MINISTERUL EDUCATIEI SI INVATAMINTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" TIMISOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

Ing. BARBU LUCIAN NICOARA

TEZA DE DOCTORAT

STUDIUL CIMPULUI MAGNETIC SI AL FORTELOR LA SEPARATOARELE CU LICHIDE MAGNETICE

CONDUCATOR STIINTIFIC:
PROF. DR. ING. IOAN DE SABATA

TIMISOARA 1988

CUPRINS

INTRODUCERE

Lichidele magnetice sînt dispersii de particule magnetice de dimensiuni mici (30 - 100 Å) într-un lichid de bază. Ele prezintă proprietăţi magnetice similare cu ale materialelor magnetice dispersate şi se comportă ca un mediu lichid continuu, avînd o stabilitate foarte bună în timp şi sub acţiunea unor cîmpuri magnetice exterioare.

Originea lichidelor magnetice se găseşte în cercetările spaţiale. Iniţial cercetările în domeniu au avut loc în ţări cu tehnologie avansată (S.U.A., U.R.S.S., Anglia, Japonia, Franţa).

In România lichidele magnetice au reţinut pentru prima dată atenţia colectivului de cercetători de la Institutul Politehnic şi Centrul de Fizică Tehnică Iaşi, în prezent făcînd obiectul cercetărilor intense şi a colectivelor de la Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timişoara, I.C.P.M.M.N. Baia-Mare precum şi a Institutului de Mine din Petroşani.

Pentru prima dată la noi în ţară a avut loc un seminar tehnico-ştiinţific cu tema "Aplicaţiile ferofluidelor" în octombrie 1980 [72] la Timişoara. Tot la Timişoara în 18-19 octombrie 1985, în cadrul "Conferinţei de Maşini Hidraulice şi Hidrodinamică" s-a desfăşurat şi o secţiune avînd ca temă "Fluidele magnetice şi aplicaţiile lor". In 21-22 octombrie 1988 s-a desfăşurat la Timişoara seminarul tehnico-ştiinţific "Lichidele magnetice - baza unor tehnologii de vîrf". Aceste trei acţiuni au fost iniţiate şi organizate de un colectiv condus de acad. Ioan Anton.

Lucrările prezentate în cadrul acestor manifestări ştiinţifice au scos în evidenţă preocuparea deosebită ce există în legătură cu studiul şi aplicaţiile practice ale lichidelor magnetice. Astfel, s-au evidenţiat numeroase domenii de utilizare: etanşări, traductoare separatoare, aparate de măsură, difuzoare etc. S-au remarcat şi preocupări în domeniul biologic şi medical.

In prezenta lucrare autorul se ocupă de studiul proprietăţilor magnetice ale lichidelor magnetice şi studiul cîmpului şi forţelor la separatoarele magnetofluidice cu poli cu profil hiperbolic.

Lucrarea cuprinde 5 capitole. In capitolul 1 sînt studiate proprietățile magnetice ale lichidelor magnetice. Sînt prezentate două metode de măsurare a susceptivității magnetice inițiale, prima bazată pe măsurarea inductivității unei bobine în prezența și absența unei probe de lichid magnetic, iar a doua originală și prin principiul ei mai precisă decît altele existente în literatură.

In continuare se investighează susceptivitatea magnetică complexă, se urmărește dependența părții reale și imaginare a acesteia de frecvență. In colaborare [21], autorul a studiat la Riga comportarea unor lichide magnetice cu particule din ferită de cobalt, lichidul fiind magnetizat de un cîmp magnetic constant.

Pornind de la metoda Gouy (cunoscută pentru măsurarea susceptivității magnetice la lichide și gaze paramagnetice de susceptivitate mică) autorul dă o metodă originală de determinare a magnetizației de saturație la lichidele magnetice.

In final, pe baza măsurării permitivității lichidelor magnetice, se trasează curbele de magnetizare pentru diferite probe de lichid magnetic, în funcție de cîmpul magnetic din interiorul probei.

In capitolul 2 sînt studiate forțele în cîmp magnetic. Este prezentată expresia generală a forțelor în cîmp electromagnetic și densitatea de volum a forțelor. Se dau expresiile densităților de volum a forțelor, particularizate pentru cîmpuri electrostatice, respectiv magnetice staționare, stabilite în medii izotrope, fără polarizări permanente, neliniare și lipsite de histerezis. In continuare este studiată presiunea electromagnetică în lichide și este prezentată o consecință importantă a presiunii electromagnetice induse de un cîmp electromagnetic într-un lichid magnetic, și anume fenomenul de levitație magnetică de primul ordin.

Urmează o demonstrație originală, mai generală decît cea cunoscută în literatură pentru calculul forței rezultante pe baza integrării tensiunilor fictive.

La sfîrșit este calculată forța exercitată de cîmpul magnetic asupra unei sfere nemagnetice imersetă într-un lichid magnetic, partea originală constînd în faptul că, la cîmpuri mici, dimensiunile sferei pot fi arbitrare.

In capitolul 3 se tratează despre cîmpurile magnetice utilizate la separatoarele magnetofluidice. Autorul a studiat cîmpul magnetic în cazul separatoarelor (ideale) cu poli infiniţi şi (reale) cu poli finiţi, profilul polilor fiind hiperbolic şi exponenţial. Este dată o demonstraţie a imposibilităţii existenţei unui cîmp magnetic al cărui gradient să fie constant şi să aibă o orientare unidirecţională. S-a stabilit o configuraţie de poli la care gradientul intensităţii cîmpului magnetic este unidirecţional, dar variază exponenţial în modul. A fost conceput un set de programe pentru calculul potenţialului magnetic, al modulului intensităţii cîmpului magnetic şi al gradientului modulului intensităţii cîmpului magnetic, în orice punct al spaţiului dintre polii unui separator, utilizînd metoda diferenţelor finite. Au fost realizate două modele electrocinetice, pentru a putea studia, prin analogie, cîmpul la separatoarele cu piese polare de dimensiuni finite.

Traiectoriile particulelor prin lichidul magnetic, plasat între polii separatorului, au fost determinate prin rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale neliniare, care descriu mişcarea acestora, pe cale numerică, cu ajutorul calculatorului CORAL 4021, utilizînd metoda Ruuge-Kutta-Gill.

Capitolul 4 prezintă realizarea practică a polilor cu profil exponenţial şi datele experimentale. Se face calculul polilor cu profil exponenţial al unei celule de separare. Deoarece particulele, după străbaterea stratului de lichid magnetic îşi continuă mişcarea în aer, s-a completat pachetul de programe al capitolului 3, obţinîndu-se traiectoriile complete ale particulelor în celula de separare.

In continuare se prezintă realizarea practică a pieselor polare cu profil exponenţial şi a celulei de separare. Urmează datele experimentale obţinute la această celulă, date experimentale ce confirmă studiul teoretic efectuat.

Capitolul 5 este rezervat concluziilor finale.

Pentru îndrumarea atentă şi sprijinul continuu acordat pe întreaga perioadă de pregătire şi elaborare a tezei ţin să mulţumesc în mod călduros conducătorului meu ştiinţific, prof.dr. ing. Ioan De Sabata.

Respectuoase mulţumiri aduc şefului Catedrei de Maşini Hidraulice, Acad. Ioan Anton, pentru ajutorul şi sprijinul acordat în elaborarea tezei şi în posibilitatea de a colabora cu cercetători de la Institutul de fizică din Riga (URSS).

Mulţumesc, de asemenea, cercet. şt. principal dr.fiz. Vékás Ladislau, şeful laboratorului de Ferohidrodinamică, pentru preţioase sfaturi şi îndemnuri primite.

Profesorului dr.ing. Constantin Sora, şeful Colectivului de Bazele electrotehnicii, îi mulţumesc respectuos pentru sprijinul acordat.

Mulţumesc şefului de catedră, prof.dr.ing. Toma Dordea, pentru imboldul şi înţelegerea cu care m-a ajutat în finalizarea tezei.

In mod deosebit aduc mulţumiri decanului Facultăţii de Electrotehnică, prof.dr.ing. Avram Heler, care m-a impulsionat continuu, pînă la depunerea tezei.

Mulţumesc inginerului de sistem Sorin Ertel, care mi-a înlesnit lucrul la calculatorul CORAL 4021.

De asemenea mulţumesc colegilor de catedră şi tuturor acelora care m-au ajutat, într-un fel sau altul, la elaborarea tezei de doctorat.

Cap. 1. PROPRIETATI MAGNETICE ALE LICHIDELOR MAGNETICE

Intrînd în însăşi denumirea lor - lichide magnetice - proprietăţile lor esenţiale, care le deosebesc fundamental de celelalte lichide şi care sînt utilizate în majoritatea aplicaţiilor practice, sînt proprietăţile magnetice.

Lichidele magnetice au utilitate practică datorită forţelor de natură magnetică ce sînt determinate de aceste proprietăţi.

Din acest motiv proprietăţilor magnetice ale lichidelor magnetice le-au fost acordate o deosebită importanţă, ele fiind analizate în numeroase lucrări, pe plan mondial. Un colectiv puternic există în URSS, la Riga, [4, 9, 11, 22, 23], cu care autorul a avut şansa de a colabora [2].

In SUA cercetări complexe sînt efectuate sub patronajul lui R.E. Rosensweig, "părintele" lichidelor magnetice [24].

La noi în ţară începutul a fost făcut de colectivul de la Iaşi [45]. In prezent cercetări complexe în acest domeniu se efectuează la Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timişoara de către un colectiv condus de acad. Ioan Anton [46, 47].

Important de cunoscut la un lichid magnetic este susceptivitatea sa magnetică notată cu x_m, sau permeabilitatea magnetică μ, legătura dintre aceste mărimi fiind cunoscută ($\mu = \mu_0(1 + x_m)$), unde μ_0 [H/m] este permeabilitatea absolută a vidului.

De asemenea informaţii importante cu privire la forţele ce apar în lichidele magnetice rezultă şi din studiul susceptivităţii iniţiale x_{mi} şi complexe $\underline{x}_m = x_m' - jx_m''$ a acestora.

In acest capitol sînt prezentate două metode de determinare a susceptivităţii magnetice iniţiale, este studiată dependenţa de frecvenţă a părţii reale şi imaginare a susceptivităţii magnetice complexe, pentru lichide cu particule de magnetită şi - pentru prima dată în ţară - cu particule de ferită de cobalt.

Este prezentată o metodă originală de stabilire rapidă a magnetizaţiei de saturaţie şi în final se determină permeabilitatea magnetică şi se trasează curbele de magnetizare pentru diferite probe de lichid magnetic în funcţie de cîmpul magnetic din interiorul probei.

1.1. Măsurarea susceptivității magnetice inițiale

O proprietate importantă care se impune a fi cunoscută în vederea utilizării lichidelor magnetice în procesele de separare magnetică este susceptivitatea magnetică inițială a acestora 2 .

Autorul a folosit două metode pentru determinarea experimentală a susceptivității inițiale a lichidelor magnetice 25 .

Lichidele magnetice sînt substanțe paramagnetice și deci ascultă de teoria lui Langevin. Cum momentul magnetic al unei particule dispersate în lichid este cu mult mai mare ca momentele magnetice ale moleculelor substanțelor paramagnetice, se spune că lichidele dele magnetice sînt superparamagntice

Pentru a avea o precizie cît mai mare s-a studiat în prealabil pînă la ce valoare a intensității cîmpului magnetic H se poate aproxima curba de magnetizare $M = M(H)$ cu o dreaptă, astfel încît eroarea să fie sub 2 %. S-a pornit de la ecuația lui Langevin:

$$\frac{M}{M_o} = \operatorname{cth}\frac{\mu_o m}{kT} H - \frac{kT}{\mu_o m}\frac{1}{H} \tag{1.1}$$

unde:

M este magnetizația lichidului;
M_o - magnetizația de saturație;
k - constanta lui Boltzmann;
T - temperatura mediului, în grade Kelvin;
H - modulul intensității cîmpului magnetic și
$m = M_{sp} \cdot V_{mp}$, în care M_{sp} este magnetizarea de saturație a mediului dispersat iar V_{mp} - volumul mediu al particulelor.

Dacă se notează cu $\xi = \mu_o m/kT$, atunci funcția lui Langevin devine:

$$\mathcal{L}(\xi H) = \operatorname{cth}\xi H - \frac{1}{\xi H} \tag{1.2}$$

Dezvoltînd în serie Taylor această funcție și luînd în considerare primii doi termeni rezultă:

$$\mathcal{L}(\xi H) \cong \mathcal{L}(o) + \xi H \mathcal{L}(o) = \frac{\xi H}{3} \tag{1.3}$$

S-a notat cu $\mathcal{L}_a(\xi H)$ valoarea adevărată, exactă, a funcției lui Langevin și dacă se pune condiția ca eroarea raportată în procente să nu depășească 2 %, se obține:

$$\frac{\mathcal{L}_a(\xi H) - \mathcal{L}(\xi H)}{\mathcal{L}_a(\xi H)} \leq 0{,}02 \tag{1.4}$$

Această inecuație transcendentă s-a rezolvat numeric pentru trei probe de lichid magnetic cu particule din magnetită cu $M_{sp} = 4,5.10^5 A/m$ și s-a considerat $K = 1,38.10^{-23}$ J/K iar $T = 293$ ^oK. Pentru proba 1 diametrul mediu al particulelor este $\bar{d}_1 = 121$ Å, pentru proba doi $\bar{d}_2 = 109,7$ Å și pentru proba trei $\bar{d}_3 = 106$ Å. Corespunzător au rezultat constantele $\xi_1 = 1,29727.10^{-4}(m/A)$, $\xi_2 = 9,6670.10^{-5}(m/A)$ și $\xi_3 = 8,7255.10^{-5}(m/A)$. Pentru prima probă relația este satisfăcută pînă la o intensitate a cîmpului magnetic de 4250 A/m, pentru a doua pînă la 5700 A/m iar pentru a treia pînă peste 6000 A/m.

Metoda de măsurare a susceptivității inițiale a lichidelor magnetice, x_{mi}, se bazează pe măsurarea inductivității unei bobine în prezența și în absența unei probe cu lichid magnetic.

In absența probei, inductanța L_o a unei bobine cilindrice cu secțiunea circulară, are expresia cunoscută:

$$L_o = \mu_o N^2 d_o^2 /4\ell, \qquad (1.5)$$

în care: N este numărul de spire al bobinei, ℓ lungimea ei iar d_o diametrul secțiunii.

Dacă în interiorul bobinei se introduce un tub cilindric cu lichid magnetic, de secțiune circulară S_1, inductanța bobinei devine L_1. Expresia inductanței L_1 se deduce după cum urmează:

$$iL_1 = N(B_1S_1 + B_oS_o) \qquad (1.6)$$

$$iL_1 = N[\mu_r\mu_o H_o \tfrac{\pi}{4} d_1^2 + \mu_o H_o \tfrac{\pi}{4} (d_o^2 - d_1^2)] \qquad (1.7)$$

în care s-a ținut seama de egalitățile componentelor tangente ale lui $\bar{H}$. Deci:

$$L_1 = \mu_o \frac{\pi}{4} \frac{N^2}{\ell} (d_o^2 + x_{mi} d_1^2) \qquad (1.8)$$

Dacă se face raportul relațiilor (1.8) și (1.5) se obține:

$$\frac{L_1}{L_o} = \frac{x_{mi}(d_1^2 + d_o^2)}{d_o^2} \qquad (1.9)$$

și în final:

$$x_{mi} = \left(\frac{L_1}{L_o} - 1\right)\left(\frac{d_o}{d_1}\right)^2 = \frac{L_1 - L_o}{L_o}\left(\frac{d_o}{d_1}\right)^2 \qquad (1.10)$$

Inductanțele s-au măsurat cu o punte semiautomată (Semiautomatic RLCG Bridge - BM 539) și s-au obținut valorile: $L_o = 6,16$ mH, $L_{1_1} = 9,39$ mH, $L_{1_2} = 12,67$ mH, $L_{1_3} = 9,34$ mH. Corespunzător au rezultat susceptivitățile inițiale ale celor trei probe de lichid magnetic: $x_{mi_1} = 1,970$, $x_{mi_2} = 4,008$, $x_{mi_3} = 1,958$. Probele au particule de magnetită iar lichidul de bază este petrol sau ulei.

O altă metodă de măsurare a susceptivității inițiale a lichidelor magnetice tinde să elimine eventualele erori introduse de diferența $\Delta L = L_1 - L_0$.

Schema electrică este prezentată în figura 1.1.

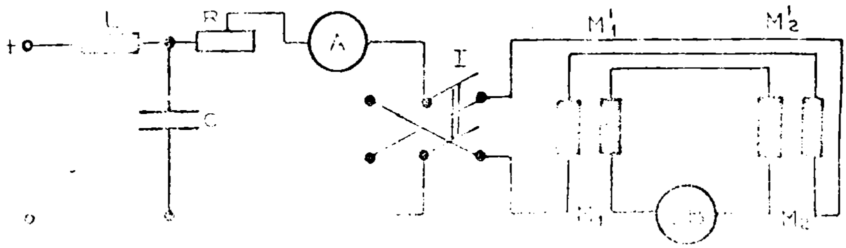


Fig. 1.1

Bobinele M_1 și M_2 sînt bobine lungi cu un cîmp cu grad mare de uniformitate. Bobinele de măsură M_1' și M_2', plasate în interiorul lui M_1 respectiv M_2, sînt conectate în opoziție. Bobina L și condensatorul C au rol de filtru.

Pentru realizarea bobinelor M_1' și M_2' s-a folosit conductor emailat de cupru cu un diametru de 0,1 mm, diametrul mediu al bobinelor fiind de 8,375 mm.

Scara galvanometrului balistic GB are 250 diviziuni (mm) și pentru a avea o precizie bună am considerat ca deviația maximă să fie în jurul a 200 diviziuni. Intensitatea cîmpului magnetic H_0 s-a considerat aproximativ 8 KA/m. Rezultă de aici numărul de spire pentru bobinele de măsură M_1' și M_2':

$$N_2 = \frac{C_b \cdot a}{2x_{mi} S_2 \mu_0 H_0} \qquad (1.11)$$

unde C_b este constanta galvanometrului balistic iar a numărul de diviziuni.

Apreciind valorile $x_{mi} = 0,8$ și $H_0 = 8,0375$ KA/m se obține $N_2 = 2715$ spire.

S-au realizat astfel două bobine M_1' și M_2' cu $N_2 = 2715$ spire, lungimea lor fiind de 80 mm (raportul dintre lungime și diametru este $\ell/d = 80/8,375 = 9,55$).

Pentru dimensionarea bobinelor de cîmp s-a pornit de la relația:

$$H_0 = \frac{N_1 I}{l} \qquad (1.12)$$

unde N_1 reprezintă numărul de spire, l lungimea bobinei iar I curentul ce o străbate.

Pentru o uniformitate ridicată a cîmpului magnetic în interiorul bobinei, trebuie ca raportul l/d_1 să fie cît mai mare [27], unde d_1 este diametrul bobinelor care determină cîmpul. In acest caz s-a considerat $l/d_1 = 15$.

Pentru confecționarea bobinelor s-au folosit tuburi de sticlă, cu diametrul exterior de 16 mm. Ținînd seama de condiția de mai sus rezultă lungimea bobinei $l = 15\ d_1 = 15 \cdot 16 = 240$. S-a luat $l = 250$ mm.

Din relația (1.12) rezultă pentru un curent I = 3 A și H_0 = 8KA/m, N_1 = 666,6 spire. Constructiv bobinele M_1 și M_2 au fost realizate din conductor de cupru emailat cu diametrul de 1 mm, în trei straturi, avînd în total 700 spire fiecare bobină.

Intensitatea cîmpului magnetic al unei bobine cu mai multe straturi, calculată pe axul ei, este dată de următoarea relație

$$H = \frac{N_1 I}{2(a_2 - a_1)l}\left[y_2 \ln \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha_2''}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha_2'}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} - y_1 \ln \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha_1''}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha_1'}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}\right], \qquad (1.13)$$

elementele geometrice fiind precizate în figura 1.2.

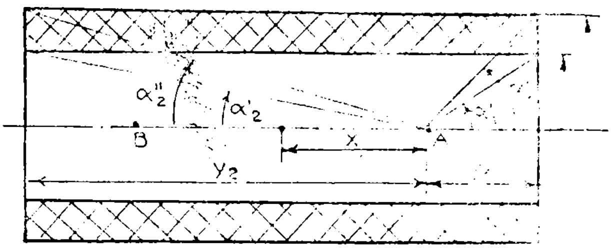


Fig. 1.2

Pentru a studia gradul de uniformitate a cîmpului magnetic s-au calculat valorile acestuia în punctele corespunzătoare extremităților bobinei de măsură, A și B, față de valoarea cîmpului la mijlocul bobinei.

Valorile numerice pentru cazul practic sînt: l = 250 mm, 2x = 80 mm. Rezultă y_1 = 85 mm și y_2 = 165 mm. Pentru razele a_1=8,1 mm şi a_2 = 10,8 mm rezultă unghiurile $\alpha_1' = \mathrm{arctg}\ 8{,}1/85 = 5{,}443^\circ$, $\alpha_1'' = \mathrm{arctg}\ 10{,}8/85 = 7{,}24^\circ$, $\alpha_2' = \mathrm{arctg}\ 8{,}1/165 = 2{,}81^\circ$ şi $\alpha_2'' = \mathrm{arctg}\ 10{,}8/165 = 7{,}24^\circ$.

Valoarea intensităţii cîmpului magnetic în curentul bobinei, H_M, se obţine pentru $\alpha_1' = \alpha_2' = 3{,}707^\circ$ şi $\alpha_1'' = \alpha_2'' = 4{,}938^\circ$. Cu ajutorul relaţiei (1.13) rezultă: $H_A = H_B = 8{,}367$ KA/m şi $H_M = 8{,}376$ KA/m.

Eroarea raportată în procente este $(H_M - H_A) \cdot 100/H_M = 0{,}107\%$, valoare care corespunde exigenţelor metodei.

Intensitatea cîmpului magnetic de valoare calculată anterior corespunde unei inducţii magnetice de aproximativ $B_o = 100$ mT.

Uniformitatea cîmpului din interiorul bobinelor a fost verificată utilizînd o bobină sondă cu 600 spire în zece straturi, verificare ce a confirmat justeţea calculelor.

Poziţia bobinelor M_1' şi M_2' poate fi modificată (figura 1.3) în interiorul bobinelor M_1 şi M_2 pînă cînd se realizează condiţia ca la acţionarea inversorului I, pentru orice valoare a curentului de lucru, fluxurile totale ale bobinelor M_1' şi M_2', conectate în opoziţie, să fie egale ($\Psi_{10} = \Psi_{20}$) şi deci galvanometrul balistic GB să nu indice nici o diviziune.

Dacă într-una din bobinele M_1' şi M_2' se introduce un tub cilindric cu lichid magnetic, la acţionarea inversorului I apare o indicaţie a galvanometrului balistic, datorită susceptivităţii lichidului, care diferă de cea a aerului. Astfel galvanometrul balistic GB va indica o variaţie a fluxului total, $2\Delta\Psi$, datorită basculării inversorului I:

$$2\Delta\Psi = a_1 \cdot C_b, \tag{1.14}$$

unde: a_1 este deviaţia galvanometrului balistic GB (în mm) iar C_b constanta sa.

Pe de altă parte:

$$2\Delta\Psi = 2\Psi_{10} + 2\Delta B S_{21} N_2 - 2\Psi_{20} = 2\Delta B S_{21} \cdot N_2 \tag{1.15}$$

unde: ΔB este variaţia inducţiei magnetice, N_2 numărul de spire al bobinei cu lichid magnetic şi S_{21} suprafaţa secţiunii transversale a lichidului din tub.

Din relaţiile (1.14) şi (1.15) rezultă:

$$\Delta B = B_1 - B_o = \frac{a_1 C_b}{2N_2 S_{21}}. \tag{1.16}$$

In relaţia (1.16) se ţine seama că $B_o = \mu_o H_o$ şi $B_1 = \mu_o \mu_r H_o$

şi deci:

$$\mu_r \mu_0 H_0 = \mu_0 H_0 + \frac{a_1 C_b}{2N_2 S_{21}} . \qquad (1.17)$$

Dacă se împarte cu $\mu_0 H_0 = B_0$ şi se ţine seama că $\mu_r = 1 + x_{mi}$, se obţine:

$$x_{mi} = \frac{a_1 C_b}{2N_2 S_{21} B_0} . \qquad (1.18)$$

Pentru determinarea inducţiei magnetice în absenţa lichidului magnetic (B_0) s-a procedat în felul următor: s-a conectat la galvanometrul balistic GB numai bobina M_1' şi s-au citit diviziunile a_0 funcţie de curent. Rezultă astfel inducţia magnetică:

$$B_0 = \frac{a_0 C_b}{2S_2 N_2} . \qquad (1.19)$$

Dacă se introduce relaţia (1.19) în relaţia (1.18) şi se ţine cont că secţiunile, atît a bobinei cît şi a lichidului magnetic, sînt circulare, rezultă pentru susceptivitatea magnetică a bobinelor magnetice următoarea expresie:

$$x_{mi} = \left(\frac{d_2}{d_{21}}\right)^2 \cdot \frac{a_1}{a_0} \qquad (1.20)$$

unde: d_2 este diametrul mediu al bobinei M_1', d_{21} este diametrul lichidului, a_1 deviaţia galvanometrului balistic GB cînd există lichid magnetic, iar a_0 deviaţia sa în absenţa lichidului magnetic.

Este important de remarcat că în relaţia (1.20) nu intervine numărul de spire şi constanta galvanometrului balistic GB, deci se elimină două posibile surse de erori. De asemenea este important de relevat că s-a eliminat eroarea ce apare la efectuarea operaţiei de scădere a două inductanţe, diferenţa făcîndu-se pe cale electrică prin însuşi principiul metodei.

La realizarea instalaţiei experimentale s-a avut în vedere o poziţionare a bobinelor în plan vertical, ceea ce elimină bulele de aer ce se formează în poziţie orizontală şi care afectează omogenitatea probei de lichid magnetic.

De asemenea, pentru ca fără lichid magnetic fluxul total al bobinelor de măsură M_1' şi M_2' conectate în opoziţie să fie nul, bobinele M_1' şi M_2' neputînd fi perfect identice, s-a conceput posibilitatea mişcării lor în plan vertical (fig.1.3), pînă la atingerea dezideratului cerut.

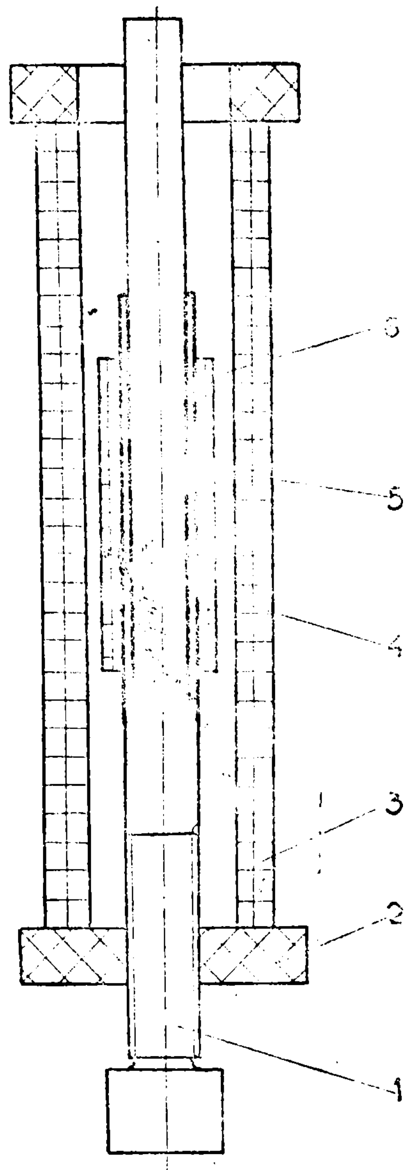


Fig. 1.3

1. Tijă filetată
2. rondelă
3. bobină generatoare de cîmp (M_1, M_2)
4. bobină de măsură (M'_1, M'_2)
5. tub din sticlă
6. tub din sticlă în care se introduce lichid magnetic

Rezultatele experimentale sînt trecute în tabelele 1.1, 1.2 şi 1.3.

Pentru cele trei probe s-au obţinut valorile medii: x_{mi_1} = 1,860, x_{mi_2} = 4,88 şi x_{mi_3} = 1,817, valori apropiate de cele obţinute prin metoda măsurării inductivităţilor, mai puţin exactă.

Experienţele reluate după un interval de aproximativ două luni au dus la valori foarte apropiate (tabelele 1.4, 1.5 şi 1.6): x_{mi_1} = 1,819, x_{mi_2} = 4,822 şi x_{mi_3} = 1,789. Tendinţa de scădere a lui x_{mi} se poate datora sedimentării în timp a unei mici părţi de particule cu diametrul mai mare.

Tabelul 1.1 Proba P_1

Nr. crt.	I [A]	a_o [mm]	a_1 [mm]	a_1/a_o	x_{mi}
1	0,06	17	10	0,588	2,231
2	0,08	20	13	0,650	2,467
3	0,1	30	15	0,500	1,898
4	0,15	44	23	0,523	1,985
5	0,2	58	30	0,517	1,962
6	0,3	89	45	0,506	1,920
7	0,4	117	60	0,513	1,947
8	0,5	147	74	0,503	1,909
9	0,6	173	87	0,503	1,909
10	0,7	205	101	0,493	1,871
11	0,8	235	115	0,489	1,856
12	0,9	265	127	0,479	1,818
13	1,0	293	143	0,488	1,852
14	1,1	325	152	0,468	1,776
15	1,2	353	167	0,473	1,795
16	1,3	383	176	0,460	1,746
17	1,4	413	191	0,462	1,753
18	1,5	442	199	0,450	1,709
19	1,6	463	205	0,443	1,681
20	1,7	490	219	0,447	1,696
21	1,8	520	230	0,442	1,677
22	1,9	550	235	0,427	1,620
23	2,0	580	247	0,426	1,617

Tabelul 1.2 Proba P_2

Nr. crt.	I [A]	a [mm]	a_o [mm]	a/a_o	x_{mi}
1	0,06	24	17	1,412	5,359
2	0,08	31	23	1,348	5,115
3	0,1	39	30	1,300	4,934
4	0,15	58	44	1,318	5,002
5	0,2	76	58	1,310	4,971
6	0,3	113	89	1,270	4,820
7	0,4	149	117	1,274	4,835
8	0,5	181	147	1,231	4,672
9	0,6	214	173	1,237	4,694
10	0,7	242	205	1,180	4,478

Tabelul 1.3 Proba P_3

Nr. crt.	I [A]	a_o [mm]	a [mm]	x_{mi}
0	1	2	3	4
1	0,06	17	9	2,008
2	0,08	23	12	1,981
3	0,1	30	15	1,898
4	0,15	44	23	1,985
5	0,2	58	30	1,962
6	0,3	89	46	1,962
7	0,4	117	60	1,947
8	0,5	147	75	1,935
9	0,6	173	90	1,973
10	0,7	205	102	1,890
11	0,8	235	115	1,856
12	0,9	265	128	1,833
13	1,0	293	135	1,749
14	1,1	325	147	1,715
15	1,2	353	161	1,713
16	1,3	383	170	1,685
17	1,4	413	183	1,681

Tabelul 1.3 Proba 3(continuare)

0	1	2	3	4
18	1,5	442	194	1,661
19	1,6	463	205	1,681
20	1,7	490	217	1,681
21	1,8	520	232	1,693
22	1,9	550	239	1,651
23	2,0	580	250	1,635

Tabelul 1.4 Proba P_4

Nr. crt.	I [A]	a_o [mm]	a [mm]	a/a_o	x_{mi}
1	0,06	17	9	0,529	2,009
2	0,08	20	12	0,600	2,277
3	0,1	30	15	0,500	1,898
4	0,15	44	22	0,500	1,898
5	0,2	58	29,5	0,509	1,930
6	0,3	89	44	0,494	1,876
7	0,4	117	59	0,504	1,914
8	0,5	147	71	0,483	1,833
9	0,6	173	86	0,497	1,887
10	0,7	205	98,5	0,480	1,823
11	0,8	235	113	0,481	1,825
12	0,9	265	128	0,483	1,833
13	1,0	293	139	0,474	1,800
14	1,1	325	151	0,465	1,763
15	1,2	353	162	0,459	1,742
16	1,3	383	176	0,460	1,744
17	1,4	413	185	0,448	1,700
18	1,5	442	197	0,456	1,691
19	1,6	463	208	0,449	1,605
20	1,7	490	219	0,447	1,697
21	1,8	520	229	0,440	1,671
22	1,9	530	237	0,447	1,697
23	2,0	580	247	0,426	1,616

Tabelul 1.5 **Proba P_2**

Nr. crt.	I [A]	a_o [mm]	a [mm]	a/a_o	x_{mi}
1	0,06	17	23,5	1,382	5,246
2	0,08	23	31	1,348	5,115
3	0,1	30	38	1,266	4,807
4	0,15	44	58	1,318	5,002
5	0,2	58	75	1,293	4,907
6	0,3	89	111	1,247	4,733
7	0,4	117	147	1,256	4,768
8	0,5	147	178	1,211	4,595
9	0,6	173	210	1,213	4,606
10	0,7	205	240	1,170	4,443

Tabelul 1.6 **Proba P_3**

Nr. crt.	I A	a_o [mm]	a [mm]	a/a_o	x_{mi}
1	0,06	17	8,5	0,500	1,898
2	0,08	20	12	0,600	2,277
3	0,1	30	14	0,466	1,771
4	0,15	44	21	0,477	1,811
5	0,2	58	28	0,483	1,832
6	0,3	89	41	0,461	1,748
7	0,4	117	55	0,470	1,764
8	0,5	147	68	0,463	1,756
9	0,6	173	81	0,468	1,777
10	0,7	205	93	0,454	1,722
11	0,8	235	106	0,451	1,712
12	0,9	265	118	0,445	1,690
13	1,0	293	130,5	0,445	1,690
14	1,1	325	143	0,440	1,670
15	1,2	353	154	0,436	1,656
16	1,3	383	164	0,428	1,625
17	1,4	413	177	0,429	1,626
18	1,5	442	189	0,428	1,625
19	1,6	463	199	0,430	1,631
20	1,7	490	210	0,429	1,626
21	1,8	520	218	0,419	1,590
22	1,9	550	231	0,436	1,654
23	2,0	580	245	0,422	1,603

1.2. Susceptivitatea magnetică complexă

In absenţa unui cîmp magnetic exterior, particulele coloidale, presupuse avînd fiecare momentul magnetic $\bar{m}$, au orientări aleatoare, astfel încît, pe ansamblul lichidului magnetic magnetizaţia este nulă.

Dacă se aplică un cîmp magnetic exterior uniform $\bar{H}$ particulele tind să se orienteze după direcţia acestuia, tendinţă care se accentuează o dată cu creşterea cîmpului, pînă la o aliniere completă a particulelor magnetice după direcţia cîmpului exterior, magnetizaţia obţinînd valoarea de saturaţie.

Pentru magnetizările prin orientare este satisfăcută ecuaţia [28]:

$$\tau \frac{dM}{dt} + M = x_{m_0} H, \tag{1.21}$$

în care τ este timpul de relaxare (acelaşi pentru toate particulele - model DEBAYE), H modulul intensităţii cîmpului exterior aplicat, M modulul vectorului de magnetizaţie şi x_{m_0} susceptivitatea magnetică în cîmp magnetic staţionar.

Dacă se rezolvă ecuaţia (1.21) pentru regimul sinusoidal permanent ($H = Hm \sin\omega t$) se obţine:

$$j\omega\tau \underline{M} + \underline{M} = x_{m_0} \underline{H} \tag{1.22}$$

sau

$$\underline{M} = \frac{x_{m_0}}{1 + j\omega\tau} \underline{H} \tag{1.23}$$

Relaţia (1.23) stabileşte legătura între complexul vectorului de magnetizaţie $\underline{M}$ şi complexul vectorului intensitate de cîmp magnetic $\underline{H}$.

Susceptivitatea magnetică complexă se defineşte în forma:

$$\underline{x}_m = \frac{\underline{M}}{\underline{H}} = \frac{x_{m_0}}{1 + j\omega\tau} \tag{1.24}$$

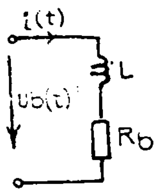
sau

$$\underline{x}_m = \frac{x_{m_0}}{1 + (\omega\tau)^2} - j \frac{\omega\tau x_{m_0}}{1 + (\omega\tau)^2} = x_m' - jx_m'' \tag{1.25}$$

Susceptivitatea magnetică complexă are deci o parte reală $x_m' = x_{m_0}/(1 + \omega\tau)^2$ şi una imaginară $x_m'' = \omega\tau x_{m_0}/(1 + \omega\tau)^2$, ambele fiind funcţie de frecvenţa $f = \omega/2\pi$ a cîmpului magnetic aplicat. La $\omega = 0$ (cîmp magnetic staţionar) rezultă $x'(o) = x_{m_0}$ şi $x''(o) = 0$.

Dacă se alimentează o bobină cu o tensiune sinusoidală

$u_b(t) = u_m \sin\omega t$ şi se notează cu R_b şi $\underline{L}$ rezistenţa, respectiv complexul inductanţei bobinei, ecuaţia corespunzătoare circuitului din figura 1.3' este:



$$\underline{u}_b = \underline{i}\,R_b + \frac{d\psi}{dt} = \underline{i}\,R_b + j\omega\underline{\psi} \qquad (1.26)$$

unde ψ este fluxul magnetic total al bobinei.

Dacă se utilizează teoremele complexului inductanţei şi variaţiei inductanţei demonstrate în [28], ecuaţia (1.26) devine:

Fig. 1.3'

$$\underline{u}_b = \underline{i}R + j\omega\left[L_o + L_o\frac{x_m' \int_{vM} H_{om}^2\,dv}{\int_{v\infty} H_{om}^2\,dv} - jL_o\frac{x_m'' \int_{vM} H_{om}^2\,dv}{\int_{v\infty} H_{om}\,dv}\right]\underline{i} \qquad (1.27)$$

sau

$$\underline{u}_b = \underline{i}\left[R_b + \omega L_o\frac{x_m'' \int_{vM} H_{om}^2\,dv}{\int_{v\infty} H_{om}^2\,dv}\right] + j\omega\left[L_o + L_o\frac{x_m' \int_{v_M} H_{om}^2\,dv}{\int_{v\infty} H_{om}^2\,dv}\right] \qquad (1.28)$$

în care v_M reprezintă volumul ocupat de lichid iar $v\infty$, întregul domeniu al cîmpului, L_o inductanţa bobinei în lipsa lichidului şi H_{om} amplitudinea intensităţii cîmpului magnetic în lipsa probei cu lichid magnetic.

Din relaţia (1.28) rezultă parametrii echivalenţi ai bobinei: rezistenţa echivalentă

$$R_e = R_b + \omega L_o\frac{x_m'' \int_{v_M} H_{om}^2\,dv}{\int_{v\infty} H_{om}^2\,dv} \qquad (1.29)$$

şi inductanţa echivalentă

$$L_e = L_o + L_o\frac{x_m' \int_{v_M} H_{om}^2\,dv}{\int_{v\infty} H_{om}^2\,dv} \qquad (1.30)$$

Dacă se notează cu:

$$A = \int_{v_M} H_{om}^2\,dv \Big/ \int_{v\infty} H_{om}^2\,dv \qquad (1.31)$$

mărimea care rămîne constantă la o probă de lichid magnetic, atunci din (1.29) şi (1.30) rezultă expresiile lui x_m' şi:

$$x_m' = \frac{1}{A}\frac{L_e - L_o}{L_o} = \frac{1}{A}\frac{\Delta L}{L_o}, \tag{1.32}$$

$$x_m'' = \frac{1}{A}\frac{R_e - R_b}{\omega L_o} = \frac{1}{A}\frac{\Delta R_b}{\omega L_o}. \tag{1.33}$$

Relaţiile (1.32) şi (1.33) dau posibilitatea determinării mărimilor x_m' şi x_m'' prin măsurarea variaţiei inductanţei şi a variaţiei unei bobine la introducerea în aceasta a unei probe de lichid magnetic.

S-au realizat două instalaţii experimentale pentru măsurarea inductanţei şi rezistenţei bobinei, prima bazată pe fenomene de rezonanţă iar a doua fiind constituită dintr-o punte foarte sensibilă.

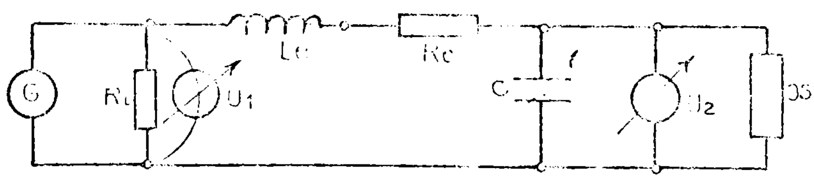


Fig. 1.4

In figura 1.4 este prezentată schema ce se bazează pe rezonanţa de tensiune. Ea se compune din generatorul de tensiune sinusoidală cu frecvenţă variabilă G , rezistenţa etalon R_1 (mult mai mică decît impedanţa circuitului exterior), bobina sondă (L_e şi R_e), capacitatea variabilă C, voltmetrele electronice U_1 şi U_2 şi osciloscopul OS.

La început se introduce bobina sondă fără lichid magnetic şi la frecvenţa aleasă (f_o) se modifică valoarea capacităţii pînă se stabileşte rezonanţa. Momentul rezonanţei se identifică cu ajutorul osciloscopului OS prin amplitudinea maximă a tensiunii U_2. Dacă L_o şi R_b sînt parametrii bobinei, la rezonanţă se poate scrie:

$$\omega_o L_o = \frac{1}{\omega_o C}\ ; \qquad L_o = \frac{1}{\omega_o^2 C} \tag{1.34}$$

şi

$$Q_o = \frac{U_{2o}}{U_1} = \frac{\omega_o L_o}{R_b}\ ; \qquad R_b = \frac{\omega_o L_o}{Q_o}. \tag{1.35}$$

Se repetă măsurările pentru bobina cu lichid magnetic pentru care, la rezonanţă, mărimile măsurate sînt U_2 şi capacitatea C. In acest caz avem:

$$\omega_o(L_o + \Delta L) = \frac{1}{\omega_o C}\ ; \qquad \Delta L = \frac{C_o - C}{\omega_o^2 C C_o} \tag{1.36}$$

BUPT

şi din:

$$\frac{U_2}{U_1} = Q = \frac{\omega_0(L_0 + \Delta L)}{R_b + \Delta R} = \frac{Q_0 + \dfrac{\omega_0 \Delta L}{R_b}}{1 + \dfrac{\Delta R}{R_b}} \tag{1.37}$$

rezultă:

$$\Delta R_b = \left(\frac{C_0}{C} \cdot \frac{U_{2o}}{U_2} - 1\right) R_b . \tag{1.38}$$

Egalităţile (1.36) şi (1.38) împreună cu (1.32) şi (1.33) permit determinarea părţii reale şi imaginare a susceptivităţii magnetice complexe:

$$x_m' = \frac{1}{A} \frac{C_0 - C}{C_0} , \tag{1.39}$$

$$x_m'' = \frac{1}{A}\left(\frac{C_0}{C} \frac{U_1}{U_{c1}} - \frac{U_1}{U_{co}}\right) . \tag{1.40}$$

A doua schemă utilizează puntea Anderson care, cum se specifică în literatură [29], permite măsurarea unor inductivităţi mici.

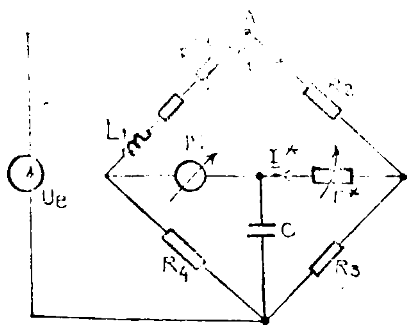


Fig. 1.5

Schema punţii este dată în fig. 1.5. In serie cu bobina cu lichid magnetic este introdusă rezistenţa variabilă R_1^*.

Notînd cu $R_1 = R_{1b} + R_1^*$, la echilibru, pentru curenţi se obţin expresiile:

$$\underline{I}_1' = \frac{\underline{U}_e}{R_1 + R_4 + j\omega L_1} ,$$

$$\underline{I}_2' = \frac{\underline{U}_e(C(R_3 + r^*) - j)}{\omega C(R_2R_3 + R_2r^* + R_3r^*) - j(R_2 + R_3)} ; \tag{1.41}$$

$$\underline{I}^* = \frac{\underline{U}_e R_3 \omega C}{C(R_2R_3 + R_2r^* + R_3r^*) - j(R_2 + R_3)} . \tag{1.42}$$

Din condiţia de echilibru:

$$-\underline{I}_1'(R_1 + j\omega L_1) + \underline{I}_2' R_2 + \underline{I}^* r^* = 0 \text{ rezultă:}$$

$$\frac{R_1 + j\omega L_1}{R_1 + R_4 + j\omega L_1} = \frac{R_2\omega C(R_3 + r^*) - R_2 j + r^* R_3 \omega C}{\omega C(R_2R_3 + R_2r^* + R_3r^*) - j(R_2 + R_3)} \tag{1.43}$$

Egalînd părţile reale şi cele imaginare din relaţia (1.43) se obţine:

$$CR_1(R_2R_3 + R_2r^* + R_3r^*) + \omega L_1(R_2 + R_3) = [R_2\omega C(R_3 + r^*) + r^*R_3\omega C]\cdot(R_1 + R_4) + \omega L_1R_4; \tag{1.44}$$

$$\omega L_1\omega C(R_2R_3 + R_2r^* + R_3r^*) - R_1(R_2 + R_3) = -R_2(R_1 + R_4) + \omega L_1R_2\omega C(R_3 + r^*) \tag{1.45}$$

Din relaţiile (1.45) şi (1.44) se obţine

$$R_1R_3 = R_2R_4 \quad \text{şi} \tag{1.46}$$

$$L_1 = C[R_2R_4 + r^*(R_1 + R_4)] \tag{1.47}$$

Ecuaţiile (1.46) şi (1.47) constituie condiţiile de echilibru ale punţii şi permit să se măsoare inductanţa bobinei şi rezistenţa sa.

La dimensionarea punţii, pentru a se obţine o sensibilitate maximă în determinarea lui L_1 s-au avut în vedere următoarele: s-a ales o astfel de valoare a capacităţii C încît raportul L_1/C să realizeze $R_1 = R_4$; s-au asigurat egalităţile $R_2 = R_3 = R_1/2 = R_4/2$.

Bobina utilizată în experiment este caracterizată prin L_1=1 mH şi $R_{1b} = 6\Omega$. Dimensionînd puntea după metoda indicată rezultă $C = 0,1\mu F$, $R_1 = R_4 = 100\Omega$ şi $R_2 = R_3 = 50\Omega$. Pentru R_4 s-a folosit o rezistenţă etalon fixă iar celelalte rezistenţe sînt în decade. Echilibrul punţii s-a realizat modificînd corespunzător rezistenţele R_1^* şi r^*.

Prin amîndouă metodele s-au obţinut rezultate apropiate.

In figura 1.5' este prezentată dependenţa părţii reale a susceptivităţii magnetice complexe de frecvenţă (unde A are semnificaţia din relaţia (1.31)) pentru două probe de lichid magnetic pe bază de petrol, proba numărul 1 avînd magnetizaţia de saturaţie de 150 G, iar proba numărul 2 de 300 G.

Se observă faptul că odată cu creşterea frecvenţei partea reală a susceptivităţii magnetice complexe tinde monoton descrescător la zero. Acest fapt a fost remarcat pentru întregul lot de probe de lichid magnetic studiate.

In figura 1.6' este prezentată dependenţa de frecvenţă a părţi imaginare a susceptivităţii magnetice complexe pentru aceleaşi două probe de lichid magnetic.

Lichidele magnetice pe bază de magnetită studiate pînă aici au constanta anizotropiei magnetice cristaline mică. In continuare am studiat dispersia permeabilităţii magnetice a lichidelor magnetice pe bază de particule de ferită de cobalt fabricate în URSS [21]. Constanta anizotropiei magnetice cristaline este de 30 de ori mai mare decît a magnetitei. Spre deosebire de cazurile tratate anterior, la aceste lichide s-au determinat dependenţele lui x'_m şi x''_m în funcţie de frecvenţă cînd în bobina sondă era prezent şi un cîmp magnetic constant, notat cu B_0 (figurile 1.8 şi 1.9).

Pentru a studia dependenţa $x''_m = f(x'_m)$ am pornit de la relaţia Cole-Cole [36]:

$$\underline{x}_m = x_m + \frac{x_{mo} - x_{m\infty}}{1 + (j\omega\tau)^{1-\alpha}} \qquad (1.48)$$

unde α este o constantă reală, $0 \leq \alpha < 1$, $x_{m\infty}$ reprezintă susceptivitatea magnetică la frecvenţe foarte înalte ($\omega \to \infty$) iar x_{mo} susceptivitatea la frecvenţe joase ($\omega \to 0$). Pentru $\alpha = 0$ din relaţia Cole-Cole se obţine ecuaţia lui Debye.

Din ecuaţia complexă (1.48) se obţin două ecuaţii reale din care se elimină parametrul $\omega\tau$. Se obţine în acest mod următoarea relaţie:

$$\left[x'_m - \frac{1}{2}(x_{m_0} + x_{m\infty})\right]^2 + \left[x''_m + \frac{1}{2}(x_{m_0} - x_m)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\alpha}{2}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(x_{m_0} - x_m)^2 \sec^2\frac{\pi\alpha}{2} \qquad (1.49)$$

Această relaţie reprezintă ecuaţia unui cerc în planul $x'_m o x''_m$, [illegible] cercului fiind în punctul C de coordonate $((x_{m_0} + x_{m\infty})/2,\ -(x_{m_0} - x_{m\infty})/2 \cdot \mathrm{tg}(\pi\alpha/2))$ şi avînd raza $R = (x_{m_0} - x_{m\infty})/2 \cdot \cos(\pi\alpha/2)$. Cercul intersectează axa ox_m în punctele $x_{m\infty}$ şi x_{m_0} (figura 1.6) şi are un arc de cerc în cadranul întîi, arc plasat în interiorul cercului Debye.

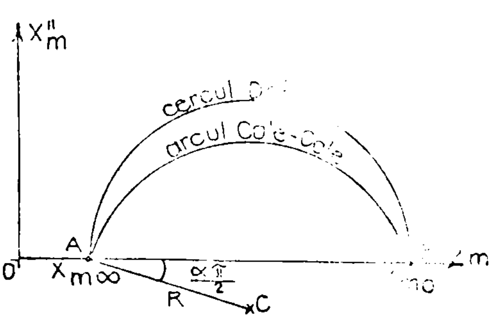


Fig. 1.6

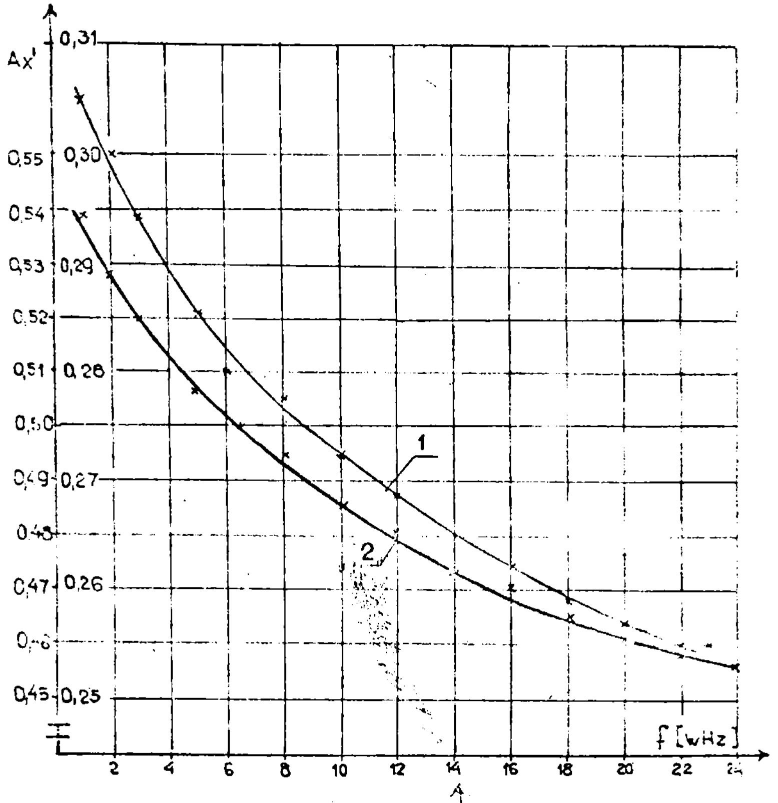

Ax'
0,31
0,30
0,29
0,28
0,27
0,26
0,25
0,55
0,54
0,53
0,52
0,51
0,50
0,49
0,47
0,45
1
2
f [MHz]
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24

Fig. 4.5 .-

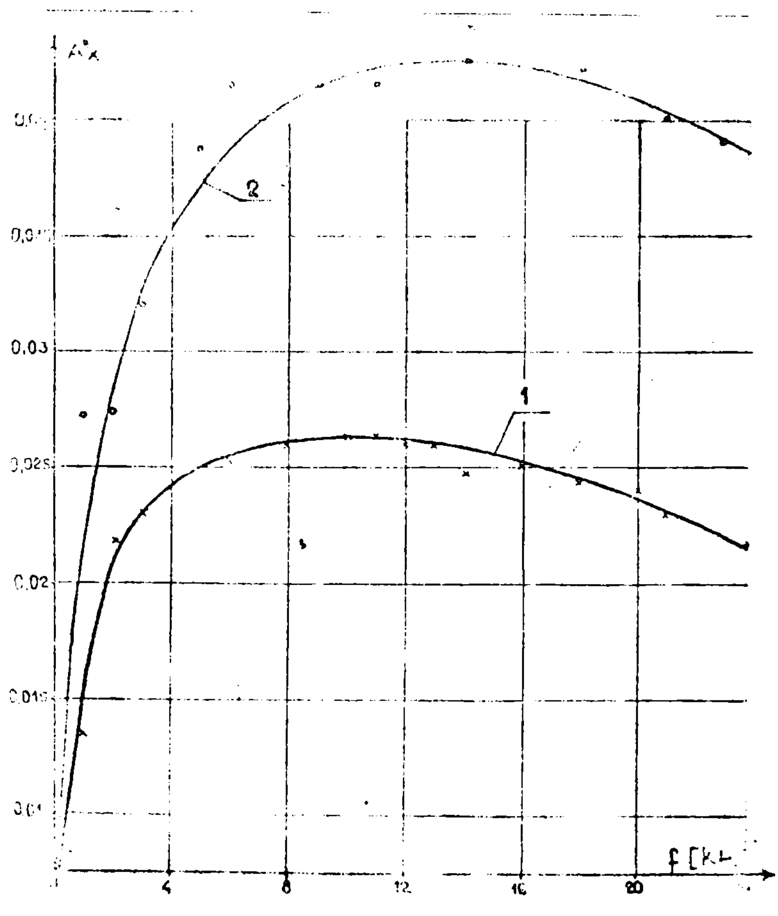


Fig. 1.6 b.

Pentru parametrul α din relaţia Cole-Cole se poate da următoarea interpretare geometrică: raza cercului care trece prin punctul A de coordonate $(x_{m\infty}, o)$ face cu axa ox'_m unghiul $\pi\alpha/2$.

Din diagrama Cole-Cole se poate determina şi timpul de relaxare τ, sau, dacă se cunoaşte timpul de relaxare, se poate determina pulsaţie ω pentru fiecare punct de pe diagramă, folosind următoarea relaţie:

$$\omega\tau = \left(\frac{v}{u}\right)^{(1-\alpha)}. \tag{1.50}$$

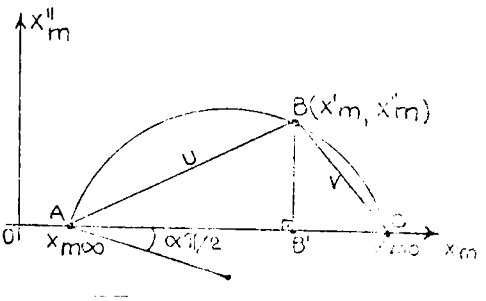


Fig.1.7

Mărimile u şi v sînt reprezentate pentru un punct oarecare B de pe diagramă, în figura 1.7. Tot de aici rezultă, aplicînd teorema lui Pitagora, raportul v/u:

$$\frac{v}{u} = \left(\frac{(x_{m0} - x'_m)^2 + (x''_m)^2}{(x'_m - x_{m\infty})^2 + (x''_m)^2}\right)^{1/2}. \tag{1.51}$$

Astfel, pe baza măsurătorilor experimentale se poate construi diagrama Cole-Cole, se determină valoarea lui α (unghiul $\pi\alpha/2$) şi determinînd raportul v/u (din relaţia (1.51)) se poate calcula timpul de relaxare cu relaţia (1.50). Timpul de relaxare o dată determinat, poate fi utilizat pentru calculul frecvenţei pentru orice punct de pe diagrama Cole-Cole.

In realitate pot să existe mai multe mecanisme de relaxare cu diferiţi timpi de relaxare. In aceste cazuri se presupune existenţa unei distribuţii continue de timpi de relaxare pe intervalul (o, ∞), cu o funcţie de distribuţie $f(\tau)$ care satisface ecuaţia:

$$\int_0^\infty f(\tau)d\tau = 1. \tag{1.52}$$

In acest caz susceptivitatea magnetică complexă ia forma:

$$\underline{x}_m = x_m + (x_{m0} - x_{m\infty})\int_0^\infty \frac{f(\tau)d\tau}{1 + j\omega\tau}, \tag{1.53}$$

funcţia de distribuţie $f(\tau)$ avînd expresia [21]:

$$f(\tau) = \frac{(\tau_0/\tau)^{1-\alpha}\sin\pi\alpha}{\pi\tau[1 - 2(\tau_0/\tau)^{1-\alpha}\cos\pi\alpha + (\tau_0/\tau)^{2(1-\alpha)}]}. \tag{1.54}$$

Partea reală şi imaginară a lui $\underline{x}_m$ se transformă corespunzător, obţinîndu-se relaţiile:

$$x_m' = x_{m\infty} + (x_{m_0} - x_{m\infty}) \int_0^{\infty} \frac{f(\tau)\, d\tau}{1 + \omega^2\tau^2} , \qquad (1.55)$$

$$x_m'' = (x_{m_0} - x_{m\infty}) \int_0^{\infty} \frac{f(\tau)\, d\tau}{1 + \omega^2\tau^2} . \qquad (1.56)$$

In practică se preferă utilizarea ecuaţiei Cole-Cole deoarece folosirea relaţiilor (1.53), (1.54) conduce la expresii foarte complicate pentru x_m' şi x_m''.

Metodica experimentală de lucru a fost asemănătoare cu cea prezentată la începutul capitolului. Spre deosebire de cazurile studiate anterior, la lichidele magnetice cu particule din ferită de cobalt s-au determinat dependenţele lui x_m' şi x_m'' în funcţie de frecvenţă cînd bobina sondă era plasată şi într-un cîmp magnetic exterior constant, notat cu B_0.

Susceptivitatea iniţială s-a determinat cu ajutorul unui magnetometru vibrator şi a avut valoarea $x_{m_0} = 0,025 \cdot 4\pi = 0,314$. Raportul lungimii probei faţă de diametrul său a fost de 4,2, parametrii bobinei s-au măsurat cu ajutorul unei punţi de tipul BM 401 E alimentată de la un generator Φ 578 şi completată cu un indicator de nul Φ 582.

Din graficul din figura 1.8 se observă că x_m' tinde monoton către zero odată cu creşterea frecvenţei. De asemenea, valoarea sa este cu atît mai mare, la frecvenţe sub un kHz, cu cît cîmpul exterior constant aplicat - B_0 - este mai mic.

La aceste lichide magnetice (cu particule din ferită de cobalt) dependenţa x_m'' cu frecvenţa prezintă un maxim (figura 1.9) a cărui valoare scade cu intensitatea cîmpului exterior aplicat B_0. Se remarcă o migrare a acestuia, o dată cu creşterea lui B_0, spre valori mai mari ale frecvenţei iar pentru B_0 = 40 mT extremul lui x_m'' nu mai aparţine intervalului de pînă la 10 kHz studiat.

Pentru trasarea diagramelor Cole-Cole, respectiv pentru determinarea coordonatelor centrului şi a razei cercului, am utilizat un program scris în FORTRAN şi rulat pe calculatorul CORAL 4021.

Programul determină cercurile care trec prin cîte trei puncte experimentale date. Astfel dacă există "n" date experimentale se obţin $C_n^3 = n(n-1)(n-2)/6$ cercuri. Din acestea este ales cercul cu abaterea standard, faţă de toate punctele experimentale, minimă. Se dau coordonatele centrului şi raza acestui cerc.

In figura 1.11 este prezentat programul de calcul.

Din diagramele Cole-Cole prezentate în figura 1.10 se observă o foarte bună înşiruire a punctelor experimentale pe arcul de cerc şi o micşorare a valorii x_m'/x_{mo} o dată cu creşterea valorii cîmpului exterior constant B_o.

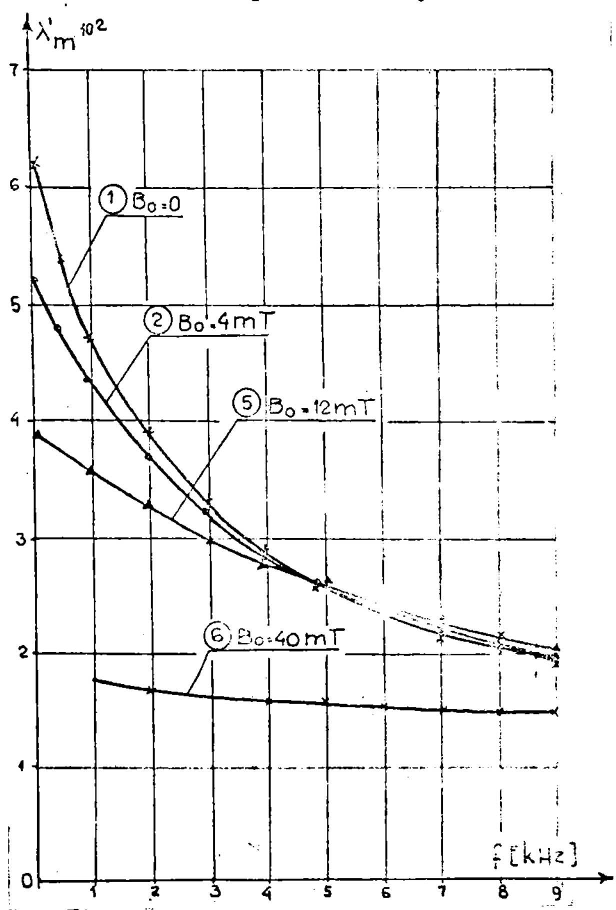


Fig. 1.8

Dependenţa de frecvenţă a părţii reale a susceptivităţii magnetice complexe pentru diverse valori ale cîmpului magnetic constant B_o

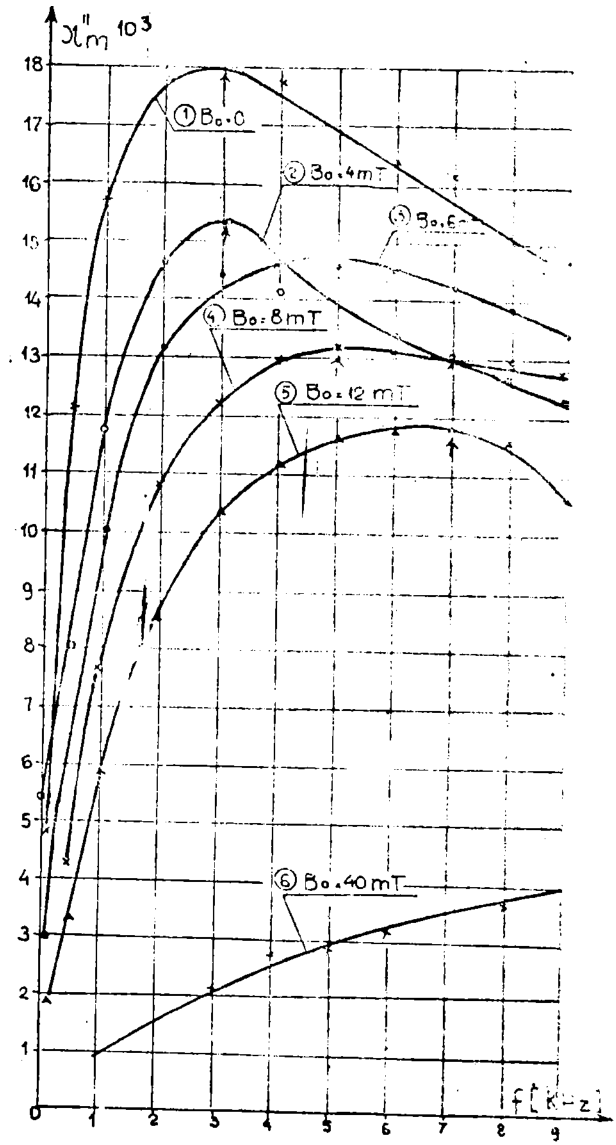


Fig. 1.9

Dependența de frecvență a părții imaginare a susceptivității magnetice complexe pentru diverse valori ale cîmpului magnetic constant B_0

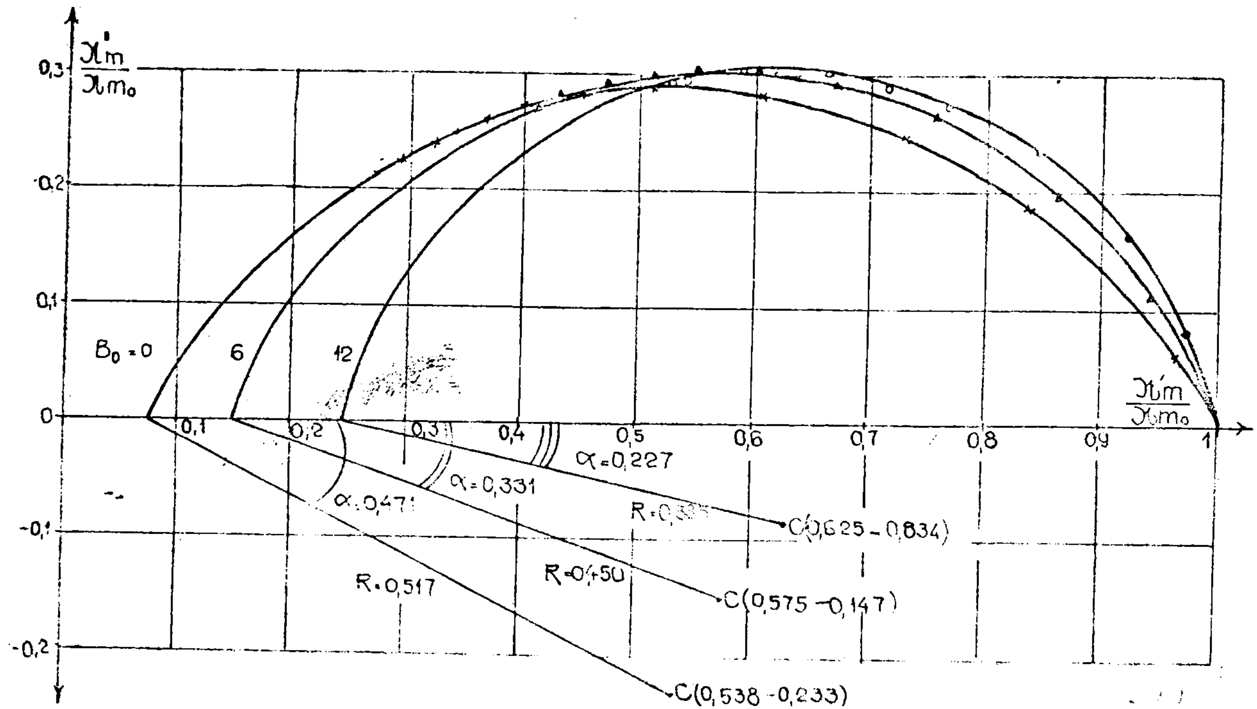


Fig. 1.10

Diagrame Cole-Cole pentru lichide magnetice cu particule din ferită de cobalt la trei valori ale cîmpului magnetic constant Bo aplicat Bo = 0,6,12 mT

```
FORTRAN-77 MIX     V4.001          13:10:19     17-Sep-87            PAG. 1
CERC.FTN;4                   /F77/TR:BLOCKS/WR

C-------------------------------------------------------------------------
C
C       PROGRAM PENTRU APROXIMAREA ECUATIEI UNUI CERC
C
C-------------------------------------------------------------------------
C
C       MATRICILE X(12),Y(12) CONTIN COORDONATELE
C       PE AXA X RESPECTIV Y A PUNCTELOR DETERMINATE EXPERIMENTALE
C
        COMMON X(12),Y(12)
        PRINT*,' B=40MT'
C
        DATA X(1),X(2),X(3),X(4)/.334,.291,.253,.210/
        DATA X(5),X(6),X(7),X(8)/.178,.156,.14,.129/
        DATA X(9),X(10),X(11)/.118,.113,.102/
        DATA Y(1),Y(2),Y(3),Y(4)/.0258,.0652,.0846,.0959/
        DATA Y(5),Y(6),Y(7),Y(8)/.097,.0959,.0911,.0848/
        DATA Y(9),Y(10),Y(11)/.0873,.0814,.0781/
C
C-------------------------------------------------------------------------
C
C       SE IMPUNE CA CERCUL SA INTERSECTEZE AXA X
C       IN PUNCTUL DE COORDONATE x=1,y=0
        X(12)=1.
        Y(12)=0.
C-------------------------------------------------------------------------
C
C       SE CERE NUMARUL DE PUNCTE CARE SE DORESTE LUAT IN CONSIDERARE
        WRITE(5,1)
1       FORMAT(1X,'Nr. de puncte :',$)
        READ(5,2)NP
2       FORMAT(I2)
C
C       SE INITIALIZEAZA EROAREA MEDIE PATRATICA
        SIGI=1000.
C
C-------------------------------------------------------------------------
C
C     . SE EXECUTA UN CALCUL AL ERORILOR PENTRU TOATE COMBINATIILE
C       POSIBILE DE 2 PUNCTE(AL TREILEA FIIND IMPUS x=1,y=0)
C       SI SE CALCULEAZA EROAREA MEDIE PATRATICA
C
        DO 10 L=1,NP-2
        DO 10 J=L+1,NP-1
        CALL CCAL(X(L),X(J),X(12),Y(L),Y(J),Y(12),XC,YC,R)
        CALL SIGMA(XC,YC,R,SIG,NP)
        IF(SIG.LE.SIGI)GO TO 200
        GO TO 10
C
C       SE CAUTA EROAREA MINIMA
C
200     XXC=XC
        YYC=YC
        RR=R
        SIGI=SIG
10      CONTINUE
```

Fig. 1.11

Program de determinare a razei şi centrului cercului Cole-Cole

1.3. Metodă de determinare a magnetizaţiei de saturaţie

Determinarea magnetizaţiei de saturaţie se poate face prin metoda galvanometrului balistic [29] (descrisă în paragraful 1.4) ori a probei vibrante [30] sau prin orice altă metodă din care rezultă dependenţa $f(1/H)$. De asemenea, prin măsurarea presiunii în lichidul magnetic în două plane perpendiculare [31, 32] se poate obţine valoarea magnetizaţiei de saturaţie.

Metodele amintite au dezavantajul unui volum important de lucru şi deci a unui timp relativ lung până la obţinerea informaţiei.

In prezentul paragraf se prezintă o metodă de determinare rapidă a magnetizaţiei de saturaţie pornind de la metoda Gouy [33], cunoscută pentru măsurarea susceptivităţii magnetice la lichide şi gaze paramagnetice de susceptivitate mică.

Se consideră un ensamblu format dintr-un tub de sticlă de secţiune circulară, închis la un capăt, poziţionat ca în figura 1.13, într-un cîmp magnetic transversal constant $\bar{H}$, astfel încît la $z = z_0$ intensitatea cîmpului magnetic să fie nulă.

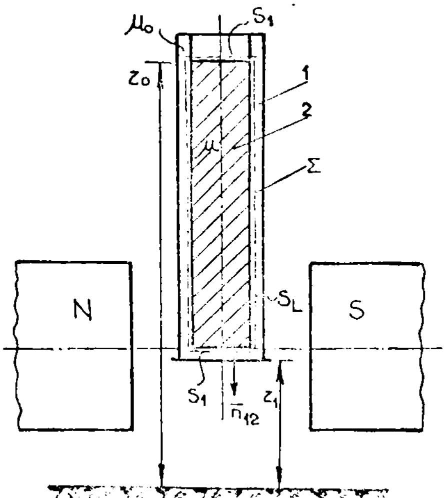


Fig. 1.13

Densitatea de volum a forţei de natură magnetică ce se exercită asupra lichidului magnetic are expresia [34]:

$$\bar{f}_{vm} = \rho\, \mathrm{grad}\, \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} dH \quad (1.57)$$

iar a celei gravitaţionale:

$$\bar{f}_{vg} = -\rho g \nabla z = -\nabla(\rho g z), \quad (1.58)$$

în care: ρ este densitatea de masă a lichidului magnetic, μ_0 - permitivitatea absolută a vidului, M - modulul vectorului de magnetizare, H - modulul intensităţii cîmpului magnetic, τ - temperatura mediului ambiant şi g - modulul acceleraţiei gravitaţionale.

Densitatea de volum a forţei rezultante, considerînd densitatea de masă a lichidului magnetic constantă, rezultă:

$$\bar{f}_{v_r} = \bar{f}_{v_g} + \bar{f}_{v_m} = \text{grad}\left[-\rho g z + \rho\mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,T} dH\right]. \qquad (1.59)$$

Forța rezultantă, distribuită cu densitatea $\bar{f}_{v_r}$, generează în lichidul magnetic o presiune, care la echilibru se determină din egalitatea:

$$\bar{f}_{v_r} = \text{grad } p \qquad (1.60)$$

Ținînd seama de relația (1.60) se obține:

$$p = -\rho g z + \rho\mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,T} dH + C \qquad (1.61)$$

Constanta de integrare C se determină din condiția ca la $z=z_0$ presiunea să fie cea atmosferică, p_0, iar intensitatea cîmpului magnetic nulă; rezultă $C = p_0 + \rho g z_0$ și relația (1.61) devine:

$$p = \rho g(z-z_0) + \rho\mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,T} dH + p_0 \qquad (1.62)$$

Forța rezultantă, care se exercită asupra lichidului magnetic, are expresia [34]:

$$\bar{F} = \oint_\Sigma p\, d\bar{s} + \oint_\Sigma \bar{f}_{sm} ds, \qquad (1.63)$$

unde suprafața închisă Σ este formată din reuniunea suprafețelor circulare inferioare (S_1) și superioare (S_2) și a celei cilindrice laterale (S_l), iar $\bar{f}_{sm}$ reprezintă densitatea de suprafață a forței exercitate de cîmpul magnetic.

Datorită simetriei cilindrice, integrala pe suprafața laterală S_l se anulează și rezultă:

$$\oint_\Sigma p d\bar{s} = \int_{S_1} p\bar{n}_{12} ds - \int_{S_2} p\bar{n}_{12} ds \qquad (1.64)$$

unde $\bar{n}_{12}$ este versorul normalei cu sensul din figura .

Dacă se dezvoltă membrul drept al relației (1.64), ținînd cont de (1.62), și se notează $S_1 = S_2 = S$, se obține:

$$\int_{S_1} p\bar{n}_{12} ds - \int_{S_2} p\bar{n}_{12} ds = [\rho g(z_0-z_1) + \rho\mu_0 \int_0^{H_1} \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,T} dH + p_0 -$$

$$- p_0] S\, \bar{n}_{12} = \bar{G} + \mu_0 \rho S\left[\int_0^{H_1} \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,T} dH\right] \bar{n}_{12} \qquad (1.65)$$

în care H_1 este intensitatea cîmpului magnetic la suprafața inferioară a cilindrului de lichid magnetic iar $\bar{G}$ este greutatea coloanei de lichid magnetic.

Termenul al doilea al relației (1.63) se poate scrie, ținînd cont de simetrie:

$$\oint_{\Sigma} \bar{F}_{em} ds = \int_{S_1} \bar{F}_{em} ds = \int_{S_1} \mu_0 \Big[-\rho \int_0^{H_1} \Big(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big)_{H,T} H dH + \int_0^{H_1} B dH -$$

$$- \int_0^{H_0} B_0 dH_0 \Big] \bar{n}_{12} ds, \qquad (1.66)$$

unde s-a utilizat expresia densității de suprafață a forței magnetice la suprafața de separație a două medii [34], cîmpul magnetic în cazul considerat fiind tangent la suprafața S_1.

Dacă se ține seama de următoarele relații cunoscute:

$$\mu = \frac{B}{H} = \mu_0 \Big(1 + \frac{M}{H}\Big) ; \qquad \Big(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big)_{H,T} = \mu_0 \frac{1}{H} \Big(\frac{\partial M}{\partial \rho}\Big)_{H,T} , \qquad (1.67)$$

egalitatea

$$\int_0^{H_1} B dH = \mu_0 \frac{H_1^2}{2} + \mu_0 \int_0^{H_1} M dH \quad \text{și} \quad \int_0^{H_0} B_0 dH_0 = \mu_0 \frac{H_0^2}{2} \qquad (1.68)$$

egalitatea (1.66) devine:

$$\oint_{\Sigma} \bar{F}_{em} ds = \mu_0 \Big[-\rho \int_0^{H_1} \Big(\frac{\partial M}{\partial \rho}\Big)_{H,T} dH + \int_0^{H_1} M dH \Big] S \bar{n}_{12} \qquad (1.69)$$

deoarece cîmpurile sînt constante pe suprafețe $\Sigma = S_1$ și $H = H_1$ conform teoremei de conservare a componentelor tangente ale intensității cîmpului magnetic.

Ca urmare, forța rezultantă care se exercită asupra cilindrului de lichid magnetic va fi:

$$\bar{F} = \bar{G} + \mu_0 S \Big(\int_0^{H_1} M dH \Big) \bar{n}_{12} \qquad (1.70)$$

sau

$$\bar{F}_m = \bar{F} - \bar{G} = \mu_0 S \Big(\int_0^{H_1} M dH \Big) \bar{n}_{12} \qquad (1.71)$$

In continuare se au în vedere următoarele două cazuri:

a) Se lucrează pe porţiunea liniară a curbei de magnetizare, la intensităţi mici ale cîmpului magnetic. Atunci:

$$\int_0^{H_1} M dH = \int_0^{H_1} x_m H dH = \frac{x_m H_1^2}{2} \qquad (1.72)$$

şi relaţia (1.71) devine:

$$\bar{F}_m = \frac{x_m H_1^2 S \mu_0}{2} \bar{n}_{12} , \qquad (1.73)$$

expresie cunoscută, [39], care permite determinarea susceptivităţii magnetice iniţiale x_m prin obţinerea experimentală a valorilor F_m, H_1 şi S:

$$x_m = \frac{2F_m}{\mu_0 S H_1^2} . \qquad (1.74)$$

b) Dacă se lucrează la cîmpuri intense, $H > 600$ kA/m, se poate determina magnetizaţia de saturaţie M_0 a lichidului magnetic.

Curba de magnetizare $M = f(H)$ se aproximează de la o valoare H_1 a intensităţii cîmpului magnetic cu un palier şi relaţia (1.75) devine:

$$\bar{F}_m = \mu_0 S \int_0^{H_2} M dH \, \bar{n}_{12} = \mu_0 S \left(\int_0^{H_1} M dH + \int_{H_1}^{H_2} M_0 dH \right) \bar{n}_{12} \qquad (1.76)$$

Dacă se notează cu $K = S\mu_0 \int_0^{H_1} M dH$ relaţia (1.76) se scrie (în modul):

$$\frac{F_m}{S_0} = K + M_0(H_2 - H_1) \qquad (1.77)$$

Pentru două valori ale lui H_2 ($H_2 > H_1$), prin eliminarea lui K rezultă valoarea magnetizaţiei de saturaţie M_0:

$$M_0 = \frac{F_{m_2} - F_{m_1}}{\mu_0 S (H_{22} - H_{21})} \qquad (1.78)$$

Relaţia (1.78) permite determinarea experimentală a lui M_0 dacă pentru două valori ale intensităţii cîmpului magnetic H_{22} şi H_{21}, mai mari ca H_1, se măsoară forţele de natură magnetică F_{m2} şi F_{m1}.

Pentru măsurarea acestor forțe s-a făcut următorul aranjament experimental, prezentat în figura 1.14.

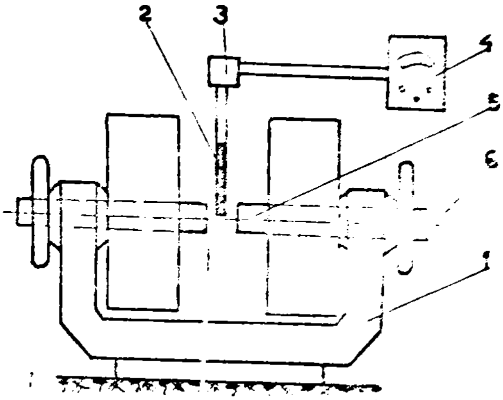


Fig. 1.14

Între polii (5) unui electromagnet de tip Weiss (1) se plasează un cilindru de secțiune circulară, cu partea inferioară plată astfel încît la suprafața de separație dintre lichidul magnetic și sticla tubului, intensitatea cîmpului magnetic are numai componentă tangentă.

Partea inferioară a tubului este plasată pe axa polilor (5) iar suprafața liberă a lichidului magnetic este în afara cîmpului polilor (pentru a avea satisfăcută condiția ca la suprafața liberă a lichidului magnetic intensitatea cîmpului magnetic să fie nulă).

Tubul este suspendat de un dispozitiv (3) prevăzut cu două timbre tensometrice racordat la un aparat (4) de tip [illegible] 2301 (de producție românească), în prealabil etalonat, care permite citirea forței ce apare la stabilirea cîmpului magnetic între poli.

S-au făcut măsurările și calculele pentru un set de lichide magnetice produse între anii 1980 și 1986 la Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timișoara. Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul .

Tabelul 1.13

Proba	H [kA/m]	J [T]	H_0 [kA/m]
1	740	8,64	64
	844	9,51	
2	668	2,75	23,3
	875	3,86	
3	637	6,47	43
	[illegible]	8,46	
4	652	8,24	70
	868	10,98	
5	652	3,59	27,3
	875	4,24	

S-a remarcat o bună concordanță între măsurările efectuate utilizînd metoda analizată și alte metode de determinare a magnetizației de saturație M_o mult mai laborioase.

Metoda este rapidă, necesitînd doar două citiri ale forței la două valori ale cîmpului magnetic aplicat.

Urmărind perfecționarea metodei [63] s-a pornit de la relația (1.71) care se poate transforma după cum urmează:

$$F_m = \mu_o S \int_0^{H_2} M \, dH \, \bar{n}_{12} = \mu_o S \left(\int_0^{H_1} M \, dH + \int_{H_1}^{H_2} M_o dH \right) \bar{n}_{12} \qquad (1.71')$$

Modulul acestei forțe de natură magnetică este:

$$|F_m| = \mu_o S \int_0^{H_1} M dH + \mu_o S_1 M_o (H_2 - H_1) =$$

$$= \mu_o S \left[\int_0^{H_1} M dH - M_o H_1 \right] + S_1 M_o \mu_o H_o = A + S M_o B, \qquad (1.71'')$$

unde $B = \mu_o H_o$ este inducția magnetică ($H_2 = H_o$), conform teoremei de conservare a componentelor tangente ale intensității cîmpului magnetic la suprafața de separație dintre lichidul magnetic și partea inferioară a tubului de sticlă) iar cu A s-a notat constanta $\mu_o S \left(\int_0^{H_1} M dH - M_o H_1 \right)$.

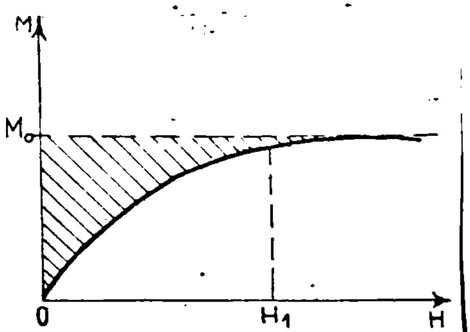


Fig. 1.13'

Dacă intensitatea cîmpului magnetic H_1 are o valoare suficient de mare (deci se poate considera că s-a ajuns la saturație) atunci diferența dintre $\int_0^{H_1} M \, dH$ și $M_o H_1$ (aria hașurată în figura 1.13') devine o mărime constantă. Deci forța de natură magnetică (1-17")

$F_m = S M_o B + A$ depinde liniar de inducția magnetică și are, în consecință, forma ecuației unei drepte: $y = a_1x + a_0$.

Prin determinarea experimentală a forţelor corespunzătoare mai multor inducţii ale cîmpului magnetic se obţin perechi de puncte (F_{mi}, B_i) $i = \overline{1,n}$. Utilizînd metoda celor mai mici pătrate se obţine dreapta optimă ce trece printre punctele experimentale: $F_m = a_1B + a_0$. De aici rezultă valoarea magnetizaţiei de saturaţie:

$$M_o = \frac{a_1}{S}, \tag{1.38'}$$

în care S reprezintă secţiunea transversală a cilindrului de lichid magnetic.

Măsurătorile experimentale s-au efectuat pe un lot de piese de lichid magnetic produse la Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timişoara în cursul anului 1987. S-au făcut în jur de şase citiri ale forţei pentru fiecare probă de lichid magnetic. Datele experimentale au fost prelucrate cu ajutorul calculatorului "TIMS", determinînd dreapta optimă $F_m = a_1B + a_0$. Programul elaborat pe baza metodei celor mai mici pătrate, în limbaj BASIC, a scos în evidenţă un coeficient de corelaţie $C_1 = 0{,}99$ (într-un singur caz 0,98) şi o abatere standard maximă $\sigma_{max} = 0{,}280$ [N], respectiv minimă, $\sigma_{min} = 0{,}007$[N].

Rezultatele experimentale sînt trecute în tabelele 1.13.1 - 1.13.14.

Tabelul 1.13.1

FMAL18 (300)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,5	0,92
2	0,6	1,17
3	0,7	1,39
4	0,8	1,63
5	0,9	1,87
6	1	2,15

$M_o = 24{,}10$ kA/m (300 G)

Tabelul 1.13.2

FMCo6 (300)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,5	0,92
2	0,6	1,17
3	0,7	1,36
4	0,8	1,60
5	0,9	1,85
6	1,0	2,09

$M_o = 23{,}54$ kA/m (296 G)

Rezultatele obţinute au fost foarte apropiate de acelea obţinute prin metode mult mai laborioase.

Valorile abaterii standard şi a coeficientului de corelaţie menţionate anterior demonstrează că s-a lucrat la saturaţie, Tabelul 1.13.3

FMP (200)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,5	0,71
2	0,6	0,88
3	0,7	1,04
4	0,8	1,22
5	0,9	1,40
6	1	1,64

M_0 = 18,43 kA/m (230 G)

Tabelul 1.13.4

FMP (400)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,5	1,38
2	0,6	1,74
3	0,7	2,08
4	0,8	2,40
5	0,9	2,73
6	1	3,04

M_0 = 33,54 kA/m (420 G)

Tabelul 1.13.5

FMP (600)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,5	2,02
2	0,6	2,53
3	0,7	2,91
4	0,8	3,42
5	0,9	3,92
6	1	4,43

M_0 = 48 kA/m (600 G)

Tabelul 1.13.6

FMP (900)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,5	2,53
2	0,6	3,29
3	0,7	4,55
4	0,8	4,93
5	0,9	5,31
6	1	6,07

M_0 = 70 kA/m (880 G)

Tabelul 1.13.7

FMALn4 (350)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,5	1,17
2	0,6	1,46
3	0,7	1,74
4	0,8	2,03
5	0,9	2,34
6	1	2,60

M_0 = 29,25 kA/m (370 G)

Tabelul 1.13.8

FMTR (300)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,5	2,28
2	0,6	2,91
3	0,7	3,42
4	0,8	4,05
5	0,9	4,81
6	0,98	5,31

M_0 = 64,70 kA/m (810 G)

deoarece $A = \mu_0 S_1 \left[\int_0^{H_1} M dH - M_0 H_1 \right] \cong a_0$ este într-adevăr constantă şi deci aria haşurată în figura 1.13' este valoric aceeaşi, indiferent de intensitatea cîmpului magnetic (presupus mai mare decît cel de saturaţie) la care s-a lucrat.

Tabelul 1.13.9

FMALn4 (350)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,5	1,12
2	0,6	1,36
3	0,7	1,60
4	0,8	1,89
5	0,9	2,19

M_o = 27,13 kA/m (340 G)

Tabelul 1.13.10

FMALi4 (300)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,5	0,95
2	0,6	1,19
3	0,7	1,38
4	0,8	1,63
5	0,9	1,87
6	1	2,11

M_o = 23,53 kA/m (296 G)

Tabelul 1.13.11

FMALi8 (400)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,5	1,19
2	0,6	1,51
3	0,7	1,77
4	0,8	2,06
5	0,9	2,38

M_o = 30 kA/m (370 G)

Tabelul 1.13.12

FMBOS (400)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,3	1,73
2	0,4	1,04
3	0,5	1,36
4	0,6	1,68
5	0,7	1,99
6	0,8	2,33

M_o = 32 kA/m (400 G)

Tabelul 1.13.13

FMALn4 (350)

Nr.	B [T]	F [N]
1	0,5	1,21
2	0,6	1,53
3	0,7	1,77
4	0,8	2,06
5	0,9	2,38

M_o = 29 kA/m (360 G)

Tabelul 1.13.14

FMALi4

Nr.	0,5	1,02
1	0,5	1,02
2	0,6	1,19
3	0,7	1,41
4	0,8	1,60
5	0,9	1,82
6	1	2,04

M_o = 21 kA/m (260 G)

Metoda este mai precisă deoarece se elimină diferenţa ce se face între două mărimi (1.78) care pot avea valori apropiate.

1.4. Măsurarea permeabilității. Curba de magnetizare

In vederea obținerii relațiilor de calcul necesare determinării experimentale a permeabilității lichidelor magnetice se analizează cîmpul magnetic în prezența acestora.

In majoritatea covîrșitoare a cazurilor, proba de lichid magnetic se plasează în tuburi de sticlă cilindrice de secțiune circulară. Cilindrul de lichid magnetic astfel obținut se poate aproxima foarte bine cu un elipsoid de revoluție. De aceea, în continuare se va considera un elipsoid de revoluție alungit, introdus într-un cîmp magnetic exterior uniform H_0, orientat în direcția axei ox, conform figurii 1.15.

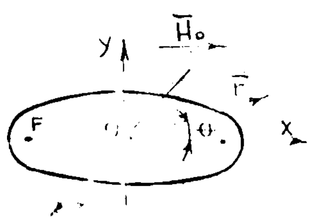


Fig. 1.15

Pentru calculul cîmpului magnetic, în acest caz, este avantajos să se lucreze în coordonate elipsoidale. Utilizînd sistemul de coordonate al cuadricelor omofocale [35] de variabile $u^1 = \xi$, $u^2 = \eta$ și $u^3 = \zeta$, ecuația elipsoizilor omofocali cu elipsoidul $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ (cu semiaxele principale a, b, c) este:

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1 \qquad (\xi > -c^2) \qquad (1.79)$$

Ecuațiile

$$\frac{x^2}{a^2+\eta} + \frac{y^2}{b^2+\eta} + \frac{z^2}{c^2+\eta} = 1 \qquad (-c^2 > \eta > -b^2) \qquad (1.80)$$

și

$$\frac{x^2}{a^2+\zeta} + \frac{y^2}{b^2+\zeta} + \frac{z^2}{c^2+\zeta} = 1 \qquad (-b^2 > \zeta > -a^2) \qquad (1.81)$$

reprezintă ecuațiile unor hiperboloizi cu o pînză (1.80) și respectiv cu două pînze (1.81). Dacă acest sistem se rezolvă în raport cu x, y și z, se obține:

$$x = \pm\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{1/2} \qquad (1.82)$$

$$y = \pm\left[\frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)}\right]^{1/2} \tag{1.83}$$

$$z = \pm\left[\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)(\zeta + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}\right]^{1/2} \tag{1.84}$$

Dacă se introduce mărimea

$$R_s = \left[(s + a^2)(s + b^2)(s + c^2)\right]^{1/2} \quad (s = \xi, \eta, \zeta) \tag{1.85}$$

atunci laplaceanul unei funcţii scalare ψ devine:

$$\Delta\psi = \nabla^2\psi = \frac{4}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)}\Big[(\eta-\zeta)R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) +$$

$$+ (\zeta-\xi)R_\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) + (\xi-\eta)R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)\Big] \tag{1.86}$$

In cazul probei elipsoidale de lichid magnetic introdusă într-un cîmp magnetic constant (fig. 1.15) potenţialul magnetic scalar V_H trebuie să satisfacă ecuaţiile:

$$\begin{cases} \nabla^2 V_{H_i} = 0 \\ \nabla^2 V_{H_e} = 0 \end{cases} \tag{1.87}$$

unde V_{H_i} reprezintă potenţialul magnetic scalar din interiorul elipsoidului iar V_{H_2} din exterior.

Condiţiile de frontieră ce trebuie satisfăcute sînt:

$$\begin{cases} \lim\limits_{r\to\infty} V_{H_i} = 0 \\ \lim\limits_{r\to\infty} V_{H_e} = - H_0 \cdot x = - H_0 r \cos\theta, \end{cases} \tag{1.88}$$

iar condiţiile de limită:

$$\begin{cases} (V_{H_i})_{\Sigma_{12}} = (V_{H_e})_{\Sigma_{12}} \\ (B_{in_1})_{\Sigma_{12}} = (B_{en_1})_{\Sigma_{12}} \end{cases} \tag{1.89}$$

unde prima relaţie din (1.89) reprezintă continuitatea potenţialului magnetic scalar la suprafaţa de separaţie Σ_{12} dintre elipsoid şi mediul înconjurător, iar a doua relaţie exprimă continuitatea componentelor normale ale vectorului inducţie magnetică la aceeaşi suprafaţă de separaţie.

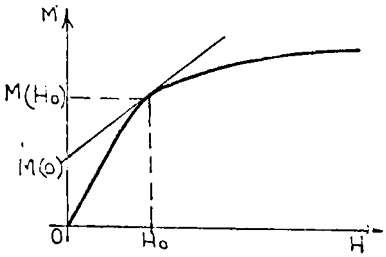


Fig. 1.16

Fie un punct de abscisă H_o căruia, din curba de magnetizare reprezentată în figura 1.16, îi corespunde ordonata $M(H_o)$. Dacă se dezvoltă în serie Taylor funcţia $M(H)$, în jurul punctului H_o, se obţine:

$$M(H) = M(H_o) + \frac{H - H_o}{1!}\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{H=H_o} + \dots \tag{1.90}$$

în care $(\partial M/\partial H)_{H=H_o} = x_{md}$ reprezintă susceptivitatea magnetică diferenţială şi se renunţă la termenii superiori din dezvoltarea în serie, se obţine:

$$M(H) = M(H_o) + (H - H_o)\, x_{md} \tag{1.91}$$

Deoarece toţi vectorii au orientarea lui $\bar{H}$ relaţia (1.91) se poate scrie vectorial:

$$\bar{M} = \bar{M}(H_o) - x_{md}\bar{H}_o + x_{md}\bar{H} = \bar{M}(o) + x_{md}\bar{H} \tag{1.92}$$

Vectorul inducţie magnetică, în interiorul elipsoidului, este dat de relaţia:

$$\bar{B}_i = \mu \bar{H}_i = \mu_o(\bar{H}_i + \bar{M}) \tag{1.93}$$

Dacă în (1.92) se introduce expresia (1.93) se obţine:

$$\bar{B}_i = \mu_o(\bar{H}_i + \bar{M}(o) + x_{md}\bar{H}_i) = \mu_d\bar{B}_i + \mu_o\bar{M}(o), \tag{1.94}$$

unde s-a notat cu $\mu_d = \mu_o(1 + x_{md})$ permitivitatea diferenţială.

A doua condiţie de limită din (1.89) devine:

$$\mu_d = \left(\frac{\partial V_{Hi}}{\partial l_m}\right)_{i\Sigma_{12}} - \mu_o M(0)_{n_1} = \mu_o\left(\frac{\partial V_{He}}{\partial l_{n_1}}\right)_{e\Sigma_{12}}, \tag{1.95}$$

unde derivatele se fac după direcţia normalei la suprafaţa de separaţie $_{12}$ dintre mediul exterior (notat cu indicele e) şi mediul interior al elipsoidului (notat cu indicele i).

Relaţia (1.95) sugerează posibilitatea ca inducţia magnetică din interiorul elipsoidului să fie rezultatul superpoziţiei a două stări: I - un elipsoid cu permitivitatea μ_d = ct. situat într-un cîmp magnetic $\bar{H}_e$ constant; II - un elipsoid uniform magnetizat cu $\bar{M}(o)$, în care $\bar{M}(o)$ are orientarea lui $\bar{H}_i$ de la starea I (figura 1.17).

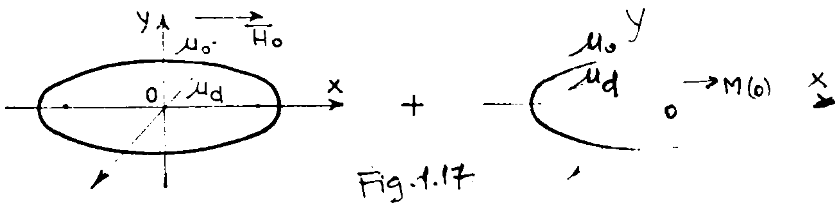


Fig.1.17

Potenţialul magnetic scalar din interiorul şi exteriorul elipsoidului se notează cu prim pentru starea I şi cu secund pentru starea doi.

Problema stării I este cunoscută în literatură [35] şi soluţia obţinută prin metoda separării variabilelor este de forma:

$$V'_{H_e} = -H_o \cdot x \frac{1 + (\mu_{dr} - 1)\frac{abc}{2} I(\xi)}{1 + (\mu_{dr} - 1)\frac{abc}{2} I(\xi)} \qquad (1.96)$$

şi

$$V'_{H_i} = -\frac{H_o \cdot x}{1 + (\mu_{dr} - 1) A_1} \qquad (1.97)$$

în care

$$I(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi(\xi + a^2)} \qquad (1.98)$$

şi

$$A_1 = \frac{abc}{2}\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi(\xi + a^2)} \qquad (1.99)$$

Aceste soluţii verifică ecuaţia lui Laplace:

$$\begin{cases} \nabla^2 V'_{H_e} = 0 \\ \nabla^2 V'_{H_i} = 0 \end{cases} \qquad (1.100)$$

condiţia de frontieră:

$$\lim_{r\to\infty} V'_{H_e} = - H_o r \cos\theta \qquad (1.101)$$

şi condiţiile la limită:

$$\begin{cases} (B'_{in_1})_{\Sigma_{12}} = (B'_{en_1})_{\Sigma_{12}}, \\ \mu_d\left(\dfrac{\partial V'_{H_i}}{\partial \ell_{n_1}}\right)_{\Sigma_{12}} = \mu_o\left(\dfrac{\partial V'_{H_e}}{\partial \ell_{n_1}}\right)_{\Sigma_{12}} \end{cases} \qquad (1.102)$$

Din ecuaţia (1.97) rezultă intensitatea cîmpului magnetic în interiorul elipsoidului de permeabilitatea μ_d:

$$\bar{H}'_i = \frac{H_o}{1 + (\mu_{dr} - 1)\, A_1}\, \bar{u}_x, \qquad (1.103)$$

$\bar{u}_x$ fiind versorul axei ox.

Pentru a determina potenţialul magnetic scalar al stării II se aplică metoda separării variabilelor, căutînd soluţii de forma:

$$V''_{H_e} = C_1 x F(\xi) = C_1 \left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}\right]^{1/2} F(\xi) \qquad (1.104)$$

$$V''_{H_i} = C_2 x = C_2 \left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}\right]^{1/2} \qquad (1.105)$$

unde s-au folosit relaţiile (1.82) şi (1.98).

Condiţia la limită $(V''_{H_e})_{\xi=0} = (V'_{H_i})_{\xi=0}$ conduce la relaţia:

$$C_2 = CF(o) = C \int_o^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi(\xi + a^2)} \qquad (1.106)$$

Condiţia de continuitate a componentelor normale ale inducţiei magnetice la suprafaţa de separaţie Σ_{12} se scrie:

$$\left(\frac{\partial V''_{H_e}}{\partial \ell_{n1}}\right)_{\xi=0} \mu_o = - \mu_d\left(\frac{\partial V''_{H_i}}{\partial \ell_{n1}}\right)_{\xi=0} + \mu_o \bar{M}(o)\cdot\bar{n}, \qquad (1.107)$$

sau:
$$\left(\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial V''_{H_i}}{\partial \xi}\right)\mu_{dr\,\xi=0} - \left(\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial V''_{H_e}}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = M(o)\ \bar{u}_x\cdot\bar{u}_\xi , \tag{1.108}$$

unde h_ξ este coeficientul metric. Dacă se înmulţeşte relaţie (1.108) rezultă:

$$\left(\frac{\partial V''_{H_i}}{\partial \xi}\right)\mu_{dr\,\xi=0} - \left(\frac{\partial V''_{H_e}}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = M(o)\ (h_\xi\cdot\bar{u}_\xi\cdot\bar{u}_x). \tag{1.109}$$

Se ştie că:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{h_\xi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\bar{u}_\xi + \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\bar{u}_\eta + \frac{1}{h_\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\bar{u}_\zeta \tag{1.110}$$

şi considerînd $\varphi = x$ se obţine:

$$\bar{u}_x = \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial x}{\partial\xi}\bar{u}_\xi + \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial x}{\partial}\bar{u}_\eta\cdot\frac{1}{h_\zeta}\frac{\partial x}{\partial\zeta}\bar{u}_\zeta . \tag{1.111}$$

Versorii $\bar{u}_\xi$, $\bar{u}_\eta$ şi $\bar{u}_\zeta$ fiind ortogonali:

$$\bar{u}_\xi\cdot\bar{u}_x = \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial x}{\partial\xi} \tag{1.112}$$

Cu aceasta relaţia (1.109) devine:

$$\left(\frac{\partial V'_{H_i}}{\partial \xi}\right)\mu_{dr\,\xi=0} - \left(\frac{\partial V'_{H_e}}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = M(o)\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)_{\xi=0} \tag{1.113}$$

Ultima condiţie dă încă o legătură între constantele C_2 şi C:

$$C_2 u_{dr} - C\left[F(o) + \frac{2}{abc}\right] = M(o). \tag{1.114}$$

Rezolvînd sistemul (1.106), (1.114) rezultă constantele de integrare şi potenţialul în interiorul elipsoidului:

$$V''_{H_i} = C_2 x = \frac{M(o)A_1 x}{1 + (\mu_{dr} - 1)A_1} . \tag{1.115}$$

Deci potențialele magnetice ale stării II satisfac atît ecuația lui Laplace:

$$\begin{cases} \nabla^2 V''_{H_i} = 0 \\ \nabla^2 V''_{H_e} = 0 \end{cases} \qquad (1.116)$$

cît și condițiile de frontieră: $\lim_{r \to \infty} V''_{H_e} = 0$ și de limită:

$$\begin{cases} (B''_{in_1})_{\Sigma_{12}} = (B''_{en_1})_{\Sigma_{12}} \\ -\left(\mu_d \dfrac{\partial V''_{H_i}}{\partial l_{n_1}}\right)_{\Sigma_{12}} + \mu_0 \bar{M}(o) \cdot \bar{n}_1 = -\mu_0 \left(\dfrac{\partial V''_{H_e}}{\partial l_{n_1}}\right)_{\Sigma_{12}} \end{cases} \qquad (1.117)$$

Superpoziția acestor stări dă, prin adunarea ecuațiilor (1.1..) și (1.116).

$$\nabla^2 V'_{H_i} + \nabla^2 V''_{H_i} = \nabla^2 (V'_{H_i} + V''_{H_i}) = \nabla^2 V_{H_i} = 0$$
$$\nabla^2 V'_{H_e} + \nabla^2 V''_{H_e} = \nabla^2 (V'_{H_e} + V''_{H_e}) = \nabla^2 V_{H_e} = 0 \qquad (1.118)$$

De asemenea, superpoziția condițiilor de limită și frontieră dau:

$$\lim_{r\to\infty} V'_{H_e} + \lim_{r\to\infty} V''_{H_e} = \lim_{r\to\infty} (V'_{H_e} + V''_{H_e}) = \lim_{r\to\infty} V_{H_e} =$$

$$= - H_0 r \cos\theta \qquad (1.119)$$

și

$$(B'_{in_1})_{\Sigma_{12}} + (B''_{in_1})_{\Sigma_{12}} = (B'_{en_1})_{\Sigma_{12}} + (B''_{en_1})_{\Sigma_{12}} \qquad (1.120)$$

$$(B'_{in_1} + B''_{in_1})_{\Sigma_{12}} = (B'_{en_1} + B''_{en_1})_{\Sigma_{12}}$$
$$(B_{in_1})_{\Sigma_{12}} = (B_{en_1})_{\Sigma_{12}} \qquad (1.121)$$

respectiv:

$$\mu_d \left[\frac{\partial}{\partial l_{n_1}} (V'_{H_1} + V''_{H_1})\right]_{\Sigma_{12}} - \mu_0 M(o)_{n_1} = \mu_0 \left[\frac{\partial}{\partial l_{n_1}} (V'_{H_e} + V''_{H_e})\right]$$

(1.121)

Se poate deci trage concluzia că prin superpoziţia celor două stări amintite se obţine relaţia căutată şi că:

$$V_{H_1} = V'_{H_1} + V''_{H_1}, \qquad V_{H_e} = V'_{H_e} + V''_{H_e},$$

$$\bar{B}_1 = \bar{B}'_1 + \bar{B}''_1, \qquad \bar{H}_1 = \bar{H}'_1 + \bar{H}''_1. \qquad (1.122)$$

Utilizînd ultima relaţie din (1.122) se poate scrie:

$$\bar{H}_1 = \bar{H}'_1 + \bar{H}''_1 = \frac{H_0}{1 + (\mu dr - 1) A_1} \bar{u}_x - \frac{M(o)A_1}{1 + (\mu dr - 1)A_1} \bar{u}_x. \qquad (1.123)$$

Deci:

$$\bar{H}_1 = \frac{H_0 - M(o)A_1}{1 + (udr - 1)A_1} \bar{u}_x \qquad (1.124)$$

Ţinînd cont că $\bar{\bar{B}}_e = \bar{B}_0 = \mu_0 \bar{H}_0$ şi $\bar{B}_1 = u\bar{H}_1 = \mu d\bar{H}_1 + \mu_0 \bar{M}(o)$ rezultă relaţia:

$$\frac{B_1}{B_0} = \frac{\mu_r}{(\mu_r - 1)A_1 + 1}. \qquad (1.125)$$

relaţie importantă care leagă inducţia magnetică din interiorul şi exteriorul elipsoidului de permeabilitatea magnetică relativă a lichidului magnetic.

Pentru elipsoidul de rotaţie alungit cu semiaxele b=c < a de excentricitate $e = (\sqrt{a^2 - b^2})/a$ se obţine:

$$A_1 = \frac{ab^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)R(\xi)} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1 - e^2}{2e^3}\left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e\right)\right]\cdot (1.126)$$

In măsurătorile experimentale s-a folosit un cilindru de sticlă de diametru interior d = 5,2 mm şi lungime ℓ = 42 mm, care s-a aproximat cu un elipsoid de revoluţie alungit, de semiaxe b = c = d/2 = 2,6 mm şi c = 1/2 = 21 mm. A rezultat excentricitatea e = 0,992306 şi constanta A_1 = 0,028018967.

Montajul utilizat pentru determinările experimentale este prezentat în figura 1.18, unde K_1 şi K_2 sînt întrerupătoare, INV - inversor, L şi C - bobină şi condensator de filtraj, A - ampermetru, B.W. - bobina Weiss, B.P. - bobină de probă, Gb - galvanometru balistic, R_e - rezistenţă externă.

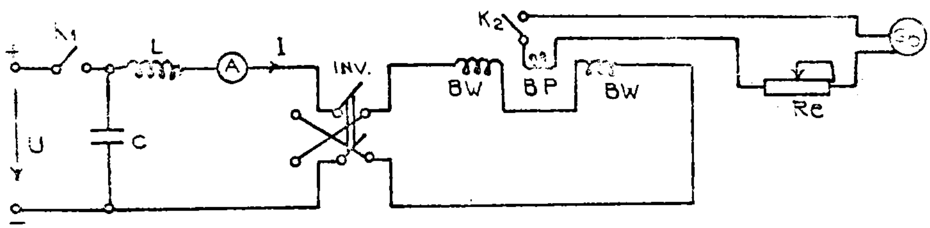


Fig. 1.18

Bobina de probă - B.P. - este introdusă în tubul de sticlă cu lichid magnetic şi ansamblul este plasat între polii unui electromagnet de tip Weiss. Polilor acestui electromagnet li s-au mărit suprafaţa pentru a realiza un grad înalt de uniformitate a cîmpului magnetic. Cu ajutorul unui teslametru s-a măsurat inducţia magnetică în puncte aparţinînd mai multor secţiuni transversale pe axa polilor şi s-a constatat că se menţine practic constantă (variaţie sub unu la sută).

Deviaţia "a" a galvanometrului balistic - Gb - apare în urma basculării de pe o poziţie pe alta a inversorului INV. Pentru a micşora erorile de citire basculares s-a făcut şi într-un sens şi în celălalt, în calcul luîndu-se media citirilor.

Bobina de probă - B.P. - din lichidul magnetic a fost dimensionată şi are următoarele caracteristici: N = 200 sp, S_b = = $13,85 \cdot 10^{-6}$ m^2, ϕ_{cu} = 0,08 mm.

Constanta galvanometrului balistic a fost determinată iar rezistenţa sa critică asigurată cu ajutorul rezistorului R_e.

Inducţia magnetică se calculează cu ajutorul relaţiei:

$$B = \frac{\Psi}{2NS_b} = \frac{a \cdot C}{2NS_b} \qquad (1.127)$$

în care: Ψ este înlănţuirea magnetică, N - numărul de spire al bobinei de probă, S_b - aria secţiunii sale transversale, a - deviaţia galvanometrului balistic iar c constanta sa.

Formula (1.127) a fost utilizată atît pentru calculul inducţiei magnetice în prezenţa lichidului magnetic - B_1 - cît şi în absenţa sa - B_0.

Din relaţia (1.125) rezultă permitivitatea relativă a lichidului magnetic:

$$\mu_r = \frac{1 - A_1}{B_0/B_1 - A_1} \tag{1.128}$$

Intensitatea cîmpului magnetic din interiorul lichidului magnetic se obţine din:

$$H_1 = B_1/\mu_0 \cdot \mu_r, \tag{1.129}$$

şi în final rezultă modulul vectorului de magnetizaţie:

$$M_1 = x_m H_1 = (\mu_r - 1)\, H_1 \tag{1.130}$$

A fostestudiat un lot de lichide magnetice produse la Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timişoara, lichide magnetice avînd particule de magnetită iar lichidul de bază fiind petrol sau ulei.

In figura 1.19 sînt prezentate curbele de magnetizare pentru trei probe de lichid magnetic iar în figura 1.20 dependenţa de intensitatea cîmpului magnetic din interiorul probelor a permeabilităţii magnetice relative pentru aceleaşi trei probe.

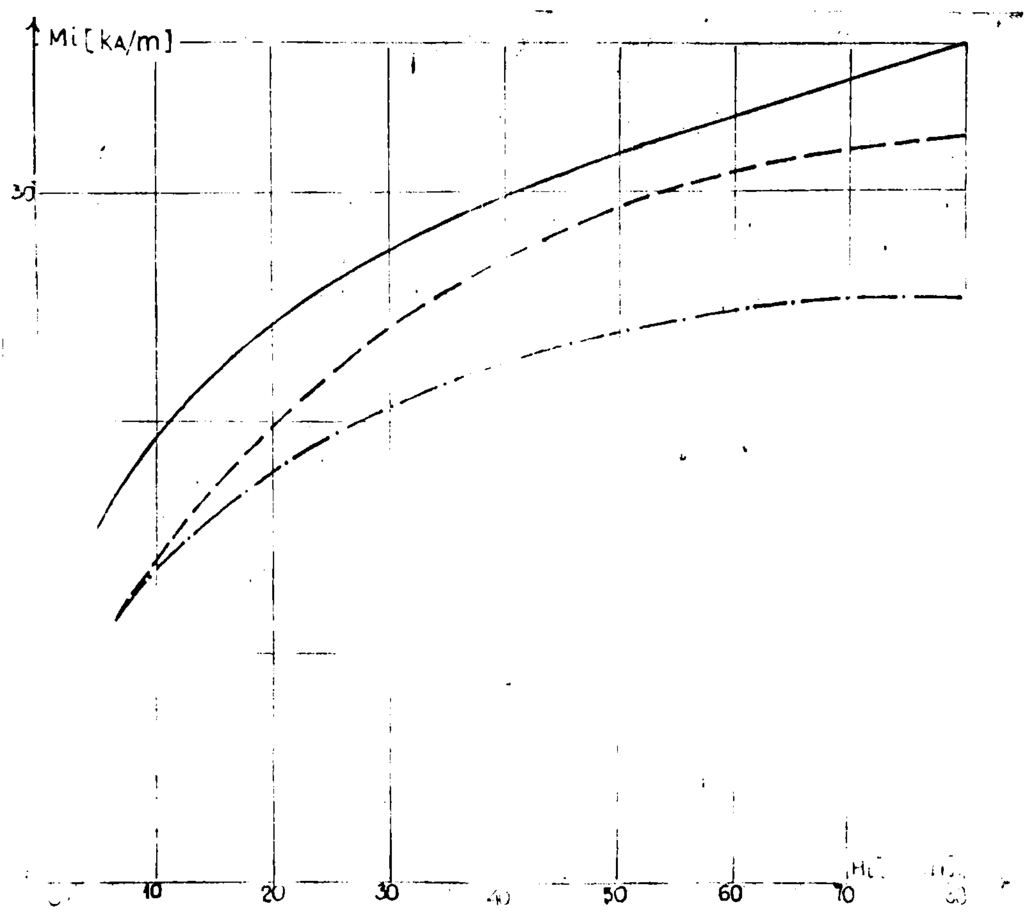


Fig. 1.19

Curbele de magnetizare pentru 3 probe
de lichid magnetic

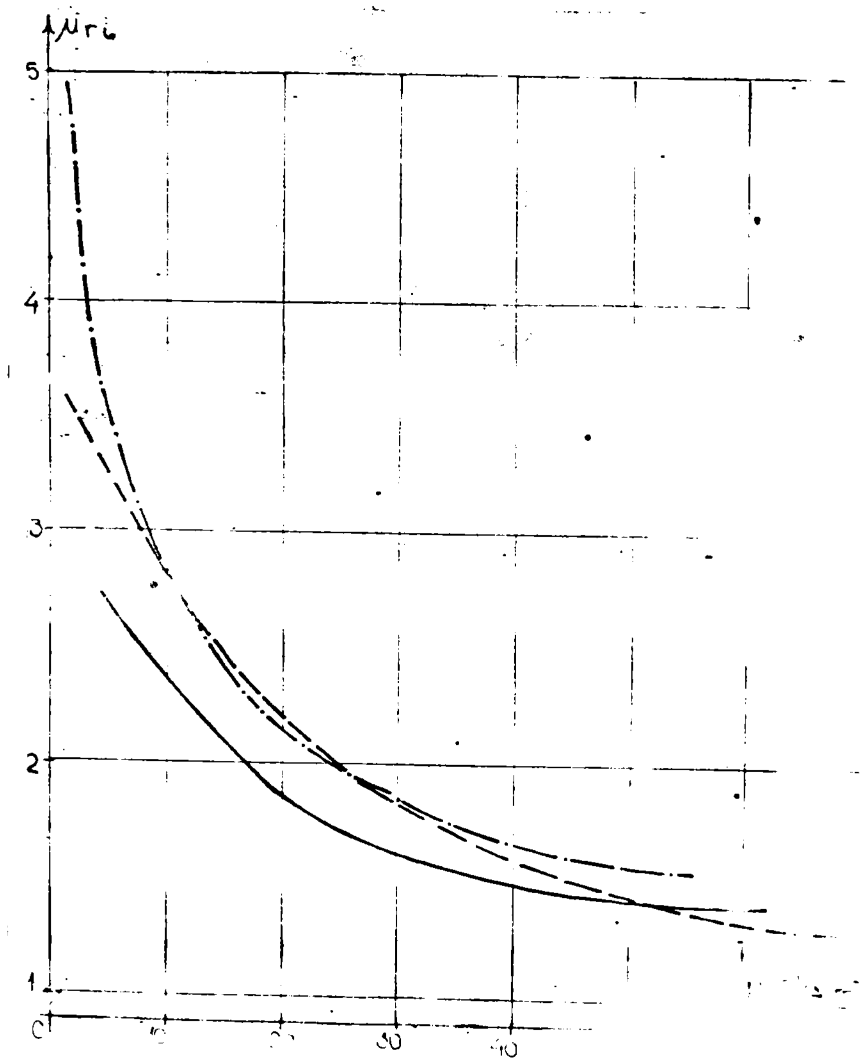


Fig. 1.20

Dependenţa de intensitatea cîmpului magnetic din interiorul probei a permeabilităţii magnetice relative pentru trei probe de lichid magnetic

BUPT

Cap. 2. FORTE IN CIMP MAGNETIC

In acest capitol se prezintă expresia generală a forţelor în cîmp electromagnetic, pornind de la teoria macroscopică a fenomenelor termodinamice. Densitatea de volum a forţei electromagnetice este scrisă pentru cazul general şi, pe urmă, particularizată pentru cîmpuri electrostatice, respectiv magnetice staţionare, stabilite în medii izotrope, fără polarizări permanente, neliniare, doar lipsite de histerezis [35, 41, 71, 34].

Expresia obţinută pentru presiunea în lichidul magnetic demonstrează că aceasta poate fi modificată prin intermediul mărimilor de stare ale cîmpului electromagnetic şi că ea mai depinde de proprietăţile electrice şi magnetice ale lichidului. Ca o consecinţă importantă a presiunii electromagnetice induse de un cîmp electromagnetic într-un lichid magnetic este prezentat fenomenul de levitaţie magnetică de primul ordin.

In continuare se dă o demonstraţie originală, mai generală decît cea cunoscută în literatură, a forţei rezultante ce se exercită asupra unui corp imersat într-un lichid magnetic - corpul putînd avea sau nu magnetizaţie sau polarizaţie permanente şi permeabilitatea magnetică μ sau μ_0, respectiv, permitivitatea electrică ε sau ε_0 - demonstraţie efectuată pe baza integrării tensiunilor fictive.

Forţa se exprimă în funcţie de o tensiune normală şi alta tangentă, la o suprafaţă arbitrară ce înconjoară corpul, suprafaţa fiind trasată în lichid. Forma suprafeţei fiind arbitrară, teorema prezintă avantaje în calculele efectuate prin metode numerice.

In final se determină o expresie mai generală a forţei exercitată de cîmpul magnetic asupra unei sfere nemagnetice imersată într-un lichid magnetic [62], configuraţia polilor fiind hiperbolică.

Intr-o primă ipoteză forţa este calculată în cazul cînd se lucrează pe porţiunea liniară a curbei de magnetizare, raza sferei fiind arbitrară, iar apoi în ipoteza că lichidul magnetic este la saturaţie şi sfera are rază mică.

Formulele pentru forţe astfel obţinute devin utile în studiul proceselor de separare ale particulelor din celulele de separare, deoarece devine cunoscută densitatea aparentă a lichidului.

2.1. Expresia generală a forțelor în cîmp electromagnetic; densitatea de volum a forțelor

Starea unui sistem fizic este cunoscută dacă se dau valorile anumitor mărimi fizice, numite mărimi de stare. Parametrii interni ai unui sistem fizic, definiți ca fiind ansamblul mărimilor fizice ce aparțin sistemului considerat, definesc în mod univoc starea sistemului luat în studiu.

Parametrii externi ai unui sistem fizic sînt toate mărimile fizice, liniar independente, ale sistemelor exterioare, a căror variație duce la modificarea stării sistemului considerat.

In teoria macroscopică a fenomenelor termodinamice este generalizată noțiunea de lucru mecanic elementar, definit în mecanică prin produsul scalar între vectorii forță și elementul de deplasare. Pentru un sistem fizic considerat expresia generală a lucrului mecanic elementar efectuat de sistem asupra exteriorului este:

$$\delta \mathcal{L} = \sum A_k \delta a_k, \qquad (2.1)$$

în care a_k sînt parametrii externi ai sistemului, iar A_k reprezintă parametrii de forță.

Unii din termenii relației (2.1) exprimă, în "lucru mecanic", acțiunile pe care sistemul fizic le efectuează asupra exteriorului cînd sistemul considerat își schimbă starea. Astfel de termeni se numesc echivalenți în lucru mecanic.

Experiențele arată că parametrii de forță sînt funcții de parametrii interni, ξ_i, de parametrii externi, a_k, și de încă o mărime termodinamică, τ, numită temperatură:

$$A_k = A_k(a, \xi, \tau) \qquad (2.2)$$

Teoria termodinamică a proceselor fizice presupune cunoscută expresia (2.1) a lucrului mecanic elementar, adică se presupun cunoscuți toți parametrii de forță ai sistemului considerat.

Se poate introduce o funcție W numită energia sistemului, astfel încît:

$$-dW = \delta \mathcal{L} - \delta Q \qquad (2.3)$$

în care δQ reprezintă căldura primită de sistem în transformarea elementară considerată, iar $\delta \mathcal{L}$ este suma între lucrul mecanic propriu-zis și echivalenții în lucru mecanic ai acțiunilor externe.

Egalitatea (2.3), stabilită pe cale experimentală, este general valabilă și reprezintă primul principiu al termodinamicii.

Dacă sistemul fizic este izolat adiabatic, adică el este pus în astfel de condiții încît modificarea temperaturii sistemelor exterioare nu schimbă starea sistemului considerat, atunci $\delta Q = 0$ și primul principiu al termodinamicii devine:

$$- dW = \delta \mathcal{L} \tag{2.3'}$$

Deoarece dW este o diferențială totală exactă, rezultă că energia unui sistem fizic este o funcție de stare: valoarea ei într-o stare dată nu depinde de șirul transformărilor prin care a trecut sistemul, dar este funcție de valorile mărimilor de stare ale sistemului, în starea dată și cea de referință ($W = 0$).

Caracterul de funcție de stare a energiei sistemului, W, îi conferă acesteia o proprietate importantă: forma matematică care exprimă pe W în funcție de mărimile de stare este invariantă în raport cu stările particulare de evoluție ale sistemului fizic.

Starea de echilibru termodinamic a unui sistem fizic reprezintă starea finală în care trece sistemul fizic cînd parametrii săi externi și temperatura corpurilor exterioare au valori constante date. In starea de echilibru termodinamic a unui sistem fizic toți parametrii săi interni sînt funcții de parametrii externi și de temperatură.

In acord cu această lege, în stări de echilibru termodinamic relația (2.2) ia forma:

$$A_k = A_k(a, \tau) \tag{2.4}$$

și, de asemenea, orice parametru intern ξ_i se poate scrie:

$$\xi_i = \xi_i(a, \tau) \tag{2.4'}$$

Energia sistemului fiind un parametru intern rezultă că $W = W(a, \tau)$, de unde se poate explicita $\tau = \varphi(a, W)$ și relațiile (2.4) și (2.4') se pot exprima numai în funcție de parametrii externi și de energie:

$$A_k = A_k'(a, W), \quad \xi_i = \xi_i(a, W) \tag{2.5}$$

Rezultă deci că stările de echilibru termodinamic ale sistemelor fizice sînt unic determinate de parametrii externi şi de încă o mărime care poate fi temperatura corpurilor exterioare sau energia sistemului. Această proprietate prezintă o deosebită importanţă pentru că ea permite să se stabilească parametrii externi ai unui sistem fizic.

Se presupune, în continuarea că parametrii externi şi temperatura variază foarte lent. In aceste condiţii stările sistemului fizic considerat se bucură de aceeaşi proprietate, adică parametrii săi interni vor varia lent şi în fiecare moment sistemul se găseşte în echilibru termodinamic. Evoluţiile sistemelor fizice, care se desfăşoară în astfel de condiţii, pot fi considerate ca un lanţ de stări de echilibru termodinamic. Procesele care se încadrează în această categorie se numesc procese cvasistatice.

Un proces cvasistatic este reversibil deoarece la parametrii externi daţi şi la temperatură dată, în echilibru termodinamic, starea sistemului fizic este unică. De asemenea, procesele reversibile reprezintă un lanţ de stări de echilibru termodinamic al sistemului fizic considerat.

Pentru a stabili forma pe care o ia primul principiu al termodinamicii aplicat cîmpului electromagnetic în[3], se consideră o suprafaţă închisă Σ, figura 2.1, în interiorul căreia există

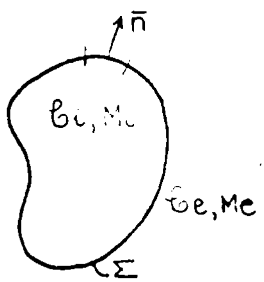


Fig. 2.1.

cîmp electromagnetic $\mathcal{E}_i$ şi un sistem de corpuri M_i. In interiorul suprafeţei Σ pot exista de asemenea cîmp electromagnetic $\mathcal{E}_e$ şi corpuri M_e.

Sistemul fizic, reprezentat de cîmpul electromagnetic $\mathcal{E}_i$ poate interacţiona cu "exteriorul", format din corpurile M_i prin intermediul parametrilor externi ai $\mathcal{E}_e$ şi M_e prin suprafaţa Σ, local, cu ajutorul mărimilor fizice referitoare la Σ care intervin în condiţiile [illegible] teoremei de unicitate a cîmpului.

Cîmpul electromagnetic este un sistem fizic care în mod natural şi în orice condiţii este izolat adiabatic. Temperatura nu intervine în mărimile de stare ale cîmpului, ea neputînd fi definită în astfel de sisteme.

In acord cu primul principiu al termodinamicii se poate deci scrie:

BUPT

$$- dW'_{elm} = \delta \mathcal{L} , \qquad (2.6)$$

în care W'_{elm} este energia cîmpului electromagnetic $\mathcal{C}_i$ iar:

$$\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}_{M_i} + \delta \mathcal{L}_{\Sigma} , \qquad (2.7)$$

reprezintă lucrul mecanic elementar efectuat asupra sistemelor exterioare în transformarea considerată. Lucrul mecanic a fost descompus în doi termeni: primul corespunde acţiunilor asupra corpurilor M_i, din interiorul lui Σ, iar al doilea reprezintă acţiunile asupra sistemului $\mathcal{C}_e \cup M_e$.

Numărul parametrilor externi ai cîmpului electromagnetic fiind infinit, cum rezultă din teorema de unicitate, echivalenţii în lucru mecanic se vor exprima în mod necesar sub forma unor integrale:

$$\delta \mathcal{L}_{M_i} = \int_{V_\Sigma} \sum (A_k da_k) dv = \int_{V_\Sigma} \delta \ell_v dv, \qquad (2.8)$$

$$\delta \mathcal{L}_\Sigma = \oint_\Sigma S(\bar{n}) dS dt, \qquad (2.9)$$

în care $\delta \ell_v$ reprezintă densitatea de volum a lucrului mecanic elementar cedat în fiecare punct mediului corporal M_i; $S(\bar{n})$ - densitatea de suprafaţă a puterii cedate prin Σ, în punctul de normală $\bar{n}$, sistemului exterior $\mathcal{C}_e \cup M_e$; a_k - parametrii externi locali (definiţi în fiecare punct al corpurilor M_i); A_k - parametrii de forţă.

Energia W'_{elm} este distribuită cu densitatea w'_{elm} şi deci, energia cîmpului electromagnetic conţinută în V_Σ se poate exprima în forma:

$$W'_{elm} = \int_{V_\Sigma} w'_{elm} dv. \qquad (2.10)$$

Avînd în vedere relaţiile (2.7), (2.8), (2.9) şi (2.10) egalitatea (2.6) se poate scrie:

$$- d \int_{V_\Sigma} w'_{elm} dv = \int_{V_\Sigma} \delta \ell_v dv + \oint_\Sigma S(\bar{n}) dadt. \qquad (2.11)$$

Relaţia (2.11) reprezintă forma integrală a primului principiu al termodinamicii aplicat cîmpului electromagnetic. Aceasta pentru cazul corpurilor în repaus mai poate fi scrisă şi în forma [44] :

$$- dW'_{elm} = -\int_{V_\Sigma} dw'_{elm} dv = \int_{V_\Sigma} \delta\ell_v dv + \oint_\Sigma \bar{S}.d\bar{a}dt. \qquad (2.11')$$

Cu transformarea Gauss-Ostrogradschi şi observînd că relaţia (2.11') este valabilă pentru orice volum V_Σ , se obţine:

$$- dw'_{elm} = \delta\ell_v + (\mathrm{div}\bar{S})dt. \qquad (2.12)$$

Egalitatea (2.12) reprezintă forma locală a primului principiu al termodinamicii aplicat cîmpului electromagnetic, cînd corpurile sînt în repaus.

Explicitarea expresiei lucrului mecanic $\delta\mathcal{L} = \int_{V_\Sigma} \delta\ell_v dv$, care conţine termenii ce exprimă lucrul mecanic propriu-zis determinat de acţiunile ponderomotoare asupra mediilor corporale precum şi echivalenţii în lucru mecanic ai acţiunilor cîmpului asupra substanţei din interiorul lui Σ , se face utilizînd teorema de unicitate demonstrată de [44]. Dacă corpurile sînt în repaus mărimile de stare ale cîmpului electromagnetic (vectorii $\bar{\mathrm{E}}$, $\bar{\mathrm{D}}$, $\bar{\mathrm{B}}$ şi $\bar{\mathrm{H}}$) sînt unic determinate dacă se cunosc:

- valorile acestora la momentul $t = 0$ în punctele interioare lui Σ ;
- sursele cîmpului, adică mărimile de stare ale corpurilor reprezentate de: densitatea curenţilor de conducţie $\bar{J}(\bar{r},t)$; vectorii de polarizare electrică $\bar{P}(\bar{r},t)$ şi magnetizaţia $\bar{M}(\bar{r},t)$;
- componenta tangentă a intensităţii cîmpului electric, $E_{t\Sigma}$, sau componenta tangentă a intensităţii cîmpului magnetic, $H_{t\Sigma}$, pe suprafaţa frontieră a domeniului considerat.

Această teoremă permite identificarea tuturor parametrilor externi şi bilanţul energetic local (2.12) se scrie în forma [44]:

$$- dw'_{elm} = \bar{X}_J.\delta\bar{\zeta}_J + \bar{X}_p.\delta\bar{P} + \bar{X}_M.\delta\bar{M} + \mathrm{div}\,\bar{S}\,dt, \qquad (2.13)$$

unde parametrul extern $\bar{J}$ se înlocuieşte cu vectorul $\bar{\zeta} = \int_0^t \bar{J}\,dt$, deoarece $d\bar{\zeta}/dt = \bar{J}$ şi, cu ajutorul legii transformării energiei prin curent de conducţie $\delta\ell_{vJ}/\delta t = \bar{E}.\bar{J}$, rezultă

$\delta_{v_J} = E.J.dt = E.\delta Q$ şi deci parametrul de forţă corespunzător, $\bar{X}_J$, devine cunoscut: $\bar{X}_J = E$.

Pentru determinarea expresiei densităţii energiei cîmpului electromagnetic, w'_{elm}, se porneşte de la observaţia că, în teoria lui Maxwell, $\bar{X}_J$ este cunoscut şi că forma locală a bilanţului energetic al cîmpului - relaţia (2.13) - trebuie să fie verificată de legile cîmpului electromagnetic. Pentru corpuri în repaos acestea sînt exprimate de sistemul:

$$\mathrm{div}\, D = \rho_v; \quad \mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t}; \quad \mathrm{div}\, B = 0; \quad \mathrm{rot}\, H = J + \frac{\partial D}{\partial t},$$

$$D = \varepsilon_0 E + P \text{ şi } B = \mu_0 (H + M). \qquad (2.14)$$

De aici rezultă:

$$\frac{\delta v_J}{\partial t} = E.J = E(\mathrm{rot}\, H - \frac{\partial D}{\partial t}) - H.\mathrm{rot}\, E - H.\frac{\partial B}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\,(E \times H) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) - E.\frac{\partial P}{\partial t} - H.\frac{\partial M}{\partial t}$$

sau:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = E.J + E.\frac{\partial P}{\partial t} + \mu_0 H.\frac{\partial M}{\partial t} + \mathrm{div}\,(E \times H). \qquad (2.15)$$

Identificînd egalităţile (2.13) şi (2.15) se obţin relaţiile:

$$\frac{\partial}{\partial t} w'_{elm} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2);$$

$$\bar{X}_p = E; \quad \bar{X}_M = \mu_0 H \text{ şi } \mathrm{div}\, S = \mathrm{div}\,(E \times H). \qquad (2.16)$$

Din prima ecuaţie, prin integrare şi impunînd condiţia ca starea de referinţă în raport cu care se calculează energia să fie starea în care $D = E = H = B = 0$, rezultă pentru densitatea de energie a cîmpului electromagnetic expresia generală:

$$w'_{elm} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2\right) \qquad (2.17)$$

care reprezintă o funcţie de stare.

Următoarele două egalităţi din (2.16) reprezintă parametrii de forţă corespunzători parametrilor externi $\bar{P}$ şi $\bar{M}$.

Din ultima egalitate rezultă expresia densităţii fluxului de energie dat de vectorul $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} + \bar{S}_S$, unde $\bar{S}_S$ este un eventual vector eminamente solenoidal. Impunînd condiţia ca $\bar{S}$ să depindă numai de mărimile de stare ale cîmpului electromagnetic de pe suprafaţa Σ şi cum în teoria Maxwell nu se poate construi un vector eminamente solenoidal care să îndeplinească această cerinţă, rezultă pentru densitatea curentului de energie expresia:

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \qquad (2.18)$$

Deoarece procesele lipsite de histerezis sînt procese cvasi-statice şi sistemul fisic este în echilibru termodinamic se pot scrie următoarele dependenţe:

$$\bar{E} = \bar{E}(\bar{J}, \bar{P}, \bar{M}, \tau), \quad \bar{H} = \bar{H}(\bar{J}, \bar{P}, \bar{M}, \tau) \qquad (2.19)$$

în care τ este temperatura corpurilor.

Dacă se ţine seama de legea conducţiei, $\bar{J} = \sigma \bar{E}$, rezultă:

$$\bar{E} = \bar{F}_E(\bar{P}, \bar{M}, \tau); \quad \bar{H} = \bar{F}_H(\bar{P}, \bar{M}, \tau) \qquad (2.20)$$

In marea majoritate intensitatea cîmpului electric nu depinde de $\bar{M}$, iar intensitatea cîmpului magnetic nu este funcţie de $\bar{P}$. In aceste cazuri, în medii fără polarizaţii permanente şi în transformări isoterme, echivalenţii în lucru mecanic corespunzători polarizărilor electrice şi magnetice se pot exprima în formele:

$$\left(\frac{\partial l_{v_P}}{\partial t}\right)_\tau = \bar{E}\cdot\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = \frac{dw_P(P,\tau)}{dt} = \left(\frac{\partial w_P}{\partial P}\right)_\tau \frac{dP}{dt},$$

$$\left(\frac{\partial l_{v_M}}{\partial t}\right)_\tau = \mu_0 \bar{H}\cdot\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} = \frac{dw_M(M,\tau)}{dt} = \left(\frac{\partial w_M}{\partial M}\right)_\tau \frac{dM}{dt}. \qquad (2.21)$$

în care w_P şi w_M reprezintă energiile cedate de cîmp, în fiecare unitate de volum, pentru realizarea polarizărilor electrice respectiv magnetice ale mediilor corporale presupuse izotrope dar cu proprietăţi neliniare.

Dacă $\bar{E}$ şi $\bar{P}$, respectiv $\bar{H}$ şi $\bar{M}$, sînt vectori cu aceeaşi orientare, atunci din (2.21) rezultă:

$$E = \left(\frac{\partial w_P}{\partial P}\right)_T \quad \text{şi} \quad H = \left(\frac{\partial w_M}{\partial M}\right)_T \tag{2.22}$$

indicele de la baza parametrilor arătînd că derivata se calculează la temperatură constantă.

In condiţiile menţionate mai sus, bilanţul energetic local poate fi scris în forma:

$$-\frac{d}{dt}\left(w'_{elm} + w_P + w_M\right) = \bar{E}.\bar{J} + \operatorname{div}\bar{S}$$

în care $w_{elm} = w'_{elm} + w_P + w_M$ reprezintă o nouă densitate de energie care cuprinde în afară de densitatea de energie a cîmpului şi densităţile de energie înmagazinate în corpuri pentru ca acestea să ajungă în stările de polarizări finale.

In condiţiile enunţate w_{elm} reprezintă o funcţie de stare care se numeşte densitate de energie electromagnetică.

Astfel bilanţul local devine:

$$-\frac{dw_{elm}}{dt} = \bar{E}.\bar{J} + \operatorname{div}\bar{S} \tag{2.23}$$

şi este valabil în toate procesele cvasistatice, izoterme, pentru corpuri izotrope şi în repaos faţă de referenţialul ales, dacă $\bar{P}$ nu depinde de $\bar{H}$ iar $\bar{M}$ nu este funcţie de $\bar{E}$.

Deoarece procesele sînt presupuse izoterme, w_{elm} din (2.23) reprezintă densitatea de volum a energiei electromagnetice libere. Expresia ei rezultă din (2.17) şi (2.21):

$$\frac{dw_{elm}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2\right) + \bar{E}.\frac{d\bar{P}}{dt} + \mu_0\bar{H}.\frac{d\bar{M}}{dt} =$$

$$= \bar{E}.\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0\bar{E} + \bar{P}\right) + \bar{H}.\frac{d}{dt}\mu_0(\bar{H}+\bar{M}) = \bar{E}.\frac{d\bar{D}}{dt} + \bar{H}.\frac{d\bar{B}}{dt} ;$$

de unde:

$$w_{elm} = \int_{D=E=0}^{D} \bar{E}\cdot d\bar{D} + \int_{B=H=0}^{B} \bar{H}\cdot d\bar{B} \; ; \qquad (2.24)$$

expresie valabilă în medii izotrope, neliniare dar lipsite de histerezis electric şi magnetic, în condiţiile precizate pentru D şi H.

Deoarece w_{elm} este un parametru intern, el este funcţie de parametrii externi $\bar{J}$, $\bar{P}$, $\bar{M}$ şi de temperatura τ. Dacă se ţine seama de legile conducţiei, a polarizaţiilor electrică şi magnetică şi de faptul că constantele mediilor corporale sînt funcţii de densitatea de masă ρ, atunci se constată că densitatea de energie electromagnetică poate fi scrisă în funcţie de variabilele independente E, H, ρ şi τ:

$$w_{elm} = w_{elm}(\bar{E}, \bar{H}, \rho, \tau) \qquad (2.25)$$

Dacă se integrează (2.23) pe volumul v_Σ şi cu transformarea Gauss-Ostrogradschi, se obţine forma integrală a bilanţului energetic:

$$-\int_{v_\Sigma} \frac{dw_{elm}}{dt}\, dv = -\frac{dW_{elm}}{dt} = \int_{v_\Sigma} \bar{E}\cdot\bar{J}\, dv + \oint_{\Sigma} \bar{S}\cdot d\bar{a}, \qquad (2.26)$$

formă valabilă în condiţiile menţionate anterior.

Deoarece energia electromagnetică este o funcţie de stare şi cum expresia (2.24) conţine numai mărimile de stare ale cîmpului, rezultă că ea reprezintă energia electromagnetică şi dacă corpurile sînt mobile cu menţiunea că diferenţiala locală se înlocuieşte cu diferenţiala substanţială.

Legile cîmpului electromagnetic, în teoria Maxwell-Hertz, au forma:

$$\mathrm{div}\,\bar{D} = \rho_v; \quad \mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\overline{d_f B}}{dt} = -\frac{d\bar{B}}{dt} - \bar{B}\,(\nabla\cdot\bar{v}) + (\bar{B}\cdot\nabla)\,\bar{v}\,;$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E}; \quad \bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M}); \qquad (2.27)$$

$$\mathrm{div}\,\bar{B} = 0; \quad \mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \frac{\overline{d_f D}}{dt} = \bar{J} + \frac{d\bar{D}}{dt} + \bar{D}\,(\nabla\cdot\bar{v}) - (\bar{D}\cdot\nabla)\,\bar{v};$$

în care $\bar{v}$ reprezintă viteza punctului de substanţă în raport cu sistemul de referinţă ales.

In continuare se face bilanţul energetic local pornind de la expresia (2.24) a energiei electromagnetice şi de la legile (2.27). In ipoteza că vectorii $\bar{E}$ şi $d_s\bar{E}$, respectiv $\bar{H}$ şi $d_s\bar{B}$ au aceeaşi orientare, rezultă:

$d_s(\bar{D}\cdot\bar{E}) = d_s(ED) = D\, d_s E + E\, d_s D$ respectiv $d_s(\bar{B}\cdot\bar{H}) = B\, d_s H + H\, d_s B$, iar termenii lui $W_{elm} = W_e + W_m$ se pot pune în forma:

$$W_e = \int_0^D E\, d_s D = \varepsilon E^2 - \int_0^E D\, d_s E = W_e(E, \rho, \tau);$$

$$W_m = \int_0^B H\, d_s B = H^2 - \int_0^H B\, d_s H = W_m(H, \rho, \tau); \qquad (2.28)$$

în care s-a ţinut seama că în medii izotrope, fără histerezis şi polarizări permanente, $\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ şi $\bar{B} = \mu \bar{H}$.

Pentru derivatele substanţiale, considerînd temperatura constantă, sînt valabile expresiile:

$$\frac{d_s w_e}{dt} = \left(\frac{\partial w_e}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} \cdot \frac{d_s \rho}{dt} + \left(\frac{\partial w_e}{\partial E}\right)_{\rho,\tau} \frac{d_s E}{dt};$$

în care:

$$\left(\frac{\partial w_e}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} = E^2\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} - \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} \cdot E\, d_s E;$$

$$\left(\frac{\partial w_e}{\partial E}\right)_{\rho,\tau} = 2\varepsilon E^2 + E^2\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial E}\right)_{\rho,\tau} - \varepsilon E = D + E^2\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial E}\right)_{\rho,\tau};$$

şi deci:

$$\frac{d w_e}{dt} = \left[E^2\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} - \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} \cdot E\, d_s E\right] \cdot \frac{d_s D}{dt} + \left[D + E^2\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial E}\right)_{\rho,\tau}\right] \frac{d_s E}{dt} =$$

$$= E\,\frac{d_s D}{dt} - \left[\int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,T} d_s E\right]\frac{d_s \rho}{dt}\,. \tag{2.29}$$

Din legea conservării masei: $\frac{d_v \rho}{dt} = \frac{d_s \rho}{dt} + \rho\,(\nabla\cdot\bar{v}) = 0$ rezultă $\frac{d_s \rho}{dt} = -\rho\,(\nabla\cdot\bar{v})$, adică pentru relația (2.18) avem:

$$\frac{dw_e}{dt} = E\cdot\frac{d_s D}{dt} + \left[\int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,T} E\, d_s E\right]\rho\,(\nabla\cdot\bar{v}); \tag{2.30}$$

și analog:

$$\frac{dw_m}{dt} = H\,\frac{d_s B}{dt} + \left[\int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,T} H\, d_s H\right]\rho\,(\nabla\cdot\bar{v})\,. \tag{2.31}$$

Fie un volum v_Z atașat în care densitatea de energie electromagnetică este w_{elm}. Derivata de integrală de volum pentru această funcție este:

$$\frac{d_v w_{elm}}{dt} = \frac{d_v w_e}{dt} + \frac{d_v w_m}{dt} = \frac{d_s w_e}{dt} + \frac{d_s w_m}{dt} + w_{elm}\,(\nabla\cdot\bar{v}) =$$

$$= E\,\frac{d_s D}{dt} + H\,\frac{d_s B}{dt} + \Big[\, w_{elm} + \rho\int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,T} E\, d_s E\; +$$

$$+ \rho\int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,T} H\, d_s H\Big]\cdot\rho(\nabla\cdot\bar{v})\,. \tag{2.32}$$

Primii doi termeni din (2.31) pot fi transformați precum urmează:

$$E\,\frac{d_s D}{dt} + H\,\frac{d_s B}{dt} = \bar{E}\cdot\frac{d_s D}{dt} + \bar{H}\cdot\frac{d_s B}{dt} = \bar{E}\cdot\Big[\mathrm{rot}\,\bar{H} - \bar{J} - \bar{D}\,(\nabla\cdot\bar{v}) +$$

$$+ (\bar{D}\cdot\nabla)\bar{v}] + \bar{H}[-\mathrm{rot}\,\bar{E} - \bar{B}\,(\nabla\cdot\bar{v}) + (\bar{B}\cdot\nabla)\,\bar{v}] = -\bar{E}\cdot\bar{J} - \mathrm{div}\,\bar{S} -$$

$$-(\bar{E}\cdot\bar{D} + \bar{H}\cdot\bar{B})\cdot(\nabla\cdot\bar{v}) + \bar{E}\cdot(\bar{D}\cdot\nabla)\,\bar{v} + \bar{H}\cdot(\bar{B}\cdot\nabla)\,\bar{v}.$$

Cu aceasta (2.32) devine:

$$-\frac{d_v w_{elm}}{dt} = \bar{E}\cdot\bar{J} + \mathrm{div}\,\bar{S} + \Big[\bar{E}\cdot\bar{D} - \rho\int_0^E \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_{B,\tau} E\, d_s E + \bar{H}\cdot\bar{B} -$$

$$-\rho\int_0^H \left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_{E,\tau} H\, d_s H - w_{elm}\Big](\nabla\cdot\bar{v}) - \bar{E}\cdot(\bar{D}\cdot\nabla)\,\bar{v} - \bar{H}\cdot(\bar{B}\cdot\nabla)\bar{v} \qquad (2.33)$$

Din compararea egalității (2.33) cu bilanțul energetic (2.23), din teoria lui Maxwell, se constată prezența unor termeni suplimentari în expresia cărora intervine viteza punctelor de substanță în raport cu referențialul ales. Aceasta arată că în afara "surselor cîmpului" mai există și alți parametri externi. In adevăr, la corpuri în mișcare, ca parametru extern intervine deplasarea punctului de substanță, lucrul mecanic cedat de cîmp, în unitatea de volum și unitatea de timp, fiind egal cu produsul scalar între densitatea de volum a forței, $\bar{f}_v$, exercitată de cîmp asupra corpurilor în interiorul lui Σ, și viteza punctului în raport cu referențialul ales $\bar{f}_v\cdot\bar{v}$.

Ultimii doi termeni din (2.33) sînt funcții de derivatele spațiale ale vitezei. Prezența acestora demonstrează că prin suprafața Σ cîmpul interacționează cu sistemul exterior nu numai prin intermediul vectorului Poyting, ci prin suma dintre $\bar{S}$ și valoarea vectorială $\bar{t}(\bar{n})$ a unui tensor, $\bar{T}$, de ordinul doi. Echivalentul în lucru mecanic, în unitatea de timp, al acestor acțiuni externe se exprimă în forma:

$$\oint_\Sigma \bar{S}\cdot d\bar{S} + \oint_\Sigma \bar{t}(\bar{n})\cdot\bar{v}\cdot dS.$$

Bilanțul energetic scris pentru volumul atașat, limitat de suprafața Σ, și ea atașată, va fi:

$$-\frac{dW_{elm}}{dt} = \int_{v_\Sigma} \bar{J}\cdot\bar{E}\, dv + \int_{v_\Sigma} \bar{F}_v\cdot\bar{v}\, dv + \oint_\Sigma \bar{S}\cdot d\bar{s} + \oint_\Sigma \bar{t}(\bar{n})\cdot\bar{v}\, ds. \quad (2.34)$$

Termenul $\oint_\Sigma \bar{t}(\bar{n})\bar{v}dS$ nu reprezintă forțele exercitate de cîmpul electromagnetic asupra sistemelor din exteriorul lui Σ. In adevăr, chiar dacă exteriorul este lipsit de corpuri, integrala este diferită de zero deși, în acest caz, cîmpul din interiorul lui Σ nu poate exercita forțe asupra sistemului din exteriorul lui Σ. Din acest motiv termenul din (2.34) se interpretează doar ca echivalent în lucru mecanic al acțiunilor pe care cîmpul din interiorul lui Σ le efectuează asupra sistemelor din exteriorul lui Σ.

Pentru a stabili forma locală a bilanțului energetic se transformă produsul scalar $\bar{t}(\bar{n})\cdot\bar{v}$, punîndu-l în funcție de tensorul $\hat{T}$.

$$\bar{t}(\bar{n})\cdot\bar{v} = \left[(\bar{n}\cdot\bar{I})\,\bar{T}_x + (\bar{n}\cdot\bar{J})\,\bar{T}_y + (\bar{n}\cdot\bar{K})\,\bar{T}_z\right]\cdot\bar{v} =$$

$$= (\bar{n}\cdot\bar{I})(\bar{T}_x\cdot\bar{v}) + (\bar{n}\cdot\bar{J})(\bar{T}_y\cdot\bar{v}) + (\bar{n}\cdot\bar{K})(\bar{T}_z\cdot\bar{v}) =$$

$$= \bar{n}\cdot\left[\bar{I}(\bar{T}_x\cdot\bar{v}) + \bar{J}(\bar{T}_y\cdot\bar{v}) + \bar{K}(\bar{T}_z\cdot\bar{v})\right] = \bar{n}\cdot(\hat{T}\cdot\bar{v}),$$

în care $\hat{T}$ este tensorul cîmpului electromagnetic și are valorile vectoriale $\bar{T}_x$, $\bar{T}_y$ și $\bar{T}_z$ corespunzătoare axelor sistemului de referință.

Integrala de suprafață referitoare la $\bar{t}(\bar{n})$ se transformă în integrală de volum, cum urmează:

$$\oint_\Sigma \bar{t}(\bar{n})\cdot\bar{v}\, ds = \oint_\Sigma \bar{n}(\hat{T}\cdot\bar{v})ds = \oint_\Sigma (\hat{T}\cdot\bar{v})\cdot d\bar{s} = \int_{v_\Sigma} \mathrm{div}\,(\hat{T}\cdot\bar{v})\, dv =$$

$$= \int_{v_\Sigma} (\bar{v}\cdot\mathrm{div}\,\hat{T} + \bar{T}_x\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + \bar{T}_y\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + \bar{T}_z\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial z})\, dv. \quad (2.35)$$

Utilizînd relația (2.35) forma integrală a bilanțului energetic, (2.33), devine:

$$-\frac{dW_{elm}}{dt} = -\int_{v_\Sigma} \frac{d_v w_{elm}}{dt}\, dv = \int_{v_\Sigma} \bar{J}\cdot\bar{E}\, dv + \oint_\Sigma \bar{S}\cdot d\bar{S} +$$

$$+\int_{V_\Sigma} (\bar{f}_v + \operatorname{div} \hat{T})\cdot\bar{v}\, dv + \int_{V_\Sigma} \left(\bar{T}_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{T}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{T}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) dv. \qquad (2.36)$$

Membrul stîng al bilanţului energetic nu depinde de sistemul de referinţă ales deoarece se referă la volume ataşate. Pentru sistemele inerţiale de aceeaşi proprietate se bucură şi primul, al doilea şi ultimul, din termenii membrului drept al relaţiei (2.36). Rezultă că al treilea termen trebuie să fie nul în toate sistemele iniţiale fiindcă el este funcţie de viteza $\bar{v}$ a punctului din corp în raport cu un astfel de reper. Rezultă:

$$\bar{f}_v = - \operatorname{div} \hat{T}, \qquad (2.37)$$

egalitate prin care se determină densitatea de volum a forţelor exercitate de cîmp asupra mediilor corpurilor din interiorul lui Σ.

In consecinţă, forma integrală a bilanţului energetic devine:

$$- \frac{dW_{elm}}{dt} = - \int_{V_\Sigma} \frac{d_v w_{elm}}{dt}\, dv = \int_{V_\Sigma} \bar{J}\cdot\bar{E}\, dv + \oint_\Sigma \bar{S}\cdot d\bar{s} +$$

$$+ \int_{V_\Sigma} \left[\bar{T}_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{T}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{T}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right] dv. \qquad (2.38)$$

Se observă că pentru $\bar{v} = 0$ (corpuri în repaos) se obţine din soluţia (2.28) forma integrală cunoscută în teoria lui Maxwell.

Dacă se transformă integrala de suprafaţă din al doilea termen al egalităţii (2.38) într-o integrală de volum, se obţine forma locală a bilanţului energetic, pentru corpuri în mişcare:

$$- \frac{d_v w_{elm}}{dt} = \bar{J}\cdot\bar{E} + \operatorname{div} \bar{S} + \left(\bar{T}_x \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{T}_y \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{T}_z \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right). \qquad (2.39)$$

Componentele tensorului $\hat{T}$ se pot calcula prin identificarea termenilor ce intervin în egalităţile (2.33) şi (2.39). Se obţine:

$$\bar{T}_x \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{T}_y \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{T}_z \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \left[\bar{E}\cdot\bar{D} - \rho \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} \cdot 1\, d_a E + \bar{H}\cdot\bar{B} - \right.$$

$$- \rho \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} H \, d_s H - w_{elm}](\nabla \cdot \bar{v}) - \bar{E} \cdot (\bar{D} \cdot \nabla)\bar{v} - \bar{H} \cdot (\bar{B} \cdot \nabla)\bar{v},$$

din care rezultă componentele tensorului $\hat{T}$:

$$T_{ii} = \bar{E} \cdot \bar{D} - \rho \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} E \, d_s E + \bar{H} \cdot \bar{B} - \rho \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} H \, d_s H -$$

$$- w_{elm} - E_i D_i - H_i B_i ; \quad T_{ij} = - E_j D_i - H_j B_i \qquad (2.40)$$

şi valoarea sa vectorială:

$$\bar{T}(\bar{n}) = \left[\bar{E} \cdot \bar{D} - \rho \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} E \, d_s E + \bar{H} \cdot \bar{B} - \rho \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} H \, d_s H - \right.$$

$$\left. - w_{elm} \right] \cdot \bar{n} - \bar{E}(\bar{D} \cdot \bar{n}) - \bar{H}(\bar{B} \cdot \bar{n}) . \qquad (2.41)$$

Pentru densitatea de volum a forţei, relaţiile (2.37), şi (2.40) şi (2.28) conduc la:

$$\bar{f}_v = \rho_v \bar{E} + (\bar{D} \cdot \nabla)\bar{E} + (\bar{B} \cdot \nabla)\bar{H} - \mathrm{grad}\left[\int_0^E D \, d_s E + \int_0^H B \, d_s H - \right.$$

$$\left. - \rho \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} E \, d_s E - \rho \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} H \, d_s H \right], \qquad (2.42)$$

în care s-a ţinut seama de legile fluxului electric şi magnetic.

Utilizînd identităţile:

$$(\bar{B} \cdot \nabla)\bar{H} = \mu(\bar{H} \cdot \nabla)\bar{H} = \mu \nabla \frac{H^2}{2} + (\mathrm{rot}\ \bar{H}) \times \bar{B} = B \ \mathrm{grad}\ H + (\mathrm{rot}\ \bar{H}) \times \bar{B},$$

$$(\bar{D} \cdot \nabla)\bar{E} = \bar{D} \ \mathrm{grad}\ E + (\mathrm{rot}\ \bar{E}) \times \bar{D},$$

şi legile circuitului magnetic şi inducţiei electromagnetice, relaţia (2.42) se scrie:

$$\bar{F}_v = \rho_v \bar{E} + \bar{J} \times \bar{B} - \mathrm{grad}\left[\int_0^E D\, d_s E + \int_0^H B\, d_s H - \rho \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} E\, d_s E - \right.$$

$$\left. - \rho \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} H\, d_s H\right] + D\ \mathrm{grad}\ E + B\ \mathrm{grad}\ H + \bar{D} \times \frac{d_f \bar{B}}{dt} +$$

$$+ \frac{d_f \bar{D}}{dt} \times \bar{B}. \qquad (2.43)$$

Ultimii doi termeni se pot transforma astfel:

$$\bar{D} \times \frac{d_f \bar{B}}{dt} + \frac{d_f \bar{D}}{dt} \times \bar{B} = \bar{D} \times \frac{\delta \bar{B}}{\delta t} + \frac{\delta \bar{D}}{\delta t} \times \bar{B} = \frac{\delta}{\delta t}(\bar{D} \times \bar{B}) = \frac{\delta}{\delta t}(\varepsilon \mu \bar{E} \times \bar{H}),$$

deoarece vectorii $\bar{D}$ şi $\bar{B}$ sînt definiţi în referenţiale locale, iar derivata de flux este o operaţie independentă de sistemul de referinţă. Simbolul $\delta/\delta t$ semnifică derivata efectuată în raport cu reperul local.

Cu acestea, egalitatea (2.43) devine:

$$\bar{F}_v = \rho_v \bar{E} + \bar{J} \times \bar{B} + D\ \mathrm{grad}\ E + B\ \mathrm{grad}\ H - \mathrm{grad}\left[\int_0^E D\, d_s E + \right.$$

$$\left. + \int_0^H B\, d_s H - \rho \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} E\, d_s E - \rho \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} H\, d_s H\right] +$$

$$+ \frac{1}{c^2}\frac{\delta}{\delta t}(\varepsilon_r \mu_r \bar{S}), \qquad (2.44)$$

în care $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ reprezintă viteza de propagare a luminii în vid, iar ε_r respectiv μ_r sînt permitivitatea relativă respectiv permeabilitatea relativă a mediului.

Ţinînd seama de identităţile:

$$D\ \mathrm{grad}\ E = \mathrm{grad}\ \frac{D \cdot E}{2} - \frac{E^2}{2}\mathrm{grad}\,\varepsilon\ ;\ B\ \mathrm{grad}\ H = \mathrm{grad}\ \frac{B \cdot H}{2} - \frac{H^2}{2}\mathrm{grad}\,\mu,$$

relaţia (2.44) se mai poate scrie şi în forma:

$$f_v = \rho_v E + J \times B - \frac{E^2}{2}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon - \frac{H^2}{2}\,\mathrm{grad}\,\mu + \mathrm{grad}\Big[\frac{D\cdot E}{2} - \int_0^E D\cdot d_s E +$$

$$+ \rho\int_0^E\Big(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\Big)_{E,\tau} + \frac{B\cdot H}{2} - \int_0^H B\, d_s H + \rho\int_0^H\Big(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big)_{H,\tau}\cdot H\, d_s H \; +$$

$$+ \frac{1}{c^2}\,\frac{\delta}{\delta t}\,(\mu_r \varepsilon_r S). \qquad (2.45)$$

O altă expresie pentru densitatea de volum a forţei se obţine observînd că, la substanţe paramagnetice şi fără polarizare permanentă, sînt valabile egalităţile:

$$\mathrm{grad}\,\mu = \mathrm{grad}\,\frac{H + M}{H}\mu_0 = \frac{\mu_0}{H^2}\,(H\nabla M - M\nabla H);$$

$$\mathrm{grad}\,\frac{BH}{2} = \mathrm{grad}\,\frac{\mu_0 H^2 + \mu_0 MH}{2} = \mu_0\, H\nabla H + \frac{\mu_0 M}{2}\nabla H + \frac{\mu_0 H}{2}\nabla M, \qquad (2.46)$$

iar pentru medii dielectrice:

$$\mathrm{grad}\,\varepsilon = \mathrm{grad}\,\frac{\varepsilon_0 E + P}{E} = \frac{1}{E^2}\,(E\nabla P - P\nabla E);$$

$$\mathrm{grad}\,\frac{DE}{2} = \mathrm{grad}\,\frac{\varepsilon_0 E^2 + P}{2} = \varepsilon_0 E\nabla E + \frac{P}{2}\nabla E + \frac{E}{2}\nabla P, \qquad (2.47)$$

în care s-au folosit legile de legătură pentru cazul cînd vectorii au orientări identice: $B = \mu_0(H + M)$ şi $D = \varepsilon_0 E + P$.

In aceste condiţii mai rezultă şi relaţiile:

$$\Big(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\Big)_{E,\tau} = \frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\varepsilon_0 + \frac{P}{E}\Big)_{E,\tau} = \frac{1}{E}\Big(\frac{\partial P}{\partial\rho}\Big)_{E,\tau};$$

$$\Big(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\Big)_{H,\tau} = \frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\mu_0 + \frac{\mu_0 M}{H}\Big)_{H,\tau} = \frac{\mu_0}{H}\Big(\frac{\partial M}{\partial\rho}\Big)_{H,\tau}. \qquad (2.48)$$

Cu (2.46), (2.47) şi (2.48) expresia (2.45) a densităţii de forţă devine:

$$\bar{f}_v = \rho_v \bar{E} + \bar{J} \times \bar{B} + P \,\mathrm{grad}\, E + \mu_0 M \,\mathrm{grad}\, H - \mathrm{grad}\Big[\int_0^E P \, d_s E + \mu_0 \int_0^H M \, d_s H\Big] + \mathrm{grad}\Big[\rho \int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} d_s E + \rho \int_0^H \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} d_s H \; + $$

$$+ \frac{1}{c^2} \frac{\delta}{\delta t} (\varepsilon_r \mu_r \bar{S}). \qquad (2.49)$$

Ţinînd seama de identităţile:

$$\mathrm{grad} \int_0^E P \, d_s E = P \,\mathrm{grad}\, E + \left[\int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} d_s E\right] \cdot \mathrm{grad}\, \rho \; ;$$

$$\mathrm{grad} \int_0^H M \, d_s H = M \,\mathrm{grad}\, H + \left[\int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} d_s H\right] \cdot \mathrm{grad}\, \rho \, , \qquad (2.50)$$

deduse în ipoteza că se menţine constantă temperatura corpurilor, egalitatea (2.49) se poate scrie şi în forma:

$$\bar{f}_v = \rho_v \bar{E} + \bar{J} \times \bar{B} + \rho \,\mathrm{grad} \int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} d_s E + \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} d_s H \; +$$

$$+ \frac{1}{c^2} \frac{\delta}{\delta t} (\varepsilon_r \mu_r \bar{S}). \qquad (2.51)$$

Pentru cîmpuri electrostatice, respectiv magnetice staţionare, stabilite în medii izotrope, fără polarizări permanente, dar neliniare şi lipsite de histerezis, densităţile de volum ale forţelor rezultă prin particularizările expresiei (2.51):

$$\bar f_{v_e} = \rho_v \bar E + \rho\,\mathrm{grad}\int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} dE \; ; \tag{2.52}$$

respectiv:

$$\bar f_{v_m} = \bar J \times \bar B + \rho\,\mathrm{grad}\,\mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} dH \; ; \tag{2.53}$$

sau (2.45):

$$\bar f_{v_e} = \rho_v \bar E - \frac{E^2}{2}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon + \mathrm{grad}\left[\frac{\bar E\cdot\bar D}{2} - \int_0^E D\,dE + \rho\int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} E\,dE\right], \tag{2.54}$$

respectiv:

$$\bar f_{v_m} = \bar J \times \bar B - \frac{H^2}{2}\,\mathrm{grad}\,\mu + \mathrm{grad}\left[\frac{\bar B\cdot\bar H}{2} - \int_0^H B\,dH + \rho\int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} H\,dH\right], \tag{2.55}$$

sau (2.44):

$$\bar f_{v_e} = \rho_v \bar E + D\,\mathrm{grad}\,E - \mathrm{grad}\left[\int_0^E D\,dE - \rho\int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} E\,dE\right] \tag{2.56}$$

respectiv:

$$\bar f_{v_m} = \bar J \times \bar B + B\,\mathrm{grad}\,H - \mathrm{grad}\left[\int_0^H B\,dH - \rho\int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} H\,dH\right] \tag{2.57}$$

sau (2.49):

$$\bar{F}_{v_e} = \rho_v \bar{E} + P \text{ grad } E + \text{grad}\left[\rho \int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{E,T} dE - \int_0^E P\, dE\right] \qquad (2.58)$$

respectiv:

$$\bar{F}_{v_m} = \bar{J} \times \bar{B} + \mu_0 M \text{ grad } H + \text{grad}\left[\rho \int_0^H \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,T} dH -\right.$$

$$\left. - \mu_0 \int_0^H M\, dH\right]. \qquad (2.59)$$

In cazul mediilor liniare din (2.45) rezultă:

$$\bar{F}_v = \rho_v \bar{E} + \bar{J} \times \bar{B} - \frac{E^2}{2} \text{grad}\varepsilon - \frac{H^2}{2} \text{grad}\mu + \frac{1}{2} \text{grad}\left[E^2 \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T + \right.$$

$$\left. + H^2 \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_T\right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_r \varepsilon_r \bar{S}). \qquad (2.60)$$

2.2. Presiunea electromagnetică în lichide

Dacă un lichid nu este încărcat cu sarcină liberă ($\rho_v = 0$) și densitatea curentului de conducție este nulă ($\bar{J} = 0$) și se află în repaos față de sistemul de referință ales, deci se află în stare hidrostatică, atunci, în prezența unui cîmp electromagnetic, asupra fluidului se exercită, din partea cîmpului, forțe de volum avînd densitatea [34]:

$$\bar{F}_v = \rho \text{ grad}\left[\int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{E,T} dE + \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,T} dH\right]. \qquad (2.61)$$

Termenul $\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_r \mu_r \bar{S})$ a fost neglijat deoarece, chiar la frecvențe înalte, el tinde către zero avînd în vedere că $c \cong 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}$.

Dacă lichidul se găsește în cîmp gravitațional, densitatea volumică a forței rezultante este:

$$\bar{f}_{v_r} = -\rho g \,\mathrm{grad}\, z + \rho\, \mathrm{grad}\Big[\int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} dE + \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} dH \text{ , } \qquad (2.62)$$

unde z este cota punctului în care se calculează $\bar{f}_{v_r}$.

Pentru lichidele care se găsesc în stare statică se poate scrie ecuația de echilibru:

$$\bar{f}_{v_r} = \mathrm{grad}\; p \qquad (2.63)$$

de unde se obține pentru presiunea p din lichid expresia:

$$p = -\rho g z + \rho\Big[\int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} dE + \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} dH\Big] + C, \qquad (2.64)$$

în care C este o constantă de integrare.

Această expresie obținută pentru presiunea în lichidul magnetic demonstrează că presiunea poate fi modificată prin intermediul mărimilor de stare ale cîmpului electromagnetic și că ea mai depinde de proprietățile electrice și magnetice ale lichidului.

In continuare trebuie determinată constanta de integrare C.

Se presupune că lichidul magnetic are o suprafață de separație cu aerul S_{1o} - suprafață liberă - neîncărcată și fără curenți de conducție. Dacă se ia un punct $P_o \in S_{1o}$ de cotă z_o, se neglijează tensiunea superficială, atunci presiunea în acel punct va fi $p_o - f_{s_{1o}}$, unde p_o este presiunea atmosferică iar $f_{s_{1o}}$ se obține înlocuind în relația [43] următoare:

$$\bar{f}_s = \rho_s \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2}{2} + \bar{J}_s \times \frac{\bar{B}_1 + \bar{B}_2}{2} + \frac{1}{2}\Big[\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) D_{1n_1} D_{2n_1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{D_{1n_1}^2}{\varepsilon_1} - \frac{D_{2n_1}^2}{\varepsilon_2}\right) \bar{n}_1' + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 \mu_2} B_{1n_1}^2 \bar{n}_1' + \mathrm{grad}_s\Big[\rho \int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} E\, d_s E +$$

$$+ \rho \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} H\, d_s H - \int_0^H B\, d_s H\Big], \qquad (2.65)$$

pe:

$\rho_s = 0,\ J_s = 0,\ \mu_2 = \mu_0,\ \varepsilon_2 = \varepsilon_0\quad D_{1_n} = D_{2_n}$ şi $H_{1t} = H_{2t}$.

Rezultă:

$$\bar{f}_{s_{10}} = \Big[\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} D^2_{1_{n_1}} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 \mu_0} B^2_{1_{n_1}} + \int_0^{E_{1o}} DdE + \int_0^{H_{1o}} BdH - \int_0^{E_{2o}} DdE -$$

$$- \int_0^{H_{2o}} BdH - \int_0^{E_{1o}} \rho_1 \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \rho_1}\right)_{E,T} EdE - \int_0^{H_{1o}} \rho_1 \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial \rho_1}\right)_{H,T} HdH \Big] \bar{n}_1, \qquad (2.66)$$

în care E_{1o}, H_{1o}, respectiv E_{2o}, H_{2o} sînt valorile intensităţilor de cîmp în punctul P_o, pe faţa dinspre lichid respectiv pe faţa dinspre cer.

Ţinînd seama de relaţiile (2.28) şi de teoremele de continuitate ale componentelor tangente ale vectorilor $\bar{E}$ şi $\bar{H}$, şi ale componentelor normale ale vectorilor $\bar{D}$ şi $\bar{B}$, expresia (2.66) se scrie:

$$\bar{f}_{s_{1o}} = \Big[\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{2\varepsilon_1^2 \varepsilon_0} D^2_{1o_{n_1}} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{2\mu_1^2 \mu_0} B^2_{1o_{n_1}} \Big] \bar{n}_1 + \Big[\int_0^{E_{1o}} PdE -$$

$$- \int_0^{E_{1o}} \rho_1 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho_1}\right)_{E,T} dE + \mu_0 \int_0^{H_{1o}} MdH - \mu_0 \int_0^{H_{1o}} \rho_1 \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_1}\right)_{H,T} dH \Big] \bar{n}_1. \qquad (2.67)$$

Acum se scrie ecuaţia (2.54) în punctul P_o:

$$- \rho_1 g z_o + \rho_1 \int_0^{E_{1o}} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho_1}\right)_{E,T} dE + \mu_o \rho_1 \int_0^{H_{1o}} \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_1}\right)_{H,T} dH + C = p_o - f_{s_{1o}} \qquad (2.68)$$

în care, prin înlocuirea lui $f_{s_{1o}}$ din relaţia (2.67) se obţine constanta C şi ţinînd cont de (2.64) rezultă în final expresia presiunii într-un punct P de cotă z din lichidul magnetic:

$$p = p_o + \rho_1 g (z_o - z) - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2}{2\varepsilon_1^2 \varepsilon_0} D^2_{1o_{n_1}} - \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2}{2\mu_1^2 \mu_0} B^2_{1o_{n_1}} -$$

$$
-\int_0^{E_{10}} P\,dE - \mu_0\int_0^{H_{10}} M\,dH + \int_0^{E} \rho_1\left(\frac{\partial P}{\partial \rho_1}\right)_{E,T} dE + \int_0^{H} \mu_0\rho_1\left(\frac{\partial M}{\partial \rho_1}\right)_{H,T} dH, \quad (2.69)
$$

Ultima relație arată că presiunea suplimentară apărută datorită prezenței cîmpului electromagnetic, numită presiune electromagnetică, în lichide omogene ce au o suprafață liberă, aflate în stări statice, are expresia:

$$
P_{elm} = \int_0^{E} \rho_1\left(\frac{\partial P}{\partial \rho_1}\right)_{E,T} dE + \mu_0\int_0^{H_1} \rho_1\left(\frac{\partial M}{\partial \rho_1}\right)_{H,T} dH - \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)^2}{2\varepsilon_1^2\varepsilon_0} D^2_{10n_1'} -
$$

$$
-\frac{(\mu_1-\mu_0)^2}{2\mu_1^2\mu_0} B^2_{10n_1'} - \int_0^{E_{10}} P\,dE - \mu_0\int_0^{H_{10}} M\,dH. \quad (2.70)
$$

O consecință importantă a presiunii electromagnetice induse de un cîmp electromagnetic într-un fluid este fenomenul de levitație magnetică de primul ordin[33].

Pentru studierea fenomenului se consideră un corp nemagnetic imersat într-un lichid magnetic în care există un cîmp magnetic exterior. Asupra corpului, limitat de suprafața închisă Σ se exercită următoarele forțe:

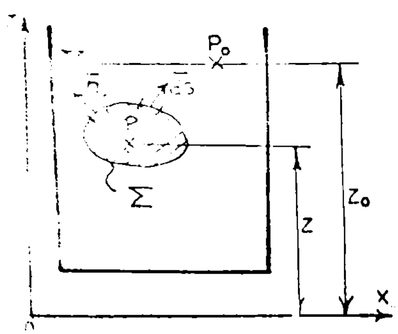


Fig. 2.2.

$\bar{F}_p = -\oint_\Sigma p\,d\bar{S}$, din partea lichidului magnetic,

$\bar{F}_s = \oint_\Sigma \bar{f}_s\,dS$, rezultanta forțelor la suprafața de separație dintre fluid și corp și

$\bar{F}_g = \int_{V_\Sigma} \bar{f}_{gv}\,dv$, rezultanta forțelor gravitaționale distribuite cu densitatea volumică $\bar{f}_{gv} = -\rho_2 g \nabla z$, ρ_2 fiind densitatea corpului.

Asupra corpului se exercită forța resultantă:

$$\bar{F} = \bar{F}_p + \bar{F}_s + \bar{F}_g \qquad (2.71)$$

Expresia presiunii se obține din (2.69) prin particularizare, deoarece în lichidul magnetic există numai cîmp magnetic:

$$p = p_0 + \rho_1 g (z_0 - z) - \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2}{2\mu_1^2 \mu_0} B_{1on}^2 - \mu_0 \int_0^{H_{1o}} M \, dH +$$

$$+ \int_0^H \mu_0 \rho_1 \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_1} \right)_{H,T} dH = p_{om} + \rho_1 g(z_0 - z) +$$

$$+ \int_0^H \mu_0 \rho_1 \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_1} \right)_{H,T} dH, \qquad (2.72)$$

în care p_{om} este o constantă referitoare la punctul P_0, calculată cu valorile vectorilor $\bar{B}_{o1}$ și $\bar{H}_{o1}$ în prezența corpului scufundat.

Dacă se are în vedere relația ultimă forța F_p devine:

$$\bar{F}_p = - p_{om} \oint_\Sigma d\bar{s} - \rho_1 g z_0 \oint_\Sigma d\bar{s} + \oint_\Sigma \rho g z \, d\bar{s} - \oint_\Sigma \Big[\int_0^H \mu_0 \rho_1 \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_1} \right)_{H,T} \Big] d\bar{s} =$$

$$= \int_{V_\Sigma} \rho g \nabla z \, dv - \oint_\Sigma \Big[\int_0^H \mu_0 \rho_1 \left(\frac{\partial M}{\partial \rho_1} \right)_{H,T} \Big] d\bar{s}. \qquad (2.73)$$

Densitatea de suprafață a forțelor exercitate de cîmpul electromagnetic la suprafața de separație se obține prin particularizarea relației (2.65):

$$\bar{F}_e = \left\{ \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_1 \mu_0} B^2_{1n'_1} + \mathrm{grad}_e \left[\delta \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial \delta} \right)_{H,\tau} H \, dH - \int_0^H B \, dH \right] \right\} \bar{n}'_1 =$$

$$= \left[\frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_1 \mu_0} B^2_{1n'_1} - \delta_1 \int_0^{H_1} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial \delta_1} \right)_{H,\tau} H \, dH - \int_0^{H_1} B \, dH + \mu_0 \frac{H_2^2}{2} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{H_1} B \, dH \right] \bar{n}'_1 , \tag{2.74}$$

sau, după cîteva transformări matematice:

$$\bar{F}_e = \left[\frac{\mu_0 H^2}{2} - \frac{\mu_0 H_1^2}{2} - \int_0^{H_1} \mu_0 M \, dH + \int_0^{H_1} \mu_0 \delta_1 \left(\frac{\partial M}{\partial \delta_1} \right)_{H,\tau} dH + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_1 \mu_0} B^2_{1n'_1} \right] \bar{n}'_1 . \tag{2.75}$$

Se obţine deci:

$$\bar{F}_e = \oint_{\Sigma} \left(\mu_0 \frac{H_2^2}{2} - \mu_0 \frac{H_1^2}{2} - \int_0^{H_1} \mu_0 M \, dH \right) d\bar{s} + \oint_{\Sigma} \left[\int_0^{H_1} \mu_0 \delta_1 \left(\frac{\partial M}{\partial \delta_1} \right)_{H,\tau} dH \right] d\bar{s} +$$

$$+ \oint_{\Sigma} \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_1 \mu_0} B^2_{1n'_1} d\bar{s} . \tag{2.76}$$

Forţa rezultantă din egalitatea (2.71), ţinînd seama de (2.73) şi (2.76), de teoremele de continuitate şi de relaţiile:

$$B = \frac{\mu \mu_0}{\mu - \mu_0} M_1 \quad B_n^2 = \frac{\mu^2 \mu_0^2}{(\mu - \mu_0)^2} M_n^2 ; \quad B^2_{n'_1} \cdot \frac{\mu_0 - \mu_1}{2 \mu_1^2 \mu_0} = \frac{M^2_{n'_1}}{2} \mu_0 ,$$

(2.77)

se scrie în forma:

$$\bar{F} = \int_{V_\Sigma} \rho_1 g \nabla z \, dv + \bar{F}_g - \mu_0 \oint_\Sigma \Big[\frac{M_n^2}{2} + \int_0^{H_1} M \, dH\Big] d\bar{s}. \qquad (2.78)$$

Primul termen din (2.78) reprezintă, în modul, greutatea volumului de lichid dezlocuit de corp, care se notează cu F_{gl}.

Condiția de levitație a corpului nemagnetic imersat în lichid magnetic este $\bar{F} = 0$, de unde se obține:

$$\bar{F}_g = \bar{F}_{gl} + \mu_0 \oint_\Sigma \Big[\frac{M_{n_1}^2}{2} + \int_0^{H_1} M \, dH\Big] d\bar{s}. \qquad (2.79)$$

2.3. Calculul forței rezultante pe calea integrării tensiunilor fictive

Calculul forței rezultante care se exercită asupra unui corp imersat într-un lichid - corpul putînd avea sau nu magnetizație sau polarizație permanente și permeabilitatea magnetică μ sau μ_0 respectiv permitivitatea electrică ε sau ε_0 - se poate efectua și pe calea integrării tensiunilor fictive.

In continuare se dă o demonstrație originală, mai generală decît cea cunoscută în literatură [40] și justificată pe altă cale. In acest scop expresia (2.41) a valorii vectoriale a tensorului, egală și de semn schimbat cu valoarea vectorială a tensorului fictiv maxwellian, se poate pune sub o altă formă observînd că pentru lichide paraelectrice, respectiv paramagnetice, sînt valabile relațiile (2.48). Din (2.41) cu (2.48), pentru corpuri în repaos se obține:

$$\bar{t}_f(\bar{n}) = -\bar{t}(\bar{n}) = -\Big[\bar{F}.\bar{E} - \rho \int_0^E \Big(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\Big)_{E,\tau} dE + \bar{H}.\bar{B} - \rho\mu_0 \int_0^H \Big(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\Big)_{H,\tau} dH -$$

$$- \int_{D=0}^{D} \bar{E}.d\bar{D} - \int_{B=0}^{B} H dB\Big]\bar{n} + \bar{E}(\bar{D}.\bar{n}) + \bar{H}(\bar{B}.\bar{n}). \qquad (2.80)$$

Ecuaţia (2.63) scrisă pentru densitatea de volum a forţei exercitată de cîmpul electromagnetic determină, la ϱ = constant, următoarea expresie a presiunii electromagnetice:

$$p_{elm} = \varrho\left[\int_0^E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho}\right)_{E,T} dE + \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial \chi}{\partial \varrho}\right)_{H,T} dH\right] + p_0, \qquad (2.81)$$

unde p_0 este o constantă de integrare.

Fie un corp imersat într-un lichid, cu proprietăţi paraelectrice, respectiv paramagnetice neliniare dar lipsit de histerezis, şi plasat într-un cîmp electromagnetic. Corpul are permitivitatea ε_1 şi permeabilitatea magnetică μ_1 (figura 2.3).

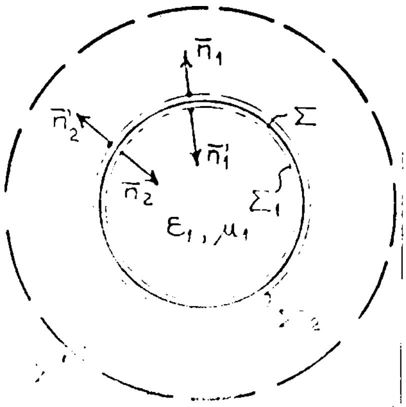


Fig. 2.3.

La suprafaţa de separaţie între corp şi lichid cîmpul exercită forţe repartizate cu densitatea $\bar{f}_{s_{12}}$. Cum proprietăţile de material suferă un salt la trecerea prin suprafaţa închisă Σ, prin raţionamente de limită se ajunge la concluzia că [ ]:

$$\bar{f}_{s_{12}} = \bar{t}_{f_1}(\bar{n}_1') + \bar{t}_{f_2}(\bar{n}_2'), \qquad (2.82)$$

în care $\bar{t}_{f_1}(\bar{n}_1')$, respectiv $\bar{t}_{f_2}(\bar{n}_2')$ reprezintă valorile vectoriale ale tensorului fictiv în puncte situate pe cele două feţe ale suprafeţei Σ, notate în figura 2.3 cu Σ_1 şi Σ_2.

Forţa resultantă care se exercită asupra corpului de către cîmpul electromagnetic este compusă din următorii termeni:

$\int_{V_\Sigma} \bar{f}_{v_{elm}} dv$ - rezultanta forţelor volumice repartizate cu densitatea $\bar{f}_{v_{elm}}$;

$\oint_\Sigma \bar{f}_{s_{12}} ds$ - resultanta forţelor de suprafaţă;

$-\oint_\Sigma p_{elm} d\bar{s}$ - forţa exercitată de lichid asupra corpului;

şi deci:

$$\bar{F} = \int_{v_\Sigma} \bar{f}_{v_{elm}} dv + \oint_\Sigma \bar{f}_{s_{12}} ds - \oint_\Sigma p_{elm} d\bar{s} . \qquad (2.83)$$

Ţinînd seama de (2.82) şi de definiţia tensiunilor fictive în acord cu care $\int_{v_\Sigma} \bar{f}_{v_{elm}} dv = \oint_{\Sigma_1} \bar{t}_{f_1}(\bar{n}_1) ds$, egalitatea (2.83) devine:

$$\bar{F} = \oint_{\Sigma_1 \to \Sigma} \bar{t}_{f_1}(\bar{n}_1) ds + \oint_{\Sigma_1 \to \Sigma} \bar{t}_{f_1}(\bar{n}_1') ds + \oint_{\Sigma_2 \to \Sigma} \bar{t}_{f_2}(\bar{n}_2') ds - \oint_\Sigma p_{elm} d\bar{s} =$$

$$= \oint_{\Sigma_2 \to \Sigma} \bar{t}_{f_2}(\bar{n}_2') ds - \oint_\Sigma p_{elm} d\bar{s}, \qquad (2.84)$$

deoarece $\bar{t}_{f_1}(\bar{n}_1) = - \bar{t}_{f_1}(\bar{n}_1')$, versorii $\bar{n}_1$ şi $\bar{n}_1'$ fiind opuşi ($\bar{n}_1 + \bar{n}_1' = 0$).

Cu relaţiile (2.80) şi (2.82) forţa rezultantă poate fi pusă în forma:

$$\bar{F} = \int_{\Sigma_2 \to \Sigma} \Big[- \bar{E}.\bar{D} + \rho \int_0^E \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} dE + \int_0^D \bar{E}.d\bar{D} - \bar{H}.\bar{B} + \mu_0 \rho \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} dH +$$

$$+ \int_0^B H\, dB \Big] d\bar{s} + \int_{\Sigma_2 \to \Sigma} \left[\bar{E}(\bar{D}.\bar{n}) + \bar{H}(\bar{B}.\bar{n}) \right] ds - \oint_\Sigma \Big[\rho \int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{E,\tau} dE +$$

$$+ \mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{H,\tau} dH \Big] d\bar{s} + \oint_\Sigma p_c d\bar{s}. \qquad (2.85)$$

Cum $\oint_\Sigma p_c d\bar{s} = 0$, $d\bar{s} = ds\, \bar{n}_2' = ds\, \bar{n}$ iar

$\int_0^D E\, dD = \bar{D}.\bar{E} - \int_0^E D\, dE$ şi $\int_0^B H\, dB = \bar{B}.\bar{H} - \int_0^H B\, dH$ se obţine în final:

$$\bar{F} = -\oint_{\Sigma_2\to\Sigma}\left[\int_0^E D\,dE + \int_0^H B\,dH\right]d\bar{s} + \oint_{\Sigma_2\to\Sigma}\left[\bar{E}(\bar{D}.\bar{n}) + \bar{H}(\bar{B}.\bar{n})\right]d\bar{s}. \tag{2.86}$$

Egalitatea (2.86) demonstrează că forţa rezultantă se poate obţine prin integrarea a două tensiuni:
una normală la suprafaţă:

$$\bar{t}_n = \left[-\left(\int_0^E D\,dE + \int_0^H B\,dH\right) + E_nD_n + H_nB_n\right]\bar{n}; \tag{2.87}$$

şi alta tangentă:

$$\bar{t}_t = (E_tD_n\bar{u}_{t_E} + H_tB_n\bar{u}_{t_H}) \tag{2.88}$$

astfel încît:

$$\bar{F} = \oint_{\Sigma_2\to\Sigma}\bar{t}(\bar{n})ds + \oint_{\Sigma_2\to\Sigma}\bar{t}_t ds, \tag{2.89}$$

în care $\bar{u}_{t_E}$ şi $\bar{u}_{t_H}$ sînt versorii tangenţi la suprafaţă, determinaţi de intersecţia între planul tangent la suprafaţă şi planul format de vectorul $\bar{E}$ respectiv $\bar{H}$.

Expresiile (2.84), (2.86) şi (2.89), care toate sînt echivalente, ale forţei rezultante sînt foarte utile întrucît dacă atît corpul cît şi lichidul sînt în stare staţionară, suprafaţa de integrare poate fi aleasă de formă arbitrară însă situată în lichid. In adevăr, dacă lichidul dintre suprafeţele Σ_2 şi Σ' din figura 2.3 este în echilibru static, forţa rezultantă care se exercită asupra lui trebuie să fie nulă. Ca urmare, notînd cu $\bar{n}'$ normala exterioară suprafeţei Σ, se poate scrie:

$$\oint_{\Sigma'}\bar{t}_f(\bar{n}')ds + \oint_{\Sigma_2\to\Sigma}\bar{t}_f(\bar{n}_2)ds - \int_{\Sigma_2\cup\Sigma'} p_{elm}d\bar{s} = \int_{V_{\Sigma_2\cup\Sigma}}\bar{f}_{v_{elm}} = 0, \tag{2.90}$$

şi deci:

$$\oint_{\Sigma'} \bar{t}_f(\bar{n}')ds - \int_{\Sigma'} p\, d\bar{s} = \int_{\Sigma_2} \bar{t}_f(\bar{n}_2')ds - \int_{\Sigma} p_{elm} d\bar{s}, \qquad (2.91)$$

egalitate ce demonstrează afirmaţia făcută.

Dacă există doar cîmp magnetic, tensiunile (2.88) obţin formele particulare:

$$\bar{t}_n = (-\int_0^H B\, dH + H_n B_n)\bar{n}, \qquad (2.92)$$

$$\bar{t}_t = H_t B_n \bar{u}_t, \qquad (2.93)$$

identice cu cele obţinute în [43] prin alte procedee.

2.4. Forţa exercitată de cîmpul magnetic asupra unei sfere nemagnetice imersată într-un lichid magnetic

O importantă aplicaţie a lichidelor magnetice o constituie separatoarele magnetice [48 - 55]. La baza principiului lor de funcţionare stau forţele exercitate de cîmpul magnetic asupra unor corpuri nemagnetice, imersate în lichid magnetic.

R.A. Curtis a studiat [16] forţa care se exercită asupra unor corpuri de dimensiuni mici (cilindru, disc şi sferă de raze mici) utilizînd următoarea expresie a "forţei de plutire magnetice": $F_m = -\mu_0 VM\nabla H$ (volumul corpului fiind V). Autorul a lucrat în ipoteza că lichidul magnetic este la saturaţie, $M = M_0$ = ct., M variază liniar în raport cu H şi corpul fiind de dimensiuni foarte mici nu modifică cîmpul în lichid.

In continuare se va studia forţa care se exercită asupra unei sfere nemagnetice de dimensiuni arbitrare imersată în lichid magnetic, ansamblul fiind plasat între poli de configuraţie hiperbolică sau exponenţială. Se porneşte de la relaţia (2.78), în care forţa de natură magnetică are expresia:

$$\bar{F}_m = -\mu_0 \oint_{\Sigma} \left[\frac{M_A^2}{2} + \int_0^H M\, dH\right] d\bar{s}, \qquad (2.78')$$

în care integrala se referă la suprafața Σ a corpului nemagnetic, vectorul de magnetizație $\bar{M}$ și intensitate a cîmpului magnetic $\bar{H}$ fiind considerați în puncte din lichidul magnetic, iar M_n reprezintă componenta normală a vectorului $\bar{M}$ la suprafața Σ .

Relația (2.78') se dezvoltă în continuare pentru poli avînd profile utilizate în construcția magnetoseparatoarelor [47], presupunînd că se lucrează fie pe porțiunea liniară a curbei de magnetizare a lichidului magnetic, fie pe porțiunea sa saturată.

Calculele se efectuează pentru cazul corpurilor nemagnetice de formă sferică, avînd raza a, introduse în lichid magnetic.

Dacă se notează cu V_H potențialul scalar al cîmpului magnetic în lipsa sferei, cu V_{H_i} valoarea acestuia în domeniul sferei și cu V_{H_e} în exteriorul ei, folosind un sistem de coordonate sferic cu originea în centrul sferei de rază a, se poate scrie:

$$V_H = f(\rho, \theta, \varphi) \qquad (2.94)$$

Pentru determinarea funcțiilor V_{H_e} și V_{H_i} se încearcă soluții de forma:

$$\begin{aligned} V_{H_e} &= f(\rho, \theta, \varphi) - A \cdot \frac{a}{\rho} \cdot f\left(\frac{a^2}{\rho}, \theta, \varphi\right) \\ V_{H_i} &= (1 - A)\, f(\rho, \theta, \varphi) \end{aligned} \qquad (2.95)$$

In continuare se demonstrează că funcțiile (2.95) satisfac ecuația lui Laplace. Deoarece (2.94) este o soluție a ecuației lui Laplace, rezultă:

$$\Delta V_H = \Delta f(\rho, \theta, \varphi) = 0$$

Pentru prima expresie din (2.95) avem:

$$\Delta V_{H_2} = \Delta f - A\Delta\left[\frac{a}{\rho} f\left(\frac{a^2}{\rho}, \theta, \varphi\right)\right] = -A\Delta\left[\frac{a}{\rho} f\left(\frac{a^2}{\rho}, \theta, \varphi\right)\right] \qquad (2.96)$$

Se fac următoarele notații: $u = a^2/\rho$ și $\Delta\left[\frac{u}{a} f(u, \theta, \varphi)\right] = \Delta F$ și se calculează un termen al laplaceanului:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial F}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u}{a} f\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\left(-\frac{1}{a}\cdot\frac{a^2}{\rho^2} f - \frac{u}{a}\cdot\frac{a^2}{\rho^2} f_u'\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(-af - uaf'\right)\right] = \frac{1}{\rho^2}\left[-af_u'\left(-\frac{a^2}{\rho^2}\right) + a f_u' \frac{a^2}{\rho^2} + uaf_u'' \frac{a^2}{\rho^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{a^3}{\rho^2} f_u' + \frac{a^2}{\rho^2} f_u' + uaf_u'' \frac{a^2}{\rho^2}\right] = \frac{a^3}{\rho^4}\left(2 f_u' + u f_u''\right) =$$

$$= \frac{a^3}{\rho^4}\cdot\frac{a^2}{\rho}\left(\frac{2}{u} f_u' + f_u''\right) = \frac{a^5}{\rho^5}\cdot\frac{1}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u}\right) =$$

$$= a^{-5}\, u^3 \frac{\partial}{\partial u}\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u}\right). \qquad (2.97)$$

Deci:

$$\Delta F = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial F}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) =$$

$$= \frac{u^3}{a^5}\frac{\partial}{\partial u}\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{u^2 \cdot \frac{u}{a}}{a^4 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{u^2 \cdot \frac{u}{a}}{a^4 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) =$$

$$= \frac{u^5}{a^5}\left[\frac{1}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{1}{u^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{u^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right] = 0$$

(2.98)

Constanta A se determină din condițiile de frontieră.
Condiția: $(V_{H_i})_{\rho=a} = (V_{H_e})_{\rho=a}$ este automat satisfăcută:

$$(1 - A)\, f(a,\theta,\varphi) = f(a,\theta,\varphi) - A\, f(a,\theta,\varphi), \qquad (2.99)$$

A doua condiție de frontieră:

$$\mu_i\left(\frac{\partial V_{H_i}}{\partial \rho}\right)_{\rho = a} = \mu_e\left(\frac{\partial V_{H_e}}{\partial \rho}\right)_{\rho = a} \qquad (2.100)$$

conduce la:

$$\mu_i(1 - A)\, f_\varrho'(a,\vartheta,\varphi) = \mu_e[f_\varrho'(a,\vartheta,\varphi) - A\,(-\frac{a}{a^2}\, f(a,\vartheta,\varphi) -$$

$$- f_u'(a,\vartheta,\varphi)]. \qquad (2.100')$$

Deoarece $f_\varrho'(a,\vartheta,\varphi) = f_u'(a,\vartheta,\varphi)$, rezultă:

$$A = \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e\left[1 + \frac{f(a,\vartheta,\varphi)}{a f_\varrho'(a,\vartheta,\varphi)}\right]}. \qquad (2.101)$$

Pentru ca încercările de soluţie (2.95) să reprezinte soluţia problemei trebuie ca membrul drept al relaţiei (2.101) să fie constant. Condiţia este realizată pentru acele cîmpuri exterioare care satisfac egalitatea:

$$V_H = f(\varrho,\vartheta,\varphi) = \psi_1(\varrho)\,\psi_2(\vartheta,\varphi). \qquad (2.102)$$

Această condiţie este îndeplinită de o gamă largă de cîmpuri.

Se presupune, în continuare, că potenţialul scalar al cîmpului magnetic din separator satisface egalitatea (2.102).

Atunci se poate scrie:

$$\bar{H}_e = -\nabla V_{H_e} = \bar{H} + A\ \mathrm{grad}\left[\frac{a}{\varrho}\, V_H\left(\frac{a^2}{\varrho},\vartheta,\varphi\right)\right] \qquad (2.103)$$

şi

$$\bar{H}_i = (1 - A)\bar{H}. \qquad (2.104)$$

Se iau în considerare în cele ce urmează două ipoteze:

a) se lucrează pe porţiunea liniară a lichidului magnetic;

b) se lucrează pe porţiunea saturată a a acestuia.

a) Dacă se lucrează pe porţiunea liniară a curbei de magnetizare $\bar{M} = \bar{M}(H)$ a lichidului magnetic, atunci $\bar{M}_e = x_m \bar{H}_e$, unde susceptivitatea magnetică x_m este o mărime constantă şi egalitatea (2.78') se poate scrie în forma:

$$\bar{F}_m = -\mu_0 \oint_{\Sigma} \left[\frac{x_m^2}{2} H_{en}^2 + \frac{x_m}{2} H_e^2 \right] d\bar{s} =$$

$$= -\mu_0 \oint_{\Sigma} \left[\frac{x_m(1+x_m)}{2} H_{en}^2 + \frac{x_m}{2} H_{ep}^2 \right] d\bar{s} \qquad (2.105)$$

unde prin H_{ep} s-a notat componenta tangentă a vectorului $\bar{H}_e$ la suprafaţa Σ.

Tinînd seama de teorema de continuitate a componentelor normale ale vectorului inducţie magnetică $\bar{B}$, $\mu H_{en} = \mu_0 H_{in}$, rezultă: $\bar{H}_{en} = \frac{1}{1+x_m} H_{in}$ şi deci relaţia (2.105) devine:

$$\bar{F}_m = -\mu_0 \frac{x_m}{2(1+x_m)} \oint_{\Sigma} H_{in}^2 \, d\bar{s} - \mu_0 \frac{x_m}{2} \oint_{\Sigma} H_{ip}^2 \, d\bar{s}. \qquad (2.106)$$

Dacă se consideră un cîmp magnetic care în lipsa sferei satisface condiţia (2.102), atunci cu (2.103), egalitatea (2.106) ia forma:

$$\bar{F}_m = -\mu_0 \frac{x_m}{2(1+x_m)} (1-A)^2 \oint_{\Sigma} H_n^2 \, d\bar{s} - \mu_0 \frac{x_m}{2} (1-A)^2 \oint_{\Sigma} H_p^2 d\bar{s} =$$

$$= -\mu_0 \frac{x_m}{1+x_m} (1-A)^2 \int_{v_\Sigma} H_n \, \text{grad}\, H_n dv - \mu_0 x_m (1-A)^2 \int_{v_\Sigma} H_p \text{grad} H_p dv, \qquad (2.107)$$

în care s-a folosit transformarea lui Gauss-Ostrogradski referitoare la gradient.

Cum $H^2 = H_n^2 + H_p^2$ şi deci H_p grad H_p = H grad H - $H_n$grad H_n, egalitatea anterioară se scrie şi în forma:

$$\bar{F}_m = -\mu_0 x_m (1-A)^2 \int_{v_\Sigma} H \, \text{grad}\, H + \frac{\mu_0 x_m^2 (1-A)^2}{1+x_m} \int_{v_\Sigma} H_n \text{grad}\, H_n \, dv. \qquad (2.108)$$

Cîmpul magnetic din separatoarele magnetice fiind plan-paralel, se consideră sfera cu centrul în planul xoy, fig. 2.4, de coordonate $(x_1, y_1, 0)$.

Versorul normalei la suprafața sferei, $\bar{u}_\varsigma$, se calculează din:

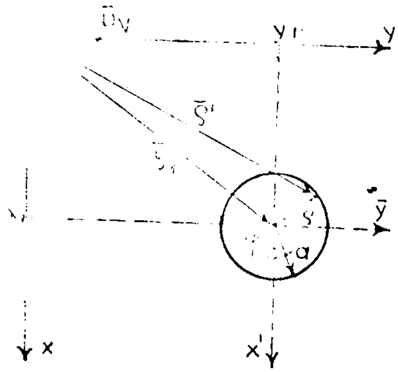


Fig. 2.4.

$$\bar{u}_\varsigma = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$$

în care:

$$f = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2$$

adică

$$\bar{u}_\varsigma = \frac{1}{a}\left[(x-x_1)\bar{u}_x + (y-y_1)\bar{u}_y + z\bar{u}_z\right].$$

Componenta normală a intensității cîmpului magnetic se scrie sub forma:

$$H_n = H_\varsigma = \bar{H}\cdot\bar{u}_\varsigma = H_x\frac{x-x_1}{a} + H_y\frac{y-y_1}{a}. \qquad (2.109)$$

Fie un cîmp magnetic plan paralel dintre doi poli magnetici avînd configurația geometrică - în planul xoy din figura 2.5 - în forma a două hiperbole raportate la bisectoare. Potențialul scalar al cîmpului magnetic are ecuația:

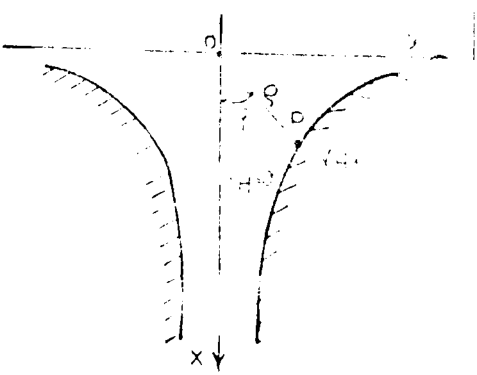


Fig. 2.5.

$$V_H = Kxy = K\varsigma'^2\cos\varphi\sin\varphi = f(\varsigma',\vartheta,\varphi),$$

adică el satisface condiția (2.102) avînd $\Psi_1 = K\varsigma'^2$ și $\Psi_2 = \sin\varphi\cos\varphi$.

Pentru constanta A rezultă o valoare ce se deduce din relația (   ):

$$\frac{f(a,\vartheta,\varphi)}{af'_{\varsigma'}(a,\vartheta,\varphi)} = \frac{Ka^2\sin\varphi\cos\varphi}{2a^2K\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{1}{2},$$

deci $A = \dfrac{2(\mu_0-\mu)}{2\mu_0+3\mu}$ iar

$$1 - A = \frac{5\mu}{3\mu+2\mu_0} = \frac{5}{3}\,\frac{x_m+5}{x_m+5}. \qquad (2.110)$$

Vectorul intensitate a câmpului magnetic are forma
$\overline{H} = -\nabla V_H = -Ky\overline{u}_x - Kx\overline{u}_y$ şi modulul $H = K(x^2 + y^2)^{1/2} = K\varsigma'$
iar gradientul său are valoarea $\nabla H = K\frac{\overline{\varsigma}'}{\varsigma'} = K\,\overline{u}_{\varsigma'}$.

Integrala din primul termen al egalităţii (2.108) se calculează cum urmează:

$$\int_{V_\Sigma} H \operatorname{grad} H \, dv = K^2\int_{V_\Sigma}\overline{\varsigma}' dv = K^2\int_{V_\Sigma}(\overline{\varsigma}'_1+\overline{\varsigma})dv = K^2\overline{\varsigma}'_1 v_S + K^2\int_{V_\Sigma}\overline{\varsigma}\, dv =$$

$$= K^2\overline{\varsigma}'_1 v_S + K^2\int_{V_\Sigma}\nabla\frac{\varsigma^2}{2}\, dv = K^2(\overline{\varsigma}'_1 v_S + \frac{\varsigma^2}{2}\oint_\Sigma d\overline{s}) = K^2 v_S\,\overline{\varsigma}'_1 \qquad (2.111)$$

deoarece $\oint_\Sigma d\overline{s} = 0$. In relaţia (2.111) $\overline{\varsigma}'_1$ reprezintă vectorul de poziţie al centrului sferei (fig. 2.4) iar v_s volumul său.

Integrala din cel de-al doilea termen al forţei de natură magnetică, relaţia (2.108), se poate scrie în forma:

$$\int_{V_\Sigma} H_n \operatorname{grad} H_n \, dv = \frac{1}{2}\int_{V_\Sigma}\operatorname{grad} H_n^2 \, dv = \frac{1}{2}\oint_\Sigma H_n^2\, d\overline{s} = \frac{1}{2}\oint_\Sigma H_\varsigma^2\, d\overline{s}, \qquad (2.112)$$

Dacă se utilizează sistemul de referinţă $x'o'y'$, cu originea în centrul sferei şi cu axele paralele cu cele ale sistemului xoy - fig.2.4 - se obţin pentru componentele vectorului intensitate a câmpului magnetic $\overline{H}$ pe suprafaţa sferei expresiile:

$$\begin{aligned} H_x &= -Ky = -K(y' + y_1) = -K(y_1 + a\sin\varphi) \\ H_y &= -Kx = -K(x' + x_1) = -K(x_1 + a\cos\varphi) \end{aligned} \qquad (2.113)$$

iar versorul normalei la sferă devine:

$$\overline{u}_\varsigma = \sin\theta\sin\varphi\,\overline{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\overline{u}_y + \cos\theta\,\overline{u}_z$$

Din relaţia (2.109) se deduce:

$$H_\varsigma = -K(y_1 + a\sin\varphi)\cos\varphi - K(x_1 + a\cos\varphi)\sin\varphi$$

şi deci

$$I = \oint_{\Sigma} H_{\xi}^{2}\bar{u}_{\xi}\, d\bar{s} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} K^{2}a^{2}[(y_1 + a\sin\varphi)\cos\varphi + (x_1 +$$

$$+ a\cos\varphi)\sin\varphi]^{2}\cdot(\cos\varphi\sin\theta\bar{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\bar{u}_y + \cos\theta\bar{u}_z)\sin\theta d\varphi d\theta. \tag{2.114}$$

Componentele vectorului $\bar{I}$ sînt:

$$I_z = K^{2}a^{2}\int_{0}^{2\pi} f(\varphi)d\varphi\int_{0}^{\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta = 0\ , \tag{2.115}$$

De șters.

$$I_x = K^{2}a^{2}\int_{0}^{2\pi}[(y_1 + a\sin\varphi)\cos\varphi + (x_1 + \cancel{a\cos\varphi)\sin\varphi]^{2}}$$

$$+ a\cos\varphi)\sin\varphi]^{2}\cos\varphi d\varphi\int_{0}^{\pi}\sin^{2}\theta d\theta =$$

$$= K^{2}a^{2}\frac{\pi}{2}\int_{0}^{2\pi}(y_1\cos\varphi_1 + x_1\sin\varphi + a\sin 2\varphi)^{2}\cos\varphi d\varphi =$$

$$= K^{2}a^{3}\frac{\pi^{2}}{2}x_1\ , \tag{2.116}$$

$$I_y = K^{2}a^{2}\int_{0}^{2\pi}[(y_1 + a\sin\varphi)\cos\varphi + (x_1 + \cancel{a\cos\varphi)\sin\varphi]^{2}}\sin\varphi$$

$$+ a\cos\varphi)\sin\varphi]^{2}\sin\varphi d\varphi\int_{0}^{\pi}\sin^{2}\theta d\theta = K^{2}a^{2}\frac{\pi}{2}\int_{0}^{2\pi}(y_1\cos\varphi +$$

$$+ x_1\sin\varphi + a\sin 2\varphi)^{2}\sin\varphi d\varphi = K^{2}a^{3}\frac{\pi^{2}}{2}y_1 \tag{2.117}$$

Rezultă:

$$\bar{I} = K^2 a^3 \frac{\pi^2}{2}\left(x_1\bar{u}_x + y_1\bar{u}_y\right) = K^2 a^3 \frac{\pi^2}{2}\bar{\rho}_1' \qquad (2.118)$$

Cu relațiile (2.111), (2.112) și (2.114) forța magnetică din expresia (2.108) ia forma:

$$\bar{F}_m = -\mu_0 x_m (1-A)^2 K^2 v_s \bar{\rho}_1' + \mu_0 \frac{x_m^2(1-A)^2}{2(1+x_m)}\cdot\frac{3\pi}{8}K^2 v_s \bar{\rho}_1' \qquad (2.119)$$

și folosind expresia (2.110) pentru factorul (1-A), se obține:

$$\bar{F}_m = -\mu_0 K^2 \frac{x_m[(16-3\pi)x_m + 16]}{16(1+x_m)}\cdot\left(\frac{5x_m+5}{3x_m+5}\right)^2 v_s \bar{\rho}_1' \qquad (2.120)$$

Asupra sferei nemagnetice imersate în lichidul magnetic se mai exercită forța gravitațională $\bar{F}_g = \rho_s v_s \bar{g}$; ρ_s, respectiv $\bar{g}$, fiind densitatea sferei, respectiv accelerația gravitațională - și forța lui Arhimede $\bar{F}_l = -\rho_l v_s \bar{g}$, în care ρ_l reprezintă densitatea lichidului magnetic.

Ca urmare, forța rezultantă ce acționează asupra sferei poate fi scrisă în forma:

$$\bar{F} = \bar{F}_g + \bar{F}_l + \bar{F}_m = v_s g\left\{\rho_s - \rho_l - \frac{\mu_0 K^2 x_m[(16-3\pi)x_m+16]}{16(1+x_m)g}\cdot\left(\frac{5x_m+5}{3x_m+5}\right)^2 x_1\right\}\bar{u}_x -$$

$$- \frac{\mu_0 K^2 x_m[(16-3\pi)x_m + 16]}{16(1+x_m)}\left(\frac{5x_m+5}{3x_m+5}\right)^2 v_s y_1 \bar{u}_y, \qquad (2.121)$$

ceea ce demonstrează că densitatea aparentă a lichidului magnetic are expresia:

$$\rho_{al} = \rho_l + \frac{\mu_0 K^2 x_m[(16-3\pi)x_m + 16]}{16(1+x_m)g}\left(\frac{5x_m+5}{3x_m+5}\right)^2 x_1 \qquad (2.122)$$

b) Se presupune în continuare că se lucrează pe porțiunea saturată a curbei de magnetizare unde $\bar{M} = \bar{M}(H)$ este de forma:

$$\bar{M} = \bar{M}_0\left(1 - \frac{C}{H}\right), \qquad (2.123)$$

în care M_0 reprezintă magnetizaţia de saturaţie iar constanta $C = KT/\mu_0 m$ poate fi determinată pe cale experimentală trasînd curba $M = f(1/H)$ (fig. 2.6). Din grafic se citeşte M_0 şi $1/H$. Pentru punctul A, $C = H_s = K_s \varsigma'$ $(K > K_s)$.

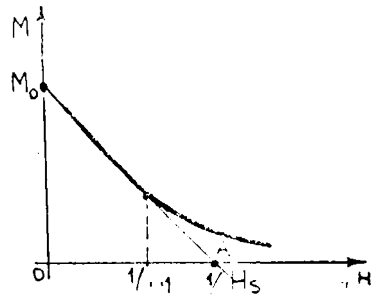


Fig. 2.6.

Funcţia M fiind discontinuă, integrala $\int_0^H MdH$ se descompune după cum urmează:

$$\int_0^H MdH = \int_0^{H_s} MdH + \int_{H_s}^{H} MdH = \int_0^{H_s} MdH + $$

$$+ M_0(H-H_s) - M_0 C \ln \frac{H}{H_s} . \qquad (2.124)$$

Forţa magnetică ce se exercită asupra sferei de rază a este:

$$\bar{F}_m = -\frac{\mu_0}{2}\oint_\Sigma M_n^2 d\bar{s} - \mu_0 \oint_\Sigma \left[\int_0^H M\, dH\right] d\bar{s} = -\frac{\mu_0}{2}\oint_\Sigma M_n^2\, d\bar{s} - \mu_0 M \oint_\Sigma H\, d\bar{s} +$$

$$+\mu_0 M_0 C \oint_\Sigma \ln \frac{H}{H_s}\, d\bar{s} = \bar{F}_m'' + \bar{F}_{m_1} + \bar{F}_{m_2} \qquad (2.125)$$

în care componentele $\bar{F}_m''$, $\bar{F}_{m_1}$ şi $\bar{F}_{m_2}$ urmează a se calcula separat.

In acest scop se descompune funcţia $H = H(x, y)$ în jurul centrului sferei de coordonate (x_1, y_1). Deoarece raza sferei a este mică, se iau în considerare numai primii termeni ai seriei. Pe suprafaţa sferei (fig. 2.4) se poate scrie:

$$H = K\varsigma' \cong K\left(\varsigma_1' + \frac{x - x_1}{1!} \cdot \frac{x_1}{\varsigma_1'} + \frac{y - y_1}{1!}\,\frac{y_1}{\varsigma_1'}\right) =$$

$$= K\left(\varsigma_1' + \frac{x_1 a \cos\varphi}{\varsigma_1'} + \frac{y_1 a \sin\varphi}{\varsigma_1'}\right). \qquad (2.126)$$

Se calculează separat integrala I_1:

$$\bar{I}_1 = \oint_{\Sigma} H\, d\bar{s} = a^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} K\left[\rho_1' + \frac{x_1 a \cos\varphi}{\rho_1'} + \frac{y_1 a \sin\varphi}{\rho_1'}\right]\bar{u}_{\rho} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi . \qquad (2.127)$$

Se ţine cont că $\bar{u}_{\rho} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\bar{u}_x + \sin\vartheta\sin\varphi\,\bar{u}_y + \cos\vartheta\,\bar{u}_z$ şi rezultă succesiv:

$$I_{1x} = a^2 \frac{K x_1 a}{\rho_1'} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\cos^2\varphi\, d\vartheta\, d\varphi + \frac{a^2 K y_1 a}{\rho_1'} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= K \frac{\pi^2 a^3}{2\rho_1'} x_1 . \qquad (2.128)$$

Similar rezultă: $I_{1y} = K \frac{\pi^2 a^3}{2\rho_1'} y_1 , \quad I_{1z} = 0 . \qquad (2.129)$

Integrala $\bar{I}_1$ ia forma:

$$\bar{I}_1 = K \frac{\pi^2 a^3}{2} (x_1 \bar{u}_x + y_1 \bar{u}_y) = \frac{\pi^2 a^3}{2} \nabla H_1$$

şi componenta $\bar{F}_{m_1}$ a forţei devine:

$$\bar{F}_{m_1} = -\mu_0 M_0 \bar{I}_1 = -\mu_0 M \frac{\pi^2 a^3}{2} \nabla H_1 = -\frac{3}{8}\pi v_s \mu_0 M_0 \nabla H_1 \qquad (2.130)$$

în care $v_s = 4\pi a^3/3$ reprezintă volumul sferei.

Se notează în continuare $\bar{I}_2 = \oint_{\Sigma} \ln\frac{H}{H_s} d\bar{s}$ şi se dezvoltă funcţia $\ln\frac{H}{H_s}$ în jurul centrului sferei:

$$\ln\frac{H}{H_s} = \ln\frac{K\rho'}{H_s} = \ln\frac{K}{H_s} + \ln\rho' \cong \ln\frac{K}{H_s} + \rho_1' + \frac{x - x_1}{1!}\cdot\frac{x_1}{\rho_1'^2} +$$

$$+ \frac{y - y_1}{2!}\cdot\frac{y_1}{\rho_1'^2} ,$$

$$\bar{I}_2 = \oint_{\Sigma} \ln\frac{K\rho'}{H_s} d\bar{s} + a^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x_1 a\cos\varphi}{\rho_1'^2} + \frac{y_1 a \sin\varphi}{\rho_1'^2}\right)\sin\varphi\, \bar{u}_{\rho}\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{x_1 a^3}{\varrho_1'^2}\pi\mu\frac{\pi}{2}\bar{u}_x + \frac{y_1 a^3}{\varrho_1'^2}\frac{\pi}{2}\pi\mu\,\bar{u}_y = \frac{\pi^2 a^3}{2\varrho_1'}\nabla H_1 . \qquad (2.131)$$

Forța $\bar{F}_{m_2}$ ia forma:

$$\bar{F}_{m_2} = \mu_o M_o C\bar{I}_2 = \frac{3\pi v_s}{8H_1}\mu_o M\nabla H_1 = \frac{3\pi v_s}{8}\mu_o(M_o - M_1)\nabla H_1 \qquad (2.132)$$

unde s-a ținut cont de relația (2.123) și s-a scos în evidență volumul sferei.

Deci:

$$F_m' = \bar{F}_{m_1} + \bar{F}_{m_2} = -\frac{3\pi v_s}{8}\mu_o M_1\nabla H_1 . \qquad (2.133)$$

Se calculează în continuare primul termen $\bar{F}_m''$ ținîndu-se seama de relația (2.123):

$$\bar{F}_m'' = -\frac{\mu_o}{2}\oint_\Sigma M_n^2 d\bar{s} = -\frac{\mu_o}{2}\oint_\Sigma\left[(\bar{M}_o\cdot\bar{u}_\varrho)(1-\frac{C}{H})\right]^2 d\bar{s} =$$

$$= -\frac{\mu_o M_o^2}{2}\oint_\Sigma\left[(\frac{\bar{H}}{H}\cdot\bar{u}_\varrho)(1-\frac{C}{H})\right]^2 d\bar{s} =$$

$$= -\frac{\mu_o M_o^2}{2}\oint_\Sigma\left(\frac{y\sin\vartheta\cos\varphi + x\sin\vartheta\sin\varphi}{\varrho'}\right)^2\cdot\left(1-\frac{C}{K\varrho'}\right)^2 d\bar{s} =$$

$$= -\frac{\mu_o M_o^2}{2}\oint_\Sigma(y\sin\vartheta\cos\varphi + x\sin\vartheta\sin\varphi)^2\left(\frac{1}{\varrho'}-\frac{C}{K\varrho'^2}\right)^2 d\bar{s} . \qquad (2.134)$$

Se dezvoltă în serie funcția $f(\varrho')$ de sub integrală și se rețin primii termeni:

$$f(\varrho') = \left(\frac{1}{\varrho'}-\frac{C}{K\varrho'^2}\right)^2 \cong f(\varrho_1') + \frac{x-x_1}{1!}\frac{\partial f}{\partial\varrho_1'}\frac{x_1}{\varrho'}\bigg|_{\varrho'=\varrho_1'} + \frac{y-y_1}{1!}\frac{\partial f}{\partial\varrho'}\frac{y_1}{\varrho'}\bigg|_{\varrho'=\varrho_1'}$$

$$f(\varrho') \cong f(\varrho_1') + (ax_1\cos\varphi + ay_1\sin\varphi)\cdot\frac{1}{\varrho_1'}\frac{\partial f}{\partial\varrho'}\bigg|_{\varrho'=\varrho_1'} \qquad (2.135)$$

Se obține în final, cu $\left.\frac{\partial f}{\partial \rho'}\right|_{\rho'=\rho_1} = -\frac{2}{\rho_1^{13}}\left(1 - \frac{C}{K\rho_1}\right)^3$, expresia:

$$f(\rho') = \frac{1}{\rho^{12}}\left(1 - \frac{C}{K\rho_1}\right)^2 - (x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi)\frac{2a}{\rho_1^{14}}\left(1 - \frac{C}{K\rho_1}\right)^3. \quad (2.136)$$

Si deci forța $\bar{F}_m''$ devine:

$$\bar{F}_m'' = -\frac{\mu_0 M_0^2}{2}\cdot\frac{1}{\rho_1^{12}}\left(1 - \frac{C}{K\rho_1}\right)^2 \oint_\Sigma (y\sin\theta\cos\varphi + x\sin\theta\sin\varphi)\Big[1 -$$

$$- (x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi)\frac{2a}{\rho_1^{12}}\left(1 - \frac{C}{K\rho_1}\right)\Big]^2 d\bar{s}. \quad (2.137)$$

Integrala din relația (2.137) se descompune după cele trei axe și după calcule rezultă relația:

$$\bar{F}_m'' = \frac{9\pi}{128} v_s\mu_0 \frac{M_1^3}{M_0}\frac{K^2}{H_1^2}\left(\bar{\rho}_1' + \frac{2}{H_1^2}\nabla H_1^2\right) \quad (2.138)$$

unde M_1 este valoarea corespunzătoare lui $1/H_1$ din figura 2.6.

Forța rezultantă care acționează asupra sferei nemagnetice, imersate în lichidul magnetic, cînd se lucrează pe porțiunea saturată a curbei de magnetizare, este:

$$\bar{F} = \bar{F}_a + \bar{F}_g + \bar{F}_m' + \bar{F}_m'' =$$

$$= -\rho_l v_s g\bar{u}_x + \rho_c v_s g\bar{u}_x - \frac{3}{8}\pi v_s\mu_0 M_1\nabla H_1 +$$

$$+ \frac{9\pi}{128} v_s\mu_0 \frac{M_1^3}{M_0}\frac{K^2}{H_1^2}\left(\bar{\rho}_1' + \frac{2\nabla V_{H_1}^2}{H_1^2}\right) \quad (2.139)$$

Dacă se ține seama de componentele gradientului cîmpului magnetic și se face aproximarea $(\nabla V_{H_1}^2/H_1^2) = 0$, forța rezultantă ia forma:

$$\bar{F} = v_s\left\{g\left[(\rho_c - \rho_\ell) + \frac{3\pi\mu_0 M_1 K x_1}{8g}\left(\frac{M_1^2 K}{M_0 H_1^2} - \frac{1}{\rho_1^2}\right)\right]\bar{u}_x + \right.$$

$$\left. + \frac{3\pi\mu_0 M_1 K}{8}\left(\frac{M_1^2 K}{M_0 H_1^2} - \frac{1}{\rho_1'}\right)\bar{u}_y\right\} \qquad (2.140)$$

De aici rezultă că densitatea aparentă a lichidului magnetic are expresia:

$$\rho_{a\ell} = \rho_\ell + \frac{3\pi\mu_0 M_1 K}{8g}\left(\frac{1}{\rho_1'} - \frac{M_1^2 K}{M_0 H_1^2}\right)x_1 \qquad (2.141)$$

Cap. 3. CIMPURI MAGNETICE FOLOSITE LA SEPARATOARE

Separarea particulelor nemagnetice, avînd densităţi diferite, cu ajutorul separatoarelor magnetofluidice a devenit în scurt timp, aşa cum arată rezultatele cercetărilor întreprinse în ultimii ani în numeroase ţări cu industrie avansată [47, 48, 49, 50], o metodă deosebit de promiţătoare.

Separatoarele cu fluid magnetic se bazează pe posibilitatea de modificare în limite largi a forţei de levitaţie magnetofluidică de ordinul I (2.79), atît prin magnetizaţia de saturaţie a lichidului, cît şi prin intensitatea şi gradientul cîmpului magnetic dintre piesele polare. Pornind de la acest principiu, începînd din anul 1969, au fost propuse şi realizate mai multe tipuri constructive de separatoare de acest fel, care pot fi grupate după modelul de funcţionare (de flux continuu sau secvenţial), forma pieselor polare, respectiv a celulei de separare, numărul de perechi de piese polare, respectiv de straturi magnetofluidice, numărul de fracţiuni separate la o singură trecere a amestecului, starea de mişcare a fluidului magnetic etc. Astfel de exemplu există separatorul tip Kaiser cu levitare diferenţială sau cu levitare secvenţială, modelul Rosensweig cu antrenare mecanică a amestecului pe orizontală, separatorul în flux continuu tip Rosensweig cu întrefier tip pană divergentă şi cu stratul magnetofluidic înclinat faţă de orizontală, separatorul cu mai multe straturi magnetofluidice cu sortare pe verticală, separatorul tip Reimers - Khalafalla cu deviere laterală şi funcţionare în flux continuu.

In cazul acestor modele, descrise detaliat în [51, 52], în timpul cît se realizează separarea granulelor amestecului după densităţi, fluidul magnetic este menţinut în celula de separare de cîmpul magnetic creat de un electromagnet sau un magnet permanent.

Există şi o serie de modele în care amestecul este transportat de lichidul de lucru, într-un canal de separare. Deoarece durata acţiunii forţei de levitaţie condiţionează eficienţa separării, lungimea canalului devine un parametru geometric important. O mărire a lungimii canalului permite trecerea lichidului cu o viteză mai ridicată prin separator, idee care a fost valorificată în cadrul unui model realizat la C.F.T. Iaşi [51, 52, 53], prevăzut cu canal de lucru introdus în întrefierul toroidal al unui electromagnet în coroană.

Separarea poate fi îmbunătăţită prin acţiunea simultană a forţei de levitaţie magnetofluidică cu forţa centrifugă în instalaţii centrifugale [54].

Dacă se urmăreşte o separare eficientă a unui amestec cu două componente cu densităţi apropiate, geometria polilor, respectiv distribuţia cîmpului din zona activă a întrefierului trebuie să asigure o densitate aparentă cît mai uniformă a stratului magnetofluidic. Această condiţie se poate realiza în separatoarele cu piese polare cu profil hiperbolic [48, 49, 50, 19].

Separatoarele magnetofluidice cu piese polare cu profil exponenţial prezintă avantajul că în regiunea activă gradientul intensităţii cîmpului magnetic este unidirecţional.

In prezentul capitol autorul a studiat cîmpul magnetic în cazul separatoarelor (ideale) cu poli infiniţi şi (reale) cu poli finiţi, profilul polilor fiind hiperbolic şi exponenţial. Se demonstrează că un cîmp magnetic al cărui gradient să fie constant şi să aibă o orientare unidirecţională nu există. S-a stabilit o configuraţie de poli la care gradientul intensităţii cîmpului magnetic este unidirecţional dar variază exponenţial în modul.

Pentru studiul cîmpului în cazul polilor cu profil finit au fost realizate două modele pe hîrtie electroconductoare.

S-au conceput programe pentru calculul potențialului magnetic, al modulului intensității cîmpului magnetic și al modulului gradientului intensității cîmpului magnetic, în orice punct al spațiului dintre polii unui separator, utilizînd metoda diferențelor finite.

S-au calculat traiectoriile particulelor printre polii separatoarelor, rezolvarea ecuațiilor diferențiale neliniare efectuîndu-se numeric, prin metoda Runge - Kutta Gill, cu ajutorul minicalculatorului CORAL 4021.

3.1. Cîmpul magnetic la separatoarele cu piese polare cu profil hiperbolic

Pentru a se obține la un separator magnetofluidic un gradient al intensității cîmpului magnetic constant, se utilizează de obicei poli avînd, în secțiune, forma unor hiperbole echilaterale raportate la bisectoare [19, 47] (figura 3.1).

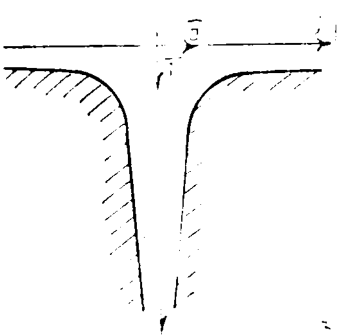


Fig. 3.1.

Potențialul magnetic V_H al unui cîmp magnetic plan paralel trebuie să satisfacă în acest caz o ecuație de forma:

$$V_H = K\,xy \qquad (3.1)$$

unde planul $y = 0$ este planul de simetrie al separatorului, x este axa de simetrie a separatorului în planul $z = 0$ iar K este o constantă.

Intensitatea cîmpului magnetic în acest caz este:

$$\bar{H} = -\left(\frac{\partial V_H}{\partial x}\,\bar{i} + \frac{\partial V_H}{\partial y}\,\bar{j} + \frac{\partial V_H}{\partial z}\,\bar{k}\right) = -K(y\bar{i} + x\bar{j}), \qquad (3.2)$$

iar modulul intensității cîmpului magnetic este:

$$H = |\bar{H}| = K\,(x^2 + y^2)^{1/2} = K\,r, \qquad (3.3)$$

$\bar{r} = r\,\bar{u}_r$ fiind vectorul de poziție.

Rezultă imediat și gradientul cîmpului magnetic:

$$\text{grad } H = K\,\bar{u}_r, \tag{3.4}$$

adică gradientul cîmpului are modulul constant, $|\text{grad } H| = K$, însă orientarea sa este variabilă, coincizînd cu aceea a vectorului de --z'ţ' (figur 3.2).

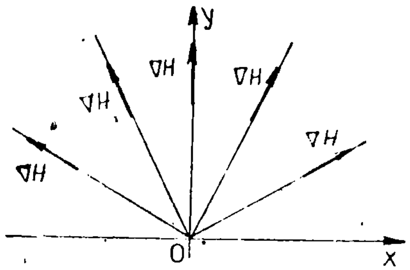


Fig. 3.2.

In spaţiul de coordonate $x \gg y$ se admite [19] că:

$$(\text{grad } H)_x = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{Kx}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cong K \quad \text{şi} \tag{3.5}$$

$$(\text{grad } H)_y = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{Ky}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cong K\,\frac{y}{x}, \quad \text{deci}$$

$$|\text{grad } H| = |(\text{grad } H)_x \bar{i} + (\text{grad } H)_y \bar{j}\,| \cong K. \tag{3.6}$$

In acest caz cîmpul magnetic poate fi produs de poli cu profil hiperbolic infinit lung (figura 3.3) a căror ecuaţii rezultă din relaţia (3.1). Dacă se consideră că un pol are potenţialul magnetic V_H atunci ecuaţia sa este:

$$xy = V_H / K; \tag{3.7}$$

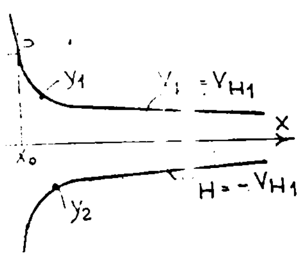


Fig. 3.3.

...ă po...ţ...l...l m gn tic al celui de l doilea este $- V_{H1}$, ecuaţia sa are forma:

$$xy = - V_H / K \,. \tag{3.7'}$$

Constanta K rezultă impunînd condiţia ca punctul de coordonate x_o, y_o să aparţină polului. Ecuaţiile care descriu profilul polilor hiperbolici sînt:

$$xy = x_o y_o, \text{ respectiv} \tag{3.8}$$

$$xy = - x_o y_o. \tag{3.9}$$

Cîmpul magnetic din întrefierul pieselor polare cu profil hiperbolic infinit poate fi calculat analitic în fiecare punct cu ajutorul relației (3.2) și, de asemenea, modulul său cu relația (3.3). In ipoteza simplificatoare considerată ($x \gg y$) modulul gradientului intensității cîmpului magnetic rezultă constant $|\text{grad } H| = K = V_H / x_0 y_0$.

S-au realizat programe pentru calculul în orice punct al spațiului dintre poli a potențialului magnetic, modulului intensității cîmpului magnetic și a modulului gradientului intensității cîmpului magnetic.

3.2. <u>Cîmpul magnetic la separatoarele magnetofluidice cu piese polare cu profil exponențial infinit</u>

In continuare se pune problema determinării potențialului magnetic scalar V_H al intensității cîmpului magnetic $\bar{H}$ pentru care:

$$\text{grad } H = \varphi_1(x,y)\bar{i} + \varphi_2(x,y)\bar{j}, \tag{3.10}$$

unde φ_1 și φ_2 sînt funcții de x și y date care satisfac relația:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}. \tag{3.11}$$

Se notează cu $\bar{u}$ versorul lui $\bar{H}$, din legea fluxului magnetic $\text{div}(\mu_0 \bar{H}) = 0$, rezultă $\text{div } \bar{H} = 0$ și se poate scrie:

$$\text{div } \bar{H} = \text{grad } H \cdot \bar{u} + H \text{ div } \bar{u} = 0, \tag{3.12}$$

în care versorul $\bar{u}$ are forma $\bar{u} = \cos\alpha\,\bar{i} + \sin\alpha\,\bar{j}$, $\alpha(x,y)$ fiind unghiul pe care îl fac versorii $\bar{u}$ și $\bar{i}$ (figura 3.4). Tinînd seama de (3.10) relația (3.12) se poate scrie în forma:

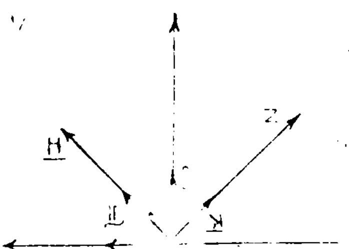


Fig. 3.4.

$$\varphi_1 \cos\alpha + \varphi_2 \sin\alpha + H\left(-\sin\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \cos\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) = 0 \tag{3.13}$$

sau:

$$\sin\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \cos\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\varphi_1 \cos\alpha + \varphi_2 \sin\alpha}{H}. \tag{3.14}$$

Teorema lui Ampère, rot $\bar{H} = 0$, conduce la egalitatea:

$$-\bar{u} \times \operatorname{grad} H + H \operatorname{rot} \bar{u} = 0,$$

sau:

$$-(\varphi_2 \cos\alpha - \varphi_1 \sin\alpha)\,\bar{k} + H\left(\cos\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\bar{k} = 0, \qquad (3.15)$$

de unde rezultă:

$$\cos\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\varphi_2 \cos\alpha - \varphi_1 \sin\alpha}{H}. \qquad (3.16)$$

Din ecuațiile (3.14) și (3.16) rezultă mărimile $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$ și $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\varphi_2(x,y)}{H}, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\frac{\varphi_1(x,y)}{H}. \qquad (3.17)$$

și

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varphi_2}{H}\right) = \frac{\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} H - \varphi_2 \frac{\partial H}{\partial y}}{H^2},$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\varphi_1}{H}\right) = -\frac{H\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \varphi_1 \frac{\partial H}{\partial x}}{H^2}. \qquad (3.18)$$

Egalitățile (3.18) evidențiază faptul că funcțiile φ_1 și φ_2 mai trebuie să îndeplinească, pe lîngă relația (3.11) și condiția:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{H} \qquad (3.19)$$

unde s-a ținut seama că $\frac{\partial H}{\partial x} = \varphi_1$ și $\frac{\partial H}{\partial y} = \varphi_2$. Dacă aceste ultime două egalități se înlocuiesc în relația (3.19) se obține ecuația pe care o satisface modulul vectorului intensitate a cîmpului magnetic H, cîmpul fiind laplacian și plan paralel:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{1}{H}\cdot\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]. \qquad (2.20)$$

Dacă se ţine seama de relaţiile (3.17) se poate scrie:

$$d\alpha = \frac{\varphi_2}{H} dx - \frac{\varphi_1}{H} dy \tag{3.21}$$

de unde rezultă unghiul $\alpha(x,y)$:

$$\alpha = \int_{x_0,y_0}^{x,y_0} \frac{\varphi_2}{H} dx - \int_{x,y_0}^{x,y} \frac{\varphi_1}{H} dy =$$

$$= \int_{x_0,y_0}^{x,y_0} \frac{\partial}{\partial y}(\ln H)\, dx - \int_{x,y_0}^{x,y} \frac{\partial}{\partial x}(\ln H)\, dy\,, \tag{3.22}$$

Modelul intensităţii cîmpului magnetic H poate fi calculat cu relaţia:

$$H = \int_{x_0,y_0}^{x,y_0} \varphi_1(x,y)\, dx + \int_{x,y_0}^{x,y} \varphi_2(x,y)\, dy. \tag{3.23}$$

Dacă se cunoaşte α şi H rezultă potenţialul magnetic scalar V_H, urmînd calculele:

$$-\frac{\partial V_H}{\partial x} = H \cos\alpha \quad \text{şi} \quad -\frac{\partial V_H}{\partial y} = H \sin\alpha\,, \tag{3.24}$$

deci:

$$-dV_H = H\cos\alpha\, dx + H \sin\alpha\, dy;$$

de unde:

$$-V_H = \int_{x_0,y_0}^{x,y_0} H \cos\alpha\, dx + \int_{x,y_0}^{x,y} H \sin\alpha\, dy. \tag{3.25}$$

Concluziile care se pot trage din cele prezentate sînt următoarele:

a) Pentru un cîmp magnetic laplacian şi plan paralel funcţiile

$\varphi_1(x,y)$ şi $\varphi_2(x,y)$ nu pot fi luate arbitrar, ci ele trebuie să satisfacă cele două condiţii menţionate, (3.11) şi (3.19). Ultima se verifică prin calculul prealabil al lui H cu relaţia (3.23). Formulele (3.22) şi (3.25) permit apoi determinarea potenţialului magnetic scalar şi deci configuraţia polilor.

Este de menţionat faptul că un cîmp magnetic care să satisfacă proprietatea, de dorit la un separator magnetic, grad $H = c\bar{I}$, c fiind o constantă, nu poate fi realizat. In acest caz $\varphi_1 = 0$ şi $\varphi_2 = c$ şi egalitatea (3.19) nu mai poate fi îndeplinită.

b) Dacă nu se impune forma cîmpului vectorial grad H, atunci se caută soluţii ale ecuaţiei (3.20) determinîndu-se cu relaţia (3.22) funcţia $\alpha = \alpha(x,y)$ şi cu relaţia (3.25) potenţialul magnetic scalar V_H şi deci configuraţia geometrică a polilor.

In continuare se prezintă o metodă, care are la bază separarea variabilelor, pentru determinarea unor soluţii particulare ale ecuaţiei (3.20) şi se studiază un caz care prezintă importanţă pentru separatoarele magnetofluidice.

Pentru a integra ecuaţia (3.20) se încearcă soluţia în care modulul intensitate a cîmpului magnetic H se poate scrie ca un produs de două funcţii, fiecare funcţie depinzînd de o singură variabilă:

$$H(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{3.26}$$

Introducînd încercarea de soluţie în ecuaţie se obţine:

$$\frac{f_1'' f_1 - f_1'^2}{f_1^2} = - \frac{f_2 f_2'' - f_2'^2}{f_2^2} \tag{3.27}$$

Deoarece membrul stîng al egalităţii este funcţie numai de x iar cel drept depinde doar de y, rezultă că ei sînt egali cu o aceeaşi constantă K:

$$\frac{f_1'' f_1 - f_1'^2}{f_1^2} = K, \qquad \frac{f_2'' f_2 - f_2'^2}{f_2^2} = - K. \tag{3.28}$$

Dacă se efectuează schimbarea de variabilă $f_1'/f_1 = g(x)$, prima ecuaţie devine $g'(x) = 0$, adică $g(x) = kx + C_1$ şi deci:

$$\frac{f_1'(x)}{f(x)} = Kx + C_1 \tag{3.29}$$

Integrînd din nou ultima egalitate se obţine:

$$\ln f_1(x) = K\frac{x^2}{2} + C_1 x + \ln C_2, \quad (C_2 > 0) \tag{3.30}$$

sau

$$f_1(x) = C_2\, e^{K\frac{x^2}{2} + C_1 x} \tag{3.31}$$

Analog, ecuaţia a doua are soluţia:

$$f_2(y) = C_3\, e^{-K\frac{y^2}{2} + C_4 y}, \quad (C_3 > 0) \tag{3.32}$$

Soluţia particulară căutată a ecuaţiei (3.20) este deci:

$$H = C\, e^{\frac{K}{2}(x^2-y^2) + C_1 x + C_4 y}, \tag{3.33}$$

unde cu C s-a notat constanta $C = C_2 C_3 > 0$.

Pentru acest caz, componentele vectorului grad H au expresiile:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \varphi_1(x,y) = C(Kx + C_1)\, e^{\frac{K}{2}(x^2-y^2) + C_1 x + C_4 y}, \tag{3.34}$$

şi deci:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \varphi_2(x,y) = C(-Ky + C_1)\, e^{\frac{K}{2}(x^2-y^2) + C_1 x + C_4 y} \tag{3.35}$$

şi deci:

$$\text{grad } H = C(Kx + C_1)\bar{I} + (-Ky + C_4)\bar{J}\, e^{\frac{K}{2}(x^2-y^2) + C_1 x + C_4 y} \tag{3.36}$$

Unghiul $\alpha = \alpha(x,y)$ pe care îl formează vectorul $\bar{H}$ cu axa ox se calculează cu relaţia (3.22):

$$\alpha(x,y) = \int_{x_0,y_0}^{x,y_0} (-Ky + C_4)\, dx - \int_{x,y_0}^{x,y} (Kx + C_1)\, dy \tag{3.37}$$

$$\alpha(x,y) = -Kxy + C_4 x - C_1 y + (Kx_0 y_0 - C_4 x_0 + C_1 y_0), \tag{3.38}$$

termenul din paranteză fiind o constantă, notată în continuare cu C_5.

Din relaţia (3.37) rezultă că un cîmp grad H unidirecţional, paralel cu axa ox se obţine dacă $K = C_4 = 0$, de unde:

$$\text{grad } H = C_6\, e^{C_1 x}\, \bar{i}, \tag{3.39}$$

adică,

$$H = C\, e^{C_1 x} \quad \text{şi} \quad \alpha = -C_1 y + C_5, \tag{3.40}$$

în care C_6 este o constantă ($C_6 = C \cdot C_1$).

In acest caz expresia lui H reprezintă soluţia generală a ecuaţiei (3.20), cînd H este funcţie numai de x, adică a ecuaţiei:

$$H \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2. \tag{3.20'}$$

Dacă $Y = 0$ reprezintă o linie echipotenţială magnetic, atunci din relaţia (3.40) rezultă:

$$C_5 = \frac{\pi}{2} \quad \text{şi deci} \quad \alpha = -C_1 y + \frac{\pi}{2}.$$

Potenţialul magnetic scalar se determină cu relaţia (3.25):

$$-V_H = \int_{x_0,y_0}^{x,y_0} C\, e^{C_1 x} \cos\alpha\, dx + \int_{x,y_0}^{x,y} C\, e^{C_1 x} \sin\alpha\, dy =$$

$$= \int_{x_0,y_0}^{x,y_0} C\, e^{C_1 x} \sin C_1 y\, dx + \int_{x,y_0}^{x,y} C\, e^{C_1 x} \cos C_1 y\, dy =$$

$$= \frac{C}{C_1}\, e^{C_1 x} \sin C_1 y - \frac{C}{C_1}\, e^{C_1 x_0} \sin C_1 y_0 . \tag{3.41}$$

Constanta $C_6 = \frac{C}{C_1}\, e^{C_1 x_0} \sin C_1 y_0$ se poate găsi impunînd condiţia ca la $y = 0$ potenţialul magnetic să fie nul; rezultă $C_6 = 0$.

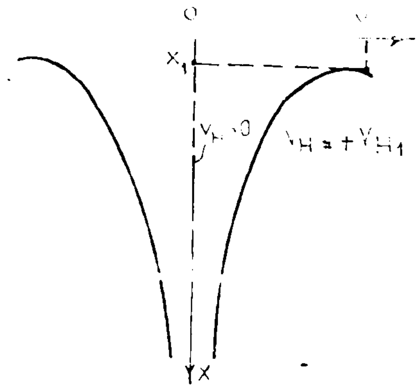
Dacă se face relaţia $C_7 = -C/C_1$ atunci potenţialul magnetic devine:

$$V_H = C_7\, e^{C_1 x} \sin C_1 y \tag{3.42}$$

Ecuaţia unei linii echipotenţiale de potenţial V_{H_1} este:

$$e^{C_1 x} \sin C_1 y = V_{H_1}/C_7 . \tag{3.43}$$

Valoarea extremă a acestei funcţii $y = y(x)$ se obţine prin anularea derivatei,



$$C_1 e^{C_1x}\frac{dx}{dy}\sin C_1y + e^{C_1x}C_1\cos C_1y = 0,$$ şi este

$y_1 = \pi/2C_1$, căreia îi corespunde

$x_1 = \frac{1}{C_1}\ln\frac{C_7}{V_{H_1}}$ (fig. 3.5).

Fig. 3.5.

In acest caz potenţialul magnetic scalar ia forma:

$$V_H = V_{H_1} e^{C_1(x - x_1)}\sin C_1y. \qquad (3.44)$$

Este mai avantajos să se opereze o translaţie a axei ox astfel încît o'x' să fie tangentă punctului de extrem (fig. 3.6).

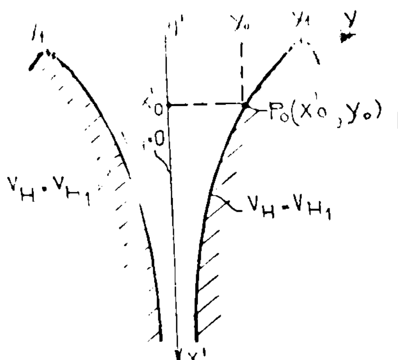


Fig. 3.6

_c__ţi_ ____ _i_ii echipo_e__iale oarecare, de potenţial magnetic V_H, în noul sistem de coordonate, are expresia:

$$V_H = V_{H_1} e^{C_1x'}\sin C_1y. \qquad (3.44')$$

In figura 3.6 sînt prezentate trei linii echipotenţiale: $V_H = V_{H_1}$, $V_H = 0$ ş_ $_H = - V_{H_1}$.

Ecuaţiile liniilor echipotenţiale $V_H = \pm V_{H_1}$, care reprezintă de fapt ecuaţiile polilor separatorului, sînt:

$$y_{1,2}(x) = \pm\frac{1}{C_1}\arcsin\left(e^{-C_1x}\right). \qquad (3.45)$$

Intensitatea cîmpului magnetic în acest sistem are forma:

$$\bar{H} = -\frac{\partial V_H}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial V_H}{\partial y}\bar{j} = -V_{H_1}C_1e^{C_1x'}(\sin C_1\bar{i} + \cos C_1\bar{j}), \qquad (3.46)$$

iar modulul său:

$$|\bar{H}| = H = V_{H_1} C_1 e^{C_1 x'} . \qquad (3.47)$$

Gradientul lui H devine:

$$\mathrm{grad}\ H = V_{H_1} C_1^2 e^{C_1 x'} \bar{I} . \qquad (3.48)$$

In concluzie, configurația polilor reprezentată în figura 3.6 generează în întrefier un cîmp magnetic avînd grad H unidirecțional și paralel cu axa ox'.

Constanta de integrare C_1 se obține impunînd condiția ca punctul $P_0(x'_0, y_0)$ să aparțină polului, a cărui potențial magnetic scalar este V_{H_1} (fig. 3.6). Se obține ecuația:

$$e^{C_1 x'_0} \sin C_1 y_0 = 1. \qquad (3.49)$$

Ecuația transcendentă în C_1 se poate rezolva considerînd funcțiile $f_1(C) = \sin C\, y_0$ și $f_2(C) = e^{-Cx_0}$ (fig. 3.7).

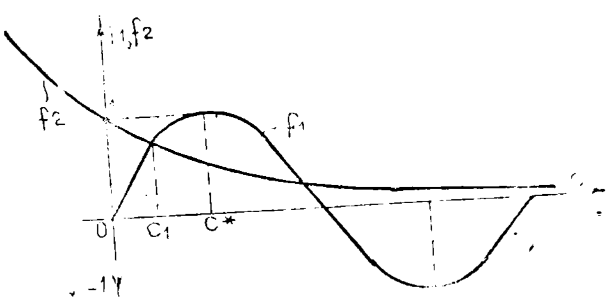


Fig. 3.7.

Valoarea constantei C_1 se găsește la intersecția celor două curbe, adică în intervalul $C_1 \in (0, C^*)$, unde $C^* = \frac{\pi}{2y_0}$ este extremul funcției f_1.

Rezolvarea se face numeric impunînd condiția ca $|f_1 - f_2| \leq \varepsilon$, ε fiind ales în funcție de precizia dorită.

Au fost realizate programe pentru calculul potențialului magnetic, a modulului intensității cîmpului magnetic și a modulului gradientului intensității cîmpului magnetic, în orice punct al spațiului dintre polii cu profil exponențial.

3.3. Traiectoriile particulelor între poli de extensiune infinită

3.3.1. Traiectoriile particulelor între polii unui separator cu piese polare cu profil hiperbolic infinit

Se consideră o particulă nemagnetică, de formă sferică, introdusă în lichidul magnetic dintre polii unui separator. Raza particulei se notează cu R_α, densitatea lichidului cu ρ_ℓ, cea a substanței particulei cu ρ_α, vîscozitatea lichidului cu η și cu M_0 magnetizația sa de saturație. Presupunînd că pretutindeni lichidul este saturat, mișcarea particulei în lichid este descrisă de ecuația:

$$\frac{4\pi R_\alpha^3}{3}\rho_\alpha \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{4\pi R_\alpha^3}{3}(\rho_\alpha - \rho_\ell)\bar{g} - \mu_0 M_0 \frac{4\pi R_\alpha^3}{3}\,\mathrm{grad}\,H - 6\pi R_\alpha \eta \frac{d\bar{r}}{dt} -$$

$$- \frac{2}{3}\pi R_\alpha^3 \rho_\ell \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \qquad (3.50)$$

în care $\bar{r}$ reprezintă vectorul de poziție al particulei.

Primul termen din membrul drept al ecuației reprezintă rezultanta dintre forța gravitațională și cea a lui Arhimede, care se exercită asupra particulei sferice, al doilea termen este forța de natură magnetică iar ultimii doi termeni sînt forțe de tip Stokes.

Impărțind cu $4\pi R^3/3$ și regrupînd termenii se obține:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + \frac{9\eta}{2R_\alpha^2(\rho_\alpha + 0{,}5\rho_\ell)}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} + \frac{\mu_0 M_0}{(\rho_\alpha + 0{,}5\rho_\ell)}\,\mathrm{grad}\,H +$$

$$+ \frac{\rho_\ell - \rho_\alpha}{\rho_\alpha + 0{,}5\rho_\ell}\bar{g} = 0\,. \qquad (3.51)$$

Ecuația vectorială (3.51) se poate scrie pe componente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K_1\frac{dx}{dt} + K_2|\mathrm{grad}\,H| + K_3 = 0; \qquad (3.52)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + K_1\frac{dz}{dt} = 0, \qquad (3.53)$$

unde s-au notat în felul următor constantele:

$$K_1 = \frac{9\eta}{2R_\alpha^2(\rho_\alpha + 0{,}5\rho_\ell)}, \quad K_2 = \frac{\mu_0 M_0}{\rho_\alpha + 0{,}5\rho_\ell}, \quad K_3 = \frac{\rho_\ell - \rho_\alpha}{\rho_\alpha + 0{,}5\rho_\ell}g, \qquad (3.54)$$

sistemul de coordonate fiind reprezentat în fig. 3.8.

Condițiile inițiale pentru rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale (3.52) și (3.53) sînt:

la $t = 0$, $\quad x(o) = x_o$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(o)} = V_x(o) = V_o \cos\alpha \qquad (3.55)$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{(o)} = V_z(o) = V_o \sin\alpha,$$

în care $\bar{V}_o$ reprezintă viteza de intrare a particulei în lichidul magnetic iar unghiul α este format de vectorii $\bar{I}$ şi $\bar{V}_o$.

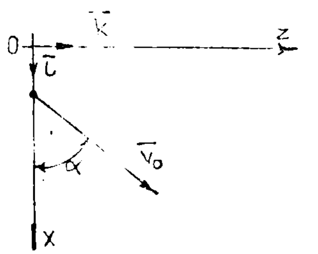


Fig. 3.8.

In cazul polilor cu profil hiperbolic $|$grad H$|$ este o constantă şi cu notaţia K_2 grad H $+ K_3 = K_4$ ecuaţia (3.52) devine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K_1 \frac{dx}{dt} + K_4 = 0. \qquad (3.56)$$

Ecuaţiile (3.56) şi (3.53) se pot integra ţinînd cont de condiţiile iniţiale (3.55) şi se obţin soluţiile:

$$x(t) = \left(\frac{K_4}{K_1^2} + \frac{V_o}{K_1}\cos\alpha\right)\left(1 - e^{-K_1 t}\right) + \left(-\frac{K_4}{K_1}\right)t\ ; \qquad (3.57)$$

$$z(t) = \frac{V_o \sin\alpha}{K_1}\left(1 - e^{-K_1 t}\right). \qquad (3.58)$$

Dacă se calculează, cu pasul în timp dorit, în acelaşi moment t_K, perechi de valori x_K şi z_K, se poate obţine traiectoria $x = x(z)$ a particulei între polii unui separator cu piese polare cu profil hiperbolic infinit.

In acest scop s-a realizat un program, denumit IRH, care permite calculul traiectoriei şi trasarea ei calitativă.

Datele de intrare sînt afişate pe un videoformat ce conţine: densitatea particulei (ROA), densitatea lichidului magnetic (ROL), raza particulei (RP), vîscozitatea lichidului magnetic, magnetizaţia sa de saturaţie (m_o), viteza iniţială (V_o), unghiul de pătrundere (ALFA) şi direcţiei particulei şi trei valori ale potenţialului magnetic (V_H) al polului.

Tabelele şi graficele conţin deci trei curbe pentru aceleaşi condiţii dar pentru valori diferite ale potenţialului magnetic (fig. 3.9).

S-au obţinut familii de curbe pentru diverse valori ale parametrilor (ROA), (RP), (M_0), (V_0) şi (ALFA).

In figura 3.9 se observă că o particulă din cupru (ROA = = 8 900 kg/m^3) cu diametrul de 1 mm, care are o viteză iniţială V_0 = 1 m/s şi pătrunde în lichid sub un unghi $\alpha = 45^{o}$ cade la o distanţă z_1 = 90 mm respectiv z_2 = 106 mm în funcţie de valoarea lui V_{H_1} (5 000 şi respectiv 10 000 (A)). Dacă potenţialul magnetic V_{H_1} ia valoarea de 20 000 (A) particula de cupru este reîntoarsă spre suprafaţa lichidului magnetic, traiectoria sa avînd alura unei parabole.

3.3.2. Traiectoriile particulelor între polii unui separator cu profil exponenţial infinit

In acest caz modulul gradientului intensităţii cîmpului magnetic este funcţie de x (3.47) şi ecuaţia (3.52) devine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K_1 \frac{dx}{dt} + K_2' e^{C_1 x} + K_3 = 0, \qquad (3.59)$$

în care $K_2' = K_2 \cdot V_{H_1} \cdot C_1^2$.

Această ecuaţie este o ecuaţie diferenţială neliniară de ordinul doi. Rezolvarea ei s-a realizat prin transformarea într-un sistem de ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul întîi. Astfel cu notaţia $x_1 = \frac{dx}{dt}$ se obţine sistemul:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -K_1 x_1 - K_2' e^{C_1 x} - K_3, \\ x_1 &= \frac{dx}{dt} \end{aligned} \qquad (3.60)$$

Sistemul s-a rezolvat cu ajutorul metodei Runge-Kutta de ordinul patru modificate de Gill. S-a utilizat subprogramul RKGS din biblioteca matematică a sistemului de operare MIX V20 a minicalculatorului CORAL 4021.

Sistemul (3.60) se poate scrie în forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f(t, x_1, x), \\ \frac{dx}{dt} &= f(t, x_1). \end{aligned} \qquad (3.61)$$

* DATE DE INTRARE

DENSITATEA PARTICULEI	: ROA	= 11[illegible]	
DENSITATEA LICHIDULUI	: ROL	1130.00	
RAZA PARTICULEI	: RP	= 0.0010000	[m]
VISCOZITATEA	: VS	0.0010000	[N...]
MAGNETIZATIA DE SATURATIE	: MS	= 83700	[A/m]
VITEZA INITIALA	: V0	1.40	[m/s]
UNGHIUL DE PATRUNDERE	: ALFA	60.000	[gr]

AK1= 0.413401 [illegible] 0.00000675 [illegible] 0.1[illegible]

POLI HIP.: VAR. ANALITICA [11]

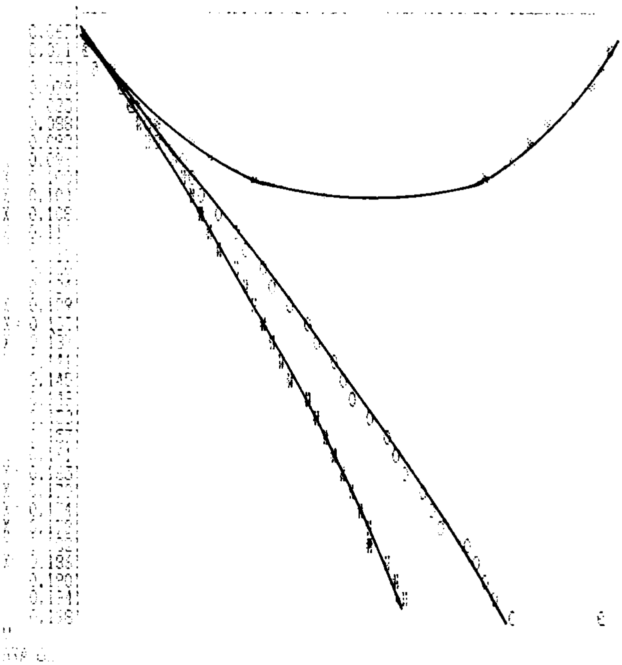
VH=[5.10.20] [kA], V0 1.4 [m/s], ALFA=60 GR.

NR	TIMP	VH1	X VH2	VH3	Z ANALITIC
1	0.0000	0.0[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	0.0040	0.[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.0[illegible]	0.07[illegible]	0.07[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	0.0120	0.076218	0.075751	0.075[illegible]	0.01[illegible]
[illegible]	0.0160	0.079264	0.07[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.0200	0.082391	0.081[illegible]	[illegible]	0.02[illegible]
[illegible]	[illegible]	0.085540	0.08[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	0.0280	0.08[illegible]	0.08[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	0.0320	0.092152	0.09[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	0.0360	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	0.0400	0.099014	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	0.0440	0.1[illegible]	0.09[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	0.0480	[illegible]	0.101[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	0.0520	0.109830	0.10[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	[illegible]	0.113572	0.107[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	0.0600	0.117[illegible]	0.110777	[illegible]	[illegible]
17	0.0640	0.121[illegible]	0.11[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.0680	0.125[illegible]	0.115739	0.09[illegible]	[illegible]
19	0.0720	0.129[illegible]	[illegible]	0.1[illegible]	[illegible]
20	[illegible]	0.133325	[illegible]	0.10[illegible]	[illegible]
21	[illegible]	0.137181	0.12[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.0840	0.141706	0.128796	0.11[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0.14[illegible]	0.131[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0.150350	0.13[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.1000	[illegible]	0.11[illegible]	[illegible]	[illegible]
27	0.1040	[illegible]	0.1[illegible]	[illegible]	[illegible]
28	0.1080	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
29	0.1120	0.17[illegible]	[illegible]	0.1[illegible]	[illegible]
30	0.11[illegible]	0.177901	[illegible]	[illegible]	[illegible]
31	0.12[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.1240	[illegible]	0.15[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0.19[illegible]	0.16[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0.197[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0.00000[illegible]	0.1[illegible]	0.121[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.1400	0.000000	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.1440	0.00000[illegible]	0.1[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.1[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.1[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
40	0.1[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
41	0.1600	0.000000	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.1[illegible]	0.000000	0.1[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]	[illegible]	0.000000	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.000000	[illegible]	0.214014
48	0.1680	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.219305
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.081521	0.222789
50	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.228245
51	[illegible]	0.000000	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.000000	[illegible]	0.237191
[illegible]	0.2080	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.241648
[illegible]	0.2120	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible] SUPRAPUNERE [illegible]

ZSTOP = 0.2160947



Z1	0.0000	Z2=	[illegible]
Z1=	0.0049	Z2	0.0000
Z1=	0.0097	[illegible]	[illegible]
Z1=	0.0193	Z2	[illegible]
Z1=	[illegible]	Z2=	0.0000
Z1=	[illegible]	Z2	[illegible]
Z1	[illegible]	Z2	[illegible]
Z1=	[illegible]	Z2	[illegible]
Z1=	[illegible]	Z2	0.0000
Z1=	[illegible]	Z2=	[illegible]
Z1=	[illegible]	Z2	[illegible]
Z1=	0.0624	Z2=	[illegible]
Z1=	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Z1=	0.0719	Z2=	0.0000
Z1=	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Z1=	[illegible]	Z2=	[illegible]
Z1=	[illegible]	Z2=	[illegible]
Z1=	0.0907	Z2	[illegible]
Z1	[illegible]	Z2	0.0000
Z1=	[illegible]	Z2=	0.0000
Z1=	[illegible]	Z2=	0.0000
Z1=	[illegible]	Z2=	0.0000
Z1	0.1111	Z2	[illegible]
Z1=	0.1198	Z2	[illegible]
Z1=	0.1234	Z2=	[illegible]
Z1	[illegible]	Z2=	[illegible]
Z1=	0.1327	Z2=	[illegible]
[illegible]	[illegible]	Z2=	[illegible]
Z1=	0.1373	Z2=	[illegible]
Z1=	0.1119	Z2	[illegible]
Z1=	0.1466	Z2=	[illegible]
Z1	0.1512	Z2	[illegible]
Z1	0.2416	Z2=	[illegible]

XSTART [illegible] XSTOP [illegible] PAS [illegible]

Fig. 3.9

Fie x_{1_i} şi x_i valorile funcţiilor la momentul t_i. Valorile funcţiilor la momentul $t_i + \Delta t = t_{i+1}$ se vor calcula după cum urmează [58]:

$$x_{1_{i+1}} = x_{1_i} + \frac{1}{6}(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) \tag{3.62}$$

în care:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \Delta t . f(t_i, x_{1_i}) \\
a_2 &= \Delta t . f(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_{1_i} + \frac{a_1}{2}) \\
a_3 &= \Delta t . f(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_{1_i} + \frac{a_2}{2}) \\
a_4 &= t . f(t_i + \Delta t, x_{1_i} + a_3).
\end{aligned} \tag{3.63}$$

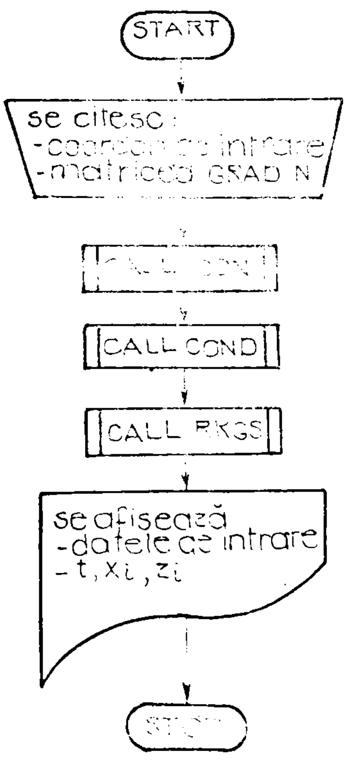


Fig. 3.10.

In figura 3.10 se prezintă schema logică a programului TREK pentru calculul traiectoriei particulelor. Se citesc coordonatele de intrare ale particulelor, numele fişierului de date ce conţine matricea GRAD H (valorile gradientului intensităţii cîmpului magnetic). In continuare se apelează două subprograme CON şi COND care conţin videoformate pentru parametrii de intrare: potenţialul magnetic (V_H), densitatea lichidului magnetic (ROL), raza particulei (RP), vîscozitatea lichidului magnetic (VS), magnetizaţia de saturaţie (M_0), viteza iniţială (V_0), unghiul de pătrundere (ALFA) şi, respectiv, timpul iniţial (T_0), timpul final (de oprire a calculului) (TF), pasul pe axa timpului (DT), densitatea particulei (ROA).

Pentru a avea informaţii privitoare la traiectoriile, în aceleaşi condiţii, a trei particule din materiale diferite s-a realizat tabelarea şi trasarea (calitativă) simultană a acestora (fig. 3.11 şi 3.12).

In figura 3.11 se observă că la acelaşi potenţial magnetic particula de plumb are o traiectorie mai abruptă, particula de cupru o traiectorie mai lungă, iar cea de zinc cea mai lungă.

In figura 3.12 se observă că în aceleaşi condiţii cu cele anterioare, dacă se foloseşte un lichid magnetic cu o magnetizaţie de saturaţie M_o = 63700 A/m (superioară celei anterioare M_o = 3980 A/m), numai particulele de Pb vor cădea, cele de Cu şi Zn orientîndu-se pe traiectorii diferite, spre suprafaţă.

Este de menţionat că programul TMK a fost testat comparativ cu programul analitic de calcul al traiectoriei, amintit în subcapitolul anterior şi s-a observat o diferenţă de maximum 0,1%.

3.4. Cîmpul magnetic la separatoarele cu piese polare cu profil finit

3.4.1. Ecuaţiile cîmpului magnetic staţionar

Ecuaţiile satisfăcute de către cîmpul magnetic staţionar sînt:

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \tag{3.64}$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J}, \tag{3.65}$$

$$\bar{B} = \mu_o(\bar{H} + \bar{M}). \tag{3.66}$$

In întreg spaţiul dintre polii unui separator, atît în aer cît şi în lichidul magnetic (considerat cu μ_r = 1), nu există curenţi electrici şi deci $\bar{J}$ = 0. In aceste condiţii rot $\bar{H}$ = 0 şi $\bar{H}$ fiind instaţional derivă din potenţialul magnetic V_H,

$$\bar{H} = - \operatorname{grad} V_H. \tag{3.67}$$

In cazul cînd intensitatea cîmpului magnetic este suficient de mare în spaţiul ocupat de lichidul magnetic, pentru a-l aduce la saturaţie, $\bar{M} = \bar{M}_o$, (caz întîlnit în practică) atunci se poate scrie:

$$\operatorname{div} \bar{B} = \operatorname{div} \mu_o\bar{H} + \operatorname{div} \mu_o\bar{M}_o = \mu_o \operatorname{div} \bar{H} = 0. \tag{3.68}$$

Dacă în această ultimă ecuaţie se introduce $\bar{H}$ din relaţia (3.67) se obţine:

Data curenta [illegible]

* DATE DE INTRARE

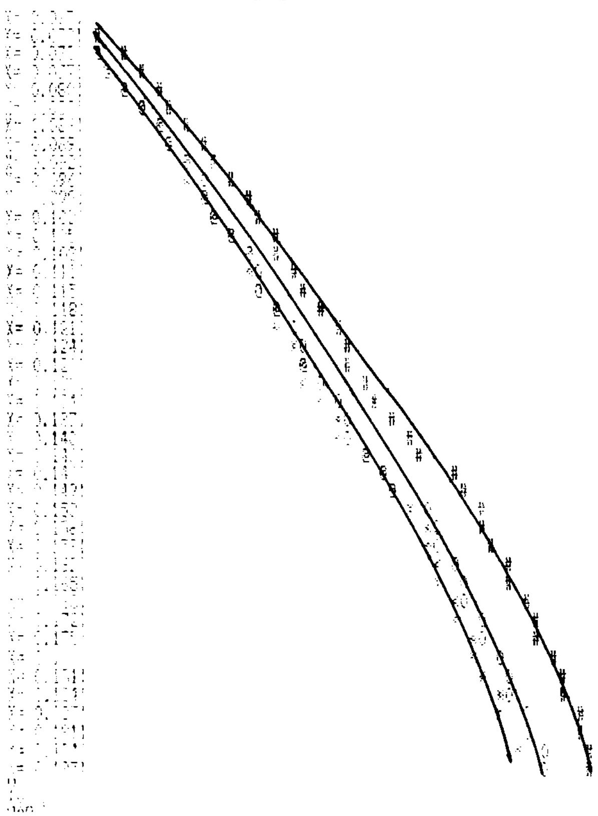
POTENTIALUL MAGNETIC		= 10000.0		
DENSITATEA LICHIDULUI	: ROL	= 1130.00	(kg/mc)	
RAZA PARTICULEI	: RP	= 0.0010000	(m)	
VISCOZITATEA	: VS	= 0.0010000	(N.s/mp)	
MAGNETIZATIA DE SATURATIE	: MO	= 29800	(A/m)	
VITEZA INITIALA	: VO	=1.40	(m/s)	
UNGHIUL DE PATRUNDERE	: ALFA	= 60.000	(grade)	
T INITIAL	: TO	= 0.0000		
T FINAL	: TF	= 1.0000		
PASUL PE AXA TIMP	: DT	= 0.00450	(s)	
DENSITATEA PARTICULEI 1	: ROA1	= 7110.00	(kg/mc)	
DENSITATEA PARTICULEI 2	: ROA2	= 8900.00	(kg/mc)	
DENSITATEA PARTICULEI 3	: ROA3	= 11300.00		

POLI EXPONENTIALI; VARIANTA ANALITICA [illegible]

NR	TIMP	X ROA1	Z ROA1	X ROA2	Z ROA2	X ROA3	Z ROA3
1	0.0000	0.067500	0.000000	0.067500	0.000000	0.067500	[illegible]
2	0.0045	0.069086	0.005448	[illegible]	0.005450	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	0.070687	0.010891	0.073928	[illegible]	0.074030	[illegible]
4	0.0135	0.072302	[illegible]	0.077353	[illegible]	[illegible]	0.016322
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.021722	[illegible]	0.021743
6	0.0225	[illegible]	0.027085	0.084333	0.027121	[illegible]	[illegible]
7	0.0270	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	0.0315	[illegible]	0.037811	0.091624	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	0.0360	0.087452	0.043151	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	0.0405	[illegible]	0.048476	0.099211	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	0.0450	0.094517	[illegible]	0.103112	[illegible]	0.104201	[illegible]
12	[illegible]	0.098120	0.059080	0.107092	0.059252	[illegible]	[illegible]
13	[illegible]	0.101764	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.112920	[illegible]
14	0.0585	[illegible]	[illegible]	0.115218	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	[illegible]	[illegible]	0.074872	0.119392	[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	0.0675	[illegible]	[illegible]	0.123607	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	0.0720	[illegible]	[illegible]	0.127889	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	[illegible]	0.124127	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	[illegible]	0.128313	[illegible]	0.141053	[illegible]	[illegible]	[illegible]
21	0.0900	0.132221	[illegible]	[illegible]	0.106614	[illegible]	[illegible]
22	0.0945	[illegible]	0.111197	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
23	0.0990	0.140102	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
24	0.1035	[illegible]	[illegible]	0.152475	[illegible]	[illegible]	[illegible]
25	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
26	[illegible]	0.146137	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
27	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
28	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
29	[illegible]	[illegible]	0.146901	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
30	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.180798	[illegible]	[illegible]	[illegible]
31	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
32	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]171793	0.000000	0.173293	0.000000	[illegible]
35	[illegible]	0.1867[illegible]	0.17[illegible]755	0.000000	0.178339	0.000000	0.179750
3[illegible]	[illegible]	[illegible]2145	[illegible]18[illegible]396	[illegible]000000	[illegible]183373	0.000000	0.184875
37	[illegible]	[illegible]7719	0.18[illegible]526	0.000000	0.1[illegible]8396	0.000000	0.1[illegible]9982

[illegible]BIFIC[illegible] : [illegible] "#" ROA2[illegible] ROA3 [illegible] SUPRAPUNERE [illegible] "@"
[illegible] [illegible]000000 ZSTOP [illegible]9319 [illegible]



XSTART= 0.0[illegible]75000 XSTOP = [illegible].19772 PAS= 0.00[illegible]

Fig. 3.11.

* DATE DE INTRARE *

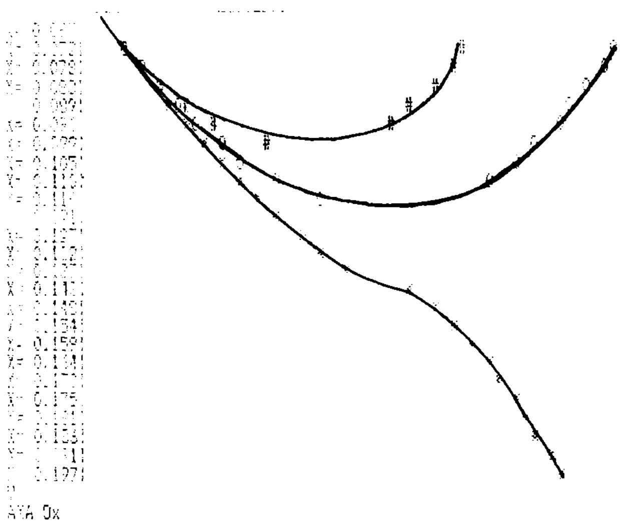
POTENTIALUL MAGNETIC	: [illegible]	[illegible]	
DENSITATEA LICHIDULUI	: ROL	= 1130.00	(kg/mc)
RAZA PARTICULEI	: RP	= 0.0025000	(m)
VISCOZITATEA	: VS	= 0.0010000	(Ns/mp)
MAGNETIZATIA DE SATURATIE	: [illegible]	12700	(A/m)
VITEZA INITIALA	: V0	=1.40	(m/s)
UNGHIUL DE PATRUNDERE	: ALFA	= 60.000	(grade)
T INITIAL	: T0	= 0.0000	
T FINAL	: TF	= [illegible]	
PASUL PE AXA TIMP	: DT	= 0.0045	
DENSITATEA PARTICULEI 1	: ROA1	= [illegible]	(kg/mc)
DENSITATEA PARTICULEI 2	: ROA2	= [illegible]	
DENSITATEA PARTICULEI 3	: ROA3	= 11200.00	

FE [illegible]

NR	TIMP	X ROA1	Z ROA1	X ROA2	Z ROA2	[illegible]	Z ROA3
1	0.0000	0.067510	0.000000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	0.0045	0.068267	0.005455	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	0.0090	0.069065	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.016252	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	[illegible]	0.021604	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	0.0225	[illegible]	0.027243	0.072101	[illegible]	0.072219	[illegible]
7	0.0270	0.073564	[illegible]	[illegible]	0.032699	[illegible]	[illegible]
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	0.0405	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	0.0450	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	0.0540	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	0.0630	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	0.0675	0.093751	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	0.0720	0.095204	[illegible]	0.099711	[illegible]	[illegible]	[illegible]
18	0.0765	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	0.0810	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	0.0855	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
21	[illegible]	0.099299	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
22	0.0945	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
23	[illegible]	0.100268	0.119428	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
24	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.111305	[illegible]	[illegible]	[illegible]
25	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
26	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
27	0.1170	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
28	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
29	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
30	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]	0.1455	[illegible]	[illegible]79572	0.1181[illegible]	0.179942	0.140[illegible]	[illegible]
35	[illegible]1500	0.090941	[illegible]	0.118271	0.184331	[illegible]	0.184507
[illegible]	0.1575	[illegible]	[illegible]89425	0.117[illegible]	0.189717	0.141[illegible]	0.189960
37	0.1620	[illegible]	[illegible]	0.11705[illegible]	0.195101	0.141410	0.195[illegible]
38	[illegible]	[illegible]64718	[illegible]	0.115[illegible]	0.200424	0.142315	[illegible]
[illegible]	0.1710	0.022208	[illegible]	0.11415[illegible]	0.205864	0.143[illegible]	0.206159
4[illegible]	0.1755	[illegible]	0.210642	[illegible]	0.211041	0.145261	0.21[illegible]
41	0.1800	[illegible]77107	0.21[illegible]	0.114379	0.216[illegible]	0.147416	0.216911
[illegible]	[illegible]1845	[illegible]74262	[illegible]	0.112[illegible]	0.221992	0.149[illegible]	[illegible]
43	0.1890	[illegible]	[illegible]26638	[illegible]	[illegible]227365	[illegible]	0.227725
44	0.1935	[illegible]2227	[illegible]	0.110715	[illegible]232704	0.153701	0.233111
45	0.1980	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.238102	0.157[illegible]	0.2384[illegible]
46	0.2025	0.000000	0.243004	0.107[illegible]	0.243437	[illegible]	[illegible]243801
47	[illegible]	0.000000	0.248317	0.105[illegible]	[illegible]	0.163911	0.249[illegible]
[illegible]	0.2115	[illegible]	0.253600	0.1030[illegible]	0.254195	[illegible]	0.254[illegible]
[illegible]	0.2160	[illegible]	0.259026	0.102074	0.259555	[illegible]170724	0.260025
5[illegible]	[illegible]2205	[illegible]	[illegible]264363	0.099[illegible]	[illegible]	[illegible]174413	[illegible]265402
[illegible]1	0.2250	0.000000	[illegible]	0.097791	0.270[illegible]	0.178[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0.000000	[illegible]	0.095406	0.275[illegible]	0.182[illegible]	[illegible]276152
5[illegible]	0.2340	0.000000	[illegible]280355	0.093[illegible]	0.280975	0.186505	[illegible]281526
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.285682	[illegible]090547	0.286325	0.190056	[illegible]
[illegible]	0.2430	[illegible]	[illegible]	[illegible]087922	0.291674	[illegible]	[illegible]292267
5[illegible]	[illegible]2475	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]200077	[illegible]297635
[illegible]7	0.2520	[illegible]	[illegible]301[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]000000	[illegible]303001
5[illegible]	[illegible]	[illegible]000000	[illegible]	[illegible]079470	0.307706	0.000000	[illegible]
59	0.2610	[illegible]	0.312274	0.07[illegible]480	0.313047	[illegible]000000	[illegible]313720
[illegible]	[illegible]	[illegible]000000	[illegible]317508	[illegible]073112	[illegible]	0.000000	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]000000	[illegible]322537	[illegible]070271	0.32[illegible]	0.000000	[illegible]324452

COLIFICARE : ROA1->"#" ROA2->"0" ROA3->"*" SUPRAPUNERE->"@"
ZSTART= [illegible] ZSTOP= 0.3244515 AXA Oz



AXA Ox

XSTART [illegible] XSTOP = 0.67027 PAS= [illegible]

Fig. 3.12.

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} V_H) = \nabla^2 V_H = \Delta V_H = 0, \tag{3.69}$$

ceea ce arată că în domeniul ocupat de lichidul magnetic potenţialul magnetic scalar satisface o ecuaţie de tip Laplace, la fel ca şi în restul spaţiului dintre polii separatorului.

Deoarece nu există curenţi superficiali (pînză de curent) la suprafaţa de separaţie dintre aer şi lichidul magnetic, componentele tangenţiale ale lui $\bar{H}$ se conservă, funcţia potenţial magnetic scalar fiind continuă:

$$V_{H_{aer}} = V_{H_{lichid\ magnetic}} \tag{3.70}$$

Dacă se consideră domeniul dintre polii unui separator, ce conţine atît lichid magnetic cît şi aer, potenţialul magnetic scalar satisface ecuaţiile lui Laplace în întreg domeniul. Această ecuaţie se poate integra numeric, în cazul cînd se cunosc valorile potenţialului în punctele de frontieră (condiţii de tip Dirichlet) sau derivata acestuia după direcţia normală (condiţii de tip Neumann).

Frontierele notate în figura 3.13 notate cu F_1 şi F_2 au potenţialul cunoscut şi constant (ele reprezentînd polii separatorului) însă pe frontierele F_3 şi F_4 potenţialul nu se cunoaşte.

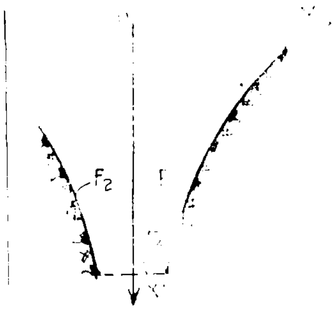


Fig. 3.13.

P[illegible]n[illegible]ru [illegible]r[illegible]na [illegible]o[illegible] po[illegible]n-ţialului pe aceste frontiere s-a procedat la modelarea electrocinetică.

3.4.2. Ecuaţiile cîmpului electrocinetic staţionar

Densitatea curentului electric de conducţie $\bar{J}$ şi intensitatea cîmpului electric satisfac ecuaţiile:

$$\operatorname{div} \bar{J} = 0, \tag{3.71}$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}, \tag{3.72}$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0. \tag{3.73}$$

Ultima relaţie arată că intensitatea cîmpului $\bar{E}$ derivă dintr-un potenţial V:

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} V. \tag{3.74}$$

Rezultă:

$$\operatorname{div} \bar{J} = \operatorname{div} \sigma \bar{E} = -\operatorname{div} (\sigma \operatorname{grad} V) =$$

$$= -(\operatorname{grad} \sigma)\cdot(\operatorname{grad} V) - \sigma \operatorname{div} (\operatorname{grad} V) = 0. \qquad (3.75)$$

Dacă domeniul are conductibilitatea constantă pe porţiuni atunci ecuaţia (3.75) devine:

$$\nabla^2 V = \Delta V = 0, \qquad (3.76)$$

adică potenţialul electric V satisface o ecuaţie de tip Laplace, la fel ca şi potenţialul magnetic.

Rezultă posibilitatea modelării, într-un domeniu oarecare, a unui cîmp V_H printr-un cîmp V, cîmpul V_H fiind numeric identic cu cîmpul V, în ipoteza condiţiilor de frontieră numeric identice.

3.4.3. Modelul electrocinetic

Se pune problema determinării condiţiilor de frontieră pe frontierele F_3 şi F_4 (fig. 3.13). Pe baza corespondenţei stabilite anterior se poate modela cîmpul magnetic plan paralel dintre polii unui separator cu ajutorul unui cîmp electrocinetic plan. Modelarea rezolvă problema determinării potenţialului pe frontierele F_3 şi F_4 (condiţii de frontieră de tip Dirichlet) deoarece (spre deosebire de potenţialul magnetic) potenţialul electric este măsurabil.

Modelul a fost executat din hîrtie rezistivă pe care au fost presaţi electrozi de cupru (în formă de bandă), ce descriu pe hîrtie exact forma secţiunii transversale a polilor. In figura 3.14 se prezintă schema la scara 1:1 a polilor cu profil hiperbolic, iar în figura 3.15 schema la aceeaşi scară a polilor cu profil exponenţial. Hîrtia electrorezistivă a fost caroiată cu un pas de 5 mm şi cu ajutorul unui voltmetru numeric (de impedanţă foarte mare) a fost măsurat potenţialul în puncte de pe frontierele F_3 şi F_4. Au fost efectuate mai multe măsurători (pentru 4-5 diferenţe de potenţial diferite) s-a făcut raportarea valorilor la potenţialul maxim (pentru fiecare set de valori în parte) şi pe urmă media în fiecare punct a valorilor potenţialului.

De remarcat că hîrtia electrorezistivă a avut o extensiune mult mai mare decît profilul polilor (de 3 ori) pentru a diminua efectele de margine.

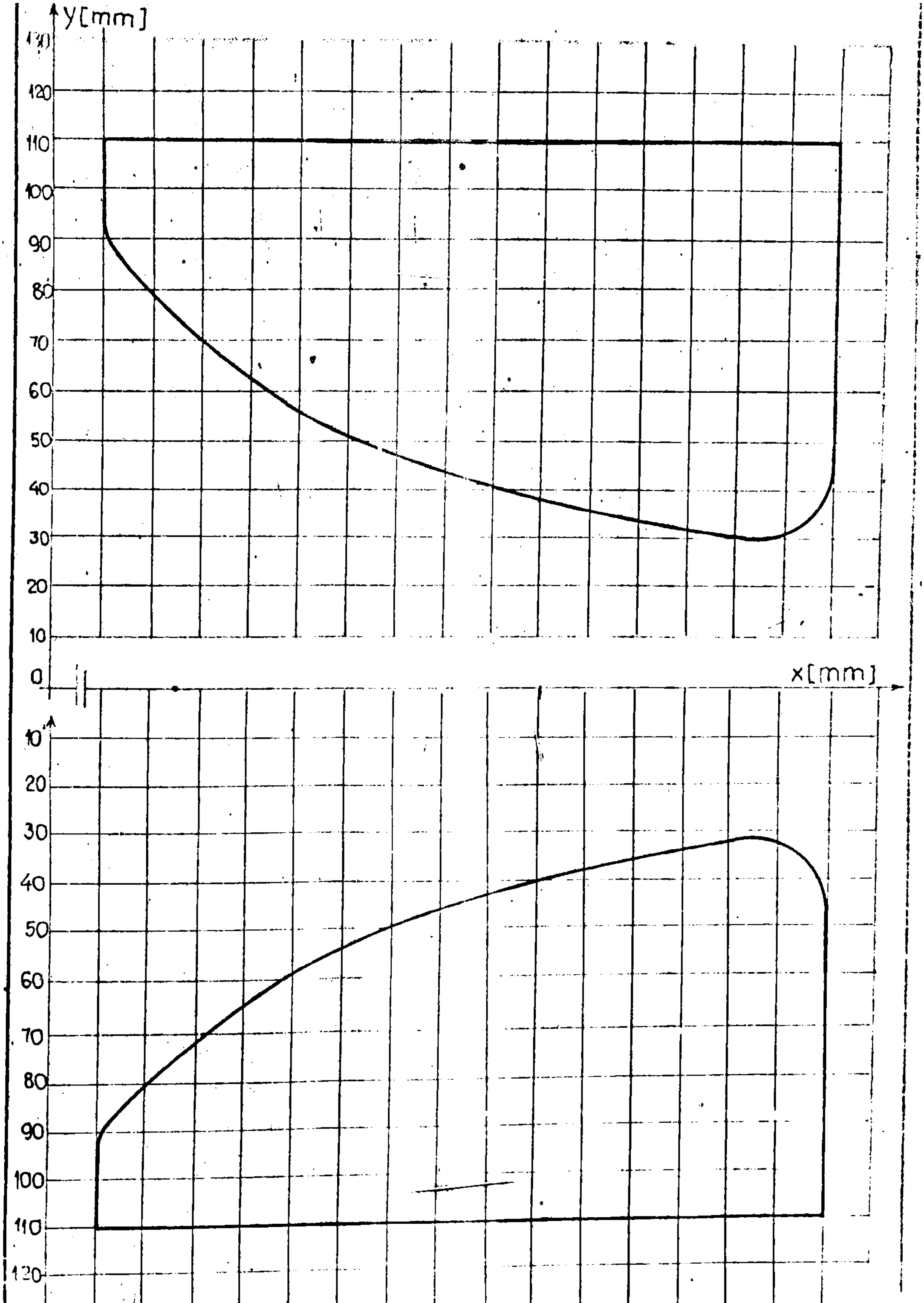


Fig. 3.14 Model behimic electrorezistivă a polilor cu profil hiperbolic

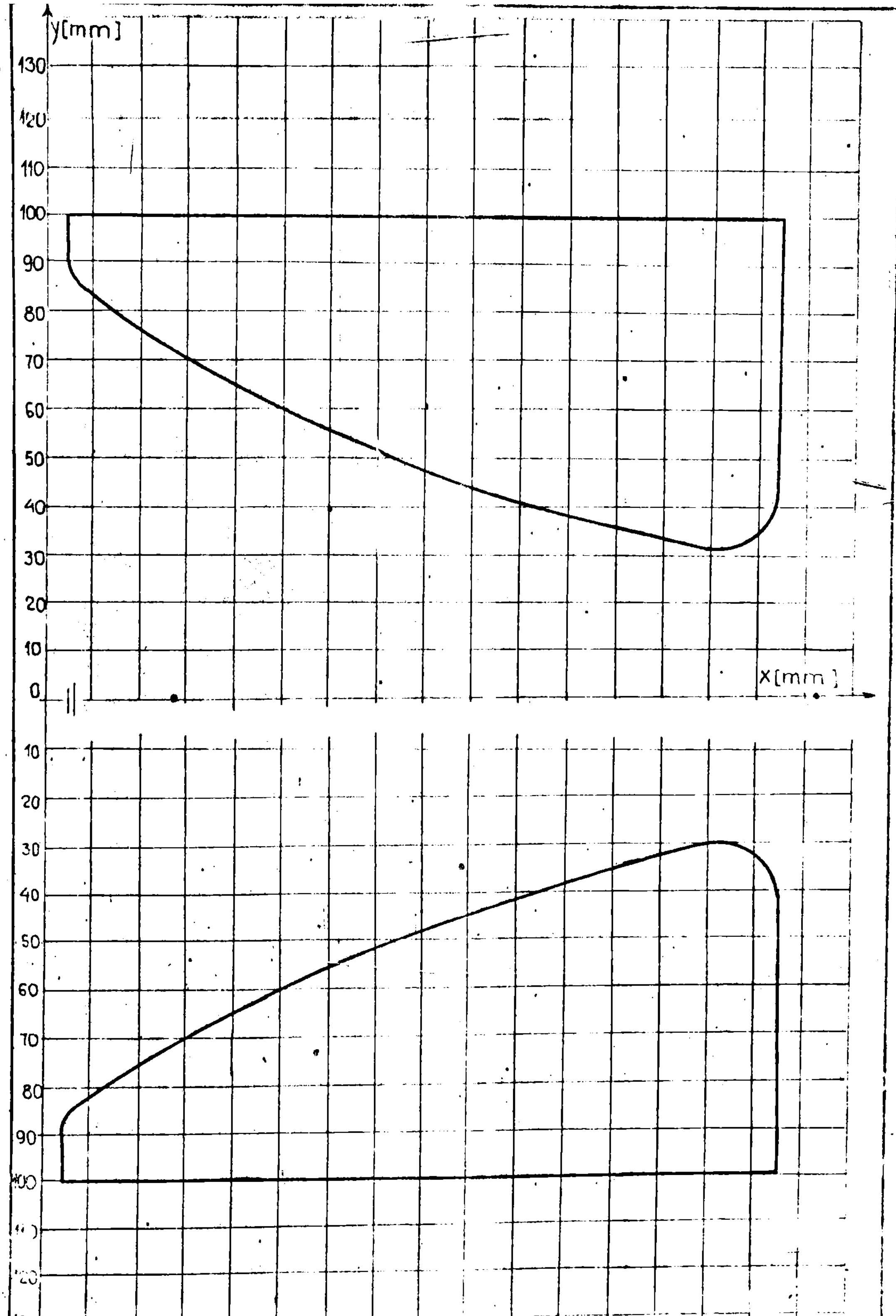


Fig. 3.15 Model pe hîrtie electrorezistivă a [illegible]
[illegible]

3.4.4. Modelul matematic în diferențe finite

În cazul unui cîmp plan paralel, ecuația de tip Laplace ce trebuie integrată se scrie, în coordonate rectangulare:

$$\Delta V_H(x,y) = \frac{\partial^2 V_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_H}{\partial y^2} = 0. \tag{3.77}$$

Condițiile de frontieră sînt de tip Dirichlet, potențialul fiind presupus cunoscut în punctele de pe frontieră.

Pentru rezolvarea ecuației s-a folosit metoda diferențelor finite. Astfel, se dezvoltă în serie Taylor funcția $V_H(x,y)$ în jurul punctului de coordonate x_0, y_0:

$$V_H(x,y) = V_{H_0} + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K!}\left[(x-x_0)\frac{\partial V_H}{\partial x}\Big|_{x=x_0} + (y-y_0)\frac{\partial V_H}{\partial y}\Big|_{y=y_0}\right]^K, \tag{3.78}$$

unde puterea K are semnificația de derivată de ordinul K.

Relația 3.78 se aplică pentru calculul valorii funcției V_H în punctele 1, 2, 3, 4 în raport cu valoarea sa în punctul 0 (fig. 3.16):

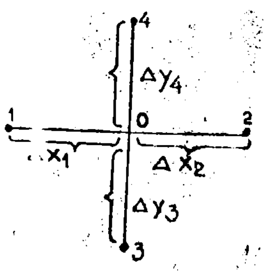


Fig. 3.16.

$$V_{H_1} = V_{H_0} - \left(\frac{\partial V_H}{\partial x}\right)_0 \Delta x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V_H}{\partial x^2}\right)_0 (\Delta x_1)^2 + \dots$$

$$V_{H_2} = V_{H_0} + \left(\frac{\partial V_H}{\partial x}\right)_0 \Delta x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V_H}{\partial x^2}\right)_0 (\Delta x_2)^2 + \dots$$

$$V_{H_3} = V_{H_0} - \left(\frac{\partial V_H}{\partial y}\right)_0 \Delta y_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V_H}{\partial y^2}\right)_0 (\Delta y_3)^2 + \dots$$

$$V_{H_4} = V_{H_0} + \left(\frac{\partial V_H}{\partial y}\right)_0 \Delta y_4 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V_H}{\partial y^2}\right)_0 (\Delta y_4)^2 + \dots \tag{3.79}$$

Dacă se admite aproximarea valorilor funcției pînă la derivatele de ordinul doi inclusiv, atunci din sistemul (3.79) rezultă $\partial^2 V_H/\partial x^2$ și $\partial^2 V_H/\partial y^2$ în punctul zero și deci valoarea funcției potențial în acel punct în raport cu valorile sale în celelalte patru puncte [57]:

$$V_{H_0} = \frac{1}{C}\left(C_1V_{H_1} + C_2V_{H_2} + C_3V_{H_3} + C_4V_{H_4}\right), \tag{3.80}$$

în care:

$$C_1 = \frac{2}{\Delta y_3(\Delta y_3 + \Delta x_2)}, \quad C_2 = \frac{2}{\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)},$$

$$C_3 = \frac{2}{\Delta y_3(\Delta y_3 + \Delta y_4)}, \quad C_4 = \frac{2}{\Delta y_4(\Delta y_3 + \Delta y_4)}, \tag{3.81}$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4.$$

Valorile funcţiei V_H sînt cunoscute pe frontiera Γ.

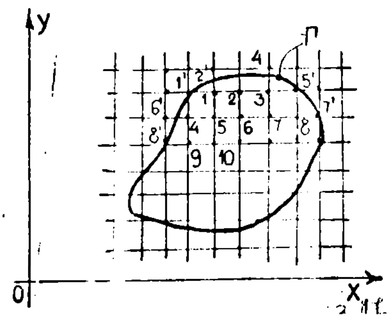


Fig. 3.17.

Domeniul mărginit de curba închisă Γ se împarte într-o reţea de pătrate (în cazul cînd $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta y_3 = \Delta y_4$) sau de dreptunghiuri (cînd $\Delta x_1 = \Delta x_2$ şi $\Delta y_3 = \Delta y_4$) conform figurii 3.17.

Se calculează valoarea funcţiei V_H în punctele vecine ale frontierei, de exemplu în punctul 4 în funcţie de valoarea cunoscută în punctele 6' şi 1', care aparţin lui Γ, iar pentru punctele 5 şi 9 se ia valoarea zero.

Se procedează astfel din aproape în aproape, utilizîndu-se tot timpul valorile funcţiei anterior calculate, pînă cînd se determină valoarea funcţiei în toate punctele interioare. Acest prim set de valori ale funcţiei pentru punctele interioare este serios afectat de erori, deoarece s-au admis valori nule ale funcţiei pentru puncte în care nu se cunoştea valoarea acesteia.

Calculul se repetă cu noul set de valori obţinut pînă cînd valorile funcţiei în punctele interioare lui Γ diferă de la o iteraţie la cea anterioară printr-o valoare maximă impusă.

Din relaţiile (3.79) se pot calcula şi derivatele de ordinul întîi ale potenţialului şi deci intensitatea cîmpului:

$$H = \left[\left(\frac{\partial V_H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_H}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{3.82}$$

şi de asemenea, cu relaţii similare, modulul gradientului cîmpului:

$$|\text{grad } H| = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2} . \qquad (3.83)$$

Calculele numerice au fost efectuate cu ajutorul unui calculator de tip CORAL 4021. Intr-o primă fază s-a elaborat un singur program, dar datorită faptului că la acest tip de calculator nu se pot adresa direct mai mult de 64 K_o, odată cu mărirea numărului de puncte al matricei de la 1 000 la 5 000, s-a impus necesitatea elaborării unui pachet de programe.

Astfel rezultatele intermediare sînt înscrise în fişiere aşa încît orice task poate fi rulat separat pînă la obţinerea rezultatului dorit.

Se prezintă în continuare schemele logice ale taskurilor utilizate.

3.4.5. Pachetul de programe utilizat pentru calculul numeric al cîmpului pentru poli de extensiune finită

In figura 3.18 este reprezentată schema logică a programului FLV. Programul permite introducerea valorilor potenţialului frontierelor F_3 şi F_4 (fig. 3.13). Odată introduse acestea rămîn înscrise într-un fişier pe disc şi la o reapelare a programului sînt afişate în videoformat, putînd fi menţinute sau schimbate în funcţie de dorinţa utilizatorului.

Figura 3.19 prezintă schema logică a programului notat cu INT. Acest program citeşte datele de intrare, limitele matricei (x_{START} şi x_{STOP}) şi paşii pe cele două axe, P_x şi P_y.

In cazul cînd se doreşte o reţea mai fină decît cea iniţială corespunzătoare punctelor de potenţial dat de pe frontiere, de exemplu se înjumătăţeşte pasul, atunci între două puncte de potenţial cunoscut se interpolează valoarea acestuia. Acest lucru este realizat de subrutinele FRONT şi CIT.

In final se scrie fişierul POT.DAT care conţine "coaja" matricii potenţial, adică cuprinde toate valorile potenţialului pe întreaga frontieră, valori necesare iteraţiilor cu paşii Px şi Py stabiliţi.

Programul CV, a cărui schemă logică este prezentată în figura 3.20, calculează potenţialul în fiecare punct al domeniului considerat, rescrie fişierul POT. DAT (care acum conţine valorile potenţialului în toate punctele reţelei, numărul de iteraţii şi timpul de calcul în secunde unitate centrală).

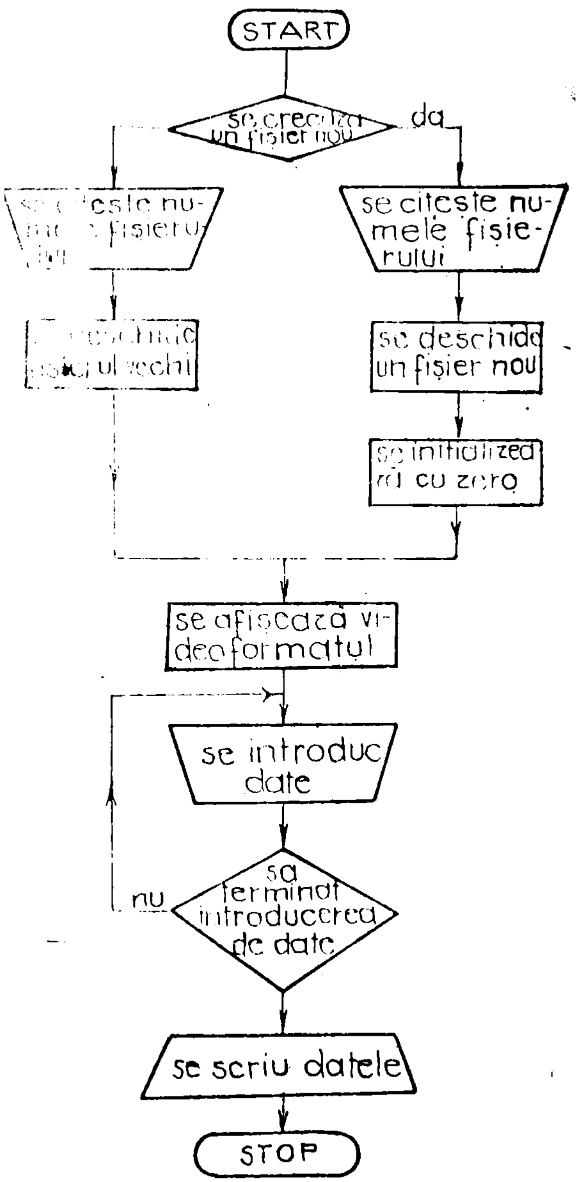


Fig. 3.18.
Schema bloc a programului FLV

Programul a fost testat prin introducerea de valori ale potenţialului de pe frontierele F_3 şi F_4 calculate analitic, considerînd polii _e ex______e ____-nită. Lucrînd în dublă precizie eroarea raportată în procente a matricii potenţ a ca cu a ă cu me o a diferenţelor finite, faţă de cea calculată analitic a fost de sub 0,1 la sută.

Programul H din figura 3.21 calculează modulul intensităţii cîmpului în fiecare punct al matricii utilizînd valorile potenţialului calculate cu programul CV şi înscrie pe disc fişierul H.DAT.

Subrutina GRAD (figura 3.22) calculează modulul gradientului cîmpului în fiecare punct al matricei utilizînd în acest scop valorile din matricea rezultantă a programului H şi înscrie pe disc fişierul GH. DAT.

Lucrînd în dublă precizie, eroarea raportată în procente a matricii modulului gradientului cîmpului H, calculată cu metoda

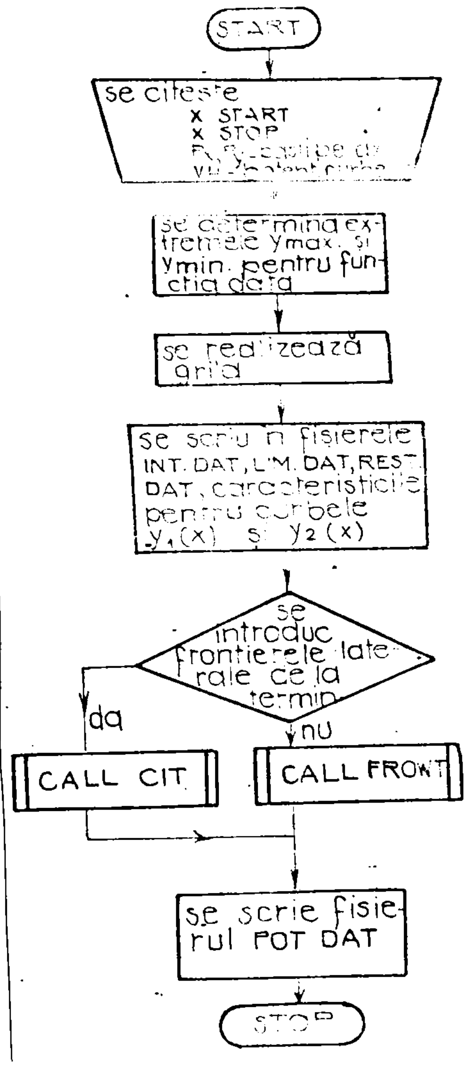


Fig. 3.19.
Schema bloc a programului INT

diferenţelor finite, faţă de cea calculată analitic a fost de sub 0,4 la sută.

Programul mai conţine subrutina FUNCTION în care se introduc funcţiile $y_1(x)$ şi $y_2(x)$, ce reprezintă ecuaţiile polilor, respectiv frontierele F_1 şi F_2 (fig. 3.7). Aceste curbe sînt oarecare, ele putînd fi oricînd redefinite. Programul a fost rulat cu curbele de ecuaţii (3.8) şi (3.9), respectiv (3.45).

3.5. Traiectoriile particulelor între polii cu profil finit ai unui separator magnetofluidic

Pentru a calcula traiectoria particulelor între polii unui separator cu profil finit trebuie cunoscută matricea modulului gradientului în spaţiul dintre poli.

In acest scop de pe modelele electrocinetice realizate s-au citit valorile potenţialului pe frontierele F_3 şi F_4 (figura 3.23), date ce au fost introduse în programul FIV (figura 3.18).

Potenţialul pe frontierele F_1 şi F_2 este constant şi cunoscut; de asemenea se cunosc ecuaţiile curbelor acestor frontiere $y_1 = y_1(x)$ şi $y_2 = y_2(x)$.

Se stabileşte valoarea V_{H_1} pentru potenţialul frontierei F_1 şi $- V_{H_1}$ pentru cel al frontierei F_2.

Se stabilesc limitele zonei cercetate (x_{start} şi x_{stop}) şi paşii pe cele două axe (Px şi Py), valori introduse în programul

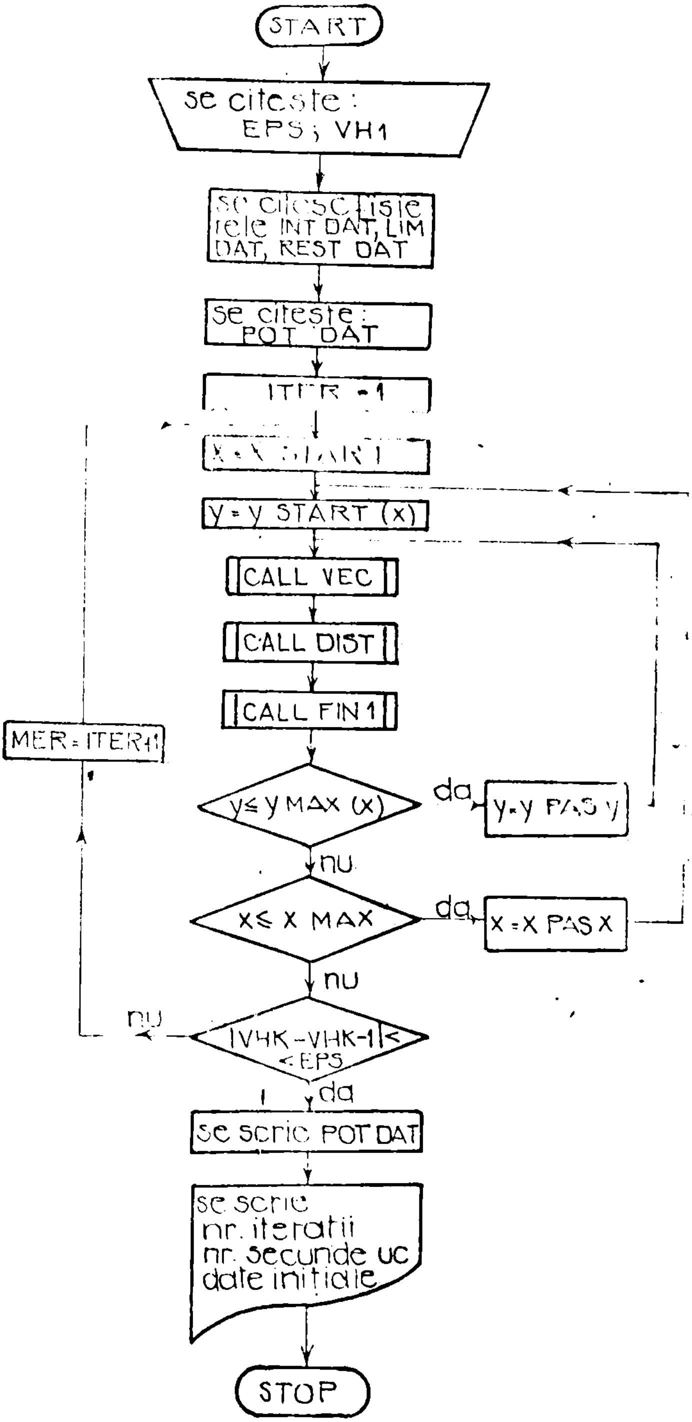


Fig. 3.20.

Schema bloc a programului CV

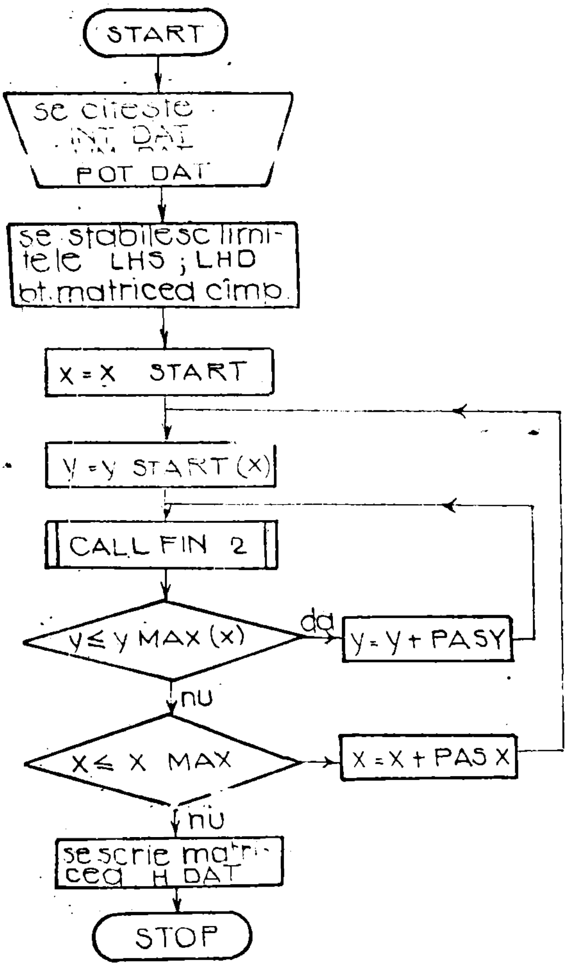


Fig. 3.21.
Schema bloc a programului H

INT (fig. 3.19), împreună cu V_{H_1}. Se calculează distanța $\Delta y = y_1(x_\lambda) - y_2(x_\lambda)$ și se împarte la pasul pe oy (Py). In cazul că această împărțire dă rest, valoarea restului se reține pentru a cunoaște coordonata punctului notat cu 1 în figura 3.23. Pentru a cunoaște coordonata x_μ a punctului 2 se înjumătățește intervalul (x_λ, $x_{\lambda+1}$) pînă cînd punctul 2 se suprapune pe frontieră, coordonată care se reține. Aceste operații sînt realizate de subrutinele FRONT și CIT.

In final programul INT scrie fișierul POT.DAT care conține coordonatele tuturor punctelor de pe frontieră și potențialul acestora. Dacă se dorește schimbarea pasului, atunci pe frontierele F_3 și F_4 valorile potențialului sînt interpolate liniar iar pentru determinarea coordonatelor punctelor de tipul 1 și 2 sînt apelate subrutinele front și cît.

In continuare se calculează valorile potențialului magnetic în toate punctele matricii, prin metoda diferențelor finite descrisă anterior, cu eroarea impusă, cu ajutorul programului CV (fig. 3.20).

Urmează apelarea programelor H și GRAD (fig. 3.21) și3.22) care calculează valorile cîmpului H și a modulului gradientului în toate punctele rețelei, mărimi care sînt scrise în fișierele HDAT și GHDAT.

Se apelează programul TRAK (fig. 3.10) căruia i se introduc valorile coordonatelor de intrare ale particulei și matricei GRADH.

Prin metoda Runge-Kutta Gill (descrisă în paragraful 3.3.2) se calculează traiectoriile particulelor.

In final se tipăresc la imprimantă (sau se afișează la terminal) datele de intrare, rînduri cu comentarii, tabelele ce conțin t_i, $x_i(t_i)$, $z_i(t_i)$ $(i = 1,n)$, graficele cu traiectoriile x_{START} și x_{STOP} (fig. 3.24).

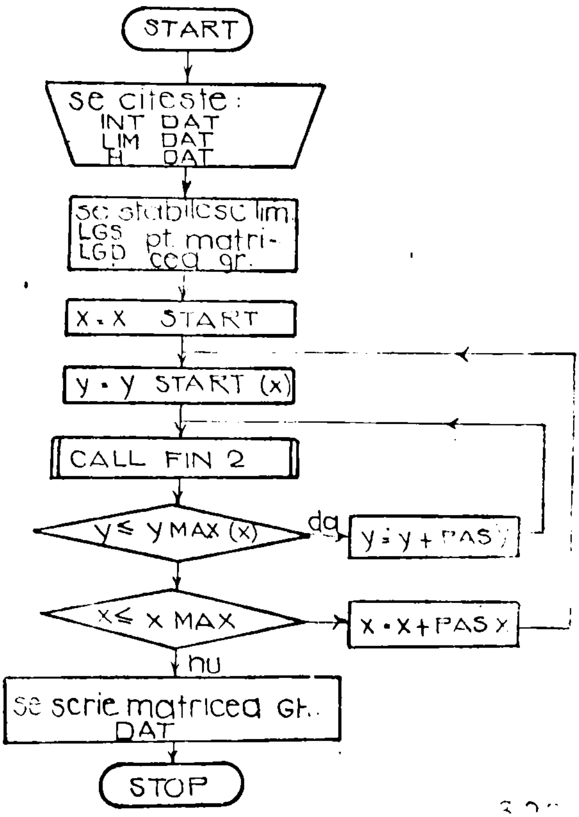


Fig. 3.22.
Schema bloc a programului GRAD

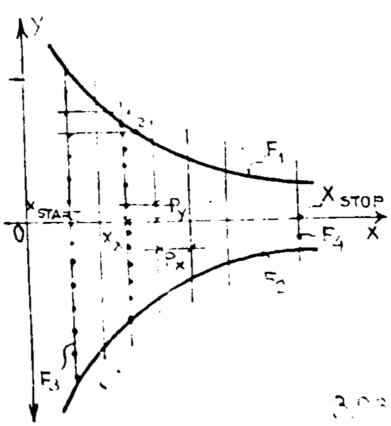


Fig. 3.23.

```
******************
* DATE DE INTRARE *
******************
```

POTENTIALUL MAGNETIC	: VH	= 16800.00	(A)
DENSITATEA LICHIDULUI	: ROL	= 925.00	(kg/mc)
RAZA PARTICULEI	: RP	= 0.0025000	(m)
VISCOZITATEA	: VS	= 0.0010000	(Ns/mp)
MAGNETIZATIA DE SATURATIE	: MO	= 7960	(A/m)
VITEZA INITIALA	: VO	=1.72	(m/s)
UNGHIUL DE PATRUNDERE	: ALFA	= 45.000	(grade)
T INITIAL	: TO	= 0.0000	(s)
T FINAL	: TF	= 0.1950	(s)
PASUL PE AXA TIMP	: DT	= 0.00050	(s)
DENSITATEA PARTICULEI 1	: ROA1	= 11500.00	(kg/mc)
DENSITATEA PARTICULEI 2	: ROA2	= 6400.00	(kg/mc)
DENSITATEA PARTICULEI 3	: ROA3	= 2600.00	(kg/mc)

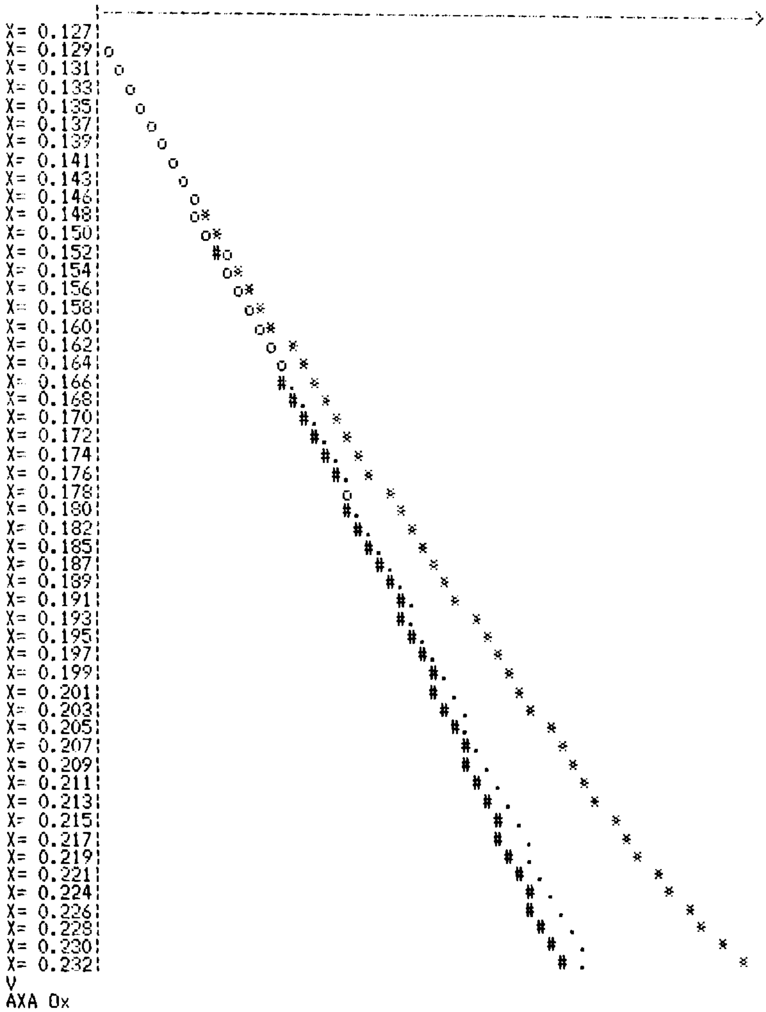
```
   145     154     201  8.7775245E-02
Viteza 1=  1.656562 Viteza 2=  1.470894 Viteza 3=  0.690222 pe axa OX.
Viteza 1=  1.221970 Viteza 2=  1.226887 Viteza 3=  1.247719 pe axa OZ.
Zlichid 1=  0.087775 Zlichid 2=  0.093449 Zlichid 3=  0.123194
******************************************************************************
```

FIG.3.24

POLI CU PROFIL EXPONENTIAL DE DIMENSIUNI FINITE

Ztotal 1= 0.087775 Ztotal 2= 0.093449 Ztotal 3= 0.123194

Tlichid1= 0.072500 Tlichid2= 0.077000 Tlichid3= 0.100500
CODIFICARE : ROA1->"#" ROA2->"." ROA3->"*" SUPRAPUNERE->"o"
ZSTART= 0.0000000 ZSTOP= 0.1231944 AXA Oz



XSTART= 0.1275000 XSTOP = 0.23266 PAS= 0.0020532

Cap. 4. REALIZAREA POLILOR CU PROFIL EXPONENTIAL. DATE EXPERIMENTALE

In acest capitol se studiază traiectoria particulelor pînă la atingerea de către acestea a suprafeţei orizontale.

Se calculează punct cu punct profilul polilor exponenţiali şi se descrie realizarea practică a acestora.

In continuare se prezintă datele experimentale obţinute la celula de separare cu poli cu profil exponenţial executată şi se compară aceste date experimentale cu studiul teoretic.

4.1. Calculul polilor cu profil exponenţial ai unei celule de separare

Dimensionarea pieselor polare s-a făcut pornind de la ecuaţia:

$$y = \frac{1}{c} \arcsin (e^{-cx}) \qquad (4.1)$$

Valoarea constantei C s-a obţinut cu ajutorul metodei descrise în paragraful 3.2. Programul de calcul al constantei C este prezentat în figura 4.1. S-a impus condiţia ca întrefierul minim să fie de 60 mm, de unde a rezultat că profilul polului trece prin punctul P_0 de coordonate (0,2025; 0,03). Eroarea admisă s-a considerat $e = 10^{-6}$. In urma rulării programului s-a obţinut $C = 7{,}44419\ m^{-1}$ limita superioară fiind $b = c^{*} = \pi/(2\ y_0)$. Programul este scris în limbaj BASIC şi a fost rulat pe un calculator de tipul TIMS.

In continuare s-a rulat programul din figura 4.2 care permite calculul perechilor de puncte (x, y) care alcătuiesc polul cu profil exponenţial. Rezultatele sînt trecute în tabelul 4.1, după care s-a desenat profilul din figura 4.3.

In figura 4.3 este prezentat polul de ecuaţie:

$$y_1 = \frac{1}{c} \arcsin (e^{-cx}).$$

Polul al doilea este simetric cu acesta şi are ecuaţia:

$$y_2 = - \frac{1}{c} \arcsin (e^{-cx}).$$

```
  50 PRINT "*******************
************"
  55 PRINT ""
  60 PRINT " f(c)=SIN (yo*c)"
  62 PRINT ""
  65 PRINT "-------------------
------------"
  70 PRINT ""
  80 PRINT " g(c)=EXP ((-x0)*c)"
  85 PRINT ""
  90 PRINT "*******************
************"
  95 PRINT ""
 100 PRINT " EROAREA ADMISA e=?"
 120 INPUT e
 140 PRINT " e=";e
 150 PRINT "-------------------
------------"
 155 PRINT ""
 160 PRINT " COORDONATELE PUNCTU
LUI (x0,y0)"
 180 INPUT x0,y0
 200 PRINT " x0=";x0,"y0=";y0
 210 PRINT "-------------------
------------"
 215 PRINT ""
 220 PRINT " LIMITA INFERIOARA a
=?"
 240 INPUT a
 260 PRINT " a=";a
 270 PRINT "-------------------
------------"
 280 LET b=PI/(2*y0)
 290 PRINT ""
 300 PRINT " LIMITA SUPERIOARA b
=";b
 310 PRINT "-------------------
------------"
 315 PRINT ""
 320 PRINT " PASUL s=?"
 340 INPUT s
 360 PRINT " s=";s
 380 DEF FN f(c)=SIN (y0*c)
 400 DEF FN g(c)=EXP ((-x0)*c)
 420 FOR c=a TO b STEP s
 440 IF ABS (FN f(c)-FN g(c))<=e
 THEN GO TO 480
 460 NEXT c
 465 PRINT "###################
############"
 470 PRINT ""
 480 PRINT " c=";c,"e=";e
 485 PRINT ""
 490 PRINT "===================
============"
 495 PRINT ""
 500 PRINT " x0=";x0,"y0=";y0
 510 PRINT ""
 520 PRINT "###################
############"
```

Fig. 4.1.

Program pentru determinarea Constantei C.

```
   2 PRINT "211288PE"
   5 BORDER 5: INK 2: PAPER 6
  10 PRINT "*******************
************"
  15 PRINT ""
  20 PRINT " PROFILUL POPULUI"
  40 PRINT " EPIPONENTIAL"
  65 PRINT ""
  70 PRINT "*******************
************"
  75 PRINT ""
  80 PRINT " CONSTANTA c=?"
 100 INPUT c
 120 PRINT " c=";c
 130 PRINT "-------------------
------------"
 140 PRINT " INTERRNDALUL (xmin,
xmax)?"
 160 INPUT x1,x2
 180 PRINT " xmin=";x1,"xmax=";x
2
 185 PRINT "-------------------
------------"
 200 PRINT " PASUL s=?"
 220 INPUT s
 240 PRINT " s=";s
 244 PRINT ""
 245 PRINT "===================
============"
 246 PRINT ""
 250 FOR x=x1 TO x2 STEP s
 260 DEF FN y(x)=(1/c)*ASN (EXP
((-x)*c))
 270 PRINT " x=";x,"y=":FN y(x)
 275 PRINT "-------------------
------------"
 280 NEXT X
 290 PRINT ""
 295 PRINT "###################
############"
 296 PRINT ""
 300 PRINT " xmin=":x1,"xmax=":x
2
 310 PRINT "-------------------
------------"
 320 PRINT " s=";s," =";c
 322 PRINT ""
 325 PRINT "###################
############"
 395 PRINT "
          OK!"
```

Fig. 4.2.

Program pentru calculul profilului exponenţial al polului.

4.2. Traiectorii complete ale particulelor în celula de separare

Mişcarea particulelor nemagnetice în lichidul dintre polii separatorului este descrisă de ecuaţia vectorială (3.51). Această ecuaţie a fost scrisă pe componente, (3.52) şi (3.53) şi integrată conform particulei prin lichidul magnetic şi distanţa pe orizontală la ieşirea din lichid (Z_{ℓ}).

BUPT

###################################

Tabelul 4.1'

###################################

x=.0525	y=.099809602
x=.0575	y=.09536763
x=.0625	y=.091204313
x=.0675	y=.08728938
x=.0725	y=.083597859
x=.0775	y=.080108832
x=.0825	y=.076804541
x=.0875	y=.073669741
x=.0925	y=.070691208
x=.0975	y=.067857367
x=0.1025	y=.065158009
x=0.1075	y=.062584063
x=0.1125	y=.060127414
x=0.1175	y=.057780767
x=0.1225	y=.055537522
x=0.1275	y=.053391683
x=0.1325	y=.051337777
x=0.1375	y=.04937079
x=0.1425	y=.047486103
x=0.1475	y=.045679474
x=0.1525	y=.043946947
x=0.1575	y=.042284866
x=0.1625	y=.040689825
x=0.1675	y=.039158643
x=0.1725	y=.037688345
x=0.1775	y=.036276143
x=0.1825	y=.034919415
x=0.1875	y=.033615698
x=0.1925	y=.032362668
x=0.1975	y=.031158131
x=0.2025	y=.030000014
x=0.2075	y=.028886352

###################################

xmin=.0525	xmax=0.2125
s=.005	c=7.4441941

###################################

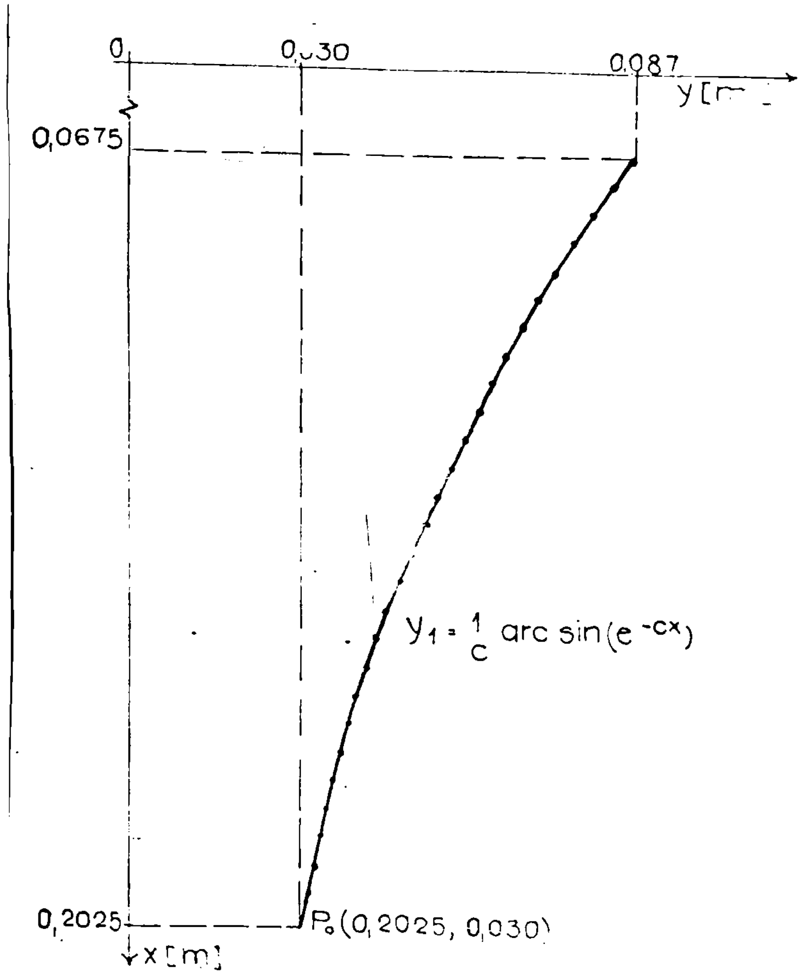


Fig. 4.3.

După parcurgerea stratului de lichid magnetic (2) de grosime Δ particula își continuă mișcarea pînă pe suprafața orizontală (3) de colectare (fig. 4.4) (cu 1 s-a notat polul magnetic).

La ieșirea din lichidul magnetic particula va avea o viteză inițială $\overline{V_o}$, de componente V'_{ox} și V'_{oz}. Legile de mișcare ale particulei în aer sînt:

$$x(t) = V'_{ox}t + g\frac{t^2}{2} \quad \text{și} \tag{4.2}$$

$$z(t) = V'_{oz}t, \tag{4.3}$$

g fiind modulul accelerației gravitaționale.

Din aceste două ecuații se obține traiectoria particulei de aer prin eliminarea parametrului timp:

$$x(z) = \frac{V'_{ox}}{V'_{oz}} z + \frac{g}{2 V'^2_{oz}} \cdot z^2 \qquad (4.4)$$

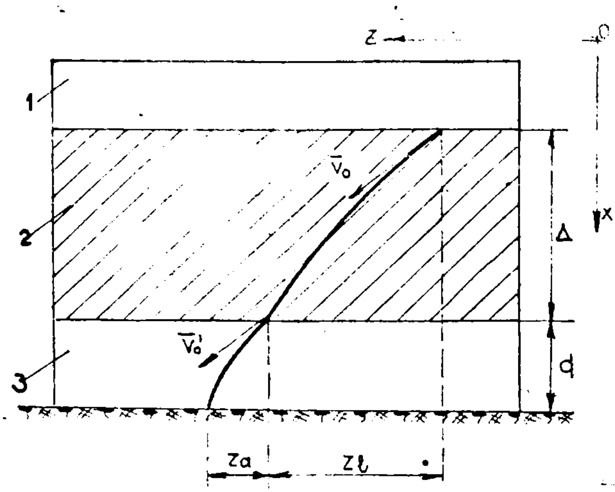


Fig. 4.4.

In practică interesează la ce distanță (pe orizontală) de la locul de intrare va cădea particula. In acest scop se determină distanța pe orizontală parcursă de particulă prin aer Z_a (fig. 4.4):

$$Z_a = \frac{V'_{oz}}{g}\left(\sqrt{V'^2_{oz} + 2gd} - V'_{oz}\right) \qquad (4.5)$$

In final se obține distanța parcursă de particulă pe orizontală:

$$Z_t = Z_a + Z_l \qquad (4.6)$$

In scopul determinării acestei distanțe s-a completat pachetul de programe prezentat în capitolul 3 cu submatricea ELS (fig. 4.5) care calculează V'_{ox} și V'_{oz}, Z_a și distanța totală Z_t.

Programul este scris pentru calculul simultan a trei traiectorii de particule de densități diferite (fig.4.4').

Programul de ansamblu a fost rulat de mai multe ori, pentru cazul polilor cu profil exponențial, avînd ca parametri, pe rînd: potențialul magnetic scalar V_H, magnetizația de saturație a lichidului magnetic M_o (ceea ce atrage după sine și modificarea densității lichidului ROL), raza particulei RP, viteza inițială V_o, unghiul α de pătrundere a particulei în lichidul magnetic și densitatea particulei ROA.

Data curenta :21-JAN-89

```
******************
* DATE DE INTRARE *
******************
```

POTENTIALUL MAGNETIC	: VH	= 16800.00	(A)
DENSITATEA LICHIDULUI	: ROL	= 1050.00	(kg/mc)
RAZA PARTICULEI	: RP	= 0.0025000	(m)
VISCOZITATEA	: VS	= 0.0010000	(Ns/mp)
MAGNETIZATIA DE SATURATIE	: MO	= 19900	(A/m)
VITEZA INITIALA	: VO	=1.72	(m/s)
UNGHIUL DE PATRUNDERE	: ALFA	= 45.000	(grade)
T INITIAL	: TO	= 0.0000	(s)
T FINAL	: TF	= 0.1950	(s)
PASUL PE AXA TIMP	: DT	= 0.00050	(s)
DENSITATEA PARTICULEI 1	: ROA1	= 11500.00	(kg/mc)
DENSITATEA PARTICULEI 2	: ROA2	= 6400.00	(kg/mc)
DENSITATEA PARTICULEI 3	: ROA3	= 2600.00	(kg/mc)

```
    82      90     197   4.9322356E-02
Viteza 1=  1.266032 Viteza 2=  0.977606 Viteza 3= -1.228541 pe axa OX.
Viteza 1=  1.219429 Viteza 2=  1.222335 Viteza 3=  1.246452 pe axa OZ.
          Distanta D=   0.024000
Zlichid 1=  0.049322 Zlichid 2=  0.054259 Zlichid 3=  0.120669
```

TRAIECTORIA COMPLETA A PARTICULELOR

POLI CU PROFIL EXPONENTIAL DE DIMENSIUNI FINITE

NR	TIMP	X ROA1	Z ROA1	X ROA2	Z ROA2	X ROA3	Z ROA3
1	0.0000	0.180000	0.000000	0.180000	0.000000	0.180000	0.000000
2	0.0005	0.180608	0.000608	0.180608	0.000608	0.180607	0.000608
3	0.0010	0.181218	0.001216	0.181216	0.001216	0.181210	0.001216
4	0.0015	0.181828	0.001824	0.181824	0.001824	0.181811	0.001825
5	0.0020	0.182440	0.002433	0.182432	0.002433	0.182409	0.002433
6	0.0025	0.183052	0.003041	0.183041	0.003041	0.183004	0.003042
7	0.0030	0.183666	0.003649	0.183649	0.003649	0.183596	0.003650
8	0.0035	0.184281	0.004257	0.184257	0.004258	0.184186	0.004259
9	0.0040	0.184897	0.004866	0.184865	0.004866	0.184772	0.004867
10	0.0045	[illegible]	0.005474	[illegible]	0.005474	[illegible]	[illegible]

g fiind modulul accelerației gravitaționale.

Din aceste două ecuații se obține traiectoria particulei de aer prin eliminarea parametrului timp:

$$x(z) = \frac{V'_{ox}}{V'_{oz}} z + \frac{g}{2 V'^2_{oz}} . z^2 \qquad (4.4)$$

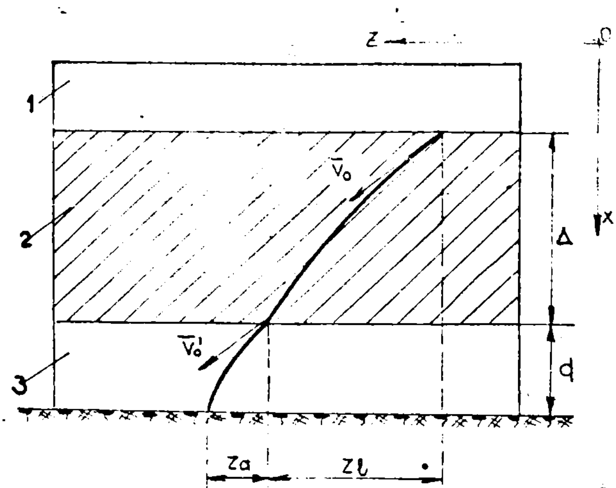


Fig. 4.4.

In practică interesează la ce distanță (pe orizontală) de la locul de intrare va cădea particula. In acest scop se determină distanța pe orizontală parcursă de particulă prin aer Z_a (fig. 4.4):

$$Z_a = \frac{V'_{oz}}{g}\left(\sqrt{V'^2_{oz} + 2gd} - V'_{oz}\right) \qquad (4.5)$$

In final se obține distanța parcursă de particulă pe orizontală:

$$Z_t = Z_a + Z_l \qquad (4.6)$$

In scopul determinării acestei distanțe s-a completat pachetul de programe prezentat în capitolul 3 cu submatricea ELS (fig. 4.5) care calculează V'_{ox} și V'_{oz}, Z_a și distanța totală Z_t.

Programul este scris pentru calculul simultan a trei traiectorii de particule de densități diferite(fig.4.4').

Programul de ansamblu a fost rulat de mai multe ori, pentru cazul polilor cu profil exponențial, avînd ca parametri, pe rînd: potențialul magnetic scalar V_H, magnetizația de saturație a lichidului magnetic M_o (ceea ce atrage după sine și modificarea densității lichidului ROL), raza particulei RP, viteza inițială V_o, unghiul α de pătrundere a particulei în lichidul magnetic și densitatea particulei ROA.

Data curenta :21-JAN-89

****
* DATE DE INTRARE *
****

POTENTIALUL MAGNETIC	: VH = 16800.00	(A)
DENSITATEA LICHIDULUI	: ROL = 1050.00	(kg/mc)
RAZA PARTICULEI	: RP = 0.0025000	(m)
VISCOZITATEA	: VS = 0.0010000	(Ns/mp)
MAGNETIZATIA DE SATURATIE	: MO = 19900	(A/m)
VITEZA INITIALA	: VO =1.72	(m/s)
UNGHIUL DE PATRUNDERE	: ALFA = 45.000	(grade)
T INITIAL	: TO = 0.0000	(s)
T FINAL	: TF = 0.1950	(s)
PASUL PE AXA TIMP	: DT = 0.00050	(s)
DENSITATEA PARTICULEI 1	: ROA1 = 11500.00	(kg/mc)
DENSITATEA PARTICULEI 2	: ROA2 = 6400.00	(kg/mc)
DENSITATEA PARTICULEI 3	: ROA3 = 2600.00	(kg/mc)

82 90 197 4.9322356E-02
Viteza 1= 1.266032 Viteza 2= 0.977606 Viteza 3= -1.228541 pe axa OX.
Viteza 1= 1.219429 Viteza 2= 1.222335 Viteza 3= 1.246452 pe axa OZ.
Distanta D= 0.024000
Zlichid 1= 0.049322 Zlichid 2= 0.054259 Zlichid 3= 0.120669

TRAIECTORIA COMPLETA A PARTICULELOR

POLI CU PROFIL EXPONENTIAL DE DIMENSIUNI FINITE

NR	TIMP	X ROA1	Z ROA1	X ROA2	Z ROA2	X ROA3	Z ROA3
1	0.0000	0.180000	0.000000	0.180000	0.000000	0.180000	0.000000
2	0.0005	0.180608	0.000608	0.180608	0.000608	0.180607	0.000608
3	0.0010	0.181218	0.001216	0.181216	0.001216	0.181210	0.001216
4	0.0015	0.181828	0.001824	0.181824	0.001824	0.181811	0.001825
5	0.0020	0.182440	0.002433	0.182432	0.002433	0.182409	0.002433
6	0.0025	0.183052	0.003041	0.183041	0.003041	0.183004	0.003042
7	0.0030	0.183666	0.003649	0.183649	0.003649	0.183596	0.003650
8	0.0035	0.184281	0.004257	0.184257	0.004258	0.184186	0.004259
9	0.0040	0.184897	0.004866	0.184865	0.004866	0.184772	0.004867
10	0.0045	0.185513	0.005474	0.185473	0.005474	0.185355	0.005476
11	0.0050	0.186131	0.006082	0.186082	0.006083	0.185936	0.006085
12	0.0055	0.186750	0.006690	0.186690	0.006691	0.186514	0.006694
13	0.0060	0.187371	0.007299	0.187300	0.007300	0.187091	0.007303
14	0.0065	0.187993	0.007907	0.187909	0.007908	0.187666	0.007912
15	0.0070	0.188616	0.008516	0.188520	0.008517	0.188239	0.008521
16	0.0075	0.189241	0.009124	0.189131	0.009126	0.188811	0.009130
17	0.0080	0.189867	0.009732	0.189743	0.009734	0.189382	0.009740
18	0.0085	0.190495	0.010341	0.190356	0.010343	0.189951	0.010349
19	0.0090	0.191124	0.010949	0.190969	0.010952	0.190519	0.010958
20	0.0095	0.191755	0.011558	0.191583	0.011560	0.191085	0.011568
21	0.0100	0.192387	0.012166	0.192199	0.012169	0.191653	0.012178
22	0.0105	0.193022	0.012775	0.192817	0.012778	0.192221	0.012787
23	0.0110	0.193659	0.013383	0.193436	0.013387	0.192790	0.013397
24	0.0115	0.194297	0.013992	0.194057	0.013996	0.193359	0.014007
25	0.0120	0.194938	0.014600	0.194679	0.014605	0.193929	0.014617
26	0.0125	0.195580	0.015209	0.195303	0.015214	0.194499	0.015227
27	0.0130	0.196225	0.015818	0.195929	0.015823	0.195071	0.015837
28	0.0135	0.196871	0.016426	0.196556	0.016432	0.195642	0.016447
29	0.0140	0.197519	0.017035	0.197183	0.017041	0.196212	0.017057

30	0.0145	0.198168	0.017644	0.197812	0.017650	0.196781	0.017667
31	0.0150	0.198819	0.018252	0.198441	0.018259	0.197349	0.018278
32	0.0155	0.199471	0.018861	0.199072	0.018868	0.197915	0.018888
33	0.0160	0.200125	0.019470	0.199703	0.019477	0.198481	0.019499
34	0.0165	0.200780	0.020079	0.200335	0.020086	0.199045	0.020109
35	0.0170	0.201436	0.020687	0.200967	0.020696	0.199608	0.020720
36	0.0175	0.202092	0.021296	0.201600	0.021305	0.200170	0.021331
37	0.0180	0.202750	0.021905	0.202233	0.021914	0.200731	0.021942
38	0.0185	0.203407	0.022514	0.202864	0.022524	0.201289	0.022552
39	0.0190	0.204066	0.023123	0.203495	0.023133	0.201843	0.023163
40	0.0195	0.204725	0.023731	0.204126	0.023743	0.202393	0.023775
41	0.0200	0.205385	0.024340	0.204756	0.024352	0.202938	0.024386
42	0.0205	0.206045	0.024949	0.205385	0.024962	0.203479	0.024997
43	0.0210	0.206705	0.025558	0.206013	0.025571	0.204015	0.025608
44	0.0215	0.207365	0.026167	0.206640	0.026181	0.204547	0.026220
45	0.0220	0.208024	0.026776	0.207266	0.026790	0.205075	0.026831
46	0.0225	0.208684	0.027385	0.207889	0.027400	0.205597	0.027442
47	0.0230	0.209344	0.027994	0.208510	0.028010	0.206111	0.028054
48	0.0235	0.210003	0.028603	0.209130	0.028619	0.206619	0.028666
49	0.0240	0.210662	0.029212	0.209747	0.029229	0.207119	0.029278
50	0.0245	0.211321	0.029821	0.210362	0.029839	0.207611	0.029889
51	0.0250	0.211980	0.030430	0.210976	0.030449	0.208096	0.030501
52	0.0255	0.212638	0.031040	0.211587	0.031059	0.208574	0.031113
53	0.0260	0.213295	0.031649	0.212195	0.031668	0.209044	0.031725
54	0.0265	0.213951	0.032258	0.212800	0.032278	0.209507	0.032337
55	0.0270	0.214607	0.032867	0.213402	0.032888	0.209962	0.032950
56	0.0275	0.215262	0.033476	0.214001	0.033498	0.210410	0.033562
57	0.0280	0.215916	0.034085	0.214597	0.034108	0.210851	0.034174
58	0.0285	0.216569	0.034695	0.215190	0.034718	0.211284	0.034787
59	0.0290	0.217222	0.035304	0.215780	0.035328	0.211707	0.035399
60	0.0295	0.217874	0.035913	0.216367	0.035939	0.212120	0.036012
61	0.0300	0.218525	0.036523	0.216951	0.036549	0.212524	0.036625
62	0.0305	0.219174	0.037132	0.217531	0.037159	0.212918	0.037237
63	0.0310	0.219823	0.037741	0.218108	0.037769	0.213303	0.037850
64	0.0315	0.220471	0.038351	0.218681	0.038379	0.213679	0.038463
65	0.0320	0.221118	0.038960	0.219251	0.038990	0.214044	0.039076
66	0.0325	0.221764	0.039569	0.219818	0.039600	0.214401	0.039689
67	0.0330	0.222409	0.040179	0.220381	0.040211	0.214748	0.040302
68	0.0335	0.223054	0.040788	0.220941	0.040821	0.215085	0.040915
69	0.0340	0.223697	0.041398	0.221497	0.041431	0.215413	0.041529
70	0.0345	0.224339	0.042007	0.222049	0.042042	0.215730	0.042142
71	0.0350	0.224980	0.042617	0.222599	0.042652	0.216038	0.042755
72	0.0355	0.225621	0.043226	0.223144	0.043263	0.216335	0.043369
73	0.0360	0.226260	0.043836	0.223687	0.043873	0.216621	0.043983
74	0.0365	0.226899	0.044445	0.224226	0.044484	0.216896	0.044596
75	0.0370	0.227536	0.045055	0.224761	0.045095	0.217161	0.045210
76	0.0375	0.228173	0.045664	0.225293	0.045705	0.217416	0.045824
77	0.0380	0.228810	0.046274	0.225822	0.046316	0.217660	0.046438
78	0.0385	0.229445	0.046884	0.226347	0.046927	0.217893	0.047052
79	0.0390	0.230080	0.047493	0.226869	0.047538	0.218116	0.047666
80	0.0395	0.230714	0.048103	0.227388	0.048148	0.218329	0.048280
81	0.0400	0.231347	0.048713	0.227904	0.048759	0.218530	0.048894
82	0.0405	0.231980	0.049322	0.228417	0.049370	0.218722	0.049508
83	0.0410	0.232615	0.049932	0.228926	0.049981	0.218902	0.050123
84	0.0415	0.233251	0.050542	0.229433	0.050592	0.219072	0.050737
85	0.0420	0.233891	0.051152	0.229936	0.051203	0.219232	0.051352
86	0.0425	0.234532	0.051761	0.230436	0.051814	0.219381	0.051966
87	0.0430	0.235176	0.052371	0.230933	0.052425	0.219520	0.052581
88	0.0435	0.235823	0.052981	0.231428	0.053036	0.219648	0.053196
89	0.0440	0.236472	0.053590	0.231919	0.053647	0.219765	0.053811
90	0.0445	0.237123	0.054200	0.232408	0.054259	0.219872	0.054426
91	0.0450	0.237777	0.054810	0.232898	0.054870	0.219968	0.055040
92	0.0455	0.238433	0.055420	0.233390	0.055481	0.220054	0.055656
93	0.0460	0.239092	0.056029	0.233885	0.056092	0.220129	0.056271
94	0.0465	0.239753	0.056639	0.234383	0.056703	0.220194	0.056886
95	0.0470	0.240417	0.057249	0.234883	0.057314	0.220249	0.057501
96	0.0475	0.241083	0.057858	0.235385	0.057926	0.220292	0.058117
97	0.0480	0.241752	0.058468	0.235890	0.058537	0.220325	0.058732
98	0.0485	0.242423	0.059078	0.236397	0.059148	0.220348	0.059348
99	0.0490	0.243096	0.059688	0.236906	0.059759	0.220360	0.059963
100	0.0495	0.243772	0.060297	0.237419	0.060370	0.220361	0.060579
101	0.0500	0.244451	0.060907	0.237933	0.060981	0.220352	0.061195
102	0.0505	0.245131	0.061517	0.238450	0.061593	0.220332	0.061810
103	0.0510	0.245815	0.062126	0.238970	0.062204	0.220302	0.062426
104	0.0515	0.246500	0.062736	0.239491	0.062815	0.220261	0.063042
105	0.0520	0.247189	0.063346	0.240016	0.063426	0.220209	0.063658
106	0.0525	0.247879	0.063956	0.240543	0.064037	0.220148	0.064275
107	0.0530	0.248572	0.064565	0.241072	0.064648	0.220075	0.064891
108	0.0535	0.249268	0.065175	0.241604	0.065260	0.219992	0.065507
109	0.0540	0.249966	0.065785	0.242138	0.065871	0.219898	0.066123
110	0.0545	0.250666	0.066394	0.242674	0.066482	0.219794	0.066740
111	0.0550	0.251369	0.067004	0.243214	0.067093	0.219680	0.067356
112	0.0555	0.252075	0.067614	0.243755	0.067704	0.219554	0.067973
113	0.0560	0.252782	0.068224	0.244299	0.068315	0.219419	0.068590
114	0.0565	0.253493	0.068833	0.244845	0.068927	0.219273	0.069207
115	0.0570	0.254205	0.069443	0.245394	0.069538	0.219116	0.069823
116	0.0575	0.254921	0.070053	0.245946	0.070149	0.218949	0.070440
117	0.0580	0.255638	0.070662	0.246499	0.070760	0.218771	0.071057
118	0.0585	0.256358	0.071272	0.247056	0.071371	0.218583	0.071674
119	0.0590	0.257081	0.000000	0.247614	0.071982	0.218384	0.072292
120	0.0595	0.000000	0.000000	0.248176	0.072594	0.218175	0.072909
121	0.0600	0.000000	0.000000	0.248739	0.073205	0.217955	0.073526
122	0.0605	0.000000	0.000000	0.249305	0.073816	0.217725	0.074143
123	0.0610	0.000000	0.000000	0.249874	0.074427	0.217485	0.074761
124	0.0615	0.000000	0.000000	0.250445	0.075038	0.217234	0.075378
125	0.0620	0.000000	0.000000	0.251018	0.075649	0.216972	0.075996

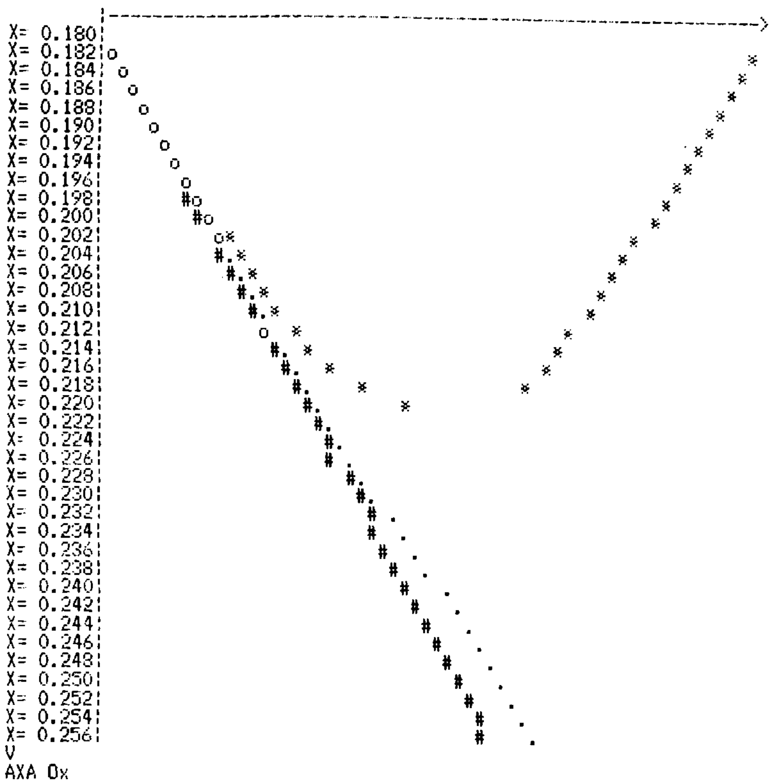
126	0.0625	0.000000	0.000000	0.251594	0.076261	0.216700	0.076614	
127	0.0630	0.000000	0.000000	0.252172	0.076872	0.216417	0.077232	
128	0.0635	0.000000	0.000000	0.252753	0.077483	0.216124	0.077849	
129	0.0640	0.000000	0.000000	0.253336	0.078094	0.215820	0.078467	
130	0.0645	0.000000	0.000000	0.253922	0.078705	0.215506	0.079085	
131	0.0650	0.000000	0.000000	0.254510	0.079317	0.215182	0.079703	
132	0.0655	0.000000	0.000000	0.255101	0.079928	0.214847	0.080322	
133	0.0660	0.000000	0.000000	0.255694	0.080539	0.214501	0.080940	
134	0.0665	0.000000	0.000000	0.256289	0.081150	0.214146	0.081558	
135	0.0670	0.000000	0.000000	0.256887	0.000000	0.213781	0.082177	
136	0.0675	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.213406	0.082795	
137	0.0680	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.213022	0.083414	
138	0.0685	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.212629	0.084032	
139	0.0690	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.212226	0.084651	
140	0.0695	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.211814	0.085270	
141	0.0700	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.211392	0.085889	
142	0.0705	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.210961	0.086507	
143	0.0710	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.210521	0.087126	
144	0.0715	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.210071	0.087746	
145	0.0720	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.209612	0.088365	
146	0.0725	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.209143	0.088984	
147	0.0730	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.208668	0.089603	
148	0.0735	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.208186	0.090223	
149	0.0740	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.207696	0.090842	
150	0.0745	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.207199	0.091462	
151	0.0750	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.206694	0.092081	
152	0.0755	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.206182	0.092701	
153	0.0760	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.205663	0.093321	
154	0.0765	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.205137	0.093941	
155	0.0770	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.204603	0.094561	
156	0.0775	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.204064	0.095181	
157	0.0780	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.203519	0.095801	
158	0.0785	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.202971	0.096421	
159	0.0790	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.202418	0.097041	
160	0.0795	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.201861	0.097662	
161	0.0800	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.201300	0.098282	
162	0.0805	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.200734	0.098903	
163	0.0810	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.200165	0.099523	
164	0.0815	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.199591	0.100144	
165	0.0820	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.199012	0.100765	
166	0.0825	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.198431	0.101385	
167	0.0830	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.197848	0.102006	
168	0.0835	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.197264	0.102627	
169	0.0840	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.196680	0.103248	
170	0.0845	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.196094	0.103869	
171	0.0850	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.195507	0.104491	
172	0.0855	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.194920	0.105112	
173	0.0860	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.194331	0.105733	
174	0.0865	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.193742	0.106355	
175	0.0870	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.193153	0.106976	
176	0.0875	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.192566	0.107598	
177	0.0880	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.191979	0.108219	
178	0.0885	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.191393	0.108841	
179	0.0890	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.190807	0.109463	
180	0.0895	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.190223	0.110085	
181	0.0900	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.189639	0.110707	
182	0.0905	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.189055	0.111329	
183	0.0910	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.188470	0.111951	
184	0.0915	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.187884	0.112573	
185	0.0920	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.187296	0.113196	
186	0.0925	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.186707	0.113818	
187	0.0930	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.186117	0.114440	
188	0.0935	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.185525	0.115063	
189	0.0940	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.184932	0.115685	
190	0.0945	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.184337	0.116308	
191	0.0950	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.183739	0.116931	
192	0.0955	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.183139	0.117554	
193	0.0960	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.182535	0.118177	
194	0.0965	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.181929	0.118800	
195	0.0970	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.181321	0.119423	
196	0.0975	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.180709	0.120046	
197	0.0980	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.180095	0.120669	
198	0.0985	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.179482	0.000000	

Ztotal 1= 0.070952 Ztotal 2= 0.081271 Ztotal 3= 0.455564

Tlichid1= 0.041000 Tlichid2= 0.045000 Tlichid3= 0.098500
CODIFICARE : ROA1->"#" ROA2->"." ROA3->"*" SUPRAPUNERE->"o"
ZSTART= 0.0000000 ZSTOP= 0.1206691 AXA Oz

```
         !------------------------------------------------------------>
X= 0.180!
X= 0.182!o                                                             *
X= 0.184! o                                                           *
X= 0.186!  o                                                         *
X= 0.188!   o                                                       *
X= 0.190!    o                                                     *
X= 0.192!     o                                                   *
X= 0.194!      o                                                 *
X= 0.196!       o                                               *
X= 0.198!       #o                                             *
X= 0.200!        #o                                           *
```

CODIFICARE : ROA1->"#" ROA2->"." ROA3->"*" SUPRAPUNERE->"o"
ZSTART= 0.0000000 ZSTOP= 0.1206691 AXA Oz



XSTART= 0.1800000 XSTOP = 0.17948 PAS= 0.0020112

Fig.4.4'

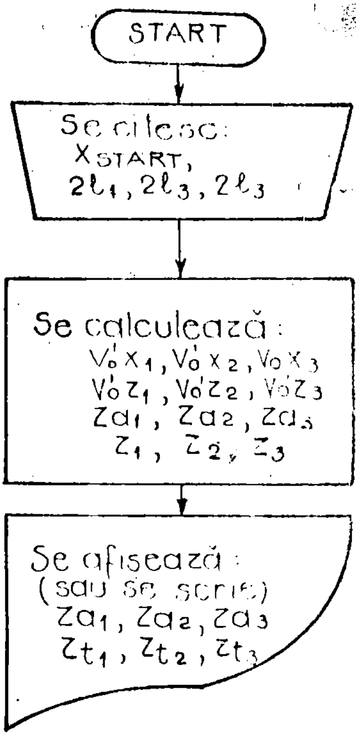


Fig. 4.5

4.3. Realizarea pieselor polare

Din STAS 500/2-80 s-a ales o tablă de oţel nealiat laminat OL 37, care a fost tăiată la dimensiunile 330x110x160 (mm) (2 bucăţi).

După debitare, pentru obţinerea piesei s-au efectuat următoarele operaţii: frezare, găurire, filetare, frezare prin copiere.

Intr-o primă etapă s-a urmărit obţinerea unui profil brut, care să aproximeze profilul exponenţial prin trei suprafeţe plane (fig. 4.5).

A doua etapă a constat în prelucrarea piesei cu ajutorul unei maşini de frezat prin copiere. Pentru aceasta a fost executat în prealabil un şablon de copiere.

In final piesele polare au fost finisate prin şlefuirea suprafeţelor.

Piesele polare cu profil exponenţial astfel obţinute au fost montate în circuitul magnetic al separatorului magnetofluidic (fig. 4.7).

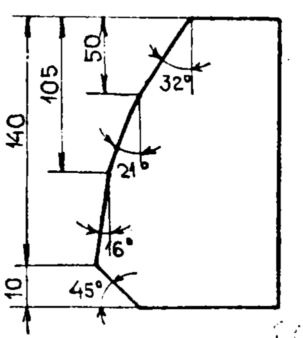


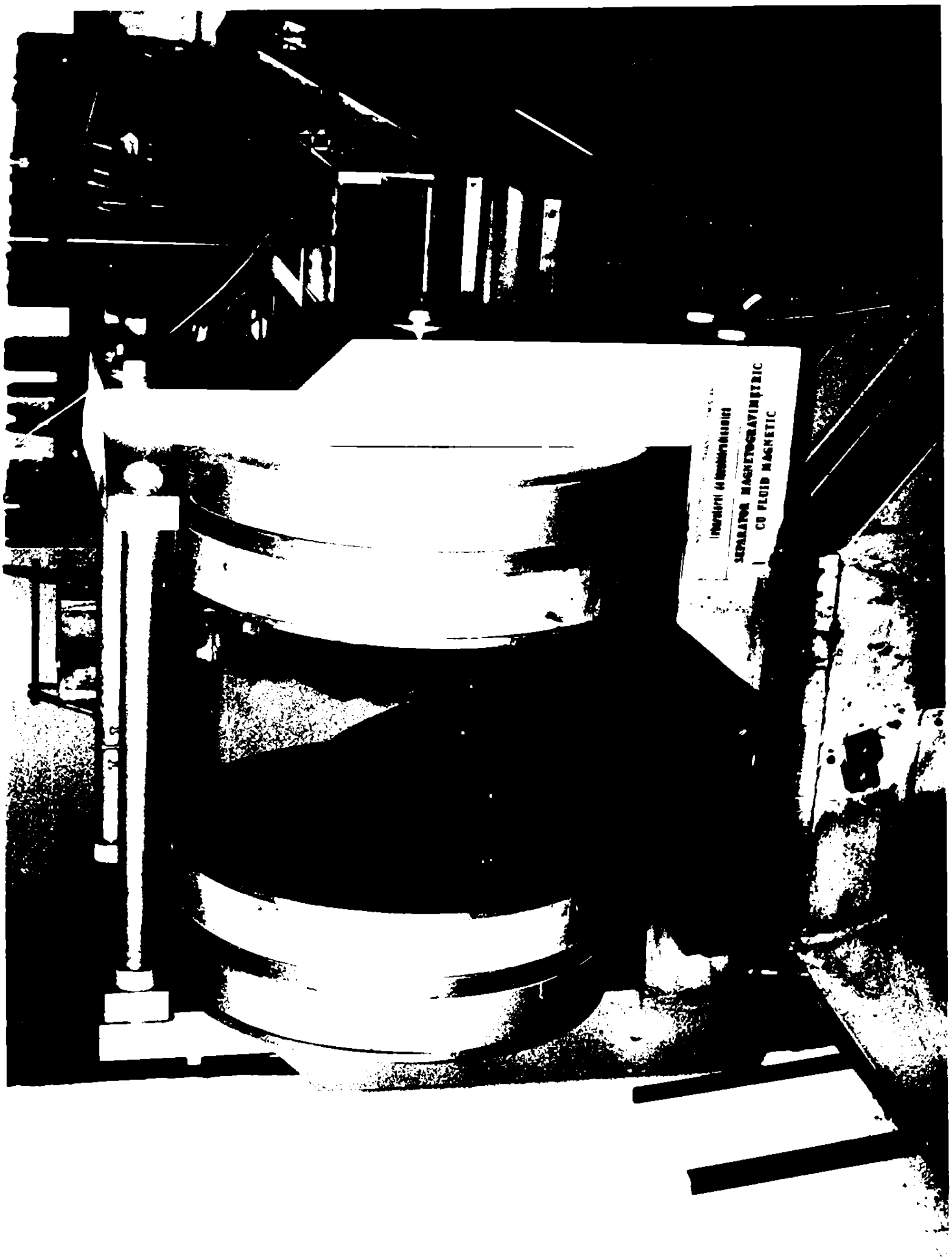
Fig. 4.6.

4.4. Date experimentale. Concluzii

Lichidele magnetice de lucru au fost pe bază de petrol de magnetizaţia de saturaţie M_0 = 250 G (19 900 A/m) şi M_0 = 100G(7 960 A/m), de densităţi 1 050 kg/m^3 şi 925 kg/m^3.

Pe un plan înclinat (fig. 4.8) de lungime "ℓ"(1) s-au pus sfere din diverse materiale şi de diverse diametre. Cu ajutorul dispozitivului (2) se pot da planului diferite înclinaţii, unghiul α citindu-se direct.

Pentru a calcula viteza de pătrundere a sferelor în lichid s-a determinat acceleraţia acestora [60]. Astfel, dacă vectorul de poziţie al centrului de masă la momentul t este $\bar{r}$, mişcarea este descrisă de ecuaţia (fig. 4.9):


SEPARATOR MAGNETOGRAVIMETRIC
CU FLUID MAGNETIC

$$M\ddot{\bar{r}} = M\bar{g} + \bar{R} + \bar{f}, \qquad (4.7)$$

unde $\bar{R}$ este reacţiunea planului, $\bar{f}$ forţa de frecare, M masa sferei, $\ddot{\bar{r}}$ derivata a doua a vectorului de poziţie în funcţie de timp, $\bar{g}$ accelera ia gr ţ 1.

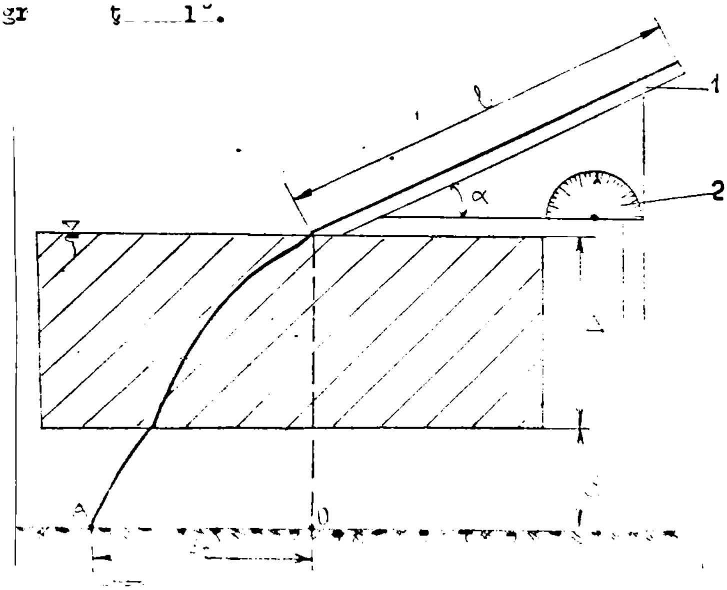


Fig. 4.8.

Proiecţiile ecuaţiei (4.7) pe un sistem de axe rectangulare sînt:

$$M\ddot{x}(t) = M g \sin\alpha - f, \qquad (4.8)$$

$$M\ddot{y}(t) = R - M g \cos\alpha . \qquad (4.9)$$

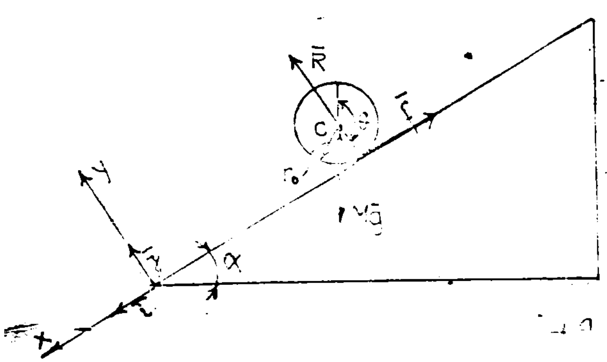


Fig. 4.9.

Momentul forţelor exterioare faţă de axa ce trece prin centrul de masă este:

$$\bar{\mathcal{M}} = - r_0 f \bar{k}, \qquad (4.10)$$

unde r_0 este raza sferei.

Momentul cinetic faţă de axa orizontală ce trece prin C are expresia:

$$\bar{L} = I_s\bar{\omega} = - I_s\dot{\theta}\bar{K}, \qquad (4.11)$$

unde I_s este momentul de inerţie al sferei iar θ este unghiul din figura 4.9. Legea conservării momentului cinetic se scrie:

$$\mathcal{M} = \frac{d\bar{L}}{dt} \qquad (4.12)$$

Deoarece sfera rămîne pe planul înclinat y = 0, iar X = aθ (nu există alunecare) şi cum $I_s = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r_o^2$, rezultă acceleraţia sferei:

$$a = \frac{5}{7} g \sin \alpha \, . \qquad (4.13)$$

Dacă lungimea planului înclinat este ℓ, rezultă viteza de pătrundere a particulei sferice în lichidul magnetic:

$$v_o = \sqrt{\frac{10}{7} g \ell \sin \alpha} \qquad (4.14)$$

La o lungime a planului înclinat de ℓ = 30 cm şi la un unghi $\alpha = 45^{o}$ se obţine v = 1,72 m/s.

S-au folosit sfere cu razele cuprinse între 1,8 şi 2,5 mm, din materiale cu densităţile cuprinse între 2 600 şi 11 500 kg/m^3.

S-a lucrat la trei valori ale intensităţii curentului electric prin bobine: I = 6 A, 10 A şi 12 A, ceea ce a corespuns la un potenţial magnetic V_H = 8 400 A, 14 000 A şi respectiv 16 800 A.

Au fost efectuate cîte trei seturi de măsurători pentru fiecare situaţie, făcîndu-se media aritmetică a rezultatului.

Sferele au fost lăsate pe rînd libere la partea superioară a planului înclinat, pe care au rulat porţiunea "ℓ", obţinînd la intrarea în lichidul magnetic viteza V_o (4.14). In continuare ele au străbătut stratul de lichid magnetic Δ dintre polii separatorului şi şi-au continuat traiectoria în aer pînă la suprafaţa orizontală de colectare. Pe suprafaţa de colectare a fost aşezată hîrtie, pe care în prealabil era marcat punctul O (piciorul perpendicularei dusă din punctul de pătrundere al sferei pe suprafaţa orizontală), astfel încît punctul A de aterizare a sferei a putut fi recunoscut uşor după urma imprimată pe hîrtie de lichidul magnetic antrenat de sferă.

In tabelul 4.1 sînt prezentate rezultatele experimentale pentru trei sfere nemagnetice (notate cu S_1, S_2 şi S_3) de aceeaşi rază RP = 2,5 mm şi de densităţi ρ_1 = 11 500 kg/m^3, ρ_2 = 6 400 kg/m^3 şi ρ_3 = 2 600 kg/m^3.

Se observă că lungimea traiectoriei (şi deci Z_{total}) creşte odată cu creşterea intensităţii curentului (implicit al potenţialului magnetic scalar V_H) la aceeaşi particulă şi de asemenea, la acelaşi V_H lungimea traiectoriei creşte cu descreşterea densităţilor sferelor. Magnetizaţia de saturaţie a lichidului magnetic utilizat în acest caz este M_o = 100 G.

Tabelul 4.2 conţine datele experimentale în cazul utilizării unui lichid magnetic cu magnetizaţia de saturaţie M_o = 250 G. Si în acest caz Z_t creşte cu descreşterea densităţii şi este de remarcat faptul că la valoarea de 14 000 A şi 16 800 A a potenţialului magnetic scalar sfera S_3, de densitate ϱ_3 = 2 600 kg/m^3, nu mai străbate stratul de lichid magnetic, ci pluteşte. Sferele S_1 şi S_2 trec prin stratul Δ de lichid magnetic şi ajung pe suprafaţa orizontală inferioară, realizîndu-se astfel o separare netă a sferei S_3 de celelalte două din material mai dens.

Tabelul 4.1

M_o = 100 G (7 960 A/m)					
Z_t [mm]					
Nr. de încercări		1	2	3	Media
I = 6 A, V_H = 8 400 A	S_1	61	63	62	62
	S_2	66	65	64	65
	S_3	72	73	73	72,6
I = 10 A, V_H = 14 000 A	S_1	63	63	64	63,3
	S_2	67	67	68	67,6
	S_3	75	75	75	75
I = 12 A, V_H = 16 800 A	S_1	68	68	69	68,3
	S_2	70	70	71	70,3
	S_3	79	80	78	79

Intre rezultatele teoretice obţinute la rulările pe calculator (paragraful 4.2) şi cele experimentale prezentate în tabelele 4.1 şi 4.2 este o bună concordanţă, diferenţa dintre acestea fiind sub 10 %.

Tabelul 4.2

M_o = 250 G (19 900 A/M)					
Z_t [mm]					
Nr. de încercări		1	2	3	Media
I = 6 A, V_H = 8 400 A	S_1	65	64	66	65
	S_2	70	69	69	69,6
	S_3	90	92	92	91,3
I = 10 A, V_H = 14 000 A	S_1	68	68	68	68
	S_2	75	75	76	75,3
	S_3	Plutește	P	P	P
I = 12 A, V_H = 16 800 A	S_1	68	69	70	69
	S_2	80	80	80	80
	S_3	P	P	P	P

Această diferență s-ar putea datora faptului că particula nu intră în lichid exact pe axa de simetrie a polilor. De asemenea s-a remarcat posibilitatea ca densitatea lichidului magnetic să nu fie riguros constantă, ci să varieze cu înălțimea stratului de lichid, fiind influențată de gradientul cîmpului magnetic din celula de separare.

Separatorul magnetofluidic cu celula de separare avînd poli cu profil exponențial astfel realizat poate servi la separarea materialelor nemagnetice de densități diferite, după locul în care acestea cad, lungimea traiectoriei fiind funcție de densitate.

De asemenea, mărind intensitatea curentului prin bobinele de excitație, deci crescînd valoarea potențialului magnetic scalar, se poate realiza o separare netă a două fracțiuni de particule de densități diferite, unele străbătînd stratul de lichid magnetic iar altele rămînînd la suprafața acestuia.

Cap. 5. CONCLUZII FINALE

Tema tratată în teza de doctorat este de mare actualitate, lichidele magnetice constituind baza unor tehnologii de vîrf.

Proprietățile deosebite ale acestor lichide, faptul că ele își mențin toate calitățile de lichide, cu o stabilitate înaltă și totodată posedă și proprietățile materialelor magnetice dispersate în matricea lichidă, fac ca acestea să prezinte un deosebit interes în diverse domenii de actualitate.

In teză, autorul și-a propus să prezinte rezultatele pe care le-a obținut în legătură cu studiul proprietăților magnetice ale lichidelor magnetice, studiul de ansamblu al forțelor și forțele care se exercită asupra corpurilor nemagnetice imersate în lichide magnetice, studiul cîmpului (a potențialului magnetic scalar, a intensității cîmpului magnetic și a gradientului cîmpului magnetic) din spațiul dintre piesele polare ale unui separator cu lichid magnetic.

In acest context s-au adus următoarele contribuții originale:

- în cadrul studiului susceptivității magnetice inițiale se folosește o metodă care prin principiul ei este mai precisă decît altele existente în literatura de specialitate;

- pentru prima dată la noi în țară a fost studiată dependența de frecvență a părții reale și imaginare a susceptivității magnetice complexe a unor lichide cu particule din ferită de cobalt, lichidul fiind magnetizat de un cîmp magnetic constant;

- metoda utilizată pentru determinarea magnetizației de saturație a lichidelor magnetice prezintă o mare precizie, rezultatele experimentale fiind prelucrate pe calculator;

- măsurarea permitivității magnetice a lichidelor magnetice și trasarea curbelor de magnetizare se face în funcție de inducție magnetică din interiorul probei;

- este dată o demonstrație mai generală decît cea cunoscută în literatură pentru calculul forței rezultante exercitată de cîmp asupra unor corpuri, pe baza integrării tensiunilor fictive;

- se calculează forța exercitată de cîmpul magnetic asupra unei sfere nemagnetice imersată într-un lichid magnetic, la cîmpuri mici, dimensiunile sferei putînd fi arbitrare;

- este conceput un pachet de programe pentru calculul, în fiecare punct al spațiului dintre polii unui separator cu lichid magnetic a potențialului magnetic scalar, a modulului intensității cîmpului magnetic și a modulului gradientului intensității cîmpului magnetic, utilizînd metoda diferențelor finite;

- sînt realizate două modele electrocinetice pentru a putea studia, prin analogie cu cîmpul magnetic, celule de separare avînd piesele polare de dimensiuni finite;

- se dă o demonstrație a faptului că nu este posibilă existența unui cîmp magnetic al cărui gradient să fie constant și să aibă o orientare unidirecțională;

- se stabilește o configurație de poli la care gradientul cîmpului magnetic este unidirecțional, dar variază exponențial în modul;

- este conceput un pachet de programe pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale neliniare ce descriu traiectoriile particulelor în celule de separare a separatorului cu lichid magnetic. Acest pachet de programe utilizează modulul gradientului intensității cîmpului magnetic pentru calculul și trasarea, punct cu punct a traiectoriei;

- este calculată și realizată practic o celulă de separare avînd polii cu profil exponențial;

- se studiază traiectoria completă, pînă la locul de colectare, a particulelor în celule de separare, comparîndu-se rezultatele teoretice cu cele experimentale.

In încheiere, se poate menționa că teza de doctorat se înscrie în cadrul preocupărilor existente la Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timișoara de studiu al lichidelor magnetice, de realizare a acestora și implementare a lor, în producție [65, 66, 67, 68, 69].

BIBLIOGRAFIE

1.- S.W. CHARLES and J. POPPLEWELL, Ferromagnetic liquids. Edited by E.P. Wohlfarth, North-Holland Publishing Co. 1980.

2.- I. [illegible] and E. [illegible], Ac susceptibility and static properties of an Fe_3O_4 ferrofluid, J.M.M.M. 24(1981), 54-66.

3.- S. CHIKAZUMI et al, Physics of magnetic fluids. J.M.M.M 65(1987) 245-251.

4.- M.M. MAIOROV, Magnitnaia Ghidrodinamica, 1980, Nr.4, p. 11-18.

5.- S.V. [illegible], B.L. [illegible], Magnitnaia Ghidrodinamica, 1980, Nr. 4, p. 11-18.

6.- S.W. CHARLES and R.E. ROSENSWEIG, Introduction to the magnetic fluids bibliography, J.M.M.M. 39(1983).

7.- [illegible] et al. Preparation and properties of Ni-Fe magnetic fluids. J.M.M.M 65 (1987) 257-260.

8.- V.V. SOKOLOV, Hydrodynamics of magnetic fluids, J.M.M.M 65 (1987) 301-306.

9.- M.M. MAIOROV, Cercetarea experimentală a permeabilităţii magnetice a lichidelor magnetice în cîmp magnetic variabil Magnitnaia Ghidrodinamica, 1979, nr. 2, 21-26.

10.- A.I. MOROZOV et al. Magnetic properties of ferrocolloids: The effect of interparticle interactions. J.M.M.M 65 (1987) 269-272.

11.- M.M. MAIOROV, Studiul experimental al mişcării de rotaţie interne şi a structurii microscopice a fluidului magnetic. Salospils (URSS) 1980.

12.- B.K. [illegible], On the low-field, low-frecquency susceptibility of [illegible] APPL PHYS 19 (1986) L 195-197.

13.- P.C. FANNIN, B.K.P. SCAIFE, S.W. CHARLES, New technique for measuring the complex susceptibility of ferrofluids. J. PHYS. E. Sci. Instrum 19 (1986).

14.- P.C. FANNIN, B.K.P. SCAIFE and S.W. CHARLES, A study of the complex susceptibility of ferrofluids and rotational brownian motion. J.M.M.M 65 (1987).

15.- P.C. SCHOLTEN, How magnetic can a magnetic fluid be? JMMM 39 (1983) 99-106.

16.- R.A. CURTIS, Second order effects in fluidmagnetic buoyancy. Appl. Sci Res. 29 (1984) 342-350.

17.- T. SATO et. al., Magnetic properties of ultafine ferrite particles. JMMM 65 (1987) 252-256.

18.- JU.I. [illegible], V.I. [illegible], Magnitnaia Ghidrodinamica, 1, (1978) 23-26.

19.- V.V. GOGOSOV, Some theoretical and practical problems of separation in magnetic fluids. JMMM 39 (1983) 169-172.

20.- T. FUJITA, M. MAMIYA, Interaction forces between nonmagnetic particles in the magnetized magnetic fluid. JMMM 65 (1987) 207-210.

21.- [illegible], [illegible], [illegible], A.O. TSEBERS, Eksperimentalinoe issledovanie dispersii magnitnoi vospriimcivosti kolloidn magnitojestkih ciastiţ v zavisimosti ot magnitnogo polia vnejnego, Magnitnaia Ghidrodinamica, 1987, Nr. 1, 53-57.

22.- [illegible], A.O. TSEBERS, Magnitnaia Ghidrodinamica, 1979, 2, 13-20.

23.- A.O. TSEBERS, Magnitnaia Ghidrodinamica, 1987, Nr. 4, c.17-22.

24.- R.E. ROSENSWEIG, Ferrohydrodynamics. Cambridge University Press 1985.

25.- D. [illegible], Asupra determinării experimentale a susceptivităţii iniţiale a fluidelor magnetice. Conf. [illegible] şi [illegible] Timişoara, 18-19.[illegible]-1985.

26.- I. [illegible], D. [illegible], L. VÉKÁS, Consideraţii cu privire la geometria polilor şi traiectoriile particulelor într-un separator magnetofluidic. Conf. [illegible] şi [illegible] Timişoara, 18-19.[illegible].1985.

27.- I. DE SABATA, Bazele electrotehnicii. Litografia IPT, 1974.

28.- I. DE SABATA, Unele teoreme ale inductivităţilor complexe ale bobinelor în prezenţa mediilor cu histerezis vâscos. Conf. naţ. de el. şi el. Timişoara, 17-18 sept. 1982.

29.- V. WILNER, Măsurări electrice vol. 2, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1969.

30.- R.W. CHANTRELL et al. IEEE Trans. Magn. MAG 14 (1978) 975.

31.- E.BLUMS, A. MIHAILOV, R. OZOLS, Teple i masso magnituon pole. Riga 1980, 206.

32.- V.V. TEKANOV, Magnitnaia Ghidrodinamica, 1977, 4, 16-20.

33.- I. BURZO, Fizica fenomenelor magnetice. Ed. Acad. RSR, Bucureşti 1979.

34.- I.DE SABATA, Bul.St. şi Th. al IPT, Tom 29(43), Electrot. 1984.

35.- I.A. STRATTON, Théorie de l'electromagnétisme, Dunod, Paris, 1969.

36.- AL. NICULA, F. PUSKAS, Dielectrici şi feroelectrici. Ed. Scrisul românesc, Craiova, 1982.

37.- S. TITEICA, Termodinamica. Ed. Acad. RSR, Bucureşti, 1982.

38.- I.DE SABATA, Bul. St. şi Th. al IPT, Tom 2 (d 70) Electrot. 1981.

39.- I.E. TAMM, Fundamentals of the Theory of Electricity Mir Publichers Moscow, 1979.

40.- R. RADULET, Bazele teoretice ele electrotehnicii. Lit. I.P. Bucureşti, 1956.

41.- M. PREDA, P. CRISTEA, F. SPINEI, Bazele electrotehnicii, E.D.P. Bucureşti, 1980.

42.- A. COLTEU, Bul. St. şi Tehn. IPTVT, Electrot. Fasc. 1, 1977, Tom 22(36) Timişoara.

43.- A. TIMOTIN, Electrotehnica, Nr. 4, Bucureşti, 1958.

44.- A. TIMOTIN, Proprietăţi dinamice ale cîmpului electromagnetic macrospopic în medii oarecare. Teză de doctorat 1957, I.P. Bucureşti.

45.- I. LUCA, GH. CALUGARU, R. BADESCU, C. COTAL, V. BADESCU, Ferofluidele şi aplicaţiile lor în industrie. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1978.

46.- I. ANTON, L. VEKAS, Aplicaţiile ferofluidelor în tehnica modernă. Seminar tehnico-ştiinţific, Timişoara, oct 1980.

47.- L. ANTON, I.DE SABATA, P. ILIE ş.a., Aspecte fundamentale ale aplicării metodei de separare magnetofluidică la concentrarea amestecurilor neferoase. Conferinţa "Maşini hidraulice şi hidrotehnică", Timişoara, 18-19 oct 1985.

48.- N.D. KRAVCENKO, V.N. GUBAREVICI, Separarea magneto-hidrostatică a amestecului de deşeuri de aluminiu şi plumb. Tvetnîie metallî nr. 4/1981, p. 102-104.

49.- N.D. KRAVCENKO, V.A. INDIN, Separarea amestecului de deşeuri de cupru şi plumb în lichid magnetic. Tvetnîie metalî nr. 2/1983 p. 80-82.

50.- AVCO Corp. Magnetic separation, Patent Marea Britanie 504 968 (1978).

51.- N. REZLESCU, V. BADESCU, GH. IACOB, E.B. BRADU, D. CONSTANDACHE, Fizica separării magnetice a materialelor. Memoriile Secţiilor St. Acad. R.S.R. Tom III Nr. 1 (1980), 134-214.

52.- N. REZLESCU, V. BADESCU, E.B. BRADU, GH. IACOB, Principiile separării magnetice a materialelor. Ed. Tehnică R.S.R., 1987.

53.- N. REZLESCU, V. BADESCU, E.B. BRADU, Practical aspects of magnetostatic separation. IEEE Trans. on Magn. MAG-17.

54.- S.E. DVORCHIK, V.G. RIKOV, L.M. SEMIASOVA, I.I. IATOVSKI, Dvijenie nemagnitnîh tel v magnetostatisticeskih i ţestrobejnîh apparatah s magnitnoi jiolhostin, Magn. Ghidr. Nr. 1 (1979) 80.

55.- R.D. SMOLKIN, YV.M. GARIN, V.N. GUBAREVICH, V.S. KROKHMAL, O.P. SAIKO, K vaprosu opredelenia rukotovîh tehnicesskih karacteristik ferrohidrostatisticeskih separator na magnitnîh jidkostel, Riga (1980), 313.

56.- G.A. RIAZANOV, Experiments and simulation in Electromagnetic Field (Nanka, Moscow, 1966) p 208 (in Russian).

57.- A. NICOLAIDE, Bazele fizice ale electrotehnicii. Ed. Scrisul românesc, Craiova 1983.

58.- A. SOCENEANTU, Programarea şi utilizarea calculatorului. Lit. I.P.T. 1980.

59.- E. DURAND, Électrostatique et magnétostatique. Ed. Masson, Paris, 1953.

60.- I.M. POPESCU, Culegere de probleme de fizică. E.D.P. Bucureşti, 1982.

61.- B. NICOARA, Metodă de măsurare a magnetizaţiei de saturaţie. Metrologia aplicată vol. XXXIV 1987 nov-2.

62.- B. NICOARA, Forţa exercitată de cîmpul magnetic asupra unei sfere nemagnetice imersată într-un lichid magnetic plasat între polii, cu profil hiperbolic, ai unui separator. Seminar tehnico-ştiinţific I.P.T. 21-22 oct 1988.

63.- B. NICOARA, Metodă de măsurare a magnetizaţiei de saturaţie a lichidelor magnetice. Seminar tehnico-ştiinţific I.P.T. 21-22 oct 1988.

64.- B. NICOARA, Traiectorii ale particulelor nemagnetice în celula unui separator magnetofluidic cu poli cu profil hiperbolic. Seminar tehnico-ştiinţific I.P.T. 21-22 oct 1988.

65.- x x x Cercetări privind obţinerea şi utilizarea ferofluidelor în procede de separare a metalelor neferoase din subproduse miniere. Contract de cercetare ştiinţifică nr. 121/1984. ICPMN Baia-Mare.

66.- x x x Cercetări privind obţinerea şi aplicarea ferofluidelor pe bază de apă şi petrol în procese de separare a metalelor neferoase din deşeuri. Contract de cercetare ştiinţifică nr. 69/1985, ICPMN Baia-Mare.

67.- x x x Forţe portante în lichide magnetice. Contract de cercetare ştiinţifică nr. 228/1986, ICPMN Baia-Mare.

68.- x x x Levitaţie şi lagăre magnetofluidice şi caracterizarea magnetică a lichidelor magnetice. Contract de cercetare ştiinţifică nr. 95/1987, I.P.T.V. Timişoara.

69.- x x x Calculul traductoarelor inductive cu lichide magnetice şi caracterizarea magnetică a lichidelor magnetice. Contract de cercetare ştiinţifică nr. 95/1987 - continuare 1988. I.P.T.V. Timişoara.

70.- R. MURIŞAN , Separarea mineralelor cu titan şi zirconiu din şlicurile de la exploatarea minieră Aghireş, cu ajutorul fluidelor magnetice. Teză de doctorat. Petroşani 1987.

71.- A. ANTON, Cercetări asupra mişcării de translaţie a ferofluidelor în absenţa şi în prezenţa unui cîmp magnetic exterior. Teză de doctorat. Bucureşti 1987.

72.- A. COLTIU, Proprietăţi ale lichidelor magnetice în cîmpuri magnetice staţionare. Teză de doctorat. Timişoara 1980.

73.- [illegible] TAKAYASU, Magnetic Separation Utilising a Magnetic Susceptibility Gradient IEEE TR.ON MAG. VOL MAG-20, Nr.1, JAN 1984.

74.- Y. ZIMMELS, I.J. LIN, Principles of Three - Dimensional magnetohidroatatic Axial Separation Sistem IEEE TR. ON MAG., VOL MAG-18, No 3, MAY 1982.

75.- Y. ZIMMELS, I.J. LIN, Characterisation of Magnetohidrostatic Axial Separation Sistem. IEE TR. ON MAG, VOL MAG-19, No 1, JAN 1983.

76.- R.E. ROSENSWEIG, Ferrohydrodynamics, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985.

77.- I. ANTON, I.DE SABATA, L. VEKAS, Proprietăţi şi aplicaţii ale lichidelor magnetice, Bucureşti, Tehnologii Calitate Maşini Materiale, Nr.1, 1987, p. 186.

78.- [illegible] MAIN, B.K.P. SCAIFE, S.W. CHARLES, The Measurment of the Frecuency Dependent Susceptibility of Magnetic colloids. J.Magn Magn. Mater 72(1988) 95-108.

79.- I. ANTON, I.DE SABATA, L. VEKAS, I. POTENCZ, E. SUCIU, Magnetic fluid seals: Some design problems and applications J Magn. Magn. Mater., Vol.65, 1987, p. 379.

80.- S.W. CHARLES, Some application of magnetic fluids -use as ink and in microwave systems. J.Magn. Magn. Mater., vol. 65, 1987, p. 350.

81.- I. STIRAN, Introducere în magnetohidrodinamică, Ed. Tehnică, Bucureşti 1969.

82.- V. IUSAN, V. MUNTEANU, Experienţe şi rezultate de laborator în utilizarea spectrometriei ferofluidice pentru separarea unor substanţe minerale utile din nisipurile de Aghireş. Simpozionul ştiinţific I.M. Petroşani, p. 11, Decembrie 1981.

83.- V. IUSAN, N. MUREŞAN, Studiul experimental al efectului fenomenelor de interfaţă asupra separării siliciului din minereuri granulate cu ajutorul fluidelor magnetice. Conferinţa de Maşini Hidraulice şi Hidrotehnică, vol. 7, Timişoara 1985.

84.- S.V.VONSOVSKI, Magnetismul. Traducere din limba rusă. Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti 1981.