INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" TIMISOARA

FACULTATEA DE MECANICA

Ing. Ioan Smicală

CONTRIBUTII PRIVIND STUDIUL SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE PRIN MODELARE ELECTRICA

- Teză de doctorat -

CONDUCATOR STIINTIFIC,

Prof. em. dr. doc. ing. GHEORGHE SILAS

T I M I S O A R A

- 1987

1. INTRODUCERE

1.1. Studii teoretice ale sistemelor mecanice vibropercutante

In etapa actuală de dezvoltare a tehnicii mondiale, în contextul generalizării revoluţiei tehnico-ştiinţifice în toate domeniile producţiei de bunuri materiale, se înregistrează în mod frecvent şi continuu tot mai multe succese şi rezultate ştiinţifice remarcabile. Preocupările oamenilor de ştiinţă şi ale cercetătorilor sînt legate tot mai mult de nevoile producţiei, ale tehnicii, vizînd elaborarea de noi tehnologii, cu eficienţă sporită, realizarea maşinilor şi instalaţiilor complexe, a roboţilor industriali, pentru mecanizarea complexă şi automatizarea proceselor industriale, agricole, din construcţii, transporturi, etc. In condiţiile crizei energetice mondiale se impun cu prioritate cercetările legate de descoperirea unor noi surse energetice, de elaborare a tehnologiilor şi de realizare a maşinilor cu consumuri energetice reduse. Toate aceste orientări ale cercetării ştiinţifice presupun studii aprofundate, atît teoretice, cît şi experimentale, urmărindu-se în mod deosebit optimizarea tehnologiilor, a maşinilor, mecanismelor şi instalaţiilor după criterii funcţionale, energetice şi de eficienţă economică. De aici rezultă importanţa deosebită a studiilor de dinamică a mecanismelor, maşinilor şi agregatelor, a cercetărilor în vede-

rea dezvoltării teoriei vibrațiilor liniare și neliniare.
De asemenea, tendințele actuale de mărire a vitezelor și turațiilor mișcărilor de regim ale mașinilor și agregatelor întăresc importanța studiilor aprofundate de dinamică și de vibrații mecanice, datorită fenomenelor de rezonanță și autovibrații ce apar mai des, cu mai mare intensitate și sub forme multiple. Ca urmare, în colectivele de cercetare pluridisciplinare, constituite tot mai frecvent pentru studiul sub multiple aspecte al unor fenomene fizice complexe, își găsesc locul și cercetători cu profil mecanic, avînd sarcini importante de cercetare, cu o pondere tot mai mare în ansamblul cercetărilor.

După toate probabilitățile, greu se pot găsi fenomene fizice, în care prin mijloace energetice minime să se ajungă la rezultate apreciabile, ca și în cazul folosirii fenomenelor de ciocnire. Aceasta conduce la un interes constant pentru studiul acestui fenomen și al aplicațiilor sale. Utilizarea principiului acțiunii ciocnirii în practica productivă și în tehnica de război își are izvoarele în adîncul veacurilor. De-a lungul secolelor studiul fenomenelor de ciocnire a avut o evoluție complicată, la început fiind bazat exclusiv pe experiență, dar devenind cu fiecare etapă tot mai util pentru producție.

Intre multiplele aplicații cu caracter ingineresc, legate de folosirea acțiunii ciocnirilor, se desprinde clasa problemelor de studiu a mișcărilor vibratorii cu ciocniri repetate, numite mișcări vibropercutante. Sistemele mecanice în care se realizează astfel de mișcări au primit denumirea de sisteme vibropercutante. Desigur, acțiunea ciocnirilor repetate are un specific aparte în comparație cu acțiunea unei singure ciocniri, cu excepția cazului în care frecvența ciocnirilor este mult mai mică față de frecvențele proprii ale sistemului elastic în care apar.

In celelalte cazuri, ciocnirile conduc la forțe perturbatoare, care determină unele rezerve de energie ce se acumulează de la o ciocnire la alta, astfel încît se obține un efect oscilant.
Cele prezentate mai sus determină aria problemelor teoriei sistemelor vibropercutante, ca o parte de sine stătătoare a teoriei vibrațiilor mecanice.

Regimurile de funcționare vibropercutante stau la baza funcționării unei largi categorii de mașini, instalații și construcții cu diferite destinații. In această categorie se încadrează mașinile pentru baterea și scoaterea pilonilor, pentru tasarea și afînarea terenurilor, pentru spargerea și fărămițarea materialelor, pentru îndesarea betoanelor și a amestecurilor de turnătorie, standurile pentru încercări la șocuri repetate, diferite perforatoare, ciocane de abataj, mașini de nituit, prese mecanice etc. De asemenea, în funcționarea vibrotransportoarelor pot să apară regimuri de funcționare cu desprinderi ale particulelor, care conduc la mișcări vibropercutante și care pot să prezinte unele avantaje pentru procesul de transport. Pentru această categorie de sisteme sînt caracteristice regimurile de mișcare periodice stabile, realizate ca și la vibrațiile forțate sau autovibrații. Diferite variante constructive ale mecanismelor și sistemelor vibropercutante din această categorie necesită, prin folosirea metodelor de studiu adecvate, nu numai rezolvarea problemelor de analiză a comportării dinamice, ci și găsirea soluțiilor de sinteză a structurilor dinamice, în vederea realizării unor regimuri optime de funcționare.

O altă categorie largă de sisteme vibropercutante este constituită din sistemele mecanice și structurile la care apariția mișcărilor vibropercutante nu este esențială în funcționarea lor, sau este chiar nedorită. In această categorie se pot încadra toate mașinile și mecanismele la care, în timpul funcționării lor, pot să apară accidental mişcări vibropercutante, datorită unor regimuri de funcţionare dezavantajoase, sau datorită ruperii lanţurilor cinematice. Astfel, în cazul funcţionării la frecvenţă ridicată a releelor, contactele acestora pot să aibă mişcări vibropercutante, ceea ce poate afecta funcţionarea corectă a dispozitivelor şi aparatelor electrice sau electronice din care fac parte. Din această cauză, pentru astfel de dispozitive şi aparate se folosesc relee electronice cu comutaţie rapidă. De asemenea, ruperea lanţurilor cinematice ale maşinilor şi ciocnirile repetate ale elementelor constructive conduc la stabilirea unor procese vibropercutante intense, avînd ca rezultat modificarea substanţială a întregii structuri a sistemului elastic, a distribuţiei frecvenţelor sale proprii, a caracterului proceselor tranzitorii, determinînd efecte neliniare variate. Datorită tendinţelor actuale de mărire a frecvenţelor de lucru, de dimensionare şi calcul de rezistenţă la durabilitate limitată a organelor de maşini, în vederea realizării de economii de materii prime şi materiale, pot să apară frecvent astfel de fenomene. Ca urmare, studiul problemelor de dinamică a sistemelor mecanice şi de stabilitate a mişcărilor acestora, necesită considerarea proceselor vibropercutante pentru sisteme cu structuri diferite, avînd mase distribuite sau concentrate, liniare sau neliniare şi fiind supuse acţiunii diferitelor forţe perturbatoare, deterministe sau aleatoare.

Spre deosebire de studiul ciocnirilor singulare sau al ciocnirilor multiple cu frecvenţă de repetiţie mică, studiul aprofundat al dinamicii şi stabilităţii mişcărilor sistemelor vibropercutante este de dată relativ recentă.

Fără a lua în considerare cîteva lucruri nesemnificative mai vechi, practic cercetările sistematice şi complexe în acest domeniu au început în deceniul al 5-lea din secolul nostru. Primele lucrări legate de studiul mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante şi al stabilităţii acestora s-au ocupat cu probleme de dinamică a sistemelor vibropercutante cu un grad de libertate, cu aplicaţii în vibrotransport, la care au avut contribuţii deosebite cercetătorii sovietici, precum, şi cu probleme de dinamică ale amortizoarelor prin şocuri repetate, la care şi-au adus contribuţia cercetători din URSS şi SUA. In scurt timp au apărut un număr mare de lucrări privind studiul sistemelor vibropercutante, cu aplicaţii în numeroase ramuri ale tehnicii şi producţiei.

Metodele de studiu şi rezultatele obţinute în acest domeniu au fost sintetizate în monografii, care au pus bazele teoriei sistemelor vibropercutante [1o], [13], [62], [71], [83], [1o6], [121]. La dezvoltarea teoriei sistemelor vibropercutante şi-au adus contribuţia, în afară de cercetători din URSS şi SUA, oameni de ştiinţă şi cercetători din numeroase ţări, printre care şi cei din ţara noastră. Printre cele mai semnificative lucrări în acest domeniu, pe lîngă monografiile menţionate mai sus şi pe lîngă lucrările cercetătorilor din ţara noastră, se pot aminti lucrările [2], [6], [7], [9], [11], [12], [2o]-[24], [38]-[4o], [55], [56], [67], [79], [8o], [84], [85], [88], [9o], [1o3]-[1o5], [12o], [124], [196], [197], [2o4]-[211], [214]-[217], elaborate de cercetători sovietici, lucrările [46], [5o], [53], [57]-[59], [66], [86], [87], [1o2], [1o8], [114], [115], [128], elaborate de cercetători din SUA, R.S. Cehoslovacia, R.P.Polonia, R.D.G. şi R.F.G. In toate aceste lucrări şi monografii sînt studiate mişcările vibropercutante periodice stabile sub diferite aspecte, pentru sisteme vibropercutante diferite, cu aplicaţii tot mai largi în tehnică şi producţie, utilizînd diverse metode de studiu, bazate pe dezvoltarea teoriei vibraţiilor neliniare şi se pun tot mai frecvent probleme de optimizare. Astfel se abordează probleme de studiu ale mişcărilor vibropercutante periodice de diferite tipuri, cu perioada egală cu perioada forţelor perturbatoare sau multiplă, cu o singură ciocnire într-o perioadă a mişcării sau cu ciocniri multiple, pentru sisteme vibropercutante cu unul, două sau mai multe grade de libertate şi chiar pentru sisteme vibropercutante ce conţin corpuri cu masa distribuită. S-a îmbogăţit foarte mult literatura de specialitate în privinţa metodelor de studiu ale stabilităţii mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante. Cu toate acestea, datorită complexităţii problemelor şi datorită ariei foarte largi de aplicabilitate, în prezent există încă multe probleme şi aspecte neelucidate în acest domeniu, chiar şi în cazul cel mai simplu al sistemelor vibropercutante cu un grad de libertate.

In ţara noastră astfel de probleme au abordat cercetători şi oameni de ştiinţă din Bucureşti, Iaşi şi Timişoara. Cele mai importante contribuţii la dezvoltarea teoriei sistemelor vibropercutante le-au adus membrii colectivului de cercetare de la Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timişoara, condus cu competenţă de tov.prof.em.dr.doc.ing.Gheorghe Silaş. In urma cercetărilor teoretice şi experimentale, efectuate cu mijloace moderne de calcul şi dispunînd de laboratoare cu o dotare la nivelul tehnicii mondiale, s-au obţinut rezultate remarcabile în acest domeniu. Primele cercetări legate de studiul sistemelor vibropercutante datează de la începutul deceniului al 7-lea din secolul nostru, imediat după înfinţarea Catedrei de Mecanică la Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timişoara şi la scurt timp după primele cercetări complexe şi sistematice pe plan mondial. Principalele contribuţii aduse de membrii catedrei la dezvoltarea teoriei sistemelor vibropercutante sînt:

a) Clasificarea sistemelor vibropercutante după numărul cuplelor (semicuplelor) percutante [27].

b) Determinarea coeficientului de restituire la ciocnire pe baza deformaţiilor locale [27], [131], [159].

c) Analiza mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante în cazul ciocnirilor plastice [27], [146].

d) Introducerea funcţiei legăturii unilaterale pentru studiul ciocnirilor sistemelor vibropercutante [27], [32], [131], [147], [149], [182].

e) Folosirea variabilei complexe pentru determinarea mişcărilor periodice şi pentru studiul stabilităţii sistemelor vibropercutante cu un grad de libertate [131], [145], [150].

f) Utilizarea metodelor de calcul matricial pentru studiul mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante [14], [32], [147], [149], [182] - [185].

g) Stabilirea unor noi metode pentru studiul stabilităţii mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante [27] - [31], [35], [36], [136] - [144], [163].

h) Stabilirea unor noi metode de aproximare poligonală pentru studiul sistemelor cu caracteristici neliniare şi al ciocnirilor neinstantanee [100], [131], [165], [176].

i) Stabilirea unor noi metode pentru determinarea mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante [33], [174].

j) Contribuţii la optimizarea sistemelor vibropercutante [74], [75], [170], [173].

Rezultatele valoroase obţinute şi contribuţiile aduse la dezvoltarea teoriei sistemelor vibropercutante au condus la recunoaşterea, atît în ţară cît şi peste hotare, a colectivului de cercetare de la Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timişoara ca o adevărată şcoală de cercetare în acest domeniu. Ca o confirmare a prestigiului acestui colectiv, a competenţei profesionale a conducătorilor săi ştiinţifici, prof.em.dr.doc.ing.Silaş

Gheorghe şi prof.dr.ing.Brîndeu Liviu, o reprezintă editarea valoroasei monografii [151], cuprinzînd rezultate obţinute de autori şi contribuţiile aduse în acest domeniu.

Metodele noi stabilite pentru studiul sistemelor vibropercutante, precum şi rezultatele generale obţinute, au fost aplicate la studiul teoretic al unei largi clase de sisteme vibropercutante cu aplicaţii în multe domenii ale tehnicii şi producţiei. Rezultatele acestor studii teoretice au stat la baza proiectării şi realizării unor maşini, mecanisme, standuri de încercare, modele experimentale, etc., cu acţiuni vibropercutante. Astfel, pe baza unor contracte de colaborare cu producţia s-au realizat şi aplicat în producţie maşini pentru înfigerea piloţilor şi palplanşelor în pămînt [177], [178], obţinîndu-se importante economii. De asemenea, tot pe baza unor contracte de cercetare cu producţia, s-au efectuat studii teoretice şi experimentale privind îmbunătăţirea proceselor tehnologice de formare şi turnare prin folosirea vibraţiilor şi vibropercuţiilor, care s-au aplicat în producţie cu eficienţă sporită faţă de tehnologiile clasice [48], [189], [194]; la aceste cercetări şi-a adus contribuţia şi autorul acestei teze. Rezultatele cercetărilor teoretice şi experimentale efectuate de autorul tezei pentru studiul sistemelor vibropercutante au fost folosite şi pentru finalizarea contractelor de cercetare încheiate cu Intreprinderea "6 Martie" din Timişoara în vederea proiectării, realizării şi încercării de noi scule şi maşini cu acţiuni vibrante şi vibropercutante folosite în construcţii. Aceste cercetări s-au folosit şi pentru proiectarea, realizarea şi încercarea de către autor, împreună cu un colectiv de studenţi, a unui model de laborator pentru studiul sistemelor vibropercutante cu unul sau două grade de libertate şi a unui stand de încercare la şocuri repetate a aparatelor electice şi electronice, avînd caracteristici tehnice superioare standurilor similare realizate în ţară.

1.2. Studii experimentale pe modele ale sistemelor mecanice vibropercutante

Studiile teoretice ale fenomenelor fizice au la bază acumulări cantitative şi calitative ale observaţiilor oamenilor asupra naturii, aceste observaţii fiind prelucrate, clasificate şi interpretate în funcţie de stadiul de dezvoltare al ştiinţei. Au rezultat metode de aprecieri cantitative şi calitative ale unor aspecte ale fenomenelor fizice, corespunzătoare diferitelor ramuri ale ştiinţei. Aceste aprecieri se efectuează pe baza unor modele fizice, la care se neglijează anumite particularităţi neesenţiale pentru aspectul studiat şi nu se ţine seama de interdependenţa dintre fenomenele de natură fizică diferită. Chiar şi în actualul stadiu înalt de dezvoltare al ştiinţei, datorită complexităţii fenomenelor fizice, nu se poate ţine seama de toate aspectele şi particularităţile acestora, astfel încît în studiul lor este necesar să se facă anumite aproximări. Este foarte important ca aproximările efectuate să nu altereze esenţa fenomenului studiat, iar verificarea concordanţei dintre teorie şi realitate se poate face numai pe cale experimentală.

In studiul comportării dinamice a sistemelor mecanice vibropercutante, chiar dacă se consideră numai aspectele pur mecanice, apar o serie de fenomene şi caracteristici mecanice, care nu se pot trata matematic prin metode exacte. Insăşi fenomenul de ciocnire este un fenomen complex, depinzînd de un număr mare de parametrii, iar caracteristica dinamică, exprimată prin dependenţa forţei percutante de deformaţiile locale în zona de contact şi de viteza relativă a punctelor teoretice de contact

în timpul ciocnirii, se modifică în timpul funcționării sistemului vibropercutant. Caracteristicile elastice și de amortizare ale elementelor constructive ale sistemelor vibropercutante sînt, în general, neliniare și depind de un număr mare de parametrii, care se pot modifica în timpul funcționării.
De asemenea, în lagăre și ghidaje apar inerent forțe de frecare, care și ele depind de o serie întreagă de parametrii și mărimi variabile. Ca urmare, pentru studiul mișcărilor sistemelor vibropercutante este necesar să se neglijeze efectul anumitor forțe și să se aproximeze anumite caracteristici. Rezultă, astfel, modele mecanice pentru sistemele vibropercutante, a căror comportare dinamică aproximează comportarea dinamică a sistemelor vibropercutante considerate. Un studiu exact al mișcărilor sistemelor mecanice vibropercutante reale nu este posibil și nici nu este necesar, avînd în vedere precizia limitată a aparatelor de măsură și control. Este necesar, însă, să se verifice pe cale experimentală încadrarea rezultatelor studiului teoretic între anumite limite, care să permită o bună funcționare a sistemelor vibropercutante reale. Verificările experimentale se efectuează pe modele experimentale, construite în conformitate cu principiile teoriei modelării, sau pe prototipuri.

Tipurile de modele experimentale ce pot fi considerate pentru sistemele mecanice sînt:

a) Modele mecanice construite la scară geometrică exactă (prototipuri pentru sistemele mecanice).

b) Modele mecanice construite în condiții speciale de modelare, fără a presupune o scară geometrică exactă (modele mecanice distorsionate).

c) Modele experimentale de altă natură fizică, dintre care cele mai răspîndite sînt modelele electrice.

d) Modele constituite pe sisteme tip calculator.

e) Diferite combinaţii ale tipurilor precedente.

Primele două tipuri de modele experimentale se încadrează în problemele de modelare fizică în care modelele sînt de aceeaşi natură fizică cu sistemele fizice corespunzătoare. Deşi modelele de tipul a) dau cele mai utile şi exacte indicaţii asupra comportării dinamice a unui sistem mecanic, în primele faze ale cercetărilor experimentale se construiesc modele de tipul b), prototipurile fiind construite abia în ultima fază a cercetărilor, după stabilirea variantelor constructive. Modelele mecanice distorsionate presupun abateri de la scara geometrică exactă şi neglijarea unor particularităţi ale sistemului mecanic considerat, care se justifică prin:

- influenţa mică a particularităţilor neglijate în comportarea dinamică a sistemului;
- eroarea acceptabilă datorită neglijărilor făcute;
- existenţa posibilităţilor de corecţie a rezultatelor măsurătorilor efectuate pe model, care să ţină seama de diferenţa dintre comportarea sistemului mecanic şi cea a modelului.

Construirea modelelor mecanice distorsionate se realizează în conformitate cu principiile similitudinii dinamice, alegîndu-se în mod convenabil scări pentru mărimile mecanice fundamentale şi, pe baza analizei dimensionale, rezultînd scările pentru mărimile mecanice derivate. Deoarece, în general, aceste modele se construiesc la scară geometrică redusă, utilizarea în primele faze ale cercetărilor experimentale a modelelor mecanice distorsionate în locul prototipurilor conduce la importante economii de materiale, materii prime, combustibil şi energie.

Modelele experimentale de tipul c) pentru sistemele mecanice, în special modelele electrice, se bazează pe analogii între legile ce descriu comportarea dinamică a sistemelor mecanice şi legile care guvernează comportarea modelului. Astfel, între ecuaţiile de mişcare ale sistemelor mecanice vibrante liniare cu mase concentrate şi legile lui Kirchhoff aplicate reţelelor electrice cu elemente electrice liniare se pot stabili analogii. Aceste analogii electrice stau la baza construirii modelelor electrice pentru sistemele mecanice. Folosirea lor este justificată de preţul de cost mult mai scăzut al elementelor modelelor electrice decît cel al elementelor constructive ale modelelor mecanice şi de faptul că măsurătorile în circuitele electrice se pot face mult mai ușor şi mai precis.

Modelele experimentale de tipul d) se realizează, în general, pe calculatoare electronice, numerice sau analogice. Modelarea sistemelor mecanice pe calculatoarele analogice se realizează prin stabilirea interconexiunilor dintre elementele de calcul analogic, astfel încît să rezulte pentru model ecuaţii diferenţiale de aceeaşi formă ca şi legile de mişcare ale sistemului. In urma calculului analogic se înregistrează, la anumite scări, variaţia în timp a diferitelor mărimi caracteristice pentru mişcarea sistemului sau diagrame în planul fazelor. Modelarea pe calculatoarele analogice se efectuează în două faze: stabilirea principală a schemei de conexiuni dintre elementele de calcul analogic pentru realizarea ecuaţiilor diferenţiale de forma cerută (modelarea calitativă) şi alegerea factorilor de scară, pe baza cărora rezultă valorile coeficienţilor ecuaţiilor diferenţiale (modelarea cantitativă). De aici rezultă şi unul din dezavantajele modelării pe calculatoarele analogice, care constă în faptul că alegerea factorilor de scară este dificilă, datorită condiţiei necesare ca pe întreaga durată a calculului analogic toate variabilele de maşină să aibă valori sub nivelul tensiunii

de referinţă a calculatorului. Un alt dezavantaj faţă de modelarea pe calculatoarele numerice îl constituie precizia relativ scăzută a elementelor de calcul analogic, ceea ce poate conduce la acumularea erorilor în scheme de modelare complexe şi, ca urmare, la compromiterea rezultatelor calculului analogic. Cu toate acestea, calculatoarele analogice se mai folosesc frecvent pentru modelarea sistemelor mecanice, a sistemelor de reglare automată, a proceselor termodinamice sau hidrodinamice, datorită posibilităţilor ce le oferă de schimbare uşoară şi rapidă a coeficienţilor . uaţiilor diferenţiale, putîndu-se urmări uşor influenţa anumitor parametrii asupra comportării acestor sisteme.
In ultimul timp s-a extins utilizarea calculatoarelor hibride, care sînt constituite prin interconectarea calculatoarelor analogice şi numerice prin intermediul convertoarelor analog-numerice şi numeric-analogice, reunindu-se, astfel, avantajele celor două tipuri de calculatoare. De asemenea, pe plan mondial există preocupări pentru modelarea pe calculatoarele numerice a sistemelor continue pe aceleaşi principii ca şi pe calculatoarele analogice, programul de calcul indicînd interconexiunile dintre anumite subrutine care simulează elementele de calcul analogic. In această direcţie s-au obţinut rezultate şi la noi în ţară; astfel la Institutul Politehnic din Bucureşti a fost realizat programul denumit LSSC [193].

In literatura de specialitate, referitoare la studiul sistemelor mecanice vibropercutante, în cea mai mare măsură sînt uate rezultatele cercetărilor experimentale efectuate pe modele mecanice distorsionate sau pe prototipuri.
Marea majoritate a lucrărilor cuprinzînd studii teoretice asupra mişcărilor vibropercutante sînt urmate de verificări experimentale pe astfel de modele. In mai mică măsură sînt reflectate în li-

teratura de specialitate rezultatele verificărilor experimentale pe modelele electrice. Totuşi, sînt cunoscute preocupările unor cercetători sovietici pentru modelarea pe calculatoarele analogice a sistemelor mecanice vibropercutante [89], [122], precum şi rezultatele valoroase obţinute prin modelarea pe calculatoare analogice şi hibride a unor astfel de sisteme de către cercetătorul Peterka Frantisek din R.S.Cehoslovacia [111] - [113].

Şi autorul acestei teze aduce unele contribuţii la modelarea electrică a sistemelor mecanice vibropercutante, atît prin analogii electrice, cît şi pe calculatoare analogice [186], [187]. Modelarea analogică a unor sisteme mecanice vibropercutante s-a efectuat pe calculatorul analogic MEDA-42TA de producţie cehoslovacă, existent în dotarea laboratoarelor catedrei.

Rezultatele teoretice şi experimentale obţinute de autor în studiul sistemelor mecanice vibropercutante se datoresc în mare parte îndrumării competente şi indicaţiilor date de conducătorul ştiinţific, prof.em.dr.doc.ing.Silaş Gheorghe.
De asemenea, a primit sprijin preţios din partea prof.dr.ing. Groşanu Iosif, prof.dr.ing.Brîndeu Liviu şi din partea tuturor membrilor catedrei. Ca urmare, autorul îşi exprimă şi pe această cale sincere mulţumiri tuturor celor care au contribuit la elaborarea şi redactarea tezei.

Cap.2. STUDIUL MISCARILOR PERIODICE STABILE ALE SISTEMELOR MECANICE VIBROPERCUTANTE

2.1. Generalități

Pentru studiul teoretic al mişcărilor sistemelor mecanice vibropercutante, în vederea unor aplicaţii tehnice în construcţia de maşini, este necesar să se ţină seama de faptul că aceste sisteme sînt neliniare, chiar dacă mişcările între ciocniri ale acestora sînt descrise de ecuaţii diferenţiale liniare.
Prin urmare, modelarea matematică a sistemelor mecanice vibropercutante prezintă dificultăţi cu atît mai mari cu cît numărul de grade de libertate al acestora este mai mare. De asemenea, natura şi caracteristicile mişcărilor vibropercutante depind, în general, de un număr mare de parametrii, ceea ce conduce la dificultăţi în stabilirea regimurilor de funcţionare optime. Rezultă că, pentru analiza şi sinteza mecanismelor vibropercutante, este necesară stabilirea unor modele mecanice, care să reproducă parametrii caracteristici ai sistemelor vibropercutante cu o aproximaţie cît mai bună. Stabilirea modelelor mecanice pentru mecanismele vibropercutante se face pe baza unor ipoteze simplificatoare, care se verifică prin încercări experimentale. Aceste ipoteze simplificatoare se referă atît la intervalele de timp dintre ciocniri ale mişcărilor sistemului, cît şi, în special, la intervalele de timp în care au loc ciocnirile.

In cele ce urmează, pentru stabilirea modelelor mecanice ale sistemelor mecanice vibropercutante se vor lua în considerare următoarele ipoteze simplificatoare:

a) Neglijarea unor forţe rezistente de valori mici faţă de alte forţe ce acţionează în intervalele dintre ciocniri ale mişcării sistemului. Astfel, în cele mai frecvente cazuri se pot neglija forţele de amortizare uscată (forţele de frecare), dacă aceasta nu influenţează mişcarea sistemului vibropercutant. In cazul studiului mişcărilor cu desprinderi ale particulelor materiale pe vibrotransportoare (caz în care vibrotransportorul împreună cu particulele transportate devine un sistem vibropercutant) forţele de frecare nu pot fi neglijate, deoarece acestea stau la baza principiului de funcţionare al vibrotransportoarelor. In multe cazuri, pentru studiul într-o primă aproximaţie al sistemelor vibropercutante se pot neglija şi forţele de amortizare vîscoasă între ciocniri. Deoarece aceste forţe apar întotdeauna, este necesar să se studieze influenţa lor asupra mişcărilor sistemelor vibropercutante.

b) Linearizarea caracteristicilor elastice şi de amortizare ale sistemelor mecanice vibropercutante între ciocniri. In general, la deplasări finite ale sistemului vibropercutant caracteristica elastică (forţă elastică exprimată ca funcţie de deformaţia elastică) şi caracteristica de amortizare (forţă de amortizare vîscoasă exprimată ca funcţie de viteză relativă între capetele elementului de amortizare) sînt neliniare. In multe cazuri, aceste caracteristici pot fi linearizate, fie integral (pentru toate valorile deformaţiilor elementelor elastice sau pentru toate valorile vitezelor relative dintre capetele elementelor de amortizare vîscoasă), fie parţial sau pe porţiuni (între anumite valori ale deformaţiilor elementelor elastice sau între anumite valori ale vitezelor relative dintre capetele elementelor de amortizare vîscoasă).

c) Neglijarea intervalului de timp în care au loc ciocnirile. In general, intervalul de timp în care au loc ciocnirile este mult mai mic decît intervalul de timp al mişcării dintre ciocniri, caz în care intervalele de timp ale ciocnirilor se consideră nule şi se spune că ciocnirile sînt instantanee. Dacă intervalele de timp în care au loc ciocnirile nu pot fi neglijate faţă de intervalele de timp ale mişcărilor dintre ciocniri, ciocnirile se numesc neinstantanee.

d) Considerarea ciocnirilor instantanee ca fenomene locale, în care în intervalele scurte (neglijabile) ale ciocnirilor poziţia sistemului nu se schimbă. In cazul ciocnirilor neinstantanee, această ipoteză nu este aplicabilă.

e) Neglijarea forţelor de valoare medie mică în timpul ciocnirilor, numite forţe nepercutante. In mod obişnuit, la ciocnirea a două corpuri, singura forţă percutantă (cu valoare medie mare în timpul ciocnirii) este forţa locală de contact, dirijată după normala comună la suprafeţele celor două corpuri în punctul teoretic de contact. In aceste cazuri ciocnirea poate fi considerată instantanee şi este caracterizată de coeficientul de restituire la ciocnire, care se determină experimental. Neglijarea celorlalte forţe care acţionează în timpul ciocnirii a două corpuri conduce la o bună aproximaţie a fenomenului complex de ciocnire, dacă ciocnirea este centrică (vitezele punctelor de contact la începutul ciocnirii sînt dirijate după normala comună la suprafeţele celor două corpuri), sau dacă ciocnirea nu este centrică, dar forţele de frecare din zona de contact sînt neglijabile.

După precizarea modelului mecanic pentru sistemul vibropercutant de studiat, pe baza ipotezelor simplificatoare, tratarea matematică a acestuia se face în funcţie de elementele caracteristice stabilite prin încadrarea sa într-o anumită categorie (grupă) de sistem vibropercutant. Incadrarea sistemelor vibropercutante în grupe se face pe baza clasificării lor după diferite criterii.

a) După numărul de grade de libertate:

- sisteme vibropercutante cu un grad de libertate
- sisteme vibropercutante cu două grade de libertate
- sisteme vibropercutante cu mai multe grade de libertate

b) După caracterul ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării între ciocniri:

- sisteme vibropercutante lineare între ciocniri
- sisteme vibropercutante nelineare între ciocniri

) După numărul cuplelor (semicluplelor) percutante:

- sisteme vibropercutante cu o cuplă percutantă
- sisteme vibropercutante cu două cuple percutante
- sisteme vibropercutante cu mai multe cuple percutante

d) După caracterul ciocnirilor:

- sisteme vibropercutante cu ciocniri instantanee
- sisteme vibropercutante cu ciocniri neinstantanee

e) După posibilitatea neglijării unor forţe rezistente în intervalele de timp dintre ciocniri:

- sisteme vibropercutante neamortizate
- sisteme vibropercutante cu amortizare viscoasă
- sisteme vibropercutante cu amortizare uscată
- sisteme vibropercutante asupra cărora acţionează şi alte categorii de forţe rezistente.

După destinaţia sistemelor vibropercutante există diferite clasificări pe grupe şi tipuri constructive. Din acest punct de vedere se pot deosebi două categorii mari de sisteme vibropercutante:

- sisteme vibropercutante la care mişcările vibropercutante sînt necesare pentru anumite procese tehnologice (în cele mai multe cazuri pentru a produce anumite deformaţii), apariţia mişcărilor vibropercutante fiind esenţială pentru funcţionarea utilajelor.

- sisteme vibropercutante la care apariţia mişcărilor vibropercutante este neesenţială în funcţionarea utilajelor, de multe ori fiind chiar nedorită.

Pentru analiza şi sinteza mecanismelor vibropercutante prezintă interes prima din aceste două categorii de sisteme vibropercutante. In problemele de optimizare ale acestor sisteme vibropercutante este necesar să se asigure lucrul mecanic de deformaţie maxim în procesul de ciocnire, care se realizează pe baza unor pierderi mari de energie cinetică în timpul ciocnirilor.
Rezultă că pentru optimizarea sistemelor vibropercutante este necesar să se impună condiţii de maxim pentru vitezele relative ale punctelor teoretice de contact ale corpurilor care se ciocnesc la începutul ciocnirilor.

Pentru studiul teoretic al tuturor acestor categorii şi grupe de sisteme vibropercutante se impune rezolvarea succesivă a următoarelor probleme:

a) Stabilirea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării sistemelor vibropercutante între ciocniri.

b) Modelarea matematică a ciocnirilor.

c) Stabilirea condiţiilor de existenţă ale mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante.

d) Studiul stabilităţii mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante.

e) Optimizarea sistemelor vibropercutante.

Primele două probleme se rezolvă pe baza modelelor mecanice ale sistemelor vibropercutante rezultate în urma acceptării unor ipoteze simplificatoare. Ca urmare, după efectuarea studiului teoretic propriu-zis, care constă în rezolvarea următoarelor probleme, se impune verificarea rezultatelor acestui studiu prin încercări experimentale pe modele.

2.2. Stabilirea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării sistemelor vibropercutante între ciocniri

2.2.1. Operator matricial de derivare parţială

Pentru stabilirea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării sistemelor vibropercutante între ciocniri se consideră cazul general al sistemelor mecanice cu mai multe grade de libertate. Cazurile în care sistemul vibropercutant considerat are unul sau două grade de libertate se obţin uşor prin particularizarea cazului general. Pentru exprimarea compactă a ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării este necesar să se folosească metodele calculului matricial. Exprimarea matricială a acestor ecuaţii diferenţiale prezintă avantajul că pot fi uşor adaptate pentru calculul numeric cu ajutorul calculatoarelor electronice.

In cele ce urmează se prezintă unele notaţii folosite pentru calculul matricial. Astfel, matricile coloană se vor nota cu o liniuţă deasupra literei ce defineşte elementele sale. Matricile patrate sau dreptunghiulare se notează cu o liniuţă sub litera ce defineşte elementele sale, dimensiunile lor fiind precizate anterior introducerii notaţiilor. Transpusa unei matrici se notează cu indicele superior "T", iar inversa unei matrici patrate nesingulare se notează cu indicele superior "-1". Astfel $\overline{A}$ reprezintă o matrice coloană cu elementele A_i, $\overline{A}^T$ reprezintă matricea linie obţinută prin transpunerea matricii coloană $\overline{A}$, iar $\underline{A}^{-1}$ reprezintă inversa matricii patrate nesingulare $\underline{A}$ cu elementele A_{ij}.

Pentru stabilirea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării sistemelor mecanice cu mai multe grade de libertate se va folosi un operator matricial de derivare parţială. Pentru definirea lui se consideră o funcţie scalară reală F de n variabile reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$, definită pe R^n cu valori în R. Notînd cu $\overline{x}$ matricea coloană cu elementele x_i $(i=1,2,\ldots,n)$, acest operator, notat cu $\frac{\partial}{\partial \overline{x}}$, se defineşte prin:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(F) = \left\| \frac{\partial F}{\partial x_1} \; \frac{\partial F}{\partial x_2} \; \ldots \; \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\|^T \tag{2.1}$$

şi corespunde gradientului unei funcţii scalare de mai multe variabile reale.

Se observă că operatorul matricial de derivare parţială astfel definit este un operator liniar, deoarece

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(F_1 + F_2) = \frac{\partial}{\partial \overline{x}}(F_1) + \frac{\partial}{\partial \overline{x}}(F_2)$$

şi pentru un scalar constant α, rezultă $\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(\alpha F) = \alpha \frac{\partial}{\partial \overline{x}}(F)$.

Pentru stabilirea proprietăţilor acestui operator se consideră diferite expresii pentru funcţia scalară F. Dacă această funcţie este de forma:

$$F = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i = \overline{x}^T . \overline{A} \tag{2.2}$$

unde $\overline{A} = \| A_i \|$ şi A_i sînt constante, se poate scrie:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(F) = \begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{Vmatrix} = \underline{I}\overline{A} \tag{2.3}$$

In expresia (2.3) $\underline{I}$ reprezintă matricea unitate cu dimensiunile $n \times n$. Se constată că aplicarea operatorului matricial de derivare parţială pentru matricea linie $\overline{x}^T$ conduce la o matrice patrată (matricea unitate $\underline{I}$) în care elementele de pe coloana j reprezintă rezultatul aplicării operatorului $\frac{\partial}{\partial \overline{x}}$ pentru x_j.

Considerînd funcţia F de forma (2.2), în care $A_i = A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se poate scrie:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(F) = \underline{I}\bar{A} + \begin{Vmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_1}x_2 + \ldots \frac{\partial A_n}{\partial x_1}x_n \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_2}x_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}x_2 + \ldots \frac{\partial A_n}{\partial x_n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_n}x_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_n}x_2 + \ldots \frac{\partial A_n}{\partial x_n}x_n \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

Se constată că, exprimînd derivata parţială a matricii linie $\bar{A}^T$ prin:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{A}^T) = \begin{Vmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \frac{\partial A_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial A_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial A_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial A_n}{\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_n} & \frac{\partial A_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial A_n}{\partial x_n} \end{Vmatrix} = \tag{2.5}$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(A_1) & \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(A_2) & \ldots & \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(A_n) \end{Vmatrix} ,$$

relaţia (2.4) devine:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(F) = \underline{I}\bar{A} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{A}^T).\bar{x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{x}^T).\bar{A} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{A}^T).\bar{x} \tag{2.6}$$

Pe baza relaţiei (2.6) se poate stabili regula de derivare parţială a unei funcţii scalare de n variabile dată ca produsul dintre o matrice linie şi una coloană, fiecare cu n elemente depinzînd de aceleaşi variabile:

$$F = \bar{A}^T.\bar{B} = \bar{B}^T.\bar{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(F) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{A}^T).\bar{B} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{B}^T).\bar{A} \tag{2.7}$$

Formula (2.7) corespunde gradientului unei funcţii scalare dată ca produsul scalar a două funcţii vectoriale.

Considerînd funcţia F de forma

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, x_i x_j = \frac{1}{2}\,\overline{x}^T.\underline{A}.\overline{x} \tag{2.8}$$

unde $\underline{A} = \| A_{ij} \|$ şi A_{ij} sînt constante, se poate scrie:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(F) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(\overline{x}^T).\underline{A}.\overline{x} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\,(\underline{A}\overline{x})^T\,.\overline{x} =$$

$$+ \frac{1}{2}\,\underline{I}\,\underline{A}\overline{x} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(\overline{x}^T\underline{A}^T).\overline{x} = \frac{1}{2}\,\underline{A}\overline{x} + \frac{1}{2}\,\underline{A}^T\overline{x} \tag{2.9}$$

Dacă matricea $\underline{A}$ este simetrică, rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(F) = \underline{A}\overline{x} = \underline{A}^T\overline{x} \tag{2.10}$$

Dacă funcţia F are expresia (2.8), dar

$A_{ij} = A_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se obţine:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(F) = \frac{1}{2}\,\underline{A}\overline{x} + \frac{1}{2}\,\underline{A}^T.\overline{x} + \tag{2.11}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1}x_1^2 + \frac{\partial A_{21}}{\partial x_1}x_1x_2 + \ldots + \frac{\partial A_{n1}}{\partial x_1}x_1x_n + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_1}x_1x_2 + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1}x_2^2 + \ldots \\ \frac{\partial A_{11}}{\partial x_2}x_1^2 + \frac{\partial A_{21}}{\partial x_2}x_1x_2 + \ldots + \frac{\partial A_{n1}}{\partial x_2}x_1x_n + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2}x_1x_2 + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2}x_2^2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial A_{11}}{\partial x_n}x_1^2 + \frac{\partial A_{21}}{\partial x_n}x_1x_2 + \ldots + \frac{\partial A_{n1}}{\partial x_n}x_1x_n + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_n}x_1x_2 + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_n}x_2^2 + \ldots \end{matrix} \right\|$$

Se constată că, exprimînd derivata parţială a matricii linie $\overline{A}_j^T$ după formula (2.5), unde $\overline{A}_j$ reprezintă coloana cu indicele j din matricea $\underline{A}$, relaţia (2.11) se poate scrie sub forma:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(F) = \frac{1}{2}\,\underline{A}\overline{x} + \frac{1}{2}\,\underline{A}^T.\overline{x} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j\,\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(\overline{A}_j^T).\overline{x} \tag{2.12}$$

Operatorul matricial de derivare parţială dat de (2.1), se mai poate exprima în mod analog printr-o matrice linie corespunzător matricii Jacobi a unei funcţii scalare de mai multe variabile. Deoarece, în cele ce urmează, acest operator este folosit pentru exprimarea compactă, matricială, a ecuaţiilor lui Lagrange, în care toţi termenii sînt sub forma unor matrici coloană, se va utiliza formula (2.1) de definiţie a operatorului considerat.

2.2.2. Stabilirea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării sistemelor vibropercutante neliniare între ciocniri

Tipul cel mai general de sistem vibropercutant a cărui mişcare este descrisă de ecuaţii diferenţiale neliniare între ciocniri, poate fi asociat, în toate cazurile întîlnite în aplicaţii, unui model mecanic de sistem supus la legături olonome şi neolonome scleronome. In mod obişnuit, de legăturile olonome se ţine seama la stabilirea parametrilor de poziţie independenţi cu care se studiază mişcarea, astfel încît ecuaţiile legăturilor olonome nu se iau în considerare direct la stabilirea ecuaţiilor de mişcare ale sistemului. Dacă este necesar să se determine şi reacţiunile legăturilor olonome asupra sistemului aflat în mişcare, ecuaţiile acestora se pot deriva în raport cu timpul şi sub această formă se includ între ecuaţiilor legăturilor neolonome.

Se consideră un astfel de sistem mecanic al cărui poziţie depinde de n coordonate generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Sistemul e supus la ℓ ($\ell < n$) legături neolonome, ale căror ecuaţii se pot exprima sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\dot{q}_j + a_{io} = 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,\ell \quad , \tag{2.13}$$

unde coeficienţii a_{ij} şi a_{io} depind de coordonatele generalizate.

Pentru stabilirea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării sistemului, metoda cea mai generală o constituie utilizarea ecuaţiilor lui Lagrange cu multiplicatori. Pentru aplicarea lor este necesar să se calculeze energia cinetică E_c a sistemului, energia sa potenţială E_p, funcţia de disipare a energiei E_d şi forţele generalizate perturbatoare Q_j^* ($j=1,2,\ldots,n$). Energia cinetică a sistemului considerat se exprimă ca o funcţie omogenă de gradul doi în vitezele generalizate:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T \underline{b}\dot{\bar{q}} \quad , \tag{2.14}$$

unde $\underline{b} = \| b_{ij} \|$ este matricea de inerţie, în general simetrică, avînd elementele b_{ij} dependente de coordonatele generalizate. Energia potenţială se calculează pentru toate forţele conservative ce acţionează asupra sistemului (greutăţi, forţe elastice, etc.) şi este o funcţie de coordonatele generalizate. Deoarece coordonatele generalizate se măsoară din poziţia de echilibru static a sistemului şi în această poziţie se consideră valoarea nulă a energiei potenţiale, aceasta se poate exprima sub forma:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}q_iq_j = \frac{1}{2}\bar{q}^T \underline{d}\bar{q} \tag{2.15}$$

unde $\underline{d} = \| d_{ij} \|$ este matricea de rigiditate, în general simetrică, avînd elementele d_{ij} dependente de coordonatele generalizate. Funcţia de disipare a energiei se calculează pentru forţele de amortizare vîscoasă şi pentru alte forţe rezistente, depinzînd de coordonatele generalizate şi de vitezele generalizate. In general şi expresia funcţiei de disipare a energiei se poate pune sub o formă patratică de vitezele generalizate:

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T \underline{c}\dot{\bar{q}} \tag{2.16}$$

unde $\underline{c} = \| c_{ij} \|$ reprezintă matricea de amortizare, simetrică şi cu elementele sale depinzînd de coordonatele generalizate şi de vitezele generalizate. Forţele generalizate perturbatoare se calculează pentru forţele perturbatoare ce acţionează asupra sistemului şi rezultă ca funcţii de timp, în expresia lor intrînd, în unele cazuri, şi coordonatele generalizate.

Cu aceste mărimi calculate, ecuaţiile lui Lagrange cu multiplicatori se pot scrie sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = - \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_p}{\partial q_j} + Q_j^* + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_{ij}$$

$$j = 1,2,\ldots,n \quad , \tag{2.17}$$

unde λ_i $(i=1,2,\ldots,l)$ sînt multiplicatorii lui Lagrange cu ajutorul cărora se exprimă reacţiunile legăturilor neolonome. Dacă a_{ij} sînt adimensionali, λ_i au dimensiuni de forţe şi reprezintă chiar reacţiunile acestor legături. Ecuaţiile (2.17) împreună cu ecuaţiile (2.13) ale legăturilor neolonome formează un sistem de $n+l$ ecuaţii diferenţiale cu necunoscutele $q_j = q_j(t)$ şi $\lambda_i = \lambda_i(t)$.

Atît ecuaţiile lui Lagrange (2.17), cît şi ecuaţiile legăturilor neolonome (2.13) se pot exprima compact sub formă matricială. Notînd cu $\underline{a} = \|a_{ij}\|$ matricea dreptunghiulară cu dimensiunile $l \times n$ cu elementele a_{ij}, cu $\overline{a}_o = \|a_{io}\|$, cu $\overline{\lambda} = \|\lambda_i\|$ şi cu $\overline{Q}^* = \|Q_j^*\|$ matricile coloană cu elementele corespunzătoare, aceste ecuaţii devin:

$$\underline{a}\,\dot{\overline{q}} + \overline{a}_o = \overline{0} \tag{2.18}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\overline{q}}}(E_c)\right\} - \frac{\partial}{\partial\overline{q}}(E_c) = -\frac{\partial}{\partial\dot{\overline{q}}}(E_d) - \frac{\partial}{\partial\overline{q}}(E_p) + \overline{Q}^* + \underline{a}^T\,\overline{\lambda} \tag{2.19}$$

Ţinînd seama de expresia (2.14) a energiei cinetice, pentru care se poate aplica formula (2.1o) de derivare parţială, primul termen al ecuaţiilor matriciale (2.19) se poate scrie:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\overline{q}}}(E_c)\right\} = \underline{b}\,\ddot{\overline{q}} + \left\{\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial \underline{b}}{\partial q_j}\right\}\dot{\overline{q}} , \tag{2.2o}$$

iar pe baza formulei (2.12), al doilea termen devine:

$$\frac{\partial}{\partial\overline{q}}(E_c) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial\overline{q}}(\overline{b}_j^T)\right\}\dot{\overline{q}} \tag{2,21}$$

astfel încît membrul stîng al ecuaţiei matriciale (2.19) are expresia:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\overline{q}}}(E_c)\right\} - \frac{\partial}{\partial\overline{q}}(E_c) = \underline{b}\ddot{\overline{q}} + \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j\left\{\frac{\partial \underline{b}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\overline{q}}(\overline{b}_j^T)\right\}\dot{\overline{q}} \tag{2.22}$$

Se constată că în această expresie apar termeni liniari în accelerațiile generalizate $\ddot{q}_j$ și termeni de gradul doi în vitezele generalizate, coeficienții fiind funcții de coordonatele generalizate.

Aplicînd formula (2.12) de derivare parțială pentru funcția de disipare a energiei dată de (2.16) și pentru energia potențială (2.15), următorii termeni din ecuația matricială (2.19) se exprimă prin:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\bar{q}}}(E_d) = \underline{c}\dot{\bar{q}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial \dot{\bar{q}}}(\bar{c}_j^T)\dot{\bar{q}} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}}(E_p) = \underline{d}\bar{q} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\partial}{\partial \bar{q}}(\bar{d}_j^T)\bar{q} \tag{2.24}$$

Se constată că în expresia (2.23) apar termeni neliniari în vitezele generalizate, iar expresia (2.24) conține termeni neliniari în coordonatele generalizate.

Pe baza relațiilor (2.22), (2.23) și (2.24), ecuațiile de mișcare ale sistemului vibropercutant între ciocniri devin:

$$\underline{b}\ddot{\bar{q}} + \underline{c}\dot{\bar{q}} + \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \left\{ \frac{\partial \underline{b}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{q}}(\bar{b}_j^T) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\bar{q}}}(\bar{c}_j^T)\right\} \dot{\bar{q}} +$$

$$+ \underline{d}\bar{q} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\partial}{\partial \bar{q}}(\bar{d}_j^T)\bar{q} = \bar{Q}^{*} + \underline{a}^T \bar{\lambda} \quad , \tag{2.25}$$

la care se adaugă ecuațiile (2.18) ale legăturilor neolonome.

Notînd:

$$\underline{C} = \underline{c} + \sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j \left\{ \frac{\partial \underline{b}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{q}}(\bar{b}_j^T) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\bar{q}}}(\bar{c}_j^T)\right\}$$

$$\underline{D} = \underline{d} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\partial}{\partial \bar{q}}(\bar{d}_j^T) \tag{2.26}$$

ecuația matricială (2.25) se mai poate scrie:

$$\underline{b}\ddot{\bar{q}} + \underline{C}\dot{\bar{q}} + \underline{D}\bar{q} = \bar{Q}^{*} + \underline{a}^T \bar{\lambda} \tag{2.27}$$

unde elementele matricii $\underline{C}$ depind de vitezele generalizate și de coordonatele generalizate, iar elementele matricii $\underline{D}$ sînt funcţii de coordonatele generalizate, ambele matrici fiind, în general, nesimetrice.

Dacă legăturile neolonome sînt neideale (cu frecare uscată), în expresiile forţelor de frecare intervin reacţiunile acestor legături, astfel încît elementele matricii $\underline{c}$ sînt funcţiuni, în general neliniare, şi de multiplicatorii λ_i. In acest caz aceşti multiplicatori se elimină mai greu între ecuaţiile date de (2.27), dar dacă această eliminare este posibilă, din (2.27) rămîn $m = n - \ell$ ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul doi în coordonatele generalizate, care împreună cu cele ℓ ecuaţii diferenţiale de ordinul întii din (2.18) formează ecuaţiile de mişcare ale sistemului vibropercutant între ciocniri.

Dacă legăturile neolonome sînt ideale (fără frecare), multiplicatorii λ_i se pot elimina uşor. Deoarece în matricea $\underline{a}^T$ se pot determina ℓ linii cu elementele liniar independente pe întreg domeniul $\mathcal{D} \in R^n$ în care iau valori coordonatele generalizate în timpul mişcării sistemului, se consideră că primele ℓ linii îndeplinesc această condiţie. Separînd primele ℓ linii de următoarele m în (2.27) această ecuaţie matriceală se descompune în două ecuaţii matriciale:

$$\underline{b}_\ell \ddot{\bar{q}} + \underline{C}_\ell \dot{\bar{q}} + \underline{D}_\ell \bar{q} = \bar{Q}^*_\ell + \underline{a}^T_\ell \bar{\lambda} \quad , \tag{2.28}$$

$$\underline{b}_m \ddot{\bar{q}} + \underline{C}_m \dot{\bar{q}} + \underline{D}_m \bar{q} = \bar{Q}^*_m + \underline{a}^T_m \bar{\lambda} \quad , \tag{2.29}$$

în care s-au folosit notaţiile:

$$\underline{b} = \begin{Vmatrix} \underline{b}_\ell \\ \underline{b}_m \end{Vmatrix} ; \quad \underline{C} = \begin{Vmatrix} \underline{C}_\ell \\ \underline{C}_m \end{Vmatrix} ; \quad \underline{D} = \begin{Vmatrix} \underline{D}_\ell \\ \underline{D}_m \end{Vmatrix} ; \tag{2.30}$$

$$\underline{a} = \begin{Vmatrix} \underline{a}_\ell & \underline{a}_m \end{Vmatrix} ; \quad \bar{Q}^* = \begin{Vmatrix} \bar{Q}^*_\ell \\ \bar{Q}^*_m \end{Vmatrix}$$

Matricea $\underline{a}^T_\ell$ fiind patrată şi nesingulară, din (2.28) se pot determina elementele matricii $\bar{\lambda}$, astfel încît, după înlocuirea în (2.29), rezultă ecuaţia matricială:

$$\{\underline{b}_m - \underline{A}\,\underline{b}_l\}\ddot{\overline{q}} + \{\underline{C}_m - \underline{A}\,\underline{C}_l\}\dot{\overline{q}} + \{\underline{D}_m - \underline{A}\,\underline{D}_l\}\overline{q} =$$

$$= \overline{Q}_m^{*} - A\,\overline{Q}_l^{*} \quad , \tag{2.31}$$

unde matricea $\underline{A} = \underline{a}_m^T(\underline{a}_l^T)^{-1}$ are dimensiunile $m \times l$.

In multe cazuri întîlnite în aplicații legăturile la care este supus sistemul vibropercutant sînt olonome scleronome și pot fi considerate ideale. In aceste condiții ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului între ciocniri se obțin din ecuația matricială (2.27) prin particularizare:

$$\underline{b}\ddot{\overline{q}} + \underline{C}\dot{\overline{q}} + \underline{D}\overline{q} = \overline{Q}^{*} \quad , \tag{2.32}$$

rezultînd tot neliniare. De asemenea, sînt frecvente cazurile în care matricea de inerție $\underline{b}$ are toate elementele constante, uneori fiind chiar matrice diagonală (în cazul sistemelor formate din corpuri aflate în mișcare de translație rectilinie și de rotație în jurul axelor lor de simetrie), iar forțele generalizate perturbatoare Q_j^{*} rezultă ca funcții numai de timp. Pentru astfel de sisteme vibropercutante prezintă interes practic trei tipuri de sisteme neliniare între ciocniri:

a) Sisteme vibropercutante cu caracteristici de amortizare liniare și cu caracteristici elastice neliniare. In acest caz matricile $\underline{b}$ și $\underline{C} = \underline{c}$ au elementele constante, termenii neliniari rezultînd din matricea $\underline{D}$, care are elementele funcțiuni de coordonatele generalizate. Pentru studiul teoretic al acestor sisteme în mod obișnuit caracteristicile elastice ale elementelor elastice se liniarizează pe porțiuni. Pentru aceasta, domeniul $\mathcal{D}$ al valorilor matricii $\overline{q}$ se împarte în mai multe subdomenii $\mathcal{D}_k$, astfel încît pe fiecare subdomeniu toate caracteristicile elastice ale sistemului să poată fi aproximate cu segmente de dreaptă. Ca urmare, pe fiecare subdomeniu, ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului între ciocniri rezultă de forma:

$$\underline{b}\ddot{\overline{q}} + \underline{c}\dot{\overline{q}} + \underline{d}_k\overline{q} = \overline{Q}^* \qquad (2.33)$$

unde matricea $\underline{d}_k$ este simetrică şi are elementele constante, cu valori diferite pe subdomenii diferite.

b) Sisteme vibropercutante neamortizate cu caracteristici elastice neliniare. Acest tip constituie un caz particular al celui prezentat mai sus, în care toate elementele matricii de amortizare $\underline{c}$ sînt nule.

c) Sisteme vibropercutante cu caracteristici de amortizare neliniare. In acest caz matricea de amortizare $\underline{c}$ are elementele funcţii numai de vitezele generalizate, iar matricea $\underline{C}$, pe baza primei relaţii (2.26), rezultă de forma:

$$\underline{C} = \underline{c} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial \dot{\overline{q}}}(\overline{c}_j^T) \quad , \qquad (2.34)$$

fiind, în general, nesimetrică şi avînd elementele funcţii neliniare de vitezele generalizate. Si în acest caz, pentru studiul teoretic al acestor sisteme, este utilă liniarizarea pe porţiuni a caracteristicilor de amortizare pe subdomenii $\mathcal{D}'_k$ ale domeniului $\mathcal{D}'$ al valorilor matricii $\dot{\overline{q}}$.

2.2.3. Stabilirea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării sistemelor vibropercutante liniare între ciocniri

Sistemelor vibropercutante liniare între ciocniri li se asociază modele mecanice corespunzătoare unor sisteme supuse la legături olonome scleronome ideale la care energia cinetică depinde numai de vitezele generalizate şi care au caracteristici elastice şi de amortizare liniare. Stabilirea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării pentru aceste sisteme se face la fel ca şi în cazul general prezentat mai sus, obţinîndu-se ecuaţia matricială de forma:

$$\underline{b}\ddot{\overline{q}} + \underline{c}\dot{\overline{q}} + \underline{d}\overline{q} = \overline{Q}^* \quad , \qquad (2.35)$$

în care matricile $\underline{b}$, $\underline{c}$ şi $\underline{d}$ sînt simetrice şi au elementele constante pe întreg domeniul $\mathcal{D}$ al valorilor coordonatelor generalizate şi pe întreg domeniul $\mathcal{D}'$ al vitezelor generalizate. Forţele generalizate perturbatoare Q_j^* sînt funcţii periodice de timp, avînd aceeaşi perioadă T.

In cele mai multe cazuri coordonatele generalizate se pot alege astfel încît să reprezinte distanţe între anumite elemente geometrice ale sistemului. In aceste cazuri modelul mecanic al sistemului se reduce la un model de translaţie, constituit din mase concentrate aflate în mişcări de translaţie rectilinie după aceeaşi direcţie (de obicei verticală), legate între ele prin elemente elastice şi de amortizare cu caracteristici liniare. Notînd cu x_j deplasarea rectilinie a masei m_j din poziţia de echilibru static a sistemului, ecuaţia matricială (2.35) se poate exprima sub forma:

$$\underline{m}\ddot{\overline{x}} + \underline{c}\dot{\overline{x}} + \underline{k}\overline{x} = \overline{F}(t) \quad , \tag{2.36}$$

unde $\underline{m}$ este matrice diagonală şi conţine masele echivalente ale sistemului, matricea $\underline{c}$ are elementele cu dimensiuni de coeficienţi de amortizare vîscoasă, matricea $\underline{k}$ are elementele cu dimensiuni de constante elastice, iar elementele matricii $\overline{F}(t)$ sînt forţe perturbatoare periodice în timp, avînd aceeaşi perioadă T.

Dacă în cazul modelului de translaţie pentru sistemul vibropercutant considerat coeficienţii de amortizare au valori mici, pentru studiul într-o primă aproximaţie se poate considera sistemul fără amortizare vîscoasă, pentru care ecuaţia matricială (2.36) devine:

$$\underline{m}\ddot{\overline{x}} + \underline{k}\overline{x} = \overline{F}(t) \tag{2.37}$$

2.3. Modelarea matematică a ciocnirilor

2.3.1. Modelarea matematică a ciocnirilor instantanee

In studiul teoretic al sistemelor mecanice vibropercutante, asupra cărora acţionează forţe perturbatoare periodice cu perioada T, prezintă interes pentru aplicaţii determinarea mişcărilor vibropercutante periodice stabile, avînd perioada un multiplu al perioadei forţelor perturbatoare rT ($r = 1,2,\ldots$). In cazurile în care durata mişcării între două ciocniri consecutive este mult mai mare decît durata τ a unei ciocniri, deci $\tau << T$, intervalul de timp τ se poate neglija şi ciocnirile se pot considera instantanee. In aceste cazuri ciocnirea este centrică, fenomenul de ciocnire este local şi se neglijează forţele nepercutante, singura forţă percutantă fiind forţa locală de contact, corespunzătoare interacţiunii celor două corpuri în timpul ciocnirii.

Pentru modelarea matematică a ciocnirilor instantanee, se consideră cupla percutantă dintre corpurile cu masele m_i şi m_j dintr-un model mecanic de translaţie al unui sistem vibropercutant (fig.2.1). Parametrii de poziţie x_i şi x_j se măsoară din poziţia de echilibru static a sistemului. Deoarece atît în timpul mişcării cît şi în momentul ciocnirii corpurile se consideră rigide, deşi pentru studiul ciocnirii trebuie să se ţină seama de deformaţii în zona locală de contact, pentru orice cuplă sau semicuplă percutantă (semicupla percutantă avînd masa unui corp neglijabilă) se poate stabili o relaţie între parametrii de

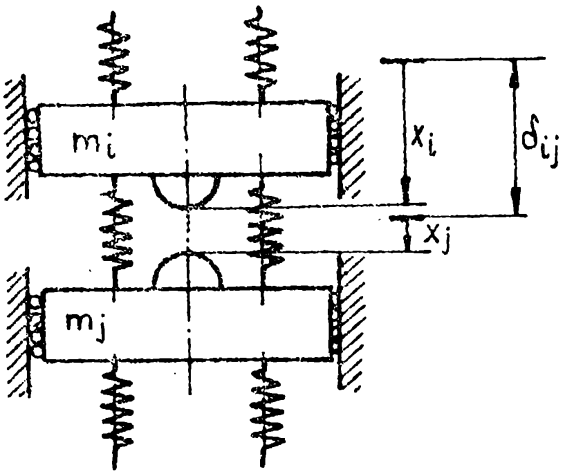


Fig.2.1

poziţie pe baza unei funcţii corespunzătoare unei legături unilaterale. In cazul considerat în fig.2.1, funcţia legăturii unilaterale este $x_j + \delta_{ij} - x_i$, cu ajutorul căreia se exprimă relaţia:

$$x_j + \delta_{ij} - x_i \geq 0 \quad , \tag{2.38}$$

în care este verificată inegalitatea în timpul mişcării sistemului şi egalitatea în momentul ciocnirii.

Se consideră că la momentul t_k are loc ciocnirea de ordinul k în poziţia în care parametrii de poziţie au valorile $(x_i)_k$ şi $(x_j)_k$, între care există relaţia:

$$(x_i)_k = (x_j)_k + \delta_{ij} \tag{2.39}$$

La începutul ciocnirii vitezele celor două corpuri, aflate în mişcare de translaţie rectilinie, au valorile $(\dot{x}_i)_k$ şi $(\dot{x}_j)_k$. Pentru determinarea vitezelor celor două corpuri la sfîrşitul ciocnirii, $(\dot{x}_i')_k$ şi $(\dot{x}_j')_k$, se aplică legile ciocnirilor sistemului format de cele două corpuri

$$m_i(\dot{x}_i)_k + m_j(\dot{x}_j)_k = m_i(\dot{x}_i')_k + m_j(\dot{x}_j')_k \tag{2.4o}$$

şi se consideră expresia coeficientului de restituire la ciocnire R dintre cele două corpuri în funcţie de viteze

$$R = \frac{(\dot{x}_j')_k - (\dot{x}_i')_k}{(\dot{x}_i)_k - (\dot{x}_j)_k} \tag{2.41}$$

Din (2.4o) şi (2.41) rezultă:

$$\begin{aligned} (\dot{x}_i')_k &= (\dot{x}_i)_k - \frac{\left[(\dot{x}_i)_k - (\dot{x}_j)_k\right](1 + R)}{1 + \dfrac{m_i}{m_j}} \\ (\dot{x}_j')_k &= (\dot{x}_j)_k + \frac{\left[(\dot{x}_i)_k - (\dot{x}_j)_k\right](1 + R)}{1 + \dfrac{m_j}{m_i}} \end{aligned} \tag{2.42}$$

In cazul ciocnirii corpului de masă m_i cu un limitator

fix, modelarea matematică a ciocnirii se realizează prin particularizări. In acest caz $x_j = 0$, $(\dot{x}_j)_k = 0$ şi $m_j \rightarrow \infty$.
In mod obişnuit pentru ciocnirile cu un limitator fix, în locul indicelui j se consideră indicele o. Relaţia pentru legătura unilaterală rezultă de forma:

$$\delta_{io} - x_i \geq 0 \,, \tag{2.43}$$

iar din (2.42) se obţine:

$$\begin{aligned} (\dot{x}'_i)_k &= -R(\dot{x}_i)_k \\ (\dot{x}'_o)_k &= 0 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Se constată că modelarea matematică a ciocnirilor instantanee se bazează pe coeficientul de restituire la ciocnire R, care se consideră constant depinzînd, în cea mai mare măsură, de proprietăţile elasto-plastice ale materialelor din care sînt confecţionate corpurile ce se ciocnesc. Determinarea coeficientului de restituire la ciocnire se face pe cale experimentală, ţinînd seama de deformaţiile corpurilor în zona de contact în timpul ciocnirii. Aceste deformaţii au loc în două faze ale fenomenului de ciocnire: faza de comprimare şi faza de relaxare. In faza de comprimare, care începe la momentul t_{ko} cînd începe ciocnirea, centrele de greutate ale corpurilor se apropie pînă la o distanţă minimă, atinsă la sfîrşitul fazei la momentul intermediar t''_k, cînd vitezele centrelor celor două corpuri au valori egale. In faza de relaxare, care are loc în intervalul de timp t''_k şi t'_k (t'_k fiind momentul în care se termină ciocnirea), centrele de greutate ale corpurilor se depărtează, revenind la sfîrşitul ciocnirii la poziţia lor relativă iniţială. Forţa locală de contact F, singura forţă percutantă în timpul ciocnirii, are o variaţie în timpul ciocnirii de forma reprezentată în fig.2.2. Inregistrînd, pe cale experimentală, această variaţie în timp

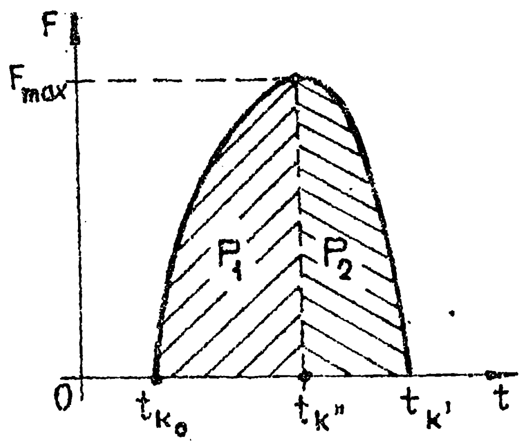


Fig. 2.2

se pot determina valorile P_1 şi P_2 ale percuţiilor ce acţionează între cele două corpuri în timpul ciocnirii în cele două faze ale ciocnirii. Coeficientul de restituire la ciocnire se defineşte ca raportul percuţiilor interioare ce acţionează în cele două faze ale ciocnirii:

$$R = \frac{P_2}{P_1} \qquad (2.45)$$

şi rezultă cu valori cuprinse între 0 şi 1. Valorile extreme corespund cazurilor ideale cînd deformaţiile sînt perfect plastice respectiv perfect elastice. Aplicînd legile ciocnirilor pentru fiecare corp în fiecare din cele două faze ale ciocnirii, se determină valoarea (2.41) a coeficientului de restituire la ciocnire în funcţie de vitezele de la începutul şi de la sfîrşitul ciocnirii.

In cazul cel mai general al ciocnirilor instantanee, există mai multe corpuri, legate între ele prin legături rigide, care participă la ciocnire. Dacă poziţia acestor corpuri depinde de m ($m < n$) coordonate generalizate, legătura unilaterală corespunzătoare cuplei percutante se exprimă printr-o relaţie de forma:

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_m) \geq 0 \qquad (2.46)$$

în care este verificată egalitatea în momentul ciocnirii. Notînd cu $\bar{q}_m$ matricea coloană formată cu cele m coordonate generalizate, cunoscînd mişcarea sistemului înainte de ciocnire, derivata totală a funcţiei legăturii unilaterale în raport cu timpul în timpul ciocnirii se poate scrie sub forma:

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T \dot{\bar{q}}_m \quad , \tag{2.47}$$

în care derivatele parţiale ale funcţiei legăturii unilaterale în raport cu coordonatele generalizate sînt calculate la începutul ciocnirii, în momentul t_{ko}, deoarece poziţia sistemului nu se modifică în timpul ciocnirii. Pentru ca să aibă loc ciocnirea de ordinul k, înainte de ciocnire funcţia f trebuie să fie descrescătoare, deci la începutul ciocnirii este necesar să fie îndeplinită condiţia:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_o = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T (\dot{\bar{q}}_m)_k < 0 \tag{2.48}$$

în care matricea coloană $(\dot{\bar{q}}_m)_k$ are ca elemente valorile cunoscute ale vitezelor generalizate la începutul ciocnirii. După ciocnire, exceptînd cazul ideal al ciocnirii perfect plastice, funcţia legăturii unilaterale trebuie să fie crescătoare, deci la sfîrşitul ciocnirii, în momentul t_k' valoarea derivatei (2.47) trebuie să fie pozitivă:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T (\dot{\bar{q}}_m')_k > 0 \tag{2.49}$$

unde matricea coloană $(\dot{\bar{q}}_m')_k$ are ca elemente valorile necunoscute ale vitezelor generalizate la sfîrşitul ciocnirii. In momentul intermediar t_k'', care separă cele două faze ale ciocnirii, funcţia legăturii unilaterale va avea valoarea minimă (avînd ca semnificaţie fizică deformaţia maximă a corpurilor în zona de contact, dar studiul ciocnirilor instantanee se neglijează deformaţiile), astfel încît în acest moment valoarea derivatei (2.47) devine:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T (\dot{\bar{q}}_m'')_k = 0 \quad , \tag{2.5o}$$

în care matricea coloană $(\dot{\bar{q}}_m'')_k$ are ca elemente valorile vitezelor generalizate la sfîrşitul fazei de comprimare şi la începutul fazei de relaxare.

Pentru studiul ciocnirii, în intervalul de timp în care are loc ciocnirea se aplică, pentru corpurile care participă la ciocnire, ecuaţiile lui Lagrange cu multiplicatorul λ al legăturii:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{cm}}{\partial \dot{\bar{q}}_m}\right)\right]_o - \left(\frac{\partial E_{cm}}{\partial \bar{q}_m}\right)_o = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o \qquad (2.51)$$

unde indicele o arată că în expresiile care rezultă coordonatele generalizate au valorile cunoscute de la începutul ciocnirii, invariabile în timpul ciocnirii, iar forţele nepercutante au fost neglijate. Deoarece energia cinetică a corpurilor care participă la ciocnire se poate exprima sub forma:

$$E_{cm} = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}_m^T \underline{b}_m \dot{\bar{q}}_m \qquad (2.52)$$

unde $\underline{b}_m$ este simetrică, avînd elementele dependente numai de coordonatele generalizate, ecuaţia matricială (2.51) se poate scrie:

$$\underline{b}_{mo} \frac{d}{dt}(\dot{\bar{q}}_m) + \sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j \left\{ \left(\frac{\partial \underline{b}_m}{\partial q_j}\right)_o - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{q}_m}(\bar{b}_{mj}^T)\right]_o \right\} \frac{d}{dt}(\bar{q}_m) =$$

$$= \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o \qquad (2.53)$$

Inmulţind ecuaţia matricială (2.53) cu dt şi integrînd de la momentul t_{ko} la un moment t din intervalul de timp al ciocnirii, deoarece $d\bar{q}_m = 0$, rezultă:

$$\underline{b}_{mo} \left\{ \dot{\bar{q}}_m - (\dot{\bar{q}}_m)_k \right\} = \left\{ \int_{t_{ko}}^{t} \lambda \, dt \right\} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o \qquad (2.54)$$

Notînd multiplicatorii de impuls:

$$\int_{t_{ko}}^{t''_k} \lambda \, dt = \mu_{o2} \; , \qquad \int_{t''_k}^{t'_k} \lambda \, dt = \mu_{21} \; , \qquad (2.55)$$

şi aplicînd (2.54) pentru cele două faze ale ciocnirii, se obţine:

$$\underline{b}_{mo}\left\{(\dot{\bar{q}}''_m)_k - (\dot{\bar{q}}_m)_k\right\} = \mu_{o2}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o$$

$$\underline{b}_{mo}\left\{(\dot{\bar{q}}'_m)_k - (\dot{\bar{q}}''_m)_k\right\} = \mu_{21}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o \qquad (2.56)$$

Deoarece matricea $\underline{b}_{mo}$ este nesingulară, relaţiile (2.56) se pot exprima şi sub forma:

$$(\dot{\bar{q}}''_m)_k - (\dot{\bar{q}}_m)_k = \mu_{o2}\underline{b}_{mo}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o$$

$$(\dot{\bar{q}}'_m)_k - (\dot{\bar{q}}''_m)_k = \mu_{21}\underline{b}_{mo}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o \qquad (2.57)$$

Inmulţind la stînga fiecare din relaţiile (2.57) cu $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T$ şi comparînd cu relaţiile:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T\left\{(\dot{\bar{q}}''_m)_k - (\dot{\bar{q}}_m)_k\right\} = -\left(\frac{df}{dt}\right)_o$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T\left\{(\dot{\bar{q}}'_m)_k - (\dot{\bar{q}}''_m)_k\right\} = \left(\frac{df}{dt}\right)_1 \qquad (2.58)$$

stabilite pe baza relaţiilor (2.48), (2.49) şi (2.5o), rezultă:

$$\mu_{o2}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T \underline{b}_{mo}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o = -\left(\frac{df}{dt}\right)_o$$

$$\mu_{21}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T \underline{b}_{mo}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o = \left(\frac{df}{dt}\right)_1 \qquad (2.59)$$

Deoarece coeficientul de restituire la ciocnire se exprimă prin:

$$R = \frac{\mu_{21}}{\mu_{o2}} = -\frac{\left(\frac{df}{dt}\right)_1}{\left(\frac{df}{dt}\right)_o} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T(\dot{\bar{q}}'_m)_k}{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T(\dot{\bar{q}}_m)_k}\,, \qquad (2.6o)$$

din (2.6o), (2.59) şi (2.57) rezultă valorile vitezelor generalizate la sfîrşitul ciocnirii:

$$(\dot{\bar{q}}'_m)_k = (\dot{\bar{q}}_m)_k - (1+R)\frac{\underline{b}_{mo}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o}{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T \underline{b}_{mo}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_m}\right)_o^T(\dot{\bar{q}}_m)_k\right] \qquad (2.61)$$

Pentru $m = 2$, $q_1 = x_i$, $q_2 = x_j$, $\underline{b}_{mo} = \begin{Vmatrix} m_i & 0 \\ 0 & m_j \end{Vmatrix}$ şi funcţia legăturii dată de (2.38) se verifică relaţiile (2.42) corespunzătoare cazului particular studiat anterior.

In mod cu totul analog se pot exprima relaţii de forma (2.61) pentru toate vitezele generalizate ale sistemului vibropercutant:

$$(\dot{\bar{q}}')_k = (\dot{\bar{q}})_k - (1 + R)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_o^T(\dot{\bar{q}})_k\right]\underline{A}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_o ,$$

$$\underline{A} = \frac{\underline{b}_o^{-1}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_o^T \underline{b}_o^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_o} \qquad (2.62)$$

deoarece toate relaţiile pe baza cărora au fost stabilite se pot exprima în funcţie de toate coordonatele generalizate. In (2.62) sînt incluse şi relaţiile (2.61), iar pentru coordonatele generalizate care nu apar explicit în funcţia legăturii unilaterale (2.46) rezultă vitezele la sfîrşitul ciocnirii egale cu cele de la începutul ciocnirii.

Relaţiile (2.48) se pot exprima, în mod analog, pentru toate coordonatele generalizate ale sistemului vibropercutant sub forma:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_o = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_o^T(\dot{\bar{q}})_k < 0 \qquad (2.48a)$$

De asemenea, înmulţind la stînga expresia matricială (2.62) cu $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_o^T$, rezultă:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_o^T(\dot{\bar{q}}')_k = -R\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right)_o^T(\dot{\bar{q}})_k > 0 \qquad (2.49a)$$

Relaţiile (2.61) sau (2.62) sînt foarte utile în studiul sistemelor vibropercutante cu mai multe grade de libertate şi sub această formă reprezintă o exprimare matricială originală a unor relaţii cunoscute în literatura de specialitate [27], [149].

2.3.2. Modelarea matematică a ciocnirilor neinstantanee

Fenomenul real de ciocnire este mult mai complex decît reprezentarea sa în cazul ciocnirilor instantanee. In primul rînd, în studiul dinamicii sistemelor vibropercutante, fenomenul de ciocnire are caracter profund neliniar şi este necesar să se ţină seama de influenţa unui număr mare de parametrii, depinzînd de forma şi dimensiunile geometrice ale corpurilor care se ciocnesc, de materialele din care sînt confecţionate, de anumite caracteristici cinematice şi dinamice. In al doilea rînd, fenomenul de ciocnire este însoţit de procesul de propagare, în volumele celor două corpuri care se ciocnesc, al undelor generate de ciocnire. Procesul de propagare al undelor în timpul ciocnirii modifică starea de tensiune în întreg volumul fiecăruia din corpurile care se ciocnesc, astfel încît apar solicitări dinamice suplimentare, care complică studiul fenomenului de ciocnire.

Se consideră cupla percutantă din fig.2.1. In cazul ciocnirilor neinstantanee, egalitatea din relaţia (2.38) este verificată numai la începutul şi la sfîrşitul ciocnirii. Notînd cu x_{ij} apropierea relativă a centrelor de greutate a celor două corpuri în timpul ciocnirii, egală cu suma deformaţiilor acestora, se poate exprima relaţia:

$$x_{ij} = x_i - (x_j + \delta_{ij}) \geq 0 \quad , \tag{2.63}$$

valabilă în timpul ciocnirii, în care egalitatea este verificată la începutul şi sfîrşitul ciocnirii în ipoteza neglijării deformaţiilor remanente în urma ciocnirii. Pentru a avea loc ciocnirea, viteza relativă $(\dot{x}_{ij})_k$ de la începutul ciocnirii trebuie să aibă valori pozitive, deci:

$$(\dot{x}_{ij})_k = (\dot{x}_i)_k - (\dot{x}_j)_k > 0 \qquad (2.64)$$

Pentru descrierea matematică a ciocnirilor neinstantanee, o importanţă deosebită o are evaluarea forţei locale de contact ca funcţie de caracteristicile geometrice şi mecanice ale corpurilor care se ciocnesc, astfel încît aceasta să reflecte cît mai aproape de realitate interacţiunile din zona de contact şi fenomenul complex de ciocnire. In urma încercărilor experimentale, s-a ajuns la concluzia că forma cea mai generală a caracteristicii de forţă a interacţiunii de contact se poate exprima prin:

$$F = \Psi (x_{ij}, \dot{x}_{ij}), \qquad (2.65)$$

în care funcţia Ψ este neliniară, atît în raport cu deformaţia totală x_{ij}, cît şi în raport cu viteza relativă $\dot{x}_{ij}$, depinzînd de caracterul deformaţiilor şi de caracteristicile geometrice şi mecanice ale corpurilor. In prezenţa deformaţiilor plastice, funcţia Ψ are un caracter hysterezic. Dacă se pot neglija deformaţiile plastice, forţa locală de contact F nu mai depinde de viteza relativă $\dot{x}_{ij}$, astfel încît caracteristica de forţă a interacţiunii de contact se poate exprima printr-o caracteristică elastică neliniară.

In literatura de specialitate [10] se consideră că o bună aproximare a fenomenului complex de ciocnire este reflectată de o caracteristică de forţă a interacţiunii de contact de forma:

$$F = d_1 x_{ij}^{\frac{2m+1}{2m}} \pm b_1 \dot{x}_{ij}^2 \qquad (2.66)$$

în care semnul "+" corespunde fazei de comprimare pînă la apropierea maximă a centrelor de greutate, cînd $\dot{x}_{ij} = 0$, iar semnul "-" corespunde fazei de relaxare. In (2.66), m=1,2,... este un număr întreg ce depinde de densitatea păturilor exterioare ale suprafeţelor corpurilor din zona de contact, astfel încît m creşte cu mărirea densităţii, iar coeficienţii d_1 şi b_1 depind de caracteristicile geometrice şi mecanice ale corpurilor. Primul termen din (2.66) exprimă influenţa deformaţiilor elastice, în timp ce al doilea termen se datorește deformaţiilor plastice, dublul semn imprimînd caracteristicii de forţă a interacţiunii de contact caracterul hysterezic. In cazul particular în care deformaţiile plastice pot fi neglijate, pentru $m=1$ se obţine formula lui Hertz:

$$F = d_2 x_{ij}^{\frac{3}{2}} = \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}\, x_{ij}^{\frac{3}{2}} \quad , \tag{2.67}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal, ν este coeficientul lui Poisson (coeficientul de contracţie transversală), iar r_1 şi r_2 sînt razele de curbură ale suprafeţelor de contact în punctul teoretic de contact la începutul ciocnirii.

La sistemele vibropercutante, datorită îndesării păturilor exterioare ale suprafeţelor care interacţionează în timpul ciocnirilor ca urmare a ciocnirilor multiple, densitatea acestor pături creşte, astfel încît primul termen din (2.66) se apropie de o dependenţă liniară. Rezultă că, în cazul mecanismelor vibropercutante, după un timp suficient de mare de funcţionare al acestora, în ipoteza neglijării deformaţiilor plastice, caracteristica de forţă a interacţiunii de contact se poate exprima printr-o dependenţă liniară de forma:

$$F = d_3 x_{ij} = \frac{dE}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\, x_{ij} \quad , \tag{2.68}$$

unde coeficientul d_3 are expresia dată, dacă suprafeţele de contact nedeformate au razele de curbură în punctul teoretic de contact de valori mari, iar coeficientul adimensional d se determină pe cale experimentală.

Din numeroasele încercări experimentale efectuate pentru evaluarea forței locale de contact în timpul ciocnirii, în ipoteza neglijării deformațiilor plastice, a rezultat că expresia ei depinde, în mare măsură, de razele de curbură ale suprafețelor de contact în punctul teoretic de contact, așa cum rezultă și din expresiile (2.67) și (2.68). Pe lîngă acestea, la determinarea experimentală a coeficientului d_1, s-a constatat că prezintă o importanță deosebită microgeometria suprafețelor aflate în contact, precum și existența unor straturi rigidizate, datorită aplicării unor tratamente termice superficiale. Trebuie precizat că formula lui Hertz (2.67) este valabilă în această formă dacă suprafețele de contact sînt rectificate și nu sînt tratate termic.

Din considerațiile anterioare rezultă că, în cazurile frecvent întîlnite în aplicații, în care se pot neglija deformațiile plastice, pentru studiul ciocnirilor la sistemele vibropercutante, efectul forței locale de contact este echivalent cu introducerea între corpurile care se ciocnesc, în timpul ciocnirii, a unui "tampon" elastic, de masă și dimensiuni geometrice neglijabile, avînd caracteristica elastică neliniară de forma primului termen din (2.66) sau de forma (2.67). In condițiile precizate, caracteristica elastică a acestui "tampon" poate fi considerată chiar liniară, de forma (2.68).

Pentru modelarea matematică a ciocnirilor neinstantanee pentru cupla percutantă din fig.2.1, pe lîngă celelalte forțe ce acționează asupra corpurilor de mase m_i și m_j în intervalele de timp dintre ciocniri, în timpul ciocnirii de ordinul k trebuie luată în considerație și forța locală de contact, corespunzătoare interacțiunii corpurilor aflate în contact. Intervalul de timp al ciocnirii fiind relativ redus, chiar și în cazul ciocnirilor considerate neinstantanee, efectul celorlalte forţe ce acţionează asupra corpurilor aflate în contact poate fi neglijat faţă de efectul forţei locale de contact, care are o valoare medie mare în timpul ciocnirii. Prin urmare, pentru studiul într-o primă aproximaţie a ciocnirii, se pot scrie ecuaţiile diferenţiale de forma:

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= -\psi(x_{ij},\dot{x}_{ij}) \\ m_j\ddot{x}_j &= \psi(x_{ij},\dot{x}_{ij}) \quad , \end{aligned} \tag{2.69}$$

în care trebuie să se ţină seama de relaţia (2.63) petru exprimarea deformaţiei totale şi a vitezei relative. Dacă ecuaţiile diferenţiale (2.69) se pot integra, ţinînd seama de condiţiile iniţiale $(x_i)_k = \delta_{ij} + (x_j)_k$, $(\dot{x}_i)_k$ şi $(\dot{x}_j)_k$ de la momentul t_{ko}, cînd începe ciocnirea de ordinul k, se obţin legile mişcării celor două corpuri în timpul ciocnirii sub forma:

$$\begin{aligned} x_i &= f_1\left[t,(x_i)_k,(x_j)_k,(\dot{x}_i)_k,(\dot{x}_j)_k\right] \\ x_j &= f_2\left[t,(x_i)_k,(x_j)_k,(\dot{x}_i)_k,(\dot{x}_j)_k\right] \quad , \end{aligned} \tag{2.70}$$

iar prin derivarea lor în raport cu timpul rezultă variaţia vitezelor în timpul ciocnirii:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{df_1}{dt} = g_1\left[t,(x_i)_k,(x_j)_k,(\dot{x}_i)_k,(\dot{x}_j)_k\right] \\ \dot{x}_j &= \frac{df_2}{dt} = g_2\left[t,(x_i)_k,(x_j)_k,(\dot{x}_i)_k,(\dot{x}_j)_k\right] . \end{aligned} \tag{2.71}$$

Punînd condiţia $x_i(t'_k) = \delta_{ij} + x_j(t'_k)$ în (2.7o), se determină momentul t'_k în care se termină ciocnirea, pe care înlocuindu-l în (2.7o) şi (2.71), rezultă poziţia şi vitezele corpurilor la sfîrşitul ciocnirii:

$$\begin{aligned} (x'_i)_k &= f_1\left[t'_k,(x_i)_k,(x_j)_k,(\dot{x}_i)_k,(\dot{x}_j)_k\right] \\ (x'_j)_k &= f_2\left[t'_k,(x_i)_k,(x_j)_k,(\dot{x}_i)_k,(\dot{x}_j)_k\right] \\ (\dot{x}'_i)_k &= g_1\left[t'_k,(x_i)_k,(x_j)_k,(\dot{x}_i)_k,(\dot{x}_j)_k\right] \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$(\dot{x}_j')_k = g_2\left[t_k', (x_i)_k, (x_j)_k, (\dot{x}_i)_k, (\dot{x}_j)_k\right]$$

Din condiţia $\dot{x}_i(t_k'') = \dot{x}_j(t_k'')$ se poate determina şi momentul intermediar t_k'' care separă cele două faze ale ciocnirii, în care forţa percutantă F şi apropierea relativă a centrelor de greutate x_{ij} au valori maxime.

Dacă deformaţiile remanente în urma ciocnirii nu se pot neglija, momentul t_k' la care se sfîrşeşte ciocnirea se determină din condiţia ca forţa locală de contact să aibă valoarea nulă şi la sfîrşitul ciocnirii.

Se observă că, pentru studiul în primă aproximaţie al fenomenului de ciocnire, adunînd relaţiile (2.69) membru cu membru, rezultă valabilitatea legii conservării impulsului total în timpul ciocnirii. Ca urmare, în orice moment al ciocnirii trebuie să fie verificate relaţiile:

$$m_i\dot{x}_i + m_j\dot{x}_j = m_i(\dot{x}_i)_k + m_j(\dot{x}_j)_k \tag{2.73}$$

Pentru cazul general al ciocnirilor neinstantanee, chiar şi în studiul în primă aproximaţie al ciocnirii, ecuaţiile diferenţiale de forma (2.69) sînt greu de integrat. Dacă se pot neglija deformaţiile plastice, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării în timpul ciocnirii sînt mai uşor de integrat, astfel încît, în urma studiului în primă aproximaţie al ciocnirii, cunoscînd parametrii iniţiali ai ciocnirii la momentul t_{ko} se pot determina parametrii finali (2.72) la momentul t_k'. In acest caz, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării în timpul ciocnirii sînt de forma:

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= -\Psi(x_{ij}) \\ m_j\ddot{x}_j &= \Psi(x_{ij}) \,. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Notînd $m_{ij} = \dfrac{m_i m_j}{m_i+m_j}$, ecuaţiile diferenţiale (2.74) conduc la ecuaţia diferenţială:

$$m_{ij}\ddot{x}_{ij} = -\Psi(x_{ij}) \quad , \tag{2.75}$$

care se poate integra. Se obţine legea vitezei relative:

$$\dot{x}_{ij}^2 = (\dot{x}_{ij})_k^2 - \frac{2}{m_{ij}} \int_0^{x_{ij}} \Psi(x_{ij})dx_{ij} \tag{2.76}$$

şi legea de variaţie a deformaţiei totale din relaţia:

$$t = t_{ko} + \int_0^{x_{ij}} \frac{dx_{ij}}{\sqrt{(\dot{x}_{ij})_k^2 - \frac{2}{m_{ij}} \int_0^{x_{ij}} \Psi(x_{ij})dx_{ij}}} \tag{2.77}$$

Deformaţia maximă $(x''_{ij})_k$ rezultă din condiţia $\dot{x}_{ij} = 0$ şi se determină din relaţia:

$$\int_0^{(x''_{ij})_k} \Psi(x_{ij})dx_{ij} = \frac{m_{ij}(\dot{x}_{ij})_k^2}{2} \quad , \tag{2.78}$$

iar durata ciocnirii devine:

$$\tau = t'_k - t_{ko} = 2 \int_0^{(x''_{ij})_k} \frac{dx_{ij}}{(\dot{x}_{ij})_k^2 - \frac{2}{m_{ij}} \int_0^{x_{ij}} \Psi(x_{ij})dx_{ij}} \tag{2.79}$$

Efectuînd integrarea din (2.76) pînă la sfîrşitul ciocnirii, cînd x_{ij} ajunge din nou la valoarea nulă, rezultă:

$$(\dot{x}'_{ij})_k^2 = (\dot{x}_{ij})_k^2 - \frac{2}{m_{ij}} \left[\int_0^{(x''_{ij})_k} \Psi(x_{ij})dx_{ij} + \int_{(x''_{ij})_k}^{0} \Psi(x_{ij})dx_{ij} \right] \tag{2.80}$$

Deoarece paranteza mare din (2.80) are valoarea nulă, se obţine:

$$(\dot{x}'_{ij})_k = -(\dot{x}_{ij})_k \quad , \tag{2.81}$$

relaţie care conduce la (2.41) pentru valoarea coeficientului de restituire $R = 1$, corespunzătoare ciocnirilor perfect elastice. Prin urmare, vitezele după ciocnire în acest caz se determină la fel ca şi în cazul ciocnirilor instantanee prin particularizare pentru ciocniri perfect elastice.

Cercetările experimentale au evidenţiat faptul că starea de tensiune în imediata vecinătate a zonei de contact se formează cu mult mai repede decît în profunzimea volumelor corespunzătoare corpurilor care se ciocnesc. Această proprietate a permis să se emită ipoteza tensionării cvasistatice a acestei zone de ciocnire, astfel încît pentru determinarea forţei locale de contact să se ţină seama de influenţa deformaţiilor elastice şi plastice, neglijîndu-se, însă, influenţa vitezei relative în timpul ciocnirii. Conform acestei ipoteze, în faza de comprimare forţa locală de contact are o variaţie crescătoare în funcţie de deformaţia totală elastică, pînă la o valoare F^*, determinată experimental, la care încep să apară şi deformaţii plastice.
In continuare, forţa locală de contact creşte pînă la valoarea maximă F_{max} de la sfîrşitul fazei de comprimare, această variaţie fiind produsă atît de deformaţiile elastice, cît şi de cele plastice. In faza de relaxare, variaţia forţei locale de contact se datoreşte numai deformaţiilor elastice, deformaţiile plastice avînd un caracter remanent. Reprezentarea grafică a variaţiei forţei locale de contact în funcţie de deformaţia totală are forma din fig.2.3. Prin urmare, în a doua parte a fazei de comprimare, cînd forţa locală de contact are valori mai mari decît F^*, deformaţia totală x_{ij} are două componente: deformaţia elastică x_e şi cea plastică x_p, deci

$$x_{ij} = x_e + x_p \tag{2.82}$$

In cele mai frecvente cazuri, se poate admite că deformaţia elastică are o variaţie dată de formula lui Hertz (2.67) sub forma:

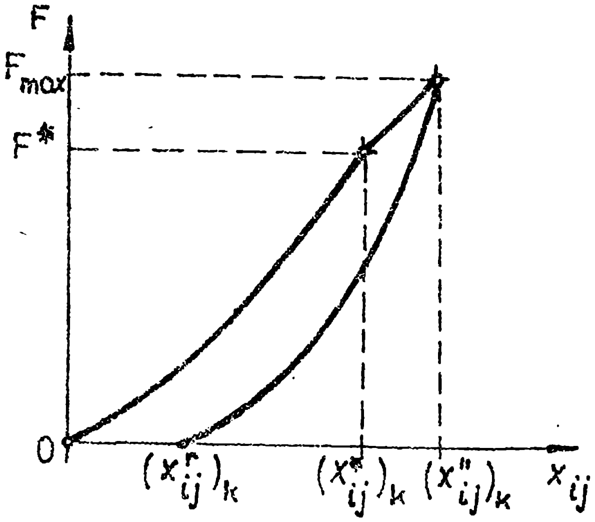


Fig. 2.3

$$x_e = \left(\frac{F}{d_2}\right)^{\frac{2}{3}} , \qquad (2.83)$$

iar deformaţia plastică are o variaţie liniară în raport cu forţa locală de contact, dată de:

$$x_p = \frac{F - F^*}{b_2} , \qquad (2.84)$$

unde b_2 se determină experimental.

Pentru studiul ciocnirii pe baza ipotezei considerate, se integrează ecuaţia diferenţială (2.75) în intervalele de timp corespunzătoare celor două părţi ale fazei de comprimare şi în intervalul de timp al fazei de relaxare. In prima parte a fazei de comprimare, cînd se produc numai deformaţii elastice, se obţine:

$$m_{ij}\frac{(\dot{x}^*_{ij})^2_k}{2} = m_{ij}\frac{(\dot{x}_{ij})^2_k}{2} - \frac{2}{5}\,\frac{F^{*\frac{5}{3}}}{d_2^{\frac{2}{3}}} . \qquad (2.85)$$

Pentru ca să se producă şi deformaţii plastice, membrul drept al relaţiei (2.85) trebuie să fie pozitiv, deci viteza relativă de la începutul ciocnirii $(\dot{x}_{ij})_k$ trebuie să fie mai mare decît valoarea critică dată de:

$$v_{cr} = \frac{2}{(5m_{ij})^{1/2}}\,\frac{F^{*\frac{5}{6}}}{d_2^{\frac{1}{3}}} . \qquad (2.86)$$

In partea a doua a fazei de comprimare, deoarece viteza relativă la sfîrşitul fazei este nulă, rezultă:

$$0 = \frac{m_{ij}(\dot{x}^{*}_{ij})^2_k}{2} - \frac{2}{5}\,\frac{F^{\frac{5}{3}}_{max} - F^{*\frac{5}{3}}}{d_2^{\frac{2}{3}}} - \frac{F^2_{max} - F^{*2}}{2b_2} \tag{2.87}$$

In faza de relaxare, integrarea ecuației (2.75) conduce la:

$$m_{ij}\,\frac{(\dot{x}'_{ij})^2_k}{2} = \frac{2}{5}\,\frac{F^{\frac{5}{3}}_{max}}{d_2^{\frac{2}{3}}} \tag{2.88}$$

Ținînd seama de (2.41) și eliminînd $(\dot{x}^{*}_{ij})_k$ și F_{max} între relațiile (2.85), (2.87) și (2.88), coeficientul de restituire la ciocnire se obține din ecuația:

$$1 - R^2 = \eta\,(R^{\frac{12}{5}} - \xi^{\frac{12}{5}}) \tag{2.89}$$

unde parametrii adimensionali η și ξ au valorile:

$$\eta = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{6}{5}} \frac{1}{b_2}\left[m_{ij}\; d_2^4(\dot{x}_{ij})^2_k\right]^{\frac{1}{5}} \quad ; \qquad \xi = \frac{v_{cr}}{(\dot{x}_{ij})_k} \tag{2.90}$$

Se constată că și în acest mod de tratare a fenomenului de ciocnire, vitezele la sfîrșitul ciocnirii se pot determina din relațiile (2.42), în care coeficientul de restituire la ciocnire R se determină din (2.89), relație cunoscută în literatura de specialitate [27], [101], dar determinată în cazul particular al ciocnirii unei sfere de oțel cu un limitator fix. Spre deosebire de cazul ciocnirilor instantanee, coeficientul de restituire la ciocnire depinde de viteza relativă de la începutul ciocnirii, așa cum rezultă și experimental, iar în urma ciocnirii se obține o deformație remanentă, dată de deformația plastică din timpul ciocnirii, exprimată prin:

$$(x^r_{ij})_k = \frac{F_{max} - F^{*}}{b_2} \quad . \tag{2.91}$$

In evaluarea forţei locale de contact şi în studiul ciocnirilor neinstantanee nu s-a ţinut seama de oscilaţiile păturilor exterioare ale suprafeţelor corpurilor în zona de contact şi de propagarea undelor elasto-plastice în volumele corpurilor, fenomene care însoţesc întotdeauna ciocnirile reale. Oscilaţiile păturilor exterioare ale suprafeţelor din zona de contact apar în primele momente după începutul ciocnirii, odată cu apariţia primelor deformaţii elastice. Aceste oscilaţii se propagă în volumele corpurilor sub forma undelor elasto-plastice atît în timpul ciocnirii, cît şi după terminarea ei. Fenomenele oscilatorii din timpul ciocnirii imprimă caracteristicii de forţă a interacţiunii de contact un caracter dinamic, astfel încît forţa locală de contact depinde explicit şi de timp, iar aceasta la rîndul ei, influenţează procesele oscilatorii, acţionînd ca o forţă perturbatoare în zona de contact. In cazul ciocnirilor centrice ponderea cea mai mare o au oscilaţiile longitudinale, a căror propagare se face după normala comună la suprafeţele de contact în punctul teoretic de contact. Cercetările experimentale au arătat că efectul acestor oscilaţii asupra caracteristicii de forţă a interacţiunii de contact şi asupra fenomenului de ciocnire în ansamblu este apreciabil în cazul în care corpurile care se ciocnesc au dimensiuni longitudinale mari. Pentru corpurile scurte perioadele proprii inferioare sînt cu mult mai mici decît intervalul de timp în care are loc ciocnirea, astfel se pot neglija procesele oscilatorii în timpul ciocnirii. De asemenea, pentru aceste corpuri, datorită frecărilor interne, procesele oscilatorii se amortizează pînă la începutul ciocnirii următoare.

2.4. Stabilirea condițiilor de existență ale mișcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante

2.4.1. Sisteme vibropercutante liniare între ciocniri, neamortizate, cu o cuplă percutantă, avînd n grade de libertate

În studiul sistemelor vibropercutante liniare între ciocniri, în marea majoritate a cazurilor ciocnirile se pot considera instantanee. De asemenea, pentru studiul teoretic al mișcărilor periodice ale acestor sisteme se pot considera modele de translație, avînd ecuația diferențială matricială a mișcării între două ciocniri consecutive (2.36), care este de aceeași formă cu ecuația (2.35) corespunzătoare cazului general.

Pentru studiul în primă aproximație al acestor sisteme, se neglijează forțele de amortizare vîscoasă, astfel încît ecuația diferențială matricială a mișcării între două ciocniri consecutive este (2.37). Pentru integrarea ei, se caută, în primul rînd, soluția generală a ecuației omogene (componenta tranzitorie a mișcării) de forma:

$$\bar{x}_t = \bar{A}\sin(pt + \varphi) \quad , \tag{2.92}$$

care, înlocuită în ecuația omogenă corespunzătoare ecuației (2.37) conduce la:

$$\left\{\underline{k} - p^2\underline{m}\right\}\bar{A} = \bar{0} \quad . \tag{2.93}$$

Din ecuația caracteristică:

$$\Delta(p^2) = \left|\underline{k} - p^2\underline{m}\right| = 0 \tag{2.94}$$

rezultă cele n pulsații proprii p_s $(s = 1,\ldots,n)$. Vectorii proprii normați corespunzători se obțin din ecuațiile matriciale:

$$\left\{\underline{k} - p_s^2\,\underline{m}\right\}\mu_s = \bar{0} \;, \qquad s = 1,\ldots,n \quad , \tag{2.95}$$

fiecare dintre ele fiind echivalentă cu un sistem de n ecuații algebrice liniare și omogene avînd ca necunoscute cei $n-1$

coeficienţi de distribuţie corespunzători unei pulsaţii proprii, obţinuţi prin împărţirea elementelor matricii $\overline{A}$ din (2.93) cu primul element A_1. Pe baza ecuaţiilor (2.95) se stabilesc uşor relaţiile de ortogonalitate ale modurilor naturale de vibraţii:

$$\overline{\mu}_r^T \underline{k}\, \overline{\mu}_s = \overline{\mu}_r^T \underline{m}\, \overline{\mu}_s = 0 \qquad (2.96)$$

pentru două pulsaţii proprii diferite p_s şi p_r, precum şi re..iile:

$$\overline{\mu}_s^T \underline{k}\, \overline{\mu}_s = p_s^2\, \overline{\mu}_s^T \underline{m}\, \mu_s \quad , \quad s = 1,\ldots,n \,. \qquad (2.97)$$

Cunoscînd vectorii proprii ai sistemului, se poate construi matricea modală normată:

$$\underline{\mu} = \left\| \overline{\mu}_1\ \overline{\mu}_2\ \ldots\ \overline{\mu}_s\ \ldots\ \overline{\mu}_n \right\| \qquad (2.98)$$

cu ajutorul căreia ecuaţiile diferenţiale ale mişcării între două ciocniri consecutive, date de (2.37), se pot decupla, obţinîndu-se ecuaţiile diferenţiale în coordonatele normale. Pentru aceasta, se efectuează transformarea:

$$\overline{x} = \underline{\mu}\, \underline{\xi} \qquad (2.99)$$

în care matricea coloană $\underline{\xi}$ are ca elemente coordonatele normale. Inlocuind (2.99) în (2.37) şi înmulţind la stînga cu transpusa matricii modale, rezultă:

$$\underline{\mu}^T \underline{m}\, \underline{\mu}\, \ddot{\underline{\xi}} + \underline{\mu}^T \underline{k}\, \underline{\mu}\, \underline{\xi} = \underline{\mu}^T \overline{F}(t) \,. \qquad (2.100)$$

Ţinînd seama de relaţiile de ortogonalitate (2.96), se constată că matricile $\underline{\mu}^T \underline{m}\, \underline{\mu}$ şi $\underline{\mu}^T \underline{k}\, \underline{\mu}$ sînt matrici patrate diagonale. Notînd:

$$\underline{M} = \underline{\mu}^T \underline{m}\, \underline{\mu} \quad ; \quad \underline{P} = \begin{Vmatrix} p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_n \end{Vmatrix} \qquad (2.101)$$

şi ţinînd seama de relaţiile (2.97), ecuaţiile (2.100) se pot exprima sub forma:

$$\ddot{\overline{\xi}} + \underline{P}^2 \overline{\xi} = \underline{M}^{-1} \underset{\sim}{\mu}^T \overline{F}(t) \quad , \qquad (2.1o2)$$

care sînt decuplate.

Folosind notațiile:

$$\underline{COS}\ (\tilde{p}t) = \left\| \begin{matrix} \cos p_1 t & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \cos p_2 t & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \cos p_3 t & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \cos p_n t \end{matrix} \right\|$$

$$\underline{SIN}(\tilde{p}t\ ) = \left\| \begin{matrix} \sin p_1 t & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sin p_2 t & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sin p_3 t & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sin p_n t \end{matrix} \right\| , \qquad (2.1o3)$$

soluția generală a ecuației omogene corespunzătoare ecuației (2.1o2) se poate exprima sub forma:

$$\overline{\xi}_t = \underline{COS}(\tilde{p}t)\overline{C}_1 + \underline{SIN}(\tilde{p}t)\overline{C}_2 \quad , \qquad (2.1o4)$$

unde matricile coloană $\overline{C}_1$ și $\overline{C}_2$ au ca elemente constante arbitrare.

Pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației matriciale (2.1o2), care este componenta forțată a mișcării, se va folosi metoda variației constantelor. Se caută soluția de forma (2.1o4), dar avînd în locul elementelor constante din $\overline{C}_1$ și $\overline{C}_2$ funcții variabile în timp, care urmează să fie determinate din condiția ca soluția considerată să verifice ecuația diferențială (2.1o2). Luînd această soluție sub forma:

$$\overline{\xi}_f = \underline{COS}(\tilde{p}t)\overline{K}_1 + \underline{SIN}(\tilde{p}t)\overline{K}_2 \qquad (2.1o5)$$

și ținînd seama de relațiile:

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{SIN}(\tilde{p}t)\right] = \underline{P}\cdot\underline{COS}(\tilde{p}t) \qquad (2.1o6)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{COS}(\tilde{p}t)\right] = -\ \underline{P}\ \underline{SIN}(\tilde{p}t) \quad ,$$

deduse din a doua relaţie (2.1o1) şi (2.1o3), rezultă:

$$\dot{\bar{\xi}}_f = -\ \underline{P}\ \underline{SIN}(\tilde{p}t).\bar{K}_1 + \underline{P}\ \underline{COS}(\tilde{p}t).\bar{K}_2 + \underline{COS}(\tilde{p}t)\ \dot{\bar{K}}_1 + \\ + \underline{SIN}(\tilde{p}t)\ \dot{\bar{K}}_2 \qquad (2.1o7)$$

Pentru determinarea funcţiilor necunoscute din $\bar{K}_1$ şi $\bar{K}_2$, se mai impune condiţia:

$$\underline{COS}(\tilde{p}t)\ \dot{\bar{K}}_1 + \underline{SIN}(\tilde{p}t)\ \dot{\bar{K}}_2 = \bar{0} \qquad (2.1o8)$$

Derivînd (2.1o7) în raport cu timpul, ţinînd seama de (2.1o8), se obţine:

$$\ddot{\bar{\xi}}_f = -\ \underline{P}^2\underline{COS}(\tilde{p}t)\ \bar{K}_1 - \underline{P}^2\underline{SIN}(\tilde{p}t)\ \bar{K}_2 - \underline{P}\ \underline{SIN}(\tilde{p}t)\ \dot{\bar{K}}_1 + \\ + \underline{P}\ \underline{COS}(\tilde{p}t)\ \dot{\bar{K}}_2 \qquad (2.1o9)$$

Inlocuind (2.1o5) şi (2.1o9) în (2.1o2), rezultă:

$$-\ \underline{SIN}(\tilde{p}t)\ \dot{\bar{K}}_1 + COS(\tilde{p}t)\ \dot{\bar{K}}_2 = \underline{P}^{-1}.\underline{M}^{-1}\ \boldsymbol{\mu}^T\bar{F}(t) \qquad (2.11o)$$

Din (2.1o8) şi (2.11o) se determină $\dot{\bar{K}}_1$ şi $\dot{\bar{K}}_2$, după care, prin integrare, se obţin funcţiile de timp necunoscute din $\bar{K}_1$ şi $\bar{K}_2$. Deoarece matricile patrate $\underline{P}^{-1}$, $\underline{M}^{-1}$, $\underline{SIN}(\tilde{p}t)$ şi $\underline{COS}(\tilde{p}t)$ sînt diagonale, astfel încît produsul lor matricial este comutativ, soluţia (2.1o5) se poate exprima sub forma:

$$\bar{\xi}_f = \underline{P}^{-1}\underline{M}^{-1}\int_0^t \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t-\tau)\right]\boldsymbol{\mu}^T\bar{F}(\tau)\,d\tau \qquad (2.111)$$

Dacă forţele perturbatoare din $\bar{F}(t)$ sînt toate armonice, avînd aceeaşi pulsaţie ω , exprimate prin:

$$\bar{F}(t) = \bar{F}_0 \sin \omega t \quad , \qquad (2.112)$$

componenta forţată a mişcării rezultă de aceeaşi formă:

$$\bar{\xi}_f = \bar{\xi}_0 \sin \omega t \qquad (2.113)$$

Impunînd condiţia ca (2.113) să verifice (2.1o2), se obţine:

$$\bar{\xi}_0 = \frac{\{\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I}\}^*}{|\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I}|} \cdot \underline{M}^{-1} \mu^T \bar{F}_0 \quad , \tag{2.114}$$

în care $\{\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I}\}^*$ este matricea complementară corespunzătoare matricii $\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I}$. Deoarece această matrice este diagonală şi inversa sa va fi diagonală, de forma:

$$\{\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I}\}^{-1} = \frac{\{\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I}\}^*}{|\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I}|} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{p_1^2 - \omega^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2^2 - \omega^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p_3^2 - \omega^2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p_n^2 - \omega^2} \end{matrix} \right\| , \tag{2.115}$$

astfel încît (2.114) se mai poate scrie:

$$\bar{\xi}_0 = \{\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I}\}^{-1} \cdot \underline{M}^{-1} \mu^T \bar{F}_0 \tag{2.116}$$

Dacă pulsaţia ω a forţelor perturbatoare coincide cu una din pulsaţiile proprii ale sistemului, matricea $\{\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I}\}$ nu se mai poate inversa, iar componenta forţată a mişcării se determină cu formula generală (2.111).

Ţinînd seama de (2.99), soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale matriceale a mişcării între ciocnirile de ordinul k şi $k+1$, pentru cazul general corespunzător unor forţe perturbatoare periodice oarecare, toate avînd aceeaşi perioadă T, se poate exprima sub forma:

$$\bar{x} = \mu \left\{ \underline{COS}\left[\bar{p}(t-t_k)\right]\bar{C}_1 + \underline{SIN}\left[\bar{p}(t-t_k)\right]\bar{C}_2 \right\} +$$
$$+ \mu\, \underline{P}^{-1}\underline{M}^{-1} \int_0^t \underline{SIN}\left[\bar{p}(t-\tau)\right] \mu^T \bar{F}(\tau)\, d\tau \tag{2.117}$$

în care constantele arbitrare din $\bar{C}_1$ şi $\bar{C}_2$ se determină din condiţiile iniţiale corespunzătoare sfîrşitului ciocnirii de ordinul k. Aceste condiţii iniţiale sînt:

$$t = t_k \quad , \quad \overline{x} = (\overline{x})_k \quad , \quad \dot{\overline{x}} = (\dot{\overline{x}}')_k \quad , \tag{2.118}$$

unde elementele matricii $(\overline{x})_k$ trebuie să verifice egalitatea din relaţia de forma (2.46) a funcţiei legăturii unilaterale, iar matricea $(\dot{\overline{x}}')_k$ se exprimă în funcţie de vitezele de la începutul ciocnirii prin relaţii de forma (2.62).

Deoarece:

$$\dot{\overline{x}} = \underline{\mu}\ \underline{P} \left\{ - \underline{SIN} \left[\widetilde{p}(t-t_k) \right] \overline{C}_1 + \underline{COS} \left[\widetilde{p}(t-t_k) \right] \overline{C}_2 \right\} + + \underline{\mu}\ \underline{M}^{-1} \cdot \int_0^t \underline{COS} \left[\widetilde{p}(t-\tau) \right] \underline{\mu}^T \overline{F}(\tau) d\tau \quad , \tag{2.119}$$

impunînd condiţiile (2.118), rezultă:

$$(\overline{x})_k = \underline{\mu}\ \overline{C}_1 + \underline{\mu}\ \underline{P}^{-1} \underline{M}^{-1} \int_0^{t_k} \underline{SIN} \left[\widetilde{p}(t_k-\tau) \right] \underline{\mu}^T \overline{F}(\tau) d\tau$$

$$(\dot{\overline{x}}')_k = \underline{\mu}\ \underline{P}\ \overline{C}_2 + \underline{\mu}\ \underline{M}^{-1} \int_0^{t_k} \underline{COS} \left[\widetilde{p}(t_k-\tau) \right] \underline{\mu}^T \overline{F}(\tau) d\tau \tag{2.120}$$

Din (2.120) se obţine:

$$\overline{C}_1 = \underline{\mu}^{-1} (\overline{x})_k - \underline{P}^{-1} \underline{M}^{-1} \int_0^{t_k} \underline{SIN} \left[\widetilde{p}(t_k-\tau) \right] \underline{\mu}^T \overline{F}(\tau) d\tau$$

$$\overline{C}_2 = \underline{P}^{-1} \underline{\mu}^{-1} (\dot{\overline{x}}')_k - \underline{P}^{-1} \underline{M}^{-1} \int_0^{t_k} \underline{COS} \left[\widetilde{p}(t_k-\tau) \right] \underline{\mu}^T \overline{F}(\tau) d\tau \tag{2.121}$$

Inlocuind (2.121) în (2.117), rezultă:

$$\overline{x} = \underline{\mu} \left\{ \underline{COS} \left[\widetilde{p}(t-t_k) \right] \underline{\mu}^{-1} (\overline{x})_k + \underline{SIN} \left[\widetilde{p}(t-t_k) \right] \underline{P}^{-1} \underline{\mu}^{-1} (\dot{\overline{x}}')_k \right\} + + \underline{\mu}\ \underline{P}^{-1} \underline{M}^{-1} \int_{t_k}^{t} \underline{SIN} \left[\widetilde{p}(t-\tau) \right] \underline{\mu}^T \overline{F}(\tau) d\tau \tag{2.122}$$

Pentru determinarea condiţiilor iniţiale pentru următorul interval al mişcării dintre două ciocniri consecutive, este necesar să se calculeze valorile $(\overline{x})_{k+1}$ şi $(\dot{\overline{x}})_{k+1}$ la momentul t_{k+1}, corespunzătoare începutului ciocnirii de ordinul k+1.

Momentul t_{k+1} rezultă ca valoarea variabilei t imediat următoare momentului t_k, pentru care este îndeplinită egalitatea în relația de forma (2.46), în care coordonatele generalizate au variația în timp dată de (2.122). După determinarea acestui moment, se obține:

$$(\overline{x})_{k+1} = \underline{\mu}\left\{\underline{COS}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\overline{x})_k + \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{P}^{-1}\underline{\mu}^{-1}(\dot{\overline{x}}')_k\right\} + \underline{\mu}\,\underline{P}^{-1}\underline{M}^{-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-\tau)\right]\underline{\mu}^T\overline{F}(\tau)\,d\tau \quad (2.123)$$

$$(\dot{\overline{x}})_{k+1} = \underline{\mu}\left\{-\underline{P}\,\underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\overline{x})_k + \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\dot{\overline{x}}')_k\right\} + \underline{\mu}\,\underline{M}^{-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\underline{COS}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-\tau)\right]\underline{\mu}^T\overline{F}(\tau)\,d\tau\ .$$

Condițiile ca mișcarea sistemului vibropercutant să fie periodică, avînd perioada un multiplu întreg r al perioadei T a forțelor perturbatoare, sînt:

$$t_{k+1} = t_k + rT\ ;\quad (\overline{x})_{k+1} = (\overline{x})_k = \overline{x}_c\ ;\quad (\dot{\overline{x}})_{k+1} = (\dot{\overline{x}})_k = \dot{\overline{x}}_c\ . \quad (2.124)$$

Impunînd condițiile (2.124) în (2.123) și observînd că pentru matricile diagonale de forma (2.1o3) sînt valabile formulele de transformare corespunzătoare funcțiilor trigonometrice obișnuite, rezultă:

$$2\dot{\overline{x}}_c - (1+R)\underline{A}\,\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T\dot{\overline{x}}_c\right] = \underline{\mu}\,\underline{M}^{-1}\,\underline{SIN}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\tilde{p}rT\right)\overline{S}_1 \quad (2.125)$$

$$2\underline{P}\,\underline{SIN}^2\left(\tfrac{1}{2}\tilde{p}rT\right)\underline{\mu}^{-1}\overline{x}_c = \underline{M}^{-1}\overline{S}_2 - \underline{SIN}\left(\tilde{p}rT\right)\underline{\mu}^{-1}\dot{\overline{x}}_c \quad (2.126)$$

în care s-au exprimat vitezele la sfîrșitul ciocnirilor în funcție de cele de la începutul ciocnirilor pe baza relațiilor de forma (2.62) și s-a notat:

$$S_1 = \int_{t_k}^{t_k+rT}\underline{SIN}\left[\tilde{p}\left(\tau - t_k - \tfrac{1}{2}rT\right)\right]\underline{\mu}^T\overline{F}(\tau)\,d\tau \quad (2.127)$$

$$\overline{S}_2 = \int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{SIN}\left[\overline{p}(\tau - t_k)\right] \underline{\mu}^T \overline{F}(\tau)\, d\tau$$

Deoarece $\overline{S}_1$ şi $\overline{S}_2$ depind de t_k, din (2.125) se determină elementele matricii $\dot{\overline{x}}_c$ în funcţie de t_k, iar din (2.126), după înlocuirea matricii $\dot{\overline{x}}_c$, rezultă poziţia sistemului vibropercutant în momentele în care au loc ciocnirile ca funcţie de t_k. Momentele t_k în care au loc ciocnirile se determină din condiţia ca elementele matricii $\overline{x}_c$ să verifice egalitatea din relaţia de forma (2.46):

$$f(x_{1c}, x_{2c}, \ldots, x_{nc}) = 0 \tag{2.128}$$

Pentru sistemul vibropercutant considerat funcţia f a legăturii unilaterale este liniară în coordonatele x_j $(j = 1,2,\ldots,n)$, fiind de forma din relaţia (2.38).

Se constată că relaţiile (2.125), (2.126) şi (2.128) reprezintă condiţiile de existenţă ale mişcărilor periodice ale sistemului vibropercutant considerat. Din aceste condiţii trebuie să rezulte valori reale pentru t_k, $\overline{x}_c$ şi $\dot{\overline{x}}_c$. De asemenea, dacă ciocnirile au loc între corpurile de mase m_i şi m_j, trebuie să fie verificată relaţia:

$$\dot{x}_{ic} - \dot{x}_{jc} > 0 \tag{2.129}$$

corespunzătoare relaţiei (2.48 a) pentru funcţia legăturii unilaterale (2.38).

In cazul în care forţele perturbatoare sînt armonice, avînd expresiile (2.112), condiţiile de existenţă ale mişcărilor periodice pentru sistemul vibropercutant considerat se exprimă prin:

$$2\dot{\overline{x}}_c - (1+R)\underline{A}\,\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}\cdot\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}\right)^T \dot{\overline{x}}_c\right] = 2\omega\underline{\mu}\overline{G}\cos\omega t_k \tag{2.130}$$

$$\underline{P}\,\underline{SIN}\left(\pi r \frac{\tilde{\underline{p}}}{\omega}\right)\underline{\mu}^{-1}\overline{x}_c = \left\{\underline{P}\,\underline{SIN}\left(\pi r \frac{\tilde{\underline{p}}}{\omega}\right)\sin\omega t_k + \right.$$

$$+\omega\,\underline{\cos}(\pi r\frac{\tilde{\underline{p}}}{\omega})\cos\omega t_k\Big\}\,\overline{G} - \underline{\cos}(\pi r\frac{\tilde{\underline{p}}}{\omega})\,\underline{\mu}^{-1}\dot{\overline{x}}_c \qquad (2.131)$$

în care s-a notat:

$$\overline{G} = \left\{\underline{p}^2 - \omega^2\underline{I}\right\}^{-1}\underline{M}^{-1}\,\underline{\mu}^T\,\overline{F}_0 \qquad (2.132)$$

Şi în acest caz, din relaţiile (2.130), (2.131) şi (2.128), trebuie să rezulte valori reale pentru t_k, $\overline{x}_c$, $\dot{\overline{x}}_c$ şi să fie verificată relaţia (2.129).

Condiţiile de existenţă ale mişcărilor periodice pentru sistemul vibropercutant considerat s-au exprimat astfel încît să se poată determina uşor parametrii mişcării. Deoarece matricea $\underline{m}$ este diagonală şi funcţia legăturii unilaterale este de forma (2.38), matricea $\underline{A}$ din (2.62) devine:

$$\underline{A} = \frac{\underline{m}^{-1}}{(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}})^T\underline{m}^{-1}\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}} = \frac{\underline{m}^{-1}}{\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}}\ , \qquad (2.133)$$

fiind matrice diagonală. Ecuaţia matricială (2.125) conduce la ecuaţiile:

$$2\dot{x}_{lc} = \sum_{h=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{n}\mu_{hs}\,\mu_{ls}\,\frac{S_1^{hs}}{M_{ss}\sin(\frac{1}{2}p_s rT)}\right\},$$

$$l = 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\ ,$$

$$2\dot{x}_{ic} - \frac{(1+R)(\dot{x}_{ic}-\dot{x}_{jc})}{1+\frac{m_i}{m_j}} = \sum_{h=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{n}\mu_{hs}\,\mu_{is}\,\frac{S_1^{hs}}{M_{ss}\sin(\frac{1}{2}p_s rT)}\right\},$$

$$(2.134)$$

$$2\dot{x}_{jc} + \frac{(1+R)(\dot{x}_{ic}-\dot{x}_{jc})}{1+\frac{m_j}{m_i}} = \sum_{h=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{n}\mu_{hs}\,\mu_{js}\,\frac{S_1^{hs}}{M_{ss}\sin(\frac{1}{2}p_s rT)}\right\}$$

iar din (2.126) rezultă:

$$x_{lc} = \sum_{h=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{n}\mu_{hs}\,\mu_{ls}\,\frac{S_2^{hs}}{2p_s M_{ss}\sin^2(\frac{1}{2}p_s rT)}\right\} -$$

$$- \sum_{h=1}^{n} \left\{ \sum_{s=1}^{n} \mu_{hs}^{(-1)} \mu_{\ell s} \frac{1}{p_s} \operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2} p_s r T\right) \dot{x}_{hc} \right\} , \qquad (2.135)$$

în care $\mu_{hs}^{(-1)}$ reprezintă elementul cu indicii h și s din matricea μ^{-1} și s-a notat:

$$S_1^{hs} = \int_{t_k}^{t_k+rT} \sin\left[p_s\left(\tau - t_k - \frac{1}{2} rT\right)\right] F_h(\tau)\, d\tau$$

$$S_2^{hs} = \int_{t_k}^{t_k+rT} \sin\left[p_s(\tau - t_k)\right] F_h(\tau)\, d\tau . \qquad (2.136)$$

Dacă forțele perturbatoare sînt armonice, avînd expresiile (2.112), condițiile de existență ale mișcărilor periodice, date de (2.13o) și (2.131), conduc la ecuațiile:

$$\dot{x}_{\ell c} = \left(\sum_{s=1}^{n} \mu_{\ell s} G_s\right) \omega \cos \omega t_k \; ,$$

$$\ell = 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n \; ,$$

$$2\dot{x}_{ic} - \frac{(1+R)(\dot{x}_{ic}-\dot{x}_{jc})}{1 + \frac{m_i}{m_j}} = 2\omega\left(\sum_{s=1}^{n} \mu_{is} G_s\right)\cos \omega t_k \; ,$$

$$2\dot{x}_{jc} + \frac{(1+R)(\dot{x}_{ic}-\dot{x}_{jc})}{1 + \frac{m_j}{m_i}} = 2\omega\left(\sum_{s=1}^{n} \mu_{js} G_s\right)\cos \omega t_k \; , \qquad (2.137)$$

$$x_{\ell c} = \left(\sum_{s=1}^{n} \mu_{\ell s} G_s\right)\sin \omega t_k + \omega \left[\sum_{s=1}^{n} \mu_{\ell s} \frac{1}{p_s} \operatorname{cotg}\left(p_s r \frac{\pi}{\omega}\right) G_s\right] \cos \omega t_k -$$

$$- \sum_{h=1}^{n} \left\{ \sum_{s=1}^{n} \mu_{hs}^{(-1)} \mu_{\ell s} \frac{1}{p_s} \operatorname{cotg}\left(p_s r \frac{\pi}{\omega}\right) \dot{x}_{hc} \right\} .$$

In cazul în care cupla percutantă corespunde ciocnirii corpului de masă m_i cu un limitator fix, relația pentru legătura unilaterală este dată de (2.43), cu ajutorul căreia condiţiile de existenţă ale mişcărilor periodice ale sistemului vibropercutant se exprimă în mod analog, avînd expresiile matriciale (2.125) şi (2.126), dacă forţele perturbatoare sînt periodice oarecare, sau expresiile (2.130) şi (2.131), dacă forţele perturbatoare sînt armonice.

2.4.2. Sisteme vibropercutante liniare între ciocniri, cu amortizare vîscoasă uniformă, cu o cuplă percutantă, avînd n grade de libertate.

In cazul în care forţele de amortizare vîscoasă nu se pot neglija, ecuaţia diferenţială matricială a mişcării sistemului vibropercutant între două ciocniri consecutive este dată de (2.36). Cu ajutorul matricii modale (2.98) corespunzătoare sistemului fără amortizare vîscoasă, efectuînd transformarea de coordonate (2.99), această ecuaţie se exprimă sub forma:

$$\ddot{\underline{\xi}} + \underline{M}^{-1}\,\underline{\mu}^{T}\underline{c}\,\underline{\mu}\,\dot{\underline{\xi}} + \underline{P}^{2}\,\underline{\xi} = \underline{M}^{-1}\underline{\mu}^{T}\underline{F}(t) \quad . \tag{2.138}$$

In general matricea $\underline{\mu}^{T}\underline{c}\,\underline{\mu}$ nu rezultă diagonală, astfel încît, în acest caz, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării nu se pot decupla, ele fiind cuplate prin forţele de amortizare vîscoasă. Există cazuri în care elementele matricii $\underline{c}$ sînt proporţionale cu elementele matricii $\underline{k}$ sau cu elementele matricii $\underline{m}$ şi în aceste cazuri ecuaţiile diferenţiale ale mişcării se decuplează. In aceste cazuri se spune că sistemul are amortizare vîscoasă uniformă. De exemplu, dacă amortizarea provine din proprietăţile vîscoase ale materialelor elementelor deformabile, se poate emite ipoteza unei similitudini între distribuţia parametrilor caracterizînd elasticitatea şi distribuţia parametrilor ce caracterizează amortizarea, astfel încît rezultă:

$$\underline{c}_1 = 2\alpha\,\underline{k} \tag{2.139}$$

In mod asemănător, dacă amortizarea se datoreşte efectului forţelor rezistente în mişcarea maselor sistemului în mediul în care se deplasează, coeficienţii de amortizare sînt proporţionali cu mărimile maselor:

$$\underline{c}_2 = 2\beta\,\underline{m} \tag{2.140}$$

In cele mai frecvente cazuri, cele două tipuri de amortizare se cumulează, astfel încît matricea de amortizare se exprimă sub forma:

$$\underline{c} = \underline{c}_1 + \underline{c}_2 \tag{2.141}$$

In aceste cazuri, rezultă:

$$\underline{M}^{-1}\,\underline{\mu}^T\underline{c}\,\underline{\mu} = 2\underline{E} \tag{2.142}$$

unde $\underline{E}$ este matrice diagonală, dată de:

$$2\underline{E} = \underline{M}^{-1}\,\underline{\mu}^T\underline{c}_1\underline{\mu} + \underline{M}^{-1}\,\underline{\mu}^T\underline{c}_2\,\underline{\mu} = 2\alpha\underline{P}^2 + 2\beta\,\underline{I}\ , \tag{2.143}$$

avînd elementele:

$$\varepsilon_s = \alpha\,p_s^2 + \beta \quad , \quad s = 1,2,\dots,n\ . \tag{2.144}$$

Pentru sisteme cu amortizare vîscoasă uniformă, ecuaţia diferenţială matricială (2.138) devine:

$$\ddot{\underline{\xi}} + 2\underline{E}\,\dot{\underline{\xi}} + \underline{P}^2\,\underline{\xi} = \underline{M}^{-1}\underline{\mu}^T\overline{F}(t)\quad , \tag{2.145}$$

în care ecuaţiile diferenţiale sînt decuplate. Notînd:

$$\underline{EXP}(-\widetilde{\varepsilon}t) = \begin{Vmatrix} e^{-\varepsilon_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\varepsilon_3 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{-\varepsilon_n t} \end{Vmatrix} \tag{2.146}$$

şi efectuînd transformarea de coordonate:

$$\overline{\xi} = \underline{EXP}\,(-\widetilde{\varepsilon}\,t)\overline{u}\quad , \tag{2.147}$$

ecuaţia (2.145) rezultă de forma:

$$\ddot{\overline{u}} + (\underline{P}^2 - \underline{E}^2)\overline{u} = \underline{EXP}\,(\widetilde{\varepsilon}\,t)\underline{M}^{-1}\,\underline{\mu}^T\overline{F}(t) \tag{2.148}$$

La stabilirea expresiei (2.148), s-a ţinut seama de relaţiile evidente:

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}\, t)\right. = -\underline{E}\ \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}\, t); \quad \underline{EXP}^{-1}(-\tilde{\varepsilon}\, t) = \underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\, t) \ , \tag{2.149}$$

Deoarece, în general, forţele de amortizare vîscoasă ce acţionează în sistemele vibropercutante au valori mici, coeficienţii α şi β din (2.144) sînt mici, astfel încît sînt îndeplinite relaţiile $p_s > \varepsilon_s$ pentru toate valorile lui s de la 1 la n. Aceste relaţii sînt îndeplinite, dacă se verifică următoarele condiţii:

$$\alpha < \frac{1}{p_1 + p_n} \ , \qquad \beta < \alpha\ p_1 p_n \ , \tag{2.15o}$$

unde p_1 este pulsaţia proprie cea mai mică şi p_n este pulsaţia proprie cea mai mare pentru sistemul fără amortizare. Cu aceste condiţii îndeplinite, se poate nota:

$$\underline{H}^2 = \underline{P}^2 - \underline{E}^2 \tag{2.151}$$

în care matricea diagonală $\underline{H}$ are elementele:

$$h_s = \sqrt{p_s^2 - \varepsilon_s^2} \ , \quad s = 1,2,\ldots,n. \tag{2.152}$$

Inlocuind (2.151) în (2.148), se constată că această ecuaţie matricială este de forma (2.1o2), pentru care componenta forţată este dată de (2.111), iar componenta tranzitorie se exprimă prin (2.1o4). Prin urmare, se poate scrie:

$$\overline{u}(t) = \underline{COS}(\tilde{h}t)\overline{C}_1 + \underline{SIN}(\tilde{h}t)\overline{C}_2 + \\ + \underline{H}^{-1}\underline{M}^{-1} \int_0^t \underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\tau)\underline{SIN}\left[\tilde{h}(t-\tau)\right]\underline{\mu}^T\overline{F}(\tau)\,d\tau \tag{2.153}$$

Ţinînd seama de transformările (2.147) şi (2.99), rezultă:

$$\overline{x}(t) = \underline{\mu}\ \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}\, t)\left\{\underline{COS}(\tilde{h}t)\overline{C}_1 + \underline{SIN}(\tilde{h}t)\overline{C}_2\right\} + \\ + \underline{\mu}\ \underline{H}^{-1}\underline{M}^{-1} \int_0^t \underline{EXP}\left[-\tilde{\varepsilon}(t-\tau)\right]\underline{SIN}\left[\tilde{h}(t-\tau)\right]\underline{\mu}^T\overline{F}(\tau)\,d\tau \tag{2.154}$$

Deoarece derivata în raport cu timpul a expresiei (2.154) este dată de:

$$\dot{\bar{x}} = \underline{\mu}\ \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}\, t) \Big\{ -\underline{E}\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\bar{C}_1 + \underline{SIN}(\tilde{h}t)\bar{C}_2\right] +$$

$$+ \underline{H}\left[-\underline{SIN}(\tilde{h}t)\bar{C}_1 + \underline{COS}(\tilde{h}t)\bar{C}_2\right]\Big\} +$$

$$+ \underline{\mu}\ \underline{H}^{-1}\underline{M}^{-1} \Big\{ -\underline{E} \int_0^t \underline{EXP}\left[-\tilde{\varepsilon}(t-\tau)\right]\underline{SIN}\left[\tilde{h}(t-\tau)\right] \underline{\mu}^T\bar{F}(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \underline{H} \int_0^t \underline{EXP}\left[-\tilde{\varepsilon}(t-\tau)\right]\underline{COS}\left[\tilde{h}(t-\tau)\right] \underline{\mu}^T\bar{F}(\tau)\,d\tau \qquad , (2.155)$$

impunînd condiţiile iniţiale (2.118) se determină constantele arbitrare din $\bar{C}_1$ şi $\bar{C}_2$, corespunzătoare intevalului de timp (t_k, t_{k+1}) dintre două ciocniri consecutive. Legea mişcării sistemului în acest interval de timp rezultă:

$$\bar{x} = \underline{\mu}\ \underline{EXP}\left[-\tilde{\varepsilon}(t-t_k)\right]\Big\{\underline{COS}\left[\tilde{h}(t-t_k)\right] \underline{\mu}^{-1}(\bar{x})_k +$$

$$+ \underline{H}^{-1}\underline{E}\ \underline{SIN}\left[\tilde{h}(t-t_k)\right] \underline{\mu}^{-1}(\bar{x})_k + \underline{H}^{-1}\underline{SIN}\left[\tilde{h}(t-t_k)\right] \underline{\mu}^{-1}(\dot{\bar{x}}')_k\Big\} +$$

$$+ \underline{\mu}\ \underline{H}^{-1}\underline{M}^{-1} \int_{t_k}^t \underline{EXP}\left[-\tilde{\varepsilon}(t-\tau)\right]\underline{SIN}\left[\tilde{h}(t-\tau)\right] \underline{\mu}^T\bar{F}(\tau)\,d\tau \ .$$

(2.156)

Determinînd din (2.156) parametrii $(\bar{x})_{k+1}$ şi $(\dot{\bar{x}})_{k+1}$ de la începutul ciocnirii următoare şi punînd condiţiile (2.124) de periodicitate a mişcării, se obţin condiţiile de existenţă ale mişcărilor periodice:

$$2\underline{H}\left\{\underline{CH}(\tilde{\varepsilon}\, rT) - \underline{COS}(\tilde{h}rT)\right\} \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_0 + (1+R)\left[\left(-\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^{-1}\dot{\bar{x}}\right]_0 \underline{L}_1\ \underline{\mu}^{-1}\underline{A}\ \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} =$$

$$= \underline{L}_1\bar{J}_3 + \underline{L}_2\bar{J}_4 \qquad (2.157)$$

$$\underline{L}_1\ \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_0 = \underline{SIN}(\tilde{h}rT)\ \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_0 - \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}\, rT)\bar{J}_4 \quad , \qquad (2.158)$$

în care s-au făcut notaţiile:

$$\underline{CH}(\tilde{\varepsilon}\, rT) = \frac{1}{2}\left[\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\, rT) + \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}\, rT)\right]$$

$$\underline{L}_1 = \underline{H}\left[\underline{COS}(\tilde{h}rT) - \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}\, rT)\right] - \underline{E}\ \underline{SIN}(\tilde{h}rT)$$

$$\underline{L}_2 = \underline{H}\ \underline{SIN}(\tilde{h}rT) + \underline{E}\left[\underline{COS}(\tilde{h}rT) - \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon}\, rT)\right]$$

$$\overline{S}_4 = \underline{M}^{-1}\int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{EXP}\left[\tilde{\varepsilon}(\tau - t_k)\right]\underline{SIN}\left[\tilde{h}(\tau - t_k)\right]\underline{\mu}^T\overline{F}(\tau)\,d\tau \qquad (2.159)$$

$$\overline{S}_3 = \underline{M}^{-1}\int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{EXP}\left[\tilde{\varepsilon}(\tau - t_k)\right]\underline{COS}\left[\tilde{h}(\tau - t_k)\right]\underline{\mu}^T\overline{F}(\tau)\,d\tau$$

Din (2.157) se determină vitezele la începutul ciocnirilor ca funcţii de t_k, iar din (2.158) rezultă poziţia sistemului în momentele în care au loc ciocnirile. Inlocuind elementele matricii $\overline{x}_c$ în (2.128) se obţine t_k, după care se pot exprima elementele matricilor $\overline{x}_c$ şi $\dot{\overline{x}}_c$ numai în funcţie de parametrii cunoscuţi. Valorile astfel determinate trebuie să fie reale şi să verifice relaţia (2.129).

Dacă forţele perturbatoare sînt armonice, avînd expresiile date de (2.112), componenta forţată corespunzătoare ecuaţiei matriciale (2.143) rezultă:

$$\overline{u}_f = \underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\, t)\left\{(\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I})\sin\omega t - 2\omega\underline{E}\cos\omega t\right\}\overline{G}_1 , \qquad (2.160)$$

în care s-a notat:

$$\overline{G}_1 = \left\{(\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I})^2 + 4\omega^2\underline{E}^2\right\}^{-1}\underline{M}^{-1}\underline{\mu}^T\overline{F}_0 \qquad (2.161)$$

Ţinînd seama de transformările (2.147) şi (2.99), soluţia generală a ecuaţiei (2.36) între ciocnirile de ordinul k şi $k+1$ se poate scrie sub forma:

$$\overline{x} = \underline{\mu}\ \underline{EXP}\left[-\tilde{\varepsilon}(t-t_k)\right]\left\{\underline{COS}\left[\tilde{h}(t-t_k)\right]\overline{C}_1 + \underline{SIN}\left[\tilde{h}(t-t_k)\right]\overline{C}_2\right\} +$$
$$+ \underline{\mu}\left\{(\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I})\sin\omega t - 2\omega\underline{E}\cos\omega t\right\}\overline{G}_1 . \qquad (2.162)$$

Pentru acest caz condiţiile de existenţă ale mişcărilor periodice ale sistemului vibropercutant rezultă din relaţiile:

$$2\underline{H}\left[\underline{CH}(\tilde{\varepsilon}\, rT)-\underline{COS}(\tilde{h}rT)\right]\underline{\mu}^{-1}\dot{\tilde{x}}_c+(1+R)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}\right)^T\dot{\tilde{x}}_c\right]\underline{L}_1\,\underline{\mu}^{-1}\underline{A}\,\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}=$$

$$=2\omega\underline{H}\left[\underline{CH}(\tilde{\varepsilon}\, rT)-\underline{COS}(\tilde{h}rT)\right]\left\{2\omega\underline{E}\sin\omega t_k+(\underline{P}^2-\omega^2\underline{I})\cos\omega t_k\right\}\overline{G}_1 \tag{2.163}$$

$$\underline{L}_1\,\underline{\mu}^{-1}\overline{x}_c=\underline{SIN}(\tilde{h}rT)\,\underline{\mu}^{-1}\dot{\overline{x}}_c+\underline{L}_1\Big\{(\underline{P}^2-\omega^2\underline{I})\sin\omega t_k-$$

$$-2\omega\underline{E}\cos\omega t_k\Big\}\overline{G}_1-\omega\,\underline{SIN}(\tilde{h}rT)\Big\{2\omega\underline{E}\sin\omega t_k+$$

$$+(\underline{P}^2-\omega^2\underline{I})\cos\omega t_k\Big\}\overline{G}_1\,. \tag{2.164}$$

2.4.3. Sisteme vibropercutante liniare între ciocniri, cuplate prin amortizare vîscoasă, cu o cuplă percutantă, avînd n grade de libertate

Deoarece, în acest caz, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării, exprimate prin (2.36), nu se pot decupla, este necesar să se determine soluţia generală a acestei ecuaţii matriciale între două ciocniri consecutive.

Pentru determinarea soluţiei tranzitorii, se consideră ecuaţia diferenţială matricială omogenă:

$$\underline{m}\ddot{\overline{x}}+\underline{c}\dot{\overline{x}}+\underline{k}\overline{x}=\overline{0}\quad, \tag{2.165}$$

la care se caută soluţii de forma:

$$\overline{x}_t=\overline{A}\,e^{\lambda t} \tag{2.166}$$

Punînd condiţia ca (2.166) să verifice (2.165), după simplificarea cu $e^{\lambda t}\neq 0$, rezultă:

$$\left\{\lambda^2\underline{m}+\lambda\underline{c}+\underline{k}\right\}\overline{A}=\overline{0} \tag{2.167}$$

Ecuaţia (2.167) corespunde unui sistem de ecuaţii algebrice, liniar şi omogen. Pentru a avea soluţii diferite de soluţia banală, determinantul sistemului trebuie să fie nul. Se obţine, astfel, ecuaţia caracteristică:

$$|\lambda^2 \underline{m} + \lambda \underline{c} + \underline{k}| = 0 \quad , \tag{2.168}$$

de gradul 2n în λ, din care se determină cele 2n valori proprii λ_{s1}, λ_{s2} ($s = 1,2,\ldots,n$). In cazul general al ecuaţiilor diferenţiale cuplate prin amortizare vîscoasă, valorile proprii rezultă două cîte două complex conjugate, de forma:

$$\begin{aligned} \lambda_{s1} &= -\varepsilon_s + i\, h_s \quad , \\ \lambda_{s2} &= -\varepsilon_s - i\, h_s \quad , \end{aligned} \tag{2.169}$$

unde $i = \sqrt{-1}$ reprezintă simbolul imaginar.

Impărţind fiecare ecuaţie algebrică din (2.167) cu primul element $\bar{A}_1$ al matricii $\bar{A}$, pentru valorile proprii λ_{s1} şi λ_{s2} din (2.167) se obţine:

$$\begin{aligned} \{\lambda_{s1}^2 \underline{m} + \lambda_{s1}\underline{c} + \underline{k}\}\bar{\nu}_{s1} &= \bar{0} \quad , \\ \{\lambda_{s2}^2 \underline{m} + \lambda_{s2}\underline{c} + \underline{k}\}\bar{\nu}_{s2} &= \bar{0} \quad ; \end{aligned} \tag{2.17o}$$

Fiecare din ecuaţiile matriciale (2.17o) reprezintă un sistem de n ecuaţii algebrice liniar dependente cu n-1 necunoscute, din care se determină elementele vectorilor proprii $\bar{\nu}_{s1}$ şi $\bar{\nu}_{s2}$, care au primul element egal cu 1.

Deoarece matricile $\underline{m}$, $\underline{c}$ şi $\underline{k}$ au elementele reale, rezultă că elementele corespunzătoare ale vectorilor proprii $\bar{\nu}_{s1}$ şi $\bar{\nu}_{s2}$, în afară de primul element, vor fi şi ele complex conjugate.

Pe baza acestei observaţii, se poate scrie:

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_{s1} &= \bar{\nu}_{sR} + i\, \bar{\nu}_{sI} \quad , \\ \bar{\nu}_{s2} &= \bar{\nu}_{sR} - i\, \bar{\nu}_{sI} \quad , \end{aligned} \tag{2.171}$$

în care matricea $\bar{\nu}_{sR}$ conţine părţile reale ale elementelor vectorilor proprii consideraţi, avînd primul element egal cu 1, iar matricea $\bar{\nu}_{sI}$ conţine părţile imaginare ale acestora, avînd primul element egal cu 0.

Inlocuind (2.169) şi (2,171) în (2.170) şi separînd părţile reale şi cele imaginare din ecuaţiile matriciale care rezultă, se pot exprima relaţiile:

$$\left\{(\varepsilon_s^2-h_s^2)\underline{m}-\varepsilon_s\underline{c}+\underline{k}\right\}\bar{\nu}_{sR}-\left\{h_s\underline{c}-2\varepsilon_s h_s\underline{m}\right\}\bar{\nu}_{sI}=\bar{0}\quad,$$
$$(2.172)$$
$$\left\{h_s\underline{c}-2\varepsilon_s h_s\underline{m}\right\}\bar{\nu}_{sR}+\left\{(\varepsilon_s^2-h_s^2)\underline{m}-\varepsilon_s\underline{c}+\underline{k}\right\}\bar{\nu}_{sI}=\bar{0}\quad,$$

care pot fi folosite pentru determinarea elementelor matricilor $\bar{\nu}_{sR}$ şi $\bar{\nu}_{sI}$.

Cu ajutorul vectorilor proprii, determinaţi ca mai sus pentru toate valorile proprii ale sistemului, se pot construi două matrici modale, avînd elementele corespunzătoare complex conjugate:

$$\underline{\nu}_1=\left\|\bar{\nu}_{11}\ \bar{\nu}_{21}\dots\ \bar{\nu}_{s1}\dots\ \bar{\nu}_{n1}\right\|=\underline{\nu}_R+i\underline{\nu}_I\quad,$$
$$(2.173)$$
$$\underline{\nu}_2=\left\|\bar{\nu}_{12}\ \bar{\nu}_{22}\dots\ \bar{\nu}_{s2}\dots\ \bar{\nu}_{n2}\right\|=\underline{\nu}_R-i\underline{\nu}_I\quad,$$

unde s-au folosit notaţiile:

$$\underline{\nu}_R=\left\|\bar{\nu}_{1R}\ \bar{\nu}_{2R}\dots\ \bar{\nu}_{sR}\dots\bar{\nu}_{nR}\right\|\quad,$$
$$(2.174)$$
$$\underline{\nu}_I=\left\|\bar{\nu}_{1I}\ \bar{\nu}_{2I}\dots\ \bar{\nu}_{sI}\dots\ \bar{\nu}_{nI}\right\|\quad.$$

Folosind matricile $\underline{\nu}_R$ şi $\underline{\nu}_I$, corespunzătoare părţilor reale şi imaginare ale matricilor modale, pe baza relaţiilor (2.172) se poate scrie:

$$\underline{m}\,\underline{\nu}_R(\underline{E}^2-\underline{H}^2)-\underline{c}\,\underline{\nu}_R\underline{E}+\underline{k}\,\underline{\nu}_R+2\underline{m}\,\underline{\nu}_I\underline{E}\,\underline{H}-\underline{c}\,\underline{\nu}_I\underline{H}=\underline{0}\quad,$$
$$(2.175)$$
$$-2\underline{m}\,\underline{\nu}_R\underline{E}\,\underline{H}+\underline{c}\,\underline{\nu}_R\underline{H}+\underline{m}\,\underline{\nu}_I(\underline{E}^2-\underline{H}^2)-\underline{c}\,\underline{\nu}_I\underline{E}+\underline{k}\,\underline{\nu}_I=\underline{0}\quad,$$

în care $\underline{E}$ este matricea diagonală cu elementele ε_s, iar $\underline{H}$ e matricea diagonală cu elementele h_s $(s=1,2,\dots,n)$. Relaţiile matriciale (2.175) înglobează toate relaţiile de forma (2.172) pentru toate valorile proprii ale sistemului.

Utilizînd matricile modale (2.173) şi matricile diagonale

$\underline{EXP}(\tilde{\lambda}_1 t)$ şi $\underline{EXP}(\tilde{\lambda}_2 t)$, construite pe baza relaţiei (2.146) cu elementele corespunzătoare valorilor proprii (2.169), soluţia generală a ecuaţiei (2.165) şi, ca urmare, soluţia tranzitorie corespunzătoare ecuaţiei (2.36) se poate scrie sub forma:

$$\bar{x}_t = \underline{\nu}_1 \underline{EXP}(\tilde{\lambda}_1 t)\bar{A}_1 + \underline{\nu}_2 \underline{EXP}(\tilde{\lambda}_2 t)\bar{A}_2 \quad , \tag{2.176}$$

în care matricile $\bar{A}_1$ şi $\bar{A}_2$ au ca elemente constante arbitrare.

Ţinînd seama de faptul că pentru funcţiile matriciale de forma (2.146) sînt valabile formulele de transformare corespunzătoare funcţiilor exponenţiale obişnuite, expresia (2.176) se poate scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_t &= (\underline{\nu}_R + i\underline{\nu}_I)\underline{EXP}\left[(-\tilde{\varepsilon} + i\tilde{h})t\right]\bar{A}_1 + \\
&+ (\underline{\nu}_R - i\underline{\nu}_I)\underline{EXP}\left[(-\tilde{\varepsilon} - i\tilde{h})t\right]\bar{A}_2 = \\
&= \underline{\nu}_R \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\Big\{\left[\underline{COS}(\tilde{h}t) + i\,\underline{SIN}(\tilde{h}t)\right]\bar{A}_1 + \\
&+ \left[\underline{COS}(\tilde{h}t) - i\,\underline{SIN}(\tilde{h}t)\right]\bar{A}_2\Big\} + \underline{\nu}_I \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\Big\{i\left[\underline{COS}(\tilde{h}t) + \right. \\
&\left. + i\,\underline{SIN}(\tilde{h}t)\right]\bar{A}_1 - i\left[\underline{COS}(\tilde{h}t) - i\,\underline{SIN}(\tilde{h}t)\right]\bar{A}_2\Big\} = \\
&= \underline{\nu}_R \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)(\bar{A}_1 + \bar{A}_2) + i\,\underline{SIN}(\tilde{h}t)(\bar{A}_1 - \bar{A}_2)\right] + \\
&+ \underline{\nu}_I \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[i\,\underline{COS}(\tilde{h}t)(\bar{A}_1 - \bar{A}_2) - \underline{SIN}(\tilde{h}t)(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)\right] .
\end{aligned} \tag{2.177}$$

Din (2.177) rezultă că matricile $\bar{A}_1$ şi $\bar{A}_2$ trebuie să aibă elementele corespunzătoare complex conjugate, astfel încît se poate scrie:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 + \bar{A}_2 &= \bar{C}_1 \quad , \\
i(\bar{A}_1 - \bar{A}_2) &= \bar{C}_2 \quad ,
\end{aligned} \tag{2.178}$$

unde matricile $\bar{C}_1$ şi $\bar{C}_2$ au ca elemente constante arbitrare reale.

Inlocuind (2.178) în (2.177), soluţia tranzitorie a sistemului devine:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_t &= \underline{\nu}_R \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\bar{C}_1 + \underline{SIN}(\tilde{h}t)\bar{C}_2\right] + \\
&+ \underline{\nu}_I \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\bar{C}_2 - \underline{SIN}(\tilde{h}t)\bar{C}_1\right] .
\end{aligned} \tag{2.179}$$

Pentru determinarea soluţiei forţate a sistemului, corespunzătoare soluţiei particulare a ecuaţiei matriciale (2.36), în cazul general în care forţele perturbatoare sînt periodice cu aceeaşi perioadă T se va folosi metoda variaţiei constantelor. Se caută soluţia forţată de forma:

$$\overline{x}_f = \underline{\nu}_R\, \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\overline{K}_1 + \underline{SIN}(\tilde{h}t)\overline{K}_2\right] + $$
$$+ \underline{\nu}_I\, \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\overline{K}_2 - \underline{SIN}(\tilde{h}t)\overline{K}_1\right] \quad , \qquad (2.18o)$$

în care matricile $\overline{K}_1$ şi $\overline{K}_2$ conţin funcţii de timp, care urmează să fie determinate din condiţia ca (2.18o) să verifice ecuaţia diferenţială matricială (2.36). Deoarece derivata în raport cu timpul a expresiei (2.18o) este:

$$\dot{\overline{x}}_f = -(\underline{\nu}_R\underline{E} + \underline{\nu}_I\underline{H})\underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\overline{K}_1 + \underline{SIN}(\tilde{h}t)\overline{K}_2\right] +$$
$$+ (\underline{\nu}_R\underline{H} - \underline{\nu}_I\underline{E})\underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\overline{K}_2 - \underline{SIN}(\tilde{h}t)\overline{K}_1\right] +$$
$$+ \underline{\nu}_R\underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\dot{\overline{K}}_1 + \underline{SIN}(\tilde{h}t)\dot{\overline{K}}_2\right] +$$
$$+ \underline{\nu}_I\underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\dot{\overline{K}}_2 - \underline{SIN}(\tilde{h}t)\dot{\overline{K}}_1\right] \quad , \qquad (2.181)$$

se mai impune condiţia:

$$\underline{\nu}_R\, \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\dot{\overline{K}}_1 + \underline{SIN}(\tilde{h}t)\dot{\overline{K}}_2\right] +$$
$$+ \underline{\nu}_I\, \underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\dot{\overline{K}}_2 - \underline{SIN}(\tilde{h}t)\dot{\overline{K}}_1\right] = \overline{0}. \qquad (2.182)$$

Punînd condiţia ca (2.18o) să verifice (2.36), după ce se calculează $\ddot{\overline{x}}_f$ şi ţinînd seama de (2.175), rezultă:

$$-(\underline{\nu}_R\underline{E} + \underline{\nu}_I\underline{H})\underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\dot{\overline{K}}_1 + \underline{SIN}(\tilde{h}t)\dot{\overline{K}}_2\right] +$$
$$+(\underline{\nu}_R\underline{H} - \underline{\nu}_I\underline{E})\underline{EXP}(-\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{COS}(\tilde{h}t)\dot{\overline{K}}_2 - \underline{SIN}(\tilde{h}t)\dot{\overline{K}}_1\right] = \underline{m}^{-1}\overline{F}$$
$$(2.183)$$

Avînd în vedere că matricea $\underline{\nu}_R$ este nesingulară, din (2.182) şi (2.183) se determină matricile cu derivatele funcţiilor de timp necunoscute:

$$\dot{\overline{K}}_1 = -\,\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon} t)\left[\underline{SIN}(\tilde{h}t) + \underline{COS}(\tilde{h}t)\,\underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I\right]\underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\overline{F} \quad ,$$

$$\dot{\overline{K}}_2 = \underline{EXP}(\widetilde{\varepsilon}\, t)\left[\underline{COS}(\widetilde{h}t) - \underline{SIN}(\widetilde{h}t)\underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I\right]\underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\overline{F}\ , \tag{2.184}$$

în care s-a notat:

$$\underline{B} = (\underline{\nu}_R\underline{E} + \underline{\nu}_I\underline{H})\,\underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I + \underline{\nu}_R\underline{H} - \underline{\nu}_I\underline{E}\ . \tag{2.185}$$

Din (2.184) se determină matricile $\dot{\overline{K}}_1$ şi $\dot{\overline{K}}_2$, avînd ca elemente funcţiile de timp necunoscute. Inlocuind aceste matrici în (2.180), se obţine soluţia forţată căutată, care se poate exprima sub forma:

$$\begin{aligned}\overline{x}_f = \underline{\nu}_R \Big\{ &\int_0^t \underline{EXP}\left[-\widetilde{\varepsilon}(t-\tau)\right]\underline{SIN}\left[\widetilde{h}(t-\tau)\right]\underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\overline{F}(\tau)d\tau - \\ &- \int_0^t \underline{EXP}\left[-\widetilde{\varepsilon}(t-\tau)\right]\underline{COS}\left[\widetilde{h}(t-\tau)\right]\underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I\underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\overline{F}(\tau)d\tau\Big\} + \\ + \underline{\nu}_I \Big\{ &\int_0^t \underline{EXP}\left[-\widetilde{\varepsilon}(t-\tau)\right]\underline{COS}\left[\widetilde{h}(t-\tau)\right]\underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\overline{F}(\tau)d\tau + \\ &+ \int_0^t \underline{EXP}\left[-\widetilde{\varepsilon}(t-\tau)\right]\underline{SIN}\left[\widetilde{h}(t-\tau)\right]\underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I\underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\overline{F}(\tau)d\tau\Big\}\ .\end{aligned} \tag{2.186}$$

Fiind determinate soluţia tranzitorie (2.179) şi soluţia forţată (2.186) pentru sistemul vibropercutant considerat, se poate face studiul mişcării sistemului între două ciocniri consecutive. Impunînd condiţiile iniţiale (2.118), se determină constantele de integrare din matricile $\overline{C}_1$ şi $\overline{C}_2$, astfel încît legea mişcării sistemului vibropercutant între ciocnirile de ordinul k şi k+1 devine:

$$\begin{aligned}\overline{x} = \underline{\nu}_R\underline{EXP}\left[-\widetilde{\varepsilon}(t-t_k)\right]\Big\{&\underline{COS}\left[\widetilde{h}(t-t_k)\right]\left[\underline{B}_1\,\underline{\nu}_R^{-1}(\overline{x})_k - \underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I\underline{B}^{-1}(\dot{\overline{x}}')_k\right] + \\ &+ \underline{SIN}\left[\widetilde{h}(t-t_k)\right]\left[\underline{B}_2\,\underline{\nu}_R^{-1}(\overline{x})_k + \underline{B}^{-1}(\dot{\overline{x}}')_k\right] + \\ &+ \int_{t_k}^t \underline{EXP}\left[-\widetilde{\varepsilon}(t-\tau)\right]\underline{SIN}\left[\widetilde{h}(t-\tau)\right]\underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\overline{F}(\tau)d\tau - \\ &- \int_{t_k}^t \underline{EXP}\left[-\widetilde{\varepsilon}(t-\tau)\right]\underline{COS}\left[\widetilde{h}(t-\tau)\right]\underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I\underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\overline{F}(\tau)d\tau\Big\} +\end{aligned}$$

$$+ \underline{\nu}_I \underline{EXP}\left[-\tilde{\varepsilon}(t-t_k)\right]\left\{\underline{COS}\left[\tilde{h}(t-t_k)\right]\left[\underline{B}_2 \underline{\nu}_R^{-1}(\bar{x})_k + \underline{B}^{-1}(\dot{\bar{x}}')_k\right] -\right.$$

$$- \underline{SIN}\left[\tilde{h}(t-t_k)\right]\left[\underline{B}_1 \underline{\nu}_R^{-1}(x)_k - \underline{\nu}_R^{-1} \underline{\nu}_I \underline{B}^{-1}(\dot{\bar{x}}')_k\right] +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} \underline{EXP}\left[-\tilde{\varepsilon}(t-\tau)\right] \underline{COS}\left[\tilde{h}(t-\tau)\right] \underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\bar{F}(\tau)\,d\tau +$$

$$\left. + \int_{t_k}^{t} \underline{EXP}\left[-\varepsilon(t-\tau)\right] \underline{SIN}\left[\tilde{h}(t-\tau)\right] \underline{\nu}_R^{-1} \underline{\nu}_I \underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\bar{F}(\tau)\,d\tau\right\}, \quad (2.187)$$

unde s-au folosit notaţiile:

$$\underline{B}_1 = \underline{I} - \underline{\nu}_R^{-1} \underline{\nu}_I \underline{B}^{-1}(\underline{\nu}_R \underline{E} + \underline{\nu}_I \underline{H}) \quad ,$$

$$\underline{B}_2 = \underline{B}^{-1}(\underline{\nu}_R \underline{E} + \underline{\nu}_I \underline{H}) \quad . \qquad (2.188)$$

Determinînd din (2.187) parametrii $\bar{x}_{k+1}$ şi $\dot{\bar{x}}_{k+1}$ de la începutul ciocnirii următoare şi impunînd condiţiile (2.124) de periodicitate a mişcării, se obţin condiţiile de existenţă ale mişcărilor periodice pentru sistemul vibropercutant considerat:

$$(\underline{L}_3\underline{L}_4^{-1}\underline{L}_6 - \underline{L}_5)\underline{B}^{-1}\dot{\bar{x}}_c + (\underline{I} - \underline{L}_3\underline{L}_4^{-1}\underline{\nu}_R^{-1} \underline{\nu}_I)\underline{B}^{-1}\left\{\dot{\bar{x}}_c -\right.$$

$$\left. - (1+R)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^T\dot{\bar{x}}_c\right]\underline{A}\,\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right\} = \underline{L}_3\underline{L}_4^{-1}(\bar{S}_5 + \bar{S}_8) - \bar{S}_6 + \bar{S}_7 \; , \quad (2.189)$$

$$(\underline{L}_4 - \underline{\nu}_R^{-1} \underline{\nu}_I \underline{L}_3)\underline{\nu}_R^{-1}\,\bar{x}_c = (\underline{\nu}_R^{-1} \underline{\nu}_I \underline{L}_5 - \underline{L}_6)\underline{B}^{-1}\dot{\bar{x}}_c + \bar{S}_5 + \bar{S}_8 -$$

$$- \underline{\nu}_R^{-1} \underline{\nu}_I(\bar{S}_6 - \bar{S}_7) \quad , \qquad (2.190)$$

în care s-au făcut notaţiile:

$$\underline{L}_3 = \underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\, rT)\left[\underline{SIN}(\tilde{h}rT)\underline{B}_1 + \underline{COS}(\tilde{h}rT)\underline{B}_2\right] - \underline{B}_2$$

$$\underline{L}_4 = \underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\, rT)\left[\underline{SIN}(\tilde{h}rT)\underline{B}_2 - \underline{COS}(\tilde{h}rT)\underline{B}_1\right] + \underline{B}_1$$

$$\underline{L}_5 = \underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\, rT)\left[\underline{COS}(\tilde{h}rT) - \underline{SIN}(\tilde{h}rT)\, \underline{\nu}_R^{-1} \underline{\nu}_I\right]$$

$$\underline{L}_6 = \underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\, rT)\left[\underline{SIN}(\tilde{h}rT) + \underline{COS}(\tilde{h}rT)\, \underline{\nu}_R^{-1} \underline{\nu}_I\right] \qquad (2.191)$$

$$\bar{S}_5 = \int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{EXP}\left[\tilde{\varepsilon}(\tau - t_k)\right] \underline{SIN}\left[\tilde{h}(\tau - t_k)\right] \underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\bar{F}(\tau)\,d\tau$$

$$\bar{S}_6 = \int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{EXP}\left[\tilde{\varepsilon}(\tau - t_k)\right] \underline{COS}\left[\tilde{h}(\tau - t_k)\right] \underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\bar{F}(\tau)d\tau$$

$$\bar{S}_7 = \int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{EXP}\left[\tilde{\varepsilon}(\tau - t_k)\right] \underline{SIN}\left[\tilde{h}(\tau - t_k)\right] \underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I\underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\bar{F}(\tau)d\tau$$

$$\bar{S}_8 = \int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{EXP}\left[\tilde{\varepsilon}(\tau - t_k)\right] \underline{COS}\left[\tilde{h}(\tau - t_k)\right] \underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I\underline{B}^{-1}\underline{m}^{-1}\bar{F}(\tau)d\tau .$$

Dacă forţele perturbatoare sînt armonice, avînd expresiile date de (2.112), componenta forţată a soluţiei ecuaţiei diferenţiale a mişcării sistemului este de forma:

$$\bar{x}_f = \bar{K}_1\cos\omega t + \bar{K}_2\sin\omega t \quad . \qquad (2.192)$$

Punînd condiţia ca (2.192) să verifice (2.36) şi efectuînd identificarea coeficienţilor lui $\cos\omega t$ şi $\sin\omega t$ rezultă:

$$\begin{aligned} &(\underline{k} - \omega^2\underline{m})\bar{K}_1 + \omega\underline{c}\,\bar{K}_2 = \bar{0} \\ &-\omega\underline{c}\,\bar{K}_1 + (\underline{k} - \omega^2\underline{m})\bar{K}_2 = \bar{F}_0 \end{aligned} \qquad (2.193)$$

In relaţiile (2.193) cel puţin una din matricile $\underline{c}$ şi $(\underline{k} - \omega^2\underline{m})$ este nesingulară. In general, în cazul considerat în care ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sistemului sînt cuplate prin forţele de amortizare vîscoasă, matricea de amortizare $\underline{c}$ este nesingulară şi nu depinde de pulsaţia forţelor perturbatoare, astfel încît din (2.193) se obţine:

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= -\left\{\omega\underline{c} + \frac{1}{\omega}(\underline{k} - \omega^2\underline{m})\underline{c}^{-1}(\underline{k} - \omega^2\underline{m})\right\}^{-1}\bar{F}_0 \\ \bar{K}_2 &= \frac{1}{\omega}\,\underline{c}^{-1}(\underline{k} - \omega^2\underline{m})\left\{\omega\underline{c} + \frac{1}{\omega}(\underline{k} - \omega^2\underline{m})\underline{c}^{-1}(\underline{k} - \omega^2\underline{m})\right\}^{-1}\bar{F}_0 \quad . \end{aligned} \qquad (2.194)$$

După determinarea soluţiei forţate, se efectuează în mod analog studiul mişcării sistemului vibropercutant între două ciocniri consecutive. Condiţiile de existenţă ale mişcărilor vibropercutante periodice pentru acest caz rezultă din relaţiile:

$$(\underline{L}_3\underline{L}_4^{-1}\underline{L}_6 - \underline{L}_5)\underline{B}^{-1}\dot{\bar{x}}_c + (\underline{I} - \underline{L}_3\underline{L}_4^{-1}\,\underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I)\underline{B}^{-1}\left\{\,\dot{\bar{x}}_c - \right.$$

$$-(1+R)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}\right)^T \dot{\overline{x}}_c\right]\underline{A}\,\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}\Big\} = \omega\left[\underline{L}_3\underline{L}_4^{-1}(\underline{L}_6 - \underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I) - \underline{L}_5 + \underline{I}\right]\underline{B}^{-1}(\overline{K}_2\cos\omega t_k - \overline{K}_1\sin\omega t_k) \tag{2.195}$$

$$(\underline{L}_4 - \underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I\underline{L}_3)\underline{\nu}_R^{-1}\overline{x}_c = (\underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I\underline{L}_5 - \underline{L}_6)\underline{B}^{-1}\dot{\overline{x}}_c + (\underline{L}_4 - \underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I\underline{L}_3)\,\underline{\nu}_R^{-1}(\overline{K}_1\cos\omega t_k + \overline{K}_2\sin\omega t_k) + \omega(\underline{L}_6 - \underline{\nu}_R^{-1}\,\underline{\nu}_I\underline{L}_5)\underline{B}^{-1}(\overline{K}_2\cos\omega t_k - \overline{K}_1\sin\omega t_k)\,. \tag{2.196}$$

2.4.4. Sisteme vibropercutante liniare între ciocniri, neamortizate, cu două cuple percutante, având n grade de libertate

Pentru sistemele vibropercutante cu mai multe grade de libertate, având două sau mai multe cuple percutante, analiza mişcărilor vibropercutante periodice şi, prin urmare, stabilirea condiţiilor de existenţă ale acestor mişcări prezintă dificultăţi sporite faţă de studiul sistemelor vibropercutante cu o singură cuplă percutantă, datorită posibilităţii existenţei unor tipuri diferite de mişcări vibropercutante periodice, care conduc la condiţii de existenţă diferite. Astfel, în cazul sistemelor vibropercutante cu două cuple percutante, pot să apară mişcări vibropercutante periodice cu ciocniri numai între corpurile corespunzătoare uneia din cele două cuple percutante, pentru care studiul se efectuează analog studiului sistemelor cu o singură cuplă percutantă. De asemenea, pot apărea mişcări vibropercutante periodice la care într-o perioadă a mişcării să existe ciocniri succesive multiple între corpurile corespunzătoare uneia din cuplele percutante, urmate de ciocniri simple sau multiple între corpurile corespunzătoare celeilalte cuple percutante. Condiţiile de existenţă ale acestor tipuri de mişcări vibropercutante periodice depind de ordinele de multiplicitate ale ciocnirilor succesive dintre corpurile corespunzătoare fiecăreia din cele două cuple percutante.

In mod obişnuit, în cazul sistemelor vibropercutante cu mai multe cuple percutante, se face studiul pentru un anumit tip de mişcare periodică, care prezintă interes pentru aplicaţii.

In cadrul acestui paragraf, se consideră un sistem vibropercutant cu două cuple percutante, caracterizat printr-un model de translaţie, la care prima cuplă percutantă corespunde ciocnirilor dintre corpurile de mase m_i şi m_j, iar a doua cuplă percutantă corespunde ciocnirilor dintre corpurile m_j şi m_l (fig.2.4). Prima cuplă percutantă este caracterizată de funcţia legăturii unilaterale f_1, pentru care este îndeplinită relaţia:

$$f_1 = x_j + \delta_{ij} - x_i \geq 0, \quad (2.197)$$

iar a doua cuplă percutantă este caracterizată de funcţia legăturii unilaterale f_2, pentru care este îndeplinită relaţia:

$$f_2 = x_l + \delta_{jl} - x_j \geq 0. \quad (2.198)$$

In relaţiile (2.197) şi (2.198) sînt îndeplinite egalităţile în momentele în care au loc ciocnirile. Pentru sistemul vibropercutant considerat se caută mişcările vibropercutante periodice pentru care într-o perioadă a mişcării apar ciocniri succesive între corpurile corespunzătoare cuplelor percutante diferite.

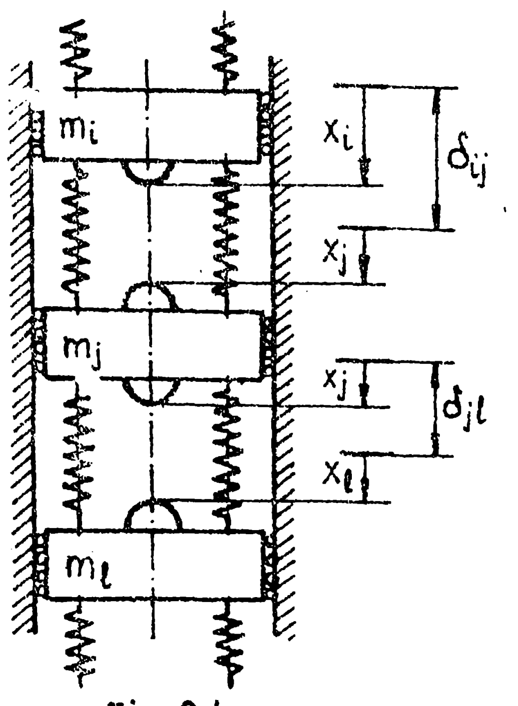


Fig.2.4

Pentru studiul acestui tip de mişcări vibropercutante periodice, se consideră, în primul rînd, cazul general în care forţele perturbatoare sînt periodice oarecare, avînd aceeaşi perioadă T. Se presupune că ciocnirea de ordinul k are loc între corpurile corespunzătoare primei cuple percutante. Deoarece între două ciocniri consecutive legea mişcării sistemului este de forma (2.117) şi condiţiile iniţiale ale mişcării după ciocnirea de ordinul k sînt (2.118), mişcarea sistemului vibropercutant între ciocnirile de ordinul k şi $k+1$ este caracterizată prin:

$$\bar{x} = \underline{\mu}\ \Big\{\underline{COS}\left[\tilde{p}(t-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\bar{x})_k + \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t-t_k)\right]\underline{P}^{-1}\underline{\mu}^{-1}(\dot{\bar{x}}')_k + \underline{P}^{-1}\underline{M}^{-1}\int_{t_k}^{t}\underline{SIN}\left[\tilde{p}(t-\tau)\right]\underline{\mu}^{T}\bar{F}(\tau)\,d\tau\Big\}, \tag{2.199}$$

$$\dot{\bar{x}} = \underline{\mu}\left\{-\underline{P}\ \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\bar{x})_k + \underline{COS}\left[\tilde{p}(t-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\dot{\bar{x}}')_k + \underline{M}^{-1}\int_{t_k}^{t}\underline{COS}\left[\tilde{p}(t-\tau)\right]\underline{\mu}^{T}\bar{F}(\tau)\,d\tau\right\},$$

unde vitezele la sfîrşitul ciocnirii de ordinul k se exprimă în funcţie de vitezele de la începutul ciocnirii prin relaţiile:

$$(\dot{\bar{x}})'_k = (\dot{\bar{x}})_k - (1+R_l)\left[\left(\frac{\partial f_l}{\partial \bar{x}}\right)^T(\dot{\bar{x}})_k\right]\underline{A}_l\ \frac{\partial f_l}{\partial \bar{x}} \tag{2.200}$$

Conform consideraţiilor anterioare, ciocnirea următoare, avînd ordinul $k+1$, are loc între corpurile corespunzătoare celei de a doua cuplă percutantă. Momentul t_{k+1} în care are loc această ciocnire se determină ca valoarea variabilei t imediat superioară momentului t_k pentru care este îndeplinită egalitatea în (2.198) cu valorile $\bar{x}_l$ şi x_j din $\bar{x}$ date de prima relaţie (2.199). După determinarea momentului t_{k+1}, rezultă parametrii finali ai intervalului de timp dintre cele două ciocniri consecutive:

$$(\bar{x})_{k+1} = \underline{\mu}\Big\{\underline{COS}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\bar{x})_k + \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{P}^{-1}\underline{\mu}^{-1}(\dot{\bar{x}})'_k + \underline{P}^{-1}\underline{M}^{-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-\tau)\right]\underline{\mu}^{T}\bar{F}(\tau)\,d\tau,$$

$$(\dot{\bar{x}})_{k+1} = \underline{\mu}\Big\{-\underline{P}\ \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\bar{x})_k + \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\dot{\bar{x}})'_k +$$

$$+ \underline{M}^{-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{\mathrm{COS}}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-\tau)\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)d\tau \quad (2.2o1)$$

Condiţiile iniţiale pentru următorul interval de timp al mişcării între două ciocniri consecutive sînt:

$$t = t_{k+1}, \quad \bar{x} = (\bar{x})_{k+1}, \quad \dot{\bar{x}} = (\dot{\bar{x}}')_{k+1}, \quad (2.2o2)$$

unde vitezele la sfîrşitul ciocnirii de ordinul k+1 se exprimă în funcţie de vitezele la începutul ciocnirii prin relaţiile:

$$(\dot{\bar{x}}')_{k+1} = (\dot{\bar{x}})_{k+1} - (1+R_2)\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}}\right)^T(\dot{\bar{x}})_{k+1}\right]\underline{A}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} \quad (2.2o3)$$

Impunînd (2.2o2) pentru determinarea constantelor de integrare din (2.117), rezultă:

$$\bar{x} = \underline{\mu}\left\{\underline{\mathrm{COS}}\left[\tilde{p}(t-t_{k+1})\right] \underline{\mu}^{-1}(\bar{x})_{k+1} + \underline{\mathrm{SIN}}\left[\tilde{p}(t-t_{k+1})\right]\underline{P}^{-1}\underline{\mu}^{-1}(\dot{\bar{x}}')_{k+1} + \underline{P}^{-1}\underline{M}^{-1}\int_{t_{k+1}}^{t} \underline{\mathrm{SIN}}\left[\tilde{p}(t-\tau)\right]\underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)d\tau\right\},$$

$$(2.2o4)$$

$$\dot{\bar{x}} = \underline{\mu}\left\{-\underline{P}\,\underline{\mathrm{SIN}}\left[\tilde{p}(t-t_{k+1})\right]\underline{\mu}^{-1}(\bar{x})_{k+1} + \underline{\mathrm{COS}}\left[\tilde{p}(t-t_{k+1})\right]\underline{\mu}^{-1}(\dot{\bar{x}}')_{k+1} + \underline{M}^{-1}\int_{t_{k+1}}^{t}\underline{\mathrm{COS}}\left[\tilde{p}(t-\tau)\right]\underline{\mu}^T\bar{F}(\tau)d\tau\right\}.$$

Deoarece ciocnirea următoare, de ordinul k+2, are loc între corpurile corespunzătoare primei cuple percutante, momentul t_{k+2} se determină ca valoarea imediat superioară momentului t_{k+1} a timpului pentru care este îndeplinită egalitatea în (2.197) cu valorile x_i şi x_j din $\bar{x}$ date de prima relaţie (2.2o4). Cu această valoare determinată, din (2.2o4) se obţin parametrii finali ai mişcării în intervalul de timp dintre ciocnirile de ordinul k+1 şi k+2:

$$(\bar{x})_{k+2} = \underline{\mu}\left\{\underline{\mathrm{COS}}\left[\tilde{p}(t_{k+2}-t_{k+1})\right]\underline{\mu}^{-1}(\bar{x})_{k+1} + \underline{\mathrm{SIN}}\left[\tilde{p}(t_{k+2}-t_{k+1})\right]\underline{P}^{-1}\underline{\mu}^{-1}(\dot{\bar{x}}')_{k+1} + \right.$$

$$+ \underline{P}^{-1}\underline{M}^{-1} \int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+2}-\tau)\right] \mu^{T} F(\tau)d\tau\Big\} ,$$

$$(\dot{\bar{x}})_{k+2} = \mu \Big\{-\underline{P}\ \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+2}-t_{k+1})\right] \mu^{-1}(\bar{x})_{k+1} +$$

$$+ \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_{k+2}-t_{k+1})\right] \mu^{-1}(\dot{\bar{x}}')_{k+1} +$$

$$+ \underline{M}^{-1} \int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_{k+2}-\tau)\right] \mu^{T} F(\tau)d\tau\Big\} . \qquad (2.2o5)$$

Relaţiile (2.2o1) şi (2.2o5), împreună cu egalităţile din (2.197) şi (2.198), ţinînd seama de (2.2oo) şi (2.2o3), pot fi privite ca relaţii de recurenţă pentru studiul mişcării sistemului pe intervalele de timp dintre două ciocniri consecutive, pornind de la condiţiile iniţiale. Pentru ca mişcarea sistemului vibropercutant să fie periodică, avînd perioada un multiplu r al perioadei T a forţelor perturbatoare, trebuie să fie îndeplinite condiţiile:

$$t_{k+2} = t_k + rT , \quad (\bar{x})_{k+2} = (\bar{x})_k = \bar{x}_{c1} , \quad (\dot{\bar{x}})_{k+2} = (\dot{\bar{x}})_k = \dot{\bar{x}}_{c1} ,$$

$$(2.2o6)$$

$$t_{k+1} \in (t_k, t_k+rT) , \quad (\bar{x})_{k+1} = \bar{x}_{c2} , \quad (\dot{\bar{x}})_{k+1} = \dot{\bar{x}}_{c2} .$$

Impunînd condiţiile de periodicitate ale mişcării (2.2o6) în (2.2o1) şi (2.2o5), rezultă condiţiile de existenţă ale mişcărilor periodice ale sistemului vibropercutant, de tipul căutat, care se pot exprima sub forma:

$$\left[\underline{I} - \underline{COS}(\tilde{p}rT)\right] \mu^{-1}\dot{\bar{x}}_{c1} - (1+R_1)\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}\right)^{T}\dot{\bar{x}}_{c1}\right]\underline{L}_7\, \mu^{-1}\underline{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} +$$

$$+ \underline{L}_8\, \mu^{-1}\dot{\bar{x}}_{c2} - (1+R_2)\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}}\right)^{T}\dot{\bar{x}}_{c2}\right]\underline{L}_8\, \mu^{-1}\underline{A}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} =$$

$$= \underline{M}^{-1}\Big\{\underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_k+rT-t_{k+1})\right] \int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(\tau-t_{k+1})\right] \mu^{T} F(\tau)d\tau -$$

$$- \underline{L}_8 \int_{t_{k+1}}^{t_k+rT} \underline{COS}\left[\tilde{p}(\tau-t_{k+1})\right] \mu^{T} F(\tau)d\tau\Big\} , \qquad (2.2o7)$$

$$- \underline{L}_8\, \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c1} + (1+R_1)\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}\right)^T \dot{\bar{x}}_{c1}\right]\underline{L}_8\, \underline{\mu}^{-1}\, \underline{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} +$$

$$+ \left[\underline{I} - \underline{COS}(\tilde{p}rT)\right] \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c2} - (1+R_2)\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}}\right)^T \dot{\bar{x}}_{c2}\right]\underline{L}_7\, \underline{\mu}^{-1}\underline{A}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} =$$

$$= \underline{M}^{-1}\underline{L}_8 \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{COS}\left[\tilde{p}(\tau - t_k)\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \underline{M}^{-1}\underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right] \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(\tau - t_k)\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)\, d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{t_{k+1}}^{t_k+rT} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_k+rT-\tau)\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)\, d\tau \right\} , \qquad (2.208)$$

$$-\underline{P}\ \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_k+rT-t_{k+1})\right] \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c1} + \underline{P}\, \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c2} +$$

$$+ \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_k+rT-t_{k+1})\right] \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c1} =$$

$$= \underline{M}^{-1} \int_{t_{k+1}}^{t_k+rT} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(\tau - t_{k+1})\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)\, d\tau , \qquad (2.209)$$

$$\underline{P}\, \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c1} - \underline{P}\ \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right] \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c2} + \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c2} =$$

$$= \underline{M}^{-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(\tau - t_k)\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)\, d\tau , \qquad (2.210)$$

unde s-au folosit notaţiile:

$$\underline{L}_7 = \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_k+rT-t_{k+1})\right] ,$$

$$\underline{L}_8 = \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right] - \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_k+rT-t_{k+1})\right] . \qquad (2.211)$$

Din relaţiile (2.207) şi (2,208), corespunzătoare unui sistem de 2n ecuaţii algebrice liniare cu 2n necunoscute, se determină $\dot{\bar{x}}_{c1}$ şi $\dot{\bar{x}}_{c2}$ ca funcţiuni de t_k şi t_{k+1}, iar din relaţiile (2.209) şi (2.210) rezultă $\bar{x}_{c1}$ şi $\bar{x}_{c2}$ ca funcţii de t_k şi t_{k+1}. Valorile momentelor t_k şi t_{k+1} în care au loc ciocnirile se determină din condiţiile ca $\bar{x}_{c1}$ să verifice relaţia $f_1 = 0$ şi $\bar{x}_{c2}$ să verifice relaţia $f_2 = 0$. Inlocuind valorile momentelor t_k şi t_{k+1} în expresiile $\bar{x}_{c1}$, $\dot{\bar{x}}_{c1}$, $\bar{x}_{c2}$ şi $\dot{\bar{x}}_{c2}$, determinate anterior ca funcţii de t_k şi t_{k+1}, se determină parametrii caracteristici ai ciocnirilor. Pentru existenţa mişcărilor vibropercutante periodice de tipul considerat, este necesar ca pentru toţi aceşti parametrii să rezulte valori reale şi să fie verificate relaţiile:

$$\begin{aligned} & t_k < t_{k+1} < t_k + rT \\ & \dot{x}_{ic1} - \dot{x}_{jc1} > 0 \qquad (2.212) \\ & \dot{x}_{jc2} - \dot{x}_{lc2} > 0 \end{aligned}$$

In cazul în care toate forţele perturbatoare sînt armonice, avînd expresiile date de (2.112), în mod analog se pot exprima condiţiile de existenţă ale mişcărilor vibropercutante periodice de tipul considerat sub forma:

$$\left[\underline{I} - \underline{COS}(\tilde{p}rT)\right] \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c1} - (1+R_1)\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}\right)^T \dot{\bar{x}}_{c1}\right] \underline{L}_7\, \underline{\mu}^{-1}\underline{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} + \underline{L}_8\, \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c2} - (1+R_2)\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}}\right)^T \dot{\bar{x}}_{c2}\right] \underline{L}_8\, \underline{\mu}^{-1}\underline{A}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} =$$

$$= \omega\left[(\underline{I} - \underline{COS}(\tilde{p}rT)\right]\bar{G} \cos \omega t_k + \omega \underline{L}_8 \bar{G} \cos \omega t_{k+1}, \qquad (2.213)$$

$$- \underline{L}_8\, \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c1} + (1+R_1)\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}\right)^T \dot{\bar{x}}_{c1}\right] \underline{L}_8\, \underline{\mu}^{-1}\underline{A}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} + \left[\underline{I} - \underline{COS}(\tilde{p}rT)\right] \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c2} - (1+R_2)\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}}\right)^T \dot{\bar{x}}_{c2}\right] \underline{L}_7\, \underline{\mu}^{-1}\underline{A}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} =$$

$$= -\omega \underline{L}_8 \bar{G} \cos \omega t_k + \omega\left[\underline{I} - \underline{COS}(\tilde{p}rT)\right]\bar{G} \cos \omega t_{k+1}, \qquad (2.214)$$

$$- \underline{P}\, \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_k + rT - t_{k+1})\right] \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c1} + \underline{P}\, \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c2} + \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_k + rT - t_{k+1})\right] \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c1} = -\underline{P}\, \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_k + rT - t_{k+1})\right]\bar{G} \sin \omega t_k + \omega\, \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_k + rT - t_{k+1})\right]\bar{G} \cos \omega t_k + \underline{P}\bar{G} \sin \omega t_{k+1}, \qquad (2.215)$$

$$\underline{P}\, \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c1} - \underline{P}\, \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_{k+1} - t_k)\right] \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c2} + \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+1} - t_k)\right] \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c2} =$$

$$= \underline{P}\overline{G} \sin\omega t_k - \underline{P}\ \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right]\overline{G} \sin\omega t_{k+1} +$$
$$+ \omega\ \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_{k+1}-t_k)\right]\overline{G} \cos\omega t_{k+1} \quad , \qquad (2.216)$$

unde $\overline{G}$ are expresia (2.132).

În unele aplicații, în special în cazul sistemelor de amortizare a vibrațiilor prin ciocniri, se întîlnesc sisteme vibropercutante cu două cuple percutante la care ambele cuple percutante corespund ciocnirilor între aceleași corpuri ale sistemului. Un model pentru astfel de cuple percutante este prezentat în fig.2.5. Pentru acest model, cuplele percutante sînt caracterizate de funcțiile legăturilor unilaterale f_1 și f_2, care îndeplinesc relațiile:

$$f_1 = x_i + \delta_{ij} - x_j \geq 0, \qquad (2.217)$$

$$f_2 = x_j - (x_i - \delta_{ij}) \geq 0 \quad , \qquad (2.218)$$

unde egalitățile sînt îndeplinite în momentele în care au loc ciocnirile.

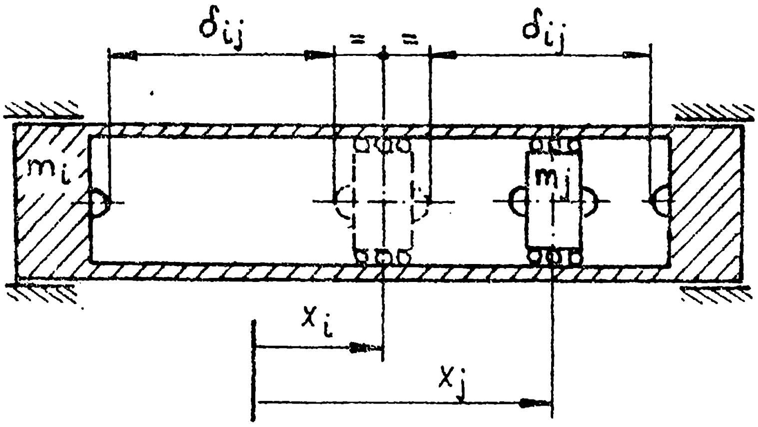


Fig. 2.5

Se presupune că pentru ambele cuple percutante coeficienții de restituire la ciocnire sînt egali ($R_1 = R_2 = R$). Ținînd seama de expresiile (2.217) și (2.218) ale funcțiilor legăturilor unilaterale corespunzătoare celor două cuple percutante, rezultă relațiile:

$$\underline{A}_1 = \underline{A}_2 = \underline{A} \quad , \qquad (2.219)$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial \overline{x}} = - \frac{\partial f_1}{\partial \overline{x}} \quad .$$

Studiul unui sistem vibropercutant conținînd astfel de cuple percutante, la care se caută mișcări vibropercutante de tipul celor studiate anterior, se efectuează analog, obținîndu-se aceleaşi condiţii de existenţă a mişcărilor vibropercutante periodice, cu particularizările date de expresiile (2.217) şi (2.218) ale funcţiilor legăturilor unilaterale şi ţinînd seama de relaţiile (2.219) ce rezultă din aceste expresii. Pentru astfel de sisteme vibropercutante , prezintă interes pentru aplicaţii mişcările vibropercutante periodice de tipul considerat, care, spre deosebire de cazul general studiat, au mişcarea relativă a corpului de masă m_j faţă de corpul de masă m_i simetrică în cele două intervale de timp dintre trei ciocniri consecutive. Pentru a determina condiţiile de existenţă ale acestor mişcări pentru sistemul vibropercutant considerat, pe lîngă condiţiile de periodicitate (2.2o6) se impun condiţiile de simetrie ale mişcării relative a corpului de masă m_j faţă de corpul de masă m_i:

$$t_{k+1} = t_k + \frac{1}{2} rT \;, \quad x_{jc1} - x_{ic1} = x_{ic2} - x_{jc2} = \delta_{ij}, \qquad (2.220)$$

$$\dot{x}_{jc1} - \dot{x}_{ic1} = \dot{x}_{ic2} - \dot{x}_{jc2} > 0 \quad . \qquad (2.221)$$

In cazul în care forţele perturbatoare sînt periodice oarecare, avînd aceeaşi perioadă T, condiţiile de existenţă ale mişcărilor vibropercutante periodice, cu mişcarea relativă a corpului de masă m_j faţă de corpul de masă m_i simetrică, se exprimă sub forma:

$$2\dot{\bar{x}}_{c1} - (1+R)\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}\right)^T \dot{\bar{x}}_{c1}\right] \underline{A}\, \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} = \qquad (2.222)$$

$$= \underline{\mu}\, \underline{M}^{-1} \underline{SIN}^{-1}(\tfrac{1}{2}\tilde{p} rT) \int_{t_k}^{t_k + rT} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(\tau - t_k - \tfrac{1}{2}rT)\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)\, d\tau$$

$$2\dot{\bar{x}}_{c2} - (1+R)\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}\right)^T \dot{\bar{x}}_{c2}\right] \underline{A}\, \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} =$$

$$= \underline{\mu}\, \underline{M}^{-1} \underline{SIN}^{-1}(\tfrac{1}{2}\tilde{p} rT) \left\{ \int_{t_k}^{t_k + \frac{1}{2}rT} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(\tau - t_k)\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)\, d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{t_k + \frac{1}{2}rT}^{t_k + rT} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_k + rT - \tau)\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)\, d\tau \right\} \qquad (2.223)$$

$$-\underline{P}\ \underline{COS}(\tfrac{1}{2}\tilde{p}rT)\ \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c1} + \underline{P}\ \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c2} + \underline{SIN}(\tfrac{1}{2}\tilde{p}rT)\ \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c1} =$$

$$= \underline{M}^{-1} \int_{t_k+\frac{1}{2}rT}^{t_k+rT} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(\tau - t_k - \tfrac{1}{2}rT)\right] \underline{\mu}^T\ \bar{F}(\tau)\,d\tau \qquad (2.224)$$

$$\underline{P}\ \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c1} - \underline{P}\ \underline{COS}(\tfrac{1}{2}\tilde{p}rT)\ \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c2} + \underline{SIN}(\tfrac{1}{2}\tilde{p}rT)\ \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c2} =$$

$$\underline{M}^{-1} \int_{t_k}^{t_k+\frac{1}{2}rT} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(\tau - t_k)\right] \underline{\mu}^T\ \bar{F}(\tau)\,d\tau \qquad (2.225)$$

Din relaţiile obţinute, care corespund unor sisteme de ecuaţii algebrice liniare, se determină $\dot{\bar{x}}_{c1}$, $\dot{\bar{x}}_{c2}$, $\bar{x}_{c1}$ şi $\bar{x}_{c2}$ ca funcţii de t_k. Valorile momentului t_k pentru care există mişcări vibropercutante periodice de tipul considerat, se obţin din cele două ecuaţii (2.220), care reprezintă, pe lîngă o condiţie de simetrie a mişcării relative a corpului de masă m_j, şi condiţiile ca în momentele ciocnirilor să fie verificate egalităţile din relaţiile (2.217) şi (2.218). Inlocuind t_k în expresiile $\dot{\bar{x}}_{c1}$, $\dot{\bar{x}}_{c2}$, $\bar{x}_{c1}$ şi $\bar{x}_{c2}$ determinate ca funcţii de t_k, rezultă parametrii ciocnirilor, care trebuie să verifice şi relaţiile (2.221).

Dacă forţele perturbatoare sînt armonice, avînd expresiile date de (2.112), condiţiile de existenţă ale mişcărilor vibropercutante periodice de tipul considerat se pot exprima sub forma:

$$2\dot{\bar{x}}_{c1} - (1+R)\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}\right)^T \dot{\bar{x}}_{c1}\right] \underline{A}\ \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} = 2\omega\underline{\mu}\ \bar{G}\ \cos\omega t_k\ , \qquad (2.226)$$

$$2\dot{\bar{x}}_{c2} - (1+R)\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}\right)^T \dot{\bar{x}}_{c2}\right] \underline{A}\ \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} = 2\omega\underline{\mu}\ \bar{G}\ \cos(\omega t_k + r\pi)\ , \qquad (2.227)$$

$$-\underline{P}\ \underline{COS}(\tilde{p}\ \frac{r\pi}{\omega})\ \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c1} + \underline{P}\ \underline{\mu}^{-1}\bar{x}_{c2} + \underline{SIN}(\tilde{p}\ \frac{r\pi}{\omega})\ \underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_{c1} =$$

$$\Big\{-\underline{P}\ \underline{COS}(\tilde{p}\ \frac{r\pi}{\omega})\sin\omega t_k + \omega\,\underline{SIN}(\tilde{p}\ \frac{r\pi}{\omega})\cos\omega t_k +$$

$$+ \underline{P}\ \sin(\omega t_k + r\pi)\Big\}\ \bar{G}\ , \qquad (2.228)$$

$$\underline{P}\, \mu^{-1}\overline{x}_{c1} - \underline{P}\, \underline{COS}(\tilde{p}\, \frac{r\pi}{\omega})\, \mu^{-1}\overline{x}_{c2} + \underline{SIN}(\tilde{p}\, \frac{r\pi}{\omega})\, \mu^{-1}\dot{\overline{x}}_{c2} =$$

$$= \Big\{ \underline{P}\, \sin\omega t_k - \underline{P}\, \underline{COS}(\tilde{p}\, \frac{r\pi}{\omega}) \sin(\omega t_k + r\pi) +$$

$$+ \omega\, \underline{SIN}(\tilde{p}\, \frac{r\pi}{\omega}) \cos(\omega t_k + r\pi) \Big\}\, \overline{G} \quad . \qquad (2.229)$$

Este de menţionat faptul că determinarea mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante avînd o singură cuplă percutantă, dar cu ciocniri duble sau multiple într-o perioadă a mişcării, se efectuează în mod analog cu cele prezentate mai sus.

2.5. Studiul stabilităţii mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante

2.5.1. Prezentarea metodei de studiu a stabilităţii

Pentru studiul stabilităţii mişcării sistemelor mecanice liniare sau neliniare s-au elaborat o serie de metode, care, în majoritatea lor, pot fi aplicate şi la studiul stabilităţii mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante. Dintre metodele cele mai cunoscute şi mai frecvent aplicate pentru studiul stabilităţii mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante sînt metoda transformărilor punctuale [20] - [24] şi metoda directă de studiu a stabilităţii [27]. De asemenea, în [131] şi în alte lucrări, elaborate de membrii ai colectivului Catedrei de Mecanică şi Rezistenţa Materialelor de la Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timişoara, s-a folosit o variantă a metodei de studiu a stabilităţii mişcării în primă aproximaţie, bazată pe liniarizarea unor ecuaţii în perturbaţii. In fond, toate aceste metode sînt variante ale metodei generale de studiu a stabilităţii mişcării în prima aproximaţie, la care, pornind de la perturbaţii iniţiale mici ale parametrilor ciocnirilor se ajunge la ecuaţii algebrice liniarizate în perturbaţii

de ordin superior ale parametrilor ciocnirilor.
In cele ce urmează se aplică ultima din metodele amintite, efectuîndu-se generalizarea pentru sistemele vibropercutante cu mai multe grade de libertate şi exprimarea matricială a ecuaţiilor linearizate în perturbaţii.

Pentru precizarea metodei, se consideră, în primul rînd, un sistem vibropercutant cu n grade de libertate şi o cuplă percutantă, la care se caută mişcările periodice avînd perioada un multiplu întreg r al perioadei T a forţelor perturbatoare şi avînd o singură ciocnire într-o perioadă a mişcării. Pentru determinarea acestor mişcări periodice, ţinînd seama de funcţia f a legăturii unilaterale corespunzătoare cuplei percutante, aşa cum s-a arătat în paragrafele precedente, se exprimă parametrii ciocnirii de ordinul $k+1$ în funcţie de parametrii ciocnirii de ordinul k sub forma:

$$\begin{aligned} &\overline{\Psi}_1\left[(\overline{x})_{k+1},\ (\overline{x})_k,\ (\dot{\overline{x}})_k,\ t_k,\ t_{k+1}\right] = \overline{0}\ ,\\ &\overline{\Psi}_2\left[(\dot{\overline{x}})_{k+1},\ (\overline{x})_k,\ (\dot{\overline{x}})_k,\ t_k,\ t_{k+1}\right] = \overline{0}\ , \end{aligned} \qquad (2.230)$$

unde $\overline{\Psi}_1$ şi $\overline{\Psi}_2$ sînt funcţii matriciale aplicate argumentelor precizate, avînd ca rezultat matrici coloană. Deoarece în momentele ciocnirilor trebuie să fie verificată egalitatea din relaţia de forma (2.46) corespunzătoare legăturii unilaterale, care se poate scrie sub forma:

$$f\left[(\overline{x})_k\right] = f\left[(\overline{x})_{k+1}\right] = 0\ , \qquad (2.231)$$

impunînd condiţiile de periodicitate a mişcării (2.124), relaţiile matriciale (2.230) şi (2.231) conduc la un sistem de $2n+1$ ecuaţii algebrice, din care se determină parametrii ciocnirilor $\overline{x}_c$, $\dot{\overline{x}}_c$ şi t_k.

In cadrul metodei considerate pentru studiul stabilităţii mişcărilor vibropercutante periodice, se presupune că la începutul mişcării apar perturbaţii mici ale parametrilor ciocnirilor.

Ca urmare, în mişcarea perturbată ciocnirea de ordinul k va avea loc la momentul $t_k+\Delta t_k$, în poziţia $\bar{x}_c+\Delta\bar{x}_k$ şi avînd vitezele la începutul ciocnirii date de $\dot{\bar{x}}_c+\Delta\dot{\bar{x}}_k$, unde perturbaţiile parametrilor ciocnirii Δt_k, $\Delta\bar{x}_k$ şi $\Delta\dot{\bar{x}}_k$ au valori mici, considerate infinitesimale. Ciocnirea următoare, de ordinul $k+1$ va avea loc la momentul $t_k+rT+\Delta t_{k+1}$, în poziţia $\bar{x}_c+\Delta\bar{x}_{k+1}$ şi avînd vitezele la începutul ciocnirii date de $\dot{\bar{x}}_c+\Delta\dot{\bar{x}}_{k+1}$, unde noile perturbaţii ale parametrilor ciocnirii au, de asemenea, valori mici. Pentru mişcarea perturbată se exprimă relaţiile matriciale dintre parametrii ciocnirilor de ordinul k şi $k+1$ sub forma:

$$\begin{aligned}&\bar{\Psi}_1(\bar{x}_c+\Delta\bar{x}_{k+1},\bar{x}_c+\Delta\bar{x}_k,\dot{\bar{x}}_c+\Delta\dot{\bar{x}}_k,t_k+\Delta t_k,t_k+rT+\Delta t_{k+1})=\bar{0}\\ &\bar{\Psi}_2(\dot{\bar{x}}_c+\Delta\dot{\bar{x}}_{k+1},\bar{x}_c+\Delta\bar{x}_k,\dot{\bar{x}}_c+\Delta\dot{\bar{x}}_k,t_k+\Delta t_k,t_k+rT+\Delta t_{k+1})=\bar{0}\end{aligned} \tag{2.232}$$

De asemenea, în momentele ciocnirilor şi pentru mişcarea perturbată trebuie să fie verificate relaţiile de forma (2.231).

$$f(\bar{x}_c+\Delta\bar{x}_k) = f(\bar{x}_c+\Delta\bar{x}_{k+1}) = 0 \tag{2.233}$$

Presupunînd perturbaţiile parametrilor ciocnirilor mici, relaţiile (2.232) şi (2.233) pot fi linearizate în raport cu perturbaţiile. Pentru aceasta, funcţiile în care apar perturbaţiile parametrilor ciocnirilor în relaţiile (2.232) şi (2.233) se dezvoltă în serii de puteri (Mac Laurin), păstrîndu-se numai termenii liniari în perturbaţii. Ca urmare, aceste relaţii linearizate se pot exprima sub forma:

$$\begin{aligned}&\bar{\Psi}_1(\bar{x}_c,\bar{x}_c,\dot{\bar{x}}_c,t_k,t_k+rT)+\Delta\bar{\Psi}_1(\Delta\bar{x}_{k+1},\Delta\bar{x}_k,\Delta\dot{\bar{x}}_k,\Delta t_k,\Delta t_{k+1}) = \bar{0}\\ &\bar{\Psi}_2(\dot{\bar{x}}_c,\bar{x}_c,\dot{\bar{x}}_c,t_k,t_k+rT)+\Delta\bar{\Psi}_2(\Delta\dot{\bar{x}}_{k+1},\Delta\bar{x}_k,\Delta\dot{\bar{x}}_k,\Delta t_k,\Delta t_{k+1}) = \bar{0}\\ &f(\bar{x}_c) + \Delta f(\Delta\bar{x}_k) = f(\bar{x}_c) + \Delta f(\Delta\bar{x}_{k+1}) = 0 \quad ,\end{aligned} \tag{2.234}$$

în care s-au făcut notaţiile:

$$\Delta\overline{\psi}_1 = \left[\frac{\partial}{\partial(\overline{x})_{k+1}}(\overline{\psi}_1^T)\right]_o^T \Delta\overline{x}_{k+1} + \left[\frac{\partial}{\partial(\overline{x})_k}(\overline{\psi}_1^T)\right]_o^T \Delta\overline{x}_k +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial(\dot{\overline{x}})_k}(\overline{\psi}_1^T)\right]_o^T \Delta\dot{\overline{x}}_k + \left(\frac{\partial\overline{\psi}_1}{\partial t_k}\right)_o \Delta t_k + \left(\frac{\partial\overline{\psi}_1}{\partial t_{k+1}}\right)_o \Delta t_{k+1} \quad ,$$

$$\Delta\overline{\psi}_2 = \left[\frac{\partial}{\partial(\dot{\overline{x}})_{k+1}}(\overline{\psi}_2^T)\right]_o^T \Delta\dot{\overline{x}}_{k+1} + \left[\frac{\partial}{\partial(\overline{x})_k}(\overline{\psi}_2^T)\right]_o^T \Delta\overline{x}_k + \tag{2.235}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial(\dot{\overline{x}})_k}(\overline{\psi}_2^T)\right]_o^T \Delta\dot{\overline{x}}_k + \left(\frac{\partial\overline{\psi}_2}{\partial t_k}\right)_o \Delta t_k + \left(\frac{\partial\overline{\psi}_2}{\partial t_{k+1}}\right)_o \Delta t_{k+1} \quad ,$$

$$\Delta f(\Delta\overline{x}_k) = \left[\frac{\partial}{\partial(\overline{x})_k}(f)\right]_o^T \Delta\overline{x}_k \quad .$$

In relațiile (2.235) derivatele parțiale ale matricilor linie $\overline{\psi}_1^T$ și $\overline{\psi}_2^T$ în raport cu elementele unor matrici coloană se calculează după formula (2.5), iar indicele o arată că toate derivatele parțiale se calculează pentru valorile parametrilor ciocnirilor corespunzători mișcării neperturbate, în care toate perturbațiile sînt nule.

Primii termeni din fiecare din relațiile (2.234) verfică relațiile (2.230) și (2.231) pentru mișcarea neperturbată, astfel încît rezultă:

$$\Delta\overline{\psi}_1(\Delta\overline{x}_{k+1}, \Delta\overline{x}_k, \Delta\dot{\overline{x}}_k, \Delta t_k, \Delta t_{k+1}) = \overline{0} \tag{2.236}$$

$$\Delta\overline{\psi}_2(\Delta\dot{\overline{x}}_{k+1}, \Delta\overline{x}_k, \Delta\dot{\overline{x}}_k, \Delta t_k, \Delta t_{k+1}) = \overline{0} \tag{2.237}$$

$$\Delta f(\Delta\overline{x}_k) = \Delta f(\Delta\overline{x}_{k+1}) = 0 \tag{2.238}$$

Pe baza relațiilor (2.238), perturbațiile de ordinul k și k+1, corespunzătoare uneia din coordonatele care apar explicit în funcția legăturii unilaterale f, se pot exprima în funcție de celelalte perturbații și se pot înlocui în (2.236) și (2.237). Ca urmare, relațiile matriciale (2.236) și (2.237) vor reprezenta un sistem liniar și omogen de 2n ecuații algebrice în perturbații de ordinul k și k+1 ale parametrilor ciocnirilor. Pentru acest sistem se caută soluții de forma:

$$\Delta \bar{x}_k = \bar{U}\beta^k , \quad \Delta \dot{\bar{x}}_k = \bar{V}\beta^k , \quad \Delta t_k = W\beta^k \qquad (2.239)$$

Punînd condiția ca soluțiile (2.239) să verifice sistemul de ecuații dat de relațiile matriciale (2.236) și (2.237) și simplificînd cu $\beta^k \neq 0$, se obține un sistem liniar și omogen de 2n ecuații algebrice cu 2n necunoscute și anume n-1 coeficienți din matricea coloană $\bar{U}$, n coeficienți din $\bar{V}$ și W. Pentru ca acest sistem să aibă soluții diferite de soluția banală, este necesar ca determinantul sistemului să fie nul:

$$\Delta_1(\beta) = 0 \qquad (2.240)$$

Ecuația (2.240), avînd membrul stîng sub forma unui polinom de gradul 2n în β, reprezintă ecuația caracteristică pentru sistemul de ecuații linearizate în perturbații reprezentat de ecuațiile matriciale (2.236) și (2.237). Ținînd seama de forma (2.239) a soluțiilor, pentru ca valorile perturbațiilor să scadă în timp, este necesar ca rădăcinile ecuației caracteristice (2.240) să fie, toate, în modul subunitare. Aplicînd criteriul lui Schur coeficienților ecuației caracteristice, rezultă condițiile de stabilitate ale mișcărilor vibropercutante periodice de tipul considerat [105].

Dacă, pentru sistemul vibropercutant cu o cuplă percutantă, se consideră, în al doilea rînd, un alt tip de mișcări vibropercutante periodice și anume cu două ciocniri într-o perioadă a mișcării, pe lîngă relațiile matriciale (2.230), rezultate din studiul mișcării sistemului între ciocnirile de ordinul k și k+1, obțin relațiile de forma:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_3\left[(\bar{x})_{k+2}, (\bar{x})_{k+1}, (\dot{\bar{x}})_{k+1}, t_{k+1}, t_{k+2}\right] &= \bar{0} \\ \bar{\Psi}_4\left[(\dot{\bar{x}})_{k+2}, (\bar{x})_{k+1}, (\dot{\bar{x}})_{k+1}, t_{k+1}, t_{k+2}\right] &= \bar{0} \quad , \end{aligned} \qquad (2.241)$$

care exprimă parametrii finali în funcţie de cei iniţiali în mişcarea sistemului între ciocnirile de ordinul $k+1$ şi $k+2$.
De asemenea, pe lîngă relaţiile (2.231), mai trebuie să fie verificată relaţia:

$$f\left[(\bar{x})_{k+2}\right]=0 \tag{2.242}$$

corespunzătoare ciocnirii de ordinul $k+2$. Pentru acest tip de mişcare a sistemului vibropercutant, condiţiile de periodicitate a mişcării se exprimă prin:

$$t_{k+2}=t_k+rT, \quad (\bar{x})_{k+2}=(\bar{x})_k=\bar{x}_{c1}, \quad (\dot{\bar{x}})_{k+2}=(\dot{\bar{x}})_k=\dot{\bar{x}}_{c1} \tag{2.243}$$

$$t_k < t_{k+1} < t_k+rT, \quad (\bar{x})_{k+1}=\bar{x}_{c2}, \quad (\dot{\bar{x}})_{k+1}=\dot{\bar{x}}_{c2}\ .$$

Parametrii ciocnirilor se determină impunînd condiţiile (2.243) în relaţiile (2.23o), (2.241), (2.231) şi (2.242).

Pentru studiul stabilităţii acestor mişcări vibropercutante periodice, se consideră perturbaţii iniţiale mici ale parametrilor ciocnirilor şi se exprimă relaţiile între parametrii ciocnirilor de ordinul k, $k+1$ şi $k+2$ în mişcarea perturbată a sistemului. După linearizarea acestor relaţii, pe lîngă ecuaţiile (2.236), (2.237) şi (2.238), se mai obţin ecuaţiile:

$$\Delta\bar{\psi}_3(\Delta\bar{x}_{k+2}, \Delta\bar{x}_{k+1}, \Delta\dot{\bar{x}}_{k+1}, \Delta t_{k+1}, \Delta t_{k+2})=\bar{0} \tag{2.244}$$

$$\Delta\bar{\psi}_4(\Delta\dot{\bar{x}}_{k+2}, \Delta\bar{x}_{k+1}, \Delta\dot{\bar{x}}_{k+1}, \Delta t_{k+1}, \Delta t_{k+2})=\bar{0} \tag{2.245}$$

$$\Delta f(\Delta\bar{x}_{k+2})=0\ . \tag{2.246}$$

Eliminînd perturbaţiile de ordinul k, $k+1$ şi $k+2$, corespunzătoare uneia din coordonatele generalizate care apare explicit în funcţia legăturii unilaterale f, pe baza relaţiilor (2.238) şi (2.246), ecuaţiile matriciale (2.236), (2.237), (2.244) şi (2.245) formează un sistem liniar omogen de $4n$ ecuaţii algebrice în perturbaţii de ordinul k, $k+1$ şi $k+2$ ale parametrilor ciocnirilor. Obţinînd soluţii de forma (2,239), se ajunge la ecuaţia caracteristică:

$$\Delta_2(\beta) = 0 \quad , \tag{2.247}$$

care, în general, are membrul stîng sub forma unui polinom de gradul 4n în β. Aplicînd criteriul lui Schur coeficienţilor ecuaţiei caracteristice (2.247), astfel încît rădăcinile sale să fie în modul subunitare, se obţin condiţiile de stabilitate ale mişcărilor vibropercutante periodice de tipul considerat.

Pentru un sistem vibropercutant cu două cuple percutante, la care se studiază mişcările periodice cu două ciocniri într-o perioadă a mişcării, determinarea condiţiilor de existenţă şi de stabilitate ale mişcărilor periodice se efectuează în mod analog. Relaţiile matriciale între parametrii ciocnirilor de ordinul k, k+1 şi k+2 sînt tot de forma (2.23o) şi (2.241), iar condiţiile de periodicitate ale mişcării sînt (2.2o6), identice cu (2.243), astfel încît rezultă atît parametrii ciocnirilor, cît şi ecuaţiile linearizate în perturbaţii pentru studiul stabilităţii mişcărilor periodice, ca şi în cazul precedent. Deosebirea faţă de sistemul vibropercutant cu o cuplă percutantă constă în faptul că în momentele ciocnirilor trebuie să se ţină seama de două funcţii ale legăturilor unilaterale, corespunzătoare celor două cuple percutante.

Metoda prezentată se poate aplica pentru studiul stabilităţii diverselor tipuri de mişcări vibropercutante periodice (cu ciocniri simple sau multiple într-o perioadă a mişcării) şi diverselor sisteme vibropercutante (cu una sau mai multe cuple percutante, liniare sau neliniare între ciocniri, etc.).

2.5.2. Studiul stabilităţii mişcărilor vibropercutante periodice cu o ciocnire într-o perioadă a mişcării

Se consideră un sistem vibropercutant cu n grade de libertate şi o cuplă percutantă, liniar între ciocniri, care se reduce la un model de translaţie. Pentru studiul în primă aproximaţie a mişcărilor periodice se neglijează forţele de amortizare.

Dacă forţele perturbatoare sînt periodice oarecare, relaţiile dintre parametrii ciocnirilor de ordinul k şi $k+1$ pentru mişcarea neperturbată sînt (2.123). In mod analog, se obţin relaţii de aceeaşi formă pentru mişcarea perturbată:

$$\bar{x}_c + \Delta\bar{x}_{k+1} = \underline{\mu}\Big\{\underline{COS}\left[\tilde{p}(rT+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\bar{x}_c+\Delta\bar{x}_k) +$$

$$+\underline{SIN}\left[\tilde{p}(rT+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)\right]\underline{P}^{-1}\underline{\mu}^{-1}(\dot{\bar{x}}'_c+\Delta\dot{\bar{x}}'_k) +$$

$$+\underline{P}^{-1}\underline{M}^{-1}\int_{t_k+\Delta t_k}^{t_k+rT+\Delta t_{k+1}}\underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_k+rT+\Delta t_{k+1}-\tau)\right]\underline{\mu}^T\bar{F}(\tau)d\tau\Big\} \tag{2.248}$$

$$\dot{\bar{x}}_c + \Delta\dot{\bar{x}}_{k+1} = \underline{\mu}\Big\{-\underline{P}\,\underline{SIN}\left[\tilde{p}(rT+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\bar{x}_c+\Delta\bar{x}_k) +$$

$$+\underline{COS}\left[\tilde{p}(rT+\Delta t_{k+1}-\Delta t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\dot{\bar{x}}'_c+\Delta\dot{\bar{x}}'_k) +$$

$$+\underline{M}^{-1}\int_{t_k+\Delta t_k}^{t_k+rT+\Delta t_{k+1}}\underline{COS}\left[\tilde{p}(t_k+rT+\Delta t_{k+1}-\tau)\right]\underline{\mu}^T\bar{F}(\tau)d\tau\Big\} \quad ,$$

în care relaţiile dintre vitezele de la sfîrşitul ciocnirii de ordinul k $(\dot{\bar{x}}'_c+\ \dot{\bar{x}}'_k)$ şi cele de la începutul ciocnirii $(\dot{\bar{x}}_c+\Delta\dot{\bar{x}}_k)$ se exprimă pe baza relaţiilor de forma (2.62). Deoarece aceste relaţii sînt liniare în vitezele generalizate, rezultă:

$$\Delta\dot{\bar{x}}'_k = \Delta\dot{\bar{x}}_k - (1+R)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}\right)^T\Delta\dot{\bar{x}}_k\right]\underline{A}\,\frac{\partial f}{\partial\bar{x}} \quad . \tag{2.249}$$

Considerînd perturbaţiile parametrilor ciocnirilor de ordinul k şi $k+1$ ca fiind mici, relaţiile (2.248) se pot linearizà în raport cu acestea. Dezvoltînd în serie Mac Laurin funcţiile trigonometrice sinus şi cosinus şi păstrînd termenii lineari în perturbaţii se obţin relaţiile:

$$\underline{SIN}(\tilde{p}\,\Delta t_k) = \underline{P}\,\Delta t_k \quad , \quad \underline{SIN}(\tilde{p}\,\Delta t_{k+1}) = \underline{P}\,\Delta t_{k+1} \; ,$$
$$\underline{COS}(\tilde{p}\,\Delta t_k) = \underline{COS}(\tilde{p}\,\Delta t_{k+1}) = \underline{I} \quad . \tag{2.250}$$

Pentru linearizarea integralelor din (2.248), acestea se descompun pe intervalele de timp, iar pe intervalele de timp infinitesimale (de la t_k la $t_k+\Delta t_k$ şi de la t_k+rT la $t_k+rT+\Delta t_{k+1}$) se aplică formula de calcul a mediei unei integrale. Ţinînd seama de periodicitatea forţelor perturbatoare şi neglijînd produsele perturbaţiilor şi puterile perturbaţiilor mai mari decît 1, rezultă:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t_k+\Delta t_k} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_k+rT+\Delta t_{k+1}-\tau)\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)d\tau = \\
&\qquad = \Delta t_k \underline{SIN}(\tilde{p}rT)\, \underline{\mu}^T \bar{F}(t_k) \quad , \\
&\int_{t_k+rT}^{t_k+rT+\Delta t_{k+1}} \underline{SIN}\left[\tilde{p}(t_k+rT+\Delta t_{k+1}-\tau)\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)d\tau = 0, \\
&\int_{t_k}^{t_k+\Delta t_k} \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_k+rT+\Delta t_{k+1}-\tau)\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)d\tau = \\
&\qquad = \Delta t_k \underline{COS}(\tilde{p}rT)\, \underline{\mu}^T \bar{F}(t_k) \quad , \\
&\int_{t_k+rT}^{t_k+rT+\Delta t_{k+1}} \underline{COS}\left[\tilde{p}(t_k+rT+\Delta t_{k+1}-\tau)\right] \underline{\mu}^T \bar{F}(\tau)d\tau = \Delta t_{k+1} \underline{\mu}^T \bar{F}(t_k).
\end{aligned} \tag{2.251}$$

Inlocuind (2.249), (2.25o) şi (2.251) în (2.248), se obţin ecuaţiile linearizate în perturbaţii ale parametrilor ciocnirilor, care se pot exprima sub forma:

$$\begin{aligned}
&\underline{P}\,\underline{SIN}(\tilde{p}rT)\,\underline{\mu}^{-1}\Delta\bar{x}_{k+1} + \underline{COS}(\tilde{p}rT)\,\underline{\mu}^{-1}\Delta\dot{\bar{x}}_{k+1} - \underline{\mu}^{-1}\Big\{\Delta\dot{\bar{x}}_k - \\
&- (1+R)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^T \Delta\dot{\bar{x}}_k\right]\underline{A}\,\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\Big\} + \Big[\underline{P}^2\,\underline{\mu}^{-1}\bar{x}_c - \underline{P}\,\underline{M}^{-1}\bar{S}_2 - \\
&- \underline{COS}(\tilde{p}rT)\underline{M}^{-1}\underline{\mu}^T\bar{F}(t_k)\Big]\Delta t_{k+1} + \left[\underline{M}^{-1}\underline{\mu}^T\bar{F}(t_k) - \underline{P}^2\underline{\mu}^{-1}\bar{x}_c\right]\Delta t_k = 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{2.252}$$

$$\begin{aligned}
&\underline{P}\,\underline{COS}(\tilde{p}rT)\,\underline{\mu}^{-1}\Delta\bar{x}_{k+1} - \underline{P}\,\underline{\mu}^{-1}\Delta\bar{x}_k - \underline{SIN}(\tilde{p}rT)\,\underline{\mu}^{-1}\Delta\dot{\bar{x}}_{k+1} + \\
&+ \left[\underline{SIN}(\tilde{p}rT)\underline{M}^{-1}\underline{\mu}^T\bar{F}(t_k) - \underline{P}\,\underline{M}^{-1}\bar{S}_2' - \underline{P}\,\underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_c'\right]\Delta t_{k+1} + \underline{P}\,\underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}_c'\,\Delta t_k = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

unde $\bar{S}_2'$ are expresia din a doua relaţie (2.127) şi s-a notat:

$$\bar{S}_2' = \int_{t_k}^{t_k+rT} \underline{COS}\left[\tilde{p}(\tau - t_k)\right]\underline{\mu}^T\,\bar{F}(\tau)d\tau . \tag{2.253}$$

Pentru studiul stabilităţii mişcărilor vibropercutante periodice considerate, este necesar să se linearizeze şi funcţia legăturii unilaterale în raport cu perturbaţiile coordonatelor generalizate, pentru mişcarea perturbată, în momentele ciocnirilor de ordinul k şi $k+1$.

Dacă funcţia legăturii unilaterale este lineară, avînd expresia dată de (2.38), se obţin relaţiile:

$$\Delta x_{jk} = \Delta x_{ik} \quad , \qquad \Delta x_{j\,k+1} = \Delta x_{i\,k+1} \tag{2.254}$$

Eliminînd în (2.252), de exemplu, perturbaţiile coordonatei x_j pe baza relaţiilor de forma (2.254), aceste ecuaţii matriciale constituie un sistem de $2n$ ecuaţii algebrice, liniar şi omogen în perturbaţii ale parametrilor ciocnirilor. Căutînd, pentru acest sistem, soluţii de forma (2.239), se ajunge la ecuaţia caracteristică de forma (2.24o), din care se determină condiţiile de stabilitate ale mişcărilor vibropercutante periodice considerate.

In cazul în care forţele perturbatoare sînt armonice, avînd expresiile date de (2.112), ecuaţiile linearizate în perturbaţii se pot exprima sub forma:

$$\begin{aligned}
&\underline{P}\,\underline{SIN}(\tilde{p}rT)\,\underline{\mu}^{-1}\Delta\bar{x}_{k+1} + \underline{COS}(\tilde{p}rT)\,\underline{\mu}^{-1}\Delta\dot{\bar{x}}_{k+1} - \underline{\mu}^{-1}\Big\{\Delta\dot{\bar{x}}_k - \\
&\quad -(1+R)\Big[\Big(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\Big)^T\Delta\dot{\bar{x}}_k\Big]\underline{A}\,\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\Big\} + \Big[\underline{P}^2\underline{\mu}^{-1}\bar{x}_c - \underline{P}^2\bar{G}\sin\omega t_k - \\
&\quad -\omega\underline{P}\,\underline{SIN}(\tilde{p}rT)\bar{G}\cos\omega t_k + \omega^2\underline{COS}(\tilde{p}rT)\bar{G}\sin\omega t_k\Big]\Delta t_{k+1} + \\
&\quad +\Big[(\underline{P}^2 - \omega^2\underline{I})\bar{G}\sin\omega t_k - \underline{P}^2\underline{\mu}^{-1}\bar{x}_c\Big]\Delta t_k = 0 \quad , \\
&\underline{P}\,\underline{COS}(prT)\,\underline{\mu}^{-1}\Delta\bar{x}_{k+1} - \underline{P}\,\underline{\mu}^{-1}\Delta\bar{x}_k - \underline{SIN}(\tilde{p}rT)\,\underline{\mu}^{-1}\Delta\dot{\bar{x}}_{k+1} + \\
&\quad +\Big[\omega\underline{P}\bar{G}\cos\omega t_k - \omega\underline{P}\,\underline{COS}(\tilde{p}rT)\bar{G}\cos\omega t_k - \\
&\quad -\omega^2\underline{SIN}(\tilde{p}rT)\bar{G}\sin\omega t_k - \underline{P}\,\underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}'_c\Big]\Delta t_{k+1} + \underline{P}\,\underline{\mu}^{-1}\dot{\bar{x}}'_c\,\Delta t_k = 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{2.255}$$

în care $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ şi $\bar{G}$ are expresia (2.132).

Dacă sistemul vibropercutant considerat are amortizare vîscoasă uniformă şi forţele perturbatoare sînt periodice oarecare, relaţiile dintre parametrii ciocnirilor de ordinul k şi $k+1$ se exprimă, pe baza relaţiilor (2.155) şi (2.156), sub forma:

$$(\underline{x})_{k+1} = \underline{\mu}\ \underline{EXP}\left[-\widetilde{\mathcal{E}}(t_{k+1}-t_k)\right]\left\{\underline{COS}\left[\widetilde{h}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\underline{x})_k + \right.$$
$$+ \underline{H}^{-1}\underline{E}\ \underline{SIN}\left[\widetilde{h}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\underline{x})_k + \underline{H}^{-1}\underline{SIN}\left[\widetilde{h}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\dot{\underline{x}}')_k\Big\} +$$
$$+ \underline{\mu}\ \underline{H}^{-1}\underline{M}^{-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\underline{EXP}\left[-\widetilde{\mathcal{E}}(t_{k+1}-\tau)\right]\underline{SIN}\left[\widetilde{h}(t_{k+1}-\tau)\right]\underline{\mu}^{T}\underline{F}(\tau)d\tau ,$$
$$(2.256)$$
$$(\dot{\underline{x}})_{k+1} = \underline{\mu}\ \underline{EXP}\left[-\widetilde{\mathcal{E}}(t_{k+1}-t_k)\right]\left\{-\underline{H}^{-1}(\underline{E}^2+\underline{H}^2)\underline{SIN}\left[\widetilde{h}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\underline{x})_k - \right.$$
$$- \underline{H}^{-1}\underline{E}\ \underline{SIN}\left[\widetilde{h}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\dot{\underline{x}}')_k + \underline{COS}\left[\widetilde{h}(t_{k+1}-t_k)\right]\underline{\mu}^{-1}(\dot{\underline{x}}')_k\Big\} -$$
$$- \underline{\mu}\ \underline{H}^{-1}\underline{M}^{-1}\underline{E}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\underline{EXP}\left[-\widetilde{\mathcal{E}}(t_{k+1}-\tau)\right]\underline{SIN}\left[\widetilde{h}(t_{k+1}-\tau)\right]\underline{\mu}^{T}\underline{F}(\tau)d\tau +$$
$$+ \underline{\mu}\ \underline{M}^{-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\underline{EXP}\left[-\widetilde{\mathcal{E}}(t_{k+1}-\tau)\right]\underline{COS}\left[\widetilde{h}(t_{k+1}-\tau)\right]\underline{\mu}^{T}\underline{F}(\tau)d\tau .$$

Pentru studiul stabilităţii mişcărilor vibropercutante periodice cu o ciocnire într-o perioadă a mişcării pentru sistemul vibropercutant considerat, se exprimă relaţiile între parametrii ciocnirilor de ordinul k şi $k+1$ pe baza relaţiilor (2.256) pentru mişcarea perturbată. Pentru linearizarea relaţiilor care rezultă, pe lîngă formulele de aproximare de forma (2.250) şi (2.251), este necesar să se linearizeze funcţiile exponenţiale. Dezvoltînd în serie Mac Laurin în raport cu perturbaţiile momentelor ciocnirilor aceste funcţii exponenţiale de timp şi păstrînd numai termenii lineari, rezultă formulele de aproximare:

$$\underline{EXP}(\widetilde{\mathcal{E}}\Delta t_k) = \underline{I} + \underline{E}\,\Delta t_k \ , \quad \underline{EXP}(-\widetilde{\mathcal{E}}\Delta t_k) = \underline{I} - \underline{E}\,\Delta t_k ,$$
$$(2.257)$$
$$\underline{EXP}(\mathcal{E}\Delta t_{k+1}) = \underline{I} + \underline{E}\,\Delta t_{k+1}, \quad \underline{EXP}(-\widetilde{\mathcal{E}}\Delta t_{k+1}) = \underline{I} - \underline{E}\,\Delta t_{k+1} .$$

Ţinînd seama şi de relaţiile (2.249), ecuaţiile linearizate în perturbaţii pentru studiul stabilităţii mişcărilor vibropercutante periodice considerate se pot exprima sub forma:

$$\Big[(\underline{E}\ \underline{L}_2-\underline{H}\ \underline{L}_1)\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\ rT)+\underline{E}^2-\underline{H}^2\Big]\ \mu^{-1}\Delta\,\overline{x}_{k+1}-(\underline{E}^2-\underline{H}^2)\ \mu^{-1}\Delta\,\overline{x}_k\ +$$

$$+\Big[\underline{L}_2\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\ rT)+\underline{E}\Big]\ \mu^{-1}\Delta\,\dot{\overline{x}}_{k+1}-\underline{E}\ \mu^{-1}\Big\{\Delta\,\dot{\overline{x}}_k-$$

$$-(1+R)\Big[(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}})^T\Delta\,\dot{\overline{x}}_k\Big]\underline{A}\ \frac{\partial f}{\partial \overline{x}}\Big\}+\Big\{(\underline{E}^2+\underline{H}^2)(\underline{E}\ \mu^{-1}\overline{x}_c+\mu^{-1}\dot{\overline{x}}'_c+\overline{S}_3)-$$

$$-\underline{M}^{-1}\Big[\underline{L}_2\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\ rT)+\underline{E}\Big]\ \mu^T\overline{F}(t_k)\Big\}\ \Delta\,t_{k+1}-\Big\{(\underline{E}^2+\underline{H}^2)(\underline{E}\ \mu^{-1}\overline{x}_c\ +$$

$$+\ \mu^{-1}\dot{\overline{x}}'_c)-\underline{M}^{-1}\underline{E}\ \mu^T\overline{F}(t_k)\Big\}\ \Delta\,t_k=0\ , \qquad (2.258)$$

$$\Big[(\underline{E}\ \underline{L}_1+\underline{H}\ \underline{L}_2)\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\ rT)+2\underline{E}\ \underline{H}\Big]\ \mu^{-1}\Delta\,\overline{x}_{k+1}-2\underline{E}\ \underline{H}\ \mu^{-1}\Delta\,\overline{x}_k\ +$$

$$+\Big[\underline{L}_1\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\ rT)+\underline{H}\Big]\ \mu^{-1}\Delta\,\dot{\overline{x}}_{k+1}-\underline{H}\ \mu^{-1}\Big\{\Delta\,\dot{\overline{x}}_k-$$

$$-(1+R)\Big[(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}})^T\Delta\,\dot{\overline{x}}_k\Big]\underline{A}\ \frac{\partial f}{\partial \overline{x}}\Big\}+\Big\{(\underline{E}^2+\underline{H}^2)(\underline{H}\ \mu^{-1}\overline{x}_c+\overline{S}_4)\ -$$

$$-\underline{M}^{-1}\Big[\underline{L}_1\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\ rT)+\underline{H}\Big]\ \mu^T\overline{F}(t_k)\Big\}\ \Delta\,t_{k+1}-\Big[\underline{H}(\underline{E}^2+\underline{H}^2)\ \mu^{-1}\overline{x}_c-$$

$$-\ \underline{M}^{-1}\underline{H}\ \mu^T\ \overline{F}(t_k)\Big]\ \Delta\,t_k\ ,$$

în care s-au folosit notaţiile (2.159).

Dacă forţele perturbatoare sînt armonice, avînd expresiile date de (2.112), studiul stabilităţii mişcărilor vibropercutante periodice de tipul considerat se efectuează în mod analog. Ecuaţiile linearizate în perturbaţii se obţin de forma:

$$\Big[(\underline{E}\ \underline{L}_2-\underline{H}\ \underline{L}_1)\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\ rT)+\underline{E}^2-\underline{H}^2\Big]\ \mu^{-1}\Delta\,\overline{x}_{k+1}-(\underline{E}^2-\underline{H}^2)\ \mu^{-1}\Delta\,\overline{x}_k\ +$$

$$+\Big[\underline{L}_2\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\ rT)+\underline{E}\Big]\ \mu^{-1}\Delta\,\dot{\overline{x}}_{k+1}-\underline{E}\ \mu^{-1}\Big\{\Delta\,\dot{\overline{x}}_k\ -$$

$$-\ (1+R)\Big[(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}})^T\Delta\,\dot{\overline{x}}_k\Big]\ \underline{A}\ \frac{\partial f}{\partial \overline{x}}\Big\}\ +\ \Big\{(\underline{E}^2+\underline{H}^2)(\underline{E}\ \mu^{-1}\overline{x}_c\ +$$

$$+\ \mu^{-1}\dot{\overline{x}}'_c)-\ \omega\Big[(\underline{E}\ \underline{L}_2-\underline{H}\ \underline{L}_1)\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\ rT)+2\underline{E}^2\Big]\overline{G}_2\ +\Big[\underline{E}(\underline{E}^2+\underline{H}^2)\ -$$

$$-\ \omega^2\underline{L}_2\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\ rT)-\ \omega^2\underline{E}\Big]\overline{G}_3\Big]\ \Delta\,t_{k+1}+\Big\{-(\underline{E}^2+\underline{H}^2)(\underline{E}\ \mu^{-1}\overline{x}_c\ +$$

$$+\ \mu^{-1}\dot{\overline{x}}'_c)+2\omega\,\underline{E}^2\overline{G}_2+\underline{E}\ \Big[\omega^2\underline{I}\ -(\underline{E}^2+\underline{H}^2)\Big]\overline{G}_3\Big\}\Delta\,t_k=0\ , \qquad (2.259)$$

$$\Big[(\underline{E}\ \underline{L}_1+\underline{H}\ \underline{L}_2)\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\ rT)+2\underline{E}\ \underline{H}\Big]\ \mu^{-1}\Delta\,\overline{x}_{k+1}-2\underline{E}\ \underline{H}\ \mu^{-1}\Delta\,\overline{x}_k\ +$$

$$+\Big[\underline{L}_1\underline{EXP}(\tilde{\varepsilon}\ rT)+\underline{H}\Big]\ \mu^{-1}\Delta\,\dot{\overline{x}}_{k+1}-\underline{H}\ \mu^{-1}\Big\{\Delta\,\dot{\overline{x}}_k\ -$$

$$-\ (1+R)\Big[(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}})^T\Delta\,\dot{\overline{x}}_k\Big]\ \underline{A}\ \frac{\partial f}{\partial \overline{x}}\Big\}\ +\Big\{(\underline{E}^2+\underline{H}^2)\ \underline{H}\ \mu^{-1}\overline{x}_c\ -$$

$$- \omega\left[(\underline{E}\ \underline{L}_1+\underline{H}\ \underline{L}_2)\underline{EXP}(\widetilde{\varepsilon}\ rT)+2\underline{E}\ \underline{H}\right]\overline{G}_2+\left[\underline{H}(\underline{E}^2+\underline{H}^2)-\omega^2\underline{L}_1\underline{EXP}(\widetilde{\varepsilon}\ rT)-\right.$$

$$\left.-\ \omega^2\underline{H}\right]\overline{G}_3\Big\}\Delta t_{k+1}+\Big\{-(\underline{E}^2+\underline{H}^2)\underline{H}\ \mu^{-1}\dot{\overline{x}}_c+2\omega\underline{E}\ \underline{H}\ \overline{G}_2\ +$$

$$+\ \underline{H}\ \left[\omega^2\underline{I}-(\underline{E}^2+\underline{H}^2)\right]\overline{G}_3\Big\}\Delta t_k = 0\quad ,$$

în care, pe lîngă notaţiile din paragraful 2.4.2, s-au mai folosit notaţiile:

$$\overline{G}_2 = \left[(\underline{P}^2-\omega^2\underline{I})\cos\omega t_k + 2\omega\underline{E}\ \sin\omega t_k\right]\overline{G}_1\quad ,$$

$$\overline{G}_3 = \left[2\omega\underline{E}\ \cos\omega t_k - (\underline{P}^2-\omega^2\underline{I})\sin\omega t_k\right]\overline{G}_1\quad . \qquad (2.260)$$

2.6. Optimizarea sistemelor vibropercutante

Aşa cum s-a arătat în paragraful 2.1, criteriul cel mai important după care se efectuează optimizarea sistemelor vibropercutante îl constituie realizarea unor pierderi mari de energie cinetică în timpul ciocnirilor. Pierderea de energie cinetică a unui sistem vibropercutant în timpul ciocnirilor se transformă în lucru mecanic de deformaţie (prese mecanice, maşini de matriţat, etc.), în lucru mecanic de deplasare a unor piese într-un mediu rezistent (maşini pentru înfigerea pilonilor în pămînt, maşini pentru tasarea terenurilor, etc.), sau în alte forme de energie, de cele mai multe ori în energie termică şi acustică (amortizoare de vibraţii prin ciocniri). In toate aceste cazuri, pentru funcţionarea în condiţii optime a sistemelor vibropercutante, este necesar ca pierderile de energie cinetică în timpul ciocnirilor să fie maxime.

Optimizarea sistemelor vibropercutante, după criteriul considerat, conduce la două probleme, în funcţie de mărimile mecanice asupra cărora se poate acţiona pentru realizarea unor mişcări vibropercutante periodice optime. In mod obişnuit, atît la proiectare, cît şi în exploatarea sistemelor vibropercutante, pot fi reglaţi anumiţi parametrii dinamici, ca, de exemplu, distanţele δ_{ij}

dintre corpurile care se ciocnesc în poziţia de echilibru static a sistemului, sau unele constante elastice prin interschimbabilitatea elementelor elastice. De asemenea, în anumite condiţii, se pot schimba mecanismele de acţionare ale sistemelor vibropercutante, astfel încît se modifică structura şi variaţia în timp a forţelor perturbatoare. Prin urmare, problemele care urmează să fie rezolvate pentru optimizarea sistemelor vibropercutante se pot formula în felul următor:

a) Fiind date forţele perturbatoare periodice, în cele mai frecvente cazuri armonice, să se determine valorile optime ale parametrilor dinamici reglabili pentru sistemul vibropercutant, astfel încît pierderile de energie cinetică în timpul ciocnirilor să fie maxime.

b) Să se determine forţele perturbatoare periodice optime, pentru care pierderile de energie cinetică în timpul ciocnirilor sînt maxime. Desigur, şi în acest caz, parametrii dinamici reglabili ai sistemului vibropercutant vor avea anumite valori optime, care trebuie să fie determinate.

Pentru concretizare, se consideră un sistem vibropercutant cu n grade de libertate şi o cuplă percutantă, care se reduce la un model de translaţie, avînd ciocnirii instantanee şi ecuaţiile diferenţiale ale mişcării liniare între ciocniri. Pierderea de energie cinetică a sistemului în timpul ciocnirii de ordinul k se exprimă prin:

$$\Delta(E_c)_k = E_c(t_k) - E_c(t_k') = \frac{1}{2}(\dot{x})_k^T \underline{m} (\dot{x})_k - \frac{1}{2}(\dot{x}')_k^T \underline{m} (\dot{x}')_k , \quad (2.261)$$

unde matricea de inerţie $\underline{m}$ este simetrică, în majoritatea cazurilor fiind matrice diagonală. Ţinînd seama de relaţia matricială (2.62) dintre vitezele de la sfîrşitul ciocnirii şi cele de la începutul ciocnirii, expresia (2.261) se poate scrie sub forma:

$$\Delta(E_c)_k = \frac{1}{2}(1-R^2)\,\frac{\left[(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}})^T(\dot{\bar{x}})_k\right]^2}{(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}})^T \underline{m}^{-1}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}} \qquad (2.262)$$

Pentru cupla percutantă din fig.2.1, avînd funcţia legăturii unilaterale dată de relaţia (2.38), expresia pierderii de energie cinetică la ciocnirea de ordinul k devine:

$$\Delta(E_c)_k = \frac{1}{2}(1-R^2)\,\frac{m_i m_j}{m_i+m_j}\left[(\dot{x}_j)_k - (\dot{x}_i)_k\right]^2 \qquad (2.263)$$

Se constată că pierderea de energie cinetică în timpul ciocnirii depinde de expresia $(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}})^T(\dot{\bar{x}})_k$, care, pentru existenţa ciocnirilor, conform relaţiei (2.48a), trebuie să fie negativă. Valorile vitezelor de la începutul ciocnirilor din această expresie se determină în funcţie de parametrii dinamici reglabili ai sistemului vibropercutant, pe baza condiţiilor de existenţă şi de stabilitate ale mişcărilor vibropercutante periodice. Rezolvarea primei probleme de optimizare a sistemului vibropercutant şi, ca urmare, determinarea parametrilor dinamici reglabili optimi, constă în rezolvarea problemei de minim a expresiei $(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}})^T\dot{\bar{x}}_c$ în raport cu parametrii dinamici reglabili.

In cazul sistemului vibropercutant considerat, avînd forţele de amortizare neglijabile şi forţele perturbatoare armonice, parametrii ciocnirilor pentru mişcările vibropercutante periodice cu o ciocnire într-o perioadă a mişcării se determină din relaţiile matriciale (2.130), (2.131) şi din ecuaţia (2.128), corespunzătoare funcţiei legăturii unilaterale. Din ecuaţiile (2.130) şi (2.131) expresia $(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}})^T\dot{\bar{x}}_c$ se poate scrie sub forma:

$$(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}})^T\dot{\bar{x}}_c = \frac{2\omega}{1-R}(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}})^T \underline{\mu}\bar{G}\cos\omega t_k \qquad (2.264)$$

Momentele t_k ale ciocnirilor se determină din ecuaţia (2.128). Dacă funcţia legăturii unilaterale are expresia (2.38), din condiţia de minim a expresiei (2.264) rezultă valoarea optimă a parametrului δ_{ij}.

Din expresia (2.264) se constată că valorile optime ale parametrilor ciocnirilor se obţin pentru condiţia $\cos \omega t_k = \pm 1$, adică ciocnirile trebuie să aibă loc în momentele în care se schimbă sensul forţelor perturbatoare.

Pentru rezolvarea celei de a doua problemă se aplică teorema energiei cinetice sub formă diferenţială într-un moment dintre două ciocniri consecutive ale sistemului vibropercutant:

$$dE_c = - dE_p + dL^p + dL^a \quad , \qquad (2.265)$$

în care dL^p este lucrul mecanic elementar al forţelor perturbatoare şi are expresia:

$$dL^p = \bar{F}^T(t)d\bar{x} = \bar{F}^T(t)\dot{\bar{x}}\, dt \quad , \qquad (2.266)$$

iar dL^a este lucrul mecanic elementar al forţelor de amortizare vîscoasă, avînd expresia de calcul:

$$dL^a = (- \underline{c}\dot{\bar{x}})^T d\bar{x} = - \dot{\bar{x}}^T \underline{c}\dot{\bar{x}}\, dt = - 2E_d dt \quad . \qquad (2.267)$$

Integrînd ecuaţia (2.265) între momentele t_k' de la sfîrşitul ciocnirii de ordinul k şi t_{k+1} de la începutul ciocnirii următoare, rezultă:

$$E_c(t_{k+1}) - \left[E_c(t_k) - \Delta(E_c)_k\right] = -E_p(t_{k+1}) + E_p(t_k') + \\ + \int_{t_k'}^{t_{k+1}} \bar{F}^T(t)\dot{\bar{x}}\, dt - 2\int_{t_k'}^{t_{k+1}} E_d(t)dt \quad . \qquad (2.268)$$

Pentru mişcările periodice ale sistemului vibropercutant, cu ciocniri instantanee, energia potenţială nu se modifică în timpul ciocnirilor, iar valoarea sa şi cea a energiei cinetice este aceeaşi pentru toate ciocnirile, astfel încît ecuaţia (2.268) devine:

$$\Delta(E_c)_k + 2\int_{t_k'}^{t_{k+1}} E_d(t)dt = \int_{t_k'}^{t_{k+1}} \bar{F}^T(t)\dot{\bar{x}}\, dt \quad . \qquad (2.269)$$

Relaţia (2.269) arată că lucrul mecanic pozitiv efectuat într-o perioadă a mişcării sistemului vibropercutant de forţele perturbatoare acoperă atît energia disipată de forţele de amortizare, cît şi pierderea de energie la ciocnire. Pentru a avea pierderi de energie maxime în timpul ciocnirilor este necesar ca lucrul mecanic efectuat de forţele perturbatoare să aibă valori maxime. Dintre toate forţele perturbatoare periodice, avînd aceeaşi perioadă T şi cu valorile extreme date de matricile coloană $\overline{F}_o$ şi $-\overline{F}_o$, lucrul mecanic maxim într-o perioadă a unei mişcări periodice cu perioada rT $(r \in N)$ este efectuat de forţele perturbatoare optime, cu variaţie dreptunghiulară în timp, avînd expresiile date de:

$$\overline{F}(t) = \overline{F}_o \operatorname{sign}(\sin \omega t) \quad , \qquad (2.27o)$$

unde $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Si pentru aceste forţe perturbatoare optime, după determinarea parametrilor ciocnirilor ca funcţii de parametrii dinamici reglabili ai sistemului vibropercutant, este necesar să se calculeze valorile lor optime din condiţia de maxim a pierderii de energie cinetică la ciocnire.

In cazul sistemului vibropercutant considerat, fără amortizare şi acţionat de forţele perturbatoare optime (2.27o), expresia $(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}})^T \dot{\overline{x}}_c$, de care depinde pierderea de energie cinetică (2.262), se poate scrie sub forma:

$$(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}})^T \dot{\overline{x}}_c = - \frac{2}{1-R} (\frac{\partial f}{\partial \overline{x}})^T \underline{\mu}\, \underline{M}^{-1} \underline{P}^{-1} \underline{COS}^{-1} (\frac{\pi}{2} \frac{\tilde{p}}{\omega}) \underline{SIN} \left\{ \tilde{p} \left[(k - \frac{3}{4}) \frac{2\pi}{\omega} - t_k \right] \right\} \underline{\mu}^T \overline{F}_o \qquad (2.271)$$

La stabilirea expresiei (2.271) s-au considerat mişcările vibropercutante periodice avînd perioada egală cu perioada forţelor perturbatoare $(r = 1)$, la care ciocnirile au loc în prima semiperioadă de variaţie a forţelor perturbatoare, cînd $\operatorname{sign}(\sin \omega t) = 1$. Prin urmare, momentul ciocnirii de ordinul k se poate determina din expresia:

$$t_k = (k-1)\,\frac{2\pi}{\omega} + \tau \quad , \qquad \tau \in \left[0,\ \frac{\pi}{\omega}\right] \quad . \qquad (2.272)$$

Ţinînd seama de (2.272), se constată că expresia (2.271) are valori extreme pentru $\tau = 0$ sau $\tau = \frac{\pi}{\omega}$, pentru care se obţine:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^T \dot{\bar{x}}_c = \pm \frac{2}{1-R}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^T \underline{\mu}\ \underline{M}^{-1}\underline{P}^{-1}\underline{TG}\left(\frac{\pi}{2}\ \frac{\tilde{\Omega}}{\omega}\right) \underline{\mu}^T F_0 \ . \qquad (2.273)$$

In (2.273) se ia semnul + sau - astfel încît această expresie să fie negativă. Rezultă că şi în acest caz sistemul are mişcări vibropercutante periodice optime dacă ciocnirile au loc în momentele în care se schimbă sensul forţelor perturbatoare.

2.7. Consideraţii privind studiul sistemelor vibropercutante nelineare între ciocniri şi cu ciocniri neinstantanee

Pentru sistemele mecanice vibropercutante avînd caracteristici elastice sau de amortizare neliniare, nu se poate determina o soluţie exactă pentru descrierea mişcării între două ciocniri consecutive. De asemenea, dacă ciocnirile nu pot fi considerate instantanee, trebuie să se ţină seama de caracterul profund neliniar al interacţiunilor percutante în timpul ciocnirilor, astfel încît nici studiul ciocnirilor nu poate fi tratat matematic prin metode exacte. Ca urmare în aceste cazuri este necesar să se aplice metode aproximative de studiu teoretic, apelîndu-se la metodele teoriei vibraţiilor neliniare.

O metodă folosită frecvent în studiul vibraţiilor neliniare este constituită de liniarizarea pe porţiuni (prin segmente de dreaptă) a caracteristicilor neliniare. Această metodă se poate utiliza cu bune rezultate şi în studiul sistemelor vibropercutante, atît pentru exprimarea caracteristicii dinamice a cuplelor percutante, cît şi pentru aproximarea caracteristicilor elastice şi de amortizare ale elementelor neliniare prin caracteristici poligonale. Erorile de calcul la folosirea acestei metode pot fi micşorate oricît de mult prin alegerea unui număr cît mai mare de laturi ale caracteristicii poligonale. Deoarece alegerea unui număr mare de laturi ale caracteristicilor poligonale implică un volum mare de calcul, metoda se foloseşte la modelarea sistemelor vibropercutante pe calculatoare analogice, numerice sau hibride. Numărul de laturi ale unei caracteristici poligonale poate fi redus, fără a afecta precizia de calcul, prin alegerea unor metode speciale de aproximare poligonală, ca, de exemplu, metoda bazată pe condiţia de minim a erorii pătratice ponderate [100], [131], [165], [176].

Atît din studiile teoretice, cît şi din cele experimentale pe modele electrice şi mecanice, s-a constatat că, asupra caracterului mişcărilor vibropercutante, au o influenţă mai mare caracteristicile elastice şi de amortizare neliniare faţă de caracteristicile dinamice neliniare ale cuplelor percutante. Chiar şi în cazul ciocnirilor neinstantanee, durata unei ciocniri este mult mai mică decît perioada mişcărilor vibropercutante periodice, astfel încît erorile de calcul datorită aproximării caracteristicii dinamice a cuplei percutante sînt mult mai mici decît erorile de calcul datorită aproximării caracteristicilor elastice şi de amortizare între două ciocniri consecutive. Prin urmare, în marea majoritate a cazurilor, modelarea matematică a ciocnirilor neinstantanee se poate efectua analog cu cea a ciocnirilor instantanee, fără a afecta precizia de calcul, ţinîndu-se seama de durata ciocnirilor, în care mişcarea sistemului vibropercutant rezultă considerînd egalitatea din relaţia generală (2.46) corespunzătoare cuplei percutante şi ţinîndu-se seama de dependenţa coeficientului de restituire de viteza relativă a punctelor teoretice de contact la începutul ciocnirii pe baza relaţiei (2.89). De altfel, se observă că valoarea coeficientului de restituire la ciocnire nu depinde de forma concretă de variaţie a forţei percutante în timpul ciocnirii, ci de raportul percuţiilor din cele două faze ale ciocnirii.

In cele ce urmează se prezintă cîteva metode aproximative de studiu a unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate, avînd caracteristica elastică neliniară.

Se consideră sistemul vibropercutant din fig.2.6, pentru care caracteristica elastică se exprimă sub forma:

$$F_e(x)=k_o x+hx^3, \qquad (2.274)$$

unde F_e este forţa elastică, x se măsoară din poziţia de echilibru static a sistemului, iar h se consideră un parametru mic. Forţa perturbatoare se consideră armonică, de forma:

$$F(t) = F_o \sin \omega t . \qquad (2.275)$$

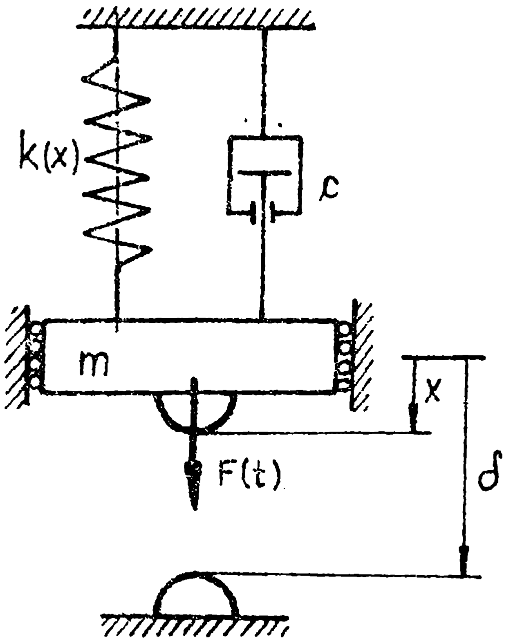


Fig. 2.6

In momentele în care $x = \delta$, corpul de masă m se ciocneşte cu un opritor fix, ciocnirile fiind considerate instantanee, caracterizate de coeficientul de restituire R.

Ecuaţia diferenţială a mişcării sistemului între două ciocniri consecutive este de forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_o x + hx^3 = F_o \sin \omega t . \qquad (2.276)$$

Atît pentru studiul teoretic, cît şi pentru modelarea sistemului vibropercutant considerat, este avantajos să se exprime ecuaţia diferenţială a mişcării sub formă adimensională. Pentru aceasta se folosesc notaţiile:

$$\tau = \omega t \; ; \quad \omega_n^2 = \frac{k_o}{m} \; ; \quad \varepsilon = \frac{c}{2m\omega_n} \; ; \quad x_{st} = \frac{F_o}{k_o} \; ; \quad \mu = \frac{hx_{st}^3}{F_o} \; ;$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_n} \; ; \quad z = \frac{x}{x_{st}} \; ; \quad d = \frac{\delta}{x_{st}} . \qquad (2.277)$$

Ecuaţia diferenţială a mişcării sub formă adimensională devine:

$$\eta^2 z'' + 2\eta\varepsilon z' + z + \mu z^3 = \sin\tau \quad , \qquad (2.278)$$

în care z' şi z'' reprezintă prima şi a doua derivată a variabilei z în raport cu variabila independentă τ , iar μ este un parametru mic adimensional.

Pentru determinarea mişcărilor vibropercutante periodice, este necesar să se integreze ecuaţia diferenţială (2.278) între două ciocniri consecutive. Ecuaţia diferenţială fiind neliniară, integrarea ei se poate efectua numai prin metode aproximative. Metoda liniarizării caracteristicii elastice s-a utilizat la modelarea sistemului vibropercutant considerat pe calculatorul analogic. In cele ce urmează se prezintă unele aspecte privind aplicarea metodei balanţei armonice şi a metodei parametrului mic pentru determinarea unor soluţii aproximative a ecuaţiei diferenţiale (2.278) între două ciocniri consecutive ale sistemului vibropercutant.

Pentru aplicarea metodei balanţei armonice, se neglijează într-o primă aproximaţie efectul forţei de amortizare vîscoasă ($\varepsilon = 0$) şi se consideră soluţia ecuaţiei diferenţiale între două ciocniri consecutive de forma:

$$z = C_1\cos\frac{\tau-\tau_k}{\eta} + C_2\sin\frac{\tau-\tau_k}{\eta} + A\sin\tau \quad , \qquad (2.279)$$

care aproximează foarte bine soluţia exactă pentru valori mici ale parametrului μ . In (2.279) τ_k este momentul adimensional al ciocnirii de ordinul k, C_1 şi C_2 sînt constante de integrare, iar A se determină din condiţia ca $A\sin\tau$ să verifice ecuaţia diferenţială şi rezultă din ecuaţia:

$$A(1-\eta^2) + \frac{3}{4}\mu A^3 = 1 \quad . \qquad (2.280)$$

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină din condițiile inițiale corespunzătoare sfîrșitului ciocnirii de ordinul k:

$$\tau = \tau_k \; ; \quad z = d \quad ; \quad z' = -R(z')_k \tag{2.281}$$

Mișcarea sistemului vibropercutant între ciocnirile de ordinul k și $k+1$ se exprimă prin legea de mișcare:

$$z = (d - A\sin\tau_k)\cos\frac{\tau-\tau_k}{\eta} - \eta\left[R(z')_k + A\cos\tau_k\right]\sin\frac{\tau-\tau_k}{\eta} + A\sin\tau \; . \tag{2.282}$$

Condițiile ca mișcarea sistemului să fie periodică, avînd perioada egală cu un multiplu r al perioadei adimensionale 2π a forței perturbatoare, sînt date de:

$$\tau = \tau_{k+1} = \tau_k + 2\pi r \; ; \quad z = d \; ; \quad z' = (z')_{k+1} = (z')_k = z'_c \; . \tag{2.283}$$

Impunînd condițiile de periodicitate (2.283) pentru legea de mișcare (2.282), rezultă:

$$A\left(\sin\tau_k - \frac{1+R}{1-R}\,\frac{\eta}{\operatorname{tg}\frac{\pi r}{\eta}}\cos\tau_k\right) = d \; ,$$
$$z'_c = \frac{2}{1-R}A\cos\tau_k \; . \tag{2.284}$$

Pentru existența mișcărilor vibropercutante periodice, din prima relație (2.284) trebuie să rezulte pentru τ_k valori reale, iar din a doua pentru z'_c este necesar să rezulte valori pozitive. Dacă se caută mișcările vibropercutante periodice optime, din expresia vitezei de ciocnire z'_c, dată de (2.284), rezultă că ciocnirile trebuie să aibă loc în momentele în care se schimbă sensul forței perturbatoare. Prin urmare, parametrii optimi ai ciocnirilor se determină din relațiile:

$$(z'_c)_{max} = \frac{2}{1-R}|A| \; ,$$
$$d_{op} = -\frac{1+R}{1-R}\eta\,|A|\operatorname{ctg}\frac{\pi r}{\eta} \; , \tag{2.285}$$

pentru care legea mișcării sistemului între ciocnirile de ordinul k și $k+1$ se exprimă prin:

$$z = A\sin\tau - \frac{1+R}{1-R}\frac{\eta|A|}{\sin\frac{\pi r}{\eta}}\cos\frac{\tau-(\tau_k+\pi)}{\eta} \qquad (2.286)$$

Studiul în primă aproximaţie al stabilităţii mişcărilor vibropercutante periodice optime, efectuat prin metoda prezentată, conduce la următoarele ecuaţii liniarizate în perturbaţii ale parametrilor ciocnirilor:

$$\frac{1}{1-R}\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi r}{\eta}\right)|A|\Delta\tau_{k+1} - \frac{1}{1-R}\left(1+R\ \mathrm{tg}^2\frac{\pi r}{\eta}\right)|A|\Delta\tau_k - \eta R\ \mathrm{tg}\frac{\pi r}{\eta}\Delta z'_k = 0$$

$$\frac{1+R}{1-R}\frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi r}{\eta}}{\mathrm{tg}\frac{\pi r}{\eta}}|A|\Delta\tau_{k+1} - \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi r}{\eta}+R\left(1+3\mathrm{tg}^2\frac{\pi r}{\eta}\right)}{(1-R)\,\mathrm{tg}\frac{\pi r}{\eta}}|A|\Delta\tau_k - \eta\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi r}{\eta}\right)\Delta z'_{k+1} - \eta R\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi r}{\eta}\right)\Delta z'_k = 0 \qquad (2.287)$$

Căutînd soluţii de forma (2.239) pentru aceste ecuaţii, se ajunge la ecuaţia caracteristică de forma (2.240). Dezvoltînd determinantul sistemului obţinut, ecuaţia sa caracteristică se poate exprima sub forma:

$$\beta^2 - \frac{1+R^2+2R\ \mathrm{tg}^2\frac{\pi r}{\eta}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi r}{\eta}}\beta + R^2 = 0 \qquad (2.288)$$

Aplicînd criteriul lui Schur, pentru ca ecuaţia caracteristică (2.288) să aibă rădăcinile în modul subunitare, rezultă condiţiile de stabilitate ale mişcărilor vibropercutante periodice optime:

$$R^2 < 1, \qquad \mathrm{tg}^2\frac{\pi r}{\eta} > 0, \qquad (2.289)$$

care sînt îndeplinite pentru toate mişcările determinate.

Sistemul vibropercutant considerat a fost studiat şi prin modelare pe calculatoarele electronice analogice şi numerice. S-a constatat că pentru valori mici ale parametrului μ rezultatele studiului teoretic sînt în concordanţă cu cele obţinute prin modelare, cu excepţia valorilor mici ale pulsaţiei forţei perturbatoare ($\eta < 0,35$) şi a valorilor pulsaţiei forţei perturbatoare pentru care rezultă valori mari ale modulului parametrului d (valorile parametrului η din jurul valorilor $\eta = 0,5$ şi $\eta = 1$). In aceste cazuri, prin modelare pe calculatoarele electronice s-a ajuns la concluzia că se obţin alte tipuri de mişcări periodice şi anume mişcări vibratorii fără ciocniri sau mişcări vibropercutante cu ciocniri multiple într-o perioadă a mişcării.

In fig.2.7 s-a reprezentat caracteristica elastică a sistemului vibropercutant considerat pentru $\mu = 0,01$, iar în fig.2.8 este dată diagrama de rezonanţă corespunzătoare. Pentru aceeaşi valoare a parametrului μ, în fig.2.9 şi 2.10 s-au reprezentat cu linie continuă diagramele parametrilor ciocnirilor corespunzătoare mişcărilor vibropercutante periodice optime în cazul $r = 1$, pentru care sînt îndeplinite condiţiile de existenţă şi de stabilitate. Aceste diagrame s-au construit pentru valorile coeficientului de restituire la ciocnire $R = 0,2$; $R = 0,4$; $R = 0,6$ şi $R = 0,8$. Se constată că valorile vitezei la începutul ciocnirilor sînt mai mari pentru valori mari ale coeficientului de restituire, dar în aceste cazuri domeniile în care sînt îndeplinite condiţiile de existenţă şi de stabilitate ale mişcărilor vibropercutante periodice de tipul considerat sînt mai înguste.

Pentru studiul sistemului vibropercutant cu metoda parametrului mic, considerînd parametrul μ suficient de mic, astfel încît puterile sale începînd cu a doua să poată fi neglijate, se caută soluţia ecuaţiei diferenţiale (2.278) între două ciocniri consecutive de forma:

$$z = z_0(\tau) + \mu z_1(\tau) + \dots \qquad (2.290)$$

De asemenea, se consideră:

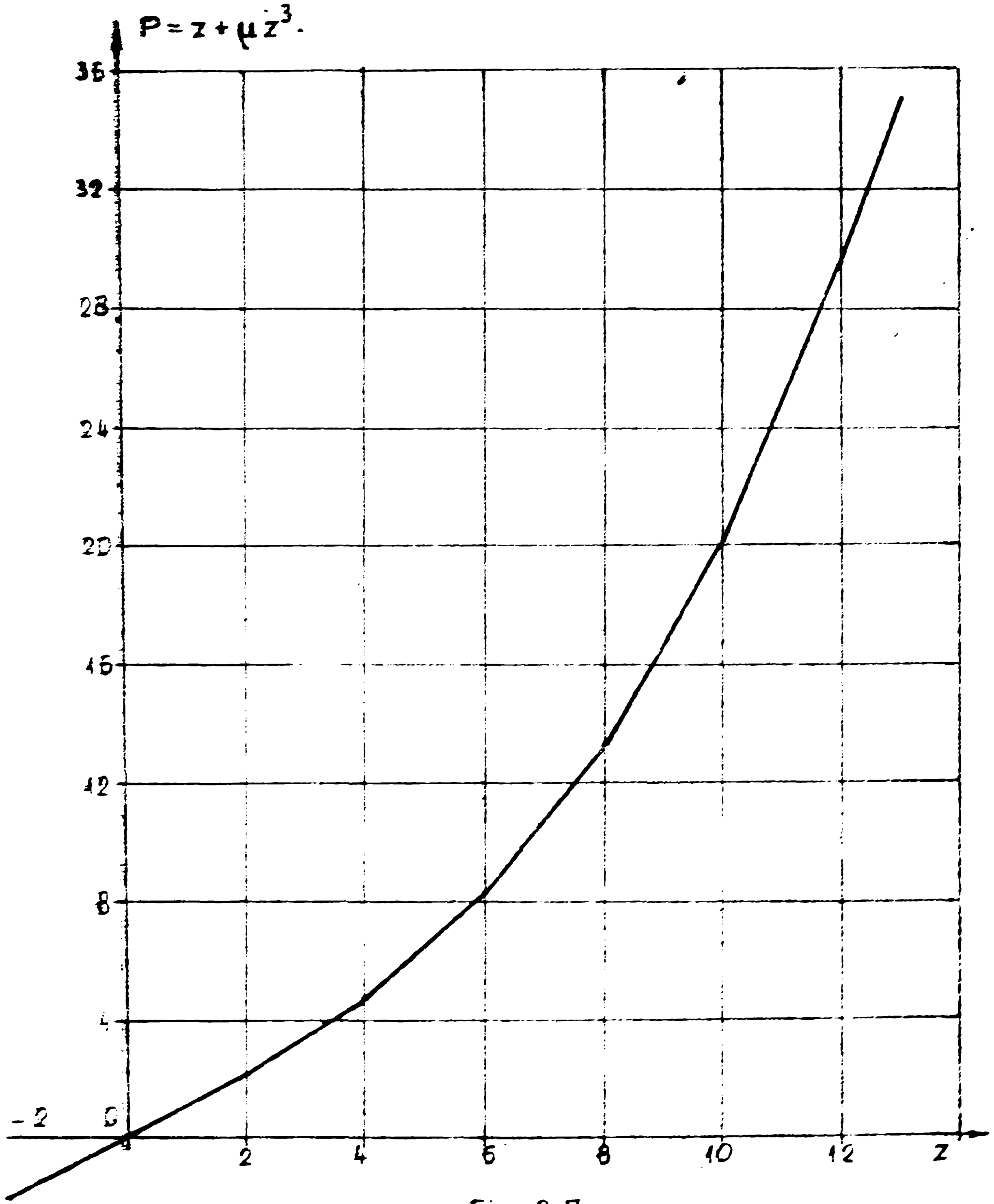


Fig. 2 7

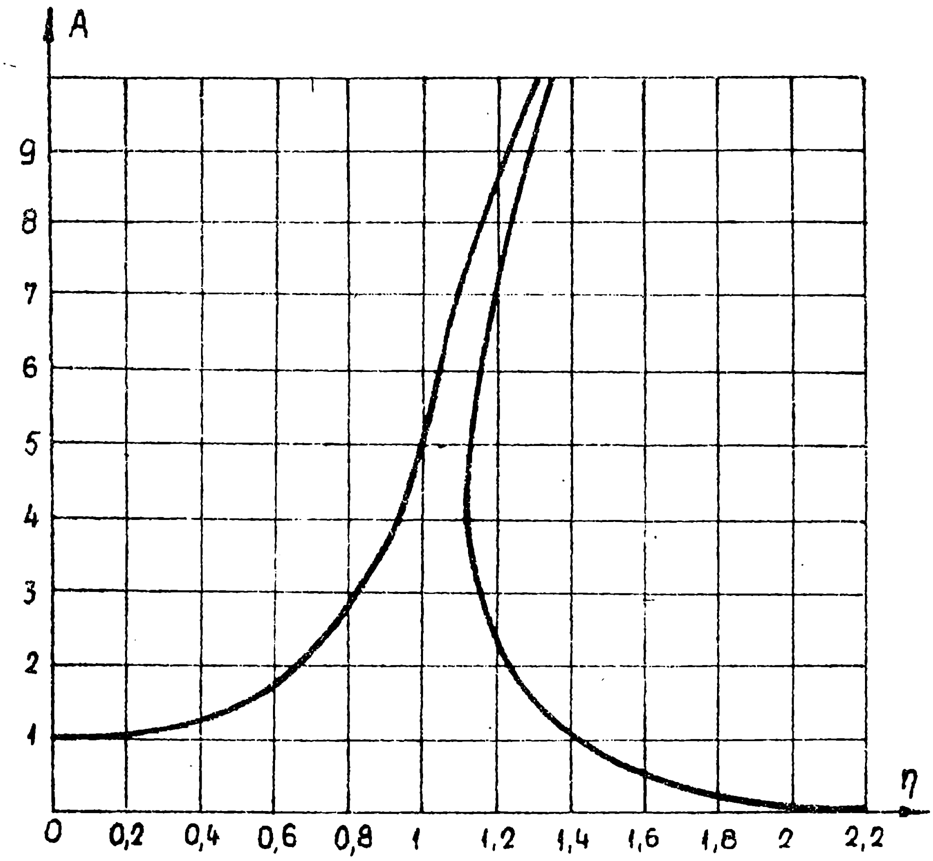


Fig. 2.8

$$\frac{1}{\eta^2} = \frac{1}{\eta_o^2} - \mu a_1 - \dots ; \qquad \eta^2 = \eta_o^2 + \eta_o^4 a_1 \mu + \dots , \qquad (2.291)$$

unde a_1 se determină astfel încît să se elimine termenii seculari.

Înlocuind (2.29o) şi (2.291) în (2.278) şi identificînd după puterile lui μ, pentru $\varepsilon = 0$ se obţin ecuaţiile diferenţiale necesare determinării soluţiei generatoare:

$$\eta_o^2 z_o'' + z_o = \sin \tau \quad , \qquad (2.292)$$

şi a primei aproximaţii:

$$\eta_o^2 z_1'' + z_1 = - \eta_o^4 a_1 z_o'' - z_o^3 \quad . \qquad (2.293)$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (2.292) este:

$$z_o = A_o \cos \frac{\tau - \tau_k}{\eta_o} + B_o \sin \frac{\tau - \tau_k}{\eta_o} + \frac{1}{1-\eta_o^2} \sin \tau \qquad (2.294)$$

Pentru condiţiile iniţiale (2.281), rezultă:

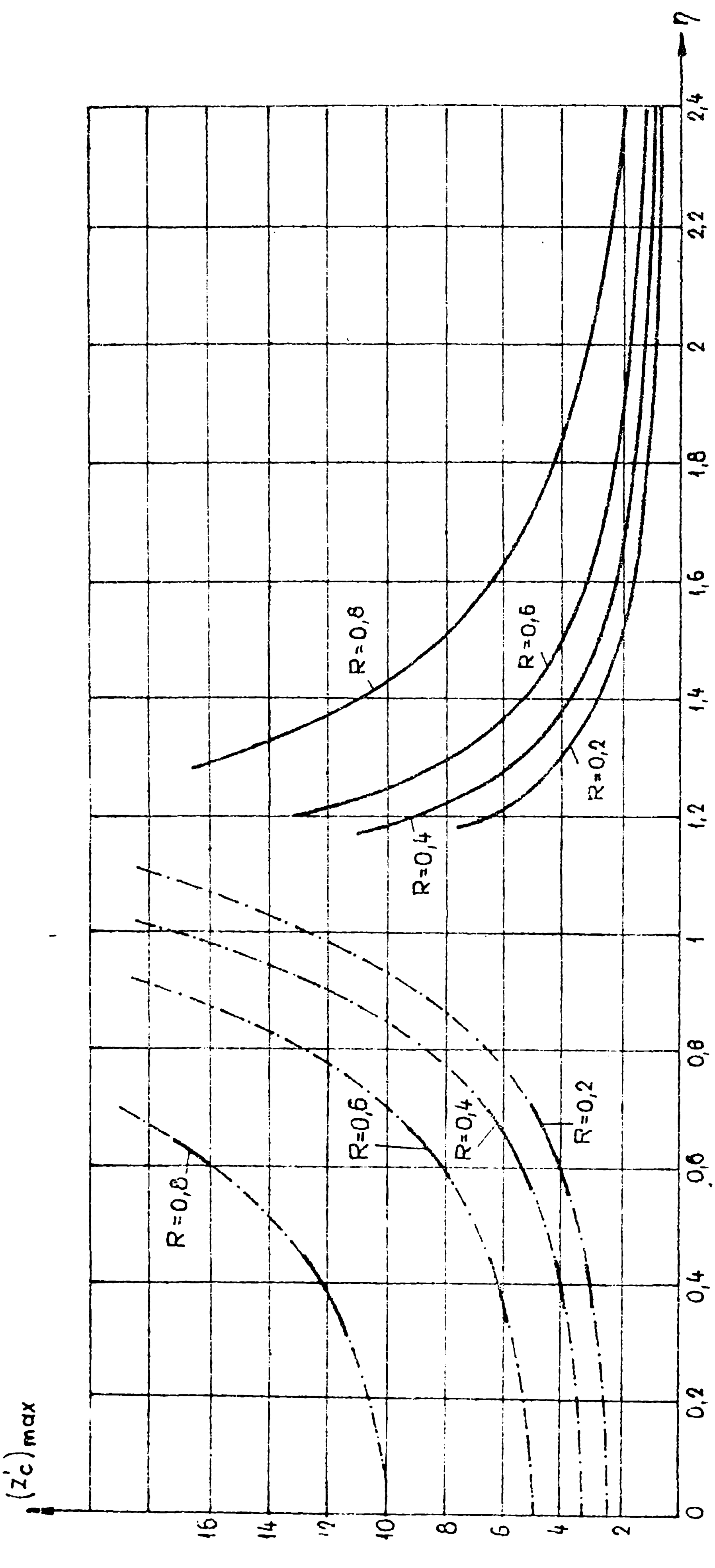

$(z'_c)_{max}$
η
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
2,2
2,4
2
4
6
8
10
12
14
16
R=0,8
R=0,6
R=0,4
R=0,2
R=0,8
R=0,6
R=0,4
R=0,2

Fig. 2.9

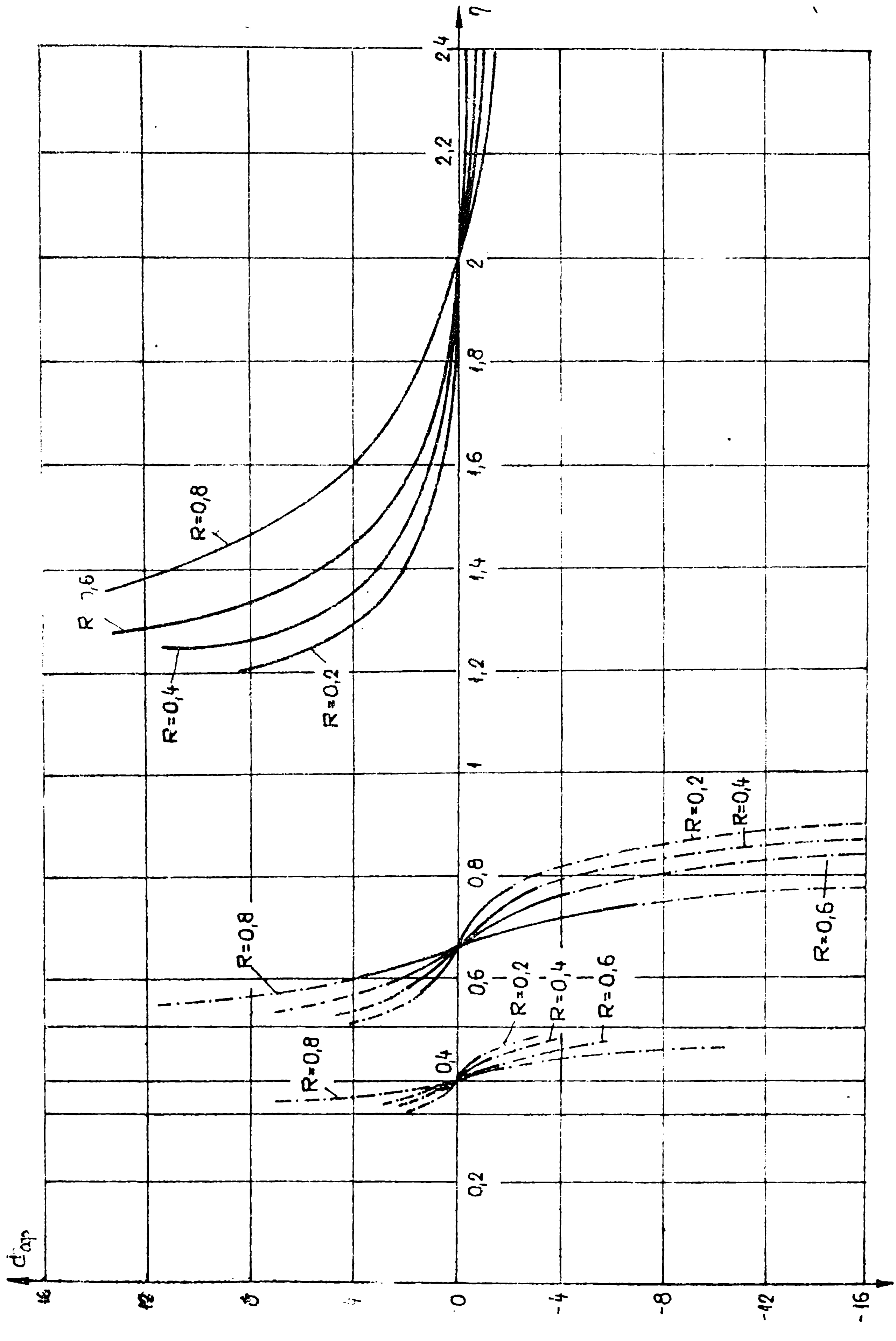


Fig. 2.10

$$A_o = d - \frac{1}{1-\eta_o^2}\sin\tau_k\ ,\quad B_o = -\frac{\eta_o}{1-\eta_o^2}\left[\cos\tau_k + (1-\eta_o^2)R(z')_k\right] \tag{2.295}$$

Inlocuind soluţia (2.294) cu constantele de integrare date de (2.295) în (2.293), dezvoltînd z_o^3 şi reducînd toţi termenii dezvoltării la funcţii trigonometrice de gradul I, se obţine valoarea coeficientului a_1:

$$a_1 = \frac{1}{\eta_o^2}\left[\frac{3}{4}(A_o^2 + B_o^2) + \frac{1}{(1-\eta_o^2)^2}\right]\ , \tag{2.296}$$

iar ecuaţia diferenţială (2.293) devine:

$$\begin{aligned}
\eta_o^2 z_1'' + z_1 = {} & \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\eta_o^2}\left[3(\eta_o^2-2)(A_o^2+B_o^2) + \frac{4\eta_o^2-3}{(1-\eta_o^2)^2}\right]\sin\tau + \\
& + \frac{1}{4}\,\frac{1}{(1-\eta_o^2)^3}\sin 3\tau + \frac{A_o}{4}(3B_o^2-A_o^2)\cos\frac{3(\tau-\tau_k)}{\eta_o} + \\
& + \frac{B_o}{4}(B_o^2-3A_o^2)\sin\frac{3(\tau-\tau_k)}{\eta_o} + \frac{3}{2}\,\frac{A_oB_o}{1-\eta_o^2}\left[\cos\frac{(2+\eta_o)\tau-2\tau_k}{\eta_o} - \right. \\
& \left. - \cos\frac{(2-\eta_o)\tau-2\tau_k}{\eta_o}\right] - \frac{3}{4}\,\frac{A_o^2-B_o^2}{1-\eta_o^2}\left[\sin\frac{(2+\eta_o)\tau-2\tau_k}{\eta_o} - \right. \\
& \left. - \sin\frac{(2-\eta_o)\tau-2\tau_k}{\eta_o}\right] + \frac{3}{4}\,\frac{A_o}{(1-\eta_o^2)^2}\left[\cos\frac{(2\eta_o+1)\tau-\tau_k}{\eta_o} + \right. \\
& \left. + \cos\frac{(2\eta_o-1)\tau+\tau_k}{\eta_o}\right] + \frac{3}{4}\,\frac{B_o}{(1-\eta_o^2)^2}\left[\sin\frac{(2\eta_o+1)\tau-\tau_k}{\eta_o} - \right. \\
& \left. - \sin\frac{(2\eta_o-1)\tau+\tau_k}{\eta_o}\right]\ .
\end{aligned} \tag{2.297}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (2.297) se determină pentru condiţiile iniţiale nule, astfel încît rezultă din (2.290) şi (2.291), cu o bună aproximaţie, mişcarea sistemului vibropercutant între două ciocniri consecutive. Parametrii ciocnirilor pentru mişcările vibropercutante periodice se determină impunînd soluţiei aproximative determinată condiţiile de periodicitate (2.283). Deoarece soluţia ecuaţiei diferenţiale (2.297) rezultă cu mulţi termeni, parametrii ciocnirilor pentru mişcările vibropercutante periodice nu se pot determina analitic, decît pentru unele valori particulare ale parametrilor sistemului vibropercutant. Astfel, pentru $\eta = 2$ şi $d = 0$, căutînd mişcările vibropercutante periodice la care ciocnirile au loc în momentele $\tau_k = (2k-1)\pi$, pentru viteza adimensională de la începutul ciocnirilor rezultă expresia:

$$z'_c = \left| \frac{24\mu\left(2\eta_o^4+23\eta_o^2+1-\frac{1}{1-9\eta_o^2}\right)-32(1-\eta_o^2)^2}{\left[(1+R)(1-\eta_o^2)^2+24\mu R\eta_o^2\right](2\eta_o^4+21\eta_o^2-24)-16(1-R)(1-\eta_o^2)^3} \right| , \tag{2.298}$$

unde η_o se determină din ecuaţia:

$$\eta_o^2 + \frac{\mu\eta_o^2}{(1-\eta_o^2)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{24}\,\frac{1+R}{R}\right)^2\frac{(1-\eta_o^2)^2}{\mu\eta_o^2} = \eta^2 . \tag{2.299}$$

Pentru a determina rădăcinile supraunitare ale ecuaţiei (2.299), este necesar să se reprezinte graficul funcţiei $y = f(\eta_o^2)$ din membrul stîng, care se intersectează cu dreapta $y = \eta^2 = 4$. In fig.2.11 sînt reprezentate aceste grafice pentru $\mu = 0,01$ şi valorile coeficientului de restituire R folosite şi la metoda precedentă. Cu valorile parametrului η_o^2, determinate cu ajutorul lor, din (2.298) se obţin valorile pentru viteza adimensională de la începutul ciocnirilor foarte apropiate de cele obţinute cu metoda balanţei armonice.

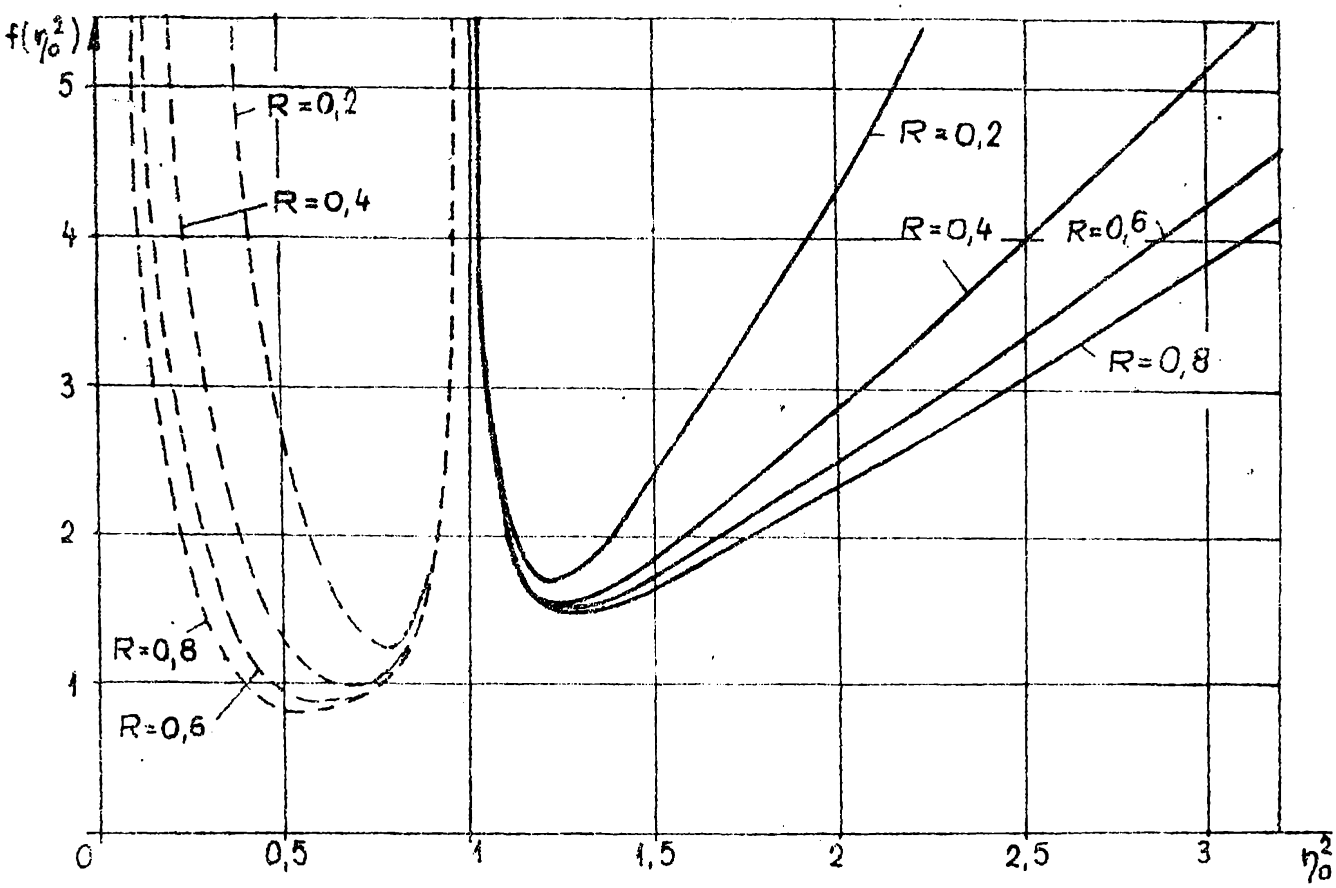


Fig. 2.11

2.8. Studiul mişcărilor vibropercutante periodice optime pentru un sistem vibropercutant cu două grade de libertate

Se consideră sistemul vibropercutant din fig.2.12, avînd două grade de libertate şi o cuplă percutantă, pentru care ecuaţia diferenţială matricială a mişcării între două ciocniri consecutive este de forma (2.37). Se neglijează toate forţele de amortizare şi se consideră ciocnirile instantanee. Pentru determinarea efectivă a mişcărilor vibropercutante periodice optime, se presupun matricile de inerţie şi de rigiditate de forma:

$$\underline{m} = \begin{Vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{Vmatrix}, \qquad (2.300)$$

$$\underline{k} = \begin{Vmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{Vmatrix},$$

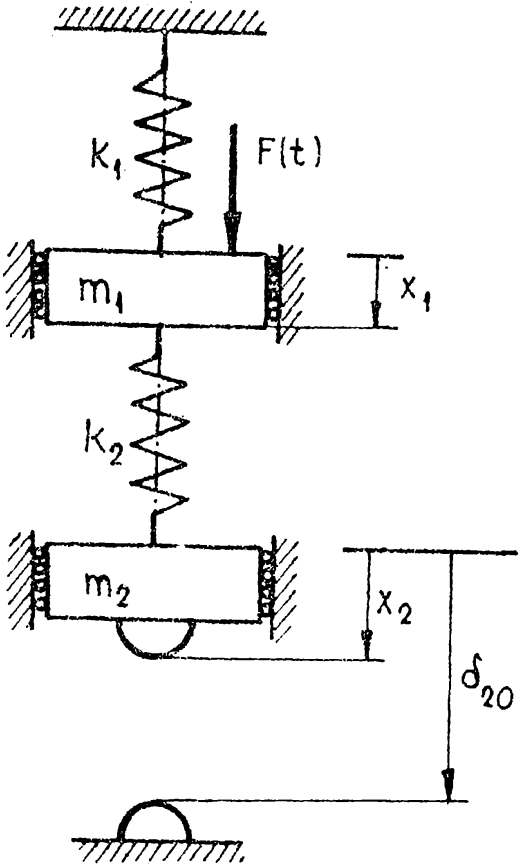


Fig. 2.12

unde $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k$ şi $k_2 = \frac{2}{3} k$. Notînd $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$, rezultă valorile pulsaţiilor proprii $p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega_n$ şi $p_2 = \sqrt{2}\,\omega_n$, iar matricile $\underline{\mu}$ şi $\underline{M}$ devin:

$$\underline{\mu} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}, \tag{2.301}$$

$$\underline{M} = \begin{Vmatrix} 5m & 0 \\ 0 & \frac{5}{4}m \end{Vmatrix} .$$

Dacă se consideră forţa perturbatoare armonică, avînd amplitudinea F_o şi pulsaţia ω, parametrii ciocnirilor mişcărilor periodice cu perioada $T = \frac{2\pi}{\omega} r$ se determină cu relaţiile (2.130) şi (2.131), în care avem:

$$\overline{G} = \frac{x_{st}}{5} \begin{Vmatrix} \frac{3}{1-3\eta^2} \\ \frac{4}{2-\eta^2} \end{Vmatrix} , \quad f(\overline{x}) = \delta_{20} - x_2 \geq 0 \quad , \tag{2.302}$$

unde s-au folosit notaţiile:

$$x_{st} = \frac{F_o}{k} \quad ; \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_n} . \tag{2.303}$$

Deoarece prezintă interes mişcările vibropercutante periodice optime, se caută valorile parametrilor ciocnirilor pentru care expresia (2.264) are valori minime. Valorile optime ale parametrilor ciocnirilor rezultă sub forma:

$$\left\| \begin{matrix} \dot{x}_{1c} \\ (\dot{x}_{2c})_{max} \end{matrix} \right\| = \frac{\omega_n x_{st} \eta}{|(1-3\eta^2)(2-\eta^2)|} \left\| \begin{matrix} 2-3\eta^2 \\ \frac{4}{1-R} \end{matrix} \right\| ,$$

$$\left\| \begin{matrix} x_{1c} \\ (\delta_{2o})_{op} \end{matrix} \right\| = -\frac{2}{5\alpha\gamma} \frac{1+R}{1-R} \frac{x_{st}\eta}{|(1-3\eta^2)(2-\eta^2)|} \left\| \begin{matrix} 2(\gamma-\alpha) \\ \alpha+4\gamma \end{matrix} \right\| , \tag{2.304}$$

în care s-a notat:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi r}{\sqrt{3}\eta} \quad ; \qquad \gamma = \sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}\pi r}{\eta} \quad . \tag{2.305}$$

Pentru studiul stabilităţii mişcărilor vibropercutante periodice optime determinate se folosesc relaţiile (2.255), care constituie ecuaţiile liniarizate în perturbaţii pentru acest caz. Căutînd pentru aceste ecuaţii soluţia de forma (2.239), se ajunge la ecuaţia caracteristică:

$$\beta^4 + a_1\beta^3 + a_2\beta^2 + a_3\beta + a_4 = 0 \quad , \tag{2.306}$$

în care coeficienţii ecuaţiei au expresiile:

$$a_1 = (1-R)\left(1,5 + 0,3R - \frac{3,6-0,4R}{\gamma^2+2} - \frac{1,2}{3\alpha^2+1}\right) + (1+R)\left[0,5(1-R) - \frac{2,4-0,8R}{\gamma^2+2} - \frac{0,2(1-R)}{3\alpha^2+1}\right] - \frac{(1+R)^2}{(3\alpha^2+1)(\gamma^2+2)}\left[0,4(3+4\alpha\gamma) + \frac{(4+3\alpha\gamma)(6\alpha-\gamma)^2}{75\alpha\gamma}\right] ,$$

$$a_2 = (1-R)\left(1,5 - 3,9R - \frac{2-4,4R}{3\alpha^2+1}\right) + (1-R)^2\left[\frac{8}{(3\alpha^2+1)(\gamma^2+2)} - \frac{4}{\gamma^2+2}\right] - (1+R)^2\left[0,5 - \frac{2,8}{\gamma^2+2} - \frac{0,1}{3\alpha^2+1} - \frac{1+2\alpha\gamma}{(3\alpha^2+1)(\gamma^2+2)} - \frac{(16-3\alpha\gamma)(6\alpha-\gamma)^2}{150\alpha\gamma(3\alpha^2+1)(\gamma^2+2)}\right] , \tag{2.307}$$

$$a_3 = (1-R)\left(0,5+0,1R + \frac{3,6R-0,4}{\gamma^2+2} - \frac{0,3+0,4R}{3\alpha^2+1}\right) - (1+R)\left[0,5(1-R) + \right.$$

$$+ \frac{2,4R-0,8}{\gamma^2+2} - \frac{0,2(1-R)}{3\alpha^2+1}\Bigg] - \frac{(1+R)^2}{(3\alpha^2+1)(\gamma^2+2)}\Bigg[0,4(3+4\alpha\gamma) +$$

$$+ \frac{(4+3\alpha\gamma)(6\alpha-\gamma)^2}{75\alpha\gamma}\Bigg] \quad , \qquad a_4 = R^2 \quad .$$

Pe baza criteriului lui Schur, condiţiile ca rădăcinile ecuaţiei caracteristice (2.306) să fie în modul subunitare, care reprezintă condiţiile de stabilitate ale mişcărilor vibropercutante periodice optime determinate, sînt:

$$|a_4| < 1 \ , \quad \left| \frac{a_2(1-a_4^2)(1-a_4)-(a_1-a_3a_4)(a_3-a_1a_4)}{(1-a_4^2)^2 - (a_3-a_1a_4)^2} \right| < 1 \quad ,$$

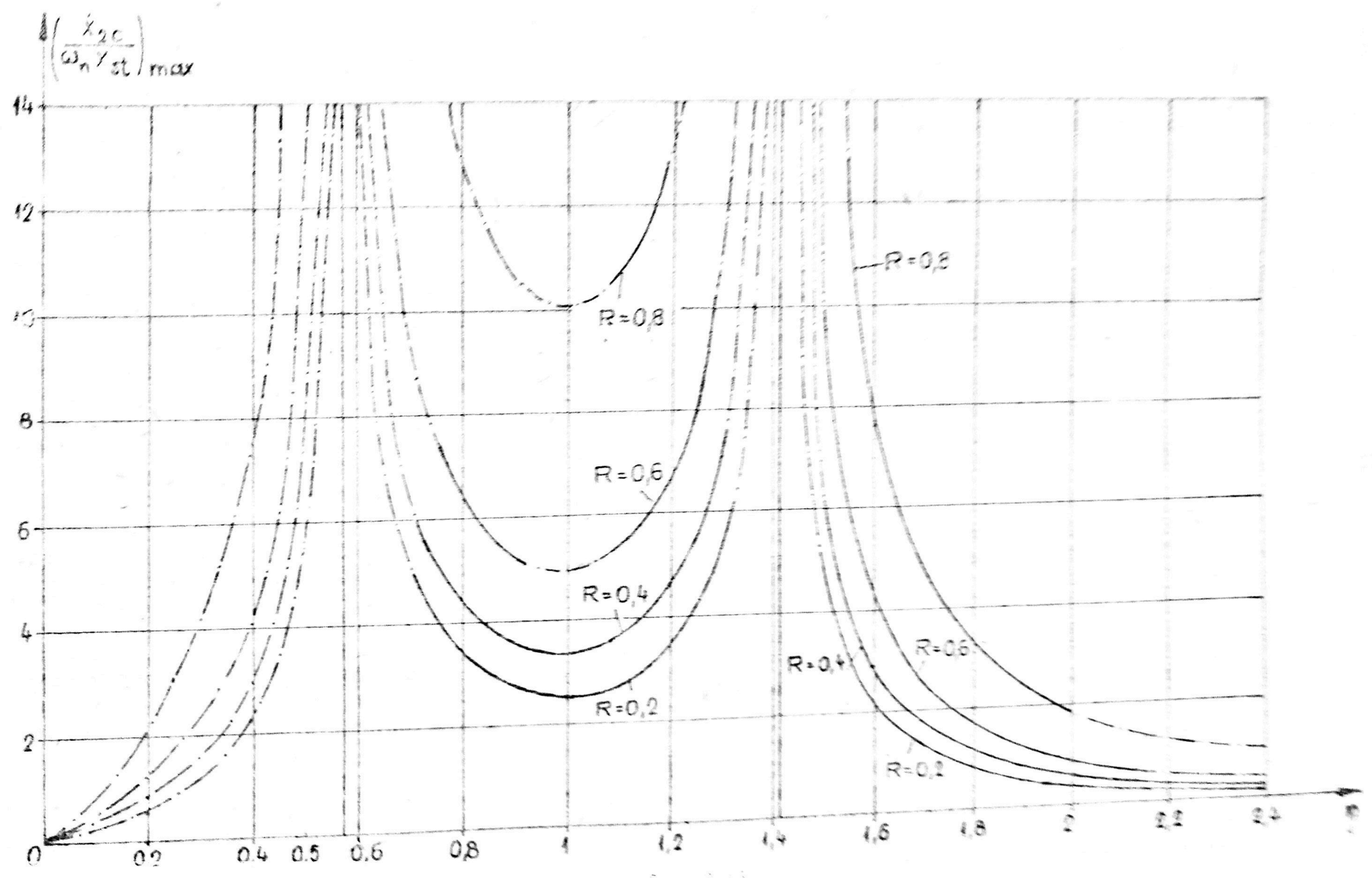
$$\left| \frac{a_3-a_1a_4}{1-a_4^2} \right| < 1 \ , \quad \left| \frac{(1+a_4)(a_1-a_3a_4)-a_2(a_3-a_1a_4)}{(1-a_4^2)(1+a_2+a_4)-(a_1+a_3)(a_3-a_1a_4)} \right| < 1 \quad . \tag{2.308}$$

In fig.2.13 şi 2.14 s-au reprezentat cu linie continuă parametrii optimi ai ciocnirilor în funcţie de η , pentru care sînt îndeplinite condiţiile de existenţă şi de stabilitate ale mişcărilor vibropercutante periodice optime, avînd perioada egală cu perioada forţei perturbatoare ($r = 1$). Aceste diagrame s-au reprezentat pentru patru valori ale coeficientului de restituire R. Se constată că pentru valori mai mici ale parametrului η decît $\eta_1 = \frac{p_1}{\omega_n'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nu sînt îndeplinite condiţiile de existenţă şi de stabilitate ale mişcărilor vibropercutante periodice optime, iar pentru valori mari ale coeficientului de restituire domeniile de stabilitate ale acestor mişcări sînt mai înguste.

Dacă forţa perturbatoare este optimă, avînd expresia dată de (2.270), din relaţia (2.273) rezultă:

$$(\dot{x}_{2c})_{max} = \frac{4}{5}\,\frac{x_{st}\,\omega_n}{1-R}\left|\sqrt{3}\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2\sqrt{3}\eta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{2}\pi}{2\eta}\right| \ . \tag{2.309}$$

Pentru compararea eficienţei forţei perturbatoare optime faţă de forţa perturbatoare armonică, s-a determinat raportul



$\left(\frac{\dot{x}_{2c}}{\omega_n Y_{st}}\right)_{max}$
14
12
10
8
6
4
2
0
0.2
0.4
0.5
0.6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
2,2
2,4
R=0,8
R=0,6
R=0,4
R=0,2
R=0,8
R=0,6
R=0,4
R=0,2

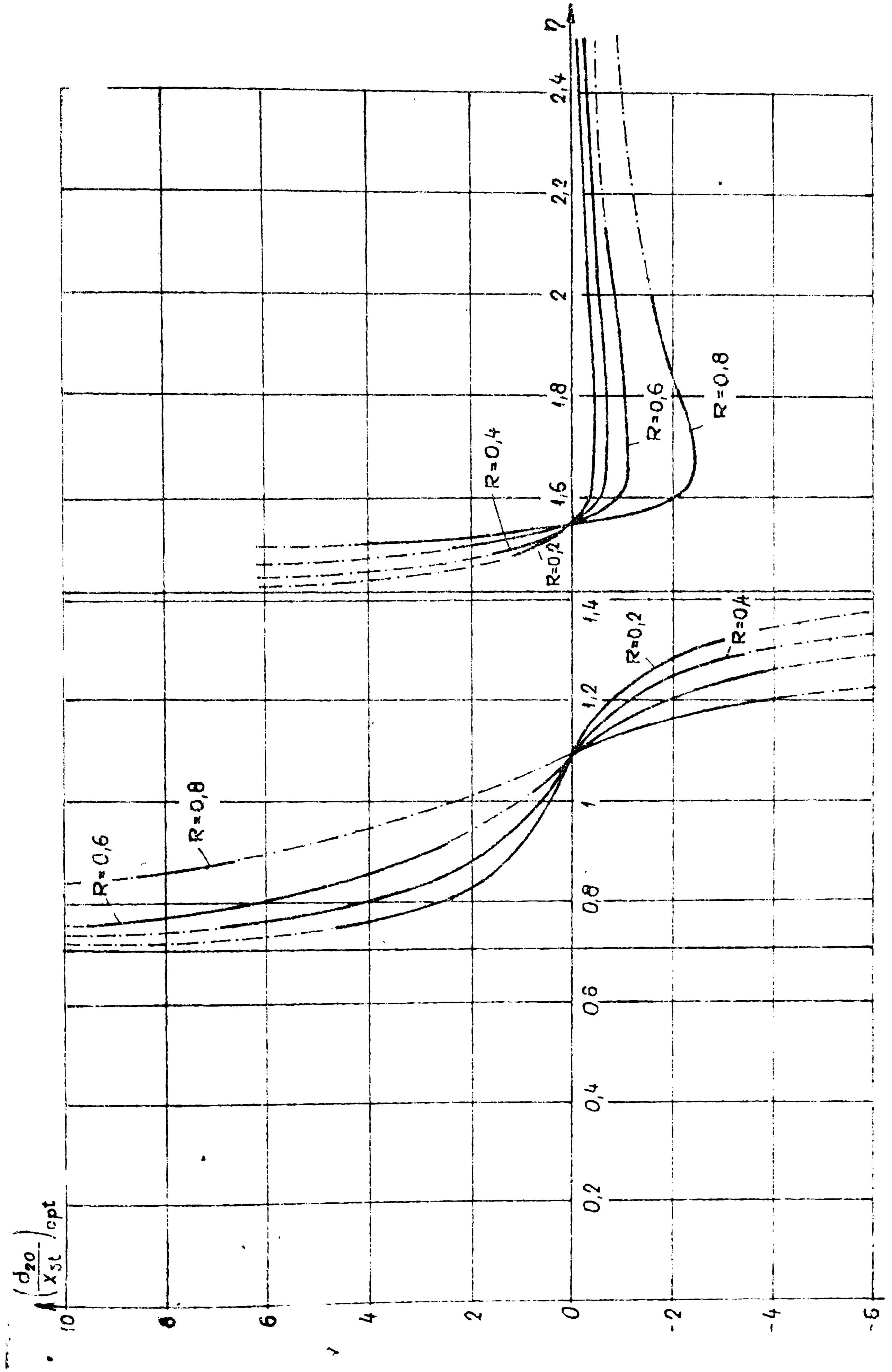


Fig. 2.14

dintre vitezele maxime de la începutul ciocnirilor, date de (2.309) şi (2.304):

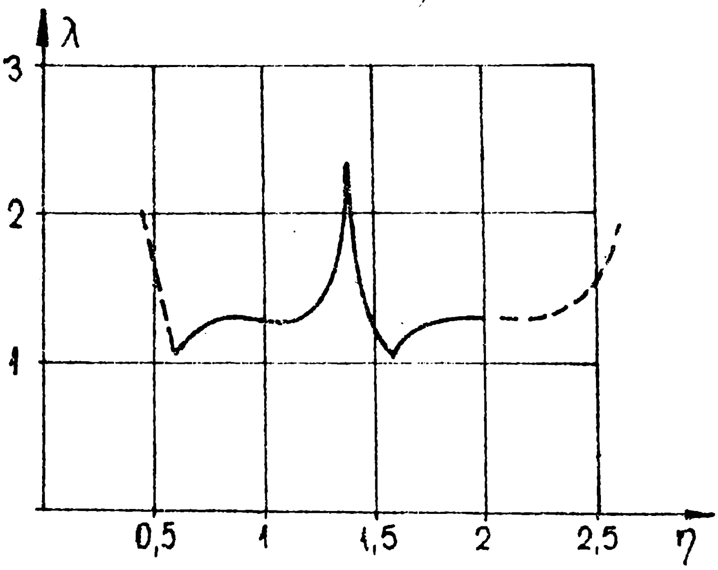


Fig. 2.15

$$\lambda = \frac{0,2}{\eta}\left|(1-3\eta^2)(2-\eta^2)\left(\sqrt{3}\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2\sqrt{3}\eta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{2}\pi}{2\eta}\right)\right| \tag{2.310}$$

In fig.2.15 s-a reprezentat acest raport în funcţie de η. Se constată că în domeniile în care sînt îndeplinite condiţiile de existenţă şi de stabilitate ale mişcărilor vibropercutante periodice optime, raportul λ este supraunitar, deci forţa perturbatoare optimă este mai eficientă.

Cap.3. MODELAREA ELECTRICA A SISTEMELOR MECANICE VIBROPERCUTANTE

3.1. Consideraţii generale

Aşa cum s-a amintit şi în paragraful 1.2, modelarea electrică a comportării dinamice a sistemelor mecanice se poate realiza în două moduri principial diferite: modelarea sistemelor dinamice pe baza unor analogii, numite analogii dinamice şi modelarea pe calculatoare electronice. In ambele cazuri, pentru realizarea unei modelări exacte, este necesar ca ecuaţiile diferenţiale care exprimă comportarea modelului electric să conducă, prin efectuarea unor transformări de variabile, pe baza unor scări de modelare, la ecuaţiile diferenţiale ce descriu comportarea dinamică a prototipului. De asemenea, în ambele cazuri, modelarea electrică se realizează în două faze: modelarea calitativă, în care se stabilesc principial conexiunile între elementele modelului electric, astfel încît ecuaţiile diferenţiale ce descriu comportarea sa să fie de aceeaşi fo[illegible] ecuaţiile diferenţiale ce descriu comportarea dinamică a pr[illegible]lui, şi modelarea cantitativă, în care se aleg în mod c[illegible] convenabil factorii de scară pentru mărimile fundamentale [illegible]lului, rezultînd, pe baza analizei dimensionale, facto[illegible] scară pentru mărimile derivate şi valorile coeficienţilor ecuaţiilor diferenţiale corespunzătoare modelului electric.

Modelarea sistemelor mecanice vibrante liniare prin analogii dinamice se bazează pe observaţia că ecuaţiile diferenţiale ale mişcării prototipului sînt de aceeaşi formă cu ecuaţiile diferenţiale ce rezultă prin aplicarea legilor lui Kirchhoff în circuite electrice liniare. Ca urmare, modelul electric realizat prin analogii dinamice pentru un astfel de prototip va conţine ca elemente pasive rezistori, condensatori şi bobine, interconectate în circuite electrice reprezentate printr-o schemă de conexiuni plană cu ochiuri şi noduri şi caracterizate prin rezistenţă electrică, capacitate electrică respectiv inductanţă constante, iar elementele active vor fi constituite din generatoare electrice de curent sau de tensiune. Există posibilitatea de a stabili două categorii de analogii dinamice pentru sistemele mecanice vibrante liniare, după cum se aplică prima sau a doua din legile lui Kirchhoff pentru modelul electric. Dacă forţele generalizate ce acţionează asupra prototipului au drept corespondent în modelul electric tensiunile electromotoare ale generatoarelor de tensiune şi căderile de tensiune pe elementele pasive, prin aplicarea legii a doua a lui Kirchhoff în bucle închise se obţine analogia "forţă - tensiune" sau "directă". Un circuit electric ce constă din bucle închise, cu buclele alăturate avînd ramuri comune, poate constitui analogul unui sistem vibrant mecanic cu un număr de grade de libertate egal cu numărul buclelor. Dacă forţele generalizate ce acţionează asupra prototipului au drept corespondent în modelul electric intensităţile curenţilor electrici generaţi de generatoarele de curent şi intensităţile curenţilor electrici ce parcurg elementele pasive, prin aplicarea primei legi a lui Kirchhoff pentru noduri se obţine analogia "forţă - curent" sau "inversă". Un circuit electric ce constă din noduri, nodurile alăturate avînd elemente comune, poate constitui analogul unui sistem mecanic vibrant cu un număr de grade de libertate egal cu numărul nodurilor.

Pentru stabilirea relaţiilor de analogie, se consideră un sistem mecanic vibrant liniar cu un singur grad de libertate.

In fig.3.1.a s-a reprezentat modelul mecanic de translaţie pentru un astfel de sistem, iar în fig.3.1.b şi 3.1.c s-au reprezentat modelele sale electrice realizate prin analogiile forţă - tensiune, respectiv forţă - curent.

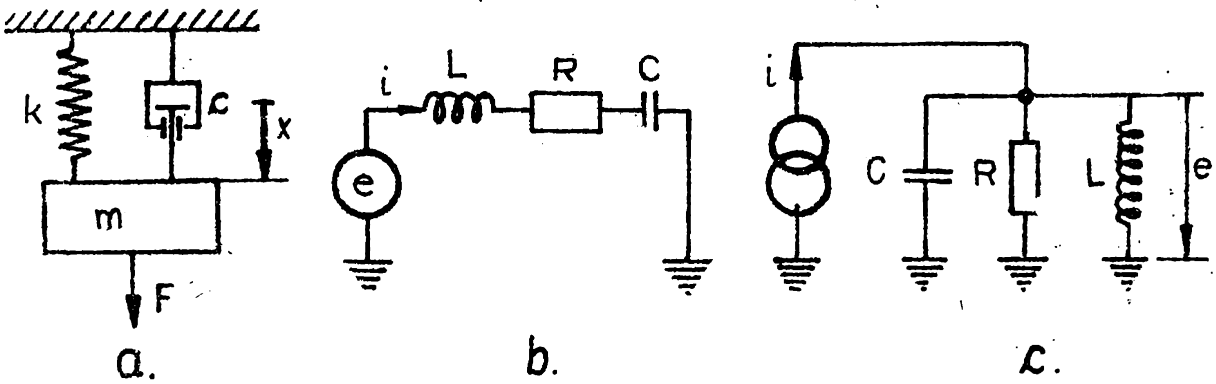


Fig. 3.1

Considerînd pentru modelul mecanic din fig.3.1.a ca parametru de poziţie deplasarea x a masei m din poziţia de echilibru static, aplicînd principiul lui d'Alembert, rezultă ecuaţia diferenţială a mişcării prototipului:

$$F - m\ddot{x} - c\dot{x} - kx = 0 \quad . \tag{3.1}$$

Aplicînd a doua lege a lui Kirchhoff pentru modelul electric din fig.3.1.b, se obţine ecuaţia diferenţială ce descrie comportarea modelului electric realizat pe baza analogiei forţă - tensiune:

$$e - L\frac{d^2q}{dt^2} - R\frac{dq}{dt} - \frac{1}{C}q = 0 \quad , \tag{3.2}$$

în care $q = q_0 + \int_0^t i\,dt$ este sarcina electrică momentană a condensatorului, q_0 fiind sarcina electrică la momentul $t_0 = 0$.

Aplicînd prima lege a lui Kirchhoff pentru modelul electric din fig.3.1.c, se obţine ecuaţia diferenţială ce descrie comportarea modelului electric realizat pe baza analogiei forţă - curent:

$$i - C\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{R}\frac{du}{dt} - \frac{1}{L}u = 0 \quad , \tag{3.3}$$

în care s-a notat $u = u_0 + \int_0^t e\,dt$.

BUPT

Tabelul 3.1

Nr. crt.	Prototip mecanic				Model electric			
	Model mecanic de translatie		Model mecanic de rotatie		Analogie forță - tensiune		Analogie forță - curent	
	Denumire	Simbol	Denumire	Simbol	Denumire	Simbol	Denumire	Simbol
1	Forță perturbatoare	F	Moment perturbator	M	Tensiunea electromotoare a generatorului de tensiune	e	Intensit. curent a gener. de curent	i
2	Masă	m	Moment de inerție axial	J	Inductanță	L	Capacitate electrică	C
3	Coeficient de amortizare	c	Coeficient de amortizare la torsiune	c	Rezistență electrică	R	Conductanță electrică	$G = \frac{1}{R}$
4	Constantă elastică	k	Constantă elastică la torsiune	k	Inversul capacității	$\frac{1}{C}$	Inversul inductanței	$\frac{1}{L}$
5	Flexibilitate (complianță)	$\frac{1}{k}$	Flexibilitate la torsiune	$\frac{1}{k}$	Capacitate electrică	C	Inductanță	L
6	Deplasare	x	Deplasare unghiulară	φ	Sarcina electrică	q	-	u
7	Viteză	$\dot{x}$	Viteză unghiulară	$\dot{\varphi}$	Intensitatea curentului	i	Tensiune electrică	e
8	Forță elastică	kx	Moment elastic	$k\varphi$	Căderea de tensiune pe condensator	$\frac{1}{C}q$	Intensitatea curentului în bobină	$\frac{1}{L}u$
9	Forță de amortizare	$c\dot{x}$	Moment de amortizare	$c\dot{\varphi}$	Căderea de tensiune pe rezistor	Ri	Intensitatea curentului prin rezistor	Ge
10	Forță de inerție	$m\ddot{x}$	Momentul forțelor de inerție	$J\ddot{\varphi}$	Tensiunea electromotoare indusă	$L\frac{di}{dt}$	Intensitatea curent. în condensat	$C\frac{de}{dt}$
11	Energie potențială	$\frac{1}{2}kx^2$	Energie potențială	$\frac{1}{2}k\varphi^2$	Energia electrostatică	$\frac{1}{2C}q^2$	-	-
12	Energie cinetică	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2$	Energie cinetică	$\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$	Energia electromagnetică	$\frac{1}{2}Li^2$	-	-

Se constată că ecuaţiile diferenţiale (3.2) şi (3.3) sînt de aceeaşi formă cu ecuaţia diferenţială (3.1) a mişcării prototipului. Relaţiile de analogie ce rezultă sînt date în tabelul 3.1.

Sistemele mecanice vibrante liniare cu mai multe grade de libertate conduc la modele mecanice obţinute prin legarea în serie sau în paralel a mai multor modele simple ca cel reprezentat în fig.3.1.a. Modelarea calitativă a acestora pe baza analogiilor dinamice prezentate se poate face direct după modelul lor mecanic. Pentru aceasta, modelul mecanic se va reprezenta în aşa fel, încît să se pună în evidenţă legăturile dintre elementele modelului, precum şi legăturile dintre aceste elemente şi exteriorul său, considerat imobil. Punctele în care sînt aplicate forţele exterioare perturbatoare, forţele elastice, de amortizare şi forţele de inerţie se numesc noduri în modelul mecanic, unul din aceste noduri fiind exteriorul modelului. Fiecare element din modelul mecanic va deveni, în această reprezentare a sa, un element de legătură dintre două noduri. Elementele modelului mecanic legate în paralel între două noduri se exprimă în analogia forţă - tensiune prin legarea în serie a elementelor analoage într-o ramură a modelului electric, iar în analogia forţă - curent se exprimă prin legarea în paralel a elementelor analoage între nodurile corespunzătoare ale modelului electric.

Pentru modelarea electrică pe baza analogiilor dinamice a sistemelor mecanice vibrante liniare se foloseşte de preferinţă analogia forţă - tensiune, deoarece generatoarele de tensiune sînt mai uşor de realizat şi măsurătorile în modelul electric corespunzător se pot face mai uşor. In acest caz, la fiecare nod din modelul mecanic va corespunde o buclă închisă în modelul electric. In cele ce urmează se vor lua în considerare numai modelele electrice realizate pe baza acestei analogii.

Pentru modelarea electrică pe baza analogiilor dinamice a sistemelor mecanice neliniare, cu discontinuități în legea de mișcare sau parametrii variabili în timp, problema se complică. Dificultatea întîmpinată în încercarea de a reprezenta o caracteristică particulară neliniară sau discontinuă printr-o analogie dinamică se datorește faptului că rar este posibil să se găsească un element electric neliniar a cărui caracteristică să o aproximeze pe cea cerută. In aceste cazuri este necesar să se recurgă la dispozitive auxiliare cu diode și relee cu diferite grade de complexitate pentru a realiza analogia cu neliniaritatea sau discontinuitatea dorită. Pentru astfel de sisteme mecanice, în care categorie intră și sistemele mecanice vibropercutante de orice tip, modelarea electrică se poate realiza mai ușor și mai precis pe calculatoare electronice. Ca urmare, în cele ce urmează se vor lua în considerare modele electrice realizate pe baza analogiei forță - tensiune pentru sistemele mecanice vibropercutante liniare între ciocniri, avînd parametrii dinamici precizați. Aceste modele electrice se folosesc pentru verificarea existenței și stabilității unor tipuri concrete de mișcări vibropercutante periodice, determinate prin studii teoretice. Pentru modelarea ciocnirilor în aceste modele electrice, este necesar ca, pe lîngă generatoarele de tensiune, care modelează forțele perturbatoare, să se realizeze ca elemente active și generatoare de impulsuri de tensiune, care să aibă în modelul electric efect analog cu efectul forțelor percutante asupra prototipului mecanic.

Pentru modelarea cantitativă pe baza analogiilor dinamice a sistemelor mecanice vibrante liniare sau vibropercutante liniare între ciocniri, este necesar să se proiecteze modelul electric, determinînd valorile parametrilor elementelor pasive și active din circuitul electric corespunzător. In acest scop, în primul rînd, se aleg factorii de scară pentru mărimile fundamentale ale modelului mecanic. Pentru analogia forţă - tensiune, factorii de scară se exprimă pe baza relaţiilor de forma:

$$(t)_p = S_1(t)_m \ , \quad (x)_p = S_2(q)_m \ , \quad (m)_p = S_3(L)_m \ , \qquad (3.4)$$

în care indicele p se referă la prototip, iar indicele m se referă la modelul electric. In al doilea rînd, înlocuind relaţiile de forma (3.4) în ecuaţiile diferenţiale ale mişcării prototipului, în urma analizei dimensionale rezultă factorii de scară pentru mărimile derivate ale prototipului şi, implicit, valorile parametrilor elementelor pasive şi active ale modelului electric.

Extragerea datelor din modelul electric se efectuează prin măsurarea şi înregistrarea unor mărimi electrice variabile în timp. In cazul analogiei forţă - tensiune, aceste mărimi sînt intensităţile curenţilor electrici în diferite ramuri de circuit şi căderile de tensiune pe anumite elemente pasive. Este foarte important ca aparatele folosite pentru măsurarea şi înregistrarea datelor să nu reacţioneze cu circuitul electric. Ca urmare, aparatele folosite pentru măsurarea curenţilor electrici trebuie să introducă o impedanţă neglijabilă în circuit (oscilografe cu buclă), iar cele folosite pentru măsurarea tensiunilor electrice trebuie să aibă o impedanţă de intrare foarte mare (volmetre electronice, osciloscoape catodice, etc.).

Pentru o modelare cît mai bună a unui sistem mecanic vibrant sau vibropercutant pe baza analogiilor dinamice, este necesar să se aleagă în aşa fel factorii de scară pentru mărimile fundamentale ale prototipului, încît modelul electric ce rezultă să îndeplinească următoarele condiţii:

- Parametrii caracteristici pentru elementele active să poată fi reproduşi la generatoarele existente în comerţ sau la generatoare uşor de proiectat şi de realizat.

- Valorile parametrilor electrici ale elementelor pasive (rezistenţe, capacităţi, inductanţe) să fie, pe cît posibil, standardizate, sau să se poată realiza uşor, cu mare precizie.

- Valorile inductanţelor să fie relativ mici, iar rezistenţa electrică a bobinelor care le realizează să fie neglijabilă. Nu se poate mări inductanţa bobinelor prin realizarea bobinelor cu miez de fier, deoarece apar neliniarităţi nedorite în circuit, iar bobinele fără miez de fier cu inductanţă mare (cu multe spire) şi de rezistenţă electrică mică (secţiune mare a spirelor) rezultă foarte voluminoase.

- Impedanţele corespunzătoare elementelor pasive din circuitul electric nu pot fi nici exagerat de mari, nici foarte mici, pentru a permite extragerea datelor cu aparatele de măsură şi de înregistrare de care se dispune.

- Căderile de tensiune pe elementele pasive nu trebuie să depăşească tensiunea lor nominală tot timpul încercărilor experimentale pe modelul electric, pentru a evita distrugerea lor. Pentru îndeplinirea acestei condiţii este necesar să se ţină seama şi de supratensiunile ce apar în procesele tranzitorii.

Modelarea sistemelor mecanice pe calculatoarele electronice se poate realiza pe calculatoare analogice, numerice sau hibride.

Calculatoarele electronice analogice sînt destinate să simuleze ecuaţii diferenţiale, efectuînd integrări, derivări, adunări, scăderi, înmulţiri, împărţiri, generînd funcţii neliniare sau cu parametrii variabili, după cum rezultă din ecuaţiile diferenţiale simulate. Toate variabilele în calculatoarele electronice analogice, numite variabile de maşină, sînt reprezentate printr-un singur tip de mărime electrică şi anume de tensiunea electrică, iar derivările şi integrările se fac în raport cu timpul de maşină.

Modelarea cu ajutorul calculatoarelor analogice se bazează pe folosirea unui număr limitat de tipuri de elemente de calcul analogic. S-a constatat că următoarele elemente permit o modelare ușoară:

a) Elemente ce permit înmulțirea unei variabile de mașină cu o constantă. Deoarece această operație se realizează cu ajutorul unor potențiometrii elicoidali de precizie, aceste elemente se mai numesc potențiometrii.

b) Dispozitive care realizează suma a două sau mai multe variabile de mașină, numite sumatori.

c) Dispozitive care realizează integrarea unor variabile de mașină în raport cu timpul de mașină, numite integratori.

d) Dispozitive ce realizează produsul a două variabile de mașină, numite multiplicatori.

e) Dispozitive care generează o dependență neliniară între două variabile de mașină, numite generatoare de funcții.

f) Dispozitive ce realizează anumite decizii logice, pentru modelarea ecuațiilor diferențiale cu discontinuități. Cele mai răspîndite dispozitive logice sînt comparatoarele, care realizează comutarea calculatorului de pe o buclă de calcul pe alta, în funcție de valoarea pozitivă sau negativă a unei variabile de mașină sau a sumei sau diferenței a două variabile de mașină.

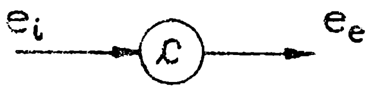
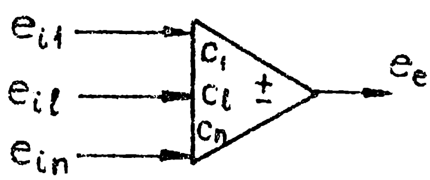
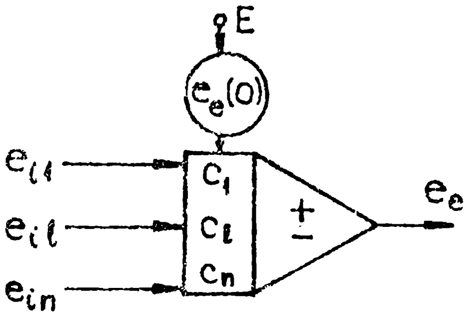
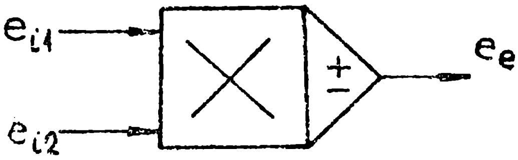
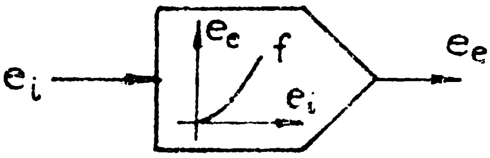
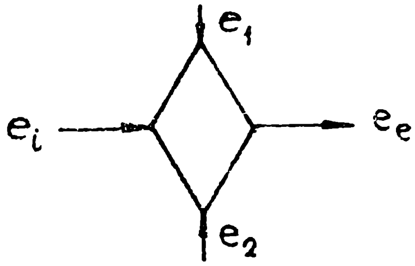
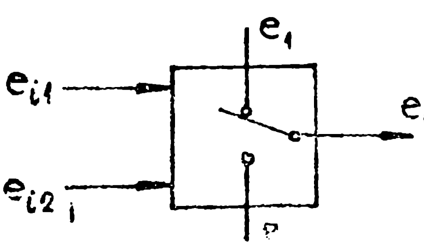
Derivarea în raport cu timpul de mașină și împărțirea a două variabile de mașină nu se pot realiza cu precizie ridicată și cu dispozitive electronice stabile, dar aceasta nu afectează posibilitățile de modelare ale calculatoarelor electronice analogice.

Toate aceste tipuri de elemente de calcul analogic se pot realiza cu elemente electrice pasive (bobine, condensatori, rezistori) sau cu elemente active, ce conțin amplificatoare de curent continuu stabilizate cu reacție negativă, numite amplificatoare operaționale. Elementele pasive de calcul realizează operațiile de calcul analogic cu erori mari, de aceea în calculatoarele electronice analogice moderne se folosesc elemente active de calcul, avînd ca element de bază amplificatorul operațional. In aceste calculatoare numai operaţia de înmulţire cu o constantă a unei variabile de maşină se realizează cu elemente de calcul pasive şi anume cu potenţiometrii.

Modelarea calitativă pe calculatorul analogic a unei ecuaţii diferenţiale sau a unui sistem de ecuaţii diferenţiale se realizează prin interconectarea elementelor de calcul analogic într-una sau mai multe bucle de calcul, care efectuează operaţiile cerute de ecuaţiile diferenţiale. Utilizînd simbolurile elementelor de calcul analogic din tabelul 3.2, se obţine, astfel, o schemă de modelare calitativă, care poate fi simplificată (de principiu) sau detaliată, în funcţie de detaliile de modelare pe care le conţine.
La modelarea calitativă pe calculatorul analogic, pe schemele de modelare se notează direct variabilele corespunzătoare prototipului şi nu variabilele de maşină de intrare (notate cu indicele i) sau de ieşire (notate cu indicele e) ale elementelor de calcul analogic.
La o modelare calitativă simplificată se poate considera că elementele de calcul analogic operează cu matrici cu elemente constante sau variabile. De asemenea, nu se ţine seama de coeficienţii constanţi de intrare la sumatoare şi integratoare şi nici de condiţiile iniţiale la integratoare.

Pentru modelarea cantitativă pe calculatorul analogic se întocmeşte o schemă de modelare detaliată, conţinînd toate detaliile necesare pentru realizarea conexiunilor între elementele de calcul pe calculatorul analogic şi pentru fixarea coeficienţilor constanţi şi a condiţiilor iniţiale cu ajutorul potenţiometrilor, operaţii care se încadrează în programarea calculatorului. Pe aceste scheme de modelare se notează variabilele de maşină corespunzătoare variabilelor prototipului şi valorile coeficienţilor şi a condiţiilor iniţiale care rezultă pe baza factorilor de scară aleşi pentru mărimile fundamentale ale prototipului. In modelarea cantitativă trebuie să se ţină seama că sumatoarele şi integratoarele, care se

Tabelul 3.2

Nr. crt	Denumire	Simbol	Operația de calcul
1	Potentiometru		$e_e = c\, e_i$
2	Sumator		$e_e = \pm \sum_{l=1}^{n} c_l e_{il}$
3	Integrator		$e_e = e_e(0) \pm$ $\pm \int_0^t \sum_{l=1}^{n} c_l e_{il} dt$
4	Multiplicator		$e_e = \pm e_{i1} \times e_{i2}$
5	Generator de functii		$e_e = f(e_i)$
6	Comparator		$e_e = \begin{cases} e_1 & \text{pt. } e_i > 0 \\ e_2 & \text{pt. } e_i < 0 \end{cases}$
7	Comparator		$e_e = \begin{cases} e_1 & \text{pt. } e_{i1} - e_{i2} > 0 \\ e_2 & \text{pt. } e_{i1} - e_{i2} < 0 \end{cases}$

realizează cu cîte un singur amplificator operaţional avînd reacţie negativă, efectuează operaţiile corespunzătoare cu schimbarea semnului şi, în acest caz, nu se mai notează semnul "-". Prin urmare în orice schemă de modelare pe calculatoare analogice, dacă la sumatoare şi la integratoare nu se indică semnul, se înţelege că acestea operează cu schimbarea semnului. De asemenea, în orice schemă de modelare, nu se mai notează coeficienţii de intrare avînd valoarea 1.

Toate mărimile constante sau variabile ale modelului electric realizat prin modelare pe calculatorul analogic se exprimă prin tensiuni electrice raportate la tensiunea de referinţă a calculatorului, notată cu E. In modelarea cantitativă se întîmpină dificultăţi la alegerea factorilor de scară, deoarece, calculatoarele analogice lucrînd în curent continuu, viteza de variaţie a tuturor variabilelor de maşină trebuie să fie mică şi, pentru o bună funcţionare a elementelor de calcul analogic, este necesar ca toate variabilele de maşină să fie subunitare tot timpul calculului analogic. Ca urmare, pentru o bună modelare cantitativă este necesar să fie cunoscute valorile extreme ale variabilelor prototipului şi factorii de scară să se determine din condiţia ca valorile extreme ale variabilelor corespunzătoare de maşină să nu depăşească valorile 1 sau -1. In probleme complexe, acest lucru este foarte dificil şi de multe ori trebuie să fie făcute multe încercări experimentale pentru determinarea factorilor de scară pentru care sînt îndeplinite aceste condiţii.

Modelarea sistemelor mecanice pe calculatoare electronice numerice se realizează tot pe baza ecuaţiilor diferenţiale ce descriu comportarea dinamică a prototipului. Calculatoarele numerice oferă posibilităţi mai largi de modelare faţă de calculatoarele analogice sau faţă de modelele realizate pe baza analogiilor dinamice. iar erorile de calcul pot fi făcute oricît de mici, prin alegerea unor metode adecvate de calcul numeric. La calculatoarele numerice nu trebuie să se țină seama de factorii de scară, de limitările impuse de condiția ca variabilele de mașină să nu depășească anumite valori și există metode numerice pentru integrarea ecuațiilor diferențiale de diferite tipuri, liniare sau neliniare, cu coeficienți constanți sau variabili, cu sau fără discontinuități, etc. Pentru modelarea calitativă pe calculatoarele numerice, după stabilirea algoritmului de calcul pe baza metodei numerice considerate, se întocmeşte schema logică, ce conține succesiunea operațiilor pe care trebuie să le efectueze calculatorul. Modelarea cantitativă constă în realizarea efectivă a programului, exprimat într-un limbaj de programare accesibil calculatorului, conținînd programul principal, subrutinele și datele numerice. Singurul dezavantaj al calculatoarelor electronice numerice față de cele analogice constă în faptul că intervalele de timp necesare pentru întocmirea programelor și, mai ales, intervalele de timp necesare efectuării calculului numeric cu precizie ridicată, extragerii datelor sub formă de grafice sau tabele, prelucrării acestora, etc., sînt mult mai mari decît în cazul folosirii calculatoarelor analogice. De asemenea, pentru urmărirea influenței unor parametrii dinamici asupra comportării dinamice a prototipului, în cazul folosirii calculatoarelor numerice este necesar să se schimbe cel puțin datele numerice, uneori chiar programul principal, și să fie rulat din nou programul. La calculatoarele analogice modificările anumitor parametrii se realizează simplu, prin schimbarea valorii constantelor unor potențiometrii, dacă la modelarea cantitativă s-a ținut seama de aceste modificări. Ca urmare, pentru modelarea pe calculatoare electronice a sistemelor mecanice complexe, a căror comportare dinamică depinde de mulți parametrii, cum este și cazul sistemelor mecanice vibropercutante de orice tip, este mai avantajos, mai economic, să se studieze comportarea prototipului pe modele electrice realizate pe calculatoare analogice, folosindu-se calculatoarele numerice numai în cazurile în care este necesară o precizie ridicată.

La modelarea sistemelor mecanice pe calculatoare electronice numerice, precizia de calcul la integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării depinde de metoda numerică folosită, care trebuie să fie cît mai rapid convergentă, şi de mărimea pasului de integrare folosit, care trebuie să fie cît mai mic. Rezultă că pentru o precizie ridicată, timpul de calcul necesar integrării ecuaţiilor diferenţiale este foarte mare, mult mai mare deci timpul necesar efectuării oricăror alte operaţii de calculator. Se poate reduce substanţial timpul de rulare a unui program corespunzător modelării pe calculatorul numeric a unui sistem dinamic, dacă se cunoaşte soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale ale mişcării pe baza unui studiu teoretic. De aici rezultă importanţa exprimării analitice, sub formă matricială, a condiţiilor de existenţă şi de stabilitate ale mişcărilor vibropercutante periodice ale sistemelor cu mai multe grade de libertate, aşa cum s-a arătat în capitolul precedent. Calculatoarele numerice operează comod şi rapid cu matrici şi se pot extrage uşor toate datele care interesează sub formă de grafice şi diagrame.

Cele mai largi posibilităţi de modelare electrică ale sistemelor dinamice le oferă calculatoarele electronice hibride, constituite din interconectarea calculatoarelor numerice şi analogice prin convertoare analog-numerice şi numeric-analogice. In aceste sisteme hibride calculatoarele numerice au rol de comandă şi de control a funcţionării dispozitivelor analogice, avînd posibilitatea să realizeze stabilirea optimă a factorilor de scară pentru modelele pe calculatoarele analogice şi să urmărească precizia calculului analogic. Partea analogică este destinată în exclusivitate integrării ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării, operaţie pe care o poate efectua uşor, rapid şi cu o precizie comparabilă cu cea a calculatoarelor numerice.

3.2. Modelarea sistemelor mecanice vibropercutante pe calculatoare analogice

3.2.1. Modelarea calitativă pe calculatoare analogice

3.2.1.1. Schema de modelare calitativă simplificată pentru sisteme vibropercutante generale cu mai multe grade de libertate

Se consideră un sistem mecanic vibropercutant, avînd n grade de libertate. In cazul cel mai general, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării între două ciocniri consecutive sînt neliniare şi se pot exprima sub forma (2.27), corespunzător unui model mecanic de sistem supus la l ($l < n$) legături neolonome scleronome date de (2.18). Pentru eliminarea multiplicatorilor din matricea $\bar{\lambda}$, se separă l ecuaţii diferenţiale astfel încît matriceá $\underline{a}_{l}^{T}$ să fie nesingulară, obţinîndu-se sistemele de ecuaţii diferenţiale de forma (2.28) şi (2.29). Din sistemul (2.28) se determină matricea $\bar{\lambda}$, care înlocuită în (2.29) conduce la un sistem de $m = n - l$ ecuaţii diferenţiale în care nu mai apar multiplicatorii lui Lagrange. Acest sistem împreună cu cele l ecuaţii ale legăturilor neolonome (2.18) formează un sistem de n ecuaţii diferenţiale neliniare, care determină mişcarea sistemului vibropercutant între două ciocniri consecutive şi este de forma:

$$\underline{\mathfrak{B}}\,\ddot{\bar{q}} + \underline{\mathfrak{C}}\,\dot{\bar{q}} + \underline{\mathfrak{D}}\,\bar{q} = \bar{Q} \quad . \tag{3.5}$$

Pentru modelul mecanic considerat, elementele matricilor $\underline{\mathfrak{B}}$ şi $\underline{\mathfrak{D}}$ depind numai de coordonatele generalizate, elementele matricii $\underline{\mathfrak{C}}$ depind de coordonatele generalizate şi de vitezele generalizate, iar forţele perturbatoare generalizate din matricea $\bar{Q}$ depind de coordonatele generalizate şi de timp.

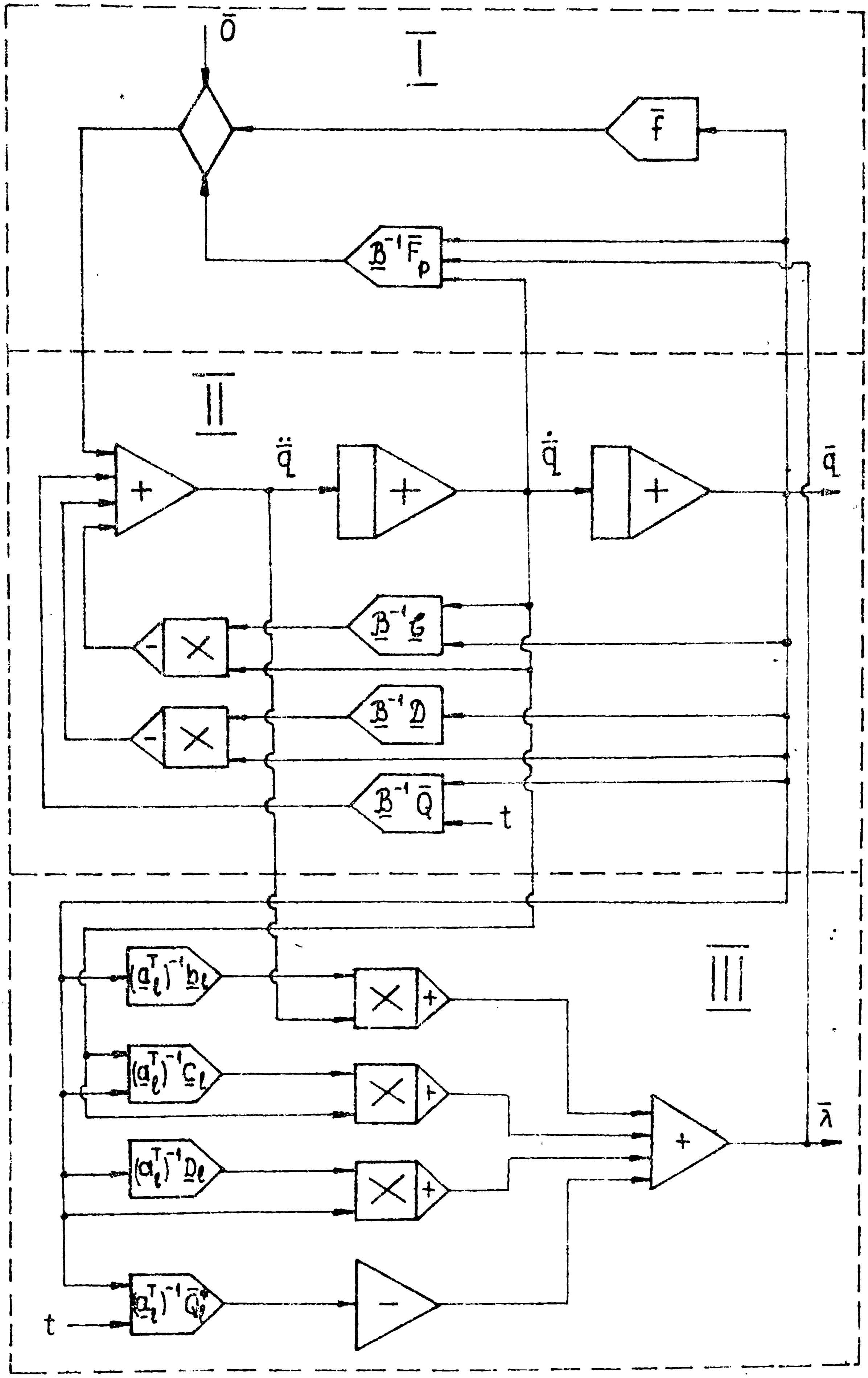

Ō
I
f̄
$\underline{B}^{-1}\bar{F}_p$
II
$\ddot{\bar{q}}$
$\dot{\bar{q}}$
$\bar{q}$
$\underline{B}^{-1}\underline{C}$
$\underline{B}^{-1}\underline{D}$
$\underline{B}^{-1}\bar{Q}$
t
III
$(\underline{a}_l^T)^{-1}\underline{b}_l$
$(\underline{a}_l^T)^{-1}\underline{c}_l$
$(\underline{a}_l^T)^{-1}\underline{D}_l$
$(\underline{a}_l^T)^{-1}\bar{Q}_l$
$\bar{\lambda}$
t

Fig. 3.2

In cazul cel mai general, sistemul vibropercutant poate să conțină mai multe cuple percutante, fiecare din ele putînd fi caracterizată de funcția legăturii unilaterale de forma generală (2.46) sau particulară (2.38), cea de a doua formă fiind întîlnită cel mai frecvent în aplicații. De asemenea, pentru caracterizarea interacțiunilor percutante în timpul ciocnirilor, pentru fiecare cuplă percutantă este necesar să se exprime forțele percutante din zonele locale de contact prin relații de forma generală (2.65). Pentru toate cuplele percutante, aceste relații caracteristice pentru modelarea matematică a ciocnirilor se pot exprima matricial sub forma:

$$\overline{f}(\overline{q}) \geq \overline{0} \quad , \quad \overline{F}_p = \Psi(\overline{q}, \dot{\overline{q}}) \quad , \tag{3.6}$$

în care matricea coloană $\overline{f}$ are un număr de elemente egal cu numărul cuplelor percutante, iar matricea coloană $\overline{F}_p$ are un număr de elemente egal cu numărul gradelor de libertate al sistemului vibropercutant. In unele cazuri, atunci cînd printre corpurile care participă la ciocniri în unele cuple percutante se află și unele corpuri supuse la legături neolonome, pentru exprimarea forțelor percutante din zonele locale de contact este necesar să se țină seama și de interacțiunile corpurilor corespunzătoare cu aceste legături, iar elementele matricii $\overline{F}_p$ pot să depindă și de valorile momentane ale multiplicatorilor lui Lagrange din matricea $\overline{\lambda}$, corespunzători legăturilor neolonome considerate.

Pentru modelarea pe calculatoarele analogice a sistemelor mecanice vibropercutante generale, în primul rînd este necesar să se realizeze integrarea ecuațiilor diferențiale de forma (3.5), care determină mișcarea sistemului vibropercutant între două ciocniri consecutive. Pentru aceasta, presupunînd matricea $\underline{B}$ nesingulară, se separă matricea coloană ce conține derivatele de cel mai mare ordin ale funcţiilor necunoscute, aici matricea $\ddot{q}$:

$$\ddot{q} = \mathcal{B}^{-1}\overline{Q} - \mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}\dot{q} - \mathcal{B}^{-1}\mathcal{D}\overline{q} \qquad (3.7)$$

Se constată că, pe baza ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării scrise sub forma (3.7), folosind simbolurile elementelor de calcul analogic din tabelul 3.2, se poate construi uşor bucla de calcul analogic pentru determinarea mişcării între două ciocniri consecutive ale sistemului vibropercutant.

In al doilea rînd, pentru modelarea pe calculatoarele analogice a acestor sisteme vibropercutante generale, este necesar să se realizeze modelarea ciocnirilor. Aceasta se poate realiza în două moduri principial diferite, după cum ciocnirile pot fi considerate instantanee sau nu. Modelarea ciocnirilor instantanee se face mai simplu, cu ajutorul unor scheme de comutare realizate cu comparatoare care schimbă condiţiile iniţiale la integratoare pentru următorul interval dintre ciocniri, înlocuind vitezele de la începutul ciocnirilor cu cele care rezultă pe baza relaţiilor de forma (2.62) pentru sfîrşitul ciocnirilor. In cazul cel mai general al ciocnirilor neinstantanee, pentru modelarea ciocnirilor se folosesc comparatoare, care delimitează intervalele de timp în care au loc ciocnirile, şi generatoare de funcţii, care construiesc forţele percutante ce acţionează suplimentar asupra corpurilor aflate în contact în timpul ciocnirilor. Dacă printre corpurile aflate în contact în timpul ciocnirilor se află şi unele corpuri supuse la legături neolonome, pentru modelarea forţelor percutante este necesar să se ţină seama şi de multiplicatorii lui Lagrange corespunzători legăturilor neolonome.

In fig.3.2 este reprezentată schema de modelare simplificată pentru un sistem vibropercutant general cu mai multe grade de libertate, la care ciocnirile sînt neinstantanee. In această schemă de modelare sînt delimitate cu linie întreruptă trei părţi distincte, care rezolvă cîte una din problemele care se pun pentru mode-

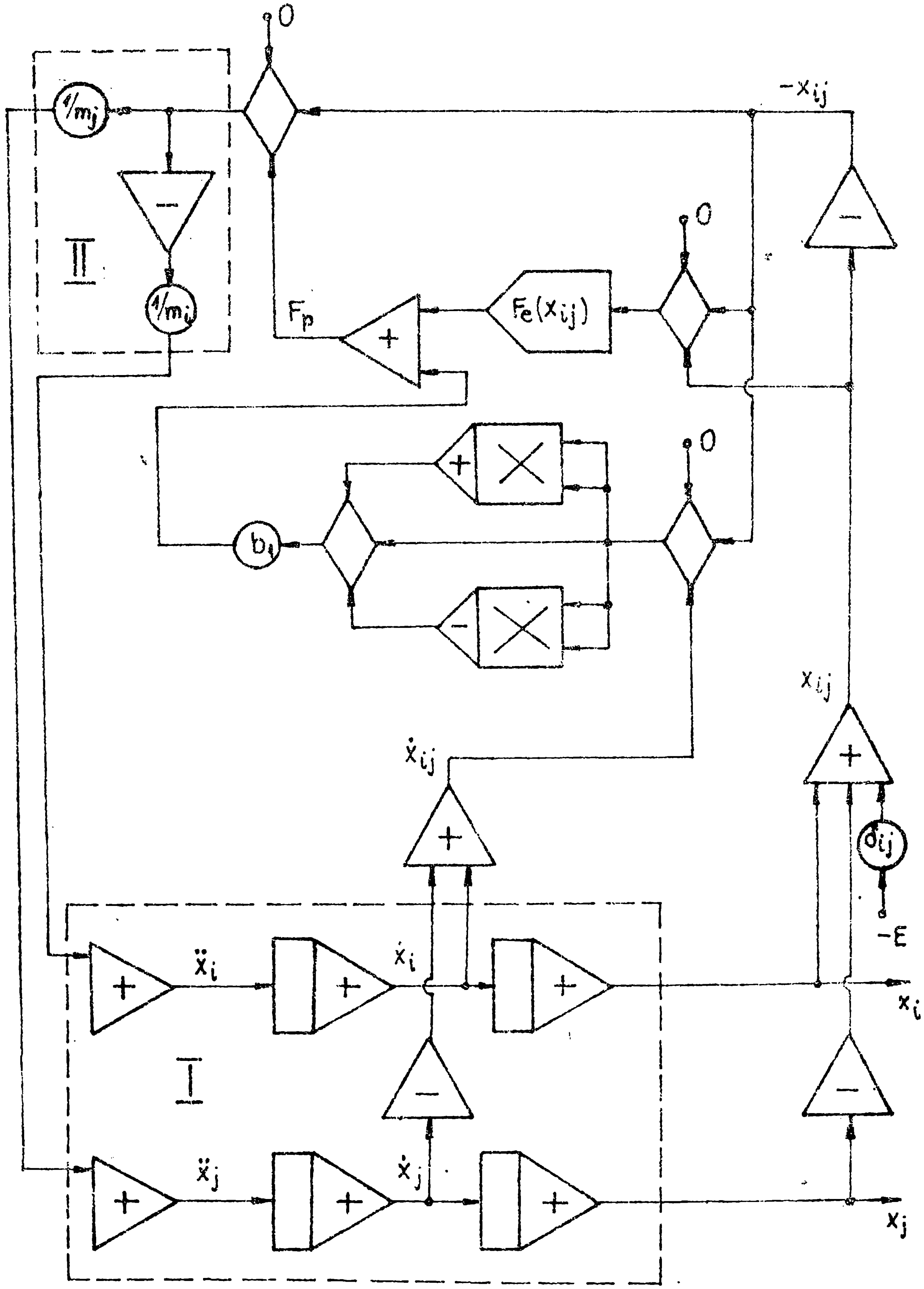

0
$-x_{ij}$
$1/m_j$
II
$1/m_i$
0
F_p
$F_e(x_{ij})$
0
b_i
x_{ij}
$\dot{x}_{ij}$
d_{ij}
$-E$
$\ddot{x}_i$
$\dot{x}_i$
x_i
I
$\ddot{x}_j$
$\dot{x}_j$
x_j

Fig. 3.3

lare. Partea II realizează integrarea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării, între ciocniri pe baza ecuaţiei matriciale (3.7), iar în timpul ciocnirilor sub acţiunea suplimentară a acceleraţiilor corespunzătoare forţelor percutante. In timpul ciocnirilor, ecuaţia diferenţială matricială a mişcării sistemului, exprimată sub forma accesibilă modelării, se poate scrie:

$$\ddot{\bar{q}} = \underline{\mathbf{B}}^{-1}\,\bar{F}_p - \underline{\mathbf{B}}^{-1}\,\underline{\mathbf{C}}\,\dot{\bar{q}} - \underline{\mathbf{B}}^{-1}\,\underline{\mathbf{D}}\,\bar{q} + \underline{\mathbf{B}}^{-1}\bar{\tau} \tag{3.8}$$

în care acceleraţiile suplimentare corespunzătoare forţelor percutante au expresia matricială $\underline{\mathbf{B}}^{-1}\,\bar{F}_p$. Partea I din schema de modelare realizează modelarea ciocnirilor neinstantanee, iar partea III furnizează multiplicatorii lui Lagrange corespunzători legăturilor neolonome.

3.2.1.2. Modelarea calitativă a ciocnirilor neinstantanee

Se consideră cupla percutantă din fig.2.1, pentru care relaţia corespunzătoare funcţiei legăturii unilaterale între două ciocniri consecutive este (2.38). Cu notaţia (2.36), relaţia (2.38) se mai poate scrie:

$$-\,x_{ij} \geq 0 \quad . \tag{3.9}$$

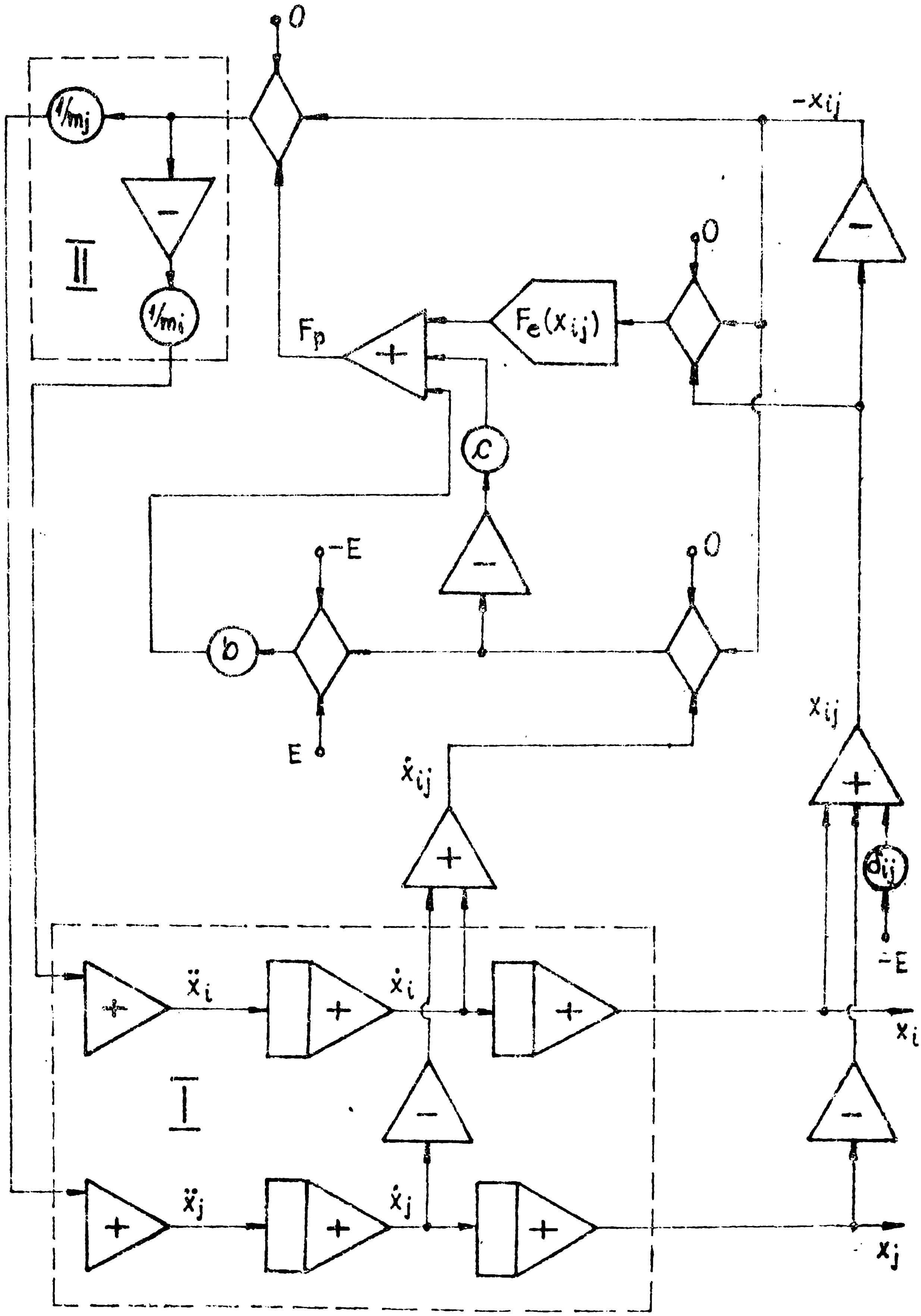
In timpul ciocnirii centrice a maselor m_i şi m_j, apropierea relativă x_{ij} a centrelor celor două mase, care reprezintă şi deformaţia totală în zona de contact, devine pozitivă. Momentele t_{ko} şi $t_{k'}$ corespunzătoare începutului şi sfîrşitului ciocnirii rezultă ca momentele succesive pentru care $x_{ij} = 0$. Cele două faze ale ciocnirii sînt delimitate de momentul $t_{k''}$ în care viteza relativă $\dot{x}_{ij}$ a celor două mase devine nulă.

In modelarea pe calculatoarele analogice a ciocnirilor neinstantanee, delimitarea intervalelor de timp în care au loc ciocnirile şi a fazelor ciocnirilor se realizează cu ajutorul comparatoarelor pe baza relaţiei (3.9) şi a condiţiilor:

$$\dot{x}_{ij} \geq 0 \quad \text{pentru} \quad t \in \left[t_{k^o}, t_{k''}\right] ,$$
$$\dot{x}_{ij} \leq 0 \quad \text{pentru} \quad t \in \left[t_{k''}, t_{k'}\right] . \qquad (3.10)$$

Modelarea forțelor percutante ce acționează asupra celor două mase în timpul ciocnirilor se efectuează pe baza expresiei generale (2.66), în care coeficienții d_1 și b_1 se determină experimental, depinzînd de geometria corpurilor și de proprietățile materialelor, iar pentru parametrul m, în cele mai frecvente cazuri, se poate considera valoarea 1, corespunzător relației lui Hertz între componenta elastică F_e a forței percutante și deformația elastică a corpurilor aflate în contact. Deoarece coeficientul d_1 are valori mari, ciocnirile sînt caracterizate prin deformații mici și forțe percutante de valori foarte mari. Ca urmare, în schemele de modelare pe calculatoarele analogice a ciocnirilor neinstantanee, este necesar ca părțile care modelează forțele percutante să fie protejate prin comparatoare, astfel încît numai în intervalele scurte de timp în care au loc ciocnirile să genereze impulsuri de tensiune corespunzătoare forțelor percutante. De asemenea, la modelarea cantitativă a sistemelor vibropercutante, condiția de bază care trebuie să fie impusă pentru determinarea factorilor de scară este ca valoarea maximă a variabilei de mașină corespunzătoare forței percutante să nu depășească valoarea 1.

In fig.3.3 este reprezentată schema de modelare calitativă detaliată a ciocnirilor neinstantanee pentru cupla percutantă din fig.2.1, la care modelarea forțelor percutante s-a efectuat pe baza expresiei (2.66). Partea din schema de modelare delimitată prin linie întreruptă și notată cu 1 reprezintă sectoarele din buclele de calcul analogic care realizează integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării pentru coordonatele x_i și x_j.



0
$-x_{ij}$
$1/m_j$
II
$1/m_i$
0
F_p
$F_e(x_{ij})$
c
−E
0
b
E
x_{ij}
$\dot{x}_{ij}$
d_{ij}
−E
$\ddot{x}_i$
$\dot{x}_i$
x_i
I
$\ddot{x}_j$
$\dot{x}_j$
x_j

Fig. 3.4

BUPT

Partea delimitată prin linie întreruptă şi notată cu II efectuează repartizarea accelerațiilor suplimentare datorită forțelor percutante în timpul ciocnirilor la sectoarele din buclele de calcul analogic care realizează integrarea ecuațiilor diferențiale ale mişcării pentru coordonatele x_i şi x_j. La această parte din schema de modelare s-a considerat că sistemul vibropercutant se reduce la un model de translație, astfel încît, din produsul matricial $\underline{m}^{-1}F_p$, pentru sectorul corespunzător coordonatei x_i se repartizează accelerația suplimentară $-\frac{1}{m_i}F_p$, iar pentru cel corespunzător coordonatei x_j rezultă accelerația suplimentară $\frac{1}{m_j}F_p$.

In literatura de specialitate, legată de modelarea matematică şi pe calculatoare electronice a sistemelor vibropercutante, există unele lucrări în care la studiul ciocnirilor centrice se ține seama mai puțin de geometria corpurilor care se ciocnesc, avîndu-se în vedere în mod special proprietățile materialelor folosite în construcția de maşini. Aceste proprietăți sînt redate destul de complet, în ceea ce priveşte modelarea ciocnirilor, prin modelele reologice ale diferitelor medii. In aceste modele reologice, corpurile care se ciocnesc se consideră ca fiind compuse dintr-o mulțime de elemente de volum de mase elementare, legate între ele prin elemente elastice, de frecare uscată şi vîscoasă. Proprietățile modelelor reologice astfel obținute definesc proprietățile mediilor vîsco-elasto-plastice, care sînt cele mai complexe din punctul de vedere al distribuției stărilor de tensiune şi a deformațiilor în volumele corpurilor. Deoarece în studiul sistemelor vibropercutante starea de deformație a corpurilor nu prezintă interes, starea de tensiune a corpurilor în timpul ciocnirilor se poate aprecia global printr-un model al legăturii rigide de contact, în care sînt cuprinse integral proprietățile visco-elasto-plastice ale materialelor. Pe baza acestora considerații, pentru cupla percutantă din fig.2.1, expresia forței percutante rezultă de forma:

$$F_p = F_e(x_{ij}) - c\,\dot{x}_{ij} - b\,\mathrm{sign}\,\dot{x}_{ij} \quad , \qquad (3.11)$$

în care b și c sînt constante ce se determină experimental. Primul termen din (3.11) reprezintă componenta elastică a forței percutante și are expresia generală dată de primul termen din (2.66), iar celelalte două componente exprimă global influența frecărilor interne de natură uscată și vîscoasă asupra stării de tensiune dintre corpurile aflate în contact în timpul ciocnirilor.

In lucrările [89], [1o2], [122] se prezintă unele modele pentru calculatoarele analogice ale unor sisteme vibropercutante particulare, la care modelarea ciocnirilor s-a realizat pe baza expresiei forței percutante de forma (3.11). In majoritatea modelelor din lucrările [89] și [122], precum și în modelarea amortizorului cu șocuri din lucrarea [1o2], componenta elastică a forței percutante se consideră liniară și se neglijează influența frecărilor interne de natură uscată. In fig.3.4 este dată o schemă de modelare calitativă generală a ciocnirilor neinstantanee pentru cupla percutantă din fig.2.1, la care modelarea forței percutante se realizează pe baza expresiei generale (3.11). Părțile delimitate prin linie întreruptă și notate cu I, respectiv II, au aceleași semnificații ca și în fig.3.3.

Metoda de modelare a ciocnirilor prezentată mai sus a fost folosită pentru studiul comportării dinamice a unor scule rotopercutante pentru construcții prin modelare pe calculatorul analogic, în cadrul unui contract de cercetare științifică cu Intreprinderea "6 Martie" din Timișoara, care produce utilaje pentru construcții. In fig.3.5 este prezentat modelul mecanic pentru astfel de scule rotopercutante. Acționarea sculei se realizează printr-un mecanism bielă-manivelă, avînd biela AB de lungime l mult mai mare decît lungimea r a manivelei. Presupunînd viteza unghiulară ω a manivelei constantă,

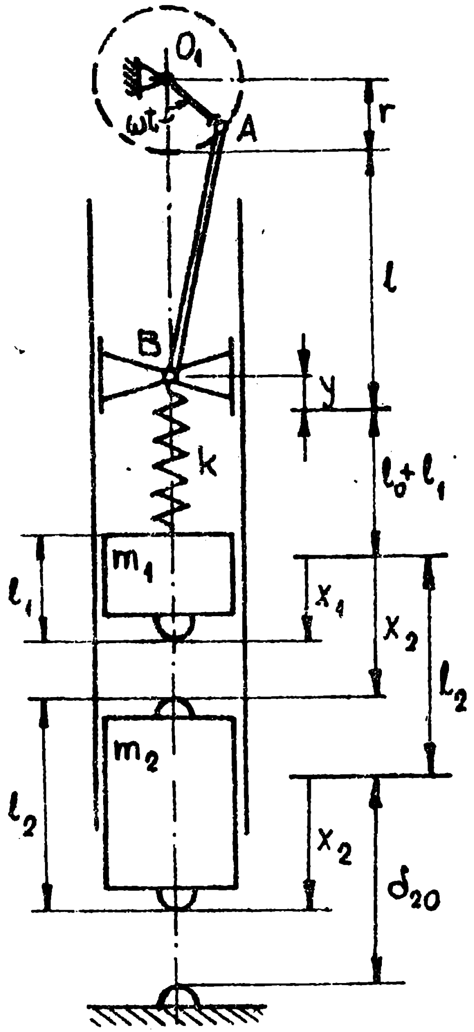


Fig. 3.5

deplasarea y a capătului B al bielei față de poziția considerată inițială, în care biela și manivela se află în prelungire, se poate exprima prin relația:

$$y = r\left(1+\frac{1}{4}\frac{r}{l}\right) - r\cos\omega t - \frac{1}{4}\frac{r^2}{l}\cos 2\omega t . \qquad (3.12)$$

Măsurînd parametrii de poziție x_1 și x_2 din poziția în care se află capătul arcului nedeformat cînd biela și manivela se află în prelungire, ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului între două ciocniri consecutive sînt:

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - k(x_1 + y) ,$$
$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g . \qquad (3.13)$$

Folosind notațiile:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m_1} ; \quad \lambda = \frac{1}{4}\frac{r}{l} ; \quad g_1 = g - \omega_n^2 r(1+\lambda) ; \quad g_2 = g , \qquad (3.14)$$

ecuațiile diferențiale (3.13), ținînd seama și de expresia (3.12), se pot exprima sub forma:

$$\ddot{x}_1 + \omega_n^2 x_1 = g_1 + r\omega_n^2 \cos\omega t + \lambda r\omega_n^2 \cos 2\omega t ,$$
$$\ddot{x}_2 = g_2 . \qquad (3.15)$$

Relațiile îndeplinite între ciocniri de funcțiile legăturilor unilaterale corespunzătoare celor două cuple percutante sînt:

$$x_2 - x_1 \geq 0 ,$$
$$\delta_{20} - x_2 \geq 0 . \qquad (3.16)$$

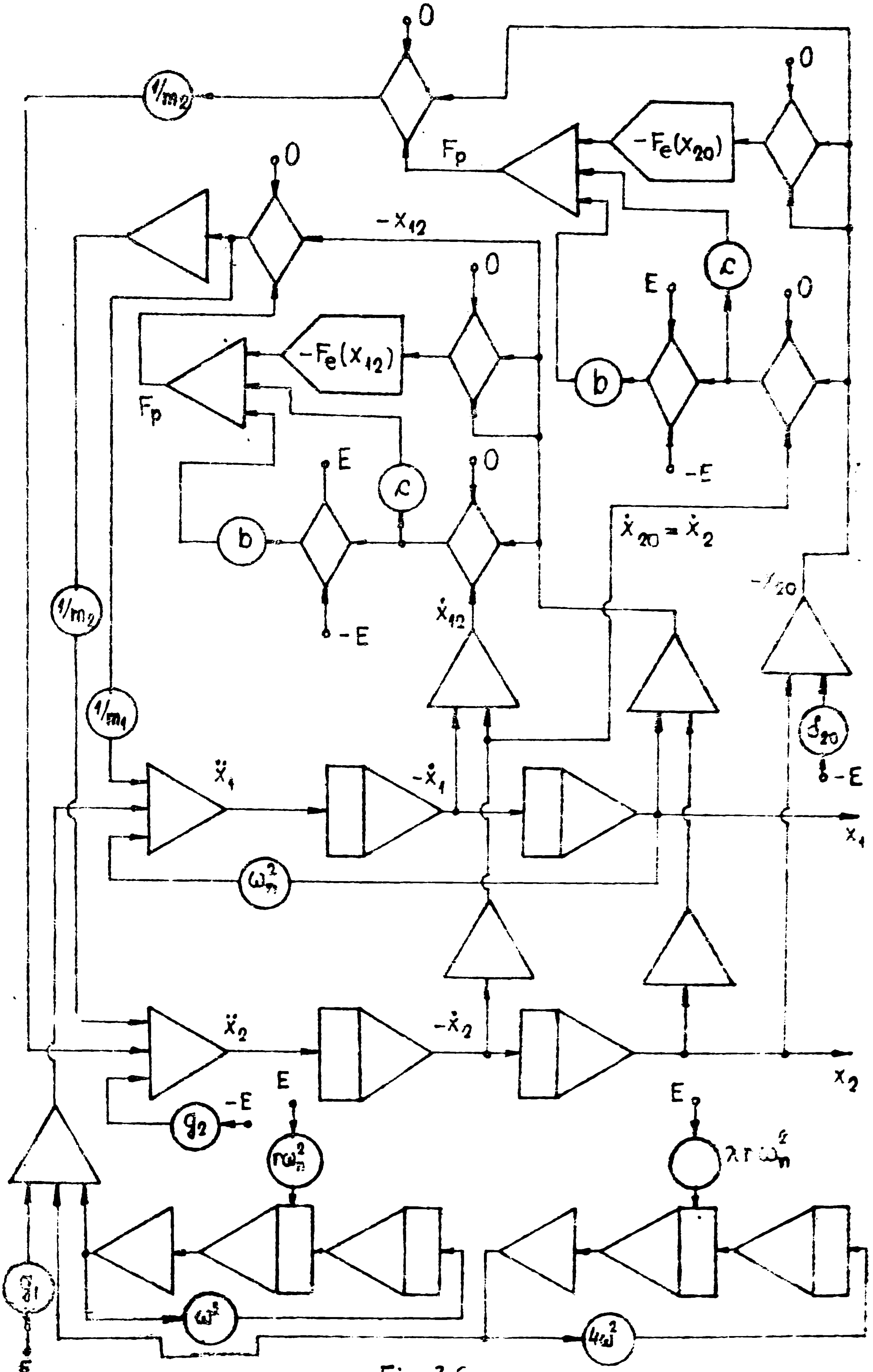

0
1/m2
Fp
-Fe(x20)
-x12
-Fe(x12)
E
c
b
-E
x20 = x2
x12
-x20
1/m2
1/m1
δ20
x1
-x1
ω_n²
x2
-x2
g2
rω_n²
λrω_n²
ω²
4ω²

Fig. 3.6

Modelarea pe calculatorul analogic a sistemului vibropercutant considerat s-a efectuat pe baza ecuaţiilor diferenţiale (3.15), a relaţiilor (3.16) şi a expresiilor pentru forţele percutante de forma (3.11). In fig.3.6 este dată schema de modelare calitativă corespunzătoare. In această schemă de modelare s-a ţinut seama că sumatoarele şi integratoarele efectuează operaţiile cu schimbarea semnului. In partea de jos a schemei de modelare sînt reprezentate sectoarele care realizează modelarea componentelor armonice din membrul drept al primei ecuaţii (3.15). Aceste sectoare s-au realizat pe baza observaţiei că ecuaţia diferenţială de forma:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \qquad (3.17)$$

cu condiţiile iniţiale $t = 0$, $z = z_0$, $\dot{z} = 0$, are soluţia armonică $z = z_0 \cos \omega t$.

In fig.3.7 sînt reprezentate diagrama mişcării şi diagrama vitezei pentru masa m_2 într-unul din regimurile vibropercutante periodice optime ale sistemului modelat, care se realizează cînd ciocnirile dintre cele două mase au loc în momentele în care masa m_2 are viteza nulă.

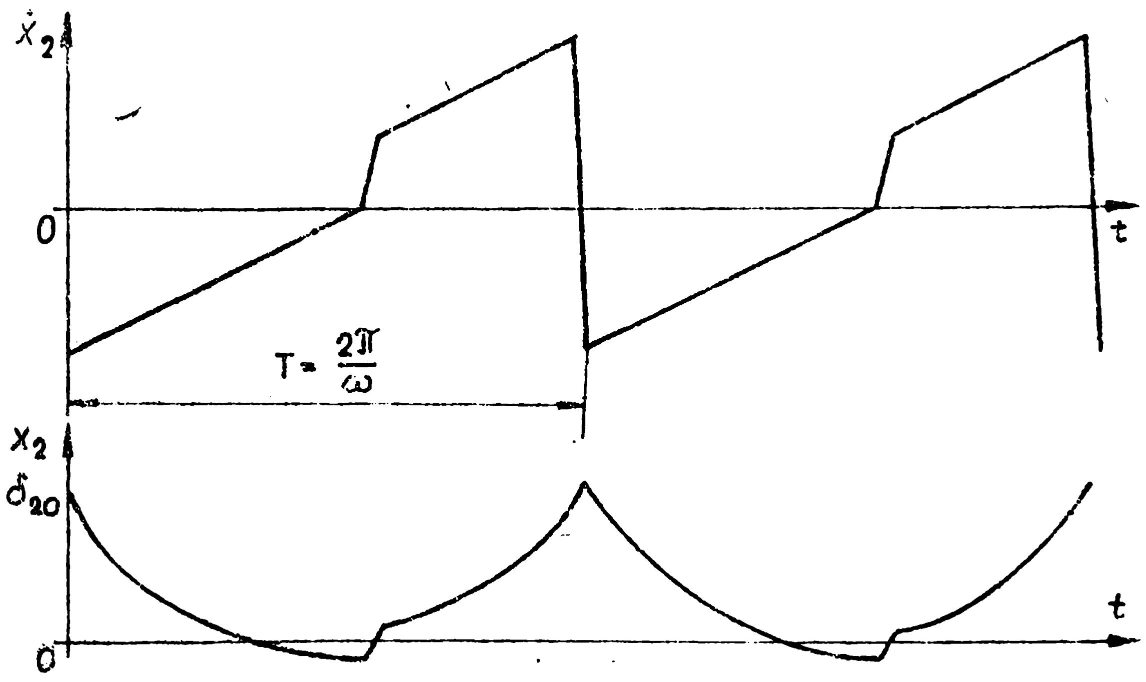


Fig. 3.7

3.2.1.3. Modelarea calitativă a ciocnirilor instantanee

Se consideră cupla percutantă din fig.2.1, pentru care este valabilă relaţia (2.38), la care ciocnirile se presupun instantanee. Prin urmare, se neglijează efectul forţelor nepercutante în timpul ciocnirilor, astfel încît ciocnirile sînt caracterizate numai prin coeficientul de restituire R, cu ajutorul căruia se exprimă vitezele de translaţie ale corpurilor de mase m_i şi m_j de la sfîrşitul ciocnirilor în funcţie de vitezele de la începutul ciocnirilor pe baza relaţiilor de formă (2.42). Rezultă că, în schemele de modelare pe calculatoarele analogice ale ciocnirilor instantanee, este necesar să se asigure în momentele ciocnirilor, cînd este îndeplinită egalitatea în relaţia (2.38), schimbarea rapidă a condiţiilor iniţiale la prizele integratoare din buclele de calcul analogic care realizează integrarea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării corpurilor de mase m_i şi m_j, conform relaţiilor (2.42). Pentru aceasta, în circuitele de reacţie negativă ale acestor integratoare trebuie să existe cîte doi condensatori identici, de precizie ridicată, care să fie conectaţi succesiv, în momentele ciocnirilor, la buclele de calcul analogic care realizează integrarea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării între două ciocniri consecutive. Astfel, dacă unul din aceşti condensatori într-unul din intervalele de timp dintre două ciocniri consecutive este operant, fiind conectat între punctul sumă de la intrarea integratorului corespunzător şi ieşirea acestuia, cel de al doilea condensator trebuie să fie inoperant şi să pregătească schimbarea condiţiilor iniţiale în momentul ciocnirii următoare, pentru care este necesar să fie conectat între masa calculatorului şi ieşirea circuitului analogic care calculează vitezele la sfîrşitul ciocnirilor în funcţie de vitezele de la începutul ciocnirilor conform relaţiilor (2.42). În momentul ciocnirii următoare, rolul celor doi condensatori se schimbă, primul devenind inoperant şi al doilea operant pentru următorul interval de timp dintre două ciocniri consecutive.

Calculatoarele analogice MEDA-42TA oferă posibilităţi largi de comutare comodă şi rapidă de pe o buclă de calcul analogic pe alta, datorită existenţei comparatoarelor cu comutaţie rapidă şi datorită separării circuitelor de reacţie şi de intrare faţă de amplificatoarele operaţionale cu care se realizează elementele active de calcul analogic. Astfel, comparatoarele conţin amplificatoare cu factor mare de amplificare a diferenţei celor două variabile de intrare (dintre care una poate să fie nulă) şi limitatoare de nivel de intrare, comutarea realizîndu-se rapid, în momentul în care diferenţa devine nulă, cu ajutorul unor relee polarizate. De asemenea, pentru realizarea integratoarelor este necesar să se conecteze intrarea şi ieşirea amplificatoarelor operaţionale respectiv la punctul sumă al circuitelor de intrare şi la ieşirea circuitelor de reacţie (care conţin condensatori cu cealaltă bornă conectată la punctul sumă), aceste circuite fiind dispuse separat, în aşa numitele "cîmpuri de integrare". In acest fel, pentru acelaşi integrator se pot folosi două cîmpuri de integrare, care se conectează succesiv, cu ajutorul comparatoarelor, în buclele de calcul analogic.

In fig.3.8 este reprezentată schema de modelare analogică a ciocnirilor instantanee pentru cupla percutantă din fig.2.1.
In partea centrală a schemei de modelare sînt dispuse buclele de calcul analogic care realizează integrarea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării pentru corpurile de mase m_i şi m_j, circuitele care pregătesc schimbarea condiţiilor iniţiale, calculînd expresiile vitezelor de la sfîrşitul ciocnirilor în funcţie de cele corespunzătoare începutului ciocnirilor pe baza relaţiilor (2.42), precum şi circuitul care calculează funcţia legăturii unilaterale $f = -x_{ij} \geq \geq 0$. Aici valorile coeficienţilor λ_i şi λ_j, stabiliţi cu ajuto-

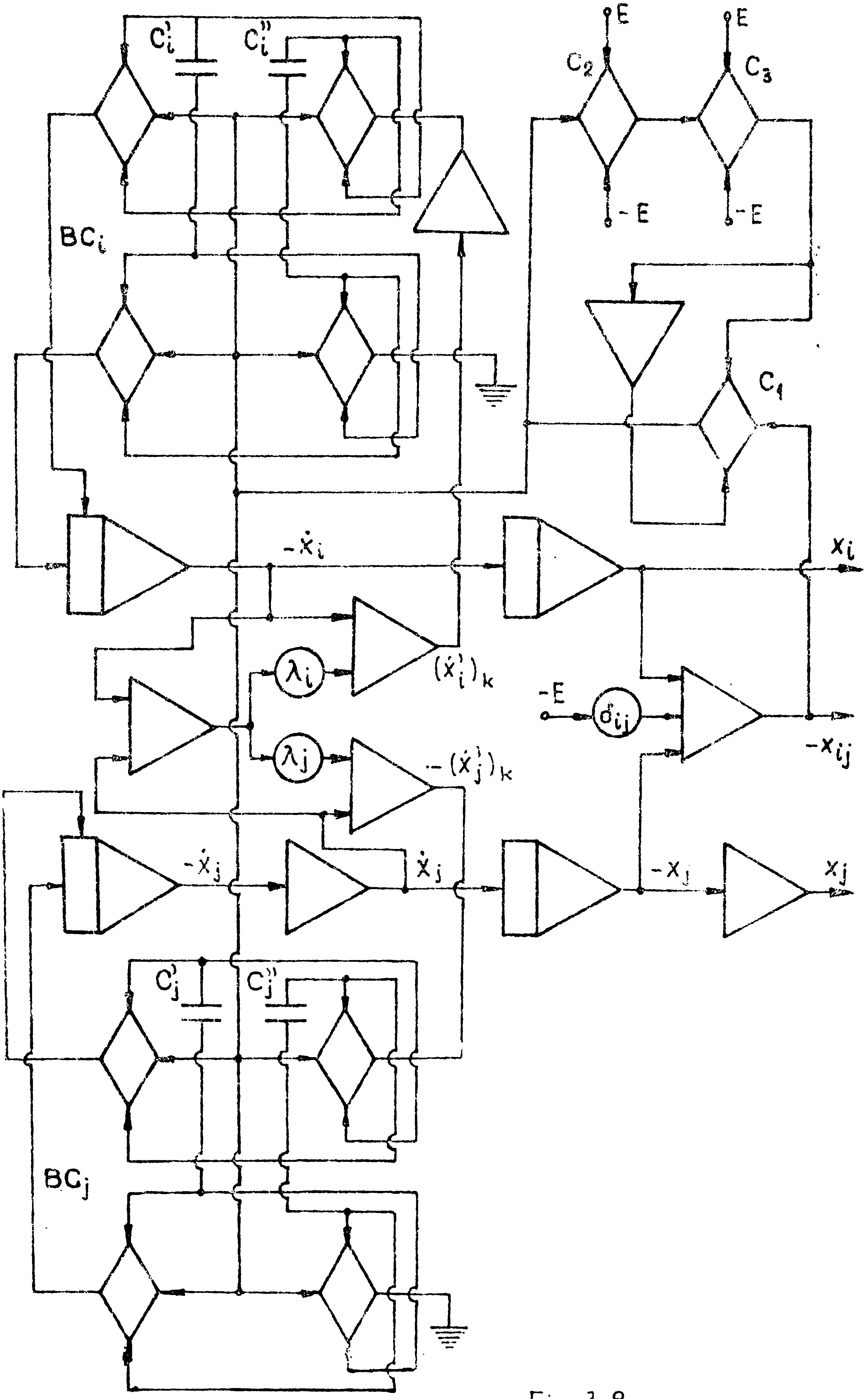

E
E
C_i'
C_i''
C_2
C_3
-E
-E
BC_i
C_1
$-\dot{x}_i$
x_i
λ_i
$(\dot{x}_i^1)_k$
-E
δ_{ij}
$-x_{ij}$
λ_j
$-(\dot{x}_j^1)_k$
$-\dot{x}_j$
$\dot{x}_j$
$-x_j$
x_j
C_j'
C_j''
BC_j

Fig. 3.8

rul r potențiometrii, au valorile:

$$\lambda_i = \frac{1 + R}{1 + \frac{m_i}{m_j}} \quad , \quad \lambda_j = \frac{1 + R}{1 + \frac{m_j}{m_i}} \quad . \tag{3.18}$$

Schimbarea condițiilor inițiale în timpul ciocnirilor se realizează cu ajutorul comparatoarelor C_1, C_2, C_3 și a blocurilor de comparatoare BC_i, respectiv BC_j. In momentul în care $-x_{ij}$ devine nul, se produce comutarea comparatorului C_1, care comandă comutarea comparatorului C_2 și a blocurilor de comparatoare BC_i, respectiv BC_j. După comutarea blocurilor de comparatoare, se schimbă condițiile inițiale la primele integratoare din buclele de calcul analogic care realizează integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării pentru corpurile de mase m_i și m_j, astfel încît $-x_{ij}$ tinde să devină din nou pozitiv. Aceasta conduce la comutarea comparatorului C_1 în poziția inițială, în același timp cu comutarea comparatorului C_3, comandată de C_2, care schimbă polaritățile bornelor de comandă ale comparatorului C_1. Se observă că rolul comparatorului C_2 este de a întîrzia comutarea comparatorului C_3, astfel încît schimbarea polarităților bornelor de comandă ale comparatorului C_1 să se realizeze după schimbarea condițiilor inițiale, în timp ce acesta revine la poziția inițială. In acest mod se evită apariția unor instabilități în funcționarea blocurilor de comparatoare care comandă schimbarea condițiilor inițiale, ceea ce ar putea duce la scurtcircuite.

Deși la calculatoarele analogice moderne se iau toate măsurile ca să se realizeze o comutare rapidă a comparatoarelor, totuși acestea au un timp de comutare finit, de ordinul zecimilor de secundă. Pentru acoperirea timpului de comutare a comparatorului C_1, în schema de modelare analogică se poate introduce un circuit de corecție, care să comande comutarea acestuia înaintea momentului ciocnirii cu un interval de timp egal cu timpul de comutare al comparatorului. Acest circuit de corecţie trebuie să aducă la cealaltă intrare a comparatorului C_1 o tensiune de corecţie pozitivă, în general dependentă de $-x_{ij}$ şi de $\dot{x}_{ij}$, astfel încît comutarea acestuia să se producă la anularea diferenţei dintre tensiunea $-x_{ij}$ şi tensiunea de corecţie, înaintea momentului ciocnirii. Realizarea acestui circuit de corecţie se poate face numai experimental, prin încercări pe calculatorul analogic.

Se constată că pentru modelarea ciocnirilor instantanee este nevoie de multe comparatoare, dar se evită utilizarea multiplicatoarelor şi a generatoarelor de funcţii neliniare, care operează cu erori mai mari decît elementele liniare de calcul analogic. Pentru o cuplă percutantă la care ciocnirile au loc între un corp al sistemului vibropercutant şi un limitator rigid fix, pentru modelarea ciocnirilor instantanee este nevoie de un singur bloc de comparatoare pentru schimbarea condiţiilor iniţiale în timpul ciocnirilor. Pentru un sistem vibropercutant cu două sau mai multe cuple percutante, pentru modelarea ciocnirilor instantanee la fiecare cuplă percutantă este necesar să se utilizeze 11 comparatoare, dacă ciocnirile au loc între două corpuri ale sistemului vibropercutant, sau 7 comparatoare, dacă ciocnirile au loc între un corp aparţinînd sistemului vibropercutant şi un limitator rigid fix. Dacă sistemul vibropercutant conţine două cuple percutante la care ciocnirile au loc între aceleaşi două corpuri ale sistemului, ca în cazul modelului din fig.2.5, modelarea pe calculatoare analogice a ciocnirilor instantanee se poate realiza numai cu 12 comparatoare. Pentru aceasta, schema de modelare analogică este asemănătoare cu cea reprezentată în fig.3.8, cu singura deosebire că înaintea comparatorului C_1 este necesar să se plaseze un alt comparator C_0, care are rolul de a selecta cupla percutantă în care se va produce ciocnirea următoare (fig.3.9).

Această selectare se realizează în funcție de viteza relativă de la începutul ciocnirii următoare, presupusă de ordinul k, avînd valoarea $(\dot{x}_{ij})_k = (\dot{x}_i)_k - (\dot{x}_j)_k$ negativă, dacă ciocnirea următoare corespunde funcției legăturii unilaterale f_1, pentru care este îndeplinită relația (2.217), sau pozitivă, dacă ciocnirea următoare corespunde funcției legăturii unilaterale f_2, pentru care este îndeplinită relația (2.218). Prin urmare, la intrarea comparatorului C_0 trebuie să se aducă tensiunea $\dot{x}_{ij} = \dot{x}_i - \dot{x}_j$, iar la bornele sale de comandă f_1 și f_2. Ținînd seama de relațiile (2.219), circuitele care calculează expresiile vitezelor de la sfîrșitul ciocnirilor în funcție de cele de la începutul ciocnirilor și conexiunile din blocurile de comparatoare BC_i și BC_j vor fi asemănătoare celor din schema de modelare din fig.3.3, cu deosebirea că trebuie să se schimbe între ei indicii i și j, deoarece funcția legăturii unilaterale f corespunzătoare cuplei percutante din fig.2.1 este identică cu funcția legăturii unilaterale f_2, corespunzătoare celei de a doua cuplă percutantă din fig.2.5.

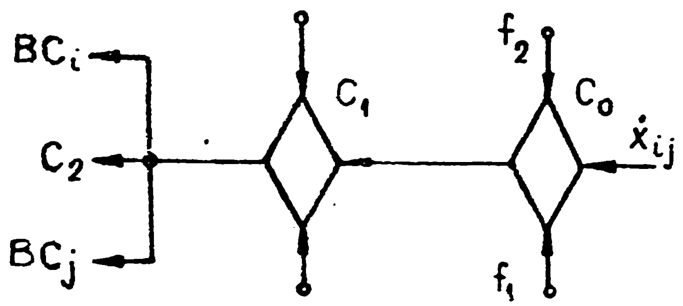


Fig. 3.9

Pe baza principiilor de modelare pe calculatoarele analogice a ciocnirilor instantanee, care au fost prezentate mai sus, se pot construi scheme de modelare analogică pentru orice sisteme vibropercutante, la care ciocnirile se pot considera instantanee. Autorul a realizat și a studiat numeroase modele pentru calculatoarele analogice, corespunzătoare unor sisteme vibropercutante cu unul, două sau mai multe grade de libertate, liniare sau neliniare între ciocniri, avînd aplicații în diverse domenii ale tehnicii și producției. Astfel, în cadrul contractului de cercetare științifică cu Intreprinderea "6 Martie" din Timișoara, pentru modelul mecanic al sculelor rotopercutante din fig.3.5 s-au realizat și studiat scheme de modelare analogică corespunzătoare ciocnirilor instantanee, obținîndu-se rezultate foarte apropiate de cele obținute pe modelul corespunzător ciocnirilor neinstantanee. De asemenea, în cadrul unui contract de cercetare științifică cu I.C.M.Reșița, în care s-au studiat posibilitățile de îmbunătățire a procesului tehnologic de formare folosind vibrațiile și vibropercuțiile, s-a studiat experimental și pe calculatorul analogic influența parametrilor diferitelor regimuri de mișcare vibropercutantă asupra calității miezurilor, determinîndu-se valorile optime ale acestor parametrii [48], [139], [194]. In lucrarea [186] se prezintă un model pentru calculatoarele analogice pentru un sistem vibropercutant cu un grad de libertate cu două cuple percutante și cu ciocniri instantanee, corespunzător unui model mecanic de amortizor cu șocuri, care a fost studiat teoretic anterior [173].

In cele ce urmează,se prezintă schema de modelare analogică pentru un model mecanic de sistem vibropercutant cu două grade de libertate și o cuplă percutantă, liniar între ciocniri, avînd ciocniri instantanee (fig.3.10). La un astfel de model mecanic se pot reduce, de exemplu, mașinile și instalațiile folosite pentru baterea pilonilor în pămînt, mașinile vibropercutante pentru tasarea terenurilor, etc. Schema de modelare pe calculatoarele analogice pentru acest model mecanic este dată în fig.3.11, fiind realizată prin particularizarea schemei de modelare analogică din fig.3.8. Aici este reprezentat și circuitul de corecție necesar pentru acoperirea timpului de comutare al comparatoarelor, care

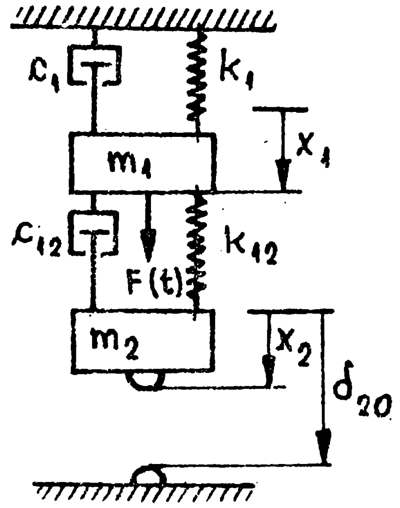


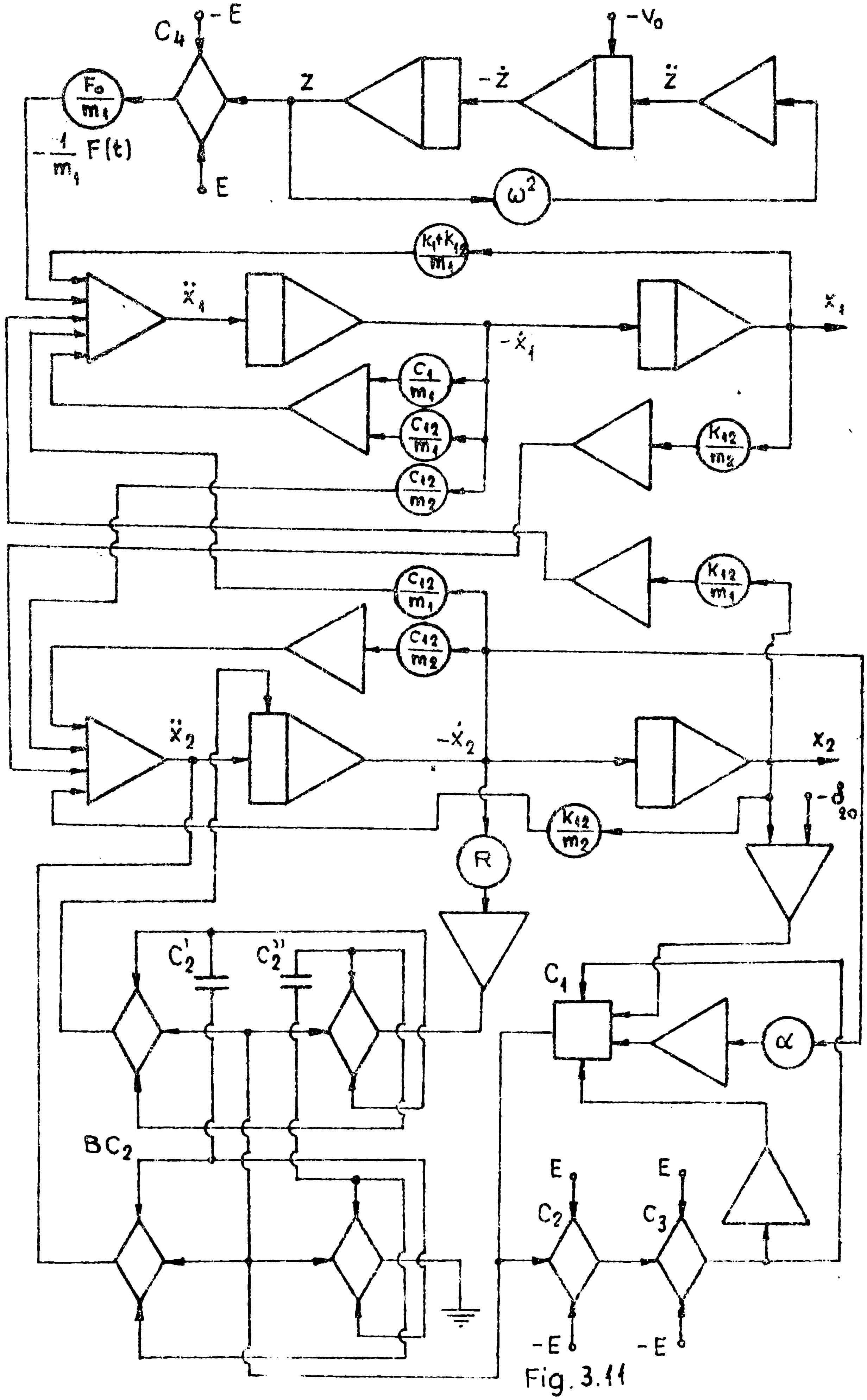
Fig.3.10

trebuie să comande comutarea comparatorului C_1 cu o fracţiune de secundă înaintea momentului ciocnirii următoare. Pentru aceasta, la cea de a doua intrare a comparatorului C_1 se aduce o tensiune mică pozitivă, aici proporţională cu viteza de translaţie a corpului de masă m_2, valoarea coeficientului α fiind mică şi determinîndu-se experimental, prin încercări pe calculatorul analogic.

In partea superioară a schemei de modelare din fig.3.11 este reprezentată bucla de calcul analogic, care realizează generarea forţei perturbatoare $F(t)$. S-a considerat că această forţă perturbatoare are variaţia optimă în timp, de forma (2.27o). Pentru generarea ei, fără a folosi generatoare de funcţii neliniare, s-a ţinut seama de faptul că ecuaţia diferenţială (3.17), cu condiţiile iniţiale $t = 0$, $z = 0$, $\dot{z} = v_o$, are soluţia armonică $z = \frac{v_o}{\omega} \sin \omega t$, iar comparatorul C_4 realizează funcţia neliniară $-\operatorname{sign}(\sin \omega t)$.

3.2.1.4. Modelarea calitativă a semicuplelor percutante

Modelarea pe calculatoarele analogice a semicuplelor percutante, a jocurilor şi a caracteristicilor neliniare se poate realiza uşor cu ajutorul generatoarelor de funcţii neliniare. Deoarece acestea, în general, operează cu erori mari, se caută scheme de modelare pe calculatoarele analogice a funcţiilor neliniare cu ajutorul comparatoarelor, la care se pot realiza uşor circuite de compensare a erorilor care se datoresc timpului finit


C_4
-E
E
$\frac{F_o}{m_1}$
$-\frac{1}{m_1}F(t)$
z
$-\dot{z}$
$\ddot{z}$
$-V_0$
ω^2
$\frac{k_1+k_{12}}{m_1}$
$\ddot{x}_1$
$-\dot{x}_1$
x_1
$\frac{C_1}{m_1}$
$\frac{C_{12}}{m_1}$
$\frac{C_{12}}{m_2}$
$\frac{k_{12}}{m_2}$
$\frac{k_{12}}{m_1}$
$\frac{C_{12}}{m_1}$
$\frac{C_{12}}{m_2}$
$\ddot{x}_2$
$-\dot{x}_2$
x_2
$\frac{k_{12}}{m_2}$
$-\delta_{20}$
R
C_2'
C_2''
C_1
α
BC_2
E
C_2
E
C_3
-E
-E
Fig. 3.11

de comutare al comparatoarelor, aşa cum s-a arătat în paragraful precedent. In aplicaţiile practice, caracteristicile de amortizare neliniare se modelează, în mod obişnuit, cu ajutorul generatoarelor de funcţii neliniare, în timp ce pentru modelarea caracteristicilor elastice neliniare se apelează, tot mai frecvent, la utilizarea comparatoarelor. Astfel, dacă între corpurile de mase m_i şi m_j ale unui sistem vibrant sau vibropercutant redus la un model mecanic de translaţie se află un element elastic neliniar, modelarea pe calculatoarele analogice a caracteristicii sale elastice se poate realiza cu ajutorul generatoarelor de funcţii neliniare sau cu ajutorul comparatoarelor. In ambele cazuri, caracteristica elastică neliniară se liniarizează pe porţiuni, folosind una din metodele analitice de liniarizare, astfel încît caracteristica elastică liniarizată să aproximeze cît mai bine caracteristica neliniară. In cazul folosirii generatoarelor de funcţii neliniare, trecerea de pe o latură a liniei poligonale ce aproximează caracteristica elastică neliniară pe alta alăturată se realizează cu ajutorul diodelor polarizate, care pot introduce erori de modelare, datorită curenţilor de polarizare inversă diferiţi de zero şi datorită modificării caracteristicilor de funcţionare ale diodelor în timp şi cu temperatura. De asemenea, potenţiometrii cu care se reglează coordonatele punctelor de frîngere ale liniei poligonale au o precizie mai scăzută decît potenţiometrii folosiţi pentru stabilirea coeficienţilor ecuaţiilor diferenţiale, care sînt potenţiometrii elicoidali cu mai multe începuturi, asigurînd o variaţie continuă a rezistenţei lor. Din aceste considerente, în schemele de modelare analogică a caracteristicilor neliniare, a jocurilor, a cuplelor şi a semicuplelor percutante se evită, dacă este posibil, utilizarea generatoarelor de funcţii neliniare.

In fig.3.12 este reprezentată o astfel de linie poligonală, corespunzătoare unei caracteristici elastice neliniare, liniarizată pe porţiuni. Caracteristica elastică fiind simetrică faţă de origine, pentru fiecare polaritate a forţei elastice F_e, respectiv a deformaţiei elementului elastic x_j-x_i, s-au considerat cîte trei laturi ale liniei poligonale. Pentru modelarea cu ajutorul comparatoarelor a acestei caracteristici elastice neliniare, se observă că liniarizarea pe porţiuni a caracteristicii neliniare este echivalentă cu introducerea între corpurile de mase m_i şi m_j, în locul elementului elastic neliniar, a unor semicuple percutante, dispuse simetric faţă de corpul de masă m_j, constituite din limitatori elastici legaţi de corpul de masă m_j, aşa cum se arată în fig.3.13. In cazul considerat, modelul din fig.3.13 conţine două perechi de semicuple percutante, pentru care se pot exprima funcţii ale unor legături unilaterale ca şi în cazul cuplelor percutante, cu ajutorul cărora se pot stabili relaţii de aceeaşi formă:

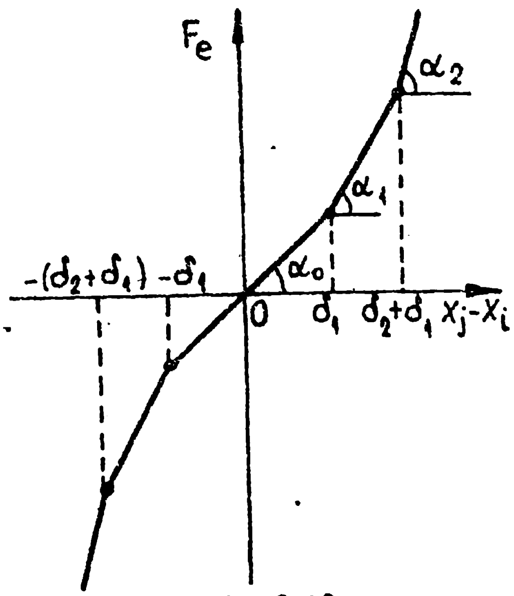


Fig.3.12

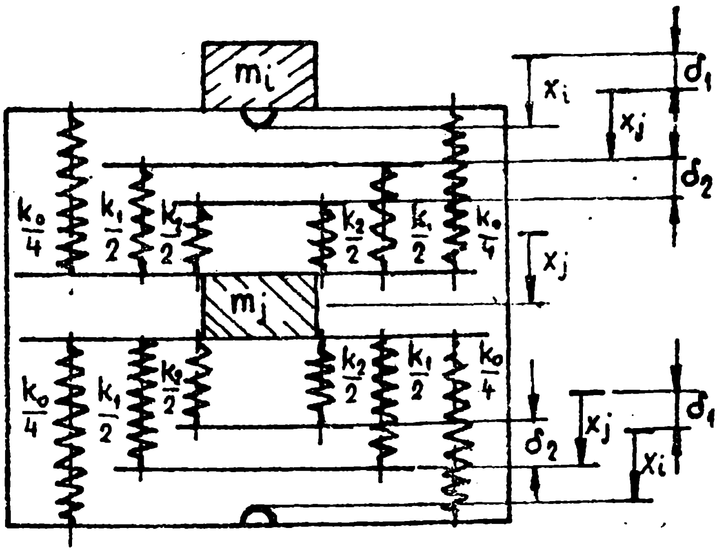


Fig.3.13

$$f_1' = \delta_1 - x_i + x_j \geq 0 \quad , \quad f_1'' = \delta_1 - (x_j - x_i) \geq 0 \ ,$$

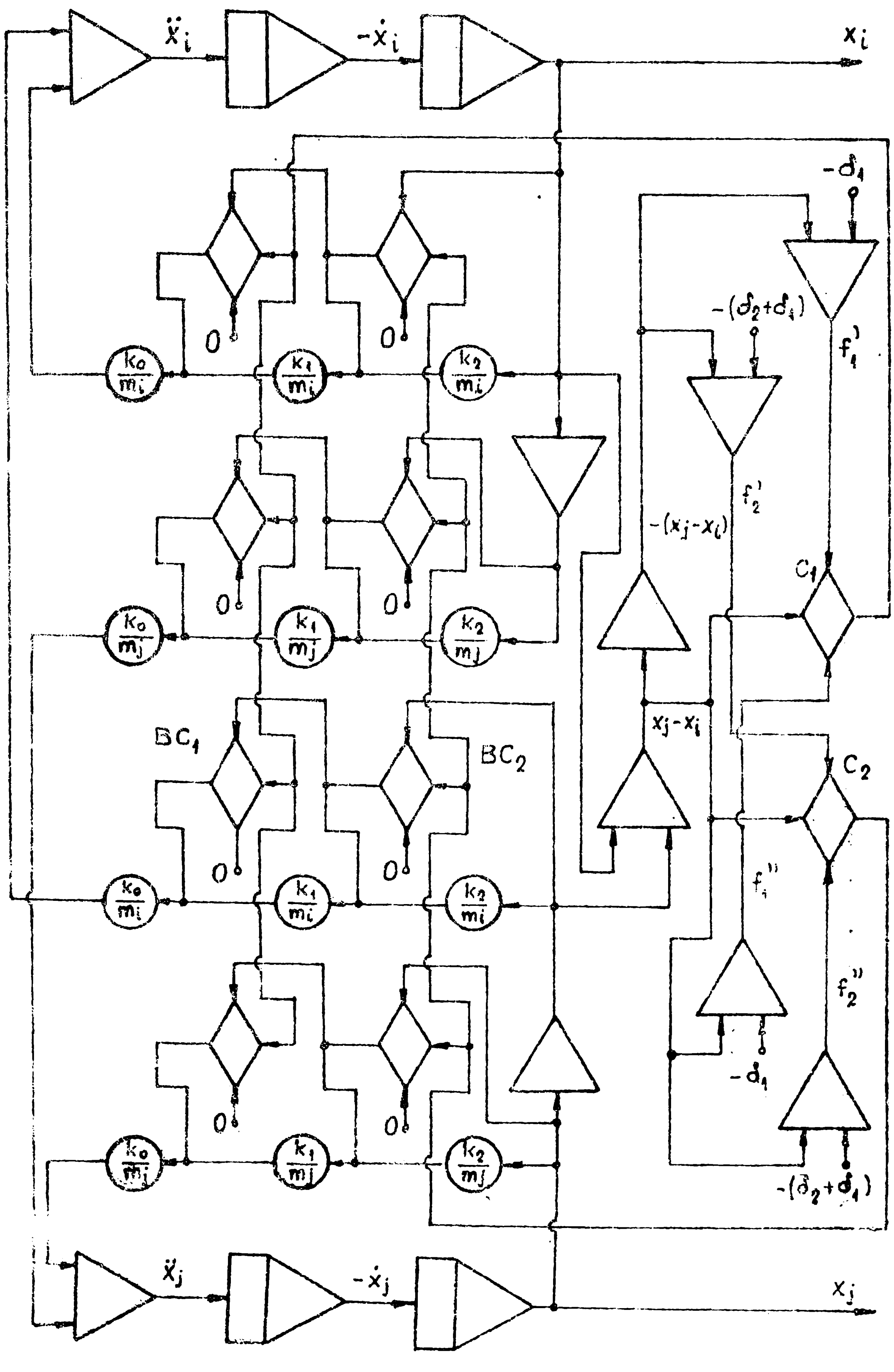
$$f_2' = \delta_1 + \delta_2 - x_i + x_j \geq 0, \quad f_2'' = \delta_1 + \delta_2 - (x_j - x_i) \geq 0 \ , \tag{3.19}$$

valabile în intervalele de timp ale mișcării sistemului între cele două semicuple percutante simetrice corespunzătoare unei perechi. Valorile pentru constanta elastică k_o și constantele elastice ale semicuplelor percutante rezultă din fig.3.12:

$$k_o = tg\,\alpha_o, \ k_1 = tg\,\alpha_1 - tg\,\alpha_o, \ k_2 = tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1 \ . \tag{3.2o}$$

In fig.3.14 este reprezentată schema de modelare pe calculatoarele analogice a caracteristicii elastice neliniare considerate, liniarizată pe porțiuni cu ajutorul celor două perechi de semicuple percutante. Comparatoarele C_1 și C_2 selectează semicupla percutantă din fiecare pereche, la care urmează să fie îndeplinită egalitatea în relațiile (3.19), în funcție de semnul deformației elementului elastic $x_j - x_i$. Blocurile de comparatoare BC_1 și BC_2 scurtcircuitează potențiometrii corespunzători în intervalele de timp ale mișcării sistemului în care sînt verificate relațiile (3.19) și îi introduc pe rînd în buclele de calcul analogic, după cum funcțiile legăturilor unilaterale (3.19) devin pe rînd negative. Compensarea erorilor datorită timpului finit de comutare al comparatoarelor se poate realiza ușor, considerînd pentru δ_1 și δ_2 valori mai mici decît cele care rezultă din liniarizarea pe porțiuni a caracteristicii neliniare din fig.3.12, pentru aceasta luîndu-se valorile $\delta_1 - \beta_1$, respectiv $\delta_2 - \beta_2$, unde β_1 și β_2 au valori mici și se determină experimental, prin încercări pe calculatorul analogic.

Jocurile între anumite elemente constructive ale unui sistem mecanic vibrant sau vibropercutant corespund în modelul mecanic unor cuple sau semicuple percutante, avînd, în general, caracter visco-elasto-plastic. La rîndul lor, componentele elastice neliniare ale forței percutante din cuplele percutante din timpul cioc-


$\ddot{x}_i$
$-\dot{x}_i$
x_i
$-\delta_1$
$-(\delta_2+\delta_1)$
f_1'
f_2'
$-(x_j-x_i)$
C_1
x_j-x_i
C_2
BC_1
BC_2
$\frac{k_0}{m_i}$
$\frac{k_1}{m_i}$
$\frac{k_2}{m_i}$
$\frac{k_0}{m_j}$
$\frac{k_1}{m_j}$
$\frac{k_2}{m_j}$
0
f_1''
f_2''
$-\delta_1$
$-(\delta_2+\delta_1)$
$\ddot{x}_j$
$-\dot{x}_j$
x_j

3.14

nirilor se pot liniariza conducînd la semicuple percutante, aşa cum s-a arătat mai sus. In cazul unei caracteristici vîsco-elastică neliniară, aceasta se poate liniariza pe porţiuni, în general pe subdomenii ale deformaţiei elastice, ceea ce conduce la modele mecanice cu semicuple percutante constituite din limitatori cu caracteristici vîsco-elastice liniare, dar la care se determină mai greu momentele şi poziţiile contactelor iniţiale şi desprinderilor de legăturile unilaterale corespunzătoare semicuplelor percutante. Ca urmare, în schemele de modelare pe calculatoarele analogice a jocurilor, a cuplelor percutante, a semicuplelor percutante şi a caracteristicilor neliniare, componentele elastice ale forţelor se modelează cu ajutorul comparatoarelor, aşa cum s-a arătat mai sus, în timp ce pentru modelarea caracteristicilor de amortizare uscată sau vîscoasă şi a componentelor plastice ale forţelor se apelează la generatoarele de funcţii neliniare.

3.2.2. Modelarea cantitativă pe calculatoare analogice

Pentru modelarea cantitativă pe calculatoarele analogice a sistemelor vibropercutante trebuie să se ţină seama de limitele impuse de funcţionarea elementelor de calcul analogic şi a dispozitivelor auxiliare. Aşa cum s-a arătat şi în paragraful 3.1, elementele de calcul analogic asigură o precizie ridicată şi stabilitatea buclelor de calcul analogic, dacă tot timpul calculului analogic toate variabilele de maşină au valori cuprinse între -1 şi 1, iar frecvenţele maxime ale acestor tensiuni variabile nu depăşesc anumite limite, ce depind de calculator. Unele dispozitive auxiliare, cum sînt înregistratoarele în coordonate, folosite frecvent pentru extragerea datelor din calculatoarele analogice, limitează şi mai mult frecvenţele maxime ale variabilelor de maşină, datorită benzilor lor de frecvenţă de funcţionare foarte înguste şi de frecvenţă mică.

Pentru modelarea cantitativă pe calculatoarele analogice a sistemelor dinamice, este necesar să se aleagă factorii de scară, astfel încît să fie respectate aceste limite. In primul rînd, trebuie să se aleagă factorul de scară pentru variabilele independente, care sînt timpul real (t) pentru modelul mecanic şi timpul de maşină (t_m), din condiţia de a nu se depăşi frecvenţa maximă admisibilă ν_a la calculatorul analogic. Dacă se cunoaşte frecvenţa maximă ν_{max} pentru variabilele modelului mecanic, factorul de scară corespunzător (S_o) rezultă din egalarea argumentelor funcţiilor armonice ale variabilelor reale şi de maşină:

$$t = S_o t_m ; \quad 2\pi\nu_{max} t = 2\pi\nu_a t_m ; \quad S_o = \frac{\nu_a}{\nu_{max}} . \qquad (3.21)$$

In cazul sistemelor vibropercutante, pentru stabilirea acestui factor de scară se poate considera ca frecvenţă maximă frecvenţa cunoscută a forţelor perturbatoare. In orice caz, pentru S_o se alege o valoare de $2\div5$ ori mai mică decît cea care rezultă pe baza relaţiilor (3.21).

In al doilea rînd, este necesar să se stabilească factorii de scară pentru variabilele dependente, din condiţia ca toate variabilele de maşină să aibă valori cuprinse între -1 şi 1 tot timpul calculului analogic. Dacă pentru variabila reală x_i, la care îi corespunde în modelul electric pe calculatorul analogic variabila de maşină X_i, se cunoaşte valoarea maximă $|x_i|_{max}$, factorul de scară corespunzător (S_i) se poate exprima sub forma:

$$x_i = S_i X_i ; \quad |x_i|_{max} = S_i \cdot 1 ; \quad S_i = \frac{1}{|x_i|_{max}} . \qquad (3.22)$$

Relaţiile de forma (3.22) trebuie să fie verificate pentru toate variabilel dependente, dar, pe lîngă S_o, numai doi factori de scară (de exemplu S_1 şi S_2) mai pot fi aleşi, toţi ceilalţi putîndu-se exprima în funcţie de S_o, S_1 şi S_2 pe baza analizei dimensionale. Ca urmare, după alegerea acestor trei factori de scară independenţi, se determină, pe baza analizei dimensionale, ceilalţi factori de scară pentru toate celelalte variabile, iar pentru variabilele reale la care se cunosc valorile maxime se determină valorile maxime ale variabilelor de maşină corespunzătoare din prima relaţie (3.22). Dacă pentru unele dintre aceste variabile de maşină rezultă valori maxime mai mari decît 1, factorii de scară aleşi trebuie micşoraţi şi procesul de stabilire a factorilor de scară se repetă, pînă cînd se verifică pentru toate variabilele de maşină condiţia de a avea valoarea maximă mai mică decît 1.

Deoarece stabilirea factorilor de scară dependenţi se realizează pe baza analizei dimensionale, rezultă că toate variabilele reale şi parametrii sistemului dinamic, care au aceeaşi unitate de măsură, vor avea aceeaşi factori de scară în modelul pe calculatoarele analogice. Ca urmare, pentru alegerea factorilor de scară independenţi, cunoscîndu-se condiţiile iniţiale, valorile maxime ale forţelor perturbatoare şi pulsaţiile acestora, se pot stabili, cu oarecare aproximaţie, valorile maxime pentru frecvenţe, pentru deplasările şi pentru forţele din sistem, cu care se începe acest proces. Practic, stabilirea tuturor factorilor de scară se definitivează prin încercări pe calculatorul analogic, începînd cu valori ale condiţiilor iniţiale şi ale variabilelor de maşină corespunzătoare forţelor perturbatoare mai mici decît valorile ce rezultă pe baza modelării cantitative preliminare.

Modelarea cantitativă a sistemelor dinamice se poate realiza mai uşor, dacă ecuaţiile diferenţiale ale mişcării se exprimă sub formă adimensională, ceea ce se poate face întotdeauna prin transformări de variabile. Dacă, prin aceste transformări de variabile, toate variabilele adimensionale rezultă ca raportul dintre variabila reală corespunzătoare şi o mărime fizică constantă cu aceeaşi unitate de măsură şi avînd valoarea mai mare sau egală cu valoarea maximă a variabilei reale corespunzătoare, ecuaţiile diferenţiale

ale mişcării se pot transpune direct pe calculator, nefiind nevoie de modelare cantitativă.

Pentru exemplificare, se consideră sistemul vibropercutant din fig.2.6, avînd ciocniri instantanee şi ecuaţia diferenţială a mişcării între două ciocniri consecutive (2.278), scrisă sub formă adimensională. Modelarea calitativă pe calculatoarele analogice, în acest caz, se realizează uşor, prin particularizarea schemei de modelare analogică din fig.3.11 la un sistem cu un singur grad de libertate. Modelarea carcateristicii elastice neliniare se poate realiza cu ajutorul comparatoarelor, prin particularizarea schemei de modelare analogică din fig.3.14, sau cu ajutorul unui generator de funcţii neliniare. In fig.2.7 este reprezentată şi o liniarizare a acestei caracteristici neliniare, folosită pentru modelarea sa pe calculatoarele analogice.

Pentru modelarea cantitativă a ecuaţiei diferenţiale adimensionale (2.278), este suficient să se considere un factor de scară S_0 pentru variabila independentă τ şi un factor de scară S_1 pentru variabila z. Factorul de scară S_0 poate fi luat egal cu unitatea, deoarece, chiar dacă apar componente armonice cu pulsaţii mai mari decît pulsaţia forţei perturbatoare, aşa cum rezultă din studiul teoretic efectuat cu metoda parametrului mic, frecvenţele corespunzătoare din modelul electric pentru calculatoarele analogice nu depăşesc frecvenţa admisibilă a calculatorului, frecvenţei forţei perturbatoare corespunzîndu-i valoarea $\frac{1}{2\pi}$ = 0,16 Hz. Ca urmare, făcînd în (2.278) transformările de variabile:

$$\tau = t_m \ , \qquad z = S_1 Z \tag{3.23}$$

rezultă ecuaţia diferenţială a modelului electric de forma:

$$Z'' + a_1 Z' + a_2 Z + a_3 Z^3 = a_5 \sin t_m \ , \tag{3.24}$$

unde s-a notat:

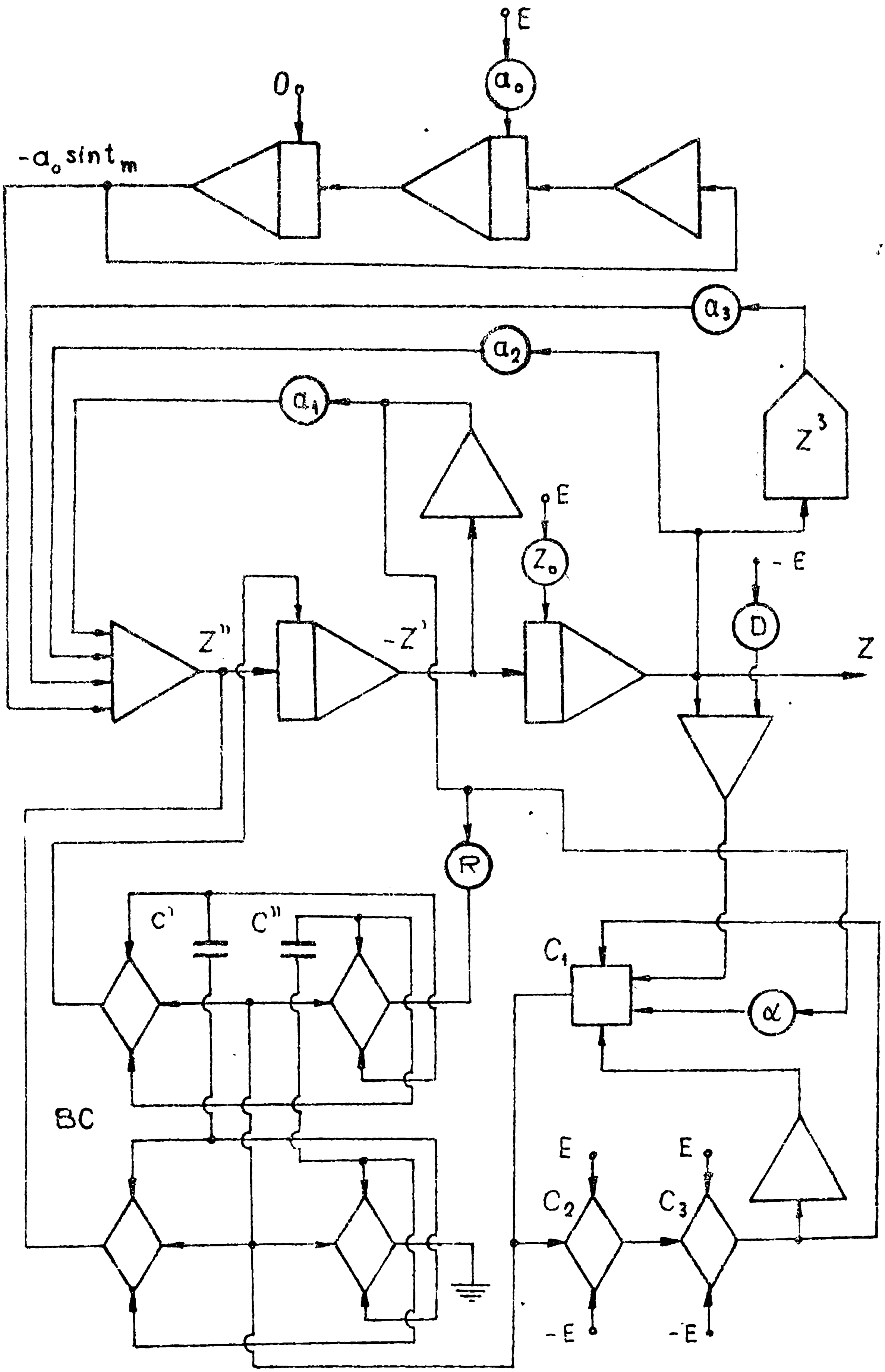


Fig 3.15

$$a_0 = \frac{1}{\eta^2 S_1} \; ; \; a_1 = \frac{2\varepsilon}{\eta} \; ; \; a_2 = \frac{1}{\eta^2} \; ; \; a_3 = \frac{\mu S_1^2}{\eta^2} \; ; \; D = \frac{d}{S_1} \; . \quad (3.25)$$

Luînd pentru S_1 o valoare supraunitară convenabilă, care se definitivează experimental, prin încercări pe calculatorul analogic, pentru a_0' şi pentru condiţiile iniţiale ale modelului electric:

$$t_m = 0 \; , \; Z = Z_0 = \frac{z_0}{S_1} \; , \; Z' = Z_0' = \frac{z_0'}{S_1} \quad (3.26)$$

se obţin valori mici, astfel încît se asigură îndeplinirea condiţiei ca tot timpul calculului analogic toate variabilele de maşină să aibă valori în modul subunitare (desigur, numai dacă mişcarea corespunzătoare a sistemului este stabilă). Valorile momentane ale variabilelor şi parametrilor sistemului vibropercutant real rezultă pe baza transformărilor de variabile şi a notaţiilor efectuate, exprimate prin relaţiile (3.25), (3.23) şi (2.277).

In fig.3.15 este prezentată schema de modelare cantitativă pentru sistemul vibropercutant considerat. Aici modelarea funcţiei neliniare Z^3 s-a făcut cu ajutorul unui generator de funcţii neliniare, pe baza liniarizării sale printr-o linie poligonală cu multe laturi (11 pentru o polaritate), astfel încît, printr-o aproximare analitică mai bună a acestei funcţii neliniare, se compensează erorile de calcul ale generatorului de funcţii neliniare.

In fig.3.16 sînt reprezentate cîteva diagrame în planul fazelor pentru sistemul vibropercutant considerat, fără amortizare vîscoasă ($\varepsilon = 0$), pentru $\mu = 0{,}01$, obţinute în urma studiilor experimentale efectuate pe modelul electric pentru calculatoarele analogice din fig.3.15.

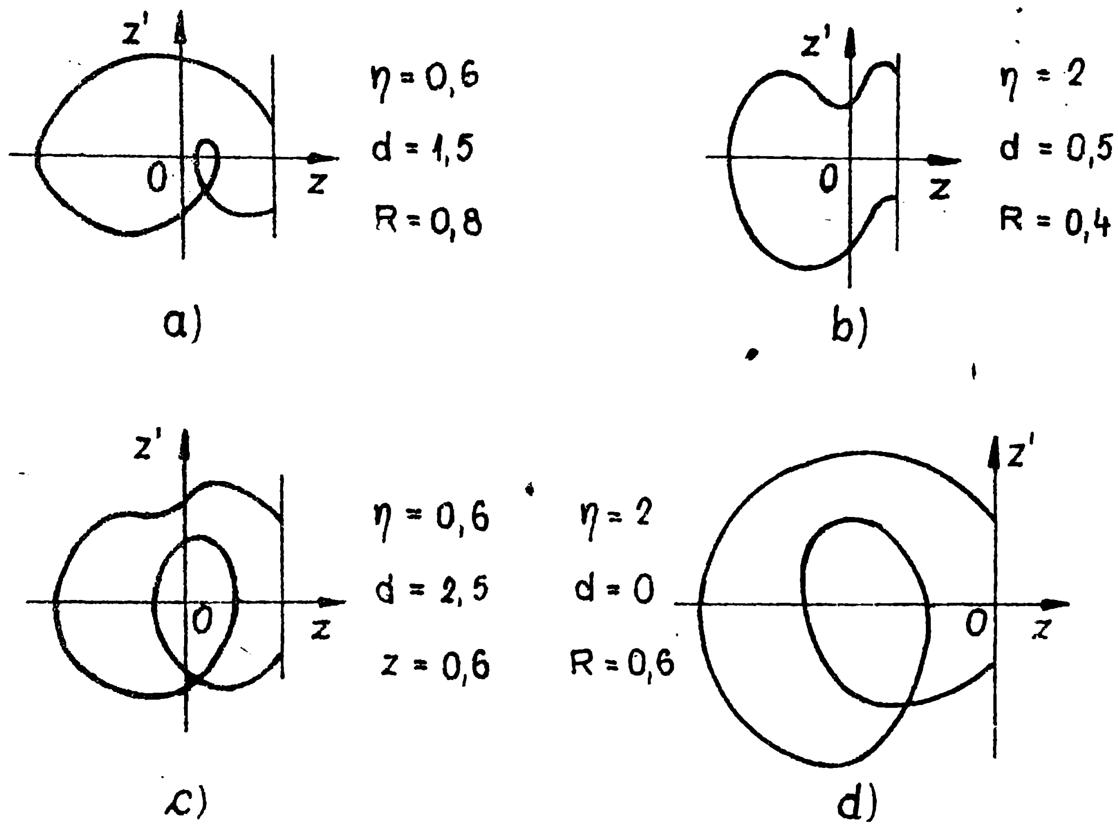


Fig. 3.16

3.3. Modelarea electrică a sistemelor vibropercutante pe calculatoare numerice

Rezultatele studiului teoretic al sistemelor vibropercutante cu mai multe grade de libertate, liniare între ciocniri şi cu ciocniri instantanee, efectuat sub formă matricială în capitolul precedent, se pot transpune foarte uşor pe calculatoarele numerice. Cu ajutorul calculatoarelor electronice numerice se asigură, prin programe şi subprograme adecvate, o prelucrare rapidă a acestor rezultate. Astfel, pentru toate cazurile studiate teoretic în care apar mişcări vibropercutante periodice cu o ciocnire într-o perioadă a mişcării, dînd valori numerice momentului t_K într-o perioadă a mişcării cu un pas ales adecvat, se pot determina uşor parametrii corespunzători ai ciocnirilor pentru mişcarea vibropercutantă periodică de tipul considerat (ecuaţiile fiind liniare în elementele matricilor $\overline{x}_c$ şi $\dot{\overline{x}}_c$) şi, cu aceştia, se pot verifica condiţiile de existenţă şi de stabilitate ale mişcărilor vibropercutante periodice, între aceste condiţii fiind necesar să se includă şi verificarea egalităţii în relaţia corespunzătoare funcţiei legăturii unilaterale în momentele ciocnirilor. Ca urmare, calculatoarele numerice pot să furnizeze, sub formă de tabele sau grafice, domeniile în care sînt îndeplinite condiţiile de existenţă şi de stabilitate ale mişcărilor vibropercutante periodice de tipul considerat pentru toate valorile parametrilor dinamici reglabili ai sistemului vibropercutant. De asemenea, se pot selecta valorile acestor parametrii dinamici reglabili pentru care mişcările vibropercutante periodice corespunzătoare sînt optime, considerînd criteriul de optimizare din paragraful 2.6 sau alte criterii. Dar, pentru a efectua toate aceste operaţii, în primul rînd calculatoarele numerice trebuie să determine valorile proprii şi vectorii proprii normaţi, pentru a construi matricea modală normată, ceea ce în cazul unui sistem cu mai multe grade de libertate nu este prea simplu. Pentru aceasta, s-a realizat un subprogram pentru determinarea acestor elemente, bazat pe metoda iteraţiei matriciale. Conform acestei metode, pentru pulsaţia proprie p_s a sistemului vibropercutant se consideră o matrice pătrată de iteraţie $\underline{L}_s$, pentru care trebuie să fie verificată relaţia matricială:

$$\underline{L}_s \overline{\mu}_s = \lambda_s \overline{\mu}_s \quad , \tag{3.27}$$

care rezultă din (2.95) prin înmulţire la stînga cu $\underline{m}^{-1}$ sau cu $\underline{k}^{-1}$. Se începe iteraţia cu un vector normat $\overline{\mu}_s^{(o)}$ ales convenabil, de obicei elementele sale avînd valorile +1 şi -1 cu alternanţa semnelor corespunzătoare modului natural de vibraţie, se calculează valorile $\lambda_s^{(j)}$ din relaţia:

$$\lambda_s^{(j)} \overline{\mu}_s^{(j)} = \underline{L}_s \overline{\mu}_s^{(j-1)} \quad , \tag{3.28}$$

astfel încît vectorul $\overline{\mu}_s^{(j)}$ să fie normat şi se verifică:

$$\overline{\mu}_s^{(j)} = \overline{\mu}_s^{(j-1)} \tag{3.29}$$

Se demonstrează că, pentru o matrice de iteraţie $\underline{L}_s$ construită adecvat, prin acest proces de iteraţie vectorii $\overline{\mu}_s^{(j)}$ converg spre $\overline{\mu}_s$ şi produsele valorilor $\lambda_s^{(j)}$ converg spre valoarea proprie λ_s, din care se determină pulsaţia proprie corespunzătoare. Pentru pulsaţia proprie maximă p_n şi pentru cea minimă p_1 matricile de iteraţie sînt matricea dinamică $\underline{L}_n = \underline{m}^{-1}\underline{k}$, respectiv inversa sa $\underline{L}_1 = \underline{k}^{-1}\underline{m}$, cu ajutorul cărora, prin iteraţie matricială, se obţin şirurile $\overline{\mu}_n^{(j)}$, $\overline{\mu}_1^{(j)}$, $\lambda_n^{(1)} \cdot \lambda_n^{(2)} \ldots \lambda_n^{(j)}$ şi $\lambda_1^{(1)} \cdot \lambda_1^{(2)} \ldots \lambda_1^{(j)}$ rapid convergente. Pulsaţiile proprii corespunzătoare, ţinînd seama de (2.95), rezultă:

$$p_n = \sqrt{\lambda_n} \quad , \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \; . \tag{3.30}$$

Pentru celelalte pulsaţii proprii se construiesc matrici de iteraţie pe baza relaţiilor de ortogonalitate (2.96) a vectorilor proprii normaţi, astfel încît procesul de iteraţie să fie rapid convergent. De exemplu, pentru pulsaţiile proprii p_{n-1} şi p_2, după determinarea vectorilor proprii $\overline{\mu}_n$ şi $\overline{\mu}_1$, se pot scrie relaţiile de ortogonalitate:

$$\overline{\mu}_{n-1}^T \underline{m}\, \overline{\mu}_n = 0 \quad , \qquad \overline{\mu}_1^T \underline{k}\, \overline{\mu}_2 = 0 \tag{3.31}$$

care sînt de forma:

$$\begin{aligned} &\left\| 1\; \mu_{n-1}^{(2)}\; \mu_{n-1}^{(3)} \ldots \mu_{n-1}^{(n)} \right\| \cdot \left\| m_1^{(n)} m_2^{(n)} \ldots m_n^{(n)} \right\|^T = 0 \\ &\left\| k_1^{(1)} k_2^{(1)} \ldots k_n^{(1)} \right\| \cdot \left\| 1\; \mu_2^{(2)}\; \mu_2^{(3)} \ldots \mu_2^{(n)} \right\|^T = 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

şi se pot exprima sub forma:

$$\begin{aligned} &1 = 0 \cdot \mu_{n-1}^{(1)} - A_2^{(n)}\mu_{n-1}^{(2)} - \ldots - A_n^{(n)}\mu_{n-1}^{(n)}, \quad A_i^{(n)} = \frac{m_i^{(n)}}{m_1^{(n)}}, \; i=2,\ldots,n \\ &1 = 0 \cdot \mu_2^{(1)} - A_2^{(1)}\mu_2^{(2)} - \ldots - A_n^{(1)}\mu_2^{(n)}, \quad A_i^{(1)} = \frac{k_i^{(1)}}{k_1^{(1)}}, \; i=2,\ldots,n \; . \end{aligned} \tag{3.33}$$

Se demonstrează că, făcînd iteraţiile cu matricile:

$$\underline{L}_{n-1} = \underline{S}_n \underline{L}_n \quad , \quad \underline{L}_2 = \underline{S}_1 \underline{L}_1 \; , \tag{3.34}$$

unde:

$$\underline{S}_i = \begin{Vmatrix} 0 & -A_2^{(i)} & -A_3^{(i)} & \dots & -A_n^{(i)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \quad , \ i=1,n \ , \quad (3.35)$$

procesul iterativ este convergent spre valorile proprii şi vectorii proprii normaţi ce corespund pulsaţiilor proprii p_{n-1} şi p_2. Procesul iterativ este cu atît mai rapid convergent, cu cît matricile de iteraţie $\underline{L}_s$ se construiesc pe baza mai multor relaţii de ortogonalitate, în funcţie de vectorii proprii determinaţi anterior.

In fig.3.17 este dată organigrama unui program pentru calculatoarele electronice numerice, realizată pe baza succesiunii de operaţii prezentată mai sus. Programul realizat permite şi studiul sistemelor vibropercutante cu amortizare vîscoasă uniformă, avînd o cuplă percutantă şi o ciocnire într-o perioadă a mişcării, aceasta fiind egală cu perioada forţelor perturbatoare (r=1). La începutul programului se determină pulsaţiile proprii şi vectorii proprii normaţi cu ajutorul unui subprogram realizat în conformitate cu metoda iteraţiei matriciale prezentată anterior, pornind de la valoarea proprie şi vectorul propriu ce corespund pulsaţiei proprii fundamentale p_1. In continuare se iniţializează ciclurile pentru parametrii dinamici reglabili, aici consideraţi coeficientul de restituire R şi jocul δ corespunzător cuplei percutante. Determinarea parametrilor ciocnirilor pentru mişcările vibropercutante periodice de tipul considerat, verificarea condiţiilor de existenţă şi de stabilitate ale acestora, precum şi optimizarea sistemului vibropercutant se realizează în cadrul programului pe baza relaţiilor matriciale stabilite în capitolul 2.

Pentru sistemele vibropercutante neliniare între ciocniri sau cu ciocniri neinstantanee, problema modelării pe calculatoarele numerice este mult mai dificilă, datorită necesităţii de a integra

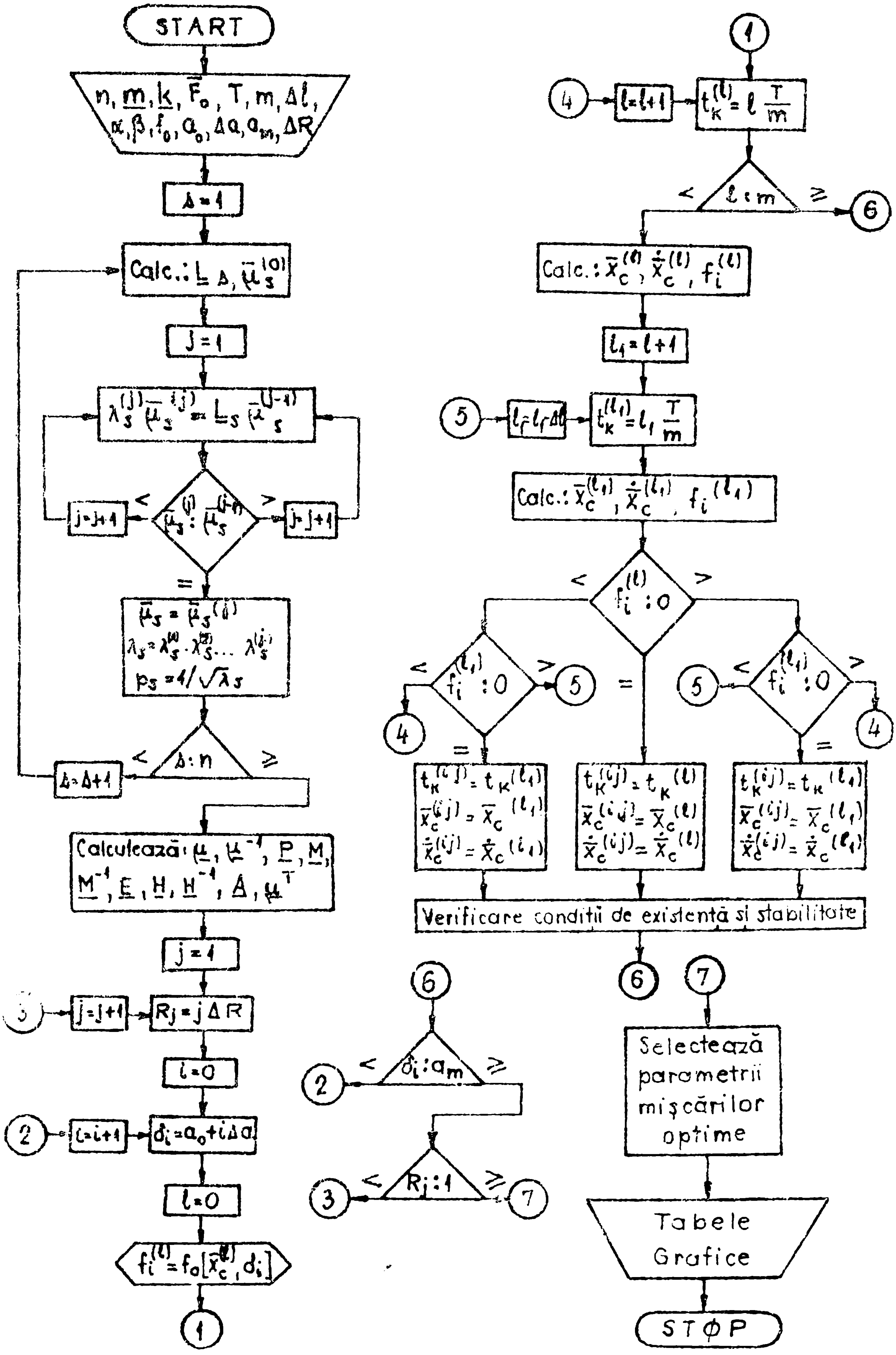

START
Calc.:
Calculează:
Verificare condiţii de existenţă şi stabilitate
Selectează parametrii mişcărilor optime
Tabele
Grafice
STOP

Fig. 3.47

ecuaţii diferenţiale neliniare. Programele pentru calculatoarele numerice, în aceste cazuri, trebuie să se bazeze pe metode de integrare numerică, care să fie rapid convergente, depinzînd de tipul neliniarităţilor din ecuaţiile diferenţiale. O problemă dificilă o constituie şi alegerea pasului de integrare. Ca urmare, pentru tipuri diferite de ecuaţii diferenţiale neliniare, sînt mai convenabile, din punct de vedere al programării pe calculatoarele numerice, metode diferite de integrare numerică, iar metoda cea mai convenabilă pentru un anumit tip se poate determina numai experimental, prin calcul numeric efectiv, dacă nu există experienţe anterioare în acest caz. Chiar şi convergenţa spre zero a erorilor metodelor de integrare numerică, care se integrează în timp, depinde de tipul ecuaţiilor diferenţiale şi foarte mult de pasul de integrare, astfel încît metodele de corecţie a erorilor (metode predictor-corector) nu au întotdeauna eficienţă.

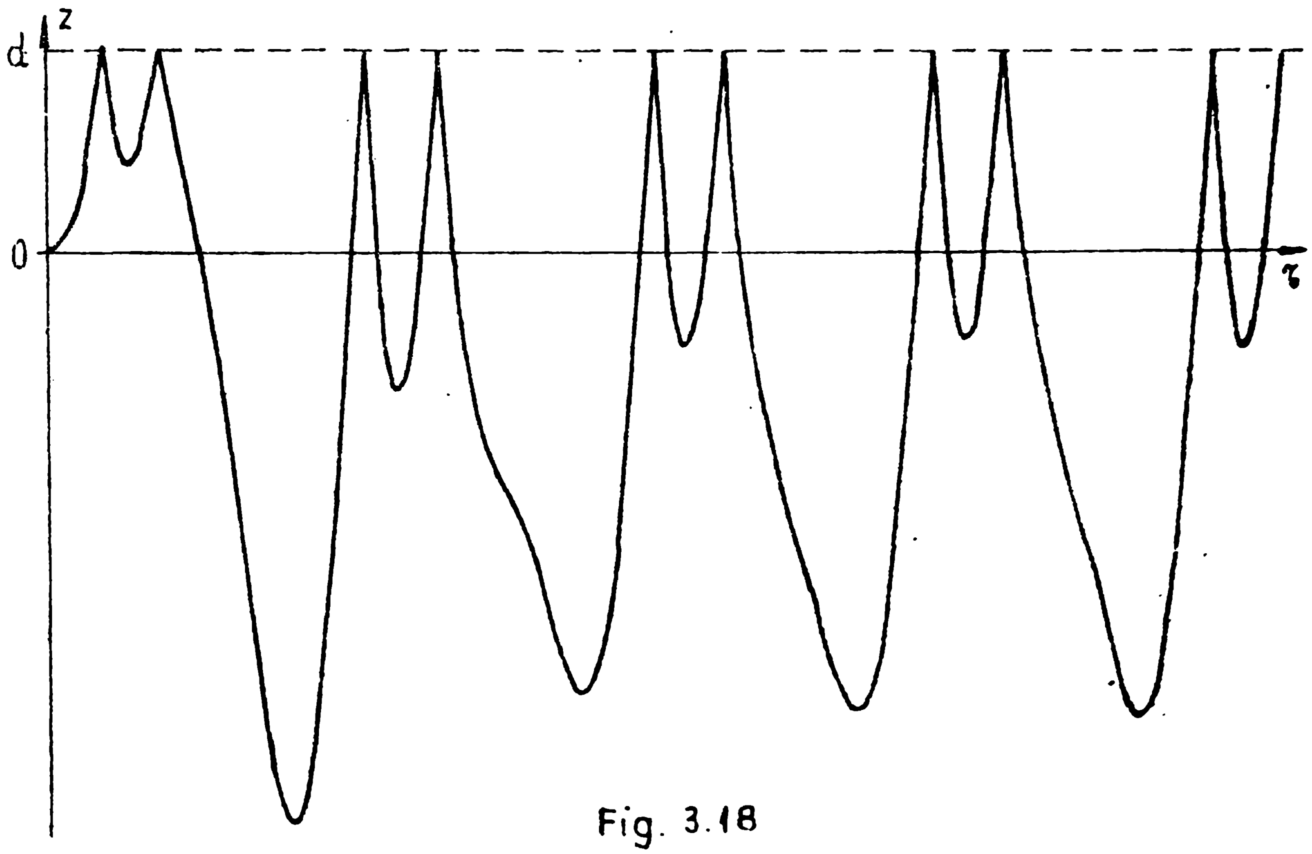


Fig. 3.18

Pentru sistemul vibropercutant din fig.2.6, avînd ecuaţia diferenţială a mişcării între două ciocniri consecutive (2.278), cu ciocniri instantanee, s-a realizat un program pentru calculatoarele numerice bazat pe metoda diferenţelor finite cu interpolare, în vederea verificării rezultatelor studiului teoretic din paragraful 2.7, precum şi a rezultatelor modelării electrice pe calculatoarele analogice din paragraful 3.1.2. Fără a intra în detalii asupra realizării programului, în fig.3.18 se dă diagrama mişcării sistemului vibropercutant considerat, obţinută prin acest program, pentru $\eta = 0{,}66$, $\varepsilon = 0{,}1$, $\mu = 0{,}025$, $d = 0{,}5$, $R = 0{,}6$, din care rezultă că pentru sistemele vibropercutante neliniare între ciocniri, cu caracteristică elastică neliniară tare, apar frecvent mişcări vibropercutante periodice stabile cu ciocniri multiple într-o perioadă a mişcării.

3.4. Modelarea electrică a sistemelor vibropercutante pe baza analogiilor dinamice

Modelarea electrică pe baza analogiilor dinamice a sistemelor vibropercutante liniare între ciocniri se face în conformitate cu principiile prezentate în paragraful 3.1. Pentru verificarea rezultatelor obţinute prin modelare pe calculatoarele analogice a sistemului vibropercutant cu două grade de libertate din fig.3.10, precum şi a studiului teoretic efectuat pentru sistemul din fig.2.12, s-a proiectat şi realizat un model electric bazat pe analogia forţă-tensiune, a cărui schemă electrică este dată în fig.3.19. Inductanţele L_1 şi L_2, corespunzătoare maselor m_1 şi m_2 din modelul mecanic, s-au realizat cu ajutorul unor bobine, fără miez de fier, pentru a nu introduce neliniarităţi în modelul electric, cu secţiunea mare a conductorului electric, pentru a avea rezistenţele electrice neglijabile. La modelul electric realizat, inductanţele L_1 şi L_2 nu sînt reglabile, avînd ambele valoarea L_1 =

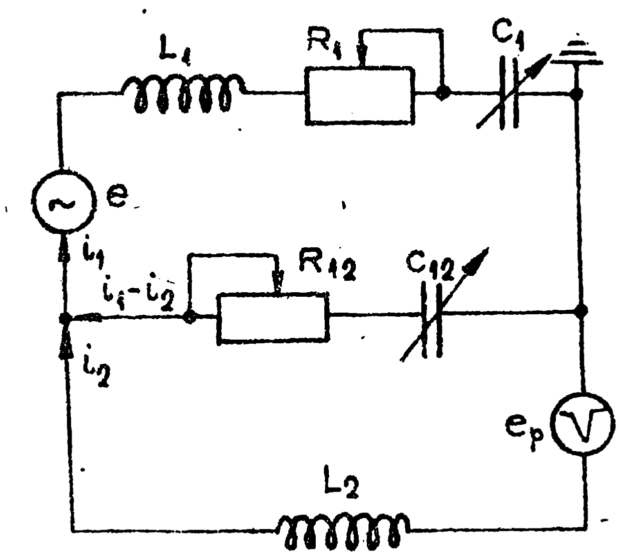


Fig. 3.19

$= L_2 = 2,1.10^{-3}H$, astfel încît pentru modelarea cantitativă şi stabilirea factorilor de scară se reglează valorile rezistenţelor R_1 şi R_{12} cu ajutorul unor potenţiometrii elicoidali de precizie, valorile capacităţilor C_1 şi C_{12} cu ajutorul unor baterii de condensatoare variabile, precum şi amplitudinea şi frecvenţa tensiunii electrice e, corespunzătoare forţei perturbatoare în modelul mecanic. Ca generator de tensiune alternativă s-a folosit unul din generatoarele electronice produse de Intreprinderea "Electronica" Bucureşti, care permite reglarea amplitudinii şi frecvenţei între limite largi. Deoarece aceste genratoare oferă şi posibilitatea furnizării unei tensiuni cu variaţie dreptunghiulară în timp, cu ajutorul modelului electric realizat se pot studia şi mişcările vibropercutante care rezultă sub acţiunea forţei perturbatoare optime.

Pentru modelarea ciocnirilor, s-au proiectat şi realizat generatoare electronice de impulsuri, avînd forma de variaţie în timp a impulsurilor, durata lor şi perioada lor de repetiţie reglabile. Forma de variaţie în timp a acestor impulsuri este constituită dintr-un front crescător liniar în timp, urmat de un front descrescător exponenţial, aşa cum este reprezentat un astfel de impuls în fig.3.19 (aici fiind necesar să fie aplicat cu polaritate negativă), la simbolizarea generatorului de impulsuri ce furnizează tensiunea e_p, corespunzătoare forţei percutante. Un astfel de impuls se realizează într-un circuit electronic în care, după apariţia unui impuls de sincronizare, se încarcă liniar în timp un condensator cu capacitatea C reglabilă şi, după un interval de timp Δt_1 reglabil, condensatorul se descarcă peste un rezistor cu rezistenţa fixă. In acest mod, prin reglarea intervalelor de timp de încărcare Δt_1 şi de descărcare Δt_2 (ultimul fiind reglat prin modificarea capacităţii C a condensatorului, care modifică constanta de timp a circuitului de descărcare), se asigură modelarea duratei ciocnirilor şi a coeficientului de restituire pentru cupla percutantă din modelul mecanic. Perioada de repetiţie a impulsurilor se reglează prin sincronizarea acestor generatoare de impulsuri de la generatorul care modelează forţa perturbatoare, eventual prin divizoare de frecvenţă, dacă se studiază mişcările vibropercutante periodice cu perioada egală cu un multiplu întreg al perioadei forţei perturbatoare. Valoarea maximă a impulsurilor se asigură prin amplificarea semnalului de la ieşirea generatorului de impulsuri printr-un amplificator de tensiune cu factor de amplificare reglabil şi cu bandă de frecvenţă de trecere largă. Pentru reglarea momentului t_{k_0}, corespunzător începutului ciocnirilor, semnalul de la ieşirea amplificatorului este trecut printr-un circuit de întîrziere, avînd timpul de întîrziere reglabil.

In fig.3.20 este reprezentată schema de principiu pentru un alt generator de impulsuri proiectat şi realizat, a cărui funcţionare se bazează pe efectul fotoelectric. Motorul electric de curent continuu 1, avînd turaţia reglabilă prin modificarea continuă a tensiunii de alimentare de la sursa 2, antrenează în mişcare de rotaţie uniformă discul 5, din care este decupată o porţiune de forma impulsului de realizat. La o distanţă corespunzătoare faţă de axul discului este plasat becul cu lupă 4, care proiectează pe suprafaţa discului un fascicol luminos cu intensitatea luminoasă constantă, asigurată prin alimentarea becului de la sursa stabilizată 3.

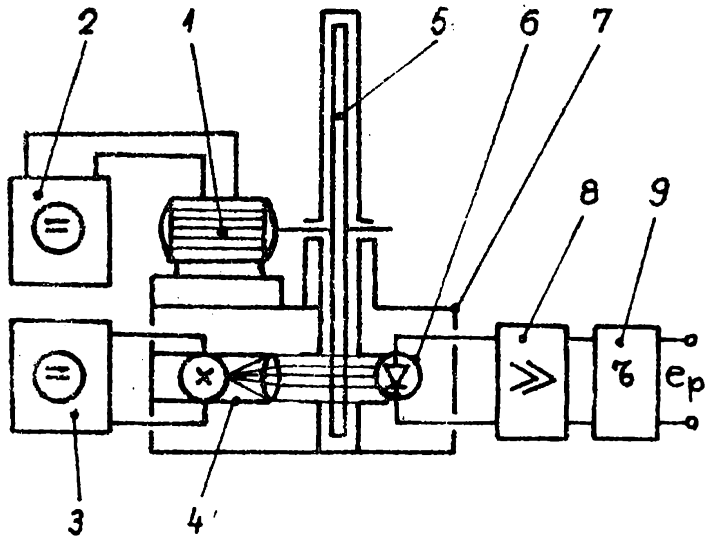


Fig.3.20

Fascicolul luminos are secţiunea dreptunghiulară cu baza foarte mică şi cu înălţimea egală cu înălţimea maximă, măsurată radial, a porţiunii decupate din disc. Forma şi dimensiunile secţiunii fascicolului luminos sînt asigurate prin practicarea corespunzătoare a unei fante în peretele corespunzător al cutiei 7, în care sînt închise elementele constructive care trebuie să fie protejate împotriva fluxului luminos exterior. De cealaltă parte a discului este plasată fotodioda 6, astfel încît, atunci cînd porţiunea decupată din disc ajunge în dreptul fantei, fotodioda să capteze fluxul luminos ce trece prin fantă şi prin porţiunea decupată. Ca urmare, în circuitul electric în care este legată fotodioda, situat la intrarea amplificatorului de tensiune 8, apare un curent electric de intensitate proporţională cu fluxul luminos captat, deci semnalul de la intrarea amplificatorului de tensiune va avea o variaţie în timp ce urmăreşte forma şi dimensiunile geometrice ale porţiunii decupate din disc. Sincronizarea funcţionării generatorului de impulsuri cu a generatorului care modelează forţa perturbatoare se realizează prin reglarea turaţiei motorului electric 1, comparînd semnalele de la ieşirile celor două generatoare pe ecranul unui osciloscop cu două spoturi, înainte de cuplarea simultană a lor la modelul electric. Reglarea momentului

t_k se realizează prin modificarea timpului de întîrziere τ al circuitului de întîrziere 9, pentru aceasta vizualizînd la fel pe ecranul osciloscopului semnalul de ieşire de la circuitul de întîrziere (e_p) comparativ cu semnalul generatorului care modelează forţa perturbatoare. La acest generator de impulsuri, modificarea unor parametrii caracteristici ai ciocnirilor în modelul mecanic implică modificarea formei şi dimensiunilor geometrice a porţiunii decupate din disc, astfel incît trebuie să se realizeze mai multe discuri interschimbabile. La realizarea lor este necesar să se ţină seama şi de turaţia motorului electric pentru reglarea duratei impulsurilor, dar întotdeauna, în cadrul modelării cantitative, se poate alege astfel factorul de scară pentru timp, încît să rezulte aceeaşi turaţie a motorului electric, oricare ar fi pulsaţia forţei perturbatoare.

Din numeroasele încercări experimentale pe acest model electric, a rezultat o concordanţă deplină cu rezultatele studiului teoretic şi cu cele obţinute prin modelare pe calculatoarele analogice.

Cap.4. INCERCARI EXPERIMENTALE PE MODELE MECANICE

4.1. Model mecanic distorsionat pentru studiul sistemelor vibropercutante cu unul sau două grade de libertate, cu una sau două cuple percutante.

Pentru verificarea rezultatelor studiului teoretic şi ale modelării electrice pentru sistemele mecanice vibropercutante cu unul sau două grade de libertate, avînd una sau două cuple percutante, s-a proiectat şi realizat un model mecanic experimental, prezentat împreună cu unele aparate de măsură în fig.4.1. Pe acest model mecanic distorsionat s-au efectuat încercări experimentale pentru sistemele vibropercutante din fig.2.12 şi fig.3.1o, pentru care s-au făcut studii teoretice şi pe modele electrice. De asemenea, pe acest model experimental se pot modela o gamă largă de sisteme vibropercutante reale, reductibile la modelele mecanice din fig.2.12, din fig.3.1o şi la alte modele mecanice, corespunzătoare unor sisteme vibropercutante liniare între ciocniri, cu unul sau două grade de libertate, avînd una sau două cuple percutante. Pentru ca modelul realizat să poată oferi aceste posibilităţi largi de modelare, s-a ţinut seama la proiectare de îndeplinirea a trei condiţii impuse:

a) Modificarea valorilor maselor modelului, prin ataşarea unor greutăţi suplimentare calibrate.

b) Modificarea constantelor elastice ale elementelor elastice

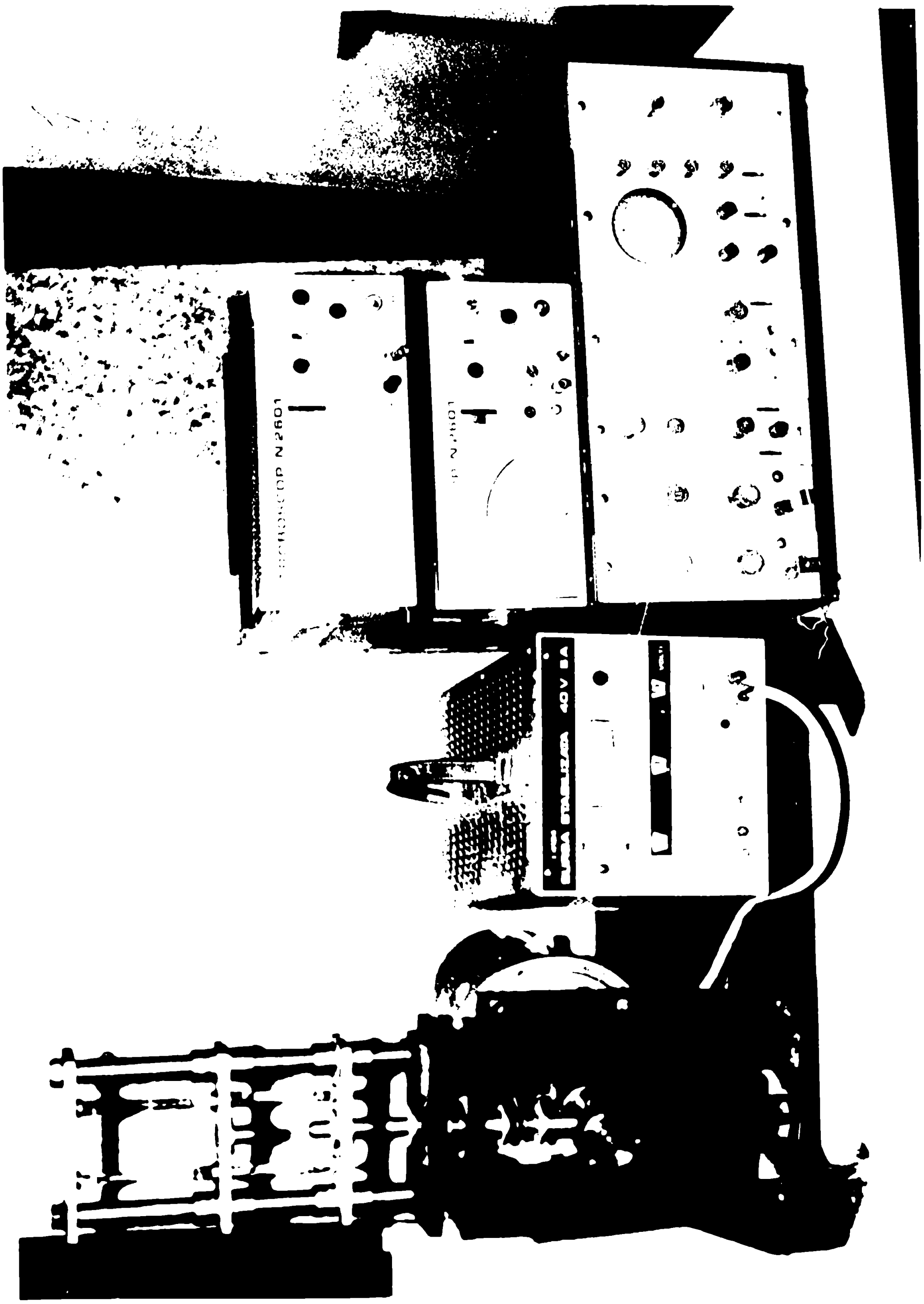


Fig. 4.1

şi a jocurilor δ_{12} şi δ_{20}, prin interschimbabilitatea arcurilor cu lungimi în stare nedeformată şi constante elastice diferite.

c) Modificarea amplitudinii şi pulsaţiei forţei perturbatoare armonice ce acţionează asupra masei m_1.

Pentru asigurarea îndeplinirii ultimei condiţii impuse, s-a ales ca sursă a forţei perturbatoare mişcarea vibratorie armonică de forma $f(t) = r \sin(\omega t+\varphi)$ a suportului de care este legată masa m_1 prin intermediul unor arcuri cu constanta elastică echivalentă k_1. In această soluţie constructivă, se poate studia atît mişcarea absolută a sistemului vibropercutant, în care forţa perturbatoare are valoarea momentană $F_a(t) = k_1 f(t)$, cît şi mişcarea sa relativă faţă de suport, în care forţa perturbatoare are valoarea momentană $F_r(t) = -m_1\ddot{f}(t)$. In acest mod se pot regla între limite largi atît amplitudinea forţei perturbatoare, prin modificarea amplitudinii r a vibraţiei suportului şi a constantei elastice echivalente k_1, respectiv a masei m_1, cît şi pulsaţia forţei perturbatoare, prin modificarea pulsaţiei vibraţiei suportului. In soluţia constructivă aleasă, suportul, sub formă de ramă dreptunghiulară, care serveşte şi de ghidaj pentru masele sistemului vibropercutant, este pus în mişcare vibratorie armonică pe verticală prin intermediul unei came, al cărei profil este astfel realizat, încît să asigure suportului o vibraţie armonică avînd o anumită amplitudine r, cama fiind antrenată în mişcare de rotaţie uniformă de un motor electric cu rotorul bobinat, produs într-o serie specială de Intreprinderea "Electromotor" Timişoara. Ca urmare, modificarea amplitudinii r a vibraţiei suportului se realizează în trepte, prin interschimbabilitatea camelor, proiectate şi realizate pentru diferite valori ale acestei amplitudini, iar modificarea pulsaţiei vibraţiei suportului se realizează continuu, prin modificarea turaţiei motorului electric, schimbînd tensiunea sa de alimentare de la o sursă stabilizată de tensiune electrică.

La modelul experimental proiectat şi realizat nu se pot modifica valorile coeficienţilor de amortizare vîscoasă, dar s-au luat măsuri ca aceste valori să fie neglijabile, prin diminuarea frecărilor în ghidaje şi a altor forţe rezistente. La modelarea unor sisteme vibropercutante concrete, s-au determinat experimental unele valori echivalente pentru aceşti coeficienţi de amortizare vîscoasă, de care s-a ţinut seama la stabilirea factorilor de scară în faza de modelare cantitativă.

Modelul mecanic a fost astfel proiectat şi realizat, încît să permită ataşarea unei perechi sau a două perechi de ciocane percutante, şi anume între cele două mase ale sistemului vibropercutant sau între una din acestea şi suportul mobil sau cadrul sudat fix al aparatului. De asemenea, prin înlocuirea arcurilor dintre masa m_1 şi suport sau a celor dintre cele două mase cu bare rigide, se poate realiza modelarea pe acelaşi model experimental a sistemelor vibropercutante cu un grad de libertate.

4.2. Stand pentru încercarea la şocuri repetate a aparatelor electrice şi electronice

In anumite condiţii de exploatare a aparatelor electrice şi electronice, în hale industriale, pe standuri de probă sau la transportul acestora, în timpul funcţionării aparatelor sau în starea lor de preambalare, pot să apară solicitări mecanice prin şocuri repetate, care au efecte negative mai pronunţate asupra acestor aparate decît solicitările prin vibraţii. Ca urmare, pe plan mondial există de mult timp preocupări pentru studiul experimental al efectelor solicitărilor prin şocuri repetate a aparatelor electrice şi electronice. In acest scop s-au construit diverse standuri de încercare, cu diferite grade de complexitate, care asigură efectuarea încercărilor experimentale în regimurile reglementate de normele ISO.

In ţara noastră preocupările în această direcţie sînt de dată relativ recentă. S-au proiectat și realizat diferite tipuri de instalații și standuri de încercare la șocuri repetate cu diverse destinații, dar care, în general, nu țin seama de particularitățile încercărilor la aceste solicitări ale aparatelor electrice și electronice. De asemenea, încă nu au fost standardizate toate regimurile de încercare la șocuri repetate a acestor aparate. Astfel, una din aceste instalații, denumită "scuturător" și folosită frecvent în turnătorii pentru dezbaterea formelor, produsă în serie de INCERC București, ar putea fi utilizată pentru încercări la șocuri repetate a aparatelor electrice și electronice, dar numai pentru un singur regim de încercare.

Avînd în vedere că majoritatea întreprinderilor din țară, producătoare de aparataj electric și electronic, sînt interesate în procurarea unor instalații specializate pentru încercarea produselor lor la șocuri repetate în diferite regimuri de încercare, în prezent dispunînd de astfel de instalații din import, s-a realizat un stand de încercare la șocuri repetate a acestor aparate, prevăzut a fi produs în serie mică la Sectorul de Prototipuri și Microproducție (S.P.M) din Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timișoara. In fig.4.2 este reprezentată o schemă bloc a standului, în care 1 reprezintă un motor electric asincron trifazat, seria AT 80-19B-4, produs la Intreprinderea "Electromotor" Timișoara, 2 este un cuplaj elastic, 3

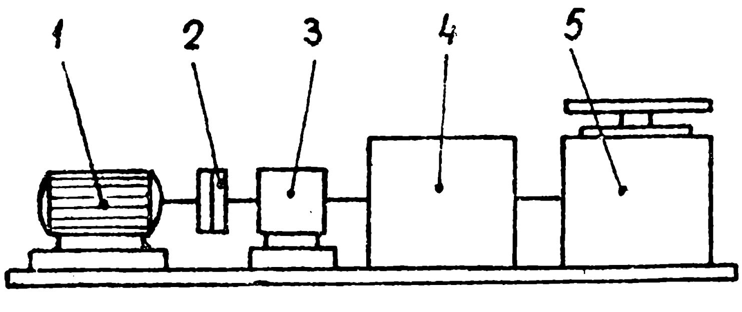


Fig. 4.2

reprezintă un reductor melcat cu raportul de transmisie 63, seria 1M1, produs la Intreprinderea "Neptun" Cîmpina, 4 reprezintă un variator cu roți conice și curea trapezoidală lată, produs în serie [illegible] 5 [illegible] masa de șoc. Intercalarea variatorului de turaţie în lanţul cinematic de transmitere a mişcării de la motorul electric la cama mesei de şoc permite reglarea între limite suficient de largi a perioadei de repetiţie a şocurilor de acceleraţie, transmise sub forma unor forţe percutante elementelor constructive ale aparatului supus încercărilor, prin intermediul elementelor elastice cu care sînt legate de carcasa aparatului.

Masa de şoc a fost astfel proiectată şi realizată, încît să permită reglarea între limite largi parametrilor acestor forţe percutante. In fig.4.3 este reprezentat un detaliu din masa de şoc, din care se poate vedea principiul de funcţionare al acesteia. Arborele principal 1, de la ieşirea variatorului de turaţie, antrenează în mişcare de rotaţie uniformă camă 2. Profilul camei este urmărit de rola 7, care transmite suportului mobil 6, pe care se fixează aparatul de încercat, o mişcare de translaţie după

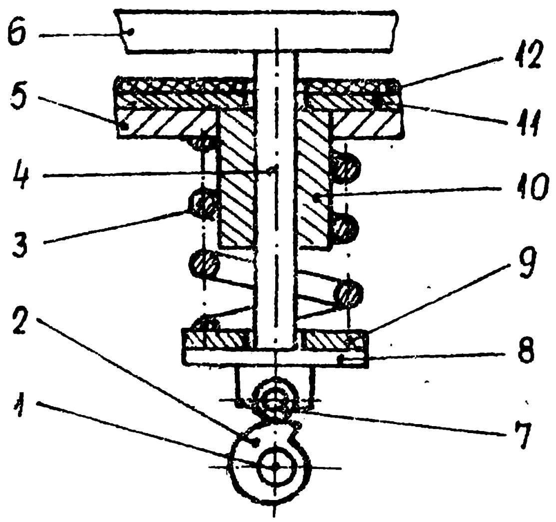


Fig. 4.3

direcţia verticală, prin intermediul unui portlagăr 8 şi a arborelui canelat 4, avînd mişcarea de rotaţie împiedicată de ghidajul 10. Datorită profilului camei din fig.4.3, suportul mobil este ridicat, după care urmează o cădere forţată de arcul pretensionat 3. Ciocnirea are loc între suportul mobil 6 şi placa 12, montată împreună cu placa distanţieră 11 pe placa superioară 5 a mesei de şoc, astfel încît rola 7 şi portlagărul 8 nu sînt solicitate în timpul ciocnirilor. Prin interschimbabilitatea plăcilor distanţiere 9 şi 11 se pot regla înălţimea de cădere a suportului mobil şi pretensionarea arcului, iar prin interschimbabilitatea plăcilor 12, confecţionate din materiale diferite, se poate modifica coeficientul de restituire la ciocnire şi caracterul ciocnirilor, rezultînd posibilităţi largi de reglare a parametrilor jocurilor de acceleraţie, şi, implicit, a parametrilor forţelor percutante transmise elementelor constructive ale aparatelor încercate.

Masa de şoc a fost proiectată şi realizată în construcţie sudată, avînd în vedere posibilităţile de asimilare în producţie de serie mică la S.F.M. Elementele sale constructive au fost dimensionate şi verificate la solicitări variabile în condiţii de durabilitate nelimitată, dar coeficienţii de siguranţă au fost adoptaţi cît mai mici, astfel încît să rezulte economie de material.

4.3. Aparate de măsură folosite la efectuarea încercărilor experimentale pe modele mecanice.

Atît pentru modelul mecanic distorsionat, prezentat în paragraful 4.1, cît şi pentru prototipul prezentat în paragraful 4.2, în cadrul încercărilor experimentale s-a urmărit măsurarea şi înregistrarea mişcărilor vibropercutante periodice, a vitezelor şi acceleraţiilor acestor mişcări, astfel încît să se poată determina parametrii caracteristici pentru aceste mişcări în funcţie de parametrii dinamici reglabili ai sistemului vibropercutant. În acest scop, aparatul de bază folosit este SDM 132, un aparat universal de măsurat vibraţii, cu două canale, utilizînd traductori piezoelectrici de acceleraţie, produs împreună cu traductorii de VEB Metra Radebeul, R.D.G. Aparatul oferă largi posibilităţi de măsurat vibraţii şi mişcări vibropercutante, avînd o bandă largă de frecvenţe de trecere începînd cu frecvenţe foarte joase, o gamă largă de domenii de măsură şi permiţînd măsurarea acceleraţiilor, a vitezelor sau deplasărilor, prin intercalarea în circuitul de măsură a unuia sau a două integratoare în timp. De asemenea, cu ajutorul acestui aparat se poate realiza într-o primă fază analiza spectrală a semnalului măsurat, prin trecerea lui printr-un bloc încorporat cu filtre de bandă de frecvenţă. Prin urmare, semnalul captat de traductor este adus prin cabluri ecranate la intrarea unuia din cele două canale, unde este amplificat și integrat în timp, după care este transmis direct sau prin blocul de filtrare la blocurile de măsură, care indică valorile extreme ale semnalului pe instrumentul de măsură și îl vizualizează pe ecranul osciloscopului încorporat. De la ieșirile pentru înregistrare ale aparatului, semnalul măsurat este aplicat unui înregistrator cu bază de timp, iar în cazul folosirii blocului de filtrare, pentru precizarea frecvenței în cadrul benzii de fr... ență de trecere a filtrului, acest semnal este aplicat și la bornele de sincronizare exterioară ale unui stroboscop, folosit aici ca frecvențmetru. Pentru a se asigura o precizie ridicată a determinărilor experimentale cantitative, întregul lanț de măsură și înregistrare a fost etalonat, pentru fiecare canal de măsură și pentru fiecare regim de funcționare a aparatului de măsură, cu ajutorul unei mese vibrante etalon. Avînd în vedere că la măsurarea mișcărilor vibropercutante apar șocuri de accelerație în timpul ciocnirilor, ca traductor s-a folosit de preferință tipul KD 34, capabil să capteze accelerații de valori mari.

Cu ajutorul acestor aparate de măsură și înregistrare s-au efectuat numeroase încercări experimentale pe ambele modele mecanice prezentate. Pentru modelul mecanic distorsionat, încercările experimentale au avut ca scop verificarea studiilor teoretice din capitolul 2, a rezultatelor modelării electrice din capitolul 3, precum și a unor rezultate obținute în urma studiilor teoretice și experimentale efectuate în cadrul unor contracte de cercetare științifică, rezultînd o bună concordanță între aceste rezultate. In cazul prototipului proiectat și realizat, corespunzător standului de încercare la șocuri repetate a aparatelor electrice și electronice, încercările experimentale au urmărit corelarea parametrilor șocurilor de accelerație reproduse pe stand cu valorile caracteristice ale elementelor constructive interschimbabile ale mesei de şoc, şi anume cu grosimile plăcilor distanţiere 9 şi 11, precum şi cu materialele din care au fost confecţionate plăcile 12.

Pentru exemplificare, în fig.4.4 sînt reprezentate diagrama vitezei şi diagrama mişcării masei m_2, înregistrate în urma încercărilor experimentale pe modelul mecanic distorsionat pentru sistemul vibropercutant din fig.2.1., corespunzătoare unei mişcări vibropercutante optime produsă de o forţă perturbatoare armonică.

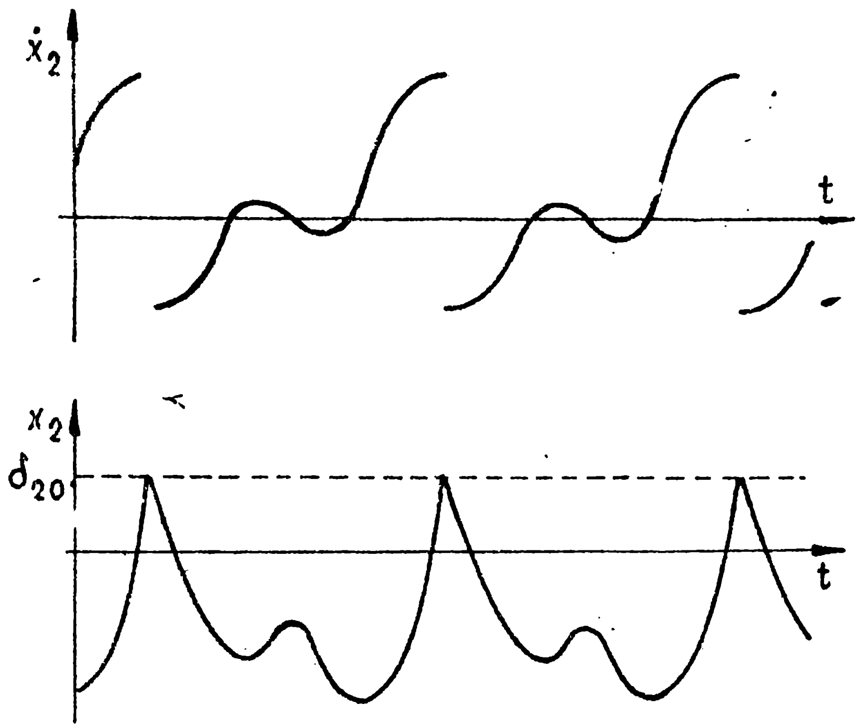


Fig. 4.4

Din diagramele din fig.4.4, în urma derminărilor cantitative pe baza factorilor de scară stabiliţi la modelare, pentru valorile parametrilor dinamici reglabili: $\eta = 0,9$, $R = 0,6$, $\frac{\delta_{20}}{x_{st}} = 3$, valoarea adimensională a vitezei de la începutul ciocnirilor a rezultat $\frac{\dot{x}_{2c}}{\omega_n x_{st}} = 4,275$, ceea ce atestă o bună concordanţă între rezultatele studiului teoretic din paragraful 2.8 şi rezultatele încercărilor experimentale. Totuşi, valoarea acestei viteze este mai mică decît valoare corespunzătoare din fig.2.13, datorită neglijării în cadrul studiului teoretic a forţelor de amortizare vîscoasă şi a altor forţe rezistente.

Cap.5. CONCLUZII

In capitolele 2, 3 şi 4 s-au prezentat metodele folosite şi rezultatele obţinute în studiul teoretic şi experimental, pe modele electrice şi mecanice, a sistemelor mecanice vibropercutante generale cu mai multe grade de libertate. Toate aceste metode de studiu sînt originale şi prezintă un grad ridicat de generalizare, multe din metodele de studiu cunoscute din literatura de specialitate obţinîndu-se prin particularizarea lor. De asemenea, pentru exemplificarea metodelor prezentate, s-au considerat probleme concrete, de un larg interes pentru aplicaţii, care nu au mai fost studiate.

Principalele rezultate obţinute în studiul teoretic şi experimental al sistemelor mecanice vibropercutante pot fi sintetizate în consideraţiile ce urmează.

1. S-a definit un operator matricial de derivare parţială, ale cărui proprietăţi au fost studiate, cu ajutorul căruia se stabilesc ecuaţiile diferenţiale ale mişcării între două ciocniri consecutive pentru orice sisteme vibropercutante cu mai multe grade de libertate, liniare sau neliniare între ciocniri, folosind ecuaţiile lui Lagrange cu multiplicatori, exprimate sub formă matricială.

2. Pentru modelarea matematică a ciocnirilor, s-a efectuat o analiză aprofundată a influenţei parametrilor dinamici corespunzători unei cuple percutante şi a proprietăţilor visco-elasto-plastice ale materialelor din zonele de contact asupra caracterului ciocnirilor.

3. In cazul ciocnirilor instantanee, s-au stabilit expresiile

matriciale ale vitezelor generalizate de la sfîrşitul ciocnirilor în funcţie de cele de la începutul ciocnirilor pentru o cuplă percutantă generală, avînd o formă generală a funcţiei legăturii unilaterale corespunzătoare.

4. Pentru studiul mişcării unui sistem vibropercutant liniar între ciocniri, între două ciocniri consecutive, s-au introdus operatori matriciali avînd ca elemente funcţii trigonometrice sau exponenţiale, cu ajutorul cărora se poate exprima compact legea mişcării sistemului, chiar şi în cazul unor forţe perturbatoare periodice oarecare, nearmonice. Forma matricială a legii de mişcare pentru sistemele vibropercutante cu mai multe grade de libertate a rezultat asemănătoare cu legea mişcării între două ciocniri consecutive a unor sisteme vibropercutante corespunzătoare cu un singur grad de libertate, ceea ce permite stabilirea unor analogii în studiul acestor sisteme.

5. In vederea stabilirii condiţiilor de existenţă a mişcărilor vibropercutante periodice de diferite tipuri, întîlnite frecvent în aplicaţii, impunînd condiţiile de periodicitate a mişcării sau anumite condiţii de periodicitate şi simetrie, s-au exprimat sub formă matricială relaţiile dintre parametrii ciocnirilor, din care rezultă valorile acestora în funcţie de parametrii dinamici ai sistemului vibropercutant. Relaţiile matriciale obţinute generalizează toate rezultatele cunoscute în literatura de specialitate, corespunzătoare studiului unor sisteme vibropercutante particulare, liniare între ciocniri, avînd unul sau mai multe grade de libertate, cu una sau două cuple percutante, neamortizate sau cu amortizare vîscoasă, sub acţiunea unor forţe perturbatoare armonice sau periodice oarecare.

6. Pentru studiul stabilităţii mişcărilor vibropercutante periodice determinate, s-a prezentat o metodă generală de liniari-

zare în raport cu perturbaţiile parametrilor ciocnirilor a relaţiilor dintre aceşti parametrii, corespunzătoare mişcării perturbate. Condiţiile de stabilitate rezultă aplicînd criteriul lui Schur coeficienţilor ecuaţiei caracteristice a sistemului de ecuaţii algebrice liniarizate în perturbaţii.

7. S-a acordat o atenţie deosebită problemelor de optimizare a sistemelor vibropercutante generale, cu mai multe grade de libertate. Mişcările vibropercutante periodice optime se determină din condiţiile de minim a unor expresii depinzînd de parametrii dinamici reglabili ai sistemului vibropercutant. În cazurile analizate au rezultat unele concluzii asemănătoare cu cele cunoscute din literatura de specialitate, privind optimizarea sistemelor vibropercutante cu un grad de libertate.

8. S-au prezentat unele consideraţii proprii privind studiul teoretic al sistemelor vibropercutante cu ciocniri neinstantanee şi al celor neliniare între ciocniri.

9. Pe baza metodelor general de studiu teoretic a sistemelor vibropercutante cu mai multe grade de libertate, s-au determinat complet mişcările vibropercutante periodice optime stabile pentru un model mecanic particular, la care se pot reduce o categorie largă de sisteme vibropercutante concrete.

10. S-a efectuat o analiză completă a posibilităţilor de modelare electrică a sistemelor mecanice vibrante şi vibropercutante, prezentîndu-se principiile generale de modelare electrică pe baza analogiilor dinamice şi pe calculatoarele electronice.

11. S-a pus accent pe modelarea sistemelor vibropercutante pe calculatoarele analogice, care oferă unele avantaje faţă de alte modele electrice pentru aceste sisteme mecanice. În acest sens, s-au prezentat numeroase scheme de modelare calitativă şi cantitativă pentru diverse categorii de sisteme vibropercutante generale, cu mai multe grade de libertate, avînd una sau mai multe cuple percutante,

întîlnite frecvent în aplicaţii. De asemenea, se dau unele rezultate obţinute în urma modelării pe calculatorul analogic MEDA-42TA a unor sisteme vibropercutante concrete, în cadrul activităţii de cercetare ştiinţifică pe bază de contracte cu unităţi economice din ţară.

12. Se prezintă schema logică de modelare pe calculatoarele electronice numerice a sistemelor vibropercutante generale, cu mai multe grade de libertate, liniare între ciocniri şi cu ciocniri instantanee, realizată pe baza studiului teoretic efectuat sub formă matricială. Deoarece în cadrul programului corespunzător modelării cantitative se evită integrarea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării între două ciocniri consecutive, timpul de rulare al programului se reduce substanţial.

13. Pentru verificarea studiului teoretic şi a rezultatelor modelării pe calculatoarele analogice în cazul modelului mecanic particular considerat, s-a proiectat şi realizat un model electric pe baza analogiei forţă-tensiune. In acest model electric s-au folosit, ca elemente active, generatoare de tensiune alternativă sau cu variaţie dreptunghiulară în timp pentru modelarea forţelor perturbatoare şi generatoare de impulsuri de tensiune pentru modelarea forţelor percutante în timpul ciocnirilor.

14. Tot pentru verificări experimentale, s-a proiectat şi realizat un model mecanic distorsionat, pe care se pot modela o clasă largă de sisteme vibropercutante cu două grade de libertate, avînd una sau două cuple percutante. Rezultatele încercărilor experimentale pe acest model mecanic distorsionat au confirmat justeţea ipotezelor simplificatoare adoptate în studiul teoretic şi pe modele electrice al sistemelor vibropercutante.

15. In vederea lărgirii domeniului de utilizare al maşinilor şi standurilor de încercare la şocuri repetate realizate în ţară, s-a proiectat şi realizat un prototip, care oferă multiple posibilităţi de reglare a diferitelor regimuri de încercare.

Acest prototip a fost proiectat pentru încercarea la şocuri repetate a aparatelor electrice şi electronice, în scopul realizării regimurilor de încercare specifice acestor aparate, dar poate fi adaptat şi pentru efectuarea altor încercări.

16. Se poate concluziona că metodele generale prezentate, fundamentate ştiinţific, privind studiul teoretic şi modelarea electrică a sistemelor vibropercutante, aduc unele contribuţii importante la dezvoltarea teoriei sistemelor vibropercutante, iar rezultatele studiilor teoretice şi experimentale pe modele electrice şi mecanice prezintă interes pentru aplicaţii în diverse domenii ale tehnicii şi producţiei, contribuind la îmbogăţirea literaturii de specialitate în aceste domenii.

BIBLIOGRAFIE

1. ABRAMOV V.M.: Kolebania priamozubîh zubciatîh koles. Izd.Harkovskogo Universiteta. Harkov, 1968.
2. ABRAMOV V.M.: Ob odnom ciastnom metode otîscania ustoicivogo periodiceskogo dvijenia vibroudernîh sistem. Teoria meh.i maşin, Vîp.13, 1972.
3. AKSENOV P.N.: Nekotorîe voprosî teorii maşin liteinogo proizvodstva. Maşghiz. Moskva, 1962.
4. ANDRONOV A.A., VITT A.A., HAIKIN S.E.: Teoria kolebanii. G.I.F. M.L. Moskva, 1959.
5. ARJANIN I.S.: O novîh neravenstvah ustoicivosti. Avtomatika i telemehanika, Tom 22, Nr.4, 1961.
6. ASAVSKI A.M.: Sintez optimalinîh vibroudarnîh mehanizmov. Vibrotehnika, Nr.3(2o), 1973.
7. ASTASEV V.K.: K dinamike osçilliatora, udariaiuşcegosia ob ogra- niciteli. Maşinovedenie, Nr.2, 1971.
8. BABAKOV I.M.: Teoria kolebanii. Izd.Nauka. Moskva, 1968.
9. BABITKI V.I.: K voprosu o suşcestvovanii vîsokociastotnîh kolebanii bolşoi amplitudî v lineinîh sistemah s ogranicitelami. Maşinovedenie, Nr.1, 1966.
1o. BABITKI V.I.: Teoria vibroudarnîh sistem. Izd.Nauka. Moskva, 1978.
11. BABITKI V.I., BRUNSTEIN R.E., KOBRINSKI A.E.: Dinamika i ustoicivosti uprughih sistem, soderjaşcih zazorov. Teoria maşin i mehanizmov, Vîp.1o5-1o6, 1965.
12. BABITKI V.I., IZRAILOVICI M.Ia.: Ob optimalinîh dvijenia vibroudarnîh sistem. Maşinovedenie, Nr.3, 1968.
13. BARKAN D.D.: Vibrometod v stroitelstve. Gosstroiizdat, Moskva, 1959.

14. BECHERESCU D.: Contribuţii privind studiul mişcărilor periodice cu ciocniri la vibrotransport. Teză de doctorat. Universitatea din Bucureşti, 1973.

15. BECHERESCU D., SMICALA I., DANOIU AL.: Studiul unor mişcări periodice ale unui sistem vibropercutant. Ses.de comunic. tehn.şt.a cadrelor didactice şi stud., Timişoara, 1977

16. BECHERESCU D., SMICALA I., DANOIU AL.: Studiul mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu două grade de libertate. Lucrările celei de a III-a Conferinţe "Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1980.

17. BECHERESCU D., SMICALA I., CIORA M.: Die Bestimmung der periodischen Bewegungen eines Stosschwingungssystems mit elastischen Begrenzer und einen Stosspaar.Proceedings of the V-th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timişoara, 1985.

18. BECHERESCU D., SMICALA I., CIORA M.: Studium der Stabilität der periodischen Bewegungen eines Stossschwingungssystems mit elastischen Begrenzer und einen Stosspaar. Proceedings of the V-th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timişoara, 1985.

19. BELEA C., VARTOLOMEI M.: Metode algebrice şi algoritmi de sinteză optimală a sistemelor dinamice. Ed.Acad.R.S.R., Bucureşti, 1985.

20. BESPALOVA L.V.: K teorii vibroudarnogo mechanizma. Izv.AN SSSR, OTN, Nr.5, 1957.

21. BESPALOVA L.V.: Rezultati modelirovania zadaci o vibraţionom i vibroudarnom pogrujenii. Izv.vîsş.ucebn.zavedenii. Radiofizika, T.3, Nr.1, 1960.

22. BESPALOVA L.V., METRIKIN V.S.: K teorii dvuhmassovoi modeli vibroudarnika. Izv.vîsş.ucebn.zavedenii. Radiofizika, T.9, Nr.2, 1965.

23. BESPALOVA L.V., METRIKIN V.S.: Vlianie viazkogo trenia na ustoicivosti vibroudarnika. Mehanika tverdogo tela, Nr.2, 1969.

24. BESPALOVA L.V., NEIMARK IU.I., FEIGHIN M.I.: Dinamiceskie sistemî s udarnîmi vzaimodeistviami i teoria nelineinîh kolebanii. Injenernîi jurnal. Mehanika tverdogo tela, Nr.1, 1966.

25. BLEHMAN I.I., DJANELIDZE G.IU.: Vibraţionnoe peremeşcenie. Izd. Nauka, Moskva, 1964.

26. BOGOLIUBOV N.N., MITROPOLSKI IU.A.: Asimptoticeskie metodî teorii nelineinîh kolebanii. G.I.T.T.L., Moskva, 1955.

27. BRINDEU L.: Contribuţii privind studiul mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante. Teză de doctorat. Institutul Politehnic Timişoara, 1970.

28. BRINDEU L.: Über die Bestimmung der Stabilitätsbedingungen der periodischen Bewegungen eines Stossschwingers mit einem Freiheitsgrad. Bul.Inst.Polit.Iaşi, Secţia IV, Mecanică tehnică, XVII, 3-4, 1971.

29. BRINDEU L.: Metodă directă folosită pentru determinarea condiţiilor de stabilitate a mişcărilor periodice în cazul sistemelor vibropercutante. Bul.ştiinţ.şi Tehnic al Inst.Polit. Timişoara, Seria Mat.-Fiz.Mec., Tom 17(31), 1, 1972.

30. BRINDEU L.: The Direct Method Used for the Determination of Stability Conditions of Periodical Movements in the Case of Shock Vibration Systems. Rev.Roum.Math.Pures et Appl., XIX, 6, 1974.

31. BRINDEU L.: Methode Directe Employee pour Determiner les Conditions de Stabilite des Mouvements Periodiques du Systeme Vibropercutant. Bul.ştiinţ.şi Tehnic al Inst.Polit.Timişoara, Seria Mat.-Fiz.-Mec., 19(33), 1, 1974.

32. BRINDEU L.: Generalizarea noţiunii de legătură unilaterală în studiul sistemelor vibropercutante. St.Cerc.Mat., 24, 4, 1974.

33. BRINDEU L.: Die Anwendung der Laplacetransformation beim Studium der periodischen Bewegungen von Stossschwingern. Strojnicky casopis, 27, 3, 1976.

34. BRINDEU L.: Consideraţii privind studiul mişcării mecanismelor vibropercutante. Lucrări şt., Seria A, Inst.de Inv. Sup., Oradea, 1976-1977.

35. BRINDEU L.: Studiul stabilităţii mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu două grade de libertate. Second IFTOMM International Symposium on Linkages and Computer Aided Design Methods - SYROM 77, Bucharest, 1977.

36. BRINDEU L.: The Stability of the Periodic Motions of the Shock Vibration Systems, Rev.Roum.des Sciences Techn., Serie de Mec.Appl., T.30, Nr.5, 1985.

37. BRINDEU L., BERETEU L., SMICALA I.: Die Berechnung der Eigenarten und der Eigenfrequenz der Schwingungen des Schaufelmodells mit diskreter Verteilung der Parametern. Proceedings of the V-th Conference "Vibration in Mechanical Engieneering" Timişoara, 1985.

38. BRUNSTEIN R.E., KOBRINSKI A.E.: Ob ustoicivosti periodiceskih dvijenii vibroudarnîh sistem. Izv.AN SSSR, OTN, Mehanika i maşinostroenie, Nr.5, 1960.

39. BRUNSTEIN R.E., KOBRINSKI A.E.: K issledovanie dinamiki i ustoicivosti vibroudarnîh sistem. Trudî Instituta Maşinovedenia. Seminar po teorii maşin i mehanizmov, T.21, Vîp.83-84, 1961.

40. BRUNSTEIN R.E., KOBRINSKI A.E.: Dinamika i ustoicivosti dvuh massovîh vibroudarnîh sistem. Izv.AN SSSR, Mehanika i maşinostroenie, Nr.5, 1964.

41. BUTENIN N.V.: Elementî teorii nelineinîh kolebanii. Sudpromghiz, Leningrad, 1962.

42. BUZDUGAN GH.: Măsurarea vibraţiilor mecanice. Ed.tehnică, Bucureşti, 1964.

43. BUZDUGAN GH., FETCU L., RADEŞ M.: Vibraţiile sistemelor mecanice. Ed.Acad.R.S.R., Bucureşti, 1975.

44. CHIRIAC A.: Studiul interacţiunii dintre sistemele vibrante şi motoarele de acţionare electrice cu putere limitată. Teză de doctorat. Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timişoara, 1981.

45. CIOARA T.GH.: Metode experimentale pentru determinarea caracteristicilor dinamice ale sistemelor vibrante. Teză de doctorat. Inst.Politehnic "Tr.Vuia" Timişoara, 1985.

46. CRAFTON P.A.: Shock and Vibration in Linear Systems, Harper and Brothers Publishers, New-York, 1961.

47. CARANDALL S.: Random Vibration. Vol.I, II. Massachusetts Instutute of Technology Press, Cambridge, Mass., 1964.

48. CRIVACUCEA O., DANOIU AL., GROSANU I., SMICALA I.: Studii teoretice şi experimentale privind formarea miezurilor prin vibraţii şi vibropercuţii. Lucr.Ses.de comunic.tehn.şt.a cadrelor didactice şi stud., Timişoara, 1977.

49. DANOIU AL., SMICALA I.: Mecanică. Partea I. Statica. Lit.Inst. Polit."Tr.Vuia" Timişoara, 1982.

50. DIETRICH H.: Bewegungsformen und Dampfungseigenschaften eines unstetig arbeitenden Stossschwingungsdampfers. ZAMM, 46, Sonderheft, 1966.

51. DINCA F., TEODOSIU C.: Vibraţii neliniare şi aleatoare. Ed. Acad.R.S.R., Bucureşti, 1969.

52. DUNAEV P.A.: Pnevmaticeskie moloti. Magghiz, Moskva, 1959.

53. EGLE D.M.: An Investigation of an Impact Vibration Absorber. Trans.of the ASME, Journal of Engineering for Industry, Special Vibration Issue, Series B, Vol.89, Nr.4, 1967.

54. ERLIH L.B.: Vibrogasiteli udarnogo deistvia i ego primenenie v stankah. Stanki i instrument, Nr.7, 1952.

55. FEIGHIN M.I.: O vînujdennîh kolebaniah dvuh mass, socilenennîh s zazorom. Izv.AN SSSR, OTN, Mehanika i maşinostroienie, Nr.5, 1960.

56. FEIGHIN M.I.: K teorii udarnogo dempfera. Izv.vîsş.ucebn. zavedenii. Radiofizika, T.4, Nr.3, 1961.

57. FU C.C.: Dinamic Stability of an Impact System conected with Rock Drilling. Trans.of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.36, Series E, Nr.4, 1969.

58. FU C.C., PAUL B.: Dinamic Stability of a Vibrating Hammer. Trans.of the ASME, Journal of Engineering for Industry, November 1969.

59. FUNG Y.C., BARTON M.V.: Shock Response of a Nonlinear System. Trans.of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.29, Nr.3, 1962.

60. GABOS Z., MANGERON D., STAN I.: Fundamentele mecanicii. Ed. Acad.R.S.R., Bucureşti, 1962.

61. GLIGOR TR.: Studiul vibraţiilor laterale ale locomotivei Diesel-electrice 060 DA de 2100 CP. Teză de doctorat. Inst. Politehnic "Tr.Vuia" Timişoara, 1974.

62. GOLDSMITH W.: Impact.The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids. Edward Arnold, London, 1960.

63. GROSANU I.: Contribuţii privind studiul mişcărilor staţionare şi nestaţionare ale sistemelor mecanice excitate inerţial, acţionate cu motoare electrice. Teză de doctorat. Inst. Politehnic, Timişoara, 1970.

64. GROSANU I., SMICALA I.: Modelarea sistemelor mecanice supuse la legături neolonome. Lucrările celei de a IV-a Conferinţe "Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1982.

65. GROSANU I., SMICALA I.: Modellierung von mechanischen Systemen mit nichtholonomen Verbindungen. Proceedings of the IV-th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timişoara, 1982.

66. GRUBIN C.: On the Theory of the Acceleration Damper. Trans.of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.23, Nr.3, 1956.

67. GULBE A.K.: Optimalnîi zakon dvijenia lotka s zadanîmi predelami uskorenia pri vibrotransportirovke v rejime s etapami poleta pri nalicii sil suhogo i viazkogo trenia. Voprosî dinamiki i procinosti, Vîp.21, Izd."Zinatne", Riga, 1971.

68. HALANAY A.: Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. Ed. Acad.R.P.R., Bucureşti, 1963.

69. HALE I.K.: Oscillations in Nonlinear Systems. Mc.Graw-Hill Book Company, New-York, 1963.

70. HAMBURGER L., BUZDUGAN GH.: Teoria vibraţiilor şi aplicaţiile ei în construcţia maşinilor. Ed.Tehnică, Bucureşti, 1958.

71. HARRIS C.M., CREDE CH.E.: Shock and Vibration Handbook. Vol.I, II, III. Mc.Graw-Hill Book Company, New-York, Toronto, London, 1961.

72. HARTOG DEN J.P.: Mechanical Vibrations. Fourth Edition. Mc. Graw-Hill Book Company, Inc.,New-York, Toronto, London, 1956.

73. HAYASHI C.: Nonlinear Oscillations in Physical Systems. Mc. Graw-Hill Book Company, New-York, San Francisco, Toronto, London, 1964.

74. HEGEDŰS A.: Contribuţii privind mişcările vibropercutante optime în sisteme mecanice şi electromecanice. Teză de doctorat. Inst.Politehnic "Tr.Vuia" Timişoara, 1971.

75. HEGEDŰS A., PETERKA F.: Dvijenie vibroudarnoi sistemi s odnoi stepeniu svobodî pri preamougolnom vozbujdenii. VII Konferencja Dinamiki Moszyn, Polska-Gliwice, 1971.

76. HEMAMI H., WEIMER F.C.: Modeling of Nonholonomic Dynamic Systems

BUPT

with Applications. Trans.of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.48, 1981.

77. IACOB C.: Mecanică teoretică. Ed.Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

78. IORIS IU.I.: Vibrometria. Izmerenie vibraţii i udarov. Obşciaia teoria, metodî i priborî. Maşghiz, Moskva, 1963.

79. IZRAILOVICI M.IA.: Optimalnîi zakon periodiceskogo dvijenia odnomassovoi vibroudarnoi sistemî. Maşinovedenie, Nr.1, 1969.

80. JURAVLEV V.F.: Metod analiza vibroudarnîh sistem pri pomoşci speţialnîh funcţii. Izv.An SSSR, Mehanika Tverdogo Tela, Nr.2, 1976.

81. KAUDERER H.: Nichtlineare Mechanik. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958.

82. KLOTTER K.: Technische Schwingungslehre. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960.

83. KOBRINSKI A.E.: Mehanizmî s uprughimi sviazami. Izd.Nauka, Moskva, 1964.

84. KOBRINSKI A.E., TIVES L.I.: Dinamika i ustoicivosti sistem soderjaşcih dve udarnîe parî. Maşinovedenie, Nr.4, 1965.

85. KOPITOV V.I.: Vînujdennîe kolebania sistemî s dvumia stepeniami svobodî pri udare ob organiciteli odnoi iz masa. Izv.vîsş. ucebn.zavedenii. Gornîi jurnal, Nr.8, 1958.

86. KOWALCZYK B.: Stabilnosc ukladu wibro-uderzeniowego o wymuszeniu kinematyczznum. Mech.teor.i stosow, 4, Nr.2, 1966.

87. KUPHAL K.: Uber die Beeinflussung von Schwingungen durch einen Stosskorper. II. Das Vertikal-System. ZAMM, Band 45, Heft.6, 1965.

88. LAVENDEL E.E.: Optimalnîi zakon dvijenia lotka s zadannîmi predelami uskorenia pri vibrotransportirovke v rejime s podbrasîvaniem. Izv.AN SSSR, Mehanika i Maşinostroienie, Nr.6, 1964.

BUPT

89. LENSKI A.N., LOBODA V.M., FABRIKA L.P.: Issledovanie udarnîh i vibroudarnîh sistem na analogovîh modeliah. Dinamika maşin, Izd.Nauka, Moskva, 1974.

90. LIVŞIT P.S.: K voprosu o vînujdennîh kolebaniah sistem udariaiuşcihsia ob organiciteli. Jurnal tehniceskoi fiziki, T.22, Vîp.6, 1952.

91. LOITIANSKI L.G.: Svobodnîe i vînujdennîe kolebania pri nalicii kvadraticinogo i promejuticinogo mejdu lineinîm i kvadraticinîm zakonov soprotivlenia. Injenernîi sbornik, Vîp.18, 1954.

92. LUDVIG GY.: Utközesi feledatok modellezese elektronikus analog szamologeppel. Jarmüvek, Mezögazdasagi gepek, 17 evfolyam, 5 szam, 1970.

93. LUDVIG GY., NAHLIK G.: Analogue Simulation of Stochastic Excited Non-Linear Vibration Systems. Periodica Polytechnica, Mechanical Engineering, Vol.20, Nr.3, Budapest, 1976.

94. MAGNUS K.: Erzwungene Schwingungen des linearen Schwingers bei nichtharmonischer Erregung. ZAMM, Band 31, Berlin, 1951.

95. MAHRENHOLZ O.: Analogrechnen in Maschinenbau und Mechanik. Hochschultaschenbücher - Verlag, Bibliographisches Institut, Mannheim, Zürich, 1968.

96. MALKIN I.G.: Nekotorîe zadaci teorii nelineinîh kolebanii. Gostehizdat, Moskva, 1956.

97. MANGERON D.: Metod integralnîh uravnenii v nelineinoi mehanike. Trudî mejunarodnogo simp.po nelineinîm kolebaniam. T.1, Izd. AN SSSR, Kiev, 1963.

98. MANGERON D., CHALEAT R.: Approximations d'ordre superieur dans l'etude des mouvements perturbes des oscillateurs. Rev. Roum.des Sc.Techn., Serie Mec.Appl., Tome 10, 4, 1965.

99. MANGERON D., IRIMICIUC N.: Mecanica rigidelor cu aplicaţii în inginerie. Vol.I, II, III. Ed.tehnică, Bucureşti, 1978-1981.

BUPT

100. MANGERON D., SILAS GH., BRINDEU L.: Metod mnogougolnogo pribliјenia v issledovanii sistem s nelineinîmi harakteristikami. Bul.Inst.Polit.din Iaşi, Tom XII(XVI), Fasc.1-2, 1966.

101. MANGERON D., SILAS GH., BRINDEU L., HEGEDUS A., ENACHESCU C.: Dinamica sistemelor vibropercutante. I. Problema în care ciocnirea nu se consideră instantanee. Bul.Inst.Polit.din Iaşi, Tom XII(XVI), Fasc.3-4, 1966.

102. MASRI S.F.: Electric - analog Studies of Impact Dampers. Trans. of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Series E, Vol.34, Nr.2, 1967.

103. MOSKVITIN A.I.: Elektriceskie maşinî vozvratno-postupatelnogo dvijenia (Elektriceskie molotki, vibratorî bîstro hodnîi elektromagnitnîi privod). Izd.AN SSSR, Moskva, Leningrad, 1950.

104. NEIMARK IU.I.: Metod tocecinîh otobrajenii v teorii nelineinîh kolebanii. Trudi mejdunarodnogo simp.po nelineinîm kolebaniam, T.2, Izd,AN SSSR, Kiev, 1963.

105. NEIMARK IU.I.: Metod tocecinîh otobrajenii v teorii nelineinîh kolebaii. Izd.Nauka, Moskva, 1972.

106. OSTAPENKO V.A.: Mehaniceskie vibroudarnîie sistemî. Naukova Dumka, Kiev, 1966.

107. PANOVKO IA.G.: Sposob priamoi linearizaţii v nelineinîh zadaciah teorii uprughih kolebanii. Injenernîi sbornik, T.13, 1952.

108. PARK W.H.: Mass-Spring-Damper Response to Repetitive Impact. Trans.of.the ASME, Journal of Engineering for Industry, November 1967.

109. PAUNESCU M.: Folosirea vibraţiilor la executarea unor lucrări de fundaţii. Ed.Tehnică, Bucureşti, 1966.

110. PENESCU C., IONESCU VL., ROSINGER EL.: Procese optimale.Ed. Acad.R.S.R., Bucureşti, 1970.

111. PETERKA F.: Modelovani kmitajicich soustav s razu na analogovem pocitaci. Strojnicky Casopis, XVI, Nr.6, 1965.

112. PETERKA F.: Teorie pohybu dvouhmotove mechanicke soustavy s vnitrnimi razy a jejii aplikace na dynamicky razovy tlumic. ACADEMIA, Praha, 1970.

113. PETERKA F.: Uvod do kmitani mechanickych soustav s vnitrnimi razy. ACADEMIA, Praha, 1981.

114. PETERKA F., KOTERA T.: Izbrannie problemi osnovnoi vibroudarnoi sistemi. Proceedings of the IV-th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timişoara, 1982.

115. PFEIFER T.: Behrührungsloser elektromagnetischer Schwingungserreger für dynamische Untersuchungen an Werkzeugmaschinen. Dissertation, Aachen, 1968.

116. PODCIUFAROV B.M.: Dinamika ţikliceskoi avtomatiki s malîm vremenem ţikla. Izv.ucebn.zavedenii, Maşinostroenie, Nr. 12, 1961.

117. PONOMARIEV S.D., BIDERMAN V.L., LIHAREV K.K., MAKUSIN V.M., MALININ N.W., TEODOSIEV V.E.: Calculul modern de rezistenţă în construcţia de maşini. Vol.III (trad.din lb. rusă). Ed.Tehnică, Bucureşti, 1964.

118. POPOV G.I.: K rascetu nelineinîh kolebanii sistemî s odnoi stepenîu svobodî na deistvie mgnovennîh i kratkovremennîh sil. Issledovania po teorii sooruienii, Vîp.VIII, Moskva, 1959.

119. RADEŞ M.: Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice. Ed.Acad.R.S.R., Bucureşti, 1979.

120. RAGULSKENE V.L.: Udarno-ciastotnîe harakteristiki vibroudarnîh sistem. Trudî AN Lit.SSR, seria B, 4(35), 1963.

BUPT

121. RGULSKIS K.M., VITKUS I.I., RAGULSKENE V.L.: Samosinhronizaţia mehaniceskih sistem. 1. Samosinhronnîe i vibroudarnîe sistemî. Izd.Mintis, Vilnius, 1965.

122. RAGULSKIS K.M., KAVOLELIS A.P.K., BALTRUSAITIS I.D., SATKIAVICIUS E.B.: Samosinhronizaţia mehaniceskih sistem. 2. Samosinhronizaţia modelirovanie. Izd.Mintis, Vilnius, 1967.

123. RIPIANU A.: Mişcările vibratorii ale arborilor drepţi şi cotiţi. Ed.Acad.R.S.R., Bucureşti, 1969.

124. RUSAKOV I.G., HARKEVICI A.A.: Vînujdennîe kolebania sistemî udariaiuşciesia ob ogranaciteli. Jurnal tehniceskoi fiziki, T.12, Vîp.11-12, 1952.

125. SAAL C., HEGEDUS A.: Mouvements vibropercutants periodiques de l'oscillomoteur biphase synchrone reactif. Bul.Inst. Polit.Iaşi, Tom XVI (XX), F.3-4, 197o.

126. SACHSE R., REUM G.: Beiträge zur Theorie des Kurbel-Feder-Hammers. Wiss. Zeitschrift der Techn.Hochschule Karl-Marx-Stadt, Jahrgang VII, Heft 2, 1965.

127. SELARIU M.: Metodă pentru determinarea relaţiei exacte de calcul a pulsaţiei proprii a unui sistem oscilant liber, conservativ cu caracteristica neliniară. Lucr.Conf."Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.

128. SENATOR M.: Existence and stability of periodic motions of a harmonical forced impacting system. Journal of Acoust. Soc.Amer., 47, Nr.5, Part 2, 197o.

129. SILAS GH.: Mecanică. Vibraţii mecanice. Ed.Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.

130. SILAS GH.: O nouă metodă de studiu a sistemelor vibropercutante liniare cu un grad de libertate şi o cuplă percutantă. Bul.şt.şi Tehn.al I.P.Timişoara, Seria Mat.-Fiz.-Mec.teoretică şi aplic., Tom 16(3o), Fasc.1, 1971.

131. SILAS GH.: Metode şi rezultate noi în studiul sistemelor vibropercutante generale cu un grad de libertate şi a vibraţiilor cu caracteristici neliniare. Teză de doctorat. Inst. Politehnic Iaşi, 1971.

132. SILAS GH.: Sisteme dinamice cu interacţiuni percutante. Bul. St.şi Tehn.al I.P.Timişoara, Seria Mat.-Fiz.-Mec.teoret.şi aplic., Tom 18(32), Fasc.2, 1973.

133. SILAS GH.: Determinarea mişcărilor periodice ale unui sistem cu un grad de libertate şi o cuplă percutantă. Lucr.Conf. "Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.

134. SILAS GH., BECHERESCU D., SMICALA I.: Studiul stabilităţii mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu limitator elastic şi o cuplă percutantă. Lucr.celei de a IV-a Conferinţe "Vib.în constr.de maşini", Timişoara, 1982.

135. SILAS GH., BRINDEU L.: Regimurile periodice staţionare ale mecanismelor vibropercutante cu amortizare vîscoasă avînd un grad de libertate. Bul.St.şi Tehn.al I.P.Timişoara, Tom 11 (25), Fasc.1, 1966.

136. SILAS GH., BRINDEU L.: Stabilitatea mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate. Ses. anuală a Soc.de Mat.din RDG, Rostock, 1968.

137. SILAS GH., BRINDEU L.: Studiul mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate. Conf.naţ. de mec.aplic.a R.S.F.Jugoslavia, Split, 1968.

138. SILAS GH., BRINDEU L.: Mişcările periodice ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate în cazul ciocnirilor elastice instantanee. Bul.St.şi Tehn.al I.P.Timişoara, Tom 14(28), Fasc.1, 1969.

139. SILAS GH., BRINDEU L.: Behandlung periodischer Bewegungen von Rüttelsystemen mit den Lagrangeschen Gleichungen. VDI Berichte, Nr.135, Frühjahr, 1969.

140. SILAS GH., BRINDEU L.: Studiul mişcărilor periodice şi a stabilităţii acestora pentru sisteme vibropercutante generale, libere sau supuse la legături, cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange. Conf.naţională de mecanică aplicată, Bucureşti, iunie 1969.

141. SILAŞ GH., BRINDEU L.: Stabilitatea mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu două grade de libertate. Bul.St.şi Tehn.al I.P.Timişoara, Seria Mat.-Fiz.-Mec.teoretică şi aplic., Tom 15 (29), Fasc.2, 197o

142. SILAS GH.,BRINDEU L.: Das Studium der Stossschwingungen einen freien Masse zwischen zwei Limitatoren mit kinematischer Erregung. VII Konferencii Dinamiki Maszyn, Politehnika Slaska, Gliwice, Poland, 1971.

143. SILAS GH., BRINDEU L.: Studiul mişcării sistemelor vibropercutante cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange. Bul.St.şi Tehn.al Inst.Polit.Timişoara, Seria Mat.-Fiz.-Mec., Tom 17(31), Fasc.2, 1972.

144. SILAS GH., BRINDEU L.: Folosirea ecuaţiilor lui Lagrange la studiul mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante. Bul.St.şi Tehn.al Inst.Polit.Timişoara, Seria Mat.-Fiz.-Mec., Tom 18(32), Fasc.1, 1973.

145. SILAS GH., BRINDEU L.: Asupra folosirii variabilei complexe în studiul mişcării sistemelor vibropercutante. Bul.St.şi Tehn.al Inst.Polit.Timişoara, Seria Mat.-Fiz.-Mec., Tom 2o (34),Fasc.2, 1975.

146. SILAS GH., BRINDEU L.: Mişcări periodice ale unui sistem vibropercutant în cazul ciocnirilor plastice. Lucr.Conf. "Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.

147. SILAS GH., BRINDEU L.: Die Verwendung der einseitigen Bindungen für das Studium der Stösse. Bul.St.şi Tehn.al Inst. Polit.Timişoara, Seria Mec., Tom 23(37), Fasc.2, 1978.

148. SILAS GH., BRINDEU L.: Studiul efectului ciocnirii asupra generatorului de vibraţii la un sistem vibropercutant. Lucr.celei de a III-a Conferinţe "Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1980.

149. SILAS GH., BRINDEU L.: Consideraţii privind folosirea funcţiei legăturii unilaterale în studiul ciocnirii. Lucr. celei de a IV-a Conferinţe "Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1982.

150. SILAS GH., BRINDEU L.: Metoda reprezentărilor complexe în studiul sistemelor vibropercutante. Lucr.celei de a IV-a Cônferineţe "Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1982.

151. SILAS GH., BRINDEU L.: Sisteme vibropercutante. Ed.tehnică, Bucureşti, 1986.

152. SILAS GH., BRINDEU L., BACRIA V.: Studiul mişcărilor periodice ale unui vibrator cu limitatori elastici. Ses.de comunic.ştiinţifice a I.P.Iaşi, 1967.

153. SILAS GH., BRINDEU L., BACRIA V.: Mişcările periodice ale unei mase libere pe un limitator elastic ce are o mişcare periodică. Bul.St.şi Tehn.al Inst.Polit.Timişoara, Seria Mat.-Fiz.-Mec.teor.şi aplic., Tom 15(29), Fasc.1, 1970.

154. SILAS GH., BRINDEU L., BACRIA V.: Studiul mişcării unui vibrator între limitatori elastici. Lucr.Conf."Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.

155. SILAS GH., BRINDEU L., GROSANU I.: Sisteme de percuţii aplicate corpurilor rigide în rotaţie. Bul.St.şi Tehn.al Inst. Polit.Timişoara, Tom 9(23), Fasc.1, 1964.

156. SILAS GH., BRINDEU L., GROSANU I., CIOARA T., BACRIA V., DEDU ST.: Cercetări privind comportarea dinamică a unui hidroagregat în regim de sarcini variabile. Lucr.Conf."Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.

157. SILAȘ GH., BRINDEU L., GROSANU I., CIOARA T., PITZER I., VAZORCA B.: Studiul comportării dinamice a unui vibrator de adîncime pentru lucrări de construcții. Lucr.Conf."Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1975.

158. SILAS GH., BRINDEU L., HEGEDUS A.: Mișcări periodice cu ciocniri ale vibratorului liber. Bul.St.și Tehn.al Inst.Polit. Timișoara, Tom 12(26), Fasc.1, 1967.

159. SILAS GH., BRINDEU L., HEGEDUS A.: Determinarea coeficientului de restituire la ciocnire pe baza deformațiilor locale. Bul.St.și Tehn.al Inst.Polit.Timișoara, Tom 12(26), Fasc.2, 1967.

160. SILAS GH., BRINDEU L., HEGEDUS A.: Studiul mișcărilor periodice ale unui mecanism vibropercutant cu masă liberă și excitație periodică. Sesiunea șt.jubiliară a Inst.Polit. Cluj, 1968.

161. SILAS GH., BRINDEU L., HEGEDUS A.: Studiul mișcărilor vibropercutante ale unei mase libere cu excitație periodică. St.Cerc.Mec.Apl., Tom 29, Nr.5, 1970.

162. SILAS GH., BRINDEU L., KLEPP H.: Percuții aplicate corpului rigid liber. Bul.St.și Tehn.al Inst.Polit.Timișoara, Tom 9(23), Fasc.2, 1964.

163. SILAS GH., BRINDEU L., SMICALA I.: Eine matrizielle Methode für das Stabilitätsstudium der periodischen Bewegungen der mechanischen Stossschwingungssystemen mit mehreren Freiheitsgraden. Proceedings of the V-th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timișoara, 1985.

164. SILAS GH., BRINDEU L., TOADER M.: Asupra mișcărilor periodice verticale cu ciocniri ale unui sistem cu două mase legate elastic. Conf.de mecanică tehnică CNIT, București, 1967.

165. SILAS GH., GROSANU I.: Analiza regimurilor nestaționare ale unor sisteme [illegible]nice folosind metoda de aproximare poli-

BUPT

gonală. Sesiunea de comunic.ştiinţifice a Inst.Polit.Iaşi, 1967.

166. SILAS GH., GROSANU I.: Mecanica. Ed.Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

167. SILAS GH., GROSANU I., BRINDEU L., CIOARA T.: Studiul teoretic şi experimental al unei plăci vibrante cu gabarit redus. Lucr. Conf."Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.

168. SILAS GH., HEGEDUS A.: Studiul mişcărilor periodice ale unui mecanism vibropercutant cu un grad de libertate. Bul.St.şi Tehn.al Inst.Polit.Timişoara, Tom 11(25), Fasc.2, 1966.

169. SILAS GH., HEGEDUS A.: Contribuţii la studiul mişcărilor periodice ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate. St.Cerc.Mec.Apl., Tom 29, Nr.6, 197o.

170. SILAS GH.,HEGEDUS A.: Contribuţii privind studiul mişcărilor periodice optime ale sistemelor vibropercutante cu un grad de libertate. Bul.St.şi Tehn.al Inst.Polit.Timişoara, Seria Mat.-Fiz.-Mec.teoret.şi aplic., Tom 16(3o), Fasc.2, 197o.

171. SILAS GH., HEGEDUS A.: Contribuţii la studiul dinamic al unor sisteme vibropercutante cu două cuple percutante. Lucr.celei de a IV-a Conferinţe "Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1982.

172. SILAS GH., HEGEDUS A.; BECHERESCU D.: Mişcările vibropercutante ale particulei materiale excitate de o platformă mobilă. Bul.St.şi Tehn.al Inst.Polit.Timişoara, Seria Mat.-Fiz.-Mec. teoret.şi aplic., Tom 15(29), Fasc.1, 197o.

173. SILAS GH., HEGEDUS A., SMICALA I.: Studiul mişcărilor periodice optime ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate avînd două cuple percutante. Lucr.Conf."Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.

174. SILAS GH., KLEPP H.: Asupra vibraţiilor sistemelor avînd caracteristică neliniară cu excitaţie prin impulsuri periodice.

Conf.de Mecanică Tehnică, Bucureşti, 1967.

175. SILAS GH., KLEPP H., CIOARA T., MARCUS A.: Asupra determinării diagramei forţei percutante la prese. Lucr.Conf."Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.

176. SILAS GH., MANGERON D., BRINDEU L., HEGEDUS A.: Uber die stationäre Bewegung eines Schlagschwingssystems, wenn der Zusammenstross nicht als momentan betrachtet wird. Rev. Roum.Scient.Techn.Mec.Appl., Tome 12, Nr.2, 1967.

177. SILAS GH., PAUNESCU M., GROSANU I., BRINDEU L.: Contribuţii la studiul şi proiectarea maşinilor vibropercutante folosite la înfigerea piloţilor. Bul.St.şi Tehn.al Inst.Polit. Timişoara, Tom 7(21), Fasc.2, 1962.

178. SILAS GH., PAUNESCU M., GROSANU I., BRINDEU L., GLIGOR T.: Vibropercutor pentru înfigerea elementelor în pămînt. Bul. St.şi Tehn.al Inst.Polit.Timişoara, Tom 9(23), Fasc.2, 1964.

179. SILAS GH., RADOI M., BRINDEU L., KLEPP H., HEGEDUS A.: Culegere de probleme de vibraţii mecanice. Vol.I, II. Editura Tehnică, Bucureşti, 1967, 1972.

180. SILAS GH., RADOI M., BRINDEU L., SMICALA I.: Folosirea modelării analogice în studiul unui izolator neliniar. Bul.St. şi Tehn.al.Inst.Polit."Tr.Vuia" Timişoara, Tom 25(39), Fasc.1, 1980.

181. SILAS GH., RADOI M., GROSANU I., BRINDEU L.: Poziţiile centrului de percuţie a unui corp în mişcare de rotaţie. Bul. St.şi Tehn.al Inst.Polit.Timişoara, Tom 6(20), Fasc.1, 1961.

182. SILAS GH., SMICALA I.: Der matrizielle Ausdruck der Bezichungen zwischen den Allgemeingeschwindigkeiten vom Anfang und vom Ende des Zusammenstosses im Falle der augenblicklichen Zusammenstosse eines mechanischen Systems mit mehreren Freiheitsgraden, Proceedings of the V-th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timişoara,

183. SILAS GH., SMICALA I.: Die Bestimmung der periodischen Bewegungen der linearen ungedämpften Stossschwingungssystemen mit einem Stosspaar und mehreren Freiheitsgraden, Proceedings of the V-th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timişoara, 1985.

184. SILAS GH., SMICALA I.: Die Bestimmung der periodischen Bewegungen der linearen Stossschwingungssystemen mit gleichförmiger zähflüssiger Dämpfung, mit einem Stosspaar und mit mehreren Freiheitsgraden. Proceedings of the V-th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timişoara, 1985.

185. SILAS GH., SMICALA I.: Die Bestimmung der periodischen Bewegungen der ungedäpften Stossschwingungssystemen, die zwischen den Zusammenstössen linear sind, mit zwei Stosspaaren und mehreren Freiheitsgraden. Proceedings of the V-th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timişoara, 1985.

186. SMICALA I.: Studiul mişcărilor periodice optime ale unui sistem vibropercutant cu un grad de libertate prin modelare pe calculatorul analogic. Lucr.Ses.de comunic.tehn.şt.a cadrelor didactice şi stud., Timişoara, 1977.

187. SMICALA I.: Die analogische Modellierung von mechanischen Stossschwingungssystemen mit mehreren Freiheitsgraden. Proceedings of the V-th Conference "Vibration in Mechanical Engineering", Timişoara, 1985.

188. SMICALA I.; DANOIU AL., BEGHERESCU D.: Mecanică. Partea II-a. Cinematică. Lit.Inst.Polit."Tr.Vuia" Timişoara, 1984.

189. SMICALA I., DANOIU AL., GROSANU I., CRIVACUCEA O.: Studii teoretice privind confecţionarea miezurilor de formare cu ajutorul vibraţiilor. Lucr.Conf."Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.

190. SMICALA I., GHEORGHIU A.: Studiul vibrațiilor forțate amortizate ale elementelor modulelor electronice formînd sisteme cu mai multe grade de libertate cu ajutorul calculatoarelor numerice. Lucr.celei de a II-a Conf."Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1978.

191. SMICALA I., GROSANU I.: Modelarea transmisiilor mecanice. Lucr.celei de a IV-a Conf."Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1982.

192. SMICALA I., NICOARA I.: Modelarea electrică a sistemelor mecanice închise. Lucr.celei de a III-a Conf."Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1980.

193. SOCEANU AL., IRIMESCU D.: Tehnici numerice de simulare a sistemelor continue. Lit.Inst.Politehnic București, 1974.

194. SPOREA I., DANOIU AL., SMICALA I., GROSANU I., VIDA M., CRIVACUCEA D.: Influența vibrațiilor asupra caracteristicilor amestecurilor de formare cu liant rășină fenolică. Lucr.Conf."Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1975.

195. STOENESCU AL., SILAS GH.: Mecanică teoretică. Ediția III. Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1963.

196. TAPLIN A.: Vibroudarnîe mehanizmî. Avtotransizdat, Moskva, 1953.

197. TIVES L.I.: Dinamika i ustoicivosti simmetricinoi vibroudarnoi sistemî, soderjașcei dva zazora. Obșcie problemî mașinostroenia, Izd.Nauka, Moskva, 1967.

198. TOADER M.I.: Contribuții la aplicarea analizei funcționale în teoria oscilațiilor neliniare. Teză de doctorat. Inst. Polit."Tr.Vuia" Timișoara, 1982.

199. TOADER M., SMICALA I.: Asupra unui sistem dinamic cu histereză liniară. Lucr.Conf."Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1975.

200. TOADER M., SMICALA I.: Asupra îmbunătăţirii soluţiei aproximative a ecuaţiei diferenţiale a sistemelor mecanice neliniare cu un grad de libertate. Bul.St.şi Tehn.al Inst. Polit."Tr.Vuia" Timişoara, Seria Mec., Tom 25(39), Fasc.1, 1980.

201. TOADER M., SMICALA I.: Asupra unei metode iterative în studiul sistemelor mecanice neliniare cu un grad de libertate. Lucr.celei de a III-a Conf."Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1980.

202. TOKACI E.: Contribuţii la studiul sistemelor materiale percutante. Bul.Inst.Politehnic Iaşi, Tom 11(15), Nr.3-4, 1965.

203. TOKACI E.: Asupra ecuaţiilor mecanicii analitice pentru cazul sistemelor materiale percutante. Studii şi cercetări matematice, Acad.R.S.R., 18, Nr.8, 1966.

204. VAINKOF IA.F.: Ob ustoicivosti dvijenia tela na vibruiuşcei platforme. Injenernîi jurnal, Mehanika tverdogo tela, Nr.6, 1966.

205. VAINKOF IA.F.: Ob ustoicivosti dvijenia dvuhmassovoi vibroudarnoi sistemî s odnostoronnîm vozbujdeniem. Prikladnaia mehanika, Tom III, Vîp.5, 1967.

206. VIBA IA.A.: Opredelenie parametrov realnogo zakona dvijenia odnoudarnogo vibraţionnogo lotka. Sb.vopr.dinam.i proçin., Vîp.21, Zinatne, Riga, 1971.

207. VIBA IA.A.: Sintez dvuhstoronnogo vibroudarnogo transportera s nepodvijnîm uporom. Sb.vopr.dinam.i proçin., Vîp.21, Zinatne, Riga, 1971.

208. VIBA IA.A.: Rasciot dinamiki odnomassovoi mehaniceskoi sistemî vibrobunker - lotok. Sb.vopr.dinam.i procin., Vîp.21, Zinatne, Riga, 1971.

209. VIBA IA.A., INDRIKSON E.A.: Optimalnoe silovoe upravlenie prodolnoi komponenti dvijenia lotka s prujinoi i ogranicite-

liami. Sb.vopr.dinam.i procin., Vîp.32, Zinatne, Riga, 1976.

210. VIBA IA.A., MERKULOV V.I.: Optimalnîe parametrı vibromolota s garmoniceskim vozbujdeniem. Sb.vopr.dinam.i procin., Vîp.33, Zinatne, Riga, 1976.

211. VIBA IA.A., NOVOHATSKAIA T.N.: Sintez udarnogo gasitelia kolebanii. Sb.vopr.dinam.i procin., Vîp.34, Zinatne, Riga, 1977.

212. VILCOVICI V., BALAN ST., VOINEA R.: Mecanică teoretică. Editura Tehnică, Bucureşti, 1963.

213. VOINAROSKI R.: Mecanică teoretică. Ed.Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.

214. ZAITEV V.A., JUCIKOV M.G., IONOVA V.S.: Vibroudarnîe proţessî v diskovîh fricţionnîh muftah. Izv.vîsş.ucebn.zavedenii, Maşinostroenie, Nr.8, 1968.

215. ZARETKI L.B.: Vînujdennîe kolebania besprujnogo vibroudarnogo mehanizma s dvumia udarnikami. Vibraţionnaia tehnika, Moskva, 1966.

216. ZEVIN A.A.: Ob ustoicivosti periodiceskih dvijenii pri nalicii soudarenii mass. Maşinovedenie, Nr.4, 1968.

217. ZEVIN A.A.: Rasseianie energhii v vibroudarnîh sistemah. Maşinovedenie, Nr.3, 1971.

CUPRINS