MINISTERUL INVATAMINTULUI SI STIINTEI

Institutul Politehnic „ Traian Vuia " Timişoara

Facultatea de Mecanică

Ing. Vasile I. Ciofoaia

CONTRIBUTII LA STUDIUL STARILOR DE SOLICITARE AL PLACILOR CIRCULARE RIGIDIZATE RADIAL

Conducător ştiinţific

Prof.dr.ing. LAZAR BOLEANTU

1 9 9 1

INTRODUCERE

In ultimii ani o amploare deosebită a luat dezvoltarea construcţiilor industriale, de maşini, de nave şi a industriei chimice. Acest lucru a impus dezvoltarea corespuzătoare de noi tipuri de structuri complexe printre care şi a plăcilor circulare cu nervuri radiale. In acest cadru se înscrie lucrarea prezentă limitată la studiul stărilor de deformaţie şi de tensiune la plăcile circulare cu nervuri radiale. Autorul încearcă, ţinînd cont de studiile [123], [124], [230] efectuate . prezent, să formuleze şi să dezvolte metode de calcul cu aplicabilitate generală şi să prezinte relaţii de calcul care să slujească proiectanţilor.

Organizarea materialului prezentat în lucrare a fost făcută în 9 capitole.

In capitolul 1 sînt prezentate notaţiile mărimilor folosite în analiza stării de deformaţie şi de tensiune a plăcilor circulare izotrope, a reţelelor de bare şi a plăcilor circulare cu nervuri radiale.

Capitolul 2 analizează modurile de creştere a rezistenţei şi rigidităţii plăcilor circulare prin folosirea de materiale cu proprietăţi mecanice superioare sau prin obţinerea unor configuraţii constructive adecvate. Sînt prezentate tipuri de plăci cu nervuri, avantaje şi inconveniente în utilizarea acestor plăci şi domeniile de utilizare. Se face o analiză critică a stadiului actual al cercetărilor privind calculul plăcilor circulare cu nervuri radiale şi se stabilesc obiectivele lucrării.

In capitolul 3 sînt create premisele dezvoltării ulterioare privind calculul plăcilor cu nervuri analizîndu-se plăcile circulare şi reţele de bare. Sînt tratate aspecte generale privind deplasările, deformaţiile, eforturile secţionale, ecuaţiile de echilibru static şi eforturile din bare la reţele în funcţie de componentele deplasării.

In capitolul 4 sînt tratate plăcile circulare cu nervuri radiale. Sînt deduse relaţii de calcul ale deformaţiilor , tensiunilor, eforturilor secţionale în funcţie de componentele deplasării precum şi ecuaţiile diferenţiale care descriu deformarea lor. Eforturile secţionale şi ecuaţiile diferenţiale s-au stabilit pe mai multe căi existînd posibilitatea confruntă - rii rezultatelor obţinute.

In capitolul 5 se analizează modul de integrare a ecua - ţiilor diferenţiale care descriu deformarea plăcilor circulare cu nervuri radiale. Soluţiile ecuaţiilor diferenţiale au fost obţinute în cazul încărcării axial simetrice a plăcii cînd nervurile au secţiunea transversală constantă sau variabilă. Se prezintă exemple de calcul iar rezultatele sînt comparate cu cele obţinute la placa circulară izotropă. Totodata se specifică modul de calcul al acestor plăci cu metodele Rayleigh-Ritz şi Bubnov-Galerkin precum şi cu metoda elemen - tului finit. In încheierea capitolului se prezintă programul de calcul prin substructurare elaborat pentru analiza diferitelor tipuri de structuri complexe precum şi a plăcilor circulare cu nervuri radiale.

Micşorarea greutăţii plăcii circulare cu nervuri ra - diale în raport cu placa circulară de grosime constantă cînd se impune ca ele să aibă aceeaşi rezistenţă sau rigiditate prin stabilirea numărului şi a dimensiunilor nervurilor se tratează în capitolul 6.

In capitolul 7 sînt prezentate cercetările experimentale ale stărilor de deformaţie şi de tensiune şi compararea lor cu rezultatele obţinute prin diferite metode de calcul. In acest sens, tensometria electrică rezistivă, fotoelasti - citatea şi interferometria holografică s-au dovedit a fi tehnicile experimentale cele mai potrivite pentru analiza stă - rilor de deformaţie şi de tensiune în plăcile circulare nervurate. Totodată sînt prezentate dispozitivele folosite pentru efectuarea cercetărilor experimentale.

In capitolul 8 sînt prezentate principalele contri - buţii şi concluzii desprinse din cercetarea teoretică şi experimentală a stărilor de deformaţie şi de tensiune la plăcile circulare cu nervuri radiale şi unele aspecte care pot fi tratate ulterior într-o nouă cercetare.

In ultimul capitol, anexe, sînt tratate mai detailat unele noţiuni de geometrie diferenţială şi analiză tensorială necesare deducerii relaţiilor pentru deplasări, deformaţii şi a ecuaţiilor de echilibru static ale plăcilor circulare. Totodată se prezintă integrarea ecuaţiilor diferenţiale care descriu deformarea plăcilor circulare cu nervuri radiale cu secţiune variabilă cu ajutorul seriilor.

Autorul îşi exprimă sentimentul de profundă recunoştinţă faţă de domnul prof.dr.ing.Lazăr Boleanţu pentru preţioasele sfaturi de încurajare şi sprijin continuu primite pentru terminarea acestei lucrări.

1. NOTATII

Sisteme de coordonate

x, y, z		- coordonate carteziene
r, φ, z		- coordonate cilindrice

Lungimi

R	$[L]$	- raza exterioară a plăcii
r	$[L]$	- rază curentă
h	$[L]$	- grosimea plăcii
H, H_o, h_r	$[L]$	- înălţimea nervurii
T, t_r, t	$[L]$	- lăţimea nervurii
b_r, b_φ	$[L]$	- distanţa dintre nervuri în direcţie circumferenţială, respectiv radială

Caracteristici geometrice

$dA = r \cdot dr \cdot d\varphi$	$[L^2]$	- aria elementului de suprafaţă
A_r, A_φ	$[L^2]$	- aria elementului de placă în direcţia axei r, respectiv φ
$A_{rn}, A_{\varphi n}$	$[L^2]$	- aria secţiunii nervurii radiale , respectiv circumferenţiale
V, V_o	$[L^3]$	- volumul plăcii cu nervuri, respectiv al plăcii fără nervuri
$I_{rn}, I_{\varphi n}$	$[L^4]$	- momente de inerţie ale secţiunilor nervurilor
D, B	$[FL]$	- rigiditatea cilindrică, respectiv axială a plăcii
D_x, D_y, D_r, D_φ	$[FL]$	- rigidităţi de încovoiere în direcţiile x, y, r, φ
D_t, D_{xy}	$[FL]$	- rigidităţi la torsiune
D_1	$[FL]$	- rigiditate la încovoiere care ia în considerare contracţia
$\bar{B}_r, \bar{B}_\varphi$	$[FL^{-1}]$	- rigiditate axială a nervurilor distribuită pe lungimile b_r, respectiv b_φ
$\bar{D}_r, \bar{D}_\varphi$	$[FL]$	- rigiditate de încovoiere ale nervurilor distribuite pe lungimile b_r, respectiv b_φ
$\bar{D}_{r\varphi}, \bar{D}_{\varphi r}$	$[FL]$	- rigiditate la torsiune al nervurilor distribuite pe lungimea b_r , respectiv b_φ
$\bar{S}_r, \bar{S}_\varphi$	$[FL^2]$	- momentul rigidităţii axiale al nervurilor în raport cu un plan de referinţă distribuite pe lungimea b_r, respectiv b_φ

$B_{r\varphi}$, $B_{\varphi r}$	$[FL^{-1}]$	- rigiditate longitudinală distribuită pe lungimile b_r, respectiv b_φ

Materiale

E	$[FL^{-2}]$	- modul de elasticitate longitudinal
E_{rn}, $E_{\varphi n}$	$[FL^{-2}]$	- modul de elasticitate longitudinal pentru materialele nervurilor
E_r, E_φ, E_x, E_y	$[FL^{-2}]$	- modul de elasticitate longitudinal după direcţiile r, φ, x, y
ν	$[-]$	- coeficient de contracţie transversală a materialului plăcii
ν_{xy}, ν_{yx}	$[-]$	- coeficient de contracţie transversală de scurtare pe direcţia y şi lungirea pe direcţia x şi invers

$$E'_x = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} ; \quad E'_y = \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} ; \quad E'' = \frac{E_x \cdot \nu_{xy}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} = \frac{E_y \cdot \nu_{yx}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}$$

Deplasări şi deformaţii

u, v, w u_o, v_o, w_o	$[L]$	- componentele depasării punctului $\mathcal{J}$, respectiv ale punctului $\mathcal{J}_o$
$\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z$ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$,	$[-]$	- lungiri specifice
γ_{xy}, $\gamma_{r\varphi}$	$[-]$	- lunecări specifice

Tensiuni

σ_r, σ_φ	$[FL^{-2}]$	- tensiune normală radială, respectiv circumferenţială
σ_{rn}, $\sigma_{\varphi n}$	$[FL^{-2}]$	- tensiunea normală din nervura radială, respectiv circumferenţială
$\tau_{r\varphi}, \tau_{rz}$, $\tau_{\varphi z}$	$[FL^{-2}]$	- tensiunea tangenţială
σ_x, σ_y, σ_z	$[FL^{-2}]$	- tensiune normală în direcţia axei x, respectiv y şi z

Incărcări exterioare

p_r, p_φ, p_z	$[FL^{-2}]$	- componentele încărcării exterioare
P	$[F]$	- forţa concentrată
M	$[FL/L]$	- moment distribuit pe unitatea de lungime

Eforturi secţionale

N_r, N_φ	$[FL^{-1}]$	- eforturi secţionale normale
$N_{r\varphi}$, $N_{\varphi r}$	$[FL^{-1}]$	- eforturi secţionale de lunecare

T_r, T_φ	$[FL^{-1}]$	- eforturi secţionale tăietoare
M_r, M_φ	$[FL/L]$	- eforturi secţionale de încovoiere
$M_{r\varphi}$, $M_{\varphi r}$	$[FL/L]$	- momente secţionale de răsucire
$\mathcal{N}_{r(n)}$, $\mathcal{T}_{r(n)}$, $\mathcal{M}_{r(n)}$, $\mathcal{N}_{r\varphi(n)}$, $\mathcal{M}_{r\varphi(n)}$		- eforturi secţionale în barele reţelei în direcţie radială
$\mathcal{N}_{\varphi(n)}$, $\mathcal{T}_{\varphi(n)}$, $\mathcal{M}_{\varphi r(n)}$, $\mathcal{M}_{\varphi r(n)}$, $\mathcal{M}_{\varphi(n)}$		- eforturi secţionale în barele reţelei în direcţie circumferenţială

Diverse

α_r, λ_r, α_φ, λ_φ	- mărimi adimensionale care caracterizează rigidizarea
A_{u_o}, A_{v_o}, L_1, L_2, L_3	- operatori diferenţiali
Π	- energia potenţială totală
U_m, U_p, U_{rn}	- energie de deformaţie a plăcii şi nervurii
L_e	- lucru mecanic exterior
$\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_\varphi$, $\mathbf{i}_z$	- versori
$\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_o$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{g}_\alpha$, $\mathbf{G}_\alpha$	- vectori
$\{ \}$	- matrice coloană
$[ ]$	- matrice pătrată
Δ	- operator Lapace în coordonate polare
$g_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$, $G^{\alpha\beta}$	- componentele covariante şi contravariante ale tensorului metric

2. STADIUL ACTUAL AL CALCULULUI PLACILOR CIRCULARE RIGIDIZATE

2.1 Consideraţii generale

In proiectarea elementelor structurale ca şi a plăcilor circulare în condiţiile realizării unei siguranţe în exploatare se are în vedere reducerea consumurilor energetice şi de material. Proiectarea unor plăci circulare uşoare care să satisfacă condiţii corespunzătoare de rezistenţă, rigiditate, stabilitate este posibilă dacă:

- se folosesc materiale cu proprietăţi mecanice superioare;
- se aplică elemente de rigidizare.

Extinderea utilizării materialelor izotrope cu proprietăţi mecanice superioare este ineficientă datorită preţului de cost ridicat. Pe lîngă aceste materiale la construcţia plăcilor se pot folosi şi materiale compozite [45]. Materialele compozite reprezintă o clasă nouă de materiale de mare importanţă tehnologică; ele sînt sisteme de corpuri solide, deformabile, combinaţii la scară macroscopică de mai multe materiale. Prin folosirea acestor materiale s-au obţinut proprietăţi superioare pentru elemente privind rezistenţa, rigiditatea, coroziunea, uzura, greutatea, izolarea termică şi acustică etc. Avantajul folosirii acestor materiale constă în reducerea greutăţii elementelor structurale precum şi în proprietatea de a fi termic stabile şi deci dimensiunile sînt conservate în timp.

Utilizarea materialelor cu maximum de eficienţă cu respectarea unei siguranţe de funcţionare a impus utilizarea plăcilor ortotrope, adică a plăcilor care au trei plane de simetrie elastică. Ortotropia plăcilor poate avea diferite cauze:

i) ortotropia cauzată de material [20], [148], [197], [226]. In acest caz materialul are moduli de elasticitate diferiţi după două direcţii reciproc perpendiculare. Din această categorie fac parte plăcile din lemn [55], [197], [208].

Pentru determinarea tensiunilor într-o placă ortotropă [121], [197] se folosește relația:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E'_x & E'' & 0 \\ E'' & E'_y & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (2.1)$$

unde constantele elastice E'_x, E'_y, E'' și G sînt mărimi independente, neexistînd relații între G și celelalte constante elastice. In cazul materialelor izotrope între E, G și ν există relația $G = E/(2(1+\nu))$. In cazul plăcilor izotrope

$$E'_x = E'_y = \frac{E}{1-\nu^2}\ ; \qquad E'' = \frac{E}{1-\nu^2}\ . \qquad (2.2)$$

ii) ortotropia condiționată constructiv [5], [6], [20], [22], [33], [141], [160], [210]. In acest caz, ortotropia se obține printr-o dispunere convenabilă a materialului izotrop în așa fel încît să rezulte o creștere a rigidității după mai multe direcții. In această categorie sînt cuprinse plăcile cutanate [160], plăcile sandwich [112], [115], plăcile perfo - rate [11], [83], [231] și plăcile nervurate [19], [20], [22], [24], [33], [68], [69], [97], [122], [141], [149], [158], [202], [215]. Deoarece pentru aceste plăci ortotropia rezultă din modul de dispunere a materialului ele se numesc plăci cu ortotropie de structură. In categoria acestor plăci se găsesc și plăcile circulare cu nervuri.

2.2 Tipuri de plăci circulare nervurate

Plăcile circulare întărite cu nervuri sînt cazuri particulare de învelișuri de rotație rigidizate. Ele sînt compuse din membrane sau plăci circulare subțiri ce se întăresc cu elemente elastice unidimensionale (bare cu pereți subțiri de tip Vlasov sau bare de tip Kirchhoff - Clebsch - Lurie).

Nervurile pot fi așezate paralel cu un diametru (fig.2.1,a) sau în cruce (fig.2.1,b), circumferențial (fig.2.1,c) sau ra - dial (fig.2.1,d), mixt (radial și circumferențial fig.2.1,e), sau sub forma unor bare curbe (fig.2.1,f).

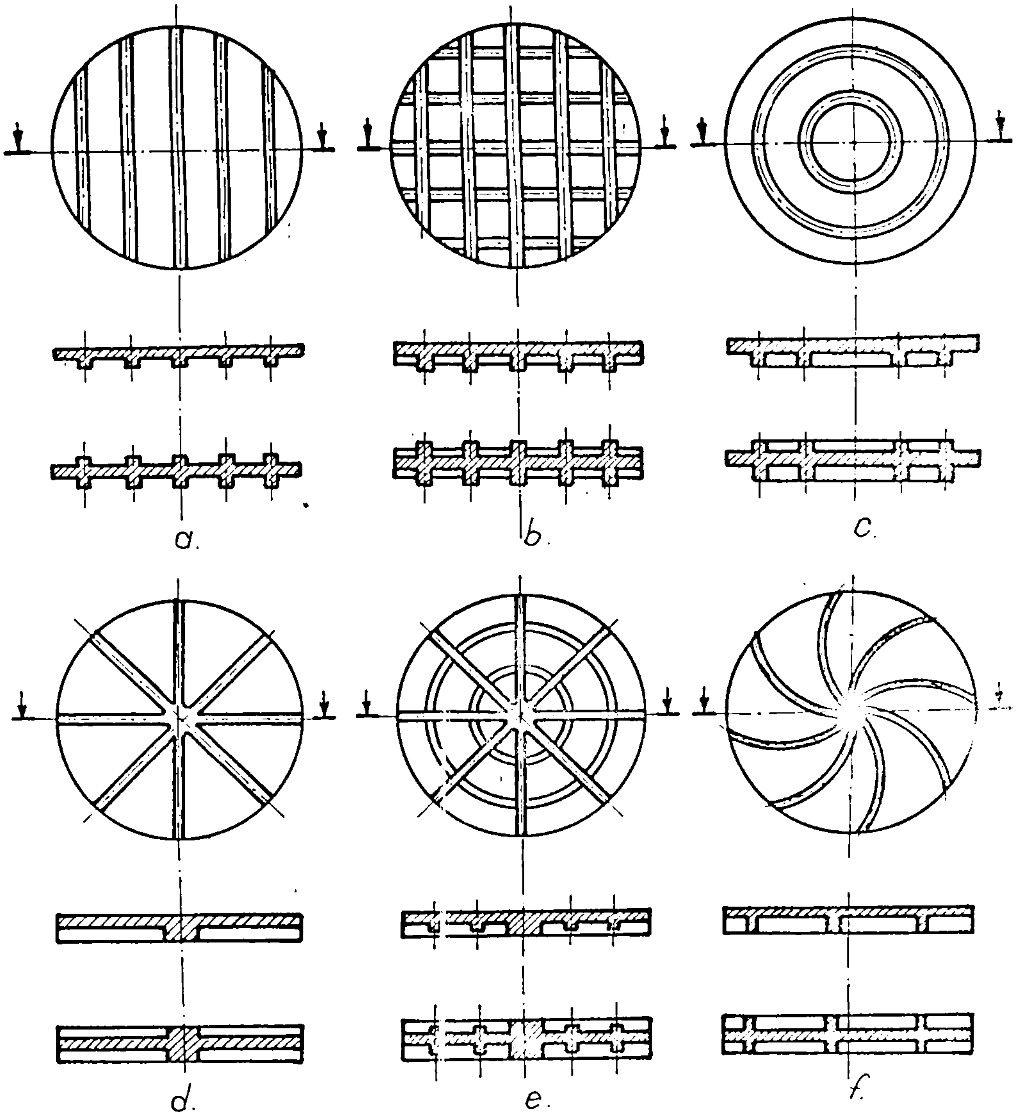


Fig.2.1

Dispunerea nervurilor poate fi pe suprafeţele exterioare pe o faţă sau ambele feţe (fig.2.1) menţionate în lucrările [23], [49], [33], [68], [69], [82], [97], [113], [230] sau cuprinse între două plăci circulare (fig.2.2) după cum reese din [122].

Placa şi nervurile pot fi confecţionate din acelaşi material sau pot fi făcute din materiale diferite.

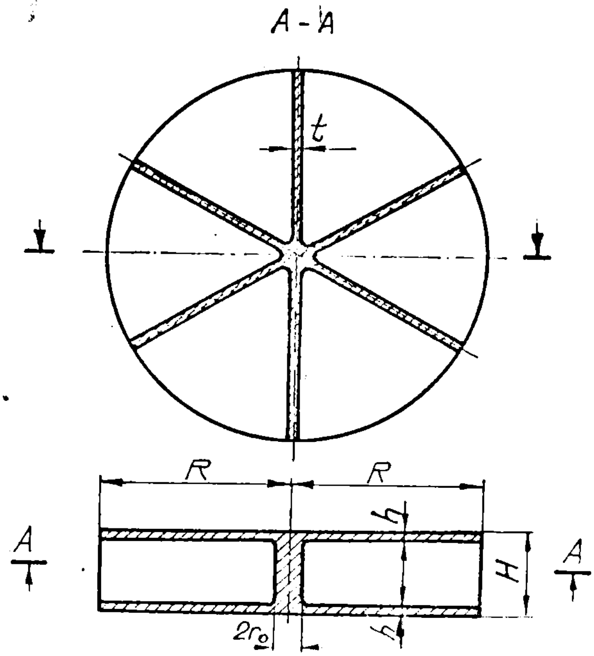


Fig.2.2

Nervurile pot face corp comun cu placa (plăci circulare cu nervuri obţinute prin turnare) sau sînt asamblate pe placă cu ajutorul niturilor, şuruburilor, sudurii sau prin lipire.

Suprafeţele de contact între nervuri şi placă sînt:

- monodimensionale (cînd nervurile sînt înguste);
- bidimensionale (cînd nervurile au lăţime mare).

2.3 Importanţa utilizării plăcilor circulare nervurate radial

Plăcile circulare cu nervuri radiale au o largă utilizare în construcţia de maşini, construcţii civile, industria chimică, construcţia de nave etc. Ele sînt folosite ca plăci circulare pentru fundaţiile unor maşini [12] , plăci de bază pentru stîlpi din fontă [148], discuri cu aripioare [105], funduri de pistoane [181], capace şi discuri pentru turbo - maşini [24], [85], flanşe la racordul conductelor [97], planşaibe pentru strunguri carusel [122], [123] , capace pentru gurile de canal, roţi dinţate întărite cu nervuri radiale [230] . In industria chimică se folosesc capace şi site circulare rigidizate în locurile în care nu se pot folosi capace sferice sau bombate. De asemenea, plăcile circulare rigidizate radial sînt utilizate cu succes în construcţia talerelor, coloanelor de absorţie ale tamburilor de la centrifuge, la răcitoarele cu tambur rotativ, la capetele tamburului de la amestecătorul din industria vinului, la amestecătorul de minereu [153].

Domeniul de utilizare al plăcilor circulare cu nervuri radiale este mare întrucît:

- prin nervurare rezultă proprietăţi mecanice superioare privind rezistenţa, rigiditatea şi stabilitatea lor [23], [230];
- se folosesc materiale cu proprietăţi mecanice scăzute, adică preţ de cost mic, pentru obţinerea proprietăţiilor mecanice amintite mai sus [39], [82] ;
- se pot obţine elemente structurale cu greutate mică (se poate micşora greutatea în condiţiile creşterii rezistenţei şi rigidităţii întrebuinţînd materiale cu preţ de cost mic);
- se intensifică procesul de transfer termic (pentru că se măreşte suprafaţa exterioară [23]).

2.4 Stadiul actual al cercetărilor privind calculul plăcilor circulare rigidizate radial

Ponderea însemnată a structurilor formate din plăci întărite cu nervuri în ansamblul general al construcţiilor de maşini, construcţii navale justifică stabilirea unui studiu privind determinarea stărilor de tensiune şi de deformaţie. Un pas important în calcularea învelişurilor cît şi a plăcilor circulare nervurate a fost făcut odată cu stabilirea metodelor de calcul la plăcile dreptunghiulare întărite cu nervuri echidistante aşezate longitudinal sau transversal, pe o singură sau ambele feţe. Plăcile întărite cu nervuri au fost studiate pentru prima dată în lucrările lui I.G. Bubnov [28]. I.G. Bubnov a determinat rigiditate limită a nervurii transversale a unei plăci în aşa fel ca să nu-şi piardă stabilitatea între nervuri cînd acestea rămîn nedeformate. Aplicînd metoda energetică, S.P. Timoshenko [226] a calculat atît plăcile consolidate longitudinal, cît şi cele întărite transversal.

Bazele teoriei învelişurilor nervurate, ca diviziune a teoriei generale a învelişurilor, au fost puse de V.Z. Vlasov şi A.I. Lurie care au studiat învelişurile cilindrice întărite longitudinal cu nervuri [5] .

Abordarea analitică a încovoierii plăcilor dreptunghiulare întărite cu nervuri este prezentată în lucrările [19] , [141], [160], [210] şi aparţine şcolii româneşti. In teza de doctorat [19] , susţinută în anul 1972, prof. I. Beleş a studiat placa cu ortotropie structurală ca o structură compusă din placă şi nervuri, considerînd o legătură articulată între ele. Ulterior, G.B. Popa a extins soluţia admiţînd o legătură rigidă între placă şi nervuri [160] .

Matricea de rigiditate pentru un element caracteristic de placă cu nervuri aflat în stare plană de tensiune a fost stabilită în lucrarea [149].

Rezolvarea unor probleme de teoria plăcilor dreptunghiulare cu ortotropie de structură folosind metoda elementului finit este prezentată în lucrările [141] , [171].

In cazul plăcilor circulare se disting două categorii de ortotropie de material şi de structură.

Teoria de calcul a plăcilor circulare confecţionate din material ortotrop este fundamentată pe aceleaşi ipoteze ca şi a plăcilor confecţionate din material izotrop. Starea de deformaţie a plăcii circulare ortotrope satisface ecuaţia cu derivate parţiale

$$D_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2D_{r\varphi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + D_\varphi \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2D_r \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - 2D_{r\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} -$$

$$- D_\varphi \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2(D_\varphi + D_{r\varphi}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + D_\varphi \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} = p(r,\varphi) \qquad (2.3)$$

dedusă de G.F. Carrier şi prezentată în lucrarea [121]. In ecuaţia (2.3) $p(r,\varphi)$ este intensitatea încărcării normale , $w(r,\varphi)$ - deplasarea transversală; D_r, D_φ - rigidităţi de încovoiere după direcţiile radială şi circumferenţială iar D_t - rigiditatea la torsiune.

Rigidităţile de încovoiere şi torsiune sînt date de relaţiile:

$$D_r = \frac{E_r \cdot h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\varphi)}; \qquad D_\varphi = \frac{E_\varphi h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\varphi)};$$

$$D_t = \frac{G_{r\varphi} \cdot h^3}{12}; \qquad D_{r\varphi} = D_r \cdot \nu_\varphi + 2 \cdot D_t. \tag{2.4}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale poate fi stabilită numai în cazul încărcării simetrice a plăcilor circulare.

A doua categorie cuprinde plăcile circulare cu ortotropie de structură din care fac parte şi plăcile circulare întărite cu nervuri radiale. Studiul stărilor de deformaţie şi de tensiune la plăcile cu nervuri radiale se găseşte într-un număr restrîns de lucrări [23], [44], [122], [123], [148], [218], [230], [68]. Pentru studiul acestor plăci sînt prezentate diferite metode de calcul ceea ce îngreunează determinarea stărilor de defor - maţie şi de tensiune.

Cercetările întreprinse pentru determinarea stărilor de deformaţie şi de tensiune la plăcile circulare cu nervuri radiale pot fi grupate în următoarele grupe:

1. Metode bazate pe studiul aproximativ al stărilor de deformaţie şi de tensiune [23], [44], [122], [218] ;

2. Metode care reduc studiul teoretic la comportarea porţiunii de placă cuprinsă între nervuri [168] avînd diferite condiţii de contur;

3. Metode care reduc rezolvarea problemei la calculul plăcilor circulare neîntărite sau constructiv ortotrope [20], [49], [181], [230] ;

4. Metode numerice (metoda diferenţelor finite [139], metoda elementului finit [68], [69]) ;

5. Metode experimentale [49], [123] .

1. Ideia metodei de aproximare a stărilor de tensiune şi de deformaţie este susţinută în mai multe lucrări. In lucrarea [23] se aproximează starea de tensiune la un capac cir - cular format dintr-o placă inelară, un înveliş cilindric şi nervuri aşezate radial pe placă. Capacul este descompus în două părţi: un element de placă cu o nervură şi învelişul cilindric.

Efectul învelişului cilindric asupra elementului de placă este înlocuit de acţiunea unui moment. Tensiunea din elementul de placă se determină cu relaţii de calcul ale grinzilor.

In lucrarea [148] se prezintă formule aproximative de calcul pentru grosimea plăcii, înălţimea nervurilor la plăci circulare cu nervuri radiale pe o singură parte folosite ca plăci de bază pentru stîlpi. Formulele de calcul sînt stabilite în funcţie de rezistenţa materialului plăcii şi de diametrul exterior al stîlpului.

Un calcul simplificat pentru obţinerea stării de tensiune la plăcile circulare cu nervuri radiale aşezate pe o singură parte solicitate axial simetric la încovoiere cu luarea în considerare a influenţei temperaturii este prezentat în lucrarea [218]. Profilul plăcii este împărţit în elemente inelare. Relaţiile de calcul pentru tensiuni se scriu plecînd de la elementul interior spre cel exterior. Trecerea de la un inel la altul se face cu relaţii ce ţin cont de prezenţa nervurilor, grosimea elementului, material şi temperatură.

In lucrările [122],[123] se calculează deplasarea transversală la o plaşaibă cu metoda energetică. Se determină rigiditatea cilindrică echivalentă a planşaibei formată din doi pereţi de formă circulară legaţi între ei cu nervuri radiale (fig.2.2) uneori şi cu nervuri circumferenţiale cu metoda energetică. Determinarea deplasării transversale a planşaibei se face cu relaţiile de calcul de la plăcile circulare izotrope înlocuindu-se rigiditatea cilindrică cu rigiditatea echivalentă.

In mod analog în lucrarea [44], I.N. Ciurin şi S.K. Sorokin determină modulul de rigiditate echivalentă pentru planşaibă solicitată nesimetric. Modulul de rigiditate astfel determinat a fost folosit la calculul deplasării transversale a planşaibei solicitată nesimetric.

2. Metoda de calcul consideră elementul de placă cuprins între două nervuri atunci cînd deformaţiile ei sînt mici. Studiul comportării elemetului de placă solicitat de încărcare impusă cu diferite condiţii de contur(reazeme simple, articulaţii, încastrări rigide sau elastice) se face cu ecuaţia diferenţială care descrie deformaţia plăcii circulare dată în lucrarea [181].

In lucrarea [168] se dă o rezolvare a problemei încovoierii plăcii elastice cu rază infinită întărită cu un sistem de nervuri radiale așezate echiunghiular și încărcate arbitrar.

3. Stabilirea stărilor de deformație și de tensiune la plăcile circulare întărite cu un număr suficient de mare de nervuri poate fi redusă la:

a) o metodă care studiază aceste plăci ca modele ortotrope structurale iar calculul este dezvoltat după teoria plăcilor ortotrope. Această metodă pune în evidență comportarea structurii ca un tot unitar și a rezervelor de rezistență. Metoda de analiză constă în netezirea plăcii, adică în distribuirea nervurilor pe suprafața plăcii în așa fel încît ansamblul devine un mediu continuu echivalent. In lucrarea [230] este prezentată teoria de calcul a plăcilor circulare cu nervuri radiale de secțiune transversală constantă stabilită de O.M. Rubaci pentru încărcări cu sarcini uniform distribuite. Folosind metoda de calcul prezentată de O.M. Rubaci, B.G. Gorskii în lucrarea [82] stabilește economia de material ce se poate realiza prin folosirea plăcilor circulare cu nervuri în raport cu placa circulară de grosime constantă.

In lucrarea [24], I.A. Birgher studiază tracțiunea și încovoierea axial - simetrică a plăcilor circulare ortotrope. Variația secțiunii transversale, în direcție radială și circumferențială, a fost pusă în evidență prin coeficienți de umplere ale căror valori variază între zero și unu. Această metodă de calcul nu dă posibilitatea să se scoată în evidență o serie de aspecte legate de prezența nervurilor.

b) al doilea mod de tratare permite ca ecuațiile să fie construite astfel încît să poată fi calculate nervurile cît și placa. Esența metodei conchide în următoarele: reacțiunile nervurilor se determină din teoria plăcilor ortotrope structural iar placa se calculează ca o placă neîntărită încărcată cu aceste reacțiuni. In lucrarea [87] se prezintă calculul stării de tensiune la un disc cu aripioare. Discul se descompune într-o placă circulară subțire și nervuri (aripioare) care pot fi prinse cu nituri, sudură sau lipite. Nervurile sînt înlocuite cu reacțiuni. Din condiția de egalitate a deplasărilor

557149
3 H

punctelor de pe linia de contact a celor două elemente (placa şi nervurile) rezultă mărimea forţelor de legătură. Stările de tensiune, la elementele componente, sînt date de forţele exterioare şi cele de legătură. In acelaşi mod, în lucrarea [181] se calculează o placă inelară susţinută pe conturul interior de un cilindru rigid legat de o traversă elastică.

4. Metode numerice. Calculatoarele apar pentru prima dată în anul 1950, însă folosirea semnificativă a lor în teorie şi practică nu este făcută imediat. Primele studii ale teoriei plăcilor realizate cu metode numerice, folosind calculatoarele, apar în anul 1957. Rezolvarea numerică a teoriei plăcilor cu ajutorul calculatoarelor poate fi urmărită pe etape:

a. In prima etapă s-a dezvoltat mai mult metoda diferenţelor finite, Ritz, Bubnov, Galerkin. Metoda diferenţelor finite, concepută din perioada lui Euler, transformă ecuaţiile diferenţiale într-un sistem de ecuaţii algebrice ce poate fi rezolvat şi cu ajutorul calculatorului. Metoda diferenţelor finite este folosită la tratarea plăcilor circulare inelare întărite cu nervuri radiale în lucrarea [139].

b. Inainte de anul 1960, o nouă etapă este marcată de rezolvarea numerică a teoriei plăcilor cu metoda elementului finit. Introdusă de Turner, Glough, Marton şi Topp metoda elementului finit s-a perfecţionat în ceea ce priveşte formularea şi fundamentarea ei din punct de vedere matematic. Această metodă reprezintă, în momentul de faţă, una din metodele eficiente pentru calcularea plăcilor. Cu toate acestea un număr mic de lucrări s-au ocupat de calculul plăcilor circulare cu nervuri radiale cu metoda elementului finit. Dintre acestea, doar în lucrările [68] şi [69] J. Egert foloseşte metoda elementului finit la calculul de rezistenţă al plăcilor circulare rigidizate radial solicitate axial - simetric.

5. Metode experimentale. Este normal ca pe lîngă determinarea teoretică a deformaţiilor şi tensiunilor să se recurgă la măsurători experimentale, fie pentru verificarea rezultatelor obţinute teoretic, fie pentru a afla mărimea tensiunilor în dreptul acelor puncte unde nu se poate găsi prin

calcul o valoare suficient de precisă. In ceea ce privește determinarea experimentală a tensiunilor și deformațiilor la plăcile circulare nervurate radial literatura de specialitate este săracă. Astfel în lucrarea [123] au fost studiate cîteva cazuri diferite de plăci circulare complexe (planșaibe). Modelele considerate au avut o grosime diferită a pereților și un număr diferit de nervuri radiale și circumferențiale determinîndu-se deplasările diferitelor puncte în cazul încărcărilor cu forțe concentrate aplicate în centru. Rezultatele experimentale au fost comparate cu cele determinate prin calcul. In lucrarea [49] se folosesc în paralel metodele teoretice și experimentale pentru stabilirea deformațiilor și tensiunilor la plăcile circulare cu nervuri radiale. Rezultatele experimentale din lucrarea [49] sînt folosite și pentru completarea ipotezelor de calcul introduse la stabilirea condițiilor de contur la acest tip de plăci.

2.5 Obiectivele lucrării

In abordarea lucrării s-a plecat de la următoarele premise:

- lucrările publicate, avînd ca temă plăcile circulare cu nervuri radiale, determină stările de deformație și de tensiune cînd nervurile au secțiunea transversală constantă iar încovoierea lor este axial simetrică;
- există prea puține date că s-au efectuat încercări experimentale;
- în nici o lucrare studiată nu este analizată problema cînd nervurile sînt de secțiune variabilă și cînd sînt solicitate și cu forțe conținute în planul median.

Plecînd de la aceste premise și considerații lucrarea de față își propune:

- punerea în evidență a avantajelor pe care le prezintă folosirea plăcilor circulare cu nervuri radiale;
- stabilirea și enunțarea problemei pe care o comportă calculul plăcilor circulare cu nervuri radiale;

- deducerea ecuaţiilor diferenţiale care descriu deformarea acestor plăci;
- integrarea ecuaţiilor diferenţiale;
- stabilirea unor noi metode de analiză pentru stările de tensiune şi de deformaţie;
- stabilirea stărilor de tensiune şi de deformaţie pentru unele tipuri de plăci cu nervuri radiale;
- completarea metodelor de calcul a acestor plăci;
- elaborarea unui program de calcul a stărilor de deformaţie şi de tensiune bazat pe metoda elementului finit;
- optimizarea dimensională a plăcilor circulare cu nervuri radiale în raport cu placa circulară de grosime constantă;
- explorarea experimentală a stărilor de tensiune şi de deformaţie în vederea confirmării studiilor teoretice.

3 TEORIA PLACILOR CIRCULARE PLANE IZOTROPE SI A RETELELOR DE BARE

In acest capitol sînt sistematizate relaţiile pentru determinarea deplasării, deformaţiei specifice, tensiunii în dreptul unui punct şi a eforturilor secţionale la placa circulară izotropă. Relaţiile sînt stabilite pentru cazul general de solicitare a plăcii circulare admiţînd anumite ipoteze simplificatoare de calcul. Totodată sînt determinate eforturile secţionale la reţele de bare plane, cu barele aşezate ortogonal în direcţie radială şi inelară, în funcţie de componentele deplasării unui punct. Mărimile stabilite în acest capitol vor fi folosite la studiul plăcilor circulare cu ortotropie de structură.

3.1 Teoria plăcilor circulare plane izotrope

3.1.1 Consideraţii generale

Placa circulară este un corp solid de formă cilindrică a cărei înălţime este mică în raport cu dimensiunea bazei. Inălţimea h a plăcii se numeşte grosime. In funcţie de modul de variaţie al grosimii plăcile circulare sînt de grosime constantă sau variabilă. Locul geometric al punctelor situate la mijlocul grosimii plăcii se numeşte plan median.

Literatura de specialitate [76], [167], [226] prezintă pentru determinarea stărilor de deformaţie şi de tensiune două metode de calcul:

a) prima metodă este complexă şi se bazează pe rezolvarea ecuaţiilor fundamentale ale teoriei elasticităţii tridimensionale. Datorită complexităţii calculului ([221], [222], [226]) au fost studiate numai anumite cazuri particulare de plăci, în special plăci groase ;

b) a doua metodă are la bază o serie de ipoteze simplificatoare, în special în cazul plăcilor circulare subţiri, este prezentată în lucrările [27], [30], [79], [113], [121] ,

3.1.2 Formularea problemei

Fie o placă circulară, rezemată sau încastrată pe contur, încărcată cu forţe care pot acţiona atît normal pe planul median, cît şi în planul median (fig.3.1).

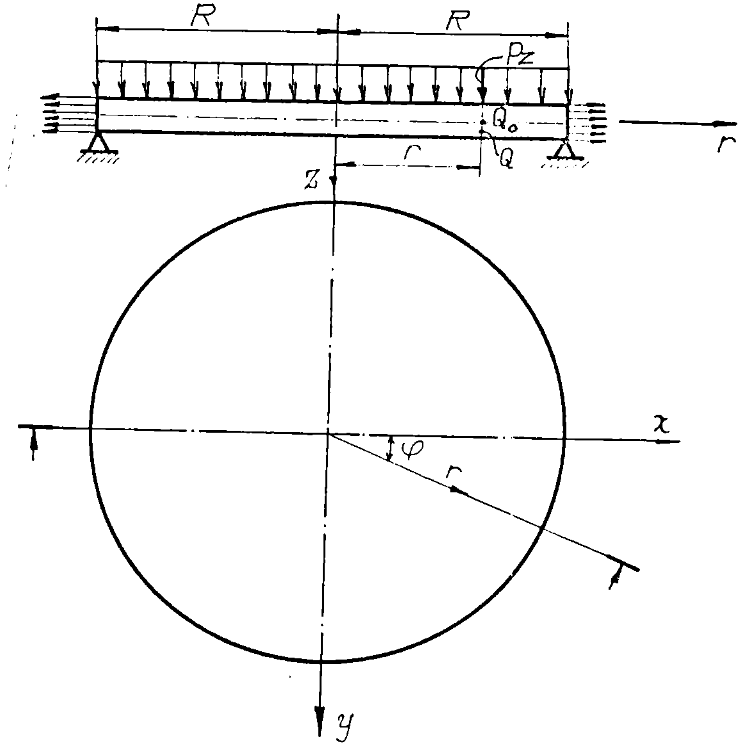


Fig.3.1

Placa se raportează la un sistem de coordonate cartezian Oxyz cu axele Ox şi Oy conţinute în planul median. Se admite că placa circulară este un corp solid ce umple complet o regiune a spaţiului euclidian cu trei dimensiuni şi formează un mediu continuu. Fiecare punct al regiunii se consideră că este sediul unei particule iar mulţimea lor determină configuraţia plăcii. Poziţia punctelor va fi stabilită cu ajutorul coordonatelor cilindrice. Vectorii de poziţie ai punctelor $Q(r,\varphi,z)$ şi $Q_0(r,\varphi,0)$ (proiecţia punctului Q pe planul median) sînt definiţi de relaţiile:

$$\mathbf{r} = r\cdot\cos\varphi\cdot\mathbf{i} + r\cdot\sin\varphi\cdot\mathbf{j} + z\cdot\mathbf{k}, \tag{3.1}$$

$$\mathbf{r}_0 = r\cdot\cos\varphi\cdot\mathbf{i} + r\cdot\sin\varphi\cdot\mathbf{j}, \tag{3.2}$$

unde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ şi $\mathbf{k}$ sînt versorii axelor sistemului de referinţă Oxyz, r - distanţa măsurată din origine pînă în dreptul punctului Q_0, φ - unghiul pe care îl face raza vectoare cu axa Ox.

3.1.3 Ipoteze simplificatoare de calcul

Se admit următoarele ipoteze:

1. materialul plăcii este omogen, izotrop şi elastic;
2. grosimea plăcii h se consideră mică în comparaţie cu raza plăcii R $(h/R < 1/5)$;
3. deplasările radială u şi tangenţială v se admit a fi funcţii liniare de variabila z;
4. deplasarea transversală w se consideră mai mică decît h/5;
5. tensiunea normală σ_z de pe planele paralele cu planul median, în comparaţie cu celelalte tensiuni normale, radială σ_r şi circumferenţială σ_φ, poate fi neglijată, adică

$$\sigma_z = 0; \tag{3.3}$$

6. ipoteza lui Kirchhoff care constă în:

a) orice dreaptă care iniţial este perpendiculară pe suprafaţa mediană rămîne dreaptă şi perpendiculară pe suprafaţa mediană deformată a plăcii. Această ipoteză este echivalentă cu a presupune că lunecările specifice γ_{rz} şi $\gamma_{\varphi z}$ sînt neglijabile, adică

$$\gamma_{rz} = \gamma_{\varphi z} = 0; \tag{3.4}$$

Intrucît γ_{rz} şi $\gamma_{\varphi z}$ sînt neglijabile rezultă că tensiunile tangenţiale τ_{rz} şi $\tau_{\varphi z}$ sînt nule, ceea ce formează o contradicţie. Ipoteza lui Kirchhoff neglijează deformaţiile specifice de lunecare numai pentru stabilirea componentelor deformaţiei specifice.

b) în timpul deformării plăcii se admite că grosimea ei nu variază, adică

$$\varepsilon_z = 0 \tag{3.5}$$

7. forţele de volum se neglijează.

3.1.4 Deplasări

Sub acţiunea forţelor exterioare placa se deformează iar punctele acesteia se deplasează. In urma deformării plăcii, punctul Q se deplasează în Q', iar Q_o în Q_o'. Dependenţa dintre poziţia deformată şi nedeformată este dată de relaţiile:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{U}; \quad (3.6) \qquad \mathbf{R}_o = \mathbf{r}_o + \mathbf{U}_o, \quad (3.7)$$

unde $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_o$ sînt vectorii de poziţie ai punctelor Q, respectiv Q_o, după deformarea plăcii;

$\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_o$ - vectorii deplasării punctelor Q, respectiv Q_o (fig.3.2).

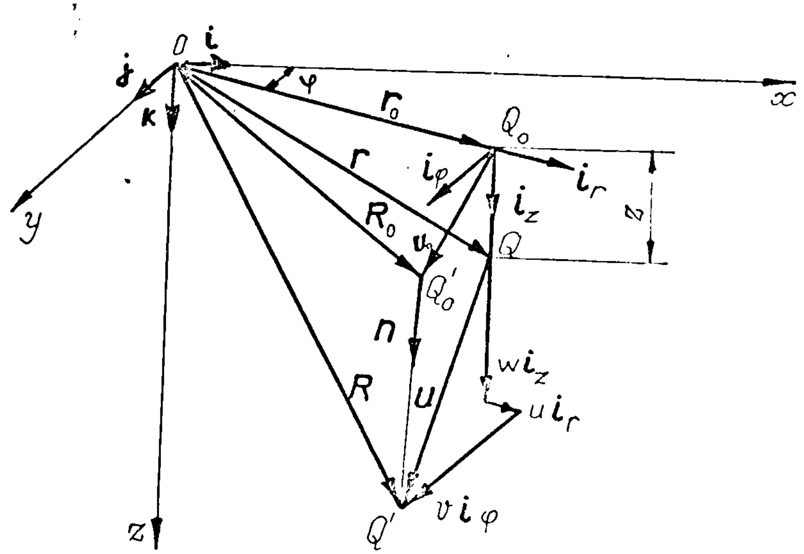


Fig.3.2

Vectorii deplasării punctelor Q şi Q_o pot fi determinaţi cu relaţiile:

$$\mathbf{U} = u \cdot \mathbf{i}_r + v \cdot \mathbf{i}_\varphi + w\,\mathbf{i}_z; \tag{3.8}$$

$$\mathbf{U}_o = u_o \cdot \mathbf{i}_r + v_o \cdot \mathbf{i}_\varphi + w_o \cdot \mathbf{i}_z, \tag{3.9}$$

unde $\boldsymbol{i}_r$, $\boldsymbol{i}_\varphi$, $\boldsymbol{i}_z$ sînt versorii bazei; u, v şi w, respectîv u_o, v_o şi w_o - componentele deplasării punctelor Q, respectiv Q_o după direcţiile radială, tangenţială şi transversală.

Ipoteza lui Kirchhoff permite exprimarea vectorului $\boldsymbol{R}$ şi sub forma:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_o + z \cdot \boldsymbol{n}, \tag{3.10}$$

unde $\boldsymbol{n}$ este versorul normal la suprafaţa mediană deformată

Versorul $\boldsymbol{n}$ se deteterminã, după [61] şi [236] cu relaţia

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{R}_o}{\partial r} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_o}{\partial \varphi}}{\left| \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_o}{\partial r} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_o}{\partial \varphi} \right|}. \tag{3.11}$$

unde

$$\boldsymbol{R}_o = (r + u_o) \cdot \boldsymbol{i}_r + v_o \cdot \boldsymbol{i}_\varphi + w_o \cdot \boldsymbol{i}_z. \tag{3.12}$$

Inlocuind derivatele vectorului $\boldsymbol{R}_o$ în relaţia (3.11) rezultă:

$$\boldsymbol{n} = -\frac{\partial w_o}{\partial r} \boldsymbol{i}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial w_o}{\partial \varphi} \cdot \boldsymbol{i}_\varphi + \boldsymbol{i}_z. \tag{3.13}$$

Pe de altă parte, din relaţiile (3.6), (3.7) şi (3.10) rezultă

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_o + z(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{i}_z). \tag{3.14}$$

Relaţia (3.14) descrie deplasarea unui punct Q al plăcii, în timpul deformării, în funcţie de deplasarea punctului Q_o care aparţine suprafeţei mediane.

Dacă se înlocuiesc relaţiile (3.13) şi (3.9) în (3.14) rezultă:

$$\boldsymbol{U} = \left(u_o - z\frac{\partial w_o}{\partial r}\right) \cdot \boldsymbol{i}_r + \left(v_o - z\frac{1}{r}\frac{\partial w_o}{\partial \varphi}\right) \cdot \boldsymbol{i}_\varphi + w_o \cdot \boldsymbol{i}_z; \tag{3.15}$$

Comparînd relaţiile (3.8) şi (3.15) rezultă componentele deplasării punctului Q în funcţie de componentele deplasării punctului Q_o date de relaţiile:

$$u = u_o - z\frac{\partial w_o}{\partial r}; \quad v = v_o - z\frac{1}{r}\frac{\partial w_o}{\partial \varphi}; \quad w = w_o. \qquad (3.16)$$

Analizînd relaţiile (3.16) rezultă că componetele deplasării punctului Q, u şi v sînt funcţii liniare de variabila z (ipoteza 3).

3.1.5 Deformaţii specifice

Componentele deformaţiilor specifice pot fi determinate, după [90] şi [236], cu relaţia:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{G_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}\, g_{\beta\beta}}}, \quad (\alpha,\beta = r,\varphi) \qquad (3.17)$$

unde $G_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ sînt componentele covariante ale tensorului metric. Componentele tensorului metric se determină după cum urmează:

- starea nedeformată

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta; \quad \mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \quad (\alpha,\beta = r,\varphi) \qquad (3.18)$$

- starea deformată

$$G_{\alpha\beta} = \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_\beta \quad \mathbf{G}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha} \quad (\alpha,\beta = r,\varphi) \qquad (3.19)$$

Vectorii $\mathbf{g}_\alpha$ $(\alpha = r, \varphi, z)$ formează o bază ortogonală. Această bază ortogonală se transformă într-o bază neortogonală (fig.3.3) a cărui vectori sînt $\mathbf{G}_\alpha$.

Plecînd de la relaţia (3.6) care descrie deformarea plăcii se obţine

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{g}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} \quad (\alpha = r, \varphi, z) \qquad (3.20)$$

In urma efectuarii calculelor se vor obţine componentele deformaţiilor specifice în cazul deplasărilor mici.

Mărimile $\varepsilon_{\alpha\beta}$, cînd $\alpha = \beta$ şi $\alpha = r, \varphi$, reprezintă lungirea sau variaţia pe unitatea de lungime a unui element inițial paralel cu vectorul $\mathcal{G}_\alpha$ iar cînd $\alpha \neq \beta$ se interpretează ca jumătate din lunecarea specifică. In aceste condiții rezultă:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2;$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2; \tag{3.21}$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial w}{\partial r}.$$

Relațiile (3.21) caracterizează starea de deformație în jurul punctului $Q(r,\varphi,z)$ fiind funcții neliniare de derivatele componentelor deplasării. Aceste relații sînt aproximative din punct de vedere matematic .

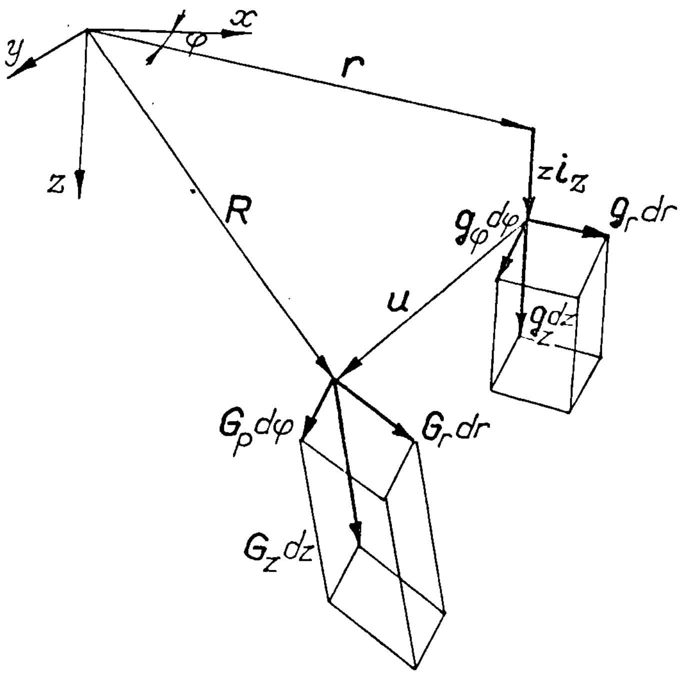


Fig.3.3

In cazul cînd gradientul deplasării este mic și com - ponenta deplasării transversale nu depășește 1/5 din grosimea plăcii se pot neglija mărimile de ordinul doi din expresiile deformaţiilor (3.21). Teoria bazată pe această aproximaţie se va numi teoria liniarizată cunoscută sub numele de teoria deformaţiilor mici (infinitezimale). Neglijînd termenii de ordinul doi din relaţiile (3.21) rezultă:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}\,;\quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi};\quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}\,. \qquad (3.22)$$

In relaţiile (3.22) se introduc relaţiile (3.16) obţinîndu-se:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_o}{\partial r} - z\,\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\,;$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi} - z\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right]; \qquad (3.23)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial v_o}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi} - \frac{v_o}{r} - 2z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right].$$

In relaţiile (3.23) s-a luat componenta deplasării punctului Q notată cu w egală cu deplasarea w_o a punctului Q_o în baza ipotezelor simplificatoare admise.

Relaţiile (3.23) pot fi particularizate pentru cazul cînd placa nu are deplasări în planul median. In acest caz $u_o = v_o = 0$ iar ecuaţiile (3.23) se reduc la ecuaţiile lui Cauchy .

Dacă se notează cu ε_r^o, ε_φ^o, $\gamma_{r\varphi}^o$ componentele deformaţiilor specifice din punctul Q_o aparţinînd planului median atunci deformaţiile specifice (3.23) se compun din două părţi:

- deformaţii uniform distribuite pe grosimea plăcii datorită încărcării plăcii de către forţe conţinute în planul median

$$\varepsilon_r^o = \frac{\partial u_o}{\partial r};$$

$$\varepsilon_\varphi^o = \frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\,; \qquad (3.24)$$

$$\gamma_{r\varphi}^o = \frac{\partial v_o}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi} - \frac{v_o}{r}\,.$$

- deformaţii care se modifică după o lege liniară pe grosimea plăcii

$$\varepsilon_r^1 = - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} ;$$

$$\varepsilon_\varphi^1 = - z \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] ; \tag{3.25}$$

$$\gamma_{r\varphi}^1 = - 2z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] .$$

Eliminarea componentelor deplasărilor u_o şi v_o între relaţiile (3.24) permite obţinerea relaţiei:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_r^o}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \cdot \varepsilon_\varphi^o)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r^o}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r \cdot \gamma_{r\varphi}^o)}{\partial r \partial \varphi} . \tag{3.26}$$

Ecuaţia (3.24) exprimă din punct de vedere fizic, condiţia de continuitate a deformaţiilor iar din punct de vedere matematic condiţia de compatibilitate a sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale (3.24).

3.1.6 Tensiuni

Starea de tensiune dintr-un punct J al plăcii situat la distanţa z de planul median se poate face ca pentru o stare de tensiune plană în punctul respectiv. Inlocuind relaţiile (3.23) în legea lui Hooke pentru starea plană de tensiune rezultă:

$$\sigma_r = \sigma_r^o - \frac{Ez}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] ;$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\varphi^o - \frac{Ez}{1 - \nu^2} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right] ; \tag{3.27}$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}^o - \frac{Ez}{1 + \nu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] ,$$

unde

$$\sigma_r^o = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_o}{\partial r} + \nu\left(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right)\right];$$

$$\sigma_\varphi^o = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{\partial u_o}{\partial r} + \frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right]; \qquad (3.28)$$

$$\tau_{r\varphi}^o = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi} - \frac{v_o}{r} + \frac{\partial v_o}{\partial r}\right].$$

Primul termen din relaţiile (3.27), respectiv relaţiile (3.28), reprezintă componentele tensiunii de membrană uniform distribuite pe grosimea plăcii funcţie de componentele deplasării u_o şi v_o . Al doilea termen din relaţiile (3.27) reprezintă componentele tensiunii de încovoiere care sînt distribuite liniar pe grosimea plăcii.

Pe lîngă componentele tensiunii calculate cu relaţia (3.27), în secţiunile radiale şi circumferenţiale ale plăcii mai apar tensiunile tangenţiale τ_{rz} şi $\tau_{\varphi z}$. Rezultantele acestor tensiuni sînt forţele tăietoare T_r şi T_φ care echilibrează suplimentul de forţă datorat încărcării transversale. Notaţiile, sensurile şi variaţia componentelor tensiunii pe grosimea plăcii în teoria liniarizată sînt arătate în figura 3.4.

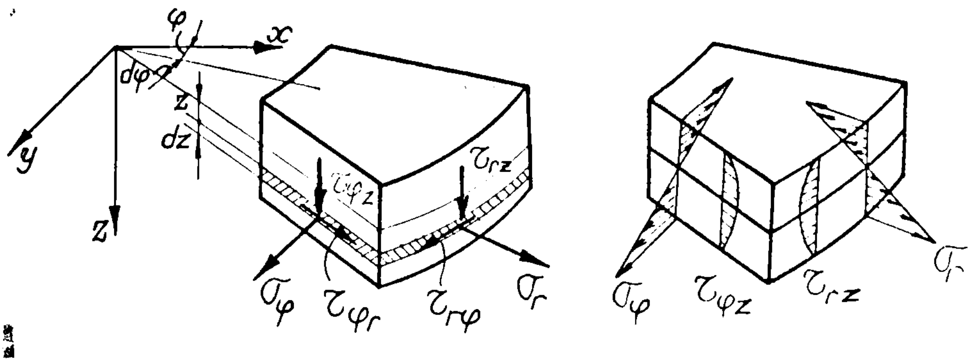


Fig.3.4

3.1.7 Eforturi secţionale

Din cauza discontinuităţilor pe care le pot avea componentele tensiunii, se preferă înlocuirea lor cu un sistem sta ic echivalen de forţe şi momen e rezul an e (efor uri secţionale) care acţionează asupra planului median. Eforturile secţionale sînt forţe care se dezvoltă pe unitatea de lungime a secţiunii şi acţionează în centrele de greutate ale fiecărei feţe laterale a elementului izolat (fig.3.5). Elementul de placă este separat prin două suprafeţe cilindrice de raze r şi $r + dr$ şi două suprafeţe diametrale ce formează unghiu $d\varphi$

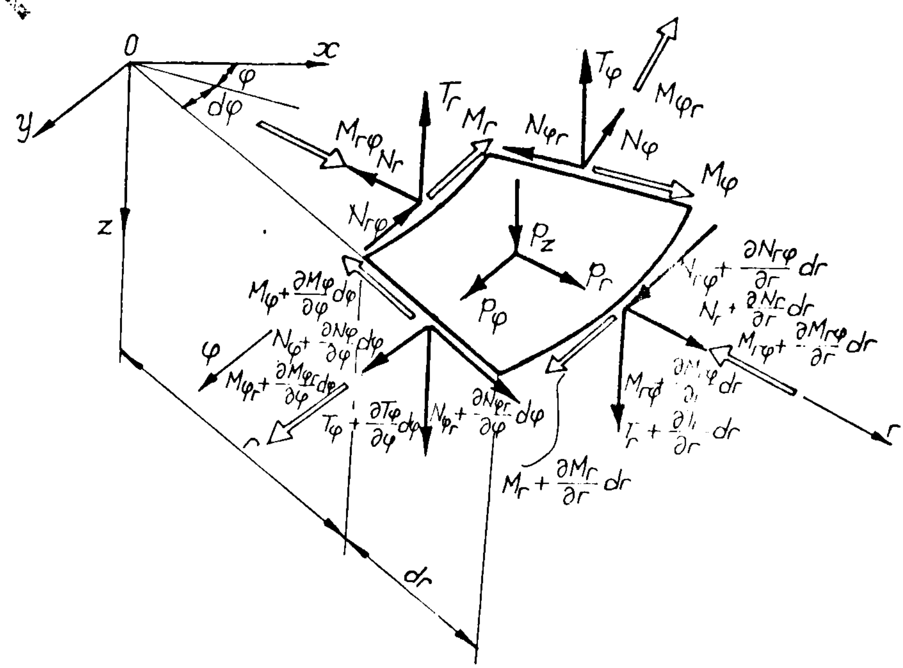


Fig.3.5

In teoria plăcilor se introduc următoarele eforturi secţionale:

- eforturi secţionale normale (N_r, N_φ) şi de lunecare ($N_{r\varphi}$, $N_{\varphi r}$);
- eforturi secţionale tăietoare (T_r, T_φ);
- eforturi secţionale de încovoiere (M_r, M_φ) şi de torsiune ($M_{r\varphi}$, $M_{\varphi r}$);

In baza dualităţii tensiunilor tangenţiale $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r}$ se obţine:

$$N_{\varphi r} = N_{r\varphi} \qquad M_{r\varphi} = M_{\varphi r} \; . \qquad (3.29)$$

Relaţiile de legătură între eforturile secţionale şi componentele tensiunii sînt:

$$\begin{bmatrix} N_r & M_r \\ N_\varphi & M_\varphi \\ N_{r\varphi} & M_{r\varphi} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{r\varphi} \end{Bmatrix} \{1 \quad z\} \, dz, \qquad (3.30)$$

$$\begin{Bmatrix} T_r \\ T_\varphi \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{rz} \\ \tau_{\varphi z} \end{Bmatrix} dz \, . \qquad (3.31)$$

Cu relaţiile (3.27), eforturile secţionale (3.30) pot fi obţinute prin integrare. Astfel, eforturile de membrană

$$N_r = B\left[\frac{\partial u_o}{\partial r} + \nu\left(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right)\right];$$

$$N_\varphi = B\left[\nu\frac{\partial u_o}{\partial r} + \frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right]; \qquad (3.32)$$

$$N_{r\varphi} = B\,\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_o}{\partial r} - \frac{v_o}{r}\right],$$

- eforturi de încovoiere şi torsiune

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right];$$

$$M_\varphi = -D\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right]; \qquad (3.33)$$

$$M_{r\varphi} = -D(1-\nu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right),$$

unde

$$B = \frac{E\cdot h}{1-\nu^2}; \qquad (3.34) \qquad D = \frac{E\cdot h^3}{12(1-\nu^2)}. \qquad (3.35)$$

In relaţiile (3.34) şi (3.35) B este rigiditatea la întindere sau compresiune iar D - rigiditatea cilindrică a plăcii.

3.1.7 Ecuaţiile de echilibru static

In figura 3.5 este reprezentat un element de placă izolat aflat sub acţiunea forţelor exterioare şi a eforturilor secţionale, care reprezintă acţiunea părţilor înlăturate pe unitatea de lungime a secţiunii.

Ecuaţiile de proiecţie ale forţelor pe cele trei axe r, φ, z după neglijarea termenilor de ordin superior conduc la

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot N_r)}{\partial r} - \frac{N_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial \varphi} = -p_r; \qquad (3.36)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 \cdot N_{r\varphi})}{\partial r} = -p_\varphi; \qquad (3.37)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot T_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} = -p_z . \qquad (3.38)$$

Luînd momentele tuturor forţelor care acţionează pe element în raport cu axele r şi φ după neglijarea infiniţilor mici de ordin superior se obţin ecuaţiile de echilibru

$$T_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{M_{r\varphi} + M_{\varphi r}}{r}; \qquad (3.39)$$

$$T_r = \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{\varphi r}}{\partial \varphi} . \qquad (3.40)$$

Din relaţiile (3.33), (3.39) şi (3.40) se determină:

$$T_\varphi = D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right]; \qquad (3.41)$$

$$T_r = D\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right]. \qquad (3.42)$$

Ecuaţiile de echilibru static, în număr de cinci, conţin 8 necunoscute. Evident problema este static nedeterminată.

Dacă se ia în considerare relaţia (3.29) rămîn 6 necunoscute.

Eliminarea eforturilor secţionale T_r şi T_φ între relaţiile (3.38), (3.39) şi (3.40) permite obţinerea ecuaţiei diferenţiale care descrie efectul încovoierii plăcii:

$$-\frac{2}{r}\frac{\partial^2 M_{r\varphi}}{\partial r\partial\varphi}-\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial\varphi^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial\varphi}-\frac{2}{r}\frac{\partial M_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial M_\varphi}{\partial r}=$$

$$=p_z\,. \qquad (3.43)$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale care descrie echilibru static se poate restrînge după cum urmează:

1. la 3 necunoscute (componentele deplasării) prin introducerea relaţiilor (3.32) în (3.36) şi (3.37) şi a relaţiilor (3.33) în (3.43) obţinîndu-se:

$$A_{u_o}(u_o,v_o)=-\frac{1}{B}\,p_r; \qquad (3.44)$$

$$A_{v_o}(u_o,v_o)=-\frac{1}{B}\,p_\varphi; \qquad (3.45)$$

$$D\Delta\Delta w=p_z\,, \qquad (3.46)$$

unde

$$A_{u_o}(u_o,v_o)=\frac{\partial^2 u_o}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial r}+\frac{1-\nu}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_o}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^2}u_o-$$

$$-\frac{3-\nu}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_o}{\partial\varphi}+\frac{1-\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_o}{\partial r\partial\varphi}; \qquad (3.47)$$

$$A_{v_o}(u_o,v_o)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_o}{\partial\varphi^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot v_o)\right]+$$

$$+\frac{1+\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_o}{\partial r\partial\varphi}+\frac{3-\nu}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_o}{\partial\varphi}; \qquad (3.48)$$

$$\Delta\Delta w=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$(3.49)$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (3.44), (3.45), (3.46) are primele două ecuaţii diferenţiale în funcţie de variabilele u_o şi v_o iar ultima ecuaţie în funcţie de variabilă w.

2. la două necunoscute, cînd pe contur se pun condiţii în funcţie de N_r, N_φ şi $N_{r\varphi}$, prin introducerea funcţiei de eforturi $F(r,\varphi)$. In acest caz sistemul de ecuaţii diferenţiale este format din ecuaţia (3.46) şi

$$\frac{1}{E\,h}\Delta\Delta F = 0. \tag{3.50}$$

Ecuaţia diferenţială (3.50) reprezintă condiţia de continuitate a deformaţiilor din suprafaţa mediană a plăcii. Această ecuaţie se obţine prin introducerea în relaţia (3.26) a deformaţiilor specifice (3.24) în funcţie de eforturile de membrană (3.32)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r^o \\ \varepsilon_\varphi^o \\ \gamma_{r\varphi}^o \end{Bmatrix} = \frac{1}{E\,h}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} N_r \\ N_\varphi \\ N_{r\varphi} \end{Bmatrix} \tag{3.51}$$

care sînt exprimate cu ajutorul funcţiei de eforturi $F(r,\varphi)$

$$N_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}; \qquad N_\varphi = -\frac{\partial^2 F}{\partial r^2};$$

$$N_{r\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right). \tag{3.52}$$

Stările de deformaţie şi de tensiune pentru plăcile circulare izotrope de grosime constantă se pot stabili după cunoaşterea soluţiilor $u_o(r,\varphi)$, $v_o(r,\varphi)$, $w(r,\varphi)$, respectiv $F(r,\varphi)$ şi $w(r,\varphi)$.

Ecuaţiile diferenţiale ale plăcilor circulare în cazuri particulare pot fi găsite în lucrările [23], [30], [79], [181], [226], [232] etc.

3.2 Rețele de bare

3.2.1 Considerații generale

Rețele de bare sînt formate din grinzi încrucișate îmbinate rigid în noduri. Ele pot fi plane sau spațiale. In lucrarea [20] este prezentată teoria de calcul a rețelelor plane dreptunghiulare în funcție de numărul de noduri.

In acest paragraf se analizează rețelele plane circulare Aceste rețele au o parte din bare așezate echiunghiular a căror axe se intersectează într-un punct iar celelalte așezate concentric în raport cu acest punct. Se determină eforturile din bare în funcție de componentele deplasării punctelor aparținînd unui plan.

3.2.2 Eforturi secționale

In figura 3.6 este reprezentat un element caracteristic dintr-o rețea de bare plană circulară. Rețeaua este acționată de forțe normale și cuprinse în planul rețelei. Axele centrelor de greutate ale barelor radiale nu sînt așezate, în general, pe același plan ca cele ale barelor inelare.

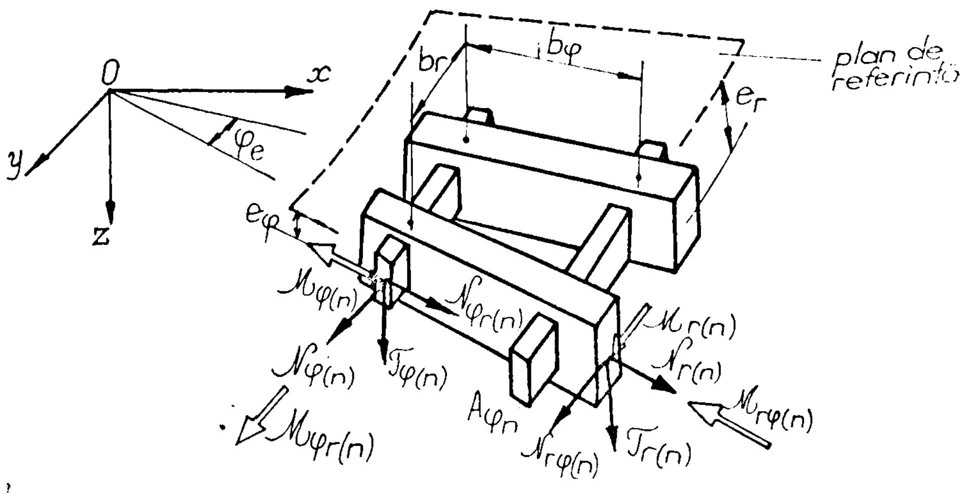


Fig.3.6

Nivelul de referință pentru eforturile secționale se va alege în așa fel încît barele radiale sau cele inelare (curbe) să aibă excentricitatea zero. Pentru demonstrația care urmează se pleacă de la așezarea generală a nivelului de referință. Nivelul de referință se alege astfel încît axele tuturor barelor să afle pe aceeași parte. Barele radiale se găsesc la distanța e_r iar cele curbe (inelare) la distanța e_φ. Intrucît rețeaua de bare este plană atunci nivelul de referință va fi un plan. Fie A_{rn} și $A_{\varphi n}$ ariile transversale ale barelor și $\bar{I}_{rn}$ și $\bar{I}_{\varphi n}$ momentele de inerție în jurul axelor paralele cu planul de referință și care trec prin centrele de greutate ale barelor. Momentele de inerție în jurul unor axe din planul de referință paralel cu axele ce trec prin centrele de greutate ale barelor vor fi:

$$I_{rn} = \bar{I}_{rn} + e_\varphi^2 A_{\varphi n} ; \qquad I_{\varphi n} = \bar{I}_{\varphi n} + e_r^2 \cdot A_{rn}. \tag{3.53}$$

In centrele de greutate ale barelor există eforturile secționale $\mathcal{N}_{r(n)}$, $\mathcal{T}_{r(n)}$, $\mathcal{M}_{r(n)}$, $\mathcal{N}_{r\varphi(n)}$, $\mathcal{M}_{r\varphi(n)}$; respectiv $\mathcal{N}_{\varphi(n)}$, $\mathcal{T}_{\varphi(n)}$, $\mathcal{M}_{\varphi(n)}$, $\mathcal{N}_{\varphi r(n)}$, $\mathcal{M}_{\varphi r(n)}$.

Dacă b_φ este distanța dintre barele curbe (inelare) iar b_r distanța dintre barele radiale, eforturile secționale raportate la unitatea de lungime sînt definite de relațiile:

$$N_{r(n)} = \frac{\mathcal{N}_{r(n)}}{b_r} ; \qquad T_{r(n)} = \frac{\mathcal{T}_{r(n)}}{b_r} . \tag{3.54}$$

Momentul de încovoiere se raportează la planul de referință

$$M_{r(n)} = \frac{\mathcal{M}_{r(n)} + e_r \mathcal{N}_{r(n)}}{b_r} . \tag{3.55}$$

In mod analog se vor determina:

$$N_{\varphi(n)} = \frac{\mathcal{N}_{\varphi(n)}}{b_\varphi} ; \quad T_{\varphi(n)} = \frac{\mathcal{T}_{\varphi(n)}}{b_\varphi} ; \quad M_{\varphi(n)} = \frac{\mathcal{M}_{\varphi(n)} + e_\varphi \mathcal{N}_{\varphi(n)}}{b_\varphi} \tag{3.56}$$

In cazul barelor inelare, datorită curburii, apare o forță suplimentară dată de momentele de răsucire .

Momentele de răsucire $\mathcal{M}_{\varphi r(n)}$ de la capetele elementului de bară curbă de lungime b_r, închis în unghiul

$\varphi_e = b_r/r$, au rezultanta $\mathcal{M}_{\varphi r(n)}\, b_r/r = \mathcal{M}_{\varphi r(n)} \cdot 2\pi/n_r$ (fig.3.7) unde n_r este numărul de bare inelare aşezate concentric. Pentru a exista echilibrul elementului de reţea este necesar adăugarea unei forţe de lunecare $\mathcal{N}'_{\varphi r(n)}$. Din condiţia de echilibru:

$$\mathcal{N}'_{\varphi r(n)}\, b_r = \mathcal{M}_{\varphi r(n)} \frac{b_r}{r}, \tag{3.57}$$

rezultă

$$\mathcal{N}'_{\varphi r(n)} = \frac{\mathcal{M}_{\varphi r(n)}}{r}. \tag{3.58}$$

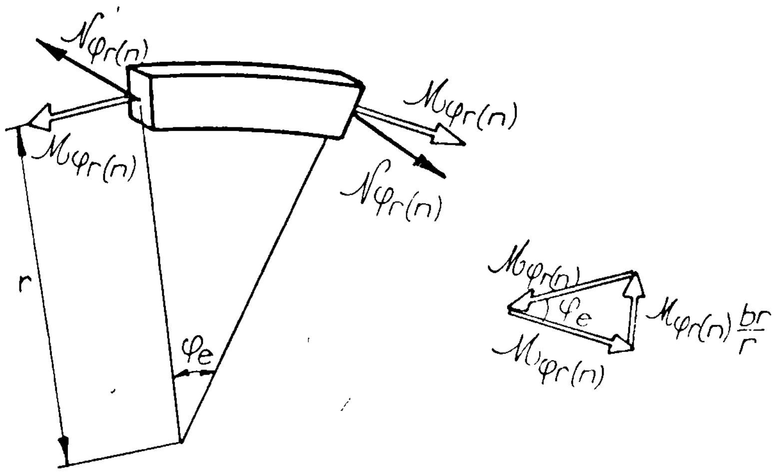


Fig.3.7

Forţa de lunecare $\mathcal{N}'_{\varphi r(n)}$ se adaugă la forţa de lunecare $\mathcal{N}_{\varphi r(n)}$. In aceste condiţii rezultă:

$$N_{\varphi r(n)} = \frac{\mathcal{N}_{\varphi r(n)}}{b_\varphi} - \frac{\mathcal{N}'_{\varphi r(n)}}{b_\varphi} = \frac{\mathcal{N}_{\varphi r(n)}}{b_\varphi} - \frac{\mathcal{M}_{\varphi r(n)}}{r \cdot b_\varphi}; \tag{3.59}$$

$$N_{r\varphi(n)} = \frac{\mathcal{N}_{r\varphi(n)}}{b_r}. \tag{3.60}$$

Forţele $\mathcal{N}_{r\varphi(n)}$ şi $\mathcal{N}_{\varphi r(n)}$ produc încovoierea barelor. Intre două puncte nodale fiecare bară se va încovoia. Unghiul drept între bare în dreptul nodului nu se va modifica (fig.3.8). Conform schemei prezentată în figura 3.8 pentru încovoierea unui braţ rezultă:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi} b_r = \gamma_r \cdot b_r = 2\,\frac{\mathcal{N}_{\varphi r(n)}(b_r/2)^3}{3\,E_{\varphi n}\cdot I_{zr(n)}}\;; \qquad (3.61)$$

$$\left(\frac{\partial v_o}{\partial r} - \frac{v_o}{r}\right)\cdot b_\varphi = \gamma_\varphi\, b_\varphi = 2\,\frac{\mathcal{N}_{r\varphi(n)}(b_\varphi/2)^3}{3\,E_{rn}\cdot I_{zr(n)}}\;. \qquad (3.62)$$

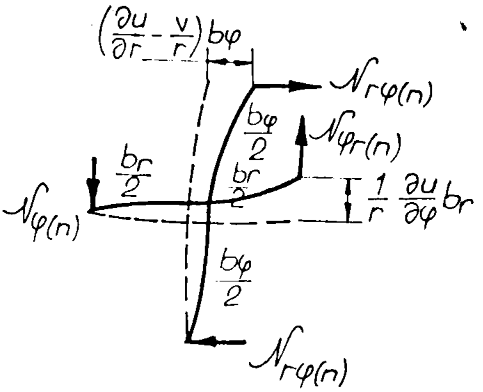


Fig.3.8

unde $I_{zr(n)}$, $I_{z\varphi(n)}$ sînt momente de inerţie axiale ale secţiunilor transversale ale barelor radiale şi curbe(inelare) în raport cu axele normale pe planul de referinţă.

Rezultă:

$$\gamma_{r\varphi(n)} = \gamma_r + \gamma_\varphi = \frac{\mathcal{N}_{\varphi r(n)}\cdot b_r^2}{12\,E_{\varphi n}\,I_{z\varphi(n)}} + \frac{\mathcal{N}_{r\varphi(n)}\cdot b_\varphi^2}{12\,E_{rn}\,I_{zr(n)}}\;. \qquad (3.63)$$

Echilibrul static în jurul nodului impune condiţia:

$$\mathcal{N}_{r\varphi(n)}\cdot b_\varphi = \mathcal{N}_{\varphi r(n)}\cdot b_r\;. \qquad (3.64)$$

Din relaţiile (3.61), (3.62), (3.63) şi (3.64) rezultă:

$$\frac{\mathcal{N}_{r\varphi(n)}}{b_r} = \frac{\mathcal{N}_{\varphi r(n)}}{b_\varphi} = \frac{1}{b_r b_\varphi}\left(\frac{\partial v_o}{\partial r} - \frac{v_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{b_r}{12E_{\varphi n}I_{z\varphi(n)}} + \frac{b_\varphi}{12E_{rn}I_{zr(n)}}\right)^{-1} \qquad (3.65)$$

Forţele normale se obţin pentru $z = e_r$, respectiv $z = e_\varphi$ cu relaţiile:

$$\mathcal{N}_{r(n)} = \int_{A_{rn}} \sigma_{rn}\, dA = E_{rn}A_{rn}\frac{\partial u_o}{\partial r} - e_r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\;; \qquad (3.66)$$

$$\mathcal{N}_{\varphi(n)} = \int_{A_{\varphi n}} \sigma_{\varphi n} dA = E_{\varphi n} A_{\varphi n} \left[\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_o}{\partial \varphi} - e_{\varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]. \tag{3.67}$$

Pentru momentele încovoietoare, după lucrările [22], [30], [79], pot fi folosite relaţiile:

$$\mathcal{M}_{r(n)} = \int_{A_{rn}} \sigma_{rn} \cdot z \cdot dA = - E_{rn} I_{\varphi n} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \tag{3.68}$$

$$\mathcal{M}_{\varphi(n)} = \int_{A_{\varphi n}} \sigma_{\varphi n} \cdot z \cdot dA = - E_{\varphi n} I_{rn} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right). \tag{3.69}$$

Momentele de torsiune vor fi exprimate prin relaţiile:

$$\mathcal{M}_{r\varphi(n)} = \int_{A_{rn}} \tau_{r\varphi n} z dA = - \frac{E_{\varphi n} I_{tr(n)}}{2(1 + \nu_r)} 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right); \tag{3.70}$$

$$\mathcal{M}_{\varphi r(n)} = \int_{A_{\varphi n}} \tau_{\varphi rn} z dA = - \frac{E_{n} I_{t(n)}}{2(1 + \nu_{\varphi})} 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right); \tag{3.71}$$

Pe baza relaţiilor (3.54), (3.55), (3.56), (3.59) şi (3.60) şi a eforturilor secţionale determinate în funcţie de componentele deplasării punctelor din planul de referinţă ((3.65) (3.71)) rezultă:

$$N_{r(n)} = \bar{B}_r \frac{\partial u_o}{\partial r} - \bar{S}_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \tag{3.72}$$

$$N_{\varphi(n)} = \bar{B}_{\varphi} \left(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_o}{\partial \varphi} \right) - \bar{S}_{\varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right); \tag{3.73}$$

$$N_{r\varphi(n)} = \bar{B}_{r\varphi} \left(\frac{\partial v_o}{\partial r} - \frac{v_o}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_o}{\partial \varphi} \right); \tag{3.74}$$

$$N_{\varphi r(n)} = \bar{B}_{r\varphi} \left(\frac{\partial v_o}{\partial r} - \frac{v_o}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_o}{\partial \varphi} \right) - \bar{D}_{\varphi r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right); \tag{3.75}$$

$$M_{r(n)} = - \bar{D}_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \bar{S}_r \frac{\partial u_o}{\partial r}; \tag{3.76}$$

$$M_{\varphi(n)} = -\bar{D}_{\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) + \bar{S}_{\varphi}\left(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right); \tag{3.77}$$

$$M_{r\varphi(n)} = -2\cdot\bar{D}_{r\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right); \tag{3.78}$$

$$M_{\varphi r(n)} = -2\cdot\bar{D}_{\varphi r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right), \tag{3.79}$$

unde pentru scrierea convenabilă a eforturilor s-au introdus următoarele notaţii:

$$\bar{B}_r = \frac{E_{rn}\cdot A_{rn}}{b_r}; \quad (3.80) \qquad \bar{B}_{\varphi} = \frac{E_{\varphi n}\cdot A_{\varphi n}}{b_{\varphi}}; \quad (3.81)$$

$$\bar{S}_r = \frac{E_{rn}\cdot A_{rn}\cdot e_r}{b_r}; \quad (3.82) \qquad \bar{S}_{\varphi} = \frac{E_{\varphi n}\cdot A_{\varphi n}\cdot e_{\varphi}}{b_{\varphi}}; \quad (3.83)$$

$$\bar{B}_{r\varphi} = \frac{12}{b_r b_{\varphi}}\left(\frac{b_r}{E_{\varphi n}\cdot I_{z\varphi(n)}} + \frac{b_{\varphi}}{E_{rn}\cdot I_{zr(n)}}\right)^{-1}; \tag{3.84}$$

$$\bar{D}_r = \frac{E_{rn}(\bar{I}_{\varphi n} + e_r^2 A_{rn})}{b_r}; \quad (3.85) \qquad \bar{D}_{\varphi} = \frac{E_{\varphi n}(\bar{I}_{rn} + e_{\varphi}^2 A_{\varphi n})}{b_{\varphi}}; \quad (3.86)$$

$$\bar{D}_{r\varphi} = \frac{E_{rn}\cdot I_{tr(n)}}{2(1+\nu_r)\cdot b_r}; \quad (3.87) \qquad \bar{D}_{\varphi r} = \frac{E_{\varphi n}\cdot I_{t\varphi(n)}}{2(1+\nu_{\varphi})\cdot b_{\varphi}}. \quad (3.88)$$

Influenţa excentricităţilor barelor e_r şi e_{φ} asupra momentelor de răsucire $M_{r\varphi(n)}$ (3.78) şi $M_{\varphi r(n)}$ (3.79) a fost neglijată.

Prin eliminarea expresiei din paranteză între relaţiile (3.78) şi (3.79) rezultă:

$$M_{r\varphi(n)} = \frac{(1+\nu_{\varphi})\, E_{rn}\, I_{tr(n)}}{(1+\nu_r)\, E_{\varphi n}\, I_{t\varphi(n)}}\,\frac{b_{\varphi}}{b_r}\, M_{\varphi r(n)} \tag{3.89}$$

Relaţia (3.89) exprimă condiţia care trebuie îndeplinită de cele două momente de torsiune $M_{r\varphi(n)}$ şi $M_{\varphi r(n)}$.

Astfel, cele două momente pot fi identice sau diferite după cum este distanţa dintre bare, materialul barelor şi caracteristicile geometrice la torsiune ale barelor. Deoarece b_r depinde de variabila r atunci $M_{r\varphi(n)}/M_{\varphi r(n)}$ va fi o mărime variabilă.

Rigidităţile $\overline{B}_r$, $\overline{B}_{r\varphi}$, $\overline{S}_r$, $\overline{D}_r$, $\overline{D}_{r\varphi}$ sînt mărimi dependente de distanţa b_r care depinde de variabila r deci sînt mărimi variabile.

3.3 Concluzii

In acest capitol s-a prezentat o tratare unitară a teoriei plăcilor circulare izotrope şi a determinării eforturilor secţionale la reţele de bare aşezate în direcţie radială şi circumferenţială. Rezultatele obţinute în acest capitol vor fi întrebuinţate la analizarea stărilor de deformaţie şi de tensiune la plăcile circulare cu nervuri.

In acest sens la plăcile circulare izotrope s-au stabilit:

- componentele deplasării unui punct în funcţie de componentele deplasării punctului aparţinînd planului median cînd are loc deformarea plăcii sub acţiunea sarcinilor exterioare;
- componentele deformaţiei (3.23) în jurul unui punct;
- eforturile secţionale raportate la planul median în funcţie de componentele deplasării;
- ecuaţiile de echilibru static.

In cazul reţelelor de bare s-a determinat, în mod original, eforturile din barele reţelei repartizate pe unitatea de lungime în funcţie de componentele deplasării punctelor aparţinînd unui plan de referinţă.

4. CONTRIBUTII PRIVIND TEORIA INCOVOIERII CU INTINDERE SAU COMPRESIUNE A PLACILOR CIRCULARE CU NERVURI

4.1 Consideraţii generale

In figura 4.1 este reprezentată o placă circulară întărită cu nervuri radiale pe ambele feţe aşezate simetric faţă de planul median.

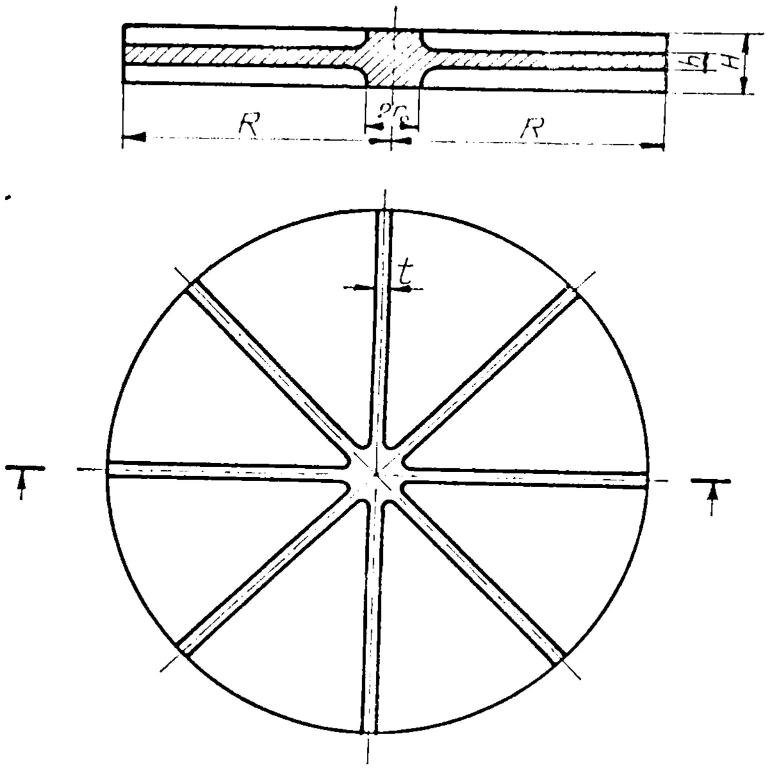


Fig. 4.1

Calculul plăcilor circulare cu nervuri radiale poate fi făcut prin două metode:

1. prima metodă, care redă comportarea ca un tot unitar a plăcii, constă în netezirea structurii adică în distribuirea nervurilor pe suprafaţa plăcii rezultînd o structură continuă

cu ortotropie de structură;

2. a doua metodă, mai exactă, ia în considerare conlucrarea efectivă între elementele componente (placă şi nervuri).

In acest capitol se pun bazele teoriei plăcilor circulare cu nervuri radiale după prima metodă de calcul. In acest sens se analizează placa circulară cu ortotropie de structură adică placa circulară întărită cu nervuri radiale şi inelare pentru determinarea relaţiilor de calcul ale componentelor tensiunii, eforturilor secţionale şi a ecuaţiilor diferenţiale care descriu deformarea lor.

4.2 Formularea problemei

Fie o placă de grosime constantă h, rază exterioară R întărită cu n_r nervuri radiale şi n_φ nervuri inelare care este solicitată de forţe conţinute în planul median şi încărcări transversale. Placa ortotropă se raportează la un sistem de coordonate cilindrice. Se consideră un element caracteristic al plăcii circulare ortotrope prezentat în figura 4.2.

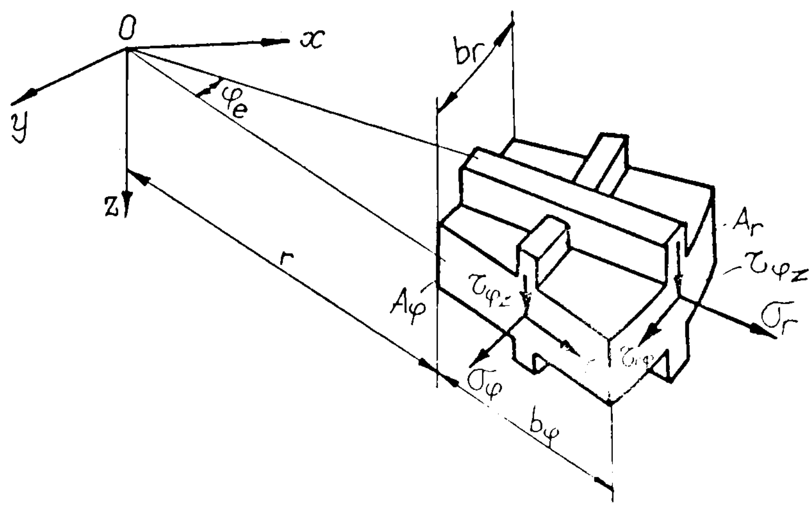


Fig.4.2

Lungimile laturilor elementului, b_r şi b_φ, corespund cu distanţele dintre nervuri în direcţie radială r, respectiv circumferenţială φ

$$b_r = \frac{2\pi r}{n_r}\ ; \qquad (4.1) \qquad\qquad b_\varphi = \frac{R}{n_\varphi}\ . \qquad (4.2)$$

Deformaţiile şi tensiunile în elementul caracteristic se admit constante în sensul axei r, respectiv φ întrucît se consideră că rigidizările sînt dispuse la intervale relativ mici. Se notează cu A_r şi A_φ ariile secţiunilor elementului de placă, normale pe axele r şi φ. Drept grade de libertate ale elementului se aleg componentele deplasării u_o, v_o şi w_o ale unui punct al planului median al plăcii ce constituie suprafaţa de referinţă pentru definirea eforturilor secţionale.

4.3 Ipoteze de calcul

Pentru stabilirea ecuaţiilor diferenţiale care descriu deformarea plăcilor circulare ortotrope, pe lîngă ipotezele de calcul menţionate în paragraful 3.1.3, se introduc următoarele ipoteze:

1. nervurile de acelaşi tip sînt identice şi au secţiunea transversală constantă sau variabilă, cu lăţimea mică în aşa fel încît contactul dintre ele şi placă este considerat a fi după o linie;

2. nervurile radiale sînt aşezate echiunghiular iar cele inelare echidistant;

3. se admite că deformarea ansamblului placă - nervuri respectă ipoteza lui Kirchhoff;

4. axele nervurilor se deformează odată cu planul median al plăcii;

5. pentru nervuri rămîne valabilă ipoteza lui Bernoulli;

6. deformaţiile, în raport cu dimensiunile plăcii, sînt considerate mici;

7. eforturile de lunecare sînt preluate numai de placă întrucît nervurile au o rigiditate la lunecare neglijabilă în afara planului lor median;

8. rigiditatea torsională a nervurilor, în raport cu a plăcii, se neglijează;

9. placa cît şi nervurile pot fi confecţionate din acelaşi material sau materiale diferite;.

10. starea de tensiune în placă se admite plană iar în nervuri monoaxială.

4.4 Deplasări şi deformaţii specifice

Cîmpul de deplasări poate fi obţinut cu relaţia (3.16) Acest lucru este posibil întrucît în aceste relaţii nu intră parametrul legat de grosimea plăcii.

Starea de deformaţie într-un punct situat în planul median al plăcii se caracterizează prin relaţiile (3.24).

Starea de deformaţie într-un punct care nu aparţine planului median se obţine cu relaţiile (3.23).

4.5 Tensiuni

Intr-un punct al plăcii situat la distanţa z de suprafaţa mediană, componentele tensiunii se pot exprima ca pentru problema stării plane în placă (porţiunea dintre nervuri) cu relaţiile (3.27).

Pentru nervuri, care se găsesc într-o stare monoaxială de tensiune rezultă:

$$\sigma_{rn} = E_{rn}\varepsilon_r = E_{rn}\left[\frac{\partial u_o}{\partial r} - z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]; \tag{4.3}$$

$$\sigma_{\varphi n} = E_{\varphi n}\varepsilon_\varphi = E_{\varphi n}\left[\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi} - z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right], \tag{4.4}$$

unde E_{rn}, respectiv $E_{\varphi n}$, sînt modulele de elasticitate longitudinală ale materialelor din care sînt confecţionate nervurile radiale, respectiv inelare.

4.6 Eforturi secţionale

Introducerea eforturilor secţionale pe unitatea de lungime permite să se înlocuiască studiul elementului prismatic cu cel al suprafeţei mediane. Eforturile secţionale pe unitatea de lungime se definesc prin relaţiile de echivalenţă reprezentînd însumarea tensiunilor aferente lăţimilor b_r, respectiv b_φ şi apoi raportarea lor la unitatea de lungime.

Relaţiile de echivalenţă sînt:

- eforturi secţionale normale

$$N_r = \frac{1}{b_r}\int_{A_r} \sigma_r dA, \qquad N_\varphi = \frac{1}{b_\varphi}\int_{A_\varphi} \sigma_\varphi dA; \tag{4.5}$$

- eforturi secţionale tăietoare

$$T_r = \frac{1}{b_r}\int_{A_r} \tau_{rz} dA, \qquad T_\varphi = \frac{1}{b_\varphi}\int_{A_\varphi} \tau_{\varphi z} dA; \tag{4.6}$$

- eforturi secţionale de lunecare

$$N_{r\varphi} = \frac{1}{b_r}\int_{A_r} \tau_{r\varphi} \cdot dA, \qquad N_{\varphi r} = \frac{1}{b_\varphi}\int_{A_\varphi} \tau_{\varphi r} \cdot dA; \tag{4.7}$$

- eforturi secţionale de încovoiere

$$M_r = \frac{1}{b_r}\int_{A_r} z \cdot \sigma_r \cdot dA, \qquad M_\varphi = \frac{1}{b_\varphi}\int_{A_\varphi} z \cdot \sigma_\varphi \cdot dA; \tag{4.8}$$

- eforturi secţionale de răsucire

$$M_{r\varphi} = \frac{1}{b_r}\int_{A_r} z \cdot \tau_{r\varphi} \cdot dA, \qquad M_{\varphi r} = \frac{1}{b_\varphi}\int_{A_\varphi} z \cdot \tau_{\varphi r} \cdot dA, \tag{4.9}$$

Sensurile pozitive ale eforturilor secţionale sînt arătate în figura 3.6.

Eforturile secţionale care acţionează asupra planului median se pot obţine în două moduri:

1. Calculul eforturilor secţionale prin efectuarea integralelor (4.5)$\div$(4.9) după introducerea în ele a tensiunilor;
2. Calculul eforturilor secţionale prin însumarea eforturilor plăcii cu eforturile din nervuri.

4.6.1 Calculul eforturilor secţionale în funcţie de componentele deplasării prin integrare

Calculul eforturilor secţionale se face în raport cu planul median al plăcii prin înlocuirea stării de tensiune dată de rel. (3.27), (4.3), (4.4) în relaţiile (4.5), (4.7), (4.8) şi (4.9). Fiecare integrală se poate calcula descompunînd-o în două părţi:

- o parte este raportată la suprafaţa de mijloc a plăcii A_{ro}, respectiv $A_{\varphi o}$;
- a doua parte pe suprafeţele transversale ale nervurilor A_{rn}, respectiv $A_{\varphi n}$.

In aceste integrale se poate ţine cont de natura materialelor din care sînt confecţionate placa cît şi nervurile. Materialele se consideră omogene şi elastice.

Prima relaţie din (4.5), ţinînd cont de cele arătate mai sus poate fi scrisă sub forma:

$$N_r = \frac{1}{b_r}\int_{A_r}\sigma_r\,dA = \frac{1}{b_r}\int_{A_{ro}}\sigma_r\,dA + \frac{1}{b_r}\int_{A_{rn}}\sigma_{rn}\,dA, \tag{4.10}$$

unde σ_r este tensiunea normală radială din placă iar σ_{rn} - tensiunea normală din nervura radială.

Dacă se înlocuiesc expresiile tensiunilor normale σ_r, respectiv σ_{rn}, rezultă:

$$N_r = \frac{1}{b_r}\int_{A_{ro}}\left\{\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_o}{\partial r} + \nu\left(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial\varphi}\right) - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)\right)\right]\right\}$$

$$+ \frac{1}{b_r}\int_{A_{rn}} E_{rn}\left(\frac{\partial u_o}{\partial r} - z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) dA. \tag{4.11}$$

Modulele de elasticitate E, E_{rn} şi $E_{\varphi n}$, coeficientul de contracţie transversală ν fiind mărimi constante în suprafeţele A_{ro} şi A_{rn}, respectiv $A_{\varphi n}$, rezultă:

$$N_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_o}{\partial r} + \nu\left(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right)\right]\frac{1}{b_r}\int_{A_{ro}} dA \; -$$

$$- \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right]\frac{1}{b_r}\int_{A_{ro}} z\cdot dA \; +$$

$$+ E_{rn}\frac{\partial u_o}{\partial r}\frac{1}{b_r}\int_{A_{rn}} dA - E_{rn}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{1}{b_r}\int_{A_{rn}} z\cdot dA \,. \qquad (4.12)$$

Se ţine cont că

$$\frac{1}{b_r}\int_{A_{rn}} dA = \frac{A_{ro}}{b_r} = h; \qquad (4.13) \qquad \frac{1}{b_r}\int_{A_{rn}} dA = \frac{A_{rn}}{b_r}, \qquad (4.14)$$

iar integralele

$$\frac{1}{b_r}\int_{A_{ro}} z\cdot dA = 0; \qquad\qquad \frac{1}{b_r}\int_{A_{rn}} z\cdot dA = 0\,. \qquad (4.15)$$

Integralele (4.15) au valoarea zero întrucît reprezintă momente statice ale secţiunii plăcii, respectiv nervurii, calculate în raport cu planul median. In final se obţine:

$$N_r = B\cdot\left[\left(1 + \frac{\bar{B}_r}{B}\right)\frac{\partial u_o}{\partial r} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi} + \frac{u_o}{r}\right)\right], \qquad (4.16)$$

unde B reprezintă rigiditatea axială a plăcii definită de relaţia (3.34) iar $\bar{B}_r$ - rigiditatea axială a nervurii distribuită pe lungimea b_r (3.80). In mod analog se calculează:

$$N_\varphi = \frac{1}{b_\varphi}\int_{A_\varphi}\sigma_\varphi dA = \frac{1}{b_\varphi}\int_{A_{\varphi o}}\sigma_\varphi dA + \frac{1}{b_\varphi}\int_{A_{\varphi n}}\sigma_{\varphi n} dA =$$

$$= \frac{1}{b_\varphi}\int_{A_{\varphi o}}\left\{\frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{\partial u_o}{\partial r}+\frac{u_o}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right]-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right]\right\}dA +$$

$$+\frac{1}{b_\varphi}\int_{A_{\varphi n}} E_{\varphi n}\left[\left(\frac{u_o}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right)-z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right]dA. \qquad (4.17)$$

In urma efectuării calculelor, rezultă

$$B\left[\left(1+\frac{\bar{B}_\varphi}{B}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}+\frac{u_o}{r}\right)+\nu\frac{\partial u_o}{\partial r}\right], \qquad (4.18)$$

unde $\bar{B}_\varphi$ reprezintă rigiditatea axială a nervurii inelare (curbe) distribuită pe lungimea b_φ (3.81).

Eforturile secţionale de lunecare sînt preluate numai de placă (ipoteza 7). In acest caz din relaţiile (3.29), (4.7) pe baza componentei tensiunii tangenţiale $\tau_{r\varphi}$ (3.27) rezultă:

$$N_{r\varphi} = N_{\varphi r} = \frac{1}{b_r}\int_{A_r}\tau_{r\varphi}\,dA =$$

$$= \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{1}{b_r}\int_{A_{ro}}\left[\frac{\partial v_o}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi}-\frac{v_o}{r}-z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)\right]dA. \qquad (4.19)$$

Tinînd cont de relaţiile (4.13) şi (4.15) după efectuarea calculelor se obţine:

$$N_{r\varphi} = N_{\varphi r} = \frac{1-\nu}{2}B\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi}-\frac{v_o}{r}+\frac{\partial v_o}{\partial r}\right]. \qquad (4.20)$$

Relaţiile (4.16), (4.18) şi (4.20) determină eforturile de membrană care nu au efect asupra încovoierii plăcii fiind mici în comparaţie cu eforturile critice de flambaj. Influenţa lor asupra încovoierii plăcii poate fi stabilită prin considerarea relaţiilor neliniare ale deformaţiilor specifice (3.23) la determinarea tensiunilor şi eforturilor secţionale.

Calculul eforturilor de încovoiere se face la fel ca a eforturilor de membrană. Prima relaţie din (4.8) devine:

$$M_r = \frac{1}{b_r}\int_{A_r} z\cdot\sigma_r\cdot dA =$$

$$= \frac{1}{b_r}\int_{A_{ro}} z\cdot\sigma_r\cdot dA + \frac{1}{b_r}\int_{A_{rn}} z\cdot\sigma_{rn}\, dA\,. \qquad (4.21)$$

Se înlocuiesc tensiunile normale σ_r(3.27) şi σ_{rn} (4.3), rezultînd:

$$M_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_o}{\partial r} + \nu\left(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right)\right]\frac{1}{b_r}\int_{A_{ro}} z\, dA -$$

$$- \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right]\frac{1}{b_r}\int_{A_{ro}} z^2 dA +$$

$$+ E_{rn}\frac{\partial u_o}{\partial r}\frac{1}{b_r}\int_{A_{rn}} z\, dA - E_{rn}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{1}{b_r}\int_{A_{rn}} z^2 dA. \qquad (4.22)$$

Se ţine cont de relaţiile (4.14) şi de faptul că :

$$\frac{1}{b_r}\int_{A_{ro}} z^2\cdot dA = \frac{1}{b_r}\int_{-h/2}^{h/2} b_r\cdot z^2\cdot dA = \frac{h^3}{12}\,, \qquad (4.23)$$

$$\frac{1}{b_r}\int_{A_{rn}} z^2\cdot dA = \frac{\overline{I}_{\varphi n}}{b_r}\,, \qquad (4.24)$$

atunci relaţia (4.22) devine:

$$M_r = -D\left[\left(1 + \frac{\overline{D}_r}{D}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right]. \qquad (4.25)$$

In relaţia (4.24) $\overline{I}_{\varphi n}$ este momentul de inerţie axial în raport cu axa φ conţinută în planul median.

In relaţia (4.25) D este rigiditatea cilindrică a plăcii determinată cu relaţia (3.35) iar $\overline{D}_r$ - rigiditatea la încovoiere a unei nervuri distribuită pe lungimea b_r calculată cu relaţia (3.85) cînd $e_r = 0$.

In mod analog se calculează M_φ. In ultima relaţie din (4.8) se introduce tensiunea circumferenţială σ_φ (3.27) şi tensiunea normală din nervura inelară (curbă) $\sigma_{\varphi n}$ (4.4) obţinîndu-se:

$$M_\varphi = \frac{1}{b_\varphi}\int_{A_\varphi} z\cdot\sigma_\varphi\, dA = \frac{1}{b_\varphi}\int_{A_{\varphi o}} z\cdot\sigma_\varphi\cdot dA + \frac{1}{b_\varphi}\int_{A_{\varphi n}} z\cdot\sigma_{\varphi n}\cdot dA =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{\partial u_o}{\partial r} + \frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right]\frac{1}{b_\varphi}\int_{A_{\varphi o}} z\cdot dA -$$

$$- \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right]\frac{1}{b_\varphi}\int_{A_{\varphi o}} z^2\, dA +$$

$$+ E_{\varphi n}\left(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right)\frac{1}{b_\varphi}\int_{A_{\varphi n}} z\, dA - E_{\varphi n}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\frac{1}{b_\varphi}\int_{A_{\varphi n}} z^2\, dA . \tag{4.26}$$

După efectuarea calculelor ţinînd cont de (4.15) şi de

$$\frac{1}{b_\varphi}\int_{A_{\varphi o}} z^2\, dA = \frac{1}{b_\varphi}\int_{-h/2}^{h/2} z^2\cdot b_\varphi\cdot dA = \frac{h^3}{12}, \tag{4.27}$$

$$\frac{1}{b_\varphi}\int_{A_{\varphi n}} z^2\, dA = \frac{\overline{I}_{rn}}{b}, \tag{4.28}$$

relaţia (4.26) devine:

$$M_\varphi = - D\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(1 + \frac{\overline{D}_\varphi}{D}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right]. \tag{4.29}$$

In relaţia (4.29) $\overline{D}_\varphi$ este rigiditatea la încovoiere a nervurii inelare (curbe) distribuită pe lungimea b_φ

determinate cu relaţia (3.86) cînd $e_\varphi = 0$.

Momentele de răsucire se determină cu relaţiile (4.9) considerînd că în nervuri $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0$ iar tensiunea tangenţială din placă este dată de relaţia (3.27)

$$M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = \frac{1}{b_r} \int_{A_{ro}} z\, \tau_{r\varphi}\, dA =$$

$$\frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_o}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_o}{r} \right) \right] \frac{1}{b_r} \int_{A_{ro}} z \cdot dA -$$

$$- \frac{E}{2(1+\nu)} \, 2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] \frac{1}{b_r} \int_{A_{ro}} z^2 dA. \qquad (4.30)$$

După efectuarea calculelor ţinînd cont de relaţiile (4.23) şi (4.14) rezultă:

$$M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = - D(1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \qquad (4.31)$$

Relaţiile (4.25), (4.29) şi (4.31) determină eforturile de încovoiere din placa circulară ortotropă.

Se remarcă că atît eforturile de membrană cît şi eforturile de placă nu mai depind de coordonata z .

4.6.2 Calculul eforturilor secţionale prin suprapunerea eforturilor plăcii şi ale reţelelor de bare

Un alt mod pentru determinarea eforturilor secţionale ale plăcii circulare ortotrope se obţine prin suprapunerea eforturilor secţionale ale plăcii circulare de grosime constantă şi ale reţelelor de bare stabilite în capitolul 3 .

Prin suprapunerea celor două tipuri de eforturi se obţine:

$$N_r = (B + \bar{B}_r) \frac{\partial u_o}{\partial r} + \nu B \left(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_o}{\partial \varphi} \right) - \bar{S}_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} ; \qquad (4.32)$$

$$N_\varphi = \nu B \frac{\partial u_o}{\partial r} + (B + \bar{B}_\varphi)(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}) - \bar{S}_\varphi(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}); \qquad (4.33)$$

$$N_{r\varphi} = (\frac{1-\nu}{2}B + \bar{B}_{r\varphi})(\frac{\partial v_o}{\partial r} - \frac{v_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi}); \qquad (4.34)$$

$$N_{\varphi r} = (\frac{1-\nu}{2}B + \bar{B}_{\varphi r})(\frac{\partial v_o}{\partial r} - \frac{v_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi}) - \bar{D}_{\varphi r}(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial \varphi}); \qquad (4.35)$$

$$M_r = -\left[(D + \bar{D}_r)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu D(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2})\right] + \bar{S}_r \frac{\partial u_o}{\partial r}; \qquad (4.36)$$

$$M_\varphi = -\left[\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (D + D_\varphi)(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2})\right] + \bar{S}_\varphi(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}); \qquad (4.37)$$

$$M_{r\varphi} = -\left[D(1-\nu) + 2\cdot\bar{D}_{r\varphi}\right](\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}); \qquad (4.38)$$

$$M_{\varphi r} = -\left[D(1-\nu) + 2\cdot\bar{D}_{\varphi r}\right](\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}). \qquad (4.39)$$

In suprapunerea relaţiilor eforturilor secţionale se constată o excepţie, la eforturile secţionale de lunecare, ce provine din nepotrivirea deformaţiilor la cele două elemente. Eforturile $\mathcal{N}_{r\varphi(n)}$ şi $\mathcal{N}_{\varphi r(n)}$ provoacă, la reţeaua de bare, o deformaţie în formă de „S" a barelor (nervurilor), în planul elementului. In cazul elementului de placă rigidizat, nervurile sînt legate rigid de suprafaţa elementului de placă, astfel că aceste deformări nu sînt posibile. Forţele $N_{r\varphi}$ şi $N_{\varphi r}$ sînt preluate de placă, deci se neglijează termenul $\bar{E}_{r\varphi}$. Relaţiile (4.32)÷(4.39) definesc eforturile secţionale pentru placa circulară ortotropă cu nervuri care au axele aşezate excentric faţă de planul median al plăcii.

In cazul cînd $e_r = e_\varphi = 0$, nervurile au axele conţinute în planul median, iar relaţiile (4.32)÷(4.39) devin identice cu relaţiile (4.16), (4.18), (4.20), (4.25), (4.29), (4.31) dacă $\bar{D}_{r\varphi} = \bar{D}_{\varphi r} = 0$ (ipoteza 8).

4.7 Ecuaţii de sinteză

Ecuaţiile de sinteză vor fi stabilite considerînd:

- grosimea plăcii constantă;
- secţiunea transversală a nervurii radiale variabilă în lungul axei;
- secţiunea transversală a nervurii inelare constantă în lungul axei.

Se introduc următoarele mărimi adimensionale:

$$\alpha_r = \frac{E_{rn} A_{rn} n_r}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot B}; \quad (4.37) \qquad \alpha_\varphi = \frac{E_{\varphi n} A_{\varphi n} n_\varphi}{R \cdot B}; \quad (4.38)$$

$$\lambda_r = \frac{E_{rn} I_{\varphi n} n_r}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot D}; \quad (4.39) \qquad \lambda_\varphi = \frac{E_{\varphi n} I_{rn} n_\varphi}{R \cdot D}. \quad (4.40)$$

Variaţia secţiunii transversale în lungul axei va fi exprimată de aria A_{rn} şi momentul de inerţie $I_{\varphi n}$. Pe baza relaţiilor (4.37) (4.40) eforturile secţionale N_r, N_φ, M_r, M_φ vor avea forma:

$$N_r = B\left[\left(1 + \frac{R}{r}\alpha_r\right)\frac{\partial u_o}{\partial r} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}u_o\right)\right]; \quad (4.41)$$

$$N_\varphi = B\left[\nu\frac{\partial u_o}{\partial r} + (1 + \alpha_\varphi)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}u_o\right)\right]; \quad (4.42)$$

$$M_r = -D\left[\left(1 + \frac{R}{r}\lambda_r\right)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right]; \quad (4.43)$$

$$M_\varphi = -D\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (1 + \lambda_\varphi)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right]. \quad (4.44)$$

Relaţiile (4.20), (4.41) şi (4.42) se introduc în ecuaţiile de echilibru static (3.36) şi (3.37) rezultînd un sistem de două ecuaţii diferenţiale cu două variabile u_o şi v_o.

Sistemul de ecuaţii diferenţiale are forma:

$$L_1(u_o, v_o) = -\frac{p_r}{B}; \quad (4.45) \qquad L_2(u_o, v_o) = -\frac{p_\varphi}{B}; \quad (4.46)$$

unde

$$L_1(u_o,v_o) = (1 + \frac{R}{r}\alpha_r)\frac{\partial^2 u_o}{\partial r^2} + (1 + R\frac{d\alpha_r}{dr})\frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial r} + \frac{1-\nu}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_o}{\partial \varphi^2} -$$

$$-(1+\alpha_\varphi)\frac{u_o}{r^2} - (\frac{3-\nu}{2} + \alpha_\varphi)\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_o}{\partial r} + \frac{1+\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_o}{\partial r \partial \varphi}, \qquad (4.47)$$

$$L_2(u_o,v_o) = (1+\alpha_\varphi)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_o}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot v_o)\right] +$$

$$+ \frac{1+\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_o}{\partial r \partial \varphi} + (\frac{3+\nu}{2} + \alpha_\varphi)\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi}. \qquad (4.48)$$

In ecuaţia (3.43) se introduc relaţiile (4.31), (4.43) (4.44) rezultînd:

$$L_3(w) = \frac{p_z}{D}, \qquad (4.49)$$

unde

$$L_3(w) = (1 + \frac{R}{r}\lambda_r)\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + (1+\lambda_\varphi)\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} -$$

$$- 2\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} + 2(1 + R\frac{d\lambda_r}{dr})\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + 2(2+\lambda_\varphi)\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} +$$

$$+ (1+\lambda_\varphi)\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r} - (1 + \lambda_\varphi - Rr\frac{d^2\lambda_r}{dr^2})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}. \qquad (4.50)$$

Obiectivul lucrării de faţă fiind studiul plăcilor circulare cu nervuri radiale aşezate simetric faţă de planul median este necesar ca în sistemul de ecuaţii diferenţiale (4.45), (4.46) şi (4.49) să se anuleze mărimile α_φ şi λ_φ întrucît nu există nervuri inelare(curbe) . In acest caz , ecuaţiile diferenţiale care descriu deformarea plăcilor cir - culare cu nervuri radiale au forma:

$$\mathcal{L}_1(u_o,v_o) = -\frac{p_r}{B}; \qquad (4.51)$$

$$\mathcal{L}_2(u_o,v_o) = -\frac{p_\varphi}{B}; \qquad (4.52)$$

$$\mathcal{L}_3(w) = \frac{p_z}{D}, \qquad (4.53)$$

unde

$$\mathcal{L}_1(u_o,v_o) = \left(1 + \frac{R}{r}\alpha_r\right)\frac{\partial^2 u_o}{\partial r^2} + \left(1 + R\frac{d\alpha_r}{dr}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1-\nu}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_o}{\partial \varphi^2} - \frac{u_o}{r^2} - \frac{3-\nu}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi} + \frac{1+\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_o}{\partial r \partial \varphi}; \quad (4.54)$$

$$\mathcal{L}_2(u_o,v_o) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_o}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot v_o)\right] +$$

$$+ \frac{1+\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_o}{\partial r \partial \varphi} + \frac{3-\nu}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi}; \quad (4.55)$$

$$\mathcal{L}_3(w) = \left(1 + \frac{R}{r}\lambda_r\right)\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} +$$

$$+ \left(1 + R\frac{d\lambda_r}{dr}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - 2\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} + 4\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} -$$

$$- \left(1 - Rr\frac{d^2\lambda_r}{dr^2}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}. \quad (4.56)$$

Analizînd ecuaţiile diferenţiale (4.51), (4.52), (4.53) care descriu deformarea plăcilor circulare cu nervuri radiale se constată că studiul se descompune în probleme de întindere sau compresiune care se pot trata independent de problema încovoierii. Astfel, în cazul cînd placa este încărcată cu forţe conţinute în planul median starea de deformaţie şi de tensiune se obţine prin rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale format din relaţiile (4.51) şi (4.52). Dacă placa este solicitată la încovoiere deformarea ei este descrisă de ecuaţia diferenţială (4.53).

Atunci cînd mărimile adimensionale α_r şi λ_r sînt nule ecuaţiile diferenţiale (4.51), (4.52) şi (4.53) devin identice cu ecuaţiile diferenţiale care descriu deformarea plăcii circulare izotrope ((3.44), (3.45), (3.46)).

In funcţie de sarcinile care solicită placa cu nervuri radiale sistemul de ecuaţii diferenţiale al suprafeţei mediane deformate se simplifică:

1. Dacă placa este încărcată numai cu forțe conținute în planul median, starea de deformație se obține prin integrarea sistemului de ecuații diferențiale format din (4.51) și (4.52). Atunci cînd forțele acționează axial simetric rezultă:

$$B\left(1 + \frac{R}{r}\alpha_r\right)\frac{d^2u_o}{dr^2} + B\left(1 + R\frac{d\alpha_r}{dr}\right)\frac{1}{r}\frac{du_o}{dr} - B\frac{u_o}{r^2} = -p_r. \quad (4.57)$$

2. Dacă placa este încărcată cu forțe normale pe planul median sistemul de ecuații diferențiale se reduce la ecuația diferențială cu derivate parțiale (4.53). In cazul plăcii circulare cu nervuri radiale încărcată cu o sarcină normală care poate fi repartizată după o lege oarecare, axial simetrică sau repartizată uniform, ecuația (4.53) se reduce la forma

$$\left(1 + \frac{R}{r}\lambda_r\right)\frac{d^4w}{dr^4} + 2\left(1 + R\frac{d\lambda_r}{dr}\right)\frac{1}{r}\frac{d^3w}{dr^3} - \left(1 - Rr\frac{d^2\lambda_r}{dr^2}\right)\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} +$$

$$+ \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = \frac{p_z}{D}. \quad (4.58)$$

4.8 Energia potențială totală a plăcilor circulare cu nervuri radiale

Fie L operatorul corespunzător sistemului de ecuații diferențiale (4.51) ÷ (4.53) care descrie deformarea plăcilor circulare cu nervuri radiale. Sistemul de ecuații diferențiale poate fi scris sub forma:

$$L \cdot \boldsymbol{U} = f. \quad (4.59)$$

Acest operator are două proprietăți importante. El este simetric (conform teoremei lui Betti) și pozitiv. In aceste condiții, după [216] , există teorema funcționalului minim. Teorema funcționalului minim menționează că dacă sistemul de ecuații (4.59) are o soluție atunci există un funcțional pătratic

$$\Pi(\boldsymbol{U}) = (L\,\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\Psi}) - 2\,(f, \boldsymbol{U}) \quad (4.60)$$

pentru care soluția sistemului de ecuații diferențiale dă funcționalei Π o valoare minimă. In relația (4.60) s-a notat cu

(,) produsul scalar. Teorema are şi o reciprocă. In acest caz funcţionala este egală cu energia potenţială totală. Energia potenţială totală se determină cu relaţia:

$$\Pi = U_m + U_p + n_r \cdot U_{rn} - L_e, \tag{4.61}$$

unde U_m este energia potenţială de deformaţie la întindere sau compresiune a plăcii; U_m - energia de deformaţie a plăcii datorită încovoierii; U_{rn} - energia de deformaţie a unei nervuri radiale; L_e - lucrul mecanic al forţelor exterioare.

Energia potenţială de deformaţie, pentru un element de placă de volum $dV = r \cdot dr \cdot d\varphi dz$, în baza ipotezelor din paragraful 3.1.3 se determină cu relaţia:

$$U = \iiint U_s \, r \, dr \, d\varphi \, dz = U_m + U_p , \tag{4.62}$$

unde

$$U_s = \frac{1}{2}(\sigma_r \cdot \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \tau_{r\varphi} \gamma_{r\varphi}). \tag{4.63}$$

U_s , din relaţia (4.62), reprezintă energia potenţială specifică sau potenţial elastic.

In relaţia (4.62) se introduce (3.27) şi se integrează în raport cu variabila z între limitele $-h/2$ şi $h/2$ rezultînd:

$$U_m = \frac{1}{2} B \iint_{S_m} \left\{ \left(\frac{\partial u_o}{\partial r} + \frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right)^2 + 2(1-\nu)\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_o}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi} - \frac{v_o}{r}\right)^2 - \frac{\partial u_o}{\partial r}\left(\frac{\partial u_o}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right)\right]\right\} r \, dr \cdot d\varphi \, ; \tag{4.64}$$

$$U_p = \frac{1}{2} D \iint_{S_m} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right]\right\} r dr d\varphi \tag{4.65}$$

Energia potenţială de deformaţie a unei nervuri, neglijînd efectul de torsiune, după [1] se determină cu relaţia:

$$U_{rn} = \frac{1}{2}\int_{(R)}\left[E_{rn}A_{rn}\left(\frac{\partial u_o}{\partial r}\right)^2 + E_{rn}I_{\varphi n}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2\right]dr. \quad (4.66)$$

Lucrul mecanic al forţelor exterioare, după [1] , [22] este dat de relaţia:

$$L_e = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}(Xu_o+Yv_o+Zw)rdrd\varphi = 2\pi\int_0^{R}(p_r u_o+p_\varphi v_o+p_z w)rdr, \quad (4.67)$$

întrucît componentele forţelor exterioare sînt:

$$X = p_r, \qquad Y = p_\varphi, \qquad Z = p_z . \quad (4.68)$$

Energia potenţială totală devine:

$$\Pi = U_m + U_p + n_r U_{rn} - L_e = \int_{(R)} F\, dr \quad (4.69)$$

unde

$$F = rB\left(\frac{\partial u_o}{\partial r} + \frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1-\nu}{2}rB\left(\frac{\partial v_o}{\partial r} + \frac{\partial u_o}{r\partial \varphi} - \frac{v_o}{r}\right)^2 -$$

$$-2(1-\nu)rB\left(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial u_o}{\partial r} + rD\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)^2 +$$

$$+2(1-\nu)rD\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 - 2(1-\nu)rD\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) +$$

$$+ \frac{E_{rn}A_{rn}n_r}{2\pi}\left(\frac{\partial u_o}{\partial r}\right)^2 + \frac{E_{rn}I_{\varphi n}n_r}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2 - 2rp_r u_o - 2rp_\varphi v_o - 2rp_z w$$

(4.70)

Pentru verificare se vor deduce condiţiile de echilibru din energia potenţială totală. Ecuaţiile lui Euler ([74] , [216]) se obţin din minimizarea funcţionalei (4.69). Ele au forma:

$$F_{u_o} - \frac{\partial}{\partial r}F_{u_{o,r}} - \frac{\partial}{\partial \varphi}F_{u_{o,\varphi}} = 0; \quad (4.71)$$

$$F_{v_o} - \frac{\partial}{\partial r} F_{v_{o,r}} - \frac{\partial}{\partial \varphi} F_{v_{o,\varphi}} = 0; \tag{4.72}$$

$$F_w - \frac{\partial}{\partial r} F_{w,r} - \frac{\partial}{\partial \varphi} F_{w,\varphi} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} F_{w,rr} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} F_{w,r\varphi} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} F_{w,\varphi\varphi} = 0 \tag{4.73}$$

unde

$$u_{o,r} = \frac{\partial u_o}{\partial r}; \qquad u_{o,\varphi} = \frac{\partial u_o}{\partial \varphi}; \tag{4.74}$$

$$v_{o,r} = \frac{\partial v_o}{\partial r}; \qquad v_{o,\varphi} = \frac{\partial v_o}{\partial \varphi}; \tag{4.75}$$

$$w_{,r} = \frac{\partial w}{\partial r}; \qquad w_{,\varphi} = \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \tag{4.76}$$

$$w_{,rr} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad w_{,r\varphi} = \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi}; \quad w_{,\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \tag{4.77}$$

In ecuaţiile (4.71), (4.72), (4.73)

$$F_{u_o} = \frac{\partial F}{\partial u_o} = 2B\left(\frac{u_o}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial u_o}{\partial r}\right) - 2\, r\, p_r; \tag{4.78}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} F_{u_{o,r}} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{o,r}}\right) = 2B\left(\frac{\partial u_o}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u_o}{\partial r^2} + \nu\frac{\partial u_o}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v_o}{\partial r \partial \varphi}\right) + 2B\left(\alpha_r R \frac{\partial^2 u_o}{\partial r^2} + R\,\frac{d\alpha_r}{dr}\frac{\partial u_o}{\partial r}\right); \tag{4.79}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} F_{u_{o,\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{o,\varphi}}\right) = (1-\nu)B\left(\frac{\partial^2 v_o}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_o}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right); \tag{4.80}$$

$$F_{v_o} = \frac{\partial F}{\partial v_o} = 2B\left\{-\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{\partial v_o}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} v_o\right]\right\} - 2rp_\varphi; \tag{4.81}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}F_{v_{o,r}} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F}{\partial v_{o,r}}\right) = B(1-\nu)\left(r\frac{\partial^2 v_o}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_o}{\partial r\partial\varphi}\right); \tag{4.82}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}F_{v_{o,\varphi}} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial v_{o,\varphi}}\right) = 2B\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_o}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2 u_o}{\partial r\partial\varphi}\right); \tag{4.83}$$

$$F_w = \frac{\partial F}{\partial w} = -2\cdot r\cdot p_z; \tag{4.84}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}F_{w,r} = 2D\left[\nu\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - 2\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\varphi^2}\right]; \tag{4.85}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}F_{w,\varphi} = -4D(1-\nu)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\varphi^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right); \tag{4.86}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}F_{w,rr} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{,rr}}\right) = 2D\left[(2+\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + r\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2\nu\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} - \right.$$
$$\left. - 2\nu\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\varphi^2} + \nu\frac{1}{r}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\varphi^2} + R\frac{d^2\lambda_r}{dr^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2R\frac{d\lambda_r}{dr}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + R\lambda_r\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}\right]; \tag{4.87}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}F_{w,r\varphi} = 2D\left[-4(1-\nu)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\varphi^2} + 2(1-\nu)\frac{1}{r}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\varphi^2} + \right.$$
$$\left. + 4(1-\nu)\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right]; \tag{4.88}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}F_{w,\varphi\varphi} = 2D\left[\nu\frac{1}{r}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\varphi^2}\right]. \tag{4.89}$$

Inlocuind relaţiile(4.78)$\div$(4.89) în ecuaţiile lui Euler rezultă condiţiile de echilibru (4.51) $\div$ (4.53) pentru placa circulară cu nervuri radiale.

Totodată cu ajutorul energiei de deformaţie a plăcii circulare cu nervuri radiale se pot determina coeficienţii matricei de rigiditate, care leagă forţele şi momentele secţionale reduse la suprafaţa mediană. Energia potenţială de deformaţie este egală cu

$$U = U_m + U_p + n_r \cdot U_{rn} = \iint_{S_m} U_o \, dA =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{S_m} \Big\{ B\Big[(\varepsilon_r^o + \varepsilon_\varphi^o)^2 + 2(1-\nu)\Big(\frac{1}{4}(\gamma_{r\varphi}^o)^2 - \varepsilon_r^o \varepsilon_\varphi^o\Big)\Big] +$$

$$+ D\Big[(\chi_r + \chi_\varphi)^2 + 2(1-\nu)\Big(\frac{1}{4}\chi_{r\varphi}^2 - \chi_r \chi_\varphi\Big)\Big] +$$

$$+ \frac{E_{rn} A_{rn} n_r}{b_r} (\varepsilon_r^o)^2 + \frac{E_{rn} I_{\varphi n} n_r}{b_r} \chi_{r\varphi}^2 \Big\} dA \qquad (4.90)$$

unde

$$\chi_r = - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} ;$$

$$\chi_\varphi = - \Big(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \Big); \qquad (4.91)$$

$$\chi_{r\varphi} = - 2\Big(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big).$$

La calculul energiei de deformaţie a nervurii (4.66), integrala liniară s-a schimbat cu integrala de suprafaţă prin relaţia

$$\int_{(R)} (\ldots)\, dr = \frac{1}{b_r} \iint_{S_m} (\ldots)\, dA \qquad (4.92)$$

Eforturile secţionale ale plăcii cu nervuri radiale se obţin cu relaţiile:

$$\begin{Bmatrix} N_r \\ N_\varphi \\ N_{r\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon_r^o} \\ \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon_\varphi^o} \\ \dfrac{\partial}{\partial \gamma_{r\varphi}^o} \end{Bmatrix} U_o ; \quad (4.93) \qquad \begin{Bmatrix} M_r \\ M_\varphi \\ M_{r\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \chi_r} \\ \dfrac{\partial}{\partial \chi_\varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \chi_{r\varphi}} \end{Bmatrix} U_o . \qquad (4.94)$$

Relaţiile (4.93) şi (4.94) permit obţinerea eforturilor secţionale ale plăcii circulare cu nervuri radiale identice cu cele determinate în paragraful 4.6.

4.9 Concluzii

In acest capitol au fost deduse eforturile secţionale pentru placa circulară cu nervuri radiale şi sistemul de ecuaţii diferenţiale care descrie deformarea lor.

Eforturile secţionale au fost determinate prin însu - marea tensiunilor pe suprafeţele elementului caracteristic de placă şi raportarea lor la unitatea de lungime. Totodată s-au verificat prin suprapunerea eforturilor de la placa circulară izotropă şi de la reţeaua de bare aşezate ortogonal în direcţie radială şi circumferenţială prezentate în capitolul 3. Comfirmarea relaţiilor de calcul a eforturilor secţionale a fost obţinută şi prin derivarea energiei de deformare a plăcii circulare cu nervuri radiale în raport cu deformaţiile specifice de membrană (ε_r^o, ε_φ^o, $\gamma_{r\varphi}^o$) şi de încovoiere (χ_r, χ_φ, $\chi_{r\varphi}$).

Tot în acest capitol a fost dedus sistemul de ecuaţii diferenţiale pentru placa întărită cu nervuri radiale şi inelare (curbe). Nervurile radiale au fost considerate cu secţiunea transversală variabilă iar cele inelare (curbe) cu secţiune constantă. Sistemul de ecuaţii diferenţiale a fost particularizat pentru placa circulară cu nervuri radiale şi verificat cu ajutorul metodei variaţionale. Totodată, se prezintă echivalenţa dintre ecuaţiile diferenţiale şi problema variaţională a plăcilor circulare nervurate radial care va sta la baza alegerii unor metode de calcul numeric. In acest sens o soluţie aproximativă a sistemului de ecuaţii diferenţiale care descrie deformaţia plăcii cu nervuri radiale se obţine pe baza minimizării funcţionalei (4.69). Ecuaţiile diferenţiale care descriu deformarea plăcii cu nervuri radiale şi inelare (curbe) de secţiune constantă sînt un caz particular al ecuaţiilor (4.45), (4.46) şi (4.49) şi au fost stabilite în lucrările [39] şi [41] .

5 CONTRIBUTII LA DETERMINAREA STARILOR DE DEFORMATIE SI DE TENSIUNE

5.1 Consideraţii generale

Determinarea stărilor de deformaţie şi de tensiune într-o placă circulară cu nervuri radiale, înseamnă a găsi o soluţie a sistemului de ecuaţii diferenţiale format din (4.51), (4.52) (4.53) care să satisfacă în acelaşi timp condiţiile de contur.

Pentru integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale cît şi a ecuaţiilor diferenţiale se disting metode exacte şi aproximative. Integrarea ecuaţiilor diferenţiale constă în:

i) găsirea soluţiei generale sau a integralei complete;

ii) stabilirea unei soluţii particulare care să satisfacă condiţiile iniţiale.

Datorită dificultăţilor ce se întîmpină la obţinerea soluţiei exacte se folosesc frecvent metode aproximative pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale. Cele mai frecvente metode aproximative sînt:

1) metodele variaţionale (metoda Rayleigh - Ritz, metoda Bubnov - Galerkin etc.);

2) metodele numerice (metoda diferenţelor finite, metoda elementului finit).

Starea de tensiune se obţine după cunoaşterea stării de deformaţie cu ajutorul relaţiilor (3.27) pentru porţiunea de placă cuprinsă între nervuri şi cu relaţia (4.3) în nervurile radiale.

Aspecte privind calculul plăcilor circulare cu nervuri radiale solicitate axial simetric sînt prezentate în lucrările [26] şi [41]. In lucrările [25] şi [37] s-au analizat plăcile circulare întărite cu nervuri radiale de secţiune variabilă.

In continuare vor fi prezentate determinarea soluţiilor exacte cît şi aproximative pentru ecuaţiile diferenţiale care descriu deformarea plăcilor circulare cu nervuri radiale.

5.2 Studiul stărilor de deformaţie şi de tensiune cu metoda analitică

In capitolul 4 au fost stabilite ecuaţiile diferenţiale ((4.51), (4.52), (4.53)) care descriu deformarea plăcilor circulare cu nervuri radiale. In cazul cînd mărimile adimensionale α_r şi λ_r sînt nule se obţin ecuaţiile diferenţiale (3.44), (3.45), (3.46) care descriu deformarea plăcilor circulare izotrope. Ecuaţiile diferenţiale (3.44) şi (3.45) sînt independente de ecuaţia (3.46) care poate fi rezolvată separat. In lucrarea [81] se foloseşte metoda separării variabilelor pentru soluţionarea ecuaţiilor diferenţiale (3.44) şi (3.45).

In lucrările [181] şi [226] încovoierea plăcii circulare izotrope se reduce la determinarea soluţiei particulare a ecuaţiei biarmonice neomogene (3.46) şi a soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale omogene corespunzătoare. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene este o funcţie biarmonică care nu este greu de stabilit. Totuşi, nu orice funcţie biarmonică care satisface ecuaţia problemei este o soluţie bună. Soluţia generală trebuie să satisfacă condiţiile de contur. O astfel de funcţie este greu de găsit şi constituie dificultatea problemei. In aceste condiţii o rezolvare corespunzătoare a ecuaţiei (3.46) se face cu ajutorul seriilor. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene sub forma unei serii a fost dată de A. Clebsch şi prezentată în lucrarea [181] . Starea de deformaţie şi de tensiune pentru plăcile circulare izotrope încărcate axial simetric se prezintă în lucrările [22], [23], [56], [142], [160], [181], [226].

După cum rezultă, studiul ecuaţiilor diferenţiale care descriu deformarea plăcilor circulare izotrope, în cazul general de încărcare, este destul de dificil pe cale analitică. Cu atît mai mult dificultăţile matematice vor fi mai mari la integrarea ecuaţiilor diferenţiale care descriu deformarea plăcii circulare cu nervuri radiale care sînt mai complexe decît acelea ale plăcilor circulare izotrope. De aceea, în continuare, se vor rezolva ecuaţiile diferenţiale care descriu deformarea plăcilor circulare plecînd de la cazuri simple de încărcare care combinate convenabil pot reproduce cazuri mai complexe de încărcare.

5.2.1 Placa circulară cu nervuri radiale de secţiune transversală constantă

Intrucît aria secţiunii transversale este constantă în lungul axei nervurii

$$\frac{d\alpha_r}{dr} = 0 \; ; \qquad \frac{d\lambda_r}{dr} = 0, \tag{5.1}$$

iar ecuaţiile diferenţiale (4.51) ÷ (4.53) vor avea forma:

$$\left(1 + \frac{R}{r}\alpha_r\right)\frac{\partial^2 u_o}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial r} + \frac{1-\nu}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_o}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^2}u_o + \frac{3-\nu}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi} + \frac{1+\nu}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_o}{\partial r \partial \varphi} = -\frac{p_r}{B}; \tag{5.2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_o}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot v_o)\right] + \frac{1+\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_o}{\partial r \partial \varphi} + \frac{3-\nu}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_o}{\partial \varphi} = -\frac{p_\varphi}{B}; \tag{5.3}$$

$$\left(1 + \frac{R}{r}\lambda_r\right)\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} - 2\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} + 2\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + 4\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{p(r,\varphi)}{D}. \tag{5.4}$$

Mărimile adimensionale α_r şi λ_r, din ecuaţiile diferenţiale (5.2) ÷ (5.4) au următoarea interpretare:

- mărimea α_r reprezintă raportul dintre modulul de rigiditate la tracţiune al tuturor nervurilor aferente unităţii de lungime şi rigiditatea la tracţiune a plăcii, luate pe circumferinţa exterioară;
- mărimea λ_r este definită de raportul dintre modulul

de rigiditate la încovoiere al tuturor nervurilor aferente unităţii de lungime a circumferinţei exterioare şi rigiditatea cilindrică de încovoiere a plăcii.

Mărimile adimensionale α_r şi λ_r se consideră indicatori de rigiditate pentru plăcile circulare cu nervuri radiale.

În cazul încărcării simetrice sistemul de ecuaţii diferenţiale (5.2) ÷ (5.4) devine:

$$\left(1 + \frac{R}{r}\alpha_r\right)\frac{d^2u_o}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_o}{dr} - \frac{u_o}{r^2} = -\frac{p_r}{B}; \qquad (5.5)$$

$$\left(1 + \frac{R}{r}\lambda_r\right)\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{1}{r}\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = \frac{p_z}{D}. \qquad (5.6)$$

Soluţiile generale ale sistemului de ecuaţii diferenţiale (5.2) ÷ (5.4) nu sînt cunoscute.

Ecuaţiile diferenţiale (5.5) şi (5.6) sînt liniare şi neomogene. Soluţia generală a fiecărei ecuaţii diferenţiale, după [107] şi [178] , se obţine adunînd la soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene corespunzătoare a soluţiei particulare a ecuaţiei diferenţiale neomogene. Ecuaţiile diferenţiale (5.5) şi (5.6) fiind independente, ele pot fi integrate separat.

Pentru integrarea ecuaţiei diferenţiale (5.5) se introduc notaţiile:

$$\rho = \frac{r}{R}; \qquad (5.7) \qquad\qquad y = \frac{\rho}{\alpha_r} = \frac{r}{R\alpha_r}. \qquad (5.8)$$

obţinîndu-se

$$\frac{d^2u_o}{dy^2} + \frac{1}{1+y}\frac{du_o}{dy} - \frac{1}{y(1+y)}u_o = -\frac{(R\alpha_r)^2}{B}\frac{y}{1+y}p_r. \qquad (5.9)$$

Ecuaţia diferenţială omogenă are forma:

$$\frac{d^2u_o}{dy^2} + \frac{1}{1+y}\frac{du_o}{dy} - \frac{1}{y(1+y)}u_o = 0. \qquad (5.10)$$

In lucrarea [178] se menţionează că orice ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi omogenă care admite două soluţii particulare, u_{o1} şi u_{o2}, liniar independente (wronskianul lor este diferit de zero), atunci soluţia generală a ecuaţiei (5.10) este de forma:

$$u_o = C_1 \cdot u_{o1} + C_2 \cdot u_{o2}, \tag{5.11}$$

unde C_1 şi C_2 sînt constante de integrare.

Este evident, prin verificare directă, că ecuaţia (5.10) are o soluţie particulară $u_{o1} = y$. Se găseşte a doua soluţie particulară u_{o2}, astfel ca u_{o1} şi u_{o2} să fie liniar independente. Notînd, în acest caz cu $a_1 = 1/(1+y)$ coeficientul primei derivate al lui u_o din ecuaţia (5.10), după [178], rezultă:

$$u_{o2} = u_{o1} \int \frac{e^{-\int a_1 dy}}{u_{o1}^2} dy = y \int \frac{e^{-\int \frac{1}{1+y} dy}}{y^2} dy =$$

$$= y \int \frac{e^{-\ln(1+y)}}{y^2} dy = y \int \frac{dy}{y^2(1+y)} = y \cdot \ln(1 + \frac{1}{y}) - 1. \tag{5.12}$$

In consecinţă, soluţia generală este de forma:

$$\bar{u}_o = C_1 \cdot y + C_2 (y \cdot \ln(1 + \frac{1}{y}) - 1) \tag{5.13}$$

Soluţia particulară u_{op} a ecuaţie (5.9) depinde şi de legea de variaţie a solicitării dată de p_r care va fi stabilită pentru fiecare caz de încărcare.

In concluzie, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (5.9) este dată de relaţia:

$$u_o = \bar{u}_o + u_{op}. \tag{5.14}$$

Fiind cunoscută deformaţia plăcii încărcată cu forţe conţinute în planul median, prin relaţia (5.14), se pot determina tensiunile în placă şi în nervuri.

Pe baza relaţiilor (3.28) tensiunile în placă se determină cu relaţiile:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du_o}{dr} + \nu \frac{u_o}{r}\right) = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{R\alpha_r}\left(\frac{du_o}{dy} + \nu \frac{u_o}{y}\right),$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{du_o}{dr} + \frac{u_o}{r}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{1}{R\alpha_r}\left(\nu\frac{du_o}{dy} + \frac{u_o}{y}\right). \quad (5.15)$$

In nervură conform relaţiilor (4.3) şi (5.8) rezultă:

$$\sigma_{rn} = E\frac{du_o}{dr} = E\frac{1}{R\cdot\alpha_r}\frac{du_o}{dy}. \quad (5.16)$$

5.2.1.1 Calculul discurilor nervurate

Un interes deosebit îl prezintă examinarea discurilor care se rotesc cu viteza unghiulară ω. Ele sînt încărcate în planul median de către forţe care acţionează axial simetric. Intensitatea forţei de inerţie p_r este compusă din intensitatea masei discului $p_{rd} = \gamma\omega^2 rh/g$ şi a nervurii distribuită pe unitatea de lungime $p_{rn} = \gamma\omega^2 rA_{rn}n_r/2\pi rg$. In acest caz rezultă:

$$p_r = p_{rd} + p_{rn} = \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 rh\left(1 + \frac{A_{rn}n_r}{2\pi rh}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{g}\omega^2\,\frac{h}{B}\,r\left(1+\frac{R\alpha_r B}{Eh}\,\frac{1}{r}\right) = \frac{\gamma}{g}\omega^2\,\frac{R\alpha_r h}{B}y\left(1+\frac{1}{(1-\nu^2)y}\right) \quad (5.17)$$

Relaţia (5.17) se introduce în ecuaţia diferenţială (5.9) a cărui soluţie generală este:

$$u_o = C_1\cdot y + C_2\left(y\cdot \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) - 1\right) +$$

$$+ \frac{\gamma}{g}\omega^2 h\,\frac{R^3\alpha_r^3}{12B}\left\{\frac{1+3\nu}{1-\nu^2}\left[y\ln(1+y) - y^2\right] - 1{,}5y^3\right\}. \quad (5.18)$$

Să se determine starea de tensiune a discului dat în figura 5.1 unde R = 300 mm; r_o = 40 mm; H = 40 mm; h = 8 mm; t = 8 mm; ω = 20 rad/s; N_R = 20 N/mm; γ = 7800 kg/m^3; g=9,81m/s^2

In acest caz soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (5.9), relaţia (5.18) trebuie să satisfacă condiţiile:

$$\text{la } r = r_o \quad \text{sau } y_o = \frac{r_o}{R\cdot\alpha_r} \qquad u_o = 0; \quad (5.19)$$

$$\text{la } r = R \text{ sau } \quad y_R = \frac{1}{\alpha_r} \qquad N_r = N_R , \tag{5.20}$$

unde N_r este forţa normală radială dată de relaţia (4.16);
N_R - forţa care acţionează asupra discului datorită acţiunii obadei.

Din condiţiile de contur rezultă următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} 1{,}07 \cdot C_1 - 0{,}29 \cdot C_2 = 2{,}6 \dfrac{\gamma}{g} \omega^2 h \dfrac{(R\alpha_r)^3}{12\,B} , \\ 1{,}42 \cdot C_1 + 5{,}2 \cdot 10^{-3} C_2 = 382{,}66 \dfrac{\gamma}{g} \omega^2 h \dfrac{(R\alpha_r)^3}{12 \cdot B} + \dfrac{R\alpha_r}{B} N_R \end{cases} \tag{5.21}$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii (5.21) rezultă:

$$\begin{aligned} C_1 &= 265{,}91 \frac{\gamma}{g} \omega^2 h \frac{(R\alpha_r)^3}{12B} + 0{,}69 \frac{R\alpha_r}{B} N_R , \\ C_2 &= 972 \frac{\gamma}{g} \omega^2 h \frac{(R\alpha_r)^3}{12B} + 2{,}56 \frac{R\alpha_r}{B} N_R . \end{aligned} \tag{5.22}$$

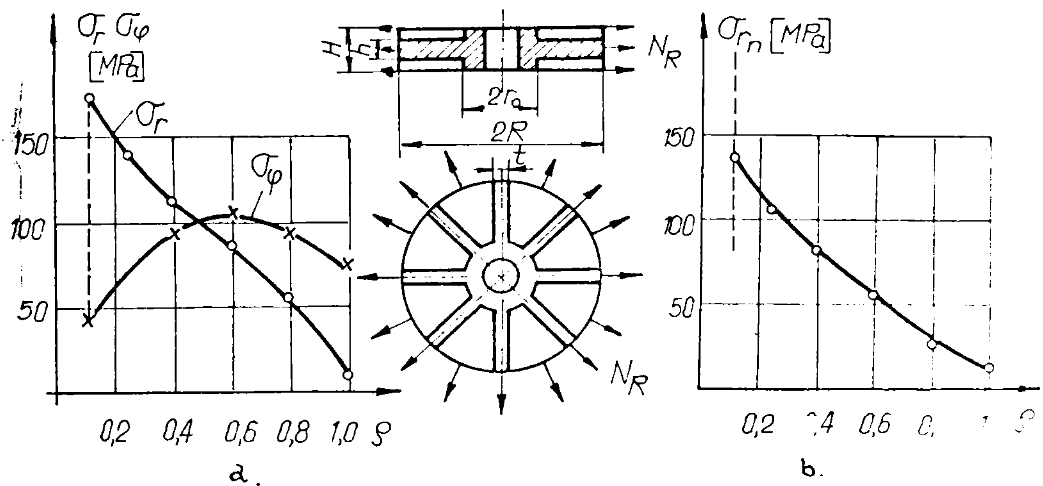


Fig.5.1

Constantele C_1 şi C_2 se introduc în relaţia (5.18). Tensiunile date de relaţiile (5.15) şi (5.16) sînt reprezentate grafic în figura (5.1,a şi 5,1,b. Tensiunile circumferenţiale au o creştere de la interior pînă la ρ = 0,6 urmînd o descreştere pînă în dreptul conturului exterior ($\rho = 1$). In dreptul conturului interior (butuc) tensiunea radială din placă este mai mare decît în nervură.

In cazul cînd $p_r = 0$ deformarea plăcilor circulare solicitate de către forţe conţinute în planul median este descrisă de ecuaţia diferenţială (5.10) a cărei soluţie este dată de relaţia (5.13). Constantele de integrare se determină din condiţiile de contur.

5.2.1.2 Incovoierea plăcii circulare cu nervuri radiale

Incovoierea plăcii circulare cu nervuri radiale este descrisă de ecuaţia diferenţială (5.4). Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale (5.4) este dificilă. De aceea se vor studia cîteva cazuri particulare de solicitare.

Incovoierea axial simetrică. In acest caz ecuaţia diferenţială (5.4) devine:

$$(1 + \frac{R}{r}\lambda_r)\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{1}{r}\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = \frac{p(r)}{D} \qquad (5.23)$$

Pentru integrarea ecuaţiei diferenţiale (5.23) se fac o serie de transformări. Astfel ecuaţia (5.23) poate fi scrisă sub forma:

$$D\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} \right) + R\lambda_r\frac{d^2w}{dr^2} \right) = p(r) \qquad (5.24)$$

sau

$$D\frac{d}{dr}\left[(r + R\lambda_r)\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right] = r\cdot p(r). \qquad (5.25)$$

Integrînd ecuaţia diferenţială (5.25), rezultă:

$$R\lambda_r)\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{1}{D}\int r\,p(r)dr + C\,. \qquad (5.26)$$

Se înmulţeşte ecuaţia (5.26) cu r, obţinîndu-se:

$$(r^2 + rR\lambda_r)\frac{d^3w}{dr^3} + r\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{dw}{dr} = r\left(\frac{1}{D}\int r\cdot p(r)dr + C\right). \quad (5.27)$$

Se introduc notaţiile:

$$\frac{dw}{dr} = W, \quad (5.28) \qquad x = \frac{r}{R\cdot\lambda_r}, \quad (5.29)$$

în ecuaţia diferenţială (5.27) obţinîndu-se:

$$x(x+1)\frac{d^2W}{dx^2} + x\frac{dW}{dx} - W = \frac{R^2\lambda_r^2}{D} x \left(R\lambda_r \int x\ p\ dx + \frac{D.C}{R\lambda_r}\right). \quad (5.30)$$

Ecuaţia diferenţială (5.30) poate fi adusă la forma:

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{1}{x+1}\frac{dW}{dx} - \frac{1}{x(x+1)}W = \frac{R^2.\lambda_r^2}{D}\frac{x}{x+1}T_r, \quad (5.31)$$

unde

$$T_r = \frac{1}{x}\left(R\lambda_r \int x\ p\ dx + \frac{D\cdot C}{R\lambda_r}\right). \quad (5.32)$$

Relaţia (5.32) determină intensitatea forţei tăietoare T_r, calculată în mod independent pentru fiecare caz de solicitare. Constanta C se determină din condiţiile de contur pentru forţa transversală T_r în dependenţă de reazemul de aşezare şi tipul de încărcare transversală.

Ecuaţia diferenţială (5.31) este asemănătoare cu (5.9). Soluţia generală se obţine adunînd la soluţia generală (W_o) a ecuaţiei diferenţiale omogene corespunzătoare a soluţiei particulare (W_p) a ecuaţiei neomogene.

Ecuaţia diferenţială omogenă

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{1}{x+1}\frac{dW}{dx} - \frac{1}{x(x+1)}W = 0, \quad (5.33)$$

are soluţia generală

$$W_o = C_1W_1 + C_2W_2 = C_1\cdot x + C_2\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1\right). \quad (5.34)$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (5.31) se poate scrie sub forma:

$$W = C_1W_1 + C_2W_2 + W_p, \tag{5.35}$$

unde W_p este soluţia particulară a ecuaţiei care depinde de tipul încărcării axial simetrice.

Relaţia (5.35), ţinînd cont de relaţiile (5.28) şi (5.29) se foloseşte la determinarea deplasării transversale a plăcii circulare cu nervuri radiale şi la calculul stării de tensiune.

Starea de tensiune în placă se determină cu relaţiile ce rezultă din al doilea termen al relaţiilor (3.27), particularizat pentru încărcarea axial simetrică, cînd $z = \pm h/2$.

Aceste relaţii au forma:

$$\sigma_r^o = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \nu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\frac{1}{(R\cdot\lambda_r)^2}\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \nu\frac{1}{x}\frac{dw}{dx}\right);$$

$$\sigma_\varphi^o = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right) = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\frac{1}{(R\lambda_r)^2}\left(\frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + \nu\frac{d^2w}{dx^2}\right). \tag{5.36}$$

Starea de tensiune în nervură se obţine cu ajutorul termenului al doilea din relaţia (4.3), cînd $z = \pm H/2$, care este de forma:

$$\sigma_{rn} = -\frac{H\cdot E_{rn}}{2}\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{H\cdot E_{rn}}{2}\frac{1}{(R\lambda_r)^2}\frac{d^2w}{dx^2}. \tag{5.37}$$

In continuare calculul este condus cu referire la fiecare caz particular în parte.

1. Placa încastrată pe contur încărcată cu o forţă uniform distribuită p

Din condiţia de echilibru a unui element de placă de rază r rezultă

$$T_r = \frac{p\cdot\pi\cdot r^2}{2\cdot\pi\cdot r} = \frac{p\cdot r}{2} = \frac{p}{2}\cdot R\cdot\lambda_r\cdot x. \tag{5.38}$$

Din relaţiile (5.32) şi (5.38) se obţine

$$\frac{R\cdot\lambda_r}{2}\,p\,x = \frac{1}{x}\left(R\cdot\lambda_r\int x\cdot p\cdot dx + \frac{D\cdot C}{R\lambda_r}\right), \tag{5.39}$$

sau

$$C = 0 \qquad (5.40)$$

Se înlocuieşte relaţia (5.38) în ecuaţia (5.31). Se obţine:

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{1}{x+1}\frac{dW}{dx} - \frac{1}{x(x+1)} W = \frac{R^3 \cdot \lambda_r^3}{2\ D} p \frac{x^2}{x+1} . \qquad (5.41)$$

Soluţia generală a ecuaţiei (5.41) are forma:

$$W = C_1 x + C_2 (x \ln(1+\frac{1}{x}) - 1) + \frac{R^3 \lambda_r^3}{8 \cdot D} p(0,5x^3 - x^2 + x\ln(x+1)). \qquad (5.42)$$

In baza relaţiilor (5.28) şi (5.29) rezultă:

$$w = \frac{R\lambda_r}{2} . x^2 C_1 + \frac{R \cdot \lambda_r}{2} C_2 \left[x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - \ln(x+1) - x\right] +$$

$$+ \frac{R^4 \lambda_r^4}{16 \cdot D} p \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + (x^2-1)\ln(1+x)\right] + C_3 . \qquad (5.43)$$

Constantele de integrare, din relaţia (5.43), se determină din condiţiile de contur şi din condiţia ca mărimile deplasării şi a eforturilor secţionale să fie finite.

Stările de deformaţie şi de tensiune se determină pentru o placă circulară întărită cu 8 nervuri radiale de rază $R = 125$ mm, $H = 6$ mm, $t = 3$ mm, $h = 3$ mm, $E = 2,1 \cdot 10^5 N/mm^2$, $\nu = 0,3$. Placa este solicitată de o sarcină uniform distribuită $p = 0,1$ MPa.

Modulul de rigiditate cilindrică determinat de relaţia (3.35) are valoarea:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 3^3}{12(1-0,3^2)} = 5,1923 \cdot 10^5 N\ mm. \qquad (5.44)$$

Parametrul λ_r se determină cu relaţia (4.39):

$$\lambda_r = \frac{8.3 \cdot (1 - 0,3^2)}{2 \cdot \pi \cdot 125} \frac{6^3 - 3^3}{3^3} = 0,1946. \qquad (5.45)$$

Pentru determinarea constantelor de integrare este necesar:

la $r = 0$ sau $x = 0$ w este finit deci $C_2 = 0$,

la $r = R$ sau $x = \frac{1}{\lambda_r} = 5,14$ $w(\frac{1}{\lambda_r}) = 0$,   (5.46)

$$\frac{dw}{dx} = 0.$$

Din ultimile condiţii de contur se obţine:

$$\begin{cases} C_1 + a\,\dfrac{R^3 \cdot \lambda_r^3}{16 \cdot D}\,p = 0; \\ b\,R\lambda_r C_1 + C_3 + c\,\dfrac{R^4 \cdot \lambda_r^4}{16 \cdot D}\,p = 0, \end{cases} \qquad (5.47)$$

unde

$$x = \frac{1}{\lambda_r}; \quad (5.48) \qquad a = x^2 - 2x + 2\ln(1 + x); \quad (5.49)$$

$$b = \frac{x^2}{2}; \quad (5.50) \qquad c = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + (x^2-1)\ln(1+x) \quad (5.51)$$

Soluţiile sistemului de ecuaţii (5.47) vor fi:

$$C_1 = -a\,\frac{R^3 \cdot \lambda_r^3}{16D}\,p = -19,77\,\frac{R^3 \cdot \lambda_r^3}{16D}\,p; \qquad (5.52)$$

$$C_3 = (ab - c)\,\frac{R^4 \cdot \lambda_r^4}{16D}\,p = 139,12\,\frac{R^4 \cdot \lambda_r^4}{16D}\,p. \qquad (5.53)$$

Constantele (5.52) şi (5.53) se introduc în relaţia (5.43) rezultînd:

$$w = \frac{R^4 \cdot \lambda_r^4}{16D}\,p\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 10,385x^2 + x + (x^2-1)\ln(1+x) + 139,12\right]. \qquad (5.54)$$

Starea de tensiune se obţine prin înlocuirea relaţiei (5.54) în (5.36) şi (5.37)

$$\sigma_r = -\frac{3R^2 \cdot \lambda_r^2}{8}\,\frac{p}{h^2}\left[3,3x^2 - 4,6x + 2,6\ln(1+x) + \frac{2 \cdot x}{1+x} - 25,7\right]; \qquad (5.56)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{3R^2 \cdot \lambda_r^2}{8}\,\frac{p}{h^2}\left[1,9x^2 - 3,2x + 2,6\ln(1+x) + \frac{0,6x}{1+x} - 25,7\right]; \qquad (5.57)$$

$$\sigma_{rn} = -\frac{E_{rn}R^2\lambda_r^2 H}{32.D}\, p\left[3x^2-4x+2\ln(1+x)+\frac{2x}{1+x}-19,77\right]. \quad (5.58)$$

Reprezentarea grafică a deplasării transversale (5.54) și a tensiunilor normale, radiale (5.56) și circumferențiale (5.57), pentru placă precum și tensiunile din nervură (5.58) în raport cu mărimile corespunzătoare din placa circulară fără nervuri sînt prezentate în figura 5.2.

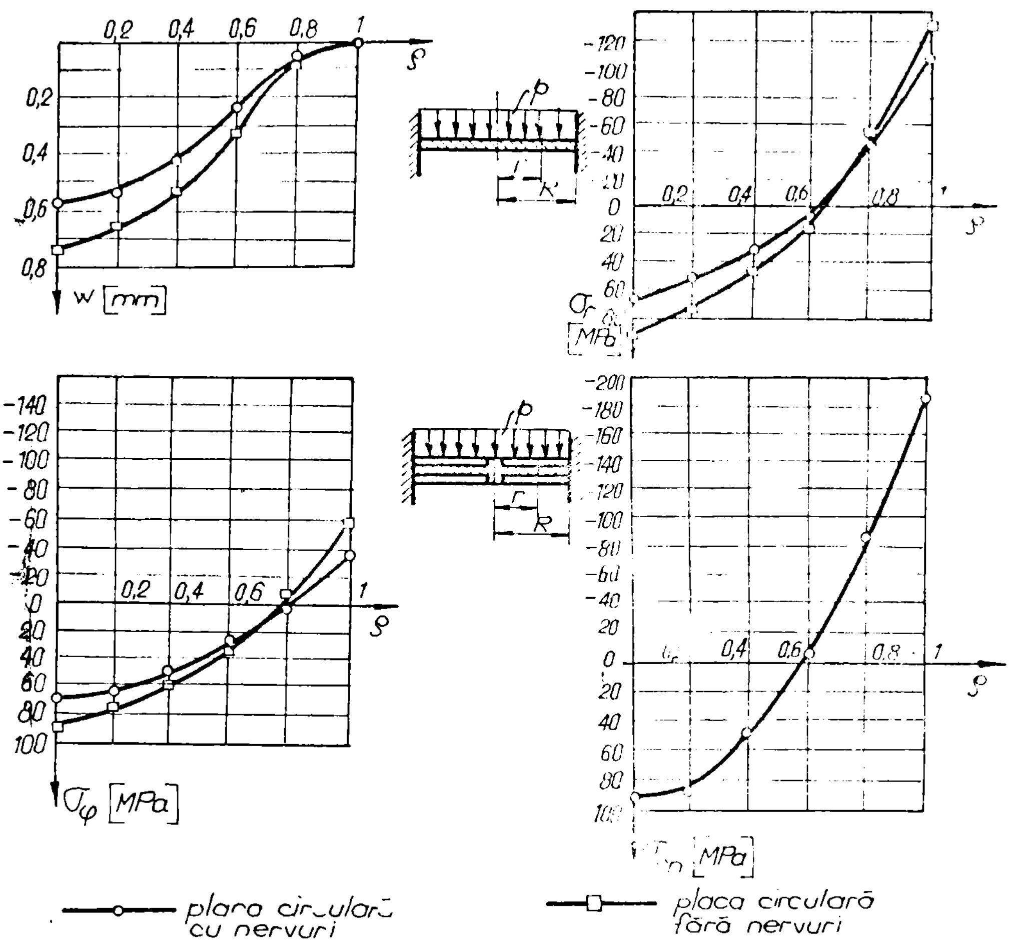


Fig.5.2

Grosimea plăcilor este considerată aceeași. Ambele plăci sînt solicitate cu o sarcină uniform distribuită avînd aceeași intensitate. Din analizarea graficelor rezultă că tensiunile normale în placă sînt mai mici la placa cu nervuri.

Totodată, la plăcile cu nervuri crește rigiditatea în raport cu plăcile fără nervuri. Tensiunile cele mai mari apar în nervuri.

2. Placa circulară cu nervuri radiale simplu rezemată pe conturul exterior încărcată cu o sarcină normală uniform distribuită p = 0,1 MPa. Diametrul exterior al plăcii este de 250 mm iar grosimea h = 3 mm. Ea are 8 nervuri radiale avînd secțiunea dreptunghiulară t = 3 mm, H = 6 mm fiind confecționată din oțel.

Starea de deformație este dată de relația (5.43) care trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

- pentru a exista mărimi finite în centrul plăcii este necesar ca $C_2 = 0$;

- la $r = R$ sau $x = 1/\lambda_r$ $\qquad w = 0;$ $\qquad$ (5.58)

- la $r = R$ sau $x = 1/\lambda_r$ $\qquad M_r = 0.$ $\qquad$ (5.59)

In relația (5.59), M_r este exprimat de (4.25).

Din condițiile de contur rezultă următorul sistem:

$$\begin{cases} bR\cdot\lambda_r C_1 + C_3 + c\,\dfrac{R^4\cdot\lambda_r^4}{16\cdot D}\,p = 0; \\[2ex] \left(1+\nu+\dfrac{1}{x}\right) C_1 + \dfrac{R^3\cdot\lambda_r^3}{16\cdot D}\,p\,m = 0 \end{cases} \tag{5.60}$$

unde $x = 1/\lambda_r$, b și c se determină cu relațiile (5.50) și (5.51) iar

$$m = \left(3+\nu+\frac{3}{x}\right)x^2-\left(4+2\nu+\frac{4}{x}\right)x+2\left(1+\nu+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)+\frac{2\cdot x}{1+x}\,. \tag{5.61}$$

Rezolvarea sistemului de ecuații (5.60) dă:

$$C_1 = -\frac{1}{1+\nu+\lambda_r}\,\frac{R^3\cdot\lambda_r^3}{16D}\,p\,m = -53,79\,\frac{R^3\cdot\lambda_r^3}{16D}\,p; \tag{5.62}$$

$$C_3 = \left(\frac{1}{1+\nu+\lambda_r}\,bm-c\right)\frac{R^4\cdot\lambda_r^4}{16D}\,p = 588,58\,\frac{R^4\cdot\lambda_r^4}{16D}\,p. \tag{5.63}$$

Constantele determinate mai sus se introduc în expresia deplasării transversale (5.43) care va avea forma:

$$w = \frac{R^4 \cdot \lambda_r^4}{16D} p \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 27,395x^2 + x + (x^2-1)\ln(1+x) + 588,53 \right]. \quad (5.64)$$

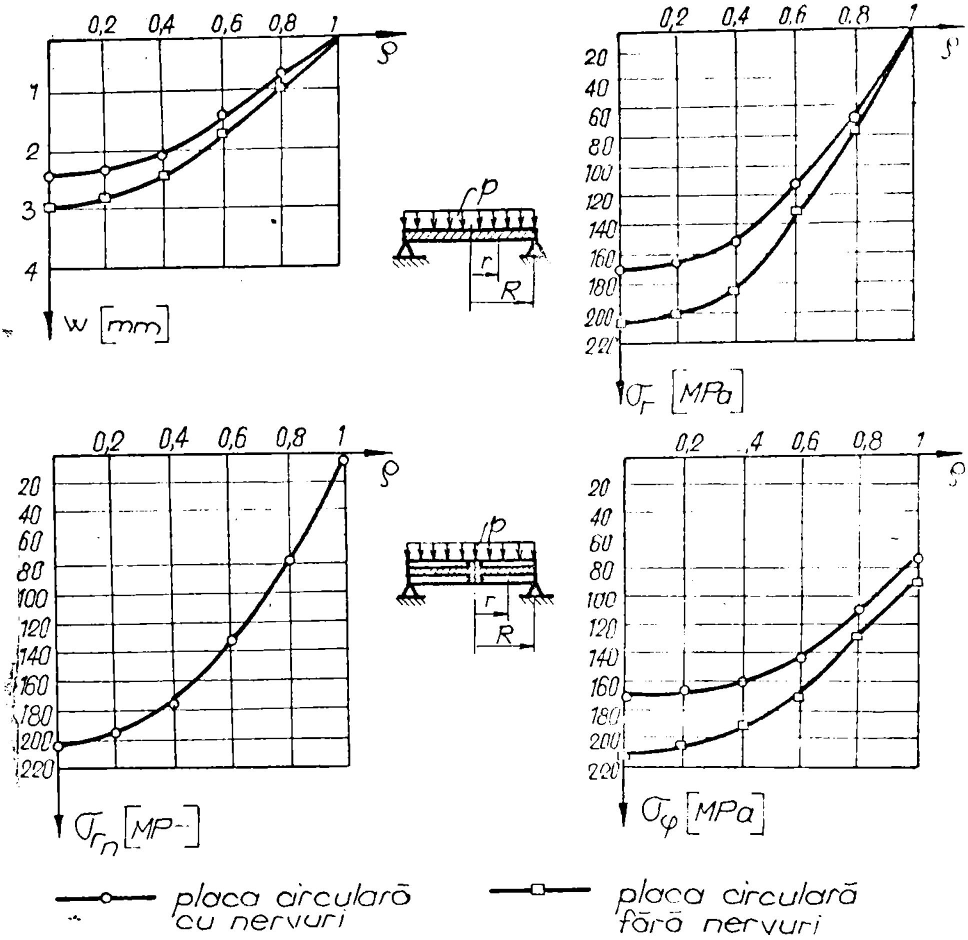


Fig.5.3

Expresiile tensiunilor în placă, după (5.36), vor fi:

$$\sigma_r = -\frac{3R^2 \cdot \lambda_r^2}{8} \frac{p}{h^2} \left[3,3x^2 - 4,6x + 2,6\ln(1+x) + \frac{2 \cdot x}{1+x} - 69,927 \right]; \quad (5.65)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{3R^2 \cdot \lambda_r^2}{8} \frac{p}{h^2} \left[1,9x^2 - 3,2x + 2,6\ln(1+x) + \frac{0,6x}{1+x} - 69,927 \right]. \quad (5.66)$$

Tensiunea normală în nervură se determină cu relaţia:

$$\sigma_{rn} = -\frac{E_{rn}R^2\cdot\lambda_r^2 H}{32\ D}p\left[3x^2-4x+2\ \ln(1+x)+\frac{2\cdot x}{1+x}-53{,}79\right].\quad(5.67)$$

In fig.5.3 sînt reprezentate grafic relaţiile (5.64), (5.65), (5.66) şi (5.67). Graficele deplasării transversale şi a tensiunilor sînt comparate cu cele ale plăcii fără nervuri. Se constată că în placa cu nervuri tensiunile sînt mai mici decît cele din placa fără nervuri. Totodată, deplasările transversale ale plăcii cu nervuri sîntt mai mici decît la placa fără nervuri.

3. Placa circulară cu nervuri încărcată cu o forţă concentrată, încastrată pe contur.

Dacă placa este încărcată cu o forţă concentrată aplicată centric, din condiţia de echilibru a unui element de placă de rază r, rezultă:

$$T_r = \frac{P}{2\,\pi\,r}\ .\qquad(5.68)$$

Din egalarea relaţiilor (5.32) şi (5.68) rezultă:

$$C = \frac{P}{2\,\pi D}\ .\qquad(5.69)$$

Condiţia (5.69) şi relaţia (5.32) permit scrierea ecuaţiei (5.31) sub forma:

$$\frac{d^2W}{dx^2}+\frac{1}{x+1}\frac{dW}{dx}-\frac{1}{x(x+1)}W = \frac{R\cdot\lambda_r}{2\,\pi D}P\frac{1}{x+1}\ .\qquad(5.70)$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (5.70) este:

$$W = C_1x + C_2(x\ \ln(1+\frac{1}{x})-1)+\frac{R\lambda_r}{4\pi D}P\ x\ \ln(x+1).\qquad(5.71)$$

In baza relaţiilor (5.28) şi (5.29) se obţine:

$$w = \frac{R\lambda_r}{2}x^2C_1+\frac{R\lambda_r}{2}C_2\left[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-\ln(1+x)-x\right]+$$

$$+\frac{R^3\ \lambda_r^3}{8\pi D}P\left[(x^2-1)\ \ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+x\right]+C_3\ .\quad(5.72)$$

Condiţiile de contur sînt:

$$\text{pentru } r = 0 \quad \text{şi} \quad r = R \qquad \frac{dw}{dr} = 0;$$

$$\text{pentru } r = R \qquad w = 0. \tag{5.73}$$

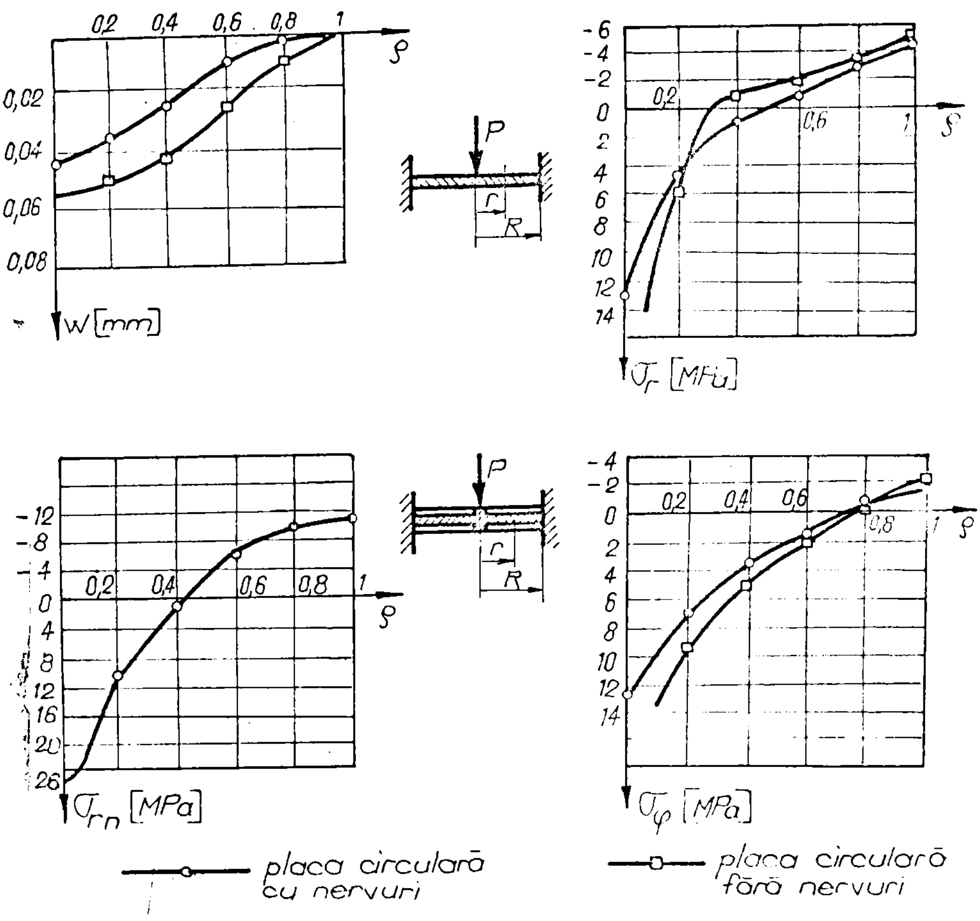


Fig.5.4

Condiţiile (5.73) dau un sistem liniar de trei ecuaţii cu trei necunoscute

$$\begin{cases} C_2 = 0\ ; \\ C_1 + d\,\dfrac{R \cdot \lambda_r}{4\pi D}\,P = 0\ ; \\ R\,\lambda_r \cdot b \cdot C_1 + C_3 + f\,\dfrac{R^2 \cdot \lambda_r^2}{8\pi D}\,P = 0, \end{cases} \tag{5.74}$$

unde $x = 1/\lambda_r$, b este dat de relaţia (5.50) iar

$$f = (x^2 - 1)\ln(1 + x) - \frac{x^2}{2} + x \qquad (5.75)$$

Soluţiile sistemului de ecuaţii (5.74) sînt:

$$C_1 = - d\frac{R\lambda_r}{4\pi D}P = -1,81\frac{R\cdot\lambda_r}{4\pi D}P ; \qquad (5.76)$$

$$C_3 = (2bd - f)\frac{R^2\cdot\lambda_r^2}{8\pi D}P = 9,757\frac{R^2\cdot\lambda_r^2}{8\pi D}P . \qquad (5.77)$$

Dimensiunile plăcii sînt cele specificate în cazul 1 iar încărcarea P = 100 N.

Expresiile pentru deplasarea transversală, tensiunile normale radiale şi circumferenţiale vor fi:

$$w = \frac{R^2\lambda_r^2}{8\pi D}P\left[(x^2 - 1)\ln(1+x) - 2.31x^2 + x + 9,757\right]; \qquad (5.78)$$

$$\sigma_r = -\frac{3P}{2\pi h^2}\left[1,3\cdot\ln(1+x) + \frac{x}{1 + x} - 2,353\right] ; \qquad (5.79)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{3P}{2\pi h^2}\left[1,3\cdot\ln(1+x) + \frac{0,3x}{1 + x} - 2,353\right] ; \qquad (5.80)$$

Tensiunea normală în nervură va fi:

$$\sigma_{rn} = -\frac{E_{rn}\cdot H}{8\cdot\pi\cdot D}P\left[\ln(1+x) + \frac{x}{1 + x} - 1,81\right] . \qquad (5.81)$$

In figura 5.4 sînt reprezentate grafic relaţiile (5.78) (5.79), (5,80) şi (5.81) în comparaţie cu relaţiile corespunzătoare ale plăcii circulare fără nervuri. In centrul plăcii rezultatele numerice nu concordă cu realitatea întrucît este un punct singular. In acest caz trebuie avut în vedere că forţele concentrate sînt aplicate pe o suprafaţă iar tensiunile normale maxime din centrul plăcii au valori finite.

4. Placa rezemată pe contur, încărcată cu o forţă concentrată centrală.

Pentru determinarea constantelor de integrare din relaţia (5.72) este necesar ca:

$$\text{la} \quad r = 0 \text{ sau } x = 0 \quad \frac{dw}{dr} = 0;$$
$$\text{la } r = R \text{ sau } x = 1/\lambda_r \quad w = 0 \text{ şi } M_r = 0. \tag{5.82}$$

Tinînd cont de relaţiile (5.71), (5.72) şi (4.25) se obţine:

$$\begin{cases} R\,\lambda_r b\, C_1 + C_3 + f\,\dfrac{R^2\cdot\lambda_r^2}{8\,\pi\,D}\,P = 0; \\ C_2 = 0\,; \\ (1 + \nu + \lambda_r)\,C_1 + \dfrac{R\cdot\lambda_r}{4\,\pi\,D}\,P\,m = 0\,, \end{cases} \tag{5.83}$$

unde $x = 1/\lambda_r$, b este dat de relaţia (5.50), f de (5.75) iar

$$m = (1 + \nu + \frac{1}{x})\,\ln(1+x) + \frac{x}{1 + x}\,. \tag{5.84}$$

Pentru aplicaţia numerică, dimensiunile plăcii sînt aceleaşi ca în cazul 1 iar forţa de încărcare P = 100 N. In aceste condiţii soluţiile sistemului de ecuaţii sînt:

$$C_2 = 0;$$

$$C_1 = -\frac{1}{1+\nu+\frac{1}{x}}\,\frac{R\,\lambda_r}{4\,\pi D}\,P\,m = 1{,}37\,\frac{R\cdot\lambda_r}{4\,\pi\,D}\,P\,; \tag{5.85}$$

$$C_3 = \left(\frac{2\,b}{1+\nu+\frac{1}{x}} - m\right)\frac{R^2\cdot\lambda_r^2}{8\,\pi\,D}\,P = 13{,}9\,\frac{R^2\lambda_r^2}{8\,\pi\cdot D}\,P. \tag{5.86}$$

Expresiile pentru deplasarea transversală şi tensiunile din placa circulară cu nervuri radiale sînt:

$$w = \frac{R^2\,\lambda_r^2}{8\cdot\pi\cdot D}\,P\left[(x^2 - 1)\,\ln(1+x) - 2{,}958x^2 + x + 26{,}896\right]; \tag{5.87}$$

$$\sigma_r = -\frac{3P}{2\pi h^2}\left[1{,}3\cdot\ln(1 + x) + \frac{x}{1 + x} - 3{,}1954\right]; \tag{5.88}$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{3P}{2\pi h^2}\left[1{,}3\cdot\ln(1 + x) + \frac{0{,}3x}{1 + x} - 3{,}1954\right]; \tag{5.89}$$

$$\sigma_{rn} = -\frac{E_{rn}\,H}{8\cdot\pi\cdot D}\,P\left[\ln(1 + x) + \frac{x}{1 + x} - 2{,}458\right]. \tag{5.90}$$

Diagramele de deplasări transversale şi tensiuni normale pentru placa circulară cu nervuri radiale în raport cu placa circulară fără nervuri sînt date în figura 5.5. Pentru a înlătura singularitatea din centrul plăcii se impune necesitatea repartizării forţei pe o suprafaţă centrală. In calculele de rezistenţă se recomandă să se considere tensiunea normală maximă din nervură care are valoarea mai mare decît cea din placă.

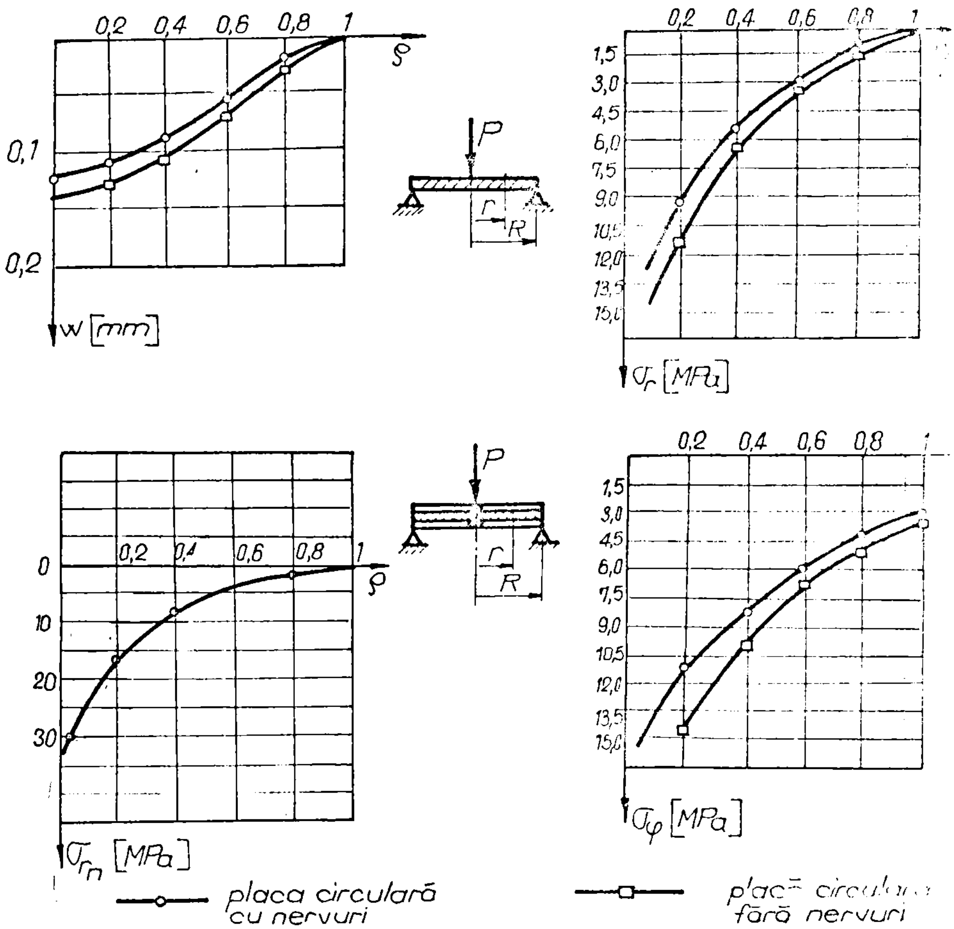


Fig.5.5

5 Placa circulară simplu rezemată pe contur încărcată pe margine cu momente uniform distribuite

Plecînd de la relaţiile(5.43) şi (5.72) rezultă:

$$w = \frac{R\lambda_r}{2}C_1 x^2 + \frac{R\lambda_r}{2}C_2\left[x^2 \ln(1+\frac{1}{x}) - \ln(1+x) - x\right] + C_3. \qquad (5.91)$$

Relaţia (5.91) s-a obţinut considerînd p = 0 în (5.43) sau P = 0 în (5.72). Totodată relaţia (5.91) care descrie deformarea plăcii circulare cu nervuri rezemată pe contur încărcată cu un moment uniform distribuit pe margine (fig.5.6) reprezintă soluţia ecuaţiei diferenţiale (5.31) ţinînd cont de relaţiile (5.28) şi (5.29) cînd $T_r = 0$.

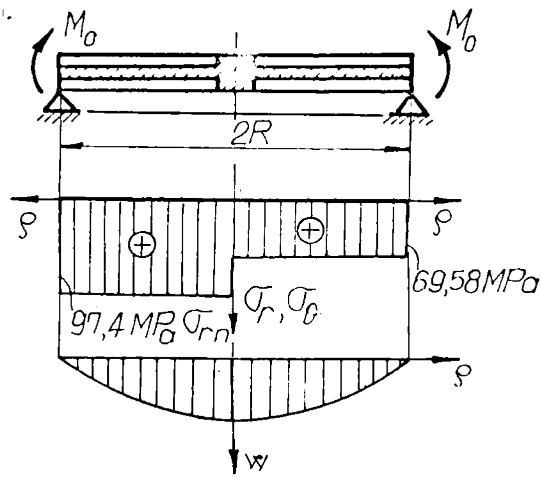


Fig.5.6

Condiţiile pentru determinarea constantelor sînt:

pentru r = 0 $\frac{dw}{dr} = 0$;

pentru r = R $M_r = M_o$;

pentru r = R $w = 0$.

Din prima condiţie rezultă imediat $C_2 = 0$. Din a doua condiţie avînd în vedere relaţia (4.25) se obţine:

$$C_1 = -\frac{1}{1+\nu+\lambda_r}\,\frac{R\cdot\lambda_r}{D}\,M_o. \qquad (5.92)$$

Din condiţia a treia rezultă:

$$C_3 = \frac{M_o R^2}{2\,D(1+\nu+\lambda_r)}. \qquad (5.93)$$

Deplasarea transversală este exprimată de relaţia:

$$w = \frac{M_o R^2}{2\,D(1+\nu+\lambda_r)}\,(1 - \lambda_r^2 x^2). \qquad (5.94)$$

In figura 5.6 sînt arătate diagramele reprezentative ale tensiunilor normale şi a deplasării trnsversale.

Tensiunile normale sînt exprimate de relaţiile:

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{6(1+\nu)}{(1+\nu+\lambda_r)}\,\frac{M_o}{h^2}, \qquad (5.95)$$

$$\sigma_{rn} = \frac{1}{1+\nu+\lambda_r}\,\frac{E\cdot H}{2\cdot D}\,M_o. \qquad (5.96)$$

Placa circulară cu nervuri radiale se consideră solicitată de momentul uniform distribuit M_o = 120 Nmm/mm iar dimensiunile aceleaşi ca la exemplele anterioare. In urma efectuării calculelor se obţine $\sigma_r = \sigma_\varphi$ = 69,58 MPa, tensiunea din nervură σ_{rn} = 97,4 MPa şi săgeata de 1,2 mm. In cazul plăcii fără nervuri avînd aceeaşi grosime şi contur, după [142] , rezultă $\sigma_r = \sigma_\varphi$ = 80 MPa iar săgeata maximă de 1,4 mm.

5.2.1.3 Plăci inelare

6. Placa inelară rezemată pe conturul exterior cu o forţă uniform distribuită (fig.5.7).

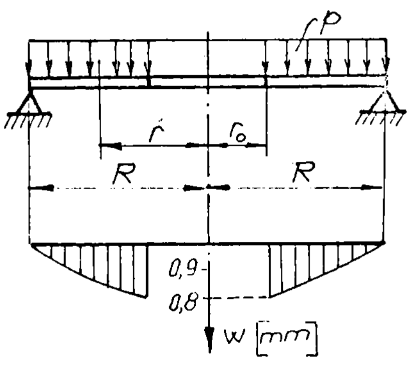


Fig.5.7

Din condiţia de echilibru a unei porţiuni de placă cuprinsă între $r = r_o$ şi $r_o < r < R$ rezultă:

$$T_r = \frac{p.r}{2} - \frac{p.r_o^2}{2r} = \frac{pR\lambda_r}{2}\left(x - \frac{x_o^2}{2}\right). \qquad (5.97)$$

Din egalarea relaţiilor (5.32) şi (5.97) se obţine:

$$\frac{pR\cdot\lambda_r}{2}\left(x - \frac{x_o^2}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(R\cdot\lambda_r\int x\cdot p\cdot dx + \frac{D\cdot C}{R\lambda_r}\right), \qquad (5.98)$$

sau

$$C = 0. \qquad (5.99)$$

Ţinînd cont de relaţiile (5.97) şi (5.99), ecuaţia diferenţială (5.31) are forma:

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{1}{x+1}\frac{dW}{dx} - \frac{1}{x(x+1)}W = \frac{R^3\cdot\lambda_r^3}{2D}p\left[\frac{x^2}{x+1} - \frac{x_o^2}{x+1}\right]. \quad (5.100)$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (5.100) are forma:

$$W = C_1x + C_2\left[x\ln(1+\frac{1}{x}) - 1\right] + \frac{R^3\cdot\lambda_r^3}{8D}p\left[\frac{x^2}{2} - x^2 + (1-2x_o^2)x\ln(1+x)\right] + \quad (5.101)$$

Relaţiile (5.28) şi (5.29) permit scrierea relaţiei (5.101) sub forma:

$$w = \frac{R\lambda_r}{2}x^2C_1 + \frac{R\lambda_r}{2}C_2\left[x^2\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln(1+x) - x\right] + \frac{R^4\lambda_r^4}{16D}p\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + (1-2x^2)\left[-\frac{x^2}{2} + x + (x^2-1)\ln(1+x)\right]\right\} + C_3. \quad (5.102)$$

Pentru determinarea constantelor de integrare C_1, C_2, C_3 există condiţiile:

$$\text{la } r = r_o \quad \text{sau} \quad x = x_o = \frac{r_o}{R\cdot\lambda_r}, \qquad M_r = 0; \quad (5.103)$$

$$\text{la } r = R \quad \text{sau} \quad x = x_R = \frac{1}{\lambda_r}, \qquad M_r = 0; \quad (5.104)$$

$$w = 0. \quad (5.105)$$

Expresia momentului de încovoiere M_r va fi:

$$M_r = -\frac{D}{R\lambda_r}\left\{(1+\nu+\frac{1}{x})C_1 + \left[(1+\nu+\frac{1}{x})\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1} - \frac{\nu}{x}\right]C_2 + \frac{R^3\cdot\lambda_r^3}{8D}p\left[(3+\nu+\frac{3}{x})\frac{x^2}{2} - (2+\nu+\frac{2}{x})x + (1-2x_o^2)\left((1+\nu+\frac{1}{x})\ln(1+x)+1\right)\right]\right\}. \quad (5.106)$$

Primele două condiţii, (5.103) şi (5.104), permite obţinerea sistemului de ecuaţii:

$$\begin{cases} a_o\cdot C_1 + b_o\cdot C_2 = -\dfrac{R^3\lambda_r^3}{8D}p\cdot c_o, \\ a_1\cdot C_1 + b_1\cdot C_2 = -\dfrac{R^3\lambda_r^3}{8D}p\cdot c_1. \end{cases} \quad (5.107)$$

unde

$$a_o = 1 + \nu + \frac{1}{x_o}; \quad (5.108) \qquad a_1 = 1 + \nu + \frac{1}{x_R}; \quad (5.109)$$

$$b_o = (1 + \nu + \frac{1}{x_o}) \ln(1 + \frac{1}{x_o}) - \frac{1}{x_o + 1} - \frac{\nu}{x_o}; \quad (5.110)$$

$$b_1 = (1 + \nu + \frac{1}{x_R}) \ln(1 + \frac{1}{x_R}) - \frac{1}{x_R + 1} - \frac{\nu}{x_R}; \quad (5.111)$$

$$c_o = (3 + \nu + \frac{3}{x_o})\frac{x_o^2}{2} - (2 + \nu + \frac{2}{x_o})x_o + (1 - 2x_o^2)((1 + \nu + \frac{1}{x_o})\ln(1 + x_o) + 1 \quad (5.112)$$

$$c_1 = (3 + \nu + \frac{3}{x_R})\frac{x_R^2}{2} - (2 + \nu + \frac{2}{x_R})x_R + (1 - 2x_R^2)((1 + \nu + \frac{1}{x_R})\ln(1 + x_R) + 1 \quad (5.113)$$

Soluţiile sistemului de ecuaţii (5.107) sînt:

$$C_1 = \frac{b_o c_1 - b_1 c_o}{a_o b_1 - a_1 b_o} \cdot \frac{R^3 \cdot \lambda_r^3}{8D} p; \quad (5.114)$$

$$C_2 = \frac{a_1 c_o - a_o c_1}{a_o b_1 - a_1 b_o} \cdot \frac{R^3 \cdot \lambda_r^3}{8D} p. \quad (5.115)$$

Din condiţia (5.105) se obţine:

$$C_3 = -\frac{R^4 \lambda_r^4}{16D} p \left[\frac{b_o c_1 - b_1 c_o}{a_o b_1 - a_1 b_o} f_1(x_R) + \frac{a_1 c_o - a_o c_1}{a_o b_1 - a_1 b_o} f_2(x_R) + f(x_R) \right], \quad (5.116)$$

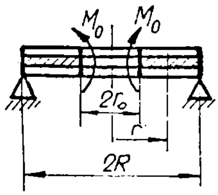
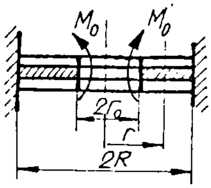
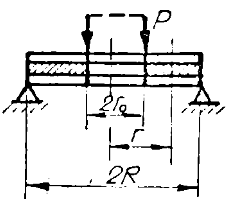
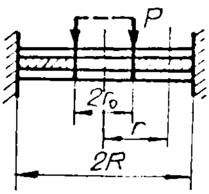
unde

$$f_1(x) = x^2; \quad (5.117) \qquad f_2(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - \ln(1+x) - x; \quad (5.118)$$

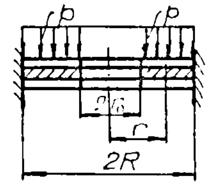
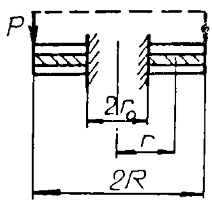
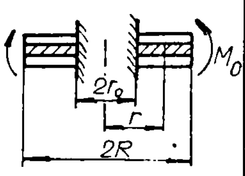
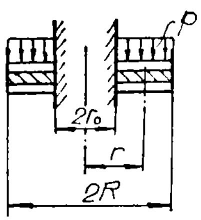
$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + (1 - 2x^2)\left[-\frac{x^2}{2} + x + (x^2 - 1)\ln(x + 1) \right]. \quad (5.119)$$

In aceste condiţii, relaţia (5.102), devine:

Tabelul nr. 5.1 ''

Nr. crt.	Schema de încărcare a plăcii inelare	Expresia suprafeței mediane deformate în funcție de $x = r/R\lambda_r$
1		$T_r = 0$; $w = \frac{M_0(R\lambda_r)^2}{2(a_0 b_1 - a_1 b_0)D}\left[b_1\left(f_1(x_R) - f_1(x)\right) + a_1\left(f_2(x) - f_2(x_R)\right)\right]$; $a_0 = 1 + \nu + \frac{1}{x_0}$; $a_1 = 1 + \nu + \frac{1}{x_R}$; $b_0 = \left(1 + \nu + \frac{1}{x_0}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x_0}\right) - \frac{1}{1 + x_0} - \frac{\nu}{x_0}$; $b_1 = \left(1 + \nu + \frac{1}{x_R}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x_R}\right) - \frac{1}{1 + x_R} - \frac{\nu}{x_R}$; $f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(x + 1) - x$; $x_0 = \frac{r_0}{R\lambda_r}$; $x_R = \frac{1}{\lambda_r}$.
2		$T_r = 0$ $w = \frac{M_0 (R\lambda_r)^2}{2(a_0 b_2 - a_2 b_0)D}\left[b_2\left(f_1(x_R) - f_1(x)\right) + a_2\left(f_2(x) - f_2(x_R)\right)\right]$ $a_2 = x_R$; $b_2 = x_R \ln\left(1 + \frac{1}{x_R}\right) - 1$;
3		$T_r = \frac{P r_0}{r} = \frac{P x_0}{x}$ $w = -\frac{R^3\lambda_r^3}{4D} x_0 P \left[\frac{b_0 c_1 - b_1 c_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}\left(f_1(x) - f_1(x_R)\right) + \frac{a_1 c_0 - a_0 c_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0}\left(f_2(x) - f_2(x_R)\right) + f_3(x) - f_3(x_R)\right]$ $c_0 = \left(1 + \nu + \frac{1}{x_0}\right)\ln(1 + x_0) + \frac{x_0}{1 + x_0}$; $c_1 = \left(1 + \nu + \frac{1}{x_R}\right)\ln(1 + x_R) + \frac{x_R}{1 + x_R}$; $f_3(x) = (x^2 - 1)\ln(x + 1) - \frac{1}{2}x^2 + x$
4		$T_r = \frac{P r_0}{r} = \frac{P x_0}{x}$ $w = \frac{R^3\lambda_r^3}{4D} x_0 P \left[\frac{b_0 c_2 - b_2 c_0}{a_0 b_2 - a_2 b_0}\left(f_1(x) - f_1(x_R)\right) + \frac{a_2 c_0 - a_0 c_2}{a_0 b_2 - a_2 b_0}\left(f_2(x) - f_2(x_R)\right) + f_3(x) - f_3(x_R)\right]$ $c_2 = x_R \ln(1 + x_R)$.

Tabelul nr. 5.1'c

Nr. crt	Schema de încărcare a plăcii inelare	Expresia suprafeţei mediane deformate în funcţie de $x = r/R\lambda_r$
5		$T_r = \frac{pr}{2} - \frac{pr_0^2}{2r} = \frac{pR\lambda_r}{2}\left(x - \frac{x_0^2}{x}\right)$; $w = \frac{R^4\lambda_1^4}{16D} p \left[\frac{b_0c_2' - c_0b_2}{a_0b_2 - a_2b_0}\left(f_1(x) - f_1(x_R)\right) + \frac{a_0c_0 - a_0c_2'}{a_0b_2 - a_2b_0}\left(f_2(x) - f_2(x_R)\right) + f(x) - f(x_R)\right]$. $c_2' = \frac{1}{2}x_R^3 - x_R^2 + (1 - 2x_0^2)x_R \ln(1 + x_R)$
6		$w = \frac{R^3\lambda_r^3}{4D} x_0 P\left[\frac{b_1c_2' - c_1b_2'}{a_1b_2' - a_2'b_1}\left(f_1(x) - f_1(x_0)\right) + \frac{a_2'c_1 - a_1c_2'}{a_1b_2' - a_2'b_1}\left(f_2(x) - f_2(x_0)\right) + f_3(x) - f_3(x_0)\right]$ $a_2' = x_0$; $b_2' = x_0 \ln\left(1 + \frac{1}{x_0}\right) - 1$; $c_2' = x_0 \ln(1 + x_0)$.
7		$T_r = 0$ $w = \frac{M_0R^2\lambda_1^2}{2D(a_2'b_1 - a_1b_2')}\left[b_2'\left(f_1(x) - f_1(x_0)\right) + a_2'\left(f_2(x_0) - f_2(x)\right)\right]$.
8		$w = \frac{R^4\lambda_r^4}{16D} p\left[\frac{b_1d_2 - d_1b_2'}{a_1b_2' - a_2'b_1}\left(f_1(x) - f_1(x_0)\right) + \frac{a_2'd_1 - a_1d_2}{a_1b_2' - a_2'b_1}\left(f_2(x) - f_2(x_0)\right) + f(x) - f(x_0)\right]$ $d_1 = \left(3 + \nu + \frac{3}{x_R}\right)\frac{x_R^2}{2} - \left(2 + \nu + \frac{2}{x_R}\right)x_R + (1 - 2x_0^2)\left[\left(1 + \nu + \frac{1}{x_R}\right)\ln(1 + x_R) + 1\right]$ $d_2 = \frac{1}{2}x_0^3 - x_0^2 + (1 - 2x_0^2)x_0 \ln(1 + x_0)$

$$w = \frac{R^4 \cdot \lambda_r^4}{16D} p \left[\frac{b_o c_1 - b_1 c_o}{a_o b_1 - a_1 b_1} (f_1(x) - f_1(x_R)) + \right.$$

$$\left. + \frac{a_1 c_o - a_o c_1}{a_o b_1 - a_1 b_o} (f_2(x) - f_2(x_R)) + f(x) - f(x_R) \right]. \qquad (5.120)$$

In figura 5.7 este prezentată diagrama deplasării trans - versale w pentru placa inelară cu 8 nervuri avînd R = 125 mm, r_o = 25 mm, h = 3 mm, H = 9 mm, t = 3 mm. Incărcarea plăcii este cu o forţă uniform distribuită de intensitate p = 0,1 MPa.

In tabelul 5.1 sînt prezentate formulele de calcul ale formei deformate ale suprafeţei mediane pentru cîteva tipuri de plăci inelare. Pentru simplificarea relaţiilor s-au introdus prescurtări unice ale căror expresii sînt specificate. Pe baza relaţiilor din tabelul 5.1 se determină starea de tensiune pentru fiecare tip de placă cu relaţiile (5.36) şi (5.37).

5.2.2 Placa circulară cu nervuri radiale de secţiune variabilă

Calculele vor fi efectuate pentru placa circulară cu ner - vuri de secţiune dreptunghiulară avînd:

- înălţime constantă şi lăţime variabilă;
- înălţime variabilă şi lăţime constantă.

5.2.2.1 Placa cu nervuri de lăţime variabilă

In figura 5.8 sînt prezentate două variante privind varia- ţia liniară a lăţimii nervurii.

Legile de variaţie ale lăţimii sînt date de relaţiile:

$$t_r = t\left[\tau - \frac{r}{R}(\tau - 1)\right]; \quad (5.121) \qquad t_r = r\frac{t}{R} = r\alpha, \quad (5.122)$$

unde

$$\tau = \frac{T}{t}; \quad (5.123) \qquad \alpha = \frac{t}{R}. \quad (5.124)$$

Deoarece, aria secţiunii transversale

$$A_{rn} = A_{rno}\left[\tau - \frac{r}{R}(\tau - 1)\right]; \qquad (5.125) \qquad A_{rn} = A_{rno}\frac{r}{R}, \quad (5.126)$$

...ectiv momentul de inerţie axial

$$I_{\varphi n} = I_{\varphi no}\left[\tau - \frac{r}{R}(\tau - 1)\right]; \qquad (5.127) \qquad I_{\varphi n} = I_{\varphi no}\frac{r}{R}, \quad (5.128)$$

mărimile adimensionale (4.37) şi (4.39) au forma:

- pentru cazul din figura 5.8,a

$$\alpha_r = \alpha_{ro}\left[\tau - \frac{r}{R}(\tau - 1)\right]; \qquad (5.129) \qquad \lambda_r = \lambda_{ro}\left[\tau - \frac{r}{R}(\tau - 1)\right] \quad (5.130)$$

- pentru cazul din figura 5.8,b

$$\alpha_r = \alpha_{ro}\frac{r}{R}; \qquad (5.131) \qquad \lambda_r = \lambda_{ro}\frac{r}{R}. \qquad (5.132)$$

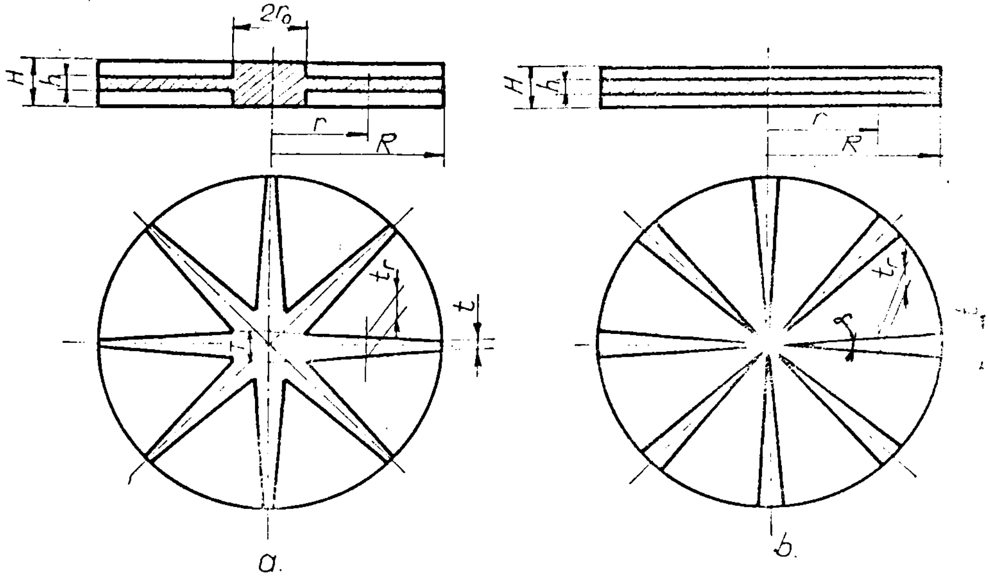


Fig.5.8

In relaţiile (5.125) ÷ (5.128), A_{rno} reprezintă aria secţiunii transversală a nervurii în dreptul circumferinţei exterioare a plăcii iar $I_{\varphi no}$ - momentul de inerţie axial din dreptul circumferinţei exterioare a plăcii în raport cu axa conţinută în plan median.

Mărimile adimensionale α_{ro} şi λ_{ro} sînt stabilite în dreptul conturului exterior al plăcii.

Sistemul de ecuaţii diferenţiale care descrie deformarea plăcilor circulare cu nervuri radiale prezentat în figura 5.8,a se obţine prin înlocuirea mărimile adimensionale α_r şi λ_r în ecuaţiile (4.51), (4.52), (4.53) rezultînd:

$$\left[1-\alpha_{ro}(\tau-1)+\alpha_{ro}\frac{R}{r}\right]\frac{\partial^2 u_o}{\partial r^2}+\left(1+\alpha_{o}(\tau-1)\right)\frac{1}{r}\frac{\partial u_o}{\partial r}+\frac{1-\vartheta}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_o}{\partial\varphi^2}-$$

$$-\frac{u_o}{r^2}-\frac{3-\vartheta}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_o}{\partial\varphi}+\frac{1+\vartheta}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_o}{\partial r\partial\varphi}=-\frac{p_r}{B}\;; \qquad (5.133)$$

ecuaţia diferenţială (4.52) rămîne neschimbată şi

$$\left[1-\lambda_{ro}(\tau-1)+\lambda_{ro}\frac{R}{r}\right]\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+2\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}-2\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\varphi^2}+$$

$$+(1-\lambda_{ro}\cdot(\tau-1))\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+2\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{p_z}{D} \qquad (5.134)$$

Relaţiile (5.131) şi (5.132) se introduc în ecuaţiile (4.51), (4.52), (4.53) rezultînd sistemul de ecuaţii diferenţiale care descrie deformarea plăcilor prezentate în figura 5.8,b avînd forma:

$$(1+\alpha_{ro})\left(\frac{\partial^2 u_o}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{u_o}{r}\right)+\frac{1-\vartheta}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_o}{\partial\varphi^2}-\frac{u_o}{r^2}-\frac{3-\vartheta}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_o}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1+\vartheta}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_o}{\partial r\partial\varphi}=-\frac{p_r}{B}\,, \qquad (5.135)$$

$$(1+\lambda_{ro})\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+2\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}-2\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\varphi^2}+(1+\lambda_{ro})\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+$$

$$+4\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{p_z}{D}\,, \qquad (5.136)$$

şi ecuaţia (4.52).

La integrarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale, prezentate mai sus, se întîmpină numeroase dificultăţi matematice.

De aceea se vor determina soluţiile acestor sisteme cînd plăcile sînt solicitate axial simetric. Integrarea ecuaţiilor diferenţiale care redau deformarea simetrică a plăcilor prezentate în figura 5.8,a nu se reduce la cuadraturi. In consecinţă, se vor obţine soluţii aproximative sub formă de serii. Această metodă va fi prezentată în paragraful următor.

Deformaţia plăcii prezentată în figura 5.8,b solicitată axial simetric este descrisă de ecuaţiile diferenţiale:

$$(1+\alpha_{ro})\frac{d^2u_o}{dr^2}+(1+\alpha_{ro})\frac{1}{r}\frac{du_o}{dr}-\frac{1}{r^2}u_o=0; \qquad (5.137)$$

$$(1+\lambda_{ro})\frac{d^4w}{dr^4}+2(1+\lambda_{ro})\frac{1}{r}\frac{d^3w}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr}=\frac{p}{D} \qquad (5.138)$$

Ecuaţiile diferenţiale (5.137) şi (5.138) sînt un caz particular al ecuaţiilor (5.135) şi (5.136) întrucît forţa şi săgeata nu depind de unghiul polar. Ecuaţiile (5.137) şi (5.138) pot fi rezolvate independent. In cazul cînd p = const. ecuaţia diferenţială (5.138) după o serie de transformări are forma:

$$(1+\lambda_{ro})r^2\frac{d^3w}{dr^3}+(1+\lambda_{ro})r\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{dw}{dr}=\frac{pr^3}{2D}+\frac{C_1r}{D}. \qquad (5.139)$$

Ţinînd cont de relaţia (5.28) ecuaţia diferenţială va avea forma:

$$r^2\frac{d^2W}{dr^2}+r\frac{dW}{dr}-\frac{1}{1+\lambda_{ro}}W=\frac{p\,r^3}{2(1+\lambda_{ro})D}+\frac{C_1\,r}{(1+\lambda_{ro})D}. \qquad (5.140)$$

Pentru a găsi forma soluţiilor pentru ecuaţiile (5.137) şi (5.140) care sînt de tip Euler se face schimbarea de variabilă independentă

$$x=\ln r; \qquad r=e^x; \qquad \frac{dr}{dx}=e^x=r. \qquad (5.141)$$

Introducînd relaţiile (5.141) în ecuaţiile diferenţiale (5.137) şi (5.140), rezultă

$$\frac{d^2u_o}{dx^2}-\frac{1}{1+\alpha_{ro}}u_o=0; \qquad (5.142)$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{1}{1+\lambda_{ro}} W = \frac{p}{2(1+\lambda_{ro})D} e^{3x} + \frac{C_1}{(1+\lambda_{ro})D} e^{x}, \qquad (5.143)$$

ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi care au soluţii particulare de forma e^{rx}, xe^{rx}, unde r este o rădăcină a ecuaţiei caracteristice.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale va fi:

$$u_o = A_1 e^{-\beta x} + A_2 e^{+\beta x} , \qquad (5.144)$$

unde

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{1 + \alpha_{ro}}} . \qquad (5.145)$$

Trecînd la variabila independentă r , relaţia (5.144) va avea forma:

$$u_o = A_1 \cdot r^{-\beta} + A_2 \cdot r^{+\beta} , \qquad (5.146)$$

unde A_1 şi A_2 sînt constante ce se determină din condiţiile de contur.

Ecuaţia diferenţială liniară neomogenă (5.143) cu coeficienţi constanţi, după [178], are soluţia generală egală cu suma soluţiei particulare şi a soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale omogene. Soluţia va fi de forma:

$$W = C_2 \cdot e^{\eta x} + C_3 \cdot e^{-\eta x} + \frac{p}{2(9\lambda_{ro}+8)D} \cdot e^{3x} + \frac{C_1}{\lambda_{ro} D} \cdot e^{x}, \qquad (5.147)$$

unde

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{1 + \lambda_{ro}}} . \qquad (5.148)$$

Relaţia (5.147) , după trecerea la variabila independentă r , are forma:

$$w = \frac{C_1}{2\lambda_{ro} D} r^2 + \frac{C_2}{1+\eta} r^{1+\eta} + \frac{C_3}{1-\eta} r^{1-\eta} + \frac{p \cdot r^4}{8(9\lambda_{ro}+8)D} + C_4, \qquad (5.149)$$

unde C_1, C_2, C_3 şi C_4 sînt constante de integrare.

In continuare se vor studia cîteva exemple de plăci avînd diametrul exterior de 400 mm întărite cu 10 nervuri cu secţiunea variabilă avînd $t = 10$ mm şi $H = 15$ mm.

1. Placa circulară cu nervuri radiale solicitată pe contur de forţa $N_R = 200$ N/mm (fig.5.9)

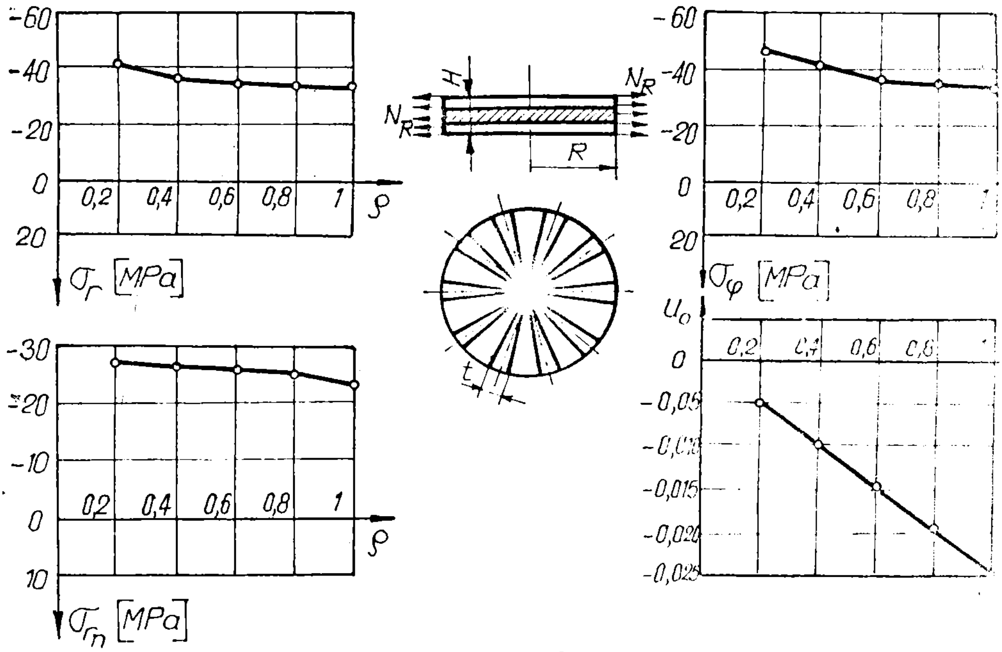


Fig.5.9

Deformaţia plăcii este descrisă de relaţia (5.146). Constantele de integrare se determină din condiţiile:

la $r = 0$ $\quad u_o$ este o mărime finită, $u_o = 0$, $\qquad$ (5.150)

la $r = R$ $\quad N_r = - N_R$. $\qquad$ (5.151)

Din prima condiţie rezultă $A_1 = 0$ iar din a doua pe baza relaţiei (4.16) rezultă:

$$A_2 = - \frac{N_R \, R^{1-\beta}}{\left[\beta(1 + \alpha_{ro}) + \nu\right] B} \qquad (5.152)$$

Expresiile pentru deplasarea radială şi tensiunile normale de membrană sînt exprimate prin relaţiile:

$$u_o = - \frac{N_R \; R}{\left[\beta(1 + \alpha_{ro}) + \nu\right] B} \, \rho^{\beta}; \qquad (5.153)$$

$$\sigma_r = -\frac{\beta + \nu}{\beta(1+\alpha_{ro}) + \nu} \frac{N_R}{h} \rho^{\beta-1} ; \qquad (5.154)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{\nu\beta + 1}{\beta(1+\alpha_{ro}) + \nu} \frac{N_R}{h} \rho^{\beta-1} . \qquad (5.155)$$

Tensiunea normală în nervură este exprimată de relaţia:

$$\sigma_{rn} = -(1-\nu^2) \frac{\beta}{\beta(1+\alpha_{ro}) + \nu} \frac{N_R}{h} \rho^{\beta-1}. \qquad (5.156)$$

In figura 5.9 sînt reprezentate grafic relaţiile (5.153) (5.154), (5.155) şi (5.156). Tensiunile normale din placă au valori apropiate. Diferenţele dintre valorile maxime şi minime ale tensiunilor normale sînt nesemnificative.

2. Placa circulară încastrată pe contur solicitată normal de o forţă uniform distribuită p = 0,1 MPa.

Deplasarea transversală a plăcii este dată de relaţia:

$$w = \frac{C_2}{1+\eta} r^{1+\eta} + \frac{p \cdot r^4}{8(9\lambda_{ro}+8)D} + C_4, \qquad (5.157)$$

întrucît pentru a avea mărimi finite pe tot domeniul plăcii este necesar ca $C_1 = C_2 = 0$ [237] . Constantele de integrare C_2 şi C_4 se determină din condiţiile de legătură:

$$\text{la} \quad r = R, \qquad \frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{şi} \quad w = 0 . \qquad (5.158)$$

Soluţia sistemului de ecuaţii ce rezultă din condiţiile de contur (5.158) va fi:

$$C_2 = \frac{p\ R^{3-\eta}}{8(9\lambda_{ro}+8)D}, \qquad C_4 = \frac{p\ R^4}{8(9\lambda_{ro}+8)D} \frac{3-\eta}{1+\eta} . \qquad (5.159)$$

Constantele (5.159) se introduc în relaţia (5.157) rezultînd deplasarea transversală a plăcii. Această relaţie este folosită pentru determinarea stării de tensiune cu relaţiile (5.36) şi (5.37).

Starea de tensiune este dată de următoarele relaţii:

$$\sigma_{rn} = -\frac{p\ R^2}{4(9\lambda_{ro} + 8)D}\ EH\left[-\eta\,\rho^{\eta-1} + 3\cdot\rho^2\right]; \qquad (5.16c)$$

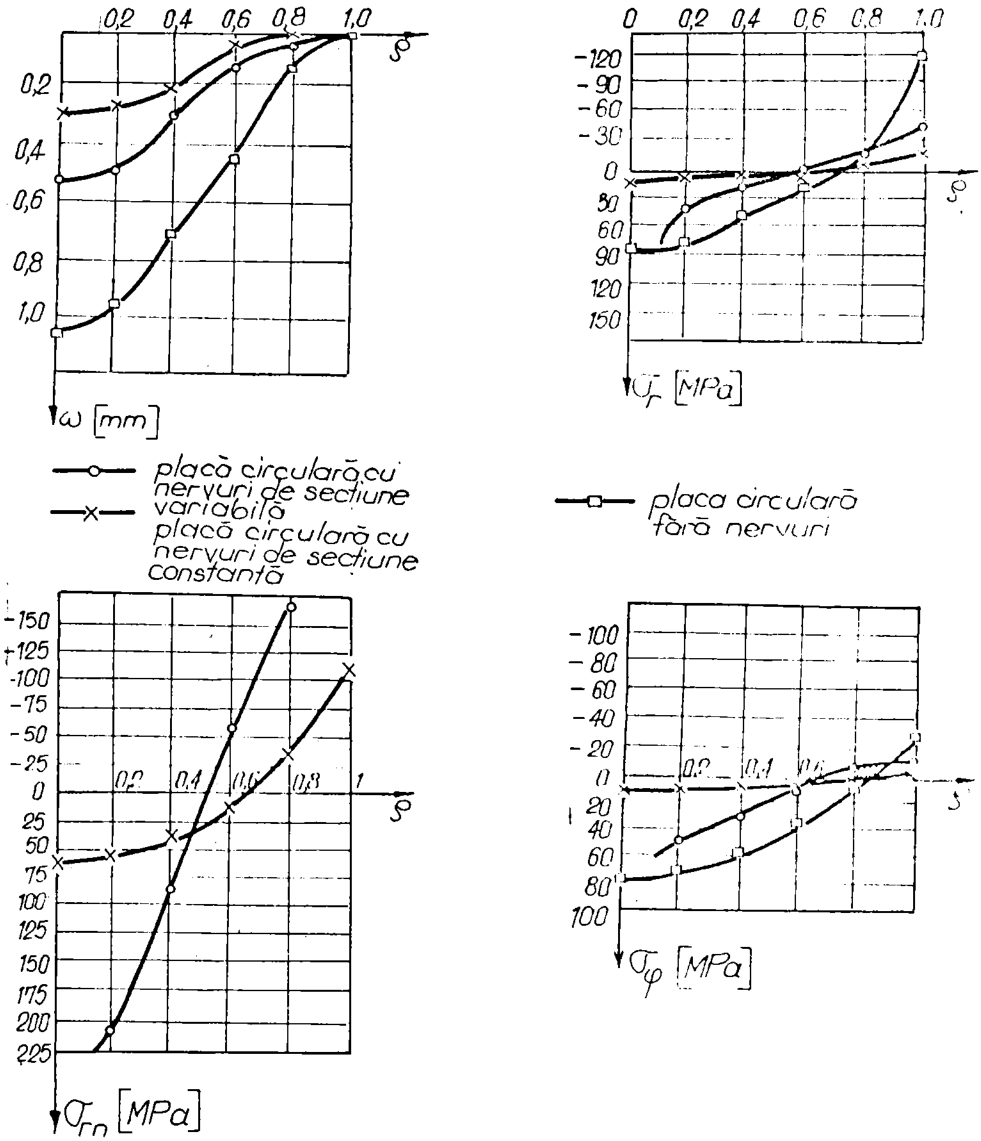


Fig. 5.10

$$\sigma_r = -\frac{3\cdot p\cdot R^2}{(9\cdot\lambda_{ro}+8)\cdot h^2}\left[-(\eta+\nu)\rho^{\eta-1}+(3+\nu)\rho^2\right]; \quad (5.161)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{3\cdot p\cdot R^2}{(9\cdot\lambda_{ro}+8)\cdot h^2}\left[-(1+\nu\eta)\rho^{\eta-1}+(1+3\nu)\rho^2\right]. \quad (5.162)$$

In figura 5.10 sînt reprezentate grafic relaţiile (5.160), (5.161) şi (5.162) precum şi deplasarea transversală

$$w = \frac{p\ R^4}{8(9\lambda_{ro}+8)(1+\eta)D}\left[-4\rho^{\eta+1}+(1+\eta)\rho^4+3-\eta\right]. \quad (5.163)$$

Placa are 10 nervuri şi următoarele dimensiuni: R=200 mm, h = 5 mm, H = 15 mm, t = 10 mm. Pentru compararea rezultatelor s-a considerat o placă circulară de secţiune constantă cu R = 200 mm şi grosimea h = 5 mm şi placa cu nervuri de secţiune constantă. S-a urmărit ca cele două tipuri de plăci circulare cu nervuri radiale să aibă aceeaşi mărime adimensională λ_{ro}. Din reprezentarea grafică rezultă:

i) deplasarea transversală la placa circulară cu nervuri de secţiune variabilă este mai mare decît a plăcii cu nervuri de secţiune constantă dar şi mai mică decît aceea a plăcii izotrope;

ii) tensiunile în nervuri sînt mai mult mai mari datorită micşorării secţiunii transversale în partea centrală.

3. Placa circulară cu nervuri radiale simplu rezemată pe contur încărcată cu o sarcină uniform distribuită.

Deplasarea transversală a plăcii se determină cu expresia (5.157). Pentru determinarea constantelor de integrare se introduc condiţiile (5.58) şi (5.59). Sistemul de două ecuaţii obţinut din cele două condiţii de contur permite determinarea constantelor

$$C_2 = -\frac{p\ (3(1+\lambda_{ro})+\nu)\ R^{3-\eta}}{2D(9\cdot\lambda_{ro}+8)(\eta(1+\lambda_{ro})+\nu)}, \quad (5.164)$$

$$C_4 = \frac{p \cdot R^4}{2D(9\lambda_{ro}+8)}\left[\frac{3(1+\lambda_{ro})}{(1+\eta)(\eta(1+\lambda_{ro})+\nu)} - \frac{1}{4}\right]. \quad (5.165)$$

Constantele de integrare se introduc în expresia deplasării transversale (5.157) rezultînd:

$$w = \frac{p\,R^4}{2D(9\lambda_{ro}+8)}\left[\frac{3(1+\lambda_{ro})+\nu}{(1+\eta)(\eta(1+\lambda_{ro})+\nu)}(1-\rho^{\eta-1}) + \frac{\rho^4-1}{4}\right]. \quad (5.166)$$

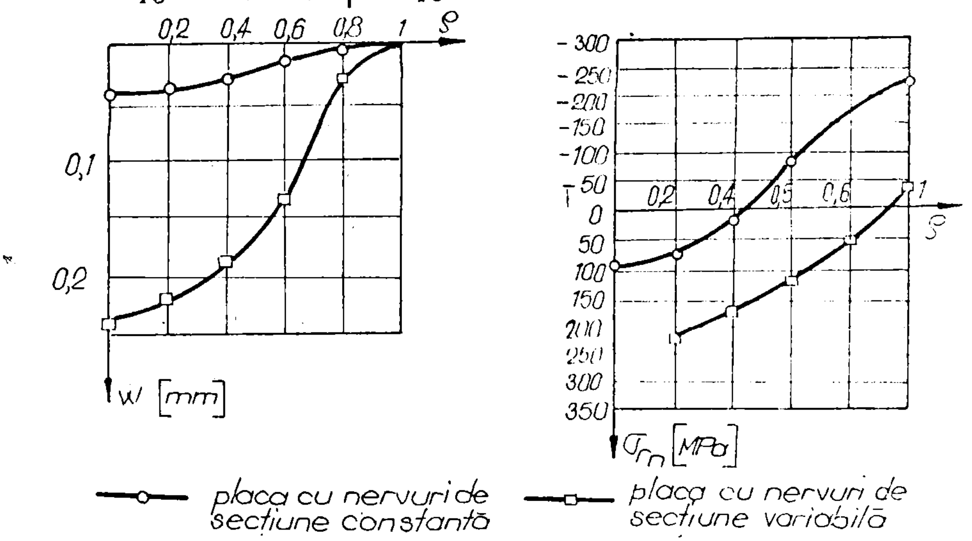


Fig.5.11

Tensiunile normale vor fi stabilite cu relațiile (5.36) şi (5.37) şi au forma:

$$\sigma_r = -\frac{3\cdot p\cdot R^2}{(9\lambda_{ro}+8)h^2}\left[-\frac{3(1+\lambda_{ro})+\nu}{\eta(1+\lambda_{ro})+\nu}(\eta+\nu)\rho^{\eta-1}+(3+\nu)\rho^2\right]; \quad (5.167)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{3\cdot p\cdot R^2}{(9\lambda_{ro}+8)h^2}\left[-\frac{3(1+\lambda_{ro})+\nu}{\eta(1+\lambda_{ro})+\nu}(1+\nu\eta)\rho^{\eta-1}+(1+3\nu)\rho^2\right]; \quad (5.168)$$

$$\sigma_{rn} = -\frac{p\,R^2}{4(9\lambda_{ro}+8)\,D}EH\left[-\frac{3(1+\lambda_{ro})+\nu}{\eta(1+\lambda_{ro})+\nu}\eta\rho^{\eta-1}+3\cdot\rho^2\right]. \quad (5.169)$$

In figura 5.11 sînt reprezentate grafic relațiile (5.166) şi (5.169) în raport cu mărimile corespunzătoare ale plăcii fără nervuri de secţiune constantă. Deplasarea transversală a plăcii circulare cu nervuri de secţiune variabilă este mai mare decît a plăcii circulare cu nervuri de secţiune constantă.

5.2.2.2 Placa cu nervuri radiale cu înălţime variabilă

In figura 5.12 este reprezentată o placă circulară cu nervuri radiale de secţiune dreptunghiulară avînd lăţimea constantă iar înălţimea variază după o lege liniară.

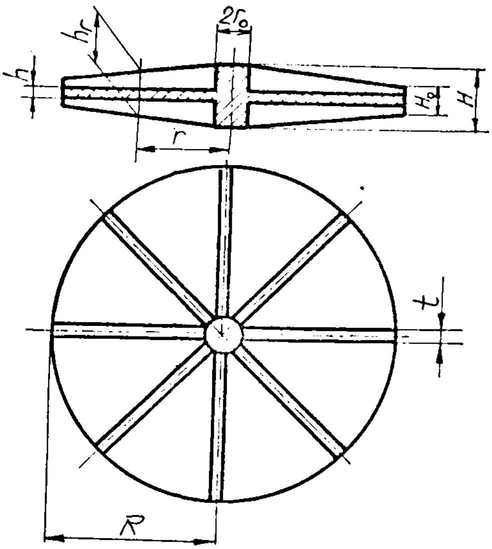


Fig.5.12

Variaţia înălţimii este dată de relaţia:

$$h_r = H - (H - H_o)\frac{r}{R}. \qquad (5.170)$$

In aceste condiţii aria secţiunii transversale, respectiv momentul de inerţie al nervurii, vor fi exprimate cu relaţiile:

$$\Lambda_{rn} = \Lambda_{rno}\left[\frac{\gamma-1}{\gamma_o-1} - \frac{\gamma-\gamma_o}{\gamma_o-1}\,\frac{r}{R}\right]; \quad I_{\varphi n} = I_{\varphi no}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-\gamma_o} - \frac{r}{R}\right)^3 - \frac{1}{(\gamma-\gamma_o)}\right] \qquad (5.171)$$

Aria secţiunii transversale şi momentul de inerţie se înlocuiesc în relaţiile (4.37) şi (4.39) pentru determinarea mărimilor adimensionale α_r şi λ_r. Relaţiile de calcul vor fi:

$$\alpha_r = \alpha_{ro}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma_o - 1} - \frac{\gamma - \gamma_o}{\gamma_o - 1}\,\frac{r}{R}\right) ; \qquad (5.172)$$

$$\lambda_r = \lambda_{ro}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - \gamma_o} - \frac{r}{R}\right)^3 - \frac{1}{(\gamma - \gamma_o)^3}\right] . \qquad (5.173)$$

unde

$$\gamma = \frac{H}{h} ; \quad (5.174) \qquad\qquad \gamma_o = \frac{H_o}{h} . \qquad (5.175)$$

Mărimile adimensionale (5.172) şi (5.173) se introduc în ecuaţiile diferenţiale (4.51), (4.52) şi (4.53). Ecuaţia diferenţială (4.52) rămîne nemodificată iar (4.51) şi (4.53) devin:

$$\left(1 - \alpha_{ro}\frac{\gamma - \gamma_o}{\gamma_o - 1} + \alpha_{ro}\frac{\gamma - 1}{\gamma_o - 1}\,\frac{R}{r}\right)\frac{\partial^2 u_o}{\partial r^2} + \left(1 - \alpha_{ro}\frac{\gamma - \gamma_o}{\gamma_o - 1}\right)\frac{1}{r}\,\frac{\partial u_o}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1-\nu}{2}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u_o}{\partial \varphi^2} - \frac{u_o}{r^2} - \frac{3-\nu}{2}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial v_o}{\partial \varphi} + \frac{1+\nu}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 v_o}{\partial r\,\partial \varphi} = -\frac{p_r}{B} . \quad (5.176)$$

$$\left[1 + \lambda_{ro}\frac{R}{r}\left(\frac{\gamma}{\gamma - \gamma_o} - \frac{r}{R}\right)^3 - \frac{1}{(\gamma - \gamma_o)^3}\right]\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r^4}\,\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} +$$

$$+ 2\left[1 - 3\lambda_{ro}\left(\frac{\gamma}{\gamma - \gamma_o} - \frac{r}{R}\right)^2\right]\frac{1}{r}\,\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - 2\,\frac{1}{r^3}\,\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} -$$

$$- \left[1 - 6\,\frac{r}{R}\left(\frac{\gamma}{\gamma - \gamma_o} - \frac{r}{R}\right)\lambda_{ro}\right]\frac{1}{r^4}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + 4\,\frac{1}{r^4}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^3}\,\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{p}{D} . \quad (5.177)$$

Integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale format din (4.52), (5176) şi (5.77) este dificilă. O soluţie aproximativă, sub forma unei serii, se obţine în cazul cînd placa este încărcată cu forţă axial simetrică.

5.3 Analiza stărilor de deformaţie şi de tensiune cu metode aproximative

Metodele aproximative folosite la stabilirea stărilor de deformaţie şi de tensiune la plăcile circulare cu nervuri radiale sînt grupate în următoarele metode:

- integrarea ecuaţiilor diferenţiale cu ajutorul seriilor;
- metode variaţionale;
- metoda elementului finit.

5.3.1 Integrarea ecuaţiilor diferenţiale cu ajutorul seriilor

După cum s-a constatat sistemul de ecuaţii diferenţiale care descrie deformaţia plăcilor circulare cu nervuri de secţiune variabilă nu poate fi integrat. Deformaţia plăcii din figura 5.8,a în cazul încărcării cu o forţă uniform distribuită normală pe planul median este descrisă de ecuaţia

$$\left(1 - \lambda_{ro}(\tau - 1) + \lambda_{ro}\frac{R}{r}\right)\frac{d^4w}{dr^4} + 2(1 - \lambda_{ro}(\tau - 1))\frac{1}{r}\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = \frac{p}{D}. \qquad (5.178)$$

Ecuaţia diferenţială (5.178), printr-o serie de transformări, este pusă sub forma:

$$(r^2 + ar)\frac{d^3w}{dr^3} + r\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{D}{A}\frac{dw}{dr} = \frac{pr^3}{2A} + \frac{C_1 r}{A}, \qquad (5.179)$$

unde

$$d = 1-\lambda_{ro}(\tau-1); \quad e = \lambda_{ro}R; \quad A = dD; \quad a = e/d. \qquad (5.180)$$

Ordinul ecuaţiei diferenţiale (5.179) se reduce prin introducerea notaţiei (5.28). In acest caz rezultă:

$$x(x + a)\frac{d^2W}{dx^2} + x\frac{dW}{dx} - \frac{D}{A}W = \frac{R^3 \cdot \lambda_{ro}^3}{2A}p \cdot x^3 + C_1 R\lambda_{ro}x. \qquad (5.181)$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (5.181) de ordinul doi, neomogenă este egală cu suma dintre soluţia particulară W_p şi soluţia generală W_g a ecuaţiei diferenţiale omogene:

$$x(x + a)\frac{d^2W}{dx^2} + x\frac{dW}{dx} - \delta \cdot W = 0, \tag{5.182}$$

unde

$$\delta = \frac{D}{A}. \tag{5.183}$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (5.182) se ia sub forma unei serii

$$W_g = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = C_0 + C_1 x + \ \dots \ + C_k x^k + \dots \tag{5.184}$$

Se introduce relaţia (5.184) în ecuaţia (5.182) şi după identificarea coeficienţilor prezentată în anexa 4 rezultă

$$W_g = C_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{((k-1)^2-\delta)\dots(2^2-\delta)(1-\delta)}{a^{k-1}\cdot k\cdot((k-1)!)^2}\,x^k\right). \tag{5.185}$$

Seria (5.185) este convergentă după criteriul lui d'Alembert întrucît $|x| < 1$ ceea ce rezultă atunci cînd $\Lambda_{ro} > 1$.

Soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale (5.181) se adoptă de forma:

$$W_p = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3. \tag{5.186}$$

Relaţia (5.186) se introduce în ecuaţia (5.181) şi după identificarea coeficienţiilor se obţine:

$$W_p = \left(\frac{C_1' R \Lambda_{ro}}{(1-\delta)\ A} + \frac{12\cdot a^2}{(1-\delta)(4-\delta)(9-\delta)}\,\frac{R^3\Lambda_{ro}^3}{2A}\,p\right)x - \frac{6\cdot a}{(9-\delta)(4-\delta)}\,\frac{R^3\Lambda_{ro}^3}{2A}\,p\,x^2 +$$

$$+ \frac{1}{9-\delta}\,\frac{R^3\cdot\Lambda_{ro}^3}{2\cdot A}\cdot p\cdot x^3. \tag{5.187}$$

Ţinînd cont de relaţia $\frac{1}{R\lambda_{ro}}\frac{dw}{dx} = W$ soluţia ecuaţiei diferenţiale (5.181) va avea forma:

$$w = R\lambda_{ro}C_1\left(\frac{x^2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{((k-1)^2-\delta)\ldots(2^2-\delta)(1-\delta)}{a^{k-1}\,k\,((k-1)!)^2}\,\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) +$$

$$+\frac{1}{9-\delta}Kpx^4 - \frac{2\cdot a}{(9-\delta)(4-\delta)}Kpx^3 + \frac{6\cdot a^2}{(9-\delta)(4-\delta)(1-\delta)}Kpx^2 +$$

$$+\frac{C_1' \; R^2\cdot\lambda_{ro}^2}{2(1-\delta)\;A}\,x^2 + C_3\,, \tag{5.188}$$

unde

$$K = \frac{R^4\cdot\lambda_{ro}^4}{2\cdot A}\,. \tag{5.189}$$

In figura 5.13 este reprezentată grafic deplasarea transversală pentru placa circulară cu nervuri de secţiune variabilă încastrată pe contur solicitată axial simetric de către o sarcină uniform distribuită. In acest caz $C_1' = 0$ iar celelalte constante se determină cu ajutorul condiţiilor (5.46). Placa este solicitată de forţa p = 0,1 MPa iar dimensiunile ei sînt: t = 10 mm, T = 15 mm, R = 200 mm, h = 5mm. Pentru reprezentarea grafică a deplasării s-a considerat 4, 6, 8 termeni ai seriei. S-a constatat că diferenţele între valorile seriilor care au 6 şi 8 termeni sînt mici şi nu depăşesc 3,2%. Rezultă că admiţînd 8 termeni ai seriei se obţin rezultate satisfăcătoare. Starea de tensiuni poate fi obţinută cu relaţiile (5.36) şi (5.37).

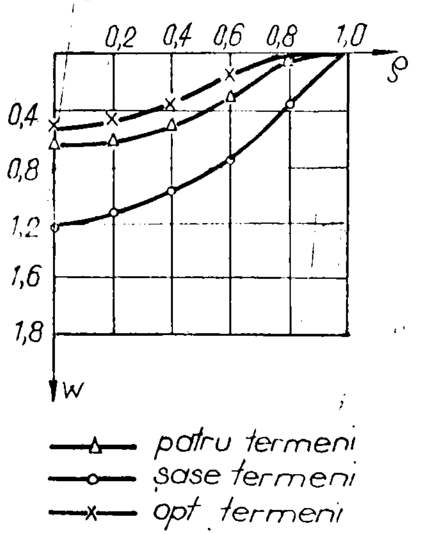


Fig.5.13

In acelaşi mod se poate rezolva ecuaţia diferenţială care descrie deformarea plăcii cu nervuri de înălţime variabilă.

5.3.2 Metode variaţionale

In lucrările [27], [181], [226], [236] sînt tratate metodele variaţionale pentru soluţionarea aproximativă a stărilor de deformaţie şi de tensiune pentru plăci. In acest sens este menţionată metoda Rayleigh - Ritz, metoda Bubnov - Galerkin etc.

In acest paragraf sînt determinate stările de deformaţie şi de tensiune la plăcile circulare cu nervuri cu ajutorul metodelor variaţionale.

5.3.2.1 Metoda Rayleigh - Ritz

Pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale care descriu deformarea plăcilor circulare cu nervuri solicitate axial simetric, metoda Rayleigh - Ritz admite că deplasările sînt aproximate de relaţiile:

$$u_o = \sum_{K=1}^{m} b_j u_j \; ; \qquad (5.190) \qquad\qquad w = \sum_{K=1}^{m} a_j w_j \, , \qquad (5.191)$$

unde u_j, w_j sînt funcţii care satisfac condiţiile de contur iar parametrii a_j şi b_j sînt mărimi necunoscute. Relaţiile (5.190) şi (5.191) se introduc în expresia energiei potenţiale totale (4.61). Parametrii necunoscuţi se determină din condiţia de minim a energiei potenţiale totale

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial b_j} = 0 \quad \text{unde } j = 1, \ldots , m. \qquad (5.192)$$

Ecuaţiile (5.192) formează un sistem de ecuaţii cu 2 m necunoscute. Rezolvarea sistemului de ecuaţii (5.192) dă posibilitatea să se determine toate constantele care se introduc în expresiile (5.190) şi (5.191).

In cazul încărcării axial simetrice componentele deplasării nu depind de unghiul polar iar energia potenţială totală va fi dată de expresia

$$\Pi = \pi\int\Big\{ rB\Big(\frac{du_o}{dr} + \frac{u_o}{r}\Big)^2 - 2(1- \;)rB\,\frac{du_o}{dr}\,\frac{u_o}{r} + rD\Big(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dw}{dr}\Big)^2 -$$

$$-2(1-\nu)\frac{d^2w}{dr^2}\frac{dw}{dr}+\frac{E_{rn}A_{rn}n_r}{2\pi}\left(\frac{du_o}{dr}\right)^2+\frac{E_{rn}I_{\varphi n}n_r}{2\pi}\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)^2-$$

$$-2\cdot r\cdot p_r\cdot u_o-2\cdot r\cdot p_z\, w\Big\}dr. \qquad (5.193)$$

In relaţia (5.193) se introduc expresiile (5.190) şi (5.191) rezultînd:

$$\Pi=\int_{(\ell)}\Big\{rB\Big(\sum_{j=1}^{m}b_ju_j'\Big)^2+\frac{B}{r}\Big(\sum_{j=1}^{m}b_ju_j\Big)^2+2\nu B\Big(\sum_{j=1}^{m}b_ju_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}b_ju_j'\Big)+$$

$$+rD\Big(\sum_{j=1}^{m}a_jw_j''\Big)^2+\frac{B}{r}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_jw_j'\Big)^2+2\nu D\Big(\sum_{j=1}^{m}a_jw_j'\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}a_jw_j''\Big)+$$

$$+\frac{E_{rn}A_{rn}n_r}{2\pi}\Big(\sum_{j=1}^{m}b_ju_j'\Big)^2+\frac{E_{rn}I_{\varphi n}n_r}{2\pi}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_jw_j''\Big)^2-$$

$$-2\cdot r\cdot p_r\Big(\sum_{j=1}^{m}b_ju_j\Big)-2\cdot r\cdot p_z\Big(\sum_{j=1}^{m}a_jw_j\Big)\Big\}dr, \qquad (5.194)$$

unde

$$u_j'=\frac{du_j}{dr}; \quad (5.195) \qquad w_j'=\frac{dw_j}{dr}; \qquad w_j''=\frac{d^2w_j}{dr^2}. \qquad (5.196)$$

Expresia (5.194) permite scrierea sistemului (5.192) sub forma:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_i}=2\pi\int_{(\ell)}\Big\{\Big[rD\,w_j''w_i''+\frac{D}{r}w_j'w_i'+\nu(w_j'w_i''+w_i'w_j'')+$$

$$+\frac{E_{rn}I_{\varphi n}n_r}{2\pi}w_j''w_i''\Big]\cdot a_j-2\,p_z\,w_i\Big\}dr; \qquad (5.197)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial b_i}=2\pi\int_{(\ell)}\Big\{\Big[rB\cdot u_j'\cdot u_i'+\frac{B}{r}u_ju_i+\nu B(u_ju_i'+u_iu_j')+$$

$$+\frac{E_{rn}A_{rn}n_r}{2\pi}u_j'u_i'\Big]b_j-r\cdot p_r u_i\Big\}dr. \qquad (5.198)$$

Relaţiile (5.197) şi (5.198) se pot scrise sub formă matricială:

$$\begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \qquad (5.199)$$

unde

$$A^{ij} = \int_{(R)} \left[rDw_j''w_i'' + \frac{D}{r}w_j'w_i' + \nu D(w_j'w_i''+w_i'w_j'') + \frac{E_{rn}I_{yn}n_r}{2\pi}w_i''w_j'' \right] dr \qquad (5.200)$$

$$B^{ij} = \int_{(R)} \left[rBu_j'u_i' + \frac{B}{r}u_ju_i + \nu B(u_ju_i'+u_iu_j') + \frac{E_{rn}A_{rn}n_r}{2\pi}u_j'u_i' \right] dr \qquad (5.201)$$

$$F_1^i = \int_{(R)} r\cdot p_z w_i\, dr; \qquad (5.202) \qquad F_2^i = \int_{(R)} r\cdot p_r\cdot u_i\, dr; \qquad (5.203)$$

$$\{a\} = \{a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_m\}^T; \qquad (5.204)$$

$$\{b\} \quad \{b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_m\}^T. \qquad (5.205)$$

Punerea sub forma matricială a sistemului de ecuaţii (5.192) permite folosirea calculatorului electronic la determinarea constantelor şi posibilitatea considerării seriilor (5.190) şi (5.191) cu mai mulţi termeni. Totodată, cu metoda lui Simpson poat fi calculaţi toţi termenii sistemului de ecuaţii (5.199).

Aplicaţie. Se consideră o placă de rază R cu n_r nervuri radiale încastrată, pe contur încărcată cu o sarcină normală uniform distribuită de intensitate p. Să se stabilească stările de deformaţie şi de tensiune ale plăcii cînd nervurile au secţiunea constantă sau variabilă.

Se admite forma deformată a suprafeţei mediane:

$$w = a_1\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 + a_2\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)^4 + \ldots \qquad (5.206)$$

Sistemul de ecuaţii (5.199), pentru aplicaţia dată, are forma:

$$[A]\,\{a\} = \{F_1\}, \qquad (5.207)$$

BUPT

unde termenii matricei $[A]$ se determină cu relaţia (5.200) iar a matricei coloană $\{F_1\}$ cu relaţia (5.202). In relaţia (5.206) ne limităm la primul termen (aproximarea care rezultă este corespunzătoare) şi ţinînd cont de forma secţiunii nervurii se obţine termenul A^{11} al matricei $[A]$ care are forma:

a) pentru nervuri cu secţiunea transversală constantă

$$A^{11} = \frac{32(5 + 6 \cdot \lambda_{ro})\, D}{15\, R^2}; \tag{5.208}$$

b) pentru nervuri cu secţiune variabilă:

i) lăţime variabilă (fig.5.8,a)

$$A^{11} = \frac{8(20 + 3\, \lambda_{ro}(3\tau + 5))\, D}{15\, R^2}; \tag{5.209}$$

ii) lăţime variabilă (fig.5.8,b)

$$A^{11} = \frac{(32 + 24 \cdot \lambda_{ro})\, D}{3\, R^2}; \tag{5.210}$$

iii) înălţime variabilă

$$A^{11} = \frac{16\left[2+3\cdot\lambda_{ro}(0,8(k^3-\ell^3)-3k^2+1,25k - 0,375)\right] D}{3\cdot R^2}; \tag{5.211}$$

unde

$$k = \frac{\delta}{\delta - \delta_o}; \quad (5.212) \qquad \ell = \frac{1}{\delta - \delta_o}. \quad (5.213)$$

In toate cazurile:

$$F_1 = \int_{(R)} r\, p\, (1 - \frac{r^2}{R^2})^2\, dr = \frac{p \cdot R^2}{6}. \tag{5.214}$$

Cu ajutorul sistemului de ecuaţii (5.207) se obţine mărimea constantei a_1. Odată cunoscută mărimea constantei a_1 se poate determina stările de deformaţie şi de tensiune după cum urmează:

a) placa cu nervuri de secţiune constantă

$$w = \frac{5 \cdot p \cdot R^4}{64(5 + 6 \cdot \lambda_{ro})D} (1 - \rho^2)^2; \qquad (5.215)$$

$$\sigma_r = \frac{15 \cdot p \cdot R^2}{8(5 + 6 \cdot \lambda_{ro})h^2} \left[(1 + \nu) - (3 + \nu)\rho^2\right]; \qquad (5.216)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{15\, p\, R^2}{8(5 + 6 \cdot \lambda_{ro})h^2} \left[(1 + \nu) - (1 + 3\nu)\rho^2\right]; \qquad (5.217)$$

$$\sigma_{rn} = \frac{15(1 - \nu^2)HR^2}{8(5 + 6 \cdot \lambda_{ro})h^3} (1 - 3\rho^2), \qquad (5.218)$$

unde

$$\rho = \frac{r}{R}. \qquad (5.219)$$

b) placa cu nervuri radiale de secţiune variabilă

i) lăţime variabilă (fig.5.8,a)

$$w = \frac{5\, p\, R^4}{16(20 + 3 \cdot \lambda_{ro}(3\tau + 5))D} (1 - \rho^2)^2; \qquad (5.220)$$

$$\sigma_r = \frac{15\, p\, R^2}{2(20 + 3\lambda_{ro}(3\tau + 5))h^2} \left[1 + \nu - (3 + \nu)\rho^2\right]; \qquad (5.221)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{15\, p\, R^2}{2(20 + 3\lambda_{ro}(3\tau + 5))h^2} \left[1 + \nu - (1 + 3\nu)\rho^2\right]; \qquad (5.222)$$

$$\sigma_{rn} = \frac{15(1 - \nu^2)pR^2H}{2(20 + 3\lambda_{ro}(3\tau + 5))\, h^3} (1 - 3 \cdot \rho^2). \qquad (5.223)$$

ii) lăţime variabilă (fig.5.8,b)

$$w = \frac{p\, R^4}{16(4 + 3 \cdot \lambda_{ro})D} (1 - \rho^2)^2; \qquad (5.224)$$

$$\sigma_r = \frac{3\, p\, R^2}{2(4 + 3 \cdot \lambda_{ro})h^2} \left[1 + \nu - (3 + \nu)\rho^2\right]; \qquad (5.225)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{3 \cdot p \cdot R^2}{2(4 + 3 \cdot \lambda_{ro})h^2}\left[1 + \nu - (1 + 3\nu)\rho^2\right]; \qquad (5.226)$$

$$\sigma_{rn} = \frac{3(1 - \nu^2)pR^2H}{2(4 + 3\lambda_{ro})h^3}(1 - 3\rho^2). \qquad (5.227)$$

iii) înălţime variabilă

$$w = \frac{p R^4}{32(2+3\lambda_{ro}(0,8(k^3-\ell^3)-3k^2+1,25k-0,375))D}(1-\rho^2)^2; \quad (5.228)$$

$$\sigma_r = \frac{3 p R^2}{4(2+3\lambda_{ro}(0,8(k^3-\ell^3)-3k^2+1,25k-0,375))h^2}\left[1+\nu-(3+\nu)\rho^2\right]; \qquad (5.229)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{3 p R^2}{4(2+3\lambda_{ro}(0,8(k^3-\ell^3)-3k^2+1,25k-0,375))h^2}\left[1+\nu-(1+3\nu)\rho^2\right]; \qquad (5.230)$$

$$\sigma_{rn} = \frac{3(1-\nu^2) \cdot p \cdot R^2H}{4(2+3\lambda_{ro}(0,8(k^3-\ell^3)-3k^2+1,25k-0,375))h^3}\left[\delta-(\delta-\delta_o)\rho\right](1-3\rho^2); \qquad (5.231)$$

In figura 5.14 sînt reprezentate grafic relaţiile (5.215) la (5.231) pentru plăci circulare de rază R = 200 mm, h = 5 mm cu 10 nervuri radiale solicitate de forţa uniform distribuită p = 0,1 MPa,

a) lăţime t = 10 mm, H = 15 mm;

b) i) t = 10 mm, T = 15 mm, H = 15 mm;

ii) t = 10 mm, T = 0 , H = 15 mm;

iii) t = 10 mm, H_o = 15 mm, H = 20 mm.

La alegerea datelor numerice s-a urmărit ca plăcile să aibe aceeaşi mărime adimensională λ_{ro}, în dreptul conturului exterior. Reprezentarea grafică a deplasărilor şi tensiunilor s-a făcută pe aceeaşi diagramă în vederea stabiliri variantelor convenabile privind forma secţiunii transversale a nervurii. In urma analizării diagramelor se constată că deplasările transversale sînt mai mici la placa cu nervuri de înălţime variabilă în timp ce la plăcile cu nervuri de lăţime variabilă (fig.5.8,b) au valori mai mari datorită micşorării rigidităţii de încovoiere a nervurilor spre partea centrală. Placa cu nervuri de lăţime variabilă (lăţimea se micşorează în lungul axei de la centrul plăcii spre conturul exterior, fig.5.8,a)

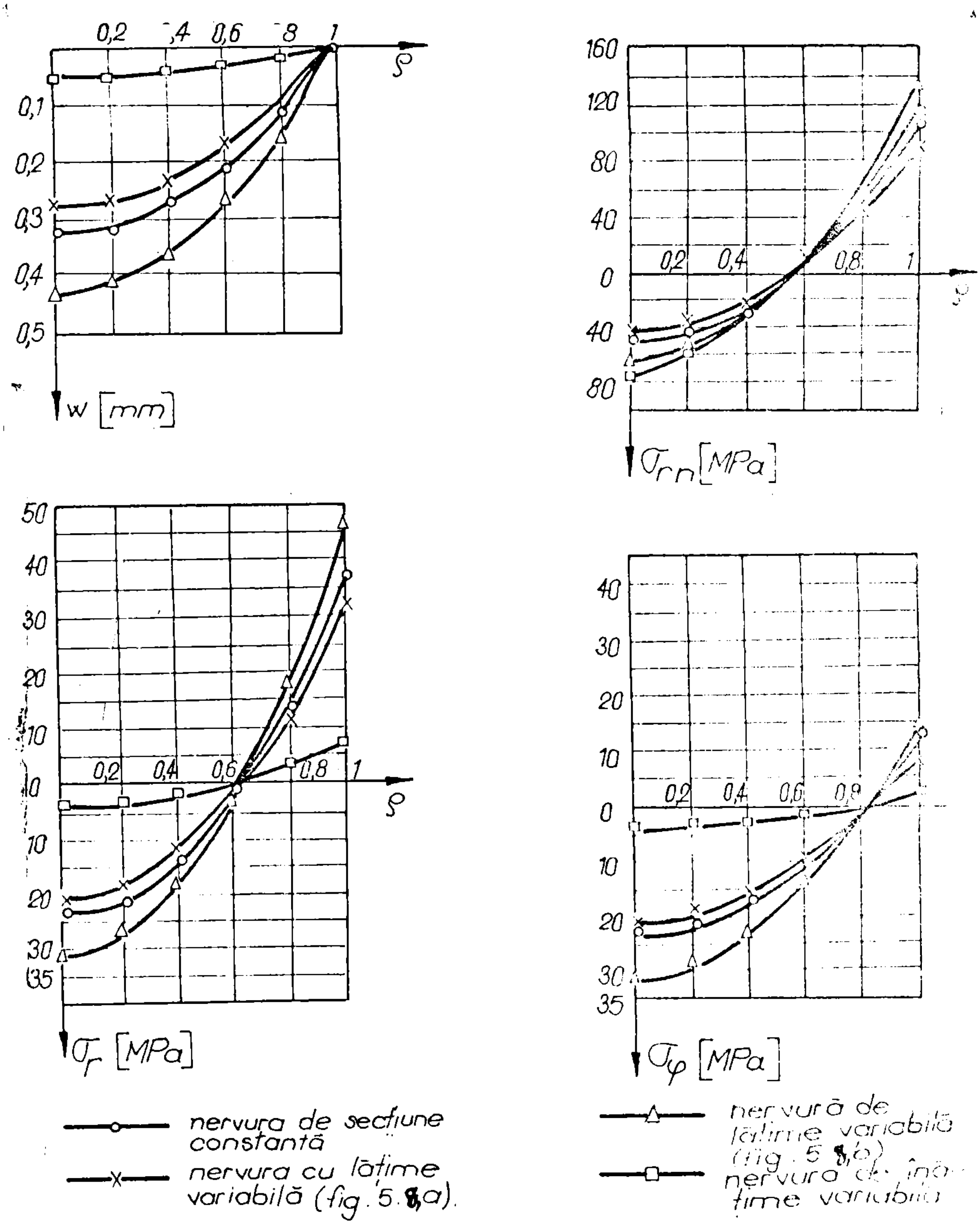


Fig.5.14

are deplasarea transversală mai mică decît placa cu nervuri de secţiune constantă. In cazul tensiunilor normale σ_r şi σ_φ cele mai mari valori sînt la placa cu nervuri de secţiune variabilă din figura 5.8,b iar valorile cele mai mici la placa cu nervuri de înălţime variabilă. Tensiunile din nervură au valorile cele mai mari la placa cu nervuri de înălţime variabilă şi cele mai mici valori la placa cu nervuri de lăţime variabilă (fig.5.8,a).

In figurile 5.15 şi 5.16 se prezintă deplasarea transversală a plăcilor cu nervuri în funcţie de mărimea secţiunii nervurilor în sistemul de referinţă $w\rho\lambda_r$, respectiv în spaţiu.

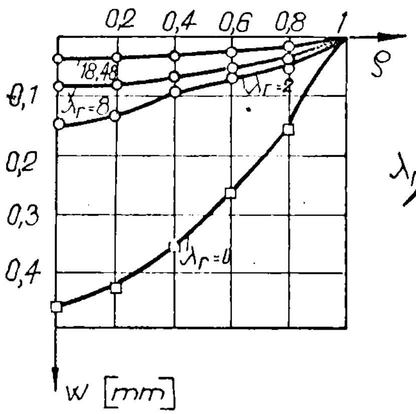


Fig.5.15

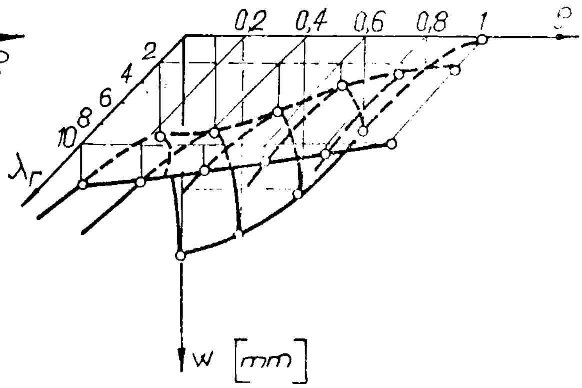
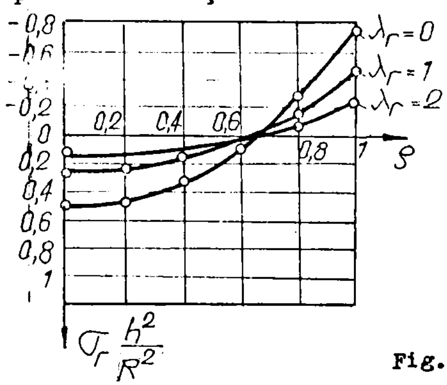


Fig.5.16

Se constată, din diagrame, o micşorare a deplasării transversale a plăcii odată cu creşterea mărimii secţiunii nervurii adică a rigidităţii plăcii caracterizată de mărimea adimensională λ_r. In figura 5.17 sînt reprezentate tensiunile normale din placă în funcţie de mărimea adimensională λ_r.



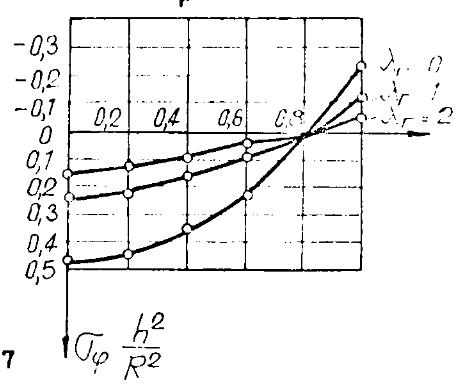


Fig.5.17

Valorile tensiunilor normale în placă se micşorează dacă are loc o creştere a mărimii secţiunilor transversale ale nervurilor, adică mărirea momentului de inerţie axial.

5.3.2.2 Metoda Bubnov - Galerkin

Metoda Bubnov - Galerkin este privită ca o aproximare a principiului deplasării virtuale utilizat la soluţionarea unor probleme de mecanică. Pentru rezolvarea ecuaţiei diferenţiale (5.6), metoda Bubnov - Galerkin adoptă expresia (5.191) pentru săgeata plăcii unde $w_j(j = \overline{1,m})$ sînt funcţii care îndeplinesc toate condiţiile de contur şi reflectă forma deformată a suprafeţei mediane deformate iar a_j sînt constante.

In ecuaţia diferenţială (5.6) se introduce relaţia (5.191) rezultînd:

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\left[D\left(1+\frac{R}{r}\lambda_r\right)\frac{d^4w_j}{dr^4} + 2D\frac{1}{r}\frac{d^3w_j}{dr^3} - D\frac{1}{r^2}\frac{d^2w_j}{dr^2} + D\frac{1}{r^3}\frac{dw_j}{dr}\right]a_j - p\right\} = 0 \qquad (5.232)$$

Coeficienţii a_j $(j = \overline{1,m})$ se determină din condiţia ca termenii ecuaţiei (5.232), în intervalul $[0\ ,\ R]$, să fie ortogonali cu funcţiile w_j. In aceste condiţii rezultă un sistem de ecuaţii liniar

$$\int_0^R\sum_{j=1}^{m}\left\{\left[D\left(1+\frac{R}{r}\ _r\right)\frac{d^4w_j}{dr^4} + 2D\frac{1}{r}\frac{d^3w_j}{dr^3} - D\frac{1}{r^2}\frac{d^2w_j}{dr^2} + D\frac{1}{r^3}\frac{w_j}{dr}\right]a_j\right\}w_i\,r\,dr =$$

$$= \int_0^R r\,p\,w_i\,dr, \qquad (i = \overline{1,m}). \qquad (5.233)$$

După efectuarea integralelor pe toată suprafaţa plăcii se obţine un sistem de ecuaţii a căror necunoscute sînt constantele a_j $(j = \overline{1,m})$.

In continuare se vor rezolva cîteva exemple.

1. Placa circulară cu nervuri încastrată pe contur solicitată normal de o forţă uniform distribuită.

Dacă se admite forma deformată a plăcii dată de relaţia (5.206) considerînd numai primul termen al seriei şi notaţia $\rho = r/R$ prin introducerea în sistemul de ecuaţii (5.233) se obţine:

$$\int_0^1 \left[\left(64 + 24\frac{\lambda_r}{\rho}\right) a_1 - \frac{pR^4}{D}(1-\rho^2)^2\right]\rho\, d\rho = 0. \qquad (5.234)$$

După efectuarea calculelor și introducerea constantei a_1 în relația (5.206) se obține expresia săgeților (5.215), determinată cu metoda Rayleigh - Ritz.

2. Placa circulară cu nervuri radiale simplu rezemată pe contur încărcată cu o forță uniform distribuită.

Se admite forma deformată a plăcii dată de relația:

$$w = a_1 w_1 = a_1(a - 2b\cdot\rho^2 + \rho^4), \qquad (5.235)$$

unde

$$a = \frac{5+\nu}{1+\nu}; \quad (5.236) \qquad b = \frac{3+\nu}{1+\nu}. \qquad (5.237)$$

Se înlocuiește relația (5.235) în (5.233) rezultă:

$$\int_0^1 \left[\left(64+24\frac{\lambda_r}{\rho}\right)a_1 - \frac{pR^4}{D}(a - 2b\rho^2 + \rho^4)\right]\rho\, d\rho = 0. \qquad (5.238)$$

După efectuarea integralei și rezolvarea ecuației se obține constanta a_1 care se înlocuiește în relația (5.235) rezultînd ecuația deplasării transversale de forma:

$$w = \frac{pR^4}{(64+120\lambda_r(3+\nu)/(11+2\nu))D}(a - 2b\rho^2 + \rho^4). \qquad (5.239)$$

Tensiunile normale din placă vor fi:

$$\sigma_r = \frac{24(3+\nu)pR^2}{(64+120\lambda_r(3+\nu)/(11+2\nu))h^2}(1-\rho^2); \qquad (5.240)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{24\,p\,R^2}{(64+120\lambda_r(3+\nu)/(11+2\nu))h^2}\left[3+\nu - (1+3\nu)\rho^2\right]; \qquad (5.241)$$

Tensiunea normală în nervură se exprimă cu relația:

$$\sigma_{rn} = \frac{24(1-\nu^2)pR^2H}{(64+120\lambda_r(3+\nu)/(11+2\nu))h^3}\left[3\rho^2 - \frac{3+\nu}{1+\nu}\right]. \qquad (5.242)$$

5.3.3 Determinarea stărilor de deformaţie şi de tensiune cu metoda elementului finit

Metoda elementului finit a cunoscut o mare dezvoltare în ultimi ani avînd o largă aplicabilitate în diverse domenii. Conceptul de bază al metodei, cînd este aplicat la o problemă de analiză structurală, constă în faptul că un corp poate fi modelat analitic prin subdivizare în regiuni (elemente finite) la care comportarea este descrisă de către funcţii care reprezintă deplasările şi tensiunile. Aceste funcţii sînt alese în aşa fel încît să garanteze continuitatea comportării corpului.

Prezentarea metodei elementului finit şi folosirea ei la calculul plăcilor este dată în lucrările [12], [48], [51], [23...].

Pentru analiza comportării statice a plăcilor circulare cu nervuri radiale s-au utilizat programele de calcul SAP IV şi SUBSM [154], urmărindu-se:

- determinarea deformaţiilor şi tensiunilor;
- verificarea rezultatelor obţinute cu alte metode de calcul.

5.3.3.1 Determinarea stărilor de deformaţie şi de tensiune folosind programul SAP IV

S-a considerat placa cu 8 nervuri prezentată în figura 5.18 avînd R = 125 mm, h = 5 mm, r_0 = 14 mm, H = 35 mm, t = 5 mm.

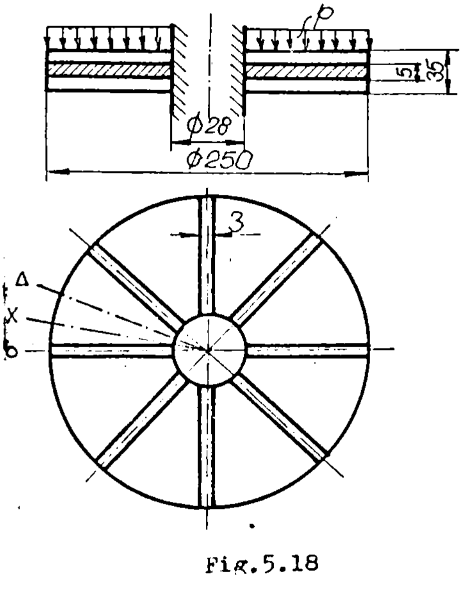


Fig.5.18

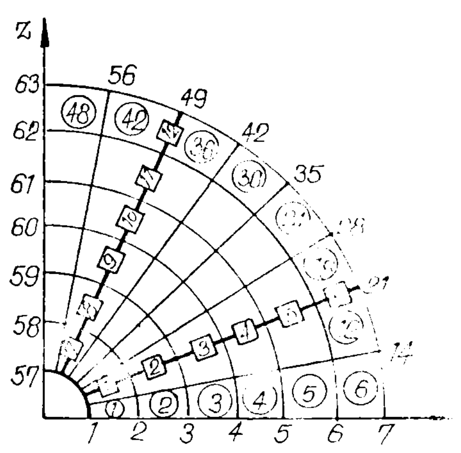


Fig.5.19

Placa este solicitată cu o forţă uniform distribuită p = 0,1 MPa. Intrucît încărcarea este simetrică pentru studiul stărilor de deformaţie şi de tensiune s-a considerat numai un sfert de placă (fig.5.19). Discretizarea s-a făcut în 48 de elemente de placă şi 12 elemente de bară interconectate în 65 de noduri.

In figura 5.20 sînt reprezentate grafic deplasările transversale ale planului median cît şi a tensiunilor determinate cu metoda elementului finit cît şi mărimile corespuzătoare stabilite cu metoda analitică (T). Metoda elementului finit pune în evidenţă că deplasările punctelor din dreptul nervurilor sînt mai mici decît ale punctelor aflate între două nervuri.

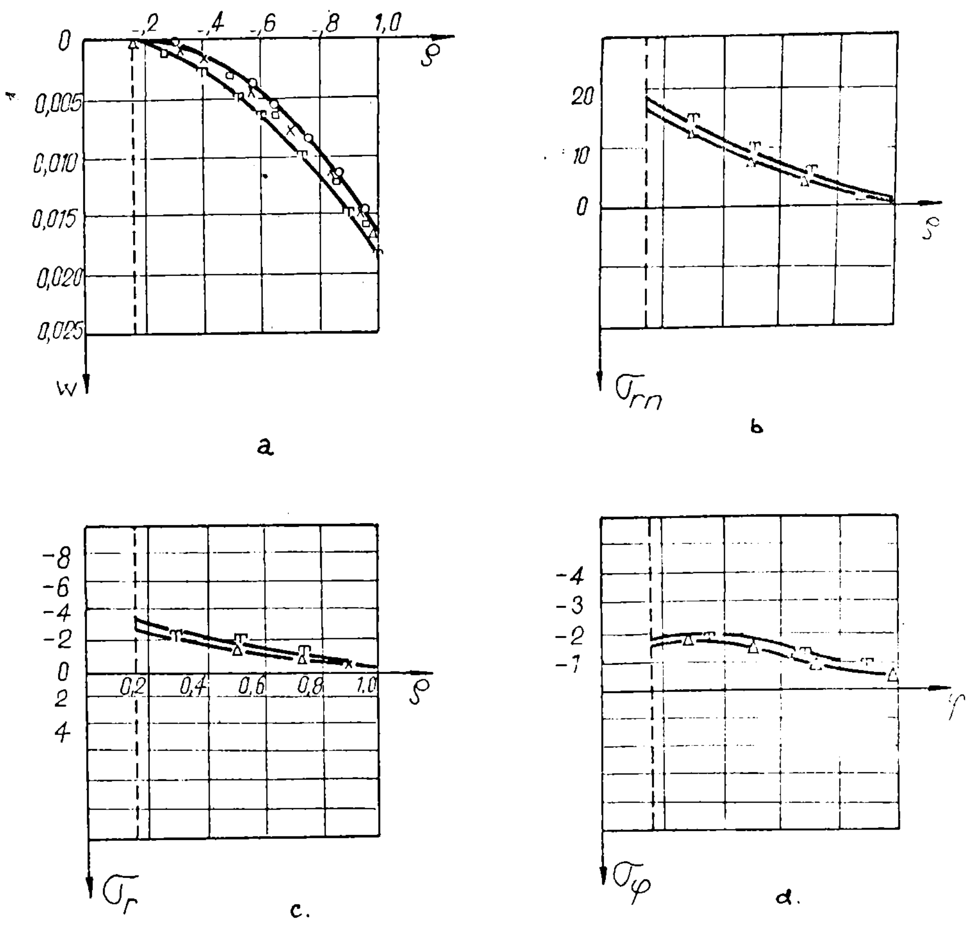


Fig.5.20

Diferențele dintre valorile deplasărilor punctelor de pe nervură și a acelora aparținînd porțiunii de placă dintre nervuri nu depășesc 7%. Metoda analitică și metoda energetică adoptînd netezirea structurii dau rezultate identice pentru deplasarea punctelor aflate între nervuri cît și în dreptul lor. Diferența dintre mărimile deplasărilor determinate cu metoda analitică și metoda elementului finit este de $2,7 \div 9,3$ %. In figura 5.20,b, c, d sînt prezentate graficul tensiunilor normale din dreptul nervurii cît și a porțiunii dintre nervuri. Diferența dintre valori fiind satisfăcătoare, rezultatele analitice fiind mai mari decît cele numerice.

Obținerea unor rezultate numerice cît mai apropiate de realitate impune o discretizare cît mai fină ceea ce duce la depășirea memoriei calculatorului și la creșterea timpului necesar efectuării calculului. Pentru evitarea acestor inconveniente în analiza structurilor cu metoda elementului finit în lucrările [47], [51], [154] se menționează folosirea substructurării.

5.3.3.2 Determinarea stărilor de deformație și de tensiune folosind programul SUBSM

Programul SUBSM ([154] , [47]) este elaborat pentru calculul structurilor prin aplicarea substructurării. Acest program poate fi folosit și la calculul plăcilor circulare cu nervuri radiale. Programul de calcul are biblioteca de elemente finite preluată din programul de calcul SAP IV și elementul de tip 10 al programului SAP V care permite introducerea pe cartele a matricei de rigiditate a oricărui element care nu este cuprins în biblioteca de elemente existentă. Schema bloc a programului SUBSM este dată în figura 5.21.

In continuare se vor descrie subrutinele programului SUBSM în ordinea în care ele apar , adică sînt apelate.

Subrutina TREE prelucrează cartela arbore;

Subrutina STRUCT conține informații cu privire la numerotarea ecuațiilor și la legăturile structurii;

Subrutina INPUTJ citește nodurile comune și coordonatele nodurilor și condițiile de legătură pentru substructură în numerotare locală;

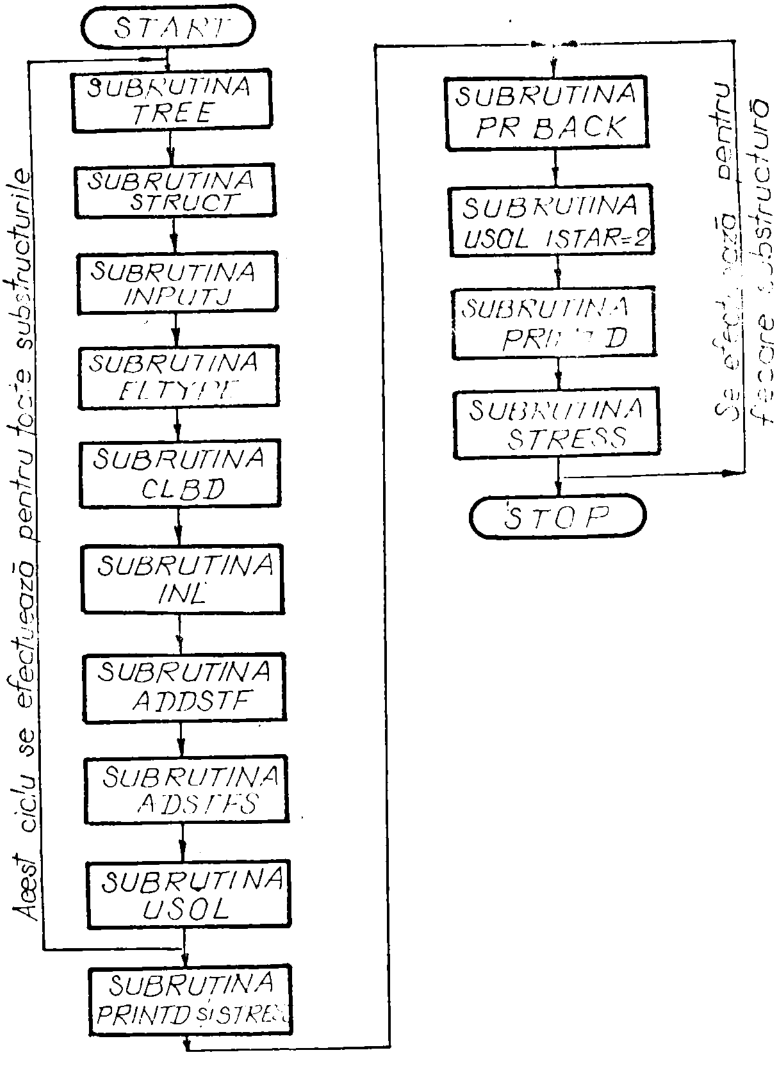


Fig.5.21

Subrutina ELTYPE realizează subrutinele necesare pentru un anumit grup de elemente;

Subrutina CLBD determină matricea de conectivitate care face legătura între numerotarea locală şi cea globală;

Subrutina INL citeşte forţele nodale;

Subrutina ADDSTF face asamblarea matricelor de rigidi - tate ale elementelor finite;

Subrutina ADSTFE efectuează asamblarea matricelor de rigiditate condensate ca şi ale încărcărilor condensate ale substructurilor la matricea de rigiditate şi încărcările substructurilor curente. Matricea condensată se referă la o substructură care este considerată ca un macroelement.

Subrutina USOL a fost preluată din programul SAP II şi modificată. Ea rezolvă complet sistemul de ecuaţii $[K]\cdot\{U\}=\{F\}$ al unei substructuri şi anume a structurii rădăcină. Sistemul de ecuaţii cuprinde: $[K]$ matricea de rigiditate a structurii, $\{U\}$ vectorul deplasărilor nodale, $\{F\}$ vectorul forţelor structurii. Această subrutină face triunghiulariazrea parţială a matricei de rigiditate condensate şi a vectorului de încărcare condensată.

Subrutina PRINTD şi STRESS tipăreşte deplasările nodurilor şi tensiunile din elemente.

Subrutina PRBACK trece deplasările nodurilor comune din numerotarea globală în numerotarea locală.

Subrutina USOL, ISTAR = 2 face retrosubstituţia pentru substructură numai pentru nodurile comune.

Subrutina PRINTD tipăreşte deplasările tuturor nodurilor.

Subrutina STRESS calculează tensiunile şi le tipăreşte valoarea lor. Selectarea subrutinelor specifice elementelor finite se face cu subrutina ELTYPE.

Procedeul de substructurare constă în împărţirea structurii complexe în părţi de sine stătătoare. In principiu, analiza prin discretizare a structurilor în substructuri comportă două etape:

- analiza stărilor de tensiune şi de deformaţie pe fiecare substructură şi
- cuplarea substructurilor cu respectarea condiţiilor de echilibru şi de discontinuităţi ale deplasărilor în nodurile comune.

Utilizarea programului SUBSM la analiza stărilor de deformaţie şi de tensiune cuprinde următoarele etape:

- împărţirea în substructuri;
- pregătirea datelor de intrare în program constînd din numerotarea elementelor finite şi delimitarea lor prin numere de ordine ale nodurilor fiecărui element, indicarea proprietăţilor

fizico - mecanice ale materialelor şi reducerea încărcării reale la forţe concentrate aplicate în nodurile structurii;

- rularea pe calculator a programului;
- prelucrarea rezultatelor.

Pentru o analiză a modului de aplicare a programului de calcul SUBSM se examinează starea de deformaţie şi de tensiune la o placă inelară cu 8 nervuri prezentată în figura 5.22. Placa are h = 3mm şi raza exterioară R = 125 mm. Nervurile sînt de secţiune dreptunghiulară cu H = 9 mm şi t = 3 mm. Placa inelară este încastrată pe conturul interior la raza r_o = 25 mm.

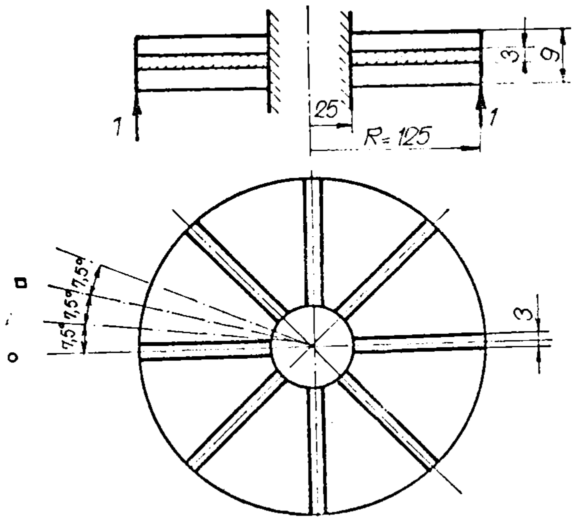
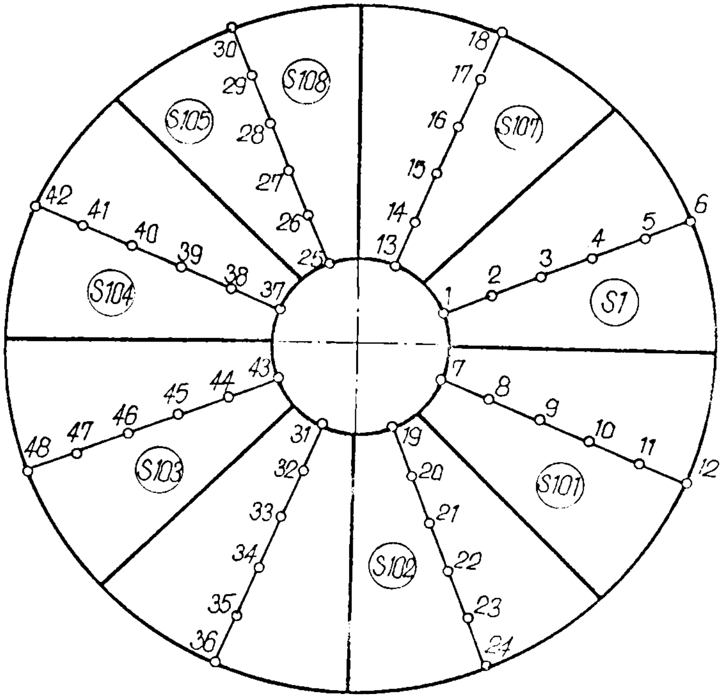


Fig.5.22

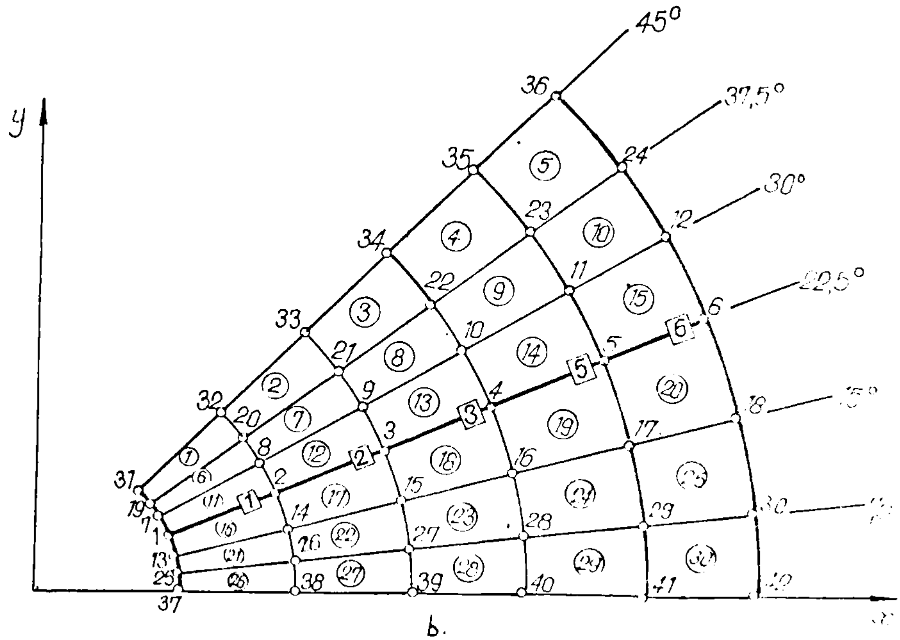
Impărţirea în substructuri a plăcii cu nervuri este dată în figura 5.23,a. O substructură este desemnată de litera S urmată de un număr . Impărţirea în substructuri este descrisă în program de cartela arbore. Cartela arbore, pentru exemplul considerat, are forma:

S10(S1, S101, S102, S103, S104, S105, S106, S107).

Ordinea de abordare a substructurilor, de către program, este inversă aceleia din cartela arbore. Fiecărei substructuri îi corespunde o numerotare locală avînd noduri comune (ce aparţin la două sau mai multe substructuri) şi noduri necomune care îi aparţin.



a.



b.

Fig.5.23

În figura 5.23,b este reprezentat modul de discretizare în elemente finite a substructurii rădăcină. Substructura are 30 de elemente patrulatere de tip placă şi 6 elemente de tip bara. In figura 5.24 se prezintă diagramele deplasărilor transversale şi a tensiunilor normale produse în placă şi nervuri. Din analiza diagramelor rezultă deplasări mai mari în porţiunea de placă cuprinsă între nervuri decît deplasările din dreptul nervurii. Tensiunile din dreptul nervurii sînt mai mari decît tensiunile porţiunii de placă cuprinsă între nervuri. Folosirea programului de SUBSM permite o micşorare a timpului de calcul de cel puţin 2 ori faţă de programul de calcul SAP IV.

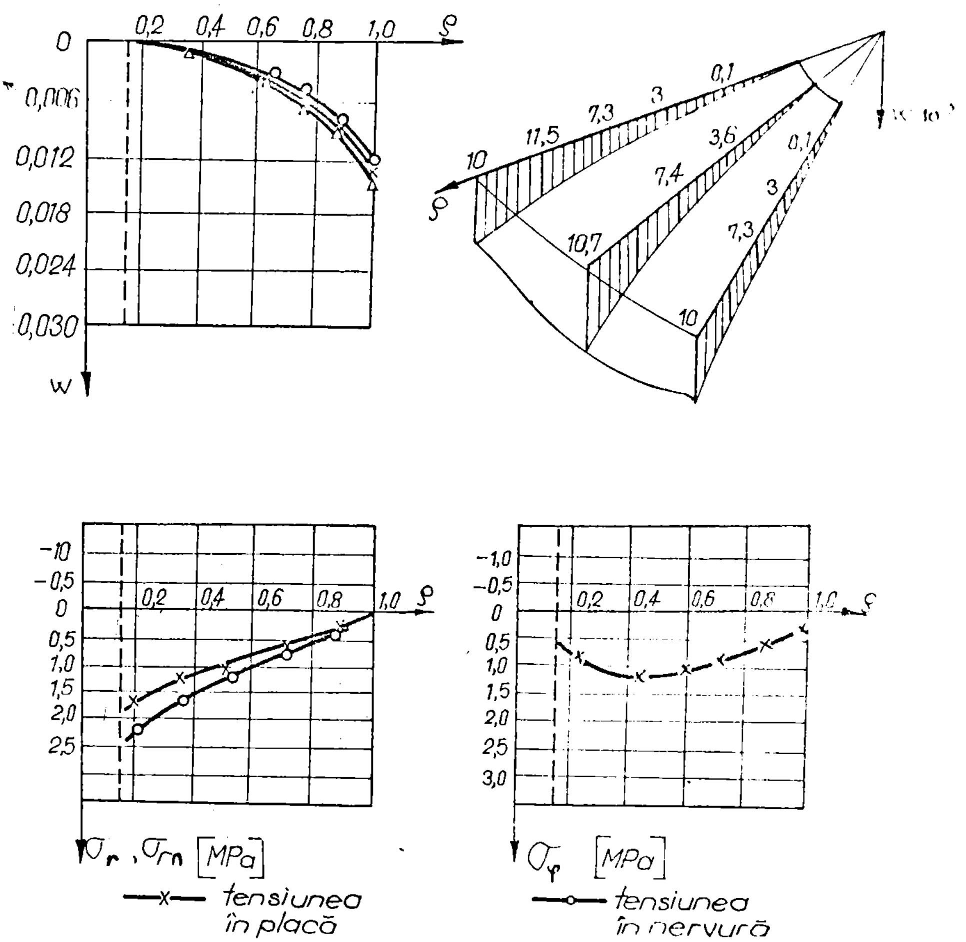


Fig.5.24

5.4 Concluzii

In acest capitol s-a abordat calculul stărilor de deformaţie şi de tensiune la plăcile circulare şi inelare cu nervuri radiale propunîndu-se diverse metode de calcul. Metodologia de calcul folosită de autor scoate în evidenţă cîteva elemente noi privind integrarea ecuaţiilor diferenţiale care descriu deformarea acestor plăci şi intrebuinţarea metodei elementului finit. In acest sens s-a pus în evidenţă:

1) posibilităţile de integrare a ecuaţiilor diferenţiale care descriu deformarea plăcilor cu nervuri radiale cînd secţiunea lor este constantă sau variabilă în lungul axei;

2) soluţiile ecuaţiilor diferenţiale în cazurile de încărcare axial simetrică pentru diverse tipuri de reazeme;

3) starea de deformaţie a plăcilor inelare cu nervuri radiale a căror relaţii de calcul sînt centralizate în tabelul 5.1. Rezultatele cuprinse în tabelul 5.1 se pot folosi la determinarea stării de tensiune.

4) folosirea metodei elementului finit pentru determinarea stărilor de deformaţie şi de tensiune cu ajutorul programului de calcul SAP IV precum şi a programului SUBSM care duce la micşorarea timpului de calculator.

5) întrebuinţarea calculului variaţional la determinarea stărilor de deformaţie şi de tensiune la plăcile circulare cu nervuri radiale.

6 INFLUENȚA NERVURILOR ASUPRA RIGIDITĂȚII ȘI MICȘORĂRII GREUTĂȚII PLĂCILOR

6.1 Considerații generale

In capitolul 5 s-a analizat starea de deformație a plăcii circulare cu nervuri radiale în raport cu cea a plăcii fără nervuri. S-a constatat că deformația plăcii cu nervuri este mai mică decît aceea a plăcii fără nervuri. Rezultă că nervurile duc la creșterea rigidității plăcii avînd influență asupra greutății lor. In continuare, se pune problema de a stabili numărul și dimensiunile nervurilor pentru realizarea reducerii greutății plăcii cu nervuri în raport cu placa fără nervuri.

In lucrările [34] și [35] sînt prezentate cîteva aspecte privind posibilitatea micșorării greutății plăcii circulare cu nervuri în raport cu placa fără nervuri cînd ambele au aceeași rezistență.

6.2 Formularea problemei

Se consideră două plăci circulare de rază R: una are grosimea h fiind întărită cu n_r nervuri radiale dispuse echiunghiular pe ambele fețe care au secțiunea transversală dreptunghiulară de înălțime H și lățime t. Nervurile se consideră confecționate din același material ca și placa. A doua placă are grosimea h_0 constantă fără nervuri.

Fie volumul de material al plăcii cu nervuri

$$V = \pi R^2 \cdot h + n_r t(H - h)R = \pi R^3 \alpha \cdot \delta , \qquad (6.1)$$

unde s-au introdus următoarele mărimi adimensionale:

$$\alpha = \frac{h}{R} ; \qquad (6.2) \qquad\qquad \beta = \frac{t}{2 \cdot \pi \cdot R} ; \qquad (6.3)$$

$$\gamma = \frac{H}{h} ; \qquad (6.4) \qquad\qquad \delta = 1 + 2\beta n_r(\gamma - 1). \quad (6.5)$$

Volumul de material al plăcii circulare fără nervuri este

$$V_o = \pi R^2 \cdot h_o = \pi R^3 \alpha_o, \qquad (6.6)$$

unde s-a introdus mărimea adimensională

$$\alpha_o = \frac{h_o}{R} . \qquad (6.7)$$

Dimensiunile plăcii circulare întărită cu nervuri vor fi alese în aşa fel încît să fie mai uşoară decît placa circulară fără nervuri cînd ambele plăci asigură aceeaşi rezistenţă sau rigiditate. Placa circulară cu nervuri radiale va fi mai uşoară decît placa circulară fără nervuri dacă raportul volumelor este subunitar. Raportul celor două volume se defineşte prin relaţia:

$$\frac{V}{V_o} = \frac{\alpha}{\alpha_o}\left[1 + 2\, n_r \beta\, (\gamma - 1)\right] . \qquad (6.8)$$

Condiţia ca placa fără nervuri şi placa cu nervuri să aibe aceeaşi rezistenţă se exprimă prin egalitatea

$$\sigma^o_{max} = \sigma_{max} , \qquad (6.9)$$

unde σ^o_{max} este tensiunea maximă din placă fără nervuri iar σ_{max} - tensiunea maximă în placa cu nervuri.

Condiţia ca rigiditatea celor două plăci să fie aceeaşi va fi:

$$w^o_{max} = w_{max} , \qquad (6.10)$$

unde w^o_{max} este deplasarea maximă a plăcii fără nervuri iar w_{max} - deplasarea maximă a plăcii circulare cu nervuri radiale.

In continuare se vor stabili dimensiunile plăcii cu nervuri radiale în raport cu placa fără nervuri cînd se realizează condiţiile de rezistenţă sau de rigiditate.

Se vor prezenta cîteva exemple de calcul.

6.3 Condiţia de rezistenţă

Se stabilesc dimensiunile la o placă circulară întărită cu nervuri radiale pe ambele feţe, încastrată pe contur şi solicitată la încovoiere axial simetrică de către o sarcină uniform distribuită p. Valoarea tensiunii maxime se obţine din relaţia (5.216) fiind dată de relaţia:

$$\sigma_{max} = k\frac{p\,R^2}{h^2} = \frac{15}{4(5+6\lambda_r)}\frac{p}{\alpha^2}, \tag{6.11}$$

unde mărimea adimensională λ_r dată de relaţia (4.39), se poate exprima în funcţie de mărimile (6.2)$\div$(6.5) sub forma:

$$\lambda_r = \frac{E\cdot I_{\varphi n}n_r}{2\pi R\cdot D} = (1-\nu^2)\frac{n_r t(H^3-h^3)}{2\pi R\,h^3} = (1-\nu^2)(\gamma^3-1)n_r\beta. \tag{6.12}$$

Tensiunea maximă în placă circulară fără nervuri, după [227], se determină cu relaţia:

$$\sigma^o_{max} = k_o\frac{p\,R^2}{h_o^2} = 0{,}75\frac{p}{\alpha_o^2}. \tag{6.13}$$

Relaţiile (6.11) şi (6.13) se introduc în condiţia (6.9) rezultînd:

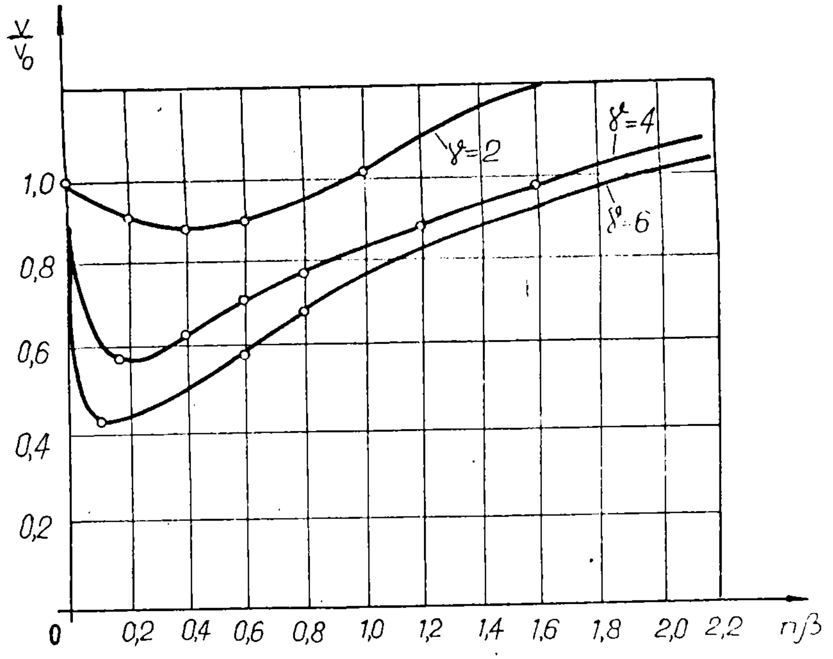
$$\frac{\alpha}{\alpha_o} = \sqrt{\frac{k}{k_o}}. \tag{6.14}$$

Dacă se ţine cont de constantele k şi k_o precum şi de relaţia (6.12), relaţia (6.14) va avea forma:

$$\frac{\alpha}{\alpha_o} = \frac{1}{\sqrt{1+1{,}2\cdot\lambda_r}} = \frac{1}{\sqrt{1+1{,}2(1-\nu^2)n_r\beta(\gamma^3-1)}}. \tag{6.15}$$

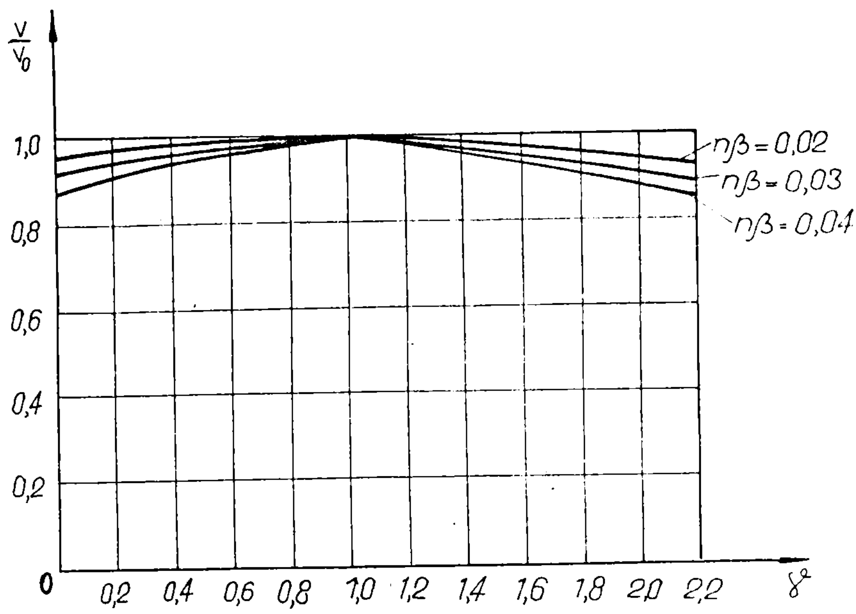
Se introduce relaţia (6.15) în funcţia dată de (6.8) rezultînd:

$$\frac{V}{V_o} = \frac{1+2\,n_r\beta\,(\gamma-1)}{\sqrt{1+1{,}2(1-\nu^2)n_r\beta\,(\gamma^3-1)}}. \tag{6.16}$$



V/V0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
nβ
γ=2
γ=4
γ=6

Fig.6.1



V/V0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
γ
nβ = 0,02
nβ = 0,03
nβ = 0,04

Fig.6.2

Relaţia (6.16) reprezintă o funcţie de două variabile γ şi $n_r\beta$. Pentru că funcţia (6.16) este complicată iar găsirea punctelor staţionare care să verifice sistemul format din derivatele ei parţiale, în raport cu variabilele γ şi $n_r\beta$ este dificil de rezolvat s-a analizat funcţia considerînd una din variabile fixată. Acest lucru este justificat, în practică, datorită condiţiilor care pot fi impuse asupra înălţimii nervurilor dar şi asupra numărului de nervuri şi a lăţimii lor.

Dacă se fixează mărimea $\gamma = H/h = \text{const.}$ atunci funcţia (6.16) se poate minimiza în raport cu variabila $n_r\beta$. Intrucît $\beta > 0$; $\nu \in (0\ \ 0,5)$; $\gamma > 1$, funcţia (6.16) este continuă pe mulţimea reală a numerelor pozitive. In $(n_r\beta)_o$, punct interior mulţimii de definiţie, funcţia (6.16) are un minim local dacă pentru orice vecinătate a lui $(n_r\beta)_o$:

$$\frac{V}{V_o}(n_r\beta) \geqslant \frac{V}{V_o}((n_r\beta)_o). \qquad (6.17)$$

Acest lucru se vizualizează uşor pe graficul curbei. Vecinătatea punctului $(n_r\beta)_o$ este porţiunea de curbă unde concavitatea este îndreptată spre axa pozitivă $0\ V/V_o$. Soluţia ecuaţiei obţinută din anularea derivatei funcţiei (6.16) în raport cu variabila $(n_r\beta)$ este dată de relaţia:

$$(n_r\beta)_o = \frac{1,2(1-\nu^2)(\gamma^2+\gamma+1)-4}{2,4(1-\nu^2)(\gamma^3-1)}. \qquad (6.18)$$

In figura 6.1 este reprezentată grafic relaţia (6.16) în funcţie de variabila $n_r\beta$, pentru γ fixat la valorile 2, 4 şi 6. Se constată că la creşterea mărimii raportului γ, adică a înălţimii nervurii în raport cu grosimea plăcii, se măreşte domeniul în care greutatea plăcilor cu nervuri este mai mică decît al plăcilor fără nervuri. Totodată, se recomandă ca parametrul $n_r\beta$ să aibă valori cît mai mici în raport cu $(n_r\beta)_o$ acest lucru impus de mărimea adimensională (6.3) care reprezintă raportul dintre două dimensiuni cu ordin de mărime diferit. Intrucît, relaţia (6.3) reprezintă raportul dintre lăţimea nervurii şi raza plăcii se recomandă ca el să aibă valori mai mici. Prin fixarea mărimii γ , în raport cu $n_r\beta$, se determină numărul de nervuri. Lăţimea nervurii se obţine uşor cînd se cunoaşte parametrul β întrucît raza conturului exterior a plăcii este impusă de construcţie. Dacă se fixează numărul de nervuri n_r se găseşte lăţimea nervurii.

Desigur există o valoare pentru $(n_r\beta)$ pentru care raportul V/V_o este mai mare decît unitatea. In acest caz plăcile circulare cu nervuri sînt mai grele decît cele fără nervuri. Valoarea lui $(n_r\beta)$ pentru care $V/V_o \geqslant 1$ este dată de relaţia

$$(n_r\beta)_1 \geqslant \frac{1,2(1-\nu^2)(\gamma^2+\gamma+1)-4}{4(\gamma-1)} . \qquad (6.19)$$

Să se determine dimensiunile unei plăci cu 8 nervuri radiale de rază exterioară $R = 125$ mm solicitată la presiunea $p = 0,1$ MPa. Placa este încastrată pe contur. Se dau: rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 150$ MPa, $\gamma = 2$.

$$(n_r\beta)_o = \frac{1,2\cdot 0,91(2^2+2+1)-4}{2,4\cdot 0,91(2^3-1)} = 0,238.$$

Se adoptă $n_r\beta = 0,137$ de unde $\beta = 0,0171$ iar $t = 2\pi R\beta = 2\cdot\pi\cdot 125\cdot 0,0171 = 13,44 \approx 14$ mm.

Din relaţia (6.12) se obţine:

$$\lambda_r = (1-\nu^2)(\gamma^3-1)n_r\beta = 0,91(2^3-1)\cdot 0,142 = 0,9 .$$

Din condiţia ca tensiunea maximă (6.11) în placă să fie de 150 MPa la presiunea $p = 0,1$ MPa rezultă:

$$h = \sqrt{\frac{15}{4(5+6\lambda_r)}\,\frac{p\,R^2}{\sigma_a}} = \sqrt{\frac{15}{4(5+6\cdot 0,9)}\,\frac{0,1\;125^2}{150}} = 1,94\text{mm} \approx 2 \text{ mm},$$

iar

$$H = \gamma\cdot h = 2\cdot 2 = 4 \text{ mm}.$$

Volumul plăcii cu nervuri va fi:

$$V = \pi\cdot 125^2\cdot 2 + 8\cdot 14\cdot(4-2)\cdot 125 = 126174,7 \text{ mm}^3$$

Grosimea plăcii fără nervuri este dată de relaţia (6.13) cînd $\sigma_{max} = 150$ MPa

$$h_o = \sqrt{\frac{0,75 \cdot p \cdot R^2}{150}} = \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,1 \cdot 125^2}{150}} = 2,79mm \cong 3 \text{ mm}$$

Volumul plăcii fără nervuri

$$V_o = \pi \cdot 125^2 \cdot 3 = 147262,16 \text{ mm}^3.$$

In final, rezultă $V/V_o = 0,86$. Dacă se calculează tensiunea maximă în nervură se obţine $\sigma_{max} = 260$ MPa adică solicitarea ei este în domeniul elastico-plastic. Parametrul $n_r\beta$ s-a adoptat mai mic întrucît rezultă o lăţime destul de mare a nervurii.

In figura 6.2 s-a trasat graficul funcţiei (6.16) în raport cu variabilă γ, cînd valoarea lui $n_r\beta$ este fixată.

In mod analog se poate trece la determinarea dimensiunilor nervurilor ca şi în exemplul anterior.

In cazul cînd este luată în calcul tensiunea maximă din nervură, pentru placa circulară cu nervuri cu contur încastrat,

$$\sigma_{max} = \frac{15(1 - \nu^2)}{4(5 + 6\lambda_r)} \frac{pR^2H}{h^3}, \tag{6.20}$$

funcţia (6.8) are forma:

$$\frac{V}{V_o} = \frac{0,95 + 1,9 \cdot n_r\beta \cdot (\gamma - 1)}{\sqrt{1 + 1,092\, n_r\beta(\gamma^3 - 1)}}. \tag{6.21}$$

Reprezentarea grafică a relaţiei (6.21) este dată în figura 6.3 cînd parametrul γ este fixat la valorile 2, 4 şi 6.

Soluţia ecuaţiei obţinută din anularea derivatei funcţiei (6.21) în raport cu variabilă $(n_r\beta)$ este dată de relaţia:

$$(n_r\beta)_o = \frac{1,03(\gamma^2 + \gamma + 1) - 3,8}{2,07 \cdot \gamma^3 + 4,14\gamma - 6,21}. \tag{6.22}$$

Se constată că domeniul pentru care funcţia (6.21) are valori mai mici decît unitatea creşte cu cît parametrul γ are valori mai mari. Funcţia (6.21) are valoarea minimă atunci cînd $(n_r\beta)$ este dat de relaţia (6.22).

Să se determine dimensiunile unei plăci cu 8 nervuri încastrată pe conturul exterior de rază R = 125 mm solicitată de o forţă uniform distribuită p = 0,1 MPa. Se admite $\gamma = 8$.

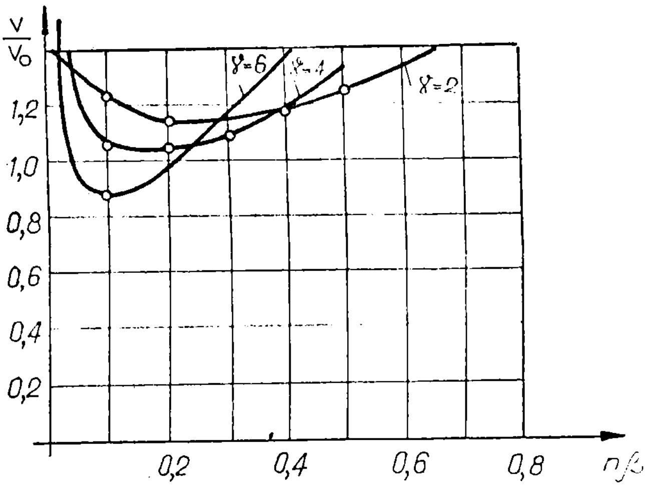


Fig.6.3

Din relaţia (6.22) rezultă:

$$(n_r\beta)_o = \frac{1,03(8^2 + 8 + 1) - 3,8}{2,07\cdot 8^3 + 4,14\cdot 8 - 6,21} = 0,06569$$

Rezultă $\beta = 0,0082$ iar $t = 2\pi R\beta = 2\cdot\pi\cdot 125\cdot 0,0082 =$
$= 6,45$ mm ≈ 7 mm.

Cu relaţia (6.12) se determină:

$$\lambda_r = (1 - 0,3^2)(8^3 - 1)\cdot 8\cdot 0,0082 = 30,546$$

Atunci cînd $\sigma_{max} = \sigma_a$ din relaţia (6.20) rezultă:

$$h = \sqrt{\frac{15(1 - \nu^2)}{4(5 + 6\lambda_r)}\,\frac{pR^2}{\sigma_a}} = \sqrt{\frac{15\cdot 0,91\cdot 0,1\cdot 125^2\cdot 4}{4(5+6\cdot 30,546)\cdot 150}}$$

$$= 0,87 \text{ mm} \approx 1 \text{ mm}.$$

Deci $H = \gamma\cdot h = 8\cdot 1 = 8$ mm iar volumul plăcii cu nervuri

$$V = \pi\, 125^2\, 1 + 8\cdot 7\cdot (8 - 1)\, 125 = 98087,3 \text{ mm}^3.$$

Grosimea plăcii fără nervuri se obţine din relaţia (6.13)

$$h_o = \sqrt{\frac{0,75\cdot p\cdot R^2}{\sigma_a}} = \sqrt{\frac{0,75\cdot 0,1\cdot 125^2}{150}} = 2,79 \approx 3 \text{ mm}$$

Volumul plăcii fără nervuri

$V_o = \pi \cdot 125^2 \cdot 3 = 147262{,}16\ mm^3.$

In aceste condiţii se obţine $V/V_o = 0{,}67.$

6.4 Condiţia de rigiditate

Dimensiunile plăcii cu nervuri încastrată pe contur şi solicitată de către o sarcină uniform distribuită p, în raport cu placa fără nervuri, pot fi stabilite şi din condiţia de rigiditate (6.10).

Săgeata maximă a plăcii cu nervuri se obţine din relaţia (5.215) avînd forma:

$$w_{max} = \frac{p \cdot R^4}{64(1 + 1{,}2 \cdot \lambda_r)D}, \tag{6.23}$$

unde λ_r este dat de relaţia (4.39) iar rigiditatea cilindrică D de relaţia (3.35).

Din lucrarea [127] se determină săgeata maximă pentru placa circulară fără nervuri

$$w^o_{max} = \frac{p \cdot R^4}{64 D_o}. \tag{6.24}$$

Relaţiile (6.23) şi (6.24) se introduc în condiţia de rigiditate (6.10) obţinîndu-se:

$$\frac{\alpha}{\alpha_o} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 1{,}092\, n_r \beta (\gamma^3 - 1)}}. \tag{6.25}$$

Relaţia (6.25) se introduce în (6.8) rezultînd:

$$\frac{V}{V_o} = \frac{1 + n_r \beta (\gamma - 1)}{\sqrt[3]{1 + 1{,}092\, n_r \beta (\gamma^3 - 1)}}. \tag{6.26}$$

Reprezentarea grafică a relaţiei (6.26) în funcţie de variabila $n_r \beta$ pentru diferite valori ale lui γ este dată în figura 6.4. Domeniul de realizarea unor plăci circulare cu nervuri mai uşoare decît plăcile fără nervuri se măreşte dacă valorile parametrului γ cresc. Valoarea de minim a funcţiei se obţine pentru

$$(n_r\beta)_o = \frac{0,25\cdot(\gamma^2 + \gamma + 1) - 1,37}{\gamma^3 - 1} . \qquad (6.27)$$

Cele mai raţionale plăci circulare cu nervuri se obţin pentru valori $(n_r\beta) \leq (n_r\beta)_o$. Atunci cînd $(n_r\beta) > (n_r\beta)_o$ se obţin plăci cu nervuri avînd raza conturului exterior mică şi un număr mare de nervuri radiale.

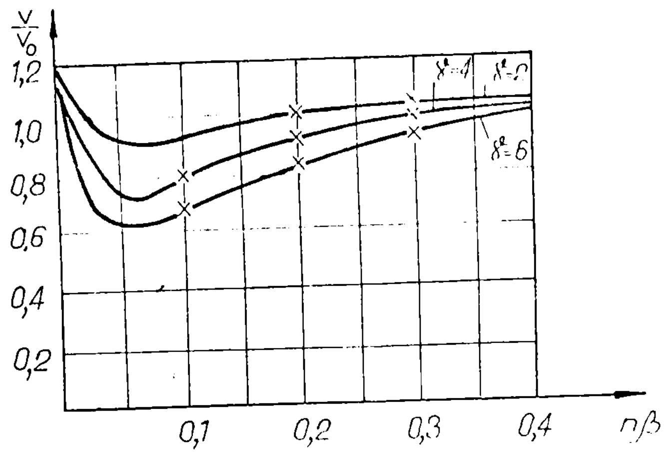


Fig.6.4

Să se determine dimensiunile unei plăci circulare cu 8 nervuri, încastrată pe conturul exterior de rază R = 125 mm, solicitată de o sarcină uniform distribuită de 0,1 MPa dacă săgeata maximă de 1 mm. Se admite γ = 4.

Din relaţia (6.27) rezultă:

$$(n_r\beta)_o = \frac{0,25(4^2 + 4 + 1) - 1,37}{4^3 - 1} = 0,61.$$

Intrucît $(n_r\beta)_o$ = 0,061 rezultă β = 0,0076 de

unde $t = 2\pi R\beta = 2\pi\, 125\; 0,0076 = 5,96$ mm $\approx$ 6 mm.

Grosimea plăcii cu nervuri rezultă din relaţia (6.23)

$$h = \sqrt[3]{\frac{12(1-\nu^2)\;pR^4}{64(1+1,2\lambda_r)Ew_{max}}} = \sqrt[3]{\frac{12\cdot 0,91\cdot 0,1\cdot 125^4}{64\cdot 5,236\cdot 2,1\cdot 10^5\cdot 1}} \approx 2 \text{ mm}$$

unde

$$\lambda_r = (1 - 0,3^2)\cdot 0,061\cdot(4^3 - 1) = 3,53$$

Inălţimea nervurii $H = \delta \cdot h = 4 \cdot 2 = 8$ mm.

Volumul plăcii cu nervuri este egal cu

$$V = \pi\, 125^2 \cdot 2 + 8 \cdot 6 \cdot (8 - 2) \cdot 125 = 134174{,}77\ \text{mm}^3.$$

Din relaţia (6.24) se obţine:

$$h_o = \sqrt[3]{\frac{12(1 - \nu^2) \cdot p \cdot R^4}{64 \cdot E \cdot w^o_{max}}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}1 \cdot 125^4}{64 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 1}} = 2{,}7 \approx 3\ \text{mm}$$

Volumul plăcii fără nervurii

$$V_o = \pi\, 125^2 3 = 147262{,}16\ \text{mm}^3$$

In aceste condiţii $V/V_o = 0{,}91$.

In figura 6.5 se reprezintă graficul funcţiei (6.26) în funcţie de variabila δ cînd parametrul $n_r\beta$ ia diferite valori. Pe baza graficului din figura 6.5 se ajunge la concluzia că volumul plăcii cu nervuri se micşorează cu cît valoarea lui δ creşte pentru valori ale parametrului $n_r\beta$ este fixat.

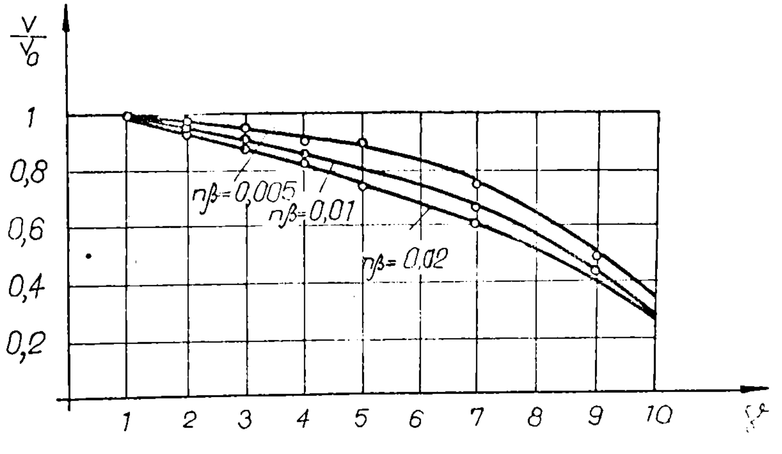


Fig.6.5

Să se determine dimensiunile unei plăci circulare cu 8 nervuri încastrată pe conturul exterior de rază R = 125 mm solicitată de o sarcină uniform distribuită de 0,1 MPa dacă săgeata maximă este de 1 mm. Se admite că lăţimea nervurii este de 4 mm iar parametrul $\delta = 4$.

Dacă $t = 4$ mm atunci

$$n_{r\beta} = n_r \frac{t}{2\pi R} = 8 \frac{4}{2\pi 125} = 0{,}041$$

Din relaţia (6.23) grosimea plăcii cu nervuri va fi:

$$h = \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\; p\; R^4}{64(1+1{,}2\;\lambda_r)E w_{max}}} = \sqrt{\frac{12\cdot 0{,}91\cdot 0{,}1\cdot 125^4}{64\cdot 3.82\cdot 2{,}1\cdot 10^5\cdot 1}} = 1{,}73 \text{ mm} \approx 2 \text{ mm}$$

unde

$$\lambda_r = (1 - 0{,}3^2)\cdot 0{,}041\cdot(4^3 - 1) = 2{,}35.$$

Inălţimea nervurii

$$H = \delta\cdot h = 4\cdot 2 \text{ mm} = 8 \text{ mm}.$$

Volumul plăcii cu nervuri:

$$V = \pi 125^2\cdot 2 + 8\cdot 4\cdot(8 - 2)\cdot 125 = 122174{,}77 \text{ mm}^3$$

De la exemplul anterior, placa fără nervuri are h_o = 3mm şi valumul $V_o = 147262{,}16$ mm^3. Rezultă $V/V_o = 0{,}82$.

6.5 Concluzii

In acest capitol se prezintă o metodă accesibilă de alegere convenabilă a dimensiunilor la placa circulară cu nervuri în raport cu placa circulară fără nervuri. Se analizează placa circulară cu nervuri încastrată pe contur încărcată axial simetric în condiţiile cînd are aceeaşi rezistenţă sau rigiditate cu placa circulară fără nervuri.

Graficele funcţiilor (6.16) şi (6.26) permit stabilirea domeniului de valori pentru parametrii $n_{r\beta}$ şi δ în care placa cu nervuri este mai uşoară decît placa circulară fără nervuri. Cunoaşterea acestor domenii permite stabilirea metodologiei de calcul pentru optimizarea dimensiunilor plăcii în funcţie de necesităţile practice.

7 CONTRIBUTII PRIVIND STUDIUL EXPERIMENTAL AL STARILOR DE TENSIUNE SI DEFORMATIE

7.1 Considerații generale

Determinarea chiar aproximativă a stărilor de tensiune și de deformație la plăcile circulare cu nervuri radiale presupune un calcul complex de rezistență sau de rigiditate. Față de această situație, o investigație experimentală este de mare utilitate, chiar și pentru aprecierea metodei de calcul adoptată.

Analiza experimentală a tensiunilor și deformațiilor urmărește:

- verificarea ipotezelor care stau la baza studiului teoretic al plăcilor cu nervuri prezentat în capitolele 4 și 5;
- completarea calculului de rezistență și confirmarea relațiilor de calcul ce se pot folosi în practică.

Măsurarea deformațiilor și tensiunilor pe cale experimentală se face prin mai multe metode printre care:

- tensometria electrică rezistivă;
- fotoelasticimetrie;
- interferometrie holografică.

Determinarea stărilor de tensiune și deformație cu ajutorul tensometriei electrice rezistive, la plăci circulare cu nervuri radiale încastrate pe contur solicitate cu o forță uniform distribuită, este prezentată în lucrările [26] și [36].

In acest capitol se prezintă evaluarea experimentală a tensiunilor și deformațiilor la unele modele de plăci solicitate cu o forță transversală uniform distribuită sau cu o forță concentrată centrală cu metodele menționate mai sus.

7.2 Măsurători și verificări experimentale tensometrice

7.2.1 Principiu

Bazele teoretice ale tensometriei electrice rezistive, caracteristicile și tipurile de traductori, principiile de măsurare și interpretare ale rezultatelor experimentale sînt prezentate detailat în literatura de specialitate [94], [147], [224].

Mărimile tensiunilor au rezultat, pentru nervuri, respectiv pentru porţiunea de placă dintre nervuri din relaţiile:

$$\sigma_{rn} = E \cdot \varepsilon_r \quad ; \tag{7.1}$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2); \tag{7.2}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \varepsilon_1 + \varepsilon_2), \tag{7.3}$$

unde se determină experimental lungirile specifice ε_1 şi ε_2 iar constantele elastice E şi ν sînt cunoscute sau stabilite experimental.

Pentru măsurarea deplasărilor diferitelor puncte ale nervurilor, precum şi a porţiunii de placă dintre nervuri, s-a folosit microcomparatoare cu tijă avînd precizia de 0,01 mm.

7.2.2 Modele şi instalaţia pentru încercarea plăci circulare cu nervuri radiale.

Determinările experimentale s-au făcut la două categorii de plăci circulare cu nervuri radiale cu opt nervuri confecţionate din aluminiu (fig.7.1) şi din oţel avînd 4, 6 şi 8 nervuri (fig.7.2).

Placa confecţionată din aluminiu ATC Si 10 Mg a fost turnată şi prelucrată prin aşchiere pe o freză universală de tip FUS 22. Atît modelele din aluminiu cît şi cele din oţel au fost fixate pe o masă divizoare. S-au trasat nervurile după care s-a efectuat prelucrarea nervurilor de pe o faţă apoi placa s-a întors şi s-au prelucrat nervurile de pe partea opusă. S-a urmărit ca nervurile de pe cele două feţe să fie aşezate simetric faţă de planul median şi faţă de un plan perpendicular pe planul median care conţine centrul plăcii şi axa nervurii. Obţinerea simetriei faţă de planul median s-a realizat prin prelucrarea la aceeaşi înălţime a nervurilor în raport cu feţele plăcii. Totodată s-a urmărit ca să aibă aceeaşi grosime.

Din şarja de turnare folosită pentru turnarea plăcilor din aluminiu s-au confecţionat epruvete pentru stabilirea caracteristicilor mecanice. După efectuarea încercărilor la tracţiune ale epruvetelor şi prelucrarea datelor experimentale a rezultat:

$$E = 70000 \ \text{MPa} \ ; \qquad \nu = 0{,}33 \ . \qquad (7.4)$$

Plăcile prezentate în figura 7.2 au fost confecţionate din OL 45 avînd:

$$E = 2{,}1 \cdot 10^5 \ \text{MPa}; \qquad \nu = 0{,}3. \qquad (7.5)$$

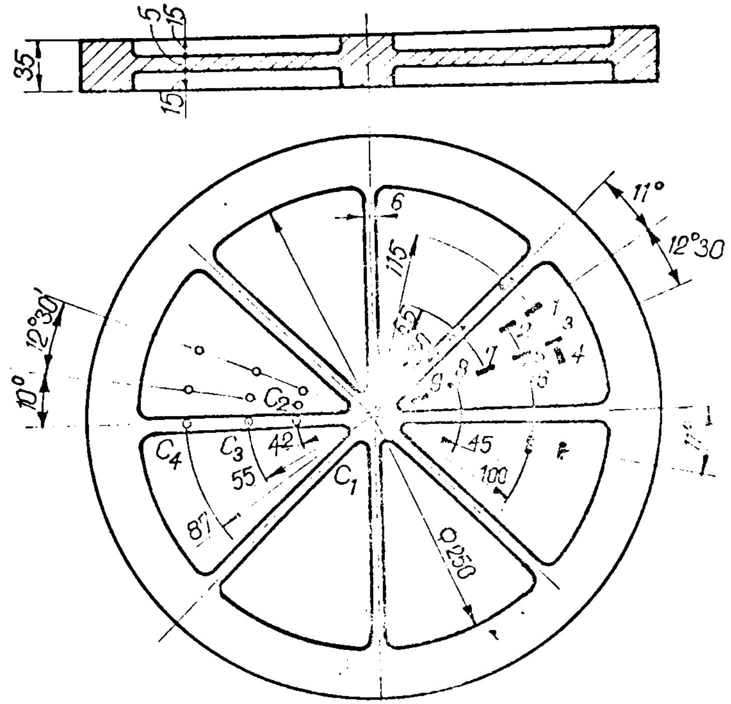


Fig.7.1

Definitivarea dimensiunilor plăcilor s-au stabilit după terminarea operaţiilor de prelucrare şi de pregătire a suprafeţelor în vederea amplasării traductorilor electrici rezistivi. Pentru stabilirea grosimii plăcii, lăţimii nervurilor s-au făcut măsurători în diferite regiuni stabilindu-se o valoare medie şi o abatere Δh, respectiv Δt.

Avînd în vedere abaterile dimensionale cît şi a caracteristicilor mecanice s-a calculat abaterea rigidităţii cilindrice cu relaţia:

$$\frac{\Delta D}{D} = \pm \frac{\Delta E}{E} \pm \frac{3 \cdot \Delta h}{h} \pm \frac{2 \Delta \nu}{\nu} \frac{\nu^2}{1 - \nu^2} \ . \qquad (7.6)$$

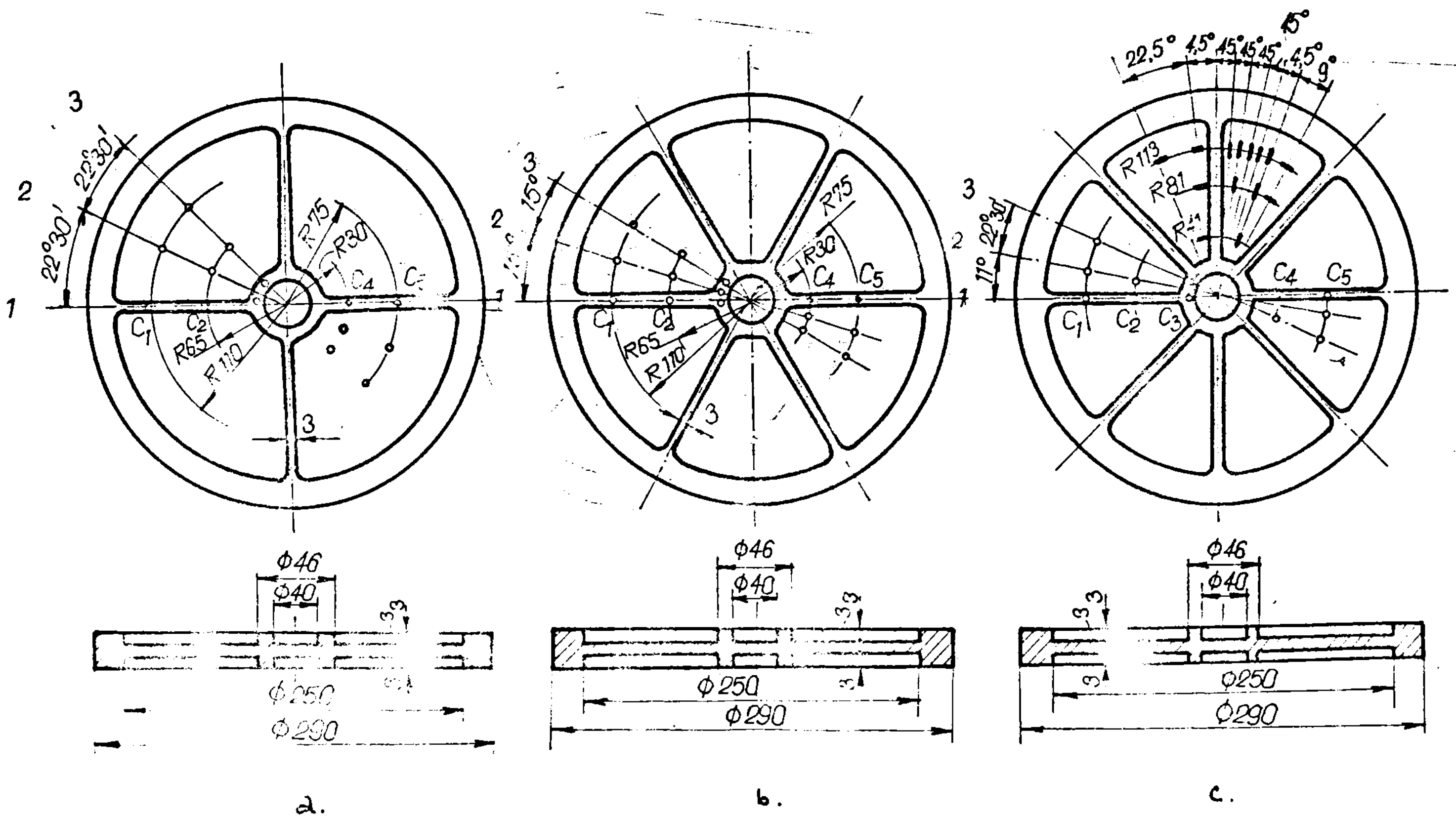

1
2
3
22°30'
22°30'
R75
R30
C1
C2
C4
C5
R65
R110
3
Φ46
Φ40
Φ250
Φ290
a.
15°
b.
11°
22°30'
R113
R81
R41
22,5°
4,5°
9°
C3
c.

Fig. 7.2.

Abaterea rigidității cilindrice ajunge pînă la 3,7% în cazul plăcii din aluminiu și la 2,7% la plăcile din oțel.

In figura 7.3 este reprezentată schematic instalația de încercat plăci circulare cu nervuri radiale care cuprinde voltmetrul electronic (A), puntea tensometrică (B) de tip M 2302, cutiile de comutare (C) de tip M 2304 și dispozitivul de solicitare (D). Cablurile de legătură (E) între traductori și cutiile de comutare au patru fire și sînt ecranate.

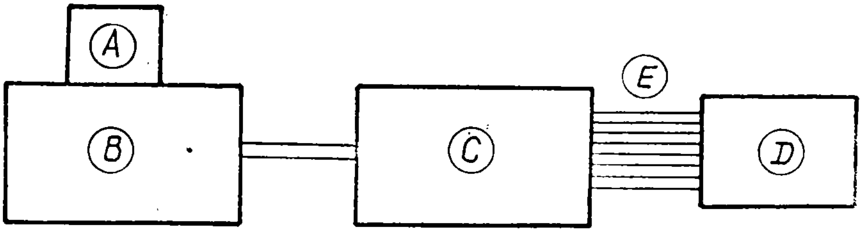
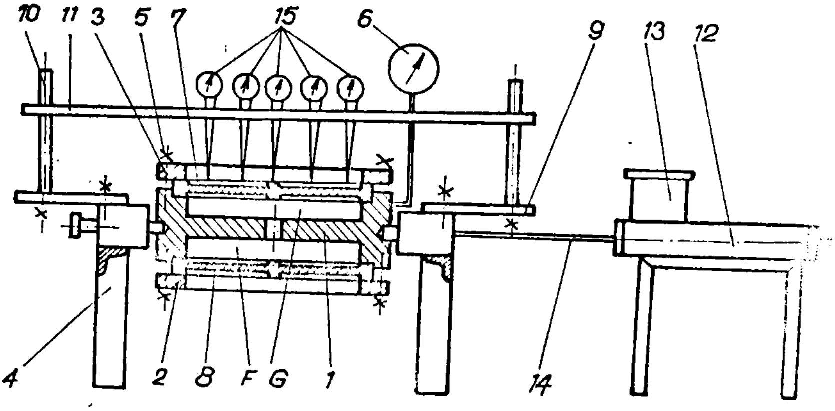


Fig.7.3

In figura 7.4 este reprezentat dispozitivul de încărcare al plăcilor cu nervuri. Intre corpul din mijloc (1) și inelele (2) și (3) s-au prins două modele identice de plăci cu nervuri radiale (7) și (8). Placa (7) este folosită drept model pentru determinarea mărimilor experimentale. Placa (8) s-a folosit pentru a împedeca rotirea inelelor (2) și (3) precum și a corpului (1) în timpul solicitării, adică realizării unei încastrări cît mai apropiată de realitate. Inelele (2) și (3) fixează cele două modele identice de plăci în corpul (1) cu ajutorul a 36 de șuruburi. Corpul (1) este prevăzut pe ambele fețe cu adînciturile F și G ce comunică între ele. In aceste spații se introduce ulei sub presiune de către pompa (12) prin intermediul unui racord cu inserție (14). Valoarea presiunii uleiului, în spațiile F și G poate fi citită la manometrul (6). Deplasarea transversală a plăcii au fost stabilită cu ajutorul microcomparatoarelor cu tijă (15) avînd precizia de 0,1 mm așezate în direcție radială pe nervuri prin intermediul unui dispozitiv format din elementele (9), (10), (11) cît și între nervuri. Corpul dispozitivului (1) este fixat pe suportul (4). Celelalte părți componente ale instalației sînt specificate în figura 7.4.



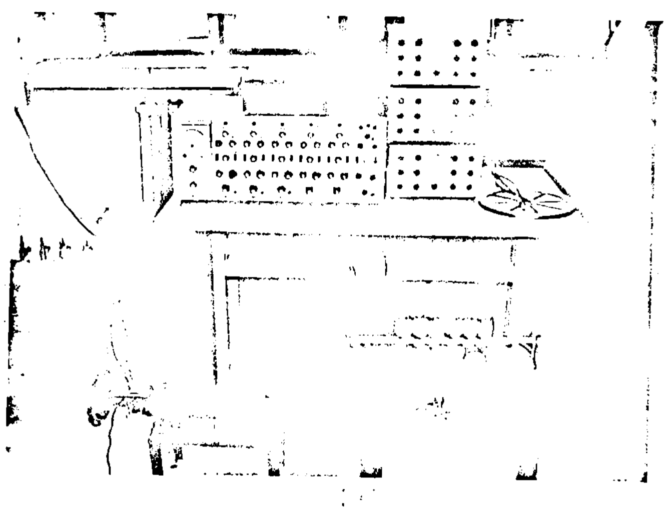


Fig.7.4

7.2.3 Programul încercărilor

Deformaţiile specifice şi deplasările transversale, în diferite puncte ale modelelor din figurile 7.1 şi 7.2,c au fost stabilite cu ajutorul traductorilor electrici rezistivi şi a microcomparatoarelor cu tijă avînd precizia de 0,01 mm. Locurile de amplasare ale traductorilor electrici rezistivi sînt specificate în figurile 7.1 şi 7.2,c. Traductorii electrici rezistivi s-au fixat, în punctele de măsusurare, cu ajutorul adezivului in - digen CIANOFIX B-1 şi acoperiţi cu IZAMET R 16 pentru ai proteja contra umidităţii şi uleiului. S-au utilizat traductori electrici rezistivi de tip TER 10 H 120 cu rezistenţa R = 130 ± 0,5 Ω şi constanta k = 1,95, fabricate la INCERC - Bucureşti. Traductorii electrici rezistivi s-au aplicat pe plăci în locurile specificate de figurile 7.1 şi 7.2. Inainte de efectuarea măsurătorilor s-a făcut o echilibrare de „zero" (rezistivă şi capacitivă) a punţii tensometrice şi o citire iniţială. Pentru a evita eventualele erori s-au efectuat trei citiri la încărcare-descărcare a deformaţiilor plăcilor cu nervuri. Datele experimentale au fost prelucrate luînd în considerare valorile medii ale mărimilor citite.

7.2.4 Rezultate experimentale şi discuţii

Placa din aluminiu, prezentată în figura 7.1, are 8 nervuri şi este încărcată cu o forţă uniform distribuită de 0,1 MPa. Cu ajutorul traductorilor electrici rezistivi s-au determinat

Tabelul 7.1

Metoda	$\rho = \frac{r}{R}$	0	0,24	0,48	0,6	[illegible]	[illegible]	1,0
	[illegible]	0	0,013	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Analitică	σ_r [MPa]	—	11,6	5,36	0,98	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	σ_φ [MPa]	—	12,34	[illegible]	6,19	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	σ_{rn} [MPa]	—	51,7	19,3	-5,01	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	w [mm]	0,19	0,177	0,11	0,081	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Energetică	σ_r [MPa]	—	10,23	6,75	3,36	-2,54	[illegible]	[illegible]
	σ_φ [MPa]	—	10,46	8,56	[illegible]	3,49	[illegible]	[illegible]
	σ_{rn} [MPa]	—	46,77	26,9	7,50	-2,60	[illegible]	[illegible]
	w [mm]	0,191	0,180	[illegible]	0,094	0,059	[illegible]	[illegible]
Elementului Finit	σ_r [MPa]		9,9	4,66	0,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	σ_φ [MPa]	—	10,7	8,6	6,02	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	σ_{rn} [illegible]	—	50,7	[illegible]	4,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	w [mm]	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Experimentală	[MPa]	—	[illegible]	[illegible]	0,88	-4,0	[illegible]	
	σ_φ [MPa]	—	11,7	[illegible]	5,8	2,4	2,9	--
	σ_{rn} [MPa]	—	—	11,7	-4,1	[illegible]	-98,8	—
	w [mm]	—	0,15	0,1	0,06	0,03	---	---

deformaţiile specifice pe direcţiile radiale şi circumferenţiale şi tensiunile cu relaţiile (7.2) şi (7.3). Deplasările transversale ale plăcii au fost măsurate cu ajutorul microcomparatoarelor cu tijă. In tabelul 7.1 sînt sistematizate valorile pentru deplasările transversale şi tensiunile principale stabilite cu metoda analitică, energetică, metoda elementului finit şi cele determinate experimental.

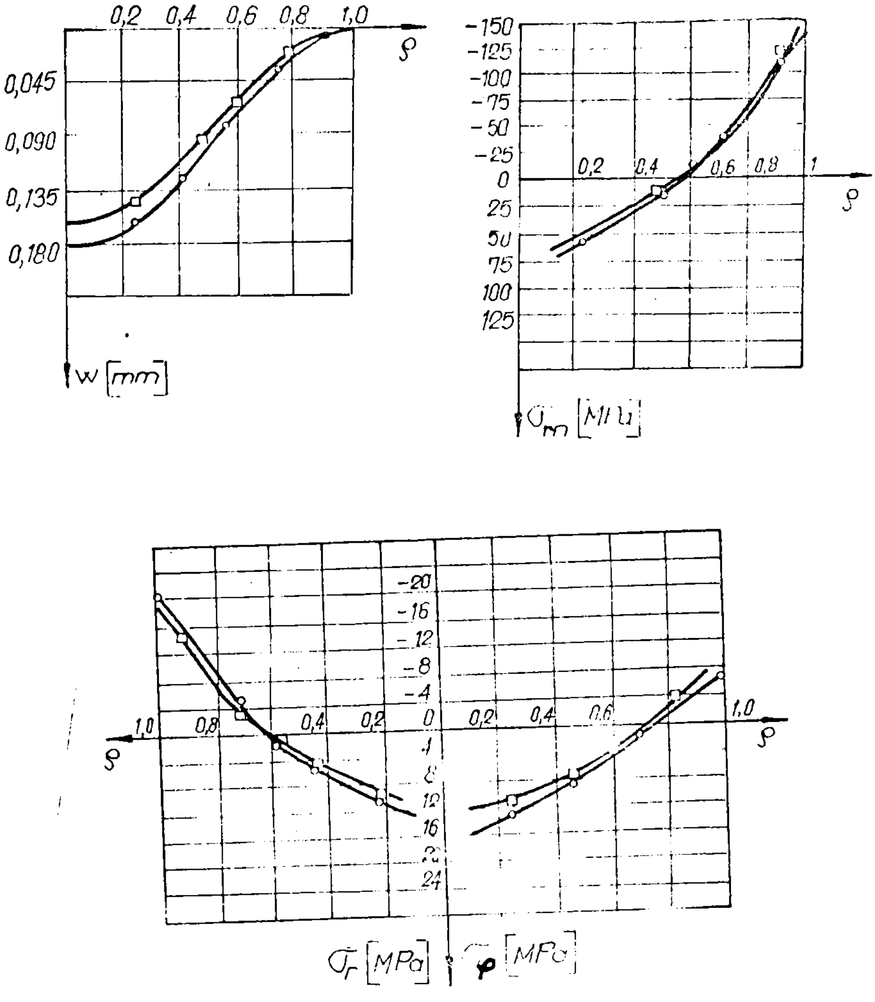


Fig.7.5

In figura 7.5 sînt reprezentate grafic rezultatele obţinute analitic şi experimental. Din tabelul 7.1 şi figura 7.5 rezultă că diferenţele dintre rezultatele determinate analitic şi cele stabilite experimental sînt nesemnificative de aceea relaţiile obţinute la studiul plăcilor circulare cu nervuri sînt recomandate pentru efectuarea calculului de rezistenţă şi de rigiditate. Totodată rezultatele determinate analitic sînt comparabile cu cele stabilite cu metoda elementului finit diferenţa dintre ele ajungînd pînă la 9,3%.

In continuare se prezintă rezultatele experimentale stabilite la tipul de plăci prezentat în figura 7.2. Plăcile din figurile 7.2,a şi 7.2,b avînd un număr diferit de nervuri, au fost încercate în două trepte de încărcare de 0,1 MPa şi 0,2 MPa. S-au măsurat deplasările transversale cu ajutorul micro - comparatoarelor cu tijă în diferite puncte atît în dreptul nervurii cît şi la porţiunea de placă cuprinsă între nervuri.

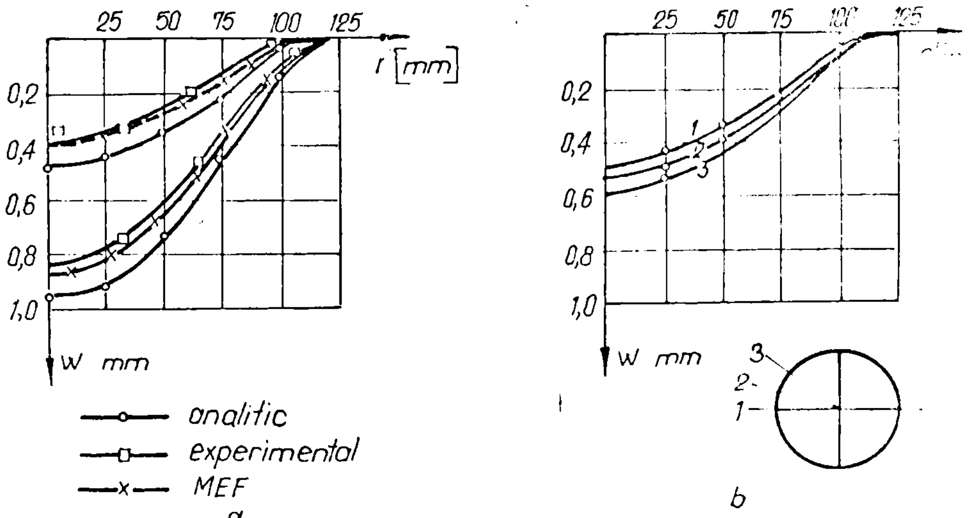


Fig.7.6

Mărimile experimentale au fost prelucrate luînd în considerare valorile medii ale deplasărilor citite. Rezultatele experimentale au fost comparate cu cele obţinute analitic şi cu metoda elementului finit. Starea de deformaţie obţinută cu metoda elementului finit a fost stabilită cu programul de calcul SIBSM. Placa cu 4 nervuri (fig.7.2,a) a fost împărţită în patru substructuri. Substructura rădăcină a fost discretizată în 17 elemente de bară şi 120 elemente de placă interconectate în 140 de noduri. In figura 7.6 s-au prezentat grafic valorile deplasării punctelor din dreptul nervurii cît şi a punctelor aparţinînd porţiunii dintre nervuri. S-au găsit diferenţe nesemnificative între rezultatele experimentale şi cele determinate cu metoda elementului finit şi diferenţe mari care ajung pînă la 30-40% între rezultatele experimentale şi cele stabilite analitic.

Placa cu 6 nervuri (fig.7.2,b) a fost împărţită în 6 substructuri. Substructura rădăcină a fost discretizată în 17 elemente de bară şi 170 elemente de placă interconectate în 198 de noduri. In figura 7.7 se prezintă diagramele deplasării transversale ale plăcii pe baza rezultatelor analitice, numerice şi experimentale.

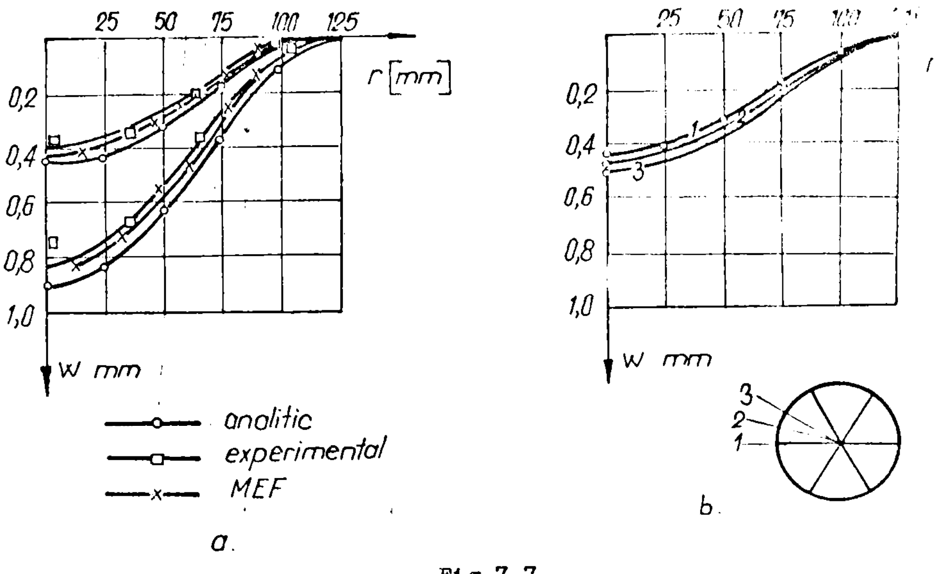


Fig.7.7

Diferenţele dintre reultatele obţinute analitic şi cele determinate experimental depăşesc 12%.

In figurile 7.6,b şi 7.7,b se reprezintă deplasarea punctelor din dreptul nervurii cît şi a punctelor aflate pe razele (2) şi (3) aparţinînd porţiunii de placă dintre nervuri Se constată că deplasările punctelor din dreptul nervurilor sînt mai mici decît cele ale punctelor aparţinînd porţiunii de placă cuprinsă între nervuri. La creşterea numărului de nervuri diferenţele dintre deplasările acestor puncte se micşorează.

Pentru determinarea stării de deformaţie şi de tensiune la placa circulară cu 8 nervuri (fig.7.2,c) s-a folosit programul de calcul SUBSM. Placa s-a împărţit în 8 substructuri (fig.7.8,a). Substructura rădăcină (fig.7.8,b) a fost discretizată în 13 elemente de bară şi 78 elemente de placă.

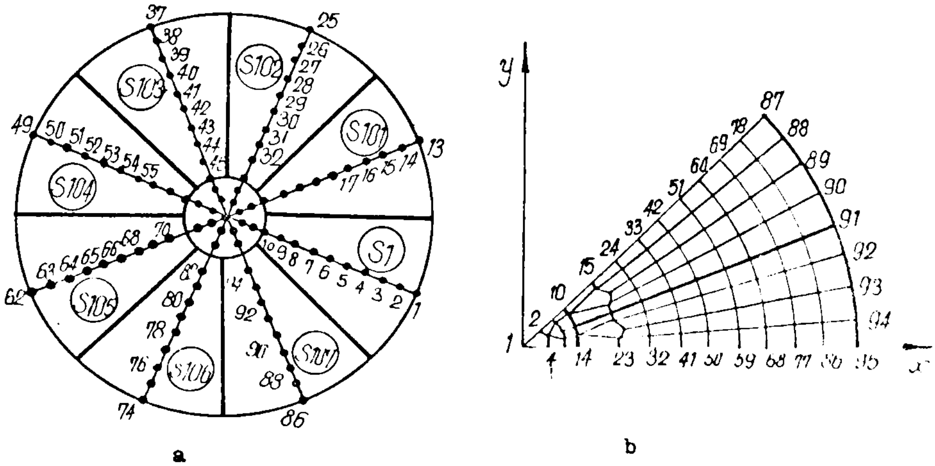


Fig.7.8

Experimental s-au determinat deplasările transversale şi deformaţiile specifice în diferite puncte ale plăcii. Amplasarea traductorilor electrici rezistivi este arătată în figura 7.2,c. In figura 7.9 sînt prezentate comparativ diagramele deplasării transversale cît şi a tensiunilor obţinute expermental, cu metoda elementului finit şi analitic pentru o încărcare cu o sarcină uniform distribuită de 0,1 MPa . Diferenţele dintre deplasările măsurate şi cele calculate variază între 4 - 9%. Totodată se constată diferenţe nesemnificative dintre mărimile calculate cu metoda elementului finit şi cele stabilite experimental. In zona nervurii inelare s-a obţinut atît cu metoda elementului finit cît şi prin metoda analitică o micşorare a tensiunilor normale σ_r şi σ_φ .

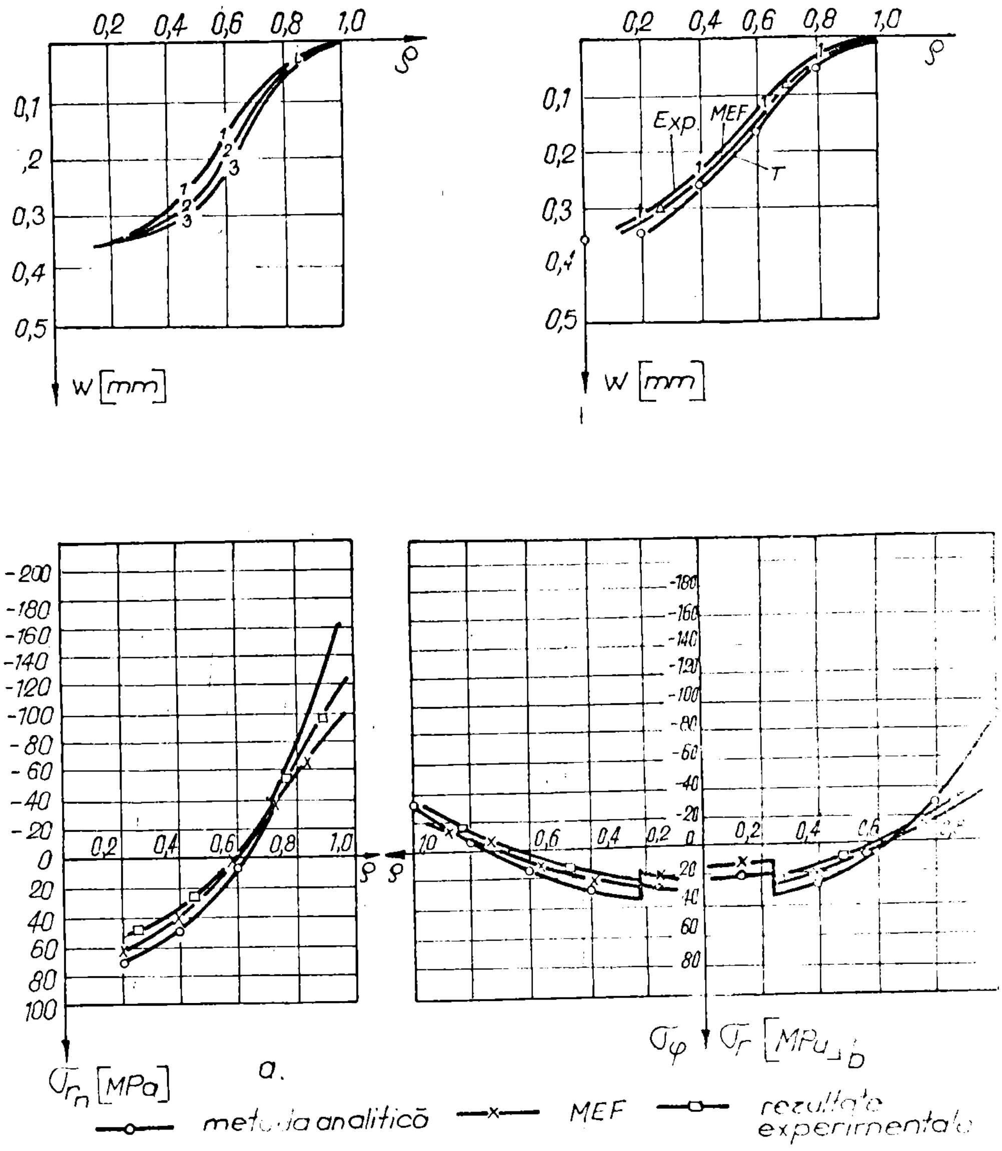


Fig.7.9

Pentru efectuarea calculului analitic s-au considerat două regiuni. O regiune interioară nervurii inelare în care s-au considerat relaţiile de calcul ale plăcii izotrope şi una exterioară în care s-au adoptat relaţiile de calcul ale plăcilor circulare cu nervuri radiale din capitolele 4 şi 5. Pentru determinarea constantelor de integrare, pe lîngă condiţiile de legătură şi existenţa mărimilor finite în centrul plăcii, s-a considerat condiţia de continuitate la trecerea de la regiunea interioară la cea exterioară. In acest sens s-a egalat unghiul de rotire al normalei la suprafaţa mediană cu unghiul de rotire al nervurii inelare.

7.2.5 Concluzii

Din cercetările tensometrice, analitice şi numerice efectuate asupra plăcilor circulare cu nervuri radiale rezultă:

- diferenţele între valorile tensiunilor determinate experimental şi analitic ajung la 9,3%;
- mărimile determinate experimental sînt mai mici decît cele stabilite analitic;
- relaţiile de calcul pentru deplasări şi tensiuni stabilite în capitolul 5 pot fi aplicate la plăcile circulare care au 8 sau mai multe nervuri radiale;
- programul de calcul cu elemente finite determină deplasare şi tensiunea aproape în orice punct iar metoda tensometrică stabileşte deformaţia şi tensiunea numai în anumite puncte. Se constată că rezultatele dterminate cu metoda elementului finit sînt mai mari decît cele stabilite experimental;
- diferenţele între valorile mărimilor stabilite cu metoda analitică şi metoda Rayleigh - Ritz sînt neimportante.

7.3 Studiul plăcilor cu ajutorul fotoelasticimetriei

7.3.1 Principiu

Un corp solid sub acţiunea forţelor se deformează şi îşi pierde izotropia, devenind anizotrop din punct de vedere mecanic. In cazul cînd corpul este transparent el devine birefrigerent ca urmare a anizotropiei optice pe care o capătă în urma solicitării. Proprietatea de birefrigerenţă a corpurilor solide transparente se poate utiliza la determinarea stării de tensiune. In general, fotoelasticimetria stabileşte starea de tensiune în cazul problemelor plane ale teoriei elasticităţii. Totuşi ea a fost extinsă şi la studiul stărilor spaţiale de solicitare prin metoda îngheţării. Acest procedeu se bazează pe proprietatea materialelor de a păstra o deformaţie permanentă după tratamentul de încălzire a modelului solicitat. In lucrarea [224] sînt prezentate toate aspectele privind determinarea stării de tensiune cu metoda îngheţării.

7.3.2 Modelul fotoelastic. Dispozitivul de încărcare.

Modelul fotoelastic s-a executat prin turnare la rece din ARALDIT D. Turnarea modelului s-a făcut într-o matriţă confecţionată din plexiglas. In figura 7.10 este prezentat modelul turnat. Placa model are 10 nervuri. După turnare modelul fotoelastic nu a mai fost prelucrat. Modelul fotoelastic a fost introdus în dispozitivul de solicitare prezentat în figura 7.11. Dispozitivul este format din două inele care fixează modelul. Intre inelele (2) şi (4) şi model (1) au fost introduse garniturile de cauciuc (3). Fixarea modelului între cele două inele s-a făcut cu ajutorul şuruburilor (5).

Determinările experimentale au fost efectuate în cadrul laboratorului de rezistenţa materialelor de la Institutul Politehnic Bucureşti.

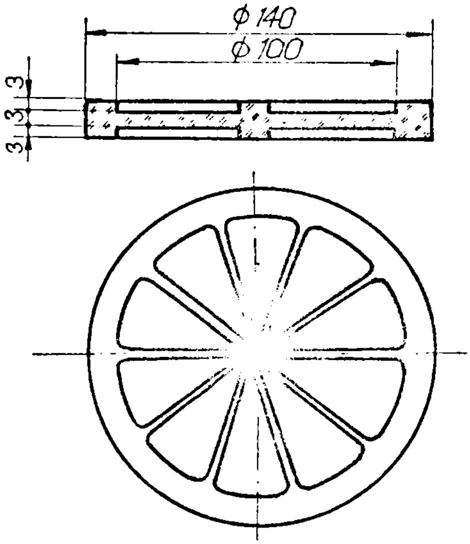


Fig.7.10

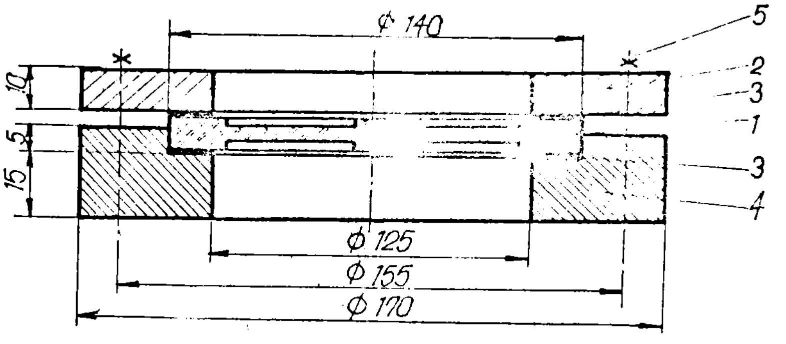


Fig.7.11

7.3.3 Determinări experimentale

Modelul a fost fixat în dispozitivul(fig.7.11) şi încărcat cu o forţă concentrată de 5 N aplicată în centrul plăcii prin intermediul unui cilindru de plexiglas având diametrul de 5 mm. Starea de tensiune a fost fixată în model cu tehnica înghețării. In acest scop, modelul neîncărcat încastrat pe con -

exterior cu ajutorul dispozitivului prezentat în figura 7.11 a fost introdus într-o etuvă programabilă şi încălzită lent pînă la temperatura de 85°C. Temperatura a fost controlată cu o precizie de ±5%. In etuvă a fost introdus în acelaşi timp un disc pentru determinarea constantei fotoelastice a materialului modelului.

La atingerea temperaturii de 85°C modelul şi discul s-au lăsat o jumătate de oră pentru uniformizarea temperaturii. La temperatura de 85°C modelul a fost încărcat cu o forţă concentrată aplicată în centrul iar discul comprimat diametral cu două forţe. Modelul încărcat s-a menţinut la temperatura de 85°C 2 ore astfel ca temperatura să se uniformizeze în toată masa. In continuare modelul s-a răcit lent , prin scăderea temperaturii cu o viteză de 5°C/oră pînă la temperatura camerei. La temperatura camerei, forţa exterioară s-a îndepărtat iar starea de tensiune din model a rămas fixată la starea macromoleculară. Modelul a fost secţionat printr-o nervură şi la mijlocul distanţei dintre nervuri. Prin secţionare s-au obţinut felii avînd grosimea de 4 mm. Aceste felii au fost examinate în lumină monocromatică cu lungimea de undă λ = 600 μm într-un polariscop cu lumină polarizată circular. Franjele izocromate care se observă pe suprafaţa modelului au fost fotografiate şi sînt prezentate în figurile 7.12 şi 7.13.

Din analiza fotoelastică, în planul elementului, rezultă izocromate obţinute cu relaţia:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = f_\sigma \cdot N, \qquad (7.7)$$

unde f_σ este componenta fotoelastică a materialului, N - ordinul de bandă citit pe contur.

Constanta fotoelastică s-a determinat pe discul de etalonare şi are valoarea f_σ = 0,0182 N/mm^2 franjă. Pe baza acestor înregistrări s-au putut trasa curbele de variaţie ale tensiunilor. Utilizînd datele obţinute din determinările fotoelastice s-au trasat curbele de variaţie ale tensiunii normale din dreptul nervurii cît şi la mijlocul distanţei dintre nervuri fiind reprezentate în figurile 7.12 şi 7.13.

Prin aplicarea legii similitudinii se pot trece rezultatele de la model la prototip. Intrucît în dreptul nervurii tensiunile sînt proporţionale cu PH/h^3 atunci tensiunile din prototip se obţin cu relaţia:

$$\sigma_p = \sigma_m \times \frac{P_p}{P_m} \times \frac{h_m^3}{h_p^3} \times \frac{H_p}{H_m} \qquad (7.8)$$

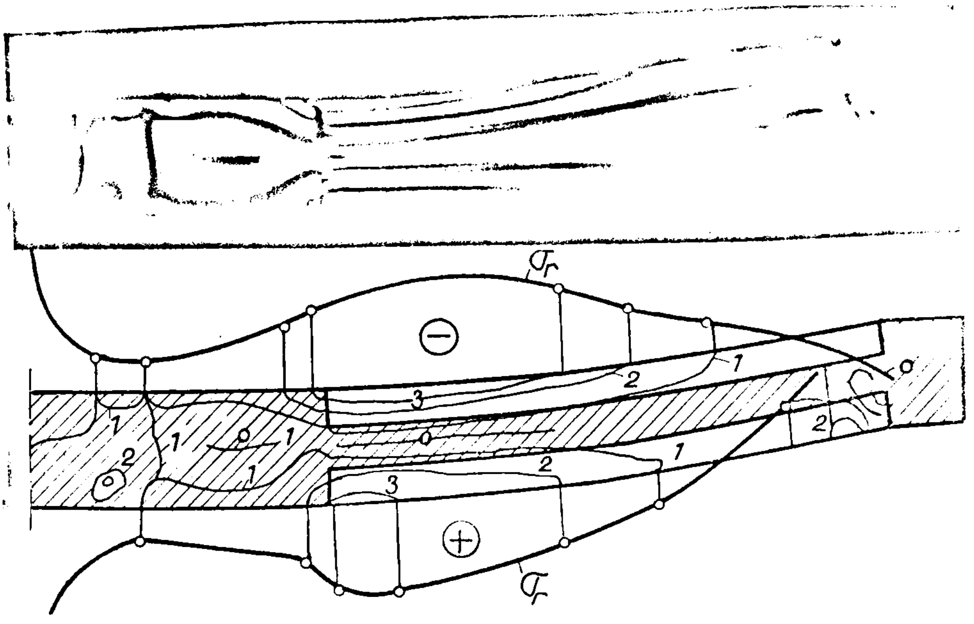


Fig.7.12

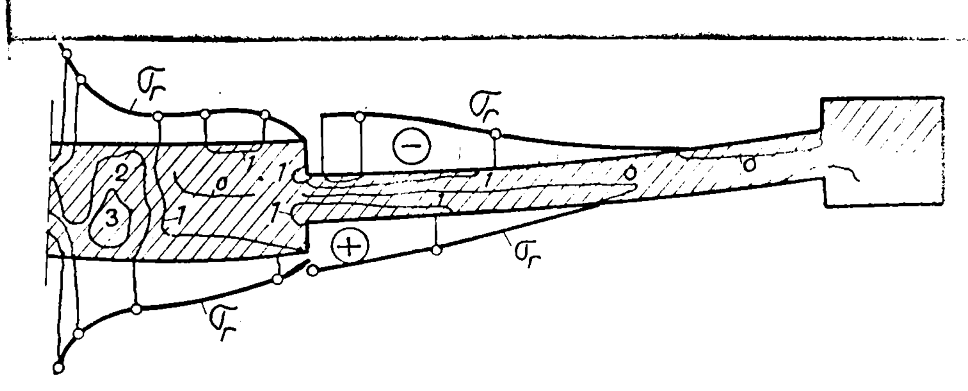


Fig.7.13

unde indicele p se referă la prototip iar m - la model, σ - tensiunea într-un punct, P - încărcarea, h - grosimea plăcii H - înălţimea nervurii.

Intrucît efectul coeficientului de contracţie transversală nu poate fi neglijat se face o corecţie a tensiunilor cu

$$k = \frac{1 - \nu_p^2}{1 - \nu_m^2} = \frac{1 - 0,3^2}{1 - 0,45^2} = 1,14. \qquad (7.9)$$

La elementul de placă cuprins între nervuri este mai dificil de trecut rezultatele de la prototip datorită distorsiunilor care trebuiesc luate în calcul, adică introducerea unui coeficient de corecţie destul de complicat. In figura 7.14 s-au prezentat comparativ valorile tensiunilor obţinute analitic şi experimental în nervură la o placă din oţel de rază R = 150mm avînd 10 nervuri de înălţime H = 27 mm, grosime t = mm, h = 9 mm. Placa are o parte rigidă în centru, locul de întîlnire al nervurilor, de rază r=16 mm

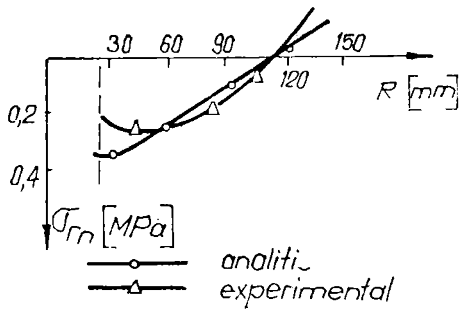


Fig.7.14

Incărcarea plăcii s-a făcut cu o forţă concentrată de 100 N în centru.

7.3.4 Concluzii

Din examinarea curbelor din figurile 7.12 şi 7.13 rezultă că tensiunea radială are o creştere în apropierea zonei de legare a nervurilor cu partea centrală, după care tensiunile scad şi schimbă semnul în apropierea conturului. Totodată tensiunile radiale au valori mai mari în dreptul nervurilor decît în porţiunea dintre nervuri ceea ce confirmă relaţiile de calcul stabilite în capitolul 5.

Comparînd valorile tensiunilor determinate analitic cu cele stabilite experimental (fig.7.14) se constată o bună concordanţă. Diferenţa dintre datele experimentale şi cele analitice nu depăşeşte 7%.

7.4 Studiul deplasărilor plăcilor cu nervuri cu ajutorul interferometriei holografice

7.4.1 Generalități. Principul holografiei

Interferometria holografică oferă posibilitatea măsurării deplasărilor mici de ordinul jumătății lungimii de undă a luminii utilizate. Această metodă nouă constă în a înregistra ...siv pe aceeaşi placă holografică, holograma unei plăci nedeformate şi holograma aceleaşi plăci supusă unei încărcări. Holograma înmagazinează informaţii atît cu privire la imaginea plăcii cît şi la amplitudinea şi defazajul introdus plăcii cînd este iluminată cu o rază coerentă. La înregistrarea hologramei se utilizează schema interferometrică prezentată în figura 7.15

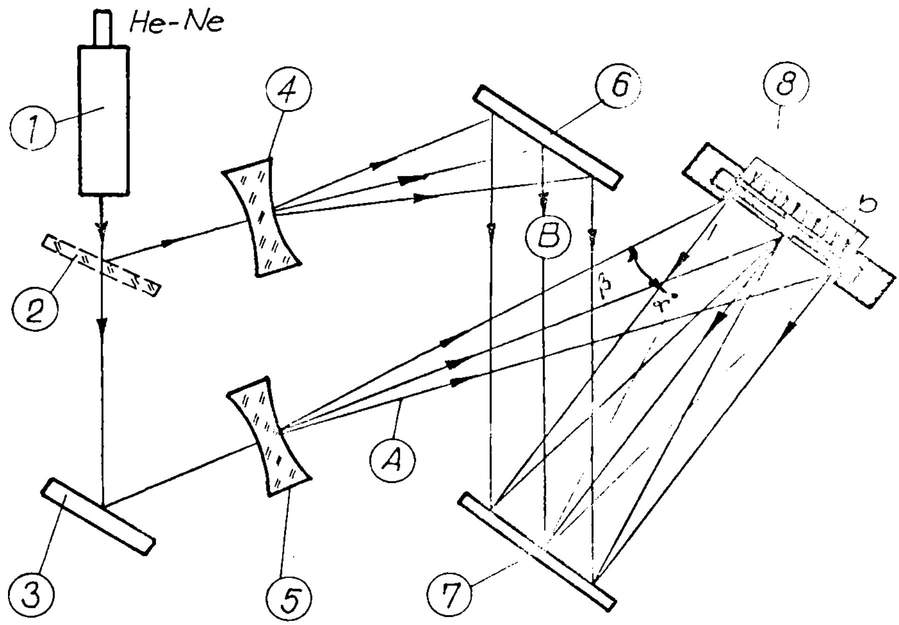


Fig.7.15

Laserul (1) tip HNA - 180, fabricat în Germania, He-Ne, avînd puterea de 50 mW emite lumina care se divide în două fascicule de către divizorul (2). Un fascicul de raze luminoase este folosit pentru iluminarea plăcii (8) prin intermediul lentilei (5) şi a oglinzii (3), numit fascicul obiect (A). Lumina reflectată difuz de placă, ajunge pe placa fotografică (7) sensibilizată de lungimea de undă $\lambda = 632,8$ nm cu a doua componentă a fasciculului luminos numit fascicul de referinţă (D). Fasciculul de referinţă lărgit de lentila (4) iluminează direct placa fotografică (7) după schimbarea traiectoriei de către oglinda (6). Pe placa fotografică (7) se formează un cîmp de interferenţă produs de fasciculul de referinţă şi fasciculul obiect difuz reflectat de pe obiect. Defazajul şi amplitudinea celor două raze componente, care interferează, vor influenţa să apară într-un punct pe placa fotografică, o amplificare sau diminuare, fapt ce se manifestă prin diferite pete luminoase. In stratul foto se memorează informaţia optică emisă de placă ca cîmp de interferenţă. Pentru citirea informaţiei stocate se va ilumina din nou placa cu un fascicul extins (A). In prima iluminare parţială se determină suprafaţa plăcii deformate iar în a doua iluminare parţială se stabileşte suprafaţa plăcii deformate. La redarea hologramei se formează în acelaşi timp două reprezentări diferite ale suprafeţei.

7.4.2 Modele. Dispozitivul de încărcare.

Pentru determinări experimentale s-au executat 3 modele din aluminiu avînd diametrul de 100 mm şi un număr de 10 şi 12 nervuri. Placa are grosimea de 3 mm iar nervurile lungimea de 9 mm şi lăţimea de 3 mm. Modelele au fost fixate în dispozitivul de încarcare, prezentat în figura 7.16. Dispozitivul de încărcare este format dintr-un corp cu o cavitate şi un locaş pentru fixarea modelelor. Modelul (5) este fixat în corpul dispozitivului de către inelul (4) prin intermediul a 12 şuruburi. Corpul dispozitivului este prins şi susţinut de suportul rigid (1) cu ajutorul tijelor (2). Uleiul introdus sub presiune de pompa cu şurub (2) în cavitatea corpului acţionează asupra plăcii. Mărimea presiunii interioare din cavitate este măsurată de manometrul (6).

7.4.3 Interpretarea înregistrărilor holografice

Examinînd o placă holografică dublu expusă şi developată, într-o rază lărgită a laserului, se poate observa obiectul supus încercării sub forma unei imagini virtuale peste care este suprapus un sistem de benzi inelare de interferență. Benzile inelare de interferență aproximează zonele plăcii care au aceeași săgeată, astfel încît în final se poate obține o vedere generală din punct de vedere al deformațiilor.

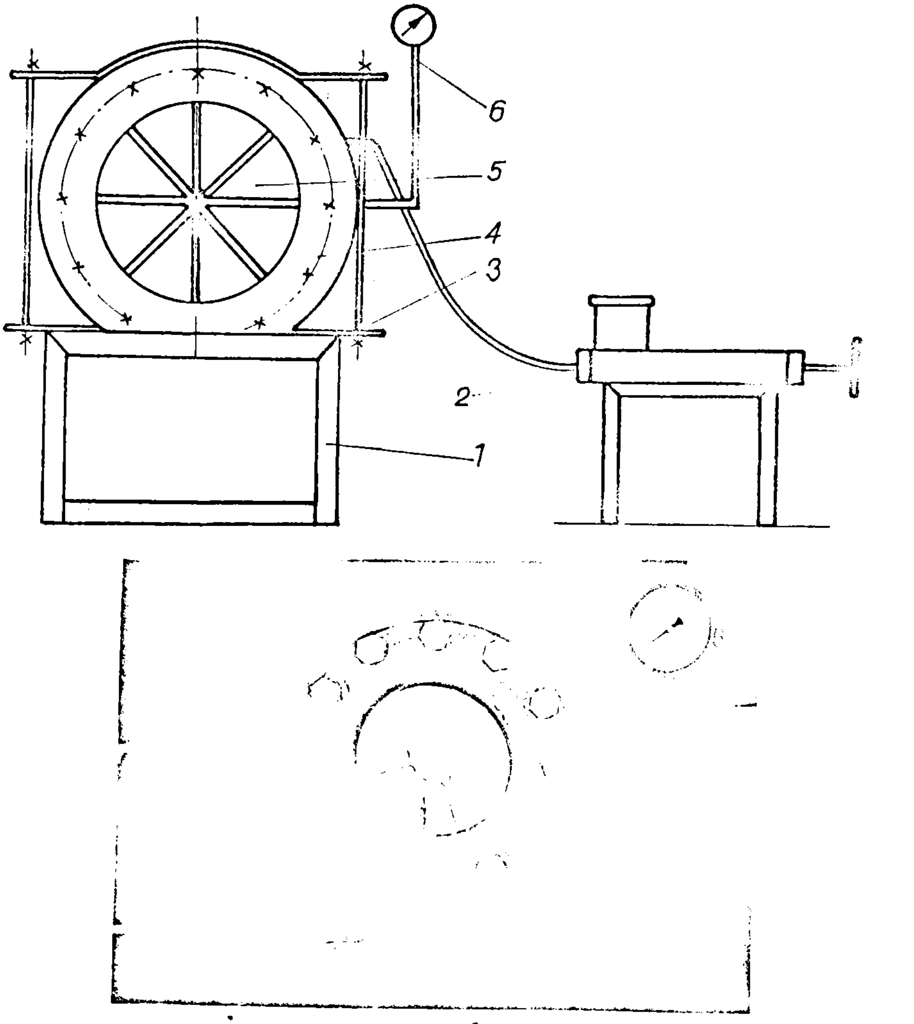


Fig.7.16

Metoda de interpretare constă în stabilirea poziției geometrice a fiecărei benzi de interferență. Inelele se vor număra de la exteriorul plăcii, unde $w = 0$, spre interior. Intrucît s-a făcut o vizare frontală, pentru punerea în evidență a deplasării transversale, lungimea de undă λ se consideră constantă în mărime iar pentru calculul săgeţii, după [11] şi [224], valabilă relaţia:

$$w_N = \frac{(2N + 1)\cdot\lambda}{2(\cos\alpha + \cos\beta)}, \qquad (7.10)$$

unde N = 1, 2, 3, ... reprezintă ordinul benzii de interferenţă, α - unghiul de incidenţă al razei obiectului faţă de normala la placă, β - unghiul de observare faţă de normala la placă.

Intrucît unghiurile α şi β depind de poziţia fiecărui punct de pe benzile de interferenţă este necesar un dispozitiv care să stabilească coordonatele lor. Mărimea unghiurilor, după [11], va depinde de poziţia sursei obiect, de dimensiunile plăcii precum şi de poziţia plăcii fotografice faţă de model. Nedispunînd de un aparat de măsură adecvat s-a stabilit numai săgeata maximă.

In figurile 7.17 şi 7.18 sînt prezentate interferogramele care dau cîmpul deplasării transversale făcîndu-se o analiză mai mult calitativă cînd plăcile sînt încastrate pe contur şi sînt încărcate cu o sarcină uniform distribuită specificată în tabelul 7.2.

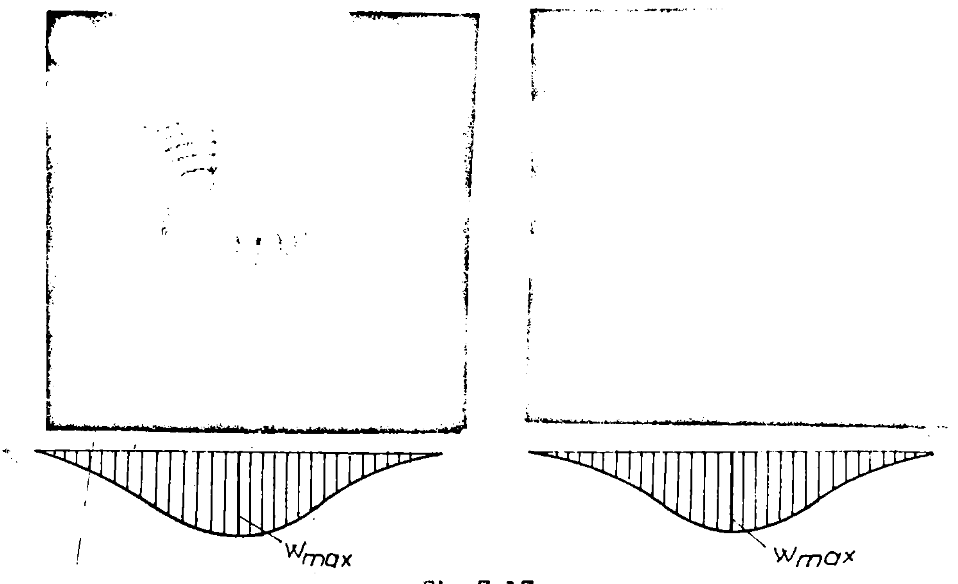


Fig.7.17

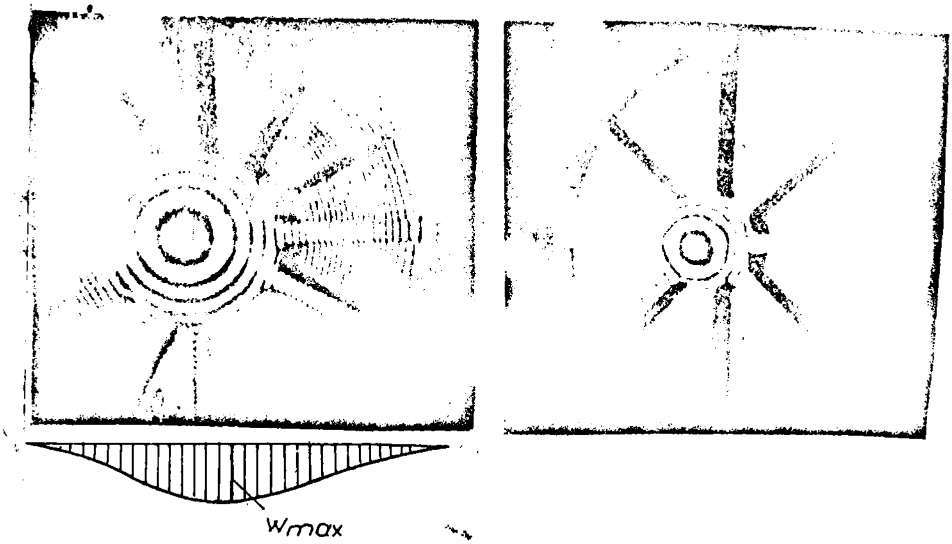


Fig.7.18

Tabelul 7.2

Placa cu.. nervuri	Presiunea $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$	Deplasarea transversală w = ...	
		Rayleigh-Ritz	Metoda analitică ($x = r/R\lambda_r$)
8	0,05	$\frac{pR^4}{64(1+\lambda_r)D}(1-\rho^2)^2$ $\rho = \frac{r}{R}$	$\frac{(R\lambda_r)^4}{16D} p \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 0{,}542x^2 + x + (x^2-1)\ln(1+x) + 0{,}00769\right]$
10	0,07		$\frac{(R\lambda_r)^4}{16D} p \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 0{,}523x^2 + x + (x^2-1)\ln(1+x) + 0{,}0027\right]$
12	0,1		$\frac{(R\lambda_r)^4}{16D} p \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 0{,}514x^2 + x + (x^2-1)\ln(1+x) + 0{,}0011\right]$

Tabelul 7.3

Placa cu	Experiment.	M e t o d a			
		Analitică		Rayleigh - Ritz	
	W_m [mm]	W_e [mm]	$\delta\% = \frac{W_c - W_m}{W_c}\%$	W_c [mm]	$\delta\% = \frac{W_c - W_m}{W_c}$
8 nervuri	$7{,}44 \cdot 10^{-3}$	$8{,}3 \cdot 10^{-3}$	10	$8{,}8 \cdot 10^{-3}$	15
10 nervuri	$9{,}45 \cdot 10^{-3}$	$8{,}6 \cdot 10^{-3}$	6,4	$10{,}5 \cdot 10^{-3}$	10
12 nervuri	$12{,}26 \cdot 10^{-3}$	$12{,}79 \cdot 10^{-3}$	4	$12{,}9 \cdot 10^{-3}$	4,9

In tabelul 7.2 sînt prezentate relaţiile de calcul pentru calculul deplasării transversale la plăcile circulare cu nervuri radiale.

Experimental, săgeata maximă se stabileşte cu relaţia (7.8) cînd $\alpha = 10^{o}$, $\beta = 55^{o}$ iar ordinul benzii de interferenţă se determină pentru fiecare caz în parte, din figurile 7.17 şi 7.18. Rezultatele determinate experimental şi analitic (tabelul 7.2) sînt centralizate în tabelul 7.3. Din analiza valorilor deplasărilor determinate prin interferometrie holografică, metoda analitică şi metoda Rayleigh-Ritz se constată o concordanţă satisfăcătoare. Totodată pe baza benzilor inelare de interferometrie s-a stabilit forma deformată a plăcilor circulare cu nervuri.

7.4.4 Concluzii

Prin aplicarea tehnicii holografice cu dublă expunere au fost rezolvate următoarele probleme:

- punerea în evidenţă a comportării complexe a plăcilor circulare cu nervuri care lucrează ca un tot unitar. Deformaţia lor este simetrică avînd benzile de interferenţă de formă inelară. In zona centrală, unde există o parte centrală rigidă (îngroşată) la care nervurile sînt legate, panta suprafeţei deformate este mică, adică are loc o rărire a inelelor de interferenţă;
- verificarea relaţiilor de calcul ale deplasării transversale stabilite în capitolul 5;
- la creşterea încărcării creşte foarte mult ordinul benzilor de interferenţă iar identificarea acestora chiar cu aparatura optică cea mai sofisticată ar deveni imposibilă (fig.7.18,b - placa cu 8 nervuri solicitată cu o sarcină uniform distribuită de 0,5 MPa);
- sensibilitatea deosebită a metodei interferometriei holografice oferă posibilităţi suplimentare în cercetare;
- obţinerea formei deformate a plăcii calitativ.

8 CONCLUZII FINALE

In lucrarea de faţă s-a urmărit să se studieze comportarea statică a plăcii circulare cu nervuri radiale încărcată cu forţe normale şi conţinute în planul median al plăcii. In special, lucrarea reflectă determinarea teoretică şi experimentală a stărilor de deformaţie şi de tensiune şi alegerea convenabilă a dimensiunilor la placa circulară cu nervuri radiale în raport cu placa circulară fără nervuri.

Dintre contribuţiile originale aduse de autor în teza de doctorat se menţionează:

1. Sistematizarea cercetărilor efectuate privind calculul plăcilor circulare cu nervuri radiale prin:

1.1 evidenţierea modului de mărire a rigidităţii şi rezistenţei plăcilor circulare prin folosirea de materiale izotrope cît şi prin folosirea nervurilor poate fi urmărită în subcapitolul 2.1;

1.2 definirea conceptului de placă circulară nervurată şi efectuarea unei clasificări a multitudinii soluţiilor constructive de plăci circulare cu nervuri (fig.2.1);

1.3 analizarea amănunţită a principalelor aplicaţii tehnice ale plăcilor circulare nervurate şi stabilirea importanţei utilizării lor menţionată în paragraful 2.3;

1.4 sistematizarea metodelor de calcul ale plăcilor circulare cu nervuri radiale prezentată în literatura de specialitate şi precizarea obiectivelor pentru această lucrare ;

2. Tratarea unitară a deformaţiei plăcilor circulare izotrope şi a reţelelor de bare aşezate în direcţie radială şi circumferenţială în vederea analizării plăcilor circulare cu nervuri radiale prin:

2.1 formularea unei teorii matematice unitare pentru deducerea deplasării (3,16), deformaţiei (3.23), componentelor tensiunii(3.27) şi a eforturilor secţionale (3.30 şi 3.31) pentru plăcile circulare izotrope solicitate la încovoiere cu întindere sau compresiune;

2.2 stabilirea, în mod original, a eforturilor din barele reţelei, repartizate pe unitatea de lungime, în funcţie de componentele deplasării punctelor aparţinînd unui plan de referinţă (relaţiile 3.72 la 3.79);

3. Formularea în deplasări a calculului plăcilor circulare cu nervuri urmărindu-se:

3.1 stabilirea relaţiilor de calcul ale eforturilor secţionale la plăcile circulare cu nervuri radiale şi inelare pe baza ortotropiei de structură (relaţiile 4.16; 4.18; 4.20; 4.25; 4.29; 4.31);

3.2 verificarea eforturilor secţionale prin suprapunerea eforturilor de la placa circulară izotropă şi a eforturilor de la reţelele de bare (paragraful 4.6.2);

3.3 determinarea ecuaţiilor diferenţiale care descriu deformarea acestor plăci în cazul solicitării de încovoiere cu întindere sau compresiune şi particularizarea lor pentru plăcile circulare cu nervuri radiale (4.51;4.52; 4.53);

3.4 verificarea ecuaţiilor diferenţiale care descriu deformarea plăcilor circulare cu nervuri radiale cu ajutorul metodei variaţionale (relaţiile 4.71; 4.72; 4.73) şi a eforturilor secţionale (4.93; 4.94);

4. Studiul stărilor de deformaţie şi de tensiune la solicitări statice în condiţii diferite de încărcare şi rezemare, urmărind:

4.1 determinarea soluţiei ecuaţiei diferenţiale care descrie deformarea unui disc cu nervuri radiale de secţiune constantă (5.18);

4.2 stabilirea soluţiei generale a încovoierii plăcii circulare cu nervuri radiale de secţiune constantă încărcată cu o forţă uniform distribuită (5.43) şi cu o forţă concentrată aplicată în centrul plăcii (5.72);

4.3 stabilirea soluţiei generale în cazul plăcilor inelare cu nervuri radiale în condiţii diferite de încărcare (paragraful 5.2.1.3);

4.4 determinarea stărilor de deformaţie şi de tensiune pentru diferite cazuri particulare de rezemare şi încărcare;

4.5 trasarea de diagrame care să concentreze o mare parte din rezultatele stabilite teoretic şi să le compare cu diagrame corespunzătoare ale plăcilor circulare izotrope pentru justificarea creşterii rigidităţii plăcilor cu nervuri;

4.6 determinarea soluţiei ecuaţiei diferenţiale care descrie deformarea plăcii circulare cu nervuri de secţiune variabilă prezentată în paragraful 5.2.2;

4.7 stabilirea soluţiilor aproximative cu ajutorul seriilor pentru ecuaţiile diferenţiale ale plăcilor cu nervuri radiale de secţiune variabilă care nu pot fi integrate (paragraful 5.3.1). Se determină soluţia ecuaţiei diferenţiale care descrie deformarea simetrică a plăcii prin transformarea ei pînă se obţine o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi cu coeficienţi variabili. Soluţia este prezentată sub forma unei serii a cărei convergenţă este verificată cu ajutorul criteriului lui d'Alembert,

4.8 stabilirea unei metodologii de calcul variaţional utilizînd teorema de minim a energiei potenţiale folosind formularea matricială care asigură premisele utilizării comode a calculatorului electronic prezentată în paragraful 5.3.2;

4.9 determinarea influenţei pe care o are creşterea mărimii secţiunii nervurilor asupra creşterii rigidităţii plăcilor este prezentată în figurile 5.14,

4.10 utilizarea metodei elementului finit pentru investigarea amănunţită a stărilor de deformaţie şi de tensiune prin:

- folosirea programului de calcul SAP IV şi
- elaborarea unui program de calcul de analiză statică cu aplicarea substructurării denumit SUBSM [154]. La elaborarea programului SUBSM s-a avut în vedere posibilitatea substructurării pe mai multe nivele avînd o mare elasticitate în abordarea structurilor complexe cît şi a plăcilor circulare cu nervuri ;

4.11 folosirea programului de calcul SUBSM şi SAP pentru calculul plăcilor circulare cu nervuri radiale au pus în evidenţă:

- deplasarea transversală mai mare a punctelor aflate între nervuri decît cele din dreptul nervurilor;
- justificarea teoriei de calcul adoptată în capitolele 4 şi 5 pentru plăcile circulare care au un număr mai mare sau egal cu 8 nervuri;

- avantajul utilizării programului de calcul SUBSM care efectuează calculul într-un timp mai mic de cel puţin 2 ori faţă de programul SAP IV;

5. Adoptarea unei metode de calcul (cap.6) care să permită alegerea convenabilă a dimensiunilor plăcii circulare cu nervuri radiale în raport cu placa fără nervuri. Această metodă de calcul are în vedere micşorarea greutăţii plăcii cu nervuri în comparaţie cu cea fără nervuri cînd ambele au aceeaşi rigiditate şi rezistenţă considerînd raportul volumelor lor să fie subunitar.

6. Explorarea experimentală a stărilor de tensiune şi de deformaţie prin măsurători tensometrice, prin fotoelasticimetrie şi prin interferometrie holografică:

6.1 s-a proiectat un dispozitiv original pentru verificarea experimentală a stărilor de deformaţie şi de tensiune în cazul solicitării axial simetrice cu o sarcină uniform distribuită. Măsurătorile au fost efectuate cu ajutorul mărcilor tensometrice pentru deformaţii specifice şi cu microcomparatoare cu tijă pentru săgeţi. Rezultatele obţinute au validat ipotezele de calcul prezentate în cuprinsul lucrării.

6.2 s-a aplicat pentru prima dată metoda fotoelastică la studiul tensiunilor în placa circulară cu nervuri radiale. Analiza stării de tensiune şi de deformaţie s-a făcut în dreptul nervurii cît şi în porţiunea dintre nervuri.

6.3 prin aplicarea interferometriei holografice a fost determinată valoarea săgeţii fără a ţine seama de caracteristicile mecanice ale materialului plăcii (tabelul 7.3 şi relaţia 7.10) şi s-a pus în evidenţă comportarea ca un tot unitar a plăcilor circulare nervurate radial.

Desigur rămîn suficiente probleme care ar merita interes pentru cercetările stărilor de deformaţie şi de tensiune, cum ar fi: stabilirea stărilor de deformaţie şi de tensiune cînd nervurile au axele aşezate excentric faţă de planul median al plăcii.

9 ANEXE

A.1 Noţiuni de geometrie diferenţială şi analiză tensorială

Sistemul de coordonate Oxyz permite stabilirea unei corespondenţe între numere şi punctele spaţiului. Descrierea deformării poate fi făcută dacă se identifică particulele într-o configuraţie de referinţă cu poziţiile lor date de vectorul de poziţie în configuraţia respectivă.

In raport cu sistemul de coordonate cartezian Oxyz, poziţia unui punct material Q al plăcii este definit de vectorul:

$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}, \qquad (A.1.1)$$

unde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sînt versorii axelor de coordonate ce se determină, după [132] şi [205], cu relaţiile:

$$\mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}; \qquad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \qquad \mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}. \qquad (A.1.2)$$

Intrcît, legătura între coordonatele carteziene şi cele cilindrice este dată de relaţiile:

$$x = r \cdot \cos\varphi \; ; \qquad y = r \cdot \sin\varphi \; ; \qquad z = z \, , \qquad (A.1.3)$$

vectorul $\mathbf{r}$ poate fi scris şi sub forma:

$$\mathbf{r} = r \cdot \cos\varphi \cdot \mathbf{i} + r \sin\varphi \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}. \qquad (A.1.4)$$

Coordonatele x, y, z (sau r, φ, z) care individualizează particulele corpului continuu, la momentul iniţial, se numesc variabile Lagrange sau coordonate materiale. Studiul solicitării în coordonate materiale se va numi descriere materială. Descrierea materială se foloseşte în studiul deformării elastice a solidelor deformabile cînd deplasările punctelor sînt mici (au caracter infinitezimal [205]). In acest caz, pentru o descriere a stărilor deformată şi nedeformată ale plăcii se va utiliza un singur reper de referinţă. Coordonatele X, Y, Z la un moment dat t sînt numite variabilele lui Euler. Ele se folosesc la descrierea spaţială cînd deplasările sînt mari ...

descrierea mişcării particulelor devine dificilă. La solicitări externe punctele unui corp solid continuu se vor deplasa. Deplasarea (ecuaţia de mişcare) a unei particule va fi definită de ecuaţia:

$$\mathbf{R} = \mathcal{X}(\mathbf{r},\ t) \quad . \tag{A.1.5}$$

Deplasrea particulei poate fi împărţită în:

- mişcare de corp rigid cînd corpul îşi schimbă poziţia în spaţiu. In acest caz, viteza şi acceleraţia la un moment dat t, vor fi date de funcţiile:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt}\mathcal{X}(\mathbf{r},\ t)\ ; \qquad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{R}} = \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{X}(\mathbf{r},\ t), \tag{A.1.6}$$

unde $\mathbf{r}$ se consideră constant, şi

- deplasări produse prin deformare descrise de variaţia funcţiei $\mathcal{X}$ în raport cu variabila $\mathbf{r}$, cînd t este fixat. In acest caz, ecuaţia (A.1.5) poate fi scrisă sub forma:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{U}(\mathbf{r}) \ , \tag{A.1.7}$$

unde $\mathbf{U}$ reprezintă vectorul deplasării particulei din configuraţia nedeformată în configuraţia deformată.

In punctul Q se introduce o bază locală a cărui vectori $\mathbf{g}_r$, $\mathbf{g}_\varphi$, $\mathbf{g}_z$ se determină, după [132] şi [236], cu relaţiile:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_r &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos\varphi\cdot\mathbf{i} + \sin\varphi\cdot\mathbf{j}\ ; \\ \mathbf{g}_\varphi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r(-\sin\varphi\cdot\mathbf{i} + \cos\varphi\cdot\mathbf{j})\ ; \\ \mathbf{g}_z &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}\ . \end{aligned} \tag{A.1.8}$$

Versorii vectorilor (A.1.8) sînt:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_r &= \frac{1}{A}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \frac{1}{A}\mathbf{g}_r = \cos\varphi\cdot\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}\ ; \\ \mathbf{i}_\varphi &= \frac{1}{B}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{B}\mathbf{g} = -\sin\varphi\cdot\mathbf{i} + \cos\varphi\cdot\mathbf{j}\ ; \\ \mathbf{i}_z &= \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_\varphi = \mathbf{k}\ . \end{aligned} \tag{A.1.9}$$

unde

$$A^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1;$$

$$B^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2. \qquad (A.1.10)$$

Baza locală $\mathbf{g}_\alpha$ $(\alpha = r, \varphi, z)$ se caracterizează prin numerele

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta, \qquad (A.1.11)$$

care determină lungimea vectorilor bazei

$$\|\mathbf{g}_\alpha\|^2 = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\alpha = g_{\alpha\alpha}, \qquad (A.1.12)$$

şi unghiurile dintre vectori

$$\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \|\mathbf{g}_\alpha\| \cdot \|\mathbf{g}_\beta\| \cos \gamma_{\alpha\beta} \qquad (A.1.13)$$

Numerele $g_{\alpha\beta}$ se numesc componentele covariante al tensorului metric din sistemul de coordonate dat. In cazul coordonatelor cilindrice

$$g_{rr} = 1; \qquad g_{\varphi\varphi} = r^2; \qquad g_{zz} = 1, \qquad (A.1.14)$$

$$g_{r\varphi} = g_{\varphi z} = g_{zr} = 0, \qquad (A.1.15)$$

întrucît

$$g_{rr} = \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_r = (\cos\varphi \cdot \mathbf{i} + \sin\varphi \cdot \mathbf{j})^2 = 1;$$

$$g_{\varphi\varphi} = \mathbf{g}_\varphi \cdot \mathbf{g}_\varphi = r^2(-\sin\varphi \cdot \mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j})^2 = r^2;$$

$$g_{zz} = \mathbf{g}_z \cdot \mathbf{g}_z = \mathbf{k}\,\mathbf{k} = 1,$$

unde

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1; \quad \mathbf{j}^2 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1; \quad \mathbf{k}^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1;$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

In afară de baza dată $\mathbf{g}_\alpha$ $(\alpha = r, \varphi, z)$, în calculul tensorial intră baza reciprocă $\mathbf{g}^\alpha$, care este legată de baza covariantă cu relaţiile:

$$\mathbf{g}^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\,\mathbf{g}_{\beta}\,; \quad \mathbf{g}_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\,\mathbf{g}^{\beta}, \tag{A.1.16}$$

unde

$$g^{\alpha\beta} = \mathbf{g}^{\alpha}\cdot\mathbf{g}^{\beta}, \tag{A.1.17}$$

sînt componentele contravariante ale tensorului metric.

Din relațiile (A.1.9), rezultă:

$$\mathbf{g}_{\alpha}\,\mathbf{g}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{A.1.18}$$

unde δ^{α}_{β} este simbolul lui Kronecker.

Din relațiile (A.1.16), (A.1.17), (A.1.14) și (A.1.13) se obține:

$$g^{rr} = 1; \qquad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2}\,; \qquad g^{zz} = 1, \tag{A.1.19}$$

$$g^{r\varphi} = g^{\varphi z} = g^{zr} = 0. \tag{A.1.20}$$

Vectorii reciproci, conform relațiilor (A.1) și (A.1.19) vor fi:

$$\mathbf{g}^{r} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\mathbf{g}_{\varphi}\times\mathbf{g}_{z}) = \cos\varphi\cdot\mathbf{i} + \sin\varphi\cdot\mathbf{j}\,;$$

$$\mathbf{g}^{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\mathbf{g}_{z}\times\mathbf{g}_{r}) = \frac{1}{r}(-\sin\varphi\cdot\mathbf{i} + \cos\varphi\cdot\mathbf{j})\,; \tag{A.1.21}$$

$$\mathbf{g}^{z} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\mathbf{g}_{r}\times\mathbf{g}_{\varphi}),$$

unde

$$\sqrt{g} = \mathbf{g}_{r}\cdot(\mathbf{g}_{\varphi}\times\mathbf{g}_{z}) = r. \tag{A.1.22}$$

După cum rezultă din relațiile de definiție vectorii bazei locale au mărimi variabile. Derivata vectorului $\mathbf{g}_{\alpha}$ în raport cu β, după [236], se determină cu relația:

$$\mathbf{g}_{\alpha,\beta} = \left\{ {\gamma \atop \alpha\ \ \beta} \right\}\mathbf{g}_{\gamma} \ \text{(sumare după } \gamma\text{)} \tag{A.1.23}$$

unde

$$\left\{ {\gamma \atop \alpha\ \ \beta} \right\} = \frac{1}{2}\,g^{\gamma\rho}(g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\rho\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\rho}). \tag{A.1.24}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}_r}{\partial r} = -\frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}\frac{\partial\sqrt{g_{rr}}}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{i}_\varphi - \frac{1}{\sqrt{g_{zz}}}\frac{\partial\sqrt{g_{rr}}}{\partial z}\,\boldsymbol{i}_z = 0;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\frac{\partial\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}{\partial r}\,\boldsymbol{i}_\varphi = \boldsymbol{i}_\varphi; \quad \frac{\partial \boldsymbol{i}_r}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\frac{\partial\sqrt{g_{zz}}}{\partial r}\,\boldsymbol{i}_z = 0;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}_\varphi}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}\frac{\partial\sqrt{g_{zz}}}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{i}_r = 0; \quad \frac{\partial \boldsymbol{i}_\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}\frac{\partial\sqrt{g_{zz}}}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{i}_z = 0;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\sqrt{g_{zz}}}\frac{\partial\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}{\partial z}\,\boldsymbol{i}_z - \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\frac{\partial\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}{\partial r}\,\boldsymbol{i}_r = -\boldsymbol{i}_r;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}_z}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{g_{zz}}}\frac{\partial\sqrt{g_{zz}}}{\partial z}\,\boldsymbol{i}_z = 0; \quad \frac{\partial \boldsymbol{i}_z}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{g_{zz}}}\frac{\partial\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}{\partial z}\,\boldsymbol{i}_\varphi = 0;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}_z}{\partial z} = -\frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\frac{\partial\sqrt{g_{zz}}}{\partial r}\,\boldsymbol{i}_r - \frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}\frac{\partial\sqrt{g_{zz}}}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{i}_\varphi = 0. \qquad (A.1.25)$$

Intrucît

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}_o}{\partial r} = \left(1 + \frac{\partial u_o}{\partial r}\right)\cdot\boldsymbol{i}_r + \frac{\partial v_o}{\partial r}\cdot\boldsymbol{i}_\varphi + \frac{\partial w_o}{\partial r}\cdot\boldsymbol{i}_z\,; \qquad (A.1.26)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}_o}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial u_o}{\partial \varphi} + v_o\right)\cdot\boldsymbol{i}_r + \left(r + u_o + \frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\right)\cdot\boldsymbol{i}_\varphi + \frac{\partial w_o}{\partial \varphi}\cdot\boldsymbol{i}_z, \qquad (A.1.27)$$

se obţin componentele versorului $\boldsymbol{n}$, unde

$$\boldsymbol{n} = \frac{L\cdot\boldsymbol{i}_r + M\cdot\boldsymbol{i}_\varphi + N\cdot\boldsymbol{i}_z}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}\,,$$

iar

$$L = \frac{\partial v_o}{\partial r}\frac{\partial w_o}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_o}{\partial \varphi}\frac{\partial w_o}{\partial r} - (r + u_o)\frac{\partial w_o}{\partial \varphi}\,;$$

$$M = v_o\frac{\partial w_o}{\partial r} + \frac{\partial u_o}{\partial \varphi}\frac{\partial w_o}{\partial r} - \frac{\partial w_o}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_o}{\partial r}\frac{\partial w_o}{\partial \varphi}; \qquad (A.1.28)$$

$$N = r+u_o + \frac{\partial v_o}{\partial \varphi} + (r+u_o)\frac{\partial u_o}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_o}{\partial r}\frac{\partial v_o}{\partial \varphi} - v_o\frac{\partial v_o}{\partial r} - \frac{\partial u_o}{\partial \varphi}\frac{\partial v_o}{\partial r}.$$

Pentru că:

$$\frac{\partial u_o}{\partial r} \approx \frac{\partial u_o}{\partial \varphi} \approx \frac{\partial v_o}{\partial r} \approx \frac{\partial v_o}{\partial \varphi} \approx \left(\frac{\partial w_o}{\partial r}\right)^2 \approx \left(\frac{\partial w_o}{\partial \varphi}\right)^2 \ll 1; \quad v_o \frac{\partial w_o}{\partial r} \approx 0; \quad u_o \ll r. \qquad (A.1.29)$$

atunci relaţiile (A.1.28) au forma:

$$L \approx -r \cdot \frac{\partial w_o}{\partial r}; \quad M \approx -\frac{\partial w_o}{\partial \varphi}; \quad N \approx r. \qquad (A.1.30)$$

Pe baza relaţiilor de mai sus versorul $\boldsymbol{n}$ este dat de relaţia

$$\boldsymbol{n} = -\frac{\partial w_o}{\partial r}\dot{\boldsymbol{i}}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial w_o}{\partial \varphi}\dot{\boldsymbol{i}}_\varphi + \dot{\boldsymbol{i}}_z. \qquad (A.1.31)$$

Versorul $\boldsymbol{n}$ va fi folosit la determinarea deplasării [illegible] punct în timpul deformării plăcii în funcţie de componentele deplasării punctului Q_o de pe suprafaţa mediană.

A.2 Deplasări şi deformaţii

Fie $\boldsymbol{r}$ vectorul de poziţie al punctului Q, iar $\boldsymbol{r}_o$ vectorul de poziţie al punctului Q_o, proiecţia punctului Q pe suprafaţa mediană a plăcii. In urma deformării plăcii punctul Q se deplasează în Q' iar Q_o în Q'_o. Vectorii de poziţie corespunzători pentru Q' şi Q'_o vor fi $\boldsymbol{R}$ şi $\boldsymbol{R}_o$. Dependenţa dintre poziţiile deformată şi nedeformată este dată de relaţiile (3.[illegible]) sau (A.1.7) şi (3.7).

Ipoteza lui Kirchhoff permite exprimarea vectorului şi sub forma:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_o + z \cdot \boldsymbol{n}, \qquad (A.2.1)$$

unde $\boldsymbol{n}$ este vector unitar normal la suprafaţa mediană deformată dată de relaţia (3.11) sau (A.1.31). Din relaţiile (A.1.7), (3.7) şi (A.2.1) rezultă:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_o + z(\boldsymbol{n} - \dot{\boldsymbol{i}}_z) \qquad (A.2.2)$$

unde $\boldsymbol{U}$ şi $\boldsymbol{U}_o$ sînt vectorii deplasării punctelor Q şi Q_o determinaţi cu relaţiile (3.8) şi (3.9).

Inlocuind relaţiile (A.1.31), (3.8) şi (3.9) în (A.2.2) rezultă:

$$= (u_o - z\frac{\partial w_o}{\partial r})\cdot\dot{\boldsymbol{i}}_r + (v_o - z\frac{1}{r}\frac{\partial w_o}{\partial \varphi})\cdot\dot{\boldsymbol{i}}_\varphi + w_o\cdot\dot{\boldsymbol{i}}_z. \qquad (A.2.3)$$

Vectorii bazei ortogonale sînt reprezentaţi prin relaţiile (A.1.9) iar vectorii bazei neortogonale se stabilesc cu formulele:

$$\boldsymbol{G}_r = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial r}; \quad \boldsymbol{G}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \varphi}; \quad \boldsymbol{G}_z = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial z}, \qquad (A.2.4)$$

unde $\boldsymbol{R}$ este dat de relaţia (3.6).

Tinînd cont de relaţiile (3.6), (3.7),(A.1.31) şi (A.1.25) formulele (A.2.4) devin:

$$\boldsymbol{G}_r = (1 + \frac{\partial u_o}{\partial r})\cdot\dot{\boldsymbol{i}}_r + \frac{\partial v_o}{\partial r}\dot{\boldsymbol{i}}_\varphi + \frac{\partial w}{\partial r}\dot{\boldsymbol{i}}_z;$$

$$\boldsymbol{G}_\varphi = (\frac{\partial u_o}{\partial r} - v_o)\cdot\dot{\boldsymbol{i}}_r + (r + u_o + \frac{\partial v_o}{\partial \varphi})\dot{\boldsymbol{i}}_\varphi + \frac{\partial w}{\partial \varphi}\cdot\dot{\boldsymbol{i}}_z; \qquad (A.2.5)$$

$$\boldsymbol{G}_z = \boldsymbol{g}_z = \dot{\boldsymbol{i}}_z.$$

Elementele tensorului metric pentru starea deformată sînt:

$$G_{rr} = \boldsymbol{G}_r\cdot\boldsymbol{G}_r = (1 + \frac{\partial u_o}{\partial r})^2 + (\frac{\partial v_o}{\partial r})^2 + (\frac{\partial w}{\partial r})^2;$$

$$G_{\varphi\varphi} = \boldsymbol{G}_\varphi\cdot\boldsymbol{G}_\varphi = (\frac{\partial v_o}{\partial r} - v_o)^2 + (r+u_o+\frac{\partial v_o}{\partial \varphi})^2 + (\frac{\partial w}{\partial \varphi})^2; \qquad (A.2.6)$$

$$G_{r\varphi} = \boldsymbol{G}_r\cdot\boldsymbol{G}_\varphi = (1+\frac{\partial u_o}{\partial r})(\frac{\partial u_o}{\partial r} - v_o) + \frac{\partial v_o}{\partial r}(r+u_o+\frac{\partial v_o}{\partial \varphi}) + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}.$$

După efectuarea calculelor şi neglijarea infiniţiilor mici relaţiile (A.2.6) devin:

$$G_{rr} = 1 + 2\frac{\partial u_o}{\partial r} + (\frac{\partial w}{\partial r})^2;$$

$$G_{\varphi\varphi} = r^2 + 2\cdot r\cdot\frac{\partial v_o}{\partial \varphi} + 2\cdot r\cdot u_o + (\frac{\partial w}{\partial \varphi})^2; \qquad (A.2.7)$$

$$G_{r\varphi} = \frac{\partial u_o}{\partial \varphi} - v_o + r\frac{\partial v_o}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}.$$

A.3 Ecuaţii de echilibru static

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un element de placă să fie în echilibru este ca suma proiecţiilor tuturor forţelor în orice direcţie să fie egală cu zero şi suma momentelor tuturor forţelor în jurul unei axe să fie zero.

Suma proiecţiilor tuturor eforturilor secţionale şi a forţelor exterioare pe axa r (fig.3.5):

$$-N_r r d\varphi + \left(N_r + \frac{\partial N_r}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\varphi - N_{\varphi r}dr\cos\frac{d\varphi}{2} + \left(N_{\varphi r} + \frac{\partial N_{\varphi r}}{\partial \varphi}d\varphi\right)dr\cos\frac{d\varphi}{2}$$
$$-N_\varphi dr\cdot\sin\frac{d\varphi}{2} - \left(N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right)dr\sin\frac{d\varphi}{2} + p_r\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi = 0; \qquad (A.3.1)$$

Suma proiecţiilor tuturor forţelor pe axa φ este:

$$-N_\varphi\cdot dr\cdot\cos\frac{d\varphi}{2} + \left(N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right)dr\cos\frac{d\varphi}{2} + N_{\varphi r}\cdot dr\cdot\sin\frac{d\varphi}{2} - N_{r\varphi}rd\varphi$$
$$+\left(N_{\varphi r} + \frac{\partial N_{\varphi r}}{\partial\varphi}d\varphi\right)dr\sin\frac{d\varphi}{2} + \left(N_{r\varphi} + \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\varphi + p_\varphi r dr d\varphi = 0;$$
$$(A.3.2)$$

Suma proiecţiilor tuturor forţelor pe axa z este:

$$p_z\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi - T_r r d\varphi - T_\varphi dr + \left(T_r + \frac{\partial T_r}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\varphi +$$
$$+\left(T_\varphi + \frac{\partial T_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right)dr = 0; \qquad (A.3.3)$$

Suma momenteleor tuturor forţelor în raport cu axa r

$$M_{r\varphi}rd\varphi - \left(M_{r\varphi} + \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\varphi - M_{\varphi r}dr\sin\frac{d\varphi}{2} + M_\varphi dr\cdot\cos\frac{d\varphi}{2} -$$
$$-\left(M_{\varphi r} + \frac{\partial M_{\varphi r}}{\partial\varphi}d\varphi\right)dr\sin\frac{d\varphi}{2} - \left(M_\varphi + \frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right)dr\cos\frac{d\varphi}{2} + T_\varphi dr\left(r+\frac{dr}{2}\right)\sin\frac{d\varphi}{2} +$$
$$+\left(T_\varphi + \frac{\partial T_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right)dr\left(r+\frac{dr}{2}\right)\sin\frac{d\varphi}{2} = 0; \qquad (A.3.4)$$

Suma momentelor tuturor forţelor în raport cu axa

$$-M_r r d\varphi + \left(M_r + \frac{\partial M_r}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\varphi - M_{\varphi r}dr\cdot\cos\frac{d\varphi}{2} + \left(M_{\varphi r} + \frac{\partial M_{\varphi r}}{\partial\varphi}d\varphi\right)dr\cdot\cos\frac{d\varphi}{2}$$

$$- M_{\varphi} \cdot dr \cdot \sin\frac{d\varphi}{2} - (M_{\varphi} + \frac{\partial M_{\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi)\sin\frac{d\varphi}{2} - T_r \cdot r \cdot d\varphi \frac{dr}{2} -$$

$$-(T_r + \frac{\partial T_r}{\partial r} dr)(r + dr)\, d\varphi \frac{dr}{2} = 0; \qquad (A.3.5)$$

Suma momentelor în raport cu axa z

$$N_{r\varphi}\, r \cdot d\varphi \frac{dr}{2} + (N_{r\varphi} + \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r} dr)(r+dr)d\varphi \frac{dr}{2} - N_{\varphi r} dr(r + \frac{dr}{2})\sin\frac{d\varphi}{2} +$$

$$- (N_{\varphi r} + \frac{\partial N_{\varphi r}}{\partial \varphi} d\varphi) dr(r + \frac{dr}{2}) \sin\frac{d\varphi}{2} = 0 . \qquad (A.3.6)$$

Neglijînd infiniţii mici de ordin superior şi consi - derînd

$$\cos\frac{d\varphi}{2} \approx 1; \qquad \sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} \qquad (A.3.7)$$

rezultă:

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_{\varphi}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{\varphi r}}{\partial \varphi} = - p_r; \qquad (A.3.8)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{N_{\varphi r} + N_{r\varphi}}{r} + \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r} = - p_{\varphi}; \qquad (A.3.9)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r \cdot T_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\varphi}}{\partial \varphi} = - p_z; \qquad (A.3.10)$$

$$T_r = \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_{\varphi}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{\varphi r}}{\partial \varphi}; \qquad (A.3.11)$$

$$T_{\varphi} = \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{M_{r\varphi} + M_{\varphi r}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{\varphi}}{\partial \varphi}; \qquad (A.3.12)$$

$$N_{r\varphi} = N_{\varphi r}. \qquad (A.3.13)$$

Ecuaţiile diferenţiale de echilibru static (A.3.8) (A.3.13) pot fi deduse şi cu principiul lucrului mecanic virtual.

A.4 Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale cu ajutorul seriilor

In această anexă se va prezenta rezolvarea ecuaţiei diferenţiale (5.   )

$$\left(d + e\frac{1}{r}\right)\frac{d^4w}{dr^4} + 2d\frac{1}{r}\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = \frac{p}{D}, \qquad (A.4.1)$$

unde s-au introdus următoarele notaţii

$$d = 1 - \lambda_r(\tau - 1) = 1 - \frac{E_{rn} \cdot n_r}{2\bar{\lambda} \cdot R \cdot D}\,\frac{H^3 - h^3}{12}(T - t); \qquad (A.4.2)$$

$$e = \tau \cdot R \cdot \lambda_r = \frac{E_{rn} n_r}{2\bar{\lambda} D} \cdot \frac{H^3 - h^3}{12} T. \qquad (A.4.3)$$

Considerînd

$$A = d \cdot D; \qquad a = \frac{\tau}{d}, \qquad (A.4.4)$$

ecuaţia diferenţială (A.4.1) va avea forma:

$$A(r + R\lambda_r a)\frac{d^4w}{dr^4} + 2A\frac{1}{r}\frac{d^3w}{dr^3} - D\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} + D\frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = p. \qquad (A.4.5)$$

Al doilea termen din membru stîng al ecuaţiei diferenţiale (A.4.5) se împarte în două, unul din ei se grupează cu primul iar al doilea cu ultimii termeni ai ecuaţiei, astfel:

$$A(r+R\lambda_r a)\frac{d^4w}{dr^4} + A\frac{1}{r}\frac{d^3w}{dr^3} + A\frac{1}{r}\frac{d^3w}{dr^3} + D\frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} - D\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} = p$$

$$(A.4.6)$$

Se dă în factor A/r şi după cîteva transformări rezultă:

$$A\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[(r + R\cdot\lambda_r a)\frac{d^3w}{dr^3}\right] + \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right) + \frac{D}{A}\frac{d}{dr}\left[-\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right] = p, \qquad (A.4.7)$$

sau

$$A\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[(r+R\lambda_r a)\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{D}{A}\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right] = p, \qquad (A.4.8)$$

Prin integrarea ecuației diferențiale (A.4.8) se obține:

$$(r + R\lambda_r a)\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{D}{A}\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{pr^2}{2\cdot A} + C . \qquad (A.4.9)$$

Se înmulțește ecuația diferențială (A.4.9) cu r obținîndu-se:

$$(r^2 + aR\lambda_r r)\frac{d^3w}{dr^3} + r\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{D}{A}\frac{dw}{dr} = \frac{pr^3}{2\cdot A} + Cr . \qquad (A.4.10)$$

Se introduc notațiile (5.28) și (5.29) în ecuația diferențială (A.4.10) rezultînd:

$$x(x+a)\frac{d^2W}{dx^2} + x\frac{dW}{dx} - \frac{D}{A}W = \frac{R^3\cdot\lambda_r^3}{2\ A}\cdot p\cdot x^3 + C\cdot R\cdot\lambda_r\ x. \qquad (A.4.11)$$

Relația (A.4.11) este o ecuație diferențială de ordinul doi neomogenă cu coeficienți variabili. Soluția generală a acestei ecuații este egală cu suma dintre soluția particulară a ecuației diferențiale neomogene (A.4.11) și soluția generală a ecuației omogene

$$x(x + a)\frac{d^2W}{dx^2} + x\frac{dW}{dx} - \frac{D}{A}W = 0. \qquad (A.4.12)$$

Integrarea ecuației diferențiale (A.4.12) nu se poate reduce la o cuadratură, deci se va căuta o soluție sub forma unei serii de puteri

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = C_0 + C_1 x + \ \ldots\ + C_k x^k + \ \ldots \qquad (A.4.13)$$

unde C_k sînt constante.

Din relația (A.4.13) se obține:

$$\frac{dW}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} k\ C_k x^{k-1} ; \qquad (A.4.14)$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\ C_k\ x^{k-2}. \qquad (A.4.15)$$

Aceste relații se introduc în ecuația diferențială (A.4. și se egalează cu zero coeficienții puterilor lui x rezultînd:

$$C_o = 0;$$

$$C_k = (-1)^{k-1}\frac{((k-1)^2-\delta)\ \dots\ (3^2-\delta)(2^2-\delta)(1-\delta)}{a^k\cdot k\cdot((k-1)!)^2}C_1, \quad (A.4.16)$$

unde

$$\delta = \frac{D}{A}. \quad (A.4.17)$$

Soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale (A.4.11) se admite sub forma:

$$W_p = B_o + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3. \quad (A.4.18)$$

Relaţia (A.4.18) se introduce în ecuaţia diferenţială (A.4.11) şi prin identificarea coeficienţilor rezultă:

$$B_o = 0;$$

$$B_1 = \frac{CR\cdot\lambda_r}{(1-\delta)A} + \frac{12\cdot a^2}{(1-\delta)(4-\delta)(9-\delta)}\ \frac{R^3\cdot\lambda_r^3}{2\cdot A}p;$$

$$B_2 = \frac{6\ a}{(9-\delta)(4-\delta)}\ \frac{R^3\cdot\lambda_r^3}{2\cdot A}p;$$

$$B_3 = \frac{1}{9-\delta}\ \frac{R^3\cdot\lambda_r^3}{2\cdot A}p. \quad (A.4.19)$$

In aceste condiţii, soluţia generală a ecuaţiei (A.4.11) va avea forma:

$$W = C_1\left(x + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{((k-1)^2-\delta)\ \dots\ (2^2-\delta)(1^2-\delta)}{a^{k-1}\cdot k\cdot((k-1)!)^2}x^k\right) +$$

$$+\frac{C\cdot R\lambda_r}{(1-\delta)A}x + \frac{12\cdot a^2}{(1-\delta)(4-\delta)(9-\delta)}\ \frac{R^3\cdot\lambda_r^3}{2\cdot A}p\ x -$$

$$-\frac{6\ a}{(4-\delta)(9-\delta)}\ \frac{R^3\cdot\lambda_r^3}{2A}p\ x^2 + \frac{1}{9-\delta}\ \frac{R^3\lambda_r^3}{2A}p x^3. \quad (A.4.20)$$

In baza relaţiilor (5.28) şi (5.29) soluţia ecuaţiei diferenţiale (A.4.11) dată de relaţia (A.4.20) devine:

$$w = C_1 R\lambda_r\left(\frac{x^2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{((k-1)^2-\delta)\ \dots\ (2^2-\delta)(1^2-\delta)}{a^{k-1}\cdot k\cdot((k-1)!)^2}\ \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) +$$

$$+ \frac{C\cdot R\lambda_r}{(1-\delta)A}\ \frac{x^2}{2} + \frac{6\cdot a^2}{(1-\delta)(4-\delta)(9-\delta)}\ \frac{R^4\cdot\lambda_r^4}{2A}\cdot p\cdot x^2 -$$

$$- \frac{2\cdot a}{(4-\delta)(9-\delta)}\ \frac{R^4\cdot\lambda_r^4}{2A}\ px^3 + \frac{1}{9-\delta}\ \frac{R^4\cdot\lambda_r^4}{2A}\ p\ \frac{x^4}{4} + C_2. \qquad (A.4.21)$$

Constantele de intrgrare se vor determina din condițiile de continuitate și de legătură.

10 BIBLIOGRAFIE

[1] ABOVSKII, P.N., ANDREEV, P.N., DERUGA, P.A. Variaţionîe prinţipî teorii uprugosti i teorii obolcek. Glavnaia redakţiia Fiziko - matematiceskoi literaturî, Nauka, Moskva, 1978.

[2] ALBRECHT, J. Ein Beitrag zur Berechnung von Stahlbeton - Kreisplatten veränderlicher Dicke im Zustand I und im Zustand II, Dissertation, Darmastadt, 1974.

[3] ALTENBACH, I., SACHAROV, S.A. Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. Leipzig, 1982.

[4] AMBARTSUMIAN, S.A. Teoria anizotropnîh obolocek. Naukova Dumka, Kiev, 1980.

[5] AMIRO, I.Ia., ZARUTKII, A.V., POLIAKOV, P.S., Rebristîe ţilindriceskie obolociki. Naukova Dumka, Kiev, 1973.

[6] AMIRO, I.Ia., ZARUTKII, A.A. Teoriia rebristîh obolocek . Naukova Dumka, Kiev, 1980.

[7] AMIRO, I.Ia., ZARUTKII, A.V., PALAMARCIUK, G.V. Dinamika rebristîh obolocek. Naukova Dumka, Kiev, 19[illegible].

[8] ANDERS, R.P. Contribuţii la optimizarea dimensională a elementelor cuplajelor intermitente cu fricţiune, prin metoda elementelor finite. Teză de doctorat, Braşov, 1987.

[9] ANDRIANOV, V.I., MANEVICI, I.L., NALIVAIKO, A.L. K rascetu kruglîh ţilindriceskih ortotropnîh plastin podkre - plennîh radialnîmi rebrami. Stroitelnaia mehanika i rascet soorujenie, nr.3, p.19 - 22, 1977.

[10] ARHIPOV, H.V. Modelirovanie iz ghibaemîh rebristîh plastin. Stroitelnaia mehanika i rascet soorujenii, p.18- 20, nr.2, 1969.

[11] ATANASIU, C. Studiul eforturilor şi deformaţiilor în plăcile perforate supuse acţiunii unor sarcini concentrate şi uniform distribuite. Teză de doctorat , Institutul Politehnic Bucureşti, 1975.

[12] AVRAM, C., BOB, C., FRIEDRICH, R., S[illegible]AN, V. Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite. Teoria echivalenţelor. Editura Academiei, Bucureşti, [illegible].

[13] BABEU, T. Rezistenţa materialelor. Vol.1 şi 2. Reprografia Institutului Politehnic „Traian Vuia"Timişoara,19[illegible]0.

[14] BATHE, K.J., ... Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of liniar Systems (SAP IV).University of California, Berkely, 1973.

[15] BATHE, K.J. Numerical Methods in Finite Element Analysis . Prentice-Hall,Inc.Englewood Cliffs,New Jersey,1976.

[16] BARTUS, K.J., ÉGERT, J. Görbült peremű és poligon lemezek szamitasa nagy potosságú haromszögelemkeel, NME Közlemenyes Miskolc, IV, Sorozat 26(1982) Kötet, 3 füzet 151 - 173.

[17] BAUMGÄRTNER, W. Zur Berechnung von Sandwichplatten nach der Theorie 2. Ordnung mit der Methode der Finiten Elemente. Dissertation, München, 1982.

[18] BEJU, I., SOCS, S., TEODORESCU, P.P. Tehnici de calcul tensorial euclidian cu aplicaţii. Editura Tehnică Bucureşti, 1977.

[19] BELEŞ, I. Contribuţii la calculul construcţiilor metalice hidrotehnice cu elemente de rezistenţă din tablă şi grinzi ţinînd seama de efectul de conlucrare spaţială. Teză de doctorat, Bucureşti, 1972.

[20] BESCHEA, N. Rezistenţa materialelor - capitole speciale. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

[21] BESENKOV, H.S., TOLOK, A.V. O vliianii deformaţii sredinnoi plaskosti na nestaţionarnoe napriajennodeformiro - vannoe sostoianie plastinî s rebrami jestkosti. Problemî procinosti, nr.4, p.103 - 106, 1985.

[22] BIA, C., ILLE, V., SOARE, V.M. Rezistenţa materialelor şi teoria elasticităţii. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[23] BIEZENO, B.C., GRAMMEL, R. Technische Dynamik. Springer Verlag Berlin, Band I und II, 1973.

[24] BIRGHER, A.I. Kruglîe plastinki i obolociki vraşcenila Oboronghiz, Moskva, 1961.

[25] BOLEANTU, L., CIOFOAIA, V. Calculul plăcilor circulare cu nervuri radiale de lăţime variabilă. Buletinul Universităţii din Braşov, 1990.

[26] BOLEANTU, L., CIOFOAIA, V. Cu privire la calculul plăcilor circulare întărite cu nervuri radiale. A VI - a Conferinţă de Vibraţii Mecanice, 1 - 3 Decembrie, Timişoara, 1988.

[27] BOLEANTU, L., DOBRE, I. Aplicaţii ale mecanicii solidului deformabil în construcţia de maşini. Editura Facla Timişoara, 1978.

[28] BUBNOV, G.I. Trudî po teorii plastin . Gostehizdat , Moskva, 1953.

[29] BURMISTROV, F.E., MASLOV, M.N. Ustoicivosti kruglîh plastin peremennoi tolşcinî. Prikladnaia mehanika , nr.11, 1975.

[30] BUZDUGAN, Gh. Rezistenţa materialelor. Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

[31] CERNIN, F.K. Lineinaia teoria obolocek . Izdatelstvo Leningraskova Universiteta, Ciasti I, 1962.

[32] CHANG, C.I. A Closed - Form Solution for an Ortotropie Rotating Disk. ASME Journal of Applied Mechanics vol. 4, p.1122 - 1123, 1974.

[33] CIOFOAIA, V. Stadiul actual al calculului plăcilor circulare rigidizate. Referat doctorat,nr.1,1984.

[34] CIOFOAIA, V. Asupra influenţei nervurilor aplicate pe plăci circulare.Buletinul Universităţii din Braşov p.15 -21, 1985.

[35] CIOFOAIA, V. Asupra optimizării plăcilor circulare întărite cu nervuri radiale. A V-a Conferinţă de vibraţii în Construcţia de maşini, Timişoara,1985.

[36] CIOFOAIA, V., ş.a. Studiul experimental asupra încovoierii unor plăci circulare întărite cu nervuri radiale . Al IV-lea Simpozion Naţional de Tensometrie cu participare internaţională, Braşov, 1986.

[37] CIOFOAIA, V. Cu privire la calculul plăcilor circulare întărite cu nervuri radiale de forme variabile . Tehnologii Moderne în Industria Petrochimică, 21 - 22 Octombrie, Ploieşti, 1988.

[38] CIOFOAIA, V., RADU, Gh. Asupra optimizării barelor cu mase ataşate supuse la oscilaţii date. Simpozionul de Mecanisme şi Transmisii mecanice. Timişoara,1986.

[39] CIOFOAIA, V. Contribuţii la calculul plăcilor circulare rigidizate. Referatul nr.2, Braşov, 1985.

[40] CIOFOAIA, V. Asupra calculului de rezistenţă a discurilor cu nervuri radiale. A VI-a Conferinţă de Vibraţii Mecanice, 1-3 Decembrie, Timişoara,p.97-100,1988.

[41] CIOFOAIA, V. Asupra determinării deplasărilor transversale la plăcile circulare ortotrope. Buletinul Comisiei Inginerilor şi Tehnicienilor,p.111-114,Braşov,1988.

[42] CIOFOAIA, V. Asupra determinării stărilor de tensiune şi deformaţie la plăci circulare de grosime variabilă. Tehnologii Moderne în Industria Petrochimică , 21 - 22 Octombrie, 1988, Ploieşti.

[43] CIOFOAIA, V., RADU, Gh. Optimizarea dinamică a grinzilor în consolă cu masă concentrată. Creativitatea în Construcţia, Fabricarea şi Exploatarea Automobilelor, 4 - 5 Decembrie, vol.1,p.59-63, Piteşti, 1981.

[44] CIURIN, N.I., SOROKIN, K.C. Rascet deformaţii plengatb karnelnîh stankov s krugovîmi gedrostatioceskimi napravsiusiciuni. Vesnik maşinostroienie, nr.1, 1977.

[45] CRISTESCU, N. Mecanica materialelor compozite. Reprografia Universităţii din Bucureşti, 1983

[46] CONSTANTINESCU, N.I., TACU, T. Calcule de rezistenţă pentru utilaje tehnologice. Structuri izotrope axial simetrice. Editura Tehnică, Bucureşti, 1979.

[47] CONSTANTINESCU, N.I., MUNTEANU, Gh.M., GOLUMBOVICI, C.D. Calcule de rezistenţa structurilor de maşini şi utilaje. Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.

[48] CONSTANTINESCU, N.I., DANET, N.G. Metode noi pentru calcule de rezistenţă. Editura Tehnică, Bucureşti, 1989.

[49] CSIZMODIA, B. Complexe Anwendung von experimentellen und numerischen Methoden Experimentplanung. Al III-lea Simpozion Naţional de Tensometrie, 28 sept.-1 oct. Timişoara, Vol.III, p.101 - 107, 1983.

[50] CSURGA, A., ÉGART, J. Konform hőmoszög alakii lemezelemek összehasonlitana. NME közle menyeiből III Sorot Gepeszet 26(1980), kötet, 2 füzet, 77-86, Miskolc.

[51] CUTEANU, E., MARINOV, R. Metoda elementelor finite în proiectarea structurilor. Editura Facla, Timişoara,1980.

[52] CURTU, I., SPERCHEZ, Fl., SERBU, A. Calculul de rezistenţă in industria lemnului. Editura Tehnica, Bucureşti , 1981.

[53] CURTU, I., ... , CIOFOAIA, V.,ş.a. Structuri sandwich pentru mobilier de greutate redusă. Industria lemnului nr.1, 1981.

[54] CURTU, I., ... , CIOFOAIA, V., ş.a. Tipuri noi de mobilier realizate din panouri cu structuri îmbunătăţite. Temă de cercetare, Braşov, 1983.

[55] CURTU, I., GHELMEZIU, I. Mecanica lemnului şi a produselor pe bază de lemn. Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.

[56] CURTU, I., ..., CIOFOAIA, V., ş.a. Rezistenţa materialelor. Memorator, Reprografia Universităţii, Braşov, 19[illegible].

[57] CURTU, I., MUNTEANU, M., RADU, Gh., CIOFOAIA, V. Cercetări privind starea de tensiune şi deformaţie din capetele de frezat, cu ajutorul metodei elementelor finite (MEF) şi metodei elemntelor de frontieră (MEF). Al IV-lea Simpozion Naţional de Tensometrie, vol.IV, p.231 - 237, Braşov.

[58] DANKERT, J. Numerische Methoden der Mechanik. VEB Fach Buch Verlag, Leipzig, 1977.

[59] DICKEY, W.R. Nonlinear Bending of Circular Plates. SIAM Journal Mathematics, vol30,nr.1,p.1-10,1976.

[60] DLUGACI, I.M., KOVALICIUL, V.N. Issledovanie napriajenevo s estoianiia ţilindricieskih obolocek spriamougolinîmi oteverstiami metodami konocinîh elementov. Prikladnaia mehanika, nr.10, 1974.

[61] DOBRESCU, A. Geometrie diferenţială. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.

[62] DONNELL, C.L. Blaki plastinî i obolociki. Nauka, Moskva, 1982.

[63] DRAGOS, L. Principiile mediilor continue. Editura Tehnică, Bucureşti, 1983.

[64] DRUMM, R. Zur Effektiven FEM - Analyse Ebner Spanungskonzentrantionsprobleme. Dissertation, Karlsruhe, 198?.

[65] DUBINA, D. Contribuţii la perfecţionarea metodelor de calcul a construcţiilor metalice hidrotehnice stavile. Rezumatul tezei de doctorat, I.P. „Traian Vuia" , Timişoara, 1986.

[66] ECSEDI, I. Nehany megljegyzesa aperemen haj lekony leme - zeikkol erösitett tarcsakrol. Nehezip, müsz.egyet Közl., 1982, Sorozat 3, 28, nr.3-4, p.141-148.

[67] EGERT, J. Gerenchakkol merovitett, vekony lamezok közelitő szamitasa vegeselem modszerret, Evfolyan, 10 szam 1978.

[68] EGERT, J. Sugariranybanmerevitett, sik fanekleemezek szi - lardsagtani szamitasa, Gep XXXI, eviolyam, 2 szam, 1979.

[69] EGERT, J.. Beitrag Festigkeitsberechnung von ebener Bodenplatten mit Aussteifung. Wissenschaftliche Zeit - schrift der Technischen Hochschule Otto von Gu - rieke Magdenburg 23, 1979 Heft 2, p.181-184.

[70] * * * Experimental Stress Analysis. Proceedings of the VIII - th International Conference on Experimental Stress Analysis, Amsterdam, The Netherlands, May 12 - 16, 1986.

[71] FILISTINSKII, A.L., LIUBCIUAK, H.V. Ob odnom sposobe rasceta makromodeli diska s rebrami v pole ţentrobej - nîh sil. Prikladnaia mehanika, nr.7, p.61-67, 1980.

[72] FILONENKO - BORODICI, M.M. Teoria elasticităţii. Editura Tehnică, vol.I, 1951, vol.II, 1952, Bucureşti.

[73] FLEISMAN, P.N., Kruglîe i kolitevîe plitî minimalinogo ves Rascet na procinosti, nr.8, Magghiz, Moskva, 1962.

[74] FORRAY, I.M. Calculul variaţional în ştiinţă şi tehnică. Editura Tehnică, Bucureşti, 1975.

[75] FREJ DA FO LIMA. Uber der mittelpunktgestutzte kreisförmig Platte veränderlicher Dicke mir ebener eberfläche bei Membran wirkung der Flachen Schale. Dissertatio München, 1979.

[76] GALIMOV, Z.K., SACENKOV, V.A. Issledovaniia po teorii plastin i obolocek. Vîpusk 14, Izd. Kazanskogo Universiteta, 1979.

[77] GOIA, I. Contribuţii la calculul barelor curbe de secţiune constantă şi variabilă. Rezumatul tezei de doctorat I.P. Bucureşti, 1970.

[78] GOIA, I., CIOFOAIA, V., ş.a. Determinarea tensiunilor în recipiente cu capace bombate. A II - a Sesiune de creaţie ştiinţifică şi tehnică, Braşov, 1979.

[79] GOIA, I. Rezistenţa materialelor. Reprografia Universităţii vol.I, 1978, vol.II, 1979, Braşov.

[80] GOIA, I., CIOFOAIA, V., RADU, Gh. Stabilitatea barelor de secţiune variabilă. Buletinul Universităţii din Braşov, 1981.

[81] GÖLDNER, H. Arbeitsbuch Höhere Festigkeitslehre. Fach - buchverlag, Leipzig, 1978.

[82] GORSKII, G.V. Issledovanie vesa kruglîh plastin podkreplennîh rebrami jestkosti. Rascetî na procinosti , nr.8, Maşghiz, Moskva, 1962.

[83] GRIGOLIK,I., FILISTINKI, I. Perforirovanie plastinî i obolocekі. Nauka Dumka, Kiev, 1981.

[84] GRIGOLIUK, I.E., MAGHIRANOV, A.L. Ustoicivosti kruglîh trehsloinîh plastin. Problemî procinosti, nr. 8, 1979.

[85] GRIGORENKO, M.Ia., MUHAED, M.A. Reşenie nelineinîh zadaci teorii obolocek na EVM. Vîşeia Skola, Kiev, 1983.

[86] GRIGORENKO, M.Ia., VASILENKO, T.A. Teoria obolocek pere - mennoi jestkosti. Nauka Dumka, Kiev, 1981.

[87] GRIGORENKO, M.Ia., MITLIN, I.E., RAER, A.G., SUDAVTOVA,K. G. Issledovanie napriajennosti pokrîvaiuşciih diskov rabocih koles ţentrobejnîh kompressorov s ucetom diskretnogo razmeşceniia lopatok. Prikladnaia mehanika, nr.1, p.116 - 119, 1978.

[88] GRIGORENKO, M.Ia., OVLIAKULIEV, O.K. Cislennomu reşeniiu kraevîh zadaci o deformaţii ghibkih kruglîh plastin peremennoi jestkosti. Prikladnaia mehanika nr.4, p.63 - 70, 1978.

[89] GRACEV, A.C. Issledovanie vliianiia parametrov podkrepleniia naustoicivosti rebristîh sfericeskih obolo - cek. Prikladnaia mehanika, nr.5,p.49 - 55, 1983.

[90] GREEN, E.A., ADKINS, E.J. Large Elastic Deformations and Non - Linear Continuum Mechanics. Oxford, 1960.

[91] GRINEV, B.V., FILIPOV, P.A. Ob optimalnîh kruglîh plastinka. Mehanika tverdogo tela, nr.1,p.131 - 138, 1977.

[92] GUPVICI, B.I., i.d. K voprosy o vesovoi optimizaţii exsten- tricine podkreplennîh ţilindriceskih obolocek pri pomoşoi variaţionovo prinţipa. Prikladnaia mehanika, nr.12, p.75 - 80, 1978.

[93] HASLINGER, J., LOVISEK, I. The Obstacle Problem for the Equilibrum of a Shallow Shell Reinforced with Stffening Ribs. Zamm, 62, p.27 - 35, 1982.

[94] HENRY, W.A. Elements of Experimental Stress Analysis . Pergamon Press, London, 1977.

[95] HEYWOOD, B.R. Photoelasticity for Designers. Pergamon Press, Oxford, 1969.

[96] HUFFINGTON, J.N. Bending Athwart a Parallel Stiffened Plate. Journal of Appleid Mechanics, June , p.278 - 282, 1967.

[97] IATAN, I.R. Cercetări teoretice şi experimentale privind construcţiile de îmbinări cu flanşe cu nervuri . Teză de doctorat, I.P. Bucureşti, 1979.

[98] ILIESCU,N., TIPERCIUC, Gh., TUDOSE, I. Fotoelasticitate. Indrumar de lucrări de laborator, I.P.Bucureşti, 1973.

[99] IOANI, M.A. Calculul spaţial al structurilor alcătuite din planşee şi stîlpi. Rezumatul tezei de doctorat. I.P. Cluj - Napoca, 1981.

[100] IORDACHE, Gh. Calculul eforturilor interioare de încovoiere pentru tamburul nervurat interior, încărcat cu sarcină axial simetrică. Revista de chimie, nr.10, p.1041 - 1043, 1979.

[101] IONESCU, D.V. Ecuaţii diferenţiale şi integrale. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.

[102] JIRA, J. Analysis of a shellow elliptic paraboloid eccen - trically reinforced with ribs. Acta Technica, CSAV, nr.6, 1978.

[103] JONES, M.R. Plastic Bukling of Eccentrically Stiffend Circular Cylindrical Shells. AIAA Journal, nr.6, 1967.

[104] KALUK, F.Ia., MATIAS, F.I., NAZARENKO, V.V. Nekotorîe za - dacii izghiba kruglîh plastir s rebrami jestkosti . Prikladnaia mehanika, nr.6,p.82 - 87, 1975.

[105] KALANDIYA, A. Mathematical methods of two - dimensional elasticity. Mir Publishers, Moscow, 1975.

[106] KAO, R. Application of Hill functions to circular plate problems. Quarterly of Applied Mathematics, April, 1975.

[107] KAMKE, E. Diferenţialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig, Bd. I. 1959.

[108] KECS, W., TEODORESCU, P.P. Aplicaţii ale teoriei distri- buţiilor în mecanică. Editura Academiei, Bucureşti, 1970.

[109] KLIAGHIN, M.V. Plasticeskii izghib krugloi rebristoi plas- tinki s ucetom membrannîh sil. Stroitelstvo i ar- hitektura, nr.5, p.29 - 32, 1969.

[110] KLIAGHIN, M.V., CIAPLINSKI, A.I. K predelinomu ravhovesii kruglîh plastin podkreplennîh radialnîmi i koltevî- mi. Stroitelstvo i arhitektur, nr.12,p.38-43,1968.

[111] LIMANOV, I.V., STETINHA, A.V. Eksperimentalnoe izucenie povedeniia ghibkih ţilindriceskih panelei, rabotain- şeib v sostovenerazreznmi sistemî. Problemî proci - nosti, nr.9, 1981.

[112] KOBELEV, H.V., KOVERSKI, M.L., TIMOFEEV, I.S. Rascet treh- sloinîh konstrukţii. Maşinostroienie, Moskva, 1985.

[113] KOVALENKO, D.A., Plastinî i obolociki v rotorah turbino - maşin. Dokladî A.N. Kiev

[114] KOVALENKO, D.A. Kruglîe plastini peremennoi tolstinîh. Isdatel fiziko - matematicieskoi literatrî , Moskva, 1959.

[115] KRAUS, D.H. Eine Finite Element Methode zur Berechnung von Sandwichplatten unter Berücksichtigung der eingen - biegesteifigkeit der Deckhäute. Dissertation, München, 1974.

[116] KRENK, S. Theories for Elastic Plates via Orthogonal Polynomials. Journal of Ap.Mechanics, December, 1981.

[117] KRUPKO, V. Zur Bemessung direkt belasteter Ringrippen bei Behälten und Rohrleitungen. Der Stahlbau, nr.6, 1969.

[118] LAVRENTEV, A.M., LIUSTERNNIK, A.L. Curs de calcul variaţional. Editura Tehnica, Bucureşti, 1955.

[119] LEIMBACH, R.K. Eine Methode zur Berichnung der Schwingscharakteristika Ringversteifter Rotationsschalen. Dissertation, Bochum, 1973.

[120] LEKNITSKII, G.S. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. Mir Publishers, Moscow, 1981.

[121] LEKNITSKII, G.S. Anisotropnîe plastinki. Gosudarstvennoe Izdatestvo tehniko - teoreticeskoi litera - turî. Moskva, 1957.

[122] LEVINA, M.Z., RESETOV, M.D Rascet planşaib (kruglîh stalov) metalorejuscih stankov na jestkosti. Stanki i instrument, nr.8, p.1-6, 1958.

[123] LEVINA, M.Z., RESETOV, K.D. Racet i experimentalnoe issledovanie izghiba kruglîh slojnîh plastin s radialnîmi. Vestnik Maşinostroienie, nr.2, p.8-11, 1959.

[124] LEWIS, P., FUCHS, B.M. Simplified direct optimization of tubular truss structures. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.17, p.601-613, 1981.

[125] LINKE, KARL-PETER. Zum Tragverhalten von Profil Sand - wichplatten mit Stahldeckschichten und einem Polyurethan Hartscham Kern bei kurz und einem langzeitiger Belastung. Dissertation, Darmstadt, 1976.

[126] LIZAREV, D.A., KLEINOV, I.V., KOSTANINA, B.I. Svobodnîe kolebaniia kolţevîh plastin s ţilindriceskoi anizotropiei. Prikladnaia mehanika, nr.7, p.76-82, 1977.

[127] LO, H.K., CHRISTENSEN, R.R., WU, E.W. A High-Order theory of Plate Deformation. Part.1. Homogeneous Plates. Part.II, Laminated Plates, Journal of Applied Mechanics, December, 1977.

[128] Lucrările prezentate la al V - lea Simpozion Naţional De Tensometrie, Galaţi, 20-23 Septembrie, 1989.

[129] LOH, C.H., CARNELY, F.J. Vibration and Stability of Spinning Annular Plates Reinforced with Edge Beams. Journal of Appleid Mechanics, September, p.499 - 501, 1977.

[130] LOHR, H. Ein Verfahren zur Berechnung von Kreisringplaten mit 2 frein Rändern und von Kreisplaten mit frein

BUPT

Rand unter einer Gleichwichtsgruppe von Einzellasten Dissertation, Darmstadt, 1975.

[131]. LUKAS, A.P. Osnovîi nelineinoi mehaniki. Stroiizdat , Moskva, 1978.

[132] LURIE, P.A. Prostranstvenîe zadaci teorii uprugosti , Gostehizdat, Moskva, 1955.

[133] MAGERON, D., POTERASU, P., VULPE, A. Teoria optimizării structurilor cu aplicaţii. Editura Junimea, Iaşi, 1980.

[134] MAGYAROSY, I. Studiul carcaselor utilizate în construcţia de maşini. Rezumatul tezei de doctorat, Institutul Politehnic Cluj - Napoca, 1985.

[135] MAKSIMENKO, N.V., FILISTINSKII, A.L. Peredacia nagruzki ot rebra jestkosti k anizotropnoi obolocike v sluciae nalicia mejdu nemi sklieivaiuşceeva sloia. Prikladnaia mehanika,nr.8,p.84-69,1978.

[136] MALSCH, H. Stabilitäts- und Schwingungsuntersuchungen von ausgesteifen Platten nach einer Finite Element Methode, Dissertation, 1977.

[137] MANEA, V. Cîteva probleme ale teoriei plăcilor plane elastice. Editura Academiei, Bucureşti, 1966.

[138] MARTIAN, I. Plăci plane cu deformaţii mari de diferite conturuml. Rezumatul tezei de doctorat. Institutul Politehnic Cluj- Napoca, 1986.

[139] MARKUS, G. Kreis- und Kreisringplatten unter antisimetrischer Belastung. Akademiai Kiado. Budapest,1973.

[140] MASSONET, Ch., ş.a. Calculul structurilor la calculatoare electronice. Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

[141] MAZILU, P., TOPA, N., IEREMIA, M. Teoria şi calculul plăcilor ortotrope. Editura Tehnică, Bucureşti, 1983.

[142] MAZILU, P., TOPA, N., IEREMIA, M. Aplicarea teoriei elasticităţii şi a plăcilor în calculul construcţiilor , Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.

[143]. MAY, B. Zur Berechnung von Schalentragen werken mit Hilfe Gekrümmter Dreickelemente. Dissertation,Bochum,19??.

[144] MANESCU, T.S. Contribuţii la calculul de rezistenţă al vanei fluture biplane. Rezumatul tezei de doctorat, I.P.„Traian Vuia" Timişoara, 1982.

[145] MITCHELL, G.A. , WAIT,R. Metod konecinîh elementov dlia s Ciastnîmi proizvodnîmi. Izdatelistvo,Mir,Moskva,1981

[146] MLEJNER, H.P. Ein Beitrag zur nicht linearen statischen u. dynamischen Analyse von Vorgespanuten und rotieren Platten und Schalen mit der Methode der Finite Elemente. Dissertation, 1972.

[147] MOCANU, D.R., BUGA, M., GEORGESCU, C. Determinarea experimentală a eforturilor unitare. Editura Transporturilor şi Telecomunicaţiilor, Bucureşti, 1966.

[148] MOCANU, D.R., BUGA, M., BRATES, M. Calcule de rezistenţă cu specific feroviar. Editura Căilor ferate, Bucureşti, vol.II, 1958.

[149] MODIGA, M. Matricea de rigiditate a elementului dreptunghiular de placă ortotropă în stare plană de eforturi. Lucrările ştiinţifice, vol.5, Universitatea Galaţi, 1976.

[150] MUNTEANU, I. Calculul structurilor spaţiale în formulare matricială. Editura Facla, Timişoara, 1972.

[151] MUNTEANU, Gh.M., RADU, Gh., POPA, Al. Rezistenţa materialelor. Reprografia Universităţii, Braşov, 1981.

[152] MUNTEANU, Gh.M. Biblioteci de programe „STRUCT". Indreptar de utilizare. Reprografia Universităţii, Braşov, 1981.

[153] MUNTEANU, Gh.M., ... , CIOFOAIA, V., ş.a Calculul prin MEF a tobei şi capacelor morii autogene ∅8500x3000 mm cu acţionare cu motor asincron cu atac prin pinion pe coroană dinţată. Contract de cercetare 6/1980, Braşov.

[154] MUNTEANU, Gh.M., CIOFOAIA, V., ş.a. Calculul pe substructuri cu ajutorul programului SAPRON al clădirii principale a CNE. Contract de cercetare ştiinţifică nr.52/1985, Braşov.

[155] MUNTEANU, Gh. M., ş.a. Contribuţii la studiul rigidităţii stabilităţii elastice ale vibraţiilor plăcilor circulare. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, 42, 6, p.568 - 592, 1983.

[156] MUNTEANU, Gh.M., ş.a. Study of Displacements and Natural Frequencies of the Circular Plates in the Presence of Membrane Stresses. Mécanique Apliqué, nr.2, p.159 - 175, 1987.

[157] MUNTEANU, Gh.M. Aplicarea pe calculator a metodei elementelor finite. Reprografia Universităţii, Braşov, 1979.

[158] MUSAT, S. Contribuţii privind aplicarea metodei elementelor finite la calculul în domeniul elastic şi elastico - plastic al plăcilor întărite cu nervuri din structura navei. Universitaea din Braşov, Teză de doctorat, 1980.

[159] MUSHELISVILI, N.I. Cîteva probleme fundamentale ale teoriei matematice a elasticităţii. Editura Academiei Bucureşti, 1954.

[160] * * * Manualul pentru calculul construcţiilor. Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

[161] NADAI, N. Die Elastischen Platten. Springer - Verlag. Berlin, 1968

[162] NADASAN, St., BABEU, T. Manualul tehnicianului din laboratorul de încercări de metale. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.

[163] NASTASE, V., CURTU, I., CIOFOAIA, V., DRAGHICIU, C. Cercetări privind rigiditatea la încovoiere a plăcilor sandwich. Industria lemnului, nr.4, 1985.

[164] NECIAI, A.I., SUHAREV, P.I. Experimentalinoe opredelenie jestkostei na izghib i krucenie plastin k razami ili rebrami. Stroitelnaia mehanika i rascet sooruJenii, nr.3, p.61 - 62, 1971.

[165] NEMCINOV, I.Iu. Rascet prostranstvennîh konstrukţii (metod konecinîh elementov) Budivelnik,Kiev, 1980.

[166] NORRIE, H.G., VRIES, G . The Finite Element Method. Academic Press, New - York, 1973.

[167] NOVOJILOV, V.V. Teoria tonkih obolocek. Sudpromghiz, Moskva, 1951.

[168] NULLER, B.M., RIVKIN, M.B. Nesimetricinîi izghib plastinki podkreplennoi simmetricinoi sistemoi radialnîh reber. Prikladnaia matematika i mehanika, nr.3 , p. 469 - 477, 1983.

[169] OCIAN, Iu.M. Kolebaniia vraşciaiuşcegocia deformiruemogo diska. Mehanika tverdogo tela,nr.5,p.69-71,1979.

[170] OLESEV, S.S. Neşuşcia sposobnosti kruglîh plastin usilennîh radialnîmi i kolţevîmi rebrami. Problemî procinosti, nr.12, p.16 - 20, 1978.

[171] OPREA, Gh. Unele probleme privind calculul la solicitări dinamice ale planşeelor cu nervuri. Buletinul Academiei Militare, nr.1, p.159-174, 1973.

[172] PARTON, Z.V., KALOMKAROV, L.A., SENIK, A.N. Primenenia metoda osredneniia k rascetu armirovannîh rebristî obolocek i plastin reguliarnoi strukturî. Problemî procinosti, nr.8, p.101-106, 1988.

[173] PARTON, Z.N., Rascet napriajenno deformirovannogo sostoianiia podkreplennîh obolocek i plastin reguliarnoi strukturî. Problemî procinosti, nr.8,p.63-69,1989.

[174] PARTON, Z.N., PERLIN, I.P. Integral Equetions in Elasticity. Mir Publishers, Moscow, 1977.

[175] PACOSTE, C., STOIAN, V., DUBUNA,D. Metode moderne în mecanica structurilor. Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989.

[176] PETRICAN, M.,ş.a. Aplicaţii ale tensometriei în industria lemnului. Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

[177] PETRILA, T., GHEORGHIU, I.C. Metode element finit şi aplicaţii. Editura Academieie, Bucureşti, 1987.

[178] PISKUNOV, N. Differential and integral calcuc. Vol. II, Mir Publishers, Moscow, 1981.

[179] POBEDRI, E.B. Cislenie metodî o teorii uprugosti i plasticinosti. Izdatelistvo Moskovskogo Universiteta, Moskva, 1981.

[180] PODHORSKY, M. Kreisplatten mit veränderlicher Dicke ihre Berechnung und Vorteile. Konstruktion 25, p.93 - 98, 1973.

[181] PONOMARIOV, S.D., ş.a Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini. Vol.II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963.

[182] POPOV, Ia, G. Konţentraţiia uprughih napriajenii vozle ştampov razrezov tonkin vkliucenii i podkretlenii. Moskva, 1982.

[183] POSEA, N. Rezistenţa materialelor. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[184] POSTOKOV, V.A., HARTURIN, I.I. Metod konecinîh elementov v rasceta sudovîh konstrukţii. Iz.Sudostroenie, Leningrad, 1974.

[185] PRAISLER, G., VASILESCU, Al. Similitudinea sistemelor elastice. Editura Academiei, Bucureşti, 1974.

[186] PRHENICHNY, N.B., DANILIN, M.Y. Numerical Methods in extremal Problems.Mir Publishers, Moscow, 1978.

[187] PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of Matrix Structural Analysis. Mc Graw Hill, New - York, 1968.

[188] PASCARIU, I. Elemente finite. Concepte. Aplicaţii. Editura Militară, Bucureşti, 1985.

[189] RAGHAVAN, S.K., RAO, S.S. Influence of Elastico-Plastic Trasition on the inelastic Response of Beams and Plates. ASME Journal of Applied Mechanics, September, vol.45,p.521 - 526, 1978.

[190] RAO, S.S. The Finite Element Method in Engineering. Pergamon Press, Oxford, 1982.

[191] RABINOVICI, M.I. Stroitelnaia mehanikav SSSR. Stroiizdat Moskva, 1969.

[192] REDDY, N.J., HUANG, L.C., SINGH, R. Large deflections and large amplitude vibration of axialsymetric circular plates. International Journal for numerical Methods in Engineering, vol.17,p.527 - 541, 1981.

[193] REITMAN, I.M., SAPIRO, S.G., Metode de proiectare optimă a corpurilor deformabile. Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.

[194] REISSNER, E.A. Atwelvth order of theory of transverse bending of transversaly isotropic plates. ZAMM, p.285 - 289, 1983.

[195] REKLAITIS, V.G., RAVINDRAN, A., RAGSDELL, K.K. Engineering Optimization. Methods and Applications. A Wiley - Interscience Publication John Wiley and Sons, New - York, 1983.

[196] RUMSISKI, L. Prelucrarea matematică a datelor experimentale. Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

[197] RUSU, O., GALL, T. Probleme moderne ale rezistenţei materialelor. Editura Tehnică, Bucureşti, 1970.

[198] SAMSONOV, A.M. O vîbore optimalinogo diskretogo raspredeleniia jestkostei rebra na krugloi plastine. Prikladnaia mehanika, nr.11, p.65-71, 1978.

[199] SAMSONOV, A.M. Neoodhodimîe uslovia optimalinosti raspredelenie jestkostei rebra uprugoi plastin. Mehanika ... tela, nr.1, p.13[illegible] - 144, 19[illegible].

[200] SANDI, H. ...atriciale în mecanica structurilor. Editura Tehnică, Bucureşti, 1976.

[201] SAWIN, G.N. Spanungserhöhung um Rande von Löchern. VEB Verlag Technik, Berlin, 1956.

[202] SAWIN, G.N., FLESHMAN, N.P. Plastinki i obolociki s rebrami jestkosti. Naukovo dumka, Kiev, 1964.

[203] SAWIN, G.N., [illegible], F. Izghib ghibkih plastin s rebrami jestkosti. Prikladnaia mehanika, nr.5, p.[illegible]-16, 1974.

[204] SALVADORI, G.U., BARON, L.M. Metode numerice în tehnică. Editura Tehnică, Bucureşti, 1972.

[205] SEDOV, L. Mécanique des milieux continus. Editions de Moscou, TomeI, Tome II, 19[illegible].

[206] SI LE CONG. Effectivität untersuchung von FEM Platten - elementen zur Behondung von Spanungskonzentrations Problemen. Dissertation, Kaiserlauten, 1986.

[207] SIMA, V., VARGA, A. Practica optimizării asistate de calculator. Editura Tehnică, Bucureşti, 19[illegible]6.

[208] SIMA, P. Calculul structurilor din lemn utilizate în economia forestieră. Editura Ceres, Craiova, [illegible].

[209] SMIRNOV, I.V. Curs de matematici superioare. Editura Tehnică, vol.I, II, III, IV, 1952 şi 1953, Bucureşti.

[210] SOARE, V.M. Contribuţii la calculul plăcilor ortotrope cu nervuri de rigidizare pe o singură parte. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, Tomul 33, nr.4, 197[illegible] şi nr.1, 1975.

[211] SOLOMON, L. Elasticitate liniară. Introducere matematică în statica solidului elastic. Editura Academiei, Bucureşti, 1969.

[212] STEPANOV, V.V. Curs de ecuaţii diferenţiale. Editura Tehnică, Bucureşti, 1955.

[213] STEINBICHLER, H. Beitrag zur quatitativen Auswertung von holographischen Interferogrammen. Dissertation. München, 1973.

[214] STOICESCU, L. MODIGA, M. Metode matriceale în teoria structurilor de nave. Reprografia Universităţii, Galaţi, 1973.

[215] STOICESCU, L. Contribuţii la calculul planşeelor de nave folosind elemente finite de placă ortotropă structural şi elemente finite de bară cu pereţi subţiri Rezumatul tezei de doctorat. I.P. Bucureşti, 197?.

[216] STRANG, G., FIX, J.G. Teoriia metoda konecinîh elementov. Izdatelstvo Mir, Moskva, 1977.

[217] SULKIN, Iu.E. Upovnenniia zadacii o kruhloi plastinke usilennoi radialnîmi rebrami. Izv.AN SSSR Mehanika, nr.2, 1965.

[218] SUSTOKOVICI, A.Ia. Uproşciennîi rascetî napraiajennogo stoianiia kruglîh plastin. Vestnik maşinostroieniia, nr.1, 1971.

[219] SZILARD, R. Theory and Analysis of Plates. Prentices - Hill, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[220] TANKEUTI, Y., NODA, N. Plane Thermoelastic Problem in a Multiply Connected Orthotropic Body. Journal of Applied Mechanics, September, p.431-436, 1977.

[221] TEODORESCU, P.P. Probleme plane în teoria elasticităţii . vol.I,1961, vol. II, 1966, Editura Academiei , Bucureşti.

[222] TEODORESCU, P.P. Probleme spaţiale ale teoriei elasticităţii. Editura Academiei, Bucureşti, 1970.

[223] TEODORESCU, P.P., ILLE, V. Teoria elasticităţii şi introducere în mecanica solidelor deformabile. vol.I,197? vol.II,1979,vol.III,1980, Editura Dacia CLuj-Napoca

[224] THEOCARIS, S.P.,ş.a Analiza experimentala a tensiunilor . vol.I,vol.II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977.

[225] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER,J.N. Theory of Elasticity. New York, Mc Graw Hill, 1951.

[226] TIMOSHENKO, S.P., WOINOVSKY-KRIEGER. Teoria plăcilor plane şi curbe. Editura Tehnică, Bucureşti, 1968.

[227] TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. Teoria stabilităţii elastice Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

[228] TIRON, M. Teoria erorilor de măsurare şi metoda celor mai mici pătrate. Editura Tehnică, Bucureşti, 1972.

[229] TOPOLE,J. Berechnung von Spannungsfunktionen für Scheiben unter beliebiger Belastung. Dissertation, Bochum, 1977

[230] VAINBERG, D.V., VAINBERG, E.D. Plastinî, diski, balki stenki, Izd. ISA Kiev, 1952.

[231] VAINBERG, D.V. Konţentraţia napriajenii v plastinah okolo otverstii i vîkrujeh. Izd. Tehnika, Kiev, 1969.

[232] VAINBERG, D.V., JDAN, Z.V. Matricinîe algoritmi v teorii obolocek vraşcenie. Izd. Kievskogo Univer. 1967.

[233] VOINEA, P.R., VOICULESCU, D., CEAUSU, V. Elasticitate şi plasticitate. I.P. Bucuresti, 1976.

[234] VLASOV, V.Z. Tonkostenie uprughie sterjni. Fizmatghiz, Moskva, 1959.

[235] WOLMIR, A.S. Biegsame Platten und Schalen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962.

[236] WASHIZU, K. Variational methods in elasticity and plasticity. Moskva, Mir, 1967.

[237] WANG, CHI-TEH. Applied Elasticity. Mc Graw-Hill Publishing company LTD, New - York, 1953.

[238] ZIENKIEWICZ, O.C. The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. Mc Graw Hill, 1967, 1971.

[239] ZIENKIEWICZ, O.C. La méthode des éléments finis. Mc Graw Hill, 1973.

11 CUPRINS