INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" TIMISOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

Ing. EMILIA BERINDE

" PROCESE TRANZITORII IN GENERATORUL DE INDUCTIE CU DOUA VITEZE DE ROTATIE INTR-O INSTALATIE AEROELECTRICA"

- TEZA DE DOCTORAT -

Conducător ştiinţific,
Prof.dr.ing. CONSTANTIN SORA

- 1989 -

INTRODUCERE

Ca urmare a sarcinilor complexe ale construcţiei socialiste, în ţara noastră consumul de energie a crescut. Criza energetică declanşată în deceniul trecut nu a întrerupt ritmul industrializării socialiste în România, datorită politicii energetice a partidului nostru cu obiectivul conturat clar, de obţinere a independenţei energetice.

Rolul surselor noi şi regenerabile de energie este deosebit la sfîrşitul deceniului acestuia urmînd a avea în balanţa energetică a ţării o pondere de 12%.

Dintre sursele noi şi regenerabile de energie, vîntul va putea avea o pondere importantă în producerea energiei electrice în ţara noastră, ţinînd pe de o parte de faptul că în conversia energiei traseul său este direct, respectiv de la axul turbinei eoliene se poate antrena generatorul electric, şi, pe de altă parte, de faptul că, pe baza estimărilor generale potenţialul tehnic şi economic minim amenajabil al ţării noastre are valoarea de 2-3,5 milioane tone combustibil convenţional/an.

In Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timişoara există un colectiv interdisciplinar sub conducerea catedrei de Maşini Hidraulice care este integrat în cercetări în domeniul utilizării energiei vîntului, în cadrul problemelor prioritare coordonate de Consiliul Naţional pentru Stiinţă şi Tehnologie. Dintre cercetările întreprinse în cadrul colectivului interdisciplinar de la Inst. Polutehnic "Traian Vuia" din Timişoara, cele referitoare la studiul posibilităţilor de realizare în ţara noastră a unei instalaţii aeroelectrice de 1000 kW, a condus şi la realizarea prezentei lucrări.

Lucrarea, înscrisă în preocupările colectivului de Electrotehnică şi Maşini Electrice din cadrul Facultăţii de Electrotehnică Timişoara, studiază procesele tranzitorii dintr-o maşină electrică de inducţie avînd două trepte ale vitezei de rotaţie, folosită ca generator electric într-o instalaţie eoliană, la trecerea de la o treaptă a vitezei de rotaţie a maşinii la cea de a doua, trecere necesară pentru creşterea randamentului instalaţiei.

Lucrarea cuprinde 8 capitole. In capitolul 1 se prezintă principalele scheme de conversie a energiei vîntului în energia electrică cunoscute şi utilizate pe plan mondial

Capitolul 2 este consacrat funcţionării unei instalaţii aeroelectrice utilizînd ca generator electric o maşină de inducţie cu rotor în colivie. Pornind de la caracteristicile mecanice ale turbinei eoliane se studiază problemele legate de alegerea şi funcţionarea generatorului electric.

In capitolul 3 se deduc ecuaţiile maşinii de curent alternativ simetrice la repartiţia sinusoidală a inducţiei magnetice în lungul pasului polar (teoria celor două axe) cu considerarea pierderilor în fier. Se prezintă ipotezele de calcul, relaţiile de legătură între mărimile maşinii reale şi cele ale maşinii echivalente, numite ecuaţii de transformare, se deduc ecuaţiile care descriu comportarea maşinii echivalente. In finalul capitolului se prezintă ecuaţiile maşinii electrice fără considerarea pierderilor în fier.

Capitolul 4 este consacrat metodelor de rezolvare a ecuaţiilor maşinilor electrice de curent alternativ în teoria celor două axe cu şi fără considerarea pierderilor în fier. Se prezintă rezolvarea acestor ecuaţii cu ajutorul calculului operaţional, determinîndu-se parametrii operaţionali ai maşinii în cazul considerării pierderilor în fier. De asemenea se prezintă metode numerice de rezolvare a ecuaţiilor maşinilor electrice de curent alternativ şi în principal metoda Runge-Kutta-Gill.

In capitolul 5, maşina de inducţie cu rotor în colivie, avînd două trepte de viteză de rotaţie şi înfăşurări repartizate zonal, se echivalează cu o maşină deinducţie trifazată în stator şi în rotor, avînd înfăşurări repartizate sinusoidal de-a lungul pasului polar. Se determină parametrii maşinii echivalente şi ecuaţiile care descriu comportarea maşinii.

In capitolul 6 se prezintă ipotezele, valorile iniţiale şi ecuaţiile maşinii la deconectarea de la o treaptă a vitezei de rotaţie şi reconectarea la a doua treaptă a vitezei de rotaţie, în cazul considerării pierderilor în fier, respectiv în cazul neglijării acestora.

Procesele tranzitorii din maşina de inducţie cu rotor în scurtcircuit, avînd două viteze de rotaţie, funcţionînd cu generator electric într-o instalaţie eoliană de 1000 kW, sînt prezentate în capitolul 7. Se prezintă influenţa valorilor iniţiale, a momentului de inerţie al sistemului turbină eoliană-multiplicator al vitezei de rotaţie, asupra solicitărilor electromagnetice şi mecanice din maşină în timpul proceselor tranzitorii.

De asemenea, sînt prezentate rezultatele experimentale, obţinute în laborator, în cazul unei maşini de inducţie de 3,3/1 kW, funcţionînd ca generator electric cu două trepte ale vitezei de rotaţie de 1500/1000 rpm.

C U P R I N S

Pag.:

1. CONVERSIA ENERGIEI EOLIENE ÎN ENERGIE ELECTRICĂ

1.1. Instalaţie de conversie a energiei eoliene în energie electrică

O sursă de energie care a fost folosită încă din antichitate şi a cărei utilizare s-a perpetuat intens pînă în secolul trecut, este energia vîntului.

Vîntul este o sursă curată şi reînnoibilă de energie şi, constituie o sursă bogată şi practic nefolosită de energie. Energia eoliană este o "energie de calitate" [37], deoarece se poate transforma relativ simplu în energie electrică. De asemenea, ea este practic inepuizabilă, nepoluantă, disponibilă practic pretutindeni, gratuită - deoarece nu cere o extracţie primară - ,dar prezintă dezavantaje prin faptul că are un caracter neregulat în timp şi spaţiu, fiind diluată - adică avînd o concentraţie mică pe unitatea de suprafaţă - ceea ce conduce ca la utilizarea unor instalaţii eoliene de putere mare să fie utilizate rotoare de dimensiuni mari.

Orice instalaţie eoliană dezvoltată constă din trei părţi distincte (fig.1.1) şi anume: sistemul aerodinamic - turbina eoliană T, transmisia mecanică-multiplicatorul vitezei de rotaţie, M şi echipamentul de conversie - generatorul electric G.

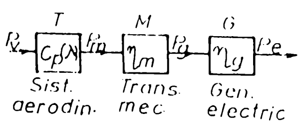


Fig.1.1

Puterea disponibilă a vîntului, P_v, care variază cu cubul vitezei acestuia, este convertită în putere mecanică prin intermediul sistemului aerodinamic, fiind afectată de coeficientul de putere C_p. Coeficientul de putere este o funcţie de viteza specifică λ - adică de raportul dintre viteza de rotaţie a turbinei şi viteza vîntului.

Puterea la intrarea în transmisie este $P_w=C_p(\lambda)\cdot P_v$. Presupunînd că randamentul acestuia η_m este constant în întregul domeniu de lucru, puterea la axul generatorului electric este $P_g = \eta_m P_w = \eta_m C_p(\lambda) P_v$.

Sistemele de conversie a energiei eoliene pot lucra la viteză de rotaţie a turbinei constantă sau variabilă.

In sistemele cu turaţie variabilă, viteza de rotaţie a turbinei eoliene, respectiv a generatorului electric, variază în funcţie de viteza vîntului, în timp ce frecvenţa curentului generat se menţine constantă, iar în cele cu turaţie constantă, viteza de rotaţie a turbinei eoliene este menţinută constantă într-un domeniu larg de variaţie a vitezei vîntului.

1.2. Scheme de conversie a energiei vîntului în energie electrică

Există o multitudine de posibilităţi de alegere a unei scheme de conversie, avînd la bază diferite criterii. Se cunosc scheme de:

a) conversie în curent continuu, cu stocare pe baterii de acumulatoare, pentru turbine de putere mică. Generatorul electric poate fi de c.c. sau un generator sincron cuplat cu un invertor (fig.1.2);

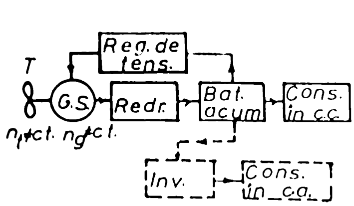


Fig.1.2

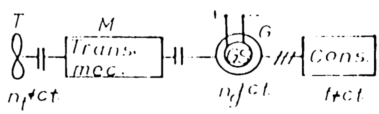


Fig.1.3

b) conversie în curent alternativ de frecvenţă variabilă în limite restrînse cu generator sincron, care debitează pe o reţea proprie (fig.1.3);

c) conversie în curent alternativ de frecvenţă constantă, cu generator sincron, care debitează pe o reţea de puetere infinită. Schema bloc este aceeaşi cu cea din fig.1.3, dar mărimile n_t (viteza de rotaţie a turbinei), n_g (viteza de rotaţie a generatorului) şi f (frecvenţa curentului debitat) sînt constante. Dezavantajele sistemelor de conversie echipate cu generatoare sincrone sînt: necesitatea mecanismului de reglare a paletelor turbinei, variaţia puterii de ieşire în funcţie de fluctuaţiile vitezei vîntului, riscul ieşirii din sincronism.

d) conversie în curent alternativ de frecvenţă constantă, cu generator asincron cu rotor în scurtcircuit, care debitează pe o rețea de putere infinită (fig.1.4). In întreg domeniul de variație a turației, frecvența este menținută constantă de către rețea. Generatorul asincron cu rotorul în scurtcircuit este un tip de generator ieftin, simplu, robust şi nu necesită îndeplinirea unor condiții speciale cînd lucrează în paralel, cu alte generatoare electrice. Suportă de asemenea supraîncărcarea şi deci se comportă avantajos la fluctuații ale vitezei vîntului (rafale).

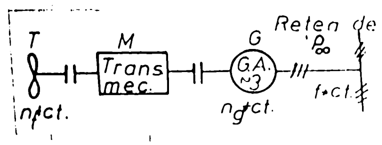


Fig.1.4

e) conversie în curent alternativ de frecvență constantă cu generator asincron cu inele de contact în circuitul roteric, care debitează pe o rețea de putere infinită (fig.1.5,a,1.5,b).

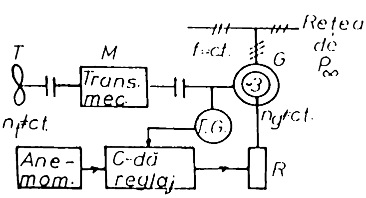


Fig.1.5,a

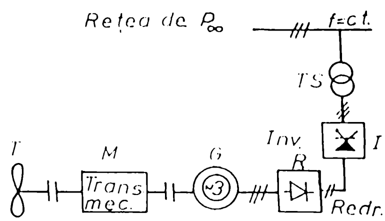


Fig.1.5,b

Sistemul permite - cu ajutorul unei scheme de comandă şi reglare corespunzătoare - ca turbina să lucreze pe caracteristica pe care coeficientul de putere este maxim, iar generatorul, pe caracteristica corespunzătoare puterii maxime debitate în rețea şi a pierderilor minime în rotor.

Dezavantajul sistemului constă în faptul că o bună parte a energiei produse este disipată pe rezistența rotorică, costul ridicat şi fiabilitatea scăzută a sistemului de comandă şi reglaj.

f) conversie în curent alternativ de frecvență constantă, cu generator de curent continuu şi inverter cu tiristoare, care debitează pe o rețea de putere infinită (fig.1.6).

Schema lucrează la turaţie variabilă şi frecvenţă constantă sincronizarea făcîndu-se prin intermediul transformatorului TS. De asemenea prezintă avantajul transmiterii fără dificultate a puterii la rafale de vînt, dar şi un cost ridicat, respectiv o fiabilitate mai scăzută în funcţionare.

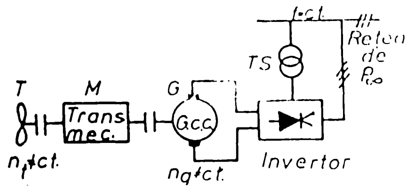


Fig.1.6

g) conversie în curent alternativ de frecvenţă constantă, utilizînd dubla conversie: curent alternativ - curent continuu - curent alternativ (fig.1.7). In această schemă, generatorul de curent continuu a fost înlocuit cu un generator sincron şi redresor, ceea ce conduce la creşterea costului instalaţiei şi scăderea fiabilităţii în funcţionare.

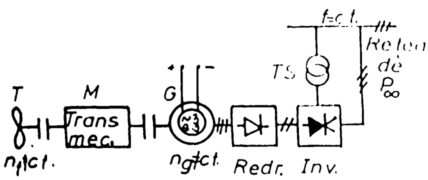


Fig.1.7

f) conversie în curent alternativ de frecvenţă constantă, utilizînd un generator cu cîmp modulat [37]. Această schemă de conversie este mult mai costisitoare decît schemele clasice, dar reduce problemele de stabilitate ale sistemului.

Există deci o multitudine de posibilităţi de a converti energia vîntului în energie electrică, dar întotdeauna trebuie să se aleagă schema cea mai avantajoasă din punct de vedere economic, al energiei produse şi - nu în ultimul rînd - al robusteţei şi fiabilităţii sistemului.

In ultimul deceniu au început să fie folosite tot mai mult în instalaţiile eoliene de mare, dar şi de mică putere, generatoarele asincrone cu rotor în scurtcircuit [37],[48],[63].

1.3. Energia obtenabilă cu un sistem de conversie

Ceea ce este caracteristic sistemelor de conversie a energiei eoliene nu este puterea generată - care este variabilă în funcţie de viteza vîntului - ci energia produsă în decursul unui an.

Există diferiţi factori de eficienţă - coeficient de putere $C_p(\lambda)$, randamentul generatorului $\eta_g(P_n)$ - care influenţează puterea generată, fiind funcţii neliniare de viteza vîntului şi sarcină.

Energia generată în decursul unui an este o funcţie complexă de forma:

$$W_e = \int P_v(t) \cdot C_p(\lambda) \cdot \eta_m \cdot \eta_g(P_n) \cdot dt$$

Ea poate fi totuşi estimată, utilizînd caracteristica putere-durată, similară graficelor de sarcină utilizate în analiza sistemelor energetice [37], cunoscînd curba viteză vînt - frecvenţă a acesteia pentru amplasamentul turbinei.

Efectuînd calcule estimative, pentru un spectru de viteze ale vîntului dat la un amplasament posibil, a rezultat că pentru o instalaţie aeroelectrică avînd puterea de 1 MW, funcţionînd cu un generator electric de inducţie de 1000/500 kW avînd două viteze de rotaţie - respectiv 1000/750 rotaţii pe minut - se poate obţine anual o energie electrică de aproximativ 3,5 GWh [80].

2. MASINA DE INDUCTIE CU ROTOR IN COLIVIE-GENERATOR INTR-O INSTALATIE AEROELECTRICA

Asamblarea maşinii primare - turbina eoliană - cu maşina electrică necesită cunoaşterea caracteristicilor mecanice ale celor două părţi componente.

2.1. Puterea şi cuplul obtenabil cu o turbină eoliană

Puterea mecanică furnizată de către turbina eoliană la arborele instalaţiei depinde de diametrul turbinei D, aria baleiată de paletele turbinei S, raportul λ dintre viteza periferică a turbinei u_M şi viteza vîntului v, densitatea aerului ϱ_0, precum şi de cubul vitezei vîntului, expresia ei fiind dată de rel. (2.1):

$$P_{at} = \lambda \cdot C_M \cdot v^3 \cdot \frac{\varrho_0}{2} \cdot S \cdot 10^{-3} \quad \text{kW} \tag{2.1}$$

în care:

$$\lambda = \frac{\pi D}{60} \cdot \frac{n_t}{v} \tag{2.2}$$

iar C_M, coeficientul de moment este o funcţie de variabila λ. Caracteristica coeficientului de moment C_M, ca funcţie de variabila λ, respectiv de viteza de rotaţie a turbinei n_t şi viteza vîntului v, este dată analitic prin relaţiile (2.3):

$$C_M = M_0 + A \cdot \lambda + B \cdot \lambda^3 - C \cdot \lambda^5 \qquad \text{pentru } \lambda \in [0, \lambda_{max1}]$$

$$C_M = A_1 - B_1 \cdot \lambda + C_1 \cdot \lambda^{-1} \qquad \text{pentru } \lambda \in [\lambda_{max1}, \lambda_{max2}] \tag{2.3}$$

$M_0, A, B, C, A_1, B_1, C_1, \lambda_{max1}, \lambda_{max2}$ sînt constante ce depind de tipul constructiv al turbinei şi care sînt cunoscute.

Momentul (cuplul) dat de turbină la arborele său, M_{ta}, este dat de relaţia (2.4):

$$M_{ta} = C_M \cdot \frac{\varrho_0}{2} \cdot S \cdot R \cdot v^2 \cdot 10^{-3} \quad \text{kN} \cdot \text{m} \tag{2.4}$$

Momentul dat de turbină la arborele generatorului electric M_t, considerat ca moment mecanic, trebuie redus prin intermediul raportului de multiplicare k_T al multiplicatorului de viteză (rel.2.5):

$$M_t = M_{ta}/k_T \tag{2.5}$$

De asemenea, puterea mecanică obtenabilă la arborele generatorului electric P_t, este diferită de cea obținută la arborele turbinei datorită prezenței multiplicatorului vitezei de rotație şi, deci, la calcularea ei se va ține seama de randamentul multiplicatorului η_m(rel.2.6):

$$P_t = \eta_m \cdot P_{at} \tag{2.6}$$

Multiplicatorul de viteză de rotație contribuie cu un moment rezistent M_{rt} care depinde de puterea transmisă generatorului electric P_g. Deoarece generatorul de inducție funcționează la alunecare mică (sub 1%) se poate considera că momentul rezistent datorită prezenței multiplicatorului este:

$$M_{rt} = - \frac{(1-\eta_m) \cdot P_n}{2\pi n_1}$$

n_1 reprezentînd viteza de rotație a cîmpului învîrtitor din generator, iar P_n puterea nominală a acestuia.

Deci, momentul rezultant produs de ansamblul turbină eoliană-multiplicator, la arborele generatorului electric este M_t:

$$M_t = \frac{M_{ta}}{k_T} + M_{rt} \tag{2.8}$$

Momentul obținabil la arborele generatorului electric M_t şi puterea mecanică transmisă acestuia P_t, sînt funcții de două variabile: viteza vîntului (mărime aleatoare) şi viteza de rotație a paletelor turbinei (mărime ce depinde de viteza vîntului).

Deoarece interesează modul în care aceste mărimi sînt dependente de viteza de rotație, se consideră viteza vîntului v ca parametru, deci se studiază comportarea sistemului la viteze ale vîntului constante.

In cazul unei turbine eoliene avînd razele paletelor de

25 m, caracteristicile mecanice $M_t=f(n)$ şi respectiv caracteristica putere-viteză de rotaţie, avînd ca parametru viteza vîntului v sînt date în fig.2.1 respectiv fig.2.2.

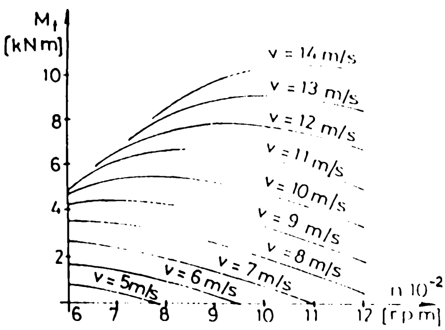


Fig.2.1

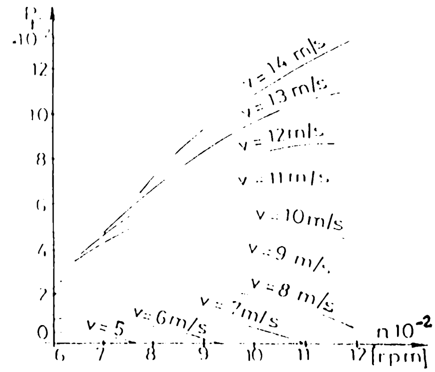


Fig.2.2

2.2. Alegerea generatorului electric

Puterea maximă obtenabilă la arborele generatorului P_{tmax}, variază după o curbă apropiată de o cubică (fig.2.3) şi deci, pentru a utiliza cît mai complet energia vîntului ar trebui ca generatorului de inducţie să i se poată regla viteza de rotaţie în limite largi.

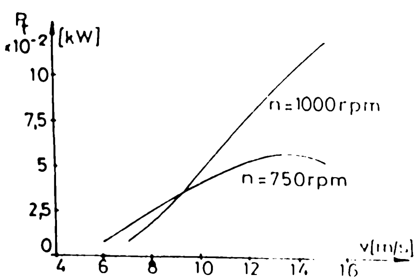


Fig.2.3

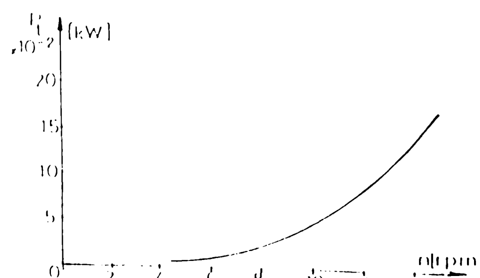


Fig.2.4

Deoarece puterea sistemului este limitată la o anumită valeare P_N, care în cazul luat în considerare este de 1000 kW, ar rezulta necesitatea reglării vitezei de rotaţie a generatorului între 500 şi 1250 rpm. Această reglare nu se poate realiza la un generator de inducţie cu rotorul în scurtcircuit.

Studiind comportarea sistemului funcţie de viteza vîntului, la viteze de rotaţie constante (fig.2.4), rezultă că o exploatare mai completă a instalaţiei aeroelectrice necesită fie utilizarea a două generatoare de inducţie, de putere nominale şi viteze de rotaţie diferite, fie a unui singur generator de inducţie, avînd două viteze de rotaţie diferite..

Utilizarea a două generatoare de inducţie cuplate pe aceeaşi axă (fig.2.5) unul avînd viteza de rotaţie n_{1I} şi puterea nominală P_{nI}, celălalt n_{1II}, P_{nII}, impune funcţionarea cu primul generator electric G_I pînă la o anumită viteză a vîntului v_c(numită viteză critică), după care se recomandă cuplarea celui de al doilea generator G_{II}.

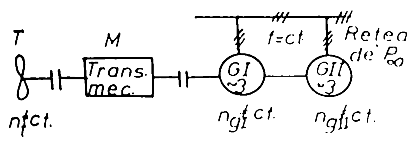


Fig.2.5

Utilizarea a două generatoare pe o axă prezintă o serie de inconveniente atît din punct de vedere al investiţiei, cît şi din punct de vedere al randamentului şi deci, al energiei obţinute.

Folosirea unui singur generator asincron, cu poli comutabili, în care se pot obţine mai multe viteze de rotaţie, corespunzătoare numărului perechilor de poli, prezintă avantaje economice şi de fiabilitate, faţă de cazul a două generatoare asincrone, avînd viteze de rotaţie şi putere nominală diferite.

In cazul considerat, s-a ales ca generator electric o maşină de inducţie avînd puterea nominală de 1000 kW pentru viteza de rotaţie 1000 rpm, respectiv de 500 kW pentru viteza de rotaţie de 750 rpm, maşină produsă de Electroputere Craiova.

2.3. Caracteristicile generatorului electric

Momentul electromagnetic şi puterea electromagnetică ale maşinii depind de parametrii electrici ai acestuia, precum şi de viteza de rotaţie transmisă maşinii. Parametrii electrici influenţează în mod considerabil caracteristicile de funcţionare ale mașinii electrice, ei depinzînd de fenomenele ce au loc în mașină. Unul dintre aceste fenomene, care apare și în regim permanent, atunci cînd mașina funcționează la alunecări relativ mari, este efectul pelicular.

Mașina de inducție considerată, are înfășurările formate din bare în formă de "T invers", plasate în crestături dreptunghiulare și prezintă un efect pelicular destul de pronunțat la alunecări mai mari decît alunecarea critică, ceea ce influențează caracteristicile de moment și de putere ale generatorului, chiar și în cazul regimului permanent , .

2.3.1. Caracteristicile de moment și de putere ale generatorului electric în regim permanent fără considerarea efectului pelicular

In cazul regimului permanent, fără considerarea efectului pelicular, momentul electromagnetic este dat de relația (2.9)

$$M_g = \frac{3pU_1^2}{2\pi f} \cdot \frac{\frac{R_2'}{s}}{(R_1+C_1\frac{R_2'}{s})^2+(X_1+C_1X_2')^2} \qquad (2.9)$$

în care:

p - numărul perechilor de poli ai mașinii;
U_1- tensiunea de fază nominală ;
f - frecvența ;
R_1, X_1 - rezistența, respectiv reactanța unei faze statorice a mașinii ;
R_2', X_2' - rezistența, respectiv reactanța unei faze rotorice a mașinii, raportate la stator;
s - alunecarea ;
C_1- modulul constantei complexe a mașinii $\underline{C}_1=1+\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_{1m}}$

Puterea stereomecanică transmisă mașinii va fi:

$$P_g = \frac{\omega_1}{p}(1+s)\cdot M \quad \text{în care} \quad \omega_1 = 2\pi f \qquad (2.10)$$

Caracteristicile mecanice M=f(n) și P=f(n) au fost calculate pentru ambele viteze de rotaţie.

2.3.2. Caracteristicile de moment şi de putere ale generatorului electric, în regim permanent, cu considerarea efectului pelicular

Maşinile de inducţie cu rotorul în scurtcircuit se construiesc pentru puteri mari - cu colivii avînd bare înalte, adică raportul dintre înălţimea şi lăţimea bazei crestăturii mai mare decît 4 [15], [28], [63], obţinîndu-se astfel rezultate mai bune în ceea ce priveşte pornirea şi funcţionarea lor.

La maşinile de inducţie cu rotor în scurtcircuit cu bare înalte, se manifestă un efect pelicular pronunţat, datorită căruia - la frecvenţe mari ale curentului din bară - repartiţia densităţii de curent pe înălţimea barei nu mai este uniformă, ceea ce conduce la modificarea parametrilor înfăşurării rotorului faţă de valoarea lor din timpul funcţionării maşinii în regim nominal, cînd frecvenţa din rotor este mică. Astfel rezistenţa fazei rotorice creşte, iar reactanţa de dispersie a aceleiaşi faze, scade.

Pentru a determina factorii de creştere a rezistenţei rotorice k_R, respectiv micşorare a reactanţei k_X s-au calculat - pentru cazul considerat - factorii de refulare ξ_R şi ξ_X (rel.2.11) [24],

$$\xi_R = a\,|s|^b \quad ; \quad \xi_X = c\,|s|^d \tag{2.11}$$

în care a,b,c,d sînt constante ce depind de tipul şi dimensiunile geometrice ale crestăturii rotorice, iar s este alunecarea la care funcţionează maşina.

Cu ajutorul factorilor de refulare ξ_R şi ξ_X se calculează funcţiile k_R şi k_X (rel.2.12) [63] de mărire, respectiv micşorarea rezistenţei, respectiv reactanţei rotorice:

$$\begin{aligned} k_R &= \xi_R \cdot \frac{\operatorname{sh} 2\xi_R + \sin 2\xi_R}{\operatorname{ch} 2\xi_R - \cos 2\xi_R} \\ k_X &= \frac{3}{2\xi_X} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2\xi_X - \sin 2\xi_X}{\operatorname{ch} 2\xi_X - \cos 2\xi_X} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Rezistenţa, respectiv reactanţa de dispersie ale fazei rotorice, reduse la stator, devin:

$$R_2 = k_R \cdot R_2' \quad ; \quad X_2 = k_X \cdot X_2' \qquad (2.13)$$

relaţii în care parametrii R_2' şi X_2' sînt cei care caracterizează funcţionarea neafectată de efectul pelicular.

Introducînd parametrii daţi de rel.(2.13) în expresia momentului electromagnetic (2.9), respectiv a puterii stereomecanice a generatorului se pot determina caracteristicile de moment M=f(n) sau M=f(s) şi respectiv de putere P=f(n) sau P=f(s).

In fig.2.6 şi 2.7 sînt reprezentate caracteristicile de moment, respectiv de putere pentru cazul cînd maşina funcţionează cu un număr de perechi de poli, iar în fig.2.8 şi 2.9 sînt reprezentate aceleaşi caracteristici, pentru celălalt număr de perechi de poli.

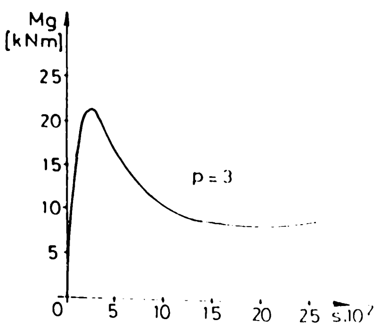


Fig.2.6

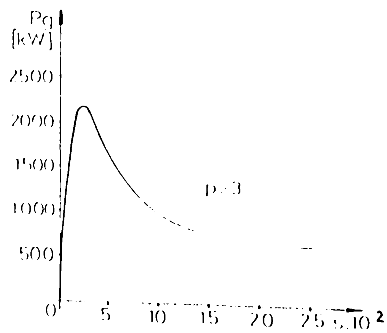


Fig.2.7

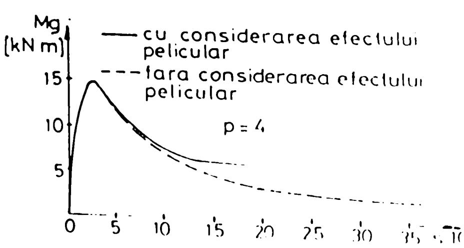


Fig.2.8

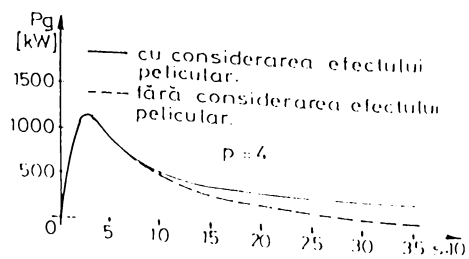


Fig.2.9

Din studiul caracteristicilor de moment și de putere rezultă că efectul pelicular influențează puternic valorile corespunzătoare unor alunecări mai mari decît alunecarea critică, deci porțiunea de funcționare instabilă a mașinii.

2.4. Determinarea punctului de funcționare a generatorului electric

Punctul de funcționare a generatorului se obține din egalitatea momentelor (rel.2.14), respectiv a puterilor (rel.2.15) la arborele generatorului:

$$\Sigma M = M_t + M_g + M_{rg} = 0 \tag{2.14}$$

$$\Sigma P = P_t + P_g = 0 \tag{2.15}$$

în care M_t, M_g, P_t și P_g sînt date de relațiile (2.8),(2.9),(2.6) și (2.10), iar momentul rezistent al generatorului fiind dat de:

$$M_{rg} = - \frac{P_{mec}}{2\pi(f/p)} \tag{2.16}$$

Relațiile (2.14) și (2.15) furnizează ecuații de grad superior în n - viteza de rotație a generatorului electric - și v - viteza vîntului, a căror rezolvare s-a făcut numeric, cu metoda Newton - , considerînd viteza vîntului ca parametru. Pentru a reduce timpul de calcul, s-a considerat - pentru început - intervalul vitezelor de rotație corespunzătoare pornirii și valorii critice a alunecării, apoi s-a redus acest interval.

Valorile vitezelor de rotație corespunzătoare punctelor de funcționare la diferite viteze ale vîntului, rezultate din calcul (tabelul nr.1), corespund cu cele rezultate grafic, din intersecția curbelor de moment, respectiv putere ale generatorului electric și ale turbinei (fig.2.10, 2.11).

In tabelul nr.1 s-a notat cu n_I viteza de rotație a generatorului electric corespunzătoare funcționării cu prima treaptă a vitezei de rotație și cu n_{II}, punctul de funcționare cu treapta a doua a acestuia.

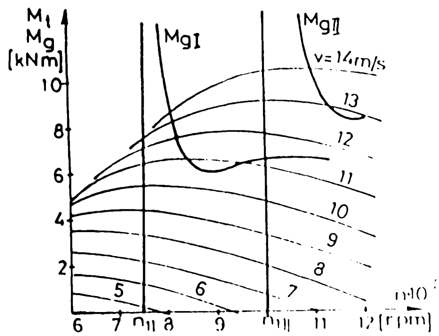


Fig.2.10

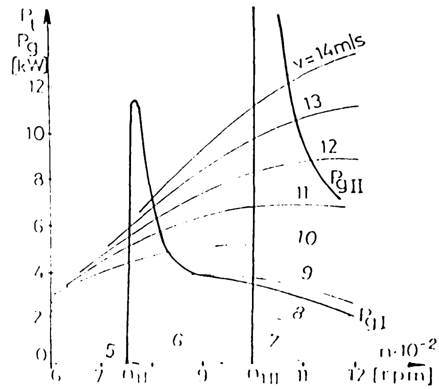


Fig.2.11

Tabelul nr.1

v m/s	6	7	8	8,5	9	10	11	12	13
n_I (rpm)	750,75	751,45	752,3	752,8	753,04	753,82	754,5	755,05	755,35
n_{II} (rpm)	–	1000,35	1000,99	1001,38	1001,88	1002,75	1003,5	1004,38	1005,25

Prin urmare, pentru viteze ale vîntului cuprinse între 6 şi 13 m/sec, maşina funcţionează cu o alunecare între 0,1-0,4% la funcţionarea cu prima treaptă a vitezei de rotaţie, pînă la viteza vîntului de 9 m/s, respectiv între 0,27-0,52% la funcţionarea cu treapta a doua a vitezei de rotaţie, pentru viteze ale vîntului mai mari de 9 m/sec.

2.5. Ecuaţia dinamicii instalaţiei

Parametrii nominali ai oricărei maşini fie ea eoliană, fie electrică, nu caracterizează complet comportarea acesteia. Este deci, necesar să se facă o analiză de comportare a ansamblului turbină eoliană-generator electric, atît în regim normal de funcţionare, cît şi în cazul pornirii instalaţiei, oppirii ei, dar mai ales, trebuie studiată comportarea ansamblului turbină eoliană- maşină electrică la trecerea de la o viteză de rotaţie la cealaltă, trecere care depinde de parametrul aleator care este viteza vîntului.

Ecuaţia dinamicii instalaţiei este:

$$\frac{d(J.\omega_m)}{dt} = M_t - M_r \qquad (2.17)$$

relaţie în care J este momentul de inerţie rezultant, al tuturor pieselor aflate în mişcare, ω_m - viteza unghiulară mecanică a instalaţiei, M_t - momentul activ, produs de turbină la arborele său, M_r reprezintă suma tuturor momentelor rezistente, deci inclusiv al generatorului electric. Trebuie precizat încă de la început că prezenţa transmisiei mecanice - respectiv a multiplicatorului vitezei de rotaţie a turbinei - conduce la necesitatea ca să se scrie ecuaţia mişcării cu toate mărimile reduse la arborele generatorului electric, pentru a putea studia dinamica maşinii electrice în funcţie de viteza vîntului v şi viteza de rotaţie a turbinei n_t.

Astfel, momentul de inerţie al ansamblului turbină eoliană-multiplicator de viteză de rotaţie J_{t1} este redus la arborele generatorului electric cu pătratul raportului de multiplicare al multiplicatorului k_T, deci:

$$J_t = J_{t1}/k_T^2 \qquad (2.17,a)$$

- momentul produs de turbina eoliană este redus la arborele generatorului electric cu raportul de multiplicare al multiplicatorului de viteză k_T (rel.2.5);

- momentul rezistent introdus de către multiplicatorul vitezei de rotaţie se consideră constant, dat de relaţia (2.7);

- momentul rezistent al maşinii electrice este suma dintre momentul electromagnetic M şi momentul rezistent propriu maşinii electrice M_{rg}(rel.2.16);

- viteza de rotaţie a turbinei eoliene n_t devine la arborele generatorului electric $n = n_t.k_T$;

Maşina electrică are şi ea un moment de inerţie al rotorului, notat cu J_g. Reducînd toate mărimile la arborele maşinii electrice şi ţinînd cont de legătura dintre viteza unghiulară mecanică ω_m, unghiul electric dintre două faze ale mașinii electrice ϑ și numărul perechilor de poli ai acesteia, p, ecuația mișcării devine:

$$\frac{J}{p} \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M_{mec} + M \qquad \text{cu } J = J_t + J_g \qquad (2.18)$$

în care M_{mec} reprezintă suma dintre momentul activ produs de turbină la arborele generatorului electric, M_t (pozitiv) și momentul rezistent al generatorului electric, M_{rg} (negativ), deci:

$$M_{mec} = M_t + M_{rg} \qquad (2.19)$$

iar M reprezintă momentul electromagnetic al mașinii electrice (considerat negativ în cazul funcționării ca generator).

Ecuația mișcării evidențiază faptul că orice modificare a unei mărimi mecanice influențează mărimile electrice și invers. Modificarea valorii unei mărimi, conduce la modificarea valorii mărimilor ce depind de prima de la valori inițiale la valori ce corespund noii situații. Această variație are loc într-un anumit interval de timp, dependent de parametrii instalației, interval în care procesele au o desfășurare în timp diferită de cea corespunzătoare regimurilor staționare, ele numindu-se procese tranzitorii [24], iar regimul de funcționare, regim tranzitoriu.

Trecerea mașinii electrice de la o viteză de rotație la cealaltă, trecere ce are loc pentru anumite viteze ale vîntului determină deci procese tranzitorii în mașina electrică. Pentru a studia comportarea acesteia în regimul tranzitoriu, este necesar să se precizeze ecuațiile de funcționare ale acesteia.

3. ECUATIILE MASINILOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV

3.1. Consideratii generale

Maşinile electrice de curent alternativ au numai cuplaj magnetic între înfăşurările celor două părţi, statorul şi rotorul.

Studiul analitic al funcţionării maşinilor electrice de curent alternativ se simplifică dacă, schemele maşinilor reale, în care înfăşurările statorice şi rotorice, cuplate între ele magnetic, se înlocuiesc cu scheme echivalente, ale căror elemente sînt cuplate între ele numai galvanic, cu condiţia echivalenţei energetice.

Infăşurările rotorului şi ale statorului se execută, în general, cu un număr diferit de faze, un număr de spire pe fază diferit şi diferiţi factori de înfăşurare. De aceea, pentru alcătuirea schemelor echivalente, ecuaţiile referitoare la mărimile rotorice trebuie reduse la înfăşurările statorice sau invers. In calcule practice este mai comodă reducerea ecuaţiilor rotorice la stator.

La o maşină electrică dată, se consideră că se cunosc mărimile geometrice, proprietăţile mecanice, electrice, termice ale materialelor din care este construită. Ca urmare, rezistenţele şi inductivităţile înfăşurărilor sînt cunoscute în funcţie de poziţia rotorului faţă de stator, poziţie determinată prin unghiul electric ϑ făcut de două axe, una fixă faţă de stator, iar alta fixă faţă de rotor.

Maşinile electrice au miezuri feromagnetice pentru închiderea cîmpului magnetic. Cîmpurile magnetice variabile în timp provoacă pierderi în miezul feromagnetic prin intermediul fenomenelor de histereză magnetică şi curenţi turbionari.

La materialele cu histereză magnetică, legătura dintre inducţia magnetică B şi intensitatea cîmpului magnetic H este neliniară şi neunivocă, ceea ce face ca inductivităţile unei maşini electrice să fie dependente de curenţi în mod neunivoc.

De asemenea cîmpul magnetic de dispersie, care se închide atît în mediu nemagnetic, cît şi în cel feromagnetic, este influenţat de fenomenul de saturaţie, fenomen care - în general - îl reduce, deci reduce inductivitatea de dispersie.

Un alt fenomen care influenţează parametrii electrici ai maşinii este efectul pelicular. Efectul pelicular deformează repartiţia densităţii curentului electric pe suprafaţa secţiunii conductorului din crestătură şi are ca efect modificarea rezistenţei şi inductivităţii părţii din conductor plasată în crestătură.

Valorile parametrilor au influenţă considerabilă asupra caracterului proceselor ce se desfăşoară în maşinile electrice şi asupra regimurilor de funcţionare ale acestora, dar mai ales asupra proceselor tranzitorii din maşină.

Deci, la scrierea ecuaţiilor care caracterizează procesele şi fenomenele ce au loc în timpul funcţionării maşinii electrice, trebuie întotdeauna precizat cum au fost definiţi parametrii maşinii.

3.2. Ecuaţiile maşinii electrice simetrice la repartiţia sinusoidală a inducţiei magnetice în lungul pasului polar (teoria celor două axe)-cu considerarea pierderilor în fier.

In mod obişnuit, maşinile electrice au întrefier variabil în lungul pasului polar şi sînt astfel construite încît au două axe de simetrie în cvadratură electrică. La aceste maşini, inducţia magnetică are o repartiţie oarecare în lungul pasului polar, dar după o curbă alternativă, care poate fi descompusă în serie Fourier. Comportarea maşinii este determinată în cea mai mare măsură de armonica fundamentală a curbei de repartiţie. Din acest motiv, se consideră cazul unei maşini electrice care are două axe de simetrie magnetice: axa d şi axa q, în cvadratură electrică, cu repartiţia sinusoidală a inducţiei magnetice în lungul pasului polar.

Se obţine o repartiţie sinusoidală a inducţiei magnetice în lungul pasului polar dacă:

- circuitul magnetic al maşinii este nesaturat şi are permeabilitatea magnetică a miezului feromagnetic, μ_{Fe} foarte mare, teoretic $\mu_{Fe} \to \infty$;
- toate înfăşurările maşinii sînt repartizate sinusoidal de-a lungul pasului polar ;
- întrefierul maşinii este constant în lungul pasului polar. Această ultimă condiţie, este întotdeauna satisfăcută la

maşinile electrice de inducţie.

La maşina cu două axe de simetrie magnetică, aceleaşi solenaţii determină cîmpuri magnetice diferite după cele două axe. Una din axele de simetrie, numită axă transversală şi notată cu q, o considerăm decalată înainte, în sensul rotaţiei, faţă de cealaltă axă numită longitudinală, notată cu d.

La o maşină cu întrefier constant se poate obţine o astfel de situaţie dacă în rotor are loc un interstiţiu nemagnetic după axa d [24]. In acest caz, cîmpul magnetic în lungul axei d nu străbate interstiţiul, iar cel în lungul axei q îl străbate.

In fig.3.1 este dată schema electrică a maşinii pentru care sînt valabile ipotezele enunţate, notîndu-se cu λ înfăşurarea fixă statorică de ordinul λ, iar cu λ' înfăşurarea fixă rotorică de ordinul λ'.

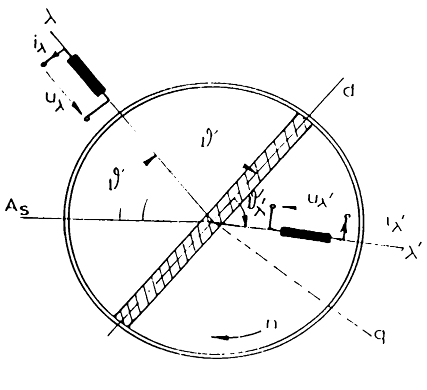


Fig.3.1

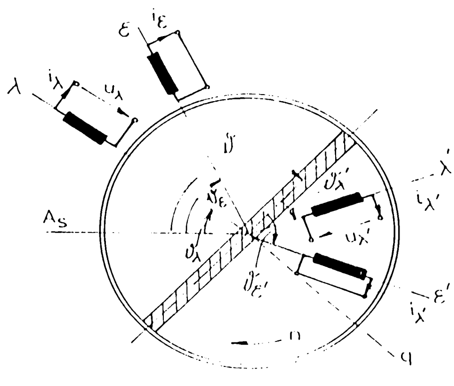


Fig.3.2

Pentru a ţine seama de influenţa pierderilor în fier asupra cîmpului magnetic, considerînd că între inducţia magnetică B şi intensitatea cîmpului magnetic H are loc o legătură liniară - condiţie satisfăcută de curenţii turbionari - pierderile prin histereză magnetică se echivalează cu pierderi prin curenţi turbionari.

Fluxul cîmpului magnetic generat de curenţii turbionari se consideră ca fiind produs de curenţi de conducţie stabiliţi într-un sistem ε de înfăşurări auxiliare scurtcircuitate, fixe faţă de stator, respectiv ε' fixe faţă de rotor, înfăşurări cuplate cu înfăşurările reale numai prin intermediul cîmpului magnetic principal. Rezistenţa electrică şi inductivitatea unei ast fel de înfăşurări auxiliare sînt mărimi care trebuie considerate cunoscute la o maşină dată. In fig.3.2 este prezentată schema electrică a maşinii pentru care sînt valabile toate ipotezele enunţate.

A_s reprezintă axa de origine pentru unghiuri fiind o axă fixă faţă de stator. Dacă se suprapune cu axa fazei 1, atunci $\vartheta_1=0$. Forma dată este generală, cînd nu se suprapune.

La o maşină simetrică în stator, cu m faze, vom avea:

$$\vartheta_\lambda=\vartheta_1+(\lambda-1)\frac{2\pi}{m} \tag{3.1}$$

Dacă maşina are m' înfăşurări şi în rotor, atunci:

$$\vartheta_{\lambda'}=\vartheta_{1'}+(\lambda'-1)\frac{2\pi}{m'} \tag{3.2}$$

Relaţiile (3.1) şi (3.2) se scriu analog şi pentru înfăşurările auxiliare ε, respectiv ε', în care $\varepsilon=1,2,\ldots,m$, iar $\varepsilon'=1',2',\ldots m_1'$.

Fie:

R_λ, R_λ' - rezistenţele electrice ale fazelor statorice, respectiv rotorice ale înfăşurărilor principale;

$R_\varepsilon, R_\varepsilon'$ - rezistenţele electrice ale fazelor statorice, respectiv rotorice ale înfăşurărilor auxiliare;

u_λ, u_λ' - tensiunile la borne ale fazelor λ şi λ';

i_λ, i_λ' - curenţii electrici stabiliţi în înfăşurările principale;

$i_\varepsilon, i_\varepsilon'$ - curenţii electrici stabiliţi în înfăşurările auxiliare;

w, w' - numărul de spire pe o fază statorică, respectiv rotorică;

$\Psi_\lambda, \Psi_\lambda'$ - fluxurile totale pentru faza de ordinul λ a înfăşurării principale statorice, respectiv cea rotorică de ordinul a înfăşurării principle rotorice.

Fluxurile totale ale unei faze se consideră ca fiind suma dintre fluxurile principale $\Psi_{\lambda h}$, $\Psi_{\lambda' h}$ ale înfăşurărilor de ordinul λ, respectiv λ', fluxurile de dispersie proprie $\Psi_{\lambda\sigma}$, $\Psi_{\lambda'\sigma}$ ale înfăşurărilor principale şi respectiv fluxurile de dispersie mutuală $\Psi_{\lambda m\sigma}$, $\Psi_{\lambda' m\sigma}$ ale aceloraşi înfăşurări (rel.3.3):

$$\Psi_{\lambda} = \Psi_{\lambda_h} + \Psi_{\lambda\sigma} + \Psi_{\lambda_{m}\sigma}$$

$$\Psi_{\lambda'} = \Psi_{\lambda'_h} + \Psi_{\lambda'\sigma} + \Psi_{\lambda'_{m}\sigma} \qquad (3.3)$$

In mod analog se definesc fluxurile totale pentru înfăşurările auxiliare de ordinul ε, respectiv ε':

$$\Psi_{\varepsilon} = \Psi_{\varepsilon h} + \Psi_{\varepsilon\sigma} + \Psi_{\varepsilon m\sigma}$$

$$\Psi_{\varepsilon'} = \Psi_{\varepsilon' h} + \Psi_{\varepsilon'\sigma} + \Psi_{\varepsilon' m\sigma} \qquad (3.4)$$

în care $\Psi_{\varepsilon h}$, $\Psi_{\varepsilon' h}$ sînt fluxurile principale, $\Psi_{\varepsilon\sigma}$, $\Psi_{\varepsilon'\sigma}$ sînt fluxurile de dispersie şi $\Psi_{\varepsilon m\sigma}$, $\Psi_{\varepsilon' m\sigma}$ sînt fluxurile de dispersie mutuală ale înfăşurărilor auxiliare de ordinul ε, respectiv ε'.

Determinarea variaţiei în raport cu timpul a curenţilor, tensiunilor şi unghiului ϑ se poate face rezolvînd ecuaţiile generale ale maşinii (3.5):

$$u_{\lambda} = -R_{\lambda} i_{\lambda} - \frac{d\Psi_{\lambda}}{dt} \qquad u_{\lambda'} = -R_{\lambda'} i_{\lambda'} - \frac{d\Psi_{\lambda'}}{dt}$$

$$0 = R_{\varepsilon} i_{\varepsilon} + \frac{d\Psi_{\varepsilon}}{dt} \qquad 0 = R_{\varepsilon'} i_{\varepsilon'} + \frac{d\Psi_{\varepsilon'}}{dt} \qquad (3.5)$$

cărora li se ataşează ecuaţia mişcării (2.18):

$$M + M_{mec} = \frac{J}{p} \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

In cazul considerat se poate proceda mai simplu, făcînd uz de o altă maşină, ideală, echivalentă din punct de vedere energetic cu maşina dată. Maşina echivalentă are schema din fig.3.3. şi are :

- $m+m_1$ înfăşurări fixe faţă de stator şi $m'+m_1'$ înfăşurări fixe faţă de rotor, necuplate între ele şi nici cu înfăşurările din cealaltă parte, cu axele în axele înfăşurărilor principale, respectiv auxiliare ale mașinii reale, repartizate sinusoidal de-a lungul pasului polar. Aceste înfășurări nu produc cîmp magnetic în întrefier;

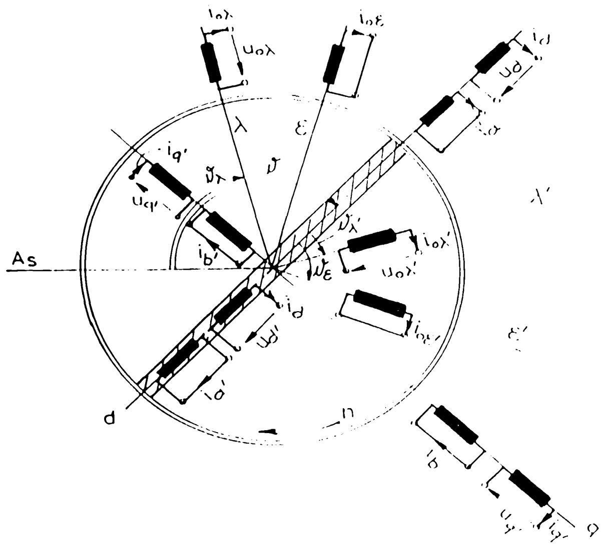


Fig.3.3

- patru înfășurări statorice, repartizate sinusoidal, mobile față de stator, fixe față de rotor, cu axele suprapuse două peste axa d, două peste axa q, și patru înfășurări rotorice similare celor statorice; dar fixe față de rotor, cu axele în axele d și respectiv q. Curenții acestor înfășurări, produc cîmpul magnetic din întrefierul mașinii (cîmpul principal), fiind cuplate magnetic două cîte două între ele.

-același întrefier, același diametru, același număr de perechi de poli, același moment de inerție și aceleași pierderi în fier ca și mașina reală;

Infășurarea fixă statorică de ordinul λ (corespunzătoare înfășurării statorice principale λ din mașina reală) are $w_{o\lambda}$ spire, inductivitatea $L_{o\lambda}$, rezistența $R_{o\lambda}$, tensiunea la borne $u_{o\lambda}$, fluxul total $\Psi_{o\lambda}$ și curentul $i_{o\lambda}$. Mărimile similare ale celorlalte înfăşurări sînt pentru:

- înfăşurările fixe rotorice de ordinul λ', corespunzătoare înfăşurărilor principale rotorice de ordinul λ': $w_{o\lambda'}$; $L_{o\lambda'}$; $R_{o\lambda'}$; $u_{o\lambda'}$; $\Psi_{o\lambda'}$; $i_{o\lambda'}$;
- înfăşurările fixe statorice de ordinul ε, corespunzătoare înfăşurărilor auxiliare statorice de ordinul ε : $w_{o\varepsilon}$; $L_{o\varepsilon}$; $R_{o\varepsilon}$; 0; $\Psi_{o\varepsilon}$; $i_{o\varepsilon}$;
- înfăşurările fixe rotorice de ordinul ε', corespunzătoare înfăşurărilor auxiliare rotorice de ordinul ε': $w_{o\varepsilon'}$; $L_{o\varepsilon'}$; $R_{o\varepsilon'}$; 0 ; $\Psi_{o\varepsilon'}$; $i_{o\varepsilon'}$;
- înfăşurările mobile statorice din axa d, respectiv q, corespunzătoare înfăşurărilor principale ale maşinii: w_d, L_{dd}, R_d, u_d, Ψ_d, i_d, respectiv w_q, L_{qq}, R_q, u_q, Ψ_q, i_q;
- înfăşurările mobile statorice din axa d, respectiv q, corespunzătoare înfăşurărilor auxiliare ale maşinii: w_a, L_{aa}, R_a, 0, Ψ_a, i_a, respectiv w_b, L_{bb}, R_b, 0, Ψ_b, i_b ;
- înfăşurările fixe rotorice din axa d', respectiv q', corespunzătoare înfăşurărilor principale ale maşinii: $w_{d'}$, $L_{d'd'}$, $R_{d'}$, $u_{d'}$, $\Psi_{d'}$, $i_{d'}$, respectiv $w_{q'}$, $L_{q'q'}$, $R_{q'}$, $u_{q'}$, $\Psi_{q'}$, $i_{q'}$.
- înfăşurările fixe rotorice din axa d', respectiv q', corespunzătoare înfăşurărilor auxiliare ale maşinii: $w_{a'}$, $L_{a'a'}$, $R_{a'}$, 0, $\Psi_{a'}$, $i_{a'}$, respectiv $w_{b'}$, $L_{b'b'}$, $R_{b'}$, 0, $\Psi_{b'}$, $i_{b'}$.

Numerele de spire $w_{o\lambda}$, $w_{o\lambda'}$, $w_{o\varepsilon}$, $w_{o\varepsilon'}$, w_d, w_q, w_a, w_b, $w_{d'}$, $w_{q'}$, $w_{a'}$, $w_{b'}$, se pot alege arbitrare. Pentru simplificarea calculelor, fără a reduce generalitatea ecuaţiilor, alegem $w_{o\lambda} = w_{o\varepsilon} = w_d = w_q = w_a = w_b = w$ şi $w_{o\lambda'} = w_{o\varepsilon'} = w_{d'} = w_{q'} = w_{a'} = w_{b'} = w'$.

Fluxurile Ψ_d, Ψ_q, Ψ_a, Ψ_b cuprind atît fluxurile principale, cît şi cele de dispersie.

Maşina echivalentă are acelaşi moment electromagnetic M, aceeaşi putere electrică totală în orice moment, aceeaşi energie magnetică separat pe stator şi rotor, aceeaşi inducţie magnetică în întrefier şi aceleaşi pierderi în fier ca şi maşina reală.

Pe baza acestor considerente, se pot stabili relaţiile de legătură între mărimile maşinii reale şi cele ale maşinii echivalente. Relaţiile respective se numesc <u>ecuaţii de transformare</u>.

3.2.1. Ecuaţiile de transformare a mărimilor statorice

3.2.1.1. Ecuaţiile de transformare a curenţilor

Maşina reală şi maşina echivalentă avînd aceleaşi inducţii magnetice în întrefieruri de aceeaşi valoare au şi aceleaşi solenaţii.

Solenaţiile în axele d şi q ale maşinii reale Θ_d şi Θ_q contribuţie ale înfăşurărilor statorice principale sînt:

$$\Theta_d = \sum_{\lambda=1}^{m} w_\lambda i_\lambda \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda); \quad \Theta_q = \sum_{\lambda=1}^{m} w_\lambda i_\lambda \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda) \tag{3.6}$$

respectiv cele corespunzătoare înfăşurărilor statorice auxiliare Θ_a şi Θ_b sînt:

$$\Theta_a = \sum_{\varepsilon=1}^{m_1} w_\varepsilon i_\varepsilon \cos(\vartheta - \vartheta_\varepsilon); \quad \Theta_b = \sum_{\varepsilon=1}^{m_1} w_\varepsilon i_\varepsilon \sin(\vartheta - \vartheta_\varepsilon) \tag{3.7}$$

Solenaţiile corespunzătoare înfăşurărilor statorice ale maşinii echivalente, în aceleaşi axe sînt:

$$\begin{aligned} \Theta_d &= w \cdot i_d \qquad & \Theta_a &= w \cdot i_a \\ \Theta_q &= w \cdot i_q \qquad & \Theta_b &= w \cdot i_b \end{aligned} \tag{3.8}$$

Din condiţia de egalitate a solenaţiilor se obţin curenţii din înfăşurările maşinii echivalente:

$$\begin{aligned} i_d &= \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{w_\lambda}{w} i_\lambda \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda) \; ; \quad i_a = -\sum_{\varepsilon=1}^{m_1} \frac{w_\varepsilon}{w} i_\varepsilon \cos(\vartheta - \vartheta_\varepsilon) \\ i_q &= -\sum_{\lambda=1}^{m} \frac{w_\lambda}{w} i_\lambda \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda) \; ; \quad i_b = \sum_{\varepsilon=1}^{m_1} \frac{w_\varepsilon}{w} i_\varepsilon \sin(\vartheta - \vartheta_\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.9}$$

In ipoteza repartiţiei sinusoidale a solenaţiilor de-a lungul pasului polar, solenaţia înfăşurării ν care contribuie la producerea cîmpului magnetic în întrefier este $w_\nu(i_\nu - i_{o\nu})$, deoarece curentul $i_{o\nu}$ nu contribuie la solenaţia din axa d, respectiv q, şi această solenaţie poate fi scrisă ca o parte din solenaţiile Θ_d şi Θ_q, respectiv Θ_a şi Θ_b considerate în axa fazei ν şi deci:

$$\begin{aligned} w_\nu(i_\nu - i_{o\nu}) &= \xi_\nu \left[w \cdot i_d \cos(\vartheta - \vartheta_\nu) - w i_q \sin(\vartheta - \vartheta_\nu) \right] \\ w_{\nu w}(i_{\nu w} - i_{o\nu w}) &= \xi_{\nu w} \left[w i_a \cos(\vartheta - \vartheta_{\nu w}) - w i_b \sin(\vartheta - \vartheta_{\nu w}) \right] \end{aligned} \tag{3.10}$$

(S-a utilizat indicele w pentru mărimile corespunzătoare fazei ν a înfășurărilor auxiliare).

Inlocuind în (3.10) expresiile curenților i_d, i_q, i_a, i_b dați de (3.9) și în urma unor transformări simple rezultă:

$$
\begin{aligned}
i_{o\nu} &= i_\nu - \xi_\nu \frac{w}{w_\nu} \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{w_\lambda}{w} i_\lambda \cos(\vartheta_\nu - \vartheta_\lambda) \\
i_{o\nu w} &= i_{\nu w} - \xi_{\nu w} \frac{w}{w_{\nu w}} \sum_{\varepsilon=1}^{m_1} \frac{w_\varepsilon}{w} i_\varepsilon \cos(\vartheta_{\nu w} - \vartheta_\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Punînd condiția ca solenația corespunzătoare curenților $i_{o\nu}$ în axa d să fie zero avem:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{\nu=1}^{m} i_{o\nu} \cos(\vartheta - \vartheta_\nu) = \sum_{\nu=1}^{m} i_\nu \cos(\vartheta - \vartheta_\nu) - \sum_{\nu=1}^{m} \xi_\nu \frac{w}{w_\nu} \cdot \\
&\cdot \cos(\vartheta - \vartheta_\nu) \cdot \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{w_\lambda}{w} i_\lambda \cos(\vartheta_\nu - \vartheta_\lambda) = \sum_{\nu=1}^{m} i_\nu \cos(\vartheta - \vartheta_\nu) - \\
&- \sum_{\nu=1}^{m} \xi_\nu \frac{w}{w_\nu} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{\lambda=1}^{m} i_\lambda \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda) - \sum_{\nu=1}^{m} \xi_\nu \frac{w}{w_\nu} \cdot \frac{1}{2} \cos 2\vartheta_\nu \cdot \\
&\cdot \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{w}{w_\lambda} i_\lambda \cos(\vartheta + \vartheta_\lambda) - \sum_{\nu=1}^{m} \xi_\nu \frac{w}{w_\nu} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_\nu \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{w_\lambda}{w} i_\lambda \sin(\vartheta + \vartheta_\lambda)
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Relațiile (3.13) sînt satisfăcute independent de i_λ și ϑ dacă sînt îndeplinite condițiile (3.14):

$$
\sum_{\nu=1}^{m} \xi_\nu = 2 \; ; \quad \sum_{\nu=1}^{m} \xi_\nu \cos 2\vartheta_\nu = 0; \quad \sum_{\nu=1}^{m} \xi_\nu \sin 2\vartheta_\nu = 0
\tag{3.14}
$$

In cazul în care mașina este simetrică, adică dacă:

$$
\vartheta = \vartheta_1 + (\lambda - 1) \frac{2\pi}{m}
\tag{3.15}
$$

relațiile (3.14) conduc la:

$$
\xi_\nu = \frac{2}{m}
\tag{3.16}
$$

In mod analog, punînd condiția ca solenația corespunzătoare curenților $i_{o\nu w}$ în axa d să fie zero, conduce la necesitatea îndeplinirii condițiilor:

$$\sum_{\nu w=1}^{m_1} \xi_{\nu w}=2\,; \qquad \sum_{\nu w=1}^{m_1} \xi_{\nu w}\cos 2\vartheta_{\nu w}=0; \quad \sum_{\nu=1}^{m_1} \xi_{\nu w}\sin 2\vartheta_{\nu w}=0 \qquad (3.17)$$

Dacă maşina este simetrică, adică dacă este îndeplinită condiţia (3.15), atunci relaţiile (3.17) conduc la egalitatea:

$$\xi_{\nu w} = \frac{2}{m_1} \qquad (3.18)$$

Deci, cu ajutorul relaţiilor (3.9),(3.11),(3.15) şi (3.16) determinăm curenţii din înfăşurările statorice ale maşinii echivalente în funcţie de curenţii din înfăşurările maşinii reale. Din rel.(3.10) obţinem şi curenţii din înfăşurările reale, cînd se cunosc cei din înfăşurările maşinii echivalente:

$$i_\nu = i_{o\nu} + \xi_\nu \frac{w}{w_\nu}\left[i_d\cos(\vartheta-\vartheta_\nu)-i_q(\sin(\vartheta-\vartheta_\nu)\right]$$

$$i_{\nu w}=i_{o\nu w}+\xi_{\nu w}\frac{w}{w_{\nu w}}\left[i_a\cos(\vartheta-\vartheta_{\nu w})-i_b\sin(\vartheta-\vartheta_{\nu w})\right] \qquad (3.19)$$

Relaţiile (3.9), (3.11), (3.15),(3.16) şi (3.19), reprezintă ecuaţiile de transformare ale curenţilor.

3.2.1.2. <u>Ecuaţiile de transformare a tensiunilor</u>

Condiţia de echivalenţă este ca, în orice moment, independent de ϑ, suma puterilor electrice momentane ale înfăşurărilor maşinii reale să fie egală cu suma puterilor electrice momentane ale înfăşurărilor maşinii echivalente, deci:

$$\sum_{\lambda=1}^{m} u_\lambda i_\lambda = u_d i_d + u_q i_q + \sum_{\lambda=1}^{m} u_{o\lambda} i_{o\lambda} \qquad (3.20)$$

. Infăşurările auxiliare atît din maşina reală, cît şi cele din maşina echivalentă fiind scurtcircuitate, tensiunile la bornele lor sînt în ambele cazuri zero.

Inlocuind în rel.(3.20) curenţii $i_d, i_q, i_{o\lambda}$ cu expresiile lor din relaţiile de transformare a curenţilor, obţinem:

$$\sum_{\lambda=1}^{m} u_{o\lambda} i_{o\lambda} = u_d \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{w_\lambda}{w} i_\lambda \cos(\vartheta-\vartheta_\lambda) - u_q \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{w_\lambda}{w} i_\lambda \sin(\vartheta-\vartheta_\lambda) +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{m} u_{o\lambda} i_\lambda - \sum_{\lambda=1}^{m} u_{o\lambda} \xi_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{w_\nu}{w} i_\nu \cos(\vartheta-\vartheta_\nu)$$

adică:

$$\sum_{\lambda=1}^{m} i_\lambda \left[u_\lambda - u_{o\lambda} - \frac{w_\lambda}{w} u_d \cos(\vartheta-\vartheta_\lambda) + \frac{w_\lambda}{w} u_q \sin(\vartheta-\vartheta_\lambda)\right] =$$

$$= -\sum_{\lambda=1}^{m} u_{o\lambda}\zeta_\lambda \frac{w}{w_\lambda}\sum_{\nu=1}^{m} \frac{w_\nu}{w} i_\nu \cos(\vartheta_\lambda-\vartheta_\nu) \qquad (3.21)$$

Inlocuind în (3.20) pe i_λ dat de (3.19) obţinem:

$$i_d\left[u_d - \sum_{\lambda=1}^{m} u_\lambda \zeta_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \cos(\vartheta-\vartheta_\lambda)\right] + i_q\left[u_q + \sum_{\lambda=1}^{m} u_\lambda \zeta_\lambda \cdot \frac{w}{w_\lambda} \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \sin(\vartheta-\vartheta_\lambda)\right] = \sum_{\lambda=1}^{m} (u_\lambda - u_{o\lambda}) \cdot i_{o\lambda} \qquad (3.22)$$

Relaţiile (3.21) şi (3.22) trebuiesc satisfăcute oricare ar fi i_λ, respectiv i_d, i_q, ceea ce este posibil dacă sînt nuli factorii care înmulţesc pe i_λ din rel.(3.21) şi i_d, i_q din rel. (3.22), adică:

$$u_d = \sum_{\lambda=1}^{m} u_\lambda \zeta_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \cos(\vartheta-\vartheta_\lambda)$$

$$u_q = -\sum_{\lambda=1}^{m} u_\lambda \zeta_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \sin(\vartheta-\vartheta_\lambda) \qquad (3.23)$$

$$u = \frac{w_\lambda}{w} u_d \cos(\vartheta-\vartheta_\lambda) - \frac{w_\lambda}{w} u_q \sin(\vartheta-\vartheta_\lambda) + u_{o\lambda}$$

şi totodată:

$$\sum_{\lambda=1}^{m} u_{o\lambda}\zeta_\lambda \frac{w}{w_\lambda}\sum_{\nu=1}^{m} \frac{w_\nu}{w} i_\nu \cos(\vartheta_\lambda-\vartheta_\nu) = 0$$

$$\sum_{\lambda=1}^{m} (u_\lambda - u_{o\lambda}) i_{o\lambda} = 0 \qquad (3.24)$$

Inlocuind în expresia lui u_λ din relaţia (3.23) pe λ cu ν şi pe u_d, u_q din aceleaşi relaţii, obţinem:

$$u_{o\nu} = u_\nu - \frac{w_\nu}{w} \sum_{\lambda=1}^{m} u_\lambda \zeta_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \cos(\vartheta_\lambda-\vartheta_\nu) \qquad (3.25)$$

Deci relaţiile de transformare a tensiunilor sînt:

$$
\begin{aligned}
u_d &= \sum_{\lambda=1}^{m} u_\lambda \xi_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda) \\
u_q &= -\sum_{\lambda=1}^{m} u_\lambda \xi_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda) \\
u_{o\nu} &= u_\nu - \frac{w_\nu}{w} \sum_{\lambda=1}^{m} u_\lambda \xi_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \cos(\vartheta_\lambda - \vartheta_\nu) \\
u_\nu &= u_{o\nu} + \frac{w_\nu}{w} \left[u_d \cos(\vartheta - \vartheta_\nu) - u_q \sin(\vartheta - \vartheta_\nu) \right]
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Cu primele trei relaţii din (3.26) se obţin tensiunile la bornele înfăşurărilor din maşina echivalentă, cînd se cunosc tensiunile la bornele înfăşurărilor din maşina reală, iar cu ultima relaţie din (3.26) se obţin tensiunile la bornele înfăşurărilor maşinii reale cînd se cunosc tensiunile la bornele înfăşurărilor maşinii echivalente.

3.2.1.3. Ecuaţiile de transformare a fluxurilor

Cele două maşini trebuie să aibă aceleaşi energii magnetice în statoare şi deci:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda=1}^{m} i_\lambda \Psi_\lambda &= i_d \Psi_d + i_q \Psi_q + \sum_{\lambda=1} i_{o\lambda} \Psi_{o\lambda} \\
\sum_{\varepsilon=1}^{m1} i_\varepsilon \Psi_\varepsilon &= i_a \Psi_a + i_b \Psi_b + \sum_{\varepsilon=1}^{m1} i_{o\varepsilon} \Psi_{o\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Ecuaţiile (3.28) sînt similare relaţiilor (3.20), cu deosebirea că aici, în locul tensiunilor intervin fluxurile magnetice,. Deci, urmînd aceeaşi cale, vom obţine ecuaţiile de transformare a fluxurilor:

$$
\begin{aligned}
\Psi_d &= \sum_{\lambda=1}^{m} \Psi_\lambda \xi_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda) \\
\Psi_q &= -\sum_{\lambda=1}^{m} \Psi_\lambda \xi_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda) \\
\Psi_{o\nu} &= \Psi_\nu - \frac{w_\nu}{w} \sum_{\lambda=1}^{m} \Psi_\lambda \xi_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \cos(\vartheta_\lambda - \vartheta_\nu) \\
\Psi_a &= \sum_{\varepsilon=1}^{m1} \Psi_\varepsilon \xi_\varepsilon \frac{w}{w_\varepsilon} \cos(\vartheta - \vartheta_\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

$$\Psi_b = -\sum_{\varepsilon=1}^{m_1} \Psi_\varepsilon \xi_\varepsilon \frac{w}{w_\varepsilon} \sin(\vartheta - \vartheta_\varepsilon)$$

$$\Psi_{o\nu w} = \Psi_{\nu w} - \frac{w_{\nu w}}{w} \sum_{\varepsilon=1}^{m_1} \Psi_\varepsilon \xi_\varepsilon \frac{w}{w_\varepsilon} \cos(\vartheta_\varepsilon - \vartheta_{\varepsilon w})$$

şi respectiv:

$$\begin{aligned} \Psi_\nu &= \Psi_{o\nu} + \frac{w_\nu}{w}\left[\Psi_d \cos(\vartheta - \vartheta_\nu) - \Psi_q \sin(\vartheta - \vartheta_\nu)\right] \\ \Psi_{\nu w} &= \Psi_{o\nu w} + \frac{w_{\nu w}}{w}\left[\Psi_a \cos(\vartheta - \vartheta_{\nu w}) - \Psi_b \sin(\vartheta - \vartheta_{\nu w})\right] \end{aligned} \tag{3.29}$$

Cu relaţiile de transformare (3.28) obţinem fluxurile magnetice totale din maşina echivalentă atunci cînd cunoaştem fluxurile magnetice din maşina reală, iar cu relaţiile (3.29) realizăm operaţiunea inversă.

Fluxul magnetic total al unei faze statorice de ordinul este:

$$\Psi_\lambda = \Psi_{\lambda h} + \Psi_{\lambda m\sigma} + \Psi_{\lambda\sigma} \tag{3.30}$$

în care: $\Psi_{\lambda h}$ - fluxul principal, $\Psi_{\lambda m\sigma}$ - fluxul de dispersie mutuală

$$\Psi_{\lambda m\sigma} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{w_\nu w_\lambda}{w^2} L_{m\sigma} i_\nu$$

Fluxul magnetic total al înfăşurărilor statorice din axa d, respectiv q va fi:

$$\begin{aligned} &\Psi_d = \Psi_{dh} + \Psi_{d\sigma}; \quad \Psi_{d\sigma} = L_{d\sigma} i_d \quad ; \quad \Psi_a = \Psi_{ah} + \Psi_{a\sigma}; \quad \Psi_{a\sigma} = L_{a\sigma} i_a \\ &\Psi_q = \Psi_{qh} + \Psi_{q\sigma}; \quad \Psi_{q\sigma} = L_{q\sigma} i_q \quad ; \quad \Psi_b = \Psi_{bh} + \Psi_{b\sigma}; \quad \Psi_{b\sigma} = L_{b\sigma} i_b \end{aligned} \tag{3.31}$$

Relaţiile de transformare a fluxurilor (3.28) şi (3.29) sînt satisfăcute şi de fluxurile principale Ψ_{dh}, Ψ_{qh}, $\Psi_{\nu h}$, Ψ_{ah}, Ψ_{bh}, $\Psi_{\nu wh}$, dar $\Psi_{o\nu h}=0$ şi $\Psi_{o\nu wh}=0$. Deci pentru fluxurile principale relaţiile de transformare devin:

$$\Psi_{dh} = \sum_{\lambda=1}^{m} \Psi_{\lambda h} \xi_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda); \quad \Psi_{ah} = \sum_{\varepsilon=1}^{m_1} \Psi_\varepsilon \xi_\varepsilon \frac{w}{w_\varepsilon} \cos(\vartheta - \vartheta_\varepsilon)$$

$$\psi_{qh} = -\sum_{\lambda=1}^{m} \psi_{\lambda h} \xi_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda) \qquad \psi_{bh} = -\sum_{\varepsilon=1}^{m_1} \psi_{\varepsilon h} \xi_{\varepsilon} \frac{w}{w_\varepsilon} \sin(\vartheta - \vartheta_\varepsilon)$$

$$\psi_{o\nu h} = 0 \qquad\qquad \psi_{o\nu wh} = 0$$

$$\psi_{\nu h} = \frac{w_\nu}{w} \left[\psi_{dh} \cos(\vartheta - \vartheta_\nu) - \psi_{qh} \sin(\vartheta - \vartheta_\nu)\right] \tag{3.32}$$

$$\psi_{\nu hw} = \frac{w_{\nu w}}{w} \left[\psi_{ah} \cos(\vartheta - \vartheta_{\nu w}) - \psi_{bh} \sin(\vartheta - \vartheta_{\nu w})\right]$$

Fluxul total al înfăşurărilor fixe faţă de stator va fi:

$$\psi_{o\lambda} = L_{o\lambda}\, i_{o\lambda} \quad \lambda = 1,2,\ldots,m \ \text{şi} \ \psi_{o\varepsilon} = L_{o\varepsilon}\, i_{o\varepsilon} \quad \varepsilon = 1,2,\ldots,m_1 \tag{3.33}$$

3.2.2. <u>Ecuaţiile de transformare a mărimilor rotorice</u>

Deoarece înfăşurările rotorice ale maşinii echivalente sînt fixe faţă de rotor, ca şi cele ale maşinii reale, ecuaţiile de transformare corespunzătoare mărimilor rotorice se deduc din cele ale mărimilor statorice, în care se face $\vartheta = 0$, deci:

a) ecuaţiile de transformare a curenţilor sînt(3.34):

$$i_{d'} = \sum_{\lambda'=1'}^{m'} \frac{w_{\lambda'}}{w'} i_{\lambda'} \cos\vartheta_{\lambda'} \qquad i_{a'} = \sum_{\varepsilon'=1'}^{m_1'} \frac{w_{\varepsilon'}}{w'} i_{\varepsilon'} \cos\vartheta_{\varepsilon'},$$

$$i_{q'} = \sum_{\lambda'=1'}^{m'} \frac{w_{\lambda'}}{w'} i_{\lambda'} \sin\vartheta_{\lambda'} \qquad i_{b'} = \sum_{\varepsilon'=1'}^{m_1'} \frac{w_{\varepsilon'}}{w'} i_{\varepsilon'} \sin\vartheta_{\varepsilon'},$$

$$i_{o\nu'} = i_{\nu'} - \xi_{\nu'} \frac{w'}{w_{\nu'}} \sum_{\lambda'=1'}^{m'} i_{\lambda'} \cos(\vartheta_{\nu'} - \vartheta_{\lambda'}) \tag{3.34}$$

$$i_{o\nu' w} = i_{\nu' w} - \xi_{\nu' w} \frac{w'}{w_{\nu' w}} \sum_{\varepsilon'=1'}^{m_1'} i_{\nu'} \cos(\vartheta_{\nu' w} - \vartheta_{\varepsilon'})$$

pentru transformarea curenţilor din maşina reală în maşina echivalentă şi (3.34) pentru transformarea din maşina echivalentă în maşina reală.

$$i_{\nu'} = i_{o\nu'} + \xi_{\nu'}\frac{w'}{w_{\nu'}}\left[i_{d'}\cos\vartheta_{\nu'} + i_{q'}\sin\vartheta_{\nu'}\right]$$

$$i_{\nu'_w} = i_{o\nu'_w} + \xi_{\nu'_w}\frac{w'}{w_{\nu'_w}}\left[i_{a}\cos\vartheta_{\nu'_w} + i_{b}\sin\vartheta_{\nu'_w}\right], \tag{3.35}$$

relaţie în care $\xi_{\nu'}$ şi $\xi_{\nu'_w}$ sînt date de (3.36), dacă maşina este simetrică:

$$\xi_{\nu'} = \frac{2}{m'}$$

$$\xi_{\nu'_w} = \frac{2}{m'_1} \tag{3.36}$$

In cazul general, din condiţia ca solenaţia curenţilor $i_{o\nu'}$, respectiv $i_{o\nu'_w}$ în axa d să fie zero, se obţin (3.37):

$$\sum_{\nu'=1'}^{m'} \xi_{\nu'} = 2; \quad \sum_{\nu'=1'}^{m'} \xi_{\nu'}\cos 2\vartheta_{\nu'} = 0; \quad \sum_{\nu'=1'}^{m'} \xi_{\nu'}\sin 2\vartheta_{\nu'} = 0$$

$$\sum_{\nu'_w=1'}^{m'_1} \xi_{\nu'_w} = 2; \quad \sum_{\nu'_w=1'}^{m'_1} \xi_{\nu'_w}\cos 2\vartheta_{\nu'_w} = 0; \quad \sum_{\nu'_w=1'}^{m'_1} \xi_{\nu'_w}\sin 2\vartheta_{\nu'_w} = 0 \tag{3.37}$$

b) <u>ecuaţiile de transformare a tensiunilor sînt</u>:

$$u_{d'} = \sum_{\lambda'=1'}^{m'} u_{\lambda'}\xi_{\lambda'}\frac{w'}{w_{\lambda'}}\cos\vartheta_{\lambda'} \qquad u_{q'} = -\sum_{\lambda'=1'}^{m'} u_{\lambda'}\xi_{\lambda'}\sin\vartheta_{\lambda'},$$

$$u_{o\nu'} = u_{\nu'} - \frac{w_{\nu'}}{w'}\sum_{\lambda'=1'}^{m'} u_{\lambda'}\xi_{\lambda'}\frac{w'}{w_{\lambda'}}\cos(\vartheta_{\lambda'} - \vartheta_{\nu'}) \tag{3.38}$$

şi respectiv:

$$u_{\nu'} = u_{o\nu'} + \frac{w_{\nu'}}{w'}\left[u_{d'}\cos\vartheta_{\nu'} + u_{q'}\sin\vartheta_{\nu'}\right] \tag{3.39}$$

c) <u>ecuaţiile de transformare a fluxurilor sînt:</u>

$$\Psi_{d'} = \sum_{\lambda'=1'}^{m'} \Psi_{\lambda'}\xi_{\lambda'}\frac{w'}{w_{\lambda'}}\cos\vartheta_{\lambda'}; \quad \Psi_{q'} = \sum_{\lambda'=1'}^{m'} \Psi_{\lambda'}\frac{w'}{w'_{\lambda}}\xi_{\lambda'}\sin\vartheta_{\lambda'},$$

$$\Psi_{o\nu'} = \Psi_{\nu'} - \frac{w_{\nu'}}{w'}\sum_{\lambda'=1'}^{m'} \Psi_{\lambda'}\xi_{\lambda'}\frac{w'}{w_{\lambda'}}\cos(\vartheta_{\lambda'} - \vartheta_{\nu'})$$

$$\Psi_{a'} = \sum_{\varepsilon'=1}^{m'} \Psi_{\varepsilon'} \zeta_{\varepsilon'} \frac{w'}{w_{\varepsilon'}} \cos \vartheta_{\varepsilon'} , \qquad \Psi_{b'} = \sum_{\varepsilon'=1}^{m'} \Psi_{\varepsilon'} \zeta_{\varepsilon'} \frac{w'}{w_{\varepsilon'}} \sin \vartheta_{\varepsilon'} , \tag{3.40}$$

$$\Psi_{o\nu'_w} = \Psi_{\nu'_w} - \frac{w_{\nu'_w}}{w'} \sum_{\varepsilon'=1}^{m'} \Psi_{\varepsilon'} \zeta_{\varepsilon'} \cos(\vartheta_{\varepsilon'} - \vartheta_{\nu'_w}) \cdot \frac{w'}{w_{\varepsilon'}}$$

şi respectiv:

$$\Psi_{\nu'} = \Psi_{o\nu'} + \frac{w_{\nu'}}{w'} \left[\Psi_{d'} \cos \vartheta_{\nu'} + \Psi_{q'} \sin \vartheta_{\nu'} \right]$$

$$\Psi_{\nu'_w} = \Psi_{o\nu'_w} + \frac{w_{\nu'_w}}{w'} \left[\Psi_{a'} \cos \vartheta_{\nu'_w} + \Psi_{b'} \sin \vartheta_{\nu'_w} \right] \tag{3.41}$$

3.2.3. Ecuaţiile tensiunilor

Ecuaţiile dintre tensiuni şi curenţi pentru înfăşurările d şi q ale maşinii echivalente se deduc din ecuaţiile maşinii reale, ţinînd seama de ecuaţiile de transformare.

Considerăm ecuaţia tensiunii la bornele fazei principale λ, respectiv ale fazei auxiliare ε din maşina reală.

$$u_\lambda = -R_\lambda i_\lambda - \frac{d\Psi_\lambda}{dt} \quad ; \quad 0 = -R_\varepsilon i_\varepsilon - \frac{d\Psi_\varepsilon}{dt} \tag{3.42}$$

Inlocuind în expresia lui u_λ pe u_λ, i_λ şi Ψ_λ funcţie de mărimile corespunzătoare din maşina echivalentă, respectiv u_d, u_q, $u_{o\lambda}$, i_d, i_q, $i_{o\lambda}$, Ψ_d, Ψ_q, $\Psi_{o\lambda}$, obţinem:

$$u_\lambda = -R_\lambda \left\{ i_{o\lambda} + \zeta_\lambda \frac{w}{w_\lambda} \left[i_d \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda) - i_q \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda) \right] \right\} -$$

$$- \frac{d\Psi_{o\lambda}}{dt} - \frac{w_\lambda}{w} \left[\frac{d\Psi_d}{dt} \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda) - \Psi_d \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda) \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\Psi_q}{dt} \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda) - \right.$$

$$\left. - \Psi_q \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda) \frac{d\vartheta}{dt} \right]$$

respectiv:

$$u_{o\lambda} + \frac{w_\lambda}{w} u_d \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda) - \frac{w}{w} u_q \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda) = -R_\lambda i_{o\lambda} - \frac{d\Psi_{o\lambda}}{dt} -$$

$$- \left[R_\lambda \zeta_\lambda \frac{w}{w_\lambda} i_d + \frac{w_\lambda}{w} \frac{d\psi_d}{dt} - \psi_q \frac{d\vartheta}{dt}\right] \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda) + \left[R_\lambda \zeta_\lambda \frac{w}{w_\lambda} i_q + \right.$$

$$\left. + \frac{d\psi_q}{dt} + \psi_d \frac{d\vartheta}{dt}\right] \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda) \qquad (3.43).$$

Relaţia (3.43) trebuie satisfăcută indiferent de valorile lui ϑ, deci obţinem :

$$u_{o\lambda} = -R_\lambda i_{o\lambda} - \frac{d\psi_{o\lambda}}{dt}$$

$$u_d = -R_\lambda \zeta_\lambda \left(\frac{w}{w_\lambda}\right)^2 i_d - \frac{d\psi_d}{dt} + \psi_q \frac{d\vartheta}{dt} \qquad (3.44)$$

$$u_q = -R_\lambda \left(\frac{w}{w_\lambda}\right)^2 i_q - \frac{d\psi_q}{dt} - \psi_d \frac{d\vartheta}{dt}$$

Notînd: $R_{o\lambda} = R_\lambda$; $R_d = R_q = R_\lambda \zeta_\lambda \left(\frac{w}{w_\lambda}\right)^2$, obţinem:

$$u_{o\lambda} = -R_{o\lambda} i_{o\lambda} - \frac{d\psi_{o\lambda}}{dt}$$

$$u_d = -R_d i_d - \frac{d\psi_d}{dt} + \psi_q \frac{d\vartheta}{dt} \qquad (3.45)$$

$$u_q = -R_q i_q - \frac{d\psi_q}{dt} - \psi_d \frac{d\vartheta}{dt}$$

Analog, pentru fazele ε ale înfăşurărilor auxiliare se obţine:

$$0 = -R_{o\varepsilon} i_{o\varepsilon} - \frac{d\psi_{o\varepsilon}}{dt}$$

$$0 = -R_a i_a - \frac{d\psi_a}{dt} + \psi_b \frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{cu: } R_{o\varepsilon} = R_\varepsilon;\ R_a = R_b = R_\varepsilon \zeta_\varepsilon \left(\frac{w}{w_\varepsilon}\right)^2 \qquad (3.46)$$

$$0 = -R_b i_b - \frac{d\psi_b}{dt} - \psi_a \frac{d\vartheta}{dt}$$

Relaţiile (3.45) şi (3.46) reprezintă ecuaţiile dintre curenţi şi tensiuni pentru înfăşurările statorice ale maşinii echivalente. Ultimele două ecuaţii din (3.45) şi (3.46) sînt aceleaşi, oricare ar fi faza considerată a maşinii reale. Caracteristică fiecărei faze îi este numai prima ecuaţie din (3.45) respectiv (3.46).

Ecuaţiile dintre curenţi şi tensiunea pentru înfăşurările rotorice ale maşinii echivalente se obţin analog, considerînd tensiunea $u_{\lambda'}$, respectiv 0 la bornele fazei rotorice λ', respectiv ε' ale maşinii reale:

$$\begin{aligned} u_{\lambda'} &= -R_{\lambda'} i_{\lambda'} - \frac{d\psi_{\lambda'}}{dt} \\ 0 &= -R_{\varepsilon'} i_{\varepsilon'} - \frac{d\psi_{\varepsilon'}}{dt} \end{aligned} \qquad (3.47)$$

în care, înlocuind pe $u_{\lambda'}$, $i_{\lambda'}$, $\psi_{\lambda'}$, $i_{\varepsilon'}$, $\psi_{\varepsilon'}$ cu mărimile corespunzătoare din maşina echivalentă, respectiv cu $u_{o\lambda'}$, u_{d}, u_{q}, $i_{o\lambda'}$, i_{d}, i_{q}, $\psi_{o\lambda'}$, ψ_{d}, ψ_{q}, $i_{o\varepsilon'}$, i_{a}, i_{b}, $\psi_{o\varepsilon'}$, $\psi_{a'}$, $\psi_{b'}$ se obţin relaţiile dintre curenţii şi tensiunile maşinii echivalente:

$$\begin{aligned} u_{o\lambda'} &= -R_{o\lambda'} i_{o\lambda'} - \frac{d\psi_o}{dt} & & R_{o\lambda'} = R_{\lambda'} \\ u_d &= -R_d\, i_d - \frac{d\psi_d}{dt} & \text{în care:}\quad & R_{d'} = \sum_{\lambda'} \left(\frac{w}{w_{\lambda'}}\right)^2 R_{\lambda'} \\ u_q &= -R_q i_q - \frac{d\psi_q'}{dt} & & R_q = R_d \end{aligned}$$

respectiv:

$$\begin{aligned} 0 &= R_{o\varepsilon'} i_{o\varepsilon'} + \frac{d\psi_{o\varepsilon'}}{dt} & & R_{o\varepsilon'} = R_{\varepsilon'} \\ 0 &= R_a i_a + \frac{d\psi_a}{dt} & \text{in care}\quad & R_a = R_b = \sum_{\varepsilon'} \left(\frac{w'}{w_{\varepsilon'}}\right)^2 R_{\varepsilon'} \\ 0 &= R_b i_b + \frac{d\psi_b}{dt} & & \end{aligned}$$

3.2.4. Relaţiile dintre rezistenţe şi inductivităţi

3.2.4.1. Relaţiile dintre rezistenţele celor două maşini

Intre rezistenţele înfăşurărilor principale statorice R_λ, respectiv cele ale înfăşurărilor auxiliare statorice R_ε, ale ma-

şinii reale şi rezistenţele înfăşurărilor statorice din **maşina echivalentă** $R_{o\lambda}$, R_d, R_q, $R_{o\varepsilon}$, R_a, R_b există relaţiile:

$$R_{o\lambda}=R_\lambda \;(1)\;;\quad R_d=R_q=\zeta_\lambda\left(\frac{w}{w_\lambda}\right)^2 R_\lambda \;(2)\;;$$
$$R_{o\varepsilon}=R_\varepsilon \;(3)\;;\quad R_a=R_b=\zeta_\varepsilon\left(\frac{w}{w_\varepsilon}\right)^2 R_\varepsilon \;(4) \qquad (3.50)$$

relaţii ce au fost deduse anterior, din ecuaţiile dintre tensiuni şi curenţi. Relaţii similare se stabilesc şi între rezistenţele fazelor înfăşurărilor principale, rotorice $R_{\lambda'}$, respectiv înfăşurărilor auxiliare rotorice $R_{\varepsilon'}$ ale înfăşurării reale şi rezistenţele înfăşurărilor rotorice $R_{o\lambda'}$, $R_{d'}$, $R_{q'}$, $R_{o\varepsilon'}$, $R_{a'}$, $R_{b'}$ **ale maşinii echivalente:**

$$R_{o\lambda'}=R_{\lambda'} \;(1)\;,\quad R_{d'}=R_{q'}=\zeta_{\lambda'}\left(\frac{w'}{w_{\lambda'}}\right)^2 R_{\lambda'} \;(2)$$
$$R_{o\varepsilon'}=R_{\varepsilon'} \;(3)\;,\quad R_{a'}=R_{b'}=\zeta_{\varepsilon'}\left(\frac{w'}{w_{\varepsilon'}}\right)^2 R_{\varepsilon'} \;(4) \qquad (3.51)$$

Egalităţile (3.44.2), (3.44.4), (3.45.2), (3.45.4) trebuiesc **satisfăcute** pentru orice fază şi deci:

$$\zeta_\nu\left(\frac{w}{w_\nu}\right)^2 R_\nu=\zeta_\lambda\left(\frac{w}{w_\lambda}\right)^2 R_\lambda \;;\quad \zeta_{\nu w}\left(\frac{w}{w_{\nu w}}\right)^2 R_{\nu w}=\zeta_\varepsilon\left(\frac{w}{w_\varepsilon}\right)^2 R_\varepsilon$$
$$\zeta_{\nu'}\left(\frac{w'}{w_{\nu'}}\right) R_{\nu'}=\zeta_{\lambda'}\left(\frac{w'}{w_{\lambda'}}\right)^2 R_{\lambda'} \;;\quad \zeta_{\nu' w}\left(\frac{w'}{w_{\nu' w}}\right)^2 R_{\nu' w}=\zeta_{\varepsilon'}\left(\frac{w}{w_{\varepsilon'}}\right)^2 R_{\varepsilon'} \qquad (3.52)$$

adică:

$$\frac{\zeta_\nu R_\nu}{w_\nu^2}=\frac{\zeta_\lambda R_\lambda}{w_\lambda^2} \;;\quad \frac{\zeta_{\nu w} R_{\nu w}}{w_{\nu w}^2}=\frac{\zeta_\varepsilon R_\varepsilon}{w_\varepsilon^2}$$
$$\frac{\zeta_{\nu'} R_{\nu'}}{w_{\nu'}^2}=\frac{\zeta_{\lambda'} R_{\lambda'}}{w_{\lambda'}^2} \;;\quad \frac{\zeta_{\nu' w} R_{\nu' w}}{w_{\nu' w}^2}=\frac{\zeta_{\varepsilon'} R_{\varepsilon'}}{w_{\varepsilon'}^2} \qquad (3.53)$$

Coeficienţii ζ_ν, $\zeta_{\nu'}$ în număr de m, respectiv m' trebuie să satisfacă ecuaţiile:

$$\sum_{\nu=1}^{m} \zeta_{\nu} = 2 \; ; \quad \sum_{\nu'=1'}^{m'} \zeta_{\nu'} = 2; \quad \sum_{\nu=1}^{m} \zeta_{\nu} \sin 2\vartheta_{\nu} = 0; \; \sum_{\nu=1}^{m} \zeta_{\nu} \cos 2\vartheta_{\nu} = 0$$

$$\sum_{\nu'=1'}^{m'} \zeta_{\nu'} \sin 2\vartheta_{\nu'} = 0 \; ; \quad \sum_{\nu'=1'}^{m'} \zeta_{\nu'} \cos 2\vartheta_{\nu'} = 0 \tag{3.54}$$

ecuaţii obţinute din condiţia de echivalenţă a solenaţiilor.

Coeficienţii $\zeta_{\nu w}$, $\zeta_{\nu' w}$, în număr de m_1, respectiv m_1' vor trebui să satisfacă ecuaţii similare:

$$\sum_{\nu' w=1}^{m_1'} \zeta_{\nu' w} = 2; \quad \sum_{\nu w=1}^{m_1} \zeta_{\nu w} = 2 \; ; \sum_{\nu w=1}^{m_1} \zeta_{\nu w} \sin 2\vartheta_{\nu w} = 0 \; ,$$

$$\sum_{\nu w=1}^{m_1} \zeta_{\nu w} \cos 2\vartheta_{\nu w} = 0 \; ; \sum_{\nu' w=1'}^{m_1'} \zeta_{\nu' w} \sin 2\vartheta_{\nu' w} = 0 \; ; \sum_{\nu' w=1'} \zeta_{\nu' w} \cos 2\vartheta_{\nu' w} = 0 \tag{3.55}$$

obţinute din aceeaşi condiţie de echivalenţă a solenaţiilor.

3.2.4.2. Relaţiile dintre inductivităţile celor două maşini.

Din definiţia inductivităţilor principale obţinem:

$$\frac{L_{ddh}}{L_{\lambda\lambda dh}} = \frac{L_{qqh}}{L_{\lambda\lambda qh}} = \left(\frac{w}{w_\lambda}\right)^2; \quad \frac{L_{d'd'h}}{L_{\lambda\lambda' d'h}} = \frac{L_{q'q'h}}{L_{\lambda'\lambda' q'h}} = \left(\frac{w'}{w_{\lambda'}}\right)^2 \tag{3.56}$$

Fluxul magnetic total al înfăşurării λ este:

$$\psi_\lambda = \psi_{\lambda h} + \psi_{\lambda m\sigma} + \psi_{\lambda\sigma} \tag{3.57}$$

Fluxurile magnetice de dispersie $\psi_{\lambda m\sigma}$ şi $\psi_{\lambda\sigma}$ satisfac ecuaţiile de transformare [27]:

$$\psi_{\lambda m\sigma} = \frac{w_\lambda}{w} L_{m\sigma} i_d \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda) - \frac{w_\lambda}{w} L_{m\sigma} i_q \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda)$$

$$\psi_{\lambda\sigma} = \psi_{o\lambda\sigma} + \frac{w_\lambda}{w}\left[\psi_d \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda) - \psi_q \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda)\right] \tag{3.58}$$

deoarece s-a admis repartiţie sinusoidală şi pentru fluxurile magnetice de dispersie $\psi_{\lambda\sigma}$, respectiv de dispersie mutuală $\psi_{\lambda m\sigma}$.

Fluxul de dispersie al înfăşurării de ordinul λ, $\psi_{\lambda\sigma}$ este:

$$\psi_{\lambda\sigma} = L_{\lambda\sigma} \cdot i_\lambda \tag{3.59}$$

De asemenea, avem următoarele relaţii între fluxuri, curenţi şi inductivităţi:

$$\Psi_{\lambda o\sigma}=L_{o\lambda}\, i_{o\lambda}\;;\quad \Psi_{d\sigma}=L_{d\sigma} i_d\;;\quad \Psi_{q\sigma}=L_{q\sigma} i_q \qquad (3.60)$$

Ţinînd seama de relaţiile de transformare pentru fluxuri şi curenţi, obţinem din (3.59):

$$i_{o\lambda}(L_{\lambda\sigma}-L_{o\lambda})+i_d\cos(\vartheta-\vartheta_\lambda)\left[\frac{w_\lambda}{w}L_{m\sigma}+\sum_\lambda\frac{w}{w}L_{\lambda\sigma}-\frac{w_\lambda}{w}L_{d\sigma}\right]-i_q\sin(\vartheta-\vartheta_\lambda)\left[\frac{w_\lambda}{w}L_{m\sigma}+\sum_\lambda\frac{w}{w_\lambda}L_{\lambda\sigma}-\frac{w_\lambda}{w}L_{q\sigma}\right]=0 \qquad (3.61)$$

Relaţia (3.61) trebuie satisfăcută indiferent de valorile curenţilor şi ale unghiului ϑ, deci fiecare coeficient trebuie să fie zero. Obţinem astfel:

$$L_{\lambda\sigma}=L_{o\lambda}\;;\quad L_{d\sigma}=L_{q\sigma}=L_{m\sigma}+\sum_\lambda\left(\frac{w}{w_\lambda}\right)^2 L_{\lambda\sigma} \qquad (3.62)$$

Relaţii similare se obţin şi pentru inductivităţile corespunzătoare înfăşurărilor statorice auxiliare:

$$L_{\varepsilon\sigma}=L_{o\varepsilon}\;;\quad L_{a\sigma}=L_{b\sigma}=L_{m\sigma w}+\sum_\varepsilon\left(\frac{w}{w_\varepsilon}\right)^2 L_{\varepsilon\sigma} \qquad (3.63)$$

ca şi pentru cele ale înfăşurărilor rotorice:

$$L_{\lambda'\sigma}=L_{o\lambda'}\;;\quad L_{d'\sigma}=L_{q'\sigma}=L_{m'\sigma}+\sum_{\lambda'}\left(\frac{w'}{w_{\lambda'}}\right)^2 L_{\lambda'\sigma}$$

$$L_{\varepsilon'\sigma}=L_{o\varepsilon'}\;;\quad L_{a'\sigma}=L_{b'\sigma}=L_{m'\sigma w}+\sum_{\varepsilon'}\left(\frac{w'}{w_{\varepsilon'}}\right)^2 L_{\varepsilon'\sigma} \qquad (3.64)$$

Dacă relaţiile (3.50) - (3.64) sînt satisfăcute (maşini cu nesimetrie particulară), teoria celor două axe se aplică nemijlocit.

Dacă o maşină electrică are înfăşurări repartizare zonal, cu $w_{\lambda z}$ spire pe fază, maşina corespunzătoare cu înfăşurări repartizate sinusoidal(se ţine seama numai de armonicile fundamentale de spaţiu ale inducţiei magnetice şi solenaţie) are w_λ spire pe faza λ, între w_λ şi $w_{\lambda z}$ existînd relaţia:

$$w_\lambda=\frac{4}{\pi}\,\xi_{\nu^\circ}\, w_{\lambda z} \qquad (3.65)$$

3.2.5. Ecuaţiile maşinii echivalente

Ecuaţiile ansamblului stator-rotor, în care fluxurile se reprezintă prin intermediul inductivităţilor proprii şi mutuale sînt următoarele:

$$u_d = -R_d i_d - \frac{d\psi_d}{dt} + \psi_q \frac{d\vartheta}{dt} \quad ; \quad u_{d'} = -R_{d'} i_{d'} - \frac{d\psi_{d'}}{dt}$$

$$u_q = -R_q i_q - \frac{d\psi_q}{dt} - \psi_d \frac{d\vartheta}{dt} \quad ; \quad u_{q'} = -R_{q'} i_{q'} - \frac{d\psi_{q'}}{dt}$$

$$u_{o\lambda} = -R_{o\lambda} i_{o\lambda} - \frac{d\psi_{o\lambda}}{dt} \quad ; \quad u_{o\lambda'} = -R_{o\lambda'} i_{o\lambda'} - \frac{d\psi_{\lambda'}}{dt}$$

$$0 = R_a i_a + \frac{d\ \ a}{dt} + \psi_b \frac{d\vartheta}{dt} \quad ; \quad 0 = R_{a'} i_{a'} + \frac{d\psi_{a'}}{dt}$$

$$0 = R_b i_b + \frac{d\psi_b}{dt} + \psi_a \frac{d\vartheta}{dt} \quad ; \quad 0 = R_{b'} i_{b'} + \frac{d\psi_{b'}}{dt} \qquad (3.66)$$

$$0 = R_{o\varepsilon} i_{o\varepsilon} + \frac{d\psi_{o\varepsilon}}{dt} \quad ; \quad 0 = R_{o\varepsilon'} i_{o\varepsilon'} + \frac{d\psi_{o\varepsilon'}}{dt}$$

$$\psi_\gamma = L_{d\gamma} i_d + L_{a\gamma} i_a + L_{d'\gamma} i_{d'} + L_{a'\gamma} i_{a'} \qquad \gamma = d, a, d', a'$$

$$\psi_\alpha = L_{q\alpha} i_q + L_{b\alpha} i_b + L_{q'\alpha} i_{q'} + L_{b'\alpha} i_{b'} \qquad \alpha = q, b, q', b'$$

$$\psi_{o\lambda} = L_{o\lambda} i_{o\lambda} \qquad \psi_{o\lambda'} = L_{o\lambda'} i_{o\lambda'}$$

$$\psi_{o\varepsilon} = L_{o\varepsilon} i_{o\varepsilon} \qquad \psi_{o\varepsilon'} = L_{o\varepsilon'} i_{o\varepsilon'}$$

La aceste ecuaţii se adaugă şi ecuaţia mişcării:

$$M_{mec} + M = \frac{1}{p} \cdot \frac{d}{dt} \left(J \frac{d\vartheta}{dt}\right) \qquad (3.67)$$

în care mărimile sînt cele precizate în capitolul 2.

Momentul electromagnetic M se determină din energia magnetică a mașinii W_m :

$$M = p \left(\frac{\partial W_m}{\partial \vartheta}\right)_{i=const.} \qquad (3.68)$$

Mașina echivalentă are aceeași energie magnetică W_m ca și mașina reală. Deci:

$$W_m = \frac{1}{2}\Big[\psi_d i_d + \psi_q i_q + \psi_a i_a + \psi_b i_b + \sum_{\lambda=1}^{m} \psi_{o\lambda} i_{o\lambda} + \sum_{\varepsilon=1}^{m_1} \psi_{o\varepsilon} i_{o\varepsilon} +$$
$$+ \psi_{d'} i_{d'} + \psi_{q'} i_{q'} + \psi_{a'} i_{a'} + \psi_{b'} i_{b'} + \sum_{\lambda'=1}^{m'} \psi_{o\lambda'} i_{o\lambda'} + \sum_{\varepsilon'=1}^{m_1'} \psi_{o\varepsilon'} i_{o\varepsilon'}\Big] \qquad (3.69)$$

Inlocuind expresia energiei magnetice W_m dată de relația (3.69) în expresia momentului electromagnetic (3.68) și aplicînd regulile de derivare în raport cu unghiul ϑ se obține pentru mărimile din stator:

$$\frac{\partial i_d}{\partial \vartheta} = i_q \; ; \; \frac{\partial i_a}{\partial \vartheta} = i_b \; ; \; \frac{\partial i_q}{\partial \vartheta} = -i_d \; ; \; \frac{\partial i_b}{\partial \vartheta} = -i_a$$

$$\frac{\partial \psi_d}{\partial \vartheta} = L_{dd} i_q + L_{ad} i_b \qquad ; \; \frac{\partial \psi_a}{\partial \vartheta} = L_{da} i_q + L_{aa} \cdot i_b$$
$$\frac{\partial \psi_q}{\partial \vartheta} = -L_{qq} i_d - L_{bq} i_a \qquad ; \; \frac{\partial \psi_b}{\partial \vartheta} = -L_{qb} i_d - L_{bb} i_a \qquad (3.70)$$
$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}\Big[\sum_{\lambda=1}^{m} \psi_{o\lambda} i_{o\lambda}\Big] = 0 \qquad ; \; \frac{\partial}{\partial \vartheta}\Big[\sum_{\varepsilon=1}^{m_1} i_{o\varepsilon} \psi_{o\varepsilon}\Big] = 0$$

iar pentru mărimile din rotor:

$$\frac{\partial i_{d'}}{\partial \vartheta} = 0 \; ; \; \frac{\partial i_{a'}}{\partial \vartheta} = 0 \; ; \; \frac{\partial i_{q'}}{\partial \vartheta} = 0 ; \; \frac{\partial i_{b'}}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_{d'}}{\partial \vartheta} = L_{dd'} i_q + L_{ad'} i_b \; ; \; \frac{\partial \psi_{a'}}{\partial \vartheta} = L_{da'} i_q + L_{aa'} i_b$$
$$\frac{\partial \psi_{q'}}{\partial \vartheta} = -L_{qq'} i_d - L_{bq'} i_a \; ; \; \frac{\partial \psi_{b'}}{\partial \vartheta} = -L_{qb'} i_d - L_{bb'} i_a \qquad (3.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sum_{\lambda'=1}^{m'}\Psi_{o\lambda'}i_{o\lambda'}\right]=0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sum_{\varepsilon'=1}^{m_1'}\Psi_{o\varepsilon'}i_{o\varepsilon'}\right]=0$$

Deci derivata energiei magnetice în raport cu unghiul ϑ, pentru curent constant va fi:

$$\frac{\partial W_m}{\partial\vartheta}=\Psi_d i_q+\Psi_a i_b-\Psi_q i_d-\Psi_b i_a+\frac{1}{2}\Big[i_a i_q(L_{da}-L_{ad})+i_q i_{d'}\cdot$$

$$\cdot(L_{dd'}-L_{d'd})+i_q i_{a'}(L_{da'}-L_{a'd})+i_b i_d(L_{ad}-L_{da})+i_{d'}i_b(L_{ad'}-L_{d'a})+$$
$$+i_b i_{a'}(L_{aa'}-L_{a'a})-i_d i_b(L_{qb}-L_{bq})-i_d i_{q'}(L_{qq'}-L_{q'q})-i_d i_{b'}\cdot$$
$$\cdot(L_{qb'}-L_{b'q})-i_a i_q(L_{bq}-L_{qb})-i_a i_{q'}(L_{bq'}-L_{q'b})-i_a i_{b'}(L_{bb'}-L_{b'b})\Big] \tag{3.72}$$

Dacă sînt îndeplinite condițiile:

$$\begin{aligned}&L_{da}=L_{ad};\ L_{dd'}=L_{d'd};\ L_{d'a}=L_{a'd};\ L_{ad'}=L_{d'a};L_{aa'}=L_{a'a}\\&L_{qb}=L_{bq};\ L_{qq'}=L_{q'q};\ L_{qb'}=L_{b'q};L_{bq'}=L_{q'b};L_{bb'}=L_{b'b}\end{aligned} \tag{3.73}$$

atunci expresia momentului electromagnetic este:

$$M=p\left[\Psi_d i_q+\Psi_a i_b-\Psi_q i_d-\Psi_b i_a\right] \tag{3.74}$$

Din expresia momentului electromagnetic se observă că datorită pierderilor în fier este posibil să existe moment electromagnetic și atunci cînd înfășurările principale sînt deschise.

Ecuațiile (3.66), (3.67) și (3.74) descriu comportarea mașinii echivalente, avînd $2(m+m_1+m'+m_1')+9$ ecuații și tot atîtea necunoscute: $i_d, i_q, i_a, i_b, \Psi_d, \Psi_q, \Psi_a, \Psi_b, \vartheta, i_{o\lambda}, \Psi_{o\lambda}, i_{o\varepsilon}, \Psi_{o\varepsilon}, i_{d'}, i_{q'}, i_{a'}, i_{b'}, \Psi_{d'}, \Psi_{q'}, \Psi_{a'}, \Psi_{b'}, i_{o\lambda'}, \Psi_{o\lambda'}, i_{o\varepsilon'}, \Psi_{o\varepsilon'}$. Cu ecuațiile de transformare se poate determina apoi dependența în raport cu timpul a mărimilor mașinii reale.

3.3. Ecuaţiile maşinii electrice simetrice la repartiţia sinusoidală a inducţiei magnetice în lungul pasului polar (teoria celor două axe) - fără considerarea pierderilor în fier.

Ecuaţiile maşinii electrice simetrice la repartiţia sinusoidală a inducţiei magnetice în lungul pasului polar, fără considerarea pierderilor în fier, sînt cunoscute în literatura de specialitate [24], [46], [18], etc.

Ele pot fi obţinute din sistemul de ecuaţii (3.60), considerînd că înfăşurările auxiliare sînt deschise , deci R_a, R_b, $R_{a'}$, $R_{b'} \to \infty$, iar curenţii care le străbat, respectiv i_a, i_b, $i_{a'}$, $i_{b'}$ sînt zero.

In acest caz, ecuaţiile de transformare a mărimilor statorice, au aceeaşi formă cu ecuaţiile de transformare a mărimilor corespunzătoare înfăşurărilor principale din maşina echivalentă cu considerarea pierderilor în fier.

Ecuaţiile maşinii echivalente sînt în acest caz [24]:

$$
\begin{aligned}
u_d &= -R_d i_d - \frac{d\psi_d}{dt} + \psi_q \frac{d\vartheta}{dt}\ ; & u_{d'} &= -R_{d'} i_{d'} - \frac{d\psi_{d'}}{dt} \\
u_q &= -R_q i_q - \frac{d\psi_q}{dt} - \psi_d \frac{d\vartheta}{dt}\ ; & u_{q'} &= -R_{q'} i_{q'} - \frac{d\psi_{q'}}{dt} \\
u_{o\lambda} &= -R_{o\lambda}\, i_{o\lambda} - \frac{d\psi_{o\lambda}}{dt}\ ; & u_{o\lambda'} &= -R_{o\lambda'} i_{o\lambda'} - \frac{d\psi_{o\lambda'}}{dt} \\
\psi_d &= L_{dd} i_d + L_{d'd} i_{d'}\ ; & \psi_{d'} &= L_{dd'} i_d + L_{d'd'} i_{d'} \\
\psi_q &= L_{qq} i_q + L_{q'q} i_{q'}\ ; & \psi_{q'} &= L_{qq'} i_q + L_{q'q'} i_{q'} \\
\psi_{o\lambda} &= L_{o\lambda}\, i_{o\lambda}\ ; & \psi_{o\lambda'} &= L_{o\lambda'} i_{o\lambda'}
\end{aligned}
\qquad (3.75)
$$

expresia cuplului electromagnetic devine:

$$M = p(\psi_d i_q - \psi_q i_d)$$

iar ecuaţia mişcării este :

$$M_{mec} + p\,(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) = \frac{J}{p}\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2} \qquad (3.77)$$

Ecuaţiile (3.75), (3.76), (3.77) descriu comportarea maşinii echivalente, avînd $2(m+m')+9$ ecuaţii şi tot atîtea necunoscute: curenţii $i_d, i_q, i_{d'}, i_{q'}, i_{o\lambda}, i_{o\lambda}'$, fluxurile $\Psi_d, \Psi_q, \Psi_{d'}, \Psi_{q'}, \Psi_{o\lambda}, \Psi_{o\lambda}'$ şi unghiul ϑ .

4. REZOLVAREA ECUAȚIILOR MAȘINILOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV DIN TEORIA CELOR DOUĂ AXE

4.1. Considerații generale

Sistemul de ecuații diferențiale (3.66), la care se atașează ecuația mișcării (3.67) este un sistem de ecuații neliniare. Soluționarea sistemelor de ecuații diferențiale neliniare este o problemă dificilă și nu există metode generale de rezolvare [72]. Analiza matematică a proceselor tranzitorii necesită rezolvarea acestui sistem de ecuații diferențiale [46] .

In cazul ecuațiilor neliniare, este necesar să se aplice metode aproximative: metoda diferențelor finite, metoda de aproximare Runge-Kutta [12].

Dacă în cursul fenomenelor viteza de rotație a mașinii nu se modifică de loc sau variațiile sînt atît de mici încît, practic ea poate fi considerată constantă, atunci ecuațiile din sistemul (3.66) pot fi considerate liniare și ele se vor rezolva aplicîndu-se metode operaționale. Prin urmare, considerînd că viteza $\omega = d\vartheta/dt$ este constantă, dar curenții și tensiunile au o variație oarecare în timp, se poate utiliza calculul operațional.

4.2. Rezolvarea ecuațiilor mașinilor electrice de curent alternativ, din teoria celor două axe, cu considerarea pierderilor în fier, aplicînd calculul operațional

Admițînd ipoteza că viteza $\omega = d\vartheta/dt$ este constantă, sistemul de ecuații diferențiale (3.66) se transformă într-un sistem de ecuații algebrice în care intervin funcțiile imagine ale curenților, tensiunilor, fluxurilor, precum și impedanțe sau admitanțe operaționale.

Deoarece ecuația integrală a lui Carson (4.1)

$$\tilde{f}(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \qquad (4.1)$$

intervine în mod natural în studiul circuitelor electrice, iar funcțiile imagine din transformarea lui Carson păstrează dimensiunile fizice ale mărimilor originale, vom folosi în continuare această transformare. Funcția imagine se scrie cu semnul " ~ "

pus deasupra, iar valoarea inițială a funcției origine se scrie cu literă mare.

4.2.1. Exprimarea în operațional a ecuațiilor

Aplicînd regulile de analiză simbolică sistemului de ecuații (3.66) se obțin expresiile corespunzătoare în operațional:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}_d = -R_d\tilde{i}_d - p(\tilde{\Psi}_d - \Psi_d) + \omega\tilde{\Psi}_q \; ; \; \tilde{u}_{d'} = -R_{d'}\tilde{i}_{d'} - p(\tilde{\Psi}_{d'} - \Psi_{d'}) \\
&\tilde{u}_q = -R_q\tilde{i}_q - p(\tilde{\Psi}_q - \Psi_q) - \omega\tilde{\Psi}_d \; ; \; \tilde{u}_{q'} = -R_{q'}\tilde{i}_{q'} - p(\tilde{\Psi}_{q'} - \Psi_{q'}) \\
&\tilde{u}_{o\lambda} = -R_{o\lambda}\tilde{i}_{o\lambda} - p(\tilde{\Psi}_{o\lambda} - \Psi_{o\lambda}); \; u_{o\lambda'} = -R_{o\lambda'}\tilde{i}_{o\lambda'} - p(\tilde{\Psi}_{o\lambda'} - \Psi_{o\lambda'}) \\
&0 = R_a\tilde{i}_a + p(\tilde{\Psi}_a - \Psi_a) - \omega\tilde{\Psi}_b \; ; \; 0 = R_{a'}\tilde{i}_{a'} + p(\tilde{\Psi}_{a'} - \Psi_{a'}) \\
&0 = R_b\tilde{i}_b + p(\tilde{\Psi}_b - \Psi_b) + \omega\tilde{\Psi}_a \; ; \; 0 = R_{b'}\tilde{i}_{b'} + p(\tilde{\Psi}_{b'} - \Psi_{b'}) \qquad (4.2) \\
&0 = R_{o\lambda}\tilde{i}_{o\lambda} + p(\tilde{\Psi}_{o\lambda} - \Psi_{o\lambda}) \; ; \; 0 = R_{o\lambda'}\tilde{i}_{o\lambda'} + p(\tilde{\Psi}_{o\lambda'} - \Psi_{o\lambda'}) \\
&\tilde{\Psi}_\gamma = L_{d\gamma}i_d + L_{a\gamma}i_a + L_{d'\gamma}i_{d'} + L_{a'\gamma}i_{a'} \qquad \gamma = d, a, d', a' \\
&\tilde{\Psi}_\alpha = L_{q\alpha}i_q + L_{b\alpha}i_b + L_{q'\alpha}i_{q'} + L_{b'\alpha}i_{b'} \qquad \alpha = q, b, q', b' \\
&\tilde{\Psi}_{o\lambda} = L_{o\lambda}\tilde{i}_{o\lambda} \; ; \; \tilde{\Psi}_{o\lambda'} = L_{o\lambda'}\tilde{i}_{o\lambda'} \; ; \; \tilde{\Psi}_{o\varepsilon} = L_{o\varepsilon}\tilde{i}_{o\varepsilon} \; ; \; \tilde{\Psi}_{o\varepsilon'} = L_{o\varepsilon'}\tilde{i}_{o\varepsilon'}
\end{aligned}
$$

Inlocuind în ecuațiile tensiunilor imaginile fluxurilor și ordonînd după imaginile curenților $i_d, i_a, i_{d'}, i_{a'}, i_q, i_b, i_{q'}, i_{b'}$ se obțin:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}_d = -(R_d + pL_{dd})\tilde{i}_d - p\cdot L_{ad}\tilde{i}_a - pL_{d'd}\tilde{i}_{d'} - pL_{a'd}\tilde{i}_{a'} + \omega(L_{qq}\tilde{i}_q + L_{bq}\tilde{i}_b + \\
&\quad + L_{q'q}\tilde{i}_{q'} + L_{b'q}\tilde{i}_{b'}) + p\Psi_d \\
&0 = pL_{da}\tilde{i}_d + (R_a + pL_{aa})\tilde{i}_a + pL_{d'a}\tilde{i}_{d'} + pL_{a'a}\tilde{i}_{a'} - \omega(L_{qb}\tilde{i}_q + L_{bb}\tilde{i}_b + \\
&\quad + L_{q'b}\tilde{i}_{q'} + L_{b'b}\tilde{i}_{b'}) - p\Psi_a \\
&\tilde{u}_{d'} = -pL_{dd'}\tilde{i}_d - pL_{ad'}\tilde{i}_a - (R_{d'} + pL_{d'd'})\tilde{i}_{d'} - pL_{a'd'}\tilde{i}_{a'} + p\Psi_{d'} \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

$$0 = pL_{da'}\tilde{i}_d + pL_{aa'}\tilde{i}_a + pL_{d'a'}\tilde{i}_{d'} + (R_{a'} + pL_{a'a'})\tilde{i}_{a'} - p\Psi_{a'}$$

$$\tilde{u}_q = -\omega(L_{dd}\tilde{i}_d + L_{ad}\tilde{i}_a + L_{d'd}\tilde{i}_{d'} + L_{a'd}\tilde{i}_{a'}) - (R_q + pL_{qq})\tilde{i}_q - pL_{bq}\tilde{i}_b -$$
$$- pL_{q'q}\tilde{i}_{q'} - pL_{b'q}\tilde{i}_{b'} + p\Psi_q$$

$$0 = \omega(L_{da}\tilde{i}_d + L_{aa}\tilde{i}_a + L_{d'a}\tilde{i}_{d'} + L_{a'a}\tilde{i}_{a'}) + pL_{qb}\tilde{i}_q + (R_b + pL_{bb})\tilde{i}_b +$$
$$+ pL_{q'b}\tilde{i}_{q'} + pL_{b'b}\tilde{i}_{b'} - p\Psi_b \qquad (4.3)$$

$$\tilde{u}_{q'} = -pL_{qq'}\tilde{i}_q - pL_{bq'}\tilde{i}_b - (R_{q'} + pL_{q'q'})\tilde{i}_{q'} - pL_{b'q'}\tilde{i}_{b'} + p\Psi_{q'}$$

$$0 = pL_{qb'}\tilde{i}_q + pL_{bb'}\tilde{i}_b + pL_{q'b'}\tilde{i}_{q'} + (R_{b'} + pL_{b'b'})\tilde{i}_{b'} - p\Psi_{b'}$$

$$\tilde{u}_{o\lambda} = -(R_{o\lambda} + pL_{o\lambda})\tilde{i}_{o\lambda} + p\Psi_{o\lambda} \ ; \quad \tilde{u}_{o\lambda'} = -(R_{o\lambda'} + pL_{o\lambda'})\tilde{i}_{o\lambda'} + p\Psi_{o\lambda'}$$

$$0 = (R_{o\varepsilon} + pL_{o\varepsilon})\tilde{i}_{o\varepsilon} - p\Psi_{o\varepsilon} \ ; \quad 0 = (R_{o\varepsilon'} + pL_{o\varepsilon'})\tilde{i}_{o\varepsilon'} - p\Psi_{o\varepsilon'}$$

Sînt 12 ecuaţii cu 12 necunoscute şi anume: imaginile curenţilor i_γ, $i_{o\lambda}$, $i_{o\lambda'}$, $i_{o\varepsilon}$, $i_{o\varepsilon'}$ (γ=d,a,d',a',q,b,q',b'). Ultimii patru curenţi se obţin din ultimele patru ecuaţii ale sistemului, fiind independenţi de imaginile $\tilde{i}_\gamma$ ale curenţilor. Deci:

$$\tilde{i}_{o\lambda} = \frac{p\Psi_{o\lambda} - \tilde{u}_{o\lambda}}{R_{o\lambda} + pL_{o\lambda}} \ ; \qquad \tilde{i}_{o\lambda'} = \frac{p\Psi_{o\lambda'} - u_{o\lambda'}}{R_{o\lambda'} + pL_{o\lambda'}}$$
$$(4.3')$$
$$\tilde{i}_{o\varepsilon} = \frac{p\Psi_{o\varepsilon}}{R_{o\varepsilon} + pL_{o\varepsilon}} \ ; \qquad \tilde{i}_{o\varepsilon'} = \frac{p\Psi_{o\varepsilon'}}{R_{o\varepsilon'} + pL_{o\varepsilon'}}$$

Pentru a obţine imaginile celorlalţi opt curenţi, trebuie rezolvat sistemul format cu primele opt ecuaţii ale lui (4.2).

4.2.2. Rezolvarea ecuaţiilor transpuse în imagini

Impărţind ecuaţiile tensiunilor pentru înfăşurările din axele d,a,d',a' cu produsul dintre p şi inductivitatea principală după axa d, L_{ddh}, respectiv pentru înfășurările din axele q,b,q',b' cu produsul dintre p și inductivitatea principală după axa q, L_{qqh}, și introducînd următoarele notații:

$$\Gamma_{\nu\lambda} = \frac{L_{\nu\lambda}}{L_{ddh}} \quad (\nu,\lambda = d,a,d',a') \qquad \eta_{\alpha\beta} = \frac{L_{\alpha\beta}}{L_{qqh}} \quad (\alpha,\beta = q,b,q',b')$$

$$T_{\gamma} = \frac{L_{\gamma\gamma}}{R_{\gamma}} \quad (\gamma = d,a,d',a',q,b,q',b') \qquad k = \frac{L_{ddh}}{L_{qqh}} \tag{4.4}$$

$$\Gamma'_{\nu\nu} = \Gamma_{\nu\nu}\left(1+\frac{1}{pT_{\nu}}\right) \quad (\nu = d,a,d',a') \qquad \eta'_{\alpha\alpha} = \eta_{\alpha\alpha}\left(1+\frac{1}{pT_{\alpha}}\right) \quad (\alpha = q,b,q',b')$$

obținem un sistem de ecuații liniare în raport cu imaginile i ale curenților.

Notînd cu Δ_D determinantul principal al sistemului și rezolvîndu-l prin transformarea lui în sumă de produse de determinanți de ordinul 4, se obține:

$$\Delta_D = \frac{1}{p^8} \sum_{\alpha=0}^{8} C_{D\alpha} \cdot p^{\alpha} \tag{4.5}$$

Coeficienții $C_{D\alpha}$ sînt polinoame de gradul 4 în ω:

$$C_{D\alpha} = C_{D\alpha 0} + C_{D\alpha 2}\cdot\omega^2 + C_{D\alpha 4}\cdot\omega^4 \tag{4.6}$$

în care $C_{D\alpha 0}$, $C_{D\alpha 2}$, $C_{D\alpha 4}$ sînt constante depinzînd numai de rapoartele $\Gamma_{\nu\gamma}$, $\eta_{\alpha\beta}$ în care $\nu,\gamma = d,a,d',a'$ și $\alpha,\beta = q,b,q',b'$.

De remarcat că: $C_{D\alpha 2} = 0$ pentru $\alpha = 8,7$; $C_{D\alpha 2} \neq 0$ pt. $\alpha = 0,1,\ldots 6$

$C_{D\alpha 4} = 0$ pentru $\alpha = 8,7,6,5$; $C_{D\alpha 4} \neq 0$ pentru $\alpha = 0,1,2,3,4$

Notînd cu Δ_{γ} determinantul obținut din determinantul principal al sistemului, prin înlocuirea coloanei γ cu expresiile termenilor liberi și rezolvîndu-l obținem:

$$\tilde{i}_{\gamma} = \frac{\Delta_{\gamma}}{\Delta_D} \qquad \gamma = d,q,a,b,d',q',a',b' \tag{4.7}$$

Dacă dezvoltăm determinantul Δ_{γ} după coloana γ (coloana ce conţine termenii liberi) se obţine:

$$\tilde{i}_\gamma = \sum_\alpha \tilde{Y}_{\alpha\gamma}(p)\cdot\tilde{u}_\alpha + \sum_\nu \tilde{G}_{\nu\gamma}(p)\Psi_\nu \qquad (4.8)$$

în care: γ, ν =d,a,q,b,d',q',a',b' ; α = d,q,d',q', iar $\tilde{Y}_{\alpha\gamma}(p)$ şi $\tilde{G}_{\nu\gamma}(p)$ sînt parametrii operaţionali, care reprezintă coeficienţii tensiunilor înfăşurărilor din axele d,q,d',q' şi respectiv valorile iniţiale ale fluxurilor, coeficienţi obţinuţi prin dezvoltarea determinantului $\Delta\gamma$ după coloana corespunzătoare termenilor liberi.

Al doilea termen care intervine în membrul drept al relaţiei (4.8) poate fi considerat ca valoare iniţială a curentului i_γ şi prin urmare:

$$\tilde{i}_\gamma = \sum_\alpha \tilde{Y}_{\alpha\gamma}(p)\tilde{u}_\alpha + I_\gamma(p) \qquad (4.9)$$

Mărimile $\tilde{Y}_{\alpha\gamma}(p)$ din expresiile imaginilor curenţilor au dimensiuni de admitanţe şi din acest motiv pot fi denumite admitanţe operaţionale. Admitanţele operaţionale se obţin rezolvînd sistemul de ecuaţii în operaţional, considerînd cunoscute tensiunile şi valorile iniţiale ale fluxurilor magnetice după axele d,q,a,b,d',q',a',b' (anexa 4.1).

Admitanţele operaţionale sînt fracţii raţionale în raport cu p, constituite dintr-un raport de două polinoame în p de ordinul 8 (numitor) şi respectiv mai mic sau egal cu 8 (numărător), cele două polinoame avînd coeficienţi de forma (4.6).

Dacă însă rezolvăm sistemul de ecuaţii (4.2) considerînd cunoscute imaginile curenţilor $\tilde{i}_d$, $\tilde{i}_q$, a tensiunilor $\tilde{u}_d$, $\tilde{u}_q$, precum şi valorile iniţiale ale fluxurilor Ψ_γ şi dacă notăm cu Δ' determinantul sistemului astfel obţinut, atunci vom obţine funcţiile imagine ale curenţilor $\tilde{i}_\varrho$ (ϱ =a,b,d',q',a',b') în funcţie numai de $\tilde{i}_d$, $\tilde{i}_q$, $\tilde{u}_d$, $\tilde{u}_q$ şi valorile iniţiale ale fluxurilor Ψ_ϱ (anexa 4.2).

Notînd cu Δ_ϱ determinantul ce se obţine din determinantul principal al sistemului Δ', prin eliminarea coloanei ϱ, şi înlocuirea ei cu coloana termenilor liberi, atunci funcţia imagine a curentului $\tilde{i}_\varrho$ va fi:

$$\tilde{i}_\varrho = \Delta_\varrho/\Delta' = A_{d\varrho}\tilde{i}_d + A_{q\varrho}\tilde{i}_q + B_{d'\varrho}\tilde{u}_{d'} + B_{q'\varrho}\tilde{u}_{q'} + I_\varrho \qquad (4.10)$$

iar I_ρ va fi de forma:

$$I_\rho = \sum_{\delta} Q_{\delta\rho}\Psi_\delta \quad \text{unde} \quad \delta = a,b,d',q',a',b' \qquad (4.11)$$

Mărimile I_ρ depind numai de valorile inițiale ale fluxurilor și, în raport cu imaginile curenților și tensiunilor, îndeplinesc rolul unor constante.

Imaginile fluxurilor înfășurărilor d,a,q și b se exprimă sub forma:

$$\tilde{\Psi}_\mu = L_{d\mu}(p)\tilde{i}_d + L_{q\mu}(p)\tilde{i}_q + G_{d'\mu}(p)\tilde{u}_{d'} + G_{q'\mu}(p)\tilde{u}_{q'} + F_\mu \qquad (4.12)$$

$$\text{cu} \quad \mu = d,a,q,b$$

Mărimile L(p) și G(p) sînt parametrii operaționali ai mașinii, în cazul considerării pierderilor în fier. Mărimile F(p) depind numai de valorile inițiale ale fluxurilor și - la fel ca și I_ρ - îndeplinesc, în raport cu imaginile curenților și ale tensiunilor, rolul unor constante.

Se remarcă faptul că atît determinantul principal Δ al sistemului (4.2), cît și cel Δ' al aceluiași sistem, se exprimă sub forma unui raport între un polinom de gradul 8, respectiv 6, în p și p^8, determinarea lor în continuare, sub forma literală a expresiilor mărimilor care intervin, neputînd fi făcută decît în cazuri particulare. Din acest motiv, determinarea expresiilor în funcție de timp ale diferitelor mărimi variabile în cazul considerării pierderilor în fier, se poate face numai numeric, în situații concrete.

Intre admitanțele operaționale $Y(p)$ și parametrii operaționali L(p), G(p), F(p) există relații de legătură, care se stabilesc prin calcularea imaginilor curenților, utilizînd pe cele ale fluxurilor.

Prin urmare, calculînd funcțiile originale, se poate calcula cuplul dezvoltat în mașină în regim tranzitoriu și, prin urmare, se cunoaște funcționarea mașinii.

4.2.3. Rezolvarea ecuațiilor mașinilor de curent alternativ, din teoria celor două axe, fără considerarea pierderilor în fier, aplicînd calculul operațional

In acest caz, sistemul de ecuaţii diferenţiale (4.1)scris în operaţional devine:

$$\tilde{u}_d = -R_d\tilde{i}_d - p(\tilde{\psi}_d - \Psi_d) + \omega\tilde{\psi}_q \quad ; \quad \tilde{u}_{d'} = -R_{d'}\tilde{i}_{d'} - p(\tilde{\psi}_{d'} - \Psi_{d'}).$$

$$\tilde{u}_q = -R_q\tilde{i}_q - p(\tilde{\psi}_q - \Psi_q) - \qquad {}_q \quad ; \quad \tilde{u}_{q'} = -R_{q'}\tilde{i}_{q'} - p(\tilde{\psi}_{q'} - \Psi_{q'}). \tag{4.13}$$

$$\tilde{\psi}_d = L_{dd}\tilde{i}_d + L_{d'd}\tilde{i}_{d'} \qquad \tilde{\psi}_{d'} = L_{dd'}\tilde{i}_d + L_{d'd'}\tilde{i}_{d'}$$

$$\tilde{\psi}_q = L_{qq}\tilde{i}_q + L_{q'q}\tilde{i}_{q'} \qquad \tilde{\psi}_{q'} = L_{qq'}\tilde{i}_q + L_{q'q'}\tilde{i}_{q'}$$

Introducînd şi în acest sistem notaţiile anterioare şi rezolvîndu-l în raport cu imaginile curenţilor $i_d, i_q, i_{d'}, i_{q'}$, se obţin expresiile imaginilor curenţilor de forma:

$$\tilde{i}_\varrho = Y_{\varrho\mu}(p)\cdot\tilde{u}_\mu(p) + I_\varrho \quad \text{cu} \quad \varrho, \mu = d, d', q, q' \tag{4.14}$$

în care mărimea I_ϱ joacă rolul unei constante în raport cu imaginea curentului i_ϱ, iar $Y_{\varrho\mu}(p)$ reprezintă admitanţele operaţionale. Admitanţele operaţionale sînt rapoarte de polinoame de gradul 4 în p la numitor, respectiv de gradul 3 în p la numărător şi prin urmare rezolvarea ecuaţiilor în continuare poate fi făcută numai numeric, pentru cazuri concrete.

Desigur că, în acest caz, problema se simplifică faţă de cazul considerării pierderilor în fier, deoarece se reduce numărul de ecuaţii ce trebuie rezolvat.

4.2.4. Concluzii

Aplicarea calculului operaţional la studiul regimurilor tranzitorii se poate face numai dacă viteza ω variază lent în timp, deci ea - pe porţiuni - poate fi considerată constantă. Această ipoteză, limitează posibilităţile de aplicare a calculului operaţional la studiul regimurilor tranzitorii din cazul maşinilor de inducţie din sistemele eoliene.

In plus, rezolvarea sistemului de ecuaţii în operaţional (4.3), respectiv (4.13), conduce la calcule laborioase. Parametrii operaţionali ai maşinii Y(p), G(p),F(p)pot fi determinaţi, în cazul general, dar obținerea funcției original se poate face numai numeric, în cazuri concrete, deoarece revine la a soluționa ecuații lineare de grad mai mare decît 4.

4.3. Metode numerice pentru rezolvarea ecuațiilor mașinilor de curent alternativ

4.3.1. Considerații generale

Metodele numerice de integrare a sistemelor de ecuații diferențiale se bazează pe un procedeu pas cu pas, pe baza căruia soluția se obține sub forma unui șir de valori ale variabilelor corespunzătoare diferitelor valori ale timpului t, plecînd de la valoarea inițială a soluției [72] .

Există două tipuri de metode numerice: metodele multipas,în care soluția este dată pe baza informațiilor de la mai mulți pași anteriori, și metodele pas cu pas sau unipas, care au informații numai din pasul imediat anterior și, eventual, din intervalul pasului considerat. [41].

Metodele unipas (pas cu pas) prezintă avantaje față de metodele multipas, printre ele fiind: posibilitatea folosirii pasului variabil și startul nemijlocit, pe baza condițiilor inițiale [41]. In ceea ce privește dezavantajele, acestea provin, în general, din complexitatea mai mare a calculelor pentru deducerea algoritmilor respectivi și din expresiile destul de complicate ale algoritmului, ceea ce face ca aplicarea pe ordinator a metodelor pas cu pas să ceară timpi de calcul superiori față de metodele multipas.

O metodă numerică este cu atît adecvată cu cît eroarea ei la fiecare iterație (eroarea de metodă) este mai mică. Afirmația este adevărată numai dacă metoda este și stabilă sau, cu alte cuvinte, numai dacă mecanismul de propagare a erorilor poate fi ținut sub control. Convergența metodei este asigurată dacă aceasta este consistentă și stabilă [73].

Din metodele numerice prezentate în literatura de specialitate, metodele de tip Runge-Kutta sînt cele mai utilizate atît în rezolvarea ecuațiilor diferențiale, cît și a sistemelor de ecuații diferențiale.

4.3.2. <u>Metode de tip Runge-Kutta</u>

Fie un sistem de ecuaţii diferenţiale scris sub formă matri cială (4.14):

$$\frac{d\,[X(x)]}{dx} = f(x,[X]) \tag{4.14}$$

în care:

$$[X]=\begin{bmatrix}[X^{(1)}(x)]\\ [X^{(2)}(x)]\\ \vdots\\ [X^{(m)}(x)]\end{bmatrix}, \quad f(x,[X])=\begin{bmatrix} f^1(x,[X^{(1)}(x)],[X^{(2)}(x)],\ldots[X^{(m)}(x)])\\ f^2(x,[X^{(1)}(x)],[X^{(2)}(x)],\ldots[X^{(m)}(x)])\\ \vdots\\ f^m(x,[X^{(1)}(x)],[X^{(2)}(x)],\ldots[X^{(m)}(x)])\end{bmatrix} \tag{4.15}$$

$[X^{(i)}(x)]$ reprezentînd derivata de ordinul i a matricei $[X]$ $(i=1,2,,,..m)$ iar funcţiile f^m fiind funcţii cunoscute, pentru care se cunosc condiţiile iniţiale, adică:

$$[X(a)]=[X_0] \tag{4.16}$$

Metodele de tip Runge-Kutta îşi propune să asigure soluţia sistemului (4.14) pe baza unei relaţii unipas de tipul:

$$[\bar{X}_{k+1}]=[\bar{X}_k]+[c_{k,k+1}] \tag{4.17}$$

unde $[c_{k,k+1}]$ este o funcţie care depinde de "istoria" problemei în intervalul $[x_k,x_{k+1}]$ şi în plus, poate fi scrisă ca o combinaţie liniară:

$$[c_{k,k+1}]=\sum_{i=1}^{s} d_i[K_i]$$

în care $[K_i]$ sînt produse dintre $h = x_{k+1}-x_k$ şi valorile funcţiei $f(x,[X])$ în anumite puncte:

$$[K_1]= hf(x_k,[\bar{X}_k])$$
$$K_2 = hf(x_k+\alpha_0 h,[\bar{X}_k]+\beta_0[K_1])$$

$$[K_3] = hf(x_k + \alpha_1 h, [\bar{X}_k] + \beta_1 [K_1] + \gamma_1 [K_2]) \quad (4.19)$$

$$K_4 = hf(x_k + \alpha_2 h, [\bar{X}_k] + \beta_2 [K_1] + \gamma_2 [K_2] + \delta_2 [K_3])$$

iar $[\bar{X}_{k+1}]$, $[\bar{X}_k]$ sînt soluţiile calculate numeric în punctele x_{k+1}, respectiv x_k.

Cu $[X]$ se notează soluţia exactă a ecuaţiei diferenţiale (4.14).

Dacă se găsesc ponderile $d_1, d_2, \dots, d_s$ şi coeficienţii $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{s-2}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{s-2}, \gamma_{1,2}, \dots, \gamma_{s-2}, \delta_2, \delta_3, \dots \delta_{s-2}$ aşa încît $[\bar{X}_{k+1}]$ dat (4.14)-(4.17) să coincidă în primii N termeni cu dezvoltarea în serie a soluţiei exacte pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$, cu aceeaşi condiţie iniţială $[\bar{X}_k]$ atunci vom spune că am realizat o metodă de tip Runge-Kutta de ordinul N. Pentru s=2,3,4 există relaţia simplă N=s, N numindu-se ordinul sau gradul metodei.

Eroarea de metodă are o expresie complicată şi este de ordinul h^{s+1}, dar metodele de tip Runge-Kutta sînt convergente şi în cazul lor nu mai este necesar şi studiul stabilităţii [41] .

Metode de tip Runge-Kutta cu s=4 au eroarea de metodă de ordinul h^5. Soluţia aproximativă se scrie sub forma (4.20)

$$[\bar{X}_{k+1}] = [\bar{X}_k] + d_1[K_1] + d_2[K_2] + d_3[K_3] + d_4[K_4] \quad (4.20)$$

în care $[K_1]$, $[K_2]$, $[K_3]$, $[K_4]$ sînt de forma (4.19), iar valorile numerice ale lui $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2, \beta_2$ şi d_1, d_2, d_3, d_4 se determină în aşa fel încît termenii pînă la h^4 inclusiv să coincidă în seriile de puteri ale lui h pentru $[\bar{X}_{k+1}]$ şi $[X(x_{k+1})]$. Se obţin mai multe seturi de valori pentru algoritm, dintre care amintim :

a) Metoda Runge-Kutta standard, cu $d_1=d_4=1/6$, $d_2=d_3=1/3$, $\alpha_0=\alpha_1=\beta_0=\gamma_1=1/2$, $\alpha_2=\delta_2=1$, $\beta_1=\beta_2=\gamma_2=0$.

b) Metoda Runge-Kutta de trei optimi, cu parametrii $d_1=d_4=1/8$, $d_2=d_3=3/8$, $\alpha_0=\beta_0=1/3$, $\gamma_1=2/3$, $\alpha_2=\beta_2=\gamma_1=\delta_2=1$, $\beta_1 = -1/3$;

c) Metoda Runge-Kutta-Gill cu parametrii $d_1=d_4=1/6$, $d_2=\frac{1}{3}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $d_3=\frac{1}{3}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\alpha_0=\alpha_1=\beta_0=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=1$, $\beta_1=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$, $\beta_2=0$, $\gamma_1 = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\delta_2 = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Un studiu comparativ al acestor variante [41] arată că varianta c este mai bună în ceea ce priveşte memoria, cerînd un număr mai mic de alocaţii şi algoritmul ei poate fi scris astfel încît să diminueze puternic influența erorilor de rotunjire. Această superioritate este contrabalansată de faptul că timpul de calcul este sensibil mai mare decît la celelalte două variante. Se arată de asemenea că algoritmul Kutta de trei optimi, implică pe ordinator operații ale căror erori de rontunjire nu se compensează una pe alta, ca în cazul metodei Runge-Kutta-Gill, și că, metodele Runge-Kutta standard și Kutta de trei optimi,dau rezultate afectate mult mai puternic de erorile de rotunjire, pe cînd în varianta Runge-Kutta-Gill abaterea datorată acestora este sensibil mai mică dar timpul de calcul este mai mare. Deci, pentru ordinatoarele cu operații rapide, în dublă precizie, sînt de preferat primele două variante ale metodelor Runge-Kutta de ordinul 4, iar în cazul celor în simplă precizie se recomandă varianta Runge-Kutta-Gill.

Metodele de tip Runge-Kutta - ca și toate metodele unipas au avantajul că, folosind numai informații din nodul imediat anterior pot folosi pas variabil. De asemenea, ele se pot aplica și sistemelor de m ecuații diferențiale de ordin s , prin transformarea acestora în sisteme de m.s ecuații diferențiale de ordinul întîi, cu condiții inițiale cunoscute, atunci cînd ordinul sistemului și respectiv al ecuațiilor diferențiale este mic.

4.3.3. Rezolvarea ecuațiilor mașinilor de curent alternativ cu metoda Runge-Kutta-Gill

Utilizarea metodei Runge-Kutta-Gill presupune cunoașterea condițiilor inițiale, precum și reordonarea sistemului de ecuații (3.66),(3.67) în sensul separării derivatelor necunoscutelor. Pentru a reduce timpul de calcul, reducînd numărul de ecuații cu care se operează în cadrul metodei numerice se pot urma două căi, considerînd ca și necunoscute, expresiile curenților i_γ sau a fluxurilor Ψ_γ (γ=d,q,a,b,d',q',a',b').

a) Se consideră necunoscute curenții i_γ. In acest caz, în sistemul de ecuații (3.66), ca și în ecuația mișcării (3.67) se înlocuiesc fluxurile în funcție de curenți și parametrii mașinii, obținînd:

$$u_d = -R_d i_d - L_{dd}\frac{di_d}{dt} - L_{ad}\frac{di_a}{dt} - L_{d'd}\frac{di_{d'}}{dt} - L_{a'd}\frac{di_{a'}}{dt} +$$

$$+ (L_{qq}i_q + L_{bq}i_b + L_{q'q}i_{q'} + L_{b'q}i_{b'})\frac{d\vartheta}{dt} \qquad (4.21.1)$$

$$u_q = -(L_{dd} i_d + L_{ad} i_a + L_{d'd} i_{d'} + L_{a'd} i_{a'}) \frac{d\vartheta}{dt} - R_q i_q - L_{qq} \frac{di_q}{dt} -$$

$$- L_{bq} \frac{di_b}{dt} - L_{q'q} \frac{di_{q'}}{dt} - L_{b'q} \frac{di_{b'}}{dt} \qquad (4.21.2)$$

$$0 = L_{da} \frac{di_d}{dt} + R_a i_a + L_{aa} \frac{di_a}{dt} + L_{d'a} \frac{di_{d'}}{dt} + L_{a'a} \frac{di_{a'}}{dt} -$$

$$- (L_{qb} i_b + L_{bb} i_b + L_{q'b} i_{q'} + L_{b'b} i_{b'}) \frac{d\vartheta}{dt} \qquad (4.21.3)$$

$$0 = (L_{da} i_d + L_{aa} i_a + L_{d'a} i_{d'} + L_{a'a} i_{a'}) \frac{d\vartheta}{dt} + L_{qb} \frac{di_q}{dt} +$$

$$+ R_b i_b + L_{bb} \frac{di_b}{dt} + L_{q'b} \frac{di_{q'}}{dt} + L_{b'b} \frac{di_{b'}}{dt} \qquad (4.21.4)$$

$$u_{d'} = -L_{dd'} \frac{di_d}{dt} - L_{ad'} \frac{di_a}{dt} - R_{d'} i_{d'} - L_{d'd'} \frac{di_{d'}}{dt} - L_{a'd'} \frac{di_{a'}}{dt} \qquad (4.21.5)$$

$$u_{q'} = -L_{qq'} \frac{di_q}{dt} - L_{bq'} \frac{di_b}{dt} - R_{q'} i_{q'} - L_{q'q'} \frac{di_{q'}}{dt} - L_{b'q'} \frac{di_{b'}}{dt} \qquad (4.21.6)$$

$$0 = L_{da'} \frac{di_d}{dt} + L_{aa'} \frac{di_a}{dt} + L_{d'a'} \frac{di_{d'}}{dt} + R_{a'} i_{a'} + L_{a'a'} \frac{di_{a'}}{dt} \qquad (4.21.7)$$

$$0 = L_{qb'} \frac{di_q}{dt} + L_{bb'} \frac{di_b}{dt} + L_{q'b'} \frac{di_{q'}}{dt} + R_{b'} i_{b'} + L_{b'b'} \frac{di_{b'}}{dt}, \qquad (4.21.8)$$

respectiv expresia momentului electromagnetic:

$$M = p\Big[(L_{dd} - L_{qq}) i_d i_q + (L_{aa} - L_{bb}) i_a i_b + i_{d'}(L_{d'd} i_q + L_{d'a} i_b) +$$

$$+ i_{a'}(L_{a'd} i_q + L_{a'a} i_b) - i_{q'}(L_{q'q} i_d + L_{q'b} i_a) - i_{b'}(L_{b'q} i_d + L_{b'b} i_a)\Big] \qquad (4.21.9)$$

Inlocuind expresia momentului electromagnetic dat de (4.21.9) în ecuaţia mişcării şi separînd din (4.21.1)-(4.21.8) expresiile derivatelor curenţilor $\frac{di_\gamma}{dt}$, obţinem:

$$\frac{di_\gamma}{dt} = F_\gamma\left(i_\gamma, \frac{di_\alpha}{dt}, u_\gamma, \frac{d\theta}{dt}, R_\gamma, L_{\rho\gamma}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = F_m\left(i_\gamma, \frac{d\theta}{dt}, R_\gamma, L_{\rho\gamma}\right) + M_{mec}\left(v, \frac{d\theta}{dt}\right) \qquad (4.22)$$

Un sistem de 9 ecuaţii cu 9 necunoscute, i_γ, $\frac{d\theta}{dt}$, în care α, ρ, γ = d,a,q,b,d',a',q',b', $\alpha \neq \gamma$. Introducînd substituţia:

$$\frac{d\theta}{dt} = Z \qquad (4.23)$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (4.22) devine:

$$\frac{di_\gamma}{dt} = F_\gamma\left(i_\gamma, \frac{di_\alpha}{dt}, u_\gamma, Z, R_\gamma, L_{\rho\gamma}\right) \text{ în care } \rho = d, a, q, b, d', a', q', b'$$

$$\frac{dZ}{dt} = F_m(i_\gamma, Z, R_\gamma, L_{\rho\gamma}) + F_{mec}(Z, v)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Z \qquad (4.24)$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (4.24) conţine 10 ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi şi tot atîtea necunoscute: curenţii $i_\gamma(t)$, unghiul $\theta(t)$ şi derivata acestuia în raport cu timpul, Z. Rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale (4.24) necesită cunoaşterea expresiilor funcţiilor F_γ, F_m, F_{mec}, precum şi a valorilor mărimilor necunoscute la momentul t=0, numite valori iniţiale.

Funcţiile F_γ, F_m depind şi de parametrii maşinii R_γ, $L_{\alpha\gamma}$ iar în expresia momentului mecanic intervine şi viteza vîntului, care – în cursul rezolvării – va fi considerată parametru constant.

De asemenea în expresiile funcţiilor F_m şi F_{mec} intervine momentul de inerţie total al ansamblului turbină eoliană – multiplicator – maşină electrică, J, precum şi numărul de perechi de poli ai maşinii electrice p.

b) Se consideră necunoscute fluxurile Ψ_μ. In acest caz, se exprimă toţi curenţii i ca funcţii de fluxurile Ψ_μ :

$$i_\mu = F'_\mu(\Psi_\mu, \frac{d\theta}{dt}, u_\mu, R_\mu, L_{\varsigma\mu}) \qquad (4.25)$$

şi apoi expresiile curenţilor se înlocuiesc în sistemul (3.60), respectiv în ecuaţia momentului electromagnetic (3.68), obţinîndu-se:

$$\frac{d\Psi_\mu}{dt} = G_\mu(\Psi_\mu, Z, u_\mu, R_\mu, L_{\varsigma\mu}) \quad \alpha, \mu = d,a,d',a',q,b,q',b'$$

$$\frac{dZ}{dt} = G_m(\mu, Z, u_\mu, R_\mu, L_{\varsigma\mu}) + G_{mec}(Z, v) \qquad (4.26)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Z$$

în care $\alpha, \varsigma, \mu = d,a,q,b,d',a',q',b'$, dar $\alpha \neq \mu$.

Sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi (4.26) cuprinde 10 ecuaţii, cu tot atîtea necunoscute: valorile fluxurilor Ψ_μ, ale unghiului ϑ şi a derivatei acestuia în raport cu timpul Z. Rezolvarea lui necesită cunoaşterea expresiilor funcţiilor G_μ, G_m, G_{mec}, precum şi a valorilor mărimilor necunoscute la momentul t=0, numite valori iniţiale.

Funcţiile G_μ, G_m depind şi de parametrii maşinii $R_\mu, L_{\alpha\mu}$, iar în expresia momentului mecanic intervine şi viteza vîntului v, care în cursul rezolvării – va fi considerată parametru constant. De asemenea în expresiile funcţiilor G_m şi G_{mec} intervine momentul de inerţie total al ansamblului turbină eoliană-multiplicator – maşină electrică J, precum şi numărul de perechi de poli ai maşinii electrice, p.

Rezolvarea în continuare fie a sistemului (4.24), fie (4.26) se face în mod similar, aplicînd algoritmul metodei Runge-Kutta-Gill şi determinînd expresiile funcţiilor de aproximare $[K_1]$, $[K_2]$, $[K_3]$, $[K_4]$. Cum s-a precizat prima ecuaţie atît a sistemului (4.24) cît şi a sistemului (4.26) este scrisă sub formă matricială, i_γ şi respectiv Ψ_γ reprezentînd matricea coloană a curenţilor i_γ, respectiv a fluxurilor Ψ_γ, iar funcţiile F_γ, G_γ sînt matrici ale căror expresii se deduc din sistemul de ecuaţii (3.66).

Expresiile funcţiilor de aproximare Runge-Kutta-Gill de ordinul IV sînt mai simple în cazul considerării ca necunoscute a valorilor fluxurilor Ψ_γ, deoarece în expresia lui G_γ apar numai valorile fluxurilor Ψ_γ, nu şi a derivatelor acestora. De aceea, în cele ce urmează se consideră necunoscute valorile fluxurilor Ψ_γ, curenţii i_γ determinîndu-se din (4.27):

$$\begin{aligned}
&\Psi_\gamma = L_{d\gamma} i_d + L_{a\gamma} i_a + L_{d'\gamma} i_{d'} + L_{a'\gamma} i_{a'} \quad \text{pentru} \quad \gamma = d, a, d', a' \\
&\Psi_\gamma = L_{q\gamma} i_q + L_{b\gamma} i_b + L_{q'\gamma} i_{q'} + L_{b'\gamma} i_{b'} \quad \text{pentru} \quad \gamma = q, b, q', b'
\end{aligned} \qquad (4.27)$$

5. ECUATIILE SI PARAMETRII MASINII ELECTRICE DE INDUCTIE AVIND DOUA VITEZE DE ROTATIE

5.1. Echivalarea mașinii electrice de inducție cu rotorul în scurtcircuit și înfășurări repartizate zonal cu mașină electrică de inducție trifazată în stator și în rotor, cu înfășurări repartizate sinusoidal

Pentru a obține o repartiție sinusoidală a inducției magnetice în lungul pasului polar - condiție necesară pentru a putea aplica nemijlocit teoria celor două axe - este necesar ca toate înfășurările statorice și rotorice ale mașinii reale să fie repartizate sinusoidal de-a lungul pasului polar.

Mașina electrică de inducție cu două viteze de rotație, folosită în instalația aeroelectrică, are înfășurările statorice și rotorice repartizate zonal, în crestături. De asemenea, mașina electrică considerată este m' fazată în rotor, ceea ce ar necesita calcularea lui $\zeta_{\nu'}$, respectiv $\zeta_{\nu' w}$ date de relațiile (3.30) la fiecare iterație, funcție de curenți, precum și rezolvarea ecuațiilor diferențiale pentru mărimile omopolare rotorice. Acest lucru nu ar mai fi necesar în cazul în care mașina de inducție este trifazată atît în stator, cît și în rotor. De aceea, în cele ce urmează, se echivalează mașina reală, cu înfășurări repartizate zonal și m' fazată în rotor cu o mașină ideală, trifazată atît în stator, cît și în rotor, avînd toate înfășurările repartizate sinusoidal în lungul pasului polar.

Mașina reală are m=3 faze în stator, avînd N_1 spire pe fază și factorul de bobinaj kb_1, iar în rotor m_2 faze, avînd N_2=1/2 spire pe o fază și factorul de bobinaj kb_2=1. Numărul de faze rotorice m_2 este egal cu numărul de crestături rotorice notat NC_2. Această mașină se echivalează cu o mașină trifazată atît în stator cît și în rotor, avînd w_1 spire pe o fază statorică și același număr de spire w_1 pe o fază rotorică, înfășurările statorice și rotorice ale mașinii echivalente fiind repartizate sinusoidal de-a lungul pasului polar. Mașina echivalentă are același moment electromecanic, aceeași putere electrică totală în orice moment, aceeași energie magnetică separat pe stator și rotor, aceeași inducție în întrefier şi aceleaşi pierderi în cupru şi în fier ca şi maşina reală.

Maşina reală şi maşina echivalentă avînd aceleaşi inducţii magnetice în întrefier au aceleaşi solenaţii în stator şi în rotor. Astfel, se obţine pentru stator:

$$\sqrt{2}\, I_{1e} \cdot w_1 \cdot \frac{3}{2} = 3\, \frac{2}{\pi} \sqrt{2}(N_1 \cdot k_{b1}) I_{1r} \tag{5.1}$$

în care I_{1r} este valoarea efectivă a curentului ce parcurge înfăşurarea statorică a maşinii reale, iar I_{1e} este valoarea efectivă a curentului din înfăşurarea statorică a maşinii echivalente. Punînd condiţia de echivalenţă a celor doi curenţi, adică:

$$I_{1e} = I_{1r} = I_1 \tag{5.2}$$

se obţine din (5.1):

$$w_1 = \frac{4}{\pi}(N_1 \cdot k_{b1}) \tag{5.3}$$

Echivalarea rotorului m_2-fazat avînd înfăşurările repartizate zonal cu rotor m_2-fazat, dar avînd înfăşurările repartizate sinusoidal conduce de asemenea la egalitatea solenaţiilor:

$$m_2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot N_2 \cdot k_{b2} \cdot I_{2r} = \frac{m_2}{2} \cdot w_{2sm} \cdot I_{2m} \cdot \sqrt{2} \tag{5.4}$$

în care: m_2 - numărul de faze ale rotorului;

N_2 - numărul de spire pe faza rotorică a maşinii reale ($N_2=1/2$);

k_{b2}-factorul de bobinaj al rotorului maşinii reale;

I_{2r}-valoarea efectivă a curentului rotoric din maşina reală, neraportat la stator;

w_{2sm}-numărul de spire al unei faze rotorice a maşinii m_2-fazate, dar cu înfăşurările repartizate sinusoidal ;

I_{2m} - valoarea efectivă a curentului ce străbate înfăşurarea rotorică m_2-fazată repartizată sinusoidal.

Punînd condiţia de echivalenţă a celor doi curenţi rotorici:

$$I_{2r} = I_{2m} = I_2 \tag{5.5}$$

se obţine:

$$w_{2sm} = \frac{4}{\pi} \qquad (5.6)$$

Rotorul m_2-fazat, avînd înfăşurările repartizate sinusoidal se echivalează cu rotor trifazat avînd înfăşurări repartizate sinusoidal şi w_1 spire pe o fază rotorică, obţinîndu-se -din egalitatea solenaţiilor rotorice:

$$\frac{m_2}{2} \cdot w_{2sm} \cdot I_2 \sqrt{2} = \frac{3}{2} w_1 \cdot \sqrt{2} \cdot I_{2,3f} \qquad (5.7)$$

în care $I_{2,3f}$ este valoarea efectivă a curentului fazei rotorice din maşina echivalentă - expresia curentului $I_{2,3f}$:

$$I_{2,3f} = \frac{\frac{m_2}{6}}{N_1 \cdot k_{b1}} \cdot I_2 = I_2' \qquad (5.8)$$

Din condiţia de echivalenţă a puterilor active şi reactive ale rotoarelor celor două maşini - reală şi echivalentă - în mod analog, se determină rezistenţa înfăşurării rotorice trifazate repartizate sinusoidal $R_{2,3f}$, respectiv reactanţa ei de dispersie $X_{2,3f}$, în funcţie de rezistenţa rotorică R_2, respectiv reactanţa de dispersie rotorică X_2 a maşinii reale:

$$R_{2,3f} = R_2' \; ; \quad X_{2,3f} = X_2' \qquad (5.9)$$

în care R_2', X_2' reprezintă rezistenţa, respectiv reactanţa de dispersie rotorică raportate la stator ale maşinii reale.

Prin urmare, maşina echivalentă trifazată în stator şi în rotor, cu înfăşurări repartizate sinusoidal în lungul pasului polar are: w_1 spire pe o fază statorică, parcursă de un curent ce are aceeaşi valoare efectivă I_1 ca şi curentul statoric al maşinii reale, w_1 spire pe o fază rotorică, parcursă de un curent ce are aceeaşi valoare efectivă I_2 ca şi curentul rotoric raportat la stator al maşinii reale. Rezistenţa unei faze rotorice, respectiv reactanţa de dispersie rotorică, din maşina echivalentă au aceleaşi valori ca şi mărimile similare (rezistenţă rotorică, reactanță de dispersie rotorică) raportat la stator ale mașinii reale, respectiv R_2', X_2'. Mașina echivalentă are de asemenea aceeași rezistență statorică, R_1, aceeași reactanță de dispersie statorică X_1, aceleași tensiuni la borne, același număr de perechi de poli, același întrefier ca și mașina reală.

5.2. Determinarea parametrilor înfășurărilor auxiliare

Pentru a ține seama de influența pierderilor în fier asupra cîmpului magnetic, pierderile prin histereză magnetică se echivalează cu pierderi prin curenți turbionari.

Fluxul cîmpului magnetic generat de curenții turbionari se consideră ca fiind produs de curenți de conducție stabiliți într-un sistem de ε înfășurări auxiliare scurtcircuitate, fixe față de ~~rotor~~ stator, respectiv ε' fixe față de rotor. Aceste înfășurări au proprietățile următoare:

- sînt cuplate magnetic între ele și cu înfășurările reale ale mașinii numai prin intermediul cîmpului magnetic principal;
- înfășurările auxiliare nu au cîmp de dispersie, ci numai cîmp principal ;
- sînt scurtcircuitate atît în stator, cît și în rotor;
- curenții stabiliți în ele, determină ca suma puterilor care se obțin la bornele lor să corespundă pierderilor în fier, separat pentru stator și rotor ;

Pentru a determina fluxurile magnetice produse de curenții de conducție din înfășurările auxiliare din mașina de inducție cu rotorul în scurtcircuit se admit în plus, următoarele ipoteze:

a) mașina m_2 fazată în rotor, cu înfășurări repartizate zonal, se echivalează cu o mașină trifazată în rotor, cu înfășurări repartizate zonal. Din echivalarea solenațiilor celor două mașini se obține că mașina trifazată în rotor are:

$$N_2 = \frac{m_2}{6} \tag{5.10}$$

spire în rotor, iar înfășurarea rotorică este parcursă de același curent I_2 ca și înfășurarea rotorică din mașina reală.

b) înfășurările auxiliare - trei în stator și trei în rotor - au axele suprapuse peste axele înfășurărilor principale ale mașinii (fig.5.1).

c) înfăşurările auxiliare statorice, respectiv rotorice au acelaşi număr de spire ca şi înfăşurările principale statorice N_1, respectiv rotorice N_2.

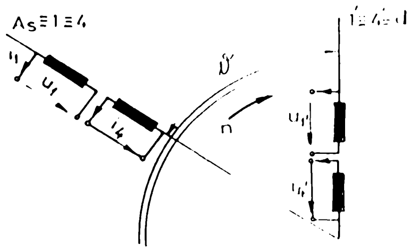


Fig.5.1

Se notează cu indicele 4 mărimile corespunzătoare înfăşurării statorice auxiliare a cărei axă se suprapune peste axa înfăşurării fazei 1, cu 5 şi respectiv 6, mărimile corespunzătoare înfăşurării statorice auxiliare a cărei axă se suprapune peste axa înfăşurării fazei statorice 2, respectiv 3.

In mod similar, se notează cu indicii 4',5',6' mărimile corespunzătoare înfăşurărilor auxiliare rotorice.

Notînd cu λ ordinul unei înfăşurări statorice principale ($\lambda=1,2,3$) şi cu ε ordinul unei înfăşurări statorice auxiliare ($\varepsilon=4,5,6$) respectiv λ' şi ε' pentru înfăşurările rotorice principale, respectiv auxiliare ($\lambda'=1',2',3'$, $\varepsilon'=4',5',6'$) atunci fluxul magnetic al înfăşurării auxiliare statorice 4 care are axa suprapusă peste axa fazei 1 statorice, este:

$$\Psi_{4h} = \sum_{\lambda=1}^{3} L_{\lambda 4h} i_\lambda + \sum_{\varepsilon=4}^{6} L_{\varepsilon 4h} i_\varepsilon + \sum_{\lambda'=1'}^{3'} L_{\lambda' 4h} i_{\lambda'} + \sum_{\varepsilon'=4'}^{6'} L_{\varepsilon' 4h} i_{\varepsilon'} \qquad (5.11)$$

în care inductivităţile $L_{\lambda 4h}$, $L_{\varepsilon 4h}$, $L_{\lambda' 4h}$, $L_{\varepsilon' 4h}$ au expresiile:

$$\begin{aligned}
&L_{\lambda 4h} = L_{11h}\cdot\cos\vartheta_\lambda \qquad && \vartheta_\lambda = \frac{(\lambda-1)2\pi}{3} \qquad && \lambda=1,2,3 \\
&L_{\varepsilon 4h} = L_{11h}\cdot\cos\vartheta_\varepsilon && \vartheta_\varepsilon = \frac{(\varepsilon-4)2\pi}{3} && \varepsilon=4,5,6 \\
&L_{\lambda' 4h} = L_{12h}\cos\left[\vartheta + \frac{(\lambda'-1)2\pi}{3}\right] && && \lambda'=1',2',3' \\
&L_{\varepsilon' 4h} = L_{12h}\cos\left[\vartheta + \frac{(\varepsilon'-4)2\pi}{3}\right] && && \varepsilon=4',5',6'
\end{aligned} \qquad (5.12)$$

$$\vartheta = (\omega_1 - \omega_2)t$$

iar pentru curenţii $i_\lambda, i_\varepsilon, i_{\lambda'}, i_{\varepsilon'}$ avem:

$$i_\lambda = I_1\sqrt{2}\sin\left[\omega_1 t - \varphi_1 - \frac{(\lambda-1)2\pi}{3}\right], \quad \lambda=1,2,3$$

$$i_\varepsilon = I_3\sqrt{2}\sin\left[\omega_1 t - \varphi_3 - \frac{(\varepsilon-4)2\pi}{3}\right], \quad \varepsilon=4,5,6 \qquad (5.13)$$

$$i'_\lambda = I_2\sqrt{2}\sin\left[\omega_2 t - \varphi_2 - \frac{(\lambda'-1)2\pi}{3}\right], \quad \lambda'=1',2',3'$$

$$i'_\varepsilon = I_4\sqrt{2}\sin\left[\omega_2 t - \varphi_4 - \frac{(\varepsilon'-4)2\pi}{3}\right] \quad \varepsilon'=4',5',6'$$

Introducînd expresiile inductivităţilor şi ale curenţilor date de (5.12), respectiv (5.13) în expresia fluxului magnetic (5.11) şi ţinînd cont că $L_{11h}=k_i \cdot L_{12h}$ (k_i - raportul de transformare a curenţilor), se obţine:

$$\psi_{4h} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,L_{11h}\Big[I_1\sin(\omega_1 t-\varphi_1)+I_3\sin(\omega_1 t-\varphi_3)+$$

$$+\frac{1}{k_i}I_2\sin(\omega_1 t-\varphi_2)+\frac{1}{k_i}I_4\sin(\omega_1 t-\varphi_4)\Big] \qquad (5.14)$$

In mod analog, fluxul magnetic al înfăşurării auxiliare rotorice 4', care are axa suprapusă peste axa fazei 1' rotorice, $\psi_{4'h}$ este:

$$\psi_{4'h} = \sum_{\lambda=1}^{3} L_{\lambda 4'h} i_\lambda + \sum_{\varepsilon=4}^{6} L_{\varepsilon 4'h} i_\varepsilon + \sum_{\lambda'=1'}^{3'} L_{\lambda' 4'h} i_{\lambda'} + \sum_{\varepsilon'=4'}^{6'} L_{\varepsilon' 4'h} i_{\varepsilon'} \qquad (5.15)$$

în care inductivităţile $L_{\lambda 4'h}$, $L_{\varepsilon 4'h}$, $L_{\lambda' 4'h}$, $L_{\varepsilon' 4'h}$ au expresiile:

$$L_{\lambda 4'h} = L_{12h}\cdot\cos\left(\vartheta - \frac{(\lambda-1)2\pi}{3}\right), \quad \lambda=1,2,3$$

$$L_{\varepsilon 4'h} = L_{12h}\cdot\cos\left[\vartheta - \frac{(\varepsilon-4)2\pi}{3}\right], \quad \varepsilon=4,5,6$$

$$L_{\lambda' 4'h} = L_{22h}\cdot\cos\frac{(\lambda'-1)2\pi}{3}, \quad \lambda'=1',2',3' \qquad (5.16)$$

$$L_{\varepsilon'4'h} = L_{22h}\cdot\cos\frac{(\varepsilon'-4)2\pi}{3} \qquad \varepsilon' = 4',5',6'$$

iar pentru curenţii i_λ, i_ε, $i_{\lambda'}$, $i_{\varepsilon'}$ sînt valabile expresiile date de (5.13).

Tinînd seama de expresiile inductivităţilor şi curenţilor din (5.16), respectiv (5.13), precum şi de relaţia de legătură dintre inductivităţi [26] prin raportul de transformare a curenţilor:

$$k_i = \frac{L_{11h}}{L_{12h}} = \frac{L_{12h}}{L_{22h}} \tag{5.17}$$

se obţine pentru fluxul magnetic total al înfăşurării auxiliare rotorice de ordinul 4':

$$\Psi_{4'h} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k_i}\cdot L_{11h}\cdot\Big[\,I_1\sqrt{2}\,\sin(\omega_2 t-\varphi_1)+I_3\sqrt{2}\,\sin(\omega_2 t-\varphi_3)+$$

$$+\frac{1}{k_i}\,I_2\sqrt{2}\,\sin(\omega_2 t-\varphi_2)+\frac{1}{k_i}\,I_4\sqrt{2}\,\sin(\omega_2 t-\varphi_4)\Big] \tag{5.18}$$

Dacă R_3 şi R_4 sînt rezistenţele electrice ale înfăşurărilor auxiliare din stator, respectiv din rotor, cu asocierea sensurilor pozitive corespunzătoare sursei şi ţinînd cont că tensiunile u_ε, $u_{\varepsilon'}$ la bornele înfăşurărilor auxiliare sînt zero (înfăşurări scurtcircuitate), ecuaţiile dintre curenţi şi tensiuni scrise pentru aceste înfăşurări conduc la:

$$0 = -R_4 i_4 - \frac{d\Psi_{4h}}{dt} \quad ; \; 0 = -R_{4'}\cdot i_{4'} - \frac{d\Psi_{4'h}}{dt} \tag{5.19}$$

Introducînd în (5.19) expresiile fluxurilor magnetice Ψ_{4h} şi $\Psi_{4'h}$ date de (5.14), respectiv (5.18), efectuînd operaţiile de derivare în raport cu timpul şi ţinînd cont că $\omega_2 = s\,\omega_1$ (s-alunecarea):

$$-\frac{3}{2}L_{11h}\,\omega_1 I_1\sqrt{2}\cos(\omega_1 t-\varphi_1)-R_3 I_3\sqrt{2}\,\sin(\omega_1 t-\varphi_3)-$$

$$-\frac{3}{2}L_{11h}\,\omega_1 I_3\sqrt{2}\cdot\cos(\omega_1 t-\varphi_3)-\frac{3}{2}\frac{1}{k_i}L_{11h}\,\omega_1 I_2\sqrt{2}\cos(\omega_1 t-\varphi_2)-$$

$$-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k_i}L_{11h}\,\omega_1 I_4\sqrt{2}\;\cos(\omega_1 t-\varphi_4) = 0$$

$$- \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k_i} L_{11h}\, \omega_1 \cdot s \cdot I_1 \sqrt{2} \cos(\omega_2 t - \varphi_1) - \frac{3}{2} \frac{1}{k_i} L_{11h} \cdot \omega_1 \cdot s \cdot I_3 \sqrt{2} \cos$$

$$(\omega_2 t - \varphi_3) - \frac{3}{2} \frac{1}{k_i^2} L_{11h} \cdot \omega_1 \cdot s \cdot I_2 \sqrt{2} \cos(\omega_2 t - \varphi_2) - R_4 I_4 \sqrt{2} \sin(\omega_2 t - \varphi_4) -$$

$$- \frac{3}{2} \frac{1}{k_i^2} L_{11h}\, \omega_1 \cdot s \cdot I_4 \sqrt{2} \cos(\omega_2 t - \varphi_4) = 0 \qquad (5.20)$$

Dezvoltînd funcțiile trigonometrice, introducînd notația $X_3 = \frac{3}{2} \omega_1 L_{11h}$ și împărțind relațiile (5.20) cu $\sqrt{2}$, acestea devin:

$$\sin \omega_1 t \left[X_3 I_1 \sin \varphi_1 + R_3 I_3 \cos \varphi_3 + X_3 I_3 \sin \varphi_3 + \frac{1}{k_i} X_3 I_2 \sin \varphi_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k_i} X_3 I_4 \sin \varphi_4 \right] + \cos \omega_1 t \left[X_3 I_1 \cos \varphi_1 - R_3 I_3 \sin \varphi_3 + X_3 I_3 \cos \varphi_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k_i} X_3 I_2 \cos \varphi_2 + \frac{1}{k_i} X_3 I_4 \cos \varphi_4 \right] = 0$$

$$\sin \omega_2 t \left[\frac{1}{k_i} s X_3 I_1 \sin \varphi_1 + \frac{1}{k_i} I_3 s X_3 \sin \varphi_3 + \frac{1}{k_i^2} X_3 s I_2 \sin \varphi_2 + \right.$$

$$\left. + R_4 I_4 \cos \varphi_4 + \frac{1}{k_i^2} X_3 s I_4 \sin \varphi_4 \right] + \cos \omega_2 t \left[\frac{1}{k_i} X_3 s I_1 \cos \varphi_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k_i} X_3 s I_3 \cos \varphi_3 + \frac{1}{k_i^2} s X_3 I_2 \cos \varphi_2 - R_4 I_4 \sin \varphi_4 + \frac{1}{k_i^2} X_3 s I_4 \cos \varphi_4 \right] = 0 \qquad (5.21)$$

Relațiile (5.21) trebuie satisfăcute în orice moment, ceea ce este posibil dacă sînt nuli factorii care înmulțesc pe $\sin \omega_1 t$, $\cos \omega_1 t$ șin $\omega_2 t$ și $\cos \omega_2 t$, adică:

$$X_3 I_1 \sin \varphi_1 + R_3 I_3 \cos \varphi_3 + X_3 I_3 \sin \varphi_3 + \frac{1}{k_i} X_3 I_2 \sin \varphi_2 + \frac{1}{k_i} X_3 I_4 \sin \varphi_4 = 0$$

$$X_3 I_1 \cos \varphi_1 - R_3 I_3 \sin \varphi_3 + X_3 I_3 \cos \varphi_3 + \frac{1}{k_i} X_3 I_2 \cos \varphi_2 + \frac{1}{k_i} X_3 I_4 \cos \varphi_4 = 0$$

$$\frac{1}{k_i} X_3 s I_1 \sin \varphi_1 + \frac{1}{k_i} X_3 s I_3 \sin \varphi_3 + \frac{1}{k_i^2} X_3 s I_2 \sin \varphi_2 + R_4 I_4 \cos \varphi_4 + \frac{1}{k_i^2} X_3 s I_4 \sin \varphi_4 = 0$$

$$\frac{1}{k_i}X_3 sI_1\cos\varphi_1+\frac{1}{k_i}X_3 sI_3\cos\varphi_3+\frac{1}{k_i^2}X_3 sI_2\cos\varphi_2-R_4I_4\sin\varphi_4+\frac{1}{k_i^2}X_3 sI_4\cos\varphi_4=0 \tag{5.22}$$

Sistemul de ecuaţii (5.22) conţine 4 ecuaţii cu 6 necunoscute: valorile efective ale curenţilor înfăşurărilor auxiliare statorice I_3, respectiv rotorice I_4, defazajele acestora φ_3, respectiv φ_4, precum şi valorile rezistenţelor R_3 şi R_4. Condiţia ca pierderile în fier să fie egalate de suma puterilor disipate în înfăşurările auxiliare de curenţii ce le străbat, conduc la:

$$pFe1 = 3R_3I_3^2$$
$$pFe2 = 3R_4I_4^2 \tag{5.23}$$

în care pFe1, respectiv pFe2 reprezintă pierderile totale în fierul statoric, respectiv rotoric al maşinii reale. Ataşînd cele două ecuaţii (5.23) sistemului (5.22) se obţine un sistem de 6 ecuaţii cu 6 necunoscute. Introducînd următoarele notaţii:

$I_4' = \frac{1}{k_i} I_4$ valoarea raportată la statorna curentului înfăşurării auxiliare rotorice I_4 (5.24)

$R_4' = k_i \cdot k_e \cdot R_4$ valoarea raportată la stator a rezistenţei înfăşurării auxiliare rotorice R_4 (5.25)

$$I_{01R}=I_1\cos\varphi_1+\frac{1}{k_i}I_2\cos\varphi_2$$
$$I_{01X}=I_1\sin\varphi_1+\frac{1}{k_i}I_2\sin\varphi_2 \tag{5.26}$$
$$I_{01}=\sqrt{I_{01R}^2+I_{01X}^2}$$

şi rezolvînd sistemul de ecuaţii (5.22), la care se adaugă (5.23) se obţine:

$$R_3=\frac{3}{2}\frac{X_3^2}{pFe1}\left[I_{01}^2+\sqrt{I_{01}^4-\frac{2}{3}\frac{1}{X_3}\left(pFe1+\frac{pFe2}{s}\right)^2}\right] \tag{5.27}$$

$$R'_4 = R_3 \frac{pFe1 \cdot s^2}{pFe2} \qquad (5.28)$$

$$I_3 = \frac{X_3 I_{o\alpha}}{\sqrt{R_3^2 + X_3^2\left(1+\frac{pFe2}{spFe1}\right)^2}} \qquad (5.29)$$

$$I'_4 = \frac{I_3}{s} \cdot \frac{pFe2}{pFe1} \qquad (5.30)$$

$$\varphi_3 = \varphi_4 = \mathrm{arctg}\ \frac{X_3 \cdot I_{o1X}(R'_4 + sR_3) - I_{o1R} R_3 R'_4}{I_{o1X} R_3 R'_4 - X_3(R'_4 + sR_3) I_{o1R}} \qquad (5.31)$$

Relaţiile (5.27) - (5.31) furnizează expresiile rezistenţelor înfăşurărilor auxiliare statorice şi rotorice, ale curenţilor ce parcurg aceste înfăşurări, precum şi ale defazajelor acestora, în funcţie de mărimile statorice şi rotorice ale maşinii reale (I_1, I_2) de viteza de rotaţie a acesteia - prin intermediul alunecării s - dar şi de mărimea pierderilor în fier statorice pFe1, respectiv rotorice pFe2.

Rezistenţele înfăşurărilor principale statorice şi rotorice R_1, R'_2, respectiv reactanţele de dispersie ale acestora (X_1, X'_2) sînt mărimi cunoscute pentru o maşină dată. Din ecuaţiile maşinii cu mărimi reduse, scrise în complex [24], se obţin expresiile curentului statoric $\underline{I}_1$ şi respectiv rotoric redus la stator $\underline{I}'_2$, în funcţie de parametrii maşinii $R_1, R'_2, X_1, X'_2, R_{1m}, X_m$, tensiunea de la bornele înfăşurării statorice $\underline{U}_1$ ($\underline{U}'_2=0$, maşina fiind cu rotor în scurtcircuit), precum şi de viteza de rotaţie a maşinii - prin alunecarea s:

$$\underline{I}_1 = \frac{(\underline{Z}_{1m} + \underline{Z}'_2)\,\underline{U}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_{1m} + \underline{Z}'_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1m})}$$

$$\underline{I}'_2 = \frac{\underline{Z}_{1m} \cdot \underline{U}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_{1m} + \underline{Z}'_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1m})} \qquad (5.32)$$

în care impedanţele $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2'$, $\underline{Z}_{1m}$ au expresiile cunoscute

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1; \quad \underline{Z}_2 = R_2 + jX_2; \quad \underline{Z}_{1m} = R_{1m} + jX_{1m}$$

5.3. Ecuaţiile şi parametrii maşinii de inducţie cu rotorul în scurtcircuit în teoria celor două axe

5.3.1. Parametrii maşinii electrice echivalente

Maşina de inducţie trifazată, cu înfăşurările principale şi auxiliare, repartizate sinusoidal în lungul pasului polar are:

- w_1 spire pe o fază a înfăşurării principale şi auxiliare, atît în stator, cît şi în rotor;
- rezistenţa înfăşurării principale statorice R_1, respectiv auxiliare statorice R_3;
- rezistenţa înfăşurării principale rotorice R_2', respectiv auxiliare rotorice R_4';
- reactanţa de dispersie a înfăşurării principale statorice X_1, respectiv rotorice X_2';
- acelaşi număr de perechi de poli ca şi maşina reală, respectiv p_1, corespunzător primei viteze de rotaţie a maşinii, şi p_2, corespunzător celei de a doua viteze de rotaţie a maşinii;
- tensiunea la bornele înfăşurării principale statorice U_1, respectiv 0 la bornele înfăşurărilor principale rotorice şi auxiliare statorice, respectiv rotorice;
- inductivitatea unei faze principale statorice, L_{11}, respectiv rotorice $L_{1'1'}$, acestea fiind date de relaţiile:

$$L_{11} = L_{11h} + L_{1\sigma} \quad ; \quad L_{1'1'} = L_{11h} + L_{2\sigma} \tag{5.33}$$

în care L_{11h} este inductivitatea principală a maşinii, $L_{1\sigma}$, respectiv $L_{2\sigma}$ sînt inductivităţile de dispersie.

- inductivitatea unei faze auxiliare statorice, respectiv auxiliare rotorice, egală cu inductivitatea principală a maşinii L_{11h}.

Inductivităţile de dispersie statorice, respectiv rotorice se obţin din reactanţele respective:

$L_{1\sigma}=X_1/2\pi f$; $L_{2\sigma}=X_2'/2\pi f$ în care f este frecvența (5.34)

Inductivitatea principală a unei faze [24] depinde de:
- numărul de spire al înfășurării w_1, dat de relația (5.3);
- lungimea axială a mașinii L_i;
- pasul polar τ ;
- numărul perechilor de poli p ;
- întrefierul mașinii δ și factorul lui Carter k_δ, k_s ;
- factorul de înclinare k_c ;

iar expresia ei este dată de:

$$L_{11h}=\frac{\mu_0}{4}\cdot\frac{w_1^2}{k_c^2}\cdot\frac{L_i\,\tau}{p\cdot\delta'} \quad \text{în care} \quad \delta'=\delta\cdot k_\delta\cdot k_c\ [\mathrm{m}] \qquad (5.35)$$
$$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ [\mathrm{H/m}]$$

pentru înfășurarea repartizată sinusoidal în lungul pasului polar.

Mașina de inducție trifazată, cu înfășurările principale și auxiliare repartizate sinusoidal în lungul pasului polar se echivalează în continuare, în mașina echivalentă din teoria celor două axe. Trebuie subliniat faptul că mașina fiind trifazată simetrică în stator și în rotor, are toate mărimile omopolare (curenți, tensiuni, fluxuri) egale cu zero și prin urmare, mașina echivalentă are în stator patru înfășurări repartizate sinusoidal, mobile față de stator fixe față de rotor, cu axele suprapuse două peste axa d și două peste axa q, cîte una în fiecare axă corespunzătoare înfășurărilor principale ale mașinii (respectiv notate cu indicii d și q) și cîte una în fiecare axă corespunzătoare înfășurărilor auxiliare ale mașinii (respectiv notate cu indicii a și b). De asemenea mașina echivalentă prezintă patru înfășurări în rotor, similare celor statorice, dar fixe față de rotor. Mărimile corespunzătoare înfășurărilor rotorice cu axele suprapuse peste axa d se notează cu indicele d', respectiv a' (după cum corespund înfășurărilor principale, respectiv celor auxiliare), iar cele corespunzătoare înfășurărilor rotorice cu axele suprapuse peste axa q, se notează în mod analog cu indicele q', respectiv b'. De asemenea, în acest caz, coeficienţii $\xi_\lambda, \xi_\varepsilon, \xi_{\lambda'}, \xi_{\varepsilon'}$, sînt:

$$\xi_\lambda = \xi_\varepsilon = \xi_{\lambda'} = \xi_{\varepsilon'} = \frac{2}{3} \tag{3.36}$$

Aplicînd relaţiile de transformare pentru rezistenţe (3.50) şi (3.51) obţinem rezistenţele maşinii echivalente:

$$R_d = R_q = \frac{2}{3} R_1 \quad ; \quad R_a = R_b = \frac{2}{3} R_3$$
$$R_{d'} = R_{q'} = \frac{2}{3} R_2' \quad ; \quad R_{a'} = R_{b'} = \frac{2}{3} R_4' \tag{5.37}$$

Inductivităţile principale ale maşinii echivalente (rel.3.56) sînt egale cu cele ale maşinii trifazate în stator şi în rotor, deoarece ea prezintă acelaşi număr de spire w_1 atît în stator, cît şi în rotor, număr de spire egal cu numărul de spire şi al înfăşurărilor maşinii echivalente. Deci:

$$L_{ddh} = L_{qqh} = L_{d'd'h} = L_{q'q'h} = L_{11h} \tag{5.40}$$

Se pot determina şi inductivităţile de dispersie ale maşinii echivalente (3.62),(3.63),(3.64):

$$L_{d\sigma} = L_{q\sigma} = \frac{2}{3} L_{1\sigma} = \frac{2}{3}\frac{X_1}{2\pi f} \quad ; \quad L_{a\sigma} = L_{b\sigma} = 0$$
$$L_{d'\sigma} = L_{q'\sigma} = \frac{2}{3} L_{2\sigma} = \frac{2}{3}\frac{X_2'}{2\pi f} \quad ; \quad L_{a'\sigma} = L_{b'\sigma} = 0 \tag{5.41}$$

(S-a considerat că nu există dispersie mutuală şi deci $L_{m\sigma}=0$, $L_{m'\sigma}=0$).

Prin urmare, inductivităţile totale ale maşinii echivalente sînt:

$L_{\lambda\lambda} = L_{\lambda\lambda h} + L_{\lambda\sigma}$ pentru $\lambda = d, q, d', q'$

$L_{\lambda\lambda} = L_{\lambda\lambda h}$ pentru $\lambda = a, b, a', b'$

$L_{\lambda\alpha} = L_{\lambda\lambda h}$ pentru $\lambda, \alpha = d, a, d', a'$, respectiv

$\lambda, \alpha = q, b, q', b'$, dar $\lambda \neq \alpha$

5.3.2. Ecuaţiile de transformare a mărimilor statorice şi rotorice

In cele ce urmează se utilizează denumirea de"transformare directă" pentru transformarea mărimilor din maşina de inducţie trifazată cu înfăşurări repartizate sinusoidal în lungul pasului polar, în maşina echivalentă, cu înfăşurări în axele d şi q, şi respectiv de "transformare inversă" în cazul obţinerii mărimilor din maşina trifazată, cînd se cunosc mărimile din maşina echivalentă.

Ecuaţiile de transformare se obţin din particularizarea ecuaţiilor prezentate în capitolul 3.2.1, respectiv 3.2.2.

a) ecuaţiile de transformare a curenţilor statorici:

- transformarea directă:

$$i_d = \sum_{\lambda=1}^{3} i_\lambda \cos(\vartheta - \vartheta_\lambda) \qquad i_a = -\sum_{\varepsilon=4}^{6} i_\varepsilon \cos(\vartheta - \vartheta_\varepsilon)$$

$$i_q = -\sum_{\lambda=1}^{3} i_\lambda \sin(\vartheta - \vartheta_\lambda) \qquad i_b = \sum_{\varepsilon=4}^{6} i_\varepsilon \sin(\vartheta - \vartheta_\varepsilon) \tag{5.43}$$

în care:

$$\vartheta_\lambda = \frac{(\lambda-1)2\pi}{3}, \quad i_\lambda = I_1\sqrt{2}\left[\sin\omega_1 t - \varphi_1 - \frac{(\lambda-1)2\pi}{3}\right] \text{pentru } \lambda=1,2,3,$$

$$\vartheta_\varepsilon = \frac{(\varepsilon-4)2\pi}{3}, \quad i_\varepsilon = I_3\sqrt{2}\,\sin\left[\omega_1 t - \varphi_3 - \frac{(\varepsilon-4)2\pi}{3}\right] \text{pentru } \varepsilon=4,5,6$$

$\vartheta = (\omega_1 - \omega_2)t$ S-a ales $\vartheta_0 = 0$

iar I_1, respectiv I_3 au expresiile date de (5.29), respectiv (5.32).

Inlocuind pe i_λ şi ϑ_λ în relaţiile (5.43), în urma unor calcule simple se obţin expresiile curenţilor statorici din maşina echivalentă:

$$i_d = \frac{3}{2}I_1\sqrt{2}\sin(\omega_1 t - \vartheta - \varphi_1) \qquad i_a = -\frac{3}{2}I_3\sqrt{2}\sin(\omega_1 t - \vartheta - \varphi_3)$$

$$i_q = -\frac{3}{2}I_1\sqrt{2}\cos(\omega_1 t - \vartheta - \varphi_1); \; i_b = \frac{3}{2}I_3\sqrt{2}\cos(\omega_1 t - \vartheta - \varphi_3) \tag{5.44}$$

- transformarea inversă:

$$i_\lambda = \frac{2}{3}\left[i_d\cos(\vartheta-\vartheta_\lambda)-i_q\sin(\vartheta-\vartheta_\lambda)\right] \quad \text{cu} \quad \vartheta_\lambda = \frac{(\lambda-1)2\pi}{3} \quad \text{pentru } \lambda=1,2,3$$

$$i_\varepsilon = -\frac{2}{3}\left[i_a\cos(\vartheta-\vartheta_\varepsilon)-i_b\sin(\vartheta-\vartheta_\varepsilon)\right] \text{cu} \quad \vartheta_\varepsilon = \frac{(\varepsilon-4)2\pi}{3} \quad \text{pentru } \varepsilon=4,5,6 \tag{5.45}$$

b) ecuaţiile de transformare a tensiunilor

- transformarea directă:

$$u_d = \sum_{\lambda=1}^{3}\frac{2}{3}u_\lambda\cos(\vartheta-\vartheta_\lambda)$$

$$u_q = -\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{2}{3}u_\lambda\sin(\vartheta-\vartheta_\lambda) \tag{5.46}$$

în care: $\vartheta_\lambda = \frac{(\lambda-1)2\pi}{3}$, $u_\lambda = U_1\sqrt{2}\sin\left[\omega_1 t - \frac{(\lambda-1)2\pi}{3}\right]$, $\lambda=1,2,3$

U_1 fiind tensiunea de fază la bornele înfăşurării statorice a maşinii reale.

Inlocuind pe u_λ şi ϑ_λ în relaţiile (5.46) se obţin expresiile tensiunilor la bornele înfăşurărilor maşinii echivalente:

$$u_d = U_1\sqrt{2}\sin(\omega_1 t-\vartheta)$$

$$u_q = -U_1\sqrt{2}\cos(\omega_1 t-\vartheta) \tag{5.47}$$

- transformarea inversă:

$$u_\lambda = u_d\cos(\vartheta-\vartheta_\lambda)-u_q\sin(\vartheta-\vartheta_\lambda) \qquad \vartheta_\lambda = \frac{(\lambda-1)2\pi}{3}, \quad \lambda=1,2,3 \tag{5.48}$$

Tensiunile la bornele înfăşurărilor auxiliare statorice, precum şi la bornele înfăşurărilor rotorice, atît principalele cît şi auxiliare, sînt toate nule, în ambele transformări.

c) ecuaţiile de transformare a fluxurilor statorice:

- transformarea directă:

$$\Psi_d = \frac{2}{3}\sum_{\lambda=1}^{3}\Psi_\lambda\cos(\vartheta-\vartheta_\lambda) \quad \text{cu} \quad \vartheta_\lambda = \frac{(\lambda-1)2\pi}{3} \qquad \lambda=1,2,3$$

$$\Psi_q = -\frac{2}{3}\sum_{\lambda=1}^{3}\Psi_\lambda\sin(\vartheta-\vartheta_\lambda)$$

$$\Psi_a = \frac{2}{3}\sum_{\varepsilon=4}^{6}\cos(\vartheta-\vartheta_\varepsilon) \quad \text{cu} \quad \vartheta_\varepsilon = \frac{(\varepsilon-4)2\pi}{3} \qquad \varepsilon=4,5,6 \tag{5.49}$$

$$\Psi_b = -\frac{2}{3}\sum_{\varepsilon=4}^{6}\Psi_\varepsilon \sin(\vartheta-\vartheta_\varepsilon)$$

- transformarea inversă:

$$\begin{aligned}
&\Psi_\lambda = \Psi_d\cos(\vartheta-\vartheta_\lambda) - \Psi_q\sin(\vartheta-\vartheta_\lambda) \qquad \vartheta_\lambda = \frac{(\lambda-1)2\pi}{3}, \quad \lambda=1,2,3\\
&\Psi_\varepsilon = \Psi_a\cos(\vartheta-\vartheta_\varepsilon) - \Psi_b\sin(\vartheta-\vartheta_\varepsilon) \qquad \vartheta_\varepsilon = \frac{(\varepsilon-4)2\pi}{3}, \quad \varepsilon=4,5,6
\end{aligned} \qquad (5.50)$$

d) <u>ecuaţiile de transformare a curenţilor rotorici:</u>

- transformarea directă:

$$\begin{aligned}
&i_{d'} = \sum_{\lambda'=1'}^{3'} i_{\lambda'}\cos\vartheta_{\lambda'}, \qquad \vartheta_{\lambda'} = \frac{(\lambda'-1)2\pi}{3} \quad \lambda'=1,2,3\\
&i_{q'} = \sum_{\lambda'=1'}^{3'} i_{\lambda'}\sin\vartheta_{\lambda'}, \qquad i_{\lambda'} = I_2'\sqrt{2}\sin\left[\omega_2 t-\varphi_2-\frac{(\lambda'-1)2\pi}{3}\right]\\
&i_{a'} = \sum_{\varepsilon'=4'}^{6'} i_{\varepsilon'}\cos\vartheta_{\varepsilon'}, \qquad \vartheta_{\varepsilon'} = \frac{(\varepsilon'-4)2\pi}{3} \quad \varepsilon'=4,5,6\\
&i_{b'} = \sum_{\varepsilon'=4'}^{6'} i_{\varepsilon'}\sin\vartheta_{\varepsilon'}, \qquad i_{\varepsilon'} = I_4'\sqrt{2}\sin\left[\omega_2 t-\varphi_4-\frac{(\varepsilon'-4)2\pi}{3}\right]
\end{aligned} \qquad (5.51)$$

Inlocuind în (5.51) curenţii $i_{\lambda'}$, $i_{\varepsilon'}$, $\vartheta_{\lambda'}$, $\vartheta_{\varepsilon'}$, se obţin curenţi rotorici din maşina echivalentă în forma (5.52):

$$\begin{aligned}
&i_{d'} = \frac{3}{2} I_2'\sqrt{2}\sin(\omega_2 t-\varphi_2) \qquad i_{q'} = -\frac{3}{2} I_2'\sqrt{2}\cos(\omega_2 t-\varphi_2)\\
&i_{a'} = -\frac{3}{2} I_4'\sqrt{2}\sin(\omega_2 t-\varphi_4) \qquad i_{b'} = \frac{3}{2} I_4'\sqrt{2}\cos(\omega_2 t-\varphi_4)
\end{aligned} \qquad (5.52)$$

- transformarea inversă:

$$\begin{aligned}
&i_{\lambda'} = \frac{2}{3}(i_{d'}\cos\vartheta_{\lambda'} + i_{q'}\sin\vartheta_{\lambda'}), \qquad \vartheta_{\lambda'} = \frac{(\lambda'-1)2\pi}{3} \quad \lambda'=1,2,3\\
&i_{\varepsilon'} = \frac{2}{3}(i_{a'}\cos\vartheta_{\varepsilon'} + i_{b'}\sin\vartheta_{\varepsilon'}), \qquad \vartheta_{\varepsilon'} = \frac{(\varepsilon'-4)2\pi}{3} \quad \varepsilon'=4,5,6
\end{aligned} \qquad (5.53)$$

e) <u>ecuaţiile de transformare a fluxurilor rotorice:</u>

- transformarea directă:

$$\begin{aligned}
&\Psi_{d'} = \frac{2}{3}\sum_{\lambda'=1'}^{3'}\cos\vartheta_{\lambda'}\Psi_{\lambda'}, \quad \Psi_{q'} = \frac{2}{3}\sum_{\lambda'=1'}^{3'}\Psi_{\lambda'}\sin\vartheta_{\lambda'}, \quad \vartheta_{\lambda'} = \frac{(\lambda'-1)2\pi}{3}, \quad \lambda'=1,2,3,\\
&\Psi_{a'} = \frac{2}{3}\sum_{\varepsilon'=4'}^{6'}\Psi_{\varepsilon'}\cos\vartheta_{\varepsilon'}, \quad \Psi_{b'} = \frac{2}{3}\sum_{\varepsilon'=4'}^{6'}\Psi_{\varepsilon'}\sin\vartheta_{\varepsilon'}, \quad \vartheta_{\varepsilon'} = \frac{(\varepsilon'-4)2\pi}{3}, \quad \varepsilon'=4,5,6
\end{aligned} \qquad (5.54)$$

- transformarea inversă:

$$\Psi_{\lambda'} = \Psi_d \cdot \cos \vartheta_{\lambda'} + \Psi_q \cdot \sin \vartheta_{\lambda'} \ , \ \vartheta_{\lambda'} = \frac{(\lambda'-1)2\pi}{3} \ , \ \lambda'=1,2,3$$

$$\Psi_{\varepsilon'} = \Psi_a \cdot \cos(\vartheta_{\varepsilon'}) + \Psi_b \cdot \sin(\vartheta_{\varepsilon'}) \ , \ \vartheta_{\varepsilon'} = \frac{(\varepsilon'-4)2\pi}{3} \ , \ \varepsilon'=4,5,6 \tag{5.55}$$

5.3.3. <u>Ecuațiile dintre tensiuni și curenți pentru mașina echivalentă</u>

Mașina echivalentă are inductivitățile principale ale înfășurărilor auxiliare:

$$L_{aa}=L_{bb}=L_{a'a'}=L_{b'b'}=L_{11h} \tag{5.56}$$

iar inductivitățile mutuale:

$$L_{ad}=L_{da}=L_{a'd}=L_{da'}=L_{d'd}=L_{dd'}=L_{d'a}=L_{ad'}=L_{11h}$$

$$L_{qb}=L_{bq}=L_{q'b}=L_{bq'}=L_{qb'}=L_{b'q}=L_{q'q}=L_{qq'}=L_{11h} \tag{5.57}$$

Prin urmare în acest caz fluxurile magnetice ale înfășurărilor auxiliare din axa d, Ψ_a și $\Psi_{a'}$, respectiv din axa q, Ψ_b și $\Psi_{b'}$ sînt egale:

$$\Psi_a=L_{da}i_d+L_{aa}i_a+L_{d'a}i_{d'}+L_{a'a}i_{a'}=L_{11h}(i_d+i_a+i_{d'}+i_{a'})$$

$$\Psi_{a'}=L_{da'}i_d+L_{aa'}i_a+L_{d'a'}i_{d'}+L_{a'a'}i_{a'}=L_{11h}(i_d+i_a+i_{d'}+i_{a'})$$

$$\Psi_b=L_{qb}i_q+L_{bb}i_b+L_{q'b}i_{q'}+L_{b'b}i_{b'}=L_{11h}(i_q+i_b+i_{q'}+i_{b'}) \tag{5.58}$$

$$\Psi_{b'}=L_{qb'}i_q+L_{bb'}i_b+L_{q'b'}i_{q'}+L_{b'b'}i_{b'}=L_{11h}(i_q+i_b+i_{q'}+i_{b'})$$

deci:

$$\Psi_a=\Psi_{a'} \text{ și } \Psi_b=\Psi_{b'}$$

Fluxurile magnetice ale înfășurărilor principale din axa d, respectiv q sînt:

$$\Psi_d=L_{d\sigma} \cdot i_d+\Psi_a \qquad \Psi_{d'}=L_{d'\sigma} i_{d'}+\Psi_a$$

$$\Psi_q=L_{q\sigma} i_q+\Psi_b \qquad \Psi_{q'}=L_{q'\sigma} i_{q'}+\Psi_b \tag{5.59}$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (3.66), căruia i se ataşează ecuaţia mişcării (3.67) cuprinde - în cazul maşinii de inducţie echivalente - doar opt ecuaţii diferenţiale, întrucît - aşa cum s-a precizat anterior - componentele omopolare ale curenţilor şi fluxurilor sînt nule. Deci sistemul de ecuaţii care descrie comportarea maşinii este:

$$u_d = -R_d i_d - \frac{d\psi_d}{dt} + \psi_q \frac{d\vartheta}{dt}\,; \qquad 0 = R_{d'} i_{d'} + \frac{d\psi_{d'}}{dt}$$

$$u_q = -R_q i_q - \frac{d\psi_q}{dt} + \psi_d \frac{d\vartheta}{dt}\,; \qquad 0 = R_{q'} i_{q'} + \frac{d\psi_{q'}}{dt}$$

$$0 = R_a i_a + \frac{d\psi_a}{dt} - \psi_b \frac{d\vartheta}{dt}\,; \qquad 0 = R_{a'} i_{a'} + \frac{d\psi_{a'}}{dt} \qquad (5.60)$$

$$0 = R_b i_b + \frac{d\ \ b}{dt} + \psi_a \frac{d\vartheta}{dt}\,; \qquad 0 = R_{b'} i_{b'} + \frac{d\psi_{b'}}{dt}$$

$$\frac{J}{p} \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M_{mec} + p(\psi_d i_q + \psi_a i_b - \psi_q i_d - \psi_b i_a)$$

în care fluxurile au expresiile date de (5.58) şi (5.59), iar rezistenţele înfăşurărilor maşinii echivalente au expresiile date de (5.37).

Ecuaţiile (5.58), (5.59) şi sistemul de ecuaţii diferenţiale (5.60) descriu comportarea maşinii echivalente în orice fel de regim. Rezolvarea sistemului de ecuaţii (5.60) nu se poate face în cazul general, ci numai în cazuri concrete, cînd se aplică metode numerice.

6. PROCESE TRANZITORII IN MASINA DE INDUCTIE CU DOUA VITEZE DE ROTATIE LA TRECEREA DE LA O VITEZA DE ROTATIE LA ALTA

6.1. Consideraţii generale

Ori de cîte ori are loc schimbarea unei mărimi, curent tensiune, frecvenţă, putere, etc., variaţia mărimii care se modifică de la valoarea iniţială la valoarea corespunzătoare noii situaţii, precum şi variaţia celorlalte mărimi care depind de aceasta, are loc într-un anumit interval de timp. Acest interval are o durată dependentă de parametrii maşinii, ai circuitelor exterioare şi poate fi de la fracţiuni de secundă pînă la mai multe secunde. In acest interval tranzitoriu, procesele au o desfăşurare în timp diferită de cea corespunzătoare regimurilor staţionare şi se numesc procese tranzitorii, iar regimul de funcţionare, regim tranzitoriu [24].

In regimurile tranzitorii, mărimile electrice - fluxuri şi curenţi nu mai variază sinusoidal în timp. Au loc componente periodice şi aperiodice care se amortizează cu diferite constante de timp.

Valorile componentelor tranzitorii depind de condiţiile iniţiale, care diferă de la o fază la alta. De aceea calculul pe fiecare fază este laborios şi complicat. Aceste dificultăţi se pot înlătura prin utilizarea ecuaţiilor maşinii stabilite în teoria celor două axe.

In maşinile electrice funcţionînd în instalaţii de producere a energiei electrice au loc procese tranzitorii ori de cîte ori se modifică brusc condiţiile de funcţionare, cum sînt: variaţia bruscă a impedanţelor consumatorilor pe care debitează sau variaţia bruscă a cuplului maşinii primare. In maşina de inducţie cu două viteze de rotaţie folosită în instalaţii aeroelectrice, au loc procese tranzitorii şi la trecerea de la o viteză de rotatie a maşinii electrice la cealaltă viteză de rotaţie, treceri impuse de modificarea puterii mecanice transmisă arborelui de către maşina primară, respectiv de modificarea vitezei vîntului. Aşa cum se precizează şi în capitolul 2.4 pentru viteze ale vîntului pînă la o anumită valoare a acestuia este avantajoasă funcţionarea maşinii electrice cu prima treaptă a vitezei de rotaţie iar pentru viteze ale vîntului mai mari este avantajoasă funcţionarea maşinii electrice cu a doua treaptă a vitezei de rotaţie.

Modificarea vitezei de rotaţie a maşinii electrice se obţine prin deconectarea înfăşurării statorice corespunzătoare unui număr de perechi de poli şi comutarea înfăşurării statorice corespunzătoare celui de al doilea număr de perechi de poli, conectarea putîndu-se face:

a) fără temporizare, deci se deconectează întrerupătorul C_1 (fig.6.1) şi se conectează întrerupătorul C_2 sau invers, se deconectează întrerupătorul C_2 şi se conectează întrerupătorul C_1,

b) cu temporizare, deci se deconectează întrerupătorul C_1, respectiv C_2 şi numai după un interval de timp se conectează C_2, respectiv C_1.

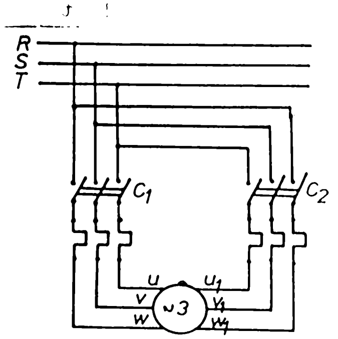


Fig.6.1

In cazul conectării cu temporizare procesele tranzitorii conduc la variaţii mai mici ale curenţilor, fluxurilor şi cuplului decît în cazul conectării fără temporizare.

Nu este însă posibilă o conectare instantanee deoarece întrerupătoarele au ele însăşi un timp de deschidere respectiv închidere a contactelor.

Prin urmare, la trecerea de la o viteză de rotaţie a maşinii electrice la cealaltă viteză de rotaţie distingem procese tranzitorii ce au loc la : a) deconectare ;
b) reconectare.

In cadrul proceselor tranzitorii de la deconectarea înfăşurării statorice corespunzătoare unui număr de perechi de poli se disting: un proces electromagnetic tranzitoriu, care provoacă supratensiuni şi scăderea cuplului electromagnetic, urmat de un proces tranzitoriu în care mărimile electrice (curenţi,fluxuri, tensiuni) se amortizează, ţinzînd spre valoarea zero, concomitent cu creşterea vitezei de rotaţie a instalaţiei, datorită prezenţei cuplului mecanic.

In mod analog, la conectarea înfăşurării statorice corespunzătoare celui de al doilea număr de perechi de poli, se distinge un proces electromagnetic tranzitoriu general, în care apar valori mari ale curenţilor şi respectiv ale cuplului electromagnetic, proces ce se amortizează cu o anumită constantă de timp, urmat de procesul tranzitoriu de accelerare sau decelerare a maşinii, după cum are loc trecerea de la viteza de rotaţie mică la viteza de rotaţie mare sau invers.

In ambele cazuri, cuplul mecanic nu este constant, deoarece el însuşi este funcţie de viteza de rotaţie. Se admite însă ipoteza că în timpul proceselor tranzitorii, viteza vîntului rămîne constantă.

De asemenea, în continuare se studiază procesele tranzitorii pe baza ecuaţiilor şi parametrilor maşinii de inducţie cu rotorul în scurtcircuit, prezentate în capitolul 5.3.

6.2. Ecuaţiile maşinii de inducţie cu rotorul în scurtcircuit exprimate funcţie numai de fluxurile magnetice cu considerarea pierderilor în fier.

Deoarece fluxurile înfăşurărilor auxiliare din axa d, respectiv q, sînt aceleaşi atît în stator, cît şi în rotor, adică:

$$\begin{aligned} \Psi_a &= \Psi_{a'} = L_{11h}(i_d + i_a + i_{d'} + i_{a'}) \\ \Psi_b &= \Psi_{b'} = L_{11h}(i_q + i_b + i_{q'} + i_{b'}) \end{aligned} \qquad (6.1)$$

rezultă că şi derivatele lor sînt egale, deci:

$$\frac{d\Psi_a}{dt} = \frac{d\Psi_{a'}}{dt} \quad ; \quad \frac{d\Psi_b}{dt} = \frac{d\Psi_{b'}}{dt} \qquad (6.2)$$

Prin urmare dacă considerăm necunoscute valorile fluxurilor magnetice, acestea fiind în număr de 6, obţinem o reducere a numărului de ecuaţii diferenţiale care trebuiesc rezolvate.

Fluxurile magnetice din maşina echivalentă sînt date de relaţiile (5.58), respectiv (5.59), relaţii din care se obţin şi expresiile curenţilor i_d, i_q, $i_{d'}$, $i_{q'}$:

$$\begin{aligned} i_d &= \frac{\Psi_d - \Psi_a}{L_{d\sigma}} \quad ; \quad i_q = \frac{\Psi_q - \Psi_b}{L_{q\sigma}} \\ i_{d'} &= \frac{\Psi_{d'} - \Psi_a}{L_{d'\sigma}} \quad ; \quad i_{q'} = \frac{\Psi_{q'} - \Psi_b}{L_{q'\sigma}} \end{aligned} \qquad (6.3)$$

Curenţii din înfăşurările auxiliare, respectiv $i_a, i_{a'}$, i_b, $i_{b'}$ se obţin din relaţiile (6.1), cărora li se ataşează ecuaţiile diferenţiale corespunzătoare, deci obţinem sistemul (6.4):

$$i_a+i_{a'}=\frac{\Psi_a}{L_{11h}}-(i_d+i_{d'}) \qquad i_b+i_{b'}=\frac{\Psi_b}{L_{11h}}-(i_q+i_{q'})$$

$$R_a i_a+\frac{d\Psi_a}{dt}-\Psi_b\frac{d\vartheta}{dt}=0 \qquad R_b i_b+\frac{d\Psi_b}{dt}+\Psi_a\frac{d\vartheta}{dt}=0 \tag{6.4}$$

$$R_{a'} i_{a'}+\frac{d\,\Psi_{a'}}{dt}=0 \qquad R_{b'} i_{b'}+\frac{d\Psi_b}{dt}=0$$

în care s-a folosit egalitatea derivatelor fluxurilor dată de relaţia (6.2).

Introducînd în (6.4) expresiile curenţilor $i_d, i_{d'}$, respectiv $i_q, i_{q'}$ date de (6.3) şi eliminînd expresiile derivatelor fluxurilor se obţin curenţii din înfăşurările auxiliare (6.5):

$$i_a=-\frac{R_{a'}}{R_a+R_{a'}}\cdot\frac{\Psi_d}{L_{d\sigma}}-\frac{R_{a'}}{R_a+R_{a'}}\cdot\frac{\Psi_{d'}}{L_{d'\sigma}}+\frac{R_{a'}}{R_a+R_{a'}}\left(\frac{1}{L_{11h}}+\frac{1}{L_{d\sigma}}+\frac{1}{L_{d'\sigma}}\right)\Psi_{a'}+\frac{\Psi_{b'}}{R_a+R_{a'}}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$i_{a'}=-\frac{R_a}{R_a+R_{a'}}\cdot\frac{\Psi_d}{L_{d\sigma}}-\frac{R_a}{R_a+R_{a'}}\cdot\frac{\Psi_{d'}}{L_{d'\sigma}}+\frac{R_a}{R_a+R_{a'}}\left(\frac{1}{L_{11h}}+\frac{1}{L_{d\sigma}}+\frac{1}{L_{d'\sigma}}\right)\Psi_{a'}-\frac{\Psi_{b'}}{R_a+R_{a'}}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$i_b=-\frac{R_{b'}}{R_b+R_{b'}}\cdot\frac{\Psi_q}{L_{q\sigma}}-\frac{R_{b'}}{R_b+R_{b'}}\cdot\frac{\Psi_{q'}}{L_{q'\sigma}}+\frac{R_{b'}}{R_b+R_{b'}}\left(\frac{1}{L_{11h}}+\frac{1}{L_{q\sigma}}+\frac{1}{L_{q'\sigma}}\right)\Psi_{b'}-\frac{\Psi_{a'}}{R_b+R_{b'}}\cdot\frac{d\vartheta}{dt} \tag{6.5}$$

$$i_{b'}=-\frac{R_b}{R_b+R_{b'}}\cdot\frac{\Psi_q}{L_{q\sigma}}-\frac{R_b}{R_b+R_{b'}}\cdot\frac{\Psi_{q'}}{L_{q'\sigma}}+\frac{R_b}{R_b+R_{b'}}\left(\frac{1}{L_{11h}}+\frac{1}{L_{q\sigma}}+\right.$$

$$+ \frac{1}{L_{q'}\sigma}) \psi_{b'} + \frac{\psi_{a'}}{R_b + R_{b'}} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$$

Inlocuind curenţii daţi de (6.3) şi (6.5) în sistemul de ecuaţii diferenţiale (6.60) şi separînd derivatele fluxurilor magnetice în raport cu timpul se obţine:

$$\frac{d\psi_d}{dt} = -\frac{R_d}{L_d}(\psi_d - \psi_a) + \psi_q \frac{d\vartheta}{dt} - u_d$$

$$\frac{d\psi_q}{dt} = -\frac{R_q}{L_q}(\psi_q - \psi_b) - \psi_d \frac{d\vartheta}{dt} - u_q$$

$$\frac{d\psi_a}{dt} = \frac{R_a R_{a'}}{R_a + R_{a'}} \cdot \frac{1}{L_{d\sigma}} \psi_d + \frac{R_a R_{a'}}{R_a + R_{a'}} \cdot \frac{1}{L_{d'}\sigma} \psi_{d'} - \frac{R_a R_{a'}}{R_a + R_{a'}} (\frac{1}{L_{11h}} + \frac{1}{L_{d\sigma}} + \frac{1}{L_{d'}\sigma}) \psi_a + \frac{R_{a'}}{R_a + R_{a'}} \cdot \psi_b \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\frac{d\psi_b}{dt} = \frac{R_b R_{b'}}{R_b + R_{b'}} \cdot \frac{1}{L_{q\sigma}} \psi_q + \frac{R_b R_{b'}}{R_b + R_{b'}} \cdot \frac{1}{L_{q'}\sigma} \psi_{q'} - \frac{R_b R_{b'}}{R_b + R_{b'}} (\frac{1}{L_{11h}} + \frac{1}{L_{q\sigma}} + \frac{1}{L_{q'}\sigma}) \psi_b - \frac{R_{b'}}{R_b + R_{b'}} \cdot \psi_a \frac{d\vartheta}{dt} \qquad (6.6)$$

$$\frac{d\psi_{d'}}{dt} = -\frac{R_{d'}}{L_{d'}\sigma}(\psi_{d'} - \psi_a)$$

$$\frac{d\psi_{q'}}{dt} = -\frac{R_{q'}}{L_{q'}\sigma}(\psi_{q'} - \psi_b)$$

Dacă se înlocuiesc curenţii i_λ (λ=a,b,d',q',a',b') daţi de (6.3) şi (6.5) în expresia cuplului electromagnetic (3.74), ţinînd cont de egalitatea parametrilor, respectiv de: $R_d=R_q$, $R_{d'}=R_{q'}$, $R_a=R_b$, $R_{a'}=R_{b'}$, $R_{a'}=R_{b'}$, $L_d=L_q$, $L_{d'}=L_{q'}$, se obţine cuplul electromagnetic funcţie numai de fluxuri:

$$M = -\frac{p}{L_d\sigma} \cdot \frac{R_a}{R_a+R_{a'}}(\psi_d\psi_{b'} - \psi_q\psi_{a'}) + \frac{p}{L_d\sigma} \cdot \frac{R_{a'}}{R_a+R_{a'}}(\psi_{d'}\psi_{b'} - \psi_{a'}\psi_{q'}) -$$

$$- \frac{p}{R_a+R_{a'}}(\psi_{a'}^2 + \psi_{b'}^2)\frac{d\vartheta}{dt} \qquad (6.7)$$

Cuplul activ dat de turbina eoliană M_{ta}, este funcţie de viteza de rotaţie a paletelor turbinei n_t(rel.2.4). Intre viteza de rotaţie n_t şi viteza de rotaţie a arborelui maşinii electrice n, respectiv derivata în raport cu timpul a unghiului există relaţia de legătură:

$$n = \frac{1}{2\pi p} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = k_T n_t \qquad (6.8)$$

în care p - reprezintă numărul perechilor de poli ai maşinii electrice, iar k_T - raportul de multiplicare a vitezei de rotaţie a paletelor turbinei.

Variabila λ dată de relaţia (2.2) se exprimă şi ea funcţie de raza paletelor turbinei R_0 viteza vîntului v, raportul de multiplicare k_T şi derivata în raport cu timpul a unghiului ϑ, $\frac{d\vartheta}{dt}$:

$$\lambda = \frac{R}{Vk_T} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \qquad (6.9)$$

Exprimarea coeficientului de moment C_M dat de relaţia (2.3) funcţie de parametrii instalaţiei aeroelectrice, viteza vîntului v, $\frac{d\vartheta}{dt}$ nu este de loc dificilă. In cazul turbinei eoliene considerate, pentru viteze de rotaţie ale maşinii electrice cuprinse între cele două viteze sincrone n_{II} şi n_{III}, pentru viteze ale vîntului v $\geqslant$ 9 m/s, variabila λ este cuprinsă între λ_{max1} λ_{max2} şi, prin urmare, coeficientul de moment are expresia:

$$C_M = A_1 - B_1\lambda + C_1\lambda^{\pm 1}$$

coeficienţii A_1, B_1, C_1, precum şi λ_{max1}, λ_{max2} fiind cunoscuţi.

Cu aceste precizări, expresia cuplului mecanic activ al turbinei, raportat la arborele maşinii electrice şi notat cu M_{ta} este:

$$M_{ta} = \frac{\rho S v^2 R A_1}{2k_T} + \frac{-\rho S v R^2 B_1}{2k_T^2} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\rho S v^3 C_1}{\frac{d\vartheta}{dt}} \qquad (6.10)$$

iar expresia cuplului mecanic, M_{mec}, definit de relaţia (2.19) este:

$$M_{mec} = -\frac{(1-\eta)P_n}{\frac{2\pi f}{p}} - \frac{P_{mec}}{\frac{2\pi f}{p}} + \frac{\rho S v^2 R A_1}{2k_T} + \frac{-\rho S v R^2 B_1}{2k_T^2} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\rho S v^3 C_1 p}{2} \frac{1}{\frac{d\vartheta}{dt}} \qquad (6.10')$$

Relaţiile (6.7) şi (6.10) furnizează expresiile cuplului electromagnetic, respectiv mecanic în funcţie de necunoscutele sistemului (5.60), adică: fluxurile magnetice ψ_λ (λ=d,q,a,b, d',q') şi derivata în raport cu timpul a unghiului ϑ, $\frac{d\vartheta}{dt}$. Inlocuind expresiile cuplului electromagnetic, M, respectiv mecanic, M_{mec}, în ecuaţia dinamicii sistemului şi separînd derivata de ordinul doi în raport cu timpul $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ se obţine:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{(1-\eta)P_n p^2}{2\pi f.J} - \frac{P_{mec}.p^2}{2\pi f.J} + \frac{\rho S v^2 R A_1 p}{2\,k_T J} - \frac{p}{L_d\sigma} \cdot \frac{R_a}{R_a+R_{a'}} \cdot \frac{p}{J} \cdot$$

$$\cdot(\psi_d \psi_{b'} - \psi_q \psi_{a'}) + \frac{p}{L_{d'}\sigma} \cdot \frac{R_{a'}}{R_a+R_{a'}} \cdot \frac{p}{J} (\psi_{d'} \psi_{b'} - \psi_{q'} \psi_{a'}) -$$

$$-\left[\frac{\rho S\; v R^2 B_1}{2J\; k_T^2} + \frac{p}{R_a+R_{a'}} \cdot \frac{p}{J}(\psi_{a'}^2 + \psi_{b'}^2)\right] \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\rho S v^3 p^2 C_1}{2J} \frac{1}{\frac{d\vartheta}{dt}}$$

(6.11)

Se introduc următoarele notaţii pentru coeficienţii necunoscutelor:

$$b_1 = -\frac{R_d}{L_d\sigma} = -\frac{R_q}{L_q\sigma} \quad ; \quad b_2 = -\frac{R_{d'}}{L_{d'}\sigma} = -\frac{R_{q'}}{L_{q'}\sigma}$$

$$b_3 = \frac{R_a R_{a'}}{R_a+R_{a'}} \cdot \frac{1}{L_d\sigma} = \frac{R_b R_{b'}}{R_b+R_{b'}} \cdot \frac{1}{L_q\sigma} \quad ; \quad b_4 = \frac{R_a R_{a'}}{R_a+R_{a'}} \cdot \frac{1}{L_{d'}\sigma} = \frac{R_b R_{b'}}{R_b+R_{b'}} \cdot \frac{1}{L_{q'}\sigma}$$

$$b_5 = -\frac{R_a R_{a'}}{R_a+R_{a'}} \left(\frac{1}{L_{11h}} + \frac{1}{L_d\sigma} + \frac{1}{L_{d'}\sigma}\right) = -\frac{R_b R_{b'}}{R_b+R_{b'}} \left(\frac{1}{L_{11h}} + \frac{1}{L_q\sigma} + \frac{1}{L_{q'}\sigma}\right)$$

$$b_6 = \frac{R_{a'}}{R_a+R_{a'}} = \frac{R_{b'}}{R_b+R_{b'}}$$

$$b_7 = -\frac{R_a R_{a'}}{R_a+R_{a'}}\left(\frac{1}{L_{11h}}+\frac{1}{L_{d'\sigma}}\right) = -\frac{R_b R_{b'}}{R_b+R_{b'}}\left(\frac{1}{L_{11h}}+\frac{1}{L_{q'\sigma}}\right)$$

$$b_8 = -\frac{(1-\eta)P_n p^2}{2\pi f J} - \frac{P_{mec} p^2}{2\pi f J} + \frac{\rho S\, v^2 R A_1 p}{2k_T J}$$

$$b_9 = -\frac{\rho S\, v\, R^2 B_1}{2J k_T^2} \quad ; \qquad b_{10} = \frac{\rho S\, v^3 p^2 C_1}{2J}$$

$$b_{11} = -\frac{(1-\eta)P_n \cdot p}{2\pi f} - \frac{P_{mec}\cdot p}{2\pi f} + \frac{\rho S\, v^2 R A_1}{2\, k_T} \qquad (6.12)$$

$$b_{12} = -\frac{\rho S\, v R^2 B_1}{2k_T^2} \quad ; \qquad b_{13} = \frac{\rho S\, v^3 C_1 p}{2}$$

$$b_{14} = \frac{p}{L_{d'\sigma}}\cdot\frac{R_{a'}}{R_a+R_{a'}}\cdot\frac{p}{J} \quad ; \qquad b_{15} = -\frac{p}{R_a+R_{a'}}\cdot\frac{p}{J}\ ;$$

$$b_{16} = -\frac{p}{L_{d\sigma}}\cdot\frac{R_a}{R_a+R_{a'}}\cdot\frac{p}{J}$$

De asemenea se notează ϑ cu y, se introduce substituţia: $Z = \frac{d\vartheta}{dt}$. Cu aceste precizări sistemul de ecuaţii diferenţiale (5.60) ce trebuie rezolvat este:

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = b_1(\Psi_d - \Psi_a) + \Psi_q \cdot Z - U_1\sqrt{2}\,\sin(\omega_1 t - y)$$

$$\frac{d\Psi_q}{dt} = b_1(\Psi_q - \Psi_b) - \Psi_d Z + U_1\sqrt{2}\,\cos(\omega_1 t - y) \qquad (6.13)$$

$$\frac{d\Psi_{d'}}{dt} = b_2(\Psi_{d'} - \Psi_a)$$

$$\frac{d\psi_{q'}}{dt} = b_2(\psi_{q'} - \psi_b)$$

$$\frac{d\psi_a}{dt} = b_3\psi_d + b_4\psi_{d'} + b_5\psi_a + b_6 Z\psi_b$$

$$\frac{d\psi_b}{dt} = b_3\psi_q + b_4\psi_{q'} + b_5\psi_a - b_6 Z\psi_a \qquad (6.13)$$

$$\frac{dZ}{dt} = b_8 + b_9 Z + \frac{b_{10}}{Z} + b_{14}(\psi_{d'}\psi_b - \psi_a\psi_{q'}) + b_{16}(\psi_d\psi_b - \psi_q\psi_a) +$$

$$b_{15}\cdot Z(\psi_a^2 + \psi_b^2)$$

$$\frac{dy}{dt} = Z$$

în care s-au înlocuit tensiunile u_d şi u_q cu expresiile date de relaţiile de transformare (5.47). De asemenea sistemul de ecuaţii diferenţiale descrie comportarea maşinii de inducţie considerate în diferite regimuri tranzitorii.

6.3. Deconectarea maşinii funcţionînd la o treaptă a vitezei de rotaţie

6.3.1. Ipoteze şi valori iniţiale

Inainte de deconectare - la momentul $t=0_-$ - maşina funcţionează în regim permanent (stabilizat) la o anumită viteză de rotaţie n_i, respectiv alunecare s_i, înfăşurările statorice avînd tensiunea la borne U_1, iar curenţii ce parcurg înfăşurările maşinii - mărimi notate cu indicele "i" se determină cu relaţiile (5.32) - I_{1i}, I'_{2i}, respectiv (5.29) - I_{3i}, I'_{4i}. Aplicînd relaţiile de transformare pentru curenţii statorici (5.43) şi pentru curenţii rotorici (5.51) se pot determina curenţii din înfăşurările principale şi auxiliare din axele d şi q ale maşinii la momentul $t=0_+$, respectiv $i_{\lambda i}$ (λ =d,q,a,b,d',q',a',b'). Trebuie subliniat faptul că maşina funcţionînd la o anumită viteză de rotaţie n_i, corespunzătoare unui număr de perechi de poli p_I toţi parametrii maşinii utilizaţi în calcule, sînt cei corespunzători maşinii cu un număr de perechi de poli p_r.

Cunoscînd curenţii din înfăşurările principale şi auxiliare ale maşinii, înainte de deconectare, precum şi parametrii acestuia - rezistenţe şi inductivităţi - se determină fluxurile magnetice din maşină înainte de deconectare, $\Psi_{\lambda i}$ (λ=d,q,a,b,d',q',a', b'), respectiv:

$$\Psi_{di}=L_{d\sigma}i_{di}+\Psi_{ai} \qquad \Psi_{qi}=L_{q\sigma}i_{qi}+\Psi_{bi}$$

$$\Psi_{d'i}=L_{d'\sigma}i_{d'i}+\Psi_{ai} \qquad \Psi_{q'i}=L_{q'\sigma}i_{q'i}+\Psi_{bi}$$

$$\Psi_{ai}=L_{11h}(i_{di}+i_{ai}+i_{d'i}+i_{a'i}) \tag{6.14}$$

$$\Psi_{bi}=L_{11h}(i_{qi}+i_{bi}+i_{q'i}+i_{b'i})$$

Mărimile din maşină din momentul imediat de după deconectare - moment notat în regimurile tranzitorii $t=0_+$ - le notăm cu indicii "0".

După deconectarea maşinii, dacă nu se consideră procesele tranzitorii rapide de deconectare, determinate de puterea reţelei şi a înfăşurărilor [45], fluxurile magnetice ce trec prin înfăşurările conectate în scurtcircuit, deci prin înfăşurările auxiliare statorice şi înfăşurările rotorice, nu se schimbă în primul moment, deci putem spune că fluxurile acestor înfăşurări se conservă, deci:

$$\Psi_{d'0}=\Psi_{d'i};\ \Psi_{q'0}=\Psi_{q'i};\ \Psi_{a0}=\Psi_{ai};\ \Psi_{b0}=\Psi_{bi} \tag{6.15}$$

O altă mărime care se conservă este viteza de rotaţie a maşinii şi deci:

$$Z_0 = Z_i = 2\pi p\cdot n_0 \tag{6.16}$$

în care: p - este numărul perechilor de poli ai maşinii care se deconectează;

$n_0=n_i$ - viteza de rotaţie a maşinii în momentul deconectării

Valoarea iniţială a unghiului ϑ, y_0 se poate alege arbitrar, deci inclusiv egală cu zero.

6.3.2. Ecuațiile mașinii la deconectare

La deconectare, curenții din înfășurările principale statorice i_d și i_q sînt nuli, deoarece acestea sînt deschise. Prin urmare, fluxurile magnetice vor fi:

$$\Psi_d = \Psi_a\ ;\quad \Psi_q = \Psi_b;\quad \Psi_{d'} = L_{d'\sigma} i_{d'} + \Psi_a;\quad \Psi_{q'} = L_{q'\sigma} i_{q'} + \Psi_b \tag{6.17}$$

$$\Psi_a = L_{11h}(i_a + i_{d'} + i_{a'})\ ;\quad \Psi_b = L_{11h}(i_b + i_{q'} + i_{b'})$$

iar sistemul de ecuații diferențiale devine:

$$\frac{d\Psi_{d'}}{dt} = b_2(\Psi_{d'} - \Psi_a) \qquad \frac{d\Psi_{q'}}{dt} = b_2(\Psi_{q'} - \Psi_a)$$

$$\frac{d\Psi_a}{dt} = b_4\Psi_{d'} + b_7\Psi_a + b_6 Z\,\Psi_b \qquad \frac{d\Psi_b}{dt} = b_4\Psi_{q'} + b_7\Psi_b - b_6 Z\,\Psi_a$$

$$\frac{dZ}{dt} = b_8 + b_9 Z + \frac{b_{10}}{Z} + b_{14}(\Psi_{d'}\Psi_b - \Psi_{q'}\Psi_a) + b_{15} Z(\Psi_a^2 + \Psi_b^2) \tag{6.18}$$

$$\frac{dy}{dt} = Z$$

Sistemul de ecuații diferențiale cuprinde 6 ecuații și 6 necunoscute; fluxurile magnetice $\Psi_{d'}$, $\Psi_{q'}$, Ψ_a, Ψ_b, derivata în raport cu timpul a unghiului ϑ, Z și respectiv unghiul ϑ, notat cu y. Rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale neliniare (6.18) se face numeric, aplicînd metoda Runge-Kutta-Gill.

Prin urmare, matricea $[X]$ a funcțiilor necunoscute este o matrice coloană cu 6 elemente: $\Psi_{d'}$, $\Psi_{q'}$, Ψ_a, Ψ_b, Z, y, iar matricea funcțiilor $f(t,[X])$ este și ea o matrice coloană cu șase elemente, expresiile lor fiind date de (6.20):

$$X=\begin{bmatrix}\Psi_{d\cdot}\\ \Psi_{q\cdot}\\ \Psi_a\\ \Psi_b\\ Z\\ y\end{bmatrix};\quad f(t,[X])=\begin{bmatrix}b_2(\Psi_{d\cdot}-\Psi_a)\\ b_2(\Psi_{q\cdot}-\Psi_b)\\ b_4\Psi_{d\cdot}+b_7\Psi_a+b_6Z\Psi_b\\ b_4\Psi_{q\cdot}+b_7\Psi_b-b_6Z\Psi_a\\ b_8+b_9Z+\frac{b_{10}}{Z}+b_{14}(\Psi_{d\cdot}\Psi_b-\Psi_{q\cdot}\Psi_a)+\\ +b_{15}Z(\Psi_a^2+\Psi_b^2)\\ Z\end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Valorile inițiale ale necunoscutelor sînt cuprinse în matricea $[X_0]$ iar valorile necunoscutelor corespunzătoare momentului t_k sînt date de matricea $[\bar{X}_k]$

$$[X_0]=\begin{bmatrix}\Psi_{d\cdot 0}\\ \Psi_{q\cdot 0}\\ \Psi_{a0}\\ \Psi_{b0}\\ Z0\\ y0\end{bmatrix};\quad [\bar{X}_k]=\begin{bmatrix}\Psi_{d\cdot k}\\ \Psi_{q\cdot k}\\ \Psi_{ak}\\ \Psi_{bk}\\ Zk\\ yk\end{bmatrix}$$

în care: $\Psi_{d\cdot 0}$, $\Psi_{q\cdot 0}$, Ψ_{a0}, Ψ_{b0}, Z_0 sînt date de relațiile (6.14), (6.15), (6.16), iar pentru y_0 s-a ales valoarea zero.

Se mai introduc următoarele notații:

$$[X_{1k}]=[\bar{X}_k]+\beta_0[K_1]\ ;\ [X_{2k}]=[\bar{X}_k]+\beta_1[K_1]+\gamma_1[K_2];$$
$$[X_{3k}]=[\bar{X}_k]+\beta_2[K_1]+\gamma_2[K_2]+\delta_2[K_3] \quad (6.22)$$

Cu acestea, matricele funcțiilor de aproximare $[K_i]$ $(i=1,2,3,4)$ sînt:

$$[K_1]=h\ f([\bar{X}_k]);\ [K_2]=h\ f([X_{1k}]),\ [K_3]=h\ f([X_{2k}])$$
$$[K_4]=h\ f([X_{3k}]) \quad (6.23)$$

iar valoarea aproximativă a soluției sistemului (6.18) la momentul $t_{k+1}=t_k+h$ vor fi elementele matricei $[\bar{X}_{k+1}]$, adică:

$$[\bar{X}_{k+1}] = [\bar{X}_k] + \sum_{i=1}^{4} d_i [K_i] \qquad (6.24)$$

valorile ponderilor d_i, respectiv a coeficienților β_0, β_1, β_2 γ_1, δ_2, δ_2 fiind cunoscute (capitolul 4.3.2).

In continuare, rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale nu mai poate fi făcută în caz general, ci numai concret, pentru mașina considerată.

Cunoscînd valorile fluxurilor magnetice, ale derivatei unghiului θ și ale unghiului θ la momentul $t=t_k$, respectiv $\psi_{d'k}$, $\psi_{q'k}$, ψ_{ak}, ψ_{bk}, z_k, y_k, se pot determina, cu ajutorul relațiilor de transformare inversă (5.50),(5.53),(5.55) fluxurile magnetice și curenții rotorici din înfășurările principale, respectiv din înfășurările auxiliare statorice și rotorice, din mașina reală, ca și valoarea cuplului electromagnetic dată de (6.7). Se remarcă faptul că, prezența înfășurărilor auxiliare, corespunzătoare pierderilor în fier, conduce la existența unui cuplu electromagnetic și atunci cînd înfășurările statorice principale ale mașinii sînt deschise.

In anexa 6.1 sînt prezentate toate elementele matricilor utilizate.

6.4. Reconectarea mașinii electrice, funcționînd a doua treaptă a vitezei de rotație

6.4.1. Ipoteze și valori inițiale

Se admit următoarele ipoteze:

a) Reconectarea mașinii electrice la rețeaua trifazată, funcționînd la a doua treaptă a vitezei de rotație, deci avînd numărul de perechi de poli p_{II}, se face după un interval de timp Δt, interval de timp egal cu timpul de deschidere și închidere a contactelor întrerupătoarelor de acționare.

b) In momentul reconectării, curenții prin înfășurările auxiliare și înfășurările principale statorice sînt zero, adică $i_{ao}=i_{do}=i_{qo}=i_{bo}=0$, iar fluxurile magnetice ale înfășurărilor principale rotorice, precum și curenții din aceste înfășurări au valori cunoscute, obținute din rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale la deconectare, pentru intervalul de timp considerat.

c) Energia magnetică corespunzătoare înfășurărilor principale rotorice din maşina care s-a deconectat, avînd numărul perechilor de poli p_I se regăseşte în înfăşurările principale rotorice din maşina care se conectează.

Fie $i_{\lambda' i}$ (λ'=1',2',3') curentul rotoric al fazei λ' la momentul $t=0_-$, fluxul magnetic corespunzător $\psi_{\lambda' i}$. Energia magnetică din rotor la momentul $t=0_-$ este

$$W_{mi} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda'=1'}^{3'} i_{\lambda' i} \psi_{\lambda' i} \qquad (6.25)$$

Energia magnetică W_{mi} de la momentul $t=0_-$ este egală cu energia magnetică W_{mo} a maşinii funcţionînd cu un număr de perechi de poli egal cu p_{II}, la momentul $t=0_+$. Valorile mărimilor electrice corespunzătoare momentului $t=0_+$ (imediat după reconectare), le notăm cu indicele "0" şi ele vor fi valori iniţiale la rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţial ce caracterizează regimul tranzitoriu. Energia magnetică W_{mo} este:

$$W_{mo} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda'=1'}^{3'} i_{\lambda' 0} \cdot \psi_{\lambda' 0} \qquad (6.26)$$

o ecuaţie cu trei necunoscute: fie curenţii $i_{\lambda' 0}$, fie fluxurile $\psi_{\lambda' 0}$, căreia i se ataşează relaţiile ce definesc fluxurile maşinii:

$$\begin{aligned}
\psi_{1'0} &= L_{11h}\left(i_{1'0} + i_{2'0}\cos\frac{2\pi}{3} + i_{3'0}\cos\frac{4\pi}{3}\right) + L_{2\sigma} i_{1'0} \\
\psi_{2'0} &= L_{11h}\left(i_{1'0}\cos\frac{4\pi}{3} + i_{2'0} + i_{3'0}\cos\frac{2\pi}{3}\right) + L_{2\sigma} i_{2'0} \qquad (6.27) \\
\psi_{3'0} &= L_{11h}\left(i_{1'0}\cos\frac{2\pi}{3} + i_{2'0}\cos\frac{4\pi}{3} + i_{3'0}\right) + L_{2\sigma} i_{3'0}
\end{aligned}$$

Se consideră că la momentul $t=0_+$, avem:

a) <u>Curentul pe o fază rotorică egal cu zero</u>, deci: $i_{1'0}=0$. Maşina fiind trifazată în rotor, are - în orice moment - suma valorilor momentane ale curenţilor egală cu zero şi deci se obţin: $i_{2'0}= -i_{3'0}=i_0'$. Inlocuind valorile în expresiile fluxurilor date de (6.27) se obţin:

$$\psi_{1'0}=0\ ;\ \psi_{2'0}=i_0'\left(\frac{3}{2} L_{11h}+L_{2\sigma}\right);\ \psi_{3'0}= -i_0'\left(\frac{3}{2} L_{11h}+L_{2\sigma}\right), \qquad (6.28)$$

în care: L_{11h}, respectiv $L_{2\sigma}$ reprezintă inductivitatea principală, respectiv inductivitatea de dispersie a unei faze rotorice din maşina considerată trifazată în stator şi în rotor, cu repartiţia sinusoidală a înfăşurărilor în lungul pasului polar avînd numărul de perechi de poli egal cu p_{II}, expresiile lor fiind date de (5.35), respectiv (5.34).

Deci energia magnetică a maşinii la momentul $t=0_0$ este:

$$w_{m0} = \frac{1}{2} i_0'^2 \left(\frac{3}{2} L_{11h} + \frac{k_X \cdot X_2'}{2\pi f}\right) \qquad (6.29)$$

în care k_X este factorul de modificare a reactanţei rotorice, corespunzător vitezei de rotaţie n_i, dar considerată în maşina care se conectează, expresia lui fiind dată de (2.12), iar f frecvenţa.

Energia magnetică din maşina care se conectează, w_{m0}, este aceeaşi cu energia magnetică din maşina care s-a deconectat, w_{mi}, şi deci se obţine valoarea curentului i_0':

$$i_0' = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\sum_{\lambda'=1'}^{3'} i_{\lambda' i} \Psi_{\lambda' i}}{\frac{3}{2} L_{11h} + \frac{k_X X_2'}{2\pi f}}} \qquad (6.30)$$

Cunoscînd valorile iniţiale ale curenţilor rotorici $i_{\lambda' 0}$ ($\lambda'=1', 2', 3'$) cu (6.28) se determină valorile iniţiale ale fluxurilor magnetice rotorice, $\Psi_{\lambda' 0}$, respectiv aplicînd relaţiile de transformare directă pentru mărimile rotorice (5.51), (5.54) se obţin valorile iniţiale ale curentului, respectiv fluxurilor magnetice corespunzătoare înfăşurărilor principale rotorice din axele d şi q, precum şi a fluxurilor magnetice ale înfăşurărilor auxiliare din aceleaşi axe:

$$i_{d'0} = 0 \; ; \quad i_{q'0} = i_0' \sqrt{3} \; ; \quad \Psi_{d'0} = 0 \; ; \quad \Psi_{q'0} = i_0' \sqrt{3}(L_{11h} + L_{q'\sigma})$$

$$\Psi_{a0} = 0 \; ; \; \Psi_{b0} = i_0' \sqrt{3} \cdot L_{11h} \qquad \text{cu } L_{q'\sigma} = \frac{2}{3} \cdot \frac{k_X X_2'}{2\pi f} \qquad (6.31)$$

Relaţiile (6.31) dau valorile iniţiale ale mărimilor rotorice corespunzătoare înfăşurărilor principale, şi ale mărimilor corespunzătoare înfăşurărilor auxiliare. Introducînd valorile iniţiale ale curenţilor statorici $i_{d0} = i_{q0} = 0$ în expresiile fluxurilor magnetice date de (5.59) şi ţinînd cont de

(6.31) se obţin:

$$\Psi_{d0} = 0 \; ; \quad \Psi_{q0} = \Psi_{b0} \qquad (6.32)$$

Deci relaţiile (6.31) şi (6.32) furnizează valorile iniţiale în cazul în care se consideră că în momentul conectării, curentul unei faze rotorice trece prin zero.

b) Curentul pe o fază rotorică este maxim, deci valoarea redusă la stator va fi: $i_{1'0} = i'_{max}$, iar curenţii celorlalte două faze rotorice vor fi: $i_{2'0} + i_{3'0} = -i'_{max}$. In acest caz, fluxurile rotorice sînt:

$$\Psi_{1'0} = i'_{max}\left(\frac{3}{2} L_{11h} + L_{2\sigma}\right); \quad \Psi_{2'0} = i_{2'0}\left(\frac{3}{2} L_{11h} + L_{2\sigma}\right)$$
$$\Psi_{3'0} = i_{3'0}\left(\frac{3}{2} L_{11h} + L_{2\sigma}\right) \qquad (6.33)$$

obţinîndu-se pentru i'_{max} expresia:

$$i'_{max} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{\sum_{\lambda=1'}^{3'} i_{\lambda' i} \Psi_{\lambda' i}}{\frac{3}{2} L_{11h} + \frac{k_x X'_2}{2\pi f}}} \qquad (6.34)$$

respectiv valorile iniţiale ale fluxurilor magnetice din maşina echivalentă:

$$\Psi_{a0} = \frac{3}{2} L_{11h} i'_{max} \; ; \; \Psi_{d'0} = \frac{3}{2}(L_{11h} + L_{d'\sigma}) i'_{max} ; \; \Psi_{d0} = \Psi_{a0}$$
$$\Psi_{b0} = 0 \; ; \; \Psi_{q0} = 0 ; \; \Psi_{q'0} = 0 \text{ cu } L_{d'\sigma} = \frac{2}{3} \cdot \frac{k_x \cdot X'_2}{2\pi f} \qquad (6.35)$$

Relaţiile (6.35) furnizează valorile iniţiale la reconectare, în cazul în care se consideră că, în momentul conectării, curentul unei faze rotorice este maxim.

Pentru a determina complet momentul reconectării este necesar să se precizeze cum sînt fluxurile rotorice faţă de cele statorice [46]. Dacă în momentul reconectării fluxul rotoric este în opoziţie de fază faţă de fluxul statoric de după reconectare, deci de la momentul $t=0_+$, atunci se vor obţine şocuri mari de curent şi de cuplu.

In cazul în care curentul unei faze rotorice este egal cu zero la momentul $t=0_+$, adică $i_{1O}=0$, fluxul fazei 1' rotorice este $\psi_{1'O}=0$, deci pentru ca fluxul statoric să fie în opoziţie de fază cu cel rotoric este necesar ca şi fluxul statoric să fie: $\psi_{1O}=0$.

Dar, în acest caz avem $\psi_{dO}=0$, $\psi_{qO}\neq 0$, deci aplicînd relaţia de transformare inversă pentru fluxul statoric (5.50), se obţine:

$$\psi_{1O} = -\psi_{qO} \sin \vartheta_o \tag{6.36}$$

deci pentru ca fluxul statoric să fie zero în momentul conectării este necesar ca $\vartheta_O=0$.

In cazul în care curentul unei faze rotorice este maxim la momentul $t=0_+$, adică $i_{1'O}=i'_{max}$, fluxul fazei 1' rotorice este $\psi_{1'O}=\psi_{1'max}$, deci pentru ca fluxul statoric să fie în opoziţie de fază cu cel rotoric - în mod analog - rezultă necesitatea ca $\vartheta_O=\pi$. Dacă însă $\vartheta_O=0$, atunci:

$\psi_{1'O} = \psi_{1'max}$, $\psi_{1O}= \psi_{1\,max}$, deci fluxurile sînt în fază.

In ambele cazuri, cînd $\vartheta_O = \frac{\pi}{2}$ rezultă că fluxurile statorice şi rotorice sînt în cuadratură. Prin urmare, sintetizînd condiţiile iniţiale de reconectare pentru fluxurile statorice şi rotorice se obţine:

$\vartheta_o=0$	$i_{1'}=0$	- fluxuri statorice în opoziţie de fază cu cele rotorice, ambele fiind nule la momentul iniţial
$\vartheta_o=\frac{\pi}{2}$	$i_{1'}=0$	- fluxurile statorice sînt în cuadratură cu cele rotorice, respectiv fluxul statoric trece prin valoarea maximă negativă, cel rotoric prin zero
$\vartheta_o=0$	$i_{1'}=i'_{max}$	- fluxurile statorice sînt în fază cu cele rotorice ambele avînd valoarea maximă pozitivă.
$\vartheta_o=\frac{\pi}{2}$	$i_{1'}=i'_{max}$	- fluxurile statorice sînt în cuadratură cu cele rotorice, fluxul statoric al unei faze fiind zero, cel rotoric avînd valoarea max. pozitivă
$\vartheta_o=\pi$	$i_{1'}=i'_{max}$	- fluxurile statorice sînt în opoziţie de fază cu cele rotorice, respectiv fluxul statoric trece prin valoarea maximă negativă, iar cel rotoric prin valoarea max. negativă.

(6.37)

Prin urmare, se poate rezolva sistemul de ecuaţii diferenţiale ce descrie comportarea maşinii în regim tranzitoriu, întrucît relaţiile (6.37) corelate cu (6.30)-(6.35) furnizează valorile iniţiale ale tuturor fluxurilor şi a unghiului ϑ în momentul conectării.

Valoarea iniţială a derivatei lui ϑ în raport cu timpul, este dată de:

$$Z_0 = 2\pi \, p_{II} n_i \tag{6.38}$$

în care: p_{II} este numărul perechilor de poli din maşina care se conectează la reţea, iar n_i este viteza de rotaţie a acesteia în momentul reconectării.

6.4.2. Ecuaţiile maşinii la reconectare

La reconectarea, parametrii maşinii sînt cei corespunzători numărului de perechi de poli p_{II}, iar sistemul de ecuaţii diferenţiale corespunzător este dat de relaţiile (6.13). Sistemul cuprinde 8 ecuaţii şi tot atîtea necunoscute: valorile fluxurilor Ψ_d, Ψ_q, Ψ_a, Ψ_b, $\Psi_{d'}$, $\Psi_{q'}$, ale lui $\frac{d\vartheta}{dt}$, Z şi unghiul ϑ notat y.

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (6.13) este neliniar, rezolvarea lui făcîndu-se numeric, prin aplicarea metodei Runge-Kutta-Gill.

Matricea [X] a funcţiilor necunoscute este o matrice -coloană cu 8 elemente, iar matricea funcţiilor f(t,[X]) este şi ea o matrice coloană cu 8 elemente, expresiile lor fiind:

$$X = \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \\ \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_{d'} \\ \Psi_{q'} \\ Z \\ y \end{bmatrix} \qquad f(t,[X]) = \begin{bmatrix} b_1(\Psi_d - \Psi_a) + \Psi_q Z - U_1\sqrt{2}\,\sin(\omega_1 t - y) \\ b_1(\Psi_q - \Psi_b) - \Psi_d Z + U_1\sqrt{2}\,\cos(\omega_1 t - y) \\ b_3\Psi_d + b_4\Psi_{d'} + b_5\Psi_a + b_6 Z\Psi_b \\ b_3\Psi_q + b_4\Psi_{q'} + b_5\Psi_b - b_6 Z\Psi_a \\ b_2(\Psi_{d'} - \Psi_a) \\ b_2(\Psi_{q'} - \Psi_b) \\ b_8 + b_9 Z + \frac{b_{10}}{Z} + b_{14}(\Psi_d \cdot \Psi_b - \Psi_q \cdot \Psi_a) + b_{16}(\Psi_d\Psi_b - \\ - \Psi_q\Psi_a) + b_{15} Z(\Psi_a^2 + \Psi_b^2) \\ Z \end{bmatrix} \tag{6.39}$$

Valorile inițiale ale necunoscutelor sînt elementele [ma]tricei $[X_o]$, iar valorile necunoscutelor la momentul t_k [fo]rmează matricea $[\bar{X}_k]$:

$$[X_o] = \begin{bmatrix} \Psi_{do} \\ \Psi_{qo} \\ \Psi_{ao} \\ \Psi_{bo} \\ \Psi_{d'o} \\ \Psi_{q'o} \\ z_o \\ y_o \end{bmatrix} \qquad [\bar{X}_k] = \begin{bmatrix} \Psi_{dk} \\ \Psi_{qk} \\ \Psi_{ak} \\ \Psi_{bk} \\ \Psi_{d'k} \\ \Psi_{q'k} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} \tag{6.40}$$

Se introduc următoarele notații:

$$[X_{1k}] = [\bar{X}_k] + \beta_o[K_1] \; ; \qquad [X_{2k}] = [\bar{X}_k] + \beta_1[K_1] + \gamma_1[K_2];$$

$$[X_{3k}] = [\bar{X}_k] + \beta_2[K_1] + \gamma_2[K_2] + \delta_2[K_3]; \; t_{1k} = t_k + \alpha_o h \; ; \tag{6.41}$$

$$t_{2k} = t_k + \alpha_1 h$$

$$t_{3k} = t_k + \alpha_2 h$$

[în] care $[X_{ik}]$ și $[K_i]$ $(i=1,2,3)$ sînt matrici coloană cu 8 [ele]mente.

Matricile funcțiilor de aproximare $[K_i]$ $(i=1,2,3,4)$ sînt:

$$[K_1] = h \; f(t_k, [\bar{X}_k]) \; ; \quad [K_2] = h \; f(t_{1k}, [X_{1k}])$$

$$[K_3] = h \; f(t_{2k}, [X_{2k}]) \; ; \quad [K_4] = h \; f(t_{3k}, [X_{3k}]) \tag{6.42}$$

[Iar] valoarea aproximativă a soluției sistemului (6.13), la mo[men]tul $t_{k+1} = t_k + h$ vor fi elementele matricei $[\bar{X}_{k+1}]$, adică:

$$[\bar{X}_{k+1}] = [\bar{X}_k] + \sum_{i=1}^{4} d_i \, [K_i] \tag{6.43}$$

valorile ponderilor d_i, respectiv a coeficienţilor α_0, α_1, α_2, β_0, β_1, β_2, δ_1, δ_2, δ_2 fiind cunoscute (capitolul 4.3.2).

In continuare, rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale nu mai poate fi făcută în caz general, ci numai concret, pentru maşina considerată.

Cunoscînd valorile fluxurilor magnetice din maşina echivalentă, unghiul ϑ şi derivata lui la momentul $t=t_k$, respectiv ψ_{dk}, ψ_{qk}, ψ_{ak}, ψ_{bk}, $\psi_{d'k}$, $\psi_{q'k}$, Z_k, y_k se pot determina:

- curenţii din maşina echivalentă i_λ (λ=d,q,a,b,d',q' a',b') cu relaţiile (6.3), respectiv (6.5);
- cuplul electromagnetic M (rel.6.7) şi cuplul mecanic M_{mec} (6.10);
- curenţii din înfăşurările principale, respectiv auxiliare ale maşinii reale: i_λ (λ =1,2,3,), i_ε (ε =4,5,6), respectiv $i_{\lambda'}$(λ'=1',2',3') $i_{\varepsilon'}$(ε'= 4',5',6') folosind relaţiile de transformare inversă (6.45) şi (6.52) ;
- fluxurile magnetice ale înfăşurărilor principale, respectiv auxiliare ale maşinii reale: ψ_λ (λ =1,2,3), ψ_ε (ε =4,5,6), respectiv $\psi_{\lambda'}$ (λ'=1',2',3'), $\psi_{\varepsilon'}$(ε'=4',5',6').
- viteza de rotaţie a maşinii:

$$n = \frac{Z_k}{2\pi p} \qquad (6.44)$$

Toate aceste mărimi fiind cunoscute, este cunoscută comportarea maşinii reale la momentul $t=t_k$.

La reconectare, se disting două procese tranzitorii:

- un proces tranzitoriu electromagnetic general, în care curenţii şi cuplul electromagnetic ating valori mari faţă de valorile nominale, care se amortizează în cîteva zeci de milisecunde, iar în timpul acestui proces viteza de rotaţie se modifică puţin.
- un proces tranzitoriu de accelerare (la trecerea de la viteza de rotaţie mică la viteza de rotaţie mare) sau de decelerare (la trecerea de la viteza de rotaţie mare la viteza de rotaţie mică). In timpul acestui proces tranzitoriu, curenţii sînt mărimi periodice, menţinîndu-se la valori de 2-4 ori mai mari decît valorile nominale, cuplul electromagnetic nu mai este o mărime oscilatorie, iar viteza de rotaţie creşte sau scade continuu. La sfîrşitul acestui proces tranzitoriu maşina atinge noua viteză

de rotaţie, corespunzătoare funcţionării - la viteza vîntului dată - cu numărul de perechi de poli p_{II}.

In anexa 6.2 sînt date toate elementele matricilor utilizate în acest capitol.

6.5. Ecuaţiile maşinii de inducţie cu rotorul în scurtcircuit exprimate funcţie numai de fluxurile magnetice - fără considerarea pierderilor în fier

Ecuaţiile maşinii de inducţie cu rotorul în scurtcircuit fără considerarea pierderilor în fier se obţin prin particularizarea ecuaţiilor sistemului (3.69), pentru cazul $u_{d'}=0$; $u_{q'}=0$, adică:

$$u_d = -R_d i_d - \frac{d\Psi_d}{dt} + \Psi_q \frac{d\vartheta}{dt} \qquad 0 = -R_{d'} i_{d'} - \frac{d\Psi_{d'}}{dt}$$

$$u_q = -R_q i_q - \frac{d\Psi_q}{dt} - \Psi_d \frac{d\vartheta}{dt} \qquad 0 = -R_{q'} i_{q'} - \frac{d\Psi_{q'}}{dt}$$

$$u_{o\lambda} = -R_{o\lambda} i_{o\lambda} - \frac{d\Psi_{o\lambda}}{dt} \qquad 0 = -R_{o\lambda'} i_{o\lambda'} - \frac{d\Psi_{o\lambda'}}{dt} \qquad (6.45)$$

$$\Psi_d = L_{dd} i_d + L_{d'd} i_{d'} \qquad \Psi_{d'} = L_{dd'} i_d + L_{d'd'} i_{d'}$$

$$\Psi_q = L_{qq} i_q + L_{q'q} i_{q'} \qquad \Psi_{q'} = L_{qq'} i_q + L_{q'q'} i_{q'}$$

$$M_{mec} + p(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) = \frac{J}{p} \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

Dacă maşina cu rotorul în scurtcircuit se echivalează cu o maşină trifazată în stator şi în rotor, avînd w_1 spire (rel. 5.3) atît în stator, cît şi în rotor şi parametrii daţi de relaţiile (5.9), respectiv rezistenţa rotorică R_2', reactanţa rotorică X_2', atunci componentele omopolare se anulează, iar inductivităţile maşinii echivalente în teoria celor două axe sînt:

$$L_{ddh} = L_{qqh} = L_{d'd'h} = L_{q'q'h} = L_{11h}$$

$$L_{d\sigma} = L_{q\sigma} = \frac{2}{3} \cdot \frac{X_1}{2\pi f} \quad ; \quad L_{d'\sigma} = L_{q'\sigma} = \frac{2}{3} \cdot \frac{X_2'}{2\pi f} \qquad (6.46)$$

$$L_{dd}=L_{qq}=L_{11h}+L_\sigma \quad ; \quad L_{d'd'}=L_{q'q'}=L_{11h}+L_\sigma' \tag{6.46}$$
$$L_{dd'}=L_{d'd}=L_{qq'}=L_{q'q}=L_{11h}$$

în care s-a notat, $L_\sigma=L_{d\sigma}=L_{q\sigma}$ şi respectiv $L_\sigma'=L_{d'\sigma}=L_{q'\sigma}$.

Exprimînd curenţii i_d, $i_{d'}$, i_q, $i_{q'}$ funcţie de fluxurile magnetice, ca şi în cazul considerării pierderilor în fier, se obţin expresiile (6.47):

$$\begin{aligned}
i_d &= \frac{L_{d'd'}}{L_{dd}L_{d'd'}-L_{11h}^2}\,\psi_d - \frac{L_{11h}}{L_{dd}L_{d'd'}-L_{11h}^2}\,\psi_{d'}\\
i_q &= \frac{L_{q'q'}}{L_{qq}L_{q'q'}-L_{11h}^2}\,\psi_q - \frac{L_{11h}}{L_{qq}L_{q'q'}-L_{11h}^2}\,\psi_{q'}\\
i_{d'} &= -\frac{L_{11h}}{L_{dd}L_{d'd'}-L_{11h}^2}\,\psi_d + \frac{L_{dd}}{L_{dd}L_{d'd'}-L_{11h}^2}\,\psi_{d'}\\
i_{q'} &= -\frac{L_{11h}}{L_{qq}L_{q'q'}-L_{11h}^2}\,\psi_q + \frac{L_{qq}}{L_{qq}L_{q'q'}-L_{11h}^2}\,\psi_{q'}
\end{aligned} \tag{6.47}$$

respectiv expresia cuplului electromagnetic:

$$M = -p.\frac{L_{11h}}{L_{dd}L_{d'd'}-L_{11h}^2}(\psi_d\psi_{q'}-\psi_q\psi_{d'}) \tag{6.48}$$

în care s-a ţinut cont de egalităţile inductivităţilor, respectiv de : $L_{dd}L_{d'd'}-L_{11h}^2=L_{qq}L_{q'q'}-L_{11h}^2$.

Introducînd curenţii daţi de (6.47) şi respectiv cuplul electromagnetic dat de (6.48), cuplul mecanic dat de (6.10) şi notînd:

$$b_{17} = -R_d \frac{L_{d'd'}}{L_{dd}L_{d'd'}-L_{1lh}^2} = -R_q \frac{L_{q'q'}}{L_{qq}L_{q'q'}-L_{1lh}^2}$$

$$b_{18} = R_d \frac{L_{1lh}}{L_{dd}L_{d'd'}-L_{1lh}^2} = R_q \frac{L_{1lh}}{L_{qq}L_{q'q'}-L_{1lh}^2}$$

$$b_{19} = -R_{d'} \frac{L_{dd}}{L_{dd}L_{d'd'}-L_{1lh}^2} = -R_{q'} \frac{L_{qq}}{L_{qq}L_{q'q'}-L_{1lh}^2}$$

$$b_{20} = R_{d'} \frac{L_{1lh}}{L_{dd}L_{d'd'}-L_{1lh}^2} = R_{q'} \frac{L_{1lh}}{L_{qq}L_{q'q'}-L_{1lh}^2} \qquad (6.49)$$

$$b_{21} = -\frac{p^2}{J} \cdot \frac{L_{1lh}}{L_{dd}L_{d'd'}-L_{1lh}^2}$$

se obține sistemul de ecuații diferențiale în care necunoscute sînt fluxurile magnetice Ψ_d, Ψ_q, $\Psi_{d'}$, $\Psi_{q'}$, respectiv unghiul (notat y) derivata acestuia în raport cu timpul $\frac{d\vartheta}{dt}$(notată Z):

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = b_{17}\Psi_d + b_{18}\Psi_{d'} + \Psi_q Z - U_1\sqrt{2}\sin(\omega_1 t - y)$$

$$\frac{d\Psi_q}{dt} = b_{17}\Psi_q + b_{18}\Psi_{q'} - \Psi_d Z + U_1\sqrt{2}\cos(\omega_1 t - y)$$

$$\frac{d\Psi_{d'}}{dt} = b_{20}\Psi_d + b_{19}\Psi_{d'} \qquad (6.50)$$

$$\frac{d\Psi_{q'}}{dt} = b_{20}\Psi_q + b_{19}\Psi_{q'}$$

$$\frac{dZ}{dt} = b_8 + b_9 Z + \frac{b_{10}}{Z} = b_{21}(\Psi_d\Psi_{q'} - \Psi_q\Psi_{d'})$$

$$\frac{dy}{dt} = Z.$$

In continuare, procesele tranzitorii se studiază în mod analog cu cele din cazul mașinii cu considerarea pierderilor în fier, determinîndu-se condițiile inițiale și apoi algoritmul

Runge-Kutta-Gill la deconectare şi respectiv la reconectare. În acest caz sistemele de ecuaţii conţin mai puţine ecuaţii; la deconectare 4 ecuaţii, iar la reconectare 6 ecuaţii, faţă de cazul considerării pierderilor în fier.

7. GENERATORUL ELECTRIC DE INDUCTIE CU ROTOR IN SCURT-CIRCUIT AVIND DOUA VITEZE DE ROTATIE IN INSTALATIE AEROELECTRICA DE 1000 kW

7.1. Parametrii electrici ai generatorului de inducţie

Generatorul electric de inducţie cu rotor în scurtcircuit în instalaţia aeroelectrică de 1000 kW are două trepte ale vitezei de rotaţie, 750 rpm şi 1000 rpm, corespunzătoare numărului de perechi de poli $p_1=4$, respectiv $p_2=3$ şi puterile nominale de 1750 kW, respectiv 1000 kW. Maşinii electrice i se cunosc caracteristicile tehnice (tabelul nr.7.1):

Tabelul nr.7.1

Nr. crt.	Simbol	Denumirea	U.M.	Valoare 1000 rot/min	Valoare 750 rot/min
0	1	2	3	4	5
1.	P_n	Puterea nominală	kW	1000	500
2.	U_1	Tensiunea nominală	V	6000	6000
3.	f	Frecvenţa reţelei	Hz	50	50
4.	I_{1n}	Curentul nominal statoric	A	127,77	69,261
5.	I_{2n}	Curentul nominal al fazei rotorice raportat la stator	A	113,99	57,85
6.	P_{Fej1}	Pierderile în fierul jugului statoric	W	8463,6	3717,1
7.	P_{FeZ1}	Pierderile în fierul dinţilor statorici	W	3483,4	2752,8
8.	P_{Cu1}	Pierderi în cupru stator	W	9130,1	11060,0
9.	P_{Cu2}	Pierderi în cupru rotor	W	7010,5	3703,2
10.	P_{mec}	Pierderi mecanice	W	8400	3000
11.	R_1	Rezistenţa înfăşurării statorice	Ω	0,18642	0,76856
12.	R_2'	Rezistenţa înfăşurării rotorice raportată la stator	Ω	0,17984	0,36885
13.	R_{1m}	Rezistenţa electrică a circuitului de magnetizare	Ω	2,5391	2,8766

0	1	2	3	4	5
14.	X_1	Reactanţa de dispersie a fazei statorice	Ω	4,4052	7,8236
15.	X_2'	Reactanţa de dispersie a fazei rotorice, raportată la stator	Ω	3,272	6,9886
16.	X_{1m}	Reactanţa circuitului de magnetizare	Ω	76,324	107,03
17.	s_n	Alunecarea nominală	–	$0,68662 \cdot 10^{-2}$	$0,74 \cdot 10^{-2}$
18.	M_n	Cuplul nominal	kN.m	9,75	6,3662
19.	GJ1	Masa jugului statoric	kg	1212,7	1212,7
20.	GJ2	Masa jugului rotoric	kg	581,7	581,7
21.	GZ1	Masa dinţilor statorici	kg	795,73	795,73
22.	GZ2	Masa dinţilor rototici	kg	280,21	280,21
23.	N1	Numărul de spire al unei faze statorice	–	120	192
24.	NC1	Numărul de crestături statorice	–	36	36
25.	NC2	Numărul de crestături rotorice	–	86	86

De asemenea se cunosc: forma şi dimensiunile crestăturilor statorice, întrefierul $\delta = 2$ mm, dimensiunile geometrice: diametrul rotorului D = 760,5 mm, lungimea axială a maşinii $L_i \doteq 656$ mm, constante de materiale.

Maşina electrică, avînd barele rotorice sub formă de "T" invers, prezintă un efect pelicular pronunţat, la valori ale alunecării mai mari decît alunecarea critică, valori pe care maşina le atinge în regimul tranzitoriu de trecere de la o viteză de rotaţie la cea de a doua. Determinarea parametrilor maşinii necesită calcularea factorilor de modificare a rezistenţei k_R, respectiv reactanţei k_X în prezenţa efectului pelicular. Factorii de refulare a curentului ξ_R şi ξ_X, care depind de geometria conductorului rotoric, de alunecarea s şi de constante de material, se determină ca funcţii de alunecare (rel.2.11, 2.12).

Inductivitatea principală L_{11h} determinată cu relaţia(5.35) are valoarea de 0,23984 H, pentru $p_1=4$, respectiv de 0,19362 H pentru $p_2 = 3$ perechi de poli.

Calculul rezistenţei electrice a înfăşurărilor auxiliare statorice R_3 (rel.5.27), respectiv rotorice reduse la stator R_4' (rel.5.28), ca şi a valorii curenţilor ce parcurg aceste înfăşurări, I_3 (rel.5.29), respectiv I_4' (rel.5.30), necesită cunoaşterea pierderilor în fier atît în stator, p_{Fe1}, cît şi în rotor p_{Fe2}. Pierderile în fier fiind echivalente cu pierderi numai prin curenţi turbionari, depind de inducţia magnetică B, de frecvenţa curenţilor din stator f_1, respectiv din rotor f_2, de constante de material, precum şi de masa fierului (rel.7.1) [28]:

$$p_{Fej} = \sigma_w (\Delta f B_j)^2 k_{jw} G_j \tag{7.1}$$

în care: - indicele j se referă la mărimile corespunzătoare jugului magnetic;

- σ_w - constanta de material ;
- k_{jw} - coeficient corespunzător repartiţiei neuniforme a inducţiei magnetice în jug, respectiv corespunzător curenţilor care se închid transversal pe tole prin bornele cu defecte în izolaţia tolelor;
- Δ - grosimea tolei din care este executat miezul magnetic ;
- B_j - inducţia magnetică în jug ;
- G_j - masa jugului.

In mod analog, pierderile în dinţi, prin curenţi turbionari sînt:

$$p_{Fez} = \sigma_w (\Delta f B_z)^2 . G_z \tag{7.2}$$

Deoarece maşina echivalentă are aceeaşi inducţie magnetică în întrefier B_δ ca şi maşina reală, se exprimă inducţia magnetică în dinţii statorici B_{z1}, respectiv rotorici B_{z2} funcţie de B_δ, obţinîndu-se:

$$\frac{B_{z1}}{B_{z2}} = \frac{\tau_{C1}}{\tau_{C2}} \cdot \frac{b_{z1m}}{b_{z2m}} \tag{7.3}$$

în care: - τ_{C1}, τ_{C2} reprezintă pasul crestăturii statorice, respectiv rotorice ;

- b_{z1m}, b_{z2m} reprezintă lățimea medie a dintelui statoric, respectiv rotoric;

Deci, cunoscînd pierderile în dinții statorici p_{Fez1}, se pot determina pierderile în dinții rotorici:

$$p_{Fez2} = p_{Fez1} \cdot \left(\frac{B_{z2}}{B_{z1}} \cdot s\right)^2 \cdot \frac{G_{z2}}{G_{z1}} \tag{7.4}$$

In mod analog, se determină pierderile în jugul rotoric p_{Fej2}, cînd se cunosc pierderile în jugul statoric p_{Fej1} (rel.7.5)

$$p_{Fej2} = p_{Fej1} \cdot \left(\frac{B_{j2}}{B_{j1}} \cdot s\right)^2 \cdot \frac{G_{j2}}{G_{j1}} \tag{7.5}$$

Pierderile totale în fierul statoric p_{Fe1}, respectiv rotoric p_{Fe2} sînt:

$$\begin{aligned} p_{Fe1} &= p_{Fej1} + p_{Fez1} \\ p_{Fe2} &= p_{Fej2} + p_{Fez2} \end{aligned} \tag{7.6}$$

Avînd determinante pierderile în fier atît în stator, cît și în rotor, se determină rezistențele electrice ale înfășurărilor auxiliare R_3, respectiv R_4' (rel.5.27, respectiv 5.28), care în cazul mașinii electrice considerate au valorile:

R_3 = 3652,183 Ω , R_4' = 5715,32 Ω pentru p=3

R_3 = 5195,684 Ω , R_4' = 8466,186 Ω pentru p=4

Dacă se cunosc parametrii înfășurărilor principale și auxiliare ale mașinii reale, cu ajutorul relațiilor (5.37), respectiv (5.41) se determină rezistențele R_λ (λ = d,q,a,b,d',q',a',b') respectiv inductivitățile $L_{\lambda\alpha}$ (λ,α = d,q,a,b,d',q',a',b') ale mașinii echivalente și prin urmare, se pot determina numeric coeficienții b_j (j=1,...,16) - dați de rel.(6.12) ai sistemului de ecuații diferențiale ce descrie comportarea mașinii la deconectare (6.18) respectiv la reconectare (6.13).

7.2. Trecerea de la viteza de rotaţie n_I la viteza de rotaţie n_{II}.

In cazul instalaţiei electrice de 1000 kW, pentru viteze ale vîntului mai mari decît 9 m/s, este avantajos - din punct de vedere al puterii obtenabile la arborele generatorului electric - ca maşina să funcţioneze cu a doua treaptă a vitezei de rotaţie, corespunzătoare numărului de perechi de poli p=3, iar pentru viteze ale vîntului v $\leq$ 9m/s este avantajos să se funcţioneze cu prima treaptă a vitezei de rotaţie, corespunzătoare numărului de perechi de poli p=4.

Se consideră că trecerea de la viteza de rotaţie mică la viteza de rotaţie mare se face la viteza vîntului v=9,5m/s, iar trecerea de la viteza de rotaţie mare la viteza de rotaţie mică se face la viteza vîntului v=9 m/s.

Trecerea de la viteza de rotaţie n_I la viteza de rotaţie n_{II} se face în două etape, prin:

- deconectarea maşinii, funcţionînd cu numărul de perechi de poli p_I;
- reconectarea maşinii, funcţionînd cu numărul de perechi de poli p_{II},

fiecărei etape, fiindu-i caracteristice anumite fenomene tranzitorii.

7.2.1. Fenomene tranzitorii la deconectare - cu considerarea pierderilor în fier

Maşina funcţionează la o anumită viteză de rotaţie n_I, viteză de rotaţie determinată de egalitatea cuplului activ dat de turbina eoliană cu suma cuplurilor rezistente, inclusiv cuplul electromagnetic al maşinii electrice. Deci, maşina electrică are numărul de perechi de poli p_I şi i se cunosc rezistenţele electrice, inductivităţile şi curenţii ce străbat înfăşurările statorice, respectiv rotorice ale maşinii. Valorile curenţilor se determină cu relaţiile (5.32) I_1, I_2' şi (5.29), (5.30), I_3, I_4'.

Relaţiile de transformare (5.37) şi (5.41) determină rezistenţele şi inductivităţile maşinii echivalente, iar cu relaţiile de transformare directă (5.43) şi (5.52) se obţin curenţii din maşina echivalentă, curenţi notaţi cu indicele "i" şi care corespund momentului t=0_ al regimului tranzitoriu.

Fluxurile magnetice din maşina echivalentă, corespunzătoare momentului t=0_ şi notate $\Psi_{\lambda i}$ (λ=d,q,a,b,d',q',a',b') sînt astfel cunoscute (rel.6.14), iar valorile lor iniţiale - notate cu indicele "0", se obţin cu ajutorul relaţiilor (6.14).

Valoarea iniţială a derivatei unghiului ϑ în raport cu timpul $\frac{d\vartheta}{dt}$, notată cu Z_0, este dată de relaţia (6.16) în care $n_0=n_I$. Se alege ca moment al deconectării, momentul în care curentul ce parcurge înfăşurarea fazei 1 statorice trece prin zero, iar valoarea iniţială a lui ϑ, notată y_0, se alege egală cu zero.

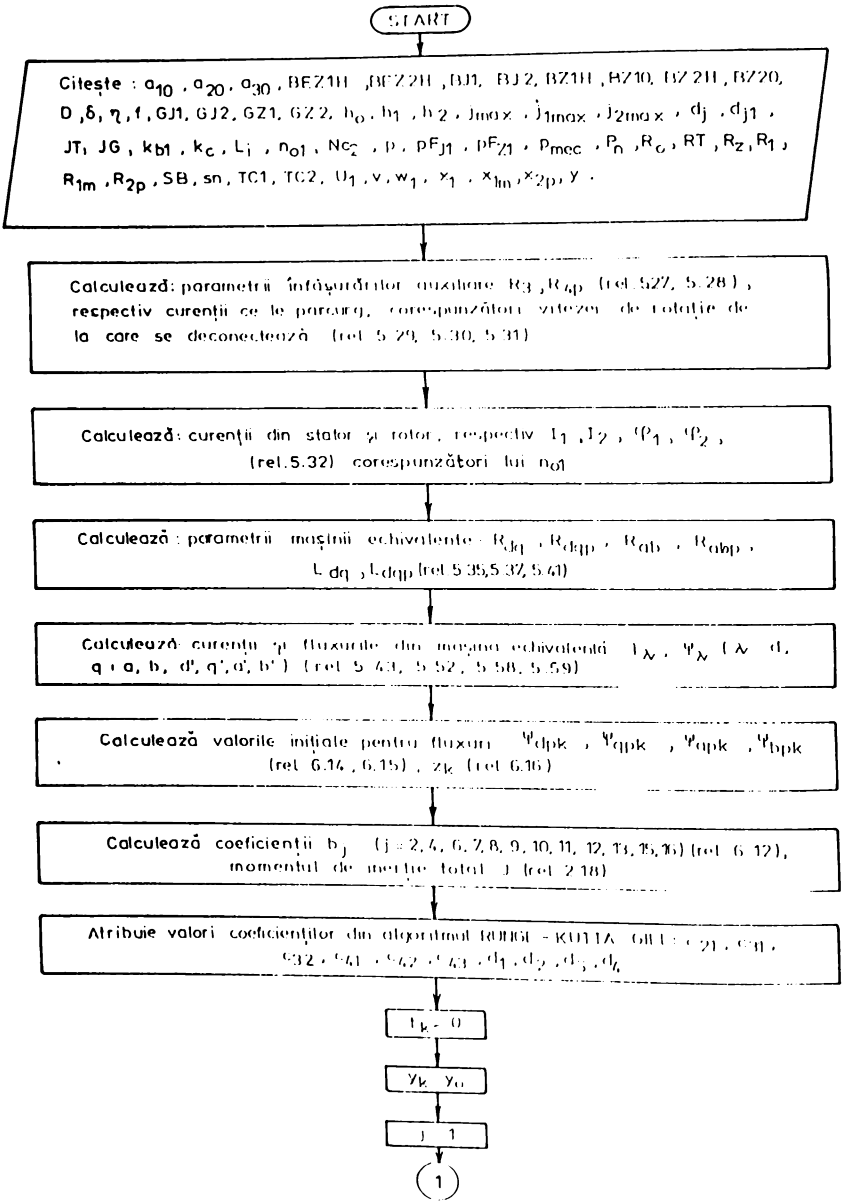
Se determină, cu ajutorul relaţiilor (6.17), coeficienţii b_j (j=1,...,16) ai sistemului de ecuaţii diferenţiale (6.18).

Rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale (6.18) se face cu ajutorul metodei numerice Runge-Kutta-Gill de ordinul 4. Programul de calcul, întocmit în limbajul BASIC al unui calculator personal SINCLAIR QL-128 k, are ordinograma prezentată în fig.7.1, notaţiile folosite fiind date în anexa nr.7.1.

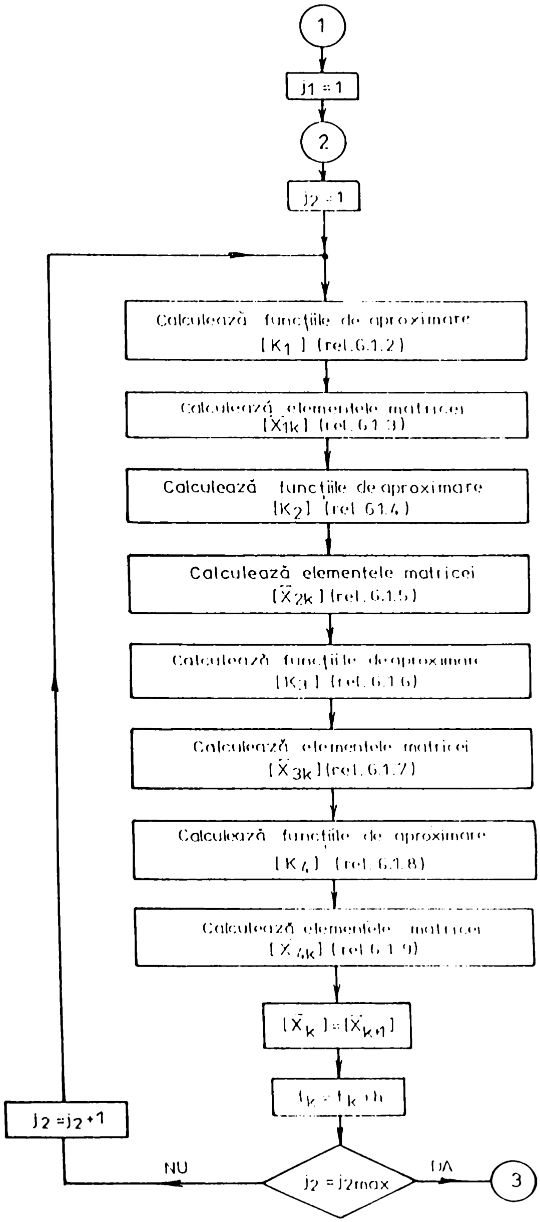
Se foloseşte metoda Runge-Kutta-Gill cu pas variabil, pasul iniţial fiind de 10^{-8} secunde, el fiind dublat pînă la valoarea h_0 = $5,12.10^{-6}$ secunde, apoi calculele se efectuează cu pasul $h=10^{-5}$ secunde. Se determină valorile curenţilor rotorici ai înfăşurărilor principale i_1, i_2, i_3, ale curenţilor din înfăşurările auxiliare $i_4, i_5, i_6, i_{4'}, i_{5'}, i_{6'}$, ale fluxurilor magnetice statorice Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 şi ale fluxurilor rotorice $\Psi_{1'}, \Psi_{2'}, \Psi_{3'}$, toate din maşina reală, în diferite momente de timp t_k. Se determină de asemenea, cuplul electromagnetic M, cuplul mecanic M_{mec} şi viteza de rotaţie n_k.

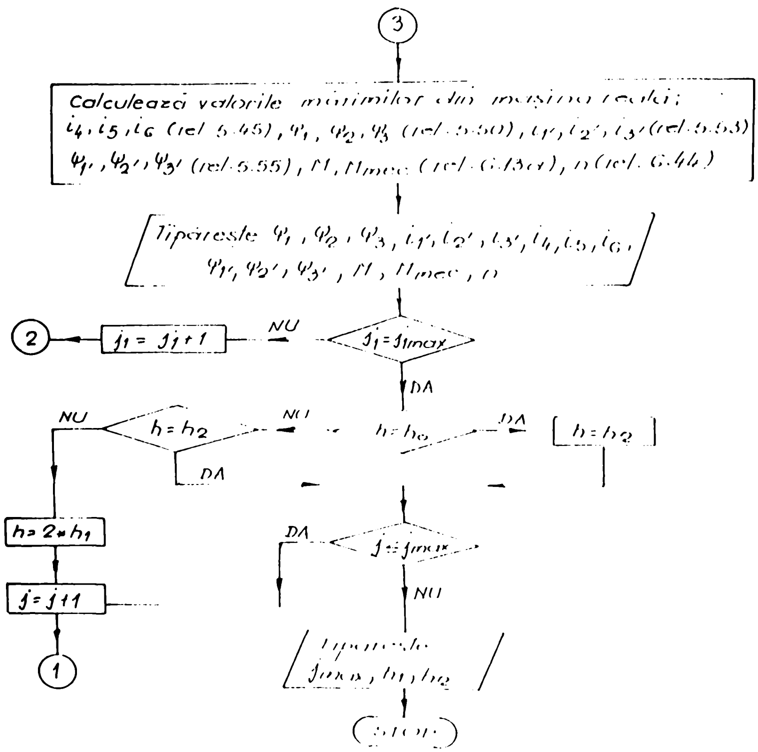
La deconectare, are loc un proces tranzitoriu electromagnetic în care cuplul electromagnetic scade de la valoarea lui corespunzătoare momentului t=0_, la aproximativ 5,6% în cazul deconectării de la viteza de rotaţie mică, deci p=4, respectiv 5,14% în cazul deconectării de la viteza de rotaţie mare, deci p=3 (fig.7.2).

(1)


START
Citește : a_{10}, a_{20}, a_{30}, BEZ1H, BEZ2H, BJ1, BJ2, BZ1H, BZ10, BZ2H, BZ20, D, δ, η, f, GJ1, GJ2, GZ1, GZ2, h_o, h_1, h_2, j_{max}, j_{1max}, j_{2max}, d_j, d_{j1}, JT, JG, k_{b1}, k_c, L_i, n_{o1}, Nc_2, p, pF_{J1}, pF_{Z1}, P_{mec}, P_n, R_c, RT, R_z, R_1, R_{1m}, R_{2p}, SB, sn, TC1, TC2, U_1, v, w_1, x_1, x_{1m}, x_{2p}, y.
Calculează: parametrii înfășurărilor auxiliare R_3, R_{4p} (rel. 5.27, 5.28), respectiv curenții ce le parcurg, corespunzători vitezei de rotație de la care se deconectează (rel. 5.29, 5.30, 5.31)
Calculează: curenții din stator și rotor, respectiv I_1, I_2, φ_1, φ_2, (rel. 5.32) corespunzători lui n_{o1}
Calculează: parametrii mașinii echivalente R_{dq}, R_{dqp}, R_{ab}, R_{abp}, L_{dq}, L_{dqp} (rel. 5.35, 5.37, 5.41)
Calculează curenții și fluxurile din mașina echivalentă I_λ, Ψ_λ (λ = d, q, a, b, d', q', a', b') (rel. 5.43, 5.52, 5.58, 5.59)
Calculează valorile inițiale pentru fluxuri Ψ_{dpk}, Ψ_{qpk}, Ψ_{apk}, Ψ_{bpk} (rel. 6.14, 6.15), z_k (rel. 6.16)
Calculează coeficienții b_j (j = 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16) (rel. 6.12), momentul de inerție total J (rel. 2.18)
Atribuie valori coeficienților din algoritmul RUNGE - KUTTA GILL: c_{21}, c_{31}, c_{32}, c_{41}, c_{42}, c_{43}, d_1, d_2, d_3, d_4
$t_k = 0$
$y_k = y_o$
j = 1
1

(2)


1
j1 = 1
2
j2 = 1
Calculează funcțiile de aproximare
[K1] (rel.6.1.2)
Calculează elementele matricei
[X1k] (rel.6.1.3)
Calculează funcțiile de aproximare
[K2] (rel.6.1.4)
Calculează elementele matricei
[X2k] (rel.6.1.5)
Calculează funcțiile de aproximare
[K3] (rel.6.1.6)
Calculează elementele matricei
[X3k] (rel.6.1.7)
Calculează funcțiile de aproximare
[K4] (rel.6.1.8)
Calculează elementele matricei
[X4k] (rel.6.1.9)
[Xk] = [Xk+1]
tk = tk + h
j2 = j2 + 1
NU
j2 = j2max
DA
3



Fi. .7.1

Durata acestui proces tranzitoriu este de ordinul microsecundelor, respectiv maxim 30 μsec şi în timpul lui, viteza de rotaţie a maşinii este constantă. De asemenea, în timpul acestui proces tranzitoriu, deoarece s-a presupus conservarea fluxurilor din înfăşurările scurtcircuitate, respectiv înfăşurările rotorice şi toate înfăşurările auxiliare, curenţii din înfăşurările auxiliare (fig.7.3) cresc de aproximativ 22 ori, respectiv 31 ori, în cazul decoenctării de la p=3, respectiv p=4, amortizîndu-se în cîteva microsecunde. Acest fenomen s-ar putea explica prin faptul că în-

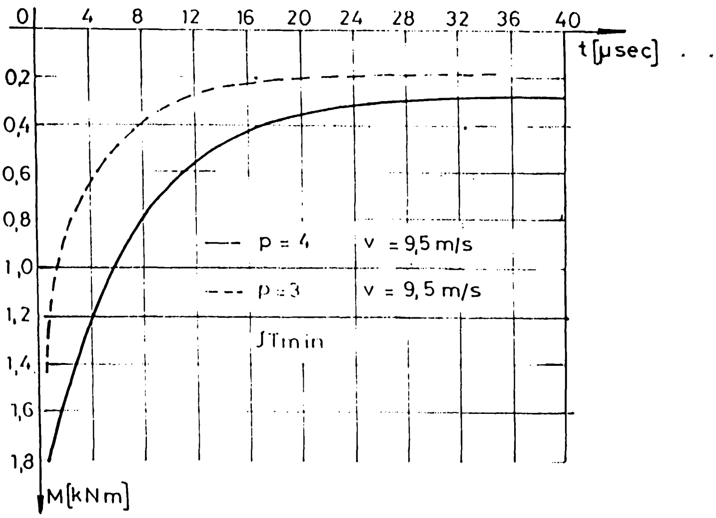


Fig.7.2

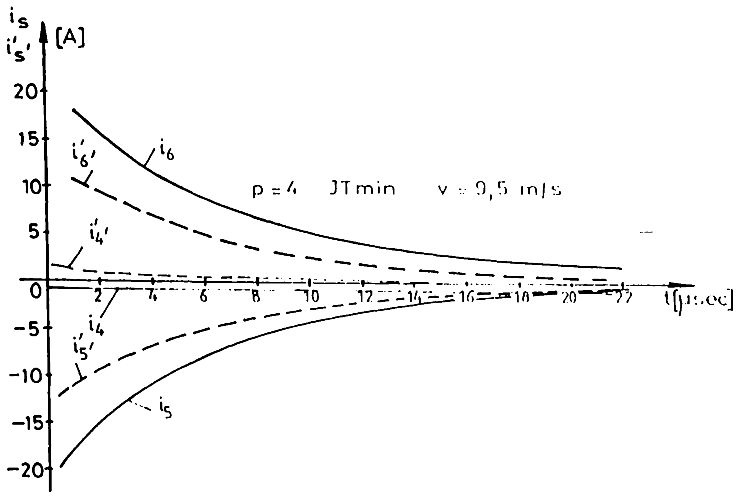


Fig.7.3

treaga energie magnetică a statorului de la momentul anterior deconectării (t=0_) se transformă în pierderi în fierul statoric. Fluxul rotoric, în timpul acestui proces tranzitoriu electromagnetic variază foarte puțin, putînd fi considerat constant (fig.7.4).

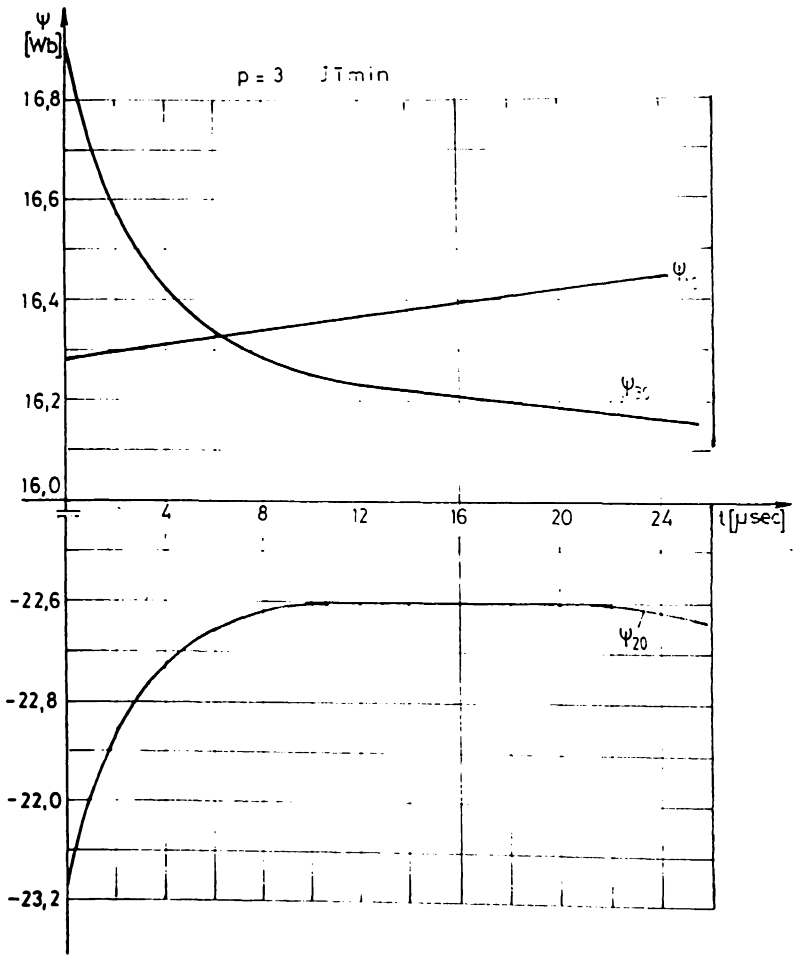


Fig.7.4

După acest proces tranzitoriu, mărimile din înfășurările în scurtcircuit - principale rotorice și cele auxiliare statorice și rotorice - variază periodic în timp, cu perioada T=20 msec, dar amortizat. In figurile 7.5, 7.6,a, 7.6.b, sînt prezentate variația în timp a curenților rotorici, respectiv din înfășurările auxiliare în cazul deconectării de la p=3, respectiv p=4.

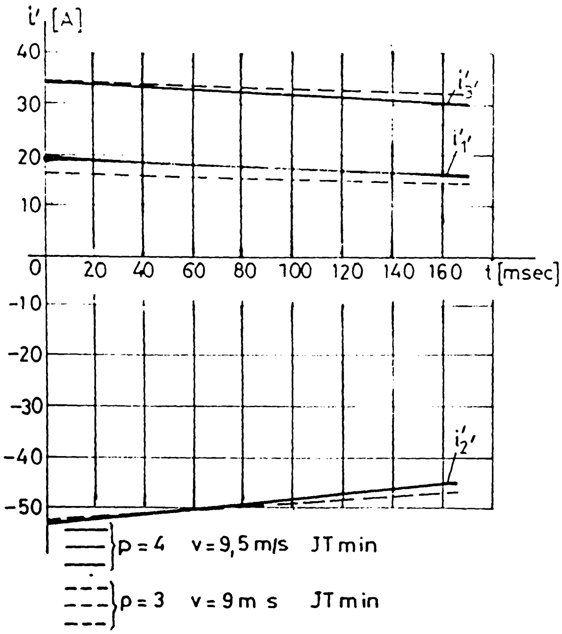


Fig.7.5

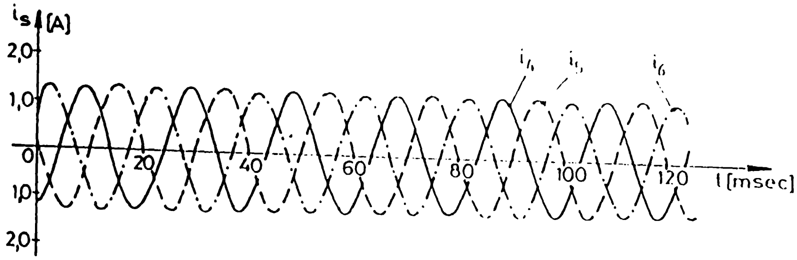


Fig.7.6,a

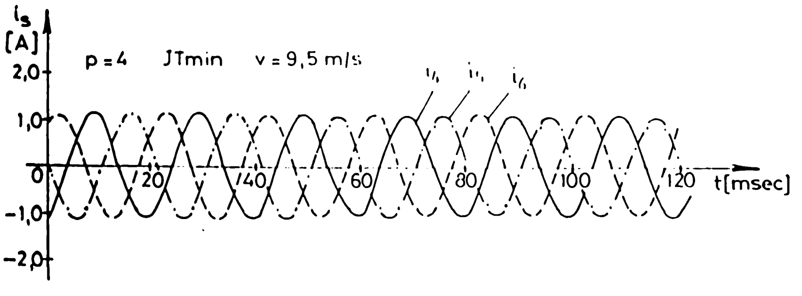


Fig.7.6,b

De asemenea sînt prezentate variaţiile fluxului magnetic statoric (fig.7.7,a, 7.7,b) corespunzătoare deconectării de la p=3, respectiv p=4, în procesul tranzitoriu amortizat, respectiv variaţia cuplului electromagnetic pe durata aceluiaşi proces (fig.7.8).

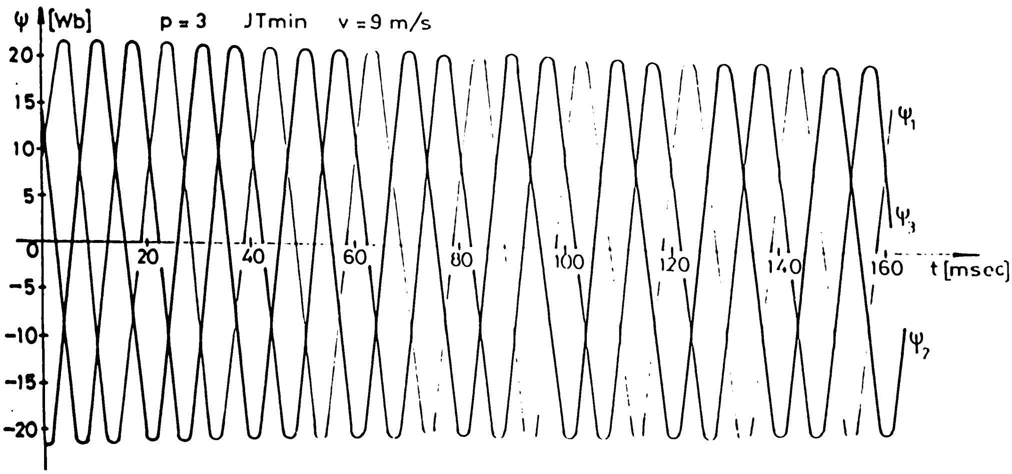


Fig. 7.7.a

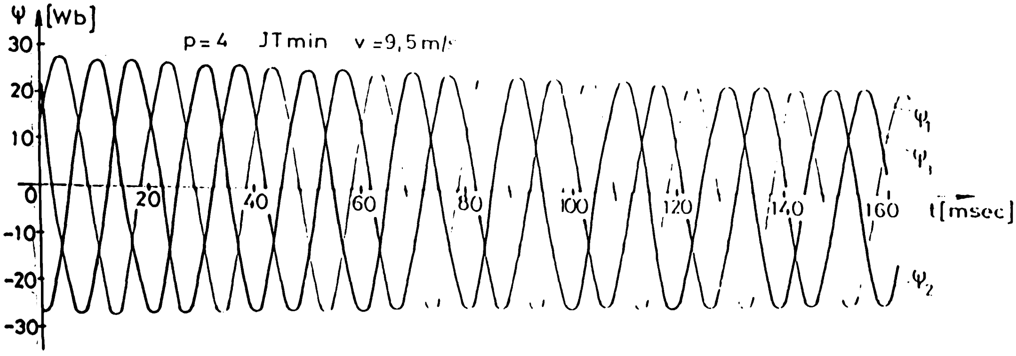


Fig.7.7,b

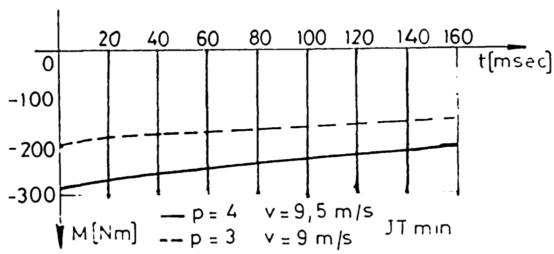


Fig.7.8

Momentul de inerţie al sistemului turbină eoliană-multiplicator al vitezei de rotaţie, moment redus la arborele generatorului electric, are valori cuprinse între $J_{tmin}=620$ kg.m^2 şi $J_{tmax}=2315$ kg.m^2. Valoarea lui influenţează mărimile din cadrul regimului tranzitoriu de la deconectare. In fig.7.9 respectiv 7.10, sînt prezentate variaţiile vitezei de rotaţie funcţie de timp, pentru cazurile corespunzătoare deconectării de la p=3, respectiv p=4, avînd ca parametrii valorile minime, respectiv maxime ale momentelor de inerţie ale turbinei.

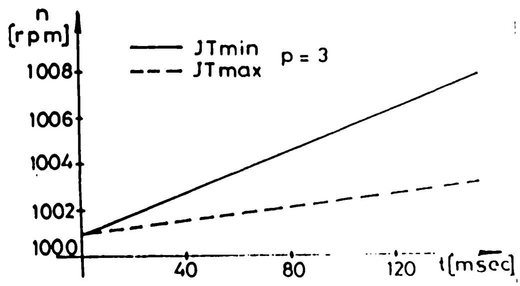


Fig.7.9

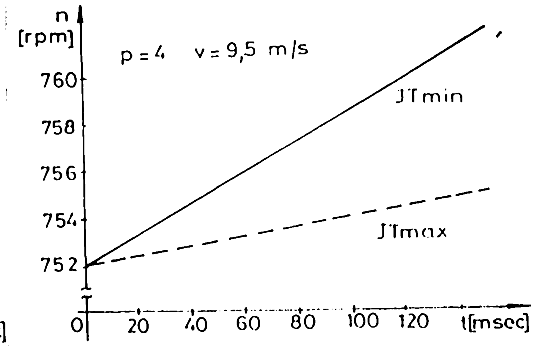


Fig.7.10

7.2.2. Fenomene tranzitorii la deconectare - fără considerarea pierderilor în fier.

Sistemul de ecuaţii diferenţiale care descrie comportarea maşinii cînd nu se consideră pierderile în fier este dat de relaţiile (6.50).

La deconectare, sistemul de ecuaţii diferenţiale este dat de (7.7):

$$\frac{d\Psi_{d'}}{dt} = -\frac{R_{d'}}{L_{d'd'}}\Psi_{d'} \qquad \frac{dZ}{dt} = b_8 + b_9 Z + \frac{b_{10}}{Z}$$

$$\frac{d\Psi_{q'}}{dt} = -\frac{R_{q'}}{L_{q'q'}}\Psi_{q'} \qquad \frac{dy}{dt} = Z \tag{7.7}$$

Programul de calcul, precum şi durata lui se reduc aproape la jumătate faţă de cazul în care se consideră pierderile în fier. Considerarea pierderilor în fier, influenţează valorile maxime ale fluxurilor statorice (fig.7.11), respectiv rotorice (fig.7.12), în sensul că fluxurile magnetice au valorile de vîrf mai mari şi amortizarea mai lentă în cazul considerării pierderilor în fier, decît în cazul în care acestea nu se consideră. De asemenea se modifică viteza de rotaţie (fig.7.13).

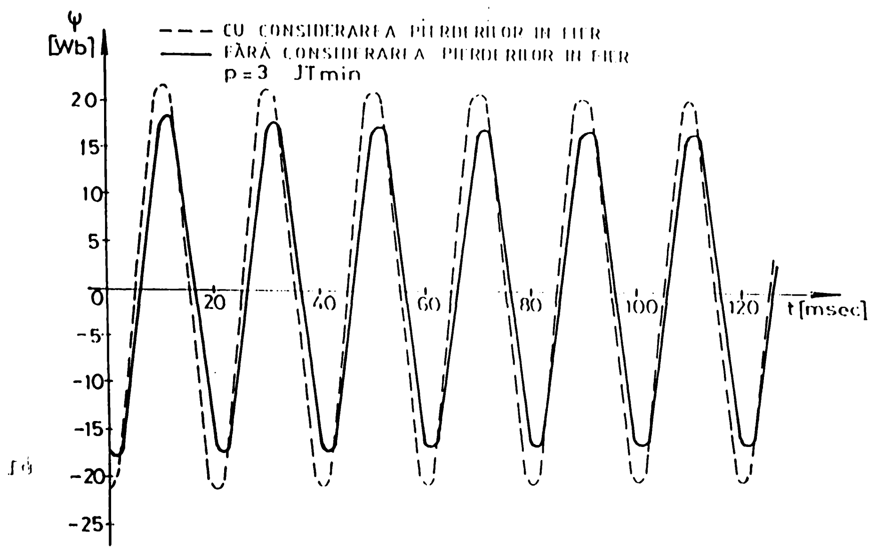


Fig.7.11

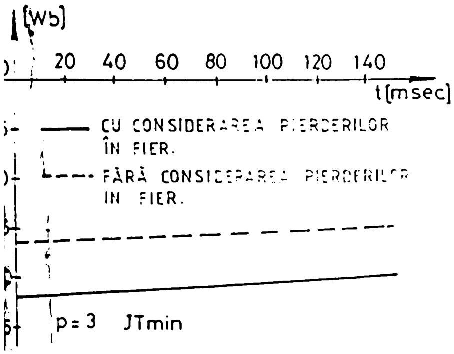


Fig.7.12

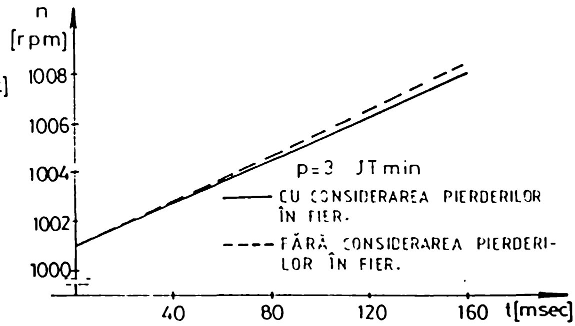


Fig.7.13

7.2.3. Fenomene tranzitorii la reconectare - cu considerarea pierderilor în fier

La reconectare, maşina electrică are numărul de perechi de poli p_{II}, iar parametrii ei electrici sînt cei corespunzători funcţionării la viteza de rotaţie n_{II}. În acest caz, viteza de rotaţie de la momentul t=0, al reconectării, notată n_{II}, este egală cu viteza de rotaţie de la sfîrşitul procesului de deconectare. Deoarece maşina prezintă alt număr de perechi de poli, ea va funcţiona la alunecarea mare, deci parametrii ei electrici vor fi puternic influenţaţi de efectul pelicular, influenţă ce se manifestă pe întreaga durată a procesului de reconectare. Efectul pelicular nu se manifestă la deconectare, cînd alunecarea a obţinut valori sub valoarea alunecării critice.

Parametrii maşinii reale, influenţaţi de efectul pelicular se determină pentru cazul vitezei de rotaţie n_{II}, cu ajutorul relaţiilor (2.11), (2.12), respectiv (2.13). Determinarea parametrilor maşinii echivalente cînd se cunosc parametrii maşinii reale, se face utilizînd relaţiile de transformare (5.37), respectiv (5.41).

Sistemul de ecuaţii diferenţiale care descrie comportarea maşinii la reconectare este dat de relaţiile (6.13). Trebuie precizat faptul că anumiţi coeficienţi ai sistemului (6.13) sînt afectaţi de efectul pelicular şi deci nu mai pot fi consideraţi constanţi în timpul rezolvării. Aceşti coeficienţi sînt cei cu a căror expresie intervin rezistenţa, respectiv reactanţa de dispersie a unei faze rotorice, adică, b_2, b_4, b_5, b_7, b_{14} (relaţiile 6.12). Se admite ipoteza că, în intervalul de timp corespunzător pasului metodei numerice, aceşti coeficienţi sînt constanţi şi au valoarea egală cu valoarea obţinută la sfîrşitul pasului anterior. Dacă pasul de integrare h este suficient de mic, atunci variaţia alunecării pe intervalul considerat este atît de mică încît poate fi considerată practic constantă.

Condiţiile iniţiale utilizate în rezolvarea sistemului de ecuaţii (6.13) influenţează în mod diferit procesele tranzitorii de la reconectare. Se consideră că reconectarea se face în momente în care curentul unei faze rotorice trece prin zero sau prin valoarea maximă, iar fluxul magnetic al unei faze statorice este în opoziție de fază, în fază sau defazat cu $\frac{\pi}{2}$ față de fluxul magnetic al unei faze rotorice, fiecărui moment considerat, corespunzîndu-i anumite valori inițiale ale mărimilor ce intervin în sistemul de ecuații diferențiale (6.13).

In toate cazurile însă, valoarea inițială a vitezei de rotație este aceeași și egală cu n_{II}, valoarea momentului de inerție al turbinei eoliene este valoarea minimă, iar viteza vîntului este de 9 m/s pentru reconectarea la p=4 și de 9,5 m/sec pentru reconectarea la p=3.

La reconectare se disting două procese tranzitorii:

a) un proces tranzitoriu electromagnetic caracterizat prin șocuri mari de curenți și de cuplu electromagnetic, dar care se amortizează rapid (cîteva zeci de milisecunde) și în timpul căruia cuplul mecanic și viteza de rotație prezintă variații mici.

b) un proces tranzitoriu electromecanic caracterizat prin curenți avînd valori de 3-4 ori mai mari decît curentul nominal, iar cuplul electromagnetic avînd valori apropiate de valorile din regimul permanent, în timpul acestui proces tranzitoriu mașina electrică accelerează - dacă reconectarea se face pentru mașina funcționînd cu numărul de perechi de poli corespunzător vitezei mari de rotație - sau decelerează - dacă reconectarea se face pentru mașina funcționînd cu numărul de perechi de poli corespunzător vitezei mici de rotație. Durata acestui proces tranzitoriu este mai mare, fiind de aproximativ 1,5 secunde la trecerea de la viteza de rotație mică la viteza de rotație mare, considerînd că momentul de inerție al turbinei are valoarea minimă, respectiv de 15 secunde la trecerea de la viteza de rotație mare la viteza de rotație mică, în cazul momentului de inerție minim.

Dacă se consideră că sistemul turbină eoliană-multiplicator al vitezei de rotație are momentul de inerție egal cu valoarea maximă, durata procesului tranzitoriu electromecanic crește la aproximativ 6 secunde, respectiv 60 de secunde adică, de aproximativ 4 ori față de cazul funcționării cu moment de inerție minim.

Procesul tranzitoriu electromagnetic este influențat de valorile inițiale ale mărimilor ce intervin în sistemul de ecuații diferențiale (6.13), ca și de valoarea momentului de inerție al ansamblului turbină eoliană-multiplicator al vitezei de rotaţie - generator electric.

La reconectare se consideră ca moment iniţial, momentul în care fluxul rotoric al unei faze trece prin valoarea zero $\Psi_{1'0}=0$, adică valoarea curentului pe faza respectivă este nulă, ceilalţi doi curenţi avînd valori egale şi de semne contrare care se obţin cu ajutorul relaţiei (6.30), respectiv momentul în care fluxul rotoric al unei faze trece prin valoarea maximă pozitivă, adică valoarea curentului pe faza respectivă este i'_{max}, dată de relaţia (6.34), iar valoarea iniţială a unghiului ϑ, (notată în program cu Z_0) fiind respectiv 0, $\frac{\pi}{2}$ sau π, obţinîndu-se flux statoric în fază, în cuadratură sau în opoziţie de fază cu fluxul rotoric.

a) La momentul iniţial, $\vartheta_0=0$ şi $i_{1'}=i'_{max}$, adică fluxul statoric este în fază cu cel rotoric, ambele avînd valoarea maximă pozitivă, adică $\Psi_{10}=\Psi_{1max}$, $\Psi_{1'0}=\Psi_{1'max}$. În acest caz momentului iniţial al reconectării îi corespund valorile date de relaţiile (7.8):

$$i'_{max}=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sum_{\lambda'=1'}^{3'} i_{\lambda'_i}\,\Psi_{\lambda'_i}}{\frac{3}{2}L_{11h'}\;\frac{k_X X_2'}{2\pi f}}}$$

$$\Psi_{a0}=\frac{3}{2}L_{11h}i'_{max};\quad \Psi_{d0}=\Psi_{a0};\quad \Psi_{d'0}=\frac{3}{2}\left(L_{11h'}\;\frac{2}{3}\cdot\frac{X_2' k_X}{2\pi f}\right)i'_{max}$$

$$\Psi_{q0}=0\;;\quad \Psi_{b0}=0;\quad \Psi_{q'0}=0\;;\quad \vartheta_0=0,\quad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0=2\pi p\,n_i \tag{7.8}$$

în care: n_i - viteza de rotaţie la momentul t 0, exprimată în rad/sec.

p - numărul perechilor de poli corespunzător treptei vitezei de rotaţie la care se reconectează maşina

k_X - factorul de micşorare a reactanţei corespunzător funcţionării la viteza de rotaţie n_i şi numărul de perechi de poli p de la reconectare.

L_{11h} - inductivitatea principală a maşinii corespunzătoare funcţionării cu numărul de perechi de poli de la reconectare

$X'_{2\sigma}$ - reactanța de dispersie rotorică, mărime similară lui L_{11h}.

b) La momentul inițial $\vartheta_o=\frac{\pi}{2}$, $i'_1=i'_{max}$ adică fluxul statoric al unei faze este zero, $\Psi_{10}=0$, fluxul fazei corespunzătoare rotorice are valoarea maximă $\Psi_{1'0}=\Psi_{1'max}$ (fluxul statoric este defazat cu $\pi/2$ în urma fluxului rotoric). In acest caz, momentului inițial al reconectării îi corespund valorile date de relațiile (7.9):

$$i'_{max}=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sum_{\lambda'=1'}^{3'} i_{\lambda' i}\Psi_{\lambda' i}}{\frac{3}{2}L_{11h}+\frac{k_X X'_2}{2\pi f}}} \tag{7.9}$$

$$\Psi_{a0}=\frac{3}{2}L_{11h}i'_{max};\quad \Psi_{d0}=\Psi_{a0};\quad \Psi_{d'0}=\frac{3}{2}(L_{11h}+\frac{2}{3}\cdot\frac{X'_2 k_X}{2\pi f})i'_{max}$$

$$\Psi_{q0}=\Psi_{b0}=\Psi_{q'0}=0;\quad \vartheta_o=\pi/2,\quad (\frac{d\vartheta}{dt})_o=2\pi p n_i.$$

mărimile avînd aceeași semnificație ca și în relațiile (7.8).

c) La momentul inițial : $\vartheta_o=\frac{\pi}{2}$, $i_{1'}=0$, adică fluxul statoric al unei faze trece prin valoarea maximă negativă, $\Psi_{10}=-\Psi_{1max}$; iar fluxul rotoric al fazei corespunzătoare trece prin zero, $\Psi_{1'0}=0$. In acest caz, momentului inițial îi corespund valorile date de relațiile (7.10):

$$i'_0=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sum_{\lambda'=1'}^{3'} i_{\lambda' i}\Psi_{\lambda' i}}{\frac{3}{2}L_{11h}+\frac{k_X\cdot X'_2}{2\pi f}}} \tag{7.10}$$

$$\Psi_{a0}=\Psi_{d0}=\Psi_{d'0}=0;\quad \Psi_{b0}=\sqrt{3}\,L_{11h}i'_0;\quad \Psi_{q0}=\Psi_{b0};$$

$$\Psi_{q'0}=i'_0\sqrt{3}\,(L_{11h}+\frac{2}{3}\frac{k_X X'_2}{2\pi f});\quad \vartheta_o=\pi/2;\quad (\frac{d\vartheta}{dt})_o=2\pi p n_i$$

d) La momentul inițial $\vartheta_o=0$, $i_{1'}=0$, adică fluxul statoric este în opoziție de fază cu cel rotoric, ambele fiind la momentul inițial zero, $\Psi_{10}=0$, $\Psi_{1'0}=0$. In acest caz, momentului inițial îi corespund valorile date de relațiile (7.11):

$$i_0^{\bullet}=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sum_{\lambda'=1'}^{3'} i_{\lambda' i}\Psi_{\lambda' i}}{\frac{3}{2}L_{11h}+\frac{k_X X_2^{\bullet}}{2\pi f}}}\quad \Psi_{a0}=0;\ \Psi_{d0}=0;\ \Psi_{d'0}=0 \tag{7.11}$$

$$\Psi_{b0}=\sqrt{3}\,L_{11h}i_0^{\bullet}\ ;\quad \Psi_{q0}=\Psi_{b0}\ ;\quad \Psi_{q'0}=i_0^{\bullet}\sqrt{3}\left(L_{11h}+\frac{2}{3}\cdot\frac{k_X X_2^{\bullet}}{2\pi f}\right)$$

$$\vartheta_0=0,\quad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0=2\pi p\, n_i$$

e) La momentul inițial: $\vartheta_0=\pi$, $i_{1'}=i^{\bullet}_{max}$, adică fluxul statoric este în opoziție de fază cu fluxul rotoric, respectiv fluxul statoric trece prin valoarea maximă negativă $\Psi_{10}=-\Psi_{1max}$, iar cel rotoric prin valoarea maximă pozitivă, $\Psi_{1'0}=\Psi_{1max}$. In acest caz, momentului inițial îi corespund valorile inițiale date de relațiile:

$$i^{\bullet}_{max}=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sum_{\lambda'=1'}^{3'} i_{\lambda' i}\Psi_{\lambda' i}}{\frac{3}{2}L_{11h}+\frac{k_X X_2^{\bullet}}{2\pi f}}}$$

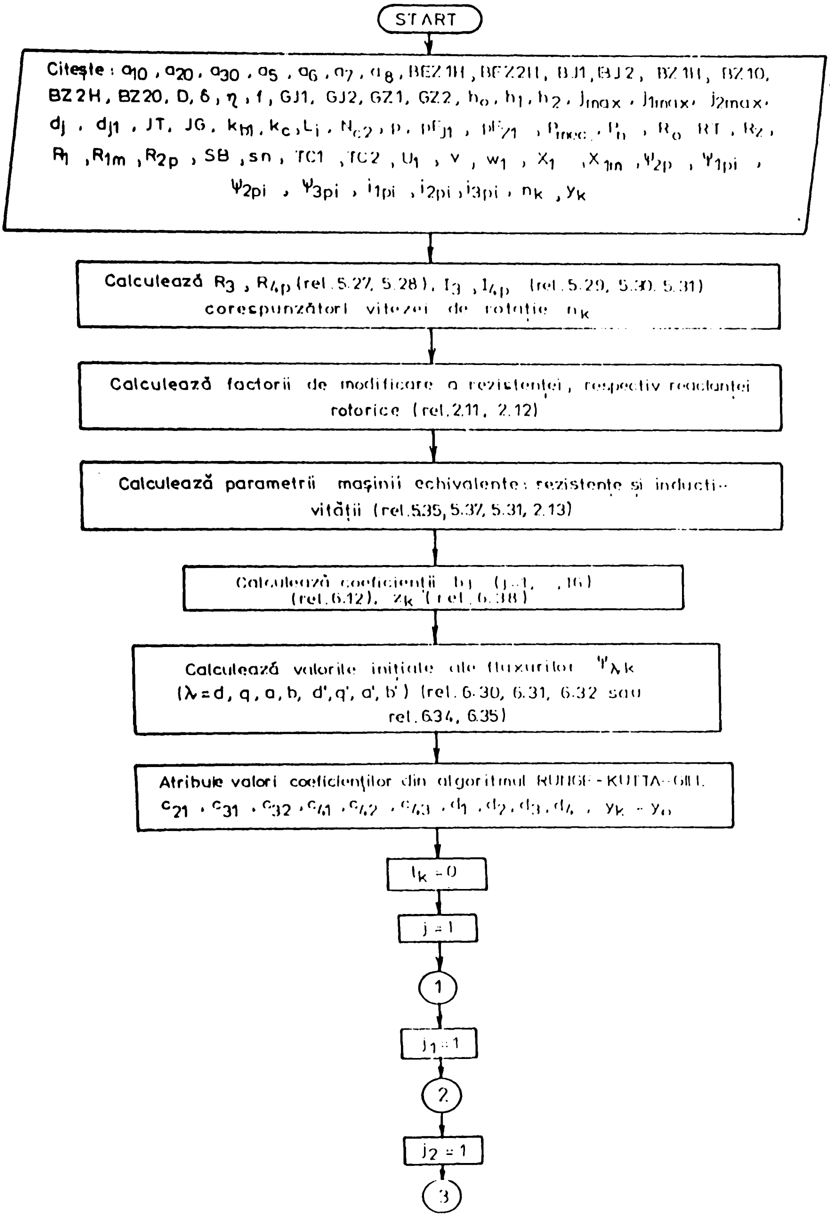
$$\Psi_{a0}=\frac{3}{2}L_{11h}i^{\bullet}_{max}\ ;\quad \Psi_{d0}=\Psi_{a0};\quad \Psi_{d'0}=\frac{3}{2}\left(L_{11h}+\frac{2}{3}\cdot\frac{k_X X_2^{\bullet}}{2\pi f}\right)i^{\bullet}_{max}$$

$$\Psi_{q0}=\Psi_{b0}=\Psi_{q'0}=0\ ;\quad \vartheta_0=\pi,\quad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0=2\pi p\, n_i \tag{7.12}$$

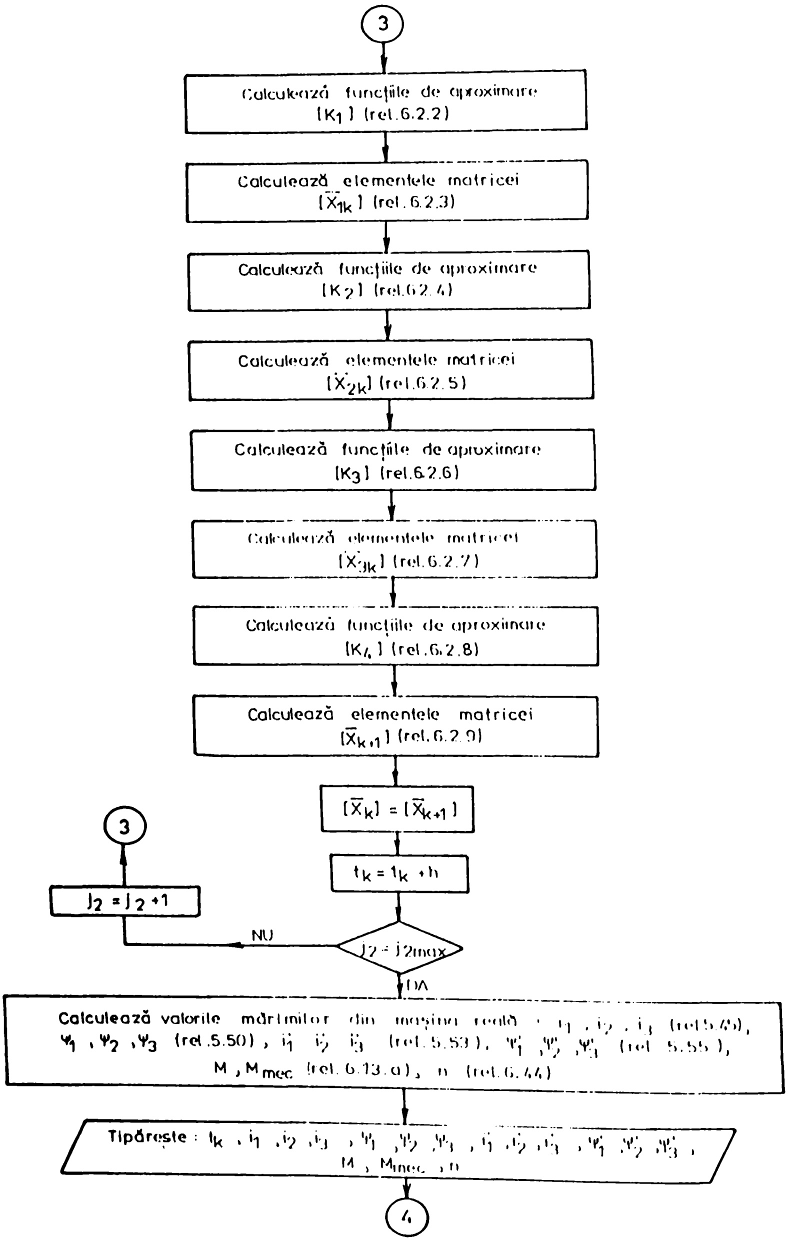
Fiind cunoscute valorile inițiale ale mărimilor ce intervin în sistemul de ecuații diferențiale (6.13), acesta poate fi rezolvat numeric.

Rezolvarea numerică a sistemului de ecuații diferențiale (6.13) se face cu metoda de aproximare de ordinul 4, Runge-Kutta-Gill, ordinograma programului de calcul este prezentată în fig.7.14. Notațiile folosite în ordinogramă sînt cele prezentate în anexa nr.7.1.

(4)


START
Citește : a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_5, a_6, a_7, a_8, BEZ1H, BEZ2H, BJ1, BJ2, BZ1H, BZ10, BZ2H, BZ20, D, δ, η, f, GJ1, GJ2, GZ1, GZ2, h_o, h_1, h_2, j_{max}, j_{1max}, j_{2max}, d_j, d_{j1}, JT, JG, k_M, k_c, L_i, N_{c2}, p, pF_{J1}, pF_{Z1}, P_{mec}, P_n, R_o, RT, R_Z, R_1, R_{1m}, R_{2p}, SB, sn, TC1, TC2, U_1, v, w_1, X_1, X_{1n}, Ψ_{2p}, Ψ_{1pi}, Ψ_{2pi}, Ψ_{3pi}, i_{1pi}, i_{2pi}, i_{3pi}, n_k, y_k
Calculează R_3, R_{4p} (rel. 5.27, 5.28), I_3, I_{4p} (rel. 5.29, 5.30, 5.31) corespunzători vitezei de rotație n_k
Calculează factorii de modificare a rezistenței, respectiv reactanței rotorice (rel. 2.11, 2.12)
Calculează parametrii mașinii echivalente: rezistențe și inductivității (rel. 5.35, 5.37, 5.31, 2.13)
Calculează coeficienții b_j (j=1, ..., 16) (rel. 6.12), z_k (rel. 6.38)
Calculează valorile inițiale ale fluxurilor $\Psi_{\lambda k}$ (λ=d, q, a, b, d', q', a', b') (rel. 6.30, 6.31, 6.32 sau rel. 6.34, 6.35)
Atribuie valori coeficienților din algoritmul RUNGE-KUTTA-GILL c_{21}, c_{31}, c_{32}, c_{41}, c_{42}, c_{43}, d_1, d_2, d_3, d_4, $y_k = y_o$
$t_k = 0$
j = 1
1
$j_1 = 1$
2
$j_2 = 1$
3

(5)


3
Calculează funcțiile de aproximare
[K1] (rel.6.2.2)
Calculează elementele matricei
[X1k] (rel.6.2.3)
Calculează funcțiile de aproximare
[K2] (rel.6.2.4)
Calculează elementele matricei
[X2k] (rel.6.2.5)
Calculează funcțiile de aproximare
[K3] (rel.6.2.6)
Calculează elementele matricei
[X3k] (rel.6.2.7)
Calculează funcțiile de aproximare
[K4] (rel.6.2.8)
Calculează elementele matricei
[Xk+1] (rel.6.2.9)
[Xk] = [Xk+1]
tk = tk + h
j2 = j2max
NU
DA
j2 = j2 + 1
3
Calculează valorile mărimilor din mașina reală
Ψ1, Ψ2, Ψ3 (rel.5.50)
M, Mmec (rel.6.13.a), n (rel.6.44)
Tipărește : tk
M, Mmec, n
4

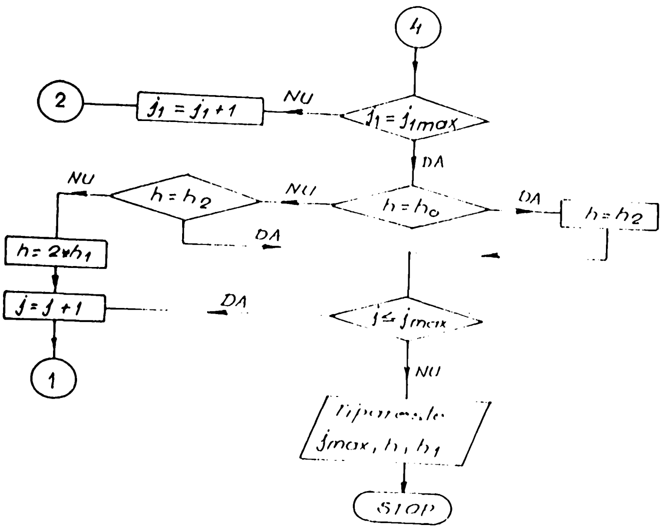


Fig.7.14

7.2.3.1. Fenomene tranzitorii în cazul reconectării la viteza de rotaţie mare

Se consideră că la reconectare, condiţiile iniţiale sînt date de relaţiile (7.8), respectiv (7.9)-(7.12). Variaţia în timp a momentului electromagnetic M şi a curentului statoric i este prezentată în fig.7.15, corespunzător diverselor condiţii iniţiale, respectiv fluxurile statoric şi rotoric în fază (rel.7.8), defazate cu $\pi/2$ (rel.7.9 şi 7.10), în opoziţie de fază, dar trecînd prin valoarea zero la momentul iniţial (rel. 7.11). In fig.7.16 este prezentată dependenţa vitezei de rotaţie de timp, respectiv a cuplului electromagnetic M, de viteza de rotaţie n, în cazul condiţiilor iniţiale precizate.

In cazul reconectării cu fluxurile statorice şi rotorice în opoziţie de fază, dependenţa de timp a mărimilor electromagnetice este prezentată în fig.7.17, iar dependenţa vitezei de rotaţie de timp şi a cuplului electromagnetic de viteza de rota-

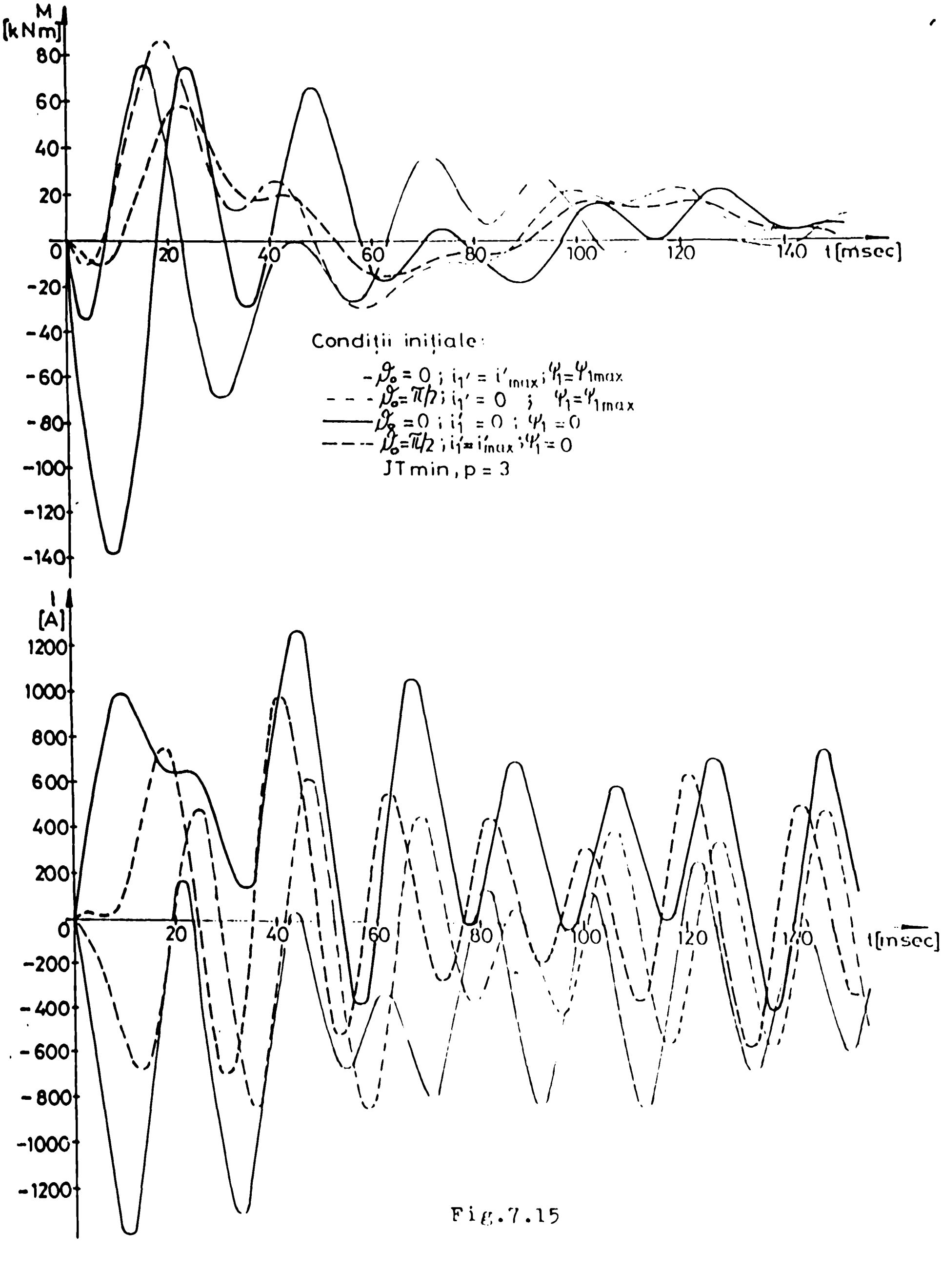

M [kNm]
t[msec]
Condiţii iniţiale:
$\vartheta_o = 0$; $i_1' = i'_{1max}$; $\Psi_1 = \Psi_{1max}$
$\vartheta_o = \pi/2$; $i_1' = 0$; $\Psi_1 = \Psi_{1max}$
$\vartheta_o = 0$; $i_1' = 0$; $\Psi_1 = 0$
$\vartheta_o = \pi/2$; $i_1' = i'_{1max}$; $\Psi_1 = 0$
JTmin, p = 3
I [A]
t[msec]

Fig.7.15

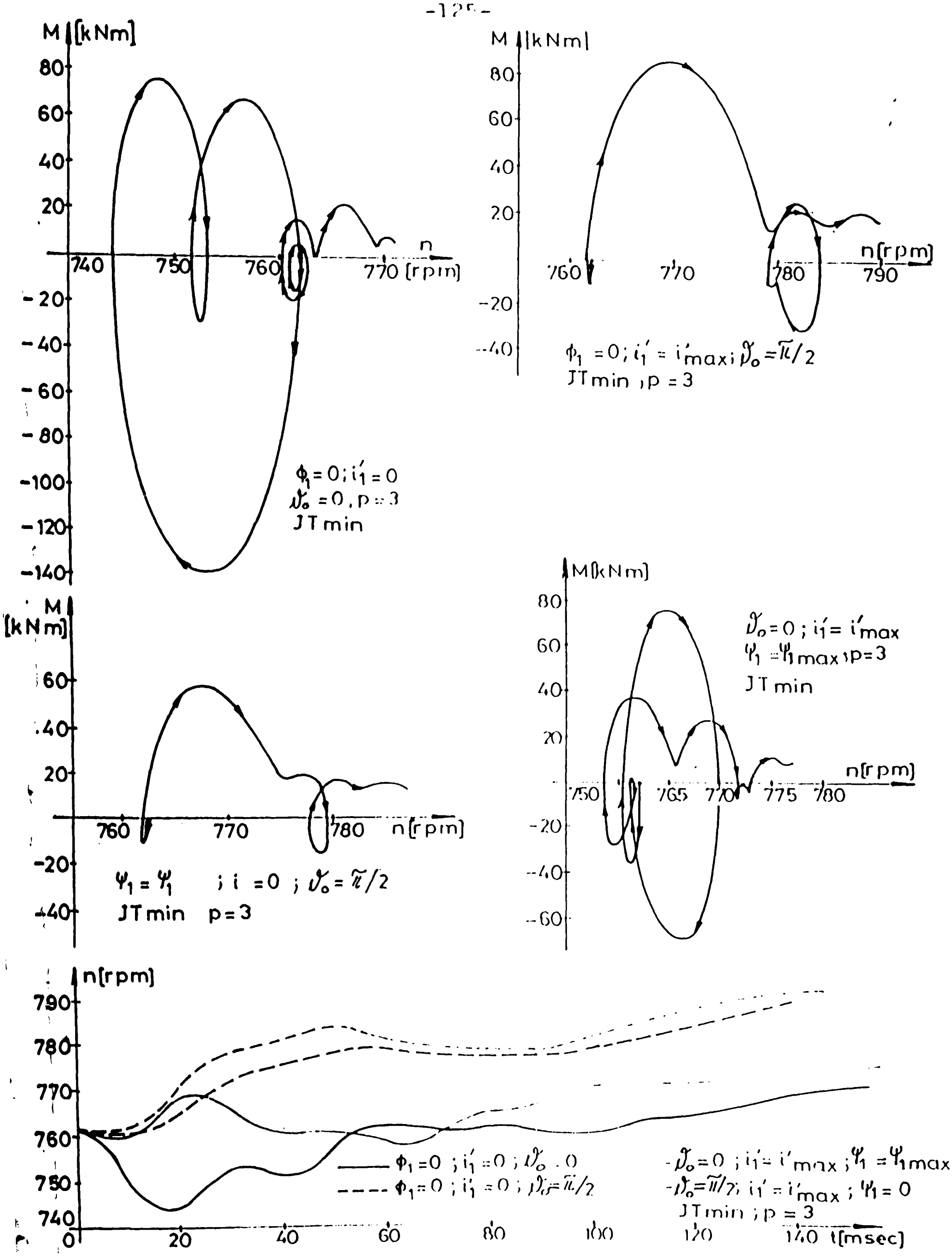

M [kNm]
n [rpm]
$\phi_1 = 0; i_1' = 0$
$\vartheta_0 = 0, p = 3$
JT min
$\phi_1 = 0; i_1' = i'_{max}; \vartheta_0 = \pi/2$
JT min, p = 3
$\psi_1 = \psi_1$; i = 0 ; $\vartheta_0 = \pi/2$
JT min p = 3
$\vartheta_0 = 0$; $i_1' = i'_{max}$
$\psi_1 = \psi_{1max}$, p=3
JT min
$\phi_1 = 0$; $i_1' = 0$; $\vartheta_0 = 0$
$\phi_1 = 0$; $i_1' = 0$; $\vartheta_0 = \pi/2$
$\vartheta_0 = 0$; $i_1' = i'_{max}$; $\psi_1 = \psi_{1max}$
$\vartheta_0 = \pi/2$; $i_1' = i'_{max}$; $\psi_1 = 0$
JT min ; p = 3
t [msec]

Fig.7.16

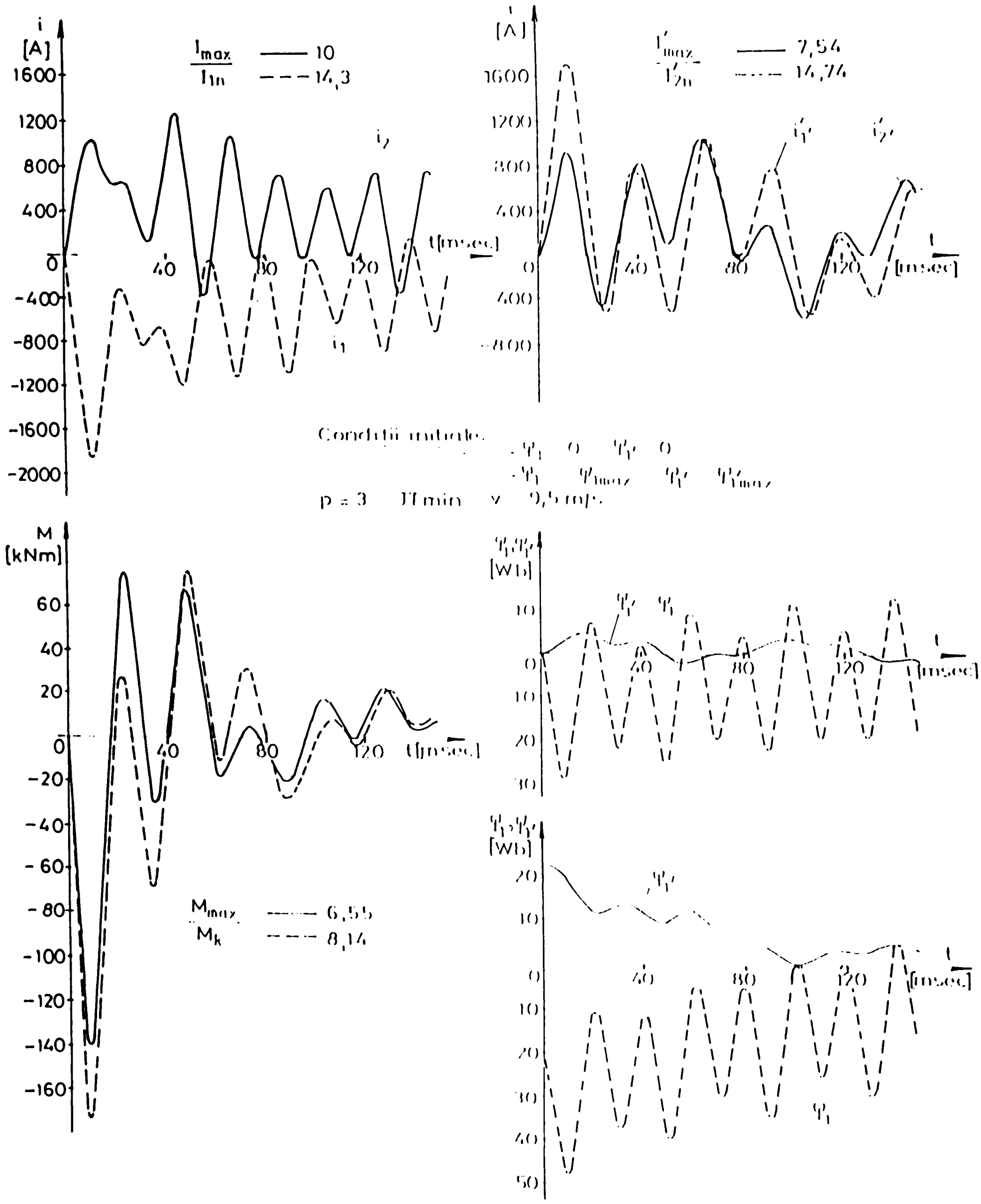

i
[A]
1600
1200
800
400
0
-400
-800
-1200
-1600
-2000
40
80
120
t[msec]
I_{max} / I_{1n}
10
14,3
i_2
i_1
[A]
1600
1200
800
400
0
400
800
40
80
120
[msec]
7,54
14,74
M
[kNm]
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
40
80
120
t[msec]
M_{max} / M_k
6,55
8,14
[Wb]
[msec]
[Wb]
[msec]

Fig.7.17

ţie este prezentată în fig.7.18.

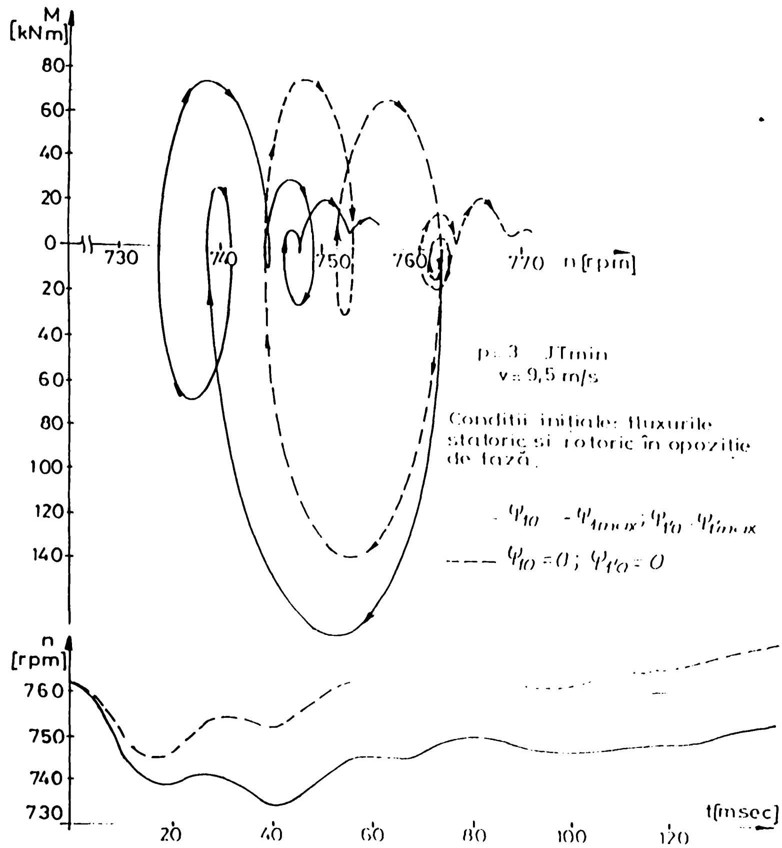


Fig.7.18

Valorile iniţiale ale mărimilor electromagnetice influenţează mult fenomenele tranzitorii care apar în timpul procesului de reconectare. Solicitările electromagnetice şi mecanice cele mai mari, sînt obţinute în cazul în care, în momentul reconectării fluxul magnetic al unei faze rotorice trece prin valoarea sa maximă, iar cel statoric are valoarea minimă, fluxurile fiind în opoziţie de fază. Solicitările electromagnetice şi mecanice cele mai mici - dintre cazurile prezentate - sînt obţinute în cazul reconectării cu fluxurile statoric şi rotoric defazate cu $\pi/2$.

In tabelul nr.7.1 sînt prezentate valori numerice şi raportate la valorile nominale (în cazul curenţilor), respectiv la valoarea critică (în cazul cuplului electromagnetic). Indicele "max" se referă la valoarea de vîrf pozitivă obţinută de mărime, iar cel "min" la valoarea de vîrf negativă. De asemenea, durata de timp de la reconectare la care se obţine valoarea respectivă se notează cu "moment de timp". De exemplu: i_{max} reprezintă valoarea de vîrf pozitivă obţinută de curentul statoric în timpul procesului tranzitoriu, iar momentul de timp reprezintă timpul - măsurat de la momentul $t=0_+$ - la care curentul a obţinut valoarea de vîrf pozitivă. Curentul statoric este notat cu i, cel rotoric cu i', iar cuplul electromagnetic cu M.

Condiţiile iniţiale ale procesului tranzitoriu în care se obţin valorile prezentate sînt notate prin referire poziţia fluxului statoric al fazei 1 faţă de fluxul rotoric al fazei 1 rotorice, respectiv prin valorile la ψ_{10}, $\psi_{1'0}$ nule sau maxime. Valoarea nominală a curentului statoric, respectiv rotoric raportat la stator este 127,77 A, respectiv 113,99 A, iar valoarea momentului critic, calculată ţinînd cont de efectul pelicular, este de 21,37 kN.m.

Prin urmare, procesul tranzitoriu electromagnetic în care apare cele mai mari solicitări electromagnetice şi mecanice este cel corespunzător reconectării în momentul în care fluxul statoric al unei faze este în opoziţie de fază cu cel rotoric, ambele avînd valori maximale (negative, respectiv pozitive) în momentul reconectării.

In calcule, s-a considerat că momentul de inerţie al sistemului turbină eoliană-multiplicator al vitezei de rotaţie are valoarea minimă J_{tmin}=620 kg.m^2. Considerarea valorii maxime a momentului de inerţie, J_{tmax}=2315 kg.m^2, conduce la un proces tranzitoriu electromagnetic cu solicitări electromagnetice şi mecanice mai mici decît în cazul în care momentul de inerţie are valoarea minimă. In fig.7.19 este prezentată variaţia

Nr. crt.	Mărimea	Condiții inițiale: fluxurile statoric și rotoric sînt:														
		în fază, $\psi_{10}=\psi_{1max}$ $\psi_{1'0}=\psi_{1'max}$			defazate cu $\pi/2$ $\psi_{10}=0, \psi_{1'0}=$ 1max			defazate cu $\pi/2$ $\psi_{10}=-\psi_{1max}$, $\psi_{1'0}=0$			opoziție de fază $\psi_{10}=0; \psi_{1'0}=0$			opoziție de fază $\psi_{10}=-\psi_{1max}, \psi_{10}=\psi_{1'max}$		
		Valoare numerică UM	Valoare raportată	Momentul de timp [msec]	Valoare numerică UM	Valoare raportată	Momentul de timp UM [msec]	Valoare numerică UM	Valoare raportată	Moment de timp UM [msec]	Valoare numerică UM	Valoare raportată	Moment de timp UM [msec]	Valoare numerică UM	Valoare raportată	Moment de timp UM [msec]
1.	i_{max}	171,2 A	1,34	21,7	+960,62 A	7,52	41,7	941,13 A	7,37	38,7	+1278,6 A	10,0	44,7	+155,2 A	1,22	140,0
2.	i_{min}	-1443,5 A	11,3	10,0	-701,97 A	5,5	29,7	-553 A	4,33	49,7	-375,05 A	2,94	55,7	-1828,2 A	14,31	10,78
3.	i'_{max}	+1408,6 A	12,36	10,0	+423,33 A	3,71	81,7	+945,9 A	8,3	38,7	529,67 A	4,65	84,7	+1680,2 A	14,74	12,7
4.	i'_{min}	-787,5 A	6,91	91,7	-358,25 A	7,53	40,7	-219,7 A	1,93	100,7	-1271,8	11,16	44,7	-517,58 A	4,54	53,7
5.	M_{max}	+76,12 kN.m	3,56	14,7	+58,12 kN.m	2,72	21,7	86,44 kN.m	4,04	13,7	+75,35 kN.m	3,53	23,7	+75,29 kN.m	3,52	48,7
6.	M_{min}	-69,57 kN.m	3,26	30,0	-15,82 kN.m	0,74	62,7	-30,4 kN.m	1,42	57,7	-139,24 kN.m	6,52	8,0	-174,99 kN.m	8,19	7,58

vitezei de rotaţie în timpul procesului tranzitoriu electromagnetic, în cazul considerării valorii maxime, respectiv minime a momentului de inerţie, dacă reconectarea se face la momentul în care fluxurile statoric şi rotoric sînt în opoziţie de fază, iar în fig.7.20 se prezintă dependenţa de timp a curentului statoric, respectiv a cuplului electromagnetic, comparativ în cele două situaţii.

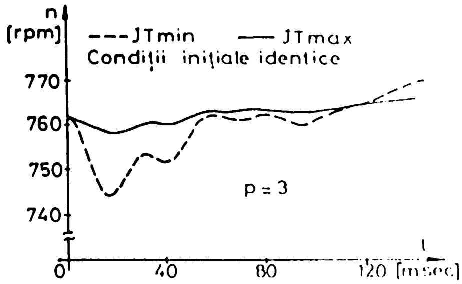


Fig.7.19

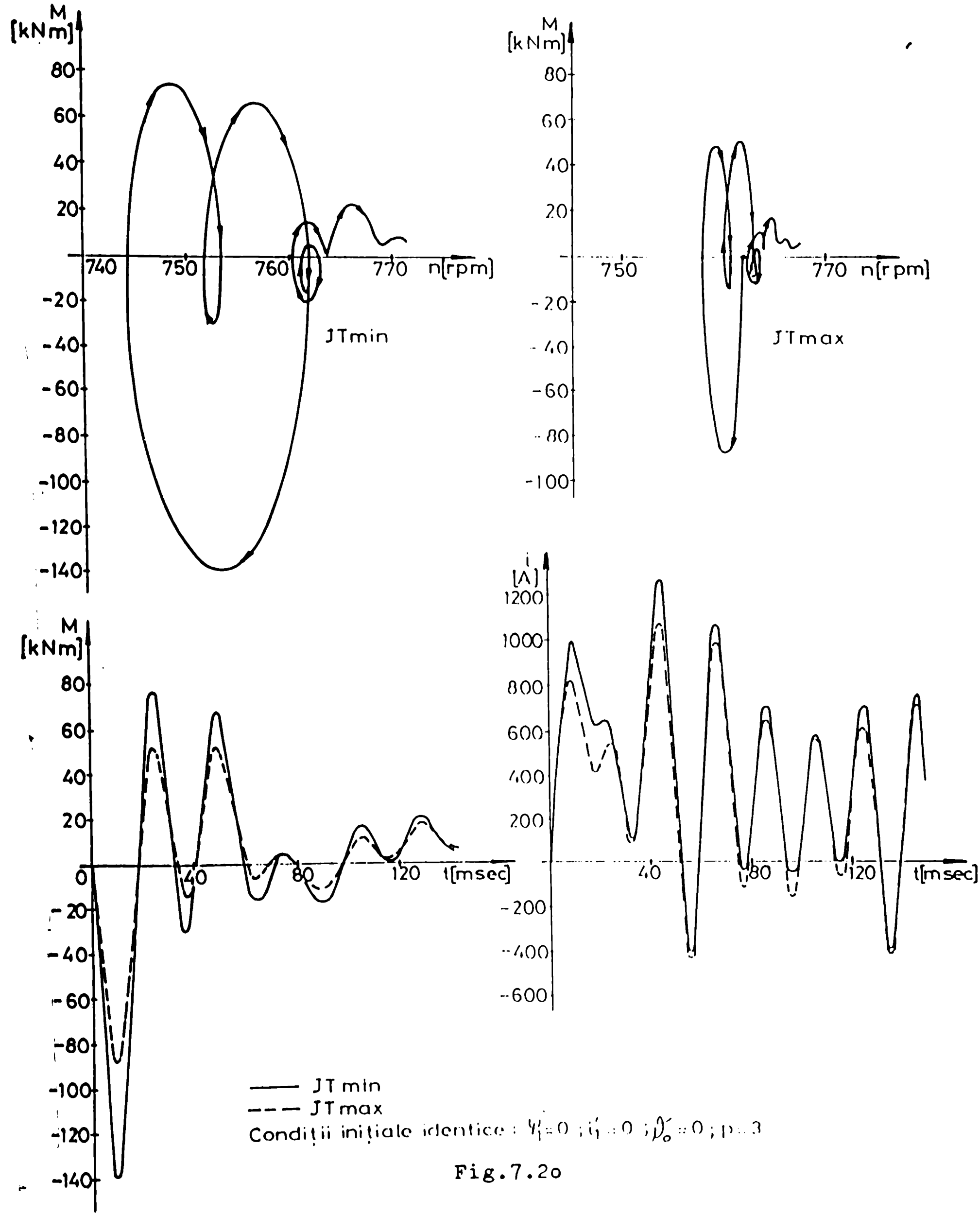
Valorile maxime obţinute în situaţia funcţionării cu moment de inerţie avînd valoarea maximă faţă de situaţia funcţionării cu moment de inerţie de valoare minimă, sînt mai mici cu: 20% pentru curentul statoric, 16,6% pentru cel rotoric, iar cuplul electromagnetic, obţine valori maximale cu 36.9%, respectiv 36,64% mai mici.

Dacă se neglijează pierderile în fier, procesul tranzitoriu este caracterizat de sistemul de ecuaţii (6.50), iar condiţiile iniţiale - în cazul reconectării în momentul în care fluxurile statoric şi rotoric sînt în opoziţie de fază, cu valori nule, sînt date de rel.7.13:

$$i_0^* = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{\sum_{\lambda'=1'}^{3'} i_{\lambda'}\psi_{\lambda'}}{\frac{3}{2} L_{11h} + \frac{k_\chi X_2'}{2\ f}}} \qquad \psi_{d0}=0\ ;\ \psi_{d'0}=0 \tag{7.13}$$

$$\psi_{q0}=i_0^*\sqrt{3}\,L_{11h}\ ;\quad \psi_{q'0}=i_0^*\sqrt{3}\left(L_{11h}+\frac{2}{3}\cdot\frac{k_\chi X_2'}{2\ f}\right)$$

Modificarea vitezei de rotaţie în timp, comparativ cu situaţia în care se consideră pierderile în fier este prezentată în fig.7.21, iar în fig.7.22 sînt prezentate comparativ variaţia în timpul procesului tranzitoriu electromagnetic a curentului statoric, respectiv a cuplului electromagnetic.



Condiţii iniţiale identice: $\psi_1' = 0$; $i_1' = 0$; $\vartheta_0' = 0$; p = 3

Fig.7.2o

De asemenea, se prezintă dependenţa cuplului electromagnetic de viteza de rotaţie.

Studiind comparativ cele două procese tranzitorii, cu şi fără considerarea pierderilor în fier, avînd aceleaşi condiţii iniţiale, rezultă că - neglijarea pierderilor în fier ar conduce la valori de vîrf mai mici pentru curenţi şi pentru cuplu.

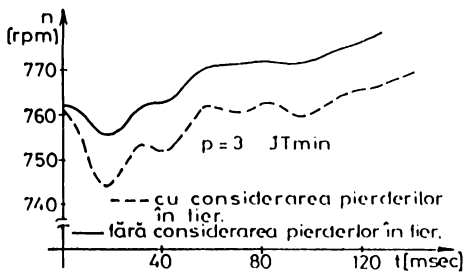


Fig.7.21

Vîrful de curent statoric este - în cazul neglijării pierderilor în fier - de 7,32 ori mai mare decît curentul nominal, cel al curentului rotoric de 7,93 ori mai mare decît curentul nominal rotoric, iar cuplul electromagnetic maxim de 2,51 ori cuplul critic, adică valori mai mici cu:

- 26,8% - în cazul curentului statoric;
- 29,84% - în cazul curentului rotoric ;
- 29% - în cazul cuplului electromagnetic,

decît în situaţia în care - în aceleaşi condiţii iniţiale - se consideră pierderile în fier.

In cazul reconectării cu fluxurile statoric şi rotoric în opoziţie de fază, se prezintă în fig.7.23 variaţia în raport cu timpul a celor trei curenţi statorici respectiv rotorici, precum şi variaţia fluxurilor magnetice statorice pe durata procesului tranzitoriu electromagnetic.

Durata procesului tranzitoriu electromagnetic este de aproximativ 160-200 msec, ea fiind mai mică în cazurile în care solicitările în timpul procesului sînt mai mici, respectiv în cazul în care la reconectare fluxurile magnetice statoric şi rotoric sînt defazate cu $\pi/2$. De fapt, se poate considera încheiat acest proces tranzitoriu la momentul de timp de la care viteza de rotaţie este continuu crescătoare, deci maşina accelerează.

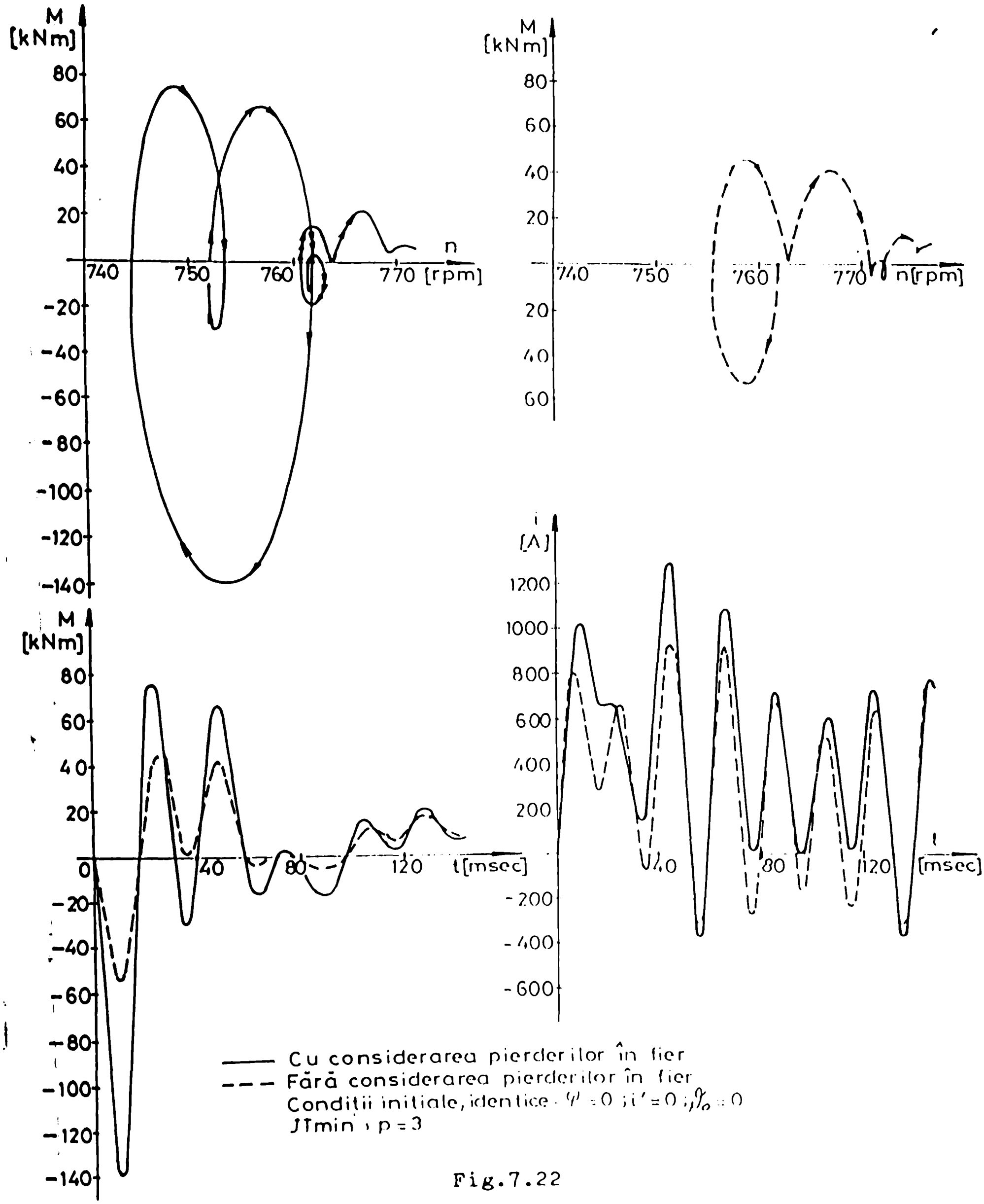

M [kNm]
n [rpm]
t [msec]
i [A]
Cu considerarea pierderilor în fier
Fără considerarea pierderilor în fier
Condiții inițiale, identice
JTmin, p = 3

Fig.7.22

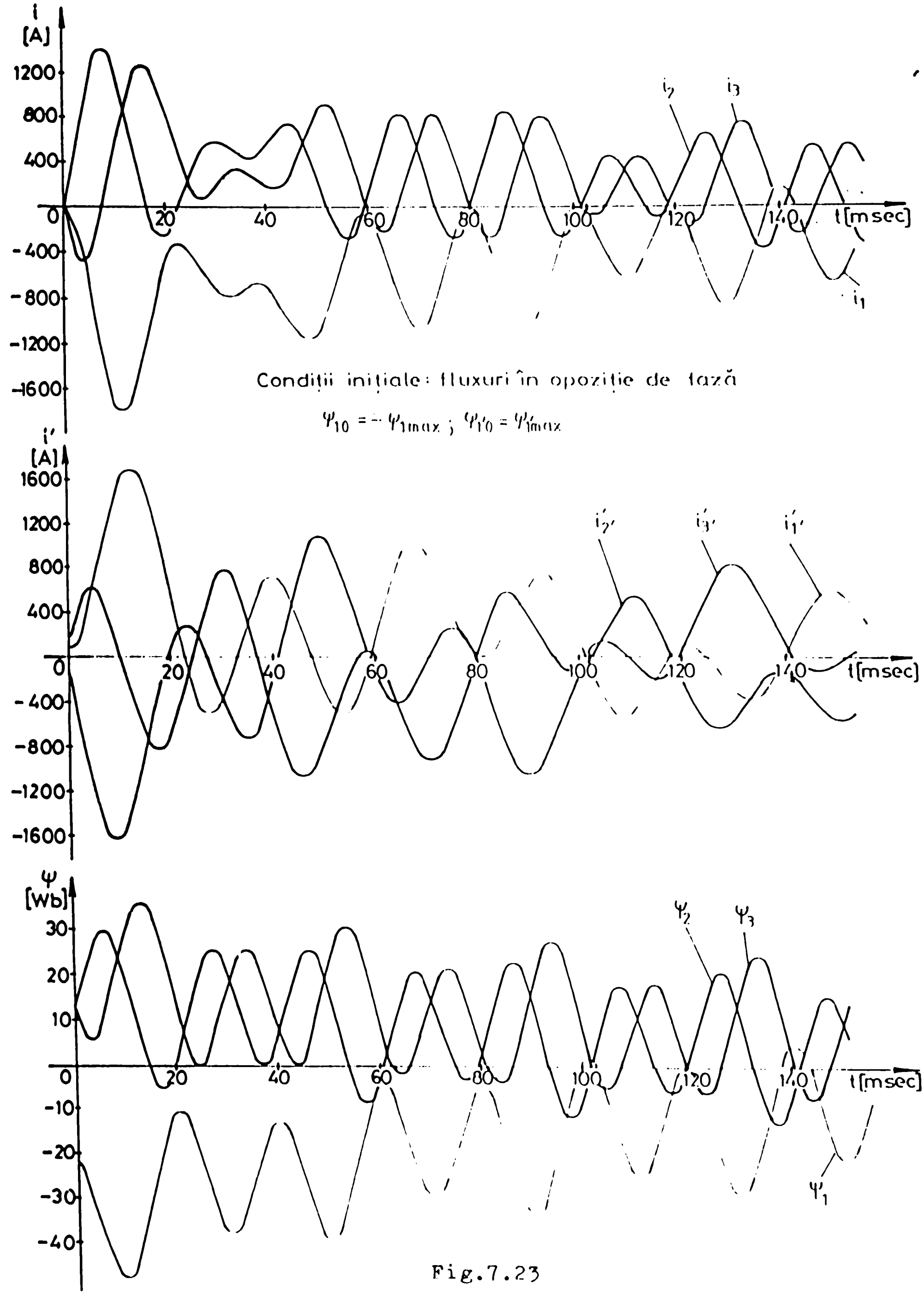

i [A]
1200
800
400
0
-400
-800
-1200
-1600
20
40
60
80
100
120
140
t[msec]
i_2
i_3
i_1
Condiții inițiale: fluxuri în opoziție de fază
$\Psi_{10} = -\Psi_{1max}$; $\Psi_{1'0} = \Psi'_{1max}$
i' [A]
1600
$i'_{2'}$
$i'_{3'}$
$i'_{1'}$
Ψ [Wb]
30
20
10
-10
-20
-30
-40
Ψ_2
Ψ_3
Ψ'_1

Fig.7.23

Regimul tranzitoriu nu se încheie însă, deoarece pînă la regimul permanent al sistemului, mărimile electrice magnetice şi mecanice continuă să se modifice în timp. Partea a doua a regimului tranzitoriu se consideră din momentul în care viteza de rotaţie creşte continuu în timp (fig.7.24), pînă la atingerea punctului de funcţionare stabil. Această parte a regimului tranzitoriu - denumită proces tranzitoriu electromecanic se caracterizează prin valori ale curenţilor variind între 2,5-4,1 ori valoarea nominală, pe 72% din durata ei (fig.7.25), după care curenţii încep să scadă.

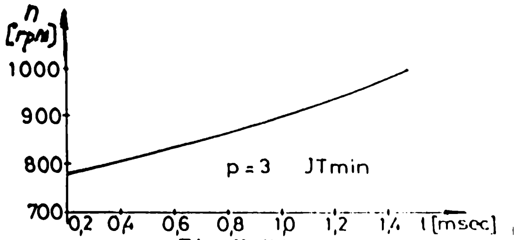


Fig.7.24

In fig.7.25 este reprezentată variaţia în raport cu timpul a curentului statoric al fazei celei mai solicitate, iar în fig.7.26, fluxul magnetic corespunzător.

De asemenea, se prezintă variaţia în raport cu timpul a cuplului electromagnetic pe durata regimului tranzitoriu (fig. 7.27) respectiv dependenţa cuplului electromagnetic de viteza de rotaţie comparativ cu valorile obţinute la considerarea regimului permanent (fig.7.28).

Valorile obţinute de cuplul electromagnetic, considerînd regimul tranzitoriu, fără neglijarea pierderilor în fier, sînt mai mici cu aproximativ 20% decît în cazul regimului permanent, iar valoarea corespunzătoare alunecării critice cu 40% mai mică.

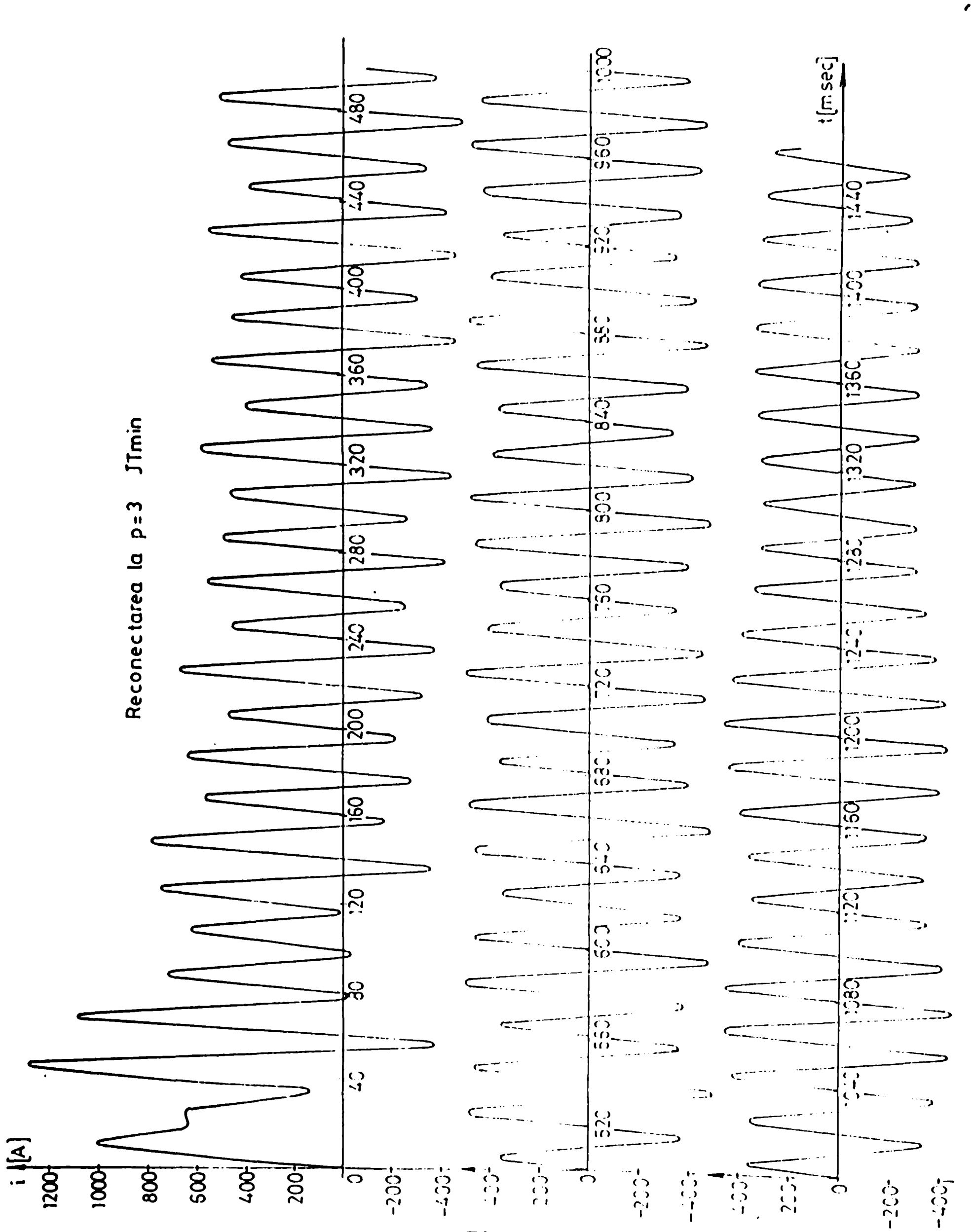


Fig.7.25

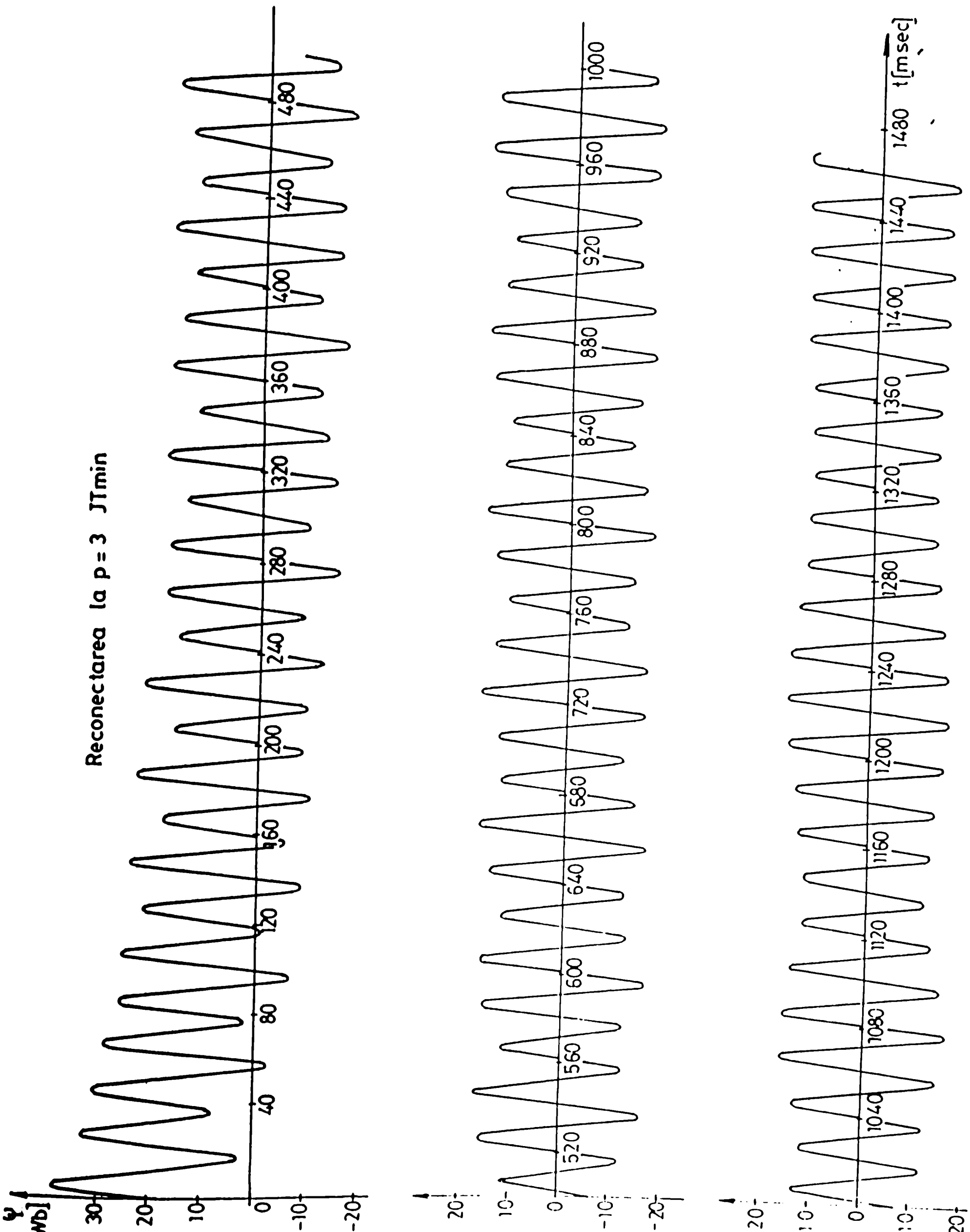

Reconectarea la p = 3 JTmin
Ψ [Wb]
t[msec]
30
20
10
0
-10
-20
40
80
120
160
200
240
280
320
360
400
440
480
520
560
600
640
680
720
760
800
840
880
920
960
1000
1040
1080
1120
1160
1200
1240
1280
1320
1350
1400
1440
1480

Fig.7.26

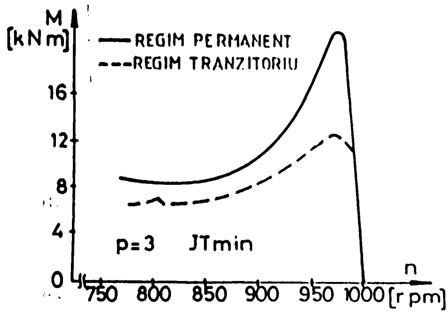


Fig.7.27

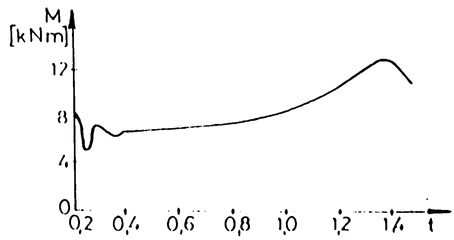


Fig.7.28

7.2.3.2. Fenomene tranzitorii în cazul reconectării la viteza de rotaţie mică

La reconectare condiţiile iniţiale sînt date de relaţiile (7.8), respectiv (7.9) - (7.12). Variaţia în timp a curentului statoric i este prezentată în fig.7.29, iar în fig.7.30 sînt prezentate variaţia în timp a momentului electromagnetic şi a vitezei de rotaţie a maşinii, variaţii corespunzătoare proceselor tranzitorii avînd diverse condiţii iniţiale la reconectare, respectiv fluxurile statoric şi rotoric în fază (rel.7.8) defazate cu $\pi/2$ (rel.7.9 şi 7.10), în opoziţie de fază, dar trecînd prin valoarea zero la momentul iniţial (rel.7.11).

De asemenea, în fig.7.31 este prezentată dependenţa cuplului electromagnetic de viteza de rotaţie n, în cazul condiţiilor iniţiale precizate.

In situaţia în care reconectarea se face în momentul în care fluxurile statorice şi rotorice sînt în opoziţie de fază, dependenţa de timp a mărimilor electromagnetice este prezentată în fig.7.32, iar dependenţa vitezei de rotaţie de timp şi a cuplului electromagnetic de viteza de rotaţie este prezentată în figura 7.33.

Valorile iniţiale ale mărimilor electromagnetice influenţează mult fenomenele tranzitorii care apar în timpul procesului de reconectare. Ca şi în cazul reconectării la viteza de rotaţie mare, şi în acest caz solicitările electromagnetice şi mecanice cele mai mari sînt obţinute în situaţia în care, în

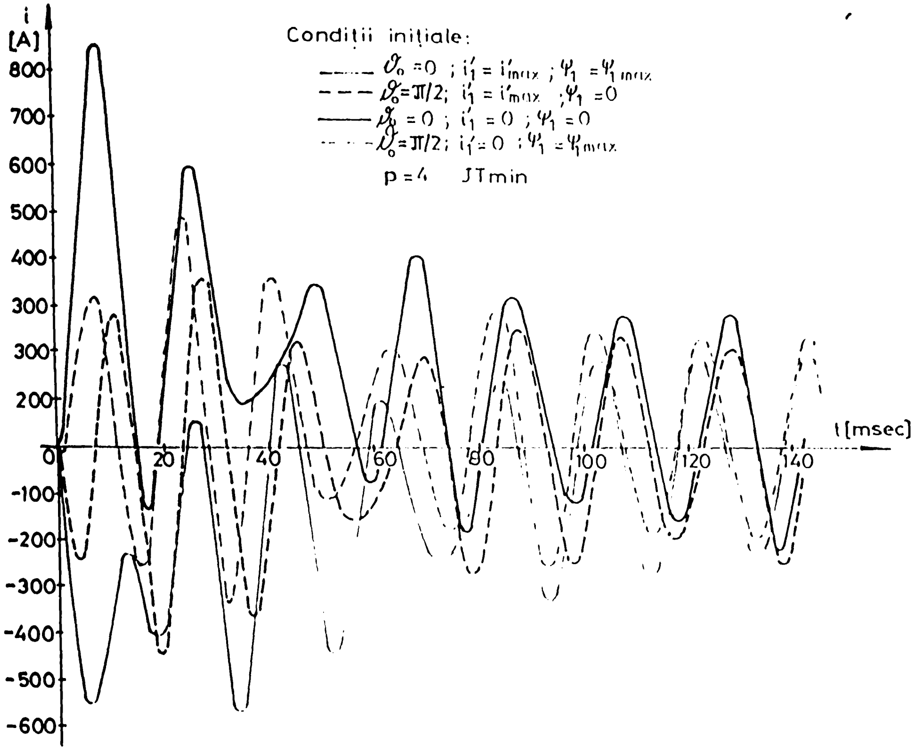


Fig.7.29

momentul reconectării fluxul magnetic al unei faze rotorice trece prin valoarea maximă, iar cel statoric are valoarea minimă (valorile inițiale sînt cele date de relațiile 7.12).

In tabelul nr.7.2 sînt prezentate valori numerice și valori raportate la valorile nominale (în cazul curenților), respectiv la valoarea critică (în cazul cuplului electromagnetic). Indicele "max" se referă la valoarea de vîrf pozitivă obținută de mărime, iar cel "min" se referă la valoarea de vîrf negativă. De asemenea, durata de timp măsurată de la momentul $t=0_+$ al reconectării pînă la obținerea valorii respective de vîrf, se

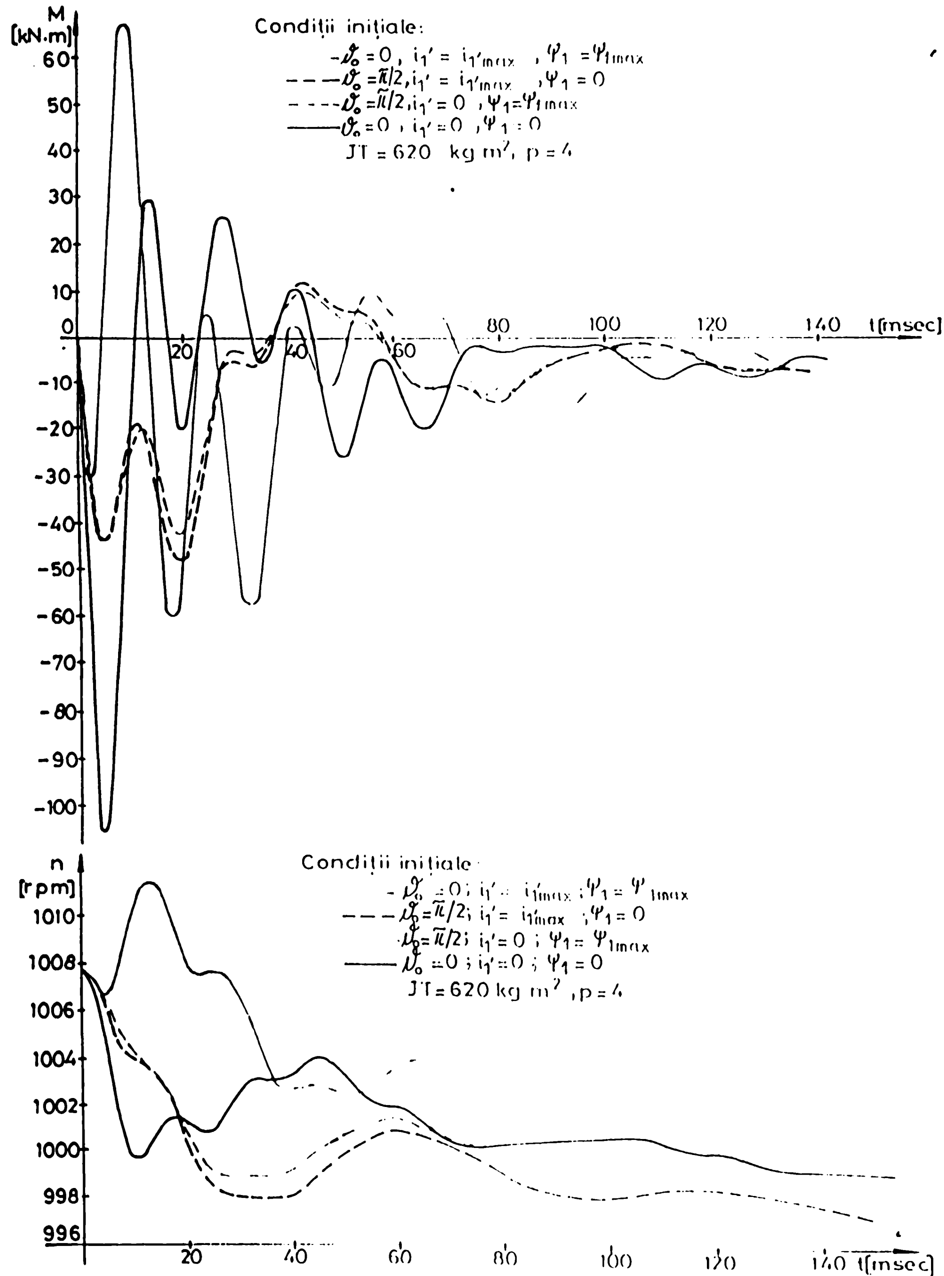
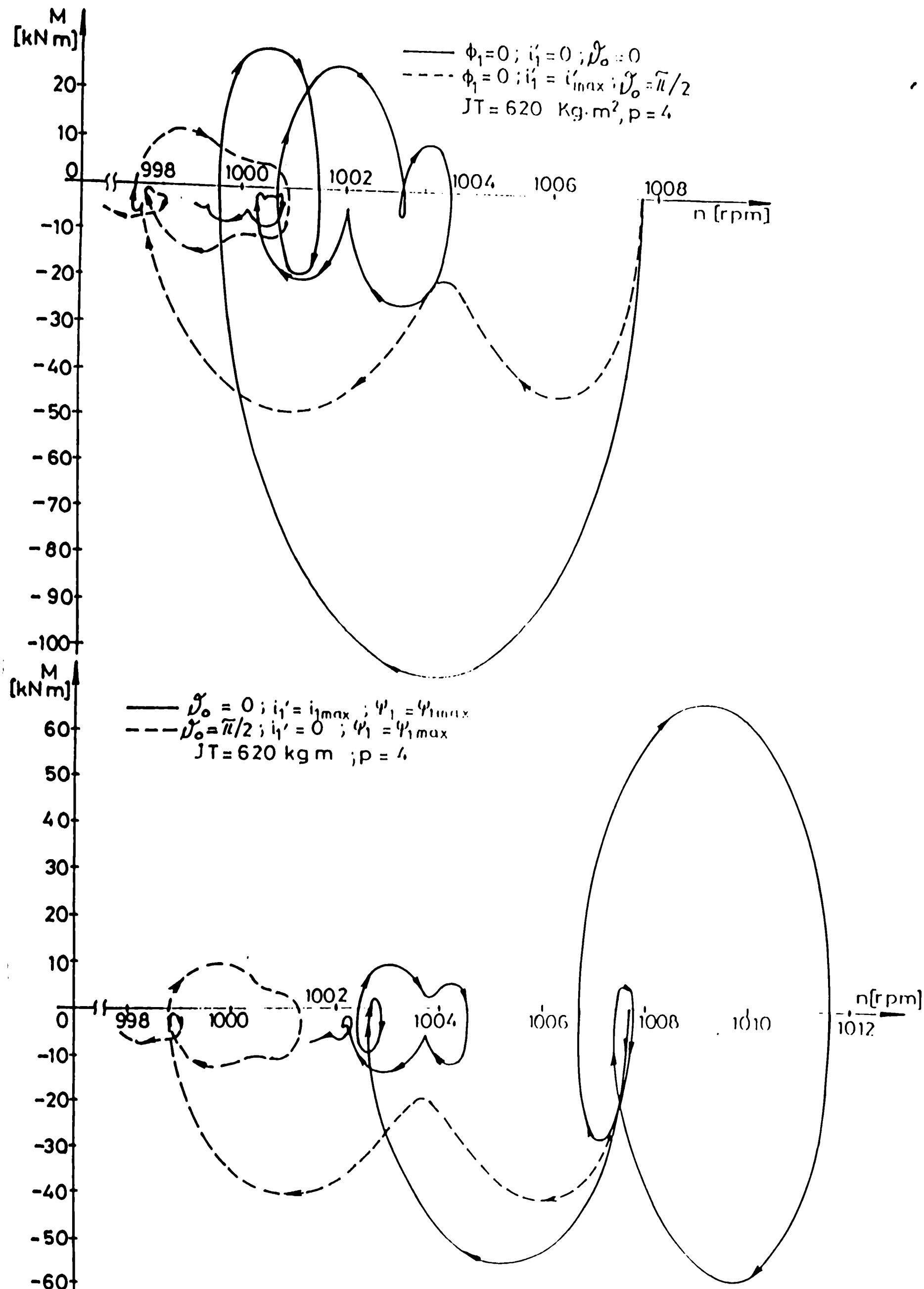
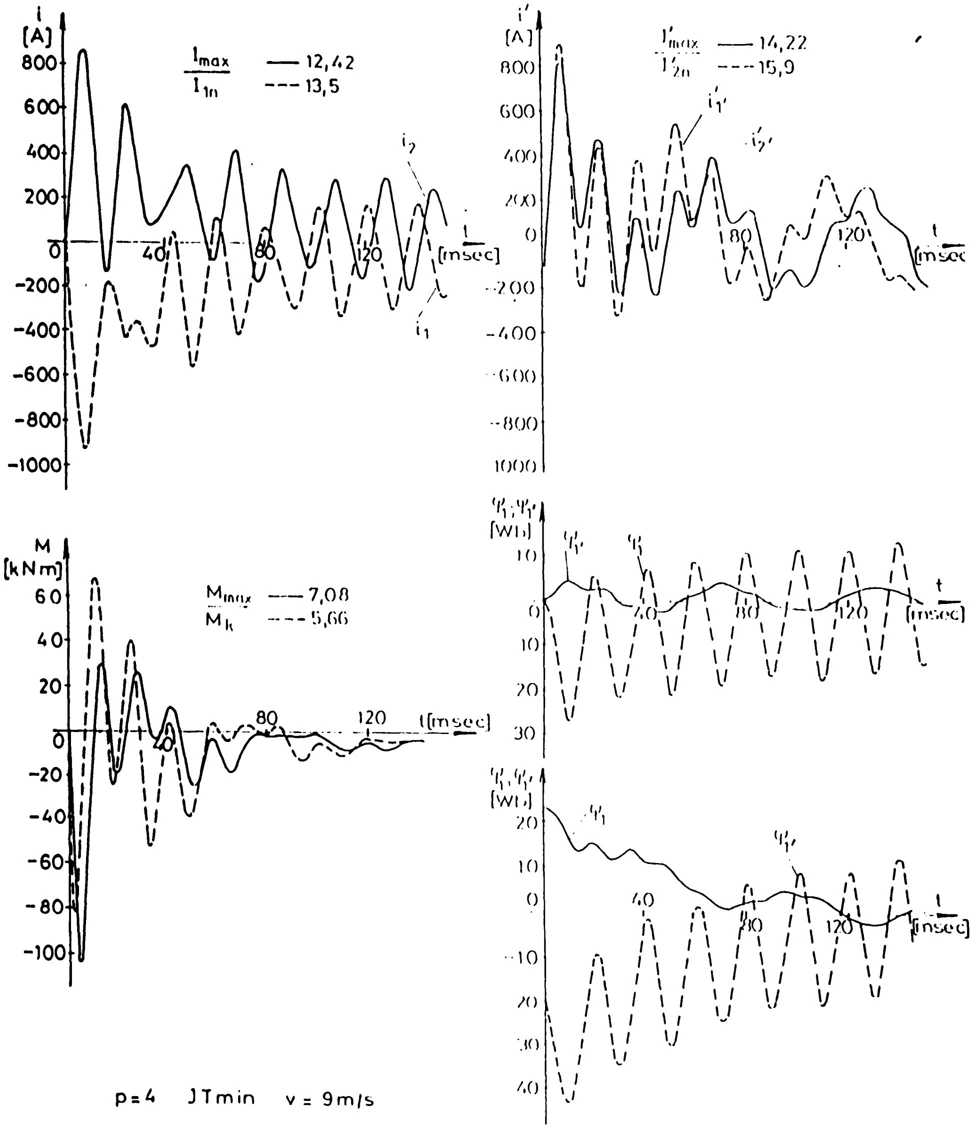

M
[kN.m]
Condiţii iniţiale:
ϑo = 0 , i1' = i1'max , Ψ1 = Ψ1max
ϑo = π/2, i1' = i1'max , Ψ1 = 0
ϑo = π/2, i1' = 0 , Ψ1 = Ψ1max
ϑo = 0 , i1' = 0 , Ψ1 = 0
JT = 620 kg m², p = 4
t[msec]
n
[rpm]
Condiţii iniţiale
ϑo = 0; i1' = i1'max ; Ψ1 = Ψ1max
ϑo = π/2; i1' = i1'max ; Ψ1 = 0
ϑo = π/2; i1' = 0 ; Ψ1 = Ψ1max
ϑo = 0 ; i1' = 0 ; Ψ1 = 0
JT = 620 kg m², p = 4
t[msec]

Fig.7.3o



M [kN m]
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
998
1000
1002
1004
1006
1008
n [rpm]
$\phi_1 = 0$; $i_1' = 0$; $\vartheta_o = 0$
$\phi_1 = 0$; $i_1' = i_{max}'$; $\vartheta_o = \pi/2$
JT = 620 Kg·m², p = 4
M [kN m]
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
998
1000
1002
1004
1006
1008
1010
1012
n[rpm]
$\vartheta_o = 0$; $i_1' = i_{1max}$; $\psi_1 = \psi_{1max}$
$\vartheta_o = \pi/2$; $i_1' = 0$; $\psi_1 = \psi_{1max}$
JT = 620 kg m ; p = 4

Fig.7.31



p=4   JTmin   v = 9m/s

Condiții inițiale: fluxurile statorice și rotorice în opoziție de fază

—— $\Psi_{10} = -\Psi_{1max}$; $\Psi'_{10} = \Psi'_{1max}$ - - - $\Psi_{10} = 0$; $\Psi'_{10} = 0$

Fig.7.32

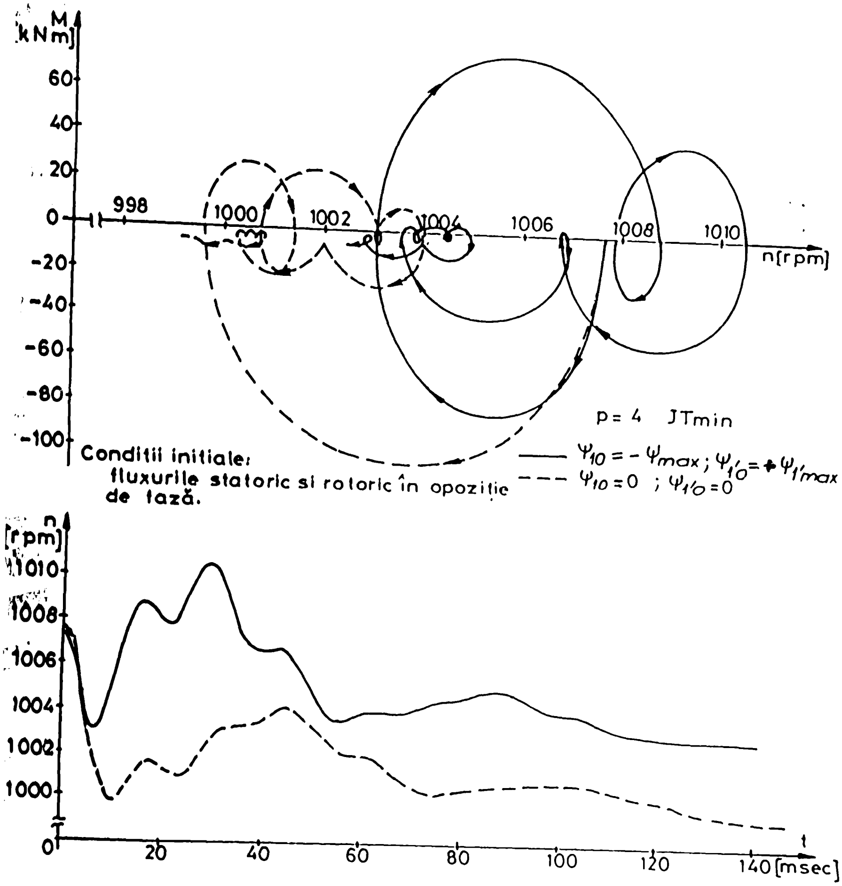


Fig.7.33

notează cu "moment de timp".

Curentul statoric se notează cu i, cel rotoric cu iar cuplul electromagnetic cu M. Condițiile inițiale ale procesului tranzitoriu în care se obțin valorile prezentate sînt simbolizate prin precizarea defazajului dintre fluxurile statoric și rotoric, precum și valorile lor la momentul t=0, , respectiv

Nr. crt.	Mărimea	Condiţii iniţiale: fluxurile statoric şi rotoric sînt:														
		în fază, $\psi_{1o}=\psi_{1max}$, $\psi_{1'0}=\psi_{1'max}$			defazate cu $\pi/2$, $\psi_{10}=0$; $\psi_{1'0}=\psi_{1'max}$			defazate cu $\pi/2$ $\psi_{10}=-\psi_{1max}$, $\psi_{1'0}=0$			opoziţie de fază $\psi_{10}=0$, $\psi_{1'0}=0$			opoziţie de fază $\psi_{10}=-\psi_{1max}$, $\psi_{1'0}=\psi_{1'max}$		
		Valoare numerică UM	Valoare raportată	Moment de timp (min)	Valoare numerică UM	Valoare raportată	Moment de timp (msec)	Valoare numerică UM	Valoare raportată	Moment de timp (msec)	Valoare numerică UM	Valoare raportată	Moment de timp (msec)	Valoare numerică UM	Valoare raportată	Moment de timp (msec)
1.	i_{max}	195,29 A	2,82	122,2	+505,4 A	7,30	21,7	+493,5 A	7,13	23,7	+856,4 A	12,36	8,22	+164,8 A	2,38	120,7
2.	i_{min}	−578,73	8,36	33,7	−300,35 A	4,34	30,7	−344,2 A	4,97	31,7	−180,9 A	2,61	77,7	−935,2 A	13,5	8,22
3.	i'_{max}	+560,89 A	9,7	35,7	493,0 A	8,52	22,7	469,91 A	8,12	21,7	822,36 A	14,2	7,58	+919,03 A	15,39	6,94
4.	i'_{min}	−235,33 A	4,07	72,7	−194,84 A	3,37	118,7	−188,1 A	3,25	115,7	−206,58 A	3,57	90,7	−325,9 A	5,63	29,7
5.	M_{max}	+67,22 kN.m	4,53	8,86	+12,02 kN.m	0,81	42,7	10,99 kN.m	0,74	42,7	29,55 kN.m	2,0	13,7	78,04 kN.m	5,26	11,42
6.	M_{min}	−60,31 kN.m	4,07	17,7	−48,7 kN.m	3,28	18,7	−43,75 kN.m	2,95	5,34	−105,8 kN.m	7,13	5,02	−84,82 kN.m	5,72	3,42

ψ_{10}, $\psi_{1'0}$.

Valoarea curentului nominal este de 69,261 A pentru stator respectiv de 57,85 A pentru rotor redus la stator, iar valoarea cuplului critic - cu efect pelicular - este de 14,83 kN.m.

Prin urmare, procesul tranzitoriu electromagnetic în care apar cele mai mari solicitări electromagnetice şi mecanice este cel corespunzător reconectării la momentul în care fluxul statoric al unei faze este în opoziţie de fază cu cel rotoric, ambele avînd valori maxime.

In calcule, s-a considerat că momentul de inerţie al sistemului turbină eoliană-multiplicator al vitezei de rotaţie are valoarea maximă, egală cu 620 kg.m^2. Considerarea valorii maxime a momentului de inerţie, JT_{max}=2315 kg.m^2, conduce la un proces tranzitoriu electromagnetic cu solicitări electromagnetice şi mecanice mai mici decît în cazul în care momentul de inerţie are valoarea minimă, iar viteza de rotaţie se modifică mult mai puţin pe durata regimului tranzitoriu electromagnetic (fig.7.34) comparativ cu cazul considerării valorii minime a momentului de inerţie. Se consideră că procesul tranzitoriu are aceleaşi condiţii iniţiale - respectiv aceleaşi valori pentru toate mărimile, excepţînd valoarea momentului de inerţie.

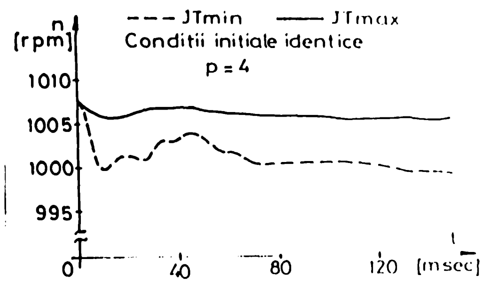


Fig.7.34

Valoarea momentului de inerţie al sistemului turbină eoliană-multiplicator al vitezei de rotaţie, influenţează şi valorile curenţilor ce se obţin în timpul procesului tranzitoriu, precum şi a cuplului electromagnetic (fig.7.35).

Valorile de vîrf obţinute în situaţia funcţionării cu moment de inerţie avînd valoarea maximă faţă de situaţia funcţionării cu moment de inerţie de valoare minimă, sînt mai mici cu: 11,8 % pentru curentul statoric, 11,6% pentru curentul rotoric şi 25,75% pentru cuplul electromagnetic. In schimb, la sfîrşitul procesului tranzitoriu electromagnetic, viteza de rotaţie este

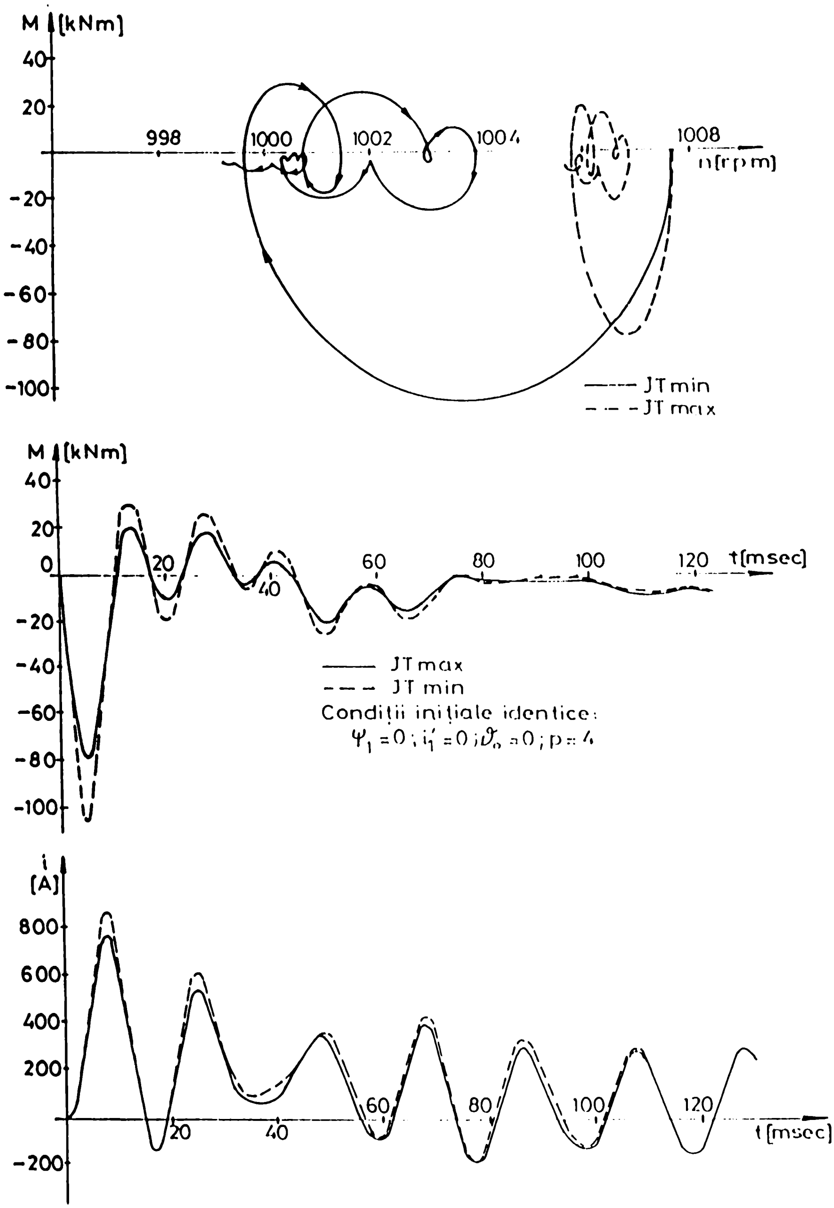

M [kNm]
40
20
-20
-40
-60
-80
-100
998
1000
1002
1004
1008
n[rpm]
JT min
JT max
M [kNm]
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
20
40
60
80
100
120
t[msec]
JT max
JT min
Condiţii iniţiale identice:
$\Psi_1 = 0$; $i_1' = 0$; $\vartheta_0 = 0$; $p = 4$
i [A]
800
600
400
200
-200
20
40
60
80
100
120
t[msec]

Fig.7.35

mai mare, respectiv alunecarea este cu 1% mai mare.

După aproximativ 60 msec, valoarea momentului de inerție numai influențează decît variația vitezei de rotație în timp. Aceasta se modifică de aproximativ 2 ori mai lent în situația considerării valorii maxime pentru momentul de inerție decît în situația considerării valorii minime a acestuia.

Dacă se neglijează pierderile în fier, procesul tranzitoriu este caracterizat de sistemul de ecuații (6.50), iar condițiile inițiale - în cazul reconectării în momentul în care fluxurile statoric şi rotoric sînt în opoziție de fază, cu valori nule, sînt date de relațiile (7.13).

Modificarea vitezei de rotație în timp, comparativ cu situația în care se consideră pierderile în fier, este prezentată în fig.7.36, iar în fig. 7.37, sînt prezentate - comparativ - variația în timpul procesului tranzitoriu electromagnetic a curentului statoric, respectiv a cuplului electromagnetic, precum şi dependența cuplului electromagnetic de viteza de rotație.

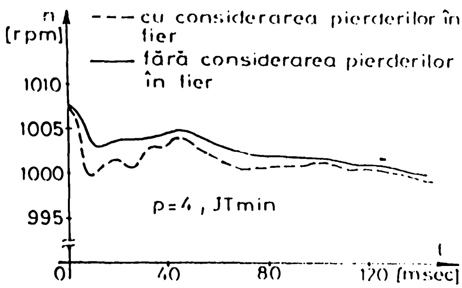


Fig.7.36

Neglijarea pierderilor în fier conduce la valori de vîrf mai mici pentru curenți şi pentru cuplul electromagnetic, respectiv valori mai mici cu 24 % în cazul curentului statoric,cu 21.86% în cazul curentului rotoric şi cu 46,46% în cazul cuplului electromagnetic, decît în situația în care - în aceleaşi condiții inițiale - se consideră pierderile în fier.

In cazul reconectării cu fluxurile statoric şi rotoric în opoziție de fază, se prezintă în fig.7.38 variația în raport cu timpul a celor trei curenți statorici, respectiv rotorici, precum şi variația fluxurilor magnetice statorice de durata procesului tranzitoriu electromagnetic.

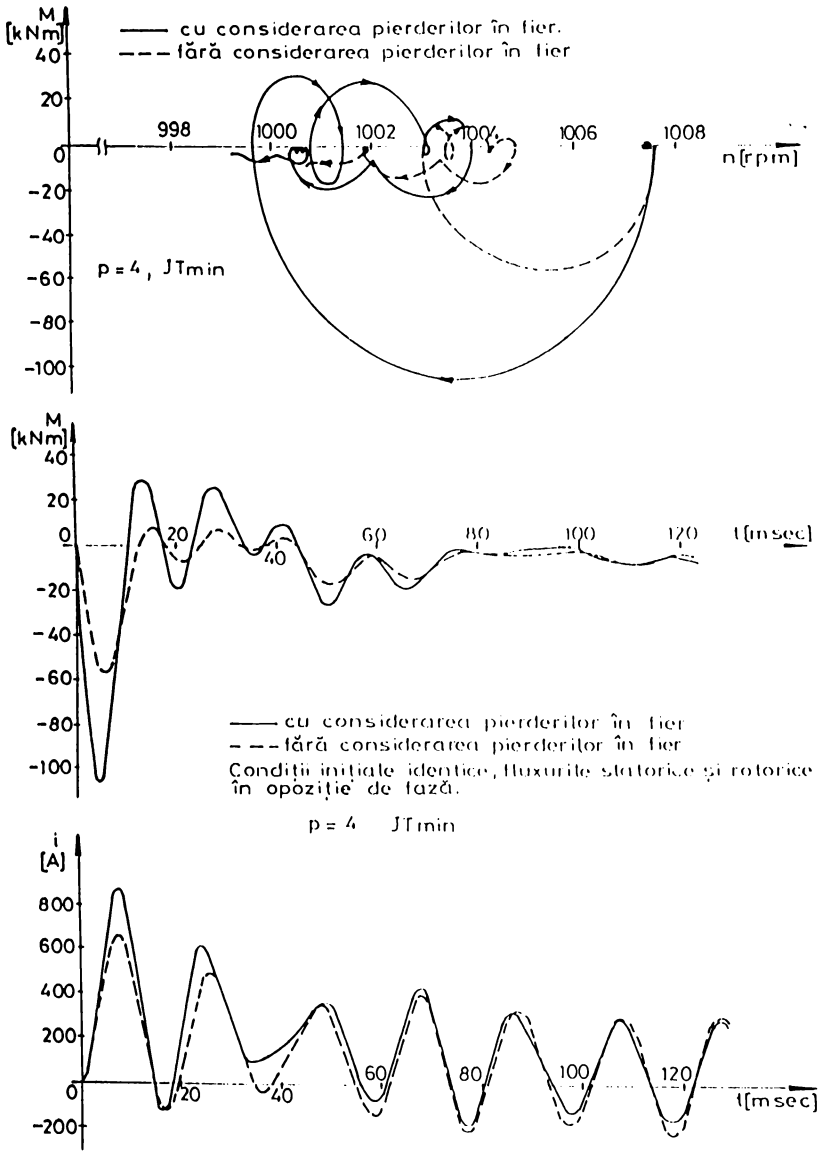
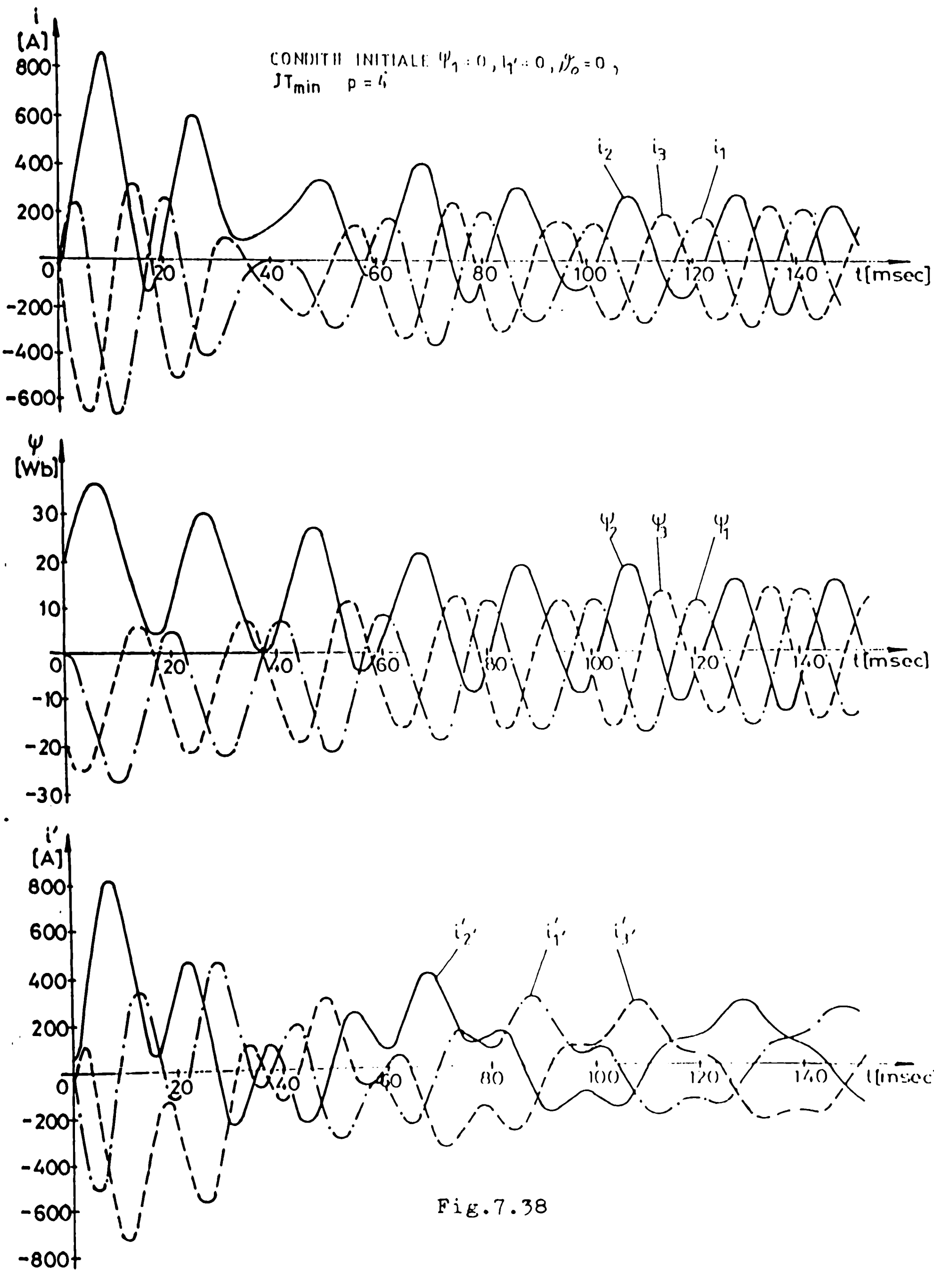

M
[kNm]
—— cu considerarea pierderilor în fier.
--- fără considerarea pierderilor în fier
998
1000
1002
1004
1006
1008
n[rpm]
p = 4, JTmin
M
[kNm]
t[msec]
—— cu considerarea pierderilor în fier
--- fără considerarea pierderilor în fier
Condiţii iniţiale identice, fluxurile statorice şi rotorice în opoziţie de fază.
p = 4 JTmin
i
[A]
t[msec]

Fig.7.37



CONDITII INITIALE $\psi_1 = 0$, $i_1' = 0$, $\vartheta_0 = 0$,
JT_{min} p = 4
i [A]
800
600
400
200
0
-200
-400
-600
i_2 i_3 i_1
20
40
60
80
100
120
140
t[msec]
ψ [Wb]
30
20
10
0
-10
-20
-30
ψ_2 ψ_3 ψ_1
t[msec]
i' [A]
800
600
400
200
0
-200
-400
-600
-800
i_2' i_1' i_3'
t[msec]

Fig.7.38

Durata procesului tranzitoriu electromagnetic este de aproximativ 160–200 msec, ea fiind mai mică în cazurile în care solicitările în timpul procesului sînt mai mici, respectiv în situaţia în care la reconectare fluxurile magnetice statoric şi roteric sînt defazate cu $\pi/2$. Dacă se consideră că procesul tranzitoriu electromagnetic s-a încheiat la momentul de timp la care viteza de rotaţie este continuu descrescătoare, deci maşina încetineşte continuu, atunci durata lui este cuprinsă între 120–150 msec.

Regimul tranzitoriu nu se încheie însă, deoarece pînă la cel stabil, mărimile electrice, magnetice şi mecanice continuă să se modifice în timp. Partea a doua a regimului tranzitoriu-considerată din momentul în care viteza de rotaţie scade continuu în timp (fig.7.39) pînă la atingerea punctului de funcţionare stabilă-se caracterizează prin valori ale curenţilor oscilînd între 2,75–3,5 ori valoarea nominală, pe aproximativ 80% din durata ei, după care curenţii încep să scadă. In fig.7.40 s-a reprezentat variaţia cuplului electromagnetic pe durata trecerii, iar în fig. 7.41 s-a reprezentat dependenţa cuplului de viteza de rotaţie în cazul regimului tranzitoriu, respectiv în cazul regimului permanent.

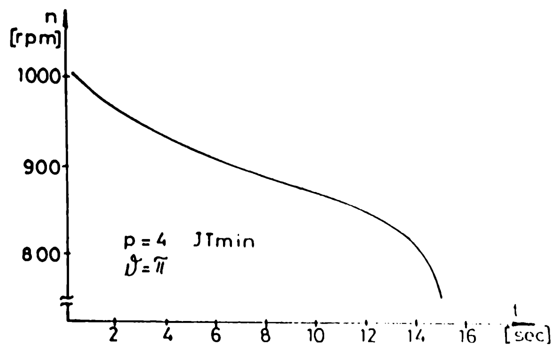


Fig.7.39

De asemenea în fig.7.42 s-a prezintă variaţia curentului unei faze statorice pe intervalul de timp de 0,6 secunde înainte de atingerea punctului de funcţionare stabilă.

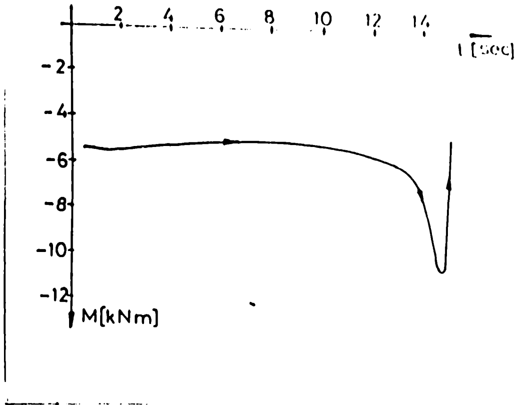


Fig.7.40

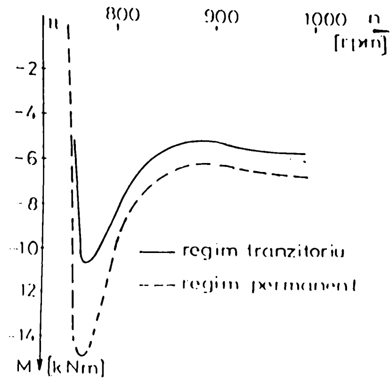


Fig.7.41

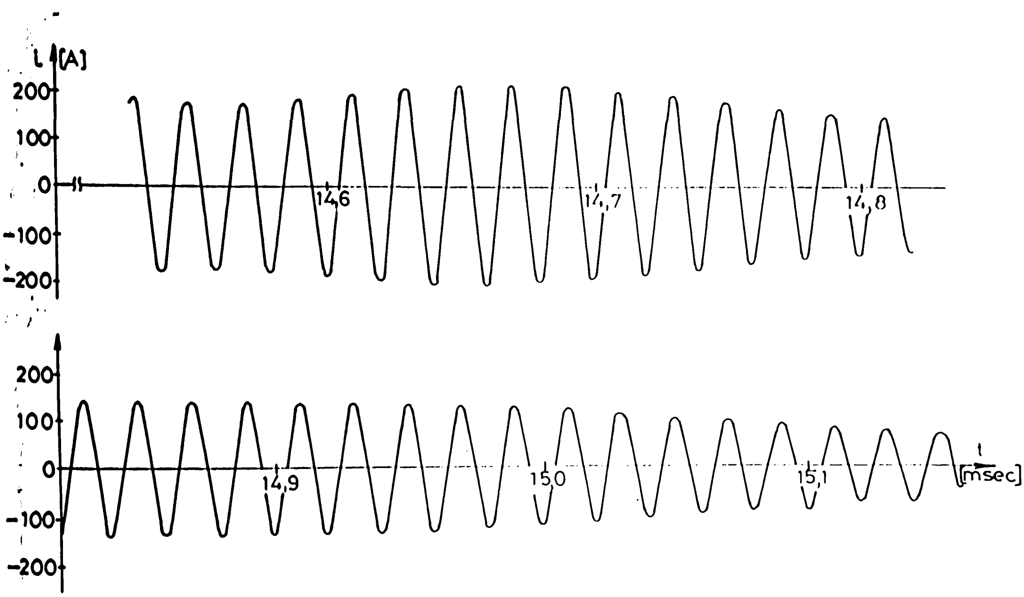


Fig.7.42

7.3. Incercări experimentale

Pentru a se verifica experimental rezultatele obținute din calcul, s-au realizat măsurători și oscilografieri de curenți la deconectare și reconectare, în cazul unei mașini de inducție cu rotorul în colivie avînd două trepte ale vitezei de rotație, respectiv 1500/1000 rpm, cu înfășurări distincte, puterea nominală de 3,3/1 kW, curentul nominal statoric de 8,89/3,9 A, tensiunea nominală de 380 V și conexiunea stea a ambelor înfășurări statorice.

In fig.7.43 este prezentată schema monofilară a instalației cu care s-au realizat încercările, iar în figura 7.44 este prezen-

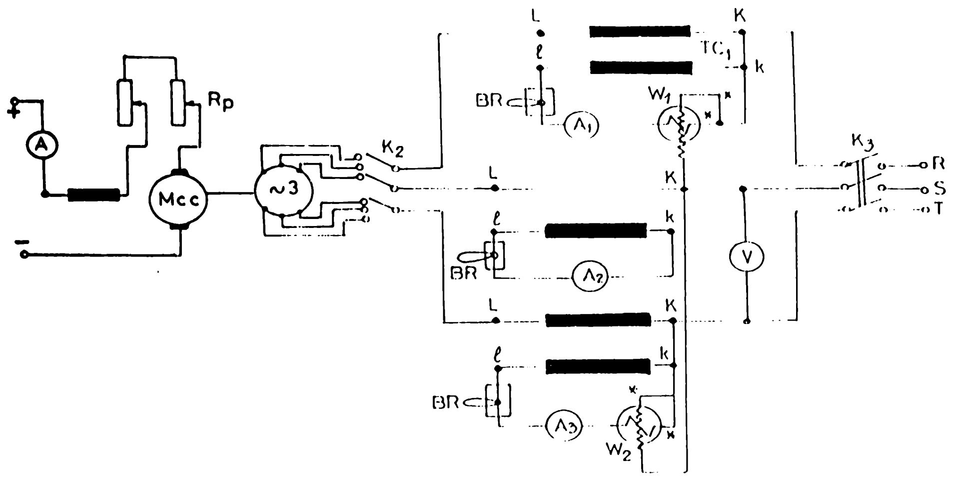


Fig.7.43

tată instalația.

S-au oscilografiat curenții înfășurărilor statorice i_1, i_2, i_3, respectiv tensiunea de linie, u_{23}, în cazul deconectării de la rețea a mașinii funcționînd la treapta de 1500 rot/min (fig.7.45). Din studiul oscilogramei rezultă că tensiunea la bornele înfășurării statorice în gol, scade după 20 msec (după o perioadă) la 37,5% din valoarea ei nominală, iar curenții la același moment de timp scad la 7,9 % din valoarea dinaintea deconectării (momentul $t=0\_$), iar după 80 msec, procesele electromagnetice s-au stins complet.

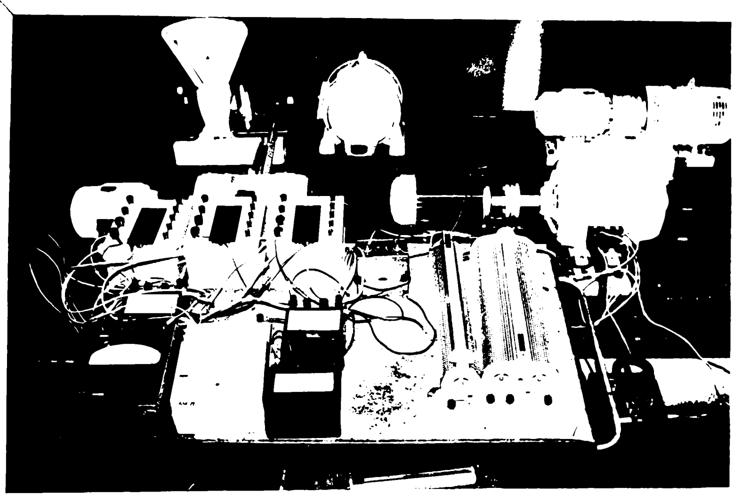


Fig.7.44

Reconectarea la viteza mică de rotaţie (corespunzătoare numărului de perechi de poli ai maşinii egal cu 3) - fig.7.56 evidenţiază faptul că în primele 10 msec de la deconectare apare pe o fază statorică - un şoc de curent de aprox.7 ori curentul nominal, dar după 80 msec, curenţii statorici scad de aproximativ 3 ori, menţinîndu-se însă la valori de 2 ori curentul nominal.

Comparînd rezultatele experimentale cu cele calculate, se observă că experimental se obţin şocuri mai mici de curent, iar alura curbelor de variaţie este asemănătoare cu cazul obţinut la reconectarea în fază - calculată (fig.7.29).

La deconectarea de la viteza de rotaţie mică (de la p=3) (fig.7.47) fenomenele sînt mai lente. Astfel, după 20 msec, tensiunea la bornele înfăşurării statorice în gol scade de 30% din valoarea nominală, iar curenţii obţin valori reprezentînd aproximativ 15% din valoarea nominală, dar - după 80-100 msec, atît tensiunea cît şi curenţii sînt zero.

Reconectarea la viteza de rotaţie mare, corespunzătoare numărului de perechi de poli p=2 (fig.7.48) conduce la şocuri de curenţi de aproximativ 6 ori curentul nominal, vîrful de curent

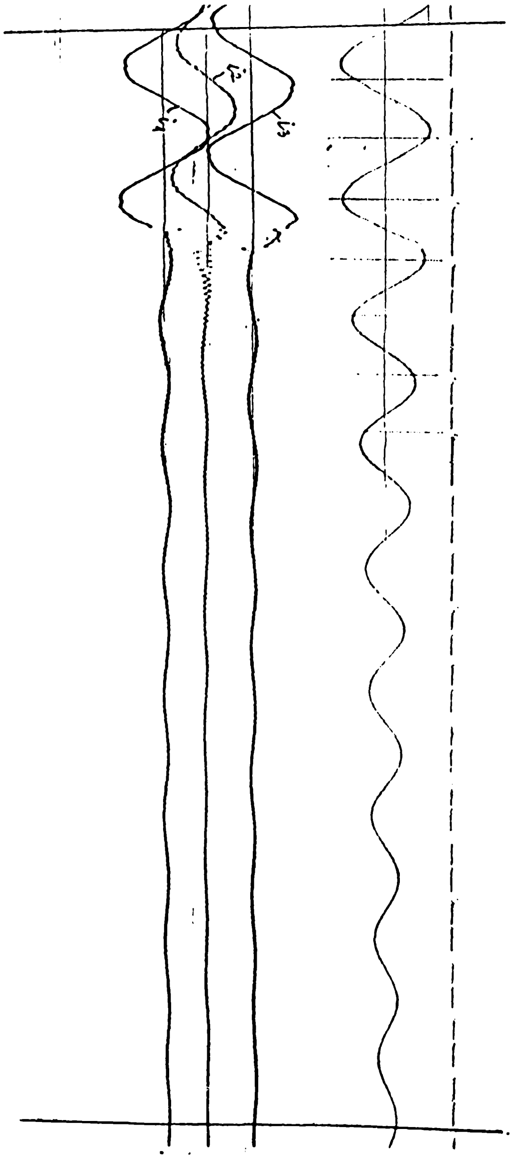


Fig.7.45

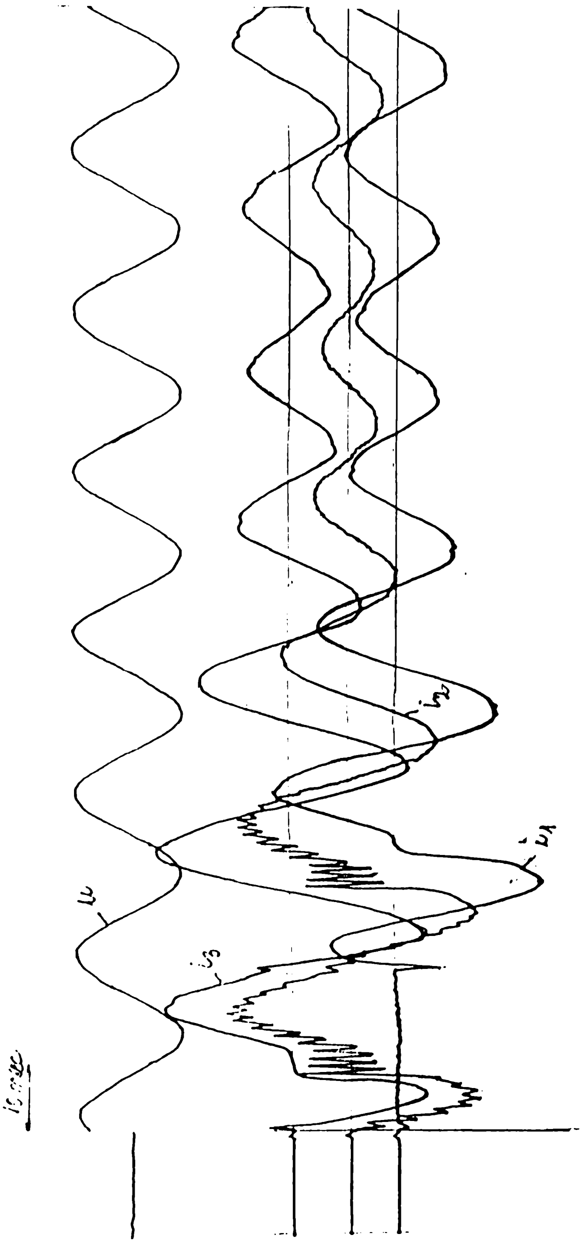


Fig. 7.46

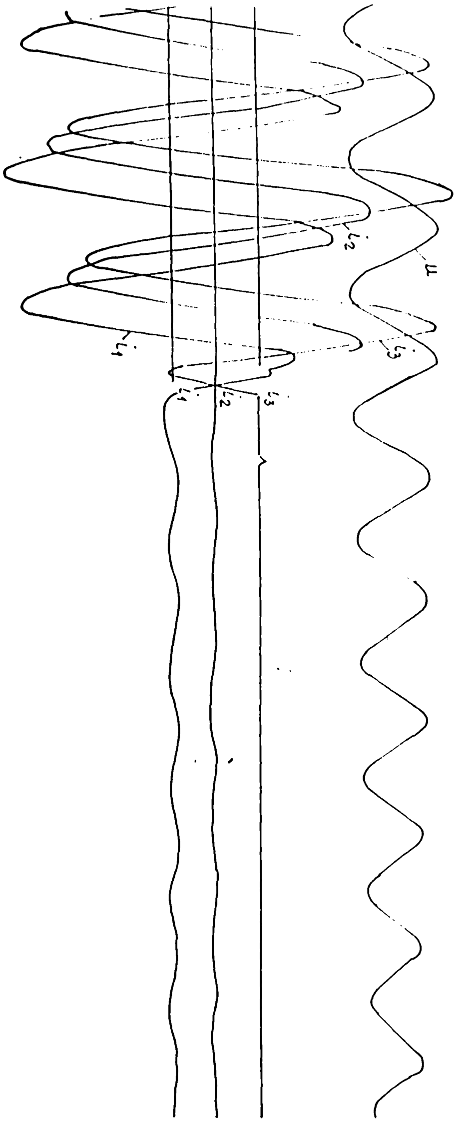


Fig. 7.47

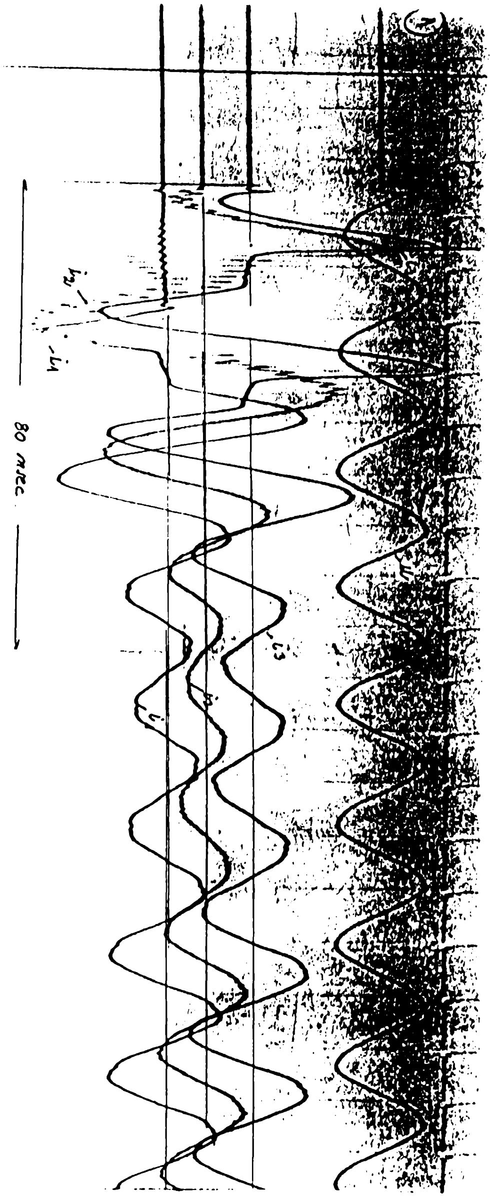


Fig.7.48

cel mai mare obținîndu-se așa cum s-a obținut și din calculele numerice - la aproximativ 10 msec de la reconectare (fig.7.15-reconectarea cu fluxurile statoric și rotoric în fază). Curenții se amortizează rapid, astfel încît la 120 msec de la reconectare regimul s-a stabilizat, valorile curenților fiind de 1,5 ori mai mari decît curentul nominal.

Încercările experimentale deși efectuate pe o mașină de putere mică, au scos în evidență faptul că - după aproximativ 10 msec de la reconectare apar vîrfurile de curent, care se amortizează rapid (aproximativ 80 msec), tinzînd spre valori cu puțin mai ridicate decît valoarea nominală, rezultat obținut și pe cale analitică, din rezolvarea numerică a sistemului de ecuații ce descriu coportarea mașinii.

8. CONCLUZII FINALE

În lucrare au fost elaborate ecuaţiile ce caracterizează funcţionarea maşinii de inducţie cu rotor în scurtcircuit, în regim tranzitoriu, cu considerarea pierderilor în fier.

Dacă în timpul procesului tranzitoriu, viteza de rotaţie poate fi considerată constantă sau dacă ea se consideră constantă pe anumite intervale de timp, rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale atît la deconectare cît şi la reconectare, se poate face utilizînd calculul operaţional. Au fost calculate expresiile generale ale admitanţelor operaţionale Y(p), cu ajutorul cărora se poate studia în continuare comportarea maşinii în regim tranzitoriu.

Dacă în timpul procesului tranzitoriu viteza de rotaţie a maşinii nu poate fi considerată constantă - cazul trecerii de la o viteză de rotaţie la cea de a doua - rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale ce caracterizează comportarea maşinii la deconectare, respectiv la reconectare, se face aplicînd metode de integrare numerică. În lucrare s-a elaborat o metodă numerică de calcul, precum şi programe de calcul pentru studiul proceselor tranzitorii ce apar în maşina de inducţie la trecerea de la o viteză de rotaţie la cea de a doua, cu considerarea pierderilor în fier atît în stator cît şi în rotor.

Rezultatele experimentale scot în evidenţă o bună concordanţă între teorie, calcul numeric şi experiment.

Studiindu-se procesele tranzitorii dintr-o maşină electrică ca generator într-o instalaţie eoliană - ,lucrarea pune la dispoziţia utilizatorilor instalaţiei, date de calcul privind comportarea maşinii electrice în regimurile tranzitorii.

Din punct de vedere teoretic s-a realizat elaborarea ecuaţiilor pentru regim tranzitoriu sub formă completă, considerînd pierderile în fier, din care se deduce prin particularizare forma uzuală a ecuaţiilor pentru maşini trifazate simetrice. Această formă generală constituie o generalizare a ecuaţiilor în teoria celor două axe şi ca urmare o dezvoltare a teoriei maşinilor electrice.

Prin elaborarea programelor de calcul numeric şi pune la dispoziţia celor interesaţi un mod concret de soluţionare numerică a ecuaţiilor neliniare din teoria celor două axe şi prin aceasta se uşurează în mare măsură abordarea concretă a studiului regimurilor tranzitorii, importante azi mai ales pentru acţionări electrice de inducţie asociate cu convertoare.

In ansamblu se poate conclude că lucrare a permis facerea unui pas inainte, verificat atît prin calcul numeric cît şi experimental, ceea ce asigură valabilitatea studiului efectuat.

BIBLIOGRAFIE

1. ANDRONESCU,PL. - Bazele electrotehnicii,Vol.I-II, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti,1972.

2. ANGOT,A. - Complemente de matematici pentru regimuri din electrotehnică şi din telecomunicaţii,Editura tehnică,Bucureşti,1965.

3. ANTONIU,I.S.,ANA AMUZESCU şi alţii - Calculul circuitelor electrice în regimuri normale şi anormale de funcţionare,Editura tehnică,Bucureşti,1975.

4. ANTONIU,I.S.- Bazele electrotehnicii,Vol.I-II,Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti,1974.

5. ARNOLD,V.I.-Ecuaţii diferenţiale ordinare - Editura ştiinţifică şi enciclopedică,Bucureşti,1978

6. BALABANIAN,N.ş.a.-Teoria modernă a circuitelor electrice,Editura tehnică,Bucureşti,1974.

7. BARGATHI,ALEX.,RAMACHDRAN,K.-Efficiency optimization of self excited induction generators using series capacitors - Proceeding of International Conference on Electrical Machines - Milano,1988,pag. 453-456.

8. BALA,C. - Maşini electrice, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti,1979.

9. BERINDE,E. - Maşina de inducţie cu rotor în colivie,generator într-o instalaţie aeroelectrică - Inst.Politehnic Timişoara,Seminar tehnico-ştiinţific, 26 martie,1988.

10. BERINDE,E.- Ecuaţiile maşinilor de curent alternativ - Inst. Politehnic Timişoara,seminar tehnico-ştiinţific 29 iunie,1988.

11. BERMAN,G.-Problèmes d'analyse mathématique - Editions MIR, Moscova,1976.

12. BOLDEA,I.,ATANASIU,GH.-Analiză unitară a maşinilor electrice, Editura Academiei RSR,Bucureşti,1983.

13. BOLDEA,I.,NASAR,S.A.-Unified tratment of core losses and saturation in the orthogonal -axis model of electric machines-IEE Proceedings vol.134, no.6,november 1987.

14. BUCUR,C.M.-Metode numerice - Editura Facla,Timişoara,1973.

15. CIOC,I.ş.a.-Maşini electrice. Indrumar de proiectare,vol.II, Editura Scrisul romănesc Craiova,1981.

16. CAMPEANU,A. - Maşini electrice, Editura Scrisul romănesc, Craiova,1988.

17. CORDUNEANU,A.- Ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în electrotehnică,Editura Facla,Timişoara,198

18. DANILIEVICI,Ia.B.,ş.a.-Parametrii maşinilor de curent alternativ,Editura tehnică,Bucureşti,1968.

19. DRAGANESCU,O.GH.-Incercările maşinilor electrice rotative-Editura tehnică,Bucureşti,1987.

20. DEMIDOVITCH,B.ş.a.-Recuiel d'encrcices et de problèmes d'analyse mathématique,Editions MIR,Moscova,1987.

21. DEMIDOVITCH,B.P.,MARON,I.A.-Computational Mathematics-Edition,MIR,Moscova,1976.

22. DE SABATA,I.-Bazele electrotehnicii, Litografia Inst.Politehnic Timişoara,198

23. DODESCU,GH.- Metode numerice în algebră,Editura tehnică,Bucureşti,1979.

24. DORDEA,T.-Maşini electrice,Editura didactică şi pedagogică, 1970.

25. DORDEA,T.-Asupra ecuaţiilor maşinilor electrice de curent alternativ,studii şi cercetări de energetică şi electrotehnică,tom.16,nr.1,1966,pag.17-31.

26. DORDEA,T.-Asupra cuplului electromagnetic al maşinilor electrice - studii şi cercetări de energetică şi electrotehnică,tom.18,nr.1,1968,pag.131-146.

27. DORDEA,T.- Beitrag Zur Zweiachsentheorie der electrischen Maschinen-Archiv für Elektrotechnik",50 Band,6.Heft,1966,pag.362-371.

28. DORDEA,T.- Proiectarea şi construcţia maşinilor electrice, vol.1-partea 1-2,Litografia IPTV Timişoara,1982.

29. DORDEA,T.,BERINDE,E.-Instalaţie aeroelectrică cu generator de inducţie avînd două viteze de rotaţie - Sesiune tehnico-ştiinţifică,Institutul politehnic Timişoara,Fac.de Electrotehnică,3o martie,1987.

30. DORDEA,T.,BERINDE,E.-Funcţionarea unei instalaţii aeroelectrică cu generator de inducţie cu două viteze de rotaţie - Eficienţă în proiectarea,fabricarea şi exploatarea maşinilor electrice,Timişoara,9-10 oct.1987, pg.20-32.

31. FOX,L.- Numerical solution of ordinary and partial differential equations-Pergamon Pres,N.Y.,1962.

32. FUCHS,E.F.,ERDEHJI,E.A.-Nonlinear magnetic field analysis of DC machines-IEE Transaction on Power Apparatus and Systems, vol.PAS-89,no.7,sept.-oct.1970.

33. GRESCEV,I.I.-Metodî isledovanie maşin peremenevo toca-Energhia Leningrad,1969.

34. HELER,A.,-Electrotehnică şi maşini electrice,vol.II-Litografia Institutului politehnic "Traian Vuia" Timişoara,1981

35. HUA,T.Q.,TURNER L.R.- Coupling between eddy currents and rigid body rotation:analysis,computation and experiments-IEE Transaction on Magnetics vol.MAG-21,nov,6,1985.

36. IACOB,C.ş.a.-Matematici clasice şi moderne -vol.1-4,Editura tehnică,Bucureşti,1978.

37. ILIE,V.,ALMASI,L.ş.a.-Utilizarea energiei vîntului-Editura tehnică,Bucureşti,1984.

38. ILIE,V.-Energia vîntului, Editura tehnică,Bucureşti,1982.

39. IOANIDES,M.G.,TEGOPOULOS,I.A.-Controlled self-excited type asynchronous generator-Proceedings og ICEM Milano 1988,pag.435-439.

40. IVANOV,A.A.-Generator asincron pentru centrale hidroelectrice de putere mică - Editura energetică de Stat,Bucureşti,1952.

41. IXARU,L.-Metode numerice pentru ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii,Editura Academiei RSR,Bucureşti,1979.

42. KAPLAN,B.-Z,KOTTICH,D.-A compact representation of synchronous motors and nonregulated synchronous generators -IEE Transactions on Magnetics,vol.MAG-21,no.6,nov.1985.

43. KLADAS,A.,RAZEK,A.-Numerical calculation of eddy currents and losses in squirrel cage motors due to supply harmonics-Proceedings og ICEM,Milano,1988,pg.65-69.

44. KONTONOVICI,M.I.-Calculul operaţional şi fenomene tranzitorii în circuitele electrice,Editura energetică de Stat,Bucureşti,1955.

45. KOSTENKO,M.,PIOTROVSKI,L.-Machines electriques,Editions MIR Moscova,1977.

46. KOVACS,K.P.-Analiza regimurilor tranzitorii ale maşinilor electrice,Editura tehnică,Bucureşti,1980.

47. LAW,A.,DAUBT,H.,COOPER,B.-Power control systems for the orkney wind-turbine generators,G.E.-Engeneering, 2,1984.

48. LUI TZEN-HU, GAO HA TANG GONG-FU : Calculational and optimal solution of capacitance for wind driver double speed induction generator-Proceeding of ICEMADS-Eforie,1986.

49. MARINESCU,GH.-Analiză numerică,Editura Academiei RSR,Bucureşti,1974.

50. MARINESCU,GH.ş.a.-Probleme de analiză numerică,Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti,1978.

51. MARINESCU,GH.ş.a.-Probleme de analiză numerică rezolvate cu calculatorul,Editura Academiei RSR,Bucureşti, 1987.

52. MIHALACHE,A- Determinarea parametrilor interni ai motorului asincron utilizînd datele de catalog EEA Electrotehnică,vol.34,no.6,aug.1986.

53. MOTGOMERY,J.G.-100 kW VWAT în operation on scillx Isles-Wind-directions,vol.VII,no.2,oct.1987,pg.14.

54. MOSZYNSKI,K.-Metode numerice de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale ordinare-Editura tehnică,Bucureşti, 1973.

55. NIEMENMAA,A.- Complex reluctivity modelling of iron losses in induction machines-Proceedings of ICEM, Milano,1988,pag.633-636.

56. PAPADOPOULOS,M.,MALATESTAS,P.,TEGOPOULOS,I.-Transient fehaviour of induction generator with terminal capacitors-Proceedings of ICEM,Milano,1988,pag.559-564.

57. PRICOV,N.AL.-Influenţa efectului pelicular tranzitoriu apărut în timpul, respectiv la deconectarea scurtcircuitelor asupra distribuţiei cimpului electromagnetic din căile de curent-EEA Electrotehnică 34,nr.6,aug.1986.

58. PREDA,M.,CRISTEA,P.,SPINCI,S.-Analiza circuitelor electrice neliniare în regim tranzitoriu - Litografia Inst.Politehnic Bucureşti,1973.

59. PREDA,M.,CRISTEA,P.,MANEA,F.-Bazele electrotehnicii,Probleme-Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti,1980.

60. RACOVEANU,N.ş.a.-Metode numerice pentru ecuaţii cu derivate parţiale de tip hiperbolic,Editura tehnică,Bucureşti,1976.

61. RAINA,G.,MALIK,U.P.-Wind energy conversion using self-excited induction generators-IEE Transaction on Power Apparators and Systems,PAS-102,nr.12,dec.1983

62. RADULET,R.-Bazele elecrtotehnicii,Probleme,vol.1-2,Editura didactică şi pedagogică Bucureşti,1981.

63. RICHTER,R.-Maşini electrice,vol.1-IV,Editura tehnică,Bucureşti, 1958-1960.

64. ROSCULET,M.ş.a.-Programarea şi utilizarea maşinilor de calcul şi elemente de calcul numeric şi informatică, Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti,1980

65. SABONADIERE,J.C.-Numerical analysis of eddy current problemes: Finite Elements in Electrical and Magnetic Field problemes,John Willey and Sons Ltd-N.Y.1980.

66. SALVADORI,M.G.,M.L.BARON-Metode numerice în tehnică,Editura tehnică,Bucureşti,1973.

67. SAVIN,GH.,ROSMAN,H.-Circuite electrice neliniare şi parametrice,Editura tehnică,Bucureşti,1973.

68. SCWEICKARDT,H.,SUCHANEK,V.-Converter-fed synchronous generator systems for wind power plants-Brown Bovery Revue, no.3/1982.

69. SLIWINSKI,T.-Analysis of fundamental core losses in induction motors-Proceeding of ICEM Milano,1988,pag.87-93.

70. SOUNTAUSTA,A.,LONMI,J.-Effects of saturation and eddy currents on the rotor bar impedance of induction motors-Proceeding of ICEM,Milano,1988,pag.649-654.

71. SIMONY,K.-Electrotehnică teoretică,Editura tehnică,Bucureşti, 1974.

72. SORA,C.-Bazele electrotehnicii,Editura didactică şi pedagogică Bucureşti,1982.

73. TEODORESCU,N.,OLARIU,V.-Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale,Editura tehnică,Bucureşti,1978.

74. TIMOTIN,A.-Lecţii de bazele electrotehnicii-Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti,1970.

75. VOICU,GH.ş.a.-Opţiuni şi perpesctive ale utilizării forţei vîntului în scopul producerii energiei electrice, Energetica,vol.31,nr.7-8,1983.

76. VRANCIU,G.,POPA,A.-Metode numerice cu aplicaţii în tehnica de calcul,Editura Scrisul românesc,Craiova,1982.

77. YILDIRIN,M.Usting,M. UMUREKLER-Existence and stability of equilibrium points of a wind turbine driver self-induction generator-Proceeding of ICEMADS Eforie,1986.

78. * * * Catalog de produse, Electroputere Craiova,1986.

79. * * * Protocol la subcontractul intern de la contractul de cercetare ştiinţifică nr.146/1985 al IPTVT, beneficiar ICEMENERG Bucureşti.

80. * * * Idem, dar nr.129/1986

81. * * * Idem, dar nr. 106/1987

82. * * * Resursele şi noua ordine internaţională, Editura politică, Bucureşti, 1981.

83. * * * SINCLAIR-QL user guide, 1985.

BUPT

Calculul expresiilor impedantelor operationale

Sistemul de ecuații în operațional este dat de relația:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\tilde{u}_d}{pL_{ddh}} + \frac{\Psi_d}{L_{ddh}} = \sigma_{dd}\tilde{i}_d + \sigma_{ad}\tilde{i}_a + \sigma_{d\cdot d}\tilde{i}_{d\cdot} + \sigma_{a\cdot d}\tilde{i}_{a\cdot} - \\
&\quad - \frac{\omega}{kp}(\eta_{qq}\tilde{i}_q + \eta_{bq}\tilde{i}_b + \eta_{q\cdot q}\tilde{i}_{q\cdot} + \eta_{b\cdot q}\tilde{i}_{b\cdot}) \\
&-\frac{\tilde{u}_q}{pL_{qqh}} + \frac{\Psi_q}{L_{qqh}} = \frac{\omega_k}{p}(\sigma_{dd}\tilde{i}_d + \sigma_{ad}\tilde{i}_a + \sigma_{d\cdot d}\tilde{i}_{d\cdot} + \sigma_{a\cdot d}\tilde{i}_{a\cdot}) + \\
&\quad + \eta_{q\cdot q}\tilde{i}_q + \eta_{bq}\tilde{i}_b + \eta_{q\cdot q}\tilde{i}_{q\cdot} + \eta_{b\cdot q}\tilde{i}_{b\cdot} \\
&\frac{\Psi_a}{L_{ddh}} = \sigma_{da}\tilde{i}_d + \sigma_{aa}\tilde{i}_a + \sigma_{d\cdot a}\tilde{i}_{d\cdot} + \sigma_{a\cdot a}\tilde{i}_{a\cdot} - \frac{\omega}{kp}(\eta_{qb}\tilde{i}_q + \eta_{bb}\tilde{i}_b + \\
&\quad + \eta_{q\cdot b}\tilde{i}_{q\cdot} + \eta_{b\cdot b}\tilde{i}_{b\cdot}) \qquad\qquad (4.1.1) \\
&\frac{\Psi_b}{L_{qqh}} = \frac{\omega_k}{p}(\sigma_{da}\tilde{i}_d + \sigma_{aa}\tilde{i}_a + \sigma_{d\cdot a}\tilde{i}_{d\cdot} + \sigma_{a\cdot a}\tilde{i}_{a\cdot}) + \eta_{qb}\tilde{i}_q + \eta_{b\cdot b}\tilde{i}_b + \\
&\quad + \eta_{q\cdot b}\tilde{i}_{q\cdot} + \eta_{bb}\tilde{i}_{b\cdot} \\
&-\frac{\tilde{u}_{d\cdot}}{pL_{ddh}} + \frac{\Psi_{d\cdot}}{L_{ddh}} = \sigma_{dd\cdot}\tilde{i}_d + \sigma_{ad\cdot}\tilde{i}_a + \sigma_{d\cdot d\cdot}\tilde{i}_{d\cdot} + \sigma_{a\cdot d\cdot}\tilde{i}_{a\cdot} \\
&-\frac{\tilde{u}_{q\cdot}}{pL_{qqh}} + \frac{\Psi_{q\cdot}}{L_{qqh}} = \eta_{qq\cdot}\tilde{i}_q + \eta_{bq\cdot}\tilde{i}_b + \eta_{q\cdot q\cdot}\tilde{i}_{q\cdot} + \eta_{b\cdot q\cdot}\tilde{i}_{b\cdot} \\
&\frac{\Psi_{a\cdot}}{L_{ddh}} = \sigma_{da\cdot}\tilde{i}_d + \sigma_{aa\cdot}\tilde{i}_a + \sigma_{d\cdot a\cdot}\tilde{i}_{d\cdot} + \sigma_{a\cdot a\cdot}\tilde{i}_{a\cdot} \\
&\frac{\Psi_{b\cdot}}{L_{qqh}} = \eta_{qb\cdot}\tilde{i}_q + \eta_{bb\cdot}\tilde{i}_b + \eta_{q\cdot b\cdot}\tilde{i}_{q\cdot} + \eta_{b\cdot b\cdot}\tilde{i}_{b\cdot}
\end{aligned}
$$

Notăm cu Δ_D determinantul principal al sistemului. El se poate calcula cu ajutorul sumelor de produse a doi determinanți de ordinul patru.

Notăm:

$$(\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_{dd} & \sigma_{ad} & \sigma_{d'd} & \sigma_{a'd} \\ \sigma_{da} & \sigma_{aa} & \sigma_{d'a} & \sigma_{a'a} \\ \sigma_{dd'} & \sigma_{ad'} & \sigma_{d'd'} & \sigma_{a'd'} \\ \sigma_{da'} & \sigma_{aa'} & \sigma_{d'a'} & \sigma_{a'a'} \end{vmatrix} \; ; \; (\sigma_1) = \begin{vmatrix} \sigma'_{dd} & \sigma_{ad} & \sigma_{d'd} & \sigma_{a'd} \\ \sigma_{da} & \sigma'_{aa} & \sigma_{d'a} & \sigma_{a'a} \\ \sigma_{dd'} & \sigma_{ad'} & \sigma'_{d'd'} & \sigma_{a'd'} \\ \sigma_{da'} & \sigma_{aa'} & \sigma_{d'a'} & \sigma'_{a'a'} \end{vmatrix}$$

$(\sigma_{\alpha\beta}),(\sigma_{1\alpha\beta})$ = determinantul de ordinul 3 obținut din (σ), respectiv (σ_1) și care este minorul elementului $\sigma_{\alpha\beta}$

$$(\sigma_{III}) = \frac{\sigma'_{dd}}{T_d}(\sigma_{dd}) + \frac{\sigma'_{aa}}{T_a}(\sigma_{aa}) + \frac{\sigma'_{d'd'}}{T_{d'}}(\sigma_{d'd'}) + \frac{\sigma'_{a'a'}}{T_{a'}}(\sigma_{a'a'})$$

Dacă unul din cei patru termeni lipsește, atunci indicele lui devine indice sus pentru (σ_{III}), deci:

$$(\sigma_{III})^d = \frac{\sigma'_{aa}}{T_a}(\sigma_{aa}) + \frac{\sigma'_{d'd'}}{T_{d'}}(\sigma_{d'd'}) + \frac{\sigma'_{a'a'}}{T_{a'}}(\sigma_{a'a'})$$

$(\sigma_{\alpha\beta,\gamma\delta})$ = determinantul de ordinul doi obținut din (σ) prin eliminarea liniilor și coloanelor ce conțin elementele $\sigma_{\alpha\beta}$ și $\sigma_{\gamma\delta}$. Analog și pentru (σ_1)

$$(\sigma_{II}) = \frac{\sigma'_{dd}}{T_d} \cdot \frac{\sigma'_{aa}}{T_a}(\sigma_{dd,aa}) + \frac{\sigma'_{dd}}{T_d} \cdot \frac{\sigma'_{d'd'}}{T_{d'}}(\sigma_{dd,d'd'}) +$$

$$+ \frac{\sigma'_{dd}}{T_d} \cdot \frac{\sigma'_{a'a'}}{T_{a'}}(\sigma_{dd,a'a'}) + \frac{\sigma'_{aa}}{T_a} \cdot \frac{\sigma'_{d'd'}}{T_{d'}}(\sigma_{aa,d'd'}) +$$

$$+ \frac{\sigma'_{aa}}{T_a} \cdot \frac{\sigma'_{a'a'}}{T_{a'}}(\sigma_{aa,d'd'}) + \frac{\sigma'_{d'd'}}{T_{d'}} \cdot \frac{\sigma'_{a'a'}}{T_{a'}}(\sigma_{d'd',a'a'})$$

Dacă (σ_{II}) nu conține elementul σ'_{dd}, atunci îl notăm cu $(\sigma_{II})^d$.

$$(\Pi\sigma) = \frac{\sigma'_{dd}}{T_d} \cdot \frac{\sigma'_{aa}}{T_a} \cdot \frac{\sigma'_{d'd'}}{T_{d'}} \cdot \frac{\sigma'_{a'a'}}{T_{a'}}$$

Dacă $(\Pi\sigma)$ nu conține un factor în produs, atunci indicele acelui factor devine indice superior al lui $(\Pi\sigma)$. De ex. $(\Pi\sigma)^d$ nu conține factorul $\frac{\sigma'_{dd}}{T_d}$.

Dacă în determinantul (σ_1) există termeni de forma $\sigma_{\alpha\alpha}$ şi nu $\sigma'_{\alpha\alpha}$ atunci indicele termenului simplu $\sigma_{\alpha\alpha}$ devine indice superior al lui (σ_1), deci:

$(\sigma_1)^{\alpha}$ nu conţine pe $\sigma'_{\alpha\alpha}$ ci pe $\sigma_{\alpha\alpha}$.

Analog se stabilesc notatii şi pentru (η).

$$(\eta)=\begin{vmatrix} \eta_{qq} & \eta_{bq} & \eta_{q'q} & \eta_{b'q} \\ \eta_{qb} & \eta_{bb} & \eta_{q'b} & \eta_{b'b} \\ \eta_{qq'} & \eta_{bq'} & \eta_{q'q'} & \eta_{b'q'} \\ \eta_{qb'} & \eta_{bb'} & \eta_{q'b'} & \eta_{b'b'} \end{vmatrix};\quad (\eta_1)=\begin{vmatrix} \eta'_{qq} & \eta_{bq} & \eta_{q'q} & \eta_{b'q} \\ \eta_{qb} & \eta'_{bb} & \eta_{q'b} & \eta_{b'b} \\ \eta_{qq'} & \eta_{bq'} & \eta'_{q'q'} & \eta_{b'q'} \\ \eta_{qb'} & \eta_{bb'} & \eta_{q'b'} & \eta'_{b'b'} \end{vmatrix}$$

In general, din dezvoltarea determinantului (σ_1) se obţine un polinom de gradul 4 în p, polinom cu coeficienţi constanţi. Din dezvoltarea unui determinant de forma(σ_1)$^{\alpha}$ se obţine un polinom de gradul 3 în p, deci scăzînd numărul indicilor superiori a lui (σ_1) din 4 se obţine gradul polinomului rezultat din dezvoltarea determinantului de ordinul patru.

Prin dezvoltarea determinanţilor de forma: (σ),(σ_{III}), (σ_{II}) se obţin <u>numai</u> coeficienţi constanţi, deci care nu conţin pe p sau ω.

Analog sînt regulile pentru determinanţi cu simbolul(η).

$$\Delta_D=-\begin{vmatrix}
\sigma'_{dd} & \sigma_{ad} & \sigma_{d'd} & \sigma_{a'd} & -\frac{\omega}{kp}\eta'_{qq} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{bq} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{q'q} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{b'q} \\
\frac{\omega k}{p}\sigma_{dd} & \frac{\omega k}{p}\sigma_{ad} & \frac{\omega k}{p}\sigma_{d'd} & \frac{\omega k}{p}\sigma_{a'd} & \eta'_{qq} & \eta_{bq} & \eta_{q'q} & \eta_{b'q} \\
\sigma_{da} & \sigma'_{aa} & \sigma_{d'a} & \sigma_{a'a} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{qb} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{bb} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{q'b} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{b'b} \\
\frac{\omega k}{p}\sigma_{da} & \frac{\omega k}{p}\sigma_{aa} & \frac{\omega k}{p}\sigma_{d'a} & \frac{\omega k}{p}\sigma_{a'a} & \eta_{qb} & \eta'_{bb} & \eta_{q'b} & \eta_{b'b} \\
\sigma_{dd'} & \sigma_{ad'} & \sigma'_{d'd'} & \sigma_{a'd'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sigma_{da'} & \sigma_{aa'} & \sigma_{d'a'} & \sigma'_{a'a'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{qq'} & \eta_{bq'} & \eta'_{q'q'} & \eta_{b'q'} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{qb'} & \eta_{bb'} & \eta_{q'b'} & \eta'_{b'b'}
\end{vmatrix}$$

Semnul minus a apărut datorită schimbării între ele a liniilor 6 şi 7 sînt diferite de zero ?ase produse formate cu minorii ce conţin coloanele 5,6,7,8 şi liniile 1278,1378,1478,2378,2478, 3478. Aplicînd regulile de dezvoltare a determinantului obţinem:

$$\Delta_D=(\sigma_1)(\eta_1)+\frac{\omega^2}{p^2}\Big[(\sigma_1)^d(\eta_1)^q+(\sigma_1)^a(\eta_1)^b+\frac{\sigma_{aa}}{pT_a}\cdot$$

$$\cdot\frac{\eta_{qq}}{pT_q}(\sigma_{1ad})\cdot(\eta_{1qb})\cdot(\quad+\frac{\sigma_{dd}}{pT_d}\cdot\frac{\eta_{bb}}{pT_b}(\sigma_{1da})(\eta_{1bd})\Big]+$$

$$+\frac{\omega^4}{p^4}(\sigma_1)^{d,a}(\eta_1)^{q,b} \qquad (4.1.3)$$

Aplicînd regulile de dezvoltare ale determinanţilor precum şi notaţiile stabilite, se obţine Δ_D ca raport între un polinom de gradul 8 în p şi p^8 de forma:

$$\Delta_D=\frac{1}{p^8}\sum_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^{\alpha} \qquad \alpha=0,1,2,\dots,7,8 \qquad (4.1.4)$$

în care coeficienţii $C_{D\alpha}$ sînt de forma:

$$C_{D\alpha}=C_{D\alpha 0}+\omega^2 C_{D\alpha 2}+\omega^4 C_{D\alpha 4} \qquad (4.1.5)$$

$C_{D\alpha 0}$, $C_{D\alpha 2}$, $C_{D\alpha 4}$ fiind constante reale, obţinute prin dezvoltarea determinanţilor şi ele depind numai de rapoartele $\sigma_{\alpha\beta}$, $\eta_{\gamma\delta}$, unde $\alpha,\beta=d,d',a,d'$, $\gamma,\delta=q,q',b,b'$.

Deci coeficienţii C_D vor fi daţi de relaţiile (4.1.6)

$C_{D80}=(\sigma)(\eta)$; $C_{D82}=0$; $C_{D84}=0$

$C_{D70}=(\sigma)(\eta_{II})+(\sigma_{III})(\eta)$; $C_{D72}=0$; $C_{D74}=0$

$C_{D60}=(\sigma)(\eta_{II})+(\sigma_{III})(\eta_{III})+(\sigma_{II})(\eta)$;

$C_{D62}=2(\sigma)(\eta)$

$C_{D64}=0$

$$C_{D50}=(\sigma)(T\eta)(T_q+T_b+T_{q'}+T_{b'})+(\sigma_{III})(\eta_{II})+(\sigma_{II})(\eta_{III})+$$
$$+(T\sigma)(T_d+T_a+T_{d'}+T_{a'})(\eta)$$

$$C_{D52}=(\sigma)\big[(\eta_{III})^q+(\eta_{III})^b\big]+(\eta)\big[(\sigma_{III})^d+(\sigma_{III})^a\big]$$

$C_{D54}=0$

$$C_{D40}=(\sigma)(T\eta)+(\sigma_{III})(T\eta)(T_q+T_b+T_{q'}+T_{b'})+(\sigma_{II})(\eta_{II})+$$
$$+(T\sigma)(T_d+T_a+T_{d'}+T_{a'})(\eta_{III})+(T\sigma)(\eta) \qquad (4.1.6)$$

$C_{D42}=(\sigma)\left[(\eta_{II})^{q}+(\eta_{II})^{b}+(\sigma_{III})^{d}(\eta_{III})^{q}+(\sigma_{III})^{a}(\eta_{III})^{b}+\right.$

$\left.+(\eta)\left[(\sigma_{II})^{d}+(\sigma_{II})^{a}\right]+(\sigma_{ad})^{d}(\eta_{qb})^{b}+(\sigma_{da})^{a}(\eta_{bq})^{q}\right.$

$C_{D44}=(\sigma)(\eta)$

$D_{D30}=(\sigma_{III})(\eta)+(\sigma_{II})(\bar{u}\eta)(T_q+T_b+T_{q\bullet}+T_{b\bullet})+(\bar{u}\sigma)(T_d+T_a+T_{d\bullet}+$

$+T_{a\bullet})(\eta_{II})+(\bar{u}\sigma)(\eta_{III})$

$C_{D32}=(\sigma)(\bar{u}\eta)(T_q+T_b)+(\sigma_{III})^{d}(\eta_{II})^{q}+(\sigma_{II})^{d}(\eta_{III})^{q}+(\bar{u}\sigma)(T_d+$

$+T_a)(\eta)$

$C_{D34}=(\sigma)(\eta_{III})^{q,b}+(\sigma_{III})^{d,a}(\eta)$

$C_{D20}=(\sigma_{II})(\bar{u}\eta)+(\bar{u}\sigma)(T_d+T_{d\bullet}+T_a+T_{a\bullet})(\bar{u}\eta)(T_q+T_b+T_{q\bullet}+T_{b\bullet})+$

$+(\bar{u}\sigma)(\eta_{II})$

$C_{D22}=(\bar{u}\eta)\left[(\sigma_{III})^{d}T_q+(\sigma_{III})^{a}T_b\right]+(\sigma_{II})^{d}(\eta_{II})^{q}+(\sigma_{II})^{a}(\eta_{II})^{b}+$

$+(\bar{u}\sigma)\left[(\eta_{III})^{q}T_d+(\eta_{III})^{b}T_a\right]+(\sigma_{ad})^{d}(\bar{u}\eta)^{b}\,\eta_{bq}+$

$+\dfrac{\sigma_{aa}}{T_a}(\sigma_{ad})^{d,a}\,\dfrac{\eta_{qq}}{T_q}(\eta_{qb})^{q,b}+\dfrac{\sigma_{dd}}{T_d}(\sigma_{da})^{a,d}\,\dfrac{\eta_{bb}}{T_b}(\eta_{bq})^{q,b}$

$C_{D24}=(\sigma)(\eta_{II})^{q,b}+(\sigma_{III})^{d,a}(\eta_{III})^{q,b}+(\sigma_{II})^{d,a}(\eta)$

$C_{D10}=(\bar{u}\sigma)(\bar{u}\eta)(T_d+T_{d\bullet}+T_a+T_{a\bullet}+T_q+T_b+T_{q\bullet}+T_{b\bullet})$

$D_{D12}=(\bar{u}\eta)\cdot\left[(\sigma_{II})^{d}T_q+(\sigma_{II})^{a}T_b\right]+(\bar{u}\sigma)\left[(\eta_{II})^{q}T_d+(\eta_{II})^{b}T_a\right]+$

$+\dfrac{\sigma_{aa}}{T_a}(\sigma_{ad})^{d,a}(\bar{u}\eta)^{b}\,\eta_{bq}+(\bar{u}\sigma)^{d}\,\sigma_{da}\,\dfrac{\eta_{qq}}{T_q}(\eta_{qb})^{q,b}+$

$+\dfrac{\sigma_{dd}}{T_d}(\sigma_{da})^{d,a}(\bar{u}\eta)^{q}\,\eta_{qb}+(\bar{u}\sigma)^{a}\,\sigma_{ad}\,\dfrac{\eta_{bb}}{T_b}(\eta_{bq})^{b,q}$

$C_{D14}=(\sigma_{III})^{d,a}(\eta_{II})^{q,b}+(\sigma_{II})^{d,a}(\eta_{III})^{q,b}$

$D_{D00}\doteq(\bar{u}\sigma)(\eta)$

$$C_{DO2}=(\pi\sigma)^{d,a}(\pi\eta)^{q,b}\left[\sigma_{dd}\frac{\sigma_{aa}}{T_a}\frac{\eta_{bb}}{T_b}\eta_{qq}+\sigma_{aa}\frac{\sigma_{dd}}{T_d}\frac{\eta_{qq}}{T_q}\eta_{bb}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma_{aa}}{T_a}\sigma_{da}\frac{\eta_{qq}}{T_q}\eta_{bq}+\frac{\sigma_{dd}}{T_d}\sigma_{ad}\frac{\eta_{bb}}{T_b}\eta_{qb}\right]$$

$$C_{DO4}=(\sigma_{II})^{d,a}(\eta_{II})^{q,b}$$

Calculul imaginilor curenților necesită și calculul determinanților obținuți din determinantul principal înlocuind coloana corespunzătoare coeficienților imaginii curentului i cu termenii liberi. Dezvoltînd după coloana termenilor liberi, obținem expresia impedanțelor operaționale Y(p) și ale parametrilor G(p), care înmulțesc valorile inițiale ale fluxurilor. Dacă se cunosc parametrii G(p) atunci:

$$Y(p)=-\frac{G(p)}{p} \tag{4.1.7}$$

Expresiile parametrilor operaționali G(p) vor fi dați de relațiile (4.1.8), pentru $\varsigma = d, a, d', a'$.

$$G_{d\varsigma}=(-1)^{\varsigma'}\frac{p^8}{L_{ddh}}\frac{1}{\sum\limits_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^{\alpha}}\left[(\sigma_{1\varsigma d})(\eta_1)+\frac{\omega^2}{p^2}(\sigma_{1\varsigma d})^{a}\right.$$

$$\left.\cdot(\eta_1)^{b}-\frac{\omega^2}{p^2}\frac{\eta_{bb}}{T_b}(\sigma_{1\varsigma a})^{d}(\eta_{1bq})\right]=(-1)^{\varsigma'}\frac{p}{L_{ddh}}\cdot\frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{6}C_{d\varsigma\alpha}p^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^{\alpha}} \tag{4.1.8}$$

în care: $C_{d\varsigma\alpha}=C_{d\varsigma\alpha 0}+\omega^2 C_{d\varsigma\alpha 2}$

$$G_{q\varsigma}=(-1)^{\varsigma'}\frac{\omega}{p}\frac{p^8}{L_{ddh}}\frac{1}{\sum\limits_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^{\alpha}}\left[(\sigma_{1\varsigma d})(\eta_1)^{q}-(\sigma_{1\varsigma a})(\eta_{1bq})+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega^2}{p^2}(\sigma_{1\varsigma d})^{a}(\eta_1)^{q,b}\right]=(-1)^{\varsigma'}\frac{p}{L_{ddh}}\cdot\frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{6}C_{q\varsigma\alpha}p^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^{\alpha}} \tag{4.1.8.2}$$

în care: $C_{q\varsigma\alpha}=C_{q\varsigma\alpha 0}+\omega^2 C_{q\varsigma\alpha 2}$

$$G_{a\varsigma}=(-1)^{\varsigma'+1}\frac{p^8}{L_{ddh}}\frac{1}{\sum\limits_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^{\alpha}}\left[(\sigma_{1\varsigma a})(\eta_1)+\frac{\omega^2}{p^2}(\sigma_{1\varsigma a})^{d}(\eta_1)^{q}+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega^2}{p^2}(\sigma_{1\varsigma d})^{a}(\eta_{1qb})\right]=(-1)^{\varsigma'+1}\frac{p}{L_{ddh}}\cdot\frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{7}C_{a\varsigma\alpha}p^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^{\alpha}} \tag{4.1.8.3}$$

în care: $C_{a\varrho\alpha}=C_{a\varrho\alpha 0}+\omega^2 C_{a\varrho\alpha 2}$

$$G_{b\varrho}=(-1)^{\varrho'+1}\frac{\omega}{p}\frac{p^8}{L_{ddh}}\frac{1}{\sum_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^\alpha}\Big[(\sigma_{1\varrho a})(\eta_1)^b-\frac{\eta_{qq}}{pT_q}(\sigma_{1\varrho d})(\eta_{1qb})+$$
$$+\frac{\omega^2}{p^2}(\sigma_{1\varrho a})^d(\eta_1)^{q,b}\Big]=(-1)^{\varrho'+1}\frac{p}{L_{ddh}}\frac{\sum_{\alpha=0}^{6}C_{b\varrho\alpha}p^\alpha}{\sum_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^\alpha} \qquad (4.1.8.4)$$

în care: $C_{b\varrho\alpha}=C_{b\varrho\alpha 0}+\omega^2 C_{b\varrho\alpha 2}$

$$G_{d^\bullet\varrho}=(-1)^{\varrho'}\frac{p^8}{L_{ddh}}\frac{1}{\sum_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^\alpha}\Big\{(\sigma_{1\varrho d^\bullet})(\eta_1)+\frac{\omega^2}{p^2}\Big[(\sigma_{1\varrho d^\bullet})^d(\eta_1)^q+$$
$$+(\sigma_{1\varrho d^\bullet})^d(\eta_1)^b+\frac{\sigma_{aa}}{pT_a}\frac{\eta_{qq}}{pT_q}(\sigma_{ad},\varrho_{d^\bullet})(\eta_{1qb})+\frac{\sigma_{dd}}{pT_d}\frac{\eta_{bb}}{pT_b}\cdot$$
$$\cdot(\sigma_{da},\varrho_{d^\bullet})(\eta_{bq})\Big]+\frac{\omega^4}{p^4}(\sigma_{1\varrho d^\bullet})^{d,a}(\eta_1)^{q,b}\Big\}=$$
$$=(-1)^{\varrho'}\frac{p}{L_{ddh}}\frac{\sum_{\alpha=0}^{7}C_{d^\bullet\varrho\alpha}p^\alpha}{\sum_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^\alpha} \qquad (4.1.8.5)$$

în care: $C_{d^\bullet\varrho\alpha}=C_{d^\bullet\varrho\alpha 0}+\omega^2 C_{d^\bullet\varrho\alpha 2}+\omega^4 C_{d^\bullet\varrho\alpha 4}$ şi

$(\sigma_{ad,ad^\bullet})=0$; $(\sigma_{da,dd^\bullet})=0$

$$G_{a^\bullet\varrho}=(-1)^{\varrho'}\frac{p^8}{L_{ddh}}\frac{1}{\sum_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^\alpha}\Big\{\sigma_{1\varrho a^\bullet})(\eta_1)+\frac{\omega^2}{p^2}\Big[(\sigma_{1\varrho a^\bullet})^d(\eta_1)+$$
$$+(\sigma_{1\varrho a^\bullet})^a(\eta_1)^b+\frac{\sigma_{aa}}{pT_a}\frac{\eta_{qq}}{pT_q}(\sigma_{1ad},\varrho_{a^\bullet})(\eta_{1qb})+\frac{\sigma_{dd}}{pT_d}\frac{\eta_{bb}}{pT_b}\cdot$$
$$\cdot(\sigma_{1da},\varrho_{a^\bullet})(\eta_{1bq})\Big]+\frac{\omega^4}{p^4}(\sigma_{1\varrho a^\bullet})^{d,a}(\eta_1)^{q,b}\Big\}=(-1)^{\varrho'}\frac{p}{L_{ddh}}\cdot$$
$$\cdot\frac{\sum_{\alpha=0}^{7}C_{a^\bullet\varrho\alpha}p^\alpha}{\sum_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^\alpha} \qquad (4.1.8.6)$$

în care: $C_{a^\bullet\varrho\alpha}=C_{a^\bullet\varrho\alpha 0}+\omega^2 C_{a^\bullet\varrho\alpha 2}+\omega^4 C_{a^\bullet\varrho\alpha 4}$ şi $(\sigma_{da,da^\bullet})=0$; $(\sigma_{ad,aa^\bullet})=0$

$$G_{q^\bullet\varrho}=(-1)^{\varrho'+1}\frac{p^8}{L_{ddh}}\frac{\omega}{p}\frac{1}{\sum_{\alpha=0}^{8}C_{D\alpha}p^\alpha}\Big\{\frac{\eta_{qq}}{pT_q}(\sigma_{1\varrho d})(\eta_{1qq^\bullet})+$$
$$+\frac{\eta_{bb}}{pT_b}(\sigma_{1\varrho a})(\eta_{1bq^\bullet})+\frac{\omega^2}{p^2}\Big[\frac{\eta_{qq}}{pT_q}(\sigma_{1\varrho d})^a(\eta_{1qq^\bullet})^b+$$

$$+\frac{\eta_{bb}}{pT_b}(\sigma_{1\varrho a})^d(\eta_{1bq^\bullet})^q\Big\} = (-1)^{\varrho'+1}\frac{\omega p}{L_{ddh}} \cdot \frac{\sum_{\alpha=0}^{5} C_{q^\bullet\varrho\alpha}p^\alpha}{\sum_{\alpha=0}^{k} C_{D\alpha}p^\alpha} \qquad (4.1.8.7)$$

în care: $C_{q^\bullet\varrho\alpha} = C_{q^\bullet\varrho\alpha 0} + \omega^2 C_{q^\bullet\varrho\alpha 2}$

$$G_{b^\bullet\varrho} = (-1)^{\varrho'}\frac{\omega}{p}\,\frac{p^8}{L_{ddh}}\,\frac{1}{\sum_{\alpha=0}^{k} C_{D\alpha}p^\alpha}\Big\{\frac{\eta_{qq}}{pT_q}(\sigma_{1\varrho d})(\eta_{1qb^\bullet})+$$

$$+\frac{\eta_{bb}}{pT_b}(\eta_{1bb^\bullet})+\frac{\omega^2}{p^2}\Big[\frac{\eta_{qq}}{pT_q}(\sigma_{1\varrho d})^a(\eta_{1qb^\bullet})^b+\frac{\eta_{bb}}{pT_b}(\sigma_{1\varrho a})^d(\eta_{1bb^\bullet})^q\Big]\Big\} =$$

$$= (-1)^{\varrho'}\frac{\omega p}{L_{ddh}} \cdot \frac{\sum_{\alpha=0}^{5} C_{b^\bullet\varrho\alpha}p^\alpha}{\sum_{\alpha=0}^{k} C_{D\alpha}p^\alpha} \qquad (4.1.8.8)$$

în care: $C_{b^\bullet\varrho\alpha} = C_{b^\bullet\varrho\alpha 0} + \omega^2 C_{b^\bullet\varrho\alpha 2}$

In relațiile (4.1.8) $\varrho' = 0$ pentru $\varrho = d, d^\bullet$ şi $\varrho' = 1$ pentru $\varrho = a, a^\bullet$.

Analog se scriu expresiile parametrilor $G_{\gamma\varrho}$ pentru $\varrho = q, b, q^\bullet, b^\bullet$. Avînd parametrii $G_{\gamma\varrho}$, se obţin şi impedanţele $Y_{\gamma\varrho}$ cu relaţia (4.1.7).

ANEXA 4.2

Calculul expresiilor coeficienţilor A,B şi [illegible]

Sistemul de ecuaţii ce trebuie rezolvat este (4.2.1):

$$-\sigma'_{dd}\tilde{i}_d + \frac{\omega}{kp}\eta_{qq}\tilde{i}_q + \frac{\psi_d}{L_{ddh}} = \frac{\tilde{u}_d}{pL_{ddh}} + \sigma_{ad}\tilde{i}_a + \sigma_{d\cdot d}\tilde{i}_{d\cdot} + \sigma_{a\cdot d}\tilde{i}_{a\cdot} +$$

$$+ 0\cdot\tilde{u}_q - \frac{\omega}{kp}\left[\eta_{bq}\tilde{i}_b + \eta_{q\cdot q}\tilde{i}_{q\cdot} + \eta_{b\cdot q}\tilde{i}_{b\cdot}\right]$$

$$-\frac{\omega k}{p}\sigma_{dd}\tilde{i}_d - \eta'_{qq}\tilde{i}_q + \frac{\psi_q}{L_{qqh}} = 0\cdot\tilde{u}_d + \frac{\omega k}{p}\left[\sigma_{ad}\tilde{i}_a + \sigma_{d\cdot d}\tilde{i}_{d\cdot} + \sigma_{a\cdot d}\tilde{i}_{a\cdot}\right] +$$

$$+ \frac{\tilde{u}_q}{pL_{qqh}} + \eta_{bq}\tilde{i}_b + \eta_{q\cdot q}\tilde{i}_{q\cdot} + \eta_{b\cdot q}\tilde{i}_{b\cdot}$$

$$-\sigma_{da}\tilde{i}_d + \frac{\omega}{kp}\eta_{qb}\tilde{i}_q + \frac{\psi_a}{L_{ddh}} = 0\cdot\tilde{u}_d + \sigma'_{aa}\tilde{i}_a + \sigma_{d\cdot a}\tilde{i}_{d\cdot} + \sigma_{a\cdot a}\tilde{i}_{a\cdot} -$$

$$-0\cdot\tilde{u}_q - \frac{\omega}{kp}\left[\eta_{bb}\tilde{i}_b + \eta_{q\cdot b}\tilde{i}_{q\cdot} + \eta_{b\cdot b}\tilde{i}_{b\cdot}\right]$$

$$-\frac{\omega k}{p}\sigma_{da}\tilde{i}_d - \eta_{qb}\tilde{i}_q + \frac{\psi_b}{L_{qqh}} = 0\cdot\tilde{u}_d + \frac{\omega k}{p}\left[\sigma_{aa}\tilde{i}_a + \sigma_{d\cdot a}\tilde{i}_{d\cdot} +\right.$$

$$\left.+ \sigma_{a\cdot a}\tilde{i}_{a\cdot}\right] + 0\cdot\tilde{u}_q + \eta'_{bb}\tilde{i}_b + \eta_{q\cdot b}\tilde{i}_{q\cdot} + \eta_{b\cdot b}\tilde{i}_{b\cdot} \qquad (4.2.1)$$

$$-\frac{\tilde{u}_{d\cdot}}{pL_{ddh}} - \sigma_{dd\cdot}\tilde{i}_d + \frac{\psi_{d\cdot}}{L_{ddh}} = 0\cdot\tilde{u}_d + \sigma_{ad\cdot}\tilde{i}_a + \sigma'_{d\cdot d\cdot}\tilde{i}_{d\cdot} + \sigma_{a\cdot d\cdot}\tilde{i}_{a\cdot}$$

$$-\frac{\tilde{u}_{q\cdot}}{pL_{qqh}} - \eta_{qq\cdot}\tilde{i}_q + \frac{\psi_{q\cdot}}{L_{qqh}} = 0\cdot\tilde{u}_q + \eta_{bq\cdot}\tilde{i}_b + \eta'_{q\cdot q\cdot}\tilde{i}_{q\cdot} + \eta_{b\cdot q\cdot}\tilde{i}_{b\cdot}$$

$$-\sigma_{da\cdot}\tilde{i}_d + \frac{\psi_{a\cdot}}{L_{ddh}} = 0\cdot\tilde{u}_d + \sigma_{aa\cdot}\tilde{i}_a + \sigma_{d\cdot a}\tilde{i}_{d\cdot} + \sigma'_{a\cdot a\cdot}\tilde{i}_{a\cdot}$$

$$-\eta_{qb\cdot}\tilde{i}_q + \frac{\psi_{b\cdot}}{L_{qqh}} = 0\cdot\tilde{u}_q + \eta_{bb\cdot}\tilde{i}_b + \eta_{q\cdot b\cdot}\tilde{i}_{q\cdot} + \eta'_{b\cdot b\cdot}\tilde{i}_{b\cdot}$$

Rezolvăm sistemul de ecuaţii algebric în raport cu mărginile curenţilor şi tensiunilor, în care valorile iniţiale ale fluxurilor joacă rolul unor constante. Notăm cu determinantul principal al sistemului.

$$\Delta = \begin{vmatrix}
\frac{1}{pL_{ddh}} & \sigma_{ad} & \sigma_{d'd} & \sigma_{a'd} & 0 & -\frac{\omega}{kp}\eta_{b'q} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{q'q} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{b'q} \\
0 & \frac{\omega k}{p}\sigma_{ad} & \frac{\omega k}{p}\sigma_{d'd} & \frac{\omega k}{p}\sigma_{a'd} & \frac{1}{pL_{qqh}} & \eta_{bq} & \eta_{q'q} & \eta_{b'q} \\
0 & \sigma'_{aa} & \sigma_{d'a} & \sigma_{a'a} & 0 & -\frac{\omega}{kp}\eta_{bb} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{q'b} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{b'b} \\
0 & \frac{\omega k}{p}\sigma_{aa} & \frac{\omega k}{p}\sigma_{d'a} & \frac{\omega k}{p}\sigma_{a'a} & 0 & \eta'_{bb} & \eta_{q'b} & \eta_{b'b} \\
0 & \sigma_{ad'} & \sigma'_{d'd'} & \sigma_{a'd'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{bq'} & \eta'_{q'q'} & \eta_{b'q'} \\
0 & \sigma_{aa'} & \sigma_{d'a'} & \sigma'_{a'a'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{bb'} & \eta_{q'b'} & \eta'_{b'b'}
\end{vmatrix} \quad (4.2.2)$$

Dezvoltînd determinantul după coloana 1, obținem un nou determinant, dar de ordinul 7, pe care îl dezvoltăm din nou după coloana 4, obținînd astfel un determinant de ordinul șase.

$$\Delta' = -\frac{1}{p^2 L_{ddh} L_{qqh}} \begin{vmatrix}
\sigma'_{aa} & \sigma_{d'a} & \sigma_{a'a} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{bb} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{q'b} & -\frac{\omega}{kp}\eta_{b'b} \\
\frac{\omega k}{p}\sigma_{aa} & \frac{\omega k}{p}\sigma_{d'a} & \frac{\omega k}{p}\sigma_{a'a} & \eta'_{bb} & \eta_{q'b} & \eta_{b'b} \\
\sigma_{ad'} & \sigma'_{d'd'} & \sigma_{a'd'} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \eta_{bq'} & \eta'_{q'q'} & \eta_{b'q'} \\
\sigma_{aa'} & \sigma_{d'a'} & \sigma'_{a'a'} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \eta_{bb'} & \eta_{q'b'} & \eta'_{b'b'}
\end{vmatrix} \quad (4.2.3)$$

(4.2.3)

In acest determinant, schimbăm între ele liniile 4 și 5, ceea ce conduce la schimbarea semnului acestuia.

Dezvoltînd determinantul în produse de cîte doi determinanți de ordinul 3, obținem:

$$\Delta' = \frac{1}{p^2 L_{ddh} L_{qqh}} \left[-\frac{\omega}{p^2} \begin{vmatrix} \sigma_{aa} & \sigma_{d'a} & \sigma_{a'a} \\ \sigma_{ad'} & \sigma_{d'd'} & \sigma_{a'd'} \\ \sigma_{aa'} & \sigma_{d'a'} & \sigma_{a'a'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_{bb} & \eta_{q'b} & \eta_{b'b} \\ \eta_{bq'} & \eta_{q'q'} & \eta_{b'q'} \\ \eta_{bb'} & \eta_{q'b'} & \eta_{b'b'} \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} \sigma'_{aa} & \sigma_{d'a} & \sigma_{a'a} \\ \sigma_{ad'} & \sigma'_{d'd'} & \sigma_{a'd'} \\ \sigma_{aa'} & \sigma_{d'a'} & \sigma'_{a'a'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta'_{bb} & \eta_{q'b} & \eta_{b'b} \\ \eta_{bq'} & \eta'_{q'q'} & \eta_{b'q'} \\ \eta_{bb'} & \eta_{q'b'} & \eta'_{b'b'} \end{vmatrix} \right] \quad (4.2.4)$$

Notăm:

$$(\sigma_{1dd}) = \begin{vmatrix} \sigma'_{aa} & \sigma_{d'a} & \sigma_{a'a} \\ \sigma_{ad'} & \sigma'_{d'd'} & \sigma_{a'd'} \\ \sigma_{aa'} & \sigma_{d'a'} & \sigma'_{a'a} \end{vmatrix} ; \quad (\sigma_{1dd})^a = \begin{vmatrix} \sigma_{aa} & \sigma_{d'a} & \sigma_{a'a} \\ \sigma_{ad'} & \sigma'_{d'd'} & \sigma_{a'd'} \\ \sigma_{aa'} & \sigma_{d'a'} & \sigma'_{a'a'} \end{vmatrix}$$

(4.2.5)

$$(\eta_{1qq}) = \begin{vmatrix} \eta'_{bb} & \eta_{q'b} & \eta_{b'b} \\ \eta_{bq'} & \eta'_{q'q'} & \eta_{b'q'} \\ \eta_{bb'} & \eta_{q'b'} & \eta'_{b'b'} \end{vmatrix} ; \quad (\eta_{1qq})^b = \begin{vmatrix} \eta_{bb} & \eta_{q'b} & \eta_{b'b} \\ \eta_{bq'} & \eta'_{q'q'} & \eta_{b'q'} \\ \eta_{bb'} & \eta_{q'b'} & \eta_{b'b'} \end{vmatrix}$$

în care (σ_{1dd}) și (η_{1qq}) sînt polinoame de ordinul 3 în p, înmulțite cu $1/p^3$, iar $(\sigma_{1dd})^a$, $(\eta_{1qq})^b$ sînt polinoame de ordinul 2 în raport cu p, înmulțite cu $1/p^2$, deci:

$$\Delta' = -\frac{1}{p^2 L_{ddh} L_{qqh}} \left[(\sigma_{1dd})(\eta_{1qq}) + \frac{\omega^2}{p^2} (\sigma_{1dd})^a (\eta_{1qq})^b \right] \quad (4.2.6)$$

adică determinantul Δ' va fi de forma unui raport între un polinom de gradul 6 în p și p^8.

$$\Delta' = -\frac{1}{p^8 L_{ddh} L_{qqh}} \sum_{\alpha=0}^{6} K_{\nu\alpha}\, p^{\alpha} \quad (4.2.7)$$

In relația (4.2.7) coeficienții lui p sînt constante obținute din dezvoltarea determinanților dați de (4.2.5) și înmulțirea lor.

Notăm:

$$(\sigma_{dd}) = \begin{vmatrix} \sigma_{aa} & \sigma_{d'a} & \sigma_{a'a} \\ \sigma_{ad'} & \sigma_{d'd'} & \sigma_{a'd'} \\ \sigma_{aa'} & \sigma_{d'a'} & \sigma_{a'a'} \end{vmatrix}; \quad (\sigma_{dd})^{d} = \frac{\sigma_{aa}}{T_a} \begin{vmatrix} \sigma_{d'd'} & \sigma_{a'd'} \\ \sigma_{d'a'} & \sigma_{a'a'} \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{\sigma_{d'd'}}{T_{d'}} \begin{vmatrix} \sigma_{aa} & \sigma_{a'a} \\ \sigma_{aa'} & \sigma_{a'a'} \end{vmatrix} + \frac{\sigma_{a'a'}}{T_{a'}} \begin{vmatrix} \sigma_{aa} & \sigma_{d'a} \\ \sigma_{ad'} & \sigma_{d'd'} \end{vmatrix} \qquad (4.2.8)$$

$(\sigma_{dd})^{d,a}$ nu conține primul termen al lui $(\sigma_{dd})^{d}$

$(\sigma_{dd})^{d,d'}$ nu îl conține pe al doilea și așa mai departe

$(\overline{\Pi}\sigma)^{d} = \frac{\sigma_{aa}}{T_a} \cdot \frac{\sigma_{d'd'}}{T_{d'}} \cdot \frac{\sigma_{a'a'}}{T_{a'}}$; $(\overline{\Pi}\sigma)^{d,a}$ nu conține primul produs, etc.

Analog folosim notații pentru (η) în care indicii din simbolurile lui (σ) se permută din d,a,d',a' în q,b,q',b'.

Coeficienții $K_{D\alpha}$ sînt de forma:

$$K_{D\alpha} = K_{D\alpha 0} + \omega^2 K_{D\alpha 2} \text{ pentru } \alpha = 0,1,\ldots,6 \text{ și se} \qquad (4.2.9)$$

pot calcula, fiind constante reale. De remarcat este faptul că $K_{D\alpha 2} = 0$ pentru $\alpha = 6,5$ și $K_{D\alpha 2} \neq 0$ pentru $\alpha = 4,3,2,1$.

Cu aceste precizări, putem scrie expresiile coeficienților K_D (4.2.10):

$K_{D60} = (\sigma_{dd})(\eta_{qq})$; $K_{D62} = 0$

$K_{D50} = (\sigma_{dd})(\eta_{qq})^{q} + (\sigma_{dd})^{d}(\eta_{qq})$; $K_{D52} = 0$

$K_{D40} = (\sigma_{dd})(\overline{\Pi}\eta)^{q}(T_b + T_{q'} + T_{b'}) + (\sigma_{dd})^{d}(\eta_{qq})^{q} + (\overline{\Pi}\sigma)^{d}$

$(T_a + T_{d'} + T_{a'})(\eta_{qq}) \qquad (4.2.10)$

$K_{D42} = (\sigma_{dd})(\eta_{qq})$

$K_{D30} = (\sigma_{dd})(\overline{\Pi}\eta)^{q} + (\sigma_{dd})^{d}(\overline{\Pi}\eta)^{q}(T_b + T_{q'} + T_{b'}) + (\overline{\Pi}\sigma)^{d}(T_a + T_{d'} + T_{a'})$.

$$\cdot(\eta_{qq})^{q}+(\pi\sigma)^{d}(\eta_{qq})$$

$$K_{D32}=(\sigma_{dd})(\eta_{qq})^{q,b}+(\sigma_{dd})^{d,a}(\eta_{qq})$$

$$K_{D20}=(\sigma_{dd})^{d}(\pi\eta)^{q}+(\pi\sigma)^{d}(T_{a}+T_{d'}+T_{a'})(\pi\eta)^{q}(T_{b}+T_{q'}+T_{b'})+(\pi\sigma)^{d}(\eta_{qq})^{q}$$

$$K_{D22}=(\sigma_{dd})(\pi\eta)^{q,b}\,\eta_{bb}+(\sigma_{dd})^{d,a}(\eta_{qq})^{q,b}+(\pi\sigma)^{d,a}\,\sigma_{aa}(\eta_{qq})$$

$$K_{D10}=(\pi\sigma)^{d}(T_{a}+T_{d'}+T_{a'})(\pi\eta)^{q}+(\pi\sigma)^{d}(\pi\eta)^{q}(T_{b}+T_{q'}+T_{b'})$$

$$K_{D12}=(\sigma_{dd})^{d,a}(\pi\eta)^{q,b}\,\eta_{bb}+(\pi\sigma)^{d,a}\,\sigma_{aa}(\eta_{qq})^{q,b}$$

$$K_{D00}=(\pi\sigma)^{d}(\pi\eta)^{q}$$

$$K_{D02}=(\pi\sigma)^{d,a}\,\sigma_{aa}(\pi\eta)^{q,b}\,\eta_{bb}$$

Pentru determinarea imaginii curentului $\hat{i}_\rho$, ca raport între determinantul Δ_ρ şi Δ' este necesară dezvoltarea lui Δ_ρ după coloana ρ , care conţine termenii liberi.

Notăm: $(\sigma_{dd}^{\alpha\beta})$ minorul termenului $\sigma_{\alpha\beta}$ din determinantul (σ_{dd}) cu $(\sigma_{1dd}^{\alpha\beta})$ minorul termenului $\sigma_{\alpha\beta}$ din determinantul (σ_{1dd}) şi analog pentru minorii termenului $\eta_{\alpha\beta}$ din determinantul (η_{qq}) şi (η_{1qq}). De asemenea notăm $(\sigma_{1dd}^{\alpha\beta})^{\alpha}$ minorul termenului $\sigma_{\alpha\beta}$ din determinantul (σ_{1dd}), dar care conţine pe $\sigma_{\alpha\alpha}$ şi nu pe $\sigma'_{\alpha\alpha}$, respectiv analog pentru notaţiile cu η . Cu aceste precizări, coeficienţii $Q_{\gamma\rho}$ din expresia imaginii curentului i_ρ vor fi daţi de relaţiile (4.2.1) pentru ρ =a',d', a. In relaţiile (4.2.11) avem $\rho'=1$ pentru ρ = d' şi $\rho'=2$ pentru ρ=a,a'.

$$Q_{a\rho}=(-1)^{\rho'}\frac{1}{L_{ddh}}\cdot\frac{p^{6}}{\sum\limits_{\alpha=0}^{6}K_{D\alpha}p^{\alpha}}(\sigma_{1dd}^{\rho a})(\eta_{1qq})$$

$$Q_{d'\rho}=(-1)^{\rho'+1}\frac{1}{L_{ddh}}\cdot\frac{p^{6}}{\sum\limits_{\alpha=0}^{6}K_{D\alpha}p^{\alpha}}\left[(\sigma_{1dd}^{\rho d'})(\eta_{1qq})+\frac{\omega^{2}}{p^{2}}(\sigma_{1dd}^{\rho d'})^{a}(\eta_{1qq})^{b}\right]$$

$$Q_{a'\rho}=(-1)^{\rho'}\frac{1}{L_{ddh}}\cdot\frac{p^{6}}{\sum\limits_{\alpha=0}^{6}K_{D\alpha}p^{\alpha}}\left[(\sigma_{1dd}^{\rho a'})(\eta_{1qq})+\frac{\omega^{2}}{p^{2}}(\sigma_{1dd})^{a}(\eta_{1qq})^{b}\right]$$

(4.2.11)

$$Q_{b\rho}=(-1)^{\rho'}\frac{\omega}{p}\frac{1}{L_{ddh}}\cdot\frac{p^{6}}{\sum\limits_{\alpha=0}^{6}K_{D\alpha}p^{\alpha}}(\sigma_{1dd}^{\rho a})(\eta_{1qq})^{b}$$

$$Q_{q^\bullet\varrho}=(-1)^{\varrho'}\frac{\omega}{p}\frac{1}{L_{ddh}}\frac{p^6}{\sum_{\alpha=0}^{6}K_{D\alpha}p^\alpha}(\sigma_{1dd}^{\varrho a})(\eta_{1qq}^{q'})$$

$$Q_{b^\bullet\varrho}=(-1)^{\varrho'}\frac{\omega}{p}\frac{1}{L_{ddh}}\frac{p^6}{\sum_{\alpha=0}^{6}K_{D\alpha}p^\alpha}(\sigma_{1dd}^{\varrho a})(\eta_{1qq}^{q'})$$

Analog, vom obține și coeficienții $Q_{\gamma\varrho}$ pentru $\varrho=b,q^\bullet,b^\bullet$ și respectiv $\varrho'=0$ pentru $\varrho=q^\bullet$ și $\varrho'=1$ pentru $\varrho=b,b^\bullet$.

$$Q_{a\varrho}=(-1)^{\varrho'}\frac{\omega}{p}\frac{1}{L_{qqh}}\frac{p^6}{\sum_{\alpha=0}^{6}K_{D\alpha}p^\alpha}(\sigma_{1dd})^{a}(\eta_{1qq}^{\varrho b})$$

$$Q_{d^\bullet\varrho}=(-1)^{\varrho'}\frac{\omega}{p}\frac{1}{L_{qqh}}\frac{p^6}{\sum_{\alpha=0}^{6}K_{D\alpha}p^\alpha}\frac{\sigma_{aa}}{pT_a}(\sigma_{1dd}^{ad'})(\eta_{1qq}^{\varrho b})$$

$$Q_{a^\bullet\varrho}=(-1)^{\varrho'+1}\frac{1}{L_{qqh}}\frac{p^6}{\sum_{\alpha=0}^{6}K_{D\alpha}p^\alpha}\cdot\frac{\sigma_{aa}}{pT_a}(\sigma_{1dd}^{aa'})(\eta_{1qq}^{\varrho b})$$

$$Q_{b\varrho}=(-1)^{\varrho'+1}\frac{1}{L_{qqh}}\frac{p^6}{\sum_{\alpha=0}^{6}K_{D\alpha}p^\alpha}(\sigma_{1dd})(\eta_{1qq}^{\varrho b})$$

$$Q_{q^\bullet\varrho}=(-1)^{\varrho}\frac{1}{L_{qqh}}\frac{p^6}{\sum_{\alpha=0}^{6}K_{D\alpha}p^\alpha}\Big[(\sigma_{1dd})(\eta_{1qq}^{\varrho q'})+\frac{\omega^2}{p^2}(\sigma_{1dd})^a(\eta_{1qq}^{\varrho q'})^b\Big] \tag{4.2.12}$$

$$Q_{b^\bullet\varrho}=(-1)^{\varrho'+1}\frac{1}{L_{qqh}}\frac{p^6}{\sum_{\alpha=0}^{6}K_{D\alpha}p^\alpha}\Big[(\sigma_{1dd})(\eta_{1qq}^{\varrho q'})+\frac{\omega^2}{p^2}(\sigma_{1dd})^a(\eta_{1qq}^{\varrho q'})^b\Big]$$

Coeficienții $A_{d\varrho}$ și $A_{q\varrho}$ se obțin cu ajutorul coeficienților $Q_{\gamma\varrho}$, astfel:

$$A_{d\varrho}=L_{ddh}\Big[\sigma_{da}(Q_{a\varrho}+\frac{\omega}{p}Q_{q\varrho})+(\sigma_{dd^\bullet}Q_{d^\bullet\varrho}+\sigma_{da^\bullet}Q_{a^\bullet\varrho})\Big]$$

$$A_{q}=L_{qqh}\Big[\eta_{qb}(-\frac{\omega}{p}Q_{a\varrho}+Q_{b\varrho})+(\eta_{qq^\bullet}Q_{q^\bullet\varrho}+\eta_{qb^\bullet}Q_{b^\bullet\varrho})\Big] \tag{4.2.13}$$

iar coeficienţii imaginilor tensiunilor sînt daţi de:

$$B_{d\cdot\varsigma} = -\frac{Q_{d\cdot\varsigma}}{p}$$

$$B_{q\cdot\varsigma} = -\frac{Q_{q\cdot\varsigma}}{p} \qquad (4.2.14)$$

Coeficienţii $Q_{\gamma\varsigma}$ sînt fracţii polinomiale în raport cu p, avînd numitorul un polinom de gradul 6 în p, iar numărătorul un polinom cu gradul maxim 5 şi minimum 2, înmulţit cu p şi respectiv p^2 , astfel încît în final, numărătorul are maxim gradul 6 şi minim gradul 4 în raport cu p.

Avînd determinaţi coeficienţii $A_{d\varsigma}$, $A_{q\varsigma}$, $B_{d\cdot\varsigma}$, $B_{q\cdot\varsigma}$ şi $Q_{\gamma\varsigma}$ se pot calcula parametrii operaţionali ai maşinii.

ANEXA 6.1

Algoritmul metodei Runge-Kutta-Gill la deconectare

La deconectare sistemul de ecuaţii diferenţiale ce trebuie rezolvat este dat de (6.18), respectiv este:

$$\frac{d\psi_{d'}}{dt}=b_2(\psi_{d'}-\psi_a) \qquad \frac{d\psi_{q'}}{dt}=b_2(\psi_{q'}-\psi_a)$$

$$\frac{d\psi_a}{dt}=b_4\psi_{d'}+b_7\psi_a+b_6Z\psi_b \qquad \frac{d\psi_b}{dt}=b_4\psi_{q'}+b_7\psi_b-b_6Z\psi_a$$

$$\frac{dZ}{dt}=b_8+b_9Z+\frac{b_{10}}{Z}+b_{14}(\psi_{d'}\psi_b-\psi_{q'}\psi_a)+b_{15}Z(\psi_a^2+\psi_b^2) \qquad (6.1.1)$$

$$\frac{dy}{dt}=Z$$

în care coeficienţii $b_j(j=2,4,6,7,8,9,10,14,15)$, daţi de relaţiile (6.12) sînt funcţie de parametrii maşinii, numărul perechilor de poli şi, de momentul de inerţie al sistemului turbină eoliană-multiplicator al vitezei de rotaţie, precum şi de parametrii turbinei eoliene, de asemenea s-au folosit următoarele notaţii: $Z=\frac{d\theta}{dt}$, $y=\theta$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii (6.1.1) se face numeric cu metoda Runge-Kutta-Gill.

Funcţiile necunoscute sînt valorile fluxurilor magnetice $\psi_{d'}$, $\psi_{q'}$, ψ_a, ψ_b, respectiv valorile lui Z şi y la momentul t. Valorile iniţiale ale acestor mărimi se notează cu indicele "0", iar valorile corespunzătoare unui moment de timp t_k, se notează cu indicele "k".

Metoda Runge-Kutta-Gill calculează valorile numerice ale funcţiilor necunoscute corespunzătoare momentului $t_{k+1}=t_k+h$, h fiind pasul metodei, respectiv $\psi_{d'k+1}$, $\psi_{q'k+1}$, ψ_{ak+1}, ψ_{bk+1}, Z_{k+1}, y_{k+1} cu ajutorul valorilor numerice ale funcţiilor corespunzătoare momentului t_k - respectiv $\psi_{d'k}$, $\psi_{q'k}$, ψ_{ak}, ψ_{bk}, Z_k, y_k - ale unor funcţii de aproximare $[K_i]$ $(i=1,2,3,4)$ şi ale funcţiilor $f(x,[X])$ date de relaţiile (6.1.1).

Elementele matricei primei funcţii de aproximare $[K_1]$ pe intervalul t_k, t_{k+1} sînt date de relaţiile (6.1.2):

$$k_{1d'} = hb_2(\psi_{d'k} - \psi_{ak})$$

$$k_{1q'} = hb_2(\psi_{q'k} - \psi_{bk})$$

$$k_{1a} = h(b_4\psi_{d'k} + b_7\psi_{ak} + b_6 Z_k \psi_{bk})$$

$$k_{1b} = h(b_4\psi_{q'k} + b_7\psi_{bk} - b_6 Z_k \psi_{ak}) \tag{6.1.2}$$

$$k_{1Z} = h\left[b_8 + b_9 Z_k + \frac{b_{10}}{Z_k} + b_{14}(\psi_{d'k}\psi_{bk} - \psi_{q'k}\psi_{ak}) + b_{15}(\psi_{ak}^2 + \psi_{bk}^2)Z_k\right]$$

$$k_{1y} = hZ_k$$

Cunoscînd funcţiile de aproximare $[K_1]$, se determină valorile numerice aproximative ale funcţiilor $f(x, [X])$ la momentul $t_{1k} = t_k + \alpha_0 h$, valori care sînt elementele matricei $[X_{1k}]$, respectiv:

$$\psi_{d'1k} = \psi_{d'k} + \beta_0 k_{1d'} \qquad \psi_{q'1k} = \psi_{q'k} + \beta_0 k_{1q'}$$

$$\psi_{a1k} = \psi_{ak} + \beta_0 k_{1a} \qquad \psi_{b1k} = \psi_{bk} + \beta_0 k_{1b} \tag{6.1.3}$$

$$Z_{1k} = Z_k + \beta_0 b_{1Z} \qquad y_{1k} = y_k + \beta_0 k_{1y}$$

Cu ajutorul valorilor numerice corespunzătoare momentului $t_{1k} = t_k + \alpha_0 h$, $[X_{1k}]$ se determină funcţiile de aproximare $[K_2]$ respectiv:

$$k_{2d'} = hb_2(\psi_{d'1k} - \psi_{a1k})$$

$$k_{2q'} = hb_2(\psi_{q'1k} - \psi_{b1k})$$

$$k_{2a} = h(b_4\psi_{d'1k} + b_7\psi_{a1k} + b_6 Z_{1k}\psi_{b1k})$$

$$k_{2b} = h(b_4\psi_{q'1k} + b_7\psi_{b1k} - b_6 Z_{1k}\psi_{a1k}) \tag{6.1.4}$$

$$k_{2Z} = h\left[b_8 + b_9 Z_{1k} + \frac{b_{10}}{Z_{1k}} + b_{14}(\psi_{d'1k}\psi_{b1k} - \psi_{q'1k}\psi_{a1k}) + b_{15}(\psi_{a1k}^2 + \psi_{b1k}^2)Z_{1k}\right]$$

$$k_{2y} = hZ_{1k}$$

Valorile numerice ale funcţiilor $f(x, [X])$ corespunzătoare momentului $t_{2k} = t_k + \alpha_1 h$, notate cu indicele "2k", şi elemente ale matricei $[X_{2k}]$ sînt:

$$\psi_{d\cdot 2k} = \psi_{d\cdot k} + \beta_1 k_{1d\cdot} + \gamma_1 k_{2d\cdot}$$

$$\psi_{q\cdot 2k} = \psi_{q\cdot k} + \beta_1 k_{1q\cdot} + \gamma_1 k_{2q\cdot}$$

$$\psi_{a2k} = \psi_{ak} + \beta_1 k_{1a} + \gamma_1 k_{2a} \qquad (6.1.5)$$

$$\psi_{b2k} = \psi_{bk} + \beta_1 k_{1b} + \gamma_1 k_{2b}$$

$$Z_{2k} = Z_k + \beta_1 k_{1Z} + \gamma_1 k_{2Z}$$

$$y_{2k} = y_k + \beta_1 k_{1y} + \gamma_1 k_{2y}$$

Se pot determina apoi, funcţiile de aproximare $[K_3]$, respectiv:

$$k_{3d\cdot} = hb_2(\psi_{d\cdot 2k} - \psi_{a2k})$$

$$k_{3q\cdot} = hb_2(\psi_{q\cdot 2k} - \psi_{b2k})$$

$$k_{3a} = h(b_4 \psi_{d\cdot 2k} + b_7 \psi_{a2k} + b_6 Z_{2k} \psi_{b2k})$$

$$k_{3b} = h(b_4 \psi_{q\cdot 2k} + b_7 \psi_{b2k} - b_6 Z_{2k} \psi_{a2k}) \qquad (6.1.6)$$

$$k_{3Z} = h\Big[b_8 + b_9 Z_{2k} + \frac{b_{10}}{Z_{2k}} + b_{14}(\psi_{d\cdot 2k}\psi_{b2k} - \psi_{q\cdot 2k}\psi_{a2k}) +$$

$$+ b_{15}(\psi^2_{a2k} + \psi^2_{b2k}) Z_{2k}\Big]$$

$$k_{3y} = hZ_{2k}$$

Valorile numerice ale funcţiilor $f(x, [X])$ la momentul $t_{3k} = t_k + \alpha_2 h$, notate cu indicele "3k" şi elemente ale matricei $[X_{3k}]$ sînt:

$$\psi_{d\cdot 3k} = \psi_{d\cdot k} + \beta_2 k_{1d\cdot} + \gamma_2 k_{2d\cdot} + \delta_2 k_{3d\cdot}$$

$$\psi_{q\cdot 3k} = \psi_{q\cdot k} + \beta_2 k_{1q\cdot} + \gamma_2 k_{2q\cdot} + \delta_2 k_{3q\cdot}$$

$$\Psi_{a3k}=\Psi_{ak}+\beta_2 k_{1a}+\gamma_2 k_{2a}+\delta_2 k_{3a}$$

$$\Psi_{b3k}=\Psi_{bk}+\beta_2 k_{1b}+\gamma_2 k_{2b}+\delta_2 k_{3b} \qquad (6.1.7)$$

$$Z_{3k}=Z_k+\beta_2 k_{1Z}+\gamma_2 k_{2Z}+\delta_2 k_{3Z}$$

$$y_{3k}=y_k+\beta_2 k_{1y}+\gamma_2 k_{2y}+\delta_2 k_{3y}$$

Cu ajutorul valorilor numerice ale lui $[X_{3k}]$ se pot calcula funcţiile de aproximare $[K_4]$:

$$k_{4d'}=hb_2(\Psi_{d'3k}-\Psi_{a3k}) \quad ; \quad k_{4q'}=hb_2(\Psi_{q'3k}-\Psi_{b3k})$$

$$k_{4a}=h(b_4\Psi_{d'3k}+b_7\Psi_{a3k}+b_6 Z_{3k}\Psi_{b3k})$$

$$k_{4b}=h(b_4\Psi_{q'3k}+b_7\Psi_{b3k}-b_6 Z_{3k}\Psi_{a3k}) \qquad (6.1.8)$$

$$k_{4Z}=h\Big[b_8+b_9 Z_{3k}+\frac{b_{10}}{Z_{3k}}+b_{14}(\Psi_{d'3k}\Psi_{b3k}-\Psi_{q'3k}\Psi_{a3k})$$

$$+b_{15}(\Psi_{a3k}^2+\Psi_{b3k}^2)Z_{3k}\Big]$$

Fiind determinate funcţiile de aproximare $[K_i]$, $i=1,2,3,4$ se determină valorile numerice aproximative ale funcţiilor necunoscute, elemente ale matricei $[X_{k+1}]$, la capătul intervalului $h=[t_{k+1},t_k]$:

$$\Psi_{d'k+1}=\Psi_{d'k}+d_1 k_{1d'}+d_2 k_{2d'}+d_3 k_{3d'}+d_4 k_{4d'}$$

$$\Psi_{q'k+1}=\Psi_{q'k}+d_1 k_{1q'}+d_2 k_{2q'}+d_3 k_{3q'}+d_4 k_{4q'}$$

$$\Psi_{ak+1}=\Psi_{ak}+d_1 k_{1a}+d_2 k_{2a}+d_3 k_{3a}+d_4 k_{4a} \qquad (6.1.9)$$

$$\Psi_{bk+1}=\Psi_{bk}+d_1 k_{1b}+d_2 k_{2b}+d_3 k_{3b}+d_4 k_{4b}$$

$$Z_{k+1}=Z_k+d_1 k_{1Z}+d_2 k_{2Z}+d_3 k_{3Z}+d_4 k_{4Z}$$

$$y_{k+1}=y_k+d_1 k_{1y}+d_2 k_{2y}+d_3 k_{3y}+d_4 k_{4y}$$

Valorile date de relaţiile (6.1.9) devin valori iniţiale pentru un nou interval de timp h.

ANEXA 6.2

Algoritmul metodei Runge-Kutta-Gill la reconectare

La reconectare, sistemul de ecuaţii diferenţiale ce trebuie rezolvat este dat de relaţiile (6.13), respectiv este:

$$\frac{d\psi_d}{dt}=b_1(\psi_d-\psi_a)+\psi_q Z-U_1\sqrt{2}\sin(\omega_1 t-y)$$

$$\frac{d\psi_q}{dt}=b_1(\psi_q-\psi_b)-\psi_d Z+U_1\sqrt{2}\cos(\omega_1 t-y)$$

$$\frac{d\psi_{d'}}{dt}=b_2(\psi_{d'}-\psi_a)$$

$$\frac{d\psi_{q'}}{dt}=b_2(\psi_{q'}-\psi_b)$$

$$\frac{d\psi_a}{dt}=b_3\psi_d+b_4\psi_{d'}+b_5\psi_a+b_6 Z\psi_b \qquad (6.2.1)$$

$$\frac{d\psi_b}{dt}=b_3\psi_q+b_4\psi_{q'}+b_5\psi_b-b_6 Z\psi_a$$

$$\frac{dZ}{dt}=b_8+b_9 Z+\frac{b_{10}}{Z}+b_{14}(\psi_{d'}\psi_b-\psi_{q'}\psi_a)+b_{16}(\psi_d\psi_b-\psi_q\psi_a)+b_{15}Z(\psi_a^2+\psi_b^2)$$

$$\frac{dy}{dt}=Z$$

în care coeficienţii $b_i(i=1,2,3,4,5,6,8,9,10,14,15,16)$, daţi de relaţiile (6.12) sînt funcţie de rezistenţele şi inductivităţile maşinii electrice, numărul perechilor de poli, de momentul de inerţie al sistemului turbină eoliană-multiplicator al vitezei de rotaţie, precum şi de parametrii geometrici ai turbinei eoliene şi de viteza vîntului. De asemenea s-au folosit următoarele notaţii: $Z=\frac{d\vartheta}{dt}$, $y=\vartheta$.

Rezolvarea sistemului de ecuaţii (6.2.1) se face cu metoda numerică Runge-Kutta-Gill.

Funcţiile necunoscute sînt valorile fluxurilor magnetice ψ_d, ψ_q, $\psi_{d'}$, $\psi_{q'}$, ψ_a, ψ_b, respectiv valorile lui Z şi y, toate funcții de timp. Valorile inițiale ale acestor mărimi se notează cu indicele "0" , cele corespunzătoare unui moment de timp t_k se notează cu indicele "k", iar cele corespunzătoare momentului de timp t_{k+1} se notează cu indicele "$_{k+1}$".

Metoda Runge-Kutta-Gill calculează valorile numerice ale funcțiilor necunoscute corespunzătoare momentului $t_{k+1}=t_k+h$, h fiind pasul metodei, respectiv ψ_{dk+1}, ψ_{qk+1}, $\psi_{d\cdot k+1}$, $\psi_{q\cdot k+1}$, ψ_{ak+1}, ψ_{bk+1}, Z_{k+1}, y_{k+1} cu ajutorul valorilor numerice ale funcțiilor corespunzătoare momentului t_k - respectiv ψ_{dk}, ψ_{qk}, $\psi_{d\cdot k}$, $\psi_{q\cdot k}$, ψ_{ak}, ψ_{bk}, Z_k, y_k - ale unor funcții de aproximare K_i i=1,2,3,4 și ale funcțiilor $f(x, [X])$, date de relațiile (6.2.1).

Elementele matricii primei funcții de aproximare $[K_1]$ pe intervalul $[t_k, t_{k+1}]$ sînt:

$$k_{1d}=h\left[b_1(\psi_{dk}-\psi_{ak})+\psi_{qk}Z_k-U_1\sqrt{2}\,\sin(\omega_1 t_k-y_k)\right]$$

$$k_{1q}=h\left[b_1(\psi_{qk}-\psi_{bk})-\psi_{dk}Z_k+U_1\sqrt{2}\,\cos(\omega_1 t_k-y_k)\right]$$

$$k_{1d\cdot}=hb_2(\psi_{d\cdot k}-\psi_{ak})$$

$$k_{1q\cdot}=hb_2(\psi_{q\cdot k}-\psi_{bk}) \qquad (6.2.2)$$

$$k_{1a}=h(b_3\psi_{dk}+b_4\psi_{d\cdot k}+b_5\psi_{ak}+b_6 Z_k\psi_{bk})$$

$$k_{1b}=h(b_3\psi_{qk}+b_4\psi_{q\cdot k}+b_5\psi_{bk}-b_6 Z_k\psi_{ak})$$

$$k_{1Z}=h\Big(b_8+b_9 Z_k+\frac{b_{10}}{Z_k}+b_{14}(\psi_{d\cdot k}\psi_{bk}-\psi_{q\cdot k}\psi_{ak})+b_{16}(\psi_{dk}\psi_{bk}-$$
$$-\psi_{dk}\psi_{ak})+b_{15}Z_k(\psi_{ak}^2+\psi_{ak}^2)\Big)$$

$$k_{1y}=hZ_k$$

Cu ajutorul primei funcții de aproximare $[K_1]$ se determină valorile numerice aproximative ale funcțiilor date de relațiile (6.2.1) la momentul $t_{1k}=t_k+\alpha_o h$, elemente ale matricei $[X_{1k}]$:

$$\psi_{d1k}=\psi_{dk}+\beta_o k_{1d} \qquad \psi_{q1k}=\psi_{qk}+\beta_o k_{1q}$$

$$\psi_{d'1k}=\psi_{d'k}+\beta_o k_{1d'} \qquad \psi_{q'1k}=\psi_{q'k}+\beta_o k_{1q'}$$

$$\psi_{a1k}=\psi_{ak}+\beta_o k_{1a} \qquad \psi_{b1k}=\psi_{bk}+\beta_o k_{1b} \tag{6.2.3}$$

$$Z_{1k}=Z_k+\beta_o k_{1Z} \qquad y_{1k}=y_k+\beta_o k_{1y}$$

Se determină valorile celei de a doua funcții de aproximare $[K_2]$, respectiv:

$$k_{2d}=h\left[b_1(\psi_{d1k}-\psi_{a1k})+\psi_{q1k}Z_{1k}-U_1\sqrt{2}\sin(\omega_1 t_{1k}-y_{1k})\right]$$

$$k_{2q}=h\left[b_1(\psi_{q1k}-\psi_{b1k})-\psi_{d1k}Z_{1k}+U_1\sqrt{2}\cos(\omega_1 t_{1k}-y_{1k})\right]$$

$$k_{2d'}=h\left[b_2(\psi_{d'1k}-\psi_{a1k})\right]$$

$$k_{2q'}=h\, b_2(\psi_{q'1k}-\psi_{b1k})$$

$$k_{2a}=h(b_3\psi_{d1k}+b_4\psi_{d'1k}+b_5\psi_{a1k}+b_6 Z_{1k}\psi_{b1k}) \tag{6.2.4}$$

$$k_{2b}=h(b_3\psi_{q1k}+b_4\psi_{q'1k}+b_5\psi_{b1k}-b_6 Z_{1k}\psi_{a1k})$$

$$k_{2Z}=h\left[b_8+b_9 Z_{1k}+\frac{b_{10}}{Z_{1k}}+b_{14}(\psi_{d'1k}\psi_{b1k}-\psi_{q'1k}\psi_{a1k})+b_{16}(\psi_{d1k}\psi_{b1k}-\psi_{q1k}\psi_{a1k})+b_{15}Z_{1k}(\psi_{a1k}^2+\psi_{b1k}^2)\right]$$

$$k_{2y}=h\, Z_{1k}$$

Pentru a determina funcțiile de aproximare K_3 este necesară calcularea valorilor funcțiilor date de (6.2.1) la momentul $t_{2k}=t_k+\alpha_1 h$, valori care sînt elemente ale matricei $[X_{2k}]$:

$$\psi_{d2k}=\psi_{dk}+\beta_1 k_{1d}+\gamma_1 k_{2d}$$

$$\psi_{q2k}=\psi_{qk}+\beta_1 k_{1q}+\gamma_1 k_{2q}$$

$$\psi_{d'2k}=\psi_{d'k}+\beta_1 k_{1d'}+\gamma_1 k_{2d'}$$

$$\psi_{q'2k}=\psi_{q'k}+\beta_1 k_{1q'}+\gamma_1 k_{2q'}$$

$$\psi_{a2k}=\psi_{ak}+\beta_1 k_{1a}+\gamma_1 k_{2a} \tag{6.2.5}$$

$$\psi_{b2k}=\psi_{bk}+\beta_1 k_{1b}+\gamma_1 k_{2b}$$

$$Z_{2k}=Z_k+\beta_1 k_{1Z}+\gamma_1 k_{2Z}$$

$$y_{2k}=y_k+\beta_1 k_{1y}+\gamma_1 k_{2y}$$

Se determină valorile pentru funcția de aproximare K_3 respectiv:

$$k_{3d}=h\left[b_1(\psi_{d2k}-\psi_{a2k})+\psi_{q2k}Z_{2k}-U_1\sqrt{2}\sin(\omega_1 t_{2k}-y_{2k})\right]$$

$$k_{3q}=h\left[b_1(\psi_{q2k}-\psi_{b2k})-\psi_{d2k}Z_{2k}+U_1\sqrt{2}\cos(\omega_1 t_{2k}-y_{2k})\right]$$

$$k_{3d'}=hb_2(\psi_{d'2k}-\psi_{a2k})$$

$$k_{3q'}=hb_2(\psi_{q'2k}-\psi_{b2k}) \tag{6.2.6}$$

$$k_{3a}=h(b_3\psi_{d2k}+b_4\psi_{d'2k}+b_5\psi_{a2k}+b_6Z_{2k}\psi_{b2k})$$

$$k_{3b}=h(b_3\psi_{q2k}+b_4\psi_{q'2k}+b_5\psi_{b2k}-b_6Z_{2k}\psi_{a2k})$$

$$k_{3Z}=h\left[b_8+b_9Z_{2k}+\frac{b_{10}}{Z_{2k}}+b_{14}(\psi_{d'2k}\psi_{b1k}-\psi_{q'2k}\psi_{a1k})+b_{16}(\psi_{d2k}\psi_{b2k}-\psi_{q2k}\psi_{a2k})+b_{15}Z_{2k}(\psi^2_{a2k}+\psi^2_{b2k})\right]$$

$$k_{3y}=hZ_{3k}$$

Valorile funcțiilor date de (6.2.1), la momentul $t_{3k}=t_k+\alpha_2 h$, valori care sînt elemente ale matricei $[X_{3k}]$ se determină cu relațiile:

$$\psi_{d3k}=\psi_{dk}+\beta_2 k_{1d}+\gamma_2 k_{2d}+\delta_2 k_{3d}$$

$$\psi_{q3k}=\psi_{qk}+\beta_2 k_{1q}+\gamma_2 k_{2q}+\delta_2 k_{3q}$$

$$\Psi_{d'3k} = \Psi_{d'k} + \beta_2 k_{1d'} + \gamma_2 k_{2d'} + \delta_2 k_{3d'}$$

$$\Psi_{q'3k} = \Psi_{q'k} + \beta_2 k_{1q'} + \gamma_2 k_{2q'} + \delta_2 k_{3q'}$$

$$\Psi_{a3k} = \Psi_{ak} + \beta_2 k_{1a} + \gamma_2 k_{2a} + \delta_2 k_{3a}$$

$$\Psi_{b3k} = \Psi_{bk} + \beta_2 k_{1b} + \gamma_2 k_{2b} + \delta_2 k_{3b} \qquad (6.2.7)$$

$$Z_{3k} = Z_k + \beta_2 k_{1Z} + \gamma_2 k_{2Z} + \delta_2 k_{3Z}$$

$$y_{3k} = y_k + \beta_2 k_{1y} + \gamma_2 k_{2y} + \delta_2 k_{2y}$$

Cu ajutorul valorilor date de relațiile (6.2.7) se determină funcția de aproximare $[K_4]$:

$$k_{4d} = h\left[b_1(\Psi_{d3k} - \Psi_{a3k}) + \Psi_{q3k} Z_{3k} - U_1\sqrt{2}\,\sin(\omega_1 t_{3k} - y_{3k})\right]$$

$$k_{4q} = h\left[b_1(\Psi_{q3k} - \Psi_{b3k}) - \Psi_{d3k} Z_{3k} + U_1\sqrt{2}\,\cos(\omega_1 t_{3k} - y_{3k})\right]$$

$$k_{4d'} = hb_2(\Psi_{d'3k} - \Psi_{a3k})$$

$$k_{4q'} = hb_2(\Psi_{q'3k} - \Psi_{b3k})$$

$$k_{4a} = h(b_3\Psi_{d3k} + b_4\Psi_{d'3k} + b_5\Psi_{a3k} + b_6 Z_{3k}\Psi_{a3k}) \qquad (6.2.8)$$

$$k_{4b} = h(b_3\Psi_{q3k} + b_4\Psi_{q'3k} + b_5\Psi_{b3k} - b_6 Z_{3k}\Psi_{b3k})$$

$$k_{4Z} = h\Big[b_8 \mp b_9 Z_{3k} + \frac{b_{10}}{Z_{3k}} + b_{14}(\Psi_{d'3k}\Psi_{b3k} - \Psi_{q'3k}\Psi_{a3k}) +$$

$$+ b_{16}(\Psi_{d3k}\Psi_{b3k} - \Psi_{q3k}\Psi_{a3k}) + b_{15} Z_{3k}(\Psi_{a3k}^2 + \Psi_{b3k}^2)\Big]$$

$$k_{4y} = hZ_{3k}$$

Prin urmare se pot calcula valorile numerice ale funcțiilor necunoscute corespunzătoare momentului $t_{k+1}=t_k+h$, elemente ale matricei $[\bar{X}_{k+1}]$

$$\psi_{d\,k+1}=\psi_{dk}+d_1k_{1d}+d_2k_{2d}+d_3k_{3d}+d_4k_{4d}$$

$$\psi_{q\,k+1}=\psi_{qk}+d_1k_{1q}+d_2k_{2q}+d_3k_{3q}+d_4k_{4q}$$

$$\psi_{d'\,k+1}=\psi_{d'k}+d_1k_{1d'}+d_2k_{2d'}+d_3k_{3d'}+d_4k_{4d'}$$

$$\psi_{q'\,k+1}=\psi_{q'k}+d_1k_{1q'}+d_2k_{2q'}+d_3k_{3q'}+d_4k_{4q'}$$

$$\psi_{a\,k+1}=\psi_{ak}+d_1k_{1a}+d_2k_{2a}+d_3k_{3a}+d_4k_{4a} \qquad (6.2.9)$$

$$\psi_{b\,k+1}=\psi_{bk}+d_1k_{1b}+d_2k_{2b}+d_3k_{3b}+d_4k_{4b}$$

$$Z_{k+1}=Z_k+d_1k_{1Z}+d_2k_{2Z}+d_3k_{3Z}+d_4k_{4Z}$$

$$y_{k+1}=y_k+d_1k_{1y}+d_2k_{2y}+d_3k_{3y}+d_4k_{4y}$$

ANEXA 7.1

Notatii utilizate în programele de calcul

a_1, a_2, a_3 - coeficienţi pentru calculul coeficientului de moment al turbinei eoliene, corespunzători coeficienţilor A_1, B_1, C_1 (re.2.3).

a_2, a_3, a_4 - coeficienţi ai variabilei t din algoritmul Runge-Kutta Gill, introduşi în program, corespunzători coeficienţilor $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.

a_5, a_6, a_7, a_8 - coeficienţi pentru calculul factorilor de refulare ai curentului ξ_R, ξ_x (rel.2.11), corespunzători respectiv coeficienţilor a,b,c,d.

BJ1,BJ2 - inducţia magnetică în jugul statoric,respectiv rotoric.

BZ1H,BZ2H - lăţimea rădăcinii dintelui statoric, respectiv rotoric.

BZ1o,BZ2o - lăţimea capătului dintelui statoric,respectiv rotoric.

b_j (j=1,...16) - coeficienţi ce intervin în sistemul de ecuaţii diferenţiale al maşinii (necunoscute se consideră fluxurile, respectiv rel.6.13,6.18)

$c_{21}, c_{31}, c_{32}, c_{41}, c_{42}, c_{43}$ - coeficienţi ai algoritmului Runge-Kutta-Gill corespunzători coeficienţilor $\beta_0, \beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ din expresiile funcţiilor de aproximare.

d_1, d_2, d_3, d_4 - ponderile cu care se calculează valoarea de la sfîrşitul intervalului în metoda Runge-Kutta-Gill

D - diametrul interior al maşinii

del - întrefierul maşinii, corespunzător lui δ

ETA - randamentul multiplicatorului vitezei de rotaţie, corespunzător lui η

f - frecvenţa (f=50 Hz)

GJ1,GJ2 - masa jugului statoric, respectiv rotoric

GZ1,GZ2 - masa dinţilor statorici, respectiv rotorici

h - valoarea maximă a pasului din metoda Runge-Kutta-Gill pentru care s-a admis dublarea acestuia

h_1 - valoarea iniţială a pasului folosit în algoritm

h_2 - valoarea maximă a pasului de iterare

i_λ (λ=1,2,3,4,5,6)-curenţii ce parcurg înfăşurările principale,respectiv auxiliare ale statorului maşinii reale

$i_{\lambda'}$ (λ'=1',2',3',4',5',6')-mărimi similare lui i_λ dar pentru rotor

i_λ (λ=d,q,a,b,d',q',a',b')-curenţii ce parcurg înfăşurările principale,respectiv auxiliare ale maşinii echivalente

$i_{1pi}, i_{2pi}, i_{3pi}$ - valorile inițiale ale curenților rotorici (numai la reconectare) din mașina reală.

j_{max} - numărul maxim de iterații al programului

d - numărul de iterații efectuat cu același pas.

j_{1max} - numărul maxim de iterații efectuat cu același pas

d_1 - numărul de iterații după care se efectuează tipărirea valorilor

j_{2max} - numărul maxim de iterații, cu același pas, după care se efectuează calculul mărimilor din mașina echivalentă și se face tipărirea.

JT - momentul de inerție al ansamblului turbină eoliană-multiplicator al vitezei de rotație, considerat la arborele generatorului electric JT_{min} = 620 kg.m^2, JT_{max}=2315 kg.m^2.

JG - momentul de inerție al generatorului electric $JG = GD^2/4$

k_{bl} - factor de bobinaj

k_c - factorul lui Carter

L_P - inductivitatea principală, mărime corespunzătoare lui L_{11h}.

L_{dq} - inductivitatea de dispersie a înfășurării principale statorice din mașina echivalentă corespunzătoare lui $L_{d\sigma}$, $L_{q\sigma}$ ($L_{dq}=L_{d\sigma}=L_{q\sigma}$).

L_{dqR} - mărime similară lui L_{dq}, dar corespunzătoare înfășurării principale rotorice ($L_{dq}=L_{d\cdot\sigma}=L_{q\cdot\sigma}$)

L_{11h} - inductivitatea principală a unei faze din mașină reală.

L_i - lungimea ideală a mașinii

M - moment (cuplu) electromagnetic

M_{mec} - moment (cuplu) mecanic, obținut la arborele generatorului electric (rel.6.10)

n_k - viteza de rotație corespunzătoare momentului de timp t_k.

n_{el} - viteza de rotație de la care are loc deconectarea mărime corespunzătoare lui n_i

NC_2 - numărul de crestături rotorice

p_I, p_{II} – numărul perechilor de poli ai generatorului electric care se deconectează, respectiv se reconectează.

pFJ1, pFZ1 – pierderile principale din jugul statoric, respectiv dinții statorici

P_{mec} – pierderile mecanice din mașina electrică

P_n – puterea nominală a mașinii electrice

R_{ab}, R_{abp} – rezistențele înfășurărilor auxiliare statorice, respectiv rotorice raportate la stator ale mașinii echivalente $R_{ab}=R_a=R_b$, $R_{abp}=R_{a'}=R_{b'}$

R_{dq}, R_{dqp} – mărimi similare lui R_{ab}, R_{abp}, dar referitoare la înfășurările principale ale mașinii echivalente $R_{dq}=R_d=R_q$; $R_{dqp}=R_{d'}=R_{q'}$

R_e – densitatea aerului, mărime corespunzătoare lui ρ (rel. 2.1)

RT – raportul de multiplicare al multiplicatorului vitezei de rotație

R_Z – raza paletelor turbinei eoliene

R_1 – rezistența electrică a fazei statorice din mașina reală

R_{1m} – rezistența electrică a circuitului de magnetizare – din mașina reală

R_{2p} – rezistența electrică a fazei rotorice reduse la stator, din mașina reală

SB – aria baleiată de paletele turbinei eoliene

s_n – alunecarea nominală a mașinii

t_k, t_{k+1} – timpul la momentul k, respectiv k+1

TC1, TC2 – pasul crestăturii statorice, respectiv rotorice

U_1 – tensiunea de fază la bornele statorului

v – viteza vîntului

w_1 – numărul de spire al fazei statorice

W_m – energia magnetică din mașină

X_1, X_{2p} – reactanța de dispersie a fazei statorice, respectiv rotorice raportată la stator, pentru mașina reală

X_{1m} – reactanța circuitului de magnetizare

y_o – valoarea inițială a lui ϑ, deci $y_o = \vartheta_o$

z_k – valoarea lui $\frac{d\vartheta}{dt}$ la momentul t_k

ϑ – unghiul electric al mașinii

Ψ – fluxul magnetic total:

$\Psi_{1pi}, \Psi_{2pi}, \Psi_{3pi}$ - fluxul magnetic rotoric corespunzător fazei 1, respectiv 2,3 la momentul inițial (considerat la reconectare)

Ψ_{dk}, Ψ_{qk} - fluxul magnetic corespunzător înfășurării principale statorice din axa d, respectiv q a mașinii echivalente la momentul t_k.

Ψ_{dpk}, Ψ_{qpk} - mărimi similare, dar pentru înfășurările principale rotorice

Ψ_{apk}, Ψ_{bpk} - mărimi similare, dar pentru înfășurările auxiliare rotorice.