MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI ÎNVĂŢĂMÎNTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA
FACULTATEA ELECTROTEHNICĂ
- Catedra de Matematică -

ELENA TOPUZU

ASUPRA UNOR SISTEME LINIARE CU CONTROL

TEZĂ DE DOCTORAT

CONDUCĂTOR ŞTIINŢIFIC

Prof.dr. BORISLAV CRSTICI

TIMIŞOARA
1986

INTRODUCERE

Teoria sistemelor liniare cu control reprezintă un capitol deosebit de important în cadrul teoriei generale a sistemelor dinamice, ramură a matematicii izvorîtă din necesităţi practice, la a cărei dezvoltare au contribuit în egală măsură atît matematicienii cît şi inginerii.

Dacă principalele noţiuni legate de stabilitate au fost formulate, investigate şi fundamentate solid în celebra teză de doctorat susţinută la sfîrşitul secolului trecut de către A.M.LIAPUNOV [L_2], primele concepte de controlabilitate apar la începutul celei de a doua jumătăţi a secolului XX, într-o formulare algebrică, în legătură cu teoria conducerii optimale a unui sistem în lucrările grupului de matematicieni condus de L.S.PONTRIAGHIN [P_1].

Formulări precise ale noţiunii de controlabilitate completă şi ale noţiunii duale de observabilitate apar în lucrările lui R.E.KALMAN [K_1], [K_2], prezentate la Conferinţa de ecuaţii diferenţiale ordinare, Mexic, 1959, respectiv primul Congres IFAC, Moscova, 1960, lucrări de pionierat în teoria sistemelor liniare cu control.

După R.E.KALMAN, sistemul cu control

$$(A,B;t_o,x_o)\quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(t_o) = x_o \end{cases}$$

unde A şi B sînt matrici de dimensiuni $n \times n$ şi respectiv $n \times m$, se zice complet controlabil dacă fiecărei stări $x_o \in R^n$ îi corespunde un număr real $t_1 \geq t_o$ şi o funcţie continuă pe porţiuni $u(t)$, $t \in [t_o,t_1]$, astfel ca soluţia $x(t)$ a sistemului $(A,B;t_o,x_o)$ să îndeplinească condiţia $x(t_1) = o$.

Pentru $m = 1$, Kalman arată că un sistem $(A,B;t,t_o)$ este complet controlabil dacă şi numai dacă

$$\text{rang}\left[B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right] = n$$

rezultat bine cunoscut în teoria sistemelor liniare sub denumirea de "condiția rangului" și care a fost generalizat de J.P. LA SALLE [S_1] pentru cazul m arbitrar, finit.

Controlabilitatea sistemelor liniare cu coeficienți variabili

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

a fost studiată de N.N.KRASOVSKI [K_5], [K_6], care obține o "condiție asupra rangului" echivalentă cu controlabilitatea completă de forma :

$(\exists)\ \bar{t} \geq t_0$ astfel ca $\text{rang}\left[Q_0(\bar{t}), Q_1(\bar{t}), \ldots, Q_{n-1}(\bar{t})\right] = n$

unde $Q_0(t) = B(t)$, $Q_j(t) = A(t)Q_{j-1}(t) - \dot{Q}_{j-1}(t)$, $j=1,2,\ldots,n-1$.

In perioada care urmează acestor lucrări se înmulțesc relativ repede studiile referitoare la sistemele liniare cu control, apărînd noi caracterizări ale noțiunii de controlabilitate completă. Astfel, în monografia inginerului automatist V.M.POPOV [P_2], anexa A, sînt prezentate un număr de 16 formulări echivalente ale acestui concept.

Extensii ale noțiunii de controlabilitate la cazul sistemelor liniare infinit dimensionale cu operatori mărginiți și nemărginiți apar pentru prima dată în lucrările lui H.O.FATTORINI [F_1], [F_2], [F_3] și R.TRIGGIANI [T_1], [T_2], care extind la cazul infinit dimensional unele caracterizări ale sistemelor complet controlabile, printre care și "condiția rangului", reformulată în contextul controlabilității aproximative introdusă de H.O. FATTORINI.

Alături de teoria sistemelor liniare continue a evoluat în permanență o teorie asemănătoare pentru cazul sistemelor liniare discrete. Matematicieni de mare prestigiu, care au adus contribuții remarcabile în teoria sistemelor continue, au formulat și demonstrat o serie de rezultate similare în teoria sistemelor discrete. Este suficient să amintim în acest sens lucrarea lui CH.V. COFFMANN și J.J.SCHÄFFER $[C_1]$, sau monografia lui A.HALANAY și D.VEXLER $[H_1]$, în care sînt studiate principalele conexiuni între diferitele tipuri de stabilitate pentru sistemele discrete (liniare și neliniare), pe modelul rezultatelor corespunzătoare din cazul continuu, utilizînd tehnici specifice sistemelor discrete. De asemenea, merită amintit aici că celebra teoremă a lui PERRON $[P_4]$ relativă la mărginirea soluțiilor unei probleme Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t) \\ x(o) = o \end{cases}$$

pentru f mărginită, are un analog discret, formulat și demonstrat la scurt timp după apariția rezultatului lui Perron de către matematicianul TA LI $[T_3]$.

O situație analoagă se prezintă în teoria sistemelor cu control, teorie dezvoltată intens în cele trei decenii de existență. Este suficient să amintim doar că formularea "principiului maximului" a lui Pontriaghin, metodă fundamentală de cercetare în controlul optimal,demonstrat pentru cazul liniar de R.GAMKRELIDZE $[G_1]$, iar pentru cazul neliniar de V.BOLTIANSKI $[B_5]$, a antrenat o serie de cercetători în elaborarea unei variante discrete a principiului. Monografia lui V.BOLTIANSKI $[B_6]$ prezintă într-o formă foarte generală și sistematică teoria comenzii optimale a sistemelor discrete.

Există la ora actuală monografii care tratează numai sistemele discrete $[B_6]$, dar și lucrări care prezintă în paralel cele două tipuri de probleme.Astfel R.E.KALMAN în lucrarea $[K_2]$ amintită mai sus, studiază alături de sistemele continue și sistemele discrete. De asemenea, în monografia lui V.M.POPOV $[P_2]$, sînt formulate și cînd e cazul demonstrate, alături de rezultate din teoria sistemelor continue și rezultate similare referitoare la sistemele discrete.

Lucrarea de față se înscrie pe linia prezentării paralele a unor rezultate din teoria sistemelor liniare cu control continue și discrete, rezultate obținute prin cercetări proprii sau în colaborare, publicate sau în curs de publicare în lucrările $[T_4]$ - $[T_{16}]$. Rezultatele originale pot fi grupate în următoarele categorii :

i) Extensii sau generalizări la cadrul spațiilor Banach (Hilbert) infinit dimensionale ale unor rezultate cunoscute în teoria sistemelor finit dimensionale ;

ii) Reformularea și demonstrarea în cadrul teoriei sistemelor liniare discrete a unor rezultate similare din teoria sistemelor liniare continue ;

iii) Prezentarea unor contraexemple care arată că anumite proprietăți ale sistemelor finit dimensionale nu admit generalizări la cazul infinit dimensional, sau că anumite proprietăți ale sistemelor continue nu rămîn adevărate pentru cazul sistemelor discrete.

Deoarece am avut în atenție în special sistemele liniare discrete, majoritatea rezultatelor amintite mai sus se referă la acest tip de sisteme. Totuși, pentru unitatea și independența lucrării, sau pentru comparație și paralelism sînt prezentate, pe scurt și în general fără demonstrație (uneori fiind citate numai sursele unde pot fi găsite), unele rezultate cunoscute în literatura de specialitate din teoria sistemelor continue.

Avînd în vedere cele precizate anterior, întreaga lucrare se situează în cadrul destul de larg al spațiilor Banach (sau Hilbert) și al sistemelor liniare cu operatori (coeficienți) mărginiţi între astfel de spaţii. Este deci natural ca analiza funcţională şi în special teoria operatorilor să aibă un rol foarte important.

Lucrarea este împărţită în patru capitole.

Capitolul I are menirea de a prezenta noţiuni din domenii conexe cu teoria sistemelor liniare cu control, noţiuni frecvent utilizate în capitolele următoare. Este o încercare de a sintetiza din literatura de specialitate acele elemente care pun în evidenţă ideea de unitate a mijloacelor de investigaţie în studiul sistemelor continue şi discrete.

In capitolul al II-lea se introduce noţiunea de număr caracteristic asociat unui şir de elemente ale unui spaţiu Banach arbitrar şi, în particular, oricărei soluţii a unui sistem discret. Se arată că numerele caracteristice introduse aici au proprietăţi analoage cu numerele lui Liapunov din cazul continuu. In cazul staţionar se analizează relaţia dintre $\chi_d(A)$ şi $|\sigma(A)|$ şi se prezintă variante discrete ale unor rezultate cunoscute în teoria sistemelor continue, legate de noţiunea de număr caracteristic, respectiv spectrul caracteristic. Rezultatele acestui capitol au fost comunicate [T_{14}], [T_{15}] la Simpozionul "Matematici şi aplicaţii", Timişoara, 1985.

Capitolul al III-lea reprezintă rezultatele asupra sistemelor liniare cu control obţinute şi publicate în [T_5], [T_6], [T_8], [T_{13}]. Noţiunile de controlabilitate sînt prezentate iniţial în cadrul mai larg al sistemelor de evadare - urmărire din teoria jocurilor diferenţiale, apoi, prin particularizare, sînt introduse concepţi-le uzuale de controlabilitate şi sînt analizate unele proprietăţi H şi B - stabile, adică acele proprietăţi, cunoscute în cazul finit dimensional, care rămîn adevărate în cazul spaţiilor Hilbert şi respectiv, Banach arbitrare.

Ultimul paragraf al acestui capitol prezintă, urmînd ideile lui S.DOLECKI $[D_1]$, o serie de conexiuni şi interdependenţe între diverse tipuri de controlabilitate existente în teoria sistemelor liniare discrete cu control.

Capitolul al IV-lea, destinat studiului sistemelor liniare cu control înzestrate cu un criteriu de calitate, prezintă rezultatele publicate în $[T_4]$, $[T_7]$, $[T_9]$-$[T_{12}]$. Rezultatele prezentate în acest capitol se referă îndeosebi la sistemele discrete şi, în esenţă, sînt generalizări la cazul infinit dimensional ale unor rezultate din $[P_2]$.

CAPITOLUL I.

SPATII DE FUNCTII SI OPERATORI LINIARI IN TEORIA SISTEMELOR

In teoria controlului sistemelor liniare, spațiile de funcții joacă un rol foarte important. Elementele unor astfel de spații, de regulă funcții cu valori operatori liniari, mărginiți sau nemărginiți, sînt utilizate drept coeficienți ; de asemenea, funcțiile de intrare (control) sînt elemente ale unui spațiu corespunzător de funcții vectoriale. Calitățile coeficienților și ale funcțiilor de intrare determină, în ultimă instanță, calitățile sistemului liniar respectiv.

In literatura de specialitate există o mare diversitate de ipoteze, mai mult sau mai puțin restrictive, atît asupra coeficienților cît și asupra funcțiilor de intrare. Sînt utilizate funcții continue sau continue pe porțiuni [P_2], funcții măsurabile mărginite [L_1], funcții integrabile în sens Riemann sau Lebesgue [C_3], etc.

Calitatea de bază care va fi cerută în continuare unei funcții operatoriale (vectoriale) pentru a putea fi utilizată drept coeficienți, respectiv funcție de intrare, va fi aceea de a fi tare măsurabilă și local integrabilă în sensul lui Bochner [Y_1].

Paragraful 1.1 al acestui capitol are menirea de a preciza notațiile și de a prezenta, fără demonstrații, principalele proprietăți ale operatorilor liniari și mărginiți. Toate acestea vor fi utilizate frecvent pe parcursul întregii lucrări. Celelalte paragrafe ale capitolului au de asemenea un caracter introductiv, avînd scopul de a prezenta într-un mod unitar spațiile de funcții și clasele de operatori liniari care intervin în teoria sistemelor liniare continue și discrete. Intregul material al acestui capitol reprezintă o încercare de a sintetiza din literatura de specialitate şi de a prezenta într-un cadru foarte general, acele elemente care contribuie la clarificarea ideii de unitate a metodelor de investigaţie în studiul celor două tipuri de sisteme.

1.1. PROPRIETĂŢI GENERALE ALE OPERATORILOR LINIARI MĂRGINIŢI

Fie U şi X două spaţii Banach peste corpul $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) al numerelor reale sau complexe. Vom nota prin $\mathcal{L}(U,X)$ spaţiul Banach al tuturor operatorilor liniari şi mărginiţi definiţi pe U şi cu valori în X. De asemenea, vom nota prin $\mathcal{L}(X)$ algebra Banach a tuturor operatorilor liniari şi mărginiţi de la X în X, al cărei element unitate, adică operatorul identitate pe X, îl vom nota prin I.

Dacă X^* desemnează spaţiul Banach al tuturor funcţionalelor liniare şi continue pe X, înzestrat cu norma obişnuită din $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$, atunci pentru fiecare $B \in \mathcal{L}(U,X)$ vom nota $B^* \in \mathcal{L}(X^*,U^*)$ operatorul adjunct al operatorului B, adică unicul operator din $\mathcal{L}(X^*,U^*)$ cu proprietatea :

$$B^*x^*(u) = x^*(Bu) \quad , \quad (\forall)\ u \in U \ , \ (\forall)\ x^* \in X^*.$$

Dacă $x \in X$ şi $x^* \in X^*$, obişnuim să notăm $\langle x,x^* \rangle$ în loc de $x^*(x)$, astfel că egalitatea de mai sus, de caracterizare a adjunctului unui operator, se mai poate scrie :

$$\langle Bu,x^* \rangle = \langle u,B^*x^* \rangle \quad , \quad (\forall)\ u \in U \ , \ (\forall)\ x^* \in X^*.$$

Pentru un operator $A \in \mathcal{L}(X)$, vom nota prin

$$\mathcal{N}(A) = \{ x \in X \mid Ax = o \} \quad \text{şi} \quad \mathcal{R}(A) = AX$$

nucleul şi respectiv, mulţimea valorilor operatorului A.

Prin spectrul punctual al operatorului A vom înţelege mulţimea

$$\sigma_{\pi}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \mathcal{N}(A-\lambda I) \neq \{o\} \} .$$

Orice număr $\lambda \in \sigma_{\pi}(A)$ va fi numit, în mod uzual, valoare proprie a operatorului A şi orice vector nenul din $\mathcal{N}(A-\lambda I)$ va fi numit vector propriu pentru operatorul A.

In cazul în care $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, vom nota $\rho(A)$ mulţimea rezolventă a operatorului A, adică mulţimea numerelor complexe λ pentru care $A-\lambda I$ este inversabil în algebra $\mathcal{L}(X)$. Operatorul $(A-\lambda I)^{-1}$, $(\lambda \in \rho(A))$, va fi numit operatorul rezolvent şi va fi notat $R(\lambda$, De asemenea, complementara în $\mathbb{C}$ a mulţimii $\rho(A)$ va fi numită spectrul operatorului A şi va fi notată prin $\sigma(A)$.

Numărul real şi pozitiv

$$r_A = \max|\sigma(A)| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

este numit rază spectrală a operatorului A şi poate fi determinată cu formula

$$r_A = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n}$$

de unde deducem imediat că $r_A \leqslant \|A\|$.

Pentru $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > r_A$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$ este absolut convergentă şi defineşte operatorul rezolvent, adică

$$R(\lambda,A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n \quad , \quad (\forall)\lambda \in \mathbb{C}\ ,\ |\lambda| > r_A.$$

Dacă φ este o funcţie complexă de variabilă complexă, analitică pe o vecinătate V a spectrului operatorului A, iar (Γ) este o curbă jordaniană închisă situată în V şi care înconjoară spectrul, atunci operatorul $\varphi(A)$ se defineşte prin

$$\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\lambda) R(\lambda,A)\, d\lambda$$

In particular, pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, definim

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda,A)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

<u>PROPOZITIA 1.1.1.</u> [C3] Fie $T \in \mathcal{L}(U,X)$. Următoarele afirmaţii

sînt adevărate :

a) Dacă T este surjectiv atunci există $m > 0$ astfel încît $\|T^* x^*\| \geq m$, pentru orice $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$.

b) Dacă există $m > 0$ astfel încît $\|Tu\| \geq m$ pentru orice $u \in U$, $\|u\| = 1$, atunci T^* este surjectiv.

<u>CONSECINȚA 1.1.2.</u> Fie U și X spații Banach reflexive și $T \in \mathcal{L}(U,X)$. Următoarele afirmații sînt echivalente :

a) T este surjectiv ;

b) Există $m > 0$ astfel ca $\|T^* x^*\| \geq m$, oricare ar fi $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$.

<u>CONSECINȚA 1.1.3.</u> Fie U și X spații Hilbert și $T \in \mathcal{L}(U,X)$. Următoarele afirmații sînt echivalente :

a) T este surjectiv ;

b) TT^* este uniform pozitiv ;

c) TT^* este surjectiv.

<u>PROPOZITIA 1.1.4.</u> Fie U și X spații Banach și $T \in \mathcal{L}(U,X)$. Următoarele afirmații sînt echivalente :

a) $\overline{\mathcal{R}(T)} = X$;

b) $\mathcal{N}(T^*) = \{0\}$.

<u>CONSECINȚA 1.1.5.</u> Fie U și X spații Hilbert și $T \in \mathcal{L}(U,X)$. Următoarele afirmații sînt echivalente :

a) $\overline{\mathcal{R}(T)} = X$;

b) T^* este injectiv ;

c) TT^* este injectiv ;

d) TT^* este strict pozitiv.

<u>1.2. SPATII DE FUNCTII CARE INTERVIN IN TEORIA SISTEMELOR.</u>

Fie X un spațiu Banach și J un interval arbitrar al semidreptei $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Vom nota prin $L_J(X)$ spațiul $L^1_{loc}(J,X)$ [M1], adică spațiul liniar al tuturor funcțiilor $f : J \longrightarrow X$

(identificate modulo mulțimile de măsură nulă), tare măsurabile în raport cu măsura Lebesgue, integrabile în sensul lui Bochner [Y1] pe fiecare subinterval compact conținut în J ; în particular vom scrie $L(X)$ în loc de $L_{R_+}(X)$. Este bine cunoscut [Y1] că înzestrat cu operațiile naturale și familia (suficientă) de seminorme $(p_K)_K$ (unde K parcurge familia subintervalelor compacte din J, iar $p_K(f) = \int_K \|f(t)\|\, dt$, $(\forall)\ f \in L_J(X)$), spațiul $L_J(X)$ este un spațiu local convex, metrizabil, complet, adică un spațiu Fréchet.

Pe lîngă acest spațiu de bază, vom utiliza unele subspații ale spațiului $L_J(X)$, înzestrate cu topologii proprii de spații Banach, topologii mai fine decît cea indusă de topologia spațiului $L_J(X)$. Astfel vom utiliza :

$$L^p(J,X)=\left\{ f \in L_J(X) \,\middle|\, \|f\|_p^p = \int_J \|f(t)\|^p\, d\mu(t) < \infty \right\},\ 1 \leq p < \infty$$

$$L^\infty(J,X)=\left\{ f \in L_J(X) \,\middle|\, \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\|f\| = \inf_{\mu(M)=0} \sup_{t \notin M} \|f(t)\| < \infty \right\}$$

Pentru $1 \leq p < \infty$, este un rezultat bine cunoscut în analiza funcțională [Y1] că $[L^p(J,X)]^*$ este izomorf și izometric cu $L^q(J,X^*)$, unde $1 < q \leq \infty$ și $1/p + 1/q = 1$.

Dacă $f \in L^p(J,X)$ și $g^* \in L^q(J,X^*)$, $1/p + 1/q = 1$, atunci

$$g^*(f) = \langle f, g^* \rangle = \int_J g^*(t)[f(t)]\, dt = \int_J \langle f(t), g^*(t) \rangle\, dt .$$

DEFINIȚIA 1.2.1. O funcție $f : J \longrightarrow X$ se zice că este primitivă pe J, dacă există $g \in L_J(X)$ și $t_0 \in J$ astfel încît :

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds \quad , \quad (\forall)\ t \in J.$$

Funcția $g \in L_J(X)$ este unic determinată (modulo mulțimile de măsură nulă) de funcția f și se notează $\dot{f}$ sau Df.

Vom nota $\mathcal{C}^{\#}(J,X)$ [R1] mulțimea funcțiilor primitive și vom zice că funcția f este $\#$- continuă dacă $f \in \mathcal{C}^{\#}(J,X)$. Este clar din definiție că orice funcție $f \in \mathcal{C}^{\#}(J,X)$ este absolut continuă pe orice subinterval compact al lui J.

PROPOZIŢIA 1.2.2. $[M_1]$. Fie U, X, Y spaţii Banach, $A \in \mathcal{C}^{\#}(J, \mathcal{L}(X,Y))$, $B \in \mathcal{C}^{\#}(J, \mathcal{L}(U,X))$ şi $f \in \mathcal{C}^{\#}(J,X)$. Atunci $AB \in \mathcal{C}^{\#}(J, \mathcal{L}(U,Y))$, $Af \in \mathcal{C}^{\#}(J,Y)$ şi sînt adevărate egalităţile :

a) $D(AB) = (DA)B + A(DB)$

b) $D(Af) = (DA)f + A(Df)$.

OBSERVAŢIA 1.2.3. Din egalitatea $Df = \lambda f$ rezultă uşor că $f(t) = e^{\lambda t} x_0 \in \mathcal{C}^{\#}(J,X)$, $x_0 \in X$. Deoarece, evident, $D : \mathcal{C}^{\#}(J,X) \longrightarrow L_J(X)$ este un operator liniar, obţinem că $\sigma_{\pi}(D) = \mathbb{C}$ şi, în consecinţă, $\rho(D) = \emptyset$.

Dacă restrîngem domeniul de definiţie al operatorului D punînd

$$\mathcal{D}(D) = \left\{ f \in \mathcal{C}^{\#}(J,X) \;\middle|\; Df \in L^p(J,X) \quad , \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \right\}$$

atunci restricţia $e^{\lambda t} x_0 \in \mathcal{D}(D)$ permite să determinăm $\sigma_{\pi}(D)$, care în general nu va mai fi tot planul complex $\mathbb{C}$ şi va depinde atît de J cît şi de alegerea lui p. De exemplu, dacă $J = \mathbb{R}_+$ şi $1 \leqslant p < \infty$, atunci $\sigma_{\pi}(D) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda < 0 \}$.

Vom mai nota

$$\mathcal{C}(J,X) = \left\{ f \in L_J(X) \;\middle|\; f \text{ continuă pe } J \right\}$$
$$\mathcal{C}^1(J,X) = \left\{ f \in \mathcal{C}^{\#}(J,X) \;\middle|\; Df \in \mathcal{C}(J,X) \right\}$$

precizînd că :

$$\mathcal{C}^1(J,X) \subset \mathcal{C}^{\#}(J,X) \subset \mathcal{C}(J,X) \subset L_J(X).$$

Spaţiile de funcţii enumerate în consideraţiile precedente vor interveni în teoria sistemelor liniare cu control t-continue.

Analogul discret al spaţiului de bază $L_J(X)$ va fi spaţiul $s(X)$ al tuturor şirurilor de elemente ale spaţiului Banach X, adică

$$s(X) = \left\{ x = (x_n)_{n \geqslant 0} \;\middle|\; x_n \in X \quad , \quad (\forall)\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

De asemenea, spaţiile

$$\ell^p(X) = \left\{ x \in s(X) \;\middle|\; \|x\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty \right\}, \quad 1 \leqslant p < \infty$$

$$\ell^{\infty}(X) = \{ x \in s(X) \mid \|x\|_{\infty} = \sup_n \|x_n\| < \infty \}$$

vor înlocui (în cazul discret) spaţiile $L^p(J,X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Deoarece atît spaţiul $s(X)$ cît şi spaţiile $\ell^p(X)$ pot fi considerate $[Y_1]$ ca spaţii de funcţii integrabile pe spaţiul cu măsură $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$, unde μ_d este măsura discretă pe σ- algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, adică $\mu_d(n) = 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, proprietăţile spaţiil $L_J(X)$ şi $L^p(J,X)$ se transmit în mod corespunzător spaţiului şi respectiv $\ell^p(X)$. Astfel spaţiul $s(X)$ va deveni un spaţiu Fré-chet dacă va fi înzestrat cu familia (suficientă) de seminorme,

$$p_k(x) = \|x_k\| \ , \quad (\forall)\ x = (x_n)_{n \geqslant 0} \in s(X) \text{ şi } (\forall)\ k \in \mathbb{N},$$

iar spaţiul $(\ell^p(X), \|\cdot\|_p)$ este un spaţiu Banach pentru $1 \leqslant p \leqslant$

De asemenea pentru $1 \leqslant p < \infty$, dualul topologic al spaţiulu $\ell^p(X)$ va putea fi identificat cu spaţiul $\ell^q(X^*)$, unde $1 < q \leqslant \infty$ şi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. In acest caz, pentru $x \in \ell^p(X)$ şi $y^* \in \ell^q(X^*)$, $1/_p + 1/_q = 1$,

$$y^*(x) = \langle x, y^* \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x_n \, , \, y_n^* \rangle \ .$$

Vom mai menţiona că dacă X este un spaţiu Banach reflexiv, în particular Hilbert, atunci pentru $1 < p < \infty$, spaţiul $L^p(J,X)$ şi analogul său discret $\ell^p(X)$ sînt spaţii Banach reflexive, în particular, $L^2(J,X)$ şi $\ell^2(X)$ sînt spaţii Hilbert dacă X est un spaţiu Hilbert.

In sfîrşit, pentru a încheia consideraţiile referitoare la .. ţiile de funcţii utilizate în teoria controlului, trebuie să prec zăm că locul operatorului de derivare va fi luat în teoria sistem lor discrete de operatorul de translaţie (la stînga) T definit pe $s(X)$ prin

$$Tx = T(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \ , \ (\forall)\ x \in s(X)$$

Uşor se constată că şi în acest caz $Tx = \lambda x$ dacă şi numai dacă $x_n = \lambda^n x_0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$ şi, în concluzie, $\sigma_T(X) = \mathbb{C}$

şi $\rho(T) = \emptyset$.

De asemenea, dacă vom restrînge domeniul lui T la

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ x \in s(X) \,\middle|\, Tx \in \ell^p(X) \right\}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

ceea ce în acest caz este echivalent cu

$$\mathcal{D}(T) = \ell^p(X) \quad \text{şi} \quad T \in \mathcal{L}(\ell^p(X)) \ , \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

atunci

$$\sigma_{\pi}(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\lambda| < 1 \right\} \text{ dacă } 1 \leqslant p < \infty$$

şi

$$\sigma_{\pi}(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\lambda| \leqslant 1 \right\} \text{ dacă } p = \infty .$$

1.3. OPERATORI LINIARI SPECIFICI SPATIILOR DE FUNCTII.

Spaţiile de funcţii prezentate în paragraful precedent au un rol esenţial în teoria sistemelor liniare cu control. Un rol la fel de important în cadrul acestei teorii revine unor operatori liniari şi continui generaţi de elemente ale unor spaţii de funcţii, operatori legaţi intim atît de construcţia sistemului cît şi de descrierea funcţiilor de stare sau de ieşire.

Fie U, X spaţii Banach şi $A(.) \in L^p_{loc}(J, \mathcal{L}(U,X))$, $1 \leqslant p < \infty$.

<u>DEFINITIA 1.3.1</u>. Numim operator de multiplicare generat de $A(.)$, operatorul $\mathcal{A} : L^q_{loc}(J,U) \longrightarrow L_J(X)$, $1/p + 1/q = 1$, definit prin

$$\mathcal{A}f = A(.)f(.) \quad , \quad (\forall)\ f \in L^q_{loc}(J,U)$$

adică

$$(\mathcal{A}f)(t) = A(t)f(t), \quad \text{aproape pentru orice } t \in J.$$

Propoziţiile următoare sînt extensii uşor de obţinut ale unor rezultate similare de la cazul funcţiilor cu valori scalare [G_2].

<u>PROPOZITIA 1.3.2</u>. Fie $A(.) \in L^p_{loc}(J, \mathcal{L}(U,X))$, $1 < p < \infty$ şi q conjugatul lui p. Atunci operatorul de multiplicare $\mathcal{A}$ generat de funcţia operatorială $A(.)$ este liniar şi continuu de la spaţiul Fréchèt $L^q_{loc}(J,U)$ în spaţiul Fréchèt $L_J(X)$. In particular dacă $A(.) \in L^p(J, \mathcal{L}(U,X))$ atunci $\mathcal{A}$ este liniar şi continuu de l

spaţiul Banach $L^q(J,U)$ în spaţiul Banach $L^1(J,X)$.

Demonstraţie : Pentru fiecare subinterval compact $K \subset J$ ave

$$p_K(\mathcal{A}f) = \int_K \|A(t)f(t)\| dt \leq \int_K \|A(t)\| . \|f(t)\| \, dt \leq$$

$$\leq \left(\int_K \|A(t)\|^p \, dt\right)^{1/p} . \left(\int_K \|f(t)\|^q \, dt\right)^{1/q} = C_K p_{K,q}(f)$$

unde $C_K = p_K(A)$ este o constantă care depinde de K, iar $p_{K,q}$ este seminorma generată de K în $L^q_{loc}(J,U)$.

Este clar că în ipoteza $A(.) \in L^p(J, \mathcal{L}(U,X))$ putem înlocui $p_K(\mathcal{A}f)$ prin $\|\mathcal{A}f\|_1$ şi obţinem

$$\|\mathcal{A}f\|_1 \leq \int_J \|A(t)\| . \|f(t)\| dt \leq \|A\|_p . \|f\|_q .$$

OBSERVATIA 1.3.3. Dacă $A(.) \in L^\infty(J, \mathcal{L}(U,X))$ atunci pentru o ce $f(.) \in L^p(J,U)$, $1 \leq p \leq \infty$, vom avea

$$\|\mathcal{A}f\|_p \leq \left(\int_J (\|A(t)\| . \|f(t)\|)^p dt\right)^{1/p} \leq \|A\|_\infty . \left(\int_J \|f(t)\|^p dt\right)^{1/p} , \quad 1 \leq p < \infty$$

şi

$$\|\mathcal{A}f\|_\infty \leq \|A\|_\infty . \|f\|_\infty .$$

In concluzie, orice element $A(.) \in L^\infty(J, \mathcal{L}(U,X))$ generează un operator de multiplicare liniar şi mărginit de la spaţiul Banach $L^p(J,U)$ în spaţiul Banach $L^p(J,X)$.

OBSERVATIA 1.3.4. Fie $A(.) \in L^\infty(J, \mathcal{L}(U,X))$. Deoarece pentru orice $f \in L^p(J,U)$ şi $g^* \in L^q(J,X^*)$ cu $1/p + 1/q = 1$, putem scri

$$\langle \mathcal{A}f, g^* \rangle = \int_J \langle A(t)f(t), g^*(t) \rangle \, dt = \int_J \langle f(t) , A^*(t)g^*(t) \rangle \, dt$$

rezultă că adjunctul operatorului $\mathcal{A}$ este un operator de multiplicare generat de $[A(.)]^* \overset{not}{=} A^*(.)$.

Fie $A(.) \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(X))$, $f \in L^1(J,X)$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Pentru fiecare $t \in J$, $t \geq t_0$, putem defini

$$(A * f)(t) = \int_{t_0}^{t} A(t-s)f(s)ds.$$

Deoarece

$$\int_{s \geq t_0} \left(\int_{t \geq s} \|A(t-s)\| . \|f(s)\| dt\right) ds \leq \|A\|_1 . \|f\|_1$$

folosind teorema Fubini-Tonelly găsim că

$$\int\limits_{t \geqslant t_0} \left\| \int_{t_0}^{t} A(t-s)f(s)ds \right\| dt \leqslant \int\limits_{s \geqslant t_0} \left(\int\limits_{t \geqslant s} \|A(t-s)\| . \|f(s)\| ds \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|_1 . \|f\|_1 .$$

Se poate arăta de asemenea $[G_2]$ că dacă $A(.) \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(X))$ $f \in L^p(J,X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, atunci aplicaţia $[t \longrightarrow (A * f)(t)] \in L^p(J,$ şi

$$\|A * f\|_p \leqslant \|A\|_1 . \|f\|_p .$$

DEFINIŢIA 1.3.5. Fie $A(.) \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(X))$. Numim operator de convoluţie generat de $A(.)$ în $L^p(J,X)$, operatorul liniar $\mathcal{A}_*$ definit prin

$$(\mathcal{A}_* f)(t) = (A * f)(t) = \int_{t_0}^{t} A(t-s)f(s)ds, \ (\forall) \ f \in L^p(J,X), (\forall) t \in J, t \geqslant$$

Din cele de mai sus rezultă că orice funcţie operatorială $A(.) \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(X))$ generează un operator de convoluţie $\mathcal{A}_*$: $L^p(J,X) \longrightarrow L^p(J,X)$, liniar şi mărginit, iar

$$\|\mathcal{A}_*\| \leqslant \|A\|_1 .$$

Prin calcul direct, utilizînd funcţia operatorială $[A(.)]^*$ şi intervertind ordinea de integrare se poate arăta că adjunctul operatorului de convoluţie $\mathcal{A}_*$ poate fi definit în $L^q(J,X^*)$, $1/p + 1/q = 1$, prin

$$(\mathcal{A}_*^* g^*)(t) = \int\limits_{\substack{s \geqslant t \\ s \in J}} A^*(s-t)g^*(s)ds \ , \ (\forall) \ g^* \in L^q(J,X^*), \ (\forall) \ t \in J,$$

unde $A^*(s-t) = [A(s-t)]^*$.

Fie acum $J = [t_0, \infty)$ şi $K(t,s) \in L^p(J \times J, \mathcal{L}(X)) \cap L^q(J \times J, \mathcal{L}(X))$

DEFINIŢIA 1.3.5. Numim operator integral generat de funcţie $K(t,s)$, operatorul liniar $\mathcal{K}$ definit pe $L^p(J,X)$ prin

$$(\mathcal{K}f)(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)f(s)ds \quad , \quad a.p.t. \quad t \in J.$$

PROPOZIŢIA 1.3.6. a) Pentru aproape fiecare $t \in J$ are sens $(\mathcal{K}f)(t) \in X$;

b) Operatorul $\mathcal{K}$ este liniar şi mărginit de la $L^p(J,X)$ în $L^p(J,X)$;

c) Adjunctul $\mathcal{K}^* : L^q(J,X^*) \longrightarrow L^q(J,X^*)$, $1/p + 1/q = 1$, se exprimă prin

$$(\mathcal{K}^* g^*)(s) = \int_{t_0}^{t} K^*(t,s) g^*(t) dt .$$

Demonstraţie : a) Deoarece $\int_J (\int_J \|K(t,s)\|^q ds) dt < \infty$, din teorema lui Fubini, rezultă că $\int_J \|K(t,s)\|^q ds < \infty$ a.p.t. $t \in J$, iar funcţia $t \longrightarrow \int_J \|K(t,s)\|^q ds$ este integrabilă pe J. De aceea, putem scrie

$$\int_{t_0}^{t} \|K(t,s)f(s)\| ds \leqslant \int_{t_0}^{t} \|K(t,s)\| . \|f(s)\| ds \leqslant$$

$$\leqslant (\int_{t_0}^{t} \|K(t,s)\|^q ds)^{1/q} . (\int_{t_0}^{t} \|f(s)\|^p ds)^{1/p} \leqslant M_t . \|f\|_p \text{ , a.p.t. } t \in$$

In concluzie, pentru aproape fiecare $t \in J$, $t \geqslant t_0$, există $\int_{t_0}^{t} K(t,s) f(s) ds = (\mathcal{K} f)(t)$;

b) Fie $f \in L^p(J,X)$. Atunci

$$\int_J \| \int_{t_0}^{t} K(t,s) f(s) ds \|^p dt \leqslant \int_J (\int_{t_0}^{t} \|K(t,s) f(s)\| ds)^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_J (\int_{t_0}^{t} \|K(t,s)\|^q ds)^{p/q} dt . \int_{t_0}^{t} \|f(s)\|^p ds \leqslant$$

$$(\int_J \int_J \|K(t,s)\|^q dt\, ds)^{p/q} . \|f\|_p^p = \|K\|^p_{L^q(J \times J, X)} \|f\|_p^p$$

deci

$$\mathcal{K} f \in L^p(J,X) \text{ şi } \|\mathcal{K} f\|_p \leqslant \|K\|_{L^q(J \times J, X)} \|f\|_p ;$$

c) Pentru orice $f \in L^p(J,X)$ şi $g^* \in L^q(J,X)$, $1/p + 1/q = 1$, vom avea

$$\langle \mathcal{K} f, g^* \rangle = \int_J \langle \int_{t_0}^{t} K(t,s) f(s) ds , g^*(t) \rangle dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} (\int_{t_0}^{t} \langle f(s), K^*(t,s) g^*(t) \rangle ds) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} (\langle f(s), \int_{s}^{\infty} K^*(t,s)g^*(t)dt \rangle)ds = \langle f, \mathcal{K}^* g^* \rangle$$

de unde

$$(\mathcal{K}^* g^*)(s) = \int_{s}^{\infty} K^*(t,s)g^*(t)dt.$$

OBSERVATIA 1.3.7. Dacă funcţia $K(t,s)$ este continuă pe $J \times J$, atunci putem defini operatorul integral $\mathcal{K}$ pe $L^p_{loc}(J,X)$ cu valori în $L^p_{loc}(J,X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

In continuare ne vom ocupa de operatorii de multiplicare, convoluţie şi sumare pe spaţii de şiruri.

Fie $\widetilde{A} = (A_n)_{n \geqslant 0} \in s(\mathcal{L}(U,X))$ şi $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in s(U)$.

DEFINITIA 1.3.8. Numim operator de multiplicare sau operator diagonal pe $s(U)$, generat de şirul $(A_n)_{n \geqslant 0}$, operatorul liniar $\mathcal{A} : s(U) \longrightarrow s(X)$, definit prin

$$\mathcal{A} f = (A_n f_n)_{n \geqslant 0} \quad , \quad (\forall)\ f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in s(U).$$

Continuitatea operatorului $\mathcal{A}$ rezultă imediat din inegalitatea

$$p_k(\mathcal{A} f) = \|A_k f_k\| \leqslant \|A_k\| \cdot \|f_k\| = c_k \cdot p_k(f) \quad , \quad (\forall)\ k \in \mathbb{N}.$$

Dacă $\widetilde{A} = (A_n)_{n \geqslant 0} \in \ell^{\infty}(\mathcal{L}(U,X))$ atunci pentru fiecare p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mathcal{A}$ induce un operator liniar şi mărginit de la $\ell^p(U)$ în $\ell^p(X)$. In particular, dacă $A_n = A \in \mathcal{L}(U,X)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, atunci $\mathcal{A} f = (A f_n)_{n \geqslant 0}$ defineşte un operator de multiplicare liniar şi mărginit de la $\ell^p(U)$ în $\ell^p(X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Fie acum $A \in \mathcal{L}(X)$ şi să notăm prin $\widetilde{A} = (A^n)_{n \geqslant 0}$ şirul puterilor lui A. Atunci $\widetilde{A}$ defineşte un operator de multiplicare în $s(X)$ definit prin

$$\mathcal{A} f = (A^n f_n)_{n \geqslant 0} \quad , \quad (\forall)\ f \in s(X).$$

In particular, deoarece orice număr $\alpha \in \mathbb{C}$ defineşte un operator $\alpha I \in \mathcal{L}(X)$, putem introduce operatorul

$$\widetilde{\alpha} f = (\alpha^n f_n)_{n \geqslant 0} \quad , \quad (\forall)\ f \in s(X).$$

<u>OBSERVATIA 1.3.9.</u> Operatorul de translaţie $T : s(X) \longrightarrow s(X)$ este similar cu αT, pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.

Intr-adevăr, pentru orice $f \in s(X)$

$$(\tilde{\alpha}^{-1} T \tilde{\alpha})f = \tilde{\alpha}^{-1} T((\alpha^n f_n)_{n \geq 0}) = \tilde{\alpha}^{-1}(\alpha f_1, \alpha^2 f_2, \ldots, \alpha^{n+1} f_n$$

$$= (\alpha f_1, \alpha f_2, \ldots, \alpha f_{n+1}, \ldots) = (\alpha T)f.$$

<u>CONSECINTA 1.3.10.</u> Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, atunci $\tilde{\alpha}$ şi $\tilde{\alpha}^{-1}$ finesc operatori izometrici pe $\ell^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, şi cu raţion. mentul precedent T şi αT sînt izometric echivalenti deci $\sigma($ şi $\sigma(\alpha T)$ coincid.

Fie $\tilde{A} = (A_n)_{n \geq 0} \in s(\mathcal{L}(X))$.

<u>DEFINITIA 1.3.11.</u> Numim operator de convoluţie generat de $\tilde{A}$ s(X) operatorul $\mathcal{A}_*: s(X) \longrightarrow s(X)$ definit prin

$$(\mathcal{A}_* f)(n) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k} f_k \quad , \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N} \ , \ (\forall)\ f \in s(X).$$

Fie

$$c(X) = \left\{ f = (f_n)_{n \geq 0} \in s(X) \;\middle|\; \lim_{n \to \infty} f_n \in X \right\}$$

şi

$$c_0(X) = \left\{ f = (f_n)_{n \geq 0} \in c(X) \;\middle|\; \lim_{n \to \infty} f_n = 0 \right\}$$

înzestrate cu norma din $\ell^\infty(X)$.

<u>TEOREMA 1.3.12.</u> Dacă $\tilde{A} = (A_n)_{n \geq 0} \in \ell^1(\mathcal{L}(X))$ atunci $\mathcal{A}_*$ este un operator liniar şi mărginit de la $\mathcal{X}$ la $\mathcal{X}$, unde $\mathcal{X}$ desemnează oricare din spaţiile $c_0(X)$, $c(X)$ sau $\ell^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$ şi are loc evaluarea

$$\|\mathcal{A}_* f\|_{\mathcal{X}} \leq \|\tilde{A}\|_1 \cdot \|f\|_{\mathcal{X}}$$

Demonstraţie : Vom analiza pe rînd cazurile $f \in c_0(X)$, $f \in c$ $f \in \ell^\infty(X)$, $f \in \ell^1(X)$ şi $f \in \ell^p(X)$, $1 < p < \infty$.

a) Fie $f \in c_0(X)$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$\|f_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|\tilde{A}\|_1} \quad \text{pentru} \quad (\forall)\ k \geq k_0.$$

De aceea

$$\|(\mathcal{A}_* f)(n)\| = \Big\|\sum_{k=0}^{n} A_{n-k} f_k\Big\| \leqslant \sum_{k=0}^{k_0} \|A_{n-k}\| \cdot \|f_k\| + \sum_{k=k_0}^{n} \|A_{n-k}\| \cdot \|f_k\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{k_0} \|A_{n-k}\| \cdot \|f_k\| + \frac{\varepsilon}{2\,\|\tilde{A}\|_1} \sum_{k=k_0}^{n} \|A_{n-k}\|$$

Deoarece şi $\|A_{n-k}\| \longrightarrow 0$ pentru $n \longrightarrow \infty$, rezultă că există $n_0 = n_0(\varepsilon)$ astfel ca $n \geqslant n_0$ să implice

$$\sum_{k=0}^{k_0} \|A_{n-k}\| \cdot \|f_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

In concluzie

$$\|(\mathcal{A}_* f)(n)\| \leqslant \varepsilon \quad , \ (\forall) n \geqslant n_0$$

adică

$$\mathcal{A}_* f \in c_0(X).$$

b) Fie $f \in c(X)$ şi să notăm $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = x \in X$. Atunci putem scrie

$$(\mathcal{A}_* f)(n) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k} f_k = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}(f_k - x) + \Big(\sum_{k=0}^{n} A_k\Big)x .$$

Deoarece $f_k - x \in c_0(X)$, conform celor demonstrate la punctul (a), $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}(f_k - x) = 0$ şi, în concluzie,

$$\lim_{n \to \infty} ((\mathcal{A}_* f)(n)) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} A_k\Big)x \in X$$

adică $\mathcal{A}_* f \in c(X)$.

c) Fie $f \in \ell^{\infty}(X)$. Atunci

$$\|(\mathcal{A}_* f)(n)\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|A_{n-k}\| \cdot \|f_k\| \leqslant \|f\|_{\infty} \cdot \sum_{k=0}^{n} \|A_{n-k}\| =$$

$$= \|f\|_{\infty} \cdot \sum_{k=0}^{n} \|A_k\| \leqslant \|\tilde{A}\|_1 \cdot \|f\|_{\infty} .$$

Deci

$$\|\mathcal{A}_* f\|_{\infty} \leqslant \|\tilde{A}\|_1 \cdot \|f\|_{\infty} .$$

In particular, avînd în vedere incluziunile $c_0(X) \subset c(X) \subset \ell^{\infty}(X)$, am obţinut inegalitatea din enunţ şi în cazurile $f \in c_0(X)$ şi $f \in c(X)$.

d) Dacă $f \in \ell^1(X)$, atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \|A_{n-k}\| \cdot \|f_k\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\| \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \|A_{n-k}\| = \|\tilde{A}\|_1 \|f\|_1$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\|A_{n-k}f_k\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\|A_{n-k}\|\cdot\|f_k\| \leqslant \|\tilde{A}\|_1\cdot\|f\|_1$$

adică

$$((\mathcal{A}_*f)(n))_{n\geqslant 0} \in \ell^1(X)\ .$$

şi

$$\|\mathcal{A}_*f\|_1 \leqslant \|\tilde{A}\|_1\cdot\|f\|_1$$

e) In sfîrşit, dacă $f\in \ell^p(X)$, $1<p<\infty$, iar q este conjugatul lui p, atunci

$$\|(\mathcal{A}_*f)(n)\| = \|\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}f_k\| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\|A_{n-k}\|^{1/p}\cdot\|f_k\|\cdot\|A_{n-k}\|^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant (\sum_{k=0}^{n}\|A_{n-k}\|\cdot\|f_k\|^p)^{1/p}\cdot(\sum_{k=0}^{n}\|A_{n-k}\|)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \|\tilde{A}\|_1^{1/q}\cdot(\sum_{k=0}^{n}\|A_{n-k}\|\cdot\|f_k\|^p)^{1/p}\ .$$

Cum $(\|A_n\|)_{n\geqslant 0}\in \ell^1(\mathbb{R})$ şi $(\|f_n\|^p)_{n\geqslant 0}\in \ell^1(\mathbb{R})$, conform punctului (d), avem

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}\|A_{n-k}\|\cdot\|f_k\|^p) \leqslant \|\tilde{A}\|_1\cdot\|f\|_p^p$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|(\mathcal{A}_*f)(n)\| \leqslant \|\tilde{A}\|_1\cdot\|f\|_p^p\cdot\|\tilde{A}\|_1^{p/q}$$

deci

$$\|\mathcal{A}_*f\|_p = (\sum_{n=0}^{\infty}\|(\mathcal{A}_*f)(n)\|^p)^{1/p} \leqslant \|\tilde{A}\|_1^{1/p+1/q}\cdot\|f\|_p = \|\tilde{A}\|_1\cdot\|f\|_p$$

şi afirmaţia teoremei este complet demonstrată.

PROPOZITIA 1.3.14. Fie $\tilde{A}=(A_n)_{n\geqslant 0}\in \ell^1(\mathcal{L}(X))$. Adjunctul operatorului de convoluţie $\mathcal{A}_*$, generat de şirul $(A_n)_{n\geqslant 0}$ în $\ell^p(X)$, $1\leqslant p<\infty$, este operatorul

$$\mathcal{A}_*^* : \ell^q(X^*)\longrightarrow \ell^q(X^*)\quad,\quad 1<q\leqslant\infty\ ,\ 1/p+1/q=1$$

definit prin

$$(\mathcal{A}_*^*g^*)(n) = \sum_{k=n}^{\infty}A^*_{k-n}g^*_k\ ,\quad (\forall)\ n\in\mathbb{N}\ ,(\forall)\ g^*=(g^*_n)_{n\geqslant 0}\in \ell^q(X^*).$$

Demonstraţie : Fie $f\in \ell^p(X)$, $g^*\in \ell^q(X^*)$, $1/p+1/q=1$. Atunci

$$\langle \mathcal{A}_*f,g^*\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle(\mathcal{A}_*f)(n),g^*_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}f_k,g^*_n\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \langle f_k , A_{n-k}^{*} g_n^{*} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \langle f_k , A_{n-k}^{*} g_n^{*} \rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \langle f_k , \sum_{n=k}^{\infty} A_{n-k}^{*} g_n^{*} \rangle = \langle f, \mathcal{A}_{*}^{*} g^{*} \rangle$$

de unde obţinem că

$$(\mathcal{A}_{*}^{*} g^{*})(k) = \sum_{n=k}^{\infty} A_{n-k}^{*} g_n^{*}$$

şi astfel afirmaţia este demonstrată.

Fie $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1/_p + 1/_q = 1$ şi $K_{nj} \in \mathcal{L}(X)$, $(\forall)$ $n,j \in \mathbb{N}$, cu proprietatea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|K_{nj}\|^{p} < \infty .$$

DEFINITIA 1.3.15. Numim operator de sumare cu nucleul $(K_{nj})_{n,j \geqslant 0}$, operatorul $\mathcal{K} : s(X) \longrightarrow s(X)$ definit prin

$$(\mathcal{K}f)(n) = \sum_{j=0}^{n} K_{nj} f_j \quad , \quad (\forall)\ f = (f_j)_{j \geqslant 0} \in s(X).$$

PROPOZITIA 1.3.16. Operatorul $\mathcal{K}$ este liniar şi mărginit de la $\ell^{p}(X)$ în $\ell^{p}(X)$, iar adjunctul său $\mathcal{K}^{*} : \ell^{q}(X^{*}) \longrightarrow \ell^{q}(X^{*})$ este definit prin

$$(\mathcal{K}^{*} g^{*})(j) = \sum_{n=j}^{\infty} K_{nj}^{*} g_n^{*} \quad , \quad (\forall)\ g^{*} = (g_n^{*})_{n \geqslant 0} \in \ell^{q}(X^{*}).$$

Demonstraţie : In primul rînd să observăm că deoarece $p \leqslant q$ rezultă că avem şi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|K_{nj}\|^{q} < \infty .$$

Fie $f \in \ell^{p}(X)$. Atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| \sum_{j=0}^{n} K_{nj} f_j \|^{p} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \|K_{nj}\| \cdot \|f_j\| \right)^{p} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \|K_{nj}\|^{q} \right)^{p/q} \cdot \sum_{j=0}^{n} \|f_j\|^{p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|K_{nj}\|^{q} \right)^{p/q} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|^{p}$$

de unde rezultă $\mathcal{K}f \in \ell^{p}(X)$ şi

$$\|\mathcal{K}f\|_{p} \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|K_{nj}\|^{q} \right)^{1/q} \cdot \|f\|_{p} .$$

Fie acum $g^{*} \in \ell^{q}(X^{*})$. Atunci

$$\langle \mathcal{K}f, g^{*}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \sum_{j=0}^{n} K_{nj} f_{j}, g_{n}^{*} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \langle f_{j}, K_{nj}^{*} g_{n}^{*} \rangle =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \langle f_{j}, K_{nj}^{*} g_{n}^{*} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f_{j}, \sum_{n=j}^{\infty} K_{nj}^{*} g_{n}^{*} \rangle = \langle f, \mathcal{K}^{*} g^{*} \rangle$$

de unde rezultă afirmația relativă la adjunct.

CAPITOLUL II.

NUMERE CARACTERISTICE ASOCIATE SISTEMELOR LINIARE DISCRETE.

Pentru studiul comportărilor asimptotice ale soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale finit dimensionale, A.M.LIAPUNOV [L2] a introdus numerele caracteristice asociate acestor soluţii, numite azi şi numere Liapunov [B8].

Asociind fiecărei soluţii un astfel de număr şi împărţind spaţiul soluţiilor în subspaţii care conţin soluţiile cu acelaşi număr caracteristic, Liapunov a arătat că toate soluţiile dintr-un astfel de subspaţiu au comportament similar de creştere la $+\infty$, comparativ cu o anumită exponenţială ; în particular, soluţiile cu număr caracteristic negativ au proprietatea că tind la zero exponenţial cînd $t \longrightarrow \infty$.

Pentru cazul ecuaţiilor liniare cu operatori constanţi într-un spaţiu n-dimensional

(A) $\dot{x} = Ax$

Liapunov a arătat că există numai un număr finit $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$, $k < n$ de numere caracteristice distincte ce se pot asocia unei astfel de ecuaţii. Mai mult, Liapunov a arătat că ν este număr caracteristic pentru o soluţie a ecuaţiei (A) dacă şi numai dacă există o valoare spectrală $\lambda \in \sigma(A)$ pentru care $\nu = \mathrm{Re}\,\lambda$. Altfel zis, dacă notăm prin $\chi(A)$ mulţimea numerelor caracteristice asociate tuturor soluţiilor ecuaţiei (A) şi prin $\mathrm{Re}\,\sigma(A) = \{\mathrm{Re}\,\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$, atunci $\chi(A) = \mathrm{Re}\,\sigma(A)$.

In paralel cu teoria stabilităţii mişcării, şi în strînsă legătură cu aceasta, numerele caracteristice au fost intens studiate în ultimul timp. O generalizare interesantă a numerelor caracteristice Liapunov este prezentată de M.REGHIŞ [R2], vizînd comportarea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale în raport cu o funcţie φ (nu neapărat exponenţială). Extensii la cazul spaţiilor Banach arbitrare sînt prezentate în [B1], [B2], [B3], [K7] . Dacă A este un operator liniar şi mărginit în spaţiul Banach X , ST.BALINT şi M.REGHIŞ [B1] arată că relaţia lui Liapunov $\chi(A) = \mathrm{Re}\,\sigma(A)$ trebuie înlocuită cu relaţia, mai slabă, $\chi(A) \subset \mathrm{Re}\,\sigma(A)$. Se caută apoi o clasă cît mai largă de operatori A pentru care $\overline{\chi(A)} = \mathrm{Re}\,\sigma(A)$, introducîndu-se clasa operatorilor real-decompozabili.

Toate consideraţiile asupra numerelor caracteristice în sensul lui Liapunov, amintite mai sus, sînt specifice sistemelor liniare cu timp continuu.

O teorie analoagă pentru cazul sistemelor discrete nu pare să fie cunoscută în literatura de specialitate, studiul stabilităţii unor astfel de sisteme fiind abordat prin metoda funcţiilor Liapunov [H1] , de altfel bine cunoscută şi în teoria sistemelor continue.

In cadrul acestui capitol, începînd cu paragraful al treilea introducem noţiunea de număr caracteristic asociat oricărui element din s(X) şi, în particular, oricărei soluţii a unui sistem discret ; vom arăta că numerele caracteristice introduse aici au proprietăţi analoage numerelor lui Liapunov din cazul continuu.

In cazul sistemelor nestaţionare discrete vom introduce indicele superior şi cel special, indici analogi cu cei amintiţi în [K7] şi vom arăta că au proprietăţi similare.

In cazul staţionar vom analiza relaţia dintre $\chi_d(A)$ şi $|\sigma(A)|$ în cadrul paragrafului patru, iar în ultimul paragraf al acestui capitol vom prezenta o variantă discretă a unei generalizări date de M.REGHIŞ [R3] teoremei lui O.PERRON.

Primul paragraf al acestui capitol are rolul de a face o succintă trecere în revistă a principalelor noţiuni din teoria sistemelor liniare continue şi discrete. In paragraful al doilea se reaminteşte noţiunea de număr caracteristic în sensul utilizat în [B1], [B2] şi apoi se determină pe o cale directă spectrul caracteristic al unui operator diagonal scalar [T10].

2.1. SISTEME LINIARE (DIFERENTIALE) CONTINUE ŞI DISCRETE.

Fie X un spaţiu Banach complex şi $A(.)\in L_J(\mathcal{L}(X))$.

DEFINITIA 2.1.1. Numim sistem diferenţial liniar omogen generat de $A(.)$ şi notăm

$$(A) \qquad \dot{x} = A(t)x$$

problema determinării funcţiilor primitive $x(.)\in \mathcal{C}^{\#}(J,X)$ cu proprietatea

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad \text{a.p.t. în } J.$$

Utilizînd Definiţia 1.2.1 rezultă că ecuaţia diferenţială (A) este echivalentă cu ecuaţia integrală

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds$$

iar pe baza principiului lui Banach de punct fix se arată în teoria ecuaţiilor diferenţiale liniare [C2] că problema Cauchy

$$(A\ ;\ t_0,x_0) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

are soluţie unică.

In particular, pentru fiecare $s\in J$, există o soluţie unică a problemei Cauchy operatoriale

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X \\ X(s) = I \quad , \quad s\in I. \end{cases}$$

Această soluţie notată $\Phi(t,s)$, $t,s\in J$, poartă numele de operator de evoluţie (Cauchy) generat de A şi se ştie că soluţia problemei Cauchy $(A\ ;\ t_0,x_0)$ admite reprezentarea

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 \quad , \quad (\forall)\ t\in J.$$

OBSERVATIA 2.1.2. Dacă $A(t) = A$, $(\forall)\ t\in J$, atunci $\Phi(t,s)$

, $t_0 \in J$, iar soluţia problemei Cauchy $(A;t_0,x_0)$ devine

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \quad , \quad (\forall)\ t \in J.$$

<u>PROPOZIŢIA 2.1.3</u>. $[C_2]$. Următoarele afirmaţii sînt adevărate :

(1) $\frac{d}{dt}\Phi(t,s) = A(t)\Phi(t,s)$ în $L_J(\mathcal{L}(X))$

(2) $\Phi(t,\tau)\Phi(\tau,s) = \Phi(t,s)$, $(\forall)\ t,\tau,s \in J$

(3) $\Phi(.,.) \in \mathcal{C}(J^2,X)$

(4) $\Phi(t,s)$ este inversabil şi $[\Phi(t,s)]^{-1} = \Phi(s,t)$, $(\forall) t,s \in J$

(5) $\frac{d}{dt}\Phi(s,t) = -\Phi(s,t)A(t)$ în $L_J(\mathcal{L}(X))$

(6) $\|\Phi(t,s)\| \leqslant e^{\int_s^t \|A(\tau)\| d\tau}$

Fie acum $A(.) \in L_J(\mathcal{L}(X)), f(.) \in L_J(X)$.

<u>DEFINIŢIA 2.1.4</u>. Numim sistem diferenţial liniar neomogen generat de A şi f şi notăm

$$(A,f) \qquad \dot{x} = A(t)x + f(t)$$

problema determinării funcţiilor $x(.) \in \mathcal{C}^{\#}(J,X)$ cu proprietatea

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t) \quad \text{a.p.t. în } J.$$

Ca şi în cazul sistemelor omogene este clar că ecuaţia (A,f) este echivalentă cu ecuaţia integrală

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

Se ştie de asemenea că unica soluţie a problemei Cauchy

$$(A,f;t_0,x_0) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

este furnizată de formula

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{x_0}^{x} \Phi(t,s)f(s)ds$$

numită formula variaţiei de constantă.

Fie $\tilde{A} = (A_n)_{n \geqslant 0} \in s(\mathcal{L}(X))$ şi $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in s(X)$.

<u>DEFINIŢIA 2.1.5</u>. Numim ecuaţie liniară discretă neomogenă asociată perechii $(\tilde{A},f)$ şi notăm

$$(\tilde{A},f) \qquad x_{n+1} = A_n x_n + f_n$$

problema determinării şirurilor $x = (x_n)_{n \geqslant 0} \in s(X)$ pentru care egalitatea precedentă este adevărată pentru orice $n \geqslant 0$.

OBSERVATIA 2.1.6. Dacă avem în vedere definiţiile operatorului de translaţie T (Def.1.3.9) şi operatorului de multiplicare $\mathcal{A}$ (Def.1.3.8) în $s(X)$, putem scrie

$$(\tilde{A},f) \qquad Tx = \mathcal{A}x + f.$$

DEFINITIA 2.1.7. Numim operator de evoluţie (Cauchy) generat de şirul $A = (A_n)_{n \geqslant 0} \in s(\mathcal{L}(X))$ şirul de operatori definit prin

$$\Phi(n,m) = \begin{cases} A_{n-1}A_{n-2} \cdots A_m & , \ (\forall)\ n > m \geqslant 0 \\ I & , \quad n = m \end{cases}$$

OBSERVATIA 2.1.8. Dacă $0 \leqslant p \leqslant m \leqslant n$, prin calcul direct, se pot verifica egalităţile

(1) $\Phi(n,m)\Phi(m,p) = \Phi(n,p)$

(2) $A_n\Phi(n,m) = \Phi(n+1,m)$

PROPOZITIA 2.1.9. Ecuaţia liniară discretă neomogenă $(\tilde{A},f)$ are soluţia generală dată de formula

$$x_n = \Phi(n)x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n,j+1)f_j \ , \ n > 0 \quad ; \quad x_0 \in X$$

numită formula discretă a variaţiei de constantă, unde $\Phi(n) = \Phi(n\ ,\ 0)$.

Demonstraţie : Pentru fiecare $n > 0$ au loc egalităţile

$$A_nx_n = A_n\Phi(n)x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} A_n\Phi(n,j+1)f_j =$$

$$= \Phi(n+1)x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n+1,j+1)f_j$$

$$x_{n+1} = \Phi(n+1)x_0 + \sum_{j=0}^{n} \Phi(n+1,j+1)f_j = A_nx_n + f_n.$$

OBSERVATIA 2.1.10. Dacă prin analogie cu cazul continuu definim problema Cauchy

$$(\tilde{A},f;1,x^0) \quad \begin{cases} x_{n+1} = A_nx_n + f_n \\ x_1 \quad = x^0 \end{cases}$$

atunci se constată simplu că unica soluţie a acestei probleme este

$$x_n = \Phi(n,i)x^0 + \sum_{j=i}^{n-1} \Phi(n,j+1)f_j \ , \ n > i$$

şi, în particular, problema Cauchy operatorială

$$(\widetilde{A},0;i,I) \quad \begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n \\ X_i \quad = I \end{cases}$$

are soluţia unică

$$X_n = \Phi(n,i) \quad , \quad n \geq i .$$

<u>OBSERVATIA 2.1.11</u>. Este clar că raţionamentele de mai sus pot fi reluate, cu modificări corespunzătoare, pentru operatorul de translaţie la dreapta T^*. Obţinem astfel ecuaţii liniare discrete generate de $(\widetilde{A},f)$ de forma

$$x_{n-1} = A_n x_n + f_n$$

în rezolvarea cărora va trebui introdus un operator de evoluţie corespunzător, pe care îl vom nota prin $\Phi^*(.,.)$ şi care va fi definit pentru orice $n, i \in \mathbb{N}$, $n \leqslant i$, prin

$$\Phi^*(n,i) = \begin{cases} A_{n+1} A_{n+2} \dots A_{i-1} A_i & , \quad n < i \\ \quad I & , \quad n = i \end{cases}$$

Se poate constata că $\Phi^*(n,i)$ este unica soluţie a problemei Cauchy operatoriale

$$\begin{cases} T^* X = \mathcal{A} X \\ X_i = I \end{cases}$$

iar $(x_n)_{0 \leqslant n \leqslant i}$ definit prin

$$x_n = \Phi^*(n,i)x^0 + \sum_{j=n+1}^{i} \Phi^*(n,j-1)f_j \ , \ n < i \quad \text{şi} \quad x_i = x^0$$

verifică, pentru orice $x^0 \in X$, egalitatea

$$x_{n-1} = A_n x_n + f_n \quad , \quad n \leqslant i .$$

<u>PROPOZITIA 2.1.12</u>. Fie $(A_n)_{n \geqslant 0}, (B_n)_{n \geqslant 0}, (F_n)_{n \geqslant 0} \in s(\mathcal{L}(X))$. Problema Cauchy operatorială discretă

$$\begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n B_n + F_n \\ X_i \quad = X^0 \end{cases}$$

are soluţia unică $(X_n)_{n \geq i}$, definită prin

$$X_n = \Phi(n,i) X^o \Phi^*(i-1,n-1) + \sum_{j=i}^{n-1} \Phi(n,j+1) F_j \Phi^*(j,n-1).$$

Demonstraţie : Introducem şirul $(C_n)_{n \geq o} \in s(\mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$ definit prin

$$C_n A = A_n A B_n \quad , \quad (\forall)\ n \geq o.$$

Este clar că sistemul din enunţul propoziţiei devine

$$\begin{cases} X_{n+1} = C_n X_n + F_n \\ X_i \quad = X^o \end{cases}$$

şi conform cu Obs.2.1.9, soluţia se poate fi scrisă

$$X_n = \widetilde{\Phi}(n,i) X^o + \sum_{j=i}^{n-1} \widetilde{\Phi}(n,j+1) F_j \quad , \quad n \geq i$$

unde am notat prin $\widetilde{\Phi}(n,i)$ operatorul de evoluţie generat de $(C_n)_{n \geq o}$.

Deoarece, conform definiţiei lui C_n, avem

$$\widetilde{\Phi}(n,i) X^o = C_{n-1} C_{n-2} \cdots C_i X^o = A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_i X^o B_i B_{i+1} \cdots B_{n-1} =$$
$$= \Phi(n,i) X^o \Phi^*(i-1,n-1)$$
$$\widetilde{\Phi}(n,j+1) F_j = A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_{j+1} F_j B_{j+1} \cdots B_{n-2} B_{n-1} =$$
$$= \Phi(n,j+1) F_j \Phi^*(j,n-1)$$

pentru a demonstra afirmaţia nu rămîne decît să înlocuim pe $\widetilde{\Phi}$ în expresia lui X_n.

OBSERVATIA 2.1.13. In cazul cînd $A_n = A$, $(\forall)\ n \geq o$, obţinem imediat

$$\Phi(n,m) = A^{n-m} \quad , \quad (\forall)\ n \geq m \geq o$$

iar soluţia generală a ecuaţiei liniare discrete devine

$$x_n = A^n x_o + \sum_{j=o}^{n-1} A^{n-j-1} f_j .$$

2.2. SPECTRUL CARACTERISTIC AL UNUI OPERATOR DIAGONAL

Fie $f \in L^{\infty}_{loc}(R_+, X)$.

DEFINITIA 2.2.1. [d_1] Numim număr caracteristic al funcţiei f

elementul $\nu(f) \in \overline{\mathbb{R}}$ definit prin

$$\nu(f) = \limsup_{t \to \infty} \frac{\ln \|f(t)\|}{t}$$

Din definiţie, se poate arăta uşor că

$$\nu(f) = \inf \left\{ \rho \in \mathbb{R} \,|\, (\exists) N_\rho > 0 \,,\, \|f(t)\| \leqslant N_\rho e^{\rho t} \right\}$$

dacă există cel puţin un număr $\rho \in \mathbb{R}$ cu proprietatea de mai sus şi $\nu(f) = \infty$ în caz contrar.

Dacă $A \in \mathcal{L}(X)$ atunci unica soluţie a problemei Cauchy

$$(A;0,x_0) \begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

este $x(t) = e^{At}x_0$.

Vom nota $\nu_A(x_0) = \nu(e^{At}x_0)$ şi vom numi mulţimea

$$\chi(A) = \left\{ \nu_A(x) \,|\, x \in X \ , \ x \neq 0 \right\}$$

spectrul caracteristic al operatorului A.

In cele ce urmează vom determina pe cale directă spectrul caracteristic al unui operator diagonal scalar.

Fie $a = (a_n)_{n \geqslant 0} \in \ell^\infty(\mathbb{C})$. Şirul a defineşte un operator diagonal (Def.1.3.8) în $\ell^p(\mathbb{C})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, prin

$$\mathcal{A}x = (a_n x_n)_{n \geqslant 0} \ , \ (\forall)\ x = (x_n)_{n \geqslant 0} \in \ell^p(\mathbb{C}).$$

Dacă $e_n = (\delta_{kn})_{n \geqslant 0}$, atunci $\mathcal{A} e_n = a_n e_n$. In concluzie $\sigma_\pi(\mathcal{A}) = \{a_n\}_{n \geqslant 0}$, de unde rezultă că $\overline{\{a_n\}}_{n \geqslant 0} \subset \sigma(\mathcal{A})$. Fiind adevărată şi incluziunea reciprocă, deducem că spectrul unui operator diagonal scalar coincide cu închiderea mulţimii formată cu elementele şirului care generează operatorul.

<u>PROPOZITIA 2.2.1.</u> Fie $\mathcal{A}$ un operator diagonal generat de şirul $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ şi $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. O condiţie necesară şi suficientă ca $\operatorname{Re}\lambda \in \chi(\mathcal{A})$ este ca pentru orice $\varepsilon > 0$, $\operatorname{Re} a \cap (\operatorname{Re}\lambda - \varepsilon, \operatorname{Re}\lambda] \neq \emptyset$, unde $\operatorname{Re} a = \{\operatorname{Re} a_n\}_{n \geqslant 0}$.

Demonstraţie : Pentru suficienţă, să observăm că dacă ...

un indice $k \in \mathbb{N}$ astfel încît $\mathrm{Re}\,\lambda = \mathrm{Re}\,a_k$, atunci $\mathrm{Re}\,\lambda \in \mathrm{Re}\,\sigma_{\pi}(\mathcal{A}) \subset \chi(\mathcal{A})$. De aceea, în continuare, presupunem că $\mathrm{Re}\,\lambda \notin \mathrm{Re}\,\sigma_{\pi}(\mathcal{A})$. Este clar din condiţia impusă că există un subşir $(a_{n_k})_{k \geq 0}$, extras din şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ cu proprietatea $\mathrm{Re}\,a_{n_k} \in (\mathrm{Re}\,\lambda - \frac{1}{k}, \mathrm{Re}\,\lambda]$

Fie $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell^p(\mathbb{C})$ cu $x_n = 0$ pentru $n \neq n_k$ şi $x_n \neq 0$ pentru $n = n_k$. Atunci

$$\|e^{\mathcal{A}t}x\|_p = \|(e^{a_{n_k}t}x_{n_k})_{k \geq 0}\|_p \geq e^{\mathrm{Re}\,a_{n_k}}\|x_{n_k}\|, \quad (\forall)\ k \geq 0$$

de unde

$$\|e^{\mathcal{A}t}x\|_p > e^{(\mathrm{Re} \quad - \frac{1}{k})t}\,|x_{n_k}|$$

astfel că

$$\nu_{\mathcal{A}}(x) = \lim_{t \to \infty} \sup \frac{\ln\|e^{\mathcal{A}t}x\|_p}{t} \geq \mathrm{Re}\,\lambda - \frac{1}{k}, \quad (\forall)\ k \geq 0$$

deci

$$\nu_{\mathcal{A}}(x) \geq \mathrm{Re}\,\lambda \ ;$$

Pe de altă parte

$$\|e^{\mathcal{A}t}x\|_p = \|(e^{a_{n_k}t}x_{n_k})_{k \geq 0}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(|e^{a_{n_k}t}||x_{n_k}|)^p\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq e^{t\mathrm{Re}\,\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|x_{n_k}|^p\right)^{1/p} = e^{t\mathrm{Re}\,\lambda}\|x\|_p, \quad \text{dacă } 1 \leq p < \infty$$

şi

$$\|e^{\mathcal{A}t}x\|_{\infty} = \|(e^{a_{n_k}t}x_{n_k})_{k \geq 0}\|_{\infty} = \sup|e^{a_{n_k}t}||x_{n_k}| \leq$$

$$\leq e^{t\mathrm{Re}\,\lambda}\sup\|x_{n_k}\| = e^{t\mathrm{Re}}\,\|x\|_{\infty}, \quad \text{dacă } p = \infty, \text{ de unde}$$

$$\nu_{\mathcal{A}}(x) \leq \mathrm{Re}\,\lambda \ .$$

Reciproc, să presupunem că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel ca $\mathrm{Re}\,a \cap (\mathrm{Re}\,\lambda - \varepsilon_0, \mathrm{Re}\,] = \emptyset$ şi să notăm

$$a' = \{a_k \in \{a_n\}_{n \geq 0} \mid \mathrm{Re}\,a_k \leq \mathrm{Re}\,\lambda - \varepsilon_0\}$$

$$I' = \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in a'\}$$

$$a'' = \{a_k \in \{a_n\}_{n \geq 0} \mid \mathrm{Re}\,a_k > \mathrm{Re}\,\lambda\}$$

$$I'' = \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in a''\}.$$

Este clar că $a' \cup a'' = a$ şi $I' \cup I'' = \mathbb{N}$.

Fie $x \in \ell^p(\mathbb{C})$, $x \neq 0$. Dacă există $k_0 \in I''$ astfel ca $x_{k_0} \neq 0$, atunci există $\delta > 0$ astfel ca $\operatorname{Re} a_{k_0} = \operatorname{Re}\lambda + \delta$ şi

$$\|e^{\mathcal{A}t} x\|_p \geq e^{t\operatorname{Re} a_{k_0}} |x_{k_0}| = e^{t(\operatorname{Re}\lambda + \delta)} |x_{k_0}| .$$

de unde rezultă

$$\nu_{\mathcal{A}}(x) \geq \operatorname{Re}\lambda + \delta > \operatorname{Re}\lambda .$$

Dacă pentru orice $k \in \mathbb{N}$ cu $x_k \neq 0$ avem $k \in I'$, atunci

$$\|e^{\mathcal{A}t} x\|_p \leq e^{(\operatorname{Re}\lambda - \varepsilon_0)t} \|x\|_p .$$

de unde

$$\nu_{\mathcal{A}}(x) \leq \operatorname{Re}\lambda - \varepsilon_0 < \operatorname{Re}\lambda$$

astfel că

$$\operatorname{Re}\lambda \notin \chi(\mathcal{A}).$$

<u>CONSECINTA 2.2.2</u>. Fie $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^\infty(\mathbb{C})$ şi $\mathcal{A}$ operatorul diagonal indus pe $\ell^p(\mathbb{C})$ de şirul a. Atunci

$$\chi(\mathcal{A}) = \begin{cases} \overline{\{\operatorname{Re} a_n\}}_{n \geq 0} & \text{dacă } \inf_{n \geq 0} \operatorname{Re} a_n \in \{\operatorname{Re} a_n\}_{n \geq 0} \\ \overline{\{\operatorname{Re} a_n\}}_{n \geq 0} \setminus \inf_{n \geq 0} \operatorname{Re} a_n & \text{dacă } \inf_{n \geq 0} \operatorname{Re} a_n \notin \{\operatorname{Re} a_n\}_{n \geq 0} \end{cases}$$

Demonstraţie : Fie $\lambda = \inf_{n \geq 0} \operatorname{Re} a_n \in \overline{\{\operatorname{Re} a_n\}}_{n \geq 0} \subset \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A})$.

Atunci $\lambda \in \chi(\mathcal{A})$.

Dacă $\lambda \notin \{\operatorname{Re} a_n\}_{n \geq 0}$, rezultă $(\lambda - \varepsilon, \lambda] \cap \{\operatorname{Re} a_n\}_{n \geq 0} = \emptyset$ şi se aplică Propoziţia 2.2.1.

<u>2.3. NUMERE CARACTERISTICE ASOCIATE ELEMENTELOR LUI s(X)</u>.

Fie X un spaţiu Banach complex şi să notăm

$$s^0(X) = \{x = (x_n)_{n \geq 0} \in s(X) \mid (\exists)\ a \geq 0 \text{ şi } N_a \geq 0 \text{ ca } \|x_n\| \leq N_a a^n, (\forall) n \geq 0\}$$

Este clar că dacă există un număr a cu proprietatea din definiţia mulţimii $s^0(X)$, orice $b \in [a, \infty)$ are această proprietate.

<u>DEFINITIA 2.3.1</u>. Numim număr caracteristic asociat şirului $x = (x_n)_{n \geq 0} \in s^0(X)$, numărul

$$\mu(x) = \inf\left\{a > 0 \,\middle|\, (\exists) N_a > 0 \text{ cu } \|x_n\| \leqslant N_a a^n, \ (\forall)\, n \geqslant 0\right\}.$$

Pentru $x \in s(X) \setminus s^0(X)$ vom pune prin definiţie $\mu(x) = \infty$.

OBSERVATIA 2.3.2. Dacă $x = (x_n)_{n \geqslant 0} \in s^0(X)$ are proprietatea că pentru orice $a \in (0,\infty)$ există $N_a > 0$ astfel ca $\|x_n\| \leqslant N_a a^n$, atunci $\mu(x) = 0$. In particular, pentru şirul nul $0 = (0,0,\dots,0,\dots)$ avem $\mu(0) = 0$ şi aceeaşi afirmaţie este adevărată pentru şirul $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ dacă $x_n = 0$, $(\forall)\, n \geqslant n_0$.

OBSERVATIA 2.3.3. Numărul caracteristic al oricărui şir constant nenul este egal cu 1.

Intr-adevăr, fie $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ cu $x_n = x_0$, $(\forall)\, n \geqslant 0$. Atunci, pentru $a = 1$ avem, în mod evident, $\|x_n\| = \|x_0\|$, $(\forall)\, n \geqslant 0$ şi oricare ar fi $0 < a < 1$, o inegalitate de forma

$$\|x_n\| = \|x_0\| \leqslant N_a a^n, \quad (\forall)\, n \geqslant 0$$

este imposibilă dacă $x_0 \neq 0$.

Următoarea propoziţie dă un analog discret al cunoscutei formule a lui Perron din cazul continuu.

PROPOZITIA 2.3.4. Pentru orice şir $x = (x_n)_{n \geqslant 0} \in s(X)$ are loc egalitatea

$$\mu(x) = \limsup_{n \to \infty} \|x_n\|^{1/n}$$

Demonstraţie : Fie $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^{1/n} = \mu$.

Dacă $\mu = 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|^{1/n} = 0$, deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 = n_0(\varepsilon)$ cu proprietatea $\|x_n\| \leqslant \varepsilon^n$, pentru $n \geqslant n_0$. Dacă definim

$$N_\varepsilon = \max(1, \|x_0\|, \|x_1\|\varepsilon^{-1}, \dots, \|x_{n_0}\|\varepsilon^{-n_0})$$

atunci $\|x_n\| \leqslant N_\varepsilon \varepsilon^n$, $(\forall)\, n \geqslant 0$, de unde $\mu(x) = 0 = \mu$.

Dacă $0 < \mu < \infty$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon)$ astfel ca $\|x_n\|^{1/n} \leqslant \mu + \varepsilon$, $(\forall)\, n \geqslant n_0$ şi ca mai sus găsim N_ε cu proprietatea

$$\|x_n\| \leqslant N_\varepsilon (\mu + \varepsilon)^n, \quad (\forall)\, n \geqslant 0.$$

astfel că $\mu(x) \leqslant \mu$.

Pe de altă parte, dacă $\mu(x) < \mu$ atunci există $\varepsilon > 0$ astfel ca $\mu(x) < \mu - \varepsilon < \mu$ şi putem găsi $N_\varepsilon > 0$ cu proprietatea

$$\|x_n\| \leqslant N_\varepsilon (\mu - \varepsilon)^{1/n} , \quad (\forall)\ n \geqslant 0.$$

De aici

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^{1/n} \leqslant \mu - \varepsilon < \mu$$

şi contrazicem definiţia lui μ.

Dacă $\mu = \infty$, presupunînd $\mu(x) < \infty$, rezultă că ar exista $a > 0$ şi $N_a > 0$ astfel ca $\|x_n\| \leqslant N_a a^n$, $(\forall)\ n \geqslant 0$, sau $\|x_n\|^{1/n} \leqslant N_a^{1/n} . a$, $(\forall)\ n \geqslant 0$, de unde $\infty = \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^{1/n} \leqslant a$, absurd.

<u>PROPOZITIA 2.3.5</u>. Pentru orice două şiruri $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$, $y = (y_n)_{n \geqslant 0} \in s(X)$, următoarele afirmaţii sînt adevărate :

a) $\mu(x + y) \leqslant \max(\mu(x), \mu(y))$; dacă $\mu(x) \neq \mu(y)$ atunci $\mu(x + y) = \max(\mu(x), \mu(y))$;

b) Dacă X este o algebră Banach şi $\mu(x).\mu(y)$ are sens, atunci $\mu(xy) \leqslant \mu(x).\mu(y)$.

Demonstraţie : a) Dacă $\mu = \max(\mu(x), \mu(y))$ atunci este clar că pentru orice $\varepsilon > 0$, $\mu + \varepsilon > \mu(x)$ şi $\mu + \varepsilon > \mu(y)$. În consecinţă, putem găsi N'_ε, N''_ε astfel încît pentru orice $n \geqslant 0$

$$\|x_n\| \leqslant N'_\varepsilon (\mu + \varepsilon)^n$$

$$\|y_n\| \leqslant N''_\varepsilon (\mu + \varepsilon)^n .$$

Rezultă că pentru $N_\varepsilon = N'_\varepsilon + N''_\varepsilon$ avem

$$\|x_n + y_n\| \leqslant \|x_n\| + \|y_n\| \leqslant N_\varepsilon (\mu + \varepsilon)^n$$

de unde

$$\mu(x + y) \leqslant \mu = \max(\mu(x), \mu(y)).$$

Să considerăm acum $\mu(x) \neq \mu(y)$ şi pentru a face o alegere să presupunem că $\mu(x) < \mu(y)$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ pentru care $\mu(x) < \mu(y) - \varepsilon < \mu(y)$, conform definiţiei lui $\mu(x)$, putem

N'_ε cu proprietatea

$$\|x_n\| \leqslant N'_\varepsilon (\mu(y)-\varepsilon)^n \quad , \quad (\forall)\ n \geqslant 0.$$

Dacă presupunem că $\mu(x+y) < \mu(y) = \max(\mu(x), \mu(y))$ atunci pentru $\varepsilon > 0$, suficient de mic, $\mu(x+y) < \mu(y)-\varepsilon$ şi putem găsi N''_ε astfel ca

$$\|x_n + y_n\| \leqslant N''_\varepsilon (\mu(y)-\varepsilon)^n.$$

In concluzie, dacă ε este suficient de mic, atunci

$$\|y_n\| \leqslant \|x_n\| + \|x_n + y_n\| \leqslant (N'_\varepsilon + N''_\varepsilon)(\mu(y)-\varepsilon)^n$$

de unde ar rezulta că

$$\mu(y) \leqslant \mu(y)-\varepsilon < \mu(y)$$

ceea ce este absurd, deci $\mu(x+y) = \max(\mu(x), \mu(y))$.

b) Fie X algebră Banach şi definim, în mod uzual, $xy = (x_n y_n)_{n \geqslant 0}$. Să presupunem, pentru început că, $\max(\mu(x), \mu(y)) \neq \infty$. Este clar că pentru orice $\varepsilon_1 > 0$ şi orice $n \geqslant 0$, putem găsi N'_{ε_1} şi N''_{ε_1} astfel ca

$$\|x_n\| \leqslant N'_{\varepsilon_1} (\mu(x) + \varepsilon_1)^n$$

$$\|y_n\| \leqslant N''_{\varepsilon_1} (\mu(y) + \varepsilon_1)^n$$

de unde

$$\|x_n y_n\| \ \|x_n\| \cdot \|y_n\| \leqslant N'_{\varepsilon_1} N''_{\varepsilon_1} (\mu(x)\mu(y) + \varepsilon_1\mu(y) + \varepsilon_1\mu(x) + \varepsilon_1^2)^n .$$

Deoarece oricare ar fi $\varepsilon > 0$, putem alege ε_1 suficient de mic astfel încît $\varepsilon_1\mu(x) + \varepsilon_1\mu(y) + \varepsilon_1^2 < \varepsilon$, obţinem

$$\mu(xy) \leqslant \mu(x).\mu(y).$$

Dacă $0 < \mu(x) < \mu(y) = \infty$, proprietatea este evidentă.

<u>PROPOZITIA 2.3.6</u>. Dacă X este o algebră Banach cu unitate, iar şirul $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ are proprietatea că x_n este inversabil oricare ar fi $n \geqslant 0$, atunci

$$\mu(x).\mu(x^{-1}) \geqslant 1 \ , \ \text{dacă} \ \mu(x) \neq 0 \ \text{sau} \ \mu(x^{-1}) \neq 0,$$

unde $x^{-1} = (x_n^{-1})_{n \geqslant 0}$.

Demonstratie : Intr-adevăr, conform Observaţiei 2.3.3 şi ...

mației (b) din propoziția precedentă avem $1 = \mu(e) = \mu(x.x^{-1}) \leqslant \leqslant \mu(x).\mu(x^{-1})$, dacă $\mu(x).\mu(x^{-1})$ are sens.

Să observăm acum că dacă $\mu(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|^{1/n} = 0$ și deci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon)$ astfel ca $\|x_n\| \leqslant \varepsilon^n$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$.

Pe de altă parte, deoarece x_n este inversabil

$$1 = \|e\| = \|x_n x_n^{-1}\| \leqslant \|x_n\| \cdot \|x_n^{-1}\| \quad , \quad (\forall)\ n \geqslant 0$$

de unde

$$\|x_n^{-1}\| \geqslant \frac{1}{\|x_n\|} \geqslant \varepsilon^{-n} \quad ; \quad (\forall)\ n \geqslant n_0$$

sau

$$\|x_n^{-1}\|^{1/n} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \quad , \quad (\forall)\ n \geqslant n_0$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \inf \|x_n^{-1}\|^{1/n} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} .$$

Deoarece inegalitatea precedentă este adevărată pentru orice $\varepsilon > 0$, deducem că

$$\infty = \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n^{-1}\|^{1/n} \leqslant \lim \sup \|x_n^{-1}\|^{1/n}$$

adică există $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n^{-1}\|^{1/n} = \infty$ și în acest caz $\mu(x)\mu(x^{-1})$ nu are sens. Analog se arată că dacă $\mu(x^{-1}) = 0$ atunci $\mu(x) = \infty$.

<u>PROPOZIȚIA 2.4.7</u>. Fie $x^1, x^2, \ldots, x^m \in s(X)$. Dacă $0 < \mu(x^i) < \infty$ pentru $i = 1,2,\ldots,m$ sînt distincte, atunci $x^1, x^2, \ldots, x^m$ sînt șiruri liniar independente în $s(X)$.

Demonstrație : Să presupunem, renumerotînd eventual, că $0 < \mu(x^1) < \mu(x^2) < \ldots < \mu(x^m) < \infty$. Dacă există constantele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, nu toate nule, astfel încît

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m = 0$$

și presupunem că α_k este constanta cu indicele cel mai mare, nenulă, atunci

$$0 = \mu(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m) = \mu(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k) =$$
$$= \max(\mu(\alpha_1 x^1), \mu(\alpha_2 x^2), \ldots, \mu(\alpha_k x^k)) = \max(\mu(x^1), \mu(x^2), \ldots$$

$\ldots, \mu(x^k)) = \mu(x^k)$.

Contradicţia obţinută demonstrează afirmaţia.

OBSERVATIA 2.3.8. Fie $\mathfrak{X}_\mu = \{x \in s(X) \mid \mu(x) < \mu\}$. Atunci $\mathfrak{X}_\mu$ este un subspaţiu liniar în $s(X)$.

Intr-adevăr, dacă $x^1, x^2 \in \mathfrak{X}_\mu$, atunci $\mu(x^1) < \mu$, $\mu(x^2) < \mu$ şi $\mu(\alpha x^1 + \beta x^2) \leq \max(\mu(x^1), \mu(x^2)) < \mu$ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

PROPOZIŢIA 2.3.9. Dacă $\mathcal{E} \subset s(X)$ este un subspaţiu finit dimensional atunci există un număr natural k, $1 \leq k \leq \dim \mathcal{E}$, un şir finit crescător de numere $\mu_0 = 0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k < \infty$ şi un şir de subspaţii $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_k \subset s(X)$ astfel încît

i) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_k$

ii) $\mu(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathcal{E}_0$ şi $\mu(x) = \mu_i$, $(\forall)\ x \in \mathcal{E}_i$, $x \neq 0$, $i \neq 0$.

Demonstraţie : Fie $\mathcal{E}_0 = \{x \in \mathcal{E} \mid \mu(x) = 0\} \ni 0$. Dacă $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, atunci $\mu_0 = 0$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ şi afirmaţia este demonstrată. Vom presupune deci că $\mathcal{E}_0 \neq \mathcal{E}$.

Dacă $x^1, x^2 \in \mathcal{E}_0$, $\mu(\alpha x^1 + \beta x^2) \leq \max(\mu(x^1), \mu(x^2)) = 0$ deci $\alpha x^1 + \beta x^2 \in \mathcal{E}_0$, $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, adică $\mathcal{E}_0$ este un subspaţiu liniar.

Fie $\mathcal{B}_0$ o bază a spaţiului $\mathcal{E}_0$. Evident, avem

$$0 \leq \operatorname{card} \mathcal{B}_0 = n_0 < \dim \mathcal{E},$$

şi, de asemenea, este clar că $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_0 \neq \{0\}$. Mai mult, pentru orice $x \in \mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_0$, $x \neq 0$, vom avea $\mu(x) > 0$.

Dacă pentru orice n ar exista $x^n \in \mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_0$ cu proprietatea $0 < \mu(x^n) < \frac{1}{n}$ ar rezulta că putem găsi un şir $(x^n)_{n \geq 1}$ de elemente din $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_0$ astfel încît $\lim_{n \to \infty} \mu(x^n) = 0$, iar numerele $\mu(x^n)$ ar fi toate distincte. In virtutea Propoziţiei 2.3.7 ar rezulta că spaţiul $\mathcal{E}$ nu este de dimensiune finită, în contradicţie cu ipoteza. In concluzie,

$$\inf\{\mu(x) \mid x \in \mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_o\} = \mu_1 > o\ .$$

Să notăm acum

$$\mathcal{E}_1 = \{x \in \mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_o \mid \mu(x) = \mu_1\} \cup \{o\}$$

Este uşor de văzut că $\mathcal{E}_1 \neq \{o\}$, în caz contrar, ca mai sus putem găsi un şir $(x^n)_{n \geq 1}$ de elemente din $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_o$ pentru care $\mu(x^n)$ sînt distincte $(\mu(x^n) \longrightarrow \mu_1)$ şi contrazicem ipoteza dimensiunii finite a lui $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_o$.

Dacă $x^1, x^2 \in \mathcal{E}_1$, atunci $\mu(\alpha x^1 + \beta x^2) \leq \mu_1$, iar pentru $\alpha x^1 + \beta x^2 \neq o$ $\mu(\alpha x^1 + \beta x^2) = \mu_1$, adică $\mathcal{E}_1$ este subspaţiu liniar.

Fie acum $\mathcal{B}_1$ o bază a spaţiului $\mathcal{E}_1$ şi să notăm prin $n_1 = \mathrm{card}\ \mathcal{B}_1$. Este clar că

$$1 \leq n_1 \leq \dim(\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_o) = \dim \mathcal{E} - n_o$$

adică

$$o < 1 \leq n_1 + n_o \leq \dim \mathcal{E}\ .$$

Dacă $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_o$ atunci $\mathcal{E} = \mathcal{E}_o \oplus \mathcal{E}_1$ şi afirmaţia este demonstrată. In caz contrar $n_1 < \dim \mathcal{E} - n_o$ şi

$$\mathcal{E} \ominus (\mathcal{E}_o \oplus \mathcal{E}_1) \neq \{o\}\ .$$

Putem repeta raţionamentul punînd

$$\mu_2 = \inf\{\mu(x) \mid x \in \mathcal{E} \ominus (\mathcal{E}_o \oplus \mathcal{E}_1)$$

de unde va rezulta că $\mu_2 > \mu_1$ şi în plus că

$$\mu_2 = \{x \in \mathcal{E} \ominus (\mathcal{E}_o \oplus \mathcal{E}_1) \mid \mu(x) = \mu_2\} \cup \{o\}$$

este subspaţiu liniar.

Rezultă astfel un şir $\mu_o = o < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ care nu poate fi infinit deoarece $\dim \mathcal{E}_j \geq 1$ pentru $j > o$, iar $\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 + \ldots < \dim \mathcal{E}$. In concluzie, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încît procesul se încheie la pasul k, adică

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_o \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_k$$

$$\mu(x) = o,\ (\forall)\ x \in \mathcal{E}_o \text{ şi } \mu(x) = \mu_i\ ,\ (\forall)\ x \in \mathcal{E}_i\ ,\ x \neq o,\ i \neq o.$$

Din construcţia efectuată observăm că şirul $\mu_o, \mu_1, \ldots, \mu_k$

şi subspaţiile $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_k$ cu proprietăţile de mai sus sînt unic determinate.

Fie $\widetilde{A} = (A_n)_{n \geq 0} \in s(\mathcal{L}(X))$ şi sistemul cu coeficienţi variabili

$$(\widetilde{A}) \quad x_{n+1} = A_n x_n \quad , \quad n \geq 0.$$

Soluţia sistemului $(\widetilde{A})$ este dată de şirul $x_n = \Phi(n)x_0$, $x_0 \in X$, unde $\Phi(n) = \Phi(n,0) = A_{n-1}A_{n-2} \ldots A_0$.

Să presupunem că $\widetilde{A} = (A_n)_{n \geq 0} \in \ell^{\infty}(\mathcal{L}(X))$, adică există $M > 0$ astfel ca $\|A_n\| \leq M$, $(\forall)\ n \geq 0$. In consecinţă, $\|\Phi(n)\| \leq M^n$, $(\forall)\ n \geq 0$, sau, mai general, $\|\Phi(n,k)\| = \|A_{n-1}A_{n-2} \ldots A_k\| \leq M^{n-k}$. Rezultă de aici că fiecare soluţie $x = (x_n)_{n \geq 0}$ a sistemului $(\widetilde{A})$ are proprietatea

$$\|x_n\| = \|\Phi(n)x_0\| \leq M^n \|x_0\|$$

şi de aceea

$$\limsup_{n \to \infty} \|x_n\|^{1/n} = \mu(x) \leq M.$$

Dacă notăm prin $\chi_d(\widetilde{A})$ mulţimea numerelor caracteristice ale tuturor soluţiilor sistemului $(\widetilde{A})$, atunci prin analogie cu noţiunile similare introduse în [K7] putem defini indicele superior şi indicele special asociat sistemului $(\widetilde{A})$.

<u>DEFINITIA 2.3.10</u>. Numim indice superior (respectiv indice special) al ecuaţiei $(\widetilde{A})$ numărul

$$\mu_s = \sup\{\mu \geq 0 \mid \mu \in \chi_d(\widetilde{A})\}$$

(respectiv $\mu^* = \inf\{a > 0 \mid (\exists)\ N_a > 0$ ca $\|\Phi(n,k)\| \leq N_a a^{n-k}\}$.

Prin calcul direct se poate constata că în cazul coeficienţilor constanţi $\mu_s = \mu^* = r_A$.

<u>TEOREMA 2.3.11</u>. Indicele superior al sistemului $(\widetilde{A})$ coincide cu numărul caracteristic asociat şirului $(\|\Phi(n)\|)_{n \geq 0}$.

Demonstraţie : Fie $\alpha = \limsup_{n \to \infty} \|\Phi(n)\|^{1/n}$. Deoarece orice soluţie $x = (x_n)_{n \geq 0}$ a sistemului $(\widetilde{A})$ are proprietatea $x_n =$

$= \Phi(n)x_0, x_0 \in X$, rezultă că

$$\|x_n\|^{1/n} \leqslant \|\Phi(n)\|^{1/n} \|x_0\|^{1/n}$$

astfel că

$$\mu(x) = \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|\Phi(n)\|^{1/n} =$$

deci

$$\mu_s \leqslant \alpha .$$

Fie acum $x = (\Phi(n)x_0)_{n \geqslant 0}$ o soluţie arbitrară a sistemului $(\tilde{A})$. Conform definiţiei indicelui μ_s rezultă că $\mu(x) \leqslant \mu_s + \mathcal{E}$, deci putem determina $N = N(\mathcal{E}, x_0)$ cu proprietatea

$$\|\Phi(n)x_0\| \leqslant N(\mu_s + \mathcal{E})^n$$

sau echivalent

$$\|(\mu_s + \mathcal{E})^{-n}\Phi(n)x_0\| \leqslant N.$$

Deoarece $\{(\mu_s + \mathcal{E})^{-n}\Phi(n)x_0\}_{n \geqslant 0}$ este o familie de operatori liniari punctual mărginită, din principiul mărginirii uniforme rezultă că există $N_{\mathcal{E}} \geqslant 0$ astfel ca

$$\|(\mu_s + \mathcal{E})^{-n}\Phi(n)\| \leqslant N_{\mathcal{E}} \quad , \quad (\forall)\ n \geqslant 0$$

sau

$$\|\Phi(n)\| \leqslant N_{\mathcal{E}}(\mu_s + \mathcal{E})^n \quad , \quad (\forall)\ n \geqslant 0$$

şi deoarece $\mathcal{E}$ este arbitrar rezultă $\alpha \leqslant \mu_s$.

2.4. SPECTRUL CARACTERISTIC ASOCIAT UNUI SISTEM DISCRET.

Fie $A \in \mathcal{L}(X)$ şi problema Cauchy discretă

$$(A; 0, x^0) \begin{cases} x_{n+1} = Ax_n \\ x_0 = x^0 \end{cases}$$

a cărei soluţie este dată de $x_n = A^n x_0$, $(\forall)\ n \geqslant 0$.

Conform consideraţiilor din paragraful precedent, putem asocia soluţiei $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ un număr caracteristic

$$\mu(x) = \mu_A(x^0) = \limsup_{n\to\infty} \|A^n x_0\|^{1/n} .$$

Prin analogie cu cazul continuu $[B_1]-[B_5]$, mulţimea de num...

reale pozitive

$$\chi_d(A) = \{\mu_A(x^0) \mid x^0 \in X \ , \ x^0 \neq 0\}$$

o vom numi spectrul caracteristic discret al operatorului A sau spectrul caracteristic asociat sistemului discret (A).

Deoarece $\mu_A(x^0) = \limsup_{n\to\infty} \|A^n x_0\|^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \|x_0\|^{1/n} = r_A$ unde r_A este raza spectrală a operatorului A, rezultă că pentru orice $x^0 \in X$, $\mu_A(x^0) \leqslant r_A = \max |\sigma(A)|$.

Dacă x^0 este vector propriu pentru A corespunzător valorii proprii λ, atunci $A^n x^0 = \lambda^n x_0$ şi, în consecinţă,

$$\mu_A(x^0) = \limsup_{n\to\infty} \|\lambda^n x_0\|^{1/n} = |\lambda|$$

Notînd $\sigma_\pi(A)$ mulţimea valorilor proprii ale operatorului A, obţinem

$$|\sigma_\pi(A)| = \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_\pi(A)\} \subset \chi_d(A).$$

<u>PROPOZITIA 2.4.1.</u> Dacă X este finit dimensional atunci $\chi_d(A) = |\sigma(A)|$.

Demonstraţie : Să presupunem că X este m-dimensional şi fie $e_1, e_2, \ldots, e_m$ o bază a sa. Atunci soluţiile $(A^n e_1)_{n \geqslant 0}$, $(A^n e_2)_{n\geqslant 0}, \ldots, (A^n e_m)_{n \geqslant 0}$ reprezintă o bază în spaţiul tuturor soluţiilor sistemului (A). Intr-adevăr

$$C_1(A^n e_1)_{n\geqslant 0} + C_2(A^n e_2)_{n\geqslant 0} + \ldots + C_m(A^n e_m)_{n\geqslant 0} = 0$$

înseamnă

$$(c_1 A^n e_1 + c_2 A^n e_2 + \ldots + c_m A^n e_m)_{n\geqslant 0} = 0$$

deci

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_m e_m = 0$$

astfel că $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

Fie $x^0 \in X$, arbitrar. Atunci $x^0 = \sum_{j=1}^{m} x_j^0 e_j$, astfel că soluţia problemei Cauchy $(A; 0, x^0)$ este

$$x = (A^n x_0)_{n\geqslant 0} = \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^0 A^n e_j\right)_{n\geqslant 0} = \sum_{j=0}^{m} x_j^0 (A^n e_j)_{n\geqslant 0}.$$

[illegible], notînd prin $\mathcal{S}$ spaţiul tuturor soluţiilor sistemului discret (A), rezultă că $(A^n e_j)_{n\geqslant 0}$, $j = 1,2,\dots,m$ este o bază în $\mathcal{S}$ şi, în consecinţă, $\dim \mathcal{S} = m$.

In virtutea Propoziţiei 2.3.9 există o familie finită de numere reale distincte $0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_k \leqslant r_A$ şi o descompunere directă a lui $\mathcal{S}$ în subspaţii

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{S}_k$$

cu proprietatea că orice $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{S}_j$ are numărul caracteristic $\mu(x) = \mu_j$.

Fie $\mathcal{X}_j = \{x_0 \in X \mid (A^n x_0)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{S}_j\}$, $j = 1,2,\dots,k$. Subspaţiul $\mathcal{S}_j$ este invariant la A deoarece, dacă $x_0 \in \mathcal{S}_j$ atunci $\mu(A^n(Ax_0))_{n\geqslant 0} = \mu(A^n x_0)_{n\geqslant 0} = \mu_j$. Restricţia operatorului A la subspaţiul $\mathcal{S}_j$ are cel puţin o valoare proprie λ şi un vector propriu x_j^0. De aici

$$\mu_A(x_j^0) = \mu_j = |\lambda| \in \sigma(A) \quad , \quad j = 0,1,\dots,k$$

deci $\chi_d(A) = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k\} \subset \sigma(A)$.

Cum pe de altă parte pentru orice X avem $|\sigma_\pi(A)| \subset \chi_d(A)$, iar în cazul finit dimensional $\sigma_\pi(A) = \sigma(A)$, rezultă afirmaţia $\chi_d(A) = |\sigma(A)|$.

PROPOZITIA 2.4.2. Dacă operatorul A este inversabil, atunci

$$\min|\sigma(A)| = \frac{1}{r_{A^{-1}}} \leqslant \mu_A(x) \leqslant r_A = \max|\sigma(A)|, \text{ pentru orice } x \in X, x \neq 0.$$

Demonstraţie : Intr-adevăr, pentru orice $x \in X$, $x \neq 0$, avem

$$\|x\| = \|A^{-n}A^n x\| \leqslant \|(A^{-1})^n\| \cdot \|A^n x\|$$

de unde

$$\|A^n x\|^{1/n} \geqslant \frac{1}{\|(A^{-1})^n\|^{1/n}} \|x\|^{1/n}$$

şi afirmaţia rezultă în virtutea Propoziţiei 2.3.4, a definiţiei numărului $\mu_A(x)$ şi a proprietăţilor razei spectrale.

PROPOZITIA 2.4.3. Pentru orice operator $A \in \mathcal{L}(X)$ este adevărată incluziunea $\chi_A(A) \subset |\sigma(A)|$.

Demonstrație : să presupunem că există $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ cu proprietatea $\mu_A(x_0) = 0$. Atunci este clar că $0 \in \sigma(A)$ (în caz contrar am avea $0 < \frac{1}{r_{A^{-1}}} \leqslant \mu_A(x_0) \leqslant r_A$), deci $\mu_A(x_0) \in |\sigma(A)|$; analog dacă $\mu_A(x_0) = r_A$.

Să presupunem deci că $0 < \mu_A(x_0) < r_A$. Dacă nu există $\lambda \in \sigma(A)$ astfel ca $\mu_A(x_0) = |\lambda|$, atunci putem nota

$$\sigma_1 = \{ \lambda \in \sigma(A) \mid |\lambda| < \mu_A(x_0) \}$$
$$\sigma_2 = \{ \lambda \in \sigma(A) \mid |\lambda| > \mu_A(x_0) \}.$$

Deoarece σ_1 și σ_2 sînt mulțimi spectrale și $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ atunci [D_1] spațiul X se descompune în sumă directă $X = X_1 \oplus X_2$, X_1 și X_2 fiind subspații invariante la A și, în plus,

$$\sigma(A|X_1) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < \mu_A(x_0) \}$$
$$\sigma(A|X_2) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \mu_A(x_0) \}.$$

Dacă notăm $A_1 = A/X_1$ și $A_2 = A/X_2$, atunci pentru $x \in X_1$ rezultă

$$\mu_A(x) = \mu_{A_1}(x) \leqslant r_{A_1} < \mu_A(x_0)$$

iar pentru $x \in X_2$

$$\mu_A(x) = \mu_{A_2}(x) > \mu_A(x_0).$$

Deoarece $x_0 = x_1 + x_2$, $x_1 \in X_1$ și $x_2 \in X_2$, atunci : dacă $x_2 \neq 0$, $\mu_A(x_0) = \max(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) = \mu_{A_2}(x_2) > \mu_A(x_0)$; dacă $x_2 = 0$, $\mu_A(x_0) = \mu_{A_1}(x_1) < \mu_A(x_0)$.

Contradicția obținută ne arată că există $\lambda_0 \in \sigma(A)$ cu proprietatea $\mu_A(x_0) = |\lambda_0|$, astfel că $\chi_d(A) \subset |\sigma(A)|$.

Deci pentru un X oarecare avem

$$|\sigma_\pi(A)| \subset \chi_d(A) \subset |\sigma(A)|.$$

Să observăm că dacă există $p \geqslant 1$ astfel încît orice soluție a sistemului $x_{n+1} = Ax_n$, $n \geqslant 0$, aparține spațiului $\ell^p(X)$, atunci $\chi_d(A) \subset [0,1]$.

Intr-adevăr, dacă oricare ar fi $x_0 \in X$, $(A^n x_0)_{n \geq 0} \in \ell^p(X) \subset \ell^\infty(X)$ există $M_{x_0} > 0$ astfel încît $\|A^n x_0\| \leq M_{x_0}$, $(\forall)\ n \geq 0$, pe baza principiului mărginirii uniforme, deducem că există $M > 0$ cu proprietatea $\|A^n\| \leq M$, $(\forall)\ n \geq 0$. De aceea

$$0 \leq \mu_A(x_0) \leq r_A = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} M^{1/n} = 1.$$

Reciproca acestei afirmaţii nu este, în general, adevărată. Pentru a justifica aceasta este suficient să considerăm $X = \mathbb{R}^2$ şi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pe baza Propoziţiei 2.4.1 $\chi_d(A) = |\sigma(A)| = \{1\} \subset [0,1]$. Insă pentru $x_0 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, $\|A^n x_0\| = \|(n,1)\| \longrightarrow \infty$ pentru $n \to \infty$. Astfel soluţia $(A^n x_0)_{n \geq 0} \notin \ell^\infty$ şi, în consecinţă, nu există $p \geq 1$ astfel ca $(A^n x_0)_{n \geq 0} \in \ell^p$.

PROPOZIŢIA 2.4.4. Pentru orice operator $A \in \mathcal{L}(X)$, $r_A \in \chi_d(A)$.

Demonstraţie : Dacă $\mu_A(x) < r_A$ oricare ar fi $x \in X$, atunci pentru fiecare $x \in X$, putem găsi $\varepsilon > 0$ astfel ca $\mu_A(x) < r_A - \varepsilon$, deci există N_ε ca $\|A^n x\| \leq N_\varepsilon (r_A - \varepsilon)^n$, $n \geq 0$.

Deoarece pentru $|\lambda| > r_A$ este adevărată dezvoltarea

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n x$$

obţinem

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{N_\varepsilon}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_A - \varepsilon}{|\lambda|}\right)^n \leq \frac{N_\varepsilon}{\varepsilon}.$$

In concluzie, familia $\{R(\lambda, A)\}_{|\lambda| > r_A}$ este punctual mărginită şi conform principiului mărginirii uniforme există $M > 0$ astfel ca $\|R(\lambda, A)\| \leq M$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| > r_A$, ceea ce contrazice proprietatea cunoscută a operatorului rezolvent

$$\|R(\lambda, A)\| \geq \frac{1}{d(\lambda, \sigma(A))} \longrightarrow \infty$$

pentru λ tinzînd la frontiera spectrului lui A.

Prin urmare, există cel puţin un vector $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ cu proprietatea $\mu_A(x_0) = r_A$.

<u>CONSECINȚA 2.4.5</u>. Mulțimea $M = \{ x \in X \mid \mu_A(x) = r_A \}$ este de categoria a doua.

Demonstrație : In caz contrar, CM este de categoria a doua. Dar $x + CM \subset M$, $(\forall)\, x \in M$ și se ajunge la o contradicție.

<u>LEMA 2.4.6</u>. Fie $A \in \mathcal{L}(X)$ și $\lambda \in \operatorname{Frt} \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$. Atunci pentru orice $\delta > 0$ și orice număr natural n există un vector $x \in X$ cu $\|x\| = 1$ pentru care

$$(1-\delta)|\lambda|^k \leq \|A^k x\| \leq (1+\delta)|\lambda|^k , \quad 0 \leq k \leq n.$$

Demonstrație : Deoarece $\lambda \in \operatorname{Frt} \sigma(A)$, $\inf\limits_{\|x\|=1} \|(A-\lambda I)x\| = 0$, deci, pentru $\delta > 0$ există $x \in X$ cu $\|x\| = 1$ astfel ca

$$\|(A-\lambda I)x\| \leq \frac{\delta}{M} , \qquad M = \max_{0 \leq k \leq n} \Big(\frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=0}^{k-1} \Big\|\frac{A}{\lambda}\Big\|^{k-1-j} \Big).$$

Atunci

$$\|(A^k - \lambda^k I)x\| = \|(A^{k-1} + \lambda A^{k-2} + \dots + \lambda^{k-1})(A-\lambda I)x\| \leq$$

$$\leq |\lambda|^k \Big\| \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=0}^{k-1} \Big(\frac{A}{\lambda}\Big)^{k-1-j} \Big\| \|(A-\lambda I)x\| = |\lambda|^k M \frac{\delta}{M} = \delta |\lambda|^k$$

de unde rezultă că

$$\big| \|A^k x\| - |\lambda|^k \big| \leq \delta |\lambda|^k$$

sau echivalent

$$(1-\delta)|\lambda|^k \leq \|A^k x\| \leq (1+\delta)|\lambda|^k .$$

<u>TEOREMA 2.4.7</u>. Fie $A, B, C \in \mathcal{L}(X)$ cu proprietatea $r_A \cdot r_B < 1$. Atunci ecuația operatorială

$$A X B = X + C$$

admite soluție unică $X = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n C B^n$.

Demonstrație : $\limsup\limits_{n\to\infty} \|A^n C B^n\|^{1/n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \|C\|^{1/n} \|B^n\|^{1/n} \leq$ $\leq r_A \cdot r_B < 1$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n C B^n$ este convergentă în norma operatorilor.

Dacă $X_C = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n C B^n$, atunci

$$A X_C B = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} C B^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} A^n C B^n + C = X_C + C .$$

Presupunînd că ecuația operatorială ar admite două soluții

X_1 şi X_2, atunci am avea

$$A(X_2 - X_1)B = X_2 - X_1$$

şi notînd $\overline{X} = X_2 - X_1$ rezultă $A\overline{X}B = \overline{X}$. Ca şi mai sus seria $\sum_{n=0}^{\infty} A^n\overline{X}B^n$ este convergentă, dar egalitatea precedentă arată că $A^n\overline{X}B^n = \overline{X}$ pentru orice n. Pe de altă parte seria $\overline{X} + \overline{X} + \ldots + \overline{X} + \ldots$ este convergentă dacă şi numai dacă $\overline{X} = 0$, adică $X_1 = X_2$.

<u>CONSECINŢA 2.4.8.</u> Ecuaţiile

$$AX - X = C \quad , \quad r_A < 1$$

$$XB - X = C \quad , \quad r_B < 1$$

admit soluţie unică

$$X = -\sum_{n=0}^{\infty} A^n C \quad \text{şi respectiv} \quad X = -\sum_{n=0}^{\infty} CB^n .$$

<u>CONSECINŢA 2.4.9.</u> Dacă $r_A < 1$ atunci ecuaţia

$$A^* XA = X + C$$

admite soluţia unică $X = -\sum_{n=0}^{\infty} (A^*)^n C A^n$

<u>LEMA 2.4.10.</u> Fie $A \in \mathcal{L}(X)$ cu $r_A < 1$. Atunci pentru $1 \leqslant p < \infty$ relaţia

$$\|x\|_{A,p}^p = \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n x\|^p \ , \quad x \in X$$

defineşte o normă pe X, echivalentă cu norma iniţială.

Demonstraţie : Fie $r_A < a < 1$. Atunci putem determina $M = M_a >$ astfel încît $\|A^n\| \leqslant Ma^n$ şi de aceea

$$\|x\|^p \leqslant \|x\|_{A,p}^p = \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n x\|^p \leqslant M\|x\|^p \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{M}{1-a} \|x\|^p .$$

Să observăm că dacă X este un spaţiu Hilbert atunci

$$\|x\|_{A,2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n x\|^2$$

este o normă hilbertiană pe X, generată de produsul scalar

$$\langle x, x \rangle_A = \sum_{n=0}^{\infty} \langle A^n x, A^n x \rangle .$$

<u>TEOREMA 2.4.11.</u> (de localizare a spectrului) [T12]. Fie $A \in \mathcal{L}$. Pentru ca

$$\|A^n\| \leqslant Ma^n \quad , \quad n \geqslant 0$$

este necesar ca $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant a\}$ şi suficient ca $\sigma(A) \subset$

$\subset \{\lambda\in\mathbb{C} \mid |\lambda|<a\}$.

Demonstrație : Presupunem că $\|A^n\| \leq Na^n$, $(\forall)\ n \geq 0$ și fie $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > a$. Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}A^n$ este absolut convergentă.

Deoarece

$$(\lambda I-A)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}A^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}A^n\right)(\lambda I-A) = \lim_{n\to\infty}(I-\lambda^{-n-1}A^{n+1}) = I$$

obținem că $\lambda \in \rho(A)$ și deci $\sigma(A) \subset \{\lambda\in\mathbb{C} \mid |\lambda| \leq a\}$.

Reciproc, dacă vom presupune că $\sigma(A) \subset \{\lambda\in\mathbb{C} \mid |\lambda| < a\}$ atunci raza spectrală a operatorului A verifică

$$r_A = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| < a.$$

Pe de altă parte, deoarece $r_A = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} < a$, înseamnă că există $N_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru $n \geq N_0$ să fie satisfăcută inegalitatea $\|A^n\| < a^n$. Notînd

$$\frac{\|A^n\|^{1/n}}{a} = N_n^{1/n}, \quad 0 \leq n \leq N_0 \quad \text{și} \quad N = \max_{0\leq n\leq N_0} N_n$$

obținem

$$\|A^n\| \leq Na^n, \quad (\forall)\ n \geq 0.$$

Rezultatul următor reprezintă analogul discret al teoremei lui Liapunov.

TEOREMA 2.4.12. Fie X un spațiu Hilbert și $A \in \mathcal{L}(X)$. Următoarele afirmații sînt echivalente :

i) $r_A < 1$;

ii) există un operator uniform pozitiv W cu proprietatea că $A^*WA - W$ este uniform negativ.

Demonstrație : (i)$\Longrightarrow$(ii). Fie $r_A < 1$. Dacă $H \gg 0$ atunci ecuația

$$A^*WA - W = -H$$

are, conform Consecinței 2.4.5, soluție unică dată de

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}HA^n.$$

Rămîne să arătăm că $W \gg 0$.

$$\langle Wx,x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle A^{*n}HA^{n}x,x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle HA^{n}x,A^{n}x\rangle \geqslant$$

$$\geqslant m(H)\sum_{n=0}^{\infty}\|A^{n}x\|^{2} = m(H)\|x\|^{2}_{A,2} \geqslant m(H)\|x\|^{2}$$

unde

$$0 < m(H) = \inf_{\|x\|=1} \langle Hx,x\rangle .$$

(ii)$\Longrightarrow$(i) Dacă W este uniform pozitiv şi $A^{*}WA - W$ este uniform negativ putem nota $-H = A^{*}WA - W$ de unde rezultă $H \gg 0$. De asemenea avem

$$m(H)\|x\|^{2} \leqslant \|x\|^{2}_{W} = \langle Wx,x\rangle \leqslant \|W\|\cdot\|x\|^{2}$$

de unde $\|x\|_{W}$ este o normă echivalentă cu cea iniţială.

Să notăm prin $\varphi(n) = \|A^{n}x\|^{2}_{W} \leqslant \|W\|\cdot\|A^{n}x\|^{2}$.

Atunci

$$\varphi(n+1)-\varphi(n) = \langle WA^{n+1}x, A^{n+1}x\rangle - \langle WA^{n}x,A^{n}x\rangle =$$

$$= \langle A^{*}WA\ A^{n}x,A^{n}x\rangle - \langle WA^{n}x,A^{n}x\rangle = \langle (A^{*}WA-W)A^{n}x,A^{n}x\rangle \leqslant$$

$$\leqslant -m(H)\|A^{n}x\|^{2} \leqslant -\frac{m(H)}{\|W\|}\|A^{n}x\|_{W}$$

de unde rezultă

$$\varphi(n+1) \leqslant \left(1 - \frac{m(H)}{\|W\|}\right)\varphi(n) \quad , \quad (\forall)\ n \geqslant 0.$$

Dar

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}HA^{n} \quad \text{de unde rezultă}$$

$$\langle Wx,x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle HA^{n}x,A^{n}x\rangle \geqslant m(H)\sum_{n=0}^{\infty}\|A^{n}x\|^{2}$$

deci $\|W\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Wx,x\rangle > m(H)$ (deoarece există cel puţin un vector $x \in X$, cu $\|x\| = 1$ şi $\|Ax\|^{2} > 0$).

Revenind la inegalitatea obţinută pentru φ , scrisă

$$\|A^{n+1}x\|_{W} \leqslant a\,\|A^{n}x\|_{W}\ ,\ (\forall)\ n \geqslant 0, \quad \text{unde} \quad 0 < a = \left(1-\frac{m(H)}{\|W\|}\right) < 1$$

rezultă

$$\|A^{n}x\|_{W} \leqslant a^{n}\|x\|_{W} \leqslant a^{n}\|W\|\cdot\|x\|$$

sau

$$m(W)\|A^{n}x\| \leqslant \|W\|\cdot\|x\|\cdot a^{n}$$

de unde

$$\|A^{n}x\| \leqslant \left(\frac{\|W\|}{m(W)}a^{n}\right)\|x\| \quad , \quad (\forall)\ n \geqslant 0\ ,\ (\forall)\ x \in X .$$

In concluzie

$$\|A^n\| \leqslant \frac{\|W\|}{m(W)} a^n = Na^n \ , \quad (\forall)\ n \geqslant 0 \ , \ a < 1$$

și conform teoremei de localizare a spectrului

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant a\}$$

de unde $r_A \leqslant a < 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

2.5. COMPORTĂRI ASIMPTOTICE NEUNIFORME PENTRU SISTEME LINIARE DISCRETE.

După cum s-a văzut în paragrafele 3-4 ale acestui capitol, numărul caracteristic asociat unui șir din $s(X)$ și, în particular, unei soluții a unui sistem discret furnizează informații cu privire la comportarea asimptotică a șirului, prin comparație cu șiruri de puteri de forma $(a^n)_{n \geqslant 0}$, $a > 0$.

Este clar din Definiția 2.3.1 că dacă numărul caracteristic al unei soluții $(x_n)_{n \geqslant 0}$ este subunitar, atunci există $a \in (0,1)$ și $N > 0$ astfel ca $\|x_n\| \leqslant Na^n$ și, în consecință, $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = 0$.

Prin analogie cu cazul continuu vom spune că sistemul

$$(\widetilde{A}) \qquad x_{n+1} = A_n x_n \quad , \quad n \geqslant 0$$

este exponențial stabil dacă există $a \in (0,1)$ și $N > 0$ astfel încît

$$\|\Phi(n,k)\| \leqslant Na^{n-k} \quad , \quad (\forall)\ n \geqslant k \geqslant 0.$$

Folosind Definiția 2.3.10, se observă că sistemul $(\widetilde{A})$ este exponențial stabil dacă și numai dacă indicele special μ^* al acestui sistem este strict subunitar.

Principalele noțiuni de stabilitate pentru sistemele discrete (definite în mod natural prin analogie cu cazul sistemelor continue), precum și conexiunile dintre aceste concepte sînt studiate în $[H_1]$.

Reamintim $[H_1]$ că sistemul $(\widetilde{A})$ satisface condiția lui Perron dacă pentru orice șir $(f_n)_{n \geqslant 0} \in \ell^\infty(X)$ soluția cu condiții inițiale nule, a sistemului $(\widetilde{A},f)$ $x_{n+1} = A_n x_n + f_n$ face parte din ℓ^∞, Prin analogie cu cazul continuu Ta Li $[T_3]$ arată că şi în cazul sistemelor discrete condiţia lui Perron este echivalentă pentru $(A_n)_{n\geq 0} \in \ell^{\infty}(\mathcal{L}(X))$ cu stabilitatea exponenţială a soluţiei nule pentru sistemul omogen $(\tilde{A})$.

Comportările asimptotice descrise mai sus sînt comportări uniforme (în raport cu k) după cum se constată din evaluarea $\|\Phi(n,k)\| \leq Na^{n-k}$, $(\forall)\ n \geq k \geq 0$.

O generalizare a condiţiei lui Perron, pentru cazul continuu, care conduce la evaluări de tip neuniform (în raport cu k) pentru $\|\Phi(n,k)\|$, se găseşte în $[R_3]$. In cele ce urmează vom prezenta o variantă discretă a generalizării date de M.Reghiş.

Fie $a > 0$ şi să definim spaţiile normate :

$$\ell_a^p(X) = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 0} \in s(X) \;\middle|\; \|x\|^p_{(p,a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|a^n x_n\|^p < \infty \right\},\quad 1 \leq p < \infty$$

$$\ell_a^{\infty}(X) = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 0} \in s(X) \;\middle|\; \|x\|_{(\infty,a)} = \sup_{n\geq 0} \|a^n x_n\| < \infty \right\}.$$

Ca şi în cazul continuu $[R_3]$, se poate verifica uşor că $\ell_a^p(X)$ este spaţiu Banach, oricare ar fi $a > 0$ şi $1 \leq p \leq \infty$ ($\Omega_a : \ell^p(X) \longrightarrow \ell_a^p(X)$ definit prin $\Omega_a x = (a^{-n} x_n)_{n\geq 0}$, $(\forall)\ x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p(X)$, este un izomorfism izometric între spaţiul Banach $\ell^p(X)$ şi spaţiul normat $\ell_a^p(X)$).

Dacă $\Phi(n,k)$ este operatorul de evoluţie generat de şirul $(A_n)_{n\geq 0} \in \ell^{\infty}(\mathcal{L}(X))$, atunci putem defini şirul de operatori liniari $(V_n)_{n\geq 0}$, unde $V_n : s(X) \longrightarrow X$ este definit prin

$$V_n x = \sum_{k=0}^{n} \Phi(n,k) x_k \ , \quad (\forall)\ x = (x_n)_{n\geq 0} \in s(X).$$

<u>PROPOZIŢIA 2.5.1</u>. Dacă pentru fiecare $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell_a^p(X)$ şirul $(V_n x)_{n\geq 0} \in \ell_b^{\infty}(X)$, atunci operatorul $V : \ell_a^p(X) \longrightarrow \ell_b^{\infty}(X)$ definit prin $Vx = (V_n x)_{n\geq 0}$ este un operator liniar şi mărginit.

Demonstraţie : Pentru fiecare $n \geq 0$, restricţia operatorului

V_n la spaţiul Banach $\ell_a^p(X)$ este operator liniar şi continuu. Deoarece, conform ipotezei, pentru fiecare $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell_a^p(X)$ şirul $(V_n x)_{n \geq 0} \in \ell_b^\infty(X)$, rezultă că $\sup_{n \geq 0} \|b^n V_n x\| < \infty$ şi în consecinţă familia $\{b^n V_n\}_{n \geq 0}$ de operatori liniari şi mărginiţi de la $\ell_a^p(X)$ în X este punctual mărginită. Utilizînd principiul mărginirii uniforme, deducem că există $M > 0$ astfel încît

$$\sup_{n \geq 0} \|b^n V_n\| \leq M$$

şi, în consecinţă, pentru fiecare $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell_a^p(X)$

$$\|b^n V_n x\| \leq M \, \|x\|_{(p,a)}$$

astfel că

$$\sup_{n \geq 0} \|b^n V_n x\| = \|Vx\|_{(\infty,b)} \leq M \, \|x\|_{(p,a)}$$

de unde rezultă afirmaţia.

<u>CONSECINTA 2.5.2</u>. Dacă pentru fiecare $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell_a^p(X)$ şirul $(V_n x)_{n \geq 0} \in \ell_b^\infty(X)$ atunci are loc evaluarea

$$b^n \left\| \sum_{k=0}^{n} \Phi(n,k) x_k \right\| \leq M \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n x_n\|^p \right)^{1/p}$$

pentru orice $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell_a^p(X)$.

Demonstraţie : Rezultă imediat explicitînd evaluarea

$$\|Vx\|_{(\infty,b)} \leq M \, \|x\|_{(p,a)}.$$

Propoziţia care urmează reprezintă analogul discret pentru generalizarea dată de M.Reghiş [ ] teoremei lui Perron.

<u>TEOREMA 2.5.3</u>. Dacă există $p \in [1,\infty]$ cu proprietatea că pentru orice şir $(f_n)_{n \geq 0} \in \ell_a^p(X)$, soluţia cu condiţii iniţiale nule a sistemului discret

$$x_{n+1} = A_n x_n + f_n \quad , \quad n \geq 0$$

aparţine spaţiului $\ell_b^p(X)$, atunci există $M > 0$ astfel încît

$$\|\Phi(n,k)\| \leq M a^{k-1_0-n} \quad , \quad (\forall) \quad n \geq k \geq 0.$$

Demonstraţie : Deoarece soluţia cu condiţii iniţiale nule se scrie

$$x_n = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n,j+1)f_j$$

şi $(x_n)_{n\geq 0} \in \ell_b^p(X) \subset \ell_b^{\infty}(X)$ pentru fiecare $(f_n)_{n\geq 0} \in \ell_a^p(X)$, pe baza raţionamentelor din propoziţia precedentă rezultă că

$$b^n \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n,j+1)f_j \right\| \leq M \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n f_n\|^p \right)^{1/p}.$$

Fie acum f un element arbitrar al spaţiului X. Dacă definim

$$f_j = \begin{cases} f & j = k-1 \\ 0 & j \neq k-1 \end{cases}$$

atunci $(f_j)_{j\geq 0} \in \ell_a^p(X)$, iar inegalitatea precedentă devine

$$b^n \|\Phi(n,k)f\| \leq M \|a^{k-1}f\| = Ma^{k-1} \|f\| , \quad (\forall)\ f \in X,$$

şi, în concluzie,

$$\|\Phi(n,k)\| \leq Ma^{k-1}b^{-n}.$$

CAPITOLUL III.

SISTEME LINIARE CU CONTROL.

Noţiunile şi conceptele de bază din teoria sistemelor liniare cu control îşi au originea în lucrările lui R.E.Kalman [K_1], [K_2], iar apariţia şi dezvoltarea acestora este strîns legată de teoria conducerii optimale a sistemelor dinamice.

Conceptul de controlabilitate (exactă) pentru sisteme finit dimensionale a fost introdus [illegible] [illegible]. [illegible] noţiunea de ε-controlabilitate apare pentru prima oară în lucrarea lui H.A. Antosiewicz [A_1]. H.O.Fattorini introduce, pentru studiul sistemelor liniare cu control infinit dimensionale, noţiunea de controlabilitate aproximativă, care coincide în cazul sistemelor liniare finit dimensionale cu noţiunea de controlabilitate exactă. Studii sistematice în domeniul controlabilităţii sistemelor liniare infinit dimensionale şi în domenii conexe cu acesta au fost efectuate de H.O.Fattorini [F_1]-[F_2], [illegible] [T_1], [T_2], [illegible] [B_9], [B_{10}], R.F.Curtain şi A.J.Pritchard [C_5], etc. In acelaşi context se înscriu şi rezultatele seminarului condus de prof.dr. M. Reghiş la Universitatea din Timişoara [illegible]-[illegible], [illegible]-[illegible], [illegible]-[R_8].

Conţinutul acestui capitol este bazat în întregime pe rezultatele obţinute în lucrările [illegible], [illegible], [illegible], [T_{13}], [illegible] în curs de publicare, sau comunicate la diverse manifestări ştiinţifice cu caracter naţional. Astfel, în paragraful 3.1 sînt extinse, la cadrul mai general al sistemelor de urmărire infinit dimensionale, noţiunile de ε-controlabilitate, controlabilitate exactă şi aproximativă şi sînt date o serie de caracterizări operatoriale ale conceptelor amintite.

Paragraful 3.2 este destinat examinării sistemelor liniare cu control obţinute aici, prin particularizarea noţiunii de sistem liniar de urmărire. Sînt prezentate de asemenea cîteva extensii la cazul infinit dimensional ale unor caracterizări ale controlabilităţii prin intermediul noţiunii de valoare spectrală controlabilă introdusă în cazul finit dimensional de M.J.L.Hautus [H_3] , sau prin utilizarea proprietăţilor rezolventei, extinzînd un rezultat similar din anexa A a monografiei lui V.M.Popov [P_2].

In paragraful 3.3, utilizînd ideile lui S.Dolecki [D_2] din cazul sistemelor liniare continue, sînt definite 15 concepte de controlabilitate care pot apare în teoria controlabilităţii sistemelor liniare discrete şi sînt prezentate diagrame care stabilesc principalele conexiuni între aceste concepte. Sînt prezentate de asemenea caracterizări ale unora din conceptele introduse şi sînt construite exemple pe diverse spaţii concrete care completează diagrama de conexiuni, arătînd că anumite implicaţii nu pot fi, în general, adevărate. Diagrama prezentată în final aduce noi clarificări în studiul conexiunilor dintre conceptele de controlabilitate introduse, fiind mult îmbunătăţită în comparaţie cu cea prezentată în lucrarea lui S.Dolecki [D_2] pentru cazul sistemelor cu timp continuu.

3.1. SISTEME DE URMĂRIRE.

Fie X, U_1, U_2 spaţii Banach şi $J = [t_0, T] \subset R_+$. In cele ce urmează $X \times X$ va fi numit spaţiul stărilor, iar elementele sale vor fi numite stări ; oricărui triplet $(t, x_1, x_2) \in J \times X \times X$ îi vom zice fază. De asemenea, U_1 şi U_2 vor fi numite spaţii de control ; mai precis, U_1 va fi numit spaţiul de control al urmăritorului, iar U_2 spaţiul de control al urmăritului. Vom mai considera funcţiile operatoriale

$$A_i(.) \in L^1(J, \mathcal{L}(X)) , \quad i = 1,2$$

numite operatori de stare, sau operatori principali şi

$B_i(\cdot) \in L^p(J, \mathcal{L}(U_i, X))$, $i = 1,2$, $1 \leqslant p < \infty$

e operatori de control ($B_1(\cdot)$ al urmăritorului, $B_2(\cdot)$ al itului). Spațiile $L^q(J,U_i)$, $i = 1,2$ și $1/p + 1/q = 1$, vor mite spații ale funcțiilor de control și orice element al unui el de spațiu va fi numit funcție de control admisibilă, sau pur mplu control (pentru urmăritor dacă $i = 1$ și pentru urmărit $i = 2$).

Dacă $u_i(\cdot) \in L^q(J,U_i)$, $i = 1,2$, sînt fixate, vom nota $(t_0, x_{i0}, u_i(\cdot))$, sau pe scurt $x_i(t)$, unica soluție a problemei hy

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i(t)x_i + B_i(t)u_i(t) \\ x_i(t_0) = x_{i0} \end{cases} \qquad i = 1,2.$$

Vom nota, de asemenea, prin $(A_1,A_2;B_1,B_2)$ sistemul

$$(A_1,A_2;\ B_1,B_2) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1(t)x_1 + B_1(t)u_1(t) \\ \dot{x}_2 = A_2(t)x_2 + B_2(t)u_2(t) \end{cases}$$

va fi numit sistem cu control de urmărire.

<u>DEFINIȚIA 3.1.1</u>. Faza inițială (t_0,x_{10},x_{20}) (sau starea inițială (x_{10},x_{20})) se zice ε-controlabilă pe J dacă pentru orice control $u_2(\cdot) \in L^q(J,U_2)$ există un control $u_1(\cdot) \in L^q(J,U_1)$ astfel ca $\|x_1(T) - x_2(T)\| \leqslant \varepsilon$

<u>DEFINIȚIA 3.1.2</u>. Vom spune că faza inițială (t_0,x_{10},x_{20}) (sau starea inițială (x_{10},x_{20})) este :

i) complet controlabilă (aproximativ) pe J dacă este ε-controlabilă pe J pentru orice $\varepsilon > 0$;

ii) exact controlabilă pe J dacă este 0-controlabilă pe J.

<u>DEFINIȚIA 3.1.3</u>. Vom spune că sistemul cu control de urmărire $(A_1,A_2;B_1,B_2)$ este ε-controlabil, complet controlabil (aproximativ) sau exact controlabil pe J, dacă orice fază inițială $(t_0,x_{10},x_{20}) \in J \times X \times X$ (sau orice stare inițială $(x_{10},x_{20}) \in X \times X$) proprietatea respectivă.

OBSERVAŢIA 3.1.4. Fie $A(.)\in L^1(J,\mathcal{L}(X))$ şi $B_i(.),u_i(.)$, $i = 1,2$, ca mai sus. Atunci putem considera sistemul

$$(A,B_1,B_2)\quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B_1(t)u_1(t) + B_2(t)u_2(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

In acest caz spaţiul X este numit spaţiul stărilor, elementele sale sînt numite stări, iar perechile $(t,x)\in J\times X$ sînt numite faze. Definiţii similare cu 3.1.1.- 3.1.3 pot fi introduse şi în cazul sistemului (A,B_1,B_2) înlocuind faza (t_0,x_{10},x_{20}) sau starea (x_{10},x_{20}) prin faza (t_0,x_0), respectiv starea x_0 şi diferenţa $x_1(T)-x_2(T)$ prin $x(T)$.

OBSERVAŢIA 3.1.5. Fie $\Phi_i(.,.)$ operatorul de evoluţie asociat funcţiei operatoriale $A_i(.)$, $i = 1,2$. Dacă notăm

$$z(t) = \Phi_1(T,t)x_1(t) - \Phi_2(T,t)x_2(t)$$

atunci vom avea

$$\dot{z}(t) = -\Phi_1(T,t)A_1(t)x_1(t) + \Phi_1(T,t)[A_1(t)x_1(t)+B_1(t)u_1(t)] + \Phi_2(T,t)A_2(t)x_2(t) - \Phi_2(T,t)[A_2(t)x_2(t)+B_2(t)u_2(t)]$$

sau

$$\dot{z}(t) = \Phi_1(T,t)B_1(t)u_1(t) - \Phi_2(T,t)B_2(t)u_2(t).$$

Deoarece $z(T) = x_1(T) - x_2(T)$, rezultă uşor $[H_3]$, $[H_4]$ că ε- controlabilitatea (complet sau exact controlabilitatea) sistemului $(A_1,A_2;B_1,B_2)$ este echivalentă cu ε-controlabilitatea (respectiv complet sau exact controlabilitatea) sistemului

$$(0;\ \widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2)\quad \dot{z} = \widetilde{B}_1(t)u_1(t) + \widetilde{B}_2(t)u_2(t)$$

unde

$$\widetilde{B}_i(t) = \Phi_i(T,t)B_i(t) \qquad i = 1,2.$$

In mod analog, dacă $\Phi(.,.)$ este operatorul de evoluţie asociat funcţiei operatoriale $A(.)\in L^1(J,\mathcal{L}(X))$ şi notăm prin $z(t) = \Phi(T,t)x(t)$, atunci sistemul $(A;B_1,B_2)$ se va transforma într-un sistem de forma

$$(0;\widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2)\qquad \dot{z} = \widetilde{B}_1(t)u_1(t) + \widetilde{B}_2(t)u_2(t)$$

unde

$$\tilde{B}_i(t) = \Phi_1(T,t)B_i(t) \qquad i = 1,2,$$

iar controlabilitatea sistemului inițial $(A;B_1,B_2)$ este echivalentă cu controlabilitatea noului sistem $(0;\tilde{B}_1,\tilde{B}_2)$.

Este astfel justificat ca în cele ce urmează să considerăm numai sisteme de forma $(0;B_1,B_2)$ care vor fi notate prin

$$(B_1,B_2) \qquad \dot{x} = B_1(t)u_1(t) + B_2(t)u_2(t).$$

Vom introduce în continuare operatorii

$$C_i : L^q(J,U_i) \longrightarrow X$$

definiți prin

$$C_iu_i(\cdot) = \int_{t_0}^{T} B_i(t)u_i(t)dt$$

care vor fi numiți operatori de controlabilitate asociați sistemului (B_1,B_2).

Presupunînd că X,U_1,U_2 sînt spații Hilbert și $p = 2$ rezultă că $L^2(J,U_i)$ este de asemenea spațiu Hilbert cu produsul scalar

$$\langle u(\cdot),v(\cdot)\rangle_{L^2(J,U_i)} = \int_{t_0}^{T} \langle u(t),v(t)\rangle_{U_i} dt \quad , \quad i = 1,2.$$

Din egalitățile

$$\langle C_iu_i(\cdot),x\rangle_X = \langle \int_{t_0}^{T} B_i(t)u_i(t), x \rangle_X =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle u_i(t),B_i^*(t)x\rangle_{U_i} dt = \langle u_i(\cdot),C_i^*x\rangle_{L^2(J,U_i)} \quad , \quad i = 1,2$$

rezultă că adjunctul operatorului C_i este definit prin

$$C_i^*x = B_i^*(\cdot)x \in L^2(J,U_i) \quad , \quad (\forall)\ x \in X \ , \ i = 1,2.$$

Notînd prin $W_i = C_i\, C_i^*$, putem scrie

$$W_ix = C_i\, C_i^*x = \int_{t_0}^{T} B_i(t)B_i^*(t)x\, dt \quad , \quad i = 1,2.$$

TEOREMA 3.1.5. Următoarele afirmații sînt echivalente :

a) faza (t_0,x_0) este complet controlabilă (aproximativ)

b) $x_0 + \overline{\mathcal{R}(C_2)} \subset \overline{\mathcal{R}(C_1)}$;

c) $x_0 + \overline{\mathcal{R}(W_2)} \subset \overline{\mathcal{R}(W_1)}$;

d) $x_0 \in \overline{\mathcal{R}(W_1)}$ şi $\overline{\mathcal{R}(W_2)} \subset \mathcal{R}(W_1)$.

Demonstraţie : a)$\Longrightarrow$b). Să presupunem că faza (t_0, x_0) este complet controlabilă (aproximativ) pe J, adică pentru orice $\varepsilon >$ şi orice control $u_2(\cdot) \in L^2(J, U_2)$ putem găsi un control $-u_1(\cdot) \in L^2(J, U_1)$ astfel ca

$$\|x(T)\| = \|x_0 - \int_{t_0}^{T} B_1(t)u_1(t)dt + \int_{t_0}^{T} B_2(t)u_2(t)dt\| \leq \varepsilon$$

Altfel spus, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ şi pentru fiecare element $x_2 \in \mathcal{R}(C_2)$, există un element $x_1 \in \mathcal{R}(C_1)$ cu proprietatea

$$\|x_0 + x_2 - x_1\| \leq \varepsilon$$

de unde

$$x_0 + \overline{\mathcal{R}(C_2)} \subset \mathcal{R}(C_1)$$

astfel că

$$x_0 + \overline{\mathcal{R}(C_2)} \subset \overline{\mathcal{R}(C_1)}.$$

b)$\Longrightarrow$c). Presupunem că $x_0 + \overline{\mathcal{R}(C_2)} \subset \overline{\mathcal{R}(C_1)}$. Rezultă că oricare ar fi $u_2(\cdot) \in L^2(J, U_2)$, $x_0 + C_2u_2(\cdot) \in \overline{\mathcal{R}(C_1)}$. Deci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $-u_1(\cdot) \in L^2(J, U_1)$ astfel ca

$$\|x_0 + C_2u_2(\cdot) - C_1(-u_1(\cdot))\| \leq \varepsilon$$

adică

$$\|x(T)\| = \|x_0 + \int_{t_0}^{T} B_1(t)u_1(t)dt + \int_{t_0}^{T} B_2(t)u_2(t)dt\| \leq \varepsilon$$

şi, în concluzie, faza (t_0, x_0) este complet controlabilă (aproximativ) pe intervalul J.

Deoarece pentru orice operator liniar şi mărginit C între două spaţii Hilbert U şi X are loc, conform Consecinţei 1.1. egalitatea $\overline{\mathcal{R}(C)} = \overline{\mathcal{R}(CC^*)}$, echivalenţele b)$\Longleftrightarrow$c)$\Longleftrightarrow$d) rezultă ţinînd cont de definiţia operatorilor W_i.

OBSERVAŢIA 2.1.7. Dacă în teorema 2.1.6 se înlocuieşte "complet controlabilă (aproximativ)" cu expresia "ε-controlabilă" atunci celelalte afirmaţii trebuie înlocuite prin

b) $x_0 + \mathcal{R}(C_2) \subset \mathcal{R}(C_1) + \varepsilon$;

c) $x_0 + \mathcal{R}(W_2) \subset \mathcal{R}(W_1) + \mathcal{E}$;

d) $x_0 \in \mathcal{R}(W_1) + \mathcal{E}$ şi $\mathcal{R}(W_2) \subset \mathcal{R}(W_1) + \mathcal{E}$.

<u>CONSECINTA 3.1.8.</u> Următoarele afirmaţii sînt echivalente :

a) faza (t_0, x_0) este exact controlabilă pe J ;

b) $x_0 + \mathcal{R}(C_2) \subset \mathcal{R}(C_1)$;

c) $x_0 + \mathcal{R}(W_2) \subset \mathcal{R}(W_1)$;

d) $x_0 \in \mathcal{R}(W_1)$ şi $\mathcal{R}(W_2) \subset \mathcal{R}(W_1)$.

<u>CONSECINTA 3.1.9.</u> Mulţimea tuturor stărilor complet controlabile (aproximativ) pe J este un subspaţiu liniar în X.

Demonstraţie : Dacă notăm $\mathcal{K}(T)$ mulţimea stărilor ... controlabile (aproximativ) pe J, atunci

$$\mathcal{K}(T) = \left\{ x \in X \,\middle|\, x + \overline{\mathcal{R}(C_2)} \subset \overline{\mathcal{R}(C_1)} \right\}$$

Fie $x_1, x_2 \in \mathcal{K}(T)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \overline{\mathcal{R}(C_2)} \subset \overline{\mathcal{R}(C_1)}$$

deoarece $\overline{\mathcal{R}(C_2)}$ şi $\overline{\mathcal{R}(C_1)}$ sînt subspaţii liniare în X.

<u>CONSECINTA 3.1.10.</u> Dacă $J = [0,\infty)$ şi $\mathcal{K} = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{K}(T)$, atunci $\mathcal{K}$ este un subspaţiu liniar în X.

Demonstraţie : Fie $x', x'' \in \mathcal{K}$ şi $T', T'' \in J$ astfel ca $x' \in \mathcal{K}(T')$ şi $x'' \in \mathcal{K}(T'')$. Atunci, conform Teoremei 3.1. , ... d), avem

$$x' \in \overline{\mathcal{R}(W_1(T'))} \quad \text{şi} \quad \overline{\mathcal{R}(W_2(T'))} \subset \overline{\mathcal{R}(W_1(T'))}$$

$$x'' \in \overline{\mathcal{R}(W_1(T''))} \quad \text{şi} \quad \overline{\mathcal{R}(W_2(T''))} \subset \overline{\mathcal{R}(W_1(T''))}.$$

Să presupunem, pentru a face o alegere, că $T' < T''$.

Deoarece $x \in \mathcal{R}(C(T'))$ înseamnă că există $u(.) \in L^2(J,U)$, astfel încît

$$x = \int_0^{T'} B(t)u(t)dt = \int_0^{T''} B(t)\tilde{u}(t)dt$$

unde

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [0,T'] \\ 0 & t \in (T',T''] \end{cases}$$

Rezultă că $\mathcal{R}(C(T')) \subset \mathcal{R}(C(T''))$, ...

$$\overline{\mathcal{R}(W_i(T''))} \subset \overline{\mathcal{R}(W_i(T'''))}, \qquad i = 1,2.$$

Prin urmare, $x', x'' \in \overline{\mathcal{R}(W_1(T''))}$, de unde pentru orice numere $\alpha, \beta \in K$ obținem

$$\alpha x' + \beta x'' \in \overline{\mathcal{R}(W_1(T''))} \quad \text{și} \quad \overline{\mathcal{R}(W_2(T''))} \subset \overline{\mathcal{R}(W_1(T'))}$$

adică

$$\alpha x' + \beta x'' \in \mathcal{X}(T'') \subset \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{X}(T).$$

<u>OBSERVAȚIA 3.1.11</u>. Din demonstrația precedentă rezultă că familia de mulțimi $\{\mathcal{X}(T)\}_{T \geq 0}$ este total ordonată relativ la relația de incluziune.

Dacă în particular funcțiile operatoriale $A_i(t) = A_i$, $B_i(t) = B_i$, $i = 1,2$, adică sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \end{cases}$$

este invariant în timp (sau cu coeficienți constanți) atunci

$$\Phi_i(t,s) = e^{(t-s)A_i}, \quad i = 1,2, \quad t,s \in J$$

astfel că prin schimbarea

$$z(t) = e^{(T-t)A_1} x_1(t) + e^{(T-t)A_2} x_2(t)$$

obținem

$$\dot{z}(t) = \widetilde{B}_1(t) u_1(t) + \widetilde{B}_2 u_2(t)$$

unde

$$\widetilde{B}_i(t) = e^{(T-t)A_i} B_i, \quad i = 1,2.$$

Deoarece

$$W_i = \int_{t_0}^{T} \widetilde{B}_i(t) \widetilde{B}_i^*(t)\, dt, \quad i = 1,2$$

rezultă că

$$W_i = \int_{t_0}^{T} e^{(T-t)A_i} B_i B_i^* e^{(T-t)A_i^*}\, dt, \quad i = 1,2.$$

<u>TEOREMA 3.1.12</u>. Fie $A_i(t) = A_i$, $B_i(t) = B_i$, $i = 1,2$.

$$\overline{\mathcal{R}}_{\infty}(W_i) = \bigvee_{n=0}^{\infty} A_i^n B_i U_i, \quad i = 1,2,$$

unde prin $\bigvee_{n=0} M_n$ am notat subspațiul liniar închis generat de mulțimile $M_n \subset X$.

Demonstrație : Fie $i = 1$ sau $i = 2$ fixat și $x \in \mathcal{N}(W_i)$.

Atunci putem scrie

$$0 = \langle W_i x, x \rangle = \langle \int_{t_0}^{T} e^{(T-t)A_i} B_i B_i^* e^{(T-t)A_i^*} x \, dt, x \rangle =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \| B_i^* e^{(T-t)A_i^*} x \|^2 \, dt$$

de unde rezultă că

$$B_i^* e^{(T-t)A_i^*} x = 0 \quad , \quad (\forall)\ t \in [t_0, T]$$

sau

$$B_i^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T-t)^n (A_i^*)^n}{n!} x = 0 \quad , \quad (\forall)\ t \in [t_0, T]$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T-t)^n}{n!} B_i^* (A_i^*)^n x = 0 \quad , \quad (\forall)\ t \in [t_0, T]$$

ceea ce implică

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}(B_i^* (A_i^*)^n).$$

Astfel s-a arătat că

$$\mathcal{N}(W_i) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}(B_i^* (A_i^*)^n).$$

Reciproc, dacă $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}(B_i^* (A_i^*)^n)$ atunci $B_i^* (A_i^*)^n x = 0$, pentru orice $n \geqslant 0$ și, în consecință

$$B_i^* e^{(T-t)A_i^*} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T-t)^n}{n!} B_i^* (A_i^*)^n x = 0$$

de unde

$$0 = \langle W_i x, x \rangle = \langle C_i C_i^* x, x \rangle = \| C_i^* x \|^2$$

adică

$$x \in \mathcal{N}(C_i^*) = \mathcal{N}(W_i)$$

și astfel

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}(B_i^* (A_i^*)^n) \subset \mathcal{N}(W_i).$$

Din cele două incluziuni de semne contrare obținem

$$\mathcal{N}(W_i) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}(B_i^* (A_i^*)^n)$$

sau echivalent

$$\mathcal{R}(W_i) = \left[\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}(B_i^* (A_i^*)^n) \right]^{\perp} = \bigvee_{n=0}^{\infty} A_i^n B_i.$$

CONSECINȚA 3.1.13. Fie $A_i(t) = A_i$, $B_i(t) = B_i$, $i = 1,2$. Următoarele afirmații sînt echivalente :

a) faza (t_0, z_0) este complet controlabilă (aproximativ) pe ...

b) $z_0 + \bigvee_{n=0}^{\infty} A_2^n B_2 U_2 \subset \bigvee_{n=0}^{\infty} A_1^n B_1 U_1$;

c) $z_0 \in \bigvee_{n=0}^{\infty} A_1^n B_1 U_1$ și $\bigvee_{n=0}^{\infty} A_2^n B_2 U_2 \subset \bigvee_{n=0}^{\infty} A_1^n B_1 U_1$.

De asemenea înlocuind $\mathcal{R}(W_i)$ prin $\overline{\mathcal{R}(W_i)}$ în Observația ... și Consecința 3.1.8, obținem caracterizări corespunzătoare pentru ε -controlabilitatea și respectiv, exact controlabilitatea unei faze (sau stări) în cazul staționar.

3.2. CONTROLABILITATEA SISTEMELOR LINIARE CONTINUE

Spre deosebire de sistemele liniare de urmărire care, în mod inexplicabil, s-au bucurat de mai puțină atenție în literatura de specialitate, sistemele liniare cu control sînt intens investigate atît în cazul finit dimensional, începînd din jurul anului 1960, cît și în cazul infinit dimensional, începînd cu deceniul trecut. În teoria sistemelor liniare infinit dimensionale s-au impus deja nume ca A.V.BALAKRISHNAN, H.O.FATTORINI, R.TRIGGIANI, etc.

In prima parte a prezentului paragraf sistemele liniare cu control vor fi privite ca și cazuri particulare ale unor sisteme de urmărire, apoi vom preciza cîteva caracterizări ale noțiunii de controlabilitate completă ale unui sistem liniar infinit dimensional.

Dacă în cazul unui sistem de urmărire $(A_1, A_2; B_1, B_2)$ vom lua $A_1(.) = A(.) \in L^1(J, \mathcal{L}(X))$, $B_1(.) = B(.) \in L^p(J, \mathcal{L}(U_1, X))$, $A_2(.) = 0$ și $B_2(.) = 0$ obținem ceea ce în mod uzual se notează

$$(A,B) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)$$

și poartă numele de sistem liniar cu control.

Definițiile 3.1.1 - 3.1.3 se transformă în definiții ale unor noțiuni bine cunoscute în teoria sistemelor cu control.

Este clar că în acest caz spaţiul U_2 ... şi vom nota $U_1 = U$, care va fi numit spaţiu de control, iar X ... fi numit spaţiu de stări.

De asemenea, deoarece ecuaţia diferenţială a urmăritorului ... duce la $\dot{x} = o$, rezultă că scopul urmăritorului este, în această ... ţuaţie, de a ajunge într-o vecinătate de rază ε a unei anumite ... x_1 fixate (cazul Definiţiei 3.1.1), respectiv oricît ... x_1 sau chiar în x_1 (dacă avem în vedere i) sau ii) ... 3.1.2).

Mai precis, dacă avem în vedere sistemul (A,B), vom introduce:

DEFINITIA 3.2.1. Vom spune că faza iniţială $(t_o,x_o) \in J \times X$ ... starea iniţială $x_o \in X$ este :

i) ε-controlabilă $[A_1]$ pe $J = [t_o,T]$ dacă oricare ar fi ... $x_1 \in X$, putem găsi o funcţie de control $u(.) \in L^q(J,U)$ ... încît

$$\|x(T)-x_1\| \leq \varepsilon \quad , \quad \text{unde} \quad x(T) = x(T;t_o,x_o,u(.)) \ ;$$

ii) complet controlabilă (aproximativ) $[A_2]$ ... ε-controlabilă pe J pentru orice $\varepsilon > o$;

iii) exact controlabilă $[X_1]$ pe J, dacă este 0-controlabilă pe J.

DEFINITIA 3.2.2. Sistemul (A,B) va fi numit ε-controlabil, complet controlabil (aproximativ) respectiv, exact controlabil ... dacă orice stare $x_o \in X$ are proprietatea respectivă.

Vom nota prin $\sum_c [M_2]$ ... sistemelor ... controlabile (aproximativ).

In literatura de specialitate există foarte multe caracterizări ale sistemelor liniare complet controlabile (aproximativ) ... interval $J = [t_o,T]$, $[T_1]$, $[R_1]$, $[\,]$, $[\,]$. In ... ... izări sînt intim legate de ... operatorului de controlabilitate $C : L^q(J,U) \longrightarrow X$ . ...

$$C(u(.)) = \int_{t_0}^{T} \Phi(T,s)B(s)u(s)ds \quad , \quad (\forall)\ u(.) \in L^q(J,U)$$

sau al operatorului $W = CC^*$ (dacă U şi X sînt spaţii Hilbert), unde $\Phi(.,.)$ este, evident, operatorul de evoluţie generat de $A(.)$. Demonstraţia acestora se reduce, în ultimă instanţă, la teoremele de "range" pentru operatorii liniari şi mărginiţi prezentate în capitolul I (Propoziţiile 1.1.1 şi 1.1.4, Consecinţele 1.1.2, 1.1.3 şi 1.1.5).

Analogul discret al unor astfel de caracterizări este prezentat în paragraful 3 al acestui capitol.

In restul acestui paragraf vom presupune A,B constante. Amintim pentru a utiliza în continuare :

PROPOZIŢIA 3.2.3 $[T_2]$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :

a) $(A,B) \in \sum_c$;

b) $\bigvee_{n=0}^{\infty} A^n BU = X$;

c) $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}(B^*(A^*)^n) = \{0\}$.

Din "condiţia de rang" (b), rezultă că dacă un sistem liniar (A,B) cu A şi B constante este controlabil aproximativ pe un interval compact J (cu interior nevid), atunci este controlabil pe orice interval J (cu interior nevid).

Dacă notăm $\rho_0(A)$ componenta conexă nemărginită a mulţimii $\rho(A)$ şi prin M' mulţimea punctelor de acumulare pentru o mulţime $M \subset \mathbb{C}$, atunci putem formula :

TEOREMA 3.2.4. Fie (A,B) un sistem liniar autonom. Următoarele afirmaţii sînt echivalente

a) $(A,B) \in \sum_c$;

b) $\bigvee_{\lambda \in \rho_0(A)} R(\lambda,A)BU = X$;

c) pentru orice mulţime $M \subset \rho_0(A)$ cu proprietatea $M' \cap \rho_0(A) \neq \emptyset$,

$$\bigvee_{\lambda \in M} R(\lambda,A)BU = X \ ;$$

d) există o mulţime $M \subset \rho_0(A)$ cu proprietatea $M' \cap \rho_0(A) \neq \emptyset$ astfel încît

$$\bigvee_{\lambda \in M} R(\lambda, A)BU = X .$$

Demonstraţie : a)$\Longrightarrow$b). Fie $(A,B) \in \sum_c$ şi $x^* \in X^*$ care se anulează pe $R(\lambda, A)BU$, $(\forall)\ \lambda \in \rho_0(A)$. In particular, pentru orice $\lambda \in \rho_0(A)$, $|\lambda| > \|A\|$ şi orice $u \in U$ putem scrie

$$0 = \langle R(\lambda, A)Bu, x^* \rangle = \langle \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n Bu, x^* \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \langle A^n Bu, x^* \rangle$$

de unde $\langle A^n Bu, x^* \rangle = 0$, $(\forall)\ n \geq 0$, $(\forall)\ u \in U$, adică x^* se anulează pe $\mathcal{R}(A^n B)$, $(\forall)\ n \geq 0$, deci şi pe $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}(A^n B)$. Aplicînd "condiţie de rang" rezultă $x^* = 0$, iar $\bigvee_{\lambda \in \rho_0(A)} R(\lambda, A)BU = X$ se obţine acum dintr-o cunoscută consecinţă a teoremei Hahn-Banach.

b)$\Longrightarrow$c). Dacă b) este adevărată şi $x^* \in X^*$ are proprietatea

$$\langle \bigvee_{\lambda \in M} R(\lambda, A)BU, x^* \rangle = 0$$

atunci pentru orice $u \in U$, funcţia analitică

$$\lambda \longrightarrow \langle R(\lambda, A)Bu, x^* \rangle$$

se anulează pe mulţimea $M \subset \mathbb{C}$, cu $M' \neq \emptyset$, deci este nulă pe $\rho_0(A)$, adică

$$\langle \bigvee_{\lambda \in \rho_0(A)} R(\lambda, A)BU, x^* \rangle = 0$$

iar în virtutea lui b) rezultă $x^* = 0$.

c)$\Longrightarrow$d)$\Longrightarrow$b) evident

b)$\Longrightarrow$a) Fie b) adevărată şi presupunem că pentru $x^* \in X^*$ are loc

$$\langle \bigvee_{n=0}^{\infty} A^n BU, x^* \rangle = 0.$$

Din reprezentarea

$$\langle R(\lambda, A)Bu, x^* \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \langle A^n Bu, x^* \rangle$$

rezultă

$$\langle \bigvee_{\lambda \in \rho_0(A)} R(\lambda, A)BU, x^* \rangle = 0 \text{ , deci } x^* = 0.$$

Reamintim [H2] că spectrul contractiv al unui operator $A \in \mathcal{L}(X)$ este mulţimea

$$\sigma_k(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \overline{R(A-\lambda I)} \neq X \right\}$$

DEFINITIA 3.2.5 [T_5]. Numărul complex $\lambda \in \sigma_k(A)$ se numește valoare spectrală controlabilă pentru sistemul (A,B) sau valoare (A,B)-controlabilă dacă operatorul

$$(A-\lambda I,B) : X \times U \longrightarrow X$$

definit prin

$$(A-\lambda I,B)(x,u)=(A-\lambda I)x + Bu \;,\; (\forall)\; (x,u) \in X \times U$$

are domeniul valorilor dens în X.

Să observăm că dacă X și U sînt spații de dimensiune finită, definiția precedentă se reduce la definiția valorilor proprii controlabile introduse în [H_3].

OBSERVATIA 3.2.6. O valoare spectrală $\lambda \in \sigma_k(A)$ este (A,B)-controlabilă dacă și numai dacă operatorul

$$(A^*-\lambda I,B^*) : X^* \longrightarrow X^* \times U^*$$

este injectiv, după cum rezultă imediat din Propoziția 1.1.4.

PROPOZITIA 3.2.7. Dacă $(A,B) \in \sum_c$ atunci orice valoare $\lambda \in \sigma_k(A)$ este (A,B)-controlabilă.

Demonstrație : Fie $(A,B) \in \sum_c$ și să presupunem că există o valoare spectrală $\lambda_0 \in \sigma_k(A)$ care nu este (A,B)-controlabilă, adică operatorul $(A^*-\lambda_0 I,B^*)$ nu este injectiv. Rezultă că există o funcțională nenulă $x_0^* \in X^*$ pentru care $A^*x_0^* = \lambda_0 x_0^*$ și $B^*x_0^* = 0$. De aici, obținem că $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}(B^*(A^*)^n) \ni x_0 \neq 0$ și contrazicem ipoteza $(A,B) \in \sum_c$ (caracterizarea (c) din Propoziția 3.2.3).

OBSERVATIA 3.2.8. Reciproca afirmației din propoziția precedentă (adevărată în cazul finit dimensional [H_3]) este falsă în cazul spațiilor Banach arbitrare. Pentru a justifica aceasta e suficient să alegem $A \in \mathcal{L}(X)$ pentru care $\sigma_k(A) = \emptyset$ și ...

PROPOZITIA 3.2.9. $(A,B) \in \sum_c$ dacă și numai dacă A^* nu are subspații invariante în $\mathcal{N}(B^*)$.

Demonstrație : Deoarece $\mathcal{N}(B^*(A^*)^n)$ este subspațiu liniar în X^*, din Propoziție 3.2.3, rezultă că $(A,B)\notin\Sigma_c$ dacă și numai dacă $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathcal{N}(B^*(A^*)^n)$ este subspațiu liniar nenul în X^*.

Dacă notăm $X_0^* = \bigcap_{n=0}^{\infty}\mathcal{N}(B^*(A^*)^n) \neq \{0\}$, este ușor de văzut, că X_0^* este invariant la A^* și este conținut în $\mathcal{N}(B^*)$.

<u>CONSECINȚA 3.2.10</u>. Fie $D\in\mathcal{L}(X,U)$. Sistemul $(A,B)\in\Sigma_c$ dacă și numai dacă $(A+BD,B)\in\Sigma_c$.

Demonstrație : Fie $X_0^*\subset\mathcal{N}(B^*)$. Atunci

$$(A+BD)^*X_0^* = (D^*B^*+A^*)X_0^* = A^*X_0^*$$

și de aceea X_0^* este invariant la A^* dacă și numai dacă este invariant la $(A+BD)^*$.

<u>CONSECINȚA 3.2.11</u>. Fie $D\in\mathcal{L}(X,U)$, $Q\in\mathcal{L}(U)$ bijectiv. Atunci $(A,B)\in\Sigma_c$ dacă și numai dacă $(A+BD,BQ)\in\Sigma_c$.

Demonstrație : Deoarece $\mathcal{N}(B^*)=\mathcal{N}(Q^*B^*)$, afirmația rezultă imediat din Consecința 3.2.10.

<u>CONSECINȚA 3.2.12</u>. Dacă $(A,B)\notin\Sigma_c$ și $\varphi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^n$ este analitică pe o vecinătate a mulțimii $\sigma(A)$, atunci $(\varphi(A),B)\notin\Sigma_c$.

Demonstrație : Din ipoteză rezultă că subspațiul $X_0^* = \bigcap_{n=0}^{\infty}\mathcal{N}(B^*(A^*)^n)\neq\{0\}$. Fie $x_0^*\in X_0^*\setminus\{0\}$. Atunci

$$\varphi(A^*)x_0^* = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(A^*)^n x_0^*$$

deci

$$B^*(A^*)^k\varphi(A^*)x_0^* = \sum_{n=0}^{\infty}a_n B^*(A^*)^{n+k}x_0^* = 0$$

de unde rezultă că $\varphi(A^*)X_0^*\subset X_0^*$ și cum $\varphi(A^*)=[\varphi(A)]^*$ se obține afirmația.

<u>OBSERVAȚIA 3.2.13</u>. Fie X și U de dimensiune finită [illegible] matricile operatorilor A,B pentru două baze fixate în X, respectiv U. Este clar că afirmația [illegible] $-\lambda I$ [illegible] este echivalent cu afirmația că pentru $(\forall)\eta\in X$ cu proprietatea $\eta A=\lambda\eta$ [illegible]

$\eta B = 0$ rezultă $\eta = 0$ sau, prin trecere la matricile adjuncte, $A^* \eta^* = \lambda \eta^*$ şi $B^* \eta^* = 0$ implică $\eta^* = 0$.

Deci, $\operatorname{Rang}(A-\lambda I, B) = n$ dacă şi numai dacă A^* nu are v... ori proprii în $\mathcal{N}(B^*)$.

CONSECINȚA 3.2.14. Fie X şi U spaţii finit dimensionale. Atunci $(A,B) \in \sum_C$ dacă şi numai dacă $\operatorname{rang}(A-\lambda I, B) = n$ pentru orice valoare proprie $\lambda \in \sigma(A) = \sigma_{\pi}(A)$.

Demonstraţie : Intr-adevăr, $(A,B) \in \sum_C$, conform Propoziţiei 3.2.9, atunci şi numai atunci cînd există un subspaţiu nenul $X_0^* \subset \subset \mathcal{N}(B^*)$, invariant la A^*. Deoarece X_0^* este finit dimensional şi $A^* X_0^* \subset X_0^*$, există $\eta^* \neq 0$, $\eta^* \in X_0^*$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel ca $A^* \eta^* = \lambda \eta^*$ şi, conform Observaţiei 3.2.13, $\operatorname{rang}(A-\lambda I, B) < n$.

Reciproc, dacă $\operatorname{rang}(A-\lambda I, B) < n$, tot conform Observaţiei 3.2.13, rezultă că A^* are vectori proprii în $\mathcal{N}(B^*)$, care evident se află în $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}(B^*(A^*)^n)$, deci $(A,B) \notin \sum_C$.

Am obţinut astfel rezultatul lui M.J.L.HAUTUS [H_2] de caracterizare a controlabilităţii complete cu ajutorul valorilor proprii controlabile.

Fie X infinit dimensional, U de dimensiune 1, $A \in \mathcal{L}(X)$ şi $B \in \mathcal{L}(U,X)$. Identificînd U cu $\mathbb{C}$, există $b \in X$ astfel ca $Bu = u.b$, $(\forall) u \in \mathbb{C}$. In acest caz notăm (A,b) în loc de (A,B).

Pentru cazul cînd şi X este finit dimensional V.M.POPOV [P_2] prezintă o condiţie echivalentă cu controlabilitatea completă de tipul :

Sistemul $(A,b) \in \sum_C$ dacă şi numai dacă sistemul operatorial

$$\begin{cases} YA = AY \\ Yb = u \end{cases}$$

are soluţie unică $(\forall)\ u \in X$.

Această condiţie nu mai caracterizează controlabilitatea completă în cazul infinit dimensional, cum reiese din exemplul care urmează :

EXEMPLUL 3.2.15. Fie $X = L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ (identificat cu L^2 pe cercul unitate din $\mathbb{C}$), $A \in \mathcal{L}(X)$ operatorul de înmulțire cu variabila, adică

$$(Af)(z) = zf(z) \ , \ (\forall) \ f \in X$$

și $b \in X$ cu $b(z) = 1$, $(\forall)$ $z = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. După cum este cunoscut [H2], comutantul operatorului A coincide cu mulțimea operatorilor de multiplicare cu elemente din $L^\infty([0,2\pi],\mathbb{C})$, deci, pentru orice $Y \in \mathcal{L}(X)$, egalitatea $YA = AY$ implică existența unei funcții $\varphi \in L^\infty([0,2\pi],\mathbb{C})$ astfel încît

$$(Yf)(z) = \varphi(z)f(z) \quad \text{a.p.t.}$$

Atunci

$$Yb = d \iff \varphi(z) = d(z) \quad \text{a.p.t.}$$

imposibil dacă $d \in L^2([0,2\pi],\mathbb{C}) \setminus L^\infty([0,2\pi],\mathbb{C})$.

Astfel sistemul operatorial

$$\begin{cases} YA = AY \\ Yb = d \end{cases}$$

nu are soluție pentru orice $d \in X$, deși perechea (A,b) este complet controlabilă, deoarece

$$(b, Ab, \ldots, A^n b, \ldots) = (1, z, \ldots, z^n, \ldots)$$

furnizează o bază în X.

Slăbind condiția din [P2] se poate obține o condiție necesară de controlabilitate completă pentru cazul infinit dimensional și anume :

PROPOZIȚIA 3.2.16. Dacă sistemul $(A,b) \in \sum_c$ atunci sistemul operatorial

$$\begin{cases} YA = AY \\ Yb = 0 \end{cases}$$

are numai soluție nulă.

Demonstrație : Presupunem $(A,b) \in \sum_c$ și să admitem că sistemul operatorial din enunț are o soluție nenulă Y_0. Fie $x_0 \in X$

pentru care $Y_0 x_0 \neq 0$. Deoarece $(A,B) \in \sum_c$, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un control $u(\cdot) \in L^2(0,U)$ astfel încît

$$\left\| x_0 - \int_{t_0}^{T} e^{-At} B\, u(t)dt \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\|Y_0\|} .$$

De aici

$$\left\| Y_0 x_0 - \int_{t_0}^{T} e^{-At} Y_0 B\, u(t)dt \right\| = \| Y_0 x_0 \| \leq \varepsilon$$

şi cum ε este arbitrar, obţinem $Y_0 x_0 = 0$, în contradicţie cu alegerea lui x_0.

OBSERVAŢIA 3.2.17. Reciproca afirmaţiei din propoziţia precedentă nu este adevărată în cazul infinit dimensional după cum se poate observa din Exemplul 3.2.15, alegînd $b(z) = z$.

3.3. SISTEME LINIARE DISCRETE CU CONTROL.

Fie X şi U spaţii Banach şi $\widetilde{A} = (A_n)_{n \geq 0} \in s(\mathcal{L}(X))$, $\widetilde{B} = (B_n)_{n \geq 0} \in s(\mathcal{L}(U,X))$. Vom utiliza în continuare aceeaşi terminologie ca şi în cazul sistemelor continue.

Sistemul liniar

$$(\widetilde{A},\widetilde{B}) \qquad x_{n+1} = A_n x_n + B_n u_n \quad , \quad n \geq 0$$

va fi numit sistem liniar discret cu control.

In virtutea Propoziţiei 2.1.9 şi Observaţiei 2.1.10 soluţia sistemului $(\widetilde{A},\widetilde{B})$ cu datele iniţiale $i = 0$, $x_0 = x^0 \in X$ este furnizată de formula discretă a variaţiei de constantă şi anume :

$$x_n = \Phi(n)x^0 + \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n,j+1) B_j u_j \; , \quad n \geq 0.$$

Operatorul de sumare $C_n : s(U) \longrightarrow X$ definit prin

$$C_n u = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n,j+1) B_j u_j \; , \; (\forall)\; u = (u_j)_{j \geq 0} \in s(U)$$

va fi numit operator de controlabilitate al sistemului.

Cu ajutorul operatorului C_n, formula discretă a variaţiei de constantă devine

$$x_n = \Phi(n)x^0 + C_n u$$

şi va fi numită proces evolutiv cu timp discret.

Rezultatele acestui paragraf se bazează pe ideile din lucrarea lui S.DOLECKI $[D_3]$ relativă la sistemele liniare continue cu control. Notaţiile şi conceptele care vor fi introduse în cele ce urmează sînt cele din lucrarea amintită, adaptate sistemelor liniare discrete.

Fie x^0, x^1 două elemente arbitrare ale spaţiului X, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \in \mathbb{R}_+$ şi $u \in s(U)$. Vom nota prin $P(x^0, x^1, n, \mathcal{E}, u)$ următoarea afirmaţie

$$\text{"} \| x^1 - \Phi(n) x^0 - C_n u \| \leq \mathcal{E} \text{"}.$$

DEFINITIA 3.3.1. Vom zice că sistemul (A,B) este de tip AC [complet controlabil (aproximativ) cu interval de timp fixat], dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încît pentru orice $x^0, x^1 \in X$ şi orice $\mathcal{E} > 0$, există $u \in s(U)$ astfel ca

$$\| x^1 - \Phi(n) x^0 - C_n u \| \leq \mathcal{E}$$

Cu notaţia introdusă mai sus sistemul (A,B) este de tip AC dacă

$$\begin{pmatrix} \exists & \forall & \forall & \forall & \exists \\ n & x^0 & x^1 & \mathcal{E} & u \end{pmatrix} \Longrightarrow P(x^0, x^1, n, \mathcal{E}, u)$$

In acest caz vom mai spune că sistemul este de tipul

$$\begin{pmatrix} \exists & \forall & \forall & \forall & \exists \\ n & x^0 & x^1 & \mathcal{E} & u \end{pmatrix}$$

Absenţa unuia din elementele x^0, x^1 sau $\mathcal{E}$ din expresia care descrie tipul sistemului va însemna că elementul respectiv este considerat nul. Astfel putem introduce

DEFINITIA 3.3.2. Un sistem de tipul $\begin{pmatrix} \exists & \forall & \forall & \exists \\ n & x^0 & x^1 & u \end{pmatrix}$ va fi numit sistem exact controlabil cu interval de timp fixat sau de tipul C.

Este clar, din definiţie, că sistemul (A,B) este de tipul C dacă există numărul natural $n \in \mathbb{N}$, astfel încît oricare ar fi $x^0, x^1 \in X$, putem găsi un control $u \in s(U)$ cu proprietatea

$$x^1 = \Phi(n)x^0 + C_n u$$

Dacă $x^0 = 0$ (sau $x^1 = 0$) în definițiile 3.3.1 - 3.3.2 se obțin noi tipuri de controlabilitate notate AC_0 și C_0 (respectiv AC_1 și C_1) și numite în mod uzual nul-accesibilitate (aproximativă), nul-accesibilitate respectiv nul-controlabilitate (aproximativă), nul-controlabilitate cu interval de timp fixat.

Prin trecerea simbolului $\underset{n}{\exists}$ după simbolurile $\underset{x_0}{\forall}\ \underset{x_1}{\forall}$ se obțin şase noi tipuri de controlabilitate cu interval de timp variabil, de speța I și care, pentru a fi diferențiate de tipurile precedente, începe cu litera L. Astfel, pentru exemplificare, LAC_1 înseamnă un sistem de tipul $\begin{pmatrix} \forall & \exists & \forall & \exists \\ x_0 & n & \varepsilon & u \end{pmatrix}$ și va fi numit sistem nul controlabil (aproximativ) cu interval de timp variabil, de speța I. De asemenea LAC va însemna un sistem de tipul $\begin{pmatrix} \forall & \forall & \exists & \forall & \exists \\ x^0 & x^1 & n & \varepsilon & u \end{pmatrix}$ și va fi numit sistem complet controlabil (aproximativ) cu interval de timp variabil, de speța I.

In sfîrșit, trei tipuri noi de controlabilitate (aproximativă) cu timp variabil, de speța a II-a, se obțin prin trecerea simbolului $\underset{n}{\exists}$ după simbolul $\underset{\varepsilon}{\forall}$ și pentru diferențiere vor începe cu litera L', adică

$$L'AC\begin{pmatrix} \forall & \forall & \forall & \exists & \exists \\ x^0 & x^1 & \varepsilon & n & u \end{pmatrix};\quad L'AC_0\begin{pmatrix} \forall & \forall & \exists & \exists \\ x^1 & \varepsilon & n & u \end{pmatrix};\quad L'AC_1\begin{pmatrix} \forall & \forall & \exists & \exists \\ x^0 & \varepsilon & n & u \end{pmatrix}$$

numite respectiv complet controlabilitate (aproximativă), nul-accesibilitate (aproximativă) și nul-controlabilitate (aproximativă) cu interval de timp variabil, de speța a II-a.

Din definițiile precedente și considerații pur logice rezultă:

<u>PROPOZIȚIA 3.3.3.</u> Următoarea diagramă de implicații este adevărată:

$$
\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
LC_0\begin{pmatrix}\forall & \exists & \exists\\ x & n & u\end{pmatrix} \& LC\begin{pmatrix}\forall & \forall & \exists & \exists\\ x^0 & x^1 & n & u\end{pmatrix} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \& LC_1\begin{pmatrix}\forall & \exists & \exists\\ x^0 & n & u\end{pmatrix} \\
C_0\begin{pmatrix}\exists & \forall & \exists\\ n & x^1 & u\end{pmatrix} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \& C\begin{pmatrix}\exists & \forall & \forall & \exists\\ n & x^0 & x^1 & u\end{pmatrix} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \& C_1\begin{pmatrix}\exists & \forall & \exists\\ n & x^0 & u\end{pmatrix} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
AC_0\begin{pmatrix}\exists & \forall & \forall & \exists\\ n & x^1 & \varepsilon & u\end{pmatrix} \arrow[d, Rightarrow] \& AC\begin{pmatrix}\exists & \forall & \forall & \forall & \exists\\ n & x^0 & x^1 & \varepsilon & u\end{pmatrix} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \& AC_1\begin{pmatrix}\exists & \forall & \forall & \exists\\ n & x^0 & \varepsilon & u\end{pmatrix} \arrow[d, Rightarrow] \\
LAC_0\begin{pmatrix}\forall & \exists & \forall & \exists\\ x^1 & n & \varepsilon & u\end{pmatrix} \arrow[d, Rightarrow] \& LAC\begin{pmatrix}\forall & \forall & \exists & \forall & \exists\\ x^0 & x^1 & n & \varepsilon & u\end{pmatrix} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \& LAC_1\begin{pmatrix}\forall & \exists & \forall & \exists\\ x^0 & n & \varepsilon & u\end{pmatrix} \arrow[d, Rightarrow] \\
L'AC_0\begin{pmatrix}\forall & \forall & \exists & \exists\\ x^1 & \varepsilon & n & u\end{pmatrix} \& L'AC\begin{pmatrix}\forall & \forall & \forall & \exists & \exists\\ x^0 & x^1 & \varepsilon & n & u\end{pmatrix} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \& L'AC_1\begin{pmatrix}\forall & \forall & \exists & \exists\\ x^0 & \varepsilon & n & u\end{pmatrix}
\end{tikzcd}
$$

După cum este cunoscut din cazul continuu, în caracterizarea conceptelor de controlabilitate un rol important îl au domeniile valorilor operatorilor $\Phi(n)$ şi C_n. Notînd $\mathcal{R}(\Phi(n))$, respectiv $\mathcal{R}(C_n)$ aceste domenii de valori şi utilizînd caracterizările corespunzătoare, obţinem :

<u>PROPOZITIA 3.3.4</u>. Următoarea diagramă de implicaţii şi echivalenţe este adevărată :

$$
\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
LC_0\Big(X=\bigcup_{n=0}^{\infty}R(C_n)\Big) \& LC\Big(X\times X=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{(x^0,x^1)\mid x^1-\phi(n)x^0\in R(C_n)\}\Big) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \& LC_1\Big(X=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{x^0\mid\phi(n)x^0\in R(C_n)\}\Big) \\
C_0\big(\exists_n \mid X=R(C_n)\big) \arrow[r, Leftrightarrow] \& C\big(\exists_n \mid X=R(C_n)\big) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \& C_1\big(\exists_n \mid R(\phi(n))\subset \overline{R}(C_n)\big) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, dashed] \\
AC_0\big(\exists_n \mid X=\overline{R(C_n)}\big) \arrow[r, Leftrightarrow] \& AC\big(\exists_n \mid X=\overline{R(C_n)}\big) \arrow[d, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \& AC_1\big(\exists_n \mid R\phi(n))\subset\overline{R(C_n)}\big) \arrow[d, Rightarrow, dashed] \\
LAC_0\Big(X=\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}R(C_n)}\Big) \& LAC\Big(X\times X=\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}\{(x^0,x^1)\mid x^1-\phi(n)x^0\in R(C_n)\}}\Big) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \& LAC_1\Big(X=\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}\{x_0\mid\phi(n)x^0\in R(C_n)\}}\Big) \arrow[d, Rightarrow, dashed] \\
L'AC_0\Big(X=\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}R(C_n)}\Big) \& L'AC\Big(X\times X=\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{n=0}^{\infty}\{(x^0,x^1)\mid x^1-\phi(n)x^0\in R_\varepsilon(C_n)\}\Big) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \& L'AC_1\Big(X=\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{n=0}^{\infty}\{x^0\mid\phi(n)x^0\in R_\varepsilon(C_n)\}\Big)
\end{tikzcd}
$$

unde $\mathcal{R}_\varepsilon(C_n)$ este vecinătatea de rază ε a mulţimii $\mathcal{R}(C_n)$.

PROPOZITIA 3.3.5. Fie $\tilde{A} \in s(\mathcal{L}(X))$ şi $\tilde{B} \in s(\mathcal{L}(U,X))$ funcţii operatoriale discrete constante, adică

$$\tilde{A} = (A, A, \ldots, A, \ldots), \quad A \in \mathcal{L}(X)$$
$$\tilde{B} = (B, B, \ldots, B, \ldots), \quad B \in \mathcal{L}(U,X)$$

Următoarele afirmaţii sînt adevărate :

a) $\mathcal{R}(C_n) \subset \mathcal{R}(C_{n+1})$

b) $\{x \in X \mid \Phi(n)x \in \mathcal{R}(C_n)\} \subset \{x \in X \mid \Phi(n+1)x \in \mathcal{R}(C_{n+1})\}$

Demonstraţie : a) Fie $x \in \mathcal{R}(C_n)$. Rezultă că există $u \in s($ cu proprietatea

$$x = C_n u = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u_j$$

Atunci

$$C_{n+1} T^* u = \sum_{j=0}^{n} A^{n-j} B (T^* u)_j = \sum_{j=1}^{n} A^{n-j} B u_{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u_j = x$$

deci $x \in \mathcal{R}(C_{n+1})$.

b) Dacă pentru un $x \in X$, $\Phi(n)x = C_n u$, adică

$$A^n x = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u_j$$

atunci

$$A^{n+1} x = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j} B u_j = \sum_{j=0}^{n} A^{n-j} B \tilde{u}_j = C_{n+1} \tilde{u}$$

unde

$$\tilde{u}_j = \begin{cases} u_j & j \leq n-1 \\ 0 & j > n-1 \end{cases}$$

deci

$$\Phi(n+1)x = C_{n+1} \tilde{u} .$$

CONSECINTA 3.3.6. Un sistem liniar discret cu coeficienţi constanţi

$$x_{n+1} = A x_n + B u_n , \quad n \geq 0$$

este controlabil de un anumit tip, cu interval de timp variabil, de speţa I, dacă şi numai dacă este controlabil de acelaşi tip, dar cu interval de timp fixat.

Altfel zis, în cazul sistemelor cu coeficienţi constanţi...

[illegible]țerea simbolului L nu schimbă conceptul de controlabilitate [illegible].

Demonstrație : Din Propoziția 3.[illegible] rezultă că [illegible] brete cu coeficienți constanți verifică ipotezele din [illegible] S.ROLEWICZ [R4] pentru existența timpului universal de control.

CONSECINȚA 3.3.7. a) Dacă există [illegible] $\in$ [illegible] $\mathcal{R}(\Phi(n)) = X$ atunci $AC_o \Longleftrightarrow AC$;

b) Dacă $\mathcal{R}(A) = X$ atunci [illegible] $\Longleftrightarrow$ [illegible] $\Longleftrightarrow$ [illegible] $\Longleftrightarrow$ [illegible]

OBSERVAȚIA 3.3.8. Fie [illegible] [illegible]tru orice $u \in s(U)$ vom avea

$$C_{n+1}u = \sum_{j=0}^{n} \Phi(n+1,j+1)B_j u_j = A_n \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n,j+1)B_j u_j + B_n u_n$$

$$= A_n C_n u + B_n u_n .$$

In continuare, vom aprofunda [illegible] [illegible]bilitate pentru sistemele liniare [illegible] în spații Hilbert.

Fie deci, X și U spații Hilbert. Din [illegible] [illegible]lui de controlabilitate

$$C_n = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n,j+1)B_j u_j$$

se constată, de fapt, că operatorul C_n poate fi considerat [illegible] [illegible]nit pe $U^n = U \times U \times \ldots \times U$.

Pentru orice $x \in X$ și $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in$ [illegible]

$$\langle C_n u, x \rangle_X = \langle \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n,j+1 \ldots$$ [illegible]

$$= \langle u, C_n^* x \rangle \ldots$$

Deci, înzestrînd U^n cu norma hilbertiană uzuală, [illegible]

$$(C_n^* x)_j = B_j^* \Phi^*(n,j+1)x \quad , \quad j = 0,1,\ldots,n$$

Ca și în cazul continuu vom introduce operatorul

$$W_n = C_n C_n^* : X \longrightarrow X$$

[illegible]dică

$$W_n x = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(n,j+1)B_j [illegible] \Phi^* [illegible] .$$

<u>TEOREMA 3.3.9</u>. Fie $\tilde{A} = (A_n)_{n\geq 0} \in s(\mathcal{L}(X))$ şi $\tilde{B} = (B_n)_{n\geq 0} \in s(\mathcal{L}(U,X))$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :

a) Sistemul (A,B) este de tip C_0 ;

b) Sistemul (A,B) este de tip C ;

există un număr natural n astfel încît una din condiţiile care urmează este satisfăcută

c) C_n este surjectiv ;

d) C_n admite invers la dreapta ;

e) W_n este surjectiv ;

f) W_n este uniform pozitiv.

Demonstraţie : a)$\Longleftrightarrow$b)$\Longleftrightarrow$c) rezultă din Propoziţia 3.3.4 ;

c)$\Longleftrightarrow$e)$\Longleftrightarrow$f) rezultă din Propoziţia 1.1.1 şi echivalenţa

$$\|C_n^* x\| \geq \sqrt{m} \quad , \quad (\forall)\ x \in X \ , \quad \|x\| = 1$$

dacă şi numai dacă

$$\langle C_n C_n^* x, x \rangle \geq m \quad , \quad (\forall)\ x \in X \ , \quad \|x\| = 1.$$

<u>CONSECINTA 3.3.10</u>. Dacă $\tilde{A} = (A, A, \ldots, A, \ldots)$ şi $\tilde{B} = (B, B, \ldots, B, \ldots)$ atunci afirmaţia c) din teorema precedentă este echivalentă cu

$$A^{n-1}BU + A^{n-2}BU + \ldots + ABU + BU = X$$

sau cu afirmaţia că operatorul ([illegible])

$$[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] : U^n \longrightarrow X$$

este surjectiv.

<u>TEOREMA 3.3.11</u>. Fie $\tilde{A} = (A_n)_{n\geq 0} \in s(\mathcal{L}(X))$ şi $\tilde{B} = (B_n)_{n\geq 0} \in s(\mathcal{L}(U,X))$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :

a) Sistemul (A,B) este de tip AC_0 ;

b) Sistemul (A,B) este de tip AC ;

există un număr natural [illegible] condiţii este satisfăcută :

c) $\overline{\mathcal{R}(C_n)} = X$;

d) $\bigvee_{j=0}^{n-1} \Phi(n,j+1)B_jU = X$;

e) $\mathcal{N}(W_n) = \mathcal{N}(C_n^*) = \{o\}$;

f) $\bigcap_{j=0}^{n-1} \mathcal{N}(B_j^* \Phi^*(n,j+1)) = \{o\}$;

g) $\overline{\mathcal{R}(W_n)} = X$;

h) W_n este strict pozitiv.

Demonstrație : Teorema este o consecință directă [illegible] implicații din Propoziția 3.3.[illegible], cu utilizarea rezultatelor din Consecința 1.1.5 și a formulei pentru adjunctul C_n^*.

CONSECINTA 3.3.12. Dacă W_n este operator cu $\mathcal{R}(\ldots) = \mathcal{R}$ [illegible] în particular dacă spațiile X și U sînt finit dimensionale, afirmațiile din Teoremele 3.3.9 și 3.3.11 sînt echivalente.

Demonstrație : Afirmațiile din Teorema 3.3.9 le implică [illegible] din Teorema 3.3.11 după cum rezultă din Propoziția 3.3.4.

Invers, să presupunem $\mathcal{R}(\overline{C_n}) = \overline{\mathcal{R}(W_n)} = X$, [illegible] afirmațiile Teoremei 3.3.11.

Deoarece

$$\mathcal{R}(W_n) = C_nC_n^*X \subset C_nU = \mathcal{R}(C_n)$$

obținem

$$\overline{\mathcal{R}(W_n)} = \mathcal{R}(W_n) \subset \mathcal{R}(C_n) \subset \overline{\mathcal{R}(C_n)} = \mathcal{R}(\ldots) = \mathcal{R}(\ldots)$$

deci

$$\mathcal{R}(W_n) = \mathcal{R}(C_n) = X$$

și afirmațiile Teoremei 3.3.[illegible] [illegible].

TEOREMA 3.3.13. Fie $\widetilde{A} = (A_n)_{n \geq 0} \in s(\mathcal{L}(X))$ și $\widetilde{B} = (B_n)_{n \geq 0} \in s(\mathcal{L}(U,X))$.

Sistemul (A,B) este de tip C_1 dacă și numai dacă există [illegible] număr natural n astfel încît una din următoarele [illegible] este adevărată :

a) $\mathcal{R}(\Phi(n)) \subset \mathcal{R}(C_n)$;

b) există $\lambda \geq 0$ cu [illegible] Φ [illegible] Φ^* [illegible] $\leq \lambda$ [illegible] .

c) există un operator $D \in \mathcal{L}(X, \ldots)$ astfel încît [illegible]

$\Phi(n)$ admite factorizarea $\Phi(n) = C_n D$.

Demonstrație : Condiția a) este echivalentă cu ... că ...sul (A,B) este de tipul C_1 conform cu caracterizările din ...ția 3.3.4, iar condițiile b) și c) sînt echivalente ... ...tea unui rezultat din teoria operatorilor datorat lui ...

Fie $A \in \mathcal{L}(X)$ și $B \in \mathcal{L}(U,X)$. Perechea (A,B) ... tem liniar continuu

$$(A,B)_c \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

și un sistem liniar discret

$$(A,B)_d \qquad x_{n+1} = Ax_n + Bu_n \qquad n \geq 0.$$

OBSERVATIA 3.3.14. După cum este cunoscut $[D_3]$, în cazul sistemelor liniare continue cu coeficienți constanți ... conceptele de nul-controlabilitate sînt echivalente, ... cu conceptele de controlabilitate ... cu cele de nul-... Această echivalență nu se păstrează în cazul sistemelor liniare discrete. Intr-adevăr, dacă ... și ... nul n atunci sistemul discret $(A,B)_d$ este de tipul ... form diagramei din Propoziția 3.3.4 este de orice alt tip ... cele 1. Deoarece $C_n = 0$, $\forall n \in N$, rezultă că ... fi, conform aceleeași diagrame, de nici un alt tip (... Din cele relatate mai sus, ... realitate naturală, pe baza definițiilor operatorilor Φ ... în cazul discret) și care nu apare în cazul continuu. Perechea $A = 0$, $B = 0$ generează un sistem liniar discret nul-controlabil care se încadrează în oricare din tipurile cu indice ... 1.

OBSERVATIA 3.3.15. Utilizînd un rezultat recent datorat ... V.I.KOROBOV și R.RABAH $[K_4]$ ... 3.3.1o ... că $(A,B)_c$ este nul-accesibil (... de tip C_0) dacă ... $(A,B)_d$ este de tip C_0. Se ... în mod natural ... celelalte tipuri de controlabilitate relative la ...

sînt echivalente cu cele corespunzătoare la [illegible] sistemul [illegible]. Răspunsul este în general negativ, cum rezultă din Observ[illegible] 3.3.14 şi din exemplele care urmează, exemple care vor [illegible] precizări suplimentare relativ la conexiunile prezentate [illegible] la din Propoziţia 3.3.4.

EXEMPLUL 3.3.16. Fie $U = \mathbb{C}$, $X = \ell^2(\mathbb{C})$, $A = T^*$, $B : \mathbb{C} \longrightarrow X$ generat de vectorul $b = (1,0,0,\ldots,0,\ldots)$.

Deoarece $\bigvee_{n=0}^{\infty} A^n b = \ell^2(\mathbb{C})$, rezultă din Propoziţia [illegible] că sistemul $(A,B)_c$ este de tip AC_0, care în cazul cont[illegible] echivalent cu AC şi AC_1 [[illegible]].

Să considerăm şi sistemul liniar discret

$$(A,B)_d \qquad x_{n+1} = T^* x_n + b\, u_n \;,\quad n \geqslant 0$$

unde

$$(x_n)_{n \geqslant 0} \in s(\ell^2(\mathbb{C})) \quad \text{şi} \quad (u_n)_{n \geqslant 0} \in s(\mathbb{C}).$$

Din definiţia operatorului C_n rezultă că

$$C_n u = \sum_{j=0}^{n-1} (T^*)^{n-j-1} b u_j = (T^*)^{n-1} b u_0 + (T^*)^{n-2} b u_1 + \ldots + b u_{n-1} \qquad (u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0, 0, \ldots).$$

Deoarece pentru $x = (x_n)_{n \geqslant 0} \in \ell^2(\mathbb{C})$ şi orice $\varepsilon >$ [illegible] $n \in \mathbb{N}$, astfel ca

$$\| x - (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, \ldots) \|_2 = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^2 \Big)^{1/2}$$ [illegible]

Alegînd

$$u = (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0, 0, \ldots)$$

rezultă

$$C_n u = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, \ldots)$$

şi prin urmare

$$\| x - C_n u \| \leqslant \varepsilon .$$

In raţionamentele precedente n depinde atît de [illegible] cît de ε şi deci sistemul $(A,B)_d$ [illegible] că numărul n nu poate fi ales [illegible] de ε, [illegible] nu este de tip LAC_o, iar conform [illegible] din Propoziţia 3.3. sistemul nu este nici de tip LAC_o (răspuns negativ la [illegible] Observaţia 3.3.14), nici de tip C_o. Am arătat astfel că, în general, $L'AC_o \not\Longrightarrow LAC_o$ chiar în cazul sistemelor liniare [illegible] cu coeficienţi constanţi.

Deoarece

$$\|\Phi(n)x + C_n u\|_2 = \|(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_0, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)\|_2 \geqslant \|x\|_2$$

sistemul precedent nu este [illegible]

$$L'AC_o \not\Longrightarrow L'AC_1 \quad \text{şi} \quad L'AC_o \not\Longrightarrow L'AC.$$

EXEMPLUL 3.3.17. Fie X şi U spaţii Hilbert separabile [illegible] finit dimensionale şi $\widetilde{A} = (A_n)_{n \geqslant o} \in s(\mathcal{L}(X))$ un şir cu suport finit, de operatori. Să notăm prin n_o cel mai mic număr natural cu proprietatea $A_n = o$, $(\forall)\, n \geqslant n_o$. Să fixăm de asemenea $(e_o', e_1', \dots, e_n', \dots)$ şi $(e_o'', e_1'', \dots, e_n'', \dots)$ baze ortonormate în U şi respectiv X.

Definim pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$

$$B_k e_i' = \begin{cases} e_i'' & o \leqslant i \leqslant k \\ o & i > k \end{cases}$$

apoi prelungim B_k prin liniaritate la întregul spaţiul U.

Este clar din definiţie că operatorul B_k este de rang finit. De asemenea rezultă uşor că operatorii C_n au rang finit, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, în plus $A_n C_n = o$, $(\forall)\, n \geqslant n_o$.

Fie acum $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i''$, un element arbitrar din X. Pentru orice $\varepsilon > o$, există un număr natural $n_1 = n_1(\varepsilon)$, care poate fi ales mai mare ca n_o, cu proprietatea

$$\|x - \sum_{i=o}^{n_1} x_i e_i''\| \leqslant \varepsilon$$

Fie $u \in s(U)$ pentru care $u_{n_1} = \sum_{i=o}^{n_1} x_i e_i' \in U$.

Atunci

$$\ldots \quad \|x-C_{n_1+1}u\| = \|x-A_{n_1}C_{n_1}u-B_{n_1}u_{n_1}\| = \|x-B_{n_1}u_{n_1}\| =$$
$$= \|x-\sum_{i=0}^{n_1} x_i B_{n_1} e_i'\| = \|x-\sum_{i=0}^{n_1} x_i e_i\| \leq \varepsilon$$

Şi de aici rezultă că sistemul discret

$$(A,B) \qquad x_{n+1} = A_n x_n + B_n u_n \,, \quad n \geq 0$$

este de tip $L'AC_0$.

Dacă ar exista $n \in \mathbb{N}$ fixat, cu proprietatea că pentru orice $x \in X$ şi orice $\varepsilon > 0$ să existe $u \in s(U)$ astfel încât

$$\|x - C_n u\| \leq \varepsilon$$

atunci, pe baza faptului că C_n are rang finit, ar rezulta că X are dimensiune finită şi obţinem o contradicţie cu ipotezele de lucru.

Din acest exemplu rezultă că, în general, $L'AC_0 \Longrightarrow AC_0$, deci în cazul sistemelor discrete (cu coeficienţi variabili) conceptele de controlabilitate cu interval de timp variabil pot fi diferite de conceptele de controlabilitate corespunzătoare cu interval de timp fixat.

<u>EXEMPLUL 3.3.18</u>. Fie $U = X = \ell^2(\mathbb{C})$, $A = 0$ şi B operatorul diagonal generat de şirul $(1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$.

Pentru orice $u = (u_n)_{n \geq 0} \in s(\ell^2(\mathbb{C}))$ putem scrie :

$$C_{n+1}u = AC_n u + Bu_n = Bu_n$$

deci, $\mathcal{R}(C_{n+1}) = \mathcal{R}(B)$.

Este clar că $\mathcal{R}(B)$ conţine toate şirurile cu suport finit şi, în consecinţă,

$$\overline{\mathcal{R}(C_{n+1})} = X$$

adică sistemul liniar discret corespunzător perechii (A,B) este de tip AC_0.

Deoarece $\ell^2(\mathbb{C}) \ni (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots) \notin \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(C_{n+1})$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, rezultă că sistemul $(A,B)_d$ nu este de tip C_0, de unde deducem că, în general, $AC_0 \not\Longrightarrow C_0$.

BUPT

EXEMPLUL 3.3.19. Fie $U = X = L^2([0,1],\mathbb{C}) = L^2[0,1]$, $A \in \mathcal{L}(X)$ un operator bijectiv şi B operatorul de înmulţire cu variabila, adică

$$(Bu)x = xu(x) \quad , \quad (\forall)\ u \in L^2[0,1] .$$

Dacă definim şirurile $\widetilde{A} = (A_n)_{n \geq 0} \in s(\mathcal{L}(X))$ şi $\widetilde{B} = (B_n)_{n \geq 0} \in s(\mathcal{L}(X))$ în modul următor :

$$A_n = A \quad , \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

$$B_n = \begin{cases} 0 & n \neq n_0 - 1 \\ B & n = n_0 - 1 \end{cases} \qquad n_0 \text{ fixat în } \mathbb{N} ,$$

atunci

$$\Phi(n_0) = A^{n_0}$$

$$C_{n_0}(u) = \sum_{j=0}^{n_0-1} A^{n_0-j-1} B_j u_j = Bu_{n_0-1}$$

de unde

$$\mathcal{R}(\Phi(n_0)) = X \quad \text{şi} \quad \mathcal{R}(C_{n_0}) = \mathcal{R}(B).$$

Fie φ o funcţie continuă şi cu suport compact în $(0,1)$. Atunci funcţia $x \longrightarrow \frac{1}{x}\varphi(x)$ aparţine spaţiului $L^2[0,1]$, deci $\varphi \in \mathcal{R}(B)$.

Din densitatea funcţiilor continue cu suport compact în $L^2[0,1]$ rezultă că

$$\mathcal{R}(\Phi(n_0)) = X = \overline{\mathcal{R}(C_{n_0})} .$$

Pe de altă parte, funcţia $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ nu aparţine spaţiului $L^2[0,1]$ şi, prin urmare, funcţia constantă 1 nu aparţine mulţimii $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(C_{n_0})$, astfel că

$$\mathcal{R}(\Phi(n_0)) \not\subset \mathcal{R}(C_{n_0}).$$

Din exemplul analizat mai sus rezultă că sistemul liniar discret (A,B) este de tip AC_1, dar nu este de tip C_1.

EXEMPLUL 3.3.20. Fie $U = X = \ell^2(\mathbb{C})$, $A = T$, $B = 0$.

Este clar că $\Phi(n) = T^n$, $C_n u = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $(\forall)\ u \in s(U)$.

Atunci

$$\|\Phi(n)x^{0} + C_{n}u\|_{2} = \|T^{n}x^{0}\|_{2} = \|(x_{n}^{0}, x_{n+1}^{0}, \dots)\|_{2} =$$

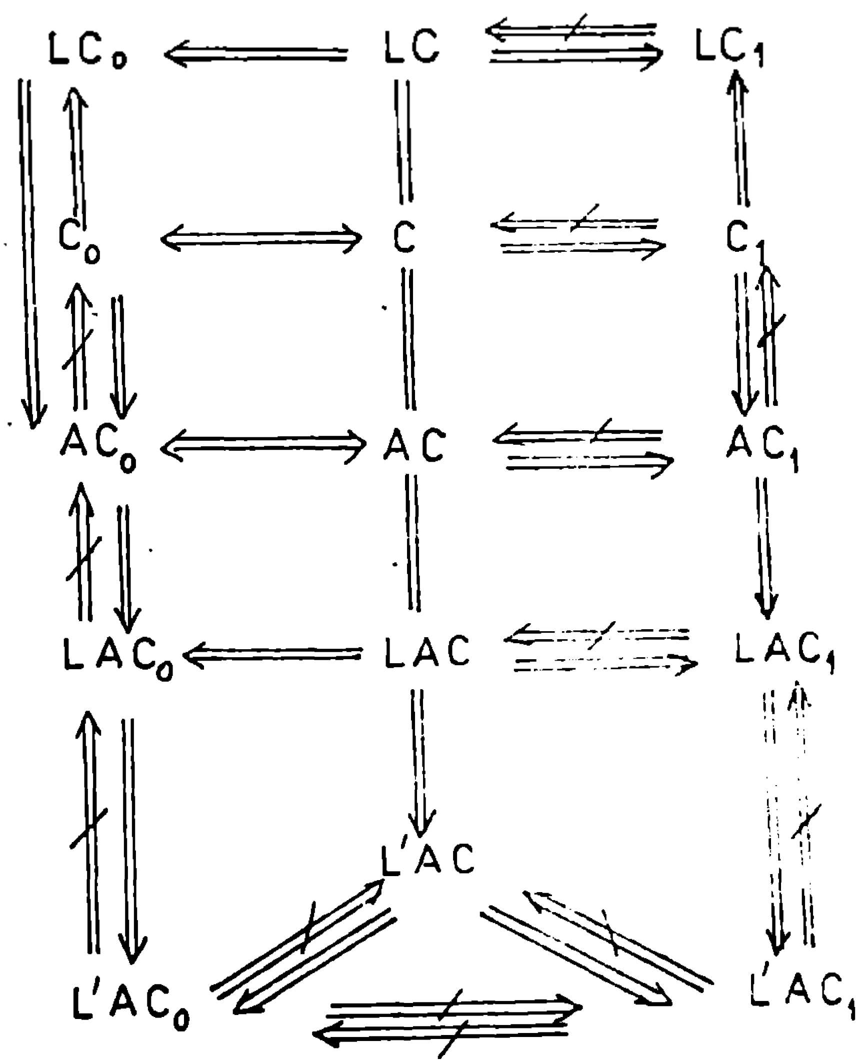
$$= \left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_{k}^{0}|^{2}\right)^{1/2} \qquad \text{pentru } n \geq n_{0}(\varepsilon, x^{0}).$$

Astfel, chiar în cazul sistemelor liniare discrete cu coeficienți constanți

$$L'AC_1 \not\Longrightarrow LAC_1.$$

Din raționamentele de mai sus rezultă că diagrama din Propoziția 3.3.4 poate fi completată cu noi informații și, în general, vom avea :

PROPOZITIA 3.3.21. Următoarea diagramă este adevărată :



CAPITOLUL IV.

APLICATII ALE CONTROLABILITĂTII LA STUDIUL UNOR PROPRIETĂTI DE OPTIMALITATE SI POZITIVITATE ALE SISTEMELOR LINIARE.

Teoria conducerii optimale a sistemelor a apărut din necesitatea rezolvării unor probleme practice puse în fața matematicii de dezvoltarea fără precedent a științei și tehnicii contemporane. Primele lucrări și studii privind teoria proceselor optimale sînt legate de lucrările lui L.S.PONTRIAGHIN și ale colaboratorilor săi [P1], [G1], [B5] care au formulat și demonstrat principiul maximului și R.BELLMAN [B11] care a pus bazele principiului programării dinamice, metode fundamentale de cercetare în teoria proceselor optimale.

In cadrul capitolului care urmează vor fi prezentate unele proprietăți ale sistemelor liniare înzestrate cu un criteriu de optimalitate, proprietăți legate într-un fel sau altul de controlabilitatea completă a sistemului respectiv. Rezultatele prezentate în cadrul acestui capitol au fost publicate în lucrările [...], [...], [...] - [T12] și în cea mai mare parte sînt legate de funcția [...] că introdusă de V.M.POPOV [P2], pentru studiul unor proprietăți de pozitivitate și hiperstabilitate a sistemelor liniare liniar-pătratice finit dimensionale.

In primul paragraf sînt prezentate proprietățile mulțimii accesibile asociate unui sistem liniar cu control, arătîndu-se că în anumite condiții acestea sînt analoage celor din cazul finit dimensional [L1]. Proprietățile mulțimii accesibile sînt aplicate, urmînd ideile lui E.B.LEE și L.MARKUS [L1], la problema existenței timpului optimal de control. In paragraful al doilea este introdusă noțiunea de familie de operatori cu [...] prin intermediul căreia este definit un model abstract de funcție [...]

teristică şi sînt precizate principalele proprietăţi ale [illegible]. În paragraful al treilea se arată că în cazul sistemelor complet controlabile, funcţia caracteristică construită generalizează noţiunea de funcţie caracteristică în sensul lui POPOV [illegible], [illegible] definirea unitară a acesteia din urmă, atît în cazul [illegible] - lor continue, cît şi în cazul [illegible].

Controlabilitatea completă a sistemului liniar [illegible] prezentarea unor caracterizări [illegible], similare caracterizărilor date [illegible] pentru cazul [illegible] dimensional. De menţionat că raţionamentele lui V.M.POPOV [illegible], fiind intim legate de dimensiunea finită a sistemului, nu [illegible] utilizate în cazul prezent [illegible].

4.1. PROPRIETĂŢI ALE [illegible]

Fie U şi X spaţii Banach reflexive, J un interval compact din $\mathbb{R}_+$, $A(.)\in L^1(J,\mathcal{L}(X))$, $B(.)\in L^p(J,\mathcal{L}(U,X))$, $1 < p < \infty$ şi U_0 o submulţime arbitrară, fixată din U. Vom nota prin

$$\mathcal{U}_0^q(J) = \{ u(.)\in L^q(J,U) \mid u(t)\in U_0 \text{ a.p.t.}, \ 1/p + 1/q = 1 \}$$

iar elementele sale vor fi numite controluri cu restricţii.

DEFINITIA 4.1.1. Starea $x_1 \in X$ se zice accesibilă (relativ la $\mathcal{U}_0^q(J)$) din faza (t_0,x_0) [illegible] şi $u(.)\in \mathcal{U}_0^q(J)$ astfel încît

$$x_1 = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)B(s)u(s)\,ds$$

unde $\Phi(.,.)$ este operatorul de evoluţie generat de $A(.)$.

Cel mai mic timp $t^* \in J$ [illegible] proprietate, [illegible] este numit timp optimal de acces [illegible] al stării [illegible] din faza (t_0,x_0), iar funcţia de control [illegible] $\in \mathcal{U}_0^q(J)$ este numită control optimal. [illegible] de control cu timp optimal [illegible] jos.

DEFINIȚIA 4.1.2. [illegible]

faza (t_0, x_0) mulțimea [illegible]

$K(t) = K(t; t_0, x_0) = \{ \ldots \in [illegible]$

PROPOZIȚIA 4.1.3. Dacă U_0 [illegible]

mea $K(t)$ este mărginită în X.

Demonstrație : Fie [illegible] $\geq$ [illegible] $\|u\| \leq$ [illegible] $\in$

Dacă $x \in K(t)$, atunci [illegible] $\in \mathcal{U}$ [illegible]

$$x = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \ldots$$

deci

$$\|x\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \cdot \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|\Phi(t, s)\| \cdot \|B(s)\| \ldots \leq \ldots$$

deoarece

$$\|\Phi(t, s)\| \cdot \|B(s)\| \in L^{\ldots}([t_0, t], R).$$

LEMA 4.1.4. Dacă U_0 [illegible]

$\mathcal{U}_0^q([t_0, t])$ este o mulțime [illegible] închisă în [illegible] $[t_0, t]$.

Demonstrație : Pentru [illegible] $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ [illegible]

$$\|u(\cdot)\| = \left(\int_{t_0}^{t} \|u(s)\| \ldots \right)^{1/\ldots} \leq \ldots (t - t_0) \ldots$$

Fie $u_n(\cdot) \in \mathcal{U}_0^q([t_0, t])$, $u_n(\cdot) \longrightarrow u(\cdot)$ în $L^q([t_0, t], \ldots)$. Atunci

există un subșir $(u_{n_k}(\cdot))$ [illegible] $k \geq 0$, convergent a.p.t. la $u(\cdot)$. Deoarece [illegible] $\in$ [illegible], pentru

fiecare $n \in N$, există o mulțime $\Omega_n \subset [t_0, t]$ cu $\mu(\Omega_n) = 0$ astfel încât

$u_n(s) \in U_0$, $(\forall)\ s \in [t_0, t] \setminus \Omega_n$. [illegible]

$\bar{\Omega} \subset [t_0, t]$ cu $\mu(\bar{\Omega}) = 0$ [illegible] $u_{n_k}(s) \longrightarrow u(s)$ [illegible] $[t_0, t] \setminus \bar{\Omega}$.

Fie $\Omega = \bar{\Omega} \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n)$. Atunci, pentru orice $s \in [t_0, t] \setminus \Omega$,

$U_0 \ni u_{n_k}(s) \longrightarrow u(s)$ și din ipoteza că U_0 este închisă rezultă

$u(s) \in U_0$, $(\forall)\ s \in [t_0, t] \setminus \Omega$, cu $\mu(\Omega) = 0$.

CONCLUZIA 4.1.5. [illegible]

$\mathcal{U}_0^q([t_0, t])$ este convexă [illegible] $[t_0, t]$ [illegible]

Demonstrație : Conform ... $\mathcal{U}_{\partial}^{q}([t_0,t])$ ... mărginită și închisă în spațiul ... reflexiv $L^q([t_0,t],U)$, ... este (secvențial) slab comp... $[5]$.

LEMA 4.1.5. Dacă U_0 ... convexă în $L^q(J,U)$.

Demonstrație : Într-ad... $u_1(\cdot)\in\mathcal{U}$ ... $\Omega \subset$ $\subset J$ cu $\mu(\Omega_1) = 0$ ... $\in$ ... $\setminus\Omega$ ... unde, pentru orice $\lambda \in [$ ... $]$

$$\lambda u_1(t) + (1-\lambda)u_2(t) \in \ldots, \quad (\forall) t \in \setminus(\Omega_1 \cup \Omega_2).$$

PROPOZIȚIA 4.1.6. Dacă ... este mărginită și închisă ... pentru fiecare $t\in J$, mulțimea ... (t) este ...

Demonstrație : Utilizând ... străm doar închiderea mulțimii ... (t).

Fie deci $x_n\in K(t)$, $x_n \longrightarrow$ ... Există ... $(u_n(\cdot))_{n\geq 0}$, $u_n(\cdot)\in\mathcal{U}_{\partial}^{q}([t_0,t])$ ...

$$x_n = \Phi(t,t_0)x_0 + \int \Phi(t,s)B(s)u_n(s)ds.$$

Dar, conform consecinței ..., $\mathcal{U}_{\partial}^{q}([t_0,t])$ este ... slab compactă în $L^q([t_0,t],U)$ ... găsind la nevoie un subșir, ... gent în $L^q([t_0,t],U)$ ... $\in\mathcal{U}_{\partial}([t_0,t])$.

Fie

$$x' = \Phi(t,t_0)x_0 + \int \Phi(t,s)B(s)u(s)ds \in K(t).$$

Pentru orice $x^*\in X^*$ vom ...

$$\langle x_n - x', x^*\rangle = \langle \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)B(s)[u_n(s)-u(s)]ds, x^*\rangle =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \langle u_n(s)-u(s), B^*(s)\Phi^*(t,s)x^*\rangle \longrightarrow 0 \quad \ldots \; n\to\infty$$

deci x_n converge la x' ... $x_n \longrightarrow$ ... X, rezultă că

$$x' = \bar{x} = \Phi(t,t_0)x_0 + \int \Phi(t,s) \ldots \in \ldots.$$

<u>CONSECINȚA 4.1.7</u>. Dacă U_0 este mărginită și închisă atunci $K(t)$ este (secvențial) slab compactă în X, pentru fiecare $t \in J$.

<u>PROPOZIȚIA 4.1.8</u>. Dacă mulțimea U_0 este convexă atunci și mulțimea $K(t)$ este convexă.

Demonstrație : U_0 fiind convexă, din Lema 4.1.5, rezultă $\mathcal{U}_0^q(J)$ este convexă în $L^q(J,U)$ și rămîne să observăm că mulțimea $K(t)$ este translatată prin vectorul $\Phi(t,t_0)x_0$ a imaginii unei mulțimi convexe printr-un operator liniar și mărginit.

In continuare, vom considera pe spațiul Banach X distanța Hausdorff-Pompeiu, adică pentru K_1 și K_2 mulțimi închise convexe și mărginite în X, definim

$$d(K_1,K_2)= \max\Big(\max_{x\in K_1} d(x,K_2), \max_{x\in K_2} d(x,K_1)\Big).$$

<u>TEOREMA 4.1.9</u>. Dacă U_0 este o mulțime convexă, închisă și mărginită din U, atunci mulțimea accesibilă $K(t)$ depinde continuu de t, în sensul metricii Hausdorff-Pompeiu.

Demonstrație : Conform enunțului, va trebui să demonstrăm că pentru orice $t_1 \in J$ și orice $\varepsilon > 0$, există $0 < \delta < 1/2$, astfel încît pentru orice $t_2 \in J$ cu $|t_2-t_1| < \delta$ să avem $d(K(t_1),K(t_2)) < \varepsilon$.

Fie $x_1 \in K(t_1)$, adică există un control $u(.) \in \mathcal{U}_0^q(J)$ astfel încît

$$x_1 = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t,s)B(s)u(s)ds.$$

Fie $u_0 \in U_0$ fixat. Definim controlul

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [t_0,t_1] \\ u_0 & t \in (t_1,t_1+1] \\ 0 & t > t_1+1 \end{cases}$$

este clar că $\bar{u}(.) \in \mathcal{U}_0^q(J)$.

Notăm

$$x_2 = \Phi(t_2,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_2,s)B(s)\bar{u}(s)ds \in K(t_2)$$

și avem

$$\|x_2-x_1\| \leqslant \|\Phi(t_2,t_1)-I\|(\|\Phi(t_1,t_0)x_0\| +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}\|\Phi(t_1,s)B(s)u(s)\|ds) + \int_{t_1}^{t_2}\|\Phi(t_2,t_1)B(s)u_0\|ds.$$

Deoarece

$$\|\Phi(t_2,t_1)-I\|(\|\Phi(t_1,t_0)x_0\| + \int_{t_0}^{t_1}\|\Phi(t_1,s)B(s)u(s)\|ds) \leqslant$$
$$\leqslant \|\Phi(t_2,t_1)-I\| \max_{(t,s)\in[t_0,t_1]}\|\Phi(t,s)\|(\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_1}\|B(s)u(s)\|ds) =$$
$$= \|\Phi(t_2,t_1)-I\|.C_{t_1} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } |t_2-t_1| < \delta'$$

în virtutea continuității operatorului $\Phi(.,.)$, iar

$$\int_{t_1}^{t_2}\|\Phi(t_2,s)B(s)u_0\|ds < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } |t_2-t_1| < \delta''.$$

în virtutea absolut continuității integralei, obținem

$$\|x_2-x_1\| < \varepsilon, \text{ pentru } |t_2-t_1| < \delta = \min(\delta', \delta'', 1/2).$$

De aici

$$d(x_1,K(t_2)) = \inf_{x\in K(t_2)}\|x_1-x\| \leqslant \|x_1-x_2\|$$

Analog, dacă alegem $x_2 \in K(t_2)$, repetînd raționamentul precedent, obținem

$$d(x_2,K(t_1)) < \varepsilon, \text{ pentru } |t_2-t_1| < \varepsilon,$$

de unde rezultă proprietatea din enunț.

<u>TEOREMA 4.1.10</u>. Dacă există $t_1 \in J$ astfel încît faza (t_1,x_1) este accesibilă din faza (t_0,x_0), atunci există timp optimal de control al stării x_1.

Demonstrație : Fie $A = \{t \in J | x_1 \in K(t)\}$. Este clar că $t_1 \in A$, conform ipotezei.

Fie $t^* = \inf A$. Pentru a demonstra afirmația este suficient să arătăm că $x_1 \in K(t^*)$.

Să presupunem, prin absurd, că $x_1 \notin K(t^*)$. Utilizînd proprietățile mulțimii $K(t^*)$ rezultă că $d(x_1,K(t^*)) = 2\varepsilon_0 > 0$. Dar, conform Teoremei 4.1.9, există $\delta_0 > 0$, astfel ca $|t-t^*| < \delta_0$

implică $d(K(t),K(t^*)) < \mathcal{E}_0$. De aceea, pentru $|t-t^*| < \delta_0$, rezultă $x_1 \in K(t)$ (în caz contrar $2\mathcal{E}_0 = d(x_1,K(t^*)) < d(K(t),K(t^*)) < \mathcal{E}_0$). Rezultatul obţinut contrazice alegerea lui t^*, deci $x_1 \in K(t^*)$, adică există un control optimal $u^*(.) \in \mathcal{U}_0^q(J)$, care transferă faza (t_0,x_0) în faza (t^*,x_1), iar t^* este cel mai mic cu această proprietate.

In teorema precedentă am impus sistemului liniar cu control (A,B) un criteriu de optimalitate (transferarea stării x_0 în starea x_1 în cel mai scurt timp posibil). Această problemă are în teoria sistemelor cu control, denumirea de problema timpului optimal de control, iar soluţionarea ei prin Teorema 4.1.1o urmează ideile lui E.B.LEE şi S.MARCUS [L_1] din cazul finit dimensional.

In teoria sistemelor liniare cu control există la ora actuală o mare diversitate de criterii de calitate, faţă de care se cere determinarea sau măcar demonstrarea existenţei controlului optimal.

Printre criteriile de calitate mult abordate în literatura de specialitate se numără şi criteriul pătratic (numit şi funcţională de cost pătratică). Problema transferului stării x_0 în starea x_1 cu minimizarea funcţionalei de cost pătratice este cunoscută sub numele de problema liniar-pătratică.

In mulţimea tuturor sistemelor liniare finit dimensionale cu control, înzestrate cu criteriul de calitate pătratic, V.M.POPOV [P_2] introduce o relaţie de echivalenţă şi identificînd sistemele modulo echivalenţa introdusă, asociază fiecărui sistem o funcţie matricială numită de V.M.POPOV funcţia caracteristică a sistemului respectiv. Această funcţie are implicaţii profunde în studiul pozitivităţii, hiperstabilităţii şi optimalităţii sistemelor liniare.

4.2. FUNCTIA CARACTERISTICĂ ABSTRACTĂ

In acest paragraf vom introduce un model abstract de funcţie caracteristică asociată unei matrici operatoriale (de fapt unei clase de echivalență de astfel de matrici) și vom arăta apoi că putem obține, prin particularizare, funcția caracteristică Popov și principalele sale proprietăți, atît pentru cazul sistemelor continue, cît și pentru cazul sistemelor discrete. Rezultatele prezentate aici au fost publicate în $[T_7]$, $[A_9]$, $[F_{11}]$.

Fie U și X spații Hilbert și să fixăm perechea de operatori (A,B), $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(U,X)$. Dacă notăm Z și $\mathcal{H}$ spațiile Hilbert $Z = U \times X$, respectiv $\mathcal{H} = X \times U \times X$, putem introduce operatorii $C \in \mathcal{L}(Z,\mathcal{H})$ și $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}),\mathcal{L}(Z))$ definiți în modul următor :

$$C = \begin{bmatrix} B & A \\ I_U & 0 \\ 0 & I_X \end{bmatrix}$$

și

$$\Psi(\Delta) = C^* \Delta C \quad , \quad (\forall) \quad \Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

unde I_U (I_X) notează operatorul identic în U (respectiv în X).

<u>LEMA 4.2.1</u>. Fie

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

Atunci

a) $$\Psi(\Delta) = \begin{bmatrix} B^*\Delta_{11}B + \Delta_{21}B + B^*\Delta_{12} + \Delta_{22} & B^*\Delta_{11}A + \Delta_{21}A + B^*\Delta_{13} + \Delta_{23} \\ A^*\Delta_{11}B + \Delta_{31}B + A^*\Delta_{12} + \Delta_{32} & A^*\Delta_{11}A + \Delta_{31}A + A^*\Delta_{13} + \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

b) $\Delta \in \mathcal{N}(\Psi)$ dacă și numai dacă următoarele egalități sînt adevărate

$$\begin{aligned} \Delta_{22} &= -B^*\Delta_{11}B - \Delta_{21}B - B^*\Delta_{12} \\ \Delta_{23} &= -B^*\Delta_{11}A - \Delta_{21}A - B^*\Delta_{13} \\ \Delta_{32} &= -A^*\Delta_{11}B - \Delta_{31}B - A^*\Delta_{12} \\ \Delta_{33} &= -A^*\Delta_{11}A - \Delta_{31}A - A^*\Delta_{13} \end{aligned}$$

Demonstrația rezultă prin calcule elementare folosind definiția lui $\Psi(\Delta)$.

DEFINIȚIA 4.2.2. Spunem că familia $(C_\alpha)_{\alpha\in J}$ de operatori din $\mathcal{L}(U,X)$ are proprietatea de generare sau pe scurt proprietatea (G) dacă

i) $C_\alpha \neq 0$, $(\forall)\ \alpha \in J$

ii) $\bigvee_{\alpha\in J} \mathcal{R}(C_\alpha) = X$.

LEMA 4.2.3. Dacă familia $(C_\alpha)_{\alpha\in J} \subset \mathcal{L}(U,X)$ are proprietatea (G) și există un șir de indici α_n cu proprietatea $\lim_{n\to\infty} C_{\alpha_n} = 0$ în topologia normei operatorilor, atunci familia $\begin{bmatrix} I_U \\ C_\alpha \end{bmatrix}_{\alpha\in J}$ din $\mathcal{L}(U,Z)$ are de asemenea proprietatea (G).

Demonstrație : Să presupunem că $(u_0,x_0)\in Z$ este ortogonal pe $\bigvee_{\alpha\in J} \mathcal{R}\begin{bmatrix} I_U \\ C_\alpha \end{bmatrix}$, adică

$$\langle u_0,u\rangle + \langle x_0, C_\alpha u\rangle = 0 \quad , \quad (\forall)\ \alpha\in J\ ,\ (\forall)\ u\in U.$$

Din ipoteză, există un subșir $(C_{\alpha_n})_{n\geq 0}$ cu proprietatea $\lim_{n\to\infty} C_{\alpha_n} = 0$ în norma lui $\mathcal{L}(U,X)$ și pentru care relația precedentă este satisfăcută. Prin trecere la limită obținem

$$\langle u_0,u\rangle = 0 \quad , \quad (\forall)\ u\in U$$

de unde rezultă că $u_0 = 0$ și $\langle x_0, C_\alpha u\rangle = 0$, $(\forall)\ \alpha\in J$.

Deoarece $\bigvee_{\alpha\in J} \mathcal{R}(C_\alpha) = X$ rezultă că și $x_0 = 0$, deci

$$\left[\bigvee_{\alpha\in J} \mathcal{R}\begin{bmatrix} I_U \\ C_\alpha \end{bmatrix}\right]^{\perp} = \{0\} \quad \text{sau} \quad \bigvee_{\alpha\in J} \mathcal{R}\begin{bmatrix} I_U \\ C_\alpha \end{bmatrix} = Z.$$

Cum condiția i) din Definiția 4.2.2 este satisfăcută, rezultă că familia $\begin{bmatrix} I_U \\ C_\alpha \end{bmatrix}_{\alpha\in J}$ are proprietatea (G).

DEFINIȚIA 4.2.4. Funcția operatorială $\chi : J \times J \times \mathcal{L}(Z) \longrightarrow \mathcal{L}(U)$ definită prin egalitatea

$$\chi(\alpha,\beta,D) = \begin{bmatrix} I_U \\ C_\beta \end{bmatrix}^{*} \cdot D \cdot \begin{bmatrix} I_U \\ C_\alpha \end{bmatrix}$$

va fi numită funcția caracteristică (abstractă) în $\mathcal{L}(Z)$, generată de familia (cu proprietatea (G)) $(C_\alpha)_{\alpha\in J}$.

OBSERVATIA 4.2.5. Dacă $D \in \mathcal{L}(Z)$ este un operator fixat, atunci vom nota $\chi_D(\alpha,\beta)$ în loc de $\chi(\alpha,\beta,D)$ şi vom spune că $\chi_D : J \times J \longrightarrow \mathcal{L}(U)$ este funcţia caracteristică asociată operatorului D.

PROPOZITIA 4.2.6. Funcţia caracteristică are următoarele proprietăţi :

a) $D \longrightarrow \chi_D$ este liniară şi injectivă ;

b) $\left[\chi_D(\alpha,\beta)\right]^* = \chi_{D^*}(\beta,\alpha)$, $(\forall)$ $D \in \mathcal{L}(Z)$, $(\forall)$ $\alpha,\beta \in J$;

c) Dacă $D = D^* \in \mathcal{L}(Z)$, atunci $\chi_D(\alpha,\alpha)$ este autoadjunct pentru orice $\alpha \in J$;

d) Dacă $D = \begin{bmatrix} K & L_1 \\ L_2 & M \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(Z)$ atunci

$$\chi_D(\alpha,\beta) = K + C_\beta^* L_1 + L_2 C_\alpha + C_\beta^* M C_\alpha .$$

Demonstraţie : a) Liniaritatea este o consecinţă imediată a definiţiei funcţiei caracteristice.

Pe baza liniarităţii, injectivitatea va fi demonstrată dacă reuşim să arătăm că $\chi_D = 0$ implică $D = 0$. Dar, $\chi_D = 0$ conduce la

$$\left\langle \begin{bmatrix} I_U \\ C_\beta \end{bmatrix}^* D \begin{bmatrix} I_U \\ C_\alpha \end{bmatrix} (u',x'),(u'',x'') \right\rangle = 0,\ (\forall)\ \alpha,\beta \in J,\ (\forall)\ (u',x'),(u'',x'') \in Z,$$

sau echivalent,

$$\left\langle D \begin{bmatrix} I_U \\ C_\alpha \end{bmatrix} (u',x'), \begin{bmatrix} I_U \\ C_\beta \end{bmatrix} (u'',x'') \right\rangle = 0,\ (\forall)\ \alpha,\beta \in J,\ (\forall)\ (u',x'),(u'',x'') \in Z.$$

Deoarece, conform Lemei 4.2.3, $\bigvee_{\alpha \in J} \mathcal{R}\begin{bmatrix} I_U \\ C_\alpha \end{bmatrix} = Z$, obţinem că $D = 0$.

Proprietăţile b) - d) rezultă prin calcul direct din definiţia funcţiei caracteristice.

DEFINITIA 4.2.7. Funcţia caracteristică $\chi_{\Psi(\Delta)}$ va fi notată χ_Δ şi va fi numită funcţie caracteristică asociată operatorului $\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

OBSERVATIA 4.2.8. Identificînd $\mathcal{L}(Z)$ cu un subspațiu al spațiului $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ prin corespondența

$$\mathcal{L}(Z)\ni D=\begin{bmatrix} K & L_1 \\ L_2 & M \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & L_1 \\ 0 & L_2 & M \end{bmatrix} = \Delta\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$$

avem $\Psi(\Delta)=D$ și, prin urmare, Definiția 4.2.7 este de fapt o extensie a Definiției 4.2.4 de la $\mathcal{L}(Z)$ la $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

OBSERVATIA 4.2.9. Deoarece $\chi_{\Delta'}=\chi_{\Delta''}$ dacă și numai dacă $\Psi(\Delta'-\Delta'')=0$, adică $\Delta'-\Delta''\in\mathcal{N}(\Psi)$, rezultă că funcția caracteristică în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se asociază în realitate unei clase de echivalență și nu unui operator.

4.3. FUNCTIA CARACTERISTICĂ POPOV

Fie $A\in\mathcal{L}(X)$, $B\in\mathcal{L}(U,X)$, $u(.)\in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,U)$. Vom nota prin

$$\mathcal{M}_{x_0}=\{z(.)=(u(.),x(.))\mid u(.)\in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,U),\ x(.)\in \mathcal{C}^{\#}(\mathbb{R}_+,X),$$
$$\dot{x}(t)=Ax(t)+B\,u(t)\ \text{ a.p.t. și } x(0)=x_0\}$$

și fie

$$\mathcal{M}=\bigcup_{x_0\in X}\mathcal{M}_{x_0}.$$

Vom asocia sistemului (A,B) un criteriu de calitate $[P_2]$ definit prin :

$$\mathcal{X}(z(.))=\langle Nx(t),x(t)\rangle-\langle Nx(0),x(0)\rangle+\int_0^t(\langle Ku(s),u(s)\rangle+$$
$$+2\mathrm{Re}\langle Lu(s),x(s)\rangle+\langle Mx(s),x(s)\rangle)ds$$

unde $N=N^*\in\mathcal{L}(X)$, $M=M^*\in\mathcal{L}(X)$, $K=K^*\in\mathcal{L}(U)$ și $L\in\mathcal{L}(U,X)$ iar $z(.)=(u(.),x(.))$.

Sistemul (A,B) înzestrat cu funcționale de cost $\mathcal{X}$ va fi notat pe scurt $[A,B;K,L,M,N]$.

Funcționala de cost $\mathcal{X}$ mai poate fi scrisă $[P_2]$:

$$\mathcal{X}(z(.))=\int_0^t\langle\begin{bmatrix} 0 & 0 & N \\ 0 & K & L^* \\ N & L & M \end{bmatrix}Cz(s),Cz(s)\rangle ds\ ,\ (\forall)\ z(.)\in\mathcal{M}$$

sau, folosind operatorul Ψ .

$$\mathcal{K}(z(.))= \int_0^t \langle \Psi(\Delta)z(s),z(s)\rangle ds \ , \ (\forall)\ z(.)\in \mathcal{M}$$

unde

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N \\ 0 & K & L^* \\ N & L & M \end{bmatrix}$$

Este destul de clar, din raţionamentele precedente, că ... identifica mulţimea tuturor funcţionalelor de cost cu un subspaţiu liniar (real) al spaţiului $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

PROPOZITIA 4.3.1. Familia de operatori $\{R(\lambda,A)B\}_{\lambda\in\rho(A)}$ din $\mathcal{L}(U,X)$ are proprietatea (G) dacă şi numai dacă sistemul (A,B) este complet controlabil (aproximativ).

Demonstraţie : Pentru $\lambda\in\rho(A)$ cu proprietatea $|\lambda| > \|A\|$ putem scrie

$$R(\lambda,A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$$

şi, în consecinţă

$$\langle R(\lambda,A)Bu,x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \langle A^n Bu,x\rangle .$$

De aceea

$$x \perp R(\lambda,A)BU$$

atunci şi numai atunci cînd

$$x \perp \sum_{n=0}^{\infty} A^n BU.$$

Afirmaţia propoziţiei rezultă acum din caracterizarea controlabilităţii complete precizată în Propoziţia 3.2.3 şi din faptul că

$$\lim_{\lambda\to\infty} R(\lambda,A)B = 0.$$

OBSERVATIA 4.3.2. Dacă sistemul (A,B) este complet controlabil (aproximativ), familia $\{R(\lambda,A)B\}_{\lambda\in\rho(A)}$ generează o funcţie caracteristică în $\mathcal{L}(Z)$ şi, prin extensie, în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. In tot restul acestui paragraf vom presupune că sistemul (A,B) este complet controlabil (aproximativ).

Deoarece pentru fiecare $\Delta\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de forma

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N \\ 0 & K & L^* \\ N & L & M \end{bmatrix}$$

obţinem prin calcul direct, sau folosind Lema 4.2.1

$$\Psi(\Delta) = \begin{bmatrix} K & (L+NB)^{*} \\ L+NB & M+A^{*}N+NA \end{bmatrix}$$

şi

$$\chi_{\Delta}(\lambda,\mu) = K + (L+NB)^{*}R(\lambda,A)B + B^{*}R(\bar{\mu},A^{*})(L+NB) + B^{*}R(\bar{\mu},A^{*})(M+A^{*}N+NA)R(\lambda,A)B$$

sau, folosind proprietăţi cunoscute ale operatorului rezolvent,

$$\chi_{\Delta}(\lambda,\mu) = K + (L+NB)^{*}R(\lambda,A)B + B^{*}R(\bar{\mu},A^{*})(L+NB) + B^{*}R(\bar{\mu},A^{*})(M+(\lambda+\bar{\mu})N)R(\lambda,A)B$$

formă din care rezultă că funcţia caracteristică introdusă aici coincide cu funcţia caracteristică introdusă de V.M.Popov [illegible] pentru sistemul $[A,B;K,L,M,N]$.

<u>TEOREMA 4.3.3</u>. Fie $\tilde{\mathcal{H}}_c$ mulţimea tuturor operatorilor din $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de forma

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N \\ 0 & K & L^{*} \\ N & L & M \end{bmatrix} ; \quad N = N^{*},\ M = M^{*} \in \mathcal{L}(X),\ K = K^{*} \in \mathcal{L}(U),\ L \in \mathcal{L}(U,X),$$

şi $z(.), z_1(.)$ arbitrare în $\mathcal{M}$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

a) $\Psi(\Delta) = 0$ dacă şi numai dacă există un operator $R = R^{*} \in \mathcal{L}(X)$ astfel încît

$$N = -R,\ L = RB,\ M = A^{*}R + RA,\ K = 0;$$

b) $\langle \Delta C z_1(t), C z_2(t) \rangle = \frac{d}{dt} \langle N x_1(t), x_2(t) \rangle + \left\langle \begin{bmatrix} K & L^{*} \\ L & M \end{bmatrix} z_1(t), z_2(t) \right\rangle$

c) $\langle (\Delta + \Delta_R) C z_1(t), C z_2(t) \rangle = \langle \Delta C z_1(t), C z_2(t) \rangle$

unde

$$\Delta_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -R \\ 0 & 0 & (RB)^{*} \\ -R & RB & RA+A^{*}R \end{bmatrix}, \quad R = R^{*} \in \mathcal{L}(X)$$

d)
$$\begin{aligned} \mathcal{X}(z(.)) &= \langle N x(t), x(t) \rangle - \langle N x(0), x(0) \rangle + \int_0^t \left\langle \begin{bmatrix} K & L^{*} \\ L & M \end{bmatrix} z(s), z(s) \right\rangle ds = \langle (N-R)x(t), x(t) \rangle - \\ &- \langle (N-R)x(0), x(0) \rangle + \int_0^t \left\langle \begin{bmatrix} K & (L+RB)^{*} \\ L+RB & M+A^{*}R+RA \end{bmatrix} z(s), z(s) \right\rangle ds \end{aligned}$$

$$\forall\, R = R^{*} \in \mathcal{L}(X).$$

e) $\chi_\Delta(\lambda,\lambda) = \left[\chi_\Delta(\lambda,\lambda)\right]^*$; $(\forall)\ \lambda \in \rho(A)$.

Demonstrație : Afirmația a) este o consecință a Lemei 4.[illegible].1.

Pentru a demonstra b) să observăm că pentru $z_1(\cdot), z_2(\cdot) \in \mathcal{M}$ putem scrie

$$\langle \Delta C z_1(t), C z_2(t) \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 & N \\ 0 & K & L^* \\ N & L & M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ u_1(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ u_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$= \langle N x_1(t), \dot{x}_2(t) \rangle + \langle N \dot{x}_1(t), x_2(t) \rangle + \left\langle \begin{bmatrix} K & L^* \\ L & M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{d}{dt} \langle N x_1(t), x_2(t) \rangle + \left\langle \begin{bmatrix} K & L^* \\ L & M \end{bmatrix} z_1(t), z_2(t) \right\rangle .$$

Afirmația c) este o consecință din a), iar d) rezultă ținînd cont de a), b) și c), integrînd între limitele 0 și t.

Proprietatea e) este o consecință a proprietății c) din Propoziția 4.2.6 și a faptului că $\Delta = \Delta^*$.

<u>DEFINITIA 4.3.4</u>. Vom zice că sistemul liniar pătratic $[A,B;K,L,M,N]$ este pozitiv dacă există un operator $R = R^* \in \mathcal{L}(X)$ cu proprietatea că operatorul autoadjunct

$$\begin{bmatrix} K & (L+RB)^* \\ L+RB & M+A^*R+RA \end{bmatrix} ; \quad U \oplus X \longrightarrow U \oplus X$$

este pozitiv definit.

<u>TEOREMA 4.3.5</u>. Fie $(A,B) \in \sum_c$ cu proprietatea $i\omega \in \rho(A)$, $(\forall)\ \omega \in \mathbb{R}$ și Δ un operator de cost generat de operatorii K, L, M, N. Următoarele afirmații sînt echivalente :

a) $[A,B;K,L,M,N]$ este pozitiv ;

b) Sistemul operatorial

$$S^*S = K$$
$$L + RB = TS$$
$$M + A^*R + RA = TT^*$$

numit sistemul Lurie are o soluție (R,S,T), $R = R^* \in \mathcal{L}(X)$, $S \in \mathcal{L}(U,X)$, $T \in \mathcal{L}(X)$;

c) $\chi_\Delta(\lambda,-\lambda) = F^*(-\bar{\lambda})F(\lambda)$, $(\forall)\lambda \in \rho(A)$, unde $F(\lambda) = S + T^*R(\lambda,A)B$;

d) $\chi_{\Delta}(i\omega, i\omega) \geq 0$, $(\forall)\, \omega \in \mathbb{R}$.

Demonstrație : Pentru a demonstra că a)$\Longrightarrow$b) să presupunem a) adevărată, deci există $R = R^* \in \mathcal{L}(X)$ cu proprietatea

$$\begin{bmatrix} K & (L + RB)^* \\ L + RB & M + A^*R + RA \end{bmatrix} \geq 0 .$$

Notînd cu P rădăcina pătrată pozitivă a acestui operator și cu $Z_0 = \mathcal{R}P$, putem construi o izometrie parțială $\Pi : U \oplus X \longrightarrow U$ al cărui spațiu inițial să fie Z_0. Se știe [..] că $\Pi^*\Pi$ coincide cu proiectorul ortogonal pe Z_0.

Dacă notăm prin $Q = \Pi P : U \oplus X \longrightarrow U$, atunci este clar că operatorul Q admite o scriere matricială de forma $Q = [S \;\; T^*]$ și, în consecință

$$Q^*Q = P\Pi^*\Pi P = P^2 = \begin{bmatrix} K & (L + RB)^* \\ TS & TT^* \end{bmatrix}$$

Pe de altă parte

$$Q^*Q = \begin{bmatrix} S^* \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & T^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^*S & S^*T^* \\ TS & TT^* \end{bmatrix}$$

și b) rezultă acum prin identificarea elementelor celor două matrici operatoriale.

b)$\Longrightarrow$c). Fie $z_{\lambda,u}(t) = (u, R(\lambda, A)Bu)e^{\lambda t}$. Prin calcul direct rezultă

$$Cz_{\lambda,u}(t) = \begin{bmatrix} B & A \\ I_U & 0 \\ 0 & I_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t}u \\ \\ e^{\lambda t}R(\lambda, A)Bu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t}(Bu + AR(\lambda, A)Bu) \\ e^{\lambda t}u \\ e^{\lambda t}\; R(\lambda, A)Bu \end{bmatrix} =$$

$$= e^{\lambda t}\begin{bmatrix} Bu - Bu + \lambda R(\lambda, A)Bu \\ u \\ R(\lambda, A)Bu \end{bmatrix} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} \lambda R(\lambda, A)Bu \\ u \\ R(\lambda, A)Bu \end{bmatrix}$$

deci

$$\Delta Cz_{\lambda,u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N \\ 0 & K & L^* \\ N & L & M \end{bmatrix} Cz_{\lambda,u}(t) = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} NR(\lambda, A)Bu \\ Ku + L^*R(\lambda, A)Bu \\ \lambda NR(\lambda, A)Bu + Lu + MR(\lambda, A)Bu \end{bmatrix}$$

de unde

$$\langle \Delta Cz_{\lambda,u_1}(t), Cz_{\lambda,u_2}(t)\rangle = [\langle NR(\lambda, A)Bu_1, \lambda R(\lambda, A)Bu_2\rangle + \langle Ku_1 +$$

$$+ L^*R(\lambda, A)Bu_1, u_2\rangle + \langle \lambda NR(\lambda, A)Bu_1 + Lu_1 +$$

$(\lambda, A)Bu_1, R(\lambda, A)Bu_2\rangle] \cdot e^{(\lambda+\bar\lambda)t} = [\langle\bar\lambda ... (\bar\lambda, A^*) ... R(\lambda, A)Bu_1 +$
$L^*R(\lambda, A)B)u_1 + (\lambda B^*R(\bar\lambda, A^*)NR(\lambda, A)B + B^*R(\bar\lambda, A^*)L +$
$R(\bar\lambda, A^*)MR(\lambda, A)B)u_1, u_2\rangle \cdot e^{(\lambda+\bar\lambda)t} = \langle[...(\lambda, A)B + B^* ...(\bar\lambda, ...) ... +$
$R(\bar\lambda, A^*)[M + (\lambda+\bar\lambda)N]R(\lambda, A)B\ u_1, u_2\rangle e^{(\lambda+\bar\lambda)t} =$
$\chi_\Delta(\lambda, \bar\lambda)u_1, u_2\rangle e^{(\lambda+\bar\lambda)t}$

vident

$e^{\lambda t}R(\lambda, A)Bu_1, e^{-\bar\lambda t}R(\lambda, A)u_2\rangle = \text{constant}, \ (\forall)\ X \in \mathcal{L}(X)$.

Conform Propoziţiei 4.3.3 b) - c), avem

$Cz_1(t), Cz_2(t)\rangle = \langle(\Delta + \Delta_R)Cz_1(t), z_2(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle(H-R)z_1(t), z_2(t)\rangle$ ...

$$\langle \begin{bmatrix} K & (L+RB)^* \\ L+RB & M+A^*R+RA \end{bmatrix} z_1(t), z_2(t)\rangle, \quad (\forall)\ z_1(.), z_2(.) \in \mathcal{M}.$$

d în vedere cele de mai sus, obţinem

$$\chi_\Delta(\lambda, -\bar\lambda)u_1, u_2\rangle = \langle \begin{bmatrix} K & (L+RB)^* \\ L+RB & M+A^*R+RA \end{bmatrix} z_{\lambda, u_1}(t), z_2(t)\rangle =$$

$$= \langle \begin{bmatrix} S^* \\ T \end{bmatrix} \cdot [S \quad T^*] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ R(\lambda, A)Bu_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ R(-\bar\lambda, A)Bu_2 \end{bmatrix} \rangle =$$

$$= \langle (S + T^*R(\lambda, A)B)u_1, (S + T^*R(-\bar\lambda, A)B)u_2\rangle =$$

$$= \langle F^*(-\bar\lambda)F(\lambda)u_1, u_2\rangle, \quad (\forall)\ \lambda \in \rho(A);$$

c)$\Longrightarrow$d). Dacă c) este adevărată şi $\lambda = i\omega$, din c) rezultă

$$\langle \chi_\Delta(i\omega, i\omega)u, u\rangle = \|F(i\omega)u\|^2 \geq 0, \quad (\forall)\ u \in U.$$

d)$\Longrightarrow$b) se obţine dintr-un rezultat al lui YAKUBOVICH V. [Y_2]

b)$\Longrightarrow$a). Din sistemul Lurie rezultă

$$\begin{bmatrix} K & (L+RB)^* \\ L+RB & M+A^*R+RA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^* \\ T \end{bmatrix} [S \quad T^*] = [S \quad T^*]^*[S \quad T^*] \geq 0.$$

Fie $[A, B, N, M, K, L]$ ca mai sus şi $u = (u_n)_{n\geq 0} \in s(U)$. Să notăm

$$\mathcal{M}_d = \left\{ z = (z_n)_{n\geq 0} = \begin{bmatrix} u_n \\ x_n \end{bmatrix}_{n\geq 0} \in s(U \times X) \middle| x_{n+1} = Ax_n + Bu_n, \ n \geq 0 \right\}$$

Să înzestrăm sistemul $(A, B)_d$ cu o funcţională de cost discretă

$$\mathcal{K}(z) = \langle Nx_{n+1}, x_{n+1} \rangle - \langle Nx_0, x_0 \rangle + \sum_{j=0}^{n} \left\langle \begin{bmatrix} K & L^* \\ L & M \end{bmatrix} z_j, z_j \right\rangle, (*) \; z \in \mathcal{M}$$

care poate fi scrisă sub forma echivalentă

$$\mathcal{K}(z) = \mathcal{K}_{\Delta}(z) = \sum_{i=0}^{n} \left\langle \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & K & L^* \\ 0 & L & M-N \end{bmatrix} Cz_j, Cz_j \right\rangle = \sum_{j=0}^{n} \langle \Psi(\Delta) z_j, z_j \rangle .$$

unde

$$\Delta = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & K & L^* \\ 0 & L & M-N \end{bmatrix}$$

Vom nota apoi prin $\widetilde{\mathcal{H}}_d$ mulțimea tuturor operatorilor Δ din $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de forma de mai sus și în continuare ne vom referi numai la astfel de operatori. Este clar că orice operator din $\widetilde{\mathcal{H}}_d$ este autoadjunct.

Conform Lemei 4.2.1, în acest caz, vom avea

$$\Psi(\Delta) = \begin{bmatrix} K + B^*NB & L^* + B^*NA \\ L + A^*NB & M - N + A^*NA \end{bmatrix}$$

Se poate arăta, ca și în cazul continuu, că familia $\{R(\lambda, A)B\}_{\lambda \in \rho(A)}$ are proprietatea de generare dacă și numai dacă sistemul discret $(A,B)_d$ este complet controlabil (aproximativ), deci (în această ipoteză) familia $\{R(\lambda, A)B\}_{\lambda \in \rho(A)}$ generează (Definiția 4.2.4) o funcție caracteristică în $\mathcal{L}(Z)$, care poate fi extinsă (Definiția 4.2.7) la $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ și apoi particularizată la $\widetilde{\mathcal{H}}_d$.

Fie deci, $\Delta \in \widetilde{\mathcal{H}}_d$. Avînd în vedere forma lui $\Psi(\Delta)$ precizată înainte, obținem funcția caracteristică

$$\chi_{\Delta}(\lambda, \mu) = K + B^*NB + B^*R(\bar{\mu}, A^*)(L + A^*NB) + \\ + (L^* + B^*NA)R(\lambda, A)B + B^*R(\bar{\mu}, A^*)(M - N + A^*NA)R(\lambda, A)B$$

sau, folosind proprietățile operatorului rezolvent,

$$\chi_{\Delta}(\lambda, \mu) = K + L^*R(\lambda, A)B + B^*R(\bar{\mu}, A^*)L + \\ + B^*R(\bar{\mu}, A^*)\left[M + (\lambda\bar{\mu} - 1)N\right] R(\lambda, A)B$$

care este chiar funcția caracteristică Popov asociată unui sistem discret $(A,B)_d$ înzestrat cu funcționala de cost $\mathcal{K}$. Din cele de mai sus rezultă că pentru orice $\lambda \in \rho(A)$, operatorul $\chi_{\Delta}(\lambda, \lambda)$

este autoadjunct.

<u>LEMA 4.3.6</u>. Dacă pentru fiecare $\lambda \in \rho(A)$ notăm prin X_λ subspațiile lui $s(X)$, respectiv $s(U)$, definite prin

$$X_\lambda = \{(\lambda^n x)_{n \geq 0} \mid x \in X\}, \text{ respectiv } U_\lambda = \{(\lambda^n u)_{n \geq 0} \mid u \in U\}$$

atunci

a) Restricția operatorului $T-A$ la X_λ este un operator injectiv ;

b) $BU_\lambda \subset (T-A)X_\lambda$, unde $T-A$ notează operatorul de înmulțire generat de $(T-A, T-A, \ldots, T-A, \ldots)$ și analog B.

Demonstrație : a) Intr-adevăr, pentru fiecare $\lambda \in \rho(A)$

$$(T-A)((\lambda^n x)_{n \geq 0}) = 0$$

dacă și numai dacă

$$\lambda^{n+1} x - \lambda^n A x = 0 \ , \ (\forall) \ n \geq 0$$

de unde, pentru $n = 0$, rezultă că

$$(\lambda I - A)x = 0$$

deci $x = 0$.

b) Fie $\lambda \in \rho(A)$ și $(\lambda^n u)_{n \geq 0} \in U_\lambda$. Atunci

$$(T-A)((\lambda^n R(\lambda, A)Bu)_{n \geq 0}) = (\lambda^n (\lambda I - A)R(\lambda, A)Bu)_{n \geq 0} =$$

$$= (\lambda^n Bu)_{n \geq 0} = B((\lambda^n u)_{n \geq 0}).$$

<u>CONSECINTA 4.3.7</u>. $(\lambda^n R(\lambda, A)Bu)_{n \geq 0} \in s(X)$ este singurul element din X a cărui imagine prin $T-A$ este $B((\lambda^n u)_{n \geq 0})$.

<u>CONSECINTA 4.3.8</u>. Pentru fiecare $\lambda \in \rho(A)$ și fiecare $u \in U$, șirul

$$z = z(\lambda, u) = (\lambda^n u, \lambda^n R(\lambda, A)Bu)_{n \geq 0} \in \mathcal{M}_d.$$

Demonstrație : Conform afirmației b) din Lema 4.3.6

$$(T-A)((\lambda^n R(\lambda, A)Bu)_{n \geq 0}) = B((\lambda^n u)_{n \geq 0})$$

de unde rezultă că

$$T((\lambda^n R(\lambda, A)Bu)_{n \geq 0}) - A((\lambda^n R(\lambda, A)Bu)_{n \geq 0}) = B((\lambda^n u)_{n \geq 0})$$

și, în consecință, pentru orice $n \geq 0$ are loc egalitatea

$$\lambda^{n+1} R(\lambda, A)Bu = A(\lambda^n R(\lambda, A)Bu) + B(\lambda^n u).$$

TEOREMA 4.3.9. Pentru orice $\lambda \in \rho(A)$ şi $u \in U$ are loc egalitatea

$$\mathcal{K}_{\Delta}(z(\lambda,u)) = \sum_{j=0}^{n} \langle \chi_{\Delta}(\lambda,\lambda)u,u \rangle \cdot |\lambda|^{2j}$$

Demonstraţie :

$$\mathcal{K}_{\Delta}(z(\lambda,u)) = \sum_{j=0}^{n} \langle \Delta Cz_j, Cz_j \rangle =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \langle \Delta C \begin{bmatrix} I_U \\ R(\lambda,A)B \end{bmatrix} (\lambda^j u), C \begin{bmatrix} I_U \\ R(\lambda,A)B \end{bmatrix} (\lambda^j u) \rangle =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \langle [I_U \; R(\lambda,A)B] C^* \Delta C \begin{bmatrix} I_U \\ R(\lambda,A)B \end{bmatrix} u,u \rangle \cdot (\lambda\bar{\lambda})^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \langle \chi_{\Delta}(\lambda,\lambda)u,u \rangle \cdot |\lambda|^{2j}.$$

CONSECINŢA 4.3.10. Dacă $\lambda \in \rho(A)$, $|\lambda| = 1$, atunci pentru orice $u \in U$ are loc egalitatea

$$\frac{1}{n+1} \mathcal{K}_{\Delta}(z(\lambda,u)) = \langle \chi_{\Delta}(\lambda,\lambda)u,u \rangle .$$

TEOREMA 4.3.11. Următoarele afirmaţii sînt adevărate :

a) $\Psi(\Delta) = 0$, $\Delta \in \mathcal{H}_d$, dacă şi numai dacă există un operator autoadjunct $R \in \mathcal{L}(X)$ astfel încît

$$\Delta = \Delta_R = \begin{bmatrix} -R & 0 & 0 \\ 0 & B^*RB & A^*RB \\ 0 & B^*RA & A^*RA \end{bmatrix}$$

b) $\chi_{\Delta}(\lambda,\mu) = \chi_{\Delta+\Delta_R}(\lambda,\mu)$

unde Δ_R este un operator definit ca la punctul a).

c) $\mathcal{K}_{\Delta}(z) = \mathcal{K}_{\Delta+\Delta_R}(z)$.

d) $$\langle Cz_j', Cz_j'' \rangle = \langle Nx_{j+1}', x_{j+1}'' \rangle - \langle Nx_j', x_j'' \rangle +$$
$$+ \langle \begin{bmatrix} K & L^* \\ L & M \end{bmatrix} z_j', z_j'' \rangle , \; (\forall)\; z_j', z_j'' \in \mathcal{M}_u .$$

Demonstraţie : Afirmaţia a) rezultă din Lema 4.2.1, iar b) şi c) din definiţiile funcţiei caracteristice, respectiv funcţionalei de cost şi egalitatea $\Psi(\Delta) = \Psi(\Delta + \Delta_R)$.

Pentru a demonstra d) să observăm mai întîi că pentru orice $z \in \mathcal{M}_u$

$$C\, z_j = \begin{bmatrix} B & A \\ I_U & 0 \\ 0 & I_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{j+1} \\ u_j \\ x_j \end{bmatrix}$$

şi,în consecinţă

$$\langle \Delta C z'_j, C z''_j \rangle = \langle \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & K & L^* \\ 0 & L & M-N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{j+1} \\ u'_j \\ x'_j \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x''_{j+1} \\ u''_j \\ x''_j \end{bmatrix} \rangle$$

$$= \langle N x'_{j+1} , x''_{j+1} \rangle + \langle \begin{bmatrix} K & L^* \\ L & M-N \end{bmatrix} z'_j, z''_j \rangle =$$

$$= \langle N x'_{j+1} , x''_{j+1} \rangle - \langle N x'_j, x''_j \rangle + \langle \begin{bmatrix} K & L^* \\ L & M \end{bmatrix} z'_j, z''_j \rangle .$$

După cum rezultă din teorema precedentă, între mulţimea funcţionalelor de cost $\mathcal{K}_\Delta$ şi mulţimea claselor de echivalenţă (determinate de relaţia $\Delta_1 \sim \Delta_2$ dacă şi numai dacă $\Psi(\Delta_1 - \Delta_2) = 0$) de operatori Δ există o corespondenţă biunivocă. Aceasta ne permite să notăm

$$(A,B;\Delta) \begin{cases} x_{n+1} = A x_n + B u_n , \ n \geqslant 0 \\ \mathcal{K}_\Delta(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} \langle \Psi(\Delta) z_j, z_j \rangle , \ z = (z_j)_{j \geqslant 0} \in \mathcal{M}_d . \end{cases}$$

<u>DEFINITIA 4.3.12</u>. $[P_2]$. Sistemul $(A,B;\Delta)$ se zice pozitiv dacă există un operator autoadjunct $R \in \mathcal{L}(X)$ cu proprietatea că operatorul

$$\begin{bmatrix} K + B^* R B & L^* + B^* R A \\ L + A^* R B & M - R + A^* R A \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(Z)$$

este pozitiv semidefinit.

<u>OBSERVATIA 4.3.13</u>. Pentru orice operator autoadjunct $R \in \mathcal{L}(X)$ şi orice $z \in \mathcal{M}_d$ are loc egalitatea

$$\mathcal{K}_\Delta(z) = \langle (N-R) x_{n+1}, x_{n+1} \rangle - \langle (N-R) x_0, x_0 \rangle +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \langle \begin{bmatrix} K + B^* R B & L^* + A^* R B \\ L + B^* R A & M - R + A^* R A \end{bmatrix} z_j, z_j \rangle$$

care rezultă din Teorema 4.3.11, utilizînd faptul că

$$\Delta + \Delta_R = \begin{bmatrix} N-R & 0 & 0 \\ 0 & K + B^*RB & L^* + B^*RA \\ 0 & L + A^*RB & M-R + A^*RA \end{bmatrix}$$

TEOREMA 4.3.14. Dacă sistemul liniar discret $(A,B;\Delta)$ este pozitiv, atunci funcţia caracteristică asociată are proprietatea

$$\chi_\Delta(\lambda,\lambda) \geq 0 \quad , \quad (\forall)\lambda \in \rho(A) \cap \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

Demonstraţie : Să presupunem că sistemul $(A,B;\Delta)$ este pozitiv. Conform Definiţiei 4.3.12, există un operator $R = R^* \in \mathcal{L}(X)$ cu proprietatea

$$\begin{bmatrix} K + B^*RB & L^* + A^*RB \\ L + B^*RA & M - R + A^*RA \end{bmatrix} \geq 0 .$$

Pe de altă parte, dacă $\lambda \in \rho(A)$, $|\lambda| = 1$ şi $u \in U$, pe baza Consecinţei 4.3.8, şirul

$$z = (z_n)_{n \geq 0} = (\lambda^n u, \lambda^n R(\lambda, A)Bu) \in \mathcal{M}_d$$

şi

$$\langle (N-R)x_{n+1}, x_{n+1} \rangle = \langle (N-R) \lambda^{n+1} R(\lambda, A)Bu, \lambda^{n+1} R(\lambda, A)Bu \rangle =$$

$$= \langle (N-R)R(\lambda, A)Bu, R(\lambda, A)Bu \rangle . (\lambda \bar{\lambda})^{n+1} = \langle (N-R)x_0, x_0 \rangle .$$

Astfel, funcţionala de cost are exprimarea :

$$\mathcal{K}_\Delta(z) = \mathcal{K}_{\Delta + \Delta_R}(z) = \sum_{j=0}^{n} \langle \begin{bmatrix} K + B^*RB & L^* + A^*RB \\ L + B^*RA & M-R + A^*RA \end{bmatrix} z_j, z_j \rangle \geq 0$$

şi, ţinînd cont de Consecinţa 4.3.10, obţinem

$$0 \leq \mathcal{K}_\Delta(z) = (n + 1) \langle \chi_\Delta(\lambda, \lambda)u, u \rangle .$$

BIBLIOGRAFIE

[A₁] ANTOSIEWICZ,H.A., Linear control theory, Arch.Rat.Mech.Anal., v.12, 4(1963), 314-324.

[B₁] BALINT,ST. şi REGHIŞ,M., Characteristic numbers and spectral properties, S.E.F., Univ.Timişoara, 17(1973).

[B₂] BALINT,ST. şi REGHIŞ,M., Characteristic numbers and spectral properties II. Circular characteristic numbers, S.E.F., Univ. Timişoara, 28(1974).

[B₃] BALINT,ST., Characteristic numbers and spectral properties III. Lower characteristic numbers and spectral properties, S.E.F., Univ.Timişoara, 2[illegible](1974).

[B₄] BARBU,V. şi PRECUPANU,TH., Convexitate şi aproximar[illegible] spaţii Banach, Ed.Acad., 1977.

[B₅] BOLTIANSKI,V.G., Prinţip maximuma v teorii optimalinîh proţesov, DAN. S.S.S.R., t.119, 6(1958).

[B₆] BOLTIANSKI,V.G., Comande optimale des systèmes discrets, Ed.Mir, Moscova, 1976.

[B₇] BROCKETT,R., Finite dimensional linear systems, New York, J.Willey, 197o.

[B₈] BILOV,P.F., VINOGRAD,R.E., GROBMAN,D.M. şi NEMÎŢKII,V.V., The theory of Liapunov's numbers, Izd.Nauka, Moscova, [illegible].

[B₉] BALAKRISHNAN,A.V., Optimal control problems in Banach spaces, SIAM J.Contr.and optim., 2(1965), 152-18o.

[B₁₀] BALAKRISHNAN,A.V., On space of linear systems, J.Math. Anal.Appl. 14(1966), 371-391.

[B₁₁] BELLMAN,R., Dynamic programming, Princeton Univ.Press, 19[illegible]7.

[C₁] COFFMAN,CH.V. şi SCHÄFFER,J.J., Linear discrete equations, Math.Annalen, 172(1967), 1[illegible]-1[illegible].

[C₂] CONTI,R., Linear differential equations and control, Acad. Press, London - New York, 1976.

[C3] CURTAIN,R.F. şi PRITCHARD,A.J., Infinite dimensional linear systems theory, Springer-Verlag, 1978.

[C4] COURANT,R. şi HILBERT,D., Methods of [illegible], v.I, New York, 1963.

[C5] COPPEL,W.A., Linear-quadratic optimal control, Proc.of the Royal Soc.of Edinburg, 75 A, 18, 1974/1975, 271-[illegible].

[D1] DALETKII,YU.L. şi KREIN,M.G., Istoicivosti [illegible] differentialinîh uravnenii v Banahovom prostranstve, Izd.Nauka, Moskva, 1970.

[D2] DOETSCH,G., Rukovodstvo [illegible] brazovanii Laplasa i z-preobrazovanii, Izd.Nauka, Moskva, [illegible].

[D3] DOLECKI,S., A classification of controllability concepts for infinite-dimensional linear system, Control and [illegible], v.5, 2(1976).

[D4] DOUGLAS,R., On majoration, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space, Proc.Amer.Math.Soc., 17([illegible]).

[D5] DELFOUR,M.C. şi MITTER,S.K., Controllability and observability for infinite-dimensional systems, SIAM J.Control, 10([illegible]).

[D6] DESOER,C.A., A generalization of the Popov criterion, [illegible] Trans.on Aut.cont. 4(1965), 182-185.

[E1] EGOROV,IU.V., Sufficient conditions for optimal control in Banach spaces, Mat.Sbornik, 64(1964), 79-104.

[F1] FATTORINI,H.O., Some remarks on complete controllability, SIAM J.Appl.Math., 4(1966), 686-694.

[F2] FATTORINI,H.O., On complete controllability of linear systems, J.Diff.Equat., 3(1967), 391-402.

[F3] FATTORINI,H.O., Boundary control systems, SIAM J.Control, v. 6, 3(1968).

[G1] GAMKRELIDZE,R.V., K teoria optimalinîh proţesov v lineinîh sistemah, DAN S.S.S.R., t.116, 1(1957).

[G2] GAŞPAR,D., Analiză funcţională, Ed.Facla, 1981.

[H1] HALANAY,A. şi WEXLER,D., Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri, Ed.Acad., 1968.

[H2] HALMOS,P.R., A Hilbert space problem book, Princeton, N.J.

[H3] HAUTUS,M.L.J., Controllability and observability conditions of linear autonomous systems, Indigat.Math., 5(1969), 443-448.

[H4] HEINEMANN,M., PACHTER,M. şi STERN,R., Max-min control problems, IEEE Trans. on aut.contr., V.AC-21, 4(1976).

[H5] HEIMANN,M., PACHTER,M. şi STERN,R., Weak and strong max-min controllability, IEEE Trans.on aut.contr., V.AC-21, (1976).

[H6] HIRIŞ,V. şi RADU,V., REGHIŞ,M., Controlabilitate în spaţii BANACH, S.E.F., Univ.Timişoara, 11(1972).

[H7] HIRIŞ,V., Asupra operatorilor de controlabilitate în spaţii Hilbert, S.E.F., Univ.Timişoara, 13(1973).

[H8] HIRIŞ,V., On complete controllability and the ciclic vectors I, S.E.F., Univ.Timişoara, 21(1974).

[H9] HIRIŞ,V. şi MEGAN,M., Controllability and invariant subspaces, S.E.F., Univ.Timişoara, 22(1974).

[H10] HIRIŞ,V. şi TOPUZU,P., On complete controllability and ciclic vectors II, Analele Univ.Timişoara, 1975.

[H11] HĂRĂGUŞ,D., Comportarea asimptotică a soluţiilor unei ecuaţii abstracte de tip Navier-Stokes, S.E.F., Univ.Timişoara, 20(1974).

[H12] HĂRĂGUŞ,D., POPESCU,N., On the asymptotical behaviour of the solutions of an equation of Schrödinger type, S.E.F., Univ.Timişoara, 26(1974).

[H13] HELTON,J.W., Discrete time systems, operators models and scattering theory, J.Funct.Anal., 16(1974), 15-38.

[J1] JAEGER,J.C. şi NEWSTEAD,G., Introducere în teoria transformării Laplace, Ed.tehnică, 1971.

[K1] KALMAN,R.E., Contribution to theory of optical control, Proc.of the Mexico City Conf.of Ordin. Diff.Equat.,

[K2] KALMAN,R.E., On the general theory [illegible] control systems, [illegible] First Intern.Congres on [illegible].Contr., Moscova, 1[illegible].

[K3] KALMAN,R.E., FALB,P. şi [illegible], Topics in [illegible] systems theory, McGraw-Hill, New York, 19[illegible].

[K4] KOROBOV,V.I. şi RABAH,R., Tocinsia upravlisemosti [illegible] prostranstve, Diff.uprav., t.1[illegible], 12(197[illegible]).

[K5] KRASOVSKI,N.N., Ob odnoi [illegible] optimalinovo [illegible] nelineinih sistem, Priklad. [illegible] meh., [illegible].

[K6] KRASOVSKI,N.N., Teoria upravlienie dvij[illegible].

[K7] KREIN,M.G., Lecţii po ustoicivosti reşenii differencialnih uravnenii v Banahovom prostranstve, Kiev, 1[illegible]64.

[K8] KATO,T. şi TANABE,H., On abstract evolution equation, [illegible] Math.J. 14(1962), 107-1[illegible]3.

[K9] KALMAN,R.E., HO,Y.C. şi [illegible],K.S., Controllability [illegible] near dynamical systems, Contrib.Diff.Equat.,1([illegible]),[illegible].

[L1] LEE,E.B. şi MARKUS,L., Foundations of optimal control theory, New York, 1967.

[L2] LIAPUNOV,A.M., Obsciaia zadacia ob ustoicivosti dvijenia, Gost.Moskva-Leningrad, 1950.

[M1] MASSERA,J.L. şi SCHÄFFER,J.J., Linear differential equations and function spaces, Acad.Press, New York, 1[illegible].

[M2] MEGAN,M. şi HIRIŞ,V., Ecuaţii diferenţiale în spaţii local convexe, S.E.F., Univ.Timişoara, 1[illegible](19[illegible]).

[M3] MEGAN,M., Stabilitatea sistemelor liniare în spaţii local convexe, S.E.F., Univ.Timişoara, 1[illegible](19[illegible]).

[M4] MEGAN,M., Similarity, controllability and spectral mapping, S.E.F., Univ.Timişoara, 23(1974).

[M5] MEGAN,M. şi HIRIŞ,V., On the space of linear controllable systems in Hilbert space, Glasnik Mat.,1[illegible](1975), 1[illegible]1-1[illegible].

[M6] MEGAN,M., On the input-output stability of time-varying linear control systems, S.E.F.,Univ.Timişoara, 3[illegible](1976).

[M_7]. MEGAN,M., On controllability, stability and Riccati differential equation for linear control systems, S.S.M., Univ. Timişoara, 39(1976).

[M_8] MEGAN,M. şi TOPUZU,P., On the density property of controllable systems, S.S.M., Univ. Timişoara, 43(1977).

[M_9] MOROZAN,T., Stochastic stability and control for [illegible] time systems with jump Markov disturbances, Revue [illegible] Pures et Appl. 2[illegible],1,1[illegible], [illegible]1-11[illegible].

[P_1] PONTRIAGHIN,L.S., BOLTIANSKI,V.G., [illegible] O, S., Théorie mathématique des processus optimaux, [illegible], Moscova, 1974.

[P_2] POPOV,V.M., Hiperstabilitatea sistemelor automate, Ed. Acad., 1966.

[P_3] PCHÉNITCHNY,B., Conditions nécessaires d'extremum, [illegible], 1969.

[P_4] PERRON,O., Die Stabilitätsfrage der [illegible], Mat.Z., 32(1930), 703-[illegible].

[R_1]. REGHIŞ,M. şi HIRIŞ,V., Controlabilité complète des [illegible] différentieles linéaires dans les espaces de Hilbert, Rev. Roum.Math.pures et appl., XVIII,7(1973), 10[illegible]1-10[illegible].

[R_2] REGHIŞ,M., O generalizare a teoriei numerelor [illegible] ce în sensul lui A.M.Liapunov, Analele Univ. [illegible], 1967, 207-233.

[R_3] REGHIŞ,M., Asupra stabilităţii [illegible] le, Lucr.şt.ale Inst.Ped.Timişoara, 19[illegible], 1[illegible].

[R_4] ROLEWICS,S., On universal time for controllability [illegible] depending linear control systems, [illegible] mat., [illegible].

[R_5] REGHIŞ,M., On the canonical structure of un linear [illegible] systems in Hilbert spaces, [illegible], Univ. [illegible].

[R_6] REGHIŞ,M. şi MEGAN,M., Riccati equation, controllability and stabilizability, [illegible], Univ. Timişoara, [illegible].

[R7] [illegible] control evolutionary processes in Banach spaces, S.E.F., Univ.Timişoara, 46(1978).

[R8] RADU,V., On the complete controllability in local [illegible] spaces, S.E.F., Univ.Timişoara, 15(19[illegible]).

[S1] LA SALLE,J.P., Time optimal control systems, Proc.[illegible] Sc., USA, v.45, 4(1959).

[T1] TRIGGIANI,R., Controllability and observability in [illegible] with bounded operators, [illegible]

[T2] TRIGGIANI,R., Extensions of rank conditions for controllability and observability to [illegible] tors, SIAM J.Contr.and Optim., 14(1976), 313-338.

[T3] TA, LI, Die Stabilitätsfrage bei Differenzengleichungen, [illegible] Math., 63(1934), 94-141.

[T4] TOPUZU,E., Proprietăţi ale [illegible] Hilbert, Bul.şt.şi tehn.,I.P.T.,t.24(38),1(197[illegible]),[illegible]

[T5] TOPUZU,P. şi TOPUZU,E., Asupra controlabilităţii [illegible] liniare în spaţii Banach, Bul.şt.şi tehn.,I.P.T.,[illegible] 1(1979), 40-44.

[T6] TOPUZU,E. şi TOPUZU,P., Controlabilitatea sistemelor [illegible] discrete, Sem.itin.de ec.funcţ.,convex.şi aprox., [illegible] ca, 1982.

[T7] TOPUZU,P. şi TOPUZU,E., On [illegible] characteristic [illegible] S.E.F., Univ.Timişoara, 59(1982).

[T8] TOPUZU,E., On some concepts of controllability in the [illegible] of differential games, S.M.F., I.P.T., 1(1982).

[T9] TOPUZU,E., On the characteristic function of a linear [illegible] te time system, S.M.F., I.P.T., 2(19[illegible]).

[T10] TOPUZU,E., Remark on the characteristic spectrum of an operator, S.M.F., I.P.T., 2(1983).

[11] TOPUZU,E., On the positivity of a linear discrete system, S.M.F., I.P.T., 2(198[illegible]).

[12] TOPUZU,E., Z-transform and the linear discrete [illegible], S.M.F., I.P.T., 1(1985).

[13] TOPUZU,E., Contraexemple în controlabilitatea [illegible] liniare discrete,(va apare).

[14] TOPUZU,E., Numere caracteristice [illegible] nicată la Simpozionul "[illegible] şi aplicaţii", 1985.

[15] TOPUZU,E., Spectrul caracteristic al unui sistem discret, (va apare).

[16] TOPUZU,E. şi TOPUZU,P., Funcţia caracteristică [illegible] şi pozitivitatea sistemelor liniare, (va apare).

[1] YOSIDA,K., Functional analysis, Springer [illegible].

[2] YAKUBOVICH,V.A., The frequency theorem for the case [illegible] the space and control spaces are Hilbert spaces, with applications to synthesis of optimal control, [illegible], XVI, 1975.

CUPRINS