INSTITUTUL POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

ING. DUMITRU RALEA

CONTRIBUTII PRIVIND CALCULUL ELECTROMAGNETIC AL BOBINELOR CRIOGENICE SI SUPRACONDUCTOARE

CONDUCATOR STIINTIFIC
PROF.DR.ING.CONSTANTIN SORA

- 1 9 8 5 -

C U P R I N S

I N T R O D U C E R E

Sistemele fizice în care intervin cîmpuri magnetice se întîlnesc în cele mai diverse domenii ale tehnicii. Performanţele acestora sînt influenţate direct de intensitatea şi repartiţia spaţială a cîmpului magnetic şi ca urmare problemele legate de producerea unor cîmpuri magnetice puternice şi cu o anumită repartiţie sînt de mare importanţă şi de actualitate.

Se remarcă de asemenea ca fiind mereu actuală problema economicităţii sistemelor fizice realizate, a reproiectării celor existente, a introducerii unor tehnologii noi care să permită depăşirea limitelor de performanţă la care s-a ajuns în multe domenii. Perspective dintre cele mai promiţătoare oferă în acest sens folosirea tehnicii frigului (criogenia) şi mai ales fenomenul de supraconducţie [9,18,20,37,52,56,63,66,119], care permite printre altele: obţinerea unor cîmpuri magnetice puternice, imposibil de atins prin mijloace convenţionale; reducerea substanţială a gabaritelor şi greutăţii; reducerea consumului de energie şi creşterea randamentelor instalaţiilor în care se aplică.

Proiectarea acestor sisteme fizice, ale căror performanţe depind direct de nivelul şi de repartiţia spaţială a cîmpului magnetic, impune dezvoltarea şi perfecţionarea metodelor de calcul al cîmpului magnetic. Se remarcă în acest sens utilitatea dezvoltării unor metode analitice care permit punerea în evidenţă a modului în care diferiţi parametri influenţează performanţele sistemelor respective, precum şi a unor metode numerice care oferă posibilitatea rezolvării mai complete a problemei de cîmp în cazuri complicate.

Teza de doctorat elaborată se înscrie pe linia preocupărilor privind dezvoltarea unor metode de calcul al cîmpului magnetic, aplicabile îndeosebi în cazul sistemelor criogenice şi supraconductoare. În cadrul ei se urmăreşte studierea şi perfecţionarea unor metode de calcul al cîmpului magnetic, elaborarea unor algoritmi şi pe baza lor a unor programe eficiente de calcul şi aplicarea acestora în cazuri de interes practic cum sînt: generatoarele magnetohidrodinamice (MHD), maşinile sincrone cu excitaţie supraconductoare, maşinile unipolare şi diferite variante de bobine cu simetrie axială.

Teza de doctorat este organizată în trei capitole principale. În capitolul întîi se prezintă unele domenii de utilizare ale bobinelor pentru cîmpuri magnetice puternice, precum şi principalele soluţii tehnologice şi constructive ale acestora: convenţionale (rezistive), criogenice şi supraconductoare. Prezentarea se face atît în scopul sistematizării cît şi al unei analize critice a diferitelor soluţii.

In capitolul al doilea se prezintă metodele de calcul al cîmpului magnetic abordate în cazurile unor conductoare cu formă oarecare, conductoare paralele de lungime mare şi al unor sisteme cu simetrie axială. De asemenea, se prezintă unele particularităţi specifice sistemelor criogenice şi supraconductoare şi ipotezele de calcul usuale care s-au admis în cadrul metodelor de calcul abordate.

In capitolul al treilea, se prezintă rezultatele obţinute în cazurile abordate şi rezolvate de autor, referitoare la: cîmpul magnetic în canalul de conversie MHD la diferite configuraţii ale canalului şi respectiv bobinelor; cîmpul magnetic de excitaţie al generatoarelor sincrone cu excitaţie supraconductoare în absenţa sau prezenţa ecranelor electromagnetice; cîmpul magnetic al solenoizilor de laborator şi metodele de îmbunătăţire a uniformităţii acestuia; cîmpul magnetic şi forţele electrodinamice la maşini unipolare supraconductoare, nesaturate sau cu circuit magnetic; compararea rezultatelor obţinute prin diferite metode de calcul în cazul unei perechi de bobine circulare (Helmholtz) şi verificarea acestora prin măsurări experimentale.

In partea finală a tezei se prezintă concluziile şi contribuţiile aduse de autor în cadrul acesteia, iar anexele conţin unele programe de calcul elaborate şi rezultate obţinute pe baza lor.

Elaborarea acestei lucrări s-a făcut sub îndrumarea permanentă şi generoasă a conducătorului ştiinţific Prof.dr.ing. Constantin Şora, căruia autorul îi aduce şi pe această cale respectuoase mulţumiri. Indrumarea atentă de care a beneficiat autorul,atît în activitatea didactică cît şi în cea de elaborare a tezei, a fost deosebit de utilă în formarea sa profesională.

Se aduc, de asemenea, mulţumiri tov. conf.dr.ing. [illegible] Constantin, pentru întregul sprijin acordat în calitate de conducător al colectivului de cercetare din care a făcut parte şi autorul. Rezultatele activităţii desfăşurate în cadrul acestui colectiv au contribuit în bună măsură la finalizarea tezei de doctorat.

Tuturor colegilor din colectivul de Bazele electrotehnicii, care l-au sprijinit în diferite ocazii, sub diverse forme şi l-au încurajat pe toată perioada elaborării lucrării, autorul le adresează calde mulţumiri.

CAPITOLUL 1

BOBINE PENTRU CÎMPURI MAGNETICE PUTERNICE. DOMENII DE UTILIZARE

După cum s-a precizat şi în introducere, bobinele destinate producerii cîmpului magnetic se folosesc în cele mai diverse ramuri ale tehnicii. Probleme mai deosebite legate atît de producerea cîmpului magnetic cît şi de aplicaţiile tehnice, intervin în cazul cîmpurilor magnetice puternice şi de aceea în cadrul tezei elaborate s-au avut în vedere în special aceste situaţii. Desigur cu denumirea de cîmp magnetic puternic este destul de relativă, neavînd o delimitare exactă. Astfel, pe lîngă valoarea inducţiei magnetice, se ia de obicei în considerare şi extinderea domeniului în care acesta se stabileşte. În această situaţie, pentru domenii cu dimensiuni obişnuite cîmpul magnetic se consideră puternic la inducţii magnetice care ating cel puţin 4 – 5 T, pe cînd la domenii cu extindere foarte mare (de exemplu în cazul acceleratoarelor de particule [1c]), chiar şi la 1 – 3 T, cîmpul magnetic poate fi considerat puternic.

1.1. Soluţii constructive şi tehnologice ale bobinelor pentru cîmpuri magnetice puternice

Primele încercări de producere a cîmpurilor magnetice puternice datează de la începutul secolului nostru. De atunci şi pînă în zilele noastre progresele ştiinţifice şi tehnologice au dus la o gamă largă de realizări care se pot încadra în trei mari categorii şi anume: bobine convenţionale (la temperatura ambiantă) cu sau fără fier, bobine criogenice şi bobine supraconductoare. Aceasta este de fapt şi succesiunea realizării lor în timp.

1.1.1. Bobine convenţionale

Acestea sînt realizate din materiale conductoare la temperatura ambiantă, în mod obişnuit cupru sau aluminiu, cu sau fără piese feromagnetice. Istoric, acestea constituie primele tipuri de bobine utilizate pentru producerea cîmpului magnetic în laboratoarele de fizică sau în diferite aplicaţii tehnice. Astfel încă în 1911, folosind juguri şi poli feromagnetici Weiss a obţinut un cîmp magnetic cu inducţia de 9,5 T într-un întrefier cu lungimea de 1 mm şi diametrul de 6 mm. Puterea necesară în acest scop era de 14 kW, iar greutatea magnetului de 14.000 kg.

Ulterior s-au adus numeroase perfecţionări în tehnica realizării acestor bobine, cele mai semnificative fiind introduse de Weiss care a folosit conductoare tubulare răcite cu ulei sau cu apă, de Dreyfus care a introdus dublicitatea pieselor polare şi respectiv de Bitter care a folosit conductoare în formă de disc şi răcirea axială. S-au realizat astfel inducţii magnetice de ordinul 10 T în funcţionare continuă, dar cu consumuri apreciabile de putere, de ordinul MW [18, 50].

Principalul dezavantaj al bobinelor convenţionale îl constituie consumul mare de energie, dezavantaj pronunţat mai ales în cazurile în care funcţionarea este continuă. În regim de funcţionare intermitent s-au obţinut în condiţii avantajoase cu astfel de bobine inducţii magnetice de ordinul 2 - 10 T pentru timp lung de funcţionare ($1-10^2$ s), 10 - 100 T pentru timp scurt ($10^{-6} - 10^{-3}$ s) şi respectiv 100 - 1500 T pentru timp foarte scurt ($< 10^{-6}$ s). În ultimul caz se utilizează metoda exploziei, bobina fiind distrusă la fiecare experiment.

Se remarcă faptul important că la cîmpuri magnetice foarte puternice densitatea energiei magnetice şi respectiv forţele locale care acţionează asupra conductoarelor parcurse de curent sînt foarte mari, astfel că materialele cu conductivitate electrică mare nu pot fi utilizate din cauza rezistenţei mecanice scăzute. În această situaţie se impune folosirea altor materiale conductoare cu rezistenţă mecanică mai ridicată deşi ele prezintă dezavantajul unei conductivităţi electrice mai scăzute. În ordine crescătoare a inducţiei magnetice, se pot utiliza aliajele Cu-Zr, Cu-Cr, Cu-Cd, Cu-Be, precum şi conductoare din molibden, tungsten, titan sau beriliu [18].

1.1.2. Bobine criogenice

Acestea sînt realizate din materiale conductoare normale dar răcite la temperaturi foarte scăzute numite şi temperaturi criogenice. Aceste temperaturi se obţin cu ajutorul sistemelor de răcire avînd în mod obişnuit ca agent de răcire unul din gazele lichefiate prezentate în tabelul 1.1.

Interesul manifestat pentru acest tip de bobine se datorează micşorării pronunţate a rezistivităţii materialelor conductoare cu scăderea temperaturii. Aceasta oferă posibilitatea obţinerii unor avantaje faţă de bobinele convenţionale, avantaje legate de mărirea densităţii de cu-

Tabelul 1.1. Principalii agenţi de răcire

Agentul	Temperatura de fierbere K
Heliu	4,2
Hidrogen	20,4
Neon	27,1
Azot	77,8

rent, reducerea puterii consumate, reducerea gabaritului şi greutăţii, obţinerea unor cîmpuri mai puternice.

Scăderea rezistivităţii metalelor la temperaturi joase depinde destul de pronunţat de gradul de puritate al acestora. Astfel se menţionează în literatură [10] că s-au obţinut rezultate spectaculoase pentru cupru şi aluminiu ultrapure la care rezistivitatea la 4,2 K a scăzut de 33000 ori şi respectiv 10000 ori faţă de rezistivitatea la 300 K. Aceste metale foarte pure prezintă însă şi unele dezavantaje cum ar fi: rezistenţă mecanică foarte scăzută, astfel încît se impun măsuri speciale de consolidare la cîmpuri magnetice puternice; datorită efectului magnetorezistiv, rezistivitatea acestora creşte o dată cu creşterea cîmpului magnetic. În cazul aluminiului efectul magnetorezistiv prezintă o saturaţie şi de aceea aluminiul este preferat în cazul bobinelor pentru cîmpuri magnetice puternice.

Aliajele cuprului şi aluminiului au rezistenţă mecanică mai mare, dar rezistivitatea lor scade relativ puţin cu temperatura. Astfel, de exemplu, în cazul aliajului Cu-Be (1% Be) rezistivitatea la temperatura de 4,2 K scade doar la jumătate din cea corespunzătoare la 300 K. Din acest motiv în practică nu se folosesc aceste aliaje la temperaturi joase, soluţia tehnologică constînd în folosirea conductoarelor de tip sandwich realizate dintr-o bandă de cupru sau aluminiu foarte pur fixată (printr-un adeziv izolant) pe o bandă dintr-un material cu înaltă rezistenţă mecanică. Dacă în timpul bobinării se asigură o anumită pretensionare a materialului de mare rezistenţă mecanică, atunci acesta va prelua o însemnată parte din solicitări. Folosirea acestui tip de conductoare pentru bobinele criogenice conduce însă şi la dezavantajul că se micşorează secţiunea utilă a bobinei, însă această micşorare poate fi limitată la mai puţin de 20% [18].

Se menţionează faptul că deşi bobinele criogenice sînt concurate serios de cele supraconductoare (par. 1.1.3), există unele situaţii în care acestea sînt preferate. Astfel este cazul regimurilor alternative şi de impuls, cînd la sistemele supraconductoare apar probleme dificile de stabilizare a stării supraconductoare şi pierderi suplimentare prin histerezis [38, 99]. De asemenea, în cazul bobinelor pentru cîmpuri magnetice care depăşesc cîmpul magnetic critic al materialelor supraconductoare tehnic utilizabile, bobinele criogenice nu pot fi înlocuite cu cele supraconductoare.

1.1.3. Bobine supraconductoare

Realizarea practică a acestora se bazează pe folosirea fenomenului de supraconducţie pe care îl manifestă anumite materiale dacă temperatura şi cîmpul magnetic sînt menţinute sub anumite valori [13, 51,58,70,74].

α. Starea supraconductoare ideală se caracterizează prin două proprietăţi fundamentale şi anume: anularea rezistivităţii la temperaturi foarte scăzute, efect descoperit în 1911 de Kammerlingh Onnes şi pe baza căruia se mai spune că aceste materiale manifestă o conducţie electrică perfectă; anularea inducţiei magnetice din volumul materialului cînd acesta trece din starea conductoare în cea supraconductoare, fenomen descoperit în 1933 şi cunoscut sub denumirea de efect Meissner. Datorită efectului Meissner se mai spune că materialele supraconductoare manifestă un diamagnetism perfect.

Trebuie precizat că nu orice material conductor devine supraconductor prin răcire la o temperatură foarte scăzută. Unele, printre care se numără şi cele mai bune conductoare (Ag, Au, Cu) prezintă chiar la temperaturi extrem de mici (fracţiuni de grad K) o anumită rezistivitate reziduală. De asemenea se menţionează că nu toate materialele supraconductoare se comportă la fel. În general, starea supraconductoare nu presupune îndeplinirea riguroasă a celor două proprietăţi fundamentale ale stării supraconductoare ideale. În acest sens în literatură se vorbeşte de trei clase de materiale supraconductoare [13,16,56,74, 95,96,97,98]:

- materialele supraconductoare de tipul I care prezintă o conducţie electrică perfectă şi un diamagnetism perfect cu excepţia unei zone superficiale restrînse ($\sim 10^{-8}$ m) în care cîmpul magnetic nu se anulează. În această clasă de materiale se încadrează cele mai multe supraconductoare metalice pure;

- materiale supraconductoare de tipul II care prezintă o conducţie electrică perfectă la densităţi de curent şi inducţii magnetice sub anumite valori, dar nu prezintă un diamagnetism perfect pentru întregul domeniu al cîmpului magnetic şi nici pentru întregul volum de material aflat în stare supraconductoare. În această categorie se încadrează cel mai multe aliaje şi compuşi intermetalici;

- materiale supraconductoare pentru cîmpuri înalte, care de fapt sînt tot supraconductoare de tipul II la care prin introducerea unor impurităţi sau prin defecte provocate ale reţelei cristaline se asigură menţinerea stării supraconductoare şi la cîmpuri magnetice ridicate. Unii autori denumesc aceste materiale supraconductoare de tipul III [97,96].

Menţinerea stării supraconductoare depinde de trei parametri: temperatura critică, cîmpul magnetic critic şi densitatea critică de curent, care se definesc după cum urmează [95,96]:

- temperatura critică, T_c, este temperatura sub care materialul trece din starea conductoare în cea supraconductoare. Ea se defineşte în condiţiile în care densitatea de curent, cîmpul magnetic precum şi alte condiţii externe (solicitări mecanice sau termice, etc.) sînt menţinute în limite suficient de scăzute astfel încît să nu afecteze temperatura la care are loc tranziţia;

- cîmpul magnetic critic, H_c, reprezintă intensitatea cîmpului magnetic sub care un supraconductor ideal de tipul I trece brusc în starea supraconductoare dacă densitatea de curent este menţinută la valori suficient de mici încît să nu afecteze tranziţia. La determinarea acestui parametru critic, supraconductorul se consideră de forma unui cilindru subţire şi foarte lung, paralel cu liniile cîmpului magnetic aplicat, astfel încît factorul de demagnetizare este zero. Parametrii critici H_c şi T_c nu sînt independenţi, dependenţa lor putîndu-se aproxima printr-o relaţie de forma:

$$H_c(T) = H_c(0)\left[1 - (T/T_c)^2\right] \qquad (1.1)$$

unde prin $H_c(0)$ s-a notat cîmpul magnetic la temperatura zero absolut (obţinut prin extrapolare). Valoarea lui H_c este scăzută pentru toate materialele supraconductoare de tipul I ($B_c = \mu_0 H_c < 0,2T$) ceea ce le face inutilizabile în practică;

- densitatea critică de curent, J_c, reprezintă densitatea curentului electric sub care la o anumită temperatură şi un anumit cîmp magnetic, materialul se află în stare supraconductoare. Acest parametru depinde atît de T_c cît şi de H_c. De fapt cei trei parametri critici determină în sistemul de coordonate T,H,J o suprafaţă care delimitează regiunea de menţinere a stării supraconductoare de cea a stării conductoare (fig. 1.1).

β. Interpretarea şi explicarea proprietăţilor stării supraconductoare se poate face prin teoria fenomenologică dezvoltată îndeosebi de London, Ginsburg, Landau [18,20,97,112] sau prin teoria microscopică cuantică a lui Bardeen, Cooper şi Schrieffer [15].

În cadrul teoriei fenomenologice, se admite că ecuaţiile lui Maxwell sînt valabile şi în regim supraconductor, dar pentru a putea fi descrise proprietăţile stării supraconductoare este necesară introducerea a două ecuaţii cunoscute în literatură sub denumirea de ecuaţiile lui London. Astfel, dacă se acceptă într-un model relativ simplu, că într-un supraconductor există două tipuri de electroni liberi [98] şi anume electroni de supraconducţie şi respectiv de conducţie (la temperatura 0°K sînt numai electroni de supraconducţie, iar în starea conductoare numai electroni de conducţie), densitatea de curent se exprimă ca sumă a celor două componente:

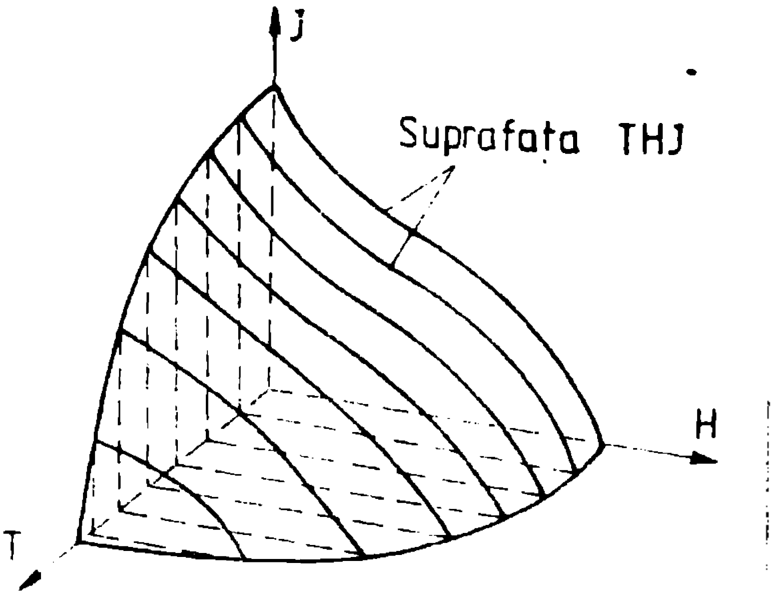


Fig. 1.1. Suprafaţa THJ care delimitează regiunea supraconductoare

$$J = J_c + J_s \tag{1.2}$$

în care componenta de conducţie se exprimă în forma obişnuită [128]:

$$J_c = \sigma \bar{E} \tag{1.3}$$

Referindu-ne la electronii supraconductori aceştia nu interacţionează cu reţeaua atomică, şi ca urmare, în prezenţa unui cîmp electric vor fi acceleraţi după legea lui Newton:

$$q\bar{E} = m\bar{a}_s = m\frac{d\bar{v}_s}{dt} \tag{1.4}$$

în care $\bar{v}_s$ reprezintă viteza de mişcare a electronilor de supraconducţie. Dacă se exprimă densitatea curentului de supraconducţie în forma $\bar{J}_s = n_s q\bar{v}_s$, în care n_s este concentraţia electronilor de supraconducţie, rezultă ţinînd seama de relaţia (1.4):

$$\frac{d\bar{J}_s}{dt} = n_s q\frac{d\bar{v}_s}{dt} = \frac{n_s}{m} q^2\bar{E} \tag{1.5}$$

relaţie cunoscută ca prima ecuaţie a lui London. Pe baza ei rezultă că în regim staţionar în stare supraconductoare $\bar{E} = 0$ independent de valoarea lui J_s. In această situaţie din (1.5) rezultă şi faptul că densitatea curentului de conducţie este nulă, adică $\bar{J} = \bar{J}_s$.

In limbaj obişnuit se spune că materialele supraconductoare prezintă o rezistivitate nulă, respectiv o conductivitate infinită; această exprimare se referă la introducerea unei relaţii similare cu (1.3) pentru întreaga densitate de curent (rel. 1.2), respectiv $\bar{J} = \sigma_s\bar{E}$. Deoarece $\bar{E} = 0$ iar $\bar{J} \neq 0$, rezultă că materialele supraconductoare manifestă o conductivitate σ_s infinită.

Considerînd un mediu supraconductor liniar, omogen şi izotrop, din ecuaţiile lui Maxwell [120] şi prima ecuaţie a lui London (1.5) rezultă [20]:

$$\nabla^2 \frac{d\bar{B}}{dt} = \frac{1}{\lambda_L^2}\frac{d\bar{B}}{dt}; \quad \nabla^2 \frac{d\bar{J}_s}{dt} = \frac{1}{\lambda_L^2}\frac{d\bar{J}_s}{dt}; \quad \nabla^2 \frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{1}{\lambda_L^2}\frac{d\bar{E}}{dt} \qquad (1.6)$$

în care $\lambda_L = \frac{1}{q}\left(\frac{m}{\mu_0 n_s}\right)^{1/2}$ este adîncimea de pătrundere London.

In cadrul teoriei fenomenologice se mai postulează că densitatea curentului de supraconducţie este porporţională cu potenţialul magnetic vector:

$$\bar{J}_s = -\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2}\bar{A} \qquad (1.7)$$

sau deoarece $\bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A}$, relaţia echivalentă:

$$\mathrm{rot}\,\bar{J}_s = -\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2}\bar{B} \qquad (1.7')$$

cunoscută ca a doua ecuaţie a lui London, şi pe baza căreia rezultă:

$$\nabla^2\bar{B} = \frac{1}{\lambda_L^2}\bar{B} \qquad (1.8)$$

adică $\bar{B}$ verifică aceeaşi ecuaţie ca şi $\frac{d\bar{B}}{dt}$.

Soluţia ecuaţiei (1.8) în cazul semispaţiului infinit este:

$$\bar{B}(x) = \bar{B}(0)\exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right) \qquad (1.9)$$

în concordanţă cu efectul Meissner, deoarece λ_L are valori de ordinul 10^{-8}m.

O soluţie similară se obţine şi pentru $\bar{J}_s$:

$$\bar{J}_s(x) = \bar{J}_s(0)\exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right) \qquad (1.10)$$

exprimînd faptul că în stare supraconductoare curentul electric este repartizat practic numai la suprafaţa mediului supraconductor. Aceasta justifică şi impune realizarea supraconductoarelor sub formă de pelicule sau filamente subţiri.

Teoria microscopică cuantică (BCS) a lui Bardeen, Cooper şi Schrieffer oferă o explicaţie mai completă a fenomenului de supraconducţie [13]. In cadrul acestei teorii se presupune că la temperaturi foarte scăzute în materialul supraconductor se realizează o stare ordensată a electronilor de conducție, care constă în formarea perechilor slab asociate de electroni numite și "perechi Cooper". Legătura dintre electronii unei astfel de perechi se realizează prin interacțiunea acestora cu vibrațiile rețelei de atomi și se exercită pe distanțe de 1000 ori mai mari decît distanțele interatomice. Aceasta se mai numește și lungime de coerență. Perechea de electroni Cooper se comportă ca o particulă Bose [70], care supunîndu-se statisticii Bose-Einstein, manifestă o mare probabilitate de a trece în starea cuantică în care sînt cele mai multe particule. Rezultatul acestei comportări este faptul că toate perechile Cooper se vor afla în aceeași stare cuantică corespunzătoare celei mai scăzute energii. Trecerea unui curent electric prin modul supraconductor înseamnă mișcarea ordonată cu aceeași viteză a perechilor Cooper, formînd o singură undă de Broglie cu lungimea de undă foarte mare [51,70]. In această situație procesele de împrăștiere sînt extrem de rare, ceea ce explică absența rezistivității. De fapt procesele de împrăștiere nici nu sînt posibile deoarece dacă o pereche Cooper ar interacționa cu rețeaua atomică ea ar trebui să treacă într-o altă stare cuantică, ori, conform statisticii Bose-Einstein acest lucru nu este posibil decît dacă toate perechile ar primi energia necesară trecerii în noua stare. Faptul că starea supraconductoare nu se menține decît la temperaturi scăzute se explică prin aceea că la aceste temperaturi agitația termică este suficient de redusă. Prezentarea detaliată a acestei teorii se poate urmări în literatura de specialitate [13,16,97].

γ. Tranziția din starea conductoare în cea supraconductoare odată cu scăderea temperaturii se face într-un interval de temperatură a cărui lărgime depinde pronunțat de gradul de puritate al materialului respectiv după cum este reprezentat calitativ în figura 1.2. Se menționează că, experimental s-a pus în evidență faptul că rezistivitatea materialelor supraconductoare este de aproximativ 10^{10} ori mai redusă decît a cuprului la temperatura ambiantă. De asemenea tot experimental s-au observat curenți persistenți în inele supraconductoare cu durata peste 1 an. Prin măsurători magnetice de mare precizie s-a calculat că timpul de existență al curentului continuu într-un inel supraconductor este mai mare decît 10^7 ani [70].

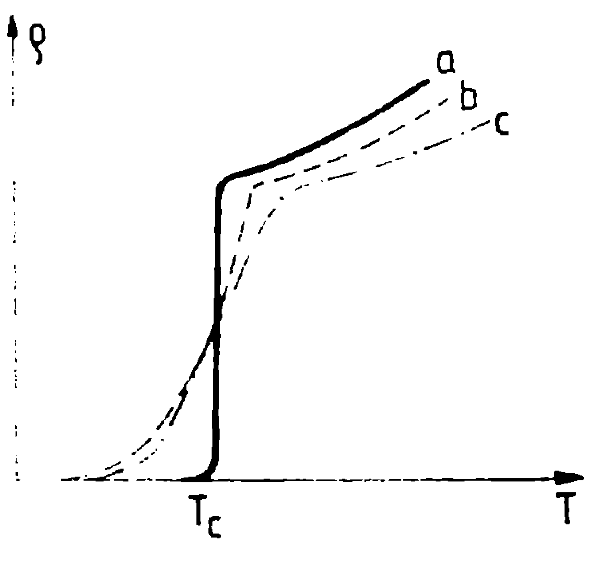


Fig. 1.2. Variația rezistivității cu temperatura la materiale supraconductoare pure (a) și impure (b,c)

Anularea (expulzarea) inducției

magnetice din volumul unui material supraconductor este un fenomen care nu poate fi explicat pe baza anulării rezistivității. În [97] se arată că un material conductor cu rezistivitate nulă nu poate avea comportarea unui material supraconductor și că aceea expulzarea cîmpului magnetic dintr-un supraconductor constituie o proprietate fundamentală a fenomenului de supraconducție. Există însă mari deosebiri în comportarea sub acest aspect a supraconductoarelor de tipul II față de cele de tipul I, după cum rezultă din figurile 1.3 și 1.4 în care este redată dependența magnetizației și inducției magnetice funcție de intensitatea cîmpului magnetic la supraconductoare de tipul I (fig. 1.3) și de tipul II (fig. 1.4)

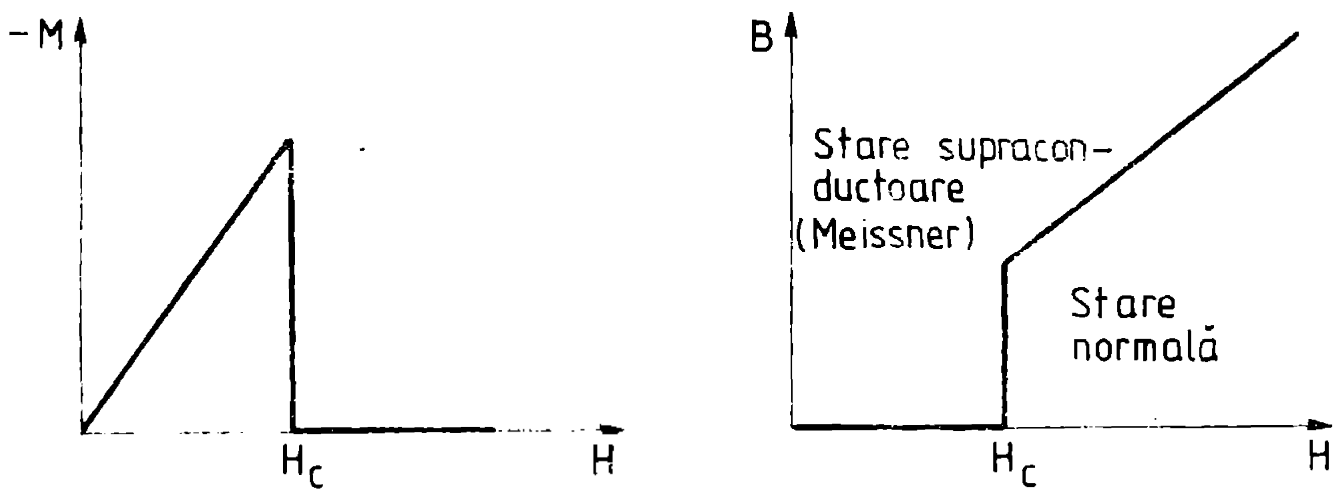


Fig. 1.3. Dependența magnetizației și a inducției magnetice de intensitatea cîmpului magnetic la supraconductoare de tipul I

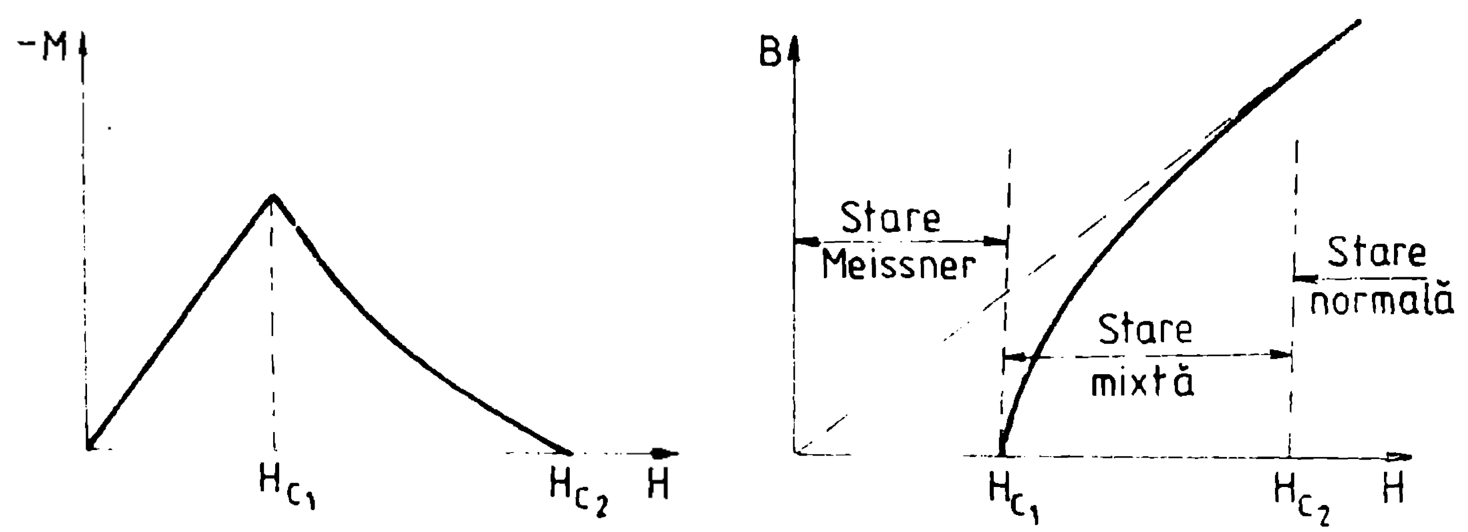


Fig. 1.4. Dependența magnetizației și a inducției magnetice de intensitatea cîmpului magnetic la supraconductoare de tipul II

Spre deosebire de supraconductoarele de tipul I, la cele de tipul II apar două valori caracteristice pentru cîmpul magnetic [illegible]: cîmpul magnetic critic inferior, H_{c1}, reprezentînd valoarea intensității cîmpului magnetic peste care supraconductorul nu mai manifestă un diamagnetism perfect, adică cîmpul magnetic pătrunde în materialul supraconductor; cîmpul magnetic critic superior, H_{c2}, reprezentînd valoarea intensităţii cîmpului magnetic peste care întreg volumul de material nu mai este în stare supraconductoare.

Între cele două valori caracteristice H_{c1} şi H_{c2}, materialul se află în "stare mixtă" [96], în care coexistă zone conductoare şi zone supraconductoare. În această stare cîmpul magnetic pătrunde în interiorul materialului formînd o reţea de tuburi de flux numite şi "fluxoizi", fiecare fluxoid fiind înconjurat de un vîrtej de supracurent. Aceşti fluxoizi nu pot lua orice valoare ci numai un multiplu întreg al "cuantei de flux" cu valoarea

$$\Phi_0 = h/2q \simeq 2 \cdot 10^{-15} Wb \qquad (1.11)$$

în care h este constanta lui Planck, iar q sarcina electronului. Verificarea experimentală a faptului că valoarea cuantei de flux este h/2q şi nu h/q este în concordanţă cu ipoteza existenţei perechilor Cooper.

Se relevă faptul remarcabil că în stare mixtă materialul supraconductor păstrează proprietatea absenţei rezistivităţii (conducţie perfectă) şi că valoarea cîmpului critic superior este foarte mare la unele aliaje sau metale de tranziţie (de 100 - 1000 ori mai mare decît H_{c1}) astfel că supraconductoarele de tipul II par probabile pentru a fi folosite în cîmpuri magnetice puternice. Acest lucru nu este încă posibil deoarece sub acţiunea forţelor Lorentz fluxoizii se deplasează prin volumul materialului supraconductor, deplasare care este disipativă şi se manifestă ca o rezistenţă electrică [58,88,95]. Dacă se iau măsuri de "fixare" (ancorare) a fluxoizilor prin introducerea unor impurităţi sau prin defecte provocate ale reţelei cristaline, atunci aceste materiale se pot folosi la curenţi electrici mari în cîmpuri magnetice puternice şi se numesc supraconductoare de cîmp înalt. Ele reprezintă de fapt supraconductoarele tehnic utilizabile. Pentru comparaţie, în tabelul 1.2 se dau temperatura critică şi cîmpul magnetic critic pentru unele supraconductoare tehnic utilizabile [18,58,70,99].

Tabelul 1.2. Temperatura critică şi cîmpul magnetic critic la unele materiale supraconductoare

Elementul	T_c [K]	B_c [T]	Materialul	T_c [K]	B_c [T] la 4,2 K
Ti	0,39	0,01	NbZr	9 - 11	7 - 9
Zr	0,546	0,0047	NbTi	6 - 10	9 - 12
Ga	1,09	0,0051	PbBi	8,6	12,5
Al	1,18	0,0105	V_3Ga	14,3	21
In	3,4	0,0293	NbN	16	21
Sn	3,72	0,0309	Nb_3Sn	18,3	22,5
Hg	4,15	0,0412	V_3Si	17	23,5
V	5,30	0,142	Nb_3Al	18,7	29,5
Pb	7,19	0,0803	Nb_3AlGe	20,7	41
Nb	9,2	0,198	(Al 0,73 Ge 0,27)		

Se menţionează faptul că cele mai frecvent utilizate materiale supraconductoare sînt în prezent NbTi şi Nb_3Sn care se produc pe scară industrială în diferite forme.

Datorită unor perturbaţii locale (variaţii ale temperaturii sau densităţii de curent) în materialul supraconductor pot apare mici regiuni care trec în starea de conducţie. La trecerea curentului electric prin aceste zone, rezistivitatea lor nemaifiind nulă, se dezvoltă o căldură care dacă nu este rapid evacuată duce la creşterea temperaturii şi deci la extinderea zonelor conductoare care pot cuprinde întregul material. Acest efect de degradare a stării supraconductoare trebuie limitat, în caz contrar fiind posibilă pierderea în întregime a stării supraconductoare, cu consecinţe ireparabile pentru instalaţia respectivă. Procedeul tehnic prin care se limitează efectul de degradare a stării supraconductoare poartă denumirea de "stabilizare" şi constă în asigurarea acelei condiţii care să evite trecerea din starea supraconductoare în cea conductoare atunci cînd intervin perturbaţii de scurtă durată.

În principiu, stabilizarea se face prin punerea în paralel cu supraconductorul a unui material bun conducător electric şi termic (de obicei cupru de înaltă puritate) numit şi material de bază. Realizîndu-se un contact bun între aceste două materiale pe toată lungimea (fig. 1.5), la apariţia unei regiuni conductoare în materialul supraconductor, curentul electric va trece în materialul de bază, acesta avînd rezistivitatea mult mai mică decît regiunea conductoare a supraconductorului (de aprox. 1000 ori), avînd şi o conductivitate termică bună, materialul de bază asigură evacuarea rapidă spre agentul de răcire a căldurii disipate şi ca urmare regiunea conductoare din materialul supraconductor nu-şi măreşte temperatura. În această situaţie, dacă perturbaţia este de scurtă durată, regiunea respectivă revine în stare supraconductoare.

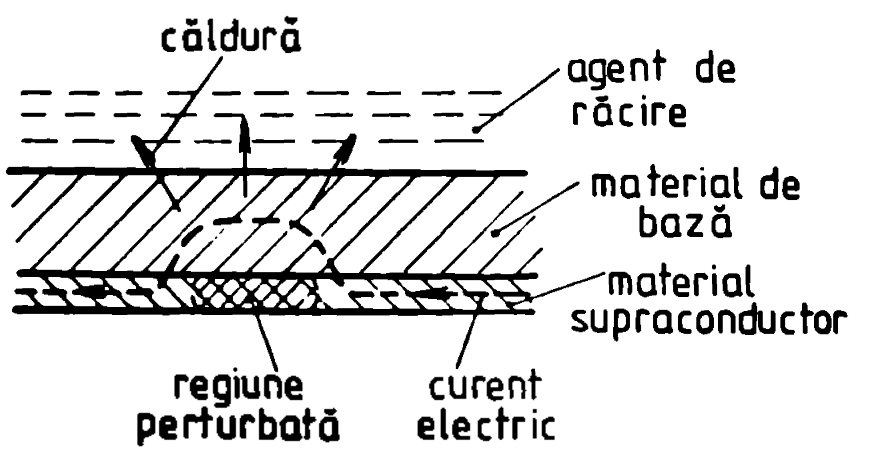


Fig. 1.5. Explicativă privind principiul stabilizării stării supraconductoare

Necesitatea folosirii în practică a supraconductoarelor stabilizate conduce la soluţia tehnologică de realizare a acestora fie sub forma de peliculă supraconductoare aplicată pe o bandă din material de bază, fie mai ales sub forma unui număr mare de

496890 356E

filamente foarte subțiri (diametre de ordinul μm) înglobate într-o "matrice" de bază (cupru). Ele trebuie să respecte trei criterii de stabilizare: criostatică, adiabatică și dinamică [18,56,65,97].

Stabilizarea criostatică, constă în asigurarea condițiilor de evacuare a căldurii desvoltate în materialul de bază la apariția unei mici zone conductoare în materialul supraconductor. Criteriul se exprimă prin relația:

$$\frac{\rho I^2}{AP} < W \qquad (1.12)$$

în care: ρ - rezistivitatea materialului de bază; A - aria secțiunii transversale a materialului de bază; P - perimetrul secțiunii în contact cu agentul de răcire; I - intensitatea curentului de lucru; W - - densitatea fluxului termic prin suprafața de contact cu agentul de răcire.

Stabilizarea adiabatică este legată de rearanjarea fluxoizilor ca urmare a apariției unei creșteri a temperaturii în materialul supraconductor. Astfel, dacă apare o creștere de temperatură ΔT_1, aceasta conduce la o scădere a densității critice de curent, ΔJ_c, ceea ce corespunde cu o rearanjare a fluxoizilor în materialul supraconductor. Ca urmare a acestei rearanjări se desvoltă în supraconductor o căldură ΔQ care în condiții adiabatice conduce la o creștere de temperatură ΔT_2. Dacă $\Delta T_2 < \Delta T_1$, atunci procesul este stabil, aceasta asigurîndu-se prin alegerea diametrului filamentului supraconductor astfel încît să îndeplinească condiția:

$$d < \frac{1}{J_c}\sqrt{\frac{3}{4\pi}\, 10^9\, T_0 S} \qquad (1.13)$$

în care S reprezintă capacitatea calorică a supraconductorului, iar $T_0 = J_c(dJ_c/dT)^{-1}$.

Stabilizarea dinamică asigură atenuarea rapidă a mișcării fluxoizilor în materialul supraconductor, astfel încît căldura desvoltată este evacuată imediat și se stabilește o temperatură de echilibru. Condiția de stabilizare dinamică este asigurată dacă diametrul filamentului supraconductor satisface relația:

$$d < \frac{8}{J_c^2}\sqrt{\frac{T_0 k_s}{\rho}\left(\frac{1}{\lambda_s} - 1\right)} \qquad (1.14)$$

în care k_s este conductivitatea termică iar λ_s este raportul dintre secțiunea transversală a supraconductorului și secțiunea totală (supraconductor și material de bază).

Prin urmare, dacă se asigură un raport corespunzător între suprafețele transversale ale supraconductorului și materialului de bază se poate realiza stabilizarea stării supraconductoare, dar nu la orice valoare a densității de curent. Astfel, de exemplu în figura 1.6 se dă modul de variație al densității critice de curent (raportată la întreaga secțiune, supraconductor plus material de bază) în funcție de cîmpul magnetic critic exterior, la 4,2 K, pentru supraconductorul NIOMAX FM A61 produs de IMI-Birmingham (Anglia). Acesta este realizat din 61 filamente de NbTi înglobate într-o matrice din cupru cu diametrul de 0,5 mm și avînd un raport Cu/NbTi = 1,35:1. Se menționează că în cazul cablurilor supraconductoare destinate bobinelor de dimensiuni mari, raportul "material de bază/supraconductor" are valori mari, chiar peste 10:1, astfel încît densitatea globală de curent este mult mai mică față de cea din filamentele supraconductoare. De asemenea, atunci cînd materialul supraconductor este folosit la realizarea unei bobine, densitatea critică de curent este sensibil redusă față de cazul unui eșantion din materialul respectiv. Aceasta în principal din cauza solicitărilor mecanice din timpul bobinării precum și condițiilor mai dificile de evacuare a căldurii. Cu toată această reducere la supraconductoarele de cîmpuri înalte se pot realiza densități globale de curent (raportate la întreaga suprafață transversală) de ordinul sutelor de A/mm^2.

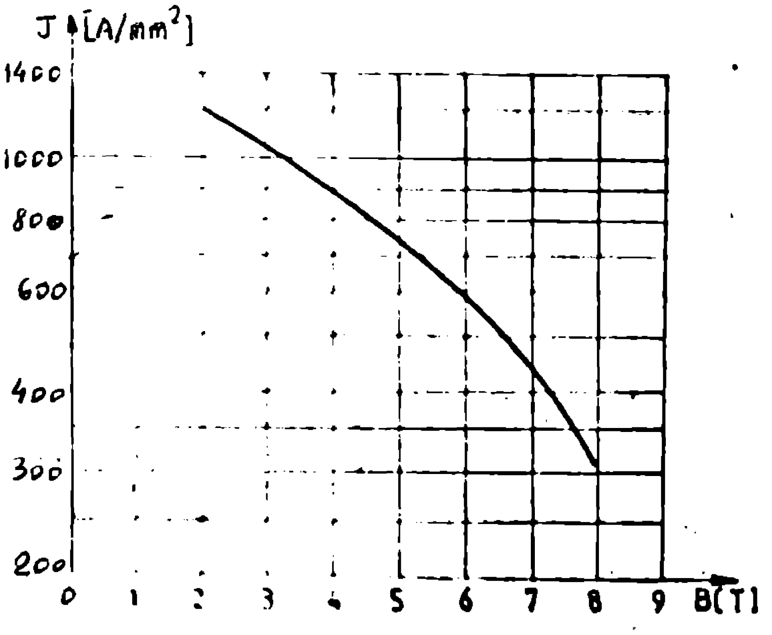


Fig. 1.6. Variația densității critice de curent funcție de cîmpul magnetic la supraconductorul NIOMAX FM A61

Este important de relevat faptul că la cîmpuri magnetice puternice valoarea densității de curent este limitată și datorită forțelor locale $\vec{f}_v = \vec{J} \times \vec{B}$ extrem de mari, care impun sisteme de consolidare pretențioase. Astfel dacă la bobinele convenționale ordinul de mărime al acestor forțe este $f_v \approx 10^6$ N/m^3, la bobinele supraconductoare aceasta este de $f_v \approx 10^9$ N/m^3 (la J = 100 A/mm^2 și B = 10 T).

In practică se folosesc și așa numitele sisteme hibride care reprezintă combinații de bobine criogenice și supraconductoare și se folosesc îndeosebi în situațiile în care sînt necesare cîmpuri magnetice care depășesc cîmpul magnetic critic al materialului supraconductor disponibil. In astfel de cazuri bobinele din zona de cîmp intens se realizează în varianta criogenică, iar cele din zona de cîmp mai redus (sub cîmpul critic) se realizează în varianta supraconductoare. Soluţia este folosită frecvent în laboratoarele de cîmpuri magnetice foarte puternice [16,88].

1.1.4. Aspecte privind menţinerea temperaturii criogenice

Saltul spectaculos realizat în domeniul bobinelor pentru cîmpuri magnetice puternice prin realizarea bobinelor criogenice şi supraconductoare, presupune depăşirea unor dificultăţi tehnologice care nu apar la cele convenţionale. Acestea sînt legate de obţinerea unor materiale cu parametri superiori la temperaturi joase şi de necesitatea realizării unui sistem de răcire capabil să menţină temperatura scăzută. Acest sistem conţine: un criostat (vas dewar) în care se introduce bobina, agentul de răcire sub formă lichefiată, agregatul care lichefiază agentul de răcire, precum şi o serie de aparate de reglare şi măsură pentru temperaturi criogenice. Se impune ca foarte importantă realizarea unei bune izolaţii termice faţă de mediul ambiant care să asigure un flux termic redus spre interiorul criostatului. In caz contrar va fi necesar un volum mare de agent de răcire şi o putere mare consumată pentru răcire.

Costul întregului sistem de răcire este de regulă de cîteva ori mai mare decît al bobinei, iar refrigeratorul necesită o putere de 750 - 1000 W pentru evacuarea unei puteri de 1 W de la temperatura de 4,2 K [10,50]. Cu toate acestea este demonstrat teoretic şi practic că bobinele criogenice şi îndeosebi cele supraconductoare asigură cheltuieli de exploatare mai reduse decît cele convenţionale. In unele cazuri chiar şi investiţiile iniţiale pot fi mai reduse datorită micşorării substanţiale a gabaritului şi greutăţii.

1.2. Domenii de utilizare ale bobinelor pentru cîmpuri magnetice puternice

Aplicaţiile tehnice în care se folosesc bobine de cîmp magnetic puternic sînt de o mare diversitate, ele intervenind în domenii legate de producerea şi utilizarea energiei electrice, fizica energiilor înalte, industria minereului, transporturi, medicină, biologie, ş.a. [17,18,37,50,56,63,68,109,119,124,136].

Pentru a avea o imagine a diversităţii acestor aplicaţii, se prezintă în continuare într-o formă succintă principalele domenii în care intervin ele.

a) Bobine de mici dimensiuni folosite ca unelte de cercetare în ramurile tradiționale ale fizicii, în biologie, medicină, etc. Se menționează în literatură [18,50,66] folosirea unor cîmpuri magnetice de 10-15 T la spectroscopia biomoleculelor, iar în medicină se fac experiențe privind regenerarea țesuturilor în cîmp magnetic, tratarea unor tipuri de cancer, vehicularea unor sonde prin interiorul vaselor sanguine etc. Astăzi se tinde ca pentru cîmpuri magnetice puternice, aceste bobine să fie realizate în varianta supraconductoare, cel mai simplu fiind realizarea lor sub forma de solenoizi supraconductori. Tehnica realizării acestora pentru cîmpuri magnetice de 5-15 T este pusă la punct pe plan mondial. Astfel se menționează că în 1975 existau numai în SUA un număr de 70 instituții care dispuneau de solenoizi supraconductori fabricați la Siemens [136].

b) Bobine folosite în fizica energiilor înalte indicate pentru: identificarea și analizarea interacțiunilor dintre particulele elementare (camera cu bule); selectarea, focalizarea și ghidarea fasciculelor de microparticule; accelerarea particulelor elementare; reactoarele de fuziune de tip Tokamak. Caracteristic pentru acestea este volumul mare al zonei de cîmp magnetic intens și ca urmare dimensiunile uriașe ale bobinelor. Pe plan mondial există realizări în toate variantele (convenționale, criogenice și supraconductoare) cu tendința spre cele criogenice și supraconductoare.

c) Bobine pentru generatoare MHD, care la cîmpuri magnetice înalte și volum mare al canalului de conversie pot deveni avantajoase. Astfel în combinație cu un turbogenerator, un generator MHD supraconductor poate asigura o mărire a randamentului global de conversie a energiei de la 40% la 48-53% [92] reducîndu-se substanțial și poluarea mediului ambiant [110].

Avînd în vedere volumul mare al canalului de conversie MHD și nivelul cîmpului magnetic necesar în acest canal [21,92,109] rezultă că varianta economică de realizare este cea supraconductoare. Realizările în varianta convențională (din anii 1960) au fost utilizate doar pentru experimente în domeniul conversiei MHD. Din jurul anului 1970 s-au realizat o serie de modele experimentale în varianta supraconductoare [16,21,50,55,61,85,92,121,125] care au demonstrat posibilitatea producerii energiei electrice prin conversie MHD în condiții practice.

d) Bobine pentru mașinile electrice rotative la care în varianta convențională s-au atins practic limitele legate de puterile unitare și randamente, în special din cauza gabaritelor și greutăților mari. Depășirea acestor limite se poate realiza prin folosirea bobinelor supraconductoare care oferă fie posibilitatea reducerii greutății de aproximativ 3 ori [57], fie a măririi puterilor unitare. Retorită dificultăţilor ce apar în cazul folosirii supraconductoarelor în regim variabil, în stadiul actual se preconizează folosirea bobinelor supraconductoare în sistemul de excitaţie al maşinilor electrice, ceea ce delimitează aria tipurilor de maşini electrice cu înfăşurări supraconductoare la : maşinile sincrone, maşinile de c.c. homopolare şi heteropolare [9,25,99]. Avantajele acestor maşini legate de eliminarea fierului, reducerea substanţială a gabaritului, mărirea tensiunii nominale, îmbunătăţirea randamentului, devin demne de interes doar la puteri unitare mari [9,32,99]. Astfel maşinile sincrone cu excitaţie supraconductoare devin competitive cu cele convenţionale la puteri unitare peste 500 MVA în cazul unei perechi de poli şi respectiv 1000-1500 MVA în cazul a două perechi de poli. Realizarea unor astfel de generatoare electrice permite şi mărirea randamentului maşinii electrice cu 0,5% [9,37] ceea ce conduce la importante economii.

Maşinile de c.c. homopolare se pretează foarte bine realizării în varianta supraconductoare, singura problemă deosebită constituind-o colectarea unor curenţi electrici de valori mari [4,36,73,88]. Cercetările actuale urmăresc obţinerea unor perii colectoare care să permită densităţi de curent mai mari, folosirea contactului cu metal lichid şi mărirea tensiunii prin segmentarea indusului.

Există şi domenii unde deşi nu este vorba de puteri unitare limită, se impun maşini electrice cu gabarite mici şi greutate redusă. Este cazul navelor maritime şi mai ales al celor spaţiale, situaţii în care folosirea maşinilor electrice cu înfăşurări supraconductoare reprezintă o soluţie.

e) Bobine pentru sustentaţie magnetică. Deşi principiul levitaţiei magnetice care se bazează pe repulsia ce intervine în cazul cîmpurilor magnetice cu acelaşi sens, este cunoscut de multă vreme (1908), aplicaţiile practice importante sînt posibile doar la cîmpuri magnetice puternice. Domeniul de aplicare cel mai important pare a fi în transportul de mare viteză (>300 km/h) caz în care suspensia pe roţi nu mai este posibilă [64,88].

f) Bobine pentru stocarea energiei, care prezintă avantaje faţă de alte soluţii de stocare pentru timp de descărcare de ordinul 10^{-3} – 10^{3} s [18,58]. Se au în vedere numai bobinele supraconductoare [18, 58,88,137] deoarece în cazul lor: energia poate fi stocată un timp practic nelimitat şi fără pierderi; încărcarea poate fi lentă, încît se utilizează surse de alimentare simple şi ieftine; gabaritul şi greutatea nu sînt excesiv de mari, datorită densităţilor mari de energie la cîmpurile magnetice puternice ce se pot realiza.

Există numeroase alte domenii în care se folosesc bobine de cîmp puri magnetice puternice. Astfel se amintesc: separarea magnetică în industria mineritului, desalinizarea apei marine, tratarea magnetică a apei poluate [88], şi altele.

Actualmente există numeroase laboratoare de cercetare care dispun de instalaţii capabile să producă cîmpuri magnetice în domeniul 10-30 T, îndeosebi în ţările dezvoltate tehnologic [18,88, 124]. Există de asemenea situaţii în care unele laboratoare au renunţat să mai folosească bobinele răcite cu apă de care dispun şi să le înlocuiască cu cele supraconductoare, fiind mai economice. Aceasta, deşi respectivele sisteme convenţionale reprezintă investiţii mari şi din punct de vedere tehnic se puteau folosi în continuare.

CAPITOLUL 2

METODE DE CALCUL AL CIMPULUI MAGNETIC SI AL FORTELOR ELECTROMAGNETICE IN SISTEMELE CRIOGENICE SI SUPRACONDUCTOARE

Importanţa determinării cîmpului magnetic şi a forţelor care se manifestă în sistemele fizice parcurse de curenţi electrici este evidentă atît în faza de proiectare cît şi de exploatare a acestora. Din punct de vedere al calculului se disting de obicei două etape:

- evaluarea calitativă şi aproximativă sau numai în anumite puncte particulare a cîmpului magnetic, astfel că încă de la început în faza de proiectare să se poată alege soluţii tehnice adecvate. Metodele de calcul folosite în acest scop trebuie să fie simple şi expeditive, în cadrul lor admiţîndu-se de obicei importante simplificări;
- determinarea mai exactă a cîmpului magnetic şi respectiv a forţelor electromagnetice pentru ca într-o etapă avansată de proiectare să se definitiveze soluţiile tehnice acceptate, sau să se aprecieze performanţele în diferite condiţii de funcţionare a unor sisteme realizate practic. Metodele de calcul folosite în aceste scopuri trebuind să permită obţinerea unor rezultate cît mai exacte, sînt desigur mai complexe şi laborioase.

În acest capitol se prezintă unele metode de calcul vizînd ambele aspecte menţionate mai sus şi în strînsă legătură cu sistemele fizice avute în vedere ţinînd seama de particularităţile acestora.

2.1. Unele particularităţi specifice sistemelor criogenice şi supraconductoare

Făcînd abstracţie de deosebirile tehnologice legate îndeosebi de domeniul temperaturilor joase, sistemele criogenice şi supraconductoare prezintă sub aspectul calculului electromagnetic unele particularităţi referitoare în principal la densitatea de curent, folosirea materialelor feromagnetice şi bineînţeles menţinerea stării de supraconducţie în cazul sistemelor supraconductoare.

2.1.1. Particularităţi legate de calculul electromagnetic al bobinelor criogenice şi supraconductoare

Odată cu scăderea rezistivităţii la temperaturi joase se poate mări densitatea de curent atît la bobinele criogenice cît mai ales la cele supraconductoare, cu condiţia ca sistemul de răcire să poată asigura menţinerea temperaturii scăzute. Creşterea densităţii de curent oferă posibilitatea reducerii secţiunii transversale a căilor de curent astfel încît în unele situaţii, bobinele pot fi echivalate prin pături de curent sau chiar prin conductoare filiforme, ceea ce simplifică problema calculului electromagnetic.

O altă particularitate rezultă din faptul că bobinele criogenice şi supraconductoare sînt realizate îndeosebi pentru cîmpuri magnetice puternice. În această situaţie, spre deosebire de cazul sistemelor convenţionale de producere a cîmpului magnetic în care materialele feromagnetice deţin un rol esenţial în obţinerea unui anumit nivel şi o anumită distribuţie spaţială a cîmpului magnetic, la sistemele criogenice şi supraconductoare este ineficientă folosirea materialelor feromagnetice pentru producerea cîmpului magnetic, din cauza saturaţiei pronunţate la cîmpuri magnetice puternice. Absenţa fierului conduce la micşorarea volumului a producţiei, iar spaţiul rămas disponibil se poate folosi în alte scopuri. Din punct de vedere al calculului electromagnetic, absenţa fierului permite tratarea problemei ca o problemă în mediu omogen şi liniar (μ_0), ceea ce constituie o simplificare majoră.

Pe de altă parte, valoarea ridicată a cîmpului magnetic în zona utilă presupune şi cîmpuri magnetice relativ mari în zonele din apropierea bobinei care produce cîmpul magnetic. Pentru protejarea aparaturii de măsură şi a altor instalaţii conexe se impun în numeroase cazuri măsuri de ecranare magnetică. În această situaţie, materialele feromagnetice neutilizate în scopul obţinerii cîmpului magnetic se vor folosi în scop de ecranare şi desigur vor complica problema calculului electromagnetic mai ales dacă acestea nu pot fi considerate liniare.

În cazul sistemelor supraconductoare se mai relevă importanţa deosebită privind funcţionarea acestora astfel încît să nu se depăşească parametrii critici, cînd dispare starea supraconductoare. Din punct de vedere al calculului electromagnetic, aceasta înseamnă că la o anumită densitate de curent este necesar să se cunoască valoarea maximă a inducţiei magnetice în bobina ce produce cîmpul magnetic şi această valoare să fie sub cîmpul critic al materialului supraconductor ($B_{max} < B_c$). Pe lîngă importanţa cunoaşterii acestei valori maxime şi deci a metodelor de determinare a sa, se mai relevă că proiectarea trebuie făcută astfel ca B_{max} să rezulte cît mai redus posibil. Aceasta deoarece la valori mari ale inducţiei magnetice sînt admise densităţi de curent reduse şi ca urmare creşte volumul de material supraconductor necesar pentru obţinerea cîmpului magnetic impus în zona utilă.

2.1.2. Unele cazuri studiate

Pe parcursul elaborării lucrării s-au avut în vedere citeva situaţii intilnite relativ frecvent în practică, izvorite şi din necesitatea rezolvării unor teme de cercetare contractuală [10,11,12,32,33,34,35,36,47] în care a fost angrenat şi autorul. Se menţionează astfel bobinele pentru generatoarele MHD, bobinele de excitaţie ale generatoarelor sincrone, diferite tipuri de solenoizi destinaţi fie unor scopuri de laborator, fie excitaţiei maşinilor electrice unipolare, în toate acestea existînd premisele realizării lor în varianta criogenică sau supraconductoare. Desigur că în situaţii diferite se pretează diferite metode pentru determinarea cîmpului magnetic şi de aceea sub acest aspect principalele probleme abordate în teză se pot încadra într-unul din următoarele cazuri:

- conductoare cu formă geometrică complicată (oarecare) care intervin în cazul bobinelor pentru generatoare MHD şi în alte situaţii cînd nu se poate neglija influenţa capetelor de bobine;
- conductoare rectilinii, paralele şi de lungime mare, întîlnite la generatoarele MHD cu canal de secţiune constantă şi lungime mare, dar mai ales la maşinile sincrone de mare putere;
- conductoare dispuse în formă de spire circulare coaxiale (simetrie de rotaţie), întîlnite la diferite tipuri de solenoizi printre care şi la excitaţia maşinilor unipolare.

2.1.3. Ipoteze de calcul uzuale

În fiecare din cazurile abordate se au în vedere anumite ipoteze simplificatoare, unele dintre acestea fiind valabile în majoritatea situaţiilor. Aceste ipoteze de calcul admise cu caracter general sînt:

- regimul se consideră staţionar;
- în calculul cîmpului magnetic se lucrează cu o densitate echivalentă de curent obţinută prin raportarea curentului total (solenaţiei) la întreaga suprafaţă transversală ţinînd seama în acest scop de suprafaţa transversală a cablului supraconductor (material de bază plus supraconductor) şi de factorul de umplere la realizarea bobinajului. Această densitate de curent se consideră constantă cel puţin pe porţiuni;

- întregul mediu se consideră liniar şi omogen din punct de vedere magnetic, cu excepţia situaţiilor în care se folosesc ecrane feromagnetice. Avînd în vedere că ecranarea magnetică se face mai ales la cîmpuri magnetice puternice, rezultă că se impune în aceste situaţii să se ţină seama atît de neomogenitatea cît şi de neliniaritatea mediului.

2.2. Conductoare de formă oarecare situate într-un mediu omogen şi liniar

In situaţia în care conductoarele parcurse de curent au o formă geometrică complicată nu se recomandă căutarea unei soluţii analitice a problemei de cîmp magnetic. Chiar dacă aceasta se poate găsi ea va fi greu de folosit în evaluările numerice. Dacă conductoarele parcurse de curenţi ocupă un domeniu limit, cîmpul magnetic se poate determina fie prin integrarea numerică a relaţiei lui Biot-Savart-Laplace, fie pe baza potenţialului magnetic vector.

2.2.1. Determinarea cîmpului magnetic prin integrarea numerică a relaţiei lui Biot-Savart-Laplace

α. Dacă se consideră o distribuţie de volum a curentului electric (fig.2.1), în ipotezele menţionate anterior inducţia magnetică într-un punct oarecare P se determină pe baza relaţiei cunoscute:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v} \frac{\bar{J}\times\bar{r}}{r^3}\,dv \qquad (2.1)$$

integrala referindu-se la întreg domeniul parcurs de curent.

In cazuri particulare în care există anumite simetrii este posibilă rezolvarea analitică a integralei de volum din relaţia (2.1), obţinîndu-se expresia inducţiei magnetice pentru cazul considerat.

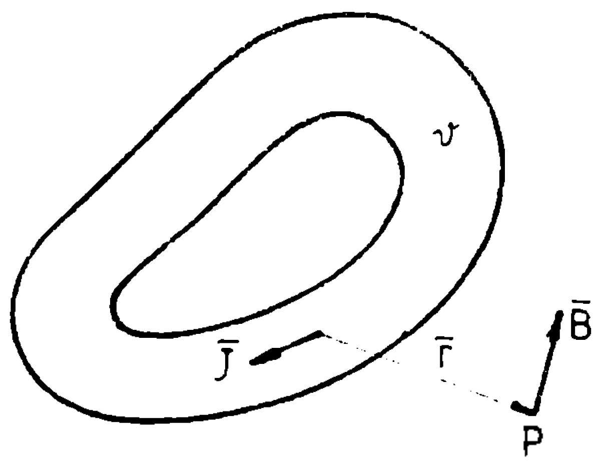


Fig.2.1. Explicativă privind aplicarea relaţiei 2.1

Intr-un caz general însă, cînd geometria conductoarelor de curent este complicată, această integrare analitică nu mai este posibilă şi se recomandă folosirea unor metode numerice de integrare.

Un astfel de procedeu a fost elaborat de autor [103] şi constă din următoarele etape:

- se descompune domeniul parcurs de curent într-un număr limit N_s de tuburi de curent, de suprafaţă transversală Δs (fig.2.2). Dacă N_s este mare, rezultă Δs mică astfel încît domeniul parcurs de curent este echivalat prin N_s spire care în calcul pot fi considerate filiforme şi parcurse fiecare de un curent $\Delta I = J\Delta s$. Se precizează că aceste spire prin care s-a echivalat domeniul parcurs de curent în general nu reprezintă spirele reale care există în sistemul fizic considerat. De aceea deşi vom păstra denumirea simplă de spire, înţelesul ei este de spire de calcul, sau spire echivalente;
- se aproximează fiecare spiră filiformă cu un contur poligonal cu N_l laturi (fig.2.3) astfel alese încît aproximarea să fie cît mai

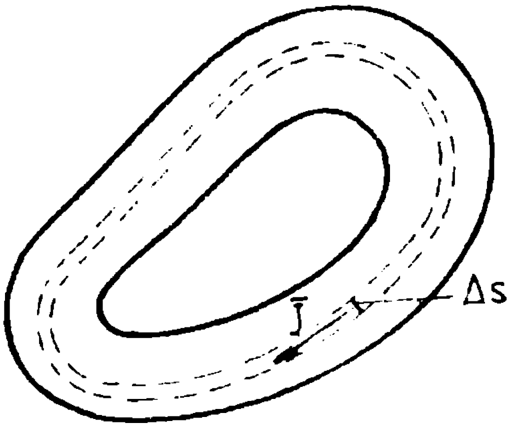


Fig.2.2. Descompunerea domeniului în spire de calcul

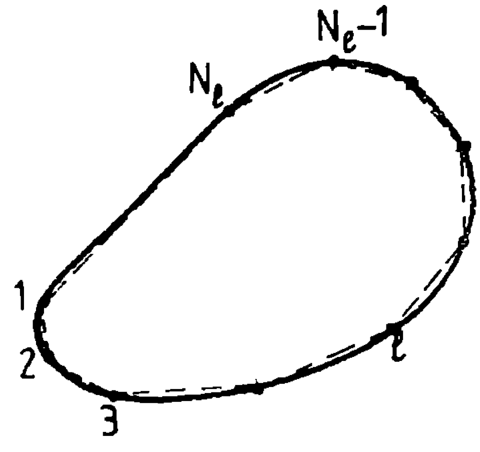


Fig.2.3. Aproximarea spirei de calcul printr-un contur poligonal

[illegible] nu presupune neapărat ca numărul de laturi să fie mare, ci îndeosebi ca vîrfurile conturului poligonal să se aleagă în poziţii convenabile;

- se însumează contribuţiile tuturor laturilor din cele N_s spire echivalente, obţinîndu-se cîmpul rezultant.

Pentru o latură rectilinie parcursă de curentul ΔI aplicînd relaţia 2.1 rezultă expresia inducţiei magnetice

$$\overline{\Delta B} = \mu_0 \frac{\Delta I}{4\pi R}(\cos\alpha_i + \cos\alpha_{i+1})\overline{u} \quad (2.2)$$

în care mărimile au semnificaţia din figura 2.4, iar $\overline{u}$ este versorul direcţiei lui $\Delta\overline{B}$.

Introducînd un factor geometric $G=(\cos\alpha_i+\cos\alpha_{i+1})/R$, relaţia (2.2) se scrie în forma

$$\overline{\Delta B} = 10^{-7} G \,\Delta I\, \overline{u} \qquad (2.3)$$

Cu aceasta, cîmpul magnetic rezultant devine

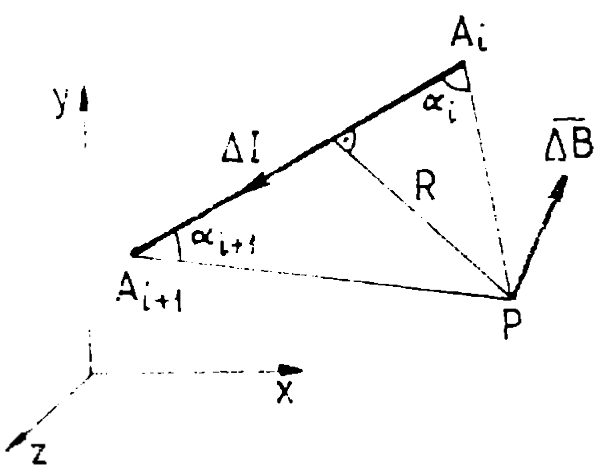


Fig.2.4. Cîmpul unei laturi rectilinii parcursă de curent

$$\overline{B} = \sum_{1}^{N_s} \sum_{1}^{N_l} \overline{\Delta B} \qquad (2.4)$$

însumarea făcîndu-se desigur pe componente într-un sistem de coordonate. Considerînd sistemul cartezian, rezultă

$$B_x = \sum_{1}^{N_s} \sum_{1}^{N_l} 10^{-7} G_x \,\Delta I; \quad B_y = \sum_{1}^{N_s} \sum_{1}^{N_l} 10^{-7} G_y \,\Delta I; \quad B_z = \sum_{1}^{N_s} \sum_{1}^{N_l} 10^{-7} G_z \,\Delta I \qquad (2.5)$$

în care: $G_x = G\,\overline{i}\cdot\overline{u}$; $G_y = G\,\overline{j}\cdot\overline{u}$; $G_z = G\,\overline{k}\cdot\overline{u}$.

În cazul particular în care toate spirele elementare sînt parcurse de acelaşi curent $\Delta I = I/N_s$, relaţiile (2.5) pot fi puse sub forma:

$$B_x=10^{-7}G_{tx}I;\quad B_y=10^{-7}G_{ty}I;\quad B_z=10^{-7}G_{tz}I \qquad (2.6)$$

în care

$$G_{tx}=\frac{1}{N_s}\sum_{1}^{N_s}\sum_{1}^{N_l}G_x;\quad G_{ty}=\frac{1}{N_s}\sum_{1}^{N_s}\sum_{1}^{N_l}G_y;\quad G_{tz}=\frac{1}{N_s}\sum_{1}^{N_s}\sum_{1}^{N_l}G_z \qquad (2.7)$$

Cunoscînd componentele cîmpului rezultant (rel. 2.6) se determină şi valoarea inducţiei magnetice în punctul considerat

$$B = 10^{-7}G_tI \qquad (2.8)$$

în care

$$G_t = (G_{tx}^2 + G_{ty}^2 + G_{tz}^2)^{1/2} \qquad (2.9)$$

Desigur că aplicarea relaţiilor (2.5) sau (2.6) pentru determinarea inducţiei magnetice este avantajoasă doar cu folosirea calculatoarelor electronice. In acest scop, a fost conceput şi realizat un program de calcul care permite determinarea inducţiei magnetice în orice punct dacă se cunosc poziţiile vîrfurilor spirelor poligonale. Ordinograma de principiu a acestuia este prezentată în figura 2.5 (pag. 38).

La rezolvarea numerică a problemei, intervin unele aspecte cu caracter contradictoriu, în special datorate preciziei de calcul şi timpului de calcul necesar. Neglijînd în acest context erorile de rotunjire introduse de sistemul de calcul, precizia este cu atît mai mare cu cît N_s şi N_l sînt mai mari, această condiţie însă la creşterea timpului de calcul. Se impune prin urmare să se stabilească anumite criterii de alegere a lui N_s şi N_l astfel încît să se obţină precizia dorită în un timp de calcul cît mai redus. In acest sens se prezintă în continuare unele recomandări privind aproximarea spirei filiforme şi a numărului de spire echivalente.

β. Pentru a estima modul în care alegerea conturului de aproximare a spirei afectează precizia de calcul, se consideră o spiră circulară de rază a parcursă de curentul I. Dacă punctul de calcul este situat la distanţa relativ mare de conturul spirei, aceasta se aproximează cu un poligon regulat avînd N_l laturi. Considerînd vîrfurile poligonului pe cerc (înscris în cerc, fig. 2.6), la limită pentru $N_l\to\infty$ spira circulară şi cea poligonală coincid şi produc acelaşi cîmp magnetic. Dacă N_l este mic, se obţine evident o eroare, uşor de estimat pentru puncte situate pe axa spirei.

Rezolvînd relaţia (2.1) pentru un punct situat pe axa spirei circulare la distanţa z, se obţine:

$$B_0 = \mu_0\frac{Ia^2}{2r^3} \qquad (2.10)$$

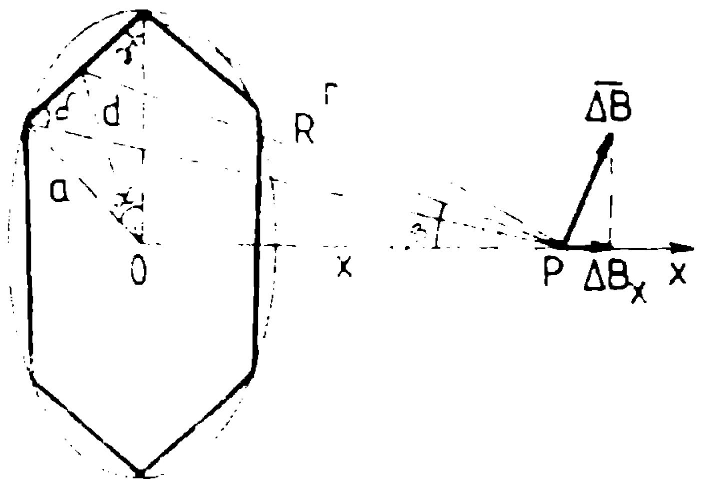


Fig. 2.6. Spira circulară și spira echivalentă (poligon)

Pentru o latură a poligonului regulat se aplică relația (2.2) și datorită simetriei, prin însumarea contribuției celor N_l laturi se obține cîmpul rezultant cu orientarea axei spirei:

$$\bar{B}_p = \sum_{1}^{N_l} \Delta \bar{B}_p = N_l \cdot \mu_0 \frac{I}{4\pi h} 2\cos\delta \sin\beta \, \bar{i} \qquad (2.11)$$

cu notațiile din figura 2.6 se poate scrie:

$$h = r \sin\delta \; ; \; \cos\delta = \frac{a}{r} \cos\gamma$$

$$\sin\beta = \frac{d}{h} = \frac{a \sin\gamma}{r \sin\delta}$$

$$\gamma = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N_l} = \frac{N_l - 2}{2N_l}\pi$$

și rezultă:

$$B_p = \mu_0 N_l \frac{I a^2 \sin 2\gamma}{4\pi r^3 \sin^2\delta} \qquad (2.12)$$

Eroarea relativă care se face prin înlocuirea spirei circulare cu un poligon regulat este:

$$\varepsilon = \frac{B_p - B_c}{B_c} = \frac{N_l}{2\pi} \frac{\sin 2\gamma}{\sin^2\delta} - 1 = \frac{\sin 2\gamma}{\alpha \sin^2\delta} - 1 \qquad (2.13)$$

deoarece

$$\sin^2\delta = \frac{x^2 + a^2 \sin^2\gamma}{x^2 + a^2} = \frac{x_r^2 + \sin^2\gamma}{x_r^2 + 1}$$

se observă că ε depinde de numărul de laturi N_l și de distanța relativă $x_r = x/a$. În tabelul 2.1 se dau valorile acestei erori funcție de N_l și de x/a, iar în figura 2.7 aceste erori sînt reprezentate grafic.

Pentru mărirea preciziei de calcul fără creșterea exagerată a numărului de laturi se propune ca spira poligonală să fie înscrisă într-un cerc de rază $a' = K_c a$ (fig. 2.6), adică vîrfurile poligonului să nu mai fie situate pe spira circulară. Valoarea factorului de corecție se poate determina din diferite condiții impuse, cum ar putea fi:

- spira circulară și cea poligonală să dea același cîmp magnetic în centru;
- perimetrul poligonului să fie același cu lungimea spirei circulare;
- suprafețele celor două spire să fie aceleași.

Tabelul 2.1. Eroarea relativă datorată înlocuirii spirei circulare cu un poligon regulat înscris în cerc

	$\varepsilon \times 10^4$			$-\varepsilon \times 10^4$					
N \ x/a	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	3	4
3	6540	4059	557	2046	5584	4624	9155	5526	7074
4	2732	2027	616	656	1512	2476	2526	5255	5441
6	1027	614	237	155	545	1041	1255	1316	1607
8	546	442	150	65,7	266	572	725	665	915
10	343	276	129	36,2	176	362	405	555	552
12	235	152	90	25	120	250	321	300	425
18	105	64,5	40,4	9,64	51,9	110	151	172	[illegible]
24	57,5	47,5	22,6	4,66	26,5	61,7	56	77	104
30	36,7	30,2	14,6	3,65	19,4	35,5	51,2	62,1	66,6
36	25,5	20,5	10,1	2,65	16,6	27,4	35,6	45,1	40,5
40	20,0	16,5	8,21	1,65	10,5	22,2	26,6	34,5	37,5
48	14,5	11,6	5,7	1,17	7,17	15,4	20	24,5	26
60	9,14	7,35	3,65	0,75	4,55	9,66	12,6	15,5	16,7
72	6,34	5,22	2,55	0,52	3,15	6,65	8,65	10,6	11,6
90	4,05	3,35	1,61	0,34	2,04	4,35	5,70	6,52	7,36
120	2,27	1,67	0,5	0,15	1,16	2,47	3,21	3,56	4,16
180	0,95	0,61	0,38	0,11	0,54	1,12	1,45	1,75	1,86
360	0,25	0,20	0,05	0,02	0,13	0,28	0,30	0,44	0,47

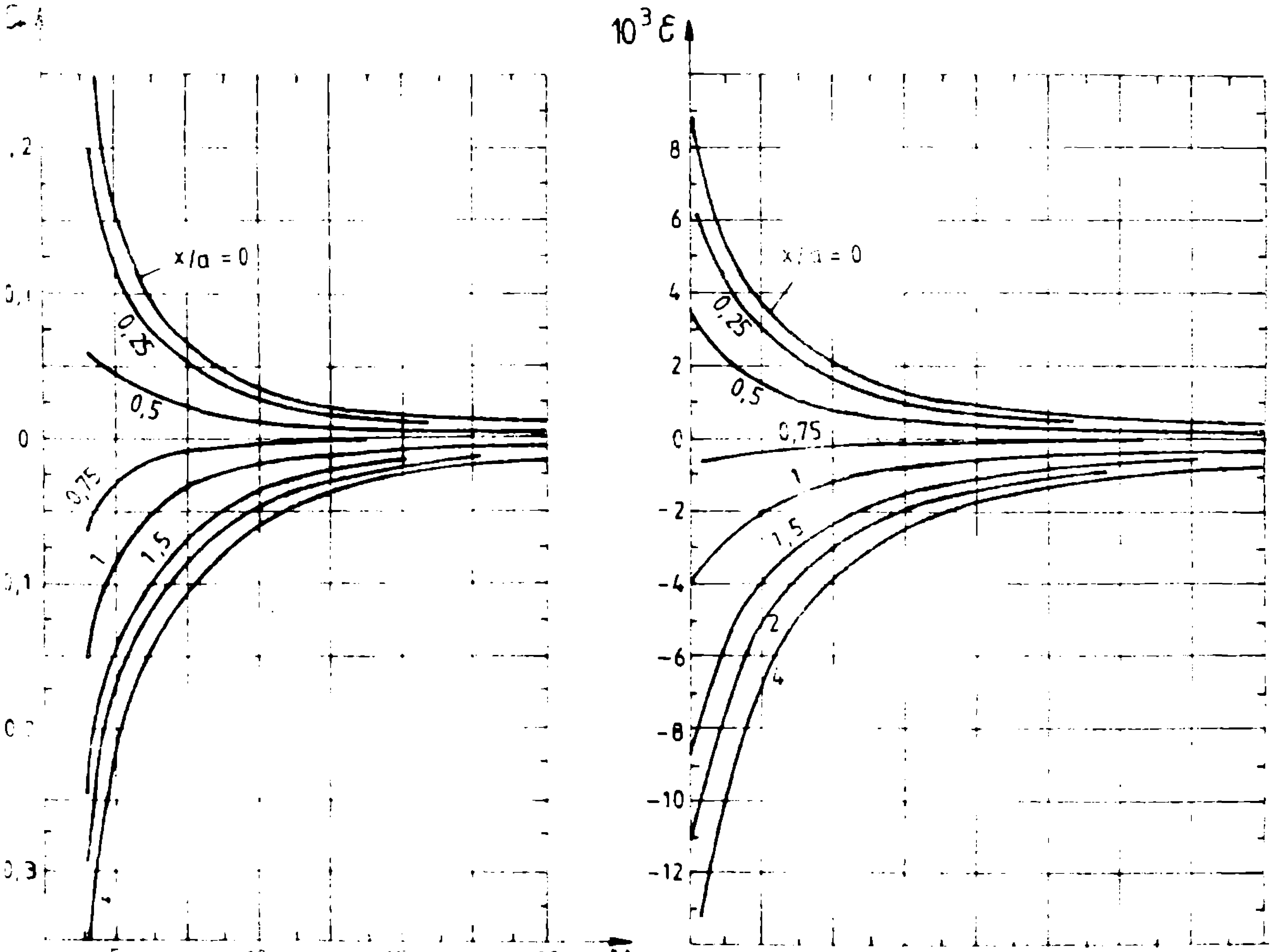


Fig.2.7. Eroarea de calcul al câmpului magnetic pe axa spirei circulare, datorată aproximării acesteia cu un poligon

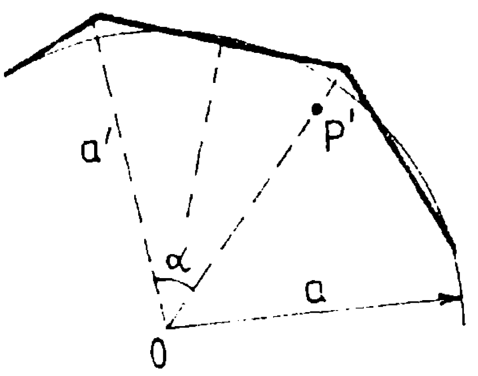


Fig. 2.8. Spira circulară şi spira echivalentă corectată

Din condiţia aceluiaşi cîmp magnetic în centru şi folosind relaţiile (2.10) şi (2.12) rezultă:

$$\mu_0 \frac{I}{2a} = \mu_0 \frac{I}{\alpha a'} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$f_{c1} = \frac{a'}{a} = \frac{2}{\alpha} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \qquad (2.14)$$

Din condiţia aceluiaşi perimetru rezultă:

$$\alpha \cdot a = 2a' \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$f_{c2} = \frac{a'}{a} = \frac{\alpha}{2 \sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (2.15)$$

Din condiţia egalităţii suprafeţelor rezultă:

$$\frac{\alpha}{2} a^2 = a' \sin\frac{\alpha}{2} \cdot a' \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a'^2}{2} \sin\alpha$$

$$f_{c3} = \frac{a'}{a} = \sqrt{\frac{\alpha}{\sin\alpha}} \qquad (2.16)$$

Valorile factorilor de corecţie funcţie de numărul de laturi, respectiv de unghiul la centru α, sînt date în tabelul 2.2. Se constată că f_{c1} şi f_{c3} coincid practic pentru $N_l > 10$. În figura 2.9 se reprezintă grafic f_{c1} şi f_{c2}.

Tabelul 2.2. Valorile factorilor de corecţie a razei spirei circulare

N_l	α (rad)	f_{c1}	f_{c2}	f_{c3}
3	2π/3	1,654	1,209	1,555
4	π/2	1,273	1,111	1,253
6	π/3	1,1026	1,0472	1,0996
8	π/4	1,0548	1,0262	1,0539
10	π/5	1,03425	1,01664	1,03391
12	π/6	1,02349	1,01151	1,02333
18	π/9	1,01030	1,00507	1,01024
24	π/12	1,00575	1,00286	1,00574
30	π/15	1,003671	1,00183	1,003667
36	π/18	1,002546	1,001270	1,002544
40	π/20	1,002061	1,001029	1,002060
48	π/24	1,001430	1,000714	1,001430
60	π/30	1,000914	1,000457	1,000914
72	π/36	1,000635	1,000317	1,000635
90	π/45	1,000406	1,000203	1,000406

Pentru spira de rază $a' = f_c a$, expresia (2.12) devine:

$$B'_p = \mu_0 \frac{N_l I a'^2 \sin 2\gamma}{4\pi (a'^2 + x^2)^{1/2} (x^2 + a'^2 \sin^2\gamma)} \qquad (2.17)$$

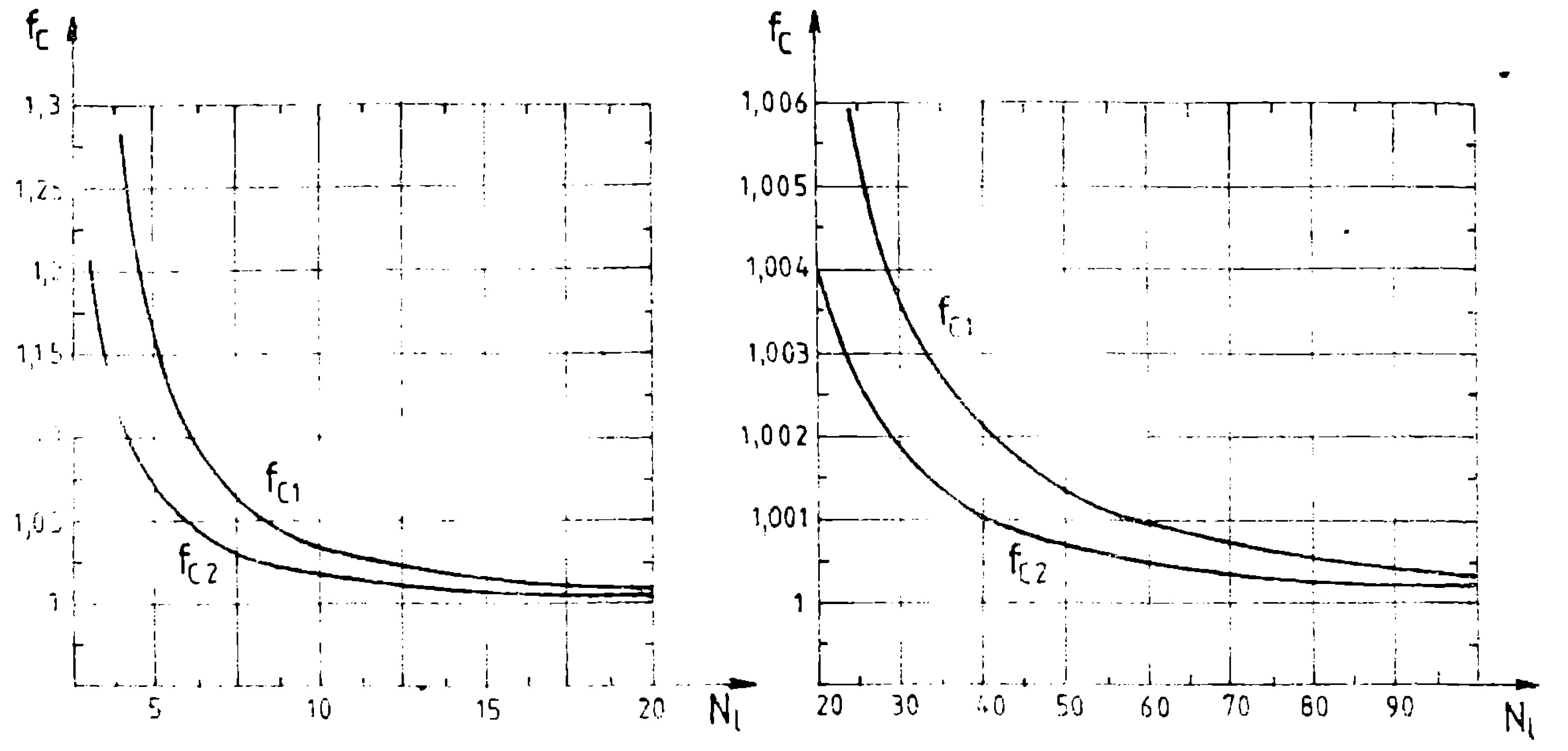


Fig. 2.9. Valorile factorului de corecţie a razei funcţie de numărul de laturi ale poligonului

Iar eroarea ε' devine:

$$\varepsilon' = \frac{B_p' - B_o}{B_o} = \frac{N_l f_c^2 (1+x_r^2)^{3/2} \sin 2\gamma}{2\pi (f_c^2 + x_r^2)^{1/2} (x_r^2 + f_c^2 \sin^2 \gamma)} - 1 \qquad (2.16)$$

In tabelul 2.3 se prezintă eroarea ε care se obţine prin folosirea factorului de corecţie f_{c1} şi se constată că pentru un număr relativ mic de laturi, N_l = 18, se obţine o precizie la fel de bună ca şi pentru N_l = 360 laturi în cazul în care nu se foloseşte acest factor de corecţie.

Tabelul 2.3. Eroarea datorată înlocuirii spirei circulare cu un poligon înscris într-un cerc cu rază corectată

N_l \ x/a	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	4
		$-\varepsilon' \cdot 10^4$				$\varepsilon' \cdot 10^4$		
3	0	77,8	203,5	2[illegible]5,6	165,4	117,1	403,8	979,[illegible]
4	0	22,6	56,2	68,6	42,1	40,9	110,1	250,[illegible]
6	0	4,3	10,9	12,3	7,8	7,1	20,1	174
8	0	1,3	3,2	3,4	1,9	2,8	6,69	13,7
10	0	0,52	1,32	1,44	0,84	1,06	2,67	5,5[illegible]
12	0	0,25	0,63	0,685	0,394	0,514	1,28	2,58
18	0	0,17	0,136	0,06	0,03	0,401	0,024	0,572
24	0	0,015	0,039	0,043	0,024	0,03	0,076	0,177
30	0	0,006	0,016	0,017	0,009	0,014	0,032	0,00[illegible]

Se consideră în continuare cazul în care punctul de calcul se află în apropierea conturului spirei (P' din fig. 2.6), situaţie care intervine la determinarea cîmpului magnetic în interiorul bobinajului fie pentru calculul forțelor, fie pentru verificarea parametrilor critici în cazul supraconductoarelor. Pe baza rezultatelor de mai sus se poate aprecia că folosirea factorului de corecție în acest caz conduce la rezultate bune pentru laturile relativ îndepărtate de punctul de calcul. Însă pentru laturile din imediata vecinătate a lui P', aproximarea conturului spirei circulare este grosieră și ca urmare eroarea de calcul va fi inacceptabil de mare. Din acest motiv se impune o aproximare mai bună în această zonă, putîndu-se adopta soluțiile (fig. 2.10):

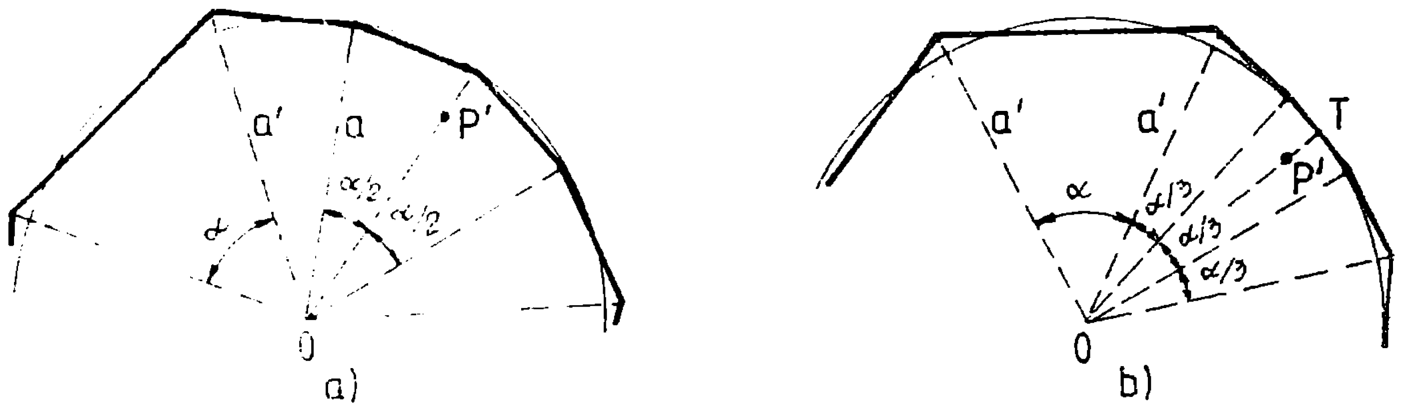


Fig. 2.10. Posibilități de aproximare a spirei pentru puncte situate în apropierea conturului spirei

– divizarea unghiului la centru α în vecinătatea punctului P' și plasarea vîrfurilor poligonului pe spira circulară (fig. 2.10 a). Procedeul poate fi repetat obținîndu-se de o parte și alta a punctului P' unghiurile α/4. Prin aceasta, la același unghi α numărul de laturi crește cu 2 respectiv 4, astfel încît se obține $\alpha = 2\pi/(N_l - 2)$, respectiv $\alpha = 2\pi/(N_l - 4)$;

– împărțirea în 3 a unghiului la centru în vecinătatea punctului P' și alegerea conturului poligonal astfel încît latura cea mai apropiată de P' să fie tangentă la spira circulară în punctul T situat pe raza ce trece prin P' (fig. 2.10 b). Prin aceasta numărul de laturi crește cu 2 astfel încît $\alpha = 2\pi/(N_l - 2)$.

În ambele situații se obține o îmbunătățire substanțială a preciziei de calcul practic fără creșterea numărului de laturi, situație avantajoasă sub aspectul timpului de calcul.

Rezultă așadar că dacă se procedează cu atenție la alegerea conturului poligonal se obține o precizie bună (tab. 2.3) pentru un număr de laturi relativ redus, N_l = 20–30. Acest rezultat se va folosi și în cazul unor spire cu formă oarecare, cînd este mai dificilă introducerea unor criterii exacte privind modul de alegere a conturului poligonal.

7. Aproximarea integralei (2.1) prin suma (2.4) conduce desigur

şi la o eroare de calcul datorată alegerii unui număr N_s limitat de spire de calcul. Pentru evaluarea acestei erori şi pentru a face posibile unele recomandări privind alegerea numărului de spire, se consideră un conductor cu secţiune dreptunghiulară, rectiliniu şi de lungime mare, parcurs de un curent uniform repartizat pe secţiune. Bara dreptunghiulară se descompune într-un număr N_s de bare elementare cu secţiunea $\Delta S = \Delta a \cdot \Delta b$ (fig.2.11), astfel încât $S = ab = N_s \Delta a \Delta b$.

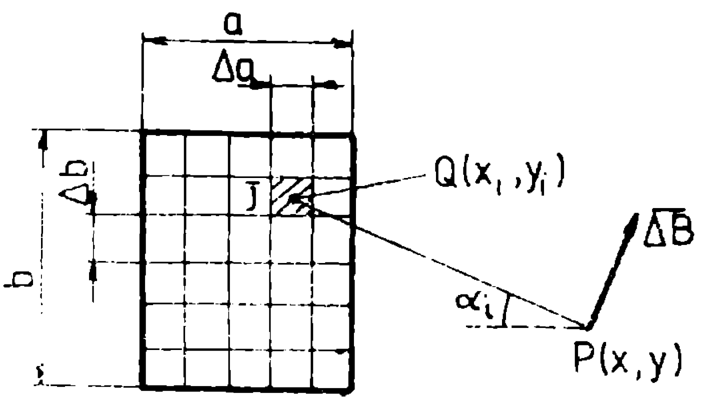


Fig.2.11. Conductor cu secţiune dreptunghiulară parcurs de curent

Notând cu ΔB inducţia magnetică corespunzătoare unei bare elementare

$$\Delta B = \mu_0 \frac{J \Delta S}{2\pi d} = \mu_0 \frac{I}{2\pi d N_s} \qquad (2.19)$$

unde I este curentul total din bara de secţiune S, se obţin componentele câmpului rezultant:

$$B_x = \sum_{1}^{N_s} \Delta B \sin\alpha_i = 10^{-7} G_x I$$
$$B_y = \sum_{1}^{N_s} \Delta B \cos\alpha_i = 10^{-7} G_y I \qquad (2.20)$$

Trecând la limită pentru Δa şi Δb foarte mici ($\rightarrow 0$) se obţine expresia exactă a inducţiei magnetice:

$$B_{xe} = 10^{-7} G_{xe} I; \qquad B_{ye} = 10^{-7} G_{ye} I \qquad (2.21)$$

în care:

$$G_{xe} = \frac{1}{S}\Big[(x-a) \ln \frac{(x-a)^2+y^2}{(x-a)^2+(y-b)^2} + x \ln \frac{x^2+(y-b)^2}{x^2+y^2} + 2y \,\mathrm{arctg} \frac{-ay}{x(x-a)+y^2} + 2(y-b)\,\mathrm{arctg} \frac{a(y-b)}{(y-b)^2+x(x-a)}\Big]$$

$$G_{ye} = \frac{1}{S}\Big[(y-b) \ln \frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{x^2+(y-b)^2} + y \ln \frac{x^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} + 2x \,\mathrm{arctg} \frac{bx}{x^2+y(y-b)} + 2(x-a)\,\mathrm{arctg} \frac{-b(x-a)}{(x-a)^2+y(y-b)}\Big] \qquad (2.22)$$

Pentru estimarea erorii rezultate din faptul că N_s este limitat, s-a considerat o bară cu secţiune pătrată şi s-a calculat printr-un program de calcul realizat de autor, eroarea

$$\varepsilon = \frac{B_y - B_{ye}}{B_{ye}} \qquad (2.23)$$

funcţie de N_s şi distanţa relativă x/a, pentru puncte situate pe dreapta y=b/2. Rezultatele sînt prezentate în tabelul 2.4, şi în figura 2.12, fiind utile în scopul alegerii unei valori minime pentru N_s dacă se urmăreşte obţinerea unei precizii impuse într-un anumit punct. Din analiza modului de variaţie al acestei erori, s-a stabilit şi o relaţie aproximativă simplă de dependenţă a distanţei relative faţă de numărul de bare elementare, care asigură o eroare $\varepsilon<1\%$

$$\frac{x}{a} \leqslant 1 + \frac{1}{N_s} \qquad (2.24)$$

Se constată, după cum era de aşteptat, că pentru puncte situate în imediata apropiere a barei parcursă de curent, se obţine o precizie satisfăcătoare dacă N_s este mare ceea ce conduce la timp mare de calcul. În această situaţie se recomandă ca secţiunile elementare Δs să fie mici în apropierea punctului de calcul şi mai mari în restul secţiunii barei parcursă de curent (fig.2.13). Se obţine în acest mod o precizie de calcul impusă, fără creşterea exagerată a numărului total de bare elementare.

Tabelul 2.4. Eroarea datorată numărului finit de bare elementare

N_s / x/a	$\varepsilon \times 10^4$									
	1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10	12×12
1	1547	-762	545	-377	328	-251	234	-188	182	-151	-125
1,005	1500	-723	457	-336	280	-211	188	-149	137	-112	-88
1,015	1427	-649	414	-267	205	-146	121	-92,3	77,6	-61,4	-42,5
1,03	1318	-553	315	-159	129	-80,7	65	-44,7	33,5	-24,6	-14,1
1,05	1155	-445	219	-118	70	-42,2	26,6	-16,9	11	-7,24	-3,22
1,075	1042	-339	140	-65,6	32,7	-17,1	9,07	-5	2,75	-1,37	-0,62
1,1	917	-237	89,5	-36,4	15,2	-6,94	3,07	-1,49	0,66	-0,35	-0,09
1,15	714	-148	36,3	-11,5	3,25	-1,18	0,33	-0,15	0,04	-0,02	-0,01
1,25	444	-17,3	6,04	-1,11	0,11	-0,05	0,02	0	0	0	-0,01
1,45	190	-1,9	0,74	0,17	0,07	0,04	0,02	0,02	0,01	0	0
1,7	77,9	2,5	0,57	0,18	0,07	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,01
2	32,5	1,6	0,33	0,11	0,05	0,03	0,01	0,02	0,01	0,01	0

Concluziile obţinute cu privire la erorile de calcul pentru bare de lungime mare rămîn valabile şi pentru o bobină masivă formată din N straturi rectilinii, dacă descompunerea acesteia în spire de calcul se face astfel încît stratul cea mai apropiată să respecte condiţiile stabilite pentru bara de lungime mare.

Relaţia care stă la baza programului de calcul (2.2) este desigur valabilă dacă punctul de calcul se află în exteriorul secţiunii Δs a spirei elementare. Dacă se calculează cîmpul magnetic în secţiunea transversală a bobinei, există două posibilităţi de descompunere

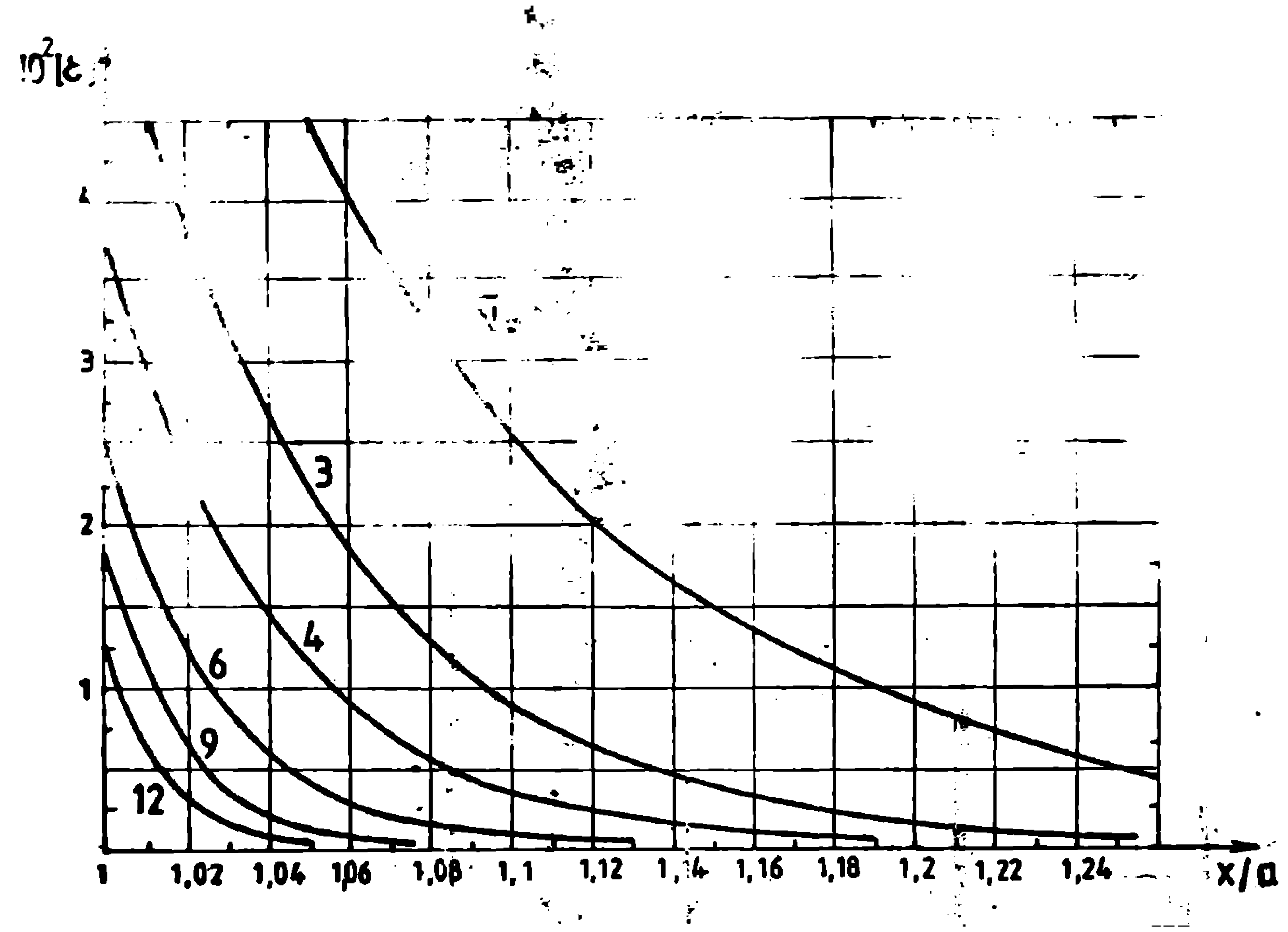


Fig. 2.12. Eroarea datorată aproximării barei rectilinii printr-un număr finit de bare elementare

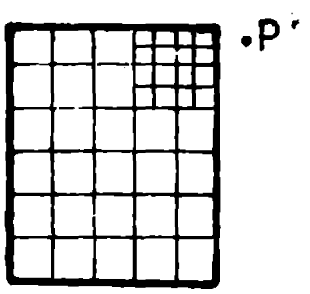


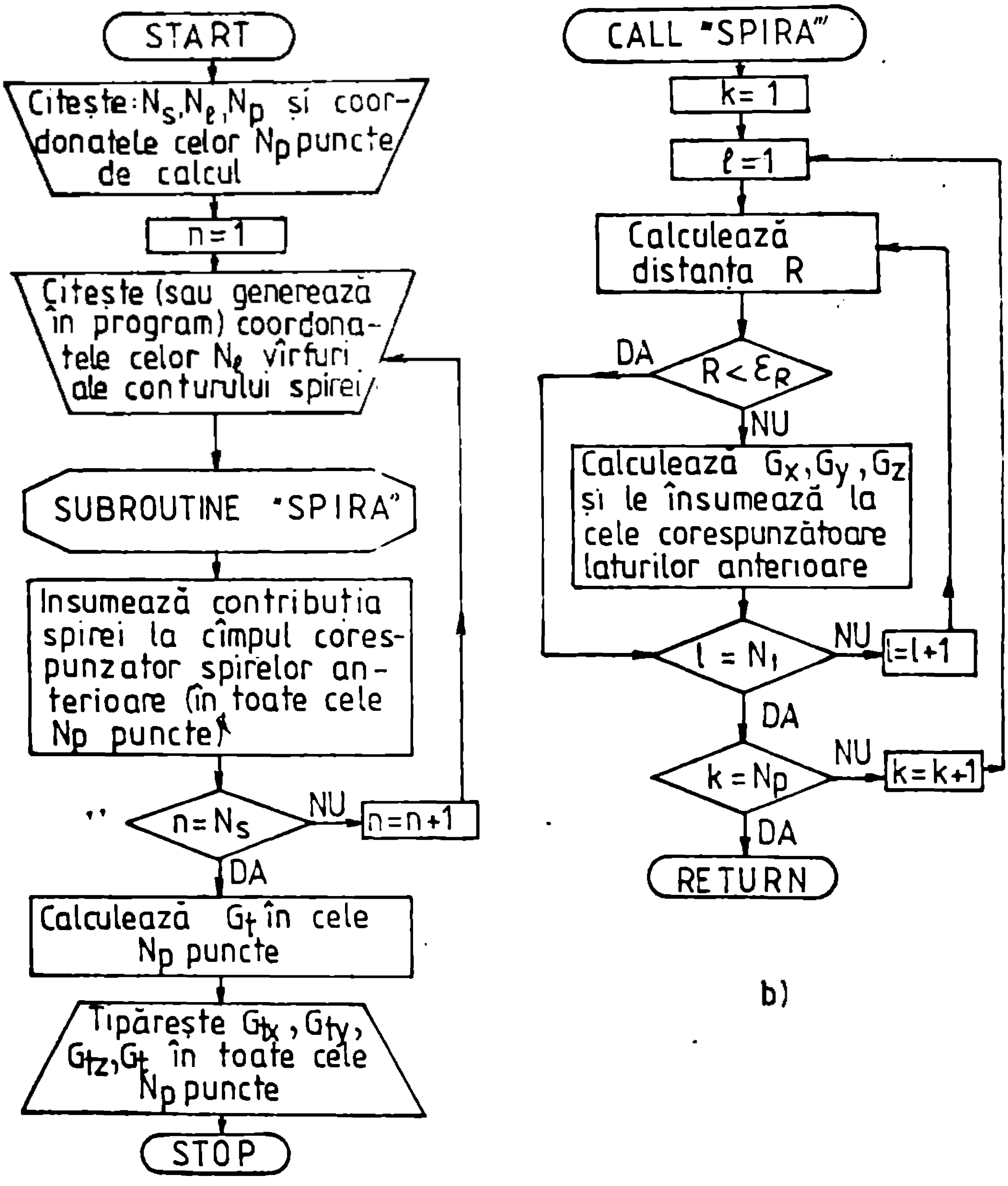
Fig. 2.13. Aproximarea secţiunii transversale pentru puncte situate în apropierea acesteia

în spire elementare şi anume:

a) punctul de calcul să se situeze pe suprafaţa laterală de contact a spirelor elementare (punctul P din fig.2.14);

b) punctul de calcul să fie în centrul secţiunii ΔS a unei spire elementare (punctul P' din fig.2.14). În această situaţie, latura respectivă a spirei elementare nu produce cîmp magnetic în punctul P' situat pe axa laturii ($\Delta B=0$) şi deci acest termen trebuie eliminat din relaţia (2.4). Această eliminare se face simplu în programul de calcul, testînd valoarea distanţei R pentru fiecare latură. Dacă $R < \varepsilon_R$ (unde $\varepsilon_R < \Delta a$, $\varepsilon_R < \Delta b$), nu se mai calculează ΔB şi se trece la următoarea latură.

Se menţionează faptul că varianta b) este de preferat deoarece prin eliminarea din calcul a laturii pe care se situează punctul P, acesta este faţă de spirele vecine la distanţe mai mari decît în varianta a). Ca urmare la acelaşi N_s rezultă o precizie mai mare, sau la aceeaşi precizie se poate lua N_s mai mic, deci timp de calcul mai



a) b)

Fig. 2.5. Ordinograma de principiu a programului de calcul bazat pe relația Biot-Savart-Laplace.
a) programul principal ; b) subprogramul „SPIRA"

redus. De asemenea se precizează faptul că şi în situaţia în care punctul P se află în exteriorul volumului parcurs de curent, aceasta se poate situa pe direcţia unei laturi a conturului poligonal, ca de exemplu latura 1 din figura 2.15. Pentru această latură $R=0$, dar $\Delta \bar B=0$, deci şi această latură trebuie eliminată dacă $R<\varepsilon_2$.

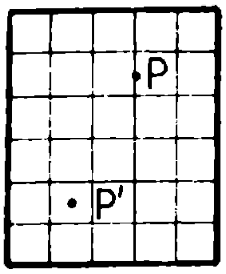


Fig.2.14. Plasarea punctelor de calcul în interiorul conductorului parcurs de curent

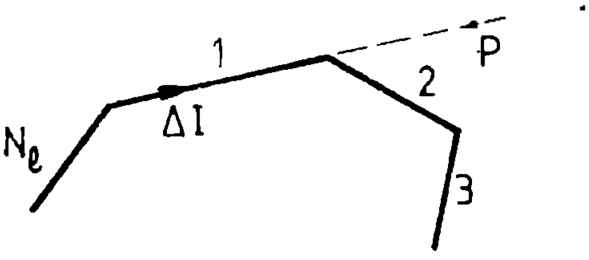


Fig.2.15. Explicativă privind situaţia în care $R=0$

2.2.2. Calculul cîmpului magnetic cu ajutorul potenţialului magnetic vector

Rezolvarea relaţiei 2.1 se poate face şi prin intermediul funcţiei potenţiale vectoriale $\bar A$, care în ipotezele menţionate se determină cu relaţia:

$$\bar A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\bar J}{r}\,dv \tag{2.25}$$

mărimile avînd semnificaţia din figura 2.1.

Efectuînd aceeaşi descompunere a domeniului V parcurs de curent în N_s spire cu N_l laturi fiecare, se obţine pentru o latură (fig. 2.16)

$$\overline{\Delta A} = \bar u_{\Delta A}\,\mu_0\,\frac{\Delta I}{4\pi}\ln\frac{R_i+l_i}{R_j+l_j} \tag{2.26}$$

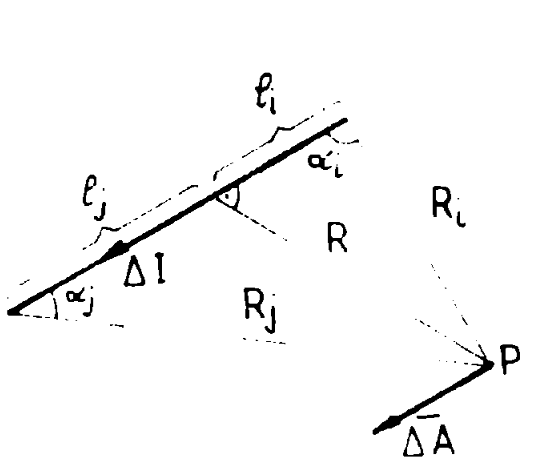


Fig.2.16. Potenţialul magnetic vector corespunzător unei laturi rectilinii

respectiv:

$$\bar A = \sum_1^{N_s}\sum_1^{N_l}\overline{\Delta A} \tag{2.27}$$

Pentru determinarea inducţiei magnetice este necesar să se cunoască modul de variaţie al potenţialului vector în jurul punctului P, pentru estimarea derivatelor ce intervin în relaţia $\bar B = \mathrm{rot}\,\bar A$. Acestea se aproximează prin diferenţe finite astfel încît (în coordonate carteziene):

$$\frac{\partial A_v}{\partial u} \approx \frac{\Delta A_v}{\Delta u} = \frac{A_{v\,i+1} - A_{v\,i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}} \qquad (2.28)$$

unde u şi v (u≠v) reprezintă pe rînd una din direcţiile sistemului de coordonate.

Rezultă că pentru calculul inducţiei magnetice într-un punct P, trebuie cunoscut potenţialul vector în 6 puncte situate pe axele sistemului de coordonate şi simetric faţă de punctul P, ca în figura 2.17.

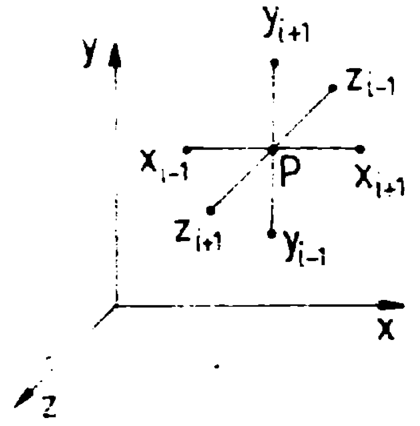


Fig.2.17. Determinarea inducţiei magnetice pe baza potenţialului magnetic vector

Avînd în vedere faptul că în cadrul acestei metode trebuie calculat rot $\bar{A}$, iar relaţia (2.26) nu este mai simplă decît (2.2), rezultă că în general metoda prezentată în acest paragraf este mai dezavantajoasă în legătură cu volumul de calcul. Metoda poate deveni avantajoasă în situaţia în care potenţialul vector are aceeaşi orientare (conductoare rectilinii paralele) situaţie ce va fi tratată în paragraful următor.

2.3. Conductoare rectilinii paralele şi de lungime mare

Situaţia se intîlneşte în cazul generatoarelor mhd şi mai ales în cazul maşinilor electrice supraconductoare de mare putere care prezintă lungime mare în raport cu dimensiunile transversale, iar materialele feromagnetice lipsesc sau se folosesc doar în scopul ecranării.

In absenţa materialelor feromagnetice, cîmpul magnetic se poate determina fie direct pe baza expresiei (2.19) fie prin intermediul potenţialului magnetic vector.

2.3.1. Calculul direct

Pornind de la expresia inducţiei magnetice corespunzătoare unui conductor filiform rectiliniu şi infinit lung, cîmpul magnetic generat în cazul unei repartiţii cunoscute de curent plan-paralele (fig. 2.18) se obţine prin integrare:

$$\bar{B} = \int_S d\bar{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_S \frac{\bar{J}\times\bar{R}}{R^2}\, dS \qquad (2.29)$$

Deoarece cîmpul este plan paralel se poate lucra în planul complex, astfel încît cu notaţiile din figura 2.19, se obţine pentru un

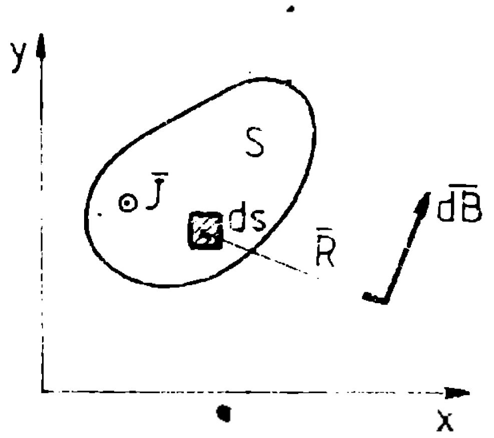


Fig.2.18. Conductor rectiliniu masiv parcurs de curent

conductor elementar expresia [15]:

$$\underline{B}^* = B_x - jB_y = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\underline{z}-\underline{z}_0} \qquad (2.30)$$

în care:

$$B_x = \mathcal{R}e\{\underline{B}^*\} = \mu_0 I \frac{y-y_0}{2\pi R^2}$$

$$B_y = -\mathcal{J}m\{\underline{B}^*\} = \mu_0 I \frac{x_0-x}{2\pi R^2} \qquad (2.31)$$

Pentru un conductor rectiliniu masiv parcurs de un curent uniform repartizat pe secțiune rezultă relația:

$$\underline{B}^* = \mu_0 \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{J\,ds}{\underline{z}-\underline{z}_0} = \mu_0 \frac{J}{4\pi} \oint_\Gamma \frac{\underline{z}^*-\underline{z}_0^*}{\underline{z}-\underline{z}_0}\, d\underline{z} \qquad (2.32)$$

în care s-a ținut seama că $(\underline{z}-\underline{z}_0)^{-1}$ este o funcție analitică, iar Γ reprezintă conturul ce limitează suprafața S (fig.2.19,b).

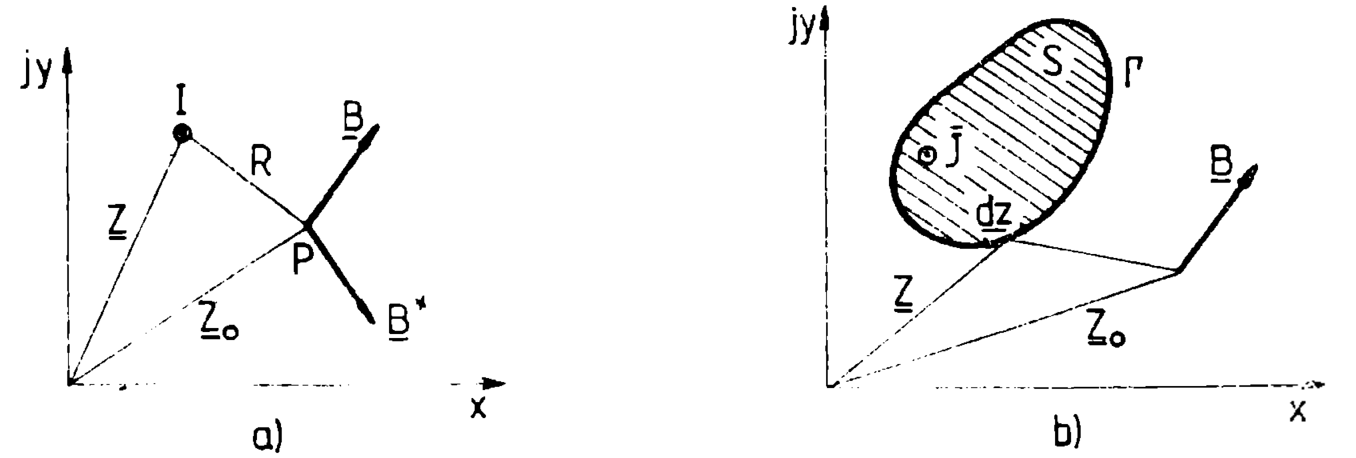


Fig. 2.19. Explicativă privind determinarea cîmpului magnetic lucrînd în planul complex.

Relația 2.32 prezintă față de relația 2.29 următoarele avantaje:

- se obține cîmpul magnetic rezultant fără a fi necesară însumarea pe componente într-un sistem de axe;
- numărul de termeni ai sumei ce aproximează integrala de contur este mai redus decît al sumei ce aproximează integrala de suprafață la o precizie de calcul echivalentă. Astfel dacă se consideră o suprafață dreptunghiulară (fig.2.11) aproximată prin $N_s = N_x N_y$ suprafețe elementare Δs, iar conturul Γ prin $N_\Gamma = 2(N_x+N_y)$ segmente rectilinii, rezultă $N_\Gamma < N_s$ pentru $N_x > 3$ și $N_y \geq 2N_x(N_x-2)$. Desigur că intervine dezavantajul de a lucra cu numere complexe, dar aceasta nu constituie o problemă în cazul folosirii calculatoarelor electronice.

2.3.2. Calculul cu ajutorul potenţialului magnetic vector

$\underline{\alpha}$. Se porneşte de la expresia potenţialului magnetic vector în cazul unui conductor filiform rectiliniu infinit lung (fig.2.20), care are direcţia paralelă cu $\overline{J}$ şi expresia:

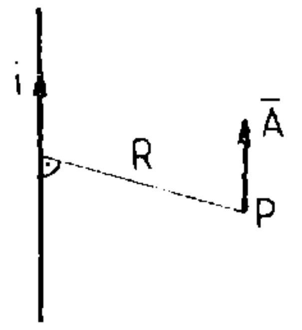


Fig.2.20.Potenţialul magnetic vector în cazul unui conductor rectiliniu parcurs de curent

$$A = C - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln R \qquad (2.33)$$

În cazul conductoarelor rectilinii şi paralele rezultă avantajul obţinerii potenţialului rezultant printr-o sumă algebrică, respectiv o integrală în cazul conductoarelor masive (fig.2.18):

$$A = C_0 - \int_S \mu_0 \frac{J da}{2\pi} \ln R \qquad (2.34)$$

La forme particulare ale suprafeţei S se poate rezolva integrala din relaţia (2.34), în caz general însă aceasta aproximîndu-se printr-o sumă cu număr finit de termeni. Avînd potenţialul vector rezultant, inducţia magnetică se obţine din $\overline{B} = \mathrm{rot}\,\overline{A}$.

În cazul maşinilor electrice, datorită dispoziţiei spaţiale a conductoarelor parcurse de curenţi este avantajos să se folosească coordonatele polare. În această situaţie (fig. 2.21), expresia (2.33) se poate pune sub altă formă prin dezvoltarea în serie a lui ln R [25,49], obţinîndu-se:

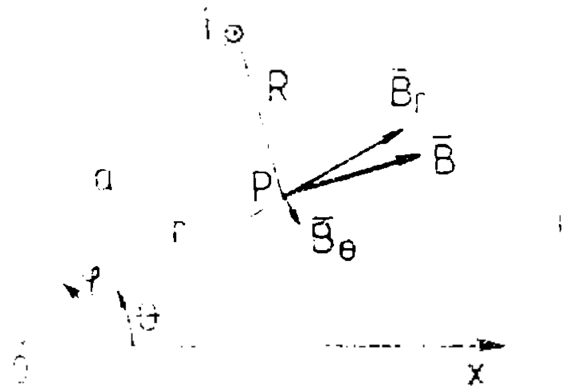


Fig. 2.21. Explicativă privind cîmpul magnetic în coordonate polare

$$A_i = C_i + \frac{\mu_0 i}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi-\theta) \quad \text{pt. } r < a$$

$$A_e = C_e - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r + \frac{\mu_0 i}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n \cos n(\varphi-\theta) \quad \text{pt. } r > a$$

$$(2.35)$$

$\underline{\beta}$. Dacă conductoarele sînt dispuse pe un cilindru iar sensurile curenţilor prin acestea alternează, se vorbeşte de sisteme multipolare. Astfel, în cazul unui multipol cu p perechi de poli (fig.2.22), potenţialul rezultant se obţine însumînd expresii de forma (2.35) pentru cele 4p conductoare. Grupînd în aceste sume cîte doi termeni corespunzători conductoarelor simetrice faţă de axa de simetrie şi ţinînd seama de faptul că

$$\sum_{m=0}^{2p-1} (-1)^m \cos m n \frac{\pi}{p} = \begin{cases} 0 \text{ pt. } n = 2kp \\ 2p \text{ pt. } n = (2k-1)p \end{cases}$$

se obţin expresiile:

$$A_i = \frac{\mu_0 2pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n\varphi \cos n\theta$$

$$A_e = \frac{\mu_0 2pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n \cos n\varphi \cos n\theta \qquad n = (2k-1)p \qquad (2.36)$$

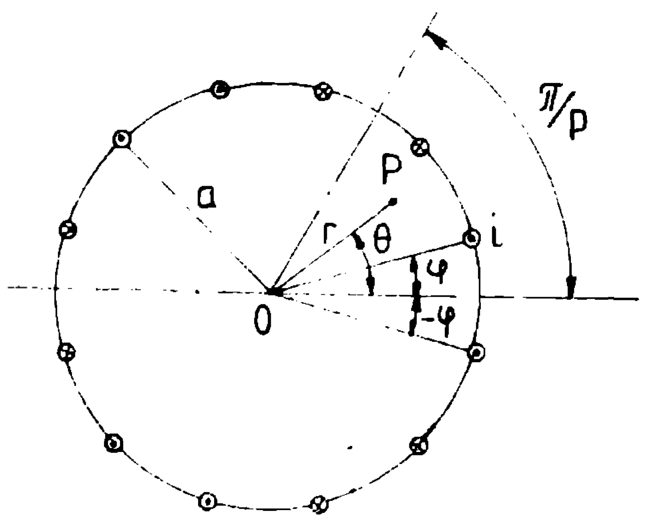


Fig.2.22. Multipol format din conductoare filiforme

în care s-a renunţat la termenul constant deoarece acesta nu intervine în expresia inducţiei magnetice.

În cazul unui multipol format din pături de curent (fig.2.23), expresiile (2.36) sînt valabile pentru 2p perechi de conductoare elementare parcurse de curenţii $di = J_l a\, d\varphi$. Potenţialul magnetic rezultant se obţine prin integrare $A = \int_0^{\varphi} dA$ şi deoarece $\int_0^{\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi = \frac{1}{n}\sin n\varphi$ rezultă:

$$A_i = \frac{\mu_0 2paJ_l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin n\varphi \cos n\theta$$

$$A_e = \frac{\mu_0 2paJ_l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sin n\varphi \cos n\theta \qquad (2.37)$$

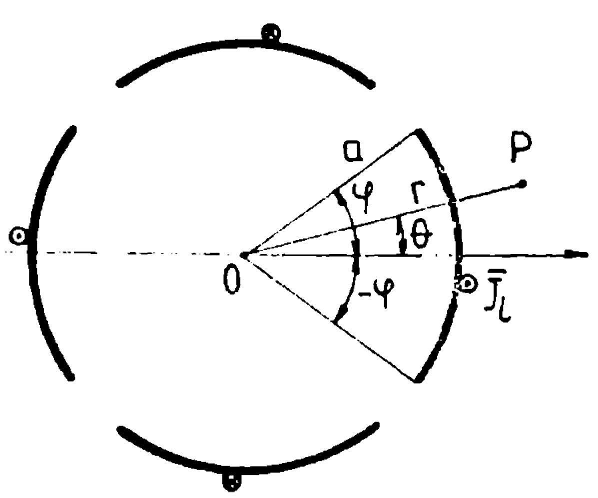


Fig.2.23. Multipol format din pături de curent

În cazul mai general al unui multipol format din conductoare masive (fig.2.24), potenţialul magnetic rezultant se obţine prin integrarea expresiilor (2.37) între limitele a_1 şi a_2, densitatea liniară J_l înlocuindu-se cu $J\,da$. Aceasta echivalează cu înlocuirea conductorului masiv prin mai multe conductoare cu grosime mică da, fiecare putînd fi considerat ca o pătură de curent.

Deoarece pentru $r < a_1$ $\int_{a_1}^{a_2} a^{1-n}\,da = \frac{1}{2-n}\left(a_2^{2-n} - a_1^{2-n}\right)$ se obţine:

$$A_i = \frac{\mu_0 2pJ}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^n}{(2-n)n^2}\left(a_2^{2-n} - a_1^{2-n}\right)\sin n\varphi \cos n\theta \qquad (2.38)$$

Pentru $r > a_2$ se obţine în mod similar :

$$A_\theta = \frac{\mu_0 2pJ}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{-n}}{(2+n)n^2}\left(a_2^{2+n}-a_1^{2+n}\right)\sin n\varphi \cos n\theta \qquad (2.39)$$

Pentru $a_1<r<a_2$ se consideră sistemul format din doi multipoli, unul de raze a_1 şi r pentru care este valabilă expresia (2.39) şi altul de raze r şi a_2 pentru care este valabilă expresia (2.38). Se obţine aşadar:

$$A_\theta = \frac{\mu_0 2pJ}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\frac{r^n}{2-n}\left(a_2^{2-n}-r^{2-n}\right) + \frac{r^{-n}}{2+n}\left(r^{2+n}-a_1^{2+n}\right)\right]\sin n\varphi \cos n\theta \qquad (2.40)$$

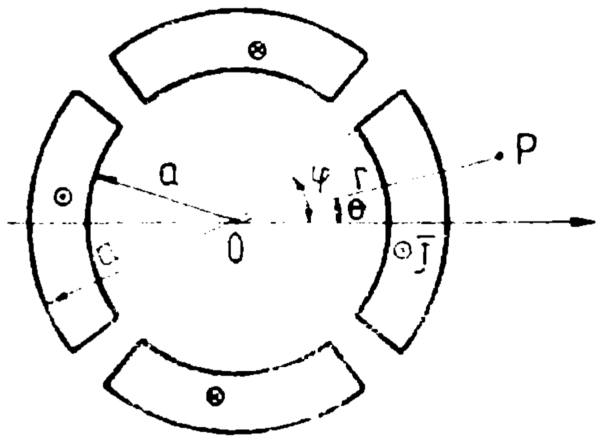


Fig.2.24. Multipol format din conductoare masive

Componentele inducţiei magnetice se determină din $\bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A}$, adică

$$B_r = \frac{\partial A}{r\partial\theta}; \qquad B_\theta = -\frac{\partial A}{\partial r} \qquad (2.41)$$

rezultînd expresiile prezentate sintetic în tabelul 2.5.

Se constată că relaţiile (2.38)-(2.40) şi corespondentele lor din tabelul 2.5 nu pot fi utilizate pentru $n = 2$ (adică în situaţia că $p = 2$ şi pentru $k = 1$), deoarece se obţine o nedeterminare. Ţinînd seama că:

$$\lim_{n\to 2}\frac{a_2^{2-n}-a_1^{2-n}}{2-n} = \lim_{n\to 2}\frac{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2-n}-1}{2-n} = \ln\frac{a_2}{a_1}$$

se obţine pentru $r<a_1$:

$$(A_1)_{n=2} = \frac{\mu_0 J}{\pi} r \ln\frac{a_2}{a_1}\sin 2\varphi \cos 2\theta \qquad (2.42)$$

$$(B_\theta^r)_{n=2} = -\frac{\mu_0 2J}{\pi} r \ln\frac{a_2}{a_1}\sin 2\varphi \begin{matrix}\sin 2\theta\\ \cos 2\theta\end{matrix}$$

şi respectiv pentru $a_1<r<a_2$:

$$(A)_{n=2} = \frac{\mu_0 J}{\pi}\left[r^2\ln\frac{a_2}{r} + \frac{r^4-a_1^4}{4r^2}\right]\sin 2\varphi \cos 2\theta$$

$$(B_\theta^r)_{n=2} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} r\left[\pm 1 - 4\ln\frac{a_2}{r} \pm \left(\frac{a_1}{r}\right)^4\right]\sin 2\varphi \begin{matrix}\sin 2\theta\\ \cos 2\theta\end{matrix} \qquad (2.43)$$

Tabelul 2.5. Expresiile componentelor inducţiei magnetice

Situaţia	Domeniul	$B^r_\theta \longrightarrow \begin{matrix} B_r \\ B_\theta \end{matrix}$ $\qquad n = 2(k-1)p$
Conductor filiform (fig. 2.21)	$r < a$	$\pm \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} \begin{matrix} \sin k(\varphi-\theta) \\ \cos k(\varphi-\theta) \end{matrix}$
	$r > a$	$\frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[\begin{matrix} 0 \\ r^{-1} \end{matrix} + a^{-1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{k+1} \right] \begin{matrix} \sin k(\varphi-\theta) \\ \cos k(\varphi-\theta) \end{matrix}$
Multipol cu cond. filiform (fig. 2.22)	$r < a$	$-\frac{\mu_0 2pi}{\pi a} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \cos n\varphi \begin{matrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{matrix}$
	$r > a$	$\mp \frac{\mu_0 2pi}{\pi a} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cos n\varphi \begin{matrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{matrix}$
Multipol cu pături de curent (fig. 2.23)	$r < a$	$-\frac{\mu_0 2pJ_l}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \sin n\varphi \begin{matrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{matrix}$
	$r > a$	$\mp \frac{\mu_0 2pJ_l}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sin n\varphi \begin{matrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{matrix}$
Multipol cu cond. masive (fig. 2.24)	$r < a_1$	$-\frac{\mu_0 2pJ}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{n(2-n)} (a_2^{2-n} - a_1^{2-n}) \sin n\varphi \begin{matrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{matrix}$
	$r > a_2$	$\mp \frac{\mu_0 2pJ}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{r^{-n-1}}{n(2+n)} (a_2^{2+n} - a_1^{2+n}) \sin n\varphi \begin{matrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{matrix}$
	$a_1 < r < a_2$	$\frac{\mu_0 2pJ}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{r}{n(4-n^2)} \left[\begin{matrix} 2n \\ 4 \end{matrix} \pm (2-n)\left(\frac{a_1}{r}\right)^{n+2} - (2+n)\left(\frac{r}{a_2}\right)^{n-2} \right] \sin n\varphi \begin{matrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{matrix}$

7. Este interesant şi util de analizat convergenţa seriilor pentru cazurile de interes practic din tabelul 2.5. Sub acest aspect, situaţia cea mai nefavorabilă se obţine pentru $\varphi = \frac{\pi}{2p}$ şi $\theta=\varphi$ pentru componenta B_r, respectiv $\theta=0$ pentru componenta B_θ.

In cazul unui multipol cu pături de curent (fig. 2.23) pentru $\theta = \varphi = \pi/2p$ şi $r=a$ se obţine:

$$B_r = -\frac{\mu_0 2pJ_l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)p} \sin^2 (2k-1)\frac{\pi}{2} = -\mu_0 \frac{2J_l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \qquad (2.44)$$

Seria rezultată fiind divergentă [1] se obţine un câmp magnetic foarte intens (teoretic infinit) în zona de schimbare a sensului curentului electric. Se impune în acest caz soluţia $\varphi < \pi/2p$.

Pentru $\theta=0$, $\varphi = \pi/2p$ şi $r=a$ se obţine:

$$B_\theta = \pm \frac{\mu_0 2pJ_l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)p} \sin (2k-1)\frac{\pi}{2} = \mp \frac{\mu_0 J_l}{2} \qquad (2.45)$$

unde s-a ţinut seama că $\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{\pi}{4}$ [1]

In cazul unui multipol cu conductoare masive, convergenţa seriilor este asigurată în toate situaţiile de faptul că intervine factorul $\frac{1}{n(n-2)}$ sau $\frac{1}{n(n+2)}$, seriile fiind de forma:

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}P(n) \quad \text{sau} \quad \sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}Q(n) \qquad (2.46)$$

cu $|P(n)|<1$ şi $|Q(n)|<1$. Astfel de exemplu pentru $p=1$, $\theta=\varphi=\frac{\pi}{2}$ şi $r=a_1$ se obţine:

$$B_r = \frac{\mu_0 2J}{\pi} r \sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}\left[\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-2}-1\right]\sin^2(2k-1)\frac{\pi}{2}$$

sau

$$B_r = \frac{\mu_0 J r}{\pi}\left[1+2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-2}\right] \qquad (2.47)$$

unde s-a ţinut seama că $\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)} = -\frac{1}{2}$ [1]

2.3.3. Metoda separării variabilelor în cazul prezenţei ecranelor electromagnetice

In cazul maşinilor sincrone cu excitaţie supraconductoare, condiţiile de funcţionare impun ca între înfăşurarea de excitaţie şi cea a indusului să se plaseze unul sau mai multe ecrane conductoare [17,25,24,55,115]. De asemenea poate interveni şi un ecran feromagnetic exterior şi respectiv unul interior dacă axul maşinii este feromagnetic. In această situaţie mediul nu mai este omogen şi ca urmare nu se mai poate calcula cîmpul magnetic pornind de la relaţia (2.35), fiind necesare alte metode.

α. Din aceste motive se consideră sistemul fizic din figura 2.25 care poate reprezenta o secţiune transversală printr-o maşină sincronă în care înfăşurările sînt aproximate prin pături de curent, iar ecranul conductor este de asemenea de grosime neglijabilă. Semnificaţiile razelor notate în figură sînt: m - ecranul feromagnetic interior, a - înfăşurarea de excitaţie, c - ecranul conductor, b - înfăşurarea indusului şi M - ecranul feromagnetic exterior.

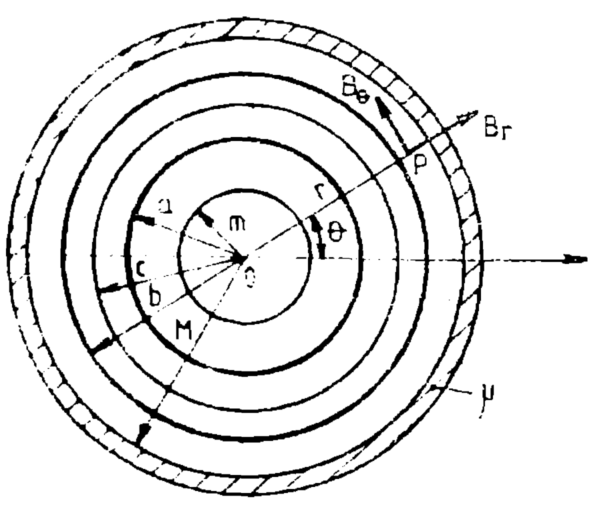


Fig. 2.25. Secţiune transversală printr-o maşină sincronă supraconductoare

Pentru determinarea cîmpului magnetic se poate utiliza potenţialul magnetic vector care în exteriorul păturilor de curent satisface ecuaţia Aiso. Considerând lungimea foarte mare, această ecuaţie în coordonate polare este de forma:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A}{r^2\partial\theta^2} = 0 \qquad (2.48)$$

cu metoda separării variabilelor, soluţia este de forma [23]:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n})(P_n \cos n\theta + Q_n \sin n\theta) \qquad (2.49)$$

Constantele de integrare din relaţia (2.49) se determină din condiţiile la limită pe care trebuie să le satisfacă potenţialul vector.

β. Referindu-ne la câmpul magnetic produs de înfăşurarea de excitaţie şi notând cu indice "i" mărimile pentru r<a şi respectiv cu "e" pentru r>a, la pătura de curent trebuie satisfăcute condiţiile

$$(B_{ri})_{r=a} = (B_{re})_{r=a}; \quad -(H_{\theta i})_{r=a} + (H_{\theta e})_{r=a} = J_l$$

care pentru potenţialul vector se scriu sub forma:

$$\left(\frac{\partial A_i}{r\partial\theta}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial A_e}{r\partial\theta}\right)_{r=a}; \quad \left(\frac{\partial A_i}{\partial r}\right)_{r=a} - \left(\frac{\partial A_e}{\partial r}\right)_{r=a} = \mu_0 J_l \qquad (2.50)$$

Înfăşurarea de excitaţie fiind de fapt un multipol cu pături de curent (fig.2.23), densitatea liniară de curent care intervine în relaţia (2.50) are repartiţia din fig.2.20, putându-se descompune în serie Fourier

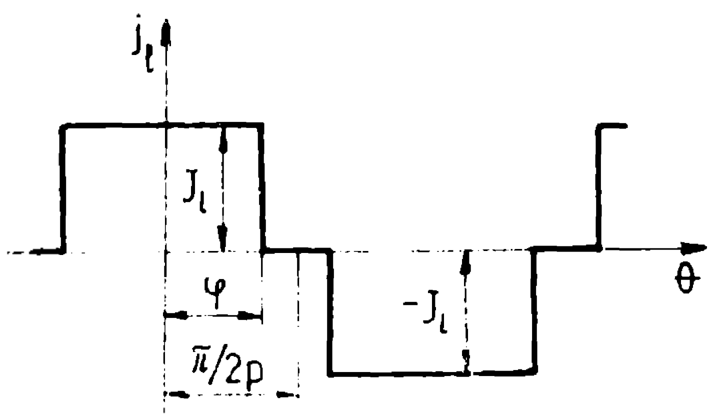


Fig.2.20. Repartiţia densităţii liniare de curent

$$J_l = \sum_{k=1}^{\infty} J_{l\nu m} \cos m\theta \qquad (2.51)$$

unde $m=\nu p=(2k-1)p$, deoarece seria conţine numai termeni de ordin $(2k-1)p$ în cosinus [25].

Amplitudinile armonicii de ordinul ν este:

$$J_{l\nu m} = \frac{p}{2\pi}\int_0^{\pi/2} J_l(\theta)\cdot\cos\nu\theta\, d\theta = \frac{4J_l p}{\pi n}\sin n\varphi \qquad (2.52)$$

Ţinând seama şi de faptul că faţă de un sistem fix inductorul se roteşte cu viteza unghiulară ω, unda mobilă de curent se scrie în forma:

$$J_l = \frac{4J_l p}{\pi n}\sum_{k=1}^{\infty} \sin n\varphi \cos\nu(\omega t - p\theta) \qquad (2.53)$$

Pentru a putea fi satisfăcută condiţia (2.50), trebuie ca să depindă de θ ca şi J_l, astfel încât relaţia (2.49) se poate scrie şi în forma:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} (C'_\nu r^n + D'_\nu r^{-n}) J_{l\nu}$$

respectiv pentru cele două zone r<a şi r>a:

$$A_i = \sum_{K=1}^{\infty} (A_\nu r^n + B_\nu r^{-n}) J_{l\nu}$$
$$A_e = \sum_{K=1}^{\infty} (F_\nu r^n + G_\nu r^{-n}) J_{l\nu} \qquad (2.54)$$

Considerînd ecranele feromagnetice ideale ($\mu \to \infty$), la suprafața acestora sînt îndeplinite condițiile :

$$(B_{\theta e})_{r=a} = \left(\frac{\partial A_e}{\partial r}\right)_{r=a} = 0 \qquad (2.55)$$

$$(B_{\theta i})_{r=m} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial r}\right)_{r=m} = 0 \qquad (2.56)$$

Condițiile (2.50),(2.55) și (2.56) aplicate pentru fiecare armonică (ν), conduc la expresiile:

$$B_\nu\left[1 + \left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right] = A_\nu\left[1 + \left(\frac{a}{m}\right)^{2n}\right]$$

$$B_\nu\left[1 - \left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right] - A_\nu\left[1 - \left(\frac{a}{m}\right)^{2n}\right] = \frac{\mu_0}{n} a^{1-n}$$

$$F_\nu = A_\nu a^{2n}$$

$$G_\nu = A_\nu m^{2n}$$

din care se obțin constantele de integrare:

$$A_\nu = \frac{\mu_0 a}{2na^n}\left[1 + \left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]\left[1 - \left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]^{-1}$$

$$B_\nu = \frac{\mu_0 a}{2na^n}\left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\left[1 + \left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]\left[1 - \left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]^{-1}$$

$$F_\nu = \frac{\mu_0 a}{2na^n} a^{2n}\left[1 + \left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]\left[1 - \left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]^{-1}$$

$$G_\nu = \frac{\mu_0 a}{2n} a^n\left[1 + \left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]\left[1 - \left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]^{-1}$$

Cu acestea, expresiile (2.54) devin:

$$A_i = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\mu_0 a J_{l\nu}}{2n}\left[1+\left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]\left[1-\left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]^{-1}\left[1+\left(\frac{m}{r}\right)^{2n}\right]\left(\frac{r}{a}\right)^n$$
$$A_e = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\mu_0 a J}{2n}\left[1+\left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]\left[1-\left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]^{-1}\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right]\left(\frac{a}{r}\right)^n \qquad (2.57)$$

Ținînd seama de relația (2.53) și introducînd notațiile

$$C_{\nu i} = \frac{4Z}{\pi n}\mu_0 J_l\left[1+\left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]\left[1-\left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]^{-1} \sin n\varphi$$

$$C_{\nu e} = \frac{4Z}{\pi n}\mu_0 J_l\left[1+\left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]\left[1-\left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]^{-1} \sin n\varphi$$

expresiile potențialului magnetic vector se scriu în forma:

$$A_i = \sum_{K=1}^{\infty} C_{\nu i}\,\frac{a}{n}\left[1+\left(\frac{m}{r}\right)^{2n}\right]\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos\nu(\omega t - p\theta)$$
$$A_e = \sum_{K=1}^{\infty} C_{\nu e}\,\frac{a}{n}\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right]\left(\frac{a}{r}\right)^n \cos\nu(\omega t - p\theta) \qquad (2.58)$$

Particularizînd aceste expresii pentru cazul în care nu există ecrane feromagnetice ($m=0$, $\mu\to\infty$), se regăsesc expresiile (2.57).

Dacă apar procese tranzitorii în care amplitudinea cîmpului magnetic învîrtitor este variabilă în timp, în ecranul conductor ($r=c$) care se rotește solidar cu inductorul se induc tensiuni și vor apare curenți electrici. Considerînd ecranul conductor ideal ($\sigma=\infty$), pentru determinarea expresiei potențialului vector se va folosi condiția:

$$\left(\frac{\partial A_e}{r\partial\theta}\right)_{r=c} = 0 \qquad (2.59)$$

în locul condiției (2.55). Prin urmare, constantele de integrare se determină din:

$$A_\nu\left[1+\left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right] = K_\nu\left[1-\left(\frac{c}{a}\right)^{2n}\right]$$

$$A_\nu\left[1-\left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right] - K_\nu\left[1+\left(\frac{c}{a}\right)^{2n}\right] = \frac{\mu_0}{n}\, a^{1-n}$$

$$F_\nu = A_\nu m^{2n}$$

$$G_\nu = -K_\nu c^{2n}$$

și rezultă pentru potențialul magnetic vector expresiile

$$A_i = \sum_{K=1}^{\infty} B_{\nu i}\frac{a}{n}\left[1+\left(\frac{m}{r}\right)^{2n}\right]\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\cos\nu(\omega t-p\theta)$$

$$A_e = \sum_{K=1}^{\infty} B_{\nu e}\frac{a}{n}\left[1-\left(\frac{r}{c}\right)^{2n}\right]\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\cos\nu(\omega t-p\theta) \qquad (2.60)$$

în care s-au introdus notațiile:

$$B_{\nu i} = \frac{2p}{\pi n}\mu_0 J_l\left[1-\left(\frac{a}{c}\right)^{2n}\right]\left[1+\left(\frac{m}{c}\right)^{2n}\right]^{-1}\sin n\varphi$$

$$B_{\nu e} = \frac{2p}{\pi n}\mu_0 J_l\left[1+\left(\frac{m}{a}\right)^{2n}\right]\left[1+\left(\frac{m}{c}\right)^{2n}\right]^{-1}\sin n\varphi$$

γ. Referitor la cîmpul magnetic produs de indus, problema se pune diferit pentru armonica fundamentală și respectiv pentru armonicile de ordin superior.

Pentru determinarea armonicii fundamentale a cîmpului magnetic al indusului, care se rotește sincron cu rotorul și cu ecranul conductor, se pot folosi relațiile (2.56) în care se înlocuiește a cu b (raza păturii de curent statorice fiind b) și desigur φ și J_l corespund de asemenea indusului.

Pentru armonicele de ordin superior ale cîmpului magnetic învîrtitor, cît și pentru procesele tranzitorii, prezența ecranului conductor (ideal) impune în locul condiției (2.56), condiția:

$$\left(\frac{\partial A_e}{r\partial\theta}\right)_{r=c} = 0$$

în această situație, constantele de integrare se determină din:

$$A_\nu\left[1-\left(\frac{m}{b}\right)^{2n}\right] = K_\nu\left[1+\left(\frac{m}{b}\right)^{2n}\right]$$

$$A_\nu\left[1+\left(\frac{m}{b}\right)^{2n}\right] - K_\nu\left[1-\left(\frac{m}{b}\right)^{2n}\right] = \mu_0\frac{b^{1-n}}{n}$$

$$F_\nu = -E_\nu e^{2n}$$

$$G_\nu = A_\nu a^{2n}$$

şi rezultă pentru potenţialul magnetic vector expresiile:

$$A_i = \sum_{k=1}^{\infty} F_{\nu i}\,\frac{b}{n}\left[1-\left(\frac{c}{r}\right)^{2n}\right]\left(\frac{r}{b}\right)^{n}\cos\nu(\omega t-p\theta)$$

$$A_e = \sum_{k=1}^{\infty} F_{\nu e}\,\frac{b}{n}\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right]\left(\frac{b}{r}\right)^{n}\cos\nu(\omega t-p\theta) \qquad (2.61)$$

în care s-au folosit notaţiile:

$$F_{\nu i} = \frac{2\mu}{\pi n}\,\mu_0 J_l\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\right]\left[1+\left(\frac{c}{a}\right)^{2n}\right]^{-1}\sin n\varphi$$

$$F_{\nu e} = \frac{2\mu}{\pi n}\,\mu_0 J_l\left[1-\left(\frac{c}{b}\right)^{2n}\right]\left[1+\left(\frac{c}{a}\right)^{2n}\right]^{-1}\sin n\varphi$$

iar sumele se fac de la $u=2$ pentru armonicele de ordin superior ale cîmpului statorului şi respectiv de la $u=1$ pentru cazul regimurilor tranzitorii.

Componentele inducţiei magnetice se obţin pe baza relaţiilor (2.41) şi rezultă valorile din tabelul 2.6.

Tabelul 2.6. Expresiile componentelor inducţiei magnetice în prezenţa ecranelor electromagnetice

Situaţia	Domeniul	$B_\theta^r \to \begin{matrix} B_r \\ B_\theta \end{matrix}$	$\nu = 2k-1$, $n = \nu p$, $\gamma = \omega t - p\theta$
Cîmpul de excitaţie şi armonica fundamentală a inductorului (a → b)	m<r<a	$\pm\sum_{k=1}^{\infty} C_{\nu i}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\left[1\pm\left(\frac{m}{r}\right)^{2n}\right]$	$\sin\nu\gamma$ $\cos\nu\gamma$
	a<r<M	$\sum_{k=1}^{\infty} C_{\nu e}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\left[1\pm\left(\frac{r}{M}\right)^{2n}\right]$	$\sin\nu\gamma$ $\cos\nu\gamma$
Regimul tranzitoriu al excitaţiei	m<r<a	$\pm\sum_{k=1}^{\infty} D_{\nu i}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\left[1\pm\left(\frac{m}{r}\right)^{2n}\right]$	$\sin\nu\gamma$ $\cos\nu\gamma$
	a<r<c	$\sum_{k=1}^{\infty} D_{\nu e}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\left[1\mp\left(\frac{r}{c}\right)^{2n}\right]$	$\sin\nu\gamma$ $\cos\nu\gamma$
Regimul tranzitoriu şi armonicile superioare ale indusului	c<r<b	$\pm\sum_{k=0}^{\infty} F_{\nu i}\left(\frac{r}{b}\right)^{n-1}\left[1\mp\left(\frac{c}{r}\right)^{2n}\right]$	$\sin\nu\gamma$ $\cos\nu\gamma$
	b<r<M	$\sum_{k=0}^{\infty} F_{\nu e}\left(\frac{b}{r}\right)^{n+1}\left[1\pm\left(\frac{r}{M}\right)^{2n}\right]$	$\sin\nu\gamma$ $\cos\nu\gamma$

Dacă înfăşurarea este masivă (fig.2.24), aceasta se echivalează cu o mulţime de pături de curent, iar cu expresiile din tabelul 2.6 în care se înlocuieşte J_l cu $J\,da$ se obţin componentele inducţiei magnetice corespunzătoare păturii de curent de rază a(b) şi grosime da(db). Cîmpul rezultant se obţine prin integrare

$$B_\theta = \int_{a_1}^{a_2} dB_\theta \quad ; \quad B_r = \int_{a_1}^{a_2} dB_r \qquad (2.62)$$

2.4. Sisteme cu simetrie axială

Sistemele în care cîmpul magnetic prezintă o simetrie axială (de rotaţie) se întîlnesc frecvent în practică îndeosebi în cazul solenoizilor sau al bobinelor rezultate dintr-o combinaţie de solenoizi coaxiali, dar şi în alte situaţii în care intervin numai spire circulare coaxiale, iar mediile respectă aceeaşi simetrie axială.

In ipotezele menţionate la paragr. 2.1.3. şi în absenţa ecranelor feromagnetice, cîmpul magnetic se poate desigur determina cu metoda descrisă în paragr. 2.2.1, dar ţinînd seama de simetria axială, se pot folosi şi alte metode bazate pe:

- expresia potenţialului vector al unei spire circulare, în care intervin integrale eliptice [126];
- integrarea analitică a expresiei 2.1, conducînd tot la expresii cu integrale eliptice [94];
- dezvoltarea în serie a potenţialului magnetic scalar al unei spire circulare [49].

Dintre aceste metode de calcul, autorul şi-a propus să o dezvolte pe ultima, fiind convenabilă în calcule pentru cazuri relativ complicate.

In prezenţa unor ecrane feromagnetice avînd formă particulară (cilindru coaxial, de lungime mare şi permeabilitate magnetică mare) se poate folosi şi metoda separării variabilelor pentru potenţialul magnetic scalar sau vector. In cazuri mai generale se impun metodele numerice, autorul oprindu-se asupra metodei diferenţelor finite.

2.4.1. Metodă bazată pe dezvoltarea în serie a potenţialului magnetic scalar

Considerînd un domeniu cu simetrie axială parcurs de curent şi putînd avea formă oarecare în secţiunea transversală S (fig.2.27), în ipotezele menţionate se poate determina cîmpul magnetic printr-o descompunere în tuburi de curent elementare (spire filiforme) şi aplicarea corespunzătoare a principiului superpoziţiei.

α. Pentru determinarea inducţiei magnetice corespunzătoare unei spire circulare parcurse de curent, se porneşte de la expresia potenţialului magnetic scalar într-un punct M(z,0) situat pe axa de simetrie a spirei. Cu notaţiile din figura 2.28, potenţialul magnetic scalar are expresia [49]:

$$V_M(z,0) = \frac{I}{2}\left(1 - \frac{z-b}{d}\right) \qquad (2.63)$$

Ţinînd seama că 1/d se poate dezvolta în serie de puteri cu coeficienţi polinoame Legendre, expresia (2.63) devine:

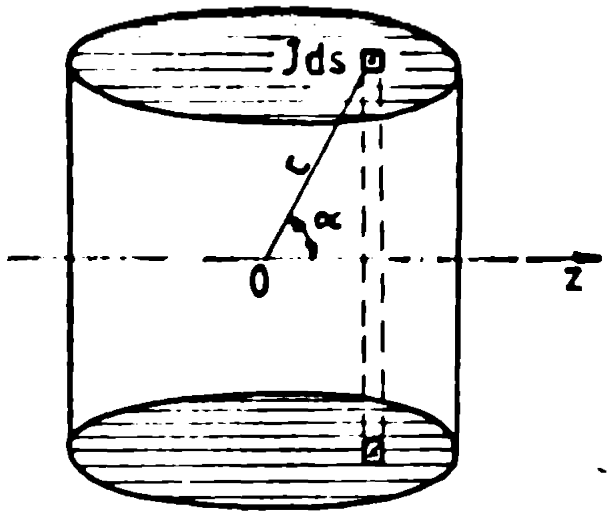


Fig.2.27. Bobină cu simetrie axială

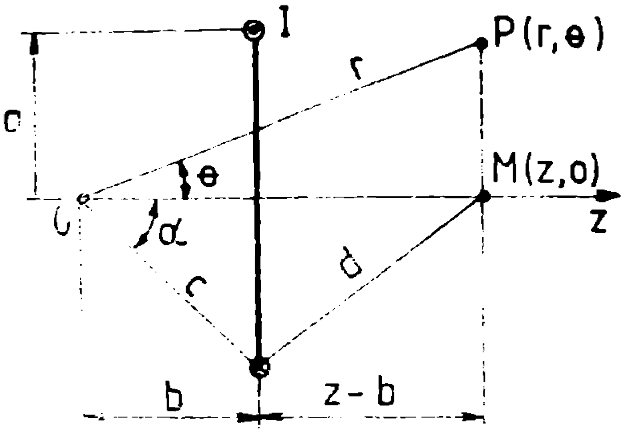


Fig.2.28. Explicativă privind potențialul magnetic scalar al unei spire circulare

$$V_m(z,0)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-b}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{c}\right)^n P_n(\cos\alpha)\right] \quad \text{pentru } z<c$$

$$V_m(z,0)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-b}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{z}\right)^{n+1} P_n(\cos\alpha)\right] \quad \text{pentru } z>c \qquad (2.64)$$

în care $P_n(\cos\alpha)$ sînt polinoamele lui Legendre, avînd expresiile cunoscute [49,117]:

$$P_0(\cos\alpha) = 1 \; ; \; P_1(\cos\alpha) = \cos\alpha$$

$$P_n(\cos\alpha) = \frac{2n-1}{n}\cos\alpha \, P_{n-1}(\cos\alpha) - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(\cos\alpha) \qquad (2.65)$$

După unele transformări, expresiile (2.64) se pot pune în forma mai convenabilă:

$$V_m(z,0) = \frac{1}{2}\left[1+\frac{b}{c} - \sin\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{c}\right)^n P'_n(\cos\alpha)\right] \quad , \quad z<c$$

$$V_m(z,0) = \frac{1}{2}\sin\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{c}{z}\right)^{n+1} P'_n(\cos\alpha) \quad , \quad z>c \qquad (2.66)$$

în care $P'_n(\cos\theta) = -\frac{d}{d\theta}\left[P_n(\cos\theta)\right]$

Pentru un punct $P(r,\theta)$ necituat pe axa de simetrie a spirei circulare (Fig.2.28), potențialul magnetic scalar se obține din relațiile (2.66) în care se înlocuiește $z^{\pm n}$ cu $r^{\pm n}\,P_n(\cos\theta)$[117]. Ținînd seama de aceasta şi renunţînd la termenul constant $\frac{1}{2}(1+\frac{b}{c})$ care nu intervine în expresia inducţiei magnetice, rezultă

$$V_{m1}(r,\theta) = -\frac{I\sin\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^n P'_n(\cos\alpha)P_n(\cos\theta)$$

$$V_{m2}(r,\theta) = \frac{I\sin\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} P'_n(\cos\alpha)P_n(\cos\theta) \qquad (2.67)$$

unde s-a notat cu indice 1 (V_{m1}) soluţia pentru $r<c$ şi cu indice 2 (V_{m2}) pentru $r>c$, notaţii ce se vor păstra şi în continuare.

Componentele inducţiei magnetice se determină din $\overline{B} = -\mu_0 \operatorname{grad} V_m$, adică:

$$B_r = -\mu_0 \frac{\partial V_M}{\partial r}; \qquad B_\theta = -\mu_0 \frac{\partial V_M}{r\,\partial \theta} \tag{2.68}$$

şi se obţin expresiile:

$$B_{r1} = \mu_0 \frac{I\sin\alpha}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^{n-1} P_n^1(\cos\alpha) P_n(\cos\theta)$$
$$B_{\theta 1} = -\mu_0 \frac{I\sin\alpha}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^{n-1} P_n^1(\cos\alpha) P_n^1(\cos\theta) \tag{2.69}$$

$$B_{r2} = \mu_0 \frac{I\sin\alpha}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^{n+2} P_n^1(\cos\alpha) P_n(\cos\theta)$$
$$B_{\theta 2} = \mu_0 \frac{I\sin\alpha}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{c}{r}\right)^{n+2} P_n^1(\cos\alpha) P_n^1(\cos\theta) \tag{2.70}$$

Atunci cînd secţiunea transversală a a domeniului parcurs de curent este mică, astfel încît aceasta se poate considera formată dintr-o singură spiră filiformă, ceea ce evidenţă avantajos ca sistemul de coordonate polar să fie considerat cu originea în centrul spirei (b=0 în fig. 2.28) astfel încît $\alpha = \pi/2$, $\cos\alpha = 0$, iar $c=a$ (raza spirei), expresiile (2.69) şi (2.70) devin:

$$B_{r1} = \mu_0 \frac{I}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} P_n^1(0)\, P_n(\cos\theta)$$
$$B_{\theta 1} = -\mu_0 \frac{I}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} P_n^1(0) P_n^1(\cos\theta) \tag{2.71}$$

$$B_{r2} = \mu_0 \frac{I}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} P_n^1(0) P_n(\cos\theta)$$
$$B_{\theta 2} = \mu_0 \frac{I}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} P_n^1(0)\, P_n^1(\cos\theta) \tag{2.72}$$

Pentru puncte situate pe axa de simetrie ($\theta=0$), deoarece $P_n(1)=1$ şi $P_n^1(1)=0$, cîmpul magnetic are numai componentă axială avînd expresiile:

$$B_{z1}(z,0) = \mu_0 \frac{I}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{n-1} P_n^1(0)$$
$$B_{z2}(z,0) = \mu_0 \frac{I}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^{n+2} P_n^1(0) \tag{2.73}$$

Pentru puncte situate în planul spirei ($\theta = \pi/2$), deoarece $P_{2n+1}(0)=0$ şi $P^1_{2n}(0)=0$, cîmpul are numai componentă tangenţială orientată tot axial ($B_\theta=-B_z$) avînd expresiile:

$$B_{z1}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \mu_0 \frac{I}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2} P^1_{2n-1}(0)$$
$$B_{z2}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = -\mu_0 \frac{I}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} P^1_{2n-1}(0) \tag{2.74}$$

Expresiile (2.74) sînt convenabile pentru determinarea cîmpului în planul spirei, avînd în vedere că

$$P^1_{2n}(0) = 0; \quad P_1^1(0) = 1; \quad P^1_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{2n+1}{n} P^1_{2n-1}(0) \tag{2.75}$$

astfel încît rezultă:

$$B_{z1}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mu_0 I}{2a}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \ldots\right]$$
$$B_{z2}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\mu_0 I}{2a}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^5 + \frac{1}{6}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^7 + \ldots\right] \tag{2.76}$$

Ţinînd seama de (2.75) rezultă că şi expresiile (2.73) se pot pune sub forma:

$$B_{z1}(z,0) = \frac{\mu_0 I}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n-2} P'_{2n-1}(0) \qquad (2.73')$$

$$B_{z2}(z,0) = \mu_0 \frac{I}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n+1} P'_{2n-1}(0)$$

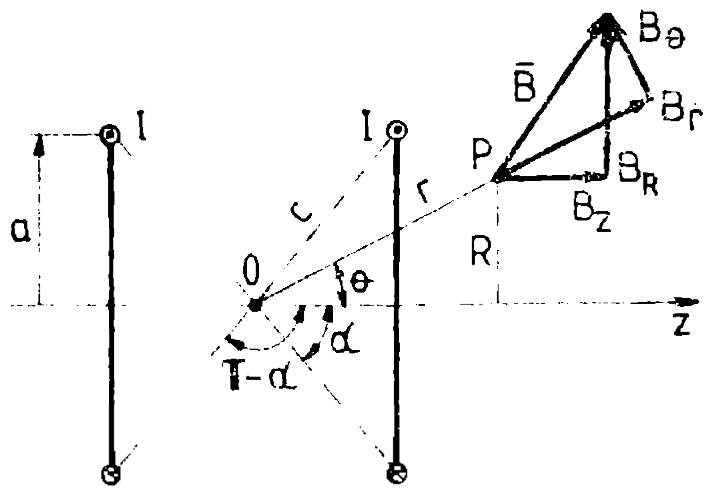


Fig. 2.29. Pereche de spire circulare

β. Dacă domeniul parcurs de curent (fig. 2.27) prezintă pe lîngă simetria axială şi simetrie faţă de un plan central ($z=0$), atunci acesta se poate considera ca fiind format din perechi de spire identice şi dispuse simetric. Considerînd o astfel de pereche de spire (fig. 2.29), caracterizate prin unghiurile α şi $\pi-\alpha$, cîmpul rezultant se obţine însumînd expresii de forma (2.69) respectiv (2.70) pentru cele două spire.

Astfel, de exemplu, pentru componenta radială în cazul $r<c$, se obţine:

$$B_{r1} = \mu_0 \frac{I\sin\alpha}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{c}\right)^{n-1}\left[P'_n(\cos\alpha)+P'_n(-\cos\alpha)\right] \qquad (2.77)$$

Deoarece $P'_n(-\cos\alpha) = \begin{cases} P'_n(\cos\alpha) & \text{pentru } n=2k-1 \\ -P'_n(\cos\alpha) & \text{pentru } n=2k \end{cases}$

rezultă că în expresia (2.77) se anulează termenii de ordin par, adică se obţine aceeaşi precizie de calcul dar cu un număr de termeni ai seriei redus la jumătate. Componentele inducţiei magnetice corespunzătoare unei perechi de spire sînt prin urmare:

$$B_{r1} = \mu_0 \frac{I\sin\alpha}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{c}\right)^{2n-2} P'_{2n-1}(\cos\alpha)\, P_{2n-1}(\cos\theta)$$

$$B_{\theta1} = -\mu_0 \frac{I\sin\alpha}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{r}{c}\right)^{2n-2} P'_{2n-1}(\cos\alpha)\, P'_{2n-1}(\cos\theta) \qquad (2.78)$$

$$B_{r2} = \mu_0 \frac{I\sin\alpha}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1} P'_{2n-1}(\cos\alpha)\, P_{2n-1}(\cos\theta)$$

$$B_{\theta2} = \mu_0 \frac{I\sin\alpha}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1} P'_{2n-1}(\cos\alpha)\, P'_{2n-1}(\cos\theta) \qquad (2.79)$$

În practică interesează de cele mai multe ori componentele după direcţia axială (B_z) şi după o direcţie perpendiculară pe aceasta (B_R). Conform cu figura 2.29 acestea se obţin din:

$$B_z = B_r\cos\theta - B_\theta\sin\theta; \quad B_R = B_r\sin\theta + B_\theta\cos\theta$$

şi rezultă:

$$B_{z1} = \mu_0 \frac{I\sin\alpha}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{c}\right)^{2n-2} P'_{2n-1}(\cos\alpha)\, P_{2n-2}(\cos\theta)$$

$$B_{R1} = -\mu_0 \frac{I\sin\alpha}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{r}{c}\right)^{2n} P'_{2n+1}(\cos\alpha)\, P'_{2n}(\cos\theta) \qquad (2.80)$$

$$B_{r2}=\mu_0\frac{I\sin\alpha}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1}P^1_{2n-1}(\cos\alpha)\,P_{2n}(\cos\theta)$$
$$B_{\theta 2}=\mu_0\frac{I\sin\alpha}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n+1}P^1_{2n-1}(\cos\alpha)\,P^1_{2n}(\cos\theta) \qquad (2.81)$$

Particularizînd aceste expresii pentru $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (cazul unei spire circulare parcursă însă de curentul 2I), se pot regăsi expresiile particulare pe axa spirei şi respectiv în planul spirei. Astfel:

- pentru $\theta = 0$, ţinînd seama că $P^1_n(1)=0$ şi $P_n(1)=1$ rezultă

$B_{\theta 1}=B_{\theta 2}=0;$

$$B_{z1}=\frac{\mu_0 I}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2}P^1_{2n-1}(0); \quad B_{z2}=\frac{\mu_0 I}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}P^1_{2n-1}(0)$$

adică tocmai relaţiile (2.73);

- pentru $\theta=\frac{\pi}{2}$, ţinînd seama că

$$P_{2n-2}(0)=\frac{1}{2n-1}P^1_{2n-1}(0); \quad P_{2n}(0)=-\frac{1}{2n}P^1_{2n-1}(0)$$

rezultă:

$B_{r1}=B_{r2}=0;$

$$B_{z1}=\frac{\mu_0 I}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2}P^{1\,2}_{2n-1}(0); \quad B_{z2}=-\frac{\mu_0 I}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}P^{1\,2}_{2n-1}(0)$$

adică tocmai relaţiile (2.74).

γ. Dacă secţiunea transversală a domeniului parcurs de curent (S în fig.2.27) este mare, atunci aceasta se descompune în spire elementare pentru care sînt valabile expresiile de calcul stabilite anterior, înlocuind doar pe I cu J dS şi notînd cîmpul corespunzător unei spire cu dB. Cîmpul rezultant se obţine prin integrarea componentei corespunzătoare a lui dB pe întreaga suprafaţă. Pot interveni următoarele trei situaţii distincte, funcţie de poziţia pe care o ocupă punctul de calcul al cîmpului magnetic (fig. 2.30):

a) $r<c_{min}$, adică toate spirele de calcul au $c>r$. In această situaţie cîmpul rezultant se obţine prin

$$B_{\xi 1}=\int_S dB_{\xi 1}\simeq\sum_1^{N_S}\Delta B_{\xi 1} \qquad (2.82)$$

unde ξ poate reprezenta pe r, θ, z sau α, iar N_S este un număr finit de spire de secţiune ΔS în care s-a descompus bobina;

b) $r>c_{max}$, adică toate spirele de calcul au $c<r$, rezultă:

$$B_{\xi 2}=\int_S dB_{\xi 2}\simeq\sum_1^{N_S}\Delta B_{\xi 2} \qquad (2.83)$$

c) $c_{min}<r<c_{max}$, adică există spire în situaţia $r<c$, dar există şi spire în situaţia $r>c$. In acest caz, cîm-

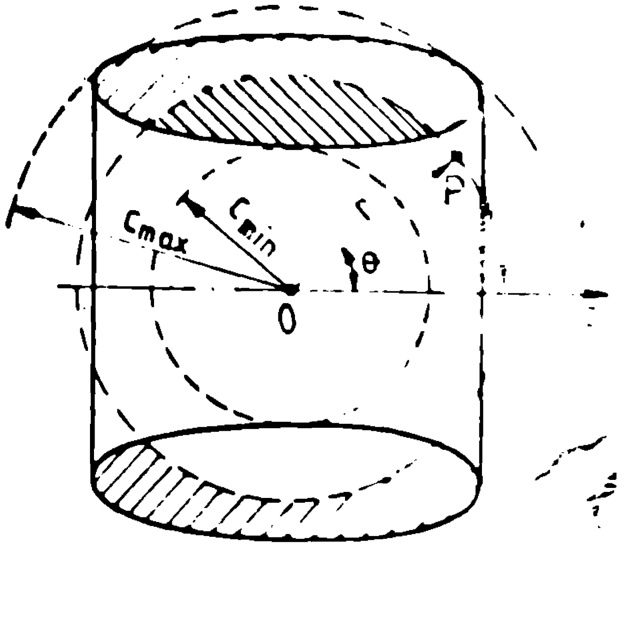


Fig.2.30. Bobină masivă cu simetrie axială

pul rezultant se obţine prin:

$$B_\xi = \int_{S1} dB_{\xi_1} + \int_{S2} dB_{\xi_2} \simeq \sum_{1}^{N_{S1}} \Delta B_{\xi_1} + \sum_{1}^{N_{S2}} \Delta B_{\xi_2} \qquad (2.84)$$

unde N_{S1} reprezintă spirele care satisfac condiţia $r<c$, iar N_{S2} cele care satisfac condiţia $r>c$.

Avînd în vedere expresiile lui dB, integrarea analitică în relaţiile (2.82),(2.83) sau (2.84) este practic imposibilă, aceasta aproximîndu-se printr-o sumă finită, corespunzătoare unui număr finit (N_s) de spire de secţiune Δs şi parcurse de curentul $\Delta I = J \cdot \Delta s$. Astfel, de exemplu, pentru componenta longitudinală a cîmpului rezultant în cazul unui sistem care prezintă şi simetrie faţă de planul central, se obţine:

$$B_{z_1} = \sum_{i=1}^{N_s} \mu_0 \frac{J_i \Delta s_i \sin\alpha_i}{c_i} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c_i}\right)^{2n-2} P^1_{2n-1}(\cos\alpha_i) P_{2n-1}(\cos\theta)$$

$$B_{z_2} = \sum_{i=1}^{N_s} \mu_0 \frac{J_i \Delta s_i \sin\alpha_i}{c_i} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_i}{r}\right)^{2n+1} P^1_{2n-1}(\cos\alpha_i) P_{2n}(\cos\theta)$$

$$B_z = \sum_{i=1}^{N_{s1}} \mu_0 \frac{J_i \Delta s_i \sin\alpha_i}{c_i} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c_i}\right)^{2n-2} P^1_{2n-1}(\cos\alpha_i) P_{2n-1}(\cos\theta) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_{s2}} \mu_0 \frac{J_i \Delta s_i \sin\alpha_i}{c_i} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_i}{r}\right)^{2n+1} P^1_{2n-1}(\cos\alpha_i) P_{2n}(\cos\theta) \qquad (2.85)$$

Expresii similare se pot scrie avînd la bază oricare dintre componentele deduse pentru o spiră sau o pereche de spire.

2.4.2. Metode pentru îmbunătăţirea uniformităţii cîmpului magnetic

După cum s-a mai amintit, bobinele cu simetrie circulară care se întîlnesc cel mai frecvent în practică au forma unor solenoizi sau combinaţii de solenoizi. Deoarece în multe situaţii se impune o anumită uniformitate a cîmpului magnetic realizat în zona utilă, este necesară analiza modului de variaţie a cîmpului în zona respectivă şi a posibilităţilor de îmbunătăţire a uniformităţii.

1. În acest scop se consideră un solenoid cu densitate de curent constantă pe secţiunea sa transversală (fig. 2.31). Cîmpul magnetic pe axa solenoidului se obţine cu expresia (2.1) care datorită simetriei se integrează simplu, rezultînd:

$$B = \frac{J}{2} a_1 \left[F\left(\alpha, \beta + \frac{z}{a_1}\right) + F\left(\alpha, \beta - \frac{z}{a_1}\right)\right] \qquad (2.86)$$

în care s-au introdus notaţiile $\alpha = a_2/a_1$ şi $\beta = b/a_1$, iar $F(\alpha,\beta)$ este un factor geometric avînd expresia [83]:

$$F(\alpha,\beta) = \frac{4\pi}{10}\beta\left[\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}) - \ln(1+\sqrt{1+\beta^2})\right] \qquad (2.87)$$

(se obţine B în [T] dacă se înlocuieşte J în [A/mm²] şi a_1 în [m]).
La centrul solenoidului, se obţine din (2.86) pentru z = 0:

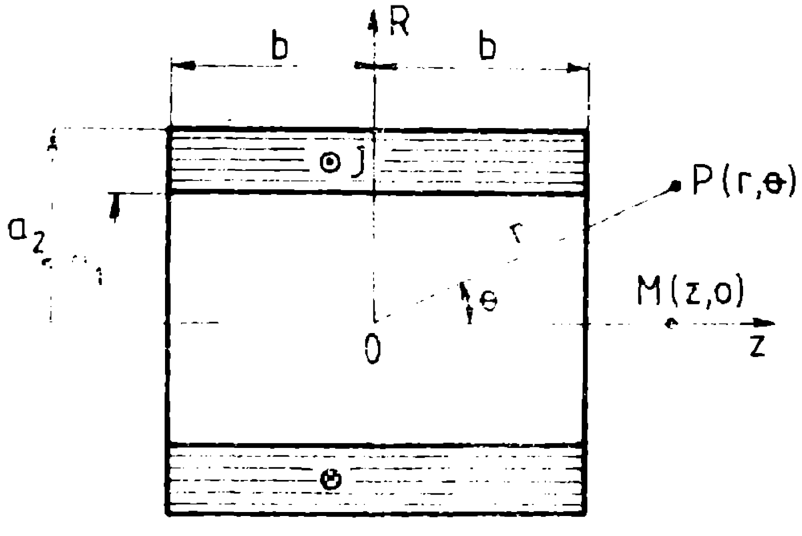


Fig. 2.31. Solenoid cu densitate de curent constantă pe secțiune

$$B_0 = Ja_1 F(\alpha,\beta) \qquad (2.88)$$

iar în zona centrală ($r<a_1$) cîmpul magnetic se poate exprima și printr-o dezvoltare în serie în jurul originii [18,83], componenta longitudinală avînd expresia:

$$B_z = B_0\left[1+E_2(\alpha,\beta)\left(\frac{r}{a_1}\right)^2 P_2(\cos\theta)+E_4(\alpha,\beta)\left(\frac{r}{a_1}\right)^4 P_4(\cos\theta)+\dots\right] \qquad (2.89)$$

în care

$$E_{2n}(\alpha,\beta) = \frac{1}{B_0(2n)!}\left(\frac{\partial^{2n} B(z,0)}{\partial z^{2n}}\right)_{z=0} \qquad (2.90)$$

Ținînd seama de semnificația polinoamelor Legendre, din relația (2.89) rezultă că variația maximă a cîmpului magnetic se obține pentru puncte situate pe axa solenoidului ($r = z$),

$$B(z,0)=B_0\left[1+E_2(\alpha,\beta)\left(\frac{z}{a_1}\right)^2 + E_4(\alpha,\beta)\left(\frac{z}{a_1}\right)^4 + \dots\right]$$

și ținînd seama de (2.88) rezultă:

$$B(z,0)=Ja_1\left[F(\alpha,\beta)+FE_2(\alpha,\beta)\left(\frac{z}{a_1}\right)^2+FE_4(\alpha,\beta)\left(\frac{z}{a_1}\right)^4+\dots\right] \qquad (2.91)$$

respectiv

$$B(z,0)=Ja_2\left[\frac{1}{\alpha}F(\alpha,\beta)+\alpha^2 FE_2(\alpha,\beta)\left(\frac{z}{a_2}\right)^2+\alpha^3 FE_4(\alpha,\beta)\left(\frac{z}{a_2}\right)^4+\dots\right] \qquad (2.92)$$

Expresiile termenilor $FE_{2n}(\alpha,\beta)$ se pot determina prin calcularea derivatelor (2.90) și ținînd seama de (2.87), fiind date în literatură [85,86]. De asemenea se pot deduce relații similare pentru cazul în care densitatea de curent este variabilă pe secțiunea solenoidului. Astfel în [85] se dau expresiile lui B_0 și $F(\alpha,\beta)$ pentru cazul în care J are o variație liniară în direcție radială, $J = J_0 a/a_1$.

Pentru a obține un cîmp magnetic de mare uniformitate în jurul originii și fără a face apel la soluția total neeconomică de mărire a lungimii solenoidului, se poate face o combinație de solenoizi astfel încît să se anuleze unii termeni din relația (2.91) sau (2.92). In literatură [18,83] se folosește terminologia de "bobină compensată de ordinul 2n", unde 2n reprezintă ordinul primului termen nenul din seria (2.91) sau (2.92).

β. Compensarea de ordinul patru se obține în mod simplu dacă se consideră bobinele din figura 2.32 ca fiind rezultate din combinația a doi solenoizi avînd parametrii a_1, α, β, J și respectiv a_1, α, β_c și $J_c = -J$. Ținînd seama de relația (2.91) rezultă:

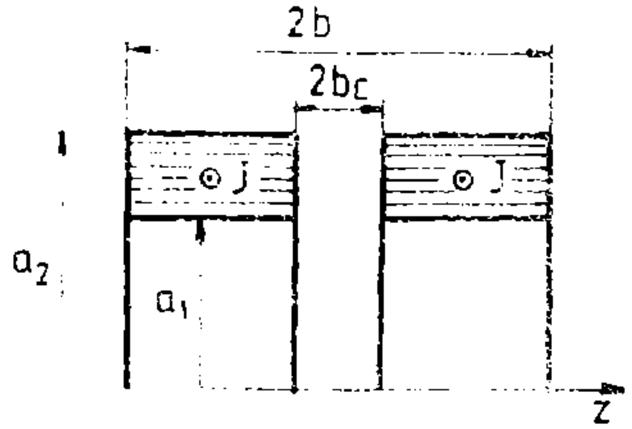


Fig.2.32. Compensare de ordinul patru

$$B = Ja_1\left\{F(\alpha,\beta) - F(\alpha,\beta_c) + \left[FE_2(\alpha,\beta) - FE_2(\alpha,\beta_c)\right]\left(\frac{z}{a_1}\right)^2 + \left[FE_4(\alpha,\beta) - FE_4(\alpha,\beta_c)\right]\left(\frac{z}{a_1}\right)^4 + \dots\right\} \quad (2.93)$$

Compensarea de ordinul patru se obține prin alegerea parametrului β_c (respectiv b_c) astfel încît

$$FE_2(\alpha,\beta) - FE_2(\alpha,\beta_c) = 0 \quad (2.94)$$

condiție care poate fi satisfăcută numai dacă $\beta \geq (1+\alpha)/4$.

Practic parametrul β_c se obține în mod simplu dacă se tabelează $FE_2(\alpha,\beta)$ în funcție de α și β. Apoi pentru α și β dat, se alege β_c din tabel astfel încît să fie satisfăcută condiția (2.94).

γ. Pentru compensare de ordinul șase se cunosc din literatură [18,27,83,88] mai multe posibilități, dintre care se prezintă două mai frecvent întîlnite:

a) Solenoid de compensare interior (fig. 2.33) situație în care bobina se consideră formată din doi solenoizi avînd parametrii a_1, α, β, J și respectiv $a_1, \alpha_c, \beta_c, J_c = -J$. Pentru compensare de ordinul șase, rezultă parametrii α_c și β_c din satisfacerea simultană a condițiilor:

$$FE_2(\alpha_c,\beta_c) = FE_2(\alpha,\beta)\ ;\ FE_4(\alpha_c,\beta_c) = FE_4(\alpha,\beta) \quad (2.95)$$

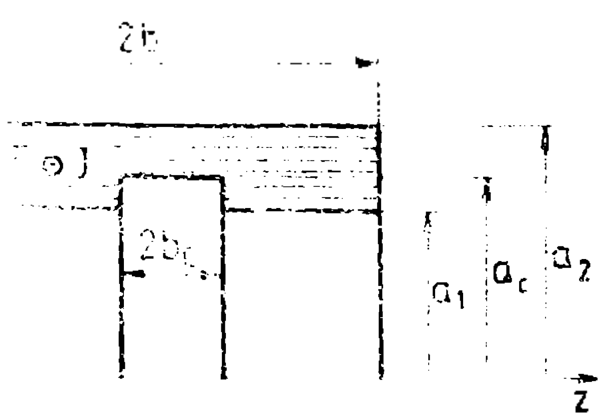


Fig. 2.33. Solenoid de compensare interior

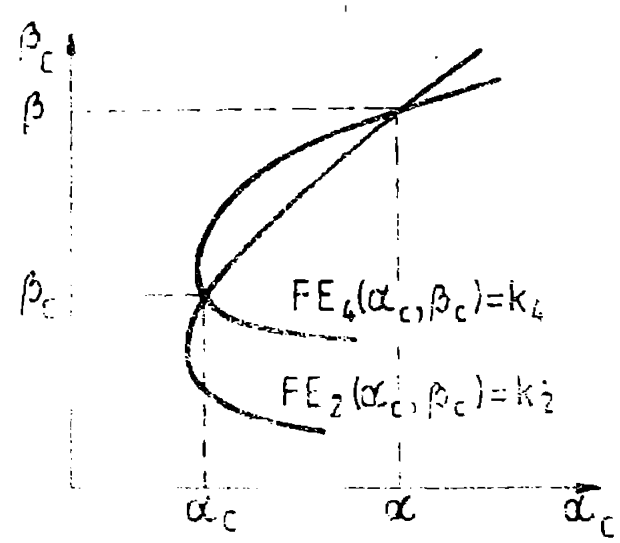


Fig. 2.34. Determinarea grafică a parametrilor solenoidului de compensare

Determinarea practică a parametrilor solenoidului de compensare se face în modul următor:

- se determină pentru solenoidul de bază (α,β) mărimile:

$$FE_2(\alpha,\beta) = k_2$$

$$FE_4(\alpha,\beta) = k_4$$

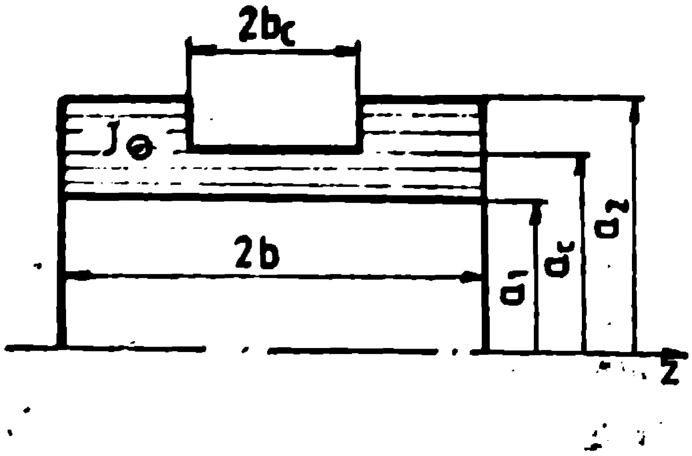


Fig. 2.55. Solenoid de compensare exterior

- se reprezintă grafic (fig. 2.54) curbele

$$FE_2(\alpha_c, \beta_c) = K_2$$
$$FE_4(\alpha_c, \beta_c) = K_4$$

- parametrii solenoidului de compensare rezultă din intersecția celor două curbe (dacă există al doilea punct de intersecție).

b) Solenoid de compensare exterior (fig. 2.55), situație în care bobina se consideră formată din doi solenoizi avînd parametrii a_2, α, β, J și respectiv $a_2, \alpha_c, \beta_c, J_e = -J$. Raza comună a celor doi solenoizi fiind a_2, se folosește expresia (2.92) pentru inducția magnetică și rezultă o compensare de ordinul șase dacă se îndeplinesc condițiile:

$$\begin{aligned} \alpha_c FE_2(\alpha_c, \beta_c) &= \alpha FE_2(\alpha, \beta) \\ \alpha_c^3 FE_4(\alpha_c, \beta_c) &= \alpha^3 FE_4(\alpha, \beta) \end{aligned} \qquad (2.96)$$

In mod similar se pot deduce condițiile necesare pentru compensare de un anumit ordin în situația că densitatea de curent este variabilă de la un strat la altul. Astfel autorul a stabilit condițiile pentru compensare de ordinul șase în situația că solenoidul este format din două sau trei straturi cu Jact [27,35]. Pentru două straturi (fig. 2.56) aceste condiții sînt:

$$\begin{aligned} FE_2(\alpha_c, \beta_c) &= FE_2(\alpha_1, \beta_1) + \frac{J_2}{\alpha_1 J_1} FE_2(\alpha_2, \beta_2) \\ FE_4(\alpha_c, \beta_c) &= FE_4(\alpha_1, \beta_1) + \frac{J_2}{\alpha_1^3 J_1} FE_4(\alpha_2, \beta_2) \end{aligned} \qquad (2.97)$$

De asemenea în [27] se propune un nou mod de compensare (fig. 2.57) derivat din varianta cu solenoid de compensare exterior, în care însă $J_e \neq -J$. Condițiile necesare pentru compensare de ordinul șase sînt:

$$\begin{aligned} \alpha_c FE_2(\alpha_c, \beta_c) &= \frac{J}{J_e} \alpha FE_2(\alpha, \beta) \\ \alpha_c^3 FE_4(\alpha_c, \beta_c) &= \frac{J}{J_e} \alpha^3 FE_4(\alpha, \beta) \end{aligned} \qquad (2.98)$$

Dacă raportul J/J_e este impus, din condițiile (2.98) rezultă α_c și β_c, alegîndu-se desigur pentru raportul J/J_e o valoare optimă astfel încît cîmpul în zona centrală să nu descrească exagerat de mult. Se poate însă impune α_c (de exemplu $\alpha_c=\alpha$) și vor rezulta din relațiile (2.98) β_c și J/J_e. Există și posibilitatea obținerii unei compensări de ordinul opt, dacă se determină α_c, β_c și J/J_e din condițiile:

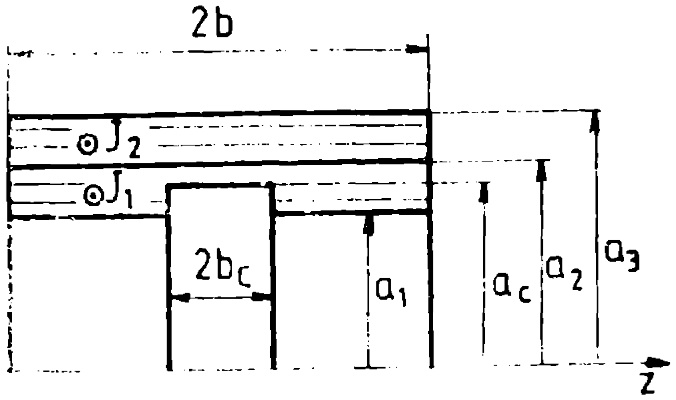


Fig. 2.36. Solenoid cu două straturi J = ct

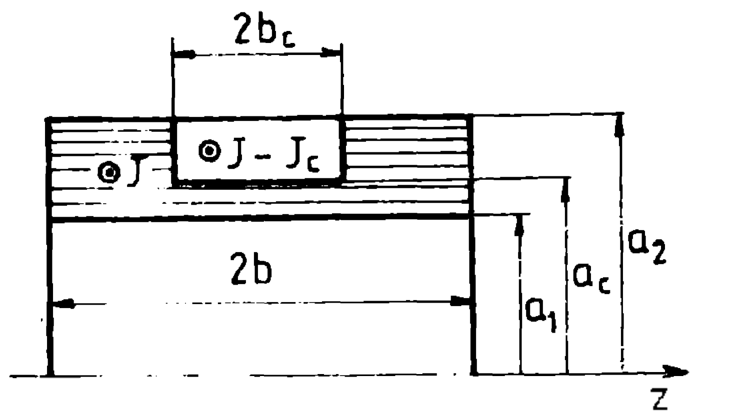


Fig. 2.37. Varianta propusă pentru compensare

$$\alpha_c FE_2(\alpha_c,\beta_c) = \frac{J}{J_c}\alpha FE_2(\alpha,\beta)$$
$$\alpha_c^3 FE_4(\alpha_c,\beta_c) = \frac{J}{J_c}\alpha^3 FE_4(\alpha,\beta) \qquad (2.99)$$
$$\alpha_c^5 FE_6(\alpha_c,\beta_c) = \frac{J}{J_c}\alpha^5 FE_6(\alpha,\beta)$$

În acest scop recomandîndu-se utilizarea unor metode numerice pentru soluţionarea sistemului (2.98).

δ. Prin metodele de compensare prezentate în paragrafele anterioare se poate obţine un cîmp magnetic de înaltă uniformitate însă într-o zonă centrală restrînsă. Autorul propune în continuare o posibilitate de a extinde zona de cîmp uniform prin modificarea pe zone a densităţii de curent.

Se consideră un solenoid sub forma unei pături de curent (fig. 2.38) cu densitatea liniară J_l constantă. Inducţia magnetică într-un punct situat pe axa solenoidului se obţine pornind de la relaţia (2.1) şi rezultă.

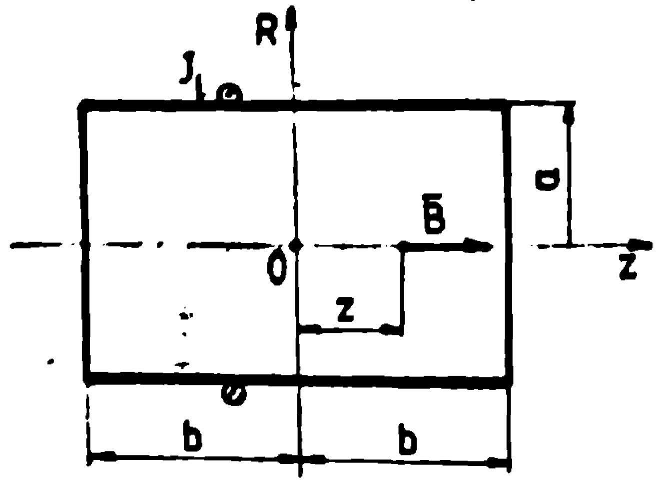


Fig. 2.38. Pătură de curent cu J_l = ct

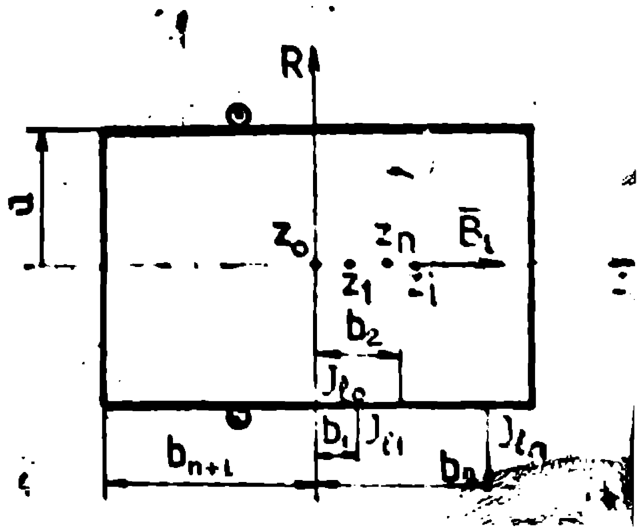


Fig. 2.39. Pătură de curent cu J_l = ct. pe porţiuni

$$B = \frac{\mu_0 J_l}{2} f(a,b,z) \qquad (2.100)$$

unde $f(a,b,z)$ este un factor geometric având expresia:

$$f(a,b,z) = \frac{b+z}{\sqrt{a^2+(b+z)^2}} + \frac{b-z}{\sqrt{a^2+(b-z)^2}} \qquad (2.101)$$

Dacă se consideră solenoidul format din n+1 zone cu densitatea constantă pe fiecare zonă, dar variabilă de la o zonă la alta (fig. 2.39), inducţia magnetică într-un punct z_i pe axa de simetrie rezultă prin însumarea contribuţiilor tuturor zonelor:

$$B_i = \frac{\mu_0}{2}\sum_{j=0}^{n} J_{lj}\left[f(a,b_{j+1},z_i) - f(a,b_j,z_i)\right] \qquad (2.102)$$

în care $b_0 = 0$ şi deci $f(a,b_0,z_i) = 0$.

Relaţia (2.102) se poate aplica şi dacă raza a este variabilă de la o zonă la alta, înlocuindu-se doar a cu a_j. În asemenea, aceasta se poate pune în forma:

$$B_i = \mu_0 \frac{J_{l0}}{2}\sum_{j=0}^{n} K_j E_{ij} \qquad (2.103)$$

în care $K_j = J_{lj}/J_{l0}$; $E_{ij} = f(a_j,b_{j+1},z_i) - f(a_j,b_j,z_i)$

Coeficienţii K_j se pot determina din condiţia ca inducţia magnetică în n puncte situate pe axă să fie aceeaşi cu cea din centrul bobinei, adică

$$B_i = B_0 \; ; \; i = 1,n \qquad (2.104)$$

Deoarece K_0 este cunoscut ($K_0=1$) expresiile (2.104) se pun sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n} K_j(E_{1j} - E_{ij}) = E_{11} - E_{i1} \quad ; \; i = 1,n \qquad (2.105)$$

sau mai compact

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij}K_j = CL_i \; ; \; i = 1,n \qquad (2.106)$$

Prin urmare a rezultat un sistem de ecuaţii algebrice liniare, care se poate rezolva simplu prin metode numerice [40,42,77].

În cazul unui solenoid masiv, având razele a_1 şi a_2 şi format din n+1 zone cu densitate de curent constantă (fig. 2.40), pentru a obţine un câmp magnetic uniform se procedează ca şi în cazul precedent. Astfel, se porneşte de la expresia (2.66) pentru câmpul magnetic pe axa unui solenoid cu J constant pe toată secţiunea sa, şi se obţine

$$B_i = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} J_j a_{1j}\Big[F(\alpha_j,\beta_{j+1} + \frac{z_i}{a_{1j}}) + F(\alpha_j,\beta_{j+1} - \frac{z_i}{a_{1j}}) -$$

$$- F(\alpha_j,\beta_j + \frac{z_i}{a_{1j}}) - F(\alpha_j,\beta_j - \frac{z_i}{a_{1j}})\Big] \qquad (2.107)$$

Această relaţie are aceeaşi formă cu şi (2.103), însă coeficienţii E_{ij} au altă expresie şi anume:

$$E_{ij} = a_{ij}\Big[F(\alpha_j,\beta_{j+1} + \frac{a_i}{a_{ij}}) + F(\alpha_j,\beta_{j+1} - \frac{a_i}{a_{ij}}) - F(\alpha_j,\beta_j + \frac{a_i}{a_{ij}}) - F(\alpha_j,\beta_j - \frac{a_i}{a_{ij}})\Big] \qquad (2.108)$$

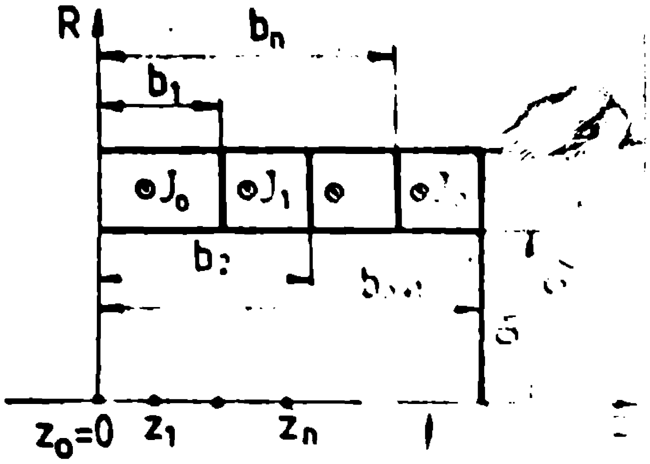


Fig. 2.40. Solenoid cu Jsect. pe porţiuni

Impunînd condiţia (2.104), rezultă un sistem de ecuaţii de forma (2.105), respectiv (2.106) cu deosebirea că E_{ij} au altă semnificaţie (2.108).

n. O posibilitate de a obţine un cîmp uniform în toată zona interioară a unei bobine rezultă prin realizarea acesteia sub forma unui elipsoid şi avînd o înfăşurare extrem de subţire (pătură de curent) cu o densitate liniară de curent ce variază într-un anume mod în lungul bobinei.

Problema care se pune este determinarea distribuţiei acestei densităţi liniare de curent. În acest scop se poate pleca de la faptul cunoscut [117] că dacă într-un cîmp magnetic uniform $\bar{B}_0$ se plasează un corp diamagnetic de formă elipsoidală, în interiorul acestuia cîmpul magnetic este tot uniform, dar mai mic, $\bar{B} < \bar{B}_0$ (fig.2.41,a).

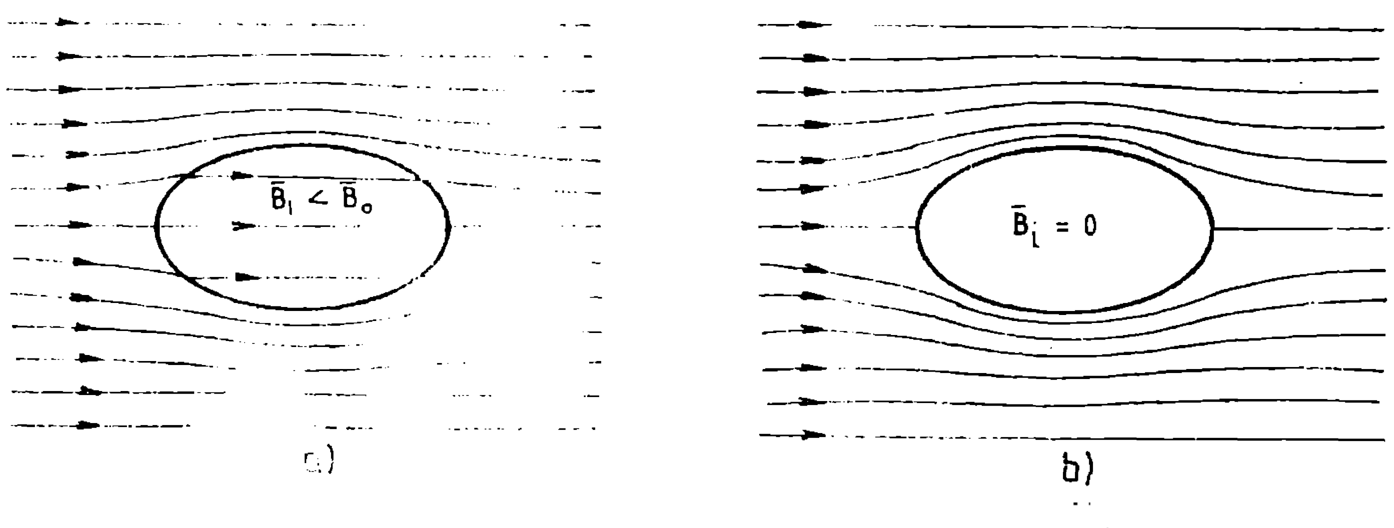


Fig. 2.41. Corp diamagnetic elipsoidal în cîmp magnetic uniform

Cîmpul magnetic în interiorul elipsoidului se poate considera sub forma $\bar{B}_1 = \bar{B}_0 + \bar{B}'$, în care $\bar{B}'$ este produs de curenţii legaţi din corp.

Dacă se consideră elipsoidul diamagnetic ideal (de exemplu supraconductor), cu $\mu_r=0$ ($\chi_m = -1$), atunci $\bar{B}_1=0$ ($\bar{B}' = -\bar{B}_0$), adică curenţii legaţi produc un cîmp magnetic egal şi de sens contrar cu cîmpul exterior. Situaţia este reprezentată în fig. 2.41,b.

Considerînd în continuare curenţii legaţi ca o pătură de curent pe suprafața elipsoidului, densitatea liniară a acestora, J_l, se determină din:

$$\mathrm{rot}_s \bar{B} = \mu_0 J_l = B_{et} - B_{it}$$

și deoarece $B_i = 0$ rezultă:

$$J_l = \frac{1}{\mu_0} B_{et} \qquad (2.109)$$

Prin urmare pentru cunoașterea densității liniare J_l pe suprafața elipsoidului diamagnetic ideal, trebuie cunoscută componenta tangentă a cîmpului magnetic la acea suprafață.

Importanța practică a relației (2.109) constă în faptul că dacă se realizează o astfel de distribuție de curent și se păstrează și în absența cîmpului exterior, atunci această pătură de curent produce în interiorul elipsoidului un cîmp magnetic uniform (fig. 2.42).

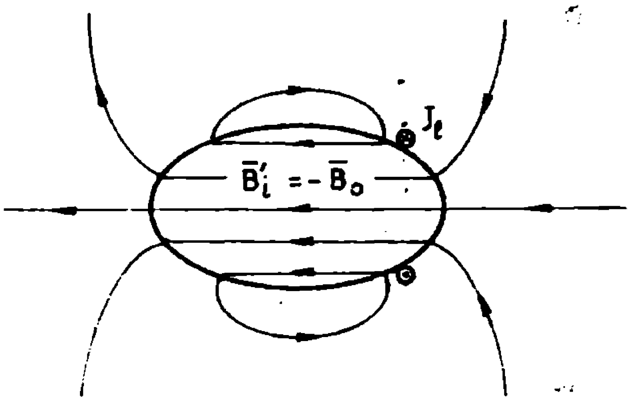


Fig. 2.42. Cîmpul magnetic al bobinei elipsoidale

Pentru obținerea distribuției densității liniare de curent care realizează un cîmp magnetic uniform în interiorul elipsoidului, trebuie deci determinată componenta tangențială a cîmpului magnetic la suprafața unui elipsoid diamagnetic ideal introdus într-un cîmp magnetic omogen (fig.2.41,b). Problema este rezolvată în [28] utilizînd coordonate curbilinii confocale, rezultatul pentru cazul unui elipsoid de rotație (care interesează în practică) cu semiaxele a și b fiind:

$$J_l = \frac{H_0}{1+G}\,\frac{py}{\sqrt{b^2+y^2(p^2-1)}} = \frac{H_0}{1+G}\,\frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \qquad (2.110)$$

în care G este un factor geometric cu expresia:

$$G = \frac{1}{p^2-1}\left[\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\ln\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)-1\right] \qquad (2.111)$$

iar $p = a/b$ (raportul semiaxelor elipsoidului).

Se constată că densitatea liniară de curent are o variație relativ complicată în lungul axei elipsoidului (fig.2.43) și prin urmare este dificilă realizarea practică a unei astfel de înfășurări. Dificultatea aceasta se poate însă elimina în mod simplu, dacă bobina elipsoidală se aproximează printr-o înfășurare în trepte, la limită o infinitate de astfel de trepte. Curentul di printr-o treaptă de lungime dx trebuie să fie același cu cel corespunzător lungimii dl pe elipsoid (fig.2.44) adică:

$$di = J_l\,dl = J'_l\,dx \qquad (2.112)$$

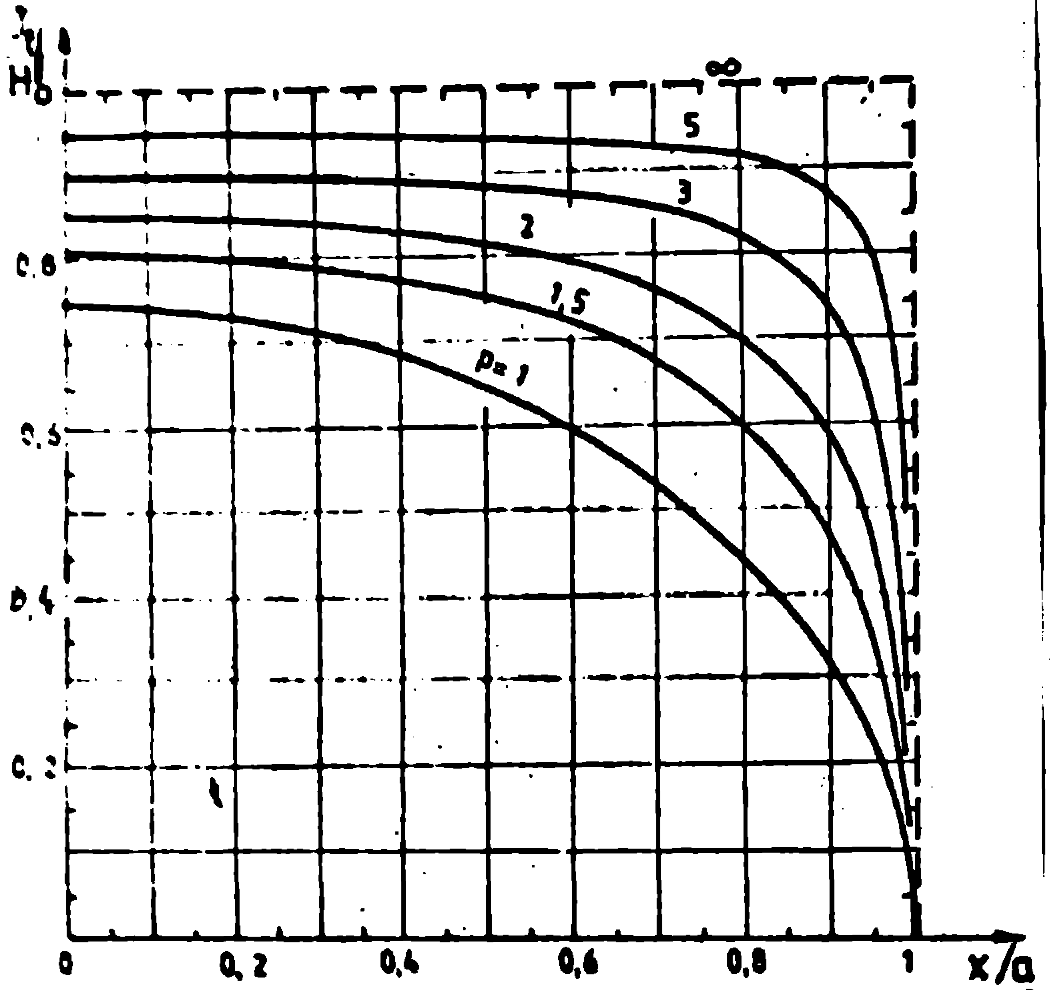


Fig. 2.43. Repartiția densității de curent la bobina elipsoidală

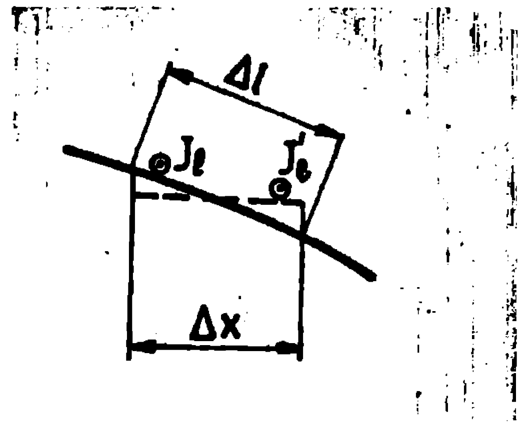


Fig. 2.44. Aproximarea elipsoidului în trepte

Ținînd seama că

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{py}\sqrt{b^2+y^2(p^2-1)}\,dx$$

din (2.110) și (2.112) se obține

$$J_l' = J_l \frac{dl}{dx} = \frac{H_0}{1+G} \qquad (2.113)$$

Acest rezultat reflectă faptul că densitatea de curent în treptele prin care se aproximează bobina elipsoidală este aceeași independent de x și deci ușor de realizat practic. Pe baza acestei ultime relații se poate calcula foarte comod cîmpul magnetic în interiorul unei astfel de bobine:

$$H_0 = (1+G)J_l' \qquad (2.114)$$

Este interesant de analizat cazurile limită $p \to \infty$ și $p \to 1$.

a) Pentru $p \to \infty$ bobina elipsoidală degenerează într-un solenoid infinit lung și deoarece $\lim_{p\to\infty} G = 0$, relația (2.114) ia forma:

$$H_0 = J_l' \qquad (2.115)$$

cunoscută din cazul solenoidului de lungime foarte mare.

b) Pentru $p \to 1$, elipsoidul degenerează într-o sferă și deoarece $\lim_{p\to 1} G = \frac{1}{3}$, se obține din (2.114):

$$H_0 = \left(1+\frac{1}{3}\right)J_l' = \frac{4}{3}J_l' \qquad (2.116)$$

Se constată, după cum era de așteptat, că la o anumită densitate de curent se obține un cîmp magnetic cu atît mai intens cu cît p este mai mic. Ținînd seama și de suprafața ocupată de pătura de curent care la o anumită semiaxă b impusă de condițiile de utilizare rezultă cu atît mai mică cu cît p este mai mic, se recomandă ca elipsoidul să fie alungit cît mai puțin posibil.

în practică, pentru a facilita accesul în zona interioară a bobinei, înfășurarea nu va ocupa întreg elipsoidul ci, va fi deschisă la capete (fig. 2.45). În această situație scade gradul de uniformitate al cîmpului magnetic mai ales în capete, dar se păstrează destul de bun în zona centrală.

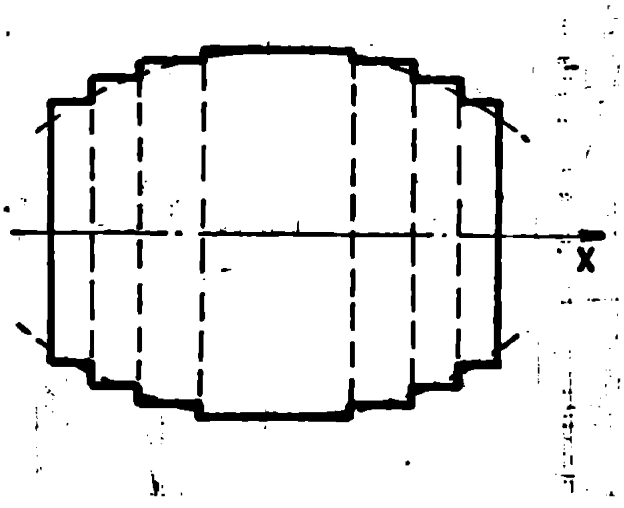


Fig. 2.45. Aproximarea în trepte a bobinei elipsoidale deschise

Pentru a compensa micșorarea gradului de uniformitate ca urmare a deschiderii solenoidului la capete, se propune următoarea soluție:

- se realizează înfășurarea din n solenoizi de baze astfel alese încît să aproximeze elipsoidul deschis (fig. 2.45);
- se determină densitatea de curent în fiecare zonă din condiția ca în n puncte de pe axă să fie același cîmp, după metoda indicată în cazul solenoizilor.

2.4.3. Metoda separării variabilelor

În cazul prezenței unor medii feromagnetice (folosite în scop de ecranare) nu se mai pot aplica metodele de calcul prezentate mai sus, urmînd să se folosească metode numerice. În unele situații particulare însă, cînd mediile sînt liniare, se poate determina și analitic cîmpul magnetic folosind metoda separării variabilelor.

α. Se consideră astfel cazul unei bobine cilindrice scurte în prezența unui ecran feromagnetic coaxial (fig. 2.46). Pentru calcul se poate folosi potențialul magnetic scalar, V_m, sau potențialul vector, $\bar{A}$, care în puncte situate în afara mediilor parcurse de curenți satisfac ecuația lui Laplace:

$$\nabla^2 V_m = 0, \text{ respectiv } \nabla^2 \bar{A} = 0.$$

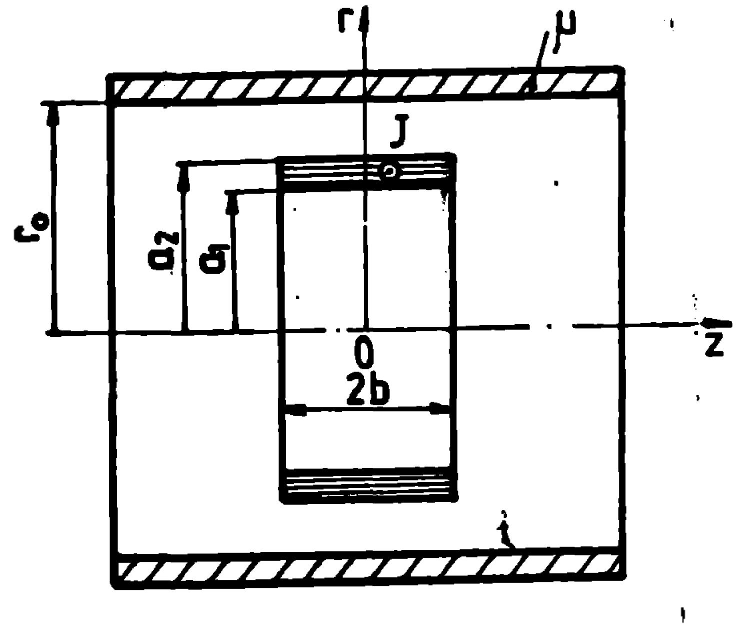


Fig. 2.46. Bobină cilindrică cu ecran feromagnetic coaxial

Ținînd seama de simetria sistemului, aceste ecuații în coordonate cilindrice sînt:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_m}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2}=0 \qquad (2.117)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A}{r}+\frac{\partial A}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=0 \qquad (2.118)$$

Rezolvarea problemei constă în integrarea ecuației (2.117) sau (2.118) în condiții de frontieră date, integrare posibilă dacă se admit anumite simplificări. Astfel se consideră ecranul ideal ($\mu = \infty$) şi de lungime infinită, iar bobina cilindrică se aproximează printr-o spiră circulară sau printr-o pătură de curent.

β. In cazul unei spire circulare ecranată cu un cilindru feromagnetic ideal coaxial (fig. 2.47,a), suprafaţa ecranului are V_H=ct şi se poate deci considera că

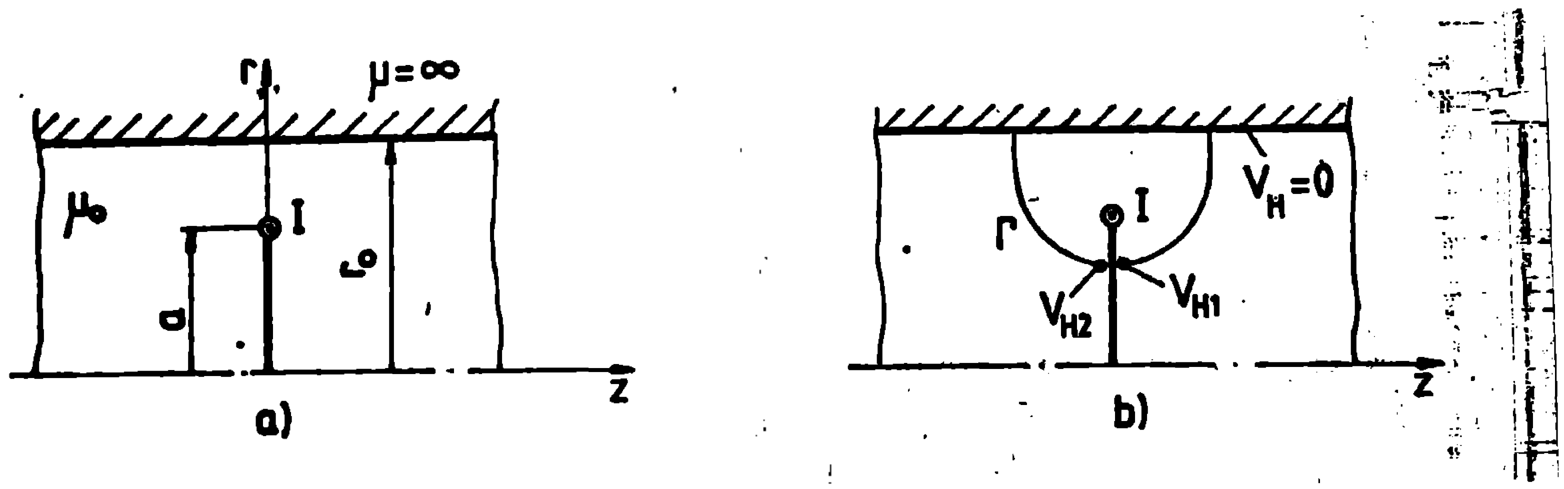


Fig. 2.47. Spiră circulară ecranată cu un cilindru feromagnetic coaxial

$$V_H(r_0,z)=0 \qquad (2.119)$$

De altă parte, suprafaţa spirei este o suprafaţă de discontinuitate pentru V_H, rezultînd în condiţia (2.119) potenţiale egale şi de semne contrarii pe cele două feţe ale suprafeţei spirei (fig. 2.47,b)

$$V_{H1} = -V_{H2} = V_{H0}$$

relaţie adevărată pentru orice $0 \leq r < a$.

Valoarea lui V_{H0} se determină din teorema lui Ampère

$$\oint_\Gamma \overline{H}\,\overline{dl} = I = V_{H1} - V_{H2} = 2V_{H0}$$

şi dacă se notează $H(0,0) = I/2a = H_0$, rezultă:

$$V_{H0} = aH_0 \qquad (2.120)$$

Tot datorită simetriei rezultă că în punctele situate în planul spirei la $r > a$, V_H are valoarea de pe ecran, adică $V_H = 0$.

Prin urmare pentru situaţia din figura 2.47, condiţiile de frontieră sînt:

$$V_H(r_0,z) = 0$$
$$V_H(r,0) = \begin{cases} aH_0 & \text{pt. } r<a \\ 0 & \text{pt. } r>a \end{cases} \qquad (2.121)$$

Rezolvarea problemei constă în integrarea ecuaţiei (2.117) cu respectarea condiţiilor (2.121). Problema a fost rezolvată în [30] cu metoda separării variabilelor, rezultînd:

$$V_M(r,z) = \frac{aI}{r_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1(\xi_m \frac{a}{r_0})}{\xi_m J_1^2(\xi_m)}\, J_0(\xi_m \frac{r}{r_0})\, \exp(-\xi_m \frac{z}{r_0}) \qquad (2.122)$$

în care J_0, J_1 sînt funcţiile Bessel de speţa întîi şi ordin zero respectiv unu, iar ξ_m sînt rădăcinile funcţiei Bessel J_0.

Pentru componentele inducţiei magnetice, din $\bar{B} = -\mu_0 \nabla V_M$ se obţine:

$$B_r(r,z) = \mu_0 \frac{aI}{r_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1(\xi_m \frac{a}{r_0})}{J_1^2(\xi_m)}\, J_1(\xi_m \frac{r}{r_0})\, \exp(-\xi_m \frac{z}{r_0})$$

$$B_z(r,z) = \mu_0 \frac{aI}{r_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1(\xi_m \frac{a}{r_0})}{J_1^2(\xi_m)}\, J_0(\xi_m \frac{r}{r_0})\, \exp(-\xi_m \frac{z}{r_0}) \qquad (2.123)$$

iar prin particularizarea lor se obţine cîmpul pe axa bobinei:

$$B_z(0,z) = \mu_0 \frac{aI}{r_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1(\xi_m \frac{a}{r_0})}{J_1^2(\xi_m)}\, \exp(-\xi_m \frac{z}{r_0}) \qquad (2.124)$$

şi la suprafaţa ecranului

$$B_r(r_0,z) = \mu_0 \frac{aI}{r_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1(\xi_m \frac{a}{r_0})}{J_1(\xi_m)}\, \exp(-\xi_m \frac{z}{r_0}) \qquad (2.125)$$

De asemenea se poate determina fluxul magnetic prin ecran:

$$\Phi = \int_0^{\infty} B_r(r_0,z) 2\pi r_0 dz = \mu_0 2\pi a I \sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1(\xi_m \frac{a}{r_0})}{\xi_m J_1(\xi_m)} \qquad (2.126)$$

şi fluxul magnetic prin suprafaţa spirei:

$$\Phi_0 = \int_0^{a} B_z(r,0) 2\pi r\, dr = \mu_0 2\pi a I \sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1^2(\xi_m \frac{a}{r_0})}{\xi_m J_1^2(\xi_m)} \qquad (2.127)$$

util pentru determinarea inductivităţii sau a energiei magnetice.

T. Se consideră în continuare un solenoid de lungime finită şi grosime redusă (astfel că se poate aproxima printr-o pătură de curent), ecranat cu un cilindru feromagnetic ideal, coaxial).

In această situaţie (fig. 2.45), pătura de curent se poate considera ca fiind formată dintr-o infinitate de spire elementare (lăţime dl). Pentru o astfel de spiră elementară sînt valabile expresiile (2.123 ... 2.125) în care însă se consideră $dI = J_l\, dl$ şi $z' = z - l$. Cîmpul rezultant se obţine prin aplicarea principiului superpoziţiei, adică

$$B_1 = \int_{-b}^{b} dB_1$$

şi ţinînd seama că

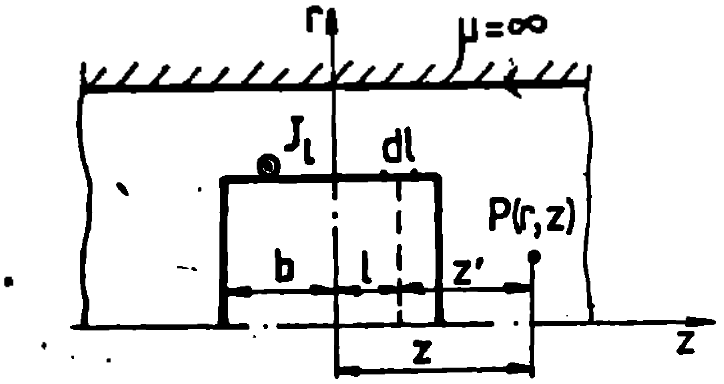


Fig. 2.48. Pături de curent ecranată cu un cilindru feromagnetic coaxial

$$\int_{-b}^{b}\exp\left(-\xi_m\frac{z-l}{r_0}\right)dl=\frac{2r_0}{\xi_m}\exp\left(-\xi_m\frac{z}{r_0}\right)\cdot sh\left(\xi_m\frac{b}{r_0}\right)$$

Se obţin relaţiile:

$$B_r(r,z)=\mu_0\frac{2aJ_l}{r_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\xi_m\frac{a}{r_0}\right)}{\xi_m J_1^2(\xi_m)}\cdot J_1\left(\xi_m\frac{r}{r_0}\right)sh\left(\xi_m\frac{b}{r_0}\right)\exp\left(-\xi_m\frac{z}{r_0}\right)$$

$$B_z(r,z)=\mu_0\frac{2aJ_l}{r_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\xi_m\frac{a}{r_0}\right)}{\xi_m J_1^2(\xi_m)}J_0\left(\xi_m\frac{r}{r_0}\right)sh\left(\xi_m\frac{b}{r_0}\right)\exp\left(-\xi_m\frac{z}{r_0}\right)$$

$$B_z(0,z)=\mu_0\frac{2aJ_l}{r_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\xi_m\frac{a}{r_0}\right)}{\xi_m J_1^2(\xi_m)}sh\left(\xi_m\frac{b}{r_0}\right)\exp\left(-\xi_m\frac{z}{r_0}\right)$$

$$B_r(r_0,z)=\mu_0\frac{2aJ}{r_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\xi_m\frac{a}{r_0}\right)}{\xi_m J_1(\xi_m)}sh\left(\xi_m\frac{b}{r_0}\right)\exp\left(-\xi_m\frac{z}{r_0}\right) \qquad (2.128)$$

Problema enunţată se poate rezolva şi pe altă cale pornind de la potenţialul magnetic vector care trebuie să fie o funcţie pară de z şi finită în întreg domeniul. Folosind metoda separării variabilelor, soluţia ecuaţiei (2.118) este în această situaţie de forma:

$$A_1(r,z)=\int_0^{\infty}C_\lambda I_1(\lambda r)\cos\lambda z\, d\lambda \qquad \text{pt. } r<a$$
$$A_2(r,z)=\int_0^{\infty}(D_\lambda K_1(\lambda r)+E_\lambda I_1(\lambda r))\cos\lambda z\, d\lambda \qquad \text{pt. } r>a \qquad (2.129)$$

în care I_1 şi K_1 sînt funcţiile lui Bessel modificate, de prima şi respectiv a doua speţă. Constantele de integrare se determină din condiţiile de frontieră:

$$A_1(a,z)=A_2(a,z)$$
$$\left(\frac{\partial A_1(r,z)}{\partial r}-\frac{\partial A_2(r,z)}{\partial r}\right)_{r=a}=\mu_0 J_l \qquad (2.130)$$
$$\frac{1}{r_0}A_2(r_0,z)+\left(\frac{\partial A_2(r,z)}{\partial r}\right)_{r=r_0}=0$$

în care J_l se exprimă printr-o integrală Fourier în forma:

$$J_l=\frac{2J_l}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda b\cos\lambda z}{\lambda}d\lambda \qquad (2.131)$$

Problema a fost rezolvată în [91], obţinîndu-se relaţiile:

$$B_{1r}(r,z) = \mu_0 \frac{2J_l}{\pi} \int_0^\infty F(\lambda,a,r_0,b)\ I_1(\lambda r)\ \sin(\lambda z) d(\lambda a)$$

$$B_{1z}(r,z) = \mu_0 \frac{2J_l}{\pi} \int_0^\infty F(\lambda,a,r_0,b)\ I_0(\lambda r)\ \cos(\lambda z) d(\lambda a)$$

$$B_{2r}(r,z) = \mu_0 \frac{2J_l}{\pi} \int_0^\infty F(\lambda,r,r_0,b)\ I_1(\lambda a)\ \sin(\lambda z) d(\lambda a)$$

$$B_{2z}(r,z) = \mu_0 \frac{2J_l}{\pi} \int_0^\infty G(\lambda,r,r_0,b)\ I_1(\lambda a)\ \cos(\lambda z) d(\lambda a) \qquad (2.132)$$

$$B_{1z}(0,z) = \mu_0 \frac{2J_l}{\pi} \int_0^\infty F(\lambda,a,r_0,b)\ \cos(\lambda z) d(\lambda a)$$

$$B_{2r}(r_0,z) = \mu_0 \frac{2J_l}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_1(\lambda a)}{\lambda r_0 I_0(\lambda r_0)} \sin(\lambda b)\ \sin(\lambda z)\ d(\lambda a)$$

în care s-au introdus notațiile:

$$F(\lambda,r,r_0,b) = \left[I_1(\lambda r)\frac{K_0(\lambda r_0)}{I_0(\lambda r_0)} + K_1(\lambda r) \right] \sin(\lambda b)$$

$$G(\lambda,r,r_0,b) = \left[I_0(\lambda r)\frac{K_0(\lambda r_0)}{I_0(\lambda r_0)} - K_0(\lambda r) \right] \sin(\lambda b) \qquad (2.133)$$

Relațiile (2.132) sînt echivalente cu (2.128), iar prin particularizare pentru $r_0 = \infty$, ($I_0(\infty)=\infty$, $K_0(\infty)=0$) permit și determinarea inducției magnetice în absența ecranului [illegible] se poate determina contribuția ecranului feromagnetic la producerea cîmpului magnetic, contribuție care apare în relațiile (2.132) prin termenul al doilea al relațiilor (2.133).

Pentru fluxul magnetic prin [illegible], se obține:

$$\Phi = \mu_0 4J_l \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda r_0)}\ \frac{\sin(\lambda b)}{\lambda}\ \sin(\lambda z)\ d(\lambda a)\ dz \qquad (2.134)$$

iar pentru fluxul printr-o suprafață [illegible] de rază a:

$$\Phi_z = \mu_0 4J_l \int_0^a \int_0^\infty F(\lambda,a,r_0,b)\ I_0(\lambda r)\ \cos(\lambda z)\ d(\lambda a)\ r dr \qquad (2.135)$$

2.4.4. Metoda diferențelor finite

α. După cum este cunoscut, metodele numerice folosite cel mai frecvent în determinarea cîmpului magnetic sînt metoda diferențelor finite și metoda elementelor finite, fiecare în parte cu anumite avantaje și dezavantaje. Metoda elementelor finite oferă posibilitatea încadrării convenabile a suprafețelor frontieră în cadrul discretizării în elemente finite, astfel că ea se folosește în cazul unor geometrii complicate și (sau) medii neomogene [74,80,69,120]. În situația unor geometrii particulare (simetrii), cînd este posibilă încadrarea acestora în rețeaua de discretizare în diferențe finite, metoda diferențelor finite prezintă avantaje sub aspectul simplității și al volumului de calcul. Ținînd seama că sistemele fizice avute în vedere prezintă astfel de particularități, în cadrul temei a fost preferată metoda diferenţelor finite.

Folosind în scopul calculului potenţialul magnetic vector, acesta satisface ecuaţia $\mathrm{rot}(\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{A}) = \bar{J}$ valabilă şi în medii neomogene. In cazul sistemelor cu simetrie axială (fig. 2.27), această ecuaţie este de forma:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\mu r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mu r}\,\frac{\partial}{\partial z}(rA)\right] + J = 0 \qquad (2.136)$$

Componentele inducţiei magnetice se determină din $\bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A}$, astfel:

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}\ ;\ B_z = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rA) = \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \qquad (2.137)$$

In cazul metodei diferenţelor finite, se scriu aceste ecuaţii în diferenţe finite şi pe baza lor se găseşte soluţia într-un număr finit de puncte, care reprezintă nodurile reţelei de discretizare.

β. Pentru deducerea ecuaţiilor în diferenţe finite se consideră pentru început o reţea de discretizare dreptunghiulară cu paşi constanţi (fig. 2.49). Derivatele din (2.136) se aproximează după cum urmează [16,57]:

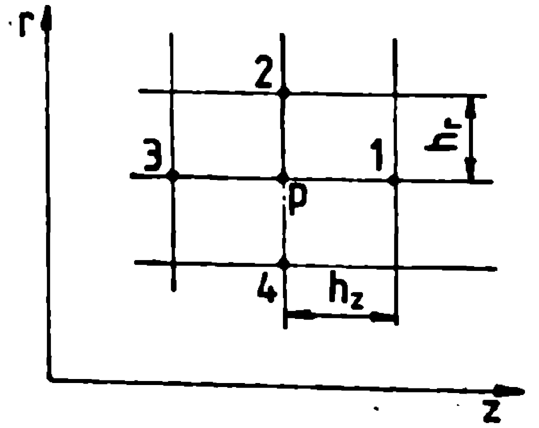


Fig. 2.49. Reţea de discretizare dreptunghiulară

$$\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial z}(rA)\right]_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1 r_1} + \frac{1}{\mu_p r_p}\right)\frac{r_1A_1 - r_pA_p}{h_z}$$

$$\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial z}(rA)\right]_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_3 r_3} + \frac{1}{\mu_p r_p}\right)\frac{r_pA_p - r_3A_3}{h_z}$$

$$\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right]_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_2 r_2} + \frac{1}{\mu_p r_p}\right)\frac{r_2A_2 - r_pA_p}{h_r}$$

$$\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right]_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_4 r_4} + \frac{1}{\mu_p r_p}\right)\frac{r_pA_p - r_4A_4}{h_r} \qquad (2.138)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mu r}\,\frac{\partial}{\partial z}(rA)\right]_p = \frac{1}{h_z}\left\{\left[\frac{1}{\mu r}\,\frac{\partial}{\partial z}(rA)\right]_1 - \left[\frac{1}{\mu r}\,\frac{\partial}{\partial z}(rA)\right]_3\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\mu r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right]_p = \frac{1}{h_r}\left\{\left[\frac{1}{\mu r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right]_2 - \left[\frac{1}{\mu r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right]_3\right\} \qquad (2.139)$$

Cu acestea, ecuaţia (2.136) devine:

$$A_p\left[h_z^2\left(\frac{2}{\mu_p} + \frac{r_p}{\mu_2 r_2} + \frac{r_p}{\mu_4 r_4}\right) + h_r^2\left(\frac{2}{\mu_p} + \frac{r_p}{\mu_1 r_1} + \frac{r_p}{\mu_3 r_3}\right)\right] =$$

$$= h_z^2\left[\left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{r_2}{\mu_p r_p}\right)A_2 + \left(\frac{1}{\mu_4} + \frac{r_4}{\mu_p r_p}\right)A_4\right] +$$

$$+ h_r^2\left[\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{r_1}{\mu_p r_p}\right)A_1 + \left(\frac{1}{\mu_3} + \frac{r_3}{\mu_p r_p}\right)A_3\right] + 2h_r^2\,h_z^2\,J_p \qquad (2.140)$$

Din care particularizând pentru o reţea pătrată ($h_r = h_z = h$), se obţine expresia cunoscută [18]

$$r_p A_p\left[\frac{1}{\mu_1 r_1}+\frac{1}{\mu_2 r_2}+\frac{1}{\mu_3 r_3}+\frac{1}{\mu_4 r_4}+\frac{4}{\mu_p r_p}\right]=\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{r_1}{\mu_p r_p}\right)A_1+$$

$$+\left(\frac{1}{\mu_2}+\frac{r_2}{\mu_p r_p}\right)A_2+\left(\frac{1}{\mu_3}+\frac{r_3}{\mu_p r_p}\right)A_3+\left(\frac{1}{\mu_4}+\frac{r_4}{\mu_p r_p}\right)A_4+2h^2 J_p \qquad (2.141)$$

Se constată că relaţiile (2.140) şi (2.141) [illegible] pentru punctele situate în apropierea [illegible] $r_4 = 0$. [illegible] (2.139) [illegible] satisfăcătoare aproximarea [illegible] $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_4 r_4}+\frac{1}{\mu_p r_p}\right)$ şi respectiv $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_2 r_2}+\frac{1}{\mu_p r_p}\right)$. [illegible] această zonă [illegible]:

$$\left(\frac{1}{\mu r}\right)_{mediu}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_p}+\frac{1}{\mu_2}\right)\cdot\frac{1}{h_r}\int_{r_p}^{r_2}\frac{dr}{r}=\frac{1}{2h_r}\left(\frac{1}{\mu_p}+\frac{1}{\mu_2}\right)\ln\frac{r_2}{r_p}$$

şi deoarece $\ln\frac{r_2}{r_p}\simeq 2\,\frac{r_2-r_p}{r_2+r_p}=\frac{2h_r}{r_2+r_p}$ rezultă

$$\left(\frac{1}{\mu r}\right)_{mediu}=\left(\frac{1}{\mu_p}+\frac{1}{\mu_2}\right)\cdot\frac{1}{r_2+r_p}$$

Cu acestea şi ţinând seama că $r_1=r_3=r_p$, se obţine:

$$\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial z}(rA)\right]_1=\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{A_1-A_p}{2h_z}$$

$$\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial z}(rA)\right]_3=\left(\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{A_p-A_3}{2h_z}$$

$$\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right]_2=\left(\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{1}{r_2+r_p}\cdot\frac{r_2A_2-r_pA_p}{h_r} \qquad (2.142)$$

$$\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right]_4=\left(\frac{1}{\mu_4}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{1}{r_4+r_p}\cdot\frac{r_pA_p-r_4A_4}{h_r}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial z}(rA)\right]_p=\frac{1}{2h_z^2}\left[\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_p}\right)(A_1-A_p)+\left(\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_p}\right)(A_3-A_p)\right] \qquad (2.143)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right]_p=\frac{1}{h_r^2}\left[\left(\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{r_2A_2-r_pA_p}{r_2+r_p}+\left(\frac{1}{\mu_4}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{r_4A_4-r_pA_p}{r_4+r_p}\right]$$

şi înlocuind în (2.136) rezultă:

$$A_p\left\{h_r^2\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_3}+\frac{2}{\mu_p}\right)+h_z^2\left[\left(\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{2r_p}{r_2+r_p}+\left(\frac{1}{\mu_4}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{2r_p}{r_4+r_p}\right]\right\}=$$

$$=2h_r^2h_z^2J_p+h_r^2\left[\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_p}\right)A_1+\left(\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_p}\right)A_3\right]+$$

$$+ h_z^2\left[\left(\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{2r_2}{r_2+r_p}A_2 + \left(\frac{1}{\mu_4}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{2r_4}{r_4+r_p}A_4\right] \qquad (2.144)$$

Dacă se introduc notaţiile

$$u_k = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu_p}{\mu_k}\right); \quad c_k = \frac{2r_p}{r_k+r_p}; \quad c_{ak} = \frac{2r_k}{r_k+r_p} \qquad (2.145)$$

relaţia (2.144) se scrie mai compact în forma:

$$A_p\left[h_r^2(u_1+u_3) + h_z^2(u_2c_2+u_4c_4)\right] = \mu_p h_r^2 h_z^2 J_p + h_r^2(u_1A_1+u_3A_3) +$$

$$+ h_z^2(u_2c_{a2}A_2 + u_4c_{a4}A_4) \qquad (2.146)$$

Ultima relaţie este utilizabilă în orice punct (şi în apropierea axei r =0), iar pentru r_p mare este identică cu (2.140). De asemenea se poate fi uşor particularizată pentru o reţea pătrată.

In practică interesează în mod deosebit situaţia cînd există suprafeţe de discontinuitate pentru permeabilitatea magnetică μ, în particular feromagneţi. Dacă fierul se poate considera liniar pentru diferite situaţii posibile, coeficienţii u_k au valorile din tabelul 2.7 (pag. 80).

Pentru ca numărul de noduri ale reţelei de discretizare să nu rezulte exagerat de mare, se poate alege o reţea cu pas constant pe anumite subdomenii, dar variabil de la un subdomeniu la altul. In această situaţie, pentru nodurile situate la graniţa dintre diferitele subdomenii, distanţele faţă de punctele vecine sînt diferite. Cu notaţiile din fig. 2.50, ecuaţia în diferenţe finite se obţine în mod similar cu (2.140) doar că se ţine seama de modul în care se exprimă derivatele de ordinul doi în situaţia că pasul reţelei este variabil. După [57] în relaţiile (2.148) se va face raportarea la pasul mediu după direcţia longitudinală şi respectiv radială, obţinîndu-se

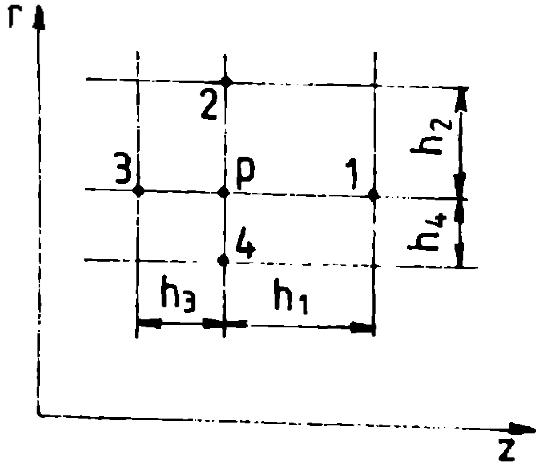


Fig.2.50. Reţea de discretizare cu pas variabil

$$\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial z}(rA)\right]_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{A_1-A_p}{h_1}$$

$$\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial z}(rA)\right]_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{A_p-A_3}{h_3} \qquad (2.147)$$

$$\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right]_2 = \left(\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{1}{r_2+r_p}\,\frac{r_2A_2-r_pA_p}{h_2}$$

$$\frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right]_4 = \left(\frac{1}{\mu_4}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{1}{r_4+r_p}\,\frac{r_pA_p-r_4A_4}{h_4}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial z}(rA)\right]_p = \frac{2}{h_1+h_3}\left[\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{A_1-A_p}{2h_1} + \left(\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{A_3-A_p}{2h_3}\right] \qquad (2.148)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right]_p = \frac{2}{h_2+h_4}\left[\left(\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{r_2A_2-r_pA_p}{h_2(r_2+r_p)} + \left(\frac{1}{\mu_4}+\frac{1}{\mu_p}\right)\frac{r_4A_4-r_pA_p}{h_4(r_4+r_p)}\right]$$

Inlocuind în relația (2.136), după unele transformări aceasta obține forma

$$A_p\left\{(h_2+h_4)\left[\frac{u_1}{h_1}+\frac{u_3}{h_3}\right] + (h_1+h_3)\left[\frac{u_2}{h_2}c_2+\frac{u_4}{h_4}c_4\right]\right\} =$$

$$= (h_2+h_4)\left[\frac{u_1}{h_1}A_1+\frac{u_3}{h_3}A_3\right] + (h_1+h_3)\left[\frac{u_2}{h_2}c_{a2}A_2+\frac{u_4}{h_4}c_{a4}A_4\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}(h_1+h_3)(h_2+h_4)\mu_pJ_p \qquad (2.149)$$

în care s-au folosit din nou notațiile (2.147).

Se verifică ușor că pentru $h_1=h_3=h_z$ și $h_2=h_4=h_r$, din relația (2.149) se obține relația (2.146).

Dacă în problema concretă abordată intervin zone există cu $\mu=ct$, este utilă particularizarea relației (2.149) ținînd seama de valorile coeficienților u_k din tabelul 2.7, obținîndu-se astfel o reducere semnificativă a necesarului de memorie și a timpului de calcul la rezolvarea numerică a problemei. Din acest motiv se dau mai jos aceste expresii particulare pentru puncte situate în zonă omogenă ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_p = \mu_0\mu_r$) și în afara conductoarelor parcurse de curent ($J_p=0$), în următoarele situații:

a) $h_1=h_3=h_z$, $h_2=h_4=h_r$

$$A_p[2+c_h(c_2+c_4)] = A_1+A_3+c_h(c_{a2}A_2+c_{a4}A_4) \qquad (2.150)$$

în care $c_h = h_z^2/h_r^2$;

b) $h_1\neq h_3$, $h_2=h_4=h_r$

$$A_p[2+c_h(c_2+c_4)] = \frac{2h_3}{h_1+h_3}\left(A_1+\frac{h_1}{h_3}A_3\right)+c_h(c_{a2}A_2+c_{a4}A_4) \qquad (2.151)$$

în care $c_h=h_1h_3/h_r^2$;

c) $h_1=h_3=h_z$, $h_2\neq h_4$

$$A_p\left[2+c_h\left(c_2+\frac{h_2}{h_4}c_4\right)\right] = A_1+A_3+c_h\left(c_{a2}A_2+\frac{h_2}{h_4}c_{a4}A_4\right) \qquad (2.152)$$

în care $c_h=2h_z^2[h_2(h_2+h_4)]^{-1}$;

d) $h_1\neq h_3$, $h_2\neq h_4$

$$A_p\left[2+c_h\left(c_2+\frac{h_2}{h_4}c_4\right)\right] = \frac{2h_3}{h_1+h_3}\left(A_1+\frac{h_1}{h_3}A_3\right)+c_h\left(c_{a2}A_2+\frac{h_2}{h_4}c_{a4}A_4\right) \qquad (2.153)$$

în care $c_h = 2h_1h_3[h_2(h_2+h_4)]^{-1}$.

In interiorul bobinei ($J_p \neq 0$), în membrul drept al ecuațiilor (2.150) și (2.152) se mai adună termenul $\mu_0\mu_r h_z^2 J_p$ și respectiv în ecuațiile (2.151) și (2.153) termenul $\mu_0\mu_r h_1 h_3 J_p$.

Componentele inducției magnetice se pot exprima de asemenea în diferențe finite. Astfel, în cazul unei rețele dreptunghiulare cu pas constant (fig. 2.49), relațiile (2.137) se scriu în forma:

$$B_r = \frac{1}{2h_z}(A_3 - A_1)$$

$$B_z = \frac{1}{2h_r r_p}(r_2A_2 - r_4A_4) = \frac{A_p}{r_p} + \frac{1}{2h_r}(A_2 - A_4) \qquad (2.154)$$

iar pentru o rețea cu pas variabil:

$$B_r = \frac{1}{h_1+h_3}(A_3 - A_1)$$

$$B_z = \frac{1}{(h_2+h_4)r_p}(r_2A_2 - r_4A_4) = \frac{A_p}{r_p} + \frac{1}{h_2+h_4}(A_2 - A_4) \qquad (2.155)$$

Se constată că pentru puncte situate pe axa de simetrie ($r_p = 0$), nu se poate determina componenta longitudinală B_z cu relațiile (2.154) sau (2.155) deoarece aceasta conduce la o nedeterminare. Ridicînd această nedeterminare se obține:

$$B_z = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA) = 2\frac{\partial A}{\partial r} \qquad (2.156)$$

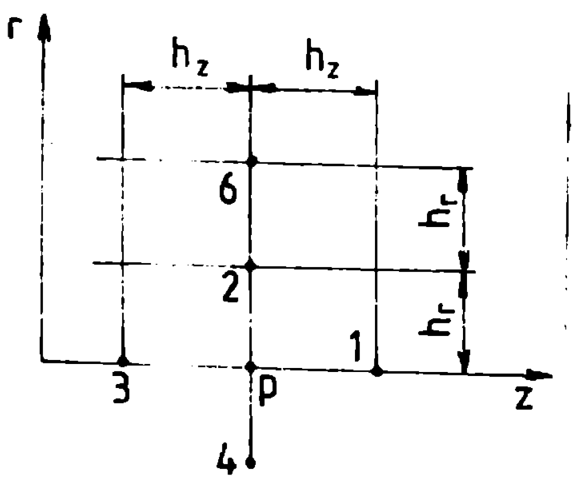


Fig.2.51. Punct de calcul pe axa de simetrie

Pentru calculul derivatei $\partial A/\partial r$ pe axa de simetrie se dezvoltă potențialul vector în serie Taylor în jurul punctului p. Cu notațiile din fig.2.51 și reținînd termenii pînă la ordinul doi, rezultă:

$$A_2 = A_p + h_r\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{2}h_r^2\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \dots$$

$$A_6 = A_p + 2h_r\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{2}4h_r^2\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \dots \qquad (2.157)$$

Din combinația $4A_2 - A_6$ și ținînd seama de (2.156) se obține:

$$B_z = \frac{1}{h_r}(4A_2 - 3A_p - A_6) \qquad (2.158)$$

Aplicarea relațiilor (2.154) sau (2.155) pentru puncte situate în apropierea unor suprafețe de separație a două medii de permeabilități mult diferite (fig. 2.52) conduce la rezultate eronate din cauza valorilor mult diferite ale componentelor tangențiale ale inducției magnetice în cele două medii. De aceea se impune exprimarea acestora funcție de potențialul magnetic vector dintr-un singur mediu.

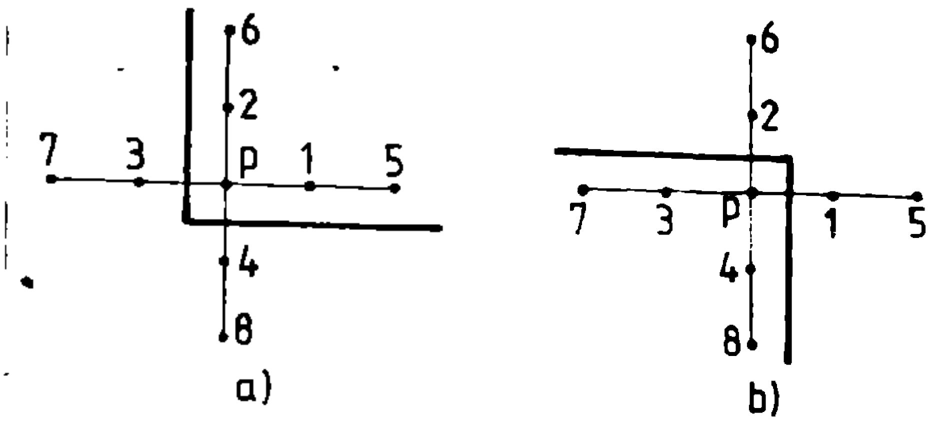


Fig. 2.52. Puncte situate în apropierea suprafeţei de separaţie a două medii

Astfel considerînd situaţia din fig. 2.52.a şi folosind dezvoltarea în serie Taylor în jurul punctului p, rezultă:

$$A_2 = A_p + h_r \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{2} h_r^2 \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \dots \qquad A_1 = A_p + h_z \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2} h_z^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \dots$$

$$A_6 = A_p + 2h_r \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{2} 4h_r^2 \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \dots \qquad A_5 = A_p + 2h_z \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2} 4h_z^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \dots$$

Din combinaţii ale acestor expresii în care se reţin doar termenii pînă la ordinul doi, se obţin derivatele

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{1}{2h_r}(4A_2 - 3A_p - A_6)$$
$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2h_z}(4A_1 - 3A_p - A_5) \qquad (2.159)$$

şi cu acestea, relaţiile (2.157) devin:

$$B_r = \frac{1}{2h_z}(3A_p - 4A_1 + A_5)$$
$$B_z = \frac{1}{r_p} A_p + \frac{1}{2h_r}(4A_2 - 3A_p - A_6) \qquad (2.160)$$

Pentru situaţia din fig. 2.52.b se obţine în mod similar

$$B_r = \frac{1}{2h_z}(4A_3 - 3A_p - A_7)$$
$$B_z = \frac{1}{r_p} A_p + \frac{1}{2h_r}(3A_p + A_8 - 4A_4) \qquad (2.161)$$

Desigur că pot apare şi situaţii cînd numai una dintre componentele inducţiei magnetice să se determine cu relaţii de forma (2.160) sau (2.161), cealaltă componentă urmînd a se determina conform cu (2.155). Se menţionează că s-a considerat o reţea cu pas constant după direcţia radială, respectiv axială, deoarece nu s-a justificat modificarea pasului reţelei după cum ne aflăm la suprafaţa de separaţie în apropierea suprafeţei şi pentru puncte situate în acelaşi mediu modificarea pasului radial nu este justificată nici în imediata apropiere a axei de simetrie.

γ. Pentru găsirea soluţiei privind valorile potenţialului magnetic vector în nodurile reţelei de discretizare, trebuie stabilită frontiera domeniului şi desigur condiţiile pe această frontieră. Ţinînd seama că axa Oz reprezintă o linie de cîmp magnetic, rezultă că pe axa de simetrie longitudinală se poate considera A=0.

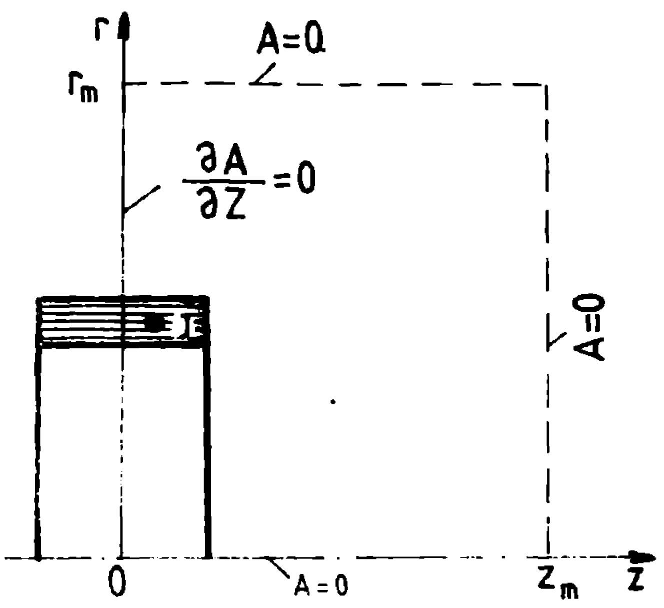


Fig.2.53. Frontiera domeniului şi condiţiile de frontieră

De asemenea dacă problema prezintă o simetrie faţă de planul z=0, înseamnă că în acest plan $\partial A/\partial z=0$, sau $A(z)=A(-z)$. În aceste condiţii, rezultă că domeniul poate fi limitat la un sfert de plan. Rezolvarea practică a problemei impune desigur limitarea domeniului la dimensiuni finite, soluţia cea mai simplă fiind un dreptunghi cu laturile r_m şi z_m (fig. 2.53). Dacă z_m şi r_m sînt suficient de mari, se poate considera că pe laturile $r=r_m$ şi respectiv $z=z_m$ avem A=0.

Fiind stabilită frontiera domeniului precum şi condiţiile pe această frontieră, se pot scrie ecuaţii de forma (2.148) respectiv (2.149) pentru toate nodurile interioare şi se ţine seama de condiţia $\partial A/\partial z=0$ pentru nodurile de pe latura z=0. Dacă şi aceste noduri se consideră interioare, adică se extinde frontiera la stînga cu un pas (fig. 2.54), pentru ele sînt valabile relaţii de aceeaşi formă ca şi pentru celelalte noduri interioare, condiţia $\partial A/\partial z=0$ însemnînd $A_3=A_1$. Rezultă prin urmare un sistem de ecuaţii egal cu numărul de noduri interioare şi tot atîtea necunoscute (potenţialele acestor noduri). Considerînd reţeaua formată din n linii şi m coloane (fig.2.55) rezultă $(n-2)(m-2)$ noduri interioare, deci tot atîtea ecuaţii, respectiv necunoscute. În general numărul acestora este mare la o discretizare fină a domeniului, recomandîndu-se pentru rezolvare metodele iterative care necesită un volum de memorie mai redus. În acest scop se vor folosi metoda iterativă Gauss-Seidel sau metodele relaxaţiei [40,42,79,111] care pot asigura şi o convergenţă rapidă a soluţiei.

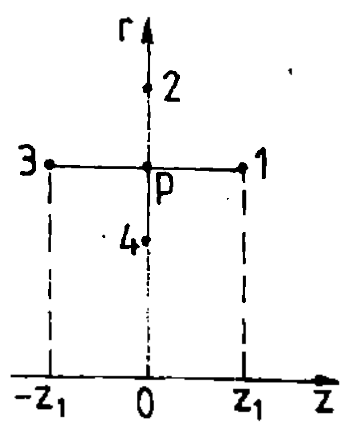


Fig. 2.54. Extinderea domeniului la stînga

δ. În cazul mediilor liniare cînd μ este independent de B, se

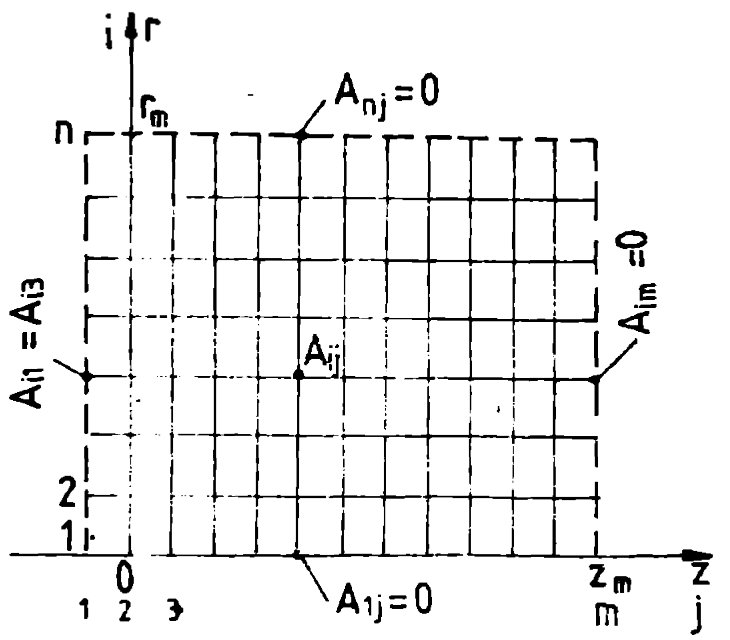


Fig. 2.35. Numerotarea nodurilor reţelei de discretizare

porneşte de la o soluţie iniţială $A_{ij}^{(o)}$ care se corectează succesiv pe baza relaţiilor (2.161) până când

$$\left|\Delta A\right|_{max}^{(k)} = \left|A_p - A_{ij}^{(k-1)}\right| < \varepsilon \qquad (2.162)$$

unde soluţia la iteraţia k este

$$A_{ij}^{(k)} = \begin{cases} A_p & \text{la metoda Gauss-Seidel} \\ A_p + f_c \Delta A & \text{la metoda relaxării} \end{cases} \qquad (2.163)$$

în care $-1 < f_c < 1$. Se produce subrelaxarea şi o accelerare a convergenţei dacă $f_c > 1$ (suprarelaxare), existând deci o valoare optimă a acestui factor, valoare ce se determină prin încercări. În literatură se dau şi unele relaţii prin care se aproximează acest optim [12].

Principalele dificultăţi care apar în rezolvarea pe cale numerică a problemei de câmp magnetic sunt legate de capacitatea de stocare a sistemului de calcul şi de timpul de calcul. Ţinând seama de aceste dificultăţi, la elaborarea algoritmului şi a programului de calcul se vor avea în vedere următoarele aspecte şi recomandări:

- reducerea la minim a memoriei şi dimensionarea tablourilor de variabile;
- micşorarea numărului de noduri ale reţelei de discretizare fără afectarea preciziei rezultatului;
- alegerea soluţiei iniţiale apropiate de soluţia finală;
- alegerea factorului de accelerare a convergenţei în apropierea valorii optime.

Pentru micşorarea numărului de noduri ale reţelei de discretizare fără afectarea preciziei soluţiei se poate adopta o reţea fină

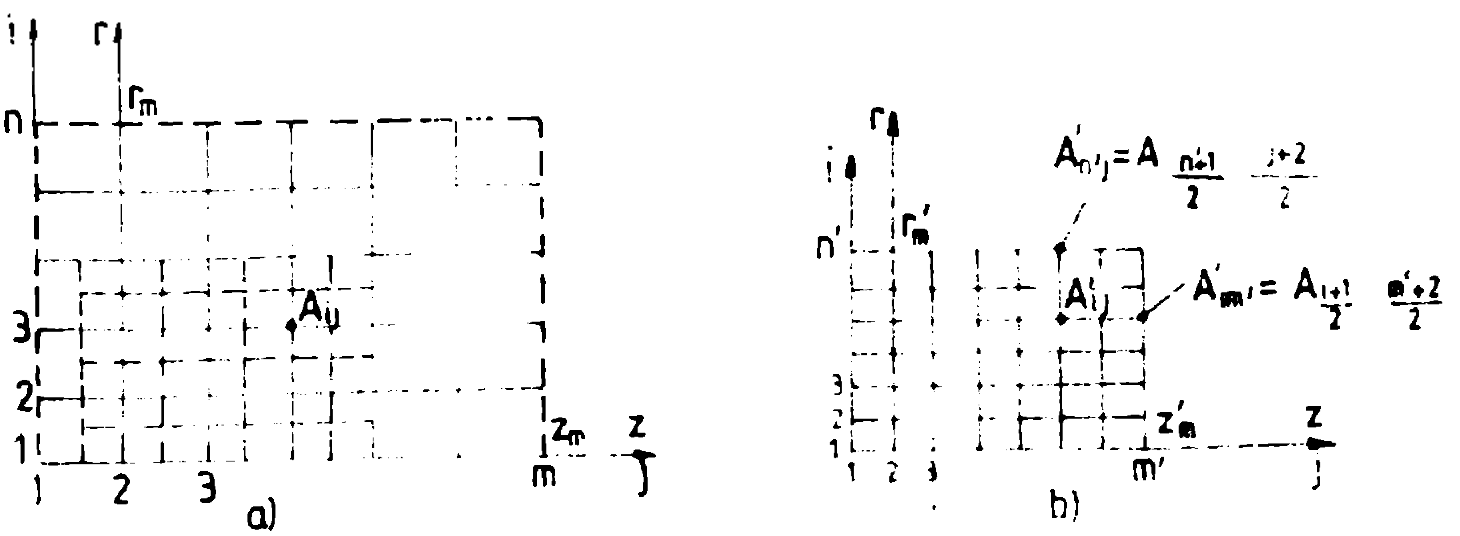


Fig. 2.36. Trecerea de la o reţea grosieră la una mai fină

(pas mic) în zonele cu variaţie mare a cîmpului magnetic, respectiv grosieră (pas mare) în zonele de mică variaţie. Aceasta presupune o anumită experienţă pentru a estima cît mai corect aceste zone. O altă posibilitate constă în folosirea unei reţele iniţiale grosiere pe baza căreia se obţine o soluţie ce va fi utilizată ca soluţie iniţială într-o reţea mai fină ale cărei dimensiuni r_m şi z_m au fost reduse (fig. 2.56). Pe frontiera domeniului redus (fig. 2.56,b) se vor considera valorile obţinute anterior, făcînd o interpolare pentru punctele ce nu au corespondent în reţeaua grosieră.

Pentru alegerea soluţiei iniţiale $a_{ij}^{(o)}$ apropiate de soluţia finală este necesar să se estimeze aproximativ spectrul cîmpului magnetic şi apoi pornind de la valori cunoscute (aproximativ) ale inducţiei magnetice, să se determine cît mai aproape valorile potenţialului vector. De exemplu pentru situaţia din fig. 2.53 se poate uşor calcula inducţia magnetică în centrul bobinei (considerînd bobina în aer). Aproximînd că inducţia magnetică în planul central (z=0) este constantă şi pornind de la z=0 în centru, rezultă din (2.154) valorile potenţialului vector în acest plan. Aproximînd şi forma liniilor de cîmp (fig.2.57) se pot atribui valori iniţiale (cîte pe zone) tuturor nodurilor reţelei de discretizare.

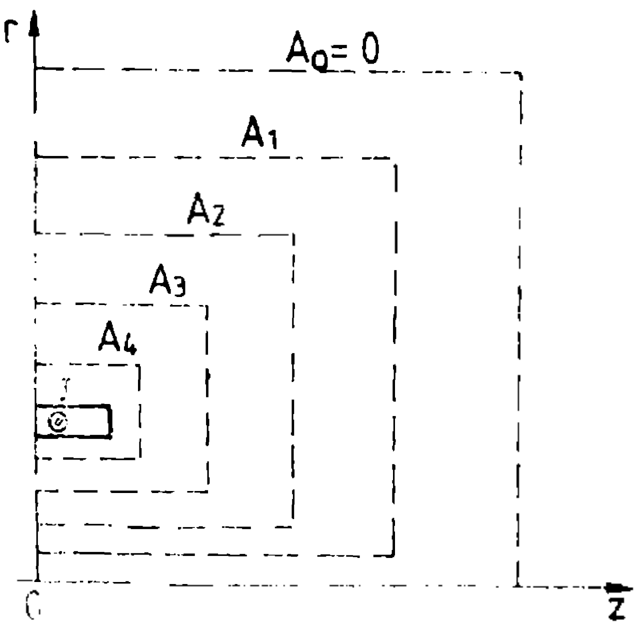


Fig.2.57 Aproximarea soluţiei iniţiale

7. Cînd există şi medii neliniare se impune şi un calcul iterativ pentru permeabilitatea magnetică. Folosind curba de magnetizare aproximată în mod convenabil, etapele de calcul sînt:

- alegerea unor valori iniţiale pentru permeabilitatea magnetică, $\mu_{ij}^{(o)}$, funcţie de valorile presupuse ale inducţiei magnetice;
- procedînd ca în cazul mediilor liniare se obţine soluţia A_{ij} şi respectiv B_{ij}, iar din curba de magnetizare se obţine $\mu_{ij}^{(1)} = \mu(B_{ij})$;
- cu noile valori obţinute pentru permeabilitatea magnetică, se repetă calculul iterativ pînă cînd noile valori sînt practic identice cu cele anterioare, adică:

$$|\Delta\mu|_{max} = |\mu_{ij}^{(k)} - \mu_{ij}^{(k-1)}| < \varepsilon_\mu \qquad (2.164)$$

Pentru accelerarea convergenţei, se recomandă o subrelaxare, adică permeabilităţii magnetice i se atribuie noile valori

CAPITOLUL 5

[illegible]

În acest capitol se prezintă unele calcule necesare în problema determinării cîmpului magnetic şi al forţelor electromagnetice, în strînsă legătură cu construcţia şi calculul [illegible]. Au fost luate în considerare generatoare magnetohidrodinamice, [illegible] şi diferite variante de construcţie.

5.1. [illegible]

Interesul pentru producerea energiei electrice pe cale magnetohidrodinamică este justificat de faptul că în combinaţie cu un turbogenerator se poate obţine o îmbunătăţire a randamentului global de conversie a energiei de la 40% la 45-50% [92] concomitent cu o reducere substanţială a poluării mediului ambiant [110]. Desigur că pentru ca soluţia aceasta de producere a energiei electrice să fie competitivă cu alte soluţii, trebuie găsite variante constructive corespunzătoare. În acest scop se consideră expresia puterii electrice pe unitatea de volum al canalului de conversie MHD, care se poate exprima în forma [109]:

$$P_e = \sigma v^2 B^2 k(1 - k) \qquad (5.1)$$

în care: σ – conductivitatea mediului (plasmei); v – viteza de curgere a mediului; B – inducţia magnetică; k – parametrul de încărcare. Se ştie faptul că produsul σv^2 este de cca. 10^3 ori mai mic decît la generatoarele rotative clasice, rezultă că trebuie mărite volumul generatorului (al canalului de conversie) şi inducţia magnetică. Prin urmare este necesar un cîmp magnetic intens într-un volum relativ mare al canalului de conversie, situaţie în care singura soluţie rezonabilă de realizare a bobinelor ce produc cîmpul magnetic este cea supraconductoare [7,9,18]. În această situaţie sînt îndeplinite ipotezele de la paragr. 2.1.3.

Forma geometrică a acestor bobine depinde în primul rînd de forma canalului de conversie, de posibilitatea accesului la electrozii plasaţi pe pereţii laterali ai canalului, de necesitatea unui cîmp magnetic transversal cît mai uniform şi nu în ultimul rînd de posibilităţile tehnologice de realizare. Se cunosc numeroase soluţii de obţinere a unui cîmp magnetic transversal şi uniform într-un canal cu secţiune constantă şi de lungime mare [41,109], dar acestea fie că sînt greu de realizat în practică, fie că nu asigură un acces facil la electrozi. Din această cauză, practic se pot lua în considerare două tipuri de bobine:

- de tip Helmholtz reprezentate principial în fig. 3.1,a;
- de tip şea, plasate pe un suport cu secţiune dreptunghiulară (fig. 3.1,b) sau de secţiune circulară (fig. 3.1,c).

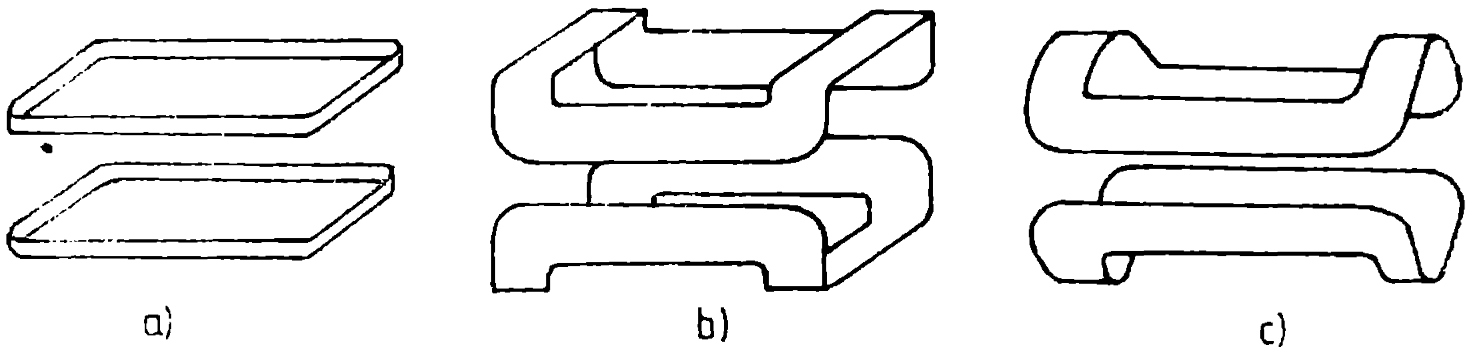


Fig. 3.1. Tipuri de bobine pentru generatoare MHD

Calculul electromagnetic al bobinelor pentru generatoare MHD, presupune parcurgerea următoarelor etape principale:

- alegerea formei geometrice a bobinelor;
- determinarea dimensiunilor orientative ale acestora printr-un calcul simplificat, echivalîndu-le cu conductoare filiforme sau pături de curent;
- determinarea secţiunii transversale a laturilor de bobină;
- calcul mai exact al cîmpului magnetic pentru bobina cu secţiunea reală şi eventuale corecţii ale formei şi dimensiunilor geometrice;
- calculul forţelor electromagnetice şi reconsiderarea dimensionării bobinei dacă aceste forţe sînt excesiv de mari.

3.1.1. Cîmpul magnetic în canalul de conversie MHD la diferite configuraţii de spire filiforme

Lungimea canalului de conversie MHD fiind mare în comparaţie cu dimensiunile transversale, bobinele pot fi aproximate pentru început prin conductoare filiforme de lungime infinită. Dacă secţiunea canalului este constantă pe lungimea lui, aceste conductoare sînt paralele şi dispuse ca în figura 3.2.

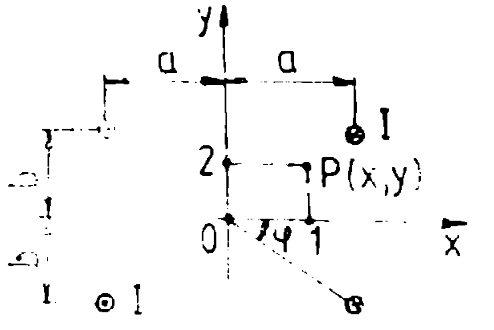


Fig.3.2.Conductoare filiforme paralele

Inducţia magnetică într-un punct P(x,y) se poate determina pornind de la relaţia (2.31) obţinîndu-se pentru componenta transversală B_y expresia:

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{a+x}{(a+x)^2+(b+y)^2} + \frac{a-x}{(a-x)^2+(b+y)^2} + \frac{a+x}{(a+x)^2+(b-y)^2} + \frac{a-x}{(a-x)^2+(b-y)^2}\right) \quad (3.2)$$

Pentru puncte situate pe axele de simetrie inducţia magnetică are numai componentă după axa y ($B=B_y$) şi se obţin expresiile particulare:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{2a}{a^2+b^2}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{a+x}{(a+x)^2+b^2} + \frac{a-x}{(a-x)^2+b^2}\right) \qquad (3.3)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{a}{a^2+(b+x)^2} + \frac{a}{a^2+(b-x)^2}\right)$$

Referindu-ne la inducţia magnetică pe axa y=0 (B_1), aceasta se poate exprima funcţie de valoarea în centru (B_0) printr-o dezvoltare în serie

$$B_1 = B_0\left[1 + \frac{x}{1!}\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2}\right)_0 + \dots\right]$$

iar pentru obţinerea unui cîmp magnetic cît mai omogen, se impune anularea primelor derivate din această expresie.

Pentru ca prima derivată să se anuleze, funcţia $B_y(x,y)$ trebuie să fie pară în raport cu x, aceasta asigurîndu-se prin plasarea simetrică a conductoarelor faţă de axele x şi y. În fig. 3.3 s-a considerat îndeplinită această condiţie şi deci $(\partial B_1/\partial x)_0=0$. Impunînd ca şi derivata de ordinul doi să se anuleze în origine, $(\partial^2 B_1/\partial x^2)_0=0$, rezultă

$$a = b\sqrt{3} \quad \text{sau} \quad \varphi = \pi/6 \qquad (3.4)$$

condiţie cunoscută în literatura [18,109].

Similar se poate arăta că şi pentru $(\partial^2 B_2/\partial y^2)_0=0$ trebuie respectată tot condiţia (3.4). Presupunînd îndeplinită această condiţie, inducţia magnetică în centru obţine expresia:

$$B_0 = \mu_0 \frac{3I}{2\pi a} \qquad (3.5)$$

Creşterea în continuare a gradului de uniformitate a cîmpului magnetic în zona utilă se poate obţine uşor prin îndepărtarea conductoarelor de această zonă (mărirea dimensiunilor a şi respectiv b), cu respectarea condiţiei (3.4). Desigur că în această situaţie apare dezavantajul micşorării valorii B_0, şi deci este important să se cunoască poziţia acestor conductoare astfel încît variaţia cîmpului magnetic să nu depăşească o valoare impusă. În acest scop se consideră variaţiile relative ale inducţiei magnetice pe axele transversale

$$\varepsilon_x = \frac{B_0-B_1}{B_0}; \quad \varepsilon_y = \frac{B_0-B_2}{B_0} \qquad (3.6)$$

şi ţinînd seama de relaţiile (3.3) rezultă:

$$\varepsilon_x = 1 - 4\,\frac{4-3\left(\frac{x}{a}\right)^2}{16-12\left(\frac{x}{a}\right)^2+9\left(\frac{x}{a}\right)^4}$$

$$\varepsilon_y = 1-4\,\frac{4+(\frac{y}{a})^2}{16+4(\frac{y}{a})^2+(\frac{y}{a})^4} = 1-4\,\frac{4+3(\frac{x}{a})^2}{16+12(\frac{x}{a})^2+9(\frac{x}{a})^4} \qquad (3.7)$$

Pe baza acestor ultime expresii se pot determina rapoartele x/a respectiv y/a astfel încît să se obțină anumite valori impuse pentru ε_x și ε_y, determinarea făcîndu-se foarte ușor din curbele reprezentate în fig. 3.3.

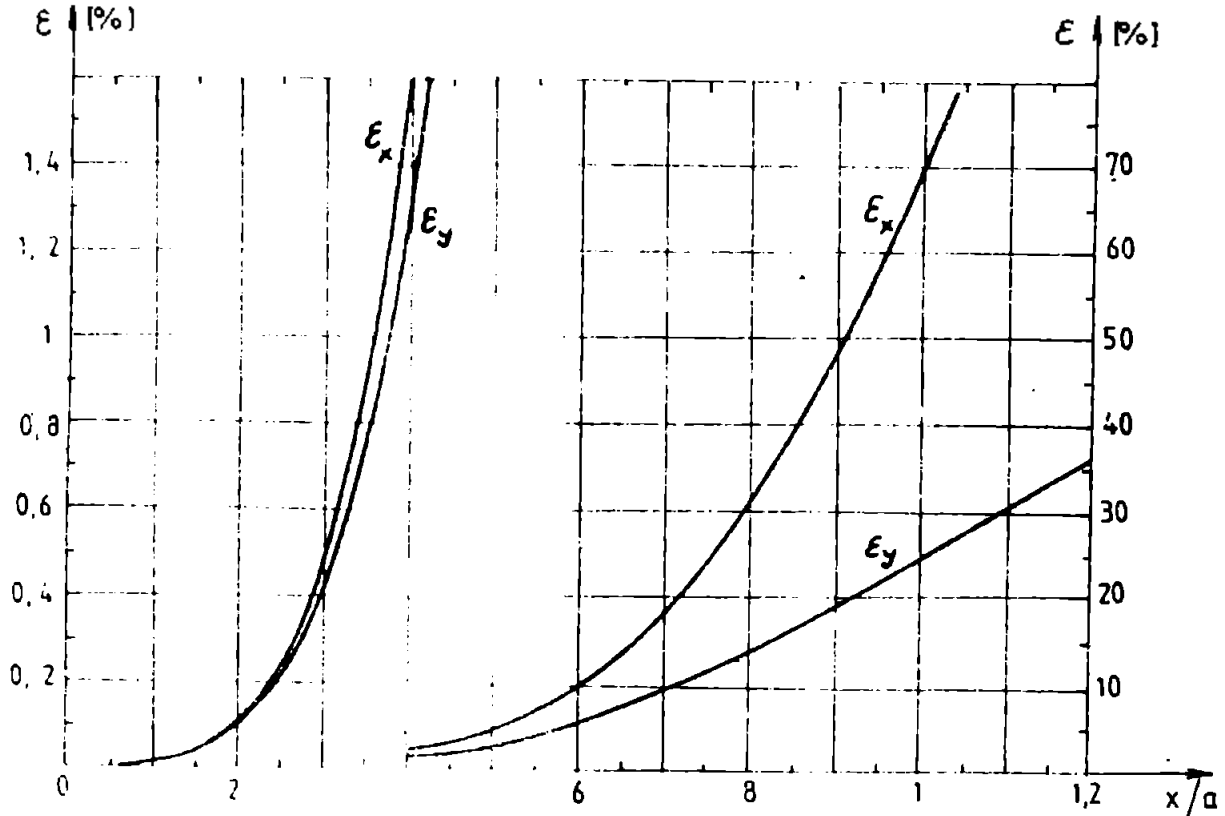


Fig. 3.3. Variația cîmpului pe axele transversale

Considerînd spirele filiforme și de lungime finită trebuie luată în considerare și contribuția capetelor. În [18] se dau expresiile inducției magnetice pe axa longitudinală a canalului în cazul unor spire de tip Helmholtz sau de tip șea cu capete rectangulare sau circulare. În cazul tezei s-a luat în considerare și situația unui canal divergent avînd forma din figura 3.4, cu laturile principale ale bobinei plasate pe pereții paraleli ai canalului (fig. 3.5.a) și respectiv pe cei divergenți (fig. 3.5.b). În primul caz (fig. 3.5.a) pentru componenta transversală a inducției magnetice într-un punct situat pe axa longitudinală s-a obținut expresia:

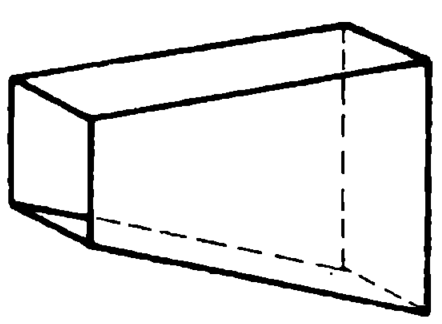


Fig. 3.4. Canal cu conversie MHD divergent

$$B_y = \frac{\mu_0 I \sin\varphi}{\pi R}\left[c\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{1}{(c^2+\varepsilon_1^2)\sqrt{\sin^2\varphi+c^2+\varepsilon_1^2}}\right) + d\left(\frac{1}{\sqrt{1+d^2}} + \frac{1}{(d^2+\varepsilon_2^2)\sqrt{\sin^2\varphi+d^2+\varepsilon_2^2}}\right)\right]$$

(3.8)

în care s-au folosit notațiile,

$$c = \frac{z}{R}\ ;\ d = \frac{l-z}{R}\ ;\ \varepsilon_1 = \frac{h_1}{R}\ ;\ \varepsilon_2 = \frac{h_2}{R} \qquad (3.9)$$

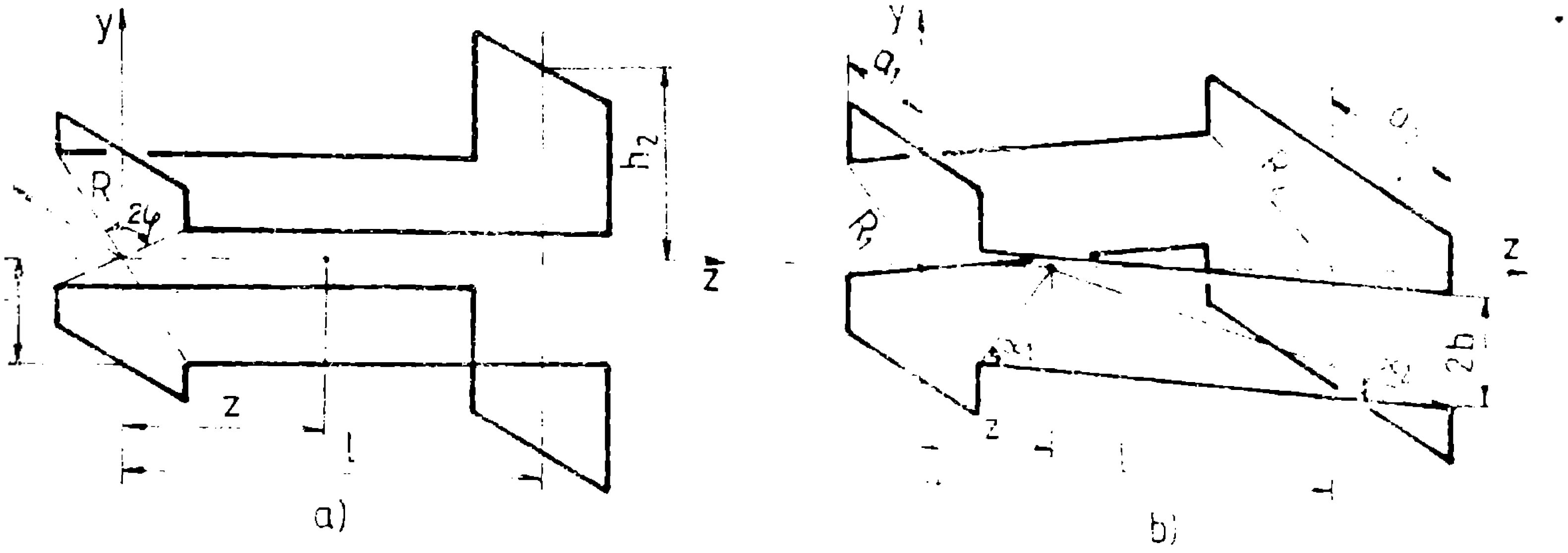


Fig. 3.5. Geometria spirelor filiforme pentru canalul divergent

Pentru spirele cu laturi divergente (fig. 3.5,b) s-a obținut:

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left[\frac{z a_1}{(b^2+z^2)\sqrt{a_1^2+b^2+z^2}} + \frac{(l-z)a_2}{[b^2+(l-z)^2]\sqrt{a_2^2+b^2+(l-z)^2}} + \frac{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}{\sqrt{a_1^2+b^2+z^2}\,\sin\alpha_1}\cos\gamma\right] \qquad (3.10)$$

în care

$$\cos\alpha_1 = \frac{lz - a_1(a_2-a_1)}{\{[l^2+(a_2-a_1)^2](a_1^2+b^2+z^2)\}^{1/2}}\ ;\ \cos\alpha_2 = \frac{l(l-z)+a_2(a_2-a_1)}{\{[l^2+(a_2-a_1)^2][a_2^2+b^2+(l-z)^2]\}^{1/2}} \qquad (3.11)$$

iar γ este unghiul format de axa Oy cu normala la planul ce trece prin punctele P(0,0,z), $A_1(-a_1,0,0)$ și $A_2(-a_2,0,l)$, adică:

$$\cos\gamma = \frac{z(a_2-a_1) + a_1 l}{\sqrt{b^2 l^2 + [z(a_2-a_1) + a_1 l]^2 + z^2(a_2-a_1)^2}} \qquad (3.12)$$

În caz că spirele de tip cu capete circulare (sînt plasate pe suprafața laterală a unui cilindru), cu notațiile din fig. 3.6 și relațiile (3.9), componenta transversală a inducției magnetice pe axa longitudinală are expresia [10]:

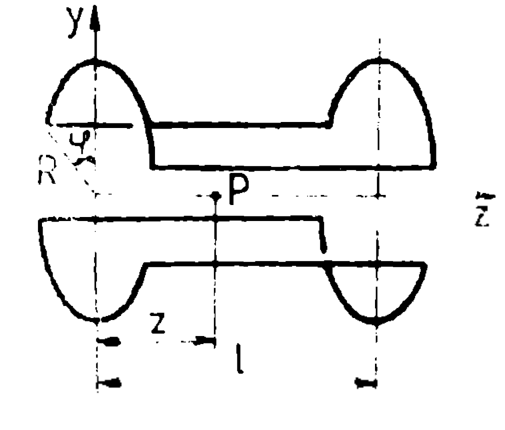


Fig.3.6.Spire filiforme cu capete circulare

$$B_y = \frac{\mu_0 I \sin\varphi}{\pi R}\left[\frac{c(2+c^2)}{(1+c^2)^{3/2}} + \frac{d(2+d^2)}{(1+d^2)^{3/2}}\right] \qquad (3.13)$$

Expresiile stabilite permit calculul relativ simplu al componentei inducției magnetice în punctele axei longitudinale a canalului. Pentru puncte care nu sînt pe această axă, se pot stabili expresii similare, dar acestea devin foarte complicate, astfel încît se recomandă calculul numeric pe baza metodei indicate în paragr. 2.2.1.

3.1.2. Câmpul magnetic în centrul de convertire MHD în cazul unor conductoare echivalente prin pături de curent

În cazul echivalării bobinelor prin pături de curent, s-au luat în considerare aceleaşi trei cazuri de bobine de tip şeu cu capete rectangulare şi laturile principale ale bobinei paralele sau divergente şi bobine ... cu capete circulare, în toate situaţiile densitatea liniară de curent, J_l, fiind constantă.

Se consideră din nou lungimea bobinelor foarte mare. Pentru situaţia din fig. 3.7, pornind de la expresia (2.31) în care $J \to J_l\,dl$, se obţine pentru componenta transversală a inducţiei magnetice expresia

$$B_y = \frac{\mu_0 J_l}{2\pi}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \qquad (3.14)$$

respectiv pe axa longitudinală

$$B_0 = \frac{\mu_0 J_l}{\pi} \cdot 2\alpha \qquad (3.15)$$

în care
$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b_2}{a} - \operatorname{arctg}\frac{b_1}{a}$$

Pentru a avea o bună uniformitate a câmpului magnetic în origine se impune din nou condiţia de anulare a derivatei de ordinul doi în origine şi se obţine:

$$b_1(a^2+b_2^2)^2 = b_2(a^2+b_1^2)^2 \qquad (3.16)$$

Pe baza acestei expresii s-a reprezentat grafic $b_1/a = F(b_2/a)$ în fig. 3.8, putându-se astfel determina comod şi expeditiv dimensiunile geometrice care asigură un grad înalt de uniformitate.

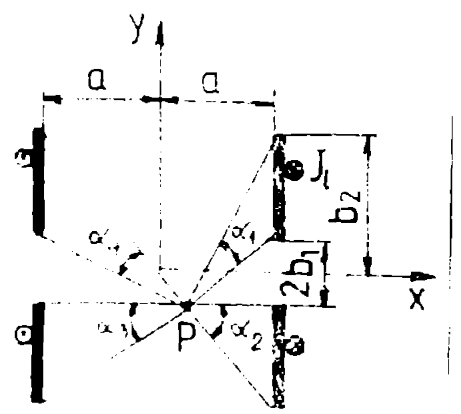


Fig.3.7. Conductoare paralele echivalate prin pături de curent

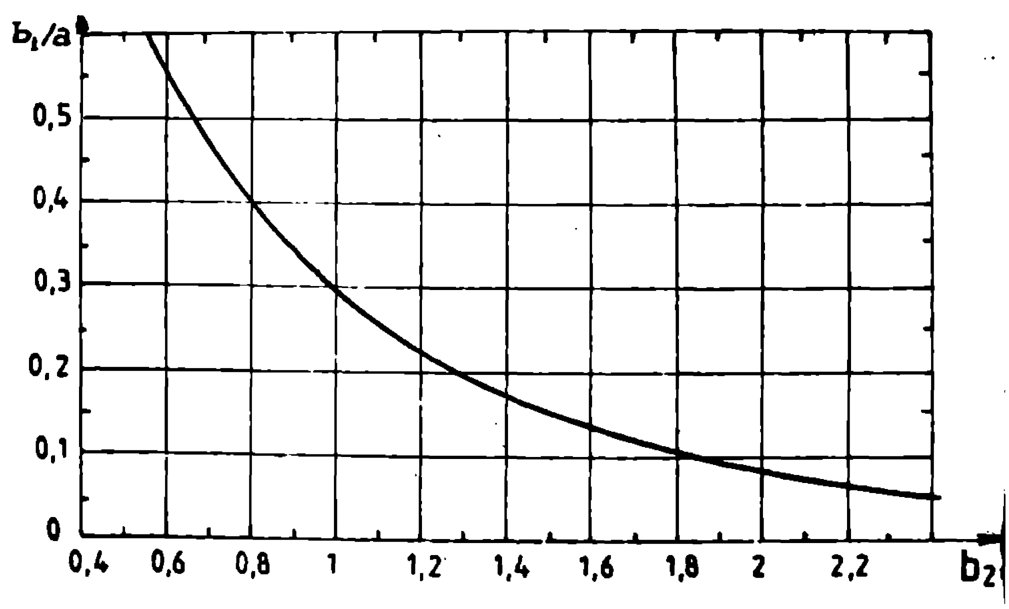


Fig.3.8. Determinarea grafică a condiţiilor geometrice pentru uniformitate ridicată

Dacă laturile principale ale bobinei sînt divergente şi de lungime mare (fig. 3.9.a), pentru determinarea inducţiei magnetice nu se mai poate porni de la expresia (2.31). Pentru puncte situate

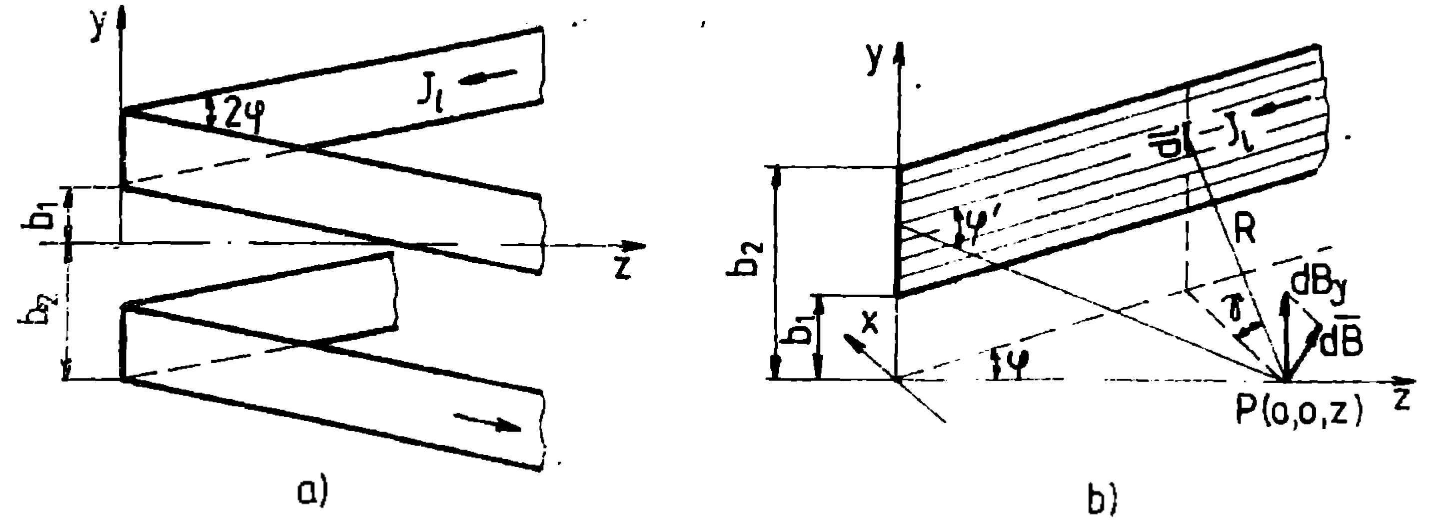


Fig. 3.9. Conductoare divergente echivalate prin pături de curent

pe axa longitudinală se porneşte de la expresia

$$dB_y = \frac{\mu_0 J_l \cdot dl}{4\pi R}(1+\cos\varphi')\cos\gamma \qquad (3.17)$$

în care notaţiile au semnificaţia din fig. 3.9.b) şi se obţine

$$B_y(z) = \frac{\mu_0 J_l}{\pi}(\alpha+\beta) \qquad (3.18)$$

în care

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b_2}{z\sin\varphi} - \operatorname{arctg}\frac{b_1}{z\sin\varphi}; \qquad \beta = \operatorname{arctg}\frac{b_2 \operatorname{ctg}\varphi}{\sqrt{z^2+b_2^2}} - \operatorname{arctg}\frac{b_1 \operatorname{ctg}\varphi}{\sqrt{z^2+b_2^2}}$$

Pentru $z \gg b_2$ şi divergenţă redusă (φ mic) rezultă $\beta \simeq \alpha\cos\varphi \simeq \alpha$ şi deci

$$B_y(z) \simeq \frac{\mu_0 J_l}{\pi}(1+\cos\varphi)\alpha \simeq \frac{\mu_0 J_l}{\pi}2\alpha \qquad (3.19)$$

relaţie de aceeaşi formă cu (3.15), însă unghiul α este funcţie de z.

Pentru situaţia în care conductoarele sînt de lungime mare şi suport cilindric, avînd în secţiune transversală forma din fig. 3.10, inducţia magnetică pe axa longitudinală se determină pornind de la relaţia (2.31) şi se obţine [8]:

$$B_0 = \frac{2\mu_0 J_l}{\pi}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$$

Pentru un punct oarecare din canal ($r < a$) se lucrează în coordonate polare şi componentele inducţiei magnetice se obţin prin particularizarea relaţiilor corespunzătoare din tabelul 2.5 în care $\mu = 1$, $J_l \to -J_l$, $\sin n\varphi \to \sin n\varphi_2 - \sin n\varphi_1$. iar rezultatele se obţin:

$$B_r = \frac{2\mu_0 J_l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}(\sin n\varphi_2 - \sin n\varphi_1)\sin n\theta$$

$$B_\theta = \frac{4\mu_0 J_l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}(\sin n\varphi_2 - \sin n\varphi_1)\cos n\theta \qquad (3.20)$$

Componenta transversală B_y se obține conform cu figura 3.10 prin proiectarea lui B_r și B_θ pe axa Oy

$$B_y = B_r \sin\theta + B_\theta \cos\theta$$

și ținînd seama că

$$\sin n\theta \sin\theta + \cos n\theta \cos\theta = \cos(n-1)\theta$$

rezultă

$$B_y = \frac{4\mu_0 J_l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}(\sin n\varphi_2 - \sin n\varphi_1)\cdot\cos(n-1)\theta \qquad (3.21)$$

care se poate ușor particulariza pentru punctele situate pe axa Ox ($\theta = 0$) sau Oy ($\theta = \pi/2$)

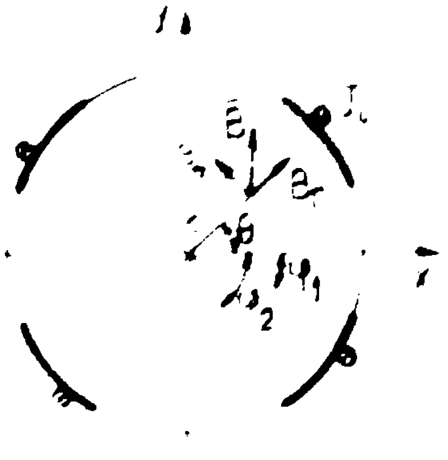


Fig. 3.10. Conductoare dispuse pe un suport cilindric.

$$B_y(x,0) = \frac{4\mu_0 J_l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}(\sin n\varphi_2 - \sin n\varphi_1)$$

$$B_y(0,y) = \frac{4\mu_0 J_l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{n}\left(\frac{y}{a}\right)^{n-1}(\sin n\varphi_2 - \sin n\varphi_1) \qquad (3.22)$$

Impunînd din nou condiția de anulare a derivatei a doua în origine, rezultă că unghiurile φ_2 și φ_1 trebuie alese astfel încît

$$\sin 3\varphi_2 - \sin 3\varphi_1 = 0 \quad \text{sau} \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{3} - \varphi_1 \qquad (3.23)$$

In situația cînd se ia în considerare lungimea finită a bobinelor, acestea se vor aproxima prin n_s spire filiforme, și se va aplica principiul superpoziției.

Pe baza metodei prezentate, s-au efectuat calcule pentru un canal de conversie MHD cu lungimea de 5 m și secțiunea transversală de 0,4 x 0,5 m² la intrare, respectiv 0,4 x 1,1 m² la ieșire, considerîndu-se trei variante constructive de bobine (a,b,c). In toate cazurile, spațiul dintre peretele interior al canalului și pătura de curent a fost apreciat la 0,175 m [6,11].

In varianta (a), laturile principale ale bobinelor sînt plasate pe pereții paraleli ai canalului, spirele avînd forma din figura 3.5.a. Pe baza dimensiunilor impuse ale canalului s-au stabilit valorile 2a = 0,75 m și b_2 = 0,5 m, iar din figura (3.8) a rezultat b_1 = 25 mm. Această valoare s-a majorat la b_1 = 75 mm pentru a avea suficient spațiu pentru cele două vase dewar.

In varianta (b), laturile principale ale bobinelor sînt plasate pe pereții divergenți ai canalului, spirele avînd forma din fig. 3.5.b. In secțiune transversală s-au ales b_2 = 0,45 m, b_1 = 0,15 m, iar a_1 = 0,9 m la intrarea canalului și a_2 = 1,5 m la ieșire. Aceorece pentru canalul considerat φ = arctg 0,1 rezultă că se poate folosi relaţia (3.19).

La varianta (c), bobinele sînt plasate pe un cilindru cu R = 0,8 m sub unghiurile $\varphi_2 = 70°$ şi $\varphi_1 = 10°$(Fig. 3.10).

Pentru cele trei variante, considerînd lungimea infinită s-au calculat: inducţia magnetică în centrul secţiunii canalului, B_0, variaţiile acesteia în canal pe axele x şi y, inducţia maximă la suprafaţa pînzei de curent, precum şi cîmpul magnetic în exteriorul canalului la distanţa de 3 m. Rezultatele sînt prezentate sintetic în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1. Rezultate comparative la cele trei variante

Varianta	$\frac{B_0}{I} \cdot 10^7$ [T/A]	ε_x %	ε_y % Intr	ε_y % Ieşire	B_{max}	B_{ext}/B_0 x=3, y=0	B_{ext}/B_0 x=0, y=3
a	9,48	2	1,5	3,5	1,224 B_0	0,05	0,05
b	12,34 intr 9,09 ieşire	1	4,5	2,5	<B_0 i.i.s.	0,037	0,043
c	7,31	2,5	2,5	5	1,02 B_0	0,02	0,05

Pentru a ţine seama de lungimea finită şi de contribuţia capetelor de bobină la producerea cîmpului magnetic, acestea s-au aproximat prin spire filiforme, în număr de şase la variantele (a) şi (c) şi respectiv trei spire la varianta (b). În această situaţie, s-a calculat componenta transversală a inducţiei magnetice pe axa longitudinală a canalului folosind expresii de forma (3.6), (3.10) şi (3.13), rezultatele fiind prezentate în figura 3.11.

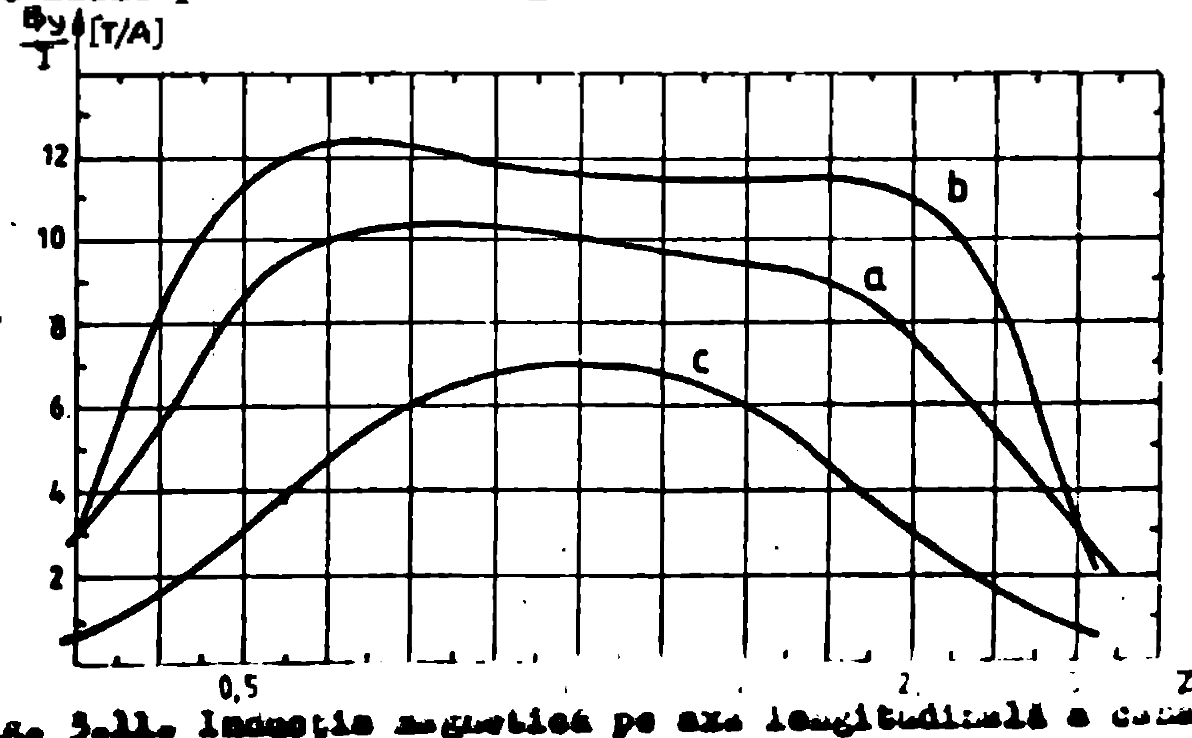


Fig. 3.11. Inducţia magnetică pe axa longitudinală a canalului la cele trei variante

Analizînd rezultatele obţinute, se constată că:

- varianta (a) prezintă o bună uniformitate a cîmpului magnetic atît în secţiunea transversală cît şi pe lungimea canalului, iar inducţia maximă pe conductoarele bobinei este cea mai redusă. Din cele trei variante considerate, este cea mai avantajoasă;
- Varianta (b) prezintă o bună uniformitate a cîmpului magnetic, dar şi marele dezavantaj al unui cîmp maxim de valoare ridicată. Această variantă se va lua însă în considerare numai dacă se impune ca electrozii să fie plasaţi pe pereţii divergenţi ai canalului;
- Varianta (c) nu este recomandabilă pentru forma de canal divergent, deoarece raportul B_0/I este redus, fiind deci necesar un curent mare pentru realizarea unui cîmp magnetic impus.

3.1.3. Cîmpul magnetic în canalul de conversie MHD în cazul unor bobine masive

Se consideră pentru început că bobinele au laturi paralele de lungime foarte mare, iar secţiunea transversală a lor este dreptunghiulară (fig.3.12,a).

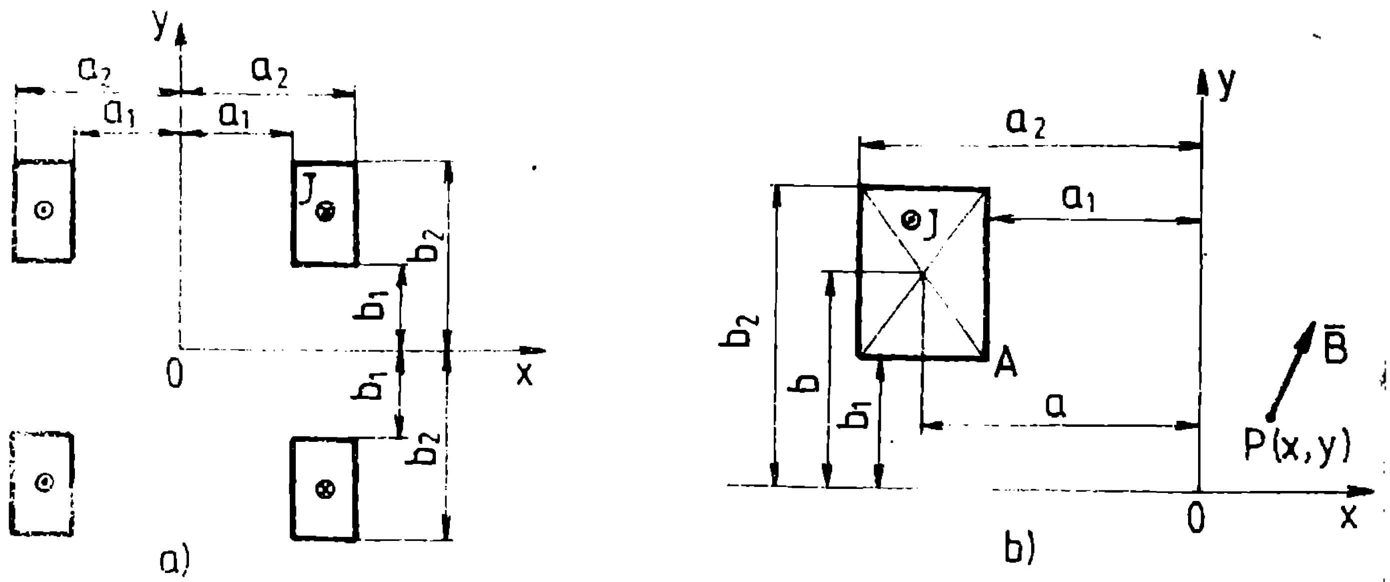


Fig. 3.12. Conductoare paralele de secţiune dreptunghiulară

Inducţia magnetică într-un punct P(x,y) corespunzătoare unui singur conductor (fig. 3.12,b) se obţine aplicînd expresia (2.32) sau particularizînd expresia (2.21) pentru sistemul de axe ales. Rezultă:

$$B_x = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\left[(x+a_1)\ln\frac{(x+a_1)^2+(y-b_1)^2}{(x+a_1)^2+(y-b_2)^2} + (x+a_2)\ln\frac{(x+a_2)^2+(y-b_2)^2}{(x+a_2)^2+(y-b_1)^2} +\right.$$

$$+\, 2(y-b_1)\,\mathrm{arctg}\,\frac{-(a_2-a_1)(y-b_1)}{(x+a_2)(x+a_1)+(y-b_1)^2} + 2(y-b_2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{(a_2-a_1)(y-b_2)}{(y-b_2)^2+(a_2+x)(a_1+x)}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\left[(y-b_2)\ln\frac{(x+a_1)^2+(y-b_2)^2}{(x+a_2)^2+(y-b_2)^2} + (y-b_1)\ln\frac{(x+a_2)^2+(y-b_1)^2}{(x+a_1)^2+(y-b_1)^2} + \right.$$

$$\left. + 2(x+a_2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{(b_2-b_1)(x+a_2)}{(x+a_2)^2+(y-b_1)(y-b_2)} + 2(x+a_1)\,\mathrm{arctg}\,\frac{-(b_2-b_1)(x+a_1)}{(x+a_1)^2+(y-b_1)(y-b_2)}\right] \tag{3.24}$$

Relațiile (3.24) se simplifică pentru un punct situat pe muchia laturii de bobină. Astfel pentru punctul $A(-a_1,b_1)$ rezultă:

$$B_x(a_1,b_1) = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\mathcal{F}_x(g_x,g_y)$$

$$B_y(-a_1,b_1) = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\mathcal{F}_y(g_x,g_y) \tag{3.25}$$

în care

$$\mathcal{F}_x(g_x,g_y) = g_x\left[\ln(1+\alpha^2) + 2\alpha\,\mathrm{arctg}\,\alpha\right]$$

$$\mathcal{F}_y(g_x,g_y) = g_x\left[\alpha\ln\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\alpha}\right]$$

iar $g_x = a_2-a_1$, $g_y = b_2-b_1$ și $\alpha = g_x/g_y$

Pentru un punct nesituat pe muchia laturii de bobină ($P(x,y)$ în fig. 3.12,b) se poate aplica principiul superpoziției după modul indicat în [65] și se obține:

$$B_x^J = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\left[\mathcal{F}_x^y(a_2+x,b_2-y)-\mathcal{F}_x^y(a_1+x,b_2-y)-\mathcal{F}_x^y(a_2+x,b_1-y)+\mathcal{F}_x^y(a_1+x,b_1-y)\right] \tag{3.26}$$

Pentru toate cele patru laturi de bobină (fig. 3.12,a) rezultă expresiile componentei inducției magnetice:

$$B_x^J = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\left[\mathcal{F}_x^y(a_2+x,b_2-y)-\mathcal{F}_x^y(a_1+x,b_2-y)-\mathcal{F}_x^y(a_2+x,b_1-y)+\mathcal{F}_x^y(a_1+x,b_1-y)\pm\right.$$

$$\pm\mathcal{F}_x^y(a_2-x,b_2-y)\mp\mathcal{F}_x^y(a_1-x,b_2-y)\mp\mathcal{F}_x^y(a_2-x,b_1-y)\pm\mathcal{F}_x^y(a_1-x,b_1-y)+$$

$$+\mathcal{F}_x^y(a_2-x,b_2+y)-\mathcal{F}_x^y(a_1-x,b_2+y)-\mathcal{F}_x^y(a_2-x,b_1+y)+\mathcal{F}_x^y(a_1-x,b_1+y)\pm$$

$$\left.\pm\mathcal{F}_x^y(a_2+x,b_2+y)\mp\mathcal{F}_x^y(a_1+x,b_2+y)\mp\mathcal{F}_x^y(a_2+x,b_1+y)\pm\mathcal{F}_x^y(a_1+x,b_1+y)\right] \tag{3.27}$$

cu expresiile particulare pe axele x și y:

$$B(x,0) = \frac{\mu_0 J}{2\pi}\left[\mathcal{F}_y(a_2+x,b_2)-\mathcal{F}_y(a_1+x,b_2)-\mathcal{F}_y(a_2+x,b_1)+\mathcal{F}_y(a_1+x,b_1)+\right.$$

$$\left.+\mathcal{F}_y(a_2-x,b_2)-\mathcal{F}_y(a_1-x,b_2)-\mathcal{F}_y(a_2-x,b_1)+\mathcal{F}_y(a_1-x,b_1)\right] \tag{3.28}$$

$$B(0,y) = \frac{\mu_0 J}{2\pi}\left[\mathcal{F}_y(a_2,b_2-y)-\mathcal{F}_y(a_1,b_2-y)-\mathcal{F}_y(a_2,b_1-y)+\mathcal{F}_y(a_1,b_1-y)+\right.$$

$$\left.+\mathcal{F}_y(a_2,b_2+y)-\mathcal{F}_y(a_1,b_2+y)-\mathcal{F}_y(a_2,b_1+y)+\mathcal{F}_y(a_1,b_1+y)\right]$$

și respectiv pe axa longitudinală a canalului:

$$B_0 = \frac{\mu_0 J}{\pi}\left[\mathcal{F}_y(a_2,b_2) - \mathcal{F}_y(a_1,b_2) - \mathcal{F}_y(a_2,b_1) + \mathcal{F}_y(a_1,b_1)\right] \tag{3.29}$$

Relațiile de calcul stabilite (3.25-3.29) se pot folosi și în cazul unor bobine masive cu laturile divergente dacă unghiul de divergență (φ în fig. 3.5) este redus astfel încît $\cos\varphi \approx 1$.

Dacă se ia în considerare atît lungimea finită cît și secțiunea transversală reală a bobinelor, calculul cîmpului magnetic se va face pe baza metodei prezentate în paragr. 2.2.1.

În continuare se prezintă modul în care s-a rezolvat problema calculului electromagnetic al unei bobine supraconductoare pentru generator MHD cu canal de conversie divergent și secțiune pătrată, cu luarea în considerare a secțiunii și lungimii finite a laturilor de bobine. Problema a constituit obiectul unui contract de cercetare științifică [47] pentru două variante de bobine, cu inducția magnetică de 6 T și respectiv 8 T. Dimensiunile canalului de conversie și ale spațiului liber din interiorul criostatului au fost impuse prin tema de proiectare și sînt date în tabelul 3.2.

Tabelul 3.2. Dimensiunile canalului de conversie

Varianta	Secțiunea canalului de conversie (m^2)		Spațiul liber din interior criostat (m^2)		Lungimea (m)
	intrare	ieșire	intrare	ieșire	
6 T	0,6x0,6	1,6x1,6	1x1	2x2	10
8 T	0,6x0,6	2,1x2,1	1x1	2,5x2,5	15

Ținînd seama de cele prezentate în paragr. 3.1.1. și 3.1.2, s-au luat în considerare bobine de tip șea divergente avînd forma din fig. 3.13. Dimensiunile interioare ale acestora rezultă funcție de dimensiunile canalului de conversie, grosimea peretelui acestuia (spațiul liber din interiorul criostatului) și de grosimea peretelui criostatului. Rezultatele prezentate în cele ce urmează se referă la varianta cu inducția magnetică de 6 T, pentru cealaltă variantă acestea putîndu-se urmări în [47].

Spațiul liber în care se plasează canalul de conversie fiind impus la valoarea 1x1 m^2 la intrare și 2x2 m^2 la ieșire și apreciind grosimea peretelui criostatului la 0,2 m [12], rezultă următoarele dimensiuni interioare pentru bobine:

$a_1 = 0{,}7$ m $\qquad a_2 = 1{,}2$ m $\qquad l = 10$ m

$b_1 = 0{,}7$ m $\qquad b_2 = 1{,}2$ m

Lungimea finită mare în raport cu dimensiunile transversale și unghiul de divergență redus, se pot aproxima într-o primă fază bobinele cu conductoare filiforme paralele și infinit lungi, plasate ca în fig. 3.2

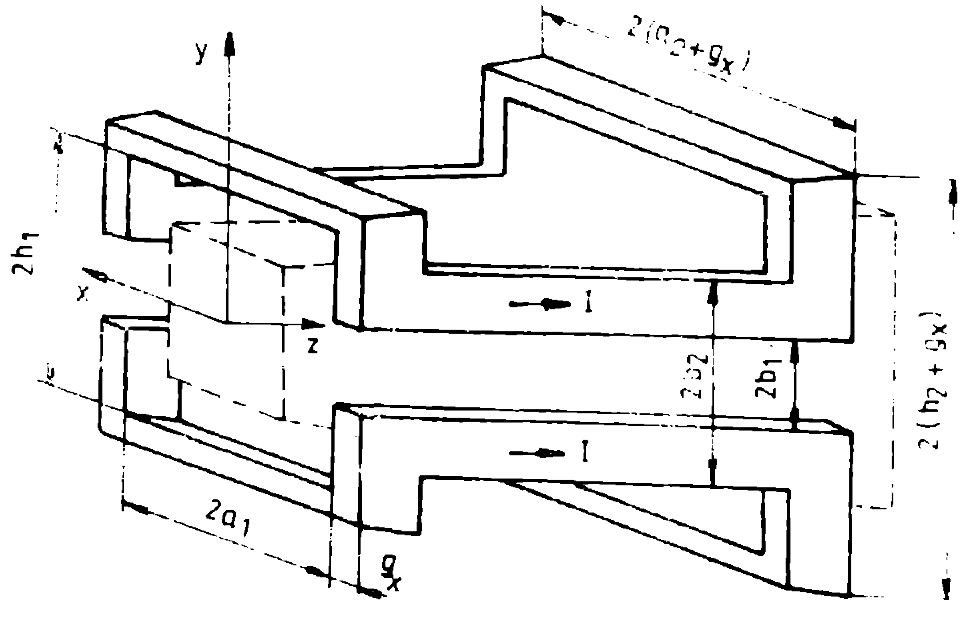


Fig. 3.13. Forma geometrică a bobinelor de tip şea

la o distanţă reală a = 1m, iar b rezultă din condiţia (3.4) pentru a avea un cîmp uniform pe secţiune, b = 0,577 m. În această situaţie, din (3.5) se determină curentul necesar pentru a realiza inducţia magnetică impusă (B_0 = 8T):

$$I = \frac{2\,aB_0}{3\mu_0} = 13{,}3\cdot10^6\,A$$

Avînd în vedere dimensiunile foarte mari ale bobinelor, se admite o valoare relativ redusă pentru densitatea de curent echivalentă, J = 48 A/mm^2, astfel încît rezultă pentru secţiunea transversală a înfăşurării de bobină

$$S = g_x(b_2-b_1) = I/J = 0{,}28\ m^2$$

Ţinînd seama de grosimea peretelui criostatului şi pentru a avea acces la electrozi, se alege b_1 = 0,3 m şi rezultă (fig. 3.12,b)

$$b_2 = b + (b - b_1) = 0{,}854\ m$$

Dacă se aproximează conductoarele prin pături de curent, din graficul 3.6 rezultă b_2 = 0,95 m. Prin urmare se vor lua în considerare bobine cu $b_2 \simeq$ 0,9 m.

În continuare, pentru alegerea unei variante optime se impune calculul mai exact al cîmpului magnetic cu luarea în considerare a lungimii finite şi a secţiunii transversale reale. Fiind necesară cunoaşterea cîmpului magnetic din interiorul canalului, dar şi pe suprafaţa bobinei şi din exteriorul bobinelor, rezultă un volum mare de calcul, astfel încît singura soluţie raţională este rezolvarea numerică pe baza metodei indicate în paragrafele anterioare. S-a realizat programul de calcul ... 04 avînd principial aceeaşi structură ca şi programul general (par.2.2.1) dar cu unele particularităţi legate cu forma bobinatorului astfel numarul de laturi este $N_l = 8$ şi deoarece apar perechi simetrice de spire este convenabil calculul cimpului pentru cite o pereche de spire. O particularitate importanta se refera la coordonatele virfurilor conturului poligonal al spirelor de calcul, care se determina in program pornind de la dimensiunile $a_1, a_2, h_1, h_2, b_1, b_2$ şi tinind seama de modul de impartire a bobinei in spire de calcul (fig. 3.14), respectiv: numarul de spire pe strat (M), numarul total de spire (N_s) şi dimensiunile secţiunii transversale a spirei de calcul (Δa, Δb).

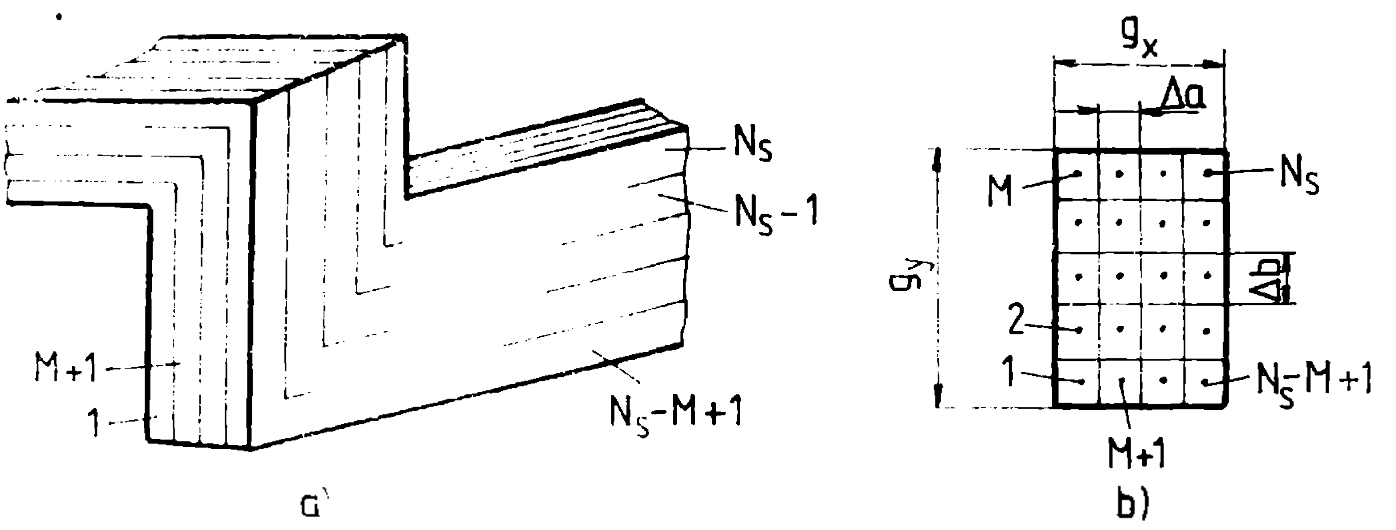


Fig. 3.14. Explicativa privind modul de impartire a bobinei in spire de calcul

Pentru ca bobinele sa pastreze forma din fig. 3.13 indiferent de valoarea lui b_2, se impune ca valorile stabilite şi date pentru h_1 şi h_2 sa fie verificate şi eventual corectate in program.

Programul de calcul elaborat pe baza ordinogramei de principiu din fig. 3.15, permite luarea in considerare a mai multor variante de bobine.

Cu ajutorul acestuia s-au calculat componentele cimpului magnetic in N_p = 100 puncte la trei variante de bobine ce se deosebesc intre ele prin marimile din tabelul 3.5.

Tabelul 3.5. Caracteristicile variantelor de bobine

Varianta	M	N_s	a(m)	b(m)	g_x(m)	g_y(m)	b_2(m)	h_1(m)	h_2(m)
1	[illegible]	[illegible]	0,034	0,1	0,47	[illegible]	0,9	[illegible]	1,2
2	7	[illegible]	0,1	0,1	0,4	0,7	1	0,565	1,2
3	10	[illegible]	0,034	0,1	0,262	1	1,3	1,25	[illegible]

Rezultatele calculului referitoare la componenta transversala a cimpului (axa y) se prezinta grafic in figurile 3.16 - 3.18

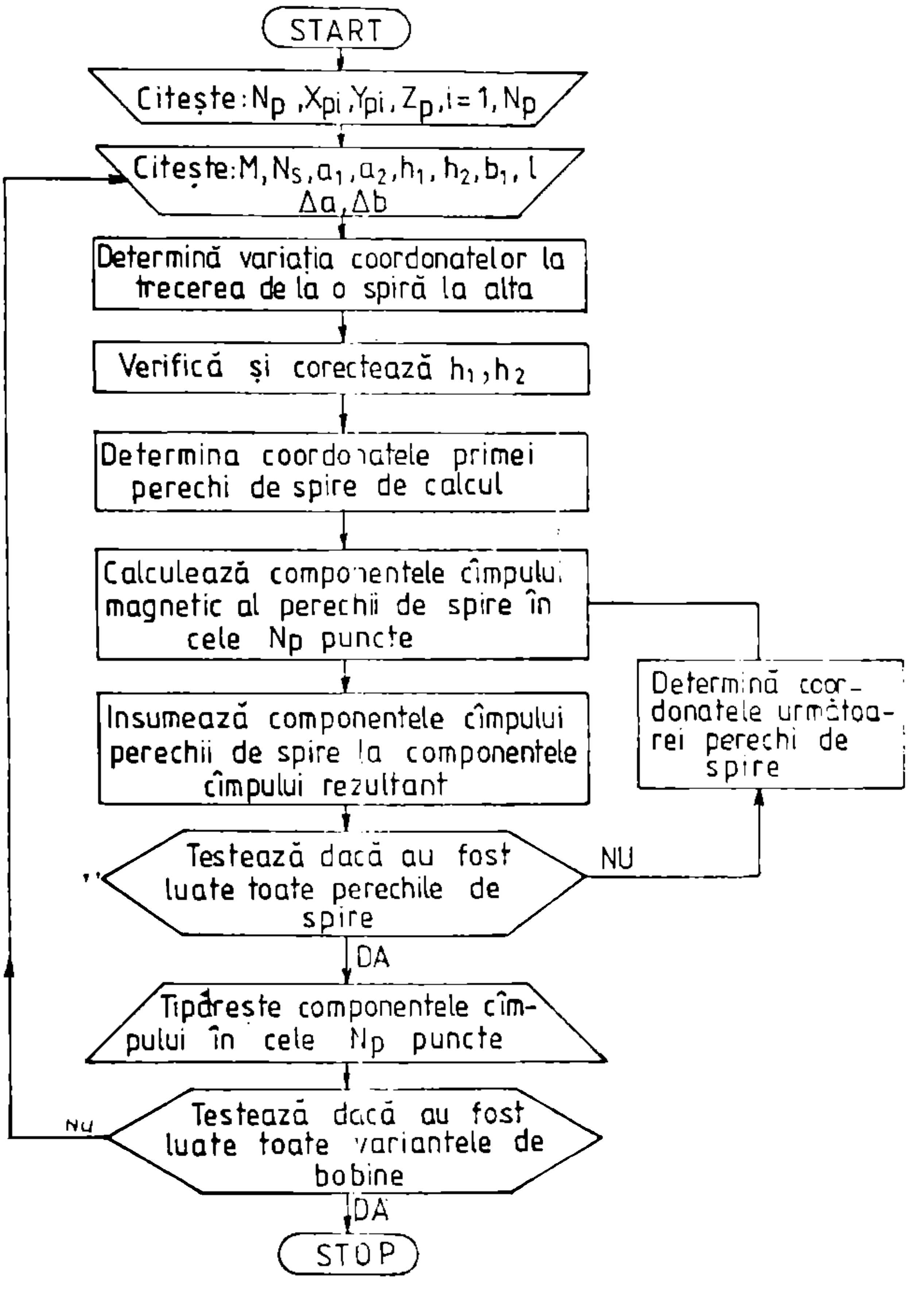
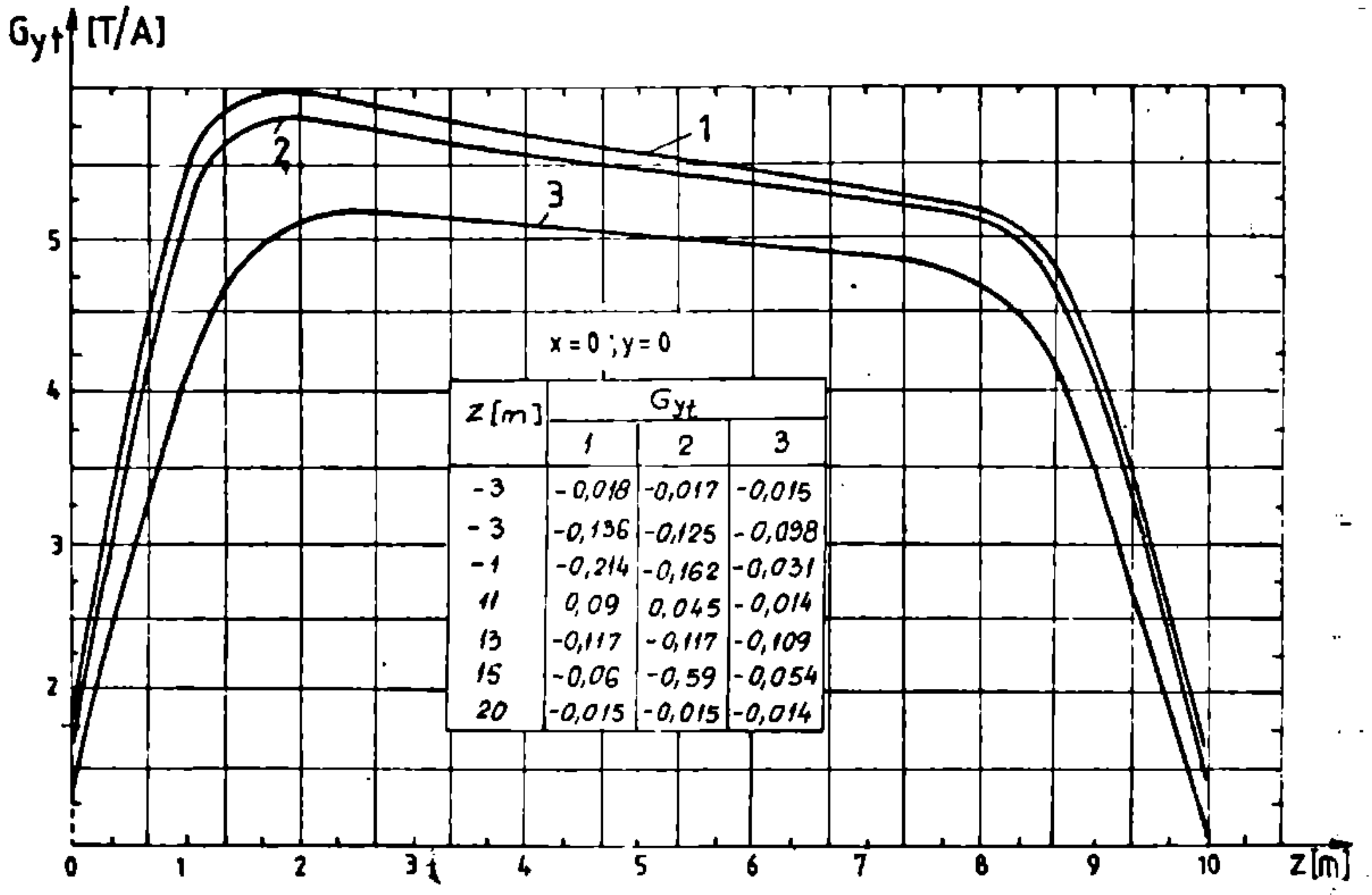
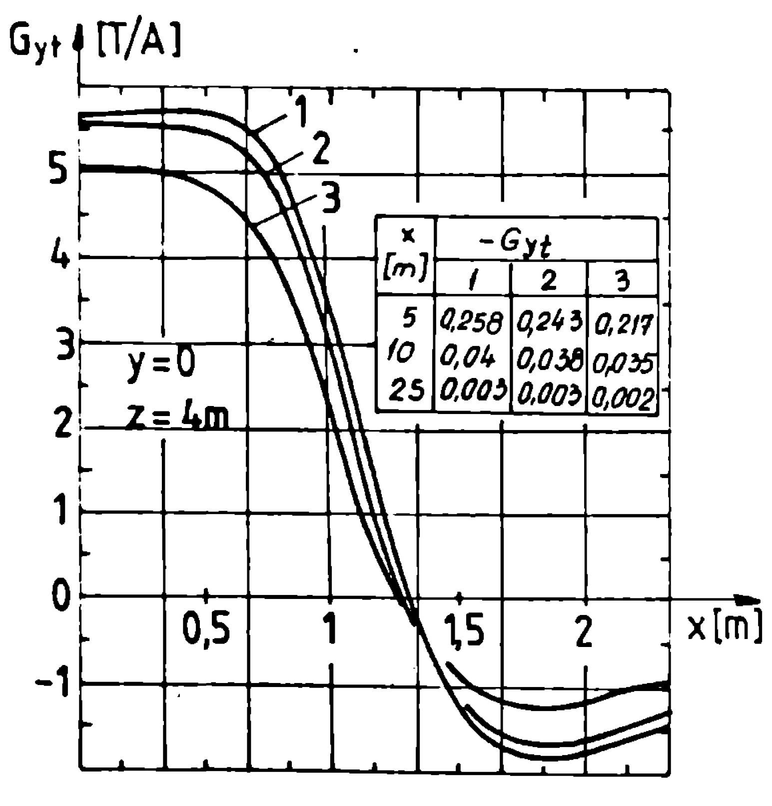
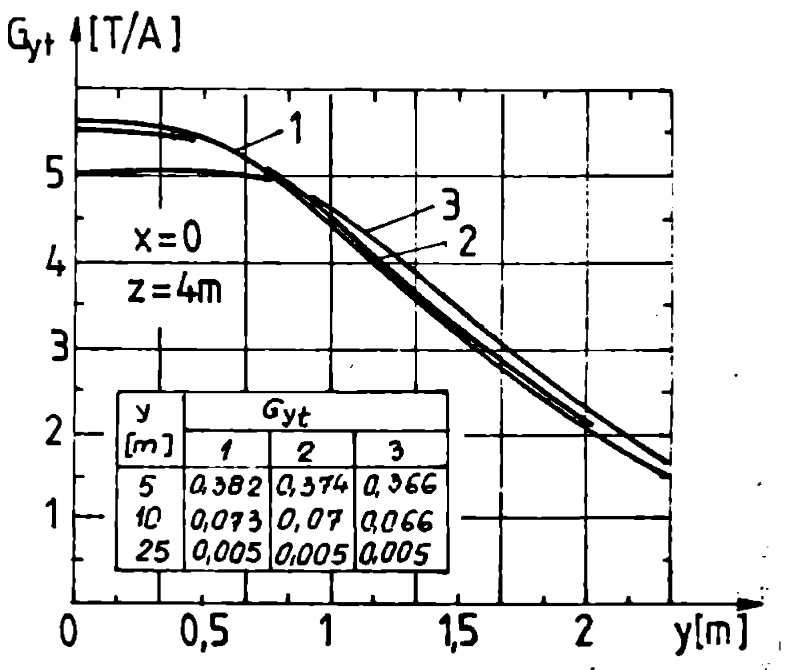


Fig.3.15. Ordinograma de principiu a programului MHD04



[illegible] pe axa longitudinală a [illegible]





[illegible] pe axele transversale într-o
secțiune centrală

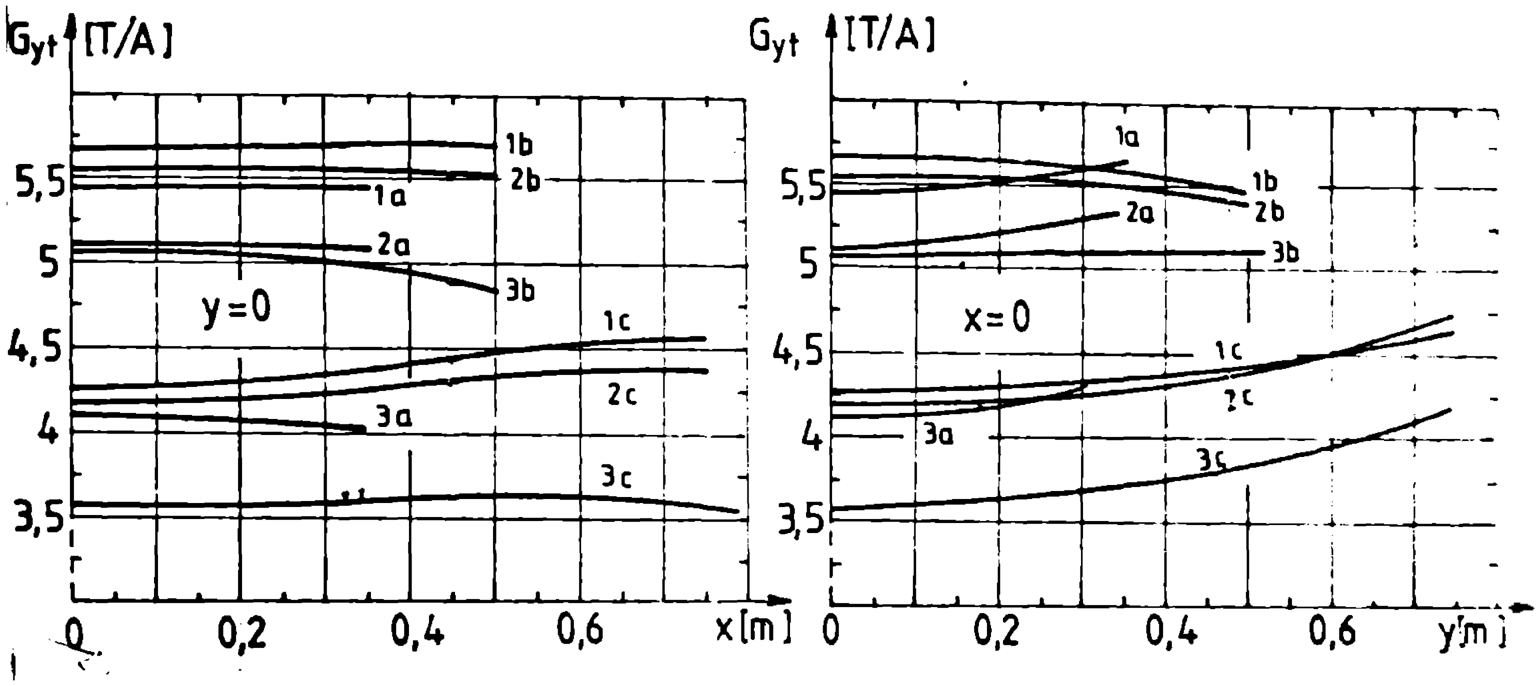


Fig. 3.10. Cîmpul magnetic pe axele transversale în interiorul canalului de conversie a) z=1 m; b) z = [illegible]; c) z = [illegible]

Analizînd aceste rezultate este clar aspectul valorii inducţiei magnetice realizate la un anumit curent electric cît şi al uniformităţii acesteia în canalul de conversie, se constată că varianta a [illegible] este cea mai avantajoasă. Pentru această variantă s-a calculat din nou cîmpul magnetic ţinînd seama de recomandările făcute în paragraful anterior pentru determinarea cîmpului magnetic în n_p = [illegible] puncte situate în canal şi în exteriorul bobinelor, deci cu excepţia [illegible] pe laturile bobinei s-a considerat un număr mare de spire echivalente ($M = 5$, $k_s = 10$). Comparativ, pentru determinarea valorii maxime a inducţiei magnetice, punctele de calcul fiind aproape de conductorul parcurs de curent, bobina s-a considerat formată dintr-un număr mare de spire echivalente (n_s mare) şi s-au calculat componentele cîmpului magnetic în $n_p = 20$ puncte situate pe suprafaţa interioară (dinspre canalul MHD) a laturii principale de bobine. O parte din rezultatele obţinute se prezintă grafic în figurile 3.19 – 3.22.

După cum era de aşteptat datorită formei geometrice a bobinelor, se observă că inducţia magnetică scade de la intrare spre ieşirea canalului de conversie. Dacă se impune ca valoarea maximă pe axa canalului să fie $B_0 = 8T$ şi ţinînd seama de valoarea obţinută pentru factorul geometric pe axa canalului ($G_{to} = 5{,}6$ T/A), se obţine curentul electric într-o bobină

$$I = 10^7 B_0/G_{to} = 10^7 \cdot 8/5{,}6 = 15{,}6 \cdot 10^6 A$$

valoare care diferă puţin de cea obţinută în cazul aproximării bobinelor cu fire filiforme şi de lungime infinită. Valorii obţinute pentru intensitatea curentului electric îi corespunde o densitate de curent

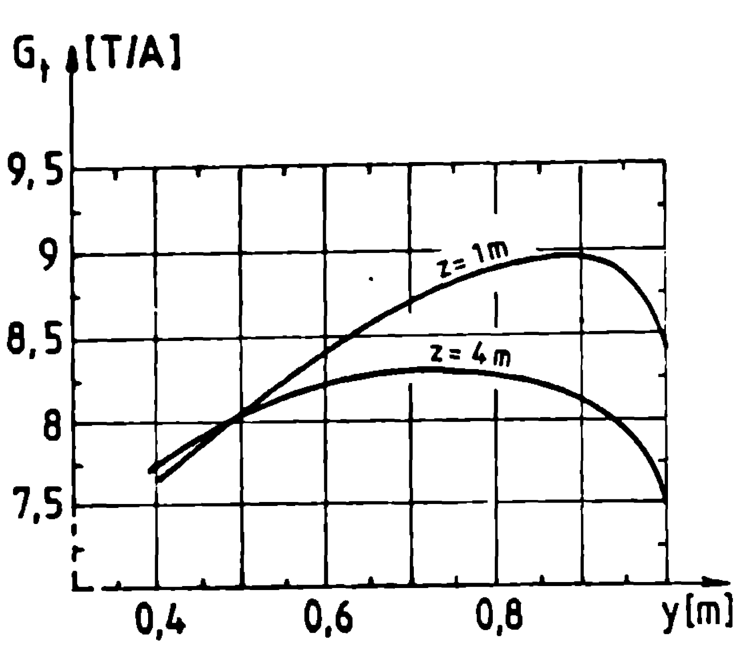


Fig. 5.19. Cîmpul magnetic pe suprafaţa interioară a laturii de bobină

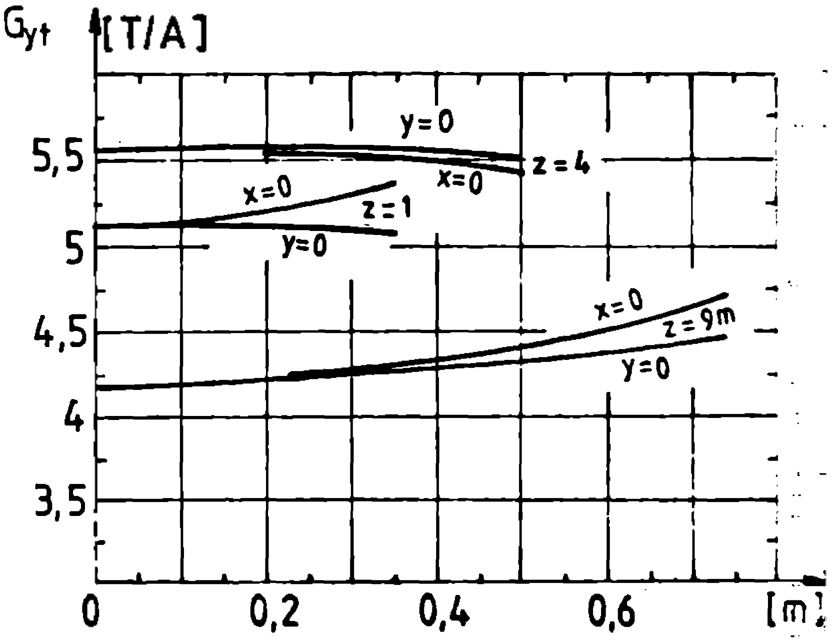


Fig. 5.20. Cîmpul magnetic pe axele transversale în interiorul canalului de conversie

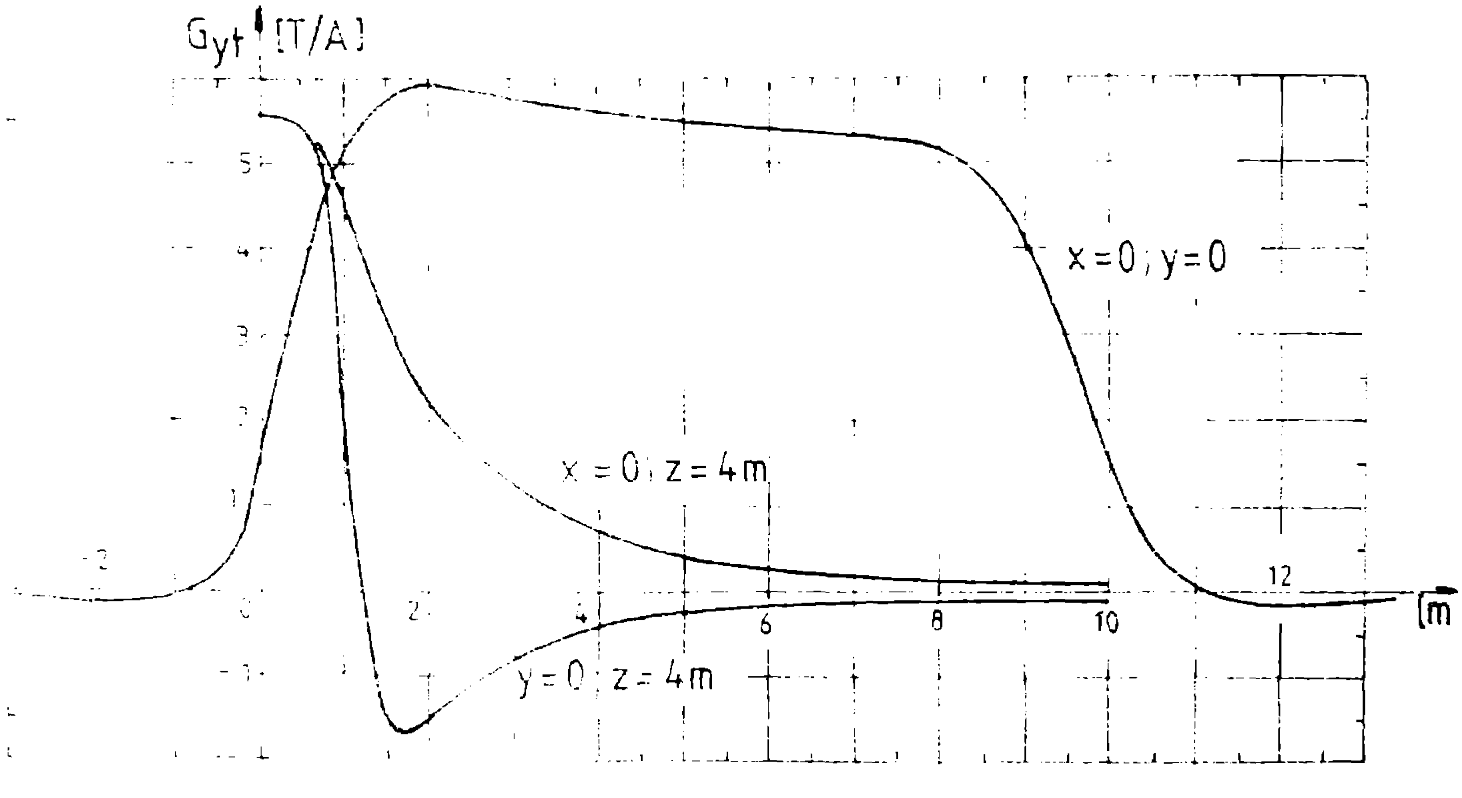


Fig. 5.21. Cîmpul magnetic pe axa longitudinală şi pe axele transversale într-o secţiune centrală a canalului

echivalentă $J = 49,3\ A/mm^2$.

La suprafaţa bobinei, inducţia magnetică are valori mari în zona de intrare a canalului. Astfel pentru z=1m şi y=0,9m s-a obţinut $G_{t\,max} = 8,94$ T/A şi rezultă

$$B_{max} = G_{t\,max}\, 10^{-7} I = 8,94 \cdot 10^{-7} \cdot 13,8 \cdot 10^{6} = 12,3\ T$$

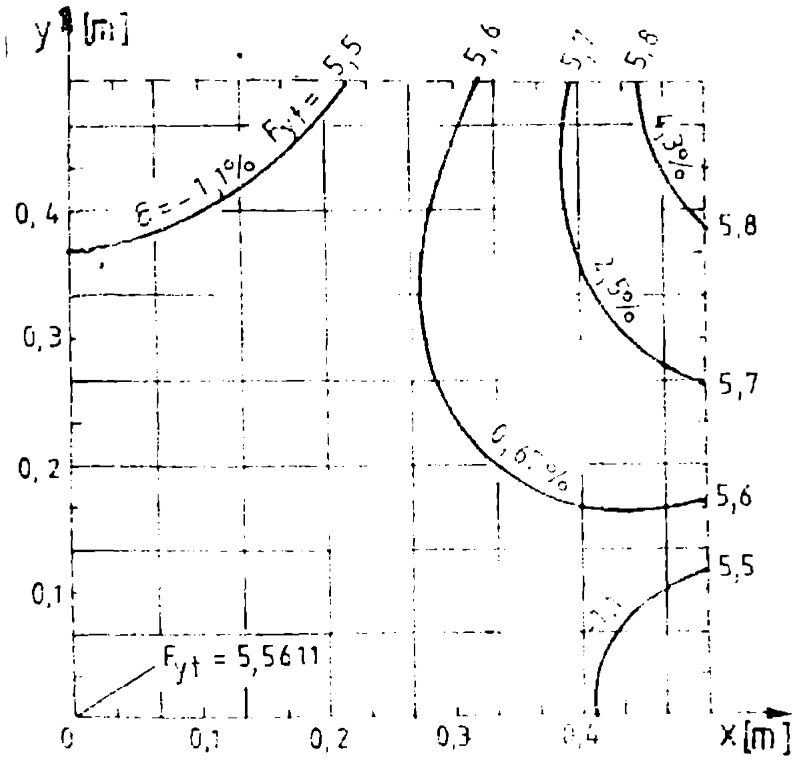


Fig. 3.22. Variația câmpului magnetic într-o secțiune centrală a canalului

Variația inducției magnetice pe secțiunea transversală într-o zonă centrală (z = 4m) se încadrează în limita de 0,5% și este mai mare spre ieșirea canalului (3% la z = 9m).

Referitor la câmpul magnetic din exteriorul bobinelor se constată valori mari îndeosebi în zona centrală. Astfel se dau pentru orientare în tabelul 3.4 valorile inducției magnetice în câteva puncte situate la z=4m

Tabelul 3.4. Inducția magnetică în exteriorul bobinelor în planul z = 4m

x (m)	1,7	2	5	10	0	0	0	0
y (m)	0	0	0	0	1,7	2	5	10
B (T)	2,33	2,15	0,32	0,05	3,76	1,90	0,23	0,1

3.1.4. Determinarea forțelor electromagnetice

Pentru calculul forței locale se va utiliza relația (2.170) având în vedere că se lucrează în coordonate carteziene. Este însă foarte importantă și cunoașterea forței rezultante care acționează asupra unității de lungime a laturii de bobină. Aceasta se poate obține dacă se consideră N_p puncte situate într-o secțiune transversală a laturii de bobină, adică în centrul secțiunii celor $N_s = N_p$ spire elementare în care se descompune bobina (fig. 3.14.b). Considerind lungimea unitară (ΔV = ΔS. Δl = ΔS.1), din relația (2.172) rezultă forța specifică pe unitatea de lungime a laturii de bobină,

$$\bar{F}_l = \bar{i}\sum_{1}^{N_s} f_{vx}\,\Delta s + \bar{j}\sum_{1}^{N_s} f_{vy}\,\Delta s + \bar{k}\sum_{1}^{N_s} f_{vz}\,\Delta s \qquad (3.30)$$

în care

$$F_{lx} = \sum_{1}^{N_s} f_{vx}\,\Delta s = G_{flx}\,10^{-7}\,I^2$$
$$F_{ly} = \sum_{1}^{N_s} f_{vy}\,\Delta s = G_{fly}\,10^{-7}\,I^2 \qquad (3.31)$$
$$F_{lz} = \sum_{1}^{N_s} f_{vz}\,\Delta s = G_{flz}\,10^{-7}\,I^2$$
$$F_l = \sqrt{F_{lx}^2 + F_{ly}^2 + F_{lz}^2} = G_{fl}\,10^{-7}\,I^2$$

În scopul determinării forțelor electromagnetice, s-au realizat două variante de programe de calcul dintre care unul permite calculul densității de volum a forței în orice punct ale cărui coordonate se dau ca date de intrare)(programul MHD 05), iar celălalt permite calculul densității de volum a forței și a forței specifice pe unitatea de lungime într-un număr dat de secțiuni transversale (N_{st}) ale laturii de bobină (programul MHD 06). Avînd în vedere numărul mare de puncte în care se calculează forțele locale pentru ca sumele (3.31) să fie cît mai exacte, coordonatele acestor puncte se determină în programul de calcul. Organigramele de principiu ale celor două programe sînt date în figurile 3.23 și 3.24 iar structura completă a lor și rezultatele obținute sînt date în [47]. Forța locală maximă apare pe latura principală (i_p = 1 după numerotarea din fig. 3.25) în apropierea capetelor acesteia, unde s-a obținut $G_{f\,max}$ = 30,4 T/A^2 și deci pe baza relației (3.171) rezultă:

$$f_{v\,max} = 30{,}4\cdot10^{-7}\cdot(13{,}8\cdot10^{6})^2 = 579\ \mathrm{MN/m^3}$$

Forța maximă pe unitatea de lungime apare pe laturile cele mai scurte (i_p = 8;2), pentru care $G_{fl\,max}$ = 3,55 T/A^2 și rezultă din (3.31)

$$F_{l\,max} = 3{,}55\cdot10^{-7}\cdot(13{,}8\cdot10^{6})^2 = 67{,}6\ \mathrm{MN/m}$$

Referitor la componentele forței rezultante pe unitatea de lungime, acestea au valorile:

$F_{lx\,max}$ = 43 MN/m și apare pe latura i_p = 8;

$F_{ly\,max}$ = 44 MN/m și apare pe latura i_p = 1;

$F_{lz\,max}$ = 54 MN/m și apare pe latura i_p = 8.

Ținînd seama de dimensiunile secțiunii transversale a laturii de bobină acestor forțe le corespund forțe pe unitatea de suprafață

$$f_{sz} = \frac{F_{lz}}{b_x} = \frac{54}{0{,}4} = 135\ \mathrm{MN/m^2} = 13{,}5\cdot10^{3}\ \mathrm{N/cm^2}$$

$$f_{sy} = \frac{F_{ly}}{b_x} = \frac{44}{0{,}4} = 110\ \mathrm{MN/m^2} = 11\cdot10^{3}\ \mathrm{N/cm^2}$$

care solicită la compresiune (strivire) conductoarele bobinei. Dacă se integrează pozitiv forțele pe unitatea de lungime, se obțin for-

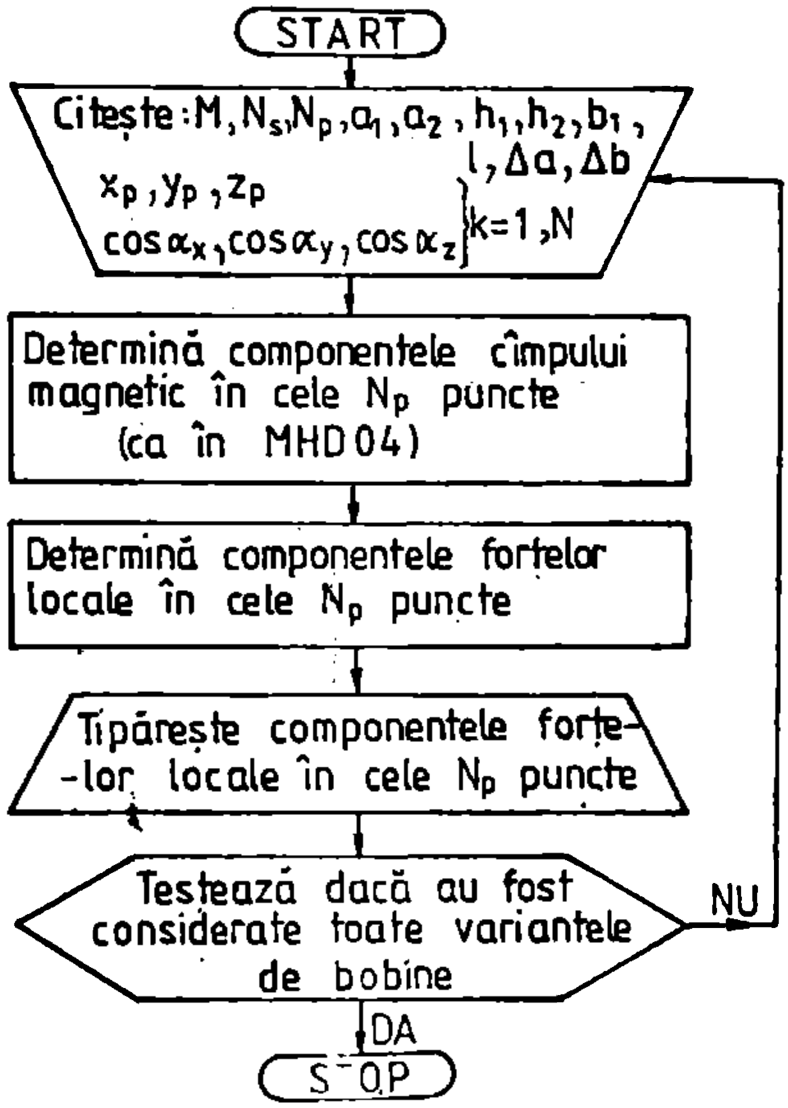
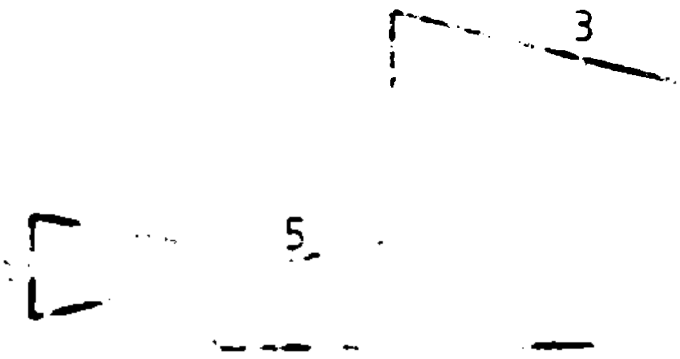


Fig 3.23 Ordinogr[illegible] de pr[illegible]
MHD 05 [illegible] cu a [illegible]



[illegible]

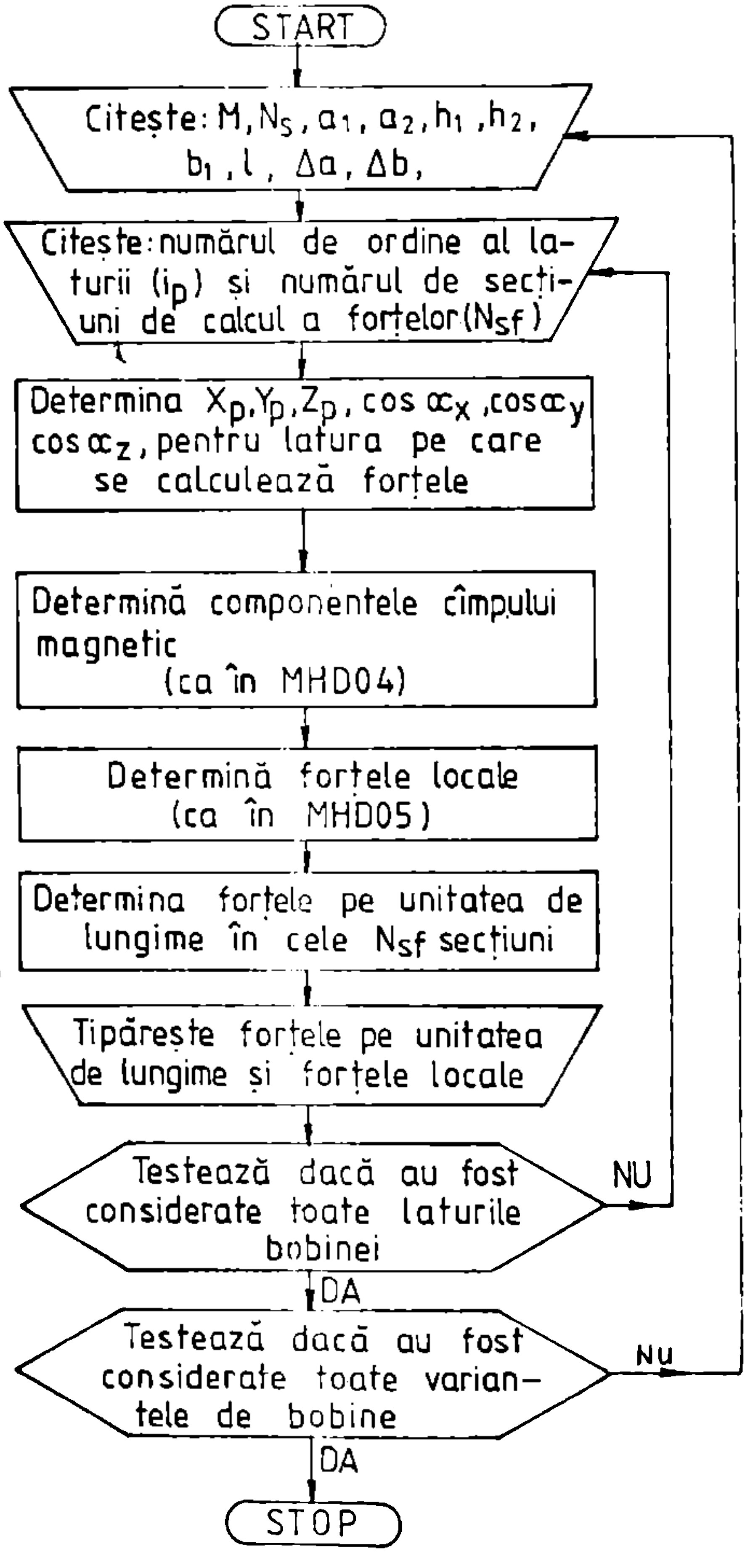


Fig. 3.24. ORDINOGRAMA DE PRINCIPIU A PROGRAMULUI MHD06 DE CALCUL A FORȚELOR LOCALE ȘI A FORȚELOR REZULTANTE PE UNITATEA DE LUNGIME

ţele rezultante care solicită bobina. Astfel, referindu-ne la direcţia cea mai defavorabilă (după axa ox), prin integrarea forţelor F_{lx} de pe laturile 1, 2 şi 8 se obţine F_x = 3010 MN. Această forţă solicită la întindere laturile 5 şi 7 ale bobinei, corespunzîndu-i o forţă specifică pe unitatea de suprafaţă transversală:

$$f_{sx} = \frac{F_x}{2 \cdot S} = \frac{3010}{2 \cdot 0{,}28} = 5370\ MN/m^2$$

Din rezultatele obţinute privind cîmpul magnetic şi forţele electromagnetice se desprind unele observaţii deosebit de importante în vederea proiectării acestei bobine. Astfel, ţinînd seama de valoarea maximă a inducţiei magnetice pe conductoarele bobinei (12,5 T) şi de parametrii critici ai materialelor supraconductoare (tabelul 1.2), rezultă că nu se va putea folosi materialul NbTi, urmînd a se utiliza Nb_3Sn sau V_3Ga. De asemenea, datorită inducţiilor magnetice mari din exteriorul bobinei (tabelul 5.4) se impun măsuri de ecranare magnetică şi respectiv restricţii de plasare a aparaturii şi instalaţiilor aferente, iar valorile deosebit de mari ale forţelor electromagnetice impun măsuri atente de consolidare a conductoarelor bobinelor.

5.2. Maşini sincrone cu excitaţie supraconductoare

Preocupările legate de folosirea înfăşurărilor supraconductoare pentru excitaţia generatoarelor sincrone sînt justificate de faptul că puterea generatoarelor sincrone convenţionale este limitată practic la 1200 - 1500 MVA în special din cauza greutăţii şi dimensiunilor extrem de mari. Pe de altă parte însă din prognozele făcute rezultă că din punct de vedere tehnico-economic se recomandă în viitor folosirea unor generatoare cu puteri de 3000 - 5000 MVA [37,100]. Pentru realizarea unor astfel de generatoare vor trebui mărite substanţial solicitările electromagnetice (inducţia magnetică şi densitatea de curent), impunîndu-se găsirea unor soluţii tehnologice care să permită aceste solicitări mărite. O astfel de soluţie o constituie folosirea înfăşurării de excitaţie supraconductoare, care oferă posibilitatea obţinerii unor cîmpuri magnetice puternice (peste 2 T) chiar în absenţa miezului feromagnetic. După cum arată studiile teoretice şi realizările experimentale [17,100, 67,115,130,134,155], absenţa miezului feromagnetic conduce la mărirea spaţiului disponibil pentru înfăşurări şi de asemenea poate fi mărită tensiunea nominală. Principalul avantaj al acestei maşini îl constituie reducerea greutăţii de aproximativ 3 ori [37].

apar însă şi alte avantaje legate de reducerea pierderilor în maşină, reducerea costului aparatelor de transformare şi conectare (ca urmare a măririi tensiunii nominale), şi altele. Faţă de cunoscutele dificultăţi legate de menţinerea temperaturii scăzute, aceste avantaje devin preponderente la puteri relativ mari, astfel încît studiile efectuate arată că generatoarele sincrone cu excitaţie supraconductoare sînt competitive cu cele clasice numai la puteri unitare mai mari de 1000 MVA [17,135].

Faţă de varianta convenţională, în afară de faptul că lipsesc piesele feromagnetice şi că înfăşurarea de excitaţie este supraconductoare, mai apar şi alte deosebiri. Astfel între înfăşurarea de excitaţie şi cea a indusului se prevede un ecran conductor pentru ca în timpul proceselor tranzitorii cîmpurile magnetice variabile ale indusului să nu pătrundă în înfăşurarea de excitaţie supraconductoare. De asemenea, maşina are în exterior un ecran feromagnetic, care este folosit şi ca suport pentru consolidarea înfăşurărilor.

Datorită acestor deosebiri constructive rezultă şi unele particularităţi privind cîmpul magnetic şi forţele electromagnetice. Astfel, cîmpul magnetic nu mai este radial, existînd şi o componentă tangenţială importantă. De asemenea, forţele electromagnetice acţionează direct asupra conductoarelor parcurse de curenţi şi nu pe suprafaţa de separaţie a fierului. Ele au valori relativ mari, astfel că se impune o bună consolidare cu materiale neferomagnetice. Din punct de vedere al calculului electromagnetic, o particularitate importantă o constituie posibilitatea aplicării principiului superpoziţiei. Această deoarece piesele feromagnetice lipsesc sau se folosesc doar în scop de ecranare şi pot fi considerate liniare, cîmpul magnetic fiind redus în acea zonă.

Dintre variantele posibile de realizare a generatoarelor sincrone cu excitaţie supraconductoare, prezintă interes cele în care indusul este plasat în exterior deoarece ventilaţia este mai bună. Mai uşor de realizat tehnologic este varianta în care excitaţia este fixă şi indusul rotitor şi de aceea primele realizări tehnice sînt de acest fel [86,87,130,134,135]. Soluţia are însă dezavantaje legate de folosirea inelelor colectoare la indus, care limitează puterea maşinii şi de aceea prezintă interes doar pentru încercări experimentale. La puteri mari, soluţia de realizare este cu excitaţie rotitoare plasată în interior şi indusul fix în exterior. Principalele dificultăţi care intervin în acest caz sînt legate de realizarea unui criostat rotitor în legătură permanentă cu instalaţia de răcire, dificultăţi care au fost deja depăşite, existînd realizări de acest tip pe plan mondial [9,17,52,64,115]. Structura unei astfel de cons-

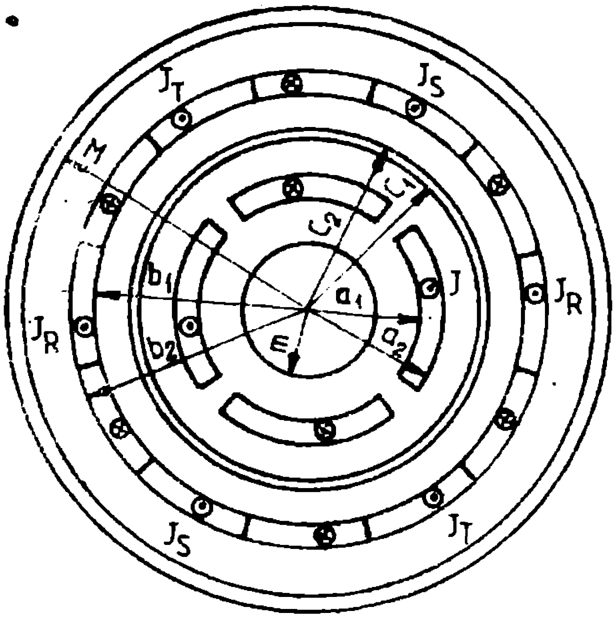


Fig. 3.26. Secțiune transversală prin mașina sincronă supraconductoare

structii în secțiune transversală este arătată principial în fig. 3.26 în care s-a considerat numărul de perechi de poli p=2, iar notațiile reprezintă: ε – raza ecranului feromagnetic interior (arborele mașinii); a_1,a_2 – razele înfășurării de excitație; b_1, b_2 – razele înfășurării indusului; c_1,c_2 – razele ecranului conductor; M – raza ecranului feromagnetic exterior. Mașina fiind lungă în comparație cu dimensiunile sale transversale, se poate neglija influența capetelor de bobină astfel că se lucrează în plan, în coordonate polare.

In acest paragraf se face o analiză a influenței ecranelor feromagnetice asupra câmpului magnetic din mașina sincronă, precum și determinarea unor parametri electromagnetici ai mașinii.

Problema a fost abordată în cadrul unui contract de cercetare științifică [32] și de asemenea în cadrul a trei articole publicate [23,24,25].

3.2.1. Câmpul magnetic la o mașină sincronă cu excitație supraconductoare în absența ecranelor

Dacă ecranele electromagnetice lipsesc sau dacă într-o primă fază acestea nu se iau în considerare, câmpul magnetic produs de o înfășurare se poate determina direct pe baza relațiilor deduse în paragr. 2.3.2, dacă înfășurarea se echivalează prin pături de curent (fig. 2.23) sau conductoare masive cu densitate de curent constantă (fig. 2.24). In acest sens se folosesc relațiile din tabelul 2.5 și respectiv relațiile (2.42) și (2.43). Astfel s-au calculat componentele inducției magnetice $B_r(\theta = \pi/2p)$ și $B_\theta(\theta = 0)$ la o înfășurare echivalată printr-o pătură de curent în cazurile p=1 sau p=2 și înfășurarea repartizată pe întreg perimetrul ($\varphi = \pi/2p$) sau pe un arc $\varphi = \pi/3p$. Rezultatele se prezintă grafic în figurile 3.27 și 3.28 în care curba cu linie punctată corespunde armonicii fundamentale ($\nu = 2k-1 = 1$).

Se constată că în cazurile în care $\varphi = \pi/2p$, adică înfășurarea ocupă întreaga suprafață a cilindrului, rezultă un câmp magnetic foarte intens pe înfășurare, ceea ce este dezavantajos dacă aceasta este

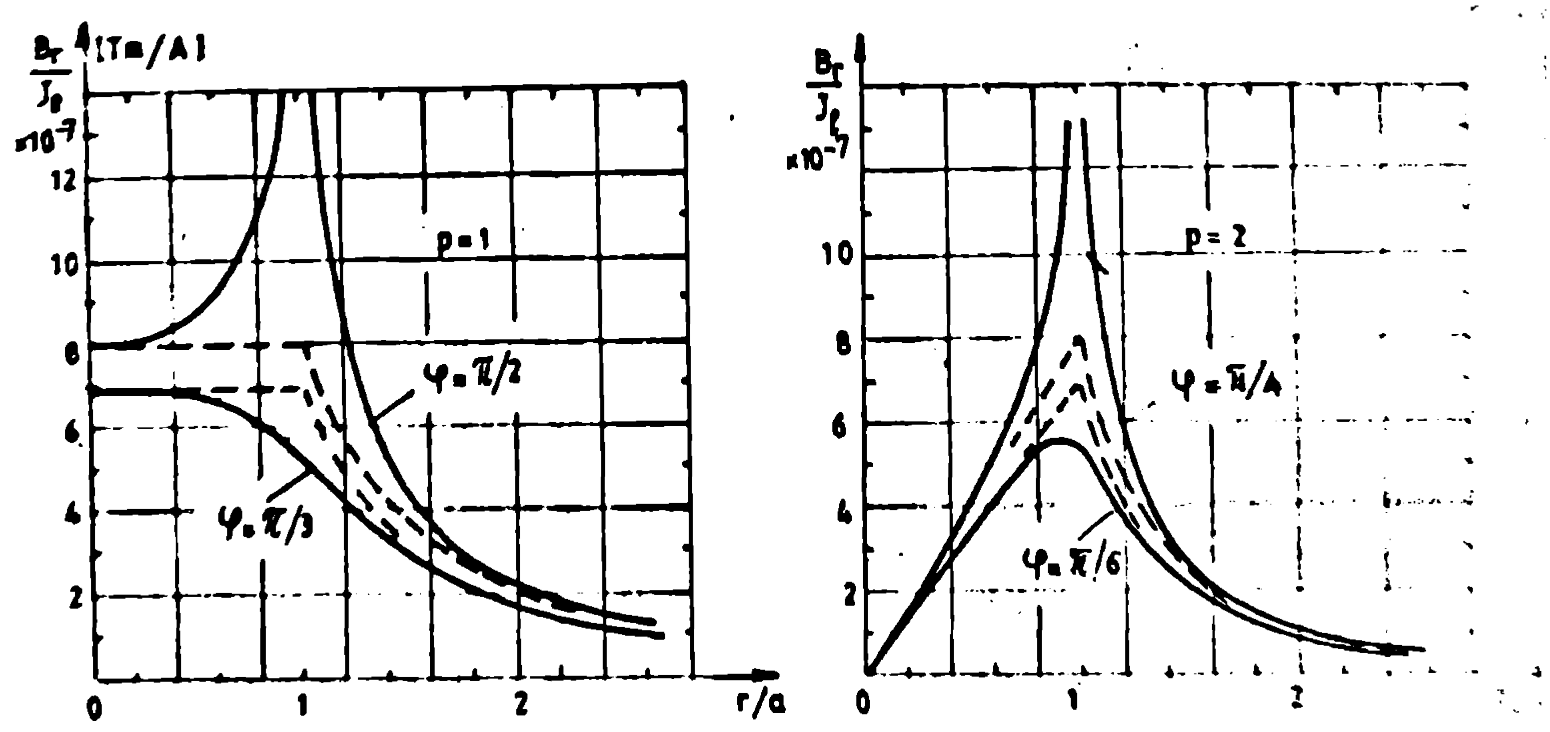


Fig. 3.27. Componenta radială a cîmpului magnetic la $\theta = \pi/2p$

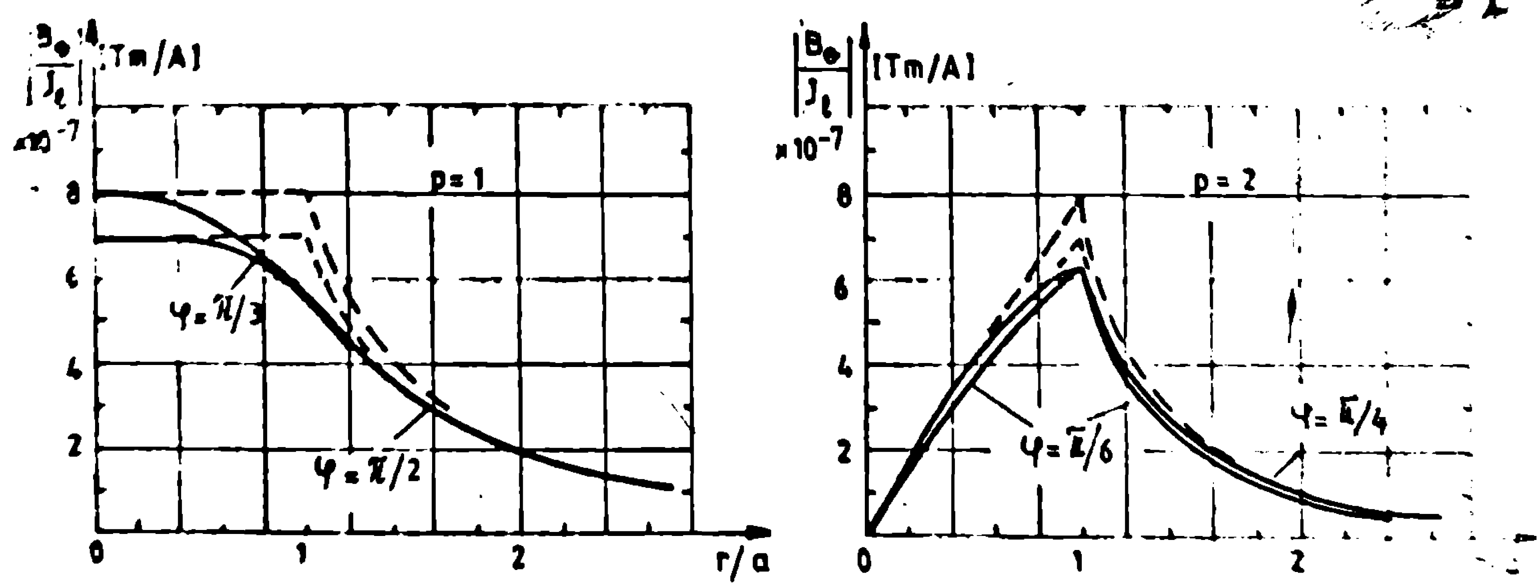


Fig. 3.28. Componenta tangențială a cîmpului magnetic la $\theta = 0$

supraconductoare. În situația că $\varphi = \pi/3p$, armonica de ordinul trei este nulă, iar cîmpul rezultant scade pronunțat în vecinătatea înfășurării.

De asemenea s-a calculat și s-a reprezentat grafic componenta radială a inducției magnetice la o înfășurare masivă cu $p = 2$, $a_2 = 1{,}3\ a_1$ și $\varphi = \pi/4$, rezultatele fiind prezentate în fig. 3.29 în care s-a considerat $J_l = J(a_2-a_1)$. Se constată că și în situația defavorabilă $\varphi = \pi/2p$, cîmpul magnetic este mai redus în dreptul înfășurării, în concordanță cu precizarea din paragraful 2.3.2 privind convergența seriilor din expresiile inducției magnetice (rel. 2.47).

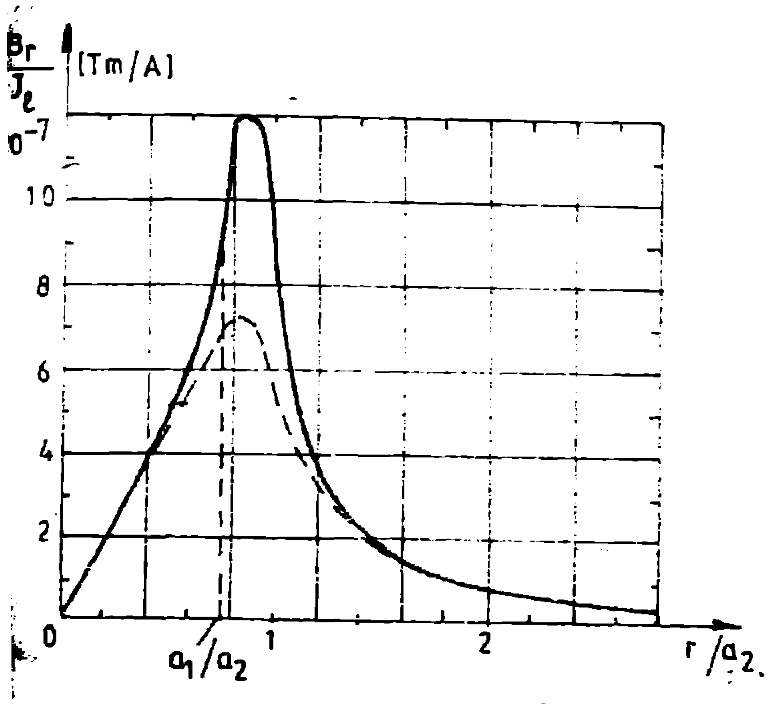


Fig. 3.29. Cîmpul magnetic la o înfășurare masivă

3.2.2. Cîmpul magnetic la o mașină sincronă cu excitație supraconductoare în prezența ecranelor

În prezența ecranelor electromagnetice, dacă acestea se consideră ideale, (ecranul conductor are $\sigma=\infty$, iar cel feromagnetic $\mu=\infty$), iar înfășurările se echivalează prin pături de curent, calculul cîmpului magnetic se poate face pe baza metodei separării variabilelor (paragr. 2.3.3) folosindu-se direct relațiile din tabelul 2.6. Pentru a avea o imagine cantitativă a influenței ecranelor asupra cîmpului magnetic produs de o înfășurare s-au considerat unele situații particulare pentru care s-a determinat componenta radială a inducției magnetice la $\varphi = \pi/2p$. Astfel s-a considerat o mașină cu două perechi de poli (p=2) și s-a neglijat influența ecranului magnetic interior, iar pătura de curent s-a considerat repartizată pe arcul $\varphi = \pi/2p = \pi/4$. Ecranul feromagnetic exterior s-a considerat în mai multe variante și anume M/a = 1,2; 1,5; 2; ∞, ultimul caz corespunzînd situației în care ecranul lipsește. Variația componentei radiale a inducției magnetice în cazurile considerate este reprezentată în figura 3.30, constatîndu-se o creștere a inducției magnetice în prezența ecranului feromagnetic.

Deoarece interesează îndeosebi armonica fundamentală (ν = 1, n = 2), s-a reprezentat grafic în fig. 3.31 influența ecranului feromagnetic asupra componentei radiale a acestei armonici.

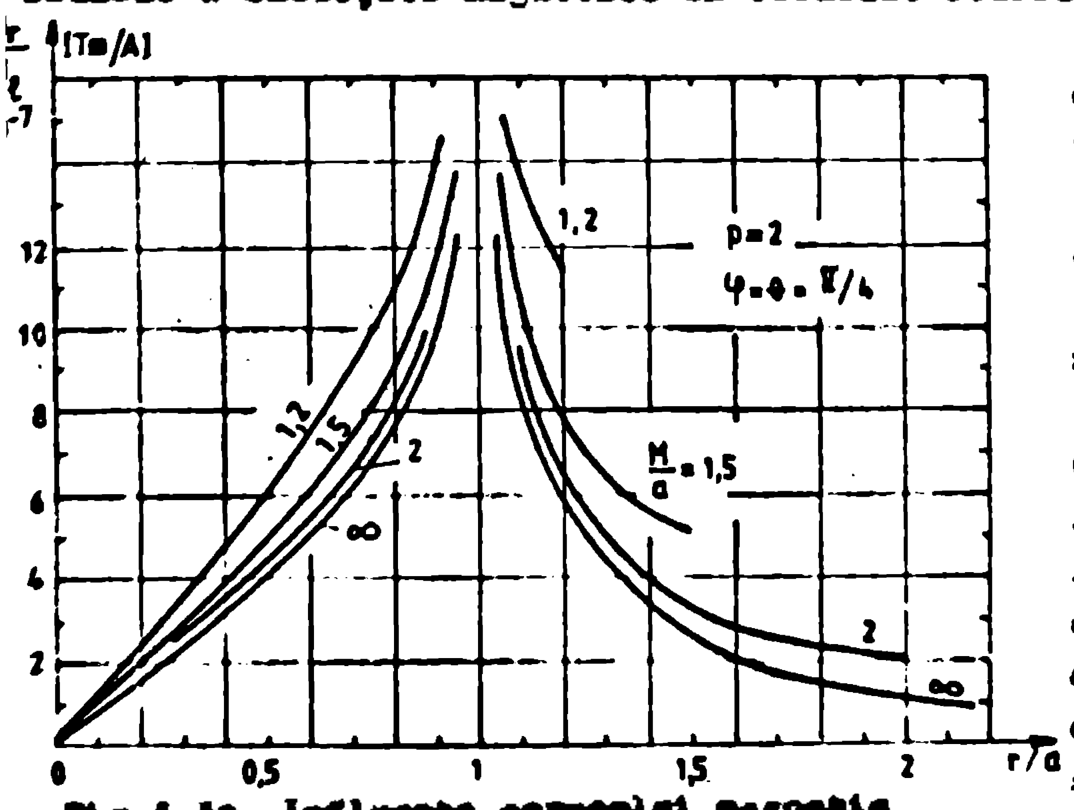


Fig. 3.30. Influența ecranului magnetic asupra inducției magnetice

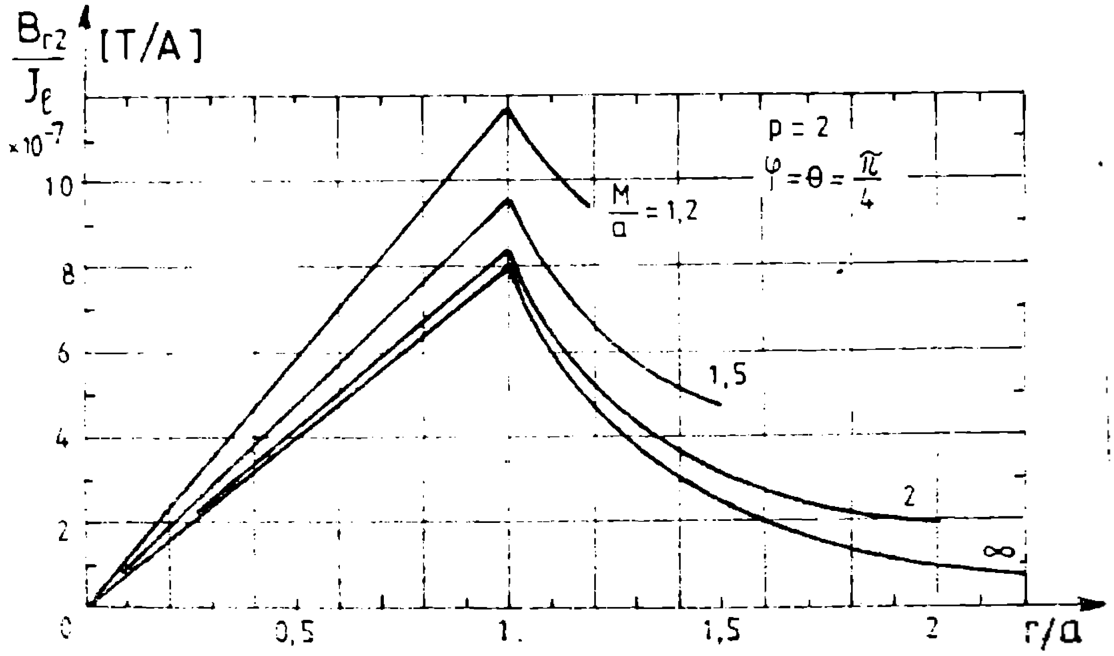


Fig. 3.31. Influența ecranului magnetic exterior asupra armonicii fundamentale a inducției magnetice

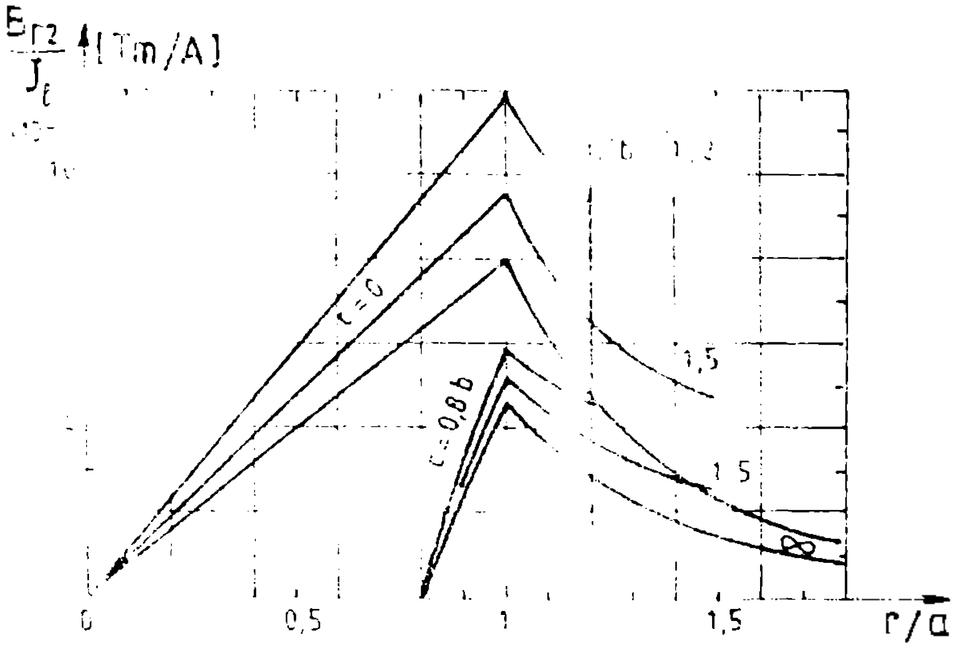


Fig. 3.32. Influența ecranului electric asupra armonicii fundamentale a inducției magnetice

Referitor la influența ecranului conductor asupra cîmpului magnetic produs de înfășurarea indusului în timpul proceselor tranzitorii, s-a reprezentat grafic în fig. 3.32 variația armonicii fundamentale a componentei radiale a inducției magnetice în situația că raza acestui ecran este c = 0,8 b. Se constată o scădere pronunțată a inducției magnetice în prezența ecranului conductor. Ca urmare a celor prezentate, rezultă că influența ecranelor electromagnetice asupra cîmpului magnetic este pronunțată, astfel încît aceste ecrane nu pot fi neglijate la calculul cîmpului magnetic.

3.2.3. Determinarea unor parametri ai mașinilor sincrone cu excitație supraconductoare

Datorită deosebirilor constructive, îndeosebi absenței miezurilor feromagnetice, parametrii mașinilor sincrone cu excitație supraconductoare sînt diferiți față de cazul mașinilor clasice. Deosebit de importantă este cunoașterea inductivităților (reactanțelor) proprii și mutuale în cadrul diferitelor regimuri de funcționare: permanent, tranzitoriu sau subtranzitoriu. S-a considerat în contisoare situaţia în care înfăşurările sînt echivalate prin pînze de curent şi intervin ecuaţiile electromagnetice (fig. 2.25) considerate ideale.

Determinarea inductivităţilor proprii şi mutuale se poate face fie din expresia energiei magnetice

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \overline{B}\,\overline{H}\,dv = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2\,dv \qquad (5.32)$$

fie pe baza relaţiei de definiţie $L = \psi/i$.
Astfel dacă se notează cu indicele "1" mărimile referitoare la inductor şi cu "2" cele referitoare la indus, expresia (5.32) se scrie în forma:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_V (\overline{B}_1+\overline{B}_2)^2\,dv = W_{m11}+W_{m22}+W_{m12} \qquad (5.33)$$

în care:

$$W_{m_{ij}} = \frac{1}{2\mu_0}\int_V \overline{B}_i\overline{B}_j\,dv \qquad (5.34)$$

Deoarece energia magnetică se poate scrie şi funcţie de inductivităţi şi curenţi, $W_m = \frac{1}{2}L_{11}\,i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}\,i_2^2 + L_{21}\,i_1 i_2$, rezultă:

$$L_{11} = \frac{2W_{m11}}{i_1^2} = \frac{1}{\mu_0 i_1^2}\int_V B_1^2\,dv$$

$$L_{22} = \frac{2W_{m22}}{i_2^2} = \frac{1}{\mu_0 i_2^2}\int_V B_2^2\,dv \qquad (5.35)$$

$$L_{21} = \frac{W_{m12}}{i_1 i_2} = \frac{1}{\mu_0 i_1 i_2}\int_V \overline{B}_1\overline{B}_2\,dv$$

în care pentru inducţiile magnetice se folosesc expresiile din tabelul 2.6. Rezultatele obţinute prin rezolvarea integralelor de volum din (5.35) sînt prezentate în [25], [illegible] detaliat [illegible] de calcul, pe baza relaţiilor de [illegible] inductivităţilor [illegible] inductivităţile se pot [illegible]

$$L_{11} = \frac{\psi_{11}}{i_1}\ ;\quad L_{22} = \frac{\psi_{22}}{i_2}\ ;\quad L_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_2} \qquad (5.36)$$

în care ψ_{ij} sînt fluxurile magnetice corespunzătoare [illegible] componenta radială a inducţiei magnetice [illegible] excitaţie (fig), fluxul magnetic printr-o spiră echivalentă [illegible] spire plasată ca în figura 5.13 are expresia:

$$d\,\psi_{22} = l\,dz_2\int_{\alpha}^{\alpha+\pi/p} B_r(z,\theta)\,r\,d\theta \qquad (5.37)$$

în care l este lungimea conductorului, iar B_r are expresia din tabelul 2.6. Considerînd numai armonica fundamentală şi sistemul de referinţă legat de rotor, B_r este de forma:

$$B_r(a,\theta) = B_m(a)\sin p\theta$$

astfel că din (3.37) se obține:

$$d\Psi_{22} = l\,a\,dN_2 B_m(a)\,\frac{2}{p}\cos p\alpha \qquad (3.38)$$

Dacă numărul total de spire este N_2, atunci dN_2 se poate exprima în forma: $dN_2 = N_2 d\alpha/2\varphi p$, iar fluxul total care înlănțuie bobina de excitație se obține prin integrare:

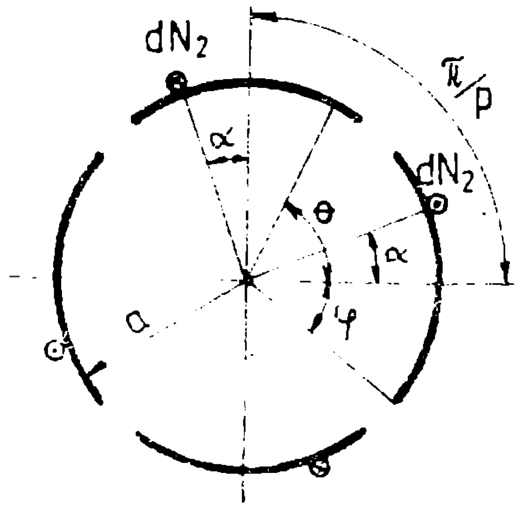


Fig. 3.33. [illegible] privind calculul inducției magnetice

$$\Psi_{22} = p\int_{-\varphi}^{\varphi} d\Psi_{22} = pB_m(a)\,\frac{laN_2}{\varphi p^2}\cos p\alpha\, d\alpha$$

$$= B_m(a)\,\frac{alN_2}{\varphi p^2}\,2\sin p\varphi = B_m(a)\,\frac{alN_2}{p}\,2\,\xi_{22} \qquad (3.39)$$

în care $\xi_{22} = \frac{\sin p\varphi}{p\varphi}$.

Ținând seama că J_l se exprimă funcție de amperspirele înfășurării în forma $J_l = I_2N_2/2\varphi ap$, din tabelul 2.6 rezultă valoarea amplitudinii inducției magnetice:

$$B_m(a) = \mu_0\,\frac{I_2N_2}{\pi a}\,\xi_{22}\,\frac{1+(\frac{a}{M})^{2p}}{1-(\frac{m}{M})^{2p}}\left[1+(\frac{m}{a})^{2p}\right]$$

și înlocuind în (3.39) rezultă:

$$\Psi_{22} = \mu_0\,\frac{2lI_2N_2^2}{\pi p}\,\xi_{22}^2\,\frac{1+(\frac{a}{M})^{2p}}{1-(\frac{m}{M})^{2p}}\left[1+(\frac{m}{a})^{2p}\right] \qquad (3.40)$$

iar inductivitatea proprie a bobinei devine:

$$L_{22} = \mu_0\,\frac{2l}{\pi p}N_2^2\,\xi_{22}^2\,\frac{1+(\frac{a}{M})^{2p}}{1-(\frac{m}{M})^{2p}}\left[1+(\frac{m}{a})^{2p}\right] \qquad (3.41)$$

Pentru inductivitatea proprie a înfășurării indusului se obține o formă similară cu (3.41), însă ținînd seama că amplitudinea cîmpului magnetic învîrtitor este 3/2 din amplitudinea cîmpului oscilant, rezultă:

$$L_{11} = \mu_0\,\frac{3l}{\pi p}N_1^2\,\xi_{11}^2\,\frac{1+(\frac{b}{M})^{2p}}{1-(\frac{m}{M})^{2p}}\left[1+(\frac{m}{b})^{2p}\right] \qquad (3.42)$$

În același mod se poate obține și inductivitatea mutuală dintre înfășurarea de excitație și cea a indusului. Astfel, deoarece

$$\Psi_{21} = B_m(b)\,\frac{2bl}{p}\,N_1\,\xi_{11}$$

și ținînd seama că din tabelul 2.6 rezultă

$$B_m(b) = \mu_0 \frac{i_2 N_2}{\pi a} \xi_{22} \frac{1+(\frac{a}{b})^{2p}}{1-(\frac{a}{b})^{2p}} (\frac{a}{b})^{p+1} \left[1+(\frac{b}{a})^{2p}\right]$$

se obține expresia:

$$L_{21} = \mu_0 \frac{2l}{\pi p} N_1 N_2 \xi_{11} \xi_{22} (\frac{a}{b})^p \frac{1+(\frac{a}{b})^{2p}}{1-(\frac{a}{b})^{2p}} \left[1+(\frac{b}{a})^{2p}\right] \quad (3.43)$$

In absența miezurilor feromagnetice ($a\to 0, b\to\infty$) inductivitățile bobinelor au expresiile:

$$L_{220} = \mu_0 \frac{2l}{\pi p} N_2^2 \xi_{22}^2 \quad ; \quad L_{110} = \mu_0 \frac{2l}{\pi p} N_1^2 \xi_{11}^2$$

$$L_{210} = \mu_0 \frac{2l}{\pi p} N_1 N_2 \xi_{11} \xi_{22} (\frac{a}{b})^p \quad (3.44)$$

Iar prezența miezurilor conduce la creșterea acestor inductivități. Astfel în figurile 3.34 și 3.35 se reprezintă grafic modul de variație

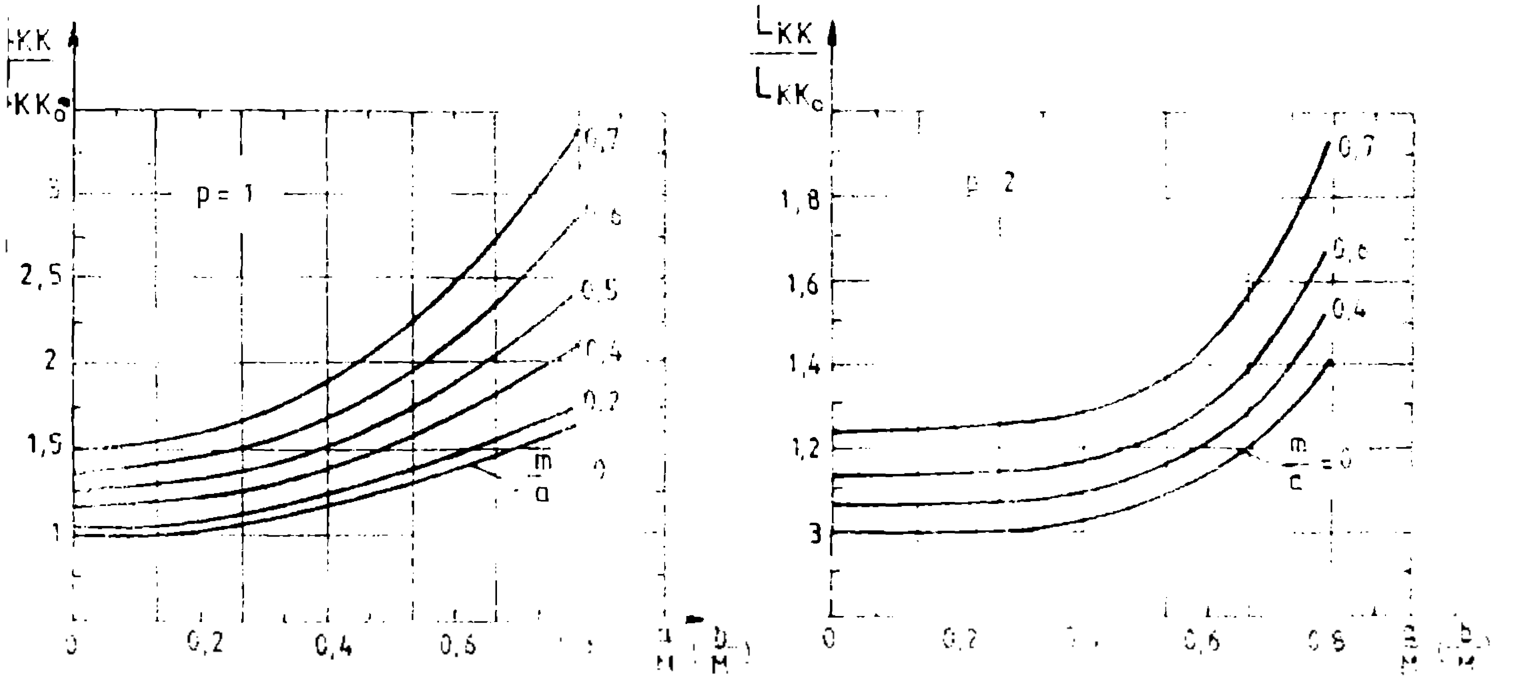


Fig. 3.34. Dependența inductivităților proprii de razele miezurilor feromagnetice

al acestor inductivități în funcție de razele miezurilor feromagnetice pentru p=1 și p=2 și b/a = 1,4.

In cazul [illegible], inductivitățile înfășurărilor sînt diferite de cele din cazul regimului permanent datorită influenței ecranului [illegible]. Analizînd expresiile inductivităților din tabelul 3.6 se constată că acestea sînt asemănătoare și diferă doar prin faptul că apare σ^{-2p} în loc de a^{-2p}. Aceasta înseamnă că în regimul [illegible] în care cîmpurile magnetice variază [illegible], inductivitățile proprii se determină din (3.42) și (3.44) în care se înlocuiește a^{2p} cu σ^{2p}, adică:

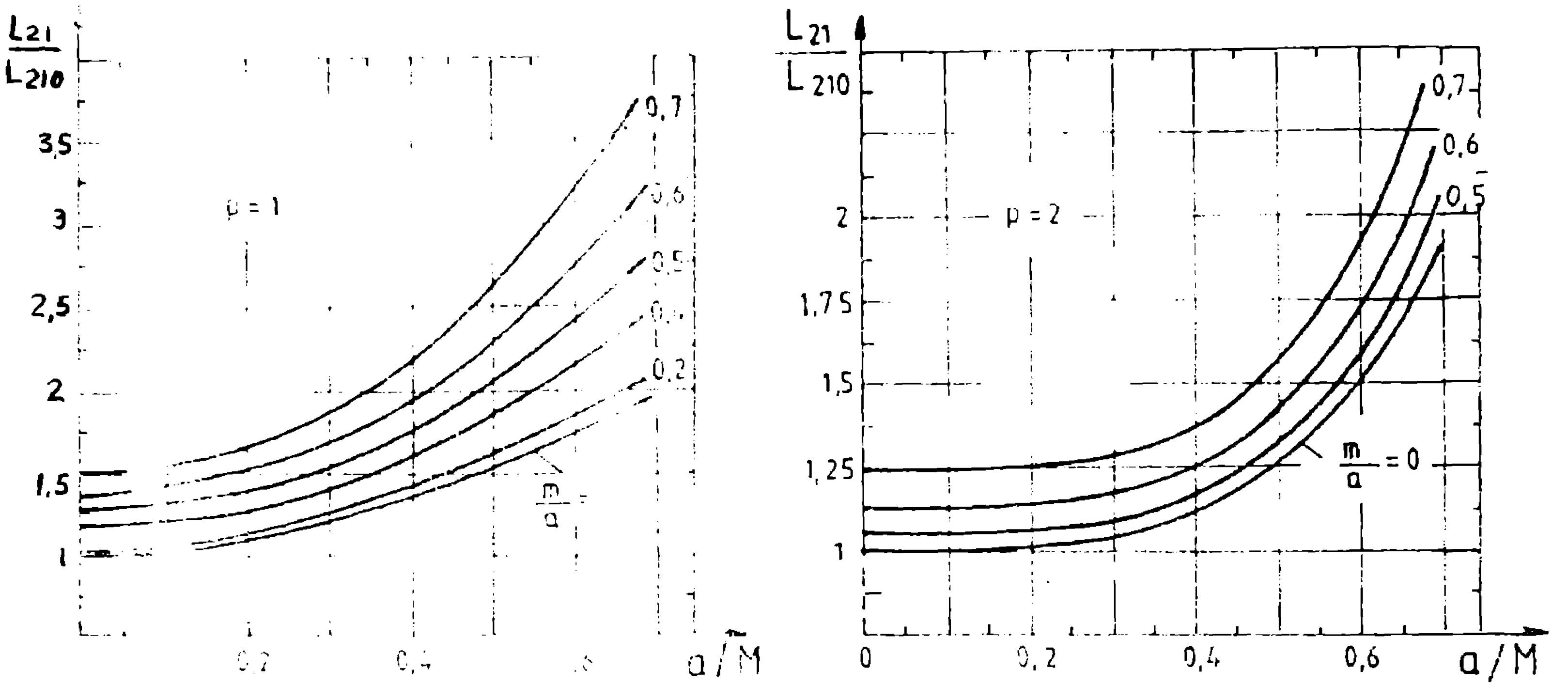


Fig. 3.39. Dependenţa inductivităţii mutuale de razele ecranelor feromagnetice

$$L''_{22} = \mu_0 \frac{2l}{\pi p} N_2^2 \xi_{22}^2 \frac{1-(\frac{a}{c})^{2p}}{1+(\frac{a}{c})^{2p}}\left[1+(\frac{m}{a})^{2p}\right] \qquad (3.45)$$

$$L''_{11} = \mu_0 \frac{2l}{\pi p} N_1^2 \xi_{11}^2 \frac{1-(\frac{b}{c})^{2p}}{1+(\frac{b}{c})^{2p}}\left[1+(\frac{m}{b})^{2p}\right] \qquad (3.46)$$

Similar, în timpul regimului tranzitoriu înfăşurarea indusului fiind ecranată de înfăşurarea de excitaţie şi invers, inductivităţile se obţin înlocuind în relaţia (3.45) pe c cu b, iar în relaţia (3.46) pe c cu a. Se obţin astfel:

$$L'_{22} = \mu_0 \frac{2l}{\pi p} N_2^2 \xi_{22}^2 \frac{1-(\frac{a}{b})^{2p}}{1+(\frac{a}{b})^{2p}}\left[1+(\frac{m}{a})^{2p}\right] \qquad (3.47)$$

$$L'_{11} = \mu_0 \frac{2l}{\pi p} N_1^2 \xi_{11}^2 \frac{1-(\frac{b}{a})^{2p}}{1+(\frac{m}{a})^{2p}}\left[1+(\frac{m}{b})^{2p}\right] \qquad (3.48)$$

Pe baza expresiilor stabilite se pot face aprecieri privind folosirea adecvată a ecranelor electromagnetice, respectiv influenţa acestora asupra parametrilor maşinii fără ca să se analizeze în lucrare în mod special acest aspect. Astfel se menţionează că datorită absenţei miezurilor feromagnetice, reactanţa sincronă rezultă pronunţat mai mică decît la maşinile convenţionale, de cca 3-5 ori mai mică [9,22,62]. Reactanţele tranzitorii şi subtranzitorii sînt mai puţin afectate, ele corespunzînd în principal unor cîmpuri de dispersie. În această situaţie se poate aprecia că maşina sincronă cu excitaţie supraconductoare are o stabilitate statică şi dinamică mai bună. Comportarea ei la scurtcircuite de durată este însă dezavantajoasă.

3.3. Solenoizi pentru cîmpuri magnetice puternice

Bobinele sub formă de solenoizi se folosesc pentru generarea cîmpurilor magnetice într-o mare diversitate de domenii, după cum s-a arătat şi în paragr. 1.2. În legătură cu performanţele acestor bobine apar două aspecte care determină în principal modul de proiectare al acestora. Astfel, dacă nu interesează uniformitatea cîmpului magnetic ci doar valoarea acestuia, proiectarea bobinei se va face astfel încît să se folosească un volum minim de material conductor (supraconductor). Dacă se impune gradul de uniformitate a cîmpului magnetic produs în zona utilă, dimensiunile geometrice alese nu vor mai respecta cerinţa de volum minim. Şi în acest caz însă se impune analizarea mai multor variante posibile, dintre care se va reţine acea care foloseşte un volum cît mai redus de material conductor. Rezultă că o mărime sintetică de mare importanţă privind aprecierea performanţelor unui solenoid, este raportul dintre inducţia magnetică în centrul solenoidului şi volumul acestuia:

$$k = B/v \quad [T/m^3] \qquad (3.49)$$

Ţinînd seama de notaţiile uzuale (fig. 2.31), volumul solenoidului se exprimă în forma:

$$v = 2b\pi(a_2^2 - a_1^2) = 2\pi a_1^3\beta(\alpha^2-1) = a_1^3 v^*(\alpha,\beta) \qquad (3.50)$$

iar inducţia magnetică în centrul solenoidului se exprimă pe baza relaţiei (2.68).

Dacă bobina considerată este rezultată dintr-o combinaţie de solenoizi, atunci v şi B se exprimă prin relaţiile:

$$v = 2\pi \sum_{1}^{n} a_{1i}^3 \beta_i(\alpha_i^2 - 1)$$

$$B = \sum_{1}^{n} J_i a_{1i} F(\alpha_i, \beta_i) \qquad (3.51)$$

3.3.1. Determinarea cîmpului magnetic produs de un solenoid sau de o combinaţie de solenoizi

Pentru a putea aprecia sub diferite aspecte multiplele variante luate în considerare, este necesar să se poată determina rapid şi suficient de exact distribuţia spaţială a cîmpului magnetic. În acest scop s-au aplicat două dintre metodele prezentate în cap. 2 şi anume cea bazată pe integrarea numerică a relaţiei lui Biot-Savart-Laplace (paragr. 2.2.1) şi cea bazată pe dezvoltarea în serie a potenţialului magnetic scalar (paragr. 2.4.1).

Referitor la prima metodă, s-a realizat programul de calcul CMS2, care constituie de fapt o particularizare a programului general de calcul al cîmpului magnetic pentru o bobină de formă oarecare. Particularizarea se referă la generarea în program a coordonatelor vîrfurilor conturului poligonal al spirelor de calcul şi la faptul că se ţine seama de simetria bobinei faţă de planul central. Structura programului este prezentată în anexa A1.

Referitor la cea de-a doua metodă, s-a realizat un program de calcul (CMS1) pe baza expresiilor componentelor inducţiei magnetice corespunzătoare unei perechi de spire (rel. 2.80 sau 2.81) şi a însumării contribuţiilor tuturor perechilor de spire (rel. 2.82, 2.83 sau 2.84). In cadrul programului de calcul realizat a fost necesară depăşirea unor dificultăţi legate de calculul seriilor din relaţiile (2.80) şi (2.81). Astfel, pentru evitarea unor calcule inutile în situaţia unei convergenţe slabe a seriilor, s-a impus limitarea numărului de termeni ai acestora, ceea ce în program s-a realizat prin limitarea ordinului polinoamelor Legendre la valoarea KM. Pe de altă parte, în situaţia unei convergenţe rapide a seriilor se poate obţine o reducere substanţială a timpului de calcul dacă se neglijează termenii seriei de la un anumit ordin în sus, în acest scop fiind necesară introducerea unui anumit criteriu de precizie. Ţinînd seama de faptul că termenii din seriile considerate pot să nu descrească monoton cu ordinul acestora, putînd apare situaţia că după un termen de valoare mică să urmeze un termen de valoare mai mare, s-a considerat obţinută precizia impusă atunci cînd

$$|b_n| + |b_{n-1}| \leq \varepsilon \qquad (3.52)$$

adică suma modulelor ultimilor doi termeni ai seriei este sub o valoare impusă ε.

Principala dificultate care apare, o constituie faptul că seriile din relaţiile (2.80) şi (2.81) nu sînt convergente pentru r=c, iar convergenţa este foarte redusă pentru r≈c. Acesta este un dezavantaj al metodei, deoarece înseamnă că nu se poate determina cîmpul magnetic pentru puncte situate oriunde în zona $r_{min} < r < r_{max}$ (fig. 3.36) existînd una sau mai multe perechi de spire pentru care r=c. Pentru depăşirea acestui neajuns a fost adoptată soluţia de calcul a inducţiei magnetice în alte două puncte vecine celui considerat, iar valoarea în punctul dorit se determină prin extrapolare. Astfel pentru r = (0,98 ÷ 1)c, se calculează inducţia magnetică în

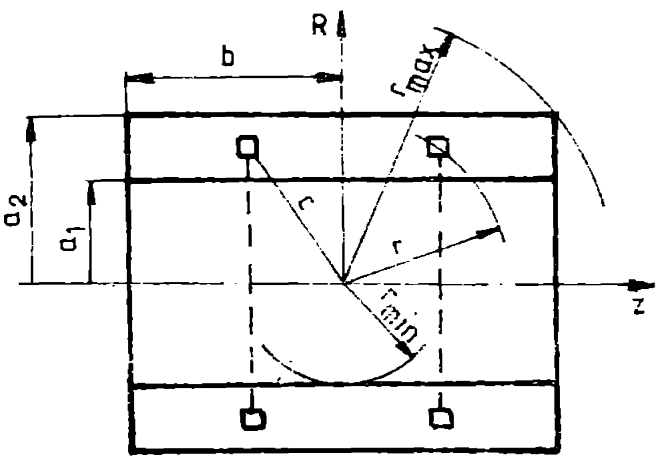


Fig. 3.36. Explicativă privind zona de convergență a relațiilor de calcul al cîmpului magnetic

punctele cu $r_1 = 0,96$ c şi $r_2 = 0,97$ c (şi acelaşi θ), iar dacă $r = (1 \div 1,02)c$, se calculează în punctele $r_1 = 1,04$ c şi $r_2 = 1,050$. Se poate aprecia că eroarea ce se face datorită extrapolării liniare este neglijabilă atât datorită faptului că punctele vecine considerate sînt apropiate de punctul inițial, cît şi datorită faptului că pentru celelalte perechi de spire nu intervine această aproximare.

Ordinograma de principiu a programului de calcul elaborat este prezentată în fig. 3.37 iar structura programului în anexa A2.

În scopul aprecierii comparative a rezultatelor obținute cu ajutorul celor două programe de calcul, acestea s-au aplicat în cazul unei perechi de spire circulare (Helmholtz) de rază a = 0,5 m. Luîndu-se numărul de laturi $N_l = 25$ în programul CMS2 şi $\varepsilon = 10^{-5}$ în programul CMS1, s-au obținut rezultate practic identice, adică sub aspectul preciziei de calcul cele două metode sînt comparabile. Referitor la timpul de calcul însă, pot apare deosebiri destul de mari. Astfel, dacă la prima metodă (CMS2) timpul de calcul nu depinde de poziția punctului de calcul, în metoda a doua (CMS1) acesta depinde pronunțat atît de unghiul θ, cît mai ales de raportul r/c. Dacă r diferă sensibil de c ($r < 0,7$ c sau $c < 0,7$ r), seriile sînt rapid convergente şi timpul de calcul este mai redus decît la prima metodă. Dacă în schimb r = 0,98 c, ordinul polinoamelor Legendre ajunge la 500 şi deci timpul de calcul este sensibil mai mare decît la prima metodă. Pe baza analizei prezentate se pot face următoarele recomandări privind utilizarea celor două programe de calcul în cazul solenoizilor:

- pentru puncte situate în zona $r < a_1$ sau $r > \sqrt{b^2+a_2^2}$ se recomandă metoda bazată pe seriile cu polinoame Legendre (programul CMS1);
- pentru puncte situate în secțiunea transversală a bobinei, se recomandă metoda bazată pe relația lui Biot-Savart-Laplace (programul CMS2). Cealaltă metodă nu se recomandă îndeosebi din cauza complicațiilor legate de faptul că punctele de calcul nu pot fi luate chiar pe spirele filiforme, ci între acestea (ca în fig. 2.14,a);
- pentru puncte nesituate în secțiunea transversală a bobinei,

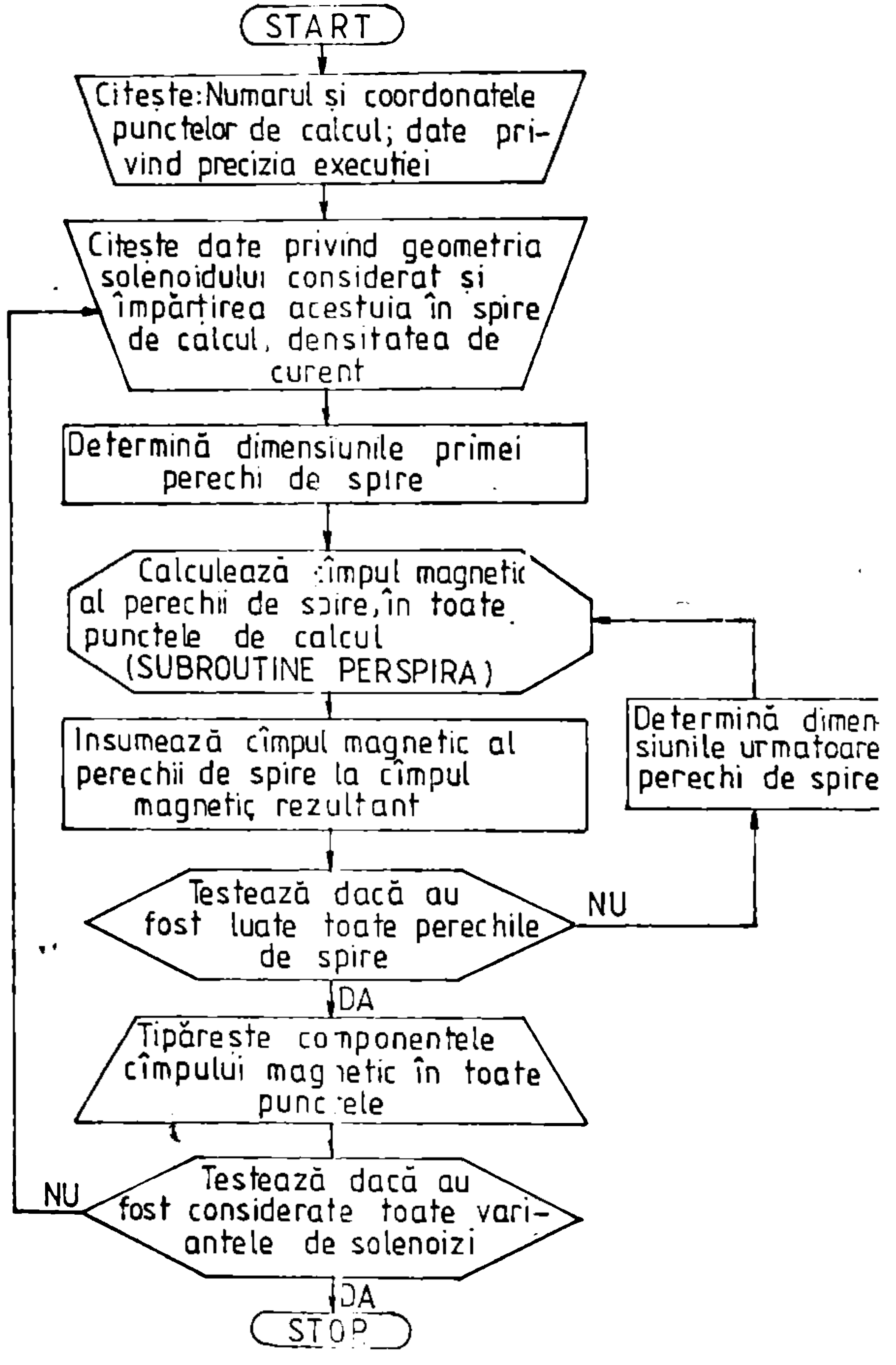


Fig. 3.37a Ordinogr ... de prin ... alcul ... ului ma ... olenoi ... za ... gend ... L)

dar cuprinse între $a_1 < r < \sqrt{b^2+a_2^2}$ se pot folosi ambele metode, cu preferinţe pentru prima, aceasta fiind mai simplă.

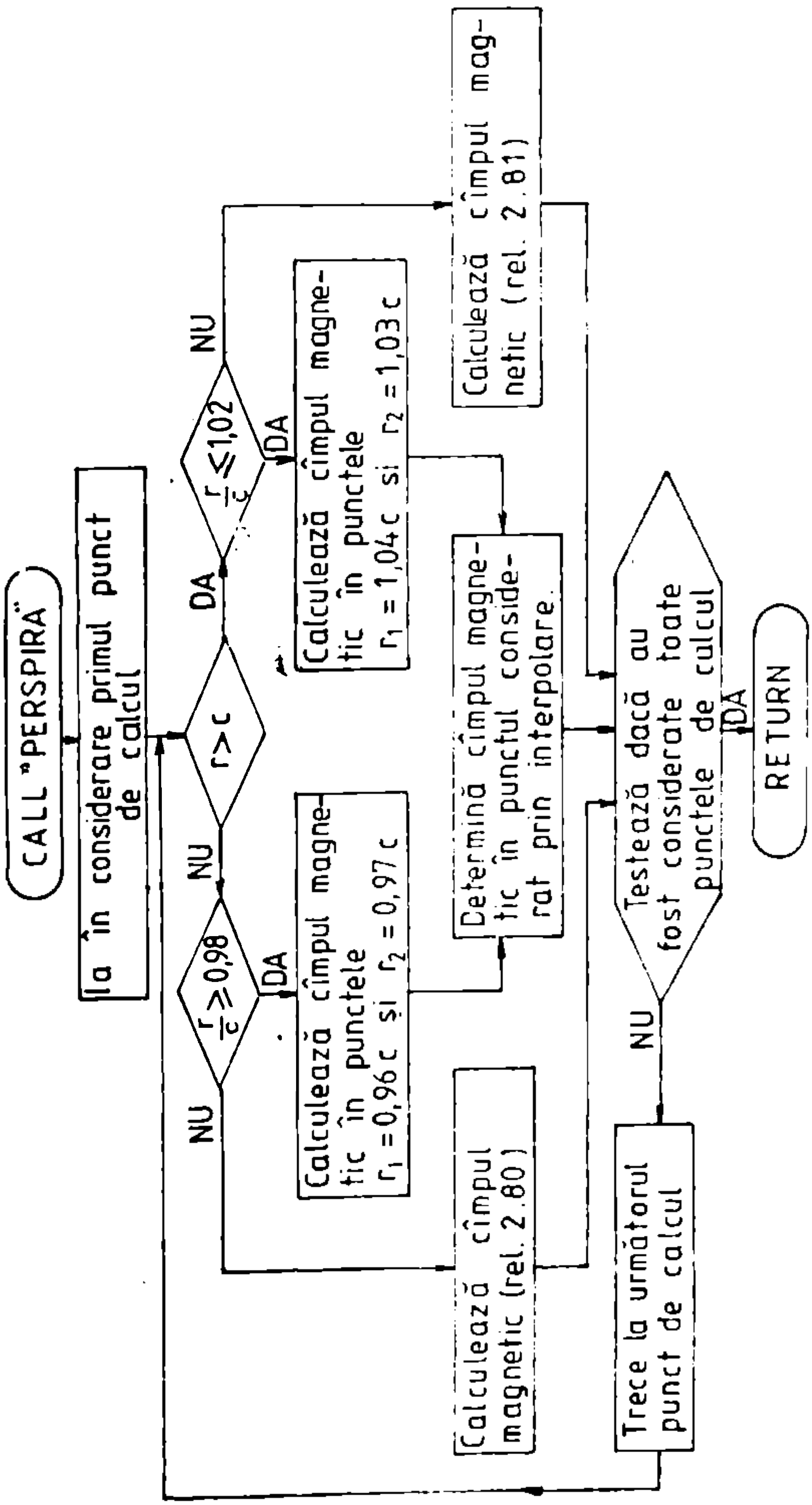


Fig. 3.37 b. Ordinograma de principiu a subprogramului de calcul al cîmpului magnetic al unei perechi de spire circulare

3.3.2. Analiza unor variante de compensare la densitate de curent constantă pe secțiune

Pentru aprecierea performanțelor obținute prin aplicarea unor tehnici de compensare, s-au luat în considerare mai multe variante de solenoizi, toate avînd același diametru interior și aceeași lungime. Solenoidul de bază de la care s-a pornit, varianta (a), are dimensiunile din fig.3.38, adică: a_1=3o mm; $\alpha = a_2/a_1 = 1,5$; $\beta = b/a_1 = 2,7$, iar densitatea de curent s-a considerat constantă pe întreaga secțiune transversală și cu valoarea J=4oo A/mm^2. Această valoare relativ mare s-a admi[s] ținînd seama de caracteristica critică (fig.1.6) și de dimensiunile reduse ale bobinei.

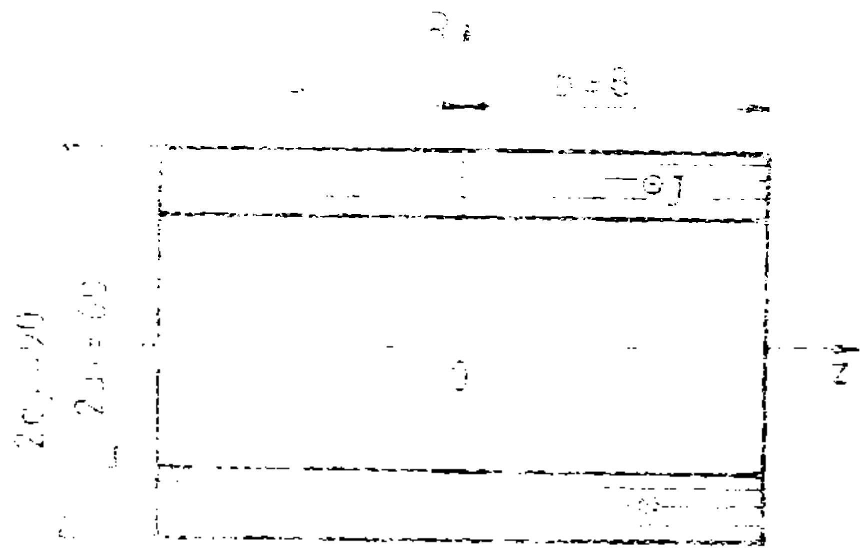


Fig.3.38. Dimensiunile solenoidului de bază (var.a)

Pentru aceste date din relațiile (2.88),(3.5o) și (3.4[9]) rezultă: B_0=6,838 T; v=572,55 cm^3; k=11943 T/m^3.

In vederea îmbunătățirii gradului de uniformitate a cîmpului magnetic s-au aplicat unele metode de compensare indicate în paragr. 2.4.2. Astfel, pentru compensare de ordinul patru (fig.2.32) trebuie îndeplinită condiția (2.94) din care rezultă β_c=o,o33, adică b_c=o,99 mm. Considerîndu-se în continuare b_c=1 mm, din relațiile (3.51) și (3.49) se obține pentru această variantă, (b).: B_0=6,635T; v=565,48 cm^3; k=1173o T/m^3.

Pentru compensare de ordinul șase se pot aplica soluțiile din fig.2.33 sau 2.35, obținîndu-se variantele (c) și (d). Pentru varianta (c), soluția se obține grafic pe baza relațiilor (2.95). Astfel deoarece $FA_2(\alpha,\beta)$= −o,o169o5 și $FZ_4(\alpha,\beta)$= −o,oo2167, rezultă din reprezentarea grafică din fig.3.39 parametrii solenoidului de compensare α_c=1,o6 și β_c=1,o8 adică a_c=31,8 mm și b_c=32,4 mm. Rotunjind aceste valori la a_c=32 mm și b_c=33 mm, se obține: B_0=6,1o6T; v=546,78cm^3; k=117ooT/m^3.

Pentru varianta (d) trebuie satisfăcute relațiile (2.96) și dacă se pornește de la același solenoid de bază se constată că rezultă o descreștere exagerată a cîmpului magnetic în zona utilă. Pentru a evita aceasta, se consideră un alt solenoid de bază avînd α = 1,9 iar celelalte caracteristici rămînînd aceleași.

Ținînd seama că $\alpha FZ_2(\alpha,\beta)$ = − o,o6575 și $\alpha^3 FZ_4(\alpha,\beta)$ = = − o,o24854, rezultă din reprezentarea grafică (fig. 3.4o) că nu

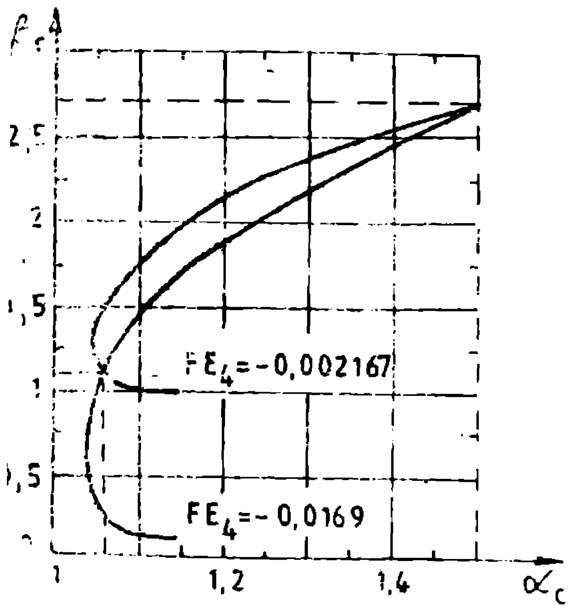


Fig.3.39. Determinarea parametrilor solenoidului de compensare la varianta (c)

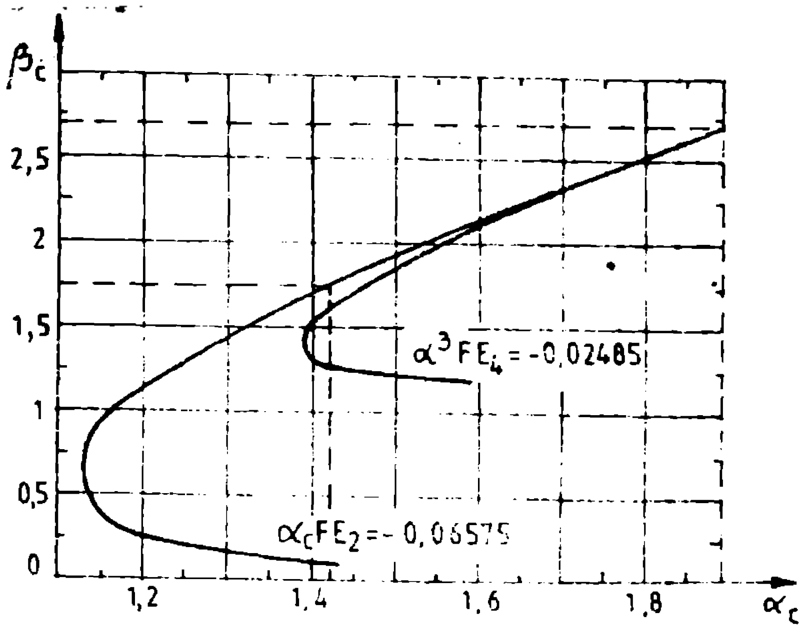


Fig. 3.40. Determinarea parametrilor solenoidului de compensare la varianta (d)

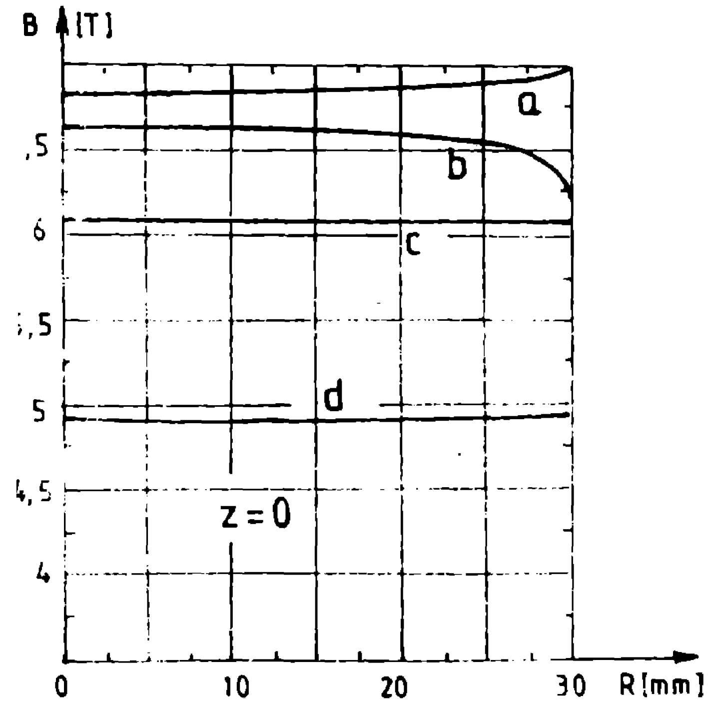
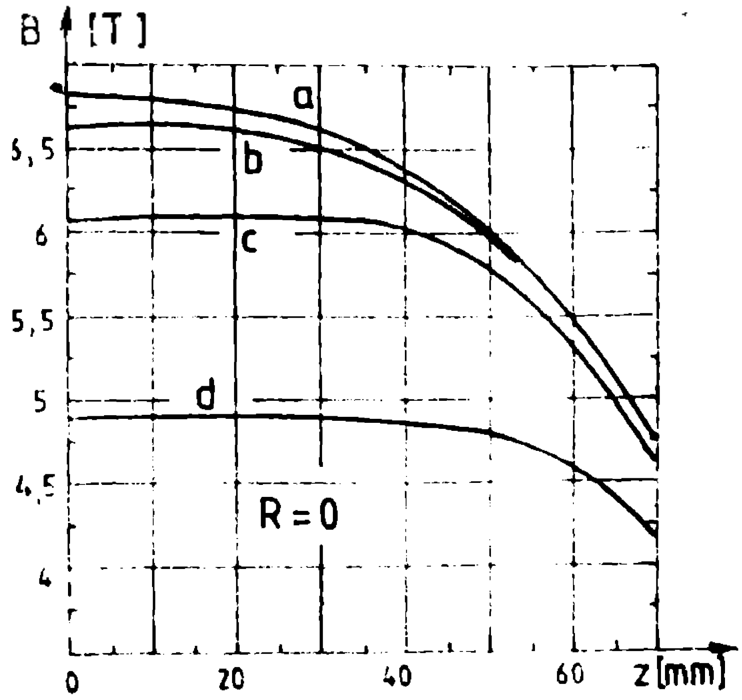
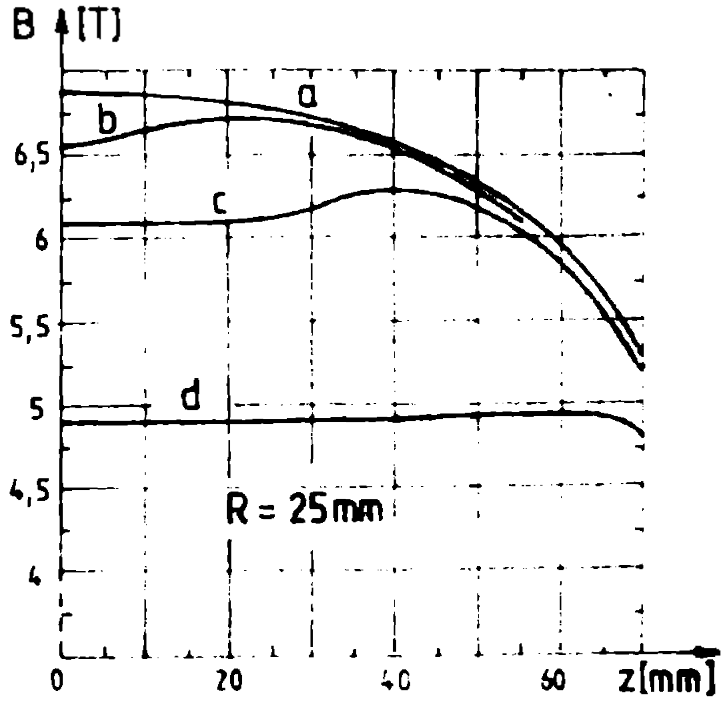


Fig. 3.41. Inducţia magnetică în interiorul solenoidului la variantele de compensare cu J = ct pe secţiune





există un punct de intersecţie între cele două curbe, deci compensarea exactă nu este posibilă. Totuşi se observă că există o zonă destul de extinsă în care cele două curbe practic se suprapun, astfel că se vor alege pentru solenoidul de compensare parametrii α_e şi β_e la limita inferioară unde curbele sînt apropiate. Rezultă în acest mod α_e = 1,425 şi β_e = 1,75 adică a_c = 40 mm şi b_e = 70 mm. Se obţine în această situaţie B_0 = 4,918 T; V = 470,3 cm^3 şi K = 10460 T/m^3.

Pentru cele patru variante considerate s-a determinat cu ajutorul programului CM32 inducţia magnetică pe axa de simetrie (R=0), la R=25 mm şi în planul central (z=0). Rezultatele sînt prezentate grafic în fig. 3.41.

3.3.3. Analiza unor variante de compensare la densitate de curent variabilă pe zone

În cazul bobinelor supraconductoare, realizarea acestora cu J = ct pe întreaga secţiune transversală a bobinei, conduce la o utilizare neraţională a materialului supraconductor. Ţinînd seama de caracteristica critică a materialului supraconductor, rezultă că se poate mări densitatea de curent în zonele de cîmp magnetic redus obţinîndu-se prin aceasta o reducere a volumului de material folosit. De aceea au fost analizate mai multe astfel de variante dintre care se prezintă în continuare cele mai caracteristice [27,35].

Astfel s-a considerat solenoidul format din două straturi caracterizate prin:

a_1 = 30 mm; α_1 = 1,2; β_1 = 2,7; J_1 = 400 A/mm^2

a_2 = 36 mm; α_2 = 1,55; β_2 = 2,25; J_2 = 1,6 J_1

şi la care nu s-au aplicat metode de compensare (varianta (e)). În mod similar ca pentru celelalte variante, din relaţiile (3.31) şi (3.43) s-au obţinut rezultatele: B_0 = 6,554 T, V = 422,7 cm^3 şi K = 16210 T/m^3.

Prin folosirea unui solenoid de compensare interior (fig. 2.36) rezultă varianta (f) la care pentru compensare de ordinul şase trebuie satisfacute condiţiile (2.97) adică:

$$FE_2(\alpha_e, \beta_e) = -0,01705;$$

$$FE_4(\alpha_e, \beta_e) = -0,00229$$

Din reprezentarea grafică a acestor curbe (fig. 3.42) rezultă pentru solenoidul de compensare α_e = 1,06 şi β_e = 1,1 , adică a_e = 31,8 mm şi b_e = 33 mm, valori sensibil apropiate de cazul în care solenoidul avea J = ct pe toată secţiunea (varianta c). Rotunjind superior pe a_e la valoarea a_e = 32 mm, se obţine:

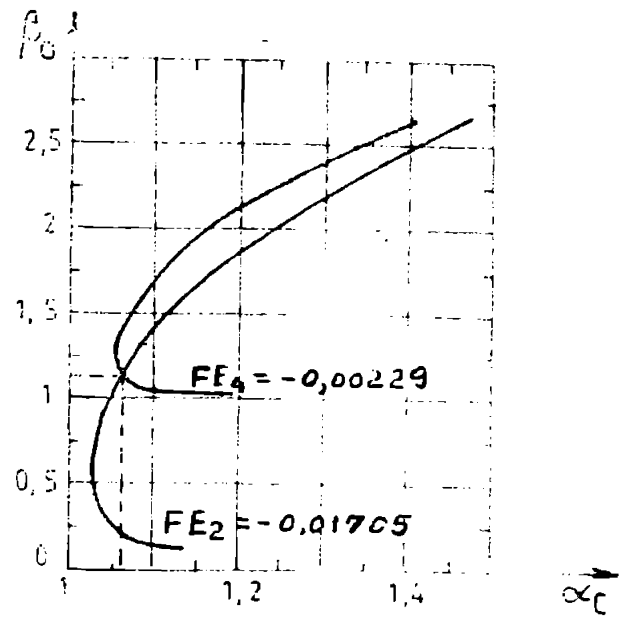


Fig. 3.42. Determinarea parametrilor solenoidului de compensare la varianta (f)

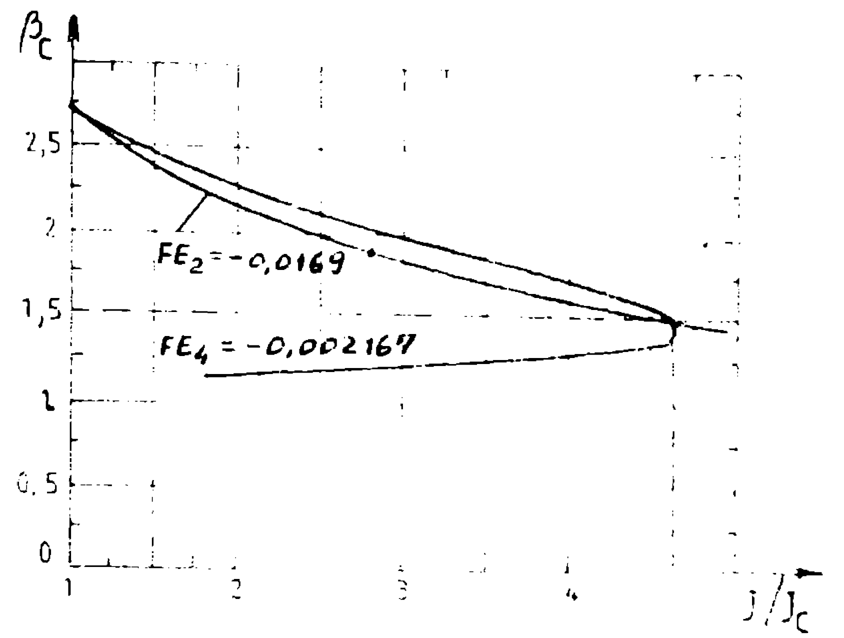


Fig. 3.43. Determinarea parametrilor solenoidului de compensare la varianta (g)

$B_0 = 6{,}122$ T; $v = 397\ cm^3$; $k = 15420\ T/m^3$

O posibilitate simplă de realizare a compensării de ordinul şase propusă în [27] este cea ilustrată în figura 2.37, în care însă $\alpha_e = \alpha$. Ţinînd seama de relaţiile (2.38) şi de faptul că solenoidul de bază are aceleaşi dimensiuni ca în varianta (a), rezultă:

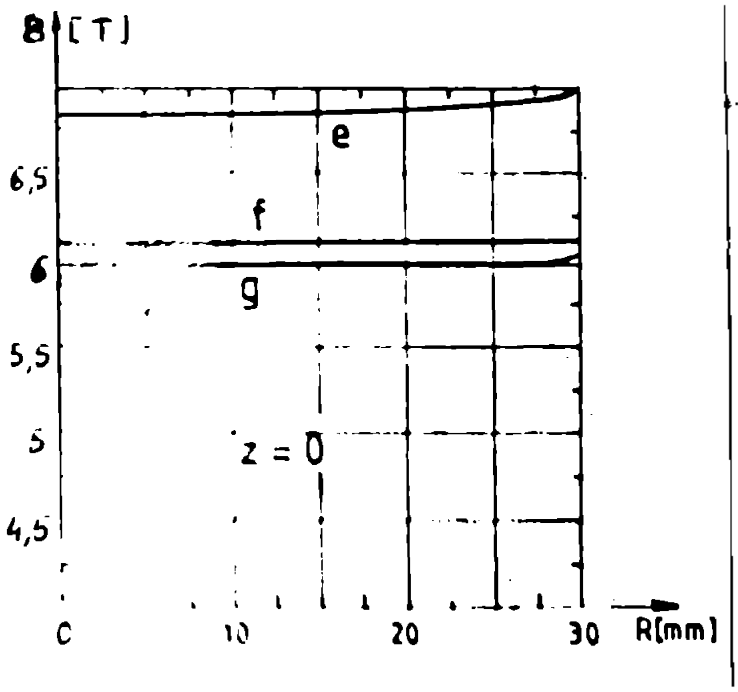
$$FE_2(\alpha, \beta_e) = \frac{J}{J_e} FE_2(\alpha,\beta) = -0{,}0169 \frac{J}{J_e}$$

$$FE_4(\alpha, \beta_e) = \frac{J}{J_e} FE_4(\alpha,\beta) = -0{,}002167 \frac{J}{J_e}$$

Din reprezentarea grafică a acestor curbe funcţie de β_e şi raportul J/J_e (fig.3.43) rezultă $\beta_e = 1{,}49$ şi $J/J_e = 4{,}6$ sau $J_e/J = 0{,}22$. Pentru a extinde zona de uniformitate a cîmpului, aceste valori se măresc uşor la $\beta_e = 1{,}5$ ($b_e = 45$ mm) şi $J_e/J = 0{,}23$ şi dacă se alege $J - J_e = 335\ A/mm^2$ rezultă $J = 436\ A/mm^2$ şi $J_e = 101\ A/mm^2$. Se obţine în această situaţie pentru varianta (g): $B_0 = 5{,}991$ T, $v = 496{,}67\ cm^3$ şi $k = 12014\ T/m^3$.

Rezultatele privind cîmpul magnetic la cele trei variante considerate, obţinute cu ajutorul programului [illegible], sînt prezentate grafic în fig. 3.44.

Pentru a avea o privire de ansamblu asupra tuturor variantelor considerate, se prezintă sintetic unele rezultate în tabelul 3.3, în care s-au notat cu indice prim mărimile corectate în situaţia că densitatea de curent să fie în concordanţă cu caracteristica critică a materialului supraconductor. În acest scop, s-a aproximat caracteristica critică pentru supraconductorul [illegible] 61/35 (fig. 1.6) în domeniul



B = 5 – 7 T cu o creştere de secţiune J_c = 1200 – 1600 A_s şi s-a modificat densitatea de curent J la valoarea J* astfel încît valoarea maximă a inducţiei magnetice B*max să corespundă caracteristicii critice.

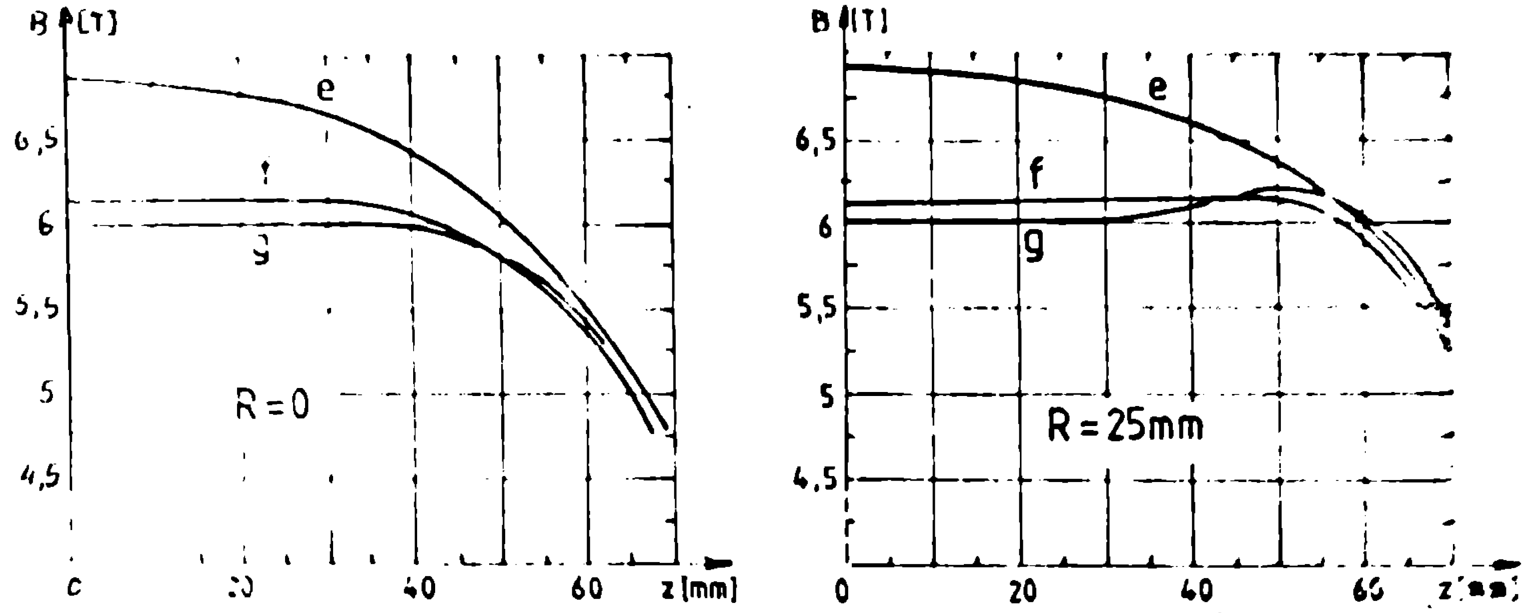


Fig. 3.44. Inducţia magnetică în interiorul solenoidului la J variabil pe secţiune

Tabelul 3.5. Rezultate caracteristice pentru variantele considerate

Varianta / Mărimea	a	b	c	d	e	f	g
1	2	3	4	5	6	7	8
J [A/mm²]	400	400	400	400	400 640	400 640	335 436
B_0 [T]	0,038	0,035	0,106	4,918	6,854	6,122	5,99
B_{max} [T]	6,97	6,75	6,55	5	6,99	6,4	6,2
v [cm³]	372,6	365,2	346,8	470,3	422,7	397	498,7
k [T/cm³]	11,94	11,73	11,17	10,46	16,21	15,42	12,62

1		2	3	4	5	6	7	8
$\Delta B/B_0$ %	z=0 z=0–35mm	4,81	3,00	0,35	0,26	4,69	0,23	0,098
	z=0 z=0–[illegible]mm	0,90	1,16	0,051	0,043	0,53	0,125	0,048
J' [A/mm^2]		365	376	387	445	365 [illegible]	365 [illegible]	318,6 412
B_0' [T]		0,239	0,237	0,500	0,472	0,234	0,832	0,71
B'_{max} [T]		0,50	0,55	0,14	0,6	0,56	0,10	0,9
k' [T/dm^3]		10,9	10,8	11,6	11,63	14,8	14,64	11,45

Pe baza rezultatelor prezentate se pot trage concluzii importante, utile în vederea alegerii variantei de bobinaj, astfel, dacă tehnologia permite să se realizeze bobina din mai multe structuri cu densități de curent diferite, rezultînd o folosire mai eficientă a materialului supraconductor. Aceasta presupune folosirea unor cabluri supraconductoare cu secțiuni diferite în diferitele zone, astfel încît prin înserierea lor să rezulte densități de curent diferite în materialul supraconductor. Referitor la variantele de compensare, se constată că la cele cu solenoid de compensare interior (c,d) cîmpul magnetic în centrul solenoidului și eficiența folosirii materialului supraconductor sînt mai puțin decît în situația solenoidului de compensare exterior (a). Din punct de vedere al uniformității cîmpului magnetic în interiorul solenoidului situația este inversă, fiind de preferat varianta cu solenoid de compensare exterior. Cea mai bună uniformitate în zona considerată o prezintă varianta (b) care din punct de vedere al eficacității folosirii materialului supraconductor este comparabilă cu variantele (c) și (d). Ținînd seama și de posibilitatea relativ simplă de realizare, rezultă că această variantă propusă este dintre cele mai avantajoase.

3.3.4. Alte posibilități de obținere a unui cîmp magnetic cu grad înalt de uniformitate

Pe lîngă variantele de compensare analizate mai sus s-au luat în considerare și posibilitățile propuse de autor în paragraful 4.2.5. In acest scop au fost elaborate programele de calcul SOL4 (pentru solenoid real – fig. 2.40) și SOL5 (pentru un solenoid aproximat printr-o pînză de curent – fig. 2.39), programe prin care pe baza relațiilor (2.10.) se determină valorile densității de curent în diferite zone astfel încît să rezulte aceeași inducție magnetică într-un număr impus de puncte situate pe axa solenoidului. Intrucît atît punerea problemei cît și modul de rezolvare sînt similare în cele două situaţii, se prezintă în continuare doar rezultatele obţinute pentru solenoizi aproximaţi prin pături de curent.

Astfel s-a considerat un solenoid cu raza a = 30 mm şi lungimea 2b = 162 mm (β = b/a = 2,7) format din 9 zone de lungimi egale, pe fiecare densitatea de curent fiind constantă. Impunîndu-se ca inducţia magnetică în 8 puncte situate pe axa longitudinală la distanţele z_i să fie aceeaşi cu inducţia magnetică în centrul solenoidului s-au obţinut rezultatele din tabelul 3.6. După cum era de aşteptat se constată că distribuţia densităţii liniare de curent depinde destul de pronunţat de poziţia punctelor z_i şi îndeosebi de valoarea maximă a lui z_i (extinderea zonei de cîmp uniform) în comparaţie cu lungimea solenoidului (b). In fig.3.45,a s-a reprezentat grafic modul de variaţie al densităţii liniare de curent şi inducţiei magnetice pe axa de simetrie la una din variantele din tabel.

Tabelul 3.6. Distribuţia densităţii liniare de curent la un solenoid cu cîmp uniform pe axa longitudinală

z_i [mm]	z_1	6	7	8	9
	z_2	12	14	16	18
	z_3	18	21	24	27
	z_4	24	28	32	36
	z_5	30	35	40	45
	z_6	36	42	48	54
	z_7	42	49	56	63
	z_8	48	56	64	72
J_i/J_o	J_1/J_o	1,001	1,0012	0,9996	0,9598
	J_2/J_o	1,0037	1,0035	1,0068	1,0792
	J_3/J_o	1,006	1,0067	0,9936	0,7859
	J_4/J_o	1,0201	1,0181	1,0598	1,5032
	J_5/J_o	0,97895	0,9859	0,6384	-0,1572
	J_6/J_o	1,3051	1,2824	1,7122	3,5499
	J_7/J_o	-0,215	-0,16535	-1,0192	-3,5222
	J_8/J_o	4,0715	4,025	4,7087	6,2596

Se constată că densitatea de curent are o distribuţie alternantă de la o zonă la alta, cu amplitudini ce cresc spre ieşirea solenoidului. Dacă se reduce extinderea zonei de cîmp uniform la valori comparabile cu raza solenoidului ($z_i \simeq a$) se reduc substanţial valorile densităţii de curent în zonele dinspre periferia solenoidului. Astfel, în fig. 3.45,b se reprezintă grafic distribuţia densităţii liniare de curent şi a inducţiei magnetice la un solenoid cu 4 zone de J=ct dacă punctele z_i s-au luat la z_i = 20;30;40 mm. Se observă şi în acest caz ca de altfel şi în cele din fig. 3.45,a, că pentru primele zone (din

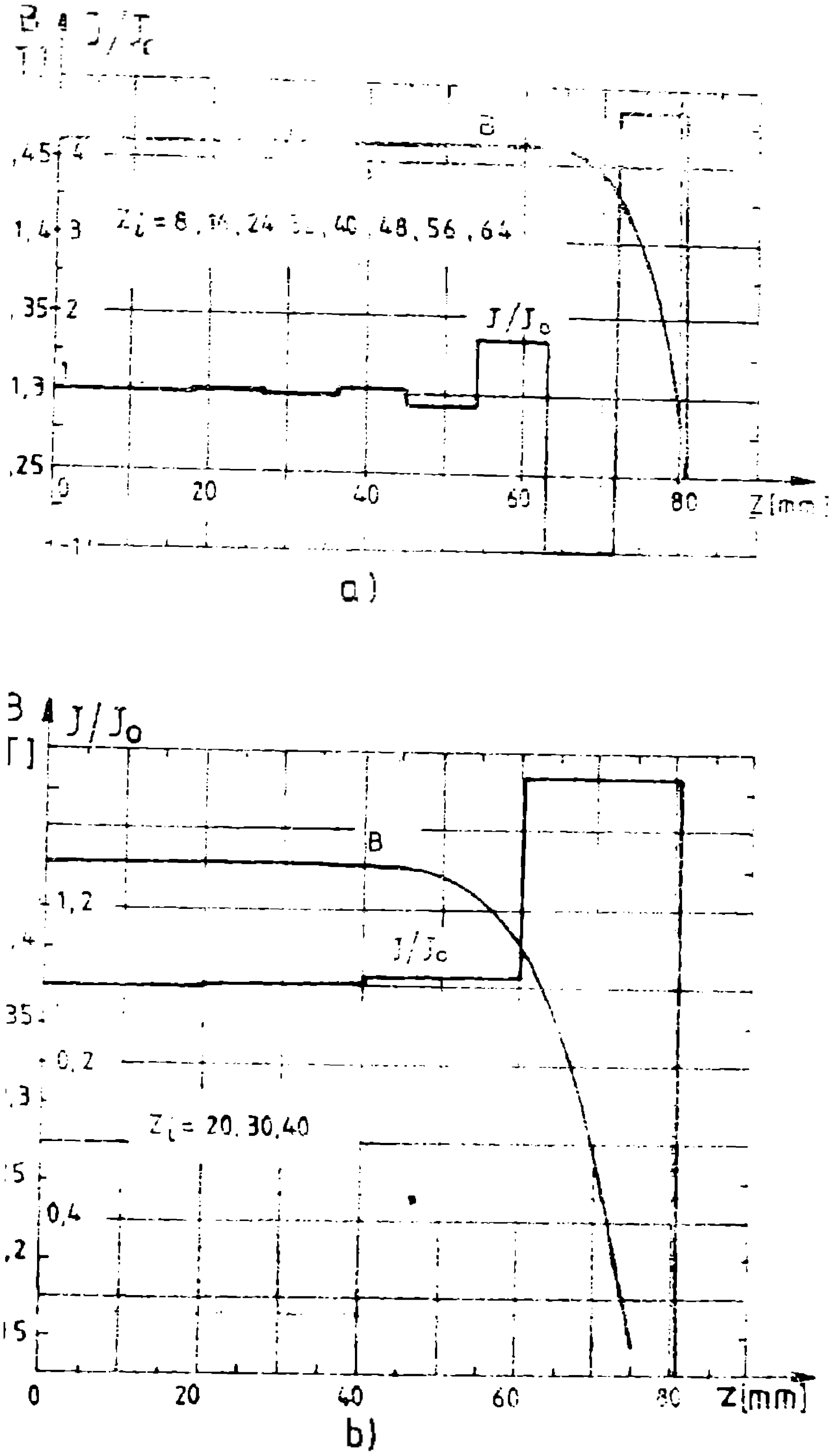


Fig.3.45. Densitatea de curent şi inducţia magnetică pe axa unui solenoid cu zone egale de J = ct

apropierea planului central) densitatea de curent este puţin diferită. Ca urmare se recomandă ca prima zonă cu J = ct (=J_0) să se ia mai extinsă, pînă la aproximativ b/2. Astfel în fig. 3.46 se prezintă rezultatele obţinute dacă prima zonă a fost extinsă pînă la z=36 mm (cît primele patru zone din fig. 3.45.a). Se constată că se obţine practic aceeaşi distribuţie a densităţii de curent şi de asemenea aceeaşi extindere a zonei de cîmp uniform. După cum s-a văzut, în unele zone rezultă o densitate de curent redusă sau chiar negativă (de sens contrar). În astfel de cazuri, se propune ca de la început să se considere J=0 în aceste zone.

Referitor la posibilitatea de a obţine un cîmp magnetic uniform în interiorul unui elipsoid de rotaţie (paragr. 2.4.2.η) s-a considerat o bobină elipsoidală cu semiaxa mare b = 99 mm şi semiaxa mică a = 30 mm. Aproximînd această bobină cu un număr mare de trepte (2 x 30) cu aceeaşi densitate de curent, s-a obţinut cu ajutorul programului [illegible]2 un cîmp magnetic uniform în orice punct din interiorul bobinei elipsoidale. Deoarece pentru a avea acces în interior, bobina se va realiza deschisă la capete, s-a considerat elipsoidul tăiat la distanţa c = 81 mm (egală cu a solenoizilor consideraţi). Variaţia inducţiei magnetice pe axa bobinei elipsoidale deschise este reprezentată în fig. 3.47 comparativ cu cea obţinută în cazul solenoidului de aceeaşi lungime şi cu densitate de curent constantă. Se constată că gradul de uniformitate rămîne mult mai ridicat decît în cazul solenoidului. Bobina

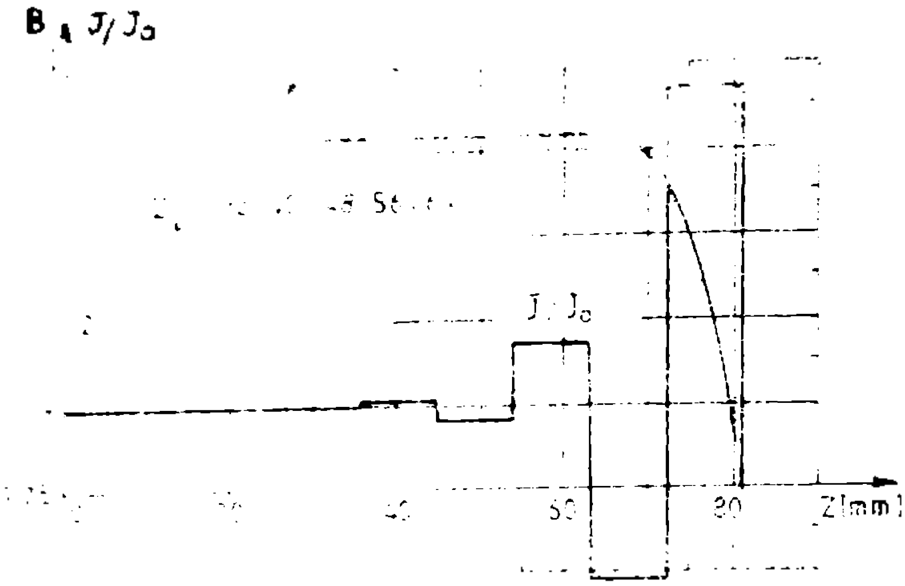


Fig. 3.46. Densitatea de curent şi inducţia magnetică pe axă în cazul ca prima zonă este extinsă

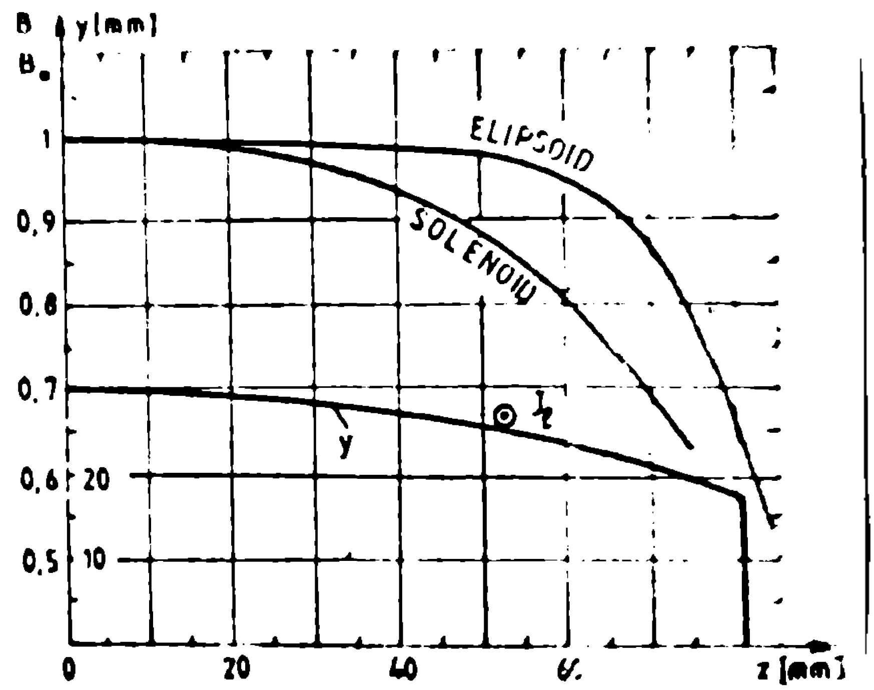


Fig. 3.47. Inducţia magnetică pe axa unui elipsoid

elipsoidală deschisă se realizează în practică aproximîndu-se în trepte după cum este indicat în fig. 2.45. Astfel, s-a aproximat aceasta doar prin 4 trepte ca în fig. 3.46. Inducţia magnetică pe axă, reprezentată de asemenea în fig. 3.46 diferă puţin faţă de situaţia că numărul treptelor ar fi foarte mare (fig. 3.47).

Pentru a compensa reducerea gradului de uniformitate a cîmpului magnetic în interiorul bobinei elipsoidale ca urmare a faptului că aceasta este deschisă la capete şi se realizează dintr-un număr redus de trepte, s-a pus problema determinării valorii densităţilor de curent în aceste trepte astfel încît să rezulte acelaşi cîmp magnetic într-un număr de puncte egal cu numărul de trepte şi situate pe axă. Pentru a putea face o comparaţie cu situaţia similară din cazul solenoizilor, s-au considerat aceleaşi puncte z_i şi aceleaşi 9 trepte. Rezultatele obţinute sînt date în tabelul 3.7 şi se constată că se menţine repartiţia alternantă a densităţii de curent, dar amplitudinile sînt mult reduse. Se poate aprecia pe baza acestor rezultate că soluţia de realizare a bobinelor formate dintr-un număr limitat de trepte care aproximează un elipsoid este mai potrivită din punct de vedere al uniformităţii cîmpului magnetic realizat.

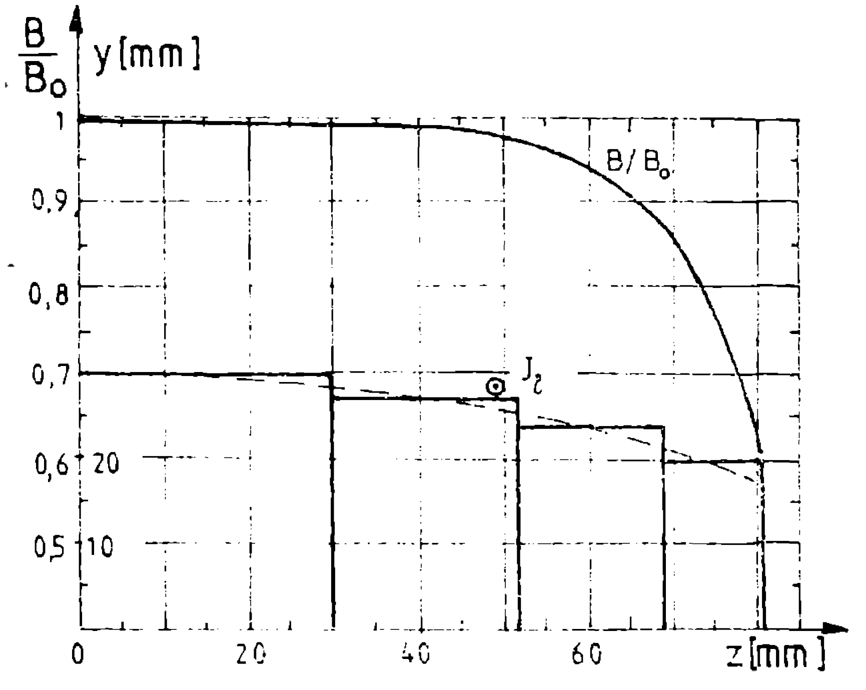


Fig. 5.40. Elipsoid de rotaţie aproximat prin patru trepte

Tabelul 5.7. Distribuţia densităţii liniare de curent la un elipsoid descris cu cinci bobine pe axa longitudinală

a_8 [mm]	48	56	64	72
J_1/J_o	1,0000	0,9999	0,9996	0,9658
J_2/J_o	1,0003	1,0004	1,0012	1,0516
J_3/J_o	1,0002	1,0000	0,9974	0,8764
J_4/J_o	1,0019	1,0022	1,0088	1,2076
J_5/J_o	0,9973	0,9978	0,9777	0,6200
J_6/J_o	1,0291	1,0246	1,0738	1,6[illegible]0
J_7/J_o	0,8621	0,8846	0,7569	0,0564
J_8/J_o	1,0414	1,6070	1,7517	2,2697

3.4. Maşini unipolare cu excitaţie supraconductoare

Faţă de maşinile de curent continuu heteropolare, cele unipolare prezintă în principal avantajul că lipseşte colectorul. Desigur că apar şi dezavantaje, cel mai important fiind legat de valoarea scăzută a tensiunii nominale şi ca urmare valoarea ridicată a curentului din indus. Aceasta face ca puterea limită a maşinilor unipolare în varianta convenţională să fie de 10-15 kW [56]. Din condiţiile specifice de funcţionare a înfăşurării de excitaţie a maşinilor unipolare, rezultă ca deosebit de avantajoasă realizarea acesteia în varianta supraconductoare care oferă posibilitatea măririi inducţiei magnetice şi deci a tensiunii induse, respectiv a puterii şi randamentului care poate ajunge la 99% [57]. Creşterea tensiunii este însă limitată, astfel încît la puteri mari rezultă curenţi de valori mari care limitează de fapt puterea maşinii. Cu toate dificultăţile care apar, se preconizează ca fiind avantajoasă folosirea acestor maşini în sistemele de acţionare a laminoarelor, a maşinilor de transportat în mine, a navelor maritime, a pompelor şi compresoarelor, ca generatoare de curenţi continui mari în electrochimie ş.a.

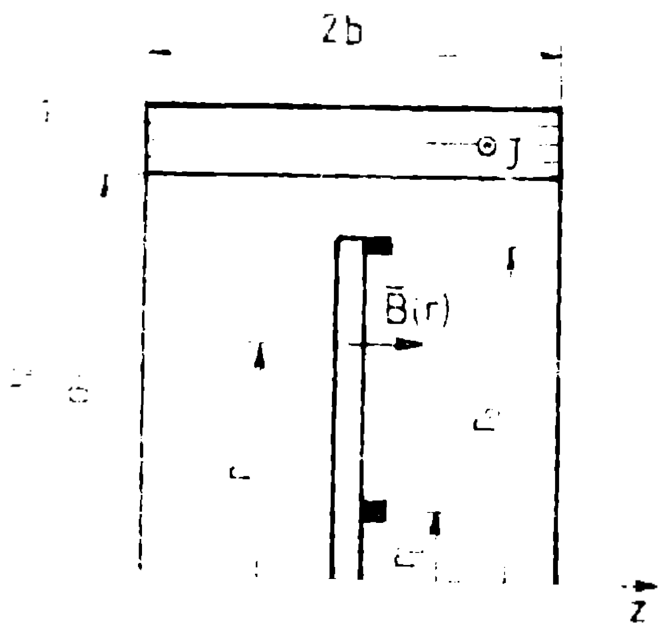


Fig. 3.45. Explicativă privind principiul maşinii unipolare cu indus în formă de disc

Constructiv, maşinile unipolare se pot realiza cu indusul în formă de disc sau de tambur. Dintre acestea, s-a abordat varianta cu indusul în formă de disc, la care înfăşurarea de excitaţie este de forma unui solenoid cu lungime redusă (fig. 3.45). Problema care se pune constă în determinarea dimensiunilor solenoidului de excitaţie (la a_1 impus) astfel încît tensiunea indusă să fie maximă. Expresia acestei tensiuni se obţine din:

$$U_e = \int_{r_i}^{r_e} (\bar{v} \times \bar{B})\, d\bar{l} = \Omega \int_{r_i}^{r_e} B(r)\, r\, dr \qquad (3.53)$$

în care Ω reprezintă viteza unghiulară a discului, iar r_i şi r_e sînt razele la care sînt plasate periile colectoare.

3.4.1. Optimizarea bobinei inductoare în absenţa ecranării magnetice

Ţinînd seama de forma bobinei de excitaţie şi de faptul că lipsesc piesele feromagnetice, calculul cîmpului magnetic se face similar ca în cazul solenoizilor. Deosebirea care apare este legată de faptul să nu se impun restricții privind uniformitatea cîmpului, astfel că se va căuta soluția care asigură volum minim de material supraconductor. Concret, s-a considerat un solenoid cu raza interioară a_1 = 0,4m și densitatea de curent constantă pe secțiune cu valoarea J = 100 A/mm^2, iar inducția magnetică în centrul solenoidului (discului) B_0 = 3,4 T. In această situație din relația (2.18) a rezultat $F(\alpha,\beta)$ = 0,085. Se pune acum problema determinării formei solenoidului (α,β) astfel încît să rezulte un volum minim de material supraconductor. Problema se poate rezolva grafic ca în [83], soluția aflîndu-se la intersecția curbei $F(\alpha,\beta)$=ct. cu $V^*(\alpha,\beta)$ = minim, în care $V^*(\alpha,\beta)$ are semnificația din relația (3.50). Pentru cazul considerat, din graficul din figura 3.50 rezultă α = 1,2 și β = 0,4 adică a_2 = 0,48 m și b = 0,16 m.

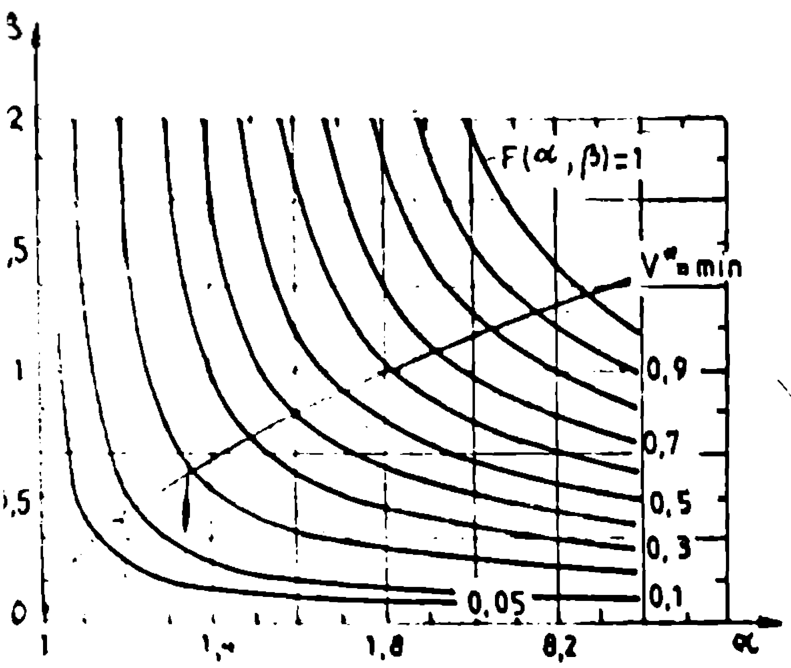


Fig. 3.50. Determinarea grafică a parametrilor solenoidului cu volum minim de material

In realitate însă, în cazul mașinilor unipolare nu interesează forma bobinei de volum minim la o anumită valoare a inducției magnetice, ci la o anumită valoare a tensiunii induse. In acest scop ar trebui trasate curbele

$$\int_{r_i}^{r_e} B(r)\, r \, dr = F_u(\alpha,\beta) = ct. \qquad (3.54)$$

iar dimensiunile optime s-ar afla la intersecția acestor curbe cu $V^*(\alpha,\beta)$ = minim. Rezolvarea acestei probleme este extrem de laborioasă avînd în vedere că $B(r)$ nu este o constantă. Din acest motiv, pentru alegerea unor dimensiuni optime, s-au luat în considerare mai multe variante pornind de la cea de volum minim la inducție magnetică dată (toate avînd același volum dar lungimi diferite) și s-a calculat inducția magnetică (cu programul ...2) și tensiunea indusă pentru cazul în care periile sînt plasate la r_i = 0,075 m și r_e = 0,33 m. Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul 3.8 și din ele se constată că varianta de volum minim pentru inducție magnetică dată asigură și tensiunea indusă maximă, dar prezintă și cel mai ridicat raport între inducția magnetică maximă și cea din centrul solenoidului (B_m/B_0). Aceasta reprezintă un dezavantaj pentru cazul în care bobina este supraconductoare, deoarece trebuie să se țină seama de caracteristica critică a supraconductorului. Aproximînd aceas-

Tabelul 3.8. Rezultatele obținute în vederea alegerii variantei optime

Mărimea \ Varianta	1	2	3	4	5	6
a_1 [m]	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
a_2 [m]	0,48	0,471	0,464	0,456	0,45	0,44
b [m]	0,16	0,182	0,204	0,233	0,265	0,335
J [A/mm^2]	100	100	100	100	100	100
B_0 [T]	3,443	3,449	3,457	3,389	3,328	3,318
B_m [T]	6	5,62	5,26	4,88	4,49	3,82
B_m/B_0	1,74	1,63	1,53	1,44	1,35	1,22
U_e/Ω [V.s]	0,2328	0,2476	0,2418	0,233	0,2233	0,2017
J' [A/mm^2]	100	103,6	107,3	111,5	116	125
B_0' [T]	3,443	3,575	3,688	3,778	3,86	3,922
B_m' [T]	6	5,82	5,644	5,441	5,208	4,775
U_e'/Ω [Vs]	0,2328	0,257	0,2595	0,2597	0,259	0,252

ta caracteristica în domeniul B = 4–6 T printr-o dreaptă de ecuație $J = 226 - 21\, B_m$ (pentru [illegible]) s-au recalculat mărimile J, B_0 și U_e în modul următor:

– pornind de la inducția magnetică maximă, B_m, se determină din caracteristica critică o valoare corectată pentru densitatea de curent $J' = 226 - 21\, B_m$;

– corespunzător noii valori pentru J' se determină inducția magnetică corectată $B'_m = B_m\, J'/J$;

– se repetă corectarea lui J' și B'_m pînă cînd noile valori coincid cu cele anterioare.

Rezultatele obținute ținînd seama de caracteristica critică sînt prezentate tot în tabelul 3.8 în care aceste mărimi sînt notate cu indice prim. Se constată că varianta optimă care asigură o tensiune maximă este cea determinată pentru bobine care nu sînt supraconductoare. Dimensiunile acesteia sînt: a_1 = 0,4 m, a_2 = 0,464 m și b = 0,204 m și după cum se vede are lungimea mărită. Pentru această bobină s-a calculat cu ajutorul programului MAG2 inducția magnetică pe axa bobinei și în planul central (în discul indus), obținîndu-se rezultatele prezentate grafic în fig. 3.31. De asemenea s-a determinat și tensiunea indusă în funcție de plasarea periilor colectoare (fig. 3.32) constatîndu-se că are mai puțină importanță variarea razei r_2 și este deosebit de importantă alegerea razei r_1 cît mai mare posibilă. Astfel, dacă prin reducerea lui r_1 de la 0,125 m la 0,075 m tensiunea indusă crește cu $\Delta U_e/\Omega$ = 0,02 Vs, prin creșterea

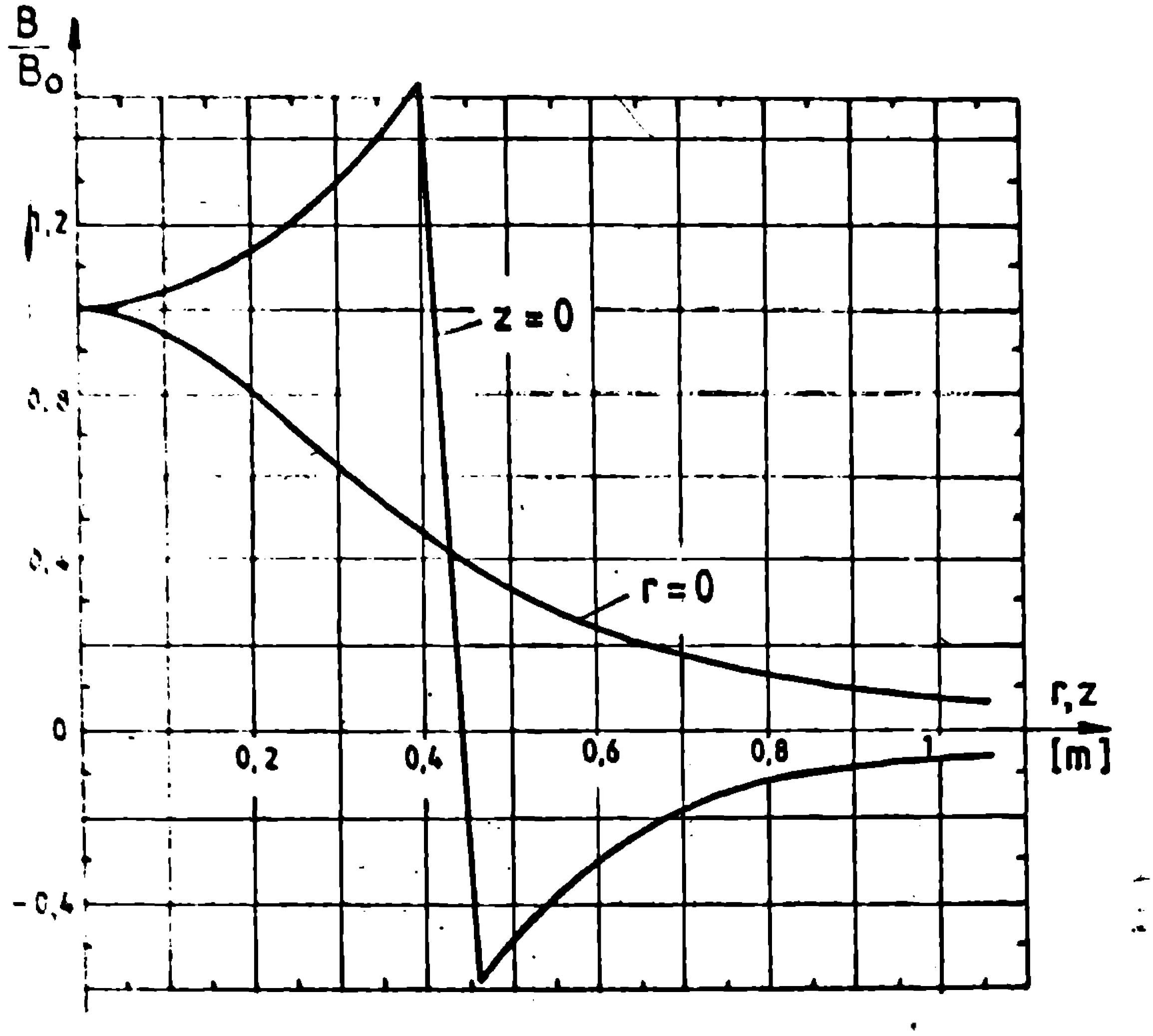


Fig. 3.51. Inducţia magnetică pe axa longitudinală şi în discul inductor

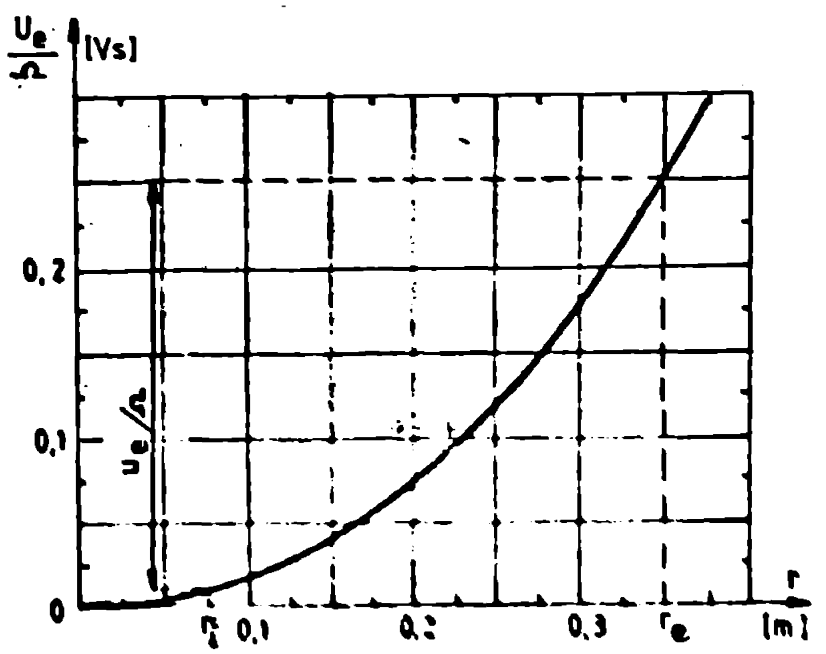


Fig. 3.52. Tensiunea indusă funcţie de plasarea periilor

lui r_e de la 0,3 m la 0,35 m, rezultă o creştere $\Delta U_e/\Omega$ = 0,09 Vs.

Se mai constată că în exteriorul bobinei de excitaţie inducţia magnetică are valori mari, astfel că se impun măsuri de ecranare magnetică.

5.4.2. Determinarea cîmpului magnetic şi a tensiunii induse în prezenţa ecranului magnetic

Ecranarea magnetică a maşinii unipolare face ca cele două metode de calcul folosite în absenţa ecranelor să nu mai poată fi aplicate. Dacă ecranul magnetic este un cilindru de lungime relativ mare şi nesaturat, acesta s-ar putea aproxima cu fier ideal ($\mu \to \infty$) şi infinit lung. În urmare, s-ar putea aplica metodele analitice prezentate în paragr. 2.4.3, bazate pe separarea variabilelor. În realitate aceste condiţii ideale nu sînt îndeplinite, astfel încît practic se pot aplica doar metode numerice pentru determinarea cîmpului magnetic. Dintre metodele numerice, s-a folosit metoda diferenţelor finite prezentată în paragr. 2.4.4, iar metodele analitice s-au folosit în scopul verificării rezultatelor (în cazuri particulare) obţinute cu ajutorul metodei numerice.

Considerînd ecranul feromagnetic cu fier liniar, dar neomogen, au fost concepute şi realizate mai multe variante de programe de calcul dintre care mai complet este programul [illegible]. Acesta se poate folosi pentru calculul cîmpului magnetic şi al tensiunii induse la un solenoid ecranat cu un cilindru feromagnetic coaxial, de lungime finită şi închis parţial la capete ca în fig. 5.33 în care s-au introdus şi notaţiile folosite în programul de calcul privitoare la reţeaua de discretizare.

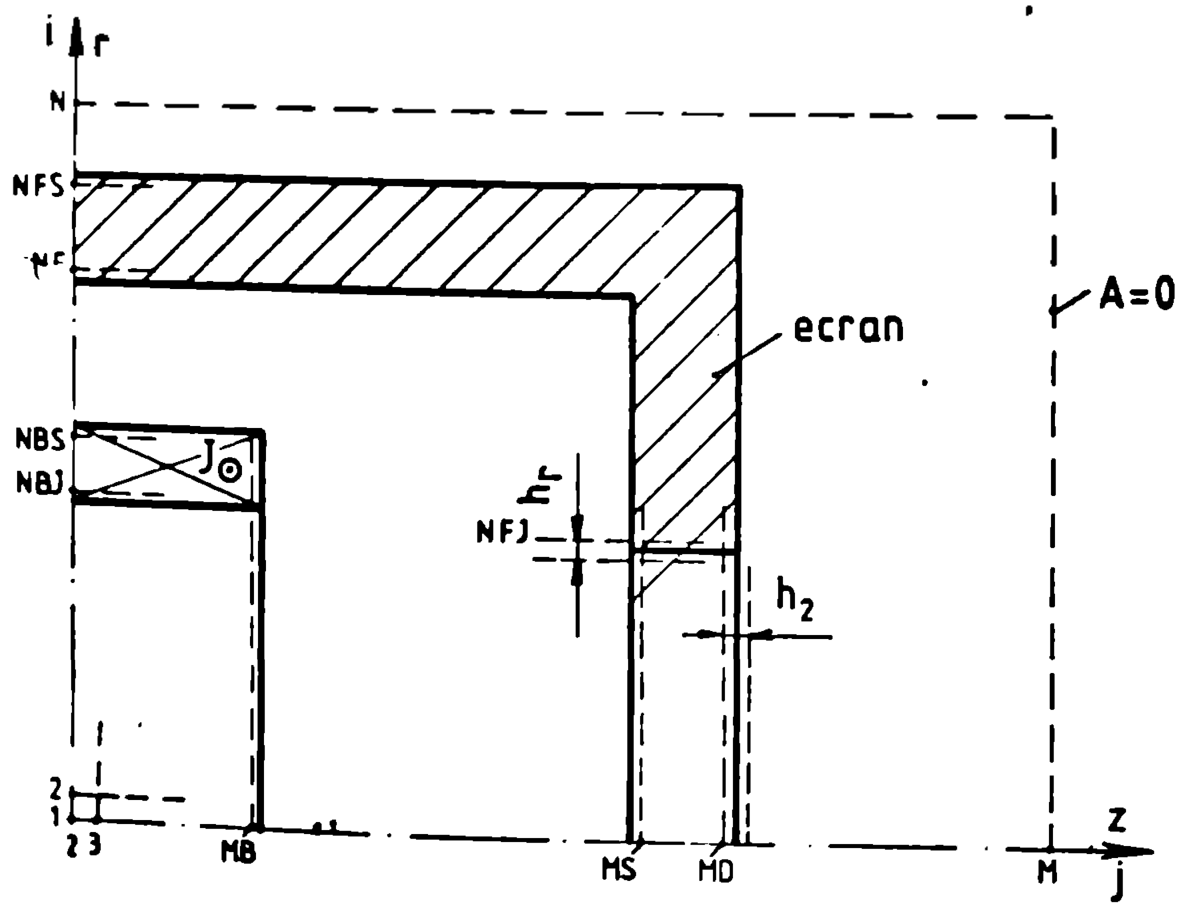


Fig. 5.33. Explicativă privind configuraţia geometrică a bobinei ecranate cu un cilindru parţial închis

pentru reducerea dimensiunilor tablourilor de variabile, pentru μ_r s-au introdus două tablouri şi anume FRC (i_1,j_1) şi FR (i_2,j), în care: $i_1 = i - MFJ+3$, $j_1 = j-MS+3$ şi $i_2 = i-MF+3$. De asemenea, pentru ca numărul de noduri să nu rezulte exagerat de mare la o reţea extinsă, se foloseşte întîi o reţea grosieră pe baza căreia se obţine soluţia iniţială pentru o reţea mai fină (cu pasul h/3) şi domeniul mai restrîns, după modul prezentat în fig. 2.50.

Cu toate acestea, numărul de noduri ale reţelei de discretizare rezultă relativ mare, astfel că s-a pus de la început problema determinării factorului optim de accelerare a convergenţei. În acest scop s-a folosit programul de calcul elaborat pentru rezolvarea unei probleme date la diferite valori ale factorului f_c şi aceeaşi precizie $\varepsilon = 10^{-5}$ (rel.2.162). Numărul de iteraţii efectuate funcţie de factorul f_c este reprezentat în fig. 5.34 pentru două dimensiuni ale reţelei de discretizare, constatîndu-se că există în fiecare caz o valoare optimă $f_{c\,opt}$, pentru care numărul de iteraţii este minim. Această valoare optimă este dată cu bună aproximaţie de relaţia [18]:

$$f_{c\,opt} = 1 - \sqrt{2\left[(M-1)^{-2}+(N-1)^{-2}\right]} \qquad (5.55)$$

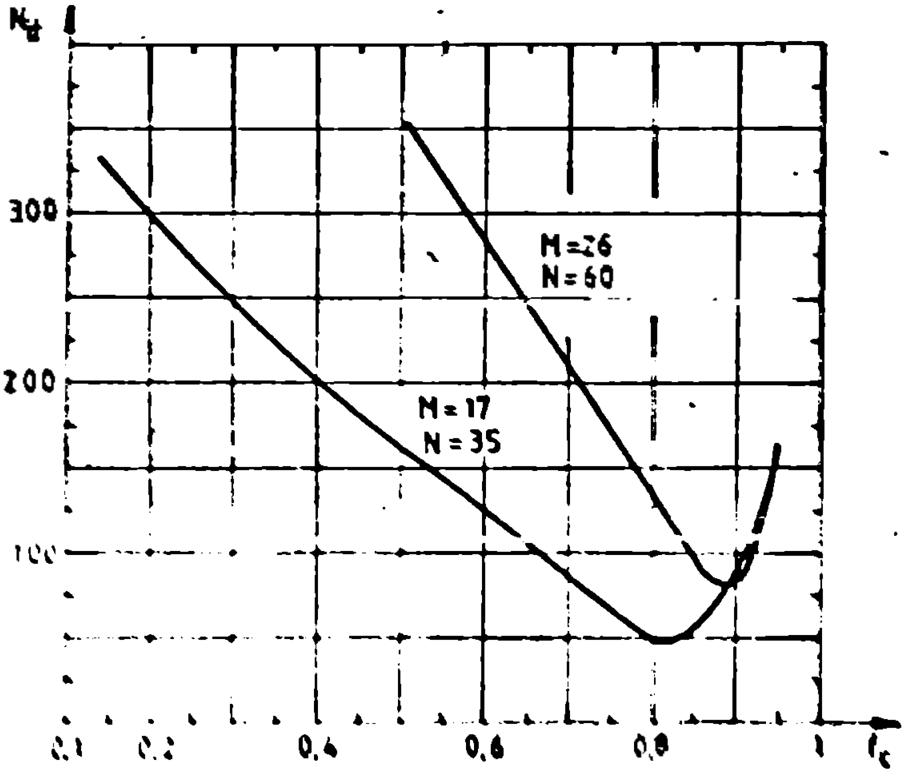


Fig. 5.34. Numărul de iteraţii funcţie de factorul de corecţie f_c

astfel încît în continuare s-a folosit expresia (5.55) pentru determinarea în program a factorului optim.

Verificarea rezultatelor obţinute pe baza programului de calcul s-a făcut în unele cazuri particulare, astfel s-a considerat în primul rînd o bobină neecranată ($\mu_r = 1$) şi s-au comparat rezultatele cu cele obţinute cu programele CMS2 şi CMSL. S-au obţinut rezultate foarte apropiate care nu mai prezintă [illegible] o comparaţie sub acest aspect se face în paragraful (5.5). Rămînea de verificat dacă şi în prezenţa ecranului feromagnetic se obţin rezultate corecte. În acest scop s-a considerat un solenoid de secţiune dreptunghiulară [illegible] ecranat cu un cilindru de lungime mare şi cu $\mu_r = 5000$ (fig. 5.35,a). Neglijînd volumul [illegible] rămîne singură [illegible] situaţia din fig. 5.35,b pentru care se [illegible] plica relațiile (2.123). Rezultatele obținute numeric și analitic privind inducția magnetică în punctele indicate pe figura 3.55.b (la un curent I = $2{,}6 \cdot 10^6$ A) sînt prezentate în tabelul 3.9. și se constată

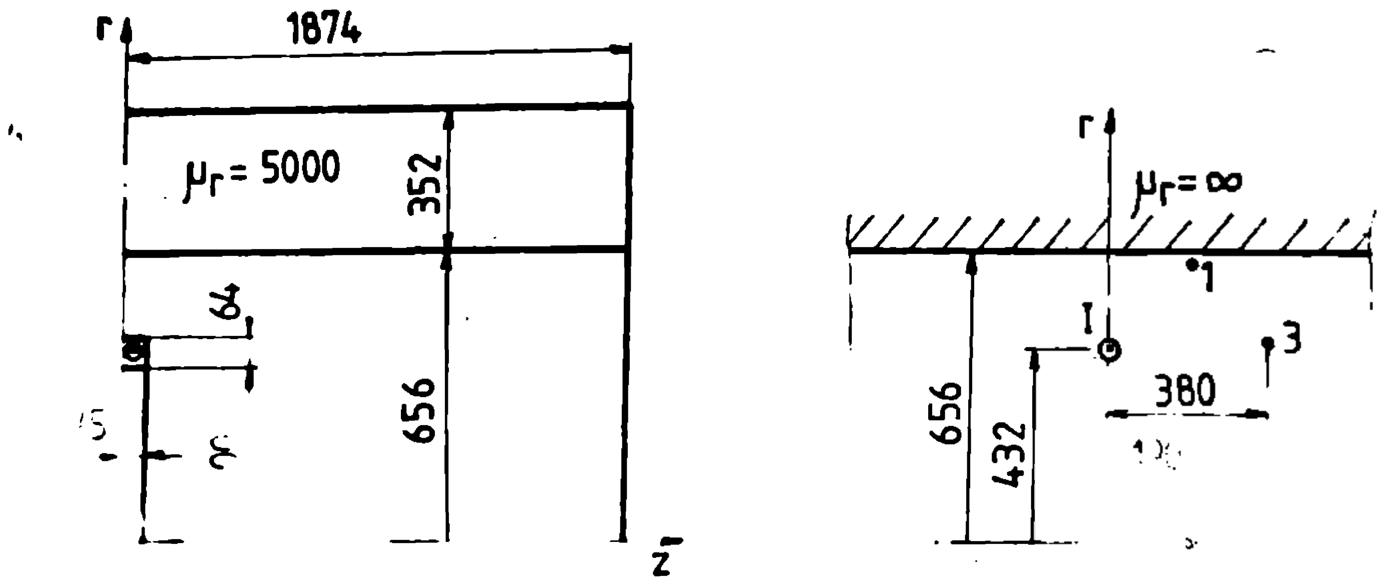


Fig. 3.55. Spira circulară ecranată cu un cilindru feromagnetic de lungime mare

Tabelul 3.9. Inducția magnetică la spira circulară ecranată cu un cilindru de lungime mare

Punctul	z [mm]	r [mm]	B_r [T]		B_z [T]	
			analitic	numeric	analitic	numeric
1	190	656	1,266	1,274	0	0
2	190	0	0	0	3,134	3,132
3	560	432	1,015	1021	0,736	0,739

o foarte bună concordanță a acestora. De asemenea, este important de remarcat că inducția magnetică în centrul solenoidului crește de la B_0 = 3,79 T în absența ecranului, la valoarea 4,06 T în prezența ecranului adică rezultă o creștere cu 7%.

Tot în scop de verificare a metodei numerice s-a considerat și un solenoid aproximat printr-o pătură de curent ecranată cu un cilindru de lungime mare (3 m) și permeabilitate mare ($\mu_r = 10^5$) astfel încît acesta poate fi considerat ideal. A rezultat astfel situația din fig. 3.56 pentru care se pot aplica relațiile (2.132), pentru calculul componentelor inducției magnetice. Rezultatele obținute în punctele indicate pe fig. 3.56 sînt prezentate în tabelul 3.10, constatîndu-se și aici o concordanță bună a acestora. Rezolvîndu-se aceeași problemă și în absența ecranului, se pot face aprecieri privind influența acestuia asupra cîmpului magnetic. Astfel, în centrul solenoidului inducția magnetică crește de la 3,596 T la 3,937 T, adică cu 9,5%, iar în

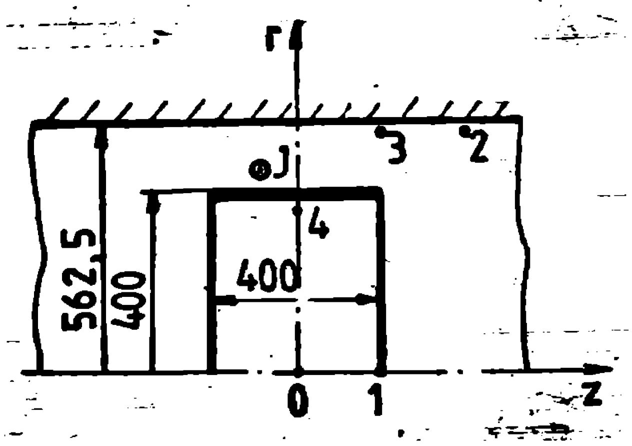


Fig. 3.56. Pătura de curent ecranată cu un cilindru feromagnetic ideal

punctul "4" situat în apropierea păturii de curent (periferia discului indus) creşterea este de la 5,301 T la 5,631 T adică de 6,1%. Prin urmare în prezenţa ecranului magnetic inducţia magnetică creşte cu aproximativ 6 ÷ 10%, în concordanţă cu rezultate cunoscute în literatura [32,88].

Tabelul 3.16. Inducţia magnetică la pătura de curent ecranată cu un cilindru feromagnetic de lungime mare

Punctul	z [mm]	r [mm]	B [T] analitic	B [T] numeric	ε %
0	0	0	3,948	3,937	0,28
1	200	0	3,111	3,103	0,26
2	400	550	0,943	0,92	2,44
3	200	550	1,405	1,425	1,4
4	0	350	5,631	5,747	1,44

Ca urmare se apreciază că programul de calcul elaborat pe baza metodei diferenţelor finite permite obţinerea unor rezultate corecte şi deci se poate aplica şi pentru probleme în care soluţia analitică nu este accesibilă. Astfel s-a considerat solenoidul cu dimensiunile optime determinate în absenţa ecranului magnetic şi parcurs de curentul total I = $2{,}6 \cdot 10^6$ A, ceea ce corespunde la densitatea

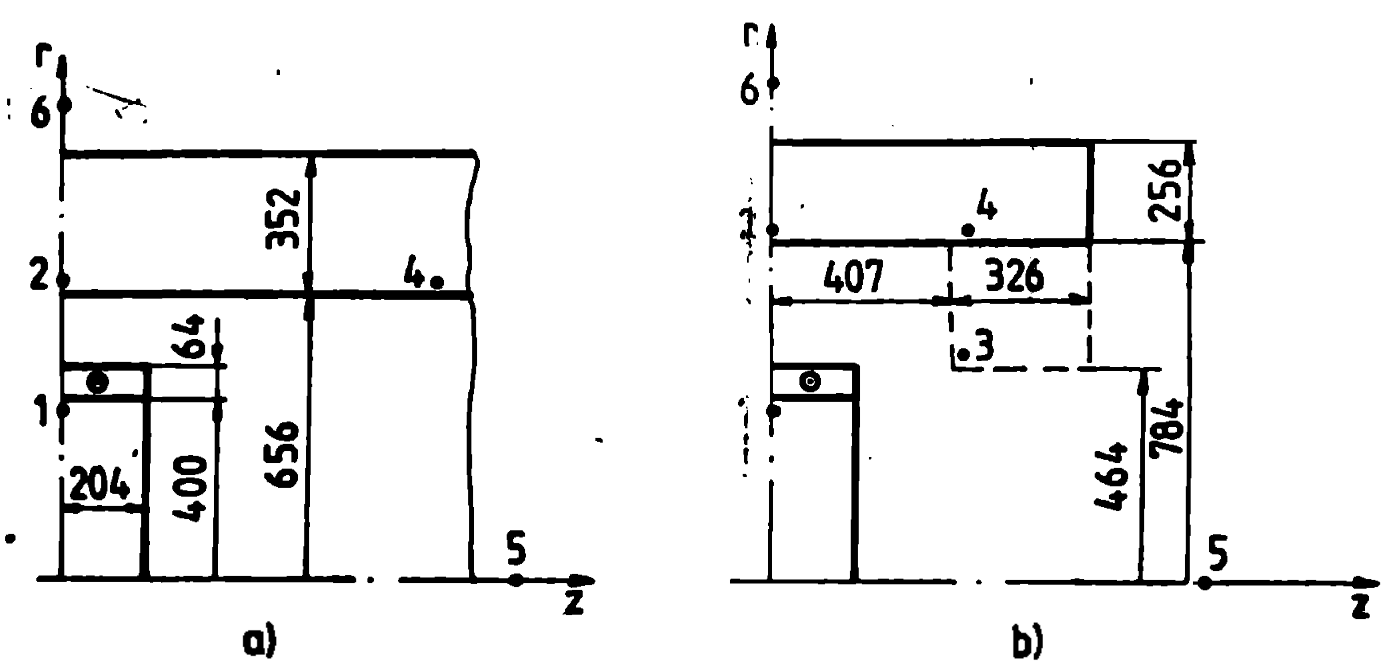


Fig. 3.57. Configuraţia geometrică a ecranului magnetic

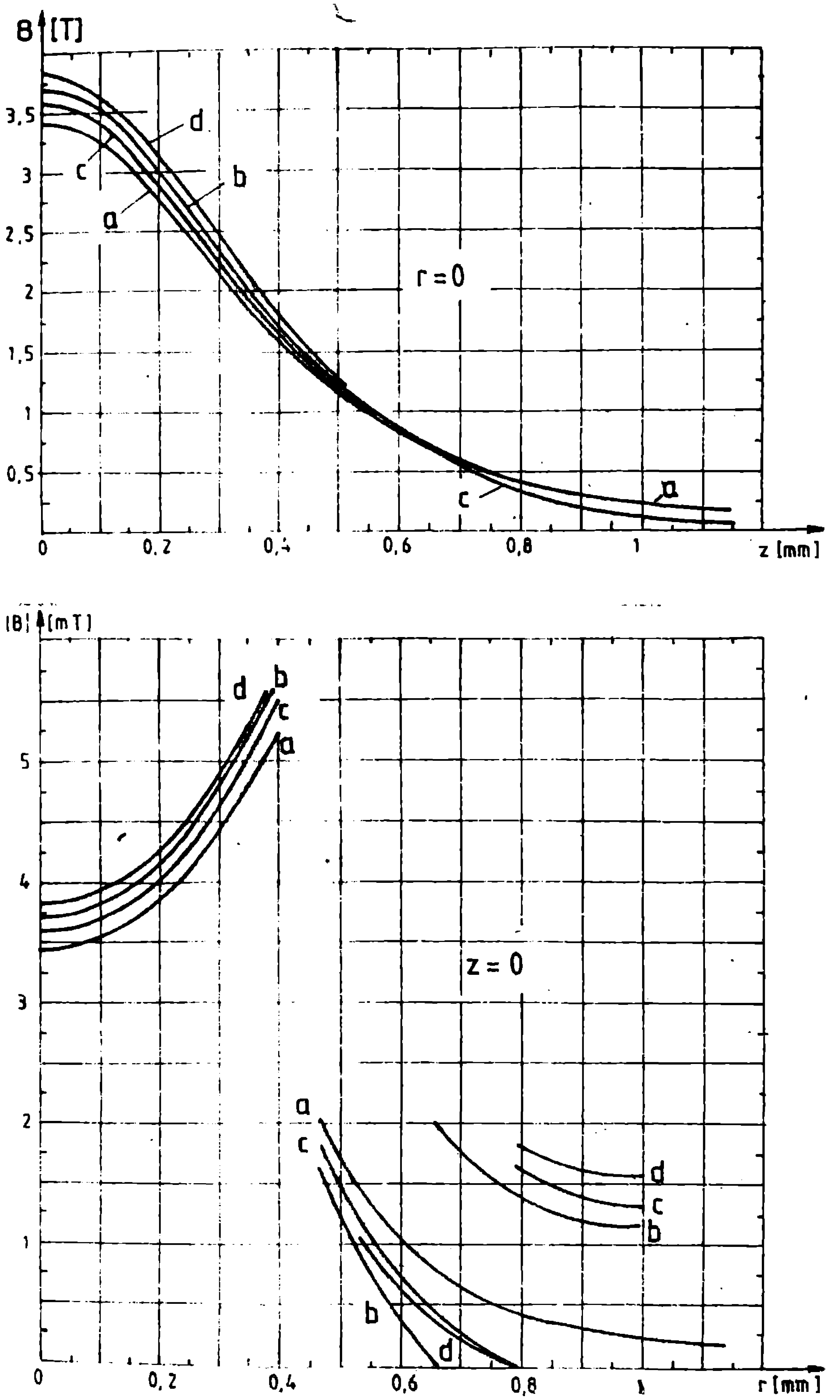


Fig. 3.58. Inducţia magnetică pe axa longitudinală
şi în planul central

$J = 100\ A/mm^2$. Aceasta s-a considerat în diferite variante de ecranare, cele mai semnificative fiind: (a) - fără ecran; (b) - ecran cilindric de lungime mare l = 1,57 m (fig. 3.57,a); (c) - ecran cilindric scurt l = 0,74 m (fig. 3.57,b); (d) - ecran cilindric scurt și închis parțial la capete (fig. 3.57,b). Considerînd permeabilitatea μ_r = 3000, s-au obținut rezultatele prezentate în tabelul 3.11 și respectiv fig. 3.58.

Tabelul 3.11. Inducția magnetică la diferite variante de ecrane

Varianta	B_0 [T]	B_1 [T]	B_2 [T]	B_3 [T]	B_4 [T]	B_5 [T] z=1,3m	B_5 [T] r=1,2m	U_e/Ω [V/s]
a	3,415	3,178				0,050	0,151	0,513
b	3,70[illegible]	3,[illegible]73	1,711		0,100	0,033	0	0,558
c	3,591	3,395	1,[illegible]		0,20[illegible]	0,044	0,000[illegible]	0,5[illegible]
d	3,624	3,[illegible]19	1,712	2,4[illegible]	0,562	0,011	0,0003	0,54[illegible]

Se constată că ecranarea în direcția axială este bună numai dacă ecranul se închide (parțial) frontal, iar în direcția radială ecranarea este bună la toate variantele. Se mai face observația că ipoteza considerării ecranului liniar [illegible] este [illegible] nesatisfăcătoare. Pentru [illegible] ipotezei, [illegible] de [illegible] și [illegible] exagerat de mare [illegible] [illegible] inducții magnetice ridicate în ecranul feromagnetic și ca urmare aceasta nu mai poate fi considerată [illegible]. [illegible] programului a fost conceput și realizat programul CMF7 după modul indicat în paragraful [illegible]. Curba de magnetizare a [illegible] feromagnetic s-a aproximat în modul indicat în figura 2.9 [illegible] porțiuni rectilinii și printr-un polinom de gradul [illegible] pentru zona dintre porțiunile rectilinii. Ordinograma de principiu a programului este dată în fig. 3.59, iar ordinograma programului CMF6 este aceeași dacă se elimină calculul iterativ pentru permeabilitatea magnetică.

3.5. [illegible]

În scopul unei analize comparative a diferitelor metode de calcul [illegible], acestea s-au aplicat în cazul unor bobine circulare [illegible] realizate la Institutul Național de Metrologie București și folosite ca surse de cîmp magnetic uniform. Fiind aplicate pentru un același sistem fizic, rezultatele obținute pot sta la baza unei aprecieri comparative [illegible]. În plus, pentru acest sistem s-au efectuat și determinări experimentale concrete privind [illegible] și [illegible] inducției magnetice, rezultatele obținute [illegible] fiind de [illegible] luate în considerare [illegible]

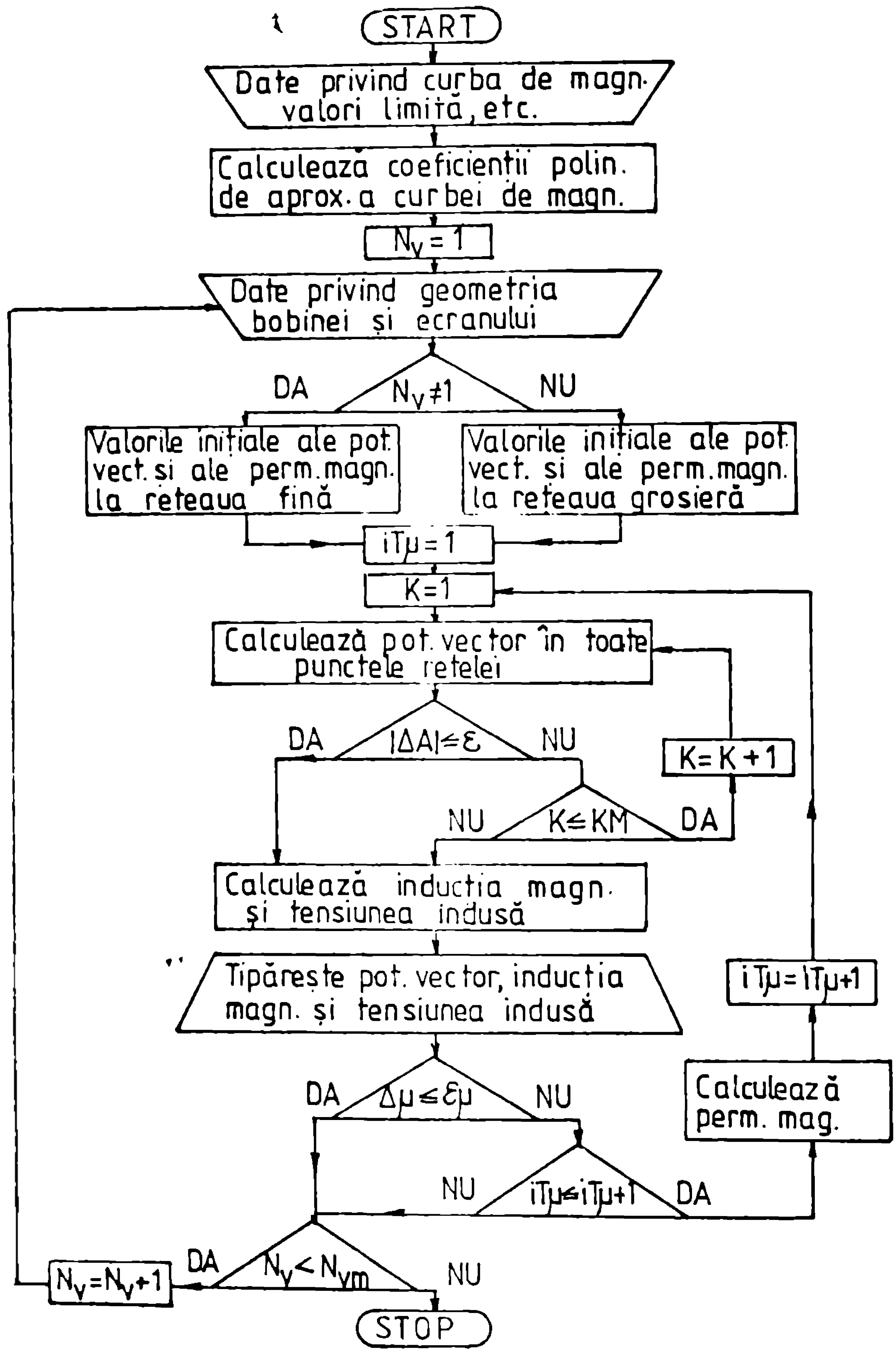


Fig.3.59 Ordinograma de principiu a programului CDF7

liza comparativă făcută.

Forma geometrică a dispozitivului studiat se prezintă în fig. 3.60, iar dimensiunile bobinelor sînt: Φ_{med} = 300 mm, d = 150 mm, g_z = 20,2 mm şi g_r = 16 mm. Alte caracteristici ale acestora, importante din punct de vedere al cîmpului magnetic produs sînt: numărul de spire al unei bobine N = 100 spire; curentul maxim admis I_{max} = 2A; constanta de cîmp (în centrul dispozitivului) k_B = 0,6032 mT/A, stabilită de constructor prin metoda rezonanţei magnetice nucleare.

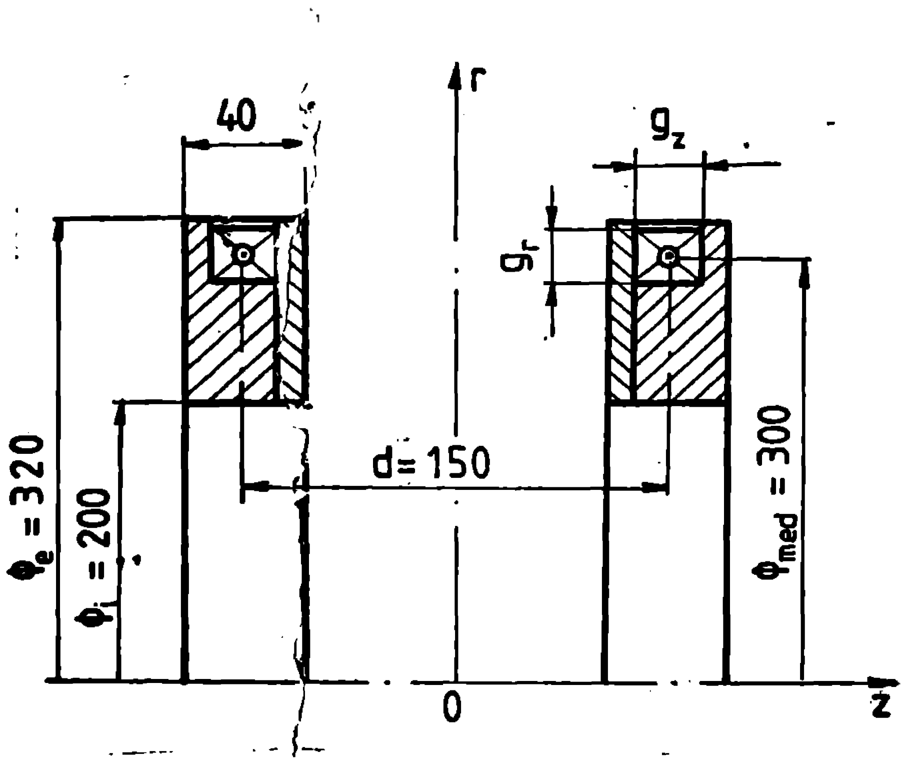


Fig. 3.60. Geometria inelelor Helmholtz

Pentru sistemul fizic considerat s-a determinat cîmpul magnetic pe baza următoarelor metode (paragr. 3.5.1):

- două metode analitice cu rezolvare numerică pe baza programelor de calcul CMB2 şi CMB1;
- o metodă numerică (metoda diferenţelor finite) în două variante, cu pas constant (programul CLF2) şi respectiv cu pas variabil în progresie geometrică (CLF9).

Pentru o mai comodă încadrare a geometriei sistemului din punct de vedere al reţelei de discretizare în cadrul metodei diferenţelor finite, pentru toate cele patru metode de calcul s-au considerat dimensiunile suprafeţei transversale a bobinei uşor modificate şi anume h_r = 15 mm şi h_z = 20 mm. In aceste condiţii şi menţinînd neschimbat curentul total (IN=200 A) a rezultat densitatea de curent (de calcul) J = 0,666 A/mm^2.

In scopul verificării rezultatelor s-au făcut şi determinări experimentale, care se vor prezenta ulterior (par. 3.5.2)

3.5.1. Metodele de calcul aplicate

Inaintea prezentării rezultatelor obţinute cu metodele de calcul amintite este oportună prezentarea unor aspecte particulare ale aplicării acestora la sistemul fizic considerat, precum şi a valorilor concrete ale principalelor mărimi de intrare în programele folosite.

α. La metoda bazată pe integrarea numerică a relaţiei lui Biot-Savart-Laplace (programul CMB2), fiecare bobină s-a considerat formată din N_s = 12 spire şi N = 4 spire echivalente pe strat, toate spirele avînd aceeaşi secţiune (fig. 3.61), de valoare Δa = $\Delta a \cdot \Delta b$ = $g_z g_r / N_s$ = 5 x 5 mm^2. In calcule aceste spire sînt considerate filiforme, fiecare dintre ele fiind aproximată printr-un poligon regulat cu N_l = = 40 laturi.

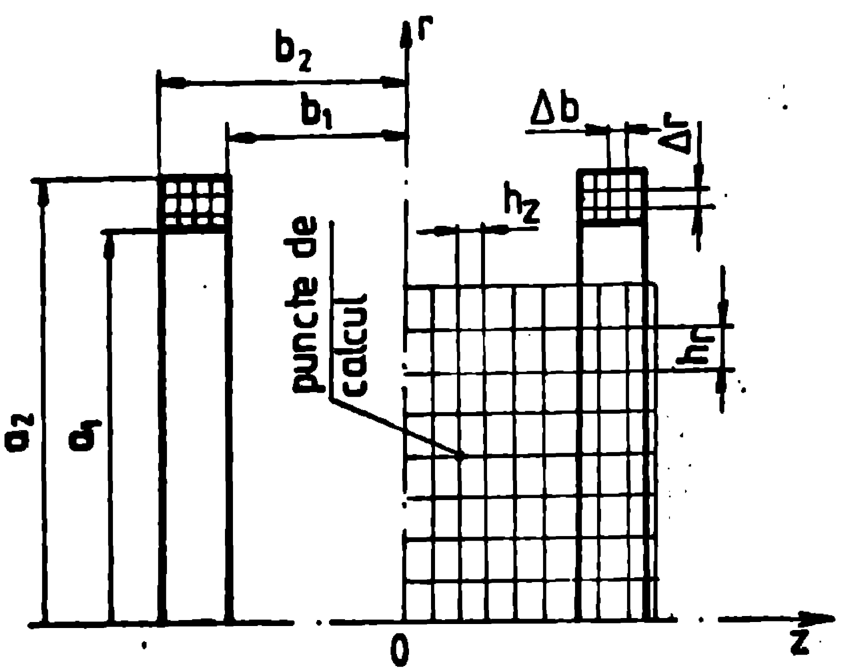


Fig. 3.61. Impărţirea bobinelor în spire echivalente şi poziţia punctelor de calcul

Păstrînd valorile exacte pentru Φ_{med} şi distanţa d şi ţinînd seama de valorile modificate pentru h_r şi h_z au rezultat: a_1 = 142,5 mm; a_2 = 157,5 mm; b_1 = 65 mm; b_2 = 85 mm. Considerînd în continuare curentul electric uniform repartizat pe secţiunea transversală a bobinelor, cu densitatea de curent menţionată (J=0,666 A/mm^2), s-a calculat inducţia magnetică în N_p = 90 puncte situate în zona r = 0 ÷ 120 mm, z = 0 ÷ 90 mm şi distanţate între ele cu pasul h_r = 15 mm şi h_z = 10 mm. (fig. 3.61). Rezultatele programului de calcul sînt prezentate în anexa A1.

β. La metoda bazată pe dezvoltarea expresiei potenţialului magnetic scalar în serii cu polinoame Legendre (programul CMSL) s-au folosit aceleaşi date de intrare ca şi pentru programul CMS2, cu următoarele deosebiri:

- lipseşte N_l ca mărime de intrare, deoarece spirele circulare nu se mai aproximează cu un poligon;
- numărul de termeni ai seriilor din relaţiile (2.60) respectiv (2.61) s-a limitat la valoarea pentru care suma modulelor ultimilor doi termeni este mai mică decît $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ori valoarea absolută a primului termen al seriei;
- ordinul maxim admis al polinoamelor Legendre a fost 491. Rezultatele calculului în aceleaşi 90 de puncte sînt prezentate în anexa A2.

γ. La metoda diferenţelor finite cu pas constant, s-a folosit programul de calcul CDF2 care constituie o particularizare a programului CDF6 pentru cazul unui mediu omogen ($\mu = \mu_0$), deci nu a mai fost necesară folosirea tablourilor pentru μ_r. Reţeaua de discretizare s-a ales dreptunghiulară cu pașii h_r = 15 mm și h_z = 10 mm, rezultînd mărimile caracteristice privind încadrarea bobinei în rețeaua de discretizare: NBJ = 11, NBS = 11, MBS = 9 și MBD = 10 (fig. 3.62)

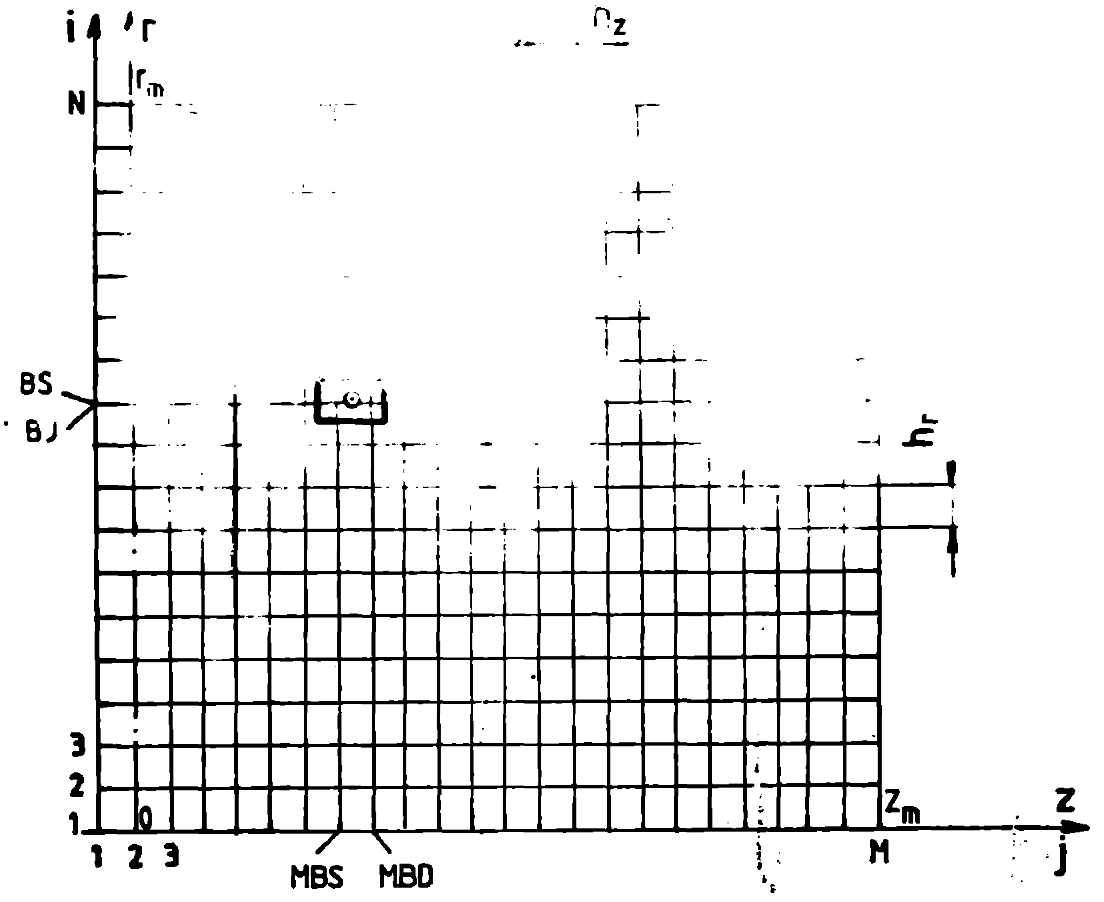


Fig. 3.62. Rețeaua de discretizare cu pas constant

Limitînd domeniul de calcul la N = 60 și M = 80, au rezultat

$$r_m = (N-1)h_r = 885 \text{ mm} \simeq 6\, r_{med}$$

$$z_m = (M-2)h_z = 780 \text{ mm} \simeq 10 \cdot d/2$$

și respectiv un număr de ecuații $N_{ec} = (M-2)(N-2) = 4524$

Se mai precizează că procesul iterativ de calcul s-a oprit cînd

$$\delta_d = \sum_{i=2}^{NBS} \sum_{j=2}^{MBS} \left| A_{ij}^{k} - A_{ij}^{k-1} \right| < \varepsilon = 10^{-5} \qquad (3.56)$$

unde prin k s-a notat numărul de iterații. De asemenea s-a limitat numărul maxim de iterații la KM = 500. Structura programului de calcul împreună cu rezultatele obținute sînt date în anexa A3.

δ. Pentru a nu crește exagerat numărul de ecuații în situația cu domeniul se extinde mult, s-a folosit și o rețea cu pas variabil în progresie geometrică în zona din exteriorul bobinei, rezultînd programul CMF 5. Astfel, s-a folosit aceeași rețea dreptunghiulară cu pas constant în zona i = 1 ÷ Nuc = 14; j = 1 ÷ Muc = 14, iar în exteriorul acestei zone pasul s-a mărit în progresie geometrică cu rația kq_h = 1,2. A rezultat rețeaua de discretizare din fig. 3.63.

Limitînd în acest caz domeniul la N = 32 și M = 33, rezultă N_{ec} = 930 adică de 5 ori mai mic decît în cazul procedeului cu toate acestea, domeniul este mult mai extins (r_m = 2,5 m ≃ 16 r_{med}; z_m =

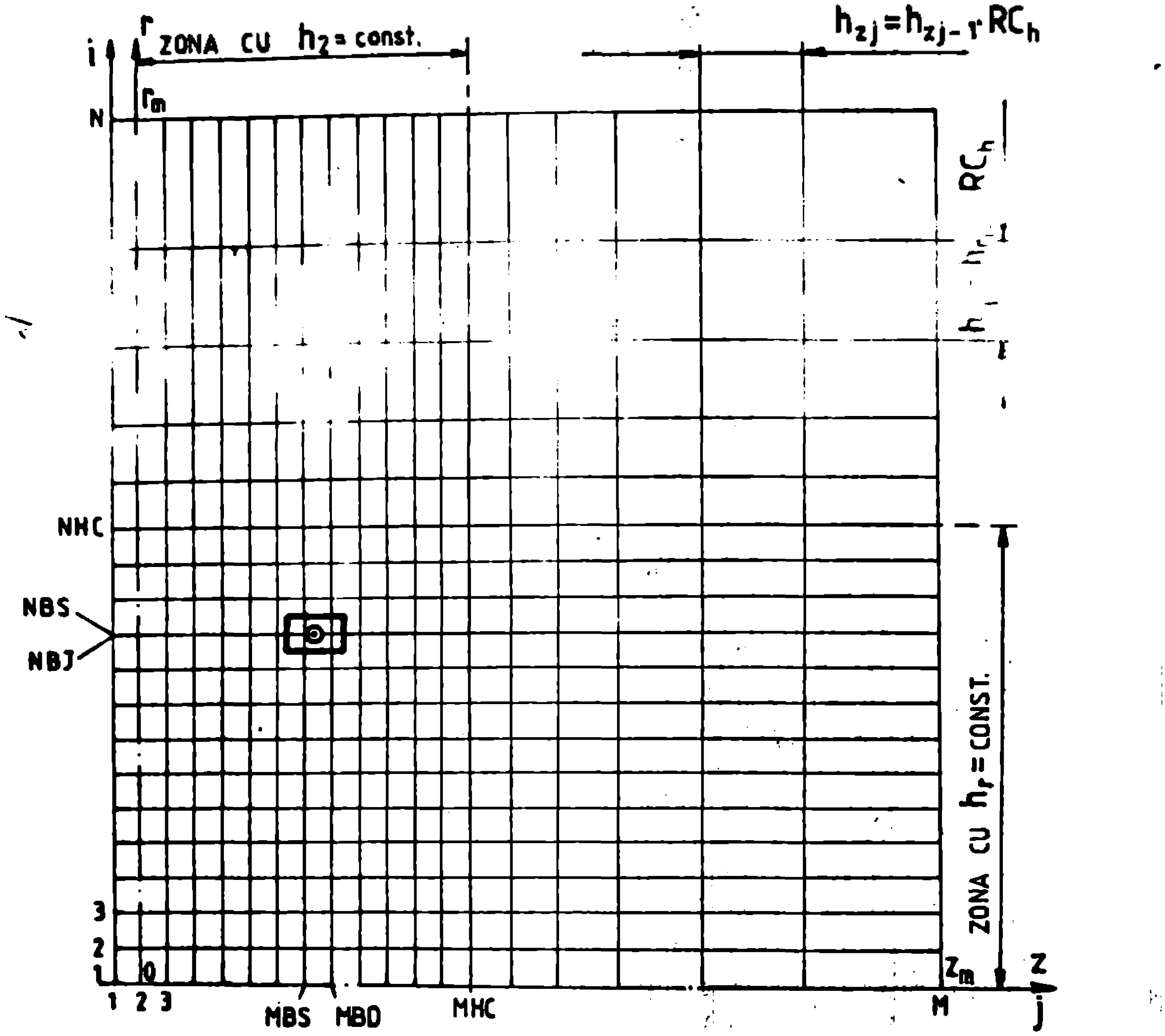


Fig. 3.63. Reţeaua de discretizare cu pas variabil

= 1,96 m = [illegible] d/2) şi deci aproximarea condiţiilor pe frontieră (Anex. fig. 2.55) este mai corectă. In aceste condiţii se poate aprecia că soluţia se obţine cu precizie mai ridicată şi cu un timp de calcul considerabil redus. Structura programului de calcul CDF9 şi rezultatele obţinute sînt prezentate în anexa A4.

3.5.2. Determinări experimentale

Verificarea rezultatelor obţinute prin cele patru metode abordate s-a făcut în două moduri şi anume prin comparare cu valoarea exactă a cîmpului magnetic pe axa de simetrie şi respectiv prin măsurare experimentală.

Pentru determinarea valorii exacte a inducţiei magnetice pe axa de simetrie s-a folosit relaţia (2.26) care dacă bobinele Helmholtz se consideră ca fiind rezultate dintr-o combinaţie a doi solenoizi de lungimi $2a_2$ şi $2a_1$, se pune în forma:

$$B = \frac{J}{2} a_1 \left[F\left(\alpha, \beta_2 + \frac{z}{a_1}\right) + F\left(\alpha, \beta_2 - \frac{z}{a_1}\right) - F\left(\alpha, \beta_1 + \frac{z}{a_1}\right) - F\left(\alpha, \beta_1 - \frac{z}{a_1}\right) \right] \qquad (3.57)$$

Se menţionează faptul că în această relaţie s-au folosit dimensiunile exacte ale secţiunii transversale a bobinei, adică:

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{158}{142} = 1,112676; \quad \beta_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{64,9}{142} = 0,457042;$$

$$\beta_2 = \frac{b_2}{a_1} = \frac{85,1}{142} = 0,599296$$

Pentru verificarea rezultatelor obţinute prin calcul, s-a măsurat componenta longitudinală a inducţiei magnetice (B_z) în puncte în care aceasta s-a şi calculat prin cele patru metode. În acest scop s-a realizat montajul din fig. 3.64 în care s-au folosit următoarele aparate:

– sursa de tensiune continuă stabilizată (S) de tipul I 4104 – IEMI Bucureşti;

– reostat (R) pentru reglarea curentului electric;

– ampermetru magnetoelectric (A) tip IAEM Timişoara şi având clasa de precizie 0,2;

– teslametru (T) cu sondă Hall, tip Siemens.

În vederea efectuării determinărilor experimentale a fost necesară realizarea din materiale neferomagnetice a unui sistem de poziţionare a sondei Hall în coordonatele cilindrice r, z. De asemenea s-a avut în vedere ca plasarea bobinelor Helmholtz să se facă astfel încît să nu existe în apropiere materiale feromagnetice care să afecteze cîmpul magnetic produs. Aceasta a presupus printre altele ca masa de lucru să nu aibă schelet metalic şi de asemenea distanţa faţă de pereţii cu armături metalice să fie suficient de mare.

De asemenea, pentru ca erorile determinărilor experimentale să fie cît mai mici, în timpul efectuării măsurării s-au avut în vedere în permanenţă următoarele: – menţinerea constantă a intensităţii

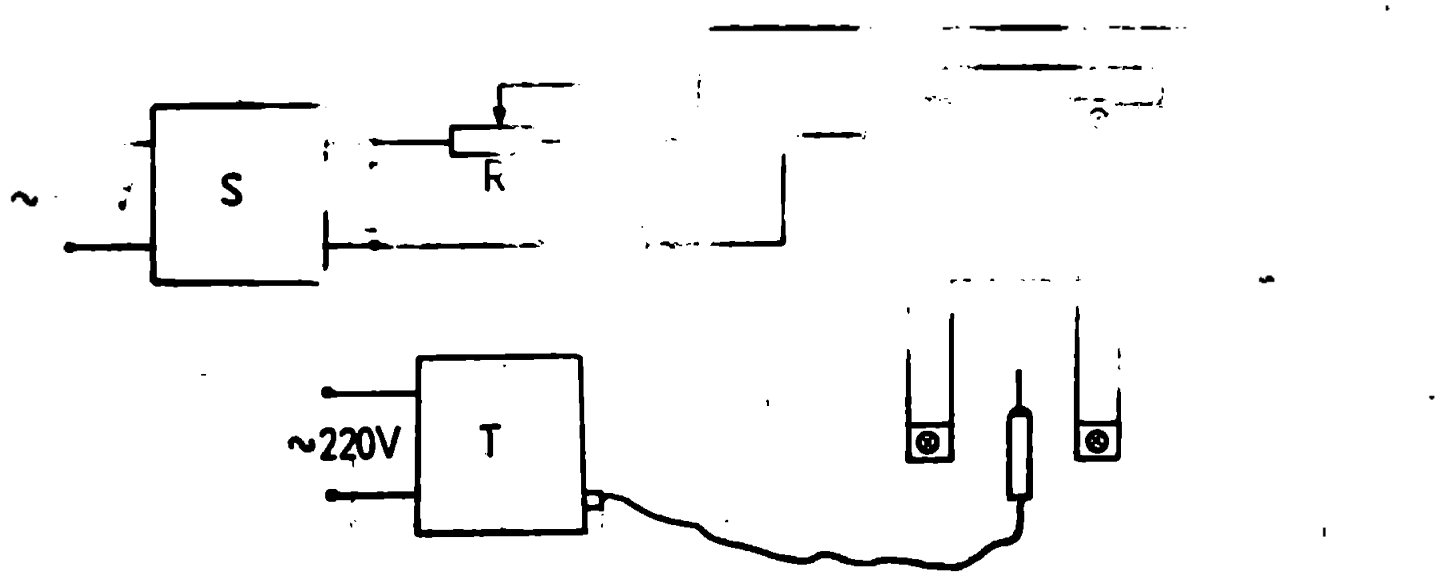


Fig. 3.64. Schema electrică a montajului pentru măsurarea inducţiei magnetice la bobinele Helmholtz

curentului electric; - poziţionarea corectă a sondei Hall; - calibrarea atentă şi repetată a teslametrului. Se menţionează că teslametrul folosit pentru măsurare prezintă o gamă largă de domenii de măsură, de la 0,1 mT pînă la 3 T. In cadrul măsurărilor efectuate s-au folosit domeniile de 1 mT şi 3 mT, de mare sensibilitate şi de aceea s-a impus calibrarea repetată a aparatului. De asemenea se mai menţionează că sonda Hall cu care este echipat teslametrul are dimensiuni reduse ($2 \times 4 \times 0,5$ mm^3), astfel că se poate considera că măsurările sînt practic punctuale.

3.5.3. Compararea rezultatelor obţinute

Pentru o apreciere comparativă mai uşoară a rezultatelor obţinute prin cele patru metode de calcul, o parte dintre acestea se prezintă sintetic în tabelul 3.12 împreună cu rezultatele măsurărilor experimentale. De asemenea, acestea se prezintă grafic în figurile 3.65 şi 3.66 după cum urmează:

- cu linie continuă pentru metodele analitice cu rezolvare numerică (programele CMS2 şi CMSL) prin care s-au obţinut rezultate practic identice (diferenţe apărînd la a cincea cifră semnificativă);
- cu linie întreruptă, pentru metoda diferenţelor finite cu pas constant (program CDF2);
- cu linie punct, pentru metoda diferenţelor finite cu pas variabil (program CDF9);
- punctele marcate reprezintă rezultatele măsurărilor experimentale.

Analizînd aceste rezultate, se constată o concordanţă bună a rezultatelor obţinute prin diferitele metode. Astfel, faţă de valorile măsurate experimental, cele calculate diferă cu mai puţin de: 0,9% la CMS2 şi CMSL; 1,6% la CDF2; 1,2% la CDF9. De asemenea se constată că în marea majoritate a punctelor inducţia magnetică măsurată experimental este mai mare decît cea calculată prin toate metodele, aceasta putînd conduce la presupunerea că măsurările experimentale au fost afectate de o eroare sistematică. Această presupunere se întăreşte dacă se compară valorile inducţiei magnetice pe axa de simetrie cu valorile exacte obţinute pe baza relaţiei (3.57). Rezultatele se prezintă comparativ în tabelul 3.13 şi în figura 3.67 şi se constată că valoarea exactă diferă faţă de rezultatele celor două metode analitice (CMS2 şi CMSL) doar la a şasea cifră semnificativă şi este puţin sub valorile măsurate.

Pe de altă parte, dacă se calculează inducţia magnetică în centrul sistemului, pe baza constantei de cîmp se obţine $B_0 = k_B \cdot I =$

Tabelul 3.12. Inducţia magnetică (comp.longitudinală) la inelele Helmholtz

B_a [mT]	r [mm]	0	15	30	45	60	75	90	105	120
z=0	CMS2	1,1988	1,1987	1,198	1,1945	1,1841	1,1599	1,1109	1,0228	0,8816
	CMSL	1,1988	1,1987	1,198	1,1945	1,1841	1,1599	1,111	1,0231	0,8821
	CDF2	1,1895	1,1891	1,1881	1,1842	1,1734	1,1492	1,1014	1,0166	0,8803
	CDF9	1,1937	1,1934	1,1924	1,1886	1,1778	1,1536	1,1059	1,0212	0,885
	exp.	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1875	1,16	1,1075	1,005	
z=10mm	CMS2	1,1987	1,1989	1,1988	1,1964	1,188	1,1667	1,122	1,0384	0,8964
	CMSL	1,1987	1,1988	1,1987	1,1964	1,188	1,1668	1,1221	1,0387	0,8999
	CDF2	1,1893	1,1894	1,1890	1,1863	1,1774	1,156	1,1121	1,0314	0,8976
	CDF9	1,1936	1,1937	1,1933	1,1906	1,1817	1,1604	1,1166	1,036	0,9023
	exp.	1,2	1,2	1,2025	1,2025	1,19	1,17	1,12	1,035	
z=20mm	CMS2	1,1982	1,1989	1,2005	1,2015	1,1987	1,1864	1,1546	1,086	0,9557
	CMSL	1,1982	1,1989	1,2005	1,2014	1,1987	1,1865	1,1547	1,0863	0,9563
	CDF2	1,1885	1,1898	1,1912	1,1918	1,1884	1,1755	1,1435	1,0765	0,9519
	CDF9	1,1928	1,1942	1,1955	1,1961	1,1927	1,1799	1,148	1,0812	0,9566
	exp.	1,2	1,2	1,205	1,2075	1,205	1,195	1,1625	1,1	
z=30mm	CMS2	1,1964	1,1979	1,2021	1,2081	1,214	1,2162	1,2063	1,1668	1,0603
	CMSL	1,1964	1,1979	1,202	1,208	1,214	1,2162	1,2064	1,167	1,0609
	CDF2	1,1864	1,1895	1,1935	1,1991	1,2044	1,2054	1,1939	1,1533	1,0512
	CDF9	1,1906	1,1938	1,1978	1,2034	1,2088	1,2098	1,1984	1,1579	1,0558
	exp.	1,2	1,2	1,2075	1,2175	1,2225	1,225	1,22	1,19	
z=40mm	CMS2	1,192	1,1944	1,2016	1,2136	1,2303	1,2508	1,2717	1,2796	1,2293
	CMSL	1,1919	1,1943	1,2015	1,2135	1,2302	1,2508	1,2716	1,2797	1,23
	CDF2	1,1815	1,1868	1,194	1,2058	1,222	1,2413	1,2591	1,2616	1,2086
	CDF9	1,1857	1,1911	1,1982	1,2101	1,2263	1,2456	1,2635	1,2661	1,2132
	exp.	1,195	1,1975	1,21	1,225	1,2425	1,265	1,28	1,285	
z=50mm	CMS2	1,1832	1,1865	1,1968	1,2149	1,2426	1,283	1,3399	1,4142	1,4782
	CMSL	1,1832	1,1865	1,1967	1,2148	1,2425	1,2829	1,3397	1,4141	1,4784
	CDF2	1,1723	1,1798	1,1903	1,2085	1,2362	1,276	1,3302	1,396	1,4404
	CDF9	1,1765	1,1841	1,1944	1,2127	1,2405	1,2803	1,3346	1,4004	1,445
	exp.	1,19	1,1925	1,205	1,225	1,25	1,29	1,35	1,43	

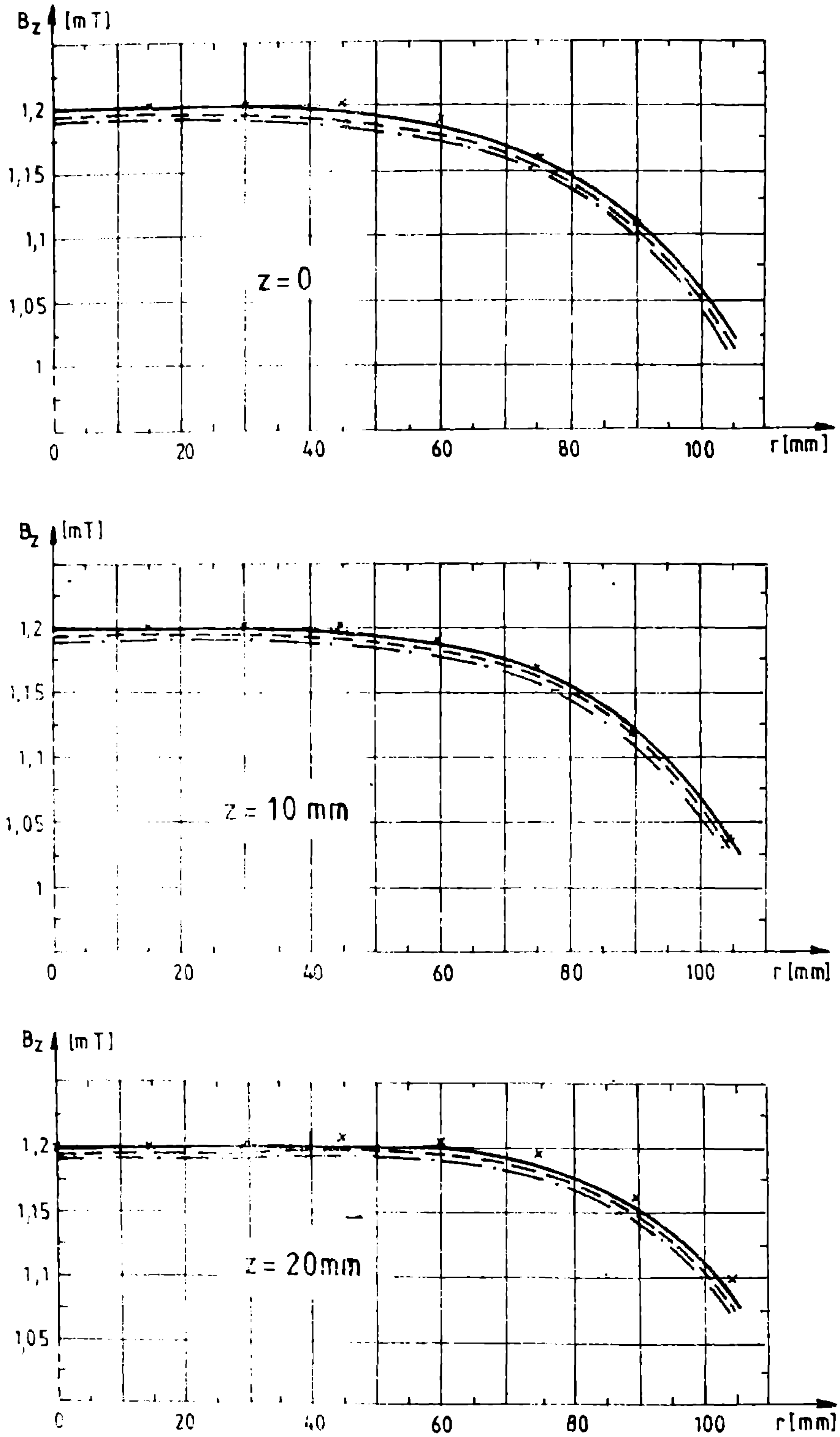


Fig.3.65. Componenta longitudinală a inducţiei magnetice la bobinele Helmholtz

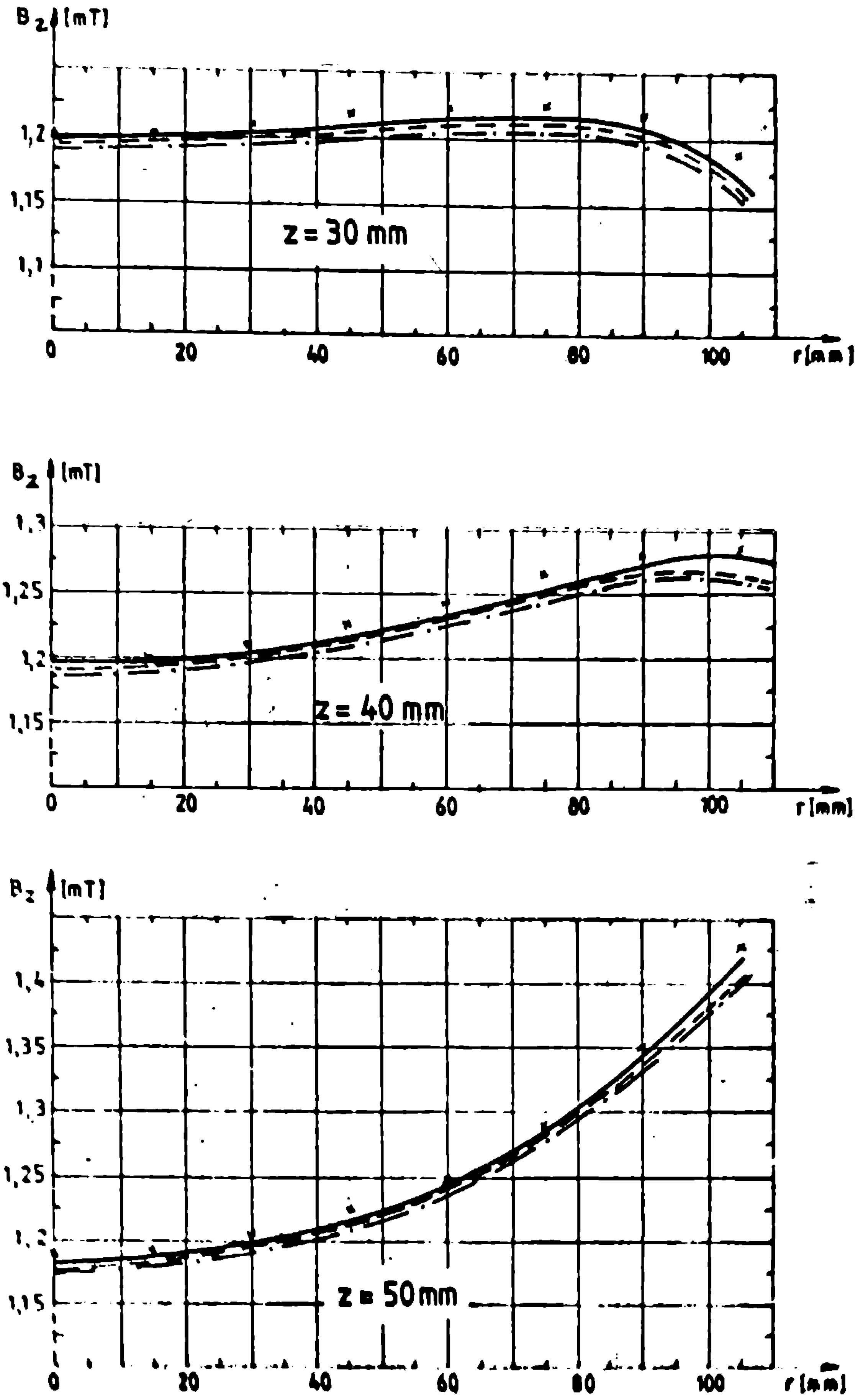


Fig. 3.66. Componenta longitudinală a inducţiei magnetice la bobinele Helmholtz

Tabelul 3.13. Inducţia magnetică pe axa bobinelor Helmholtz [mT]

z[mm]	CMS2	CMSL	CDF2	CDF9	Valoare exactă	Măs. exp.
0	1,1988	1,19874	1,18945	1,19372	1,19868	1,2
10	1,1987	1,19867	1,18927	1,19357	1,19862	1,2
20	1,1982	1,19819	1,18852	1,19282	1,19815	1,2
30	1,1964	1,19639	1,18634	1,19062	1,19636	1,2
40	1,1920	1,19192	1,18144	1,18567	1,19189	1,195
50	1,1832	1,18318	1,17229	1,17648	1,18316	1,19
60	1,1686	1,16860	1,15737	1,16155	1,16860	
70	1,1469	1,14690	1,13551	1,13964	1,14690	
80	1,1173	1,11727	1,10591	1,10997	1,11727	
90	1,0796	1,07955	1,06844	1,07244	1,07955	
100			1,02359	1,02755	1,03425	1,04
110			0,97243	0,97637	0,98245	0,99
120			0,91642	0,92036	0,92567	0,93

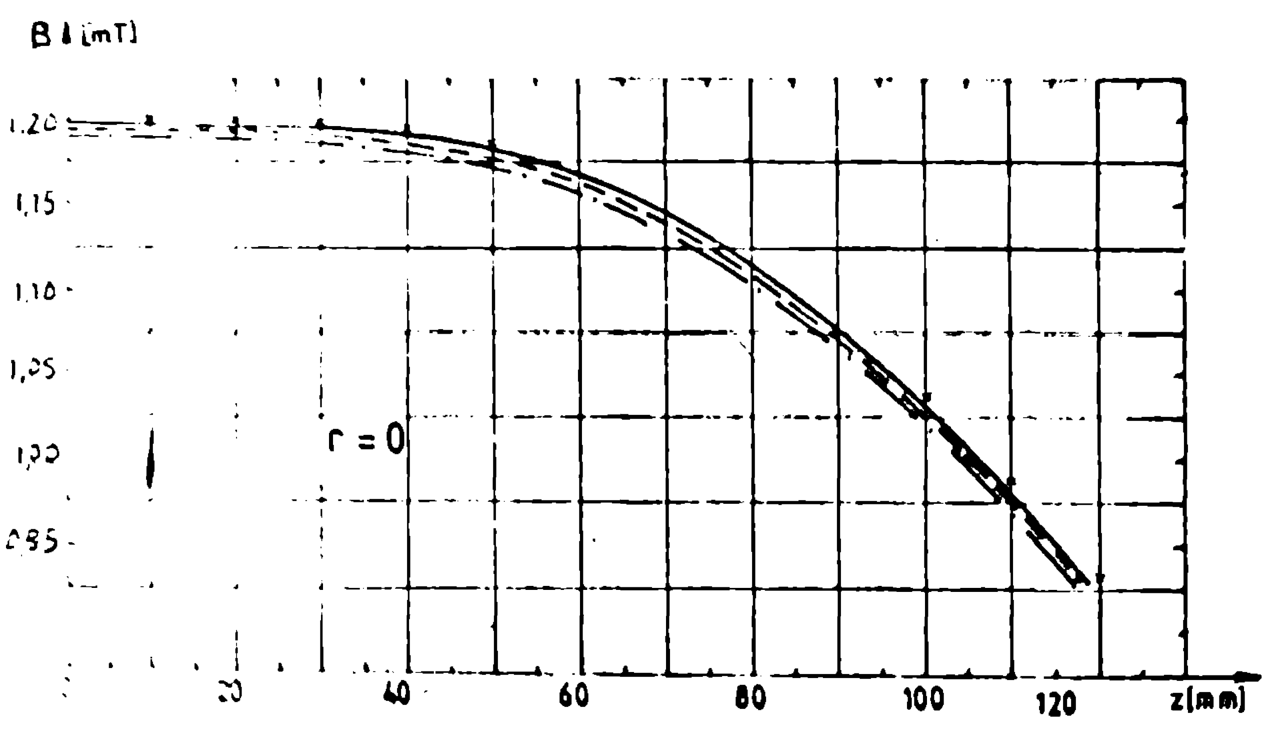


Fig. 3.67. Inducţia magnetică pe axa bobinelor Helmholtz

= 0,6032·2 = 1,2064 mT, în concordanţă cu valoarea măsurată. Deoarece însă aceasta diferă de valoarea exactă determinată pe baza dimensiunilor geometrice cunoscute, rezultă concluzia că dimensiunile date n-au fost riguros respectate tehnologic şi de aici rezultă evident o anumită eroare sistematică ce afectează calculele. Se poate deci aprecia că metodele de calcul aplicate conduc de fapt la rezultate mai puţin eronate decît cele prezentate. De asemenea la toate aceste metode se poate mări precizia în detrimentul timpului de calcul. Se mai precizează că un indiciu suplimentar al corectitudinii rezultatelor obținute îl constituie faptul că există o bună concordanță privind alura curbei de variație a inducției magnetice după r sau z, obținută prin toate metodele abordate.

In legătură cu folosirea eficientă a metodelor de calcul abordate este deosebit de utilă o comparație a acestora și sub aspectul timpului de calcul necesar pentru obținerea soluției, deși nu s-a avut în vedere o analiză amănunțită în această direcție. Pentru exemplul de calcul considerat, se prezintă în tabelul 3.14 timpul de calcul consumat la aplicarea celor patru metode și se constată că metodele analitice sînt echivalente și sub acest aspect. La metoda diferențelor finite cu pas constant, timpul de calcul este substanțial mai mare deși precizia este cea mai scăzută. Cauza o constituie numărul mare de ecuații și convergența slabă a procesului iterativ de calcul. La metoda diferențelor finite cu pas variabil, timpul de calcul este semnificativ redus și totuși (după cum s-a văzut) precizia este mai bună. Rezultă de aici concluzia că în cazul domeniilor cu extindere foarte mare se impune folosirea unei rețele de discretizare cu pas variabil.

Tabelul 3.14. Timpul de calcul la metodele abordate

Metoda	CMB2	CMBL	CDF2	CDF9
Timpul de calcul [s]	150,3	149,9	605	162

Din cele prezentate se pot desprinde și unele recomandări cu caracter mai general privind alegerea metodei de calcul pentru rezolvarea unei probleme date. Astfel, după cum s-a văzut, cele două metode analitice sînt echivalente atît sub aspectul preciziei cît și al timpului de calcul. Cu toate acestea metoda bazată pe integrarea relației lui Biot-Savart-Laplace este de preferat (în cazul mediilor omogene) deoarece prezintă avantajul simplității și mai important, se poate aplica la geometrii complicate cînd un calcul analitic exact nu s-ar putea efectua. Referindu-ne la metoda diferențelor finite, aceasta este dezavantajoasă în cazul problemelor cu medii omogene (cum a fost cazul bobinelor Helmholtz), deși se poate obține o precizie satisfăcătoare. Metoda se va folosi însă în cazul mediilor neomogene cînd nu se mai pot aplica cele două metode analitice luate în considerare.

C O N C L U Z I I

Problemele mai importante abordate în cadrul tezei de doctorat se referă în principal la:

- Relevarea unor aspecte caracteristice majore ale diferitelor soluții tehnologice și constructive de bobine pentru cîmpuri magnetice puternice și a implicațiilor acestora asupra calculului electromagnetic al sistemelor respective;

- Desvoltarea unor metode analitice și numerice într-o formă convenabilă folosirii calculatorului electronic pentru determinarea cîmpului magnetic la diferite configurații de bobine situate în medii magnetice omogene și neomogene;

- Aplicarea metodelor de calcul prezentate în cazul unor sisteme de interes practic, cum sînt: generatoarele MHD, mașinile sincrone, diferite variante de solenoizi și mașinile unipolare.

În legătură cu particularitățile bobinelor supraconductoare pentru cîmpuri magnetice puternice se arată că din punct de vedere al calculului electromagnetic aceste particularități se referă în principal la: densitatea mare de curent; absența pieselor feromagnetice în scopul producerii cîmpului magnetic; menținerea stării supraconductoare. În această situație este justificată problema desvoltării unor metode eficiente de calcul al cîmpului magnetic la diferite configurații de bobine situate într-un mediu magnetic omogen. Pe de altă parte, bobinele respective fiind destinate producerii unor cîmpuri magnetice puternice, rezultă că în multe situații se impune ecranarea magnetică pentru protejarea aparaturii și instalațiilor conexe. Deoarece prezența acestor ecrane afectează cîmpul magnetic produs, a fost necesară și abordarea unor metode de calcul al cîmpului magnetic în cazul unor medii neomogene. Metodele de calcul desvoltate au fost aplicate în cazul unor sisteme de interes practic, care au constituit și obiectul mai multor contracte de cercetare științifică.

În continuare se prezintă principalele contribuții originale ale autorului în legătură cu problemele abordate.

1. Elaborarea unei metode de calcul al cîmpului magnetic pentru bobine cu formă oarecare situate în medii omogene și liniare plecînd de la relația lui Biot-Savart-Laplace. Pe baza metodei elaborate s-a conceput și realizat un program de calcul cu aplicabilitate la bobine cu forme geometrice complicate, fără restricții privitoare la poziția punctului în care se calculează cîmpul magnetic. Programul elaborat se remarcă prin simplitate și s-a dovedit eficient nu numai în cazul

bobinelor cu geometrie complicată cum este cazul generatoarelor MHD, ci şi la bobine cu simetrie axială, pentru care există şi alte soluţii privind cîmpul magnetic.

2. Deducerea şi prezentarea într-o formă compactă a unor expresii de calcul pentru cîmpul magnetic în cazul unor conductoare rectilinii paralele de lungime mare şi dispuse pe un cilindru sub forma unor multipoli. Relaţiile s-au dedus în absenţa sau prezenţa unor ecrane electromagnetice ideale, iar contribuţiile autorului se referă îndeosebi la:

2.1. Unele precizări privind convergenţa seriilor din expresiile inducţiei magnetice, din care rezultă recomandări utile privind alegerea unor dimensiuni geometrice;

2.2. Aplicarea relaţiilor de calcul deduse în cazul generatoarelor MHD cu canal de lungime mare şi secţiune transversală constantă, dar mai ales în cazul bobinelor pentru generatoare sincrone, rezultatele obţinute evidenţiind influenţa ecranelor asupra cîmpului magnetic şi asupra unor parametri ai maşinii.

3. In cazul bobinelor supraconductoare pentru generatoare MHD, se menţionează contribuţiile autorului privind:

3.1. Stabilirea expresiei inducţiei magnetice corespunzătoare unei spire filiforme, pe axa longitudinală a unui canal divergent;

3.2. Tratarea unitară a condiţiilor geometrice de obţinere a unui cîmp magnetic cu uniformitate sporită în secţiunea transversală a canalului. S-au trasat grafice din care se pot determina expeditiv dimensiunile geometrice respective;

3.3. Elaborarea unui program de calcul al cîmpului magnetic în orice punct şi a două programe de calcul a forţelor locale şi respectiv pe unitatea de lungime. Programele de calcul elaborate s-au aplicat în cazul unei bobine masive pentru un generator MHD cu canal în formă de trunchi de piramidă. Rezultatele obţinute sînt utile şi pentru proiectarea sistemului de consolidare.

4. In cazul bobinelor formate din spire circulare coaxiale fără medii feromagnetice, în principal solenoizi sau combinaţii de solenoizi, problemele rezolvate sînt legate îndeosebi de determinarea cîmpului magnetic şi de posibilităţile de a obţine cîmpuri magnetice de mare uniformitate. Contribuţiile autorului în legătură cu aceste probleme sînt:

4.1. Stabilirea expresiilor de calcul al cîmpului magnetic în orice punct, pornind de la dezvoltarea în serie a potenţialului magnetic scalar al unei spire circulare filiforme. Se stabilesc de asemenea expresii particulare simple dar importante pentru calculul cîmpului magnetic în planul unei spire circulare. Pe baza expresiilor deduse, s-a elaborat un program de calcul al cîmpului magnetic, în cadrul căruia s-a eliminat restricția privind alegerea punctului de calcul astfel încît seriile să fie convergente;

4.2. s-a particularizat programul general de calcul pe baza relației lui Biot-Savart-Laplace pentru cazul unor spire circulare și pe baza rezultatelor obținute prin aplicarea ambelor programe s-au dat indicații privind oportunitatea folosirii fiecăruia;

4.3. s-au tratat unitar diferite posibilități cunoscute pentru obținerea unor cîmpuri magnetice cu grad de uniformitate ridicat și s-au propus patru noi variante de compensare. In legătură cu aceasta s-a realizat programe de calcul care determină valoarea densității de curent în diferite zone ale unor solenoizi coaxiali din condiția de a avea același cîmp magnetic într-un număr impus de puncte situate pe axa longitudinală. S-a arătat că este deosebit de avantajoasă realizarea bobinei sub forma unor trepte cu diametre astfel alese încît să aproximeze un elipsoid de rotație.

5. In cazul bobinelor pentru excitația mașinilor unipolare, fiind prezente ecrane feromagnetice, s-a folosit ca metodă de calcul al cîmpului magnetic metoda diferențelor finite. Contribuțiile autorului în acest domeniu sînt:

5.1. Stabilirea unor relații generale în diferențe finite pentru potențialul magnetic vector în cazul unor medii neomogene și o rețea de discretizare cu pas variabil. Relațiile generale sînt și particularizate pentru cazuri uzuale din practică. S-au făcut precizări privind stabilirea frontierei domeniului, accelerarea convergenței procesului iterativ de calcul, aproximarea curbei de magnetizare dacă mediul se consideră liniar;

5.2. Pe baza relațiilor stabilite, s-au conceput două programe de calcul, pentru ecrane liniare și respectiv neliniare;

5.3. S-a determinat factorul optim de accelerare a convergenței în două situații și s-a constatat o bună concordanță cu rezultate cunoscute din literatură.

5.4. Rezultatele obținute prin metoda diferențelor finite s-au verificat în unele cazuri particulare prin metode analitice, obținîndu-se o foarte bună concordanță. Ca urmare s-a putut aprecia că metoda diferențelor finite conduce la rezultate corecte;

5.5. S-a rezolvat apoi problema determinării cîmpului magnetic și a tensiunii induse în diferite variante de ecranare. Forma bobinei a fost optimizată în sensul ca în absența ecranelor să rezulte o tensiune indusă maximă. Rezultatele obținute permit să se pună în evidență influența ecranelor asupra cîmpului magnetic, precum și indicații privind alegerea dimensiunilor acestor ecrane.

6. O contribuţie importantă a autorului se referă la aplicarea metodelor de calcul în cazul unor bobine circulare helmholtz la care s-au putut efectua şi determinări experimentale. De asemenea s-a conceput şi realizat un program de calcul pe baza metodei diferenţelor finite la o reţea cu pas variabil în progresie geometrică. Concordanţa bună a rezultatelor obţinute prin toate metodele de calcul, cu cele experimentale atestă corectitudinea acestor metode. De asemenea, pe baza acestor rezultate s-au putut face unele recomandări privind alegerea metodei de calcul într-o problemă tehnică concretă. Referitor la metoda diferenţelor finite, a rezultat că folosirea unei reţele de discretizare cu pas variabil în progresie geometrică în cazul domeniilor cu extindere mare, este avantajoasă atît sub aspectul preciziei cît şi al rapidităţii obţinerii soluţiei.

7. Toate programele de calcul sînt în exclusivitate concepute de autor şi s-au rulat la Centrul de Calcul al I.P.T.V. Timişoara.

B I B L I O G R A F I E

1. Angot, A. Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică şi telecomunicaţii. Traducere din limba franceză, Bucureşti, Editura Tehnică, 1965

2. Appleton, A.D. Motors, generators and fluxpumps. Low temperatures and electric power, Pergamon Press, 1970

3. Appleton, A.D., Mc Nab, I.R. A model superconducting motor. Low temperatures and electric power, Pergamon Press, 1970

4. Appleton, A.D., Ross, J.S.H. Aspects of a superconducting winding for a 3250 kW motors. Low temperatures and electric power, Pergamon Press, 1970

5. Appleton, A.D. Status of superconducting machines at International Research and Development Co Ltd. England – Spring 1972

6. [illegible], R. Distribuţia spaţială a câmpului magnetic produs de un solenoid cilindric. EEA – Electrotehnica, nr. 6, 1972

7. Atanasiu, Gh., Constantin, A., Popa, I., Mandu, D., [illegible], D. The analysis of superconducting magnet systems for the MHD energy conversion. Rev. Roum. Sci. Techn. Electrotechn. et Energ., 23, 1, p. 163-169, 1978

8. Atanasiu, Gh., Constantin, A., Popa, I., Mandu, D. Berechnung des Magnetfeldes von Supraleiterspulen verschiedener Geometrie für MHD Dipolmagnete. Rev. Roum. Sci. Techn. Electrotechn. et Energ., 23, 2, p. 207-215, 1978

9. Atanasiu, Gh. Maşini electrice cu înfăşurări supraconductoare. Lucrările Colocviului de supraconductibilitate şi crioelectrotehnică, Craiova, dec. 1977

10. Atanasiu, Gh., Constantin, A., Popa, I., Predan, A., Mandu, D. Studiul documentar tehnico-ştiinţific privind magneţii supraconductori utilizaţi pentru generatoarele MHD. Protocol (faza A) la contractul de cercetare ştiinţifică nr. 155/21.05.1975, IPTV Timişoara – ICPE Bucureşti

11. Atanasiu, Gh., Constantin, A., Popa, I., Predan, A., Mandu, D. Studiu privind principiile de calcul ale magnetului supraconductor destinat unui canal de conversie MHD cu puterea electrică de 1-10 kW. Protocol (faza B) la contractul de cercetare ştiinţifică nr. 155/21.05.1975, IPTV Timişoara – ICPE Bucureşti

12. Atanasiu, Gh., Constantin, A., Popa, I., Mandu, D., Predan, A. Calculul electromagnetic mecanic şi termic preliminar al electromagnetului supraconductor destinat unui canal de conversie MHD cu puterea electrică de 1-10 kW. Protocol (faza C) la contractul de cercetare ştiinţifică nr. 155/21.05.1975, IPTV Timişoara – ICPE Bucureşti

13. Bardeen, J., Cooper, L.N., Schrieffer, J.R. Theory of superconductivity. Physical Review, vol. 108, nr. 5, 1957, p. 1175-1204

14. Barthelemy, R.R., [illegible] Optimum magnets for MHD generators. Proceedings of a Symposium on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, Salzburg, 1966.

15. [illegible], Vasiliev, V.I., [illegible], G.V. K voprosu ob optimizaţii kriogenih u sverhprovodiaşcih magnitnih sistem MHD generatorov. Proceedings of a Symposium on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, Salzburg, 1966

16. Bonn, Kn., Komarek, P. Behavior of a large superconducting MHD magnet. Fifth International Conference on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, München, 1971

17. Brateljik, T. Turbogeneratoren mit supraleitender Erregerwicklung. Bul ASE, 64, 17, p. 1040-1050, 1973

18. Brechna, H. Superconducting magnet systems. Springer-Verlag, Berlin, 1973

19. Buckel, W. Supraleitung. Grundlagen und Anwendungen, Physik Verlag, 1972

20. Bucur, C.M., Popeea, C.A., Simion, Gh.Gh. Matematici speciale - calcul numeric. Ed. did. şi ped., Bucureşti, 1983

21. Bünde, R., Muntenbruch, H. MHD Power Generation. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

22. Cimpeanu, A. Unele probleme constructive şi funcţionale specifice maşinilor sincrone supraconductoare. Lucrările Colocviului de supraconductibilitate şi crioelectrotehnică, Craiova, 1977

23. Constantin, A., Radu, D. Contribuţii la calculul cîmpului magnetic şi al reactanţelor la maşinile sincrone cu excitaţie supraconductoare. Electrotehnica, nr. 1, p. 25-32, 1979

24. Constantin, A., Radu, D. Particularităţi în determinarea parametrilor şi a solicitărilor mecanice la maşinile sincrone cu excitaţie supraconductoare. Lucrările celui de al II-lea Colocviu Naţional de Criogenie Crioelectrotehnică şi electrotehnică aplicată, Craiova, mai 1980

25. Constantin, A., Radu, D. Cu privire la unele criterii în proiectarea generatoarelor sincrone supraconductoare. Lucrările celui de al II-lea Colocviu Naţional de Criogenie Crioelectrotehnică şi electrotehnică aplicată, Craiova, mai 1980

26. Constantin, A., Radu, D. Particularităţi la pătrunderea cîmpului electromagnetic în corpuri supraconductoare, conductoare şi dielectrice. Bul. şt. şi tehnic al IPTV Timişoara, Electrotehnica, Tom 26(40), fasc 1-1981, p.15-26

27. Constantin, A., Radu, D. Consideraţii privind metodele de uniformizare a cîmpului magnetic la bobine solenoidale supraconductoare. Bul. şt. şi tehnic al IPTV Timişoara, Electrotehnica, Tom 26(40), fasc 2-1981, p. 17-24

28. Constantin, A., Radu, D. Posibilitate de realizare a unor bobine de cîmp magnetic uniform. Electrotehnica, 30, nr. 1, 1982, p. 31-34.

29. Constantin, A., Radu, D. Beitrag zur Berechnung der Erregerspulen von supraleitenden Synchronmaschinen. Bul. şt. şi tehnic al IPTV Timişoara, Electrotehnica, Tom 28(42), p. 5-9, 1983

30. Constantin, A., Radu, D. Influenţa ecranelor feromagnetice asupra cîmpului magnetic produs de bobine cilindrice scurte. Conferinţa Naţională de Electrotehnică şi Electroenergetică, Vol. I, Maşini electrotehnice I, p. 59-70, Timişoara, sept. 1982

31. Constantin, A., Radu, D. Contribuţii la calculul cîmpului magnetic produs de bobine cilindrice în prezenţa unui ecran feromagnetic coaxial. Bul. şt. şi Tehnic al IPTV Timişoara, Electrotehnica, Tom 29(43), p. 11-14, 1984

32. Constantinescu, Radu, D., Popescu, V. Studiul şi calculul cîmpului

magnetic la diferite configurații de mașini electrice utilizînd excitații supraconductoare. Protocol în cadrul contractului de cercetare științifică nr. 204/16.12.1976, IPTV Timișoara - ICI Electroputere Craiova

33. Constantin, A., Radu, I., Ciorascu, V. Calculul parametrilor, a solicitărilor și elaborarea unei metodici de proiectare pentru un generator sincron de mică putere cu excitație supraconductoare. Protocol în cadrul contractului de cercetare științifică nr. 140/1977, IPTV Timișoara - ICP Electroputere Craiova

34. Constantin, A., Radu, I. Calculul cîmpului magnetic și al forțelor electromagnetice la un solenoid supraconductor de laborator. Protocol la subcontractul de cercetare științifică între catedrele IPTV Timișoara, Facultatea electrotehnică - Utilizări și mașini electrice, 1979

35. Constantin, A., Radu, I., Irinia, T. Calculul cîmpului magnetic și al forțelor electromagnetice la un solenoid de laborator. Protocol la subcontractul de cercetare științifică nr. 151/1980, între catedrele IPTV Timișoara, Facultatea electrotehnică - Utilizări și mașini electrice

36. Constantin, A., Radu, I., Irinia, T., Frînkel, D., Dabu, D. Cercetarea și elaborarea metodicii de calcul a distribuției cîmpului magnetic și a forțelor electromagnetice în criomașini electrice unipolare. Protocol la subcontractul de cercetare științifică nr. 49/2/1981, între catedrele IPTV Timișoara, Facultatea electrotehnică - Utilizări și mașini electrice.

37. Crucșanu, ... Crioelectrotehnica și criza energetică actuală. Lucrările Colocviului de supraconductibilitate și crioelectrotehnică, Craiova, 1977, p. 1-11

38. Cruțu, Gh., Negru, ... Programarea în calculatorul Felix C 256. Ed. științifică, 1973

39. Delille, ... Étude comparée des diverses procédés d'obtention d'un champ magnétique pour générateur MHD industriel. International Symposium on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, Paris, 1964

40. Demidovich, B.P., Maron, I.A. Computational mathematics. Translated from the Russian, Mir publishers, Moscow, 1976

41. Dima, P. Programarea în FORTRAN. Ed. didactică și ped., București, 1971

42. Dodescu, Gh., Toma, M. Metode de calcul numeric. Ed. didactică și ped., București, 1976

43. Donadieu, L. Bobinage supraconducteur à fer pour générateur MHD. International Symposium on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, Paris, 1964

44. Donadieu, L., Maloy, J. Études sur la stabilisation des bobines supraconductrices. Proceedings of a Symposium on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, Salzburg, 1966

45. Donadieu, L. Étude des amenées de courant pour bobines magnétiques. Revue générale de l'électricité, vol. 77, nr. 2, p. 193-205, 1968

46. Dordea, T. Mașini electrice. Ed. didactică și ped., București, 1977

47. Dordea, T., Constantin, A., Radu, I. Calculul cîmpului magnetic și al forțelor electromagnetice pentru un magnet supraconductor cu bobinaj în șa în două variante cu inducția magnetică de 6 T și 8 T. Protocol la contractul de cercetare științifică nr. 120/1979, IPTV Timișoara - ICPE București

48. Dumitrapcu, L., Pătruţ, St., Stan, St. Invăţăm FORTRAN conversind cu calculatorul. Vol. 1,2, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1982

49. Durand, E. Électrostatique et Magnétostatique. Masson, 1953

50. Dzung, L.S. Production of an uniform magnetic field for MHD generators. Proceedings of Symposium on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, Warsaw, 1968

51. Feynman R. Fizica modernă. Mecanica cuantică. Traducere din limba engleză, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1970

52. Foner, S., Schwartz, B. Superconducting Machines and Devices, Large Systems Applications. Plenum Press, New York, 1974

53. Fushimi, K. Compact superconducting magnet utilizing multilayer insulation for MHD power generation research. Fifth International Conference on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, München, 1971

54. Fushimi, K. Applications of superconducting magnets in Japan. Cryogenics, Nr. 10, 1970, p.116

55. Fürsien, A. Der Turbogenerator mit supraleitender Erregerwicklung in transienten Betrieb. Archiv für Elektrotechnik, vol.57, p. 291-296, 1976

56. Gemster, H.P., Parker, C.E. High Magnetic Fields. John Wiley, New York, 1962

57. Godunov, S.K., Reabenki, V.S. Scheme de calcul cu diferenţe finite. Traducere din limba rusă, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1977

58. Goulow, M.W., Baylis, J.A., Lindley, B.C. Superconductivity and its applications to power engineering. Proc. IEE, IEE Reviews, vol.119, Nr. 8R, 1972

59. Harrowell, R.V., Norris, W.T. Some aspects of the design of magnets for MHD generators. International Symposium on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, Paris, 1964

60. Harrowell, R.V. Feasibility of a power transformer with superconducting windings. Proc. IEE, vol. 117, 1970, p.131-140

61. Hatch, A.M. Characteristics of superconducting magnets for large MHD generators. Avco Everet Research Laboratory, 1976

62. Hevillard, J.F. Structure du stateur d'un cryoalternateur. Ancrement et protection de l'enroulement. Rev.gen.de l'électricité, vol. 86, Nr.1, 1977, p. 51-56

63. Heywood, J.B., Womack, C.J. Open-Cycle MHD Power Generation. Pergamon Press, Oxford, 1969.

64. Hirai, K. A lightweight superconducting magnet for a test facility of magnetic suspension for vehicles. 4th International Conference on Magnet Technology at BNL, 1972

65. Ixaru, L.Gr. Metode numerice pentru ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii, Ed. Acad. RSR, Bucureşti, 1979

66. Janke, E., Emde, F., Losch, F. Tafeln höherer Funktionen, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960

67. Jefferies, M.J. Prospects for superconductive generators in the electric utility industry. IEEE Transaction PAS, vol. 92, Nr.5, 1973

68. Karasik, B.I. Fizica i tehnica silnih magnitnih polei.1964

69. Kilb, R.W., Westendorp, W.F. General Electric Report, 1967

70. Kittel, Ch. Introducere în fizica corpului solid. Traducere din limba engleză, Ed. Tehnică, 1970

71. Klein, G. High magnetic fields and magnetohydrodynamic generator. Symposium on Magnetoplasmadynamic Electrical Power Generation, University of Durham, 1962

72. Komarek, P. Superconducting magnets in the world of energy, especially in fusion power. Cryogenics, nr.3, 1976

73. Kullmann, D. Supraleitende Generatoren und Motoren. VDI Bildungswerk, BW 2816, 1976

74. Linton, E. Sverhprovodimosti. Izdatelstvo MIR, 1971

75. Lontai, L.M., Marston, P.G. Proc.Int.Symp.Magnet Techn., 1965

76. Masser, H. Elektrische Maschinen mit Supraleitern. Herbstschule für Anwendung der Supraleitung, Karlsruhe, 1972

77. McCracken, D.D., Dorn, W.S. Metode numerice cu programare în FORTRAN IV. Traducere din limba engleză, Ed. Tehnică, București, 1976

78. McFee, R. Optimum input leads for cryogenic apparatus. Rev.Scient. Instr. vol.30, nr.2, p.98-102, 1959

79. Mihăiu, Gh., Rădulescu, M.M. Analiza numerică a câmpului electromagnetic. Atelierul de multiplicare al IP Cluj-Napoca, 1985

80. Mocanu, C.I. Teoria câmpului electromagnetic. Ed.did.și ped., București, 1981

81. Montgomery, D.B., Weggel, R.J., Leupold, M.J., Yodh, S.B., Wright, R.L. Superconducting magnet system for intravascular navigation. J.Appl.Phys., vol. 40, 1969, p.2129-2132

82. Montgomery, D.B. Superconducting magnets for base load MHD generators. 1975

83. Montgomery, D.B. Solenoid magnet design. The magnetic and mechanical aspects of resistive and superconducting systems. Wiley-Interscience, New York, 1969

84. Monti, C., Morini, A., Pardo, B. Steady state analysis of the magnetic fields and eddy currents in the rotating screen of a superconducting alternator. Archiv für Elektrotechnik, vol. 57, p. 319-328, 1976

85. Mori, A., Jackson, A. 1976 MHD Status Report. Superconducting Magnets, for the MHD Liaison Group Meeting, Viena, 1976

86. Müller, G. Die Anwendung der Supraleitung bei rotierenden elektrischen Maschinen. Elektrie, vol.25, nr.4, 1971, p.135-139

87. Müller, G. Auslegung von Synchronmaschinen für mittlere Leistungen mit supraleitender Erregerwicklung. Elektrie, vol.25, nr.4, 1971, p.139-142

88. Newhouse, V.L. Applied superconductivity. Academic Press, New York, 1975

89. Nicolaide, A. Producerea energiei electrice pe cale magnetohidrodinamică, Ed. Tehnică, București, 1968

90. Nicolaide, A. Bazele fizice ale electrotehnicii. Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1983

91. Niculescu, St. Inițiere în FORTRAN. Ed. Tehnică, București, 1972

92. Ovcharenko, V.A. Large superconducting magnets- a key issue in commercialisation of MHD. Cryogenics, vol.18, nr.6, 1978.

93. Persch, C.P. Superconducting detector magnet Plute for the electron-positron storage ring at DESY. Fourth International Conference on Magnet Technology, Brookhaven, 1972

94. Pasare, S. Calculul distribuţiei spaţiale a cîmpului magnetic produs de un solenoid cilindric. EEA-Electrotehnica, nr.8, 1980

95. Powell, R.L. Definitions of terms for practical superconductors. 1. Fundamental states and flux fenomena. Cryogenics, vol. 17, nr. 12, 1977

96. Powell, R.L. Definitions of terms for practical superconductors. 2. Critical parameters. Cryogenics, vol.18, nr.5, 1978

97. Puşcaşu, S., Badea, M. Conceptele fundamentale ale crioelectrotehnicii. Partea I. EEA-electrotehnica, vol.25, nr.1, 1977, p. 1-9

98. Puşcaşu, S., Badea, M. Conceptele fundamentale ale crioelectrotehnicii. Partea II. EEA-electrotehnica, vol.25, nr.4, 1977, p. 149-157

99. Puşcaşu, S. Aspecte actuale ale utilizării supraconductibilităţii în construcţia de maşini electrice rotative. EEA-electrotehnica, vol.25, nr.3, 1977

00. Puşcaşu, S. Unele probleme actuale şi de perspectivă în electrotehnica aplicată. EEA-electrotehnica, vol.26, nr.3, 1978, p. 115-120

01. Puşcaşu, S., Ştefănescu, Fl., Toaxen, V. Calculul conductorilor de curent de legătură pentru instalaţiile criogenice. Lucrările celui de-al II-lea Colocviu Naţional de Criogenie Crioelectrotehnică şi Electrotehnică aplicată, vol.I, Craiova, 1980

02. Puşcaşu, S., Ştefănescu, Fl., Isar, I., Toaxen, V., Socol, M. Unele probleme ale proiectării criotransformatoarelor rezistive. Lucrările celui de-al II-lea Colocviu Naţional de Criogenie Crioelectrotehnică şi Electrotehnică aplicată, vol.I, Craiova, 1980

03. Puşcaşu, S., Badea, M. Unele probleme ale electrotehnicii circuitelor supraconductoare, EEA-Electrotehnica, vol.27, nr.2, 1979, p.48-54.

04. Racoveanu, N., Dodescu, Gh., Mincu, I., Metode numerice pentru ecuaţii cu derivate parţiale de tip parabolic. Ed.Tehnică, Bucureşti, 1977

05. Radu, D. Calculul cîmpului magnetic al unei bobine de formă carecare. Bul.St.şi Tehnic al IPTV Timişoara, Electrotehnica, Tom 24(38), Fasc. 2-1979, p.23-31

06. Radu, D. Calculul cîmpului magnetic şi al forţelor electromagnetice la o bobină de tip şa divergentă. Comunicare la Sesiunea ştiinţifică a Fac. de Electrotehnică, IPTV Timişoara, octombrie 1979

07. Radu, D., Constantin, A. Consideraţii privind determinarea cîmpului magnetic şi a forţelor electromagnetice la un solenoid supraconductor. Lucrările celui de-al II-lea Colocviu Naţional de Criogenie Crioelectrotehnică şi Electrotehnică aplicată, Craiova, mai 1980

08. Răduleţ, R. Bazele electrotehnicii. Probleme I. Ed.did. şi ped., Bucureşti, 1970

109. Rosa, R.J. Magnetohydrodynamic Energy Conversion. McGraw-Hill Book Company, New York, 1968

110. Ruiu, A. Dezvoltarea surselor neconvenţionale de producere a energiei electrice şi impactul asupra mediului ambiant. Energetica, vol.23, Nr.9, 1976

111. Salvadori, M.G., Baron, M.L. Metode numerice în tehnică. Traducere din limba engleză, Ed. Tehnică, 1972

112. Schaffernak, A.F. Beitrag zum technischen Verständnis der phänomenologischen Supraleitungstheorien. Partea I. E.u.M., nr. 3, 1975, p. 103-113

113. Schaffernak, A.F. Beitrag zum technischen Verständnis der phänomenologischen Supraleitungstheorien. Partea II. E.u.M., nr. 12, 1975, p.501-511

114. Schaffernak, A.F. Der Typ-I-Supraleiter im sprungförmigen äusseren Magnetfeld. Archiv für Elektrotechnik, Nr.3, 1974, p.112-119

115. Sergl, J. Berechnung des magnetischen Feldes und der Wicklungsinduktivitäten bei einem Turbogenerator mit supraleitender Erregerwicklung. Archiv für Elektrotechnik, vol.56, Nr.4, 1974, p.150-158

116. Shoenberg, D. Superconductivity. Cambridge University Press, 1960

117. Simony, K. Electrotehnica teoretică. Traducere din limba maghiară, Ed. Tehnică, 1974

118. Sicev, V.V., Semenovici, A.B., Andrianov, V.V. Perehodnie proţesi provodiaşcih magnetnih sistemah. Proceedings of a Symposium on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, Salzburg, 1966

119. Stănculescu, V. Criomaşini electrice şi aplicaţii ale crioelectrotehnicii. EEA-Electrotehnica, vol.24, Nr.3, 1976, p. 116-123

120. Stănculescu, V. Supraconductori şi materiale crioelectrotehnice. EEA-Electrotehnica, vol. 23, Nr.5, 1975, p. 227-232

121. Stekly, Z. A large experimental superconducting magnet for MHD Power Generation. International Institute of Refrigeration, 1966

122. Stekly, Z. Superconducting Magnets for MHD Generators. Proceedings of a Symposium on MHD Electrical Power Generation, Warsaw, 1968

123. Stekly, Z., Thome, R. Characteristics of MHD Generator Using Superconducting Field Coils. Fifth International Conference on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, München, 1971

124. Swartz, P.S. Superconducting materials magnets and applications 1961-1973

125. Şabac, I. Gh. Matematici speciale. Vol.I. Ed.didactică şi ped., Bucureşti, 1981

126. Şabac, I. Gh., Cocirlan, P., Stănăşilă, O., Topală, A. Matematici speciale, vol II, Ed.did. şi ped., Bucureşti, 1983

127. Şema, A. Metodica optimizaţii electromagnita MHD generatora postoianovo toka. Proceedings of a Symposium on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, Salzburg, 1966

128. [illegible], C. [illegible]le electrotehnicii, Ed.did.şi ped., Bucureşti, 1982

129. [illegible], [illegible] A stable low voltage 1000 A d.c. supply. Cryogenics, vol.14, Nr.4, 1974

130. Thullen, P. An experimental alternator with a superconducting field winding. IEEE Transactions PAS, vol.90, 1971, p.611-619

131. Vraciu, Gh., Popa, A. [illegible]tode numerice cu aplicaţii în tehnica de calcul, vol.1. Scrisul românesc, Craiova, 1982

132. [illegible], U. [illegible]rări electrice industriale. Vol II. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1969

133. Wilson, C.W., Roberts, D.G. Superconducting magnets for Magnetoplasmadynamic Power Generation. Symposium on Magnetoplasmadynamic Electrical Power Generation, University of Durham, 1962

134. [illegible], [illegible], [illegible], Z.J., [illegible] A study of alternators with superconducting field windings. IEEE Trans. PAS, vol. 85, Nr. 3, 1966, p.264-280

135. [illegible], H.H. The aplication of superconductors in the field windings of large syncronous machines. IEEE Trans.PAS, vol.90, Nr.2, 1971, p.620-627

136. Yamamoto, [illegible] Semi-superconductive rotary machine. Low temperatures and electric power, Pergamon Press, 1970, p.285-289

137. Background and capabilities. Avco Everett Research Laboratory, 1975

138. [illegible] [illegible], Siemens Aktiengesellschaft, 1975

139. ICPE Studii şi cercetări în domeniul criogenicii şi crioelectrotehnicii. Cercetări asupra materialelor supraconductoare şi a altor materiale la temperaturi joase. Documentaţie ICPE - 1.255, 1973

140. Fizica i Tehnica Silnîh magnitnîh polei (sbornik referatov), Atomizdat, Moscova, 1970

ANEXA 1

```
C
C
C
C    **** CALCULUL CIMPULUI MAGNETIC AL UNUI SOLENOID
C           PRIN APROXIMAREA SPIREI CU UN POLIGON
C
      DIMENSION X(99),Y(99),Z(99),XP(99),ZP(99),
     +FX(99),FZ(99),FXT(99),FZT(99),FG(99)
      READ(105,4)HZ,HR,NR,NZ,NL,NIAR,NPC
    4 FORMAT(2F10.5,10I5)
      NP=NR*NZ
      RC=-HR
      DO 5 IV=1,NR
      RC=RC+HR
      ZC=-HZ
      IL=(IV-1)*NZ
      DO 5 IH=1,NZ
      ZC=ZC+HZ
      I=IL+IH
      XP(I)=RC
    5 ZP(I)=ZC
      PI=3.141593
      KODI=1
    7 CONTINUE
      DO 38 K=1,NP
      FXT(K)=0.0
   38 FZT(K)=0.0
   17 READ(105,10)A1,A2,D1,D2,DENSC,M,N,KOD
   10 FORMAT(4F10.6,F10.3,3I5)
      WRITE(108,333)
  333 FORMAT('1'///)
      WRITE(108,23)A1,D1,DENSC,M,N,NL,KOD,A2,D2
   23 FORMAT(///3X,'A1=',F7.6,2X,'D1=',F7.6,2X,
     +'DENSC=',E12.6,2X,'M=',I2,2X,'N=',I2,2X,'NL=',
     +I2,2X,'KOD=',I2/4X,'A2=',F7.6,2X,'D2=',F7.6/)
      GZ=(D2-D1)/M
      GY=(A2-A1)/N
      FEX=1.2*GY*GZ*DENSC
      IF(GZ-GY)56,56,57
   56 GM=GZ
      GO TO 59
   57 GM=GY
   59 U=2*PI/NL
      FC=2/U*SIN(U/2)/COS(U/2)
      A=A1+GY/2
      NL1=NL/4+1
      NL2=NL/2
      NL3=NL2+1
      NL4=NL3+1
      DO 73 IN=1,N
      D=D1+GZ/2
      X(1)=A
      Y(1)=0.
      X(NL3)=-X(1)
      Y(NL3)=Y(1)
      DO 35 I=2,NL1
      UI=U*(I-1)
      X(I)=FC*A*COS(UI)
      X(NL4-I)=-X(I)
      Y(I)=FC*A*SIN(UI)
   35 Y(NL4-I)=Y(I)
      DO 72 IM=1,M
      DO 46 I=1,NL3
   46 Z(I)=D
   15 CONTINUE
      DO 61 K=1,NP
      FX(K)=0.
      FZ(K)=0.
      DO 67 I=1,NL2
      J=I+1
      DNX=ZP(K)*(Y(J)-Y(I))+Y(I)*Z(J)-Y(J)*Z(I)
      DNY=(XP(K)-X(I))*(Z(J)-Z(I))-(ZP(K)-Z(I))*
     +(X(J)-X(I))
      DNZ=XP(K)*(Y(I)-Y(J))+X(I)*Y(J)-X(J)*Y(I)
      DNP=DNX**2+DNY**2+DNZ**2
      DN=SQRT(DNP)
      ABP=(X(J)-X(I))**2+(Y(J)-Y(I))**2+(Z(J)-Z(I))**2
```

ANEXA 1

```
      AB=SQRT(ABP)
      RP=DNP/ABP
      R=SQRT(RP)
      IF(R.LT.0.00.0) GO TO 67
      R1P=(XP(K)-X(I))**2+Y(I)**2 (ZP(K)-Z(I))**2
      R2P=(XP(K)-X(J))**2+Y(J)**2 (ZP(K)-Z(J))**2
      R1=SQRT(R1P)
      R2=SQRT(R2P)
      COSA1=(R1P+ABP-R2P)/(R1*AB*  .)
      COSA2=(R2P+ABP-R1P)/(R2*AB*  .)
      F=(COSA1+COSA2)/R
      FX(K)=FX(K)+F*CNX/CR
      FZ(K)=FZ(K)+F*CNZ/CR
   67 CONTINUE
   69 CONTINUE
      DO 31 K=1,NP
      FXT(K)=FXT(K)+FX(K)*FEX
   31 FZT(K)=FZT(K)+FZ(K)*FEX
      IF(Z(1))72,72,71
   71 DO 47 I=1,NL3
   47 Z(I)=-Z
      GO TO 15
   72 D=D+GZ
   73 A=A+GX
      IF(KOD.EQ.1) GO TO 17
      WRITE(108,20)
   20 FORMAT(11X,'K',5X,'ZP',7X,'XP',9X,'BZ',8X,
     +3X,'BR',11X,'F'/10X,59('*'))
      DO 90 K=1,NP
      FG(K)=SQRT(FXT(K)**2+FZT(K) *2)
   90 WRITE(108,21)K,ZP(K),XP(K), ZT(K),FXT(K),FG(K)
   21 FORMAT(1 X,I2,2F9.5,3E13.5)
      IF(KOD.EQ. 1)GO TO 24
      GO TO 17
   24 CONTINUE
      IF(IPC.EQ.1)GO TO 101
      WRITE(108,93)
   93 FORMAT(/11X,'K',6X,'XP',7X,'XP*BZ',
     +5X,'UE/LEGA'/10X,35('*'))
      PS=XP(1)*FZT(1)
      S=0
      DO 95 K=2,NPC
      PD=XP(K)*FZT(K)
      S=S+(PS+PD)*(XP(K)-XP(K-1)) 2
      WRITE(108,96)K,XP(K),PD,S
   96 FORMAT(1 X,I2,3F1?.6)
   95 PS=PD
  101 CONTINUE
      IF(KOD1.EQ.NVAR) STOP
      KOD1=KOD1+1
      GO TO 7
      END
```

ANEXA 1

A1=.14250 D1=.16500 DENSE= .4667E+03 M= 4 N= 2 NL=45 KOU=

A2=.15750 D2=.18500

K	ZP	RP	BZ	R	E
1.	.00000	.00000	.11568E+01	.136[illegible]E-07	.11568E+01
2.	.01000	.00000	.11587E+01	.3498E-07	.11987E+01
3.	.02000	.00000	.11583E+01	.3479E-07	.11962E+01
4.	.03000	.00000	.11064E+01	.28[illegible]4E-07	.11064E+01
5.	.04000	.00000	.1152[illegible]E+01	.26[illegible]7E-07	.115[illegible]E+01
6.	.05000	.00000	.11832E+01	.4277E-07	.11832E+01
7.	.06000	.00000	.11466E+01	.5[illegible]E-07	.11466E+01
8.	.07000	.00000	.1146[illegible]E+01	.2[illegible]E-07	.1146[illegible]E+01
9.	.08000	.00000	.11173E+01	.4467E-07	.11173E+01
10.	.09000	.00000	.11796E+01	.5[illegible]5E-07	.11796E+01
11.	.00000	.01500	.11937E+01	.526[illegible]E-07	.11987E+01
12.	.01000	.01500	.11989E+01	-.1487E-04	.11969E+01
13.	.02000	.01500	.11989E+01	.4576E-03	.11989E+01
14.	.03000	.01500	.11979E+01	.1837E-02	.11979E+01
15.	.04000	.01500	.11944E+01	.439[illegible]E-02	.11944E+01
16.	.05000	.01500	.11865E+01	.8229E-02	.11866E+01
17.	.06000	.01500	.11727E+01	.1325E-01	.11728E+01
18.	.07000	.01500	.11515E+01	.19[illegible]6E-01	.11516E+01
19.	.08000	.01500	.11219E+01	.2534E-01	.11222E+01
20.	.09000	.01500	.10839E+01	.3141E-01	.10844E+01
21.	.00000	.03000	.11987E+01	.638[illegible]E-07	.11987E+01
22.	.01000	.03000	.11989E+01	-.8957E-03	.11969E+01
23.	.02000	.03000	.12005E+01	-.6738E-03	.12005E+01
24.	.03000	.03000	.12021E+01	.1567E-02	.12021E+01
25.	.04000	.03000	.12016E+01	.635E-02	.12016E+01
26.	.05000	.03000	.11969E+01	.1443E-01	.11969E+01
27.	.06000	.03000	.11857E+01	.2495E-01	.11857E+01
28.	.07000	.03000	.11657E+01	.3746E-01	.11664E+01
29.	.08000	.03000	.11365E+01	.5[illegible]E-01	.11377E+01
30.	.09000	.03000	.10975E+01	.6395E-01	.10994E+01
31.	.00000	.04500	.11945E+01	.447[illegible]E-07	.11945E+01
32.	.01000	.04500	.11964E+01	-.3753E-02	.11964E+01
33.	.02000	.04500	.12015E+01	-.5433E-02	.12015E+01
34.	.03000	.04500	.12081E+01	-.3475E-02	.12081E+01
35.	.04000	.04500	.12136E+01	.3417E-02	.12136E+01
36.	.05000	.04500	.12149E+01	.1573E-01	.12150E+01
37.	.06000	.04500	.12096E+01	.3311E-01	.12091E+01
38.	.07000	.04500	.11921E+01	.5423E-01	.11933E+01
39.	.08000	.04500	.11654E+01	.7763E-01	.11659E+01
40.	.09000	.04500	.11274E+01	.9929E-01	.11268E+01
41.	.00000	.06000	.11841E+01	.5589E-07	.11841E+01
42.	.01000	.06000	.11893E+01	-.1[illegible]7E-01	.11893E+01
43.	.02000	.06000	.11987E+01	-.1[illegible]E-01	.11998E+01
44.	.03000	.06000	.12147E+01	-.1745E-01	.12142E+01
45.	.04000	.06000	.12293E+01	-.9665E-02	.12293E+01
46.	.05000	.06000	.12426E+01	.7811E-02	.12426E+01
47.	.06000	.06000	.12457E+01	.3746E-01	.12462E+01
48.	.07000	.06000	.12349E+01	.6795E-01	.12368E+01
49.	.08000	.06000	.12072E+01	.1146E+00	.12119E+01
50.	.09000	.06000	.11626E+01	.1391E+00	.11707E+01
51.	.00000	.07500	.11599E+01	.2982E-07	.11599E+01
52.	.01000	.07500	.11607E+01	-.2216E-01	.11609E+01
53.	.02000	.07500	.11964E+01	-.3945E-01	.11971E+01
54.	.03000	.07500	.12162E+01	-.4714E-01	.12171E+01
55.	.04000	.07500	.125[illegible]8E+01	-.4375E-01	.12515E+01
56.	.05000	.07500	.1283[illegible]E+01	-.1758E-01	.12831E+01
57.	.06000	.07500	.1303[illegible]E+01	.2266E-01	.13037E+01
58.	.07000	.07500	.1303[illegible]E+01	.7596E-01	.13057E+01
59.	.08000	.07500	.12774E+01	.1343E+00	.12845E+01
60.	.09000	.07500	.12246E+01	.1907E+00	.12393E+01
61.	.00000	.09000	.111[illegible]E+01	-.1116E-07	.111[illegible]9E+01
62.	.01000	.09000	.112[illegible]E+01	-.4291E-01	.11228E+01
63.	.02000	.09000	.11546E+01	-.7943E-01	.11573E+01
64.	.03000	.09000	.12067E+01	-.1026E+00	.12107E+01
65.	.04000	.09000	.12717E+01	-.1043E+00	.12759E+01
66.	.05000	.09000	.13399E+01	-.7621E-01	.13420E+01
67.	.06000	.09000	.13945E+01	-.1567E-01	.13945E+01
68.	.07000	.09000	.14165E+01	.7249E-01	.14133E+01
69.	.08000	.09000	.139[illegible]E+01	.1727E+00	.147[illegible]E+01
70.	.09000	.09000	.13[illegible]E+01	.2[illegible]3E+00	.13[illegible]1E+01
71.	.00000	.10500	.1[illegible]9E+01	-.2[illegible]8E-07	.1[illegible]E+01
72.	.01000	.10500	.1[illegible]94E+01	-.7[illegible]E-01	.1[illegible]E+01
73.	.02000	.10500	.1[illegible]E+01	-.1427E+00	.1[illegible]3E+01
74.	.03000	.10500	.1[illegible]E+01	-.1979E+00	.1[illegible]E+01
75.	.04000	.10500	.12796E+01	-.2236E+00	.1296[illegible]E+01
76.	.05000	.10500	.1[illegible]E+01	-.2[illegible]E+00	.14[illegible]6E+01
77.	.06000	.10500	.1[illegible]E+01	-.112[illegible]E+00	.1[illegible]46[illegible]E+01
78.	.07000	.10500	.1[illegible]E+01	.411[illegible]E-01	.1[illegible]E+01
79.	.08000	.10500	.159[illegible]E+01	.2297E+00	.1[illegible]16E+01
80.	.09000	.10500	.147[illegible]E+01	.3697E+00	.1[illegible]E+01

ANEXA 2

```
C
C
C
C     *** CALCULUL CIMPULUI MAGNETIC AL UNUI SOLENOID
C     UTILIZIND POLINOAME LEGENDR ***
C
      DIMENSION RP(100),ZP(100),B(100),ER(100),BZT(100),
     *BRT(100),B(100)
      READ(105,4)HZ,HR,NR,NZ,NVAR
    4 FORMAT(2F10.5,3I5)
      NP=NR*NZ
      RC=-HR
      DO 5 IV=1,NR
      RC=RC+HR
      ZC=-HZ
      IL=(IV-1)*NZ
      DO 5 IH=1,NZ
      ZC=ZC+HZ
      I=IL+IH
      RP(I)=RC
      IF(ZC.EQ.0.AND.RC.EQ.0)RP(I)=HR/2.
    5 ZP(I)=ZC
      KM=491
      KOD1=1
    7 CONTINUE
      DO 10 K=1,NP
      BZT(K)=0.0
      BRT(K)=0.0
   10 CONTINUE
   15 READ(105,16)A1,A2,D1,D2,DENSC,M,N,KOD
   16 FORMAT(5F10.5,3I5)
      PI=3.141593
      ER=2*PI/SQRT(A1**2+D1**2)/1.E+5
      WRITE(108,333)
  333 FORMAT('1'///)
      WRITE(108,17)A1,D1,DENSC,M,N,KOD,A2,D2,ER
   17 FORMAT(///8X,'A1=',F6.4,2X,'D1=',F6.4,2X,'DENSC=',
     +F6.2,2X,'M=',I2,2X,'N=',I2,2X,'KOD=',I2/
     +8X,'A2=',F6.4,2X,'D2=',F6.4,2X,'ER=',E8.3/)
      WRITE(108,20)
   20 FORMAT(11X,'K',5X,'ZP',7X,'RP',9X,'BZ',8X,'BR',
     +8X,'B'/11X,52('*'))
      GZ=(D2-D1)/M
      GR=(A2-A1)/N
      FEX=0.2*GZ*GR*DENSC
      A=A1+GR/2
      DO 23 IN=1,N
      D=D1+GZ/2
      DO 22 IM=1,M
      CALL PERSP(NP,KM,A,D,ER,RP,ZP,BZ,BR)
      DO 30 K=1,NP
      BZT(K)=BZT(K)+BZ(K)*FEX
      BRT(K)=BRT(K)+BR(K)*FEX
   30 CONTINUE
      D=D+GZ
   22 CONTINUE
      A=A+GR
   23 CONTINUE
      DO 40 K=1,NP
      B(K)=SQRT(BZT(K)**2+BRT(K)**2)
      WRITE(108,50)K,ZP(K),RP(K),BZT(K),BRT(K),B(K)
   50 FORMAT(10X,I2,2F9.5,2X,3F10.6)
   40 CONTINUE
      IF(KOD.EQ.1) GO TO 25
      GO TO 15
   25 IF(KOD1.EQ.NVAR) STOP
      KOD1=KOD1+1
      GO TO 7
      END
      SUBROUTINE PERSP(NP,KM,A,D,ER,RP,ZP,BZ,BR)
      DIMENSION RP(NP),ZP(NP),BZ(NP),BR(NP)
      DIMENSION FT(500),PA(500),DT(500),DFA(500)
      PI=3.141593
      C=SQRT(A**2+D**2)
      ALFA=ATAN(A/D)
      PA(1)=1.
      PA(2)=COS(ALFA)
```

A N E X A 2

```
      DPA(2)=SIN(ALFA)
      PT(1)=1.
      DO 100 I=1,NP
      R=SQRT(RP(I)**2+ZP(I)**2)
      IF(ZP(I)-0.000001)71,71,72
   71 TETA=PI/2
      GO TO 58
   72 TETA=ATAN(RP(I)/ZP(I))
   58 CONTINUE
      X1=500.
      Y1=500.
      BZ(I)=0.
      BR(I)=0.
      PT(2)=COS(TETA)
      IF(R.GT.C) GO TO 14
      COD=1
      RZ=R
      RC=R-C
      AM=ABS(RC)
      IF(AM/C-0.02)110,111,111
  110 R=0.96*C
      COD=COD+1
      GO TO 111
  120 R=0.97*C
      BZ(I)=0.
      X1=500.
      COD=COD+1
  111 CONTINUE
      DO 11 K=1,KM,2
      K1=K-1
      X=2*PI/C*SIN(ALFA)*(R/C)**K1*DPA(K+1)*PT(K)
      BZ(I)=BZ(I)+X
      VARX=ABS(X1)+ABS(X)
      X1=X
      IF(VARX.LT.EK)GO TO 12
      K1=K+1
      K2=K+2
      K3=K+3
      C1=(2*K+1.)/K2
      C2=K/(K+1.)
      C3=(2*K+3.)/K3
      C4=(K+1.)/K3
      PT(K2)=C1*COS(TETA)*PT(K1)-C2*PT(K)
      PT(K3)=C3*COS(TETA)*PT(K2)-C4*PT(K1)
      PA(K2)=C1*COS(ALFA)*PA(K1)-C2*PA(K)
      PA(K3)=C3*COS(ALFA)*PA(K2)-C4*PA(K1)
      DPA(K3)=K2/SIN(ALFA)*(PA(K2)-COS(ALFA)*PA(K3))
   11 CONTINUE
   12 IF(COD-2.)130,131,132
  131 BZ1=BZ(I)
      R1=R
      GO TO 120
  132 BZ2=BZ(I)
      R2=R
      BZ(I)=BZ2+(BZ2-BZ1)*(RZ-R2)/(R2-R1)
  130 CONTINUE
      COD=1
      IF(AM/C-0.02)140,141,141
  140 R=R1
      COD=COD+1
      GO TO 141
  150 R=R2
      BR(I)=0.
      Y1=500.
      COD=COD+1
  141 CONTINUE
      DO 13 K=1,KM,2
      IF(TETA-0.0001)25,25,26
   25 Y=0.0
      GO TO 28
   26 CONTINUE
      K1=K+1
      K2=K+2
      K3=K+3
      C1=(2*K+1.)/K2
      C2=K/(K+1.)
      C3=(2*K+3.)/K3
```

A N E X A 2

```
      C4=(K+1.)/K2
      PT(K2)=C1*COS(TETA)*PT(K1)-C2*PT(K)
      DPT(K2)=K2/SIN(TETA)*(PT(K1)-COS(TETA)*PT(K2))
      PA(K2)=C1*COS(ALFA)*PA(K1)- C2*PA(K)
      PA(K3)=C3*COS(ALFA)*PA(K2)- C4*PA(K1)
      DPA(K3)=K2/SIN(ALFA)*(PA(K2)-COS(ALFA)*PA(K3))
      Y=2*PI/C*SIN(ALFA)/K2*(R/C)**K1*DPA(K3)*DPT(K2)
   29 CONTINUE
      BR(I)=BR(I)+Y
      VARY=ABS(Y1)+ABS(Y)
      Y1=Y
      IF(VARY.LT.ER) GO TO 200
      PT(K3)=C3*COS(TETA)*PT(K2)- C4*PT(K1)
   13 CONTINUE
  200 IF(COD-2.)101,101,102
  101 BR1=BR(I)
      GO TO 150
  102 BR2=BR(I)
      BR(I)=BR2+(BR2-BR1)*(RZ-R2)/(R2-R1)
      GO TO 100
   14 CONTINUE
      COD=1
      RZ=R
      RC=R-C
      AM=ABS(RC)
      IF(AM/C-0.02)210,211,211
  210 R=1.04*C
      COD=COD+1
      GO TO 211
  220 R=1.03*C
      BZ(I)=0.
      X1=500.0
      COD=COD+1
  211 CONTINUE
      DO 15 K=1,KM,2
      K1=K+1
      K2=K+2
      K3=K+3
      C1=(2*K+1.)/K1
      C2=K/(K+1.)
      PT(K2)=C1*COS(TETA)*PT(K1)- C2*PT(K)
      X=2*PI/C*SIN(ALFA)*(C/R)**K *DPA(K1)*PT(K2)
      BZ(I)=BZ(I)+X
      VARX=ABS(X1)+ABS(X)
      X1=X
      IF(VARX.LT.ER)GO TO 16
      C3=(2*K+3.)/K2
      C4=(K+1.)/K2
      PT(K3)=C3*COS(TETA)*PT(K2)- C4*PT(K1)
      PA(K2)=C1*COS(ALFA)*PA(K1)- C2*PA(K)
      PA(K3)=C3*COS(ALFA)*PA(K2)- C4*PA(K1)
      DPA(K3)=K2/SIN(ALFA)*(PA(K2) -COS(ALFA)*PA(K3))
   15 CONTINUE
   16 IF(COD-2.)230,231,232
  231 BZ1=BZ(I)
      R1=R
      GO TO 22
  232 BZ2=BZ(I)
      R2=R
      BZ(I)=BZ2+(BZ2-BZ1)*(RZ-R2)/(R2-R1)
  230 CONTINUE
      COD=1
      IF(AM/C-0.02)240,241,241
  240 R=R1
      COD=COD+1
      GO TO 241
  250 R=R2
      BR(I)=0.
      Y1=500.0
      COD=COD+1
  241 CONTINUE
      DO 39 K=1,KM,2
      IF(TETA-0.0001)35,35,36
   35 Y=0.0
      GO TO 38
   36 CONTINUE
      K1=K+1
```

INTOCMIT RADU D.	PROIECT: TEZ DOCT. VERSIUNE: 01	INCOCLIESTE	PAGINA DATA 27.3.85

A N E X A 2

```
      K2=K+2
      K3=K+3
      C1=(2*K+1.)/K2
      C2=K/(K+1.)
      PT(K2)=C1*COS(TETA)*PT(K1)- 2*PT(K)
      DPT(K2)=K1/SIN(TETA)*(PT(K1 -COS(TETA)*PT(K2))
      Y=2*PI/C*SIN(ALFA)/K1*(C/R)**K2*DPA(K1)*DPT(K2)
   38 CONTINUE
      BR(I)=BR(I)+Y
      VARY=ABS(Y1)+ABS(Y)
      Y1=Y
      IF(VARY.LT.ER) GO TO 199
      C3=(2*K+3.)/K3
      C4=(K+1.)/K2
      PT(K3)=C3*COS(TETA)*PT(K2)- 4*PT(K1)
      PA(K2)=C1*COS(ALFA)*PA(K1)- 2*PA(K)
      PA(K3)=C3*COS(ALFA)*PA(K2)- 4*PA(K1)
      DPA(K3)=K2/SIN(ALFA)*(PA(K2 -COS(ALFA)*PA(K3))
   99 CONTINUE
  199 IF(COD-2.))100,301,302
  301 BR1=BR(I)
      GO TO 25
  302 BR2=BR(I)
      BR(I)=BR1+(BR2-BR1)*(Z2-R2)/(R2-R1)
  100 CONTINUE
      RETURN
      END
```

ANEXA 2

A1= .1425 D1= .0650 DENSC=666.67 M= 4 N= 3 KOD=
A2= .1575 D2= .0850 ER=.40[illegible]E-04

K	ZP	RP	EZ	ER	E
1	.00000	.00750	1.198732	[illegible]	1.198732
2	.01000	.00000	1.198672	[illegible]	1.198672
3	.02000	.00000	1.198195	[illegible]	1.198195
4	.03000	.00000	1.196391	[illegible]	1.196391
5	.04000	.00000	1.191915	[illegible]	1.191915
6	.05000	.00000	1.183177	[illegible]	1.183177
7	.06000	.00000	1.16[illegible]	[illegible]	1.16[illegible]
8	.07000	.00000	1.146897	[illegible]	1.146897
9	.08000	.00000	1.117265	[illegible]	1.117265
10	.09000	.00000	1.079546	[illegible]	1.079546
11	.00000	.01500	1.198[illegible]8	[illegible]	1.198[illegible]8
12	.01000	.01500	1.198836	-.0010 3	1.198826
13	.02000	.01500	1.198881	.0004 1	1.198881
14	.03000	.01500	1.197863	.0018 8	1.197865
15	.04000	.01500	1.194315	.0043 0	1.194323
16	.05000	.01500	1.186495	.0082 6	1.186522
17	.06000	.01500	1.172670	.0132 5	1.172752
18	.07000	.01500	1.151439	.0190 3	1.151597
19	.08000	.01500	1.121899	.0252 3	1.122164
20	.09000	.01500	1.083985	.0314 1	1.08434[illegible]
21	.00000	.03000	1.19[illegible]	[illegible]	1.198[illegible]
22	.01000	.03000	1.198729	-.0008 1	1.198729
23	.02000	.03000	1.20[illegible]478	-.0016 5	1.20[illegible]478
24	.03000	.03000	1.202[illegible]27	.0015 2	1.202[illegible]28
25	.04000	.03000	1.201522	.0065 0	1.201539
26	.05000	.03000	1.196734	.0144 0	1.196821
27	.06000	.03000	1.185423	.0249 8	1.18[illegible]
28	.07000	.03000	1.165724	.0374 1	1.166[illegible]
29	.08000	.03000	1.134497	.0508 6	1.137626
30	.09000	.03000	1.097436	.0639 9	1.099[illegible]
31	.00000	.04500	1.194517	[illegible]	1.194517
32	.01000	.04500	1.196393	-.0036 1	1.196395
33	.02000	.04500	1.201449	-.0054 6	1.201462
34	.03000	.04500	1.208027	-.0034 5	1.208032
35	.04000	.04500	1.213544	.0034 2	1.213549
36	.05000	.04500	1.214819	.0157 4	1.214921
37	.06000	.04500	1.208559	.0331 1	1.209014
38	.07000	.04500	1.191948	.0542 9	1.193[illegible]
39	.08000	.04500	1.163319	.0776 3	1.165868
40	.09000	.04500	1.122325	.0991 3	1.126695
41	.00000	.06000	1.184150	[illegible]	1.18415[illegible]
42	.01000	.06000	1.187973	-.01[illegible] 6	1.188015
43	.02000	.06000	1.195694	-.0166 [illegible]	1.1958[illegible]1
44	.03000	.06000	1.214[illegible]7	-.0174 2	1.214132
45	.04000	.06000	1.232238	-.0096 5	1.232275
46	.05000	.06000	1.242542	.0078 3	1.242567
47	.06000	.06000	1.245626	.0344 7	1.2461[illegible]4
48	.07000	.06000	1.2349[illegible]	.0679 6	1.23667[illegible]
49	.08000	.06000	1.207178	.1045 2	1.211656
50	.09000	.06000	1.167255	.1396 1	1.173625
51	.00000	.07500	1.159925	[illegible]	1.159925
52	.01000	.07500	1.166793	-.0221 3	1.166992
53	.02000	.07500	1.186469	-.0393 6	1.18712[illegible]
54	.03000	.07500	1.216162	-.0469 4	1.2170[illegible]
55	.04000	.07500	1.25[illegible]779	-.04[illegible]	1.251439
56	.05000	.07500	1.282969	-.0174 1	1.282988
57	.06000	.07500	1.30[illegible]	.0226 5	1.30[illegible]517
58	.07000	.07500	1.303325	.0759 5	1.305534
59	.08000	.07500	1.277193	.1346 9	1.284285
60	.09000	.07500	1.224435	.1905 4	1.239174
61	.00000	.09000	1.111[illegible]49	[illegible]	1.111[illegible]49
62	.01000	.09000	1.127115	-.0428 7	1.122932
63	.02000	.09000	1.154691	-.0793 2	1.157413
64	.03000	.09000	1.206484	-.1023 3	1.21[illegible]
65	.04000	.09000	1.271656	-.1337 7	1.275682
66	.05000	.09000	1.339736	-.0759 2	1.341687
67	.06000	.09000	1.394175	-.0154 5	1.394279
68	.07000	.09000	1.416148	.0724 8	1.418[illegible]
69	.08000	.09000	1.397183	.1722 6	1.4[illegible]
70	.09000	.09000	1.321799	.2635 8	1.347813
71	.00000	.10500	1.02[illegible]195	[illegible]	1.023[illegible]95
72	.01000	.10500	1.039776	-.0742 [illegible]	1.041363
73	.02000	.10500	1.086262	-.1426 8	1.095564
74	.03000	.10500	1.1669[illegible]	-.1907 6	1.183454
75	.04000	.10500	1.279687	-.2228 7	1.296949
76	.05000	.10500	1.414391	-.2010 5	1.428311
77	.06000	.10500	1.541698	-.1121 7	1.545774
78	.07000	.10500	1.615476	.0433 9	1.616058
79	.08000	.10500	1.594414	.2292 9	1.610816
80	.09000	.10500	1.477958	.3892 [illegible]	1.529385

A N E X A 3

```
C
C
C
C   ***  CALCULUL CIMPULUI MAGNETIC   **
C   ***  LA UN SOLENOID PRIN METODA   **
C        *** DIFERENTELOR FINITE ***
C
      DIMENSION A(60,80),DC(60,80),NC(80)
      DIMENSION FZT(90)
      READ(105,1)NBJ,NBS,NM,N,NPC
      READ(105,1)MBS,MBD,MK,M,KM
    1 FORMAT(5I5)
      READ(105,2)HR,HZ,EPS,CD,AI
    2 FORMAT(5F10.5)
      PI=3.14159
      CMN=1./(N-1.)/(N-1.)+1./(M-1.)/(M-1.)
      FSR=1.-3.14*SQRT(2.*CMN)
      WRITE(108,333)
  333 FORMAT('1'///)
      WRITE(108,7)NBJ,NBS,MBS,MBD,KM,CD,FSR,EPS
    7 FORMAT(///15X,'NBJ=',I2,3X,'NBS=',I2,
     +3X,'MBS=',I2,3X,'MBD=',I2,3X,'KM=',I3/15X,
     +'CD=',E9.3,3X,'FSR=',E8.3,3X,'EPS=',E8.3)
      NJL=14
      N1=N-1
      M1=M-1
      NBJ1=NBJ-1
      NMJ=NBJ/2
      NMS=NBS+(N-NBS)/3
      MMD=MBD+(M-MBD)/3
      HRP=HR*HR
      HZP=HZ*HZ
      CDC=PI*HRP*HZP/5
      DO 3 I=1,N
      DO 3 J=1,M
      DC(I,J)=0.
    3 A(I,J)=0.
      DO 119 J=1,MMD
  119 A(I,J)=AI
      DO 4 J=1,M
    4 NC(J)=J
      DO 72 I=NBJ,NBS
      DO 72 J=MBS,MBD
   72 DC(I,J)=CD
      K=1
    5 CONTINUE
      BIG=0.
      R0=0.
      DO 20 I=2,N1
      R4=R0
      R0=R0+HR
      R2=R0+HR
      R20=R2+R0
      R40=R4+R0
      C2=R0/R2
      C4=R0/R4
      CA2=R2/R20
      CA4=R4/R40
      CA0=HRP+HZP*(C2+C4)
      DO 10 J=2,M1
      TL=HRP*(A(I,J+1)+A(I,J-1))/2 +HZP*
     +(CA2*A(I+1,J)+CA4*A(I-1,J))+CDC*DC(I,J)
      A0=TL/CA0
      DA=A0-A(I,J)
      BIG=BIG+ABS(DA)
   10 A(I,J)=A0+FSR*DA
   20 CONTINUE
      DO 93 I=2,N1
   93 A(I,1)=A(I,2)
      IF(BIG-EPS)50,50,30
   30 IF(K-KM)40,41,41
   40 K=K+1
      GO TO 5
   41 CONTINUE
   50 CONTINUE
      WRITE(108,22)K,BIG
   22 FORMAT(///20X,'NUMARUL DE ITERATII K=',
```

ANEXA 3

```
     +I3/20X,'SUMA DIFERENTELOR    I(=',E2.3)
      WRITE(108,110)
  110 FORMAT(///5X,'I',6X,'J',6X,'ZP',8X,'RP',
     +8X,'BZ',6X,'BR',8X,'B'/8X,5 ('*'))
      J=2
      ZP=0.
      I=1
      RP=0.
      BZ=(4*A(2,J)-A(3,J))/HR
      BR=0.
      B=BZ
      FZT(I)=BZ
      WRITE(108,120)I,J,ZP,RP,BZ,BR,B
  120 FORMAT(5X,2I5,5F10.5)
      DO 130 I=2,NI
      RP=RP+HR
      BZ=A(I,J)/RP+(A(I+1,J)-A(I-1,J))/2/HR
      BR=0.
      B=ABS(BZ)
      FZT(I)=BZ
      WRITE(108,120)I,J,ZP,RP,BZ,BR,B
  130 CONTINUE
      WRITE(108,333)
      I=1
      RP=0.
      ZP=0.
      DO 131 J=3,MI
      ZP=ZP+HZ
      BZ=(4*A(2,J)-A(3,J))/HR
      BR=0.
      B=BZ
      WRITE(108,120)I,J,ZP,RP,BZ,BR,B
  131 CONTINUE
      WRITE(108,333)
      DO 132 I=2,NK
      RP=(I-1)*HR
      ZP=0.
      DO 132 J=3,MK
      ZP=ZP+HZ
      BZ=A(I,J)/RP+(A(I+1,J)-A(I-1,J))/2/HR
      BR=(A(I,J-1)-A(I,J+1))/2/HZ
      B=SQRT(BR*BR+BZ*BZ)
      WRITE(108,120)I,J,ZP,RP,BZ,BR,B
  132 CONTINUE
      DO 235 I=NPJ,NBS
      RP=(I-1)*HR
      DO 235 J=195,MEC
      ZP=(J-2)*HZ
      BZ=A(I,J)/RP+(A(I+1,J)-A(I-1,J))/2/HR
      BR=(A(I,J-1)-A(I,J+1))/2/HZ
      B=SQRT(BR*BR+BZ*BZ)
      WRITE(108,120)I,J,ZP,RP,BZ,BR,B
  235 CONTINUE
      IF(NPC.EQ.1) GO TO 155
      WRITE(108,140)
  140 FORMAT(//,X,'I',4X,'J',6X,' R',6X,
     +'RP*BZ',4X,'UF/OMEGA'/6X,38('*'))
      J=2
      RP=0.
      PS=0.
      S=0.
      DO 150 I=2,NBS
      RP=RP+HR
      PD=RP*FZT(I)
      S=S+(PS+PD)*HR/2
      WRITE(108,160)I,J,RP,PD,S
  160 FORMAT(5X,2I5,3F10.6)
  150 PS=PD
  155 CONTINUE
      STOP
      END
```

ANEXA 3

NEJ=11   NBS=11   NPS= 9   NBD=10   KP=300
CD=.667E+03   FSR=.9 6E+.0   EPS=.1 0E-04

NUMARUL DE ITERATII K=360
SUMA DIFERENTELOR BTG=.434E-0

I	J	ZP	RP	BZ	BR	B
1	2	.00000	.00000	1.18547	.00000	1.18547
2	2	.00000	.01500	-.47757	.00000	.47757
3	2	.00000	.03000	1.16819	.00000	1.16819
4	2	.00000	.04500	1.16421	.00000	1.16421
5	2	.00000	.06000	1.17341	.00000	1.17341
6	2	.00000	.07500	1.14917	.00000	1.14917
7	2	.00000	.09000	1.10141	.00000	1.10141
8	2	.00000	.10500	1.01655	.00000	1.01655
9	2	.00000	.12000	.88032	.00000	.88032
10	2	.00000	.13500	.68677	.00000	.68677
11	2	.00000	.15000	.45419	.00000	.45419
12	2	.00000	.16500	.23159	.00000	.23159
13	2	.00000	.18000	.06352	.00000	.06352
14	2	.00000	.19500	-.04179	.00000	.04179
15	2	.00000	.21000	-.09784	.00000	.09784
16	2	.00000	.22500	-.12196	.00000	.12196
17	2	.00000	.24000	-.12775	.00000	.12775
18	2	.00000	.25500	-.12399	.00000	.12399
19	2	.00000	.27000	-.11582	.00000	.11582
20	2	.00000	.28500	-.10605	.00000	.10605
21	2	.00000	.30000	-.09614	.00000	.09614
22	2	.00000	.31500	-.08678	.00000	.08678
23	2	.00000	.33000	-.07825	.00000	.07825
24	2	.00000	.34500	-.07062	.00000	.07062
25	2	.00000	.36000	-.06388	.00000	.06388
26	2	.00000	.37500	-.05796	.00000	.05796
27	2	.00000	.39000	-.05277	.00000	.05277
28	2	.00000	.40500	-.04822	.00000	.04822
29	2	.00000	.42000	-.04423	.00000	.04423
30	2	.00000	.43500	-.04073	.00000	.04073
31	2	.00000	.45000	-.03765	.00000	.03765
32	2	.00000	.46500	-.03493	.00000	.03493
33	2	.00000	.48000	-.03254	.00000	.03254
34	2	.00000	.49500	-.03041	.00000	.03041
35	2	.00000	.51000	-.02853	.00000	.02853
36	2	.00000	.52500	-.02686	.00000	.02686
37	2	.00000	.54000	-.02537	.00000	.02537
38	2	.00000	.55500	-.02404	.00000	.02404
39	2	.00000	.57000	-.02285	.00000	.02285
40	2	.00000	.58500	-.02179	.00000	.02179
41	2	.00000	.60000	-.02084	.00000	.02084
42	2	.00000	.61500	-.01999	.00000	.01999
43	2	.00000	.63000	-.01923	.00000	.01923
44	2	.00000	.64500	-.01855	.00000	.01855
45	2	.00000	.66000	-.01794	.00000	.01794
46	2	.00000	.67500	-.01739	.00000	.01739
47	2	.00000	.69000	-.01691	.00000	.01691
48	2	.00000	.70500	-.01647	.00000	.01647
49	2	.00000	.72000	-.01609	.00000	.01609
50	2	.00000	.73500	-.01575	.00000	.01575
51	2	.00000	.75000	-.01546	.00000	.01546
52	2	.00000	.76500	-.01520	.00000	.01520
53	2	.00000	.78000	-.01498	.00000	.01498
54	2	.00000	.79500	-.01479	.00000	.01479
55	2	.00000	.81000	-.01464	.00000	.01464
56	2	.00000	.82500	-.01452	.00000	.01452
57	2	.00000	.84000	-.01442	.00000	.01442
58	2	.00000	.85500	-.01435	.00000	.01435
59	2	.00000	.87000	-.01431	.00000	.01431

A N E X A 3

1	3	.01000	.00000	1.18927	.00000	1.18927
1	4	.02000	.00000	1.18853	.00000	1.18853
1	5	.03000	.00000	1.18640	.00000	1.18640
1	6	.04000	.00000	1.18152	.00000	1.18152
1	7	.05000	.00000	1.17234	.00000	1.17234
1	8	.06000	.00000	1.15740	.00000	1.15740
1	9	.07000	.00000	1.13547	.00000	1.13547
1	10	.08000	.00000	1.10565	.00000	1.10565
1	11	.09000	.00000	1.06841	.00000	1.06841
1	12	.10000	.00000	1.02359	.00000	1.02359
1	13	.11000	.00000	.97243	.00000	.97243
1	14	.12000	.00000	.91639	.00000	.91639
1	15	.13000	.00000	.85715	.00000	.85715
1	16	.14000	.00000	.79640	.00000	.79640
1	17	.15000	.00000	.73568	.00000	.73569
1	18	.16000	.00000	.67626	.00000	.67626
1	19	.17000	.00000	.61915	.00000	.61915
1	20	.18000	.00000	.56510	.00000	.56510
1	21	.19000	.00000	.51453	.00000	.51453
1	22	.20000	.00000	.46770	.00000	.46770
1	23	.21000	.00000	.42468	.00000	.42468
1	24	.22000	.00000	.38542	.00000	.38542
1	25	.23000	.00000	.34974	.00000	.34974
1	26	.24000	.00000	.31745	.00000	.31745
1	27	.25000	.00000	.28830	.00000	.28830
1	28	.26000	.00000	.26203	.00000	.26203
1	29	.27000	.00000	.23838	.00000	.23838
1	30	.28000	.00000	.21711	.00000	.21711
1	31	.29000	.00000	.19798	.00000	.19798
1	32	.30000	.00000	.18077	.00000	.18077
1	33	.31000	.00000	.16527	.00000	.16527
1	34	.32000	.00000	.15130	.00000	.15130
1	35	.33000	.00000	.13871	.00000	.13871
1	36	.34000	.00000	.12733	.00000	.12733
1	37	.35000	.00000	.11703	.00000	.11703
1	38	.36000	.00000	.10771	.00000	.10771
1	39	.37000	.00000	.09925	.00000	.09925
1	40	.38000	.00000	.09157	.00000	.09157
1	41	.39000	.00000	.08458	.00000	.08458
1	42	.40000	.00000	.07820	.00000	.07820
1	43	.41000	.00000	.07238	.00000	.07238
1	44	.42000	.00000	.06706	.00000	.06706
1	45	.43000	.00000	.06218	.00000	.06218
1	46	.44000	.00000	.05771	.00000	.05771
1	47	.45000	.00000	.05359	.00000	.05359
1	48	.46000	.00000	.04980	.00000	.04980
1	49	.47000	.00000	.04631	.00000	.04631
1	50	.48000	.00000	.04308	.00000	.04308
1	51	.49000	.00000	.04008	.00000	.04008
1	52	.50000	.00000	.03731	.00000	.03731
1	53	.51000	.00000	.03474	.00000	.03474
1	54	.52000	.00000	.03234	.00000	.03234
1	55	.53000	.00000	.03011	.00000	.03011
1	56	.54000	.00000	.02803	.00000	.02803
1	57	.55000	.00000	.02608	.00000	.02608
1	58	.56000	.00000	.02425	.00000	.02425
1	59	.57000	.00000	.02254	.00000	.02254
1	60	.58000	.00000	.02093	.00000	.02093
1	61	.59000	.00000	.01940	.00000	.01940
1	62	.60000	.00000	.01797	.00000	.01797
1	63	.61000	.00000	.01661	.00000	.01661
1	64	.62000	.00000	.01531	.00000	.01531
1	65	.63000	.00000	.01409	.00000	.01409
1	66	.64000	.00000	.01291	.00000	.01291
1	67	.65000	.00000	.01180	.00000	.01180
1	68	.66000	.00000	.01072	.00000	.01072
1	69	.67000	.00000	.00969	.00000	.00969
1	70	.68000	.00000	.00872	.00000	.00872
1	71	.69000	.00000	.00774	.00000	.00774
1	72	.70000	.00000	.00681	.00000	.00681
1	73	.71000	.00000	.00590	.00000	.00590
1	74	.72000	.00000	.00502	.00000	.00502
1	75	.73000	.00000	.00415	.00000	.00416
1	76	.74000	.00000	.00331	.00000	.00331
1	77	.75000	.00000	.00247	.00000	.00247
1	78	.76000	.00000	.00164	.00000	.00164
1	79	.77000	.00000	.00082	.00000	.00082

ANEXA 3

2	3	.01000	.01500	-.47730	-.[illegible]7	.47730
2	4	.02000	.01500	-.47681	.0032	.47681
2	5	.03000	.01500	-.47714	.0363	.47714
2	6	.04000	[illegible]	-.47984	.[illegible]7	.47985
2	7	.05000	[illegible]	-.48678	.[illegible]1	.48665
2	8	.06000	[illegible]	-.49984	.1[illegible]6	[illegible]
2	9	.07000	[illegible]	-.52159	.1698	[illegible]
2	10	.08000	[illegible]	-.55[illegible]	.2[illegible]	[illegible]
2	11	.09000	[illegible]	-.58823	.3144	.589[illegible]7
3	3	.01000	[illegible]	1.18299	-.[illegible]	1.18899
3	4	.02000	[illegible]	1.19120	-.[illegible]	[illegible]
3	5	.03000	[illegible]	1.19349	.[illegible]	1.19349
3	6	.04000	[illegible]	1.19395	.0612	1.19397
3	7	.05000	[illegible]	1.19622	.1307	[illegible]
3	8	.06000	[illegible]	1.17965	.2[illegible]	[illegible]
3	9	.07000	[illegible]	1.16776	.3727	1.16136
3	10	.08000	[illegible]	1.13265	[illegible]	1.13279
3	11	.09000	[illegible]	1.09233	.64[illegible]	1.09417
4	3	.01000	[illegible]	1.18622	-.[illegible]272	1.18623
4	4	.02000	[illegible]	1.19173	-.[illegible]	1.19174
4	5	.03000	[illegible]	1.19912	-.[illegible]	1.19913
4	6	.04000	[illegible]	1.20580	.[illegible]	[illegible]
4	7	.05000	[illegible]	1.20845	.1519	[illegible]
4	8	.06000	[illegible]	1.20350	.3265	[illegible]
4	9	.07000	[illegible]	1.18776	[illegible]	1.18899
4	10	.08000	[illegible]	[illegible]	.7[illegible]	1.15177
4	11	.09000	[illegible]	[illegible]	.9942	[illegible]
5	3	.01000	[illegible]	1.17732	-.0979	1.17736
5	4	.02000	[illegible]	1.18836	-.16[illegible]	1.18847
5	5	.03000	[illegible]	1.20442	-.1731	1.2[illegible]455
5	6	.04000	[illegible]	1.22199	-.[illegible]534	[illegible]
5	7	.05000	[illegible]	1.22629	.0728	1.22622
5	8	.06000	[illegible]	1.24137	.[illegible]	[illegible]
5	9	.07000	[illegible]	1.23199	.6759	[illegible]
5	10	.08000	[illegible]	1.20440	.[illegible]476	[illegible]
5	11	.09000	[illegible]	[illegible]	.4[illegible]	1.16667
6	3	.01000	[illegible]	[illegible]	-.[illegible]	[illegible]
6	4	.02000	[illegible]	[illegible]	-.[illegible]	[illegible]
6	5	.03000	[illegible]	[illegible]	-.4555	[illegible]
6	6	.04000	[illegible]	[illegible]	-.[illegible]	1.24187
6	7	.05000	[illegible]	1.27597	-.1703	[illegible]
6	8	.06000	[illegible]	[illegible]	.[illegible]	[illegible]
6	9	.07000	[illegible]	1.[illegible]315	.7562	[illegible]
6	10	.08000	[illegible]	[illegible]	.[illegible]	[illegible]
6	11	.09000	[illegible]	1.22131	.9133	1.22621
7	3	.01000	[illegible]	[illegible]	-.[illegible]	1.11279
7	4	.02000	[illegible]	[illegible]	-.7553	1.14597
7	5	.03000	[illegible]	1.19392	-.9772	1.19792
7	6	.04000	[illegible]	[illegible]	-.9978	[illegible]
7	7	.05000	[illegible]	[illegible]	-.74[illegible]	[illegible]
7	8	.06000	[illegible]	[illegible]	-.1572	1.39169
7	9	.07000	[illegible]	1.42146	.7222	[illegible]
7	10	.08000	[illegible]	[illegible]	.7354	[illegible]
7	11	.09000	[illegible]	[illegible]	.6496	[illegible]
8	3	.01000	[illegible]	[illegible]	-.7077	[illegible]
8	4	.02000	[illegible]	[illegible]	-.[illegible]	[illegible]
8	5	.03000	[illegible]	[illegible]	-.0639	[illegible]
8	6	.04000	[illegible]	[illegible]	-.1049	[illegible]
8	7	.05000	[illegible]	1.39595	-.9[illegible]	[illegible]
8	8	.06000	[illegible]	[illegible]	-.[illegible]	[illegible]
8	9	.07000	[illegible]	[illegible]	.4[illegible]	[illegible]
8	10	.08000	[illegible]	1.61277	.3[illegible]	[illegible]
8	11	.09000	[illegible]	[illegible]	.87[illegible]	[illegible]
9	3	.01000	[illegible]	[illegible]	-.1[illegible]4	[illegible]
9	4	.02000	[illegible]	[illegible]	-.1999	.97689
9	5	.03000	[illegible]	1.[illegible]5113	-.22[illegible]5	[illegible]
9	6	.04000	[illegible]	[illegible]	-.[illegible]	[illegible]
9	7	.05000	[illegible]	[illegible]	-.3071	[illegible]
9	8	.06000	[illegible]	[illegible]	-.4136	[illegible]
9	9	.07000	[illegible]	[illegible]	-.5526	[illegible]
9	10	.08000	[illegible]	[illegible]	.5[illegible]2	[illegible]
9	11	.09000	[illegible]	[illegible]	.414	[illegible]
11	9	.07000	[illegible]	.98790	-1.316	[illegible]
11	10	.08000	[illegible]	[illegible]	2.4004	[illegible]

ANEXA 4

```
C
C
C
C   *** CALCULUL CIMPULUI MAGNETIC  L UNEI
C   *** PERECHI DE BOBINE CIRCULARE SITUATE
C   *** IN AER,PRIN METODA DIFERENTELOR
C   ***     FINITE CU PAS VARIABIL
      DIMENSION A(60,60),DC(30,30),NC(60)
      READ(105,1)NBJ,NBS,NW,NHC,N
      READ(105,1)MBS,MBD,MW,MHC,M  KM
      READ(105,2)HR,HZ,RCH,CD,AI, PS
    1 FORMAT(16I5)
    2 FORMAT(3F10.5)
      PI=3.141593
      NM1=N-1
      MM1=M-1
      CMN=2./NM1/NM1+2./MM1/MM1
      FSR=1.-PI*SQRT(CMN)
      WRITE(108,333)
  333 FORMAT('1'///)
      WRITE(108,5)NBJ,NBS,NW,NHC,  ,MBS,
     +MBD,MW,MHC,M,KM,HR,HZ,RCH,C  ,AI,EPS
    5 FORMAT(/20X,'NBJ=',I2,2X,'N  S=',I2,
     +2X,'NW=',I2,2X,'NHC=',I2,2X  'N=',I2/
     +20X,'MBS=',I2,2X,'MBD=',I2,  X,'MW=',
     +I2,2X,'MHC=',I2,2X,'M=',I2,  X,'KM=',
     +I3/20X,'HR=',E8.3,2X,'HZ=',  8.3,2X,
     +'RCH=',E8.3/20X,'CD=',E8.3,  X,
     +'AI=',E8.3,2X,'EPS=',E8.3)
      NJL=14
      NMJ=NBJ/2
      NMS=NBS+(4-NBS)/3
      MMD=MBD+(4-MBD)/3
      MHCP1=MHC+1
      NHCP1=NHC+1
      FSRP1=FSR+1
      HRP=HR*HR
      HZP=HZ*HZ
      CH1=HZP/HRP
      CDC=PI*HZP/5.
      DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,M
      NC(J)=J
   10 A(I,J)=1.
      DO 11 I=NMJ,NMS
      DO 11 J=1,MMD
   11 A(I,J)=AI
      DO 12 I=1,NHC
      DO 12 J=2,MHC
   12 DC(I,J)=0.
      DO 13 I=NBJ,NBS
      DO 13 J=MBS,MBD
   13 DC(I,J)=CD
      K=1
   20 CONTINUE
      BIG=0.
      RP=0.
      DO 33 I=2,NHC
      RP=RP+HR
      C2=RP/(2*RP+HR)
      C4=RP/(2*RP-HR)
      CA2=(RP+HR)/(2*RP+HR)
      CA4=(RP-HR)/(2*RP-HR)
      CAP=1.+CH1*(C2+C4)
      DO 31 J=2,MHC
      TL=(A(I,J+1)+A(I,J-1))/2.+CH1*(CA2*
     +A(I+1,J)+CA4*A(I-1,J))+CDC*DC(I,J)
      AP=TL/CAP
      DA=AP-A(I,J)
      BIG=BIG+ABS(DA)
   31 A(I,J)=AP+FSR*DA
      H1=HZ
      DO 32 J=MHCP1,MM1
      H3=H1
      H1=H1*RCH
      CH=H1*H3/HRP
      CAP=1.+CH*(C2+C4)
```

ANEXA 4

```
      TL=(H3*A(I,J+1)+H1*A(I,J-1))/(H1+H3)+
     +CH*(CA2*A(I+1,J)+CA4*A(I-1,J))
   32 A(I,J)=FSRP1*TL/CAP-FSR*A(I,J)
   33 CONTINUE
      H2=HR
      DO 43 I=NHCP1,NM1
      H4=H2
      H2=H2*RCH
      RP=RP+H4
      C2=RP/(2*RP+H2)*H4
      C4=RP/(2*RP-H4)*H2
      CA2=(RP+H2)/(2*RP+H2)*H4
      CA4=(RP-H4)/(2*RP-H4)*H2
      CH=2.*HZP/H2/H4/(H2+H4)
      CAP=1.+CH*(C2+C4)
      DO 41 J=2,MHC
      TL=(A(I,J+1)+A(I,J-1))/2.+
     +CH*(CA2*A(I+1,J)+CA4*A(I-1,J))
   41 A(I,J)=FSRP1*TL/CAP-FSR*A(I,J)
      H1=HZ
      DO 42 J=MHCP1,MM1
      H3=H1
      H1=H1*RCH
      CH=2.*H1*H3/H2/H4/(H2+H4)
      CAP=1.+CH*(C2+C4)
      TL=(H3*A(I,J+1)+H1*A(I,J-1))/(H1+H3)+
     +CH*(CA2*A(I+1,J)+CA4*A(I-1,J))
   42 A(I,J)=FSRP1*TL/CAP-FSR*A(I,J)
   43 CONTINUE
      DO 50 I=2,NM1
   50 A(I,1)=A(I,3)
      IF(SIG-EPS)60,60,51
   51 IF(K-KM)52,60,60
   52 K=K+1
      GO TO 20
   60 CONTINUE
      WRITE(108,22)K,SIG
   22 FORMAT(///25X,'NUMARUL DE ITERATII K=',
     +I3/25X,'SUMA DIFERENTELOR SIG=',E8.3)
      WRITE(108,110)
  110 FORMAT(///9X,'I',4X,'J',6X,'ZP',8X,'RP',
     +8X,'BZ',8X,'BR',8X,'B'/8X,5('*'))
      J=2
      ZP=0.
      I=1
      RP=0.
      BZ=(4*A(2,J)-A(3,J))/HR
      BR=0.
      B=BZ
      WRITE(108,120)I,J,ZP,RP,BZ,BR,B
  120 FORMAT(5X,2I5,5F10.5)
      DO 130 I=2,NHC
      RP=RP+HR
      BZ=A(I,J)/RP+(A(I+1,J)-A(I-1,J))/2/HR
      BR=0.
      B=ABS(BZ)
      WRITE(108,120)I,J,ZP,RP,BZ,BR,B
  130 CONTINUE
      I=1
      RP=0.
      ZP=0.
      DO 131 J=3,MHC
      ZP=ZP+HZ
      BZ=(4*A(2,J)-A(3,J))/HR
      BR=0.
      B=BZ
      WRITE(108,120)I,J,ZP,RP,BZ,BR,B
  131 CONTINUE
      NWS=2
      NWV=5
  135 DO 132 I=NWS,NWV
      RP=(I-1)*HR
      ZP=0.
      DO 132 J=3,MW
      ZP=ZP+HZ
      BZ=A(I,J)/RP+(A(I+1,J)-A(I-1,J))/2/HR
      BR=(A(I,J-1)-A(I,J+1))/2/HZ
```

ANEXA 4

```
      B=SQRT(BR*BR+BZ*BZ)
      WRITE(108,120)I,J,ZP,RP,BZ,BR,B
  132 CONTINUE
      IF(NWV.EQ.NW) GO TO 140
      NWS=NWV+1
      NWV=NW
      WRITE(108,333)
      GO TO 135
  140 CONTINUE
      STOP
      END
```

ANEXA 4

NBJ=11 NBS=11 [illegible] NHC=14 N=32
MBS= 9 MBO=[illegible] [illegible]=14 MHC=14 M=35 [illegible]
HR=.150E-01 HZ=[illegible] KCH=[illegible]
CD=.667E+ 3 AT=[illegible] EPS=[illegible]

NUMARUL DE ITERATII K=[illegible]
SUMA DIFERENTELOR BIG=.2[illegible]E-04

I	J	ZP	RP	EZ	dF	d
1	2	.00000	[illegible]	1.19372	[illegible]	1.19372
2	2	.00000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	2	.00000	[illegible]	1.19243	[illegible]	1.19243
4	2	.00000	[illegible]	1.18555	[illegible]	1.18555
5	2	.00000	[illegible]	1.17782	[illegible]	1.17782
6	2	.00000	[illegible]	1.15363	[illegible]	1.15363
7	2	.00000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	2	.00000	[illegible]	1.02117	[illegible]	1.02117
9	2	.00000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	2	.00000	[illegible]	.69167	[illegible]	.69167
11	2	.00000	[illegible]	.45924	[illegible]	.45924
12	2	.00000	[illegible]	.23684	[illegible]	.23684
13	2	.00000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	2	.00000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	3	.01000	[illegible]	1.19357	[illegible]	1.19357
1	4	.02000	[illegible]	1.19282	[illegible]	1.19282
1	5	.03000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	6	.04000	[illegible]	1.18567	[illegible]	1.18567
1	7	.05000	[illegible]	1.17649	[illegible]	1.17648
1	8	.06000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	9	.07000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	10	.08000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	11	.09000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	12	.10000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	13	.11000	[illegible]	.97637	[illegible]	.97637
1	14	.12000	[illegible]	.92036	[illegible]	.92036
2	3	.01000	[illegible]	1.19367	[illegible]	1.19367
2	4	.02000	[illegible]	1.19414	[illegible]	1.19414
2	5	.03000	[illegible]	1.19378	[illegible]	1.19379
2	6	.04000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	7	.05000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	8	.06000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	9	.07000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	10	.08000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	11	.09000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	12	.10000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	13	.11000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	14	.12000	[illegible]	[illegible]	.4436	[illegible]
3	3	.01000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	4	.02000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	5	.03000	[illegible]	1.19776	[illegible]	1.19778
3	6	.04000	[illegible]	1.19821	[illegible]	[illegible]
3	7	.05000	[illegible]	1.19443	[illegible]	[illegible]
3	8	.06000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	9	.07000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	10	.08000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	11	.09000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	12	.10000	[illegible]	[illegible]	.7574	[illegible]
3	13	.11000	[illegible]	.95126	[illegible]	[illegible]
3	14	.12000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	3	.01000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	4	.02000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	5	.03000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	6	.04000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	7	.05000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	8	.06000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	9	.07000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	10	.08000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	11	.09000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	12	.10000	[illegible]	[illegible]	.1877	[illegible]
4	13	.11000	[illegible]	[illegible]	.3241	[illegible]
4	14	.12000	[illegible]	.38816	[illegible]	.94897
5	3	.01000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	4	.02000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	5	.03000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	6	.04000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	7	.05000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	8	.06000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	9	.07000	[illegible]	[illegible]	.6737	[illegible]
5	10	.08000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	11	.09000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	12	.10000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	13	.11000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	14	.12000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

BUPT

ANEXA 4

6	3	.01000	.27[illegible]	1.16[illegible]29	-.2321	1.16[illegible]
6	4	.02000	.27[illegible]	1.17391	-.3746	1.18[illegible]
6	5	.03000	.27[illegible]	1.2[illegible]983	-.4542	1.21[illegible]66
6	6	.04000	.27[illegible]	1.24559	-.3[illegible]	1.25622
6	7	.05000	.27[illegible]	1.28[illegible]29	-.1734	1.28[illegible]
6	8	.06000	.27[illegible]	1.3[illegible]438	.2226	1.3[illegible]437
6	9	.07000	.27[illegible]	1.3[illegible]722	.7536	1.3[illegible]
6	10	.08000	.27[illegible]	1.2[illegible]	.35[illegible]	1.2[illegible]
6	11	.09000	.27[illegible]	1.22529	.913[illegible]	1.24[illegible]
6	12	.10000	.27[illegible]	1.[illegible]4696	.3672	1.17[illegible]4
6	13	.11000	.27[illegible]	1.[illegible]5582	.[illegible]	1.[illegible]8245
6	14	.12000	.27[illegible]	.96[illegible]44	.7832	.9[illegible]
7	3	.01000	.29[illegible]	1.11657	-.4771	1.11721
7	4	.02000	.29[illegible]	1.14798	-.7514	1.15[illegible]45
7	5	.03000	.29[illegible]	1.19842	-.97[illegible]	1.2[illegible]6
7	6	.04000	.29[illegible]	1.26353	-.99[illegible]	1.2[illegible]45
7	7	.05000	.29[illegible]	1.33462	-.7[illegible]2	1.3[illegible]64
7	8	.06000	.29[illegible]	1.39611	-.1[illegible]	1.39619
7	9	.07000	.29[illegible]	1.42563	.72[illegible]	1.427[illegible]
7	10	.08000	.29[illegible]	1.4[illegible]157	.7359	1.41220
7	11	.09000	.29[illegible]	1.32327	.6436	1.34[illegible]
7	12	.10000	.29[illegible]	1.21146	.4075	1.2[illegible]
7	13	.11000	.29[illegible]	1.08749	.6516	1.[illegible]471[illegible]
7	14	.12000	.29[illegible]	.96559	.7537	1.[illegible]599
8	3	.01000	.1[illegible]	1.[illegible]2	-.7[illegible]9	1.[illegible]43
8	4	.02000	.1[illegible]	1.[illegible]15	-.3546	1.[illegible]
8	5	.03000	.1[illegible]	1.[illegible]785	-.8622	1.1[illegible]
8	6	.04000	.1[illegible]	1.26613	-.[illegible]76	1.2[illegible]
8	7	.05000	.1[illegible]	1.4[illegible]41	-.91[illegible]	1.4[illegible]45
8	8	.06000	.1[illegible]	1.5[illegible]45	-.[illegible]923	1.5[illegible]
8	9	.07000	.1[illegible]	1.63823	.4352	1.6[illegible]
8	10	.08000	.1[illegible]	1.61697	.3139	1.6[illegible]4
8	11	.09000	.1[illegible]	1.47613	.3845	1.5[illegible]
8	12	.10000	.1[illegible]	1.29144	.7948	1.27757
8	13	.11000	.1[illegible]	1.10971	.1[illegible]	1.22198
8	14	.12000	.1[illegible]	.94977	.[illegible]	1.[illegible]
9	3	.01000	.12[illegible]	.[illegible]	-.1[illegible]	.9[illegible]4
9	4	.02000	.12[illegible]	.95661	-.1946	.96146
9	5	.03000	.12[illegible]	1.[illegible]5581	-.[illegible]	1.1[illegible]377
9	6	.04000	.12[illegible]	1.[illegible]	-.[illegible]	1.27[illegible]
9	7	.05000	.12[illegible]	1.44494	-.3[illegible]6	1.[illegible]772
9	8	.06000	.12[illegible]	1.75[illegible]	-.[illegible]	1.7875[illegible]
9	9	.07000	.12[illegible]	2.[illegible]7429	-.5475	2.[illegible]
9	10	.08000	.12[illegible]	2.[illegible]5658	.5[illegible]	2.[illegible]8627
9	11	.09000	.12[illegible]	1.[illegible]	.[illegible]	1.81[illegible]28
9	12	.10000	.12[illegible]	1.75[illegible]	.4[illegible]	1.[illegible]426
9	13	.11000	.12[illegible]	1.[illegible]262	.[illegible]7	1.[illegible]
9	14	.12000	.12[illegible]	.90[illegible]57	.7213	1.1[illegible]875
10	3	.01000	.13[illegible]	.7[illegible]61	-.5[illegible]	.72[illegible]47
10	4	.02000	.13[illegible]	.75[illegible]21	-.1[illegible]	.8[illegible]
10	5	.03000	.13[illegible]	.[illegible]4183	-.9[illegible]7	.974[illegible]
10	6	.04000	.13[illegible]	1.[illegible]811	-.9[illegible]	1.22[illegible]9
10	7	.05000	.13[illegible]	1.31744	-.96[illegible]	1.59[illegible]
10	8	.06000	.13[illegible]	1.92189	-.86[illegible]	1.[illegible]
10	9	.07000	.13[illegible]	2.[illegible]7029	-.95[illegible]4	2.[illegible]
10	10	.08000	.13[illegible]	2.16468	.[illegible]347	2.25193
10	11	.09000	.13[illegible]	1.[illegible]77	.[illegible]	2.27[illegible]
10	12	.10000	.13[illegible]	1.24759	.21[illegible]	1.746[illegible]
10	13	.11000	.13[illegible]	.[illegible]	.[illegible]2	1.[illegible]1
10	14	.12000	.13[illegible]	.7[illegible]43	.[illegible]7	1.[illegible]44
11	3	.01000	.15[illegible]	.46[illegible]4	-.[illegible]639	.49[illegible]
11	4	.02000	.15[illegible]	.47132	-.[illegible]473	.58[illegible]9
11	5	.03000	.15[illegible]	.48656	-.5613	.77[illegible]
11	6	.04000	.15[illegible]	.51[illegible]	-.6247	1.[illegible]6
11	7	.05000	.15[illegible]	.[illegible]	-1.[illegible]9	1.7[illegible]3
11	8	.06000	.15[illegible]	.[illegible]71[illegible]9	-2.[illegible]712	2.99[illegible]2
11	9	.07000	.15[illegible]	.[illegible]9260	-1.31[illegible]	[illegible]
11	10	.08000	.15[illegible]	.[illegible]	[illegible]4659	2.31576
11	11	.09000	.15[illegible]	.[illegible]	[illegible]	2.[illegible]
11	12	.10000	.15[illegible]	.[illegible]2324	1.[illegible]941	1.[illegible]
11	13	.11000	.15[illegible]	.[illegible]5174	.[illegible]847	1.[illegible]
11	14	.12000	.15[illegible]	.[illegible]	.7[illegible]74	1.[illegible]
12	3	.01000	.16[illegible]	.[illegible]2873	-.[illegible]526	.26[illegible]
12	4	.02000	.16[illegible]	.[illegible]125	-.7[illegible]	.3[illegible]44[illegible]
12	5	.03000	.16[illegible]	.[illegible]4316	-.4[illegible]	.46[illegible]
12	6	.04000	.16[illegible]	.[illegible]2722	-.[illegible]	.[illegible]
12	7	.05000	.16[illegible]	-.[illegible]	-.[illegible]21	.9[illegible]
12	8	.06000	.16[illegible]	-.[illegible]1642	-.[illegible]	1.[illegible]
12	9	.07000	.16[illegible]	-.[illegible]	-.4774	1.[illegible]
12	10	.08000	.16[illegible]	-.[illegible]	.4[illegible]	1.[illegible]
12	11	.09000	.16[illegible]	-.[illegible]	1.7[illegible]	1.[illegible]
12	12	.10000	.16[illegible]	-.[illegible]	1.[illegible]276	1.[illegible]
12	13	.11000	.16[illegible]	-.[illegible]747	.[illegible]	.95766
12	14	.12000	.16[illegible]	.[illegible]	.9[illegible]9	.[illegible]477