

MINISTERUL EDUCATIEI SI INVATANINTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" TIMISOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

ING. MARIANA DOINA TITHAZAN

T E Z A D E D O C T O R A T

APLICATII ALE TEORIEI DISTRIBUTIILOR IN
STUDIUL FENOMENELOR ELECTROMAGNETICE

CONDUCATOR STIINTIFIC,

PROF.DR.ING. IOAN DE SABATA

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

TIMISOARA 1988

INSTITUTUL POLITEHNIC TIMISOARA	
E	A
C	535829
Volumele nr.	
Data	18.10.88

BUPT

MINISTERUL EDUCATIEI SI INVATAMINTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" TIMISOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

ING. MARIANA DOINA TITIHAZAN

T E Z A D E D O C T O R A T

APLICATII ALE TEORIEI DISTRIBUTIILOR IN
STUDIUL FENOMENELOR ELECTROMAGNETICE

CONDUCATOR STIINTIFIC,

PROF.DR.ING. IOAN DE SABATA

TIMISOARA 1988

APLICATII ALE TEORIEI DISTRIBUTIILOR
ÎN STUDIUL FENOMENELOR ELECTROMAGNETICE

C U P R Î N S

	Pag.
INTRODUCERE	1
Cap.1. NOTIUNI DE TEORIA DISTRIBUTIILOR.	4
1.1.. Definiții.	4
1.1.1. Distribuțiile și spațiul distribu- țiilor	4
1.1.2. Precizări cu privire la densitatea generată de sarcini punctuale.	7
1.1.3. Distribuții concentrate pe o mul- țime.	9
1.2. Operații cu distribuții	12
1.2.1. Operații simple.	12
1.2.2. Derivarea distribuțiilor	12
1.2.3. Produsul tensorial și produsul de convoluție.	14
1.3. Definirea operatorilor și spațiul distri- buțiilor.	15
1.3.1. Gradientul.	15
1.3.2. Divergența	16
1.3.3. Rotorul.	23
Cap.2. MARIMI FIZICE ALE CORPURIILOR SI CIMPULUI ELEC- TRONAGNETIC IN SPATIUL DISTRIBUTIILOR	29
2.1. Sarcina electrică și densitățile ei.	
Densitatea de dublu strat.	30
2.1.1. Densitatea volumică de sarcină electrică punctuală	30
2.1.2. Densități distribuționale de sar- cină electrică liberă și de pola- rizare	30

	Pag.
2.1.3. Densitatea de dublu strat.	33
2.2. Intensitatea și densitatea curentului electric de conducție.	34
2.3. Mărimi vectoriale ale corpurilor și câmpului electromagnetic	37
Cap.3. LEGILE TEORIEI MAXWELL A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN SPAȚIUL DISTRIBUȚIILOR.	39
3.1. Precizări cu privire la formele distribuționale ale legilor.	39
3.2. Legea fluxului electric	40
3.3. Legea polarizației electrice temporare și legea legăturii D, E, \vec{P}	41
3.4. Legea fluxului magnetic	44
3.5. Legea magnetizației temporare și legea legăturii $\vec{B}, \vec{H}, \vec{M}$	44
3.6. Legea conservării sarcinii electrice libere	45
3.7. Legea conducției.	48
3.8. Legea circuitului magnetic pentru corpuri în repaus.	48
3.9. Legea inducției electromagnetice.	50
Cap.4. UNELE TEOREME ALE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC FORMULATE ÎN SPAȚIUL DISTRIBUȚIILOR	52
4.1. Divergența și rotorul intensității câmpului electromagnetic formulate în spațiul distribuțiilor.	52
4.2. Teorema lui Gauss și teorema potențialului electrostatic	56
4.3. Teorema relaxației.	59
Cap.5. APLICAȚIILE ALE TEORIEI DISTRIBUȚIILOR ÎN STUDIUL ȘI REALIZAREA PRACTICĂ A MODULELOR DE REDRESARE DE ÎNALȚĂ TENSIUNE.	61
5.1. Determinarea potențialului electrocinetic staționar în lungul unei joncțiuni pn din dioda semiconductoră.	62

	Pag.
5.1.1. Ecuatia lui Poisson in spatiul distribuțiilor	63
5.1.1.1. Precizări	63
5.1.1.2. Rezolvarea ecuatiei lui Poisson	64
5.1.2. Potențialul electrocinetic staționar în lungul jonctiunii pn	68
5.1.2.1. Calculul derivatelor potențialului electrocinetic staționar	69
5.1.2.2. Laplacianul distribuției potențial electrocinetic staționar	73
5.1.2.3. Rezolvarea ecuatiei lui Poisson când se ia în considerare stratul dublu din jonctiunea pn	75
5.1.2.3.1. Potențialul de volum	76
5.1.2.3.2. Potențialul de dublu strat	79
5.1.3 Concluzii	81
5.2. Aspecte teoretice privind determinarea caracteristicii ideale curent-tensiune a diodelor	81
5.2.1. Aproximații și abateri relative la determinarea caracteristicii ideale	82
5.2.2. Stratul dublu de pe interfața jonctiunii pn în D'	85
5.2.3. Ecuatia concentrației de purtători rezolvată în D'	85
5.2.4. Formularea în D' , a dependenței curent-tensiune	87
5.3. Probleme privind selecționarea diodelor cu avalanșă controlată, pentru realizarea modulelor de redresare	91
5.3.1. Caracteristicile diodelor cu avalanșă controlată, folosite în construcția modulelor redresoare de înaltă tensiune	92
5.3.1.1. Caracteristica inversă curent-tensiune	93
5.3.1.2. Alte caracteristici ale diodelor polarizate invers	95
5.3.2. Aparat pentru ridicarea continuă a caracteristicilor diodelor	99

	Pag.
5.4. Studiul și realizarea unor module de redresare de înaltă tensiune	101
5.4.1. Simularea funcției de redresor.	101
5.4.2. Modelarea pe calculator analitic a funcționării cascadei cu două etaje.	108
5.4.3. Soluții privind realizarea practică a unor module redresoare de înaltă tensiune.	120
Cap.6. CONCLUZII FINALE	121
BIBLIOGRAFIE.	124

INTRODUCERE

Teoria distribuțiilor s-a dezvoltat din necesitatea de a fundamenta riguros unele procedee și metode de calcul folosite în fizică și tehnică, precum și pentru a putea prinde în modele matematice o categorie mai largă de fenomene. Păstrarea formală a proprietăților fundamentale ale operațiilor clasice a condus la rezolvarea unor probleme teoretice și aplicative, justificând procedee și rezultate care pot fi formulate într-o formă unitară și generală.

Distribuțiile au apărut în legătură cu rezolvarea unor probleme de fizică matematică, mecanică cuantică și electromagnetism - în care alături de funcții continue se utilizau funcții discontinue și simboluri pentru mărimi concentrate (masa punctuală, sursa punctuală, impulsul concentrat, etc.). Astfel, în anul 1926, P.A.M. Dirac a introdus în mecanica cuantică - funcția δ numită și funcția impuls, pentru a putea păstra și în cazul sarcinii punctuale definiția noțiunii de densitate; anterior, O.Heaviside a introdus o altă funcție discontinuă - funcția Θ , funcția treaptă unitate, a cărei derivată (inclusiv și în punctul de discontinuitate, în origine) s-a dovedit a fi funcția impuls; în diferite domenii ale matematicii s-au introdus noțiuni noi, funcții singulare, generalizări sau extinderi ale unor operații: introducerea noțiunii de valoare principală pentru $\frac{1}{x}$, de către A.L.Cauchy, considerarea părții finite a unei integrale divergente (regularizarea ei), etc /11,34,57,103,129,130/.

Noțiunea de funcție generalizată este introdusă pentru prima dată de S.L.Sobolev /34,35,103/, ca soluție generalizată a unor ecuații diferențiale cu derivate parțiale de tip hiperbolic.

Aceste noțiuni noi, formalismul de calcul privind utilizarea unor "funcții" (incorect denumite din punct de vedere al analizei matematice clasice), au condus la crearea unei noi teorii, care sintetizează, simplifică și justifică aceste fapte.

O expunere sistematică și generală a teoriei distribuțiilor, folosind metodele analizei funcționale a făcut-o Laurent Schwartz în anii 1950, 1951, în cele două volume "Théorie des distributions",

apărute în editura Herman, Paris /103/, devenind astfel unul din creatorii acestei teorii.

I.M.Gelfand, G.E.Silov (6,34,35/ au lărgit mult teoria elaborată de L.Schwartz, studiind unele probleme dificile privind ecuațiile cu derivate parțiale. Y.Mikusinski și R.Sikovski /61,107/ folosesc pentru definirea distribuțiilor metoda șirurilor fundamentale - metodă mai apropiată de spiritul analizei matematice clasice.

Pentru studiul problemelor tehnice în general, este mai adecvată metoda funcționalelor liniare elaborată de Laurent Schwartz.

În țara noastră, la scurt timp după apariția teoriei distribuțiilor au apărut lucrări valoroase în care se dezvoltă teoria distribuțiilor ca un capitol al analizei funcționale. Sînt cunoscute lucrările lui I.Ciorănescu, R.Cristescu, D.Gașpar, W.Kecs, Gh. Marinescu, V.Olaru, O.Stănășilă, P.P.Teodorescu /7,12,52,57,75,76/.

În domeniul bazelor electrotehnicii, în anul 1971, regretatul academician Remus Răduleț a publicat în Revue Roumaine des Sciences techniques, série Electrotechnique, un articol de referință, în care a formulat, pentru prima dată, în formă generalizată ecuațiile lui Maxwell /91/. De asemenea, au avut contribuții remarcabile și alți cercetători, de exemplu D.Homentcovschi /41/, A.Panaitescu /82/. În teoria circuitelor electrice s-au impus deja metode de rezolvare a circuitelor cu ajutorul distribuțiilor (în regim tranzitoriu, semnale impuls, etc) /42,65,87/.

Pornind de la definiția riguroasă a mărimilor și operatorilor în spațiul distribuțiilor, teza are un caracter interdisciplinar, între tehnică și matematică, încercînd să abordeze într-o manieră originală, aspecte ale teoriei cîmpului electromagnetic, în scopul obținerii unui grad mai mare de generalitate și unitate.

Lucrarea cuprinde șase capitole. În primul capitol se definesc distribuțiile, principalele operații și proprietăți, se fixează notațiile; se definesc operatorii gradient, divergența și rotor în spațiul distribuțiilor.

În capitolul 2 se definesc în cadrul teoriei distribuțiilor mărimile fizice, electrice și magnetice ale corpurilor și cîmpului electromagnetic.

În capitolul următor, pe baza mărimilor fizice și operatorilor definiți în capitolele anterioare, se formulează principalele legi ale cîmpului electromagnetic în forma distribuțională; din această formă se deduc formele diferențiale și integrale ale legilor.

În capitolul 4 se definește distribuția intensității câmpului electric generat de sarcina punctuală; cu ajutorul principiului superpoziției forțelor se stabilește câmpul generat de un ansamblu de sarcini punctuale - deci câmpul generat de o distribuție oarecare de sarcini; ecuația lui Poisson formulată în spațiul distribuțiilor pune în corespondență biunivocă potențialul și sursele care-l determină, chiar în cazul sarcinilor electrice de volum nul.

În capitolul 5 se studiază aspecte teoretice și practice legate de realizarea unor module de redresare de înaltă tensiune, în cadrul unei colaborări de lungă durată cu ICPE București; se scot în evidență soluții practice privind realizarea unor module de redresare cu performanțe superioare, fiabile, competitive, care să înlocuiască importul.

În capitolul 6 se sintetizează principalele concluzii ce se desprind din studiul efectuat, evidențiind elementele originile ale lucrării.

Contribuțiile originale ale autoarei se concretizează prin lucrări științifice, colaborări cu întreprinderi și institute de cercetare, inovații și invenții /137 - 154 /.

Pentru sprijinul generos acordat la elaborarea și finalizarea tezei de doctorat, pentru îndrumările atente și prețioase, îi sînt recunoscătoare și îi aduc respectuoase mulțumiri, tovarășului prof.dr.ing. Ioan De Sabata, conducătorul științific al tezei.

Pentru preocuparea și ajutorul acordat la tratarea unor aspecte matematice ale tezei, aduc călduroase mulțumiri tov.prof.dr. Borislav Crstici și lect.dr.Mihai Neagu, de la Catedra de Matematici a I.P.T.V.Timișoara.

Imi exprim întreaga grațitudine față de sprijinul acordat de tov.prof.dr.doc.Constantin Sora, pentru discuțiile și îndrumările asupra lucrării, în cadrul dezbaterilor științifice ale Colectivului de Bazele electrotehnicii.

Prof.dr.ing.Toma Dordea, șeful Catedrei de Electrotehnică și mașini electrice și prof.dr.ing.Avram Heler, decanul Facultății de electrotehnică, le sînt recunoscătoare pentru condițiile deosebite create în vederea finalizării tezei. De asemenea, aduc mulțumiri pentru buna colaborare, colectivelor de la Laboratoarele de înaltă tensiune din ICPE București și IPTV Timișoara.

Sincere mulțumiri colegilor care m-au sprijinit pe durata elaborării lucrării.

Capitolul 1

NOTIUNI DE TEORIA DISTRIBUTIILOR

În acest prim capitol se definesc principalele noțiuni matematice și operații utilizate în lucrare și se stabilesc notațiile corespunzătoare; ele sînt în acord cu literatura matematică de specialitate (în plus, în lucrare, distribuțiile și operatorii definiți în spațiul distribuțiilor se vor sublinia), /15, 51, 52, 129, 130, etc./.

Pentru operatorii gradient, divergență și rotor se determină expresia lor în distribuții, în cazurile cele mai generale. În expresiile în distribuții ale divergenței și rotorului se introduc termeni suplimentari față de cei cunoscuți în literatură, și anume cei referitori la divergențele lineică și punctuală și cel referitor la rotorul lineic. Demonstrațiile date nu au fost întîlnite în literatura consultată.

1.1. D e f i n i ț i i

Se definesc, în cele ce urmează, noțiunea de distribuție și spațiile aferente ei (spațiul funcțiilor test, \mathcal{D} și spațiul distribuțiilor, \mathcal{D}') ; se definesc distribuțiile de tip funcție și cele singulare, de asemenea se definesc distribuțiile concentrate pe o mulțime, frecvent utilizate în lucrare.

1.1.1. Distribuțiile și spațiul distribuțiilor.

Înainte de a defini noțiunea de distribuție este necesară introducerea unei mulțimi de funcții pe care aceasta operează și anume mulțimea funcțiilor test sau fundamentale, astfel:

Spațiul funcțiilor test sau spațiul fundamental, notat cu \mathcal{D} , este spațiul funcțiilor definite pe R^n , cu valori reale sau complexe, indefinit derivabile și cu suport compact (sînt identic nule în afara unei mulțimi mărginite). Suportul unei funcții - este închiderea mulțimii punctelor pe care funcția este diferită de zero. Altfel spus, mulțimea funcțiilor test cuprinde funcțiile ce au derivate de orice ordin și se anulează în afara unei mulțimi mărginite. În particular în cazul funcțiilor test de o variabilă, mulțimea funcțiilor test cuprinde funcțiile ce au derivate de orice ordin pe întreaga dreaptă reală și se anulează în afara unui interval finit. /52, 103, 129/.

Se numește distribuție orice funcțională liniară și continuă, definită pe un spațiu fundamental. Valoarea distribuției \underline{T} , pe funcția test φ se notează $\langle \underline{T}, \varphi \rangle$, deci $\langle \underline{T}, \varphi \rangle = \underline{T} \varphi$.

Definiția dată include condițiile:

a) Distribuția \underline{T} este o funcțională pe \mathcal{D} : fiecărei funcții test $\varphi \in \mathcal{D}$ îi asociază numărul (real),

$$\langle \underline{T}, \varphi \rangle ; \quad (1.1.1)$$

b) Distribuția \underline{T} este funcțională liniară pe \mathcal{D} : dacă $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi \in \mathcal{D}$ iar λ și μ sînt numere reale, atunci:

$$\langle \underline{T}, \lambda \varphi + \mu \psi \rangle = \lambda \langle \underline{T}, \varphi \rangle + \mu \langle \underline{T}, \psi \rangle, \quad (1.1.2)$$

c) Distribuția \underline{T} este o funcțională continuă pe \mathcal{D} dacă $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ în \mathcal{D} , atunci

$$\langle \underline{T}, \varphi_k \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1.1.3)$$

Se notează cu \mathcal{D}' sau $\mathcal{D}'(R)$ mulțimea distribuțiilor definite pe \mathcal{D} ; \mathcal{D}' - este spațiul distribuțiilor sau spațiul lui Schwartz /51,52,103,129,130,131,132,136/.

Spațiul \mathcal{D}' este liniar, deoarece combinația liniară a distribuțiilor \underline{T}_1 și \underline{T}_2 este definită ca funcționala:

$$\langle \lambda \underline{T}_1 + \mu \underline{T}_2, \varphi \rangle = \lambda \langle \underline{T}_1, \varphi \rangle + \mu \langle \underline{T}_2, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}; \quad (1.1.4)$$

Funcționala $\lambda \underline{T}_1 + \mu \underline{T}_2$ este liniară și continuă pe \mathcal{D} , adică aparține lui \mathcal{D}' .

Dacă $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi \in \mathcal{D}$, iar α și β - numere reale, prin definiție avem:

$$\begin{aligned} \langle \lambda \underline{T}_1 + \mu \underline{T}_2, \alpha \varphi + \beta \psi \rangle &= \lambda \langle \underline{T}_1, \alpha \varphi + \beta \psi \rangle + \mu \langle \underline{T}_2, \alpha \varphi + \beta \psi \rangle = \\ &= \alpha [\lambda \langle \underline{T}_1, \varphi \rangle + \mu \langle \underline{T}_2, \varphi \rangle] + \beta [\lambda \langle \underline{T}_1, \psi \rangle + \mu \langle \underline{T}_2, \psi \rangle] = \\ &= \alpha \langle \lambda \underline{T}_1 + \mu \underline{T}_2, \varphi \rangle + \beta \langle \lambda \underline{T}_1 + \mu \underline{T}_2, \psi \rangle, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

deci funcționala este liniară. Continuitatea decurge din continuitatea funcționalelor \underline{T}_1 și \underline{T}_2 :

dacă $\varphi_K \rightarrow 0$, $K \rightarrow \infty$ în \mathcal{D} , atunci

$$\langle \lambda \underline{I}_1 + \mu \underline{I}_2, \varphi_K \rangle = \lambda \langle \underline{I}_1, \varphi_K \rangle + \mu \langle \underline{I}_2, \varphi_K \rangle \rightarrow 0, K \rightarrow \infty. \quad (1.1.6)$$

Convergența în \mathcal{D}' se definește ca o convergență slabă a șirului de funcționale: șirul de distribuții $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots$ din \mathcal{D}' , converge către distribuția $\underline{I} \in \mathcal{D}'$, dacă, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle \underline{I}_K, \varphi \rangle \rightarrow \langle \underline{I}, \varphi \rangle, K \rightarrow \infty. \quad (1.1.7)$$

Exemple:

1) Dacă f este o funcție local integrabilă (integrabilă pe orice mulțime mărginită) atunci funcționala \underline{I}_f , definită prin

$$\langle \underline{I}_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (1.1.8)$$

definește o distribuție numită distribuție de tip funcție, sau distribuție regulată (o generalizare a noțiunii de funcții local integrabilă). Se obișnuiește, ca în loc de \underline{I}_f , generată de f să se scrie \underline{f} , adică

$$\langle \underline{f}, \varphi \rangle = \langle \underline{I}_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (1.1.8')$$

2) Distribuția generată de funcția treaptă a lui Heaviside:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0 \\ 1 & \text{pentru } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.1.9)$$

este o distribuție regulată, distribuția lui Heaviside,

$$\langle \theta, \varphi(x) \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (1.1.9')$$

3) Funcționala $\underline{\delta}$, definită de

$$\langle \underline{\delta}, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (1.1.10)$$

este o distribuție singulară (nu este regulată), numită distribuția lui Dirac.

Notăția $\underline{I}(x)$, pentru distribuția \underline{I} , este formală, înțelegînd prin x , argumentul funcției test, asupra căreia acționează funcționala \underline{I} .

1.1.2. Precizări cu referire la densitatea generată de sarcini punctuale.

Distribuția asociată unei funcții f , local sumabilă, se poate interpreta ca o distribuție de sarcini definite prin densitatea ρ . Sînt numeroase expresii $\langle \underline{I}, \varphi \rangle$, însă φ nu aparține în general spațiului \mathcal{D} . Dar fiecare distribuție \underline{I} , se poate extinde ca funcțională pe o mulțime care include pe \mathcal{D} , care depinde de \underline{I} . Astfel, \underline{I} poate fi extinsă pe spațiul funcțiilor φ , continue în origine, f la spațiul funcțiilor φ , astfel ca $f\varphi$ să fie sumabilă, etc.

Pe de altă parte, practic nu se poate măsura densitatea de sarcină într-un punct, ci doar densitatea medie într-o vecinătate suficient de mică a punctului, considerîndu-se că aceasta este densitatea în punctul respectiv; densitatea este determinată de "valorile medii" luate în vecinătatea fiecărui punct.

Dacă vrem să definim densitatea de sarcină a unui punct material, se repartizează (se distribuie) uniform sarcina unitate în sfera de rază ε , S_ε . Densitatea medie este:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} & , \quad |x| < \varepsilon \\ 0 & , \quad |x| > \varepsilon \end{cases} \quad (1.1.11)$$

Densitatea punctuală de sarcină - notată cu $\delta(x)$, este limita punctuală a șirului de densități medii $f_\varepsilon(x)$, cînd $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty & , \text{dacă } x=0 \\ 0 & , \text{dacă } x \neq 0. \end{cases} \quad (1.1.12)$$

Integrala din densitatea $\delta(x)$ pe orice volum V , trebuie să fie egală cu sarcina conținută în V :

$$\int_V \delta(x) dx = \begin{cases} 1 & , \text{dacă } 0 \in V \\ 0 & , \text{dacă } 0 \notin V. \end{cases} \quad (1.1.13)$$

Dar, conform ecuației (1.1.12), membrul stîng al egalității (1.1.13) este întotdeauna egal cu zero. Contradicția la care s-a ajuns arată că densitatea $\delta(x)$ nu poate fi egală cu limita punctuală a șirului $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Se determină limita slabă a șirului de funcții $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, adică pentru orice funcție continuă φ , se cerește li-

mita șirului numeric

$$\int f_{\varepsilon} \varphi \, dx \quad , \quad \text{cînd} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \, .$$

Se arată că

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_{\varepsilon}(x) \varphi(x) \, dx = \varphi(0) \quad (1.1.14)$$

iar atunci datorită continuității funcției $\varphi(x)$, pentru orice $\eta > 0$, există $\varepsilon_0 > 0$, astfel încît :

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta \quad , \quad \text{dacă} \quad |x| < \varepsilon_0 \, .$$

Deci, pentru orice $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, avem

$$\begin{aligned} \left| \int f_{\varepsilon}(x) \varphi(x) \, dx - \varphi(0) \right| &= \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \int_{|x| < \varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] \, dx \right| \leq \\ &\leq \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x| < \varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| \, dx \leq \eta \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x| < \varepsilon} dx = \eta \, . \end{aligned}$$

Limita slabă a șirului de funcții $f_{\varepsilon}(x)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, este o funcțională care fiecărei funcții continue $\varphi(x)$ îi pune în corespondență numărul $\varphi(0)$ = valoarea funcției $\varphi(x)$ în punctul $x=0$. Această funcțională este, prin definiție, densitatea $\underline{\sigma}(x)$.

$$\text{Deci,} \quad f_{\varepsilon}(x) \rightarrow \underline{\sigma}(x) \quad , \quad \varepsilon \rightarrow 0 \, ,$$

în sensul că pentru orice funcție continuă $\varphi(x)$ are loc relația:

$$\int f_{\varepsilon}(x) \varphi(x) \, dx \rightarrow \langle \underline{\sigma}, \varphi \rangle ; \quad \varepsilon \rightarrow 0 \, , \quad (1.1.15)$$

unde $\langle \underline{\sigma}, \varphi \rangle$ este valoarea funcționalei $\underline{\sigma}$, pe funcția φ , adică numărul $\varphi(0)$.

Sarcina totală se obține aplicînd funcționala (densitatea)

$$\underline{\sigma}(x) \text{ funcției } \varphi(x) = 1 \, ,$$

$$\langle \underline{\sigma}, 1 \rangle = 1(0) = 1 \, , \quad (1.1.16)$$

Dacă sarcina concentrată în punctul $x = 0$ este Q , densitatea corespunzătoare va fi $Q \underline{\sigma}(x)$. Dacă sarcina Q este concentrată în punctul x_0 , densitatea corespunzătoare va fi $Q \underline{\sigma}(x_1 - x_0)$.

$$\langle Q \underline{\sigma}(x - x_0), \varphi \rangle = Q \varphi(x_0) \, . \quad (1.1.17)$$

În general, dacă în punctele x_K , $K = 1, 2, \dots, N$ sînt concentrate sarcinile Q_K , densitatea corespunzătoare va fi

$$\sum_{K=1}^N Q_K \delta(x - x_K) \quad (1.1.18)$$

Astfel, densitatea generată de sarcini punctuale nu poate fi descrisă în limitele noțiunii clasice de funcție și pentru a o defini trebuie să recurgem la noțiuni matematice mai generale - funcționale liniare și continue (distribuții).

1.1.3. Distribuții concentrate pe o mulțime.

Deși valoarea unei distribuții într-un punct nu este definită, totuși o distribuție poate fi nulă într-un domeniu conform definiției următoare:

Fiind dată o mulțime deschisă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se spune că distribuția \underline{T} este nulă pe Ω , dacă

$$\langle \underline{T}, \varphi \rangle = 0 \quad (1.1.19)$$

pentru toate funcțiile test cu suport inclus în Ω .

Se spune că două distribuții $\underline{T}_1, \underline{T}_2$ sînt egale pe Ω dacă $\underline{T}_1 - \underline{T}_2$ este nulă pe Ω .

Deci prin definiție

$$\underline{T}_1 = \underline{T}_2 \text{ pe } \Omega$$

dacă

$$\langle \underline{T}_1 - \underline{T}_2, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D} \text{ cu } \text{supp } \varphi \subset \Omega,$$

adică pe baza lui (1.14).

$$\langle \underline{T}_1, \varphi \rangle = \langle \underline{T}_2, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D} \text{ cu } \text{supp } \varphi \subset \Omega. \quad (1.1.20)$$

Aceste definiții permit considerarea distribuțiilor din punct de vedere local. Mai precis: putem scrie egalitatea a două distribuții pe o mulțime Ω , fără a prejudicia ce se întîmplă în afara mulțimii Ω /lo3/.

Să notăm cu \mathcal{D}_Ω partea (submulțimea) lui \mathcal{D} cuprinzînd funcțiile-test cu $\text{supp } \varphi \subset \Omega$. Deci $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega \iff \varphi \in \mathcal{D}$ și $\text{supp } \varphi \subset \Omega$.

Distribuțiile definite pe acest spațiu fundamental \mathcal{D}_Ω ($\mathcal{D}_\Omega \subset \mathcal{D}$) se va nota \mathcal{D}'_Ω . Pe baza principiului de "asamblare din bucăți" /lo3/, se mai poate da o definiție echivalentă a distribuției nule. Mai întîi se definește ce înseamnă distribuția

nulă în vecinătatea unui punct: \underline{T} este nulă în vecinătatea unui punct $x \in R^n$, dacă este nulă (conform definiției date mai sus) într-o deschisă, conținând acel punct. Apoi pe baza principiului amintit definiția echivalentă a distribuției nule pe o deschisă Ω : \underline{T} este nulă pe Ω , dacă este nulă în vecinătatea fiecărui punct din Ω .

Se numește suport al unei distribuții \underline{T} , complementarea reuniunii mulțimilor deschise pe care se anulează această distribuție; se notează $\text{supp } \underline{T}$. Suportul unei distribuții este o mulțime închisă. Dacă ea este și mărginită - distribuția este un suport compact.

Dacă o distribuție \underline{T} are suportul conținut într-o mulțime A ($\text{supp } \underline{T} \subset A$), atunci distribuția \underline{T} este concentrată pe mulțimea A (distribuția lui Dirac $\underline{\delta}$ și distribuția lui Heaviside $\underline{\theta}$ sînt distribuții concentrate în origine, respectiv pe servicii a $[a, \infty)$).

Din cele de mai sus rezultă:

- Distribuția \underline{T} este egală cu zero în orice domeniu din complementarea lui $\text{supp } \underline{T}$, adică $\langle \underline{T}, \varphi \rangle = 0$ pentru orice φ , pentru care $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \underline{T} = \emptyset$.

Cu alte cuvinte dacă suportul distribuției nu are nici un punct comun cu suportul funcției test, valoarea distribuției pe această funcție test este nulă, adică numărul pe care-l pune în corespondență cu această funcție test, funcționala liniară reprezentată de distribuția considerată, este numărul zero.

Dacă C este o curbă netedă pe porțiuni, iar dl este elementul de linie, se definește distribuția lui Dirac concentrată pe curba C , $\underline{\delta}_C$, prin formula:

$$\langle \underline{\delta}_C, \varphi(x) \rangle = \int_C \varphi(x) dl, \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^3) \quad (1.1.21)$$

cu proprietatea esențială că pentru puncte $x \in C$, avem $\underline{\delta}_C = 0$.

Dacă S este o suprafață netedă pe porțiuni, din R^n , iar ds este elementul de arie, atunci distribuția lui Dirac concentrată pe suprafața S , $\underline{\delta}_S$, se definește prin formula:

$$\langle \underline{\delta}_S, \varphi(x) \rangle = \int_S \varphi(x) ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^n), \quad x \in R^n \quad (1.1.22)$$

cu proprietatea că pentru $x \in S$, $\underline{\delta}_S = 0$

Dacă V este un domeniu din R^n , atunci distribuția lui Dirac, $\underline{\delta}_V$, concentrată pe domeniul V , se definește prin:

$$\langle \underline{\delta}_V, \varphi(x) \rangle = \int_V \varphi(x) dv, \quad (1.1.23)$$

cu dv - elementul de volum, $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, $x \in R^n$ și proprietatea că $\delta_V = 0$ pentru puncte care nu aparțin lui V .

De asemenea dacă $f(x)$ este o funcție indefinit derivabilă, aplicînd produsul că ai o distribuție, rel.(1.2.3), avem:

$$\langle f(x) \delta_C, \varphi(x) \rangle = \int_C f(x) \varphi(x) dl \quad (1.1.24)$$

$$\langle f(x) \delta_S, \varphi(x) \rangle = \int_S f(x) \varphi(x) ds \quad (1.1.25)$$

$$\langle f(x) \delta_V, \varphi(x) \rangle = \int_V f(x) \varphi(x) dv \quad (1.1.26)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad x \in R^n$$

Observații:

Dacă $\rho = \frac{dm}{dl}$, reprezintă densitatea lineică a masei distribuite pe Γ , masa totală de pe curbă este:

$$M = \int_{\Gamma} dm = \int_{\Gamma} \rho dl = \langle \rho \delta_{\Gamma}, 1 \rangle.$$

Distribuția $f = \rho \delta_{\Gamma}$ reprezintă masa totală M distribuită pe Γ , dacă se admite $\varphi = 1$. Această funcție nu aparține spațiului fundamental \mathcal{D} , deoarece nu are suport compact. Deci unele mărimi fizice acționează asupra unor funcții care nu aparțin totdeauna spațiului \mathcal{D} ; acestea corespund unor funcționale care sînt definite pe spații mai lungi decît \mathcal{D} /52/.

Pentru distribuții oarecare $\langle \underline{f}(x), \varphi \rangle$ concentrate pe curbe C , suprafața S sau în volume V), pot fi definite /52/:

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int_C f(x) \varphi(x) dl \quad (1.1.27)$$

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int_S f(x) \varphi(x) ds \quad (1.1.28)$$

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int_V f(x) \varphi(x) dv \quad (1.1.29)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad x \in R^n, \quad \text{și}$$

$$\text{supp } f \subset C, S \text{ au } V$$

Distribuțiile cu suport compact considerate ca funcționale liniare continue definite pe \mathcal{D} se pot prelungi în mod biunivoc și cu păstrarea continuității pe spațiul \mathcal{E} al tuturor funcțiilor indefinit derivabile (fără a ține seama de suportul lor). În ast-

fel de cazuri are sens de a considera $\langle \underline{I}, 1 \rangle$.

1.2. Operații cu distribuții.

Se definesc operații simple cu distribuțiile (suma, produsul cu un număr, produsul cu o funcție și operații mai complexe (derivarea, produsul tensorial și produsul de convoluție).

1.2.1. Operații simple.

Se definesc /11,12,13,18,34,35,51,52,57,61,70,103,104,129,130,136/:

- produsul unei distribuții cu un număr

$$\langle \lambda \underline{I}, \varphi \rangle = \lambda \langle \underline{I}, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}, \tau \in \mathcal{D}' \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad (1.2.1)$$

- suma a două distribuții:

$$\langle \underline{I}_1 + \underline{I}_2, \varphi \rangle = \langle \underline{I}_1, \varphi \rangle + \langle \underline{I}_2, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}, \underline{I}_1, \underline{I}_2 \in \mathcal{D}'; \quad (1.2.2)$$

- produsul dintre o distribuție și o funcție indefinit derivabilă

$$\langle a \underline{I}, \varphi \rangle = \langle \underline{I}, a\varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}, \underline{I} \in \mathcal{D}', a \in C^\infty \quad (1.2.3)$$

Cu aceste operații și cu convergența slabă, definită prin relația (1.1.7) se arată /52/ că spațiul distribuțiilor este un spațiu complet.

1.2.2. Derivarea distribuțiilor.

Prin definiție, derivata unei distribuții definită pe spațiul funcțiilor test reale de o variabilă reală este dată de relația:

$$\langle \underline{I}', \varphi \rangle = - \langle \underline{I}, \varphi' \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (1.2.4)$$

sau derivata de ordinul K

$$\langle \underline{I}^{(K)}, \varphi \rangle = (-1)^K \langle \underline{I}, \varphi^{(K)} \rangle \quad (1.2.4')$$

cu precizarea că $\text{supp } \underline{I}^{(K)} \subset \text{supp } \underline{I}, \forall \varphi \in \mathcal{D}$.

In consecință, orice distribuție are derivată de orice ordin și derivata distribuției este tot o distribuție.

In cazul distribuțiilor definite pe $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, adică pe spațiul funcțiilor test de n variabile, se definesc derivatele parțiale ale distribuției \underline{I} după formulele:

$$\langle \frac{\partial \underline{I}}{\partial x_i}, \varphi \rangle = - \langle \underline{I}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (1.2.4'')$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \right\rangle = (-1)^2 \left\langle \tau, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (1.2.4'')$$

Ordinea de derivate nu contează, dat fiind că derivarea distribuțiilor se transferă asupra funcțiilor test, conform formulilor de mai sus.

Pentru distribuții generate de funcții f , de clasa C^m , derivata în sensul teoriei distribuțiilor \underline{f}' și distribuția derivatei în sens obișnuit sînt egale:

$$\underline{f}^{(k)} = \left\{ \underline{f}^{(k')} \right\}, \quad f \in C^m, \quad k \leq m \quad (1.2.5)$$

Dacă f este o funcție de o variabilă independentă, indefinit derivabilă pentru $x < x_0$ și $x > x_0$, astfel încît derivata să are o limită la stînga și o limită la dreapta în punctul $x = x_0$, notînd f' , f'' , ..., $f^{(m)}$ derivatele distribuțiilor \underline{f} în sensul distribuțiilor și cu $\left\{ \underline{f}' \right\}$, $\left\{ \underline{f}'' \right\}$, ..., $\left\{ \underline{f}^{(m)} \right\}$ distribuțiile derivatelor în sens obișnuit, definite pentru $x < x_0$ și $x > x_0$ și nedefinite în $x = x_0$, atunci au loc formulele:

$$\begin{aligned} \underline{f}' &= \left\{ \underline{f}' \right\} + s_{x_0}^0(f) \underline{\delta}_{x_0} \\ \underline{f}'' &= \left\{ \underline{f}'' \right\} + s_{x_0}^0(f) \underline{\delta}_{x_0}' + s_{x_0}^1(f) \underline{\delta}_{x_0} \\ \underline{f}^{(m)} &= \left\{ \underline{f}^{(m)} \right\} + s_{x_0}^0(f) \underline{\delta}_{x_0}^{(m-1)} + s_{x_0}^1(f) \underline{\delta}_{x_0}^{(m-2)} + \dots \\ &\dots + s_{x_0}^{m-2} \underline{\delta}_{x_0}' + s_{x_0}^{(m-1)}(f) \underline{\delta}_{x_0} \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

unde $\underline{\delta}_{x_0}^{(\alpha)} \in \mathcal{D}'$ rezultă din definiția derivatei

$$\left\langle \underline{\delta}_{x_0}^{(\alpha)}, \varphi \right\rangle = (-1)^\alpha \varphi^{(\alpha)}(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (1.2.7)$$

iar $s_{x_0}^{(m-1)}$ este saltul derivatei de ordinul $(m-1)$ funcției f , în x_0 .

Dacă f este o funcție scalară de punct indefinit derivabilă peste tot cu excepția punctelor de pe o suprafață $S \subset \mathbb{R}^3$, funcția f și derivatele sale prezintă un salt la trecerea prin suprafața S , expresia derivatelor parțiale în sensul distribu-

țiilor, a funcției f , în coordonate x_k este:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\} + [f]_S \cos(n_S, \bar{u}_k) \delta_S \quad (1.2.8)$$

unde: $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\}$ este distribuția dată de derivata parțială în sensul teoriei funcțiilor, definită pentru $\bar{r} \notin S$ și nedefinită pentru $\bar{r} \in S$;

$[f]_S$ este saltul funcției f la trecerea prin suprafața S în punctul considerat și în sens crescător al coordonatelor x_k ;

$\angle(n_S, u_k)$ este unghiul format de vectorul unitar \bar{n}_S , normal la suprafața S , orientat în sensul crescător al coordonatei x_k , cu vectorul unitar \bar{u}_k al axei x_k ;

δ_S este distribuția lui Dirac concentrată pe suprafața S .

Dacă $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este o funcție avînd gradul de omogenitate $1-n$, local integrabilă, n fiind dimensiunea spațiului, atunci derivatele ei parțiale în sensul distribuțiilor sînt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\} \Big|_D + (-1)^{i-1} \delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \Big|_{\Gamma} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \quad (1.2.9)$$

unde:

$i = 1, 2, \dots, n$;

D este un domeniu mărginit din R^n ;

Γ este frontiera domeniului D .

1.2.3. Produsul tensorial și produsul de convoluție.

Produsul tensorial (direct) a două distribuții $T_1(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$ și $T_2(y) \in \mathcal{D}'(R^m)$ se definește prin relația

$$\langle T_1(x) \times T_2(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle T_1(x), \langle T_2(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle \quad (1.2.10)$$

cu $x \in R^n$, $y \in R^m$, $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ și este o distribuție definită pe spațiul fundamental $D(R^{n+m})$. Suportul ei este constituit din produsul cartezian al suporturilor celor două distribuții:

$$\text{supp} [T_1(x) \times T_2(y)] = [\text{supp } T_1(x)] \times [\text{supp } T_2(x)].$$

Produsul de convoluție a două distribuții $T_1(x), T_2(x) \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ este o distribuție, definită cu ajutorul produsului direct

$$\langle \underline{T_1(x)} * \underline{T_2(x)}, \varphi(x) \rangle = \langle \underline{T_1(x)} \times \underline{T_2(y)}, \varphi(x+y) \rangle = \quad (1.2.11)$$

$$= \langle \underline{T_1(x)}, \langle \underline{T_2(y)}, \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle \underline{T_1(y)}, \langle \underline{T_2(x)}, \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

în una din următoarele condiții:

- a) cel puțin una din distribuțiile $\underline{T_1(x)}$ și $\underline{T_2(x)}$ are suport compact;
- b) ambele distribuții $\underline{T_1(x)}$ și $\underline{T_2(x)}$ au suporturile mărginite în aceeași parte;

Suportul produsului de convoluție este cuprins în închiderea sumei suporturilor celor două distribuții.

Distribuția lui Dirac are rol de unitate în raport cu produsul de convoluție.

1.3. Definirea operatorilor în spațiul distribuțiilor.

Formele în distribuții ale gradientului, divergenței și rotorului au fost utilizate în literatură /91/, fără însă a fi demonstrate integral (se introduc termeni suplimentari referitori la divergența lineică și punctuale și la rotorul lineic).

1.3.1. G r a d i e n t u l.

Având o distribuție de tip funcție $\underline{f} \in \mathcal{D}'$, se definește distribuția gradientului și sensul teoriei distribuțiilor $\underline{\text{grad } f} \in \mathcal{D}'$ prin relația:

$$\begin{aligned} \langle \underline{\text{grad } f}, \varphi \rangle &= \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} \underline{f} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} \underline{f} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \underline{f}, \varphi \rangle = \\ &= -\langle \underline{f}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle \bar{i} - \langle \underline{f}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle \bar{j} - \langle \underline{f}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rangle \bar{k} = -\langle \underline{f}, \nabla \varphi \rangle \quad (1.3.1) \end{aligned}$$

Calculând derivatele parțiale ale distribuției \underline{f} cu relația (1.2.8), dacă funcția are un salt la trecerea printr-o suprafață S , avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + [f]_S \cos(\bar{n}_S, x) \underline{d}_S \\ \frac{\partial}{\partial y} f &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \right\} + [f]_S \cos(\bar{n}_S, y) \underline{d}_S \\ \frac{\partial}{\partial z} f &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \right\} + [f]_S \cos(\bar{n}_S, z) \underline{d}_S \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Înmulțind în (1.3.2) cu $\bar{i}, \bar{j}, \bar{x}$ și adunând pe verticală se obține

$$\underline{\text{grad}} f = \left\{ \underline{\text{grad}} f \right\} + [f]_S \bar{n}_S \underline{d}_S$$

unde $\bar{n}_S [f]_S = \text{grad}_S f$ - este gradientul superficial al funcției f .

Relația devine:

$$\underline{\text{grad}} f = \left\{ \underline{\text{grad}} f \right\} + \text{grad}_S f \underline{d}_S \quad (1.3.3)$$

și este valabilă în $R^3 = V_\infty$.

Referitor la volumul $V_\Sigma \subset V_\infty$, relația (1.3.3) ia forma:

$$\text{grad}_{V_\Sigma} f = \text{grad} f \underline{d}_{V_\Sigma} + \text{grad}_S f \underline{d}_{S'} = S \cap V_\Sigma \quad (1.3.4)$$

în care: $\text{grad}_{V_\Sigma} f$ este simbolul distribuției gradientului în V_Σ , $\text{grad} f$ și $\text{grad}_S f$ sînt gradientul și gradientul superficial al funcției f , în \underline{d}_{V_Σ} și $\underline{d}_{S'}$ sînt distribuțiile lui Dirac concentrate pe V_Σ respectiv $S' = S \cap V_\Sigma$, suprafața de discontinuitate pentru f în V_Σ . În adevăr, cu relațiile (1.1.26) și (1.1.29) se obține:

$$\langle \text{grad} f \underline{d}_{V_\Sigma}, \varphi \rangle = \langle \left\{ \underline{\text{grad}} f \right\}_{V_\Sigma}, \varphi \rangle = \int_{V_\Sigma} \text{grad} f \varphi \, dv$$

1.3.2. Divergența.

Dacă distribuția vectorului

$$\underline{G} = G_x \bar{i} + G_y \bar{j} + G_z \bar{k}$$

este

$\underline{G}: \mathcal{D} \rightarrow R^3$, atunci trebuie să existe relația

$$\langle \underline{G}, \varphi \rangle = \langle \underline{G}_x, \varphi \rangle \bar{i} + \langle \underline{G}_y, \varphi \rangle \bar{j} + \langle \underline{G}_z, \varphi \rangle \bar{k}$$

adică

G_x, G_y, G_z trebuie să fie distribuții.

$$\underline{G}_x \in \mathcal{D}', \underline{G}_y \in \mathcal{D}' \text{ și } \underline{G}_z \in \mathcal{D}'$$

Se definește $\text{div} \underline{G} \in \mathcal{D}'$ prin relația

535-829
281+1

$$\begin{aligned} \langle \underline{\text{div } G}, \varphi \rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \right), \varphi \right\rangle = \\ &= - \langle \underline{G}_x, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle - \langle \underline{G}_y, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle - \langle \underline{G}_z, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rangle. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Se admite că în R^3 există suprafețe S de salt al componentelor normale ale vectorului, curbe C și puncte P în care vectorul nu este definit.

Pentru calculul derivatelor parțiale din relația (1.3.5) se aplică formula (1.2.8) pentru calculul derivatei distribuției în sensul teoriei distribuțiilor, când vectorul prezintă salt la trecerea prin suprafața S și formula (1.2.9) pentru calculul derivatelor parțiale în sensul distribuțiilor în cazul funcțiilor avînd gradul de omogenitate egal cu -2 (deoarece $l-n=1-3=-2$), cînd frontiera domeniului D , notată Γ în relația (1.2.9) este o suprafață \sum_c ce înconjoară curba C sau o suprafață \sum_p ce înconjoară punctul P .

Derivatele parțiale ale distribuțiilor $\underline{G}_x, \underline{G}_y$ și \underline{G}_z devin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \underline{G}_x &= \left\{ \frac{\partial G_x}{\partial x} \right\} + [G_x]_S \cos(n_S, x) \underline{d}_S + \underline{\delta}(x, y, z) \iint_c G_x dydz + \\ &+ \underline{\delta}(x, y, z) \iint_p G_x dydz \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \underline{G}_y &= \left\{ \frac{\partial G_y}{\partial y} \right\} + [G_y]_S \cos(n_S, y) \underline{d}_S - \underline{\delta}(x, y, z) \iint_c G_y dzdx + \\ &+ \underline{\delta}(x, y, z) \iint_p G_y dzdx \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \underline{G}_z &= \left\{ \frac{\partial G_z}{\partial z} \right\} + [G_z]_S \cos(n_S, z) \underline{d}_S + \underline{\delta}(x, y, z) \iint_c G_z dx dy + \\ &+ \underline{\delta}(x, y, z) \iint_p G_z dx dy \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Prin însumarea relațiilor (1.3.6), (1.3.7) și (1.3.8) pe verticală se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \underline{G_x} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{G_y} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{G_z} &= \left\{ \frac{\partial G_x}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{\partial G_y}{\partial y} \right\} + \left\{ \frac{\partial G_z}{\partial z} \right\} + \\ &+ \left([G_x]_S \cos(\bar{n}_S, x) + [G_y]_S \cos(\bar{n}_S, y) + [G_z]_S \cos(\bar{n}_S, z) \right) \underline{\delta}_S + \\ &+ \underline{\delta}(x, y, z) \iiint_{\Sigma_C} G_x dy dz - G_y dz dx + G_z dx dy + \\ &+ \underline{\delta}(x, y, z) \iiint_{\Sigma_P} G_x dy dz - G_y dz dx + G_z dx dy. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Membrul stîng reprezintă distribuția divergenței în sensul distribuțiilor, conform definiției (1.3.5)

$$\frac{\partial}{\partial x} \underline{G_x} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{G_y} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{G_z} = \underline{\text{div}} \bar{G} \quad (1.3.10)$$

$$\left\{ \frac{\partial G_x}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{\partial G_y}{\partial y} \right\} + \left\{ \frac{\partial G_z}{\partial z} \right\} = \left\{ \underline{\text{div}} \bar{G} \right\} \quad (1.3.11)$$

reprezintă divergența de volum în sens clasic.

Termenul referitor la suprafața de salt S, devine:

$$\begin{aligned} \left([G_x]_S \cos(\bar{n}_S, x) + [G_y]_S \cos(\bar{n}_S, y) + [G_z]_S \cos(\bar{n}_S, z) \right) \underline{\delta}_S &= \left(\bar{G}_2 - \bar{G}_1 \right) \cdot \\ \cdot \bar{n}_S \underline{\delta}_S &= [\bar{G}]_S \cdot \bar{n}_S \cdot \underline{\delta}_S = \text{div}_S \bar{G} \underline{\delta}_S \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

și reprezintă produsul divergenței superficiale pe suprafața S cu distribuția lui Dirac concentrată pe ea. Pentru a calcula termenul referitor la curba C, se alege \underline{dl} și \underline{dl}' , asociați după regula burghiului drept (fig.1.1).

Pe curba C se alege un sistem local de referință, de coordonate cilindrice r, θ, z .

Se calculează expresia de sus integrală, de forma:

$$G_x dy dz - G_y dz dx + G_z dx dy \quad (1.3.13)$$

în care proiecțiile pe axe ale vectorului sînt:

$$\begin{aligned} G_x &= G_r \cos \theta - G_\theta \sin \theta \\ G_y &= G_r \sin \theta + G_\theta \cos \theta \\ G_z &= G_z \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

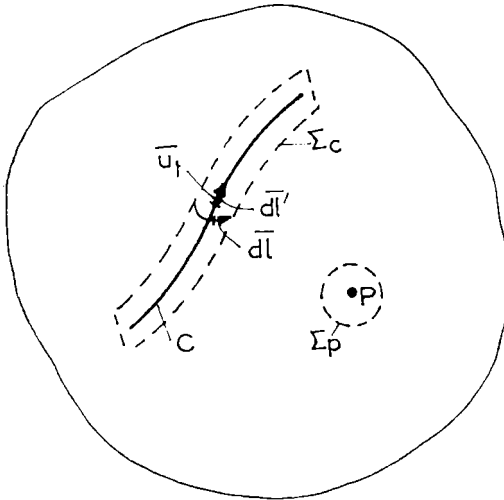


Fig.1.1

cu elementele de arie

$$\begin{aligned} dy dz &= r \cos \theta d\theta dz \\ dz dx &= -r \sin \theta d\theta dz \\ dx dy &= -r^2 \sin \theta \cos \theta (d\theta)^2 \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

înlocuind (1.3.14) și (1.3.15) în (1.3.13) se obține:

$$\begin{aligned} G_x dy dz - G_y dz dx + G_z dx dy &= (G_r \cos \theta - G_\theta \sin \theta) r \cos \theta d\theta dz + \\ &+ (G_r \sin \theta + G_\theta \cos \theta) r \sin \theta d\theta dz - G_z r^2 \sin \theta \cos \theta (d\theta)^2 = \\ &= G_r r \cos^2 \theta d\theta dz - G_\theta r \sin \theta \cos \theta d\theta dz + G_r r \sin^2 \theta d\theta dz + \\ &+ G_\theta r \cos \theta \sin \theta d\theta dz - G_z r^2 \sin \theta \cos \theta (d\theta)^2 = \\ &= G_r r d\theta dz - G_z r^2 \sin \theta \cos \theta (d\theta)^2 \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Integrând pe o suprafață cilindrică elementară \sum_c , de înălțime dl' pe curba C (fig.1.1), unde G_z și r se consideră constante, deoarece

$$\iint_{\Sigma_C} G_z r^2 \sin \theta \cos \theta (d\theta)^2 = G_z r^2 \iint_{\Sigma_{C'}} \sin \theta \cos \theta (d\theta)^2 =$$

$$= 2\pi G_z r^2 \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad , \quad (1.3.17)$$

se obține

$$\frac{\delta(x,y,z)}{\Sigma_C} \iint_{\Sigma_C} G_r r d\theta dz = dl \cdot \text{div}_\ell \bar{G} \delta(x,y,z) = dl \cdot \text{div}_\ell \bar{G} \varphi(0,0,0) \quad , \quad (1.3.17')$$

unde $\varphi(0,0,0)$ este funcția test în punctul de origine al sistemului de coordonate local, ales, iar $dl=dl'$. Pentru toată suprafața Σ_C , care înconjură curba C,

$$\frac{\delta(x,y,z)}{\Sigma_C} \iint_{\Sigma_C} G_r r d\theta dz = \int_{P \in C} dl \cdot \text{div}_1 \bar{G} \varphi(P) = \text{div}_1 \bar{G} \underline{\delta}_C \quad (1.3.18)$$

unde $\varphi(P)$ este funcția test φ din punctul $P \in C$, originea sistemului de coordonate, iar $\underline{\delta}_C$ este distribuția lui Dirac concentrată pe curba C.

Pentru punctul P, care nu aparține curbei C, (fig.1.1) dar în care vectorul \bar{G} nu este definit, se calculează:

$$\frac{\delta(x,y,z)}{\Sigma_P} \iint_{\Sigma_P} (G_x dy dz - G_y dz dx + G_z dx dy) \quad (1.3.19)$$

pe suprafața Σ_P ce înconjură acest punct.

Se alege un sistem de coordonate local, cu originea în punctul P și se exprimă componentele vectorului \bar{G} în coordonate sferice:

$$\begin{aligned} G_x &= G_r \sin \theta \cos \varphi - G_\varphi \sin \varphi + G_\theta \cos \theta \cos \varphi \\ G_y &= G_r \sin \theta \sin \varphi + G_\varphi \cos \varphi + G_\theta \cos \theta \sin \varphi \\ z &= G_r \cos \theta - G_\theta \sin \theta \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

elementele de arie:

$$\begin{aligned} dy dz &= r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi d\varphi d\theta \\ dz dx &= r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi d\varphi d\theta \\ dx dy &= r^2 \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Înlocuind în expresia de sub integrală se obține :

$$\begin{aligned}
 G \, x \, dy \, dz - G \, y \, dz \, dx + G \, z \, dx \, dy = & (r^2 G_r \sin^3 \theta \cos^2 \varphi - \\
 - r^2 G_\varphi \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi + r^2 G_\theta \sin^2 \theta \cos \theta \cos^2 \varphi - \\
 - r^2 G_r \sin^3 \theta \sin^2 \varphi - r^2 G_\varphi \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi - r^2 G_\theta \sin^2 \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \\
 + r^2 G_r \sin \theta \cos^2 \theta - r^2 G_\theta \sin^2 \theta \cos \theta) \, d\theta \, d\varphi & \quad (1.3.22)
 \end{aligned}$$

Prin integrare pe suprafața Σ_P , ce înconjură punctul P (fig.1.1) se obține:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma_P} \sin^3 \theta \cos^2 \varphi \, d\theta \, d\varphi &= \int_0^{\tilde{\pi}} \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\tilde{\pi}} \cos^2 \varphi \, d\varphi = -\frac{1}{3} \cos \theta \sin^2 \theta \Big|_0^{\tilde{\pi}} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \Big|_0^{\tilde{\pi}} = 0 \\
 \iint_{\Sigma_P} \sin^3 \theta \sin^2 \varphi \, d\theta \, d\varphi &= \int_0^{\tilde{\pi}} \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\tilde{\pi}} \sin^2 \varphi \, d\varphi = -\frac{1}{3} \cos \theta \sin^2 \theta \Big|_0^{\tilde{\pi}} \cdot
 \end{aligned}$$

$$\cdot \left(-\frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\tilde{\pi}} = 0$$

$$\iint_{\Sigma_P} \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\tilde{\pi}} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^{2\tilde{\pi}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi =$$

$$= \left(-\frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\tilde{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{2\tilde{\pi}} = 0$$

$$\iint_{\Sigma_P} \sin^2 \theta \cos \theta \cos^2 \varphi \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\tilde{\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\tilde{\pi}} \cos^2 \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 \theta \Big|_0^{\tilde{\pi}} \cdot \frac{1}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\tilde{\pi}} = 0$$

$$\iint_{\Sigma_P} \sin^2 \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\tilde{\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\tilde{\pi}} \sin^2 \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 \theta \Big|_0^{\tilde{\pi}} \cdot \left(-\frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\tilde{\pi}} = 0$$

$$\iint_{\Sigma_P} \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3} \sin^3 \theta \Big|_0^{\pi} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\iint_{\Sigma_P} \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\pi} \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{3}$$

(1.3.23)

Cu aria sferei Σ_P , egală cu $4\pi r^2$, rezultă:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma(x,y,z)}} \iint_{\Sigma} r^2 G_P \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\varphi &= \underline{\underline{\sigma(x,y,z)}} \iint_{\Sigma_P} \bar{G} \cdot \bar{ds} = \\ &= \underline{\underline{\sigma(x,y,z)}} \operatorname{div}_P \bar{G} = \operatorname{div}_P \bar{G} \varphi(0,0,0) = \operatorname{div}_P \bar{G} \underline{\underline{\sigma}}_P, \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

originea sistemului de coordonate, fiind în punctul P.

Cu ajutorul relațiilor (1.3.10), (1.3.11), (1.3.12), (1.3.18) și (1.3.24) se obține distribuția divergenței în sensul distribuțiilor:

$$\underline{\underline{\operatorname{div} \bar{G}}} = \left\{ \underline{\underline{\operatorname{div} G}} \right\} + \operatorname{div}_A \bar{G} \underline{\underline{\sigma}}_S + \operatorname{div}_l \bar{G} \underline{\underline{\sigma}}_C + \operatorname{div}_P \bar{G} \underline{\underline{\sigma}}_P \quad (1.3.25)$$

Această relație se referă la cazul când se ia în considerare întregul spațiu $R^3 = V_\infty$. Dacă ne referim la volumul $V_\Sigma \subset V_\infty$ este util să se introducă distribuția divergenței în V_Σ , notată prin simbolul $\underline{\underline{\operatorname{div}_{V_\Sigma} \bar{G}}}$.

Rezultă

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\operatorname{div}_{V_\Sigma} \bar{G}}} &= \operatorname{div} \bar{G} \underline{\underline{\sigma}}_{V_\Sigma} + \operatorname{div}_A \bar{G} \underline{\underline{\sigma}}_S = s n V_\Sigma + \operatorname{div}_l \bar{G} \underline{\underline{\sigma}}_C = c n V_\Sigma + \\ &+ \sum_{P \in V} \operatorname{div}_P \bar{G} \underline{\underline{\sigma}}_P, \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

deoarece ne interesează suprafața de salt S' inclusă în V_Σ , curba C' și punctele P, numai din V_Σ ; iar cu relațiile (1.1.25) și (1.1.29)

$$\left\langle \underline{\underline{\operatorname{div} \bar{G}}} \Big|_{V_\Sigma}, \varphi \right\rangle = \left\langle \operatorname{div} \bar{G} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{V_\Sigma}, \varphi \right\rangle = \int_{V_\Sigma} \operatorname{div} \bar{G} \varphi \, dv,$$

reprezentînd divergența de volum în V_{Σ} , în sens clasic, înmulțită cu distribuția lui Dirac concentrată în acel volum.

1.3.3. R o t o r u l .

Se definește $\underline{\text{rot}} \underline{\vec{G}} \in \mathcal{D}'$ prin relația:

$$\begin{aligned} \langle \underline{\text{rot}} \underline{\vec{G}}, \varphi \rangle &= \langle \left[\underline{\vec{i}} \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right) + \underline{\vec{j}} \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \left. \underline{\vec{k}} \left(\frac{\partial G_y}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial y} \right) \right], \varphi \rangle = \underline{\vec{i}} \langle \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right), \varphi \rangle + \\ &+ \underline{\vec{j}} \langle \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right), \varphi \rangle + \underline{\vec{k}} \langle \left(\frac{\partial G_y}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial y} \right), \varphi \rangle = \\ &= \underline{\vec{i}} \langle \underline{G}_z, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \rangle + \underline{\vec{i}} \langle \underline{G}_z, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle + \underline{\vec{j}} \langle \underline{G}_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle + \\ &+ \underline{\vec{j}} \langle \underline{G}_z, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle + \underline{\vec{k}} \langle \underline{G}_y, -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle + \underline{\vec{k}} \langle \underline{G}_x, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle \quad (1.3.27) \end{aligned}$$

Pentru determinarea expresiei distribuției rotorului în sensul distribuțiilor, se aplică formula (1.2.8) care exprimă derivatele parțiale ale distribuțiilor, cînd vectorul $\underline{\vec{G}}$ prezintă salt al componentelor tangențiale pe suprafața S și formula (1.2.9) pentru calculul derivatelor parțiale ale distribuției pe curba C pe care vectorul nu este definit. În relația (1.2.9), frontiera domeniului, este Σ_C (fig.1.1).

Derivatele parțiale care intră în expresia (1.3.27) sînt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \underline{G}_z &= \left\{ \frac{\partial G_z}{\partial y} \right\} + [G_z]_S \cos(\bar{n}_S, y) \underline{d}_S - \underline{\sigma}(x, y, z) \Bigg|_{\Sigma_C} G_z \, dz \, dx \\ \frac{\partial}{\partial z} \underline{G}_y &= \left\{ \frac{\partial G_y}{\partial z} \right\} + [G_y]_S \cos(\bar{n}_S, z) \underline{d}_S + \underline{\sigma}(x, y, z) \Bigg|_{\Sigma_C} G_y \, dx \, dy \\ \frac{\partial}{\partial z} \underline{G}_x &= \left\{ \frac{\partial G_x}{\partial z} \right\} + [G_x]_S \cos(\bar{n}_S, z) \underline{d}_S + \underline{\sigma}(x, y, z) \Bigg|_{\Sigma_C} G_x \, dx \, dy \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \underline{G}_z = \left\{ \frac{\partial G_z}{\partial x} \right\} + [G_z]_S \cos(\bar{n}_S, x) \underline{d}_S + \underline{d}(x, y, z) \left\| \int_{\Sigma_C} G_z \, dydz \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \underline{G}_y = \left\{ \frac{\partial G_y}{\partial x} \right\} + [G_y]_S \cos(\bar{n}_S, x) \underline{d}_S + \underline{d}(x, y, z) \left\| \int_{\Sigma_C} G_y \, dzdx \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \underline{G}_x = \left\{ \frac{\partial G_x}{\partial y} \right\} + [G_x]_S \cos(\bar{n}_S, y) \underline{d}_S - \underline{d}(x, y, z) \left\| \int_{\Sigma_C} G_x \, dydz \right.$$

(1.3.29)

Calculînd proiecțiile rotorului după axe, se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \underline{G}_z - \frac{\partial}{\partial z} \underline{G}_y &= \left\{ \frac{\partial G_z}{\partial y} \right\} - \left\{ \frac{\partial G_y}{\partial z} \right\} + \left([G_z]_S \cos(\bar{n}_S, y) - \right. \\ &\left. - [G_y]_S \cos(\bar{n}_S, z) \right) \underline{d}_S - \underline{d}(x, y, z) \left\| \int_{\Sigma_C} (G_z \, dzdx + G_y dx dy) \right. \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

unde

$$\frac{\partial}{\partial y} \underline{G}_z - \frac{\partial}{\partial z} \underline{G}_y : \underline{\text{rot}} \bar{G}_x \quad (1.3.31)$$

$$\left\{ \frac{\partial G_z}{\partial y} \right\} - \left\{ \frac{\partial G_y}{\partial z} \right\} = \left\{ \underline{\text{rot}} \bar{G}_x \right\} \quad (1.3.32)$$

În coordonate cilindrice (1.3.14), termenul de sub integrală devine:

$$\begin{aligned} G_z \, dzdx + G_y \, dx \, dy &= G_z (-r \sin \theta \, d\theta \, dz) + (G_r \sin \theta + G_\theta \cos \theta) \cdot \\ &(-r^2 \sin \theta \cos \theta \, (d\theta)^2) = -r G_z \sin \theta \, d\theta \, dz - r^2 G_r \sin^2 \theta \cos \theta \, (d\theta)^2 - \\ &- r^2 G_\theta \sin \theta \cos^2 \theta \, (d\theta)^2. \end{aligned}$$

Prin integrare se obține:

$$\int_{\Sigma_C} (-r G_z \sin \theta \, d\theta \, dz - r^2 G_r \sin^2 \theta \, (d\theta)^2 - r^2 G_\theta \sin \theta \cos^2 \theta \, (d\theta)^2) =$$

$$= r G_z \int_{\Sigma_C} \sin \theta d\theta dz - r^2 G_r \int_{\Sigma_C} \sin^2 \theta \cos \theta (d\theta)^2 -$$

$$- r^2 \int_{\Sigma_C} G_\theta \sin \theta \cos^2 \theta (d\theta)^2 = 0$$

$$\int_0^2 \sin \theta d\theta = 0 ; \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta (\sin \theta)' d\theta = \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^{2\pi} = 0 ;$$

$$\int_0^2 G_\theta \sin \theta \cos^2 \theta (d\theta)^2 = - \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (1.3.33)$$

A doua componentă a rotorului este:

$$\frac{\partial}{\partial z} G_x - \frac{\partial}{\partial x} G_z = \left\{ \frac{\partial G_x}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial G_z}{\partial x} \right\} + \left[[G_x]_S \cos(\bar{n}_S, z) - \right.$$

$$\left. - [G_z]_S \cos(\bar{n}_S, x) \right] \underline{d}_S + \underline{d}(x, y, z) \int_{\Sigma_C} (G_x dx dy - G_z dy dz), \quad (1.3.34)$$

unde, se notează:

$$\frac{\partial}{\partial z} G_x - \frac{\partial}{\partial x} G_z = \underline{\text{rot } \bar{G}}_y \quad (1.3.35)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} G_x \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} G_z \right\} = \left\{ \underline{\text{rot } \bar{G}}_y \right\}, \quad (1.3.36)$$

iar expresia de sub integrală devine:

$$G_x dx dy - G_z dy dz =$$

$$(G_r \cos \theta - G_\theta \sin \theta) (-r^2 \sin \theta \cos \theta (d\theta)^2 - G_z r \cos \theta d\theta dz =$$

$$= r^2 G_r \sin \theta \cos^2 \theta (d\theta)^2 + r^2 G_\theta \sin^2 \theta \cos \theta (d\theta)^2 - G_z r \cos \theta d\theta dz.$$

Prin integrare se obține:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Sigma_C} (-r^2 G_r \sin \theta \cos^2 \theta (d\theta)^2 + r^2 G_\theta \sin^2 \theta \cos \theta (d\theta)^2 - \\
 & \quad - G_z r \cos \theta d\theta dz) = \\
 & = -r^2 G_r \iint_{\Sigma_C} \sin \theta \cos^2 \theta (d\theta)^2 + r^2 G_\theta \iint_{\Sigma_C} \sin^2 \theta \cos \theta (d\theta)^2 - \\
 & \quad - \iint_{\Sigma_C} G_z r \cos \theta d\theta dz = -r^2 G_r \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta (\cos \theta)^2 (d\theta)^2 + \\
 & \quad + r^2 G_\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta (\sin \theta) (d\theta)^2 - \int_0^2 G_z r \cos \theta d\theta dz = 0 \quad (1.3.37)
 \end{aligned}$$

A treia componentă este

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} &= \left\{ \frac{\partial G_y}{\partial x} \right\} - \left\{ \frac{\partial G_x}{\partial y} \right\} + ([G_y]_S \cos(\vec{n}_S, x) - [G_x]_S \cos(\vec{n}_S, y)) \vec{e}_S + \\
 & \quad + \underline{d(x,y,z)} \iint_{\Sigma_C} G_y dz dx + G_x dy dz, \quad (1.3.38)
 \end{aligned}$$

unde se notează:

$$\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} = \underline{\text{rot } \vec{G}}_z \quad (1.3.39)$$

$$\left\{ \frac{\partial G_y}{\partial x} \right\} - \left\{ \frac{\partial G_x}{\partial y} \right\} = \left\{ \underline{\text{rot } \vec{G}}_z \right\}, \quad (1.3.40)$$

iar termenul de sub integrală devine:

$$\begin{aligned}
 G_y dy dz + G_x dy dz &= (G_r \sin \theta + G_\theta \cos \theta) r \cos^2 \theta d\theta dz + \\
 & \quad + (G_r \cos \theta - G_\theta \sin \theta) (-r \sin \theta d\theta dz = \\
 & = r G_r \sin \theta \cos^2 \theta d\theta dz + r G_\theta \cos^2 \theta d\theta dz - \\
 & \quad - r G_r \sin \theta \cos \theta d\theta dz + r G_\theta \sin^2 \theta d\theta dz = \\
 & = r G_\theta d\theta dz.
 \end{aligned}$$

Acest termen se integrează pe o suprafață Σ_C , cilindrică elementară atașată elementului de linie dl' , al curbei C, ca și la calculul divergenței:

$$\underline{d}(x,y,z) \Big|_{\Sigma_C} \int r G_\theta d\theta dz \underline{u}_z = \underline{d}(x,y,z) dz \underline{u}_t \Big|_{\text{rot}_1 \bar{G}} = \text{rot}_1 \bar{G} \varphi(0,0,0) dl'.$$

Considerînd integrala Σ_C , se obține:

$$\underline{d}(x,y,z) \Big|_{\Sigma_C} \int r G_\theta d\theta dz \underline{u}_t = \int_{PEC} dl' \text{rot}_1 \bar{G} \varphi(P) = \text{rot}_1 \bar{G} \underline{d}_C. \quad (1.3.41)$$

unde $\varphi(P)$ este funcția test concentrată într-un punct P, al curbei C, iar \underline{d}_C este distribuția lui Dirac, concentrată pe C.

Pentru suprafața S, cu

$$\bar{n}_S = \cos(\bar{n}_S, x) \bar{i} + \cos(\bar{n}_S, y) \bar{j} + \cos(\bar{n}_S, z) \bar{k}$$

$$\text{și } \bar{G}_S = G_x \bar{i} + G_y \bar{j} + G_z \bar{k}$$

din produsul vectorial

$$\bar{n}_S \times \bar{G}_S = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos(\bar{n}_S, x) & \cos(\bar{n}_S, y) & \cos(\bar{n}_S, z) \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$$

rezultă:

$$\left\{ \left([G_z]_S \cos(\bar{n}_S, y) - [G_y]_S \cos(\bar{n}_S, z) \right) \bar{i} + \left([G_x]_S \cos(\bar{n}_S, z) - [G_z]_S \cos(\bar{n}_S, x) \right) \bar{j} + \left([G_y]_S \cos(\bar{n}_S, x) - [G_x]_S \cos(\bar{n}_S, y) \right) \bar{k} \right\} \underline{d}_S =$$

$$= (\bar{n}_S \times \bar{G}_S) \underline{d}_S = \text{rot}_S \bar{G} \underline{d}_S \quad (1.3.42)$$

Din relațiile (1.3.31), (1.3.32), (1.3.33), (1.3.35), (1.3.36), (1.3.37), (1.3.39), (1.3.40), (1.3.41) și (1.3.42), se obține:

$$\begin{aligned} & \underline{\text{rot}} \bar{G}_x \bar{i} + \underline{\text{rot}} \bar{G}_y \bar{j} + \underline{\text{rot}} \bar{G}_z \bar{k} = \\ & \left\{ \underline{\text{rot}} \bar{G}_x \right\} \bar{i} + \left\{ \underline{\text{rot}} \bar{G}_y \right\} \bar{j} + \left\{ \underline{\text{rot}} \bar{G}_z \right\} \bar{k} + \\ & + \text{rot}_S \bar{G} \underline{d}_S + \text{rot}_1 \bar{G} \underline{d}_C \quad \text{sau} \\ & \underline{\text{rot}} \bar{G} = \underline{\text{rot}} \bar{G} + \text{rot}_S \bar{G} \underline{d}_S + \text{rot}_1 \bar{G} \underline{d}_C \quad (1.3.43) \end{aligned}$$

expresie valabilă în întreg spațiul $R^3 = V_\infty$. Dacă ne referim la volumul $V_\Sigma \subset V_\infty$, ca în cazul divergenței, avem:

$$\text{rot}_{V_\Sigma} \bar{G} = \text{rot} \bar{G} \underline{d}_{V_\Sigma} + \text{rot}_S \bar{G} \underline{d}_{S'} = s n_{V_\Sigma} + \text{rot}_1 \bar{G} \underline{d}_{C'} = c n_{V_\Sigma} \quad (1.3.44)$$

unde: S' este suprafața de salt a componentelor tangente ale lui \bar{G} , iar C' este o curbă pe care vectorul \bar{G} este nedefinit.

Observație importantă:

Dacă operațiile gradient, divergență și rotor sînt operații punctuale, cele definite în distribuții prin relațiile (1.3.4), (1.3.26) și (1.3.44) sînt operații globale.

Capitolul 2

MĂRIMI FIZICE ALE CORPURILOR ȘI CIMPULUI ELECTROMAGNETIC ÎN SPAȚIUL DISTRIBUȚIILOR.

Se știe că în literatura tehnică s-au utilizat sporadic unele distribuții - mai ales cele legate de densitățile volumice de sarcină electrică /41, 64, 91/.

În cele ce urmează se vor defini riguros, densitățile volumice de sarcină electrică distribuționale, atât pentru sarcini electrice libere, cât și pentru sarcini de polarizare, cu repartiție punctuală, lineică, superficială și volumică, calculându-se totodată și sarcinile electrice ce determină repartițiile respective; se definește distribuția intensității curentului electric de conducție și densitățile ei; se definesc apoi distribuțiile vectoriale de polarizare electrică și magnetică, inducție și intensitate de câmp electric și inducție și intensitate de câmp magnetic.

Definirea densităților volumice distribuționale pentru toate repartițiile posibile de sarcină electrică are avantajul utilizării unui limbaj unitar și al apropierii dintre limbajul matematic și al determinărilor experimentale; ultimul aspect este relevant și în legătură cu definirea vectorilor de polarizare electrică și magnetică. Definiția intensității curentului electric de conducție în spațiul distribuțiilor, pe lângă cele două avantaje menționate mai sus, cuprinde și un termen suplimentar neutilizat în teoria clasică, datorat discontinuității sarcinii electrice, în momentul t_0 , un impuls de curent - ceea ce de fapt este, din nou, o exprimare matematică mai adecvată a unui fenomen fizic idealizat.

Mărimile vectoriale ale cimpului, definite în spațiul distribuțiilor se vor utiliza în formularea formei distribuționale a legilor cimpului electromagnetic.

Definirea stratului dublu și a densității sale volumice în spațiul distribuțiilor /52/ va constitui o formă matematică accesibilă aplicațiilor din ultimul capitol.

Contribuțiile originale - legate de definirea riguroasă și

sistematică în cadrul teoriei distribuțiilor a mărimilor fizice ale corpurilor și câmpului electromagnetic sînt prezentate detaliat în paragrafele următoare; parțial, unele rezultate au fost publicate sau prezentate la sesiuni științifice /139,141,153/.

2.1. SARCINA ELECTRICA SI DENSITATILE EI.
DENSITATEA DE DUBLU STRAT.

2.1.1. Densitatea volumică de sarcină electrică punctuală.

Notînd distribuția lui Dirac concentrată în punctul P, de rază vectorială \vec{r} , prin $\underline{\sigma}_p(\vec{r})$, definită cu relația:

$$\langle \underline{\sigma}_p(\vec{r}), \varphi(\vec{r}) \rangle = \varphi(P), \quad \vec{r} \in R^3, \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (2.1.1)$$

se definește densitatea volumică a sarcinii punctuale, în sens distribuțional, mărimea:

$$\underline{\sigma}_p(\vec{r}) = Q_p \underline{\sigma}_p(\vec{r}). \quad (2.1.2)$$

Se introduce următoarea definiție /131,132/: se numește - printr-un abuz de limbaj - "integrala" de volum a unei distribuții, notată cu $\int_V f dv$, suma tuturor distribuțiilor definite pe volumul considerat, cu funcția test $\varphi(x,y,z) = 1$.

"Integrarea" densității volumice a sarcinii punctuale pe volumul V, care include punctul P, conduce la suma sarcinilor punctuale din V:

$$\int_V \underline{\sigma}_p(\vec{r}) dv = \sum_{\lambda=1}^n \langle \underline{\sigma}_p(\vec{r}_\lambda), 1 \rangle = \sum_{\lambda=1}^n Q_{p_\lambda} \langle \underline{\sigma}_p(\vec{r}_\lambda), 1 \rangle = \sum_{\lambda=1}^n Q_{p_\lambda} \quad (2.1.3)$$

2.1.2. Densități distribuționale de sarcină electrică liberă și de polarizare.

În cazul sarcinii electrice libere se pot defini în spațiul distribuțiilor D' , distribuțiile densitate volumică de sarcină electrică repartizată lineic, $\underline{\rho}_l$ pe curba C, superficial pe suprafața S, $\underline{\rho}_s$, sau volumic în volumul V, $\underline{\rho}_v$. Ele se introduc cu ajutorul distribuțiilor lui Dirac concentrate pe curbă, suprafață sau în volumul respectiv, notate $\underline{\sigma}_C, \underline{\sigma}_S, \underline{\sigma}_V$, definite prin relațiile (1.1.21), (1.1.22) și (1.1.23), cu proprietatea

esențială, că suportul fiecăreia dintre ele este inclus în S , C sau V . Astfel avem următoarele relații de definiție a densităților volumice distribuționale repartizate lineic, superficial și volumic:

$$\underline{\rho}_1(\vec{r}) = \rho_1(\vec{r}) \underline{d}_C \quad (2.1.4)$$

$$\underline{\rho}_s(\vec{r}) = \rho_s(\vec{r}) \underline{d}_S \quad (2.1.5)$$

$$\underline{\rho}_v(\vec{r}) = \rho_v(\vec{r}) \underline{d}_V \quad (2.1.6)$$

Conceptul de densitate volumică de sarcină are un sens fizic, dacă prin integrarea ei pe volumul respectiv, se obține sarcina totală din volumul considerat. Stiind că prin $\int f(\mathbf{x}) dx$, $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}'$, cu suport compact, se înțelege numărul $\langle \underline{f}, \varphi \rangle$, unde $\varphi \in \mathcal{D}$ și $\varphi \equiv 1$, rezultă:

$$\langle \underline{\rho}_1(\vec{r}), 1 \rangle = \langle \rho_1(\vec{r}) \underline{d}_C, 1 \rangle = \int_C \rho_1(\vec{r}) dl = Q_C \quad (2.1.7)$$

$$\langle \underline{\rho}_s(\vec{r}), 1 \rangle = \langle \rho_s(\vec{r}) \underline{d}_S, 1 \rangle = \int_S \rho_s(\vec{r}) ds = Q_S \quad (2.1.8)$$

$$\langle \underline{\rho}_v(\vec{r}), 1 \rangle = \langle \rho_v(\vec{r}) \underline{d}_V, 1 \rangle = \int_V \rho_v(\vec{r}) dv = Q_V \quad (2.1.9)$$

unde: Q_C , Q_S și Q_V reprezintă sarcina electrică liberă ce încarcă curba C , suprafața S , respectiv volumul V .

Distribuția densității volumice de sarcină electrică din întregul volum V_{Σ_∞} , se introduce printr-o distribuție regulată și deci integrala sa va fi:

$$\langle \underline{\rho}_v(r), 1 \rangle = \int_{V_{\Sigma_\infty}} \rho_v(\vec{r}) dv = Q \quad (2.1.10)$$

sarcina electrică totală din V_{Σ_∞} .

Prin definiție, se introduce distribuția densității volumice a sarcinii electrice libere, referitoare la volumul V_Σ , în forma:

$$\underline{\rho}_{v_\Sigma} = \rho_v \underline{d}_{V_\Sigma} + \rho_s \underline{d}_S = s n v_\Sigma + \rho_l \underline{d}_C = c n v_\Sigma + \sum_{\rho_\lambda \in V_\Sigma} Q_\lambda \underline{d}_{P_\lambda} \quad (2.1.11)$$

unde $\underline{\sigma}_{V_\Sigma}$, $\underline{\sigma}_{S'} = S \cap V_\Sigma$, $\underline{\sigma}_{C'} = C \cap V_\Sigma$ și $\underline{\sigma}_{P_\lambda}$ sînt distribuțiile lui Dirac concentrate pe volumul V_Σ , suprafața S' ce rezultă din intersecția suprafeței S cu volumul V_Σ , curba C' ce rezultă din intersecția cîrbei C cu volumul V_Σ și în puncte P cuprinse în V , astfel spus distribuțiile lui Dirac sînt concentrate pe suprafețe, curbe și puncte incluse într-un volum V_Σ .

În baza definițiilor date pentru distribuțiile concentrate în V_Σ , pe S' , C' și P_λ , relațiile (1.1.24), (1.1.25) și (1.1.26) la $\varphi = 1$, se obține:

$$\underline{\rho}_{V_\Sigma} = \int_{V_\Sigma} \rho_v dv + \int_{S'} \rho_s ds + \int_{C'} \rho_l dl + \sum_{P_\lambda \in V_\Sigma} Q_\lambda = Q_{V_\Sigma} \quad (2.1.12)$$

în care Q_{V_Σ} reprezintă sarcina liberă totală închisă de suprafața Σ .

Pentru sarcinile de polarizare se pot defini în mod similar, distribuțiile:

$$\underline{\rho}'_p(\vec{r}) = Q'_p \underline{\sigma}'_p(\vec{r}) \quad (2.1.13)$$

$$\underline{\rho}'_l(\vec{r}) = \rho'_l(\vec{r}) \underline{\sigma}'_c \quad (2.1.14)$$

$$\underline{\rho}'_s(\vec{r}) = \rho'_s(\vec{r}) \underline{\sigma}'_s \quad (2.1.15)$$

$$\underline{\rho}'_v(\vec{r}) = \rho'_v(\vec{r}) \underline{\sigma}'_v \quad (2.1.16)$$

în care: Q'_p - sarcina punctuală de polarizare;

$\rho'_l(\vec{r})$, $\rho'_s(\vec{r})$, $\rho'_v(\vec{r})$ - densitatea lineică, superficială și volumică a sarcinii electrice de polarizare.

În întregul volum V_{Σ_∞} , distribuția densității volumice de sarcină electrică se introduce printr-o distribuție regulată și deci integrala ei va da sarcina electrică de polarizare, totală, din V_{Σ_∞} ,

$$\langle \underline{\rho}'_v(\vec{r}), 1 \rangle = \int_{V_{\Sigma_\infty}} \rho'_v(\vec{r}) dv = Q' \quad (2.1.17)$$

Se introduce, prin definiție, distribuția densității volumice a sarcinii electrice de polarizare, referitoare la un volum V_Σ , mărginit de suprafața Σ , astfel:

$$\rho'_{V_\Sigma} = \rho'_V \underline{dV}_\Sigma + \rho'_S \underline{dS}' = S \cap V_\Sigma + \rho'_i \underline{dC}' = C \cap V_\Sigma + \sum_{P_\lambda \in V_\Sigma} Q'_\lambda \underline{dP}_\lambda, \quad (2.1.18)$$

undé: \underline{dV}_Σ , \underline{dC}' , \underline{dS}' și \underline{dP}_λ sînt distribuțiile lui Dirac concentrate pe volumul V_Σ sau pe suprafețe S' , curbe C' și în puncte P_λ incluse în volumul V_Σ .

Si aici rezultă sarcina de polarizare totală inclusă de suprafața Σ , astfel:

$$\rho_{V_\Sigma} = \int_{V_\Sigma} \rho'_V dv + \int_{S'} \rho'_S ds + \int_{C'} \rho'_i dl + \sum_{P_\lambda \in V_\Sigma} Q'_\lambda = Q'_{V_\Sigma} \quad (2.1.19)$$

2.1.3. Densitatea de dublu strat.

Conceptul de strat electric pe suprafața S sau curba C poate fi interpretat corect în spațiul distribuțiilor, definindu-se chiar și distribuția sa densitate volumică [52,130/.

Referitor la stratul electric dublu pe o suprafață, se pot da [52/ următoarele definiții:

Se numește strat electric dublu pe suprafața S , limită pentru care $h \rightarrow +0$ în sensul teoriei distribuțiilor, a ansamblului de sarcini electrice repartizate pe suprafețele S și S' (fig .2.1), negative repartizate cu densitatea $\rho_S(\vec{r})$, respectiv pozitive repartizate cu densitatea $\rho'_S(\vec{r})$, pentru

că $\rho_S(\vec{r})$ și $\rho'_S(\vec{r})$ sunt densități superficiale verifică relația:

$$\rho_S(\vec{r}) ds = \rho'_S(\vec{r}') ds', \quad (2.1.20)$$

admițînd că densitatea momentelor definită prin relația:

$$\tau(x,y,z) = \lim_{h \rightarrow +0} \rho_S(x,y,z)h \quad (2.1.21)$$

este o mărime finită.

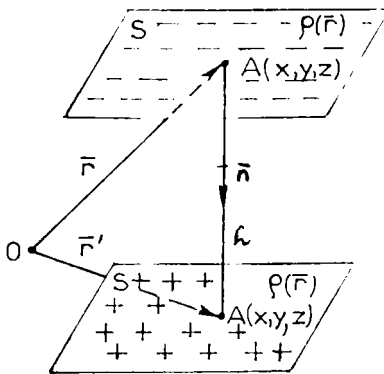


Fig. 2.1

Densitatea volumică a stratului electric dublu pe suprafața S , este distribuția:

$$\underline{\rho}_s(\vec{r}) = - \frac{\partial}{\partial n} \left[\tilde{r}(\vec{r}) \underline{\sigma}_s \right], \quad (2.1.22)$$

unde $\underline{\sigma}_s$ este distribuția lui Dirac concentrată pe suprafața S . Distribuția (2.1.22) corespunde repartiției dipolilor pe suprafața S , orientată de la S la S' după normală, \vec{n} .

Introducând suprafața S într-un sistem de coordonate x, y, z , stratul electric dublu fiind situat în planul oyz , cu normala \vec{n} îndreptată în sensul pozitiv al axei Ox , se poate scrie:

$$\underline{\rho}(x, y, z) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{r}(x, y, z) \underline{\sigma}_{x=0} \right]. \quad (2.1.23)$$

știind că

$$\underline{\sigma}(0, y, z) = \underline{\sigma}_{x=0},$$

de oarece

$$\begin{aligned} \langle \underline{\sigma}_{x=0}, \varphi(x, y, z) \rangle &= \int_{x=0} \varphi(x, y, z) dy dz = \\ &= \iint_{R^2} \varphi(0, y, z) dy dz = \langle \underline{\sigma}(x), \varphi(x, y, z) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^3), \end{aligned}$$

rezultă

$$\underline{\rho}_\Delta(x, y, z) = - \tilde{r}(y, z) \frac{\partial}{\partial x} \underline{\sigma}(x) = - \tilde{r}(y, z) \underline{\sigma}'(x). \quad (2.1.24)$$

Densitatea volumică distribuțională a stratului dublu situat în planul Oyz ; se observă că ea se exprimă cu ajutorul derivatei distribuției lui Dirac; relația va fi utilă în aplicațiile din capitolul 5.

2.2. INTENSITATEA SI DENSITATEA CURENTULUI DE CONDUCTIE.

Se consideră $q(t)$ sarcina electrică ce trece la momentul t printr-o suprafață trasată în conductă. Cu ajutorul funcției lui Heaviside (rel.1.1.9), sarcina electrică ce trece prin secțiunea conductei începînd cu $t=t_0$, se poate scrie sub forma:

$$q^*(t) = q(t) \theta(t-t_0), \quad (2.2.1)$$

în care

$$q(t) = q^*(t) \quad \text{pentru } t \geq t_0.$$

Deoarece distribuția lui Heaviside este regulată (rel.1.1.9'), rezultă distribuția sarcinii electrice:

$$\underline{q(t)} = q(t) \underline{\theta(t-t_0)} \quad (2.2.2)$$

Derivând în sensul distribuțiilor (rel.1.2.6), se obține:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \underline{\theta(t-t_0)} q'(t) + q(t_0) \underline{\delta(t-t_0)} \quad (2.2.3)$$

Deoarece

$$q' \underline{\theta(t-t_0)} = i \theta(t-t_0) = \int_0^{\infty} \theta i \varphi dt = \int_{t_0}^{\infty} i \varphi dt = \{ \underline{i} \} \quad (2.2.4)$$

(presupunând că i este o funcție indefinit derivabilă), considerind prin definiție că

$$\underline{i(t)} = \frac{dq(t)}{dt} \quad (2.2.5)$$

rezultă:

$$\underline{i(t)} = \{ \underline{i(t)} \} + q(t_0) \underline{\delta(t-t_0)} \quad (2.2.6)$$

distribuția intensității curentului de conducție.

Se observă, că intensitatea curentului de conducție (în sensul teoriei distribuțiilor) este egală cu suma dintre intensitatea în sens obișnuit și intensitatea datorită discontinuității din momentul t_0 a sarcinii electrice, când are loc un impuls al curentului.

Cu ajutorul distribuției lui Dirac concentrată pe volumul V , $\underline{\delta_V}$, (rel.1.1.23), al conductorului masiv parcurs de curentul de conducție, vom defini distribuția densitate volumică a curentului electric de conducție în forma:

$$\underline{\vec{J}} = \underline{\vec{J}} \underline{\delta_V} \quad ; \quad (2.2.7)$$

Cu distribuția lui Dirac $\underline{\delta_S}$, concentrată pe suprafața S , (rel.1.1.22), vom defini distribuția densitate a pinzei de curent

$$\underline{\vec{J}}_s = \underline{\vec{J}}_s \underline{\delta_S} \quad (2.2.8)$$

Distribuția densitate a curentului lîneic , se definește cu ajutorul distribuției lui Dirac concentrată pe curba C, \underline{d}_C . (rel. 1.1.21),

$$\underline{J}_1 = \bar{J}_1 \underline{d}_C \quad , \quad (2.2.9)$$

în care $\bar{J}_1 = i \bar{u}_1$, i fiind intensitatea curentului de conducție prin fir, iar \bar{u}_1 este versorul tangent la cursă, avînd sensul pe tangentă identic cu sensul de referință al curentului.

Fie o suprafață S_Γ , limitată de curba Γ , care intersectează conducta parcursă de curent de conducție, pînze de curent și curenți filiformi (fig.2.2).

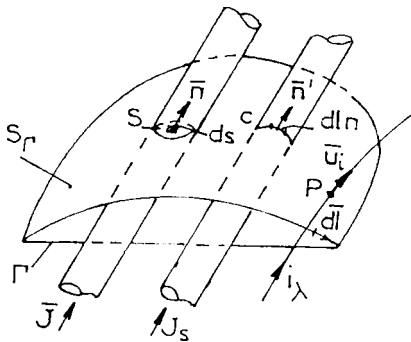


Fig.2.2

referință al curbei Γ ;

i_λ - reprezintă intensitatea curentului filiform interceptată de S_Γ , pozitiv cînd sensul său de referință coincide cu regula burghiului drept aplicată curbei Γ și negativă în caz contrar.

Ca urmare, cu mărimile definite anterior se poate scrie pentru intensitatea curentului de conducție prin S_Γ , la $\varphi = 1$, expresia:

Intensitatea curentului prin suprafața S_Γ (cum se știe), se scrie în forma:

$$i = \int_{S_\Gamma} \bar{J} \cdot d\bar{s} + \int_{C=S_\Gamma \cap S_J} \bar{J}_s \cdot d\bar{l}_m + \sum \pm i_\lambda \quad (2.2.10)$$

în care:

$d\bar{s} = ds \cdot \bar{n}$, \bar{n} fiind normala la S_Γ cu sensul de referință dat de regula burghiului drept;

$d\bar{l}_m = dl \cdot \bar{n}'$, \bar{n}' - normala la curba C care se găsește în planul tangent al pînzei de curent și are orientarea dată de regula burghiului drept, asociată sensului de

$$\begin{aligned}
 \underline{1}_{S_{\Gamma}} = & (\bar{J} \cdot \bar{n}) \underline{\sigma}_{S_{\Gamma}} + (\bar{J}_s \cdot \bar{n}) \underline{\sigma}_{C=S_{\Gamma} \cap S_{\mathcal{D}_s}} + \\
 & + \sum_{P_{\lambda} \in S_{\Gamma}} (\bar{J}_{1\lambda} \cdot \bar{u}_{1\lambda}) \underline{\sigma}_{P_{\lambda}}
 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

unde P_{λ} sînt puncte de intersecție între S_{Γ} și conductele filiforme parcurse de curenți.

2.3. MARIMI VECTORIALE ALE CORPURILOR SI CIMPULUI ELECTROMAGNETIC.

În literatura matematică se cunoaște definiția unei distribuții vectoriale [35], conform căreia un vector este distribuție, dacă proiecțiile sale pe axele de coordonate sînt distribuții.

Vectorul de polarizare \bar{P} și vectorul magnetizație \bar{M} , clasic definiți ca limita spre care tinde raportul dintre suma momentelor electrice, respectiv magnetice ale moleculelor din elementul de volum, cînd acesta tinde la zero pot fi considerați în distribuții, astfel:

$$\underline{\bar{P}} : \mathcal{D} \Rightarrow \mathbb{R}^3$$

prin relația:

$$\langle \underline{\bar{P}}, \varphi \rangle = \langle \underline{P}_x, \varphi \rangle \bar{i} + \langle \underline{P}_y, \varphi \rangle \bar{j} + \langle \underline{P}_z, \varphi \rangle \bar{k}, \quad (2.3.1)$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$

deci $\underline{P}_x \in \mathcal{D}'$, $\underline{P}_y \in \mathcal{D}'$, $\underline{P}_z \in \mathcal{D}$;

$$\underline{\bar{M}} : \mathcal{D} \Rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{prin relația}$$

$$\langle \underline{\bar{M}}, \varphi \rangle = \langle \underline{M}_x, \varphi \rangle \bar{i} + \langle \underline{M}_y, \varphi \rangle \bar{j} + \langle \underline{M}_z, \varphi \rangle \bar{k} \quad (2.3.2)$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$

deci $\underline{M}_x \in \mathcal{D}'$, $\underline{M}_y \in \mathcal{D}'$, $\underline{M}_z \in \mathcal{D}'$.

La fel, vectorii \bar{D} , \bar{E} , \bar{B} și sînt distribuții dacă proiecțiile lor pe axe sînt distribuții:

Inducția electrică,

$$\underline{\bar{D}} : \mathcal{D} \Rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{prin relația}$$

$$\langle \underline{\bar{D}}, \varphi \rangle = \langle \underline{D}_x, \varphi \rangle \bar{i} + \langle \underline{D}_y, \varphi \rangle \bar{j} + \langle \underline{D}_z, \varphi \rangle \bar{k}, \quad (2.3.3)$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$

, cu $\underline{D}_x \in \mathcal{D}'$, $\underline{D}_y \in \mathcal{D}'$, $\underline{D}_z \in \mathcal{D}'$;

- intensitatea cîmpului electric,

$\underline{\bar{E}} : \mathcal{D} \Rightarrow \mathbb{R}^3$ prin relația

$$\langle \underline{\bar{E}}, \varphi \rangle = \langle \underline{E}_x, \varphi \rangle \bar{i} + \langle \underline{E}_y, \varphi \rangle \bar{j} + \langle \underline{E}_z, \varphi \rangle \bar{k}, \quad (2.3.4)$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$ și $\underline{E}_x \in \mathcal{D}'$, $\underline{E}_y \in \mathcal{D}'$, $\underline{E}_z \in \mathcal{D}'$;

- inducția magnetică:

$\underline{\bar{B}} : \mathcal{D} \Rightarrow \mathbb{R}^3$ prin relația

$$\langle \underline{\bar{B}}, \varphi \rangle = \langle \underline{B}_x, \varphi \rangle \bar{i} + \langle \underline{B}_y, \varphi \rangle \bar{j} + \langle \underline{B}_z, \varphi \rangle \bar{k} \quad (2.3.5)$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$ și $\underline{B}_x \in \mathcal{D}'$, $\underline{B}_y \in \mathcal{D}'$, $\underline{B}_z \in \mathcal{D}'$

- intensitatea cîmpului magnetic

$\underline{\bar{H}} : \mathcal{D} \Rightarrow \mathbb{R}^3$ prin relația

$$\langle \underline{\bar{H}}, \varphi \rangle = \langle \underline{H}_x, \varphi \rangle \bar{i} + \langle \underline{H}_y, \varphi \rangle \bar{j} + \langle \underline{H}_z, \varphi \rangle \bar{k} \quad (2.3.6)$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$ și $\underline{H}_x \in \mathcal{D}'$, $\underline{H}_y \in \mathcal{D}'$, $\underline{H}_z \in \mathcal{D}'$.

Capitolul 3

LEGILE TEORIEI MAXWELL A CIMPULUI ELECTRO-MAGNETIC IN SPATIUL DISTRIBUTIILOR.

In articolul "Generalized functions in the theory of fields", publicat in Revue Roumaine des Sciences Technique, 1971, R.Răduleț și I.R. Ciric /91/ au fost primii care au introdus in electrotehnica românească teoria distribuțiilor, ajungind la formularea generalizată a celor mai importante legi ale teoriei câmpului electromagnetic.

Deducerea lor s-a făcut aplicând teoremele generalizate ale lui Stokes și Gauss-Ostrogradski, pornind de la formele integrale cunoscute și din acest motiv ele sînt valabile pentru funcția test $\varphi = 1$, $1 \in \mathcal{D}$ (spațiul funcțiilor indefinit derivabile). O formulare apropiată o dă D. Homentcovski in articolul "Sur la forme en distributions des equations de Maxwell", publicat in aceeași revistă in anul 1972 /41/.

Pe baza mărimilor electrice și magnetice ale corpurilor și câmpului, definite in capitolul 2, și cu ajutorul operatorilor definiți in paragraful 1.3, in cadrul acestui capitol se formulează principalele legi ale câmpului electromagnetic in spațiul distribuțiilor, valabile pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$. Avantajele formulării legilor in spațiul distribuțiilor, sînt legate in primul rînd de faptul că operatorii div și rot definiți in distribuții conferă caracter glosal legilor și teoremelor.

Din literatura consultată in vederea elaborării tezei, am tras concluzia că aceste formulări sînt originale. Parțial, unele rezultate au fost comunicate sau publicate /138,139,140/.

3.1. Precizări cu privire la formele distribuționale ale legilor.

Legile teoriilor de cîmp se exprimă cu ajutorul integralelor de suprafață și de linie ale vectorilor câmpului electromagnetic. Acestea le corespund conceptele diferențiale divergentă și rotorul. Experimental, legile se deduc sub formă integrală.

Formularea în distribuții se justifică prin faptul că din ea rezultă formele diferențiale și prin urmare și cea integrală a legii.

Forma distribuțională este valabilă pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, φ + funcție de punct și de timp. Ca regulă de trecere de la forma în distribuții la formele clasice se poate folosi următoarea: se scriu formele legilor în distribuții (forme care coincid formal cu formele locale), valabile $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi = \varphi(P, t)$. Cu ajutorul operatorilor și mărimilor definite în spațiul distribuțiilor, prin identificare, rezultă formele diferențiale clasice și de aici forma integrală.

In cazul legilor care nu au forme diferențiale, trecerea la forma clasică se face folosind definiția egalității a două distribuții (rel.1.1.20).

3.2. LEGEA FLUXULUI ELECTRIC.

Legea fluxului electric, formulată cu ajutorul distribuțiilor are forma:

$$\text{div}_{V_{\Sigma}} \bar{D} = \rho_{V_{\Sigma}} \quad (3.2.1)$$

și poate fi enunțată cum urmează:

In fiecare moment și pentru orice suprafață închisă, distribuția în volum a divergenței vectorului inducție electrică este egală cu distribuția în volumul delimitat de suprafață a densității sarcinii electrice libere.

Formularea (3.2.1) se justifică prin faptul că din ea rezultă formele diferențiale și prin urmare și forma integrală a legii.

In adevăr, dezvoltând în (3.2.1) cei doi membrii cu relațiile (1.3.26) și (2.1.11) se obține:

$$\begin{aligned} \text{div}_{V_{\Sigma}} \bar{D} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in V_{\Sigma}} \text{div}_{\lambda} \bar{D} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in V_{\Sigma}} \rho_{\lambda} + \text{div}_{\ell} \bar{D} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in V_{\Sigma}} \rho_{\lambda} + \sum_{\lambda \in V_{\Sigma}} \text{div}_{\rho} \bar{D} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in V_{\Sigma}} \rho_{\lambda} \\ = \rho_{V_{\Sigma}} + \rho_{S} = \rho_{V_{\Sigma}} + \rho_{\ell} = \rho_{V_{\Sigma}} + \rho_{\rho} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

deoarece V_{Σ} este arbitrar, prin identificare, rezultă:

$$\text{div}_{V} \bar{D} = \rho_{V}, \text{div}_{S} \bar{D} = \rho_{S}, \text{div}_{\ell} \bar{D} = \rho_{\ell}, \text{div}_{\rho} \bar{D} = \rho_{\rho} \quad (3.2.3)$$

formele diferențiale ale legii.

Forma integrală echivalentă se obține cu transformarea Gauss-Ostrogradski ,

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{V_{\Sigma}} \operatorname{div} \vec{D} \, dv + \int_{S'} \operatorname{div}_s \vec{D} \, ds + \int_{C'} \operatorname{div}_l \vec{D} \, dl + \sum_{P_{\lambda} \in V_{\Sigma}} \operatorname{div}_{P_{\lambda}} \vec{D} \quad (3.24)$$

adică

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{V_{\Sigma}} \rho_v \, dv + \int_{S'} \rho_s \, ds + \int_{C'} \rho_l \, dl + \sum_{P_{\lambda} \in V_{\Sigma}} Q_{P_{\lambda}} \quad (3.25)$$

Cu relația (2.1.12), rezultă forma integrală cunoscută:

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{V_{\Sigma}} \quad (3.26)$$

adică: în fiecare moment, fluxul vectorului inducție electrică, prin orice suprafață închisă Σ , este egal cu sarcina electrică liberă din volumul închis de suprafață, V_{Σ} .

3.3. LEGEA POLARIZAȚIEI ELECTRICE TEMPORARE ȘI LEGEA LEGATURII \vec{D} , \vec{E} , \vec{P} .

Forma în distribuții a legii polarizației electrice temporare, pentru medii liniare și izotrope, este:

$$\underline{\vec{P}}_t = \epsilon_0 \chi_e \underline{\vec{E}} \quad (3.3.1)$$

și se enunță astfel:

În fiecare moment și în orice mediu liniar și izotrop, distribuția în volum a vectorului polarizație electrică temporară este proporțională cu distribuția în volum a vectorului intensitate de câmp electric, factor de proporționalitate fiind produsul între permitivitatea vidului și susceptivitatea electrică a mediului.

Justificarea formulării de mai sus se face observînd că din forma ei în distribuții rezultă forma obișnuită a legii. În adevăr, avem

$$\langle \underline{\vec{P}}_t, \varphi \rangle = \langle \epsilon_0 \chi_e \underline{\vec{E}}, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (3.3.2)$$

și \bar{P}_t și \bar{E} - distribuții regulate, generate de funcțiile vectoriale \bar{P}_t și \bar{E} , local integrabile, cu relația (1.1.8'), se definesc

$$\langle \bar{P}_t, \varphi \rangle = \int_V \bar{P}_t \varphi \, dv, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \text{ și } V = \text{supp } \varphi, \quad (3.3.3)$$

Aplicînd relația (1.2.1) - produsul unei distribuții cu un număr ($\epsilon_0 \chi_e = \text{constant}$) și cu relația (1.1.8'), se obține:

$$\langle \epsilon_0 \chi_e \bar{E}, \varphi \rangle = \epsilon_0 \chi_e \langle \bar{E}, \varphi \rangle = \epsilon_0 \chi_e \int_V \bar{E} \varphi \, dv, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \text{ și } V = \text{supp } \varphi \quad (3.3.4)$$

Din egalitatea (3.3.1) rezultă că diferența funcțiilor local integrabile, care generează distribuțiile respective, este nulă aproape peste tot /52/.

$$\bar{P}_t - \epsilon_0 \chi_e \bar{E} = 0 \quad \text{a.p.t.} \quad (3.3.5)$$

sau că mulțimea punctelor pentru care

$$\bar{P}_t - \epsilon_0 \chi_e \bar{E} \neq 0, \text{ este de măsură nulă.}$$

Dacă funcțiile local integrabile sînt și continue rezultă egalitatea (3.3.5) peste tot.

Din (3.3.5) avem expresia

$$\bar{P}_t = \epsilon_0 \chi_e \bar{E}, \quad (3.3.6)$$

care, cum se știe reprezintă forma clasică a legii.

Forma în distribuții a legii legăturii \bar{D} , \bar{E} , \bar{P} este:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (3.3.7)$$

și se enunță astfel:

În fiecare moment, distribuția în volum a vectorului inducție electrică, este egală cu suma dintre distribuție în volum a vectorului intensitate de cîmp electric, înmulțită cu permitivitatea vidului și distribuția în volum a vectorului polarizație electrică.

Din forma în distribuții, rezultă forma clasică a legii, astfel:

- pentru $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, avem

$$\langle \bar{D}, \varphi \rangle = \langle \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}, \varphi \rangle, \quad (7.3.8)$$

Distribuțiile \underline{D} , \underline{E} și \underline{P} sînt distribuții regulate generate de funcții local integrabile (rel.1.18')

$$\langle \underline{D}, \varphi \rangle = \int_V \underline{D} \varphi \, dv, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad v = \text{supp} \varphi \quad (3.3.9)$$

iar \underline{E} și \underline{P} sînt definite prin relațiile (3.3.3), respectiv (3.3.4).

Aplicînd relația (1.2.1) cu ϵ_0 - constantă, din expresia (3.3.8), rezultă că

$$\underline{D} - \epsilon_0 \underline{E} - \underline{P} = 0 \quad \text{a.p.t.}$$

$$\text{sau } \underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \quad \text{a.p.t.} \quad (3.3.10)$$

forma clasică a legii:

Combinînd cele două legi, sub forma distribuțională, se obține:

$$\begin{aligned} \underline{D} &= \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}_t + \underline{P}_p = \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E} + \underline{P}_p = \epsilon \underline{E} + \underline{P}_p, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

în care \underline{P}_p este distribuția polarizației permanente. Relația este valabilă pentru:

$$\langle \underline{D}, \varphi \rangle = \epsilon_0 \langle \underline{E}, \varphi \rangle + \langle \underline{P}_p, \varphi \rangle \quad (3.3.12)$$

și cu distribuțiile definite prin (3.3.9), (3.3.4) și (3.3.3), rezultă:

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}_p \quad \text{a.p.t.}, \quad (3.3.13)$$

care reprezintă legea legăturii în medii liniare și izotrope, în forma clasică.

3.4. LEGEA FLUXULUI MAGNETIC.

Forma în distribuții a legii fluxului magnetic este următoarea:

$$\operatorname{div}_{V_{\Sigma}} \vec{B} = 0 \quad (3.4.1)$$

Ea se enunță astfel:

În fiecare moment și pentru orice suprafață închisă, distribuția în volum a divergenței vectorului inducție magnetică este egală cu zero.

Din forma distribuțională a legii, rezultă formele diferențiale. Dezvoltând $\operatorname{div}_{V_{\Sigma}} \vec{B}$ cu relația (1.3.26) se obține:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{V_{\Sigma}} \vec{B} &= \operatorname{div}_S \vec{B} + \operatorname{div}_L \vec{B} + \sum_{P_{\lambda} \in V_{\Sigma}} \operatorname{div}_P \vec{B} \\ &= \operatorname{div}_S \vec{B} + \operatorname{div}_L \vec{B} + \sum_{P_{\lambda} \in V_{\Sigma}} \operatorname{div}_P \vec{B} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

de unde rezultă relațiile cunoscute

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div}_S \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div}_L \vec{B} = 0 \quad \text{și} \quad \operatorname{div}_P \vec{B} = 0 \quad (3.4.3)$$

deoarece V_{Σ} este arbitrar.

Cu ajutorul lor, aplicând transformarea Gauss-Ostrogradski avem:

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \int_{V_{\Sigma}} \operatorname{div} \vec{B} \, dv + \int_{S'} \operatorname{div}_S \vec{B} \, ds + \int_{C'} \operatorname{div}_L \vec{B} \, dl + \sum_{P_{\lambda} \in V_{\Sigma}} \operatorname{div}_P \vec{B} \quad (3.4.4)$$

$$\text{sau} \quad \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0, \quad (3.4.5)$$

ceea ce reprezintă forma integrală a legii fluxului magnetic

3.5. LEGEA MAGNETIZĂRII TEMPORARE ȘI LEGEA LEGĂTURII DINTRE \vec{B} , \vec{H} ȘI \vec{M}

În distribuții, forma legii magnetizării temporare este

$$\vec{M}_t = \chi_m \vec{H}, \quad (3.5.1)$$

care se enunță astfel:

În fiecare moment, distribuția în volum a vectorului magnetizație temporară este proporțională cu distribuția în volum a vectorului intensitate de câmp magnetic, factor de proporționalitate fiind susceptivitatea magnetică a mediului.

Din forma în distribuții rezultă forma clasică a legii. În adevăr:

$$\langle \underline{\bar{M}}_t, \varphi \rangle = \langle \chi_m \cdot \underline{\bar{H}}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (3.5.2)$$

Dacă $\underline{\bar{M}}_t$ și $\underline{\bar{M}}$ sînt distribuții regulate, generate de funcțiile local integrabile $\underline{\bar{M}}_t$ și $\underline{\bar{M}}$, definite conform relației (1.1.8'),

$$\langle \underline{\bar{M}}_t, \varphi \rangle = \int_V \underline{\bar{M}}_t \varphi \, dv, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad V = \text{supp } \varphi \quad (3.5.3)$$

$$\langle \chi_m \underline{\bar{H}}, \varphi \rangle = \chi_m \langle \underline{\bar{H}}, \varphi \rangle = \chi_m \int_V \underline{\bar{H}} \varphi \, dv, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad V = \text{supp } \varphi \quad (3.5.4)$$

se obține:

$$\underline{\bar{M}}_t - \chi_m \underline{\bar{H}} = 0 \quad \text{a.p.t.},$$

sau

$$\underline{\bar{M}}_t = \chi_m \underline{\bar{H}} \quad \text{a.p.t.}, \quad (3.5.5)$$

deci se obține forma clasică a legii.

Forma în distribuții a legii legăturii este:

$$\underline{\bar{B}} = \mu_0 (\underline{\bar{H}} + \underline{\bar{M}}) \quad (3.5.6)$$

și se enunță astfel:

În fiecare moment, distribuția în volum a vectorului inducție magnetică este proporțională cu suma distribuțiilor în volum ale vectorului intensitate de câmp electric și magnetizație, factor de proporționalitate fiind permitivitatea vidului.

Pentru $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, avem

$$\langle \underline{\bar{B}}, \varphi \rangle = \langle \mu_0 (\underline{\bar{H}} + \underline{\bar{M}}), \varphi \rangle \quad (3.5.7)$$

Dacă și $\underline{\bar{B}}$ este o distribuție regulată

$$\langle \underline{\bar{B}}, \varphi \rangle = \int_V \underline{\bar{B}} \varphi \, dv, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad V = \text{supp } \varphi \quad (3.5.8)$$

cu definițiile (3.5.2) și 3.5.4), se obține egalitatea:

$$\vec{B} - \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = 0 \quad \text{a.p.t.},$$

de unde

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad \text{a.p.t.} \quad (3.5.9)$$

relație care reprezintă forma clasică a legii legăturii \vec{B} , \vec{H} , \vec{M} .

3.6. LEGEA CONSERVĂRII SARCINII ELECTRICE LIBERE.

Legea conservării sarcinii electrice libere, formulată cu ajutorul distribuțiilor, are forma:

$$\underline{\text{div}}_{V_\Sigma} \vec{J} = - \frac{d}{dt} \underline{\rho}_{V_\Sigma} \quad (3.6.1)$$

și se enunță după cum urmează:

În fiecare moment și pentru orice suprafață închisă, distribuția în volum a divergenței vectorului densității curentului electric de conducție este egală și de semn opus cu derivata în raport cu timpul a distribuției în volumul delimitat de suprafață a densității sarcinii electrice libere.

Formularea (3.6.1) se justifică, deoarece, din ea rezultă formale diferențiale cunoscute și prin urmare forma integrală a legii.

În adevăr, dezvoltând $\underline{\text{div}}_{V_\Sigma} \vec{J}$ după relația (1.3.16) și $\underline{\rho}_{V_\Sigma}$ după relația (2.1.11), se obține:

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}}_{V_\Sigma} \vec{J} &= \underline{\text{div}}_s \vec{J} + \underline{\text{div}}_l \vec{J} + \sum_{P_\lambda \in V_\Sigma} \underline{\text{div}}_{P_\lambda} \vec{J} = \underline{\text{div}}_s \vec{J} + \underline{\text{div}}_l \vec{J} + \sum_{P_\lambda \in V_\Sigma} \underline{\text{div}}_{P_\lambda} \vec{J} \\ &= \underline{\text{div}}_s \vec{J} + \underline{\text{div}}_l \vec{J} + \sum_{P_\lambda \in V_\Sigma} \underline{\text{div}}_{P_\lambda} \vec{J} = - \frac{\partial}{\partial t} \underline{\rho}_{V_\Sigma} - \frac{\partial}{\partial t} \underline{\rho}_{s \cdot} - \\ &- \frac{\partial}{\partial t} \underline{\rho}_{l \cdot} - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{P_\lambda \in V_\Sigma} \underline{\rho}_{P_\lambda} \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Prin identificare, se obțin formele diferențiale cunoscute ale legii

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \vec{J} &= - \frac{\partial \underline{\rho}_V}{\partial t}, \quad \underline{\text{div}}_s \vec{J} = - \frac{\partial \underline{\rho}_s}{\partial t}, \quad \underline{\text{div}}_l \vec{J} = - \frac{\partial \underline{\rho}_l}{\partial t} \quad \text{și} \\ \underline{\text{div}}_P \vec{J} &= - \frac{\partial}{\partial t} \underline{\rho}_{P_\lambda} \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Forma integrală echivalentă se obține cu transformarea Gauss-Ostrogradski:

$$\oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{ds} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dv + \int_{S'} \operatorname{div}_s \vec{j} ds + \int_{C'} \operatorname{div}_l \vec{j} dl + \sum_{R_{\lambda} \in V_{\Sigma}} \operatorname{div}_p \vec{j} \quad (3.6.4)$$

adică, cu relațiile (3.6.3) rezultă:

$$\oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{ds} = - \int_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv - \int_{S'} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} ds - \int_{C'} \frac{\partial \rho_l}{\partial t} dl - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{R_{\lambda} \in V_{\Sigma}} Q_p \quad (3.6.5)$$

Aplicînd relația (2.1.12) se obține

$$\oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{ds} = i_{\Sigma} = - \frac{d}{dt} Q_{V_{\Sigma}} \quad (3.6.6)$$

forma integrală a legii conservării sarcinii electrice libere.

În relația (3.6.2) s-a considerat că densitățile de sarcină electrică nu admit salturi și astfel s-a aplicat relația (1.2.5) pentru calculul derivatei distribuției densitate de sarcină electrică. Dacă se admit salturi ale densităților de sarcină din volumul V_{Σ} , salturi în timp, la momentul t_0 , aplicînd relația (1.2.6) se obține o variantă a formelor diferențiale ale legii.

Deci, dacă

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q_{V_{\Sigma}} &= \left\{ \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right\} + [\rho_v]_{t_0} \underline{\sigma}(t_0) + \left\{ \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \right\} + \left\{ \frac{\partial \rho_l}{\partial t} \right\} + [\rho_s]_{t_0} \underline{\sigma}(t_0) + \\ &+ [\rho_l]_{t_0} \underline{\sigma}(t_0) + \left\{ \frac{\partial Q_p}{\partial t} \right\} + [Q_p]_{t_0} \underline{\sigma}(t_0) \quad (3.6.7) \end{aligned}$$

rezultă:

$$\left\{ \operatorname{div} \vec{j} \right\} = - \left\{ \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right\} - [\rho_v]_{t_0} \underline{\sigma}(t_0); \left\{ \operatorname{div}_l \vec{j} \right\} = - \left\{ \frac{\partial \rho_l}{\partial t} \right\} - [\rho_l]_{t_0} \underline{\sigma}(t_0); \quad (3.6.8)$$

$$\left\{ \operatorname{div}_s \vec{j} \right\} = - \left\{ \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \right\} - [\rho_s]_{t_0} \underline{\sigma}(t_0); \left\{ \operatorname{div}_p \vec{j} \right\} = - \left\{ \frac{\partial Q_p}{\partial t} \right\} - [Q_p]_{t_0} \underline{\sigma}(t_0)$$

forme diferențiale ale legii în sensul distribuțiilor.

3.7. LEGEA CONDUCTIEI.

Forma în distribuții a legii conductiei este:

$$\underline{\bar{J}} = (\underline{\bar{E}} + \underline{\bar{E}}_1) \quad (3.7.1)$$

și se enunță astfel:

În fiecare moment distribuția în volum a vectorului densitate de curent electric de conducție este proporțională cu suma distribuțiilor în volum a vectorilor intensitate de câmp electric și intensitate de câmp electric imprimat, factor de proporționalitate fiind conductivitatea mediului.

Justificarea formulării de mai sus se face observând că din forma în distribuții rezultă forma obișnuită a legii. În adevăr, avem

$$\langle \underline{\bar{J}}, \varphi \rangle = \langle \delta(\underline{\bar{E}} + \underline{\bar{E}}_1), \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}; \quad (3.7.2)$$

dacă $\underline{\bar{J}}$ este o distribuție regulată, generată de funcția local integrabilă \bar{J} , definită prin

$$\langle \underline{\bar{J}}, \varphi \rangle = \int_V \bar{J} \varphi dv, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, V = \text{supp } \varphi \quad (3.7.3)$$

și $\underline{\bar{E}}$ respectiv $\underline{\bar{E}}_1$ sînt distribuții regulate, definite prin rel.(3.3.4); între funcțiile local integrabile avem egalitatea:

$$\bar{J} - \delta(\underline{\bar{E}} + \underline{\bar{E}}_1) = 0, \quad \text{a.p.t.}$$

$$\text{sau} \quad \bar{J} = \delta(\underline{\bar{E}} + \underline{\bar{E}}_1) \quad \text{a.p.t.}, \quad (3.7.4)$$

relație care reprezintă legea conductiei sub formă clasică.

3.8. LEGEA CIRCUITULUI MAGNETIC PENTRU CORPURI ÎN REPAUS.

Forma în distribuții a legii circuitului magnetic pentru corpuri în repaus este:

$$\text{rot}_{\underline{V}_\Sigma} \underline{\bar{H}} = \underline{\bar{J}} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{\bar{D}} \quad (3.8.1)$$

și se enunță cum urmează:

În fiecare moment distribuția în volum a rotorului vectorului intensitate de câmp magnetic este egală cu suma între distribuția în volum a densității curentului electric de conducție și distribuția în volum a derivatei în raport cu timpul a vectorului inducției electrice.

Formularea (3.8.1) se justifică deoarece, din ea rezultă formele diferențiale și forma locală a legii.

În adevăr, dezvoltând membrul stâng al relației (3.8.1) cu (1.3.4) avem:

$$\text{rot}_{V_{\Sigma}} \bar{H} = \text{rot}_{V_{\Sigma}} \bar{H} \underline{d}_{V_{\Sigma}} + \text{rot}_S \bar{H} \underline{d}_S + \text{rot}_1 \bar{H} \underline{d}_C \quad (3.8.2)$$

unde s-au considerat distribuțiile lui Dirac concentrate în volum, pe suprafață și pe curbă $\underline{d}_{V_{\Sigma}}, \underline{d}_S, \underline{d}_C$.

Din relațiile (2.2.7), (2.2.8) și (2.2.9), densitatea curentului electric de conducție, în distribuții este

$$\bar{J} = \bar{J} \underline{d}_{V_{\Sigma}} + \bar{J}_S \underline{d}_S + \bar{J}_C \underline{d}_C = \bar{J} \underline{d}_{V_{\Sigma}} + \bar{J}_S \underline{d}_S + i \bar{u}_1 \underline{d}_C \quad (3.8.3)$$

Distribuția derivatei vectorului \bar{D} , fără salt în t_0 , este dată de relația (1.2.5):

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{D} = \left\{ \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right\} \quad (3.8.4)$$

egală cu derivata lui \bar{D} , în sens clasic.

Prin identificare, din relațiile (3.8.2), (3.8.3) și (3.8.4) se obține:

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}, \quad \text{rot}_S \bar{H} = \bar{J}_S \quad \text{și} \quad \text{rot}_1 \bar{H} = i \bar{u}_1 \quad (3.8.5)$$

formele diferențiale clasice ale legii.

Forma integrală a legii circuitului magnetic se obține cu transformarea Stokes. Pentru a deduce forma integrală, se consideră o suprafață S_P , limitată de curba închisă Γ , intersectată (ca în paragraful 2.2) de conducte parcurse de curent de conducție cu densitatea \bar{J} , pinze de curent cu densitatea \bar{J}_S și curenți filiformi $i \bar{u}_1$. Se obține:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_S \text{rot } \bar{H} \cdot d\bar{s} + \int_{C=S_P \cap C_{\bar{J}_S}} \text{rot}_S \bar{H} \cdot d\bar{l}_n + \sum_{\lambda=S_P \cap C_{\bar{J}_1}} \text{rot}_1 \bar{H} \cdot \bar{u}_{1\lambda} \quad (3.8.6)$$

adică, din (3.8.5)

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_{S_P} \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{s} + \int_C \bar{J}_S \cdot d\bar{l}_n + \sum_{\lambda} i \bar{u}_{1\lambda} \quad (3.8.7)$$

ceea ce, conform relației (2.2.10) și notînd curentul de deplasare:

$$i_{D_{S_{\Gamma}}} = \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{ds} \quad (3.8.8)$$

ne dă suma dintre curentul de conducție și curentul de deplasare, deci forma integrală a legii

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = i_{S_{\Gamma}} + i_{D_{S_{\Gamma}}} \quad (3.8.9)$$

Dacă se consideră salt în momentul t_0 , pentru vectorul \bar{D} , atunci cu relația (1.2.6)

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{D} = \left\{ \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right\} + [\bar{D}]_{t_0} \underline{\sigma}_{t_0} \quad (3.8.10)$$

iar forma diferențială în volum a legii devine:

$$\left\{ \underline{\text{rot}} \bar{H} \right\} = \left\{ \bar{J} \right\} + \left\{ \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right\} + [\bar{D}]_{t_0} \underline{\sigma}_{t_0} \quad (3.8.11)$$

identică cu forma clasică, cunoscută, la care se adaugă un termen suplimentar determinat de saltul în momentul t_0 al vectorului.

Curentul de deplasare, atunci, conține un termen suplimentar datorat saltului vectorului în momentul t_0 .

$$i_{D_{S_{\Gamma}}} = \int_{S_{\Gamma}} \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + [\bar{D}]_{t_0} \underline{\sigma}_{t_0} \right) \cdot \bar{ds} \quad (3.8.12)$$

3.9. LEGEA INDUCȚIEI ELECTROMAGNETICE PENTRU CORPURI ÎN REPAUS.

În distribuții, legea inducției electromagnetice are forma:

$$\underline{\text{rot}}_{V_{\Sigma}} \bar{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \bar{B} \quad (3.9.1)$$

și se enunță cum urmează:

În fiecare moment, distribuția în volum a rotorului vectorului intensitate de câmp electric este egală și de semn opus cu distribuția în volum a derivatei în raport cu timpul a vectorului inducție magnetică.

Formularea se justifică prin faptul că din ea rezultă formele diferențiale și prin urmare și cea integrală a legii.

În adevăr, dezvoltând în cei doi membrii cu relațiile (1.3.44 și (1.2.5) se obține:

$$\underline{\text{rot}}_V \bar{\underline{E}} = \text{rot} \bar{\underline{E}} \underline{dV}_\Sigma + \text{rot}_s \bar{\underline{E}} \underline{dS}_s + \text{rot}_1 \bar{\underline{E}} \underline{dC}, \quad (3.9.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\underline{B}} = \left\{ \frac{\partial \bar{\underline{B}}}{\partial t} \right\}, \quad (3.9.3)$$

de unde, prin identificare, rezultă formele diferențiale ale legii

$$\text{rot} \bar{\underline{E}} = - \frac{\partial \bar{\underline{B}}}{\partial t}, \quad \text{rot}_s \bar{\underline{E}} = 0, \quad \text{rot}_1 \bar{\underline{E}} = 0 \quad (3.9.3')$$

Forma integrală a legii se deduce aplicînd teorema lui Stokes:

$$\oint_{S_\Gamma} \bar{\underline{E}} \cdot d\bar{\underline{l}} = \int_{S_\Gamma} \text{rot} \bar{\underline{E}} \cdot d\bar{\underline{s}} + \left(\int_{C=S_\Gamma \cap S'} \text{rot}_s \bar{\underline{E}} \cdot d\bar{\underline{l}} + \sum_{P_\lambda=S_\Gamma \cap C'} \text{rot}_1 \bar{\underline{E}} \cdot \bar{\underline{U}}_{i\lambda} \right) \quad (3.9.4)$$

adică din (3.9.3) ,

$$\oint_{S_\Gamma} \bar{\underline{E}} \cdot d\bar{\underline{l}} = \int_{S_\Gamma} - \frac{\partial \bar{\underline{B}}}{\partial t} \cdot d\bar{\underline{s}}, \quad (3.9.5)$$

relație ce reprezintă forma integrală a legii, deoarece membrul drept este derivata în raport cu timpul a fluxului magnetic prin suprafața S_Γ .

Dacă vectorul $\bar{\underline{B}}$ are un salt în momentul t_0 , derivata (3.9.3), cu relația (1.2.6) devine:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\underline{B}} = \left\{ \frac{\partial \bar{\underline{B}}}{\partial t} \right\} + [\bar{\underline{B}}]_{t_0} \underline{d}t_0, \quad (3.9.6)$$

iar forma diferențială în volum a legii, devine:

$$\left\{ \underline{\text{rot}} \bar{\underline{E}} \right\} = - \left\{ \frac{\partial \bar{\underline{B}}}{\partial t} \right\} - [\bar{\underline{B}}]_{t_0} \underline{d}t_0 \quad (3.9.7)$$

Membrul drept al formei integrale se completează cu termenul corespunzător

$$- \int_{S_\Gamma} \left(\left\{ \frac{\partial \bar{\underline{B}}}{\partial t} \right\} + [\bar{\underline{B}}]_{t_0} \underline{d}t_0 \right) \cdot d\bar{\underline{s}}, \quad (3.9.8)$$

datprîtă saltului în timp al lui $\bar{\underline{B}}$.

Capitolul 4

UNELE TEOREME ALE CIMPULUI ELECTROMAGNETIC FORMULATE IN SPATIUL DISTRIBUTIILOR.

În acest capitol, în întregime original, se definește distribuția intensității cimpului electric generat de sarcina electrică punctuală, se calculează divergența și rotorul ei ; se formulează în spațiul distribuțiilor teorema lui Gauss și teorema potențialului electrostatic, determinându-se ecuația lui Poisson pentru regiunile de cimp în care există distribuție de sarcină superficială, lineică și punctuală ; se formulează în distribuții teorema relaxației.

Avantajele acestor formulări sînt legate de operarea cu mărimi scalare sau vectoriale - distribuții (funcționale liniare și continue) și de caracterul global al teoremelor formulate în distribuții (identice cu forma diferențială) din care rezultă direct forma integrală cunoscută.

Determinarea ecuației lui Poisson pentru cazul sarcinilor superficiale, lineice și punctuale - deci de volum nul - are avantajul stabilirii unei corespondențe directe între potențial și sursele care-l determină.

Parțial, unele rezultate din acest capitol au fost publicate sau comunicate /140,141,142/.

4.1. Divergența și rotorul intensității cimpului electric generat de o sarcină punctuală.

În tratarea teoriei cimpului electrostatic, generat în vid de sarcini electrice distribuite volumic, superficial, lineic sau punctual, se pornește de la definiția intensității cimpului electric în vid și de la relația lui Coulomb /20,88,114,120.etc./.

Apoi cu ajutorul principiului superpoziției forțelor se stabilește cimpul generat de un ansamblu de sarcini punctuale, ceea ce permite calculul cimpului generat de o distribuție oarecare de sarcini.

În acest paragraf, se arată cum pot fi abordate aceste probleme în limbajul teoriei distribuțiilor.

Se consideră, în spațiul vid, sarcina punctuală Q_p , situată în punctul P. Se arată că distribuția intensității câmpului electric în vid are expresia:

$$\underline{\underline{E}}_V = \frac{Q_p}{4\pi\epsilon_0} \nabla_p \left(\frac{\bar{r}}{r^3} \right), \quad (4.1.1)$$

adică

$$\langle \underline{\underline{E}}_V, \varphi \rangle = \int_{V_\infty} \frac{Q_p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r}}{r^3} \varphi \, dv = \int_D \frac{Q_p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r}}{r^3} \varphi \, dv,$$

unde: \bar{r} - vectorul de poziție al unui punct cu originea în Q_p - presupusă punctuală;

D - suportul lui φ , $\varphi \in \mathcal{D}$.

În adevăr, admitînd pentru intensitatea câmpului generat de o sarcină punctuală, în vid, expresia:

$$\underline{\underline{E}}_V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r}}{r^3}, \quad (4.1.2)$$

avem

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{E}}_V, \varphi \rangle &= \langle \underline{\underline{E}}_V, \varphi \rangle = \left\langle \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r}}{r^3}, \varphi \right\rangle = \\ &= \frac{Q_p}{4\pi\epsilon_0} \left[\left\langle \frac{x}{r^3}, \varphi \right\rangle \bar{i} + \left\langle \frac{y}{r^3}, \varphi \right\rangle \bar{j} + \left\langle \frac{z}{r^3}, \varphi \right\rangle \bar{k} \right] = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \frac{\bar{r}}{r^3}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Funcția $\frac{1}{r}$, local integrabilă, poate genera o distribuție de tip funcție prin relația:

$$\left\langle \frac{1}{r}, \varphi \right\rangle = \int_D \frac{\varphi}{r} \, dv, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (4.1.3)$$

unde D - este suportul lui φ .

Prin definiție (rel.1.3.1), distribuția gradientului acestei funcții este

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } \frac{1}{r}, \varphi \rangle &= \langle \bar{i} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \varphi \rangle = v_p \int_D \text{grad } \frac{1}{r} \varphi dv = -v_p \int_D \frac{\bar{r}}{r^3} \varphi dv \\ &= -\langle v_p \frac{1}{r}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle \bar{i} - \langle v_p \frac{1}{r}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle \bar{j} - \langle v_p \frac{1}{r}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rangle \bar{k}, \forall \varphi \in \mathcal{D} \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

În relațiile anterioare gradientul a fost luat în punctul M, iar vectorul \bar{r} are orientarea de la P la M, fig.4.1. Cu ajutorul

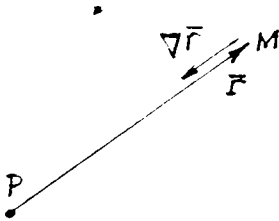


Fig.4.1

gradientului, distribuția intensității câmpului electric generat de o sarcină punctuală, din punctul P, este

$$\underline{\bar{E}}_V = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \underline{\text{grad } \frac{1}{r}} \quad (4.1.5)$$

Pentru calculul $\text{div } \underline{\bar{E}}$ se observă că proiecțiile vectorului pe axe, E_x ,

E_y și E_z sînt funcții omogene de grad $l-3 = -2$ și deci se poate aplica formula (1.2.9) pentru calculul derivatelor parțiale care intră în calculul divergenței; aplicînd formula (1.3.25) pentru distribuția divergentă

$$\underline{\text{div } \bar{E}} = \text{div}_P \bar{E} \sigma_P = \frac{Q_P}{\epsilon_0} \sigma_P, \quad (4.1.6)$$

deoarece $\left\{ \underline{\text{div } \bar{E}} \right\} = 0$, $\text{div}_S \bar{E} = 0$ și $\text{div}_1 \bar{E} = 0$

Pentru calculul $\underline{\text{rot } \bar{E}}$, în aceleași condiții, din relația (1.3.43), rezultă

$$\underline{\text{rot } \bar{E}} = 0, \quad (4.1.7)$$

deoarece $\left\{ \underline{\text{rot } \bar{E}} \right\} = 0$, $\text{rot}_S \bar{E} = 0$, $\text{rot}_1 \bar{E} = 0$

Relația (4.1.5), în care

$$\underline{\text{grad } \frac{1}{r}} = - \left(\frac{\bar{r}}{r^3} \right),$$

arată că distribuția lui $\underline{\bar{E}}$ se poate exprima cu ajutorul unei funcții scalare V , potențialul scalar, sub forma:

$$\underline{\bar{E}}_V = - \underline{\text{grad } V}, \quad (4.1.8)$$

Potențialul

$$\underline{v}_v = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (4.1.9)$$

fiind o distribuție de tip funcție, definită prin relația:

$$\langle v_v, \varphi \rangle = \int_{R^3} v \varphi \, dv \quad .$$

Din relațiile (4.1.6) și (4.1.8), aplicind definiția laplacienuului, deoarece relația (4.1.8) implică și relația echivalentă în funcții aplicind egalitatea a două distribuții (rel. 1.1.2o), se obține :

$$\begin{aligned} - \underline{\operatorname{div} \operatorname{grad} v}_v &= \frac{1}{\epsilon_0} \underline{\rho}_p \quad , \quad \text{sau} \\ - \epsilon_0 \underline{\Delta v}_v &= \underline{\rho}_p \quad , \quad (4.1.10) \end{aligned}$$

relație ce reprezintă ecuația lui Poisson în cazul sarcinii punctuale.

În cazul unui sistem de mai multe sarcini punctuale, distribuția intensității câmpului electric rezultat într-un punct, este egală cu suma distribuțiilor intensităților de câmp electric generate de fiecare sarcină punctuală ,

$$\underline{E} = \sum_{i=1}^n \underline{E}_{i_v} \quad , \quad (4.1.11)$$

deoarece distribuțiile sînt funcționale liniare și continue și se definește suma lor prin relația (2.1.11), deci teorema superpoziției se aplică direct.

Potențialul electric este dat de o relație asemănătoare, de forma:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n \underline{v}_{i_v} \quad (4.1.12)$$

Ca mai sus, pentru că relația în distribuții (4.1.8) implică și relația în funcții, aplicind egalitatea a două distribuții (rel.1.1.2o), se obține:

$$- \underline{\operatorname{div} \operatorname{grad} v} = \frac{1}{\epsilon_0} \underline{\rho}_p \quad . \quad (4.1.13)$$

unde:

$$\underline{\rho}_p = \sum_{i=1}^n \hat{c}_{P_i} Q_i \quad .$$

Pentru o distribuție continuă de sarcini, din volumul V , a cărui densitate volumică de sarcină este distribuție dată prin relația (2.1.11) se obține:

$$-\Delta v = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_v + \rho_\lambda + \rho_c + \rho) \quad (4.1.14)$$

sau

$$-\Delta v = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{v\Sigma} \quad (4.1.15)$$

relație care pune în corespondență biunivocă, sursa și potențialul, chiar în cazul sarcinilor de volum nul.

4.2. TEOREMA LUI GAUSS ȘI TEOREMA POTENTIALULUI ELECTROSTATIC.

Forma în distribuții a teoremei lui Gauss referitoare la polarizația electrică este:

$$\operatorname{div}_{V\Sigma} \bar{P} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho'_{v\Sigma} \quad (4.2.1)$$

și se enunță astfel:

În fiecare moment distribuția în volum a divergenței vectorului de polarizație electrică este proporțională și de semn opus cu distribuția în volum a densității de sarcină electrică de polarizare. factor de proporționalitate fiind $\frac{1}{\epsilon_0}$.

Formularea (4.2.1) se justifică, deoarece din ea, rezultă formele diferențiale cunoscute ale teoremei și deci forma ei integrală.

În adevăr, dezvoltând (4.2.1) cu relațiile (1.3.26) și (2.1.8) se obțin :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{P} \int_{V\Sigma} + \operatorname{div}_s \bar{P} \int_{S'} + \operatorname{div}_1 \bar{P} \int_{C'} + \sum_{\lambda=1}^n \operatorname{div}_p \bar{P} \int_{p_\lambda} &= \\ = -\frac{\rho'_v}{\epsilon_0} \int_{V\Sigma} - \frac{\rho'_\lambda}{\epsilon_0} \int_{S'} - \frac{\rho'_c}{\epsilon_0} \int_{C'} - \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\lambda=1}^n \rho'_\lambda \int_{p_\lambda} & \quad (4.2.2) \end{aligned}$$

de unde, prin identificare, rezultă

$$\operatorname{div} \bar{P} = -\frac{\rho'_v}{\epsilon_0}, \operatorname{div}_s \bar{P} = -\frac{\rho'_\lambda}{\epsilon_0}, \operatorname{div}_1 \bar{P} = -\frac{\rho'_c}{\epsilon_0}, \operatorname{div}_p \bar{P} = -\frac{\rho'_\lambda}{\epsilon_0} \quad (4.2.3)$$

formele diferențiale ale teoremei.

Forma ei integrală, echivalentă se obține cu transformarea Gauss-Ostrogradski :

$$\oint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{ds} = \int_{V_{\Sigma}} \operatorname{div} \vec{P} \, dv + \int_{S'} \operatorname{div}_s \vec{P} \, ds + \int_{C'} \operatorname{div}_l \vec{P} \, ds + \sum_{\lambda=1}^n \operatorname{div}_{P_{\lambda}} \vec{P} ,$$

adică, cu (4.2.3)

$$\oint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{ds} = \int_{V_{\Sigma}} -\frac{\rho'_v}{\epsilon_0} \, dv - \int_{S'} \frac{\rho'_s}{\epsilon_0} \, ds - \int_{C'} \frac{\rho'_l}{\epsilon_0} \, dl - \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\lambda=1}^n q'_{P_{\lambda}} , \quad (4.2.4)$$

sau cu relația (2.1.19) rezultă

$$\oint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{ds} = -\frac{Q'_{V_{\Sigma}}}{\epsilon_0} \quad (4.2.5)$$

Din forma în distribuții a legii legăturii \vec{D} , \vec{E} , \vec{P} (rel. 3.3.5), avem

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} - \vec{P} , \quad (4.2.6)$$

de unde, deoarece avem și (3.3.8) rezultă

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \vec{D} - \operatorname{div} \vec{P} . \quad (4.2.7)$$

Din legea fluxului electric, $\operatorname{div} \vec{D}$ conform relației (3.2.1), iar $\operatorname{div} \vec{P}$ din relația (4.2.1), conduce la

$$\operatorname{div}_{V_{\Sigma}} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho'_{V_{\Sigma}} + \rho'_{V_{\Sigma}}) . \quad (4.2.8)$$

relații care reprezintă teorema lui Gauss formulată în distribuții. Ea se enunță astfel:

Distribuția în volum a divergenței vectorului intensitate de câmp electric este proporțională cu sumă distribuțiilor în volum ale densităților de sarcină electrică liberă și de polarizare, factor de proporționalitate fiind $\frac{1}{\epsilon_0}$.

Relația (4.2.8) este valabilă oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$. Din ea, cu $\varphi = 1$, rezultă forma integrală, clasică a teoremei.

În adevăr, considerînd distribuția lui Dirac concentrată pe volumul V_{Σ} , avem

$$\operatorname{div}_{V_{\Sigma}} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} \int_{V_{\Sigma}} \varphi = \int_{V_{\Sigma}} \operatorname{div} \vec{E} \, d\varphi \, dv = \int_{V_{\Sigma}} \operatorname{div} \vec{E} \, dv . \quad (4.2.9)$$

Din relațiile (2.1.12) și (2.1.19),

$$\frac{1}{\epsilon_0} (\rho_V + \rho'_V)_{V_\Sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q')_{V_\Sigma} \quad (4.2.10)$$

Atunci, avem

$$\int_{V_\Sigma} \text{div } \vec{E} \, dv = \frac{Q + Q'}{\epsilon_0} \quad (4.2.11)$$

sau, cu transformarea lui Stokes

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q + Q'}{\epsilon_0}, \quad (4.2.12)$$

adică forma integrală a teoremei.

Forma în distribuții a teoremei potențialului electrostatic se obține din legea inducției electromagnetice, rel. (3.9.1), în care $\vec{B} = \text{constant}$, deci $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$.

Atunci, forma în distribuții a teoremei este :

$$\text{rot}_{V_\Sigma} \vec{E} = 0, \quad (4.2.13)$$

adică distribuția în volum a rotorului vectorului intensitate de câmp electric este nulă.

Procedând ca și la legea inducției electromagnetice, se dezvoltă cu rel. (1.3.44):

$$\text{rot}_{V_\Sigma} \vec{E} = \text{rot } \vec{E} \int_{V_\Sigma} + \text{rot}_s \vec{E} \int_s + \text{rot}_l \vec{E} \int_C$$

deci avem formele diferențiale ale teoremei

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{rot}_s \vec{E} = 0 \quad \text{și} \quad \text{rot}_l \vec{E} = 0 \quad (4.2.14)$$

Forma integrală, clasică, se obține, aplicând teorema lui Stokes :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_C \text{rot}_s \vec{E} \cdot d\vec{l} + \sum_{\lambda=1}^n \text{rot}_l \vec{E} \cdot \vec{u}_\lambda$$

adică

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.2.15)$$

4.3. TEOREMA RELAXATIEI.

În medii fără polarizare permanentă permanentă, din relația de legătură (3.3.11), se obține în distribuții

$$\underline{\bar{D}} = \underline{\epsilon} \underline{\bar{E}} \quad (4.3.1)$$

Dacă în relația (3.7.1) - legea conducției, nu avem cîmp imprimat, avem

$$\underline{\bar{J}} = \underline{\sigma} \underline{\bar{E}}, \quad (4.3.2)$$

deci

$$\underline{\bar{J}} = \frac{\underline{\sigma}}{\underline{\epsilon}} \underline{\bar{D}}, \quad (4.3.3)$$

sau

$$\underline{\text{div}} \underline{\bar{J}} = \frac{\underline{\sigma}}{\underline{\epsilon}} \underline{\text{div}} \underline{\bar{D}} \quad (4.3.4)$$

(deoarece rel. 4.3.3 - există și în funcții). Din legea conservării sarcinii electrice libere (3.6.1) și legea fluxului electric (3.2.1) se obține în distribuții

$$\frac{d}{dt} \underline{\rho}_{V\Sigma} + \frac{\underline{\sigma}}{\underline{\epsilon}} \underline{\rho}_{V\Sigma} = 0, \quad (4.3.5)$$

relații ce exprimă modul în care, variază în timp densitatea $\underline{\rho}_{V\Sigma}$

În formularea distribuțională, ecuația (4.3.5) admite întotdeauna soluție /130,136/. Ea este o ecuație diferențială liniară, omogenă cu coeficienți constanți, ce poate fi pusă sub forma:

$$\underline{\rho}'_{V\Sigma}(t) + \frac{\underline{\sigma}}{\underline{\epsilon}} \underline{\rho}_{V\Sigma}(t) = 0.$$

Soluția ecuației, în sensul teoriei distribuțiilor /68, 174,180/ este:

$$\underline{\rho}_{V\Sigma}(t) = c e^{-\int \frac{\underline{\sigma}}{\underline{\epsilon}} dt} = c e^{-\frac{\underline{\sigma}}{\underline{\epsilon}} t}, \quad (4.3.6)$$

unde constanta c este egală cu valoarea densității sarcinii libere la momentul inițial. Deci:

$$\underline{\rho}_{V\Sigma}(t) = \underline{\rho}_{V\Sigma}(0) e^{-\frac{t}{\tau_r}} \quad (4.3.7)$$

unde $\tau_r = \frac{\epsilon}{\sigma}$ - este timp de relaxare.

Relația (4.3.7) este expresia matematică a teoremei relaxației în distribuții; ea arată că densitatea sarcinii electrice din medii ce nu au proprietatea de conductibilitate, tinde exponențial spre zero.

Dacă, (cu rel.2.1.11) și volumul $V_\Sigma \subset V_\infty$,

$$\rho_{V_\Sigma} = \rho_v \underline{dV}_\Sigma + \rho_s \underline{dS} + \rho_l \underline{dC} + \sum_{P_\lambda=1}^n Q_{P_\lambda} \underline{dP}_\lambda$$

$$\rho_{V_\Sigma}(0) = \rho_v(0) \underline{dV}_\Sigma + \rho_s(0) \underline{dS} + \rho_l(0) \underline{dC} + \sum_{P_\lambda=1}^n Q_{P_\lambda}(0) \underline{dP}_\lambda$$

prin identificare avem

$$\begin{aligned} \rho_v &= \rho_v(0) e^{-\frac{t}{\tau_r}}, & \rho_s &= \rho_s(0) e^{-\frac{t}{\tau_r}} \\ \rho_l &= \rho_l(0) e^{-\frac{t}{\tau_r}}, & Q_p &= Q_p(0) e^{-\frac{t}{\tau_r}} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

relații ce au rezultat direct din forma în distribuții a teoremei.

C a p i t o l u l 5

APLICATII ALE TEORIEI DISTRIBUTIILOR IN STUDIUL SI REALIZAREA PRACTICA A MODULELOR DE REDRESARE DE INALTA TENSIUNE.

Teoria distribuțiilor se poate aplica în studiul fenomenelor electromagnetice obținându-se generalizări și rezultate noi, ce pun în evidență aspecte practice sau teoretice ce nu puteau fi prinse în formulări matematice clasice.

În cazul modulelor de redresare de înaltă tensiune intervin atât probleme de câmp electric cât și analiza comportării circuitului cu conducție unilaterală, format din inserierea unor diode.

În acest capitol se vor analiza atât probleme tehnologice legate de realizarea practică a unor module de redresare, din care unele elaborate de autoare au fost aplicate deja în industrie, cât și probleme teoretice de cercetare fundamentală, publicate sau comunicate de autoarea tezei.

Astfel, în cadrul acestui capitol au fost aduse următoarele contribuții originale:

- Rezolvarea ecuației lui Poisson, cu luarea în considerare a stratului dublu de pe joncțiunea pn a diodei semiconductoră;

- soluționarea ecuației de variație a excesului de purtători cu distanța, în D^0 ;

- formularea dependenței dintre densitatea curentului de conducție și tensiunea aplicată diodei - valabilă și în zona de trecere a joncțiunii pn;

- realizarea unui montaj practic pentru determinarea continuă la diferite temperaturi, a caracteristicii curent-tensiune ale diodelor cu avalanșă controlată; compararea lor în vederea realizării unor module de redresare;

- definirea conducțanței dinamice a diodelor cu avalanșă controlată;

- realizarea unui montaj pentru ridicarea dependenței conducțanță-tensiune pentru diodele cu avalanșă controlată, utilizând blocul de înmulțire al calculatorului analogic BETA 42 TA;

- conceperea și realizarea unui aparat independent pentru ridicarea dependenței conductanță-tensiune, utilizând un multiplicator tip ROB 8095;
- realizarea practică și încercarea unor circuite de redresare mono și bialternanță cu amplificatoare operaționale și pe calculator analogic;
- simularea pe calculator analogic a cascadei cu două etaje, din instalația de vopsire electrostatică de la ELBA Timișoara;
- formularea unor concluzii privind metode de ridicare a calității și fiabilității modulelor de redresare de înaltă tensiune;

Contribuțiile originale sînt concretizate prin articole publicate și susținute la sesiuni sau seminarii științifice /143, 144, 145, 146, 153/, certificate de inovator /149, 150, 151/ și propuneri de invenție înregistrată la OSIM /154/, colaborări cu întreprinderi din Timișoara (Electrometal, Electrobanat) și cu ICPE București.

5.1. Determinarea potențialului electrocinetic staționar în lungul unei joncțiunii pn din dioda semiconductoră.

Una din ecuațiile de bază ale electronicii semiconductoarelor, ecuația lui Poisson, care stabilește o corespondență între potențial și sursă, se obișnuiește a se rezolva separat în cele două regiuni ale joncțiunii pn /23, 38, 96, 97, 134/.

O tratare matematică mai complexă, unitară și generală poate fi folosită în cadrul teoriei distribuțiilor. Soluția determinată în acest cadru conține în plus, un termen determinat de prezența stratului dublu de sarcini de pe interfața pn, termen care, în cadrul matematicii clasice nici nu putea fi luat în considerare; condițiile de frontieră sînt cuprinse în saltul introdus de stratul dublu de sarcini considerat.

Din punct de vedere practic, luarea în considerare a influenței stratului dublu asupra potențialului - are importanță deosebită în ceea ce privește lărgirea aspectelor tehnologice ce pot fi tratate și matematic, mai riguros și mai corect printr-o apropiere a teoriei de practică.

În perioada 1978-1979, în Institutul politehnic "Traian Vuia" Timișoara s-au organizat prelegeri de teoria distribuțiilor, expuse de tov.prof. Borislav Crstici și lector dr. Mihai Neagu. Pe baza noțiunilor prezentate în aceste prelegeri și a bibliografiei de specialitate, am determinat potențialul electrocinetic staționar, ca soluție a ecuației lui Poisson, și densitatea curentului de conducție, prin joncțiunea pn a diodei semiconductoare, cu luarea în considerare a stratului dublu de pe interfața joncțiunii pn a diodei.

5.1.1. Ecuația lui Poisson în spațiul distribuțiilor.

În acest capitol se fac precizări în legătură cu formularea corectă a problemelor în cazul în care membrul drept al ecuației lui Poisson are singularități destul de tari.

Se dă rezolvarea ecuației lui Poisson în formă generalizată, incluzând condițiile inițiale în surse instantanee de tip simplu și dublu strat de pe suprafața de frontieră. Soluția este reprezentată sub forma convoluției dintre soluția fundamentală a ecuației și membrul drept /130/ și se obține însumând perturbațiile generate de fiecare punct al sursei.

5.1.1.1. P r e c i z ă r i.

S-a arătat că ecuația lui Poisson, sub forma:

$$\underline{\Delta v} = - \frac{1}{\epsilon_0} \underline{\rho} \quad (5.1.1)$$

pune în corespondență, în forma generalizată în spațiul distribuțiilor potențialul cu distribuția densitate volumică de sarcină electrică, chiar și în cazul repartițiilor de sarcină cu volum nul.

Formularea problemei trebuie să satisfacă următoarele criterii naturale /76,130,136/:

- a) Soluția trebuie să existe într-o anumită clasă de funcții \mathcal{M}_1 ;
- b) Soluția trebuie să fie unică într-o anumită clasă de funcții \mathcal{M}_2 ;
- c) Soluția trebuie să depindă în mod continuu de datele Problemei - impuse de experiențe. măsurători.

Problema este corect formulată dacă satisface condițiile a, b, c. Mulțimea de funcții $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ se numește clasă de corectitudine.

Soluțiile clasice sînt caracterizate de faptul că sînt presupuse suficient de netede și satisfac ecuația în fiecare punct al domeniului de definiție (se presupune a priori continuitatea membrului drept în domeniul de definiție). Dar, în cazurile cele mai interesante, membrul drept (ce caracterizează intensitatea acțiunilor exterioare) are singularități destul de tari. De aceea pentru aceste probleme, formulările clasice sînt insuficiente și se renunță (parțial sau total) la netezimea soluției în domeniu, introducînd soluții generalizate (distribuții).

5.1.1.2. Rezolvarea ecuației lui Poisson.

Rezolvarea ecuației lui Poisson este dată în formulare generalizată, ceea ce permite includerea condițiilor inițiale în surse instantanee (de tip simplu și dublu strat) de pe suprafața de frontieră. Rezolvarea se face printr-o metodă standard, însumînd perturbațiile generate de fiecare punct al sursei, astfel încît soluția este reprezentată sub forma convoluției dintre soluția fundamentală și membrul drept.

Se știe că soluția ecuației liniare

$$L(D) \underline{u} = \underline{f(x)} \quad (5.1.2)$$

cu $f \in \mathcal{D}'$ și $L(D)$ operator diferențial este unică și clasa de distribuții din \mathcal{D}' , pentru care există convoluția cu \mathcal{E} (soluția fundamentală).

Soluția este

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{E} * f} \quad (5.1.3)$$

și are o interpretare fizică concretă: sursa $f(x)$ poate fi considerată ca "suma" surselor punctuale $f(\xi) \underline{\delta(x - \xi)}$ și anume:

$$\underline{f(x)} = \underline{\mathcal{E} * f} = \int f(\xi) \underline{\delta(x - \xi)} d\xi \quad (5.1.4)$$

deoarece orice distribuție poate fi dezvoltată după distribuții Dirac /52, 103, 130/ (această formulă se are în vedere cînd se spune că orice corp este format din mase punctuale, sau că orice sursă constă din surse punctuale, etc.).

Pentru operatorul diferențial $L(D)$, soluția fundamentală este distribuția $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'$, care satisface în \mathbb{R}^n , ecuația:

$$L(D) \underline{\varepsilon} = \underline{\delta}(x) \quad (5.1.5)$$

În virtutea acestei relații, fiecare sursă punctuală $f(\xi) \underline{\delta}(x-\xi)$ produce efectul $f(\xi) \underline{\varepsilon}(x-\xi)$. De aceea, soluția

$$\underline{u}(x) = \underline{\varepsilon} * f = \int f(\xi) \underline{\varepsilon}(x-\xi) d\xi \quad (5.1.6)$$

este superpoziția acestor efecte.

Pentru o funcție $u \in C^2$ și $x \in D$, $x \in \Sigma$, este valabilă următoarea formulă a lui Green :

$$u(x) = \frac{1}{(n-2) \Gamma_n} \left\{ \int_D \frac{Du(y)}{(x-y)^{n-2}} dy - \int_S \left[\frac{1}{(x-y)^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial ny} \frac{1}{(x-y)^{n-2}} \right] dS_y \right\}, \text{ pentru } n \geq 3 \quad (5.1.7)$$

și funcția u poate fi reprezentată ca suma a trei potențiale

$$u(x) = v_n(x) + v_n^{(0)}(x) + v_n^{(1)}(x) \quad (5.1.8)$$

în care:

$$v_n(x) = \varepsilon_n * \{ \underline{\Delta u} \} = - \frac{1}{(n-2) \Gamma_n} \int_D \frac{\Delta u(y)}{(x-y)^{n-2}} dy \quad (5.1.9)$$

este potențialul de volum cu densitatea

$$\rho = - \frac{1}{(n-2) \Gamma_n} \{ \underline{\Delta u} \} \quad ; \quad (5.1.10)$$

$$v_n^{(0)}(x) = - \varepsilon_n * \left(\frac{\partial u}{\partial n} \underline{d_S} \right) = \frac{1}{(n-2) \sigma_n} \int_S \frac{1}{(x-y)^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n} dS_y \quad (5.1.11)$$

este potențialul de simplu strat pe suprafața S cu densitatea

$$\frac{1}{(n-2) \sigma_n} \frac{\partial u}{\partial n} = \mu \underline{d_S} \quad ; \quad (5.1.12)$$

$$v_n^{(1)}(x) = - \varepsilon_n * \frac{\partial}{\partial n} (u \underline{d_S}) = \frac{u}{(n-2) \sigma_n} \int_S u(y) \frac{\partial}{\partial n y} \frac{1}{(x-y)^{n-2}} dS_y \quad (5.1.13)$$

este potențialul de dublu strat pe suprafața S , cu densitatea:

$$- \frac{1}{(n-2) \sigma_n} u = - \frac{\partial}{\partial n} \tau \underline{d_S} \quad (5.1.14)$$

Deoarece $[u]_S = -u|_S$; $\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_S = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S$, rezultă:

$$\underline{\Delta u} = \{ \underline{\Delta u} \} - \frac{\partial u}{\partial n} \underline{d_S} - \frac{\partial}{\partial n} u \underline{d_S} \quad (5.1.15)$$

n - normala exterioară la S , în punctul $\in S$

identificînd (5.1.15) cu (5.1.3), rezultă:

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{\varepsilon} * \underline{\Delta u} = \varepsilon_n * \{ \underline{\Delta u} \} - \varepsilon_n * \left(\frac{\partial u}{\partial n} \underline{d_S} \right) - \\ &- \varepsilon_n * \frac{\partial}{\partial n} (u \underline{d_S}) = \frac{1}{(n-2) \sigma_n} \left[\frac{1}{(x)^{n-2}} * \{ \underline{\Delta u} \} + \right. \\ &+ \frac{1}{(x)^{n-2}} * \left(\frac{\partial u}{\partial n} \underline{d_S} \right) + \left. \frac{1}{(x)^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial n} (u \underline{d_S}) \right] \quad (5.1.16) \end{aligned}$$

Cu relațiile (5.1.10), (5.1.12), (5.1.14), se obțin:

a) - potențialul de volum:

$$V_n(x) = \int_D \frac{\rho(y)}{(x-y)^{n-2}} dy \quad (5.1.17)$$

unde ρ este funcție absolut integrabilă cu suport compact pe \mathbb{R}^n .
Relația (5.1.17) rezultă din convoluția funcției integrabile ρ -
cu suport compact, cu funcția local integrabilă $(x)^{-n+2}$, $n \geq 3$

$$V_n = (x)^{-n+2} * \rho, \quad n \geq 3 \quad (5.1.18)$$

Pentru $n=2$

$$V_2(x) = \int \rho(y) \ln \frac{1}{(x-y)} dy \quad (5.1.19)$$

sau sub forma convoluției

$$V_2(x) = \ln(x) * \rho \quad (5.1.20)$$

b) - potențialul de simplu strat

$$V_n^{(o)}(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{(x-y)^{n-2}} dS_y, \quad n \geq 3 \quad (5.1.21)$$

unde μ este funcția conținută pe S , iar $\mu \underline{d}_S$ este stratul
simplu de densitate μ .

Convoluția este adevărată

$$V_n^{(o)} = |x|^{-n+2} * \mu \underline{d}_S, \quad n \geq 3 \quad (5.1.22)$$

Pentru $n=2$

$$V_2^{(o)} = \int_S \mu(y) \ln \frac{1}{(x-y)} dy \quad (5.1.23)$$

sau

$$V_2^{(o)} = - \ln|x| * \mu \underline{d}_S \quad (5.1.24)$$

c) - potențialul de dublu strat:

$$v_n^{(1)}(x) = \int_S \tau(y) \frac{\partial}{\partial n y} \frac{1}{(x-y)^{n-1}} ds_y, \quad n \geq 3 \quad (5.1.25)$$

unde $-\frac{\partial}{\partial n} (\tau \underline{ds})$ este stratul dublu cu densitatea τ ,

$$v_n^{(1)}(x) = -|x|^{-n+2} * \frac{\partial}{\partial n} (\tau \underline{ds}); \quad n \geq 3 \quad (5.1.26)$$

Pentru $n=2$

$$v_2^{(1)}(x) = \int_S \tau(y) \frac{\partial}{\partial n y} \ln \frac{1}{(x-y)} dy \quad (5.1.27)$$

$$v_2^{(1)}(x) = \ln |x| * \frac{\partial}{\partial n} (\tau \underline{ds}) \quad (5.1.28)$$

Astfel, soluția ecuației Poisson, dată de relația (5.1.8) include direct condițiile de pe suprafața de frontieră. Sub forma unor produse de convoluție, soluția are o interpretare fizică concretă, prin însumarea (superpoziția) perturbațiilor generate de fiecare punct al sursei.

5.1.2. Potențialul electrocinetic staționar în jurul joncțiunii pn din diode semiconductoră.

În mod obișnuit densitatea de sarcină în regiunea de trecere din joncțiunea pn se consideră /16,24,26,96/ :

$$\begin{aligned} \rho_-(x) &= -q N_A && \text{în regiunea p} \\ \rho_+(x) &= +q N_D && \text{în regiunea n} \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

unde:

N_A, N_D - concentrația impurităților donoare și acceptoare.

Suprafața joncțiunii pn încărcată cu sarcină electrică dublă constituie o suprafață de discontinuitate pentru potențial.

5.1.2.1. Calculul derivatelor potențialului electrocinetic staționar.

Dacă V este funcție local integrabilă, cu discontinuitate dispusă pe suprafața S , care împarte domeniul de definiție al funcției, în două domenii D_1 și D_2 , fiecare punct al lui S este punct de discontinuitate pentru V , adică

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_S, y_S, z_S)} V(x,y,z) &\neq \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_S, y_S, z_S)} V(x,y,z) \\ (x,y,z) &\in D_1 \quad (x,y,z) \in D_2 \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

Diferența limitelor este saltul funcției la traversarea suprafeței S /19,66,74,114/.

$$\begin{aligned} \text{Dacă } V_1 &= \frac{\tau}{2\epsilon_0} \\ V_2 &= -\frac{\tau}{2\epsilon_0} \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

unde τ este densitatea superficială a momentelor dipolilor, definită prin relația=

$$\vec{\tau} = \tau \vec{n} \quad (5.1.32)$$

atunci saltul potențialului la trecerea prin suprafața S este:

$$V_1 - V_2 = \frac{\tau}{\epsilon_0} \cdot n_{ef} \cdot s_0 \quad (5.1.33)$$

Se presupune că derivatele nu prezintă discontinuități, deci există numai discontinuitate de speța I .

Se notează cu \underline{v} - distribuția definită de funcția V .

$$\langle \underline{v}, \varphi \rangle = \iiint_{\mathbb{R}^3} v(x,y,z) \varphi(x,y,z) dx dy dz, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \quad (5.1.34)$$

Derivata parțială a distribuției \underline{v} , aplicînd relația (1.2.4) și ținînd seama de (5.1.34), devine:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial v}{\partial x}, \varphi \right\rangle &= - \iiint_{R^3} v(x,y,z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz = \\
 &= - \iint_{R^2} dy dz \int_{-\infty}^{+\infty} v(x,y,z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \\
 &= \iint_{R^2} dy dz \left[\int_{-\infty}^{(x_S-0, y_S, z_S)} v \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \int_{(x_S+0, y_S, z_S)}^{+\infty} v \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right] =
 \end{aligned}$$

Se presupune că se pătrunde prin S cu sensul creșterii lui x - pentru a rezolva integrala prin părți se ia x_S-0 , x_S+0 ; $(x_S, y_S, z_S) \in S$.

$$\begin{aligned}
 &= - \iint_{R^2} dy dz \left[v \varphi \Big|_{-\infty}^{x_S-0, y_S, z_S} - \int_{-\infty}^{x_S-0, y_S, z_S} \frac{\partial v}{\partial x} \varphi dx + v \varphi \Big|_{x_S+0, y_S, z_S}^{+\infty} \right. \\
 &+ \left. \int_{x_S+0, y_S, z_S}^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial x} \varphi dx \right] = \iiint_{R^3} \frac{\partial v}{\partial x} \varphi(x,y,z) dx dy dz - \\
 &- \iint_{R^2} \left[v(x_S-0, y_S, z_S) \varphi(x_S, y_S, z_S) - v(x_S+0, y_S, z_S) \cdot \right. \\
 &\cdot \left. \varphi(x_S, y_S, z_S) \right] dy dz = \iiint_{R^3} \frac{\partial v}{\partial x} \varphi(x,y,z) dx dy dz + \\
 &+ \iint_S s_{0x} \varphi(x,y,z) dy dz = \iiint_{R^3} \frac{\partial v}{\partial x} \varphi(x,y,z) dx dy dz + \\
 &+ \iint s_{0x} \cos(\vec{n}_x, \vec{O}_x) \varphi(x,y,z) ds
 \end{aligned}$$

unde s_{0x} - este saltul funcției după x ,

iar $dy dz = ds \cos(\bar{n}_x, 0_x)$,

atunci derivata distribuțională a distribuției V devine:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \right\} + s_{0x} \cos(\bar{n}_x, 0_x) \underline{\sigma}_S \quad (5.1.35)$$

adică este egală cu suma dintre distribuția definită de funcția derivată și distribuția lui Dirac definită pe suprafața de discontinuitate înmulțită cu cos unghiului dintre normala la S și axa Ox și saltul funcției.

Dacă $\bar{n} = \bar{n}_x$ și $s_0 = s_{0x}$

atunci produsul

$$s_{0x} \cos(\bar{n}_x, 0_x) = s_0 \cos(\bar{n}, 0_x)$$

pentru o normală fixată și relația (5.1.35) devine:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \right\} + s_0 \cos(\bar{n}, 0_x) \underline{\sigma}_S \quad (5.1.36)$$

Pentru calculul derivatei a II-a se aplică relația:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

și se obține :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \right\} + s_0 \cos(\bar{n}, 0_x) \underline{\sigma}_S \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \right] + \frac{\partial}{\partial x} (s_0 \cos(\bar{n}, 0_x) \underline{\sigma}_S) \\ &= \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} + s_1 \cos(\bar{n}, 0_x) \underline{\sigma}_S + \frac{\partial}{\partial x} [s_0 \cos(\bar{n}, 0_x) \underline{\sigma}_S] \end{aligned} \quad (5.1.37)$$

unde s_1 - saltul derivatei după x a lui V

Atunci

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle = & \iint_{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \varphi(x, y) dx dy + \int_S s_1 \cos(\bar{n}, 0x) \varphi(x, y) ds - \\ & - \int_S s_0 \cos(\bar{n}, 0x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds \end{aligned} \quad (5.1.38)$$

Dacă $s_1 = 0$, relația devine :

$$\left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle = \iint_{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \varphi(x, y) dx dy - \int_S s_0 \cos(\bar{n}, 0x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds \quad (5.1.39)$$

Dacă se calculează derivatele parțiale după y și z , se obține:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right\} + s_2 \cos(\bar{n}, 0y) \underline{d}_S + \frac{\partial}{\partial y} (s_0 \cos(\bar{n}, 0, y)) \underline{d}_S \quad (5.1.40)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} + s_3 \cos(\bar{n}, 0z) \underline{d}_S + \frac{\partial}{\partial z} (s_0 \cos(\bar{n}, 0z)) \underline{d}_S \quad (5.1.41)$$

Dacă saltul derivatelor lui V este zero, avem:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} [s_0 \cos(\bar{n}, 0x) \underline{d}_S] \quad (5.1.42)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} [s_0 \cos(\bar{n}, 0y) \underline{d}_S] \quad (5.1.43)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} [s_0 \cos(\bar{n}, 0z) \underline{d}_S] \quad (5.1.44)$$

5.1.2.2. Laplacianul distribuției potențial electrocinetic staționar.

Știind că laplacianul distribuției V este:

$$\underline{\Delta V} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (5.1.45)$$

și introducând relațiile (5.1.37), (5.1.40) și (5.1.41) se obține:

$$\begin{aligned} \underline{\Delta V} &= \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} + [s_1 \cos(\bar{n}, 0x) + s_2 \cos(\bar{n}, 0y) + \\ &+ s_3 \cos(\bar{n}, 0z)] \underline{d}_S + \frac{\partial}{\partial x} [s_0 \cos(\bar{n}, 0x) \underline{d}_S] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} [s_0 \cos(\bar{n}, 0y) \underline{d}_S] + \frac{\partial}{\partial z} [s_0 \cos(\bar{n}, 0z) \underline{d}_S] \end{aligned}$$

Dacă se notează s_n - saltul derivatei normale a funcției V :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n} &= \Delta V \cdot \bar{n} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos(\bar{n}, 0x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(\bar{n}, 0y) + \\ &+ \frac{\partial V}{\partial z} \cos(\bar{n}, 0z) = s_n \end{aligned} \quad (5.1.46)$$

se obține:

$$\begin{aligned} \underline{\Delta V} &= \left\{ \underline{\Delta V} \right\} + s_n \underline{d}_S + \frac{\partial}{\partial x} [s_0 \cos(\bar{n}, 0x) \underline{d}_S] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} [s_0 \cos(\bar{n}, 0y) \underline{d}_S] + \frac{\partial}{\partial z} [s_0 \cos(\bar{n}, 0z) \underline{d}_S] \end{aligned} \quad (5.1.47)$$

Se analizează separat termenii de formă: (aplicând regula de derivare 1.2.4):

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} [s_0 \cos(\bar{n}, 0x) \underline{d}_S], \psi \right\rangle = - \left\langle s_0 \cos(\bar{n}, 0x) \underline{d}_S, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\rangle =$$

aplicând regula produs funcție - distribuție

$$= - \langle \underline{\sigma}_S, s_0 \cos(\bar{n}, 0x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle = - \iint_S s_0 \cos(n, 0x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds$$

Suma de forma:

$$\begin{aligned} & \langle \frac{\partial}{\partial x} [s_0 \cos(\bar{n}, 0x) \underline{\sigma}_S] + \frac{\partial}{\partial y} [s_0 \cos(\bar{n}, 0y) \underline{\sigma}_S] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} [s_0 \cos(\bar{n}, 0z) \underline{\sigma}_S], \varphi \rangle = \iint_S s_0 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\bar{n}, 0x) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\bar{n}, 0y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(\bar{n}, 0z) \right] ds = - \iint_S s_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \stackrel{\text{definiție}}{=} \\ & = \langle \frac{\partial}{\partial n} (s_0 \underline{\sigma}_S), \varphi \rangle \end{aligned} \quad (5.1.48)$$

unde $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ este derivata normală a lui φ .

Relația (5.1.48) este derivata normală a lui $(s_0 \underline{\sigma}_S)$ aplicată lui φ , adică

$$\frac{\partial}{\partial n} (s_0 \underline{\sigma}_S) = - \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \quad (5.1.49)$$

atunci

$$\langle \frac{\partial}{\partial n} (s_0 \underline{\sigma}_S), \varphi \rangle = - \langle s_0 \underline{\sigma}_S, \frac{\partial \varphi}{\partial n} \rangle = - \langle \underline{\sigma}_S, s_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \rangle \quad (5.1.50)$$

Cu acestea laplacianul lui v , devine:

$$\underline{\Delta v} = \{ \underline{\Delta v} \} + s_n \underline{\sigma}_S + \frac{\partial}{\partial n} (s_0 \underline{\sigma}_S) \quad (5.1.51)$$

Știind că derivata normală nu are salt, $s_n = 0$

$$\underline{\Delta v} = \{ \underline{\Delta v} \} + \frac{\partial}{\partial n} (s_0 \underline{\sigma}_S) \quad (5.1.52)$$

5.1.2.3. Rezolvarea ecuației lui Poisson când se ia în considerare stratul dublu din joncțiunea pn.

În ecuația (5.1.52)

$$\underline{\Delta V} = \left\{ \underline{\Delta V} \right\} + \frac{\partial}{\partial n} (s_o \underline{\mathcal{E}}_S) ,$$

se fac următoarele substituții:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left\{ \underline{\Delta V} \right\} &= - \left\{ \frac{\rho}{\epsilon_o} \right\} = - \frac{1}{\epsilon_o} \left\{ (\rho_- + \rho_+) \right\} = - \frac{1}{\epsilon_o} \left\{ (-qN_A + qN_D) \right\} = \\ &= \frac{1}{\epsilon_o} (q N_A - q N_D) = \frac{q}{\epsilon_o} N_A - N_D = \frac{qN}{\epsilon_o} \end{aligned} \quad (5.1.53)$$

cu $N = N_A - N_D$ (concentrația de purtători).

b) În relația (2.1.22), densitatea distribuțională volumică se notează cu $\underline{\rho}_S$, deci relația devine:

$$\underline{\rho}_S = - \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\tau}{\epsilon_o} \underline{\mathcal{E}}_S \right] \quad (5.1.54)$$

unde saltul $s_o = \frac{\tau}{\epsilon_o}$, are semnificația din (5.1.33).

Atunci (5.1.52) se transformă în:

$$\underline{\Delta V} = - \frac{1}{\epsilon_o} (\rho + \rho_S) = - \frac{1}{\epsilon_o} \left[\frac{\partial}{\partial n} \tau \underline{\mathcal{E}}_S \right] + \frac{qN}{\epsilon_o} \quad (5.1.55)$$

Soluția se obține prin superpoziția soluțiilor pentru densitate volumică a sarcinii din cele două regiuni p și n și a stratului dublu, superpoziția potențialului de volum și a potențialului de dublu strat.

5.1.2.3.1. Potențialul de volum.

Se rezolvă ecuația

$$\underline{\Delta v} = - \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (5.1.56)$$

în spațiul distribuțiilor \mathcal{D}' , adică se cere determinarea lui \underline{v} , cînd se cunoaște $\underline{\rho}$. Se cunoaște [13,52,130] că ea devine o ecuație de convoluție:

$$\underline{\Delta v} = \underline{\Delta \delta} * \underline{v} = - \frac{1}{\epsilon_0} \underline{\rho} \quad (5.1.57)$$

Se consideră funcția:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

care are o singularitate și origine.

Se va demonstra că ea este o funcție local integrabilă, deci că există $\int_{\Omega} \frac{1}{r} dv$, oricare ar fi volumul Ω mărginit.

Se arată că există \int_{Ω} într-un caz particular, cînd Ω este o sferă, de rază a cu centrul în origine.

Coordonatele sferice ale unui punct M , sînt:

$$\begin{aligned} x &= r \sin u \cos v & 0 < r < a \\ y &= r \sin u \sin v & 0 \leq v \leq 2\pi \\ z &= r \cos u & 0 \leq u \leq \pi \end{aligned}$$

Jacobianul transformării este:

$$J = r^2 \sin u$$

și rezultă

$$\begin{aligned} \iiint_{r < a} \frac{dx \, dy \, dz}{r} &= \int_0^a dv \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin u}{r} \, dv = \\ &= \int_0^a r dr \int_0^{\pi} \sin u \, dv \int_0^{2\pi} dv = \frac{a^2}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

deci integrala există.

Dacă $0 \in \Omega$, funcția este continuă, integrabilă. Rezultă că $\frac{1}{r}$ este o funcție local integrabilă. Atunci se poate scrie distribuția regulată, sau de tip funcție:

$$\langle \frac{1}{r}, \varphi \rangle = \iiint_{R^3} \frac{\varphi}{r} dx dy dz \quad (5.1.58)$$

Se calculează $\Delta \frac{1}{r}$ cu sensul distribuțiilor. În general se aplică regula, care rezultă din definiția derivatei:

$$\begin{aligned} \langle \Delta \frac{1}{r}, \varphi \rangle &= \langle \frac{1}{r}, \Delta \varphi \rangle = \iiint_{R^3} \frac{\Delta \varphi}{r} dx dy dz = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_r \frac{1}{r} \Delta \varphi dx dy dz \end{aligned} \quad (5.1.59)$$

unde s-a considerat funcția:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{r} & , r \geq \varepsilon \\ 0 & , r < \varepsilon \end{cases}$$

Se calculează în continuare integrala înainte de trecerea la limită:

$$\begin{aligned} \iiint_{r > \varepsilon} \frac{1}{r} \Delta \varphi dx dy dz &= \iiint_{r > \varepsilon} \left[\frac{1}{r} \Delta \varphi - \varphi \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \right] dx dy dz = \\ &= \oint_{r = \varepsilon} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds \end{aligned}$$

unde $\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r}$; \vec{n} este normala exterioră (în interiorul sferei).

Pentru $r > 0$, $\Delta \frac{1}{r} = 0$ și

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_N \cdot 4\pi \varepsilon^2 = 0$$

unde punctul N aparține circumferinței sferei

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r} \right) = \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \right) \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right)_{r=\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2} \quad \text{și}$$

$$- \oint_{r=\epsilon} \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds = - \frac{1}{\epsilon^2} \psi(N) 4\pi \epsilon^2 = -4\pi \psi(N) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -4\pi \psi(0,0,0)$$

dacă $\psi(N) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \psi(0)$

In final:

$$\iiint_{R^3} \frac{\Delta \psi}{r} dx dy dz = -4\pi \psi(0,0,0) = -4\pi \sigma, \psi >$$

sau

$$\underline{\Delta \frac{1}{r}} = -4\pi \underline{\sigma} \quad (5.1.60)$$

Inlocuind in ecuația (5.1.57)

$$\Delta \left(-\frac{1}{4\pi r} \right) = \underline{\sigma}$$

avem

$$\underline{-\frac{1}{4\pi r}} * \Delta \underline{\sigma} = \underline{\sigma} \quad \text{in sensul convoluției}$$

sau

$$\underline{(\Delta \sigma)^{-1}} = -\frac{1}{4\pi r}$$

Atunci

$$\underline{(\Delta \sigma)^{-1}} * (\Delta \sigma * v) = (\Delta \sigma)^{-1} * \left(-\frac{1}{\epsilon_0} \rho \right).$$

Convoluția are sens deoarece

$$\text{supp } (\Delta \sigma)^{-1} = R^3$$

$$\text{supp } \frac{\Delta \sigma}{\rho} = \{0\}$$

$$\text{supp } \underline{\rho} = \text{volumul compact ocupat de sarcina repartizată volumic.}$$

In general, soluția problemei este:

$$\underline{v} = - \frac{1}{4\pi r} * \left(-\frac{1}{\epsilon_0} \rho \right) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\rho * \frac{1}{r} \right) \quad (5.1.61)$$

unde: ϱ - este distribuția regulată;
 $\frac{1}{r}$ - este distribuție regulată

soluție în concordanță cu rel.(5.1.18).

5.1.3.2. Potențialul de dublu strat.

Cu densitatea volumică distribuțională, dată de relația (5.1.54) ecuația lui Poisson devine:

$$\Delta v = + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tilde{\tau}}{\varepsilon_0} \sigma_S \right)$$

Cu relația (5.1.26):

$$v = - \frac{\partial}{\partial n} \left[\left(\frac{\tilde{\tau}}{\varepsilon_0} (x, y, z) \sigma_S \right) \right] * \frac{1}{4\pi r} \quad (5.1.62)$$

Produsul de convoluție dintre o distribuție regulată dată de o funcție local integrabilă și o funcție continuă pe S , devine:

$$\begin{aligned} v &= - \left[\frac{\tilde{\tau}}{\varepsilon_0} \sigma_S \right] * \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = \\ &= - \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_S \tilde{\tau}(u, v, w) \frac{\partial}{\partial n} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}} \right] ds(u, v, w) \end{aligned} \quad (5.1.63)$$

deoarece produsul de convoluție se transformă astfel:

$$f(x, y, z) * \tilde{\tau}(x, y, z) \sigma_S = \int_S \tilde{\tau}(u, v, w) f(x-u, y-v, z-w) ds(u, v, w)$$

Relația se demonstrează astfel:

$$\begin{aligned}
 & \langle f(x,y,z) * \tilde{\tau}(x,y,z) \underline{dS}_S \cdot \varphi(x,y,z) \rangle = \\
 & = \langle f(x,y,z) * \tilde{\tau}(u,v,w) \underline{dS}_{(u,v,w)}, \varphi(x+u,y+v,z+w) \rangle = \\
 & = \langle f(x,y,z), \int_S \tilde{\tau}(u,v,w) \varphi(x+u,y+v,z+w) dS_{(u,v,w)} \rangle = \\
 & = \int_{R^3} f(x,y,z) \left[\int_S \tilde{\tau}(u,v,w) \varphi(x+u,y+v,z+w) dS_{(u,v,w)} \right] dx dy dz = \\
 & = \int_{R^3} \int_S f(x,y,z) \tilde{\tau}(u,v,w) \varphi(x+u,y+v,z+w) dS_{(u,v,w)} dx dy dz = \\
 & = \int_S \tilde{\tau}(u,v,w) \left[\int_{R^3} f(x,y,z) \varphi(x+u,y+v,z+w) dx dy dz \right] dS_{u,v,w} = \\
 & = \int_S \tilde{\tau}(u,v,w) \left[\int_{R^3} f(x-u,y-v,z-w) \varphi(x,y,z) dx dy dz \right] dS_{(u,v,w)} = \\
 & = \int_{R^3} \left[\int_S \tilde{\tau}(u,v,w) f(x-u,y-v,z-w) dS_{(u,v,w)} \right] \varphi(x,y,z) dx dy dz = \\
 & = \langle \int_S \tilde{\tau}(u,v,w) f(x-u,y-v,z-w) dS_{(u,v,w)} \cdot \varphi(x,y,z) \rangle
 \end{aligned}$$

sau în funcții se prezintă sub forma:

$$\varphi(x,y,z) = \int_S \tilde{\tau}(u,v,w) \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}} dS_{(u,v,w)}$$

5.1.3. C o n c l u z i i .

Relațiile (5.1.61) și (5.1.62) sînt soluțiile ecuației Poisson (5.1.55), sub forma produselor de convoluție:

$$\underline{v} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\rho * \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\rho_S d * \frac{1}{r} \right) \quad (5.1.64)$$

$$v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left(\rho * \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left[\rho_S * \frac{1}{r} \right] \right\} \quad (5.1.64')$$

Relația (5.1.64') se transformă cu ajutorul rel.(5.1.17) și (5.1.25) în :

$$v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \frac{\rho}{r} dv + \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{r} \right] ds \right\} \quad (5.1.65)$$

și reprezintă soluția ecuației lui Poisson considerată în spațiul distribuțiilor.

Se consideră că rezolvarea ecuației lui Poisson în spațiul distribuțiilor este mai corectă și mai completă d.p.d.v. matematic, iar din punct de vedere practic, contribuie la lărgirea cunoștințelor teoretice privind calculul potențialului în joncțiunea pn prin luarea în considerare a stratului dublu.

5.2. ASPECTE TEORETICE PRIVIND DETERMINAREA CARACTERISTICILOR IDEALE CURENT - TENSIUNE ALE DIODELOR.

Caracteristica curent - tensiune a unei diode sintetizează proprietățile și principalii parametri ai diodei: cădere de tensiune în sens direct în jur de 1 V ce depinde foarte puțin de curent, începînd cu o valoare de prag u_0 ; curentul invers foarte mic pînă la tensiuni ridicate, crescînd apoi lent funcție de tensiune; tensiune de străpungere u_g abruptă. Caracteristica poate fi împărțită în 4 zone (fig.5.1): zona I - numită zona Zener - are loc o creștere bruscă a curentului la tensiuni inverse mari, și reprezintă caracteristica inversă a diodei. Ea relevă interacțiunea a 5 factori de bază: tensiunea, curentul, temperatura joncțiunii, coeficientul total de transfer al căldurii între joncțiune și mediul ambiant și temperatura ambiantă.

Parametrul cel mai important este tensiunea inversă de vîrf maximă sau tensiunea de străpungere a diodei. Valoarea tensiunii inverse pentru care creșterea curentului devine bruscă, se numește tensiunea inversă maximă admisibilă (prescurtat în literatura tehnică PIV) - ea nu reprezintă o limită de utilizare ci o valoare sub care nu există schimbări ireversibile. Tensiunea inversă nominală - este tensiunea la care funcționează dioda și este mai mică decît PIV.

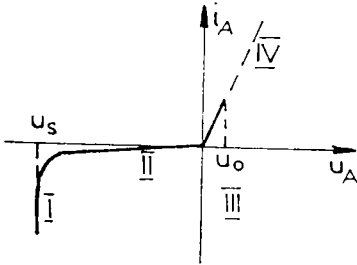


Fig.5.1.

Zona II și III este modelată teoretic de ecuația lui Schockley

$$i_A = i_s \left(e^{\frac{u_A}{u_T}} - 1 \right) \quad (5.2.1)$$

unde: i_s - este curentul de saturație al diodei, iar u_T - tensiunea termică - cunoscută la temperatura T dată.

În zona IV, la $u_A > u_0$, u_0 - bariera de potențial, se obțin curenți mari - variație liniară în raport cu tensiunea.

Caracteristica reflectă două proprietăți specifice: dependența neliniară dintre variabilele electrice de la terminale (u_A și i_A) și conducție unidirecțională.

5.2.1. Aproximații și abateri relative la determinarea caracteristicii ideale.

Pentru stabilirea expresiei (5.1.1) se fac o serie de aproximații și simplificări și anume: deoarece se folosesc expresiile concentrațiilor de purtători în condiții de echilibru se presupune că nivelul de injecție este mic; joncțiunea este polarizată direct, deși expresia (5.1.1) este valabilă și la polarizare inversă; se presupune că la polarizare directă, prin joncțiune, curentul este determinat de purtătorii majoritari injectați în regiunea opusă, unde difuzează ca purtători minoritari în exces și se recombina treptat; joncțiunea pn este groasă, adică lungimile regiunilor p și n sînt mult mai mari decît lungimile de difuzie ale purtătorilor minoritari; joncțiunea pn este izotermă și singurul agent

exterior care perturbă echilibrul, este tensiunea aplicată, u_A .

Pentru calculul curentului prin joncțiune, i_A , se evaluează densitățile j_p și j_n de difuzie ale purtătorilor (goluri sau electroni), conform relației

$$i_A = S [j_p + j_n] \quad (5.2.2)$$

unde S este aria secțiunii transversale a joncțiunii. În acest scop în figura 5.2 se reprezintă joncțiunea pn polarizată direct, cu tensiunea u_A și variația concentrației golurilor în regiunea neutră n, $p_n(x)$, respectiv în regiunea neutră p, $p_p(x)$.

Repartiții similare $n_p(x)$ și $n_n(x)$ există și pentru electroni.

- Se știe /96,134/ că j_p - fiind un curent de difuzie este determinat numai de concentrații p , care variază cu distanța, după relația:

$$- \frac{x}{L_p}$$

$$P_n = P_{n0} + [P_p(0) - P_{n0}] e^{-\frac{x}{L_p}} \quad (5.2.3)$$

cu originea pentru x în punctul N (fig.5.2).

Aplicînd u_A , p_n variază cu distanța cu lo ordine de mărime, în timp ce p_p practic nu se modifică. Deci j_p va fi dat numai

$$\frac{dp_n}{dx}$$

de p_n , prin relația:

$$j_p = - e D_p \frac{dp_n}{dx} \quad (5.2.4)$$

Dacă concentrațiile n sînt:

$$- \frac{x}{L_n}$$

$$n_p = n_{p0} + [n_p(0) - n_{p0}] e^{-\frac{x}{L_n}} \quad (5.2.5)$$

atunci

$$j_n = + e D_n \frac{dn_p}{dx} \quad (5.2.6)$$

În aceste relații, singura mărime care depinde de u_A este $P_n(0)$, deoarece D_p , D_n , L_p , L_n , P_{n0} , n_{p0} sînt parametrii fizici ai semiconductorului; e - sarcina electrică a electronului.

Relația de legătură între u_A și $p_n(0)$, respectiv $n_p(0)$ este cunoscută [134] :

$$p_n(0) = p_{no} e^{\frac{u_A}{u_T}}, \quad n_p(0) = n_{po} e^{\frac{u_A}{u_T}}, \quad (5.2.7)$$

cu precizarea că tensiunea termică $u_T = \frac{kT}{e}$, este cunoscută și constantă la T dat.

Inlocuind (5.2.7) în (5.2.3) sau (5.2.5) și apoi în (5.2.4) respectiv (5.2.6) se obține:

$$j_p(N) = \frac{e D_p p_{no}}{L_p} \left(e^{\frac{u_A}{u_T}} - 1 \right) \quad (5.2.8)$$

$$j_n(P) = \frac{e D_n n_{po}}{L_n} \left(e^{\frac{u_A}{u_T}} - 1 \right). \quad (5.2.9)$$

În continuare se arată în literatură că deoarece curentul i_A nu depinde de x , se poate presupune că

$$j_n(P) \cong j_n(N) \quad (5.2.10)$$

deci, că în zona de trecere, notată cu ℓ în fig.5.2, valorile lui j_p și j_n nu se modifică (ℓ este foarte mică) și rezultă:

$$i_A = S \left[j_p(N) + j_n(N) \right] = S e \left[\left(\frac{D_p}{L_p} p_{no} + \frac{D_n}{L_n} n_{po} \right) \left(e^{\frac{u_A}{u_T}} - 1 \right) \right] \quad (5.2.11)$$

$$\text{sau} \quad i_A = i_S \left(e^{\frac{u_A}{u_T}} - 1 \right) \quad (5.2.11')$$

$$\text{cu} \quad i_S = S e \left(\frac{D_p}{L_p} p_{no} + \frac{D_n}{L_n} n_{po} \right), \quad (5.2.12)$$

curentul rezidual al joncțiunii (numit și curent de saturație).

5.2.2. Stratul dublu de pe interfața joncțiunii p_n , în Φ' .

Se știe /23, 134/ că în cazul joncțiunilor p_n reale, caracteristica $i_A - u_A$ se abate de la ecuația 5.2.1, datorită atât verificării aproximative a unora din ipotezele simplificatoare, pe care s-a fondat deducerea expresiei respective, cât și apariției unor fenomene specifice funcționării joncțiunii, care nu au fost luate în considerare. Unul din aceste fenomene care poate fi pus în discuție în cadrul matematic al teoriei distribuțiilor este cel al influenței stratului dublu asupra curentului prin joncțiune - în conducție inversă.

În relațiile (5.2.8), (5.2.9) și (5.2.10) la stabilirea ecuației diodei ideale nu s-au luat în considerare fenomenele ce apar în zona de trecere, notată cu ℓ în fig.5.2. Unul din efectele mai importante din zona de trecere este cel al generării - recombinării de perechi electron-gol. În regim de conducție inversă, pe lângă curentul invers, prin diodă circulă un curent suplimentar determinat de mișcarea golurilor și a electronilor generați termic în regiunea de trecere. La creșterea tensiunii inverse (în valoare absolută) curentul prin diodă are o creștere. Se obține astfel un curent $i_a > i_A$, la creșterea tensiunii inverse, deci:

$$i_a = i_0 \left(e^{\frac{u_a}{u_T}} - 1 \right) \quad (5.2.13)$$

este ecuația diodei ideale în aceste condiții, unde $i_0 > i_g$.

Din punct de vedere matematic perechile electron-gol de pe suprafața joncțiunii, pot fi încadrate într-un strat dublu de sarcini electrice.

5.2.3. Ecuatia concentrației de purtători rezolvată în Φ'

Se știe din literatură /23/, /26/, /96/ că excesul de purtători variază cu distanța după o ecuație diferențială ordinară de forma:

$$y'' - a y = 0 \quad (5.2.14)$$

în care:

$y = p_n - p_{no}$ pentru semiconductorul de tip p ;

$a = \frac{1}{L_p}$ - constantă - cu L_p - lungimea medie de difuzie a golurilor în exces.

Soluția ecuației este de forma :

$$y = p_n - p_{no} = C_1 e^{-x/L_p} + C_2 e^{x/L_p} \quad (5.2.15)$$

Punind condițiile la limită

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty \quad p_n - p_{no} &\rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \quad p_n &= p_n(0) \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

rezultă: $C_1 = 0$ și $C_2 = p_n(0) - p_{no}$

Se ajunge astfel la soluția dată prin relațiile (5.2.3), (5.2.5), pentru goluri și electroni în exces, deci de o parte și de alta a zonei de trecere (fig.5.2).

Considerînd o diodă polarizată direct, cu tensiunea de 0,35 V, de tipul n+p, se obține, într-o reprezentare simplificată repartiția golurilor și electronilor în lungul joncțiunii (cu linie întreruptă - la echilibru) /38/, conform figurii 5.3.

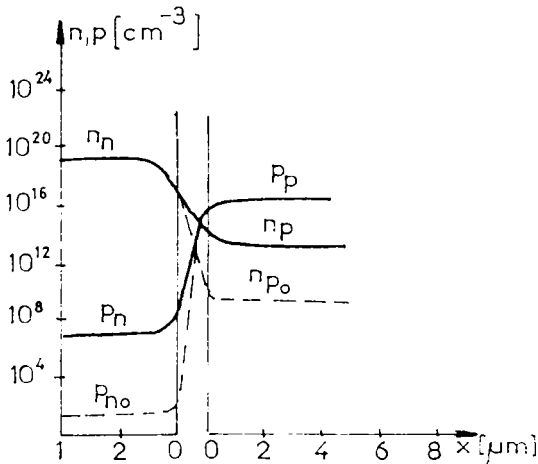


Fig.5.3

Dacă se consideră că \underline{y} este o distribuție regulată definită prin relația:

$$\langle \underline{y}, \varphi \rangle = \int_D y \varphi dx \quad (5.2.17)$$

$$D = \text{supp } \varphi, \varphi \in \mathcal{D}$$

și i se calculează derivatele, în sensul teoriei distribuțiilor /13/, /52/, se obține:

derivata întâi:

$$\underline{\mathcal{D}} \underline{y}' = \underline{y}' + s_0 \underline{\mathcal{D}} \quad (5.2.18)$$

cu s_0 - saltul funcției în $x=0$;
 - distribuția lui Dirac concentrată în $x=0$

derivata a doua:

$$\underline{y}'' = \underline{y}'' + s_0 \underline{\mathcal{D}}' + s_1 \underline{\mathcal{D}} \quad (5.2.19)$$

în care: s_1 - saltul derivatei funcției y , egal cu zero
 - din punct de vedere tehnologic.

Scriind în ecuația (5.1.17) în distribuție rezultă

$$\{ \underline{y}'' \} - a \underline{y} = - s_0 \underline{\mathcal{D}}' \quad (5.2.20)$$

ecuație care formulată în spațiul distribuțiilor conține și saltul din $x=0$.

Punând în corespondență relațiile (5.2.20) cu (2.1.24) rezultă că saltul s_0 în $x=0$ poate fi introdus de stratul dublu de pe interfața joncțiunii pn; astfel, în ecuația (5.2.22), definită în \mathcal{D}' , acest salt intervine explicit.

5.2.4. Formularea în \mathcal{D}' , a dependenței curent-tensiune.

În cadrul teoriei distribuțiilor, soluționarea ecuației (5.2.20) se poate face prin însumarea soluției ecuației omogene \underline{y} cu soluția particulară a ecuației neomogene \underline{y}_0 /13/, 52/.

$$\underline{Y} = \underline{y} + \underline{y}_0 \quad (5.2.21)$$

Soluția ecuației omogene este cunoscută, din relația (5.2.15), în condițiile (5.2.16), sub forma:

$$\underline{y} = C_2 e^{-\sqrt{a} x} \quad (5.2.22)$$

Pentru determinarea soluției ecuației neomogene, unul din procedee /13/ este următorul:

Soluția y_0 se alege de forma:

$$y_0 = (x) \underline{\theta(x)} \quad (5.2.23)$$

unde $\underline{\theta(x)}$ este distribuția lui Heaviside, definită ca o distribuție regulată, prin relația:

$$\langle \underline{\theta(x)}, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \quad (5.2.24)$$

$$\text{cu } \underline{\theta(x)} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0 \\ 1 & \text{pentru } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.2.24')$$

Soluția (5.2.23) este un produs între o funcție indefinit derivabilă $\alpha(x)$ și o distribuție $\underline{\theta}$.

Aplicînd relația (1.2.1) pentru calculul derivatei acestei distribuții, avem:

$$\underline{(\alpha T)'} = \alpha' T + \alpha T' \quad (5.2.25)$$

deoarece distribuția din membrul stîng este

$$\langle \underline{(\alpha T)'}, \varphi \rangle = - \langle \underline{\alpha T}, \varphi' \rangle = - \langle \alpha T, \varphi' \rangle,$$

iar distribuția din membrul drept este:

$$\begin{aligned} \langle \underline{\alpha' T + \alpha T'}, \varphi \rangle &= \langle \underline{\alpha' T}, \varphi \rangle + \langle \underline{\alpha T'}, \varphi \rangle = \\ &= \langle \underline{1}, \alpha' \varphi \rangle + \langle \underline{1}', \alpha \varphi \rangle = \langle \underline{1}, \alpha \varphi' \rangle - \langle \underline{1}, (\alpha \varphi)' \rangle = \\ &= \langle \underline{1}, \alpha' \varphi \rangle - \langle \underline{1}, \alpha' \varphi + \alpha \varphi' \rangle = \\ &= \langle \underline{1}, \alpha' \varphi \rangle - \langle \underline{1}, \alpha' \varphi \rangle - \langle \underline{1}, \alpha \varphi' \rangle = \\ &= - \langle \underline{1}, \alpha \varphi' \rangle. \end{aligned}$$

Atunci rezultă:

$$\begin{aligned} \underline{y_0'} &= \underline{\alpha''(x)} \underline{\theta(x)} + \underline{\alpha(o)} \underline{\sigma'(x)} \\ \underline{y_0''} &= \underline{\alpha''''(x)} \underline{\theta(x)} + \underline{\alpha'(o)} \underline{\sigma'(x)} + \underline{\alpha(o)} \underline{\sigma''(x)} \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

cu proprietatea

$$\underline{\alpha(x)} \underline{\sigma'(x)} = \underline{\alpha(o)} \underline{\sigma'(x)}$$

deoarece

$$\alpha(o) < \underline{\sigma}, \psi > = < \alpha(o) \underline{\sigma}, \psi >$$

înlocuind în ecuația (5.1.23) avem:

$$\underline{\alpha''(x)} \underline{\theta(x)} + \underline{\alpha'(o)} \underline{\sigma'(x)} + \underline{\alpha(o)} \underline{\sigma''(x)} - \alpha \alpha(x) \theta(x) = - \underline{s_0} \underline{\sigma'}$$

Prin identificare se obține:

$$\alpha''(x) - \alpha \alpha(x) = 0$$

$$\alpha'(o) = 0$$

$$\alpha(o) = -s_0$$

Soluția și derivata ei sînt:

$$\alpha(x) = K_1 e^{\sqrt{a} x} + K_2 e^{-\sqrt{a} x}$$

$$\alpha'(x) = K_1 \sqrt{a} e^{\sqrt{a} x} - K_2 \sqrt{a} e^{-\sqrt{a} x}$$

iar în $x=0$

$$\alpha'(o) = K_1 \sqrt{a} - K_2 \sqrt{a} = 0$$

și rezultă

$$K_1 = K_2 = K_0$$

iar

$$\alpha(x) = K e^{\sqrt{a} x} + K e^{-\sqrt{a} x}$$

Dacă $\alpha(o) = -s_0$, avem

$$K + K = -s_0 \quad \text{și} \quad K = -\frac{s_0}{2}$$

Soluția ecuației neomogene y_0 este:

$$\underline{y_0} = -\frac{s_0}{2} (e^{\sqrt{a} x} + e^{-\sqrt{a} x}) \underline{\Theta(x)} = -s_0 \operatorname{ch} \sqrt{a} x \underline{\Theta(x)} \quad (5.2.27)$$

Atunci (5.1.24) devine

$$\underline{Y} = \underline{C_2} e^{-\sqrt{a} x} - s_0 \operatorname{ch} \sqrt{a} x \underline{\Theta(x)} \quad (5.2.28)$$

iar derivata ei va fi

$$\underline{Y'} = \underline{C_2} \underline{a} e^{-\sqrt{a} x} - s_0 \sqrt{a} \operatorname{sh} \sqrt{a} x \underline{\Theta(x)} - s_0 \underline{\delta(x)} \quad (5.2.29)$$

Transformate în funcții, soluția și derivata ei sînt:

$$Y = \begin{cases} C_2 e^{-\sqrt{a} x} & \text{pentru } x < 0 \\ C_2 e^{-\sqrt{a} x} - s_0 \operatorname{ch} \sqrt{a} x & \text{pentru } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.2.30)$$

$$Y' = \begin{cases} -C_2 \sqrt{a} e^{-\sqrt{a} x} & \text{pentru } x < 0 \\ -C_2 \sqrt{a} e^{-\sqrt{a} x} - s_0 \sqrt{a} \operatorname{sh} \sqrt{a} x & \text{pentru } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.2.31)$$

Inlocuind $\sqrt{a} = \frac{1}{L_p}$ și introducînd în relațiile (5.24)(5.26)

se obține:

$$\underline{j_p} = \frac{e^{D_n p n_0}}{L_p} e^{-\frac{x}{L_p}} \left(e^{\frac{u_a}{u_T}} - 1 \right) + e^{D_p} s_0 \operatorname{sh} \frac{1}{L_p} x$$

$$\underline{j_p} = \frac{e^{D_n n_{p0}}}{L_n} e^{-\frac{x}{L_n}} \left(e^{\frac{u_a}{u_T}} - 1 \right) \quad (5.2.32)$$

Din această relație rezultă că are loc creșterea curentului rezidual al joncțiunii, la o valoare mai mare - curent de saturație prin termenul adiacent $e^{D_p} s_0 \operatorname{sh} \frac{1}{L_p} x$.

Acum se poate spune, corect, că i_A nu depinde de x și în $x=a$ se obțin relațiile (5.28), respectiv (5.29) fără a mai fi necesară condiția suplimentară (5.1.10), sub forma:

$$j_n(0_+) = \frac{e D_p p_{no}}{L_p} \left(e^{\frac{u_a}{u_T}} - 1 \right) \quad (5.2.33)$$

$$j_n(0_-) = \frac{e D_n n_{po}}{L_n} \left(e^{\frac{u_a}{u_T}} - 1 \right) .$$

Rezultă din ecuația (5.2.2) și (5.2.11)

$$i_a = S \left[j_p(0_+) + j_n(0_-) \right] , \quad (5.2.33')$$

relație valabilă și în zona de trecere.

5.3. PROBLEME PRIVIND SELECTIONAREA DIODELOR CU AVALANSA CONTROLATA, PENTRU REALIZAREA MODULELOR DE REDRESARE.

Modulele de redresare de înaltă tensiune impun inserierea mai multor diode de înaltă tensiune, deoarece o singură joncțiune pn nu poate rezista la tensiuni inverse în domeniul 5 kV ... 200 kV. Pentru tensiuni mai mari se folosesc scheme de redresare cu multiplicare în cascadă, care conțin mai multe module de redresare de înaltă tensiune /148, 149/.

Pentru realizarea unor module de redresare, prin inseriere, este esențială obținerea unei repartiții a căderilor de tensiune cât mai uniforme în lungul lanțului de diode, o izolație electrică corespunzătoare și o bună răcire a diodelor - în special în cazul unor curenți intenși (fie curenți de sarcină de durată, fie curenți de scurtcircuit de scurtă durată).

Repartiția cât mai uniformă a tensiunii este condiționată de utilizarea unor diode cu rezistențe inverse cât mai apropiate, chiar egale.

O primă selecție a diodelor o constituie măsurarea rezistenței inverse. În literatura tehnică de specialitate nu se precizează însă, pentru fiecare tip de diodă la ce tensiune de polarizare

zare inversă să se facă aceste determinări, aceasta fiind de fapt tensiunea nominală a aparatului de măsură (a megohmmetrului), care de vele mai multe ori este diferită de tensiunea de lucru a unei diode inseriate în modulul de redresare.

În aceste condiții, se consideră utilă, determinarea precisă, continuă a caracteristicii curent-tensiune (sau a altor variante), pentru selectarea diodelor folosite în sursele de înaltă tensiune continuă utilizate în diverse aplicații industriale (surse de tensiune continuă în laboratoare de înaltă tensiune, vopsire electrostatică, electrofiltre, etc.).

În cele ce urmează se prezintă montaje practice pentru determinarea continuă, la diferite temperaturi a caracteristicilor diodelor, utilizând osciloscopul, calculatorul MEDA 42 TA cu înregistratorul său; se prezintă apoi schema unui aparat independent pentru ridicarea caracteristicii conductanță-tensiune, cu ajutorul unui multiplicator ROB 8095.

5.3.1. Caracteristicile diodelor cu avalanșă controlată folosite în construcția modulelor redresoare de înaltă tensiune.

Diodele cu avalanșă controlată de tip D10A10, D16A12, D25A12, cu siliciu, intrate în fabricație recentă la IPRS Băneasa, sînt astfel realizate încît la depășirea tensiunii de străpungere, multiplicarea în avalanșă a purtătorilor în regiunea de sarcină spațială a joncțiunii pn, se produce în întregul volum al structurii semiconductoră (la diodele redresoare obișnuite străpungerea se produce într-o regiune limitată de pe suprafață sau din volumul structurii de siliciu). Din acest motiv, diodele cu avalanșă controlată pot suporta, pe durate scurte, impulsuri de curent invers în gama de puteri de ordinul kilowaților.

În literatura tehnică* se arată că datorită capacității de a suporta sarcini mari de tensiune inversă, se poate evita folosirea sistemelor uzuale de protecție, adică diodele cu avalanșă controlată pot fi conectate în serie fără a folosi rețele de echilibrare statică sau dinamică a tensiunilor inverse.

Pentru sursele de înaltă tensiune continuă, această precizare rămîne valabilă numai dacă diodele utilizate au caracteristici identice.

* Catalog - Diode cu siliciu - apărut în colecția Automatică, informatică, electronică și management, Editura tehnică, 1986, București.

Tabel 5.1. Date de catalog ale diodelor cu avalanșă controlată.

T i p	V_{RRM} /V/	V_{RA} /V/	I_{FAVM} /A/	I_{FSM} /A/	V_{FM} /V/	V_{T0} /U/	r_d /m /
D10A10	1000	1200-1700	10	150	1,4	0,98	10
D16A12	1200	1400-2000	16	180	1,4	0,92	9,8
D25A12	1200	1400-2000	25	300	1,4	0,9	5,6
	I_{RM}		I^2t la 10 ms /A ² s/				
	25°C/μA/	150°C/mA/	25°C	150°C			
D10A10	25	3	220	110			
D16A12	25	3	315	160			
D25A12	50	5	800	450			

- V_{RRM} - tensiune a inversă de vîrf repetitivă;
- V_{RA} - tensiunea inversă de avalanșă;
- I_{FAVM} - curent direct mediu , la $T = 120^\circ\text{C}$;
- I_{FSM} - curent direct de suprasarcină accidentală la 150°C ;
- V_{FM} - tensiunea directă maximă la 25°C ;
- V_{T0} - tensiunea de prag la 150°C ;
- r_d - rezistența dinamică la 150°C ;
- I_{RM} - curentul invers maxim;
- I^2t - integrala de curent.

Măsurătoarea cu megohmmetrul - care determină un singur punct al caracteristicii este utilă doar pentru eliminarea diodelor cu izolație slăbită.

În cadrul unei documentări la IPRS Băneasa, am constatat că în scop de sortare, verificarea caracteristicii curent-tensiune se face pe un osciloscop, determinându-se precis panta caracteristicii directe, la diferite temperaturi.

Determinările sînt corespunzătoare pentru diodele normale, folosite în mod curent, dar nu sînt suficiente pentru diodele folosite în construcția modulelor redresoare de înaltă tensiune.

Pentru construirea unor module de redresare de înaltă calitate și fiabilitate este necesară selectarea diodelor cu caracteristici inverse curent-tensiune identice, la aceeași temperatură, fixată.

5.3.1.1. Caracteristica inversă curent-tensiune.

Conform datelor de catalog ale diodelor cu avalanșă controlată (tab.5.1), tensiunea inversă maximă admisibilă, numită tensiune inversă de avalanșă, este cuprinsă într-o gamă destul de largă de valori. Pentru determinarea precisă a limitelor și a tensiunii de străpungere s-a realizat montajul din fig.5.4. În acest montaj,

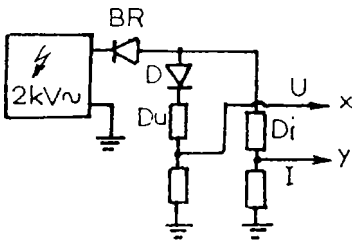


Fig.5.4

ca sursă de tensiune SIT s-a utilizat o trusă de înaltă tensiune alternativă de încercat tip TCS 2 kV/ 0,1 A, ICEMENERG București, la care se poate extinde domeniul de tensiune conform metodei prezentate în inovația nr.521/16.03, 1977 /150/. Circuitul a fost completat cu o schemă de redresare monoalternanță pentru a se reda caracteristica inversă cu osciloscopul catodic. Montajul prezentat măsoară rezistența inversă la diferite tensiuni - practic este un megohmmetru cu tensiune variabilă. În țară sînt cunoscute megohmmetre de 500 V, 1000 V, 2500 V, 5000 V, cu care, așa cum s-a arătat, se determină un singur punct al caracteristicii. Măsurarea conform montajului prezentat în fig.5.4 se face cu tensiune alternativă redresată. BR este un bloc de redresare monoalternanță - ceea ce reduce solicitarea termică a diodelor încercate, notate cu D. Prin D_u și D_i s-au notat divizorul de tensiune și de curent, divizoare de tip rezistiv, cu care se obțin semnalele potrivite pentru

vizualizare pe osciloscop sau pentru multiplicarea semnalelor cu ajutorul unui circuit linear integrat, de tip multiplicator, fabricat ICCE București, de tipul ROB 8095.

Cu montajul prezentat în fig.5.5 se pot compara caracteristicile curent-tensiune a două diode D_1 și D_2 .

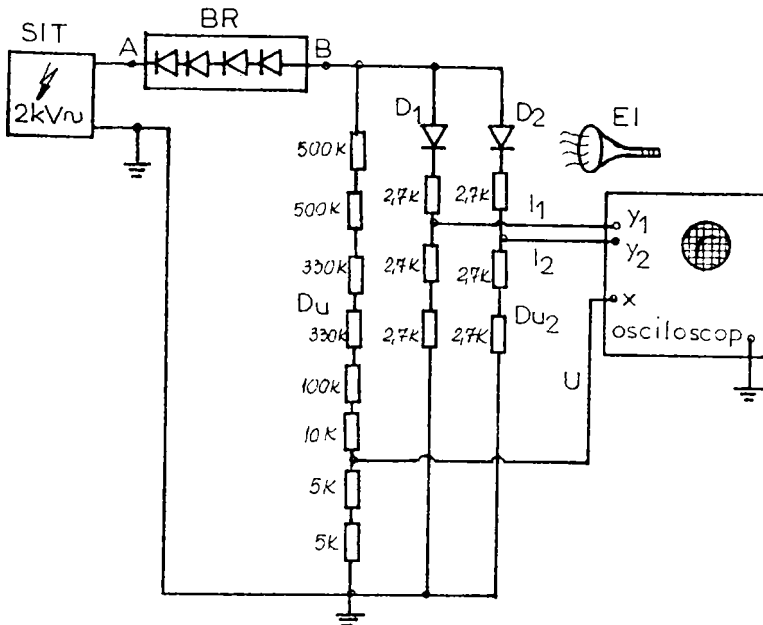


Fig.5.5

Modul de lucru este următorul: se aplică tensiune în jurul tensiunii inverse de avalanșă V_{RA} (1000 - 2000 V) și se determină curentul invers I_{RM} /mA/ ; pe ecranul osciloscopului se obține caracteristica inversă curent-tensiune. Încălzind diodele, cu ajutorul elementului de încălzire EI, la temperaturi de 100 - 150°C se constată o creștere a curentului de conducție în stare inversă (în valoare absolută), la creșterea tensiunii aplicate, așa cum s-a arătat în paragraful 5.1.2. Montajul oferă două posibilități de lucru: a) - mărind tensiunea inversă aplicată până se obține din nou o valoare apropiată de curentul de conducție inversă maximă cu menținerea încălzirii (fără menținerea încălzirii nu se poate crește tensiunea inversă aplicată, deoarece s-ar ajunge la străpun-

gerea diodei prin creșterea curentului) ; b) - păstrînd tensiunea aplicată constantă - prin răcire, se constată o creștere a curentului de conducție în stare inversă, ca în figura 5.6.

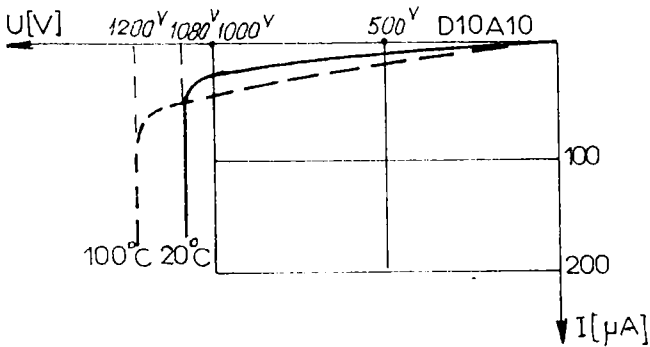


Fig.5.6

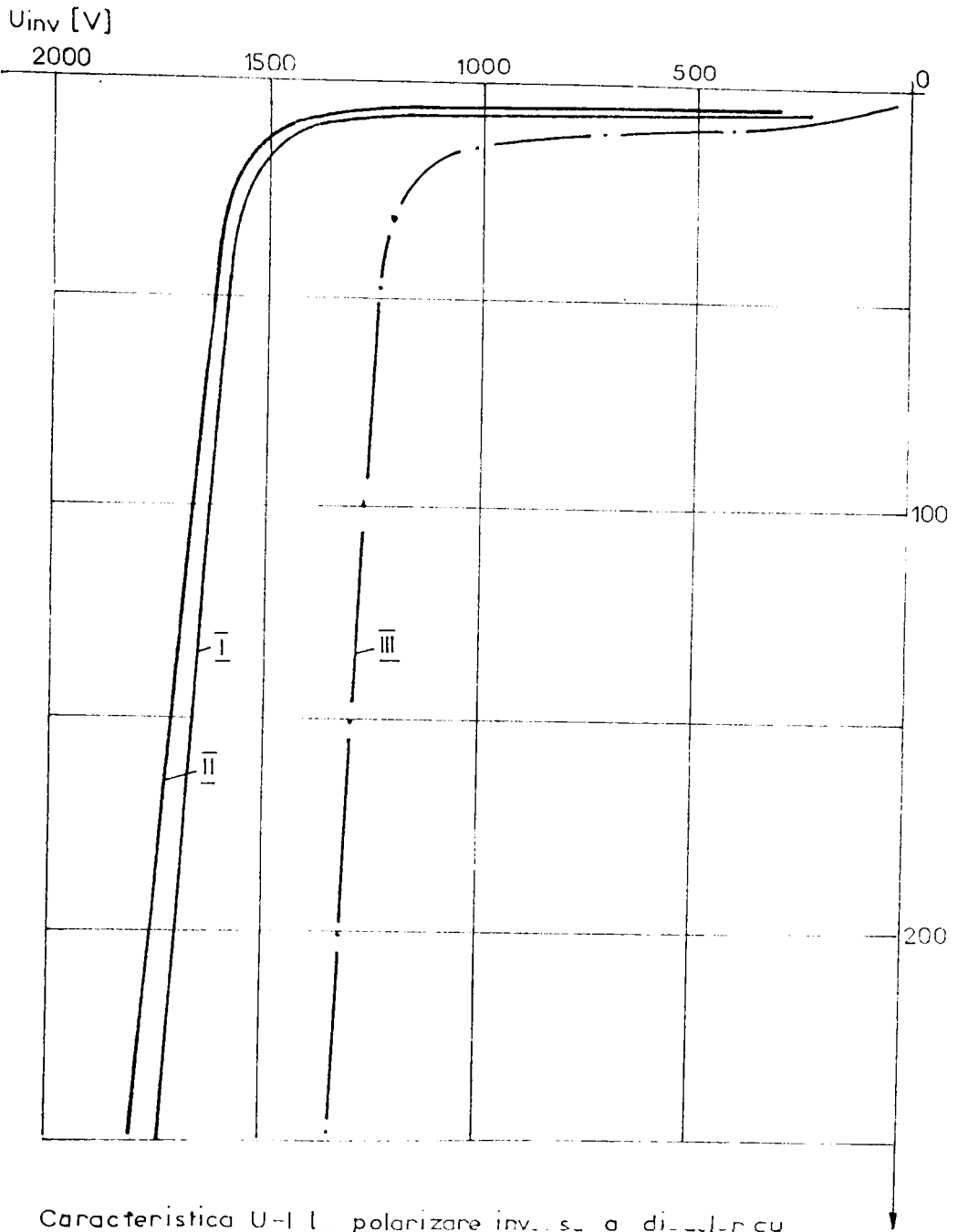
In figura 5.7 s-au redat caracteristicile inverse pentru trei diode D10 A10, la temperatura constantă $\theta = 25^{\circ}\text{C}$. Se constată o diferență destul de mare între tensiunile de saturație ale diodelor, notate I, II și III cuprinsă însă în limitele admise.

In figura 5.8 s-a reprezentat variația curentului funcție de temperatură la tensiune inversă constantă, pentru diodele I și II.

5.3.1.2. Alte caracteristici ale diodelor polarizate invers.

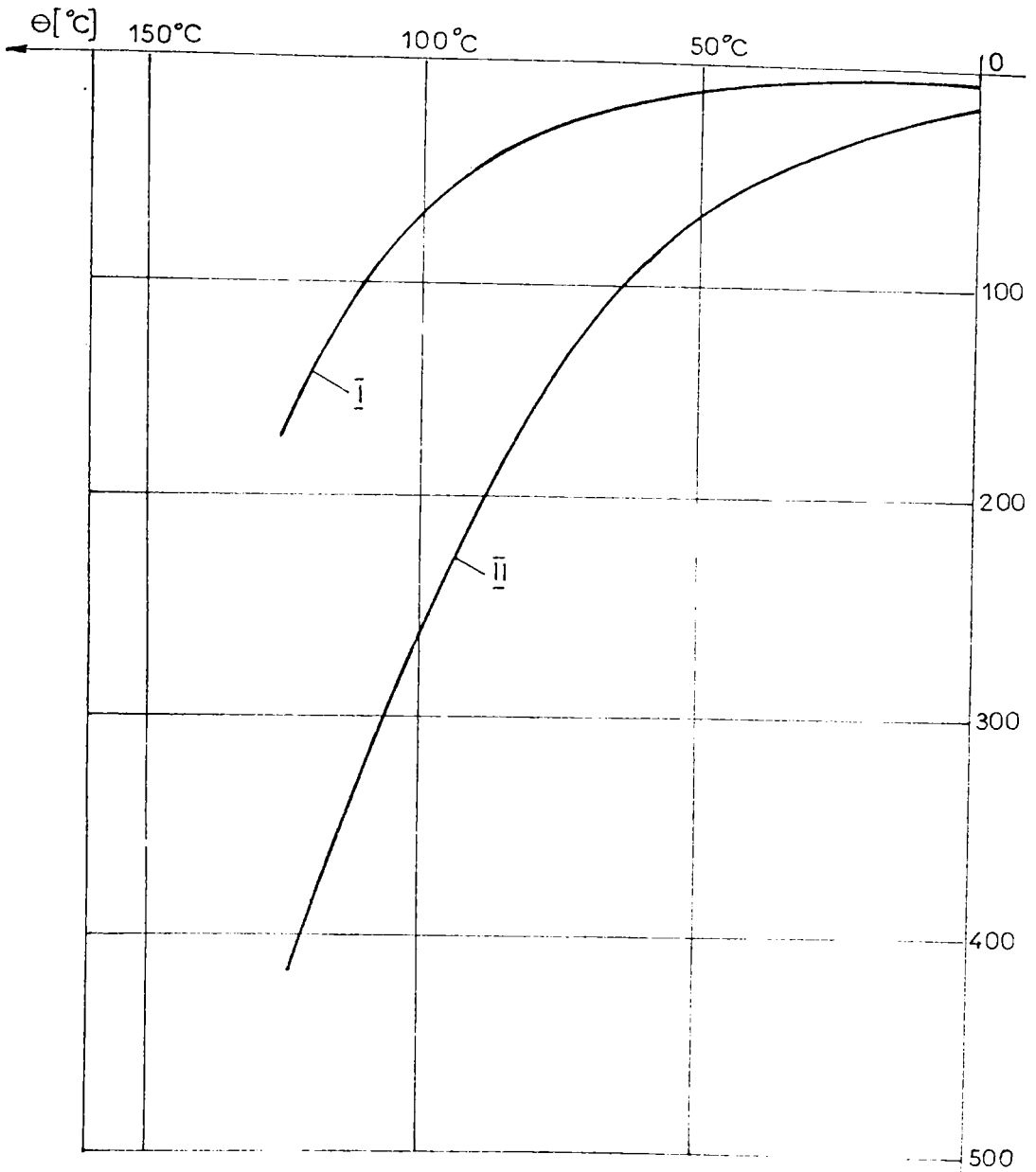
In regiunea de prăbușire a caracteristicii inverse, pentru o variație largă a curentului, tensiunea este aproape constantă și egală cu V_{RA} . Variația tensiunii cu creșterea curentului conduce la noțiunea de rezistență dinamică /134/. In general se indică rezistența dinamică nominală, notată r_d și definită astfel:

$$r_d = \frac{dU}{dI} = \frac{\Delta U}{\Delta I} \Big|_{I \text{ nominal}} \quad (5.3.1)$$



Caracteristica U-I la polarizare inversă a diodului cu avalanșă controlată tip D10A1C ($\Theta = 25^{\circ}\text{C}$)

FIG. 5.7



Caract. $I=f(\theta)$
 $U_{\text{inv}} = 1600 \text{ V}$

I [μA]

FIG. 58.

Ea este definită ca panta curbei $I = f(U)$, în zona de prăbușire.

Conductanța dinamică definită ca inversul rezistenței dinamice

$$g_d = \frac{dI}{dU} \quad (5.3.2)$$

poate fi definită ca distribuție cu ajutorul derivatei în sens distribuțional [13], astfel:

$$\underline{g_d} = \frac{dI}{dU} = \left\{ \frac{dI}{dU} \right\} + s_1 \underline{\delta} \quad (5.3.3)$$

sau

$$\underline{g_d} = \{ \underline{g_d} \} + s_1 \underline{\delta} \quad (5.3.4)$$

unde s_1 este saltul curentului invers la tensiunea de saturație, $\underline{\delta}$ - distribuția lui Dirac concentrată în acest punct.

Reprezentarea matematică propusă reprezintă mai corect și mai intuitiv, variația bruscă a acestui parametru.

În cele ce urmează se prezintă un montaj pentru determinarea conductanței electrice la o variație continuă a tensiunii de polarizare inversă între zero și o valoare apropiată de tensiunea de străpungere.

Se preferă determinarea conductanței pentru reducerea erorii de măsură care ar apărea în cazul împărțirii la un numitor cu valori foarte mici (curent).

Trasarea caracteristicilor se face cu ajutorul calculatorului analogic MEDA 42TA și a înregistratorului BAK 4T.

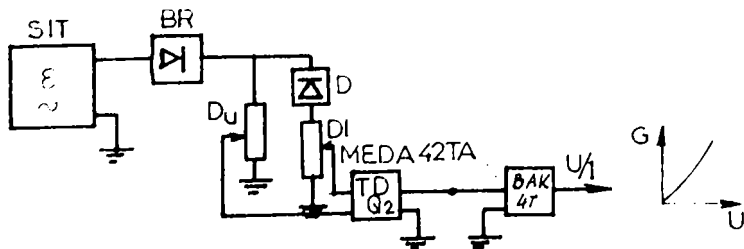


Fig.5.9

Schemă electrică, redată în figura 5.9, cuprinde: sursa de înaltă tensiune SIT, blocul de redresare BR, un divizor de tensiune D_u și un divizor de curent D_1 (rezistive), montajul pe calculatorul

MEDA 42 TA (ce include blocul de înmulțire TDQ₂) și un înregistrator în coordonate, tip B A K 4T.

Schema electrică de modelare pe calculator analogic, are cablajul realizat ca în fig.5.10; cu A₁, A₂, A₃ s-au notat amplificatoarele operaționale ale calculatorului, cu reacțiile lor.

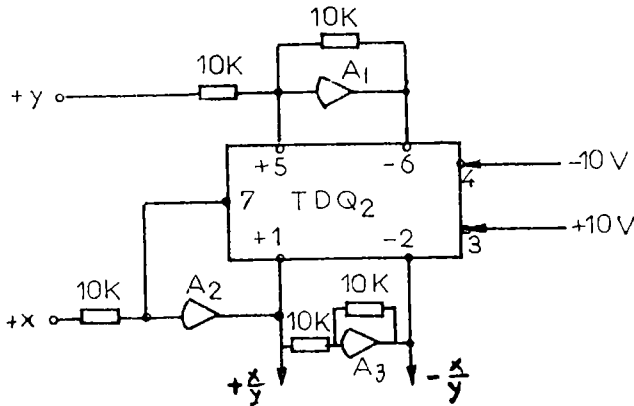


Fig.5.10

Se menționează, că atât calculatorul MEDA 42TA, cât și înregistratorul său sînt utilaje din import, de precizie și de volum mare, ce pot fi folosite în scop de cercetare.

5.3.2. Aparat pentru ridicarea continuă a Caracteristicilor diodelor.

Pentru a dispune de un aparat independent de măsurare rapidă a conductanței electrice la diferite tensiuni și temperaturi, s-a realizat un montaj ca în fig.5.11, (propunere de invenție /154/). În principiu, montajul cuprinde: un multiplicator de tip ROB 8095 produs în țară, la ICCE București, un amplificator electronic - β A 741, divizoarele de tensiune și de curent D_u și D_i, sursa de înaltă tensiune SIT și blocul de redresare BR.

Circuitul electronic s-a realizat pe o plăcuță imprimată. Aparatul este de mici dimensiuni, poate fi folosit în mod independent.

Împărțirea valorilor celor două tensiuni, pentru a obține conductanța diodei în fiecare punct de funcționare se realizează cu ajutorul amplificatorului PA 741, care are în reacția negativă un multiplicator analogic /8/, obținându-se astfel un amplificator operațional divizor.

Montajul de divizor - utilizând un ROB 8095 are patru posibilități de corecție: corecția de zero pentru $U_x = u$ și $U_y = i$, corecția factorului de multiplicare k_m , corecția de zero a semnalului de ieșire u_e .

Dacă $\pm \Delta U_m$ este eroarea de calcul a multiplicatorului se obține tensiunea de ieșire sub forma:

$$u_e = - \frac{1}{K_m} \left(\frac{U_x}{U_y} \cdot \frac{R_2}{R_1} \pm \frac{\Delta u_m}{U_y} \right) \quad (5.3.5)$$

astfel încît se observă că eroarea de măsură a divizorului crește, cu scăderea valorii împărțitorului U_y , deci la $U_y = 0$, ajunge la limita superioară.

De aceea precizia modulului de divizare este definită pentru un domeniu bine determinat al valorii tensiunii U_y . Valoarea cea mai scăzută a lui U_y este 0,15 % din valoarea sa maximă. Raportul R_2/R_1 se alege funcție de domeniul maxim al tensiunii de ieșire u_M , corespunzătoare pentru u_{xM} :

$$\frac{R_2}{R_1} = K_m u_{eM} \cdot \frac{0,15 u_{yM}}{u_{xM}} \quad (5.3.6)$$

Pentru fiecare tip de diode D10 A10, sau D 25 A12, aparatul se reetalonează, obținînd comparativ caracteristicile unui mare număr de diode. Deoarece în etapele premergătoare de reglaj ale schemei de măsură este necesară stabilirea rapoartelor optime de divizare pentru divizoarele D_u și D_i (fig.5.11), astfel ca tensiunile de intrare în blocul de divizare să nu depășească ± 10 V; au fost utilizăți blocuri de semnalizare optică, care semnalizează depășirea valorii de 10 V.

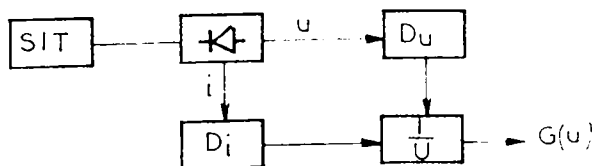


Fig. 5.11.

5.4. STUDIUL ȘI REALIZAREA UNOR MODULE DE REDRESARE DE INALTA TENSIUNE.

Diodele cu avalanșă controlată cu siliciu, fabricate la I.P.R.S. Băneasa au parametri funcționali corespunzători și constanți în timp, sînt de putere mare, astfel că este posibilă utilizarea lor pe scară industrială la realizarea instalațiilor de redresare - care astfel, pot lucra cu minim de supraveghere și la parametri energetici foarte ridicați.

Inițial pentru redresare s-au utilizat Kenotroane, diode cu gaz, redresoare mecanice. Prin conectarea în serie a mai multor diode se obține mărirea tensiunii de serviciu, la același curent - obținîndu-se module de redresare - care apoi se combină în scheme de redresare adecvate (monoalternanță), dublare simetrică sau asimetrică, triplare, multiplicare în cascadă).

În cadrul unei colaborări între I.P. "Traian Vuia" Timișoara și întreprinderea Electrobanat Timișoara s-au realizat module de redresare de înaltă tensiune pentru instalația de vopsire electrostatică, procedeu de mare eficiență economică. Vopsirea electrostatică necesită tensiuni înalte continue de 80 - 120 kV și asigură obținerea unui strat de vopsea uniform, aderent, cu pierderi minime și cu o productivitate ridicată.

În articolul "Modules de redressement de la haute tension pour installations de peinture électrostatique" sînt prezentate soluțiile tehnologice, parametrii calculați și încercările experimentale care au stat la baza inovației /149/ aplicată la Electrobanat Timișoara.

5.4.1. Simularea funcției de redresor.

În acest capitol se prezintă circuite electronice de simulare a diodei ideale, a funcției sale de redresor - circuite ce vor fi utilizate pentru modelarea funcționării instalației de înaltă tensiune continuă în cascadă.

Simularea se face cu circuite electronice sau pe calculator analogic, cu ajutorul amplificatoarelor operationale.

Noțiunea de amplificator electronic și operațional este larg folosită în studiul circuitelor /10/.

Prin definiție, amplificatorul se referă la componentele

variabile ale semnalelor de intrare și ieșire prin relația:

$$x_o(t) = A x_i(t - \tilde{\tau}) \quad (5.4.1)$$

unde: x_o este răspunsul, iar x_i - excitația ;

A - (numai real) - amplificarea ;

$\tilde{\tau}$ - timpul de întârziere introdus de amplificator.

este timpul de trecere al semnalului prin amplificator, conform schemei bloc din fig.5.12.a , schemă echivalentă cu un cvadripol - figura 5.12.b.

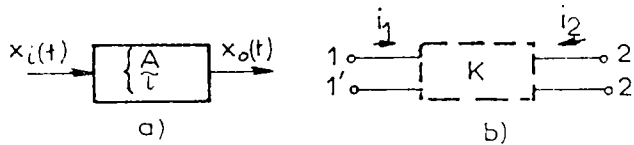
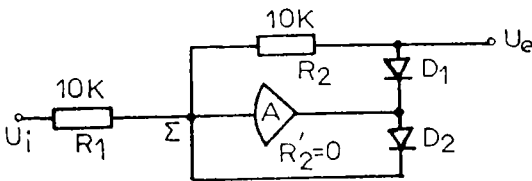


Fig.5.12

1) Redresarea unei singure alternanțe pe calculator analogic.

Montajul de simulare este redat în figura 5.13 și conține ca element principal un amplificator operațional.



La aplicarea tensiunii de intrare pozitive se obține $u_e = 0$, deoarece

$$K_{\text{transfer}} = \frac{R_2'}{R_1} = 0$$

La aplicarea tensiunii de intrare negative, se obțin:

Fig.5.13

$$I_1 = \frac{U_i - U}{R_1} = \frac{U_i}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U_e - U}{R_2} = \frac{U_e}{R_2}$$

Cu $I_1 + I_2 = 0$ avem $\frac{U_i}{R_1} + \frac{U_e}{R_2} = 0$ și deci

$$U_e = - \frac{R_2}{R_1} U_i \quad (5.4.2) \quad \text{are semn schimbat.}$$

Schema prezentată simulează redresarea monoalternantă.

2) Redresor ideal - modelat pe calculator analogic cu ambele alternante.

Intr-o primă variantă, se realizează schema din fig.5.14

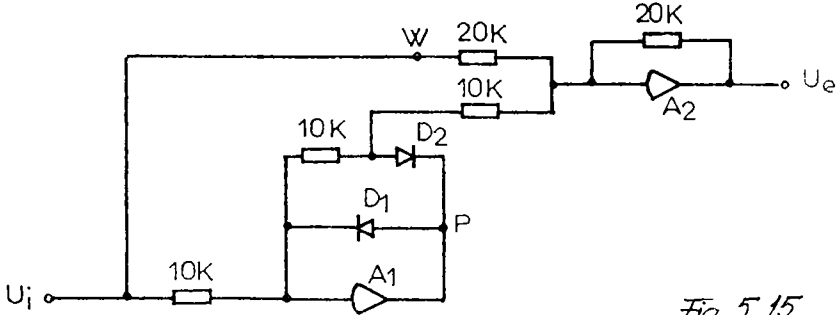


Fig.5.14 (jos).

Fig. 5.15.

Dacă la intrare se aplică tensiune pozitivă, în punctul P rezultă tensiune negativă și conduce D_1 (D_2 este blocată). În punctul Q avem $(-U_i)$, deoarece coeficientul de transfer

$$K = \frac{R_{\text{reactie}}}{R_{\text{intrare}}} = \frac{10^{\text{K}}}{10^{\text{K}}} = 1 \quad (5.4.3)$$

Amplificatorul A_2 împreună cu rezistența sa de intrare și de reacție, face a doua schimbare de semn astfel că tensiunea de la ieșire $U_e = U_i^0$ și este pozitivă. Dacă la intrare se aplică tensiune negativă (alternanță negativă), conduce D_2 . Punctul P este pozitiv, punctul S are $+U_i$. Amplificatorul A_3 face o schimbare de semn, iar A_2 încă o schimbare de semn, astfel că la ieșire se obține $U_e = -U_i$ ($U_i < 0$), deci $U_e > 0$.

A doua variantă care conține numai două amplificatoare operaționale este redată în figura 5.15.

La alternanța pozitivă a tensiunii de intrare se deschide D_2 , în punctul P, avînd potențial negativ. În S, avem $-U_i$, iar în W avem $+U_i$, deci A_2 lucrează ca sumator cu schimbare de semn.

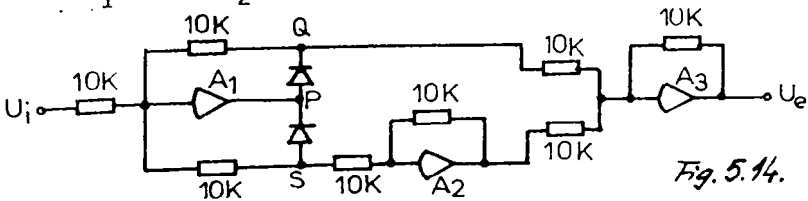


Fig. 5.14.

$$\frac{+ U_i}{20 K} + \frac{- U_i}{10 K} + \frac{U_e}{20 K} = 0 \quad \text{sau}$$

$$U_e = - (K_w \cdot U_w + K_S \cdot U_S) = - \left(\frac{20}{20} U_i + \frac{20}{20} (-U_i) \right) =$$

$$= - U_i + 2 U_i = U_i \quad (5.4.4)$$

La alternanță negativă, P are potențial pozitiv și conduce dioda D_2 . Cum rezistența de reacție este zero, potențialul lui P devine zero, deci $U_S=0$. Atunci minusul se aplică la A_2 care are coeficient de transfer 1 ($\frac{20}{20}$), dar schimbă semnul și rezultă

$$U_e = -U_i \quad (U_i < 0) , \quad \text{deci } U_e > 0 \quad (5.4.5)$$

Circuitele prezentate la punctele 1 și 2 se vor utiliza la modelarea cascadei, în capitolul 5.4.2.

3) Simularea unei diode ideale cu amplificatoare operaționale (circuit integrat).

Simbolul unui amplificator operațional este redat în figura 5.16 /10/ și are coeficientul de amplificare, în buclă deschisă

$$A = \frac{U_E}{U_D} = 10^5 \quad (5.4.6)$$

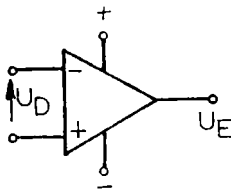


Fig.5.16

Un amplificator operațional poate fi inversor (în schema din fig.5.17), când avem

$$\frac{U_i + U_D}{R_1} + \frac{U_E + U_D}{R_2} = 0$$

$$U_D = \frac{U_E}{A} = \frac{U_E}{10^5} = 0 \quad \text{sau}$$

$$U_E = - \frac{R_2}{R_1} U_i \quad (5.4.7)$$

De asemenea poate fi repetor - când nu schimbă semnul tensiunii la ieșire față de tensiunea de la intrare (fig.5.18).

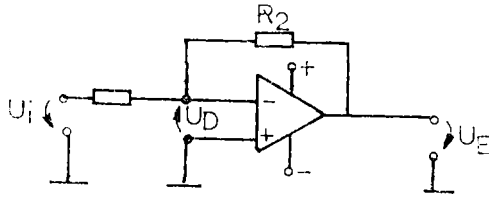


Fig.5.17

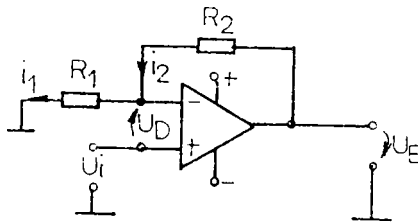


Fig.5.18

$$U_e = A \cdot U_D$$

$$U_D = U_i - i_1 R_1$$

$$\frac{U_E}{R_1 + R_2} = i_2 = i_1$$

$$U_D = U_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_E$$

$$U_E = A \left(U_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_E \right) = A U_i - \frac{A R_1}{R_1 + R_2} U_E = U_E$$

$$U_E \left(1 + \frac{A R_1}{R_1 + R_2} \right) = A U_i$$

$$U_E = \frac{A U_i}{1 + \frac{A R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{(R_1 + R_2) A U_i}{R_1 + R_2 + A R_1} = \frac{(R_1 + R_2) U_i}{\frac{R_1 + R_2}{A} + R_1} =$$

$$= \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot U_i = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot U_i$$

Repetorul dă tensiunea:

$$U_E = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) U_i \quad (5.4.8)$$

Un redresor monoalternantă cu amplificator operațional, este redat în figura 5.19

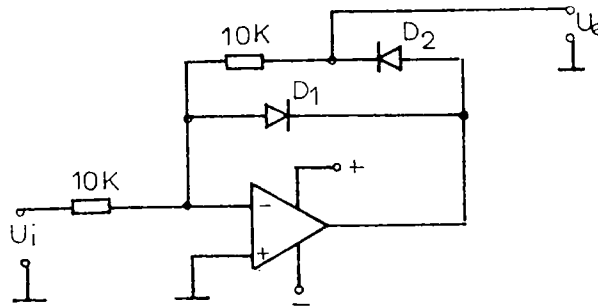


Fig.5.19

Cînd tensiunea de intrare U_i este pozitivă, dioda D_1 conduce și face ca tensiunea din punctul P să fie zero, deoarece rezistența de reacție inseriată cu D_1 este zero. Deci $U_e = 0$. Cînd U_i este negativă, D_2 conduce, deoarece U_p este pozitiv și deci coeficientul de transfer este $\frac{10}{10} = 1$ și $U_e = -U_i$, iar $U_e > 0$, deoarece $U_i < 0$.

4) Redresor dublă alternanță cu amplificatoare operaționale (circuite integrate).

Se realizează schema din figura 5.20.

În alternanța pozitivă P are potențial negativ, și

$$U_E = - \left(\frac{20}{20} U_i + \frac{20}{10} (-U_i) \right) = U_i$$

În alternanța negativă, $U_p > 0$, dar ulterior devine zero, D_1 conduce, și $U_e = -\frac{20}{20} U_i$. Cu $U_i < 0$, rezultă $U_e > 0$.

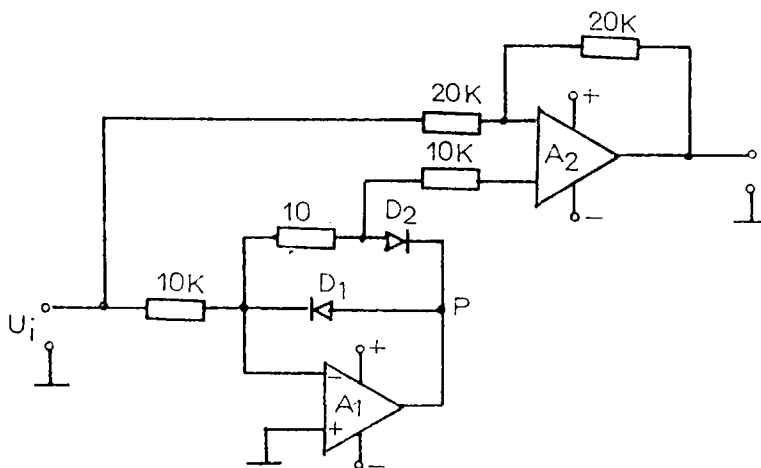


Fig.5.20

Intr-o altă variantă (fig.5.21) se obține:

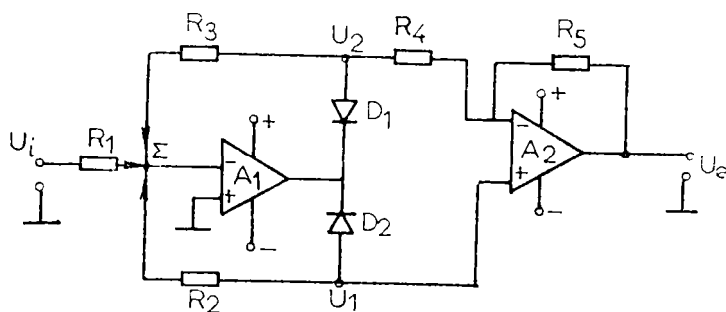


Fig.5.21

în alternanța pozitivă conduce D_1 iar în alternanța negativă conduce D_2 și $U_1 > 0$. Tensiunea $U_1 > 0$ se aplică la intrarea + a lui A_2 care lucrează în regim de repetor,

$$U_e = \left(1 + \frac{R_5}{R_3 + R_4} \right) U_1 .$$

În nodul Σ , suma curenților este zero

$$\frac{U_i}{R_1} + \frac{U_1}{R_2} + \frac{U_1}{R_3 + R_4} = 0$$

$$\frac{U_1}{R_3 + R_4} + \frac{U_1}{R_2} = - \frac{U_i}{R_1}$$

$$U_1 \left(\frac{1}{R_3 + R_4} + \frac{1}{R_2} \right) = - \frac{U_i}{R_1}$$

$$U_1 \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_2(R_3 + R_4)} = - \frac{U_i}{R_1}$$

$$U = \frac{U_i R_2 (R_3 + R_4)}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4)}$$

sau

$$U_e = \left(1 + \frac{R_5}{R_3 + R_4} \right) U_1 = \frac{R_3 + R_4 + R_5}{R_3 + R_4} (-U_i) \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4)}$$

pentru $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10 \text{ K}$ (5.4.9)

rezultă $U_e = -U_i$ dacă $U_i < Q$ avem $U_e > 0$

Aceste circuite de la punctele 3 și 4, lucrează independent de calculatorul analogic și pot fi folosite în diverse aplicații.

5.4.2. Modelarea pe calculator analogic a funcționării cascadei cu două etaje.

Modelarea pe calculator analogic a funcționării cascadei de înaltă tensiune este una din metodele accesibile și mai puțin costisitoare, în comparație cu determinările pe o instalație reală de înaltă tensiune. Se pot măsura: tensiunile, căderile de tensiune, factorul de ondulație pentru diferite rezistențe de sarcină conectate la ieșire și se pot stabili soluții de optimizare. Operarea pe calculator analogic prezintă avantajul repetării calculului în diferite variante printr-un reglaj relativ simplu, din potențio-metre, al coeficienților de transfer și al condițiilor inițiale. Soluțiile grafice care se obțin direct de la înregistratorul calculatorului permit o interpretare intuitivă a fenomenului studiat.

Cascada este o instalație de înaltă tensiune formată din module redresoare conectate în schema din figura 5.22.

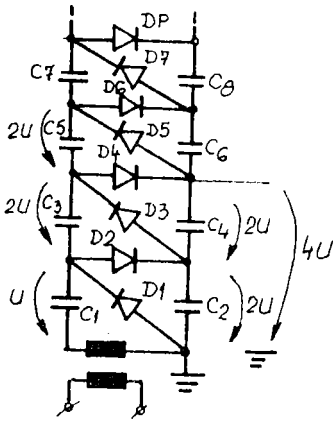


Fig.5.22

tensiunea $2U$ față de masă.

Procesul este progresiv în mai multe alternanțe. Sarcina condensatorului C_2 se transferă și asupra condensatorului C_3 prin D_1 și D_3 . După inseriere, borna superioară a lui C_4 se încarcă la $4U$ față de masă.

Schema electronică realizată pe calculatorul IEDA 4RTA este redată în figura 5.23. Pentru realizarea fizică a schemelor de simulare s-au folosit și alte rezistențe și condensatoare decât cele din dotarea calculatorului.

În figurile 5.24, 5.25, 5.26, 5.27 și 5.28 se dau înregistrările făcute pe înregistratorul BAK 4T pentru cascada cu un etaj și cu două etaje.

Schema din fig.5.24 conține un generator de tensiune sinusoidală, cu pulsația reglabilă. Generatorul de semnal funcționează pe baza ecuației diferențiale cunoscute:

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + u(t) = 0 \quad , \quad (5.4.10)$$

a cărei soluție este:

Se cunosc cascade cu 8 etaje. În cele ce urmează se modelează pe calculator analogic cu două etaje - care funcționează în instalația de vopsire electrostatică la întreprinderea Electrobanat Timișoara.

Considerând alternanța (+) la extremitatea din dreapta, conduce D_1 și se încarcă C_1 la valoarea U . După ce extremitatea din stânga trece la alternanța + inseriind tensiunea dată de înfășurarea de înaltă tensiune a transformatorului cu tensiunea de încărcare a condensatorului C_1 , prin intermediul diodei D_2 , C_2 se încarcă la

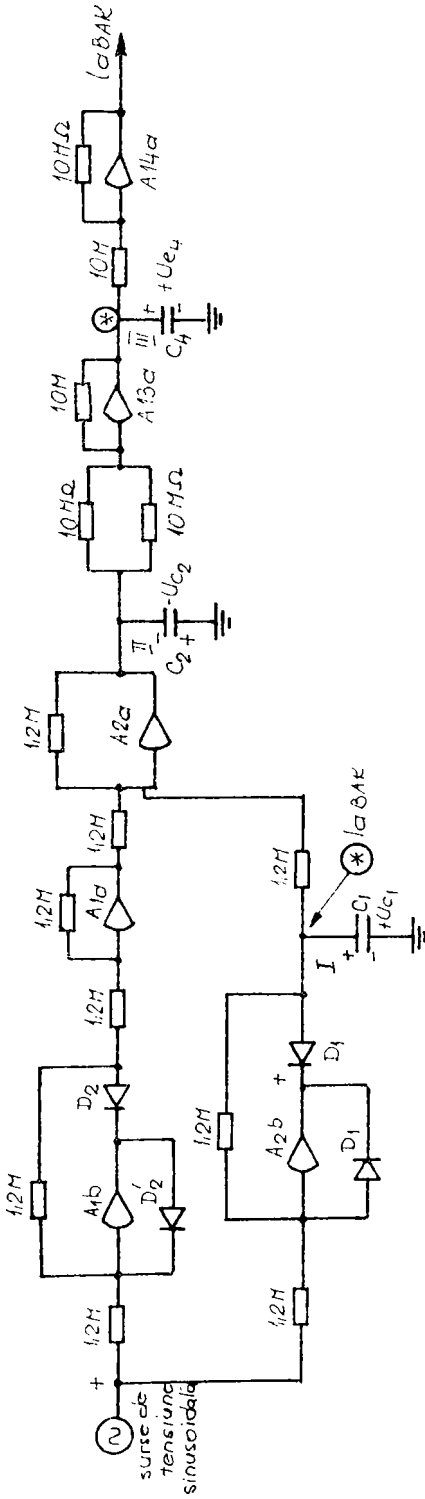


FIG. 5.23

$$u(t) = u(0) \sin \omega t \quad (5.4.11)$$

Deoarece ecuația se poate scrie

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} = -\omega u(t) \quad (5.4.10')$$

în schema de cablaj prezentată mai jos (fig.5.25) s-a urmărit integrarea acestei ecuații

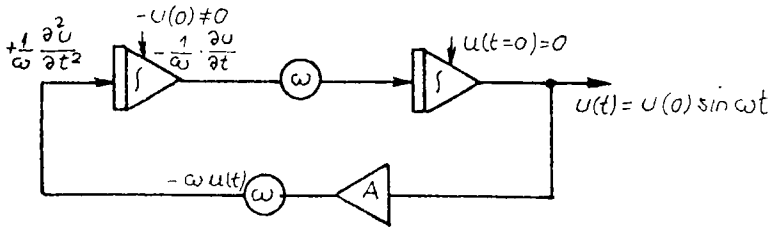


Fig.5.24

Integratorul din stînga are condiții inițiale diferite de zero, iar integratorul din dreapta are condiții inițiale zero deoarece pentru $t=0$, $\sin \omega t = 0$.

Inregistratorul de tip BAK-4T permite înregistrarea semnalelor în perioada T în domeniul 5-20 sec. Conform fig.5.22 în alternanța pozitivă a sursei de tensiune sinusoidală, conduce dioda D_1 , proces simulat în schema din fig.5.23 prin amplificatorul A_{1b} și condensatorul C_1 ; amplificatorul A_{2b} este blocat - are tensiunea la ieșire zero. În alternanța negativă tensiunea la ieșire urmărește cu semn schimbat tensiunea sinusoidală de la intrare și încarcă condensatorul C_1 cu tensiune pozitivă. După ce se atinge maximul tensiunii, condensatorul rămîne încărcat, nu se autodescarcă prin rezistența de izolație, eventual rezistența de reacție a amplificatorului A_{2b} care este de valoare foarte mare (1,2 M Ω).

Tensiunea pe condensatorul C_2 din cascadă se obține însumînd tensiunea sursei cu tensiunea remanentă de pe condensatorul C_1 , lucru realizat de către amplificatorul A_{2a} , care lucrează ca sumator, și care are atât rezistența internă, cît și rezistența de reacție de valori foarte mari (1,2 M Ω).

La ieșirea amplificatorului A_{1a} obținem tensiunea redresată pozitivă deoarece amplificatorul A_{1b} asigură la ieșire tensiune redresată negativă, dar amplificatorul A_{1a} îi schimbă semnul. În

acest fel se obține tensiunea pe C_2 , U_{C2} cu semn schimbat.

În continuare, pentru a reduce numărul de elemente utilizate (amplificatoare operaționale) se simulează obținerea tensiunii și elementele C_2 și C_4 , dublând valoarea tensiunii pe condensatorul C_2 , amplificatorul operațional A 13a execută și o schimbare de semn, iar prin amplificatorul A 14a se obține din nou o tensiune negativă pentru a putea fi comparată cu tensiunea de pe condensatorul C_2 .

În felul acesta amplificatorul A 14a, având rezistența de intrare și de reacție de valoare foarte mare ($10\text{ M}\Omega$) împiedică auto-descărcarea condensatorului C_4 , la conectarea înregistratorului BAK 4T. În mod similar se pot modela cascade cu mai multe etaje, dar aceasta conduce la o schemă și mai complexă.

Înregistrările pe calculatorul analogic MEDA 42TA prezentate în figurile următoare reprezintă variații caracteristice ale tensiunii, în diferite puncte din cascadă.

În figura 5.25 este prezentată variația sinusoidală a tensiunii sursei și tensiunea obținută pe condensatorul C_1 , în două variante:

- curba trasată cu negru s-a obținut intercalând între condensatorul C_1 și înregistratorul BAK un inversor cu rezistență mare internă și de reacție (marcată * - în fig.5.23) ;

- curba trasată cu roșu s-a obținut conectând direct înregistratorul BAK, la condensatorul C_1 (se observă o scădere a tensiunii deoarece rezistența de intrare a înregistratorului BAK este mai mică).

În figura 5.26 s-a reprezentat tensiunea sinusoidală a sursei, tensiunea pe condensatorul C_2 și C_4 ($U_{C4} + U_{C2}$). Rezultă pulsații destul de mari care pot fi redresate cu ajutorul unor condensatoare de filtrare conectate la ieșirea cascadei de tensiune.

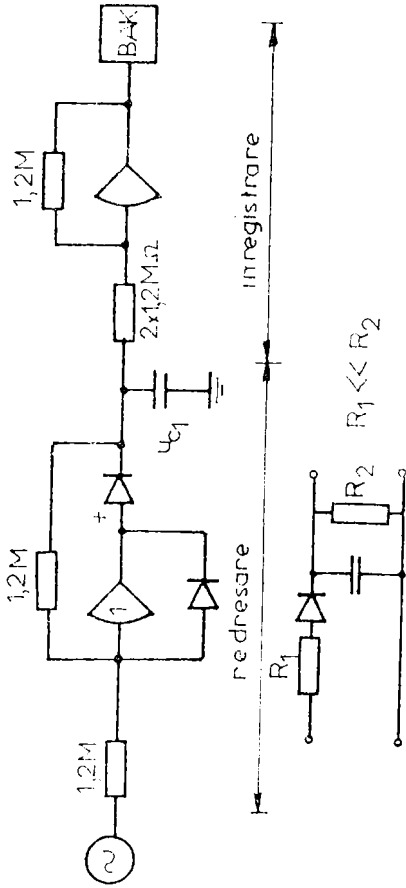
Obs.: U_{C4} este tensiunea între borna superioară a condensatorului C_4 și masă.

În figura 5.27 se prezintă complet variația tensiunii în toate punctele modelate:

- tensiunea sinusoidală a sursei începe cu alternanța negativă și are perioada $T = 6,28$ sec. corespunzătoare pulsației $\omega = 1$ rad/sec.;

- tensiunea pe condensatorul C_1 , U_{C1} este pozitivă (condensatorul se încarcă în alternanța negativă a tensiunii sinusoidale

$K_x = 2 \text{ sec/cm}$
 $k_y = 50 \text{ mV/mm}$



- 115 -

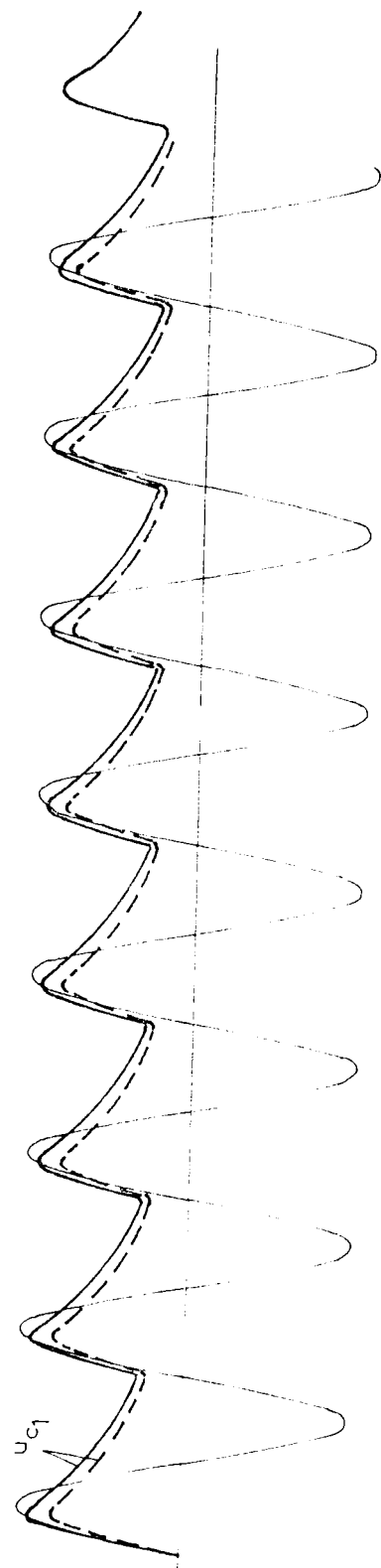
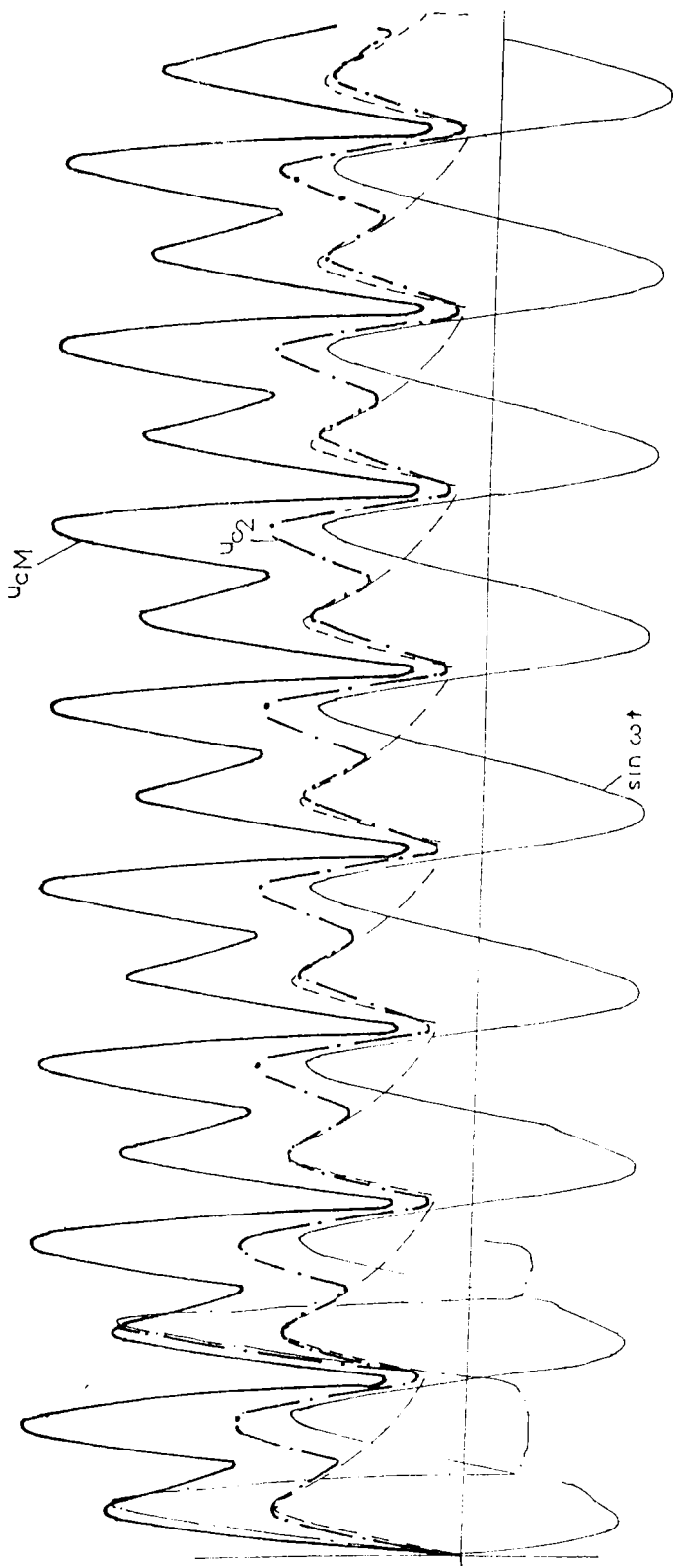
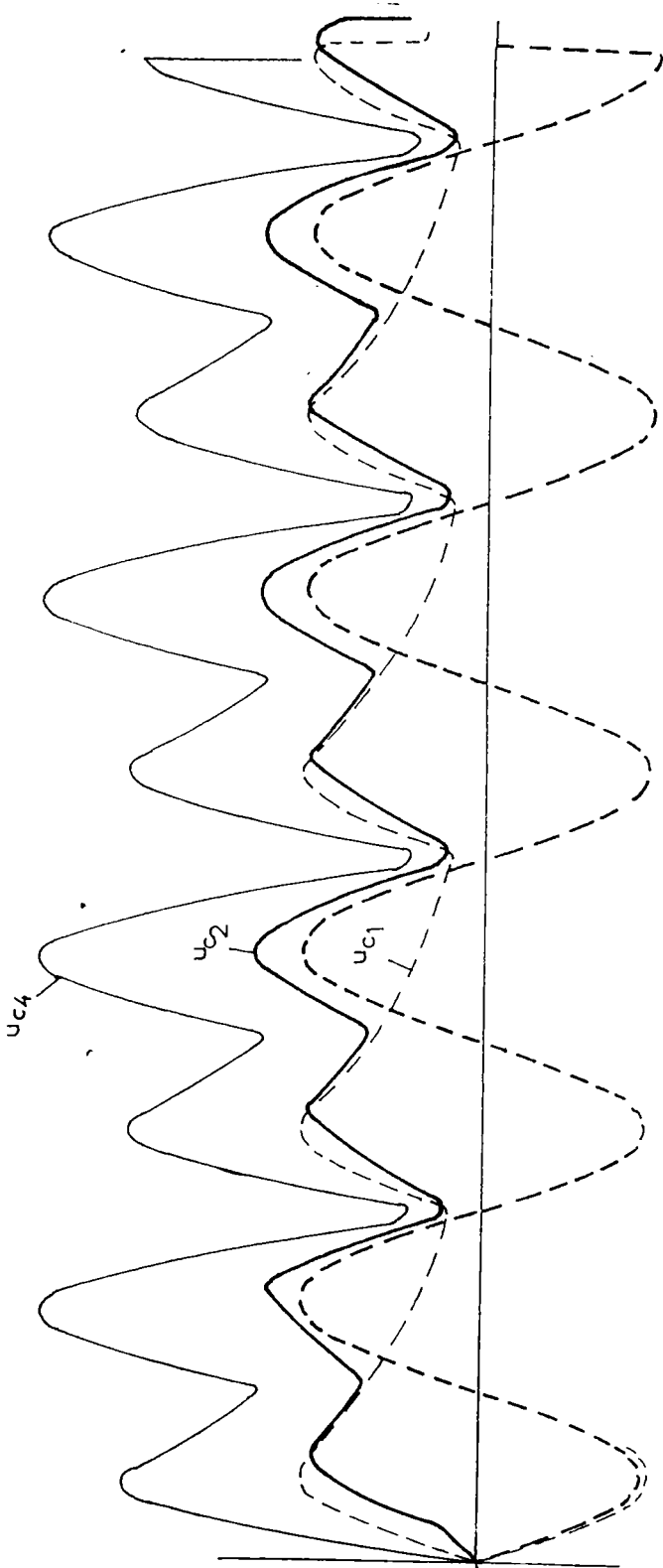


FIG. 5.25



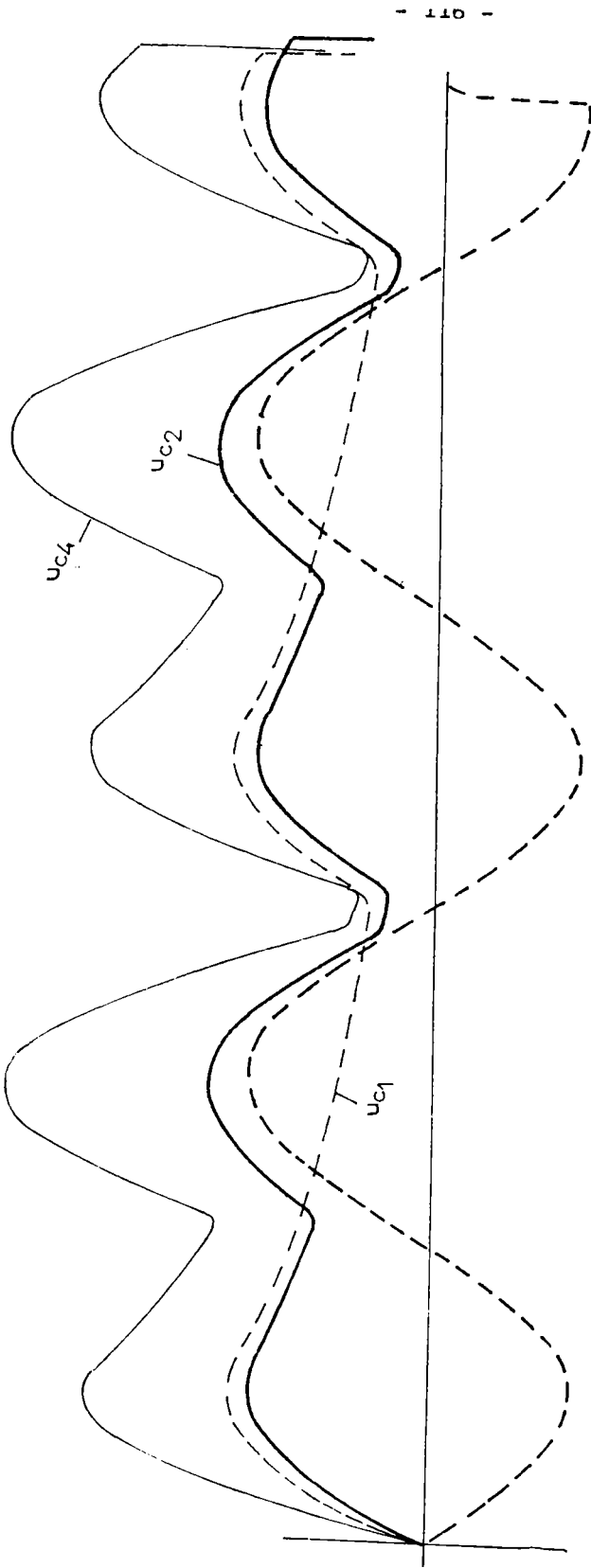
Cascada 2 etaje $K_y=100 \text{ mV/mm}$, $K_x= 2 \text{ s/cm}$

FIG. 5.26



Cascade 2 etaje : $k_y = 100 \text{ mV/mm}$ $k_x = 1 \text{ s/cm}$

FIG. 5.27



Cascadă două etaje $K_y = 100 \text{ mV/mm}$; $K_x = 0,5 \text{ s/cm}$

FIG. 5.28

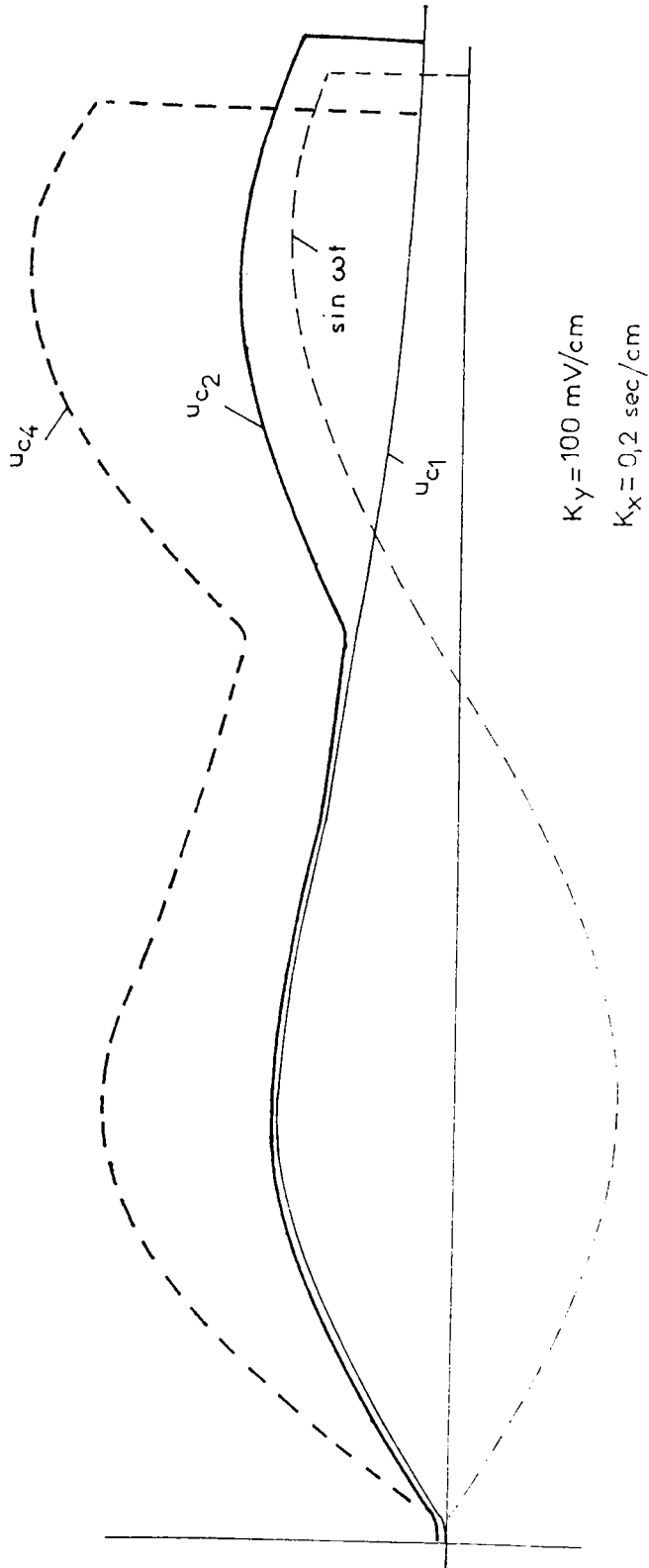


FIG. 5.29

Cascada 2 etaje: $K_y = 50 \text{ mV/mm}$
 $K_x = 2 \text{ s/cm}$

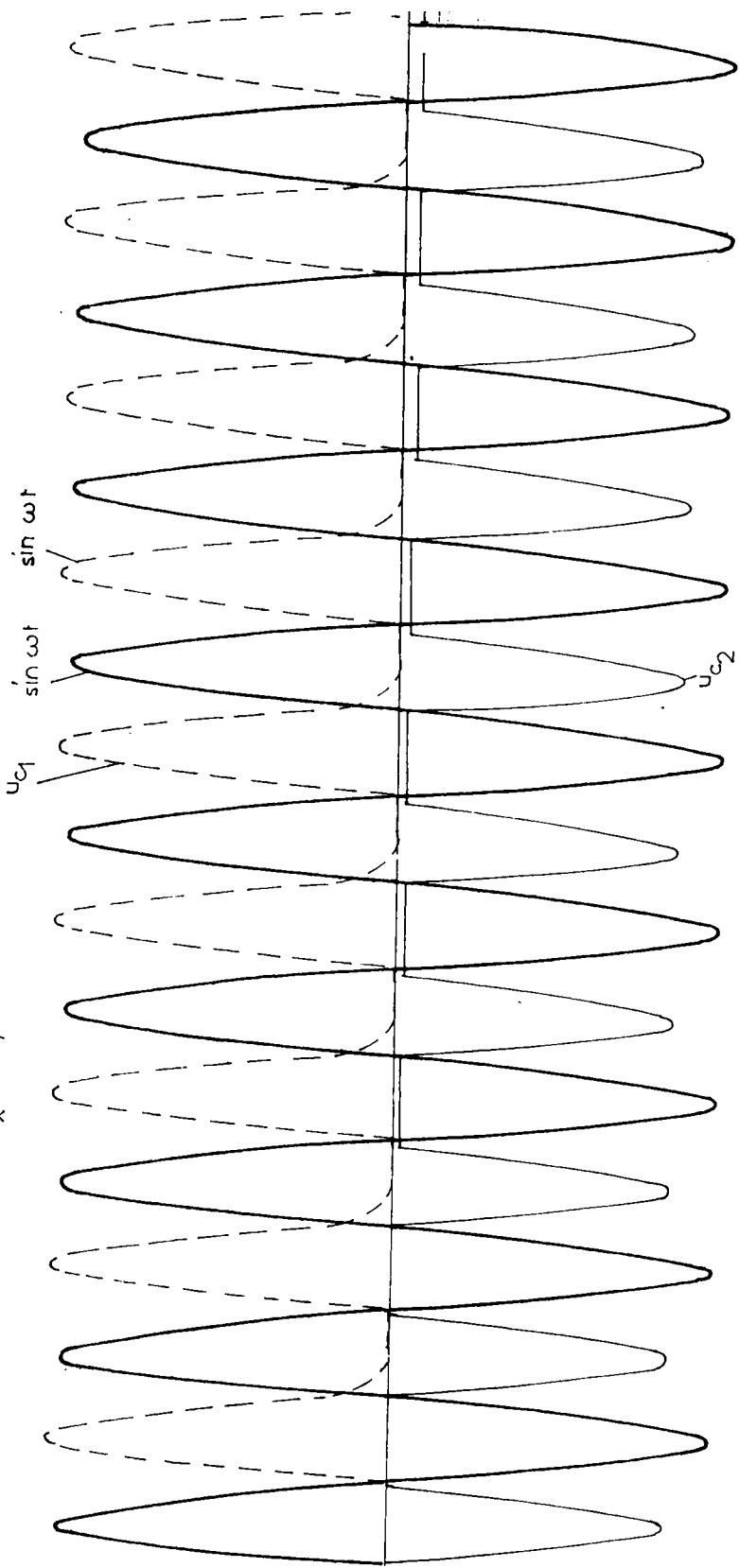


FIG. 5.30

pentru că se operează și o inversare de semn); după ce s-a atins maximul tensiunii sinusoidale se observă o autodescărcare a condensatorului, după care, în următoarea alternanță negativă a tensiunii sursei condensatorul C_1 se încarcă cu tensiune pozitivă;

- tensiunea la ieșirea condensatorului C_2 este în primul moment egală cu tensiunea pe condensatorul C_1 , urmărește o scurtă perioadă și procesul de autodescărcare, dar intervine un element nou: în alternanța pozitivă a tensiunii sursei se obține o însumare între tensiunea sursei și tensiunea remanentă pe C_1 (tensiunea este cu atât mai mare cu cât procesul de autodescărcare al condensatorului ar fi mai redus - ceea ce s-ar obține la frecvențe mai ridicate ale tensiunii de alimentare;

- la ieșirea condensatorului C_4 , tensiunea reprezintă un multiplu al tensiunii pe condensatorul C_2 ; aici se observă și mai bine pulsațiile de tensiune care apar și multiplicarea acestei tensiuni.

În figura 5.28 procesul este reluat la o scară mai extinsă a timpului, 0,5 s/cm, iar în figura 5.29 s-a mărit și mai mult, la 0,2 s/cm.

În figura 5.30 s-a prezentat doar tensiunea sinusoidală a sursei la o scară comprimată a timpului și totodată s-a încercat înregistrarea tensiunii pe condensatorul C_1 , alimentînd direct înregistratorul, prin intermediul unui amplificator operațional cu impedanță mare de intrare, ceea ce a condus la o descărcare rapidă a condensatorului C_1 , în comparație cu graficele anterioare.

Schema modelată în fig.5.23 a permis verificarea ipotezelor teoretice privind funcționarea schemei de multiplicare în cascadă a tensiunii; fig.5.22; a scos în evidență efectul de autodescărcare a condensatoarelor și faptul că procesul poate fi redus cu frecvența tensiunii de alimentare. La 50 Hz, perioada fiind de 20 msec, mult mai mică decît 6,28 secunde, se poate considera că autodescărcarea are o pondere redusă.

În instalația de vopsire electrostatică - pulsațiile tensiunii U_{C4} nu influențează calitatea procesului tehnologic, deoarece sînt pulsații de o frecvență dublă, față de cea a tensiunii de alimentare, fapt confirmat și în literatura de specialitate /12/. Instalația lucrează cu randament, cu atât mai bine, cu cât valoarea capacității condensatoarelor este mai mare, ceea ce

conduce însă la creșterea prețului de cost și a gabaritului (condensatoarele fiind de înaltă tensiune).

S-a constatat că amplificatoarele operaționale și-au îndeplinit funcția de redresor ideal, conform paragrafului 5.4.1, asigurând conducția și la tensiuni mai mici decât tensiunea de prag a diodelor; pe de altă parte utilizarea rezistențelor de reacție de valori mari a împiedicat autodescărcarea condensatoarelor prin aceste diode în sens invers - spre sursă.

5.4.3. Soluții privind realizarea practică a unor module redresoare de înaltă tensiune.

Teoria distribuțiilor oferă un cadru favorabil studierii aspectelor legate de realizarea concretă a unor instalații de înaltă tensiune - conferindu-le un înalt grad de generalitate și de precizie.

Astfel în ceea ce privește realizarea modulelor de redresare de înaltă tensiune, cu ajutorul diodelor de avalanșă controlată, se desprind următoarele concluzii:

- dacă se reușește selectarea unui număr corespunzător de diode, cu caracteristica $I = f(U)$ sau $G = f(U)$ identică, la temperatura de lucru, diodele se pot inseria, conform indicațiilor din cataloagele de fabricație;

- dacă însă, se constată mici abateri între caracteristicile diodelor, se preferă egalizarea căderilor de tensiune cu rezistențe de egalizare (sau alte metode), pentru a asigura fiabilitatea produselor.

În ceea ce privește încadrarea modulelor de redresare în instalații de multiplicare a tensiunii (tip cascadă sau ltele) este necesar să se facă o optimizare a prețului de cost, gabaritului și a calității tensiunii redresate, funcție de pretențiile fiecărui beneficiar în parte.

CONCLUZII FINALE

Teza de doctorat face parte din categoria lucrărilor cu caracter interdisciplinar - bazată pe un aparat matematic modern, cu aplicații tehnice imediate: teoria distribuțiilor, cadrul matematic al tezei, permite prezentarea teoriei cimpului electromagnetic într-o formă unitară, cu luarea în considerare a unor fenomene, care în alt cadru nu apar.

Distribuțiile, ca funcționale liniare și continue definite pe un spațiu fundamental - permit interpretarea și definirea densităților de sarcină electrică - într-un cadru matematic riguros (practic nu se poate măsura densitatea de sarcină într-un punct, ci doar densitatea medie într-o vecinătate suficient de mică a punctului).

Toate mărimile cimpului electromagnetic și corpurilor definite ca distribuții (scalare sau vectoriale) - devin astfel concepte indefinit derivabile - deci au întotdeauna derivată de orice ordin - (saltul funcției din care derivă distribuția - în timpul sau la traversarea unor suprafețe sau curbe de discontinuitate este inclus în definiția derivatei în sensul teoriei distribuțiilor).

Operatorii grad, div și rot - definiți în spațiul distribuțiilor primesc un caracter global; astfel legile cimpului electromagnetic formulate în cadrul acestei teorii au un caracter unitar și general; din ele rezultă direct formele diferențiale și integrale cunoscute.

Formularea și rezolvarea ecuațiilor diferențiale în distribuții permite determinarea unor soluții noi, care nu pot fi găsite cu mijloace clasice.

În acest context s-au adus următoarele contribuții originale:

- determinarea riguroasă prin calcul a prezenței divergenței și rotorului de linie și a divergenței de punct a unui vector nedefinit pe C sau în P , în expresia distribuțională a divergenței;

- definirea sistematică a mărimilor fizice ale corpurilor și cimpului electromagnetic în spațiul distribuțiilor; în expres-

sia intensității curentului electric de conducție s-a pus în evidență un termen datorat discontinuității sarcinii electrice, când are loc un impuls al curentului;

- formularea principalelor legi generale și de material ale teoriei Maxwell a câmpului electromagnetic în spațiul distribuțiilor, valabile pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$;

- calculul divergenței și rotorului intensității câmpului creată de sarcina electrică punctuală; formularea în spațiul distribuțiilor a teoremei lui Gauss și a potențialului electrostatic; determinarea formei în distribuții a ecuației lui Poisson pentru regiunile de câmp cu repartiție superficială, lineică și punctuală de sarcină electrică, stabilindu-se astfel o relație biunivocă între potențial și sursă - în acord cu aspectul fizic - chiar în cazul sarcinilor de volum nul, teorema relaxației formulată în spațiul distribuțiilor;

- formularea și rezolvarea ecuației lui Poisson, una din ecuațiile de bază ale electrotehnicii și a electronicii semiconductorilor, cu luarea în considerare a stratului dublu de pe interfața joncțiunii pn a unei diode semiconductoare (ceea ce în cadrul clasic, nu poate apare), lărgind astfel aspectele tehnologice ce pot fi tratate și matematic, mai riguros și mai corect; rezolvarea ecuației se face incluzând condițiile inițiale în surse instantanee de dublu strat de pe suprafața de frontieră; soluția este prezentată și sub forma convoluției dintre soluția fundamentală a ecuației și membrul drept și se obține însumând perturbațiile generate de fiecare punct al sursei; practic, în cadrul distribuțiilor, se renunță la rezolvarea pe domenii a ecuației, așa cum se obișnuiește - cu neglijarea fenomenelor ce au loc în zona de trecere a joncțiunii pn - și se reușește o soluționare unitară și generală a ecuației lui Poisson - când membrul drept are singularități destul de tari;

- formularea în distribuții a dependenței dintre densitatea curentului de conducție și tensiunea aplicată unei diode semiconductoare, luând în considerare stratul dublu de pe interfața joncțiunii pn; formularea este valabilă și în zona de trecere a joncțiunii, conține un termen suplimentar în concordanță cu aspectul tehnologic;

- realizarea unor montaje pentru determinarea precisă, continuă, la diferite temperaturi, a caracteristicilor diodelor cu avalanșă controlată, polarizate invers - folosite la fabricarea modulelor de redresare de înaltă tensiune la ICPE București;

- realizarea și experimentarea unui aparat independent pentru ridicarea caracteristicii conductanță-tensiune, cu ajutorul unui multiplicator ROB 8095, fabricat la I C C E București (propunere de invenție);

- definirea conductanței dinamice la diodele semiconductoare - în regiunea de prăbușire a caracteristicii inverse, cu ajutorul distribuției lui Dirac - ceea ce permite interpretarea mai corectă și mai intuitivă a variației bruște a curentului;

- simularea și modelarea pe calculator analogic, a funcționării diodei ideale ca redresor și a funcționării cascadei de înaltă tensiune - instalație de tensiune continuă; studiul funcționării cascadei în diverse regimuri de funcționare, determinarea precisă a solicitărilor electrice la diferite nivele și în diferite puncte ale instalației;

- desprinderea unor soluții de optimizare practice privind îmbunătățirea performanțelor și calității modulelor de redresare de înaltă tensiune, în vederea realizării unor utilaje competitive; verificarea soluțiilor propuse.

În încheiere, se poate menționa că teza de doctorat se înscrie în tematica cadru de cercetări a Catedrei de electrotehnică și mașini electrice din Institutul politehnic "Traian Vuia" Timișoara - în legătură cu îmbunătățirea performanțelor mașinilor și aparatelor electrice, în direcția găsirii unor soluții privind creșterea nivelului tehnic și calitativ al produselor și sporirii gradului de competitivitate a produselor românești.

B I B L I O G R A F I E

1. I.Arsac: Transformation de Fourier et théorie des distributions, Ed.Dunod, Paris, 1961.
2. A.V.Armencoiu: Instalație de redresare cu semiconductoare de înaltă tensiune, utilizând mediul de răcire izolant, ulei de transformator, Energetica, 30,1982, nr.5, p. 232-236.
3. N.Balabanian și T.Bickart: Teoria modernă a circuitelor, Ed. tehnică, București, 1974.
4. E.J. Beltrami, R.M. Wohlers: Distributions and Values of Analytic Functions, Academic Press, New York, 1966.
5. Gh.Carsianu, M.Săvescu, I.Constantin, O.Stanomir: Semnale, circuite și sisteme, Ed.did. și ped., București, 1986.
6. Chilov Analyse mathématique, Ed.Mir Moscou, 1978.
7. I.Ciorănescu: Teoreme de reprezentare a unor distribuții vectoriale, St.și cerc. matem., 24, 5, p.687-728, 1972.
8. M.Ciugudean, V.Tiponuț, M.E.Tănase, I.Bogdanov, H.Cârstea, A.Filip: Circuite integrate liniare, Aplicații, Ed. Facla, Timișoara, 1986.
9. A.Corduneanu: Ecuații diferențiale cu aplicații în electrotehnică, Ed.Facla, Timișoara, 1981.
10. M.Costin: Introducere în circuite electronice. Ed.Dacia, Cluj-Napoca, 1983.
11. R.Cristescu: Elemente de analiză funcțională și introducere în teoria distribuțiilor, Ed.tehnică, București, 1966.
12. R.Cristescu și Gh.Marinescu: Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor, Ed.Academiei R.S.R., 1966.
13. B.Crștici, T.Bânzaru, O.Lipovan, M.Neagu, M.Neamțu, H.Jeuhaus, B.Rendi, D.Rendi, I.Sturz : Matematici speciale, Ed. did. și ped., București, 1981.
14. D.Dascălu : Injecția unipolară în dispozitive electrodice semiconductoare, Ed.Academiei R.S.R., 1972.

15. D.Dascălu: O nouă formulare a teoriei contactului metal-semiconductor în prezența unui strat interfacial, EEA-Automatizația și Electronica, 28, nr.3, 1984, p. 93-97.
16. D.Dascălu ș.a.: Dispozitive și circuite electronice, Ed. did. și ped., București, 1982.
17. Th.Dănilă ș.a.: Dispozitive și circuite electronice, Ed. did. și ped., București, 1982.
18. E.De Jager: Applications of Distributions in Mathematical Physics, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1969.
19. I.De Sabata: Bazele electrotehnicii, vol.I.,II,III, I.P.T.V. Timișoara, 1972, 1974, 1977.
20. I.De Sabata: Bazele electrotehnicii, vol:I, I.P.T.V. Timișoara, 1980.
21. I.De Sabata, A.Colțeu: Sur la théorie des champs électrocinétiques distribués sur les surfaces, Bul. șt. și tehnic al I.P.T.V.Timișoara, 23(34),2 - 1978.
22. I.De Sabata, D.Fränkell: Asupra formelor locale ale legilor electrodinamicii Maxwell-Hertz la frontiera dintre corpuri în mișcare, CNEE Craiova, 1984, p. 33-42.
23. V.Dolocan : Fizica dispozitivelor cu corp solid, Ed.Academiei R.S.R., 1978.
24. I.Dragu, M.Iosif: Circuite integrate liniare. Amplificatoare operaționale, Ed.Militară, București, 1981.
25. M.Drăgănescu: Procese electronice în dispozitive semiconductoare de circuit, Ed.Academiei, R.P.R., Buc.1962.
26. M.Drăgănescu: Electronica corpului solid. Ed.tehnică, București, 1972.
27. E.Durand : Electrostatique et magnetostatique, Ed. Masson, Paris, 1953.

28. E.Durand: Electrostatique, tome I, II, III, Ed.Masson, Paris, 1966, 1972, 1976.
229. I.Feier, I.Dragu, V.Vulpe: Dioda Zenner, aplicații, Ed.tehnică, București, 1975.
30. P.R.Fegnmann: Fizica modernă, Electromagnetismul, vol.II, Ed. tehnică, 1970.
31. J.Garsoux: Espace vectoriels topologiques et distributions. Ed. Dunod, Paris, 1963.
32. D.Gaşpar : Analiză funcțională, Ed.Facla Timișoara, 1981.
33. R.T.Glasey și J.Chadan: Properties of the solutions of the Cauchy problem for the classical coupled Maxwell-Dirac equation in one space dimension, Proc. Am. Math.Soc., vol.43, nr.2, 1974.
34. I.M.Gelfand, G.E. Chilov: Les distributions, tomes I,II,III, Ed. Dunod, Paris, 1962, 1964, 1965.
35. I.M.Gelfand, G.E.Chilov: Funcții generalizate, Ed.științifică și enciclopedică, București, 1983.
36. I.M.Gelfand, N.Y.Vilenkin: Les distributions, tome IV, Ed. Dunod, Paris, 1967.
37. P.E.Grây, C.L.Searle: Bazele electronicii moderne. Ed.Tehnică, București, 1973.
38. A.S.Grové: Fizica și Tehnologia dispozitivelor semiconductoare, Ed.Tehnică, București, 1973.
39. J.Hale: Theory of functional differential equations, Springer Verlag, New York, 1967.
40. E. Hăntilă: Observații privind organizarea mărimilor primitive și a legilor teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic, E.P.A., Electrotehnica, nr.1, 1983, p. 31-34.

41. D.Homentcovschi: Sur la forme en distributions des équations de Maxwell, Revue Roumaine des sciences technique, Série Electrotechnique et énergétique, 24, 2, 209-217, 1979.
42. M.Iordache, L.Dumitriu, M.Perpelea, N.Voicu: Analiza pe calculator a circuitelor electrice - primul pas în proiectarea asistată de calculator, E.E.A. - Electrotehnică, 35 (1984), nr.5, 183-190.
43. Ch. Jowelt: Staticeskoie electricestvoe v electronike, Ed. Energia. Moscova, 1980.
44. A.Kasatkin, M.Perekalin: Basic electrical engineering, Ed. Mir, Moscova, 1980.
45. W.Kecs: Asupra unor aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanica teoretică și aplicată, Studii și cerc.matem., 15,1, 83-95, 1967.
46. W.Kecs: Reprezentarea câmpurilor vectoriale cu ajutorul funcțiilor generalizate, Studii și cerc. matem. 15,2 265-273, 1964.
47. W.Kecs: Répresentation mathématique des moments de type dipôle, Rev.Roum., Math., Pures et Appl., X, 9, 1391-1402, 1965.
48. W.Kecs: Asupra derivării distribuțiilor compuse și unele aplicații ale lor; St.și cerc.matem., 21, 8, 223-233, 1969.
49. W.Kecs: Produsul de convoluție și aplicații, Ed. Academiei R.S.R., 1978.
50. W.Kecs: Complémente de matematici cu aplicații în tehnică, Ed.tehnică, 1981.
51. W.Kecs; P.P.Teodorescu: Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică, Ed.Academiei, 1970.
52. W.Kecs, P.P.Teodorescu: Introducere în teoria distribuțiilor cu aplicații în tehnică, Ed.tehnică, 1975.

53. P.S.Kireev: Fizica semiconductorilor, Ed.ştiinţif.şi encicl., Bucureşti, 1977.
54. Ch.Kittel: Introducere în fizica corpului solid, Ed.tehnică, Bucureşti, 1972.
55. L.Landau,E.Lifsit: Electrodinamica mediilor continue, Edit. tehnică, 1968.
56. A.Manolescu şi colab.: Circuite integrate liniare,Ed.did.şi ped., Bucureşti, 1984.
57. Gh.Marinescu: Tratat de analiză funcţională, vol.1, Ed.Academiei R.S.R., 1970.
58. Gh.Marinescu; C.Tudor: Sur la transformation Laplace des distributions, Rev.Roum.,Math. Pures et Appl., 9, 1967.
59. R.Marinescu, L.Condriuc: Model bidimensional de impurităţi obţinut prin implantarea de ioni în siliciu monocristalin, E.E.A.-Automatica şi electronica, vol.29(1985), 1, 9-12.
60. G.Mânduteanu: Dispozitive semiconductoare de putere cu senzor de temperatură integrat, EEA-Automatică şi electronică, 31, 2, 1984, p.43.
61. J.Mikusinski,R.Sikorski: The elementary theory of distributions, Varşovia, 1961.
62. S.G.Mihlin: Ecuaţii liniare cu derivate parţiale, Ed.ştiinţifică şi enciclopedică, 1983.
63. I.Mitrache: Contribuţii la studii privind determinarea dependenţei capacităţii diferenţiale a stratului dublu electric de potenţial de electrod, E E A - Electrotehnica, 32 (1984), 5, 175-181.
64. I.Mitrache: Fenomene tranzitorii (de relaxare) în sisteme electrochimice, în cazul variaţiei în trepte a tensiunii de electrod "măsurată", E E A - Electrotehnica, 35 (1987), nr.5, p. 194-199.

65. C.I.Mocanu: Teoria circuitelor electrice, Ed.did.și ped., București, 1979.
66. C.I.Mocanu: Teoria câmpului electromagnetic, Ed.did.și ped., București, 1981.
67. Al.Moseanu: Redresoare cu siliciu, Ed.tehnică, 1966.
68. Al.Moseanu: Redresoare cu semiconductori, Ed.tehnică, 1975.
69. M.Neagu: Asupra transformărilor generale ale familiilor compozabile cu aplicații, Teză de doctorat, Timișoara, 1978.
70. M.Neagu: Operații directe cu distribuțiile, Bul. I.P.T.V. Timișoara, Matematică, 1977.
71. M.Neagu, B.Crstici: About the value of a distribution in a point, Proc.of thr Symposium of Math. and its Appl., Timișoara, 1985, 63-65,
72. E.Nicolau: Câmpuri și unde electromagnetice, Ed.Academiei R.S.R., 1972.
73. E.Nicolau: Introducere în electromagnetismul teoretic modern, Ed.Academiei RSR, 1974.
74. V.Novacu: Introducere în electrodinamică, Ed.Academiei R S R , vol.I,II, 1955.
75. V.Olaru, V.Prepelița: Teoria distribuțiilor, funcții complexe și aplicații, Ed.științif.și enciclop., București, 1986.
76. V.Olaru: Ecuații cu derivate parțiale. Soluții generalizate, vol.I,II, Ed.Universității, București, 1970, 1971.
77. L.Oniciu, E.Constantinescu: Electrochimie și coroziune, Ed.did. și ped., București, 1982.
78. L.Oniciu, S.Agachi, L.Boboș, I.Mitrache: Conversia electrochimică a energiei, Ed.științif.și enciclop., București, 1977.

79. A.Panaitescu: Unicité des solutions des équations Maxwell-Hertz des milieux linéaires en mouvement connu, Rev.Roum. Scienc.Tech.Electrotechnique et Energétique, 20, 2, 205-210, 1975.
80. A.Panaitescu: Le théorème de l'énergie électromagnétique pour des domaines à surface de discontinuité en mouvement, Rev.Roum., Science Techn., Electrotechnique et Energétique, 26, 4, 1981.
81. A.Panaitescu: Contribuții la studiul proceselor electromagnetice în dispozitive cu medii în mișcare, Teză de doctorat, București, 1981.
82. A.Panaitescu: Asupra unor teoreme generale din electrodinamica lui Maxwell-Hertz, Lucrările CNEE Timișoara, Sept. 1980, vol.II, 287-298.
83. M.Pătruțescu: Diodele tunel și utilizarea lor, Ed.Academiei R.S.R., 1968.
84. S.Petrescu, I.Filimon, I.Barbălat, I.Matei: Analiză matematică și matematici speciale, Ed.did.și ped. București, 1976.
85. R.Piringer: Dispozitive electronice, Ed.did. și ped., București, 1976.
86. S.Pușcașu, Gh.Mihai: Geometrizarea câmpului electromagnetic, Lucrările CNEE, Timișoara, 1982, vol.II, pag. 329-341.
87. N.Racoveanu: Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor la studiul rețelilor electrice, E.E.A., 3, 1970, 110-116.
88. R.Răduleț: Bazele teoretice ale electrotehnicii, vol.I, Ed.Energetica de stat și Tipografia Ministerului Învățămîntului, 1954-1956.
89. R.Răduleț: Systèmes des espèces de grandeurs macroscopique primitives d'état électromagnétique, Rev.Roum., Science Tech., Electrotechnique et Énergetique, Tome 16, 2, 189-222, 1971.

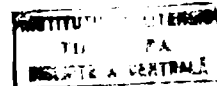
90. R.Răduleț: Asupra bazelor electrodinamicii macroscopice, E E A - Electrotehnică, 8, 1984, 301-310.
91. R.Răduleț, R.Cîrîc: Generalized functions in the theory of fields, Rev.Roum. des Sciences Techniques, 1971, 16, 4, 565-591.
92. R.Răduleț, A.Tugulea, Al.Timotei: Teoreme de unicitate pentru regiuni variabile ale câmpului electromagnetic, St.și cerc. energ., 1971, 21, 1, 109-128.
93. R.Râpeanu: Circuite integrate analogice, Ed.tehnică, București, 1983.
94. F.Riesz, B.Sz.Nagy: Leçons d'analyse fonctionnelle, Budapesta, 1952.
95. D.Roddy: Inițiere în microelectronică, Ed.tehnică, București, 1982.
96. D.D.Sandu: Electronica fizică. Ed.Academiei RSR, București, 1973.
97. D.D.Sandu: Dispozitive și circuite electronice, Ed.did. și ped., București, 1975.
98. D.D.Sandu: Dispozitive electronice pentru microunde, Ed. șt. și enciclopedică, București, 1982.
99. M.Săvescu: Determinarea răspunsului circuitelor electrice la semnale modulate cu oscilații discontinue, Rev. Telecomunicații, 9, 1971, 478-486.
100. M.Săvescu, T.Petrescu, S.Ciochină: Semnale, circuite și sisteme, Probleme, Ed.did. și ped., București, 1981.
101. M.Săvescu: Metode în analiza circuitelor electronice, Ed. științifică și enciclopedică, București, 1985.
102. Z.Schlett, I.Hoffman, A.Câmpeanu: Elemente de fizică semiconductorilor.

103. L.Schwartz: Théorie des distributions, tome I,II. Ed.Herman, Paris, 1950, 1951.
104. L.Schwartz: Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Ed.Herman, Paris, Ed. a II-a, 1965.
105. L.Sedov: Mécanique des milieux continue, Ed.Mir, Moscova, 1975.
106. R.Sikorski: A definition of the notion of distribution, Bull. Acad.Pol.Sci., Série III, 2, 209-211, 1954.
107. R.Sikorski: On distribution in the delta distribution, Bull. Acad.Pol.Sci., Sér. Sci.Math., Astr. et Phys., VIII, 10, 1960.
108. K.Simonyi: Electrotehnica teoretică, Ed. a V-a, Ed.tehnică, București, 1974.
109. I.Spînulescu: Fizica straturilor, subțiri și aplicațiile acestora, Ed.științif. și enciclop., București, 1975.
110. F.Stănciulescu: Analiza și simularea sistemelor neliniare, Ed. Academiei R S R, București, 1974.
111. A.Stratton: Théorie de l'électromagnétisme, Ed.Durand, Paris, 1961.
112. I.D.Suceveanu: Redresor comandat cu număr variabil de pulsuri, E E A - Electrotehnica, 83, 1985, 5, 201-205.
113. Gh.Sabac, O.Stănășilă, P.Ciocârlan, A.Topală: Matematici speciale, vol.I,II, Ed.did. și ped. 1981, 1983.
114. C. Sora: Bazele electrotehnicii, vol.I,II,III, I.P.T.V. Timișoara, 1972, - 1976.
115. C.Sora: Bazele electrotehnicii, Ed.did. și ped., București, 1982.
116. C.Teleman, Teleman: Aplicații ale topologiei în fizica particulelor elementare, Ed.științif. și enciclop., București, 1976.

117. N.Teodorescu, V.Olariu: Ecuatiile fizicii matematice, Ed. did. și ped., București, 1975.
118. N.Teodorescu, V.Olariu: Ecuatii diferențiale și cu derivate parțiale, vol.III, Ed.tehnică, 1980.
119. A.N.Tihonov, A.A.Samorski: Ecuatiile fizicii matematice, Ed.Tehnică, București, 1956.
120. Al.Timotin: Electrodinamica mediilor în mișcare, Fizica, vol.I, Ed.did. și ped., București, 1964.
121. Al.Timotin: Unicitatea soluțiilor și calculul puterii în câmpul electromagnetic cvasistaționar al unui sistem de conductoare paralele, St.cerc.,energ., 17, 1, 143-153, 1967.
122. R.Tocaci: Fenomene discontinue în mecanica și rezistența materialelor, Ed.Academiei R S R, 1974.
123. E.Tocaci: Funcția quasi - Dirac și utilizarea ei în mecanică. St.și cerc în mecanica apl., Ed. Academiei R S R, 2, 1975.
124. E.Tocaci: Teoria câmpurilor, spațiul și energie, Ed. șt. și enciclopedică, 1984.
125. R.Tițeica, L.Popescu: Fizica generală, Ed.tehnică, București, 1971.
126. M.Vascan, V.Giurgiu, D.Rucinschi: Probleme legate de încercarea în laborator a cablurilor de înaltă tensiune, C N E E, vol.13, p.167-175, Craiova, sept. 1984.
127. M.Vasiu: Fizica teoretică. Ed.did. și ped., Buc., 1970.
128. M.Vasiu: Electrodinamica și teoria relativității, Ed.did., și ped., București, 1979.
129. V.Vladimirov: Distributions en physique mathématique, Ed. Mir, Moscova, 1979.

130. V.Vladimirov : Ecuatiile fizicii matematice, Ed. stiintifică și enciclopedică, București, 1980.
131. V.Vladimirov, ș.a.: Recueil de problèmes d'équations de physique mathématique, Ed. Mir, Moscova, 1972.
132. V.Vladimirov, ș.a.: Culegere de probleme de ecuațiile fizicii matematice, Ed. stiintifică și enciclopedică, București, 1981.
133. Th.Wolkenstein: Physico-chimie de la surface des semi-conducteurs, Ed. Mir, Moscova, 1973.
134. V.Zamfir: Bazele radioelectrotehnicii, Ed. Facla, Timișoara, 1987.
135. B.Zeldovich, A.D.Myskis: Elements of Applied Mathematics, Ed. Mir, Moscova, 1976.
136. C.Zuilly: Problèmes de distributions avec solution détaillées, Ed. Herman, Paris, 1978.
137. M.Titihăzan: Aplicații ale teoriei distribuțiilor în electrotehnică - referat I, în cadrul pregătirii pentru doctorat, susținut în colectiv de catedră, septembrie 1981.
138. M.Titihăzan: Ecuatiile lui Maxwell în spațiul distribuțiilor - referat II, în cadrul pregătirii pentru doctorat, susținut în colectiv de catedră, martie 1982.
139. M.Titihăzan: Conceptul densității volumice de sarcină electrică liberă în spațiul distribuțiilor - Sesiune de comunicări științifice a cadrelor didactice, iunie 1984.
140. M.Titihăzan; M.Neagu: Teorema fundamentală a cimpurilor de vectori formulată în spațiul distribuțiilor, formulată în spațiul distribuțiilor, Sesiune de comunicări științifice a cadrelor didactice, iunie, 1984.

141. M.Titihăzan: À propos des sources du champ électrostatique dans l'espace des distributions, Bul.št. și tehnic al I.P.T.V.Timișoara, tom 29(43), Electrotehnica, 1984, 147-155.
142. M.Titihăzan: Unele teoreme ale electrostaticii formulate în spațiul distribuțiilor, CNEE, Craiova, septembrie 1984, 147-155.
143. M.Titihăzan: Cu privire la avantajele rezolvării cuadrupolilor electrice în spațiul distribuțiilor, Simpozion de matematici aplicate, Timișoara, noiembrie 1985.
144. M.Titihăzan: Solution d'un circuit électrique soumis à un impulsion de tension, au modelage analogique sur l'ordinateur MEDA 42TA, Proc.of Symposium of Mathem. and its Appl., Timișoara, 1985, 219-222.
145. M.Titihăzan: Studiul sistemelor dinamice liniare în spațiul distribuțiilor, Simpozion național de teoria sistemelor, Craiova, 1986, 141-146.
146. M.Titihăzan: Aspecte privind rezolvarea unor regimuri tranzitorii ale circuitelor electrice în spațiul distribuțiilor, Simpozion național de teoria sistemelor, Craiova, 1986, 135-141.
147. * * * Contract de cercetare nr.140/76 ICPE București: Instalație de încercare de înaltă tensiune tip modul 200 kV/100 mA c.c., beneficiar IPTVTimiș.
148. M.Titihăzan, M.Titihăzan: Modules de redressement de la haute tension pour installations de peinture électrostatique, Bulletin științific și tehnic al IPTV Timișoara, 31(45), Electrotehnica, 1986, 61-64.



149. Certificat de inovator nr.1064/17.03.85: Soluții tehnologice pentru realizarea unor module de redresare a tensiunii înalte pentru instalația de vopsire electrostatică, aplicată la Electrobanat-Timișoara.
150. Certificat de inovator nr. 521/16.III.1987, Instalație de încercare cu tensiune mărită de 4500 V, aplicată la IPTV Timisoara.
151. Certificat de inovator nr.648/20.IV.1987 "Sursă de tensiune alternativă reglabilă, portabilă, pentru încercarea la suprasarcină a aparatelor electrice".
152. Convenție de cercetare științifică nr. 187/87, I.P.T.V. Timișoara: Metodă analitică de calcul - aplicarea teoriei distribuțiilor și metode de testare, privind parametrii diodelor semiconductoră, utilizate în construcția modulelor redresoare de înaltă tensiune, cu ICPE București.
153. M.Titișăzan: " An Expression of diffusion current density in the pn junction of semiconductor diodes" - în curs de publicare la Euletinul științific și tehnic al I.P.T.V.Timișoara, tom 33 (47), 1988.
154. Invenție înregistrată la I.P.T.V.Timișoara, nr.0079/12 mai 1988: " Aparat pentru determinarea caracteristicii conductanță-tensiune la polarizarea inversă a diodelor semiconductoră." OSIM Nr. 13 35 87/19.05.1988.