INSTITUTUL POLITEHNIC " TRAIAN VUIA" TIMISOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

GHEORGHE TUDOR

LOCALIZAREA ZEROURILOR UNOR CLASE DE FUNCTII SI APLICATII

- Teză de doctorat -

Conducător ştiinţific:
Prof. dr. BORISLAV CRSTICI

- Timişoara, 1986 -

INTRODUCERE

Prezenta teză de doctorat oglindește parțial activitatea autorului din ultimii 15 ani.

Fiind un colaborator, împreună cu conducătorul științific prof.B.Crstici, al prof. D.S.Mitrinović, autorul s-a ocupat mult de diverse inegalități pe linia cărții prof.D.S.Mitrinović , "Analytic Inequalities" [77] . Aceste preocupări se oglinesc în principal în capitolul I al tezei.

In timpul stagiului de doctorantură autorul a studiat la îndemnul conducătorului științific seriile Fourier pentru funcții de mai multe variabile. Din acest studiu au rezultat cîteva inegalități importante referitoare la polinoamele trigonometrice de mai multe variabile. Rezultatele obținute în cadrul acestor preocupări sînt în principal expuse în capitolul II al lucrării de față care este marcat și de colaborarea autorului cu M.Neagu în domeniul ecuațiilor funcționale.

In fine, propunîndu-și să întreprindă un studiu aprofundat și prelungit al localizării zerourilor unor funcții (în particular funcții polinomiale) în planul complex, autorul a făcut acest lucru căutînd să aplice în acest studiu rezultatele găsite în legătură cu rafinarea unor inegalități sau elaborarea unor noi metode de demonstrație pentru inegalități cunoscute. Dat fiind că rezultatele privitoare la localizarea zerourilor se exprimă prin inegalități, rezultă caracterul uniter al lucrării, ca fiind o lucrare care tratează inegalitățile și aplicațiile lor.

Ar fi desigur inutil, după celebrele cărți ale lui Hardy-Littlewood - Polya [47] , Bellman-Beckenbach [7] , Mitrinović [77] - ca să amintim doar cîteva din cele mai reprezentative - să pledăm pentru teoria inegalităților. Ne vom mărgini să indicăm cîteva domenii în care inegalitățile își găsesc o aplicabilitate de neevitat, alegerea acestor domenii fiind, desigur , marcată de lecturile și preocupările autorului . Astfel avem:

Probleme de extremum [1] , [37] , [42] , [50] , [82] , [105] , [107] , [108] , [127] .

<u>Probleme referitoare la sumabilitatea seriilor</u> [48], [49], [68], [133].

<u>Probleme de interpolare şi aproximarea funcţiilor</u> [8], [44], [130].

<u>Probleme de limitare</u> [39], [46], [51], [52], [132].

Dintre matematicienii renumiţi care au demonstrat sau aplicat astfel de inegalităţi la diferite probleme cităm:

V.L.Goncarov, C.Hyltén-Cavallius, W.W.Rogosinski, P. Turán, L.Fejér, B.Sz. Nagy, R.Askey, J.Fitch, L.Vietoris, S.N. Bernstein, Y.L.Geronimus şi mulţi alţii.

De remarcat faptul că metodele de demonstrare a acestor inegalităţi sînt foarte variate, ceea ce conduce la situaţia de a putea aduce contribuţia şi la inegalităţi cunoscute, dacă se găseşte o metodă unitară de demonstraţie, pentru o clasă de inegalităţi, chiar dacă prin această nouă metodă nu se îmbunătăţeso inegalităţile vizate. Sînt însă şi cazuri în care noua metodă de demonstraţie conduce la îmbunătăţirea inegalităţilor considerate ([87], [137], [138], [150]).

In capitolul I al acestei lucrări, sînt generalizate sau rafinate o serie de astfel de inegalităţi importante, folosind în unele cazuri metode diferite de cele utilizate de către autorii respectivi.

Astfel, în §2 se demonstrează inegalitatea

$$(1.0)\qquad \sum_{k=m}^{m+n-1} b_k \sin kx > 0, \quad \forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2m-1}\right[, \; n \in N,$$

$$kb_k \geq (k+1)\, b_{k+1} > 0, \; k=m, m+1, \dots m+n-2.$$

care generalizează inegalitatea lui Fejer-Jackson [77], aceasta obţinîndu-se pentru $m=1$, $b_k=1/k$.

Paragraful 3, conţine o rafinare a unei inegalităţi a lui P.Turán 134 prin inegalitatea

$$(2.0)\qquad 0 < \sum_{\nu=1}^{p} b_\nu \sin \nu x < b_1(\omega_n(\theta) - x)$$

$$\theta \in]0, \pi], \text{ fix } \forall\, x \in]0, \theta[, \; \forall p = 1, 2, \dots, n,$$

$\nu b_\nu \geqslant (\nu+1)\, b_{\nu+1}$, $\nu = 1,2, \ldots, n-1$, unde

$$\omega_n(\theta) = \max_{1\le k\le n} \left\{ \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\sin \nu\theta}{\nu} + \theta \right\}$$

Inegalitatea lui P.Turán se obţine pentru $\theta = \pi$, $b_k = 1/k$.

In §4 este rafinată o inegalitate datorată lui C.Hylten-Cavallius [51].

Capitolul II, care conţine trei paragrafe, tratează asupra unor inegalităţi referitoare la polinoamele trigonometrice de mai multe variabile.

Inegalităţi cunoscute sau nu, dintre care unele datorate matematicienilor L.Vietoris, J.N.Lyness, C.Moler, L.Fejér ş.a., sînt demonstrate folosind o metodă unitară care permite extinderea unor inegalităţi asupra polinoamelor trigonometrice de o variabilă la inegalităţi asupra polinoamelor trigonometrice de mai multe variabile.

Pentru aceasta, se demonstrează o teoremă generală pornind de la următoarea ecuaţie funcţională

$$(3.0) \qquad f(z-x,z-y) - f(x,y) = f(z,\, z-x-y)$$

pentru care se iau în considerare soluţiile din clasa funcţiilor local integrabile. Schema de extindere se bazează pe cîteva corolare deduse din teorema respectivă.

Dintre rezultatele obtinute, amintim doar pe următorul:

Dacă au loc inegalităţile:

$$(4.0) \qquad \sum_{1}^{n} b_k \frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k} \geqslant 0 , \quad \forall\ x \in [0,\theta] , \quad (\theta \le \pi)$$

$$(5.0) \qquad \sum_{1}^{n} b_k \frac{\sin \alpha_k \theta}{\alpha_k} \frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k} \geqslant 0, \quad \forall\ x \in [0,\theta] ,$$

cu $\alpha_k, b_k \in \mathbb{R}$,

atunci are loc inegalitatea

$$(6.0) \qquad \sum_{1}^{n} b_k \frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k} \frac{\sin \alpha_k y}{\alpha_k} \geqslant 0, \quad \forall\ (x,y) \in [0,\theta]^2$$

şi reciproc, (6.0) implică (4.0) şi (5.0) .

In cazul particular $\alpha_k = k$, $\theta = \pi$, se obţine o teoremă a lui L.Fejér [5] .

Problemele dezvoltate în capitolul III, au ca bază de plecare, unele inegalităţi întîlnite în capitolul I.

Obiectul acestui capitol, ca şi al capitolului IV îl constituie un studiu aprofundat asupra localizării zerourilor funcţiilor analitice.

Problema localizării zerourilor analitice, a fost şi este, în atenţia multor matematicieni, care au studiat diferite aspecte ale ei.

Dintre matematicienii care au abordat această problemă, amintim pe următorii:

Ch.Lucas, A.M.Legendre, E.Laguerre, Ch.Hermite, P.L.Cebîşev, K.F.Gauss, P.Montel, E.Picard, E.Landau, J. Dieudonnée , M.Marden, G.Szegö , A.F.Timan, D.M.Simenunović ş.a.

La aceştia, se mai adaugă şi matematicieni români care au adus, prin lucrările lor, o contribuţie însemnată în acest domeniu. Reamintim doar cîţiva: Th.Angheluţă, O. Onicescu, T.Popoviciu, D.Pompeiu.

Dintre multitudinea de rezultate obţinute, în această direcţie, amintim doar cîteva. Astfel sînt :

- Probleme referitoare la numărul zerourilor din interiorul cercului unitate ale polinoamelor algebrice (Teoremele lui Routh, I.Schur, Hurwitz)

- Probleme referitoare la localizarea zerourilor derivatelor polinoamelor (Teoremele lui K.F.Gauss, Gh.Lucas, J.Jensen, J.L.Walsh, Grace-Heawood)

- Probleme referitoare la numărul zerourilor reale ale polinoamelor (Teoremele lui Sturm, Ch.Fourier, E.Laquerre, I.Newton, Ch.Hermite, A.Cauchy, J.L.Lagrange, J.Hadamand, Kakeya ş.a.).

O altă problemă se referă la stabilirea unor relaţii între zerourile polinoamelor şi cele ale derivatelor acestora. Printre cei care au obținut rezultate în această direcție amintim pe G.Peysen, E.Laquerre, R.Godeanu, Julius V.Sz. Nagy.

O contribuție însemnată, a avut aici matematicianul român T.Popoviciu, care a stabilit prin cîteva teoreme importante, o serie de inegalități între zerourile polinoamelor și cele ale derivatelor acestora.

O bună parte din rezultatele de mai sus, sînt consemnate în cartea lui Andrej Turowicz [160] , "Geometrie zer wielomianov" (Polish), 1967 , Warsawa.

In unele cercetări a fost luată în considerare ecuația

$$(7.0) \qquad 1 + a_{n_1} x^{n_1} + a_{n_2} x^{n_2} + \dots + a_{n_p} x^{n_p} = 0$$

Pentru prima dată E.Landau a pus problema determinării unor regiuni ale planului complex, care conține totdeauna rădăcini ale ecuației (7.0) , cînd o parte dintre coeficienți rămîn ficși, iar ceilalți variază arbitrar.

Singurele regiuni ale planului care se iau în considerare sînt cercurile cu centrul în origine , cu alte cuvinte, se caută limitele superioare ale modulelor unui anumit număr de rădăcini.

Această problemă a făcut obiectul unei suite de lucrări ale matematicienilor:

E.Landau, Van Vleck, E.Picard, P.Montel, J.Dieudonnée ș.a.

De exemplu, P.Montel a arătat că pentru ecuația

$$(8.0) \qquad 1+a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p + a_{p+1}x^{n_{p+1}} + \dots + a_{p+k}x^{n_{p+k}} = 0$$

dacă sînt dați coeficienții $a_1, a_2, \dots, a_p$ ($a_p \neq 0$) există totdeauna rădăcini ale ecuației inferioare în modul unui număr fix $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_p, k)$ care nu depinde decît de coeficienții dați de numărul termenilor polinomului.

O completare importantă la această problemă a fost adusă de către Van Vleck.

O altă direcție de cercetare , cuprinde studiul zerourilor seriilor de puteri aleatoare.

Un astfel de studiu, îl face, printre alţii Jakab M., în teza sa de doctorat "Zerourile seriilor de puteri în discul unitate", Berlin, 1978.

Această lucrare se ocupă cu comportarea funcţiilor

$$f(z,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\omega) a_n z^n \tag{9.0}$$

definită pe discul unitate D şi ai căror coeficienţi $Z_n(\omega)$ sînt variabile aleatoare. Scopul lucrării este de a stabili proprietăţi aproape certe pentru familia de funcţii (9.0).

O problemă analoagă pentru familia de funcţii întregi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pm a_n z^n \tag{10.0}$$

(unde semnul $\pm$ se ia cu probabilitatea $\frac{1}{2}$), a fost deja cercetată de mult timp de către J.E.Littlewood şi A.C.Offord [63] .

De aceste probleme s-a ocupat şi A.Zygmind care a arătat că, aproape toate funcţiile din familia (9.0) ($Z_n(\omega)$ fiind variabile aleatoare independente supuse legii normale) aplică D într-o mulţime F aproape densă în C .

Ceva mai tîrziu, J.P.Kahane a demonstrat că, aproape toate funcţiile din această familie sînt surjective dacă

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| / \sqrt{n \log n} = \infty \tag{11.0}$$

Aceste rezultate le-a completat A.C.Offord 92 care a arătat că, în anumite condiţii de netezime pentru funcţiile de repartiţie ale variabilelor $Z_n(\omega)$ funcţia (9.0) în fiecare sector din D, aproape sigur ia valoarea zero de o infinitate de ori.

In încheierea acestei sumare treceri în revistă a unor rezultate obţinute în problemele de care ne ocupăm, ţinem să apreciem în mod deosebit monografia lui D.S.Mitrinović (colaborator P.M.Vasić [77], Berlin - Heidelberg - New York, 1970, care cuprinde multe probleme bine sistematizate, din domeniile amintite în această introducere.

In capitolul III al acestei lucrări se consideră mulţimea $\mathcal{H}^+$ a tuturor funcţiilor de forma

$$(12.0)\qquad f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n, \; a_n > 0, \; n=0,1,2,\ldots, \quad |z| < R \leq +\infty$$

şi a polinoamelor (complete) cu coeficienţi strict pozitivi.

Cu ajutorul unor funcţionale $\omega_k[f]$ $(k=0,1,2)$ este studiată problema localizării zerourilor unor combinaţii de funcţii din $\mathcal{H}^+$ folosind pentru aceasta şi unele dintre inegalităţile asupra polinoamelor trigonometrice întîlnite în cuprinsul capitolului I.

In §2 sînt prezentate proprietăţi ale funcţionalelor $\omega_k[f]$ care sînt folosite în paragrafele următoare.

In §3 , sînt considerate, printre altele, funcţiile de forma

$$(13.0)\qquad F(z) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{p_i} f_k^i(z), \quad \text{cu} \quad f_k^i \in \mathcal{H}^+ .$$

cu cazul particular remarcabil

$$(14.0)\qquad F_1(z) = \lambda_0 + \lambda_1 f_1^{p_1}(z) + \ldots + \lambda_m f_m^{p_2}(z) ,$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \quad f_k \in \mathcal{H}^+ , \; k=1,2,\ldots,m.$$

In § 4,5 , sînt analizate funcţiile de forma

$$(15.0)\qquad F_2(z) = \lambda_0 + \lambda_1 g_1(z) e^{f_1(z)} + \ldots + \lambda_p g_p(z)\, e^{f_p(z)}$$

$$\text{cu}\, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p \geq 0, \; g_k, f_k \in \mathcal{H}^+, \; k=1,2,\ldots,p.$$

Sînt considerate apoi cîteva cazuri speciale în care, printre funcţiile $g_k(z)$, $f_k(z)$ apar şi polinoamele

$$(16.0)\qquad E_n(z) = \sum_{0}^{n} \frac{z^k}{k!} , \; L_n(z) = 1 + \sum_{1}^{n} \frac{z^k}{k}$$

studiate din punct de vedere al zerourilor de către D.M. Simeunović în unele din lucrările sale 117 , 118 și de către alți matematicieni.

Pentru unele familii speciale de funcții (§5) se stabilesc limite fixe pentru modulele zerourilor.

In acest capitol, se demonstrează și unele teoreme prin care se stabilesc condiții suficiente de neanulare a funcțiilor $f\in\mathcal{H}^+$ sau a derivatelor lor, în domeniul $|z|<R$.

Paragraful 9, se ocupă pe scurt de limitarea modulelor zerourilor funcțiilor de forma

$$(17.0) \qquad g(z) = a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_{2n-1}z^{2n-1}$$

In capitolul IV sînt considerate funcțiile

$$(18.0) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \; c_n\in C, \quad n=0,1,2,\ldots, \; |z|<R$$

In § 1 sînt demonstrate unele teoreme generale referitoare la distribuția zerourilor funcțiilor f(z) de forma (18.0) și se dau două teoreme de aproximare a modulelor zerourilor.

In §2 sînt considerate funcțiile cu seria respectivă de formă lacunară

$$(19.0) \qquad g(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} z^{n_k}, \quad |z|<R$$

Si aici, printre problemele de limitare, se dau două teoreme de aproximare a modulelor zerourilor.

In ultimul paragraf, sînt considerate și funcțiile de forma

$$(20.0) \qquad h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n , \qquad R^*<|z|<R .$$

Ultimul capitol al acestei lucrări, intitulat "Aplicații" este alcătuit din două paragrafe.

In §1 sînt indicate cîteva din domeniile în care funcţiile de variabilă complexă îşi găsesc o largă utilizare şi unde, există deci, posibilitatea aplicării rezultatelor stabilite în capitolele III, IV.

In §2 se insistă ceva mai mult asupra aplicaţiilor în hidro-aerodinamică, unde, funcţiile de variabilă complexă joacă un rol important în studiul mişcărilor plane potenţiale staţionare ale fluidelor incompresibile (potenţialul complex, viteza complexă) şi în studiul profilelor aerodinamice.

Pentru mişcările plane irotaţionale, pentru care viteza complexă are una din formele

(21.0) $$w_1(z) = a_o+a_1 z + a_2 z^2 +\ldots+ a_n z^n +\ldots ,$$

$$a_n > o, \quad n = o,1,2 \ldots \quad |z| < R_{w_1}$$

(22.0) $$w_2(z) = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z_n + \ldots$$

$$c_n \in \mathbb{C} , \quad n= o,1,2,\ldots, \quad |z| < R_{w_2}$$

(23.0) $$w_3(z)=c_o + c_{n_1} z^{n_1} + c_{n_2} z^{n_2} +\ldots+ c_{n_p} z^{n_p} + \ldots$$

$$c_o > o, \quad c_{n_p} \in \mathbb{C} , \quad p = 1,2,\ldots, \quad |z|<R_{w_3} ,$$

se dau teoreme prin care eventualele puncte de stagnare în scurgerea fluidelor sînt localizate în coroane circulare.

CAP.I. INEGALITĂŢI ASUPRA POLINOAMELOR ŞI SERIILOR TRIGONOMETRICE DE O VARIABILA

§ 1. Generalităţi

Fie polinomul trigonometric notat

(1.1.1) $$T_n(x,\bar{a},\bar{b}) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k,\ b_k \in R ,$$

şi $$T_n(x,\bar{a},\bar{o}) = \sigma_n^{o}(x,\bar{a}) = a_o + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu x ,$$

$$T_n(x,\bar{o},\bar{b}) = \tau_n(x,\bar{b}) = \sum_{=1}^{n} b_\nu \sin \nu x$$

Mai introducem şi următoarele notaţii:

$$\tau_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} , \quad \sigma_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \nu x}{\nu}$$

$$\sigma_n^{o}(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \nu x}{\nu} , \quad \sigma_n(x,\bar{a}) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu x$$

$$\tau(x,\bar{b}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin \nu x , \quad \sigma(x,\bar{a}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$$

$$\sigma^{o}(x,\bar{a}) = a_o + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$$

Din literatura de specialitate ,[27], [28], [77], ş.a., sînt cunoscute inegalităţile:

(1.1.2) $$\sigma_n^{o}(x,\bar{a}) > o , \quad x \in \left]o,\pi\right[, \quad n \in N , \text{ cu condiţiile}$$

$$(A) \quad a_o \geq k\, a_k \geq (k+1)\, a_{k+1} > o, \quad k = 1,2,\ldots,n-1.$$

(1.1.3) $$\tau_n(x,\bar{b}) > o, \quad x \in \left]o,\pi\right[, \quad n \in N , \text{ cu condiţiile}$$

$$(B) \quad k b_k \geq (k+1) b_{k+1} > o, \quad k = 1,\ldots,n-1 ,$$

(1.1.4) $T_n(x,\bar{a},\bar{b}) > 0,\ x \in]0,\pi[\ ,\quad n \in \mathbb{N}$, cu condițiile

$$(C)\ \bar{a} = \bar{0}\ ,\ (2k-1)b_{2k-1} \geqslant (2k+1)b_{2k+1} > 0,\ k=1,2,\dots$$

Mulțimile formate cu polinoamele $\tau_n(x,\bar{b})$, $\sigma_n(x,\bar{a})$, $\sigma_n^0(x,\bar{a})$ și cu seriile corespunzătoare, pentru care au loc condițiile (A) și (B) , le notăm respectiv :

$$\mathcal{T}_s\ ;\ \mathcal{T}_c\ ;\ \mathcal{T}_c^0\ .$$

Reamintim și inegalitățile cunoscute (v. de ex. [7], [134])

(1.1.5) $\tau_n(x) > 0\ ,\ \forall\ x \in]0,\pi[\ ,\quad n \in \mathbb{N}$ (Fejér-Jackson)

(1.1.6) $\sigma_n^0(x) > 0\ ,\ x \in]0,\pi[\ ,\quad n \in \mathbb{N}$ (W.H.Young)

(1.1.7) $0 < \tau_n(x) < \pi - x\ ,\quad x \in]0,\pi[\ ,\ n \in \mathbb{N}$ (P.Turán)

§ 2. <u>Generalizarea inegalității Fejér- Jackson</u>

Vom demonstra în cele ce urmează, o teoremă care generalizează într-un anumit sens, inegalitatea (1.1.5).

<u>TEOREMA 1.2.1.</u> Dacă numerele b_k, $k=m, m+1,\dots m+n-1$ satisfac condițiile

$$kb_k \geqslant (k+1)\ b_{k+1} > 0,\quad k=m,\ m+1,\dots,m+n-2$$

atunci, are loc inegalitatea

(1.2.1) $$\sum_{k=m}^{m+n-1} b_k \sin kx > 0,\quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2m-1}\right[\ ,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

<u>Demonstrație:</u> Considerăm funcția auxiliară

(1.2.2) $$F_n(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(1+k\alpha)x}{1+k}\ ,\quad \alpha \in]0,1]$$

Se arată, fără dificultate că, minimele funcției $F_n(x,\alpha)$ în intervalul $\left]0,\frac{2\pi}{2-\alpha}\right[$ sînt pozitive, deoarece valorile funcţiei $F_{n-1}(x,\alpha)$ în punctele de minim ale funcţiei $F_n(x,\alpha)$. din acest interval, sînt pozitive.

In acest caz, dacă în plus are loc inegalitatea

$$(1.2.3) \qquad F_n\left(\frac{\pi}{2-\alpha},\alpha\right) \geqslant 0,$$

atunci, rezultă

$$(1.2.4) \qquad F_n(x,\alpha) > 0, \quad \forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2-\alpha}\right[.$$

De aici, tragem concluzia următoare:

Dacă pentru un număr real $\alpha \in]0,1]$ şi pentru un număr natural n_0 au loc inegalităţile:

$$(1.2.5) \qquad F_{n_0}(x,\alpha) > 0, \quad \forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2-\alpha}\right[, \; F_n\left(\frac{\pi}{2-\alpha},\alpha\right) \geqslant 0, \; \forall\, n \geqslant n_0$$

atunci, rezultă

$$(1.2.6) \qquad F_n(x,\alpha) > 0, \; \forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2-\alpha}\right[, \; \forall\, n \geqslant n_0 .$$

Această concluzie se poate exprima într-o formă echivalentă astfel:

Dacă pentru un număr real $\lambda \in [1, +\infty)$ şi pentru un număr natural n_0 există inegalitatea

$$(1.2.7) \qquad \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{\sin(\lambda+k)x}{\lambda+k} > 0, \qquad x \in \left]0, \frac{\pi}{2\lambda-1}\right[$$

şi dacă

$$(1.2.8) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda+k} \sin \frac{\lambda+k}{2\lambda-1}\pi \geqslant 0 \qquad \text{pentru } \forall\, n > n_0 ,$$

atunci,

$$(1.2.9) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\lambda+k)x}{\lambda+k} > 0, \; \forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2\lambda-1}\right[, \; \forall\, n \geqslant n_0 .$$

Facem în (1.2.7), (1.2.8), (1.2.9) $\lambda = m \in \mathbb{N}^*$. Luăm $n_0 = 1$

In acest caz (1.2.7) devine $\frac{\sin mx}{m} > 0$ care este adevărată în intervalul $\left]0, \frac{\pi}{2m-1}\right[$.

Conform cu propoziția de mai sus, este suficient să arătăm că (1.2.8) e adevărată, adică

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{m+k} \sin \frac{(m+k)\pi}{2m-1} \geq 0, \text{ pentru orice } n > 1 \tag{1.2.10}$$

Dar verificarea acestei inegalități nu prezintă nici o dificultate. Se iau în considerare două cazuri

1^o $m+n-1 = 2p(2m-1)+r$, $r=0, 1, \ldots, 2m-2$

2^o $m+n-1 = (2p+1)(2m-1)+r, r=0, 1, \ldots, 2m-2$

In primul caz, se deduce

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{m+k} \sin \frac{m+k}{2m-1}\pi \geq \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{2m-1-k} - \frac{1}{2m-1+k} - \frac{1}{4m-2-k}\right) \frac{\sin k\pi}{2m-1} \geq 0,$$

deoarece $\frac{1}{2m-1-k} - \frac{1}{2m-1+k} - \frac{1}{4m-2-k} \geq 0$, $k = \overline{1, n-1}$

In cazul 2^o , este mai ușor de stabilit (1.2.10).

Așadar, pentru $\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2m-1}\right[$, are loc inegalitatea

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{\sin kx}{k} > 0,\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2m-1}\right[,\ m,n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.11}$$

Inegalitatea (1.2.1) rezultă din (1.2.11), folosind și identitatea lui Abel:

$$\sum_{r=1}^{m} u_r v_r = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} v_i (u_k - u_{k+1}) + u_n \sum_{i=1}^{n} v_i \tag{1.2.12}$$

Astfel, teorema 1.2.1 este demonstrată.

Inegalitatea Fejér - Jackson (1.28) se deduce ca un caz particulr din (1.2.11) pentru m=1.

§ 3. Generalizarea şi rafinarea inegalităţii lui P.Turán.

TEOREMA 1.3.1. Dacă $\theta \in]0,\pi]$ şi $\tau_k(x,\bar{b}) \in \mathcal{T}_s$ $k=1,2,\dots,p$ atunci, are loc inegalitatea dublă.

$$0 < \tau_p(x,\bar{b}) < b_1(\omega_n(\theta)-x), \quad x \in]0,\theta[\tag{1.3.1}$$

$$p=1,2,\dots,n \quad \text{unde } \omega_n(\theta) = \max_{1\le k\le n} \{\tau_k(\theta) + \theta\}$$

Demonstraţie: Considerăm funcţia auxiliară

$$\delta_p(x) \overset{df}{=} \omega_n(\theta) - x - \tau_p(x), \quad p \le n \tag{1.3.2}$$

Pentru punctele de minim ale funcţiei $\delta_p(x)$,

$$\chi_\nu^p = (2\nu+1)\pi/p, \ \nu = 0,1,2,\dots, \quad \text{cu } (2\nu+1)\pi/p < \theta,$$

este evidentă următoarea egalitate

$$\delta_p(\chi_\nu^p) = \delta_{p-1}(\chi_\nu^p) \tag{1.3.3}$$

Tinînd seama că

$$\delta_p(0) \geqslant 0, \quad \delta_p(\theta) \geqslant 0, \quad p = 1,2,\dots,n \quad \text{şi că}$$

$$\delta_1(x) > 0, \quad \forall \ x \in]0,\theta[\ ,$$

din (3.3) rezultă prin inducţie că

$$\delta_p(x) > 0, \quad x \in]0,\theta[\ , p = 1,2,\dots,n .$$

Folosind acest rezultat şi ţinînd seama de (1.2.12), rezultă inegalitatea (1.3.1) şi teorema este demonstrată.

Remarcă. In cazul particular $\theta = \pi$, se observă că $\omega_n(\pi) = \pi$ şi dacă $b_k = 1/k$, se obţine din (1.3.1) inegalitatea (1.1.7) datorată lui P.Turán.

Din această teoremă deducem corolarele:

Corolar 1.3.1. Dacă $\tau(x,\bar{b}) \in \mathcal{T}_s$, atunci, are loc inegalitatea dublă

$$(1.3.4)\qquad 0<\mathcal{T}(x,\bar b)<a_1\,(\omega(\theta)-x)\,,\quad x\in\,]0,\theta[\,,$$

unde $\omega(\theta)=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{\mathcal{T}_n(\theta)+\theta\}$ $\qquad (\theta\leq\pi)$

Corolar 1.3.2. Dacă numerele $b_1, b_3, \ldots b_{2n-1}, \ldots$ satisfac inegalitățile $(2n-1)b_{2n-1}\geq(2n+1)b_{2n+1}>0$, $n=1,2,\ldots$ atunci, este satisfăcută inegalitatea dublă

$$(1.3.5.)\qquad 0<\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x<b_1(\omega(\theta)-\frac{\pi}{2})\;,\; x\in\,]0,\theta[$$

Pentru demonstrație, este suficient să observăm că

$$\sum_{k=1}^{n} b_{2k-1}\sin(2k-1)x=\frac{1}{2}\,(\mathcal{T}_{2n-1}(x,\bar b)+\mathcal{T}_{2n-1}(\pi-x,\bar b)$$

Se aplică apoi inegalitatea (1.3.1) și prin trecere la limită rezultă (1.3.5).

TEOREMA 1.3.2. Dacă $\mathcal{T}_n(x,b)\in\mathcal{T}_s$, atunci, pentru $\forall\, m\in\mathbb{N}^*$, are loc inegalitatea dublă

$$(1.3.6)\qquad 0<\mathcal{T}_n(x,\bar b)<b_1(\mathcal{T}_{m-1}(\frac{\pi}{m})+\frac{\pi}{m}-x),\quad x\in\,]0,\frac{\pi}{m}[$$

Demonstrație: Pentru $\theta=\frac{\pi}{m}$, valoarea lui ω este :

$$(1.3.7)\qquad \omega(\frac{\pi}{m})=\mathcal{T}_{m-1}(\frac{\pi}{m})+\frac{\pi}{m}\,.$$

Deoarece $\max\limits_{1\leq k\leq m}\{\mathcal{T}_k(\frac{\pi}{m})\}=\mathcal{T}_{m-1}(\frac{\pi}{m})$,

Considerăm cazul $n>m$. Se poate scrie

$$\mathcal{T}_n(\frac{\pi}{m})=\mathcal{T}_{m-1}(\frac{\pi}{m})+S_1+S_2+S_3+\ldots\,,$$

unde $$S_i=\sum_{k=1}^{p_i}\frac{(-1)^i}{k+m+i}\sin\frac{k\pi}{m}\qquad \text{și}$$

$p_1\leq m-1$, $p_1\geq p_2\geq p_3\geq\ldots$

Este evident că, dacă $1<p_i<m-1$, atunci S_{i+1} nu mai

apare, ultimul termen în suma $S_1+S_2+\ldots$, fiind S_i.

Deoarece $S_{2k-1}<o$, $S_{2k}>o$, $|S_{2k-1}|>S_{2k}$, rezultă că

$$S_1+S_2+\ldots+<o$$

şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Din această teoremă, folosind şi (1.2.12), avem

<u>Corolar 1.3.3.</u> Pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$, au loc inegalităţile:

$$(1.3.9)\qquad o<\tau(x,\bar b)<b_1\left(\omega_{m-1}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\frac{\pi}{m}-x\right),\quad (x,\bar b)\in\mathcal{J}_s,\quad x\in\left]o,\frac{\pi}{m}\right[$$

$$(1.3.10)\qquad o<\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x<b_1\left(\tau_{m-1}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{2}\right),$$

$\forall\, x\in\left]o,\frac{\pi}{m}\right[$, unde $(2n-1)b_{2n-1}\geqslant(2n+1)b_{2n+1}>o$, $n=1,2,\ldots$.

<u>Demonstraţie</u>: Inegalitatea (1.3.9) este evidentă;pentru (1.3.10), avem:

$$o<\sum_{1}^{n} b_{2k-1}\sin(2n-1)x=\frac{1}{2}\left(\tau_{2n-1}(x,\bar b)+\right.$$

$$\left.+\tau_{2n-1}(\pi-x,\bar b)\right)<b_1\left(\tau_{2m-1}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{2}\right)$$

Se face apoi $n\to\infty$.

Ţinînd seama de cele demonstrate mai sus, din punct de vedere grafic chestiunile se prezintă ca în fig.1.

Coordonatele punctului B_m, $m>2$, sînt:

$$x_m=\frac{\pi}{m},\quad y_m=\omega\left(\frac{\pi}{m}\right)-\frac{\pi}{m}=\tau_{m-1}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\frac{\pi}{m(m+1)}$$

Problema care se pune este dacă şirul (y_m) este crescător, în caz afirmativ, punctele B_m se află sub dreapta

$$y=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\ \left(=\lim_{m\to\infty} y_m\right)$$

Folosind formula

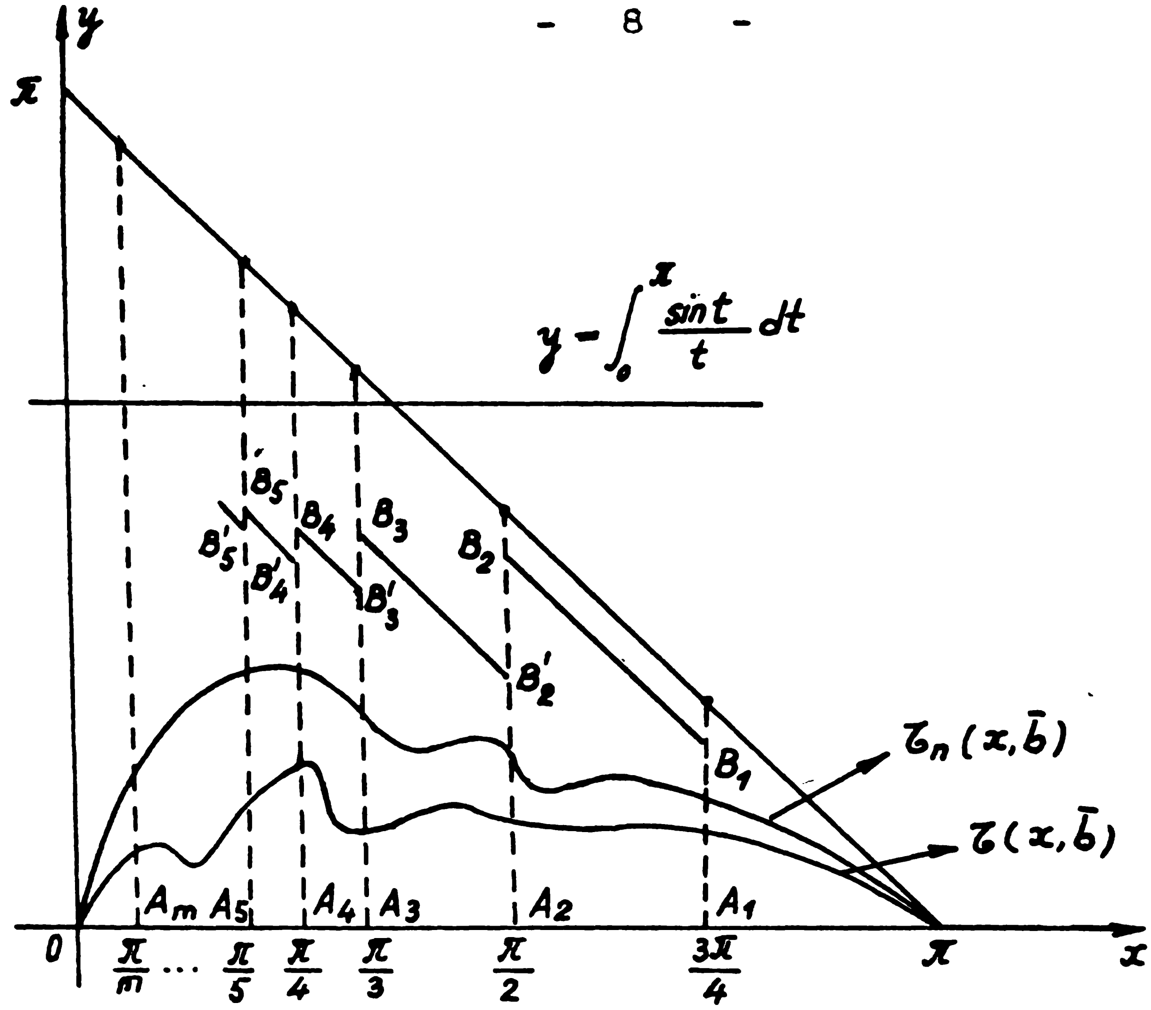

Fig. 1.

(1.3.11) $$\varphi(h) = \varphi(h+\delta) + \delta\varphi'(h+\delta) + \frac{1}{2}\delta^2\,\varphi''(\xi)\,,\quad \xi\in[h,h+\delta]$$

unde φ este o funcţie de două ori derivabilă pe $[h,\delta+h]$, se arată prin cîteva majorări succesive că

$$y_{m+1}-y_m = \tau_{m-1}\left(\frac{\pi}{m+1}\right)-\tau_{m-1}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\frac{1}{m}\sin\frac{\pi}{m+1}-\frac{2\pi}{m(m+1)(m+2)}\geq 0$$

de la un anumit rang m .

Astfel, după cum se poate observa pe figură,problema studiată mai sus, constituie o rafinare a inegalităţii

(1.3.12) $$0<\tau_n(x,\bar{b})<b_1\min\left(\pi-x\,,\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)\,,$$

x o,

Inegalitatea

(1.3.13) $$\left|\sum_1^n\frac{\sin kx}{k}\right|<\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt = 1,8519\ldots<\frac{\pi}{2}+1,\quad x\in\mathbb{R}$$

este datorată lui D.Jackson [52],[77].

§ 4. Generalizarea şi rafinarea unei inegalităţi a lui C.Hyltén - Cavallius

In acest paragraf vom stabili cîteva inegalităţi asupra polinomului trigonometric $\sigma_n(x)$.

TEOREMA 1.4.1. Polinomul $\sigma_n(x)$ satisface inegalitatea dublă

$$\frac{\cos nx + (-1)^{n+1}}{2n} - \alpha_n < \sigma_n(x) < \min(\varphi_n(x), \psi_n(x)) \tag{1.4.1}$$

$\forall\ x \in]0, \pi[$, unde s-a notat

$$\varphi_n(x) = -\ln \sin \frac{x}{2} + \frac{\pi - x}{2} - \alpha_n$$

$$\psi_n(x) = -2\ln \sin \frac{x}{2} + \frac{\cos nx + (-1)^{n+1}}{2n} - \alpha_n$$

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \ (> 0)$$

Pentru demonstraţie, dăm următoarele leme:

Lema 1.4.1. Polinomul $\sigma_n(x)$ verifică inegalităţile:

$$-1 < \sigma_n(x) - \ln \sin \frac{x}{2} + \frac{\pi - x}{2} - \alpha_n, \quad x \in]0, \pi[\tag{1.4.2}$$

Demonstraţie: Considerăm funcţia auxiliară

$$\varnothing_n(x) = \sigma_n(x) + \ln \sin \frac{x}{2} - \frac{\pi - x}{2} - \alpha_n, \quad x \in]0, \pi[\tag{1.4.3}$$

In punctele de maxim al funcţiei $\varnothing_n(x)$,

$$x_\nu^n = \frac{4\nu + 1}{2n}\pi, \ \nu = 0,1,2,\dots, \quad \text{aşa că} \quad 0 < x_\nu^n < \pi,$$

are loc egalitatea

$$\varnothing_n(x_\nu^n) = \varnothing_{n-1}(x_\nu^n) \tag{1.4.4}$$

care se verifică imediat.

Fie funcţia

$$\varnothing_1(x) = \cos x + \ln \sin \frac{x}{2} - \frac{\pi - x}{2} + 1$$

In punctul de maxim $x_0^1 = \frac{\pi}{2}$, avem $\varnothing_1(\frac{\pi}{2}) < 0$

Avem şi $\varnothing_1(\pi) < 0$, $\lim_{x \to 0+} \varnothing_1(x) = -\infty$. Rezultă

$$\phi_1(x) < 0, \quad \forall \; x \in \left]0, \pi\right[.$$

Din (1.4.4), folosind metoda inducţiei, rezultă

$$\phi_n(x) \leqslant 0, \; \forall \; x \in \left]0, \pi\right[$$

Lema este demonstrată.

Observaţie. Inegalitatea (1.4.2) constituie o rafinare a inegalităţii:

$$\sigma_n(x) < -\ln \sin \frac{x}{2} + \frac{\pi - x}{2} \tag{1.4.5}$$

datorată lui C.Hyltén - Cavallius [50], [77].

Lema 1.4.2. Polinomul $\sigma_n(x)$ satisface inegalităţile

$$\frac{\cos nx + (-1)^{n+1}}{2n} - \alpha_n \leqslant \sigma_n(x) < \psi_n(x) \; , \quad x \in \left]0, \pi\right[, \; n \in \mathbb{N} \tag{1.4.6}$$

Demonstraţie: Rezultă imediat din identitatea (1.4.7)

$$\sigma_n(x) = -\frac{1}{2}\int_x^{\pi} \cos nx \, \mathrm{ctg} \, \frac{x}{2} \, dx - \ln \sin \frac{x}{2} \tag{1.4.7}$$

care se stabileşte fără dificultate.

Demonstraţia teoremei rezultă din cele două leme.

In continuare, folosind rezultatele de mai sus, vom stabili şi alte inegalităţi.

TEOREMA 1.4.2. Pentru orice $x \in \left]0, \pi\right[$, $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea dublă

$$\max(\varphi_n^*(x), \tilde{\varphi}_n(x)) \leqslant \sum_1^n \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} \leqslant \tag{1.4.8}$$

$$\leqslant \min(\psi_n^*(x), \tilde{\psi}_n(x)) \; ,$$

unde
$$\tilde{\varphi}_n(x) = \frac{\cos(2n-1)x}{2(2n-1)} + \ln \cos \frac{x}{2}$$

$$\tilde{\psi}_n(x) = \frac{\cos(2n-1)x}{2(2n-1)} - \ln \sin \frac{x}{2}$$

$$\varphi_n^*(x) = \frac{1}{2}\left(\ln \cos \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \alpha_{2n-1} - 1\right)$$

$$\psi_n^*(x) = \frac{1}{2}\left(-\ln \sin \frac{x}{2} + \frac{\pi - x}{2} - \alpha_{2n-1} + 1\right)$$

Demonstrație: Avem

$$\sum_{1}^{n} \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{2n-1}(x) - \sigma_{2n-1}(\pi - x)\right)$$

și din (1.4.2) deducem

$$\varphi_n^{*}(x) < \sum_{1}^{n} \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} < \psi_n^{*}(x) \tag{1.4.9}$$

Din (1.4.6) deducem

$$\tilde{\varphi}_n(x) < \sum_{1}^{n} \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} < \tilde{\psi}_n(x) \tag{1.4.10}$$

Teorema e demonstrată.

TEOREMA 1.4.3. Dacă $\sigma^{o}(x,\bar{a}) \in \mathcal{T}_c^{o}$, atunci au loc inegalitățile:

$$0 \leq \sigma^{o}(x,\bar{a}) \leq a_0\left(-\ln \sin \frac{x}{2} + \frac{\pi - x}{2} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.4.11}$$

$$-\frac{1}{2} a_1\left(-\ln \cos \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \leq \sum_{1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1) \leq \tag{1.4.12}$$

$$\leq \frac{1}{2} a_1\left(-\ln \sin \frac{x}{2} + \frac{\pi - x}{2} + \frac{1}{2}\right), \ \forall \ x \in]0,\pi[$$

Demonstrație. Din (1.4.2) deducem

$$0 < \sigma_n^{o}(x) < -\ln \sin \frac{x}{2} + \frac{\pi - x}{2} + \frac{1}{2}, \quad x \in]0,\pi[\ n \in \mathbb{N} \tag{1.4.13}$$

iar de aici rezultă și:

$$0 < \sigma_n^{o}(x,\bar{a}) < a_0\left(-\ln \sin \frac{x}{2} + \frac{\pi - x}{2} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.4.14}$$

Astfel, inegalitatea (1.4.11) este stabilită.

In (1.4.11) se face schimbarea $x \to \pi - x$, se înmulțește inegalitatea astfel obținută cu -1 și se adună apoi la (1.4.11). Rezultă (1.4.12).

Teorema este demonstrată.

CAP.II. INEGALITATI ASUPRA POLINOAMELOR TRIGONOMETRICE DE MAI MULTE VARIABILE

§ 1. Ecuaţii funcţionale generatoare de inegalităţi asupra polinoamelor trigonometrice

In acest paragraf, se prezintă schema generală, de deducere a unor inegalităţi asupra polinoamelor trigonometrice de mai multe variabile, utilizînd inegalităţi relative la polinoamele trigonometrice de o variabilă.

Pentru o prezentare unitară, se foloseşte o ecuaţie funcţională şi se demonstrează o teoremă asupra unei clase de soluţii ale acestei ecuaţii.

Fie ecuaţiile funcţionale

(2.1.1) $$f(z-x,z-y) - f(x,y) = f(z,z-x-y)$$

(2.1.2) $$f(z-x,z-y) + f(x,y) = f(z,z-x-y)$$

In [86], [148], se demonstrează că, soluţiile ecuaţiilor (2.1.1), (2.1.2), în clasa funcţiilor local integrabile, sînt de forma

(2.1.3) $$f(x,y) = \varphi(x-y) - \varphi(x+y) \quad \text{respectiv}$$

(2.14) $$f(x,y) = \tilde{\varphi}(x-y) + \hat{\varphi}(x+y)$$

în care, φ este o funcţie local integrabilă pară, iar $\hat{\varphi}$ este o funcţie local integrabilă, impară.

Notăm $\mathcal{C}_0(p,q)$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei (2.1.1) care satisfac inegalitatea dublă

(2.1.5) $$p(x) \leq f(\theta,x) \leq q(x) \ , \ \forall \ x \in [0,\theta]$$

unde p şi q sînt două funcţii definite pe $[0,\theta]$.

Notăm $\mathcal{C}_0'(\rho,\delta)$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei (2.1.1) pentru care f(x;x) este derivabilă pe $(0,\theta)$ şi

(2.1.6) $$\rho(x) \leq f_y'(x,0) \leq \delta(x) \ , \quad \forall \ x \in [0, 2\theta] \ .$$

ρ, δ fiind două functii continue pe $[0, 2\theta]$.

Cu notațiile următoare

(2.1.7) $$\lambda(\alpha,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)dt, \quad \Lambda(\alpha,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(t)dt$$, avem

<u>TEOREMA 2.1.1.</u> Dacă $f \in \mathcal{C}_{\theta}(p,q) \cap \mathcal{C}_{\theta}^{\prime}(\rho,\delta)$, atunci au loc inegalitățile următoare

(2.1.8) $$\frac{1}{2}\lambda(x-y,\ x+y) \leq f(x,y) \leq \frac{1}{2}\Lambda(x-y,\ x+y),$$

$$(x,y) \in [0,\theta]^2, \quad x+y \leq \theta, \quad x \geq y$$

(2.1.9) $$\frac{1}{2}\lambda(y-x,\ 2\theta-x-y) + p(x+y-\theta) \leq f(x,y) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\Lambda(y-x,\ 2\theta-x-y) + q\,(x+y-\theta),$$

$$(x,y) \in [0,\theta]^2, \quad x+y \geq \theta, \quad y \geq x.$$

Reciproc, dacă f este o soluție a ecuației (2.1.1) și verifică (2.1.8) și (2.1.9), atunci $f \in \mathcal{C}_{\theta}(p,q) \cap \mathcal{C}_{\theta}^{\prime}(\rho,\delta)$

<u>Demonstrație</u>: Dacă f este soluție a ecuației (2.1.1) atunci

(2.1.10) $$f(x,y) = \varphi(x-y) - \varphi(x+y),$$

cu φ, funcție pară derivabilă pe $(0, 2\theta)$ și

$$f_y^{\prime}(x,0) = -2\varphi^{\prime}(x)$$

Se integrează (2.1.6) pe $[\alpha,\beta] = [0,\theta]$ și făcînd apoi schimbările $x+y = \beta$, $x-y = \alpha$, rezultă (2.1.8).

Fie acum $(x,y) \in [0,\theta]^2$, $x+y \geq \theta$. Punem

$$\xi = \theta - x, \quad \eta = \theta - y, \quad \xi + \eta \leq \theta.$$

Conform cu (2.1.8), avem

(2.1.11) $$\frac{1}{2}\lambda(\xi-\eta,\ \xi+\eta) \leq f(\xi,\eta) \leq \frac{1}{2}\Lambda(\xi-\eta,\ \xi+\eta) \quad (\xi > \eta)$$

Ținînd seama că f verifică ecuația (2.1.1) avem:

(2.1.12) $$\frac{1}{2}\lambda(\xi-\eta, \xi+\eta) \leq f(\theta-\xi,\ \theta-\eta) - f(\theta, \theta-\xi-\eta) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\Lambda(\xi-\eta,\xi+\eta)$$

adică,

(2.1.13) $$\frac{1}{2}\lambda(\xi-\eta,\xi+\eta) + f(\theta,\theta-\xi-\eta) \leq f(\theta-\xi,\theta-\eta) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\Lambda(\xi-\eta,\xi+\eta) + f(\theta,\theta-\xi-\eta).$$

Ţinînd seama de (2.1.5) avem

$$p(\theta-\xi-\eta) \leq f(\theta,\theta-\xi-\eta) \leq q(\theta-\xi-\eta)$$

Revenind la $\xi=\theta-x$, $\eta=\theta-y$, din (2.1.13) rezultă (2.1.9).

Reciproc: Dacă în (2.1.9) luăm y=0, se obţine (2.1.5) şi deci $f\in \mathcal{C}_\theta(p,q)$.

Dacă în inegalitatea (2.1.8) împărţim în ambii membri cu $y\neq o$ şi facem apoi $y\to o$, obţinem:

$$\frac{1}{2}\lim_{y\to o}\frac{1}{y}\int_{x-y}^{x+y}\rho(t)\,dt \leq \lim_{y\to o}\frac{f(x,y)-f(x,o)}{y-o} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\lim_{y\to o}\frac{1}{y}\int_{x-y}^{x+y}\delta(t)\,dt\ ,\ x\in[o,\theta]\ ;$$

adică $\rho(x) \leq f'_y(x,o) \leq \delta(x)$, $\forall\, x\in[o,\theta]$

şi deci $f\in \mathcal{C}'_\theta(\rho,\delta)$. Q.E.D.

Corolar 2.1.1. Dacă $f\in \mathcal{C}_\theta(p,q)\cap \mathcal{C}'_\theta(\rho,\delta)$ şi au loc inegalităţile

(2.1.14) $$p(x) \geq \frac{1}{2}\int_{\theta-x}^{\theta+x}\rho(t)dt\ ,\ q(x) \leq \frac{1}{2}\int_{\theta-x}^{\theta+x}\delta(t)dt,$$

$$x\in[o,\theta]$$

atunci are loc inegalitatea

(2.1.15) $$\frac{1}{2}\lambda(y-x,\ x+y) \leq f(x,y) \leq \frac{1}{2}\Lambda(y-x,\ x+y)\ ,$$

$$\forall\,(x,y)\in[o,\theta]^2\ ,\quad y\geq x\ .$$

Demonstraţie : Inegalitatea (2.1.15) coincide cu (2.1.8) Fie $(x,y)\in[o,\theta]^2$, $x+y\geq\theta$.

Avem, ţinînd seama de (2.1.14)

$$\frac{1}{2}\lambda(y-x,\ 2\theta-x-y) + p(x+y-\theta) \geqslant \frac{1}{2}\lambda(y-x, 2\theta-x-y) +$$

$$+ \frac{1}{2}\lambda(2\theta-x-y,\ x+y) = \frac{1}{2}\lambda(x-y,\ x+y)$$

De asemenea,

$$\frac{1}{2}\Lambda(y-x, 2\theta-x-y) + q(x+y-\theta) \leqslant \frac{1}{2}\Lambda(y-x, 2\theta-x-y) +$$

$$+ \frac{1}{2}\Lambda(2\theta-x-y, x+y) = \frac{1}{2}\Lambda(y-x, x+y)$$

Se poate arăta că şi reciproc , adică inegalitatea (2.1.15) implică inegalităţile (2.1.14).

Corolar 2.1.2. Dacă $f \in \mathcal{C}'_{\theta}(\rho, \delta)$ astfel încît $f(\theta, x) \equiv 0$, $\forall\ x \in [o,\ \theta]$, atunci există inegalităţile :

(2.1.16) $$\frac{1}{2}\lambda(x-y,\ x+y) \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{1}{2}\Lambda(x-y, x+y)$$

$$(x,y) \in [o, \theta]^2 ,\ x+y \leqslant \theta,\ x > y.$$

(2.1.17) $$\frac{1}{2}\lambda(y-x, 2\theta-x-y) \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{1}{2}\Lambda(y-x, 2\theta-x-y)$$

$$(x,y) \in [o, \theta]^2 ,\ x+y \geqslant \theta,\ y > x$$

Reciproc, din (2.1.17) rezultă $f(\theta, x) \equiv o, x \in [o, \theta]$

Demonstraţie: In acest caz, se pot lua

$p(x) \equiv q(x) = o, \quad x \in [o, \theta]$, căci $f(\theta, x) \equiv o$.

Pentru reciprocă, este suficient să luăm $y=0$ în (2.1.17) şi avem

$$\frac{1}{2}\lambda(\theta-x,\ \theta-x) = \frac{1}{2}\Lambda(\theta-x,\ \theta-x) = o$$

Corolar 2.1.3. Dacă f este o soluţie a ecuaţiei (2.1.1) pentru care sînt satisfăcute condiţiile

(2.1.18) $$f(\theta, x) \geqslant o, \quad x \in [o, \theta],$$

(2.1.19) $$f'_y\ (x, o) \geqslant o, x \in [o, \theta]$$

atunci, are loc inegalitatea

$$f(x,y) \geq 0, \quad (x,y) \in [0,\theta]^2 \tag{2.1.20}$$

Reciproc, din (2.1.20) rezultă (2.1.18) şi (2.1.19).

Remarcă. Dacă se consideră ecuaţia funcţională (2.1.2), se poate stabili pentru anumite soluţii ale ei, o teoremă analogă cu teorema 2.1.1., şi se pot, de asemenea, deduce corolare corespunzătoare.

In cele ce urmează, vom aplica aceste rezultate la extinderea unor inegalităţi trigonometrice de o variabilă, la alte inegalităţi, în mai multe variabile.

Introducem notaţiile:

$$T_n(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\sin kx_\nu}{k} \tag{2.1.21}$$

$$T_n(x_1,\ldots,x_m,\bar{b}) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{m} b_k \frac{\sin kx_\nu}{k}, \quad b_k \in \mathbb{R} \tag{2.1.22}$$

Facem observaţia importantă că polinomul

$$T_n(x_1,x_2,\bar{b}) = \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\sin kx_1}{k} \cdot \frac{\sin kx_2}{k} \tag{2.1.23}$$

este o soluţie a ecuaţiei (2.1.1), ceea ce rezultă imediat din scrierea

$$T_n(x_1,x_2,\bar{b}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{2} \cdot \frac{\cos k(x_1-x_2)}{k} - \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\cos k(x_1+x_2)}{k} \tag{2.1.23'}$$

Mai general, observăm că următoarea funcţie

$$\emptyset(x,y) = \sum_{1}^{n} b_k \frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k} \cdot \frac{\sin \alpha_k y}{\alpha_k}, \quad \text{cu } \alpha_k \in \mathbb{R}, \tag{2.1.24}$$

este soluţie a ecuaţiei funcţionale (2.1.1).

§ 2. Generalizarea unei inegalităţi a lui Fejér.

TEOREMA 2.2.1. Dacă sînt îndeplinite condiţiile

$$(2.2.1)\quad \sum_1^n b_k \frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k} \geq 0\ , \qquad \forall\, x \in [0,\ \theta]\ .$$

$$(2.2.2)\quad \sum_1^n b_k \frac{\sin \alpha_k \theta}{\alpha_k}\,\frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k} \geq 0, \qquad \forall\, x \in [0,\ \theta]$$

atunci, are loc inegalitatea

$$(2.2.3)\quad \sum_1^n b_k \frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k}\,\frac{\sin \alpha_k y}{\alpha_k} \geq 0\ , \qquad \forall\ (x,y) \in [0,\theta]^2$$

Reciproc, inegalitatea (2.2.3) implică inegalităţile (2.2.1), (2.2.2).

Demonstraţie: Rezultă imediat prin aplicarea corolarului 2.1.3.

Inegalităţilor (2.2.1), (2.2.2) şi (2.2.3) le corespund inegalităţile (2.1.18), (2.1.19), (2.1.20).

Drept cazuri particulare mai importante sînt pentru $\alpha_k = k$, $\alpha_k = 2k-1$.

Cazul $\alpha_k = k$ şi $\theta = \pi$, este remarcabil şi el corespunde următoarei teoreme a lui Fejér [4] :

Inegalitatea

$$(2.2.4)\qquad T_n(x_1,\bar{b}) = \sum_{k=1}^n b_k \frac{\sin kx_1}{k} \geq 0 \quad \text{pentru } \forall\ x_1 \in [0,\pi]$$

are loc, dacă şi numai dacă are loc inegalitatea

$$(2.2.5)\qquad T_n(x_1,x_2,\bar{b}) = \sum_{k=1}^n b_k \frac{\sin kx_1}{k}\,\frac{\sin kx_2}{k} \geq 0\ ,\quad (x_1,x_2) \in [0,\pi]^2$$

TEOREMA 2.2.2. Dacă $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$, atunci

$$(2.2.6)\qquad T_n(x_1,x_2,\ldots,x_m,\bar{b}) > 0, \quad \forall\ (x_1,\ldots,x_m) \in]0,\pi[^m$$

Demonstraţie: Fie inegalitatea (2.1.3.)

$$T_n(x_1,\ \bar{b}\ ) > 0,\quad x_1 \in\ ]0,\pi[$$

Din teorema lui Fejér amintită mai sus, rezultă

$$(2.2.7)\qquad T_n(x_1,x_2,\bar{b}) > 0,\quad (x_1,x_2) \in\ ]0,\pi[^2\ .$$

Aplicată această teoremă succesiv inegalităţii (2.2.7) şi următoarelor care se obţin, rezultă cu uşurinţă inegalitatea (22.6).

In legătură cu această inegalitate, facem în continuare, citeva observaţii:

Observaţii: 1° In [34] inegalitatea (2.2.6) a mai fost demonstrată în cazul $b_1=b_2=\dots=b_n=1$ (v. şi [77]), dar cu condiţia suplimentară $x_1+x_2+\dots+x_n<\pi$

2° In condiţiile

(2.2.8) $$b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_n > 0$$

$$b_{2k} \leq \frac{2k-1}{2k} b_{2k-1} \quad (1 \leq k \leq [\tfrac{n}{2}])$$

L.Vietoris (v. de ex. [77]), stabileşte inegalităţile:

(2.2.9) $$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx > 0, \quad \sum_{k=0}^{n} b_k \cos kx > 0, \qquad 0 < x < \pi .$$

In condiţiile (2.2.8), (2.2.8'), acelaşi autor stabileşte şi inegalitatea

(2.2.10) $$\sum_{k=1}^{n} \Big(k b_k \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\sin kx}{k}\Big) > 0$$

pentru $x_\nu \in [0,\pi[$, $\nu = 1,\dots,m$, $\sum_{1}^{m} x_\nu < \pi$

Aşa cum rezultă din teorema 2.2.2, inegalitatea (2.2.10) are loc cu singura condiţie (2.2.8) $\forall\, x_1,x_2,\dots,x_m \in]0,\pi[$.

§ 3. Extinderea unei inegalităţi a lui P.Turán

In cele ce urmează, ne vom ocupa de inegalitatea [77], [133]:

(2.3.1) $$0 < 4 \sin^2 \frac{x}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\pi - x}{2}\right) < \zeta_n(x) < \pi - x , \quad x \in]0,\pi[.$$

Reamintim şi inegalitatea (1.3.13)

(2.3.2) $$|\zeta_n(x)| < \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = A = 1,8519\ldots (< \frac{\pi}{2}+1) \quad x \in \mathbb{R}$$

BUPT

TEOREMA 2.3.1. Dacă numerele $b_1, b_2, \dots b_n$ satisfac condiţiile $b_\nu \geq \dots b_{\nu+1} \geq 0$, $\nu = 1,2,\dots, n-1$, atunci, au loc inegalităţile

(2.3.3) $$0 < T_n(x_1,\dots x_m,\bar{b}) < b_1 \min(Ax_2\dots x_m, (\pi - x_1)x_2\dots x_m)$$

$$\forall\ (x_1,\dots x_m) \in \left]0, \pi\right[^m$$

(2.3.4) $$\left| T_n(x_1,\dots x_m,\bar{b}) \right| < b_1 A \left| x_2 \dots x_m \right|$$

dacă $(x_1, x_2 \dots x_m) \in \mathbb{R}^m$

Demonstraţie: Din (2.3.1) rezultă şi

(2.3.5) $$0 < T_n(x,\bar{b}) < b_1(\pi - x)$$

Se aplică apoi teorema (2.1.1) succesiv şi rezultă

(2.3.6) $$0 < T_n(x_1,\dots x_m,\bar{b}) < b_1(\pi - x_1)\ x_2\dots x_m$$

$$\forall\ (x_1,\dots,x_m) \in \left]0, \pi\right[^m .$$

Din (2.3.2) rezultă şi

(2.3.7) $$T_n(x,\bar{b}) < b_1 A\ , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicînd acestei inegalităţi teorema 2.1.1, se obţine inegalitatea :

(2.3.8) $$T_n(x_1,\dots x_m,\bar{b}) < b_1 A\ x_2\dots x_m\ ,\ (x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^m$$

Din (2.3.6) şi (2.3.8) rezultă (2.3.3) şi (2.3.4) ,Q.E.D.

Corolar 2.3.1. Dacă $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{2n-1} > 0$, atunci are loc inegalitatea:

(2.3.9) $$0 < \left| \sum_{k=1}^{n} b_{2k-1} \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \right| < b_1 A \left| x_2 \dots x_m \right|$$

$$\forall\ (x_1,\dots x_m) \in \mathbb{R}^m$$

Demonstraţie: Se consideră (2.3.3), pentru $n \to 2n-1$

şi se face schimbarea $x_1 \longrightarrow \pi - x_1$. Adunînd (2.3.3) cu inegalitatea astfel obţinută, rezultă (2.3.9).

<u>Corolar 2.3.2.</u> Dacă $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots > 0$, atunci sînt verificate inegalităţile:

$$(2.3.10) \qquad 0 < \sum_{n=1}^{\infty} b_n \prod_{k=1}^{m} \frac{\sin nx_k}{n} < b_1 \min(Ax_2,\ldots x_m, (\pi - x_1)x_2\ldots x_m)$$

$$\forall\,(x_1,\ldots x_m) \in \,]0,\pi[^m$$

$$(2.3.11) \qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n \prod_{k=1}^{m} \frac{\sin nx_k}{n}\right| < b_1 A \left|x_2\ldots x_m\right|$$

$$\forall\,(x_1,\ldots x_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$(2.3.12) \qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \prod_{k=1}^{m} \frac{\sin(2n-1)x_k}{2n-1}\right| < b_1 A \quad \left|x_2\ldots x_m\right|,$$

$$\forall\,(x_1,\ldots x_m) \in \mathbb{R}^m$$

<u>Demonstraţie:</u> Inegalităţile (2.3.3), (2.3.4), (2.3.9) au loc pentru orice n. Rezultă (2.3.10), (2.3.11), (2.3.12) .

CAP.III. STUDIU ASUPRA LOCALIZARII ZEROURILOR FUNCTIILOR ANALITICE DIN $\mathcal{H}^+$

§ 1. Introducere. In acest capitol vor fi utilizate unele inegalităţi asupra polinoamelor trigonometrice de o variabilă întîlnite în Cap. I. (cunoscute sau demonstrate), în rezolvarea unor probleme relative la localizarea zerourilor funcţiilor analitice.

Reamintim astfel:

(3.1.1) $\tau_n(x) > 0,\ x \in]0,\pi[,\ n \in \mathbb{N}$ (Fejér - Jackson)

(3.1.2) $\sigma_n^0(x) > 0,\ x \in]0,\pi[,\ n \in \mathbb{N}$ (W.H.Young)

(3.1.3) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} > 0,\ x \in]0,\pi[,\ n \in \mathbb{N}$$

(3.1.4) $$\tau_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(m+k)x}{m+n} > 0,\ x \in]0,\ \frac{\pi}{2m-1}[,\ m,n \in \mathbb{N}$$

Inegalităţile (3.1.1) şi (3.1.3) sînt cuprinse în inegalitatea 84 :

(3.1.5) $$\sum_{1}^{p} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + \varepsilon \sum_{1}^{q} \frac{\sin 2kx}{2k} > 0,$$

$$0 < x < \pi,\quad -1 \leq \varepsilon \leq 1,\quad q = p \ \text{ sau } \ p-1 .$$

Prin $\mathcal{H}^+$ notăm clasa funcţiilor de forma:

(3.1.6) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\quad |z| < R \ \ (\text{sau } R_f),\ \text{ unde}$$

$a_n > 0$, $n=0,1,2,\dots$, sau $a_n > 0$, $n=0,1,2,\dots,m$, $a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = 0$ (m-arbitrar)

(3.1.7) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,\ c_n \in \mathbb{C},\ n = 0,1,2,\dots,\ |z| < R ,$$

introducem următoarele notaţii:

$$\bar{\omega}_p[f]= \inf_{n\geq 1} \frac{n}{n+p+1} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \quad , \quad p = -1,0,1,2,\ldots,$$

$$\omega_0[f]=\bar{\omega}_0[f] \ , \ \omega_s[f]= \min\left(\frac{1}{s} \left|\frac{c_0}{c_1}\right|, \omega_0[f] \right) \ , \ s=1,2$$

$$\nu[f] = \bar{\omega}_{-1}[f]$$

Mai notăm $\mathcal{H}_0^+$ şi $\mathcal{H}_1^+$ mulţimile de funcţii din $\mathcal{H}^+$ de forma (3.1.6), care nu se anulează în $|z|<R$ şi respectiv, care nu admit zerouri complexe în $|z|<R$.

Mulţimea zerourilor complexe pentru f(z), din $|z|<R$ o notăm cu $\mathcal{Z}_f^c$, iar mulţimea tuturor zerourilor, cu $\mathcal{Z}_f$

In cele ce urmează, se întreprinde un studiu asupra unor limite inferioare ale modulelor zerourilor funcţiilor din $\mathcal{H}^+$ şi ale unor combinaţii de astfel de funcţii.

Se obţin cîteva rezultate în acest sens, din care se deduc şi condiţii suficiente pentru care funcţiile respective nu se anulează în interiorul cercului de convergenţă al seriilor pe care le reprezintă.

§ 2. Proprietăţi ale funcţionalelor $\omega_k[f]$ (sau $\omega_k[f(z)]$).

Lema 3.2.1. Funcţionalele $\omega_k : \mathcal{H}^+ \longrightarrow R_+^0$, k=0,1,2, satisfac următoarele proprietăţi:

(3.2.1) $\quad \omega_0[f]\geq\omega_1[f]\geq\omega_2[f]\geq 0, \quad \forall f\in\mathcal{H}^+$

(3.2.2) $\quad \omega_k[\alpha f] = \omega_k[f] , \quad \forall \alpha\in R_+, \quad \forall f\in\mathcal{H}^+$

(3.2.3) $\quad \omega_k[f(z)+\beta]\geq\omega_k[f], \quad \forall \beta\geq 0, \forall f\in\mathcal{H}^+$

(3.2.4) $\quad \omega_k[f+g]\geq \min(\omega[f],\omega[g]) \ , \quad f,g\in\mathcal{H}^+.$

(3.2.5) $\quad \dfrac{1}{\omega_k[fg]} \leq \dfrac{1}{\omega_0[f]} + \dfrac{1}{\omega_k[g]} \ , \ f, g\in\mathcal{H}^+, \quad k=1,2 .$

Demonstraţie: Proprietăţile (3.2.1) , (3.2.2), (2.2.3) sînt evidente. Pentru demonstrarea inegalităţii (3.2.4) este suficient să se facă apel la inegalitatea cunoscută.

$$(3.2.6)\qquad \min_{i=\overline{1,p}}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{p} d_i a_i\right)/\left(\sum_{i=1}^{p} d_i b_i\right)\leqslant\max_{i=\overline{1,p}}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$$

care are loc, oricare ar fi sistemele numerice $(a_1,a_2\ldots a_p)$, $(b_1,b_2,\ldots,b_p)$, $(d_1,d_2,\ldots d_p)$ cu $a_k,b_k,\ {}_k\ o$, $k=1,2,\ldots p$.

Pentru (3.2.5) folosim de asemenea inegalităţile (3.2.6).

Fie $f(z)=\sum\limits_{o}^{\infty} a_n z^n$, $g(z)=\sum\limits_{o}^{\infty} b_n z^n$, $h(z)=f(z)q(z)=\sum\limits_{n}^{\infty} c_n z^n$

Avem:

$$\frac{c_o}{c_1}\geqslant\min\left(t\,\frac{a_o}{a_1},(1-t)\,\frac{b_o}{b_1}\right)\geqslant\min(t\omega_1[f],\ (1-t)\omega_1[g]),\ \forall\ t\in[o,1]$$

$$\frac{nc_n}{(n+1)c_{n+1}}\geqslant\min\left(t\,\frac{n}{n+1}\,\frac{a_n}{a_{n+1}},\ (1-t)\,\frac{n}{n+1}\,\frac{b_o}{b_1},\ \frac{n}{n+1}\,\frac{b_1}{b_2},\ldots\frac{n}{n+1}\,\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)$$

$$\geqslant\min\ (t\omega_o[f],\ (1-t)\omega_2[g]\ ),\qquad t\in[o,1].$$

Deducem de aici

$$(3.2.7)\qquad \omega_k\ [f.g]\geqslant\min(t\omega_k[f],\ (1-t)\omega_2[g]),\ k=o,1,t\in[o,1]$$

şi evident,

$$(3.2.8)\qquad \omega_k[f.g]\geqslant\sup_{t\in[o,1]}\min\ (t\omega_k[f],\ (1-t)\omega_2[g]),\ k=o,1$$

Punctul $t_o\in[o,1]$, pentru care este atins sup de mai sus, este dat de egalitatea

$$t\omega_k[f]\ =\ (1-t)\omega_2[g]\ .$$

Obţinem astfel inegalitatea

$$(3.2.9)\qquad \omega_k\ [f.g]\geqslant\frac{\omega_k[f]\omega_2[g]}{\omega_k[f]+\omega_2[g]},\qquad k=1,o$$

şi (3.2.5) este demonstrată.

Această inegalitate, va juca un rol important în problemele care urmează.

Corolar 3.2.1. Pentru $\forall\ f,g \in \mathcal{H}^+$, există inegalitatea

$$\frac{1}{\omega_s[f\cdot g]} \leq \min\left(\frac{1}{\omega_s[f]} + \frac{1}{\omega_2[g]} , \frac{1}{\omega_s[g]} + \frac{1}{\omega_2[f]} \right), \qquad s=0,1 \tag{3.2.10}$$

Demonstrație : Rezultă din proprietatea (3.2.5)

Corolar 3.2.2. Pentru $f_1, f_2, \ldots, f_p \in \mathcal{H}^+$ și $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$
$\ldots \alpha_p \in \mathbb{R}_+$ are loc inegalitatea.

$$\omega_s\left[\sum_1^p \alpha_k f_k\right] \geq \min_{k=\overline{1,p}} (\omega_s[f_k]) , \qquad s=0,1,2. \tag{3.2.11}$$

Demonstrație: Rezultă imediat din (3.2.2) și (3.2.4)

Corolar. 3.2.3. Dacă $f_1, f_2, \ldots f_p \in \mathcal{H}^+$, atunci există inegalitatea

$$\frac{1}{\omega_s[f_1 f_2 \ldots f_p]} \leq \min_{(i_k)} \left(\frac{1}{\omega_s[f_{i_1}]} + \frac{1}{\omega_s[f_{i_2}]} + \ldots + \frac{1}{\omega_2[f_{i_p}]} \right), \qquad s=0,1, \tag{3.2.12}$$

iar minimul se ia în raport cu toate permutările (i_k) ale numerelor $1,2,\ldots p$.

Demonstrație: Inegalitatea (3.2.12) se deduce din inegalitatea (3.2.10) prin asocierea produsului $f_1, f_2, \ldots, f_p$.

Corolar 3.2.4. Pentru orice $f \in \mathcal{H}^+$ și $p \in \mathbb{N}$, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{\omega_s[f^p]} \leq \frac{1}{\omega_s[f]} + \frac{p-1}{\omega_2[f]} , \qquad s = 0,1. \tag{3.2.13}$$

Demonstrație: Rezultă din (3.2.12) cu $f_1=f_2=\ldots=f_p$.

Lema 3.2.2. Fie sistemele de funcții din $\mathcal{H}^+$ $(f_1^1, f_2^1, \ldots, f_{p_1}^1), \ldots (f_1^m, f_2^m, \ldots, f_{p_m}^m)$. Are loc inegalitatea

$$1/\omega_s\left[\sum_{i=1}^m \prod_{k=1}^{p_i} f_k^i\right] \leq \tag{3.2.14}$$

$$\max_{1\leq i\leq m} \left\{ \min_{(k_p)} \left(\frac{1}{\omega_s[f_{k_1}]} + \frac{1}{\omega_2[f_{k_2}^i]} + \ldots + \frac{1}{\omega_2[f_{k_{p_i}}^i]} \right) \right. \qquad s=0,1$$

în care minimul se ia în raport cu toate permutările

$(k_1, k_2, \dots, k_{p_i})$ ale numerelor $1,2,\dots,p_i$, $i=\overline{1,m}$.

Lema este demonstrată.

§ 3 . Limitarea modulelor zerourilor unor combinaţii de funcţii din $\mathcal{H}^+$

Cu pregătirea din § 2, trecem acum la studiul amintit la începutul acestui capitol.

Lema 3.3.1. Pentru orice $f \in \mathcal{H}^+$, $z_0 \in \mathcal{Z}_f$, $z_0^1 \in \mathcal{Z}_f^c$, au loc inegalităţile

(3.3.1) $$|z_0| \geqslant \omega_1[f], \quad |z_0'| \geqslant \omega_0[f].$$

Demonstraţie: Cu notaţiile $z = re^{i\varphi}$ şi

(3.3.2) $$K_n(r,\varphi,\bar{a}) = \delta_0(r) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \delta_\nu(r)\sigma_\nu^0(\varphi)r^\nu + na_n r^n \sigma_n^0(\varphi)$$

(3.3.3) $$I_n(r,\varphi,\bar{a}) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \delta_\nu(r)\tau_\nu(\varphi)r^\nu + na_n r^n \tau_n(\varphi)$$

unde $\delta_0(r) = a_0 - a_1 r$, $\delta_\nu(r) = \nu a_\nu - (\nu+1)a_{\nu+1}$, $= 1,2,\dots$

avem

(3.3.4) $$\operatorname{Re} f(z) = \lim_{n\to\infty} K_n(r,\varphi,\bar{a}), \quad \operatorname{Im} f(z) = \lim_{n\to\infty} I_n(r,\varphi,\bar{a})$$

Impunem condiţiile $\delta_\nu(r) > 0$, $\nu = 1,2,\dots$ şi ţinînd seama de inegalităţile (3.1.1), (3.1.2), rezultă $\operatorname{Im} f(z) > 0$, $\forall \varphi \in]0,\pi[$ şi deci are loc prima inegalitate (3.3.1).

Pentru un zero real, se ţine seama de expresia lui $K_n(r,\varphi,\bar{a})$ şi făcînd aceleaşi consideraţii, rezultă a doua inegalitate (3.3.1).

Observaţie: Pentru o funcţie de forma

$$f(z) = a_0 - a_1 z + a_2 z^2 - a_3 z^3 + \dots, \quad a_n > 0, \ n = 0,1,2,\dots$$

rezultatul de mai sus rămîne valabil (e suficientă schimbarea $z \to -z$).

Din lema de mai sus, rezultă imediat

Corolar 3.3.1. Dacă şirul $(na_n/(n+1)a_{n+1})_{n\geq 1}$ este m.d. atunci $\mathcal{Z}_f^c = \emptyset$. Dacă în plus $a_0/a_1 \geqslant R$, atunci $\mathcal{Z}_f = \emptyset$

($\emptyset$ - mulţimea vidă).

TEOREMA 3.3.1. Dacă pentru $f\in\mathcal{H}^+$, există un număr natural m, aşa încît şirul $(ka_k/(k+1)a_{k+1})_{k\geq m}$, este m.d., atunci $f(z)\neq 0$ în domeniul

$$\mathcal{D}_m : |z|<R\ ,\ -\pi/(2m+1) < \arg z < \pi/(2m-1)$$

Demonstraţie: pentru f(z), avem:

$$\operatorname{Im} f(z) = \sum_{\nu=1}^{m-1} a_\nu r^\nu \sin\nu\varphi + \lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{\nu=0}^{n-2}\delta_{\nu+m}(r)\tau_{m,\nu}(\varphi)r^{\nu+m} +$$

$$+ (m+n-1)a_{m+n-1}r^{m+n-1}\ \tau_{m,n-1}(\varphi)\Big]$$

Dacă $z\in\mathcal{D}_m$, atunci $\operatorname{Im} f(z)>0$. Intr-adevăr, $\tau_{m,\nu}(\varphi)>0$ (v.(3.1.4)), $\varphi\in\left]0,\frac{\pi}{2m-1}\right[$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ şi cum şirul $(ka_k/(k+1)a_{k+1})_{k\geq m}$ este monoton descrescător, rezultă că pentru $\forall\ r<R$, $(r>0)$, avem

$$ka_k-(k+1)a_{k+1}r > 0, \quad k = m,m+1,\ldots$$

adică

$$\delta_{\nu+m}(r)>0, \quad \nu = 0,1,2,\ldots$$

Teorema e demonstrată.

Dăm mai jos o teoremă generală referitoare la zerourile unei anumite combinaţii de funcţie din $^+$.

TEOREMA 3.3.2. Fie m sisteme de funcţii din $\mathcal{H}^+$ $(f_1^1, f_2^1, \ldots, f_{p_1}^1)$, ... $(f_1^m, f_2^m, \ldots f_{p_m}^m)$ şi fie funcţia

$$F(z) = \sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{p_i} f_k^i(z)\ ,\quad 0\leq|z|<R_F\leq +\infty \tag{3.3.5}$$

Dacă $z_0\in\mathcal{Z}_F$ şi $z_0'\in\mathcal{Z}_F^c$, atunci avem

$|z_0|\geq L_1$ şi $|z_0'|\geq L_0$ unde s-a notat

$$L_s = 1/\max_{1\leq i\leq m}\left\{\min_{(k_r)}\left(\frac{1}{\omega_s[f_{k_1}^i]}+\frac{1}{\omega_2[f_{k_2}^i]}+\ldots+\frac{1}{\omega_2[f_{k_{p_i}}^i]}\right)\right. , \tag{3.3.6}$$

$s = 1,0$

Demonstraţie: Conform cu lema 3.3.1 funcţia F(z) nu se anulează în domeniul $|z|<\omega_1[F]$ şi nu admite zerouri complexe în domeniul $|z|<\omega_o[F]$.

Din lema 3.2.2, rezultă evident

$$\omega_s[F] \geq L_s , \quad s = 1,o .$$

Deci, f(z) nu s anulează în domeniul $|z|< L_1$ şi nu admite zerouri complexe în domeniul $|z|< L_o$.

Teorema e demonstrată.

TEOREMA 3.3.3. Fie $f \in \mathcal{H}^+$ şi numerele naturale $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Oricare ar fi constantele pozitive $\lambda_o , \lambda_1 , \ldots \lambda_n$, funcţia

$$F(z) = \lambda_o + \lambda_1 f^{p_1}(z) + \lambda_2 f^{p_2}(z) + \ldots + \lambda_n f^{p_n}(z) , \tag{3.3.7}$$

nu se anulează în domeniul

$$|z| < \frac{\omega_1[f]\omega_2[f]}{(p_n-1)\omega_1[f]+\omega_2[f]} \tag{3.3.8}$$

şi nu admite zerouri complexe în domeniul

$$|z| < \frac{\omega_o[f]\omega_2[f]}{(p_n-1)\omega_o[f]+\omega_2[f]} \tag{3.3.9}$$

Demonstraţie: Conform cu corolarul 3.2.2 , avem

$$\omega_s[F] \geq \min(\omega_s[f^{p_1}], \omega_s[f^{p_2}], \ldots \omega_s[f^{p_n}]), \quad s=1,o \tag{3.3.10}$$

Conform cu corolarul 3.2.4 , avem

$$\frac{1}{\omega_s[f^{p_k}]} \leq \frac{1}{\omega_s[f]} + \frac{p_k-1}{\omega_2[f]} , \text{ care se mai scrie} \tag{3.3.11}$$

$$\omega_s[f^{p_k}] \geq \frac{\omega_s[f]\omega_2[f]}{(p_k-1)\omega_s[f]+\omega_2[f]} , \quad s = 1, o \tag{3.3.12}$$

Se observă că minimul din (3.3.2) este atins cu k=n. Avem deci,

$$\omega_s[F] \geq \frac{\omega_s[f]\omega_2[f]}{(p_n-1)\omega_s[f]+\omega_2[f]} , \quad s = 1, o .$$

şi cum $F(z)$ nu se anulează în $|z|<\omega_1[F]$ şi nu admite zerouri complexe în $|z|<\omega_o[F]$, teorema e demonstrată.

Mai general, teorema poate fi enunţată sub forma următoare (demonstraţia rămînînd aceeaşi):

TEOREMA 3.3.4. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{H}^+$ şi $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Funcţia

(3.3.13) $$F_1(z) = \lambda_o + \lambda_1 f_1^{p_1}(z) + \lambda_2 f_2^{p_2}(z) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_n f_n^{p_n}(z), \lambda_o, \ldots \lambda_n > 0$$

nu se anulează în domeniul

(3.3.14) $$|z| < \min_k \frac{\omega_1[f_k]\omega_2[f_k]}{(p_k-1)\omega_1[f_k] + \omega_2[f_k]}$$

şi nu admite zerouri complexe în domeniul

(3.3.15) $$|z| < \min_k \frac{\omega_o[f_k]\omega_2[f_k]}{(p_k-1)\omega_o[f_k] + \omega_2[f_k]}$$

TEOREMA 3.3.5. Fie p funcţii $f_1, f_2, \ldots, f_p \in \mathcal{H}^+$, notate

(3.3.16) $$f_k(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n^{(k)} z^n, \quad 0 \leq |z| < R_{f_k} \leq +\infty, \quad k=1,2,\ldots$$

Dacă toate şirurile $(na_n^{(k)}/(n+1)a_{n+1}^{(k)})_{n\geq 1}$, $k=1,2,\ldots p$ sînt monoton descrescătoare, atunci, oricare ar fi constantele pozitive $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$, funcţiile de forma

(3.3.17) $$\phi(z) = \lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z) + \ldots + \lambda_p f_p(z), |z| < R_\phi$$

aparţine mulţimii $\mathcal{H}_1^+$.

Dacă, în plus $a_o^{(k)}/a_1^{(k)} \geq R_{f_k}$, $k = 1, \ldots p$, atunci $\phi(z) \in \mathcal{H}_o^+$.

Demonstraţie: Avem inegalitatea

$$\omega_s[\phi] \geq \min(\omega_s[f_1], \ldots \omega_s[f_p]), \quad s = 1, o.$$

Dacă şirurile $(na_n^{(k)} / (n+1)a_{n+1}^{(k)})_{n\geq 1}$ sînt monoton descrescătoare, atunci

$$\omega_0[f_k] = R_{f_k} \quad , \quad k = 1,2,\ldots,p$$

In acest caz,

(3.3.18) $\quad \omega_0[\emptyset] \geq \min(R_{f_1}, R_{f_2}, \ldots R_{f_p}) = R_\emptyset \Rightarrow \omega_0[\emptyset] = R_\emptyset$

şi deci, mulţimea $\mathcal{Z}_\emptyset^c$ nu conţine nici un element. Dacă în plus $a_0^{(k)}/a_1^{(k)} \geq R_{f_k}$, în acest caz

(3.3.18') $\quad \omega_1[\emptyset] \geq \min(\omega_1[f_1], \ldots \omega_1[f_p]) = R_\emptyset \Rightarrow \omega_1[\emptyset] = R_\emptyset$

si deci, mulţimea $\mathcal{Z}_\emptyset$ este mulţimea vidă.

<u>TEOREMA 3.3.6.</u> Fie $f \in \mathcal{H}^+$, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, $|z| < R_f$, Dacă există $p \in \mathbb{N}$, astfel încît, să fie satisfăcute condiţiile

(3.3.19) $\quad \min\limits_{0\leq n\leq p} \dfrac{a_n}{(n+1)a_{n+1}} \geq R_f$

(3.3.20) $\quad$ şirul $\left(\dfrac{n}{n+p+1} \dfrac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}}\right)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător

atunci, $f(z), f'(z), \ldots f^{(p)}(z) \in \mathcal{H}_0^+$.

<u>Demonstraţie</u>: Notăm $r_k = a_k/a_{k+1}$, $k = 0,1,2,\ldots$ Avem:

$$\omega_1[f] = \inf\left(r_0, \frac{1}{2} r_1, \frac{2}{3} r_2, \ldots, \frac{p}{p+1} r_p, \frac{p+1}{p+2} r_{p+1}, \frac{p+2}{p+3} r_{p+2}, \ldots\right)$$

$$\omega_1[f'] = \inf\left(.., \frac{1}{2} r_1, \frac{1}{3} r_2, \ldots, \frac{p-1}{p+1} r_p, \frac{p}{p+2} r_{p+1}, \frac{p+1}{p+3} r_{p+2}, \ldots\right)$$

$$\omega_1[f''] = \inf\left(.,.., \frac{1}{3} r_2, \ldots, \frac{p-2}{p+1} r_p, \frac{p-1}{p+2} r_{p+1}, \frac{p}{p+3} r_{p+2} \quad \ldots\right)$$

. . . .

. . . .

$$\omega_1[f^{(p-1)}] = \inf\left(\ldots, \frac{r_{p-1}}{p}, \frac{1}{p+1} r_p, \frac{2}{p+2} r_{p+1} \frac{3}{p+3} r_{p+2} \ldots\right)$$

$$\omega_1[f^{(p)}] = \inf\left(.,\ldots\ldots, \frac{1}{p+1} r_p, \frac{1}{p+2} r_{p+1}, \frac{2}{p+3} r_{p+2}, \ldots\right)$$

Din acest tablou, în ipoteza condiţiilor (3.3.19), (3.3.2(se deduce fără dificultate că

$$\omega_1[f] = \omega_1[f'] = \omega_1[f''] = \ldots = \omega_1[f^{(p)}] = R$$

Teorema este demonstrată.

§ 4. Studiu asupra localizării zerourilor unor funcţii de forma $F(z) = \lambda_o + \lambda_1 g_1(z)e^{f_1(z)} + \ldots + \lambda_p g_p(z)e^{f_p(z)}$

In acest paragraf vom considera funcţiile de forma

$$F(z) = \lambda_o g_o(z) + \lambda_1 g_1(z)e^{f_1(z)} + \ldots + \lambda_p g_p(z)e^{f_p(z)} \tag{3.4.1}$$

în care $g_k(z)$, $f_k(z)$ sînt funcţii de o formă specială, în particular, polinoame de o anumită structură.

In cîteva lucrări, matematicianul D.M.Simeunović tratează problema limitării modulelor zerourilor unor polinoame particulare.

Astfel, în [118], se găsesc limite inferioare şi superioare pentru modulele zerourilor polinoamelor

$$E_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} \tag{3.4.2}$$

De această problemă, se ocupă şi matematicienii G.Polya şi G. Szegö .

In [117] D.M.Simeunović se ocupă, de asemenea, de zerourile funcţiilor de forma

$$L_n(z) = 1 + \frac{z}{} + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n} \tag{3.4.3}$$

In cele ce urmează, se stabilesc limite pentru modulele zerourilor unor funcţii de o formă complicată, în care apar, printre altele , şi polinoamele de forma (3.4.2), (3.4.3) drept cazuri particulare.

In paragraful 5, ne ocupăm mai mult de aceste cazuri particulare.

Dăm în prealabil două teoreme generale. Considerăm funcţia

$$\emptyset(z) = \lambda_o + \lambda_1 e^{p_1(z)} + \ldots + \lambda_m e^{p_m(z)} \tag{3.4.4}$$, unde

$$p_s(z) = a_1^s z + a_2^s z^2 + \ldots + a_{p_s}^s z^{p_s} ,$$

cu $a_k^s \geqslant o$, $k = \overline{2,p}$, $a_1^s > o$, $s = \overline{1,m}$.

<u>TEOREMA 3.4.1.</u> Fie $z_o \in \mathcal{L}_\emptyset$. Dacă sînt satisfăcute condițiile

(3,4.5) $$a_1^s \geqslant \max_{2\leq k\leq p_s} \sqrt[k]{k!a_k^s} \quad , \; s = 1,2,\ldots m \text{ sau}$$

(3.4.5') $$a_1^s \geqslant \max \left(\sqrt{2a_2^s} \;,\; \frac{a_3^s}{a_2^s} \;,\; \frac{a_4^s}{a_3^s} \;,\; \ldots \frac{a_{p_s}^s}{a_{p_s-1}^s}\right)$$

(cînd $p_s(z)$ e nelacunar), atunci are loc inegalitatea

(3.4.6) $$|z_o| \geqslant \min_{1\leq s\leq m} \frac{1}{2^{p_s-1} a_1^s}$$

Dacă polinoamele $p_s(z)$ sînt lacunare (sau o parte dintre ele) atunci, în inegalitatea (3.4.6) , p_s se înlocuiește cu numărul termenilor polinomului.

Pentru demonstrație, dăm mai întîi

<u>Lema 3.4.1.</u> Fie $f \in \mathcal{H}^+$, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ și funcția

$$\varphi(z) = b_o + b_1 z^p + b_2 z^{p+h} + \ldots + b_n z^{p+(n-1)h} + \ldots, \; b_n > o \;,\; n=o,1,$$

Dacă sînt satisfăcute condițiile

(3.4.7) $$\frac{a_o}{a_p} \leq \frac{b_o}{b_1} \;,\; \frac{a_o}{a_p} \leq \inf_{n\geqslant 1} \frac{b_n}{b_{n+1}}$$

atunci, are loc inegalitatea

(3.4.8) $$\omega_1[f\varphi] \geqslant \frac{1}{2}\,\omega_1[f]$$

<u>Demonstrație:</u> Avem evident $\varphi f \in \mathcal{H}^+$ și fie

$$f(z)\varphi(z) = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots =$$

$$= a_o b_o + a_1 b_o z + \ldots + a_{p-1} b_o z^{p-1} +$$

$$+ (a_o b_1 + a_p b_o) z^p + (a_1 b_1 + a_{p+1} b_o)\, z^{p+1} + \ldots + \ldots$$

Deducem inegalitățile:

$$\frac{c_o}{c_1} = \frac{a_o}{a_1} \geqslant \omega_1 [f]$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2}\,\frac{a_1}{a_2} > \omega_o[f]$$

. . . .

$$\frac{p-2}{p-1}\,\frac{c_{p-2}}{c_{p-1}} = \frac{p-2}{p-1}\,\frac{a_{p-2}}{a_{p-1}} \geqslant \omega_1[f]$$

$$\frac{p-1}{p}\,\frac{c_{p-1}}{c_p} = \frac{1}{2}\,\frac{p-1}{p}\,\frac{a_{p-1}b_o + a_{p-1}b_o}{a_o b_1 + a_p b_o} \geqslant \frac{1}{2}\,\omega_o[f],$$

deoarece $\dfrac{a_{p-1}}{a_o b_1}$ $\dfrac{a_{p-1}}{a_p}$ (vezi (3.4.7))

$$\frac{p}{p+1}\,\frac{c_p}{c_{p+1}} = \frac{p}{p+1}\,\frac{a_o b_1 + a_p b_o}{a_1 b_1 + a_{p+1} b_o} \geqslant \min\left(\frac{1}{2}\,\frac{a_o}{a_1}, \frac{p}{p+1}\,\frac{a_p}{a_{p+1}}\right)$$

$$\geqslant \omega_2[f]$$

$$\frac{p+h-1}{p+h}\,\frac{c_{p+h-1}}{c_{p+h}} = \frac{p+h-1}{p+h}\,\frac{\frac{1}{2}a_{h-1}b_1 + \frac{1}{2}a_{h-1}b_1 + a_{p+h-1}b_o}{a_o b_2 + a_h b_1 + a_{p+h}b_o} \geqslant$$

$$\geqslant \min\left(\frac{1}{2}\,\frac{p+h-1}{p+h}\,\frac{a_{h-1}b_1}{a_o b_2}, \frac{1}{2}\,\frac{p+h-1}{p+h}\,\frac{a_{h-1}}{a_h}, \frac{p+h-1}{p+h}\,\frac{a_{p+h-1}}{a_{p+h}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \min\left(\frac{1}{2}\,\frac{h-1}{h}\,\frac{a_{h-1}}{a_h}, \frac{p+h-1}{p+h}\,\frac{a_{p+h-1}}{a_{p+h}}\right) \geqslant \frac{1}{2}\,\omega_o[f]$$

deoarece, $\dfrac{p+h-1}{p+h}\,\dfrac{a_{h-1}}{a_h} \geqslant \dfrac{h-1}{h}\,\dfrac{a_{h-1}}{a_h}$ şi

$$\frac{a_{h-1}b_1}{a_o b_2} \geqslant \frac{a_{h-1}}{a_h} \quad \text{(vezi (3.4.7))}$$

$$\frac{p+h}{p+h+1}\,\frac{c_{p+h}}{c_{p+h+1}} = \frac{p+h}{p+h+1}\,\frac{a_o b_2 + a_h b_1 + a_{p+h}b_o}{a_1 b_2 + a_{h+1}b_1 + a_{p+h+1}b_o} \geqslant$$

$$\geqslant \min\left(\frac{1}{2}\,\frac{a_o}{a_1}, \frac{h}{h+1}\,\frac{a_h}{a_{h+1}}, \frac{p+h}{p+h+1}\,\frac{a_{p+h}}{a_{p+h+1}}\right) \geqslant \omega_2[f].$$

. . . .

$$\frac{p+2h-1}{p+2h}\,\frac{c_{p+2h-1}}{c_{p+2h}} = \frac{p+2h-1}{p+2h}\,\frac{a_{h-1}b_2 + a_{2h-1}b_1\ a_{p+2h-1}b_o}{a_o b_3 + a_h b_2 + a_{2h}b_1 + a_{p+2h}b_o} \geqslant$$

$$\geqslant \min\left(\frac{1}{2}\,\frac{p+2h-1}{p+2h}\,\frac{a_{h-1}b_2}{a_o b_3}, \frac{1}{2}\,\frac{p+2h-1}{p+2h}\,\frac{a_{h-1}}{a_h},\right.$$

$$\frac{p+2h-1}{p+2h}\,\frac{a_{2h-1}}{a_{2h}}\,,\ \frac{p+2h-1}{p+2h}\,\frac{a_{p+2h-1}}{a_{p+2h}}\ )\geqslant$$

$$\geqslant \min\left(\frac{1}{2}\,\frac{h-1}{h}\,\frac{a_{h-1}}{a_h}\,,\ \frac{2h-1}{2h}\,\frac{a_{2h-1}}{a_{2h}}\,,\ \frac{p+2h-1}{p+2h}\,\frac{a_{p+2h-1}}{a_{p+2h}}\right)\geqslant \frac{1}{2}\,\omega_o[f]$$

deoarece $\frac{p+2h-1}{p+2h} > \frac{h-1}{h}$ şi $\frac{2h-1}{2h}$ iar

$$\frac{a_{h-1}b_2}{a_o b_3} \geqslant \frac{a_{h-1}}{a_h} \Leftrightarrow \frac{a_o}{a_h} \leqslant \frac{b_2}{b_3} \qquad \text{(vezi (3.4.7))}$$

ş.a.m.d, lema este demonstrată.

Inainte de a trece la demonstrarea teoremei 3.4.1., dăm mai jos încă o lemă necesară pentru cele ce urmează.

Lema 3.4.2. Dacă pentru funcţiile f şi φ considerate mai sus sînt satisfăcute condiţiile (3.4.7) şi

$$(3.4.9)\qquad \omega_2\,[f]\leqslant \min\left(\frac{1}{2}\,\frac{p-1}{p}\,\frac{a_{p-1}}{a_p}\,,\ \frac{1}{2}\,\frac{h-1}{h}\,\frac{a_{h-1}}{a_h}\right)$$

atunci, are loc inegalitatea

$$(3.4.10)\qquad \omega_2\,[f\varphi]\geqslant \omega_2\,[f]$$

Demonstratie: Este suficientă urmărirea pas cu pas a demonstraţiei lemei 3.4.1.

Corolar 3.4.1. Fie functiile $f, \psi \in \mathcal{H}^+$, notate $f(z) = \sum_{o}^{\infty} a_n z^n$, $\psi(z) = \sum_{o}^{\infty} b_n z^n$. Dacă sînt satisfăcute condiţiile

$$(3.4.11)\qquad \frac{a_o}{a_p} \leqslant \inf_{n\geqslant o} \frac{b_n}{b_{n+1}}$$

atunci, are loc inegalitatea

$$(3.4.12)\qquad \omega_s\,[f(z)\cdot\varphi(z^p)]\geqslant \frac{1}{2}\,\omega_s[f]\,,\quad s = 1,o.$$

Demonstraţie: Rezultă din lema 3.4.1, punînd p = h .

Corolar 3.4.2. Fie functiile $f,\psi\in\mathcal{H}^+$ considerate anterior. Dacă este satisfăcută condiţia (3.4.11) şi următoarea condiţie

$$(3.4.13)\qquad \omega_2\,[f]\leqslant \frac{1}{2}\,\frac{p-1}{p}\,\frac{a_{p-1}}{a_p}$$

atunci, are loc inegalitatea

$$\omega_2\left[f(z)\,\psi(z^p)\right] \geqslant \omega_2\left[f\right] \tag{3.4.14}$$

Demonstrație: Rezultă din lema 3.4.2 luînd h=p .

Observație: Lemele demonstrate mai sus rămîn valabile și dacă f și φ (respectiv ψ) sînt polinoame din $\mathcal{H}^+$ (sau polinom și serie) cu singura condiție

$$\text{grad } f(z) \geqslant \max(p,h)$$

Demonstrația teoremei 3.4.1. Fie, deci, functia

$$\phi(z) = \sum_{0}^{m} \lambda_s \varphi_s(z) , \quad \text{unde am notat } \varphi_s(z) = e^{p_s(z)}$$

s=1,2,...m, $\varphi_0(z) \equiv 1$. Avem inegalitatea

$$\omega_1[\phi] \geqslant \min_s \omega_1[\varphi_s(z)]$$

Fie

$$\varphi_s(z) = e^{a_1^s z + a_2^s z^2 + \dots + a_{p_s}^s z^{p_s}} =$$

$$= \left(1 + \frac{a_1^s}{1!} z + \frac{(a_1^s)^2}{2!} z^2 + \frac{(a_1^s)^3}{3!} z^3 + \dots\right) .$$

$$\left(1 + \frac{a_2^s}{1!} z^2 + \frac{(a_2^s)^2}{2!} z^4 + \dots\right) . \left(1 + \frac{a_3^s}{1!} z^3 + \frac{a_3^s}{2!} z^6 + \dots\right) ..$$

$$\dots \left(1 + \frac{a_{p_s}^s}{1!} z^{p_s} + \frac{(a_{p_s}^s)}{2!} z^{2p_s} + \dots\right)$$

Considerăm produsul primelor două serii. Condiția (3.4.11) devine (p=2)

$$\frac{1}{\frac{(a_1^s)}{2!}} \leqslant \inf_{n \geqslant 0} \frac{(a_2^s)^n}{n!} \Big/ \frac{(a_2^s)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{a_2^s}$$

de unde rezultă $a_1^s \geqslant \sqrt{2a_2^s}$.

Aplicînd lema 3.4.1 , avem

$$\omega_1\left[e^{a_1^s z} . e^{a_2^s z^2}\right] \geqslant \frac{1}{2}\omega_1\left[e^{a_1^s z}\right] = \frac{1}{2a_1^s}$$

Mai departe, efectuînd produsul primelor trei serii, observăm că în seria produs, coeficientul lui z^3, notat $k_2(z^3)$, conține termenul $\frac{(a_1^s)^3}{3!}$.

Condiția (3.4.11) în acest caz devine:

$$\frac{1}{k_2(z^3)} \leqslant \frac{1}{\frac{(a_1^s)^3}{3!}} \leqslant \inf_{n \geqslant 0} \frac{(a_3^s)^n}{n!} \Big/ \frac{(a_3^s)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{a_3^s}$$

de unde rezultă $a_1^s \geqslant \sqrt[3]{3!\ a_3^s}$.

In acest caz

$$\omega_1\left[e^{a_1^s z} \cdot e^{a_2^s z^2} \cdot e^{a_3^s z^3}\right] \geqslant \frac{1}{2}\,\omega_1\left[e^{a_1^s z} \cdot e^{a_2^s z^2}\right] \geqslant \frac{1}{2^2}\,\frac{1}{a_1^s}$$

Continuînd acest procedeu, se obține pentru

$$a_1^s \geqslant \max_{2 \leqslant k \leqslant p_s} \sqrt[k]{k!\ a_k^s}$$

adică tocmai condițiile (3.4.5) din teoremă.

In acest caz, avem pînă la urmă,

$$\omega_1\left[\varphi_s(z)\right] \geqslant \frac{1}{2^{p_s - 1}\, a_1^s}$$

Cele demonstrate mai sus, rămîn valabile și dacă au loc condițiile (3.4.5) (cînd polinomul $p_s(z)$ e complet) deoarece:

$$k_2(z^3) = \frac{(a_1^s)^3}{3!} + \frac{a_1^s}{1!}\,\frac{a_2^s}{1!} \quad \text{și deci} ,$$

$$\frac{1}{k_2(z_3)} \leqslant \frac{1}{a_1^s\ a_2^s} \leqslant \frac{1}{a_3^s} \Rightarrow a_1^s \geqslant \frac{a_3^s}{a_2^s}$$

Tot astfel se întîmplă, în continuare, cu ceilalți coeficienți din următoarele serii produs.

In cazul cînd polinoamele $p_s(z)$ sînt lacunare, ($a_1^s > 0$, $a_k^s \geqslant 0$, $k = \overline{2, p_s}$) , teorema rămîne , de asemenea valabilă cu condițiile (3.4.5) așa cum rezultă prin aplicarea lemei 4.3.1. Prin înlocuirea lui p_s, gradul lui $p_s(z)$ cu numărul termenilor lui $p_s(z)$, limita stabilită pentru zerouri, se îmbunătățește evident.

De asemenea, dacă are loc condiția (3.4.9) din lema 4.3.2., limita stabilită se îmbunătățește, așa cum vom vedea pe unele cazuri particulare remarcabile.

Să considerăm acum funcțiile de forma

(3.4.15) $$H(z) = f_o(z) + f_1(z)e^{p_1(z)} + \dots + f_m(z).e^{p_m(z)}$$

unde $p_k(z)$ sînt polinoame de forma

$$p_k(z) = a_1^k z + a_2^k z^2 + \dots + a_{p_k}^k z^{p_k},\ k=1,2,\dots m$$

iar $f_k \in \mathcal{H}^+$, $k=o,\dots,m$ ($p_o(z) \equiv 1$).

Referitor la zerourile lui $H(z)$, avem:

TEOREMA 3.4.2. Dacă ptpolinoamele $p_s(z)$ sînt satisfăcute condițiile (3.4.5) (sau (3.4.5') cînd $p_s(z)$ e complet), atunci, dacă $z_o \in \mathcal{Z}_H$, are loc inegalitatea

(3.4.16) $$|z_o| \geq \min_{s=\overline{1,m}} \left(\omega_1[f_o],\ \frac{\omega_2[f_s]}{1+2^{p_s-1} a_1^s \omega_2[f_s]} \right)$$

Dacă $p_s(z)$ este lacunar, p_s din (3.4.16) se înlocuiește cu numărul termenilor lui $p_s(z)$.

Demonstrație: Din (3.4.15) deducem

$$\omega_1[H] \geq \min_{s=\overline{1,m}} \left(\omega_1[f_o],\ \omega_1\left[f_s(z)e^{p_s(z)}\right] \right)$$

Pentru $f, g \in \mathcal{H}^+$ reamintim inegalitatea

$$\omega_1[fg] \geq \max \left(\frac{\omega_2[f]\omega_1[g]}{\omega_2[f]+\omega_1[g]},\ \frac{\omega_1[f]\omega_2[g]}{\omega_1[f]+\omega_2[g]} \right)$$

Avem:

$$\omega_1\left[f_s(z)\,e^{p_s(z)}\right] \geq \frac{\omega_2[f_s]\omega_1\left[e^{p_s(z)}\right]}{\omega_2[f_s] + \omega_1\left[e^{p_s(z)}\right]}$$

Dar, din demonstrația Teoremei 3.4.1., s-a obținut inegalitatea:

$$\omega_1\left[e^{p_s(z)}\right] \geq \frac{1}{2^{p_s-1} a_1^s}$$

Deci,

$$\omega_1\left[f_s(z)\,.e^{p_s(z)}\right] \geq \frac{\omega_2[f_s](1/2^{p_s-1}a_1^s)}{\omega_2[f_s] + 1/2^{p_s-1}a_1^s} = \frac{\omega_2[f_s]}{1+2^{p_s-1}a_1^s\omega_2[f_s]}$$

și teorema este demonstrată.

In continuare, vom considera cîteva cazuri particulare , pe care le considerăm mai interesante .

§ 5. Studiu asupra localizării zerourilor unor funcţii de o formă specială. Familii de funcţii cu limite fixe.

Introducem pentru cele ce urmează, următoarele notaţii:

$$\overline{P}_E = \left\{ E_0(z), E_1(z), \dots, E_n(z), \dots e^z \right\}$$

$$P_L = \left\{ L_0(z), L_1(z), \dots, L_n(z), \dots \right\}.$$

Considerăm şi următoarele familii de funcţii,

$$\mathfrak{F}_E^o = \left\{ \lambda_0 + \lambda_1 e^{f_1(z)} + \dots + \lambda_p e^{f_p(z)} \right\}, \text{ cu } f_k \in \overline{P}_E, \lambda_k \geq 0, \quad k=0,1,\dots,p$$

$$\mathfrak{F}_L^o = \left\{ \lambda_0 + \lambda_1 e^{f_1(z)} + \dots + \lambda_p e^{f_p(z)} \right\}, \quad \text{cu } f_k \in P_L,\ k=1,2,\dots p.$$

Vom spune că numărul $a \geq 0$, este o limită fixă pentru modulele zerourilor funcţiilor unei familii $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}^+$ pe scurt limită fixă a familiei $\mathcal{F}$, dacă $\forall\ f \in \mathcal{H}^+$, $\forall\ z_0 \in \mathcal{Z}_f$, avem $|z_0| \geq a$.

Evident, aceste limite fixe, sînt determinate în raport cu metoda pe care o folosim noi.

TEOREMA 3.5.1. Pentru familia de funcţii $\mathfrak{F}_E^o$ numărul $a = \frac{1}{2}$ este o limită fixă.

Demonstraţie: Fie $\varnothing_0(z) \in \mathfrak{F}_E^o$, de forma:

$$(3.5.1) \quad \varnothing_0(z) = \lambda_0 + \lambda_1 e^{E_1(z)} + \lambda_2 e^{E_2(z)} + \dots + \lambda_m e^{E_m(z)}$$

Dacă $z_0 \in \mathcal{Z}_{\varnothing_0}$, să arătăm că $|z_0| \geq \frac{1}{2}$.

Pentru aceasta este suficient să arătăm că pentru funcţia

$$(3.5.2) \quad \tilde{\varnothing}_0(z) = \lambda_0 + \lambda_1 e^{E_1(z)-1} + \dots + \lambda_m e^{E_m(z)-1} ,$$

avem $|z_0| \geq \frac{1}{2}$, unde $z_0 \in \mathcal{Z}_{\tilde{\varnothing}_0}$.

Condiţiile (3.4.5) (sau (3.4.5')) se verifică în acest caz . Conform cu teorema 3.4.1., rezultă

$$\tilde{\varnothing}_0(z) \neq 0 , \quad \text{pentru } |z| < \frac{1}{2n-1}$$

Dar limita 1/2m-1 , poate fi înlocuită cu $\frac{1}{2}$.

Pentru aceasta, se aplică corolarul 3.4.2 . Avem:

$$\omega_1\left[\tilde{\phi}_0\right] \geq \min_{k=\overline{1,m}} \left(\omega_1\left[e^z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^m}{m!}\right]\right)$$

In produsul $e^z . e^{z^2/2!} \ldots e^{z^m/m!}$ se asociază seriile respective două cîte două, $e^z . e^{z^2/2!}$, $(e^z . e^{z^2/2!})e^{z^3/3!}$, etc., şi se constată că, condiţia (3.4.13) din corolarul 3.4.2 este îndeplinită de fiecare dată, iar $\omega_2[f] \geq \frac{1}{2}$.

In final, inegalitatea (3.4.14) , ne va da pentru funcţiile de mai sus

$$\omega_1\left[e^z . e^{z^2/2!} \ldots e^{z^k/k!}\right] \geq \frac{1}{2} \tag{3.5.3}$$

Deci, pentru funcţiile de forma (3.5.1) teorema este adevărată.

Fie acum $\phi(z) \in \mathcal{F}_E^{o}$, de forma

$$\phi(z) = \lambda_0 + \lambda_1 e^{E_1(z)} + \ldots + \lambda_m e^{E_m(z)} + \lambda e^{e^z} \tag{3.5.4}$$

Deoarece inegalitatea (3.5.5)are loc pentru $\forall$ $k \in N$, rezultă şi

$$\omega_1\left[e^{e^z}\right] \geq \frac{1}{2} \quad . \tag{3.5.5}$$

şi deci $\phi(z) \neq 0$, $\forall$ $|z| < \frac{1}{2}$.

Teorema e demonstrată.

Rezultate analoage se obţin şi pentru funcţiile din P_L.

TEOREMA 3.5.2. Pentru familia de funcţii $\mathcal{F}_L^{o}$, numărul a = $\frac{1}{2}$ este o limită fixă.

Demonstraţia este analoagă cu cea a teoremei 3.5.1.

Aşadar, familiile $\mathcal{F}_E^{o}$ şi $\mathcal{F}_L^{o}$, au o limită fixă comună.

2. Fie acum familia formată cu funcţiile de forma

$$\phi_1(z) = \lambda_0 + \lambda_1 e^{z+\frac{z^{p_1}}{p_1!}} + \ldots + \lambda_m e^{z+\frac{z^{p_m}}{p_m!}} \qquad k=1,2,\ldots \tag{3.5.6}$$

notată $\mathcal{F}_E^{1}$.

TEOREMA 3.5.3. Pentru familia de funcţii $\mathcal{F}_E^{1}$ numărul a = $\frac{1}{2}$ este o limită fixă.

Pentru demonstrație, dăm următoarea teoremă mai generală.

TEOREMA 3.5.4. Fie funcțiile de forma

$$(3.5.7)\quad F_1(z)=\lambda_0+\lambda_1 e^{a_1^1 z+a_2^1 z^{p_1}}+\dots+\lambda_m e^{a_1^m z+a_2^m z^{p_m}},$$

cu $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \geqslant 0$, $a_1^1, a_2^1, \dots, a_1^m, a_2^m > 0$

Dacă sînt îndeplinite condițiile

$$(3.5.8)\quad a_1^1 \geqslant \sqrt[p_1]{p_1!\,a_2^1}, \dots, a_1^m \geqslant \sqrt[p_m]{p_m!\,a_2^m}\quad \text{, atunci,}$$

$F_1(z) \neq 0$, dacă $|z| < \min\limits_{1\le s\le m} \dfrac{1}{2a_1^s}$

Demonstrație: Rezultă imediat, prin aplicarea teoremei 3.4.1.

Teorema 3.5.3, este un caz particular al acestei teoreme.

3. Fie acum familia $\mathfrak{F}_E^2$, a funcțiilor de forma

$$(3.5.9)\quad \phi_2(z)=\lambda_0+\lambda_1 g_1(z)e^{f_1(z)}+\dots+\lambda_m g_m(z)e^{f_m(z)}$$

unde, $g_k, \dots g_m$, $f_1, \dots f_m \in P_E$, $\lambda_0, \dots \lambda_m \geqslant 0$.

TEOREMA 3.5.5. Pentru familia $\mathfrak{F}_E^2$, numărul $a=\frac{1}{3}$, este o limită fină.

Demonstrație: Pentru $\forall$ $f\in P_E$ avem $\omega_1[f]=1$, $\omega_2[f]=\frac{1}{2}$, evident

$$\omega_1[\phi_2] \geqslant \min_{k=\overline{1,m}} \omega_1\left[g_k(z)\,e^{f_k(z)}\right]$$

Dar,
$$\omega_1\left[e^{f_k(z)}\right] \geqslant \omega_2\left[e^{f_k(z)}\right] \geqslant \frac{1}{2}.$$

Aplicînd inegalitatea produsului,

$$\omega_1[fg] \geqslant \frac{\omega_1[f]\omega_2[g]}{\omega_1[f]+\omega_2[g]}$$, avem

$$\omega_1\left[f_k(z)e^{g_k(z)}\right] \geqslant \frac{1}{3} .$$

Teorema e demonstrată.

Dacă se considerăm acum familia $\mathfrak{F}_L^2$ a funcţiilor de forma (3.5.9), cu $f_1,\dots,f_m$, $g_1,\dots g_m$, din P_L, se poate stabili un rezultat analog:

TEOREMA 3.5.6. Pentru familia $\mathfrak{F}_L^2$, numărul $a = \frac{1}{3}$, este o limită fixă.

4. Fie acum familia $\mathfrak{F}_E^3$ a funcţiilor de forma

$$(3.5.10) \qquad \phi_3(z) = \lambda_0 + \lambda_1(1+z)e^z + \lambda_2(1+z+z^2)e^{z^2} + \dots$$
$$\dots + \lambda_m(1+z+\dots+z_m)e^{z^m}$$

cu $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_m \geqslant 0$.

TEOREMA 3.5.7. Pentru familia $\mathfrak{F}_E^3$ numărul $a = \frac{1}{4}$, este o limită fixă.

Această teoremă este un caz particular al următoarei teoreme:

TEOREMA 3.5.8. Fie funcţiile de forma:

$$F_3(z) = p_0(z) + p_1(z)e^z + \dots + p_m(z)e^{z^m} \quad , \text{cu}$$

$$p_s(z) = a_0^s + a_1^s z + a_2^s z^2 + \dots + a_{p_s}^s z^{p_s} \quad , s=0,\dots m \quad \text{cu}$$

coeficienţi strict pozitivi. Dacă

$$a_0^1 \leq a_1^1 , \quad a_0^2 \leq a_2^2 , \dots a_0^m \leq a_m^m \quad , \text{atunci}$$

$$\phi_3(z) \neq 0 , \text{ dacă } |z| < \min_s \left(\frac{1}{2}\omega_1[p_s(z)]\right) .$$

Pentru demonstraţie, este suficientă aplicarea lemeo

5. In încheierea acestui paragraf, considerăm şi familia $\mathcal{F}_E^4$ a funcţiilor de forma:

$$\emptyset_4(z) = \lambda_0 + \lambda_1 E_1(z)\, e^{z+z^{p_1}/p_1!} + \ldots \tag{3.5.12}$$

$$\ldots + \lambda_m E_m(z)\, e^{z+z^{p_m}/p_m!}$$

Si pentru această familie avem următoarea

TEOREMA 3.5.9. Pentru familia de funcţii $\mathcal{F}_E^4$ numărul $a = \frac{1}{3}$, este o limită fixă.

Pentru demonstraţie, vezi demonstraţiile teoremelor analoage.

In încheiere, remarcăm că, astfel de familii de funcţii cu limite fixe, se pot obţine şi în paragraful următor, prin diferite particularizări.

§ 6. Limitarea modulelor zerourilor funcţiilor de forma

$$\emptyset(z) = \lambda_0 + \lambda_1 f(\alpha_1 z) + \lambda_2 f(\alpha_2 z) f(z^2) + \ldots +$$

$$+ \lambda_p f(\alpha_p z)\, f(z^2) \ldots f(z^p),$$

In acest paragraf ne vom ocupa, aşadar de funcţiile $\emptyset(z)$ de forma amintită mai sus, cu $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_p \geqslant 0$.

TEOREMA 3.6.1. Fie $f \in \mathcal{H}^+$, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, $|z| < R_f$. Dacă constantele pozitive $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ satisfac inegalităţile

$$\alpha_s \geqslant \max_{2 \le k \le s} \left(\frac{a_0}{a_k} \sup_{n \geqslant 0} \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad s = 2,3,\ldots p \tag{3.6.1.}$$

atunci, funcţia $\emptyset(z)$, nu se anulează în domeniul

$$|z| < \min \left(\omega_1[f(\alpha_1 z)],\ \frac{1}{2}\omega_1[f(\alpha_2 z)], \ldots \frac{1}{p-1}\omega_1[f(\alpha_p z)]\right) \tag{3.6.2}$$

<u>**Demonstrație:**</u> **Avem**

$$\omega_1[\emptyset] \geqslant \min(\omega_1[f(\alpha_1 z)], \omega_1[f(\alpha_2 z)f(z^2)], \dots$$

$$\dots \omega_1 \, f(\alpha_p z)f(z^2) \dots f(z^p)])$$

Să considerăm produsul

$$f(\alpha_s z)f(z^2)f(z^3)f(z^4) \dots f(z^s) =$$

$$= (a_0 + a_1\alpha_s z + a_2\alpha_s^2 \, z^2 + a_3\alpha_s^3 \, z^3 + \dots)(a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \dots)$$

$$(a_0 + a_1 z^3 + a_2 z^6 + \dots)(a_0 + a_1 z^4 + a_2 z^8 + \dots)\dots(a_0 + a_1 z^3 + \dots)$$

Reamintim propoziția următoare:
Dacă pentru seriile

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p + \dots + a_n z^n + \dots$$

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots$$

este îndeplinită condiția

$$\text{(3.6.3)} \qquad \frac{a_0}{a_p} \leq \inf_{n \geqslant 0} \frac{b_n}{b_{n+1}}$$

atunci, are loc inegalitatea

$$\text{(3.6.4)} \qquad \omega_1[f(z) \; g(z^p)] \geqslant \frac{1}{2}\omega_1[f].$$

Considerăm produsul primelor două serii din produsul anterior. Condiția (3.6.3) este

$$\frac{a_0}{k_1(z^2)} = \frac{a_0}{a_2\alpha_s^2} \leq \inf_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow \alpha_s^2 \geqslant \frac{a_0}{a_2} \sup_{n \geqslant 0} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Conform cu propoziția amintită, vom avea

$$\text{(3.6.6)} \qquad \omega_1[f(\alpha_s z) \; f(z^2)] \geqslant \frac{1}{2} \, \omega_1[f(\alpha_s z)].$$

Mai departe, efectuăm produsul primelor două serii, în care, coeficientul lui z^3, $k_2(z^3)$, este o sumă ce conține și numărul $a_3 a_o \alpha_s^3$.

Impunem condiția (3.6.3)

$$(3.6.7) \quad \frac{a_o^2}{k_2(z^3)} \leq \frac{a_o^2}{a_3 a_o \alpha_s^3} \leq \inf_{n \geq o} \frac{a_n}{a_{n+1}} \Longrightarrow$$

$$\alpha_s \geq \left(\frac{a_o}{a_3} \sup_{n \geq o} \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Conform aceleiași propoziții, avem (3.6.8)

$$(3.6.8) \quad \omega_1\left[f(\alpha_s z) f(z^2) f(z^3)\right] \geq \frac{1}{2}\omega_1\left[f(\alpha_s z)\ f(z^2)\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{2^2}\omega_1\left[f(\alpha_s z)\right].$$

Acest procedeu poate continua în același mod.

Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă, stabilește un caz particular.

TEOREMA 3.6.2. Fie funcția de forma

$$(3.6.9) \quad \phi(z) = \lambda_o + \lambda_1 e^{\alpha_1 z} + \lambda_2 e^{\alpha_2 z + z^2} + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_p e^{\alpha_p z + z^2 + \ldots + z^p}$$

cu $\lambda_o, \lambda_1, \ldots \lambda_p \geq o$. Dacă sînt îndeplinite condițiile

$$(3.6.10) \quad \alpha_s \geq \sqrt[s]{s!} \quad , \ s = 2, \ldots p \ , \text{ atunci}$$

$$f(z) \neq 0, \quad \forall z \ , \text{ cu}$$

$$|z| < \min\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{2\alpha_2}, \frac{1}{2^2\alpha_3}, \ldots \frac{1}{2^{p-1}\alpha_p} \right)$$

Demonstrație: Condițiile (3.6.10) corespund condițiilor (3.6.1) din teorema 3.6.1 . Se aplică deci teorema 3.6.1, cu

$$\omega_1[e^{\alpha_s z}] = \frac{1}{\alpha_s} .$$

§ 7. Limitarea modulelor zerourilor funcţiilor de forma

$$\emptyset(z) = \lambda_0 + \lambda_1 f_1(\alpha_1 z) f_1(z^{p_1}) + \dots + \lambda_m f_m(\alpha_m z) f_m(z^{p_m})$$

In acest paragraf considerăm funcţiile $\emptyset(z)$ de forma de mai sus, în care, $f_k \in \mathcal{H}^+$ şi

$$f_k(z) = \sum_0^{\infty} a_n^{(k)} z^n, \quad k = 1, \dots m .$$

Avem următoarea

TEOREMA 3.7.1. Dacă pentru funcţiile $\emptyset(z)$, avem λ_0, $\lambda_1, \dots \lambda_m \geq 0$, iar numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ satisfac condiţiile

$$(3.7.1) \qquad \alpha_k \geq \left(\frac{a_0^{(k)}}{a_{p_k}^{(k)}} \sup_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}^{(k)}}{a_n^{(k)}} \right)^{1/p_k} , \quad k = 1, 2, \dots m$$

atunci, $\emptyset(z) \neq 0$, dacă

$$(3.7.2) \qquad |z| < \min_k \frac{1}{2} \omega_1[f_k(\alpha_k z)], \qquad (p_1, \dots p_m \in \mathbb{N})$$

Demonstraţie. Avem

$$\omega_1[\emptyset] \geq \min \left(\omega_1[f_1(\alpha_1 z) f_1(z^{p_1})], \dots \omega_1[f_m(\alpha_m z) f_m(z^{p_m})] \right)$$

Fie produsul

$$f_k(\alpha_k z) f_k(z^{p_k}) = (a_0^{(k)} + a_1^{(k)} (\alpha_k z) + a_2^{(k)} (\alpha_k z)^2 + \dots)$$

$$(a_0^{(k)} + a_1^{(k)} z^{p_n} + a_2^{(k)} z^{2p_k} + \dots)$$

Aplicînd şi aici propoziţia amintită în paragraful precedent, avem:

$$\frac{a_o^{(k)}}{a_{p_k}^{(k)}\alpha_k^{p_k}} \leq \inf_{n\geq o} \frac{a_n^{(k)}}{a_{n+1}^{(k)}} \text{ , adică}$$

$$\alpha_k \geqslant \left(\frac{a_o^{(k)}}{a_{p_k}^{(k)}} \sup_{n\geq o} \frac{a_{n+1}^{(k)}}{a_n^{(k)}} \right)^{\frac{1}{p_k}}$$

dar atunci,

$$\omega_1\left[f_k(\alpha_k z)f_k(z^{p_k})\right] \geqslant \frac{1}{2}\,\omega_1\left[f_k(\alpha_k z)\right] \tag{3.7.3}$$

Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă stabileşte un caz particular.

TEOREMA 3.7.2. Dacă numerele pozitive $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ satisfac condiţiile:

$$\alpha_k \geqslant \sqrt[p_k]{p_k!} \quad , \qquad k = 1,2,\dots m \tag{3.7.4}$$

atunci, funcţia

$$\emptyset(z) = \lambda_o + \lambda_1 e^{\alpha_1 z + z^{p_1}} + \dots \lambda_m e^{\alpha_m z + z^{p_m}} \quad , \alpha_k > o \tag{3.7.5}$$

nu se anulează pentru $|z| < \min_k \left(\frac{1}{2\alpha_k} \right)$.

Demonstraţia decurge din teorema 3.7.1.

In încheierea acestui capitol, dăm şi următorul paragraf.

§ 8. Limitarea modulelor zerourilor funcţiilor de forma:

$$\emptyset(z) = \lambda_o + \lambda_1 f(\alpha_1^1 z) + \lambda_2 f(\alpha_1^2 z)\, f(\alpha_2^2 z^2) + \dots$$
$$+ \lambda_p f(\alpha_1^p z) f(\alpha_2^p z^2) \dots f(\alpha_p^p z^p) .$$

In cele ce urmează, vom lua în considerare funcţiile $\emptyset(z)$ de forma de mai sus, unde $\lambda_o, \lambda_1 \dots \lambda_p \geqslant o$, iar

$$\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3, \dots, \alpha_1^p, \alpha_2^p, \alpha_p^p > o.$$

TEOREMA 3.8.1. Fie $f \in \mathcal{H}^+$, $f(z) = \sum_o^\infty a_n z^n$, $|z| < R$.

Dacă sînt satisfăcute condiţiile

$$(3.8.1) \qquad \alpha_1^s \max_{2\le k\le s} \left(\alpha_k^s \frac{a_0}{a_k} \sup_{n\ge 0} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad s= 2,\dots p$$

atunci, funcţia $\emptyset(z)$ nu se anulează în domeniul

$$(3.8.2) \qquad |z|<\min \Big(\omega_1 \left[f(\alpha_1^1 z)\right], \tfrac{1}{2}\omega_1\left[f(\alpha_1^2 z)\right], \dots$$

$$\dots \frac{1}{2^{p-1}}\omega_1\left[f(\alpha_1^p z)\right]\Big)$$

Demonstraţie. Este suficient să se urmărească pas cu pas, demonstraţia teoremei 3.6.1.

Această teoremă, este însă mai generală decît teorema 3.6.1.

TEOREMA 3.8.2. Dacă constantele $\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_2^2 \dots \alpha_1^p, \alpha_2^p, \dots \alpha_p^p$ satisfac condiţiile

$$(3.8.3) \qquad \alpha_1^s \ge \max_{2\le k\le s} \left(\alpha_k^s\, k!\right)^{1/k}, \quad s = 2, \dots p$$

atunci funcţia

$$(3.8.4) \qquad \emptyset(z) = \lambda_0 + \lambda_1 e^{\alpha_1^1 z} + \lambda_2 e^{\alpha_1^2 z+\alpha_2^2 z^2} + \dots +$$

$$+\lambda_p e^{\alpha_1^p z + \alpha_2^p z^2 + \dots + \alpha_p^p z^p}, \quad \lambda_0, \dots \lambda_p \ge 0,$$

nu se anulează în domeniul

$$(3.8.5) \qquad |z| < \min \left(\frac{1}{\alpha_1^1}, \frac{1}{2\alpha_1^2}, \dots \frac{1}{2^{p-1}\alpha_1^p}\right)$$

Demonstraţie: Se obţine ca un caz particular al teoremei 3.8.1.

In încheierea acestui paragraf dăm şi următoarea teoremă mai generală.

TEOREMA 3.8.3. Fie $f\in\mathcal{H}^+$, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$,

Dacă constantele pozitive $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots \alpha_{p_1}^1, \alpha_1^2, \dots \alpha_{p_2}^2 \dots \dots \alpha_1^m, \alpha_2^m, \dots \alpha_{p_m}^m$, satisfac inegalităţile

$$(3.8.6)\qquad \alpha_1^s \geqslant \max_{2\leq k\leq p_s} \left(\alpha_k^s \frac{a_o}{a_k} \sup_{n\geqslant o} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad s = 1,2,\ldots m$$

atunci funcţia

$$(3.8.7)\qquad \phi(z) = \lambda_o + \lambda_1 f(\alpha_1^1 z) f(\alpha_2^1 z^2) \ldots f(\alpha_{p_1}^1 z^{p_1}) +$$

$$+ \ldots + \lambda_m f(\alpha_1^m z) f(\alpha_2^m z^2) \ldots f(\alpha_{p_m}^m z^{p_m}),$$

cu $\lambda_o, \ldots \lambda_m \geqslant o$, nu se anulează în domeniul

$$(3.8.8)\qquad |z| < \min\left(\frac{1}{2^{p_1-1}} \omega_1\left[f(\alpha_1^1 z)\right], \ \ldots \ \frac{1}{2^{p_m-1}} \omega_1\left[f(\alpha_1^m z)\right]\right)$$

Demonstraţia este analoagă cu cea a teoremei 3.6.1.

Să considerăm acum un caz particular.

Fie

$$(3.8.9)\qquad \phi(z) = \lambda_o + \lambda_1 e^{p_1(z)} + \ldots + \lambda_m e^{p_m(z)}$$

cu $\qquad p_k(z) = \alpha_1^k z + \alpha_2^k z^2 + \ldots + \alpha_{p_k}^k z^{p_k}, \quad k=1,\ldots m.$

Următoarea teoremă, stabileşte în anumite condiţii o limită inferioară a modulelor zerourilor funcţiilor cu forma (3.8.9). Avem astfel:

<u>TEOREMA 3.8.4.</u> Dacă constantele $\frac{q}{p}$ satisfac condiţiile

$$(3.8.10)\qquad \alpha_1^s \geqslant \max_{2\leq k\leq p_s} (\alpha_k^s \, k!)^{\frac{1}{k}}, \quad s= 1,2,\ldots m,$$

atunci, $\qquad \phi(z) \neq o$, pentru

$$(3.8.11)\qquad |z| < \min\left(\frac{1}{2^{p_1-1}\alpha_1^1}, \ldots, \frac{1}{2^{p_m-1}\alpha_1^m} \right)$$

Această teoremă este un caz particular al teoremei 3.8.3.

<u>Observaţii:</u> Folosind teorema 3.8.3 şi inegalităţile pe

care le satisface $\omega_1[f]$, cînd f se înlocuieşte cu produse de funcţii din $\mathcal{H}^+$, se poate stabili o limită inferioară pentru modulele eventualelor zerouri ale funcţiei mai generale.

$$\emptyset(z) = f_o(z) + f_1(z)e^{p_1(z)} + \ldots + f_m(z)e^{p_m(z)} , \tag{3.8.12}$$

unde $f_o, f_1, \ldots f_m \in \mathcal{H}^+$, iar polinoamele $p_k(z)$ sînt de forma amintită mai sus şi satisfac condiţiile din teorema 3.8.4. Nu mai dăm expresia acestei limite.

§ 9. Limitarea modulelor zerourilor functiilor de forma $g(z) = a_o + \sum_1^{\infty} a_{2n-1} z^{2n-1}$

In acest ultim paragraf, ieşim puţin din mulţimea $\mathcal{H}^+$. Vom considera aşadar , funcţiile de forma

$$g(z) = a_o + \sum_1^{\infty} a_{2n-1} z^{2n-1} , \quad a_{2n-1} > 0, \ n=1,2\ldots, \tag{3.9.1}$$

$$0 \leq |z| < R_g \leq +\infty$$

Referitor la zerourile lui g(z) din $|z| < R_g$, avem

TEOREMA 3.9.1. Dacă $z_o \in \mathcal{Z}_g^c$, atunci, are loc inegalitatea

$$\omega^*[g] \leq |z_o| < R_g , \qquad \forall a_o \in \mathbb{R} \tag{3.9.2}$$

unde s-a notat

$$\omega^*[g] = \inf_{n \geq 1} \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}} \tag{3.9.3}$$

Demonstraţie: Cu $z = re^{i\varphi}$, avem

$\operatorname{Im} g(z) = \lim_{n \to \infty} I^*_{2n-1}(r, \varphi, \bar{a})$, unde

$$I^*_{2n-1}(r, \varphi, \bar{a}) = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{p} \frac{\sin(2\nu-1)\varphi}{2\nu-1} \delta^*_p(r) +$$

$$+ (2n-1)\, a_{2n-1} r^{2n-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(2\nu-1)\varphi}{2\nu-1}$$

şi $\delta_p^x(r) = (2p-1)a_{2p-1}\, r^{2p-1} - (2p+1)a_{2p+1}r^{2p+1}$

Tinînd seama de inegalitatea (3.1.3)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(2\nu-1)\varphi}{2\nu-1} > 0, \ \forall \varphi \in]0,\pi[, \ \forall n \in \mathbb{N} .$$

Impunînd condiţiile

$$\delta_p^x(r) > 0, \quad p = 1,2,\ldots$$

acestea au loc pentru

$$r < \inf_{n\geq 1} \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}} = \omega^x[g]$$

Dar în acest caz, $\operatorname{Im} g(z) > 0$.

Deci, $g(z)$ nu admite zerouri complexe în $|z| < \omega^x[g]$

<u>Corolar 3.9.1.</u> Dacă şirul $((2n-1)a_{2n-1}/(2n+1)a_{2n+1})_{n\geq 1}$ este monoton descrescător, atunci, funcţia $g(z)$ nu admite zerouri complexe în $|z| < R_g$, $\forall a_0 \in \mathbb{R}$.

<u>Demonstraţie:</u> Rezultă imediat, deoarece în acest caz, $\omega^x[g] = R_g$.

Remarcăm, în încheierea acestui capitol, că multe din rezultatele stabilite în paragrafele precedente, rămîn valabile şi pentru funcţiile $g(z)$.

Inainte de a trece la cazul general, menţionăm de asemenea că, rezultate analoage se pot obţine şi pentru funcţiile de forma

$$(3.9.4) \quad h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad R_1 < |z| < R_2 \ , \ a_k > 0$$

$$k = \ldots,-2,-1,0,1,2\ldots$$

CAP. IV. STUDIU ASUPRA LOCALIZARII ZEROURILOR FUNCTIILOR DE FORMA $f(z)=\sum_{0}^{\infty} c_n z^n$, $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 0,1,\ldots$

§ 1. Stabilirea unor limite inferioare pentru modulele zerourilor funcţiilor $f(z)=\sum_{0}^{\infty} c_n z^n$, cu serie completă.

Ideea folosirii pozitivităţii unor polinoame trigonometrice la studiul distribuţiei zerourilor unor funcţii, poate fi extinsă şi la cazul general, cînd coeficienţii a_n (notaţi acum c_n) sînt numere complexe.

In acest caz vom utiliza pozitivitatea altor expresii asemănătoare, polinoamelor trigonometrice, care, în realitate sînt combinaţii de astfel de polinoame trigonometrice.

Fie aşadar, funcţia (mulţimea lor o notăm)

$$(4.1.1)\quad f(z)=\sum_{0}^{\infty} c_n z^n,\ c_n\in \mathbb{C},\ n=0,1,2,\ldots,c_0>0,\ 0\leq|z|<R_f$$

TEOREMA 4.1.1. Fie o serie de termeni pozitivi

$$(4.1.2)\quad (n):\ \sum_{1}^{\infty} u_n \leq u_0 < +\infty$$

Dacă $z_0 \in \mathcal{Z}_f$, atunci, are loc inegalitatea

$$(4.1.3)\quad |z_0| \geq \Omega[f] \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{n\geq 0} \frac{u_{n+1}}{u_n}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Demonstraţie: Cu $z = re^{i\varphi}$, $c_n = |c_n|e^{i\varphi_n}$, putem scrie

$$\operatorname{Re} f(z) = \lim_{n\to\infty} K_n(r,\varphi,\bar{c})\ ,\ \text{unde}$$

$$K_n(r,\varphi,\bar{c}) = \Delta_0(r)u_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\Delta_k(r)\ (u_0 + \sum_{\nu=1}^{k} u_\nu \cos(\nu\varphi+\varphi_\nu))$$

$$+ \frac{|c_n|}{u_n} r^n\ (u_0 + \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \cos(\nu\varphi+\varphi_\nu))$$

şi $\Delta_k(r) = \frac{|c_k|}{u_k} r^k - \frac{|c_{k+1}|}{u_{k+1}} r^{k+1}$, $k=0,1,2,\dots$

Vom observa că , datorită condiţiei (3.1.2), toate sumele $u_0 + \sum_1^k u_\nu \cos(\nu\varphi+\varphi_\nu)$, $k=1,2,\dots$ sînt pozitive.

Impunînd condiţiile $\Delta_k(r) > 0$, $k = 0,1,2,\dots$ se deduce că, pentru

$$|z| < \inf_{n\geq 1} \frac{u_{n+1}}{u_n}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| ,$$

avem $\mathrm{Re}\, f(z) > 0$, şi deci $f(z) \neq 0$ pentru $|z| < \Omega[f]$.

Remarcăm că, $c_0 > 0$, nu restrînge generalitatea.

Corolar 4.1.1. Fie $f \in \mathcal{H}$, $|z| < R_f$. Dacă există o serie cu termeni pozitivi

$$(u) : \sum_1^\infty u_n \leq u_0 \leq +\infty ,$$

pentru care, sînt verificate condiţiile

(a) şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|\right)_{n\geq 0}$ este monoton descrecător.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, atunci , $f(z) \neq 0$, în $|z| < R_f$.

Demonstraţie: In condiţiile corolarului, avem evident $\Omega[f] = R_f$.

Corolar 4.1.2. Dacă şirul $\left(\frac{n}{n+2}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|\right)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător şi $\frac{1}{2}\left|\frac{c_0}{c_1}\right| \geq R_f$, atunci $f(z) \neq 0$ în $|z| < R_f$.

Acest corolar, este un caz particular al corolarului 4.1.1, considerînd ca serie (u) , seria

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1 .$$

Dăm mai jos o teoremă generală, care ne va permite să obţinem, cu ajutorul teoremei 4.1.1, cîteva limite particulare remarcabile.

TEOREMA 4.1.2. Fie $f \in \mathcal{H}$ şi seria

(4.1.4) $(\alpha): \sum_{1}^{\infty} \alpha_n t^n \leq \alpha_0(t)$, cu $\alpha_n > 0$, $n=1,2,\ldots$, iar $\alpha_0(t)$ este o funcţie mărginită pe $\forall\ [0,\varepsilon] \subset [0,\lambda)$. Dacă funcţia $\varphi(t) = \frac{t}{\alpha_0(t)}$ nu are puncte de extrem în $(0,\lambda)$ şi $\lim_{t\to\lambda^-} \varphi(t) = 0$, atunci, dacă $z_0 \in \mathcal{Z}_f^{\alpha}$, are loc inegalitatea.

$$(4.1.5)\qquad |z_0| < t_0 \inf_{n\geq 1} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

unde t_0 este rădăcina ecuaţiei

$$(4.1.6)\qquad \alpha_1 \left|\frac{c_0}{c_1}\right| \varphi(t) = t \inf_{n\geq 1} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \text{ din } (0,\lambda)$$

Demonstraţie: In teorema 4.1.1 în locul seriei (u) considerăm seria de puteri (α). Conform cu teorma 4.1.1, avem $f(z) \neq 0$, pentru

$$|z| < \inf_{n\geq 1}\left(\frac{\alpha_1 t}{\alpha_0(t)}\left|\frac{c_0}{c_1}\right|,\ \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| t \right),\quad t \in (0,\lambda)$$

Ţinînd seama de condiţiile pe care le satisface funcţia $\frac{t}{\alpha_0(t)}$, este evident că punctul $t_0 \in (0,\lambda)$, pentru care avem

$$\sup_{t\in(0,\lambda)}\ \inf_{n\geq 1}\left(\frac{\alpha_1 t}{\alpha_0(t)}\left|\frac{c_0}{c_1}\right|,\ \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| t\right),$$

este dat de ecuaţia

$$\alpha_1 \left|\frac{c_0}{c_1}\right| \varphi(t) = t \inf_{n\geq 1} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

In continuare, indicăm cîteva cazuri particulare remarcabile:

Considerăm seria

$$(1-t)^{-\alpha} - 1 = \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} t^2 + \ldots +$$

$$(4.1.7)\qquad + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!} t^n + \ldots \text{ cu } t \in (0,1),\qquad 0.$$

Avem în acest caz,

$$\varphi(t) = \frac{t}{(1-t)^{-\alpha}-1}\ , \quad t \in (o,1)$$

Rezolvînd ecuația

$$\frac{\alpha t}{(1-t)^{-\alpha}-t}\left|\frac{c_o}{c_1}\right| = t \inf_{n \geq 1} \frac{\alpha+n}{n+1}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

în raport cu t, și notînd

$$h(\alpha) = \inf_{n \geq 1} \frac{\alpha+n}{n+1}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

se obține următoarea limită a zerourilor

(4.1.8) $$\ell(\alpha) = h(\alpha)\left[1-\left(1+\frac{\alpha}{h(\alpha)}\left|\frac{c_o}{c_1}\right|\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Din (4.1.8) obținem următoarele limite: ($\alpha \to 1$, $\alpha \to o$, $\alpha \to +\infty$)

(4.1.9) $$\rho_f = \frac{|c_o|\ \nu[f]}{|c_o| + |c_1|\ \nu[f]}\ ,$$, - limita raportului

(4.1.10) $$e_f = \omega_o[f]\left(1 - e^{-\left|\frac{c_o}{c_1}\right| \frac{1}{\omega_o[f]}}\right)$$ - limita exponențială,

(4.1.11) $$l_f = \theta[f]\ln\left(1 + \left|\frac{c_o}{c_1}\right| \frac{1}{\theta[f]}\right)$$ - limita logaritmică,

unde $\theta[f] = \inf\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

Observații: Considerațiile de mai sus rămîn valabile și pentru polinoamele cu coeficienți complecși .

TEOREMA 4.1.3. Fie $f \in \mathcal{H}$, $|z|<R$. a) Dacă șirul $\left(|c_n|/|c_{n+1}|\right)_{n \geq 1}$ este monoton descrescător, atunci $f(z) \neq o$, dacă

$$|z| < \frac{|c_o|R}{|c_o|+|c_1|R}$$

b) Dacă şirul $(n|c_n|/(n+1)|c_{n+1}|)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător, atunci $f(z) \neq o$, pentru

$$|z| < R\left(1 - e^{-\left|\frac{c_o}{c_1}\right|\frac{1}{R}}\right)$$

Demonstraţie: Rezultă imediat folosind (4.1.9) respectiv (4.1.1o), deoarece şi într-un caz şi în celălalt vom avea $\mathcal{V}[f] = R$, $\omega_o[f] = R$.

Din următoarea teoremă, se constată cum factorul $\left|\frac{c_o}{c_1}\right|$, influenţează în anumite condiţii, apropierea zerourilor de circumferinţa cercului de convergenţă al seriei respective.

TEOREMA 4.1.4. (de aproximare). Fie $f \in \mathcal{H}$, $|z| < R$. Dacă au loc condiţiile

(4.1.12) şirul $\left(\frac{n}{n+1}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|\right)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător

şi $\left|\frac{c_o}{c_1}\right| \geq R \ln \frac{R}{\varepsilon}$, sau

(4.1.13) şirul $\left(\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|\right)_{n\ 1}$ este monoton descrescător

şi $\left|\frac{c_o}{c_1}\right| \geq \frac{R(R-\varepsilon)}{\varepsilon}$, $o < \varepsilon < R$, ε - mic

atunci, pentru $\forall\ z_o \in \mathcal{Z}_{of}$, avem $|z_o| \cong R$, cu o eroare inferioară lui ε.

Demonstraţie: Rezultă imediat din teorema 4.1.3. folosind respectiv (4.1.1o), deoarece

Dăm acum o teoremă, prin care se stabilesc condiţii suficiente, astfel ca, $f(z)$, $f'(z)$,... $f^{(p)}(z)$ să nu se anuleze pentru $|z| < R$.

TEOREMA 4.1.5. Fie $f \in \mathcal{H}$, $|z| < R$. Presupunem că există $p \in \mathbb{N}$, astfel încît să avem

(4.1.14) şirul $\left(\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+p+1)}\left|\frac{c_{n+p}}{c_{n+p+1}}\right|\right)_{n\geq 1}$ e monoton descrescător

(4.1.15) $\min\limits_{0\leq n\leq p} \frac{1}{2(n+1)}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \geq R$

In aceste condiţii, $f(z), f'(z), \ldots f^{(p)}(z) \neq 0$ in $|z| < R$.

Demonstraţie: Am văzut mai înainte că, dacă $z_0 \in \mathcal{Z}_f$, atunci,

$$|z_0| \geq \inf_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} \left|\frac{c_0}{c_1}\right| , \frac{n}{n+2} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \right) \overset{df}{=} \omega_{22}[f]$$

Considerînd funcţiile $f(z), f'(z), \ldots f^{(p)}(z)$, avem:

$$\omega_{22}[f] = \inf \left(\frac{1}{2}\left|\frac{c_0}{c_1}\right| , \frac{1}{3}\left|\frac{c_1}{c_2}\right|, \frac{2}{4}\left|\frac{c_2}{c_3}\right|, \frac{3}{5}\left|\frac{c_3}{c_4}\right|, \frac{4}{6}\left|\frac{c_4}{c_5}\right|, \frac{5}{7}\left|\frac{c_5}{c_6}\right|, \ldots \right)$$

$$\omega_{22}[f'] = \inf (, \ , \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\left|\frac{c_1}{c_2}\right|, \frac{1.2}{3.3}\left|\frac{c_2}{c_3}\right| , \frac{2.3}{4.4}\left|\frac{c_3}{c_4}\right|, \frac{3.4}{6.5}\left|\frac{c_4}{c_5}\right|, \frac{4.5}{7.6}\left|\frac{c_5}{c_6}\right| \ldots)$$

$$\omega_{22}[f''] = \inf (, \ , \ , \frac{1.1}{2.3}\left|\frac{c_2}{c_3}\right|, \frac{1.2}{3.4}\left|\frac{c_3}{c_4}\right|, \frac{2.3}{4.5}\left|\frac{c_4}{c_5}\right| , \frac{3.4}{5.6}\left|\frac{c_5}{c_6}\right| \ldots)$$

$$\omega_{22}[f'''] = \inf (, \ , \ , \ , \frac{1.1}{2.4}\left|\frac{c_3}{c_4}\right|, \frac{1.2}{3.5}\left|\frac{c_4}{c_5}\right| , \frac{2.3}{4.6}\left|\frac{c_5}{c_6}\right| , \ldots)$$

- -

Pentru simplificarea demonstraţiei, luăm $p = 3$.

Aşa cum se poate observa din tabelul de mai sus, constatăm următoarele:

Monotonia şirului:

$$\frac{1.2}{3.5}\left|\frac{c_4}{c_5}\right| \geq \frac{2.3}{4.6}\left|\frac{c_5}{c_6}\right| \geq \frac{3.4}{5.7}\left|\frac{c_6}{c_7}\right| \geq \ldots$$

implică monotonia şirurilor de deasupra, începînd de la acela i termen ce conţine pe $\left|\frac{c_4}{c_5}\right|$. Pentru termenii din stînga, avem inegalităţile:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1.1}{2}\left|\frac{c_1}{c_2}\right| < \frac{1}{3}\left|\frac{c_1}{c_2}\right| ,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\left|\frac{c_2}{c_3}\right| < \frac{1.2}{3.3}\left|\frac{c_2}{c_3}\right| < \frac{2}{4}\left|\frac{c_2}{c_3}\right|$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\left|\frac{c_3}{c_4}\right| < \frac{1.2}{3.4}\left|\frac{c_2}{c_4}\right| < \frac{2}{4}\,\frac{3}{4}\left|\frac{c_3}{c_4}\right| < \frac{3}{5}\left|\frac{c_3}{c_4}\right|$$

Ţinînd seama de aceste observaţii şi de condiţiile teoremei , rezultă imediat

$$\omega_{22}[f] = \omega_{22}[f'] = \omega_{22}[f''] = \omega_{22}[f'''] = R$$

Teorema e demonstrată pentru cazul p = 3.

Cazul general se demonstrează analog.

Considerăm acum, un sistem p+1 funcţii,

$$(4.1.16) \qquad f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} z^n , \quad |z|< R_{f_k} \quad , k = 0,1,\dots p$$

şi o serie cu termeni pozitivi

$$(4.1.17) \qquad (u) : \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq u_0 < +\infty$$

Introducem notaţiile

$$\alpha_k = \sup_{n\geq 0} \left| \frac{c_n^{(k)}}{c_n^{(o)}} \right| , \quad k = 1,2\dots p$$

$$\nu_u[f] = \inf_{n\geq 1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \left| \frac{c_n^{(k)}}{c_{n+1}^{(k)}} \right|$$

Fie funcţiile de forma

$$(4.1.18) \qquad F(z) = \lambda_o f_o(z) + \lambda_1 f_1(z) + \dots + \lambda_p f_p(z), \; \lambda_k \in \mathbb{C} ,$$
$$k = \overline{o,p}, \quad |z|< R_f$$

Asupra zerourilor funcţiei F(z), vom da mai jos o teoremă de aproximare.

TEOREMA 4.1.6. (de aproximare). Presupunem că $\sum_1^p \alpha_k \leq 1$ şi că există o serie (u) cu proprietatea că $\nu_u[f_o]=R_{f_o}$. Atunci, dacă are loc inegalitatea $|\lambda_o| \geq \left(\frac{2R_F}{\varepsilon}-1\right) \sum_{k=1}^{p} \alpha_k |\lambda_k|$, ε - mic, atunci , $\forall$ $z_o \in \mathcal{Z}_{oF}$, avem $|z_o| \simeq R_F$, cu o eroare inferioară lui ε .

Pentru demonstrație, dăm mai întîi

Lema 4.1.1. Dacă este satisfăcută condiția $|\lambda_o| \geq \sum_1^p |\lambda_k| \alpha_k$, atunci , $\varphi(z) \neq$ o pentru $\forall$ z, cu

$$|z| < \frac{|\lambda_o| - \sum_1^p |\lambda_k| \alpha_k}{|\lambda_o| + \sum_1^p |\lambda_k| \alpha_k} \nu_u [f_o]$$

Demonstrație: Dacă $z_o \in \mathcal{Z}_f$ cu $f = \sum_o^\infty c_n z^n$, am văzut că

$$|z_o| \geq \inf_{n \geq o} \frac{u_{n+1}}{u_n} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \nu_u [f]$$

Dacă $z_o \in \mathcal{Z}_F$, vom avea deci

$$\nu_u [F] = \inf_{n \geq o} \frac{u_{n+1}}{u_n} \left| \frac{\lambda_o c_n^{(o)} + \lambda_1 c_n^{(1)} + \ldots + \lambda_p c_n^{(p)}}{\lambda_o c_{n+1}^{(o)} + \lambda_1 c_{n+1}^{(1)} + \ldots + \lambda_p c_{n+1}^{(p)}} \right| \geq$$

$$\geq \inf_{n \geq o} \frac{u_{n+1}}{u_n} \left| \frac{c_n^{(o)}}{c_{n+1}} \right| \left| \frac{|\lambda_o| - \sum_1^p |\lambda_k| (|c_n^{(k)}| / |c_n^{(o)}|)}{|\lambda_o| + \sum_1^p |\lambda_k| (|c_{n+1}^{(k)}| / |c_{n+1}^{(o)}|)} \right| \geq$$

$$\geq \inf_{n \geq o} \frac{u_{n+1}}{u_n} \left| \frac{c_n^{(o)}}{c_{n+1}^{(o)}} \right| \frac{|\lambda_o| - \sum_1^p |\lambda_k| \alpha_k}{|\lambda_o| + \sum_1^p |\lambda_k| \alpha_k} = \frac{|\lambda_o| - \sum_1^p |\lambda_k| \alpha_k}{|\lambda_o| + \sum_1^p |\lambda_k| \alpha_k} \nu_u [f_o]$$

și lema e demonstrată.

In continuare, ținînd seama de condiția $\sum_1^p \alpha_k \leq 1$, rezultă $\sup_{n \geq o} \left| \frac{c_n^{(k)}}{c_n^{(o)}} \right| \leq 1$ și deci, $h_F = h_{f_o}$. Prin urmare, o limită inferioară pentru zerourile lui F(z) va fi

$$\frac{|\lambda_o| - \sum_1^p |\lambda_k| \alpha_k}{|\lambda_o| + \sum_1^p |\lambda_k| \alpha_k} h_F$$

Dar atunci,

$$d(R_F, z_o) \leq R_F - \frac{|\lambda_o| - \sum_1^p |\lambda_k| \alpha_k}{|\lambda_o| + \sum_1^p |\lambda_k| \alpha_k} R_F \quad , \qquad \text{Q.E.D.}$$

§ 2. Limitarea modulelor zerourilor funcţiilor de forma

$$g(z) = c_o + \sum_1^{\infty} c_{n_k} z^{n_k} .$$

In cele ce urmează , vom considera deci, seriile de puteri sub forma lacunară. Fie

$$(4.2.1) \qquad g(z) = c_o + c_{n_1} z^{n_1} + c_{n_2} z^{n_2} + \ldots + c_{n_p} z^{n_p} + \ldots ,$$

$$c_{n_p} \in \mathbb{C} , \; c_o > o , \; (n_o = o) , \; p = 1,2,\ldots, \; |z| < R_g .$$

Deşi rezultatele vor fi analoage în unele privinţe, există şi deosebiri, de aceea ne ocupăm separat de aceste funcţii.

Dăm mai întîi o teoremă generală, corespunzătoare teoremei 4.1.1.

TEOREMA 4.2.1. Fie o serie cu termeni pozitivi

$$(4.2.2) \quad (u) : \sum_{p=1}^{\infty} u_{n_p} \leq u_o < +\infty$$

Dacă $z_o \in \mathcal{Z}_g^{\alpha}$, atunci, are loc inegalitatea

$$(4.2.3) \qquad |z_o| \geq \inf_{p \geq o} \left(\frac{u_{p+1}}{u_{n_p}} \left| \frac{c_{n_p}}{c_{n_{p+1}}} \right| \right)^{1/(n_{p+1} - n_p)}$$

Demonstraţia este analoagă cu a teoremei 4.1.1.

Corolar 4.2.1. Dacă există o serie cu termeni pozitivi

$$\sum_{p=1}^{\infty} u_{n_p} \leq u_o < +\infty$$

astfel încît şirul $\left(\frac{u_{n_{p+1}}}{u_{n_p}} \left| \frac{c_{n_p}}{c_{n_{p+1}}} \right| \right)_{p \geq 1}^{1/(n_{p+1} - n_p)}$ este monoton descrescător şi $\lim_{p \to \infty} \frac{u_{n_{p+1}}}{u_{n_p}} = 1$, atunci $g(z) \neq o$, pentru $|z| < R_g$.

Corolar 4.2.2. Dacă şirul $\left(\frac{n_k}{n_{k+2}}\left|\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}\right|\right)_{k\geq 1}$ este monoton descrescător şi

$$R_g \leq \frac{1}{n_1 \cdot n_2}\left|\frac{c_{n_0}}{c_{n_1}}\right| ,$$

atunci, $g(z) \neq 0$, pentru $|z| < R_g$.

Pentru demonstraţie se foloseşte corolarul 4.2.1 şi inegalitatea

$$\frac{1}{n_1 \cdot n_2} + \frac{1}{n_2 \cdot n_3} + \ldots \leq 1,$$

In continuare vom considera cîteva cazuri particulare care prezintă interes.

a) Fie seria

$$t^{n_1} + t^{n_2} + \ldots + t^{n_p} + \ldots \leq \frac{t^{n_1}}{(1-t)^{n_1}} ,$$

$n_1 < n_2 < \ldots$, $t \in (0,1)$

Conform cu teorema 4.2.1, pentru $z_0 \in \mathcal{Z}_g$, avem

$$|z_0| \geq \inf_{k \geq 1}\left((1-t)\left|\frac{c_0}{c_1}\right|^{1/n_1} , \; t\left|\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}\right|^{1/(n_{k+1}-n_k)}\right), \; \forall\, t \in (0,1)$$

deci,

$$|z_0| \geq \sup_{t\in(0,1)} \inf_{k\geq 1}\left((1-t)\left|\frac{c_0}{c_1}\right|^{1/n_1}, \; t\left|\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}\right|^{1/(n_{k+1}-n_k)}\right)$$

Supremul de mai sus este atins în t_0 dat de

$$(1-t)\left|\frac{c_0}{c_1}\right|^{1/n_1} = t\,\nu[g] , \quad \text{cu}$$

$$\nu[g] = \inf_{k\geq 1}\left|\frac{c_{n_\nu}}{c_{n_{k+1}}}\right|^{1/(n_{k+1}-n_k)}$$

aşa cum se constată fără dificultate. Se deduce astfel următoarea limitare:

$$(4.2.5)\qquad |z_o| \geq \frac{|c_o|^{1/n_1}\,\nu[g]}{|c_o|^{1/n_1} + |c_{n_1}|^{1/n_1}\nu[g]} \overset{df}{=} \rho_g^{*}$$

b) Fie acum seria

$$(4.2.6)\qquad t+\frac{t^2}{2}+\ldots+\frac{t^n}{n}+\ldots = -\ln(1-t), \quad t\in(o,1)$$

Deducem pentru $1\leq n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots$,

$$\frac{t^{n_1}}{n_1}+\frac{t^{n_2}}{n_2}+\ldots+\frac{t^{n_p}}{n_p}+\ldots \leq (-\ln(1-t))^{n_1}$$

In acest caz vom avea:

$$|z_o| \geq \sup_{t\in(o,1)} \inf_{k\geq 1} \left(-\frac{t}{\ln(1-t)}\left(\frac{1}{n_1}\left|\frac{c_o}{c_{n_1}}\right|\right)^{1/n_1},\ t\left(\frac{n_k}{n_{k+1}}\left|\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}\right|\right)^{1/(n_{k+1}-n}\right.$$

iar supremul de mai sus, este atins în t_o dat de $-\frac{t}{\ln(1-t)}\gamma_o[g]=$

$= t\gamma[g]$, în care am notat

$$\gamma_o[g] = \left(\frac{1}{n_1}\left|\frac{c_o}{c_{n_1}}\right|\right)^{1/n_1},\ \gamma[g] = \inf_{k\geq 1}\left(\frac{n_k}{n_{k+1}}\left|\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}\right|\right)^{1(n_{k+1}-n_k)}$$

Avem, astfel următoarea limitare:

$$(4.2.7)\qquad |z_o| \geq \gamma[g]\,(1-e^{-\gamma_o[g]/\gamma[g]}) \overset{df}{=} e_g^{*} \ .$$

Din (4.2.5) şi (4.2.7) , deducem

<u>TEOREMA 4.2.2</u>. Fie $g\in\mathcal{H}$, $|z|<R_g$. Dacă $z_o\in\mathcal{Z}_g$, atunci, are loc inegalitatea

$$(4.2.8)\qquad |z_o| \geq \max\ (\rho_g^{*},\ e_g^{*})\ .$$

<u>Observaţii</u> : Limitele stabilite mai sus, rămîn valabile şi pentru polinoamele lacunare cu coeficienţi complecşi.

TEOREMA 4.2.3. (de aproximare). Fie $g(z) = \sum_{0}^{\infty} c_{n_k} z^{n_k}$, $|z| < R$. Dacă sînt satisfăcute condițiile

a) Şirul $\left(\left|\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}\right|\right)^{1/(n_{k+1}-n_k)}$ este monoton descrescător şi

$$\left|\frac{c_o}{c_{n_1}}\right| \geqslant \left[\frac{R(R-\varepsilon)}{\varepsilon}\right]^{n_1} \quad \text{sau}$$

b) Şirul $\left(\frac{n_k}{n_{k+1}}\left|\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}\right|\right)^{1/(n_{k+1}-n_k)}_{k\geqslant 1}$ este monoton descrescător

şi $\left|\frac{c_o}{c_{n_1}}\right| \geqslant n_1 \left(R \ln \frac{R}{\varepsilon}\right)^{n_1}$, $o < \varepsilon < R$ $\underline{\varepsilon - \text{mic}}$,

atunci pentru $\forall\, z_o \in \mathcal{Z}_g$, avem $|z_o| \simeq R$, cu o eroare inferioară lui ε.

Demonstrație. Dacă şirul $\left(\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}\right)^{1/(n_{k+1}-n_k)}$ este monoton descrescător, atunci ρ_g^* devine

$$\rho_g^* = \frac{|c_o|^{1/n_1} R}{|c_o|^{1/n_1} + |c_{n_1}|^{1/n_1} R}$$

şi în acest caz vom avea $R - |z_o| < R - \rho_g^* < \varepsilon$.

Dacă şirul $\left(\frac{n_k}{n_{k+1}}\left|\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}\right|\right)^{1/(n_{k+1}-n_k)}$ este monoton descrescător, limita e_g^* devine

$$e_g^* = R(1 - e^{-\Upsilon_o[g]/R})$$

şi în acest caz, avem $R - |z_o| < R - e_g^* < \varepsilon$.

Teorema e demonstrată.

O formă particulară mai des întîlnită, este

(4.2.9) $\quad h(z) = c_o + c_1 z + c_3 z^3 + \ldots + c_{2n-1} z^{2n-1} + \ldots, z \quad R_h$.

Conform cu cele stabilite anterior, dacă $z_0 \in \mathcal{Z}_h$, atunci

$$|z_0| \geq \inf_{n \geq 1} \left(\frac{u_1}{u_0} \left|\frac{c_0}{c_1}\right| \right), \left(\frac{u_{2n+1}}{u_{2n-1}} \left| \frac{c_{2n-1}}{c_{2n+1}} \right| \right)^{1/2} \Big) \tag{4.2.10}$$

Fie seria

$$\sum_{1}^{\infty} t^{2n-1} = \frac{t}{1-t^2}, \quad t \in (0,1) \tag{4.2.11}$$

Vom avea

$$|z_0| \geq \sup_{t \in (0,1)} \inf_{n \geq 1} \left((1-t^2)\left|\frac{c_0}{c_1}\right|, \ t\left|\frac{c_{2n-1}}{c_{2n+1}}\right|^{1/2} \right) \tag{4.2.12}$$

Punctul $t_0 \in (0,1)$ căutat, este dat de

$$(1-t^2)\left|\frac{c_0}{c_1}\right| = t\,\nu[h], \quad \nu[h] = \inf_{n \geq 1} \sqrt{\left|\frac{c_{2n-1}}{c_{2n+1}}\right|}$$

Obţinem astfel, un rezultat dat de următoarea

TEOREMA 4.2.4. Dacă $z_0 \in \mathcal{Z}_h$, atunci avem

$$|z_0| \geq \frac{2(|c_0|/|c_1|)\,\nu[h]}{\nu[h] + \sqrt{(\nu[h])^2 + 4(|c_0|/|c_1|)^2}} \tag{4.2.13}$$

Observaţii: Este evident că, $h(z)$ fiind un caz particular pentru $g(z)$ (ca serii), pentru zerourile lui $h(z)$, funcţionează aceeaşi limită (4.2.5). Dar limita (4.2.13) este mai bună, deoarece

$$\frac{2(|c_0|/|c_1|)\,\nu[h]}{\nu[h] + \sqrt{(\nu[h])^2 + 4(|c_0|/|c_1|)^2}} \geq \frac{|c_0|\,\nu[h]}{|c_0| + |c_1|\,\nu[h]}$$

TEOREMA 4.2.5. (de aproximare). Fie funcţia $h(z)$ dată de (4.2.9), pentru care presupunem satisfăcute condiţiile

a) Sirul $\left(\sqrt{\left|\frac{c_{2n-1}}{c_{2n+1}}\right|}\right)_{n \geq 1}$ este monoton descrescător,

b) $\left|\frac{c_0}{c_1}\right| \geqslant \frac{R^2(R-\varepsilon)}{\varepsilon(2R-\varepsilon)}$, $\quad 0<\varepsilon<\frac{R}{2}$, ε - mic

Atunci, dacă $z_0 \in \mathcal{Z}_h$, avem $|z_0| \simeq R$ cu o eroare inferioară lui ε.

Demonstrație. Deoarece șirul $\left(\left|\frac{c_{2n-1}}{c_{2n+1}}\right|\right)^{1/2}$ este monoton descrescător, rezultă $\nu[h] = R$.

Limita (4.2.13) în acest caz, devine

$$(4.2.14) \qquad |z_0| \geqslant \frac{2(|c_0|/|c_1|)R}{R+\sqrt{R^2+4(|c_0|/|c_1|)^2}}$$

Din condiția b), rezultă imediat, $R-|z_0|<\varepsilon$.

§ 3. Studiu asupra distribuției zerourilor funcțiilor de forma $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$.

Considerăm în acest paragraf, funcțiile

$$(4.3.1) \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \text{ cu } c_n \in \mathbb{C},\ n=0,1,2,\ldots,\ R^* < |z| < R$$

Considerăm seriile cu termeni pozitivi

$$(\alpha): \sum_1^{\infty} \alpha_n \leq \alpha_0 < +\infty, \quad (\beta)\ \sum_1^{\infty} \beta_n \leq \beta_0 < +\infty$$

Introducem și notațiile următoare

$$w[f] = \inf_{n \geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\left|\frac{c_0}{c_1}\right|,\ \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|\right)$$

$$W[f] = \inf_{n \geqslant 1}\left(2\frac{\beta_0}{\beta_1}\left|\frac{c_{-1}}{c_0}\right|,\ \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}\left|\frac{c_{-n-1}}{c_{-n}}\right|\right).$$

TEOREMA 4.3.1. Dacă z_0 este un zero pentru $f(z)$, dată de (4.3.1), din coroana $R^*<|z|<R$, atunci are loc una din inegalitățile

$$(4.3.2) \qquad |z_0| \geqslant w[f], \qquad |z_0| \geqslant W[f].$$

<u>Demonstrație:</u> Cu $z = re^{i\varphi}$ $c_n = |c_n| e^{i\varphi_n}$, $c_{-n} = |c_{-n}| e^{i\varphi'_n}$, avem

$$\operatorname{Re} f(z) = \lim_{n\to\infty} (k'_n(r,\varphi,\bar{c}) + k''_n(r,\varphi,\bar{c}))$$

unde am notat

$$k'_n(r,\varphi,\bar{c}) = \left(\frac{|c_0|}{2\alpha_0} - \frac{|c_1|}{\alpha_1}\right)\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\delta_k(r)\left(\alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu\cos(\nu\varphi+\varphi_\nu)\right) + \frac{|c_n|}{\alpha_n} r^n \left(\alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\cos(\nu\varphi+\varphi_\nu)\right),$$

$$k''_n(r,\varphi,\bar{c}) = \left(\frac{|c_0|}{2\beta_0} - \frac{|c_{-1}|}{\beta_1}\frac{1}{r}\right)\beta_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\delta^*_k(r)\left(\beta_0 + \sum_{\nu=1}^{k}\beta_\nu\cos(\nu\varphi+\varphi'_\nu)\right) + \frac{|c_{-n}|}{\beta_n}\frac{1}{r^n}\left(\beta_0 + \sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu\cos(\nu\varphi+\varphi'_\nu)\right),$$

și

$$\delta_k(r) = \frac{|c_k|}{\alpha_k} r^k - \frac{|c_{k+1}|}{\alpha_{k+1}} r^{k+1},$$

$$\delta^*_k(r) = \frac{|c_{-k}|}{\beta_k}\frac{1}{r^k} - \frac{|c_{-k-1}|}{\beta_{k+1}}\frac{1}{r^{k+1}}, \quad k=1,2,\ldots$$

Si aici se constată că toate sumele $\alpha_0 + \sum_1^k \alpha_\nu\cos(\nu\varphi+\varphi_\nu)$, $\beta_0 + \sum_1^k \beta_\nu\cos(\nu\varphi+\varphi'_\nu)$ sînt pozitive, și impunînd condițiile $\delta_k(r) > 0$, $\delta^*_k(r) > 0$, $k=1,2,\ldots$, rezultă

$$\operatorname{Re} f(z) > 0 .$$

Teorema e demonstrată.

Se constată că, dacă există două serii $(\alpha),(\beta)$

astfel încît $R^* = w[f]$, $R = w[f]$, atunci, $f(z) \neq o$ pentru $R^* < |z| < R$.

Să considerăm şi aici două serii numerice particulare.

Fie astfel

$$\sum_1^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t} \quad , \quad t \in (o,1)$$

In acest caz, procedînd ca în problemele precedente, considerăm şirurile:

$$(y_n(t)) \overset{df}{=} \left((1-t)\,\frac{1}{2}\left|\frac{c_o}{c_1}\right| ,\ t\left|\frac{c_1}{c_2}\right|, \dots\ t\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| , \dots\right)$$

$$(y_n^*(t)) \overset{df}{=} \left((1-t)\,2\left|\frac{c_{-1}}{c_o}\right| ,\ t\left|\frac{c_{-2}}{c_{-1}}\right|, \dots\ t\left|\frac{c_{-n-1}}{c_{-n}}\right|, \dots\right)$$

Problema determinării punctelor t_o, $t_o^* \in (o,1)$ pentru care avem

$$\sup_{t\in(o,1)} \inf_{n\geq o} (y_n(t)) \ , \quad \inf_{t\in(o,1)} \sup_{n\geq o} (y_n^*(t))$$

conduce imediat la rezolvarea următoarelor ecuaţii:

$$(1-t)\left|\frac{c_o}{2c_1}\right| = t \inf_{n\geq 1}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \overset{df}{=} \nu_o[f]$$

$$(1-t)\,2\left|\frac{c_{-1}}{c_o}\right| = t \sup_{n\geq 1}\left|\frac{c_{n-1}}{c_{-n}}\right| \overset{df}{=} \nu_o^*[f] .$$

Deducem

<u>TEOREMA 4.3.2.</u> Dacă z_o este un zero pentru $f(z)$, atunci, are loc una din inegalităţile

$$(4.3.3) \quad |z_o| \geq \frac{|c_o|\,\nu_o[f]}{|c_o| + 2|c_1|\,\nu_o[f]} \qquad \text{sau}$$

$$(4.3.4)\qquad |z_0| \leq \frac{2|c_{-1}|\, \nu_0^{*}[f]}{2|c_{-1}| + \nu_0^{*}[f]}$$

In încheiere, dăm şi următoarea

TEOREMA 4.3.3. Dacă pentru $f(z)$, $R^{*} < |z| < R$, sînt îndeplinite condiţiile

$$(4.3.5)\qquad \text{şirul } \left(\frac{1}{4}\left|\frac{c_0}{c_1}\right|, \frac{n}{n+2}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|\right) \text{ este monoton descrescător}$$

iar şirul

$$(4.3.6)\qquad \left(4\left|\frac{c_{-1}}{c_0}\right|, \frac{n+2}{n}\left|\frac{c_{-n-1}}{c_{-n}}\right|\right) \text{ este monoton crescător}$$

atunci, $f(z) \neq 0$, pentru $R^{*} < |z| < R$.

Demonstraţie. Se aleg drept serii (α) şi (β) seria

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = 1$$

In acest caz se observă că

$$w[f] = \inf_{n \geq 1} \left(\frac{1}{4}\left|\frac{c_0}{c_1}\right|, \frac{n}{n+2}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|\right) = R \qquad \text{şi}$$

$$W[f] = \sup_{n \geq 1} \left(4\left|\frac{c_{-1}}{c_0}\right|, \frac{n+2}{n}\left|\frac{c_{-n-1}}{c_{-n}}\right|\right) = R^{*}$$

Din teorema 4.3.1, avem sau

$|z_0| \geq w[f]$ sau $|z_0| \leq W[f]$ teorema este demonstrată.

CAPITOLUL V. A P L I C A T I I

§ 1. Generalităţi

Problemele dezvoltate în capitolele anterioare, atît cele referitoare la polinoamele trigonometrice de una şi mai multe variabile, cît şi cele privitoare la studiul repartiţiei zerourilor funcţiilor analitice în planul complex, îşi găsesc aplicaţii în fizică, mecanică, electrotehnică. Ne vom opri doar la unele aplicaţii din sfera celei de a doua problematici.

Posibilităţile de aplicare, sînt în strînsă legătură cu utilizarea tot mai largă a funcţiilor complexe de variabilă complexă, în unele capitole din teoria elasticităţii, electrotehnica teoretică, hidro-aerodinamică ş.a. Astfel:

1. Problema antiplană. Studiul micilor deplasări şi micilor deformaţii ale barelor cilindrice zvelte, izotrope şi omogene cu suprafaţa laterală liberă, în esenţă, conduce la problema Dirichlet sau Neuman, pentru ecuaţia lui Laplace în două variabile. Dezvoltarea modernă a subiectului, utilizează aparatului teoriei funcţiilor de variabilă complexă, ceea ce a fost prevăzut încă de Saint Venant, dar a luat proporţiile actuale graţie rezultatelor lui I.N.Muşhelisvili [63] R.Capildeo [19] ş.a. (Funcţiile lui Capildeo şi Milne-Thomson, funcţiile lui Prandtl şi Timashenko).

Problema torsiunii, se reduce la determinarea funcţiei $\psi(\delta)$ olomorfe într-un domeniu $\mathcal{D}$. Linia principală de abordare a problemei torsiunii, o constituie utilizarea mijloacelor teoriei funcţiilor complexe, ale căror posibilităţi practice sînt limitate numai de posibilitatea construirii efective a reprezentării conforme corespunzătoare (exacte sau aproximative) a domeniului $\mathcal{D}$ pe discul unitate $\mathcal{U}$.

BUPT

Pentru transformarea

$$Z = \omega(z) \qquad (z = \omega^{-1}(Z))$$

care reprezintă conform discul unitate Π (fr γ) din planul (z) pe domeniul simplu conex $\mathcal{D}$, derivata ω '(z) nu admite zerouri în Π (putînd avea, în schimb, zerouri pe γ).

De remarcat că în aceste probleme , un rol important îl are metoda seriilor. Dacă soluția nu poate fi găsită direct, se ține seama că ω (z) și ψ(z) sînt olomorfe în Π :

$$\omega(z) = \sum_{0}^{\infty} \omega_n z^n \; , \; \psi(z) = \sum_{0}^{\infty} b_n z^n$$

$$(\omega_n \text{ - cunoscuți})$$

In această reprezentare deci, funcția $\sum_{1}^{\infty} n\,\omega_n z^{n-1}$ nu admite zerouri în Π

2. Problema plană. Problemele la limită fundamentale ale elasticității plane, se reduc la una și aceeași problemă la limită a teoriei funcțiilor de variabilă complexă.

Primul care a dat o reprezentare complexă sistematică a deplasărilor și tensiunilor în problema plană a fost G.V.Kolosov (19o9).

Formulele de reprezentare și-au găsit o formă riguroasă și elegantă în opera lui I.N.Mushelisvili , sintetizată în [83] .

Dacă în problema antiplană, soluția depinde în ultima instanță de determinarea unei funcții de variabilă complexă - în problema plană avem de a face cu două astfel de funcții.

In [83] , se ia ca punct de plecare reprezentarea funcției biarmonice U cu ajutorul a două funcții de variabilă complexă $\varphi(Z)$, $\psi(Z)$, olomorfe pe suportul mediului elastic

$$U = \mathrm{Re}\left[\bar{Z}\varphi(Z) + \chi(Z)\right], \quad Z = X_1 + iX_2 , \quad (\chi'(Z) = \psi(Z))$$

reprezentare dată prima dată de Goursat (Bull.Soc.Math. de France , 26 , p.236) în ipoteza că U este analitică și redată de Mushelisvili în 1919 în caz general (Izvestija Akad. Nauk SSSR , p. 663).

Metodele teoriei funcțiilor de variabilă complexă cîștigă necontenit teren în studiul încovoierii plăcilor, o prezentare modernă a subiectului fiind dată de către mai mulți matematicieni.

Formulele de bază ale problemei plane, conțin două funcții de variabilă complexă, analitice în general, olomorfe în particular. Cînd funcțiile nu sînt olomorfe (domenii multiplu conexe sau infinite), partea lor principală este determinată iar din condițiile la limită se determină și în acest caz două funcții olomorfe.

Există, în general, două metode de a reprezenta aceste funcții. Metoda cea mai directă este de a reprezenta aceste funcții sub formă de serii Taylor și de a determina coeficienții din condițiile la limită. A doua metodă, constă în a prelungi adecvat aceste funcții în domeniul complementar suportului elastic și de a defini funcții olomorfe în tot planul complex exceptînd $\mathrm{fr}\,\Gamma$

Soluţia problemelor fundamentale pentru domenii reprezentabile conform pe discul unitate, prin intermediul unor funcţii polinomiale, urmăreşte determinarea funcţiilor $\varphi(z)$, $\psi(z)$, sub formă de serii. Pentru rezolvarea acestor probleme se utilizează cel mai adesea dezvoltările în serie (Taylor sau Laurent). Metoda seriilor şi a integralelor de tip Cauchy permite rezolvarea efectivă sau cel puţin studiul teoretic al problemelor Dirichlet sau Neuman.

3. In ELECTROTEHNICA, în studiul proceselor cvasistaţionare, este utilizat aparatul funcţiilor complexe de variabilă complexă.

- Tratarea problemelor analizei circuitelor electrice: regimurile permanente şi procesele tranzitorii (circuite cu regim tranzitoriu).

- Studiul cîmpurilor statice şi staţionare, se poate face cu ajutorul funcţiilor complexe, care reprezintă auxiliarul cel mai eficace în rezolvarea problemei plane a electrostaticii. Sînt studiate diferite cîmpuri din fizică cu ajutorul potenţialului complex $w = f(z)$ care le descrie.

De asemenea, este utilizată metoda transformării conforme pentru studiul electrozilor poligonali.

4. In HIDRO-AERODINAMICA, funcţiile de variabilă complexă îşi găsesc o largă utilizare în descrierea mişcărilor plane irotaţionale staţionare a fluidelor incompresibile.

In continuare, facem cîteva referiri mai concrete în acest domeniu, care scot în evidenţă importanţa punctelor din planul complex în care se anulează unele funcţii. Aceste puncte, în general nu pot fi determinate , dar pot fi, în unele cazuri, localizate în anumite coroane circulare.

Se știe că orice mișcare plană irotațională poate fi reprezentată printr-o funcție analitică de z

$$f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y) \quad \text{(potențial complex)}$$

φ - potențialul de viteze, ψ - functia de curent și invers, orice funcție analitică de variabilă complexă z , va reprezenta o mișcare plană irotațională, cu φ, ψ - avînd semnificațiile de mai sus.

In special, cînd se utilizează metoda holografică , se ia ca bază de plecare, viteza complexă și nu potențial complex.

In numeroase probleme de scurgere a unui fluid, joacă un rol important punctele în care viteza complexă $w = f'(z)$ se anulează (puncte de stagnare) .

Aceste puncte pot fi determinate efectiv în unele probleme , cum sînt:

- sursă în curent paralel (aflarea bordului de atac)
- sistem format din două surse
- mișcarea în jurul unui cilindru oval
- vîrtej într-un curent paralel
- șiruri de surse și vîrtejuri

Mișcarea în jurul cercului cu și fără circulație.

Este de asemenea importantă utilizarea funcțiilor complexe în teoria profilelor aerodinamice, unde transformarea conformă joacă un rol important.

Viteza într-un punct de profil $w(z)$ depinde de viteza în punctul corespunzător pe cercul generator $W(Z)$, prin relația

$$w(z) = W(Z)/\frac{dz}{dZ}$$

Deoarece în B, vîrful profilului (ascuţit) $\frac{dz}{dZ} = 0$, implică $w(Z_{B'}) = 0$ pe cercul generator pentru ca $w(z)$ să fie finită.

Ipoteza făcută asupra imposibilităţii fizice a unei viteze infinite la vîrf este ipoteza lui Jukovski (numită adesea ipoteza Kutta-Jukovski) şi face posibilă determinarea circulaţiei astfel ca viteza în B' să fie nulă.

Aplicarea reprezentării conforme la rezolvarea diferitelor probleme, în care de asemenea se cere determinarea punctelor de stagnare, este ilustrată şi de următoarele exemple:

- surse sau vîrtejuri în interiorul unui diedru
- surse sau vîrtejuri situate la distanţe egale pe o circumferinţă
- scurgerea de-a lungul pereţilor plani
- mişcarea în jurul unei plăci plane
- scurgerea în jurul sistemelor de fante sau în jurul reţelelor
- mişcarea în jurul unui contur situat într-un curent paralel

Ca o aplicare a ultimei mişcări, este teoria profilelor aerodinamice (Profile Jukovski, Karáman-Treffz, Mises, Carafoli).

Toate se obţin folosind transformarea :

$$z = Z + \frac{q^2}{Z} + \frac{q_2}{Z^2} + \ldots + \frac{q_n}{Z^n} + \ldots$$

care reprezintă conturul unui cerc pe cel al unui profil.

Intre viteze, există relaţia:

$$V_p = V_k / \left|\frac{dz}{dZ}\right|$$

($\frac{dz}{dZ}$ = o în vîrful profilului, V_k = o).

Pentru profilele utilizate la construcţia palelor de elice sau chiar pentru profilele de aripă, în anumite puncte ale anvergurii aripii, raţiuni de ordin constructiv impun un vîrf rotunjit. De aceea apare necesar să se analizeze mai îndeaproape caracteristicile scurgerii în jurul unui vîrf rotunjit şi să se deducă condiţiile de echilibrare pentru a determina punctul de viteză nulă de pe profil şi de pe cerc şi prin aceasta însăşi circulaţia.

Mai multe probleme din capitolele III-V, se ocupă cu localizarea zerourilor unor combinaţii de funcţii olomorfe (între care şi combinaţiile liniare). Aceste probleme pot fi puse în legătură cu principiul superpoziţiei.

Deoarece problema determinării unor mişcări potenţiale plane este liniară (ecuaţia lui Laplace şi condiţiile la limită) rezultă că orice combinaţie liniară de potenţiali complecşi $f_k(z)$ va fi tot un potenţial complex. Această constatare traduce matematic faptul că mişcarea datorată mai multor cauze se face ca şi cînd fiecare cauză ar exista independent.

§ 2. Izolarea punctelor de stagnare în cazul unor mişcări plane irotaţionale

Ţinînd seama de interpretările din § 1 şi de rezultatele obţinute în cap. III-IV, dăm mai jos cîteva teoreme care leagă aceste rezultate de mişcarea plană potenţială staţionară a fluidelor incompresibile.

TEOREMA 5.2.1. Mişcările pentru care viteza complexă este de forma

$$(5.2.1) \qquad W_1(z) = a_o + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \; a_n \geq o, \; n = o,1,2,\ldots, \; |z| < R_{W_1}$$

nu admit puncte de stagnare în domeniul

$$(5.2.2) \qquad |z| < \omega_1 [W_1]$$

şi nu admit puncte de stagnare complexe în domeniul

$$(5.2.3) \qquad |z| < \omega_o [W_1]$$

Fie funcţiile $f_1, f_2, \ldots f_m \in \mathcal{H}^+$ şi numerele naturale $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$.

TEOREMA 5.2.2. Mişcările pentru care viteza complexă este de forma

$$(5.2.4) \qquad W_2(z) = \lambda_o + \lambda_1 f_1^{p_1}(z) + \lambda_2 f_2^{p_2}(z) + \ldots \lambda_m f_m^{p_m}(z),$$

cu $\lambda_o, \lambda_1, \ldots \lambda_m \geq o$, $|z| < R_{W_2}$

nu admit puncte de stagnare în domeniul

$$(5.2.5)\quad |z| < \min_k \frac{\omega_1 [f_k] \omega_2 [f_k]}{(p_k-1)\omega_1 [f_k] + \omega_2 [f_k]}$$

şi nu admit puncte de stagnare complexe în domeniul

$$(5.2.6)\quad |z| < \min_k \frac{\omega_0 [f_k] \omega_2 [f_k]}{(p_k-1)\omega_0 [f_k] + \omega_2 [f_k]}$$

Aceste două teoreme se deduc din rezultatele obţinute în capitolul III. Evident, se pot deduce multe alte teoreme folosind şi alte rezultate din acest capitol.

Din capitolul IV, deducem şi următoarele:

TEOREMA 5.2.3. Fie o serie cu termeni pozitivi

$$(5.2.7)\quad \sum_1^{\infty} u_n \leq u_0 < +\infty$$

Mişcările pentru care viteza complexă este

$$(5.2.8)\quad w_3(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n, \quad c_0 > 0, \quad c_n \in \mathbb{C},$$

$$n = 1, 2, \ldots, |z| < R_{w_3}$$

nu posedă puncte de stagnare în domeniul

$$(5.2.9)\quad |z| < \inf_{n \geq 0} \frac{u_{n+1}}{u_n} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

Următoarea teoremă, dă condiţii de apropiere a eventualelor puncte de stagnare de circumferinţa cercului de convergenţă.

TEOREMA 5.2.4. Dacă pentru viteza complexă (5.2.8) sînt satisfăcute condițiile:

a) şirul $\left(\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|\right)_{n\geq 1}$ este m.d. şi $\left|\frac{c_o}{c_1}\right|\geq\frac{R(R-\mathcal{E})}{\mathcal{E}}$,

sau

b) şirul $(n|c_n|/(n+1)|c_{n+1}|)_{n\geq 1}$ este m.d. şi

$$\left|\frac{c_o}{c_1}\right|\geq R\ \ln\ \frac{R}{\mathcal{E}}\ ,\quad o<\mathcal{E}<R\ ,$$

atunci, eventualele puncte de stagnare se află în coroana $o<R-\mathcal{E}<|z|<R$.

In continuare, considerăm viteza de forma mai generală

$$(5.2.10)\qquad w_4(z) = c_o + c_{n_1}z^{n_1} + c_{n_2}z^{n_2} + \ldots + c_{n_p}z^{n_p} + \ldots ,$$

$$c_o > o,\ c_{n_p}\in\mathbb{C}\ ,\ p = 1,2,\ldots,\ |z|<R_{w_4}.$$

Fie notațiile din Cap.IV,

$$\rho_f^{*} = \frac{|c_o|^{1/n_1}\nu[g]}{|c_o|^{1/n_1}+|c_{n_1}|^{1/n_1}\nu[g]}$$

$$e_g^{*} = \gamma[f]\left(1 - e^{-\gamma_o[f]/\gamma[f]}\right);$$

$$\nu[f]= \inf_{k\geq 1}\left|\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}\right|^{1/(n_{k+1}-n_k)},\ \gamma_o[f]=\left(\frac{1}{n_1}\left|\frac{c_o}{c_{n_1}}\right|\right)^{1/n_1}$$

$$\gamma[f] = \inf_{k\geq 1}\left(\frac{n_k}{n_{k+1}}\left|\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}\right|\right)^{1/(n_{k+1}-n_k)}$$

BUPT

TEOREMA 5.2.5. Punctele de stagnare z_0 ale mişcărilor pentru care viteza complexă are forma (102) satisfac inegalitatea

$$(5.2.11) \qquad |z_0| \geq \max(\varrho_f^*, e_f^*)$$

Din această teoremă, deducem şi următoarea

TEOREMA 5.2.6. Dacă pentru viteza complexă (5.2.10) sînt satisfăcute condiţiile:

a) $\left(|c_{n_k}| / |c_{n_{k+1}}|\right)^{1/(n_{k+1}-n_k)}$ este m.d. şi

$$\left|\frac{c_0}{c_{n_1}}\right| \geq \left[\frac{R(R-\varepsilon)}{\varepsilon}\right]^{n_1}$$ sau

b) $\left(n_k |c_{n_k}| / n_{k+1} |c_{n_{k+1}}|\right)_{k\geq 1}^{1/(n_{k+1}-n_k)}$ este m.d. şi

$$\left|\frac{c_0}{c_{n_1}}\right| \geq n_1 \left(R \ln \frac{R}{\varepsilon}\right)^{n_1}, \qquad 0 < \varepsilon < R,$$

atunci, eventualele puncte de stagnare ale mişcărilor respective, se găsesc în coroana

$$0 < R - \varepsilon < |z| < \quad .$$

TEOREMA 5.2.7. Dacă viteza complexă are forma (5.2.12)

$$(5.2.12) \qquad w(z) = c_0 + c_1 z + c_3 z^3 + \ldots + c_{2n-1} z^{2n-1} + \ldots$$

atunci punctele de stagnare z_0, satisfac inegalitatea

$$(5.2.13)\quad |z_0| \geq \frac{2(|c_0|/|c_1|)\nu[w]}{\nu[w] + \sqrt{(\nu[w])^2 + 4(|c_0|/|c_1|)^2}}$$

unde
$$\nu[w] = \inf_{n\geq 1} \sqrt{\left|\frac{c_{2n-1}}{c_{2n+1}}\right|}$$

In continuare dăm şi următoarea teoremă de aproximare

TEOREMA 5.2.8. Dacă pentru viteza (5.2.12) sînt satisfăcute condiţiile

a) şirul $\left(\sqrt{\left|\frac{c_{2n-1}}{c_{2n+1}}\right|}\right)_{n\geq 1}$ este m.d. şi

b) $\left|\frac{c_0}{c_1}\right| \geq \frac{R^2.(R-\mathcal{E})}{\mathcal{E}(2R-\mathcal{E})}$, $0<\mathcal{E}<\frac{R}{2}$, $\mathcal{E}$ - mic

atunci, dacă z_0 este punct de stagnare, avem $|z_0| \simeq R$, cu o aproximaţie inferioară lui $\mathcal{E}$.

In încheiere, mai dăm cîteva teoreme prin care se stabilesc condiţii suficiente , în care, viteza complexă reprezentată printr-o serie de puteri, nu se anulează în interiorul cercului de convergenţă al seriei respective. Aceste teoreme sînt aplicaţii ale rezultatelor stabilite în cap. III şi IV.

TEOREMA 5.2.9. Fie o viteză complexă

$$(5.2.14)\qquad w(z) = \lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z) + \ldots + \lambda_p f_p(z),\quad |z| < R_w$$

$$f_1, f_2 \dots f_p \in \mathcal{H}^+ \ , \ f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k \ z^n \ , \ 0<|z|<R_{f_k} \leq +\infty \ ,$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p \geqslant 0, \ k = 1,2,\dots p$$

Dacă toate şirurile

$$(na_n^k / (n+1)a_{n+1}^k)_{n \geqslant 1} \quad , \quad n = 1,2,\dots p \ ,$$

sînt monoton descrescătoare, atunci, mişcarea corespunzătoare nu posedă puncte de stagnare complexe în $|z|<R_w$.

Dacă în plus $a_0^k / a_1^k \geqslant R_{f_k}$, $k = 1,2,\dots, p$, atunci, mişcarea nu posedă puncte de stagnare pentru $|z|<R_w$.

TEOREMA 5.2.10. Fie viteza complexă

$$w(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n \ , \ c_0 > 0, \ c_n \in \mathcal{C}, \ n=1,2,\dots, |z| < R_w \tag{5.2.15}$$

Dacă există o serie cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq u_0 < +\infty \ , \tag{u}$$

estfel ca:

(A) Şirul $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \right)_{n \geq 1}$ este monoton descrescător

(B) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$,

atunci, mişcarea nu posedă puncte de stagnare în domeniul $|z| < R_w$.

Corolar 5.2.1. Dacă şirul $\left(\frac{n}{n+2}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|\right)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător şi $\frac{1}{2}\left|\frac{c_o}{c_1}\right|\geq R_w$, atunci mişcarea nu posedă puncte de stagnare în domeniul $|z|<R_w$.

TEOREMA 5.2.11. Fie viteza complexă

(5.2.16) $$w(z)=c_o+c_{n_1}z^{n_1}+c_{n_2}z^{n_2}+\ldots+c_{n_p}z^{n_p}+\ldots$$

$$c_o>0,\quad c_{n_p}\in\mathcal{C},\ p=1,2,\ldots,\quad |z|<R_w$$

Dacă există o serie cu termeni pozitivi

(u') $$\sum_{p=1}^{\infty}u_{n_p}\leqslant u_o<+\infty$$, astfel ca:

(A') şirul $$\left(\frac{u_{n_{p+1}}}{u_{n_p}}\left|\frac{c_{n_p}}{c_{n_{p+1}}}\right|\right)^{1/(n_{p+1}-n_p)}_{p\geq 1}$$

este monoton descrescător

(B') $$\lim_{p\to\infty}\frac{u_{n_{p+1}}}{u_{n_p}}=1\ ,$$

atunci, mişcarea nu posedă puncte de stagnare pentru $|z|<R_w$.

Corolar 5.2.2. Dacă şirul

$$\left(\frac{n_k}{n_{k+1}}\left|\frac{c_{n_k}}{c_{n_{k+1}}}\right|\right)_{k\geq 1}$$ este monoton descrecător,

şi $$R_w\leqslant\frac{1}{n_1n_2}\left|\frac{c_{n_o}}{c_{n_1}}\right|\ ,$$

atunci mişcarea nu posedă puncte de stagnare în domeniul $|z|<R_w$.

BIBLIOGRAFIE

1. N.I.Ahiezer M.G.Krein - Über Fouriersche Reihen beschränkter Summierbarer Funktionen und ein neues Extremum - problem, Zap. Harkov Mat. Obs.(4) 9(1934), 9-23 i (4) lo (1934) , 3-32

2. L.V.Ahlfors - Complex Analysis - Mc Graw-Hill New-York 1966

3. Th.Angheluţă - Curs de teoria funcţiilor de variabilă complexă. Ed. tehnică, Bucureşti, 1957

4. R.Askey, J.Fitch - SIAM Review, 11 (1969) 82-86

5. R.Askey, J.Fitch - Some pozitive trigonometric sums, Notices Amer.Math.Soc. 15(1968), 769

6. N.K.Bari - Generalization of inequalities of S.N.Bernstein and A.A. Markoff (na ruskom) Izvestya Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 18(1954), 159-176

7. E.F.Beckenbach, R.Bellman - Inequetlities , Berlin-Heidelberg-New York 1961 and 1965

8. S.Bernstein - Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions, Mémoire publiés par l'Academie de Belgique, 1912

9. H.Behnke, F.Sommer - Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen , Springer Verlag, Berlin, 1965

lo.M.Biernacki - Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires (Thèse). Bull. de l'Acad. polon. des Sciences et des Lettres 541-685 (1927).

11.R.P.Boas - Inequalities for the coefficients of trigonometric polynomials, I, Indagationes Math. 9(1947), 298-3ol.

12.R.P.Boas - Inequalities for the coefficients of trigonometric polynomials, II, Inaligationes Math. 9(1947), 369-372

13.R.P.Boas - Inequalities for polynomials with a prescribed zero, Studies in mathematical Analysis and related topics, Stanford 1962, pp. 42-47

14.I.Blankfield D.Zeitlin - Problem E 122o, Amer. Math. Montly 64(1957), 47-48

15.N.Boboc - Funcţii complexe. Ed. did. şi pedag., Bucureşti 1969

16.N.Bouhbaki - Topologie générale, deuxième edition chap. 8, Nombres complexes.

17.H.Bray - On the zeros of a polynomial and of its derivative , Amer. J.Math. 53 (1931) 864-872

18.N.G.De Bruijn T.A.Springer - On the zeros of a polinomiel and of its derivative II. Indagationes Math. 9(1947)

19.R.Capildeo - Flexure with shear centre. A general treatment with complex variables, Proc. Cambridge Phil. Soc. 49, 2 (1953)

2o.Gh.Călugăreanu - Elemente de teoria funcţiilor de o variabilă complexă. Ed. did. şi pedag. , Bucureşti 1963

21.E.Carafoli T.Oroveanu - Mecanica fluidelor, vol.II. Ed.Acad. RSR 1955

22.R.D.Charmichael T.E.Mason - Note on the roots of algebric équetions.Bull.Amer.Math.Soc. 21(1914) 14-22

23. F.Constantinescu - Sur un théorème de V.A.Markov , Mathematica vol. 2(25) , 2, 1960, pp.211-216

24. F.Constantinescu - Relations entre les coefficients de deux polynomes dont les racines se separent , Casopis Pest.Mat. 89 (1964) 1-4

25. V.N.Constantinescu - Mecanica fluidelor si elemente de aerodinamică, E.D.P., Bucuresti, 1983

26.J.B.Conway - Functions of one complexe variable Springer Verlag, Berlin 1973

27.B.Crstici, Gh.Tudor - Compléments au traité de Mitrinović (I). Quelques inegalitiés intégrales, Mathematica vol. 14 (37), 1, 1972, pp.27-31

28.B.Crstici, Gh.Tudor - Compléments au traité de Mitrinović (II). Sur quelques inégalitiés intégrales. Publ. de la Fac. d'Electrot. de l'Univ. à Belgrade . Serie Math. et Phys. 381-409.

29.B.Crstici, R.Meynieux - Compléments au traité de D.S.Mitrinović IV. Sur une intégrale dépendant d'un paramètre réel. Publ.Fac. Electrot. Univ.Belgrade Sér. Math.Phys. (1975), 153-158

30.H.Davenport, H.Halbenstam - The values of a trigonometric polynomial at well spaced points, Mathematika 13(1966) 91-96

31.J.Dieudonné - Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1960

32.J.Dieudonné - Recherches sur quelques problems relatifs aux polynomes et aux fonctions bornées d'un variable complexe. Annales Scientiques de l'Ecole Normale Supérieure (3). Tome 48, 247-358

33. A.Dinghas - Verlesungen über Funktionen -theorie, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961, p.128

34.D.Z.Doković - Sur une généralisation de l'inégalité de Fejér-Jackson. Univ. Beograd Publ. Elektrot. Fak. Ser.Mat.Fiz.Nr.35- Nr. 37 (1960) 1-4

35.L.Dragoş - Principiile mecanicii mediilor continue. Ed.tehnică, Bucureşti, 1981

36.D.Emanuel - Lecţiuni de teoria funcţiilor. Ed. Scrisul Românesc, Bucureşti, 1924

37.P.Erdös - An ine quality for the maximum of trigonometric polynomials, Ann.Polon. Math. 12(1962) 151-154

38.M.A.Eygrafov - Sbornic zadaci po teorii analiticeschih funcţii, Izd. Nauka Moscova 1972

39.D.Gaier, J.Todd - On the rate of convergence of optimal ADI processes, Num. Math. 9(1967) 452-459

40.G.Gasper - Nonnegative sums of cosine, ultraspherical and Jacobi polynomials J.Math. Anal. Appl. 26(1969), 60-68

41.Ya.L.Geronimus - Refinement of estimates of Van der Corput Visser, Fejes and Boas for the coefficients of trigonometric polynomials (na ruskom). Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 63(1948) 479 -482.

42.Ya.L.Geronimus - Sur quelques propriétés extrémales des polynomes trigonometriques, C.R. Acad.Sci.Paris 198 (1934) 2221-2222

43.R.Codeanu - Sur les équations algébriques ayant

44.V.L.Gončarov - The Theory of Interpolation and Approximation of Functions (în rusă) Moskva 1954, 231-232

45.A.Green, W.Zerna - Theoretical elasticity, Oxford 1954

46. T.H.Gronwall - Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n}$, Math.Ann.72 (1912) 228-243

47.G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.Pólya - Inequalities, Cambridge, 1934

48.E.Hille, J.Tamarkin - On the summability of Fourier series, I, Trans.Amer.Math. Soc. 34(1932) 757-783

49. C.Hyltén-Cavallius - Apozitive trigonometrical kernel, Tölfte Skandinaviska Matematiker-Kongressen, Lund 1953, pp. 9o-94 (1954)

5o.C.Hyltén-Cavallius - Some extermal problems for trigonometrical and complex polynomials, Math. Scand. 3(1955), 5-2o

51.C.Hyltén-Cavallius - Geometrical methods applied to trigonometrical sums, Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar 21, Nr.1 (195o), 19 pp.

52.D.Jackson - Uber eine trigonometrische Summe Rend. Circ. Mat. Palermo 32 (1911) 257-262

53.M.Jakob - Nullstellen zufälliger Potenzreihen Diplomarbeit, Tu Berlin (1975)

54. M.Jakob - Nullstellen zufälliger Potenzreihen im Einheitskreis, Berlin 1978

55.J.Karamata, M.Tomić - Considération géométriques relatives aux polynômes et series trigonométriques, Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 2(1948),157-175

56.H.Kramer - Über einige Ungleichungen zwischen den Nullstellem eines Polynoms und series ersten Ableitung, Mathematica (Cluj) 1o(33)(1968) 89-93

57.E.Landau - Ueber den Picardschen Satz Vierteljahrschrist der naturfucschen den Gesellschaft in Zürich, t 51, 316-318 (19o6)

58.E.Landau - Über eine Aufgabe aus der Funktionen theorie, Tôhoku Math. J. 5(1914)

59.E.Landau - Sur quelques théorèmes de M.Petrović relatifs aux zéros des fonctions analytiques, Bull.Soc.Math.France 33(19o5) 251-261

6o.E.Landau - Sur quelques généralisation du théorème de M.Picard. Annales (scientifiques) de l'Ecole Normale Supérieure(3), 24 179-2o1 (19o7)

61.S.Lang - Complex Analysis, Addison-Wesley,Reading, 1977

62.G.K.Lebed - On trigonometric series with coefficients which satisfy some conditions (în l.rusă) Mat. Sb. 74 (116) (1967) 1oo-118

63.J.E.Littlewood, A.C.Offord - On the distribution of zeros and a-values of a random integral function II, Annals of Math. 49(1948) pp. 885-952 5o(1949) pp.99o-991.

64.Ch.Lucas - Comptes Rendus 1868, 2-e semèstr

65.A.Lucas - Sur une application de ka Mécanique rationelle à la theorie des équations, C.R. 89 (1879), 224-226.

66. J.N.Lyness, C.Moler - Problem 67-6, Siam Review 9 (1967), 25o i 11(1969), 82-86

67. K.Mahler - On the zeros of the derivative of a polynomial Proc.Roy.Soc.Ser. A 264 (1961) 145-154

68.F.Mokai - A property of Dirichlet's Kernel Studia Sci. Math.Hung. 1(1966), 11-16

69.D.Marković - Sur les zéros réels des dérivées des quelques fonctions, Bull.Soc. Math. Phys. Serbie 4 IV 3-4 (1952) 1-5

7o.D.Marković - Sur la limite inférieure des modules des zéros d'un polynôme, Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 2(1948) 236-242

71.A.Markoff - Sur une question posée par Mendelejeff , Bulletin de l'Acad. de Scient. Petersburg,1889

72.W.A.Markov - Über Polynome, die in einem gegebenen Intervall möglichst wenig von Null abweichen Math. Annalen 77 213-258 (1916)

73.A.I.Markusevici - Teoria analiticeschih funcţii, Izd. Tehnikescoi lit. Moscova, 195o

74.J.Marcinkiewicz, A.Zygmund - Mean values of trigonometric polynomials, Fund.Math. 28(1936) 136-166

75.M.Marden - Geometry of Polynomials, Amer.Math. Soc.Math. Surveys, Nr.3, 2 nd ed. Providence 1966

76.L.L.Meyer - Sur les équations algébriques Now.Ann.Math. (3) 1o (1891)

77.D.S.Mitrinović (colab.P.M. Vasić) - Analytic Inequalities , Springer Verlag Berlin - Heidelberg-New York, 197o

78.P.Montel - Sur les modules des zéros des polynômes , Annales (sc.) de l'Ecole Normale Supérieure (3), 4o 1-34, 1923

79.P.Montel - Sur les rapports entre l'Algèbre et la Théorie des fonctions, Mathematica, t.9., 1935, Cluj,

80.P.Montel - Sur une théorème de Roudré , C.R. de l'Acad. des Sciences t.195, 1932, p.855

81.P.Montel - Sur les fractions rationnelles à termes entrchacés , Mathematica I 110-129(1931)

82.H.P.Mulholland - On two extremum problems for polynomials on the unit circle J.London Math. Soc. 31 (1956)

83.N.I.Muhhelisvili- Nekotorîe osnovîe zadaci matematiceskoi teorii uprugosti u izd. AN.SSSR, M.1954

84.R.Meynieux, Gh.Tudor - Compléments au traité de Mitrinović(III). Sur un schéma général pour obtenir des inegalités, Ibid. Nr.412-460, 1973, pp. 171-174.

85.D.J.Neuman - Norms of polynomial, Amer.Math.Monthly 67 (1960), 778-779

86.M.Neagu , Gh.Tudor - Asupra unei clase de ecuații funcționale cu aplicații la polinoame trigonometrice (II). Lucrări tehn. si şt. ale Inst. de subing. Reșița, 1976

87.M.Neagu , Gh.Tudor - Sur une classe d'équations fonctionnelles (II). Lucrările tehnico-şt., IPTVT, Mat.-Fiz., 1977, 141-146

88.M.Nicolescu - Recherches sur les fonctions polyharmoniques Ann. Sc. Ecole Norm.Sup.(3) 52(1935)

89.S.M.Nikolskii - Generalization of a propositions of S.N. Bernstein (în l.rusă). Doklady Acad.Nauk SSSR 60(1948) 1507-1510

9o.S.M.Nikolskii - Inequalities for entre functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of several variables Trudy Mat. Inst. Steklov 38(1951) 244-278

91.N.Obrechkoff - Sur les racines des équations algébriques , The Thohoku, Math.Jour.vol,38, 1933, p.93

92.A.C.Offord - The distribution of zeros of power series whose coefficients are independent random variables.Indian Journal of Math.vol.9 No.1 (1967) pp.175-196

93.O.Onicescu - Sur les zéros des certaines polynomes, Mathematica, vol.1 p.141 (1929)

94.A.Ostrovski - Note sur les parties réelles et imaginaires des racines des polynomes. J.Math. Pures Appl. (9) 44 (1965) 327-329

95.A.Ostrovski - On a inequality of I.Vicente Gonçalves, Univ. Lisabona Revista Fac. Ci (2) A 1 (195o), 167-171

96.M.M.Parodi - Sur la localisation des fréquences propres des réseaux electriques maillés. C.R., 224, 1957, p.19o3-19o5

97.M.M.Parodi - La localisation des zeros de la derivée du polynome caractéristique d'une matrice, C.R., t.244 Nr.23 (3 Jun. 1957), Paris, p.2764-2765

98.G.Peyser - On the roots of the derivative of polynomial with real roots Amer. Math. Montly 74(1967), 11o2-11o4

99.D.Pompeiu - Sur une théorème analogue à celui de Rondré , C.R.de l'Acad. des Sciences, t.195, 1932, p.855

1oo.T.Popoviciu - Sur les équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles Mathematica (Cluj) (1935) 129-145

1o1.T.Popoviciu - Sur certaines inégalités entre les zéros, supposés tous réels, d'un polynome et ceux de sa dérivée. Ann.Sci.Univ. Jassy I Section XXX (1944-1947) 191-218

1o2.G.Polya, G.Szegö - Aufgaben und Lehrsätze aus des Analysis, Berlin 1954

1o3.G.Polya, G.Szegö - Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis, Moskva 1956

1o4.Q.I.Rahman - Inequalities concerning polynomials and trigonometric polinomials, J.Math.Anal.Appl. 6 (1963) 3o3-324

1o5.W.W.Rogosinski,- G.Szegö Extremum problems for nonnegative sine polynomials, Acta Sci. Math. (Szeged) 12(195o) 112-124

1o6.W.W.Rogosinski, G.Szegö Uber die Abschnitte von Potenzreithen, die in einem Kreise beschrankt bleiben, Math. Z. 28(1928), 73-94

1o7.W.W.Rogosinski Extremum problems for polynomials and trigonometrical polynomials. J.London Math. Soc. 29(1954) 259-275

1o8.W.W.Rogosinski- Linear extremum problems for real polynomials and trigonometrical polynomials, Arch. Math. 5(1954) 182-19o and corrigenda 6(1955) 87

1o9.J.Rudnicki - Remarque sur un théorème de Mr. Walsh, Mathematica (Cluj) 8(1934) 136-138

11o.M.Schweitzer - The partial sum of second order of the geometric series, Duke, Math.J. 18(1951) 529-533

111.P.Sergescu - Sur quelques inégalités de Landau et Lindelof, C.R. t 179, 1924, Paris p.322-325

112.S.Sidon - Über Fourier-Koeffizienten, J.London Math.Soc. 13(1938) 181-183

113.D.M.Simeunović Sur les limites des modules des zéros des polynômes, Mat.Vesnik 4(19) 1967 293-298

114.D.M.Simeunović Remarque sur les zéros d'une classe des fonctions entieres, GLAS de l'Academie Serbe des Sciences et des Arts t. CCLX.

115.D.M.Simeunović Sur la répartition des zéros d'une classe de polynômes. Publications de L'Inst.Math., nouvelle série, t. 28(42) Beograd, 198o pp.187-194

116.D.M.Simeunović Sur les zéros du polynôme $\overset{n}{\underset{=1}{}}\ \frac{z}{\quad}$, n=1,2,... Matematički vesnik 2(17) 1965, 259-261

117.D.M.Simeunović Sur les limites des zéros du polynôme $1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\dots+\frac{z^n}{n!}$. Publications de l'Inst. Math., nouvelle série t.3o(44), 1981 (Beograd) pp.169-175

118.S.Sanantopoulos Sur un théorème de M.Landau C.R., de l'Acad. des Sciences t.174, 591-592 (1932)

119.I.S.Sokolnikoff Mathematical theory of elasticity, Mc Graw Hill, 1946, 1956

12o.W.Specht - Absch ätzungen der Wurzen algebraischen Gleichungen, Math. Z. 52(1949), 31o-321

121.S.B.Stéckin - A generalization of some inequalities of S.N. Bernstein (in l.rusă) Doklady Acad. Nauk SSSR N.S.6o(1948), 1511-1514

122. S.B.Stecken - Some remarks on trigonometric polynomials, Uspehi Mat.Nauk (N.S.) 10 Nr.1 (63) (1955), 159-166

123. S.Stoilow - Teoria funcţiilor de o variabilă complexă, vol.I,II, Ed. Acad. Bucureşti 1954-56

124. G.Szegö - Ortogonal Polynomials, Amer.Math.Soc. Coll.Publications, vol.23, rev.ed. Providence 1959

125. G.Szegö - Power series with multiply monotonic sequences of coefficients, Duke Math. J. 8(1941), 559-564

126. B.Sz.Nagy - Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen . Entwicklungen I: Periodischen Fall, Ber. Math.Phys. Kl.Sächs. Akad.Wiss.Leipzig 90(1938) 103-134.

127. K.Simonyi - Electrotehnica teoretică .Ed.tehnică, Bucureşti 1974 (trad.)

128. M.Tajima - On the roots of an algebric equation, Tôhoku Math. I (1921) 173-174

129. A.F.Timan - Theory of approximation of functions of a real variable, Oxford-London-New-York- Paris, 1963, p.90.

129. S.P.Timoshenko J.N.Goodier - Theory of elasticity, 2nd. ed.N.Y.,1951

130. M.Tomić - Sur les sommes trigonometriques à coefficients monotones (în l.sîrbă) Srpska Akad. Nauka Zbornik Radova 18 Matematički Ins. 2(1952) 13-52

131.P.Turán - On a trigonometrical sum, Ann.-Soc.Pel.Math. 25(1952) 155-161

132.P.Turán - Über die Partialsummen der Fourierreiche, J. London Math. Soc. 13(1939) 278-282

133.Gh.Tudor - Some remarkable integral inequalities. Publ.de la Fac. d'Electrot., de l'Univ. à Belgrade, Ser. Math. et Phys., Nr. 544-576, 1976, 144-148

134.Gh.Tudor - Sur les zéros des quelques fonctions analytiques, Bul.St. şi tehnic, IPTVT, Ser. Math.-Fiz. Tom 24 (38), Fasc. 1, 1978, pp.9-11

135.Gh.Tudor - Des inegalités fonctionnelles lesquelles généralisent un théorème de Fejér. Lucrările tehnico-şt., IPTVT, Mat.-Fiz., 1977, 141-146

136.Gh.Tudor,- M.Neagu - Asupra unei clase de polinoame şi serii trigonometrice (IV) Ibid. 147-153

137.Gh.Tudor,- M.Neagu - Des équations fonctionnelles et des inegalités trigonometriques. Seminarul Mat.-Fiz. IPTVT, 1982, pp.73-76

138.Gh.Tudor - L'étude sur la distribution des zéros des fonctions analytiques (I). Sem. de Mat.-Fiz., IPTVT, nov. 1983, pp.21-24

139.Gh.Tudor,- V.Tudor - Quelques inegalités sur les polynômes trigonometriques. Sem. de Mat.-Fiz. IPTVT, 1985

14o.Gh.Tudor - Studiu asupra distribuţiei zerourilor funcţiilor analitice (II). Lucrările sem. de Mat.-Fiz.IPTVT, mai 1984, pp. 59-62

141.Gh.Tudor - Inegalităţi asupra polinoamelor trigonometrice de o variabilă. Al II-lea Simpozion Naţional cu tema "Inegalităţi matematice" Sibiu 15-16 Dec. 1984, pp.38-39

142.Gh.Tudor - Inegalităţi asupra polinoamelor trigonometrice de mai multe variabile. Ibid, pp.39-4o

143.Gh.Tudor - Studiu asupra localizării zerourilor funcțiilor analitice (I). Ibid. ,pp.41

144.Gh.Tudor - Studii asupra localizării zerourilor funcțiilor analitice (II). Ibid. pp.42

145.Gh.Tudor, E.Burlacu, V.Groza - Algoritmi de optimizare cu program pentru limitele modulelor zerourilor unor funcții. Lucrările ses. șt. "Aplicații ale matematicii în tehnică și economie" pp.67-7o, 1983

146.Gh.Tudor - Compléments au traité de Mitrinović (V). Quelques inegalités integrales remarquables Bul.St. si Tehn. IPT. Seria Mat-Fit-Mec., teoret. si apl. Tom 19(33), fasc. 1/1974

147.Gh.Tudor - Compléments au traîte de Mitrinović (VI) Une généralisation de l'inégalité de Fejer-Jackson. Publ. de la Fac. d'Electrote. de l'Univ. à Belgrade, Série : Math. et Phys. Nr. 467497 1974, pp.111-114.

148.Gh.Tudor, M.Neagu - Generalizarea unei teoreme a lui Fejér într-o clasă de ecuații funcționale (I). Lucrări tehnice și șt. ale Inst. de Subing. Reșița, 1976

149. A.H.Tureckii - On a fonction deviating least from zero (în l. rusă), Belorussk Gos. Univ. Uč. Zap. Ser. Fiz.-Mat. 16(1954) 41-43

15o.I.G.Van der Corput C.Visser - Inequalities concerning polynomials and trigonometric polynomials, Indogationes Math. 8(1946), 238-247

151. J.Vincente Gonçeles - L'inegalité de W.Specht, Univ. Lisabona Revista Fac. Ci (2) A1(1950) 167-171

152. I.L.Welsh - An inequality for the roots of algebric equation. Ann. of Math. (2) 25 (1924) 285-286

153. K.P.Williams - Note concerning the roots of an equatio, Bull.Amer.Math.Soc.,26(1922) 394-396

154. W.Wrona - On minimal distance between roots of the equation of third degree (na poliskom) Zeszeyty Nauk.Wyz.Szkd. Ped.Katowice 1966 Nr.5, 9-12

155. A.Zygmund - Trigonometric Series I, Cambridge 1959, p.244, p.266

156. A.Zygmund - Two notes on inequalities J.Math. and Phys. 21(1942) 117-123

157. W.H.Young - On a certain series of Fourier Proc.London Math. Soc. (2) 11(1913) 357-366

158. P.Sergescu - Sur le module des zéros des derivées des fonctions barnées. Congrès Avancement Soc. 1930, Alger.

159. A.Turowicz - Geometrie zer wielomienov (Polish), 1967, Warsawa

160. A.Lupas - Inequalities for the roots of a class of polynomials. Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser.Mat.Fiz.Nr.577-Nr.598 (1977), 70-83

161. J.N.Nehman - Einige Aschätzungen der Grenzen der Wurzen algebraischer Gleichungen. Univ.Beograd, Publ. Elektrotehn. Fasc.Mat.Fiz.Nr.412-460 (1973), 61-66

BUPT

162.Gh.M.Tudor - Sur la repartition des zéros des fonctions analytiquen.Sem.Mat.si Fiz. I.P."Traian Vuia" Timişoara, mai 1985, 35-37.
