INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA"
T I M I S O A R A
Facultatea de Electrotehnică

P a v e l   N ă s l ă u

ASUPRA UNOR PROBLEME CU PERTURBATII SINGULARE CU APLICAȚII IN TEHNICĂ

- Teză de doctorat -

Conducător științific,
Prof.dr.Borislav Crstici

Timișoara
1985

INTRODUCERE

o.1. Perturbaţii singulare.

Revoluţia ştiinţifică şi tehnică contemporană a condus la reconsiderarea atitudinii faţă de legile naturii. Pe măsură ce o cunoaştem, constatăm că natura refuză să se exprime în limbajul pe care îl presupun regulile paradigmatice inventate de oameni. Ca urmare, schimbarea atitudinii constă în faptul că "ştiinţele sînt deschise spre imprevizibil, pe care nu-l mai consideră ca semn al unei cunoaşteri imperfecte, al unui control insuficient. Ştiinţele naturii sînt deschise de acum dialogului cu o natură ce nu poate fi dominată printr-o singură privire teoretică, ci doar explorată, cu o natură deschisă căreia îi aparţinem şi noi, participînd la construcţia ei".(I.Prigogine şi I.Stengers [106]).

Participînd la acest dialog, metodele matematice devin tot mai complexe, un rol tot mai important revenind celor de aproximaţie şi dintre acestea celor asimptotice, care se aplică fenomenelor care constituie perturbaţii ale altor fenomene sau ale modelelor elaborate de oameni.

Intuitiv, o problemă constituie o "perturbaţie" a unei alte probleme "neperturbată" dacă soluţia primeia poate fi pusă în legătură cu soluţia celei de a doua, care are o situaţie specială prin faptul că soluţia ei o cunoaştem sau presupunem că o putem determina.

In general legătura dinte cele două probleme se realizează prin identificarea în problema perturbată a unui parametru (coeficient de perturbaţie) astfel încît problema neperturbată să se obţină din cea perturbată pentru o anumită valoare fixă a acestui parametru (Il vom nota, de exemplu, ε şi valoarea fixă vom considera-o zero). Putem spune deci că avem o familie de probleme indiciată de parametrul ε, toate problemele din această familie fiind perturbaţii ale uneia speciale dintre ele.

Intuiţia ne spune că dacă parametrul tinde către zero atunci ar trebui ca soluţia problemei perturbate să tindă către soluţia problemei neperturbate.

In realitate aceasta se întîmplă necondiţionat numai la anumite probleme - cele regulate, pe cînd la cele singulare intuiţia e neputincioasă şi la inginer şi la fizician şi la matematician (S. Lomov, [68]).

Incercînd să le definească, A.N.Tihonov, în introducerea la [68] precizează că perturbaţiile regulate sînt cele în care perturbaţia are caracter de subordonare faţă de operatorul neperturbat, pe cînd perturbaţiile singulare sînt cele în care se perturbă părţile principale ale acestui operator.

Dar caracterul regulat sau singular este legat şi de domeniul de variaţie a variabilelor.

Intr-un anumit domeniu perturbaţia poate fi regulată în timp ce în alt domeniu(de variaţie a variabilelor independente, pentru o aceeaşi ecuaţie diferenţială, de exemplu),perturbaţia poate fi singulară. De aceea este dificil de dat o definiţie generală a perturbaţiilor singulare. Aproape fiecare cercetător o înţelege în felul său [68]. Totuşi cele mai multe probleme de perturbaţii singulare se încadrează în definiţiile introduse de noi în § 1.1. :

Considerînd două mulţimi X şi Y, un interval închis $I\subset R$, o familie de operatori $\mathcal{L}=\{L_\varepsilon \mid L_\varepsilon : D_\varepsilon \mapsto Y, D_\varepsilon \subset X, \varepsilon\in I\}$ şi o familie de elemente $\mathcal{F}=\{f_\varepsilon \mid f_\varepsilon \in Y, \varepsilon\in I\}$, problema determinării unei familii $\mathcal{Z}=\{z_\varepsilon \mid z_\varepsilon\in D_\varepsilon, \varepsilon\in I\}$ astfel încît $L_\varepsilon z_\varepsilon = f_\varepsilon$ pentru orice $\varepsilon\in I$ se numeşte problemă cu parametru şi se notează $(\mathcal{L},\mathcal{F})$; parametrul ε se numeşte parametrul problemei iar familia $\mathcal{Z}$ se numeşte soluţia problemei$(\mathcal{L},\mathcal{F})$; dacă $I\ni o$ atunci problema $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ se zice problemă cu parametru mic; dacă $D_\varepsilon = D$ pentru orice $\varepsilon\in I$ atunci problema $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ se zice problemă cu perturbaţii regulate sau problemă regulată ; dacă există ε_0 astfel încît $D_\varepsilon = D \subsetneq D_{\varepsilon_0}$ pentru $\varepsilon\in I\setminus\{\varepsilon_0\}$ problema$(\mathcal{L},\mathcal{F})$ se zice problemă cu perturbaţii singulare.

Definiţia prezentată mai sus nu epuizează toate situaţiile de perturbaţii singulare(A se vedea introducerea la cartea lui I.L.Lions [63] şi monografia lui T.Kato[52]) dar perturbaţiile singulare astfel definite conţin şi "ecuaţiile cu parametru mic lîngă derivata de ordinul cel mai mare "[122].

Perturbaţiile singulare apar în acele probleme în care au loc treceri neuniforme , ,discontinue sau rapide de la unele caracteristici fizice la altele şi în probleme de margine (de frontieră)[135].

Domeniile în care au loc aceste perturbaţii sînt: teoria oscilaţiilor neliniare, teoria giroscoapelor, teoria reglării automate, fizica cuantică şi în alte domenii ale ştiinţei şi tehnicii.

o.2. Analiză asimptotică.

Intr-o accepţiune foarte largă putem defini analiza asimptotică ca"aproximarea unor obiecte matematice sau de altă natură prin obiecte mai simple "(S.A.Lomov,[66]). Ea se poate face la diferite nivele de rigurozitate, atît din punct de vedere fizic cît şi matematic.

Din punct de vedere matematic, ea este o ramură a analizei matematice ce se ocupă cu determinarea soluţiilor analitice aproximative ale unor probleme în care un parametru sau o variabilă are o valoare mică (sau mare) sau este în vecinătatea unui punct în care soluţia nu este analitică(C.Iacob,[49]).

Referindu-se numai la perturbaţiile datorate prezenţei parametrului ε, A.B.Vasilieva consideră următoarele definiţii:

Se numeşte aproximaţie asimptotică (sau reprezentare asimptotică sau formulă asimptotică) după parametrul ε pentru soluţia $z(\cdot,\varepsilon)$ a unei probleme, o funcţie $Z(\cdot,\varepsilon)$astfel încît diferenţa $z(\cdot,\varepsilon)-Z(\cdot,\varepsilon)$ să fie mică(într-o anumită normă)într-un interval dat de variaţie a variabilelor, de îndată ce parametrul ε este suficient de mic[135].

Se numeşte metodă asimptotică un procedeu de construire a funcţiei $Z(\cdot,\varepsilon)$ prin rezolvarea unor probleme mai simple decît cea iniţială.[135].

In § 1.1. noi am definit mai exact aceste noţiuni pentru problema cu parametru mic $(\mathcal{L},F)$ definită în § o.1.

Valoarea practică a metodelor asimptotice constă în posibilitatea determinării efective a funcţiei $Z(\cdot,\varepsilon)$ din probleme mai simple decît cea iniţială.

In cazul perturbaţiilor regulate metodele asimptotice constau în determinarea unei serii după parametrul ε numită dezvoltare asimptotică a soluţiei ; ca aproximaţie asimptotică se consideră o sumă parţială a acestei serii.

In cazul perturbaţiilor singulare aceste metode nu mai sînt posibile. Au fost elaborate alte metode care constau în determinarea formală a soluţiei fie sub forma unei sume de două serii, fie a unui produs de două serii, fie în "regularizarea" perturbaţiei, etc.

O parte din aceste metode obţinute de diferiţi autori este prezentată în capitolul I al acestei lucrări. De altfel şi scopul acestei lucrări este prezentarea unor metode asimptotice pentru ecuaţii cu perturbaţii singulare.

Se pune întrebarea dacă în condiţiile existenţei calculatoarelor electronice mai are rost să ne ocupăm de aceste metode asimptotice.

Răspunsul ar putea fi oricare din următoarele:

1)"Metodele numerice şi cele asimptotice nu se exclud ci se completează.De exemplu, în multe cazuri expresia asimptotică poate fi luată ca aproximaţie de ordinul zero într-o metodă numerică.

Cea mai completă legătură reciprocă între metodele numerice şi cele asimptotice se manifestă în cazul cînd într-o metodă numerică, la un moment dat, trebuie făcut studiul proprietăţilor asimptotice ale unor ecuaţii ce apar în metoda respectivă(A.B. Vasilieva, [135]).

2) "Cu riscul de a simplifica excesiv lucrurile, am putea spune că analiza numerică încearcă să obţină informaţii cantitative despre o problemă particulară , pe cînd analiza asimptotică încearcă să obţină o vedere asupra comportării calitative a unei familii de probleme şi numai o informaţie semicantitativă despre membrii individuali ai familiei;...Avînd scopuri diferite cele două discipline n-ar trebui să se intersecteze. Dacă se intersectează atunci sînt complementare (deci una întregeşte pe cealalt ...metodele asimptotice atunci sînt cele mai eficiente (şi) din punct de vedere numeric cînd metodele numerice generale dau performanţe slabe sau nu reuşesc deloc"(L.F.Shampine,[117]).

3)Datorită aplicaţiilor multiple din celelalte ştiinţe şi tehnică"teoria analizei asimptotice are importanţă atît pentru cercetarea fundamentală cît şi pentru rezolvarea problemelor curente ale practicii"(A.N.Tihonov, în introducerea la [68]).

o.3. <u>Istoric</u>.

Ca şi prezentarea aspectelor principale ale teoriei perturbaţiilor,referirile de ordin istoric care urmează nu vizează epuizarea subiectului dar credem că au un caracter semnificativ.

Vom începe prin a aminti episodul Leverrier-Galle-Adams din istoria ştiinţei secolului al XIX-lea în legătură cu descoperirea planetei Neptun pe baza studierii mişcării perturbate a planetei Uranus.

(Dacă se studiază mişcarea unei planete în jurul soarelui pe baza legii atracţiei universale [5],prin neglijarea interacţiunii cu celelalte planete se obţine o problemă complet integrabilă -problema celor două corpuri, a cărei soluţie este orbita kepleriană a planetei ;această soluţie este o primă aproximaţie a orbitei reale datorată perturbaţiei celorlalte planete-problema celor trei corpuri, de exemplu).

Acest episod este o ilustrare elocventă a metodelor din teoria perturbaţiilor, un adevărat triumf al ştiinţei secolului XIX şi după toate probabilităţile termenul de "perturbaţie" provine din mecanica cerească unde accepţiunea lui matematică este aşa de strîns legată de cea fizică.

Tot în mecanica cerească au luat naştere şi dezvoltările asimptotice ale funcţiilor care constiuie parte integrantă a teoriei perturbaţiilor (a se vedea monografia [25]).In sprijinul acestei afirmaţii este suficient să amintim lucrările lui

H.Poincaré [100],[101]. Dezvoltările lui H.Poincaré au fost dezvoltări în serie după şirul asimptotic $\{1/z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $z\to\infty$ unde z este variabila în raport cu care s-au considerat derivatele .

Rezultate analoage cu cele ale lui H.Poincaré au fost stabilite şi pentru dezvoltările asimptotice ale funcţiilor - soluţii ale unor ecuaţii dieferenţiale, după şirul asimptotic $\{\varepsilon^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon\to+0$ unde ε este un parametru, diferit de variabila funcţiei prin raport cu care s-a derivat. De fapt, dezvoltările asimptotice prin raport cu parametrul au fost cunoscute înainte de H.Poincaré, fără însă să fie numite în acest fel.Astfel Liouville a stabilit în 1837,[64],că un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia : $\ddot{y}+(\lambda^2 r(x)+q(x))y=0$, $(r(x)>0;\lambda\to\infty)$, este de forma

$$y_1(x,\lambda)=(y_{01}(x)+\frac{1}{\lambda}y_{11}(x)+\dots+\frac{1}{\lambda^n}y_{n1}(x)+\dots)\sin(\lambda\int_0^x\sqrt{r(x)}dx)$$

$$y_2(x,\lambda)=(y_{02}(x)+\frac{1}{\lambda}y_{12}(x)+\dots+\frac{1}{\lambda^n}y_{n2}(x)+\dots)\cos(\lambda\int_0^x\sqrt{r(x)}dx)$$

Un alt episod celebru din istoria ştiinţei legat de teoria perturbaţiilor se situează la începutul secolului XX.

De data aceasta este vorba de mecanica fluidelor. La sfîrşitul secolului al XIX-lea în această ştiinţă situaţia era următoarea:Hidrodinamica teoretică bazată pe ecuaţiile lui Euler(D'Alembert Euler)date pentru mişcarea fluidelor fără frecare a atins un înalt grad de dezvoltare,însă rezultatele obţinute în această hidrodinamică"clasică " nu concordau cu rezultatele experimeţelor. Neconcordanţa se manifesta îndeosebi în problema pierderii de presiune în ţevi şi în problema rezistenţei pe care o opune fluidul unui corp ce se mişcă în el. In aceste condiţii au fost stabilite ecuaţiile de mişcare ale fluidului care ţin cont de frecare- ecuaţiile Navier-Stokes(M.Navier [94],S.D.Poisson[102], B.de St.Venan [141] G.G.Stokes[119]).

Dar aceste ecuaţii nu au putut fi aplicate la studiul mişcării fluidelor din cauza dificultăţilor de ordin matematic foarte mari care se întîlneau , cu excepţia cîtorva cazuri particulare.

Pe de altă parte, pentru apă şi aer - cele mai importante fluide, coeficientul de vîscozitate este foarte mic,deci şi forţele de frecare cauzate de vîscozitate sînt mici în comparaţie cu celelalte forţe (de gravitaţie, de presiune); mult timp nu s-a putut explica de ce forţele de frecare mici au o influenţă aşa de mare în procesul de mişcare.

In 1904 (deci la aproape jumătate de secol după lucrarea lui Stokes [119]),L.Prandtl,[103], într-o lucrare prezentată la cel de al III-lea Congres internaţional al matematicienilor , desfăşurat la Heidelberg, a indicat calea pe care se poate face studiul teoretic al mişcării fluidului cu frecare. El a arătat că în curgerea fluidului pe lîngă un obstacol, mişcarea trebuie studiată în două regiuni: un strat foarte subţire lîngă obstacol (strat limită)unde frecarea joacă un rol esenţial şi regiunea complementară acestui strat unde frecarea poate fi neglijată(a se vedea monografiile [116],[48],[113]).

Rolul parametrului mic îl joacă coeficientul de vîscozitate. Dacă acesta se ia egal cu zero direct în ecuaţiile Navier-Stokes se obţin ecuaţiile lui Euler pentru fluide ideale. Dar soluţia acestor din urmă ecuaţii nu descrie ce se întîmplă la peretele obstacolului întîlnit de fluid.Prandtl a arătat că trecerea la limită (cînd coeficientul de vîscozitate tinde la zero) nu trebuie efectuată în ecuaţii(.coeficienţii ecuaţiilor Navier-Stokes) ci în soluţia acestor ecuaţii (pentru a vedea ce se întîmplă la peretele obstacolului).

Metoda folosită de Prandtl constă în dezvoltarea asimptotică a soluţiei ecuaţiilor, separat în zona exterioară a stratului limită(dezvoltarea exterioară)şi separat în zona stratului limită (dezvoltarea interioară), şi apoi"racordarea" (matching) celor două dezvoltări[1o3],[1o4].

Deşi unele idei intuitive despre racordarea locală a soluţiilor se pot identifica încă de la Laplace şi Kirchoff(conform [69]) aplicarea acestei metode la ecuaţiile perturbate singular începe cu lucrarea [1o3].

Fundamentarea matematică a metodei în ceea ce priveşte ecuaţiile diferenţiale ordinare a fost făcută de L.Schlesinger [115]şi G.D. Birkhoff[9].

Inaintea lor a făcut-o J.Horn[44],[45]dar numai pentru ecuaţiile diferenţiale de ordinul II iar după ei, o extindere a cazului considerat de G.D.Birkhoff a făcut-o P.Noaillon[97].

Rezultatele lui L.Schlesinger şi G.D. Birkhoff se pot găsi în [68].Aceste rezultate enunţate pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale se găsesc în [17].)

După P.Noaillon urmează o perioadă în care problemele cu perturbaţii singulare nu au stat în atenţia matematicienilor.In schimb, reprezentanţii aplicaţiilor matematicilor au elaborat o serie de metode de analiză asimptotică privind un cerc restrîns de probleme. Astfel, de exemplu,găsim în reviste de fizică lucrări ca ale lui L.Brillouin[13],H.A.Kramers şi C.Wentzel [147],care au stat la baza aşa numitei metode W.K.B.

O revenire la studii matematice privind problema perturbaţiilor singulare s-a înregistrat între cele două războaie prin lucrările lui Y.-W.Tschen[126], M.Nagumo [75] şi E.Rothe[111] în care se abordează şi probleme neliniare [75].Aceste lucrări au rămas însă fără ecou .In schimb, F.Rellich[108]între 1937-1942, a fundamentat din punct de vedere matematic teoria perturbaţiilor proprietăţilor spectrale ale operatorilor liniari autoadjuncţi faţă de schimbări mici.(Această teorie a fost creeată de Rayleigh şi Schrődinger formal şi incomplet fundamentată matematic;ulterior rezultatele lui F.Rellich au fost extinse de către K.O.Friedrichs [31]la spectrul continuu şi de către B.Sz.Nagy ,F.Wolf [149], T.Kato [53]pentru operatori neautoadjuncţi în spaţii Banach).

In 1946 K.O.Friedrichs şi elevul său W.Wasow, efectuînd un studiu sistematic al problemelor la limită cu perturbaţii singulare, au folosit pentru prima oară în titlul unei lucrări,[30],noţiunea de perturbaţie singulară (ulterior, K.Friedrichs a prezentat în [32]fenomenele asimptotice iar W.Wasow a consacrat capitolul al X-lea din [148]perturbaţiilor singulare ale ecuaţiilor diferenţiale.

In paralel,o contribuţie fundamentală la dezvoltarea teoriei perturbaţiilor singulare au adus în continuare matematicienii sovietici.

I.I.Gradstein a început studiul acestor probleme în 1946,[35], dar momentele cele mai importante le constituie lucrările lui A.N. Tihonov [120], [121], [122]în domeniul ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale neliniare cu parametru mic lîngă(o parte din) derivatele de ordinul cel mai mare.

El a stabilit condiţiile în care soluţia acestor sisteme converge către soluţia sistemului redus cînd parametrul tinde la zero.

Eleva sa,A.B.Vasilieva,a stabilit condiţiile în care derivata soluţiei acestor sisteme converge către soluţia unui anumit sistem de ecuaţii diferenţiale[129].

Aceste lucrări au fost continuate de către elevii lui A.N. Tihonov şi alţi matematicieni sovietici aflaţi sub influenţa şcolii sale,prin elaborarea unor noi metode asimptotice sau extinderea celor anterioare, asupra cărora vom reveni.

0.4. Comentarii bibliografice.

După 1950 cercetările în domeniile perturbaţiilor datorate parametrilor s-au dezvoltat cu repeziciune.De aceea nu vom putea aminti aici toate lucrările care oglindesc aceste cercetări.Totuşi, dintre lucrările din aceste domenii consultate de noi şi pe care le considerăm reprezentative amintim:

In domeniul ecuaţiilor cu mai multe scări de timp:lucrările lui I.S.Gradstein [35], [36], [37], A.N.Tihonov [121], J.J.Levin şi

N.Levinson [61], A.Halanay şi V.Drăgan [22],[41].

Studiul soluţiilor periodice ale sistemelor cu perturbaţii singulare s-a făcut în lucrările lui K.O.Friedrichs şi W.Wasow [3o],[148],L.Flatto şi N. Levinson [28], M.I.Imanaliev[51],N.N. Bogoliubov jr.[12](metoda de "luare a mediei", osrednenia" în l. rusă ;"averaging" în l.engleză), A.Halanay(cazul critic)[4o]şi A. Halanay şi V.Drăgan[22],[41].

Studiul perturbaţiilor singulare ale ecuaţiilor cu derivate parţiale s-a făcut în cele trei memorii ale lui M.I.Vişik şi L.A. Liusternik [142],[143],[144], teza de doctorat a lui Denise Huét [46], monografiile lui M.Van Dyke[24], şi J.L. Lions[63](aceasta avînd peste 3oo de trimiteri bibliografice), partea a doua a cărţilor lui S.A.Lomov [68]şi a lui J.Kevorkian şi J.D. Cole[56].

Din literartura privind perturbaţiile operatorilor liniari abstracţi amintim lucrarea fundamentală a lui I.Ţ.Gohberg şi M.G. Krein[34]privind stabilitatea indexului şi a altor mărimi caracteristice ale unor operatori faţă de perturbaţii mici(Extinderi ale rezultatelor din această lucrare sînt făcute de către T.Kato pentru operatori liniari închişi [53],[54], E.Hille şi R.S.Philips [42]pentru semigrupuri de operatori, F.H.Vasilescu[128]pentru complexe de spaţii Banach şi subsemnatul [85]pentru complexe de ideale de operatori. O parte din aceste rezultate sînt prezentate în monografiile lui T.Kato [55]şi M.Schechter[114] iar o sinteză a rezultatelor din aceste monografii privind stabilitatea închiderii , inversabilităţii mărginite, spectrului şi rezolventei faţă de perturbaţii mici este făcută de subsemnatul în [8o]. De asemenea, dintre lucrările recente privind extinderea metodelor asimtotice de la ecuaţii diferenţiale la operatori abstracţi menţionăm lucrările lui J.Mika [74](metoda racordării seriilor)şi M.A.Valiev şi S.A.Lomov [127](metoda regularizării).

In teoria stabilităţii ecuaţiilor diferenţiale(problema stabilităţii o putem privi tot ca o problemă cu perturbaţii(deşi în acest caz se folosesc alte metode decît cele asimtotice). De exemplu, dacă $x(t,x^o)$ este soluţia problemei $\dot{x}=f(t,x)$, $x(o)=x^o$ şi urmărim comportarea soluţiilor $x(t,\lambda)$ cînd λ se află într-o vecinătate a lui x^o, atunci $x(t,x^o)$ are caracterul"special", neperturbat iar $x(t,\lambda)$ sînt "perturbaţii" ale sale), în ţara noastră alături de şcoala profesorului A.Halanay, şcoala matematică de ecuaţii de la Universitatea din Timişoara de sub conducerea profesorului M.Reghiş a obţinut rezultate importante .Lucrări ale profesorului M.Reghiş sînt citate în memorii importante cum sînt cele ale lui L.Cesari [15] , J.L.Massera şi J.J. Schaffer[7o] , A.Halanay [39],iar o trecere în revistă a rezultatelor obţinute de profesorul M.Reghiş şi elevii săi se găseşte în [1o7] .

Stabilitatea soluţiilor ecuaţiilor perturbate singular a fost studiată în lucrările lui I.S.Gradstein[37], M.B nea[6],A.I. Klimuşev şi N.N.Krassovski[57],M.I.Imanaliev[51], A.Halanay şi V.Drăgan [41] .

In lucrarea de faţă ne ocupăm de metode asimptotice pentru ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale şi integro-diferenţiale cu parametru mic lîngă derivata de ordinul cel mai mare.In această direcţie, în ultimii 3o de ani, şcoala sovietică a obţinut rezultate importante.

A.B.Vasilieva a fundamentat o nouă metodă asimptotică-metoda funcţiilor de strat limită, sau - după unii autori-metoda Vasilieva [131], [132], [135](această metodă este prezentată în §.1.4.).

Rezultatele obţinute iniţial în lucrările [131],[5o] au fost obţinute în condiţii destul de puternice de stabilitate a spectrului unui anumit operator(partea reală a tuturor valorilor proprii să fie negativă). Cercetările ulterioare au extins aceste rezultate la cazul stabilităţii condiţionate(o parte din valorile proprii au partea reală negativă iar restul pozitivă). Acestea sînt oglindite în lucrările lui A.B.Vasilieva şi V.F.Butuzov[135]şi V.A.Anikeeva[3

De asemenea metoda lui Vasilieva a fost extinsă la teoria stratului de tranziţie interior[134], şi la cazul"critic"(cînd o parte din valorile proprii sînt nule) de către A.B.Vasilieva[136],[137], A.A.Sîskin[118]şi A.B. Vasilieva şi V.F.Butuzov[14],[135]. M.I. Imanaliev[5o],[51]a extins metoda Vasilieva la ecuaţii integro-diferenţiale iar N.N.Nefëdov[96]la o clasă de ecuaţii integrale.

S.A.Lomov a elaborat o altă metodă,într-o serie de lucrări din care cităm [65]-[68]şi anume, metoda regularizării(pe care o prezentăm pe scurt în §.1.5.)Ea constă în extinderea spaţiului variabilelor şi a operatorului diferenţial perturbat la alt spaţiu, respectiv alt operator, astfel încît perturbaţia extinsă să fie regulată.Aceasta are unele avantaje asupra altor metode, cum ar fi convergenţa uniformă, aplicabilitatea sa generală la probleme diferenţiale, integro-diferenţiale, cu derivate parţiale,însă numai la cele cu variaţia rapidă a funcţiei necunoscute.

Metoda prezentată de S.F.Feşcenko, N.I.Skil şi L.D.Nikolenko în [27],care constă în determinarea soluţiei formale ca produs de două serii este de fapt tot o metodă de regularizare.

Acestea sînt numai o parte din lucrările din domeniu. O trecere în revistă completă este făcută în survey-urile succesive [133],[138],[14o],[15o],[12]precum şi în monografiile fundamentale [27]; [138], [139], [68], [41].

Aceste cercetări cu caracter fundamentel şi-au găsit aplicabilitatea în diferite domenii ale ştiinţelor aplicative. Astfel rezultatele obţinute de A.N.Tihonov şi A.B.Vasilieva au fost folosite de către P.Kokotovic şi P.Sannuti [58],[59] în teoria sensibilităţii sistemelor dinamice. Ideile lor sînt prezentate şi în monografiile lui J.B.Cruz jr.[20] şi P.M.Frank [29]. I.K.Bogatîrev a folosit teoria stratului de tranziţie interior la teoria sistemelor cu impulsuri [11].

A.Halanay şi V.Drăgan au folosit metode asimptotice originale în teoria controlului sistemelor dinamice [21], a stabilităţii maşinilor sincrone [4] (împreună cu E.Arie şi D.Martac) [23] şi în alte lucrări.

0.5. Conţinutul tezei.

Teza este structurată în 5 capitole precedate de această introducere şi urmate de bibliografie. Primul capitol cuprinde 5 paragrafe iar următoarele capitole cuprind fiecare cîte două paragrafe.

Rezultatele originale ale autorului sînt expuse în capitolele II, III, IV şi în paragraful al doilea al capitolului V.

In introducere am prezentat problema generală a perturbaţiilor, în special a celor singulare (§.0.1.), scopul metodelor asimptotice (§.0.2) şi rezultatele obţinute în domeniul ecuaţiilor diferenţiale cu perturbaţii singulare şi în alte domenii ale teoriei perturbaţiilor (atît în §.0.3. cît şi în §.0.4.). Am făcut acest lucru din două motive: In primul rînd pentru a reda o imagine mai cuprinzătoare a problematicii perturbaţiilor singulare şi pentru a evidenţia locul pe care-l ocupă în această problematică teoria ecuaţiilor diferenţiale şi integro-diferenţiale cu parametru mic lîngă derivata de ordinul cel mai mare, în care se încadrează şi rezultatele din această lucrare, şi în al doilea rînd pentru că, astfel redactată, introducerea reflectă lecturile autorului.

La sfîrşitul fiecărui paragraf sînt comentarii bibliografice în care sînt indicate lucrările autorului sau ale altor autori în care au fost publicate rezultatele prezentate în paragraful respectiv.

In capitolul I sînt definite noţiunile fundamentale şi sînt prezentate principalele rezultate şi metode asimptotice din literatura de specialitate în legătură cu care se află rezultatele originale din capitolele următoare.

In § 1.1. sînt definite noțiunile fundamentale, sînt date definiții originale (definițiile 1.3-1.8) pentru noțiunile de problemă regulată, problemă cu perturbații singulare și soluție asimptotică, bazate pe noțiunile de problemă apropiată și soluție apropiată atașate unei probleme cu parametru mic în spații abstracte.

In § 1.2. este subliniată dependența continuă de parametru a soluțiilor problemelor regulate și este prezentată metoda clasică de determinare a unor soluții asimptotice pentru aceste probleme pe exemplul sistemelor de ecuații diferențiale neliniare de ordinul I.

In § 1.3. este prezentată teorema fundamentală a lui A.N. Tihonov în care sînt date condiții suficiente pentru ca soluția problemei Cauchy pentru sisteme neliniare de ecuații diferențiale cu perturbații singulare, să depindă continuu de parametru.

In § 1.4. este prezentată metoda funcțiilor de strat limită (metoda Vasilieva) de construire a unor soluții asimptotice pentru problemele diferențiale neliniare cu perturbații singulare (1.16)-(1.17) și pentru problemele integro-diferențiale neliniare cu perturbații singulare (1.4o)-(1.17).

In § 1.5. este prezentată metoda regularizării a lui S.A.Lomov pentru problemele diferențiale (1.45) și integro-diferențiale (1.61), liniare, cu perturbații singulare.

In capitolul II sînt extinse rezultatele obținute de S.A.Lomov și prezentate în § 1.5, considerînd aceleași probleme (1.45), respectiv (1.61), dar în cazul critic mai general cînd toate valorile proprii ale matricii A(t) pot fi multiple (cu condiția ca matricea A(t) să fie diagonalizabilă).

In § 2.1. se consideră problema (1.45); urmînd ideea lui S.A.Lomov, această problemă se extinde la altă problemă (1.46), care este o problemă regulată într-un anumit spațiu U. Acest spațiu este adaptat noului spectru considerat pentru matricea A(t), construcția sa fiind mai fundamentată matematic decît cea făcută de S.A.Lomov pentru spațiul analog.

Demonstrația teoremelor 2.1-2.7 se face după ideile folosite de S.A.Lomov pentru demonstrația teoremelor analoage, urmărindu-se adaptarea lor atît la noua terminologie introdusă cît și la noul spectru considerat. In plus este rezolvată și o problemă originală și anume, în ce condiții aproximația asimptotică de un anumit ordin (construită prin metoda expusă în acest paragraf) coincide cu soluția exactă (Teorema 2.8).

In § 2.2. sînt extinse rezultatele din § 1.5 și cele obținute în § 2.1 la problema (1.61) (această problemă a fost studiată de S.A.Lomov doar în cazul cînd valorile proprii ale matricii A(t) sînt simple și nenule). Se arată în ce condiții este posibilă extinderea la cazul cînd matricea A(t) are și valoarea proprie zero și se arată că extinderea este întotdeauna posibilă la cazul cînd matricea A(t) este diagonalizabilă și are valori proprii simple sau multiple nenule.

In capitolul III sînt studiate unele probleme integro-diferențiale de tip Fredholm cu perturbații singulare.

In § 3.1. sînt considerate ecuațiile integro-diferențiale de ordinul doi cu parametru mic lîngă derivata de ordinul doi. Sînt date condiții suficiente de existență și unicitate a soluției și este dat un algoritm direct de construire a unei soluții asimptotice pentru aceste ecuații, bazat pe metoda Vasilieva. Este dată o demonstrație originală pentru teorema de evaluare exponențială a funcțiilor de strat limită și este demonstrată evaluarea asimptotică a restului.

In § 3.2, pornind de la o idee dată în[27], pentru ecuații diferențiale, este dată o metodă asimptotică pentru sisteme de ecuații integro-diferențiale de tip Fredholm cu perturbații singulare. Spre deosebire de celelalte metode, prin această metodă nu se simplifică structura ecuațiilor ci coeficienții ecuațiilor sînt inlocuiți cu polinoamele lor Mac Laurin prin raport cu parametrul. Pornindu-se de la o ecuație, se ajunge la sisteme de ecuații de forme tot mai generale (dar în condiții tot mai restrictive asupra spectrului unei anumite matrici), demonstrîndu-se de fiecare dată convergența asimptotică.

In capitolul IV sînt considerate sisteme de ecuații integro-diferențiale cu ambele limite de integrare variabile;aceste ecuații nu au fost studiate de alți autori.

In § 4.1. sînt considerate sisteme de ecuații integro-diferențiale neliniare cu perturbații singulare în care termenul integral este de forma (4.1c). Specificul acestor sisteme este că, aplicînd metoda Vasilieva, soluția lor asimptotică se construiește prin rezolvarea unor ecuații exclusiv diferențiale.

Este demonstrată evaluarea exponențială a funcțiilor de strat limită și evaluarea asimptotică a restului.

In § 4.2. se consideră sisteme de ecuații integro-diferențiale în care ecuațiile cu mișcări rapide sînt cele din §·4.1 iar cele cu mișcări lente sînt liniare, cu limitele de integrare simetrice față de zero. O atenție deosebită este acordată problemei neperturbate. Sînt date condiții de existență și unicitate a soluției acesteia și este dată o metodă numerică cu ajutorul funcțiilor spline. Sînt construite soluții asimptotice atît pentru problema cu mișcări lente cît și pentru întreaga problemă cu perturbații singulare.

In capitolul V sînt aplicate unele rezultate din capitolele precedente în teoria sensibilității sistemelor dinamice.

In § 5.1. sînt date unele noțiuni de teoria sensibilității sistemelor dinamice și sînt prezentate principalele rezultate obținute de P.Kokotovic și P.Sannuti în această teorie precum și rezultatele obținute de A.B.Vasilieva (privind derivatele soluțiilor sistemelor de ecuații diferențiale cu perturbații singulare) pe care se bazează rezultatele primilor doi dar și ale autorului din § 5.2.

In § 5.2, deși acesta este destinat aplicațiilor, am stabilit și unele rezultate cu caracter fundamental. Definind în mod natural funcțiile de sensibilitate de ordin superior, am stabilit identitatea dintre acestea și coeficienții seriilor regulate ale dezvoltărilor asimptotice obținute atît prin metoda Vasilieva cît și prin metoda regularizării, rezultînd astfel și o metodă de calcul a funcțiilor de sensibilitate.

Aceste rezultate sînt ilustrate prin exemple des întîlnite în tehnică,dar este dat și un exemplu original prin care se subliniază necesitatea folosirii dezvoltărilor asimptotice,care conțin funcțiile de sensibilitate și în același timp dau o informație asupra comportării soluțiilor și în zona stratului limită.

* * *

Cînd prezenta lucrare era în linii mari elaborată a apărut cartea profesorului A.Halanay în colaborare cu dr.V.Drăgan [41]- - prima monografie în limba română privind dezvoltările asimptotice ale problemelor cu perturbații singulare.

Consultatea ei mi-a întărit unele convingeri dobîndite în studiul problemelor enunțate chiar în titlul ei, studiu pe care l-am efectuat în perioada 1978-1985.

In încheiere țin să mulțumesc tovarăşului profesor dr.Borislav Crstici pentru stăruința pe care a depus-o în conducerea studiilor mele de doctorat şi pentru ajutorul acordat în timpul elaborării prezentei teze.

De asemenea, mulțumesc tovarăşului profesor dr.Mircea Reghiş pentru sugestiile pe care mi le-a acordat în timpul definitivării acestei teze.

CAPITOLUL I

METODE ASIMPTOTICE

In acest capitol vom defini noţiunile fundamentale şi vom prezenta metodele asimptotice din literatura de specialitate în legătură cu care se află rezultatele originale din capitolele următoare.

1.1. Noţiuni fundamentale.

In acest paragraf vom defini noţiunile fundamentale privind perturbaţiile singulare şi aproximaţiile asimptotice. Vom încerca să generalizăm definiţiile aflate în literatura de specialitate astfel încît acestea să cuprindă şi ecuaţiile cu parametru mic, inclusiv "ecuaţiile cu parametru mic lîngă derivatele de ordinul cel mai mare".

Fie U un spaţiu de funcţii definite pe un interval $I \subset R$, cu valori într-un spaţiu normat.

Pentru a descrie comportarea unei funcţii $f \in U$ în raport cu o altă funcţie $g \in U$ atunci cînd $\varepsilon \in I$, $\varepsilon \to \varepsilon_0$, vom folosi definiţiile şi notaţiile lui E.Landau, care sînt des întîlnite în literatura de specialitate.

Definiţia 1.1. Zicem că funcţia $f \in U$ are acelaşi ordin ca funcţia $g \in U$ pentru $\varepsilon \to \varepsilon_0$ şi notăm $f = O(g)$ pentru $\varepsilon \to \varepsilon_0$, dacă există o vecinătate V a lui ε_0 şi o constantă $k > 0$ astfel încît:

$\|f(\varepsilon)\| \leq k\|g(\varepsilon)\|$ pentru orice $\varepsilon \in V \cap I$.

Definiţia 1.2. Zicem că funcţia $f \in U$ are un ordin mai mic decît funcţia $g \in U$ pentru $\varepsilon \to \varepsilon_0$ şi notăm:

$f = o(g)$ pentru $\varepsilon \to \varepsilon_0$,

dacă pentru orice $k > 0$ există o vecinătate V_k a lui ε_0 astfel încît $\|f(\varepsilon)\| \leq k\|g(\varepsilon)\|$ pentru orice $\varepsilon \in V_k \cap I$.

Observaţia 1.1. Dacă există o vecinătate V a lui ε_0 astfel încît $g(\varepsilon) \neq 0$ pentru $\varepsilon \in V(\varepsilon_0)$ atunci:

a) $f = O(g)$ pentru $\varepsilon \to \varepsilon_0$ dacă şi numai dacă funcţia $\|f(\varepsilon)\| / \|g(\varepsilon)\|$ este mărginită în $V(\varepsilon_0)$;

b) $f = o(g)$ pentru $\varepsilon \to \varepsilon_0$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \|f(\varepsilon)\| / \|g(\varepsilon)\| = 0$ ∎

Vom defini în continuare noţiunea de problemă cu parametru mic astfel încît aceasta să includă ca un caz particular noţiunea de perturbaţie singulară datorată parametrului mic.

Fie X şi Y două mulţimi, I un interval închis din R,

$\mathcal{L} = \{ L_\varepsilon | L_\varepsilon : D_\varepsilon \to Y, D_\varepsilon \subset X, \varepsilon \in I \}$ o familie de operatori şi
$\mathcal{F} = \{ f_\varepsilon | f_\varepsilon \in Y, \varepsilon \in I \}$ o familie de elemente din Y.

<u>Definiţia 1.3</u>. Fiind date familiile $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{F}$, problema determinării unei familii de elemente $\mathcal{Z} = \{ z_\varepsilon | z_\varepsilon \in D_\varepsilon , \varepsilon \in I \}$ astfel încît:

$$L_\varepsilon z_\varepsilon = f_\varepsilon \ , \ (\forall) \varepsilon \in I \tag{1.1}$$

se numeşte problemă cu parametru şi se notează $(\mathcal{L},\mathcal{F})$; parametrul ε se numeşte parametrul problemei iar familia $\mathcal{Z}$ se numeşte soluţia pproblemei $(\mathcal{L},\mathcal{F})$; dacă $I \ni o$ atunci problema$(\mathcal{L},\mathcal{F})$ se numeşte problemă cu parametru mic∎

<u>Definiţia 1.4.</u> Dacă $D_\varepsilon = D$ oricare ar fi $\varepsilon \in I$, atunci problema $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ se numeşte problemă cu perturbaţii regulate sau problemă regulată∎

<u>Definiţia 1.5.</u> Dacă există $\varepsilon_0 \in I$ astfel încît $D_\varepsilon = D \subsetneq D_{\varepsilon_0}$ oricare ar fi $\varepsilon \in I \setminus \{\varepsilon_0\}$ atunci problema $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ se numeşte problemă cu perturbaţii singulare∎

<u>Definiţia 1.6</u>. Dacă $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ este o problemă cu parametru mic atunci problema

$$L_0 z_0 = f_0 \ , \ z_0 \in D_0 \ , \ f_0 \in Y \tag{1.2}$$

se numeşte problemă neperturbată(sau redusă sau degenerată) a problemei $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ şi se notează (L_0, f_0)∎

In continuare presupunem că $(Y, \|\cdot\|)$ este spaţiu liniar normat.

<u>Definiţia 1.7.</u> Fiind dată problema cu parametru mic $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ şi un număr $N \in \mathbb{N}$ dat, problema determinării unei familii de elemente $\mathcal{Z}_N = \{ Z_{\varepsilon N} | Z_{\varepsilon N} \in D_\varepsilon , \varepsilon \in I \}$ astfel încît

$$L_\varepsilon Z_{\varepsilon N} - f_\varepsilon = O(\varepsilon^{N+1} \alpha) \text{ pentru } \varepsilon \to o , \tag{1.3}$$

unde α este un element din Y, se numeşte problemă apropiată de ordinul N a problemei $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ iar familia $\mathcal{Z}_N$ se numeşte soluţie apropiată de ordinul N a problemei$(\mathcal{L},\mathcal{F})$∎

In continuare prepupunem că şi $(X, \|\cdot\|)$ este spaţiu liniar normat.

<u>Definiţia 1.8.</u> Fiind dată problema cu parametru mic$(\mathcal{L},\mathcal{F})$, familia $\mathcal{Z}_N$ se numeşte soluţie asimptotică de ordinul N a problemei $(\mathcal{L},\mathcal{F})$sau aproximaţie asimptotică de ordinul N a soluţiei $\mathcal{Z}$ a problemei $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ dacă ea este o soluţie apropiată de ordinul N a problemei$(\mathcal{L},\mathcal{F})$ şi (pe lîngă condiţia (1.3)) satisface condiţia:

$$\| z_\varepsilon - Z_{\varepsilon N} \| = O(C_0 + C_1 \|\alpha\|) \varepsilon^{N+1} \text{ pentru } \varepsilon \to o , \tag{1.4}$$

constantele C_0 şi C_1 nedepinzînd de ε ∎

<u>Definiţia 1.9</u>. Se numeşte metodă asimptotică orice procedeu de determinare a unei soluţii asimptotice pentru problema $(\mathcal{L},\mathcal{F})$∎

<u>Observaţia 1.2</u>. Valoarea practică a metodelor asimptotice constă în determinarea efectivă a aproximaţiei asimptotice $\mathcal{Z}_N$ prin rezolvarea unor probleme mai simple decît problema(1.1) atunci cînd este dificil sau imposibil de determinat soluţia $\mathcal{Z}$ a sa.

In general metodele asimptotice constau în parcurgerea următoarelor etape:

1)Se înlocuieşte z_ε din (1.1) printr-o serie cu coeficienţi nedeterminaţi de forma:

$$z_0+\varepsilon z_1+\ldots+\varepsilon^k z_k+\ldots \tag{1.5}$$

2)Se dezvoltă funcţiile L_ε şi f_ε după formule lui Mac Laurin de ordinul N prin raport cu ε, impunîndu-se în prealabil condiţii suficiente de netezime pentru aceste funcţii.

3)Se identifică coeficienţii lui ε^i, $i=\overline{0,N}$, obţinîndu-se astfel probleme mai simple decît problema(1.1),(problema care rezultă din identificarea coeficienţilor lui ε^0 este chiar problema (1.2))

4)Se rezolvă problemele obţinute la 3) şi prin intermediul soluţiilor acestor probleme rezultă coeficienţii z_i, $i=\overline{0,N}$ ai seriei (1.5) rezultînd astfel o sumă parţială a sa :

$$Z_{\varepsilon N}=z_0+\varepsilon z_1+\ldots+\varepsilon^N z_N \tag{1.6}$$

5) Se demonstrează că familia $\mathcal{Z}_N$ astfel obţinută este o aproximaţie asimptotică de ordinul N a problemei $(\mathcal{L},\mathcal{F})$∎

<u>Definiţia 1.1o</u>. Dacă familia $\mathcal{Z}_N$ este o aproximaţie asimptotică de ordinul N dată de relaţiile (1.6) şi (1.2) atunci ea se mai numeşte şi dezvoltare asimptotică de ordinul N a soluţiei problemei $(\mathcal{L},\mathcal{F})$; Dacă pentru orice $N\in\mathbb{N}$ familia $\mathcal{Z}_N$ dată de (1.6) şi (1.2) este o dezvoltare asimptotică de ordinul N a soluţiei problemei $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ atunci zicem că seria (1.5) este o dezvoltare asimptotică a soluţiei problemei$(\mathcal{L},\mathcal{F})$ sau că seria(1.5) converge asimptotic către soluţia problemei(1.1)∎

<u>Comentarii bibliografice</u>.

Deşi denumirile de perturbaţie regulată,perturbaţie singulară şi soluţie asimptotică sînt deja clasice în literatura de specialitate,modul în care ele sînt definite diferă de la autor la autor.

Ideea de a considera cazul $D_\varepsilon=D_0$, $\varepsilon\in I$ pentru perturbaţiile regulate şi cazul $D_\varepsilon\subsetneq D_0$, $\varepsilon\in I\setminus\{0\}$ pentru perturbaţiile singulare a fost preluată de autor din [68]. In rest, definiţiile (1.3)-(1.8), bazate pe noţiunea de problemă apropiată de ordinul N ataşată unei probleme cu parametru mic în spaţii abstracte aparţin autorului∎

1.2. Metode asimptotice pentru probleme regulate.

In acest paragraf vom prezenta problema dependenţei continue de parametru a soluţiilor problemelor regulate şi metoda clasică de determinare a unor aproximaţii asimptotice pentru aceste probleme pe exemplul sistemelor de ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul I.

Considerăm problema regulată$(\mathcal{L},\mathcal{F})$ unde

$$\mathcal{L} = \left\{\frac{d}{dt}\right\},\ \mathcal{F} = \{ f_\varepsilon \mid f_\varepsilon : E\subset\mathbb{C}^n \times [o,a] \times [o,\varepsilon_o] \to \mathbb{C}^n \}$$

iar în locul problemei(1.1) considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{dz}{dt} = f(z,t,\varepsilon),\quad o \leq t \leq a < \infty \qquad (1.7)$$

Soluţia Z se cere în clasa funcţiilor $\{z \mid z : [o,a] \times [o,\varepsilon_o] \to \mathbb{C}^n\}$care sînt derivabile prin raport cu t şi satisfac condiţia iniţială:

$$z(o,\varepsilon) = z^o \qquad (1.8)$$

O aproximaţie asimptotică de ordinul zero se poate obţine (în condiţii suficiente de netezime impuse funcţiei f) direct din problema neperturbată:

$$\frac{dz_o}{dt} = f(z_o,t,o)\ ,\ z_o(o) = z^o \qquad (1.9)$$

Mai mult, are loc următoarea teoremă de dependenţă continuă a soluţiei faţă de parametrul ε :

<u>Teorema 1.1.</u> [135] Dacă $f(z,t,\varepsilon)$ este continuă prin raport cu ansamblul variabilelor(z,t,ε), îndeplineşte condiţia lui Lipschitz prin raport cu z într-un anumit domeniu de variaţie a variabilelor(z,t,ε) atunci soluţia $z(t,\varepsilon)$ a problemei(1.7)-(1.8) converge uniform pentru $t\in[o,a]$, cîndεtinde la zero,către soluţia problemei reduse(1.9)∎

Pentru a obţine o dezvoltare asimptotică de un ordin $N > o$, metoda este următoarea [135]:

Se caută soluţia apropiată a problemei $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ sub forma(1.5). In acest scop, se înlocuieşte (1.5) în (1.7) şi se scriu ambii membrii ai ecuaţiei (1.7) sub formă de serii de puteri ale lui ε . Pentru aceasta se dezvoltă funcţia $f(z,t,\varepsilon)$ din membrul drept al acestei ecuaţii după formula lui Mac Laurin prin raport cuε în vecinătatea punctului $(z_o(t),t,o)$:

$$f(z,t,\varepsilon)=f(z_o(t)+\varepsilon z_1(t)+\ \ldots,t,\varepsilon\ ) =f(z_o(t),t,o)+\varepsilon\,(f_z(t)z_1(t)+ + f_1(t))+\ldots+\varepsilon^k(f_z(t)z_k(t)+f_k(t)) + \ldots \qquad (1.10)$$

unde : $f_z(t)=f'_z(z_o(t),t,o), f_1(t)=f'_\varepsilon\ (z_o(t),t,o),$

$f_2(t)=\frac{1}{2!}(f''_{z^2}(z_0(t),t,o)\cdot z_1^2(t)+2f''_{z\varepsilon}\cdot z_1(t)+f''_{\varepsilon^2}(z_0(t),t,o))$

iar $f_k(t), k\geq 2$ se exprimă determinat în funcţie de t şi $z_i(t)$.
$i=\overline{o,k-1}$.

Egalînd coeficienţii seriei (1.10) cu ai seriei care se obţine derivînd prin raport cu t termenii seriei (1.5) rezultă ecuaţiile

$$\frac{dz_o}{dt}=f(z_o(t),t,o) \tag{1.11}$$

$$\frac{dz_k}{dt}=f_z(t)z_k(t)+f_k(t) \tag{1.12}$$

Prin identificarea coeficienţilor, după înlocuirea seriei (1.5) în condiţia iniţială (1.8) rezultă:

$$z_o(o)=z^o \tag{1.13}$$

$$z_k(o)=o \qquad k=1,2,\ldots \tag{1.14}$$

Se observă că problema (1.11)-1.13) este chiar problema redusă (1.9).

Problemele(1.12)-(1.14) fiind liniare, admit soluţii unice pentru $t\in[o,a]$. Rezolvînd aceste probleme se obţin coeficienţii seriei formale (1.5).

In general, aceasta este divergentă, dar pentru ε suficient de mic este convergentă asimptotic. Mai precis, are loc teorema următoare:

<u>Teorema 1.2.</u> [135] Dacă funcţia $f(z,t,\varepsilon)$ are derivate parţiale continue pînă la ordinul N+1 prin raport cu toate argumentele şi problema redusă (1.9) admite o soluţie $z_o(t)$ atunci există ε_o astfel încît pentru $o\leq\varepsilon\leq\varepsilon_o$ are loc evaluarea:

$$\| z(t,\varepsilon)-Z_{\varepsilon N}(t)\| \leq C\,\varepsilon^{N+1} \quad \text{pentru } t\in[o,a], \tag{1.15}$$

unde $z(t,\varepsilon)$ este soluţia exactă a problemei(1.7)-(1.8) şi $Z_{\varepsilon N}(t)$ este suma parţială (1.6) a seriei (1.5) obţinută prin rezolvarea problemelor (1.9) şi (1.12)-(1.14) pentru $k=\overline{1,N}$, iar constanta $C>o$ nu depinde de $t\in[o,a]$ şi nici de $\varepsilon\in[o,\varepsilon_o]$ dar depinde , în general , de N.

<u>Comentarii bibliografice</u>.

Teoremele 1.1. şi 1.2 au devenit clasice în teoria ecuaţiilor diferenţiale. Ele se găsesc în monografia citată [135] a lui A.B. Vasilieva şi V.F.Butuzov dar şi în alte monografii. Astfel teorema 1.1. se găseşte în cursurile de ecuaţii diferenţiale ale lui N.P.Erughin [26] şi C.Petrovskii [99].

1.3. Teorema lui Tihonov relativă la sisteme de ecuații diferențiale neliniare cu perturbații singulare.

In acest paragraf vom considera sistemele de ecuații diferențiale neliniare cu perturbații singulare și vom prezenta condițiile impuse de A.N.Tihonov acestor sisteme pentru ca soluțiile lor să depindă continuu de parametru.

Vom considera chiar problema cu perturbații singulare studiată de A.N.Tihonov [120]:

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = F(z,x,t) \qquad 0 \leq t \leq a < \infty \tag{1.16 a}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(z,x,t) \tag{1.16 b}$$

$$z(0,\varepsilon) = z^0, \ x(0,\varepsilon) = x^0 \tag{1.17}$$

unde F, z, z^0 și f, x, x^0 sînt funcții-vector de dimensiune M, respectiv m, $0 \leq \varepsilon \ll 1$, și vectorii z^0 și x^0 sînt constanți.

Problema redusă este în acest caz:

$$0 = F(\bar{z},\bar{x},t) \tag{1.18 a}$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{z},\bar{x},t), \quad \bar{x}(0) = x^0 \tag{1.18 b}$$

Scriind sistemul (1.16) sub forma (1.7), condiția de continuitate (prin raport cu ε) nu mai este îndeplinită și teorema 1.1 nu mai este, în general, valabilă. A.N.Tihonov a stabilit condițiile în care soluția problemei (1.16)-(1.17) este totuși continuă prin raport cu ε:

Condiția 1.1. Funcțiile F și f sînt continue și satisfac condiție lui Lipschitz în raport cu z și x într-un domeniu deschis G din spațiul variabilelor (z,x,t).

Condiția 1.2. Ecuația (1.18a) are soluția $\bar{z} = \varphi(\bar{x},t)$ într-un domeniu mărginit și închis $\bar{D}$ din spațiul variabilelor (x,t) astfel încît:

(i) $\varphi(\bar{x},t)$ este continuă în $\bar{D}$

(ii) dacă $(x,t) \in \bar{D}$ atunci $(\varphi(\bar{x},t), \bar{x},t) \in G$

(iii) soluția $\bar{z} = \varphi(\bar{x},t)$ este izolată în $\bar{D}$ (adică există $\eta > 0$ astfel încît dacă $0 < \| z - \varphi(\bar{x},t) \| < \eta$, $(\bar{x},t) \in \bar{D}$ atunci $F(z,x,t) \neq 0$)

Condiția 1.3. Sistemul obținut din (1.18 b) prin înlocuirea $\bar{z} := \varphi(\bar{x},t)$, are soluție unică $\bar{x}(t)$ pentru $t \in [0,a]$ astfel încît $(\bar{x}(t),t) \in D$ pentru $t \in [0,a]$ ($D = \bar{D}$) și $f(\varphi(\bar{x},t),\bar{x},t)$ satisface condițiile lui Lipschitz prin raport cu $\bar{x}$ în $\bar{D}$.

Condiția 1.4. Punctul de repaus $\tilde{z} = \varphi(x,t)$ al sistemului asociat (conform terminologiei lui A.N.Tihonov [122]):

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = F(\tilde{z},x,t), \ \tau \geq 0 \tag{1.19}$$

este asimptotic stabil în sensul lui Liapunov, uniform în raport cu $(x,t)\in\bar{D}$ (adică pentru orice $\mu>0$ există $\delta(\mu)$ astfel încît dacă $\|\tilde{z}(0)-\varphi(x,t)\|\leq\delta(\mu)$ atunci $\|\tilde{z}(\tau)-\varphi(x,t)\|\leq\mu$ pentru $\tau\geq 0$ şi $\tilde{z}(\tau)$ tinde către $\varphi(x,t)$ pentru $\tau\to\infty$).

Condiţia 1.5. Valoarea iniţială z^0 aparţine domeniului de influenţă(atracţie) a punctului de repaus $\tilde{z}=\varphi(x^0,0)$(adică soluţia $\tilde{z}(\tau)$ a sistemului care se obţine din (1.19) pentru $x=x^0$, $t=0$, satisface condiţiile: $(\tilde{z}(\tau),x^0,0)\in G$ pentru $\tau\geq 0$ şi $\tilde{z}(\tau)\to\varphi(x^0,0)$ pentru $\tau\to\infty$).

Pentru prescurtare vom introduce:

Definiţia 1.11. Problema (1.16)-(1.17) este de tipul "T_0" dacă satisface condiţiile 1.1. - 1.5 de mai sus.

Teorema 1.3 [120]. Dacă problema (1.16)-(1.17) este de tipul "T_0" atunci există $\varepsilon_0>0$ astfel încît pentru $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ soluţia sa există, este unică(pentru $t\in[0,a]$)şi îndeplineşte condiţia la limită:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = \bar{x}(t) \text{ pentru } t\in[0,a] \tag{1.20}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} z(t,\varepsilon) = \bar{z}(t)\equiv\varphi(\bar{x}(t),t) \text{ pentru } t\in(0,a]. \tag{1.21}$$

Comentarii bilbiografice.

Teorema 1.3 este fundamentală în teoria ecuaţiilor diferenţiale neliniare cu parametru mic. Ea se găseşte şi în [122] şi este demonstrată şi în [135]

In cazul particular cînd M este egal cu 1 sau 2 în [76] este dată o demonstraţie mai directă decît cea dată de A.N.Tihonov, pentru această teoremă.

1.4. Metoda funcţiilor de strat limită (metoda Vasilieva) pentru probleme cu perturbaţii singulare.

In acest paragraf vom prezenta metoda asimptotică elaborată de A.B.Vasilieva pentru probleme cu perturbaţii singulare neliniare. Vom arăta cum se aplică această metodă atît în cazul sistemelor de ecuaţii diferenţiale cît şi în cazul sistemelor de ecuaţii integro diferenţiale cu perturbaţii singulare.

Pentru primul caz vom considera din nou problema (1.16)-(1.17) studiată de A.N.Tihonov.

Pentru construirea unei soluţii asimptotice de ordinul N pentru această problemă sînt necesare condiţii mai puternice decît cele impuse în teorema 1.3. In locul condiţiei 1.1. impunem:

Condiţia 1.1'. Funcţiile $F(z,x,t)$ şi $f(z,x,t)$ admit derivate parţiale continue prin raport cu toate argumentele pînă la ordinul N+2 în domeniul G de variaţie a lui (z,x,t).

O condiţie suficientă pentru satisfacerea condiţiei 1.4 este:

<u>Condiţie 1.4'</u>. Valorile proprii $\overline{\lambda}_i(t)$, $i = \overline{1,M}$ ale matricii $\overline{F}_z(t) = F'_z(\varphi(\overline{x}(t),t), \overline{x}(t),t)$ îndeplinesc condiţia de stabilitate (după prima aproximare):

$$\mathrm{Re}\ \overline{\lambda}_i(t) < 0 \text{ pentru } t \in [0,a],\quad i = \overline{1,M}. \tag{1.22}$$

<u>Definiţia 1.12.</u> Problema (1.16)-(1.17) este de tipul "V_N" dacă îndeplineşte condiţiile 1.1', 1.2, 1.3, 1.4', 1.5 de mai sus.

Metoda asimptotică ce se aplică problemelor regulate (indicată în §.1.2) se poate aplica şi problemei cu perturbaţii singulare date de (1.16)-(1.17) însă ea este valabilă numai pentru $t \in (t_0,a]$, $0 < t_0 < a$.

Pentru a obţine o aproximare uniformă pe $[0,a]$, metoda enunţată în titlul acestui paragraf este următoarea:
Soluţia problemei (1.16)-(1.17) se scrie formal sub forma unei sume de două serii:

$$y(t,\varepsilon) = \overline{y}(t,\varepsilon)+\hat{y}(\tau,\varepsilon),\ \tau=t/\varepsilon \tag{1.23 a}$$

$$\overline{y}(t,\varepsilon) = \overline{y}_0(t)+\varepsilon\overline{y}_1(t)+\ldots+\varepsilon^k\overline{y}_k(t)+\ldots \tag{1.23 b}$$

$$\hat{y}(\tau,\varepsilon)= \hat{y}_0(\tau)+\varepsilon\hat{y}_1(\tau)+\ldots+\varepsilon^k\hat{y}_k(\tau)+\ldots \tag{1.23 c}$$

unde prin y am notat şi vom nota în continuare oricare dintre literele x sau z.

Inlocuind expresiile (1.23) în (1.16) şi înmulţind (1.16 b) cu ε rezultă :

$$\varepsilon\frac{d\overline{z}(t,\varepsilon)}{dt} + \frac{d\hat{z}(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = F(\overline{z}(t,\varepsilon)+\hat{z}(\tau,\varepsilon),\overline{x}(t,\varepsilon)+\hat{x}(\tau,\varepsilon),t) \tag{1.24a}$$

$$\varepsilon\frac{d\overline{x}(t,\varepsilon)}{dt} + \frac{d\hat{x}(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = \varepsilon f(\overline{z}(t,\varepsilon)+\hat{z}(\tau,\varepsilon),\overline{x}(t,\varepsilon)+\hat{x}(\tau,\varepsilon),t) \tag{1.24b}$$

Funcţiile din membrul drept al ecuaţiilor (1.24) se dezvoltă în serie Mac Laurin, analog ca în §.1.2:

$$F(\overline{z}+\hat{z},\overline{x}+\hat{x},t) = \overline{F}(t,\varepsilon)+\hat{F}(\tau,\varepsilon) \tag{1.25}$$

$$\overline{F}(t,\varepsilon)=F(\overline{z},\overline{x},t) = F(\overline{z}_0(t)+\varepsilon\overline{z}_1(t)+\ldots,\overline{x}_0(t)+\varepsilon\overline{x}_1(t)+\ldots,t)=$$
$$=\overline{F}_0(t)+\varepsilon\overline{F}_1(t)+\ldots+\varepsilon^k\overline{F}_k(t)+\ldots, \tag{1.26}$$

$$\overline{F}_0(t)=F(\overline{z}_0(t),\overline{x}_0(t),t),\ \overline{F}_1(t) = \overline{F}_z(t)\overline{z}_1(t)+\overline{F}_x(t)\overline{x}_1(t), \tag{1.27}$$

unde

$$\overline{F}_y(t) = F'_y(\overline{z}_0(t),\overline{x}_0(t),t),\ \overline{F}_k(t) = \overline{F}_z(t)\overline{z}_k(t)+\overline{F}_x(t)\overline{x}_k(t)+F_k(t) \tag{1.28}$$

unde $F_k(t)$ se exprimă determinat în funcţie de $\overline{z}_i(t),\overline{x}_i(t)$, $i=\overline{0,k-1}$,

$$\hat{F}(\tau,\varepsilon)\equiv F(\bar{z}(\tau\varepsilon,\varepsilon)+\hat{z}(\tau,\varepsilon),\bar{x}(\tau\varepsilon,\varepsilon)+\hat{x}(\tau,\varepsilon),\tau\varepsilon)-$$

$$-F(\bar{z}(\tau\varepsilon,\varepsilon),\bar{x}(\tau\varepsilon,\varepsilon),\tau\varepsilon)=\hat{F}_o(\tau)+\varepsilon\hat{F}_1(\tau)+\ldots+\varepsilon^k\hat{F}_k(\tau)+\ldots, \quad (1.29)$$

$$\hat{F}_o(\tau)\equiv F(\bar{z}_o(o)+\hat{z}_o(\tau),\bar{x}_o(o)+\hat{x}_o(\tau),o)-F(\bar{z}_o(o),\bar{x}_o(o),o),$$

$$\hat{F}_1(\tau)\equiv\hat{F}_z(\tau)\cdot\hat{z}_1(\tau)+\hat{F}_x(\tau)\hat{x}_1(\tau)+\tilde{F}_1(\tau),$$

unde: $\hat{F}_y(\tau)\equiv F'_y(\bar{z}_o(o)+\hat{z}_o(\tau),\bar{x}_o(o)+\hat{x}_o(\tau),o);\tilde{F}_1(\tau)\equiv$

$$\equiv(\hat{F}_z(\tau)-\bar{F}_z(o))(\dot{\bar{z}}_o(o)\tau+\bar{z}_1(o))+(\hat{F}_x(\tau)-\bar{F}_x(o))(\dot{\bar{x}}_o(o)\tau+\bar{x}_1(o))+$$

$$+(\hat{F}_t(\tau)-\bar{F}_t(o))\tau;\ \hat{F}_t(\tau)\equiv F'_t(\bar{z}_o(o)+\hat{z}_o(\tau),\bar{x}_o(o)+\hat{x}_o(\tau),0),$$

$$\hat{F}_k(\tau)\equiv\hat{F}_z(\tau)\hat{z}_k(\tau)+\hat{F}_x(\tau)\hat{x}_k(\tau)+\tilde{F}_k(\tau),\ k=1,2,\ldots$$

unde $\tilde{F}_k(\tau)$ se exprimă determinat în funcţie de $\bar{z}_i(o),\bar{x}_i(o)$, $i=\overline{1,k}$ şi de $\hat{z}_j(\tau)$, $\hat{x}_j(\tau)$, $j=\overline{o,k-1}$.

Inlocuind expresia (1.25) în (1.24 a) şi expresia analoagă a lui $f(z,x,t)$ în (1.24b) rezultă:

$$\varepsilon\frac{d\bar{z}(t,\varepsilon)}{dt}+\frac{d\hat{z}(\tau,\varepsilon)}{d\tau}=\bar{F}(t,\varepsilon)+\hat{F}(\tau,\varepsilon) \quad (1.30\ a)$$

$$\varepsilon\frac{d\bar{x}(t,\varepsilon)}{dt}+\frac{d\hat{z}}{d\tau}=\varepsilon\bar{f}(t,\varepsilon)+\varepsilon\hat{f}(\tau,\varepsilon) \quad (1.30\ b)$$

Ţinînd cont de dezvoltările (1.26) şi (1.29), identificînd coeficienţii aceloraşi puteri ale lui ε, separat funcţiile de variabilă t de cele de variabilă τ, se obţin ecuaţiile:

$$o=\bar{F}_o(t)\equiv F(\bar{z}_o(t),\ \bar{x}_o(t),t) \quad (1.31\ a)$$

$$\frac{d\bar{x}_o(t)}{dt}=\bar{f}_o(t)\equiv f(\bar{z}_o(t),\ \bar{x}_o(t),t) \quad (1.31\ b)$$

$$\frac{d\hat{z}_o(\tau)}{d\tau}=\hat{F}_o(\tau)\equiv F(\bar{z}_o(o)+\hat{z}_o(\tau),\bar{x}_o(o)+\hat{x}_o(\tau),o) \quad (1.32\ a)$$

$$\frac{d\hat{x}_o(\tau)}{d\tau}=o \quad (1.32\ b)$$

$$\frac{d\bar{z}_{k-1}(t)}{dt}=\bar{F}_k(t)\equiv\bar{F}_z\bar{z}_k(t)+\bar{F}_x(t)\cdot\bar{x}_k(t)+F_k(t) \quad (1.33\ a)$$

$$\frac{d\bar{x}_k(t)}{dt}=\bar{f}_k(t)\equiv\bar{f}_z(t)\cdot\bar{z}_k(t)+\bar{f}_x(t)\bar{x}_k(t)+f_k(t) \quad (1.33\ b)$$

$$\frac{d\hat{z}_k(\tau)}{d\tau}=\hat{F}_k(\tau)\equiv\hat{F}_z(\tau)\ \hat{z}_k(\tau)+\hat{F}_x(\tau)\hat{x}_k(\tau)+\tilde{F}_k(\tau) \quad (1.34\ a)$$

$$\frac{d\hat{x}_k(\tau)}{d\tau} = \hat{f}_{k-1}(\tau) \equiv \hat{f}_z(\tau)\,\hat{z}_{k-1}(\tau) + \hat{f}_x(\tau)\hat{x}_{k-1}(\tau) + \tilde{f}_{k-1}(\tau) \quad (1.34b)$$

Inlocuind expresiile (1.23) în condiţiile (1.17) rezultă:

$$\bar{z}_0(o) + \hat{z}_0(o) = z^o \quad (1.35a)$$

$$\bar{x}_0(o) + \hat{x}_0(o) = x^o \quad (1.35\ b)$$

$$\bar{z}_k(o) + \hat{z}_k(o) = o\ ,\ k = 1,2,\ \dots \quad (1.36\ a)$$

$$\bar{x}_k(o) + \hat{x}_k(o) = o\ ,\ k = 1,2,\ \dots \quad (1.36\ b)$$

Ataşînd sistemului (1.31) condiţia iniţială $\bar{x}_o(o)=x^o$ se obţine problema redusă (1.18). Deci soluţia sa va fi:

$$\bar{x}_o(t) \equiv \bar{x}(t),\quad \bar{z}_o(t) \equiv \varphi(\bar{x}_o(t),t)$$

Rezultă, ţinînd cont de relaţiile (1.35), condiţia iniţială pentru sistemul liniar (1.32) : $\hat{x}_o(o) = o$, $\hat{z}_o(o) = z^o - \bar{z}_o(o)$, din care rezultă $\hat{x}_o(\tau) \equiv o$ şi $\hat{z}_o(\tau)$.

Din (1.34 b) rezultă : $\hat{x}_k(\tau) = \hat{x}_k(o) + \int_0^{\tau} \hat{f}_{k-1}(\tau)\, d\tau, k=1,2,\dots$

Impunînd condiţia : $\hat{x}_k(\tau) \longrightarrow o$ pentru $\tau \to \infty$, rezultă:

$$\hat{x}_k(o) = -\int_0^{\infty} \hat{f}_{k-1}(\tau)\, d\tau,\ \text{deci:}\ \hat{x}_k(\tau) = -\int_{\tau}^{\infty} \hat{f}_{k-1}(\tau) d\tau\ ,\ k=1,2,\dots$$

$$\text{şi}\ \bar{x}_k(o) = \int_0^{\infty} \hat{f}_{k-1}(\tau)\ d\tau\ ; \quad (1.37)$$

Din (1.33b) şi (1.37) rezultă $\bar{x}_k(t)$ şi $\bar{z}_k(t)$ iar din (1.34) şi (1.36a) rezultă $\hat{z}_k(\tau)$, $k=1,2,\dots$

Problemele se rezolvă succesiv, soluţiile problemelor de ordinul i, $i=\overline{o,k}$ folosindu-se la determinarea soluţiilor problemelor de ordinul k+1, obţinîndu-se astfel o sumă parţială de ordinul N a seriei (1.23):

$$Y_{\mathcal{E}N}(t) = \sum_{k=o}^{N} \mathcal{E}^k (\bar{y}_k(t) + \hat{y}_k(\tau))\ ,\ \tau = t/\mathcal{E} \quad (1.38)$$

Teorema 1.4. [131] Dacă problema (1.21)-(1.22) este de tipul "V_N" atunci există $\mathcal{E}_o > o$ şi există $C > o$ astfel încît oricare ar fi $\mathcal{E}$, $o < \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_o$, ea admite o soluţie unică - $(z(t,\mathcal{E}), x(t,\mathcal{E}))$ (pentru $t \in [o,a]$) care satisface condiţia :

$$\| y(t,\mathcal{E}) - Y_{\mathcal{E}N}(t) \| \leq C \cdot \mathcal{E}^{N+1},\ \text{pentru}\ t \in [o,a]\ \blacksquare \quad (1.39)$$

(unde prin y şi Y s-a notat oricare din x sau z, respectiv X sau Z).

In continuare vom aplica metoda asimptotică expusă mai sus la sisteme de ecuaţii integro-diferenţiale cu perturbaţii singulare.

Vom considera în locul sistemului de ecuaţii diferenţiale (1.16), sisteme de ecuaţii integro-diferenţiale de forma[5o]:

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = F(z,x,J,t,\varepsilon) \qquad (1.4o\ a)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(z,x,J,t,\varepsilon)\ , \qquad (1.4o\ b)$$

cu aceeaşi condiţie iniţială (1.17), considerînd şi în acest caz că F,z,z^o şi f,x,x^o sînt de dimensiuni M, respectiv m, iar

$$J = \int_0^{\alpha} K(t,s,z(s,\varepsilon),\ x(s,\varepsilon),\varepsilon)\ ds \qquad (1.4o\ c)$$

unde K este funcţie -vector de dimensiune **k** iar α = a (sistemul (1.4o) este de tip Fredholm) sau α = t (sistemul (1.4o) este de tip Volterra).

Condiţiile corespunzătoare condiţiilor 1.1-1.5 şi 1.1',1.4', suficiente pentru existenţa soluţiei problemei(1.4o)-(1.17) şi pentru construirea unei soluţii asimptotice a acestei probleme, se formulează analog, ţinînd cont de prezenţa parametrului ε care se consideră ε =o în aceste condiţii, şi a termenului integral asupra căruia se impune condiţia suplimentară ca nucleul K să admită derivate parţiale continue prin raport cu toate argumentele. Vom numi problema (1.4o)-(1.17) care satisface aceste condiţii, problemă de tip "I_{II}" .

Metoda asimptotică în acest caz este următoarea [5o]:

Se înlocuiesc expresiile (1.23) în (1.4o c) şi funcţia J se reprezintă sub forma:

$$J=\bar{J}(\ t,\varepsilon) + \hat{J}(\tau,\varepsilon) \qquad (1.41)$$

In acest scop se dezvoltă mai întîi K:

$$K(t,s,z(s,\varepsilon),x(s,\varepsilon),\varepsilon)= \bar{K}(t,s,\varepsilon) + \hat{K}(\ t\ ,\sigma,\varepsilon)\ ;\ \sigma= s/\varepsilon\ ;$$

$$\bar{K}(t,s,\varepsilon) \equiv K(\ t,s,\bar{z}(s,\varepsilon),\bar{x}(s,\varepsilon),\varepsilon)= \bar{K}_o(t,s)+ \varepsilon\bar{K}_1(t,s)+\ldots, \qquad (1.42\ a)$$

$$\bar{K}_o(t,s)\equiv K(t,s,\bar{z}_o(s),\bar{x}_o(s),o)$$

$$\bar{K}_i(t,s)= \bar{K}_z(t,s)\bar{z}_i(s)+\bar{K}_x(t,s)\bar{x}_i(s) + \bar{R}_i(t,s),\ i=1,2,\ldots$$

unde $\bar{K}_y(t,s)$ se calculează în $(t,s,\ \bar{z}_o(s),\bar{x}_o(s))$ iar $\bar{R}_i(t,s)$ se exprimă determinat în funcţie de $\bar{z}_j(s)$, $\bar{x}_j(s)$, $j=\overline{o,\ i-1}$;

$$\hat{K}(t,\sigma,\varepsilon) \equiv K(t,\sigma\varepsilon\ ,\bar{z}(\ \sigma\varepsilon\ ,\varepsilon\ )+\hat{z}(\sigma,\varepsilon),\ \bar{x}(\sigma\varepsilon,\varepsilon)+\ \hat{x}(\sigma,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-K(t,\sigma\varepsilon,\bar{z}(\sigma\varepsilon,\varepsilon),\bar{x}(\sigma\varepsilon,\varepsilon),\varepsilon) = \hat{K}_o(t,\sigma) + \varepsilon\hat{K}_1(t,\sigma\ ) + \ldots \qquad (1.42\ b)$$

$\hat{K}_o(t,\sigma) \equiv K(t,o,\bar{z}_o(o)+\hat{z}_o(\sigma), \bar{x}_o(o)+\hat{x}_o(\sigma),o)-K(t,o,\bar{z}_o(o),\bar{x}_o(o),o)$,

$K_i(t,\sigma) = \hat{K}_z(t,\sigma)\hat{z}_i(\sigma)+\hat{K}_x(t,\sigma)\hat{x}_i(\sigma)+\hat{R}_i(t,\sigma)$, $i = 1,2,\dots$

unde $\hat{K}_y(t,\sigma)$ se calculează în $(t,o,\bar{z}_o(o)+\hat{z}_o(\sigma),\bar{x}_o(o)+\hat{x}_o(\sigma),o)$

Dacă $\alpha = a$, atunci:

$$J=\int_o^a \bar{K}(t,s,\varepsilon)\,ds + \int_o^a \hat{K}(t,\sigma,\varepsilon)\,ds = \int_o^a \bar{K}(t,s,\varepsilon)\,ds + $$

$$+\varepsilon\int_o^{a/\varepsilon}\hat{K}(t,\sigma,\varepsilon)d\sigma = \int_o^t \bar{K}(t,s,\varepsilon)ds+ \varepsilon\int_o^\infty \hat{K}(t,\sigma,\varepsilon)\,d\sigma -$$

$$-\varepsilon\int_{a/\varepsilon}^\infty \hat{K}(t,\sigma,\varepsilon)d\sigma$$

Deoarece $\hat{K}(t,\sigma,\varepsilon)\to o$ (exponențial) pentru $\sigma\to\infty$ rezultă că ultima integrală poate fi neglijată pentru ε mic. Deci considerăm

$$J = \int_o^a \bar{K}(t,s,\varepsilon)ds + \varepsilon\int_o^\infty \hat{K}(t,\sigma,\varepsilon)d\sigma \equiv \bar{J}(t,\varepsilon) \qquad (1.43\ a)$$

Dacă $\alpha = t$ atunci :

$$J = \int_o^t \bar{K}(t,s,\varepsilon)\,ds + \varepsilon\int_o^\infty \hat{K}(t,\sigma,\varepsilon)\,d\sigma - \varepsilon\int_\tau^\infty \hat{K}(\tau\varepsilon,\sigma,\varepsilon)d\sigma \equiv$$

$$\equiv \bar{J}(t,\varepsilon)+\hat{J}(\tau,\varepsilon),\ \hat{J}(\tau,\varepsilon) \equiv -\int_\tau^\infty \hat{K}(\tau\varepsilon,\sigma,\varepsilon)d\sigma \qquad (1.43\ b)$$

Inlocuind expresiile (1.42) in (1.43) (și, în cazul (1.43 b), dezvoltînd din nou după ε pe $\hat{K}(\tau\varepsilon,\sigma,\varepsilon)$), obținem exprimarea termenului integral sub forma sumei a două serii în cazul $\alpha = t$ și sub forma unei serii (prima dintre ele) dacă $\alpha = a$, pe care le notăm astfel:

$$\bar{J}(t,\varepsilon) = \bar{J}_o(t) + \varepsilon\bar{J}_1(t)+\dots+\varepsilon^k\bar{J}_k(t)+\dots \qquad (1.43\ c)$$

$$\hat{J}(\tau,\varepsilon) = \hat{J}_o(\tau) + \varepsilon\hat{J}_1(\tau) +\dots+\varepsilon^k\hat{J}_k(\tau)+\dots \qquad (1.43\ d)$$

unde

$$\bar{J}_o(t)=\int_o^\alpha \bar{K}_o(t,s)ds,\ \bar{J}_k(t) = \int_o^\alpha \bar{K}_k(t,s)ds + \int_o^\infty \hat{K}_{k-1}(t,\sigma)d\sigma,$$

$$\hat{J}_o(\tau) \equiv o,\hat{J}_1(\tau) = -\int_\tau^\infty \hat{K}_o(o,\sigma)d\sigma,\dots$$

Inlocuind în (1.4o) funcțiile cu dezvoltările respective (1.23),(1.43) se obțin problemele pentru determinarea coeficienților seriilor (1.23).

Pentru $(\bar{z}_o(t), \bar{x}_o(t))$ se obține problema redusă:

$$o =\bar{F}_o(t)\equiv F(\bar{z}_o(t),\bar{x}_o(t),\ \int_o^\alpha K(t,s,\bar{z}_o(s),\bar{x}_o(s),o)ds,t,o) \qquad (1.\ \ a)$$

$$\frac{d\bar{x}_o}{dt} =\bar{f}_o(t)\equiv f(\bar{z}_o(t),\bar{x}_o(t),\int_o^\alpha K(t,s,\bar{z}_o(s),\bar{x}_o(s),o)ds,t,o) \qquad (1.44\ b)$$

$$\bar{x}_o(o) = x^o \qquad (1.44\ c)$$

Pentru $(\hat{z}_o(\tau),\hat{x}_o(\tau))$ se obține problema exclusiv diferențială:

$$\frac{d\hat{z}_o}{d\tau} = \hat{F}_o(\tau) \equiv F(\bar{z}_o(o)+\hat{z}_o(\tau),\bar{x}_o(o)+\hat{x}_o(\tau),\bar{J}_o(o),o,o)-$$

$$-F(\bar{z}_o(o),\bar{x}_o(o),\bar{J}_o(o),o,o);\bar{J}_o(o) = \begin{cases} o & \text{dacă } \alpha = t \\ \int_o^a K(o,s,\bar{z}_o(s),\bar{x}_o(s),o)ds, & \alpha = a \end{cases}$$

$$\frac{d\hat{x}_o}{d\tau} = o;\hat{x}_o(o) = o,\ \hat{z}_o(o)= z^o - \bar{z}_o(o)$$

Pentru $(\bar{z}_k(t),\ \bar{x}_k(t))$, $k=1,2,\ldots$ se obține problema de același tip cu (1.44):

$$\frac{d\bar{z}_{k-1}}{dt} = \bar{F}_k(t)\equiv\bar{F}_z(t)\bar{z}_k(t)+\bar{F}_x(t)\bar{x}_k(t)+\bar{F}_J(t)\cdot\Big(\int_o^\infty \hat{K}_{k-1}(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+\int_o^\alpha (\bar{K}_z(t,s)\ \bar{z}_k(s)+\bar{K}_x(t,s)\bar{x}_k(s)+\ \bar{R}_k(t,s))ds\Big)+F_k(t)$$

$$\frac{d\bar{x}_k(t)}{dt} = \bar{f}_k(t);\ \bar{x}_k(o) = \int_o^\infty \hat{f}_{k-1}(\tau)d\tau$$

iar pentru $(\hat{z}_k(\tau),\hat{x}_k(\tau))$ se obține problema diferențială:

$$\frac{d\hat{z}_k(\tau)}{d\tau} = \hat{F}_k(\tau) \equiv \hat{F}_z(\tau)\ \hat{z}_k(\tau) + \hat{F}_x(\tau)\ \hat{x}_k(\tau) + G_k(\tau)$$

$$\frac{d\hat{x}_k(\tau)}{d\tau} = \hat{f}_{k-1}(\tau);\ \hat{x}_k(o) = -\int_o^\infty \hat{f}_{k-1}(\tau)d\tau;\hat{z}_k(o)=-\bar{z}_k(o)$$

Are loc teorema analoagă teoremei 1.4:

<u>Teorema 1.5</u> [5o]. Dacă problema(1.4o)-(1.17) este de tipul "I_N" atunci există $\varepsilon_o>o$ și există $C>o$ astfel încît oricare ar fi ε, $o<\varepsilon\le\varepsilon_o$, ea admite soluția unică$(z(t,\varepsilon),x(t,\varepsilon))$ care satisface condiția (1.39), unde suma parțială $Y_{\varepsilon N}(t)$ dată de relația (1.38) este obținută după algoritmul descris mai sus pentru această problemă$\blacksquare$

<u>Comentarii bibliografice.</u>

Metoda funcțiilor de strat limită, A.B.Vasilieva a elaborat-o in lucrarile [131] și [132] și este prezentată în [135].

Condiția de stabilitate 1.4' a fost slăbită în lucrările ulterioare ale lui A.B.Vasilieva și V.F.Butuzov [135] și

V.A.Anikeeva [3], considerîndu-se în aceste lucrări şi cazul cînd o parte din valorile proprii ale matricii $\bar{F}_z(t)$ ataşate sistemului (1.16) au partea reală strict negativă iar cealaltă parte au partea reală strict pozitivă, dar impunîndu-se ca numărul de condiţii iniţiale în t=o să coincidă cu numărul de valori proprii cu partea reală strict negativă iar numărul de condiţii iniţiale în t=a să coincidă cu numărul de valori proprii cu partea reală strict pozitivă.

In alte lucrări, A.B.Vasilieva([136] , [137] , [135]) şi A.S.Siskin [118] au considerat pentru sistemul (1.16) cazul "critic " cînd o parte din valorile proprii sînt identic nule.

Sistemele de ecuaţii integro-diferenţiale (1.4o) au fost studiate doar în cazul stabil (cazul în care e îndeplinită condiţia (1.4')) de către M.I.Imanaliev [5o].

Teoremele 1.4 şi 1.5 sînt demonstrate şi în [135].

1.5. Metoda regularizării a lui S.A.Lomov pentru probleme cu perturbaţii singulare cu variaţie rapidă.

In acest paragraf vom prezenta o metodă generală elaborată de S.A.Lomov pentru problemele cu variaţie rapidă.

Vom considera mai întîi sistemele de ecuaţii diferenţiale liniare cu variaţie rapidă:

$$L_\varepsilon z \equiv \varepsilon \frac{dz}{dt} - A(t)z(t,\varepsilon) = f(t); z(o,\varepsilon) = z^o \qquad (1.45)$$

unde $A(t)$ este matrice pătratică de ordinul n, $f(t)$ şi z^o sînt vectori n-dimensionali, $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o \ll 1$. Presupunem îndeplinite:

<u>Condiţia 1.6</u>. $A(t), f(t) \in C^\infty[o,a]$, $o < a < \infty$.

<u>Condiţia 1.7</u>. Spectrul $\{\lambda_i(t)\}_{i=\overline{1,n}}$ al matricii $A(t)$ este simplu: $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ pentru $t \in [o,a]$ şi $i \neq j$ şi $\lambda_i(t) \neq o, i,j = \overline{1,n}$.

Regularizarea problemei (1.45) se face astfel [68]:

Se extinde funcţia necunoscută $z(t,\varepsilon)$ la o funcţie (tot necunoscută) $\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)$ unde $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ astfel încît dacă:

$$\varphi_i(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_o^t \lambda_i(\rho)d\rho \, , \; \varphi_i(o,o) = o \, , \; \varphi(t,\varepsilon) = (\varphi_1(t,\varepsilon), \ldots, \varphi_n(t,\varepsilon)),$$

atunci $\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau = \varphi(t,\varepsilon)} \equiv z(t,\varepsilon)$,

iar problema (1.45) se extinde la problema:

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{z}_\varepsilon \equiv \varepsilon \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + D_\lambda \tilde{z} - A(t)\tilde{z} = f(t), D_\lambda \equiv \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial}{\partial \tau_j} ; \tilde{z}(0,0) = z^0 \quad (1.46)$$

astfel încît $\tilde{L}_\varepsilon \tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau = \varphi(t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon z(t,\varepsilon)$.

Problema (1.46) fiind o problemă regulată se consideră soluţia sa sub forma:

$$\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon) = z_0(t,\tau) + \varepsilon z_1(t,\tau) + \ldots + \varepsilon^k z_k(t,\tau) + \ldots \quad (1.47)$$

unde $z_0(t,\tau)$ este soluţia problemei reduse:

$$L_0 z_0(t,\tau) = f(t), L_0 \equiv D_\lambda - A(t), \; z_0(0,0) = z^0 \quad (1.48)$$

iar problemele pentru determinarea celorlalţi coeficienţi ai seriei (1.47) rezultă prin înlocuirea acesteia în (1.46) şi identificare:

$$L_0 \tilde{z}_i(t,\tau) = -\frac{\partial z_{i-1}(t,\tau)}{\partial t}, \; z_i(0,0) = 0, \; i=1,2,\ldots \quad (1.49)$$

Problemele (1.48) şi (1.49) nu sînt complete deoarece condiţiile iniţiale sînt date doar într-un punct (şi nu pe o curbă), dar în loc să completăm aceste condiţii vom considera un spaţiu U de funcţii în care aceste probleme să fie univoc rezolvabile:

$$U = \bigoplus_{i,j=1}^{n} U_{ij} \oplus C_t^n , U_{ij} = \left\{ u_{ij}(t)\, b_i(t)\, e^{\tau_j} ; u_{ij}(t) \in C^\infty([0,a],C) \right\} \quad (1.$$

unde C_t^n este spaţiul vectorilor n-dimensionali, depinzînd de t ca parametru, în care considerăm baza $\{b_i(t)\}_{i=\overline{1,n}}$ formată cu vectorii proprii ai lui A(t). Spaţiul U se numeşte spaţiul soluţiilor fără rezonanţă.

Un element oarecare $u \in U$ se exprimă sub forma:

$$u(t,\tau) = \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij}(t) b_i(t) e^{\tau_j} + \bar{u}(t), \; \bar{u}(t) \in C_t^n \quad (1.51)$$

Spaţiile U, C_t^n, U_{ij} sînt invariante prin raport cu operatorul L_0; operatorul adjunct al lui L_0 este $L_0^* \equiv D_{\bar{\lambda}} - A^*$,

$D_{\bar{\lambda}} = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j(t) \frac{\partial}{\partial \tau_j}$; o bază pentru Ker L_0^* este :

$$\left\{ z_i^* \mid z_i^* = b_i^* e^{\tau_i}, \; i=\overline{1,n} \right\} \quad (1.52)$$

unde $\{b_i^*\}_{i=\overline{1,n}}$ este baza adjunctă, ortonormală bazei $\{b_i\}_{i=\overline{1,n}}$.

Teorema 1.6 [68]. Dacă $A(t)\in C^1[o,a]$ verifică condiţia 1.7 şi $h(t,\tau)\in U$, $h\perp \operatorname{Ker} L_o^*$ atunci soluţia problemei

$$L_o u(t,\tau) = h(t,\tau)\ ,\quad u(o,o) = u^o \tag{1.53}$$

există şi dacă satisface condiţiile :

$$u(t,\tau)\in U\ ,\frac{\partial u(t,\tau)}{\partial t}\perp \operatorname{Ker} L_o^* \tag{1.54}$$

atunci ea este unică.

Teorema 1.6 permite rezolvarea în U a problemelor (1.48) şi (1.49). Datorită condiţiei (1.54), soluţia problemei (1.48) trebuie luată în U sub forma:

$$z_o(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} u_{ii}(t)\, b_i(t)\, e^{\tau_i} + \bar{z}_o(t) \tag{1.55}$$

Rezultă : $L_o z_o = -A(t)\,\bar{z}_o(t)$, $\bar{z}_o(t) = -A^{-1}(t)f(t)$.

Din condiţia $z_o(o,o) = z^o$ şi din (1.55) rezultă $u_{ii}(o), i=\overline{1,n}$, rămînînd (deocamdată) nedeterminaţi $u_{ii}(t)$, $t\in(o,a]$.

Trecînd la problema următoare -(1.49) pentru k =1;

$$L_o z_1(t,\tau) = -\frac{\partial z_o(t,\tau)}{\partial t}\ ,\ z_1(o,o) = o \tag{1.56}$$

vom cere, conform teoremei 1.6 să fie îndeplinită condiţia: $-\frac{\partial z_o}{\partial t}\perp \operatorname{Ker} L_o^*$. Rezultă ecuaţiile:

$$\frac{du_{ii}^o}{dt} + (\dot{b}_i, b_i^*)\, u_{ii}^o = o,\ i=\overline{1,n} \tag{1.57}$$

Rezolvînd aceste ecuaţii cu condiţiile iniţiale determinate anterior, soluţia $z_o(t,\tau)$ va fi univoc determinată. Ceilalţi coeficienţi ai seriei (1.47) se determină în mod analog, rezultînd o sumă parţială a ei:

$$Z_{\varepsilon N}(t,\tau) = \sum_{r=o}^{N} \varepsilon^r z_r(t,\tau) \tag{1.58}$$

Impunem:

Condiţia 1.8. Spectrul matricii $A(t)$ se poate ordona astfel încît : $\operatorname{Re}\lambda_1(t)\leqslant \operatorname{Re}\lambda_2(t)\leqslant \dots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_n(t)$, $t\in[o,a]$.

Considerînd în spaţiul $\hat{U}$, care se obţine din U pentru $\tau=\varphi(t,\varepsilon)$, norma unui vector $V(t,\varepsilon) = (v_1(t,\varepsilon),\dots,v_n(t,\varepsilon))$:

$$|||V(t,\varepsilon)||| = \max_{t\in[o,a]} \|V(t,\varepsilon)\|,\ \|V(t,\varepsilon)\| = \sum_{k=1}^{n} |v_k(t,\varepsilon)|,\ t\in[o,a],$$

are loc următoarea teoremă:

Teorema 1.7 [68]. Dacă sînt îndeplinite condiţiile 1.6-1.8 atunci există ε_o astfel încît oricare ar fi ε, $0<\varepsilon\leq\varepsilon_o$ şi oricare ar fi $N\in\mathbb{N}$ are loc evaluarea:

$$|||z(t,\varepsilon)-Z_{\varepsilon N}(t,\varphi(t,\varepsilon))||| \leq \varepsilon^{N+1}\left(\sum_{i=1}^{N+1} c_i e^{\alpha_i}\right) \qquad (1.59)$$

unde $z(t,\varepsilon)$ este soluţia problemei (1.45) şi $Z_{\varepsilon N}(t,\varphi(t,\varepsilon))$ se obţine din suma (1.58) calculată prin metoda descrisă mai sus, $\alpha_{n+1}=o$, $\alpha_i=\max\limits_{t\in[o,a]} \operatorname{Re}\varphi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, iar constantele C_i nu depind de ε ∎

Observaţia 1.3. Dacă pe lîngă condiţiile 1.6-1.8 impunem:

Condiţia 1.9. $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\leq o$, $i=\overline{1,n}$,

atunci relaţia (1.59) devine mai simplă:

$$|||z(t,\varepsilon)-Z_{\varepsilon N}(t,\varphi(t,\varepsilon))||| \leq C\cdot\varepsilon^{N+1} \text{ ∎} \qquad (1.6o)$$

S.A. Lomov a considerat şi cazul "critic" cînd spectrul matricii $A(t)$ satisface în locul Condiţiei 1.7:

Condiţia 1.7'. Matricea $A(t)$ este diagonalizabilă, avînd valori proprii nenule simple $\lambda_i\neq o$, $i=\overline{1,p}$, $p<n$ astfel încît $\lambda_i(t)\neq\lambda_j(t)$ oricare ar fi $t\in[o,a]$ pentru $i\neq j$ şi valoarea proprie zero (simplă sau multiplă): $\lambda_k(t)\equiv o$ pentru $t\in[o,a]$ şi $k=\overline{p+1,r}$ ∎

Regularizarea se face ca în cazul anterior, cu unele deosebiri:

$\tau=(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p)$, $\varphi(t,\varepsilon)=(\varphi_1(t,\varepsilon),\ldots,\varphi_p(t,\varepsilon))$,

$$D_\lambda=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial}{\partial\tau_j},\quad U=\bigoplus_{j=1}^{p+1} C_t^n e^{\tau_j},\quad \tau_{p+1}=o,\quad L_o^*=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial}{\partial\tau_j}-$$

$-A^*(t)$, $\operatorname{Ker} L_o^*=\{b_i^* e^{\tau_i};\ i=\overline{1,n};\ \tau_i=o, \text{ pentru } i=\overline{p+1,n}\}$.

Determinarea coeficienţilor seriei (1.47) rezultă din:

Teorema 1.8. Dacă $A(t)\in C^1[o,a]$ verifică condiţia 1.7' atunci condiţia necesară şi suficientă ca problema (1.53) să fie rezolvabilă în U este : $h(t,\tau)\in U$, $h\perp\operatorname{Ker} L_o^*$.

Dacă această condiţie este îndeplinită şi în plus este îndeplinită condiţia 1.8 atunci soluţia care îndeplineşte condiţia (1.54) este unică ∎

De asemenea, teorema 1.7 de evaluare asimptotică şi observaţia 1.3, rămîn valabile şi în acest caz, cu enunţul adaptat noului spaţiu U.

Metoda regularizării a fost extinsă şi la sisteme de ecuaţii integro-diferenţiale de tip Volterra tot de către S.A. Lomov. Fie problema [68]:

$$T_{\varepsilon} z(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon \frac{dz}{dt} - A(t)z + \int_0^t K(t,s)z(s,\varepsilon)ds = f(t) \qquad (1.61)$$
$$z(o,\varepsilon) = z^o$$

unde $A(t), f(t), z^o$ şi ε au aceeaşi semnificaţie ca în problema (1.45) şi îndeplinesc condiţiile 1.6-1.9. Impunem şi

Condiţia 1.6'. $K(t,s) \in C^{\infty}(Q)$, $Q = [o,a] \times [o,a]$∎

Regularizarea operatorului diferenţial se face ca şi în cazul problemei (1.45), extinzîndu-l la un operator acţionînd în acelaşi spaţiu U dat de (1.5o) iar operatorul integral se extinde doar la restricţia $\hat{U}$ a lui U, considerînd extensia problemei (1.61) astfel:

$$\tilde{T}_{\varepsilon} \tilde{z}(t,\tau,\varepsilon) \equiv \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + L_o \tilde{z} + \int_0^t K(t,s)\, \tilde{z}(s,\varphi(s,\varepsilon))ds =$$
$$= f(t);\ \tilde{z}(o,o,\varepsilon) = z^o \qquad (1.62)$$

Problema mai dificială care apare în plus este dezvoltarea asimptotică a termenului integral.

Definiţia 1.13. O clasă M_{ε} de funcţii este asimptotic invariantă pentru $\varepsilon \to o$ în raport cu un operator T dacă satisface condiţiile:

a) $M_{\varepsilon} \subset D(T)$ pentru orice ε fix.

b) Oricare ar fi $g(t,\varepsilon) \in M_{\varepsilon}$ există $g_k(t,\varepsilon) \in M_{\varepsilon}$, $k \in N$ astfel încît :

$$Tg = g_o(t,\varepsilon) + \varepsilon g_1(t,\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^k \cdot g_k(t,\varepsilon) + \ldots$$

c) Seria de la b) converge asimptotic pentru $\varepsilon \to o$∎

Teorema 1.9 [68]. Spaţiul U este asimptotic invariant în raport cu operatorul integral din (1.62)∎

Considerînd soluţia problemei (1.62) sub forma (1.47) şi coeficienţii acestei serii în U sub forma:

$$z_i(t,\tau) = \sum_{k,j=1}^{n} z^i_{kj}(t) b_k(t) \cdot e^{\tau_j} + \sum_{k=1}^{n} z^i_k(t) b_k(t) \qquad (1.63)$$

se obţine următoarea dezvoltare a termenului integral:

$$\int_0^t K(t,s) z_i(s,\varphi(s,\varepsilon))ds = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t K(t,s) z^i_k(s)\, b_k(s)ds +$$
$$+ \sum_{k,j=1}^{n} \int_0^t K(t,s) z^i_{kj}(s) b_k(s) e^{\varphi_j(s,\varepsilon)} ds \qquad (1.64)$$

Prima sumă din (1.64), notată cu δ_i se reprezintă în baza

$\{b_i(t)\}_{i=\overline{1,n}}$ sub forma:

$$\gamma_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j^i(t)b_j(t),\quad \gamma_j^i(t)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_0^t K(t,s)b_k(s)z_k^i(s)ds,b_j^*(t)\Big) .$$

A doua sumă, notată $\beta_i(t,\varepsilon)$, se dezvoltă, integrînd succesiv prin părţi, obţinîndu-se o dezvoltare de forma:

$$\beta_i(t,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon^{m+1} p_m^i (t,\tau)\Big|_{\tau:=\varphi(t,\varepsilon)}$$

Inlocuind termenul integral cu dezvoltările de mai sus în (1.62), se obţin prin identificare problemele :

$$L_0 z_0 = f(t)-\gamma_0(t),\ z_0(0,0) = z^0$$

$$L_0 z_i = -\frac{\partial z_{i-1}}{\partial t} - \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k-1} p_{i-k}^{k-1} (t,\tau)-\gamma_i(t), z_i(0,0)=0$$

Prin rezolvarea succesivă a acestor probleme se obţine o sumă parţială de forma (1.58) şi are loc:

Teorema 1.10 [68]. Dacă problema (1.61) îndeplineşte condiţiile 1.6-1.9 şi 1.6' atunci există ε_0 astfel încît oricare ar fi ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ şi oricare ar fi $N\in\mathbb{N}$ are loc evaluarea (1.60) unde suma parţială $Z_{\varepsilon N}(t,\varphi(t,\varepsilon))$ se obţine prin metoda de mai sus∎

Observaţia 1.4. Spre deosebire de metoda funcţiilor de strat limită unde apar factori de rezonanţă de forma $(t/\varepsilon)^k e^{-\varkappa/\varepsilon}$ în cazul metodei regularizării, funcţiile exponenţiale $e^{\varphi_i(t,\varepsilon)}$ se înmulţesc cu factori mărginiţi pentru $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. Acest fapt permite ca, în anumite cazuri, seriile asimptotice să conveargă şi în sens obişnuit∎

Comentarii bibliografice.

Metoda regularizării a lui S.A.Lomov este expusă pe larg în monografia sa [68], unde se dau şi demonstraţiile teoremelor 1.6-1.10 enunţate în acest paragraf.

De asemenea în [68] se studiază şi cazul neliniar $\varepsilon\dot z=F(z,t)$, $z(0,\varepsilon)=z^0$ (în locul problemei (1.45)) în condiţiile în care spectrul matricii $A(t)=F_z(\varphi(t),t)$ (unde $z=\varphi(t)$ este o soluţie izolată a ecuaţiei reduse $F(z,t)=0$) satisface condiţiile 1.7-1.9∎

CAPITOLUL II

REGULARIZAREA PERTURBATIILOR SINGULARE ALE UNOR SISTEME DE ECUATII IN CAZURI CRITICE

In acest capitol vom extinde rezultatele lui S.A.Lomov prezentate în § 1.5 la cazul "critic" cînd în problemele (1.45) şi (1.61) matricea $A(t)$ este diagonalizabilă(putînd fi multiple şi valorile proprii nenule).

2.1. Regularizarea perturbaţiilor singulare ale sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare cu variaţie rapidă în cazuri "critice".

In acest paragraf vom extinde rezultatele obţinute de S.A. Lomov prin metoda regularizării pentru problema(1.45)considerîndu-o în cazul "critic" mai general cînd în locul condiţiilor (1.7) sau (1.7') se consideră:

Condiţia 2.1. Spaţiul propriu corespunzător fiecărei valori proprii distincte $\lambda_i(t), i=\overline{0,s}$ a matricii $A(t)$ are dimensiunea n_i egală cu multiplicitatea sa algebrică şi:

$$\lambda_0(t)=0, \lambda_i(t)\neq\lambda_j(t) \text{ pentru } t\in[0,a] \text{ şi } i\neq j; i,j=\overline{0,s}.$$

Observaţia 2.1. Condiţia ca multiplicitatea algebrică a valorilor proprii să fie constantă nu este prea restrictivă deoarece are loc o propietate mai generală şi anume: Dacă $T(\varkappa)$ este o familie de operatori mărginiţi într-un spaţiu finit dimensional, olomorfă într-un domeniu D_0 al planului complex $\varkappa$, atunci numărul valorilor proprii ale lui $T(\varkappa)$ este constant, cu excepţia unor anumite valori ale lui $\varkappa$ numite puncte exceptionale ;numărul acestora este finit în orice compact din D_0; un subdomeniu simplu conex al lui D_0 se numeşte simplu dacă nu are puncte excepţionale ; în orice domeniu simplu valorile proprii sînt funcţii olomorfe, avînd multiplicitatea algebrică constantă (T.Kato [55])

Deci condiţia 2.1 cere ca pe $[0,a]$ să nu existe puncte excepţionale şi în plus, multiplicitatea algebrică a lui $A(t)$

să fie egală cu cea geometrică, altfel spus, matricea $A(t)$ să fie simplă, diagonalizabilă.

In acest caz, pentru fiecare t fixat, matricea $A(t)$ are n vectori liniar independenţi care constituie o bază în C^n :

$$\left\{ b_k^i(t) \mid A(t)b_k^i(t) = \lambda_i(t)\, b_k^i(t),\ k=\overline{1,n_i},\ i=\overline{o,s};\ \sum_{i=0}^{s} n_i=n \right\} \quad (2.1)$$

In principiu regularizarea problemei (1.45) este aceeaşi: extinderea acestei probleme la alta care să nu mai fie singulară ci regulată. In acest scop, introducem s variabile independente, (atîtea cîte valori proprii distincte nenule are matricea $A(t)$), extinzînd funcţia necunoscută $z(t,\varepsilon)$ la altă funcţie, tot necunoscută, $\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)$, unde $\tau=(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_s)$, astfel încît dacă $\varphi(t,\varepsilon)=(\varphi_1(t,\varepsilon),\varphi_2(t,\varepsilon),\dots,\varphi_s(t,\varepsilon))$, unde

$$\varphi_1(t,\varepsilon)=\begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^t \lambda_1(p)dp, & t>o \\ o \text{ dacă } t=o \end{cases}, \text{atunci } \tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau=\varphi(t,\varepsilon)} \equiv z(t,\varepsilon),$$

iar operatorul L_ε şi problema (1.45) se extind la operatorul şi problema :

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{z} \equiv \varepsilon\frac{\partial z}{\partial t} + L_o\tilde{z}=f(t),\ \tilde{z}(o,o,\varepsilon)=z^o;\ L_o\equiv \sum_{j=1}^{s} \lambda_j\frac{\partial}{\partial \tau_j} - A(t) \quad (2.2)$$

Observaţia 2.2. Extinderea problemei (1.45) se face astfel încît dacă $z(t,\varepsilon)\in\mathcal{D}(\tilde{L}_\varepsilon)$ atunci $\tilde{L}_\varepsilon z(t,\varepsilon) \equiv L_\varepsilon z(t,\varepsilon)$ şi în acelaşi timp, astfel încît dacă $z(t,\varepsilon)\in\mathcal{D}(L_\varepsilon)$ atunci

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau=\varphi(t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon z(t,\varepsilon) \blacksquare$$

Problema (2.2) fiind regulată, soluţia ei se consideră tot sub forma (1.47), rezultînd, prin identificarea formală a coeficienţilor lui ε, problemele (1.48) şi (1.49) cu L_o dat de (2.2). Deoarece problemele (1.48) şi (1.49) (ca de altfel şi problema (2.2)) nu sînt univoc rezolvabile vom considera şi de data aceasta un spaţiu U în care problema :

$$L_o u(t,\tau)=h(t,\tau),\ u(o,o)=u^o;\ h,u\in U \quad (2.3)$$

să fie univoc rezolvabilă. Vom numi spaţiul U tot spaţiul soluţiilor fără rezonanţă şi îl construim astfel:

Fie $\mathcal{T}=\{ f \mid f : C^s\mapsto C^n,\ f\in C^\infty(C^s)\}$ spaţiul funcţiilor indefinit derivabile de variabile τ, notate $f(\tau)=f(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_s)$;

Fie funcţiile proiecţie: $\pi_j:\mathbb{C}^s\mapsto\mathbb{C}$, $\pi_j(\zeta) = \zeta_j$ şi funcţiile: $e_j: \mathbb{C}^s\mapsto\mathbb{C}$, $e_j=\exp.\pi_j;(e_j(\zeta)=\exp.(\pi_j(\zeta)) = \exp(\zeta^j) = e^{\zeta_j})$.

Considerînd şi notaţia e_o pentru funcţia unitate: $e_o:\mathbb{C}^s\longrightarrow\mathbb{C}$, $e_o(\zeta) = 1$, construim spaţiile de funcţii:

$$U_j= e_j\mathbb{C}^n=\{e_j.v \mid v\in\mathbb{C}^n\}\subset\mathcal{T}, \quad j = \overline{o,s}$$

Intersecţia lor fiind spaţiul nul, putem considera suma directă în $\mathcal{T}$:

$$U = \bigoplus_{j=o}^{s} U_j = \bigoplus_{j=o}^{s} \mathbb{C}^n e_j \tag{2.4}$$

Deoarece $\dim U_j=n$, $j=\overline{o,s}$, $\dim U=n(s+1)<\dim\mathcal{T}=\infty$, incluziunea $U\subset\mathcal{T}$ este strictă.

Pentru fiecare t fixat, $t\in[o,a]$, considerat drept parametru, putem lua în U baza care rezultă din (2.1):

$$\{b_k^i(t)\, e_j \mid k = \overline{1,n_i},\ i,j = \overline{o,s}\} \tag{2.5}$$

Rezultă pentru orice $u\in U$ reprezentarea în această bază:

$$u= \sum_{i,j=o}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} u_k^{ij}(t)b_k^i(t)e_j; \tag{2.6}$$

Prin urmare problema (2.3) o rezolvăm în clasa funcţiilor de forma:

$$u(t,\zeta) = \sum_{i,j=o}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} u_k^{ij}(t)\, b_k^i(t)\, e^{\zeta_j} \tag{2.7}$$

<u>Observaţia 2.3</u>. Baza biortogonală bazei(2.1) în $\mathbb{C}^n$ este baza ei adjunctă:

$$\{b_k^{i*}(t) \mid A^*(t)b_k^{i*}(t)= \bar{\lambda}_i(t)\, b_k^{i*}(t)\ ;\ k= \overline{1,n_i},\ i=\overline{o,s}\} \tag{2.8}$$

$$(b_k^{i*}(t),\, b_h^j(t)) = \delta_{ij}\cdot\delta_{kh},\ k=\overline{1, n_i},\ h =\overline{1,n_j};\ i,j=\overline{o,s}. \tag{2.9}$$

Intradevăr, considerînd baza ortogonală bazei(2.1), determinată unic de relaţiile (2.9), rezultă:

$$(b_h^j,\, A^* b_k^{i*}-\bar{\lambda}_i\, b_k^{i*})=(A\, b_h^j,\, b_k^{i*}) - \lambda_i(b_h^j,\, b_k^{i*}) =$$

$=(\lambda_j-\lambda_i).(b_h^j,\ b_k^{i*})=0$, pentru $h=\overline{1,n_j}$, $j=\overline{0,s}$. Rezultă:

$A^* b_k^{i*}-\bar{\lambda}_i\ b_k^{i*}=0$, $k=\overline{1,n_i}$, $i=\overline{0,s}$, deoarece unicul vector ortogonal pe toţi vectorii bazei este vectorul nul∎

Cu ajutorul bazelor (2.1) şi (2.8) organizăm spaţiul U ca spaţiu Hilbert, nu ca în [68] ci astfel:

Dacă $u\in U$ se exprimă în baza (2.5) prin (2.6) iar $v\in U$,

$$v=\sum_{i,j=0}^{s}\ \sum_{k=1}^{n_i}\ v_k^{ij}(t)\ b_k^i(t)\ e_j$$

atunci definim produsul scalar astfel: exprimăm în prealabil vectorul : $v^j=\sum_{i=0}^{s}\ \sum_{k=1}^{n_i}\ v_k^{ij}(t)\ b_k^{i}(t)$ în baza (2.8) :

$$v^j=\sum_{i=0}^{s}\ \sum_{k=1}^{n_i}\ (v^j(t),\ b_k^i\ (t))b_k^{i*}(t)\equiv\sum_{i=0}^{s}\ w_k^{ij}\ (t)\ b_k^{i*}(t),$$

de unde rezultă exprimarea lui v în următoarea bază a lui U:

$\left\{b_k^{i*}(t)\ e_j;\ \ k=\overline{1,\ n_i},\ \ i,j=\overline{0,s}\right\}$, astfel:

$$v=\sum_{i,j=0}^{s}\ \sum_{k=1}^{n_i}\ w_k^{ij}\ (t)\ b_k^i\ (t)\ e_j$$ şi definim produsul scalar în U în felul următor:

$$(u,v)=\sum_{i,j=0}^{s}\ \sum_{k=1}^{n_i}\ u_k^{ij}\ (t)\ \overline{w_k^{ij}\ (t)}\ . \qquad (2.10)$$

In particular dacă $v^*\in U$, $v^*=\sum_{i,j=0}^{s}\ \sum_{k=1}^{n_i}\ v_k^{ij*}(t)\ b_k^{i*}(t)\ e_j$

atunci rezultă:

$$(u,v^*)=\sum_{i,j=0}^{s}\ \sum_{k=1}^{n_i}\ u_k^{ij}\ (t)\ \overline{v_k^{ij*}(t)}$$

Din (2.2) şi (2.7) rezultă:

$$L_0u(t,\zeta)=\sum_{i,j=0}^{s}\ \sum_{k=1}^{n_i}\ u_k^{ij}(t)b_k^i(t)(\lambda_j(t)-\lambda_i(t))\ e^{\zeta_j},$$

de unde rezultă următoarele propietăţi:

-spaţiile U_j, $j=\overline{o,s}$ şi spaţiul U sînt invariante faţă de L_o;

-aceste spaţii rămîn invariante şi dacă se consideră numai funcţiile:

$u_k^{ij}(t) \in \dot{C}^{\infty}[o,a]$;(datorită condiţiei(2.1)).

-nucleul operatorului L_o este acoperirea liniară a bazei sale, care este :

$$\left\{ b_k^i(t)\, e_i \mid k=\overline{1,n_i},\ i=\overline{o,s} \right\}; \tag{2.11}$$

-operatorul adjunct al lui L_o este operatorul :

$$L_o^* = \sum_{j=1}^{s} \bar{\lambda}_j(t) \frac{\partial}{\partial \tau} - A^*(t) ; \tag{2.12}$$

-o bază pentru Ker L_o^* este

$$\left\{ b_k^{i*}(t)\, e_i \mid k=\overline{1,n_i},\ i=\overline{o,s} \right\}. \tag{2.13}$$

<u>Teorema 2.1</u>. Dacă $h \in U$ iar A(t) îndeplineşte condiţiile 1.6 şi 2.1 atunci problema (2.3) este rezolvabilă în U dacă şi numai dacă funcţia h este ortogonală nucleului operatorului L_o^*: $h \perp \mathrm{Ker}\ L_o^*$(identic în $t \in [o,a]$) (2.14)

<u>Demonstraţie</u>. Deoarece L_o aplică spaţiul finit dimensional U în el însuşi rezultă (de exemplu,din [34] sau [114])că L_o este normal rezolvabil şi deci ecauţia (2.3) este rezolvabilă dacă şi numai dacă are loc (2.14).

Vom arăta că condiţia (2.14) este suficientă şi pentru rezilvarea problemei (2.3).

Considerînd în baza canonică din C^n vectorii bazei(2.8):

$$b_k^{i*} = (b_{1k}^{oi*}, \ldots, b_{n_o k}^{oi*}, b_{1k}^{1i*}, \ldots, b_{n_1 k}^{1i*}, \ldots, b_{1k}^{si*}, \ldots, b_{n_s k}^{si*})$$

şi un vector oarecare $h \in U$:

$$h(t,\tau)=H(t)e^{\tilde{\tau}} \ ;H(t)= \left\{ h_k^{ij} \mid k=\overline{1,n_i};\ i,j=\overline{o,s} \right\} \tag{2.15}$$

unde i şi k indică liniile matricii H(t) iar j-coloanele,iar $e^{\tilde{\tau}}=(1,e^{\tau_1},e^{\tau_2},\ldots,e^{\tau_s})^T$,condiţia (2.14) devine:

$$\sum_{r=0}^{s} \sum_{k=1}^{n_r} h_k^{rj}\, b_{k\,h}^{rjk} = o; h=\overline{1,n_j},\ j=\overline{o,s}. \qquad (2.16)$$

Scriem un element $u \in U$ sub forma

$$u(t,\tau)= B(t)\, e^{M_n(\tau)}\, W(t)+C(t)\, e^{\tilde{\tau}}, \qquad (2.17)$$

unde $M_n(\tau) = \mathrm{diag}\{ \underbrace{o,\ldots,o}_{n_o \text{ori}}, \underbrace{\tau_1,\ldots,\tau_1}_{n_1 \text{ori}}, \ldots, \underbrace{\tau_s,\ldots,\tau_s}_{n_s \text{ori}} \}$, $\qquad (2.18)$

B(t) este matricea ale cărei coloane sînt formate cu coordonatele vectorilor bazei(2.5) în baza canonică, în ordine, W(t) este un vector nedeterminat din $\mathbb{C}^n$, C(t) este matrice ,deocamdată nedeterminată,de tipul $(n\ ,s+1)$.

Inlocuind h şi u din (2.15) şi (2.17) în (2.3) rezultă:

$$L_o(B(t)e^{M_n(\tau)}W(t)) = B(t)M_n(\lambda(t))e^{M_n(\tau)}W(t)-A(t)B(t)e^{M_n(\tau)}W(t)=o,$$

$$L_o(C(t)e^{\tilde{\tau}}) = C(t)\tilde{M}_s(\lambda(t))e^{\tilde{\tau}}-A(t)C(t)e^{\tilde{\tau}}=H(t)e^{\tilde{\tau}}, \qquad (2.19)$$

unde $M_n(\lambda(t))$ se obţine înlocuind în (2.18) τ_i cu $\lambda_i(t)$ iar

$$\tilde{M}_s(\lambda(t))=\mathrm{diag}\{ o, \lambda_1(t), \lambda_2(t),\ldots, \lambda_s(t)\} \qquad (2.20)$$

Inlocuind C(t) cu B(t)D(t) rezultă din (2.19) :

$$D(t)\tilde{M}_s(\lambda(t))-M_n(\lambda(t))\, D(t)= B^{-1}(t)H(t) \qquad (2.21)$$

Notînd,analog ca în (2.15), elementele matricilor D(t) şi $B^{-1}(t)H(t)$ respectiv cu d_k^{ij}, α_k^{ij}, rezultă din (2.21):

$$\alpha_k^{ii} = o \text{ pentru } k=\overline{1,n_i},\ i=\overline{o,s} \qquad (2.22)$$

$$d_k^{ij}(\lambda_j-\lambda_i)=\alpha_k^{ij} \text{ pentru } k=\overline{1,n_i},\ i\neq j,\ i,j=\overline{o,s} \qquad (2.23)$$

Rezultă că rezolvabilitatea ecuaţiei (2.3) este echivalentă cu cea a ecuaţiei algebrice (2.21), care este echivalentă cu îndeplinirea condiţiei (2.22), care la rîndul ei este chiar condiţia (2.16), care şi ea este echivalentă cu (2.14).

Echivalenţa condiţiilor (2.22) şi (2.16) rezultă din faptul că dacă coordonatele vectorilor unei baze într-o bază ortonormală (în cazul nostru baza canonică) formează coloanele unei matrici B, atunci conjugatele coordonatelor bazei duale în aceeaşi bază ortonormală formează liniile matricii B^{-1}. ([145], p.253).

Elementele matricii $D(t)$ sînt unic determinate de (2.23) pentru $i \neq j$, $i,j = \overline{0,s}$ şi arbitrare pentru $i=j$.

Datorită exprimării unice a lui $u(t,\tau)$ în baza canonică, ţinînd seama de exprimarea (2.17), le vom lua egale cu zero în cazul $i=j$.

Condiţia iniţială (2.13), datorită exprimării (2.17), devine :

$$B(o)e^{M_n(o)} W(o) + C(o)E_{s+1} = u^o$$

unde E_p este vectorul p-dimensional cu toate componentele egale cu 1. Rezultă unic $W(o)$:

$$W(o) = B^{-1}(o)(u^o - C(o)E_{s+1}) \blacksquare \tag{2.24}$$

Teorema 2.2. Dacă $A(t)$ îndeplineşte condiţiile 1.6 şi 2.1 şi $h \in U$ îndeplineşte condiţia (2.14) atunci există şi este unică soluţia $u \in U$ a problemei (2.3) care îndeplineşte condiţia :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \perp \operatorname{Ker} L_o^* \quad \text{(identic în t)} \tag{2.25}$$

Demonstraţie. Derivînd pe $u(t,\tau)$ din (2,17) prin raport cu t şi îmulţind relaţia obţinută , pe rînd , cu elementele lui $\operatorname{Ker} L_o^*$ (din (2.13)), rezultă din (2.25):

$$\dot{W}(t) + R(t)\, W(t) + S(t) = o \tag{2.26}$$

unde $R(t) = \operatorname{diag}\{ R_{oo}, R_{11}, \dots, R_{ss} \}$, (2.27)

$$R_{ii} = \left\{ r^{ii}_{kh} \mid r^{ii}_{kh} = ((\dot{b}^i_h), b^{i*}_k), k, h = \overline{1,n_i} \; , \; i = \overline{o,s} \right\}$$

$$S(t) = \{\sigma^o_1, \dots, \sigma^o_{n_o}, \sigma^1_1, \dots, \sigma^1_{n_1}, \dots, \sigma^s_{n_s}\}; \quad \sigma^i_k = ((\dot{C}^i), b^{i*}_k),$$

unde $C^i(t)$ sînt coloanele matricii $C(t)$.

Sistemul liniar de ecuaţii diferenţiale (2.26) împreună cu condiţia iniţială (2.24) determină unic pe $W(t)$ şi prin urmare soluţia problemei (2.3),(2.25) este complet determinată sub forma (2.17).

Unicitatea rezultă din faptul că dacă problema (2.3),(2.25) ar avea două soluţii u_1 şi u_2 atunci diferenţa lor $v = u_1 - u_2$ ar verifica în U relaţiile :

$$v(t,\tau) = B(t)e^{M_n(\tau)} W(t); W(o) = o; \dot{W}(t) + R(t)\, W(t) = o$$

de unde rezultă $V(t,\tau) \equiv o$ $\blacksquare$

Din demonstrația teoremelor precedente rezultă și modul de construire a unei soluții apropiate pentru problema$(\mathcal{L},\{f\})$ dată de (2.2), în condițiile 1.6 și 2.1.

Pentru problema neperturbată(1.48) se impune condiția (2.16); dar deoarece matricea H(t) din (2.15) are doar prima coloană $h^o(t)=f(t)$ diferită de zero, condiția (2.16) se reduce la :

$$\sum_{r=o}^{s} \sum_{k=1}^{n_r} f_k^r(t)\, b_{kh}^{ro} = o ; h = \overline{1,n_o} , \tag{2.28}$$

care exprimă condiția ca nucleul operatorului reprezentat de matricea A(t) să fie ortogonal termenului liber al sistemului redus care se obține din(1.45) pentru $\varepsilon = o$:

$$- A(t)\, \bar{z}(t) = f(t). \tag{2.29}$$

Așadar, condiția (2.28) este de fapt:

<u>Condiția 2.2</u>. Sistemul redus (2.29) este compatibil.

Presupunînd îndeplinită această condiție, soluția problemei (1.28) se determină ca în demonstrația teoremei 2.1, rămînînd însă nedeterminat vectorul W(t) care în cazul problemei(1.48) îl notăm $W(t) = W_o(t)$.

Dar , deoarece condiția(2.14) de rezolvabilitate a problemei (1.49) pentru i =1 este tocmai:

$$\frac{\partial z_o}{\partial t} \perp \mathrm{Ker}\, L_o^*, \tag{2.3o}$$

condițiile (1.48) și (2.3o) asigură, datorită teoremei 2.2, determinarea lui W_o și deci existența, unicitatea și modul de calcul al primei aproximații $z_o(t,\tau)$.

Se determină în continuare $z_1(t,\tau)$ tot sub forma (2.17):

$$z_1(t,\tau) = B(t)e^{M_n(\tau)}\, W_1(t)+B(t)D_1(t)e^{\tilde{\tau}},$$

impunîndu-i-se să verifice problema(1.49) pentru i =1; rezultă astfel D_1 dintr-o condiție analoagă cu (2.23) iar $W_1(t)$ rămîne nedeterminat ; dar și acesta se determină trecînd la problema următoare - (1.49) pentru i =2 și impunînd pentru această problemă condiția de rezolvabilitate (2.14).

In felul acesta se determină succesiv ceilalți coeficienți ai seriei (1.47), rezultînd astfel familia de funcții: $\tilde{Z}_N = \{ Z_{\varepsilon N} \mid \varepsilon \in [o, \varepsilon_o]\}$ dată de relația (1.58) în care însă funcțiile $z_r(t,\tau)$ se determină prin metoda descrisă de noi mai sus.

<u>Teorema 2.3</u>. Dacă problema (1.45) satisface condiţiile 1.6, 2.1 şi 2.2 atunci familia $\tilde{Z}_N$ este soluţie apropiată de ordinul N pentru problema ($\tilde{\mathcal{L}}$, {f}) dată de (2.2).

<u>Demonstraţie</u>. Din (1.48) şi (1.49) rezultă că funcţia $Z_{\varepsilon N}$ dată de (1.58) verifică aceeaşi condiţie iniţială ca şi soluţia exactă:

$$Z_{\varepsilon N}(o,o) = z^o \tag{2.31}$$

Din aceleaşi relaţii rezultă:

$$\tilde{L}_\varepsilon Z_{\varepsilon N} = \sum_{r=o}^{N} \varepsilon^r \tilde{L}_\varepsilon(z_r) = \sum_{r=o}^{N} \varepsilon^r \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} + L_o\right)(z_r) =$$

$$= \varepsilon \frac{\partial z_o}{\partial t} + f + \sum_{r=1}^{N} \varepsilon^r \left(\varepsilon \frac{\partial z_r}{\partial t} - \frac{\partial z_{r-1}}{\partial t}\right) = f + \varepsilon^{N+1} \frac{\partial z_N}{\partial t}. \tag{2.32}$$

Deoarece $\frac{\partial z_N}{\partial t} \in U$ rezultă: $\frac{\partial z_N}{\partial t} = \sum_{j=o}^{s} v_j(t) e^{\tau_j}$, $v_j \in C^\infty[o,a]$,

$$\tilde{L}_\varepsilon Z_{\varepsilon N} - f = O\left(\left(\varepsilon^{N+1} \sum_{j=o}^{s} |e^{\tau_j}|\right) E_n\right),\ \tau_o = o \ \blacksquare \tag{2.33}$$

Fie Z_N familia funcţiilor care sînt restricţii ale funcţiilor din familia $\tilde{Z}_N$ pentru $\tau = \varphi(t,\varepsilon)$.

<u>Teorema 2.4</u>. Dacă problema (1.45) satisface condiţiile 1.6, 2.1 şi 2.2 atunci familia Z_N este soluţie apropiată de ordinul N pentru problema ($\mathcal{L}$, {f}) dată de (1.45).

<u>Demonstraţie</u>. Din (2.31) rezultă:

$$Z_{\varepsilon N}(o,\varphi(o,\varepsilon)) = Z_{\varepsilon N}(o,o) = z^o.$$

Considerăm spaţiul $\hat{U} = \{\hat{z} \mid \hat{z}(t,\varepsilon) \equiv z(t,\varphi(t,\varepsilon)),\ z \in U\}$ al funcţiilor care sînt restricţii ale funcţiilor din U pentru $\tau = \varphi(t,\varepsilon)$. Reprezentînd un element oarecare z din U sub forma $z(t,\tau) =$

$$= \sum_{j=o}^{s} u_j(t) e^{\tau_j},\ \tau_o = o, \text{ rezultă că } \hat{z}(t,\varepsilon) = z(t,\varphi(t,\varepsilon)) =$$

$$= \sum_{j=o}^{s} u_j(t)\, e^{\varphi_j(t,\varepsilon)},\ \varphi_o = o$$

Definim în spaţiul $\hat{U}$ norma:

$$\|\hat{z}\| = \sum_{j=o}^{s} e^{\tilde{\lambda}_j} \max_{t\in[o,a]} \|u_j(t)\|,\ \tilde{\lambda}_j = \max_{t\in[o,a]} \operatorname{Re} \varphi_j(t,\varepsilon). \tag{2.34}$$

Din (2.32) şi (2.33) rezultă evaluarea în norma (2.34):

$$L_\varepsilon \hat{Z}_{\varepsilon N} - f = O\left(\varepsilon^{N+1} \left(\sum_{j=o}^{s} |e^{\tilde{\lambda}_j}|\right) E_n\right), \tag{2.35}$$

de unde rezultă că familia Z_N este soluţie apropiată de ordinul N pentru problema $(\mathcal{L},\{f\})$ dată de (1.45)■

In continuare se pune problema dacă această soluţie apropiată de ordinul N este şi soluţie asimptotică de ordinul N.

Notăm termenul rezidual astfel:

$$\bar{z}(t,\varepsilon) = z(,\varepsilon) - Z_{\varepsilon N}(t,\varphi(t,\varepsilon)) \tag{2.36}$$

Rezultă, prin scăderea din (1.45) şi (2.32), problema:

$$L_\varepsilon \bar{z}\,(t,\varepsilon) = -\,\varepsilon^{N+1}\frac{\partial z_N(\,t,\varphi(t,\varepsilon))}{\partial t};\bar{z}(o,\varepsilon)=o;\; N=o,1,2,\ldots$$

Soluţia acestei problema este:

$$\bar{z}(t,\varepsilon) = -\,\varepsilon^N Z(t,\varepsilon)\int_o^t Z^{-1}(s,\varepsilon)\,\frac{\partial z_N(s,\varphi(s,\varepsilon))}{\partial t}\,ds \tag{2.37}$$

unde $Z(t,\varepsilon)$ este matricea fundamentală a ecuaţiei omogene: $\varepsilon\dot{z} - A(t)z=o$, adică soluţia ecuaţiei matriciale:

$$\varepsilon\,\dot{Z} - A(t)\,Z = o \tag{2.38}$$

Soluţia ecuaţiei (2.38) o căutăm sub forma unei serii formale:

$$Z(t,\varepsilon) = P(t,\varepsilon)\,e^{M_n(\varphi(t,\varepsilon))};P(t,\varepsilon) = \sum_{r=o}^{\infty}\varepsilon^r P_r(t) \tag{2.39}$$

unde $M_n(\varphi(t,\varepsilon))$ se obţine din (2.18) pentru $\tau_i = \varphi_i(t,\varepsilon)$.

Inlocuind pe $Z(t,\varepsilon)$ din (2.39) în(2.38) rezultă, prin identificare, ecuaţiile succesive:

$$P_oM_n(\lambda(t)) - AP_o = o;\quad P_rM_n(\lambda(t)) - AP_r = -\dot{P}_{r-1};\; r=1,2,\ldots \tag{2.4o}$$

Considerînd soluţia primei ecuaţii(2.4o) sub forma $P_o = BD^o$, rezultă după îmulţirea cu B^{-1}:

$$D^oM_n(\lambda(t)) - M_n(\lambda(t))\,D^o = 0.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii matriciale algebrice este:

$$D^o = \mathrm{diag}\left\{D^o_{oo}, D^o_{11},\ldots, D^o_{ss}\right\};\; D^o_{ii} = \left\{d^{oii}_{k\,h}\,|\,k\,,\,h=\overline{o,n_i},\; i=\overline{o,s}\right\} \tag{2.41}$$

unde blocurile diagonale D^o_{ii} au elementele arbitrare.

Procedînd analog cu ecuaţia (2.4o) pentru r=1 rezultă

$$P_1 = BD^1;\; D^1M_n(\lambda(t)) - M_n(\lambda(t))D^1 = -B^{-1}(\dot{B}\,D^o + B\,\dot{D}^o) \tag{2.42}$$

Deoarece blocurile diagonale din membrul stîng ale ecuaţiei (2.42) aflate în aceeaşi poziţie ca şi blocurile D^o_{ii} ale matricii D^o din (2.41) sînt toate identic nule, e necesar ca aceeaşi proprietate să aibă şi blocurile respective din membrul drept al ecuaţiei (2.42), de unde rezultă ecuaţiile;

$$\dot{D}^o_{ii} + (B^{-1}\dot{B})_{ii} D^o_{ii} = o \ , \ i=\overline{o,s} \qquad (2.43)$$

Prin acelaşi raţionament se obţin matricile $P_r = BD^r$, $r=1,2,\ldots$, ale căror elemente sînt unic determinate, cu excepţia blocurilor diagonale D^r_{ii}, $i=\overline{o,s}$, (analoage blocurilor D^o_{ii} ale lui D^o), care satisfac ecuaţiile :

$$\dot{D}^r_{ii} + (B^{-1}\dot{B})_{ii} D^r_{ii} = o, \quad i=\overline{o,s}, \quad r=1,2,\ldots$$

Pentru ca seria formală a lui $Z(t,\varepsilon)$ din (2.39) care apare în (2.37)' să aibă o inversă formală, este suficient ca matricea $D^o(t)$ să fie inversabilă şi ε suficient de mic. Ţinînd seama de exprimarea (2.41), vom impune ecuaţiilor (2.43) condiţii iniţiale convenabile, astfel încît $\det D^o_{ii}(o) \neq o$, din care va rezulta datorită ecuaţiilor (2.43) că $D^o_{ii}(t) \neq o$ pentru orice $t \in [o,a]$ (a se vedea, de exemplu, [8]) şi deci matricea $P_o(t)$ este inversabilă şi pentru ε suficient de mic matricile din (2.39) au inverse formale.

Consideraţiile de mai sus sînt suficiente ca, urmînd aceeaşi demonstraţie ca în [68], (p.68) (pentru valori proprii nenule simple), adaptată spaţiului U dat de (2.4), să enunţăm teorema următoare despre evaluarea asimptotică a termenului rezidual. Impunem în prealabil:

<u>Condiţia 2.3</u>. Pentru orice pereche $i,j=\overline{o,s}$ are loc una din inegalităţile:

$\mathrm{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)) \leq o$ sau $\mathrm{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)) \geq o$, $(\forall)\, t \in [o,a]$ ∎

<u>Teorema 2.5</u>. Dacă problema (1.45) satisface condiţiile 1.6, 2.1-2.3 atunci familia $\mathcal{Z}_N$ este soluţie asimptotică pentru problema $(\mathcal{L},\{f\})$ dată de (1.45); mai precis, are loc evaluarea asimptotică:

$$\| z - \hat{Z}_{\varepsilon N} \| \leq \varepsilon^{N+1} \Big(\sum_{j=o}^{s} C_j e^{\tilde{\lambda}_j} \Big) \qquad (2.44)$$

în norma definită de (2.34), constantele C_j nedepinzînd de ε ∎

<u>Observaţia 2.4</u>. Dacă la ipotezele teoremei 2.5 adăugăm

<u>Condiţia 2.4</u>. $\mathrm{Re}\,\lambda_i(t) \leq o$ pentru $t \in [o,a]$ şi $i=\overline{1,s}$, atunci din această teoremă rezultă:

Teorema 2.6. Dacă problema (1.45) satisface condiţiile 1.6, 2.1-2.4 atunci restricţia seriei(1.47) pentru $\tau=\varphi(t,\varepsilon)$converge asimptotic către soluţia acestei probleme şi are loc evaluarea asimptotică:

$$\| z - \hat{z}_{\varepsilon N} \| \leq C \cdot \varepsilon^{N+1} \tag{2.45}$$

în norma definită de (2.34), unde C nu depinde de ε.

Observaţia 2.5. Prima aproximaţie a problemei(1.45) este $\hat{z}_0(t,\varepsilon) = z_0(t,\varphi(t,\varepsilon))$ unde

$$z_0(t,\tau) = B(t)\, e^{M_n(\tau)}\, W_0(t) + B(t) D_0(t) e^{\tau} \tag{2.46}$$

este prima aproximaţie a problemei (2.2).

Dacă presupunem îndeplinită condiţia de stabilitate a spectrului matricii A(t):

Condiţia 2.4'. Re $\lambda_i(t) < 0$ pentru $t \in [0,a]$ şi $i=\overline{1,s}$. atunci există limita:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{z}_0(t,\varepsilon) = \bar{z}_0(t) \equiv \sum_{k=1}^{n_0} w_k^0(t)\, b_k^0(t) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} d_k^{io}(t) b_k^i(t) \tag{2.47}$$

uniform pentru $0 < a_1 \leq t \leq a$, unde w_k^0 sînt primele n_0 componente ale vectorului W_0 din (2.46),determinat prin metoda descrisă mai sus iar $d_k^{io}(t)$ rezultă din (2.23): $d_k^{io}(t) = (f(t), b_k^{i*}(t))/\lambda_i(t)$, $k=\overline{1,n_i}$, $i=\overline{1,s}$.

Datorită teoremei de existenţă şi unicitate pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale, condiţia 1.6 este suficientă(nu şi necesară) pentru existenţa şi unicitatea soluţiei problemei(1.45).

Pe de altă parte, presupunînd îndeplinită condiţia 2.2 , problema neperturbată(2.29) are o infinitate de soluţii de forma

$$z(t) = \sum_{k=1}^{n_0} v_k(t)\, b_k^0(t) + \tilde{z}(t) \tag{2.48}$$

unde $v_k(t)$ sînt funcţii arbitrare iar $\tilde{z}(t)$ este o soluţie particulară a sistemului (2.29).

Aceste soluţii nu sînt izolate între ele, prin urmare nu este aplicabilă teorema 1.3 a lui A.N.Tihonov în acest caz.

Se pune problema dacă soluţia problemei (1.45) tinde totuşi pentru $\varepsilon \to 0$ către una din soluţiile (2.48). Răspunsul este afirmativ în condiţiile teoremei următoare:

Teorema 2.7 Dacă problema (1.45) satisface condiţiile 1.6, 2.1-2.3 şi 2.4' atunci soluţia sa converge uniform pentru $\varepsilon \to +0$ pe segmentul $[a_1, a]$, $0 < a_1 < a$ către soluţia $\bar{z}_0(t)$ a sistemului (2.29)dată de (2.47).

Demonstrație. Din (2.34) rezultă că dacă $v \in U$ atunci :

$$\|\hat{v}\|_{C[a_1,a]} \leq \|\hat{v}\|_{C[0,a]} \leq \|\hat{v}\|_{\hat{U}} \tag{2.49}$$

iar din (2.49) și (2.45) rezultă că $\lim_{\varepsilon \to 0} \| z-\hat{z}_0 \| = 0$ (2.50)
unde z este soluția problemei(1.45). Ținînd cont de (2.47) și (2.50) rezultă că $\lim_{\varepsilon \to 0} z(t,\varepsilon) = \bar{z}_0(t)$ ∎

Observație 2.6. O altă problemă care se pune relativ la problema (1.45) este dacă e posibil ca soluția asimptotică de un anumit ordin(construită prin metoda expusă în acest paragraf) să coincidă cu soluția exactă a problemei(1.45).

Un răspuns afirmativ este dat de teorema următoare.

Teorema 2.8. Dacă matricea $A(t) \equiv A$ este constantă și diagonalizabilă atunci condiția necesară și suficientă ca soluția asimptotică $Z_{\varepsilon N}(t, \varphi(t,\varepsilon))$, obținută prin metoda descrisă în acest paragraf, să coincidă cu soluția exactă a problemei(1.45) este ca termenul liber f(t) să aibă componentele polinoame de grad cel mult N.

Demonstrație. Relația (2.17) pentru $u(t,\tau) = z_r(t,\tau)$ devine:

$$z_r(t,\tau) = B\, e^{M_n(\tau)} W_r(t) + BD_r(t)e^{\tilde{\tau}}, \text{unde}: D_r = (d^{ij}_{kr}) \quad k=\overline{1,n_i} \;\; i=\overline{0,s};\;\; j=\overline{0,s}$$

$$W_r(t) = (w^0_{1r}(t),\dots,w^0_{n_0 r}(t), w^1_{1r}(t),\dots,w^1_{n_1 r}(t),\dots,w^s_{1r}(t),\dots,w_{n_s r}(t))^T,$$

sau, altfel scris:

$$z_r(t,\tau) = \sum_{j=0}^{s} \sum_{k=1}^{n_j} w^j_{kr}(t) b^j_k e^{\tau_j} + \sum_{i,j=0}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} d^{ij}_{kr}(t) b^i_k e^{\tau_j} \tag{2.51}$$

Rezultă că relația(2.25) implică relațiile:

$\dot{w}^i_{kr}(t) + \dot{d}^{ii}_{kr} = 0$ și deoarece $d^{ii}_{kr} \equiv 0$ rezultă $w^i_{kr}(t) \equiv w^i_{kr}(0)$,

unde $w^i_{kr}(0)$ rezultă din (2.24):

$W_0(0) = B^{-1} z^0 - D_0(0)E_{s+1}$, $W_k(0) = -D_k(0)E_{s+1}$, $k=1,2,\dots$

Pe de altă parte, din (2.22) și (2.23) rezultă elementele matricii D_0: $d^{00}_{k0} = 0, k=\overline{1,n_0}$; $d^{ij}_{k0} = 0$, $k=\overline{1,n_i}$, $i=\overline{0,s}$, $j=\overline{1,s}$,
$d^{i0}_{k0} = (-b^{i*}_k, f^i_k(t))/\lambda_i$, $k=\overline{1,n_i}$, $i=\overline{1,s}$.

de unde rezultă că elementele matricii D_o sînt polinoame de gradul cel mult N dacă funcţia - vector f(t) este polinom de gradul N.

Deoarece $\frac{\partial z_r}{\partial t} = B\,\dot{D}_r(t)\,e^{\tilde{\tau}}$, $L_o z_r(t,\tau) = -B\,\dot{D}_{r-1}(t)\,e^{\tilde{\tau}}$,

din aceleaşi relaţii (2.22) şi (2.23) rezultă succesiv elementele matricilor $D_r(t)$:

$$d^{oo}_{kr} = o,\ k=\overline{1,n_o}\ ;\ d^{ij}_{kr} = o,\ k=\overline{1,n_i},\ i=\overline{o,s};j=\overline{1,s}\ ; \qquad (2.52)$$

$$d^{io}_{kr}(t) = +\dot{d}^{io}_{k(r-1)}(t)/\lambda_i,\ k=\overline{1,n_i},\ i=\overline{1,s},\ r=1,2,\ldots$$

Din relaţiile (2.52) rezultă că dacă f este polinom de gradul N atunci elementele matricilor D_r sînt polinoame de grad cel mult N-r ,deci $D_{N+p}(t) \equiv o$, pentru $p \in N^*$, deci $W_{N+p}(o)=o$, deci $W_{N+p}(t) \equiv o$ şi prin urmare $Z_{N+p}(t) \equiv o$ pentru $p \in N^*$.

Reciproc, dacă $Z_{N+1}(t,\tau) \equiv o$, rezultă că $d^{io}_{kN}(t)$ sînt polinoame de grad zero, iar $d^{io}_{kr}(t)$, $k=\overline{1,n_i}$, $i=\overline{1,s}$, $r < N$, sînt polinoame de gradul cel mult N-r şi deci f(t) este un vector cu componentele polinoame de gradul cel mult N∎

<u>Exemplul 2.1.</u> Sistemul

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\dot{z}_1 + 2z_1 = 6t \qquad &;\quad z_1(o) = 2\\
&\varepsilon\dot{z}_2 - z_1 + 3z_2 - 3z_3 = 6t^2 \qquad &;\quad z_2(o) = o\\
&\varepsilon\dot{z}_3 - z_1 + z_2 - z_3 = 2t^2-2t \qquad &;\quad z_3(o) = 4
\end{aligned}$$

care îndeplineşte condiţiile 1.6 , 2.1 - 2.3 şi 2.4', are soluţia exactă egală cu restricţia sumei parţiale de ordinul doi dată de (1.58) pentru $\tau = \varphi(t,\varepsilon)$.

Intr-adevăr:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & o & o \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{aligned} &\lambda_o=o, n_o = 1;\ \lambda_1=-2,\ n_1=2\ ;\\ &\tau = (\tau_1) = (\tau)\ ;\\ &L_o = -2\frac{\partial}{\partial \tau}\ ; \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1^o & b_1^1 & b_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & 1 & -3 \\ 1 & 1 & o \\ 1 & o & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} b_1^{o*} \\ b_1^{1*} \\ b_2^{1*} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

Ţinînd cont de teorema 2.8 rezultă:

$$z_r(t,\tau) = w_{1r}^o b_1^o + w_{1r}^1 b_1^1 + w_{2r}^1 b_2^1 + d_{1r}^{1o} b_1^1 + d_{2r}^{1o} b_2^1, \quad r = o,1,2,$$

unde: $d_{1o}^{1o} = 3t^2$, $d_{2o}^{1o} = t^2 - t$,

$$W_o = \begin{bmatrix} w_{1o}^o \\ w_{1o}^1 \\ w_{2o}^1 \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ o \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad z_o(t,\tau) = \begin{bmatrix} 3t + 2e^{\tau} \\ 7 + 3t^2 - 7e^{\tau} \\ 7 - t + t^2 - 3e^{\tau} \end{bmatrix}$$

$d_{11}^{1o} = -3t$, $d_{21}^{1o} = -t + \frac{1}{2}$, $w_{11}^o = w_{11}^1 = o$, $w_{21}^1 = -\frac{1}{2}$,

$$z_1(t,\tau) = -\frac{1}{2} b_2^1 e^{\tau} - 3tb_1^1 + \left(-t + \frac{1}{2}\right) b_2^1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} e^{\tau} \\ -3t \\ \frac{1}{2} - t - \frac{1}{2} e^{\tau} \end{bmatrix},$$

$d_{12}^{1o} = \frac{3}{2}$, $d_{22}^{1o} = \frac{1}{2}$, $w_{12}^o = o$, $w_{12}^1 = -\frac{3}{2}$, $w_{22}^1 = -\frac{1}{2}$.

$$z_2(t,\tau) = \left(-\frac{3}{2} b_1^1 - \frac{1}{2} b_2^1\right) e^{\tau} + \frac{3}{2} b_1^1 + \frac{1}{2} b_2^1 = \begin{bmatrix} o \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{\tau} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{\tau} \end{bmatrix}$$

Rezultă soluţia $Z(t,\varepsilon) = z_0(t,\frac{-2t}{\varepsilon})+\varepsilon z_1(t,\frac{-2t}{\varepsilon})+ \varepsilon^2 z_2(t,\frac{-2t}{\varepsilon})$, adică:

$$z_1=3t + 2e^{-2t/\varepsilon}+\varepsilon(- \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot e^{-2t/\varepsilon}),$$

$$z_2= 3t^2 +t-te^{-2t/\varepsilon}+ \varepsilon(-3t)+ \varepsilon^2(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{-2t/\varepsilon}) ,$$

$$z_3= t^2-t+7-3e^{-2t/\varepsilon} + \varepsilon(-t+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t/\varepsilon})+ \varepsilon^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t/\varepsilon}) \blacksquare$$

Observaţia 2.7. Noţiunile,propietăţile şi teoremele din acest paragraf rămîn valabile şi dacă matricea $A(t)$ nu are valoarea proprie zero ci valori proprii simple sau multiple care satisfac, în locul condiţiei 2.1 condiţia următoare:

Condiţia 2.1'. Spaţiul propriu corespunzător fiecărei valori proprii distincte $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,s}$, are dimensiunea n_i egală cu multiplicitatea sa alegbrică şi

$$\lambda_i(t)\neq 0,\ \lambda_i(t) \neq \lambda_j(t) \text{ pentru } t \in [0,a] \text{ şi } i\neq j \text{ şi } i,j=\overline{1,s}.$$

In acest caz se consideră peste tot $i,j=\overline{1,s}$; condiţia (2.28) şi condiţia 2.2 sînt superflue iar în teorema 2.7 soluţia problemei (1.45) converge către soluţia unică a sistemului(2.29).

De asemenea , metoda descrisă mai sus poate fi extinsă la sisteme mai generale decît (1.45) de exemplu ,la cazul neliniar considerat de S.A.Lomov în [68]■

Comentarii bibliografice.

Teoremele 2.1-2.7 fiind o extindere a teoremelor analoage din [68],demonstraţia lor se face după aceleaşi idei,urmărinduse ,bineînţeles, adaptarea la cazul studiat de autor şi folosinduse terminilogia introdusă în paragraful 1.1.

Definiţia spaţiului U al soluţiilor fără rezonanţă este diferită de definiţia analoagă din [68] ,mai fundamentată din punct de vedere matematic.

De asemenea produsul scalar în spaţiul U este definit într-un mod mai natural.

Ideea de a considera teorema 2.8 aparţine autorului.

O parte din rezultatele prezentate în acest paragraf au fost publicate în [89]■

2.2. Regularizarea perturbaţiilor singulare ale sistemelor de ecuaţii integro-diferenţiale liniare de tip Volterra cu variaţie rapidă în cazuri critice.

În acest paragraf vom extinde rezultatele din paragrafele 1.5 şi 2.1 la problema cu perturbaţii singulare în care se consideră în locul problemei(1.45) problema Cauchy integro-diferenţială, de tip Volterra:

$$T_{\varepsilon} z \equiv \varepsilon \frac{dz(t,\varepsilon)}{dt} - A(t)z(t,\varepsilon) + \int_0^t K(t,r)z(r,\varepsilon)dr = f(t); z(o,\varepsilon) = z^o \tag{2.53}$$

în aceleaşi cazuri "critice" ca în §2.1. Vom presupune deci îndeplinite condiţiile 2.1-2.4.

Vom extinde spaţiul $\mathbb{C}^n$ la spaţiul U din (2.4), funcţia $z(t,\varepsilon)$ la funcţia $\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)$ iar operatorul T şi problema (2.53) la operatorul şi problema:

$$\tilde{T}_{\varepsilon} \tilde{z} \equiv \varepsilon \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + D_{\lambda} \tilde{z} - A(t)\tilde{z} + \int_0^t K(t,p)\tilde{z}(p,\varphi(p,\varepsilon),\varepsilon)dp = f(t) \tag{2.54}$$

$$\tilde{z}(o,o,\varepsilon) = z^o$$

Soluţia acestei probleme o vom considera tot sub forma (1.47).

<u>Teorema 2.9</u>. Dacă sînt îndeplinite condiţiile 1.6, 2.1-2.4, atunci spaţiul U este asimptotic invariant prin raport cu operatorul integral:

$$I\, z(t,\tau) = \int_0^t K(t,p)z(p,\varphi(p,\varepsilon)dp$$

<u>Demonstraţie</u>. Considerînd $z_r \in U$ exprimat prin formula (2.7) rezultă:

$$I\, z_r(t,\tau) = \int_0^t K(t,p)z_r(p,\varphi(p,\varepsilon))dp =$$

$$= \sum_{i,j=o}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} \int_0^t K(t,p)z_{kr}^{ij}(p)b_k^i(p)e^{\varphi_j(p,\varepsilon)}dp; \; \varphi_o = o \tag{2.55}$$

Pentru j = o în suma din(2.55) se obţine un element tot din U:

$$u_r = \sum_{i=o}^{s} \sum_{k=1}^{n_o} \int_0^t K(t,p)z_{kr}^{io}\, b_k^i\, dp = \sum_{h=o}^{s} \sum_{k=1}^{n_h} u_{kr}^h\; b_k^h =$$

$$= \sum_{h=o}^{s} \sum_{q=1}^{n_h} \Big(\sum_{i=o}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} \int_0^t K(t,p)z_{kr}^{io}\, b_k^i\, dp, b_q^{h*}\Big) \cdot b_q^h$$

iar pentru $j=\overline{1,s}$ se integrează prin părţi termenul integral, obţinîndu-se ca şi în cazul valorilor proprii simple, [68], o serie asimptotică:

$$\int_o^t K(t,p)z_{kr}^{ij}\, b_k^i\, e^{\varphi_j(p,\varepsilon)}dp=\sum_{m=o}^{\infty}(-1)^m\,\varepsilon^{m+1}(g_{kr}^{mij}(t,t)e^{\varphi_j(t,\varepsilon)}-$$

$$-g_{kr}^{mij}(t,o)),\text{unde: } g_{kr}^{mij}(t,p)=D_p^{mj}K(t,p)z_{kr}^{ij}(p)b_k^i(p),$$

$$D_p^{oj}\equiv\frac{1}{\lambda_j(p)},\quad D_p^{mj}\equiv\frac{1}{\lambda_j(p)}\cdot\frac{\partial}{\partial p}(D_p^{m-1,j}).\text{Rezultă:}$$

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=o}^{s}\sum_{k=1}^{n_i}\int_o^t K(t,p)z_{kr}^{ij}\, b_k^i\, e^{\varphi_j(p,\varepsilon)}dp=$$

$$=\sum_{m=o}^{\infty}(-1)^m\,\varepsilon^{m+1}\Big(\sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{h=o}^{s}\sum_{q=1}^{n_h}\Big(\sum_{i=o}^{s}\sum_{k=1}^{n_i}g_{kr}^{mij}(p,p),b_q^{h*}\Big)b_q^h e^{\varphi_j(t,\varepsilon)}$$

$$+\sum_{h=o}^{s}\sum_{q=1}^{n_h}\Big(-\sum_{i=o}^{s}\sum_{k=1}^{n_i}g_{kr}^{mij}(t,o),b_q^{h*}\Big)\, b_q^h\Big)\Big)\equiv$$

$$\equiv\sum_{m=o}^{\infty}(-1)^m\varepsilon^{m+1}\Big(\sum_{j=1}^{s}\sum_{h=o}^{s}\sum_{q=1}^{n_h}v_{qr}^{mhj}b_q^h\, e^{\varphi_j(t,\varepsilon)}+\sum_{h=o}^{s}\sum_{q=1}^{n_h}v_{qr}^{mho}\, b_q^h\Big)\equiv$$

$$\equiv\sum_{m=o}^{\infty}(-1)^m\,\varepsilon^{m+1}\,v_r^m;Iz_r(t,\tau)=u_r(t)+\sum_{m=o}^{\infty}(-1)^m\,\varepsilon^{m+1}\,v_r^m(t)_m \quad (2.56)$$

Pentru determinarea termenilor seriei(1.47), aceasta se înlocuieşte în (2.54), şi ţinînd cont de relaţiile (2.56) se identifică coeficienţii aceleraşi puteri ale lui ε, rezultînd problemele:

$$L_o z_o=f(t)-u_o(t);\; z_o(o,o)=z^o \qquad (2.57)$$

$$L_o z_1=-\frac{\partial z_o}{\partial t}-u_1(t)-v_o^o(t);\; z_1(o,o)=o \qquad (2.58)$$

$$L_o z_r=-\frac{\partial z_{r-1}}{\partial t}-u_r(t)-\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}v_{r-1}^{k-1}(t);z_r(o,o)=o;r=2,3,\ldots \qquad (2.59)$$

Pentru rezolvarea problemei integro-diferenţiale(2.57), vom considera pe $z_o\in U$ sub forma generală (2.7). Rezultă

$$L_o z_o=\sum_{i,j=o}^{s}\sum_{k=1}^{n_i}z_{ko}^{ij}(\lambda_j-\lambda_i)b_k^i\,\varepsilon^{\tau_j}$$

şi deoarece termenul liber din (2.57) este din $\mathbb{C}^n$, rezultă că trebuie luat:

$$z_o=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_j} z_{ko}^{jj}\, b_k^j\, e^{\tau_j}+\sum_{i=o}^{s}\sum_{k=1}^{n_i} z_{ko}^{io}\, b_k^i\,, \qquad (2.60)$$

$$L_o z_o = -\sum_{i=o}^{s}\sum_{k=1}^{n_i} z_{ko}^{io}\cdot\lambda_i b_k^i\ ;$$

Inmulţind (2.52) cu b_k^{i*} rezultă:

$$-\lambda_i z_{ko}^{io}+\Big(\sum_{h=o}^{s}\sum_{q=1}^{n_h}\int_o^t K(t,p)z_{qo}^{ho}\, b_q^h\, dp, b_k^{i*}\Big)=(f(t),b_k^{i*}) \qquad (2.61)$$

$$k=\overline{1,n_i},\quad i=\overline{o,s}$$

<u>Observaţia 2.8</u>. Relaţiile (2.61) conţin şi condiţia ca teremenul liber al sistemului (2.57) să fie ortogonal nucleului $\operatorname{Ker} L_o^*$ - condiţie de normal rezolvabilitate a lui L_o. In particular, e necesară:

<u>Condiţia 2.5</u>. $(f(o), b_k^{o*}(o)) = o$, $k=\overline{1,n_o}$ ∎

Notînd $Y_o(t)=(z_{1o}^{oo}, z_{2o}^{oo},\dots,z_{n_oo}^{oo}, z_{1o}^{1o},\dots,z_{n_1o}^{1o},\dots,z_{1o}^{so},\dots z_{n_so}^{so})$, sistemul (2.61) se poate scrie matricial sub forma:

$$M_n(\lambda(t))Y_o(t)+\int_o^t \hat{K}(t,p)Y_o(p)dp=\hat{f}(t) \qquad (2.62)$$

unde $\hat{f}(t)=((f,b_1^{o*}),\dots,(f,b_{n_o}^{o*}),(f,b_1^{1*}),\dots,(f,b_{n_1}^{1*}),\dots,(f,b_{n_s}^{s*}))^T$, iar matricea $\hat{K}(t,p)$ se exprimă determinat în funcţie de $K(t,p)$ şi vectorii bazelor (2.5) şi (2.8).

Dacă toate valorile proprii ale matricii A ar fi nenule atunci ecuaţia matricială (2.62) s-ar reduce la o ecuaţie integrală de tip Volterra de speţa a doua. Vom arăta că, în anumite condiţii, aceasta se întîmplă şi în cazul condiţiei 2.1.

Vom considera problema mai generală: Fie ecuaţia matricială:

$$A(t)Y(t)+\int_o^t K(t,p)Y(p)dp = F(t) \qquad (2.63)$$

Dacă $A(t)$ este matrice simplă atunci ecuația(2.63) este echivalentă cu:

$$Y(t) = B(t)Z(t)$$

$$M_n(\lambda(t))Z(t)+\int_o^t B^{-1}(t)K(t,p)B(p)Z(p)dp= B^{-1}(t)F(t) \qquad (2.64)$$

Dacă spectrul matricii $A(t)$ conține pe zero cu multiplicitatea n_o atunci ecuația (2.64) este de forma:

$$\int_o^t (K_{oo}(t,p)Z_o(p)+K_{o1}(t,p)Z_1(p))dp = F_o(t) \qquad (2.65\ a)$$

$$Z_1(t)+ \int_o^t (K_{1o}(t,p)Z_o(p)+K_{11}(t,p)Z_1(p))dp=F_1(t) \qquad (2.65\ b)$$

unde K_{oo} este de tipul $n_o x\ n_o$, $Z_o=(z_1,\dots n_o)^T, Z_1=(z_{n_o+1},\dots,z_n)^T$.

Lema 2.1. Dacă $F_o(o)=o$ și $\det K_{oo}(t,t) \neq o$ atunci sistemul (2.65) se reduce la o ecuație matricială Volterra de speța a doua.

Demonstrație. Derivînd ecuația (2.65 a) rezultă :

$$K_{oo}(t,t)Z_o(t)+K_{o1}(t,t)Z_1(t)+ \int_o^t (\dot K_{oo}(t,p)Z_o(p)+\dot K_{o1}(t,p)Z_1(p)dp=\dot F_o(t$$

și ținînd cont de (2.65 b) sistemul (2.65) se scrie sub forma:

$$\begin{bmatrix} Z_o(t) \\ Z_1(t) \end{bmatrix} + \int_o^t \begin{bmatrix} \widetilde K_{oo}(t,p) & \widetilde K_{o1}(t,p) \\ K_{1o}(t,p) & K_{11}(t,p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_o(p) \\ Z_1(p) \end{bmatrix} dp= \begin{bmatrix} F_o(t) \\ F_1(t) \end{bmatrix} \qquad (2.66)$$

unde $\widetilde K_{oi}(t,p)=K_{oo}^{-1}(t,t)(\dot K_{oi}(t,p)-K_{o1}(t,t)K_{1i}(t,p))$, $i=o,1$

$$\widetilde F_o(t) = K_{oo}^{-1}(t,t)(\dot F_o(t)-K_{o1}(t,t)F_1(t)) \blacksquare$$

Consecință: Sistemul(2.62) se exprimă sub forma (2.65); dacă blocul diagonal al lui $\hat K(t,t)$ omolog lui $K_{oo}(t,t)$, este nesingular și este îndeplinită condiția 2.6 atunci sistemul (2.62) are soluție unică și deci funcțiile $z_{ko}^{io}(t)$ din (2.60) sînt unic determinate prin rezolvarea sistemului(2.61).

Celelalte funcții z_{ko}^{jj} sînt deocamdată cunoscute doar în zero, datorită relațiilor (2.57) și (2.60):

$$z_{ko}^{jj}(o)=(z^o,b_k^{j*})-z_{ko}^{jo}(o);\ k=\overline{1,n_j},\ j=\overline{1,s} \qquad (2.67)$$

Observaţia 2.9. Datorită aceloraşi relaţii (2.57) şi (2.60) se impune:

Condiţia 2.6. $z_{ko}^{oo}(o) = (z^o, b_k^{o*}(o))$, $k = \overline{1,m_o}$,

care datorită relaţiilor (2.62) şi (2.66) devine:

$$K_{oo}^{-1}(o,o)(\hat{f}_o(o)-K_{o1}(o,o)\hat{f}_1(o)) = \begin{bmatrix} (z^o, b_1^{o*}(o)) \\ - - - - - - - \\ (z^o, b_{m_o}^{o*}(o)) \end{bmatrix}$$

Ecuaţiile pentru determinarea funcţiilor $z_{ko}^{jj}(t)$ rezultă din condiţia ca membrul drept al sistemului (2.58) să fie ortogonal lui $\mathrm{Ker}\, L_o^*$:

$$\dot{z}_{ko}^{jj} + \sum_{h=1}^{m_j}(b_h^j, b_k^{j*})\, z_{ho}^{jj} + v_{ko}^{ojj} = o,\quad k=\overline{1,n_j};\ j=\overline{1,s} \tag{2.68}$$

Prin rezolvarea celor s sisteme liniare (2.68) cu condiţiile (2.67), soluţia $z_o(t,\tau)$ este complet determinată în U sub forma (2.60).

Pentru determinarea termenului următor din (1.47)- $z_1(t,\tau)$, se scrie membrul drept al sistemului (2.58) sub forma:

$$-\frac{\partial z_o}{\partial t} - u_1 - v_o^o = \hat{f}_1+\tilde{f}_1+\bar{f}_1;\quad \hat{f}_1 = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_j} f_{k1}^{jj}\, b_k^j\, e^{\tau_j},$$

$$\tilde{f}_1 \equiv \sum_{j=1,i=o,j\neq i}^{s}\ \sum^{s}\ \sum_{k=1}^{m_i} f_{k1}^{ij}\, b_k^i\, e^{\tau_j};\quad \bar{f}_1 \equiv \sum_{i=o}^{s}\sum_{k=1}^{n_i} f_{k1}^i\, b_k^i$$

şi se caută soluţia sub forma: $z_1=\hat{z}_1+\tilde{z}_1+\bar{z}_1$. Rezultă:

$L_o\hat{z}_1=o$, de unde: $\hat{z}_1 = \sum_{i=o}^{s}\sum_{k=1}^{m_i} z_{k1}^{ii}\, b_k^i\, e^{\tau_j}$, z_{k1}^{ii} -arbitrari,

$L_o\tilde{z}_1=\tilde{f}_1$, de unde: $\tilde{z}_1 = \sum_{j=1,i=o,j\neq i}^{s}\ \sum^{s}\ \sum_{k=1}^{m_i} f_{k1}^{ij}\, b_k^i\, e^{\tau_j}/(\lambda_i-\lambda_j)$

$L_o\bar{z}_1=\bar{f}_1$, de unde rezultă $\bar{z}_1$ prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii integrale analog cu (2.61).

In acelaşi mod se determină celelalte funcţii $z_r(t,\tau)$.

Observația 2.1o. Condiția 2.5 este naturală, ea fiind de fapt condiția de compatibilitate a sistemului redus care se obține din (2.53) pentru $\varepsilon = o$ și $t = o$.

Condiția 2.6 se verifică după ce se rezolvă sistemul (2.61). In mod analog, funcția $z_r(t,\tau)$ există și se poate determina prin metoda descrisă mai sus numai dacă sînt satisfăcute condiții analoage cu condițiile 2.5 și 2.6 pentru fiecare r :

$$f_{kr}^{oo}(o) = o, \quad u_{kr}^{oo}(o) + u_{kr}^{o1}(o) = o, \quad k=\overline{1, m_o}, \quad r=\overline{1,N} \qquad (2.69)$$

In acest caz se obține o soluție asimptotică de ordinul N și se demonstrează că ea verifică o evaluare asimptotică de forma (2.44) sau (2.45) (în condițiile 1.6 și 2.1 - 2.6). Din păcate, acest caz nu este întotdeauna posibil și nici nu poate fi verificat apriori, după prima aproximare.

In schimb dacă se consideră în locul condiției 2.1 condiția 2.1' atunci condițiile 2.5 și 2.6 sînt superflue și construirea soluției asimptotice prin metoda descrisă în acest paragraf este posibilă în condițiile respective întotdeauna și au loc evaluări asimptotice de forma (2.45) sau (2.46).

Comentarii bibliografice.

Problemele integro - diferențiale de forma (2.53) au fost studiate de S.A.Lomov doar în cazul cînd sînt îndeplinite condițiile 1.6, 1.6' și 1.7 . (După cum am arătat în § 1.4 M.I.Imanaliev [5o] a studiat și cazul neliniar (1.4o) dar tot numai în condiția 1.4' de stabilitate a spectrului matricii $\bar{F}_z(t)$)

Rezultatele prezentate în acest paragraf sînt conținute în lucrarea [93] a autorului.

O altă generalizare decît cea prezentată în acest paragraf este cea publicată de autor în [89], în care funcţiile K şi f din (2.53) sînt înlocuite cu funcţii care depind şi de parametru ($K=K(t,s,\varepsilon)$, $f=f(t,\varepsilon)$), în condiţii analoage cu condiţiile 1.6,1.6' şi 1.7.

CAPITOLUL III

PROBLEME INTEGRO-DIFERENTIALE DE TIP FREDHOLM CU PERTURBATII SINGULARE

In acest capitol vom prezenta două metode asimptotice originale pentru unele probleme integro-diferentiale de tip Fredholm liniare, cu perturbatii singulare.

3.1. Ecuatii integro-diferentiale de ordinul doi de tip Fredholm cu parametru mic lîngă derivata de ordinul doi.

In acest paragraf vom considera problemele cu perturbatii singulare de forma:

$$\varepsilon \frac{d^2z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + \beta z + \gamma \int_0^a H(t,s) z(s,\varepsilon) ds = f(t,\varepsilon) \qquad (3.1)$$

$$z(o,\varepsilon) = z^0 \ , \ \dot{z}(o,\varepsilon) = z^1 \qquad (3.2)$$

unde $o < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$, $\alpha > o$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, pentru care presupunem îndeplinită:

Conditia 3.1. Functiile $H(t,s)$ şi $f(t,\varepsilon)$ au derivate partiale continue pînă la ordinul $N+1$ (unde $N \in \mathbb{N}$ este dat) prin raport cu toate argumentele pentru $o \leq t,s \leq a$, $o \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ∎

Ecuatia (3.1) poate fi redusă la un sistem de două ecuatii de ordinul I cu două necunoscute, z - cu variatie lentă şi $\frac{dz}{dt}$ - cu variatie rapidă, la care se poate aplica, de exemplu, metoda Vasilieva ca în [50]. Datorită însă liniarităţii ecuatiei (3.1) vom aplica ideea acestei metode direct problemei (3.1) - (3.2) şi vom da un algoritm de construire a unei solutii asimptotice a acestei probleme mai simplu decît cel care ar rezulta reducînd-o la un sistem de două ecuatii diferentiale de ordinul I şi am aplica apoi metoda din [50].

Problema redusă a problemei (3.1)-(3.2) este problema:

$$\alpha \frac{dz_0}{dt} + \beta z_0 + \gamma \int_0^a H(t,s) z_0(s) ds = f(t,o); z_0(o) = z^0 \qquad (3.3)$$

Problema (3.3) este echivalentă cu ecuatia integrală:

$$z_0+\frac{\gamma}{\alpha}\int_0^a\left(\int_0^t e^{-\beta(t-s)/\alpha}H(s,r)ds\right)z_0(r)dr =$$

$$=z^0 e^{-\beta t/\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^t f(s,o)e^{-\beta(t-s)/\alpha}ds \qquad (3.4)$$

Ecuaţia (3.4) fiind o ecuaţie integrală de tip Fredholm, existenţa şi unicitatea soluţiei sale o asigurăm prin următoarele două leme:

Lema 3.1. Dacă $\beta \neq o$ şi este îndeplinită condiţia 3.1 pentru N =o atunci o condiţie suficientă pentru existenţa şi unicitatea soluţiei problemelor (3.3) şi (3.4) în $C^1[o,a]$ este:

$$|\gamma| < \frac{\beta}{aM(1-e^{-a\beta/\alpha})} \qquad (3.5)$$

unde: $M = \sup_{(t,s)\in Q} |H(t,s)|$, $Q = [o,a]\times[o,a]$ ∎

Lemá 3.2. Dacă $\alpha > o$ şi $\beta = o$ atunci problema redusă:

$$\alpha\frac{dz_0}{dt}+\gamma\int_0^a H(t,s)z_0(s)ds = f(t,o) \qquad (3.6)$$

este echivalentă cu ecuaţia integrală:

$$z_0(t)+\frac{\gamma}{\alpha}\int_0^a\left(\int_0^t H(s,r)ds\right)z_0(r)dr = \frac{1}{\alpha}\int_0^t f(s,o)ds+z^0 \qquad (3.7)$$

care are soluţie unică în $C^1[o,a]$ dacă:

$$\alpha > |\gamma| a^2 M \quad ∎ \qquad (3.8)$$

Observaţia 3.1. Dacă β tinde către zero, din ecuaţia (3.4) se obţine ecuaţia (3.6) iar condiţia (3.5) devine la limită condiţia (3.8). Dacă β este o constantă oarecare atunci o condiţie mai puternică decît condiţia (3.5) dar care implică atît condiţia (3.5) dacă $\beta \neq o$ cît şi condiţia (3.8) dacă $\beta = o$ este condiţia:

$$\alpha > |\gamma| a^2 M + |\beta| a \qquad (3.9)$$

De altfel, dacă $\beta \neq o$ problema (3.3) poate fi redusă la o problemă de forma (3.6).

Intr-adevăr, efectuînd în (3.3) schimbarea de funcţie [7]:

$$z_0 = uy;\ \alpha\dot{y} = -\beta y;\ y(o) = 1, \qquad (3.10)$$

rezultă problema:

$$\alpha\frac{du}{dt}+\gamma\int_0^a e^{\beta(t-s)/\alpha}H(t,s)u(s)ds-f(t,o)e^{\beta t/\alpha}=o;\ u(o)=z^0 \ ∎ \qquad (3.11)$$

Revenind la problema (3.1) vom considera soluţia ei sub forma unei sume de două serii:

$$z(t,\varepsilon)= \bar{z}(t,\varepsilon)+ \hat{z}(\tau,\varepsilon), \quad \tau =t/\varepsilon \qquad (3.12\ a)$$

$$\bar{z}(t,\varepsilon)= \bar{z}_0(t) + \varepsilon \bar{z}_1(t)+\ldots+ \varepsilon^k \bar{z}_k(t)+\ldots \qquad (3.12\ b)$$

$$\hat{z}(\tau,\varepsilon)= \hat{z}_0(\tau) + \varepsilon \hat{z}_1(\tau)+\ldots+ \varepsilon^k \hat{z}_k(\tau)+\ldots \qquad (3.12\ c)$$

Ţinînd cont de relaţiile (3.12), considerăm următoarea dezvoltare a termenului integral din (3.1):

$$J = \int_0^a H(t,s)z(s,\varepsilon)ds = J_0(t)+ \varepsilon J_1(t)+\ldots+ \varepsilon^k J_k(t)+\ldots \qquad (3.13\ a)$$

$$J_0=\int_0^a \bar{K}_0(t,s)ds, \quad J_i = \int_0^a \bar{K}_i(t,s)ds+ \int_0^\infty \hat{K}_{i-1}(t,\sigma)d\sigma \qquad (3.13\ b)$$

$$\bar{K}_i(t,s)\equiv H(t,s)\bar{z}_i(s), \hat{K}_i(t,\sigma)=\sum_{j=0}^{i} \frac{\sigma^j}{j!} \frac{\partial^j H(t,o)}{\partial s^j} \hat{z}_{i-j}(\sigma) \qquad (3.13\ c)$$

$$i = o,1,2,\ldots$$

Considerînd şi dezvoltarea termenului liber din (3.1):

$$f(t,\varepsilon) = f_0(t)+ \varepsilon f_1(t)+\ldots+ \varepsilon^k f_k(t)+\ldots , \qquad (3.14)$$

după înlocuirea relaţiilor (3.12)-(3.14) în (3.1) şi identificarea formală a coeficienţilor aceloraşi puteri ale lui ε, separat funcţiile de variabilă τ de cele de variabilă t, rezultă ecuaţiile:

$$\frac{d^2\hat{z}_0(\tau)}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\hat{z}_0(\tau)}{d\tau} = o \qquad (3.15\ a)$$

$$\alpha\frac{d\bar{z}_0(t)}{dt} +\beta \bar{z}_0(t)+ \gamma J_0(t) = f_0(t) \qquad (3.15\ b)$$

$$\frac{d^2\hat{z}_i(\tau)}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\hat{z}_i(\tau)}{d\tau} = -\beta \hat{z}_{i-1}(\tau), \quad i = 1,2,\ldots \qquad (3.16\ a)$$

$$\alpha \frac{d\bar{z}_i(t)}{dt}+\beta \bar{z}_i(t)+ \gamma J_i(t)=f_i(t)- \frac{d^2\bar{z}_{i-1}(t)}{dt^2}, \quad i=1,2,\ldots \qquad (3.16\ b)$$

<u>Observaţia 3.2.</u> Pentru ca funcţiile de strat limită să aibă o influenţă neglijabilă în afara zonei stratului limită sînt necesare condiţiile la limită:

$$\lim_{\tau\to\infty} \hat{z}_i(\tau) = o, \quad i = o,1,2,\ldots \qquad (3.17)$$

Vom arăta că aceste condiţii implică evaluarea exponenţială atît a funcţiilor respective cît şi a derivatelor lor.

<u>Teorema 3.1.</u> Dacă funcţiile $\hat{z}_i(\tau)$ satisfac ecuaţiile succesive (3.15 a), (3.16 a), condiţiile (3.17) şi condiţiile:

$$\frac{d\hat{z}_o(o)}{d\tau} = o, \quad \frac{d\hat{z}_i(o)}{d\tau} = z_i^1, \quad i = 1,2,\dots, \qquad (3.18)$$

unde z_i^1 sînt constante date, atunci există $\alpha' \in (o,\alpha)$ astfel încît:

$$\hat{z}_i(\tau) = o(e^{-\alpha'\tau}), \quad \frac{d\hat{z}_i(\tau)}{d\tau} = o(e^{-\alpha'\tau}) \text{ pentru } \tau \to \infty, \quad i = o,1,2,\dots \qquad (3.19)$$

Demonstrație. Din (3.15 a),(3.17) și (3.18) rezultă $\hat{z}_o(\tau) \equiv o$.

Dacă $\beta = o$ atunci soluțiile ecuațiilor (3.16 a) sînt de forma:

$\hat{z}_i(\tau) = A_i + B_i e^{-\alpha\tau}$; din (3.17) rezultă $A_i = o$ iar din (3.18) rezultă $-\alpha B_i = z_i^1$; deci $\hat{z}_i(\tau) = -(z_i^1/\alpha)e^{-\alpha\tau}$, de unde rezultă evaluările (3.19) pentru orice $\alpha' \in (o,\alpha)$.

Dacă $\beta \neq o$ atunci soluția generală a ecuației (3.16 a) este:

$$\hat{z}_i(\tau) = A_i + B_i e^{-\alpha\tau} + \tilde{z}_i(\tau)$$

unde $\tilde{z}_i(\tau)$ este o soluție particulară a acestei ecuații.

Se observă că o astfel de soluție este dată de relația de recurență:

$$\tilde{z}_o(\tau) = o, \quad \tilde{z}_i(\tau) = -\frac{\beta}{\alpha}\int_o^\tau \hat{z}_{i-1}(s)ds + \frac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha\tau}\int_o^\tau e^{\alpha s}\hat{z}_{i-1}(s)ds \qquad (3.2o)$$

Din (3.2o) rezultă prin inducție completă că

$$\tilde{z}_i(\tau) = C_i + Q_{i-1}(\tau)e^{-\alpha\tau}, \quad \hat{z}_i(\tau) = A_i + B_i e^{-\alpha\tau} + C_i + Q_{i-1}(\tau)e^{-\alpha\tau}$$

unde C_i sînt constante iar $Q_i(\tau)$ sînt polinoame determinate de variabilă τ de gradul cel mult i.

Din (3.17) rezultă $A_i + C_i = o$ iar din (3.2o) rezultă $\frac{d\tilde{z}_i(o)}{d\tau} = o$ și deci $\frac{d\hat{z}_i(o)}{d\tau} = -\alpha B_i$; prin urmare soluția problemei (3.16 a) cu condițiile (3.17) și (3.18) este:

$$\hat{z}_i(\tau) = (Q_{i-1}(\tau) - z_i^1/\alpha)e^{-\alpha\tau} \qquad (3.21)$$

unde $Q_i(\tau)$ este un polinom determinat de gradul cel mult i în variabila τ. Din (3.21) rezultă că există $\alpha' \in (o,\alpha)$ astfel încît să aibă loc evaluările (3.19)■

Observația 3.3 Evaluările (3.19) justifică atît convergența ultimei integrale din (3.13 b) cît și neglijarea, în cadrul algoritmului propus, a termenului

$$\hat{J}_i = -\int_{a/\varepsilon}^{\infty} \hat{K}_i(t,\sigma)d\sigma$$

care ar fi trebuit să apară în expresia lui J_i din (3.13b).

Intr-adevar, din (3.13 c) şi (3.19) rezultă:

$$\hat{J}_i = o(e^{-a\alpha/\varepsilon}) = o(\varepsilon^{N+1}) \text{ pentru } i = \overline{o,N},\ N \in \mathbb{N} \blacksquare$$

Din dezvoltarea condiţiilor iniţiale (3.2):

$$\overline{z}_o(o) + \hat{z}_o(o) + \varepsilon\,\overline{z}_1(o) + \varepsilon\,\hat{z}_1(o) + \ldots + \varepsilon^k\,\overline{z}_k(o) + \varepsilon^k\,\hat{z}_k(o) + \ldots = z^o$$

$$\frac{d\overline{z}_o(o)}{dt} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\hat{z}_o(o)}{d\tau} + \varepsilon\frac{d\overline{z}_1(o)}{dt} + \frac{d\hat{z}_1(o)}{d\tau} + \ldots = z^1$$

rezultă relaţiile:

$$\frac{d\hat{z}_o(o)}{d\tau} = o \qquad (3.22\ a)$$

$$\overline{z}_o(o) + \hat{z}_o(o) = z^o \qquad (3.22\ b)$$

$$\frac{d\overline{z}_o(o)}{dt} + \frac{d\hat{z}_1(o)}{d\tau} = z^1 \qquad (3.22\ c)$$

$$\overline{z}_i(o) + \hat{z}_i(o) = o \quad i = 1,2,\ldots \qquad (3.23\ a)$$

$$\frac{d\overline{z}_{i-1}(o)}{dt} + \frac{d\hat{z}_i(o)}{d\tau} = o \quad i = 2,3,\ldots \qquad (3.23\ b)$$

Algoritmul de determinare a funcţiilor $\overline{z}_i(t)$, $\hat{z}_i(\tau)$ este următorul:

<u>Pasul 1</u>. Din demonstraţia teoremei 3.1 rezultă: $\hat{z}_o(\tau) \equiv o$. (3.24)

<u>Pasul 2</u>. Din (3.21) şi (3.24) rezultă că trebuie asociată ecuaţiei (3.15 b) condiţia iniţială $\overline{z}_o(o) = z^o$. Rezultă, după cum era de aşteptat, că $\overline{z}_o(t)$ este soluţia problemei reduse (3.5).

Presupunînd îndeplinită condiţia (3.9), prin rezolvarea problemei reduse, rezultată univoc $\overline{z}_o(t)$.

<u>Pasul 3</u>. Din (3.16 a), (3.17),(3.22 c) şi (3.24) rezultă:

$$\hat{z}_1(\tau) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{d\overline{z}_o(o)}{dt} - z^1\right)e^{-\alpha\tau} \qquad (3.25)$$

<u>Pasul 4</u>. Din (3.16 b),(3.13),(3.23a),(3.24) şi (3.25) rezultă:

$$\alpha \frac{d\bar{z}_1(t)}{dt} + \beta \bar{z}_1(t) + \gamma \int_0^a H(t,s)\bar{z}_1(s)ds = f_1(t) - \frac{d^2\bar{z}_0(t)}{dt^2}, \qquad (3.26)$$

$$\bar{z}_1(o) = \frac{1}{\alpha}\left(z^1 - \frac{d\bar{z}_0(o)}{dt}\right)$$

Problema (3.26) este de acelaşi tip cu problema redusă (3.3). In aceleaşi condiţii, prin rezolvarea ei, rezultă $\bar{z}_1(t)$.

<u>Pasul 2i+1</u>, i = 2,3,... Din (3.21) şi (3.23 b) rezultă soluţia problemei (3.14 a), (3.23 b):

$$\hat{z}_i(\tau) = \left(\frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{z}_{i-1}(o)}{dt} + \varphi_{i-1}(\tau)\right)e^{-\alpha\tau}$$

<u>Pasul 2i+2</u>, i = 2,3,... Din (3.16 b),(3.13) şi (3.23 a) rezultă:

$$\alpha \frac{d\bar{z}_i(t)}{dt} + \beta \bar{z}_i(t) + \gamma \int_0^a H(t,s)\bar{z}_i(s)ds = f_i(t) - \frac{d^2\bar{z}_{i-1}(t)}{dt^2} -$$

$$-\gamma \int_0^\infty \sum_{j=o}^{i-1} \frac{\sigma^j}{j!} \frac{\partial^j H(t,o)}{\partial s^j} \hat{z}_{i-j}(\sigma)d\sigma, \quad \bar{z}_i(o) = -\hat{z}_i(o) \qquad (3.27)$$

Problema (3.27) este de acelaşi tip cu problema redusă. Prin rezolvarea ei rezultă $\bar{z}_i(t)$.

In felul acesta se pot determina termenii seriilor (3.12) pînă la un ordin oarecare, fixat N.

$$\text{Notăm } V_{\varepsilon N} = \sum_{i=o}^{N} \varepsilon^i \left(\frac{d\bar{z}_i(t)}{dt} + \frac{d\hat{z}_{i+1}(t/\varepsilon)}{d\tau}\right) \qquad (3.28)$$

<u>Teorema 3.2</u>. Dacă problema cu perturbaţii singulare dată de relaţiile (3.1)-(3.2) îndeplineşte condiţiile 3.1 şi (3.9) atunci în orice vecinătate suficient de mică a primei aproximaţii $Z_{\varepsilon 0}$ această problemă are soluţie unică; familia Z_N-dată de (1.6) şi algoritmul descris mai sus, este o aproximaţie asimptotică de ordinul N a acestei soluţii, iar $V_{\varepsilon N}$ este o aproximaţie asimptotică de ordinul N a derivatei prin raport cu t a soluţiei problemei (3.1)-(3.2).

Demonstrație. Problema (3.1)-(3.2) se scrie sub forma echivalentă:

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} + \alpha v + \beta z + \gamma \int_0^a H(t,\varepsilon) z(s,\varepsilon) ds = f(t,\varepsilon) \qquad (3.29\ a)$$

$$\frac{dz}{dt} = v, \quad z(o,\varepsilon) = z^0, \quad v(o,\varepsilon) = z^1 \qquad (3.29\ b)$$

Notînd

$$\frac{d\bar{z}_i(t)}{dt} = \bar{v}_i(t), \quad \frac{d\hat{z}_{i+1}}{d\tau} \equiv \varepsilon \frac{d\hat{z}_{i+1}(t/\varepsilon)}{dt} = \hat{v}_i(\tau)$$

rezultă

$V_{\varepsilon N}(t) = \sum_{i=o}^{N} \varepsilon^i(\bar{v}_i(t) + \hat{v}_i(\tau))$; Din (3.15)-(3.16) și (1.6)

rezultă:

$$\varepsilon \frac{dV_{\varepsilon N}}{dt} + \alpha V_{\varepsilon N} + \beta Z_{\varepsilon N} + \gamma J_{\varepsilon N} = f_{\varepsilon N} + \varepsilon^{N+1} \frac{d\bar{V}_n}{dt} \qquad (3.3o\ a)$$

$$\frac{dZ_{\varepsilon N}}{dt} = V_{\varepsilon N} - \varepsilon^N \hat{v}_N; \quad Z_{\varepsilon N}(o) = z^0, \quad V_{\varepsilon N}(o) = z^1 \qquad (3.3o\ b)$$

Notînd $u(t,\varepsilon) = z(t,\varepsilon) - Z_{\varepsilon N}(t)$, $w(t,\varepsilon) = v(t,\varepsilon) - V_{\varepsilon N}(t)$ (3.31)

rezultă(prin scăderea relațiilor (3.29) și (3.3o))problema:

$$\varepsilon \frac{dw}{dt} + \alpha w + \beta u + \gamma \int_0^a H(t,s) u(s,\varepsilon) ds = O(\varepsilon^{N+1}) \qquad (3.32\ a)$$

$$\frac{du}{dt} = w - \varepsilon^N \hat{v}_N(t/\varepsilon), \quad u(o,\varepsilon) = w(o,\varepsilon) = o \quad , \qquad (3.32\ b)$$

care se scrie sub forma integrală echivalentă:

$$u(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \int_0^r e^{-\alpha(r-s)/\varepsilon} \left(\beta u(s,\varepsilon) + \gamma \int_0^a H(s,e) u(e,\varepsilon) de\right) ds dr + O(\varepsilon^{N+1}) \qquad (3.33)$$

Condiția (3.9) este suficientă pentru ca operatorul definit de relația (3.33) să fie contractant.

Considerînd șirul aproximațiilor succesive:

$$\overset{(o)}{u}(t,\varepsilon) = o, \quad \overset{(i+1)}{u}(t,o) = O(\varepsilon^{N+1}) -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \int_0^r e^{-(r-s)\alpha/\varepsilon} \left(\beta \overset{(i)}{u}(s,\varepsilon) + \gamma \int_0^a H(s,e) \overset{(i)}{u}(e,\varepsilon) de\right) ds dr,$$

rezultă că el este convergent și verifică relația:

$$|\overset{(i)}{u}(t,\varepsilon)| \leqslant C\,\varepsilon^{N+1} \tag{3.34}$$

pentru orice $t \in [o,a]$ şi orice $\varepsilon \in (o, \varepsilon_o]$.
Rezultă deci, existenta şi unicitatea soluţiei problemei (3.33) deci şi a soluţiei problemei (3.32) şi ţinînd cont de (3.31) rezultă existenţa şi unicitatea soluţiei problemei (3.1)-(3.2).

Trecînd la limită pentru $i \to \infty$ în (3.34) rezultă:

$$|z - Z_{\varepsilon N}| \leqslant C \cdot \varepsilon^{N+1} \tag{3.35}$$

şi din (3.31),(3.35) şi (3.32 a) rezultă:

$$\left|\frac{\partial z}{\partial t} - W_{\varepsilon N}\right| \leqslant C \cdot \varepsilon^{N+1} \;\blacksquare \tag{3.36}$$

Observaţia 3.4. Algoritmul prezentat mai sus implică rezolvarea unor ecuaţii liniare pur diferenţiale (care se rezolvă uşor) pentru determinarea funcţiilor $\hat{z}_i(\tau)$. In schimb, funcţiile $\overline{z}_i(t)$ se determină prin rezolvarea unor ecuaţii integro-diferenţiale de tipul celei reduse, mai simple decît ecuaţia iniţială (3.1) dar care necesită, totuşi, în general, calcule complicate.

Metodele asimptotice presupun în general cunoscută soluţia problemei reduse şi a celor de acelaşi tip cu ea. Totuşi, dacă nu se cunoaşte soluţia sa exactă, atunci o informaţie calitativă asupra comportării soluţiei problemei perturbate (3.1)-(3.2) oferă şi o soluţie aproximativă (asimptotică sau analitică, obţinută prin metode numerice) a problemei reduse.

In cazul problemei (3.1), problema sa redusă este mai simplă dacă $\beta = o$, adică este de forma (3.6).

Dacă $\beta \neq o$ am văzut că, printr-o schimbare de funcţie convenabilă-(3.1o), problema redusă (3.3) poate fi adusă la forma (3.11) care este tot o problemă de forma (3.6)■

Comentarii bibliografice.

Ideea de a face schimbarea de funcţie (3.1o) a fost preluată din [7].

Rezultatele prezentate în acest paragraf au fost publicate de autor în [77]. Tot în [77] este dată şi o metodă numerică de rezolvare a ecuaţiilor de tipul problemei reduse (3.6)■

3.2. Metodă asimptotică pentru sistemele de ecuații integro-diferențiale de tip Fredholm cu perturbații singulare

Metodele asimptotice prezentate în paragrafele anterioare constau în construirea unei aproximații asimptotice cu ajutorul soluțiilor unor ecuații cu o structură mai simplă decît problema inițială cu perturbații singulare.

In acest paragraf propunem o nouă metodă pentru sistemele de ecuații integro-diferențiale, care constă în determinarea unei aproximații asimptotice ca soluție a problemei cu perturbații singulare care se obține din cea inițială prin înlocuirea funcțiilor cunoscute cu polinoamele lor Mac Laurin prin raport cu parametrul.

Vom ilustra această metodă în cazul sistemelor de ecuații integro-diferențiale de tip Fredholm cu variație rapidă:

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} - A(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon) - \int_0^a K(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds = f(t,\varepsilon), \qquad (3.37)$$

$$z(o,\varepsilon) = z^0,$$

unde $o < \varepsilon \leq \varepsilon_1 << 1$ și presupunem îndeplinită:

Condiția 3.2. Funcțiile $A(t,\varepsilon)$, $K(t,s,\varepsilon)$ și $f(t,\varepsilon)$ sînt matrici respectiv vector de dimensiuni (M,M) respectiv M, continue, cu derivate prin raport cu ε pînă la ordinul $N+1$ continue, respectiv, pe mulțimile:

$$Q=\{(t,\varepsilon)|\ o \leq t \leq a, o \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1\}, \quad S=\{(t,s,\varepsilon)|(t,\varepsilon) \in Q, s \in [o,a]\}.$$

Metoda pe care o propunem este următoarea:

Asociem problemei (3.37) problema, în general, mai simplă:

$$\varepsilon\frac{dz_N}{dt} - A_N(t,\varepsilon)z_N(t,\varepsilon) - \int_0^a K_N(t,s,\varepsilon)z_N(s,\varepsilon)ds = f_N(t,\varepsilon); \quad z_N(o,\varepsilon) = z^0 \qquad (3.38)$$

unde A_N, K_N, f_N sînt polinoamele Mac Laurin prin raport cu ε ale funcțiilor respective.

Considerăm mai întîi cazul $M=1$

$$\text{Fie } \omega = \max_{(t,\varepsilon)\in Q} |A(t,\varepsilon)-A_0(t)|, \quad k = \max_{(t,s,\varepsilon)\in S} |K(t,s,\varepsilon)| \qquad (3.39)$$

(aici și în continuare, în acest paragraf, indicele "$_0$" atașat unei funcții care depinde de ε indică faptul că în acea funcție $\varepsilon = o$).

Pentru a demonstra că soluția z_N a problemei (3.38) este o aproximație asimptotică a soluției problemei (3.37) vom folosi următoarea lemă de tip Gronwall:

Lema 3.3 [17]. Dacă

$$r(t) \leq c\int_0^t r(s)ds + f(t), \text{pentru orice } t \in [o,a],$$

unde $c > o$ iar $f(t)$ este derivabilă pe $[o,a]$, atunci:

$$r(t) \leq f(o)\, e^{ct} + \int_0^t e^{c(t-s)} f'(s)ds, \text{pentru orice } t \in [o,a] \blacksquare$$

Bazîndu-ne pe această lemă vom demonstra următoarea:

Lema 3.4. Dacă

$$r(t) \leq \lambda\int_0^t e^{-\beta(t-s)} r(s)ds + \nu\int_0^t e^{-\beta(t-s)}ds, (\forall) t \in [o,a] \qquad (3.40)$$

$$\text{atunci } r(t) \leq \nu\,(1-e^{(\lambda-\beta)t})/(\beta-\lambda), (\forall) t \in [o,a] \qquad (3.41)$$

Demonstrație. Transoriem ipoteza (3.40) sub forma:

$$r(t)e^{\beta t} \leq \lambda\int_0^t e^{\beta s} r(s)ds + \nu\int_0^t e^{\beta s}ds \qquad (3.42)$$

și observăm că funcția $r(t)e^{\beta t}$ îndeplinește ipoteza lemei 3.3.
Rezultă:

$$r(t)e^{\beta t} \leq \nu(e^{\beta t} - e^{\lambda t})/(\beta-\lambda) \qquad (3.43)$$

iar din (3.43) rezultă (3.41)■

Din lema 3.4 rezultă:

Lema 3.5. Dacă o funcție $r(t)$ îndeplinește condiția (3.40), unde $\nu > o$ și $\beta > \lambda > o$ atunci:

$$r(t) \leq \nu/(\beta-\lambda) (\forall) t \in [o,a] \blacksquare \qquad (3.44)$$

Teorema 3.3. Dacă funcțiile din (3.37) îndeplinesc condiția 3.2 pentru $M = 1$ și în plus:

$$\mathrm{Re}\, A_0(t) < -\alpha \quad, \alpha > \omega + ka \text{ pentru orice } t \in [o,a], \qquad (3.45)$$

atunci soluția $z_N(t,\varepsilon)$ a problemei (3.38) este o aproximație asimptotică de ordinul N pentru soluția problemei (3.37). Mai precis, există ε_0 și există constanta d (nedepinzînd de ε) astfel încît pentru orice ε, $o < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ are loc evaluarea:

$$|z(t,\varepsilon) - z_N(t,\varepsilon)| \leq d/(\alpha-\omega-ka)\cdot\varepsilon^{N+1}, (\forall) t \in [o,a] \qquad (3.46)$$

Demonstrație. Fie $u(t,\varepsilon) = z(t,\varepsilon) - z_N(t,\varepsilon)$ (3.47)

Prin scăderea ecuațiilor (3.37) și (3.38) rezultă că $u(t,\varepsilon)$ este soluția problemei:

$$\varepsilon \frac{du}{dt} - A(t,\varepsilon)u(s,\varepsilon) - \int_0^a K(t,s,\varepsilon)u(s,\varepsilon)ds = \varepsilon^{N+1} G_N(t,\varepsilon), \quad (3.48)$$

$u(o,\varepsilon)=o$, unde $\sup\limits_{(t,\varepsilon)\in Q} |G_N(t,\varepsilon)| = d < \infty$

Transformăm ecuaţia (3.48) făcînd schimbarea de funcţie [7]:

$$u(t,\varepsilon)=y(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon),\ \varepsilon\dot{y}(t,\varepsilon)=A_o(t)y(t,\varepsilon),\ y(o,\varepsilon)=1 \quad (3.49)$$

(aici şi în continuare "$\cdot$" semnifică derivata funcţiei respective prin raport cu t).

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = (A(t,\varepsilon)-A_o(t))x(t,\varepsilon) + \int_0^a K(t,s,\varepsilon)u(s,\varepsilon)ds/y(t,\varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon^{N+1} G_N(t,\varepsilon)/y(t,\varepsilon),\quad x(o,\varepsilon) = o \quad (3.50)$$

Integrînd membrii egalităţii (3.50), apoi înmulţind cu $y(t,\varepsilon)$ şi ţinînd cont de (3.49) rezultă:

$$\varepsilon u(t,\varepsilon) = \int_0^t (A(s,\varepsilon)-A_o(s))u(s,\varepsilon)\frac{y(t,\varepsilon)}{y(s,\varepsilon)}ds +$$

$$+\int_0^t \left(\int_0^a K(s,\sigma,\varepsilon)u(\sigma,\varepsilon)d\sigma\right)y(t,\varepsilon)/y(s,\varepsilon)ds +$$

$$+ \varepsilon^{N+1}\int_0^t G_N(s,\varepsilon)y(t,\varepsilon)/y(s,\varepsilon)ds,$$

$$|u(t,\varepsilon)| \le \frac{\omega}{\varepsilon}\int_0^t |u(s,\varepsilon)|\, e^{-(t-s)\alpha/\varepsilon}ds +$$

$$+\int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\left(k\int_0^a |u(\sigma,\varepsilon)|d\sigma + \varepsilon^{N+1}d\right)e^{-(t-s)\alpha/\varepsilon}ds. \quad (3.51)$$

Aplicînd lema 3.5 rezultă din (3.51):

$$|u(t,\varepsilon)| \le \frac{1}{\varepsilon}\left(k\int_0^a |u(\sigma,\varepsilon)|d\sigma + \varepsilon^{N+1}d\right)/(\alpha/\varepsilon - \omega/\varepsilon)$$

de unde rezultă (3.46)∎

Vom considera în continuare problema (3.37) pentru M =2 şi matricile $A(t,\varepsilon)$ şi $K(t,s,\varepsilon)$ circulare. Mai precis considerăm:

$$A(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} a_1(t,\varepsilon) & a_2(t,\varepsilon) \\ a_2(t,\varepsilon) & a_1(t,\varepsilon)\end{bmatrix},\ K(t,s,\varepsilon)=\begin{bmatrix} k_1(t,s,\varepsilon) & k_2(t,s,\varepsilon) \\ k_2(t,s,\varepsilon) & k_1(t,s,\varepsilon)\end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$f(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} f_1(t,\varepsilon) \\ f_2(t,\varepsilon)\end{bmatrix},\ z(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} z_1(t,\varepsilon) \\ z_2(t,\varepsilon)\end{bmatrix},\ z^o=\begin{bmatrix} z_1^o \\ z_2^o\end{bmatrix},\ z_N(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} z_{N1}(t,\varepsilon) \\ z_{N2}(t,\varepsilon)\end{bmatrix}$$

Adunînd şi scăzînd cele două ecuaţii care se obţin prin înlocuirea relaţiilor (3.52) în (3.37) pentru M =2, se obţin două ecuaţii de aceeaşi formă (3.37) cu M =1 unde:

$A(t,\varepsilon)=a_1(t,\varepsilon)+a_2(t,\varepsilon)$ sau $A(t,\varepsilon)=a_1(t,\varepsilon)-a_2(t,\varepsilon)$

$K(t,s,\varepsilon)=k_1(t,s,\varepsilon)+k_2(t,s,\varepsilon)$ sau $K(t,s,\varepsilon)=k_1(t,s,\varepsilon)-k_2(t,s,\varepsilon)$.

Aplicînd acestor două ecuații cu $M=1$ teorema 3.2 rezultă:

Teorema 3.4. Dacă matricile din (3.37) sînt date de (3.52) și îndeplinesc condiția 3.2 iar valorile proprii ale lui $A_0(t)$ satisfac condiția $\operatorname{Re}\lambda_i(t)<-\alpha$, $i=1,2$, $\alpha>\omega+ka$, (3.53)

$\omega=\max(\max\limits_{(t,\varepsilon)\in Q}|a_1(t,\varepsilon)-a_{10}(t)|, \max\limits_{(t,\varepsilon)\in Q}|a_2(t,\varepsilon)-a_{20}(t)|)$,

$k=\max(\max\limits_{(t,s,\varepsilon)\in S}|k_1(t,s,\varepsilon)|, \max\limits_{(t,s,\varepsilon)\in S}|k_2(t,s,\varepsilon)|)$,

atunci există constantele ε_0 și D (nedepinzînd de ε) astfel încît:

$$|z_i(t,\varepsilon)-z_{Ni}(t,\varepsilon)|\leq \varepsilon^{N+1}D/(\alpha-\omega-ka), t\in[0,a], \varepsilon\in[0,\varepsilon_0] \quad (3.54)$$

pentru $i=1,2$■

Considerăm cazul cînd, în condiția 3.2, $M\in\mathbb{N}$ este oarecare, fixat, dar matricea $A_0(t)\equiv A_0$ este constantă.

Lema 3.6 [60,61] Dacă valorile proprii λ_i ale matricii $A_0(t)\equiv A_0$ satisfac relația:

$$\operatorname{Re}\lambda_i\leq-\alpha<0, \quad i=\overline{1,M}, \quad (3.55)$$

atunci există o constantă $C>0$ astfel încît:

$$\|e^{A_0t}\|\leq C e^{-\alpha t} \quad \text{pentru orice } t\geq 0 \,■ \quad (3.56)$$

Teorema 3.5. Dacă matricile din (3.37) satisfac condiția 3.2 și $A_0(t)\equiv A_0$ satisface condiția (3.55) unde α satisface condiția:

$$\alpha/C>\omega+ka; \omega=\max_{(t,\varepsilon)\in Q}\|A(t,\varepsilon)-A_0(t)\|, k=\max_{(t,s,\varepsilon)\in S}\|K(t,s,\varepsilon)\|, \quad (3.57)$$

C fiind dată de (3.56) atunci soluția $z_N(t,\varepsilon)$ a problemei (3.38) este o aproximație asimptotică a soluției problemei (3.37) și există constantele ε_0 și D (nedepinzînd de ε) astfel încît

$$\|z(t,\varepsilon)-z_N(t,\varepsilon)\|\leq D/(\alpha/C-\omega-ka)\cdot\varepsilon^{N+1}, t\in[0,a]. \quad (3.58)$$

Demonstrație. Funcția $u(t,\varepsilon)$ dată de (3.47) este soluția problemei:

$$\varepsilon\frac{du}{dt}=A_0u+(A(t,\varepsilon)-A_0)u+\int_0^a K(t,s,\varepsilon)u(s,\varepsilon)ds+\varepsilon^{N+1}G_N(t,\varepsilon)$$

$$\sup_{(t,\varepsilon)\in Q}\|G_N(t,\varepsilon)\|=D<\infty, \qquad u(0,\varepsilon)=0 \quad (3.59)$$

care, datorită "formulei variației constantelor" ([41], p.191), este echivalentă cu ecuația:

$$u(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{A_o(t-s)/\varepsilon}(A(s,\varepsilon)-A_o)u(s,\varepsilon)ds + \qquad (3.60)$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{A_o(t-s)/\varepsilon}\int_0^a K(s,\sigma,\varepsilon)u(\sigma,\varepsilon)d\sigma\, ds+\varepsilon^N\int_0^t e^{A_o(t-s)/\varepsilon}G_N(s,\varepsilon)ds$$

Din (3.60) şi (3.56) rezultă:

$$\|u(t,\varepsilon)\| \leq \frac{\omega C}{\varepsilon}\int_0^t \|u(s,\varepsilon)\|\, e^{-(t-s)\alpha/\varepsilon}ds + \qquad (3.61)$$
$$+\frac{C}{\varepsilon}\int_0^t (k\int_0^a \|u(\sigma,\varepsilon)\|\, d\sigma + \varepsilon^{N+1}D)e^{(t-s)\alpha/\varepsilon}ds$$

Aplicînd inecuaţiei (3.61) lema 3.5 rezultă (3.58)∎

Vom considera acum cazul general cînd $M\in\mathbb{N}$ este oarecare,fixat, iar $A_o(t)$ nu este neapărat constantă, impunînd însă o condiţie mai tare decît (3.55):Matricea $A_o(t)$ este cu valori uniform Hurwitz:

$$\operatorname{Re}\lambda_i(t)\leq -2\alpha \quad \text{pentru } t\in[o,a],\ i=\overline{1,M} \qquad (3.62)$$

şi α satisface condiţia (3.57) cu notaţiile din teorema 3.3.

Vom folosi o lemă fundamentală în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale:

<u>Lema 3.7</u> [28]. Fie $A_o: I\subset R \longrightarrow \mathcal{L}(R^M,R^M)$ (în cazul nostru $I=[o,a]$) o matrice ale cărei valori proprii satisfac relaţia (3.62). Atunci există $C>0$ astfel încît matricea fundamentală $C(t,s)$ a sistemului:

$$\frac{dz}{dt}=A_o(t)z(t) \quad \text{să verifice relaţia:}$$

$\|C(t,s)\| \leq C\, e^{-(t-s)\alpha}$ oricare ar fi t,s astfel încît $o\leq s\leq t\leq a$.

Formula variaţiei constantelor este dată în cazul general de:

<u>Lema 3.8</u> ([41],p.90). Dacă funcţiile $A_o(t)$ şi $f(t)$ sînt continue pe $I\subset R$ atunci soluţia $z(t,t^o,z^o,\varepsilon)$ a problemei:

$$\varepsilon\frac{dz}{dt}=A_o(t)z(t)+f(t),\ z(t^o)=z^o$$

are următoarea formulă de reprezentare:

$$z(t,t^o,z^o,\varepsilon)=C(t,t^o,\varepsilon)z^o+\int_{t_o}^t C(t,s,\varepsilon)f(s)ds \ ∎$$

<u>Teorema 3.6</u>.Dacă funcţiile din (3.37) îndeplinesc condiţiile 3.2,(3.62) şi (3.57) cu notaţiile din teorema 3.3 atunci are loc concluzia teoremei 3.5.

<u>Demonstraţie</u>.Urmînd raţionamentul teoremelor precedente, pe baza lemei 3.8 se obţine din (3.59) o relaţie care generalizează relaţia (3.60),cu $C(t,s,\varepsilon)$ în loc de $e^{A_o(t-s)/\varepsilon}$ şi din relaţia obţinută, pe baza lemei 3.7, rezultă (3.58)∎

Observația 3.5. Dacă se consideră cazul particular al problemei (3.37):

$$\varepsilon\frac{dz}{dt}-A(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon)-\varepsilon\int_{0}^{a}K(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds=f(t,\varepsilon),\quad z(0,\varepsilon)=z^{0} \quad (3.63)$$

atunci condiția $\alpha/C>\omega+ka$ din ipotezele teoremelor 3.2-3.5 (cu $C=1$ în cazul teoremelor 3.2 și 3.3) devine în acest caz condiția $\alpha/C>\omega+\varepsilon ka$ și pentru ε suficient de mic această condiție este întotdeauna îndeplinită, în virtutea condiției 3.2∎

Comentarii bibliografice.

Ideea de a considera această metodă pentru problemele integro-diferențiale cu perturbații singulare a fost preluată din monografia privind metodele asimptotice în teoria ecuațiilor diferențiale liniare a lui S.F.Feșcenko, N.I.Șkil și L.D.Nikolenko [27], unde această idee este doar sugerată pentru ecuații diferențiale.

Lemele citate 3.3, 3.6-3.8 sînt des folosite. De exemplu, lema 3.3 este demonstrată și în [27], lemele 3.6-3.8 se găsesc și în monografia lui A.Halanay și V.Drăgan [41] (respectiv la pag.13,14,90), iar lema 3.6 este demonstrată în [60].

Rezultatele prezentate în acest paragraf au fost publicate în lucrările [83] și [19] (ultima în colaborare cu tov.prof.dr. B.Crstici)∎

CAPITOLUL IV

PROBLEME INTEGRO-DIFERENTIALE NELINIARE CU AMBELE LIMITE DE INTEGRARE VARIABILE CU PERTURBATII SINGULARE

In acest capitol vom folosi metoda funcţiilor de strat limită a lui A.B.Vasilieva pentru a studia unele probleme integro-diferenţiale neliniare cu ambele limite de integrare variabile, cu perturbaţii singulare, care nu au fost studiate încă în literatura de specialitate.

4.1. Sisteme integro-diferenţiale neliniare cu ambele limite de integrare variabile cu perturbaţii singulare

In acest paragraf vom studia problemele cu perturbaţii singulare de forma;

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = F(z,x,J,t,\varepsilon) \qquad (4.1\ a)$$

$$0 \leq t \leq a,\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$$

$$\frac{dx}{dt} = f(z,x,J,t,\varepsilon) \qquad (4.1\ b)$$

cu condiţia iniţială: $z(0,\varepsilon) = z^0(\varepsilon)$, $x(0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)$, (4.2)
considerînd ca şi în cazul sistemelor integro-diferenţiale de tip Volterra sau Fredholm (1.40) că funcţiile F,z,z^0 şi f,x,x^0 sînt de dimensiune M, respectiv m, dar, spre deosebire de sistemele de forma (1.40) condiţiile iniţiale nu sînt constante, ci depind de parametru iar termenul integral este:

$$J = \int_{t-\varepsilon}^{t} K(t,s,z(s,\varepsilon),\ x(s,\varepsilon),\varepsilon)ds \qquad (4.1\ c)$$

Impunem condiţiile care să asigure existenţa şi unicitatea soluţiei problemei (4.1)-(4.2) şi posibilitatea construirii unei soluţii asimptotice de un ordin N, dat, pentru această problemă.

Condiţia 4.1. Funcţiile K,z^0,x^0 şi F,f au derivate parţiale (derivate) continue pînă la ordinul N+1, respectiv N+2 prin raport cu toate argumentele∎

Soluţia apropiată se consideră tot sub forma (1.25), dar, în locul dezvoltărilor nucleului $K(t,s,z,x,\varepsilon)$ din (1.42) şi în locul dezvoltării lui J din (1.43) vom considera dezvoltările mai simple:

$$K(t,s,z(s,\varepsilon),x(s,\varepsilon),\varepsilon) \equiv \bar{K}(t,s,\varepsilon)+\hat{K}(\tau,\sigma,\varepsilon),\ \sigma=s/\varepsilon,$$

$$\bar{K}(t,s,\varepsilon)\equiv K(t,s,\bar{z}(s,\varepsilon),\bar{x}(s,\varepsilon),\varepsilon);\ \hat{K}(\tau,\sigma,\varepsilon)\equiv \tag{4.3 a}$$

$$\equiv K(\tau\varepsilon,\sigma\varepsilon,\bar{z}(\sigma\varepsilon,\varepsilon)+\hat{z}(\sigma,\varepsilon),\bar{x}(\sigma\varepsilon,\varepsilon)+\hat{x}(\sigma\varepsilon,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-K(\tau\varepsilon,\sigma\varepsilon,\bar{z}(\sigma\varepsilon,\varepsilon),\bar{x}(\sigma\varepsilon,\varepsilon),\varepsilon);\ J(t,\varepsilon)\equiv\bar{J}(t,\varepsilon)+\hat{J}(\tau,\varepsilon),$$

$$\bar{J}(t,\varepsilon)\equiv\int_{t-\varepsilon}^{t}\bar{K}(t,s,\varepsilon)ds=\varepsilon\bar{J}_0(t)+\varepsilon^2\bar{J}_1(t)+\ldots, \tag{4.3 b}$$

$$\bar{J}_0(t)=K(t,t,\bar{z}_0(t),\bar{x}_0(t),o)\equiv\bar{K}_0(t),$$

$$\bar{J}_k(t)=\bar{K}_z(t)\bar{z}_k(t)+\bar{K}_x(t)\bar{x}_k(t)+\bar{L}_k(t),\ k=1,2,\ldots$$

$$\hat{J}(\tau,\varepsilon)\equiv\int_{t-\varepsilon}^{t}\hat{K}(\tau,\sigma,\varepsilon)ds=\varepsilon\int_{\tau-1}^{\tau}\hat{K}(\tau,\sigma,\varepsilon)d\sigma=\varepsilon\hat{J}_0(\tau)+\varepsilon^2\hat{J}_1(\tau)+\ldots \tag{4.3 c}$$

$$\hat{J}_0(\tau)=\int_{\tau-1}^{\tau}(\hat{K}_0(\sigma)-\bar{K}_0(o))d\sigma$$

$$\hat{J}_k(\tau)=\int_{\tau-1}^{\tau}(\hat{K}_z(\sigma)\hat{z}_k(\sigma)+\hat{K}_x(\sigma)\hat{x}_k(\sigma))d\sigma+\hat{L}_k(\tau)$$

unde: $\bar{K}_y(t)$ este derivata lui K în

$(t,t,\bar{z}_0(t),\bar{x}_0(t),o);\hat{K}_0(\sigma)\equiv K(o,o,\bar{z}_0(o)+\hat{z}_0(\sigma),\bar{x}_0(o)+\hat{x}_0(\sigma),o)$,

$\hat{K}_y(\sigma)$ este derivata lui K în $(o,o,\bar{z}_0(o)+\hat{z}_0(\sigma),\bar{x}_0(o)+\hat{x}_0(\sigma),o)$

iar $\bar{L}_K(t)$ şi $\hat{L}_K(\tau)$ se determină în funcţie de $\bar{y}_i(t),i=\overline{o,k-1}$

respectiv în funcţie de $\bar{y}_i(o)$, $i=\overline{o,k}$ şi $\hat{y}_j(\tau)$, $j=\overline{o,k-1}$

In mod analog, rezultă dezvoltările lui F şi f:

$$\bar{F}(t,\varepsilon)\equiv F(\bar{z}(t,\varepsilon),\bar{x}(t,\varepsilon),\bar{J}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\bar{F}_0(t)+\varepsilon\bar{F}_1(t)+\ldots, \tag{4.4 a}$$

$$\bar{F}_0(t)\equiv F(\bar{z}_0(t),\bar{x}_0(t),o,t,o),\bar{F}_k(t)=\bar{F}_z(t)\bar{z}_k(t)+\bar{F}_x(t)\bar{x}_k(t)+\bar{G}_k,k=1,2,\ldots,$$

$$\hat{F}(\tau,\varepsilon)\equiv F(\bar{z}(\tau\varepsilon,\varepsilon)+\hat{z}(\tau,\varepsilon),\bar{x}(\tau\varepsilon,\varepsilon)+\hat{x}(\tau,\varepsilon),\bar{J}(\tau\varepsilon,\varepsilon)+\hat{J}(\tau,\varepsilon),\tau\varepsilon,\varepsilon) -$$

$$-F(\bar{z}(\tau\varepsilon,\varepsilon),\bar{x}(\tau\varepsilon,\varepsilon),\bar{J}(\tau\varepsilon,\varepsilon),\tau\varepsilon,\varepsilon)=\hat{F}_0(\tau)+\varepsilon\hat{F}_1(\tau)+\ldots, \tag{4.4 b}$$

$$\hat{F}_0(\tau)=F(\bar{z}_0(o)+\hat{z}_0(\tau),\bar{x}_0(o)+\hat{x}_0(\tau),o,o,o)-F(\bar{z}_0(o),\bar{x}_0(o),o,o,o),$$

$$\hat{F}_k(\tau)=\hat{F}_z(\tau)\hat{z}_k(\tau)+\hat{F}_x(\tau)\hat{x}_k(\tau)+\hat{G}_k(\tau),$$

unde $\bar{F}_y(t)$ şi $\hat{F}_y(\tau)$ sînt derivatele prin raport cu y în:

$(\bar{z}_0(t),\bar{x}_0(t),o,t,o)$, respectiv în $(\bar{z}_0(o)+\hat{z}_0(\tau),\bar{x}_0(o)+\hat{x}_0(\tau),o,o,o)$

Inlocuind dezvoltările (4.3),(4,4) în (4.1) rezultă prin identificare problemele:

$$o = \overline{F}_o(t) \equiv F(\overline{z}_o(t), \overline{x}_o(t), o,t,o) \tag{4.5 a}$$

$$\frac{d\overline{x}_o}{dt} = \overline{f}_o(t) \equiv f(\overline{z}_o(t),\overline{x}_o(t),o,t,o) \tag{4.5 b}$$

$$\frac{d\hat{z}_o}{d\tau} = \hat{F}_o(\tau) \equiv F(\overline{z}_o(o)+\hat{z}_o(\tau),\overline{x}_o(o)+\hat{x}_o(\tau),o,o,o) \tag{4.6 a}$$

$$\frac{d\hat{x}_o}{d\tau} = o \tag{4.6 b}$$

$$\frac{d\overline{z}_{k-1}}{dt} = \overline{F}_k(t) \equiv \overline{F}_z(t)\overline{z}_k(t)+\overline{F}_x(t)\overline{x}_k(t)+\overline{G}_k(t) \tag{4.7 a}$$

$$\frac{d\overline{x}_k}{dt} = \overline{f}_k(t) \equiv \overline{f}_z(t)\overline{z}_k(t)+\overline{F}_x(t)\overline{x}_k(t)+\overline{g}_k(t) \tag{4.7 b}$$

$$\frac{d\hat{z}_k}{d\tau} = \hat{F}_k(\tau) \equiv \hat{F}_z(\tau)\hat{z}_k(\tau)+\hat{F}_x(\tau)\hat{x}_k(\tau)+\hat{G}_k(\tau) \tag{4.8 a}$$

$$\frac{d\hat{x}_k}{d\tau} = \hat{f}_{k-1}(\tau) \tag{4.8 b}$$

Observaţia 4.1. Spre deosebire de cazul sistemelor integro-diferenţiale de tip Volterra sau Fredholm (1.4o),ecuaţiile (4.5)-(4.8) pentru determinarea coeficienţilor seriei (1.25) sînt toate exclusiv diferenţiale. Chiar şi sistemul redus, care în cazurile amintite era un sistem de ecuaţii integrale de acelaşi tip, în cazul acesta sistemul redus (4.5) are o parte algebrică şi una diferenţială∎

Dezvoltînd şi condiţiile iniţiale după ε rezultă:
$y^o(\varepsilon) = y^o + \varepsilon y^1+\ldots+\varepsilon^k y^k+\ldots$; rezulta:

$$\overline{y}_k(o) + \hat{y}_k(o) = y^k;\ k = o,1,2,\ldots \tag{4.9}$$

Vom impune şi în acest caz condiţii asupra primei aproximări:

Condiţia 4.2. Sistemul redus (4.5) cu condiţia iniţială $\overline{x}_o(o) = x^o$ admite o soluţie $(\overline{z}_o(t), \overline{x}_o(t))$ pentru $t \in [o,a]$ ∎

Din condiţia $\overline{x}_o(o)=x^o$ şi (4.9) şi (4.6 b) rezultă $\hat{x}_o(\tau) \equiv o$ şi sistemul (4.6 a) devine:

$$\frac{d\hat{z}_o}{d\tau} = F(\overline{z}_o(o) + \hat{z}_o(\tau), x^o,o,o,o) \tag{4.10}$$

Acesta se obţine din sistemul asociat (problemei (4.1)-(4.2))

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = F(\tilde{z},x^o,o,t,o) \tag{4.11}$$

pentru $\tilde{z} = \overline{z}_o(o)+\hat{z}_o(\tau)$ şi $t = o$. Impunem condiţia de stabilitate:

Condiţia 4.3. Valorile proprii $\overline{\lambda}_i(t)$ ale matricii $\overline{F}_z(t) \equiv F'_z(\overline{z}_o(t),\overline{x}_o(t),o,t,o)$ au partea reală strict negativă.

Condiţia 4.4. Soluţia $\hat{z}_o(\tau)$ a sistemului (4.1o) cu condiţia iniţială $\hat{z}_o(o) = z^o-\overline{z}_o(o)$ satisface condiţia:

$$\lim_{\tau\to\infty} \hat{z}_o(\tau) = o \qquad (4.12)$$

adică valoarea iniţială $z^o-\overline{z}_o(o)$ aparţine domeniului de atracţie a punctului de repaus $\hat{z}_o = o$.

Din (4.8 b) rezultă:

$\hat{x}_k(\tau) = \hat{x}_k(o)+\int_o^{\tau} \hat{f}_{k-1}(\sigma)d\sigma$ şi datorită condiţiei (4.12) rezultă:

$\hat{x}_k(o)=-\int_o^{\infty}\hat{f}_{k-1}(\sigma)d\sigma$; $\hat{x}_k(\tau)=-\int_{\tau}^{\infty}\hat{f}_{k-1}(\sigma)d\sigma$; $\overline{x}_k(o)=x^k+\int_o^{\infty}\hat{f}_{k-1}(\sigma)d\sigma$

$\hat{z}_k(o) = z^k-\overline{z}_k(o)$.

Aceste condiţii iniţiale se ataşează ecuaţiilor (4.5)-(4.8), aceste probleme rezolvîndu-se în aceeaşi ordine ca cele din §.3.1.

Teorema 4.1. Dacă sînt îndeplinite condiţiile 4.1-4.4 atunci există $C > 0$ şi există $\varkappa > o$ astfel încît funcţiile de strat limită $\hat{y}_i(\tau)$ satisfac relaţiile:

$$\| \hat{y}_i(\tau)\| \leq C\, e^{-\varkappa\tau} \qquad \text{pentru } \tau \geq o\ ,\ i=\overline{1,N} \qquad (4.13)$$

Demonstraţie. Deoarece problemele din care se obţin funcţiile $\hat{y}_i(\tau)$ sînt diferenţiale, demonstraţia acestei teoreme, este în linii mari la fel ca cea a teoremei de evaluare a funcţiilor de strat limită pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale (1.16) ([135]):

$\hat{x}_o(\tau) \equiv o$; deoarece $\hat{z}_o(\tau)$ satisface (4.12) rezultă:

$(\forall)\ \delta>o\ (\exists)\ \tau_o=\tau_o(\delta)$ astfel încît $\|\hat{z}_o(\tau)\| \leq \delta$ pentru $\tau \geq \tau_o$. (4.14)

Pentru $\tau \geq \tau_o$ ecuaţia (4.6 a) se scrie sub forma:

$$\frac{d\hat{z}_o}{d\tau} = F_z(o)\,\hat{z}_o + G(\hat{z}_o), \qquad (4.15)$$

$$G(\hat{z}_o) \equiv F(\overline{z}_o(o)+\hat{z}_o(\tau),x^o,o,o,o)-F_z(o)\hat{z}_o;$$

rezultă: $\quad G(o) = F(\overline{z}_o(o), x^o,o,o,o) = o$, şi $\qquad (4.16)$

$(\forall)\ \varepsilon>o\ (\exists)\ \eta=\eta(\varepsilon)$ astfel încît $(\forall)u_1, \|u_1\|<\eta, (\forall)u_2, \|u_2\|<\eta$ rezultă

$$\|G(u_1)-G(u_2)\| \leq \varepsilon\, \|u_1-u_2\|. \qquad (4.17)$$

Ultima relaţie rezultă din teorema lui Lagrange:

$G(u_1)-G(u_2)=\hat{G}_u(u_1-u_2)$, unde $\hat{G}_u = \hat{F}_z-F_z(o)$ şi din condiţia 4.1 rezultă că $\|G_u\|$ este oricît de mic pentru $\|u_i\|$, $i=1,2$ suficient de mici.

Ecuaţia (4.6 a) este echivalentă cu ecuaţia integrală:

$$\hat{z}_0(\tau)= e^{F_z(o)(\tau-\tau_0)}\hat{z}_0(\tau_0)+\int_{\tau_0}^{\tau} e^{F_z(o)(\tau-s)}G(\hat{z}_0(s))ds \quad (4.18)$$

Pentru a obţine evaluarea exponenţială (4.15) pentru $y_i = z_0$ vom folosi metoda aproximaţiilor succesive:

$$\overset{(o)}{\hat{z}}_0(\tau) = e^{F_z(o)(\tau-\tau_0)}\hat{z}_0(\tau_0) \quad (4.19)$$

$$\overset{(k)}{\hat{z}}_0(\tau) = e^{F_z(o)(\tau-\tau_0)}\hat{z}_0(\tau_0)+\int_{\tau_0}^{\tau} e^{F_z(o)(\tau-s)}G(\overset{(k-1)}{\hat{z}_0}(s))ds. \quad (4.20)$$

Din condiţia 4.3 rezultă:

$$\| e^{F_z(o)(\tau-s)}\| \leq c_1 e^{-\alpha(\tau-s)} \quad \text{pentru } \tau_0 \leq s \leq \tau \quad (4.21)$$

şi deci, datorită (4.14), rezultă:

$$\| \overset{(o)}{\hat{z}}_0(\tau)\| \leq \delta\cdot c_1 e^{-\alpha(\tau-\tau_0)},$$ sau, fixînd un număr $\varkappa\in(o,\alpha)$,

$$\| \overset{(o)}{\hat{z}}_0(\tau)\| \leq \delta\cdot c_1 e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)} \quad (4.22)$$

şi renotînd constantele, rezultă (4.15) pentru $i = o$.

Fie ε suficient de mic astfel încît: $q = \varepsilon c_1/(\alpha-\varkappa) < 1$

Acestui ε îi corespunde $\eta = \eta(\varepsilon)$ astfel încît să fie îndeplinită relaţia (4.17); luînd δ suficient de mic în (2.14) pentru ca $\delta c_1/(1-q) < \eta$ şi $\tau_0 = \tau_0(\delta)$, din (4.19) şi (4.15) rezultă:

$$\| \overset{(o)}{\hat{z}}_0(\tau)\| \leq \eta \quad \text{pentru } \tau \geq \tau_0, \quad (4.23)$$

$$\| \overset{(1)}{\hat{z}}_0 - \overset{(o)}{\hat{z}}_0\| \leq \int_{\tau_0}^{\tau}\| e^{F_z(o)(\tau-s)}\|\cdot\| G(\overset{(o)}{\hat{z}}_0(s))-G(o)\| ds \leq$$

$$\leq \int_{\tau_0}^{\tau} c_1 e^{-\alpha(\tau-s)}\cdot\varepsilon\,\delta c_1 e^{-\varkappa(s-\tau_0)}ds = \delta c_1\varepsilon c_1 e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)}\cdot$$

$$\cdot\int_{\tau_0}^{\tau} e^{-(\alpha-\varkappa)(\tau-s)}ds \leq \delta c_1\varepsilon c_1/(\alpha-\varkappa)e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)} =$$

$$= \delta c_1 q\, e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)}, \quad (4.24)$$

$$\| \overset{(1)}{\hat{z}}_0\| \leq \| \overset{(o)}{\hat{z}}_0\| + \| \overset{(1)}{\hat{z}}_0 - \overset{(o)}{z}_0\| \leq c_1\delta(1+q)e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)} < \delta c_1/(1-q)e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)} < \eta \quad (4.25)$$

Pentru $\tau \geq \tau_0$, se demonstrează prin inducţie completă:

$$\| \overset{(k)}{\hat{z}}_0\| \leq \delta c_1(1+q+\ldots+q^k)\, e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)}, \quad (4.26)$$

$$\| \overset{(k)}{\hat{z}}_0 - \overset{(k-1)}{\hat{z}}_0\| \leq \delta c_1 q^k e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)} \quad (4.27)$$

Intr-adevăr, pentru $k=1$ aceste inegalităţi sînt adevărate datorită (4.25) (a doua inegalitate) şi datorită (4.24). Presupunîndu-le adevărate pentru k, din (4.20), rezultă pentru $\tau \geq \tau_0$:

$$\| \overset{(k)}{\hat{z}_0} \| \leq \delta C_1 (1+q+\ldots+q^k) e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)} \leq \delta C_1/(1-q) e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)}$$

iar din (4.17) şi (4.27) rezultă:

$$\| \overset{(k+1)}{\hat{z}_0} - \overset{(k)}{\hat{z}_0} \| \leq \int_{\tau_0}^{\tau} \| e^{F_z(o)(\tau-s)} \| \cdot \| G(\overset{(k)}{\hat{z}_0}) - G(\overset{(k-1)}{\hat{z}_0}) \| ds \leq$$

$$\leq \int_{\tau_0}^{\tau} C_1 e^{-\alpha(\tau-s)} \cdot \varepsilon \cdot \| \overset{(k)}{\hat{z}_0} - \overset{(k-1)}{\hat{z}_0} \| ds \leq \int_{\tau_0}^{\tau} C_1 e^{-\alpha(\tau-\tau_0)} \varepsilon \delta C_1 q^k e^{-\varkappa(s-\tau_0)} ds =$$

$$= \delta C_1 \varepsilon C_1 e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-(\alpha-\varkappa)(\tau-s)} ds \leq$$

$$\leq \delta C_1 \varepsilon C_1/(\alpha-\varkappa) q^k e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)} = \delta C_1 q^{k+1} e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)} \qquad (4.28)$$

de unde rezultă (4.27) pentru (k+1) iar din (4.28) şi (4.26) rezultă (4.26) pentru (k+1):

$$\| \overset{(k+1)}{\hat{z}_0} \| \leq \| \overset{(k)}{\hat{z}_0} \| + \| \overset{(k+1)}{\hat{z}_0} - \overset{(k)}{\hat{z}_0} \| \leq \delta C_1 (1+q+\ldots+q^{k+1}) e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)}$$

deci (4.26) şi (4.27) sînt adevărate pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Din (4.27) rezultă convergenţa şirului aproximaţiilor succesive către $\hat{z}_0(\tau)$ datorită relaţiilor (4.2o) şi (4.17) şi prin trecere la limită în (4.26) rezultă evaluarea:

$$\| \hat{z}_0(\tau) \| \leq \delta C_1/(1-q) e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)} \qquad (4.29)$$

Pentru $o \leq \tau \leq \tau_0$, deoarece $\hat{z}_0$ este soluţia ecuaţiei (4.1o) ea este mărginită de o constantă C_2. Notînd

$C = \max (C_2 e^{-\varkappa \tau_0}, C_1/(1-q) e^{-\varkappa \tau_0})$, rezultă (4.13) pentru $i = o$. Pentru $i = 1$, din expresia lui $\hat{f}_0(\tau)$ rezultă:

$\hat{f}_0(\tau) \equiv f(\bar{z}_0(o)+\hat{z}_0(\tau), x^o, o,o,o) - f(\bar{z}_0(o), x^o, o,o,o) = \hat{f}_z \hat{z}_0(\tau)$ iar

din (4.13) pentru $i:=o$ şi condiţia 4.1 rezultă

$$\| \hat{f}_0(\tau) \| \leq C e^{-\varkappa \tau} \quad \text{pentru} \quad \tau \geq o \qquad (4.3o)$$

iar din (4.3o) rezultă convergenţa integralei din care se determină $\hat{x}_0(\tau)$ şi evaluarea:

$$\| \hat{x}_1(\tau) \| \leq C_1' \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-\varkappa s} ds = \frac{C'}{\varkappa} e^{-\varkappa \tau} = C e^{-\varkappa \tau}, \ \tau \geq o \quad (4.31)$$

deci evaluarea (4.13) pentru $\hat{x}_1$. Pentru $\hat{z}_1$ se scrie (4.8 a) sub forma:

$$\frac{d\hat{z}_1}{d\tau} = \hat{F}_z(\tau) \hat{z}_1(\tau) + \hat{G}_1(\tau) \qquad (4.32)$$

unde

$\hat{G}_1(\tau) = \hat{F}_x \hat{x}_1 + \tilde{G}_1(\tau)$, $\tilde{G}_1(\tau) = (\hat{F}_z(\tau) - \bar{F}_z(o)).(\dot{\bar{z}}_0(o)\tau + \bar{z}_1(o)) +$
$+ (\hat{F}_x(\tau) - \bar{F}_x(o))(\dot{\bar{x}}_0(o) - \bar{x}_1(o)) + (\hat{F}_J(\tau) - \bar{F}_J(o)) \cdot K(o,o,\bar{z}_0(o), \bar{x}_c(o), o) +$
$+ \hat{F}_J(\tau) \hat{J}_0(\tau) + (\hat{F}_t(\tau) - \bar{F}_t(o))\tau + \hat{F}_\varepsilon(\tau) - \bar{F}_\varepsilon(o)$.

Aplicînd formula lui Lagrange tuturor diferențelor în care intervin, în expresia lui $\tilde{G}_1(\tau)$, derivatele lui $\hat{F}(\tau)-\overline{F}(t), t=o$ precum și diferenței $\hat{K}_o(\tau)-\overline{K}_o(o)$ din expresia lui $\hat{J}_o(\tau)$ din (4.30) se obține evaluarea:

$$\|\tilde{G}_1(\tau)\| \leq (C\tau+C)(\|\hat{z}_o(\tau)\|+\|\hat{x}_o(\tau)\|) \leq (C\tau+C)e^{-\varkappa\tau}$$

Alegînd $\varkappa_1<\varkappa$ astfel încît $(C\tau+C)e^{-\varkappa\tau} \leq C\,e^{-\varkappa_1\tau}$, rezultă, ținînd cont de (4.31) în expresia lui $\hat{G}_1(\tau)$:

$$\|\hat{G}_1(\tau)\| \leq C_1 e^{-\varkappa\tau}, \quad \tau \geq o \qquad (4.33)$$

Aplicînd formula variației constantelor sistemului (4.32) în mod analog cum a fost făcută evaluarea (4.13) pentru $\hat{y}_i(\tau)=\hat{z}_o(\tau)$, rezultă această evaluare pentru $\hat{y}_i(\tau)=\hat{z}_1(\tau)$, prin metoda aproximațiilor succesive, ținînd cont de (4.33).

Demonstrația se continuă prin inducție:

Se constată, aplicînd teorema lui Lagrange că $\hat{f}_{k-1}(\tau)$ este o combinație liniară de funcții continue de $\hat{y}_i(\tau)$, $i=\overline{o,k-1}$. Din această cauză, presupunînd adevărată inegalitate (4.13) pentru $i=\overline{o,k-1}$ rezultă și pentru $\hat{f}_{k-1}(\tau)$:

$$\|\hat{f}_{k-1}(\tau)\| \leq C e^{-\varkappa\tau} \quad \text{pentru} \quad \tau \geq o \qquad (4.34)$$

și din (4.8b) și (4.34) rezultă (4.13) pentru $\hat{y}_i(\tau)=\hat{z}_k(\tau)$.

Pentru $\hat{y}_i(\tau)=\hat{z}_k(\tau)$ se scrie (4.8 a) sub forma:

$$\frac{d\hat{z}_k(\tau)}{d\tau}=\hat{F}_z(\tau)\,\hat{z}_k(\tau)+\hat{G}_k(\tau)$$

și, în mod analog ca pentru $\hat{z}_1(\tau)$, se demonstrează evaluarea exponențială a lui $\hat{G}_k(\tau)$, din care rezultă (4.13) pentru $\hat{y}_i(\tau)=\hat{z}_k(\tau)$ ∎

Vom demonstra în continuare că teorema de evaluare asimptotică a restului, de tipul teoremelor 1.4 și 1.5 are loc și în cazul problemei (4.1)-(4.2):

<u>Teorema 4.2</u>. Dacă sînt îndeplinite condițiile 4.1-4.4 atunci există constantele ε_o și $C>o$ astfel încît pentru orice $\varepsilon\in(o,\varepsilon_o)$ soluția $(z(t,\varepsilon), x(t,\varepsilon))$ a problemei (4.1)-(4.2) există pentru $t\in[o,a]$, este unică și satisface relațiile (1.39),(1.38).

<u>Demonstrație</u>. Fie

$$u(t,\varepsilon)=z(t,\varepsilon)-Z_{\varepsilon N}(t,\varepsilon), \quad v(t,\varepsilon)=x(t,\varepsilon)-X_{\varepsilon N}(t,\varepsilon) \qquad (4.35)$$

și notăm: $w(t,\varepsilon)$ oricare dintre funcțiile $u(t,\varepsilon)$ sau $v(t,\varepsilon)$,

$J(w,Y_{\varepsilon N}) \equiv \int_{\tau_0}^{\tau} K(u+Z_{\varepsilon N}, v+X_{\varepsilon N}, \varepsilon)ds, \hat{F}(w,Y_{\varepsilon N}) \equiv F(u,Z_{\varepsilon N}, v+X_{\varepsilon N}, J(w,Y_{\varepsilon N}), t, \varepsilon),$
$F^o \equiv F(t,\varepsilon) \equiv F(\bar{z}_o(t)+\hat{z}_o(t/\varepsilon), x^o, t, o)$

Notații analoage considerăm și pentru f și derivatele lui $\hat{F}$ și F și ale lui $\hat{f}$ și f.

Inlocuind (4.35) în (4.1)-(4.2) obținem:

$$\varepsilon\frac{du}{dt} = F(w,Y_{\varepsilon N}) - \frac{dZ_{\varepsilon N}}{dt}, \frac{dv}{dt} = f(w,Y_{\varepsilon N}) - \frac{dX_{\varepsilon N}}{dt} \qquad (4.36)$$

$$u(o,\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}),\ v(o,\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}) \qquad (4.37)$$

Pentru a demonstra teorema va trebui să demonstrăm, cu noile notații, că soluția problemei (4.36)-(4.37) satisface condiția: există ε_o astfel încît oricare ar fi ε, $o<\varepsilon\le\varepsilon_o$ are loc:

$$\|u(t,\varepsilon)\| \le C\varepsilon^{N+1},\ \|v(t,\varepsilon)\| \le C\varepsilon^{N+1}, t\in[o,a] \qquad (4.38)$$

Pentru a o demonstra, scriem (4.36) sub forma:

$$\varepsilon\frac{du}{dt} = F_z^o u + F_x^o v + G(u,v,t,\varepsilon), \frac{dv}{dt} = f_z^o u + f_x^o v + g(u,v,t,\varepsilon) \qquad (4.39)$$

$$G(u,v,t,\varepsilon) = \hat{F}(w,Y_{\varepsilon N}) - \varepsilon\dot{Z}_{\varepsilon N} - F_z^o u - F_x^o v \qquad (4.40\ a)$$

$$g(u,v,t,\varepsilon) = \hat{f}(w,Y_{\varepsilon N}) - \dot{X}_{\varepsilon N} - f_z^o u - f_x^o v \qquad (4.40\ b)$$

Funcțiile G și g îndeplinesc condițiile:

$$\|G(o,o,z,\varepsilon)\| \le C\varepsilon^{N+1}, \|g(o,o,t,\varepsilon)\| \le C(\varepsilon^{N+1} + \varepsilon^N e^{-\pi\tau/\varepsilon}) \qquad (4.41)$$

și au proprietatea că pentru orice $\mu > o$ există $\delta = \delta(\mu)$ și există $\varepsilon_o = \varepsilon_o(\mu)$ astfel încît pentru orice $u_i, v_i, \|u_i\| \le \delta, \|v_i\| \le \delta$ $i=1,2$ și orice ε, $o<\varepsilon\le\varepsilon_o$ au loc inegalitățile:

$$\|G(u_1,v_1,t,\varepsilon) - G(u_2,v_2,t,\varepsilon)\| \le \varepsilon\ (\|u_1-u_2\| + \|v_1-v_2\|) \qquad (4.42\ a)$$

$$\|g(u_1,v_1,t,\varepsilon) - g(u_2,v_2,t,\varepsilon)\| \le \varepsilon\ (\|u_1-u_2\| + \|v_1-v_2\|) \qquad (4.42\ b)$$

Pentru a le demonstra, vom începe cu a doua relație (4.41):

$$g(o,o,t,o) = \hat{f}(o,Y_{\varepsilon N}) - \dot{X}_{\varepsilon N} = \Big[\hat{f}(o,\sum_{k=o}^{N}\varepsilon^k(\bar{y}_k(\tau\varepsilon) + \hat{y}_k(\tau))) -$$

$$- \hat{f}(o,\sum_{k=o}^{N}\varepsilon^k\,\bar{y}_k(\tau\varepsilon)) - \frac{d}{d\tau}(\sum_{k=o}^{N}\varepsilon^{k-1}\,\hat{x}_k(\tau))\Big] + \qquad (4.43)$$

$$+\Big[\hat{f}(o,\sum_{k=o}^{N}\varepsilon^k\,\bar{y}_k(t)) - \frac{d}{dt}(\sum_{k=o}^{N}\varepsilon^k\,\bar{x}_k(t))\Big],$$

$$\hat{f}(o,\sum_{k=o}^{N}\varepsilon^k(\bar{x}_k(\tau\varepsilon)+\hat{x}_k(\tau)))-\hat{f}(o,\sum_{k=o}^{N}\varepsilon^k\bar{x}_k(\tau\varepsilon)) = \tag{4.44}$$
$$=\sum_{k=o}^{N}\varepsilon^k\hat{f}_k(\tau)+O(\varepsilon^{N+1});\hat{f}(o,\sum_{k=o}^{N}\varepsilon^k\bar{x}_k(t))=\sum_{k=o}^{N}\varepsilon^k\bar{f}_k(t)+O(\varepsilon^{N+1}).$$

Din (4.6 b),(4.7 b),(4.44) şi (4.43) rezultă:

$\| g(o,o,t,\varepsilon)\| = \| \varepsilon^N f_N(\tau)+O(\varepsilon^{N+1})\|$ şi din (4.34) rezultă a doua relaţie (4.41); prima rezultă în mod analog.

Pentru (4.42 b) aplicăm formula lui Lagrange:

$$g(u_1,v_1,t,\varepsilon)-g(u_2,v_2,t,\varepsilon)=\hat{f}_z(w',Y_{\varepsilon N})(u_1-u_2) +$$
$$+\hat{f}_x(w'',Y_{\varepsilon N})(v_1-v_2)+\hat{f}_J(w''',Y_{\varepsilon N})\cdot\Big[\int_{t-\varepsilon}^{t}(K_z(u_1-u_2) +$$
$$+K_x(v_1-v_2))ds\Big] - f_z^o(u_1-u_2)- f_x^o(v_1-v_2)$$

Deoarece pentru ε, u_i, v_i suficient de mici diferenţele $\hat{f}_z(w',Y_{\varepsilon N})-f_z^o$, $\hat{f}_x(w'',Y_{\varepsilon N})-f_x^o$ sînt şi ele oricît de mici iar termenii $\int_{t-\varepsilon}^{t} K_z ds$ şi $\int_{t-\varepsilon}^{t} K_x ds$ sînt de ordinul $O(\varepsilon)$ rezultă (4.42 b) şi în mod analog rezultă (4.42 a).

Aplicînd formula variaţiei constantelor sistemelor (4.39) obţinem:

$$u(t,\varepsilon)=U(t,o,\varepsilon)O(\varepsilon^{N+1})+\int_o^t U(t,s,\varepsilon)\,\frac{1}{\varepsilon}\,(F_x^oV(s,\varepsilon)+G)ds \tag{4.45 a}$$

$$v(t,\varepsilon)=V(t,o,\varepsilon)O(\varepsilon^{N+1})+\int_o^t V(t,s,\varepsilon)(f_z^ou(s,\varepsilon)+g)ds \tag{4.45 b}$$

unde $U(t,s,\varepsilon)$ şi $V(t,s,\varepsilon)$ sînt matricile fundamentale ale sistemelor (4.39) - soluţiile problemelor:

$$\varepsilon\frac{dU}{dt} = F_z^oU,\ U(s,s,\varepsilon) = E_M \tag{4.46 a}$$

$$\frac{dV}{dt} = f_x^oV,\ V(s,s,\varepsilon) = E_m \tag{4.46 b}$$

Matricea f_y^o fiind mărginită, din (4.46b) rezultă că şi matricea $V(t,s,\varepsilon)$ este mărginită.

Pentru evaluarea lui $U(t,s,\varepsilon)$ vom aplica lema 3.7. Deoarece ea nu este aplicabilă direct sistmului (4.46 a), vom scrie acest sistem sub formă:

$$\varepsilon\frac{dU}{dt} = \bar{F}_z(t)U + (F_z^o - \bar{F}_z)\,U,\quad U(s,s,\varepsilon) = E_M$$

iar acesta se transformă în sistemul echivalent de ecuații integrale:

$$U(t,s,\varepsilon)=C(t,s,\varepsilon)+\int_0^t C(t,r,s)\,\frac{1}{\varepsilon}\,(F_z^o-\bar{F}_z)U(r,s,\varepsilon)dr \qquad (4.47)$$

unde $C(t,s,\varepsilon)$ este soluția sistemului omogen:

$$\varepsilon\frac{dC}{dt} = \bar{F}_z C\ ,\quad C(s,s,\varepsilon) = E_M \qquad (4.48)$$

Aplicînd sistemului (4.48) lema 3.7 rezultă evaluarea (3.61).

Deoarece diferența $F_z^o - \bar{F}_z$ este oricît de mică pentru $\|\hat{z}(\tau)\|<\varepsilon$ iar aceasta are loc pentru $\varepsilon \leq \varepsilon_o$, aplicînd metoda aproximațiilor succesive sistemului (4.47), în acelaşi mod cum a fost aplicată sistemului (4.18) pentru evaluarea lui $\hat{z}_o(\tau)$, rezultă pentru $U(t,s,\varepsilon)$ evaluarea:

$$\| U(t,s,\varepsilon)\| \leq Ce^{-\varkappa(t-s)/\varepsilon},\quad 0\leq s\leq t,\quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_o \qquad (4.49)$$

Inlocuind $v(t,\varepsilon)$ din (4.45 b) în (4.45 a) şi folosind formula:

$$\int_0^t\int_0^s y(s,p)dp\,ds=\int_0^t\int_p^t y(s,p)ds\,dp = \int_0^t\int_s^t y(p,s)dp\,ds \qquad (4.50)$$

rezultă sistemul echivalent cu (4.45):

$$u(t,\varepsilon)=U(t,o,\varepsilon)O(\varepsilon^{N+1})+\int_0^t \tilde{K}(t,s,\varepsilon)u(s,\varepsilon)ds+\varphi_1(u,v,t,\varepsilon) \qquad (4.51\ a)$$

$$v(t,\varepsilon)=V(t,o,\varepsilon)O(\varepsilon^{N+1})+\int_0^t V(t,s,\varepsilon)f_z^o u(s,\varepsilon)ds+\varphi_2(u,v,t,\varepsilon) \qquad (4.51\ b)$$

unde:

$$\tilde{K}(t,s,\varepsilon) \equiv \tilde{K}_1(t,s,\varepsilon)f_z^o(s,\varepsilon);\quad \tilde{K}_1(t,s,\varepsilon)\equiv$$

$$\equiv\int_s^t \frac{1}{\varepsilon}\,U(t,p,\varepsilon)F_x^o(p,\varepsilon)V(p,s,\varepsilon)dp$$

de unde, datorită mărginirii lui V şi (4.49) rezultă:

$$\| \tilde{K}_1(t,s,\varepsilon)\| \leq C \text{ pentru } 0\leq s\leq t\leq a,\quad 0<\varepsilon\leq\varepsilon_o$$

iar operatorii integrali: $\varphi_1(u,v,t,\varepsilon)\equiv$

$$\equiv\int_0^t \frac{1}{\varepsilon}U(t,s,\varepsilon)[F_x^o V(s,o,\varepsilon)O(\varepsilon^{N+1})+G(u,v,s,\varepsilon)]+$$

$$+\int_0^t \tilde{K}_1(t,s,\varepsilon)g(u,v,s,\varepsilon)ds \text{ şi } \int_0^t V(t,s,\varepsilon)g(u,v,s,\varepsilon)ds\equiv$$

$\equiv\varphi_2(u,v,t,\varepsilon)$, datorită proprietăților (4.41) şi (4.42) ale lui G.

şi g, au şi ei proprietăţi analoage:

$$\|Q_i(o,o,t,\varepsilon)\| \leq C\,\varepsilon^{N+1}, \text{pentru } o \leq t \leq a,\ o \leq \varepsilon < \varepsilon_o \quad ,i=1,2,.. \tag{4.52}$$

$$\|Q_i(u_1,v_1,t,\varepsilon)-Q_i(u_2,v_2,t,\varepsilon)\| \leq$$
$$\leq \varepsilon \max_{o \leq s \leq t} [\|u_1(s,\varepsilon)-u_2(s,\varepsilon)\|+\|v_1(s,\varepsilon)-v_2(s,\varepsilon)\|] \quad ,i=1,2 \tag{4.53}$$

Considerînd (4.51a) ca o ecuaţie integrală de tip Volterra, rezultă:

$$u(t,\varepsilon)=U(t,o,\varepsilon)O(\varepsilon^{N+1})Q_1(u,v,t,\varepsilon)+\int_o^t R(t,s,\varepsilon)Q_1(u,v,s,\varepsilon)ds \equiv$$
$$\equiv S_1(u,v,t,\varepsilon) \tag{4.54 a}$$

unde $R(t,s,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{K}_j(t,s,\varepsilon)$ este rezolventa nucleului $\tilde{K}(t,s,\varepsilon)$:

$$\tilde{K}_1(t,s,\varepsilon)=K(t,s,\varepsilon),\ \tilde{K}_j(t,s,\varepsilon)=\int_s^t \tilde{K}_{j-1}(t,p,\varepsilon)\tilde{K}(p,s,\varepsilon)dp$$

Fiind suma unei serii uniform convergente de funcţii continue, rezolventa este continuă. Ecuaţia (4.51 b) se scrie:

$$v(t,\varepsilon)=\int_o^t H(t,s,\varepsilon)u(s,\varepsilon)ds + S_2(u,v,t,\varepsilon) \tag{4.54 b}$$

unde $H(t,s,\varepsilon) \equiv V(t,s,\varepsilon)f_z^o(s,\varepsilon)$, $S_2(u,v,t,\varepsilon) \equiv$
$$\equiv V(t,o,\varepsilon)O(\varepsilon^{N+1})+Q_2(u,v,t,\varepsilon)$$

Operatorii S_i, $i = 1,2$, datorită proprietăţilor (4.52) şi (4.53) ale lui Q_i au proprietăţi analoage cu Q_i.

Deoarece problema (4.36)-(4.37) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii integrale (4.54) este suficient să demonstrăm că soluţia acestui sistem există, este unică şi satisface (4.38).

In acest scop folosim din nou metoda aproximaţiilor succesive:

$$u_o(t,\varepsilon)=o,\ v_o(t,\varepsilon)=o,\ u_k(t,\varepsilon)=S_1(u_{k-1},v_{k-1},t,\varepsilon), \tag{4.55 a}$$

$$v_k(t,\varepsilon)=\int_o^t H(t,s,\varepsilon)u_{k-1}(s,\varepsilon)ds+S_2(u_{k-1},V_{k-1},t,\varepsilon) \tag{4.55 b}$$

Din proprietăţile pentru S_i analoage cu (4.52) şi (4.53) şi din (4.55) rezultă:

$$\|u_1(t,\varepsilon)\| \leq C\ ^{N+1}, \|v_1(t,\varepsilon)\| \leq C\,\varepsilon^{N+1},\ o \leq t \leq a,\ o < \varepsilon < \varepsilon_o \tag{4.56}$$

$$\|u_{k-1}(t,\varepsilon)-u_k(t,\varepsilon)\| \leq$$
$$\leq \max_{o \leq s \leq t} (\|u_k(s,\varepsilon)-u_{k-1}(s,\varepsilon)\|+\|v_k(s,\varepsilon)-v_{k-1}(s,\varepsilon)\|), \tag{4.57 a}$$

$$\| v_{k+1}(t,\varepsilon)-V_k(t,\varepsilon)\| \leq ca \max_{0\leq s\leq t} (\| u_k(s,\varepsilon)-u_{k+1}(s,\varepsilon)\| +$$
$$+ \varepsilon \max_{0\leq s\leq t} (\| u_k(s,\varepsilon)-u_{k-1}(s,\varepsilon)\| + \| v_k(s,\varepsilon)-v_{k-1}(s,\varepsilon)\|) \qquad (4.57\ b)$$

pentru $\| w_k(s,\varepsilon)\| \leq \delta$, $\| w_{k-1}(s,\varepsilon)\| \leq \delta$. (4.58)

Notînd ω = max (4 ca,1),

$$D_{k+1}= \max_{0\leq t\leq a} (\| u_{k+1}(t,\varepsilon)-u_k(t,\varepsilon)\|\omega + \| v_{k+1}(t,\varepsilon)-v_k(t,\varepsilon)\|), \qquad (4.59)$$

$$U_k = \max_{0\leq t\leq a} (\| u_k(t,\varepsilon)-u_{k-1}(t,\varepsilon)\|), V_k= \max_{0\leq t\leq a} (\| v_k(t,\varepsilon)-v_{k-1}(t,\varepsilon)\|)$$

şi înmulţind (4.57a) cu ω rezultă, adunînd-o cu (4.57 b):

$$D_{k+1} \leq \varepsilon\omega U_k + \varepsilon\omega V_k + ca\, U_k + \varepsilon U_k + \varepsilon V_k \leq \varepsilon D_k + \varepsilon\omega D_k + ca\, U_k$$

şi deoarece $U_k \leq D_k/\omega$, $ca \leq \omega/4$ rezultă:

$$D_{k+1} \leq \varepsilon (1+\omega)D_k + D_k/4 \leq D_k/2 \qquad (4.60)$$

dacă ε este suficient de mic astfel încît $\varepsilon (1+\omega) \leq 1/4$ şi dacă sînt satisfăcute relaţiile (4.58).

Mai trebuie demonstrat că pentru ε suficient de mic relaţiile (4.58) au într-adevăr loc:

Presupunînd că (4.58)-(4.60) au loc pentru $k=\overline{1,p-1}$ rezultă:

$$D_{k+1} \leq D_k/2 \leq \ldots \leq D_1/2^k, \text{ de unde:}$$

$$\| u_p\| \leq \| u_p-u_{p-1}\| + \| u_{p-1}-u_{p-2}\| + \ldots + \| u_1\| \leq D_p+D_{p-1}+\ldots+D_1 \leq$$
$$\leq (2^{-p+1}+2^{-p+2}+\ldots+1)D_1 \leq 2D_1 \leq \delta(\varepsilon) \qquad (4.61)$$

de unde rezultă că prima relaţie (4.58) are loc pentru orice $p \in \mathbb{N}$.

In mod analog are loc şi a doua deci şi (4.60) pentru $p \in \mathbb{N}$.

De aici şi din (4.56),(4.61) rezultă:

$$\| u_k(t,\varepsilon)\| \leq C\, \varepsilon^{N+1}, \| v_k(t,\varepsilon)\| \leq C\, \varepsilon^{N+1} \qquad (4.62)$$

Din (4.62) rezultă convergenţa şirului aproximaţiilor succesive pentru $k \to \infty$, uniform prin raport cu $t \in [0,a]$ şi evaluarea(4.36). Rezultă existenţa soluţiei $(u(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon))$ a problemei (4.36)-(4.37) de unde, conform (4.35) rezultă existenţa soluţiei $(z(t,\varepsilon),x(t,\varepsilon))$a problemei (4.1)-(4.2) iar evaluarea (4.36) implică unicitatea acestei soluţii∎

Observaţia 4.2. Deşi soluţia asimptotică (1.58) construită mai sus pentru problema (4.1)-(4.2) are evaluarea (1.59), şi în acest caz introducerea funcţiilor de frontieră a fost necesară doar pentru a obține o aproximare convenabilă în vecinătatea valorii inițiale t=o, unde valoarea lor este semnificativă.

Dacă soluția interesează, nu în zona stratului limită ci pentru $o < t_o \leq t \leq a$, $o < \varepsilon$ atunci se poate renunța la funcțiile de strat limită, considerîndu-se drept aproximație asimptotică doar suma parțială a seriei regulate, evaluarea (1.39) rămînînd valabilă:

$$\overline{Y}_{\varepsilon N}(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k \, \overline{y}_k(t),$$

$$\| y(t,\varepsilon) - \overline{Y}_{\varepsilon N}(t,\varepsilon) \| \leq C\, \varepsilon^{N+1}, \quad o < t_o \leq t \leq a, \quad o < \varepsilon \leq \varepsilon_o \tag{4.63}$$

Intr-adevăr, din (1.39) și (4.13) rezultă:

$$\| y(t,\varepsilon) - \overline{Y}_{\varepsilon N}(t,\varepsilon) \| \leq \| y(t,\varepsilon) - Y_{\varepsilon N}(t,\varepsilon) \| + \| \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \, \hat{y}_k(\tau) \| \leq$$

$\leq C_1 \varepsilon^{N+1} + C_2 e^{-\varkappa\tau}$ și deoarece $e^{-\varkappa\tau} = e^{-\varkappa t/\varepsilon} \leq e^{-\varkappa t_o/\varepsilon}$,

$e^{t_o/\varepsilon} \geq (\varkappa t_o)^{N+1} / \varepsilon^{N+1} = C_3 / \varepsilon^{N+1}$, rezultă (4.63) din aceste relații ∎

<u>Comentarii bibliografice.</u>

Problema (4.1)-(4.2) nu a mai fost studiată în literatura de specialitate.

Termenul integral de forma (4.1 c) apare în lucrarea [96] a lui N.N.Nefëdov în care se construiește o soluție asimptotică prin metoda lui A.B.Vasilieva pentru ecuațiile integrale de forma

$$\varepsilon z(t) - \int_{t-\varepsilon}^{t} K(t,s,z(s),\varepsilon)ds = \varepsilon f(t,\varepsilon), \quad o \leq t \leq a$$

cu aplicații importante în biologie.

Demonstrația teoremelor 4.1 și 4.2 se face după modelul teoremelor analoage (Teoremele 3.1 și 5.1 din [135]) privind sistemele de ecuații diferențiale (1.16) și integro-diferențiale (1.40).

Rezultatele prezentate în acest paragraf constituie un capitol al referatului [81] și au fost publicate în [78] ∎

4.2. <u>Sisteme integro-diferențiale semiliniare cu ambele limite de integrare variabile cu perturbații singulare</u>

In acest paragraf vom considera problema integro-diferențială în care una dintre funcțiile necunoscute este cu variație lentă, fiind soluția unei ecuații integro-diferențiale liniare în care limitele de integrare sînt simetrice față de origine iar celelalte funcții necunoscute sînt cu variație rapidă:

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = F(z,x,J,t,\varepsilon),\ 0 \le t \le a,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \ll 1, \tag{4.64 a}$$

$$a\frac{dx}{dt} + b(t,\varepsilon)x + c\int_{-t}^{t} K(t,s,\varepsilon)x(s,\varepsilon)ds = f(t,\varepsilon) \tag{4.64 b}$$

$$z(o,\varepsilon) = z^0(\varepsilon),\ x(o,\varepsilon) = x^0(\varepsilon), \tag{4.64 c}$$

$o < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $t \in [-a,a]$, impunînd aceleaşi condiţii ca şi pentru problema (4.1) (cu m:=1) şi termenul integral J fiind dat de aceeaşi relaţie (4.1 c).

Vom studia mai întîi ecuaţia (4.64 b).

Dacă a şi $b(t,\varepsilon)$ sînt identic nule, atunci ecuaţia integrală care se obţine poate prezenta unele aspecte funcţionale. Astfel, de exemplu, [33], ecuaţia integrală $\int_{-t}^{t} x(s)ds = f(t)$, echivalentă (în ipoteză că f(t) este derivabilă, impară şi nulă în origine) cu ecuaţia funcţională $x(t)+x(-t)=\dot f(t)$, admite o infinitate de soluţii mărginite şi integrabile de forma: $x(t)=\dot f(t)/2+h(t)$, h(t) arbitrară, mărginită, integrabilă şi impară.

Există şi ecuaţii integro-diferenţiale de forma (4.64 b) care pot prezenta unele surprize în sensul devierii de la teoremele de existenţă şi unicitate cunoscute pentru ecuaţii de tip Volterra de speţa a doua; un asemenea exemplu este problema: (a se vedea lucrarea autorului [92]):

$$\frac{dx}{dt} + \int_{-t}^{t} x(s)ds = o,\ x(\pi\sqrt{2}/4) = x^0 \tag{4.65}$$

Se verifică imediat că problema (4.65) are o infinitate de soluţii de forma $x(t)=\alpha\cos\sqrt{2}t$ dacă $x^0 = 0$ şi nu are soluţii dacă $x^0 \neq 0$.

Vom vedea, însă, că dacă condiţia iniţială se dă pentru t=o, atunci ecuaţiile de forma (4.64 b) au soluţie unică.

Vom reduce ecuaţia (4.64 b) la un sistem de două ecuaţii integrale de tip Volterra. In prealabil o vom reduce la o ecuaţie în care coeficientul corespunzător lui $b(t,\varepsilon)$ este nul.

<u>Lema 4.1</u>. Dacă problema

$$a\frac{dx}{dt} + b(t)x + C\int_{-t}^{t} K(t,s)x(s)ds = f(t),\ x(o)=x^0,\ a \neq o \tag{4.66}$$

admite soluţia x(t) atunci problema:

$$\frac{du}{dt} + \lambda\int_{-t}^{t} N(t,s)u(s)ds = g(t),\ u(o) = x^0 \tag{4.67}$$

unde: $\lambda = C/a$,

$$N(t,s)=K(t,s)\exp\left(\frac{1}{a}\int_s^t b(r)dr\right), g(t)=\frac{f(t)}{a}\exp\left(\frac{1}{a}\int_0^t b(r)dr\right), \quad (4.68)$$

admite soluţia u(t) dată de relaţiile:

$$x(t)=u(t)v(t), \ \frac{dv}{dt}=-\frac{b(t)}{a}v(t), v(o)=1 \quad (4.69)$$

şi reciproc, dacă problema (4.67) admite soluţua u(t) atunci problema (4.66) admite soluţia x(t) dată de aceleaşi relaţii.

Demonstraţie. Efectuînd în (4.66) substituţia indicată de (4.69) obţinem (4.67),(4,68) şi efectuînd aceeaşi substituţie (4.69) în (4.67) rezultă (4.66),(4.68)■

Lema 4.2. Problema (4.67) este echivalentă în $C^1[-a,a]$ cu ecuaţia:

$$u(t)+\lambda\int_0^t\int_0^p N(p,s)u(s)dsdp+\lambda\int_0^t\int_0^p N(p,-s)u(-s)dsdp =$$
$$=x^o+\int_0^t g(s)ds \quad (4.7o)$$

Demonstraţie. Dacă (4.7o) admite o soluţie atunci, prin derivare, rezultă că ea verifică (4.67) iar condiţia iniţială din (4.67) se constată prin verificare directă. Invers, dacă (4.67) admite soluţia u(t), atunci ea verifică relaţiile succesive,

$$u(t)-\int_0^t \frac{du(p)}{dp}dp=x^o, u(t)+\int_0^t \lambda\int_{-p}^{p} N(p,s)u(s)dsdp=$$
$$=x^o+\int_0^t g(s)ds, \text{ de unde rezultă (4.7o)}$$■

Pentru a reduce ecuaţia (4.7o) la forma integrală enunţată, vom înlocui în (4.7o) t cu -t, apoi vom face schimbarea de variabilă s în -s în termenii integrali şi după aceea schimbarea de variabilă p în -p; vom obţine astfel ecuaţia:

$$u(-s)+\lambda\int_0^t\int_0^p N(-p,s)u(s)dsdp+\lambda\int_0^t\int_0^p N(-p,-s)u(-s)dsdp=$$
$$=x^o-\int_0^t g(-s)ds \quad (4.7o')$$

Notăm: $N(p,s)\equiv N_{11}(p,s)$, $N(p,-s)\equiv N_{12}(p,s)$, $N(-p,s)\equiv N_{21}(p,s)$, $N(-p,-s)\equiv N_{22}(p,s)$, $u(s)\equiv u_1(s)$, $u(-s)\equiv u_2(s)$, (4.71)
$x^o+\int_0^t g(s)ds\equiv f_1(t,x^o-\int_0^t g(-s)ds\equiv f_2(t)$

Cu aceste notaţii, ecuaţiile (4.7o) şi (4.7o') devin:

$$u_1(t)+\lambda\int_0^t\int_0^p N_{11}(p,s)u_1(s)dsdp+\lambda\int_0^t\int_0^p N_{12}(p,s)u_2(s)dsdp=f_1(t) \quad (4.72\ a)$$

$$u_2(t)+\lambda\int_0^t\int_0^p N_{21}(p,s)u_1(s)dsdp+\lambda\int_0^t\int_0^p N_{22}(p,s)u_2(s)dsdp=f_2(t) \quad (4.72\ b)$$

Notînd:

$$U(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix},M(p,s)=\begin{bmatrix}N_{11}(p,s) & N_{12}(p,s)\\ N_{21}(p,s) & N_{22}(p,s)\end{bmatrix} \quad F(t)=\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix} \quad (4.73)$$

sistemul (4.72) se poate scrie sub forma matricială:

$$U(t)+\lambda\int_0^t\int_0^p M(p,s)U(s)dsdp = F(t) \quad (4.74)$$

Observația 4.3. Schimbînd ordinea de integrare în (4.74) obținem:

$$U(t)+\lambda\int_0^t\left(\int_s^t M(p,s)dp\right)U(s)ds = F(t) \quad (4.75)$$

care este o ecuație integrală de tip Volterra, dar construcția obișnuită a iteratelor nucleului său este greoaie în acest caz; de exemplu:

$$N_2(t,s)=\int_0^t\left(\int_r^t M(p,r)dp\right)\left(\int_s^r M(q,s)dq\right)dr$$

Mai mult, eventualele proprietăți de simetrie ale lui $M(p,s)$ nu se transmit asupra nucleului ecuației (4.75) și nici asupra iteratelor sale. Din aceste motive, nu este convenabil ca ecuația (4.74) să fie tratată sub forma (4.75) cu mijloacele teoriei clasice a ecuațiilor de tip Volterra; teorema de existență, unicitate și de construire a nucleului rezolvant o dăm pentru cazul acestor ecuații (cu $M\in\mathbb{N}$, nu neapărat $M=2$) sub formă mai simplă∎

Teorema 4.3. Dacă funcțiile $M(t,s)$ și $F(t)$ sint continue pentru $o \le s \le t \le a$, respectiv pentru $o \le t \le a$ atunci ecuația matricială (4.74) are soluție unică în $C[o,a]$ care se exprima sub forma:

$$U(t)=F(t)+\lambda\int_0^t\int_0^p \mathcal{M}(p,s)\cdot F(s)dsdp, \quad (4.76)$$

$$\mathcal{M}(p,s) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}M_i(p,s), \quad (4.77)$$

$$M_1(p,s)=M(p,s),M_i(p,s)=\int_s^p M(p,r)\int_s^r M_{i-1}(q,s)dqdr \quad i=2,3,\ldots \quad (4.78)$$

Demonstrație Căutînd soluția problemei (4.74) sub forma:

$$U(t)=U_0(t)+\lambda U_1(t)+\ldots+\lambda^k U_k(t)+\ldots;U_k\in C[0,a] \quad (4.79)$$

prin înlocuirea seriei (4.79) în (4.74) și identificarea formală a coeficienților acelorași puteri ale lui λ rezultă:

$$U_0(t)=F(t),U_i(t)=\int_0^t\int_0^p M(p,s)U_{i-1}(s)dsdp, \quad i=1,2,\ldots \quad (4.80)$$

de unde, prin inducție completă, rezultă:

$$U_1(t)=\int_0^t\int_0^p M(p,s)F(s)dsdp, U_2(t)=\int_0^t\int_0^p M(p,s)U_1(s)dsdp =$$

$$=\int_0^t\int_0^p M(p,s)\int_0^s\int_0^q M(q,r)F(r)drdqdsdp =$$

$$=\int_0^t\int_0^p M(p,s)\int_0^s\int_r^s M(q,r)F(r)dqdrdsdp =$$

$$=\int_0^t\int_0^p\int_r^p M(p,s)F(r)\int_r^s M(q,r)dqdsdrdp = \qquad (r \rightleftarrows s)$$

$$=\int_0^t\int_0^p M_2(p,s)F(s)dsdp, \text{ unde } M_2(p,s)=\int_s^p M(p,r)\int_s^r M_1(q,s)dqdr,$$

$$U_i(t) = \int_0^t\int_0^p M_i(p,s)F(s)dsdp, \quad i=1,2,\ldots \quad (4.81)$$

unde $M_i(p,s)$ este dat de relația de recurență (4.78).

Presupunînd că $\|F(t)\| \leq A, \|M(p,s)\| \leq B$, rezultă, prin inducție completă, din (4.78):

$$\| M_i(p,s)\| \leq B^i(p-s)^{2i-2}/(2i-2)! \quad (4.82)$$

$$\| \lambda^{i-1} M_i(p,s)\| \leq B\,(|\lambda|\,Ba^2)^{i-1}/(2i-2)! \quad (4.83)$$

iar din (4.81) și (4.83) rezultă:

$$\| \lambda^i U_i(t)\| \leq A\,(|\lambda|Ba^2)^i/(2i)! \quad (4.84)$$

Din (4.84) rezultă că seria (4.79) este absolut și uniform convergentă, iar din (4.80) (prima egalitate) și din (4.81) rezultă ca suma sa este:

$$U(t)=F(t)+\lambda\int_0^t\int_0^p \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i-1}M_i(p,s)F(s)dsdp ,$$

seria care intervine sub semnul integral fiind și ea absolut și uniform convergentă datorită (4.83), la fel ca și cea cu termenul general $\lambda^i \int_o^p M(p,s)\, U_{i-1}(s)ds$. Pe de altă parte, din (4.81), rezultă, prin integrare termen cu termen, că funcţia continuă $U(t)$ dată de relaţiile (4.76),(4.77),(4.78) verifică ecuaţia (4.74). Aceasta fiind echivalentă cu (4.75), soluţia sa este unică∎

Observaţia 4.4. Dacă în teorema 4.3, $F(t)\in C^1[o,a]$ atunci şi $U(t)\in C^1[o,a]$ ∎

Observaţia 4.5. "Nucleele iterate" date de relaţia (4.76) se calculează mai simplu decît nucleele iterate clasice în cazul ecuaţiei (4.74). Mai mult, are loc o relaţie mai generală decît (4.78), pe care am demonstrat-o în [87]:

$$M_i(p,s)=\int_s^p M_{i-j}(p,r)\int_s^r M_j(q,s)dqds,\ i,j\in\mathbb{N}\ ,\ o<j<i$$

De asemenea, dacă $M(p,s)$ este simetric, simetric generalizat, simetrizabil sau simetrizabil generalizat (în sensul definiţiilor date de Th.Angheluţă [1],[2], proprietatea respectivă se transmite şi asupra "iteratelor" sale date de (4.78).[87] ∎

Revenind la ecuaţia (4.7o), din cele de mai sus, rezultă:

Lema 4.3. Dacă funcţiile $g(t)$ şi $N(t,s)$ sînt continue pe $[-a,a]$ respectiv pe $[-a,a]\times[-a,a]$, atunci ecuaţia (4.7o) are o soluţie unică în $C^1[-a,a]$ şi anume $u(t)=u_1(t)$, unde $(u_1(t),u_2(t))$ este soluţia din $C^1[-a,a]$ a sistemului (4.72).

Demonstraţie. Ecuaţia (4.7o) admite soluţie dacă şi numai dacă soluţia sistemului (4.72) verifică condiţia:

$$u_2(-t) = u_1(t) \quad \text{pentru } t\in[-a,a] \qquad (4.85)$$

Intr-adevăr, dacă (4.7o) are o soluţie $u(t)$ atunci, rezultă, ţinînd cont de construcţia sistemului (4.72), din relaţiile (4.7o), (4.7o') şi (4.71) că soluţia acestui sistem este:

$$u_1(t) = u(t),\ u_2(t) = u(-t) \qquad (4.86)$$

Invers, dacă soluţia sistemului (4.72) verifică (4.85) atunci, înlocuind în prima ecuaţie a sa $u_2(t)$ cu $u_1(-t)$, se observă că $u(t)=u_1(t)$ este soluţie a ecuaţiei (4.7o).

Pentru a demonstra că relaţia (4.85) este într-adevăr îndeplinită, fie $\tilde{u}_1(t)=u_2(-t)$; prima ecuaţie (4.72) devine:

$$u_1(t)+\lambda\int_o^t\int_o^p N(p,s)u_1(s)dsdp+\lambda\int_o^t\int_o^p N(p,-s)\tilde{u}_1(-s)dsdp=f_1(t) \qquad (4.87)$$

Inlocuind în a doua ecuaţie (4.72) t cu -t, făcînd schimbările de variabile s în -s şi apoi p în -p, din (4.71) rezultă:

$$\tilde{u}_1(t)+\lambda\int_0^t\int_0^p N(p,s)\tilde{u}_1(s)dsdp+\lambda\int_0^t\int_0^p N(p,-s)u_1(-s)dsdp=f_1(t) \quad (4.88)$$

Notînd $u^*(t)=u_1(t)-\tilde{u}_1(t)$ şi scăzînd (4.88) din (4.87) rezultă:

$$u^*(t)+\lambda\int_0^t\int_0^p N(p,s)u^*(s)dsdp-\lambda\int_0^t\int_0^p N(p,-s)u^*(-s)dsdp=0 \quad (4.89)$$

Unica soluţie mărginită şi integrabilă a ecuaţiei (4.89) este cea trivială. Intr-adevăr, dacă $|u^*(t)|\leq D, |N(p,s)|\leq B$, pentru $t,s\in[-a,a]$, rezultă din (4.89) prin inducţie completă că $|u^*(t)|\leq D(|\lambda| 2Ba)^{2n}/(2n)!$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, de unde rezultă $u^*(t)\equiv 0$, deci $\tilde{u}_1(t)\equiv u_1(t)$ şi deci relaţia (4.85) este, într-adevăr satisfăcută ■

Din lemele 4.1-4.3 rezultă următoarele două teoreme:

<u>Teorema 4.4.</u> Dacă funcţiile f(t), b(t) şi K(t,s) sînt continue pe [-a,a], respectiv pe [-a,a]x[-a,a] atunci problema (4.66) admite o soluţie unică în $C^1[-a,a]$ şi anume:

$$x(t) = u_1(t)\exp\left(-\frac{1}{a}\int_0^t b(s)ds\right)$$

unde $(u_1(t), u_2(s))$ este soluţia sistemului (4.72) ■

<u>Teorema 4.5.</u> Dacă funcţiile $f(t,\varepsilon)$, $b(t,\varepsilon)$ şi $K(t,s,\varepsilon)$ sînt continue pentru $t,s\in[-a,a]$ şi $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0$ şi $a\neq 0$ atunci ecuaţia (4.64 b) cu condiţia iniţială $x(0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)$ are soluţie unică în $C^1[-a,a]$ pentru orice $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, fixat ■

Ecuaţia (4.64 b) fiind independentă de (4.64 a), vom construi mai întîi dezvoltarea asimptotică a soluţiei sale. Ea reprezintă o perturbaţie regulată prin raport cu parametrul ε. De aceea dezvoltarea asimptotică o vom considera ca în §.1.2 sub forma:

$$x(t,\varepsilon)=\bar{x}_0(t)+\varepsilon\bar{x}_1(t)+\ldots+\varepsilon^k\bar{x}_k(t)+\ldots$$

Considerînd şi dezvoltările

$b(t,\varepsilon)=\bar{b}_0(t)+\varepsilon\bar{b}_1(t)+\ldots;\ f(t,\varepsilon)=\bar{f}_0(t)+\varepsilon\bar{f}_1(t)+\ldots$

$K(t,s,\varepsilon)=\bar{K}_0(t,s)+\varepsilon\bar{K}_1(t,s)+\ldots;\ x^0(\varepsilon)=x^0+\varepsilon x^1+\ldots$

rezultă, înlocuindu-le în (4.64 b) şi (4.2), prin identificare, problemele:

$$a\frac{d\overline{x}_o}{dt}+\overline{b}_o(t)\,\overline{x}_o(t)+C\int_{-t}^{t}\overline{K}_o(t,s)\overline{x}_o(s)ds=\overline{f}_o(t),\ \overline{x}_o(o)=x^o \qquad (4.9o)$$

$$a\frac{d\overline{x}_i}{dt}+\overline{b}_o(t)\overline{x}_i(t)+C\int_{-t}^{t}\overline{K}_o(t,s)\overline{x}_i(s)ds=\overline{f}_i(t)-$$
$$-\sum_{j=o}^{i-1}(b_{i-j}(t)\overline{x}_j(t)+C\int_{-t}^{t}\overline{K}_{i-j}(t,s)\overline{x}_j(s)ds),\ \overline{x}_i(o)=x^i,i=1,2,..(4.91)$$

<u>Teorema 4.6.</u> Dacă funcţiile $f(t,\varepsilon),b(t,\varepsilon)$ şi $K(t,s,\varepsilon)$ sînt continue şi cu derivate continue pînă la ordinul $(N+1)$ prin raport cu ε pentru $t,s\in[-a,a]$, $\varepsilon\in[o,\overline{\varepsilon}_o]$ atunci există ε_o şi există $C>o$, nedepinzînd de ε, astfel încît:

$$|x(t,\varepsilon)-\sum_{i=o}^{N}\varepsilon^i\overline{x}_i(t)|<C\,\varepsilon^{N+1} \text{ pentru } t\in[-a,a],\varepsilon\in[o,\varepsilon_o] \quad (4.92)$$

unde funcţiile $\overline{x}_i(t)$, $i=\overline{1,N}$ se determină prin rezolvarea succesivă a problemelor (4.9o)-(4.91) iar $x(t,\varepsilon)$ este soluţia ecuaţiei (4.6 b) cu condiţia iniţială $x(o,\varepsilon)=x^o(\varepsilon)$.

<u>Demonstraţie.</u> Notînd cu $u(t,\varepsilon)$ diferenţa din (4.93), rezultă datorită relaţiilor (4.9o),(4.91) că ea este soluţia problemei:

$$a\frac{du}{dt}+b(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon)+C\int_{-t}^{t}K(t,s,\varepsilon)u(s,\varepsilon)ds=O(\varepsilon^{N+1}),u(o,\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$$

Aceasta se transformă pe baza lemelor 4.1-4.3 într-un sistem de două ecuaţii integro-diferenţiale de tip Volterra şi apoi demonstraţia se continuă la fel ca şi demonstraţia teoremei 1.5 dată în [5o] şi în[135]∎

<u>Observaţia 4.6.</u> Toate problemele (4.9o),(4.91) pentru determinarea funcţiilor $\overline{x}_i(t)$, $i=\overline{o,N}$ se determină prin rezolvarea unor probleme de tipul studiat-(4.66), diferind de la una la alta doar termenul liber∎

<u>Observaţia 4.7.</u> Teorema 4.6 rămîne valabilă şi dacă $a=o$ şi $b_o(t)\neq o$, cu deosebirea că în acest caz condiţia iniţială este de prisos iar în locul problemelor (4.9o), (4.91) apar ecuaţii integrale de forma:

$$x(t)=\int_{-t}^{t}H(t,s)x(s)ds+f(t),$$

amintite şi la începutul acestui paragraf, care se pot reduce la sisteme de două ecuaţii integrale de tip Volterra. Atunci cînd rezolvarea lor este greoaie sau imposibilă se poate folosi o metodă de rezolvare aproximativă cu ajutorul funcțiilor spline pe care am dat-o în [82]. Vom considera o ecuație mai generală, cea pe care am considerat-o în [84]:

$$x(t) = \int_{-t}^{t} K(t,s,x(s))ds + f(t) \qquad (4.93)$$

unde $K(t,s,x)$ are derivate parțiale pînă la ordinul $N-1$ și satiface condiția lui Lipschitz:

$$|K(t,s,x_1)-K(t,s,x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad (4.94)$$

pentru $(t,s) \in [-a,a]\times[-a,a]$ iar $f(t)$ are derivate pînă la ordinul $N-1$. Algoritmul obișnuit de construire a funcției spline, folosit în cazul ecuațiilor integrale de tip Volterra ([47],[71]-[74], [125]) nu se poate aplica în acest caz, deoarece limitele de integrare ale ecuației (4.93) nu permit determinarea funcției spline pe intervalele succesive, de la stînga la dreapta, ale unei diviziuni a intervalului de integrare. Vom folosi următorul algoritm: considerăm o diviziune uniformă:

$\Delta : -a=-nh < -(n-1)h < \ldots < -h < o < h < \ldots < nh = a$

a intervalului $[-a,a]$ și construim funcția spline $S(t)$ corespunzatoare lui Δ astfel:

$$S(o) = f(o);\ S^{(r)}(o) = x^{(r)}(o),\ r = \overline{1,N-1} \qquad (4.95\ a)$$

$$S(t)=\sum_{r=o}^{N-1} \frac{(t-ph)^r}{r!} S^{(r)}(ph)+(t-ph)^N a_p),\ \forall t \in (ph,(p+1)h] \qquad (4.95\ b)$$

$$S(t)=\sum_{r=o}^{N-1} \frac{(t+ph)^r}{r!} S^{(r)}(-ph)+(t+ph)^N b_p,\ \forall t \in [-(p+1)h,-ph) \qquad (4.95\ c)$$

unde $x^{(r)}(o)$ rezultă din (4.93) prin derivare, iar a_p și b_p, $p=\overline{o,n-1}$ sînt constante nedeterminate. Se observă că relațiile (4.95) definesc o funcție spline polinomială de gradul N și de clasă $C^{N-1}[-a,a]$ corespunzătoare diviziunii Δ. Aceasta este unică. Mai precis, are loc:

<u>Lema 4.4.</u> Dacă $|f_{ij}(x_j^1)-f_{ij}(x_j^2)| < L_{ij}|x_j^1-x_j^2|$, pentru $i,j=\overline{1,n}$ și $\sum_{j=1}^{n} L_{ij} < 1$ pentru $i=\overline{1,n}$, atunci soluția sistemului algebric neliniar: $x_i=\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j)$, $i=\overline{1,n}$, există și este unică.

Demonstrație. Se aplică teorema 11.2.3 din [112].

Pe baza acestei leme rezultă:

Teorema 4.7. Dacă $h < (N+1)/2L$ (4.96)

atunci funcția spline care satisface condițiile (4.95) și verifică ecuația (4.93) în punctele diviziunii Δ există și este unică.

Demonstrație. Funcția $S(t)$ este determinată dacă se cunosc constantele a_p și b_p, $p = \overline{0,n-1}$. Acestea se determină succesiv impunîndu-i-se lui $S(t)$ să verifice ecuația (4.93) simultan în $(p+1)h$ și $-(p+1)h$:

$$\sum_{r=0}^{N-1} \frac{h^r}{r!}S^{(r)}(ph)+h^N a_p=f((p+1)h)+\sum_{i=-p}^{p-1}\int_{ih}^{(i+1)h} K((p+1)h,s,S(s))ds+$$

$$+\int_{-(p+1)h}^{-ph} K((p+1)h,s,\sum_{r=0}^{N-1}\frac{(s+ph)^r}{r!}S^{(r)}(-ph)+(s+ph)^N b_p)ds\ +$$

$$+\int_{ph}^{(p+1)h} K((p+1)h,s,\sum_{r=0}^{N-1}\frac{(s-ph)^r}{r!}S^{(r)}(ph)+(s-ph)^N a_p)ds \qquad (4.97\ a)$$

...

$$\sum_{r=0}^{N-1}\frac{(-h)^r}{r!}S^{(r)}(-ph)+(-h)^N b_p=f(-(p+1)h)-$$

$$-\sum_{i=-p}^{p-1}\int_{ih}^{(i+1)h} K(-(p+1)h,s,S(s))ds\ -$$

$$-\int_{-(p+1)h}^{-ph} K(-(p+1)h,s,\sum_{r=0}^{N-1}\frac{(s+ph)^r}{r!}S^{(r)}(-ph)+(s+ph)^N b_p)ds\ -$$

$$-\int_{ph}^{(p+1)h} K(-(p+1)h,s,\sum_{r=0}^{N-1}\frac{(s-ph)^r}{r!}S^{(r)}(ph)+(s-ph)^N a_p)ds \qquad (4.97\ b)$$

Sistemul (4.97) se scrie prescurtat sub forma:

$$a_p = C_{p1}+f_{11}(a_p)+f_{12}(b_p) \qquad (4.98\ a)$$

$$b_p = C_{p2}+f_{21}(a_p)+f_{22}(b_p) \qquad (4.98\ b)$$

și datorită condiției (4.94) funcțiile f_{ij} satisfac condițiile:

$$|f_{ij}(x_1)-f_{ij}(x_2)| \le \frac{Lh}{N+1}|x_1-x_2| \qquad i,j=1,2 \qquad (4.99)$$

Se aplică lema 4.4 sistemului (4.98) ţinînd cont de condiţiile (4.96) şi (4.99)■

Revenind la dezvoltarea asiptotică a problemei (4.64)-(4.2) aceasta se face ca în paragraful precedent, cu următoarele deosebiri: în locul ecuaţiilor (4.5b) şi (4.7b) se consideră ecuaţiile:(4.90), respectiv,(4.91);ecuaţiile (4.6 b)şi (4.8 b) sînt de prisos,considerîndu-se peste tot $\hat{x}_i(\tau) \equiv 0$; în locul condiţilor pentru $f(z,x,J,t,\varepsilon)$ se cer în condiţia 4.1 condiţiile din teorema 4.6;în aceste condiţii condiţia 4.2 este întotdeauna îndeplinită.Cu aceste precizări, din teoremele 4.2 şi 4.6 rezultă:

<u>Teorema 4.8</u>. In condiţiile teoremelor 4.2 şi 4.6 soluţia problemei (4.64)-(4.2) există unic pentru $t\in[0,a]$ şi au loc evaluările asimptotice (4.92), respectiv (1.39), (1.38) pentru $y(t,\varepsilon):=z(t,\varepsilon)$, $Y_{\varepsilon N}(t,\varepsilon):= Z_{\varepsilon N}(t,\varepsilon)$■

<u>Observaţia 4.8</u>. Se poate construi o dezvoltare asimptotică pentru sistemul (4.64) şi în cazul în care termenul integral J din (4.64) este de tip Volterra sau Fredholm, de forma (1.40 c). In acest caz dezvoltarea pentru(4.64 b) se face ca mai sus, obţinîndu-se funcţiile $\bar{x}_i(t)$, iar funcţiile $\hat{x}_i(\tau)$ se consideră identic nule; cu ajutorul acestora se determină funcţiile $\bar{z}_i(t),\hat{z}_i(\tau)$ după metoda[50] descrisă în § 1.4■

<u>Comentarii bibliografice</u>.

Problemele (4.64) şi(4.66) nu au mai fost studiate de către alţi autori.

In schimb,ecuaţiile integrale cu limite simetrice faţă de zero care se obţin din (4.66)pentru a =o şi b(t) ≡1 au fost studiate de către V.Volterra şi J.Pérés [146]şi M.Ghermănescu [33].Din aceste lucrări a fost preluată ideea de demonstraţie a lemei 4.3.

Demonstraţia teoremei 4.3 este clasică , după modelul teoremelor de existenţă şi unicitate asupra ecuaţiilor integrale de tip Volterra de speţa a doua.Dar atît teorema 4.3 cît şi observaţia 4.5 scot în evidenţă faptul că toată teoria clasică (inclusiv rezultatele lui Th.Angheluţă din [1] şi [2]asupra ecuaţiilor integrale de tip Volterra de speţa a doua poate fi pusă sub o altă formă,mai convenabilă,în cazul ecuaţiilor integrale de forma (4.74).

Lema 4.4 este o consecinţă a teoremei 11.2.3. din monografia lui I.A.Rus [112].

Rezultatele din acest paragraf sînt publicate în lucrările [82] , [84] ,[86] , şi [92]■

CAPITOLUL V

APLICATII . FUNCTIILE DE SENSIBILITATE ALE SISTEMELOR DINAMICE CU ABATERI PARAMETRICE DE TIP (λ)

In acest capitol vom aplica unele rezultate din capitolele precedente (privind dezvoltările asimptotice ale soluţiilor sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu perturbaţii singulare) la calculul funcţiilor de sensibilitate ale sistemelor dinamice cu abateri parametrice de tip (λ).

Vom ilustra aceste aplicaţii cu exemple din tehnică.

5.1. Problema sensibilităţii sistemelor dinamice.

In acest paragraf vom prezenta principalele rezultate obţinute de P.Kokotovic şi P.Sannuti în teoria sistemelor dinamice precum şi rezultatele obţinute anterior de A.B. Vasilieva pe care se bazează rezultatele primilor doi dar şi cele ale autorului din paragraful următor.

Problema sensibilităţii parametrice apare în tehnică şi în toate domeniile de cercetare în care sînt folosite modele matematice în scopul analizei sau sintezei.

In cazul sistemelor dinamice, intuitiv, prin sensibilitatea unui sistem se înţelege efectul abaterilor parametrice asupra indicatorilor care caracterizează comportarea dinamică a sistemului cum ar fi: traiectoriile de stare, funcţia de transfer, indicatori de performanţă , etc. Cauzele care conduc la abateri parametrice pot fi: toleranţe de fabricaţie ale unor sisteme tehnice, imprecizia la măsurare la identificarea sistemelor, aproximaţii sau simplificări la formularea modelului matematic, modificarea condiţiilor de mediu, modificarea condiţiilor de funcţionare,etc.

Abaterile parametrice ale sistemelor continue pot fi împărţite în 3 clase (După Miller-Murray, conf. [29]):

(α) Abateri care nu schimbă structura sistemului(schimbarea structurii se poate manifesta prin modificarea ordinului sistemului , a gradului numitorului unei funcţii de transfer,etc.) altfel spus, faţă de abaterile de tip (α) sistemul prezintă o stabilitate structurală (noţiune introdusă în 1937 de Andronov), în sensul că sistemul rămîne din punct de vedere calitativ același la abateri mici ale parametrilor, spre deosebire de stabilitatea în sens Liapunov care cere doar ca sistemul să revină la starea sa de echilibru sau să se abată foarte puțin de la aceasta după o perturbație parametrică mică. Cauzele care produc astfel de abateri pot fi: toleranțe de fabricație, schimbarea condițiilor de mediu sau de funcționare.

(β) Abateri ale condițiilor inițiale de la valoarea lor nominală. Cauze: imprecizia în măsurare, reglarea inexactă.

(λ) Abateri care schimbă structura sistemului. Cauze: idealizarea modelului matematic al sistemului (de exemplu, neglijarea unor capacități sau inductanțe parazite), reducerea ordinului sistemului, erori de identificare.

Fie $\underline{\xi} = \underline{\xi}(\varepsilon,\cdot)$ o funcție derivabilă prin raport cu ε care caracterizează comportarea unui sistem. (In acest paragraf vom adopta notația din științele tehnice: "$\underline{f}$" pentru a indica faptul că f este o mărime vectorială).

<u>Definiția 5.1</u> [58]. Funcția

$$\underline{S}(\varepsilon_0,\cdot) = \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=\varepsilon_0}$$

se numește funcție de sensibilitate (absolută) a sistemului pentru valoarea nominală ε_0 a parametrului ε ∎

Ea permite aproximarea abaterii funcției caracteristice a sistemului la o variație $\Delta\varepsilon$ a lui ε prin:

$$\Delta \underline{\xi}(\varepsilon,\cdot) \approx \underline{S}(\varepsilon_0,\cdot)\Delta\varepsilon$$

In cazul sistemelor dinamice problema sensibilității nu este o problemă nouă, fiind de fapt, problema influenței coeficienților ecuațiilor diferențiale asupra soluțiilor. Mult timp însă această problemă a avut doar un interes pur matematic. După cum am văzut în introducere, pentru sistemele continue perturbate singular, primul care și-a pus problema dependenței continue a soluției față de parametru a fost A.N.Tihonov, problemă pe care a rezolvat-o încă din 1950 [121] pentru sistemele de forma (1.16) de tipul "T_0" și pe care noi am prezentat-o în § 1.3.

In același an A.B.Vasilieva a rezolvat problema derivării soluției problemei (1.16)-(1.17) prin raport cu parametrul, problemă pe care o rezumăm în:

<u>Teorema 5.1</u> [129]. Dacă problema (1.16)-(1.17) este de tipul "V_1" atunci:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\partial \underline{x}(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \underline{\lambda}(t), \qquad 0 < t \leq a \tag{5.1}$$

unde $\underline{\lambda}(t)$ este soluţia problemei Cauchy liniare:

$$\dot{\underline{\lambda}} = \underline{f}'_x(\underline{A})\underline{\lambda} + \underline{f}'_z(\underline{A})\underline{\nu} + \underline{f}'_t(\underline{A}); \underline{A} \equiv (\underline{z}_0(t), \underline{x}_0(t), t) \tag{5.2a}$$

$$\underline{\nu} = (\underline{F}'_z(\underline{A}))^{-1}\cdot \dot{\underline{\varphi}}(\underline{x}_0(t),t) - (\underline{F}'_z(\underline{A}))^{-1}\underline{F}'_x(\underline{A})\underline{\lambda} \tag{5.2b}$$

$$\underline{\lambda}(0) = \int_0^\infty (\underline{f}(\tilde{\underline{z}}(\tau), \underline{x}^0, 0) - \underline{f}(\underline{\varphi}(\underline{x}^0, 0), \underline{x}^0, 0))d\tau \;\blacksquare \tag{5.2c}$$

Mai tîrziu, în [130], A.B.Vasilieva a rezolvat şi problema derivatelor de ordin superior prin raport cu parametrul ale soluţiei problemei (1.16)-(1.17):

<u>Lema 5.1</u> [130]. Dacă sistemul (1.16) este de tipul "V_p" atunci derivatele de ordinul k prin raport cu ε ale soluţiei sistemului (1.16), notate $(\underline{z}_{\varepsilon^k}, \underline{x}_{\varepsilon^k})$ constituie pentru $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ soluţia problemei:

$$\varepsilon\, \dot{\underline{z}}_{\varepsilon^k} + k\, \dot{\underline{z}}_{\varepsilon^{k-1}} = \underline{F}_{\varepsilon^k} \equiv \underline{F}_k(\underline{z}, \underline{x}, t, \underline{z}_\varepsilon, \underline{x}_\varepsilon, \ldots, \underline{z}_{\varepsilon^k}, \underline{x}_{\varepsilon^k}) \tag{5.3a}$$

$$\dot{\underline{x}}_{\varepsilon^k} = \underline{f}_{\varepsilon^k} \equiv \underline{f}_k(\underline{z}, \underline{x}, t, \underline{z}_\varepsilon, \underline{x}_\varepsilon, \ldots, \underline{z}_{\varepsilon^k}, \underline{x}_{\varepsilon^k}) \tag{5.3b}$$

$$\underline{z}_{\varepsilon^k}(0,\varepsilon) = 0, \underline{x}_{\varepsilon^k}(0,\varepsilon) = 0, k = \overline{1,p} \tag{5.4}$$

iar derivatele de acelaşi ordin la limită:

$$\overline{\underline{z}}_{\varepsilon^k}(t) = \lim_{\varepsilon\to+0} \underline{z}_{\varepsilon^k}(t,\varepsilon), \quad \overline{\underline{x}}_{\varepsilon^k}(t) = \lim_{\varepsilon\to+0} \underline{x}_{\varepsilon^k}(t,\varepsilon) \tag{5.5}$$

verifică sistemul degenerat al sistemului (5.3):

$$\underline{0} = \underline{F}_k(\overline{\underline{z}}, \overline{\underline{x}}, t, \overline{\underline{z}}_\varepsilon, \overline{\underline{x}}_\varepsilon, \ldots, \overline{\underline{z}}_{\varepsilon^k}, \overline{\underline{x}}_{\varepsilon^k}) - k\, \dot{\overline{\underline{z}}}_{\varepsilon^{k-1}} \tag{5.6a}$$

$$\dot{\overline{\underline{x}}}_{\varepsilon^k} = \underline{f}_k(\overline{\underline{z}}, \overline{\underline{x}}, t, \overline{\underline{z}}_\varepsilon, \overline{\underline{x}}_\varepsilon, \ldots, \overline{\underline{z}}_{\varepsilon^k}, \overline{\underline{x}}_{\varepsilon^k}) \tag{5.6b}$$

dar în general condiţiile iniţiale în t=0 pentru aceste funcţii sînt diferite de (5.4)∎

Pentru a determina "saltul" lui $\underline{x}_{\varepsilon^k}$ în t=0 (dacă acest salt este determinat, saltul lui $\underline{z}_{\varepsilon^k}$ rezultă din (5.6a)), se consideră sistemul auxiliar obţinut din (1.16)-(1.17) prin schimbarea $t = \tau\varepsilon$:

$$\frac{d\underline{z}}{d\tau} = \underline{F}(\underline{z}, \underline{x}, \tau\varepsilon) \tag{5.7a}$$

$$\frac{d\underline{x}}{d\tau} = \underline{f}(\underline{z}, \underline{x}, \tau\varepsilon) \tag{5.7b}$$

$$\underline{z}(0,\varepsilon) = \underline{z}^0, \underline{x}(0,\varepsilon) = \underline{x}^0 \tag{5.8}$$

Deoarece, prin raport cu noua variabilă, problema (5.7)-(5.8) este o perturbaţie regulată soluţia sa formală se determină sub forma:

$$\underline{y}(\tau,\varepsilon) := \underline{y}_0(\tau) + \varepsilon \underline{y}_1(\tau) + \varepsilon^2 \underline{y}_2(\tau) + \dots \qquad (5.9)$$

Coeficienţii acestor două serii se determină prin înlocuirea lui $\underline{y}(\tau,\varepsilon)$ din (5.9.) în (5.7) şi dezvoltarea funcţiilor din membrul drept după ε în vecinătatea lui o:

$$\underline{f}(\underline{z},\underline{x},\tau\varepsilon) = \underline{f}_0(\tau) + \varepsilon \underline{f}_1(\tau) + \varepsilon^2 \underline{f}_2(\tau) + \dots \qquad (5.1o\ a)$$

$$\underline{f}_0(\tau) \equiv \underline{f}(\underline{z}_0(\tau), \underline{x}_0(\tau), o) \qquad (5.1o\ b)$$

$$\underline{f}_i(\tau) = \frac{1}{i!}\left[\frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} \underline{f}(\underline{z}_0 + \varepsilon \underline{z}_1 + \dots, \underline{x}_0 + \varepsilon \underline{x}_1 + \dots; \tau\varepsilon)\right]\Big|_{\varepsilon=0} \qquad (5.1o\ c)$$

Analog se dezvoltă $\underline{F}(\underline{z},\underline{x},\tau\varepsilon)$.

Teorema principală din [13o] se formulează astfel:

<u>Teorema 5.2</u> [13o]. Dacă problema (1.16)-(1.17) este de tipul "V_p" atunci valorile la limită (5.5) ale derivatelor de ordinul k, $o<k\leq p$ prin raport cu ε ale soluţiei problemei (1.16)-(1.17) există şi satisfac sistemul degenerat (5.6) cu condiţia iniţială:

$$\bar{\underline{x}}_{\varepsilon^k}(o) = \bar{\underline{x}}^{o}_{\varepsilon^k} = (-1)^k \int_0^\infty \tau^k \underline{f}^{(k)}_{k-1}(\tau)\, d\tau \qquad (5.11)$$

unde $\underline{f}_{k-1}(\tau)$ rezultă din (5.1o)a

Aceste probleme au căpătat (şi) o importanţă practică odată cu dezvoltarea procedeelor de proiectare în inginerie.

P.Kokotevic şi P.Sannuti [58] au aplicat rezultatele obţinute în teoremele 1.3 şi 5.1 pentru problema (1.16)-(1.17) la sistemele continue de forma:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{z},t,\underline{u},\varepsilon) \qquad \underline{x}(t_0) = \underline{x}^o \qquad (5.12\ a)$$

$$\varepsilon\dot{\underline{z}} = \underline{F}(\underline{x},\underline{z},t,\underline{u},\varepsilon) \qquad \underline{z}(t_0) = \underline{z}^o \qquad (5.12\ b)$$

$$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x},\underline{z},t,\underline{u},\varepsilon) \qquad (5.12\ c)$$

(unde : $\underline{x} = [x_1,\dots,x_m]^T$ şi $\underline{z} = [x_{m+1},\dots,x_{m+M}]^T$ reprezintă starea sistemului, $\underline{u}$ - intrarea

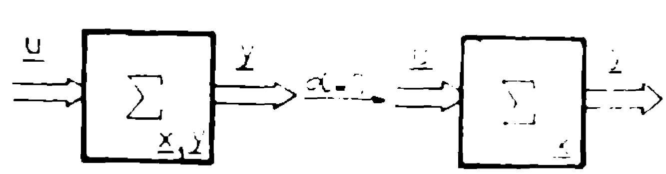

Fig.1

iar $\underline{y}$ - ieşirea acestuia, $t\in[o,a]$), sisteme care prezintă abateri de tip (λ) datorită parametrului mic (trecerea de la $\varepsilon \neq o$ la $\varepsilon = o$ este schiţată în fig.1)

Considerînd pentru sistemul (5.12) funcţia $\underline{\xi} = (\underline{x},\underline{z},\underline{y})^T$ şi sistemul său redus (neperturbat):

$$\dot{\underline{x}}_o = \underline{f}(\underline{x}_o, \underline{z}_o, t, \underline{u}, o), \ \underline{x}_o(o) = \underline{x}^o \qquad (5.13\ a)$$

$$\underline{0} = \underline{F}(\underline{x}_o, \underline{z}_o, t, \underline{u}, o) \qquad (5.13\ b)$$

$$\underline{y}_o = \underline{g}(\underline{x}_o, \underline{z}_o, t, \underline{u}, o) \qquad (5.13\ c)$$

se pune problema în ce condiţii funcţia de sensibilitate:

$$\underline{S}(\varepsilon,t) = \begin{bmatrix}\mu\\ \lambda\\ \sigma\end{bmatrix}, \ \underline{\mu}(\varepsilon,t) = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}, \ \underline{\xi}(\varepsilon,t) = \frac{\partial z}{\partial \varepsilon}, \ \underline{\sigma}(\varepsilon,t) = \frac{\partial \underline{y}}{\partial \varepsilon} \qquad (5.14)$$

a sistemului (5.12) poate fi aproximată pentru $\varepsilon \to +o$ cu ajutorul sistemului redus (5.13),(care are cu p ecuaţii diferenţiale mai puţin decît(5.12)). Pentru aceasta este suficient ca pentru o funcţie $\underline{u}(t), t \in [o,a]$ dată, soluţia sistemului (5.12) să converga pentru $\varepsilon \to +o$ către soluţia sistemului (5.13) şi să existe limitele:

$$\bar{\underline{\mu}}(t) = \lim_{\varepsilon \to +o} \underline{\mu}(\varepsilon, t), \quad \bar{\xi}(t) = \lim_{\varepsilon \to +o} \xi(\varepsilon,t), \bar{\underline{\sigma}}(t) = \lim_{\varepsilon \to +o} \sigma(\varepsilon,t) \qquad (5.15)$$

Deoarece pentru $\underline{u}(t)$ dat sistemului (5.12 a) şi (5.12 b) este de fapt un sistem de forma (I.16), condiţiile 1.1-1,5,1,1',1.4' se enunţă şi pentru sistemul (5.12) în mod analog,ţinînd cont de prezenţa suplimentară a funcţiilor $\underline{u}$ şi $\underline{g}$(care nu influenţează calitativ problema). Astfel, condiţiile 1.1,1.1' se impun şi funcţiei $\underline{g}$, în condiţia 1.2, $\underline{z} = \underline{\varphi}(\underline{x},\underline{u},t)$, în condiţia 1.5, punctul de repaus este $\underline{z} = \underline{\varphi}(\underline{x}^o, \underline{u}(o), o)$. Vom numi şi sistemele de forma (5.12) care îndeplinesc condiţii analoage cu condiţiile 1.1.-1.5, respectiv 1.1', 1.2, 1.3, 1.4', 1.5,(impuse sistemului (1.16)) sisteme de tipul "T_p", respectiv "V_p" şi teoremele 1.3, 5.1 şi 5.2, rămîn valabile ,în condiţiile respective, şi pentru sistemul (5.12). Astfel convergenţa cerută mai sus este asigurată pentru sistemele de forma (5.12) de tipul "T_o" iar limitele (5.15) sînt precizate în:

<u>Teorema 5.3</u> [58]. Dacă sistemul (5.12) este de tipul"V_1" atunci funcţia de sensibilitate la limită a sa: $(\bar{\mu}(t), \bar{\xi}(t), \bar{\sigma}(t))^T$ este dată de ecuaţiile:

$$\dot{\bar{\underline{\mu}}} = \left[\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{z}}\left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{z}}\right)^{-1}\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}}\right]_o \bar{\underline{\mu}} + \left[\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{z}}\left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{z}}\right)^{-1}\right]_o \cdot \dot{\underline{z}}_o - \left[\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{z}}\left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{z}}\right)^{-1}\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}}\right]_o + \left[\frac{\partial \underline{f}}{\partial \varepsilon}\right]_o \qquad (5.16\ a)$$

$$\bar{\xi} = \left[\left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{z}}\right)^{-1}\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}}\right]_o \bar{\underline{\mu}} + \left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{z}}\right)_o^{-1} \dot{\underline{z}}_o - \left[\left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{z}}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{F}}{\partial \varepsilon}\right]_o \qquad (5.16\ b)$$

$$\bar{\underline{\sigma}} = \left[\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}} - \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{z}}\left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{z}}\right)^{-1}\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}}\right]_o \bar{\underline{\mu}} + \left[\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{z}}\left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{z}}\right)^{-1}\right] \cdot \dot{\underline{z}}_o - \left[\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{z}}\left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{z}}\right)^{-1}\frac{\partial \underline{F}}{\partial \varepsilon}\right]_o + \left[\frac{\partial \underline{g}}{\partial \varepsilon}\right]_o \qquad (5.16\ c)$$

(unde $\dot{\underline{z}}_o$ rezultă din sistemul (5.13)), cu condiția inițială ;

$$\bar{\mu}(t_o) = \int_{t_o}^{t} (\underline{f}(\underline{x}(t_o), \tilde{\underline{z}}(\tau), t_o, \underline{u}(t_o), o) - \underline{f}(\underline{x}(t_o), \underline{z}_o(t_o), \underline{u}(t_o), o))d\tau \qquad (5.17)$$

iar $\tilde{\underline{z}}(\tau)$ este soluția problemei

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = \underline{F}(\underline{x}(t_o), \tilde{\underline{z}}(\tau), t_o, \underline{u}(t_o), o); \underline{z}(t_o) = \underline{z}^o \qquad (5.18)$$

<u>Comentarii bibliografice</u>.

Primul care a sesizat importanța sensibilității parametrice în proiectarea circuitelor de reglare a fost H.W.Bode [10] dar o contribuție importantă la elaborarea teoriei sensibilității sistemelor dinamice a adus-o P.Kokotovic [58], [59]

Această teorie, tratată pe larg și în monografiile lui J.B.Cruz Jr. [20] și a lui P.M.Frank [29], a găsit apoi aplicații nu numai în tehnică ci și în științele economice și sociale.

§.5.2. Funcțiile de sensibilitate de ordin superior aferente sistemelor de ecuații diferențiale cu perturbații singulare

In acest paragraf vom defini funcțiile de sensibilitate de ordinul k, k∈N pentru problema (1.16)-(1.17) și vom stabili legătura dintre acestea și funcțiile $(\bar{z}_k(t), \bar{x}_k(t))$ din dezvoltarea asimptotică (1.23), rezultînd în felul acesta o metodă de calcul pentru aceste funcții de sensibilitate. Vom extinde aceste rezultate la problema (5.12).

In cazul sistemelor de forma (1.45) vom stabili echivalența dintre funcțiile de sensibilitate de ordinul k, funcțiile $\bar{z}_k(t)$ din dezvoltarea (1.23) și partea din C^m a funcțiilor $\underline{z}_k(t, \tau(t,\varepsilon))$ care rezultă din (1.63).

Vom considera pentru aceste sisteme și cazul cînd condiția de stabilitate 1.4' nu este satisfăcută.

Este natural să considerăm pentru funcțiile de sensibilitate de ordin superior următoarea definiție.

<u>Definiția 5.2.</u> Se numește funcție de sensibilitate de ordinul $k, k=\overline{1,p}$ a sistemului (1.16)-(1.17) funcția :

$$(\mu_k(t,\varepsilon), \zeta_k(t,\varepsilon)); \mu_k(t,\varepsilon) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k x}{\partial \varepsilon^k}, \quad \zeta_k(t,\varepsilon) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k z}{\partial \varepsilon^k} \qquad (5.19)$$

unde $(\underline{z}(t,\varepsilon), \underline{x}(t,\varepsilon))$ este soluția acestui sistem

Fie funcţiile de sensibilitate la limită:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \mu_k(t,\varepsilon) = \bar{\mu}_k(t), \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \zeta_k(t,\varepsilon) = \bar{\zeta}_k(t), \quad k=\overline{1,p} \qquad (5.20).$$

<u>Teorema 5.4</u>. Dacă problema (1.16)-(1.17) este de tipul "Vp" atunci funcţiile de sensibilitate la limită(5.20) există şi coincid cu coeficienţii de acelaşi ordin ai seriei regulate (1.23 b) .Mai precis, au loc egalităţile:

$$\bar{\mu}_k(t) = \bar{x}_k(t), \quad \bar{\zeta}_k(t) = \bar{z}_k(t) \quad , \quad k=\overline{1,p} \qquad (5.21)$$

unde $\bar{x}_k(t)$, $\bar{z}_k(t)$ sînt funcţiile din (1.23 b) determinate prin metoda Vasilieva expusă în § 1.4.

<u>Demonstraţie</u>. Derivînd membru cu membru relaţiile (1.16) prin raport cu ε şi trecînd la limită pentru $\varepsilon \to +0$ se observă că $(\bar{\mu}_1(t), \bar{\zeta}_1(t))$ este ca şi $(\bar{x}_1(t), \bar{z}_1(t))$ soluţia sisitemului (1.33) cu k:=1. Repetînd procedeul , va rezulta succesiv că $(\bar{\mu}_k(t)$, $\bar{\zeta}_k(t))$ verifică sisitemul (1.33) pentru $k=\overline{1,p}$ la fel ca şi funcţiile $(\bar{x}_k(t), \bar{z}_k(t))$.

De altfel la aceeaşi concluzie se ajunge pornind şi de la lema 5.1.

Mai trebuie să demonstrăm că aceste funcţii verifică şi aceeaşi condiţie iniţială.In acest scop stabilim mai întîi legătura dintre dezvoltările (1.23) şi (5.9).

Efectuînd în (1.23) schimbarea de variabilă $t=\tau\varepsilon$ rezultă:

$$y(\tau\varepsilon,\varepsilon) = \bar{y}(\tau\varepsilon,\varepsilon) + \hat{x}(\tau,\varepsilon) \qquad (5.22\ a)$$

$$\bar{y}(\tau\varepsilon,\varepsilon) = \bar{y}_0(\tau\varepsilon) + \varepsilon\bar{y}_1(\tau\varepsilon) + \varepsilon^2\bar{y}_2(\tau\varepsilon) + \ldots =$$
$$= \bar{y}_0(0) + \dot{\bar{y}}_0(0)\tau\varepsilon + \ddot{\bar{y}}_0(0)\,\tau^2/2\;\varepsilon^2 + \ldots +$$
$$+\varepsilon(\bar{y}_1(0) + \dot{\bar{y}}_1(0)\tau\varepsilon + \ddot{\bar{y}}_1(0)\,\tau^2/2\;\varepsilon^2 + \ldots) +$$
$$+\varepsilon^2(\bar{y}_2(0) + \dot{\bar{y}}_2(0)\tau\varepsilon + \ddot{\bar{y}}_2(0)\,\tau^2/2\;\varepsilon^2 + \ldots) + \ldots \qquad (5.22\ b)$$

$$\hat{y}(\tau,\varepsilon) = \hat{y}_0(\tau) + \varepsilon\hat{y}_1(\tau) + \varepsilon^2\hat{y}_2(\tau) + \ldots \qquad (5.22\ c)$$

Comparînd (5.22) cu (5.9) rezultă prin inducţie completă:

$$y_0(\tau) = \hat{y}_0(\tau) + \bar{y}_0(0) \qquad (5.23\ a)$$

$$y_1(\tau) = \hat{y}_1(\tau) + \bar{y}_1(0) + \dot{\bar{y}}_0(0)\tau \qquad (5.23\ b)$$

$$y_k(\tau) = \hat{y}_k(\tau) + \sum_{i=0}^{k} y^{(i)}_{k-i}(0)\,\tau^i/(i!) \qquad k=\overline{0,p} \qquad (5.23\ c)$$

Prin urmare diferenţa dintre funcţiile $y_k(\tau)$ şi $\hat{y}_k(\tau)$ este un polinom determinat de gradul k în variabila τ.

BUPT

Din (1.29) rezultă:

$$\underline{f}(\tau,\varepsilon) = \underline{f}(\underline{\bar{z}}(\tau\varepsilon,\varepsilon)+\underline{\hat{z}}(\tau,\varepsilon),\ \underline{\bar{x}}(\tau\varepsilon,\varepsilon)+\underline{\hat{x}}(\tau,\varepsilon),\tau\varepsilon) -$$
$$-\underline{f}(\underline{\bar{z}}(\tau\varepsilon,\varepsilon),\ \underline{\bar{x}}(\tau\varepsilon,\varepsilon),\tau\varepsilon) = \underline{f}(\underline{z}(\tau,\varepsilon),\underline{x}(\tau,\varepsilon),\tau\varepsilon) -$$
$$-\underline{f}(\underline{z}(\tau,\varepsilon)-\underline{\hat{z}}(\tau,\varepsilon),\ \underline{x}(\tau,\varepsilon)-\underline{\hat{x}}(\tau,\varepsilon),\tau\varepsilon) =$$
$$=\underline{f}_o(\tau)+\varepsilon\underline{f}_1(\tau)+\varepsilon^2\underline{f}_2(\tau)+\ldots+$$
$$+\underline{f}_o^*(\tau)+\varepsilon\underline{f}_1^*(\tau)+\varepsilon^2\underline{f}_2^*(\tau)+\ldots \qquad (5.24)$$

unde funcțiile $\underline{f}_i(\tau)$ sînt cele din (5.1o) iar din (5.23) rezultă:

$$\underline{f}_o^*(\tau)=\underline{f}(\underline{z}_o(\tau)-\underline{\hat{z}}_o(\tau),\ \underline{x}_o(\tau)-\underline{\hat{x}}_o(\tau),\ o) = \underline{f}(\underline{\bar{z}}_o,\underline{x}^o,o),$$
$$\underline{f}_1^*(\tau)=\underline{f}_z(\underline{\bar{z}}_o(o),\underline{x}^o,o)(\underline{z}_1(\tau)-\underline{\hat{z}}_1(\tau))+\underline{f}_x(\underline{\bar{z}}_o(o),\underline{x}^o,o)(\underline{x}_1(\tau)-\underline{\hat{x}}_1(\tau))+$$
$$+\underline{f}_t(\underline{\bar{z}}_o(o),\underline{x}^o,o) = \underline{f}_z(\underline{\bar{z}}_o(o),\underline{x}^o,o)(\underline{\bar{z}}_1(o)+\dot{\underline{\bar{z}}}_o(o)\tau)+$$
$$+\underline{f}_x(\underline{\bar{z}}_o(o),\underline{x}^o,o)(\underline{\bar{x}}_1(o)+\dot{\underline{\bar{x}}}_o(o)\tau)+\underline{f}_t(\underline{\bar{z}}_o(o),\underline{x}^o,o),$$

iar celelalte funcții $\underline{f}_k^*(\tau)$, $k=\overline{1,p}$, sînt și ele polinoame cu coeficienți determinați, constanți, de gradul k în variabila τ.

Din (5.24) și (5.1o) rezultă:

$$\underline{\hat{f}}_k(\tau) = \underline{f}_k(\tau)+\underline{f}_k^*(\tau),\ k=o,1,2,\ldots \qquad (5.25)$$

și de aici rezultă: $\underline{\hat{f}}_{k-1}^{(k)}(\tau) = \underline{f}_{k-1}^{(k)}(\tau)$, $k=1,2,\ldots$

Din această egalitate și din (5.11) rezultă:

$$\underline{\tilde{x}}_{\varepsilon^k}(o) = (-1)^k\int_o^\infty \tau^k\,\underline{f}_{k-1}^{(k)}(\tau)\,d\tau=$$
$$=(-1)^k\left[\left[\sum_{i=o}^{k-1}(-1)^i(\tau^k)^{(i)}\underline{f}_{k-1}^{(k-1-i)}(\tau)\right]\Big|_o^\infty+(1)^k\int_o^\infty(\tau^k)^{(k)}\underline{f}_{k-1}(\tau)d\tau\right]=$$
$$=k!\int_o^\infty\underline{\hat{f}}_{k-1}(\tau)d\tau+\lim_{\tau\to\infty}\left[\sum_{i=o}^{k-1}(-1)^{k+i}\tau(\tau-1)\ldots(\tau-i+1)\underline{\hat{f}}_{k-1}^{(k-1-i)}(\tau)\right] \qquad (5.26)$$

Deoarece (cf.[135], p.64):

$$\underline{\hat{f}}_{k-1}(\tau)=\sum_{i=o}^{k-1}\left[\left(\int_o^1\underline{A}_i(\sigma,\tau)d\sigma\right)\underline{\hat{z}}_{k-1-i}(\tau)+\left(\int_o^1\underline{B}_i(\sigma,\tau)d\sigma\right)\underline{\hat{x}}_{k-1-i}(\tau)\right] \qquad (5.27)$$

unde $\underline{A}_i(\sigma,\tau)$, $\underline{B}_i(\sigma,\tau)$ sînt matrici determinate, ale căror elemente sînt de ordinul $O(\tau^i)$ pentru $\tau\to\infty$ iar funcțiile $\underline{\hat{y}}_i(\tau)$ satisfac evaluarea ([135], p.57):

$$\|\underline{\hat{y}}_i(\tau)\| \le Ce^{-\varkappa\tau} \quad \text{pentru } \tau\ge o, \qquad (5.28)$$

unde $C>o$ și $\varkappa>o$ sînt constante, rezultă din (5.27) și (5.28) că funcțiile $\underline{\hat{f}}_{k-1}(\tau)$ tind la zero pentru $\tau\to\infty$.

Mai mult, din (1.34) rezulta că şi derivatele funcţiilor $\hat{y}_i(\tau)$ admit evaluări exponenţiale de forma (5.28) şi din (5.27) rezultă deci că atît funcţiile $\hat{f}_{k-1}'(\tau)$ cît şi derivatele lor pînă la ordinul p, înmulţite cu polinoame de variabilă τ de orice ordin au limita zero pentru $\tau \to \infty$.

Prin urmare, din (5.26) rezultă:

$$\bar{x}_{\varepsilon^k}(o)=k!\int_o^{\infty}\hat{f}_{k-1}(\tau)d\tau \qquad (5.29)$$

iar din (5.19),(1.37) şi (5.29) rezultă:

$$\bar{x}_k(o)=\bar{\mu}_k(o)=\int_o^{\infty}\hat{f}_{k-1}(\tau)d\tau \;\blacksquare \qquad (5.30)$$

Observatia 5.1. Din (1.31a), (1.33) cu k=1 şi (5.23a) rezultă că $(\bar{z}_1(t),\ \bar{x}_1(t))$ verifică sistemul (5.2a)-(5.2b) iar datorită relaţiei (1.37) cu k=1 rezultă $\bar{x}_1(o)=\lambda(o)$, de unde rezultă $\bar{x}_1(t)=\lambda(t)$. Prin urmare pentru k=1, teorema 5.4 este echivalentă cu teorema 5.1 ■

Observatia 5.2. Funcţiile de sensibilitate la limită (5.20) rezultă direct din dezvoltarea asimptotică după metoda Vasilieva, rezultînd astfel o metodă de calcul a lor.

De altfel, suma parţială (1.38) a acestei dezvoltări oferă o informaţie asupra comportării soluţiei problemei (1.16)-(1.17) şi în stratul limită, ceea ce funcţiile de sensibilitate nu o fac. Ele dau o aproximaţie asimptotică a soluţiei dar nu în stratul limită, prin:

$$\underline{x}(t,\varepsilon)\approx\sum_{k=o}^{p}\varepsilon^k\,\bar{\mu}_k(t);\quad \underline{z}(t,\varepsilon)\approx\sum_{k=o}^{p}\varepsilon^k\,\xi_k(t);\quad o<t_o\le t\le a\;\blacksquare$$

Observatia 5.3. Definiţia 5.2, teorema 5.4 şi observaţia 5.2 se extind în mod natural de la problema (1.16)-(1.17) la problema (5.12) care are aplicaţii multiple.

Vom ilustra atît metoda Vasilieva cît şi metoda de calcul a funcţiilor de sensibilitate prin următoarele două exemple cu aplicaţii în tehnică:

Exemplul 5.1.

Se consideră sistemul în circuit închis din fig.2 (în particular acesta poate fi sistemul de reglare a turaţiei unui servo-sistem)

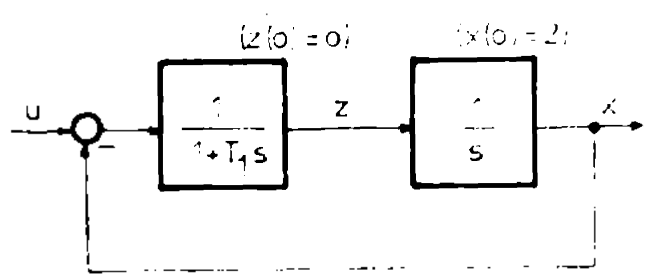

Fig 2

Se cere să se determine funcţiile de sensibilitate de ordinul 1 şi 2 şi aproximaţia asimptotică de ordinul doi pentru variabilele de stare x şi z în raport cu constanta de timp T_1 (considerată ca parametru mic cu valoarea nominală $T_{1o}=o$) pentru o variaţie treaptă unitară u(t)=1(t) a mărimii de intrare.

<u>Soluţie:</u> Ecuaţiile de stare ale sistemului din Fig.2 fiind:

$$\dot{x}=z,\ x(0)=2 \qquad (5.31\ a)$$

$$T_1\dot{z}=-x-z+1,\ z(0)=0 \qquad (5.31\ b)$$

sistemul (5.31) este de tipul "V_p", pe

Considerăm aproximarea asimptotică:

$$x(T_1,t)=\bar{x}_0(t)+T_1\bar{x}_1(t)+T_1^2\bar{x}_2(t)+\hat{x}_0(\tau)+T_1\hat{x}_1(\tau)+T_1^2\hat{x}_2(\tau) \qquad (5.32\ a)$$

$$z(T_1,t)=\bar{z}_0(t)+T_1\bar{z}_1(t)+T_1^2\bar{z}_2(t)+\hat{z}_0(\tau)+T_1\hat{z}_1(\tau)+T_1^2\hat{z}_2(\tau) \qquad (5.32\ b)$$

unde $\tau=t/T_1$: înlocuind (5.32) în (5.31) rezultă:

$$\dot{\bar{x}}_0+T_1\dot{\bar{x}}_1+T_1^2\dot{\bar{x}}_2+1/T_1\hat{x}'_0+\hat{x}'_1+T_1\hat{x}'_2=\bar{z}_0+T_1\bar{z}_1+T_1^2\bar{z}_2+\hat{z}_0+T_1\hat{z}_1+T_1^2\hat{z}_2$$

$$T_1\dot{\bar{z}}_0+T_1^2\dot{\bar{z}}_1+T_1^3\dot{\bar{z}}_2+\hat{z}'_0+T_1\hat{z}'_1+T_1^2\hat{z}'_2=1-\bar{x}_0-T_1\bar{x}_1-T_1^2\bar{x}_2-$$

$$-\hat{x}_0-T_1\hat{x}_1-T_1^2\hat{x}_2-\bar{z}_0-T_1\bar{z}_1-T_1^2\bar{z}_2-T_1\hat{z}_1-T_1^2\hat{z}_2-\hat{z}_0$$

(cu " $\dot{}$ " s-a notat derivata prin raport cu t iar cu " ' " derivata prin raport cu τ a funcţiei respective)

Prin identificare, rezultă sisitemele de ecuaţii:

$$\hat{x}'_0=0;\ \dot{\bar{x}}_0=\bar{z}_0;\ 1-\bar{x}_0-\bar{z}_0=0;\ \hat{z}'_0=-\hat{x}_0-\hat{z}_0$$

$$\hat{x}'_1=\hat{z}_0;\ \dot{\bar{x}}_1=\bar{z}_1;\ \dot{\bar{z}}_0=-\bar{x}_1-\bar{z}_1;\ \hat{z}'_1=-\hat{x}_1-\hat{z}_1$$

$$\hat{x}'_2=\hat{z}_1;\ \dot{\bar{x}}_2=\bar{z}_2;\ \dot{\bar{z}}_1=-\bar{x}_2-\bar{z}_2;\ \hat{z}'_2=-\hat{x}_2-\hat{z}_2$$

Impunînd condiţiile:

$$\lim_{\tau\to\infty}\hat{x}_i(\tau)=0,\ \lim_{\tau\to\infty}\hat{z}_i(\tau)=0,\ i=0,1,2$$

şi condiţiile iniţiale respective care rezultă din (5.31),(5.32):

$$\bar{x}_0(0)+\hat{x}_0(0)=2\ ;\ \bar{z}_0(0)+\hat{z}_0(0)=0$$

$$\bar{x}_i(0)+\hat{x}_i(0)=0\ ;\ \bar{z}_i(0)+\hat{z}_i(0)=0,\ i=1,2,$$

rezultă ,în ordinea scrisă, soluţiile:

$$\hat{x}_0(\tau)=0,\ \bar{x}_0(t)=1+e^{-t},\ \bar{z}_0(t)=e^{-t},\ \hat{z}_0(\tau)=e^{-\tau}$$

$$\hat{x}_1(\tau)=-e^{-\tau},\ \bar{x}_1(t)=(1-t)e^{-t},\ \bar{z}_1(t)=(t-2)e^{-t},\ \hat{z}_1(\tau)=$$

$$=(2+\tau)e^{-\tau},\ \hat{x}_2(\tau)=-(3+\tau)e^{-\tau},\ \bar{x}_2(t)=(3-3t+t^2/2)\cdot$$

$$\cdot e^{-t},\ \bar{z}_2(t)=-(t^2/2-4t+6)e^{-t},\ \hat{z}_2(\tau)=(\tau^2/2+3\tau-6)e^{-\tau},\ \tau=t/T_1 \qquad (5.33)$$

de unde, conform teoremei 5.4 rezultă că funcţiile de sensibilitate sînt:

$$\underline{\underline{S}}_o^1(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \\ \bar{z}_1(t) \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \underline{\underline{S}}_o^2(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2(t) \\ \\ \bar{z}_2(t) \end{bmatrix}$$

unde $\bar{x}_i, \bar{z}_i$, $i = 1,2$ rezultă din (5.33); tot din (5.33) rezultă şi aproximaţia asimptotică cerută, înlocuind funcţiile din (5.33) în (5.32).

Exemplul 5.2.

Se consideră sistemul în circuit deschis din Fig.3 (în particular, două elemente acumulatoare de energie de capacităţi diferite, înseriate). Se cere să se determine funcţiile de sensibilitate de ordinul 1 şi 2 în raport cu constanta de timp T_1 (considerată ca parametru mic cu valoarea nominală $T_{1o} = 0$) pentru o variaţie treptată $U(t) = U_o 1(t)$ a mărimii de intrare şi condiţii iniţiale arbitrare date.

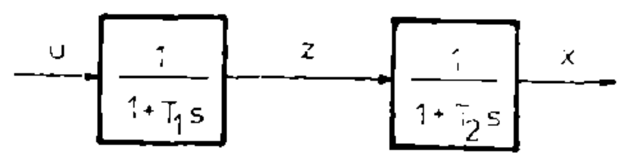

Fig.3

Soluţie. Ecuaţiile de stare ale sistemului sînt:

$$\dot{x} = -T_2^{-1}x + T_2^{-1} z; \; x(o) = x^o$$

$$T_1\dot{z} = -z + U_o; \; t \geq o; \; z(o) = z^o$$

Procedînd analog ca la exemplul precedent, rezultă aproximaţia asimptotică de ordinul doi:

$$x := U_o + (x^o - U_o)e^{-t/T_2} + T_1 T_2^{-1}(z^o - U_o)(e^{-t/T_2} - e^{-t/T_1}) +$$

$$+ T_1^2 T_2^{-2}(z^o - U_o)(e^{-t/T_2} - e^{-t/T_1}) \; ; \; z := U_o$$

de unde rezultă funcţiile de sensibilitate cerute:

$$\underline{S}_o^1(t) = \begin{bmatrix} T_2^{-1}(z^o - U_o)\, e^{-t/T_2} \\ o \end{bmatrix}, \; \underline{S}_o^2(t) = \begin{bmatrix} T_2^{-2}(z^o - U_o)e^{-t/T_2} \\ o \end{bmatrix}.$$

In cazul sistemelor de ecuaţii de forma (1.45) se poate stabili o legătură directă între funcţiile de sensibilitate la limită, funcţiile obţinute prin metoda Vasilieva şi funcţiile $\bar{z}^k(t)$ din exprimarea sub forma (1.63) a funcţiilor $z_k(t,\tau)$ din dezvoltarea (1.58):

$$z_k(t,\tau) = \sum_{i,j=1}^{n} z_{ij}^k(t) b_i(t) e^{\tau j} + \bar{z}^k(\tau) \; .$$

<u>Teorema 5.5</u>. Dacă sistemul (1.45) îndeplineşte condiţiile 1.6–1.8 şi condiţia $\mathrm{Re}\,\lambda_i(t) < 0, i=\overline{1,n}$ atunci funcţiile de sensibilitate la limită $\underline{\xi}_k(t)$ din (5.20), funcţiile $\underline{z}_k(t)$ obţinute prin metoda Vasilieva aplicată acestui sistem şi funcţiile $\underline{z}^k(t)$ obţinute prin metoda lui S.A.Lomov sînt egale. Mai mult, ele rezultă (fără a fi necesară rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale) din relaţia de recurenţă:

$$\underline{\xi}_0(t)=-A^{-1}(t)f(t),\ \underline{\xi}_k(t)=D\underline{\xi}_{k-1}(t),\ k\in\mathbb{N} \text{ unde } D=A^{-1}(t)\frac{d}{dt}\ \blacksquare$$

<u>Observaţia 5.4.</u> Teoremele 1.3, 5.1–5.5 cer o condiţie obligatorie condiţia de stabilitate a spectrului 1.4'. Dacă aceasta nu este satisfăcută, fiind satisfăcută în locul ei, pentru sistemele de forma (1.45) condiţia mai slabă -1.9, metoda pe care am dat-o în § 2.1 poate fi folosită pentru a obţine o aproximare asimptotică pentru aceste sisteme■

<u>Exemplul 5.3.</u> Să se determine o aproximare asimptotică în raport cu parametrul mic ε care afectează constantele de timp T_1, T_2, T_3, pentru sistemul din fig.4, în condiţiile excitării sale cu intrările:

$$u_1 = 3t,\ u_2 = 2t^2,$$
$$u_3 = 2t^2 - 2t$$

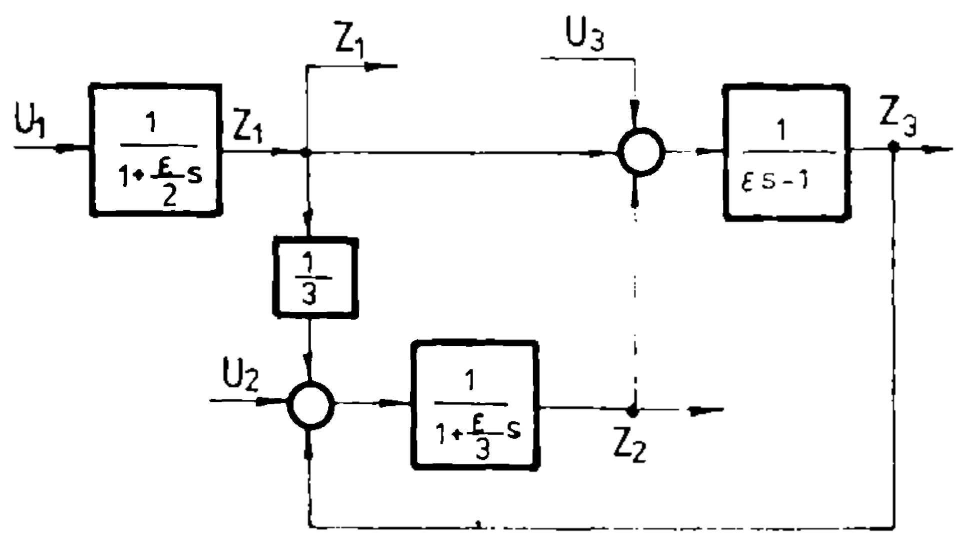

Fig.4

<u>Soluţie.</u>

Ecuaţiile de stare ale sistemului sînt:

$$\frac{\varepsilon}{2}\dot{z}_1 + z_1 = 3t$$
$$\frac{\varepsilon}{3}\dot{z}_2 + z_2 = \frac{1}{3}z_1 + z_3 + 2t^2$$
$$\varepsilon\dot{z}_3 - z_3 = z_1 - z_2 + 2t^2 - 2t$$

Acest sistem fiind echivalent cu cel din exemplul [illegible], o aproximare asimptotică a soluţiei sale este:

$$\underline{z}(t,\varepsilon) \equiv \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \approx \underline{z}_1(t,-2t/\varepsilon) = \begin{bmatrix} 3t+2e^{-2t/\varepsilon} \\ 3t^2+7-7e^{-2t/\varepsilon} \\ t^2-t+7-2e^{-2t/\varepsilon} \end{bmatrix}$$

şi după cum am observat, aproximaţia asimptotică de ordinul doi este chiar soluţia exactă■

BUPT

Comentarii bibliografice.

Teorema 5.4 a fost stabilită pornind de la lucrările [129]-[131] şi [135]. Ea poate fi pusă în legătură şi cu un alt rezultat obţinut de către A.B.Vasilieva în [132] unde se consideră soluţia problemei (1.16)-(1.17) dezvoltată doar în serie regulată

$$\underline{y}(t,\varepsilon) = \tilde{\underline{y}}_0(t) + \varepsilon\tilde{\underline{y}}_1(t) + \varepsilon^2\tilde{\underline{y}}_2(t)+\ldots$$

şi se demonstrează că funcţiile $\tilde{\underline{y}}_i$ verifică aceleaşi ecuaţii diferenţiale ca şi funcţiile $\bar{\underline{y}}_i$ şi li se impune să verifice şi aceleaşi condiţii iniţiale, demonstrîndu-se apoi evaluarea asimptotică a restului.

Teorema 5.5 stabileşte legătura dintre funcţiile de sensibilitate ale sistemelor de forma (1.45) şi partea "regulată" a dezvoltărilor asimptotice de acelaşi ordin obţinute atît prin metoda Vasilieva cît şi prin metoda Lomov (a regularizării) pentru soluţiile acestor sisteme.

Exemplele de tipul 5.1 şi 5.2 sînt des folosite în tehnică (a se vedea, de exemplu, [29]), dar asupra lor s-a pus doar problema determinării funcţiilor de sensibilitate de ordinul 1.

Exemplul 5.3 este original. El pledează pentru folosirea dezvoltărilor asimptotice, (nu numai a funcţiilor de sensibilitate), mai ales cînd nu sînt îndeplinite condiţiile de stabilitate ale spectrului matricii A(t).

Rezultatele obţinute de autor în acest paragraf au fost publicate în lucrările [90] şi [91] (ultima în colaborare cu ing.dr.T.L.Dragomir).

BIBLIOGRAFIE

1 Th.Anghelutza, Sur les propriétés des noyaux symetriques et symetrisables généralisès,Comptes rendus,t.186,1928, p.559.

2 Th.Anghelutza, idem, Mathematica, vol.III,p.64-76,193o,Cluj.

3 V.A.Anikeeva (Esipova) Asimptotica soluției problemei generale la limită pentru sisteme de ecuații diferențiale ordinare perturbate singular de tipul condiționat stabile (l.rusă),Diff.uravn.11(1975),f.11,p.1957-1966.

4 E.Arie, M.Botgros, A.Halanay, D.Martac, Transient stability of the syncronous machine, Rev.Roum.Sci.techn.Electrotehn. et Energ.,19,4 (1974),611-626.

5 V.I.Arnould, Mathematical methods of classical mechanics. Graduate Texts in Math.,nr.6o,Springer-Verlag,New York,1978. Trad.rom."Metodele matematice ale mecanicii clasice",Ed.șt. encicl.Buc.198o.

6 M.Banea, Asupra comportării soluțiilor sistemelor de ecuații diferențiale cu parametru mic pe lîngă derivate.St.cerc.mat. XII,1(1961),251-273.

7 R.Bellman, Stability Theory of Differential Equations, Mc Graw-Hill Book Company Inc.New York, 1954.

8 R.Bellman, Introduction to matrix analysis, Mc.Graw-Hill comp.,inc.,New York, Toronto, London, 196o (Trad.rom:Introducere în analiza matriceală, Ed.tehn.Buc.,1969).

9 G.D.Birkoff, On the asymptotic caracter of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter, Trans. Amer. Math.Soc.9(1908) p.219-231.

1o H.W.Bode, Network Analysis and Feedback Amplifier Design.D.Van Nostrand, New York (1945;1957).

11 I.K.Bogatîrev, Dispozitive cu impulsuri cu distribuție neliniară a parametrilor (l.rusă) "Sovietskoe radio" 1978.

12 N.N.Bogoliubov jr., Teoria perturbațiilor (l.rusă),Matematicaeskaia Entiklopedia vol.I,Izd."Sovietskaia Entiklopedia", Moskva, 1982, 742-747.

13 L.Brillouin, Rémarques sur la mécanique ondulatoire,J.Phys. Radium,7 (1927),353-368.

14 V.F.Butuzov,A.B.Vasilieva, Sisteme de ecuatii diferentiale şi sisteme cu parametru mic în cazul cînd sistemul degenerat se găseşte pe spectru (l.rusă),Diff.uravn. 6(1970) Nr.4, 650-664.

15 L.Cesari, Asymptotic Behavior and Stability Problems in ODE, Third ed.,Springer, 1971.

16 E.A.Coddington, N.Levinson, A boundary value problem for a nonlinear differential equation with a small parameter, Proc. Amer.Math.Soc.3 (1952),p.73-81.

17 E.A.Coddington, N.Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Mc.Graw Hill, New York,1955.

18 R.Courant,D.Hilbert, Methoden der matematischen Physik, I,II, Springer, 1968.

19 B.Crstici, P.Năslău, Asymptotic approximation of solutions of some singularly perturbed systems of integro-differential equations,Sem.itinesant de ec.funct.,aprox.,convex,Cluj-Napoca,1985,59-62

20 J.B.Cruz, Jr., Feedback systems,Mc Graw Hill,New York, London, 1972.

21 V.Drăgan, A.Halanay, Suboptimal linear controller by singular perturbations techniques, Rev.Roum.Sci.techn. Electrotehn.et Energ.,21,4 (1976), 585-591.

22 V.Drăgan, A.Halanay, Singular perturbations with several parameters, Preprint Series in Mathematics nr.30/1980 INCREST, Bucureşti.

23 V.Drăgan, A.Halanay, Stability problems for syncronous machines by singular perturbation methods. Rev.Roum.Sci. tehn., Serie Electrotehn.et Energ.,27, 2(1982),199-209.

24 M.Van Dyke, Perturbation methods in fluid mechanics,Academic Press, 1964.

25 A.Erdélyi, Asymptotic Expansions, Dover Publications, Inc. 1956.

26 N.P.Erughin, Curs de ecuatii diferentiale (l.rusă)"Nauka i tehnika", Minsk, 1970.

27 S.F.Feşcenko,N.I.Skil,L.D.Nikolenko,Metode asimptotice în teoria ecuatiilor diferentiale liniare (l.rusă),"Naukova Dumka",Kiev, 1966.

28 L.Flato,N.Levinson, Periodic solutions of singularly perturbed systems.J.Rational Mech.Anal,4(1955),943-950.
29 P,M.Frank, Empfindlichkeitsanalyse dinamischer Systeme, R.Oldenbourg Verlag München Wien, 1976.
30 K.O.Friedrichs, W.Wasow, Singular perturbations of nonlinear oscillations.Duke Math.J. 13(1946),367-381.
31 K.O.Friedrichs,On the perturbation of continuous spectra, Comm.Pure.Appl.Math.1,361-406, 1948.
32 K.O.Friedrichs, Asymptotic phenomena in mathematical physics, Bull.Amer.Math.Soc.61(1955), 367-381.
33 M.Ghermănescu, Equations integrales aux deux limites variables Ap.de mat.pura ed applicata,vol.LIV, 1961, p.33-56.
34 I.Ţ.Gohberg,M.G.Krein, Proprietăţile de bază ale numerelor de defect, numerelor de rădăcină şi a indexului operatorilor liniari (l.rusă),Uspehi Mat. Nauk 12,2(1974),1957, 43-118.
35 I.S.Gradstein, Despre comportarea soluţiei sistemelor liniare de ecuaţii diferenţiale, degenerate la limită (l.rusă) Dokladî A.N.S.S.R.,L111,5,(1946), 395-398.
36 I.S.Gradstein, Ecuaţii diferenţiale în care intervin diferite puteri ale parametrului mic ca factori la derivate (l.rusă), Dokl.Akad.Nauk SSSR,182,1,1952, 5-8.
37 I.S.Gradstein, Aplicarea teoriei stabilităţii lui A.M. Liapunov la teoria ecuaţiilor diferenţiale cu factori mici la derivate (l.rusă), Matematiceski Sbornic,32, 74, 2(1953).
38 I.S.Gradstein, Asupra soluţiilor pe semiaxa timpului ale ecuaţiilor diferenţiale cu factori mici la derivate (l.rusă), Mat.Sb.32,74,3(1973),680-690.
39 A.Halanay, Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale, Ed.Acad.R.P.R.,1963.
40 A.Halanay, Perturbaţii singulare la sisteme periodice.Cazul critic (l.rusă),Rev.roum.Math.Pures et Appl.11(1966),951-960.
41 A.Halanay,V.Drăgan, Perturbaţii singulare. Dezvoltări asimptotice,Ed.Acad.R.S.R.,1983.
42 E.Hille,R.S.Philips, Functional analysis and semigroups. Revised et Providence:Am.Math.Soc.Colloq.Publ.Vol.31,1957.
43 F.Hoppensteadt, Asymptotic stability in singular perturbations problems.J.Diff.Eq.,15,3(1974),510-521.
44 J.Horn, Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter,Math.Ann.52(1899), 271-292.

45 J.Horn, Über linearem Differentialgleichung mit einem veränderlichen Parameter, Math.Ann.52(1899),340-362.

46 D.Huet, Phénomènes de perturbation singulière dans les problèmes aux limites.Ann.Inst.Fourier,Grenoble,10(1960), 61-151.

47 M.S.Hung,The numerical solution of differential and integral equations by spline functions,MRC Techn.Summary Rept, Madison,March,1970.

48 C.Iacob, Introduction mathématique à la mécanique des fluides, Bucarest-Paris, 1959.

49 C.Iacob, D.Homentcovschi,N.Marcov,A.Nicolau, Matematici clasice şi moderne, vol.IV, Ed.tehn.Bucureşti,1983.

50 M.I.Imanaliev, Metode asimptotice în teoria sistemelor integro-diferentiale perturbate singular (l.rusă), Frunze "Ilim",1972.

51 M.I.Imanaliev, Oscilatiile şi stabilitatea solutiilor sistemelor integro-diferentiale perturbate singular (l.rusă), Frunze,"Ilim", 1974.

52 T.Kato, On the convergence of the perturbation method,I,II, Progr.Theor.Phys.4(1949) p.514-523, 5(1950), p.95-101, 207-212.

53 T.Kato, On the perturbation theory of closed linear operators J.Math.Soc.Japan 4,(1952),323-337.

54 T.Kato, Perturbation theory for nulity, deficiency and other quantities of linear operators, J.Analyse Math.,6, 1958,261-322.

55 T.Kato, Perturbation theory for linear operators,Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

56 J.Kevorkian, J.D.Cole, Perturbation methods in applied mathematics. Applied Math.Sciences, vol.34, Springer-Verlag Berlin, New York,1981.

57 A.I.Klimuşev,N.N.Krasovski, Stabilitatea asimptotică uniformă a sistemelor de ecuatii diferentiale cu parametru mic la derivate (l.rusă),Prikladnaia Mat.i Meh.25(1961), 680-690.

58 P.Kokotovic,P.Sannuti, Singular Perturbation Method for Reducing the model Order in Optimal Control Design,IEEE Trans.AC-13 Nr.4 Aug.1968,377-384.

59 P.Kokotovic, Singular Perturbations: Order Reduction in Control System Design,JACC 1972,The Amer.Soc.of Mechanical Engineers, New York,1972.

60 M.G.Krein, Lecții despre teoria stabilității soluțiilor sistemelor de ecuații diferențiale în spații Banach, Akad.nauk.ukrain.SSR, Kiev, 1964.

61 J.J.Levin, N.Levinson, Singular perturbations of nonlinear systems of differential equations and an associated boundary layer equation, J.Rat.Mech.Anal.3.2(1954), 247-270.

62 N.Liașcenko, Asupra stabilității asimptotice a soluțiilor sistemelor de ecuații diferențiale (l.rusă), Dokladî Akad. Nauk SSSR, 64, 4(1949), 441-443.

63 J.L.Lions, Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en controle optimal, Lectures Notes in Math.323, Springer-Verlag, (1973).

64 J.Liouville, Sur les développements des fonctions ou parties des fonctions en séries dont les divers termes sont assujettés a satisfaire a une même éq.diff.du second ordre contenanant un paramètre variable, Journal des math.pures et appl.2(1837), 16-35.

65 S.A.Lomov, Regularizarea perturbațiilor singulare (l.rusă), Dokl.Naucino.tehn.conf.MEI, sect.matem., 1965, 129-133.

66 S.A.Lomov, Asupra unei metode de regularizare a perturbațiilor singulare (l.rusă), D.A.N.SSSR, 1967, 177, 6, 1273-1276.

67 S.A.Lomov, Teoria problemelor la limită perturbate singular, (l.rusă), Alma Ata, 1976.

68 S.A.Lomov, Introducere în teoria perturbațiilor singulare, (l.rusă), "Nauka" Moskva, 1981.

69 R.E.O'Malley, jr, Review on the bookes of Kevorkian - Cole and Nayfeh, Bull.(New Series) of the AMS vol.7, nr.2(1982), 414-420.

70 J.L.Massera, J.J.Schäffer, Linear Differential Equations and Function Spaces, Academic Press, 1966.

71 M.Micula, G.Micula, Sur la résolution numerique des equations integrales du type de Volterra de seconde espèce à l'aide des functions splines, Studia Univ.Babeș-Bolyai, Ser.mat.mec., fasc.2, 1973, 65-68.

72 G.Micula, The numerical solution of Volterra integro-differential equations by spline functions, Rev.Roum.de Math.pures et appl.Tom.XX, nr.3, 1975, 349-3..

73 G.Micula, Funcții spline și aplicații, Ed.tehn.Buc., 1...

74 J.Mika, Singular perturbation method for evolution equations in Banach spaces, Math.Phys.and Appl.Math.2, Reidel, Dordrecht, 1974.

75 M.Nagumo, Über des Verhalten der Integrale von $\lambda y'' + f(x,y,y';\lambda) = 0$ für $\lambda \to \infty$., Proc.Phys. Math.Soc., Japan, 21,(1939), 529-534.

76 G.Moldovan, Comportarea soluţiilor sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi care depind de un parametru mic., Studia Univ.Babeş-Bolyai, Series math.phys., fasc.2, 1968, 21-30.

77 P.Năslău, Asupra unei ecuaţii integro-diferenţiale, Bul.şt. şi tehn.al I.P.T.V.Timişoara, Tom.24 (38); fasc.1, 1979; 29-33. (Ref:Mat.Rev.82 K:45010, p.4742).

78 P.Năslău, Dezvoltarea asimptotică a soluţiei în cazul unei clase de sisteme de ecuaţii integro-diferenţiale. Seminarul itinerant de ecuaţii funcţionale, aproximare şi convexitate, 1980, Cluj-Napoca, p.97-102.

79 P.Năslău, Formule de cvadratură, Ref.ptr.doctorat, 1979.

80 P.Năslău, Metode asimptotice pentru ecuaţii cu operatori perturbaţi singular, Ref.pentru doctorat, 1980.

81 P.Năslău, Dezvoltarea asimptotică a soluţiilor ecuaţiilor integrale perturbate singular, Ref.pentru doctorat, 1980.

82 P.Năslău, Asupra unor ecuaţii integrale cu ambele limite de integrare variabile, Sem.itinerant de ec.funcţ., aprox. şi convex., 1980, Timişoara, p.187-190 (Ref: Ref.jurnal, 13B Nr.7/1983, 7B 466 p.68).

83 P.Năslău, O metodă asimptotică pentru un sistem ciclic de ecuaţii integro-diferenţiale, Bul.şt.şi tehn.al I.P.T.V. Timişoara, Tom 25(39), f.2-1980, p.53-56.

84 P.Năslău, Aproximarea soluţiei unor ecuaţii integrale neliniare, Bul.şt.şi tehn.al I.P.T.V.Timişoara, Tom 27(41), f.1-1982, p.55-58 (Ref:Ref.Jurnal, 13B Nr.11/1983, 11B 1540 (p.218).

85 P.Năslău, Stabilitatea indexului unui complex de ideale de operatori, Sem.itinerant de ec.funcţ., aprox.şi convex., 1982 Cluj-Napoca, p.227-230.

86. P.Năslău, Proprietăţi de simetrie ale unor ecuaţii integrale, Sem."Th.Angheluţă", Cluj-Napoca, 1983, 167-172.

87 P.Năslău, Asymptotic approximation of some singular perturbed integro-differential equations,Sem.de mat.şi fiz.al Inst.polit."Traian Vuia",Timişoara,mai, 1983,19-22.(Ref.Ref.jurn. 12Б667/1984).
88 P.Năslău, Asupra integrării asimptotice prin metoda regularizării a unor ecuaţii integro-diferenţiale perturbate singular, Al IV-lea simpozion de analiză funcţională şi aplicaţii, Craiova, 4-5 noiemb.1983,249-253.
89 P.Năslău, On the regularization of singular perturbations of some linear differential equations in critical cases, Sem.de mat.şi fiz.al Inst.polit."Traian Vuia" Timişoara,noiemb. 1983,57-60.
90 P.Năslău, About the sensitivity functions for the singularly perturbed systems of differential equations,Sem.de mat.şi fiz.al Inst.polit."Traian Vuia",Timişoara,mai 1984,55-58.
91 P.Năslău,T.L.Dragomir, Asupra unei metode de calcul a funcţiilor de sensibilitate de tip (λ) aferente proceselor tranzitorii ale sistemelor, Al III-lea simp.naţ.de teoria sistemelor,Craiova, 1984,vol.I, 210-213.
92 P.Năslău, On some linear integro-differential equations with both of the limits variable,Sem.de mat.şi fiz.al Inst.polit. "Traian Vuia",Timişoara, 1985 (va apare).
93 P.Năslău, On the regularization of singular perturbations of some integro-differential equations in critical cases (va apare).
94 M.Navier, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides,Mém. Acad Sci.6(1827),389-416.
95 A.H.Nayfeh, Introduction to perturbation techniques Wiley New York, 1981.
96 N.N.Nefëdov, Despre o clasă de ecuaţii perturbate singular, (l.rusă),J.vîcisl.mat.i fiz.,18,1978,p.93-105.
97 P.Noaillon, Développements asymptotiques dans les équations différentielle linéaires à paramètre variable.Mémoires de la Soc.des Sci.de Liège, Sér 3,11 (1912).
98 D.Pascali ş.a., Analiza neliniară şi aplicaţii în mecanică, Ed.Acad.RSR,Bucureşti,1977.
99 C.Petrovskii, Lecţii despre teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare (l.rusă),"Nauka", Moscova,1970.

100 H.Poincaré, Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, Acta Math.8 (1866),295-344.
101 H.Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, vol.I, Paris, 1892,(cap.VII).
102 S.D.Poisson, Mémoire sur les équations générales de l'equilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides. J.Ecole Polytechn.13(1831) 139-1[illegible].
103 L.Prandtl, Über Flüssingkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung, Verhandlungen des III Int.Math.Kongr.Heidelberg, 484-494, Leipzig, Teubner, 1904.
104 L.Prandtl, Anschauliche und nützliche Mathematik.Lecţie ţinută în semestrul de iarnă 1931/32 la Göttingen.
105 L.I.Pontriagin, Ecuaţii diferenţiale ordinare (l.rusă) Izd. "Nauka", Moskva, 1974.
106 I.Prigogine,I.Stengers, Noua alianţă. Metamorfoza ştiinţei "Idei contemporane",Ed.pol.,1984.
107 M.Reghiş şi M.Megan, Aspecte ale cercetării matematice în domeniul ecuaţiilor funcţionale şi diferenţiale la Universitatea din Timişoara,Sem.itinerant de ec.funct., aprox.şi convexitate,Cluj-Napoca,1979,p.159-175.
108 F.Rellich, Störungstheorie der Spektralzerlegung, Math.Ann I: 113,(1937),p.600-619,II:113(1937),p.677-685,III:116(1939), p.555-570,IV:117(1940), 356-362,V:118(1942),462-4[illegible].
109 V.I.Rojkov, Proprietăţi asimptotice ale soluţiilor sistemelor de ecuaţii de tip neutral cu abatere mică a argumentului. Teză de doctorat,(l.rusă),1970.
110 V.I.Rojkov, Asimptotica soluţiilor unor sisteme cu parametru mic lîngă derivată (l.rusă),Diff.uravn.10(1974) Nr6, 1037-1049.
111 E.Rothe, Asymptotic solution of a boundary value problem. Yowa State College J.Sci.13 (1939).
112 I.A.Rus, Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix, Ed.Dacia, Cluj-Napoca, 1979.
113 S.N.Săvulescu,A.Georgescu,H.Dumitrescu,M.Bucur, Cercetări matematice în teoria modernă a stratului limită,Ed.Acad.RSR, Bucureşti,1981.
114 M.Schechter, Principles of functional analysis,[illegible] Press, New York and London,1971.

115 L.Schlesinger, Uber asymptotischen Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Functionen eines Parameters., Math.Ann 63(1907),277-300.

116 H.Schlichting, Grenzschicht-Theorie, Fünfte erweiterte unde neubearbeitete Auflage Verlag G.Braun Karlsruhe 1964 (Trad.rusă:Teoria pogranicinova sloia,Nauka,1969,Trad.engl: Boundary-layer theory,Mc.Graw Hill 1968 (6th ed.)).

117 L.F.Shampine, Recenzia cărţii lui W.L.Miranker: Numerical methods for stiff equations and singular perturbation problems (vol.5 al seriei "Math.and.its Appl",London,1981), Bull (New Series) of the Amer.Math.Soc.,vol.7.3,1982.

118 A.S.Şiskin, Asimptotica soluţiilor unor probleme pentru ecuaţii diferenţiale ordinare singular perturbate în cazul cînd condiţiile de degenerare regulată nu sînt îndeplinite. Dizertaţie pentru titlul de candidat,(l.rusă),1974.

119 G.G.Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids,Trans.Cambr.Phil.Soc.8(1845),287-305.

120 A.N.Tihonov, Despre dependenţa soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale de parametrul mic (l.rusă),Mat.sb.22(64),1948, 193-204.

121 A.N.Tihonov, Despre sisteme de ecuaţii diferenţiale conţinînd parametri mici (l.rusă),Mat.sb.27(69),1950,147-156.

122 A.N.Tihonov, Sisteme de ecuaţii diferenţiale conţinînd parametri mici lîngă derivate,(l.rusă) Mat.sb.31(73),1952, 576-586.

123 A.N.Tihonov,A.B.Vasilieva,A.G.Sfeşnikov, Ecuaţii diferenţiale (l.rusă),"Nauka" Moskva, 1980.

124 G.A.Ţiganov, Asimptotica soluţiilor sistemelor de ecuaţii cu diferenţe de tipul stabilităţii condiţionate (l.rusă), Dizertaţie de candidat,1973.

125 El Tom, Efficient algorithms for Volterra Integral Equations of the Second Kind, Computing 14, 1975,153-166.

126 Y.W.Tschen, Uber das Verhalten der Lösungen einer Folge von Differentialgleichungen welche in Limes ausarten.Compositio Mathematica 2(1935),378-401.

127 M.A.Valiev,S.A.Lomov, Integrarea asimptotică a problemelor perturbate singular în spaţii Hilbert (l.rusă),Diff. uravn.Tom.XVII,nr.10,1981,1792-1805.

128 F.M.Vasilescu, Stability of the index of a complex of Banach spaces,J.op.th.,2(1979),247-275.

129 A.B.Vasilieva,Despre derivarea soluţiei sistemelor de ecuaţii diferenţiale conţinînd parametru mic (l.rusă), Dokl.Akad.Nauk SSSR, 1950,T LXXV Nr.4,483-486.

130 A.B.Vasilieva, Despre derivarea de ordin superior prin raport cu parametrul a soluţiei sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu parametru mic lîngă derivate (l.rusă), Mat.sb.T.48 (90) Nr.3(1959),311-334.

131. A.B.Vasilieva, Asimptotica soluţiei unor probleme la limită pentru ecuaţii cu parametru mic pe lîngă derivata de ordin maxim (l.rusă),DAN, 135 Nr.6 (1960),1303-1306.

132 A.B.Vasilieva, Asimptotica soluţiei unor probleme pentru ecuaţii diferenţiale neliniare cu parametru mic pe lîngă derivata de ordin maxim (l.rusă),Uspehi mat.Nauk,XVIII, 3(111)(1963),15-86.

133 A.B.Vasilieva,V.M.Volosov, Despre lucrările lui A.N. Tihonov şi ale elevilor săi în teoria ecuaţiilor diferenţiale conţinînd parametru mic,(l.rusă),Uspehi mat. Nauk 22(134)(1967) fiz.,149-168.

134 A.B.Vasilieva,V.A.Tupciev,A.N.Iarkin,Soluţii periodice ale sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu parametru mic lîngă derivate apropiate de soluţiile discontinue (l.rusă) Lucrările conferinţei unionale de oscilaţii neliniare (l.rusă), Kiev (1970),149-150.

135 A.B.Vasilieva,V.F.Butuzov, Dezvoltarea asimptotică a soluţiei ecuaţiilor perturbate singular (l.rusă) "Nauka", Moskva,1973.

136 A.B.Vasilieva, Sisteme singular perturbate conţinînd o nedeterminare la degenerare (l.rusă),Dokl.Akad.Nauk SSSR 224(1975),Nr.1, 19-22.

137 A.B.Vasilieva, Sisteme singular perturbate,condiţionat stabile, cu singularităţi în condiţiile la limită (l.rusă) Diff.uravn.nr.11(1975) 227-238.

138 A.B.Vasilieva, Despre dezvoltarea teoriei ecuaţiilor diferentiale cu parametru mic lîngă derivata de ordin maxim în perioada 1966-1976 (l.rusă),Uspehi mat.Nauk,6(192)(1976), 1o2-122.

139 A.B.Vasilieva,V.F.Butuzov, Ecuaţii perturbate singular în cazuri critice (l.rusă), Izd.Moskovskova Univ.1978.

14o A.B.Vasilieva, Rezultatele din teoria perturbaţiilor singulare în ultimii 5 ani,(l.rusă),Vestnik, Moskov Univ.Ser.XV Vîc isl,Mat-Kibern,1981,nr.3,25-35.

141 B.de St.Venant, Note à joindre un mémoire sur la dynamique des fluides,C.R.Acad.Sci.Paris 17 (1843),124o-1244.

142 M.I.Vişik,L.A.Liusternik, Dezvoltări regulate şi strat limită pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu parametru mic. Uspehi mat Nauk XII,5(77) (1957),3-122.

143 M.I.Vişik, L.A.Liusternik, Soluţia unor probleme şi dezvoltarea în cazul matricilor autoadjuncte şi neautoadjuncte ale ecuaţiilor diferenţiale I(l.rusă),Uspehi mat.nauk,XV, 3(93),196o, 3-8o.

144 M.I.Vişik, L.A.Liusternik, Comportarea asimptotica a soluţiei ecuaţiilor diferenţiale liniare cu variaţie mare sau rapidă a coeficienţilor şi a condiţiilor la limită (l.rusă), Uspehi Mat.nauk,XV,4 (94),(196o), 27-95.

145 V.Voievodine, Algèbre linéaire,Ed.Mir, Moscou, 1976.

146 V.Volterra et J.Pérés, Théorie générale des fonctionelles, 1,Paris, Gauthier-Villars,1937.

147 G.Wentzel, Eine Verallgemeinenung der Quantenbedingung für die Zwecke der Wellenmechanik, Z.Physik 38(1926),518-529.

148 W.Wasow, Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Publishers,1965.

149 F.Wolf, Analytic perturbation of operators in Banach spaces, Math.Ann,124,1952,317-333.

15o Materialele primei conferinţe unionale de metode asimptotice în teoria ecuaţiilor diferenţiale şi integro-diferenţiale perturbate singular şi de aplicaţii ale acestora,(l.rusa), Frunze,"Ilim",1975.

CUPRINS