MINISTERUL EDUCATIEI SI INVATAMINTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" TIMISOARA
FACULTATEA DE MECANICA

IULIU NICOLAE CARTE

CONTRIBUTII LA STUDIUL RETELELOR DE PROFILE RADIAL-AXIALE SI UTILIZAREA LOR IN PROIECTAREA ROTORILOR TURBINELOR FRANCIS

- Teză de doctorat -

CONDUCATOR STIINTIFIC
Acad.Prof.Dr.Doc.Ing.IOAN ANTON

- Timişoara, 1986 -

Deschide cartea, ca să înveţi ce au gîndit alţii ;
închide cartea, ca să gîndeşti tu însuţi.

Librum aperti, ut discas, qui alii cogitaverint; librum claude, ut ipse cogites.

CUVINT INAINTE

In complexul proces al cunoaşterii, în urma a nenumărate observaţii făcute de milenii şi a unor consideraţii filozofice foarte bine întemeiate, omul a ajuns la un rezultat de o importanţă majoră şi anume : pentru orice sistem α aflat într-o stare $\mathcal{S}_0$ numită iniţială, care ajunge după un interval de timp Δt într-o stare $\mathcal{S}$ numită finală, ca urmare a interacţiunii dintre sistemul α şi sistemele înconjurătoare, legătura dintre $\mathcal{S}_0$ şi $\mathcal{S}$ este necesară şi reproductibilă, sau altfel spus această legătură este o relaţie de determinare cauzală; $\mathcal{S}_0$ este numită cauză, $\mathcal{S}$ este numit efect iar legătura dintre ele poate fi pusă sub forma [182]

$$\mathcal{S} = E_{(\Delta t)} \mathcal{S}_0 \tag{a}$$

în care $E_{(\Delta t)}$ este operatorul de evoluţie al sistemului, în condiţiile date, pe durata Δt . Relaţia (a) se numeşte cauzală şi ne arată către ce stare evoluează, în condiţii date, un sistem care se găseşte într-o stare iniţială dată.

In evoluţia socială a omenirii a apărut însă în mod obiectiv următoarea problemă fundamentală : cum trebuie să acţionăm asupra unui sistem α pentru ca acesta să ajungă într-o stare finală dată $\mathcal{S}_F$. Pentru aceasta va trebui să găsim atît o stare iniţială $\mathcal{S}_I$ cît şi un operator de evoluţie $E_{F;I}$ astfel ca

$$\mathcal{S}_F = E_{F;I} \mathcal{S}_I \tag{b}$$

adică să se obţina o stare efect, aceasta determinînd cauza care îl produce. Relaţia (b), deşi asemănătoare cu (a), nu este cauzală ci este o relaţie finalistă iar operatorul $E_{F;I}$ un operator de evoluţie finalist. Realizarea unui efect dorit cere deci utilizarea unor relaţii de conexiune finaliste cu ajutorul cărora să putem găsi cauzele şi condiţiile necesare obţinerii efectului.

Unul dintre importanţii beneficiari ai relaţiilor de conexiune finaliste este INGINERIA. Ingineria reprezintă un complex de acţiuni care au drept scop realizarea de materiale, dispozitive şi aparate, linii tehnologice, maşini, construcţii etc. Un atribut esențial al relației (b) este faptul că există o infinitate de procese care pot conduce la starea finală propusă pornind de la o infinitate de stări inițiale. Procesele inginerești se pot realiza într-un număr imens de variante dar arta inginerească constă tocmai în selecționarea acelor căi de rezolvare care să asigure produselor inginerești în mod esențial și necesar : realizabilitate, calitate, fiabilitate, productivitate, economicitate [182] .

Dacă starea finală efect $\mathcal{S}_F$ este o mașină (hidraulică de exemplu) operatorul de evoluție finalist $E_{F,I}$ este structurat în mare prin : concepție, tehnologie și fabricație.

Prezenta teză încearcă dă aducă o contribuție la definitivarea operatorului finalist $E_{F,I}$ pe partea lui privind concepția (studiu, proiectare, analiză), în cazul în care produsul ingineresc (starea finală $\mathcal{S}_F$) este o turbomașină radial-axială.

In precuvîntarea acestei lucrări - îndelung elaborate și fasonate datorită dorinței autorului de a o conecta mereu la ceea ce este mai nou, mai de ultimă oră, în domeniul abordat, și de aceea, intrată într-o inerție care amenința să devină un "perpetuum mobile" al cărui punct final ar fi fost greu de pus - doresc să-mi exprim recunoștința profesională, față de toți cei care m-au înconjurat cu răbdare, înțelegere și tact colegial.

Este greu să încredințez cuvintelor natura complexă a sentimentelor de stimă și afecțiune pe care le nutresc față de mentorul și distinsului meu dascăl, tovarășul academician profesor doctor docent inginer Ioan Anton, a cărui strălucită personalitate științifică mi-a călăuzit și influențat spiritul și capacitatea de muncă și creație de-a lungul anilor, manifestată și în elaborarea prezentei teze; pentru care îi mulțumesc din adîncul inimii.

Adresez colegilor din catedră și colaboratorilor externi, îndeosebi celor de la Centrul de calcul al IPTVT, calde mulțumiri.

Familiei, recunoștință pentru tandra încurajare și statornica-i dragoste.

Conducerii facultății și institutului, omagii respectuoase pentru sprijin și comprehensiune.

Pentru luminoasele perspective și neasemuitele condiții create azi, științei românești, PARTIDULUI, îi mulțumesc.

CAPITOLUL 1

ORIENTARI ACTUALE IN HIDRODINAMICA RETELELOR DE PROFILE RADIAL-AXIALE

1.1 Introducere

Mişcarea fluidelor prin organele paletate ale turbomaşinilor are un caracter complex, spaţial. Abordarea problemei în cazul cel mai general (fluid vîscos, compresibil, mişcare tridimensională, mişcare rotaţională, mişcare turbulentă, mişcare cu evoluţie) este practic imposibilă din cauza dificultăţilor de natură matematică care se ivesc la rezolvarea sistemului diferenţial care exprimă mişcarea. Din acest motiv problemele de hidrodinamica turbomaşinilor au obţinut unele rezolvări numai sub restricţia unor ipoteze simplificatoare legate de structura mişcării şi de proprietăţile fluidului. Greutăţile ce se ivesc în tratarea teoretică a problemelor de hidrodinamică chiar pentru cazuri simple (de exemplu mişcarea potenţială plană în jurul reţelelor de profile axiale) au făcut ca, în proiectarea turbomaşinilor, să fie folosite, mult timp metode şi relaţii extrem de simplificate. Astfel o largă răspîndire are şi în prezent, aşa numita metodă monodimensională sau metoda mărimilor medii care constă în principal în

(i) în cadrul problemei inverse - în determinarea configuraţiei liniilor de curent (în mişcarea absolută sau relativă după caz) admiţînd apriorii variaţia unor parametri hidraulici medii în zonele paletate. Astfel, mult folosite sînt variaţiile $r \cdot v_u = f(r)$ în cazul turbinelor şi $\beta = \beta(r)$ în cazul pompelor.

(ii) în cadrul problemei directe - în calculul variaţiilor principalilor parametri hidraulici medii în lungul canalului (mai ales a vitezelor medii).

Deşi simplistă metoda s-a impus prin marea ei operativitate. Dublată de un vast program de investigaţii experimentale care a permis optimizări (încercări pe variante) şi mai ales de experienţa cumulată de constructorii de turbomaşini în stabilirea acelor variaţii apriori amintite mai înainte, metoda a permis proiectarea unor turbomaşini cu performanţe ridicate. Marele dezavantaj al metodei constă în faptul că rezultatele nu pot fi apreciate decît global. Imposibilitatea de a determina în detaliu mişcarea fluidului în zonele paletate ale turbomaşinilor şi, în consecinţă, de a aduce corecţii locale geometriei maşinii (frontierelor solide) pentru eliminarea erorilor şi dirijarea unor parametrii a dus practic la plafonarea metodei.

1.2 Metode teoretice

Complexitatea problemei şi, în consecinţă, diversa alegere a ipotezelor simplificatoare pentru tratări teoretice a făcut ca metodele de calcul din hidrodinamica organelor paletate ale turbomaşinilor să fie variate. Ele au conturat însă, cu rezultate destul de bune, următoarele trei direcţii principale de abordare teoretică a problemei şi anume :

(i) metoda suprafeţei de curent medii

(ii) metoda bidimensională

(iii) metoda tridimensională

1.2.1 Metoda suprafeţei de curent medii

Metoda suprafeţei de curent medii constă în esenţă în substituirea paletei cu suprafaţa schelet a ei. Aceasta face ca în zonele paletate mişcarea (absolută sau relativă după caz)să poată fi acceptată ca axial simetrică iar suprafaţa schelet a paletei devine suprafaţă de curent pentru această mişcare. Inceputurile se datoresc lui Lorenz [101] şi Bauersfeld [16] care au considerat mişcarea prin rotorul turbomaşinilor ca fiind obţinută prin suprapunerea a două mişcări : una potenţială în planul axial şi una de rotaţie în jurul axei rotorului. Mises [107] , introduce, în cadrul acestei metode un cîmp de forţe corporale care să reprezinte echivalentul acţiunii suprafeţei schelet a paletelor asupra curentului. Pe această linie contribuţii remarcabile aduc Gravalos [68], Vavra [164], Stepanov [155], Raabe [129], Kviatkovski [98] , Sirotkin [145] care a introdus şi efectul grosimii paletelor.Toate acestea au condus la conturarea unor metode de analiză a mişcării prin rotoarele turbomaşinilor radial-axiale (soluţionarea problemei directe) - Sirotkin [145] şi Wood [173] la pompele radial-axiale), Jansen [86] la turbinele Francis, Wada şi colaboratorii [169] la maşinile radial-axiale reversibile. In cadrul problemei inverse o metodă mai perfecţionată a fost iniţiată de Wislicenus [171] (metoda liniei de curent medii) care o apropie însă de teoria reţelelor de profile radial-axiale.

1.2.2 Metoda bidimensională

Metoda bidimensională sau metoda reţelelor de profile radial-axiale, constă în divizarea problemei tridimensionale în două probleme bidimensionale conexe şi anume :

(i) se rezolvă o problemă axial simetrică într-un contur dat (formulare directă) sau se generează şi conturul (formulare inversă) care dă liniile de curent în plan axial.

(ii) se studiază mişcarea fluidului în jurul reţelelor de profile radial-axiale dispuse pe suprafeţe de curent de revoluţie de meridiane - liniile de curent obţinute la 1.2.2.(i); reţele de profile care se obţin prin intersecţia suprafeţelor paletelor cu aceste suprafeţe de curent.

In cadrul acestei metode problema mişcării fluidelor prin rotorii turbomaşinilor a dus la rezolvări complexe permiţînd obţinerea cîmpului de viteze şi presiuni (şi a mărimilor fizice conexe) în tot domeniul mişcării interesînd în mod deosebit frontierele profilelor.

Tratarea directă a problemei pe suprafeţele de curent este extrem de dificilă (mecanica fluidelor într-un spaţiu riemanian bidimensional Aris [14]). Ecuaţiile generale ale mişcării pe suprafeţe de revoluţie apar în lucrările lui Stanitz [153] , Wu [177] Senoo şi Nakase [143] . Cu ajutorul transformărilor conforme rezultate remarcabile au fost obţinute de Spannake [150] , Sorensen [149] dar mai ales de Valander [162] , Stanitz [153] , Viktorov [165] .

O cale fertilă a constituit metoda singularităţilor care a permis rezolvări destul de simple aproximative, pentru o gamă largă de probleme directe şi indirecte. In acest context se înscriu lucrările lui Gruber [69] , Fuzy [63] , Czibere [41] ,Schilhausl [136] pentru reţele radiale de pompe şi Imbach [83], Mansouri [102] , Mur ai [111],[112] pentru reţele radial-axiale.

1.2.3 Metoda tridimensională

Primele tratări teoretice ale mişcării tridimensionale prin organele paletate ale turbomaşinilor apar în lucrările lui Spannake [150] şi Dreyfus [50] . Stanitz [152] , în 1952 prezintă o tratare tridimensională a mişcării prin rotoarele compresoarelor centrifuge, iar Ellis şi Stanitz [53] au dezvoltat metoda realizînd o comparaţie cu metodele bidimensionale şi cu verificări experimentale. O tratare generală şi sistematică a problemei tridimensionale prin rotoare a realizat Wu [179] care a reuşit şi integrarea ecuaţiilor de mişcare în rezolvarea problemei directe.Cu metode variaţionale au abordat problema Krajewski [95] şiStrscheletzky [156] iar Vötter [167] a dezvoltat o metodă numerică de calcul. Dezvoltări în serie pentru soluţionarea problemei au folosit Potetenko [126] şi Raabe [13o] iar metode matriciale Katsanis [89] şi Bessman [2o] care au realizat şi complexe programe de calcul. Pe această linie lucrări importante au fost semnate de Krimerman [97] (mişcarea în compresoare) şi Moore şi colab. [1o9] (mişcarea în rotoarele centrifuge).

1.2.4 <u>Noi direcţii</u>

In ultimele două decenii s-au impus în dinamica fluidelor, datorită marii lor eficacităţi, cîteva metode numerice noi de calcul pe această linie, cele mai reprezentative sînt : metoda elementului finit (M.E.F.) şi mai recent, metoda elementului de margine (M.E.M.) iar în ultimii ani, în combinaţie cu metoda multi-grid (M.M.G.) pentru soluţionarea sistemelor algebrice liniare. Aplicaţii în mecanica fluidelor apar în [22], [39], [4], [12o], [168] (M.E.F.) şi [73], [23] [24], [15], [157] (M.E.M.). Cu aplicaţii în hidrodinamica turbomaşinilor, folosind M.E.F., Hirsch şi Warzee [76], [77] tratează cîmpul hidrodinamic din planul axial al turbomaşinilor; De Vries şi Norrie [168] mişcarea potenţială în jurul profilelor singulare, Kolati şi Voia [93] mişcarea potenţială în jurul reţelelor de profile axiale; Carnevale şi colab. 28 prezintă o metodă quasi tri-dimensională de simulare a mişcării în pompe. In acelaşi context, folosind M.E.M. Brebbia şi colab. [23] determină cîmpul de viteze pe frontiera profilelor hidrodinamice izolate iar Symm [157] şi mult mai complex Hess şi Smith [73] determină mişcarea în jurul profilelor izolate, în jurul reţelelor de profile axiale şi în jurul corpurilor cu suprafaţă de revoluţie.

1.3 <u>Investigaţii experimentale</u>

In paralel cu evoluţia metodelor teoretice de calcul s-au dezvoltat şi numeroase metode de investigaţie experimentală, au apărut staţiuni din ce în ce mai complexe şi aparatură tot mai perfecţionată. Scopul acestor investigaţii experimentale a fost de a elucida unele aspecte fizice legate de curgerea fluidelor prin turbomaşini (rezultate calitative) dar mai ales de a realiza măsurători cît mai precise pentru a putea fi confruntate cu ele metodele teoretice (rezultate cantitative).

Bune rezultate calitative au obţinut Fischer [57] şi Grünagl [7o] care au folosit tehnica fotografierii. Primele măsurări de presiuni în canale rotitoare au fost efectuate de Prian [127] şi Hamrick [72] iar Acosta [1], [2] realizează ample şi îngrijite măsurări în rotorii turbopompelor. Realizări remarcabile privind instalaţiile de măsură legate în special de complexitatea lor şi acurateţea aparaturii de măsură se găsesc în lucrările lui Leist şi Dettmering [99] . Măsurări de viteze şi presiuni în instalaţii complexe apar în lucrările lui Bär [17] , Pfoertner [119], Schlemmer [137],[138] pentru turbine Francis şi Benson [18] pentru turbine cu gaze; toate aceste măsurări au fost comparate cu determinări pe cale analitică. Măsurători mai speciale în turbinele Francis (regimuri tranzitorii, vibraţii) realizează Walter [170] , Furtner [61],[62], Gerich [65],[66]. In cadrul acestor investigaţii experimentale este de remarcat realizarea unor dispozitive de măsură a vitezei şi presiunii tot mai perfecţionate pentru organele rotitoare ale turbomaşinilor precum şi extinderea cîmpului de investigaţie la nivelul stratului limită de pe frontierele solide.

1.4 Hidrodinamica reţelelor de profile radial-axiale

Multiplele preocupări, în cadrul metodei bidimensionale, pentru rezolvarea problemelor de hidrodinamica turbomaşinilor, au dus la constituirea unei teorii a hidrodinamicii reţelelor de profile radial-axiale. Deşi încă în fază de început, această teorie a conturat actualmente trei direcţii de abordare a problemelor şi anume : metoda liniei de curent (liniei de schelet mijlocii), metoda singularităţilor şi metoda transformărilor conforme.

(i) metoda liniei de curent mijlocii, folosită cu precădere la rezolvarea problemei inverse constă în esenţă în determinarea deviaţiei curbei schelet a profilului de pe suprafaţă de la linia de curent medie de pe suprafaţă. Metoda a fost iniţiată, aşa cum am mai amintit de Wislicenus [171] care a şi găsit corelaţii între distribuţia încărcării pe profil, funcţia de grosime a profilului, coeficient de portanţă şi funcţia de deviaţie a scheletului de la linia de curent mijlocie. Metoda a fost dezvoltată de Gearhard [64] , Ervin [54] dar mai ales de Mc Bride [104],[105] care a extins metoda la o gamă largă de încărcări ale profilului, permiţînd analiza distribuţiei de presiuni şi ale stratului limită pe suprafeţele profilelor şi a realizat complexe programe de calcul.

(ii) metoda singularităţilor constă în înlocuirea profilului reţelei radial-axiale cu o dublă distribuţie de surse-absorbţii respectiv circulaţii în lungul unei curbe de pe suprafaţă şi care să aibe ca efect, în cadrul mişcării pe suprafaţă , exact acela al prezenţei profilului. Metoda conduce la ecuaţii foarte complicate pentru cîmpul de viteze care se integrează extrem de greu. Inceputurile au fost prezentate la 1.2.2. Pe suprafeţe conice problema a fost abordată de Imbach [13]şi Mansouri [1o2] care dă şi o metodă aproximativă de rezolvare a problemei inverse (practic dă alegerea unei reţele de geometrie cunoscută şi instalarea ei corectă). Füzy [63] prezintă rezolvarea problemei inverse pentru reţele de profile subţiri (practic reţele de schelete) pentru suprafeţe de revoluţie apropiate de cele conice. Cazul general al suprafeţelor de revoluţie oarecare este tratat de Murai [111] a cărei metodă se distinge prin acurateţe dar este extrem de laborioasă şi greoaie pentru calcule. Soluţiile care dau, de exemplu, distribuţiile de singularităţi se obţin prin dezvoltări în serii de funcţii.

(iii) metoda transformărilor conforme constă, în principal, în comutarea problemei de pe suprafaţa de curent într-un plan asociat cu ajutorul unor schimbări de funcţii şi de variabile. Problema este studiată în acest plan asociat iar rezultatele sînt transpuse apoi pe suprafaţa de revoluţie. Metoda aceasta s-a dovedit fertilă şi în cadrul ei s-au folosit trei procedee mai importante şi anume : funcţiile analitice generalizate; analogia cu ecuaţii cu derivate parţiale ce au soluţii cunoscute şi procedee numerice directe. Transformarea conformă a reţelei radial-axiale într-o reţea liniară plană de anvergură variabilă apare în lucrările lui Wu [176], [177], Viktorov [165] realizează transformarea într-o reţea circulară plană iar Belehova [183] procedeul de transformare conformă a mişcării din planul asociat pe o suprafaţă canonică arbitrară.

Utilizînd funcţiile analitice generalizate în [178] este prezentată extinderea formulei lui Kocin pentru reţele liniare de anvergură variabilă. Aceasta conduce la ecuaţii integrale pentru cîmpul de viteze care pot fi rezolvate prin procedee numerice. O a doua cale este expusă de Viktorov [165] şi ea are la bază asemănarea ecuaţiilor cu derivate parţiale ale funcţiei de curent şi potenţialului vitezei cu ecuaţiile aceloraşi funcţii din mişcarea potenţială plană subsonică a gazelor în care funcţia de grosime a stratului este aproximată cu variaţii liniare sau parabolice. Procedeele numerice directe sînt cele mai eficace şi cele mai aproape de realitate deoarece cu ajutorul lor se obţine integrarea directă a ecuaţiilor de mişcare într-un domeniu cu condiţii la limită impuse.

1.5 Scoala românească de hidrodinamica turbomaşinilor

La eforturile şi realizările obţinute pe plan mondial în complexa problematică a hidrodinamicii turbomaşinilor a contribuit şi şcoala românească prin rezultate remarcabile. Profesorii

Aurel Bărglăzan [184],[185], Dorin Pavel [187],[188], Dumitru Dumitrescu [189],[190] au semnat începuturile şi au creionat direcţiile principale de dezvoltare. Tot lor se datoreşte şi apariţia şi apoi afirmarea puternicei noastre industrii de maşini hidraulice şi echipamente hidromecanice. Rezultate teoretice fundamentale privind teoria profilelor şi reţelelor de profile apar în lucrările lui C.Iacob [82],[85] şi E.Carafoli [25],[26]. Continuarea acestor tradiţii este preluată de colectivele de cadre didactice şi cercetători de la institutele politehnice Timişoara şi Bucureşti şi de la unele centre de cercetare şi proiectare în domeniu (CCSITEH Reşiţa şi IPCUP Ploieşti). La Timişoara lucrări fundamentale abordează I.Anton [7],[5],[6] iar contribuţii importante aduc O.Popa [121],[123], V.Anton [12],[13], M.Gheorghiu [67]. La Bucureşti realizări remarcabile apar în lucrările autorilor M. Cazacu [36], G.Zidaru [178],[179], N.Vasiliu [163], E.Izbăşoiu [84], la Reşiţa în lucrarile lui I.Voia [93],[166] şi C.V.Câmpian [37],[38] iar la Ploieşti în lucrările lui N. Peligrad [116], [117] şi lista specialiştilor români în domeniu poate fi continuată.

1.6 Obiectivele propuse spre rezolvare în cadrul tezei

In cadrul metodelor de abordare a hidrodinamicii turbomaşinilor radial-axiale, perspective fertile deschide metoda reţelelor de profile radial-axiale. In cadrul ei, în rezolvarea problemei directe, deşi preocupările au fost multiple şi variate, apare ca necesară o metodă eficace şi precisă, operativă şi în acelaşi timp elastică, de determinare a mişcării fluidelor în jurul reţelelor radial-axiale, precedată, cu aceleaşi atribute, de determinarea suprafeţelor de revoluţie suport ale mişcării. Metoda ar permite analize locale, la diverse modificări ale parametrilor mişcării, şi intervenţii operative pentru dirijarea unor parametrii în vederea obţinerii rezultatelor dorite. Pentru soluţionarea totală şi complexă a problemei a fost ales un procedeu numeric direct şi anume metoda elementului finit. Ca turbomaşină radial-axială de studiu a fost aleasă turbina Francis (deci reţele radial-axiale de turbină) iar consideraţiile privind mişcarea prin organele paletate ale maşinii au fost făcute în următoarele ipoteze :

(i) fluid perfect
(ii) fluid incompresibil
(iii) forţe corporale exterioare (masice) neglijabile
(iv) mişcare absolută potenţială

(v) mişcare fără evoluţie (permanentă)

(vi) turaţia rotorului constantă - mişcare relativă permanentă

(vii) în lipsa paletelor mişcarea este axial-simetrică

(viii) suprafeţele de curent sînt de revoluţie

(ix) mişcarea este uniformă la t/2 de amontele respectiv avalul reţelei

Soluţionarea problemei directe a reţelelor radial-axiale, fixe şi mobile, cu ajutorul metodei elementului finit şi realizarea, în acest scop, a complexe programe de calcul, este obiectivul fundamental al prezentei teze.

Lista notaţiilor

$a_\alpha ; b_\alpha$ = funcţiile de interpolare globală pe Ω

$a_\alpha^* ; b_\alpha^*$ = funcţiile de interpolare globală pe Γ

$a_N^e ; b_N^e$ = funcţiile de interpolare locală pe Ω^e

$a_N^{*e} ; b_N^{*e}$ = funcţiile de interpolare locală pe Γ^e

b = lăţimea de intrare în domeniul rotorului Francis

C_μ = coeficienţi polinomiali

$D_{\alpha\beta}$ = coeficienţii sistemului liniar global

D_{NM} = coeficienţii sistemului liniar local

$f_{/i}$ = derivata funcţiei f în raport cu coordonata carteziană x_i

$f_{/n}$ = derivata normală a funcţiei f

$f_{/r} ; f_{/\theta} ; f_{/z}$ = derivata în raport cu respectiv r, θ, z

F_α = termenii liberi ai sistemului liniar global

F_α^Γ = termenii liberi ai sistemului liniar global daţi de elementele de pe frontieră

F_α^Ω = termenii liberi suplimentari ai sistemului liniar global

F_N^e = termenii liberi ai sistemului liniar local

$F_N^{e\Gamma}$ = termenii liberi ai sistemului liniar local pe elementele de pe frontieră

$F_N^{e\Omega}$ = termenii liberi suplimentari ai sistemului liniar local

g_{ij} = tensorul metric

h = funcţia de grosime a stratului de fluid

h_i = factorii de scară

$|J|$ = iacobian

ℓ = lungimea frontierei de intrare a elementului finit

L = extinderea axială a domeniului rotorului turbinei Francis

L^R = extinderea radială a domeniului rotorului turbinei Francis

m = gradul polinomului de aproximare

N = numărul paletelor rotorului

p = presiune

p^{AM} = presiunea la intrarea în domeniu

$\bar{p} ; \bar{\bar{p}}$ = coeficienţi de presiune

q_k = valori cunoscute pentru ψ (sau φ)

q^i = coordonate curbilinii ortogonale

Q = debitul

$\bar{Q}_o$ = debitul ce iese ortogonal din planul asociat

r = rază

r, θ, z = coordonate cilindrice

r_0 = raza corespunzătoare originii sistemului de coordonate curbilinii

t = pasul rețelei

s = arcul de curbă

S_i = suprafețele de coordonate

u = viteza periferică

v = viteza absolută

$v^i_{/ /j}$ = derivata covariantă a vectorului covariant v^i

$\bar{v}, \bar{\bar{v}}$ = viteze adimensională

v^{AM} = viteza absolută la intrarea în domeniu

v^{AV} = viteza absolută la ieșirea din domeniu

w = viteză relativă

w_i = coeficienți de pondere

$\bar{w}$ = viteza relativă adimensională

w^{AM} = viteza relativă la intrarea în domeniu

w^{AV} = viteza relativă la ieșirea din domeniu

$\bar{w}, \bar{\bar{w}}$ = viteze relative adimensionale

x_i = coordonate carteziene

Γ = frontiera domeniului

Γ^e = frontiera elementului finit

Γ^v = circulația vitezei

δ_{ij} = delta Kronecker

$\Delta^e_{N\alpha}$ = matricea Booleană a elementului finit

ε_{ij} = tensorul lui Ricci de ordinul 2

ε^{ijk} = tensorul lui Ricci contravariant de ordinul 3

φ = potențialul vitezei

ξ_i = coordonate naturale

ξ, η = coordonate naturale

ψ = funcție de curent

ρ = densitatea fluidului

ω = viteză unghiulară

Ω = domeniul de analiză

Ω^e = elementul finit

<u>Indici superiori</u>

A = în dreptul bordului de atac al profilului

AM = intrarea în domeniu

AV = ieșirea din domeniu

F = în dreptul bordului de fugă al profilului

e = element finit

i = componentă contravariantă

(k) = iteraţie de ordin k

$*$ = valoare adimensională

<u>Indici inferiori</u>

$|_{AB}$ = în lungul arcului AB

i = componenta carteziană i a vectorului

(i) = componenta fizică i a vectorului

$IF \rightarrow EP$ = salt de la zona IF la zona EP

N, M = noduri în numărarea locală

α, β = noduri în numărarea globală

$(\;)$ = valori fizice ale mărimilor de pe suprafaţa de revol

CAPITOLUL 2

MISCAREA PLANA SI AXIAL-SIMETRICA A LICHIDELOR IDEALE

2.1 Mişcarea plană

Dacă 012 este planul de bază al mişcării evident

$$x_3 = v_3 = 0 \tag{2.1}$$

iar mişcarea fiind izocoră, ecuaţia de continuitate dă

$$v_{i/i} = v_{1/1} + v_{2/2} = 0 \tag{2.2}$$

2.1.1 Funcţia de curent

(2.2) permite introducerea funcţiei de curent ψ prin

$$\psi = \int \varepsilon_{ij} v_i \, dx_j \tag{2.3}$$

iar din

$$d\psi = \psi_{/i} dx_i = \varepsilon_{ij} v_i \, dx_j \tag{2.4}$$

rezultă cîmpul de viteze

$$v_i = \varepsilon_{ij} \psi_{/j} \tag{2.5}$$

2.1.2 Mişcarea potenţială plană

In cazul particular al acestei mişcări cîmpul de viteze admite o funcţie φ , numit potenţialul vitezei, dat de

$$v_i = \varphi_{/i} \tag{2.6}$$

care verifică identic

$$\varepsilon_{ij} v_{j/i} = 0 \tag{2.7}$$

In acest caz avem legătura între ψ şi φ

$$\varphi_{/i} = \varepsilon_{ij} \psi_{/j} \tag{2.8}$$

2.1.3 Ecuaţiile lui Laplace pentru mişcarea potenţială plană

Din (2.7) şi (2.5) rezultă imediat ecuaţia lui Laplace pentru funcţia de curent

$$\varepsilon_{ij} v_{j/i} = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \psi_{/ki} = -\delta_{ik} \psi_{/ki} = -\psi_{/ii} \tag{2.9}$$

$$\psi_{/ii} = 0 \tag{2.10}$$

iar din (2.2) şi (2.6) ecuaţia lui Laplace pentru potenţialul vitezei

$$\varphi_{/ii} = 0 \tag{2.11}$$

2.1.4 Linii de curent şi linii de egal potenţial al vitezei. Cîmpul hidrodinamic (spectrul hidrodinamic) al mişcării plane

Din (2.4) se obţine că curbele ψ = const sînt linii de curent

$$v_1 dx_2 = v_2 dx_1 \tag{2.12}$$

iar diferenţa $\psi_a - \psi_b$ reprezintă debitul de lichid ce curge printre cele două linii de curent. Curbele φ = const sînt ortogonale pe curbele ψ = const. Intr-adevăr cu (2.8) rezultă

$$\varphi_{/i}\psi_{/i} = \varphi_{/1}\psi_{/1} + \varphi_{/2}\psi_{/2} = \varepsilon_{12}\psi_{/2}\psi_{/1} + \varepsilon_{21}\psi_{/1}\psi_{/2} = 0 \tag{2.13}$$

Ansamblul familiilor de curbe ψ = const şi φ = const defineşte cîmpul (sau spectrul) hidrodinamic al unei mişcări plane.

2.1.5 Mişcarea rotaţională plană

Singura componentă nenulă a lui $rot\,\vec{v} = \vec{\omega}$ dat de

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} v_{k/j} \tag{2.14}$$

este $\omega_3 = \omega$

$$\omega_3 = \varepsilon_{3ij} v_{j/i} = \varepsilon_{ij} v_{j/i} = \omega \tag{2.15}$$

şi care cu (2.9) duce la ecuaţia lui Poisson pentru funcţia de curent

$$\psi_{/ii} + \omega = 0 \tag{2.16}$$

2.2 Mişcarea axial-simetrică

Structura axial-simetrică a mişcării definită prin

$$v_{i/\theta} = 0 \tag{2.17}$$

sugerează folosirea unui sistem de coordonate cilindrice. Dacă 0123 este un sistem de coordonate carteziene de bază $\vec{e}_i$, $i=1,2,3$ atunci pentru un punct arbitrar M vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM}$ este dat de

$$\overrightarrow{OM} = x_i \vec{e}_i \tag{2.18}$$

Intr-un sistem de coordonate curbilinii ξ_i, i=1,2,3 de bază $\vec{g}_i$, i=1,2,3 avem legătura

$$\vec{g}_i = \frac{\partial x_m}{\partial \xi_i}\vec{e}_m \quad ; m = 1,2,3 \tag{2.19}$$

Pentru coordonatele cilindrice

$$\begin{cases} \xi_1 = r & \text{(radial)} \\ \xi_2 = \theta & \text{(tangenţial)} \\ \xi_3 = z & \text{(axial)} \end{cases} \tag{2.20}$$

şi avem trecerea

520488
226 E

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \\ x_3 = z \end{cases} \tag{2.21}$$

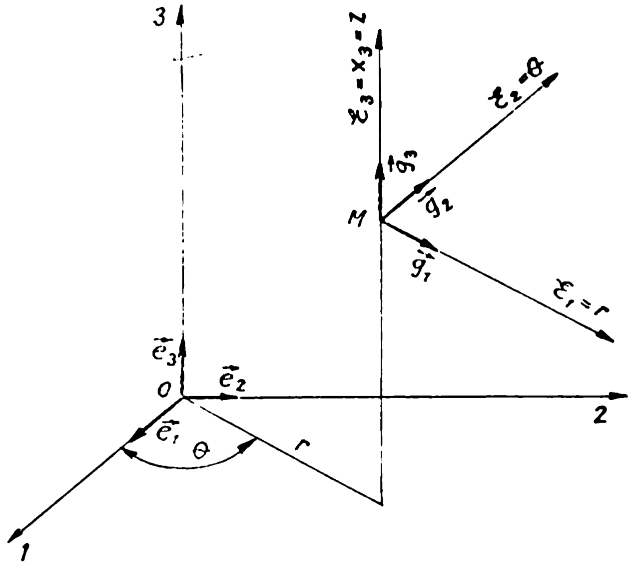


Fig.2.1 Sistemul de coordonate cilindrice

deci (2.18) devine

$$\vec{OM} = r\cos\theta\,\vec{e}_1 + r\sin\theta\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3 \tag{2.22}$$

şi defineşte metrica, în componente covariante de exemplu, prin

$$g_{ij} = \frac{\partial x_m}{\partial x_i}\,\frac{\partial x_m}{\partial x_j} \tag{2.23}$$

adică

$$g_{11} = g_{33} = 1\ ;\ g_{22} = r^2 \quad \text{iar toţi ceilalţi } g_{ij} = 0 \tag{2.24}$$

şi conexiunea prin

$$\Gamma^i_{jk} = g^{il}\,\Gamma_{jkl} = \frac{1}{2} g^{il}\left(g_{lj/k} + g_{lk/j} - g_{jl/k}\right) \tag{2.25}$$

adică

$$\Gamma^1_{22} = -r\ ;\ \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = r^{-1} \quad \text{iar toţi ceilalţi } \Gamma^i_{jk} = 0 \tag{2.26}$$

Ecuaţia de continuitate pentru lichide scrisă în coordonate arbitrare (în componente contravariante ale vitezei,de exemplu)

$$\frac{\partial v^i}{\partial \xi_i} + \Gamma^i_{ij} v^j = 0 \tag{2.27}$$

folosind (2.24) şi (2.26) şi trecerea la componente fizice ale vitezei $\overset{*}{v}{}^i$ prin

$$v^i = \left(g^{ii}\right)^{1/2} \overset{*}{v}{}^i \qquad \text{(fără sumare după i)} \tag{2.28}$$

dă pentru cazul coordonatelor cilindrice $v^1 = v_r;\ v^2 = v_\theta;\ v^3 = v_z$

$$v_{r/r} + r^{-1} v_{\theta/\theta} + v_{z/z} + r^{-1} v_r = 0 \tag{2.29}$$

şi care cu (2.17) se reduce la

$$v_{r/r} + v_{z/z} + r^{-1} v_r = 0 \tag{2.3o}$$

2.2.1 Funcţia de curent

(2.3o) permite introducerea funcţiei de curent ψ prin

$$\psi = \int (r v_z\, dr - r v_r\, dz) \tag{2.31}$$

iar din

$$d\psi = \psi_{/r} dr + \psi_{/z} dz = r v_z\, dr - r v_r\, dz \tag{2.32}$$

rezultă cîmpul de viteze

$$\begin{aligned} v_z &= r^{-1} \psi_{/r} \\ v_r &= -r^{-1} \psi_{/z} \end{aligned} \tag{2.33}$$

2.2.2 Mişcarea potenţială axial simetrică

Analog cu cele de la 2.1.2 se poate introduce şi aici potenţialul φ al vitezei din care

$$\begin{aligned} v_z &= \varphi_{/z} \\ v_r &= \varphi_{/r} \end{aligned} \tag{2.34}$$

şi care verifică identic

$$\varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \xi_i} + \Gamma^j_{ik} v^k \right) g^{-1/2} = 0 \tag{2.35}$$

In acest caz avem legătura între ψ şi φ

$$\begin{aligned} \varphi_{/z} &= r^{-1} \psi_{/r} \\ \varphi_{/r} &= -r^{-1} \psi_{/z} \end{aligned} \tag{2.36}$$

2.2.3 Ecuaţiile lui Stokes pentru mişcarea potenţială axial-simetrică

Folosind (2.24) şi (2.26) şi trecerea la componentele fizice ale vitezei dată de (2.28) se obţin componentele fizice ale lui $\vec{\omega}$

$$\omega_r = v_{\theta/z} - r^{-1} v_{z/\theta} \tag{2.37}$$

$$\omega_\theta = v_{z/r} - v_{r/z} \tag{2.38}$$

$$\omega_z = r^{-1} v_{r/\theta} - r^{-1} (r v_\theta)_{/r} \tag{2.39}$$

Inlocuind (2.33) în (2.38) şi egalînd cu zero se obţine ecuaţia lui Stokes pentru funcţia de curent

$$\psi_{/rr} + \psi_{/zz} - r^{-1} \psi_{/r} = 0 \tag{2.4o}$$

Inlocuind (2.34) în (2.3o) se obţine ecuaţia lui Stokes pentru potenţialul vitezei

$$\varphi_{/rr}+\varphi_{/zz}+r^{-1}\varphi_{/r}=0 \tag{2.41}$$

2.2.4 Linii de curent şi linii de egal potenţial al vitezei. Cîmpul hidrodinamic al mişcării potenţiale axial-simetrice

Din (2.17) şi (2.32) rezultă că într-un plan axial arbitrar curbele ψ = const sînt linii de curent

$$v_z\,dr=v_r\,dz \tag{2.42}$$

iar $2\pi\cdot(\psi_a-\psi_b)$ reprezintă debitul de lichid ce curge printre cele două suprafeţe de revoluţie de meridian respectiv cele două linii de curent. Curbele ψ = const sînt ortogonale pe φ = const într-un plan axial arbitrar. Intr-adevăr cu (2.36) rezultă

$$\varphi_{/i}\psi_{/i}=\varphi_{/z}\psi_{/z}+\varphi_{/r}\psi_{/r}=r^{-1}\psi_{/r}\psi_{/z}-r^{-1}\psi_{/z}\psi_{/r}=0 \tag{2.43}$$

Ansamblul familiilor de curbe ψ = const şi φ = const defineşte într-un plan axial arbitrar, cîmpul hidrodinamic al unei mişcări axial-simetrice.

2.2.5 Suprafeţe de curent şi suprafeţe de egal potenţial al vitezei

Dacă $z = f(r)$ este ecuaţia, în plan axial, a unei curbe ψ = const atunci suprafaţa de revoluţie

$$\begin{cases} x_1=r\cos\theta \\ x_2=r\sin\theta \\ x_3=f(r) \end{cases} \tag{2.44}$$

este o suprafaţă de curent. Analog dacă $z = g(r)$ este ecuaţia, în plan axial, a unei curbe φ = const atunci suprafaţa de revoluţie

$$\begin{cases} x_1=r\cos\theta \\ x_2=r\sin\theta \\ x_3=g(r) \end{cases} \tag{2.45}$$

este o suprafaţă de egal potenţial al vitezei. Aceste două suprafeţe sînt ortogonale şi pe ele liniile de coordonate θ = constant sînt meridianele iar r = constant sînt paralelele.

CAPITOLUL 3

DETERMINAREA CIMPULUI HIDRODINAMIC PRIN ROTORII TURBINELOR FRANCIS UTILIZIND M.E.F.

3.1 Generalităţi

Ipoteza că suprafeţele de curent din zona rotorilor turbinelor Francis sînt suprafeţe de revoluţie permite substituirea studiului curgerii prin reţeaua de palete rotorice cu studiul unei reţele de profile radial axiale. Această reţea de profile radial axială, dispusă pe suprafeţele de curent, se obţine din intersecţia suprafeţelor paletelor rotorice cu aceste suprafeţe de curent. Aceasta face ca în zona rotorului, considerat în această fază ca fiind nepaletat, mişcarea lichidului ideal să poată fi acceptată ca potenţială şi axial-simetrică.

3.2 Domeniul tipic din zona rotorului. Condiţii la limită

Pentru rotorii turbinelor Francis domeniul de curgere are o formă tipică. Gabaritul lui este definit de extinderea radială L^R şi de cea axială L.

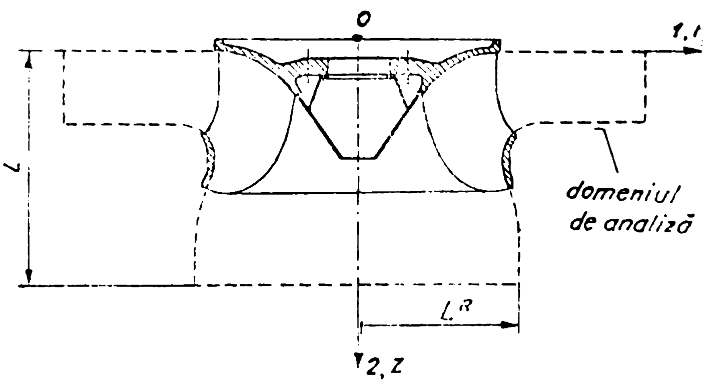


Fig.3.1 Rotorul turbinelor Francis

Cum ecuaţiile (2.40) şi (2.41) sînt în două variabile z şi r raportăm domeniul la un reper plan carteziam 012 cu identificarea

$$z = x_1 \; ; r = x_2 \tag{3.1}$$

3.2.1 Formularea în funcţia de curent

Datorită simetriei este suficient să considerăm doar primul cadran. Punctele A,B,C,D impart frontiera Γ a domeniului Ω în patru părţi. Astfel AD şi BC sînt linii de curent, AB este secţiunea de influx iar CD secţiunea de flux.

Cu (3.1), ecuaţia (2.40) şi relaţiile (2.33) se scriu

$$v_i = x_2^{-1} \varepsilon_{ij} \psi_{/j} \tag{3.3}$$

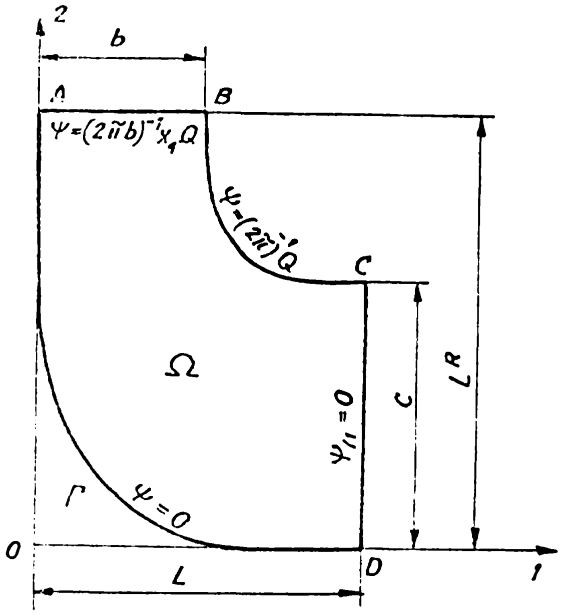


Fig.3.2 Domeniul tipic. Condiţii la limită pentru funcţia ψ .

...ndiţiile la limită pentru funcţia ψ sînt

$$\begin{cases} \psi = \text{constant} & \text{pe } AD \text{ şi } BC \\ \psi = \psi(x_1) & \text{pe } AB \\ \psi_{/1} = 0 & \text{pe } CD \end{cases} \tag{3.4}$$

...vem deci de rezolvat o problemă la limită mixtă pe domeniul Ω pen-...ru ecuaţia (3.2) cu funcţia necunoscută ψ cu condiţii la limi-...ă esenţiale (Dirichlet) pe părţile AD, BC şi AB ale frontierei Γ ...lui Ω şi cu condiţii la limită naturale (Neumann) pe partea CD ...frontierei. Pentru cazul nostru vom impune

$$\begin{cases} \psi = 0 & \text{pe } AD \\ \psi = (2\pi)^{-1} Q & \text{pe } BC \\ v_2 = \text{constant} & \text{pe } AB \\ \psi_{/1} = 0 & \text{pe } CD \end{cases} \tag{3.5}$$

...in (3.3) însă

$$v_2 = -x_2^{-1} \psi_{/1} = -x_2^{-1} \frac{d\psi}{dx_1} \tag{3.6}$$

...zultă

$$\psi = -v_2 x_1 x_2 + C(x_2) \tag{3.7}$$

...

$$\psi(0, L^R) = 0 \quad \text{şi} \quad \psi(b, L^R) = (2\pi)^{-1} Q \tag{3.8}$$

...utem determina pe $C(x_2)$ şi v_2 după AB

$$v_2 = -(2\pi b L^R)^{-1} \cdot Q \quad \text{și} \quad C(x_2) = 0 \tag{3.9}$$

Cu acestea (3.7) devine

$$\psi = (2\pi b L^R)^{-1} \cdot x_1 x_2 Q \tag{3.10}$$

iar (3.5)

$$\begin{cases} \psi = 0 & \text{pe } AD \\ \psi = (2\pi)^{-1} \cdot Q & \text{pe } BC \\ \psi = (2\pi b)^{-1} \cdot x_1 \cdot Q & \text{pe } AB \\ \psi_{/1} = 0 & \text{pe } CD \end{cases} \tag{3.11}$$

3.2.2 <u>Formularea în potențialul vitezei</u>

Cu (3.1) ecuația (2.41) și relațiile (2.34) devin

$$\varphi_{/11} + \varphi_{/22} + x_2^{-1} \varphi_{/2} = 0 \tag{3.12}$$

$$v_i = \varphi_{/i} \tag{3.13}$$

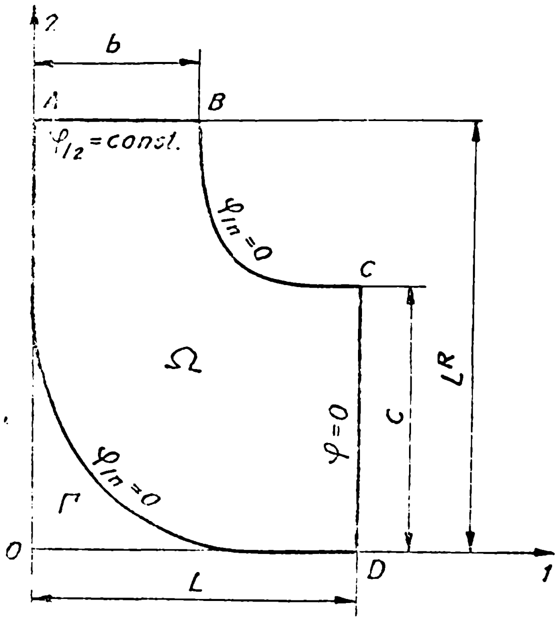


Fig.3.3 Domeniul tipic.Condiții la limită pentru funcția φ .

Condițiile la limită pentru funcția φ sînt

$$\begin{cases} \varphi = 0 & \text{pe } CD \\ \varphi_{/2} = \text{constant} & \text{pe } AB \\ \varphi_{/n} = 0 & \text{pe } BC \text{ și } AD \end{cases} \tag{3.14}$$

Avem deci de rezolvat o problemă la limită mixtă pe domeniul Ω pentru ecuația (3.12) cu funcția necunoscută φ cu condiții la limită esențiale pe partea CD a frontierei Γ și condiții la limită naturale pe părțile AB, BC și AD. Pentru cazul nostru vom impune

$$\begin{cases} \varphi = 0 & \text{pe } CD \\ v_2 = \text{constant} & \text{pe } AB \\ \varphi_{/n} = 0 & \text{pe } BC \text{ și } AD \end{cases} \tag{3.15}$$

în care v_2 este dat de (3.9).

3.3 Tratarea în formă adimensională

Pentru a mări generalitatea este utilă comutarea problemei în formă adimensională.

3.3.1 Formularea în funcția de curent

Cu schimbarea de variabilă

$$x_i^* = x_i L^{-1} \tag{3.16}$$

și de funcție

$$\psi^* = 2\pi Q^{-1} \cdot \psi \tag{3.17}$$

(3.2) și (3.3) devin

$$\psi^*_{/1^*1^*} + \psi^*_{/2^*2^*} - x_2^{*-1} \cdot \psi^*_{/2^*} = 0 \tag{3.18}$$

$$v_i^* = x_2^{*-1} \varepsilon_{ij^*} \psi^*_{/j^*} \tag{3.19}$$

iar condițiile la limită (3.11)

$$\begin{cases} \psi^* = 0 & \text{pe } AD \\ \psi^* = 1 & \text{pe } BC \\ \psi^* = x_i^* \cdot b^{*-1} & \text{pe } AB \\ \psi^*_{/1^*} = 0 & \text{pe } CD \end{cases} \tag{3.20}$$

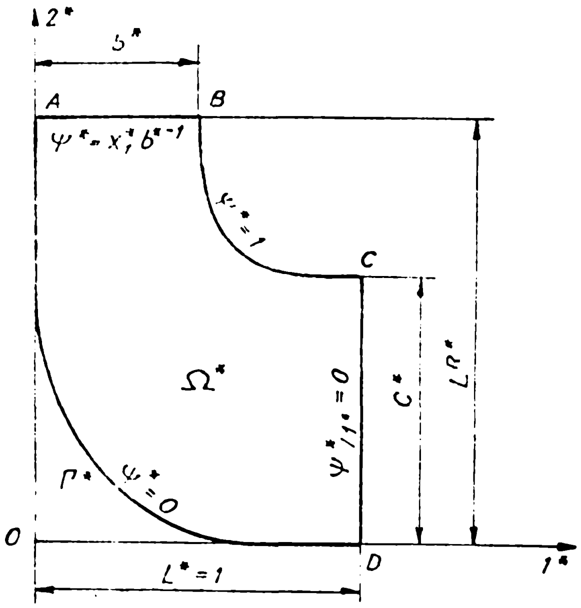


Fig.3.4 Condiții la limită pentru funcția ψ^*.

Relațiile (3.16), (3.17) și (3.19) dau imediat și legătura între viteze

$$v_i^* = 2\pi L^2 \cdot Q^{-1} \cdot v_i$$

şi viteza constantă v_2^* pe partea AB a frontierei

$$v_2^* = -b^{*-1} \cdot L^{R^*-1}$$

3.3.2 Formularea în potenţialul vitezei

Cu schimbarea de variabilă (3.16) şi de funcţie

$$\varphi^* = 2\pi L Q^{-1} \cdot \varphi \tag{3.23}$$

(3.12) şi (3.13) devin

$$\varphi^*_{/1^*1^*} + \varphi^*_{/2^*2^*} + x_2^{*-1} \varphi^*_{/2^*} = 0$$

$$v_i^* = \delta_{ii^*} \varphi^*_{/i^*} \tag{3.24}$$

iar condiţiile la limită (3.15)

$$\begin{cases} \varphi^* = 0 & \text{pe } CD \\ v_2^* = \text{constant} & \text{pe } AB \\ \varphi^*_{/n} = 0 & \text{pe } BC \text{ şi } AD \end{cases} \tag{3.25}$$

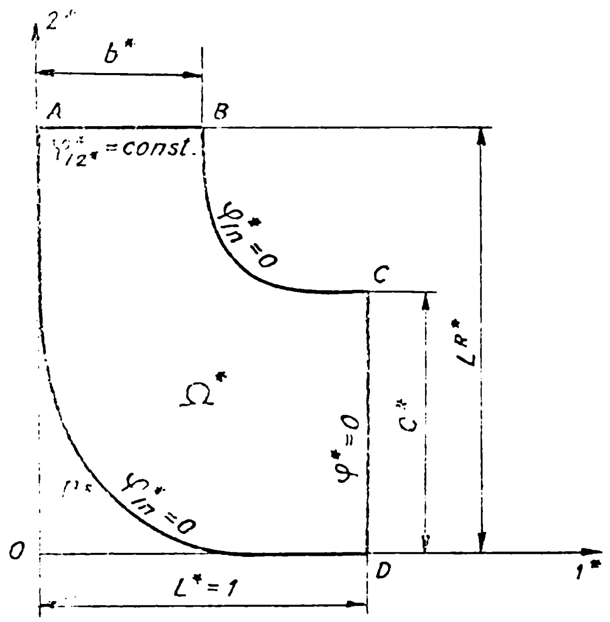


Fig.3.5 Condiţii la limită pentru funcţia φ^*.

Rămîn valabile relaţiile (3.21) şi (3.22).

3.4 Integrarea ecuaţiei lui Stokes prin M.E.F.

M.E.F. este o metodă numerică de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale sau cu derivate parţiale cu condiţii la limită prescrise. Cu ajutorul ei se obţine o soluţie aproximativă a problemei, în formă discretă.

3.4.1 Formularea în funcţia de curent

Vom folosi tratarea în formă adimensională dată de 3.3.1 în care, fără nici un pericol de confuzie, vom renunţa la notare cu asterisc. Să reluăm, deci, ecuaţia (3.18) cu condiţiile la limită (3.2o). Funcţia ψ poate fi aproximată global pe Ω prin

$$\psi = a_\alpha \psi_\alpha \qquad \alpha = \overline{1,G} \tag{3.26}$$

unde G este numărul de puncte (noduri) de pe Ω. Aplicînd metoda lui Galerkin rezultă [22], [39]

$$\int_\Omega (\psi_{/ii} - x_2^{-1}\psi_{/2})\, a_\alpha \, d\Omega = 0 \tag{3.27}$$

din care, integrînd prin părţi, se obţine

$$\int_\Omega \psi_{/i} a_{\alpha/i}\, d\Omega + 2\int_\Omega x_2^{-1} \psi_{/2} a_\alpha \, d\Omega - \int_\Gamma \psi_{/i} n_i a_\alpha^* \, d\Gamma \tag{3.28}$$

în care a_α sînt funcţiile de interpolare globală, a_α^* funcţiile de interpolare globală pe frontiera Γ a lui Ω iar ψ_α valoarea lui ψ în nodul α. Folosind (3.26) ecuaţia (3.28) devine

$$\psi_\beta \int_\Omega a_{\beta/i} a_{\alpha/i}\, d\Omega + 2\psi_\beta \int_\Omega x_2^{-1} a_{\beta/2} a_\alpha \, d\Omega = \int_\Gamma \psi_{/i} n_i a_\alpha^* \, d\Gamma \tag{3.29}$$

adică sistemul liniar

$$D_{\alpha\beta}\psi_\beta = F_\alpha \qquad \alpha,\beta = \overline{1,G} \tag{3.3o}$$

în care coeficienţii $D_{\alpha\beta}$ sînt daţi de

$$D_{\alpha\beta} = \int_\Omega a_{\alpha/i} a_{\beta/i}\, d\Omega + 2\int_\Omega x_2^{-1} a_\alpha a_{\beta/2}\, d\Omega \qquad \alpha,\beta = \overline{1,G} \tag{3.31}$$

iar termenii liberi

$$F_\alpha = \int_\Gamma \psi_{/i} n_i a_\alpha^* \, d\Gamma \qquad \alpha = \overline{1,G} \tag{3,32}$$

Fie acum o discretizare a lui Ω într-un număr E de domenii (elemente) finite Ω^e cu frontierele Γ^e astfel ca

$$\mathring{\Omega}^e \cap \mathring{\Omega}^f = \emptyset \qquad \text{dacă } e \neq f \tag{3.33}$$

$$\bigcup_{e=1}^{E} \overline{\Omega}^e = \overline{\Omega} \qquad \text{cu } \overline{\Omega}^e = \mathring{\Omega}^e \cup \Gamma^e \tag{3.34}$$

Analog cu cele precedente funcţia ψ poate fi aproximată local pe fiecare element finit Ω^e prin

$$\psi^e = a_N^e \psi_N^e \qquad N = \overline{1,F} \tag{3.35}$$

în care a_N^e sînt funcţiile de interpolare locală, ψ_N^e valoarea lui ψ^e în nodul N a lui Ω^e iar F numărul de noduri a lui Ω^e. Procedînd similar cu cele de mai înainte obţinem pe fiecare element finit

$$\int_{\Omega^e}(\psi^e_{/ii} - x_2^{-1}\psi^e_{/2})a^e_N \, d\Omega^e = 0 \tag{3.36}$$

care integrată prin părţi conduce la ecuaţia

$$\int_{\Omega^e}\psi^e_{/i}a^e_{N/i}\, d\Omega^e + 2\int_{\Omega^e}x_2^{-1}\psi^e_{/2}a^e_N \, d\Omega^e - \int_{\Gamma^e}\psi^e_{/i}n_i a^{*e}_N \, d\Gamma^e = 0 \tag{3.37}$$

şi care cu (3.35) devine

$$\psi^e_M\int_{\Omega^e}a^e_{N/i}a^e_{M/i}\, d\Omega^e + 2\psi^e_M\int_{\Omega^e}x_2^{-1}a^e_N a^e_{M/2}\, d\Omega^e = \int_{\Gamma^e}\psi^e_{/i}n_i a^{*e}_N \, d\Gamma^e \tag{3.38}$$

Am obţinut local sistemul liniar

$$D^e_{NM}\psi^e_M = F^e_N \qquad N,M = \overline{1,F} \tag{3.39}$$

în care

$$D^e_{NM} = \int_{\Omega^e}a^e_{N/i}a^e_{M/i}\, d\Omega^e + 2\int_{\Omega^e}x_2^{-1}a^e_N a^e_{M/2}\, d\Omega^e \qquad N,M = \overline{1,F} \tag{3.40}$$

iar termenii liberi

$$F^e_N = \int_{\Gamma^e}\psi^e_{/i}n_i a^{*e}_N \, d\Gamma^e \qquad N = \overline{1,F} \tag{3.41}$$

Trecerea de la sistemul local (3.39) la cel global (3.30) care dă rezolvarea problemei, se face cu ajutorul matricilor Booleene $\Delta^e_{N\alpha}$ pentru fiecare element finit. Astfel, cum

$$\psi = \sum_{e=1}^{E}\psi^e = \sum_{e=1}^{E}a^e_N\psi^e_N \tag{3.42}$$

avem legătura

$$\psi^e_N = \Delta^e_{N\alpha}\psi_\alpha \tag{3.43}$$

respectiv

$$\psi_\alpha = \sum_{e=1}^{E}\Delta^e_{N\alpha}\psi^e_N \tag{3.44}$$

iar coeficienţii $D_{\alpha\beta}$ sînt daţi de

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{e=1}^{E}D^e_{NM}\Delta^e_{N\alpha}\Delta^e_{M\beta} \tag{3.45}$$

iar termenii liberi F_α de

$$F_\alpha = \sum_{e=1}^{E}F^e_N\Delta^e_{N\alpha} \tag{3.46}$$

Din (3.42), (3.43) şi (3.26) se obţine şi legătura dintre a_α şi

$$a_\alpha = \sum_{e=1}^{E}a^e_N\Delta^e_{N\alpha} \tag{3.47}$$

3.4.2 Formularea în potenţialul vitezei

Cu aceleaşi precizări de la începutul lui 3.4.1 să reluăm ecuaţia (3.24) cu condiţiile la limită (3.25). Funcţia φ poate fi aproximată global pe Ω prin

$$\varphi = b_\alpha\varphi_\alpha \qquad \alpha = \overline{1,G} \tag{3.48}$$

Aplicînd metoda lui Galerkin rezultă

$$\int_{\Omega}(\varphi_{/ii}+x_2^{-1}\varphi_{/2})b_\alpha\, d\Omega=0 \tag{3.49}$$

iar, integrînd prin părţi

$$\int_{\Omega}\varphi_{/i}b_{\alpha/i}\, d\Omega-\int_{\Gamma}\varphi_{/i}n_i b_\alpha^*\, d\Gamma=0 \tag{3.50}$$

Cu (3.48) ecuaţia (3.5o) conduce la

$$\varphi_\beta\int_{\Omega}b_{\beta/i}b_{\alpha/i}\, d\Omega=\int_{\Gamma}\varphi_{/i}n_i b_\alpha^*\, d\Gamma \tag{3.51}$$

adică tot un sistem liniar de forma (3.3o) în care coeficienţii $D_{\alpha\beta}$ sînt daţi de

$$D_{\alpha\beta}=\int_{\Omega}b_{\alpha/i}b_{\beta/i}\, d\Omega \qquad \alpha,\beta=\overline{1,G} \tag{3.52}$$

iar termenii liberi F_α de

$$F_\alpha=\int_{\Gamma}\varphi_{/i}n_i b_\alpha^*\, d\Gamma \tag{3.53}$$

In relaţiile precedente b_α sînt funcţiile de interpolare globală, b_α^* funcţiile de interpolare globală pe frontieră iar φ_α valoarea lui φ în nodul α . Fie acum o discretizare a lui Ω dată de (3.33) şi (3.34). Funcţia φ poate fi aproximată local prin

$$\varphi^e=b_N^e\varphi_N^e \qquad N=\overline{1,F} \tag{3.54}$$

Procedînd similar cu cele de la 3.4.1 se obţine pentru fiecare element finit

$$\int_{\Omega^e}(\varphi_{/ii}^e+x_2^{-1}\varphi_{/2}^e)b_N^e\, d\Omega^e=0 \tag{3.55}$$

care integrată prin părţi dă

$$\int_{\Omega^e}\varphi_{/i}^e b_{N/i}^e\, d\Omega^e-\int_{\Gamma^e}\varphi_{/i}^e n_i b_N^{*e}\, d\Gamma^e=0 \tag{3.56}$$

din care, cu (3.54), obţinem

$$\varphi_M^e\int_{\Omega^e}b_{N/i}^e b_{M/i}^e\, d\Omega^e=\int_{\Gamma^e}\varphi_{/i}^e n_i b_N^{*e}\, d\Gamma^e \tag{3.57}$$

adică tot un sistem liniar de forma (3.39) în care coeficienţii D_{NM}^e sînt daţi de

$$D_{NM}^e=\int_{\Omega^e}b_{N/i}^e b_{M/i}^e\, d\Omega^e \tag{3.58}$$

iar termenii liberi F_N^e de

$$F_N^e=\int_{\Gamma^e}\varphi_{/i}^e n_i b_N^{*e}\, d\Gamma^e \tag{3.59}$$

Trecerea de la sistemul local la cel global se face tot cu ajutorul matricilor Booleene $\Delta^e_{N\alpha}$. Avem astfel legăturile analoage cu (3.43), (3.44) şi (3.47), respectiv

$$\varphi^e_N = \Delta^e_{N\alpha}\varphi_\alpha \tag{3.60}$$

$$\varphi_\alpha = \sum_{e=1}^{E} \Delta^e_{N\alpha}\varphi^e_N \tag{3.61}$$

$$b_\alpha = \sum_{e=1}^{E} b^e_N \Delta^e_{N\alpha} \tag{3.62}$$

iar coeficienţii $D_{\alpha\beta}$ şi termenii liberi F_α sînt legaţi de D_{NM} respectiv de F^e_N prin (3.45) respectiv (3.46).

3.5 Discretizarea domeniului

Pentru discretizarea domeniului au fost alese elemente finite izoparametrice liniare,[39] . Un asemenea element finit are patru noduri în colţuri : F = 4. Aceste elemente finite izoparametrice utilizează un sistem de coordonate naturale ξ_i ; i=1,2 care variază între 0 şi ±1 numite coordonate izoparametrice sau ξ - naturale, centrat în centrul de greutate al elementului.

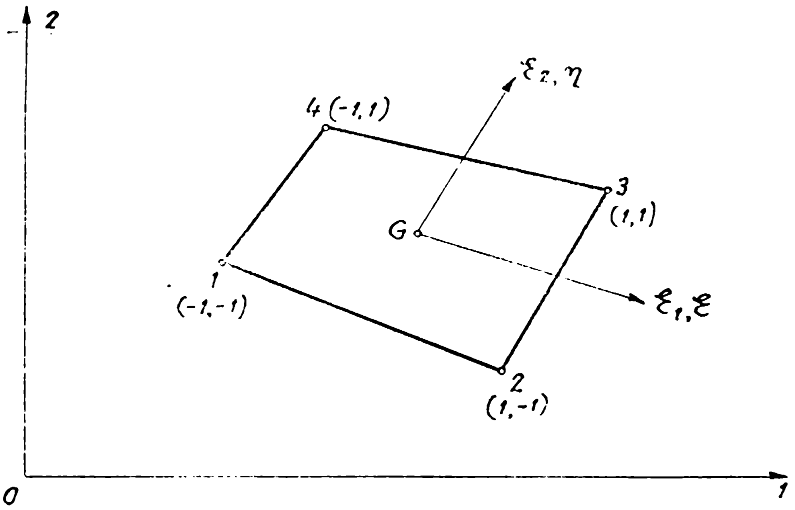


Fig.3.6 Elementul finit izoparametric

Pentru un punct arbitrar din element, coordonatele lui carteziene x_i sînt legate de cele ξ - naturale prin

$$x_i = a_i + a_{ij}\xi_j + a_{ijk}\xi_j\xi_k \quad \text{cu} \quad a_{ijk}=0 \ \text{dacă} \ j=k \tag{3.63}$$

iar de coordonatele carteziene x_{Ni} ale nodurilor prin

$$x_i = a_N(\xi_i)x_{Ni} \tag{3.63'}$$

în care $a_N(\xi_i) = b_N(\xi_i)$ sînt funcţiile izoparametrice de interpolare

$$a_N(\xi_i) = b_N(\xi_i) = \frac{1}{4}(1+\xi_{N1}\xi_1)(1+\xi_{N2}\xi_2) \qquad N=\overline{1,4} \tag{3.64}$$

sau folosind

$$\begin{matrix} \xi_{11}=-1 & \xi_{12}=-1 \\ \xi_{21}=1 & \xi_{22}=-1 \\ \xi_{31}=1 & \xi_{32}=1 \\ \xi_{41}=-1 & \xi_{42}=1 \end{matrix} \tag{3.64'}$$

$$\begin{aligned} a_1(\xi_i)=b_1(\xi_i)=4^{-1}(1-\xi_1)(1-\xi_2) \\ a_2(\xi_i)=b_2(\xi_i)=4^{-1}(1+\xi_1)(1-\xi_2) \\ a_3(\xi_i)=b_3(\xi_i)=4^{-1}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \\ a_4(\xi_i)=b_4(\xi_i)=4^{-1}(1-\xi_1)(1+\xi_2) \end{aligned} \tag{3.65}$$

Scriind pe larg (3.63) obţinem

$$x_i=4^{-1}(a_i+b_i\xi_1+c_i\xi_2+d_i\xi_1\xi_2) \tag{3.66}$$

din care, cu (3.63) se obţin coeficienţii a_i, b_i, c_i, d_i

$$\begin{aligned} a_i&=x_{1i}+x_{2i}+x_{3i}+x_{4i} \\ b_i&=-x_{1i}+x_{2i}+x_{3i}-x_{4i} \\ c_i&=-x_{1i}-x_{2i}+x_{3i}+x_{4i} \\ d_i&=x_{1i}-x_{2i}+x_{3i}-x_{4i} \end{aligned} \tag{3.67}$$

Pentru calculele ce urmează este utilă schimbarea de variabilă din x_1, x_2 în ξ_1, ξ_2 prin

$$\int_\Omega dx_1\,dx_2=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|J|\,d\xi_1\,d\xi_2 \tag{3.68}$$

în care $|J|$ e iacobinianul transformării

$$|J|=8^{-1}(\alpha_0+\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2) \tag{3.69}$$

cu

$$\begin{aligned} \alpha_0&=(x_{41}-x_{21})(x_{12}-x_{32})-(x_{11}-x_{31})(x_{42}-x_{22}) \\ \alpha_1&=(x_{31}-x_{41})(x_{12}-x_{22})-(x_{11}-x_{21})(x_{32}-x_{42}) \\ \alpha_2&=(x_{41}-x_{11})(x_{22}-x_{32})-(x_{21}-x_{31})(x_{42}-x_{12}) \end{aligned} \tag{3.70}$$

3.6 Calculul coeficienţilor D^e_{NM}

Vom renunţa, fără pericol de confuzie la indexarea superioară cu e şi vom utiliza variabilele z, r (vezi (3.1)) şi ξ, η date de identificarea

$$\begin{cases} \xi_1=\xi \\ \xi_2=\eta \end{cases} \tag{3.71}$$

Cu acestea formulele (3.65), (3.66), (3.67), (3.68), (3.69) şi (3.70) devin

$$\begin{aligned} a_1(\xi_i)=b_1(\xi_i)=4^{-1}(1-\xi)(1-\eta) \\ a_2(\xi_i)=b_2(\xi_i)=4^{-1}(1+\xi)(1-\eta) \\ a_3(\xi_i)=b_3(\xi_i)=4^{-1}(1+\xi)(1+\eta) \\ a_4(\xi_i)=b_4(\xi_i)=4^{-1}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \tag{3.72}$$

$$z = 4^{-1}(a_1 + b_1\xi + c_1\eta + d_1\xi\eta)$$
$$r = 4^{-1}(a_2 + b_2\xi + c_2\eta + d_2\xi\eta) \qquad (3.73)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= z_1+z_2+z_3+z_4 & a_2 &= r_1+r_2+r_3+r_4 \\ b_1 &= -z_1+z_2+z_3-z_4 & b_2 &= -r_1+r_2+r_3-r_4 \\ c_1 &= -z_1-z_2+z_3+z_4 & c_2 &= -r_1-r_2+r_3+r_4 \\ d_1 &= z_1-z_2+z_3-z_4 & d_2 &= r_1-r_2+r_3-r_4 \end{aligned} \qquad (3.74)$$

$$\int_\Omega dz\,dr = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |J|\,d\xi\,d\eta \qquad (3.75)$$

$$|J| = 8^{-1}(\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta) \qquad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (z_4-z_2)(r_1-r_3)-(z_1-z_3)(r_4-r_2) \\ \alpha_1 &= (z_3-z_4)(r_1-r_2)-(z_1-z_2)(r_3-r_4) \\ \alpha_2 &= (z_4-z_1)(r_2-r_3)-(z_2-z_3)(r_4-r_1) \end{aligned} \qquad (3.77)$$

3.6.1 Formularea în funcția de curent

Observînd că elementul de volum $d\Omega$ este un tor de secțiune axială $dr\,dz$

$$d\Omega = r\,d\theta\,dr\,dz \qquad (3.78)$$

cu ipoteza de axial-simetrie, coeficienții D_{NM} dați de (3.40) devin

$$D_{NM} = \int_\Omega (a_{N/z}a_{M/z} + a_{N/r}a_{M/r})\,r\,dz\,dr + 2\int_\Omega a_N a_{M/r}\,dz\,dr \qquad (3.79)$$

sau, cu (3.75)

$$D_{NM} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(a_{N/z}a_{M/z} + a_{N/r}a_{M/r})\,r\,|J|\,d\xi\,d\eta + 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} a_N a_{M/r}|J|\,d\xi\,d\eta \qquad (3.80)$$

Din

$$\frac{\partial a_N}{\partial \xi_i} = a_{N/k}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} = a_{N/k}J_{ki} \qquad (3.81)$$

rezultă imediat și

$$a_{N/k} = (J_{ki})^{-1}\frac{\partial a_N}{\partial \xi_i} \qquad (3.82)$$

dar cum

$$(J_{ki})^{-1} = (|J|)^{-1}J_{ki} \qquad (3.83)$$

derivînd (3.72) și folosind matricea lui $|J|$ relația (3.82) ne dă, [39]

$$a_{N/k} = (8|J|)^{-1}(A_{NK} + B^{i}_{NK}\xi_i) \qquad (3.84)$$

sau cu (3.71)

$$a_{N/K}=(8|J|)^{-1}(A_{NK}+B^1_{NK}\xi+B^2_{NK}\eta) \tag{3.85}$$

respectiv

$$\begin{aligned} a_{N/z}&=(8|J|)^{-1}(A_{N1}+B^1_{N1}\xi+B^2_{N1}\eta) \\ a_{N/r}&=(8|J|)^{-1}(A_{N2}+B^1_{N2}\xi+B^2_{N2}\eta) \end{aligned} \tag{3.86}$$

în care

$$\begin{array}{ll} A_{11}=r_2-r_4 & A_{12}=z_4-z_2 \\ A_{21}=r_3-r_1 & A_{22}=z_1-z_3 \\ A_{31}=r_4-r_2 & A_{32}=z_2-z_4 \\ A_{41}=r_1-r_3 & A_{42}=z_3-z_1 \end{array} \tag{3.87}$$

$$\begin{array}{llll} B^1_{11}=r_4-r_3 & B^1_{12}=z_3-z_4 & B^2_{11}=r_3-r_2 & B^2_{12}=z_2-z_3 \\ B^1_{21}=r_3-r_4 & B^1_{22}=z_4-z_3 & B^2_{21}=r_1-r_4 & B^2_{22}=z_4-z_1 \\ B^1_{31}=r_1-r_2 & B^1_{32}=z_2-z_1 & B^2_{31}=r_4-r_1 & B^2_{32}=z_1-z_4 \\ B^1_{41}=r_2-r_1 & B^1_{42}=z_1-z_2 & B^2_{41}=r_2-r_3 & B^2_{42}=z_3-z_2 \end{array} \tag{3.88}$$

Cu considerațiile precedente, produsul derivatelor din prima integrală a lui (3.80) devine

$$a_{N/z}a_{M/z}=(64|J|^2)^{-1}[a^{(1)}_{NM}+b^{(1)}_{NM}\xi+c^{(1)}_{NM}\eta+d^{(1)}_{NM}\xi\eta+e^{(1)}_{NM}\xi^2+f^{(1)}_{NM}\eta^2] \tag{3.89}$$

$$a_{N/r}a_{M/r}=(64|J|^2)^{-1}[a^{(2)}_{NM}+b^{(2)}_{NM}\xi+c^{(2)}_{NM}\eta+d^{(2)}_{NM}\xi\eta+e^{(2)}_{NM}\xi^2+f^{(2)}_{NM}\eta^2] \tag{3.90}$$

în care

$$\begin{array}{ll} a^{(1)}_{NM}=A_{N1}A_{M1} & a^{(2)}_{NM}=A_{N2}A_{M2} \\ b^{(1)}_{NM}=A_{N1}B^1_{M1}+A_{M1}B^1_{N1} & b^{(2)}_{NM}=A_{N2}B^1_{M2}+A_{M2}B^1_{N2} \\ c^{(1)}_{NM}=A_{N1}B^2_{M1}+A_{M1}B^2_{N1} & c^{(2)}_{NM}=A_{N2}B^2_{M2}+A_{M2}B^2_{N2} \\ d^{(1)}_{NM}=B^1_{N1}B^2_{M1}+B^2_{N1}B^1_{M1} & d^{(2)}_{NM}=B^1_{N2}B^1_{M2}+B^2_{N2}B^1_{M2} \\ e^{(1)}_{NM}=B^1_{N1}B^1_{M1} & e^{(2)}_{NM}=B^1_{N2}B^1_{M2} \\ f^{(1)}_{NM}=B^2_{N1}B^2_{M1} & f^{(2)}_{NM}=B^2_{N2}B^2_{M2} \end{array} \tag{3.91}$$

Similar pentru produsul $a_N \cdot a_{M/r}$ din a doua integrală a lui (3.80)

$$\begin{aligned} a_N a_{M/r}=(32|J|)^{-1}[g^{(2)}_{NM}+h^{(2)}_{NM}\xi+k^{(2)}_{NM}\eta+ \\ +q^{(2)}_{NM}\xi^2+p^{(2)}_{NM}\xi\eta+s^{(2)}_{NM}\eta^2+t^{(2)}_{NM}\xi^2\eta+u^{(2)}_{NM}\xi\eta^2] \end{aligned} \tag{3.92}$$

în care

$$\begin{aligned} g^{(2)}_{NM}&=A_{M2} \\ h^{(2)}_{NM}&=B^1_{M2}+A_{M2}\xi_{N1} \\ k^{(2)}_{NM}&=B^2_{M2}+A_{M2}\xi_{N2} \\ p^{(2)}_{NM}&=B^1_{M2}\xi_{N2}+B^2_{M2}\xi_{N1}+A_{M2}\xi_{N1}\xi_{N2} \\ q^{(2)}_{NM}&=B^1_{M2}\xi_{N1} \\ s^{(2)}_{NM}&=B^2_{M2}\xi_{N2} \\ t^{(2)}_{NM}&=B^1_{M2}\xi_{N1}\xi_{N2} \\ u^{(2)}_{NM}&=B^2_{M2}\xi_{N1}\xi_{N2} \end{aligned} \tag{3.93}$$

Inlocuind acum (3.89), (3.9o) şi (3.93) în (3.8o) se obţin coeficienţii D_{NM} pe fiecare element finit

$$D_{NM}=\frac{1}{32}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{NM}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{3.94}$$

unde

$$\begin{aligned} f_{NM}(\xi,\eta) &= [a_{NM}^{(1)}+a_{NM}^{(2)}+(b_{NM}^{(1)}+b_{NM}^{(2)})\xi+(c_{NM}^{(1)}+c_{NM}^{(2)})\eta+ \\ &+(d_{NM}^{(1)}+d_{NM}^{(2)})\xi\eta+(e_{NM}^{(1)}+e_{NM}^{(2)})\xi^2+(f_{NM}^{(1)}+f_{NM}^{(2)})\eta^2]\cdot \\ &\cdot(a_2+b_2\xi+c_2\eta+d_2\xi\eta)(\alpha_0+\alpha_1\xi+\alpha_2\eta)^{-1}+ \\ &+2[g_{NM}^{(2)}+h_{NM}^{(2)}\xi+k_{NM}^{(2)}\eta+p_{NM}^{(2)}\xi\eta+q_{NM}^{(2)}\xi^2+s_{NM}^{(2)}\eta^2+t_{NM}^{(2)}\xi^2\eta+u_{NM}^{(2)}\xi\eta^2] \end{aligned} \tag{3.95}$$

Evaluarea coeficienţilor D_{NM}, daţi de (3.94) cu (3.95), o vom face prin cubatură numerică

$$D_{NM}=\frac{1}{32}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_i w_j f_{NM}(\xi_i,\eta_j) \tag{3.96}$$

în care m e numărul punctelor gausiene din interiorul elementului, ξ_i şi η_i coordonatele naturale ale lor iar w_i coeficienţii de pondere. Pentru $m = 6$

$$D_{NM}=\frac{1}{32}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} w_i w_j f_{NM}(\xi_i,\eta_j) \tag{3.97}$$

în care coeficienţii de pondere sînt

$$\begin{aligned} w_1&=0,1713244923 \\ w_2&=0,3607615730 \\ w_3&=0,4679139345 \\ w_4&=w_3 \\ w_5&=w_2 \\ w_6&=w_1 \end{aligned} \tag{3.98}$$

iar coordonatele punctelor gausiene

$$\begin{aligned} \xi_1&=\eta_1=-0,9324695142 \\ \xi_2&=\eta_2=-0,6612093864 \\ \xi_3&=\eta_3=-0,2386191860 \\ \xi_4&=\eta_4=-\xi_3 \\ \xi_5&=\eta_5=-\xi_2 \\ \xi_6&=\eta_6=-\xi_1 \end{aligned} \tag{3.99}$$

3.6.2 Formularea în potenţialul vitezei

Coeficienţii D_{NM} daţi de (3.58) devin, observînd (3.78)

$$D_{NM}=\int_{\Omega}(b_{N/z}b_{M/z}+b_{N/r}b_{M/r})\,r\,dz\,dr \tag{3.1oo}$$

sau, cu (3.75)

$$D_{NM}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(b_{N/z}b_{M/z}+b_{N/r}b_{M/r})\,r\,|J|\,d\xi\,d\eta \tag{3.1o1}$$

Utilizînd rezultatele de la 3.6.1 cu $a_N\equiv b_N$ se obţine pentru D_{NM} tot o formulă de tipul (3.94)

$$D_{NM}=\frac{1}{32}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_{NM}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{3.1o2}$$

unde

$$g_{NM}(\xi,\eta)=[a_{NM}^{(1)}+a_{NM}^{(2)}+(b_{NM}^{(1)}+b_{NM}^{(2)})\xi+(c_{NM}^{(1)}+c_{NM}^{(2)})\eta+ \\ +(d_{NM}^{(1)}+d_{NM}^{(2)})\xi\eta+(e_{NM}^{(1)}+e_{NM}^{(2)})\xi^2+(f_{NM}^{(1)}+f_{NM}^{(2)})\eta^2]\cdot \\ \cdot(a_2+b_2\xi+c_2\eta+d_2\xi\eta)(\alpha_0+\alpha_1\xi+\alpha_2\eta)^{-1} \qquad (3.103)$$

iar evaluarea lor se face tot prin cubatură numerică, adică printr-o formulă analoagă lui (3.97)

$$D_{NM}=\frac{1}{32}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}w_i w_j\, g_{NM}(\xi_i,\eta_j) \qquad (3.104)$$

și unde w_i , ξ_i și η_i sînt dați de (3.98) respectiv (3.99).

3.7 Calculul termenilor liberi F_N^e

Vom renunța, la fel, la indexarea superioară cu e .

3.7.1 Formularea în funcția de curent

Pe partea ABUBCUAD condițiile la limită sînt esențiale iar pe partea CD a frontierei, conform cu (3.20) condiția la limită naturală este $\psi_{,1}=0$. Rezultă imediat din (3.41)

$$F_N=0 \qquad (3.105)$$

3.7.2 Formularea în potențialul vitezei

Conform cu (3.25), pe partea CD a frontierei $\varphi=0$ iar pe părțile BC și AD avem condiția naturală $\varphi_{/n}=0$. In consecință $F_N=0$ mai puțin pe elementele finite ale părții de influx AB. Pe această parte a frontierei F_N se determină cu ajutorul lui (3.59) care cu (2.34) se scrie

$$F_N=\int_0^{l} v_i n_i b_N^{*}\, r\, ds \qquad (3.106)$$

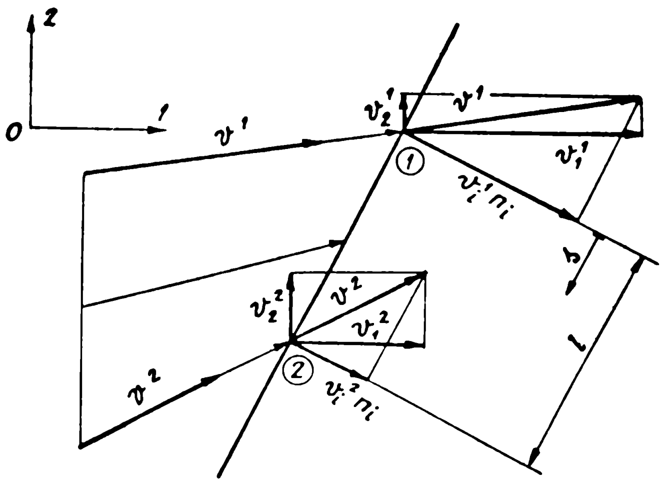


Fig.3.7 Condiții pe frontieră

Elementele finite fiind izoparametrice, [39]

$$v_i=v_i^N b_N^{*} \qquad N=1,2 \qquad (3.107)$$

$$r = r_N b_N^* \qquad N = 1,2 \tag{3.108}$$

unde funcţiile de interpolare b_N^* pe frontieră sînt

$$\begin{aligned} b_1^* &= 1 - s\ell^{-1} \\ b_2^* &= s\ell^{-1} \end{aligned} \tag{3.109}$$

Cu (3.107) şi (3.109) termenii liberi F_N, daţi de (3.106), devin

$$F_N = \int_0^\ell b_M^* v_i^M n_i r_Q b_Q^* b_N^* \, ds \qquad N,M,Q = 1,2 \tag{3.110}$$

sau pe larg

$$\begin{aligned} F_1 = \int_0^\ell &[(1 - s\ell^{-1})(v_1^1 n_1 + v_2^1 n_2) + s\ell^{-1}(v_1^2 n_1 + v_2^2 n_2)] \cdot \\ &\cdot [r_1(1 - s\ell^{-1}) + r_2 s\ell^{-1}](1 - s\ell^{-1}) \, ds \end{aligned} \tag{3.111}$$

$$\begin{aligned} F_2 = \int_0^\ell &[(1 - s\ell^{-1})(v_1^1 n_1 + v_2^1 n_2) + s\ell^{-1}(v_1^2 n_1 + v_2^2 n_2)] \cdot \\ &\cdot [r_1(1 - s\ell^{-1}) + r_2 s\ell^{-1}] s\ell^{-1} \, ds \end{aligned} \tag{3.112}$$

care integrate dau

$$F_N = \frac{\ell}{12} \begin{bmatrix} (3v_a + v_b) r_1 + (v_a + v_b) r_2 \\ (v_a + v_b) r_1 + (v_a + 3v_b) r_2 \end{bmatrix} \tag{3.113}$$

în care

$$v_a = v_1^1 n_1 + v_2^1 n_2 = v_i^1 n_i \tag{3.114}$$

$$v_b = v_1^2 n_1 + v_2^2 n_2 = v_i^2 n_i \tag{3.115}$$

In cazul nostru $n_1 = 0$ şi $n_2 = -1$ (vezi fig.3.5) iar $r_1 = r_2 = L^R$

Folosind şi (3.22) rezultă

$$v_a = v_b = -b^{-1} L^{R^{-1}} \tag{3.116}$$

şi în final termenii liberi

$$F_N = \frac{\ell}{2b} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.117}$$

adică

$$F_1 = F_2 = 2^{-1} \ell b^{-1} \tag{3.118}$$

3.8 Asamblarea matricii sistemului. Punerea condiţiilor la limită

Avînd coeficienţii D_{NM}^e şi termenii liberi F_N^e pe fiecare element finit se poate face acum implementarea lor în matricile sistemului (3.30). Aceasta se obţine cu ajutorul relaţiilor (3.45) şi (3.46) care în scriere matricială devin

$$D_{\alpha\beta}=\sum_{e=1}^{E}(\Delta^e)^T D^e \Delta^e \tag{3.119}$$

$$F_\alpha=\sum_{e=1}^{E}(\Delta^e)^T F^e \tag{3.120}$$

în care D^e este matricea coeficienţilor D^e_{NM}, F^e matricea coloană a termenilor liberi F^e_N iar Δ^e matricea Booleană a elementului finit respectiv e. Matricea Δ^e, de elemente $\Delta^e_{N\alpha}$ este de dimensiune $F\times G$ adică $4\times G$. Pentru determinarea ei avem nevoie, în prealabil, de matricea de conexiune C care dă corespondenţa dintre numărarea locală şi cea globală a nodurilor. Această matrice de conexiune, de elemente C_{Ne} este de dimensiune $F\times E$ adică $4\times E$. Elementul curent C_{Ne} al matricei este numărul nodului în numărarea globală ce corespunde numărului nodului N în numărarea locală pentru elementul finit e. Dacă notăm pentru elementul e.

$$C_{Ne}=e_N \tag{3.121}$$

matricea Δ^e a elementului e va avea doar patru elemente nenule şi egale cu unitatea şi anume

$$\Delta^e_{1e_1}=\Delta^e_{2e_2}=\Delta^e_{3e_3}=\Delta^e_{4e_4}=1 \tag{3.122}$$

Fiind obţinut acum sistemul global (3.30) se poate trece acum la punerea condiţiilor la limită. Dacă din cele G noduri ale domeniului Ω în m din ele se dau valorile lui ψ (sau φ) sistemul liniar (3.30) devine de dimensiune $G-m$.

$$\overline{D}_{\alpha\beta}\,\psi_\beta=\overline{F}_\alpha \qquad \alpha,\beta=\overline{1,G-m} \tag{3.123}$$

Dacă în nodul k avem condiţia $\psi=q_k$ (sau respectiv $\varphi=q_k$) elementele lui (3.123) devin

$$\overline{D}_{kk}=1 \qquad \overline{D}_{\alpha k}=\overline{D}_{k\alpha}=0 \quad \text{dacă } \alpha\neq k \tag{3.124}$$

$$\overline{F}_k=q_k \qquad \overline{F}_\alpha=F_\alpha-D_{\alpha k}q_k \quad \text{dacă } \alpha\neq k \tag{3.125}$$

3.9 Determinarea cîmpului de viteze

3.9.1 Formularea în funcţia de curent

Din (3.3), folosind (3.35), (3.86) şi (3.76) se obţin componentele vitezei pe fiecare element finit în centrul lui de greutate ($\xi=\eta=0$)

$$v^e_z=4\alpha_0^{-1}a_1^{-1}A_{N2}\psi^e_N \qquad N=\overline{1,4} \tag{3.126}$$

$$v^e_r=-4\alpha_0^{-1}a_2^{-1}A_{N1}\psi^e_N \qquad N=\overline{1,4} \tag{3.127}$$

iar în noduri se consideră mediile aritmetice ale componentelor vitezei ale elementelor finite adiacente. Mărimea vitezei este

$$v=(v_z^2+v_r^2)^{1/2} \tag{3.128}$$

sau raportată la viteza de la intrare v^{AB} dată de (3.22)

$$\bar{v}=v.v^{AB^{-1}} \tag{3.129}$$

3.9.2 Formularea în potențialul vitezei

Se obține analog, componentele vitezei, din (3.13) folosind (3.54), (3.66) și (3.76)

$$v_z^e=\alpha_0^{-1} A_{N1}\varphi_N^e \qquad N=\overline{1,4} \tag{3.130}$$

$$v_r^e=\alpha_0^{-1} A_{N2}\varphi_N^e \qquad N=\overline{1,4} \tag{3.131}$$

3.10 Determinarea cîmpului de presiuni

Se obține imediat din teorema lui Bernoulli pentru mișcarea potențială fără evoluție

$$p-p^{AB}=2^{-1}\rho\,(v^{AB^2}-v^2) \tag{3.132}$$

sau raportată la $2^{-1}\rho\, v^{AB^2}$, folosind și (3.129)

$$\bar{p}=(p-p^{AB})\,2\rho^{-1}v^{AB^{-2}}=1-\bar{v}^2 \tag{3.133}$$

3.11 Determinarea liniilor de curent și a liniilor de egal potențial al vitezei

Cunoscînd valorile lui ψ (sau φ) în noduri, obținute cu rezolvarea lui (3.123) și cum variația lui ψ (sau φ) este considerată liniară pe frontierele elementului finit, prin interpolare liniară se găsesc coordonatele punctului în care ψ (sau φ) are valoarea dorită. Căutîndu-se toate punctele de pe frontierele elementelor finite în care ψ (sau φ) are o anumită valoare constantă se obțin curbele ψ = constant (sau φ = constant) în mod discret.

3.12 Exemplu de calcul

Metoda a fost aplicată unui rotor de turbină Francis cu frontierele de tip Bovet. In cele ce urmează este dată rezolvarea complexă a mișcării potențiale și fără evoluție a unui lichid în următorul domeniu de analiză.

3.12.1 Domeniul de analiză

Frontiera exterioară (inelul) este formată din

(i) Un segment de dreaptă de ecuație

$$z=0,476152 \tag{3.134}$$

(ii) Un arc de curbă de ecuație

$$r(z)=0,749760-0,285416\{1,821029(z-0,476152)\}^{1/2}\cdot \\ \cdot\{1-1,821029(z-0,476152)\}^{3/2} \qquad z\in[0,476152,\ 0,84] \tag{3.135}$$

(iii) Un arc de cerc de ecuaţie

$$r(z)=0,124+\{\rho^2-(z-1)^2\}^{1/2} \qquad z\in\{0,84\ ,\ 1\} \tag{3.136}$$

.de ρ este

$$\rho=\{[0,124-r_{(0,84)}]^2+0,0256\}^{1/2} \tag{3.137}$$

Frontiera interioară (coroana) este compusă din

(iv) un segment de dreaptă de ecuaţie

$$z=0 \tag{3.138}$$

(v) un arc de curbă cu ecuaţia

$$r(z)=0,651604-0,985882\,z^{1/2}\cdot(1-0,241313\,z)^{3/2} \tag{3.139}$$

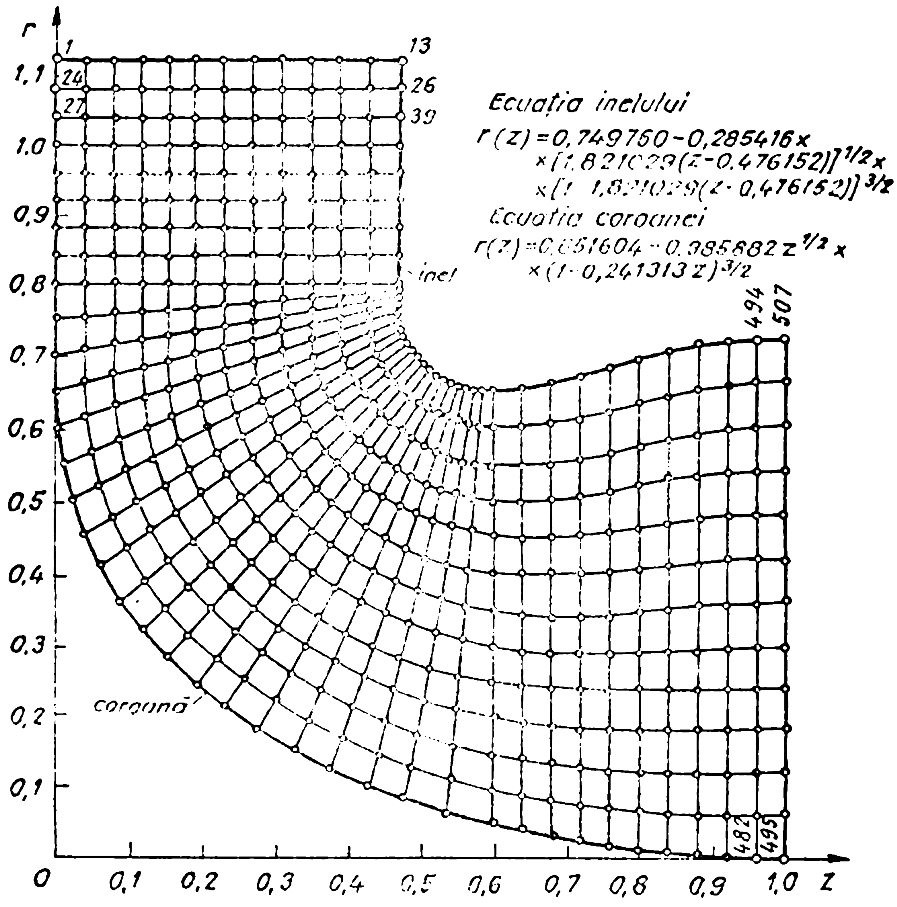


Fig.3.8 Discretizarea domeniului

In fig.3.8 este prezentată discretizarea domeniului în e-emente finite izoparametrice. Au rezultat 456 elemente finite E = 456) şi 507 noduri (G = 507).

3.12.2 Realizarea programului de calcul

Rezolvarea problemei a fost obţinută cu ajutorul progra-lor PSIELF şi FIELFIN în cadrul cărora au fost utilizate subprogramele

(i) DISCRET, care realizează

1. discretizarea domeniului
2. calculul matricii de conexiune

(ii) SISTEM, care realizează

1. calculul matricii coeficienților pe element finit
2. calculul matricii Booleene pe element finit
3. asamblarea matricii globale a sistemului liniar omogen
4. Impunerea condițiilor pe frontiera domeniului și determinarea matricii sistemului liniar neomogen
5. rezolvarea sistemului liniar neomogen

(iii) VITNOD, CARE REALIZEAZĂ

1. determinarea vitezelor în nodurile rețelei
2. determinarea presiunilor în nodurile rețelei

(iv) CAUT 4, care realizează

1. trasarea discretă a curbelor ψ = constant
2. trasarea discretă a curbelor φ = constant
3. cîmpul de viteze și presiuni în lungul curbelor ψ = constant
4. cîmpul de viteze și presiuni în lungul curbelor φ = constant

3.12.3 Rezultate numerice

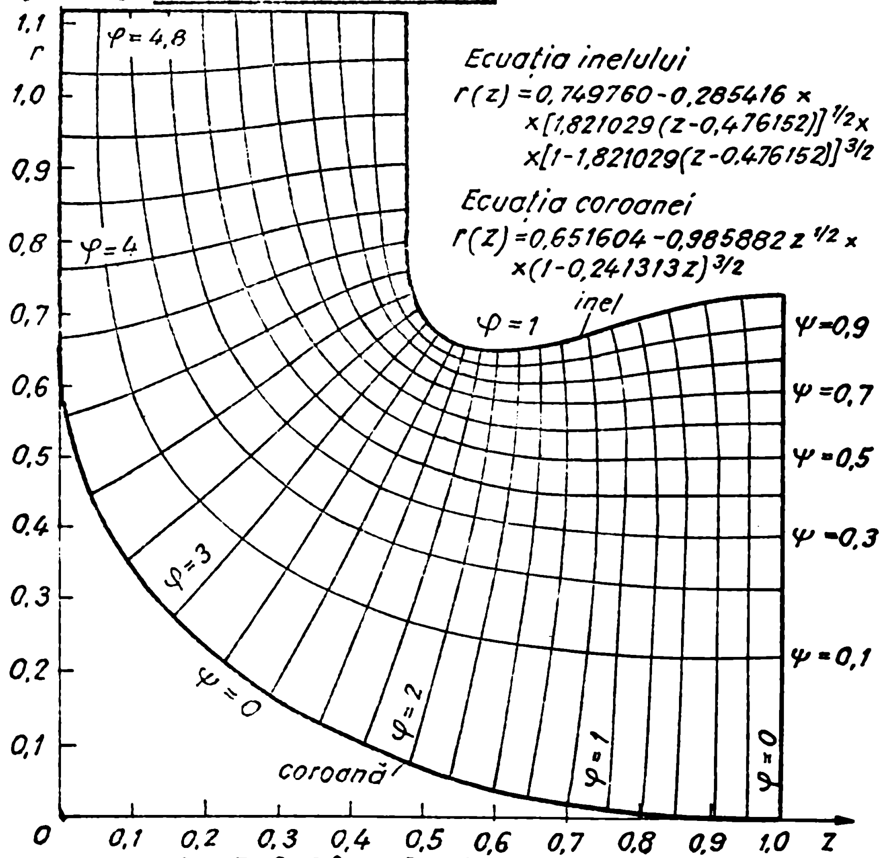


Fig.3.9 Cîmpul hidrodinamic

In fig.3.9 este prezentat cîmpul hidrodinamic, în domeniul : analiză considerat, constituit din liniile de curent ψ = con-;ant şi liniile de egal potenţial al vitezei φ = constant iar în .g.3.lo respectiv 3.11 cîmpul de viteze, respectiv cîmpul de pre-.uni în lungul liniilor de curent.

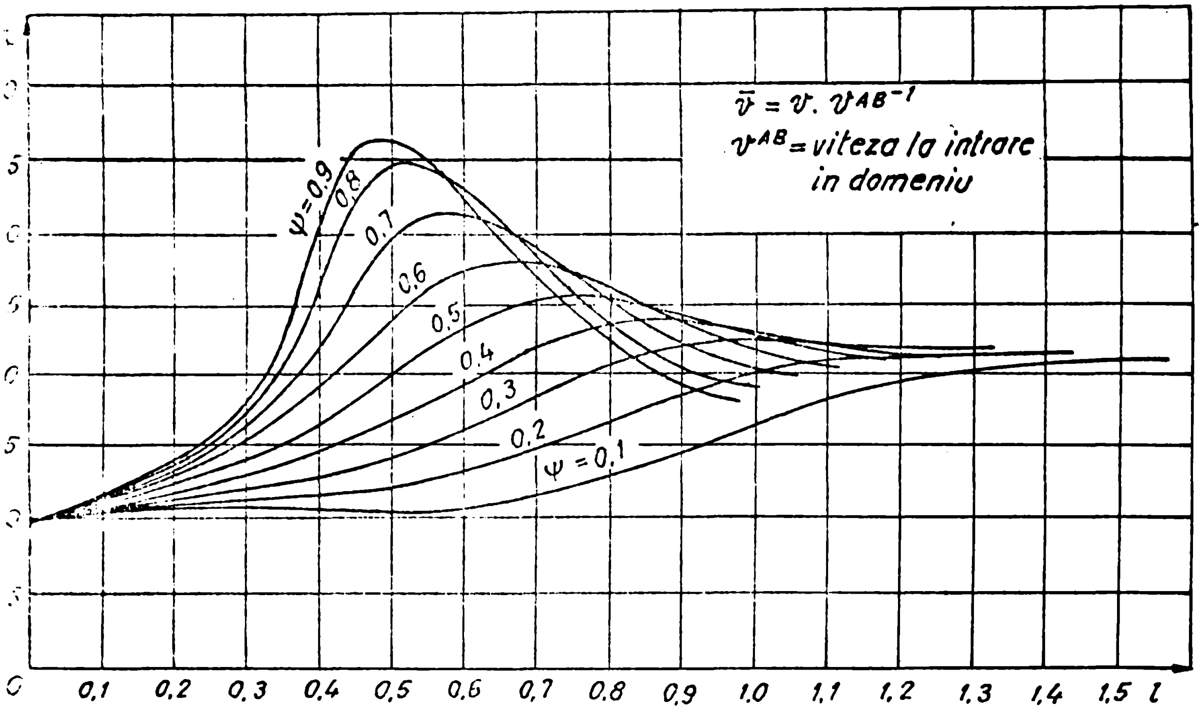


Fig.3.lo Cîmpul de viteze în lungul liniilor de curent

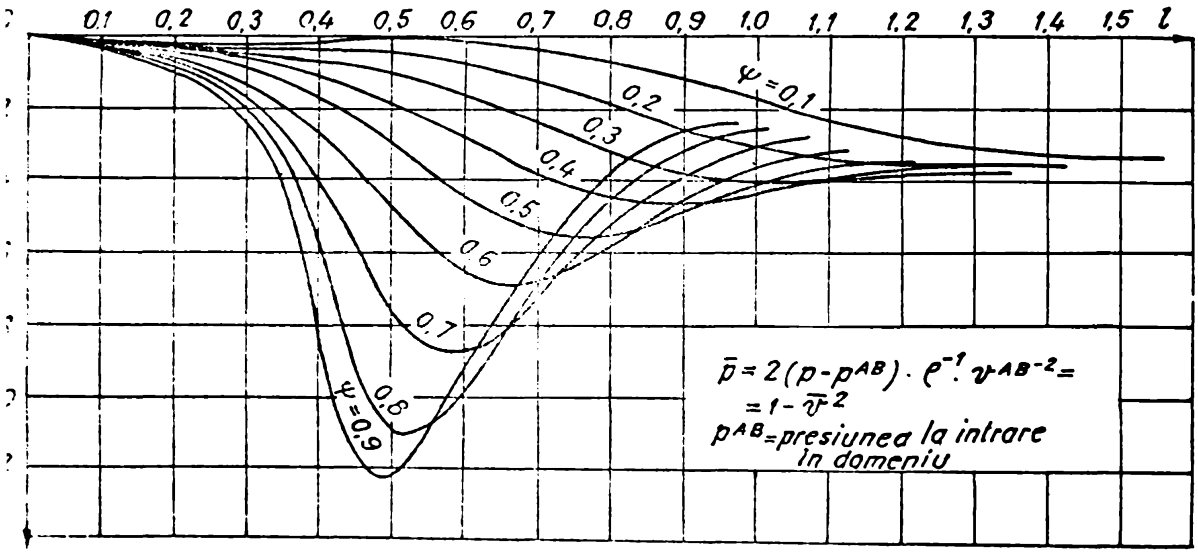


Fig.3.11 Cîmpul de presiuni în lungul liniilor de curent

CAPITOLUL 4

MISCAREA POTENTIALA PLANA IN JURUL OBSTACOLELOR IZOLATE IN IPOTEZA POTENTIALULUI VITEZEI UNIFORM

4.1 Generalităţi

In cazul mişcării plane a unui lichid ideal în jurul unui obstacol izolat determinarea ei înseamnă determinarea liniilor de curent, a cîmpului de viteze şi a cîmpului de presiuni în domeniul de analiză considerat. Dacă mişcarea este şi potenţială liniilor de curent li se adaugă şi liniile de egal potenţial al vitezei.

4.2 Domeniul de analiză. Condiţii la limită

Se va determina mişcarea în jurul unui profil izolat dispus între doi pereţi rigizi considerînd potenţialul vitezei uniform. Domeniul de analiză considerat este atunci un dreptunghi ce conţine în interiorul lui profilul izolat.

4.2.1 Formularea în funcţia de curent

Determinarea mişcării înseamnă practic rezolvarea unei probleme la limită mixte pentru ecuaţia (2.1o), cu funcţia necunoscută ψ , pe domeniul Ω cu condiţii la limită esenţiale pe părţile AB, OA, OC şi frontiera profilului şi condiţii la limită naturale pe partea BC a frontierei Γ a lui Ω .

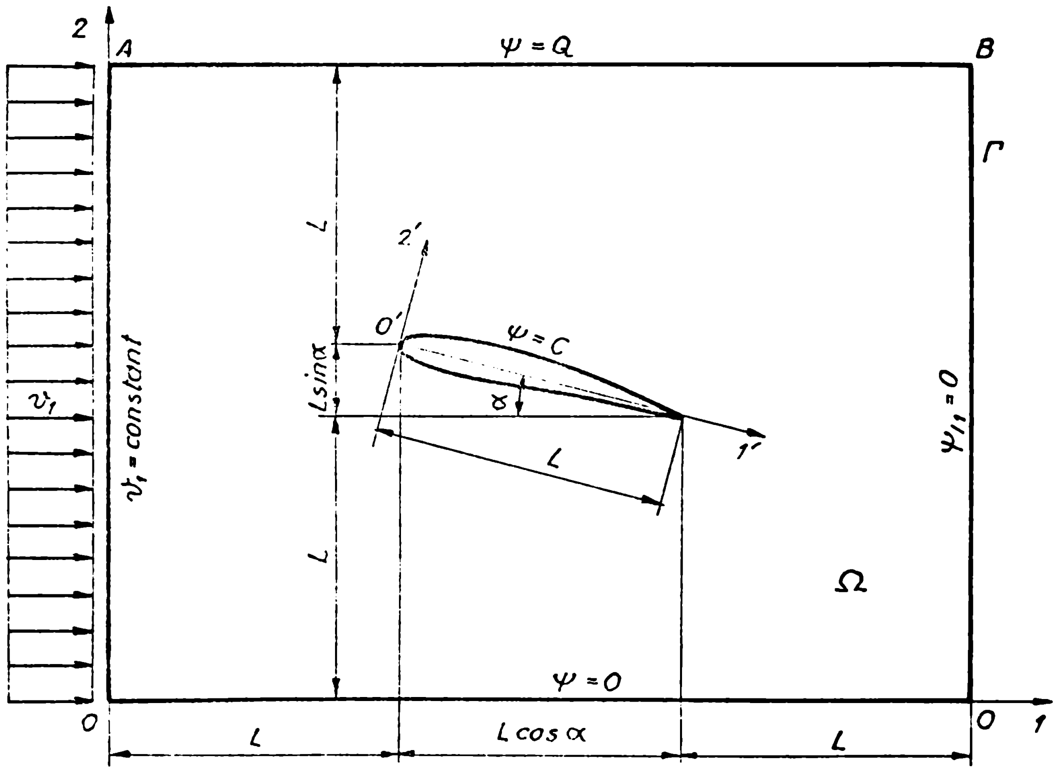


Fig.4.1 Condiţii la limită pentru funcţia ψ .

$$\begin{cases} \psi = \text{constant pe AB, OC și frontiera profilului} \\ \psi = \psi(x_2) \quad \text{pe AO} \\ \psi_{,1} = 0 \quad \text{pe BC} \end{cases} \tag{4.1}$$

Pentru cazul nostru vom impune

$$\begin{cases} \psi = C & \text{pe frontiera profilului} \\ \psi = 0 & \text{pe OC} \\ \psi = Q & \text{pe AB} \\ v_1 = \text{constant} & \text{pe AO} \\ \psi_{,1} = 0 & \text{pe BC} \end{cases} \tag{4.2}$$

, pe partea AO a frontierei

$$v_1 = (2 + \sin\alpha)^{-1} \cdot L^{-1} \cdot Q \tag{4.3}$$

4.2.2 Formularea în potențialul vitezei

Determinarea mișcării înseamnă rezolvarea unei probleme la tă mixte pentru ecuația (2.11), cu funcția necunoscută φ ,presă uniformă, pe domeniul Ω cu condiții la limită esențiale artea BC a frontierei și condiții la limită naturale pe părți-3, OC, AO și frontiera profilului

$$\begin{cases} \varphi = \text{constant pe BC} \\ \varphi_{/n} = 0 \quad \text{pe AB,OC și frontiera profilului} \\ \varphi_{,1} = \text{constant} \quad \text{pe AO} \end{cases} \tag{4.4}$$

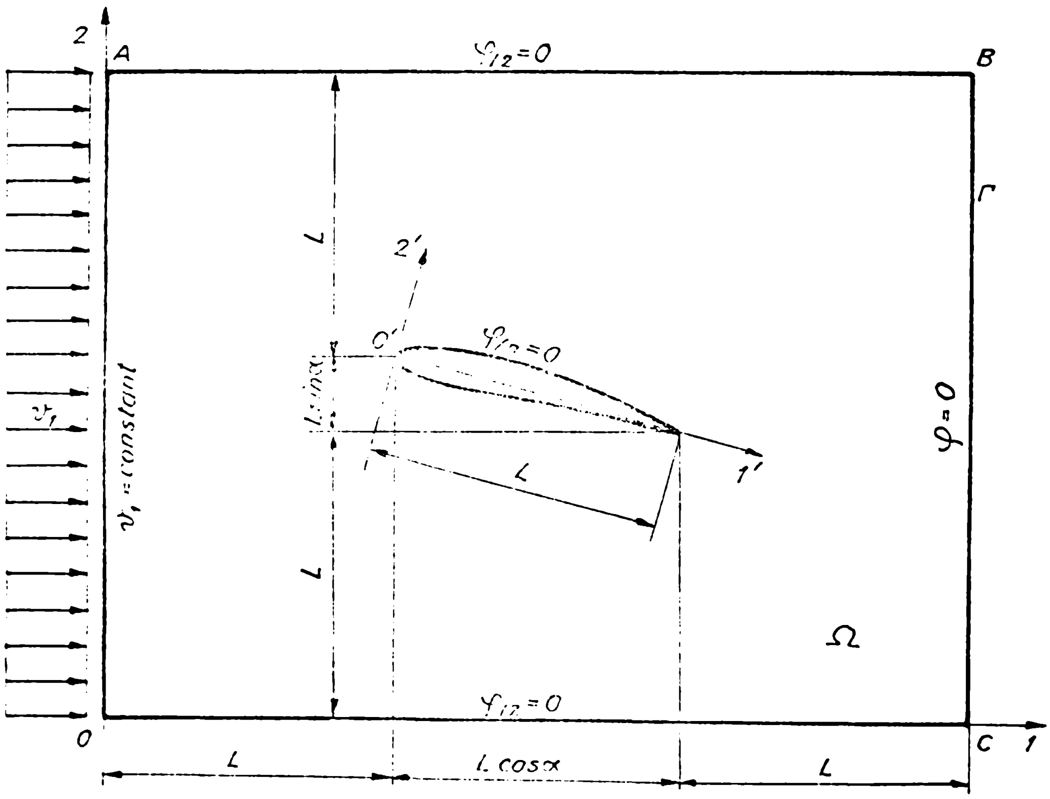


Fig.4.2 Condiții la limită pentru funcția φ .

Pentru cazul nostru vom impune

$$\begin{cases} \varphi = 0 & \text{pe BC} \\ \varphi_{/2} = 0 & \text{pe AB şi OC} \\ v_1 = \text{constant} & \text{pe AO} \\ \varphi_{/n} = 0 & \text{pe frontiera profilului} \end{cases} \qquad (4.5)$$

în care v_1 este dat de (4.3).

4.3 Tratarea în formă adimensională

4.3.1 Formularea în funcţia de curent

Cu schimbarea de variabilă (3.16) şi de funcţie

$$\psi^* = (2+\sin\alpha)\,Q^{-1}\,\psi \qquad (4.6)$$

(2.10) şi (2.5) devin

$$\psi^*_{/ii} = 0 \qquad (4.7)$$

$$v_i^* = \varepsilon_{ij}\,\psi^*_{/j} \qquad (4.8)$$

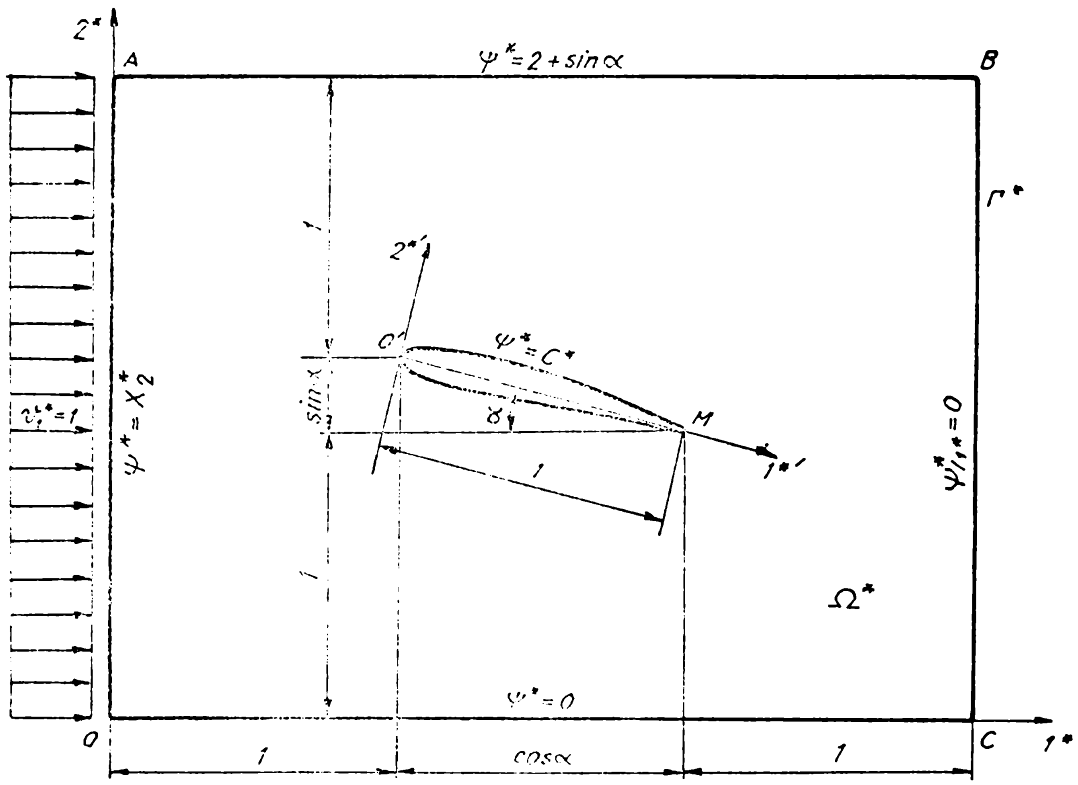


Fig.4.3 Condiţii la limită pentru funcţia ψ^*.

Relaţiile (3.16), (4.6) şi (4.8) dau legătura între viteze

$$v_i^* = (2+\sin\alpha)\,L\,Q^{-1}\,v_i \qquad (4.9)$$

iar viteza constantă pe partea AO a frontierei devine

$$v_1^* = 1 \qquad (4.9)$$

iar condițiile la limită (4.2)

$$\begin{cases} \psi^* = C^* & \text{pe frontiera profilului} \\ \psi^* = 0 & \text{pe OC} \\ \psi^* = 2 + \sin\alpha & \text{pe AB} \\ v_1^* = 1 & \text{pe AO} \\ \psi^*_{/1^*} = 0 & \text{pe BC} \end{cases} \qquad (4.10)$$

adică

$$\begin{cases} \psi^* = C^* & \text{pe frontiera profilului} \\ \psi^* = 0 & \text{pe OC} \\ \psi^* = 2 + \sin\alpha & \text{pe AB} \\ \psi^* = x_2^* & \text{pe AO} \\ \psi^*_{/1^*} = 0 & \text{pe BC} \end{cases} \qquad (4.11)$$

Cum nu se cunoaște, apriori, valoarea constantei C^* pe frontiera profilului, rezolvarea se obține prin metoda suprapunerii efectelor [22] . Astfel soluția lui (4.7) cu condițiile la limită (4.11) se pune sub forma

$$\psi^* = \psi^{*1} + \lambda\psi^{*2} + \mu\psi^{*3} \qquad (4.12)$$

în care $\psi^{*\beta}$, $\beta = 1,2,3$ sînt soluțiile problemelor la limită parțiale

$$\begin{cases} \psi^{*1}_{/ii} = 0 & \text{în interiorul domeniului} \\ \psi^{*1} = 0 & \text{pe frontiera profilului} \\ \psi^{*1} = 0 & \text{pe OC} \\ \psi^{*1} = 2 + \sin\alpha & \text{pe AB} \\ \psi^{*1} = x_2^* & \text{pe OA} \\ \psi^{*1}_{/1^*} = 0 & \text{pe BC} \end{cases} \qquad (4.13)$$

$$\begin{cases} \psi^{*2}_{/ii} = 0 & \text{în interiorul domeniului} \\ \psi^{*2} = 0 & \text{pe frontiera profilului} \\ \psi^{*2} = 1 & \text{pe OC, AB și OA} \\ \psi^{*2}_{/1^*} = 0 & \text{pe BC} \end{cases} \qquad (4.14)$$

$$\begin{cases} \psi^{*3}_{/ii}=0 & \text{în interiorul domeniului} \\ \psi^{*3}=1 & \text{pe frontiera profilului} \\ \psi^{*3}=0 & \text{pe OC, AB și OA} \\ \psi^{*3}_{/1^*}=0 & \text{pe BC} \end{cases} \tag{4.15}$$

Cu ajutorul lui (4.8) și (4.12) se scriu componentele vitezei

$$v_1^*=v_1^{*1}+\lambda v_1^{*2}+\mu v_1^{*3} \tag{4.16}$$

$$v_2^*=v_2^{*1}+\lambda v_2^{*2}+\mu v_2^{*3} \tag{4.17}$$

Punînd acum condiția lui Kutta la bordul de fugă M al profilului, și anume ca viteza să se anuleze, se obține sistemul

$$\begin{cases} v_1^{*1M}+\lambda v_1^{*2M}+\mu v_1^{*3M}=0 \\ v_2^{*1M}+\lambda v_2^{*2M}+\mu v_2^{*3M}=0 \end{cases} \tag{4.18}$$

care permite determinarea coeficienților λ și μ.

4.3.2 <u>Formularea în potențialul vitezei</u>.

Cu schimbarea de variabilă (3.16) și de funcție

$$\varphi^*=(2+\sin\alpha)\,Q^{-1}\cdot\varphi \tag{4.19}$$

(2.11) și (2.6) devin

$$\varphi^*_{/ii}=0 \tag{4.20}$$

$$v_i^*=\varphi^*_{/i} \tag{4.21}$$

Cu aceeași legătură (4.9) între viteze și cu (4.9') pe partea AO a frontierei, iar condiția la limită (4.5)

$$\begin{cases} \varphi^*=0 & \text{pe BC} \\ \varphi^*_{/2^*}=0 & \text{pe AB și OC} \\ v_1^*=1 & \text{pe AO} \\ \varphi^*_{/n}=0 & \text{pe frontiera profilului} \end{cases} \tag{4.22}$$

adică

$$\begin{cases} \varphi^*=0 & \text{pe BC} \\ \varphi^*_{/2^*}=0 & \text{pe AB și OC} \\ \varphi^*_{/1^*}=1 & \text{pe AO} \\ \varphi^*_{/n}=0 & \text{pe frontiera profilului} \end{cases} \tag{4.23}$$

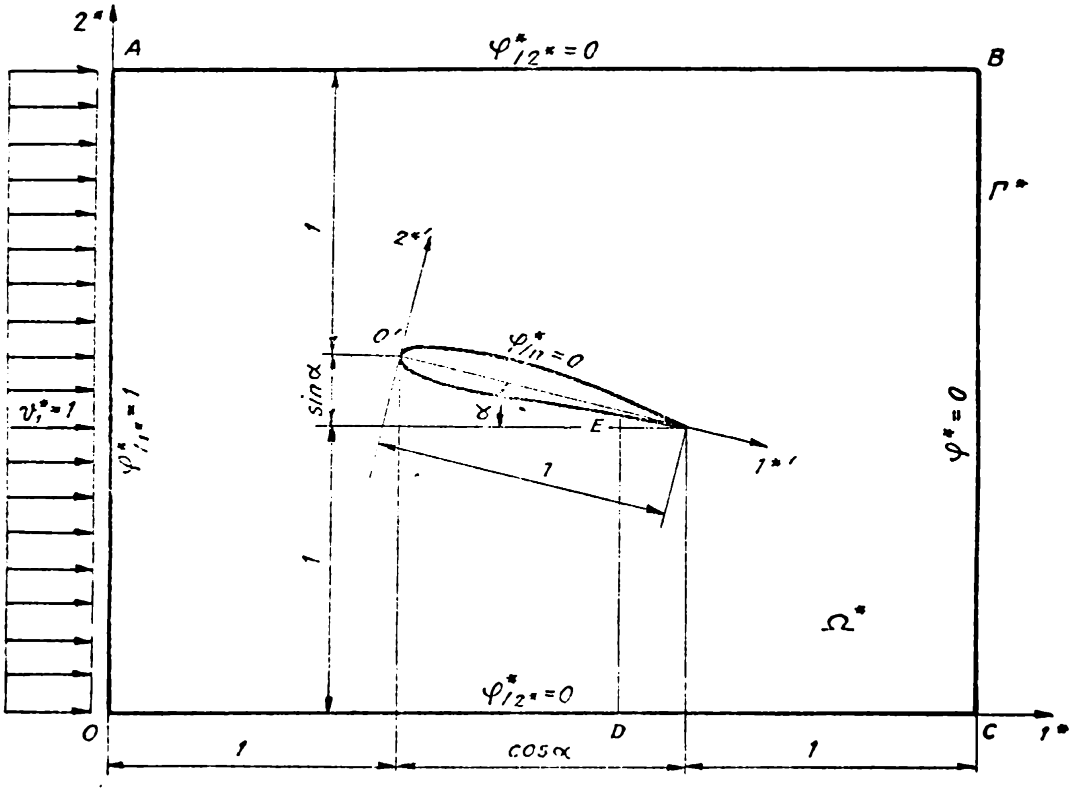


Fig.4.4 Condiţii la limită pentru funcţia φ^* .

4.3.3 Formularea în funcţia de curent cunoscînd potenţialul vitezei

Determinarea mişcării cu metoda prezentată la 4.3.1 care volum mare de calcul în general legat de precizia determinării lorilor funcţiilor ψ^{*1}, ψ^{*2} şi ψ^{*3} şi a derivatelor lor în veiătatea imediată a bordului de fugă M a profilului. In cazul care φ^* poate fi acceptată ca uniformă, determinarea liniilor curent se face rezolvînd mai întîi formularea 2.4.2 care deterză funcţia φ^* . Atunci condiţiile la limită (4.11) pentru funcia ψ^* devin

$$\begin{cases} \psi^* = 0 & \text{pe OC} \\ \psi^* = 2+\sin\alpha & \text{pe AB} \\ \psi^* = x_2^* & \text{pe AO} \\ \psi^*_{/1^*} = 0 & \text{pe BC} \\ \psi^*_{/n} = f^*(x_1^*,x_2^*) & \text{pe frontiera profilului} \end{cases} \tag{4.24}$$

ie $f^*(x_1^*,x_2^*)$ se obţine folosind (4.8) şi (2.8)

$$f^*(x_1^*,x_2^*) = \psi^*_{/i}\, n_i = \psi^*_{/1^*}\, n_{1^*} + \psi^*_{/2^*}\, n_{2^*} = -\varphi^*_{/2^*}\, n_{1^*} + \varphi^*_{/1^*}\, n_{2^*} \tag{4.25}$$

O rezolvare mai operativă o dă determinarea constantei C^* pe frontiera profilului pentru condiţiile la limită (4.11).Ea se obţine scriind debitul ce străbate segmentul DE

$$C^*=\int_D^E v_i^* \, dx_2^* = \int_D^E \varphi^*_{/1^*} \, dx_2^* \tag{4.26}$$

4.4 Integrarea ecuaţiei lui Laplace prin M.E.F.

Vom folosi tratarea în formă adimensională şi vom renunţa la notarea cu asterisc.

4.4.1 Formularea în funcţia de curent

Să reluăm ecuaţia (4.7) cu condiţiile la limită (4.11) sau (4.24). Funcţia ψ poate fi aproximată global pe Ω prin (3.26). Aplicînd metoda lui Galerkin rezultă ;[22] , [39]

$$\int_\Omega \psi_{/ii} \, a_\alpha \, d\Omega = 0 \tag{4.27}$$

care, integrată, prin părţi, conduce la

$$\int_\Omega \psi_{/i} a_{\alpha/i} \, d\Omega - \int_\Gamma \psi_{/i} n_i a_\alpha^* \, d\Gamma = 0 \tag{4.28}$$

şi care cu (3.26) devine

$$\psi_\beta \int_\Omega a_{\alpha/i} a_{\beta/i} \, d\Omega = \int_\Gamma \psi_{/i} n_i a_\alpha^* \, d\Gamma \tag{4.29}$$

adică sistemul liniar (3.30) în care coeficienţii $D_{\alpha\beta}$ sînt daţi de

$$D_{\alpha\beta} = \int_\Omega a_{\alpha/i} a_{\beta/i} \, d\Omega \tag{4.30}$$

iar termenii liberi de

$$F_\alpha = \int_\Gamma \psi_{/i} n_i a_\alpha^* \, d\Gamma \tag{4.31}$$

Dacă facem acum o discretizare a lui Ω în elemente finite Ω^e , funcţia ψ poate fi aproximată local prin (3.35). Procedînd similar cu cele de mai înainte obţinem pentru fiecare element finit Ω^2

$$\int_{\Omega^e} \psi^e_{/ii} a_N^e \, d\Omega^e = 0 \tag{4.32}$$

care integrată prin părţi dă

$$\int_{\Omega^e} \psi^e_{/i} a^e_{N/i} \, d\Omega^e - \int_{\Gamma^e} \psi^e_{/i} n_i a_N^{*e} \, d\Gamma^e = 0 \tag{4.33}$$

din care, cu (3.35), se obţine

$$\psi_M^e \int_{\Omega^e} a^e_{N/i} a^e_{M/i} \, d\Omega^e = \int_{\Gamma^e} \psi^e_{/i} n_i a_N^{*e} \, d\Gamma^e \tag{4.34}$$

adică sistemul liniar (3.39) în care

$$D^e_{NM} = \int_{\Omega^e} a^e_{N/i} a^e_{M/i} \, d\Omega^e \tag{4.35}$$

r termenii liberi

$$F_N^e=\int_{\Gamma^e}\psi_{/i}^e n_i a_N^{*e}\, d\Gamma^e \tag{4.36}$$

...cerea de la local la global se face tot cu formulele (3.42), .44), (3.45) şi (3.46).

4.4.2 Formularea în potenţialul vitezei

Problema este identică cu cea de la 2.5.1. Se ajunge la stemul local

$$D_{NM}^e \varphi_M^e = F_N^e \tag{4.37}$$

care

$$D_{NM}^e=\int_{\Omega^e} b_{N/i}^e b_{M/i}^e\, d\Omega^e \tag{4.38}$$

$$F_N^e=\int_{\Gamma^e}\varphi_{/i}^e n_i b_N^{*e}\, d\Gamma^e \tag{4.39}$$

4.5 Discretizarea domeniului

Pentru discretizare au fost alese tot elemente finite izo-parametrice liniare. In consecinţă vor fi folosite formulele de la 3.

4.6 Calculul coeficienţilor D_{NM}^e

Vom renunţa la indexarea superioară cu e şi vom utiliza riabilele x_1, x_2 respectiv ξ, η. Coeficienţii D_{NM}^e sînt aceeaşi şi pentru formularea în ψ (daţi de (4.35)) cît şi pentru formu-...a în φ (daţi de (4.38)). Cu $a_N=b_N$, observînd că $d\Omega=dx_1dx_2$ folosind (3.68) coeficienţii devin

$$D_{NM}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} a_{N/i}a_{M/i}\,|J|\, d\xi\, d\eta \tag{4.40}$$

: cu (3.85), (3.89) şi (3.90) în care x_1 joacă rolul lui ξ iar x_2 rolul lui η

$$D_{NM}=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{NM}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{4.41}$$

care

$$\begin{aligned} f_{NM}(\xi,\eta)=\{&a_{NM}^{(1)}+a_{NM}^{(2)}+(b_{NM}^{(1)}+b_{NM}^{(2)})\xi+(c_{NM}^{(1)}+c_{NM}^{(2)})\eta+\\ &+(d_{NM}^{(1)}+d_{NM}^{(2)})\xi\eta+(e_{NM}^{(1)}+e_{NM}^{(2)})\xi^2+(f_{NM}^{(1)}+f_{NM}^{(2)})\eta^2\}\cdot(\alpha_0+\alpha_1\xi+\alpha_2\eta)^{-1}\end{aligned} \tag{4.42}$$

pentru care sînt valabile formulele de la 3.6.1. Evaluarea coeficienţilor se face tot cu o formulă analoagă lui (3.97)

$$D_{NM}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} w_i w_j f_{NM}(\xi_i,\eta_j) \qquad (4.43)$$

unde w_i, ξ_i şi η_i sînt daţi de (3.98) respectiv (3.99).

4.7 Calculul termenilor liberi F_N^e

4.7.1 Formularea în funcţia de curent

In formularea dată la 4.3.3 termenii liberi daţi de (4.36) sînt nuli pe toată frontiera exterioară a domeniului mai puţin pe frontiera profilului pe care, (vezi (4.24) şi (4.25)) folosind (4.8)

$$F_N=\int_0^{\ell} \varepsilon_{ji}\, v_j\, n_i\, a_N^*\, ds \qquad (4.44)$$

Elementele finite fiind izoparametrice (vezi şi fig.3.7) este adevărată (3.1o7) unde funcţiile de interpolare pe frontiera sînt date de (3.1o9). Cu acestea termenii liberi daţi de (4.44) devin, [39]

$$F_N=\int_0^{\ell} \varepsilon_{ji}\, v_j^M a_M^*\, n_i\, a_N^*\, ds \qquad N,M=1,2 \qquad (4.45)$$

sau pe larg

$$F_1=\int_0^{\ell}\{(1-s\ell^{-1})(v_1^1 n_2-v_2^1 n_1)+ s\ell^{-1}(v_1^2 n_2-v_2^2 n_1)\}(1-s\ell^{-1})\,ds \qquad (4.46)$$

$$F_2=\int_0^{\ell}\{(1-s\ell^{-1})(v_1^1 n_2-v_2^1 n_1)+ s\ell^{-1}(v_1^2 n_2-v_2^2 n_1)\}\, s\ell^{-1}\,ds \qquad (4.47)$$

care integrate dau

$$F_N=\frac{\ell}{3}\begin{bmatrix} v_1^1 n_2-v_2^1 n_1+\frac{1}{2}(v_1^2 n_2-v_2^2 n_1) \\ \frac{1}{2}(v_1^1 n_2-v_2^1 n_1)+v_1^2 n_2-v_2^2 n_1 \end{bmatrix} \qquad (4.48)$$

4.7.2 Formularea în potenţialul vitezei

In formularea dată de 4.2.2 singurii termeni liberi ne-nuli sînt pe partea AO a frontierei pe care ei se determină cu ajutorul lui (4.39) şi (4.21)

$$F_N=\int_0^{\ell} v_i n_i b_N^*\, ds \qquad (4.49)$$

care cu (3.1o7) şi (3.1o9) devin

$$F_N=\int_0^{\ell} v_i^M b_M^*\, n_i\, b_N^*\, ds \qquad (4.5o)$$

sau pe larg

$$F_1=\int_0^{\ell}\{(1-s\ell^{-1})(v_1^1 n_1+v_2^1 n_2)+ s\ell^{-1}(v_1^2 n_1+v_2^2 n_2)\}(1-s\ell^{-1})\,ds \qquad (4.51)$$

$$F_2=\int_0^{\ell}[(1-s\ell^{-1})(v_1^1 m_1+v_2^1 m_2)+ + s\ell^{-1}(v_1^2 m_1+v_2^2 m_2)]\, s\ell^{-1}\, ds \tag{4.52}$$

...i care integrate dau

$$F_N=\frac{\ell}{3}\begin{bmatrix} v_1^1 m_1+v_2^1 m_2+\frac{1}{2}(v_1^2 m_1+v_2^2 m_2) \\ \frac{1}{2}(v_1^1 m_1+v_2^1 m_2)+v_1^2 m_1+v_2^2 m_2 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

...cazul nostru $m_1 = 1$, $m_2 = 0$ iar $v_1^1 = V_1^2 = 1$ şi $v_2^1 = v_2^2 = 0$.
...i, în final

$$F_N=\frac{\ell}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \tag{4.54}$$

...ică

$$F_N=\frac{1}{2}\ell \tag{4.55}$$

4.8 Asamblarea matricii sistemului. Punerea condiţiilor la limită

Rămîn valabile consideraţiile de la 3.8.

4.9 Determinarea cîmpului de viteze

4.9.1 Formularea în funcţia de curent

Analog cu cele de la 3.9.1, folosind (4.8), (3.35),(3.86) (3.76), se obţin componentele vitezei pe fiecare element finit

$$v_1^e=\psi_{/2}^e=a_{N/2}^e\psi_N^e=(8|J|)^{-1}(A_{N2}+B_{N2}^1\xi+B_{N2}^2\eta)\psi_N^e \tag{4.56}$$

$$v_2^e=-\psi_{/1}^e=-a_{N/1}^e\psi_N^e=-(8|J|)^{-1}(A_{N1}+B_{N1}^1\xi+B_{N1}^2\eta)\psi_N^e \tag{4.57}$$

...re în centrele de greutate ale elementelor izoparametrice devin

$$v_1^e=\alpha_0^{-1}A_{N2}\psi_N^e \tag{4.58}$$

$$v_2^e=-\alpha_0^{-1}A_{N1}\psi_N^e \tag{4.59}$$

...rimea vitezei este

$$v=(v_1^2+v_2^2)^{1/2} \tag{4.60}$$

...au raportată la viteza de la intrare v^{0A} dată de (4.9)

$$\bar{v}=v\cdot v^{0A^{-1}} \tag{4.61}$$

4.9.2 Formularea în potenţialul vitezei

Din (4.21), folosind (3.35), (3.86) şi (3.76), se obţin ...componentele vitezei pe fiecare element finit

$$v_1^e = \varphi_{/1}^e = b_{N/1}^e \varphi_N^e = (8|\mathcal{J}|)^{-1}(A_{N1} + B_{N1}^1 \xi + B_{N1}^2 \eta)\varphi_N^e \tag{4.62}$$

$$v_2^e = \varphi_{/2}^e = b_{N/2}^e \varphi_N^e = (8|\mathcal{J}|)^{-1}(A_{N2} + B_{N2}^1 \xi + B_{N2}^2 \eta)\varphi_N^e \tag{4.63}$$

care în centrele de greutate ale elementelor finite devin

$$v_1^e = \alpha_o^{-1} A_{N1} \varphi_N^e \tag{4.64}$$

$$v_2^e = \alpha_o^{-1} A_{N2} \varphi_N^e \tag{4.65}$$

4.1o Determinarea cîmpului de presiuni

Se obține imediat din teorema lui Bernoulli pentru mișcarea potențială fără evoluție

$$p - p^{oA} = 2^{-1} \rho (v^{oA^2} - v^2) \tag{4.66}$$

sau raportată la $2^{-1} \rho \, v^{oA^2}$

$$\overline{p} = (p - p^{oA}) 2 \rho^{-1} v^{oA^{-2}} = 1 - \overline{v}^2 \tag{4.67}$$

4.11 Determinarea liniilor de curent și a liniilor de egal potențial al vitezei

Rămîn valabile considerațiile de la 3.11.

4.12 Exemplu de calcul

Metoda a fost aplicată unui profil aerohidrodinamic izolat NACA 2412 dispus între doi pereți rigizi plani și paraleli pentru două incidențe $\alpha = 2^o$ și $\alpha = 6^o$. In cele ce urmează este dată rezolvarea complexă a mișcării potențiale și fără evoluție a unui lichid în jurul acestui profil NACA dispus între doi pereți rigizi plani și paraleli în următorul domeniu de analiză considerînd potențialul φ al vitezei uniform.

4.12.1 Domeniul de analiză

Considerînd coarda profilului unitară, domeniul de analiză a fost considerat cel din fig.4.3.

In fig.4.5 respectiv 4.6 este prezentată discretizarea domeniului în elemente finite izoparametrice. Programul de discretizare a domeniului a fost astfel conceput încît punctele nodale să fie mai multe în apropierea frontierei profilului. Au rezultat 8oo elemente finite (E = 8oo) și 885 noduri (G = 885) din care 5o pe frontiera profilului.

4.12.2 Realizarea programului de calcul

Rezolvarea problemei a fost obținută cu ajutorul programului MISPLAN în cadrul căruia au fost utilizate subprogramele :

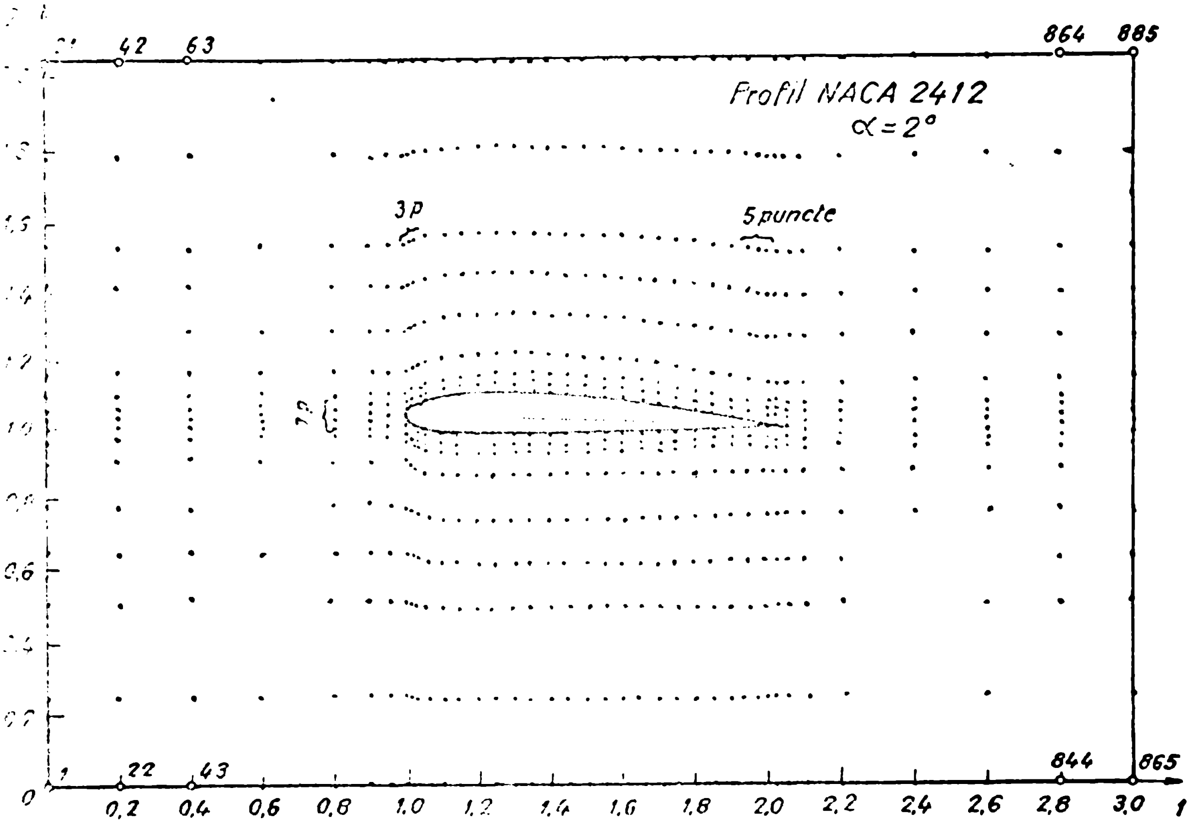


Fig.4.5 Discretizarea domeniului; $\alpha = 2^{o}$

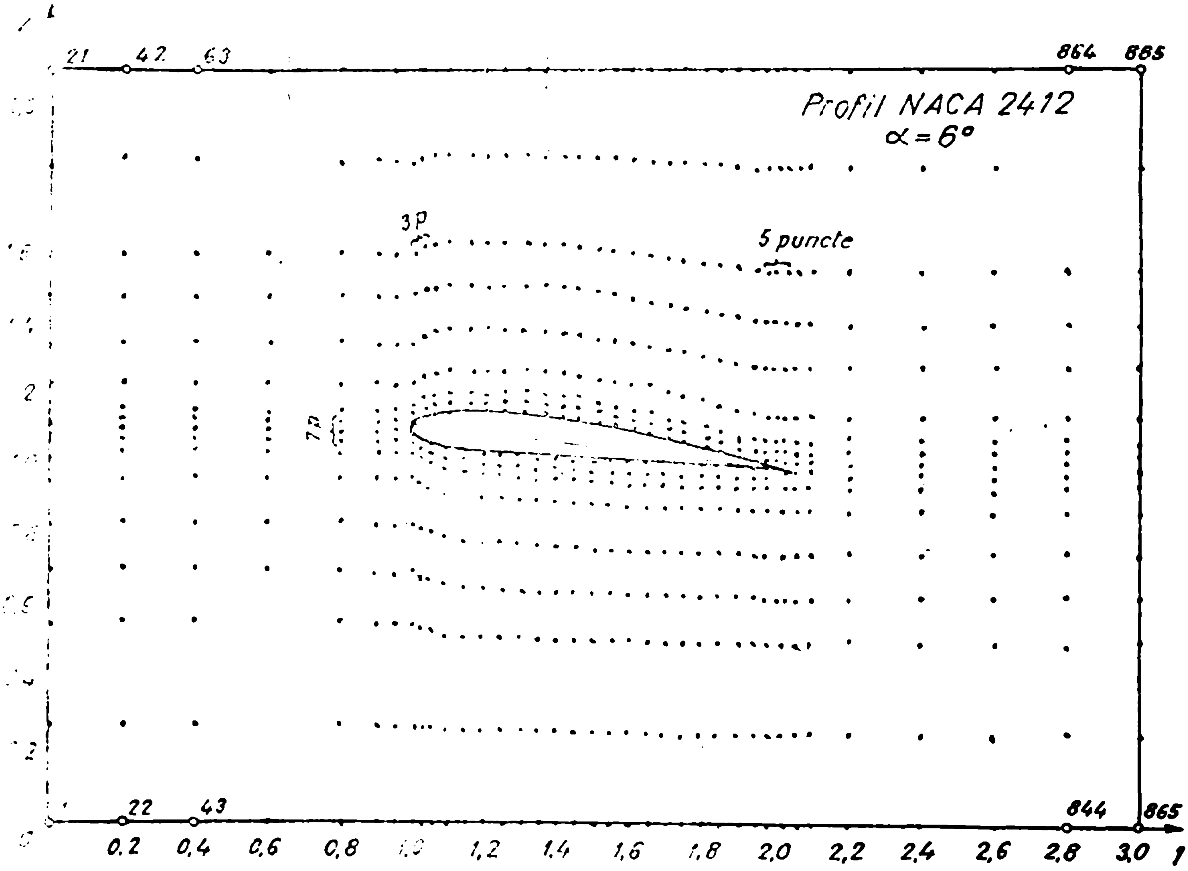


Fig.4.6 Discretizarea domeniului; $\alpha = 6^{o}$

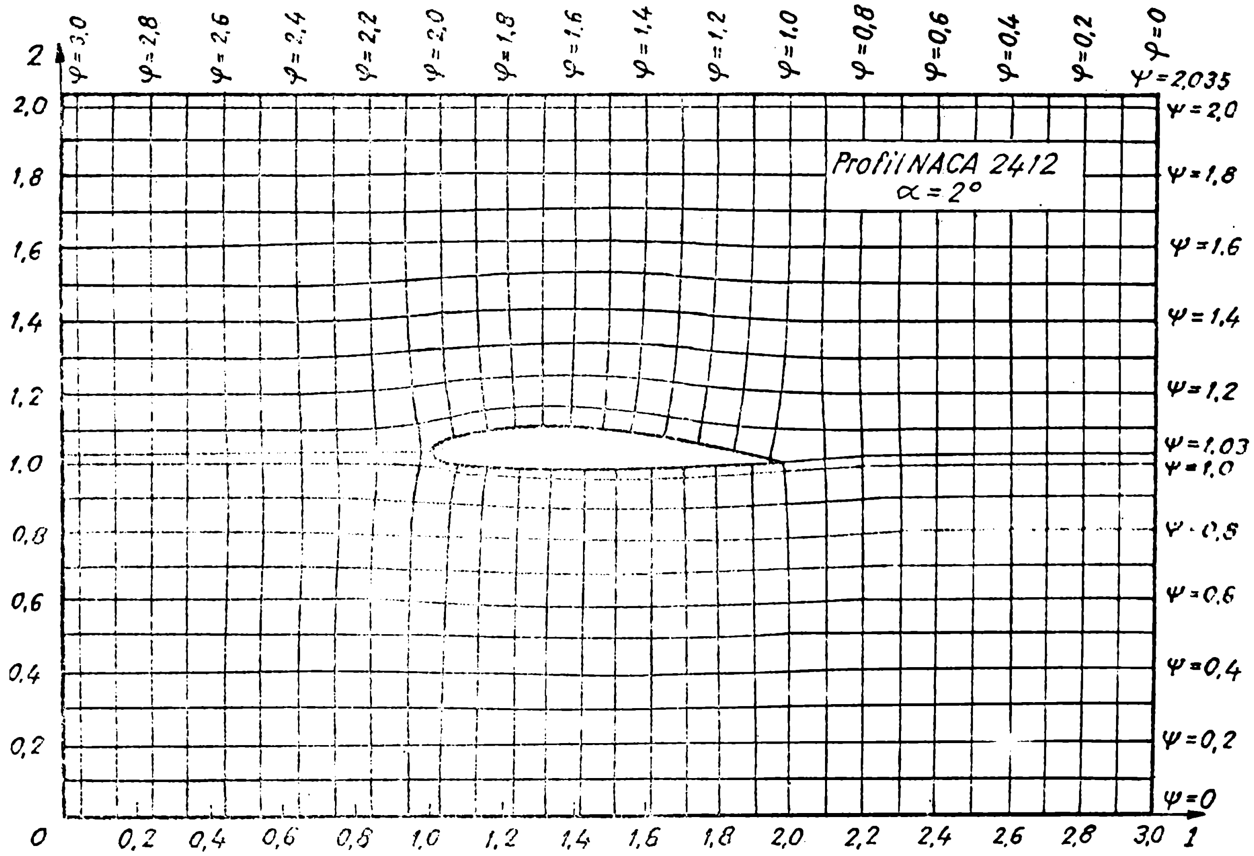


Fig.4.7 Cîmpul hidrodinamic ; $\alpha = 2^{o}$

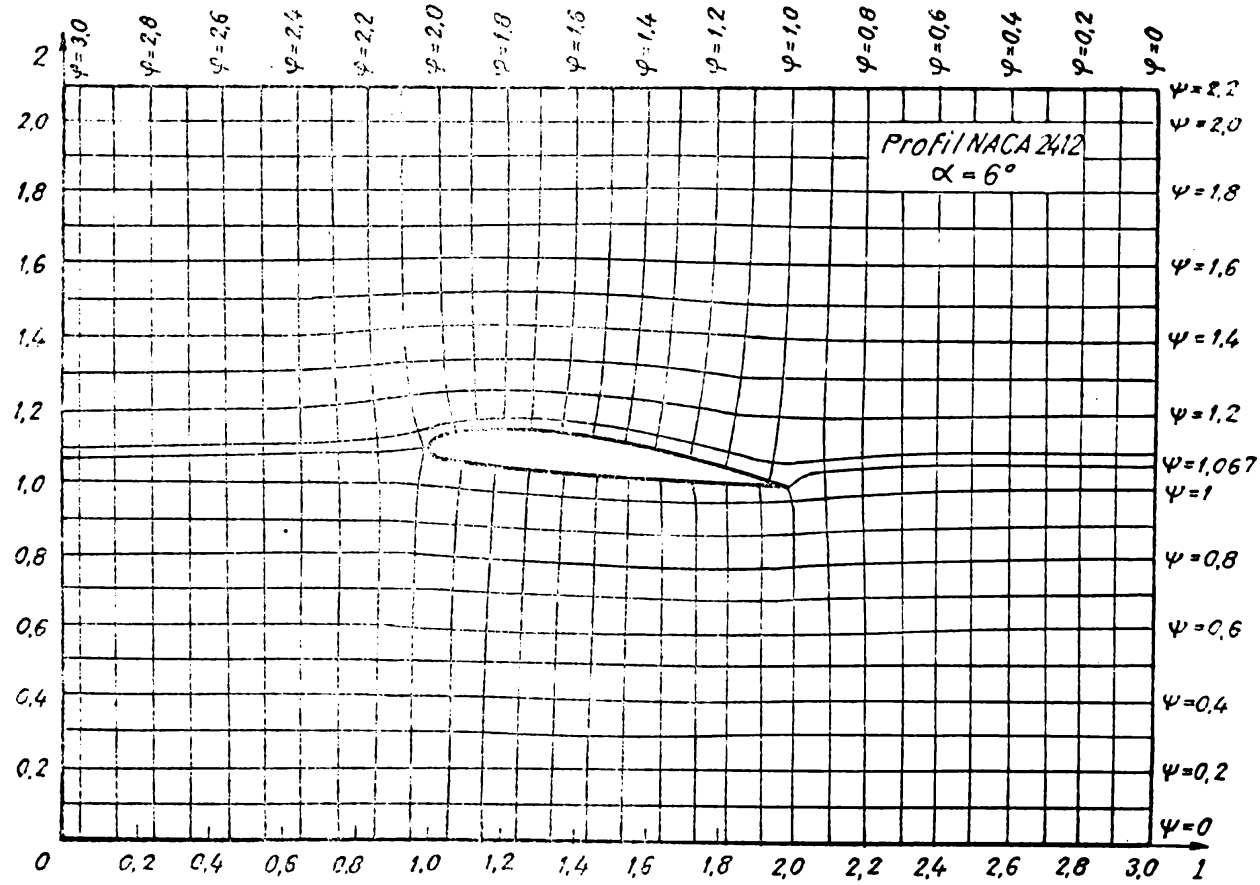


Fig.4.8 Cîmpul hidrodinamic ; $\alpha = 6^{o}$

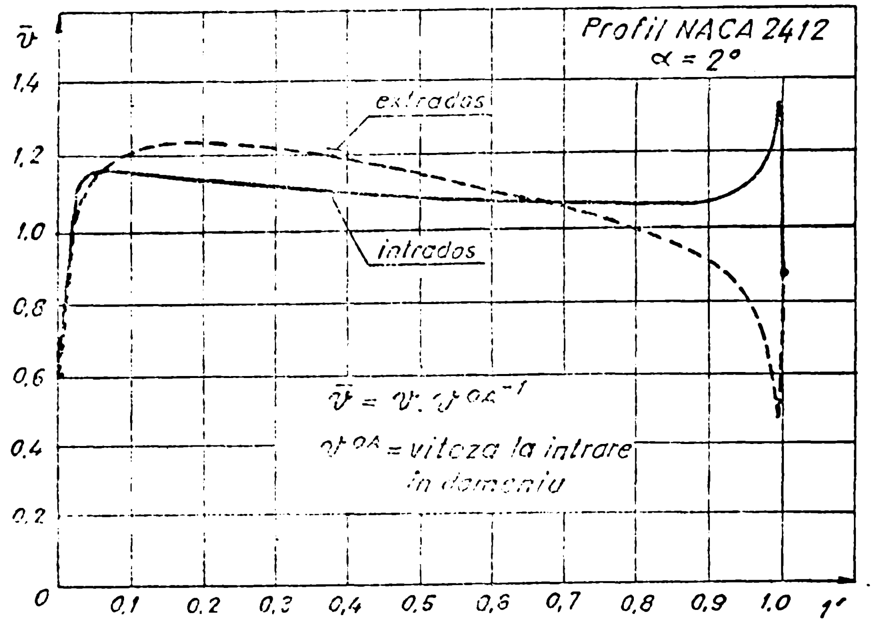


Fig.4.9 Cîmpul de viteze pe frontiera profilului;
$\alpha = 2^{\circ}$.

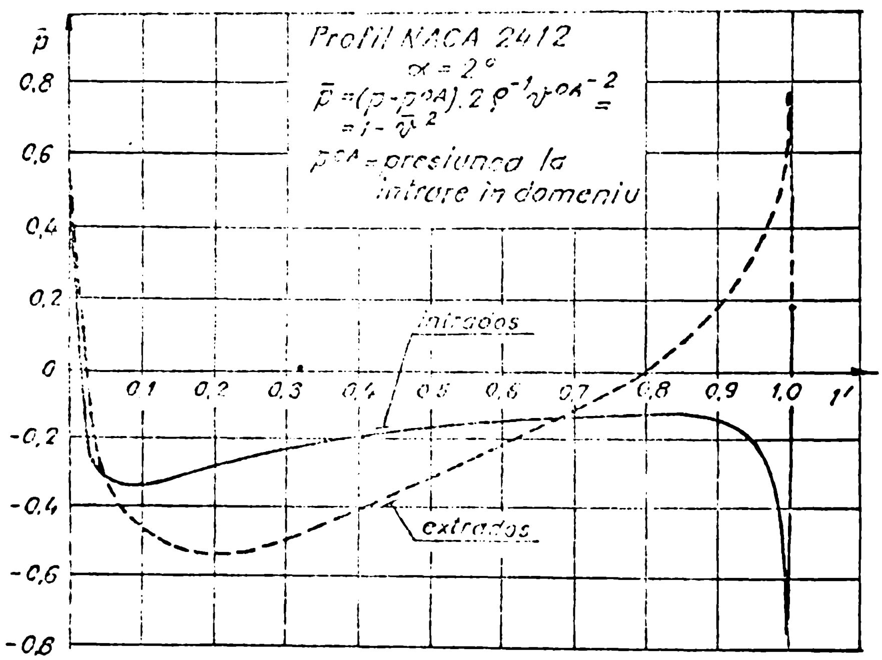


Fig.4.1o Cîmpul de presiuni pe frontiera profilului;
$\alpha = 2^{\circ}$.

(i) DISCRET (vezi 3.12.2 (i))

(ii) SISTEM (vezi 3.12.2 (ii))

(iii) VITCEG care realizează

1. determinarea vitezei în nodurile reţelei
2. determinarea vitezelor în nodurile de pe frontiera profilului
3. determinarea presiunilor în nodurile de pe frontiera profilului

(iv) CAUT 4 (vezi 3.12.2 (iv))

(v) CONDLIM care

1. stabileşte condiţiile la limită pe frontiera domeniului

4.12.3 Rezultate numerice

In fig.4.7 respectiv 4.8 este prezentat cîmpul hidrodinamic în domeniul de analiză considerat, constituit din liniile de curent ψ = constant şi liniile de egal potenţial al vitezei φ = constant. In fig.4.9 este dată variaţia vitezei $\bar{v}$ în lungul profilului în cazul $\alpha = 2^o$ iar în fig.4.lo variţia presiunii $\bar{p}$ pentru $\alpha = 2^o$. In fig.4.11 şi 4.12 sînt date aceleaşi variaţii pentru $\alpha = 6^o$.

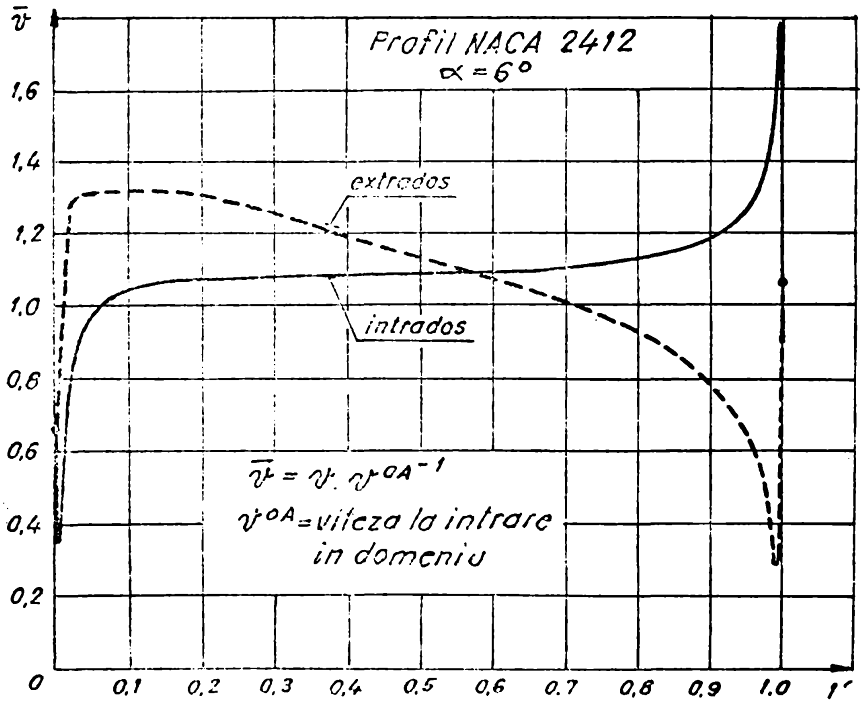


Fig.4.11 Cîmpul de viteze pe frontiera profilului; $\alpha = 6^o$.

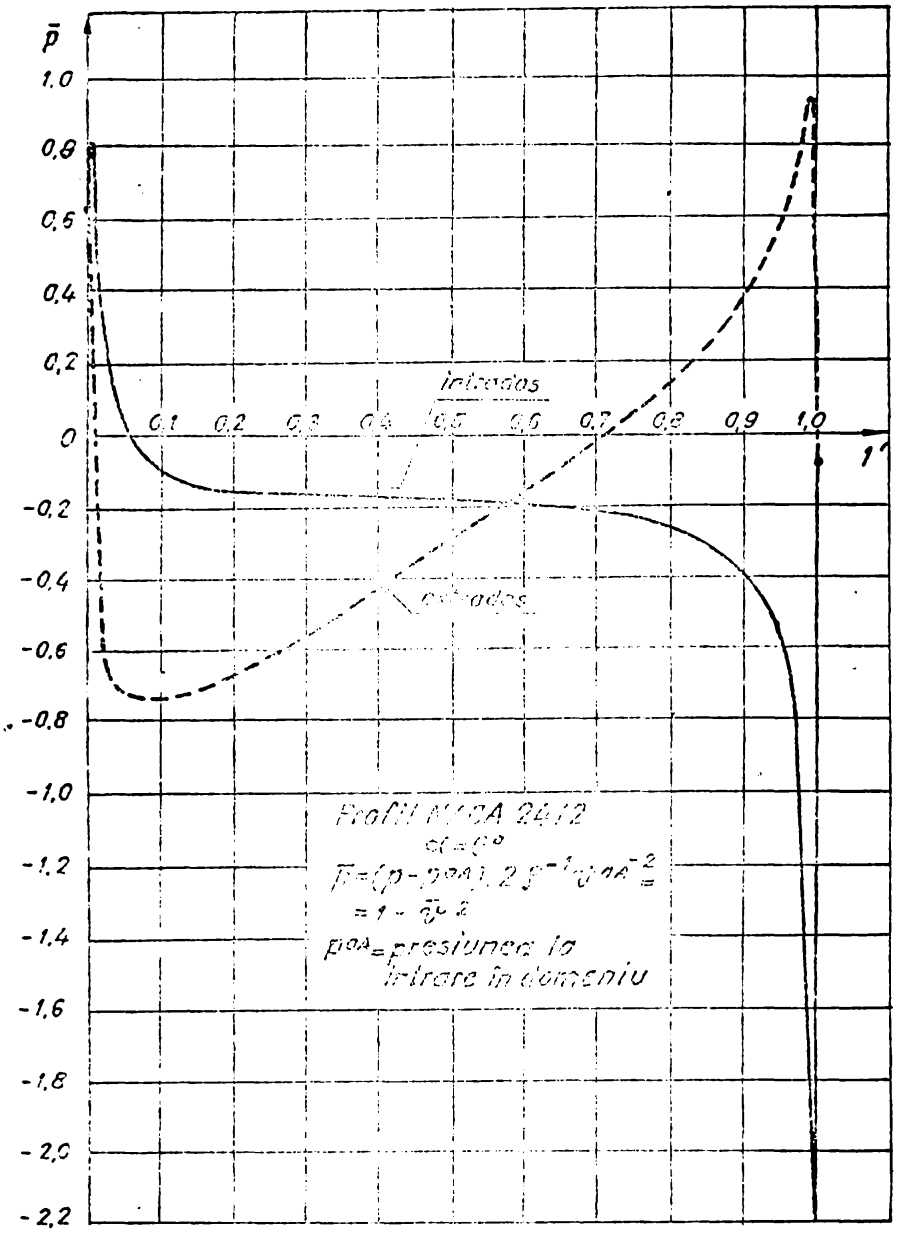


Fig.4.12 Cîmpul de presiuni pe frontiera profilului; $\alpha = 6^{\circ}$.

4.13 Remarcă

Consideraţiile din acest capitol au doar o valoare metodologică, ele reprezentînd un pas spre rezolvarea mişcării în jurul reţelelor de profile axiale. Ipoteza făcută pentru potenţialul vitezei de a fi uniform face ca rezultatele să se depărteze de realitate. Inexistenţa saltului pentru φ implică absenţa circulaţiei în jurul profilului şi implicit absenţa portanţei. Rezolvarea problemei poate fi dată de formularea în ψ cu dificultăţile semnalate la 4.3.3.

CAPITOLUL 5

MISCAREA POTENTIALA PLANA IN JURUL RETELELOR DE PROFILE AXIALE CU CIRCULATIE DATA

5.1 Generalități

Ne propunem să determinăm mişcarea potenţială în jurul unei familii de obstacole dispuse periodic în lungul unei drepte în ipoteza cunoaşterii circulaţiei vitezei în jurul obstacolului. Cu aplicaţie la turbomaşini o astfel de familie de obstacole o constituie reţeaua de profile aerodinamice axială. Pentru aceste reţele cunoaşterea circulaţiei este echivalentă cu cunoaşterea unghiurilor β^{AM} şi β^{AV} de intrare respectiv ieşire din domeniu. Determinarea mişcării înseamnă, analog cu cele de la 4.1, determinarea liniilor de curent, a liniilor de egal potenţial al vitezei, a cîmpului de viteze şi a cîmpului de presiuni.

5.2 Domeniul de analiză. Condiţii la limită

Domeniul de analiză trebuie astfel ales încît el să păstreze efectul de periodicitate al mişcării. In consecinţă el va fi definit de frontierele a trei profile învecinate dispuse la pasul t, din care unul va fi în interiorul domeniului. Condiţiile la limită pe frontierele de influx respectiv flux se vor pune la t/2 de frontul bordurilor de atac respectiv de cel al bordurilor de fugă ale profilelor şi trebuiesc astfel formulate încît să fie asigurată periodicitatea mişcării.

5.2.1 Formularea în funcţia de curent

Determinarea mişcării înseamnă rezolvarea unei probleme la limită pentru ecuaţia (2.1o), cu funcţia necunoscută ψ, pe domeniul Ω cu condiţii la limită esenţiale pe frontiera domeniului şi anume

$$\begin{cases} \psi = \text{constant} & \text{pe } DE, JI \text{ şi frontiera profilului interior} \\ \psi = \psi(x_2) & \text{pe } AC \text{ şi } FH \\ \psi = \psi(x_1) & \text{pe } CD, EF, AJ \text{ şi } IH \end{cases} \tag{5.1}$$

Periodicitatea cîmpului de viteze impune pentru funcţia ψ

$$\psi(x_1, x_2 + k\cdot t) = \psi(x_1, x_2) + k\cdot A \quad ; \quad A = \text{constant} \tag{5.2}$$

$$\psi_{/i}(x_1, x_2 + k\cdot t) = \psi_{/i}(x_1, x_2) \tag{5.3}$$

Cu (5.2) condiţiile la limită (5.1) devin atunci în cazul nostru

$$\begin{cases} \psi = 0 & \text{pe } JI \\ \psi = Q & \text{pe } DE \\ \psi = \frac{1}{2}Q & \text{pe frontiera profilului interior} \\ \psi = \psi(x_1) & \text{pe } AJ \text{ şi } IH \\ \psi = \psi(x_1) + Q & \text{pe } CD \text{ şi } EF \\ v_1^{AM} = v_1^{AV} = \text{constant} & \text{pe } AC \text{ şi } FH \end{cases} \tag{5.4}$$

în care componentele după axa 1-a a vitezei din amonte, v^{AM} (pe frontiera de intrare AC) şi aval v^{AV} (pe frontiera de ieşire FH) sînt

$$v_1^{AM} = v_1^{AV} = (2t)^{-1} \cdot Q \tag{5.5}$$

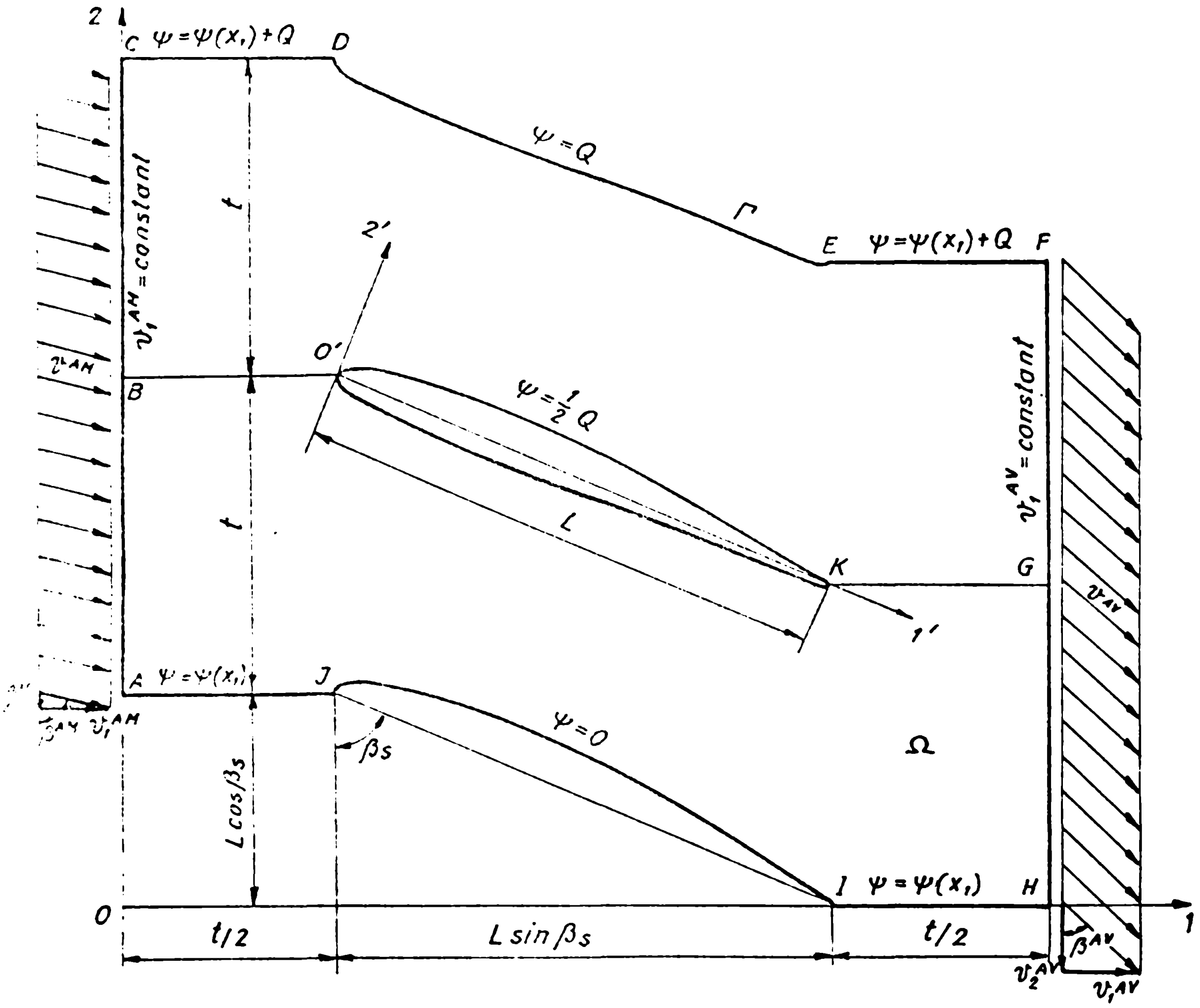


Fig.5.1 Condiţii la limită pentru funcţia ψ

5.2.2 Formularea în potenţialul vitezei

Determinarea mişcării înseamnă rezolvarea unei probleme la limită Neumann pentru ecuaţia (2.11) cu funcţia necunoscută φ , pe domeniul Ω cu condiţii la limită natur ale pe frontiera domeniului şi anume

$$\begin{cases} \varphi_{/n}=0 & \text{pe } DE\,,\, JI \text{ şi frontiera profilului interior} \\ \varphi_{/2}=f(x_1) & \text{pe } CD \text{ şi } AJ \\ \varphi_{/2}=g(x_1) & \text{pe } EF \text{ şi } IH \\ \varphi_{/1}=\text{constant} & \text{pe } AC \text{ şi } FH \end{cases} \tag{5.6}$$

în care am folosit periodicitatea cîmpului de viteze, ce impune pentru derivatele lui φ.

$$\varphi_{/i}(x_1, x_2+k\cdot t)=\varphi_{/i}(x_1,x_2) \tag{5.7}$$

Pentru cazul nostru condiţiile la limită (5.6) sînt

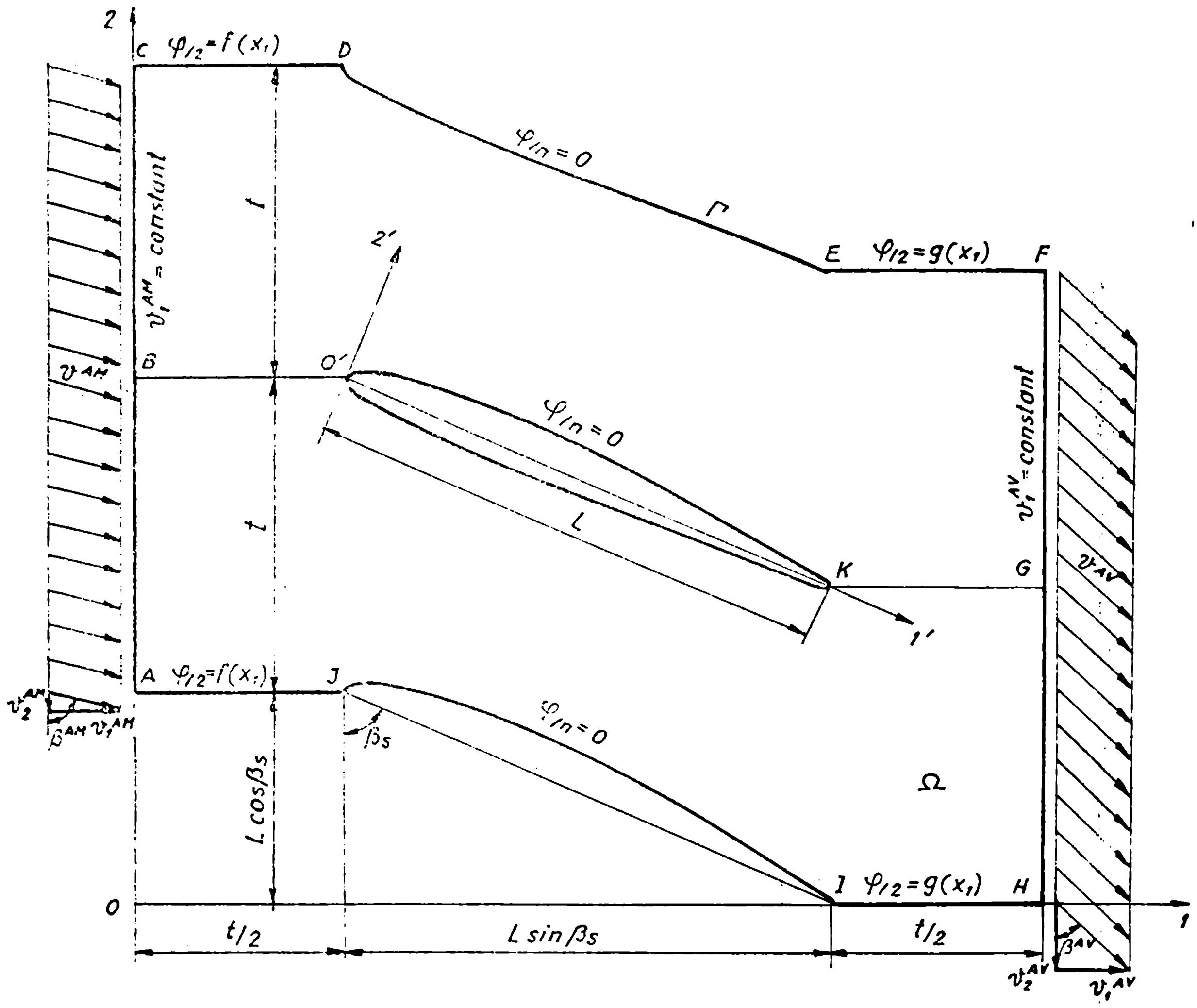


Fig.5.2 Condiţii la limită pentru funcţia φ.

$$\begin{cases} \varphi_{/n}=0 & \text{pe } DE,\ JI \text{ și frontiera profilului interior} \\ \varphi_{/2}=f(x_1) & \text{pe } CD \text{ și } AJ \\ \varphi_{/2}=g(x_1) & \text{pe } EF \text{ și } IH \\ v_1^{AM}=v_1^{AV}=\text{constant} & \text{pe } AC \text{ și } FH \end{cases} \tag{5.8}$$

în care $v_1^{AM} = v_1^{AV}$ este dat tot de (5.5).

5.3 Tratarea în formă adimensională

5.3.1 Formularea în funcția de curent

Cu schimbarea de variabilă (3.16) și de funcție

$$\psi^* = 2tL^{-1}\cdot Q^{-1}\psi \tag{5.9}$$

(2.1c) și (2.5) devin (4.7) respectiv (4.8) cu legătura între viteze

$$v_i^* = 2t\,Q^{-1}v_i \tag{5.10}$$

iar primele componente ale vitezelor pe părțile AC respectiv FH ale frontierei

$$v_1^{*AM} = v_1^{*AV} = 1 \tag{5.11}$$

condițiile la limită (5.4) devin

$$\begin{cases} \psi^*=0 & \text{pe } IJ \\ \psi^*=2tL^{-1} & \text{pe } DE \\ \psi^*=tL^{-1} & \text{pe frontiera profilului interior} \\ v_1^{*AM}=v_1^{*AV}=1 & \text{pe } AC \text{ și } FH \\ \psi^*=\psi^*(x_1^*) & \text{pe } AJ \text{ și } IH \\ \psi^*=\psi^*(x_1^*)+2tL^{-1} & \text{pe } CD \text{ și } EF \end{cases} \tag{5.12}$$

adică

$$\begin{cases} \psi^*=0 & \text{pe } IJ \\ \psi^*=2tL^{-1} & \text{pe } DE \\ \psi^*=tL^{-1} & \text{pe frontiera profilului interior} \\ \psi^*=x_2^*+C^* & \text{pe } AC \\ \psi^*=x_2^*+C'^* & \text{pe } FH \\ \psi^*=\psi^*(x_1^*) & \text{pe } AJ \text{ și } IH \\ \psi^*=\psi^*(x_1^*)+2tL^{-1} & \text{pe } CD \text{ și } EF \end{cases} \tag{5.13}$$

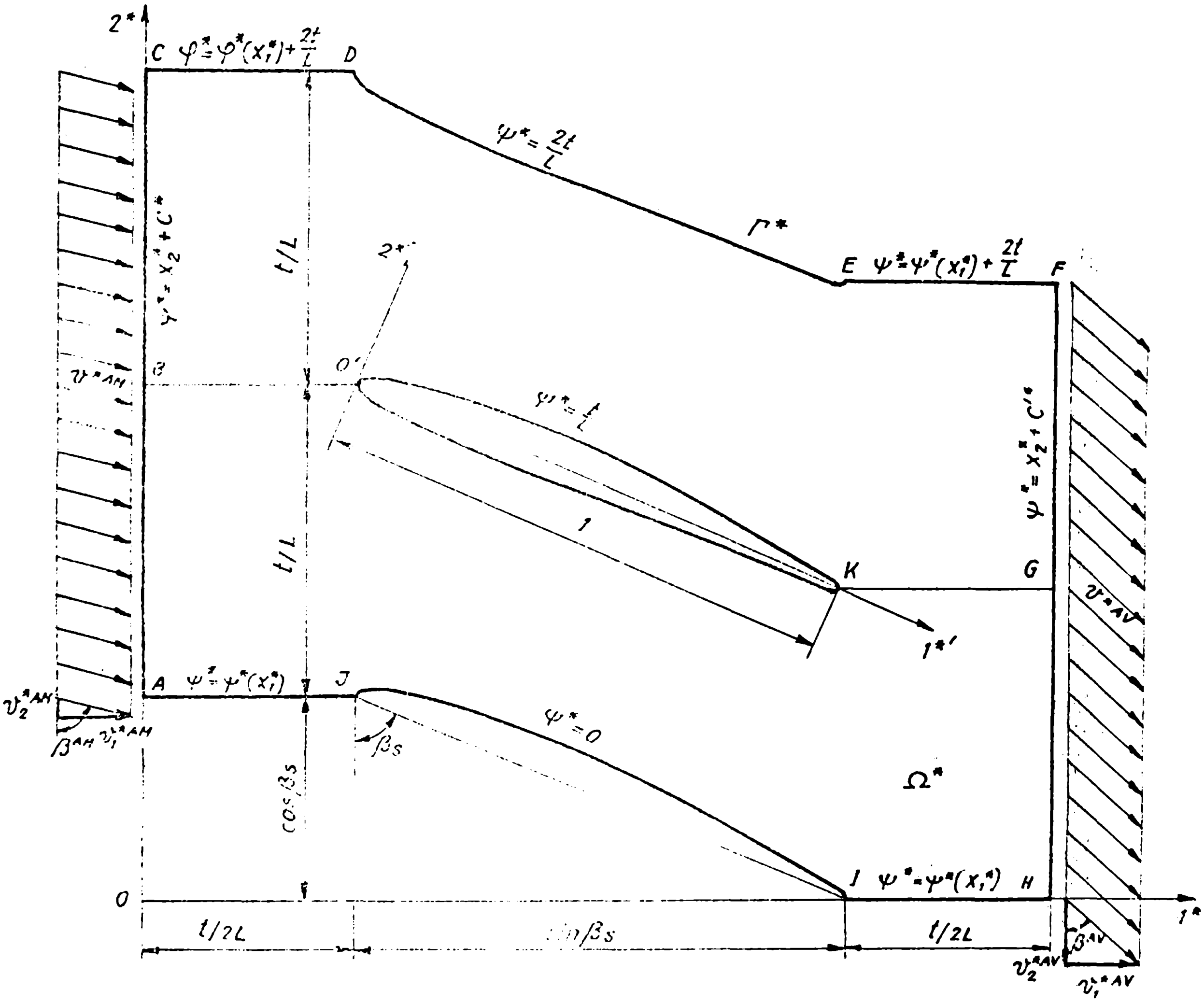


Fig.5.3 Condiţii la limită pentru funcţia ψ^*.

In (5.12) respectiv (5.13) am folosit periodicitatea cîmpului de viteze v_i^* date de relaţiile omoloage lui (5.2) şi (5.3)

$$\psi^*(x_1^*, x_2^* + k t L^{-1}) = \psi^*(x_1^*, x_2^*) + k t L^{-1} \tag{5.14}$$

$$\psi^*_{/i}(x_1^*, x_2^* + k t L^{-1}) = \psi^*_{/i}(x_1^*, x_2^*) \tag{5.15}$$

Pentru soluţionarea problemei rămîne de determinat în (5.13) constantele C^* şi C'^* şi de a admite o variaţie a lui ψ^* pe părţile AJ şi IH ale frontierei. Constantele C^* şi C'^* se determină din condiţiile cinematice de intrare respectiv de ieşire pe părţile AC respectiv FH ale frontierei. Pentru precizarea funcţiei $\psi^*(x_1^*)$ se va folosi un procedeu iterativ. Se caută o variaţie iniţială a lui $\psi^*(x_1^*)$ pe părţile AJ şi IH pentru care procesul iterativ este eficient. Dacă notăm cu $\psi^{*(1)}$ prima iterație atunci soluția va da și valorile lui ψ^{*} pe BO' și KG. Atunci cu (5.14) condițiile la limită pentru iterația 2-a vor fi pe AJ și IH

$$\begin{aligned} \psi^{*(2)}\big|_{AJ} &= \psi^{*(1)}\big|_{BO'} - tL^{-1} \\ \psi^{*(2)}\big|_{IH} &= \psi^{*(1)}\big|_{KG} - tL^{-1} \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} \psi^{*(2)}\big|_{CD} &= \psi^{*(1)}\big|_{BO'} + tL^{-1} \\ \psi^{*(2)}\big|_{EF} &= \psi^{*(1)}\big|_{KG} + tL^{-1} \end{aligned} \tag{5.17}$$

respectiv pentru iterația $k+1$

$$\begin{aligned} \psi^{*(k+1)}\big|_{AJ} &= \psi^{*(k)}\big|_{BO'} - tL^{-1} \\ \psi^{*(k+1)}\big|_{IH} &= \psi^{*(k)}\big|_{KG} - tL^{-1} \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} \psi^{*(k+1)}\big|_{CD} &= \psi^{*(k)}\big|_{BO'} + tL^{-1} \\ \psi^{*(k+1)}\big|_{EF} &= \psi^{*(k)}\big|_{KG} + tL^{-1} \end{aligned} \tag{5.19}$$

Relația (5.15) arată cînd se oprește procedeul iterativ, în cazul cînd este eficient

$$\begin{aligned} \psi^{*(k)}_{/2^*}\big|_{AJ} &\cong \psi^{*(k)}_{/2^*}\big|_{BO'} \cong \psi^{*(k)}_{/2^*}\big|_{CD} \\ \psi^{*(k)}_{/2^*}\big|_{IH} &\cong \psi^{*(k)}_{/2^*}\big|_{KG} \cong \psi^{*(k)}_{/2^*}\big|_{EF} \end{aligned} \tag{5.20}$$

5.3.2 <u>Formularea în potențialul vitezei</u>

Cu schimbarea de variabilă (3.16) și de funcție

$$\varphi^{*} = 2tL^{-1}Q^{-1} \tag{5.21}$$

(2.11) și (2.6) devin (4.20) respectiv (4.21) cu legătura între viteze dată (5.10) și aceleași componente constante (5.11). Condițiile la limită (5.6) devin

$$\begin{cases} \varphi^{*}_{/m} = 0 & \text{pe } DE\text{, } JI \text{ și frontiera profilului interior} \\ \varphi^{*}_{/2^*} = f^{*}(x_1^{*}) & \text{pe } CD \text{ și } AJ \\ \varphi^{*}_{/2^*} = g^{*}(x_1^{*}) & \text{pe } EF \text{ și } IH \\ v_1^{*AM} = v_1^{*AV} = 1 & \text{pe } AC \text{ și } FH \end{cases} \tag{5.22}$$

adică

$$\begin{cases} \varphi^*_{/n}=0 & \text{pe } DE,\ JI \text{ şi frontiera profilului interior} \\ \varphi^*_{/2^*}=f^*(x_1^*) & \text{pe } CD \text{ şi } AJ \\ \varphi^*_{/2^*}=g^*(x_1^*) & \text{pe } EF \text{ şi } IH \\ \varphi^*_{/1^*}=1 & \text{pe } AC \text{ şi } FH \end{cases} \tag{5.23}$$

în care am folosit periodicitatea cîmpului de viteze dată de

$$\varphi^*_{/i}(x_1^*, x_2^* + k t L^{-1}) = \varphi^*_{/i}(x_1^*, x_2^*) \tag{5.24}$$

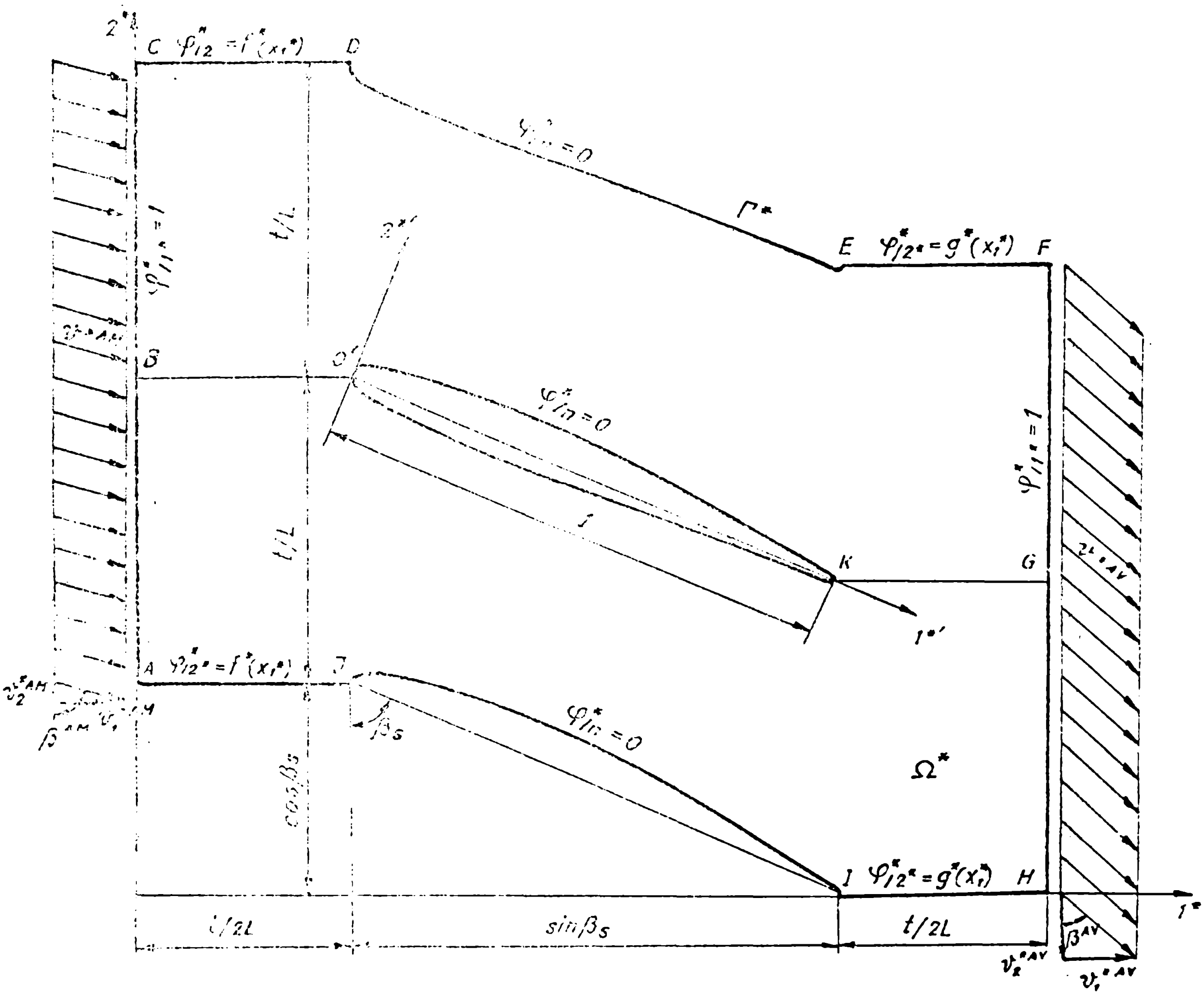


Fig.5.4 Condiţii la limită pentru funcţia φ^*.

La condiţiile la limită (5.23) se mai adaugă o condiţie pentru φ^* (altfel matricea sistemului liniar este singulară); de exemplu $\varphi^* = 0$ în punctul H .

Funcţiile $f^*(x_1^*)$ şi $g^*(x_1^*)$ pot fi precizate folosind un procedeu iterativ analog celui prezentat la 5.3.1. Ele însă pot fi determinate imediat considerînd rezolvată problema în ψ . Din (4.8) se obține

$$f^*(x_1^*) = -\psi^*_{/1^*} = v_2^*(x_1^*) \qquad \text{pe } CD \text{ și } AJ \tag{5.25}$$

$$g^*(x_1^*) = -\psi^*_{/1^*} = v_2^*(x_1^*) \qquad \text{pe } EF \text{ și } IH \tag{5.26}$$

5.4 Determinarea mișcării prin M.E.F.

Vom folosi tot tratarea în formă adimensională. Pentru determinarea mișcării în jurul rețelei de profile rămîn valabile toate considerațiile de la 4.4 ; 4.5 ; 4.6 ; 4.7 ; 4.8 și 4.11. Pentru calculul termenilor liberi F_N , în formularea în potențialul vitezei pot fi făcute cîteva precizări. Termenii liberi F_N sînt dați (4.93) iar pe frontierele domeniului de analiză ei vor avea forme simplificate

(i) pe AJ și IH ; $m_1 = 0$; $m_2 = 1$

$$F_N = \frac{\ell}{3}\begin{bmatrix} v_2^1 + \frac{1}{2} v_2^2 \\ \frac{1}{2} v_2^1 + v_2^2 \end{bmatrix} \tag{5-27}$$

(ii) pe CD și EF ; $m_1 = 0$; $m_2 = -1$

$$F_N = -\frac{\ell}{3}\begin{bmatrix} v_2^1 + \frac{1}{2} v_2^2 \\ \frac{1}{2} v_2^1 + v_2^2 \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

(iii) pe AC ; $m_1 = 1$; $m_2 = 0$; $v_1^1 = v_1^2 = 1$

$$F_N = \frac{\ell}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

(iv) pe FH ; $m_1 = -1$; $m_2 = 0$; $v_1^1 = v_1^2 = 1$

$$F_N = -\frac{\ell}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

5.5 Determinarea cîmpului de viteze

Rămîn valabile considerațiile de la 4.9 cu deosebire doar $\bar{v}$, dat 4.61 în 4.91 , o vom defini prin raportare la v^{AM} adi-

$$\bar{v} = v \cdot v^{AM^{-1}} \tag{5.31}$$

5.6 Determinarea cîmpului de presiuni

Se obține analog lui 4.10

$$p - p^{AM} = 2^{-1} \rho \left(v^{AM^2} - v^2\right) \tag{5.32}$$

sau raportat la $2^{-1}\rho\, v^{AM^2}$

$$\bar{p}=(p-p^{AM})\,2\rho^{-1}v^{AM^{-2}}=1-\bar{v}^{2} \tag{5.33}$$

adică tot (4.67).

5.7 Determinarea circulației și a coeficientului de portanță

5.7.1 Determinarea circulației

Circulația vitezei în jurul profilului de contur C este

$$\Gamma^{V}=\oint_{C} v_i\, dx_i \tag{5.34}$$

Dacă mișcarea este potențială atunci Γ^{V} este dată de deflecția curentului prin

$$\Gamma^{V}=t\,(v_2^{AV}-v_2^{AM}) \tag{5.35}$$

iar căderea de presiune între amonte și aval

$$p^{AM}-p^{AV}=2^{-1}\rho\,(v_2^{AV^2}-v_2^{AM^2}) \tag{5.36}$$

Introducînd media vectorială $\vec{v}^{\infty}$ a vitezelor prin

$$v_i^{\infty}=\frac{1}{2}(v_i^{AM}+v_i^{AV}) \tag{5.37}$$

(5.36) devine, folosind (5.35) și (5.37)

$$p^{AM}-p^{AV}=\rho\, v_2^{\infty}\,\Gamma^{V}\, t^{-1} \tag{5.38}$$

In formă adimensională, utilizînd (3.2o) și

$$\Gamma^{*V}=2t\,L^{-1}Q^{-1}\,\Gamma^{V} \tag{5.39}$$

rezultă, cu (5.1o)

$$\Gamma^{*V}=\oint_{C^*} v_i^{*}\, dx_i^{*} \tag{5.4o}$$

și

$$\Gamma^{*V}=t\,L^{-1}(v_2^{*AV}-v_2^{*AM}) \tag{5.41}$$

Folosind acum $\bar{v}$ și $\bar{p}$ dați de (5.31) și (5.33) circulația devine

$$\bar{\Gamma}^{V}=\oint_{C^*}\bar{v}_i\, dx_i^{*} \tag{5.42}$$

respectiv

$$\bar{\Gamma}^{V}=t\,L^{-1}(\bar{v}_2^{AV}-\bar{v}_2^{AM}) \tag{5.43}$$

cu

$$\bar{v}_i^{\infty}=\frac{1}{2}(\bar{v}_i^{AM}+\bar{v}_i^{AV}) \tag{5.44}$$

căderea de presiune dată de (5.38) devine (cu semn schimbat)

BUPT

$$\bar{p}^{AV}=(p^{AV}-p^{AM})2\rho^{-1}v^{AM^{-2}}=(\bar{v}_2^{AM^2}-\bar{v}_2^{AV^2})=-2t^{-1}L\bar{v}_2^{\infty}\bar{\Gamma}^{V} \qquad (5.45)$$

În (5.43) se observă că, pentru o deflecţie dată, circulaţia depinde liniar de pasul reţelei

5.7.2 Determinarea coeficientului de portanţă

Forţa de acţiune $\vec{F}$ a lichidului asupra profilului dispus în reţea este

$$F_i=\oint_C p\, n_i\, ds \qquad (5.46)$$

sau pe componente

$$F_1=\oint_C p\, dx_2 \quad ; \quad F_2=\oint_C p\, dx_i \qquad (5.47)$$

iar mărimea ei

$$F=(F_1^2+F_2^2)^{1/2} \qquad (5.48)$$

este ortogonală pe suportul lui $\vec{v}^{\infty}$.

In cadrul mişcării potenţiale între $\vec{F}$ şi Γ^V există o legătură directă şi anume

$$F_1=\rho v_2^{\infty}\Gamma^V \qquad (5.49)$$

$$F_2=-\rho v_1^{\infty}\Gamma^V \qquad (5.50)$$

$$F=\rho v^{\infty}\Gamma^V \qquad (5.51)$$

Coeficientul de portanţă C^F este definit prin

$$C^F=2\rho^{-1}\cdot v^{AM^{-2}}\cdot L^{-1}\cdot F \qquad (5.52)$$

sau

$$C^F=(C_1^{F^2}+C_2^{F^2})^{1/2} \qquad (5.53)$$

Atunci

$$C_i^F=\oint_{C^*}\bar{p}\, n_i\, ds^* \qquad (5.53')$$

Mai folosită este forma $\tilde{C}^F$ pentru coeficientul de portanţă dată

$$\tilde{C}^F=2\rho^{-1}\cdot v^{\infty^{-2}}\cdot L^{-1}\cdot F \qquad (5.54)$$

deci

$$\tilde{C}^F = \left(\tilde{C}_1^{F\,2} + \tilde{C}_2^{F\,2}\right)^{1/2} \tag{5.55}$$

avem legăturile

$$\tilde{C}_1^F = 2\,\tilde{v}_2^{\infty}\,\tilde{v}^{\infty^{-2}}\,\Gamma^V \tag{5-56}$$

5.8 Exemplu de calcul

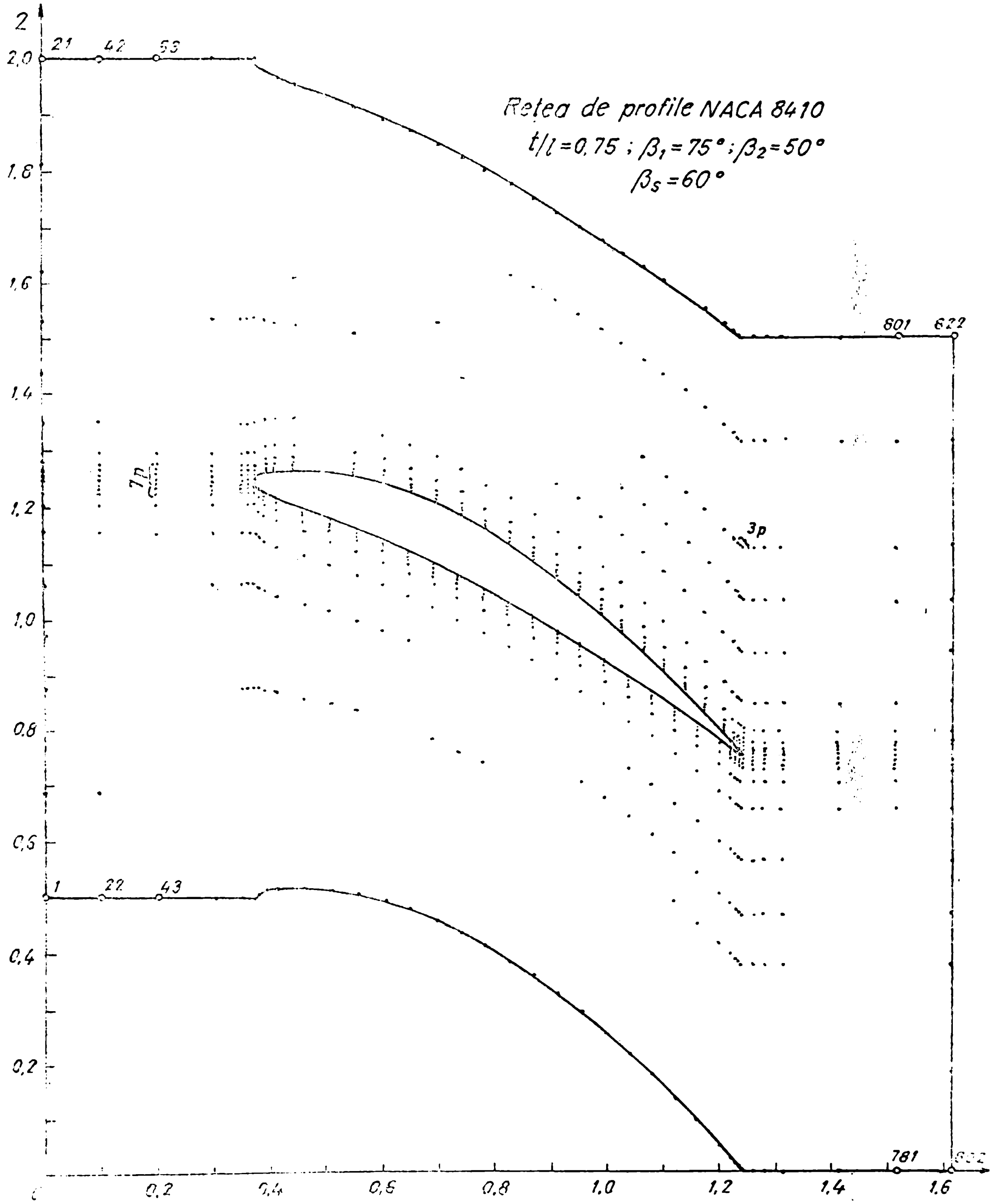


Fig.5.5 Discretizarea domeniului

$$\tilde{C}_2^F = -2\,\bar{v}_1^{\infty}\,\bar{v}^{\infty\,-2}\cdot\bar{\Gamma}^V \qquad (5.57)$$

$$\tilde{C}^F = 2\,\bar{v}^{\infty\,-1}\cdot\bar{\Gamma}^V \qquad (5.58)$$

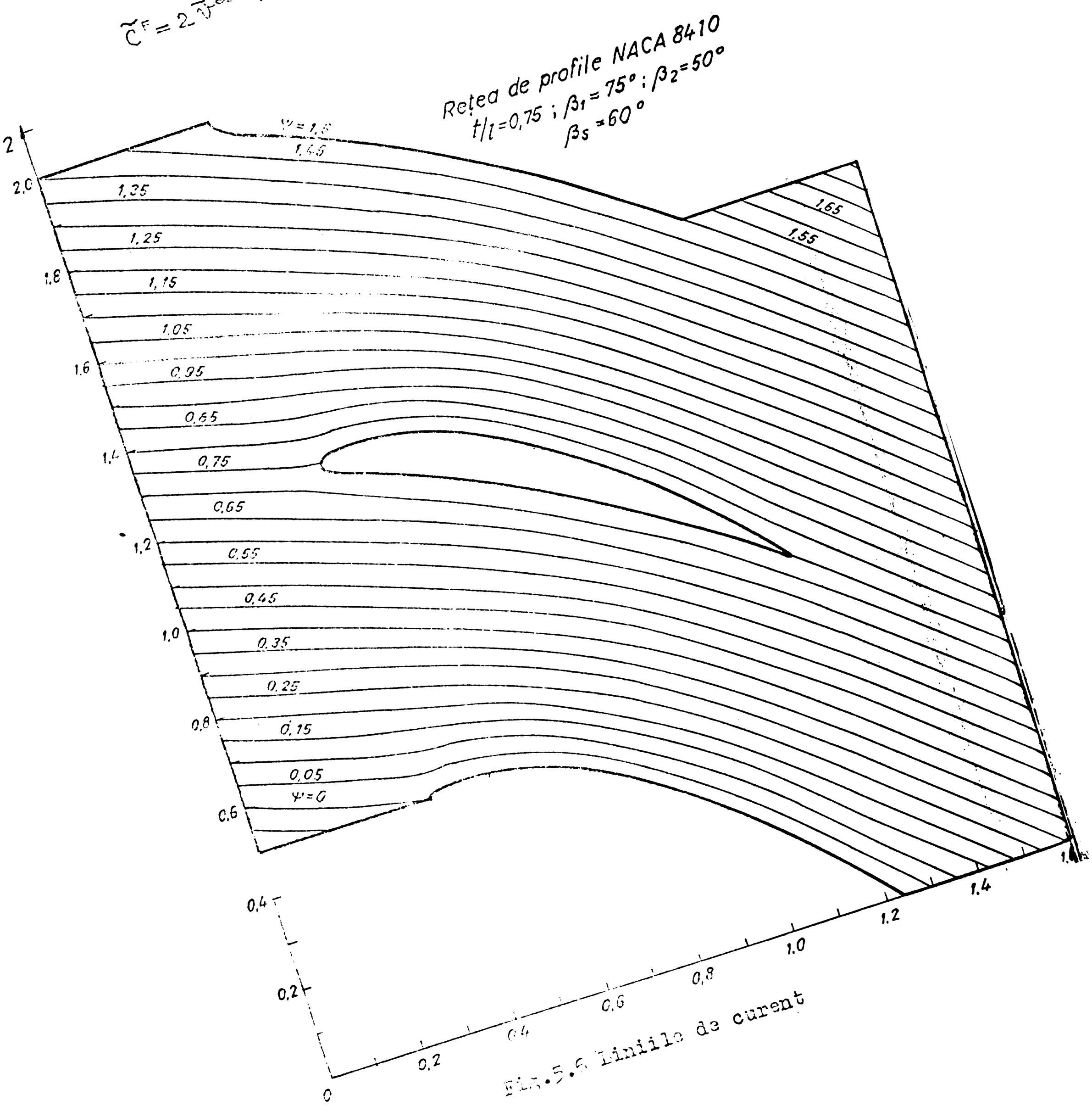


Fig.5.6 Liniile de curent

Metoda a fost aplicată unei rețele de profile aerohidrodinamice axiale de turbină constituită din profile NACA 8410 cu următorii parametri $t/L = 0{,}75$; $\beta_1 = 75^{o}$; $\beta_2 = 50^{o}$; $\beta_s = 60^{o}$. In cele ce urmează este dată rezolvarea complexă a mișcării potențiale și fără evoluție a unui lichid în jurul rețelei menționate considerînd următorul domeniu de analiză, folosind formularea în ψ.

5.8.1 <u>Domeniul de analiză</u>

Considerînd coarda profilului unitară, domeniul de analiză a fost considerat cel din fig.5.5. In fig.5.5 este prezentată discretizarea domeniului în elemente finite izoparametrice. Programul de discretizare a domeniului a fost astfel conceput încît punctele nodale să fie mai numeroase în apropierea profilului interior(vezi şi 4.12.1). Au rezultat astfel 740 elemente finite ($E = 740$) şi 822 noduri ($G = 822$) din care 50 pe frontiera profilului interior.

5.8.2 <u>Realizarea programului de calcul</u>

Rezolvarea problemei a fost obținută cu ajutorul programului MISPLANR în cadrul căruia au fost utilizate subprogramele

(i) DISCRET (vezi 3.12.2 (i))

(ii) SISTEM (vezi 3.12.2 (ii))

(III) VITEZG care realizează

1. determinarea vitezelor în nodurile rețelei
2. determinarea vitezelor în nodurile de pe frontiera profilului
3. determinarea presiunilor în nodurile de pe frontiera profilului
4. calculul circulației
5. calculul căderii de presiune

(iv) CAUT 4 (vezi 3.12.2 (iv))

(v) CONDLIM (vezi 4.12.2 (v))

(vi) COEFPOT care

1. calculează coeficientul de portanță

5.8.3 <u>Rezultate numerice</u>

In fig.5.6 sînt prezentate liniile de curent $\psi =$ constant în domeniul de analiză considerat. In fig.5.7 este dată variația vitezei $\overline{v}$ în lungul profilului iar în fig.5.8 variația presiunii $\overline{p}$ în lungul profilului.

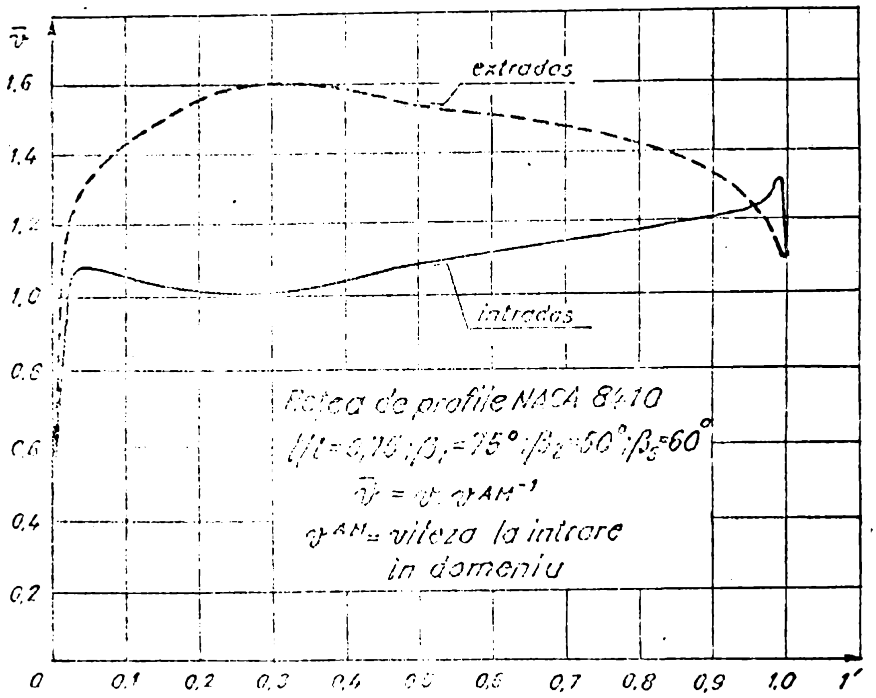


Fig.5.7 Cîmpul de viteze pe frontiera profilului

5.8.4 Comparaţii cu alte metode

In cazul mişcării potenţiale plane şi fără evoluţie a unui uid incompresibil în jurul unei reţele de profile axiale parametrii tegrali ai reţelei (în formă adimensională) : circulaţia $\bar{\Gamma}^{V}$, căderea de presiune $\tilde{p}^{AV}$ şi coeficientul de portanţă $\tilde{C}^{F}$ sînt legaţi pasul $t\bar{L}^{-1}$ şi deflecţia curentului $\bar{v}_2^{AV}-\bar{v}_2^{AM}$ prin formulele (5.41) şi (5.53). In tabelul ce urmează sînt daţi comparativ parametrii integrali calculaţi cu ajutorul cîmpului de viteze tiv presiunii, daţi de (5.42) şi (5.53'), determinate cu ajutorul M.E.F.

Parametrul integral		Teoretic	M.E.F.
Circulaţia $\bar{\Gamma}^{V}$	$\bar{\Gamma}^{V}$	0,4128	0,4080
Căderea de presiune	$-\tilde{p}^{AV}$	0,5899	0,5818
Coeficientul de portanţă	$\tilde{C}^{F}$	0,7496	0,7520

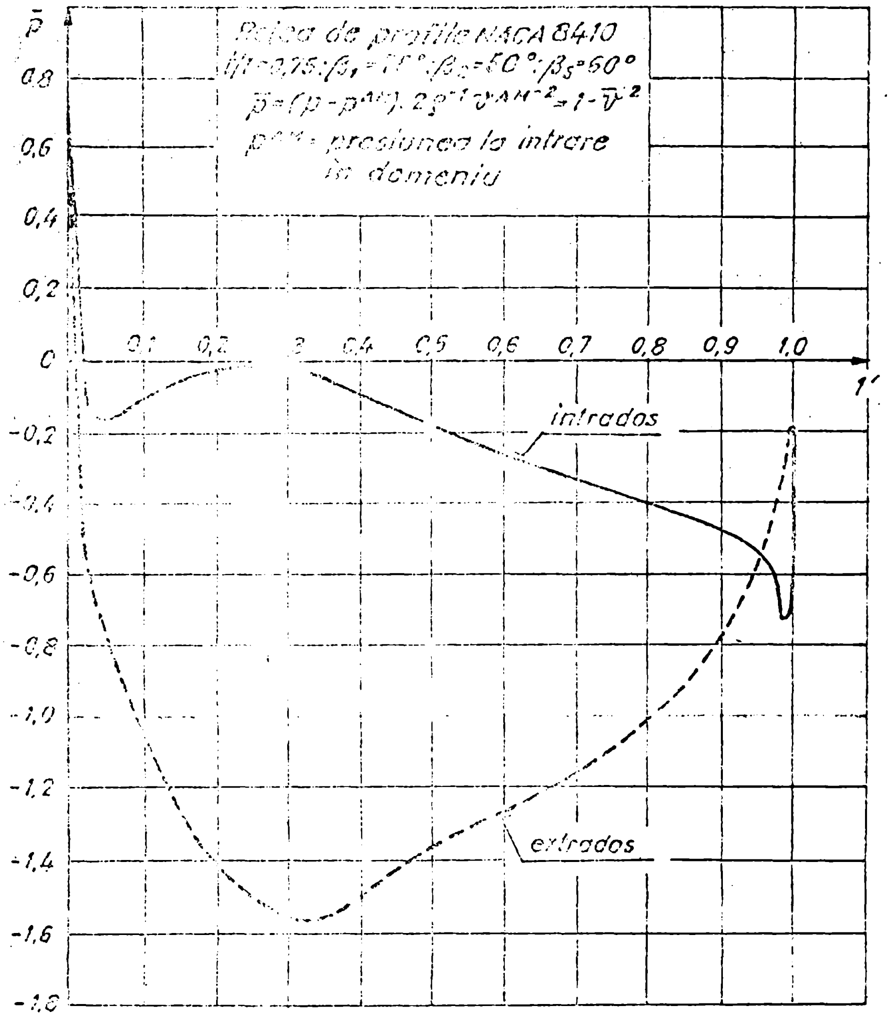


Fig.5.8 Cîmpul de presiuni pe frontiera profilului

In fig.5.9 este dat comparativ cîmpul de presiuni pe frontiera profilului determinat cu M.E.F. şi prin alte metode teoretice şi experimentale şi în tabel coeficientul de portanţă determinat din cîmpul de presiuni pe frontiera profilului.

5.9 Determinarea liniilor de egal potenţial al vitezei

Formularea de la 5.3.2 poate fi folosită numai în cazul în care potenţialul φ al vitezei este o funcţie uniformă pe domeniul de analiză considerat. Aceasta este echivalent cu o mişcare fără circulaţie în jurul profilelor deci 5.3.2 poate fi folosită numai în cazul particular al reţelelor de profile ce nu realizează deflecţie.

Existenţa circulaţiei în jurul profilelor ce compun reţeaua face ca potenţialul vitezei să fie o funcţie multiformă, saltul ei fiind tocmai circulaţia. Pentru a aduce potenţialul complex la forma uniformă domeniul mişcării trebuie transformat într-un simplu conex.

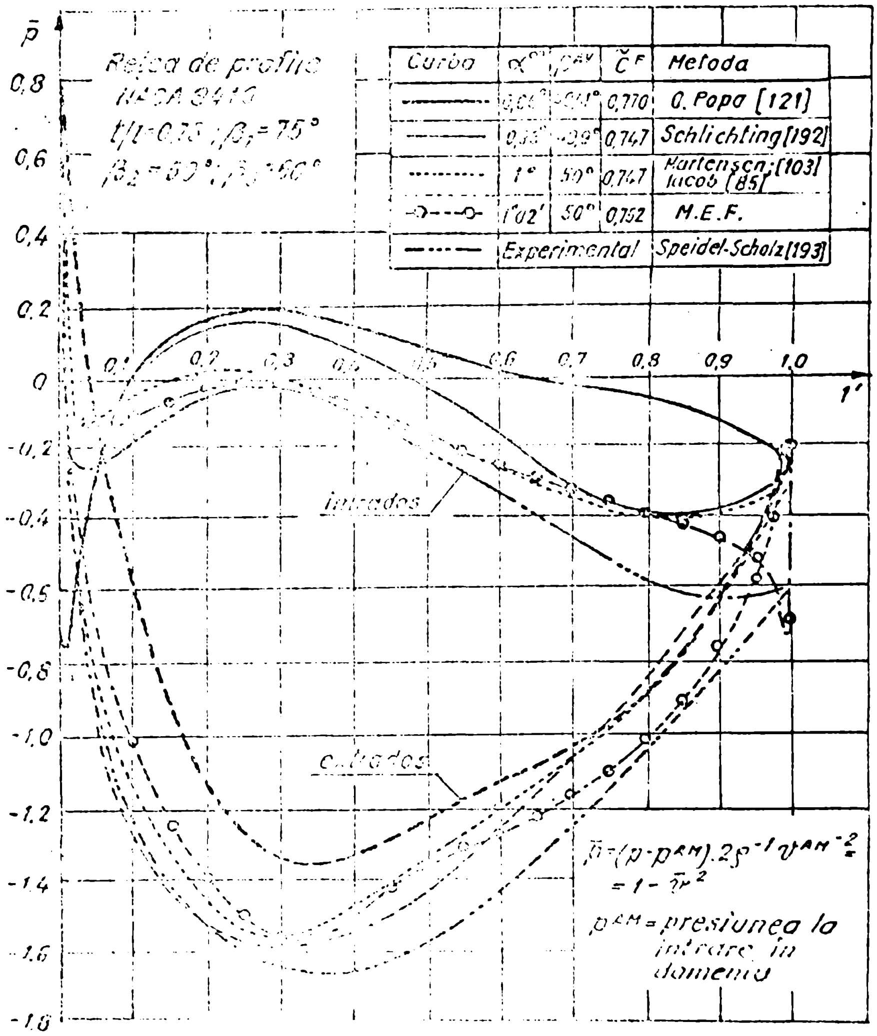


Fig.5.9 Cîmpul de presiuni pe frontiera profilului. Comparații cu alte metode teoretice și experimentale

Metoda	$\check{C}^F$	Abaterea absolută de la val. teoretică	Abaterea relativă de la val. teoretică
Teoretic	0,7496	-	-
O. Popa	0,7700	0,0204	2,721 %
Schlichting	0,7470	-0,0026	-0,347 %
Martensen - K. Iacob	0,7470	-0,0026	-0,347 %
M.E.F.	0,7520	0,0024	0,320 %

5.9.1 Domeniul de analiză. Condiţii la limită

Domeniul de analiză este tot cel din fig.5.2 (respectiv 5.4) la care însă am practicat o tăietură în lungul segmentului KG transformîndu-l astfel într-un domeniu simplu conex. Determinarea potenţialului vitezei înseamnă rezolvarea unei probleme la limită mixte pentru ecuaţia (2.11), cu funcţia necunoscută φ, pe domeniul simplu conex Ω cu următoarele condiţii la limită

$$\begin{cases} \varphi_{/m}=0 & \text{pe } DE,\ JI \text{ şi frontiera profilului interior} \\ \varphi=\varphi(x_1) & \text{pe } IH,\ AJ,\ CD,\ EF,\ KG_{\text{superior}} \text{ şi } KG_{\text{inferior}} \\ \varphi=\varphi(x_2) & \text{pe } AC,\ HG \text{ şi } GF \end{cases} \tag{5.59}$$

Presupunînd cunoscută funcţia ψ, deci şi cîmpul de viteze v_i, funcţiile $\varphi(x_1)$ şi respectiv $\varphi(x_2)$ pe frontieră se determină imediat din

$$\varphi(x_1)=\varphi_M+\int_{x_1^M}^{x_1} v_1\,dx_1 \tag{5.60}$$

$$\varphi(x_2)=\varphi_M+\int_{x_2^M}^{x_2} v_2\,dx_2 \tag{5.61}$$

iar pe KG saltul funcţiei φ este circulaţia adică

$$\varphi(x_1)\Big|_{KG_{\text{inferior}}}=\varphi(x_1)\Big|_{KG_{\text{superior}}}+\Gamma^v \tag{5.62}$$

Impunînd φ = o în punctul H, condiţiile la limită (5.59) devin pe larg

$$\begin{cases} \varphi_{/m}=0 & \text{pe } DE,\ JI \text{ şi frontiera profilului interior} \\ \varphi(x_1)=\int_0^{x_1} v_1\,dx_1 & \text{pe } IH \\ \varphi(x_1)=\int_J^{x_1} v_1\,dx_1+\varphi_J & \text{pe } AJ \\ \varphi(x_1)=\int_D^{x_1} v_1\,dx_1+\varphi_D & \text{pe } CD \\ \varphi(x_1)=\int_F^{x_1} v_1\,dx_1+\varphi_F & \text{pe } EF \\ \varphi(x_1)=\int_G^{x_1} v_1\,dx_1+\varphi_G & \text{pe } KG_{\text{inferior}} \\ \varphi(x_1)=\int_G^{x_1} v_1\,dx_1+\varphi_G-\Gamma^v & \text{pe } KG_{\text{superior}} \\ \varphi(x_2)=\int_0^{x_2} v_2\,dx_2 & \text{pe } HG \\ \varphi(x_2)=\int_G^{x_2} v_2\,dx_2+\varphi_G-\Gamma^v & \text{pe } GF \\ \varphi(x_2)=\int_A^{x_2} v_2\,dx_2+\varphi_A & \text{pe. } AC \end{cases} \tag{5.63}$$

unde

$$\varphi_J = \varphi_I + \int_I^J v_i \, dx_i \tag{5.64}$$

$$\varphi_D = \varphi_E + \int_E^D v_i \, dx_i \tag{5.65}$$

5.9.2 <u>Tratarea în formă adimensională</u>

Cu schimbarea de variabilă (3.16) şi de funcţie (5.21) ecuaţia (2.11) devine (4.2o) iar condiţiile la limită (5.63) devin, folosind forma (5.4o)

$$\begin{cases} \varphi^*_{/n} = 0 & \text{pe } DE, JI \text{ şi frontiera profilului interior} \\ \varphi^*(x_1^*) = \int_0^{x_1^*} v_1^* dx_1^* & \text{pe } IH \\ \varphi^*(x_1^*) = \int_J^{x_1^*} v_1^* dx_1^* + \varphi_J^* & \text{pe } AJ \\ \varphi^*(x_1^*) = \int_D^{x_1^*} v_1^* dx_1^* + \varphi_D^* & \text{pe } CD \\ \varphi^*(x_1^*) = \int_F^{x_1^*} v_1^* dx_1^* + \varphi_F^* & \text{pe } EF \\ \varphi^*(x_1^*) = \int_G^{x_1^*} v_1^* dx_1^* + \varphi_G^* & \text{pe } KG_{\text{inferior}} \\ \varphi^*(x_1^*) = \int_G^{x_1^*} v_1^* dx_1^* + \varphi_G^* - \Gamma^{*v} & \text{pe } KG_{\text{superior}} \\ \varphi^*(x_2^*) = \int_0^{x_2^*} v_2^* dx_2^* & \text{pe } HG \\ \varphi^*(x_2^*) = \int_G^{x_2^*} v_2^* dx_2^* + \varphi_G^* - \Gamma^{*v} & \text{pe } GF \\ \varphi^*(x_2^*) = \int_A^{x_2^*} v_2^* dx_2^* + \varphi_A^* & \text{pe } AC \end{cases} \tag{5.66}$$

In locul condiţiilor la limită (5.66) pot fi folosite şi variante în sensul că pe unele părţi ale frontierei exterioare a domeniului de analiză pot fi impuse condiţii la limită naturale. Astfel din legătura (2.8) pot fi determinate derivatele normale $\varphi^*_{/1^*}$ şi $\varphi^*_{/2^*}$

$$\varphi^*_{/1^*} = \psi^*_{/2^*} \quad \text{pe } AC \text{ şi } FH \tag{5.67}$$

$$\varphi^*_{/2^*} = -\psi^*_{/1^*} \quad \text{pe } AJ, IH, CD \text{ şi } EF \tag{5.68}$$

Dacă se folosesc numai condiţii la limită naturale, matricea sistemului global este singulară. Din acest motiv într-un punct (de exemplu în H) se pune o condiţie la limită esenţială, de exemplu $\varphi^{*} = 0$.

Calculul numeric în aceste variante este însă mai complicat deoarece derivatele normale de pe frontieră introduc termeni liberi nenuli.

5.9.3 Rezultate numerice

Metoda a fost aplicată aceleiaşi reţele prezentată la 5.8. Discretizarea domeniului a fost făcută tot în elemente finite izo-

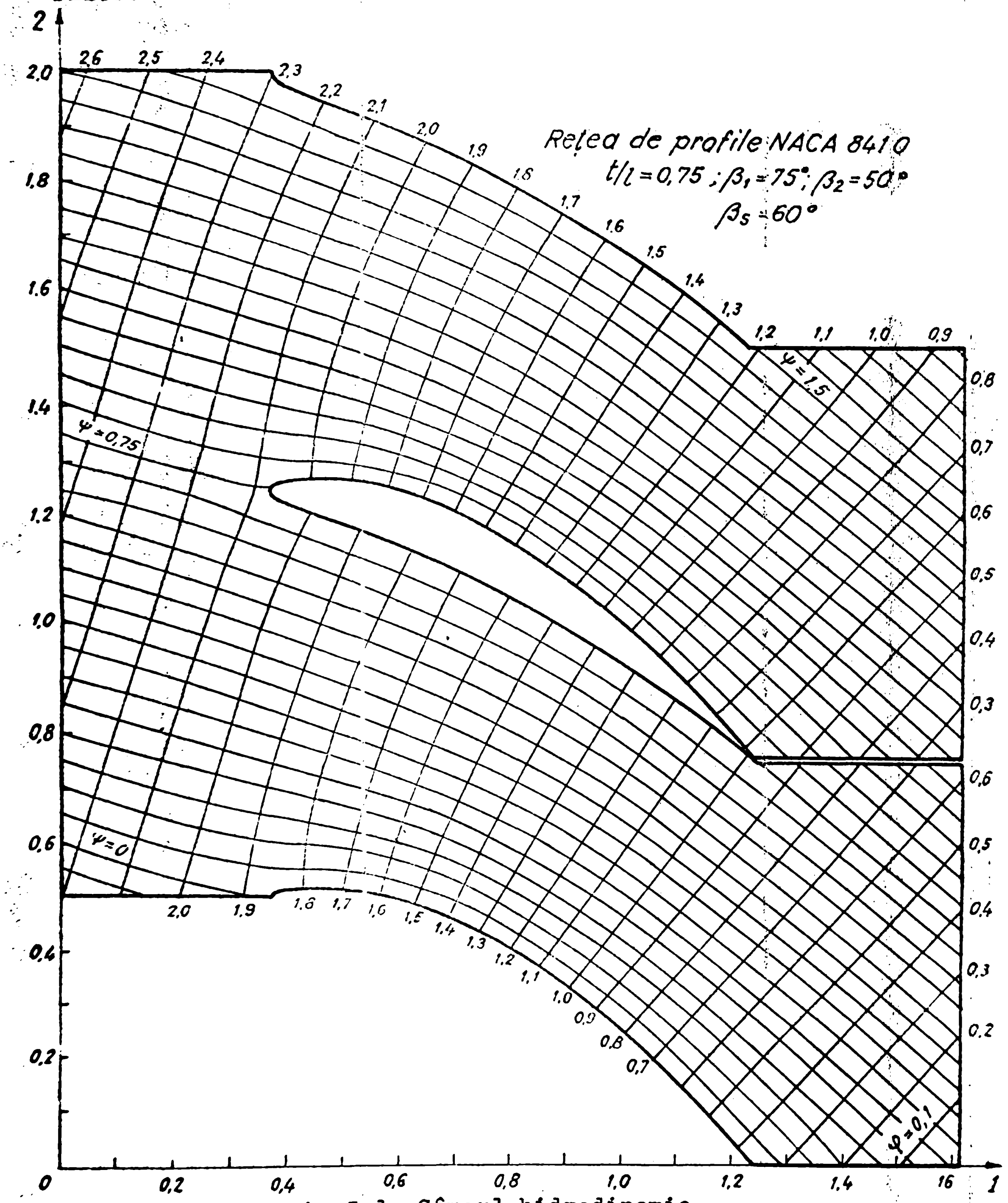


Fig.5.10 Cîmpul hidrodinamic

parametrice ca în fig.5.5 cu deosebirea că pe segmentul KG apar două rînduri, unul superior şi unul inferior (din simplu conexitatea domeniului de analiză). Au rezultat astfel 740 elemente finite (E = 740) şi 829 noduri (G = 829), din care 50 pe frontiera profilului interior. Pentru rezolvarea problemei în programul principal MISPLANR, prezentat la 5.2.2, a fost introdusă o nouă subrutină REAREANJ care realizează discretizarea modificată datorită dublării nodurilor pe segmentul KG . In fig.5.10 este prezentat cîmpul hidrodinamic al mişcării.In lungul segmentului KG se observă saltul potenţialului φ

CAPITOLUL 6

DETERMINAREA MISCARII IN JURUL RETELELOR DE PROFILE RADIAL-AXIALE FIXE CU CIRCULATIE DATA

6.1 Generalităţi

In continuarea consideraţiilor de la 3.1 ne propunem să determinăm mişcarea în jurul unei reţele de profile radial-axiale aşezată pe o suprafaţă de curent presupusă de revoluţie, fiind cunoscută circulaţia vitezei în jurul profilelor sau echivalent condiţiile cinematice de intrare respectiv de ieşire. Analog cu cele de la 5.1 aceasta înseamnă determinarea liniilor de curent, a liniilor de egal potenţial al vitezei (ambele curbe considerate conţinute în suprafaţa de revoluţie suport) şi a cîmpului de viteze şi presiuni în domeniul mişcării de pe suprafaţa de revoluţie.

6.2 Transformarea conformă a reţelei radial-axiale

Tratarea directă a problemei pe suprafaţa de revoluţie întîmpină dificultăţi extrem de mari (mecanica fluidelor într-un spaţiu riemannian bidimensional). Din acest motiv suprafeţele de curent (care sînt nedesfăşurabile) se reprezintă conform pe un plan, cu păstrarea grosimii variabile a stratului de fluid dintre două suprafeţe de curent infinit vecine.

6.2.1 Sistemul special de coordonate. Metrica spaţiului

Să considerăm o secţiune axială prin zona paletată a unei turbomaşini radial-axiale.

Un sistem natural de coordonate q^i poate fi introdus cu ajutorul următoarelor trei familii de suprafeţe [110], [142], [152], [169], [177], [178]

(i) S_1 - suprafeţe de revoluţie ortogonale pe suprafeţele de curent

(ii) S_2 - semiplane axiale

(iii) S_3 - suprafeţe de curent de revoluţie

S_1 poate fi, de exemplu, suprafeţe de egal potenţial al vitezei pentru mişcarea axial-simetrică în rotorul nepaletat.

Fixînd originea O a sistemului de coordonate, curbele de coordonate sînt date de

$$q^i = S_j \cap S_k \qquad i,j,k = 1,2,3 \text{ distincte} \tag{6.1}$$

şi ele reprezintă

(i) Curba q^1 - după meridianul suprafeţei de curgere S_3 care conţine punctul O

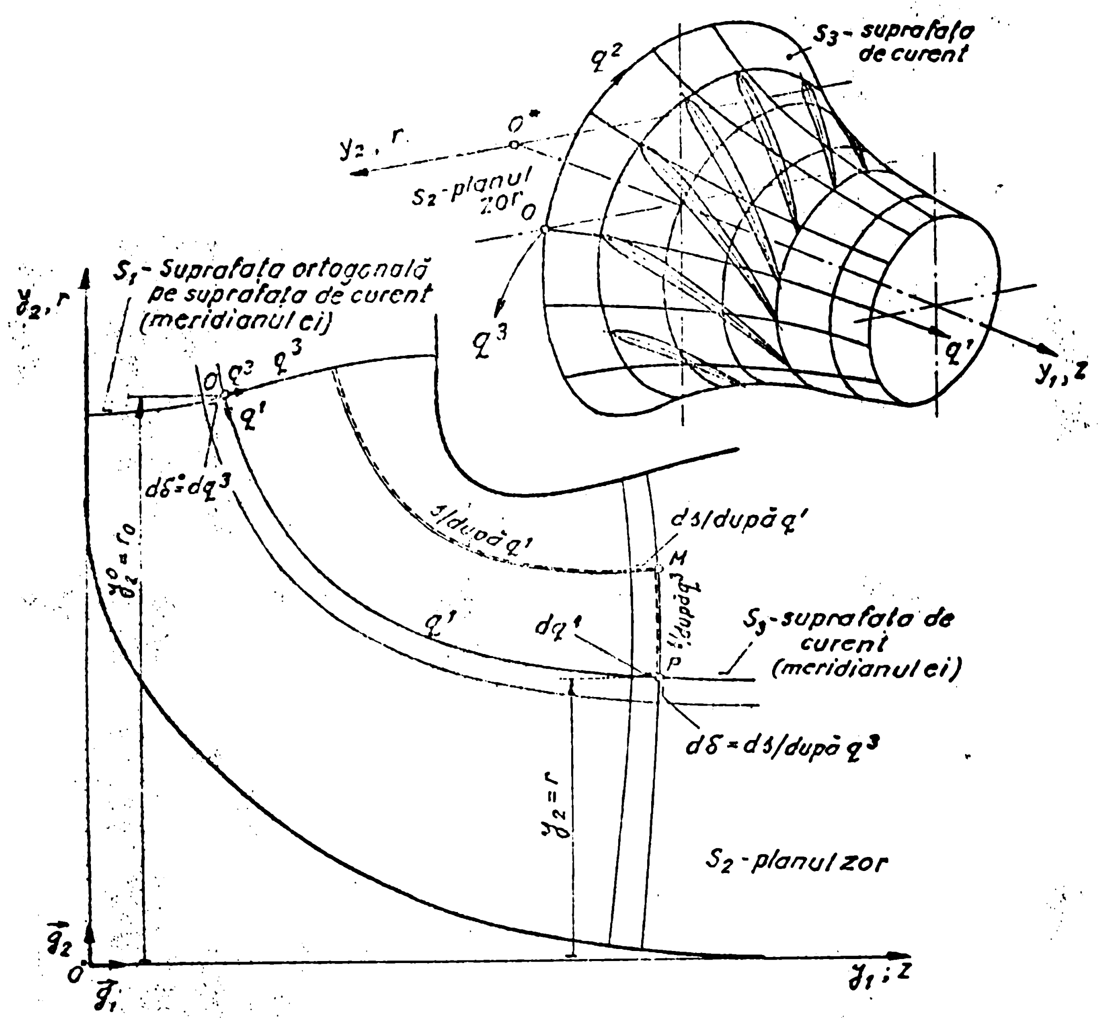


Fig.6.1 Sistemul special de coordonate

(ii) Curba q^2 - după cercul de rază r_0 (ce conține pe O) cu planul normal pe axa O^*z.

(iii) Curba q^3 - după meridianul suprafeței ortogonale pe suprafața de curent și care conține punctul O

Se observă că sistemul de coordonate q^i este ortogonal și el introduce metrica

$$g_{ii} = h_i^2 \tag{6.2}$$

unde h_i sînt factorii de scară. Pentru o distanță elementară ds în direcția coordonatei q^i factorii de scară sînt dați de

$$ds = h_{\underline{i}}\, dq^{\underline{i}} \tag{6.3}$$

sublinierea indicelui însemnînd că nu se face sumare după el.

Fie acum un punct de pe suprafața de curent de meridian axa q^1 (deci care conține originea O). Pentru ds în lungul lui q^1, ($ds|$ avem evident

$$h_1 = (ds|_{\text{după } q^1})(dq^1)^{-1} = 1 \tag{6.4}$$

pentru ds după q^2, $(ds|_{\text{după } q^2})$

$$h_2=(ds|_{după\,q^2})(dq^2)^{-1}=r\,d\theta\,(r_0 d\theta)^{-1}=r r_0^{-1} \tag{6.5}$$

Pentru ds după q^3, $(ds|_{după\,q^3})$

$$h_3=(ds|_{după\,q^3})(dq^3)^{-1}=d\delta\,(d\delta^{\circ})^{-1}=h(q^1) \tag{6.6}$$

unde $d\delta$ este distanța (după q^2) dintre două suprafețe de curent infinit vecin. Evident

$$h(0)=1 \tag{6.7}$$

Deci pentru puncte de pe suprafața de curent ce conține axa q^1, metrica este, în componente dublu covariante

$$g_{11}=h_1^2=1\;;\;g_{22}=h_2^2=r^2\cdot r_0^{-2}\;;\;g_{33}=h_3^2=\{h(q^1)\}^2 \tag{6.8}$$

iar coeficienții de conexiune sînt dați de

$$\Gamma^p_{qr}=\begin{cases} 0 & \text{dacă } p,\ q,\ r \text{ sînt diferiți} \\ \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial h_i}{\partial q^j} & \text{dacă } p=q=r=i=j \\ & \text{sau } q=r=i\;;\;p=j \\ & \text{sau } r=p=i\;;\;q=j \\ -\dfrac{h_i}{h_j^2}\dfrac{\partial h_i}{\partial q^j} & \text{dacă } p=q=i\;;\;r=j \end{cases} \tag{6.9}$$

6.2.2 <u>Ecuațiile mișcării potențiale pe suprafață</u>

Fie cîmpul de viteze spațial, în componente contravariante de exemplu, v^i. Mișcarea fiind izocoră, ecuația de continuitate dă

$$v^i_{/\!/i}=0 \tag{6.10}$$

($/\!/i$ reprezintă derivarea covariantă) adică

$$\frac{\partial v^i}{\partial q^i}+\Gamma^i_{ji}v^j=0 \tag{6.11}$$

Trecînd la componente fizice ale vitezei $v_{(i)}$ prin

$$v_{(i)}=h_i v^i \tag{6.12}$$

și folosind (6.9) ecuația (6.11) se scrie pe larg

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\{v_{(1)}h_2h_3\}+\frac{\partial}{\partial q^2}\{v_{(2)}h_1h_3\}+\frac{\partial}{\partial q^3}\{v_{(3)}h_1h_2\}=0 \tag{6.13}$$

Cum $\vec{v}$ este tangent la suprafața de curgere $v_{(3)}=0$ și folosind (6.8) ecuația (6.13) devine

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\left[r r_0^{-1} h\, v_{(1)}\right]+\frac{\partial}{\partial q^2}\left[h \cdot v_{(2)}\right]=0 \qquad (6.14)$$

Condiția ca mișcarea spațială să fie potențială cere

$$\varepsilon^{ijk} g_{kp}\, v^p_{/\!/j}=0 \qquad (6.15)$$

sau trecînd la componente fizice prin (6.12) și folosind (6.2) și (6.9)

$$\frac{1}{h_j}\frac{\partial v_{(k)}}{\partial q^j}-\frac{1}{h_k}\frac{\partial v_{(j)}}{\partial q^k}+\frac{1}{h_j h_k}\left[v_{(k)}\frac{\partial h_k}{\partial q^j}-v_{(j)}\frac{\partial h_j}{\partial q^k}\right]=0 \qquad (6.16)$$

Anulînd a 3-a componentă fizică a lui rot $\vec{v}$ (j = 1, k = 2 în (6.16)) se obține

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial v_{(2)}}{\partial q^1}-\frac{1}{h_2}\frac{\partial v_{(1)}}{\partial q^2}+\frac{1}{h_1 h_2}\left[v_{(2)}\frac{\partial h_2}{\partial q^1}-v_{(1)}\frac{\partial h_1}{\partial q^2}\right]=0 \qquad (6.17)$$

care cu (6.8) devine

$$\frac{\partial v_{(2)}}{\partial q^1}-r_0 r^{-1}\frac{\partial v_{(1)}}{\partial q^2}+r_0 r^{-1} v_{(2)}\frac{\partial (r r_0^{-1})}{\partial q^2}=0 \qquad (6.18)$$

adică

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\left[r r_0^{-1} v_{(2)}\right]-\frac{\partial v_{(1)}}{\partial q^2}=0 \qquad (6.19)$$

6.2.3 Transformarea conformă a rețelei radial-axiale

Pentru a valorifica ecuațiile (6.14) și (6.19) este utilă schimbarea de variabilă, [110], [142], [178]

$$\begin{cases} x_1=\int_0^{q^1} h_1 h_2^{-1}\, dq^1=\int_0^{q^1} r_0 r^{-1}\, dq^1 \\ x_2=q^2 \end{cases} \qquad (6.20)$$

care realizează o transformare geometrică a suprafeței de curent într-un domeniu plan numit planul imagine. (6.20) arată că axele 01 și 02 (de versori $\vec{e}_1$ și $\vec{e}_2$) din planul imagine, ce corespund curbelor Oq^1 și Oq^2 de pe suprafața de curent, sînt ortogonale.

Dacă N este numărul profilelor ce compun rețeaua radial-axială, pasul rețelei liniare din planul imagine este

$$t=2\pi r_0 \cdot N^{-1} \qquad (6.21)$$

Rezultă deci că (6.20) conservă pasul din dreptul lui r_0. Scriind acum (6.20) sub formă diferențială și folosind (6.4) și (6.5) se obține

$$\frac{dx_1}{dx_2} = h_1 h_2^{-1} \frac{dq^1}{dq^2} = \frac{ds|_{după\, q^1}}{ds|_{după\, q^2}} \tag{6.22}$$

deci (6.2o) este o transformare local conformă, fiindcă este bijectivă și conservă raportul arcelor elementare și care realizează transformarea diferențiabilă a rețelei radial-axiale de pe suprafața de curent S_3 într-o rețea liniară din planul imagine 012. Funcția $h(q^1)$ dată de (6.6), care reprezintă fizic în formă adimensională grosimea stratului de fluid dintre două suprafețe de curent infinit vecine, se păstrează prin (6.2o) dar devine o funcție $h(x_1)$

6.2.4 Legătura dintre cîmpul de viteze din planul imagine cu cel de pe suprafața de curent

In virtutea faptului că (6.2o) este o transformare conformă rezultă proprietățile

(i) debitul elementar prin secțiunile elementare normale la axele q^1 respectiv x_1 este același

$$dQ = v_{(1)}(ds|_{după\, q^2})(ds|_{după\, q^3}) = v_1\, dx_2 (ds|_{după\, q^3}) \tag{6.23}$$

de unde, cu (6.5) și (6.2o), rezultă

$$v_1 = v_{(1)} h_2 \frac{dq^2}{dx_2} = v_{(1)} h_2 = v_{(1)} r \cdot r_0^{-1} \tag{6.24}$$

(ii) circulația elementară pe arce elementare paralele cu fronturile rețelelor este aceeași

$$d\Gamma^v = v_{(2)}(ds|_{după\, q^2}) = v_{(2)}\, dx_2 \tag{6.25}$$

de unde, cu (6.5) și (6.2o) rezultă

$$v_2 = v_{(2)} h_2 \frac{dq^2}{dx_2} = v_{(2)} h_2 = v_{(2)} r \cdot r_0^{-1} \tag{6.26}$$

Din(6.24) și (6.26) rezultă aceeași legătură și între modulele vitezelor

$$v = v_{()} \cdot r\, r_0^{-1} \tag{6.27}$$

unde $v_{()}$ este mărimea fizică a vitezei de pe suprafața de curent.

6.2.5 Ecuația lui Stokes pentru funcția de curent în planul imagine

Folosind în ecuația (6.14) pe (6.24), (6.26) și (6.2o) se obține succesiv

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\{r r_0^{-1} h(x_1) r^{-1} r_0 v_1\} + \frac{\partial}{\partial q^2}\{h(x_1) r^{-1} r_0 v_2\} = 0 \tag{6.28}$$

$$\{v_1 \cdot h(x_1)\}_{/1} \frac{dx_1}{dq^1} + \{v_2 \cdot h(x_1) r^{-1} r_0\}_{/2} \frac{dx_2}{dq^2} = 0 \tag{6.29}$$

$$\{v_1 h(x_1)\}_{/1} r_0 r^{-1} + \{v_2 h(x_1) r^{-1} r_0\}_{/2} = 0 \tag{6.30}$$

şi cum $r = r(x_1)$ (din $r = r(q^1)$ şi (6.20))

$$\{v_1 \cdot h(x_1)\}_{/1} + \{v_2 \cdot h(x_1)\}_{/2} = 0 \tag{6.31}$$

Observînd că din (6.31)

$$\{-v_1 h(x_1)\}_{/1} = \{v_2 \cdot h(x_1)\}_{/2} \tag{6.32}$$

membrul stîng al ecuaţiei

$$v_1 \cdot h(x_1) dx_2 - v_2 \cdot h(x_1) dx_1 = 0 \tag{6.33}$$

este o diferenţială totală, se poate introduce funcţia de curent ψ prin

$$d\psi = \psi_{/i} dx_i = h(x_1) \varepsilon_{ij} v_i dx_j \tag{6.34}$$

din care rezultă cîmpul de viteze

$$v_i = h^{-1}(x_1) \varepsilon_{ij} \psi_{/j} \tag{6.35}$$

Din faptul că ψ = constant sînt linii de curent în planul imaginee, adică

$$\varepsilon_{ij} v_i dx_j = 0 \tag{6.36}$$

rezultă, cu (6.24), (6.26) şi (6.20)

$$v_{(1)} h_2 dq^2 - v_{(2)} h_2 h_1 h_2^{-1} dq^1 = 0 \tag{6.37}$$

sau cu (6.4) şi (6.5)

$$v_{(1)} \cdot ds|_{\text{după } q^1} - v_{(2)} \cdot ds|_{\text{după } q^2} = 0 \tag{6.38}$$

deci liniilor de curent din planul imagine le corespund injectiv linii de curent ale mişcării fizice de pe suprafaţa de curent.

Procedînd analog cu ecuaţia (6.19) se obţine succesiv

$$v_{2/1} \frac{dx_1}{dq^1} - (v_1 r^{-1} r_0)_{/2} \frac{dx_2}{dq^2} = 0 \tag{6.39}$$

$$\vartheta_{2/1}\, r_o\, r^{-1} - \vartheta_{1/2}\, r^{-1} r_o = 0 \tag{5.40}$$

adică

$$\vartheta_{1/2} - \vartheta_{2/1} = 0 \tag{6.41}$$

Inlocuind acum (6.35) în (6.41) se obţine ecuaţia lui Stokes pentru funcţia de curent în planul imagine

$$\{h^{-1}(x_1)\,\psi_{/2}\}_{/2} + \{h^{-1}(x_1)\,\psi_{/1}\}_{/1} = 0 \tag{6.42}$$

$$\psi_{/22}\, h^{-1}(x_1) + \psi_{/11}\, h^{-1}(x_1) + \psi_{/1}\{h^{-1}(x_1)\}_{/1} = 0 \tag{6.43}$$

adică ;[110], [178]

$$\psi_{/ii} - h^{-1} \cdot h_{/1}\, \psi_{/1} = 0 \tag{6.44}$$

6.2.6 <u>Ecuaţia lui Stokes pentru potenţialul vitezei în planul imagine</u>

Ecuaţia (6.41) permite, în planul imagine, introducerea potenţialului φ al vitezei prin (2.6). Inlocuind (2.6) în (6.31) se obţine ecuaţia lui Stokes pentru potenţialul vitezei în planul imagine

$$[h(x_1)\,\varphi_{/1}]_{/1} + [h(x_1)\,\varphi_{/2}]_{/2} = 0 \tag{6.45}$$

adică ;[178]

$$\varphi_{/ii} + h^{-1} \cdot h_{/1}\, \varphi_{/1} = 0 \tag{6.46}$$

6.3 <u>Domeniul de analiză din planul imagine. Condiţii la limită</u>

Domeniul de analiză de pe suprafaţa de curent trebuie să fie astfel ales încît el să păstreze efectul de periodicitate cilindrică a mişcării. In consecinţă el va fi definit de frontierele a trei profile învecinate (analog cu cele de la 5.2) dispuse la pasul t pe cercul paralel al frontului reţelei, din care unul va fi interior domeniului. Condiţiile la limită pe frontierele de influx respectiv flux ale domeniului de pe suprafaţa de curent vor fi puse la t/2 de frontul bordurilor de atac respectiv de cel de fugă ale profilelor.

Prin (6.20) domeniul de pe suprafaţa de curent trece injectiv în domeniul de analiză din planul imagine. El este tot de forma din fig.5.1 (fig.5.2, fig.5.3, fig.5.4), cu deosebirea că după axa 1-a apare deformarea dată de prima relaţie din (6.2o) ($A3 \neq IH \neq t/2$) iar după axa 2-a se conservă în adevărata mărime segmentul $AC = t$

Pentru condiţiile la limită din planul imagine rămîn valabile consideraţiile de la 5.2.1 respectiv 5.2.2 sau 5.2.1 pentru ecuaţiile (6.44) respectiv (6.46) cu unele modificări ce vor fi prezentate la 6.4.

6.4 Tratarea în formă adimensională în planul imagine

Sînt valabile consideraţiile de la 5.3.1 respectiv 5.3.2, considerate în planul imagine, în care t şi Q sînt asociate frontului reţelei cu următoarele precizări

Punînd originea O a sistemului de coordonate $Oq^1q^2q^3$ la t/2 frontul reţelei (după q^1) din (6.24) rezultă

$$\begin{aligned} v_1^{AM} &= v_{(1)}^{AM} \\ v_1^{AV} &= r^{AV} \cdot r_0^{-1} \, v_{(1)}^{AV} \end{aligned} \tag{6.47}$$

punînd $v_{(1)}^{AM} = 1$ rezultă

$$v_{(1)}^{AV} = \overline{v}_{(1)}^{AV} = \overline{v}_{a}^{AV} \tag{6.48}$$

unde $\overline{v}_a^{AV}$ este dată de (3.129) dar raportată la viteza din originea prezentată mai sus. Rezultă atunci în formă adimensională

$$\begin{aligned} v_1^{*AM} &= 1 \\ v_1^{*AV} &= r^{AV} \cdot r_0^{-1} \, \overline{v}_a^{AV} \end{aligned} \tag{6.49}$$

Dar din conservarea debitului dintre două suprafeţe de curent

$$2\pi r_0 \, d\delta^0 \, v_{(1)}^{AM} = 2\pi r \, d\delta \cdot v_{(1)} \tag{6.50}$$

şi (6.6) se obţine

$$h(q^1) = r_0 \, r^{-1} \, \overline{v}_a^{-1} \tag{6.51}$$

iar (6.49) devine

$$\begin{aligned} v_1^{*AM} &= 1 \\ v_1^{*AV} &= \overset{-1}{h}(x_1^{AV}) = h^{AV^{-1}} \end{aligned} \tag{6.52}$$

care modifică pe FH condiţiile la limită (5.12) respectiv (5.22) şi (5.23). Din (6.52) şi (6.35) se observă că condiţiile la limită (5.13) rămîn neschimbate.

6.5 Integrarea ecuaţiei lui Stokes în planul imagine prin M.E.F.

Vom folosi tot tratarea în formă adimensională şi vom renunţa la notarea cu asterisc.

6.5.1 Formularea în funcţia de curent

Să reluăm ecuaţia (7.44) cu condiţiile la limită prezentate la 6.4. Funcţia ψ poate fi aproximată global pe domeniul Ω din planul imagine prin (3.26). Aplicînd metoda lui Galerkin rezultă [22], [39]

$$\int_{\Omega}(\psi_{/ii}-h^{-1}h_{/1}\psi_{/1})a_{\alpha}\,d\Omega=0 \qquad (6.53)$$

care integrată prin părţi conduce la

$$\int_{\Omega}\psi_{/i}a_{\alpha/i}\,d\Omega+\int_{\Omega}h^{-1}h_{/1}\psi_{/1}a_{\alpha}\,d\Omega-\int_{\Gamma}\psi_{/i}n_i a_{\alpha}^{+}\,d\Gamma=0 \qquad (6.54)$$

şi care cu (3.26) devine

$$\psi_{\beta}\int_{\Omega}a_{\alpha/i}a_{\beta/i}\,d\Omega+\psi_{\beta}\int_{\Omega}h^{-1}h_{/1}a_{\beta/1}a_{\alpha}\,d\Omega-\int_{\Gamma}\psi_{/i}n_i a_{\alpha}^{+}\,d\Gamma=0 \qquad (6.55)$$

adică sistemul liniar (3.30) în care coeficienţii $D_{\alpha\beta}$ sînt daţi de

$$D_{\alpha\beta}=\int_{\Omega}a_{\alpha/i}a_{\beta/i}\,d\Omega+\int_{\Omega}h^{-1}h_{/1}a_{\alpha}a_{\beta/1}\,d\Omega \qquad (6.56)$$

iar termenii liberi de (4.31).

Dacă facem acum o discretizare a lui Ω în elemente finite Ω^e, funcţia ψ poate fi aproximată local prin (3.35). Procedînd similar cu cele de mai înainte obţinem pentru fiecare element finit

$$\int_{\Omega^e}(\psi^e_{/ii}-h^{-1}h_{/1}\psi^e_{/1})a^e_N\,d\Omega^e=0 \qquad (6.57)$$

care integrată prin părţi dă

$$\int_{\Omega^e}\psi^e_{/i}a^e_{N/i}\,d\Omega^e+\int_{\Omega^e}h^{-1}h_{/1}\psi^e_{/1}a^e_N\,d\Omega^e-\int_{\Gamma^e}\psi^e_{/i}n_i a^{+e}_N\,d\Gamma^e=0 \qquad (6.58)$$

din care, cu (3.35), se obţine

$$\psi^e_M\int_{\Omega^e}a^e_{N/i}a^e_{M/i}\,d\Omega^e+\psi^e_M\int_{\Omega^e}h^{-1}h_{/1}a^e_{M/1}a^e_N\,d\Omega^e=\int_{\Gamma^e}\psi^e_{/i}n_i a^{+e}_N\,d\Gamma^e \qquad (6.59)$$

adică sistemul liniar (3.39) în care

$$D^e_{NM}=\int_{\Omega^e}a^e_{N/i}a^e_{M/i}\,d\Omega^e+\int_{\Omega^e}h^{-1}h_{/1}a^e_N a^e_{M/1}\,d\Omega^e \qquad (6.60)$$

iar termenii liberi sînt daţi de (4.35).

Trecerea de la local la global se face tot cu formulele (3.42), (3.44), (3.45) şi (3.46).

6.5.2 Formularea în potențialul vitezei

Problema este aproape identică cu cea de la (6.51) (apare doar un termen cu semn schimbat). Se obține pentru ecuația (6.46) sistemul global (4.48) în care coeficienții $D_{\alpha\beta}$ sînt dați de

$$D_{\alpha\beta}=\int_{\Omega} b_{\alpha/i}\, b_{\beta/i}\, d\Omega-\int_{\Omega} h^{-1} h_{/1}\, b_{\alpha}\, b_{\beta/1}\, d\Omega \qquad (6.61)$$

termenii liberi de (4.31) (cu φ în loc de ψ și b_α în loc de [illegible]) și respectiv la sistemul local (4.37) în care

$$D^{e}_{NM}=\int_{\Omega^e} b^{e}_{N/i}\, b^{e}_{M/i}\, d\Omega^{e}-\int_{\Omega^e} h^{-1} h_{/1}\, b^{e}_{N}\, b^{e}_{M/1}\, d\Omega^{e} \qquad (6.62)$$

și F^{e}_{N} dați de (4.39). Trecerea de la local la global se face tot cu (3.45) și (3.46).

6.5.3 Discretizarea domeniului din planul imagine

Pentru discretizare au fost alese tot elemente finite izoparametrice. In consecință vor fi folosite formulele de la 3.5.

6.5.4 Calculul coeficienților D^{e}_{NM}

Vom renunța la indexarea superioară cu e și vom utiliza, la fel, variabilele ξ, η. Coeficienții D^{e}_{NM} pentru formularea în ψ (dați de (6.53)) și φ (dați de (6.59)) diferă doar prin semnul fața celui de al doilea termen. Cu $a_N = b_N$, observînd că $d\Omega = dx_1\, dx_2$ și folosind (3.68) coeficienții devin

$$D_{NM}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} a_{N/i}\, a_{M/i}\, |J|\, d\xi\, d\eta+\lambda\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} h^{-1} h_{/1}\, a_{N}\, a_{M/1}\, |J|\, d\xi\, d\eta \qquad (6.63)$$

cu $\lambda = 1$ pentru formularea în ψ și $\lambda = -1$ pentru formularea în φ. Folosind (3.85), (3.89) și (3.90) se obține mai departe

$$D_{NM}=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{NM}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta+\lambda R_{NM} \qquad (6.64)$$

$f_{NM}(\xi,\eta)$ care e dat de (4.42) iar

$$R_{NM}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} h^{-1} h_{/1}\, a_{N}\, a_{M/1}\, |J|\, d\xi\, d\eta \qquad (6.65)$$

produsul $a_N \cdot a_{M/1}$ este dat de o formulă similară cu (3.92)

$$a_N a_{M/1}=(32|J|)^{-1}\{g^{(1)}_{NM}+h^{(1)}_{NM}\xi+k^{(1)}_{NM}\eta+p^{(1)}_{NM}\xi\eta+q^{(1)}_{NM}\xi^{2}+r^{(1)}_{NM}\eta^{2}+t^{(1)}_{NM}\xi^{2}\eta+u^{(1)}_{NM}\xi\eta^{2}\} \qquad (6.66)$$

care

$$
\begin{aligned}
&a_{NM}^{(1)} = A_{M1}\\
&b_{NM}^{(1)} = B_{M1}^{1} + \xi_{M1} A_{M1}\\
&k_{NM}^{(1)} = B_{M1}^{2} + \xi_{M2} A_{M1}\\
&p_{NM}^{(1)} = \xi_{N1} B_{M1}^{2} + \xi_{N2} B_{M1}^{1} + \xi_{N1}\xi_{N2} A_{M1}\\
&q_{NM}^{(1)} = \xi_{N1} B_{M1}^{1}\\
&\lambda_{NM}^{(1)} = \xi_{N2} B_{M1}^{2}\\
&t_{NM}^{(1)} = \xi_{M1}\xi_{M2} B_{M1}^{1}\\
&u_{NM}^{(1)} = \xi_{N1}\xi_{N2} B_{M1}^{2}
\end{aligned}
\qquad (6.67)
$$

cu formulele (3.87) şi (3.88). Rămîne de calculat factorul $h^{-1} h_{,1}$. Pentru $h(x_1)$ se admite aproximarea polinomială

$$h(x_1) = \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu x_1^\mu \qquad (6.68)$$

deci

$$h^{-1} h_{,1} = \Big(\sum_{\mu=1}^{m} \mu c_\mu x_1^{\mu-1}\Big)\Big(\sum_{\mu=0}^{m} c_\mu x_1^\mu\Big)^{-1} \qquad (6.69)$$

Cu acestea R_{NM} devine

$$
\begin{aligned}
R_{NM} = \frac{1}{32}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} &\Big(\sum_{\mu=1}^{m} \mu c_\mu x_1^{\mu-1}\Big)\Big(\sum_{\mu=0}^{m} c_\mu x_1^\mu\Big)^{-1}\cdot\\
&\cdot\big[a_{NM}^{(1)} + b_{NM}^{(1)}\xi + k_{NM}^{(1)}\eta + p_{NM}^{(1)}\xi\eta + q_{NM}^{(1)}\xi^2 +\\
&+ \lambda_{NM}^{(1)}\eta^2 + t_{NM}^{(1)}\xi^2\eta + u_{NM}^{(1)}\xi\eta^2\big]\, d\xi\, d\eta
\end{aligned}
\qquad (6.70)
$$

sau cu (3.66)

$$R_{NM} = \frac{1}{32}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \pi_{NM}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (6.71)$$

unde

$$
\begin{aligned}
\pi_{NM}(\xi,\eta) = &\Big\{\sum_{\mu=1}^{m} \mu c_\mu [4^{-1}(a_1 + b_1\xi + c_1\eta + d_1\xi\eta)]^{\mu-1}\Big\}\cdot\\
&\cdot\Big\{\sum_{\mu=0}^{m} c_\mu [4^{-1}(a_1 + b_1\xi + c_1\eta + d_1\xi\eta)]^{\mu}\Big\}^{-1}\cdot\\
&\cdot\big[a_{NM}^{(1)} + b_{NM}^{(1)}\xi + k_{NM}^{(1)}\eta + p_{NM}^{(1)}\xi\eta + q_{NM}^{(1)}\xi^2 +\\
&+ \lambda_{NM}^{(1)}\eta^2 + t_{NM}^{(1)}\xi^2\eta + u_{NM}^{(1)}\xi\eta^2\big]
\end{aligned}
\qquad (6.72)
$$

deci în final

$$D_{NM}=\frac{1}{32}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[4f_{NM}(\xi,\eta)+\lambda r_{NM}(\xi,\eta)\right]d\xi d\eta \qquad (6.73)$$

...tru care sînt valabile formulele de la 3.6.1.

Evaluarea coeficienţilor se face tot cu o formulă analoagă (3.97)

$$D_{NM}=\frac{1}{32}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}w_i w_j\left[4f_{NM}(\xi_i,\eta_j)+\lambda r_{NM}(\xi_i,\eta_j)\right] \qquad (6.74)$$

... w_i, ξ_i şi η_i sînt daţi tot de (3.98) respectiv (3.99).

6.5.3 Calculul termenilor liberi F_N^e

Pentru formularea în ψ toţi termenii liberi sînt nuli. Pentru formularea în φ termenii liberi sînt daţi de (4.53) cu formele ...ulare (5.27), (5.28), (5.29) şi (5.30) prezentate la 5.4.

6.6 Determinarea cîmpului de viteze în planul imagine

6.6.1 Formularea în funcţia de curent

Analog cu cele de la 4.91 folosind (6.35), (3.35), (3.86), ...), (6.68) şi (3.66) se obţin componentele vitezei pe fiecare ...t finit

$$\begin{aligned} v_1^e &= \left\{\sum_{\mu=0}^{m} C_\mu\left[4^{-1}(a_1+b_1\xi+c_1\eta+d_1\xi\eta)\right]^\mu\right\}^{-1}\psi_{/2}^e = \\ &= \left\{\sum_{\mu=0}^{m} C_\mu\left[4^{-1}(a_1+b_1\xi+c_1\eta+d_1\xi\eta)\right]^\mu\right\}^{-1} a_{N/2}^e\,\psi_N^e = \qquad (6.75) \\ &= \left\{8|J|\sum_{\mu=0}^{m} C_\mu\left[4^{-1}(a_1+b_1\xi+c_1\eta+d_1\xi\eta)\right]^\mu\right\}^{-1}\cdot\left(A_{N2}+B_{N2}^1\xi+B_{N2}^2\eta\right)\psi_N^e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2^e &= -\left\{\sum_{\mu=0}^{m} C_\mu\left[4^{-1}(a_1+b_1\xi+c_1\eta+d_1\xi\eta)\right]^\mu\right\}^{-1}\psi_{/1}^e = \\ &= -\left\{\sum_{\mu=0}^{m} C_\mu\left[4^{-1}(a_1+b_1\xi+c_1\eta+d_1\xi\eta)\right]^\mu\right\}^{-1} a_{N/1}^e\,\psi_N^e = \qquad (6.76) \\ &= -\left\{\sum_{\mu=0}^{m} C_\mu\left[4^{-1}(a_1+b_1\xi+c_1\eta+d_1\xi\eta)\right]^\mu\right\}^{-1}\cdot\left(A_{N1}+B_{N1}^1\xi+B_{N1}^2\eta\right)\psi_N^e \end{aligned}$$

În centrele de greutate ale elementelor finite izoparametri... devin

$$v_1^e=\left[\alpha_0\sum_{\mu=0}^{m}C_\mu(4^{-1}a_1)^\mu\right]^{-1}A_{N2}\,\psi_N^e \qquad (6.77)$$

$$v_2^e=-\left[\alpha_0\sum_{\mu=0}^{m}C_\mu(4^{-1}a_1)^\mu\right]^{-1}A_{N1}\,\psi_N^e \qquad (6.78)$$

Mărimea vitezei este dată de (4.6o) sau, raportată la viteza de la intrare, de (5.31).

6.6.2 Formularea în potențialul vitezei

Problema este identică cu cea de la 4.9.2. Pe fiecare element finit componentele vitezei sînt date de (4.62) respectiv (4.63) iar în centrele de greutate de (4.64) respectiv (4.65).

6.7 Determinarea cîmpului de presiuni în planul imagine

Mișcarea în planul imagine fiind potențială, sînt adevărate considerațiile de la 5.6 deci și formulele (5.32) și (5.33).

6.8 Determinarea circulației în planul imagine

Circulația în planul imagine în forma $\overline{\Gamma}^{V}$ este dată de (5.42). Mișcarea în planul imagine fiind potențială între componentele vitezelor $\overline{v}^{AM}$ și $\overline{v}^{AV}$ avem legăturile

$$\overline{v}_1^{AV}-\overline{v}_1^{AM}=\overline{Q}_o\,L\,t^{-1} \qquad (6.79)$$

$$\overline{v}_2^{AV}-\overline{v}_2^{AM}=\overline{\Gamma}^{V}\cdot L\cdot t^{-1} \qquad (6.8o)$$

unde $\overline{Q}_o$ este debitul plan adimensional ce iese ortogonal din domeniul de analiză din planul imagine. Din (6.79) și (6.8o) se obține imediat tot (5.43) pentru $\overline{\Gamma}^{V}$ și

$$\overline{Q}_o=tL^{-1}(\overline{v}_1^{AV}-\overline{v}_1^{AM}) \qquad (6-81)$$

6.9 Transpunerea rezultatelor din planul imagine pe suprafața de curent

Avînd determinată mișcarea în planul imagine pot fi acum transpuse rezultatele pe suprafața de curent rezultînd mișcarea fizică pe această suprafață.

6.9.1 Transpunerea cîmpului hidrodinamic

Liniilor de curent din planul imagine le corespund, conform cu (6.36) și (6.3o) biunivoc, linii de curent de pe suprafața de curgere de revoluție. Cum liniile de egal potențial al vitezei din planul imagine sînt ortogonale pe liniile de curent și cum (6.2o) este o transformare conformă, liniile de egal potențial al vitezei trec prin (6.2o) în curbe pe suprafața de curent ortogonale pe liniile de curent, deci ele sînt linii de egal potențial al vitezei fizice a mișcării fizice de pe suprafața de curent de revoluție.

Fixînd, de moment, originea O a sistemului de coordonate $Oq^1q^2q^3$ ... /2 la frontul rețelei pe meridianul ce conține bordul de fugă al unui profil, în sistemul de coordonate de suprafață $Oq_\gamma^1q^2$ (q_γ^1 meridiane, q_γ^2 cercuri paralele), prin (6.2o)

... transpuse pe suprafaţa de curent de revoluţie cele două familii de curbe (linii de curent şi linii de egal potenţial al vitezei) ... în rol dispus în planul imagine. Dacă pot fi găsite forme de aproximare a lor, $x_2 = x_2(x_1)$ în planul imagine atunci ele prin (...) dau curbe $q^2 = q^2(q^1)$ pe suprafaţa de curent de revoluţie.

6.3.2 Transpunerea câmpului de viteze

Transpunerea câmpului de viteze se obţine imediat folosind relaţiile din 6.2.1. Astfel mărimea vitezei fizice v_{ω} a mişcării pe suprafaţă este, din (6.27)

$$v_{\omega} = \lambda_0 \, r^{-1} \, v \tag{6.82}$$

raportată la v_{ω}^{AM}

$$\overline{v}_{\omega} = v_{\omega} \, v_{\omega}^{AM^{-1}} = \lambda_0 \, r^{-1} \, v \, v^{AM^{-1}} \tag{6.83}$$

$$\overline{v}_{\omega} = \lambda_0 \, r^{-1} \, \overline{v} \tag{6.84}$$

6.3.3 Transpunerea câmpului de presiuni

Câmpul de presiuni p_{ω} în mişcarea fizică de pe suprafaţă se obţine scriind ecuaţia lui Bernoulli în lungul unei linii de curent de pe suprafaţă

$$p_{\omega} - p_{\omega}^{AM} = 2^{-1} \rho \left[v_{\omega}^{AM^2} - v_{\omega}^2 \right] \tag{6.85}$$

raportat la $2^{-1} \rho \, v_{\omega}^{AM^2}$, folosind şi (6.83)

$$\overline{p}_{\omega} = \left[p_{\omega} - p_{\omega}^{AM} \right] 2 \rho^{-1} v_{\omega}^{AM^{-2}} = 1 - v_{\omega}^2 \, v_{\omega}^{AM^{-2}} = 1 - \overline{v}_{\omega}^2 \tag{6.86}$$

sau, cu (6.84)

$$\overline{p}_{\omega} = 1 - \lambda_0^2 \, r^{-2} \, \overline{v}^2 \tag{6.87}$$

sau

$$\overline{p}_{\omega} = 1 - \overline{v}^2 + \overline{v}^2 \left(1 - \lambda_0^2 r^{-2} \right) = \overline{p} + \overline{v}^2 \left(1 - \lambda_0^2 r^{-2} \right) \tag{6.88}$$

6.3.4 Calculul circulaţiei pe suprafaţa de curent

Circulaţia Γ_{ω}^{V} în jurul profilelor ce compun reţeaua radială de pe suprafaţa de revoluţie este

$$\Gamma_{\omega}^{V} = \oint_{C_{\omega}} g_{ij} \, v^i \, dq^j \tag{6.89}$$

C_{ω} este conturul profilului de pe suprafaţă ce corespunde prin (...) conturului C al profilului din planul imagine. Dar elementul de arc ds_{ω}, de pe suprafaţă este

$$ds_{(1)} = (g_{ij}\, dq^i\, dq^j)^{1/2} \tag{6.9o}$$

iar v^i poate fi pusă sub forma

$$v^i = v_{(1)} \frac{dq^i}{ds_{(1)}} \tag{6.91}$$

unde $\frac{dq^i}{ds_{(1)}}$ sînt componentele contravariante ale versorului tangent la $C_{(1)}$. Cu acestea (6.82) devine

$$\Gamma_{(1)}^v = \oint_{C_{(1)}} g_{ij}\, v_{(1)} \frac{dq^i}{ds_{(1)}} dq^j = \oint_{C_{(1)}} v_{(1)}\, ds_{(1)} \tag{6.92}$$

Calculînd acum $ds_{(1)}$ cu (6.9o), (6.8) şi (6.2o) rezultă

$$ds_{(1)} = [g_{11}(dq^1)^2 + g_{22}(dq^2)^2]^{1/2} = (r_0^{-2} r^2 dx_1^2 + r_0^{-2} r^2 dx_2^2)^{1/2} = r_0^{-1} r\, ds \tag{6.93}$$

Folosind acum (6.82) şi (6.93) în (6.92) se obţine

$$\Gamma_{(1)}^v = \oint_C v\, ds = \Gamma^v \tag{6.94}$$

Analog, cu (6.84) se obţine şi $\bar{\Gamma}^v$

$$\bar{\Gamma}_{(1)}^v = \oint_C \bar{v}\, ds = \bar{\Gamma}^v \tag{6.95}$$

adică circulaţia în jurul profilelor este aceeaşi atît pe suprafaţa de curent cît şi în planul imagine.

6.9.5 Raportarea parametrilor profilului de pe suprafaţă la loxodromă

Am văzut în cele precedente că transformarea (6.2o) este conformă. Aceasta face ca coarda profilului din planul imagine să treacă pe suprafaţa de curent de revoluţie într-o loxodromă unic determinată de bordurile de atac respectiv de fugă ale profilului. Este util atunci ca cîmpurile ce definesc parametrii hidrodinamici ai profilului de pe suprafaţă să fie reprezentate în lungul acestei curbe loxodrome notată $O'1'_{(1)}$.

6.1o Exemplu de calcul

Metoda a fost aplicată unei reţele radial-axiale de turbină Francis obţinută prin deformarea unei reţele axiale NACA 841o de turbină după regula

$$s|_{\text{după } q^2} = r \cdot r_A^{-1} x_2 \tag{6.96}$$

(s măsurat de la meridianul planului axial ce conţine bordul de fugă iar x_2 vezi fig.5.2) pe meridianul ψ = o,3 al cîmpului hidrodinamic determinat la 3.12 şi poziţionată prin z^A = o,273 şi z^F = o,52.

Deformarea (6.96) a conservat $\beta^{AM} = 75^{o}$ şi $t/L = 0,75$ în dreptul bordurilor de atac. In cele ce urmează este dată rezolvarea complexă a mişcării potenţiale şi fără evoluţie a unui fluid incompresibil în jurul reţelei de profile radial-axiale, avînd circulaţia dată, menţionate mai înainte, comutînd problema în planul imagine şi apoi transpunînd rezultatele pe suprafaţa de curent de revoluţie. A rezultat în planul imagine o reţea axială de turbină cu parametrii $t/L = 0,75$, $\beta^{AM} = 75^{o}$, $\beta^{AV} = 54^{o}$, $\beta_{\infty} = 64^{o}16'30''$ cu stratul de fluid de grosime variabilă.

In fig.6.2 este prezentată o imagine aproximativă a profilului reţelei radial-axiale de pe suprafaţa de curent de revoluţie. Axa $O'1'_{(1)}$ este loxodroma desfăşurată pe plan iar coordonatele $O'2'_{(1)}$, după normalele la loxodromă. Imaginea lui este doar aproximativă fiindcă fig.6.2 ne dă o imagine aproape de realitate a grosimii profilului şi nu şi a curburii lui.

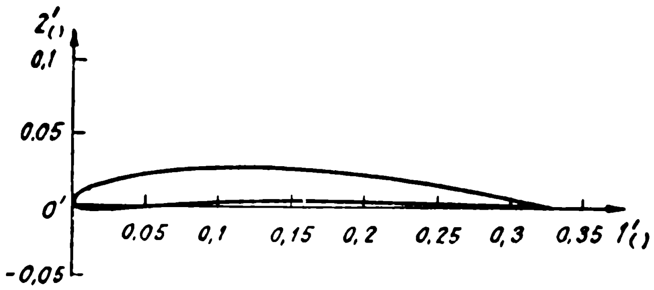


Fig.6.2 O imagine aproximativă a profilului de pe suprafaţa de curent de revoluţie. Axa $O'1'_{(1)}$ este în lungul loxodromei iar $O'2'_{(1)}$ după normalele la loxodromă

In fig.6.3 este prezentat profilul din fig.6.2 (de pe suprafaţa de curent) deformat prin (6.20) în planul imagine. Axei $O'1'$ din planul imagine (coarda profilului) îi corespunde prin (6.20) loxodroma pe suprafaţa de curent şi care desfăşurată pe plan a dat axa $O'1'_{(1)}$.

In fig.6.4 este dată o imagine comparativă a celor două profile aduse la coardă unitară.

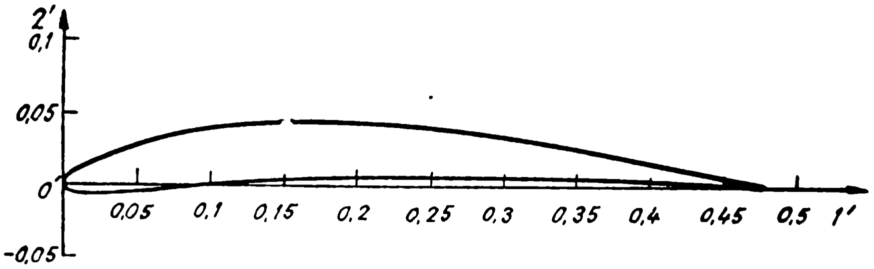


Fig.6.3 Profilul deformat prin (6.2o) în planul imagine

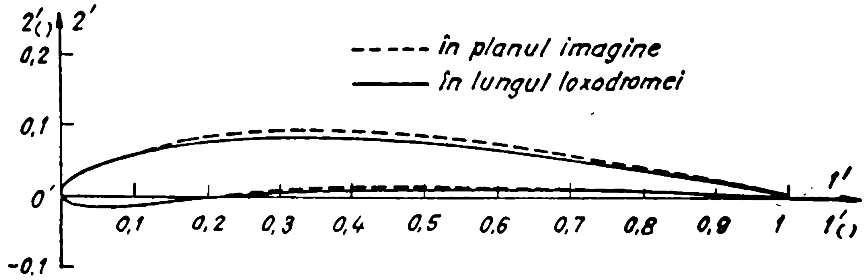


Fig.6.4 Comparaţie între cele două profile aduse la coardă unitară

6.lo.1 Domeniul de analiză din planul imagine

Domeniul de analiză este cel din fig.6.5 pe care s-a efectuat discretizarea prezentată la 6.53. In partea de jos a fig. 6.5 este dată variaţia funcţiei $h(x_1)$ (ce dă în formă relativă grosimea stratului de fluid) după axa 1-a ce corespunde normalei la frontul de atac al reţelei.

6.lo.2 Realizarea programului de calcul

Rezolvarea problemei a fost obţinută cu ajutorul programului MISSROT în cadrul căruia au fost utilizate subprogramele

(i) DISCRET (vezi 3.12.2 (i))
(ii) SISTEM (vezi 3.12.2 (ii))
(iii) VITCEG (vezi 5.8.2 (iii))
(iv) CAUT 4 (vezi 3.12.2 (iv))
(v) CONDLIM (vezi 4.12.2 (v))

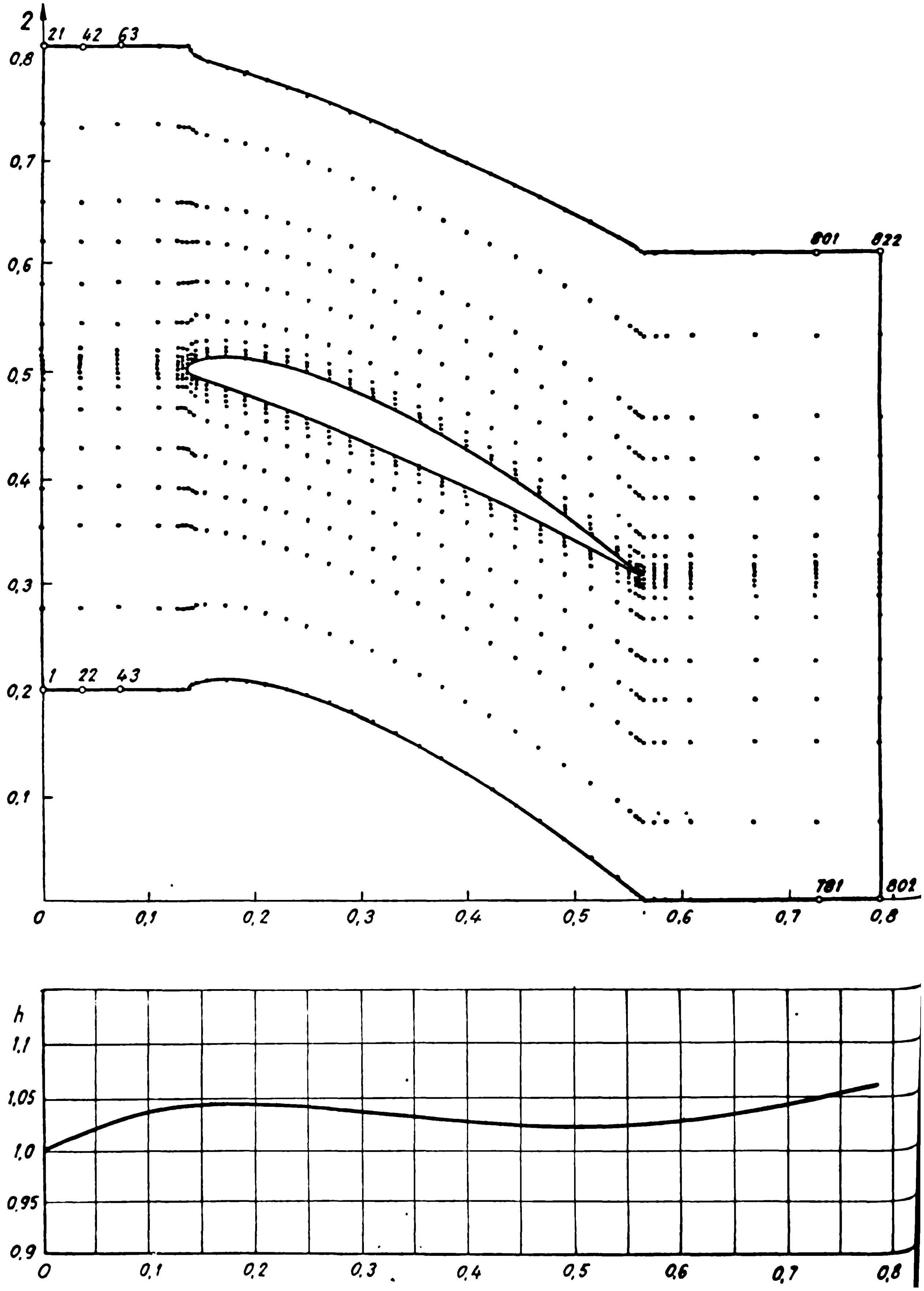


Fig.6.5 Discretizarea domeniului din planul imagine.Grosimea relativă a stratului de fluid.

(v i) REARGANJ (vezi 5.9.3)

(v ii) COEFPOR care

1. calculează coeficientul de portanţă în planul imagine

(viii) PRG care realizează

1. trecerea domeniului de pe suprafaţa de curent de revoluţie în planul imagine
2. aproximarea numerică a relaţiilor de trecere

(ix) DERLOG care calculează

1. funcţia de grosime a stratului de fluid $h(x_1)$
2. derivata $h'(x_1)$

(x) TRSP care realizează

1. transpunerea liniilor de curent din planul imagine pe suprafaţa de curent de revoluţie
2. transpunerea liniilor de egal potenţial al vitezei din planul imagine pe suprafaţa de curent de revoluţie
3. calculul discret al punctelor loxodromei
4. calculul cîmpului de viteze pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei
5. calculul cîmpului de presiuni pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei

6.1o.3 Rezultate numerice

In fig.6.6 sînt prezentate liniile de curent în planul imagine în domeniul de analiză iar în fig.6.7 cîmpul hidrodinamic al mişcării în planul imagine (compus din liniile de curent ψ = constant şi liniile de egal potenţial al vitezei φ = constant In lungul segmentului KG se observă saltul potenţialului φ .

In fig.6.8 este dată variaţia vitezei $\overline{v}$ în lungul profilului din planul imagine iar în fig.6.9 variaţia presiunii $\overline{p}$ în lungul profilului. In tabelul din fig.6.8 este dată comparativ valoarea circulaţiei $\Gamma^v = \Gamma_{(1)}^v$ teoretică (calculată cu (5.43)) şi prin M.E.F. (determinată prin integrarea cîmpului de viteze.

In fig.6.1o este dată variaţia vitezei fizice $\overline{v}_{(1)}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent de revoluţie în lungul loxodromei iar în fig.6.11 variaţia presiunii $\overline{p}_{(1)}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţă.

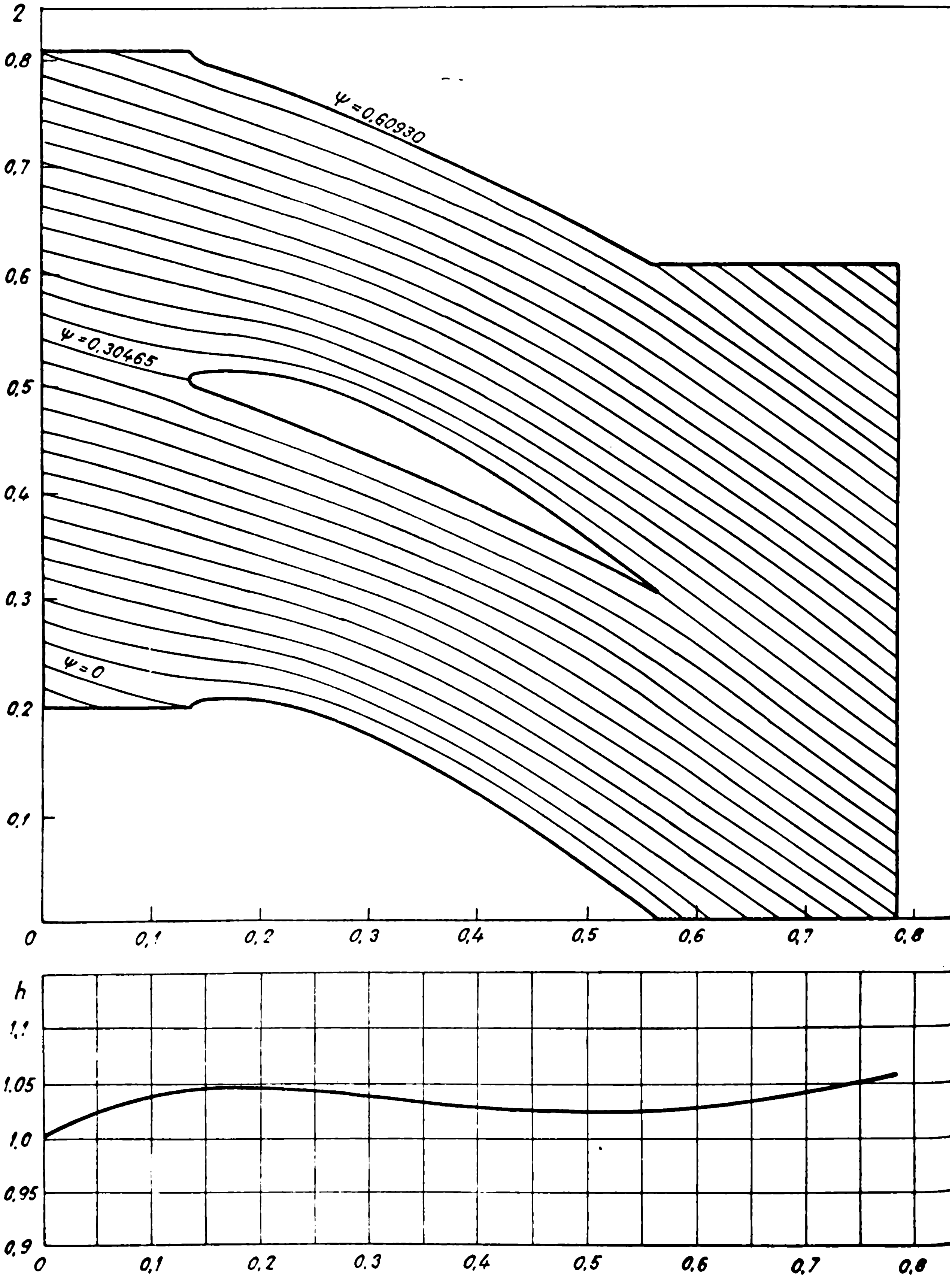
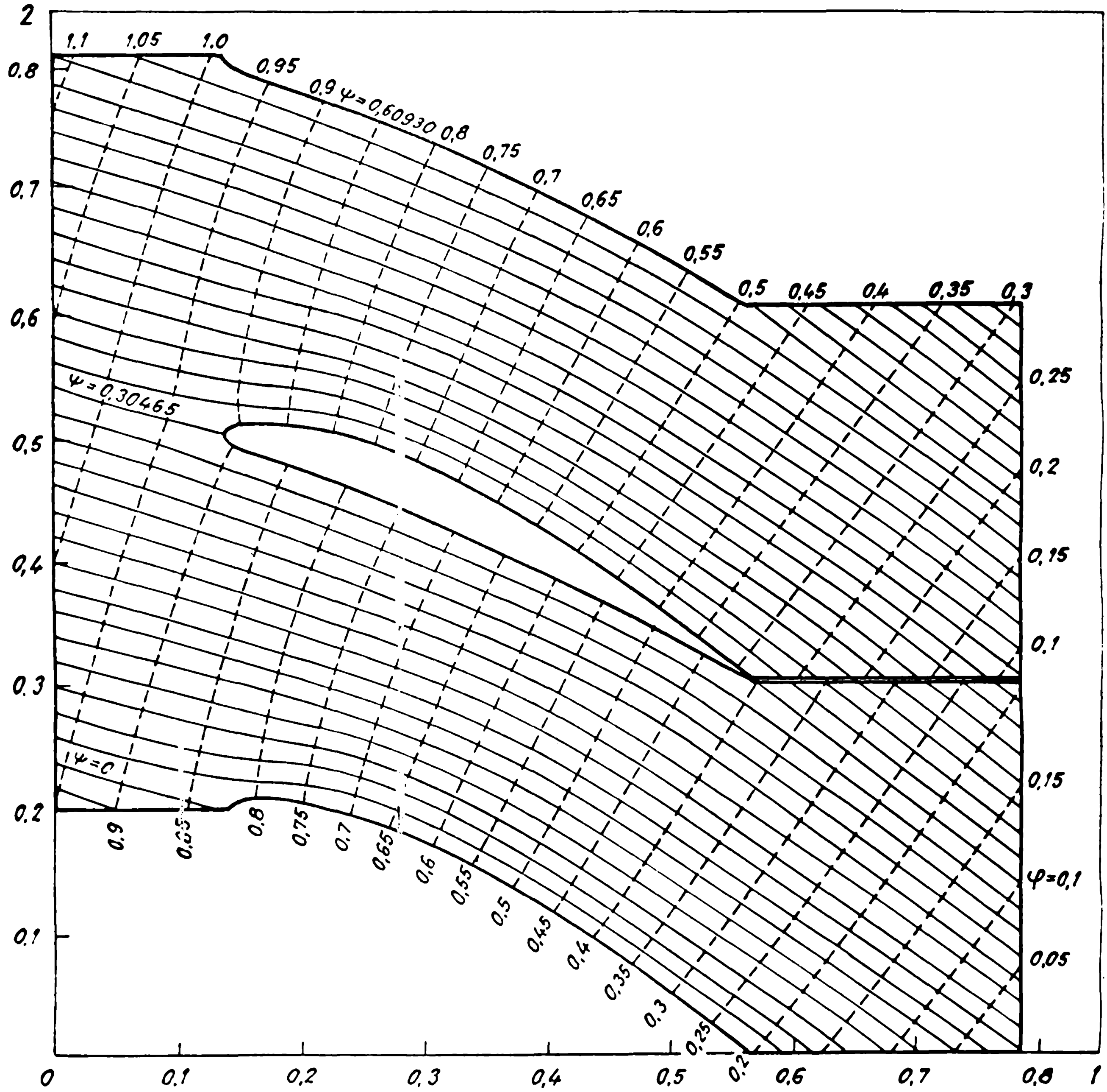


Fig.6.6 Liniile de curent în planul imagine



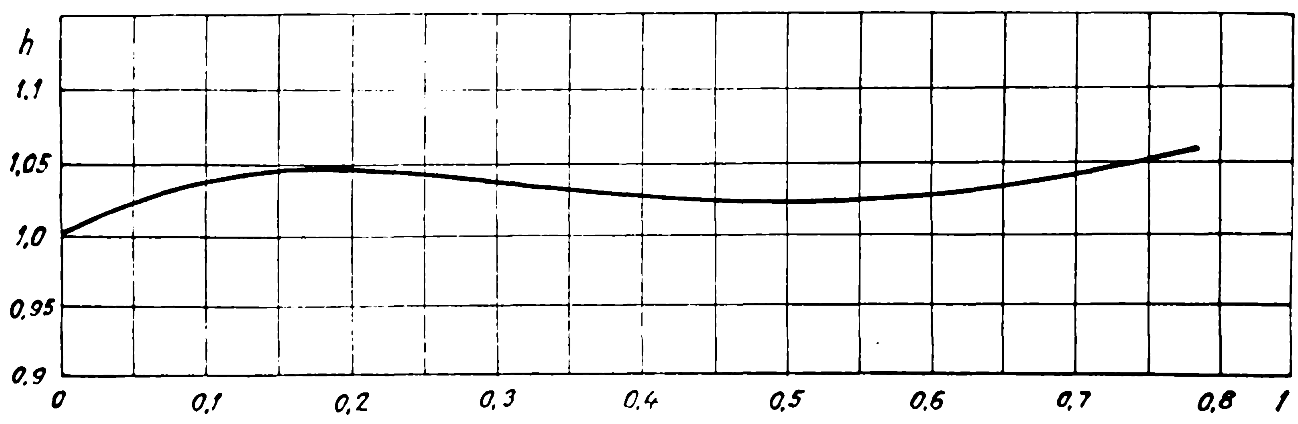


Fig.6.7 Cîmpul hidrodinamic în planul imagine

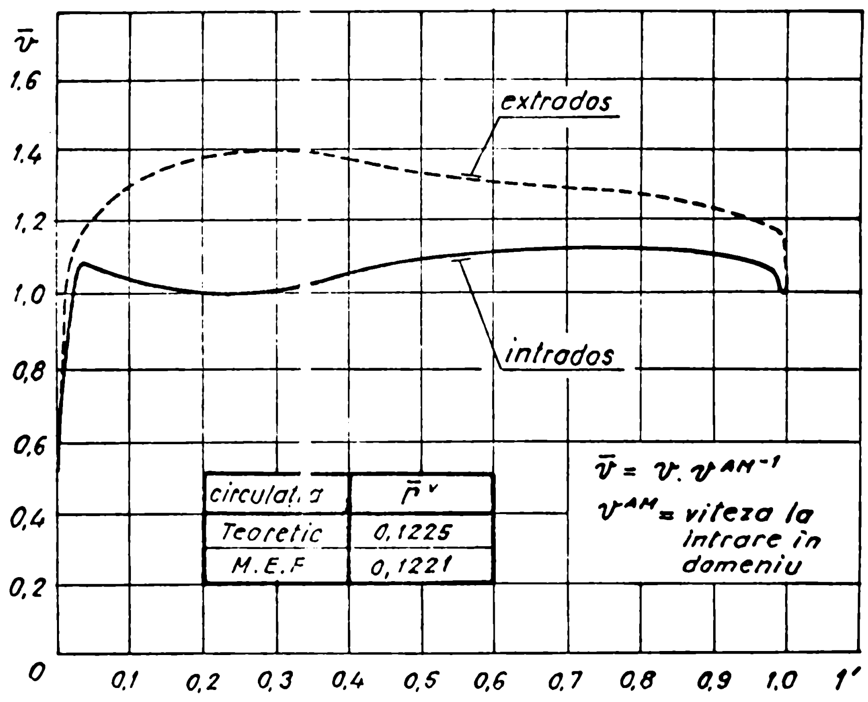


Fig.6.8 Cîmpul de viteze pe frontiera profilului în planul imagine

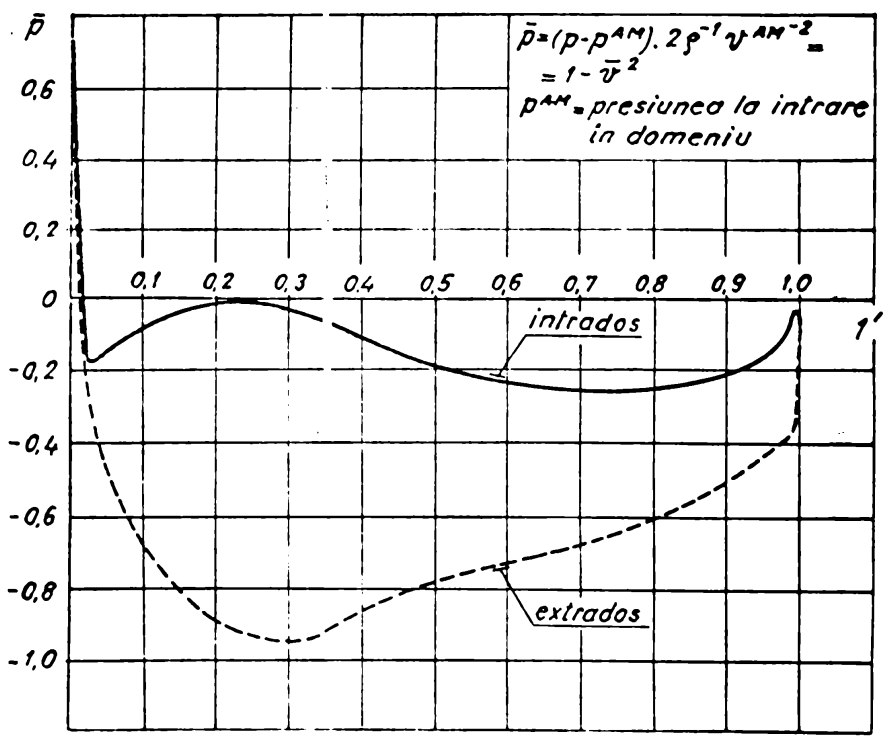


Fig.6.9 Cîmpul de presiuni pe frontiera profilului în planul imagine

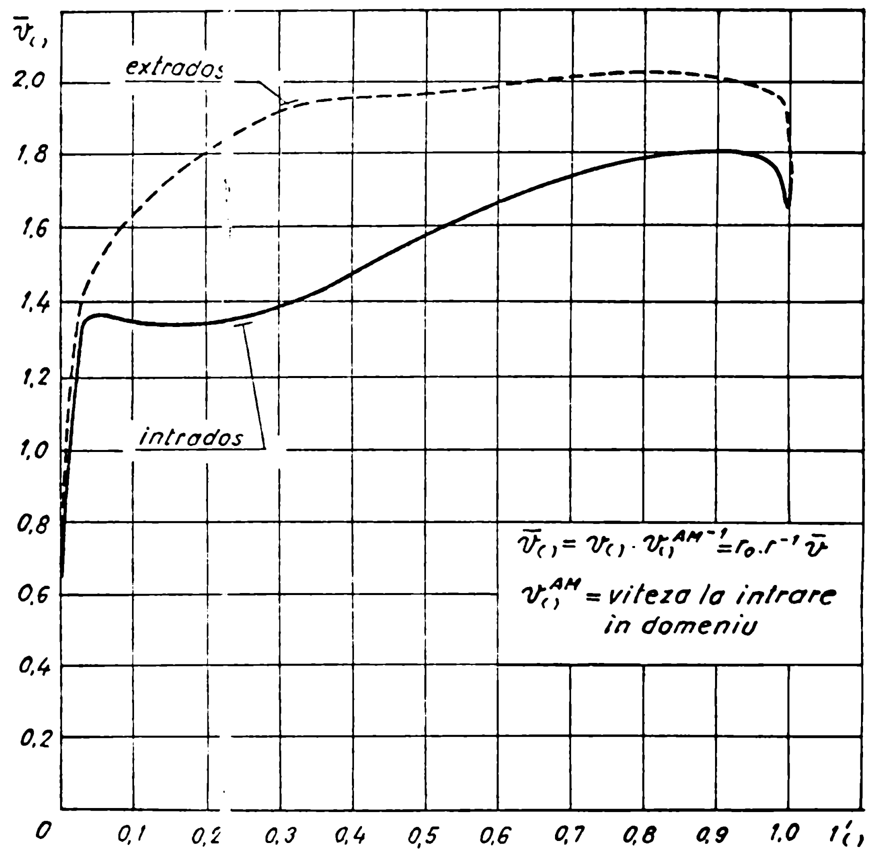


Fig.6.10 Cîmpul de viteze pe frontiera profilului de pe suprafața de curent în lungul loxodromei

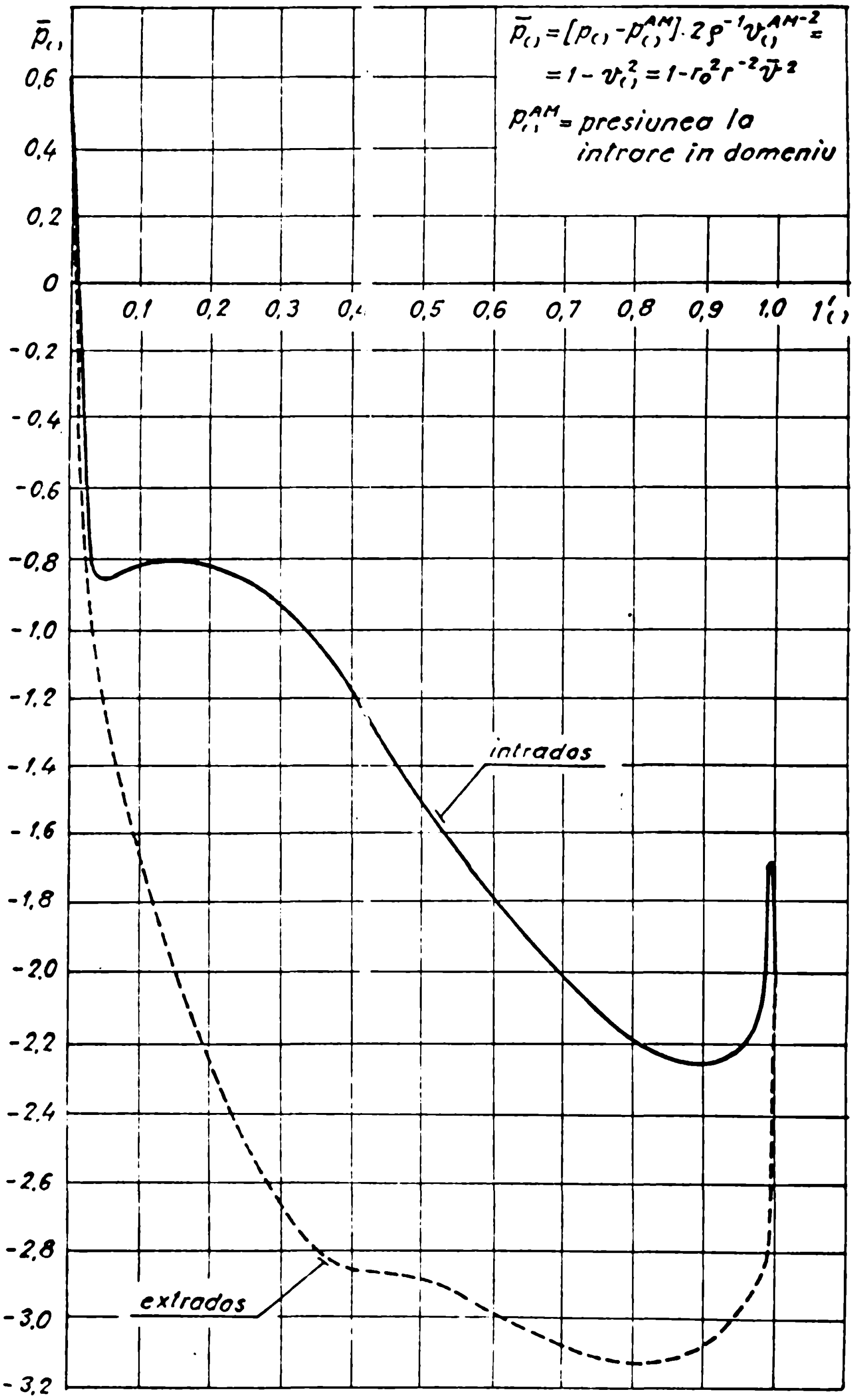


Fig.6.11 Cîmpul de presiuni pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei

CAPITOLUL 7

DETERMINAREA MISCARII IN JURUL RETELELOR DE PROFILE RADIAL-AXIALE MOBILE CU DEVIATIE DATA

7.1 Generalităţi

Cu aplicaţii la mişcarea fluidelor prin rotoarele turbomaşinilor radial axiale, ne propunem acum să determinăm cazul cel mai general bidimensional al acestei mişcări şi anume mişcarea fluidelor în jurul reţelelor de profile radial-axiale mobile presupunînd cunoscută deviaţia realizată de reţeaua de profile sau, echivalent, condiţiile cinematice de la intrare, respectiv ieşire. Reţeaua de profile radial-axială, aşezată pe suprafaţa de curent de revoluţie cu frontul reţelei în lungul unui cerc paralel, este într-o mişcare de rotaţie datorită vitezei unghiulare $\vec{\omega}$ a rotorului.

7.2 Mişcarea relativă rotaţională pe suprafaţa de curent

Fie zona rotorului unei turbine Francis cîmpul hidrodinamic şi $\overline{\psi}$ = constant, un meridian al suprafeţei de curgere pe care este aşezată o reţea radial-axială de turbină (vezi fig.6.1) care se roteşte cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$.

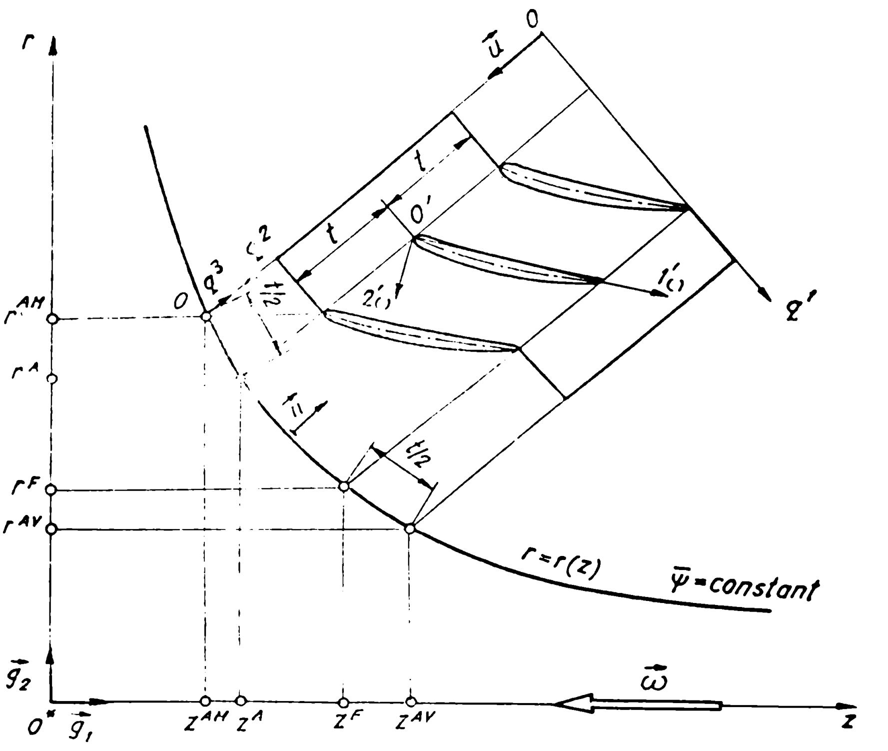


Fig.7.1 Reţeaua radial-axială

Dacă $\vec{v}$ este viteza absolută, $\vec{w}$ viteza relativă pe suprafaţa de meridian $r = r(z)$, iar $\vec{u}$ viteza periferică corespunzătoare vectorului viteză unghiulară a rotorului $\vec{\omega}$, legătura dintre le este dată de

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u} \tag{7.1}$$

În ipoteza că mişcarea absolută este potenţială, din (7.1) se obţine

$$\mathrm{rot}\,\vec{w} + \mathrm{rot}\,\vec{u} = 0 \tag{7.2}$$

sau, cu

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec{u} &= 2\vec{\omega} \\ \mathrm{rot}\,\vec{w} + 2\vec{\omega} &= 0 \end{aligned} \tag{7.3}$$

care după axa q^3 (vezi fig.7.1) dă în componente fizice

$$(\mathrm{rot}\,\vec{w})_{(3)} + 2\,\omega_{(3)} = 0 \tag{7.4}$$

Dar componentele fizice ale lui rot $\vec{w}$ sînt date de

$$\begin{aligned} h_i \varepsilon^{ijk} w_{k/j} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial w_{(k)}}{\partial q^{j}} - \frac{1}{h_k}\frac{\partial w_{(j)}}{\partial q^{k}} + \\ + \frac{1}{h_j h_k}\left[w_{(k)}\frac{\partial h_k}{\partial q^j} - w_{(j)}\frac{\partial h_j}{\partial q^k}\right] \end{aligned} \tag{7.5}$$

de unde rezultă componenta 3-a ($j = 1$ şi $k = 2$ în 7.5).

$$\begin{aligned} (\mathrm{rot}\,\vec{w})_{(3)} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial w_{(2)}}{\partial q^1} - \frac{1}{h_2}\frac{\partial w_{(1)}}{\partial q^2} + \\ + \frac{1}{h_1 h_2}\left[w_{(2)}\frac{\partial h_2}{\partial q^1} - w_{(1)}\frac{\partial h_1}{\partial q^2}\right] \end{aligned} \tag{7.6}$$

în care $w_{(i)}$ sînt componentele fizice ale vitezei relative $\vec{w}$. Componenta fizică $\omega_{(3)}$ este dată de produsul scalar dintre $\vec{\omega}$ şi $\vec{n}$ unde $\vec{n}$ este normala la meridianul $r = r(z)$ (vezi fig. 7.1). Dar

$$\vec{\omega} = -\omega\vec{g}_1 \tag{7.7}$$

şi

$$\vec{n} = -r'(z)\{1 + r'^2(z)\}^{-1/2}\cdot\vec{g}_1 + [1 + r'^2(z)]\vec{g}_2 \tag{7.8}$$

cu care $\omega_{(3)}$ devine

$$\omega_{(3)} = r'(z)\{1 + r'^2(z)\}^{-1/2}\cdot\omega \tag{7.9}$$

Rezultă atunci din (7.4) cu (7.6) şi (7.9)

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial w_{(2)}}{\partial q^1}-\frac{1}{h_2}\frac{\partial w_{(1)}}{\partial q^2}+\frac{1}{h_1 h_2}\left\{w_{(2)}\frac{\partial h_2}{\partial q^1}-w_{(1)}\frac{\partial h_1}{\partial q^2}\right]+ \\ +2\omega r'(z)\left(1+r'^2(z)\right\}^{-1/2}=0 \tag{7.10}$$

şi care, cu (6.8) devine

$$\frac{\partial w_{(2)}}{\partial q^1}-r_0 r^{-1}\frac{\partial w_{(1)}}{\partial q^2}+r_0 r^{-1}\frac{\partial (r r_0^{-1})}{\partial q^2}+ \\ +2\omega r'(z)\{1+r'^2(z)\}^{-1/2}=0 \tag{7.11}$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\{r r_0^{-1} w_{(2)}\}-\frac{\partial w_{(1)}}{\partial q^2}+2 r_0^{-1} r\,\omega\, r'(z)\{1+r'^2(z)\}^{-1/2}=0 \tag{7.12}$$

adică

$$\frac{\partial}{\partial q^1}[r r_0^{-1} w_{(2)}]-\frac{\partial w_{(1)}}{\partial q^2}+r_0^{-1} r\cdot f=0 \tag{7.13}$$

unde

$$f=2\omega r'(z)\{1+r'^2(z)\}^{-1/2} \tag{7.14}$$

7.3 <u>Ecuaţia diferenţială pentru funcţia de curent în planul imagine</u>

Prin (6.20) reţeaua radial-axială de pe suprafaţa de curent trece într-o reţea liniară în planul imagine. Analog cu cele de la 6.2.5, folosind în ecuaţia (7.13) pe (6.24), (6.26) şi (6.20) se obţine, analog lui (6.40)

$$w_{2/1} r_0 r^{-1}-w_{1/2} r_0 r^{-1}-r_0^{-1} r f=0 \tag{7.15}$$

în care f define, prin $z = z\,(q^1)$, funcţie de x_1 .

Introducînd funcţia de curent ψ prin (6.34) şi înlocuind (6.35) în (7.15) se obţine ecuaţia diferenţială pentru funcţia de curent în planul imagine

$$[-h^{-1}(x_1)\psi_{/1}]_{/1}-[h^{-1}(x_1)\psi_{/2}]_{/2}-(r_0^{-1} r)^2\cdot f(x_1)=0 \tag{7.16}$$

$$\psi_{/11} h^{-1}(x_1)+\psi_{/22} h^{-1}(x_1)+\psi_{/1}[h^{-1}(x_1)]_{/1}+(r_0^{-1} r)^2\cdot f(x_1)=0 \tag{7.17}$$

...ică; [142], [169], [177]

$$\psi_{/ii}-h^{-1}h_{/1}\psi_{/1}+h(r_0^{-1}\cdot r)^2\cdot f=0 \qquad (7.18)$$

7.4 Tratarea în formă adimensională. Condiţii la limită în planul imagine

Cu schimbarea de variabilă (3.16) şi de funcţie

$$\psi^*=\frac{1}{2}bNQ^{-1}\psi \qquad (7.19)$$

care b este lăţimea rotorului, Q debitul prin rotor iar N numă-... de palete ecuaţia (7.18) trece în

$$\psi^*_{/ii}-h^{-1}h_{/1^*}\psi^*_{/1^*}+h(r_0^{-1}r)^2\cdot f^*=0 \qquad (7.20)$$

care

$$f^*=2\omega^* r'(z)\{1+r'^2(z)\}^{-1/2} \qquad (7.21)$$

... $z=z(x_1^*)$, prin $z=z(q^1)$, (6.2o) şi (3.16) şi

$$\omega^*=\omega L^2 bN(2Q)^{-1} \qquad (7.22)$$

...mpul de viteze w_i^* este dat de (4.8)

$$w_i^*=\varepsilon_{ij}\psi^*_{/j} \qquad (7.23)$$

legătura

$$w_i^*=\frac{1}{2}bNLQ^{-1}w_i \qquad (7.24)$$

...egătura dintre arcul s (în lungul lui q^1, deci în lungul meridia-...lui) şi z este dată de

$$s=\int_{z^{AM}}^{z}\{1+r'^2(z)\}^{1/2}\cdot dz \qquad (7,25)$$

... trecerea de la s la x_1 prin prima relaţie a lui (6.2o).

Pentru condiţiile la limită din planul imagine rămîn va-...ile consideraţiile de la 6.3 şi 6.4.

7.5 Integrarea ecuaţiei diferenţiale pentru funcţia de curent în planul imagine prin M.E.F.

Vom folosi tot tratarea în formă adimensională şi vom re-...nţa la notarea cu asterisc.

Să reluăm ecuaţia (7.2o) cu condiţiile la limită de la ...4 puse însă pentru viteza relativă w_i. Funcţia ψ poate fi ...proximată global pe domeniul Ω din planul imagine prin (3.26). ...licînd metoda lui Galerkin rezultă

$$\int_{\Omega}[\psi_{/ii}-h^{-1}h_{/1}\psi_{/1}+h(r_0^{-1}r)^2f]a_\alpha\,d\Omega=0 \tag{7.26}$$

care integrată prin părţi conduce la

$$\int_{\Omega}\psi_{/i}a_{\alpha/i}\,d\Omega+\int_{\Omega}h^{-1}h_{/1}\psi_{/1}a_\alpha\,d\Omega-\int_{\Omega}h(r_0^{-1}r)^2fa_\alpha\,d\Omega-\\ -\int_{\Gamma}\psi_{/i}n_i a_\alpha^*\,d\Gamma=0 \tag{7.27}$$

şi care, cu (3.26) devine

$$\psi_\beta\int_{\Omega}a_{\alpha/i}a_{\beta/i}\,d\Omega+\psi_\beta\int_{\Omega}h^{-1}h_{/1}a_{\beta/1}a_\alpha\,d\Omega=\\ =\int_{\Gamma}\psi_{/i}n_i a_\alpha^*\,d\Gamma+\int_{\Omega}h(r_0^{-1}r)^2fa_\alpha\,d\Omega \tag{7.28}$$

adică sistemul liniar

$$D_{\alpha\beta}\psi_\beta=F_\alpha \tag{7.29}$$

în care coeficienţii $D_{\alpha\beta}$ sînt daţi de (6.56) iar termenii liberi de

$$F_\alpha=\int_{\Gamma}\psi_{/i}n_i a_\alpha^*\,d\Gamma+\int_{\Omega}h(r_0^{-1}r)^2fa_\alpha\,d\Omega \tag{7.30}$$

adică

$$F_\alpha=F_\alpha^\Gamma+F_\alpha^\Omega \tag{7.31}$$

în care F_α^Γ sînt daţi de (4.31) iar F_α^Ω de

$$F_\alpha^\Omega=\int_{\Omega}h(r_0^{-1}r)^2fa_\alpha\,d\Omega. \tag{7.32}$$

Pe un element finit Ω^e din planul imagine funcţia ψ poate fi aproximată local prin (3.35). Procedînd similar cu cele de mai înainte obţinem pentru fiecare element finit

$$\int_{\Omega^e}[\psi^e_{/ii}-h^{-1}h_{/1}\psi^e_{/1}+h(r_0^{-1}r)^2f]a_N^e\,d\Omega^e=0 \tag{7.33}$$

care integrată prin părţi dă

$$\int_{\Omega^e}\psi^e_{/i}a^e_{N/i}\,d\Omega^e+\int_{\Omega^e}h^{-1}h_{/1}\psi^e_{/1}a^e_N\,d\Omega^e-\int_{\Omega^e}h(r_0^{-1}r)^2f\cdot a^e_N\,d\Omega^e-\\ -\int_{\Gamma^e}\psi^e_{/i}n_i a_N^{*e}\,d\Gamma^e=0 \tag{7.34}$$

din care, cu (3.35), se obţine

$$\psi^e_M\int_{\Omega^e}a^e_{N/i}a^e_{M/i}\,d\Omega^e+\psi^e_M\int_{\Omega^e}h^{-1}h_{/1}a^e_{M/1}a^e_N\,d\Omega^e=\\ =\int_{\Gamma^e}\psi^e_{/i}n_i a_N^{*e}\,d\Gamma^e+\int_{\Omega^e}h(r_0^{-1}r)^2fa^e_N\,d\Omega^e \tag{7.35}$$

adică sistemul liniar

$$D^e_{NM}\,\psi^e_M = F^e_N \tag{7.36}$$

în care coeficienţii D^e_{NM} sînt daţi de (6.60) iar termenii liberi de

$$F^e_N = \int_{\Gamma^e} \psi^e_{/i}\, n_i\, a^{*e}_N\, d\Gamma^e + \int_{\Omega^e} k\,(r_0^{-1} r)^2 f a^e_N\, d\Omega^e \tag{7.37}$$

avem deci

$$F^e_N = F^{e\Gamma}_N + F^{e\Omega}_N \tag{7.38}$$

cu $F^{e\Gamma}_N$ daţi de (4.36) iar $F^{e\Omega}_N$ de

$$F^{e\Omega}_N = \int_{\Omega^e} k\,(r_0^{-1} r)^2 f \cdot a^e_N\, d\Omega^e \tag{7.39}$$

Trecerea de la local la global se va face tot cu formulele (3.42), (3.44), (3.45) şi (3.46).

7.6 Calculul termenilor liberi $F^{e\Omega}_N$

Pentru determinarea termenilor liberi vom folosi din nou (7.38) cu (3.71). Se obţine

$$F^{\Omega}_N = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k\,(r_0^{-1} r)^2 f\, a_N\, |J|\, d\xi\, d\eta \tag{7.40}$$

în care a_N sînt daţi de (3.65), $|J|$ de (3.69) cu (3.70) iar f de (7.21) cu (7.22). Notînd

$$g_N(\xi,\eta) = k[x_1(\xi,\eta)] \cdot \{r_0^{-1} r[x_1(\xi,\eta)]\}^2 \cdot f\circ z\circ s\circ x_1(\xi,\eta) \cdot a_N(\xi,\eta)\, \frac{1}{8}\,(\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta) \tag{7.41}$$

în care $x_1(\xi,\eta)$ este dat de (3.66) se obţine

$$F^{\Omega}_N = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_N(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{7.42}$$

Evaluarea termenilor liberi daţi de (7.42) se va face tot prin cuadratură numerică

$$F^{\Omega}_N = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} w_i w_j\, g_N(\xi_i,\eta_j) \tag{7.43}$$

în care w_i, ξ_i şi η_i sînt daţi de (3.90) respectiv (3.91) pentru n = 6.

7.7 Determinarea cîmpului de viteze în planul imagine

Problema este analoagă cu cea de la 6.6.1 cu deosebirea că în locul lui v_i apare w_i iar $\overline{w}$ îl vom defini prin raportare la w^{AM}

$$\overline{w} = w \cdot w^{AM^{-1}} \tag{7.44}$$

7.8 Transpunerea rezultatelor din planul imagine pe suprafața de curent

7.8.1 Transpunerea liniilor de curent

Se face analog cu cele prezentate la 6.9.1.

7.8.2 Transpunerea cîmpului de viteze

Se face la fel cu cele prezentate la 6.9.2, cu $w_{()}$ însă în loc de $v_{()}$.

7.8.3 Determinarea cîmpului de presiuni pe suprafața de curent

Cîmpul de presiuni $p_{()}$, în mişcarea relativă fizică de pe suprafața de curent de revoluție se obține scriind ecuația lui Bernoulli în lungul unei linii de curent de pe suprafață între punctul de la intrare şi un punct curent. Se obține

$$p_{()} - p_{()}^{AM} = 2^{-1} \rho \left\{ w_{()}^{AM^2} - w_{()}^2 - u_{()}^{AM^2} + u_{()}^2 \right\} \tag{7.45}$$

sau, raportat la $2^{-1} \rho \, w_{()}^{AM^2}$

$$\begin{aligned} \overline{p}_{()} &= \left[p_{()} - p_{()}^{AM} \right] 2 \rho^{-1} w_{()}^{AM^{-2}} = \\ &= 1 - \overline{w}_{()}^2 + \omega^2 \cdot r^{AM^2} \cdot w_{()}^{AM^{-2}} \left\{ (r : r^{AM^{-1}})^2 - 1 \right\} \end{aligned} \tag{7.46}$$

sau încă, cu (6.84) (cu w în loc de v)

$$\overline{p}_{()} = 1 - r_0^2 r^{-2} \overline{w}^2 + \omega^2 \cdot r^{AM^2} \cdot r_0^{-2} \cdot w^{AM^{-2}} \left[(r \cdot r^{AM^{-1}})^2 - 1 \right\} \tag{7.47}$$

7.9 Exemplu de calcul

Metoda a fost aplicată rețelei de profile radial-axiale de turbină Francis prezentată la 6.1o (vezi şi fig.7.1).

In cele ce urmează este dată rezolvarea complexă a mişcării rotaționale şi fără evoluție a unui fluid incompresibil în jurul rețelei de profile menționate, de deviație cunoscută, comutînd problema în planul imagine şi apoi transpunînd rezultatele pe suprafața de curent de revoluție.

7.9.1 Domeniul de analiză din planul imagine

Domeniul de analiză este cel din fig.7.5 pe care s-a păstrat discretizarea prezentată la 7.5.3.

7.9.2 Realizarea programului de calcul

Rezolvarea problemei a fost obţinută cu ajutorul programului MISSROT (prezentat la 6.1o.2) cu unele modificări şi adăugiri, în cadrul căruia au fost utilizate subprogramele

(i) DISCRET (vezi 3.12.2 (i))
(ii) SISTEM (vezi 3.12.2 (ii))
(iii) VITCEG (vezi 5.8.2 (iii))
(iv) CAUT 4 (vezi 3.12.2 (iv))
(v) CONDLIM (vezi 4.12.2 (v))
(vi) REAREANJ (vezi 5.9.3)
(vii) COEFPOR (vezi 6.1o.2 (vii))
(viii) PRG (vezi 6.1o.2 (viii))
(ix) DERLOG (vezi 6.1o.2 (ix))
(x) TRSP (vezi 6.1o.2 (x))
(xi) TLIBROT care realizează calculul termenilor liberi suplimentari.

7.9.3 Rezultate numerice

Programul a fost rulat la valori parametrice ale lui ω în intervalul $[-1,2\ ;\ 1,2]$. In fig.7.2 sînt prezentate liniile de curent în planul imagine în domeniul de analiză considerat, pentru ω = o,4, păstrînd condiţiile la limită de la intrare şi ieşire.In fig.7.3 sînt date liniile de curent pentru ω = -o,4 cu aceeaşi păstrare a condiţiilor la limită. In fig.7.4 este dată variaţia vitezei $\overline{w}$ în lungul profilului din planul imagine iar în fig.7.5 variaţia presiunii $\overline{p}$ pentru $\omega \geq 0$. In fig.7.6 respectiv 7.7 sînt date aceleaşi variaţii pentru $\omega \leq 0$. In fig.7.8 este dată variaţia vitezei fizice $\overline{w}_{c_1}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent de revoluţie în lungul loxodromei iar în fig.7.9 variaţia presiunii $\overline{p}_{c_1}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţă pentru $\omega \geq 0$. In fig. 7.1o respectiv 7.11 sînt date aceleaşi variaţii pentru $\omega \leq 0$.

Cîmpul de viteze de pe frontiera profilului din planul imagine a permis calculul circulaţiei $\Gamma^{v} = \Gamma^{v}_{c_1}$ la valori parametrice a lui ω.

In fig.7.12 este prezentată variaţia circulaţiei $\Gamma^{v} - \Gamma^{v}_{c_1}$ în raport cu ω. Este de semnalat caracterul liniar al acestei variaţii.

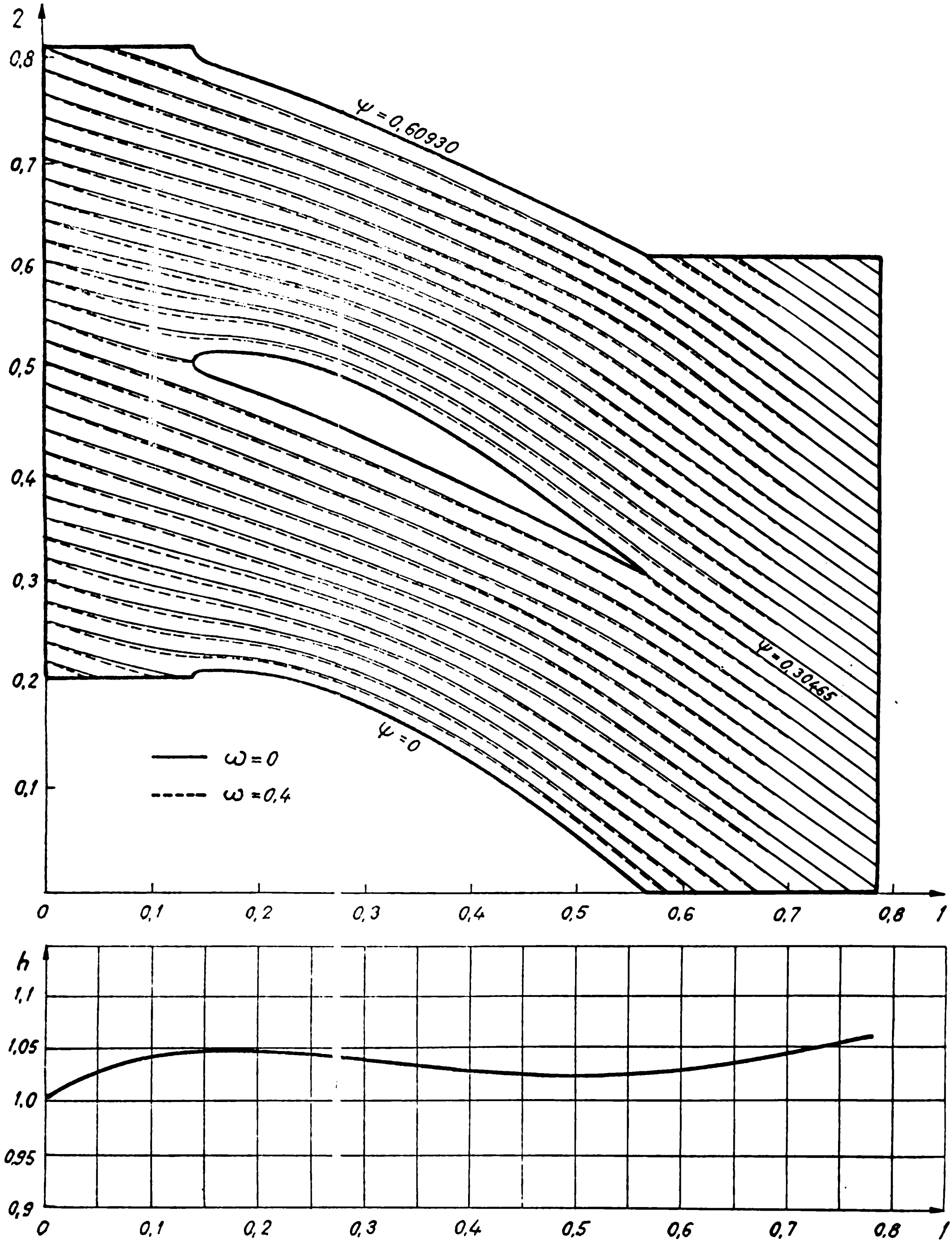


Fig.7.2 Liniile de curent în planul imagine pentru
ω = o,4

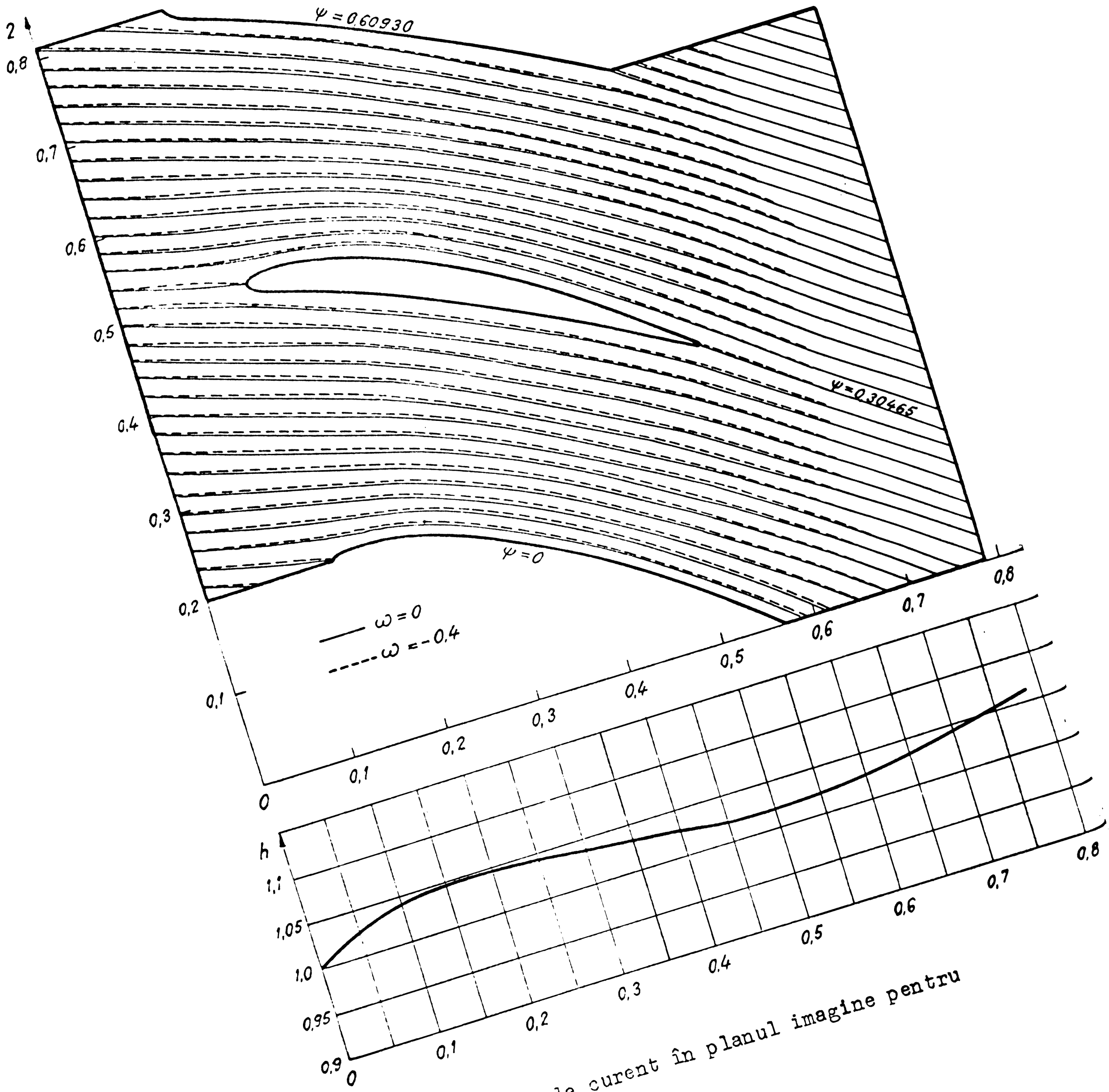


Fig.7.3 Liniile de curent în planul imagine pentru
$\omega = -0{,}4$

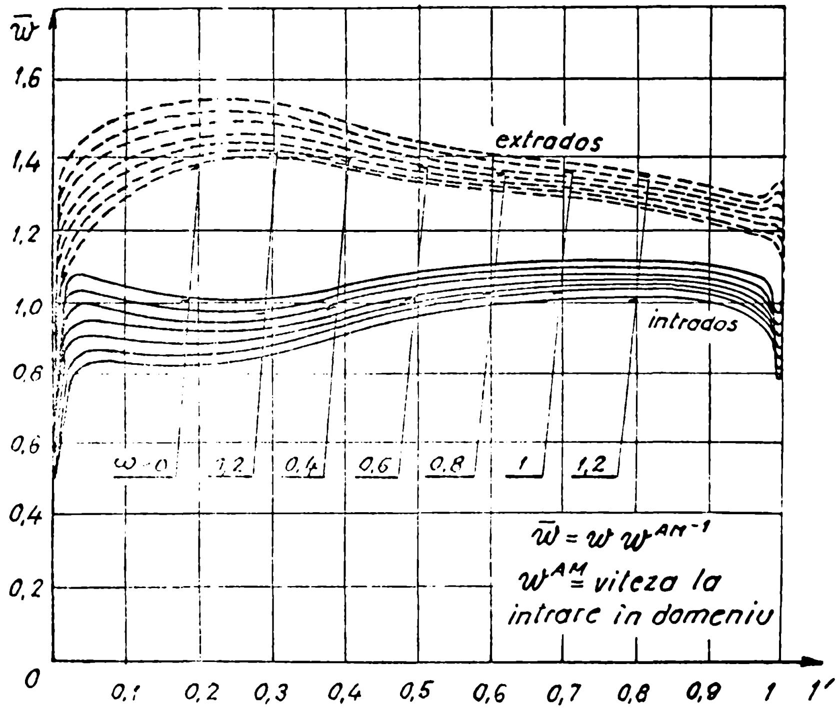


Fig.7.4 Cîmpul de viteze pe frontiera profilului în planul imagine $\omega \geq 0$.

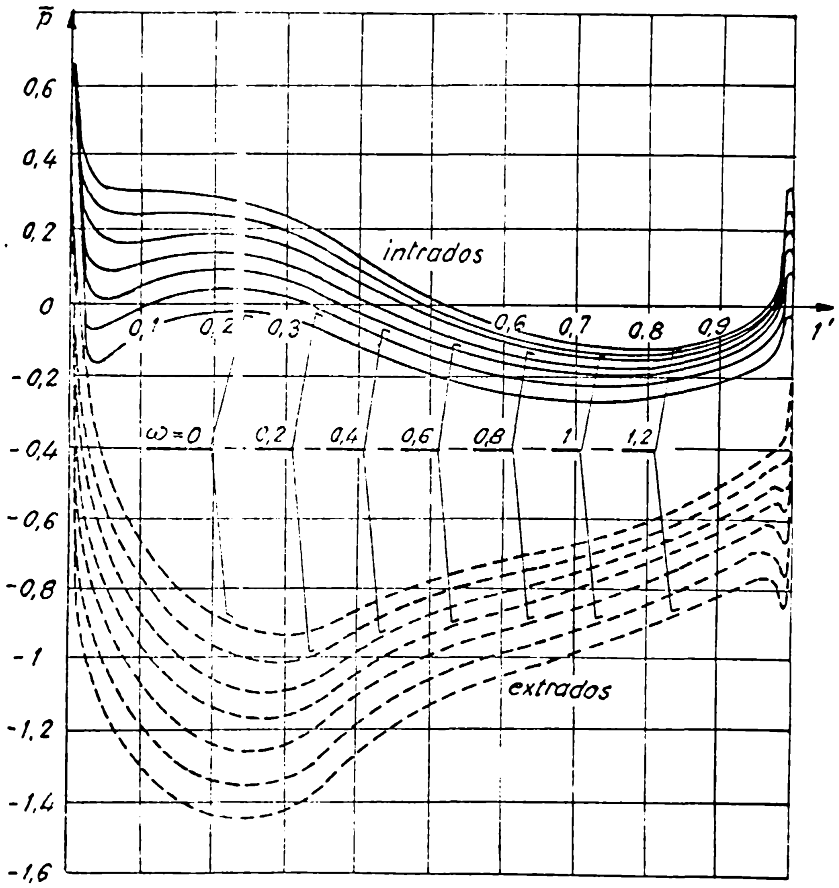


Fig.7.5 Cîmpul de presiuni pe frontiera profilului în planul imagine $\omega \geq 0$

BUPT

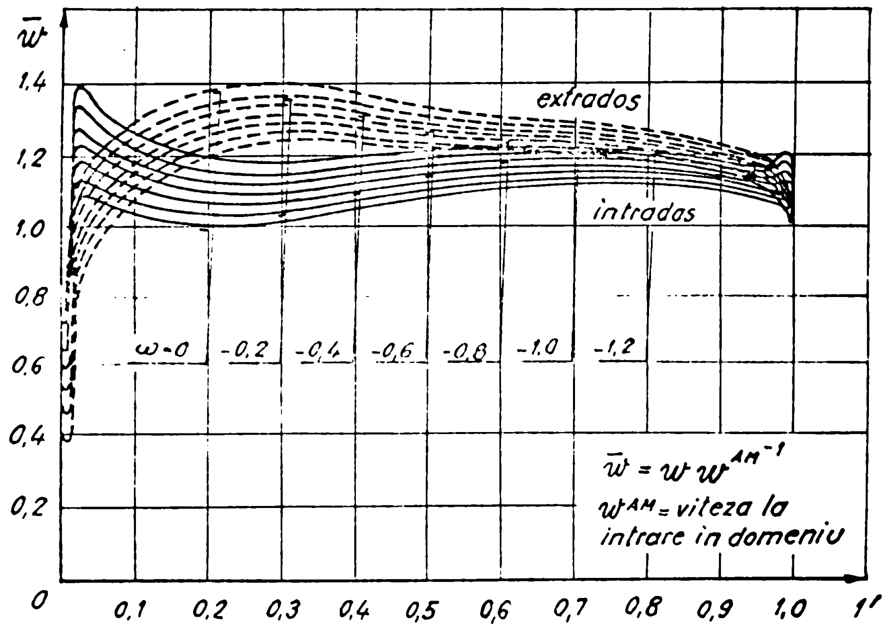


Fig.7.6 Cîmpul de viteze pe frontiera profilului în planul imagine ; $\omega \leq 0$.

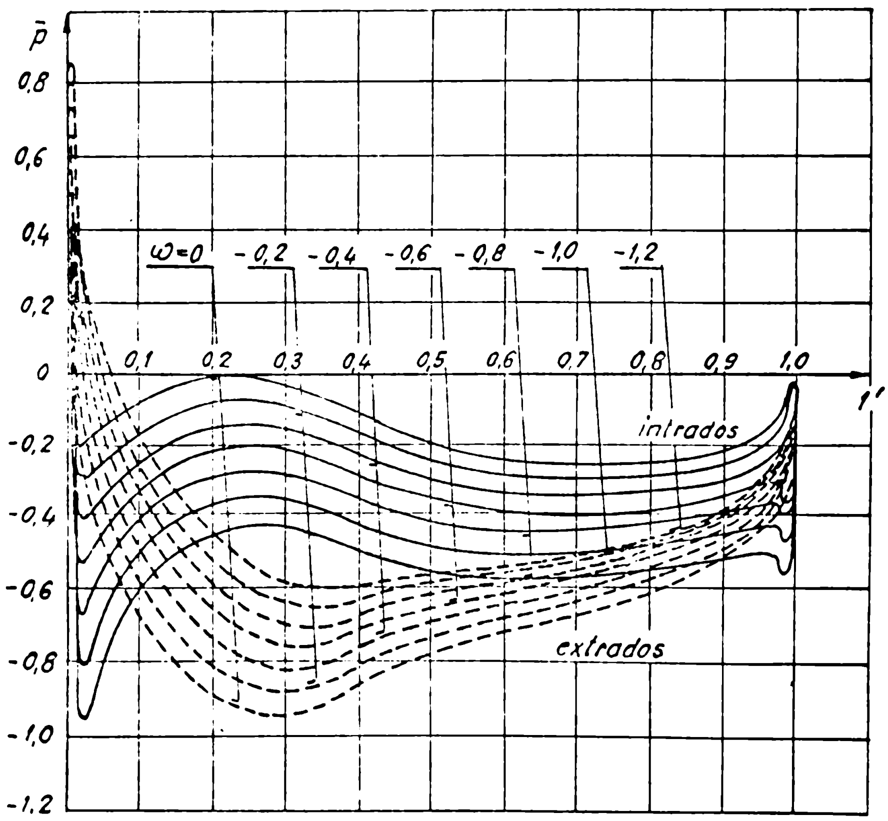


Fig.7.7 Cîmpul de presiuni pe frontiera profilului în planul imagine ; $\omega \leq 0$.

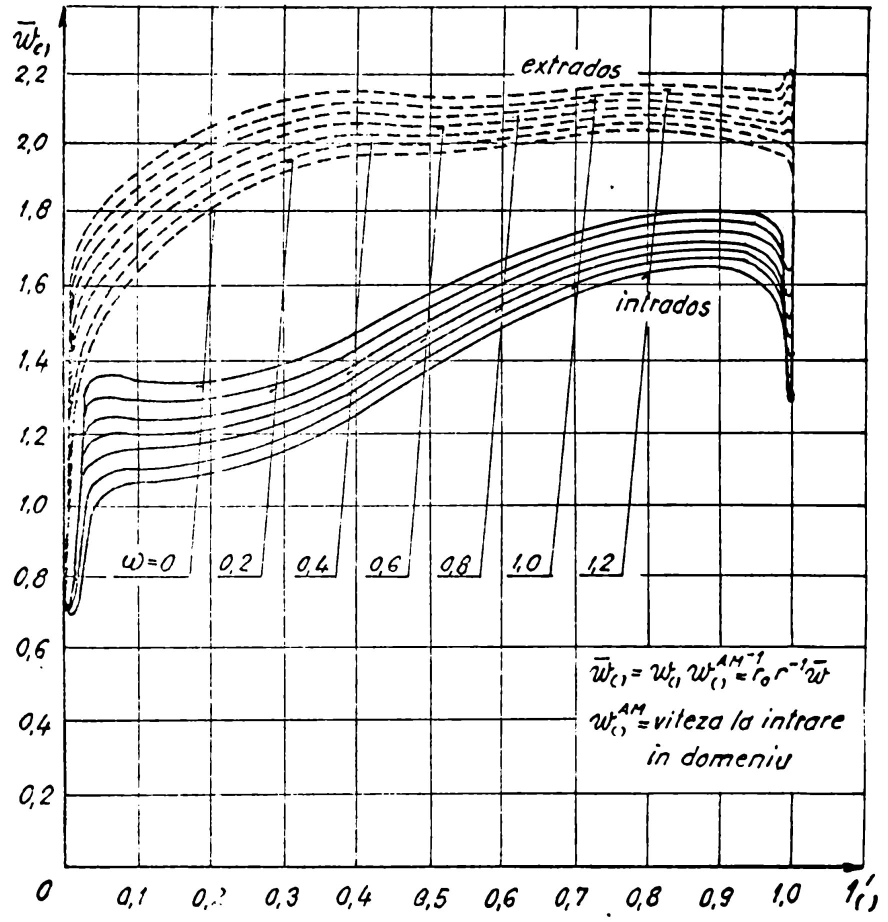


Fig.7.8 Cîmpul de viteze pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei ; $\omega \geq 0$.

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$\bar{\Gamma}^v$	0,4080	0,54[illegible]7	0,6875	0,8271	0,6671	1,1070	1,2460
C^F	0,9166	1,2450	1,5720	1,8950	2,2170	2,5360	2,8510

ω	0	-0,2	-0,4	-0,6	-0,8	-1,0	-1,2
$\bar{\Gamma}^v$	0,4080	0,2683	0,1286	-0,0111	-0,1510	-0,2904	-0,4303
C^F	0,9166	0,5854	0,2516	-0,0846	-0,4235	-0,7638	-1,1080

7.9.4 Extremele de depresiune

Un interes deosebit la mişcarea fluidelor în jurul reţelelor de profile îl prezintă extremele de depresiune. Analiza cîmpului de presiuni de pe frontiera profilelor (vezi fig.7.9 şi 7.11) a stabilit existenţa a 6 zone în care apar extreme locale de depresiune şi anume

(i) IA intrados, zona bordului de atac
(ii) IP intrados, zona posterioară a profilului
(iii) IF intrados, zona bordului de fugă
(iv) EC extrados, zona centrală a profilului
(v) EP extrados, zona posterioară a profilului
(vi) EF extrados, zona bordului de fugă

şi tendinţa, pentru valori mai mari ale lui ω ($\omega>1,2$), de formare a unei a 7-a zone

(vii) EA extrados, zona bordului de atac

Variaţia extremelor locale de depresiune pentru cele 6 zone permite alcătuirea diagramei din fig.7.15 din care se poate analiza variaţia în raport cu ω, a extremului global de depresiune al profilului de pe suprafaţa de curent. La creşterea lui ω de exemplu, zona în care apare extremul global de depresiune se deplasează discontinuu pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în ordinea IF $\rightarrow$ EP $\rightarrow$ EF (fig.7.14 cazul $\omega\nearrow$) definind valorile de mutaţie ale lui ω.

(i) $\omega_{IF\rightarrow EP}=\omega_{EP\rightarrow IF}$ la saltul IF $\rightarrow$ EP respectiv EP $\rightarrow$ IF

(ii) $\omega_{EP\rightarrow EF}=\omega_{EF\rightarrow EP}$ la saltul EP $\rightarrow$ EF respectiv EF $\rightarrow$ EP

In fig.7.16 sînt prezentate valorile de mutaţie ale lui ω pentru reţeaua de profile radial-axială amintită împreună cu "deplasarea" punctului nomad de extrem global de depresiune la variaţia lui ω.

Toate aceste consideraţii sînt utile în studiul fenomenului de cavitaţie la reţelele de profile radial-axiale.

In cazul reţelelor de profile radial-axiale de turbină (cum este cazul celei de faţă) mai realistă este situaţia în care mărimile sînt raportate la viteza de la ieşire $w_{(1}^{AV}$ din domeniu, definind cîmpul de viteze

$$\bar{\bar{w}}_{(1}=w_{(1}\, w_{(1}^{AV^{-1}} \tag{7.48}$$

şi cîmpul de presiuni

$$\bar{\bar{p}}_{(1}=\{p_{(1}-p_{(1}^{AV}\}\cdot 2\rho^{-1}\cdot w_{(1}^{AV^{-2}} \tag{7.49}$$

sau, folosind (7.48)

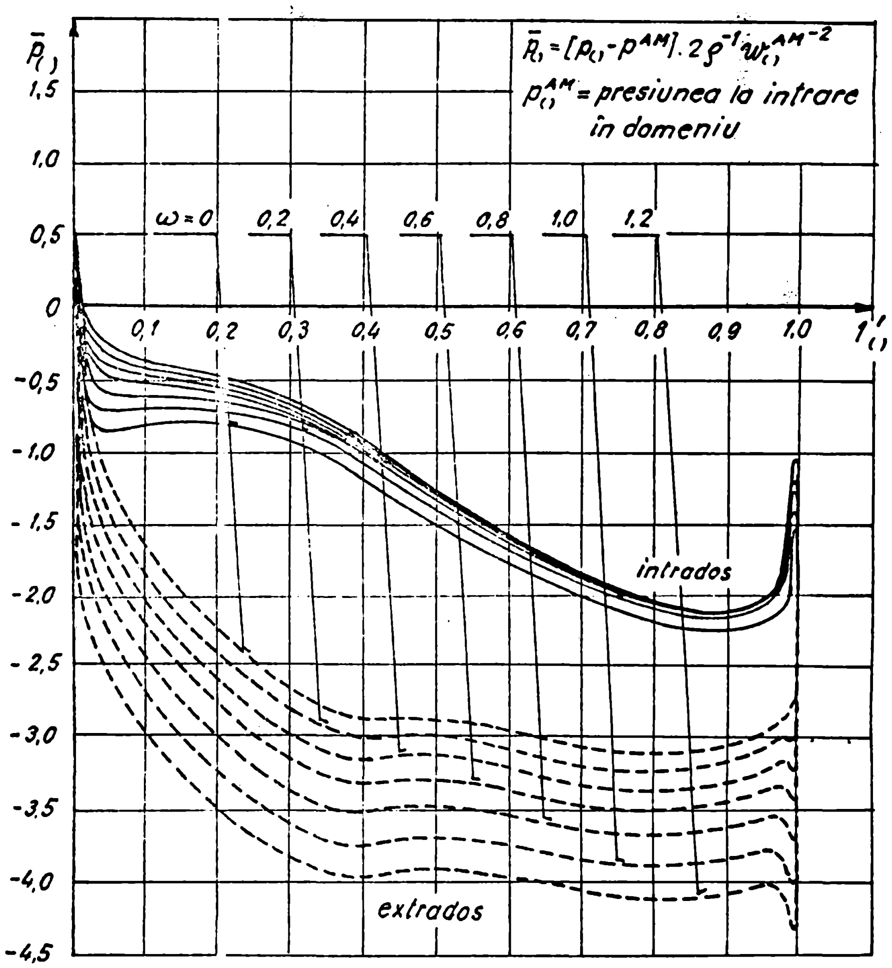


Fig.7.9 Cîmpul de presiuni pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei; $\omega \geq 0$.

$$\bar{\bar{p}}_{()} = 1 - \bar{\bar{w}}_{()}^{2} + \omega^{2} r^{AV^{2}} \cdot w_{()}^{AV^{-2}} \left[(r \cdot r^{AV^{-1}})^{2} - 1 \right] \tag{7.50}$$

adică, analog lui (7.47)

$$\bar{\bar{p}}_{()} = 1 - r_0^{2} r^{-2} \bar{\bar{w}}^{2} + \omega^{2} r^{AV^{2}} \cdot r_0^{-2} \cdot w^{AV^{-2}} \left\{ (r \cdot r^{AV^{-1}})^{2} - 1 \right\} \tag{7.51}$$

Diagrama din fig.7.15, împreună cu distribuţiile de presiuni din fig.7.9 şi 7.11 permit o analiză a sensibilităţii la cavitaţie a reţelei de profile pentru o valoare constantă a lui ω. Caracteristica exterioară de cavitaţie este practic o dreaptă paralelă cu axa absciselor. Mărirea depresiunii din zona rotorului este echivalentă cu o translaţie a curbei caracteristice exterioare

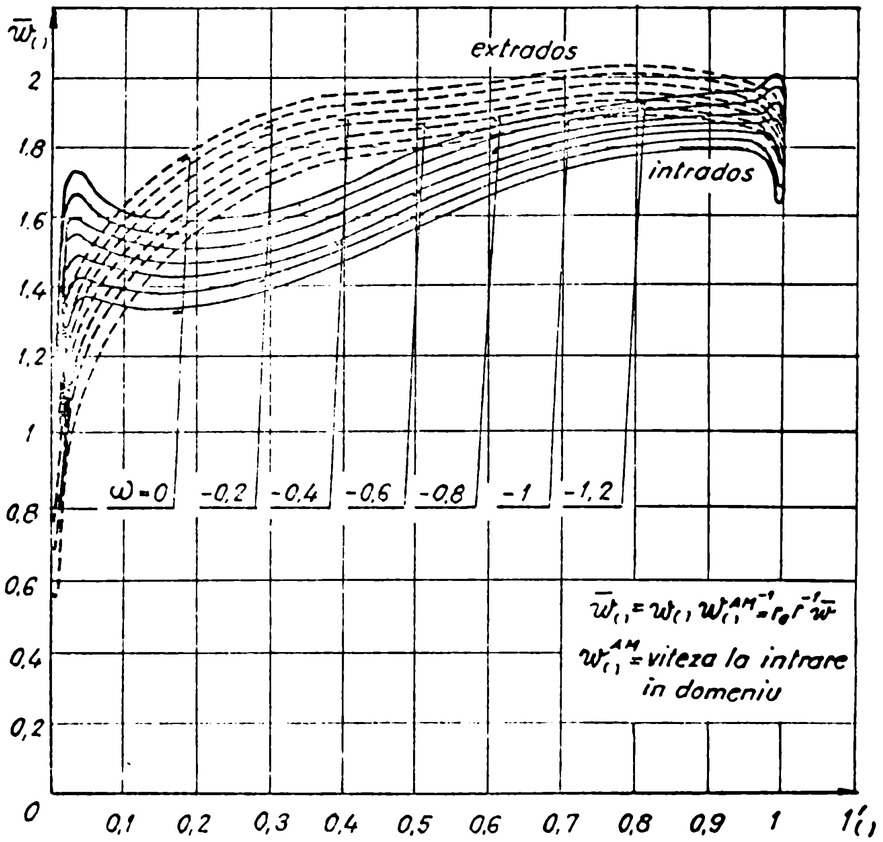


Fig.7.10 Cîmpul de viteze pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei, $\omega \leq 0$.

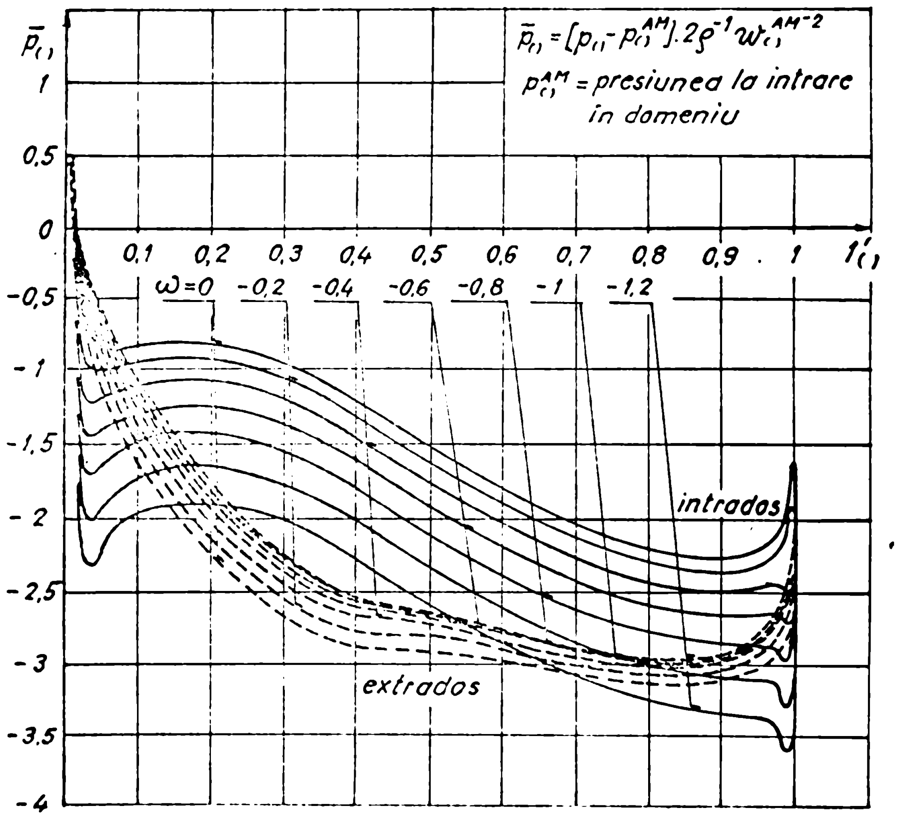


Fig.7.11 Cîmpul de presiuni pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei, $\omega \leq 0$.

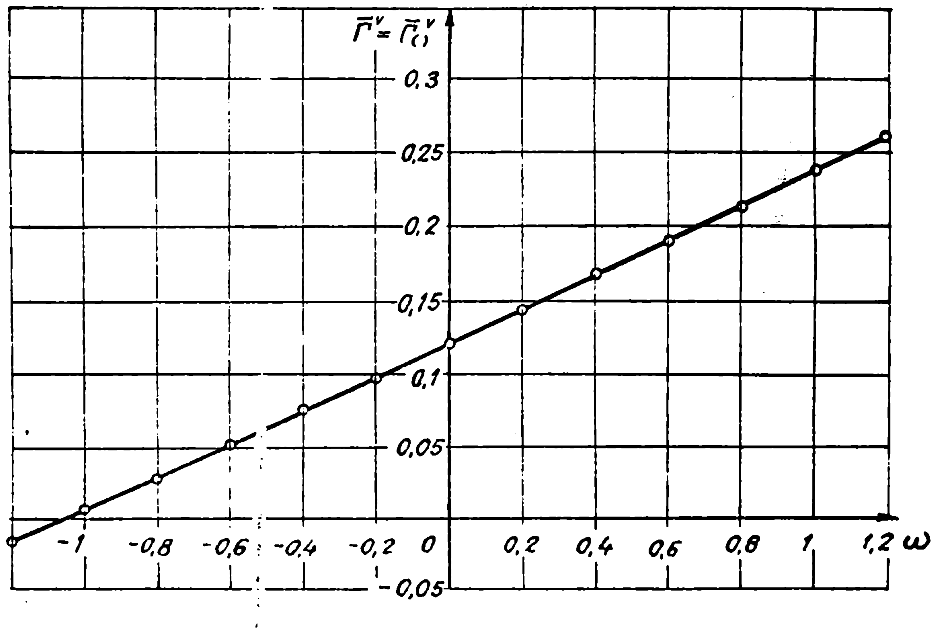


Fig.7.12 Variaţia circulaţiei $\bar{\Gamma}^v = \bar{\Gamma}^v_{()}$ cu ω.

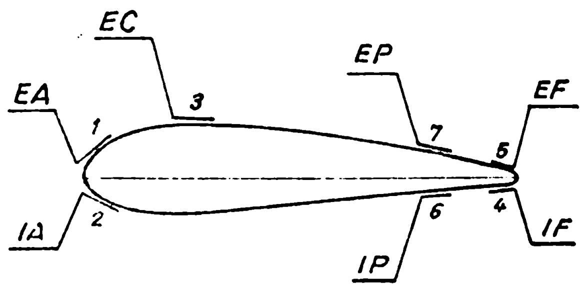


Fig.7.13 Zonele de extrem local de depresiune

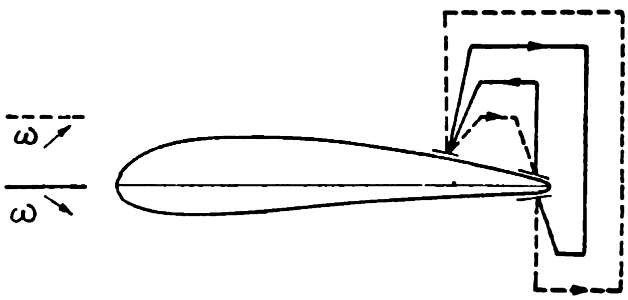


Fig.7.14 "Deplasarea" zonei nomade în care apare extremul global de depresiune la variaţia lui ω .

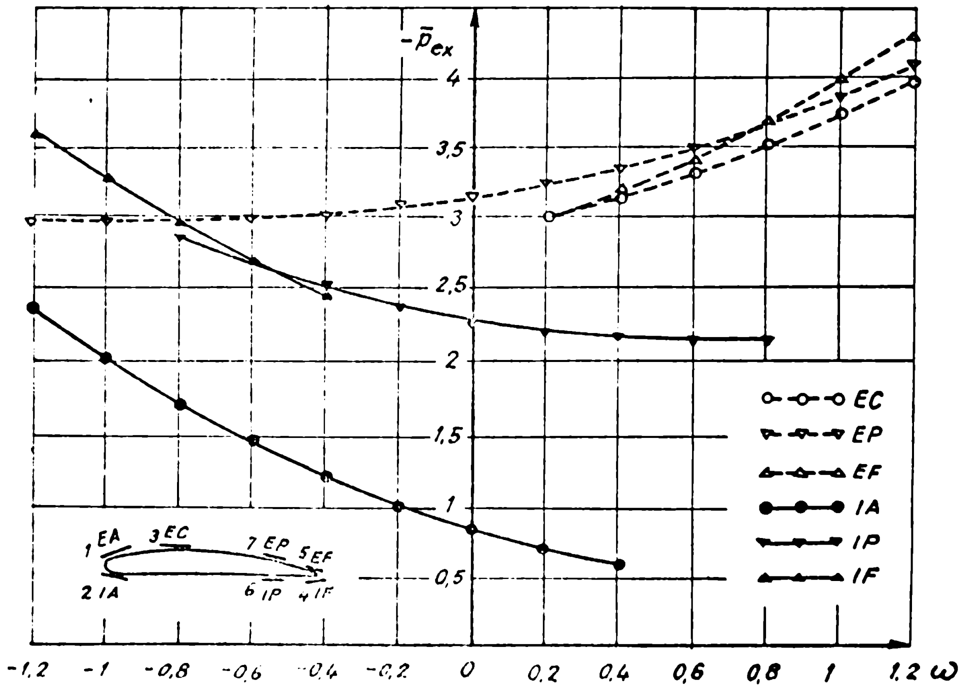


Fig.7.15 Variaţia extremelor locale de depresiune pentru cele 6 zone în raport cu ω.

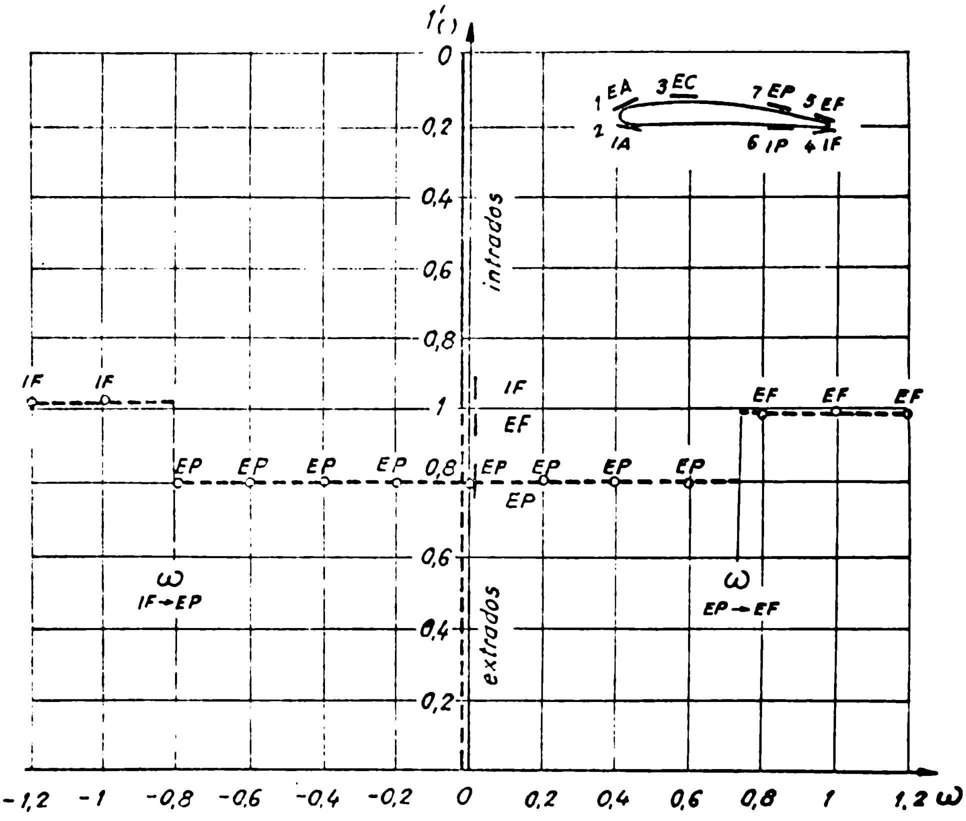


Fig.7.16 "Deplasarea" punctului nomad (abscisa) de extrem global de depresiune la variaţia lui ω. Valorile de mutaţie ale lui ω.

de cavitaţie de la valorile negative ale lui $\bar{p}_{(\iota)}$ (sau $\bar{\bar{p}}_{(\iota)}$) spre origine în lungul axei ordonatelor (translaţie în sus în diagramele din fig.7.9 şi 7.11 şi translaţie în jos în diagrama din fig. 7.15). De exemplu pentru $\omega = -1,2$ (vezi fig.7.11 şi 7.15) cavitaţia apare în zona IF (intrados fugă). Cu mărirea depresiunii cavitaţia se extinde pe suprafaţa intrados a profilului dinspre bordul de fugă spre partea centrală iar la un moment dat se activează zona EP (extrados posterior) şi mai tîrziu zona IA (intrados atac)- Pentru $\omega = o$ aceleaşi diagrame arată că incipienţa cavitaţiei se realizează în zona EP. Mărirea depresiunii determină extinderea cavitaţiei pe aproape toată suprafaţa extrados şi foarte tîrziu este activată zona IP (intrados posterior). Pentru $\omega = 1,2$ (vezi diagramele din fig.7.9 şi 7.15) cavitaţia apare în zona EF (extrados fugă)şi imediat sînt activate EP şi EC (extrados central). Mărirea depresiunii determină extinderea cavitaţiei pe aproape întreaga suprafaţă a extradosului fără să fie afectată curgerea în lungul suprafeţei intrados.

7.9.5.Modificarea condiţiilor la limită

La 7.9.3 au fost prezentate rezultatele în cazul curgerii în jurul reţelei de profile de la 6.1o păstrînd neschimbate condiţiile la limită de la intrare şi ieşire la variaţii parametrice ale lui ω . Cu aplicaţii la turbinele Francis,în exploatare apare necesară comportarea reţelei radial axiale la diferite regimuri de funcţionare a turbinei sau echivalent la condiţii la limită modificate pentru reţeaua radial-axială.

In cele ce urmează sînt date rezultatele privind mişcarea lichidului ideal în jurul reţelei radial-axiale modificînd condiţiile de la intrare în ipoteza conservării componentei tangenţiale a vitezei absolute de la intrare în domeniu $v_{(2)}^{AM}$, la variaţii parametrice a componentei meridionale $v_{(1)}^{AM}$ (situaţie ce apare frecvent la reglarea turbinelor Francis) şi a unghiului β^{AV} . Cum $u_{(\iota)}^{AM}$ este acelaşi conservarea lui $v_{(2)}^{AM}$ implică şi conservarea lui $w_{(2)}^{AM}$ Drept nominală a fost considerată situaţia de la 7.9.3 pentru $\omega = o,4$ iar pentru $v_{(1)}^{AM}$ cazurile $v_{(1)}^{AM} \cdot v_{(1)m}^{AM^{-1}} = o,5$; o,75 ; 1 ; 1,25 şi 1,5. Cum $v_{(\iota)}^{AM} = v_{\iota}^{AM}$ şi (6.2o) este conformă triunghiurile de viteză de la intrarea în domeniul de pe suprafaţa de curent se transpun neschimbate în domeniul din planul imagine iar $v_1^{AV} = v_1^{AM} \cdot k^{AV^{-1}}$ permite determinarea şi a triunghiurilor de viteze de la ieşirea din domeniul din planul imagine.

In fig.7.17 sînt prezentate triunghiurile de viteze de la intrare respectiv ieşire din domeniul din planul imagine pentru

...azul nominal ($v_1^{AM} \cdot v_{1n}^{AM^{-1}} = 1$) şi pentru cazurile extreme o,5 şi ,5 iar în fig.7.18 unghiurile cinematice tipice ale triunghiurilor de viteze.

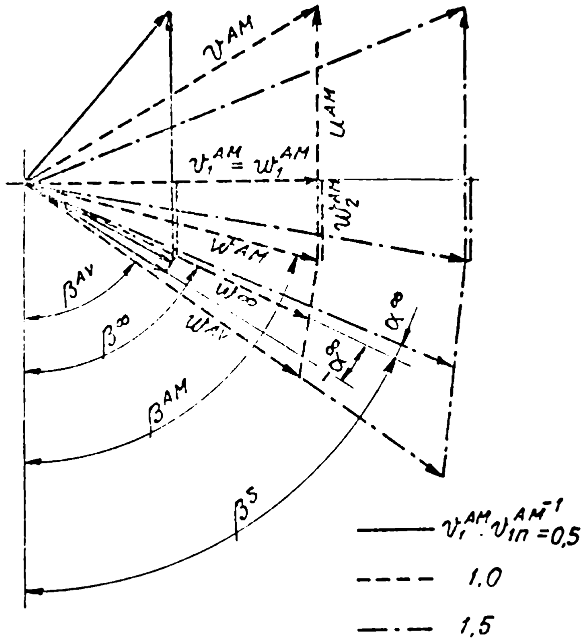


Fig.7.17 Triunghirule de viteze de la intrare respectiv ieşire din domeniul din planul imagine

$v_1^{AM} \cdot v_{1n}^{AM^{-1}}$	β^{AM}	β^{AV}	β^∞	α^∞
0,5	61°48'48"	54°	57°51'24"	-6°25'06"
0,75	70°20'24"	54°	61°47'35"	-2°28'45"
1	75°	54°	63°52'44"	-0°23'36"
1,25	77°54'04"	54°	65°10'03"	0°53'33"
1,5	79°52'19"	54°	66°02'31"	1°46'01"

Fig.7.18 Unghiurile cinematice tipice de la intrare respectiv ieşire din domeniul din planul imagine la valori parametrice ale lui $v_1^{AM} \cdot v_{1n}^{AM^{-1}}$.

In fig.7.19 este dată variația vitezei fizice $\overline{w}_{(1)}$ pe frontiera profilului de pe suprafața de curent de revoluție în lungul loxodromei în funcție de raportul $v_1^{AM} \cdot v_{1n}^{AM^{-1}}$. In fig.7.2o și 7.21 este prezentată variația presiunii $\overline{p}_{(1)}$ respectiv $\overline{\overline{p}}_{(1)}$ pe frontiera profilului, de pe suprafața de curent în lungul loxodromei în raport cu $v_1^{AM} \cdot v_{1n}^{AM^{-1}}$.

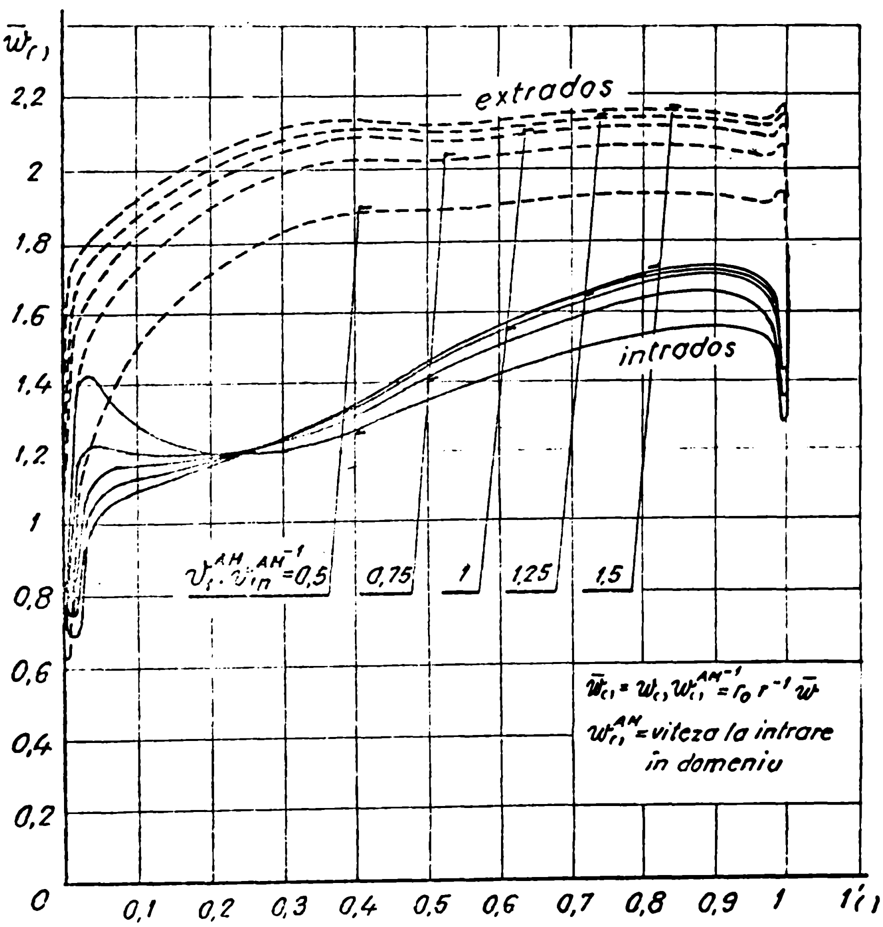


Fig.7.19 Cîmpul de viteze pe frontiera profilului de pe suprafața de curent în lungul loxodromei la valori diferite ale lui $v_1^{AM} \cdot v_{1n}^{AM^{-1}}$.

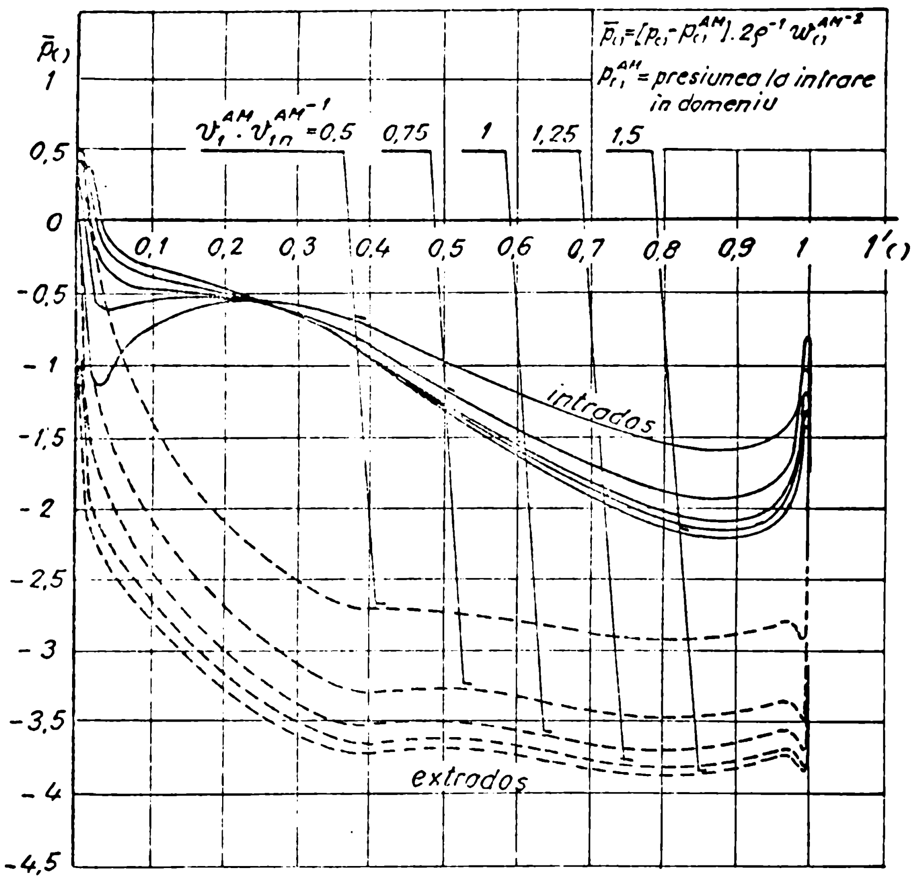


Fig.7.2o Cîmpul de presiuni $\bar{p}_{()}$ pe frontiera profilului de pe suprafața de curent în lungul loxodromei la valori diferite ale lui $v_1^{AM}\cdot v_{1n}^{AM^{-1}}$.

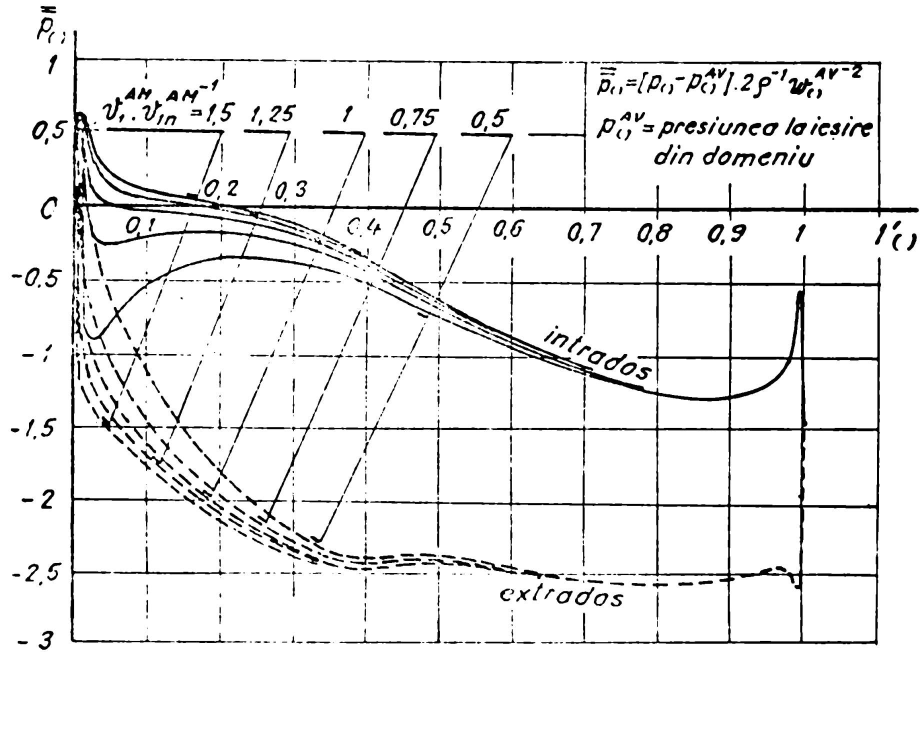


Fig.7.21 Cîmpul de presiuni $\bar{\bar{p}}_{()}$ pe frontiera profilului de pe suprafața de curent în lungul loxodromei la valori diferite ale lui $v_1^{AM}\cdot v_{1n}^{AM^{-1}}$.

In fig.7.19 este dată variaţia vitezei fizice $\overline{w}_{()}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent de revoluţie în lungul loxodromei în funcţie de raportul $\vartheta_1^{AM} \cdot \vartheta_{1n}^{AM^{-1}}$. In fig.7.2o şi 7.21 este prezentată variaţia presiunii $\overline{p}_{()}$ respectiv $\overline{\overline{p}}_{()}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei în raport cu $\vartheta_1^{AM} \cdot \vartheta_{1n}^{AM^{-1}}$.

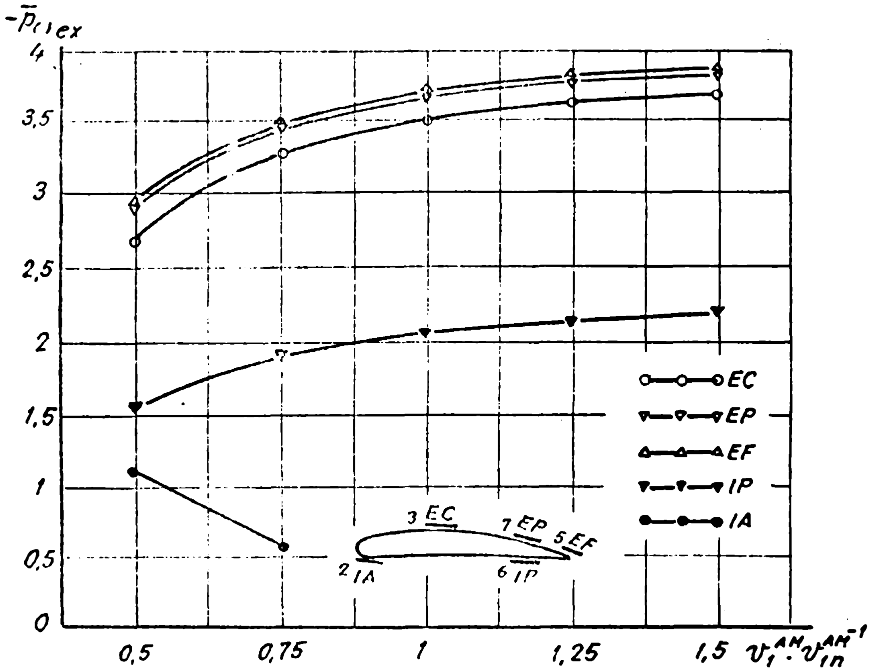


Fig.7.22 Variaţia extremelor locale de depresiune $\overline{p}_{()ex}$. pentru cele 5 zone cu raportul $\vartheta_1^{AM} \cdot \vartheta_{1n}^{AM^{-1}}$

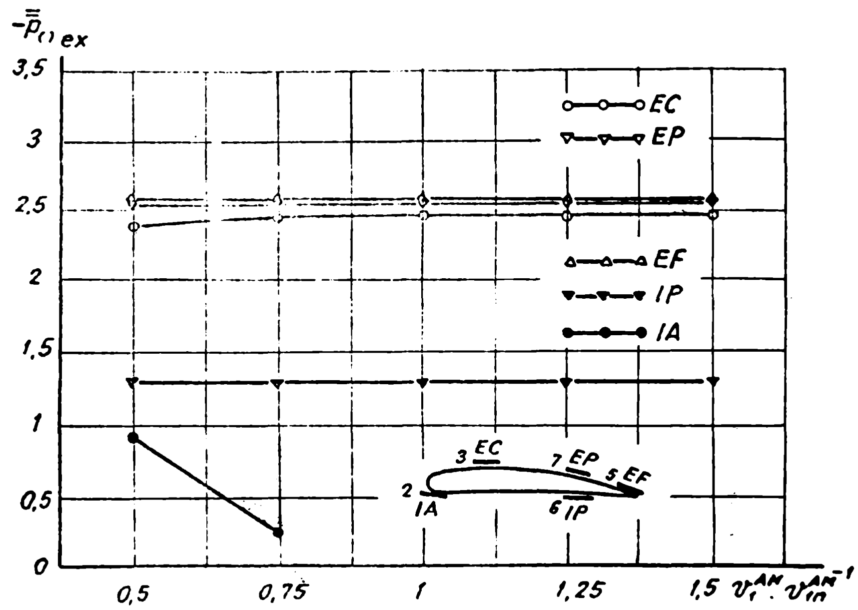


Fig.7.23 Variaţia extremelor locale de depresiune $\overline{\overline{p}}_{()ex}$ pentru cele 5 zone cu raportul $\vartheta_1^{AM} \cdot \vartheta_{1n}^{AM^{-1}}$

Analog cu cele de la 7.9.4 şi în acest caz apar 5 zone de extrem local de depresiune (nu mai apare zona IF). Diagramele din fig.7.22 şi fig.7.23 (analoage celei din fig.7.15) ne arată variaţia extremelor locale de depresiune $\overline{p}_{\omega ex}$ respectiv $\overline{\overline{p}}_{\omega ex}$ pentru cele 5 zone în raport cu $\nu_1^{AM} : \nu_{1n}^{AM^{-1}}$

In fig.7.24 este dată variaţia extremelor locale de depresiune $\overline{p}_{\omega ex}$ pentru cele 5 zone în raport cu unghiul cinematic α^{∞} în planul imagine (corespunde bijectiv raportului $\nu_1^{AM} : \nu_{1n}^{AM^{-1}}$).

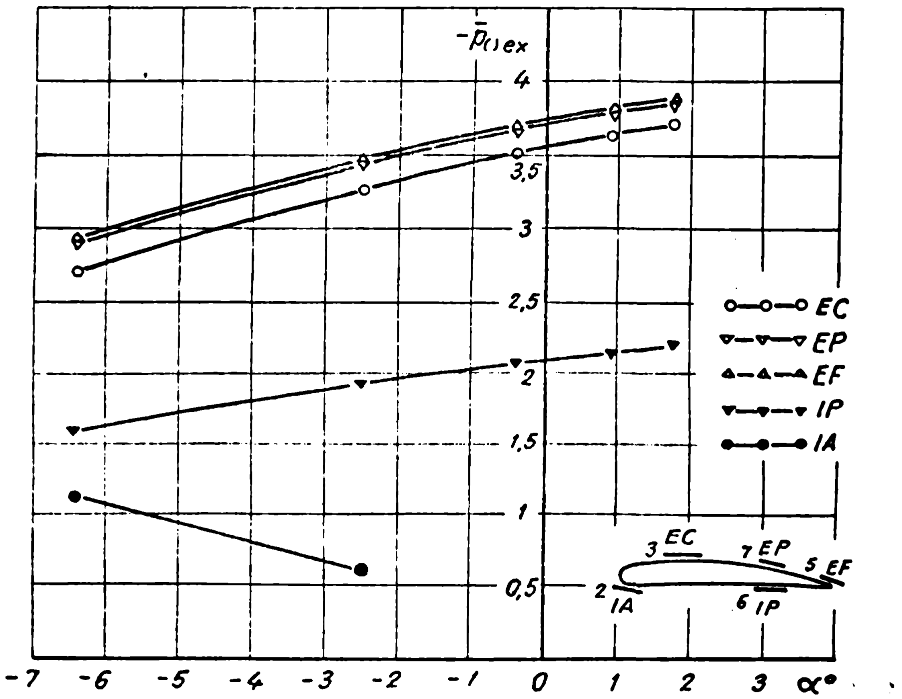


Fig.7.24 Variaţia extremelor locale de depresiune pentru cele 5 zone în raport cu unghiul cinematic

7-9.10 Comparaţii cu alte metode

Pentru a avea o imagine a preciziei şi acurateţei prezentei metode, ea a fost aplicată reţelei radial-axiale mobile dispusă pe meridianul S2 al rotorului Francis încercat de Bär [17], reţea pentru care au fost efectuate şi cîteva determinări teoretice. Astfel au fost folosite

(i) O metodă bidimensională ce are la bază o ecuaţie cu derivate parţiale asemănătoare cu (7.18), ce apare în [142], [169], [177] care, prin metoda relaxării a fost soluţionată aproximativ într-un procedeu dat de Vötter [167]. Cu ajutorul ei au fost determinate liniile de curent ale mişcării în jurul reţelei din planul imagine precum şi cîmpul de viteze fizice pe frontiera profilelor de pe suprafaţa de curent.

(ii) O metodă tridimensională ce are la bază principiul minimei acţiuni şi un procedeu numeric de calcul datorat lui Strscheletzky [156] şi Vötter [167]. Cu ajutorul ei au fost determinate cîmpul de viteze fizice pe frontiera profilelor de pe suprafaţa de curent.

Pentru soluţionarea acestei probleme programul MISSROT a suferit uşoare modificări şi adăugiri (faţă de cel prezentat la 7.9.2) datorate mai ales faptului că, pentru a realiza comparaţia pentru reţeaua din planul imagine, originea sistemului special de coordonate (vezi fig.7.1) a fost luată pe meridianul $S2$ în dreptul lui n^A (în loc de n^M). De asemenea a fost modificată structura funcţiei f dată de (6.21) fiindcă pentru aproximarea numerică a meridianului $S2$ a fost utilizat, zonal, un polinom de grad mai mare.

In fig.7.25 sînt prezentate grosimea relativă a stratului de lichid precum şi liniile de curent în planul imagine determinate prin M.E.F. şi metoda bidimensională de la 7.9.1o (i).

In fig.7.26 şi 7.27 sînt date respectiv cîmpul de viteze $\overline{w}_{()}$ şi presiuni $\overline{p}_{()}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei iar în fig.7.28 şi 7.29 cîmpul de viteze $\overline{\overline{w}}_{()}$ şi presiuni $\overline{\overline{p}}_{()}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei.

In fig.7.3o şi 7.31 sînt prezentate respectiv cîmpul de viteze adimensionale $w_{()}\cdot(2gH)^{-1/2}$ respectiv presiuni adimensionale $(p_{()}-p_{()}^{AM})(\rho g H)^{-1}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul meridianului (partea de meridian ce corespunde proiecţiei cilindrice a loxodromei).

In fig.7.32 este prezentat comparativ cîmpul de viteze adimensionale $w_{()}\cdot(2gH)^{-1/2}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent determinat prin M.E.F., prin cele două metode teoretice (bidimensională conform cu 7.9.1o (i) şi tridimensională conform cu 7.9.1o (ii) şi experimental (de Bär [17]). Analizînd comparativ, curbele din fig.7.32 au putut fi constatate următoarele :

(i) metoda tridimensională (a cărei folosinţă presupune cunoaşterea unor rezultate obţinute cu ajutorul metodei bidimensionale) permite determinarea cîmpului de viteze, în bune condiţiuni doar în zona centrală a profilului. In zona bordului de atac şi zona bordului de fugă rezultatele sînt departe de realitate.

(ii) metoda bidimensională urmăreşte destul de bine curba experimentală. Si aici rezultatele sînt mai puţin precise în zona

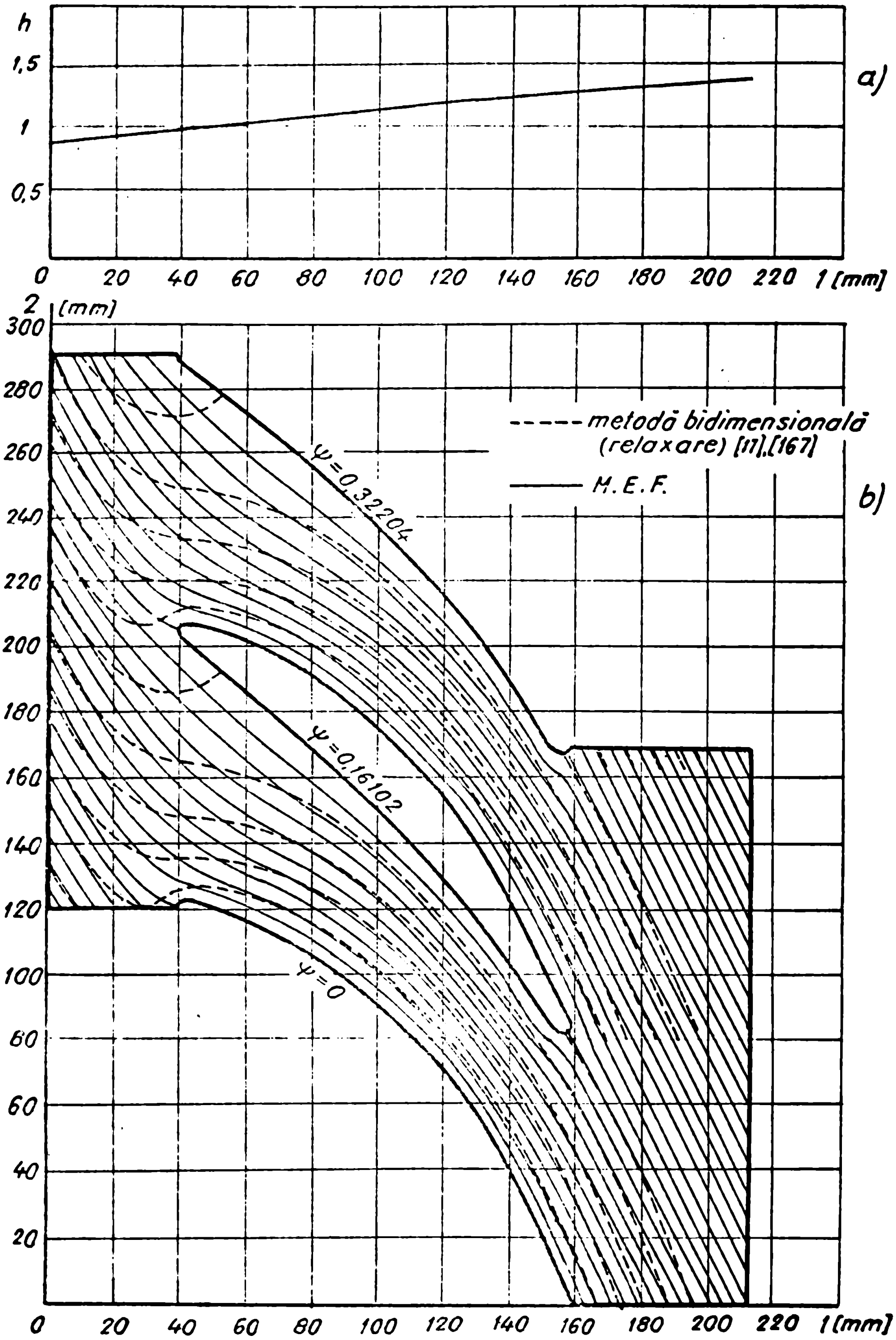


Fig.7.25 Grosimea relativă a stratului de lichid (a). Liniile de curent în planul imagine (b)

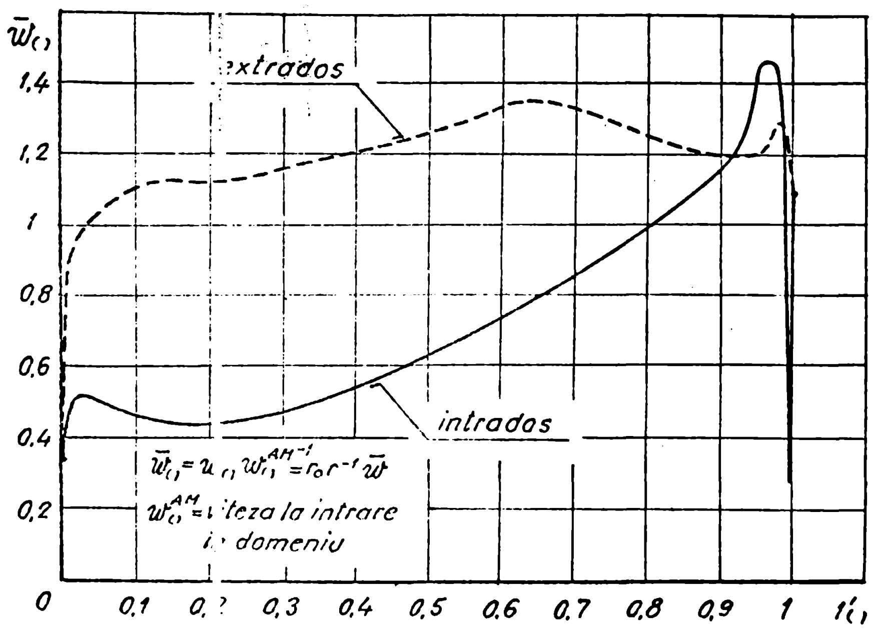


Fig.7.26 Cîmpul de viteze $\overline{w}_{(\,)}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei

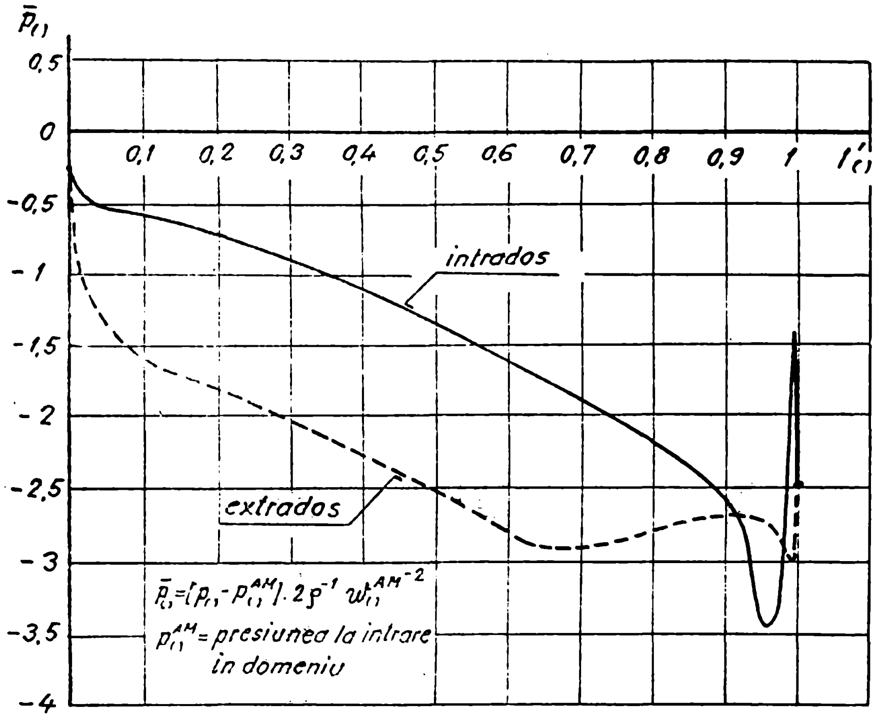


Fig.7.27 Cîmpul de presiuni $\overline{p}_{(\,)}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei

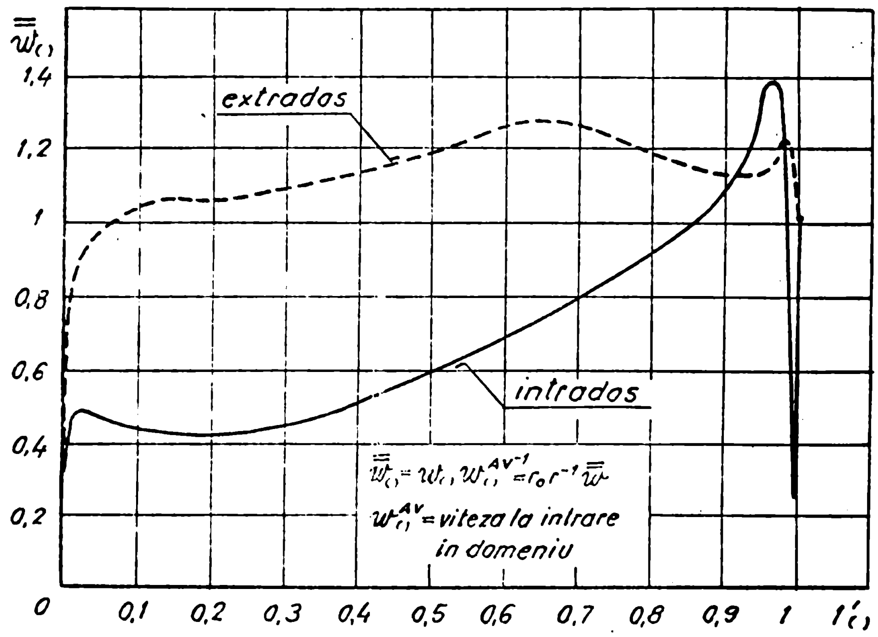


Fig.7.28 Cîmpul de viteze $\overline{\overline{w}}_{()}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei

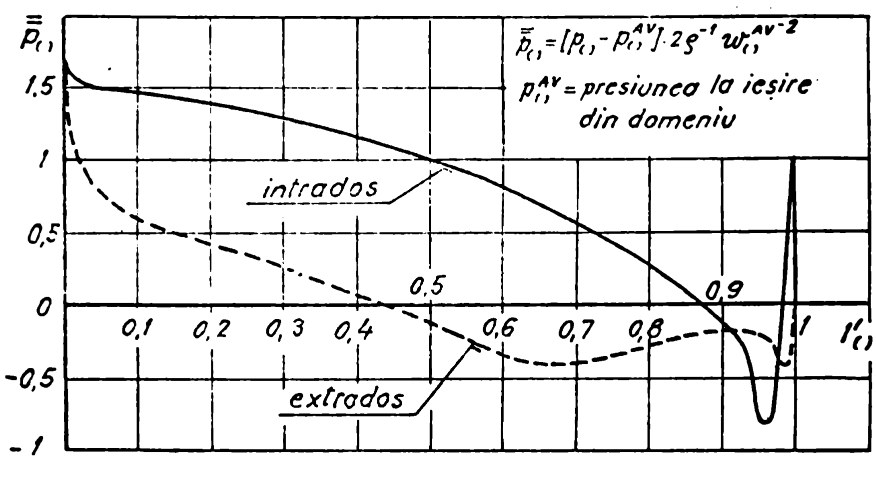


Fig.7.29 Cîmpul de presiuni $\overline{\overline{p}}_{()}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul loxodromei

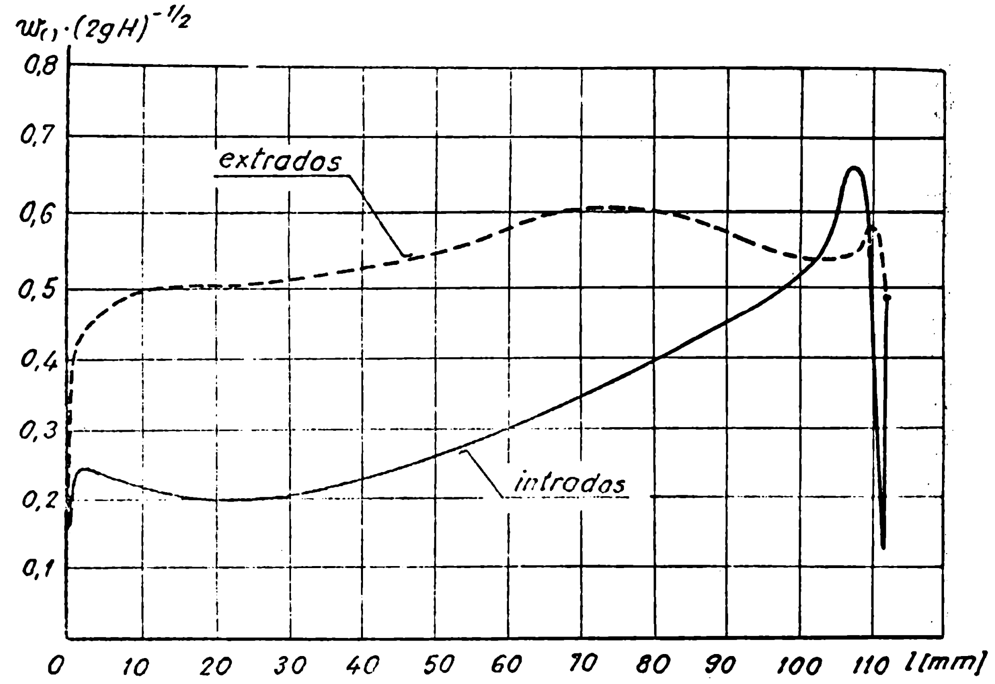


Fig.7.30 Cîmpul de viteze adimensionale $w_{()} \cdot (2gH)^{-1/2}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul meridianului

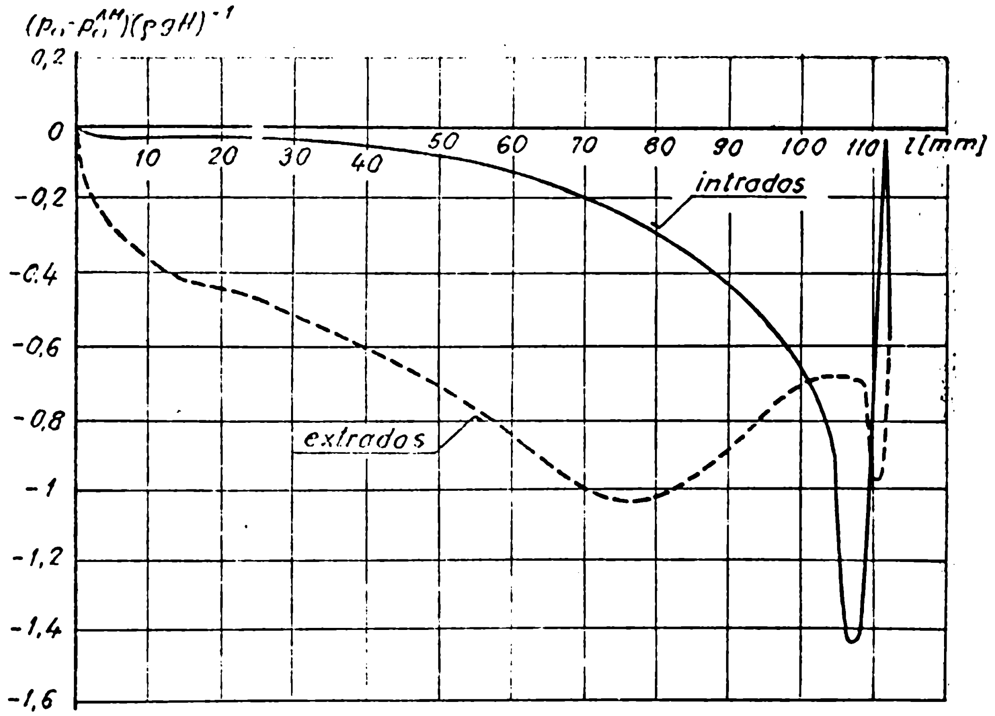


Fig.7.31 Cîmpul de presiuni adimensionale $(p_{()} - p_{()}^{AM}) \cdot (\rho gH)^{-1}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul meridianului.

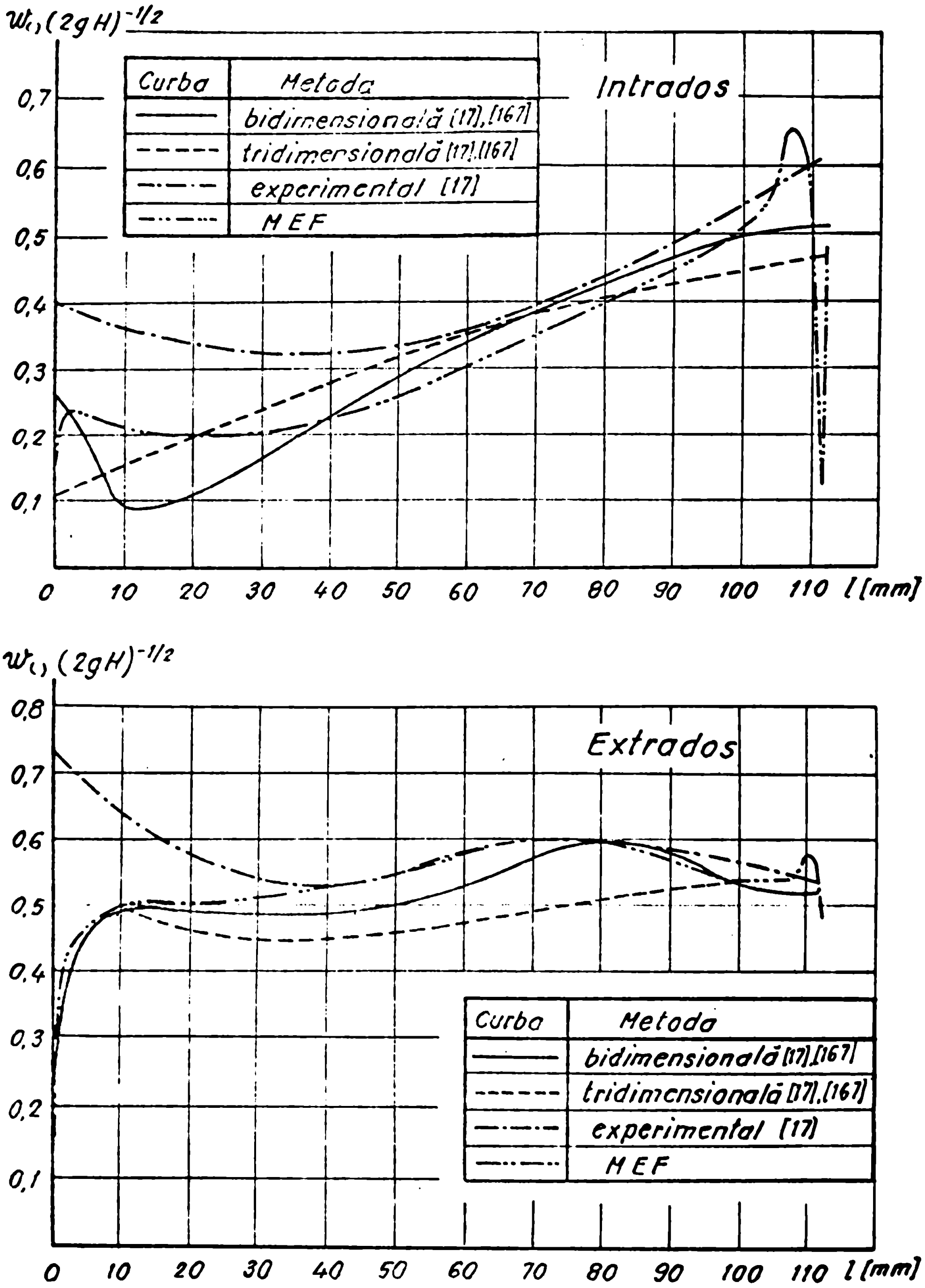


Fig.7.32 Cîmpul de viteze adimensionale $w_{\nu}(2gH)^{-1/2}$ pe frontiera profilului de pe suprafaţa de curent în lungul meridianului.Comparaţii cu alte metode teoretice şi experimentale.

bordului de fugă (curbură mare). De asemenea prezintă un minim exagerat pe intrados în dreptul lui l = 12 mm(conform cu liniile de curent din fig.8.24 acest minim ar trebui să fie nul).

(iii) Metoda elementului finit a dat rezultatele cele mai apropiate de cele obţinute experimental şi ca valori şi ca alură a curbelor, deşi pentru partea intrados rezultatele obţinute experimental sînt mai mari.

(iv) Datorită discretizării fine a domeniului în zonele în care frontiera are curbură mare (bordul de atac dar mai ales cel de fugă) M.E.F. permite obţinerea cîmpului de viteze şi în această zonă cu mare precizie.

(v) Curbele experimentale obţinute de Bär diferă mult de toate curbele teoretice pentru partea anterioară a profilului (cca. 30 % pe extrados şi 40 % pe intrados).

CAPITOLUL 8

CONCLUZII. CONTRIBUTII PERSONALE. PERSPECTIVE

Pe baza rezultatelor obţinute la rezolvarea problemei di-ecte a reţelelor de profile radial-axiale, tratată în etape, cu jutorul metodei elementului finit, din relaţiile teoretice stabi-ite şi mai ales din multiplele şi variatele exemple numerice ru-ate, cu ajutorul programelor de calcul,au putut fi conturate, în adrul hidrodinamicii reţelelor de profile radial-axiale următoa-ele.

8.1 Concluzii

8.1.1 In cadrul hidrodinamicii reţelelor de profile radial-xiale, suprafeţele de curent, pe care sînt dispuse aceste reţele, onstituie punctul de plecare. Aceasta justifică efortul depus pen-ru a găsi o metodă operativă şi precisă pentru determinarea aces-or suprafeţe de curent. Cu ajutorul M.E.F. problema a fost rezol-ată total în cazul cel mai general (frontierele laterale,coroana i inelul, fiind impuse). Pentru determinarea meridianelor suprafe-elor de curgere (presupuse de revoluţie), în cadrul M.E.F., a ost folosită metoda variabilelor auxiliare; funcţia de curent ψ i potenţialul vitezei φ . Tratările au fost independente,esen-ială fiind problema în ψ (ψ = constant fiind ecuaţia liniilor e curent în plan axial) iar problema în φ ajutătoare. Pentru ezvoltările ulterioare, importanţă majoră are determinarea cîmpu-ui de viteze în lungul liniilor de curent din planul axial.

8.1.2 In forma prezentată, determinarea liniilor de curent n plan axial s-a făcut într-un domeniu dat. Condiţiile de la in-rare în domeniu au corespuns unui cîmp de viteze uniform (condiţii limită esenţiale) iar cele de la ieşire unui cîmp de viteze pa-alel cu axa rotorului (condiţii la limită naturale). Pentru alte azuri concrete modificarea condiţiilor la limită de intrare şi eşire poate fi operată fără dificultate. Aceste condiţii la limi-, privind intrarea respectiv ieşirea din domeniul de analiză, use la distanţă finită sînt mai aproape de realitate decît cele simptotice, în cadrul zonelor tipice ale unei maşini hidraulice. rice modificări în proprietăţile mişcării fluidului din amontele au avalul zonei în studiu pot fi implementate imediat în condi-iile la limită.

8.1.3 Aparatele directoare, ce sînt dispuse în amonte de rotor la turbinele Francis, nu pot fi modelate, decît aproximativ, cu rețele de profile pur radiale (vezi fig.3.9) ci cu rețele radial-axiale. De aceea trebuiesc revăzute considerațiile privind calculul paletelor cilindrice ale aparatelor directoare în context cu condiții la limită puse la distanță finită.

8.1.4 In studiul mișcării plane în jurul rețelelor de profile axiale a fost folosită aceeași metodă a variabilelor auxiliare ψ și φ în cadrul M.E.F. Alegerea domeniului de analiză și impunerea condițiilor la limită de intrare respectiv ieșire la t/2 în amonte de frontul de atac al rețelei respectiv în aval de cel de fugă s-a dovedit corespunzătoare (vezi fig.5.9 și tabelul sintetic de la 5.8.4). Mișcarea în jurul rețelei axiale a fost rezolvată cu ajutorul formulării în ψ, în cadrul căreia a fost conceput și folosit un procedeu iterativ pentru a fi îndeplinită condiția de periodicitate, care s-a dovedit a fi corespunzător și eficace. Rezolvarea problemei în ψ a permis rezolvarea în φ cu φ multiformă (saltul ei fiind circulația, vezi fig.5.1o). Problema mișcării în jurul rețelelor de profile axiale a fost rezolvată în situația cunoașterii unui parametru cinematic al mișcării (circulația sau, echivalent, condițiile cinematice de la intrare și ieșire).

8.1.5 A fost conceput și folosit un procedeu numeric de determinare a liniilor de curent și a celor echipotențiale precum și a cîmpului de viteze și presiuni în domeniul de analiză considerat. O atenție deosebită a fost acordată cîmpului de viteze și presiuni pe frontiera profilului care a permis calculul parametrilor integrali ai profilului cu mare precizie (vezi tabelul de la 5.8.4).

8.1.6 Pentru rezolvarea problemei directe în jurul rețelelor de profile radial-axiale fixe și mobile, în aceeași ipoteză a cunoașterii deviației curentului, a fost folosită transformarea conformă a rețelei radial-axiale de pe suprafața de curent de revoluție pe un plan asociat cu păstrarea grosimii variabile a stratului de fluid dintre două suprafețe de curent vecine aflate la distanță elementară, rezultînd o rețea de profile de anvergură variabilă. Transformarea diferențiabilă (6.2o) (conformă) a definit bijectiv legătura dintre domeniul de pe suprafața de curent și cel din planul imagine, precum și legătura dintre mărimile cinematice ale mișcării fizice de pe suprafață și cele ale mișcării în planul imagine. Condiţiile de intrare respectiv ieşire pentru mişcarea fizică de pe suprafaţă au fost considerate la $t/2$ pe meridian, în amonte de frontul de atac respectiv în avalul bordului de fugă, unde t reprezintă pasul reţelei din dreptul bordurilor de atac ale profilelor. In planul imagine această condiţie nu se mai păstrează, adîncimea domeniului rezultînd din transformarea (8.2o).

8.1.7 Cu ajutorul M.E.F. şi a variabilelor auxiliare ψ şi φ a fost abordată problema în planul imagine. Au fost găsite estimări numerice pentru funcţia de grosime h şi pentru o serie de parametrii geometrici de trecere de la suprafaţă la planul imagine. Pentru rezolvarea mişcării s-a păstrat în mare tehnica (în cadrul M.E.F.) de la reţelele axiale clasice. Cum imaginea conformă a corzii profilului din planul imagine este o loxodromă pe suprafaţa de revoluţie, drept reprezentativă pentru lungimea profilului de pe suprafaţă a fost considerată loxodroma unic determinată de poziţiile de pe suprafaţă ale bordurilor de atac şi fugă ale profilelor. Toate reprezentările privind variaţia unor mărimi pe frontiera profilelor de pe suprafaţă au fost considerate în lungul acestei loxodrome.

8.1.8 Comutarea problemei pentru reţelele radial-axiale, în planul imagine şi conservarea circulaţiei ($\Gamma_\omega^v = \Gamma^v$) permite ca studiul să fie redus la reţeaua din acest plan imagine. Poate deveni acum abordabilă şi problema inversă a reţelelor urmînd ca rezultatele să fie verificate pe suprafaţă.

8.1.9 In exploatarea turbomaşinilor, pentru obţinerea regimului optim de funcţionare, o importanţă majoră o are reglarea acestora. Pentru reţelele de profile ale organelor paletate aceasta înseamnă modificarea condiţiilor la limită. In acest context a fost analizată mişcarea în jurul reţelei de profile radial-axiale pentru diferite condiţii la limită (compatibile cu posibilităţile de reglare din maşină) (vezi fig.7.19 ; 7.2o şi 7.21) şi mai ales problema extremelor locale şi globale de depresiune de pe frontiera profilelor (vezi fig.7.22 ; 7.23 şi 7.24).

8.1.1o Rezultatele obţinute în cadrul prezentei teze, în rezolvarea problemei directe a reţelelor de profile radial-axiale cu deviaţie dată, confirmă şi justifică eforturile depuse pentru stabilirea unei metode, întregită cu programe de calcul care dă rezolvarea complexă a problemei. Folosirea M.E.F. s-a dovedit eficace conferind metodei de analiză operativitate, acurateţă şi precizie. Un dezavantaj al metodei constă în faptul că, în esenţă aplicarea M.E.F. făcîndu-se pentru rezolvarea unei probleme la limită interioare, este necesară cunoaşterea condiţiilor la limită la intrare şi ieşire, respectiv a circulaţiei. La celelalte metode teoretice, asigurarea mişcării cu circulaţie, se face impunînd o condiţie suplimentară la bordul de fugă (condiţia Kutta-Jukovski).

8.2 Contribuţii personale

La realizarea prezentei teze drept contribuţii originale mai importante sînt următoarele :

8.2.1 La determinarea cîmpului hidrodinamic prin rotoarele turbinelor Francis a fost folosită M.E.F., pentru integrarea numerică a ecuaţiilor lui Stokes pentru funcţiile ψ şi φ utilizînd metoda lui Galerkin şi discretizarea domeniului în elemente finite izoparametrice. A fost conceput şi folosit un procedeu numeric pentru determinarea discretă a curbelor ψ = constant şi φ = constant în plan axial şi pentru cîmpul de viteze şi presiuni în special în lungul liniilor ψ = constant şi φ = constant. Pentru realizarea complexă a problemei au fost realizate programele PSIELF şi FIELFIN.

8.2.2 La determinarea mişcării potenţiale plane în jurul reţelelor de profile axiale a fost folosită M.E.F. pentru integrarea numerică a ecuaţiei lui Laplace pentru funcţiile ψ şi φ utilizînd aceeaşi tehnică dată de metoda lui Galerkin şi efectuînd discretizarea tot în elemente finite izoparametrice. Au fost analizate condiţiile la limită pentru ambele formulări şi a fost conceput un procedeu iterativ de calcul pentru îndeplinirea condiţiei de periodicitate. Rezolvarea problemei a fost obţinută prin formularea în ψ iar pe baza ei a fost rezolvată şi problema în φ localizînd saltul în avalul bordului de fugă. A rezultat astfel complet cîmpul hidrodinamic. A fost conceput şi folosit un procedeu numeric de determinare a liniilor de curent şi a celor echipotenţiale precum şi a cîmpului de viteze şi presiuni pe frontiera profilelor. Pentru rezolvarea complexă a acestei probleme a fost realizat programul MISPLANR.

8.2.3 Pentru studiul mişcării potenţiale în jurul reţelelor radial-axiale, fixe şi mobile, a fost folosită transformarea conformă a domeniului de analiză de pe suprafaţa de curent într-un plan, cu păstrarea grosimii stratului de fluid dintre două suprafeţe de curent vecine. In ipoteza mişcării spaţiale potenţiale (pentru reţelele fixe) şi respectiv în ipoteza mişcării spaţiale absolute potenţiale (pentru reţele mobile), ecuaţiile cu derivate parţiale în ψ şi φ (sau numai ψ pentru reţele

..ile), ce dau mişcarea fizică pe suprafaţă, au fost transpune în ..lanul imagine. Problema a trecut astfel în acest plan iar rezolva..a ei a urmărit aceeaşi cale ca şi în cele ce preced (utilizînd ..toda lui Galerkin în cadrul M.E.F. şi discretizarea în elemente ..inite izoparametrice). Au fost analizate condiţiile la limită pe ..uprafaţă şi trecerea lor în planul imagine.

8.2.4 A fost conceput şi folosit un procedeu numeric de de..rminare a funcţiei de grosime $h(\varphi^1)$ şi trecerea ei în $h(x_1)$ ..n planul imagine. Pentru reţelele radial-axiale fixe rezolvarea ..roblemei a fost obţinută cu formularea în ψ din care a rezul..t şi rezolvarea problemei în φ localizînd saltul în avalul ..rdului de fugă al profilului. Pentru reţelele radial-axiale mo..ile rezolvarea s-a obţinut prin formularea în ψ. Au fost ana..izate în continuare modalităţile de trecere a rezultatelor pen..ru reţeaua din planul imagine la reţeaua radial-axială de pe su..rafaţa de curent de revoluţie. Pentru reprezentarea grafică a re..ltatelor privind reţeaua radial-axială a fost folosită variaţia .. lungul loxodromei ce uneşte bordurile de fugă şi atac ale pro..lului.

8.2.5 Pentru a extinde posibilităţile de analiză a fost ..nceput un program de determinare a mişcării la ω şi condiţii .. limită variabile. Astfel a fost creat programul MISSROT ce dă ..zolvarea problemei directe pentru reţelele de profile radial-..iale fizice şi mobile cu deviaţie dată.

8.2.6 Obiectivul principal urmărit în rezolvarea proble..i directe a reţelelor de profile axiale şi radial-axiale este ..mpul de viteze şi presiuni pe frontiera profilelor. Aceste re..ltate primare pot da, prin prelucrări ulterioare, informaţii ..ortante privind comportarea reţelelor, necesare la proiectarea ..anelor paletate ale turbomaşinilor şi la analiza mişcării ..uidelor prin ele. Astfel, în cadrul tezei, au fost analizate ..remele locale şi globale de depresiune, pe frontiera profile.., la ω şi condiţii la limită variabile definind în final ..bele de sensibilitate la cavitaţie ale reţelei, de mare interes .. teoria şi exploatarea turbomaşinilor.

8.2.7 Pentru a avea o imagine a acurateţii şi preciziei ..ezentei metode, utilizînd M.E.F. în cadrul rezolvării problemei ..recte a reţelelor de profile axiale şi radial-axiale cu devia..e dată, ea a fost aplicată reţelei axiale NACA 8410 şi exemplu..i de reţea radial-axială mobilă din Bär /17/ pentru care exis.. şi alte rezolvări teoretice şi experimentale. Comparaţia efectuată (vezi fig.5.9 şi tabelul,respectiv fig.7.25 şi 7.32) arată că prezenta metodă a dat rezultatele cele mai apropiate de cele obţinute experimental şi ca valori şi ca alură.

8.3 Perspective

Analiza mişcării fluidelor prin organele paletate ale turbomaşinilor, utilizînd M.E.F., pornind de la aceste prime rezultate, poate continua de pe poziţii calitativ superioare. Astfel pot fi considerate importante, fertile şi de perspectivă următoarele direcţii :

8.3.1 Pe baza cîmpului de viteze şi presiuni cunoscut pe frontiera profilelor reţelei radial-axiale, pot fi analizate pierderile în mişcarea fluidului vîscos în jurul reţelei cu ajutorul teoriei stratului limită (utilizînd chiar M.E.F.).

8.3.2 Problema directă, pentru organele paletate ale turbomaşinilor, în ipoteza fluidului ideal, ar putea fi abordată cu M.E.F. şi tridimensional. Este de mare interes comparaţia între rezultatele obţinute prin metoda reţelelor şi cea tridimensională cu implicaţii importante la proiectarea turbomaşinilor.

8.3.3 Atît pentru cazul bi cît şi tridimensional realistă ar constitui tratarea problemei mişcării global prin turbomaşină folosind domeniile cuplate (de exemplu la turbine; aparat director + rotor + tub de aspiraţie). Condiţiile la limită la ieşire dintr-un domeniu ar constitui condiţii la intrare pentru domeniul următor.

8.3.4 Cu ajutorul M.E.F. ar putea fi tratată problema directă pentru reţelele radial-axiale în cazul lichidului vîscos, utilizînd metoda variabilelor primitive. Ar rezulta astfel comparaţii utile cu rezultatele obţinute prin teoria stratului limită.

8.3.5 In urma tuturor acestor rezolvări s-ar putea găsi legături sintetice între forma frontierelor domeniului (inelul şi coroana), geometria paletelor (geometria reţelelor de profile radial-axiale) şi performanţele organului paletat respectiv cu posibilităţi de intervenţie locală operative pentru a obţine rezultate optimizate. Rezultatele obţinute ar da posibilitatea alcătuirii unor programe de calcul complexe care să deie rezolvarea totală şi globală a mişcării fluidelor prin turbomaşini.

BIBLIOGRAFIE

1. Acosta A.J. - An Experimental and Theoretical Investigation of Two-Dimensional Centrifugal Pump Impelers. Trans ASME, Juli 1954
2. Acosta A.J., Bowermann R.D. - An Experimental Study of Centrifugal Pump Impelers. Trans ASME 79, Nr.8, 1958
3. Ames W.F. - Nonliniar Partial Diferential Equations in Engineering. vol.I şi II, Academic Press, New-York, London 1972
4. Ames W.F. - Numerical Methods for Partial Diferential Equations 2nd edition Academic Press, New-York 1977
5. Anton I. - Cavitaţia vol.I Ed.Acad.RSR, Bucureşti 1984
6. Anton I. - Cavitaţia vol.II Ed.Acad.RSR, Bucureşti 1985
7. Anton I. - Turbine hidraulice, Ed.Facla Timişoara 1979
8. Anton I., Popa O. - Caracteristicile cavitaţionale ale unei reţele de profile cu bordul de fugă rotunjit. St.cerc.şt.tehn.Acad.RSR, Baza Timişoara X 2, 1963
9. Anton I., Popa O. - Repartiţia potenţial teoretică a presiunilor pe conturul profilului hidrodinamic MHT-2. St.cerc.şt.tehn.Timişoara, VIII 3-4 1961
10. Anton I., Popa O., Marţiş V. - Caracteristicile energetice şi cavitaţionale ale profilului MHT-1 dispus în reţea de turbină. St.cerc.şt.tehn.Timişoara IX 3-4, 1962
11. Anton I., Popa O. - The Determination of Sensibility to Cavitation of Cascade of Hydrofoils of Arbitrary Shape.Problems of Fluid-Flow Machines Warszawa 1968
12. Anton V. - Cercetări experimentale privind influenţa geometriei unor reţele de profile asupra caracteristicilor lor energetice şi cavitaţionale. Teză de doctorat, Inst.Pol. Timişoara, 1972
13. Anton V. - Diagrame universale ale reţelelor plane de profile.Bul.şt.tehn.IPTVT Seria Mecanică tom 21(35), fasc.2, 1976
14. Aris R. - Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mecanics. Prentice Hall of Canada, London, Tokyo, Sydney 1962
15. Bauerjee P.K., Butterfield R. - Boundary Element Methods in Engineering Science. Mc Graw-Hill, London, New-York,1981

16. Bauersfeld H. - Konstruction der Francisschaufel nach der Lorenzschen Theorie. VDI 1912
17. Bär E. - Messung der relativen Strömungsfeldes in Wasser an der Laufschaufel einer schnelläufigen Francisturbine.Diss München, 1969
18. Benson R.S., Cartwright W.G., Hill M.J. - Analytical and Experimental Studies of Two-Dimensional Flow in a Radial Bladed Impeller. ASME Gas Turbine, Conf.Houston, Texas 1971
19. Borel L. - Etude pseudo-tridimensionnelle des ecoulements fluides antor des aubes de turbomachines. Bulletin Technique Vevey, 1978
2o. Bosman C., El-Shaarawi M.A.I. - Quasi-Three-Dimensional Numerical Solution of Flow in Turbomachines, Journal of Fluids Engineering, March 1977
21. Bovet T. - Contribution a l'etude de trace d'aulage d'une turbine a reaction du type Francis. Int.techniques Charmilles No.9, 1963
22. Brătianu C. - Metode cu elemente finite în dinamica fluidelor. Ed.Acad.Bucureşti, 1983
23. Brebbia C.A. - Boundary Element Methods. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New-York 1981
24. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. - Boundary Element Techniques.Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York Tokyo, 1984
25. Carafoli E., Constantinescu V.H. - Dinamica fluidelor incompresibile. Ed.Acad.Bucureşti 1981
26. Carafoli E. - Aerodinamica, Ed.tehnică Bucureşti, 1951
27. Carafoli E., Oroveanu T. - Mecanica fluidelor. Ed.Acad.Bucureşti 1955
28. Carnevale E., Giusti S., Manfrida G., Martelli F. - Quasi Three-Dimensional Finite Element Flow Calculation in Pumps. Proceedings of the seventh conference on fluid machinery Vol.1, Akademia Kiadó, Budapest 1983
29. Carte I. - The Determination of the Plane Potential Motion Round the Profile Cascades through the Finite Element Method. Mecanique applique, Tome 3o, No.2,3 Ed.Acad.
3o. Carte I. - The Determination of the Hydrodynamic Field through the Francis Turbine Impellers Using the Finite Element Method. Hydroforum 85, Problems of hydraulic machinery, Gdansk 1985

1. Carte I. - Hidraulică şi maşini hidraulice. partea I-a. Lit.I IPTV Timişoara 1985

2. Carte I. - Similarea mişcării meridionale axial-simetrice prin rotorii turbinelor Francis utilizînd metoda elementului finit.Partea I şi II. Conferinţa Maşini hidraulice şi hidrodinamică. Vol.1, Timişoara 1985

3. Carte I. - Simularea mişcării plane potenţiale în jurul obstacolelor izolate utilizînd metoda elementului finit.Partea I şi II. Conferinţa Maşini hidraulice şi hidrodinamică, vol.1, Timişoara 1985

4. Carte I. - Simularea mişcării plane potenţiale în jurul reţelelor de profile axiale prin metoda elementului finit.Partea I,II şi III. Conferinţa Maşini hidraulice şi hidrodinamică. Vol.1, Timişoara 1985

5. Carte I., Ludescher H. - Realizarea unui program pentru rezolvarea complexă a mişcării în jurul reţelelor de profile axiale prin metoda elementului finit. Conferinţa Maşini hidraulice şi hidrodinamică. Vol.1 Timişoara, 1985

6. Cazacu M., Bănescu A., Petru C. - Soluţionarea numerică a curgerii tridimensionale cu simetrie axială a fluidelor vîscoase incompresibile. Ses.şt.Acad.RSR, Oct.1973

7. Câmpian C.V. - Contribuţii la studiul şi realizarea rotoarelor de maşini hidraulice axiale şi axiale reversibile.Teză de doctorat IPTV Timişoara 1978

8. Câmpian C.V. - Contribuţii la proiectarea hidrodinamică a aparatelor directoare. Conferinţa Maşini hidraulice şi hidrodinamică, Vol.2, Timişoara 1985

9. Chung T.J. - Finite Element Analysis in Fluid Dynamics. Mc-Graw Hill, New-York 1978

10. Czibere T. - Uber die Berechnung der Schaufelprofile von Strömungsmaschinen mit halb-axialer Durchströmung. Acta Techn. 44, 1963

11. Czibere T. - Uber die Berechnung der Schaufelprofile und der Strömung um die Schaufeln von Strömungsmaschinen. Ing. Arch. 33, 1964

12. Demidovici B.P., Maron I.A. - Computational Mathematics.Moscow 1974

13. Demidowitsch B.P., Maron I.A., Schuwalowa E.S. - Numerische methoden der analysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1968

14. Deriaz P. - The Mixed Flow Variable-Pitch Pump Turbine.Water Power 1960

45. Deshpande R.B. - Computer Program for Calculating Velocities and Streamlines on a Blade-to-Blade Surface of a Turbomachine. Progress Report UMIST 197o
46. Deshpande R.B. - A Comparison and Optimisation of Computation Techniques for Inviscid Blade-to-Blade Flow through a Turbomachine. Ph.D.thesis UMIST 1971
47. Desphande R.B. - Analytical Study of Blade-to-Blade Flow through a Turbomachine. Journal of the Aeronautical Soc. of India, vol.27 no.3
48. Dobândă V. - Catalog de profile. Lab.de maşini hidraulice, I.P.Timişoara 1974
49. Dorn W.S., Mc.Cracken D.D. - Metode numerice cu programe în Fortran IV Ed.tehnică Bucureşti, 1974
5o. Dreyfus L-A. - Three Dimensional Theory of Turbine Flow and its Applications to the Design of Weel Vanes for Frances and Propeller Turbine. Acta Polytechnika Mechanical Eng.Series Vol.1, No.1, Stockholm 1946
51. Dumitrescu I.I. - Simularea cîmpurilor potenţiale. Ed.Acad. Bucureşti 1983
52. Eckardt.D. - Detailed Flow Investigation Within a High-Speed Centrifugal Compresor Impeller. J.Fluids.Eng.Trans.ASME Sept.1976
53. Ellis G.O., Stanitz J.D. - Comparison of Two and Three Dimensional Potential Flow Solutions in a Rotating Impeller Passage NACA-TN 28o6, 1952
54. Ervin J.R., et al. - Two-Dimensional Low-Speed Cascade.Investigation of NACA Compressor Blade Sections Having a Systematic Variation in Mean Line Loading NACA-TN 3816, 1956
55. Essers J.A. - Computational Methods for Turbulent, Transonic an Viscous Flow Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo, 1983
56. Fachbach H. - Die Strömung in einer schnelläufigen Francisturbine. Diss.T.H.Graz 197o
57. Fischer K. - Untersuchungen der Strömung in einer Kreiselpumpe. Mitt.d.Hydraul.Inst.München,Heft 4, 1931
58. Florea I., Isbăşoiu C. - Hidraulică şi maşini hidraulice. Instit.Pol.Bucureşti, 1974
59. Florea J., Vasiliu N. - Metodologie de proiectare asistată de calculator pentru rotorul diagonal reglabil.Consf. naţ.energetică Bucureşti 1983

60. Flödl G., Spitaler P., Strember F. - Problems in the Design of Francis Type Turbines and Single-Stage Reversible Pump-Turbines due to tendancy to Larger Dimensions out Pots Methods and Total Dynamic Peeds. 7th Symposium IAHR Wien, 1974

61. Furtner N., Raabe J. - The Dynamic Measurement of the Unsteady Flow Near and Within the Boundary Layer of Water Operated Axial and Semi-Axial Model Turbine Proc. lo-th Symposium of the IAHR Tokyo 198o

62. Furtner N. - Instationare messung der Schaufelnaben relativströmung in laufrädern von axial und halbaxialturbinen. Diss.München 1978

63. Füzy O. - Design of Mixed Flow Impeller. Periodica Polytehnica 6, No.4, 1962

64. Gearhart W.S. - Two-Dimensional Tests on a Compressor Glade Designed by the Mean Streamline Method. Applied Research Laboratory TM 71-32 1971

65. Gerich R. - Untersuchungen über die instationare strömung in einer schnelläufigen Francis-modell-turbine mit besonderer berücksichtigung des teillast-verhaltens. Diss.München 1974

66. Gerick R., Raabe J. - Untersuchung der instationären Strömung in einer Francis-Modell-Turbine. Konferenz Hydro-Turbo 74 Lazne Luhacovice CSSR

67. Gheorghiu M. - Studiul teoretic şi experimental al caracteristiăilor energetice ale reţelelor circulare de profile pentru aparate directoare de turbine, Teză de doctorat. Inst.Pol."Traian Vuia" Timişoara 1976

68. Gravalos F. - The Dynamics of Turbo-Flow. Angew.Math.und Phys No.4 1959

69. Gruber I. - Die Berechnung von radiales laufrädern mit wor-wärts gekrümmter beschaufelung. Masch.Bauteoh.lo, No.8, 1961

7o. Grünagl E. - Flüssigkeitsberehung in umplaufenden radialradern VDI Forschungsheft 1o5, 194o

71. Hamming R.W. - Numerical Methods for Scientist and Engineers Mc.Graw-Hill Book Company, New-York, San Francisco, Toronto, London 1962

72. Hamrick J.T., Missin J., Michel D.J. - Study of Three Dimensionale Internal Flow Distribution Base on Measurements in a 48-Inch Radial Centrifugal Impeller NACA-IN 2983, 1954

73. Hess J.L., Smith A.M.O. - Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies. Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, Pergamon Press, London 1967

74. Hill M.J. - Numerical Solutions for Mixed Flow Turbomachines. Ph.D.thesis Manchester, England 1974

75. Hiriş V., Zsifkow N. - Concepte şi aplicaţii ale metodei elementelor finite. Monografii matematice No.14 Secţia matematică Fac.de ştiinţe ale naturii Timişoara, 1978

76. Hirsch C., Warzee G. - The Meridional Through-Flow Calculation in an Axial Flow Machinee by the Finite Element Method in the mathematics of finite elements and aplications II. Academic Press, London, New-York, San-Francisco, 1976

77. Hirsch C., Warzee G. - Finite Element Method for Through Flow Calculations in Turbomachines. Trans.ASME J.Fluids Eng. 1976

78. Hoeller H.K. - Definition de grandeurs alimentaires pour le calcul des ecoulements potentials plans et dans un espace de revolution. Bulletin Escher Wyss, 1974/1

79. Howells R., Lakshminarayama - Three-Dimensional Potential Flow and Effects of Blade Dihedral in Axial Flow Propeller Pumps. Journal of Fluids Engineering, March 1977

80. Hromadka T.V. - The Complex Variable Boundary Element Method Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo, 1984

81. Hubner K.H. - The Finite Element Method for Engineers John Wiley New-York, London, Sidney, Toronto, 1975

82. Iacob C, - Introduction mathematique a la mecanique des fluides. Ed.Acad.RSR şi Gauthier-Villars, 1952

83. Imbach H.E. - Die Berechnung der Kompressiblen reibungsfrebeln unterschallströmung durch räumliche gitter aus Schaufeln auch grosser dicke und starker wolbang. Mitt a.d. Inst.f Th. Zürich 1960

84. Izbăşoiu E. - Contribuţii la calculul gabaritelor şi parametrilor turbinelor cu reacţiune cu dezvoltarea hidrodinamicii axial tubulare. Teză de doctorat IPB, 1980

85. Jacob K. - Erweiterung des Martensen-Verfahrens auf einzel und gitterprofile mit eckiger hinterkante oder sehr kleinen abrundungsradius. Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen Bericht 67 A 21, 1967

86. Jansen W. - Flow Analysis in Francis Water Turbines. Trans. ASME Journal of Engineering for Power, July 1967
87. Johnston J.P., Dean R.C.jr. - Losses in Vaneless Diffusers of Centrifugal Compressors and Pumps. Analysis, Experiment and Design, Journal of Engineering for Power,Ian. 1966
88. Katsanis T. - Computer Program for Calculating of Velocities and Streamlines on a Blade to Blade Stream surface of a Turbomachine. NASA TND 4525, 1968
89. Katsanis T. - Quasi-Three-Dimensional Calculations of Velocities in Turbomachine Blade Roms. Trans.ASME, 72WA/GT-7, 1972
9o. Katsanis T. - Use of Arbitrary Quasi-Orthogonals for Calculating Flow Distribution in the Meridional Plane on a Turbomachine. NASA TND-2546, 1964
91. Katsanis T. - Use of Arbitrary Quasi-Orthogonals for Calculating Flow Distribution on a Blade-to-Blade Surface in a Turbomachine. NASA TND-29o9, 1965
92. Kazacov L.J. - Die nichtstationäre umströmung einer mehrreibigen zweidimensionalen profilgitters einer hydraulischen maschine in einer schicht mit veränderlicher diske. Energomaschinostroenie 16, 197o
93. Kolati I., Voia I. - Plane Potential Muvements through Cascades Computed with the Finite Elements Method Proceedings of the seventh conference on fluid machinery.Vol. I, Akad.Kiadó, Budapest 1983
94. Korcian J. - Dreidimensionale, quasistationäre messung des relativen strömungsfeldes in schaufelkanal eines langsamläufigen Kreiselpumpenlaufrades. Diss.München 1982
95. Krajevski B. - Variational Problems of the Theory of Three Dimensional Flow through Thermal Turbomachinery. Archivus Meechaniki Sostowanej 6, 15, 1963
96. Kramer J.J. - Analysis of Incompressible Nonviscous Blade-to-Blade Flow in Rotating Blade Roms. Trans.ASME, Feb. 1958
97. Krimerman Y., Adler D. - The complete Three-Dimensional Calculation of the Compressible Flow Fields in Turbo-Impellers J.Mech.Eng.Sci. 2o, 3, 1978

98. Kviatkovski N.S. - Diagonalnîe ghidroturbinî. Maşinostroenie Moskova 1971

99. Leist K., Dettmering N. - Prüfstande zur messung der druckvebeihung an rotierenden schaufeln forschungsbar. Wirtschfts. Verkehraminist N.R.W. Nr.422, 1958

1oo. Lesohin A.F. - Rascet lopastei rabocih koles osevîh turbin. B.Ku.Energomaşinostroenie L 1953

1o1. Lorentz H. - Nouvelle theorie et calcul des rous-turbines. Paris, Dunot et Pinot 1913

1o2. Mansouri F. - Theoretical Method for Design of Variable Pitch Mixed Flow Hydraulic Tubrines. Fluides Engineering Conference, Chicago, ASME 1967

1o3. Martensen E. - Berechnung der druckverteilung an gitterprofilen in ebenen potentialströmungs mit einer Freedholmschen integralgleichung.Archive for rational mechanics and analysis. Vol.3. 1959

1o4. Mc Bride M.W. - Computerization of the Mean Streamline Blade Design Method Applied Research Laboratory TM 73-22, 1973

1o5. Mc.Bride M.W. -Refinement of the Mean Streamline Method of Blade Section Design. Journal of Fluids Engineering Sept. 1977

1o6. Mercheş I., Burlacu L. - Mecanica analitică şi a mediilor deformabile. Ed.did. şi pedag.Bucureşti 1983

1o7. Mises R. - Theorie des wasserräder. Z.angew.Math.und Phys. vol.57 Nr.1, 1969

1o8. Mitchell A.R. - An Introduction to the Mathematics of Finite Elements and Aplications. Academic Press, London, New-York San Francisco, 1973

1o9. Moore J., Moore J.G., Johnston M.W. - On Three-Dimensional Flow in Centrifugal Impellers. C.P. 1384, 1977

11o. Moulin C., Wegner M., Eremeef R. - Vink-Phong-Methodes de trase des turbomachines hydrauliques. La Houille Blanche Nr.7/8 1977

111. Murai H. - Theory on Blades of Axial amd Radial-Flow-Pumps and Water-Turbines. Th.Rep.Inst.High.Sp.Mech.Japan,vol. 17, 1965/1966

112. Murai H. - Theory on Blades of Diagonal Flow Pumps and Water-Turbines. Rep.1,2. Rep.Inst.High.Sp.Mech.Japan,vol.16 1964/1965 Nr.159

113. Murakami M., Kikyama K., Asakure E. - Velocity and Pressure Distributions in the Impeller Passages of Centrifugal Pumps. ASME,Journal of Fluid Engineering 1o2,4,198o

114. Nagafuji T., Morii H. - A Flow Study in Francis Turbine Runner. Proc.lo[th] Symposium of the IAHR Tokyo 198o

115. Numachi F. - Cavitation Tests on Hydrofoils Designed for Accelerating Flow Cascade. Rep.4 Trans.ASME 1969

116. Peligrad N. - Pierderile hidraulice în circuitul convertizoarelor hidraulice de cuplu în diferite regimuri de funcţionare. Teză de doctorat Inst.Pol.Traian Vuia,Timişoara,1984

117. Peligrad N. - Optimizarea calculului de proiectare a convertizoarelor hidraulice de cuplu cu o treaptă destinată instalaţiilor de foraj. Constr.de maş.Nr.7-8, 1984

118. Peyret R., Taylor T.D. - Computational Methods for Fluid Flow. Springer Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin 1982

119. Pfoertner H. - Laufradströmung in einer Francis Turbine vergleich experimenteller ergebnisse mit numerische berechneten strömungsfeldern, V.D.I. Berichte 424, 1981

12o. Pian Th.H.H., Tong Pin - Finite Element Method in Continuus Mechanics. Advances in Applied Mechanics. Vol.12, 1972

121. Popa O. - Mişcări potenţiale şi teoria hidrodinamicii reţelelor de profile. Lit.IPTV Timişoara 198o

122. Popa O. - Contribuţii teoretice la calculul reţelelor de profile folosite în construcţia maşinilor hidraulice.Con.Conf. de maş.hidr. Timişoara 1964

123. Popa O. - Uber die potentialbewegung in schaufelgitter mit Carafoli Profilen. Conf.dr maş.hidr.1964

124. Popa O. - Mecanica fluidelor şi măsuri hidraulice.Vol.I şi II Lit.IPTV Timişoara 1976-1978

125. Popa O. - The Determination of a General Relation Between the Aerodynamic Properties of a Single Airfoil and Those of the Same Airfoil Arranged in Arbitrary Cascade. Proc.of t the fourth Conf.on Fluid Machinery Budapest 1972

126. Potetenko D.V. - Opledelenie formî trehmernogo poteka i raspredelenie skorostei v kanalah ghidromaşin.Energeticeskoe Maşinostroenie, Harcov V/4 1967

127. Prian V.D., Michel D.J. - An Analysis of Flow in Rotating Passage of Large Radial-Inlet Centrifugal Compressor at Tip Speed of 7oo Feet per Second NACA TN 1951

128. Proskura G.F. - Ghidrodinamica turbomaşin. Maşghiz 1984

129. Raabe J. - Hydraulische Maschinen und Anlagen V.D.I.Verlag Düsseldorf 197o

13o. Raabe J. - Berechnung der 3 dimensionalen strömung einer reibungsfreien fluids durch ein turbomaschinen. Laufrad mit doppelt gekrümmten schaufeln. V.D.I.Berichte 424,1981

131. Raabe J. - Die rechnerische bestimmung des relativen und absoluten strömungsfelder bei diagonaler turbomaschinen. Maschinenmarkt 66, Nr.lo S 6/8, Nr.12 S 6/8, 196o

132. Ribaut M. - Three-Dimensional Calculation of Flow in Turbomachines with the Aid of Singularities. Trans.ASME, Jul. 1968

133. Richard P. - Fluid Mechanics. John Viley, New-Xork 1961

134. Riegels F.W. - Aerodynamische Profile. München 1958

135. Rotta J.C. - Fortran IV - rechnenprogramme für grenzschichten bei kompressiblen ebenen und achsensymetrischen strömungen. D.FVLR Bericht AVA-FB Göttingen 197o

136. Schilhausl M.I. - Three-Dimensional Theory of Incompressible and Inviscid Flow through Mixed Flow. Turbomaschines, J. of Eng.for Power, ASME, Oct.1965

137. Schlemmer G. - Messung des absoluten und relativen strömungsfeldes einer schnell-läufiger Francisturbine mit berücksichtigung der wirbelzopferscheinungen im saugrohr. Diss. München 197.

138. Schlemmer G., Gerick R., Raabe H. - Measurement of Quasi-Steady and Unsteady Flow-Field in Francisturbines of High Specific Speed Carried Aut Before the Runner, in the Runner and in the Draft Tube. Proceedings 6th Symposium of IAHR 1972

139. Scholz N. - Uber die durchführung systematischer messungen an ebenen Schaufelgittern. Breunschweig 1956

14o. Scholz N. - Aerodinamik der Schaufelgitter. I.G.Braun Karlsruhe 1965

141. Sedille M. - Turbomachines hydrauliques et thermiques.I.Masson, Paris 1966

142. Senoo Y.,Nakase Y. - A Blode Theory of an Impeller with an Arbitrary Surface of Revolution. Trans.ASME 1971

143. Senoo Y., Nakase Y. - An Analysis of Flow through a Mixed Flow Impeller. Journal of Engineering for Power 1972

144. Sierno F., Leva E. - Modern Freuds in Selecting and Designing Francis Turbines. Water Power 8/1976

145. Sirotkin I.A. - K postanovke obratnoi osesimmatricinoi zadaciu ustanovivsceagosia vibrogovo tecenila idealnoi mesjmaemoi jidkosti v turbomaşinah. Mehanika jidkosti i gaza 1966

146. Sirotkin I.A. - On the Formulation of the Discret Problem of Rotational Flow in Turbomachines Inzh.Zh.Vol.3 nr.2, 1963

147. Smith L.H.Jr. - The Radial Equilibrium Equation of Turbomachinery. Journal of Engineering for Power. Ian.1966

148. Smith L.H.Jr., Leroy H., Hsuan Yah - Sweep and Dihidral Effects in Axial-Flow Turbomachinery. Journal of Basic Engineering, Sept. 1963

149. Sörensen E. - Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder. Z.angew.Math.Mech. 7, Nr.2, 1927

150. Spannake W. - Zur dreidimensionalen theorie der turbinen und pumpen für umzusammendruckbare flüssigkeiten. Forschung Bd.8.H.1 1937

151. Speidel L., Scholz N. - Berechnung über die Strömungsverhiste in ebenen Schaufelgitter. VDI, 464/1957

152. Stanitz J-D. - Same Theoretical Aerodynamic investigations of Impellers in Radial and Mixed Flow Centrifugal Compressors. Cleveland Ohio, Trans.ASME 1952

153. Stanitz J.D., Ellis G.D. - Two-Dimensional Compressible Flow in Centrifugal Compressors with Straight Blodes. NACA Report 1950

154. Staufer F. - Verfahren zur bestimmung der Schaufelnform umlaufender kreisförmiger Schaufelgitter.Wasserkraft und Wasserwirtschaft 16 Heft Ian.1956

155. Stepanov G.I. - Ghidrodinamika reşetok turbomáşin. F.M.Moskva 1962

156. Strscheletzky M. - Uber gleichgewichtsformen freier bogwerkzeugen von Strömungen inkompressibler flüssigkeiten.VDI Z. 106, Nr.95, Nr.10 S, 1964

157. Symm G.T. - Integral Equation Methods in Potential Theory,II, Proc.Roy.Soc.Ser.A 275, 1963

158. Tietjens P.D. - Applied Hydro- and Aeromechanics. Dover Publications Inc.New-York 1960

159. Traupel W. - Thermische Turbomaschinen, Bd.I Thermodynamischströmungstechnische berechnung, 3 Auflage, Berlin,Heidelberg, New-York, Springer 1972

160. Truckenbrodt B. - Fluid mechanik. Band 2, Elementare Strömungsvorgänge dichtelestäudiger fluide sowie potential und grenzsch .chtströmungen. 2 Auflage, Berlin, Heidelberg New-York, Springer 1980
161. Truckenbrodt E. - Strömungsmechanik. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New-York 1968
162. Vallander S.V. - Protekanie jidkosti v turbine. D.A-N. SSSR, T 81, No.4, 1952
163. Vasiliu N. - Contribuţii la hidrodinamica rotoarelor radial-axiale ale turbomaşinilor. Teză de doctorat.Inst.Pol.Bucureşti 1976
164. Vavra M.H. - Aero-Thermodynamics an Flow in Turbomachines, John Wiley, New-York 1960
165. Viktorov G.V. - Ghidrodinamiceskaia teoriia reşetok izdatelstvo, Vîşşaia Şkila, Moskva 1962
166. Voia J. - Aplicarea reţelei plane de profile la studiul rotorilor radial-axiale ai maşinilor hidraulice.Constr.de maş.nr.1 1983
167. Votter M. - Beitrage zur numerischen berechnung des räumlichen strömungsfeldes in hydraulischen turbomaschinen.T.H. München, 1968
168. De Vries G., Norrie D.H. - The aplication at the Finite Element Technique to Potential Flow Problems. Trans.ASME, Series E., Journal of Applied Mechanics 38, 1971
169. Wada Y., Yamaguchi Y., Yokoi N., Tanabe S. - Analysis of Flow in Pump-Turbine Ranker. Hitachi Rewiew vol.22,Nr.10
170. Walter A.A. - Messungen des frequenzverhaltens einer Francis-Turbine in wasser verschiedenen luftgehalters und luft verschiedener dichte. Diss.München 1979
171. Wislicenus G.F. - Fluid Mechanics of Turbomachinery. Mc.Graw-Hill Book Company, New-York, London 1947
172. Wislicenus G.F. - The Fluid Mechanics of Turbomachinery. Vol. II CH 29, Dower Publications Inc.New-York 1965
173. Wood M.D., Merlow A.V. - The Use of Numerical Methods for the Investigations of Flow in Water Pumpes Impellers, Proceedings of the J.of M.E. Vol.189 Part.1, Nr.29, 1966-1967
174. Wu C. - A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachine of Axial, Radial and Mixed Flow Types, Trans.ASME vol.74, 1952

175. Wu C., Brown C.A., Cartilow E.L. - Analysis of Flow in a Subsonic Mixed-Flow Impeller. Nat.Adv.Comm.Aeron.Techn. Note 2749, Washington 1952

176. Wu C. - A General through-Flow Theory of Fluid Flow with Subsonic and Supersonic Velocity in Turbomachines of Arbitrary Hub and Casing Shapes. NASA TN 2302, 1951

177. Wu C. - A Theory of the Direct and Inverse Problems of Compressible Flow Past Cascade of Arbitrary Blode Sections Lying in Arbitrary Stream Filament of Revolution in Turbomachine. Mechanical Engineering, Scientia Sinica,Vol. VIII, No.12, 1959

178. Zidaru G. - Mişcări potenţiale şi hidrodinamica reţelelor de profile. Ed.didac.şi pedag.Bucureşti 1981

179. Zidaru G. - Contribuţii la hidrodinamica reţelelor circulare de profile. Teză de doctorat, Bucureşti 1971

180. Zienkiewicz O.C. - The Finite Element Method in Engineering Science. Mc Graw-Hill London 1971

181. Zienkiewicz O.C. - The Finite Element Method, 3rd edition Mc Graw-Hill, London 1977

182. Moisil C.G. - Fizica şi ingineria. Forum 5, Bucureşti 1986

183. Belehova N.G. - Ucet pro transtreunosti potoka, obteksiuşcego roboçee koleso turbomaşinî, V.L.U, No.1, 1958

184. Bărglăzan A, - Maşini hidraulice. IPT Timişoara 1952

185. Bărglăzan A. - Fenomenul de cavitaţie la maşinile hidraulice. St.cerc.şt.tehn.Timişoara, 1, 1954

186. Bărglăzan A., Anton I., Anton V., Preda I. - Incercările maşinilor hidraulice şi pneumatice.Editura tehnică, Bucureşti 1959

187. Pavel D. - Potentialströmungen durch Kreiselräder. Teză de doctorat, Zürich 1925

188. Pavel D. - Maşini hidraulice. Editura energetică de stat, Bucureşti 1956

189. Dumitrescu D. - Strömung an einer Luftblase im senkrechten Rohr Z.angew.Math.und Mech.vol.23, Heft 3, 1943

190. Dumitrescu D., Ionescu G.D. - Metode numerice pentru studiul mişcărilor axial-simetrice ale fluidelor perfecte. St.cerc.de mec.apl. vol.4 Ed.Acad.RPR, 1958

191. Dumitrescu D., Cazacu M.D. - Theoretische und experimentelle Betreichtungen über die strömung zäher flüssigkeiten um eine plate bei Kleinen und mittleren Reynoldszahlen. Z.. angew.Math.und Mech. vol.5o, 197o

192. Schlichting H. - Berechnung der Reibungslosen inkompressib-len strömung für ein vorgegebenes ebenes schaufelgitter. VDI Forschungsheft 447, VDI Verlag, Düsseldorf 1955

193. Speidel L., Scholz N. - Untersuchungen über die strömungsver-luste in ebenen schaufelgittern. VDI-Forsch.Heft 464, Düsseldorf, 1955

CUPRINS