formula (3.35) oferă un cadru natural pentru o eșantionare adaptivă în sensul urmator. Se observă că φ_0 explorează componentele de frecvență joasă din f , iar ψ_i componentele de frecvență cu atît mai înaltă cu cît i e mai mare. Deoarece

$$c_{0k} = \int f(x) \varphi_0(x-k) dx$$

$$c_{-1k} = \int f(x) \varphi_{-1}(x-k) dx = \sqrt{2} \int f(x) \varphi_0(2x-k) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int f\left(\frac{x}{2}\right) \varphi_0(x-\omega) dx$$

$$c_{-2k} = \int f(x) \varphi_{-2}(x-k) dx = \frac{1}{2} \int f\left(\frac{x}{4}\right) \varphi_0(x-k) dx \dots$$

rezultă că pentru același interval relativ la suportul funcției f există de două ori mai mulți coeficienți în W_{-1} decît în W_0 sau V_0 , de două ori mai mulți în W_{-2} decît în W_{-1} Faptul că ψ_{ik} sînt cu suport compact asigură într-adevăr o explorare locală a lui f .

Analiza în spații din ce în ce mai înalte se poate opri atunci cînd $b_{ik}=0$, ceea ce înseamnă de fapt $\int f(x) \psi(2^i x - k) dx = 0$, adică f nu variază în raport cu $\psi(2^i x)$, deci $\langle f, \psi_{ik} \rangle = \int f(x) \psi(x) dx = 0$. Aceasta conduce la o eșantionare adaptivă neregulată, în sensul că acolo unde f e de frecvență mai înaltă, coeficienții din dezvoltarea (3.35) vor fi mai denși, iar acolo unde f coboară în spații de frecvență mai joasă, pot fi calculați mai puțini coeficienți. În paragraful 3.3 vom vedea cum acești coeficienți pot fi înlocuiți chiar de către eșantioanele semnalului la momentelele kT , $kT/2$, $kT/4$, De fapt ceea ce ne interesează în transmiterea semnalului (sau stocarea sa) sînt aceste eșantioane prelevate după un anumit algoritm (par 3.3), care, cunoscînd funcțiile φ și ψ , pot servi la reconstrucția semnalului.

Avantajul determinant al bazelor de undișoare este că TUD (transformarea undișoară discretă) poate fi calculată prin filtrare, fără a construi separat funcțiile φ și ψ în scopul efectuării produselor scalare. Ținînd cont de relațiile de ortogonalitate dintre funcțiile ψ_{jk} și φ_{jk} , se obține din (3.27):

$$\langle f, \varphi_{jk} \rangle = \sum_n h(n-2k) \langle f, \varphi_{j-1,n} \rangle \quad \text{decîi}$$

$$c_{jk} = \sum_n h(n-2k) c_{j-1,n} \tag{3.36}$$

din (3.28):

$$b_{jk} = \sum_n g(n-2k) c_{j-1,n} \tag{3.37}$$

din (3.29):

$$c_{j-1,n} = \sum_k h(n-2k) c_{j,k} + \sum_k g(n-2k) b_{jk} \tag{3.38}$$

Cele trei ecuații de mai sus reprezintă algoritmul pentru calculul TUD.

Dacă notăm cu $(Ha)(k) = \sum_n h(n-2k) a_n$, operatorul $H: l^2 \rightarrow l^2$ de filtrare cu $h(n)$ apoi de decimare cu 2, cu $(Ga)_k = \sum_n g(n-2k) a_n$, operatorul $G: l^2 \rightarrow l^2$ de filtrare cu $g(n)$ și decimare cu 2, adică:

$$Ha = (h * a) \downarrow 2$$

$$Ga = (g * a) \downarrow 2$$

atunci operatorii adjuncți vor fi $H^* a = a \uparrow 2 * h' = \sum_k h(n-2k) a_k$ și $G^* a = a \uparrow 2 * g' = \sum_k g(n-2k) a_k$, adică interpolare cu 2 (umplere cu 0 în poziții impare) urmată de filtrare, deoarece:

Demonstrație (4):

$$\begin{aligned} \langle Ha, b \rangle &= \langle \sum_n h(n-2k) a_n, b \rangle = \sum_{k,n} h(n-2k) a_n b_k = \\ &= \sum_n a_n \sum_k h(n-2k) b_k = \langle a, H^* b \rangle \end{aligned}$$

q.e.d.

Cu aceasta cele trei relații (3.36), (3.37), (3.38) pot fi privite ca o descompunere și reconstrucție perfectă a unui semnal f cu filtrele h și g , numite filtre conjugate în cuadratură (CQF)

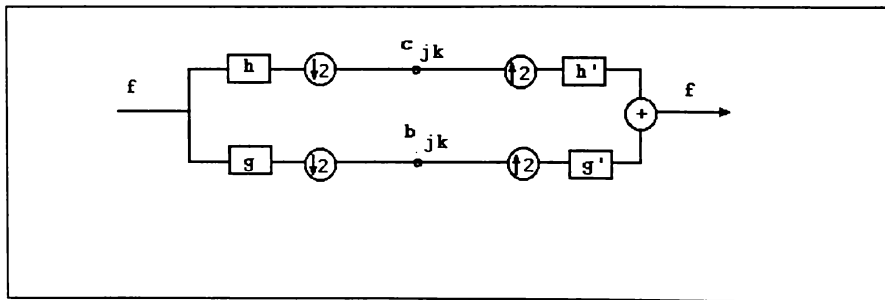


fig.3.3.: implementarea analizei pe baza de undișoare cu filtre conjugate în cuadratură

prezentate în fig.3.3 [95] (unde f a înlocuit secvența $c_{j-1,n}$ care reprezintă de fapt aproximarea lui f în spațiul V_{j-1})

Cele trei relații pot fi iterate însă pînă la rezoluția dorită,

astfel că proiecția ortogonală a unui semnal f în spațiile $V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots$ se aproximează cu structura din figura 3.4.

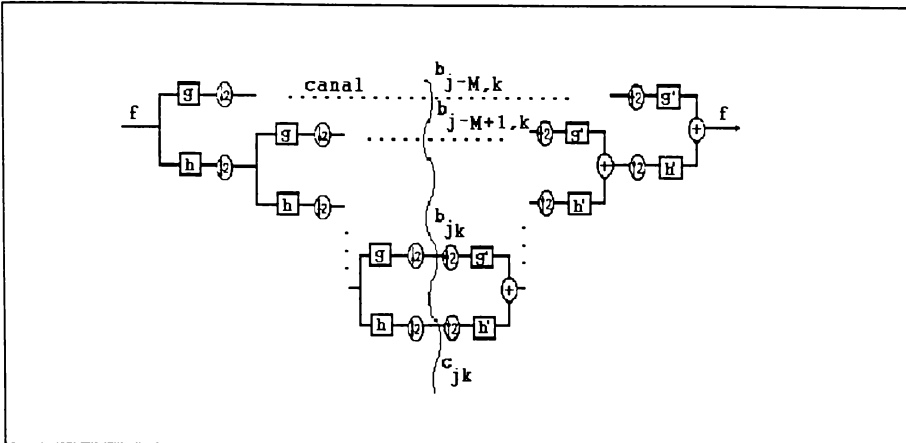


fig.3.4.: iterarea structurii din fig.3.3 pentru obținerea unei analize multirezoluție.

Am folosit termenul de aproximare, deoarece lucrând de fapt în domeniul deja discretizat al semnalelor din l^2 , calculul produsului scalar $(f * \varphi_j)(k)$ se înlocuiește cu următorul produs: $((f * h) \downarrow 2 * h) \downarrow 2 * \dots * h) \downarrow 2$ (de M ori), adică sînt valabile aproximările (cu referire la rel. 3.35):

$$\varphi_j(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{k=1}^M m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right), \quad M < \infty, \quad \psi_j \approx ((h * h \downarrow 2 * \dots * g \downarrow 2^{(M-1)}), \quad \psi_{j-M} \approx g$$

Dar acest lucru nu deranjează, deoarece oricum lucrăm în spațiul l^2 în loc de L^2 în cazul prelucrării digitale, deci oricum f este preeșantionat, adică de bandă limitată, deci se află într-un V_j , ceea ce înseamnă că toată informația este cuprinsă în coeficienții c_{jk} , iar filtrele sînt cu reconstrucție perfectă. De fapt în loc să lucrăm cu baza $\{\psi_{jk}\}$ în L^2 , lucrăm cu baza $\{h(n-2k), g(n-2k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ și iteratele ei în l^2 . Exemplul din fig. 3.4 este construit pe baza a 8 iterații (nivele de analiză) astfel încît baza utilizată este:

$$\{(g), (h * g \downarrow 2), \dots, (h * h \downarrow 2 * \dots * h \downarrow 2^6 * g \downarrow 2^7), (h * h \downarrow 2 * \dots * h \downarrow 2^7)\} \quad (3.39)$$

(cu observația că decimare, urmată de convoluție este identică cu interpolare, urmată de convoluție, urmată de decimare)

Dacă ne imaginăm că între analiză și reconstrucție se află un canal de transmisiune (figura 3.4), procedeul de mai sus revine la înlocuirea transmisiei a N eșantioane din semnalul f în intervalul T cu transmisia în același interval de timp a $N/2$ coeficienți ai produsului scalar al lui f cu Ψ_{i-M} (care caracterizează proiecția lui f în spațiul corespunzător frecvențelor celor mai înalte, W_{i-M} , vezi fig.3.2), plus $N/4$ coeficienții din spațiul W_{i-M+1} , plus...plus $N/2^N$ coeficienți din spațiul W_i și $N/2^N$ coeficienți din spațiul V_j . Rezultă că numărul de valori ce trebuie transmise (sau memorate) este același, doar că într-o astfel de analiză putem renunța la acei coeficienți apropiați de zero, care semnalează faptul că f nu are componente într-un anumit spațiu, obținînd astfel o reducere a cantității de informație transmisă. Dacă între spațiul eșantioanelor semnalului inițial și cel al coeficienților transformării undișoară se găsește o aplicație bijectivă, acest lucru poate sta la baza unei eșantionări adaptive, așa cum autorul va arăta în paragraful 3.3.

Procedeul nu se rezumă doar la teorie, deoarece filtrele sînt cu răspuns finit la impuls (FIR), adică implementabile (deoarece baza a fost formată cu undișoare cu suport compact), iar reconstrucția este fără nici o dificultate, "on line", fiind vorba de fapt tot de o filtrare.

Rămîn de determinat secvențele $h(n)$ care conduc la relațiile de ortogonalitate descrise în acest paragraf. De fapt trebuie găsite soluții FIR pentru ecuația (3.22) pe care o reamintim aici:

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$$

(de fapt această relație semnifică faptul că densitatea spectrală de putere a semnalului analizat nu este afectată de trecerea prin sistemul de analiză bicanal).

O parametrizare a acestor soluții este dată în [29] dar va fi preferată cea din [51], de fapt echivalentă, și aceasta va fi expusă în paragraful 3.2.3. Această parametrizare conduce mult mai ușor la generalizarea analizei bicanal la o analiză multicanal a semnalelor și permite o mult mai ușoară și rapidă implementare practică a TUD. În analiza multicanal canalele h și g vor fi înlocuite cu canalele $h_0, h_1 \dots h_M$, unde h_0 va fi canalul de joasă frecvență iar h_i vor acoperi progresiv întreg spectrul de putere al semnalului, rezultînd o relație echivalentă relației 3.22. Cu cît

analiza semnalului se face pe mai multe canale și cu cît aceste canale sînt iterate de mai multe ori , cu atît analiza este mai fină și numărul de coeficienti diferiti de 0 scade, rezultînd astfel o compresie mai mare a semnalului, fapt probat în par 3.4 ce contine rezultatele experimentale.

3.2.3. Filtrați multicanal în analiza și reconstrucția semnalelor.
Baze de undișoare generalizate.

3.2.3.1. Sisteme bicanal

Fie sistemul bicanal din figura 3.5:

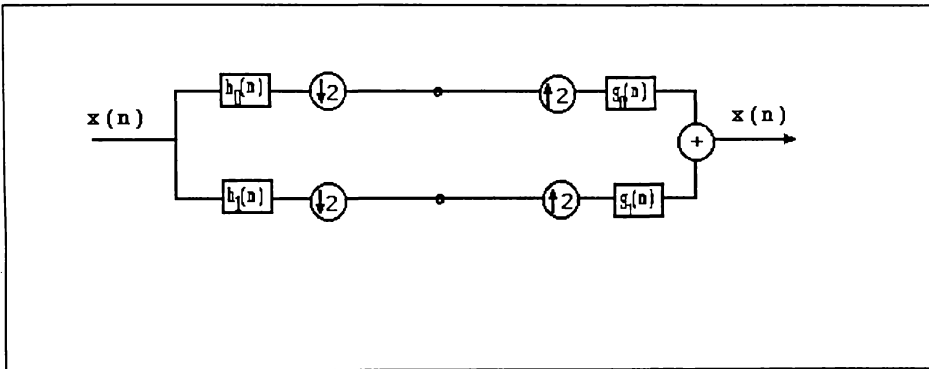


fig.3.5: sistem de filtrare bicanal cu reconstrucție perfectă

Trecînd la variabila (z) [109], decimarea, urmată de interpolarea cu 2 a unui semnal implică o transformare $x(z) \rightarrow (x(z) + x(-z))/2$ ($-z = e^{j(\omega+\pi)}$, vezi paragraful 3.2.2), astfel încît sistemul din fig.3.5 produce rezultatul (G_i și H_i sînt transformatele z pentru g_i și h_i):

$$\hat{x}(z) = \frac{1}{2} [G_0(z) G_1(z)] \begin{bmatrix} H_0(z) H_0(-z) \\ H_1(z) H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(z) \\ x(-z) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Notînd matricea din (3.40) cu $H_m(z)$ se spune că matricea $H_m(z)$ este paraunitară dacă:

$$H_m^T(z^{-1}) \cdot H_m(z) = cI \quad (3.41)$$

unde c este o constantă, iar coeficienții $h_i(n)$ ce intră în

componenta $H_i(z)$ sînt reali. Dacă $z=e^{j\omega}$, atunci $H(z^{-1})=H^*(z)$ și de fapt (3.41) reprezintă o generalizare (matricială) a noțiunii de filtru trece tot. Pentru ca matricea H_m să fie paraunitară trebuie ca:

$$H_i(z)H_i(z^{-1})+H_i(-z)H_i(-z^{-1})=cI, \quad i=0,1$$

$$H_0(z)H_1(z^{-1})+H_0(-z)H_1(-z^{-1})=0$$

Relațiile sînt satisfăcute în general dacă $H_i(z)=-z^{-1}A(z^2)H_0(-z^{-1})$, unde $A(z)$ este un filtru trece tot. Dacă se dorește o soluție FIR pentru cele două filtre, atunci $H_i(z)=-z^{-2i-1}H_0(z^{-1})$.

Alegînd $c=2$, $l=0$, cele două relații de mai sus reprezintă tocmai condițiile ((ii), (3.24), (3.25), respectiv (3.22) din paragraful 3.2.2. $H_i(z)H_i(z^{-1})$ fiind tocmai transformata (z) a secvenței de autocorelație a lui $h(n)$ rezultă:

$$\langle h_i(n), h_j(n+2m) \rangle = \delta_m \delta_{ij}, \quad i, j=0,1$$

Prin urmare $\{h_0(n+2l), h_1(n+2m)\}$ este o bază ortonormată în l^2 care generează o bază ortonormată de undișoare prin iterarea structurii din figura 3.5. Dacă H_m este paraunitară, pentru reconstrucția perfectă din relația (3.40) rezultă prin verificare imediată:

$$G_0(z)=H_0(z^{-1}) \text{ și } G_1(z)=H_1(z^{-1})$$

adică tocmai structura din figura 3.3.

Matricea H_m prezintă însă redundanță, deoarece coeficienții $h_0(n)$, $h_1(n)$ apar de două ori în expresia ei. Pentru a scăpa de această redundanță, se despart coeficienții pari de cei impari, adică se scrie:

$$H_i(z)=H_{i0}(z^2)+z^{-1}H_{i1}(z^2) \quad (3.42)$$

și se construiește matricea polifază:

$$H_P(z^2)=\begin{bmatrix} H_{00}(z^2) & H_{01}(z^2) \\ H_{10}(z^2) & H_{11}(z^2) \end{bmatrix}=\frac{1}{2}H_m(z)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

Din relația (3.42) se vede că H_p e paraunitar d.ș.n.d. H_m e paraunitară, astfel încît proiectarea structurilor bicanal ce conduc la baze de undișoare se poate face pe baza matricilor polifază care

la baze de undișoare se poate face pe baza matricilor polifază care prezintă factorizări canonice. Structurile paraunitare cu filtre FIR de lungime $2N$ pot fi descrise prin următoarea structură laticială:

$$\begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix} = R_0 \prod_{i=1}^{N-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{bmatrix}$$

De exemplu pentru $\alpha_0 = \pi/12$, $\alpha_1 = -\pi/3$ se ajunge la exemplul din paragraful 3.2.2: $h_n = 1/(4\sqrt{2}) [1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}]$. Iterînd banca de filtre pe ramura de sus, ajungem la structura din figura 3.4, realizînd descompunerea semnalului într-o bază a lui 1^2 generată de $\{h_1, (h_0 * \uparrow 2h_1), (h_0 * \uparrow 2h_0 * \dots * \uparrow 2h_0 * \uparrow 2h_1), (h_0 * \uparrow 2h_0 * \dots * \uparrow 2h_0)\}$ care am văzut că este echivalentul discret al undișoarelor. De fapt (vezi figura 3.2) se realizează o descompunere în benzi de frecvență cu factor de calitate constant.

Observație: în [45] sînt prezentate și alte modalități de generare a bazelor de undișoare. Pentru completarea imaginii despre această problemă redăm succint una dintre ele: banca de filtre poate fi iterată și pe ramura de sus (g în fig.3.4), dînd naștere astfel la 2^{2^k-1}

baze de undișoare diferite, putîndu-se găsi astfel o "cea mai bună bază" dintr-un anumit punct de vedere. Ținînd cont de faptul că decimare cu 2 și filtrare cu $H(z)$ e echivalent cu filtrare cu $H(z^2)$ și decimare cu 2, se poate construi spre exemplu o bază de undișoare în care structura bicanal se repetă atît pe ramura de sus, cît și pe cea de jos (se poate verifica prin inducție că proprietatea de reconstrucție perfectă se păstrează):

$$\begin{aligned} F_0(z) &= H_0(z) H_0(z^2), & F_1(z) &= H_0(z) H_1(z^2) \\ F_2(z) &= H_1(z) H_0(z^2), & F_3(z) &= H_1(z) H_1(z^2) \end{aligned}$$

Dacă $\hat{\phi}_0(\omega) = \prod_{i=1}^N F_0\left(\frac{\omega}{2^i}\right)$ atunci:

$$\psi_0(x) = 2 \sum f_0(k) \phi_0(4x-k)$$

și definind: $\psi_i(x) = 2 \sum f_i(k) \phi_0(4x-k)$, $i=1,2,3$ se obține o mulțime de funcții de tipul $\{\phi(x-k), \psi_1(x-l), \psi_2(x-m), \psi_3(x-n)\}_{k,l,m,n \in \mathbb{Z}}$ ortonormale, iar $2^j \psi_i(4^j x - l_j)$, $i \in \{1,2,3\}$, $l_j, j \in \mathbb{Z}$ formează o bază ortonormală pentru

L^2 . Aceste dezvoltări depășesc scopul lucrării de față însă pot crea o imagine mai corectă asupra subiectului filtrării multicanal [109].

3.2.3.2 Filtrare multicanal

Să considerăm cazul general [51] (care ar putea de fapt conduce la o analiză optimală a unui semnal) al filtrării multicanal cu M canale din figura 3.6, și fie descompunerea semnalelor la intrarea și ieșirea din sistem realizată în următorul mod:

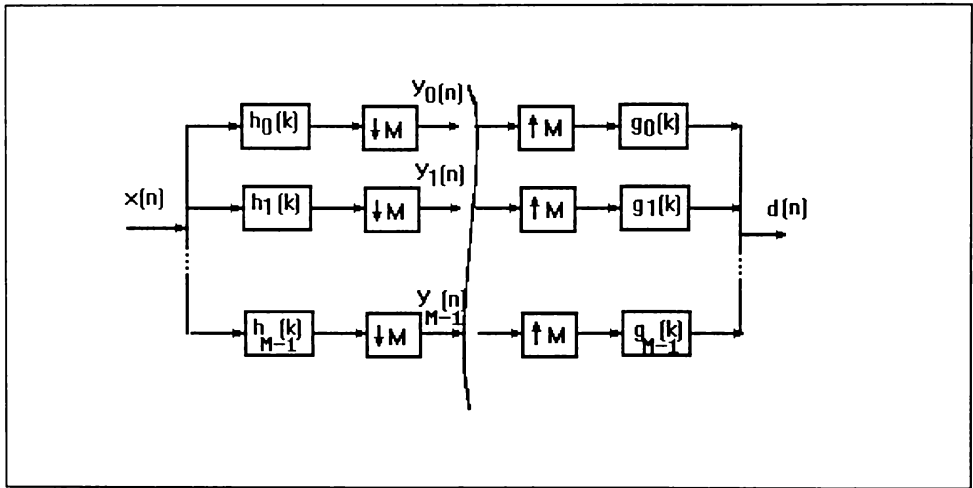


fig.3.6.: structură multicanal pentru analiza și reconstrucția perfectă a semnalelor

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} X_k(z^M) \quad (3.43)$$

$$D(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} D_k(z^M) \quad (3.44)$$

filtrele fiind descrise prin componentele lor polifază (echivalentul rel 3.42):

$$H_i(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} H_{i,k}(z^M) \quad (3.45)$$

$$G_i(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^k G_{i,k}(z^M) \quad (3.46)$$

unde

$$H_{i,k}(z) = \sum_n h_i(Mn+k) z^{-n}$$

$$G_{i,k}(z) = \sum_n g_i(Mn-k) z^{-n}$$

Atunci, prin verificare directă, se obține (vezi fig.3.6):

$$Y_i(z) = \sum_{k=0}^{M-1} H_{i,k}(z) X_k(z) \quad (3.47)$$

$$D_k(z) = \sum_{i=0}^{M-1} G_{i,k}(z) Y_i(z) \quad (3.48)$$

Utilizînd matricile polifază:

$$H_p(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) & \dots & H_{0M-1}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{M-1,0}(z) & H_{M-1,1}(z) & \dots & H_{M-1,M-1}(z) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$G_p(z) = \begin{bmatrix} G_{00}(z) & G_{01}(z) & \dots & G_{0M-1}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{M-1,0}(z) & G_{M-1,1}(z) & \dots & G_{M-1,M-1}(z) \end{bmatrix}$$

și notînd $X_p(z) = [X_0(z), X_1(z), \dots, X_{M-1}(z)]^T$

$Y_p(z) = [Y_0(z), Y_1(z), \dots, Y_{M-1}(z)]^T$

$D_p(z) = [D_0(z), D_1(z), \dots, D_{M-1}(z)]^T$

se obține: $Y_p(z) = H_p(z) X_p(z)$

$D_p(z) = G_p^T(z) Y_p(z)$ și:

$$D_p(z) = G_p^T(z) H_p(z) X_p(z) \quad (3.50)$$

ecuație care descrie funcționarea structurii multicanal. Pentru a obține filtraj multicanal cu reconstrucție perfectă trebuie ca

$G_p^T(z)H_p(z)=I$. În general trebuie găsite soluții la această condiție, deci:

$$G_p^T(z)=H^{-1}(z)=\frac{1}{\det(H_p(z))}\text{adj}(H_p(z))$$

Dacă dorim ca soluțiile să fie FIR, atunci $\det(H_p(z))$ trebuie să fie cel mult egal cu o întârziere, adică de forma Kz^k , în acest mod ajungînd la soluții ce conduc la baze oblice biortogonale. Dacă în plus matricea polifază este unitară (adică de tip trece tot):

$$H_p^T(z^{-1}) \cdot H_p(z) = I$$

atunci o soluție imediată pentru G_p este:

$$G_p(z)=H_p(z^{-1})$$

obținînd un sistem care conduce la o bază ortonormată de undișoare. În [51] se arată că pentru a construi o matrice polifază unitară cu filtre FIR, se poate utiliza parametrizarea (care generalizează cazul bicanal):

$$H_p(z)=U_0 \prod_{i=1}^N P_i(z) \quad (3.51)$$

$$P_i(z)=[I-v_i v_i^T+z^{-1}v_i v_i^T], \quad v_i \in C^M, \quad \|v\|=1$$

În acest caz filtrele de reconstrucție se obțin conform (3.46) de forma:

$$G_i(z)=H_i(z^{-1})$$

adică reprezintă inversatele în timp a filtrelor de analiză. Relația de ortogonalitate $H_p^T(z)H_p(z^{-1})=I$ se transferă în domeniul timp în forma relațiilor de ortogonalitate între translatatele cu M ale filtrelor și între filtre.

$$\sum_k h_i(k) g_j(Ml-k) = \delta_l \delta_{ij} \quad (3.52)$$

unde g_i vor avea semnificația de filtre duale filtrelor h_i . Dacă în plus matricea H_p este unitară rezultă:

$$\sum_k h_i(k) h_j(k+Ml) = \sum_k g_i(k) g_j(k+Ml) = \delta_{ij} \quad (3.53)$$

datorită relațiilor:

$$\sum_k H_{ik}(z) G_{jk}(z) = \delta_{ij}$$

respectiv

$$\sum_k H_{ik}(z) H_{jk}(z^{-1}) = \delta_{ij}$$

Generalizarea (5) relației (3.20) : ținând cont de faptul ca partea stîngă a relației 3.53 reprezintă eșantioanele din pozițiile multiple de M ale funcției de autocorelație a semnalului h_i și aplicînd TF discretă acestei relații obținem:

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \frac{2\pi}{M})|^2 + \dots + |m_0(\omega + \frac{2\pi(M-1)}{M})|^2 = 1$$

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_i h_i e^{-j\omega i}$$

unde ceea ce era de așteptat pentru că
ansamblul filtrelor care formează structura multicanal transferă semnalul nealterat (filtre cu reconstrucție perfectă)

Utilizînd relația inversă $H_p(z)G_p^T(z)=I$, se obțin ca și în paragraful 3.2.2 relațiile de reconstrucție generale:

$$\sum_{i,k} h_i(Mk+n_1) g_i(Mk+n_2) = \delta_{n_1 n_2} \quad (3.54)$$

pentru cazul general, respectiv:

$$\sum_{i,k} h_i(Mk+n_1) h_i(Mk+n_2) = \sum_{i,j} g_i(Mk+n_1) g_i(Mk+n_2) = \delta_{n_1 n_2} \quad (3.55)$$

În cazul matricilor polifază unitare. Pentru a completa construcția matricilor polifază ce generează filtraj multicanal cu reconstrucție perfectă, care prin iterare pe una din ramuri să ducă la generarea unei baze ortonormate de undișoare trebuie să găsim vectorul h_0 (filtrul de joasă frecvență) care să satisfacă rel. 3.53 și încă o relație suplimentară: $\sum_k h_0(k) = \sqrt{M}$, adică relații similare celor din propoziția 3.2: (ii) și (iii). Acest filtru rezultă în forma [51]:

$$h_0(z) = \left(\prod_{i=1}^N P_i(z) \right) \cdot e$$

unde: $h_0(z) = [H_{0,1}, H_{0,2}, \dots, H_{0,M-1}]^T$

$$s_i: \quad e = \left[\frac{1}{\sqrt{M}} \frac{1}{\sqrt{M}} \dots \frac{1}{\sqrt{M}} \right]^T$$

Pentru a găsi celelalte filtre h_i se construiește matricea U din relația (3.51) unitară (eventual printr-un procedeu Gram-Schmidt) și avînd pe prima coloana vectorul e .

Relațiile (3.53), (3.55), respectiv (3.52), (3.54) permit generarea unor baze oblice, respectiv ortogonale de undișoare analog tehnicilor din paragraful 3.2.2.

În [35] [51] se demonstrează următoarele afirmații:
Fie h_0 o secvență astfel încît:

$$\Phi_0(\omega) = \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^j \left(\frac{1}{\sqrt{M}} H_0 \left(\frac{\omega}{M^j} \right) \right), \quad H_0(0) = \sqrt{M}$$

iar produsul infinit converge la o funcție din L^2 , eventual de o anumită regularitate. Atunci există secvențele h_i , $i=1, M-1$, astfel încît h_i formează filtrele de analiză ale unei matrici polifază unitară (construită prin parametrizarea amintită, deci care nu este unică) și definind funcțiile:

$$\Psi_i(t) = \sqrt{M} \sum h_i(k) \Psi_0(Mt-k), \quad \Psi_{ijk}(t) = M^{j/2} \Psi_i(M^j t - k)$$

rezultă că $\{\Psi_{i,j,k}\}$ este o bază oblică strînsă în L^2 și datorită ortogonalității chiar o bază ortonormată, adică:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_k \langle f, \Psi_{ijk} \rangle \Psi_{ijk}(t) \quad \text{respectiv:}$$

$$f(t) = \sum_k \langle f, \Psi_{00k} \rangle \Psi_{00k}(t) + \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_k \langle f, \Psi_{ijk} \rangle \Psi_{ijk}(t)$$

unde Ψ_0 joacă rolul de funcție scară, iar Ψ_i , $i=1, M-1$ sînt undișoarele.

În Fig 3.7 și 3.8 sînt reprezentate undișoare cu suport compact obținute prin procedeele indicate pentru $M=3$ și $N=3$ iterații pe canalul de joasă frecvență împreună cu comportarea lor în frecvență.

Structura multicanal reprezintă deci cea mai generală formă de

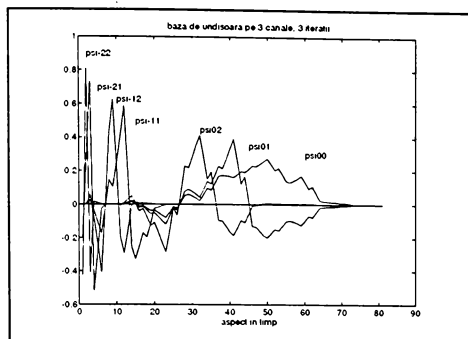


fig.3.7:bază de undișoare gener. prin N=3 iterații ale unei struct. multicanal cu M=3 filtre

(prin iterarea structurii multicanal), creînd astfel posibilitatea explorării semnalului la diverse rezoluții. Vom încerca să rezolvăm problema eșantionării adaptive utilizînd baze ortonormate de undișoare a căror construcție este în acest moment încheiată.

generare a bazelor de undișoare, dar și forma de implementare rapidă a algoritmului TUD ca în figura 3.9. (rezultatul filtrării fiind chiar coeficienții undișoare - vezi paragraful 3.2), deoarece de fapt la ieșirea fiecărui filtru h_i doar al M-lea eșantion este cerut (din cauza decimării). Sistemele multicanal introduc în același timp noțiunea de scară într-un spațiu Hilbert

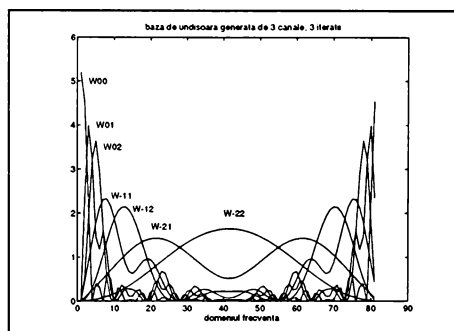


fig.3.8:descompunerea spațiului frecvență l^2 în subspații generate de undișoare

3.3 Algoritm de eșantionare adaptivă și reconstrucție on-line a unui semnal pe baza analizei cu o bază ortonormată de undișoare.

3.3.1 Algoritm de eșantionare cu adaptare la conținutul local în frecvență al semnalului.

Să aplicăm considerațiile din paragraful 3.2. la eșantionarea adaptivă a unui semnal și la reconstrucția acestuia. Semnalul cu care vom lucra este discret, deci preeșantionat, astfel încît putem construi o bază ortonormată de undișoare finită ca rezoluție, cu care semnalul să fie descris complet. Fie de exemplu un sistem bicanal construit cu funcția scara și undișoara generate pe baza rel. (3.51): cu $v=[a \ b]^T$ unde $a^2+b^2=1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $N=1$, și

$$U_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

deci:

$$H_p = \begin{bmatrix} h_0 + z^{-1} \cdot h_2 & h_1 + z^{-1} \cdot h_3 \\ g_0 + z^{-1} \cdot g_2 & g_1 + z^{-1} \cdot g_3 \end{bmatrix} = U_0 \{ [I - VV^T] + z^{-1} \cdot VV^T \} \quad 3.56$$

astfel încît canalele sînt descrise de funcțiile raspuns la impuls:

$$\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = [A \ B] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} b(b-a) & a(a-b) & a(a+b) & b(a+b) \\ b(a+b) & -a(a+b) & a(a-b) & b(a-b) \end{bmatrix} \quad 3.57$$

Am văzut că $\{h(n-2k), g(n-2k)\}_k$, cu sau fara iteratele lor formează o bază ortonormată pentru l^2 . Dacă de exemplu iterăm structura bicanal pe ramura de joasă frecvență de $N=8$ ori, atunci baza utilizată va fi:

$$\{g, (h * g|2), \dots, (h * h|2 * \dots * h|2^6 * g|2^7), (h * h|2 * \dots * h|2^7)\}$$

proiecția unui semnal în spațiul descris de această bază făcîndu-se cu partea de analiză (din stînga) a sistemului din figura 3.4.

Figurile 3.10 și 3.11 prezinta în domeniul timp cele 8 undișoare și funcția scara, respectiv în domeniul frecvența spațiile $V_8, W_8, W_7, W_6, \dots, W_1$, a caror sumă formează l^2 . Fără să uităm că lucrăm în domeniul discret, să notăm totuși funcțiile din baza descrisă cu relația de mai sus, pentru ușurința scrierii, cu echivalentele lor din domeniul continuu (pe care conform figurii 3.10. le aproximează din ce în ce mai bine pe măsură ce scade rezoluția), adică cu $\{\psi_{1k}, \psi_{2k}, \dots, \psi_{8k}, \varphi_{vk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Proiecția unui semnal x în spațiul descris de funcțiile de mai sus va fi de fapt egală cu x și va avea expresia:

$$x = Px = \sum_k \langle x, \varphi_{8k} \rangle \varphi_{8k} + \sum_{i=1}^8 \sum_k \langle x, \psi_{ik} \rangle \psi_{ik}$$

coeficienții descompunerii rezultînd în urma filtrării cu sistemul din figura 3.4. și anume pentru fiecare $k=2m$, coeficienții

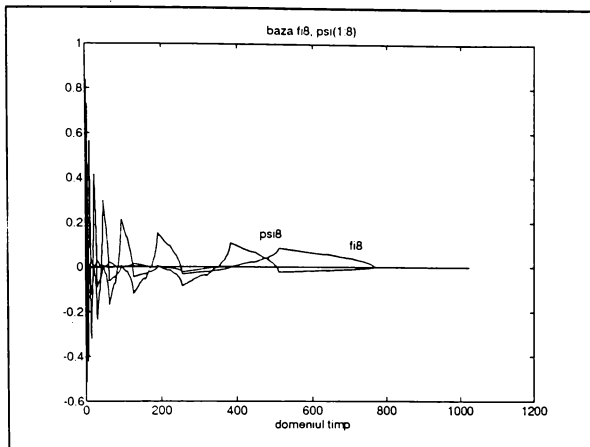


fig. 3.10: baza de undișoare cu care s-a impl. algoritmul de eșantionare adaptivă

să nu ocupe în frecvență toate spatiile

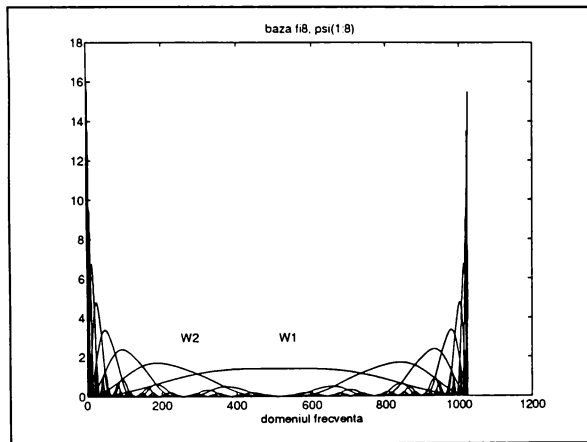


fig.3.11: descompunerea spațiului l^2 în fișii cu factor de calitate constant

$y_{1:k} = \langle f, \Psi_{1:k} \rangle$, pentru $k=2^{2^m}$
 coeficienții
 $y_{2:k} = \langle f, \Psi_{2:k} \rangle, \dots$ pentru
 $k=2^m$: $y_{2^m:k} = \langle f, \Psi_{2^m:k} \rangle$, și
 $y_{2^m:k}^* = \langle f, \Phi_{2^m:k} \rangle$. Ultimul
 coeficient a fost notat
 cu asterisc pentru ca el
 corespunde proiecției
 într-un spațiu de tip V
 și nu W , el constituind
 de fapt completarea
 informației despre x cu

partea de joasă
 frecvență. S-ar putea ca
 x la un anumit moment

din figura 3.11 și acest

lucru este sesizat prin

intermediul

coeficienților y_{ik} . Dacă

găsim o relație

bijectivă între

eșantioanele semnalului

x și coeficienții TUD y

(se observă că sînt în

număr egal cu numărul

eșantioanelor semnalului

x indiferent de numărul

iterațiilor) atunci

putem adopta următorul

procedeu de eșantionare

adaptivă (compresie de

date): De fiecare dată cînd unul din coeficienți $y_{1:k}, y_{2^m:k}^*$, $k \in \mathbb{Z}$, este
 mai mare decît un $\delta > 0$, să transmitem eșantionul aferent din semnalul
 x iar dacă nu :nu. Dacă x are componente în spațiul W_i , atunci $y_{1:k}$
 vor fi diferiți de 0 și toate esantioanele din x vor fi transmise.

Dacă însă anumiți coeficienți lipsesc, pe măsură ce x trece în
 spații de rezoluție mai joasă, numărul de eșantioane diferite de 0
 scade, astfel încît se poate obține o reducere a numărului de valori

ce caracterizează semnalul x (un grafic în acest sens este prezentat în par.3.4). Acest procedeu corespunde întru totul unei eșantionări adaptive, deoarece ψ_k au suport compact și produsul scalar între x și ψ_k dă o informație despre frecvența instantanee a semnalului.

Observație: Dacă h și g sînt de lungime L (în cazul nostru)=4; atunci $h * g \uparrow 2$ e de lungime $(2^2-1)(L-1)+1=10$; $(h * h \uparrow 2) * g \uparrow 2$ e de lungime $(2^3-1)(L-1)+1=22$ etc.

Să considerăm că analiza se face pe un singur nivel adică structura bicanal este aplicată o singură dată pentru analiza semnalului x . Coeficienții transformării undișoară pot fi aranjați conform fig.3.12.

Relațiile între eșantioanele semnalului x și coeficienții y se pot deduce direct prin efectuarea produselor scalare sau, ceea ce este echivalent dar mult mai ușor de implementat practic, prin utilizarea parametrizării din relația 3.51. Cu notațiile din 3.56, 3.57 și aplicînd direct relația 3.50 în domeniul timp (discret) obținem: $\mathbf{y}_p(n) = \mathbf{A} \mathbf{x}_p(n) + \mathbf{B} \mathbf{x}_p(n-1)$, adică pentru cazul bicanal:

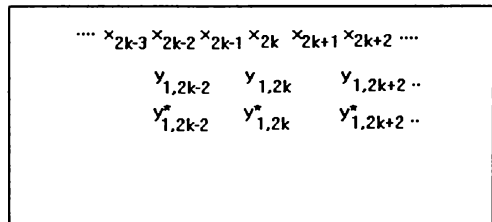


fig.3.12: eșantioanele semnalului sursă x și coeficienții transformării undișoară y

$$\begin{pmatrix} y_{1,2k}^* \\ y_{1,2k} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{2k} \\ x_{2k-1} \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} x_{2k-2} \\ x_{2k-3} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

relație ce corespunde unui filtru FIR cauzal. Relația inversă de trecere de la spațiul imagine Y la spațiul semnal X se obține prin înmulțirea rel.3.58 cu \mathbf{A}^T și a aceleiași relații scrise pentru $k+1$ cu \mathbf{B}^T obținîndu-se o relație care corespunde unui filtru finit necauzal:

$$\begin{pmatrix} x_{2k} \\ x_{2k-1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} y_{1,2k}^* \\ y_{1,2k} \end{pmatrix} + \mathbf{B}^T \begin{pmatrix} y_{1,2k+2}^* \\ y_{1,2k+2} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

deoarece după cum e ușor de văzut din 3.56 și 3.57 avem:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} b(b-a) & a(a-b) \\ b(b+a) & -a(a+b) \end{vmatrix} & B &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} a(a+b) & b(a+b) \\ a(a-b) & b(a-b) \end{vmatrix} \\
 A^T A &= \begin{vmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{vmatrix} & B^T B &= \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

((I-vv²) e idempotentă) deci sînt valabile: A^TA+B^TB=1 și A^TB=B^TA=0. Rel. 3.58 și 3.59 reprezintă de fapt implementarea băncii de filtre cu reconstrucție perfectă din fig.3.3. Coeficienții y reprezintă, așa cum am vazut din paragraful 3.2, proiecția semnalului x în spațiul de înaltă frecvență, iar coeficienții y* proiecția lui x în spațiul de joasă frecvență. Crearea bazei de undișoare descrisă la începutul acestui paragraf revine la iterarea relației 3.58 pentru semnalul format cu coeficienții y*, astfel încit spațiul de joasă frecvență este divizat la rîndul lui în două. Relația de analiză va fi:

$$\begin{vmatrix} y_{2,4k}^* \\ y_{2,4k} \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} y_{1,4k}^* \\ y_{1,4k-2}^* \end{vmatrix} + B \cdot \begin{vmatrix} y_{1,4k-4}^* \\ y_{1,4k-6}^* \end{vmatrix}$$

Înseamnă că linia de coeficienți y* din fig 3.12 poate fi la rîndul ei înlocuită cu transformata ei undișoară astfel încit prin mai multe iterări ale relației 3.58 (în fig. sînt 4) obținem imaginea Y a semnalului X din figura 3.14 :

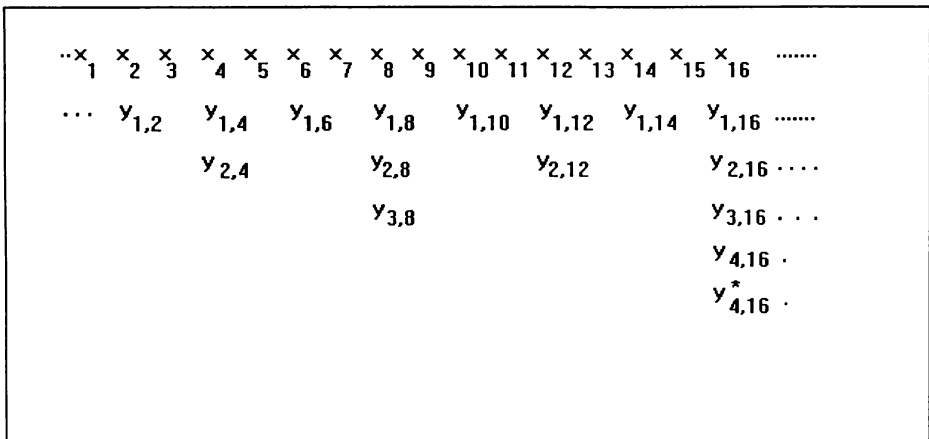


fig 3.14: semnal X și coeficienții TUD Y după analiza pe 4 nivele

Dacă în relația 3.58 facem y_{1,2k}=y_{1,2k}^*=0 , vom obține prin aplicarea}}

succesivă a matricii A^T respectiv B^T dă naștere relații:

$$\begin{aligned} bx_{2k} - ax_{2k-1} &= 0 \\ ax_{2k-2} + bx_{2k-3} &= 0 \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că dacă cei doi coeficienți ai TUD sînt 0 putem renunța la unul dintre eșantioanele $\{x_{2k}$ sau $x_{2k-1}\}$ respectiv $\{x_{2k-2}$ sau $x_{2k-3}\}$ obținînd în acest fel o compresie de date. Să încercăm să extindem această observație pentru un semnal discret oarecare x deocamdată analizat pe un singur nivel (o singură iterație a sistemului bicanal vezi fig. 3.12).

Teorema 3.3.1: Considerăm șirurile de numere reale (x_n) , (y_{2n}) , (y'_{2n}) , $n \in \mathbb{Z}$, legate prin relațiile:

$$bx_{2n-1} + ax_{2n} = cy_{2n+2}^* + dy_{2n+2} \quad (3.61)$$

$$-ax_{2n+1} + bx_{2n+2} = -dy_{2n+2}^* + cy_{2n+2} \quad (3.62)$$

unde $a^2 + b^2 = 1$, a, b diferit de 0, $c = (a+b)/\sqrt{2}$, $d = (a-b)/\sqrt{2}$. Dacă există $k, m \in \mathbb{Z}$, cu $k < m$ a.î. cunoaștem $x_{2k-1}, x_{2m}, y_{2k+2}, \dots, y_{2m}, y'_{2k+2}, \dots, y'_{2m}$, atunci valorile semnalului $x_{2k}, x_{2k+1}, \dots, x_{2m-1}$ sînt unic determinate.

Observație : relațiile 3.61, 3.62 reprezintă explicitarea relației matriciale 3.58 după înmulțirea cu A^T respectiv B^T .

Demonstrație: scriem alternativ relațiile 3.61, 3.62 pentru $n = k, k+1, \dots, m-2, m-1$ obținînd sistemul 331 (ec. 1...6):

$$\text{Sistemul 331: (1) } bx_{2k-1} + ax_{2k} = cy_{2k+2}^* + dy_{2k+2}$$

$$(2) \quad -ax_{2k+1} + bx_{2k+2} = -dy_{2k+2}^* + cy_{2k+2}$$

$$(3) \quad bx_{2k+1} + ax_{2k+2} = cy_{2k+4}^* + dy_{2k+4}$$

$$\begin{aligned} -ax_{2k+3} + bx_{2k+4} &= -dy_{2k+4}^* + cy_{2k+4} \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

$$(4) \quad -ax_{2m-3} + bx_{2m-2} = -dy_{2m-2}^* + cy_{2m-2}$$

$$(5) \quad bx_{2m-3} + ax_{2m-2} = cy_{2m}^* + dy_{2m}$$

$$(6) \quad -ax_{2m-1} + bx_{2m} = -dy_{2m}^* + cy_{2m}$$

de unde:

$$x_{2k} = -\frac{b}{a}x_{2k-1} + \frac{c}{a}y_{2k+2}^* + \frac{d}{a}y_{2k+2}$$

$$x_{2k+1} = \begin{vmatrix} b & -dy_{2k+2}^* + cy_{2k+2} \\ a & cy_{2k+4}^* + dy_{2k+4} \end{vmatrix}$$

$$x_{2k+2} = \begin{vmatrix} -dy_{2k+2}^* + cy_{2k+2} & -a \\ cy_{2k+4}^* + dy_{2k+4} & b \end{vmatrix}$$

$$x_{2m-1} = \frac{b}{a}x_{2m} + \frac{d}{a}y_{2m}^* - \frac{c}{a}y_{2m}$$

q.e.d.

(Observație: ușurința obținerii lui X când se cunoaște imaginea Y se datorează faptului că determinantul sistemului format din ec. (2) și (3) este = -1.)

Corolarul 3.3.1.: fie șirurile x, y și y* din Teorema 3.3.1 cu condițiile 3.61, 3.62, $k < m$. Dacă cunoaștem x_{2k-1}, x_{2m} , iar $y_{2k+2}, \dots, y_{2m}, y_{2k+2}^*, \dots, y_{2m}^*$, sînt toate =0 atunci $x_{2k}, x_{2k+1}, \dots, x_{2m-1}$ sînt unic determinate.

Această însă e echivalent cu a spune că $x_{2k}, x_{2k+1}, \dots, x_{2m-1}$ pot fi neglijate la transmisie sau stocare astfel că am obținut o compresie de date. Avem nevoie însă de un algoritm care să pună în corespondență unică cîte un eșantion al semnalului și un coeficient al transformării undișoară chiar atunci cînd nu există succesiuni compacte de 0 printre coeficienți. Pentru aceasta fie :

Teorema 3.3.2: Considerăm șirurile de numere reale din Teorema 3.3.1 cu condițiile 3.61, 3.62, și numerele $k, m \in \mathbb{Z}$, $k < m$. Dacă cunoaștem x_{2k-1} și cite două elemente din fiecare din următoarele

mulțimi $\{(x_{2k}, x_{2k+1}, y_{2k+2}, y'_{2k+2}), \dots, (x_{2m-2}, x_{2m-1}, y_{2m}, y'_{2m})\}$, și x_{2m} , atunci elementele $x_{2k}, x_{2k+1}, \dots, x_{2m-1}$ sînt unic determinate.

Demonstrație (prin inducție): verificarea condiției inițiale: presupunem $m=k+1$. Atunci sistemul 331 se reduce la ec. 1 și 2 în care cunoaștem pe x_{2k-1} și x_{2k+2} ($=x_{2m}$) și cite două elemente în mulțimea $\{(x_{2k}, x_{2k+1}, y_{2k+2}, y'_{2k+2})\}$. Cazul în care îi cunoaștem pe y_{2k+2}, y'_{2k+2} e tratat de Teorema 331 (chiar și în observația de înaintea acelei teoreme), cazul în care îi cunoaștem pe x_{2k}, x_{2k+1} e trivial (adică sînt unic determinați dacă îi cunoaștem). Rămîn 4 cazuri dar în oricare dintre ele una din ecuațiile 1 sau 2 conține o singură necunoscută, după care se trece la aflarea celei de a doua din cealaltă ecuație. Deci x_{2k}, x_{2k+1} sînt unic determinați.

Inducție: să presupunem că semnalul x pentru care se cunosc x_{2k+1} și cite două elemente din fiecare din următoarele mulțimi $\{(x_{2k}, x_{2k+1}, y_{2k+2}, y'_{2k+2}), \dots, (x_{2m-4}, x_{2m-3}, y_{2m-2}, y'_{2m-2})\}$, și x_{2m-2} , are elementele $x_{2k}, x_{2k+1}, \dots, x_{2m-3}$ unic determinate. Să arătăm că dacă cunoașterea eșantionului x_{2m-2} se înlocuiește prin cunoașterea a două elemente din mulțimea $\{x_{2m-2}, x_{2m-1}, y_{2m}, y'_{2m}\}$, și a elementului x_{2m} , atunci elementele $x_{2k}, x_{2k+1}, \dots, x_{2m-1}$ sînt unic determinate. Dar ipoteza inductiei e echivalentă cu a spune că în condițiile date sistemul 331 format din ec. 1, 2...inclusiv 4, e unic determinat.

Dacă cunoaștem pe x_{2m-2} și adăugăm sistemului ec. 5 și 6 în care cunoaștem două elemente din mulțimea $\{x_{2m-2}, x_{2m-1}, y_{2m}, y'_{2m}\}$, și pe x_{2m} , atunci elementele $x_{2k}, x_{2k+1}, \dots, x_{2m-3}$ sînt ca și pînă acum determinate iar în ec. 5 avem o singură necunoscută y_{2m} sau y'_{2m} pe care o putem determina (pentru că dacă îl cunoaștem pe x_{2m-1} problema e deja rezolvată). Ec 6 ni-l dă pe x_{2m-1} .

Dacă nu cunoaștem x_{2m-2} dar adăugăm sistemului ec 5 și 6 în care cunoaștem două elemente din mulțimea $\{x_{2m-2}, x_{2m-1}, y_{2m}, y'_{2m}\}$, și pe x_{2m} , înseamnă (deoarece nu-l cunoaștem pe x_{2m-2}) că sau îi cunoaștem pe y_{2m}, y'_{2m} , sau îl cunoaștem pe x_{2m-1} și pe unul din y_{2m} sau y'_{2m} . Dar acest ultim caz e echivalent, din cauza ec. 6 cu a-i cunoaște pe y_{2m} și y'_{2m} , astfel încît sistemul 331 s-a restrîns la ecuațiile 1, 2...4, 5. Dar din ec.5 rezultă:

$$x_{2m-2} = -\frac{b}{a}x_{2m-3} + \frac{c}{a}y'_{2m} + \frac{d}{a}y_{2m} \quad 3.63$$

care introdusă în ec.4 rezultă în:

și coeficientul care îl înmulțește pe x_{2m-3} este $-1/a$ diferit de 0.

$$\left(-a - \frac{b^2}{a}\right)x_{2m-3} = -b\left(\frac{c}{a}y_{2m}^* + \frac{d}{a}y_{2m}\right) - dy_{2m-2}^* + cy_{2m-2} \quad 3.64$$

Deci sistemul 331 în care s-a înlocuit ec. 4 cu ecuatia 3.64 este deasemenea unic determinat în condițiile din ipoteză, pentru că în ec. 3.64 y_{2m} și y_{2m}^* sînt cunoscute. x_{2m-3} fiind cunoscut din ec. 3.63 rezultă și x_{2m-2} astfel încît întreg semnalul de la x_{2k-1} pînă la x_{2m} e unic determinat.

q.e.d.

Corolarul 3.3.2: În condițiile teoremei 3.3.1. pentru $k < m$, și cunoscînd eșantioanele x_{2k-1} și x_{2m} urmatorul procedeu de eșantionare adaptivă conduce la un semnal unic determinat:

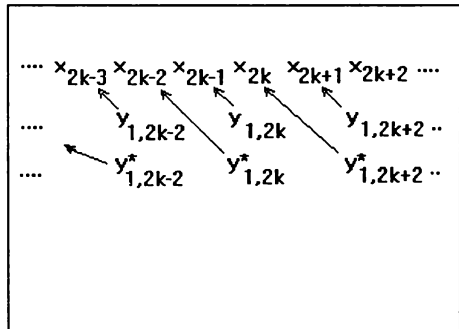
dacă $y_{2k+2} = 0$ neglijăm eșantionul x_{2k+1}

dacă $y_{2k+2}^* = 0$ neglijăm eșantionul x_{2k}

Demonstrație: rezultă imediat din teorema 3.3.2

Procedeu de punere în corespondență a eșantioanelor semnalului cu coeficienții TUD este prezentat în fig 3.15.

O formă ceva mai slabă a Teoremei 3.3.2 pe care însă o vom folosi în continuare la dezvoltarea algoritmului de eșantionare adaptivă este:



Teorema 3.3.3: Considerăm șirurile de numere reale din Teorema 3.3.1 cu condițiile 3.61, 3.62, și numerela $k, m \in \mathbb{Z}$, $k < m$. Dacă cunoaștem x_{2k-1} și x_{2m} , și cite un element din fiecare din urmatoarele mulțimi $\{x_{2k}, y_{2k+2}^*\}, \{x_{2k+1}, y_{2k+2}\}, \dots, \{x_{2m-2}, y_{2m}^*\}, \{x_{2m-1}, y_{2m}\}$, (fig.3.15) atunci elementele $x_{2k}, x_{2k+1}, \dots, x_{2m-1}$ sînt unic determinate.

fig. 3.15: algoritm de eșantionare adaptivă după o analiză pe 2 nivele

Demonstrație : rezulta imediat din Teorema 3.3.2.

Observație : este evident că dacă șirul $X = (x_n)$ este cunoscut atunci și TUD a șirului X , adică $Y = \{(y_{2n}), (y_{2n}^*)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, este de asemenea unic determinată deci cunoscută, TUD fiind o aplicație liniară bijectivă (deci inversabilă, vezi par. 3.2.2).

Iterînd banca de filtre pe ramura de joasă frecvență obținem TUD a vectorului X în forma dîn fig. 3.14. Teorema 3.3.3 se extinde la:

Teorema 3.3.4: fie șirurile $(x_n), (y_{2n}), (y_{2n}^*), \dots, (y_{2n_n}), (y_{2n_n}^*)$

$n \in \mathbb{Z}$, legate prin condiții de tipul 3.61, 3.62 respectiv:

$$\begin{vmatrix} Y_{2^{i+1},K}^* \\ Y_{2^{i+1},K} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} Y_{2^i,K-3 \cdot 2^i}^* \\ Y_{2^i,K-2 \cdot 2^i}^* \end{vmatrix} + B \begin{vmatrix} Y_{2^i,K-2^i}^* \\ Y_{2^i,K}^* \end{vmatrix}, \quad K=2^{i+1}, \quad i=0 \dots N-1$$

Dacă sînt cunoscute $x_{2^k-(2^{N-1})(L-1)} \dots x_{2^k-1}$, (eșantioane inițiale ale semnalului x) și $x_{(2^{N_m}-(2^{N-1})(L-1)+1)} \dots x_{2^{N_m}}$ (eșantioane finale ale semnalului x) (L lungimea undișoarei h_0), precum și cîte unul din elementele următoarelor mulțimi $\{x_{2n+1}, y_{1,2n+2}\}$, $\{x_{4n}, y_{2,4n+4}\}$, $\{x_{8n-2}, y_{3,8n+8}\} \dots \{x_{2^{N_m+2-2(N-1)}, y_{N,2^{N_m+2N}}\}$, $\{x_{2^{N_m+2-2N}}, y_{N,2^{N_m+2N}}^*\}$, atunci $x_{2^k} \dots x_{2^{N_m}-(2^{N-1})(L-1)}$ sînt unic determinate.

Demonstrație: condițiile inițiale și finale determină condițiile inițiale și finale pentru fiecare din șirurile $y_{i,n}^*$, $i=1:N$ (vezi observația de la pag. 29). Aplicînd succesiv Teorema 3.3.3 pentru fiecare din aceste șiruri se obține Teorema 3.3.4

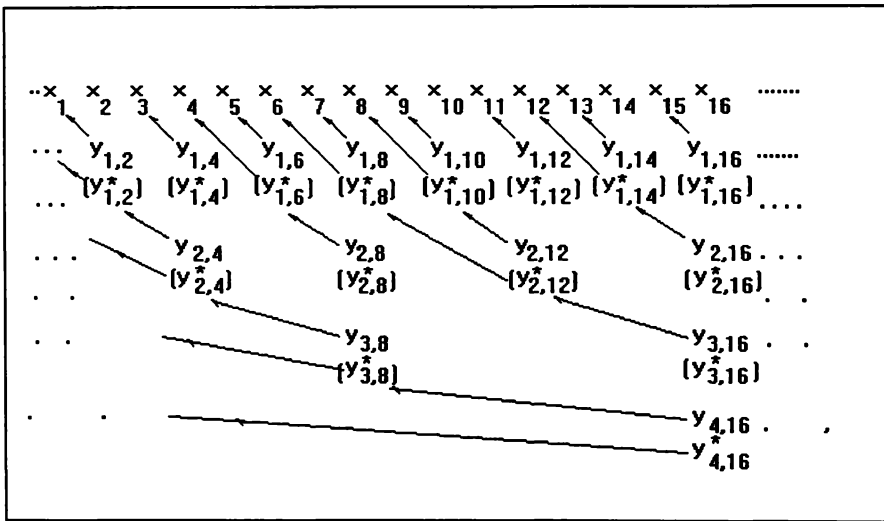


fig.3.16: algoritm de eșantionare adaptivă după o analiză pe 4 nivele

Modul unic de asociere al fiecărui eșantion din semnalul x cu cîte un coeficient din TUD este prezentat în fig.3.16 (aici $N=4$, pentru simplitate $k=0$), cu observația că în această figura au fost reprezentați și coeficienții de tip y^* -pentru a exemplifica algoritmul de eșantionare adaptivă- și care nu se calculează de fapt decit pentru ultimul nivel (partea de joasă frecvență fiind mereu prelucrată).

Pe baza teoremei 3.3.4 putem enunța acum algoritmul de eșantionare adaptiva:

Corolarul 3.3.4 (algoritm de eșantionare adaptivă): în condițiile teoremei 3.3.4 un semnal x este unic determinat dacă analizînd transformata undișoară discretă a sa, de fiecare dată cînd:

- $y_{1,2k}=0$, se neglijeaza eșantionul x_{2k-1}
- $y_{2,4k}=0$, se neglijeaza eșantionul x_{4k-4}
- $y_{3,8k}=0$ se neglijeaza eșantionul x_{8k-10}
-
- $y_{N,2^Nk}=0$ se neglijeaza eșantionul $x_{2^Nk-2^{N-1}k-1}$
- $y_{N,2^Nk}^*=0$ se neglijeaza eșantionul $x_{2^Nk-2^{N+1}k-2}$

Demonstrație: rezultă direct din T3.3.4

Observație: faptul că semnalul este unic determinat chiar dacă unele eșantioana sînt 'uitate' rezultă din conditii algebrice de tipul 3.61, 3.62. Că avem de a face într-adevar cu o compresie de date , respectiv eșantionare adaptivă, rezultă din modul cum au fost alese aceste constrîngeri algebrice (par. 3.2) adică din faptul că y sau $y^*=0$ implică inexistența la un moment dat a unor componente ale semnalului într-o anumită bandă de frecvență. Acest fapt este ilustrat în exemplele din în par. 3.4. În practică algoritmul va funcționa prin neglijarea tuturor acelor eșantioane care corespund la coeficienți de modul mai mic decît un $\delta > 0$. Energia semnalului eroare care se face la reconstrucție din această cauză este :

$$E = \sum y_i^2 < \delta^2 n_{cof} \quad (3.65)$$

unde suma se face dupa indicele i care parcurge mulțimea coeficienților mai mici în modul decit δ , aceasta avînd cardinalul n_{cof} (mulțimea șirurilor de tip y și y^* este numarabilă astfel că poate fi renumerotată). Notînd cu N lungimea semnalului X și cu n_{es} numărul de eșantioane rezultate în urma procedului din cor. 3.3.4., avem evident $N = n_{es} + n_{cof}$, și din relația 3.65 putem calcula (deosebit de ușor) puterea erorii:

$$P < \delta^2 (1-D) \quad (3.66)$$

unde prin $D = n_{es}/N$, am notat densitatea de eșantionare. Dacă D este calculată succesiv pentru porțiuni ale semnalului X , atunci rel. 3.66 ne dă puterea momentană medie a erorii, iar dacă procedeul de reconstrucție asigură reconstrucția exactă cu excepția acelor coeficienți care au fost considerați egali cu 0, atunci rel.3.66 reprezintă chiar zgomotul ce intervine în calculul raportului

semnal/zgomot de reconstrucție.

Un avantaj imediat al analizei cu undișoare este și posibilitatea de refacere on-line a semnalului deoarece funcțiile care formează baza ortonormată sînt cu suport compact (influența unui eșantion asupra TUD este limitată în timp, și invers influența unui coeficient al TUD asupra semnalului e limitată în timp).

3.3.2 Reconstrucția on-line a semnalelor după eșantionarea adaptivă printr-o metodă iterativă.

Refacerea semnalului (vectorului) X din imaginea sa Y (transformata sa undișoară discretă) ar putea urma una dintre caile consacrate de rezolvare iterativă a sistemului:

$$TX=Y \quad (3.67)$$

unde prin T am notat aplicația liniară (matricea) din l^2 în l^2 care corespunde TUD. Ea este o matrice semidiagonală, infinită, iar transformarea este ortogonală (conform rel. (ii), 3.24, 3.25 din par.3.2.2).

O astfel de cale ar fi metoda iterațiilor standard [52]:

$$X_k = X_{k-1} + M^{-1}(Y - TX_{k-1})$$

ceea ce este echivalent cu: $MX_k = NX_k + Y$, unde $T = M - N$ este o partiție a matricii T , sau una din metodele derivate din aceasta de exemplu metoda gradientilor conjugați care mărește rapiditatea de convergență. Din păcate în cazul nostru sistemul din rel. 3.67 este ciudat în sensul că se cunosc anumite componente ale lui X împreună cu un număr de valori 0 ale imaginii Y în număr egal cu componentele lui X care trebuie determinate (vezi cor. 3.3.4). Numărul ecuațiilor este aleator și depinde de densitatea de eșantionare (care și ea este variabilă) adică de comportarea în frecvență a semnalului. În plus pentru a susține convergența algoritmului de mai sus trebuie arătat că raza spectrală a aplicației $M^{-1}N$ (modulul valorii proprii maxime) este mai mică decît 1, ceea ce se poate dovedi dificil.

Putem încerca utilizarea algoritmului LMS în care funcția eroare J care trebuie minimizată, să fie suma pătratelor coeficienților diferiți de 0 care apar în pozițiile în care aceștia ar trebui să fie 0 (ușor de detectat la recepție pe baza poziției eșantioanelor care apar și a relației bijective descrise de Cor.3.3.4). Să notăm cu $H(Z)$ mulțimea indicilor pentru care cunoaștem semnalul X , și cu $G(Z)$ mulțimea indicilor pentru care știm (din cor. 3.3.4) că ar

trebui să fie 0
 coeficienții
 corespunzători din Y.
 Atunci H=complementul
 lui G în Z, H+G=Z, și
 $J=\sum_{i \in G} y_i^2$, $i \in G$. (am făcut o
 renumerotare
 a coeficienților din Y ,
 Y fiind o mulțime
 numărabilă). Algoritmul
 LMS se scrie:

$X_k = X_{k-1} - \mu \text{grad} J$, iar
 gradientul funcției
 eroare se calculează în
 modul următor:

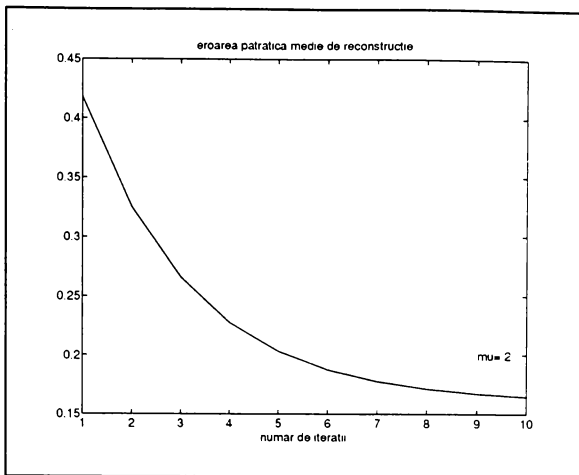


fig.3.17: curba de convergență a
 algoritmului LMS din rel. 3.68

$$\nabla J = \frac{d(\sum_{i \in G} y_i^2)}{dX} = \frac{d}{dX} (\sum_{i \in G} (\psi_i * X)^2)$$

$$\nabla J = 2 \sum_{i \in G} (\psi_i * X) \frac{d}{dX} \langle \psi_i', X \rangle = 2 \sum_{i \in G} (\psi_i * X) \psi_i'$$

deci:

$$X_{k+1} = X_k - \mu \sum_{i \in G} (\psi_i * X_k) \psi_i' \tag{3.68}$$

Din păcate eroarea J nu ține cont decit de coeficienții din
 mulțimea G , adică algoritmul funcționează bine pentru semnale cu
 $\text{card}(G) \gg \text{card}(H)$, deci de exemplu pentru semnale din spațiul de
 joasă frecvență. În fig.3.17 se prezintă curba de convergență a
 algoritmului (se observă că nu tinde complet la 0) iar în fig 3.18
 o porțiune de semnal împreună cu eșantioanele sale si semnalul
 refacut (din nou se observă o eroare reziduală). Subrutina care
 implementează algoritmul este denumită lmsund.m și este prezentată
 în anexă în cadrul pachetului MATLAB realizat de autor.

Din aceste motive vom căuta să utilizam algoritmul prezentat în
 Cap 2. de aflare a inversului unui operator pe care îl vom alege cu
 grijă astfel încît acest invers să existe. Demersul are șanse de
 succes pentru că în fond algoritmul din cap.2 determină baza duală
 bazei în care s-a făcut descompunerea semnalului. Și anume

reconstrucția semnalului din eșantioanele sosite neregulat o vom face pe baza proiecției lui X în spațiul descris doar de acele undișoare care au avut o contribuție la analiza lui X , faptul că la un moment dat $y_i \neq 0$ fiind recuperat din poziția eșantioanelor sosite la recepție (cor. 3.3.4). Atunci proiecția semnalului X în acest spațiu va fi (de exemplu pentru $N=8$ iterații):

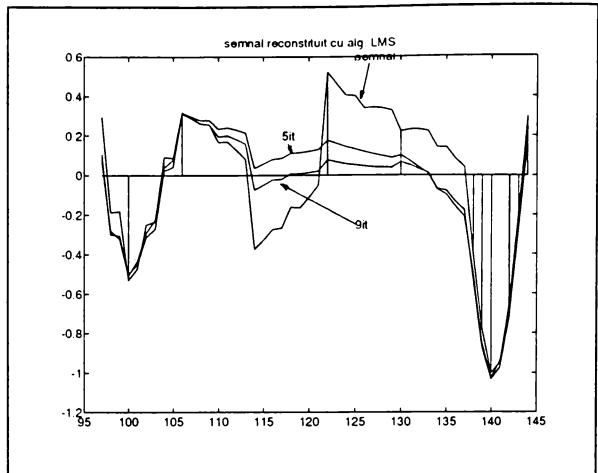


fig.3.18: porțiune de semnal reconstruit cu algoritmul LMS din rel.3.68, după 5 și 9 iterații, în urma eșantionării adaptive

$$PX = \sum_{k \in H1} \langle X, \varphi_{8k} \rangle \varphi_{8k} + \sum_{i=1}^8 \sum_{k \in H1} \langle X, \psi_{ik} \rangle \psi_{ik} \quad (3.69)$$

unde $k \in H1$ implică ca proiecția semnalului X pe φ_{8k} respectiv ψ_{ik} este mai mare decât δ . Procedura "on line" este posibilă, deoarece ψ_i sunt finite ca lungime, iar proiectorul din relația (3.69) se determină prin aplicarea semnalului X la intrarea sistemului de analiză și sinteză din figura 3.4., adică prin filtrare, cu observația că acei coeficienți care corespund la produsul scalar cu ψ_i , $k \in H1$, sunt egalați cu zero înainte de reconstrucție (respectiv înainte de introducerea într-o relație de reconstrucție de tipul 3.59)

În par. 2.2.2 prezentăm un operator K care aplicat lui X diferă suficient de puțin de X pentru a fi adevărată relația (2.17). Înseamnă că trebuie să operăm asupra semnalului eșantionat $X_{e,s}$ (care poartă toată informația despre X), astfel încât proiecția lui să nu difere prea mult de X . Fie atunci operatorul K construit în următorul mod: $K = T^{-1} Q_2 T Q_1$, unde T este operatorul TUD iar semnificația celorlalți doi operatori este:

Q_1 : pune pe 0 toate eșantioanele cu indici din G

Q_2 : pune pe 0 toți coeficienții cu indici din G

în aceste condiții avem:

$$\text{Teorema 3.3.5: } \|X - KX\| \leq \|X\| \quad (3.70)$$

Demonstrație: Operatorul T (TUD) este un operator ortonormat care pastrează norma (de altfel ca și Transformata Fourier) astfel ca relația 3.70 este echivalenta cu:

$$\|TX - TKX\| \leq \|TX\| \Rightarrow \|Y - Q_2 T Q_1 X\| \leq \|Y\| \quad (3.71)$$

Pentru simplitate să notăm tot cu H subspațiul lui l^2 care conține semnalele ce au componentele cu indici din mulțimea G egale cu 0, și să notăm tot cu G subspațiul lui l^2 care conține semnalele ce au componentele cu indici din mulțimea H egale cu 0. Evident și cu aceste notații : $H+G=l^2$, și $H^\perp G$ deoarece

dacă $f \in H$ și $g \in G$ atunci $\langle f, g \rangle = 0$ pentru că pentru fiecare indice cel puțin una dintre componente este nulă.

Atunci Q_1 îl duce pe X în XH, iar X e descompus în două componente ortogonale: $X = XH + XG$ cu $XH^\perp XG$ deci $\|XH\|^2 + \|XG\|^2 = \|X\|^2$. Operatorul T care urmează în relația 3.71 îl duce pe XH în YH și pe XG în YG, dar T pastrează produsele scalare deci $Y = YH + YG$ cu $YH^\perp YG$ și $\|YH\|^2 + \|YG\|^2 = \|Y\|^2$. Urmează operatorul Q_2 aplicat lui YH și care pune pe 0 coeficienții cu indici în mulțimea G, adică îl duce pe YH tot în subspațiul H (de data aceasta din spațiul vectorial al imaginii) adică în YHH. Succesiunea operatorilor este reprezentată în fig.3.19.

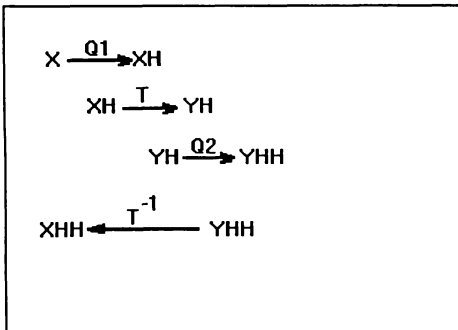


fig.3.19: acțiunea operatorului $K = T^{-1} Q_2 T Q_1$ asupra semnalului X

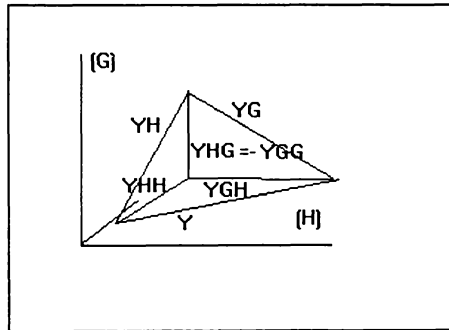


fig.3.20: acțiunea operatorului K în domeniul imagine Y

Trebuie să arătăm că $\|Y - YHH\| \leq \|Y\|$. Dar la rîndul lor YH și YG se descompun în subspațiile H și G în modul urmator:

$$YH = YHH + YHG \text{ cu } YHH^\perp YHG \text{ și } \|YHH\|^2 + \|YHG\|^2 = \|YH\|^2. \quad (3.72)$$

$$YG = YGH + YGG \text{ cu } YGH^\perp YGG \text{ și } \|YGH\|^2 + \|YGG\|^2 = \|YG\|^2. \quad (3.73)$$

deci $Y = YHH + YHG + YGH + YGG \quad (3.74)$

Să observăm că Y aparține și el de fapt subspațiului H al lui l^2 (adică X era un semnal care are coeficienții TUD cu indici în mulțimea G egali cu 0). Atunci înmulțind scalar relația 3.74 pe rând cu YHG și YGG obținem:

$$\langle YHG, Y \rangle = 0 = \|YHG\|^2 + \langle YHG, YGG \rangle$$

$$\langle YGG, Y \rangle = 0 = \langle YGG, YHG \rangle + \|YGG\|^2$$

deci $\|YGG\| = \|YHG\|$, (produsul scalar fiind comutativ) și :

$$\cos(\langle YGG, YHG \rangle) = \langle YGG, YHG \rangle / (\|YGG\| \|YHG\|) = \langle YGG, YHG \rangle / \|YGG\|^2 = -1$$

adică vectorii YGG și YHG sînt egali de sens opus. Atunci rel. 3.74 se transformă în :

$$Y = YHH + YGH$$

deci $Y - YHH = YGH$. Din 3.72 și 3.73 obținem:

$$\|Y\|^2 = \|YH\|^2 + \|YGH\|^2 = \|YHH\|^2 + \|YHG\|^2 + \|YGH\|^2 + \|YGG\|^2$$

deci $\|Y\|^2 \geq \|YGH\|^2$ adică tocmai $\|Y - YHH\| \leq \|Y\|$.

q.e.d.

În figura 3.20 sînt ilustrate relațiile de mai sus în forma geometrică.

Observație : a spune ca Y se afla într-un subspațiu H al lui l^2 (ceea ce a fost esențial în demonstrația de mai sus) e similar cu a spune despre un semnal că e limitat în banda la W : coeficienții Transf. Fourier Discrete cu indici mai mari ca W sînt nuli.

Teorema 3.3.5 ne permite să utilizăm iterațiile:

$$X_0 = Q_1 X$$

$$X_{n+1} = X_n + K(X - X_n) = X_n + T^{-1} Q_2 T (Q_1 X - Q_1 X_n) \quad (3.75)$$

pentru obținerea lui X , unde $Q_1 X$ este tocmai ceea ce cunoaștem la recepție despre semnalul X (adică eșantioanele care ajung la recepție). Este important de remarcat faptul că prin acest procedeu reconstrucția semnalului (rezolvarea sistemului 3.67) se face doar utilizînd aceste eșantioane și informația despre coeficienții care sînt 0 în TUD, informație ce se obține univoc din poziția eșantioanelor. În par.3.4 sînt ilustrate rezultatele obținute cu acest procedeu utilizînd subrutinele `etprim.m` și `incprim.m` descrise în anexă și care implementează exact procedeu de eșantionare adaptivă din corolarul 3.3.4 și procedeu de refacere iterativă on-line a semnalelor din relația 3.75. Faptul că ψ_{ij} sînt cu suport compact permite aplicarea operatorului K pe porțiuni din semnal (deoarece la un moment dat doar un număr limitat de ψ_{ik} intră în componența lui T deci contribuie la formarea lui X), porțiuni (blocuri) care au lungimea M^N ($M = \text{nr. de canale}$, $N = \text{nr. de iterații ale}$

canalelor). Trecerea la porțiunea următoare se face prin memorarea valorilor inițiale și finale din registrele ce intră în componența filtrelor FIR h și g din figura 3.4 (practic prin memorarea valorilor ce intră în relațiile 3.58 și 3.59). O observație care trebuie făcută este că datorită faptului că rel 3.59 este expresia unui filtru finit necauzal fiecare iterație în plus a relației 3.75 implică luarea în considerare a unui nou bloc de lungime M la reconstrucție (adică a eșantioanelor care sosesc în acel interval de timp), dar acest lucru nu deranjează deoarece semnalele pe care lucrăm sînt de lungime mare (teoretic infinită), iar viteza de convergență a algoritmului 3.75 este foarte bună.

A doua observație este aceea că dacă algoritmul se utilizează la compresie de semnal, atunci intervalele dintre eșantioane trebuie memorate, respectiv transmise la rîndul lor. Cum vom vedea în paragraful 3.4. compresia care se obține aplicînd algoritmul unor semnale nestaționare (semnal vocal) este mare, de ordinul $1/8$, astfel încît informația suplimentară despre poziția eșantioanelor nu deranjează foarte mult. În plus distanța între eșantioane este un întreg (semnalul fiind discret) a cărui valoare maximă depinde de numărul de iterații ale băncii de filtre de analiză. De exemplu pentru un sistem bicanal iterat de 8 ori, distanța maximă între eșantioane este de 256 și poate fi codată pe 8 cifre binare, ceea ce probabil este mai puțin decît numărul de biți necesar pentru codarea unui eșantion al semnalului. Informația despre momentele de timp cînd survin eșantioanele nu dublează deci cantitatea de informație obținută în urma procesului de eșantionare adaptivă. Oricum problema memorării sau transmițerii acestor momente de timp este generală pentru orice procedeu de eșantionare adaptivă, indiferent de metoda pe care se bazează.

3.4 Rezultate experimentale

Rezultatele din acest paragraf sînt obținute prin implementarea procedurilor descrise în cor.3.3.4 și rel 3.75 în limbajul MATLAB dedicat prelucrării numerice de semnal.

În primul rînd trebuie să ne convingem că algoritmul propus conduce într-adevar la compresie de semnal. În fig.3.21 și 3.22 se prezintă densitatea de eșantionare pentru un semnal de joasă frecvență (zgomot roz de medie nulă), în funcție de numărul N de

iterații ale unui sistem bicanal ($M=2$).

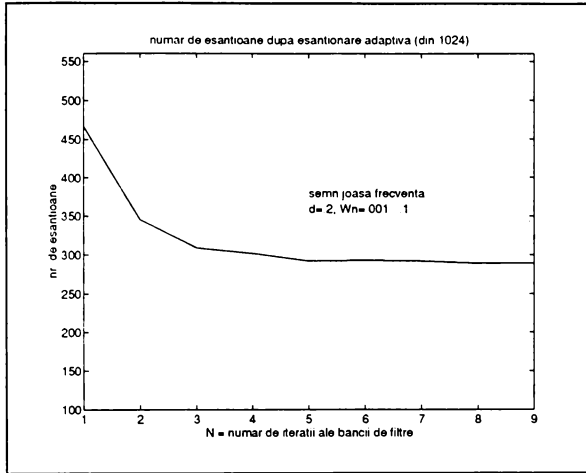


fig.3.21: compresia de semnal în urma aplicării algoritmului din cor. 3.3.4 semnal în banda de frecv. normalizată W_n

Pragul de neglijare a coeficienților Transformării undișoare discrete este de $d=0.2$ în fig.3.21 respectiv 0.4 în fig. 3.22 din dispersia semnalului. Se observă diferența dintre numărul de eșantioane neglijate în cele două cazuri. Banda de frecvența a semnalului utilizat a fost în ambele cazuri $W_n=[0.001, 0.1]$ cu $W=1$ corespunzând la π . Se observă din cele două figuri că

pentru semnale de joasă frecvență se justifică aplicarea algoritmului de eșantionare adaptivă prin analiza semnalului cu un număr mare de iterații al sistemului bicanal, aceasta deoarece sistemul este iterat pe ramura de joasă frecvență ca în fig.3.4. În fig.3.23 și 3.24 se prezintă densitatea de eșantionare în funcție de numărul de iterații

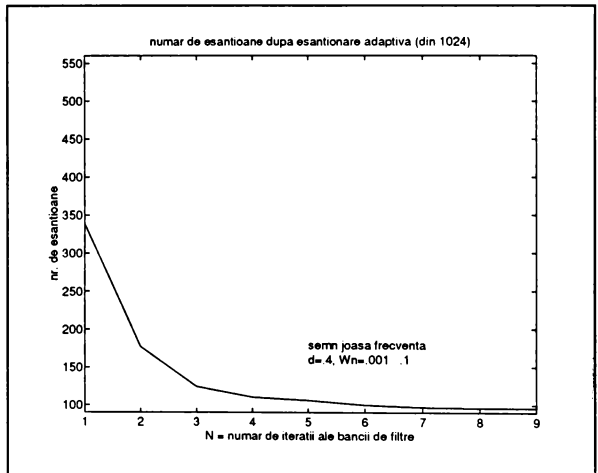
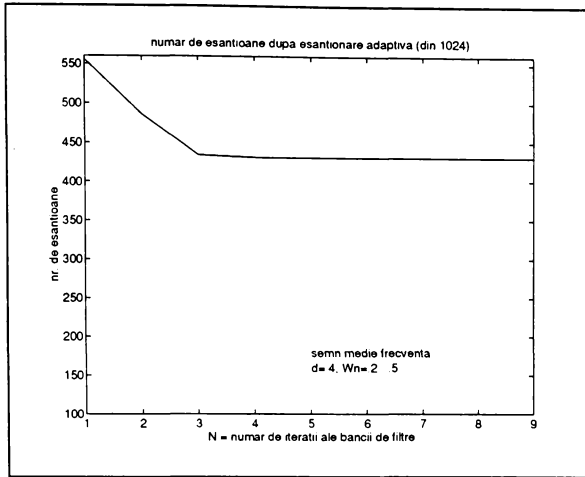


fig.3.22: densitatea de eșantioane pentru un nivel de neglijare d mai mare decit în fig.3.21

ale băncii de filtre pentru un semnal de medie frecvență respectiv de înaltă frecvență. Se observă că numărul de eșantioane rămîne practic constant odata ce descompunerea în fișii cu factor de calitate constant Q (vezi fig.3.11), realizată de banca de filtre, nu mai afectează porțiunea în care se găsește semnalul.

În fig.3.23 semnalul a fost ales cu o largime de bandă care acoperă



mai multe fișii cu Q constant. Din această cauză compresia se saturează la un număr mai mare de eșantioane reținute decât în fig.3.24. Semnalele utilizate în aceste cazuri au fost generate prin trecerea unui zgomot alb printr-un filtru cu caracteristici potrivit alese (frecvențele normalizate de tăiere sînt incluse în desen cu notația W_n),

fig.3.23: influența asupra compresiei a iterării băncii de filtre analizoare din fig.3.4 la un semn de medie frecv.

astfel încît avem de-a face cu semnale stationare. În cazul real un număr mare de iterații asigură urmărirea optimă a caracteristicilor semnalului de către densitatea de eșantionare, cum va reieși în continuare. Totuși și în cazurile prezentate se poate constata o bună compresie de date astfel încît procedeul din cor.3.3.4 se justifică.

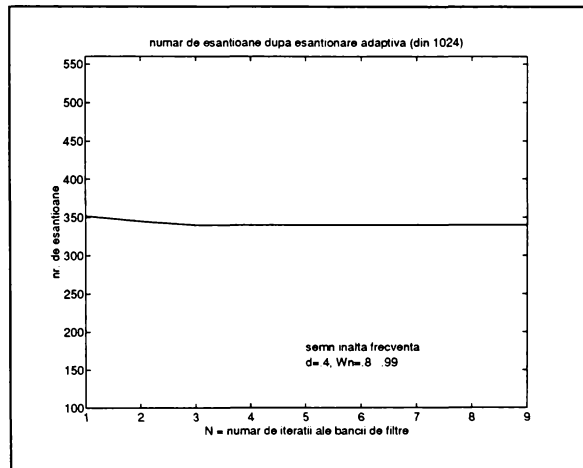


fig.3.24 compresia după eșantionare adaptivă pe baza filtrelor din fig.3.4 pentru un semn de înaltă frecvență

În continuare algoritmul de eșantionare adaptivă din corolarul 3.3.4 este aplicat semnalului din fig.3.25 (zgomot roz de joasă frecvență) a cărui densitate spectrală de putere este prezentată în fig 3.26. Analiza se face pe 8 nivele cu un sistem bicanal. În fig 3.27 și 3.28 se prezintă rezultatul aplicării algoritmului iterativ

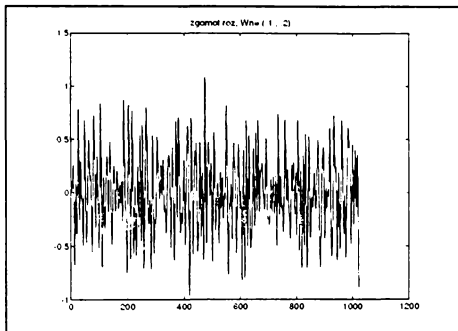


fig.3.25: zgomot roz eș. adaptiv

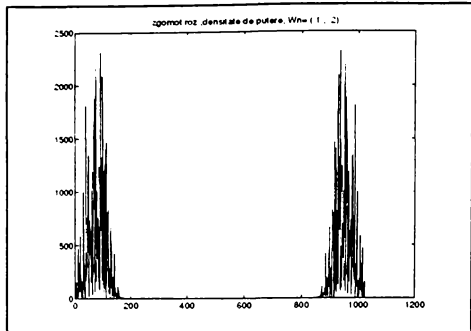


fig.3.26: dens. de putere a zg.

de reconstrucție din par.3.3.2 rel. 3.75, asupra eșantioanelor sosite în mod neregulat la receptie (conform eșantionării adaptive). În detaliile de reconstrucție se pot observa semnalul eșantionat (Q_1X) și cel reconstruit după $n=3$ respectiv $n=5$ iterații la aplicarea relației

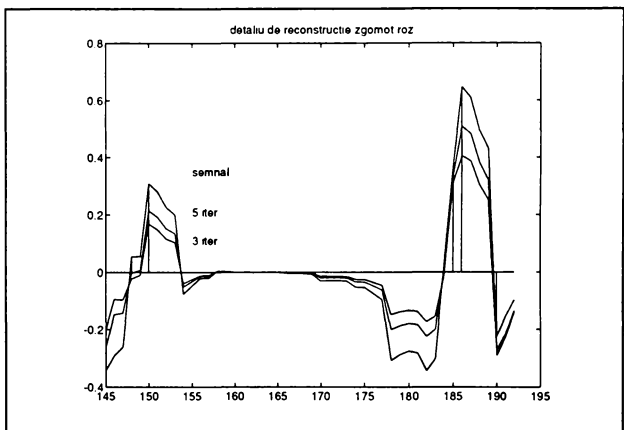


fig.3.27: detaliu de reconstrucție cu alg. 3.75 și eșant. sosite neregulat la recepție

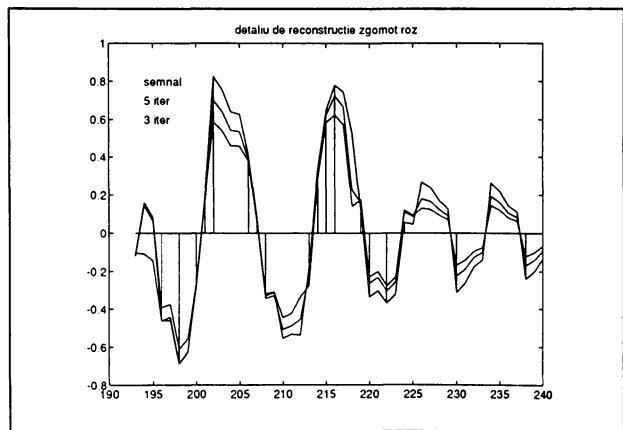


fig.3.28: detaliu de reconstrucție cu alg. 3.75 și eșant. sosite neregulat la recepție

3.75, precum și poziția eșantioanelor sosite. Se poate urmări astfel convergența procedurii de reconstrucție. Se observă cum X_k se apropie de X cu fiecare nouă iterație, Deasemenea se poate observa modul neuniform în care sînt dispuse eșantioanele

în urma algoritmului adaptiv. În fig.3.29 se prezintă și

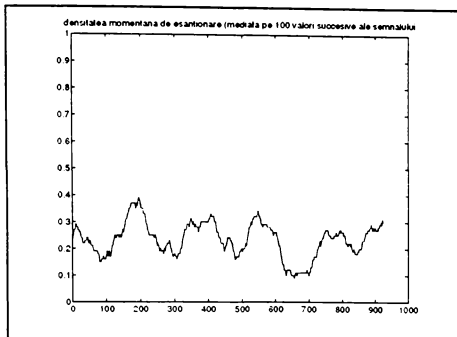


fig.3.29: densitatea medie de eșantionare pt. semnalul din fig.3.25

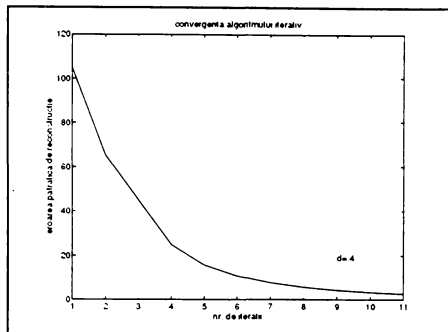


fig.3.30: convergența algoritmului de reconstrucție. rel. 3.75

densitatea medie de eșantionare pentru acest semnal, după eșantionarea adaptivă, unde media alunecătoare s-a făcut pentru 100 de valori consecutive ale semnalului X. Se observă că densitatea de eșantionare nu variază prea mult deoarece semnalul este staționar. În toate aceste reprezentări δ a fost de 0.4 din dispersia semnalului (\sqrt{M})ⁱ, $i=1:N$, pentru coeficienții de pe nivelul i, din cauza scalării intervenite în rel.3.20 pentru M=2, v. rutina 'etprim.m' din anexă). În fig.3.30 se prezintă și eroarea patrică de reconstrucție în funcție de numărul de iterații ale relației 3.75, adică convergența algoritmului de reconstrucție propus. Se observă că algoritmul converge sigur (nu are loc o destabilizare).

În continuare algoritmul de eșantionare adaptivă (cor.3.3.4) și cel de reconstrucție iterativă (rel. 3.75) au fost aplicate unor

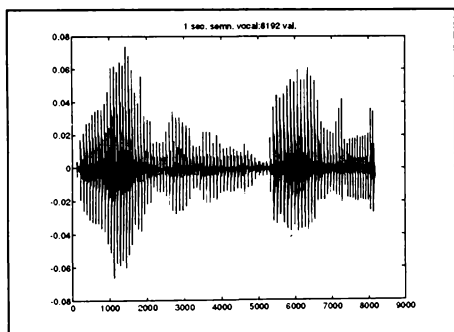


fig.3.31: 1 sec. de semnal vocal (8192) eșantioane

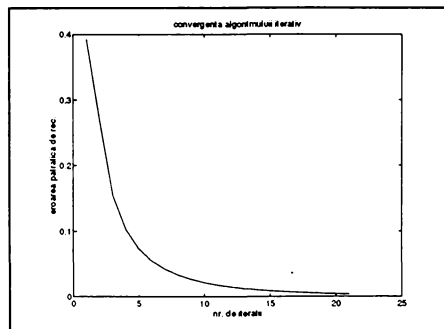


fig 3.32: convergența algoritmului iterativ (eroarea patrică de reconstrucție este normală)

semnale vocale. Sistemul de analiză a fost cel bicanal (M=2) iterat

de $N=8$ ori (adică tocmai baza ortonormată din fig.3.10). Fig 3.31 prezintă 1 sec. de semnal vocal (8192 eșantioane). În urma aplicării algoritmului 3.3.4 numărul de eșantioane a fost redus la 1245.

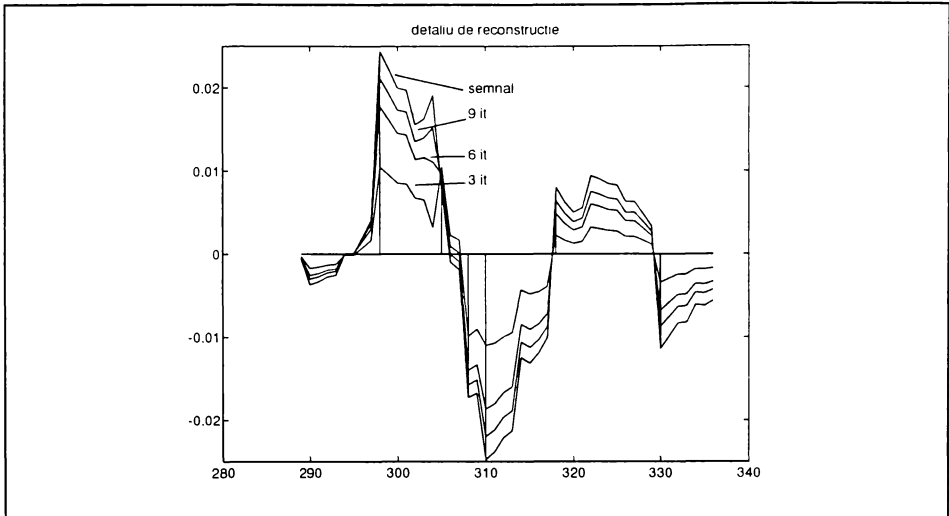


fig . 3 . 33:detaliu de reconstr. a semnalului din fig.3.31 cu algoritmul iterativ din rel 3.75 . dupa 3,6 și 9 iterații

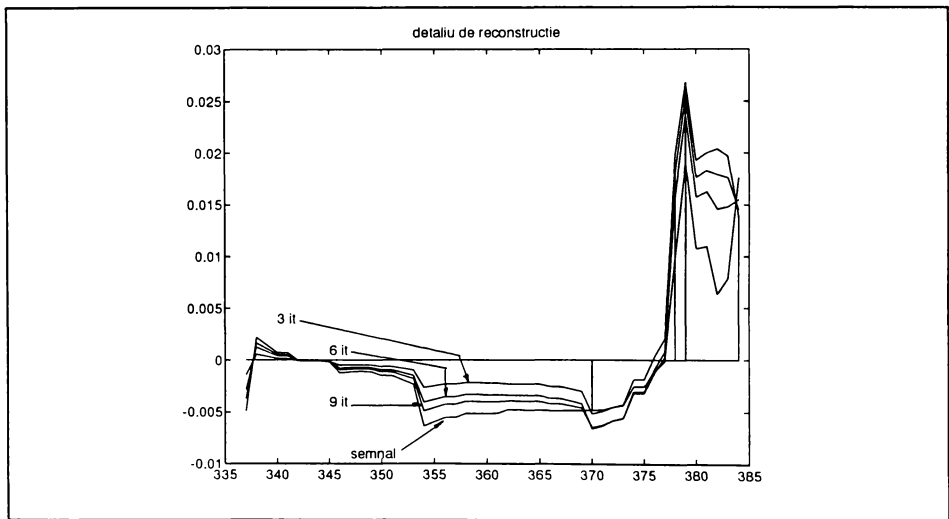


fig . 3 . 34 alt detaliu similar cu fig.3.33, se pot observa eșantioanele rúnase în urma eșant. adaptive

În fig.3.33 și 3.34 se prezintă detalii ale semnalului reconstruit după 3,6 și 9 iterații , precum și momentele de eșantionare. Se observă clar convergența algoritmului de reconstrucție care rezultă

și din figura 3.32 în care se prezintă eroarea patratică de reconstrucție (normată) în funcție de numărul de iterații. Se poate deasemenea observa modul neuniform de esantionare expus în par.3.2 și 3.3. În fig 3.35 se prezintă semnalul reconstruit după 5 iterații ale relației 3.75 (amintim că e vorba de aplicarea on-line a acestei relații, deci pe blocuri de câte 256 de valori din semnalul X). In final pentru alte 2 exemple (cîte o secunda de semnal vocal), se prezintă rezultatele aplicării algoritmului de compresie și de reconstrucție: în fig. 3.36 3.37 3.38 3.39

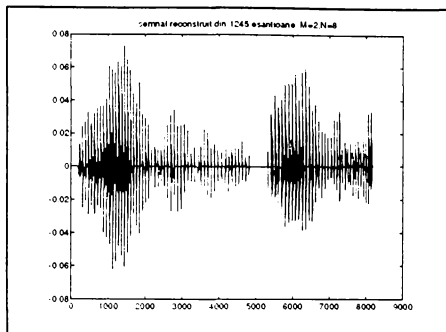


fig. 3.35: semnalul reconstruit din 1245 eșantioane corespunzător semnalului din fig.3.31

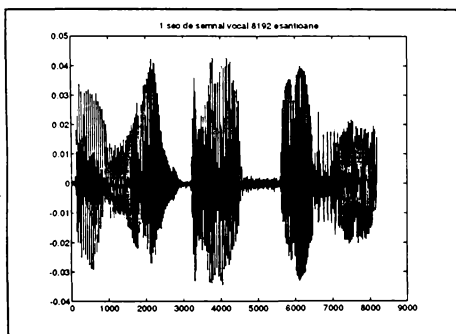


fig. 3.36: 1 sec. de semnal vocal: 8192 eșantioane

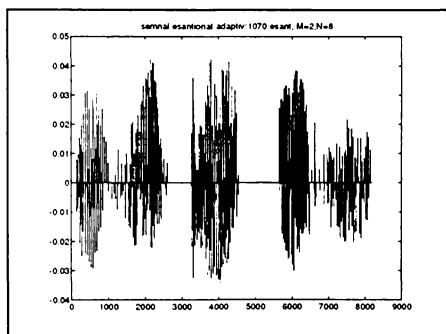


fig. 3.37: după eșantionare: 1070 eșant. rămase

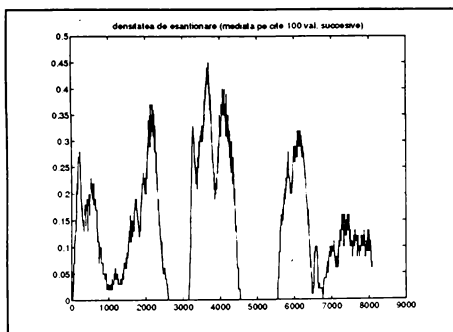


fig. 3.38: densitatea de eșantionare (mediată pe cîte 100 valori)

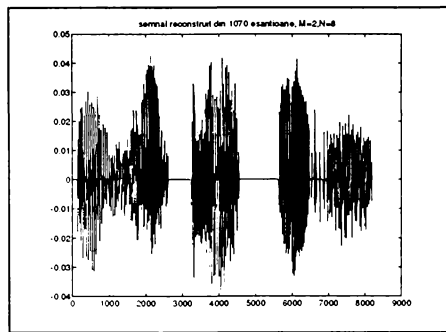


fig. 3.39: semnal reconstruit iterativ (5 it.) din 1070 eșantioane

respectiv 3.40, 3.41, 3.42, 3.43 se pot urmări semnalul inițial, semnalul eșantionat adaptiv (adică eșantioanele care au rămas după

analiza cu sistemul de filtre din fig.3.4 și a aplicării algoritmului descris în corolarul 3.3.4 par.3.3.1), densitatea medie de eșantionare și semnalul reconstruit. În toate aceste cazuri sînt de remarcat utilitatea algoritmului de eșantionare care a condus la o compresie de 8192/1070 pentru primul respectiv 8192/1344 pentru cel de-al doilea semnal, și corectitudinea algoritmului de reconstrucție. Din cauza faptului că semnalele sînt nestaționare se pot observa clar variațiile densității de eșantionare care în cazul celui de-al treilea semnal vocal ajunge deseori la 0 (fig.3.42).

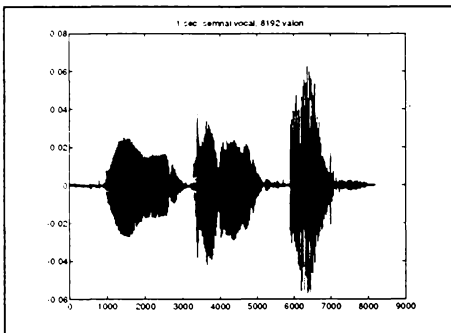


fig. 3.40: 1 sec. semnal vocal 8192 eșantioane

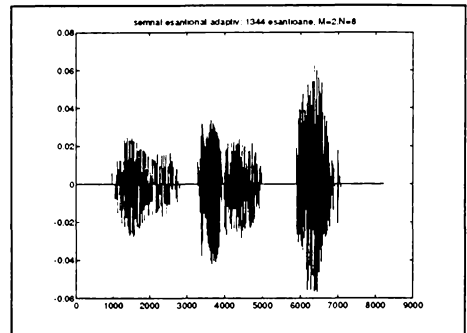


fig. 3.41: eșant. rămase după eș.adaptivă: 1344

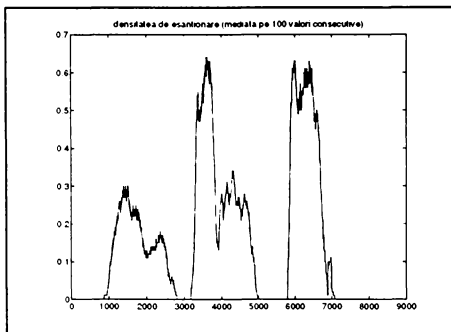


fig. 3.42: densitatea de eșantionare mediată pe câte 100 valori succesive

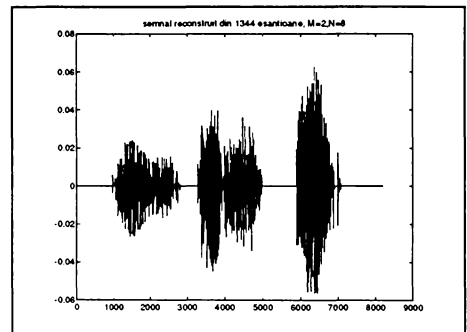


fig. 3.43: semnal reconstruit iterativ (5 it.) din 1344 eșantioane (analiză bicanal pe 8 nivele)

Pentru cele două semnale se prezintă deasemenea în fig.3.44 respectiv 3.45 eroarea patritică medie de reconstrucție în funcție de numărul de iterații ale relației 3.75. Diferența între cele două imagini constă în faptul că în primul caz eroarea de reconstrucție a fost determinată față de proiecția semnalului inițial în spațiul coeficienților TUD aproximați cu 0 (neglijăți deoarece au fost mai mici decit δ) - și precum se observă eroarea tinde la 0 - iar în al doilea caz eroarea a fost determinată chiar față de semnalul

inițial, astfel încât se remarcă persistența termenului eroare dependent de δ dat de relația 3.66. Subrutinele utilizate la punerea în practică a algoritmilor prezentați în par. 3.4 sînt

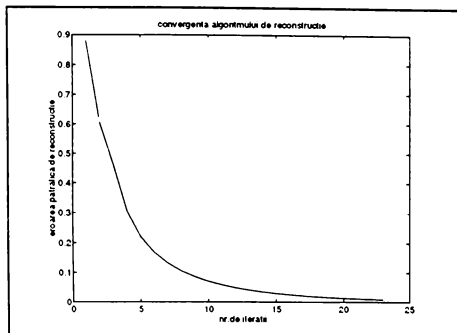


fig.3.44: convergența algoritmului de reconstrucție față de proiecția semnalului în subspațiul determinat de anularea unor coeficienți ai TUD

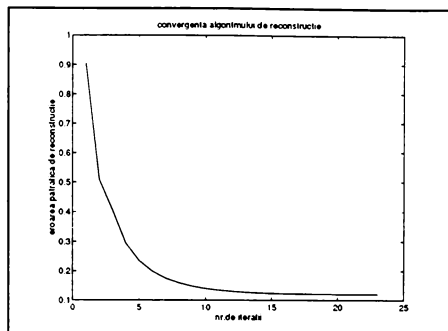


fig.3.45: convergența algoritmului de reconstrucție iterativă față de semnalul inițial: punerea în evidență a erorii dat. neglijării unor coeficienți; rel 3.66

scrise în limbajul MATLAB și au fost incluse într-o bibliotecă care este prezentată în parte (cele mai importante subrutine) în Anexă.

3.5 Rezumat și concluzii

În acest capitol este dezvoltat un algoritm de eșantionare adaptat la proprietățile locale ale semnalelor împreună cu procedeul aferent de reconstrucție. În acest scop a fost utilizată analiza semnalului cu ajutorul unei baze ortonormate de undișoare. Construcția acestei baze este prezentată în par. 3.2, rezultînd pentru Transformarea undișoară discretă (TUD) - care este în fapt proiecția pe această bază a unui semnal-, trei proprietăți importante:

1. baza este formată din translatatele și scalatele unei singure funcții (numită undișoară), deci TUD se poate implementa simplu prin filtrare (cu o structură de tipul celei din fig 3.4).

2. undișoara este cu suport compact, se analizează astfel comportarea locală a semnalului, filtrele de analiză și sinteză sînt FIR, deci se poate realiza o reconstrucție locală deci on-line a semnalului pe bază doar a unui număr finit de eșantioane.

3. scalatele undișoarei descompun spațiul transformatei Fourier a semnalului în fișii cu factor de calitate Q constant, analiza punînd în evidență comportarea momentană în frecvență a semnalului, creînd astfel posibilitatea construirii unei metode de compresie.

Autorul a contribuit cu demonstrații și observații proprii la prezentarea acestui material.

În par.3.3 proprietățile de mai sus sînt exploatate de autor pentru construcția unui algoritm de eșantionare adaptivă pe baza TUD, care renunță la eșantioanele redundante păstrînd însă informația necesară pentru determinarea univocă a semnalului. De asemenea autorul găsește un procedeu iterativ de reconstrucție a semnalului din eșantioanele sosite (neregulat) la recepție, demonstrînd convergența procedeeului. Din demonstrații rezulta că procedeele nu sînt triviale iar par. 3.4. prezintă rezultate experimentale care scot în evidența utilitatea aplicativa a algoritmilor propuși în ceea ce privește compresia de date rezultată cit și în ceea ce privește corectitudinea reconstrucției. Procedeele propuse sînt în totalitate originale. Semnalele utilizate la testari sînt provenite din zgomot alb filtrat și din semnale vocale nestaționare. Deși procedeele este universal, mai ales în cazul acestora din urmă el conduce la compresii mari de date. Se poate spune că bazele de undișoare reprezintă un cadru natural de analiză locală a semnalului, cadru obținut prin aplicarea grupului transformărilor afine unei singure funcții.

Capitolul 4. Contribuții și direcții de dezvoltare viitoare

4.1 Contribuții

Lucrarea de față reprezintă o încercare de extindere a teoremei eșantionării clasice în direcția obținerii unui procedeu de eșantionare adaptivă. Ea constituie totodată o sinteză a cunoștințelor în domeniu considerate utile de către autor în vederea atingerii scopului propus.

Astfel în capitolul 1 autorul prezintă trei domenii matematice cunoscute în general, care pot servi la deducerea Teoremei Eșantionării. Cunoașterea acestor domenii crează perspectiva necesară abordării teoremei și poate conduce la generalizări utile, sau, ceea ce este la fel de important, îndepărtează pericolul căutării în direcții lipsite de perspectivă. Formula de însumare Poisson aparținând domeniului analizei Fourier, subliniază dualitatea care există între spațiul semnalelor continue și cel al celor discrete, stipulând condițiile în care o integrală de convoluție poate fi înlocuită cu o sumă de convoluție -par.1.2. Teorema Paley- Wiener leagă clasa semnalelor de bandă finită de clasa funcțiilor întregi de ordin finit, transferind problema recuperării funcțiilor din eșantioane în aceea a determinării unei funcții întregi în planul complex (o problemă algebrică de interpolare). Cu mijloacele teoriei funcțiilor complexe în par 1.3 autorul face o discuție a posibilității de a aproxima o funcție oarecare (posibil cu viteză de variație foarte mare) cu o funcție de bandă limitată. Deasemenea pe aceeași bază autorul construiește o generalizare proprie a Teoremei Eșantionării în par. 1.4 susținută în [43]. Această generalizare conține drept cazuri particulare aserțiuni formulate în literatură [21], [49] și constituie un prim exemplu de eșantionare neregulată. Teoria spațiilor Hilbert -al treilea domeniu-, oferă instrumente puternice în studierea aproximării semnalelor prin serii de funcții, punând la îndemână operatori de proiecție a semnalelor în spații de interes, teorie care va fi de altfel utilizată în continuare în lucrare.

Capitolul 2 este consacrat generalizării Teoremei Eșantionării

în domeniul eșantionării neuniforme. Pornind de la constatarea că $L^2(\mathbb{R})$ și $l^2(\mathbb{Z})$ împreună cu subspațiile lor ce cuprind semnale de bandă limitată au o structură de spațiu Hilbert, în par. 2.2.1 și 2.2.2 se introduce noțiunea de bază oblică cu ajutorul căreia vor fi descrise în continuare semnalele eșantionate neuniform, precum și un procedeu iterativ de recuperare a bazelor oblice duale. Materialul urmează în principal descrierile din [16], [38], [53] și [75] dar autorul a canalizat expunerea înspre problematica eșantionării, scoțînd în evidență anumite aspecte importante din această perspectivă, semnalate prin figurile introduse în text, și a completat acolo unde a crezut de cuviință cu demonstrații (1 și 2 par.2.2.1) și observații (1 par. 2.2.2) redacte prin caractere grafice diferite. Par. 2.2.3 este original în afara porțiunilor citate explicit, și în acest paragraf autorul transferă problema refacerii semnalelor din domeniul continuu, prezenta în literatură [115], în domeniul discret, domeniu în care oricum se fac prelucrările ulterioare de semnal. În acest paragraf se identifică problema reconstrucției cu problema obținerii bazei oblice duale și se exemplifică o aplicație liniară (matrice) ale cărei linii constituie o bază oblică în spațiul semnalelor limitate în bandă. Pornind de la constatarea că reconstrucția semnalului necesită aflarea proiecției sale ortogonale pe componentele bazei oblice precum și aflarea bazei oblice duale, se justifică posibilitatea utilizării algoritmului minimizării erorii pătratice medii (LMS) pentru recuperarea semnalului. Par. 2.2.4 conține condițiile prezente în literatură, în care un set de translate ale unei funcții constituie o bază oblică într-un spațiu dat, iar autorul transpune aceste condiții în domeniul discret (Teorema 2.1)

Paragrafele 2.3 și 2.4 sînt în întregime originale. În par.2.3 se studiază proprietățile de urmărire ale algoritmului LMS în cazul clasic al identificării sistemelor liniare, variabile în timp (LVT) staționare în sens slab, calculîndu-se o expresie pentru eroarea de urmărirea în funcție de proprietățile statistice ale semnalului (funcția de împrăștiere) și demonstrînd prin experimentare (par.2.3.2) validitatea rezultatelor. Exprimarea erorii în acest mod nou și utilă pentru estimarea ei a priori, acest lucru fiind făcut în literatură într-un caz foarte particular. În continuare în par.2.4 algoritmul LMS este aplicat pe baza constatărilor din paragrafele anterioare la recuperarea semnalelor staționare din

eșantioane prelevate neregulat. Se constată o bună reconstrucție în cazul în care eșantioanele conduc la existența unei baze oblice de tipul celei exemplificate în par 2.2.3. și se verifică acest lucru în practică (par.2.4.2).

Se elimină astfel constrângerea prezentă în literatură de a cunoaște a priori toate eșantioanele pentru a putea efectua reconstrucția, obținându-se un procedeu de reconstrucție on-line. Rezultatele sînt susținute de două lucrari publicate în SUA la IEEE 5'th Digital Signal Proc. Workshop, Starved Rock Lodge, Illinois. sept. 1992, respectiv la IEEE Internat. Conference on Acoustics Speech and Signal Proc., aprilie 1993, Minneapolis, [40] și [41].

Capitolul 3 este consacrat aplicării transformării undișoară discretă (TUD) la eșantionarea neuniformă a semnalelor. Autorul utilizează această dezvoltare pentru a trece de la reconstrucția semnalelor staționare la aceea a semnalelor oarecare păstrînd în același timp posibilitatea reconstrucției on-line. Deasemenea pe baza TUD autorul construiește un algoritm de eșantionare adaptivă. Paragraful 3.2 dezvoltă teoria construcției bazelor oblice și ortonormate de undișoare. Materialul a fost conceput pe baza mai multor lucrari, cele mai importante fiind [25], [29], [35], [51], [78], [95], [109]. Fiecare dintre acestea surprind sau adîncesc diferite aspecte din 'metoda undișoarelor': completitudinea sistemului de funcții, construcția de undișoare cu suport compact, ușurința și rapiditatea calculului coeficienților Fourier, identificarea cu filtrarea multicanal, parametrizarea soluțiilor. A căzut în sarcina autorului de a prezenta aceste aspecte în așa fel încît expunerea să conveargă înspre scopul propus: eșantionarea adaptivă, neluată în considerare în lucrările citate pe parcursul paragrafului. A fost nevoie deasemenea ca autorul să facă anumite demonstrații (1), (2), (3), (4) precum și generalizarea (5) în par 3.2, probabil subînțelese în bibliografie, dar necesare lui însuși pentru a putea înțelege și utiliza materialul. Acestea sînt scoase în evidență (prin modul de scriere) pe parcursul paragrafului.

Paragrafele 3.3 și 3.4 sînt în întregime originale. Ele prezintă teoretic și experimental un algoritm nou (cel puțin nedetectat de autor în nici una din lucrările din bibliografie) care raspunde scopului propus în momentul cînd această cercetare a fost începută. Algoritmul a cărei demonstrație teoretică (Teorema 3.3.1 ... Teorema 3.3.5 împreună cu corolarele aferente) se găsește în

par. 3.3 are următoarele caracteristici:

- este netrivial așa după cum rezultă din demonstrații
- este util așa după cum rezultă din aplicarea în practică (compresii mari de date, par.3.4)
- este original

El se bazează pe utilizarea în practică a analizei semnalelor cu baze ortonormate provenite din aplicarea grupului transformărilor afine unei singure funcții : funcția undișoară. Translatatele și scalatele ei au proprietatea de a descompune spațiul șirurilor de energie finită l^2 în fișii cu factor de calitate constant , dar în același timp au suport compact, astfel încât semnalul este analizat local în frecvență. Autorul a exploatat această observație care evident nu-i aparține.Însă (cel puțin în bibliografia avută la dispoziție) această proprietate a Transformatei Undișoară Discretă (TUD) este utilizată în exclusivitate pentru realizarea compresiei în domeniul transformatei (în domeniul coeficienților Fourier), adică a imaginii semnalului. Nouă în această lucrare este utilizarea TUD pentru realizarea compresiei chiar în domeniul semnalului. Rezultă astfel o eșantionare adaptivă , adică un set de eșantioane care descriu într-un mod univoc semnalul , și nu un set de coeficienți Fourier.

Astfel se raspunde problemei conținute în titlul lucrării prin conceperea unui algoritm de eșantionare adaptat la proprietățile locale ale semnalului împreună cu un algoritm de reconstrucție a semnalului din aceste eșantioane în regim on-line, deci pentru semnale semi-infinite.

Rezultatele din acest capitol au fost publicate într-un contract de cercetare în 1993 [101].

Nu în ultimul rând o contribuție a autorului o constituie și realizarea bibliotecii MATLAB, prezentată (parțial) în anexă, care a servit la verificarea în practică a algoritmilor susținuți teoretic în cap. 2 și 3. Această bibliotecă care cuprinde în principal implementarea TUD indiferent de numărul de canale, de parametrizarea funcției scara Ψ_{00} , și de numărul de iterații ale băncii de filtre, poate sta la baza unor cercetari viitoare. Biblioteca cuprinde de asemenea implementarea algoritmului LMS în refacerea on-line a semnalelor eșantionate aleator, cu posibilitatea punerii în evidență a proprietăților statistice ale semnalelor.

4.2 Direcții de dezvoltare

Deoarece fiecare capitol se încheie cu concluzii vom prezenta în continuare câteva direcții de dezvoltare. Se poate deduce din cele arătate că eșantionarea adaptivă, neregulată e legată strâns de reprezentarea semnalelor cu ajutorul bazelor oblice, respectiv a analizei multirezoluție pe bază de undișoare. Modul în care alegem funcțiile din bază în sensul obținerii unei adaptări suplimentare - a bazei - la semnalul ce trebuie analizat nu a fost tratat. În literatură acest aspect este abordat fie pe baza minimizării unei funcționale legate de semnalul f , de exemplu a entropiei proiecției lui f în spațiile ce compun un anumit spațiu Hilbert $\oplus H_i = H$ cu

$$\epsilon^2(f, \{H_i\}) = -\sum \|f_i\|^2 \ln \|f_i\|^2$$

sau pe baza altor funcții 'cost': maximizarea proiecției lui f în spațiile undișoară pîna la un nivel dat sau minimizarea erorii făcute la neglijarea componentelor semnalului ce se gasesc în spații de la un nivel dat în sus. Se poate urmări de asemenea decorelarea maximă a semnalelor obținute la ieșirile filtrelor ce compun banca de analiză. Generarea diferitelor baze printre care se caută "cea mai bună" d.p.d.v. al criteriilor de mai sus, se poate face cu ajutorul filtrării multicanal descrise în cap. 3, prin iterarea băncilor de filtre pe oricare dintre ramurile ce compun aceste sisteme multicanal, ceea ce se obține fiind o analiză multirezoluție, în care ratele de eșantionare între diferitele ramuri pot fi în raport rațional (nu întreg). Astfel, deși toate bazele de undișoare pot fi generate cu filtre multicanal, s-ar putea întâmpla ca descompunerea spațiului Hilbert inițial, optimă d.p.d.v. al compresiei unui semnal, să nu fie cea dată de o bază de undișoare (deci de parametrizările din [29] și [109]) ci de compunerea mai multor astfel de baze pornind de la funcții scară diferite. Se știe că bazele de undișoare sunt foarte utile pentru compresia diferitelor tipuri de semnale, deci și pentru eșantionarea adaptivă dar problema alegerii celei mai bune baze este încă deschisă. Direcții viitoare de dezvoltare ale subiectului ar cuprinde analiza unor noi algoritmi iterativi de reconstrucție cu performanțe mai bune d.p.d.v. al rapidității de convergență sau al raportului semnal/zgomot de reconstrucție, în cazul în care semnalul ar fi afectat de zgomot, sau s-ar putea referi la găsirea unor

descompuneri ale spațiului l^2 , care să ducă la o compresie maximă în funcție de semnalul analizat.

Bibliografie

- [1] Aldroubi A., Unser M. "Families of Wavelet Transforms in Connection with Shannon's Sampling Theory and the Gabor Transform", in C.K.Chui "Wavelets: A Tutorial in Theory and Application", Academic Press, 1992
- [2] Alpert B.K. "Construction of Simple Multiscale Bases for Fast Matrix Operations", in M.B.Ruskai "Wavelets and their Applications", Jones a. Bartlett Publishers, 1992
- [3] Arrowood J.L., Smith M.J.T.: "Exact Reconstruction Analysis/Synthesis Filter Banks with Time-varying Filters" Proc. IEEE ICASSP 1993
- [4] Auscher P.: "Wavelet Bases for $L^2(\mathbb{R})$ with Rational Dilation Factor" in M.B.Ruskai "Wavelets and their Applications", Jones a. Bartlett Publishers, 1992
- [5] Baraniuk R.G., Jones D.L.: "New Dimensions in Wavelet Analysis" Proc. ICASSP 1992
- [6] Basseville M. et. al. "Modeling and Estimation of Multiresolution Stochastic Processes" IEEE Trans. on IT, Vol.38, March 1992
- [7] Battle G.: "Cardinal Spline Interpolation and the Block Spin Construction of Wavelets" in C.K.Chui "Wavelets: A Tutorial in Theory and Application", Academic Press, 1992
- [8] Bello P.A. "Characterization of Randomly Time Variant Linear Channels" IEEE Tr. on Commun. Syst., 11, 1963
- [9] Benedetto J.J. "Irregular Sampling and Frames", in C.K.Chui "Wavelets: A Tutorial in Theory and Application", Academic Press, 1992
- [10] Beutler F.J. "Alias-Free Randomly Timed Sampling of Stochastic Processes", IEEE Transmission and Information Theory, IT-16, March 1970
- [11] Beutler F.J., Leneman O.A.Z. "Random Sampling of Random Processes", Information and Control, NO. 9/1966
- [12] Beylkin G., Coifman R.R., Rochlin V.: "Wavelets in Numerical Analysis" in M.B.Ruskai "Wavelets and their Applications", Jones a. Bartlett Publishers, 1992
- [13] Boashash B., et al.: "Algorithms for Instantaneous Frequency Estimation. A comparative Study" SPIE Vol 1348 Advanced Signal-Processing Algorithms (1990)
- [14] Butzer P.L. "A survey of Whittaker-Shannon Sampling Theorem and Some of its Extensions", Journal of Mathematical Research and Exposition, Jan.1983, Vol.3
- [15] Butzer P.L., Splettstößer W., Stens R.L. "The Sampling Theorem and Linear Prediction in Signal Analysis", Jber. des Dt.-Mathematischen Verein 90 (1988), Teubner Stuttgart
- [16] Cenker C. "Die Entwicklung von Distributionen nach Kohärenten Funktionssystemen.", Diplomarbeit Univ.Wien, 1989
- [17] Cenker C, Feichtinger H.G, Herrmann M, "Iterative Algorithms in Irregular Sampling. A First Comparison of Methods" Proc.ICCCP-1991 Phoenix/Az, March 1991
- [18] Chui C.K. "Wavelets and Spline Interpolation", in "Advances in Numerical Analysis", vol.II, Ed.Will Light, Clarendon Press, Oxford, 1992
- [19] Chui C.K. "On Cardinal Spline-Wavelets", in M.B.Ruskai "Wavelets and their Applications", Jones a. Bartlett

- Publishers, 1992
- [20] Churkin I.L., Iakovlev V.P., Wunsch G. "Theorie und Anwendung der Signalabtastung", Berlin, Verlag Technik, 1966
 - [21] Clark I.I. "Sampling and Reconstruction of Non-Bandlimited Signals" Preprint
 - [22] Clark I.I., Palmer M.R., Lawrence P.D.: "A Transformation Method for the Reconstruction of Functions from Nonuniform Spaced Samples" IEEE Tr. on ASSP, Vol 33 Oct 1985
 - [23] Cochran D., Clark I.I.: "On the Sampling and Reconstruction of Time-warped Band-limited Signals", Proc. ICASSP 1990
 - [24] Cohen A.: "Wavelets and Digital Signal Processing" in M.B.Ruskai "Wavelets and their Applications", Jones a. Bartlett Publishers, 1992
 - [25] Cohen A. "Biorthogonal Wavelets", in C.K.Chui "Wavelets: A Tutorial in Theory and Application", Academic Press, 1992
 - [26] Cohen A., Daubechies I. "Nonseparable bidimensional wavelet bases", Revista Matematica Iberoamericana, Vol 9, No 1, 1993
 - [27] Coifman R.R., Wickerhauser M.V. "Entropy-Based Algorithms for Best Basis Selection", IEEE Trans. on IT, Vol.38, No.2 March 1992
 - [28] Coifman R.R., Meyer Y., Wickerhauser M.V. "Wavelet Analysis and Signal Processing", in M.B.Ruskai "Wavelets and their Applications", Jones a. Bartlett Publishers, 1992
 - [29] Daubechies I. "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets", Comm. on Pure and Applied Mathematics, Vol.41(1988), 908-996
 - [30] Daubechies I.: "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis" IEEE Tr. on IT, Vol 36, Sept. 1990
 - [31] Delprat N., et al.: "Asymptotic Wavelet and Gabor Analysis: Extraction of Instantaneous Frequencies" IEEE Tr. on IT, Vol 38, March 1992
 - [32] DeVore R.A., Jawerth B., Lucier J.: "Image Compression Through Wavelet Transform Coding" IEEE Tr. on IT, Vol 38, March 1992
 - [33] Doroslovacki M., Hong F., "Wavelet-Based Adaptive Filtering" Proc. IEEE ICASSP 1993
 - [34] Erdol N., Basbug F., "Performance of Wavelet Transform Based Adaptive Filters" Proc. IEEE ICASSP 1993
 - [35] Feauveau J.C. "Nonorthogonal Multiresolution Analysis Using Wavelets", in C.K.Chui "Wavelets: A Tutorial in Theory and Application", Academic Press, 1992
 - [36] Feauveau J.C.: "Wavelets for Quincunx Pyramid" in M.B.Ruskai "Wavelets and their Applications", Jones a. Bartlett Publishers, 1992
 - [37] Feichtinger H.G., Gröchenig K. "Non-Orthogonal Wavelet and Gabor Expansions and Group Representations", in M.B.Ruskai "Wavelets and their Applications", Jones a. Bartlett Publishers, 1992
 - [38] Feichtinger H.G., Gröchenig K. "Theory and Practice of Irregular Sampling", Preprint
 - [39] Ferreira P.J.: "Incomplete Sampling Series and the Recovery of Missing Samples from Oversampled Bandlimited Signals" IEEE Tr. on SP Jan. 1992
 - [40] Filimon V., W Kozek, G. Kubin " LMS Identification of WSSUS Channels" IEEE 5'th DSP Workshop, Starved Rock Lodge,
-

- Illinois. Sept 1992
- [41] Filimon V., Kozek W., Kreuzer W., Kubin G. "LMS and RLS Tracking Analysis for WSSUS Channels" Proc. IEEE ICASSP 1993, Minneapolis
- [42] Filimon V. "Reconstructia unor semnale din esantioane prelevate neregulat" Ses. Com. Univ. Oradea, mai 1993
- [43] Filimon V., Lugojan S.: "About an extension of the Whittaker-Shannon Sampling Theorem" Ses Com. Univ. Arad, aprilie 1994
- [44] Filimon V. "Referat 1", Timisoara, Feb. 1993
- [45] Filimon V. "Referat 2", Timisoara, Iulie. 1993
- [46] Flandrin P., Martin W.: "The Wigner-Ville Spectrum of Nonstationary Random Signals" Preprint
- [47] Gardner W.: "Nonstationary Learning Characteristics of the LMS Algorithm" IEEE Tr. on Circ. a Systems, 34, Oct 1987
- [48] Griffiths L.J.: "Rapid Measurement of Digital Instantaneous Frequency" IEEE Tr. on ASSP Vol 23, April 1975
- [49] Gröchenig K.: "A New Approach to Irregular Sampling of Band-Limited Functions" NATO Conference, Ciocco Ill, July 1989
- [50] Gröchenig K.: "Irregular Sampling of Wavelet and Short Time Fourier Transforms" Preprint
- [51] Gopinath R.A., Burrus C.S. "Wavelet Transforms and Filter Banks", in C.K.Chui "Wavelets: A Tutorial in Theory and Application", Academic Press, 1992
- [52] Golub G.H., Van Loan Ch.F. "Matrix Computations" The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989
- [53] Heil C.E, Walnut D.F., "Continuous and Discrete Wavelet Transforms" SIAM Revue Vol.31, Dec.1989
- [54] Herley C., Vetterli M.: "Wavelets and Recursive Filter Banks" IEEE Tr. on SP, Aug. 1993
- [55] Higgins I.R. "Five Short Stories about the Cardinal Series", Bull.Amer.Math Soc.(12), 1985, p.45-89
- [56] Hlawatsch F., Boudreaux-Bartels G.F. "Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations", IEEE SP Magazine, April 1992
- [57] Horiuchi K.: "Sampling Principle for Continuous Signals with Time-Varying Bands". Information and Control 13, 1968
- [58] Hosur S., Tewfik A.H.: "Wavelet Transform Domain LMS Algorithm" Proc. IEEE ICASSP 1993
- [59] Jerry A.: "The Shannon Sampling Theorem - Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Revue", Proc. of IEEE Vol.65, Nov.1977
- [60] Kailath T., "Measurements on Time-variant Communication Channels" IEEE Tr. on IT, Sept 1962
- [61] Kovacevic J., Vetterly M.: "Perfect Reconstruction Filter Banks with Rational Sampling Factors" IEEE Tr. on SP, June 1993
- [62] Kozek W. : "On the Generalized Weyl Correspondence and its Application to Time-Frequency analysis of Linear Time-Varying Systems" Proc. IEEE-SP, Victoria, Oct. 1992
- [63] Kozek W.: "Time-Frequency Signal Processing Based on the Wigner-Weyl Frame Work" Signal Processing 29, Oct. 1992
- [64] Kozek W., Hlawatsch F., "Time-Frequency Representation of Linear Time-Varying Systems Using the Weyl Symbol" Proc. IEE Sixth. Int. Conf. on Dig. Proc. of Signals in Comm." Loughborough UK, Sept 1991
- [65] Kubin G., "Coefficient Filtering - a Common Framework for the Adaptation in Time-Varying Environments" in D. Docampo a.A.R. Figueras : "Adaptive Algorithms: Applications and

- Non-Classical Schemes", Vigo, Spain 1991
- [66] Kubin G.: "Direct-form Adaptive Filter Algorithms: a Unified View" in IT Young : "Signal Processing III: Theories and Applications" Amsterdam 1986
- [67] Kubin G.: "Adaptive Signalverarbeitung" Vorlesung, Okt. 1991
- [68] Lambrecht C.B., Karrakchou M.: " Subband Adaptive Filtering: The Mutual Wavelet Packets Approach" Proc. IEEE ICASSP 1993
- [69] Lechleider J.W.: "A New Interpolation Theorem with Application to Pulse Transmission" IEEE Tr. on Communications, Vol 39, Oct. 1991
- [70] Luthra A, " Extension of Parseval's Relation to Nonuniform Sampling" IEEE Trans. ASSP, Vol.36, No.12, Dec.1988
- [71] Lim J., Oppenheim A.V., "Advanced Methods in Signal Processing" Prentice Hall, NY 1988
- [72] Ljung L., Gunnarson S.: "Adaptation and Tracking in System Identification - a Survey" Automatica 26, Jan 1990
- [73] Mallat S. "Multifrequency Channel Decompositions of Images a Wavelet Models", IEEE Trans. ASSP, Vol.37, Dec. 1989
- [74] Mallat S. "Zero Crossings of a Wavelet Transform" IEEE Trans. on IT, Vol.37, 1991
- [75] Manzella V. "Completeness of Continuous and Discrete Gabor Expansions", Preprint
- [76] Marks R.J. II: "Introduction of Shannon Sampling and Interpolation Theory" Springer 1991
- [77] Mateescu A.: "Semnale, circuite și sisteme" Ed. Did. și Pedagogică, București, 1981
- [78] Meyer Y., " Ondelettes et Operateurs", Hermann, Paris 1990
- [79] Munch N.J., "Noise Reduction in Tight Weyl-Heisenberg Frames" IEEE Trans. on IT, Vol 38, March 1992
- [80] Nayeby K, Barnwell T, Smith M, " Analysis and Synthesis Systems with Time-varying Filter-Bank Structures" Proc. ICASSP 1992
- [81] Naylor A.W., Sell G.R. "Linear Operator Theory in Engineering and Science", Springer Verlag, NY Inc., 1982
- [82] Oakley J, Cunningham M, Little G, "A Fourier Domain Formula for the Least Square Projection of a Function onto a Repetitive Basis in N-Dimensional Space" IEEE Trans. ASSP Vol.38, Jan.1990
- [83] Olsen P., Seip K.: "A Note on Irregular Discrete Wavelet Transform" IEEE tr. on IT, Vol 38, March 1992
- [84] Oppenheim A.V., Schaffer R.W. "Digital Signal Processing", Prentice Hall, NY.1975
- [85] Papoulis A. "Signal Analysis", N.Y., McGraw-Hill, 1977
- [86] Petropulu A.P.: "Detection of Transients Using Discrete Wavelet Transform" Proc. ICASSP 1992
- [87] Pop E., Nafornta I., Mihaescu A., Tiponut V., Toma L.: " Metode in prelucrarea numerica a semnalelor" Facla Tim. 1986
- [88] Rioul O., Flandrin P. "Time-Scale Energy Distributions: A General Class Extending Wavelet Transforms", IEEE Tr. on SP, July 1992
- [89] Rioul O., Vetterli M. "Wavelets and Signal Processing", IEEE SP Magazine, October 1991
- [90] Scharf L.L. "Statistical Signal Processing", Addison Wesley Publishing Comp., 1991
- [91] Seip K.: "wavelets in $H^2(\mathbb{R})$: Sampling, Interpolation, and Riesz Space Density" in C.K.Chui "Wavelets: A Tutorial in Theory and Application", Academic Press, 1992

-
- [92] Shapiro H.S., Silverman R.A.: "Alias-Free Sampling of Random Noise" Inform. a. Control, June 1960
- [93] Shlomot E., Zeevi Y.: "Nonuniform Sampling and Representation of Images which are not Bandlimited", EE Pub. 742, Jan 1990
- [94] Silov G.E., "Analiza functionala" Ed. St. 1980
- [95] Smith M.J.T., Barnwell T.P., "Exact Reconstruction Techniques for tree structured subband coders" IEEE Trans. ASSP, Vol.34/1986
- [96] Sodagar I., Nayebi K., Barnwell T.P.: "A Class of Time-Varying Wavelet Transforms" Proc. IEEE ICASSP 1993
- [96] Soman A.K., Vaidyanathan P.P.: "On Orthonormal Wavelets and Paraunitary Filter Banks" IEEE Tr. on SP, March 1993
- [97] Spătaru Al.: "Teoria transmisiunii informației" Ed. Did. și Pedagogică, București 1983
- [98] Splettstösser W.: "Sampling Approximation of Continuous Functions with Multidimensional Domain" IEEE Tr. on IT, Vol 28, Sept. 1982
- [99] Splettstösser W.: "On the Approximation of Random Processes by Convolution Processes" ZAMM 61, 1981
- [100] Stanomir D., Stănășilă "Metode Numerice în Teoria Semnalelor", Ed. Teh. București, 1980
- [101] Stoica V., Filimon V.: "Prelucrarea numerică adaptivă a semnalului de telecomunicații" Raport la contractul de cercetare 5004/c Tema 28, Noi. 1993
- [102] Tiponut V.: "A Reconstruction Algorithm of Sampled Signals using FFT" Proc. Melecom 1983, Mediterranean Electrotechnical Conference,
- [103] Tewfik A.H., Levy B.C., Willsky A.S.: "Sampling Theorems for Two-Dimensional Isotropic random Fields" IEEE Trans on IT, Vol.34, Sept. 1988
- [104] Tewfik A.H., Sinha D., Jorgensen P. "On the Optimal Choice of a Wavelet for Signal Representation", IEEE Trans. on IT, Vol.38, No.2 March 1992
- [105] Tchamitchian Ph. "Biorthogonalité et Théorie des Opérateurs" Revista Matematica Iberoamericana, Vol 3, No 2, 1987
- [106] Therrien Ch.W. "Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing" Prentice-Hall International, New Jersey, 1992
- [107] Unser M., Aldroubi A. "Polynomial Splines and Wavelets - A Signal Processing Perspective", in C.K. Chui "Wavelets: A Tutorial in Theory and Application", Academic Press, 1992
- [108] Vaidyanathan P.P., Hoang P. "Lattice Structures for Optimal Design and Robust Implementation of Two-Channel Perfect Reconstruction QMF Banks", IEEE Trans on ASSP, Vol.36, Jan. 1988
- [109] Vetterli M. "Wavelets and Filter Banks for Discrete-Time Signal Processing", in M.B. Ruskai "Wavelets and their Applications", Jones a. Bartlett Publishers, 1992
- [110] Vetterli M., Herley C.: "Wavelet and Filter Banks: Theory and Design" IEEE Trans on SP, Sept. 1992
- [111] Wahlberg B.: "The Effects of Rapid Sampling in System Identification" Automatica No 26, 1990
- [112] Walter G.G.: "A Sampling Theory for Wavelet Subspaces", IEEE Trans. on IT, Vol.38, March 1992
- [113] Widrow B, Stearns S.D., "Adaptive Signal Processing" Prentice Hall 1985
- [114] Widrow B. et al: "Stationary and Nonstationary Learning
-

- Characteristics of the LMS Adaptive Filter" Proc. IEEE, 164, Aug. 1976
- [115] Wingham D. J, "The Reconstruction of a Band-Limited Function and its Fourier Transform From a Finite Number of Samples at Arbitrary Locations by Singular Value Decomposition" IEEE Trans. ASSP, Vol.40, March 1992
- [116] Yeh S., Stark H. " Iterative and One Step Reconstruction from Nonuniform Samples by Convex Projections" I.Opt.Soc. Am.A., Vol.7, No.3, March 1990
- [117] Zhou N., Holte N.:"Least Squares Channel Estimation for a Channel With Fast Time Variations" Proc. IEEE ICASSP 1992
- [118] Zibulski M., Zevi Y.Y.:"Oversampling in the Gabor Scheme" Proc. ICASSP 1992
- [119] Ziegler R.A., Cioffi J.M.:"Estimation of Time -Varying Digital Mobile Radio Channels" Proc. IEEE Globecom -1991, Phoenix (Az)
- [120] Zou H., Tewfik A.H.:"Parametrization of Compactly Supported Orthonormal Wavelets" IEEE Tr. on SP, March 1993
- [121] Zühlke W.:"Arythmische Signalverarbeitung und-Übertragung", Frequenz 45, 1991
- [122] Zwaan M. "Dynamic MRI Reconstruction as a Moment Problem. Riesz Bases in L^2 -Spaces.", Report Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam
- [123] *** Hewlett-Packard "Sampling Converter Reference Guide"

Anexa

Programe referitoare la experimentele din paragraful 2.3**alle12.m**

```

k5=0          %exec alg. LMS pt diferiti mu
for il=1:29
    k5=k5+1;
    mu(il)
    lms12
    E=(E(1,100:355));
    D=(D(1,100:355));
    A(k5)=sum(E)/256; %eroare cu zg.alb
    B(k5)=sum(D)/256; %eroare de urmarire
    clear E D;
end;
clg;

```

lms12.m

```

rand('normal');          % implementeaza alg. LMS
x1=[1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1]; %secventa necorelata
w=zeros(8,1);
for i=1:512
    x2;
    zz=(sqrt(8/SNR))*rand;
    e=x3*(c1(i,:)'-w)+zz;
    w=w+mu(il)*e*x3;
    Z(i)=zz;
    E(i)=e^2;
    D(i)=(c1(i,:)'-w)'*(c1(i,:)'-w);
end

```

c12.m

```

k12; %genereaza sistemul LTV pe baza functiei de imprastiere
c1=abs(iff(K));
for i=1:256
    c1=[c1(512,:)' c1(1:511,:)']';
end;
K=abs(fft(c1));
%M={37.5 30};
%subplot(221),mesh(K,M);
%subplot(222),mesh(c1,M);

```

k12.m

```

for i=1:512          %genereaza functia de imprastiere
    for j=1:8
        K(i,j)=512*((2/(i+j))^y);
    end;
end;

```

sumap12.m

```

N=512;          %calculeaza media erorii apriori
i=sqrt(-1);
p=1;
for i2=1:29
    mu(i2)
    for q=1:8
        for k=1:512
            a(k) = exp(i * k * 2 * p i / N);
        end;
        b(k)=(1/N^2)*(K(k,q))^2*abs((a(k)-1)^2)/abs((a(k)+mu(i2)-1)^2);
        B1(q)=sum(b);
    end;
    A1(p)=sum(B1);
end;

```

```

    E1(p)=A1(p)+32*mu(i2)/(SNR*(1-4*mu(i2)));
    p=p+1;
    clear b B1;
end;

```

Programe referitoare la experimentele din paragraful 2.4

lm.m

```

%          Program principal (LMS alunecator)
clg
% executa lms cind se cunosc esantioanele semnalului (Y) ale lui e din tt
% cuprinse in vect 'd', fereastra se calc in ww=WE;
re=input('semnal nou?');
if re==1
    clear
    tt9 %ofera unsemnal 'e' (din gensem) si semnal esant : 'd'
        % lungimea N , pozitiile de esant in Y1 de lungime M
else
    clear M1 H WE ss
    genery1
    Y=e(Y1);
    d=e;
    d(~11)=zeros(1,N-M); % d= semnalul esantionat
    clear n 1 11;
end
subplot(211),plot(e)
plot(abs(fft(e)))
pause(2)
clg
N1=input('N1=');
h19 % face matricea H (M1,N1) N1 e dat de utiliz, M1 e variabil :
    % cite esantioane incap in N1
ww9 % face o fereastra de uitare : diagonal ( )
theta=zeros(N1,1); % rez sist y=H*theta
mu=input('mu'); % th = th + muH'WE (y-H*th)
E=zeros(1,N);
rez=zeros(1,N); % th aluneca si rezulta rez
yy=Y(1:M1); %yy contine val din fereastra momentana lung N1
var=M1;
ss=zeros(N1,N1);
for i = 1:N-N1
    ss=ss+H'*WE*H;
    %G=pinv(H(1:var;:));
    %pp=pp+G'*R*G;
    i
    ee=yy-H*theta;
    E(i)=ee'*ee;
    theta=theta+mu*H'*WE*ee;
    a1=min(find(Y1:=i+1)); %lim din st a ferestr moment
    b=max(find(Y1:=i+N1)); % lim din dreapta a fer.
    YY1=Y1(a1:b); % pozitiile esantioanelor din fer mom
    schimH % calc noua matr H
    ww9 % noua matr de uitare D M1 e var.
    yy=Y(a1:b);
    rez(i)=theta(1);
    theta=[theta(2:N1)' 0]'; % aluneca theta
    s=i+1:i+N1; % fereastra moment.
end
subplot(211),plot(e)
hold
subplot(211),discrete(d,'g')
hold
subplot(212),plot(N/N1*rez);hold;plot(e,'g');hold;
ss=ss/i;
mumax=1/max(eig(ss));
[O,D]=eig(ss);
BBB=fft(O);
for i2=1:N1
    AA(:,i2)=interp(BBB(:,i2),N/N1)/(sqrt(N1));
end
C=(abs(fft(e))).^2;
suma %calculeaza eroarea apriorii

```

```
put %determina eroarea dupa experiment
```

h19.m

```
% genereaza matricea ce contine baza oblica , M1 nr. de coloane
% M1 nr de linii = nr. de esantioane din intervalul N1

%N1=input('N1=');
M1=sum(Y1~=N1);
for i=1:N1
    for j=1:M1
        if Y1(j)==i
            H(j,i)=2*W+1;
        else
            H(j,i)=sin((2*W+1)*(Y1(j)-i)*pi/N)/(sin(pi*(Y1(j)-i)/N));
        end;
    end;
end;
H=H./N1;
```

tt.9

```
% genereaza un semnal cu largimea de banda W si lungimea N
% genereaza vectorul ce contine esantioanele si semnalul esantionat

N=input('N=');
W=input('W=');
%W2=input('W2=');
%Wn=[W1 W2];
f=white(N);
if W<1
    B=fir1(20,W);
    %T=fir1(40,.5);
    e=filter(B,1,f);
    %e=filter(T,1,e);
else
    e=f;
end
%[W1*N W2*N]
W=W*N
generay1 % genereaza vectorul de esantioane
Y=e(Y1);
d=e;
d(~11)=zeros(1,N-M); % d= semnalul esantionat
clear n 1 11;
```

ww9.m

```
% creaza fereastra F alunecatoare
% m=input('n=');
n=1:M1;
%WWW=ones(1,M1);
WWW=n/M1;
%WWW=(n/M1).^2;
%WWW=(exp(n/2)/exp(M1));
WE=diag(WWW); %/(sum(WWW.^2));
```

schimb.m

```
%adauga o noua coloana la matricea H in procesul de alunecare
M1=length(Y1);
H=zeros(M1,N1);
for i1=1:N1
    for j=1:M1
        if Y1(j)==i+1
            H(j,i1)=2*W+1;
        else
            H(j,i1)=sin((2*W+1)*(Y1(j)-i-i1)*pi/N)/(sin(pi*(Y1(j)-i-i1)/N));
        end;
    end;
end;
```

```

end;
H=H./N1;

put

pu=0;          %calculeaza eroarea medie de reconstructie
ppu=0;
eee=e*N1/N;
eeee=';
rezrez=rez';
for il=N1:N-1*N1
    pu=pu+sum((Q'*eee(il:il+N1-1)-Q'*rezrez(il:il+N1-1)).^2);
    %pu=pu+sum((eee(il:il+N1-1)-rezrez(il:il+N1-1)).^2);
end
pu=pu/(N-3*N1+1);

suma

lambda=diag(D); %calc. eroarea de reconstructie pe baza form
x=max(lambda);
i=sqrt(-1);
for q=1:N1
    if lambda(q) < -1
        for k=1:N
            a(k) = exp(i * k * 2 * pi / N);
            b(k)=C(k)*abs((a(k)-1)^2)/abs((a(k)+mu*lambda(q)-1)^2);
        end;
        B1(q)=sum(b);
    else
        B1(q)=0;
    end
end;
AA1=sum(B1)/(N^2);

```

Programe referitoare la experimentele din paragraful 3.4

```

calc

function [COEF,memxout]=calc(e,M,N,memxin); %implementeaza TUD
% itereaza canale pe ramura de jos dintr-un FB cu M canale
if M==2
    load HH2
elseif M==3
    load HH3
elseif M==4
    load HH4
else
    end
end
B=V*V'*E;A=E-B;
    B=B';A=A';
part=M^(N); % cite valori ale semn. intra intr-un bloc
COEF=[];
mem=memxin;
for il=1:length(e)/part
    s=e((il-1)*part+1:il*part);
    ses=zeros(1,length(s));
    ss=s;
    REZ=[];
        for i2=1:N %itereaza N filtre
            if i2<1
                s=D(1,:);
            end
            x=fapeM(s,M);
            D=A*x+B*(rotldro(x,1)+[mem(:,i2) zeros(M,part/(M^(i2))-1)]);
            J=fadaM(D(2:M,:),i2,part,M);
            for p=1:(M-1)
                REZ=[REZ;J((M-p),:)]; % contine coef transf. undisoara
            end
            if i2==N
                REZ=[REZ;fadaM(D(1,:),i2,part,M)];
            end
        end
    end
end

```

```

end
if i1==1
    memxout(:,i2)=x(:,part/(M^(i2)));
end
    mem(:,i2)=x(:,part/(M^(i2)));
end
COEF=[COEF REZ];
end

```

dens

```

function a=dens(1);
%calc dens de esantionare
r=length(1);
for i=1:r-100
    a(i)=sum(1(i:i+50))/50;
end

```

etprim

```

% itereaza canale pe ramura de jos dintr-un FB cu M canale
clear A B E D x sem part REZ COEF l1 lll nres;
clc;
M=input('nr. de canale=');
N=input('nr. de iteratii ale canalelor= ');
if M==2
    load HH2
elseif M==3
    load HH3
elseif M==4
    load HH4
else
end
B=V*V'*E;A=E-B;
    B=B';A=A';
sem=input('semmal = ');
%sem=sem/sqrt(sum(sem.^2));
alfa=input('cit din coef sa treaca ? (: 1) ');
alfa=alfa*sqrt(sum(sem.^2)/(length(sem)));
part=M^(N); % cite valori ale semm. intra intr-un bloc
memx=zeros(M,N);
COEF=[];
esant=[];
l1=[];
LL=[];
mmm=[];
nres=0;
nres1=0;
for i1=1:length(sem)/part
    s=sem((i1-1)*part+1:i1*part);
    ses=zeros(1,length(s));
    ss=s;
    REZ=[];
    l1=zeros(1,part/M);
    L=zeros(N+1,part/M); % trebuie corectat daca M!=2 !!
    mm=zeros(1,part);
    clear l
    for i2=1:N %itereaza N filtre
        if i2>1
            s=D(1,:);
        end
        x=fapeM(s,M);
        D=A*x+B*(rotdro(x,1)+[memx(:,i2) zeros(M,part/(M^(i2))-1)]);
        %keyboard
        J=fadaM(D(2:M,:),i2,part,M);
        for p=1:(M-1)
            REZ=[REZ;J((M-p),:)] ; % contine coef transf. undisoara
            l=abs(J(M-p,:))·alfa*(sqrt(M))^(i2);
            L(i2,:)=l; %trebuie corectat daca M!=2 !!
            l1=l1+l;
            %m=em(1,M,i2);
            %mm=mm+l;
            %keyboard
        end
        if i2==N

```

```

    REZ={REZ; fadam(D(1,:), i2, part, M)};
    l=abs(fadam(D(1,:), i2, part, M))^alfa*(sqrt(M))^(i2);
    L(i2+1,:)=1; %trebuie corectat daca M!=2 !!
    L(i2, length(L))=1;
    L(i2+1, length(L))=1;
    ll=ll11;
    %m=em(1, M, i2);
    %mm=mm1m;
    %mm(length(m)/2)=1; mm(length(m))=1;
end
memx(:, i2)=x(:, part/(M^(i2)));
end
COEF={COEF REZ};
ll=fadam(ll, 2, part, M);
ses(ll)=ses(ll);
ll1={ll1 ll1};
LL={LL LL};
esant={esant ses};
nres=nres+sum(ll);
%mmmm={mmmm mm};
end
%mmmm=rotst(mmmm, 1);
%mmmm(length(mmmm))=1;
mmmm=me(LL);
[l, p]=size(REZ);
COEFEF=zeros(1, N*p);
C=set0(COEF, ll1, M);
CC=set00(COEF, LL);
s=refacing(M, N, C, COEFEF, A, B);
p=refacing(M, N, CC, COEFEF, A, B);
esant1=s;
esant1(-mmmm)=zeros(1, length(esant1)-sum(mmmm));
%esant2=s;
esant2=p;
esant2(-mmmm)=zeros(1, length(esant2)-sum(mmmm));
save fis_e_p esant2 M N A B LL ll1 mmmm;
%save fis_e_s esant1 M N A B ll1 mmmm;
nres
sum(mmmm)

```

gramsch

```

%face o matrice ortonormata cu prima col=[1/sqrt(M)...] pentru a fi
%folosita in polifaz la generarea filterbank
clear U E
U(:, 1)=ones(M, 1)/sqrt(M);
for g=2:M
    g
    U(:, g)=input('u= ?');
end
E(:, 1)=U(:, 1);
for h=2:M
    a=zeros(M, 1);
    for k=1:(h-1)
        a=a+(U(:, h) '*E(:, k))*E(:, k);
    end
    E(:, h)=U(:, h)-a;
    E(:, h)=E(:, h)/sqrt(sum(E(:, h).^2));
end

```

fadam

```

function y=fadam(A, i, part, M) % face coeficientii lui D sa incapa in matrici de
                                % ac. lung = part / M
[m, n]=size(A);
B=zeros(m, part/M);
h=1:n;
B(:, h.*(M^(i-1)))=A(:, h);
y=B;

```

fapem

```
function y=fapeM(s,M) % PUNE UN SIR PE TREI RINDURI
n=1:length(s)/M;
y=[];
for k=1:M
    a=s(n.*M-k+1);
    y=[y;a];
end
```

incprim

```
% reface semnalul prin proiectii iterate in spatiul coeficientilor
load fis
Q=[];QQ=[];Y=[];Z=[];
clear re rr r
es=esant2;
%G=LL; LL=1l(mnm,N);
a=sum(p.^2);
%rr=aco(es,mnm);
%rr=acopl(es,mnm);
r=es;
r=sum((p-rr).^2);
re=[a r];
r=length(es);
for i=1:9
    i
    if i==1
        qq=zeros(1,r);
    else
        qq=Q((i-1),:);
    end
    qq(-mnm)=zeros(1,r-sum(mnm));
    y=es-qq;
    %z=aco(y,mnm);
    %z=acopl(y,mnm);
    z=y;
    C=calc(z,M,N,zeros(M,N));
    %C=set0(C,111,M);
    C=set00(C,LL);
    q=refacing(M,N,C,zeros(M+(M-1)*(N-1),N*M^(N-1)),A,B);
    QQ=[QQ q];
    Z=[Z z];
    if i==1
        q=q;
        C=C;
    else
        q=Q((i-1),:)+q;
    end
    Q=[Q;q];
    rr=sum((p-q).^2);
    re=[re rr];
    Y=[Y y];
    %keyboard
end
```

lmsund

```
% reface semnalul prin aducerea prin LMS a coeficientilor in plus la 0
load fis
mu=input('mu=');
Q=[];QQ=[];Y=[];Z=[];
%G=LL; LL=1l(mnm,N);
es=esant2;
rr=aco(es,mnm);
r=sum((p-rr).^2);
re=[r];
z=rr;
for i=1:9
    i
    C=calc(z,M,N,zeros(M,N));
    %C=set0(C,111,M);
    C=set00(C,-LL);
    q=refacing(M,N,C,zeros(M+(M-1)*(N-1),N*M^(N-1)),A,B);
    QQ=[QQ q];
    z=z-mu*q;
```



```

        Z=[Z z];
        r=sum((p-z).^2);
        re=[re r]
end

11

function y=LL(m,N); %descopera coeficientii o din semnal
e=m;
for i=1:N
    a=(par(e)+impar(e))*1.5;
    if i==1
        b=a;
        for il=i:i-1
            b=e2(b);
        end
        y(i,:)=b;
    else
        y(i,:)=a;
    end
    if i==N
        y((i+1),:)=y(i,:);
    end
    e=par(e);
end

polifaz

%face matrice polifaza cind se dau vectorii v din : U=PN*P(N-1)*...*P1
%cu Pi=[I-vv' + z(-1)vv'] si trece in H0 direct filtrele hi i=1:M
clear V B A M N
M=input('M=?');
N=input('N=?');
grmsch
for i=1:N
    i
    V(:,i)=input('v=?')';
    V(:,i)=V(:,i)/sqrt(sum(V(:,i).^2));
    B(:,(i-1)*M+1:i*M)=V(:,i)*V(:,i)';
    A(:,(i-1)*M+1:i*M)=eye(M)-B(:,(i-1)*M+1:i*M);
end
AA=[A(:,1:M) B(:,1:M)];
if N==2
    for il=2:N
        AA=prodconv(AA,[A(:,(il-1)*M+1:i1*M) B(:,(il-1)*M+1:i1*M)]);
    end
else
end
HH=[];
for il=1:(N+1)
    H=(AA(:,(il-1)*M+1:i1*M))*E;
    HH=[HH' H']';
end

refacing

function sem = refacing(M,N,COEF,COEFEF,A,B);
%reface semnalul din coeficienti , implementeaza TUD inversa
%function sem = refacing(M,N,COEF,COEFEF,A,B);
[m,n]=size(COEF);
n1=M^(N-1);
COEF=[COEF COEFEF];
sem=[];
for i=1:n/n1
    AA=COEF(:,(i-1)*n1+1:(i+N)*n1);
    for il=1:N
        if il==1
            x=1:N+1;
            d=AA((N-1)*(M-1)+1:m,n1.*x);
            d=flipud(d);
            a1=(M-1)*(N-2);
        else
            b=N*M^(il-1);
            a=1:b;
            %keyboard

```

```

                d=[AA(a1+1:a1+M-1,a.*M^(N-i1));invfapeM(y(:,1:b/M))];
                d=flipud(d);
                a1=a1-M+1;
            end
            %keyboard
            y=A'*d+B'*rotsto(d,1);
            %keyboard
        end
        sem=[sem invfapeM(y(:,1:n1))];
    end

```

set00

```

function C =set00(COEF,LL);
% pune pe 0 coeficientii care sint 0 initial
% function C =set00(COEF,LL);
[m,n]=size(COEF);
A=zeros(m,n);
A(-LL)=COEF(-LL);
C=COEF-A;

```

vectfaz

```

%face h0 polifaza cind se dau vectorii v din : h0(z)=PN*P(N-1)*...*P1*e
%cu P1=[I-vv'+ z^(-1)vv']
clear V B A AA H h0
clc
M=input('M=?');
N=input('N=?');
for i1=1:N
    i
    V(:,i)=input('v=?');
    V(:,i)=V(:,i)/sqrt(sum(V(:,i).^2));
    B(:,(i-1)*M+1:i*M)=V(:,i)*V(:,i)';
    A(:,(i-1)*M+1:i*M)=eye(M)-B(:,(i-1)*M+1:i*M);
end
AA=[A(:,1:M) B(:,1:M)];
if N~=2
    for i1=2:N
        AA=prodconv(AA,[A(:,(i1-1)*M+1:i1*M) B(:,(i1-1)*M+1:i1*M)]);
    end
else
    end
AA=AA/sqrt(M);
h0=[];
for i1=1:(N+1)
    H(:,i1)=sum(AA(:,(i1-1)*M+1:i1*M)');
    h0=[h0 H(:,i1)'];
end
plot(abs(fft(h0,128)));grid

```