Ministerul Educaţiei şi Învăţământului

INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA

FACULTATEA DE ELECTROTEHNICĂ

- Catedra de Matematică -

PARASCHIVA POPOVICI

ECUAŢII OPERATORIALE NELINIARE ŞI APLICAŢII

TEZĂ DE DOCTORAT

Conducător ştiinţific :

Prof.dr. BORISLAV CRSTICI

Timişoara - 1987

INTRODUCERE

Specialiştii diverselor domenii de activitate au fost, sînt şi vor fi permanent confruntaţi cu ecuaţii operatoriale ($Fx = b$, $F : X \longrightarrow Y$, X, Y spaţii) de o diversitate de tipuri, care se cer rezolvate.

In general, nu este posibil de a determina explicit soluţia ecuaţiei ($Fx = b$) sau, dacă se poate, forma ei explicită este atît de complicată încît ea este inutilizabilă şi din acest motiv căutăm o soluţie aproximativă.

In cadrul aproximării soluţiilor ecuaţiilor, studiul metodelor iterative ocupă un loc important.

In prezenta lucrare, se abordează rezolvarea ecuaţiilor operatoriale neliniare în spaţii finit dimensionale sau spaţii Hilbert reale, ecuaţii care provin din discretizarea unor ecuaţii diferenţiale neliniare, în mod special a ecuaţiilor cu diferenţe corespunzătoare problemelor la limită bilocale pentru ecuaţii diferenţiale slab neliniare, sau cvasiliniare, problemei Dirichlet pentru ecuaţii eliptice slab neliniare. Sînt prezentate metode numerice iterative proprii sau generalizări ale unor metode iterative cunoscute, implementate pe calculator.

Problema la limită bilocală pentru ecuaţii diferenţiale slab neliniare precum şi metoda cu diferenţe pentru rezolvarea numerică a ei au fost considerate de P.Henrici [17], M.Lees [27], M.Keller [22], J.Douglas [10], Samarski [59] şi alţii. M.Lees [27] a dat o teoremă de existenţă şi unicitate şi a obţinut condiţii simple de convergenţă pentru metodele cu diferenţe. Rezultatele lui M.Lees şi M.H.Schultz [28] relative la rezolvarea numerică a problemei la limită bilocale pentru ecuaţii diferenţiale cvasiliniare prin metode cu diferenţe finite au fost obţinute pe baza generalizării principiului de punct fix Leray - Schauder pentru operatori A-compacti, teorie desvoltată de W.V.Petryshyn [47], S.Kaniel [18]. In Capitolul 1 autorul construieşte o teorie de tipul M.Lees relativă la rezolvarea problemei Dirichlet pentru ecuaţii cu derivate parţiale eliptice slab neliniare prin metoda cu diferenţe finite standard (în cinci puncte) [55]. Această problemă a fost considerată de L.Bers [6], N.Levinson [29], S.V.Parter 42 , 43 , J.Douglas [10] . L.Bers, într-o lucrare cunoscută [6] a arătat că soluţiile ecuaţiilor cu diferenţe finite standard converg la soluţia problemei continue în condiţii suficient de largi principala condiţie fiind (1.13) . Aceste rezultate au fost generalizate de autor [55]. Intr-o serie de lucrări [43],[44], S.V.Parter a studiat metodele cu diferenţe finite standard şi cu diferenţe finite corectate pentru obţinerea unei soluţii "maximale" (în cazul în care problema admite mai multe soluţii). Menţionăm de asemenea rezultatele lui J.Douglas [10] asupra metodei direcţiilor alternante pentru ecuaţiile cu diferenţe finite standard. Condiţia principală impusă de J-Douglas condiţia (1.14) , mai slabă decît condiţia cerută de L.Bers este utilizată şi în studiul nostru ca şi condiţie principală.

In Capitolul 2 se studiază convergenţa locală a unor metode iterative pentru ecuaţii neliniare în spaţii finit dimensionale sau în spaţii Hilbert reale. S-au considerat ecuaţii de forma (1.4) care provin din discretizarea unor ecuaţii diferenţiale neliniare (probleme cu condiţii la limită) sau de formă mai generală (1.11). Astfel, se generalizează o metodă iterativă directă clasică [5] pentru ecuaţii de forma (1.11), se studiază [57] o variantă a metodei direcţiilor alternante pentru cazul neliniar considerată de Kellog [23] şi se generalizează [52] o metodă de tip gradient considerată de Altman [1],[2]. In cazuri particulare se obţin unele metode iterative cunoscute,în general cu condiţii de convergenţă mai slabe, ceea ce corespunde cu faptul că condiţiile considerate asigură numai o convergenţă locală.

Menţionăm că problema rezolvării numerice a ecuaţiilor diferenţiale neliniare, în mod special a ecuaţiilor cu diferenţe corespunzătoare problemelor la limită de tip eliptic slab neliniare a fost considerată de numeroşi autori. Astfel Bers [6], Ortega şi Rockoff [39] iar mai recent Gergei [14] au considerat metode Gauss-Seidel neliniară (metoda SOR cu parametrul de relaxare 1). Douglas [10] şi Gunn [15] au studiat metoda direcţiilor alternante a lui Peaceman - Rachford [44] pentru ecuaţii eliptice neliniare iar Scorobogatko şi Mamunya [61] au considerat o metodă specială de aproximaţii succesive. Intrucît ecuaţiile cu diferenţe sînt în general lacunare (sparsity) derivata Fréchet fiind o matrice rară, metodele numerice studiate în Capitolul 2 se referă la ecuaţii neliniare de acest tip. Metodele de calcul cu matrice rare pentru a fi eficiente trebuie să beneficieze de proporţia mare de elemente nule din aceste matrice, ceea ce creează necesitatea considerării unor tehnici speciale de memorare, programare şi analiză numerică. O cerinţă esenţială în programarea matricelor rare constă în memorarea şi executarea operaţiilor numerice numai cu elemente nenule ale matricei, de a salva memorie şi timp de calcul.

Menţionăm că tehnicile de prelucrare a matricelor rare de mari dimensiuni reprezintă un domeniu de cercetare relativ nou (primele conferinţe şi lucrări de sinteză consacrate acestui subiect datează din anii 1969-1971) şi că impactul matricelor rare asupra software-lui de aplicaţii şi chiar asupra tehnologiilor în tehnica de calcul este considerabil.

In Capitolul 3 al tezei sînt prezentate tehnici speciale de realizare a programelor calculator pentru metodele numerice prezentate în Capitolul 2, exploatînd proprietatea de lacunaritate a ecuaţiilor cu diferenţe, în vederea obţinerii unor programe performante [58]. Programele astfel obţinute pot fi catalogate într-o bibliotecă sursă. In ultimul paragraf al Capitolului 3 am aplicat cercetările noastre la rezolvarea unor probleme concrete din electroenergetică [50] .

In totalitatea lor cele trei capitole realizează o tratare completă a subiectului de la fundamentări teoretice pînă la procedee numerice şi programe calculator.

CAPITOLUL 1.

ECUAŢII CU DIFERENŢE CORESPUNZĂTOARE PROBLEMELOR LA LIMITĂ NELINIARE

In acest capitol se consideră ecuaţiile cu diferenţe corespunzătoare unor probleme la limită neliniare : probleme la limită bilocală pentru ecuaţii diferenţiale slab neliniare şi cvasiliniare şi problema Dirichlet pentru ecuaţii eliptice slab neliniare. Ecuaţiile cu diferenţe considerate reprezintă exemple tipice de ecuaţii neliniare lacunare. In text sînt prezentate rezultatele lui M.Lees [27], M.Lees şi M.H.Schultz [28] relative la existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor cu diferenţe respective precum şi unele probleme legate de convergenţa soluţiilor problemelor discrete la soluţiile problemelor continue. De asemenea, în paragraful 1.3 se construieşte o teorie de tipul M.Lees relativă la rezolvarea problemei Dirichlet pentru ecuaţii cu derivate parţiale eliptice slab neliniare prin metoda cu diferenţe finite standard.

1.1. PROBLEMA LA LIMITĂ BILOCALĂ PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE SLAB NELINIARE.

Problema la limită bilocală pentru ecuaţii diferenţiale slab neliniare precum şi metoda cu diferenţe pentru rezolvarea numerică a ei au fost considerate de P.Henrici [17], M.Lees [27], M.Keller [22], J.Douglas [10], Samarski [59] şi alţii. M.Lees [27] a dat o teoremă de existenţă şi unicitate şi a obţinut condiţii simple de convergenţă pentru metodele cu diferenţe, rezultate pe care le vom prezenta în acest paragraf.

1.1.1. Notaţii şi noţiuni introductive. Fie n un întreg arbitrar şi $h = (n+1)^{-1}$. Mulţimea discretă $\bar{d} = \{t_j = jh \mid j = 0,1,\dots,n+1\}$ o vom numi diviziunea uniformă închisă a intervalului $I = [0,1]$; $d = \bar{d} - \{0,1\}$ va fi diviziunea uniformă deschisă a aceluiaş interval. Vom nota cu X_n mulţimea funcţiilor reale x definite pe $\bar{d}$ astfel încît $x(o) = x(1) = o$. Este clar că mulţimea X_n înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari obişnuite este un spaţiu liniar de dimensiune n. Dacă definim pe X_n norma $\|x\|_d = \max_d |x(t)|$ (numită norma uniformă sau norma max) atunci X_n devine un spaţiu Banach real n-dimensional. Mulţimea funcţiilor reale x definite pe $\bar{d}$ fără condiţiile $x(o) = x(1) = o$, structurată în acelaş mod, constituie un spaţiu Banach cu $n + 2$ dimensiuni ; vom nota acest spaţiu cu X_{n+2} .

OBSERVATIE. Vom identifica spaţiul X_n cu spaţiul real n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Dacă $x \in X_n$ atunci x va fi considerat un vector coloană avînd componentele $x_j = x(t_j)$, $j = 1,\ldots,n$. Vom utiliza, după caz, terminologia unui spaţiu de funcţii sau a spaţiului $\mathbb{R}^n$.

Dacă $u \in C(I)$ şi $u(o) = u(1) = o$, restricţia lui u la $\bar{d}$ o vom nota de asemenea cu u ; această dublă semnificaţie a lui u nu va provoca în general ambiguităţi ; de exemplu, prin $\|u\|_d$ vom înţelege norma uniformă a restricţiei lui u la $\bar{d}$. Menţionăm că norma (uniformă) a spaţiului $C(I)$ o vom nota cu $\|\cdot\|_I$.

Fie $x,y \in X_n$; vom nota, pentru orice $k \leq n + 1$,

$$\langle x,y \rangle_k = h \sum_{j=1}^{k} x(t_j)y(t_j).$$

Se vede că $\langle x,y \rangle_n$ defineşte un produs interior pe spaţiul X_n. Norma indusă de acest produs o vom nota cu $\|\cdot\|_o$, deci $\|x\|_o = \langle x,x \rangle_n^{1/2}$. Se poate verifica cu uşurinţă că

$$h^{1/2}\|x\|_d \leq \|x\|_o \leq \|x\|_d.$$

Fie $A : X_n \longrightarrow X_n$ un operator definit de

$$Ax(t) = h^{-2}[x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)],\ t \in d\ ,$$

şi $Ax(o) = Ax(1) = o$. Se ştie că A este un operator liniar cu matricea (notată de asemenea cu A)

$$A = h^{-2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Să observăm că, dacă $u \in C^1(I)$, Au constitue diferenţa divizată de ordinul doi a funcţiei u în raport cu pasul h. După cum se ştie această diferenţă aproximează, în anumite condiţii derivata de ordinul doi a funcţiei u în punctele diviziunii d ; acest fapt este esenţial pentru aproximarea soluţiilor problemelor la limită bilocale (liniare sau neliniare).

Se definesc de asemenea operatorii diferenţă D_+ şi D_- pe spaţiul X_{n+2} cu valori în X_{n+2} cu ajutorul relaţiilor

$$D_+x(t) = h^{-1}[x(t+h) - x(t)],$$

$$D_-x(t) = h^{-1}[x(t) - x(t-h)],$$

pentru orice $t \in d$ şi $D_+x(1) = -x(1)$, $D_-x(o) = x(o)$. Matricile acestor operatori sînt :

$$D_+ = h^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix},\quad D_- = h^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

D_+x şi D_-x reprezintă diferenţele divizate de ordinul întîi ("la dreapta" şi respectiv "la stînga") ale funcţiei x în raport cu pasul h. Dacă notăm $A_M = D_+D_-$ atunci $A_M(X_n) \subseteq X_n$ şi restricţia lui A_M la X_n coincide cu A.

Operatorul $-A$ fiind simetric şi pozitiv definit, se poate defini pe spaţiul X_n norma $\|\cdot\|_A$ dată de

$$\|x\|_A^2 = -\langle Ax, x\rangle_n .$$

este evident că

$$\|x\|_A^2 = -\langle A_M x, x\rangle_n = -\langle D_+ D_- x, x\rangle_{n+1} = \langle D_- x, D_- x\rangle_{n+1} .$$

Utilizînd această relație se poate arăta (M.Lees [27], lema 2) că pentru orice $x \in X_n$ avem

$$2\,\|x\|_d \le \|x\|_A .$$

1.1.2. <u>Probleme la limită bilocală slab neliniară</u>. Vom considera următoarea problemă la limită bilocală slab neliniară

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} &u'' = f(t,u)\ ,\ t \in [0,1] \\ &u(0) = \alpha\ ,\ u(1) = \beta\ , \end{aligned}$$

unde α, β sînt două numere reale date iar f este o funcție reală definită pe $D = \{(t,u) \mid 0 \le t \le 1,\ -\infty < u < +\infty\}$. Să observăm că limitele α , β se pot considera întotdeauna egale cu zero ; în adevăr, dacă u este o soluție a problemei (1.2) și dacă notăm $g(t,v) = f(t, v + \xi)$, unde $\xi(t) = \beta t + \alpha(1-t)$, atunci $v = u - \xi$ este o soluție a problemei

$$\begin{aligned} &v'' = g(t,v) \\ &v(0) = v(1) = 0. \end{aligned}$$

Invers, orice soluție v a acestei probleme generează o soluție $u = v + \xi$ a problemei (1.2).

In continuare vom considera problema (1.2) în care limitele α, β sînt egale cu zero.

OBSERVATIE. Din punctul de vedere al calculului numeric nu este întotdeauna util să luăm $\alpha = \beta = 0$; de exemplu, calculul lui u (pe o mulțime discretă) atunci cînd se cunoaște v necesită un ciclu în plus în programele de calcul.

Următoarea teoremă dată de M.Lees [27] constituie unul din rezultatele principale asupra existenței și unicității soluției problemei (1.2) :

TEOREMA 1.1. Presupunem că f are derivate parțiale de orice ordin în raport cu u continue și că

(1.3) $$\inf_{\omega} f_u = -\eta > -\pi^2$$

Atunci problema la limită bilocală (1.2) are o soluție unică.

Această teoremă generalizează un rezultat prezentat de P.Henrici [17] care presupune că f_u este continuă și satisface relația $0 \leq f_u(t,u) \leq L$ pe ω pentru o anumită constantă L. De remarcat faptul că condiția (1.3) presupune că f_u este mărginită numai la stînga.

1.1.3. Ecuații cu diferențe finite corespunzătoare problemei (1.2). Să presupunem că problema (1.2) admite o soluție $u \in C^4(I)$. Aplicînd formula lui Taylor, se obține

$$Au(t) = u''(t) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi), \quad 0 < \xi < 1.$$

Ținînd cont că $u^{(4)}$ este mărginită pe I, avem $u'' \approx Au$, astfel încît în locul ecuației $u'' = f(t,u)$ vom considera ecuația $Au = f(t,u)$. In mod obișnuit soluția acestei ecuații este apropiată de soluția ecuației inițiale dar rezolvarea ei nu este în general mai simplă. De aceea vom căuta o soluție x a acestei ecuații în spațiul X_n și vom numi problema astfel obținută problema discretă corespunzătoare problemei continue (1.2). Dacă notăm $\Phi x = (f[t_1,x(t_1)],\dots,f[t_n,x(t_n)])^T$ ecuația discretă se poate scrie sub forma

(1.4) $$Ax - \Phi x = 0,$$

unde A are forma (1.1). Este clar că (1.4) constitue un sistem neliniar de n ecuații cu n necunoscute, componentele lui x, $x(t_j)$, $j = 1,\dots,n$. Vom numi acest sistem ecuațiile cu diferențe finite standard corespunzătoare problemei la limită bilocale (1.2).

Asupra ecuațiilor (1.4) se pun următoarele trei probleme :

1) Existența și unicitatea soluției sistemului ;

2) Convergența soluțiilor sistemelor de forma (1.4), într-un anumit sens, la soluția problemei (1.2), atunci cînd $n \to \infty$;

3) Rezolvarea numerică a sistemului (1.4).

Menționăm că, avînd în vedere forma particulară a ecuațiilor (1.4), se pot construi proceduri speciale de calcul în vederea utilizării unui calculator electronic care să asigure un consum redus de memorie și de timp unitate centrală. Această problemă va fi tratată în capitolele 2 și 3 ale prezentei lucrări.

Să presupunem acum că $u \in C^6(I)$ și să considerăm în dezvoltarea în serie Taylor a funcției u termenii pînă la ordinul 6 inclusiv. Se obține

$$Au(t) = u''(t) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(t) + \frac{2h^4}{6!} u^{(6)}(\xi_1) \, , \quad 0 < \xi_1 < 1 .$$

Ținînd cont că

$$u^{(4)}(t) = \frac{d^2}{dt^2} f[t,u(t)] = Af[t,u(t)] - \frac{h^2}{12} \frac{d^4}{dt^4} f[t,u(t)]_{t = \xi_2}$$

$$0 < \xi_2 < 1 \, ,$$

rezultă

$$Au(t) = f[t,u(t)] + \frac{h^2}{12} Af[t,u(t)] +$$

$$+ \frac{h^4}{12} \left(\frac{1}{30} u^{(6)}(\xi_1) - \frac{d^4}{dt^4} f[t,u(t)]_{t=\xi_2} \right).$$

Așadar $Au \approx f(t,u) + (h^2/12)Af(t,u)$ și rezultă imediat următoarea discretizare pentru problema (1.2) :

$$Ax - \Phi x - \frac{h^2}{12} A \Phi x = 0. \tag{1.5}$$

S-a obținut din nou un sistem liniar de n ecuații cu n necunoscute care diferă de (1.4) prin partea neliniară. Vom numi acest sistem ecuațiile cu diferențe finite corectate corespunzătoare problemei la limită bilocală (1.2).

1.1.4. <u>Convergența</u>. Vom nota cu $C_0(I)$ mulțimea funcțiilor reale continue pe I şi astfel încît $u(o) = u(1) = o$. Dacă $u \in C_o(I)$ şi $x \in X_n$ vom înţelege prin $u - x$ diferenţa dintre restricţia lui u la d şi x. Fie acum $\{x^n\}$ un şir astfel încît $x^n \in X_n$. Vom spune că şirul $\{x_n\}$ converge la $u \in C_o(I)$ dacă $\| x^n - u\|_d \longrightarrow o$, $n \longrightarrow \infty$.

Teoria lui M.Lees referitoare la rezolvarea numerică a problemei (1.2) prin metode cu diferenţe are la bază următoarea lemă (lema 6, [27]) :

LEMA 1.1. Presupunem că f satisface relaţia (1.3) şi că h_o este astfel încît

$$\eta < \pi^2\left[1-(h_o^2/12)\right]^2 .$$

Dacă $h \leq h_o$ şi $x,y \in X_n$ satisface relaţiile

$$Ax = f(t,x)+ q_1(t),$$
$$Ay = f(t,y)+ q_2(t),$$

pentru $t \in d$, atunci $\|x-y\|_A \leq 2k_o \| q_1 - q_2 \|_o$, unde

$$2k_o = \frac{\pi}{\pi^2\left[1-(h_o^2/12)\pi^2\right] - \eta} .$$

Pe baza acestei leme se poate obţine următorul rezultat ([27], teoremele 2 şi 3) asupra convergenţei soluţiilor ecuaţiilor cu diferenţe finite standard la soluţia problemei (1.2) :

TEOREMA 1.2. Presupunem că f satisface relaţia (1.3) şi că $h \leq h_o$. Atunci ecuaţiile cu diferenţe finite standard (1.4) au o soluţie unică $x^n \in X_n$. Dacă u este soluţia problemei (1.2) atunci

$$\| u - x^n\|_d \leq \frac{1}{2} \| u - x^n\|_A \leq \frac{h^2}{12} k_o \| u^{(4)}\|_I .$$

Să observăm că din această teoremă rezultă că dacă $n \longrightarrow \infty$ atunci $h \longrightarrow o$ şi $\| u - x^n\|_d \longrightarrow o$, adică şirul de soluţii ale ecuaţiilor cu diferenţe finite standard converge la soluţia problemei (1.2).

Relativ la ecuaţiile cu diferenţe finite corectate se obţine ([27], teoremele 5 şi 6)

TEOREMA 1.3. *Dacă* f *satisface relaţia* (1.3) *atunci ecuaţiile cu diferenţe corectate* (1.5) *au o soluţie unică* $x^n \in X_n$ *pentru* h *suficient de mic iar şirul de soluţii ale acestor ecuaţii converge la soluţia problemei* (1.2).

1.2. PROBLEMA LA LIMITĂ BILOCALĂ PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE CVASILINIARE.

In acest paragraf vom prezenta rezultatele lui M.Lees şi M.H.Schultz [28] relative la rezolvarea numerică a problemei la limită bilocale pentru ecuaţii diferenţiale cvasiliniare prin metode cu diferenţe finite. Aceste rezultate au fost obţinute pe baza generalizării principiului de punct fix Leray - Schauder pentru operatori A - compacţi, teorie dezvoltată de W.V.Petryshyn [47], S.Kaniel [18], M.Lees şi M.H.Schultz [28] .

1.2.1. *Noţiuni introductive*. Vom nota cu $C_o^1(I)$ spaţiul liniar al funcţiilor reale u, continuu diferenţiabile pe $I = [o,1]$ şi astfel încît $u(o) = u(1) = o$. Dacă pe $C_o^1(I)$ definim norma

$$\|u\| = \max_I |u(t)| + \max_I |u'(t)|$$

atunci $C_o^1(I)$ devine un spaţiu Banach real. Pe spaţiul X_n vom considera norma

$$\|x\|_d = \max_d |x(t)| + \max_d |D_-x(t)|,$$

unde D_- este operatorul diferenţă definit în 1.1.1. Spaţiul X_n înzestrat cu această normă devine de asemenea un spaţiu Banach real n-dimensional.

Pentru fiecare X_n definim un operator $\varphi_n : X_n \longrightarrow C_o^1(I)$ $(x \longrightarrow u = \varphi_n(x))$ după cum urmează :

1) dacă $t \in [t_j, t_{j+1}]$, $1 \le t \le n$, atunci $u = \varphi_n(x)$ este polinomul (unic) de grad cel mult trei astfel încît

$$u(t_j) = x(t_j)\ ,\ u'(t_j) = D_-x(t_j),$$
$$u(t_{j+1}) = x(t_{j+1}),\ u'(t_{j+1}) = D_-x(t_{j+1});$$

2) dacă $t \in [0, t_1]$, atunci $u = \varphi_n x$ este polinomul (unic) de grad cel mult doi astfel încît

$$u(o) = o\quad ,\quad u'(t_1) = D_-x(t_1)$$
$$u(t_1) = x(t_1).$$

Să observăm că pe fiecare interval $[t_j, t_{j+1}]$, $1 \le j \le n$ (respectiv pe $[o, t_1]$), funcția $u \in C_o^1(I)$ care corespunde elementului $x \in X_n$ este definită de un polinom de interpolare Hermite de ordinul trei (respectiv de ordinul doi).

Se poate arăta că φ_n este un operator liniar și că există o constantă c_1, independentă de n, astfel încît

(1.6) $$\|x\|_d \le \|\varphi_n x\| \le c_1 \|x\|_d\ ,\ \forall\ x \in X_n.$$

1.2.2. <u>Problema la limită bilocală cvasiliniară și ecuații cu diferențe finite standard</u>. Considerăm următoarea problemă la limită bilocală cvasiliniară.

(1.7) $$u'' = f(t, u, u')\ ,\ t \in [o, 1]$$
$$u(o) = u(1) = o$$

unde f este o funcție reală definită pe $\mathcal{L} = \{(t, u, u') | o \le t \le 1,\ -\infty < u, u' < +\infty\}$. Dacă presupunem că problema (1.7) are o soluție $u \in C^4(I)$ iar f are derivată parțială în raport cu u' mărginită, atunci

$$Au(t) = f[t, u(t), D_o u(t)] + r\ ,\ t \in d,$$

unde $D_o u(t) = [u(t+h) - u(t-h)]/2h$ iar r satisface $|r| \le c_2 h^2$ pentru o constantă C_2 independentă de n. Așadar $Au \approx f(t, u, D_o u)$ și dacă notăm

$$\Phi x = \begin{pmatrix} f[t_1, x_1, (x_2 - x_0)/2h] \\ \vdots \\ f[t_n, x_n, (x_{n+1} - x_{n-1})/2h] \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

rezultă discretizarea (1.4) pentru problema (1.7). Ca şi în cazul slab neliniar, ecuaţiile (1.4) cu Φ dat de (1.8) le vom numi ecuaţiile cu diferenţe standard corespunzătoare problemei la limită bilocale cvasiliniare (1.7).

Vom presupune că f este de două ori continuu diferenţiabilă pe S ; orice soluţie a problemei (1.7) este în acest caz de clasă C^4 pe $[0,1]$. Asupra funcţiei f se mai impun următoarele condiţii :

Dacă u este o soluţie a problemei (1.7) atunci

$$\begin{aligned} &f_x(t,u,0) \geq m > 0 \text{ , şi} \\ &|f(t,u,u')| \leq \sigma(u'), \text{ pentru } |u| \leq k_1 \text{ ,} \end{aligned} \tag{1.9}$$

unde $k_1 = m^{-1} \max|f(t,0,0)|$ iar σ este o funcţie pozitivă şi continuă pe $[0,\infty)$ astfel încît

$$\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\sigma(s)} = +\infty.$$

Se poate arăta că în aceste condiţii $|u(t)| \leq k_1$ şi $|u'(t)| \leq k_2$ unde k_2 este o constantă care depinde numai de k_1.

Putem acum enunţa următoarea teoremă asupra problemei (1.7) şi a metodei cu diferenţe finite pentru rezolvarea numerică a ei (M.Lees şi M.H.Schultz [28] , teorema 7) :

TEOREMA 1.4. Dacă f este o funcţie de două ori continuu diferenţiabilă pe S şi satisface condiţiile (1.9) atunci problema la limită (1.7) are cel puţin o soluţie u , ecuaţiile cu diferenţe standard corespunzătoare au o soluţie x^n pentru n suficient de mare şi există un subşir $\{x^{n_j}\}$ al lui $\{x^n\}$ astfel încît $\| \varphi_{n_j} x^{n_j} - u \| \to 0$, $n_j \to \infty$.

Dacă în plus $f_x(t,x,x') > 0$ atunci se poate arăta că soluţia u a problemei (1.7) este unică şi că şirul $\{\varphi_n x^n\}$ converge la u în topologia spaţiului $C_0^1(I)$. Aproximarea obţinută cu ajutorul soluţiei x^n a problemei discrete, pe mulţimea d, este de ordinul h^2.

Se poate obţine de asemenea un rezultat similar cu cel din teorema 1.2 pentru cazul slab neliniar. Deoarece şirul polinoamelor de interpolare Hermite corespunzătoare unei funcţii, respectiv derivatele lor, converge uniform la funcţia considerată, respectiv la derivata ei, se poate arăta că $\| \varphi_n u - u \| \to 0$, $n \to \infty$. Ţinînd cont şi de relaţia (1.6) rezultă

$$\| x^n - u \|_d \leq \| \varphi_n (x^n - u) \| \leq$$

$$\leq \| \varphi_n x^n - u \| + \| u - \varphi_n u \| \to 0 ,$$

ceea ce înseamnă că şirul de soluţii x^n al ecuaţiilor cu diferenţe finite converge la soluţia problemei (1.7).

1.2.3. <u>Caz particular</u>. Să considerăm problema cvasiliniară particulară de forma

$$\text{(1.10)} \quad \begin{aligned} &u'' = a(u)u + f(t,u) \\ &u(0) = u(1) = 0 , \end{aligned}$$

unde a şi f sînt funcţii reale definite respectiv pe $(-\infty , +\infty)$ şi $\{ (t,u) | 0 \leq t \leq 1, -\infty < u < +\infty \}$. Dacă notăm $a(x) = \operatorname{diag}[a(x_1),\ldots,a(x_n)]$ ecuaţiile cu diferenţe standard se pot scrie sub forma

$$[A - a(x)]x - \Phi x = 0,$$

unde A şi Φ au semnificaţiile din paragraful 1.1. Dacă notăm $A(x) = A - a(x)$, aceste ecuaţii devin

$$\text{(1.11)} \qquad A(x)x - \Phi x = 0.$$

Sub această formă ecuaţiile cu diferenţe prezintă anumite avantaje din punctul de vedere al algoritmului de calcul numeric (paragrafele 2.2, 2.3, 2.5).

1.3. PROBLEMA DIRICHLET PENTRU ECUAȚII ELIPTICE SLAB NELINIARE

In acest paragraf vom construi o teorie de tipul M.Lees relativă la rezolvarea problemei Dirichlet pentru ecuații cu derivate parțiale eliptice slab neliniare prin metode cu diferențe finite standard (în cinci puncte). Această problemă a fost considerată de L.Bers [6] , N.Levinson [29], B.V.Parter [42],[43], J.Douglas [10]. L.Bers, într-o lucrare cunoscută [6] a arătat că soluțiile ecuațiilor cu diferențe finite standard converg la soluția problemei continue în condiții suficient de largi principala condiție fiind (1.13) ; aceste rezultate vor fi generalizate [55] în capitolul de față. Intr-o serie de lucrări [42],[43], S.V.Parter a studiat metodele cu diferențe finite standard și cu diferențe finite corectate pentru obținerea unei soluții "maximale" (în cazul în care problema admite mai multe soluții). Menționăm de asemenea rezultatele lui J.Douglas [10] asupra metodei direcțiilor alternate pentru ecuațiile cu diferențe finite standard ; condiția principală impusă de J.Douglas condiția (1.14) , mai slabă decît condiția cerută de L.Bers, va fi utilizată și în studiul nostru ca și condiție principală.

1.3.1. <u>Notații și noțiuni introductive</u>. Fie $D = \{(t,s),\ 0 < t,\ s < 1\}$ pătratul unitate din R^2, Γ frontiera lui D și $\bar{D} = D \cup \Gamma$. Vom nota cu $C_0^n(\bar{D})$ mulțimea funcțiilor reale u, de n ori continuu diferențiabile pe $\bar{D}$ și astfel încît $u|_\Gamma = 0$. Pentru simplificarea scrierii un punct oarecare $(t,s) \in D$ va fi notat P.

Vom considera următoarea problemă Dirichlet pentru ecuații cu derivate parțiale eliptice slab neliniare (pe scurt problema Dirichlet eliptică slab neliniară)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = f(P,u) \quad , \quad P \in D \, , \tag{1.12}$$
$$u|_{\Gamma} = 0,$$

unde f este o funcție reală definită pe $S = \{(t,s,u) | 0 \le t, s \le 1, -\infty < u < +\infty\}$. Dacă f satisface anumite condiții de "netezire" (de exemplu [42]) iar f_u este pozitivă,

$$f_u(P,u) \geq 0 \quad , \quad (P,u) \in S, \tag{1.13}$$

atunci problema (1.12) are soluție unică. De asemenea ecuațiile cu diferențe finite standard au soluții unice iar șirul soluțiilor acestor ecuații converge la soluția problemei (1.12). J.Douglas [10] a studiat metoda direcțiilor alternate pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor cu diferențe finite, impunînd condiția mai slabă

$$f_u(P,u) \geq -\eta > -2\pi^2 \quad , \quad (P,u) \in S. \tag{1.14}$$

Fie m un întreg arbitrar și $h = (m+1)^{-1}$. Ca și în cazul unidimensional, mulțimea discretă $\bar{d} = \{(t_i,s_j) | t_i = ih \, , \, s_j = jh \, , i,j = 0,1,\dots,m+1\}$ o vom numi rețeaua uniformă închisă a pătratului unitate $\bar{D}$; $d = \{(t_i,s_j) | t_i = ih \, , \, s_j = jh \, , \, i,j = 1,\dots,m\}$ va fi rețeaua uniformă deschisă a lui $\bar{D}$. Vom nota $\Gamma = \bar{d} - d$ și vom spune că Γ este frontiera lui $\bar{d}$. Este clar că d conține $n = m^2$ puncte din pătratul unitate D iar $\bar{d}$, $n_1 = (m+2)^2$ puncte din același pătrat. Vom nota cu X_n mulțimea funcțiilor reale x definite pe $\bar{d}$ astfel încît $x(P) = 0$, $P \in \Gamma$ și cu X_{n_1} funcțiile x fără această condiție. Structurate ca și în paragraful 1.1, X_n și X_{n_1} vor fi spații Banach reale finit dimensionale (cu n și respectiv n_1 dimensiuni). Ca și în cazul unidimensional, vom identifica spațiul X_n cu spațiul real n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Un element x din X_n considerat ca vector coloană din $\mathbb{R}^n$ va avea componentele $x_{ij} = x(t_i,s_j)$, $i,j = 1,\dots,m$ unde convenim ca primul indice care se modifică să fie i, adică $x = (x_{11},\dots,x_{m1},\dots,x_{1m},\dots,x_{mm})^T$. Aceeaşi observaţie este valabilă şi pentru X_{n1}. Dacă $u \in C_0(\bar{D})$, restricţia lui u la $\bar{d}$ o vom nota de asemenea cu u.

Fie x,y X_{n_1} ; vom nota, pentru orice $k \geqslant 0$, $\ell \leqslant m+1$, $k \leqslant \ell$,

$$\langle x,y \rangle_{k,\ell} = h \sum_{i,j=k}^{\ell} x(t_i,s_j)y(t_i,s_j).$$

Se vede că $\langle x,y \rangle_{1,m}$ defineşte un produs interior pe spaţiul X_n. Norma indusă de acest produs o vom nota cu $\|\cdot\|_e$. Se poate verifica cu uşurinţă că

$$h^{1/2}\|x\|_d \leq \|x\|_e \leq h^{-1/2}\|x\|_d. \tag{1.15}$$

1.3.2. <u>Diferenţe finite</u>. Fie $A : X_n \longrightarrow X_n$ operatorul definit de

$$Ax(t,s) = h^{-2}\big[x(t+h,s)+ x(t-h,s)+ x(t,s+h)+ x(t,s-h)- 4x(t,s)\big] , \ (t,s)\in d ,$$

$$Ax(t,s) = 0 \quad , \quad (t,s) \in \gamma .$$

Se poate verifica că A este liniar şi că matricea lui A, de dimensiuni $n \times n$ $(n = m^2)$, este constituită din blocuri de dimensiuni $m \times m$ şi are forma

$$A = h^{-2}\begin{pmatrix} B & I & & 0 \\ I & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & I \\ 0 & & I & B \end{pmatrix}, \text{ unde } B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -4 \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

iar I este matricea unitate $m \times m$ dimensională.

Dacă $u \in C_0^n(\bar{D})$ se poate arăta că $\Delta u \approx Au$ pe $\bar{d}$ [relaţia (1.17), relaţie pe baza căreia se obţin ecuaţiile cu diferențe finite standard corespunzătoare problemei (1.12) .

Vom considera de asemenea operatorii diferență de ordinul întîi în raport cu t, D_+^t , D_-^t : $X_{n_1} \longrightarrow X_{n_1}$ și respectiv în raport cu s, D_+^s , D_-^s : $X_{n_1} \longrightarrow X_{n_1}$.

Operatorii D_+^t , D_-^t sînt definiți de

$$D_+^t\, x(t,s) = h^{-1}[x(t+h,s)-x(t,s)], \text{ pe } \bar{d} - \{(1,s_j), j = 0,\dots,m+1\}$$

$$D_+^t\, x(1,s) = -h^{-1}x(1,s)\ ,\ s \in \{s_j,\ j = 0,\dots,m+1\},$$

$$D_-^t\, x(t,s) = h^{-1}[x(t,s)- x(t-h,s)] \text{ pe } \bar{d} - \{(0,s_j), j = 0,\dots,m+1\},$$

$$D_-^t\, x(0,s) = h^{-1}x(0,s)\ ,\ s \in \{s_j\ ,\ j = 0,\dots,m+1\} .$$

Se poate verifica ușor că D_+^t , D_-^t sînt liniari și că

$$D_+^t = h^{-1}\begin{pmatrix} C & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C \end{pmatrix},\quad D_-^t = h^{-1}\begin{pmatrix} -C^T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -C^T \end{pmatrix},\ \text{unde } C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix},$$

dimensiunile lui C fiind $(m+2)x(m+2)$.

Operatorii D_+^s , D_-^s se definesc în mod analog și anume

$$D_+^s\, x(t,s) = h^{-1}[x(t,s+h)-x(t,s)] \text{ pe } \bar{d} - \{(t_i,1),\ i = 0,\dots,m+1\},$$

$$D_+^s\, x(t,1) = -h^{-1}x(t,1)\ ,\ t \in \{t_i\ ,\ i = 0,\dots,m+1\},$$

$$D_-^s\, x(t,s) = h^{-1}[x(t,s)-x(t,s-h)], \text{ pe } \bar{d} - \{(t_i,0),\ i = 0,\dots,m+1\},$$

$$D_-^s\, x(t,0) = h^{-1}x(t,0)\ ,\ t \in \{t_i\ ,\ i = 0,\dots,m+1\} .$$

D_+^s și D_-^s sînt de asemenea liniari și

$$D_+^s = h^{-1}\begin{pmatrix} -I & I & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ 0 & & & -I \end{pmatrix},\quad D_-^s = h^{-1}\begin{pmatrix} I & & & 0 \\ -I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -I & I \end{pmatrix}$$

unde I este matricea unitate $(m+2)x(m+2)$ dimensională.

Vom nota $A_M = D_+^t D_-^t + D_+^s D_-^s$. Se poate arăta că A_M este constituită din blocuri de dimensiuni $(m+2)x(m+2)$ și că are forma

$$A_M = h^{-2}\begin{pmatrix} B_1 & I & & & 0 \\ I & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & B_1 & I \\ 0 & & & I & B_2 \end{pmatrix}, \text{ unde } B_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & & 0 \\ 1 & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & -4 & 1 \\ 0 & & & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & & & 0 \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

B_1 şi B_2 avînd dimensiunile $(m+2)\times(m+2)$. Restricţia lui A_M la X_n coincide cu A.

Vom introduce acum pe spaţiul X_n norma $\|x\|_A^2 = -\langle Ax,x\rangle_{1,m}$. Ţinînd cont că $-A$ este simetrică şi pozitiv definită ([40] sau [11]) se poate arăta că într-adevăr $\|\cdot\|_A$ satisface condiţiile unei norme (pentru inegalitatea $\|x+y\|_A \le \|x\|_A + \|y\|_A$ se utilizează inegalitatea lui Schwarz generalizată).

Să observăm că, deoarece $D_+^t = -(D_-^t)^T$ şi $D_+^s = -(D_-^s)^T$, avem pentru orice $x \in X_n$,

$$\|x\|_A^2 = -\langle Ax,x\rangle_{1,m} = -\langle A_M x,x\rangle_{0,m+1} =$$
$$= \langle D_-^t x, D_-^t x\rangle_{0,m+1} + \langle D_-^s x, D_-^s x\rangle_{0,m+1}.$$

LEMA 1.2. <u>Dacă</u> $x \in X_n$ <u>atunci</u> $2\sqrt{2}\,\|x\|_d \le \|x\|_A$.

<u>Demonstraţie</u>. Fie k, ℓ doi întregi astfel încît $1 \le k, \ell \le m$. Se poate verifica că

$$2x_{k\ell} = h\sum_{i=1}^{k} D_-^t x_i - h\sum_{i=k+1}^{m+1} D_-^t x_i = h\sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon_i D_-^t x_i ,$$

$$2x_{k\ell} = h\sum_{j=1}^{\ell} D_-^s x_{kj} - h\sum_{j=\ell+1}^{m+1} D_-^s x_{kj} = h\sum_{j=1}^{m+1} \varepsilon'_j D_-^s x_{kj} ,$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & i \le k \\ -1 & i > k \end{cases} \qquad \varepsilon'_j = \begin{cases} 1 & j \le \ell \\ -1 & j > \ell \end{cases}$$

De aici rezultă

$$4x_{k\ell} = h\sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon_i D_-^t x_i + h\sum_{j=1}^{m+1} \varepsilon'_j D_-^s x_{kj}.$$

Utilizînd inegalitatea lui Schwarz şi faptul că $\sum_{i=1}^{m+1} h = 1$, se obţine

$$4|x_{k\ell}| \le h\sum_{i=1}^{m+1} |D_-^t x_{i\ell}| + h\sum_{j=1}^{m+1} |D_-^s x_{kj}| =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} h^{1/2} h^{1/2} |D_-^t x_{i\ell}| + \sum_{j=1}^{m+1} h^{1/2} h^{1/2} |D_-^s x_{kj}| \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{m+1} h\right)^{1/2} \left(h\sum_{i=1}^{m+1} |D_-^t x_{i\ell}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{m+1} h\right)^{1/2} \left(h\sum_{j=1}^{m+1} |D_-^t x_{kj}|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(h\sum_{i=1}^{m+1} |D_-^t x_{i\ell}|^2\right)^{1/2} + \left(h\sum_{i=1}^{m+1} |D_-^s x_{kj}|^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(h\sum_{i,j=0}^{m+1} |D_-^t x_{ij}|^2\right)^{1/2} + \left(h\sum_{i,j=0}^{m+1} |D_-^s x_{ij}|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \langle D_-^t x , D_-^t x \rangle^{1/2} + \langle D_-^s x , D_-^s x \rangle^{1/2}.$$

Ţinînd cont că pentru orice a, b pozitivi avem $a^{1/2} + b^{1/2} \le \sqrt{2}(a + b)^{1/2}$, rezultă că

$$4|x_{k\ell}| \le \sqrt{2}\left[\langle D_-^t x, D_-^t x\rangle + \langle D_-^s x, D_-^s x\rangle\right]^{1/2} = \sqrt{2}\|x\|_{\Delta}$$

şi lema este demonstrată.

1.3.3. <u>Ecuaţii cu diferenţe finite standard</u>. Să presupunem că problema (1.12) are o soluţie u de patru ori continuu diferenţiabilă pe $\bar{D}$. Atunci are loc ([11], teorema 20.8)

$$(1.17)\qquad \Delta u(P) - u(P) = \frac{h^2}{12}\left[u_{t^4}(\xi_t, s) + u_{s^4}(t, \xi_s)\right],$$

unde $t - h < \xi_t < t + h$, $s - h < \xi_s < s + h$. De aici rezultă că $\Delta u \approx \Delta u$, astfel încît în locul ecuaţiei $\Delta u = f(P, u)$ din pro-

49486
3556

blema (1.12) vom considera ecuația $Au = f(P,u)$. Vom determina o soluție a ei în X_n, rezultînd astfel problema la limită discretă,

$$(1.18)\qquad \begin{aligned} &Ax = f(P,x) \quad , \quad P \in \overline{d} \\ &x|_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

Dacă notăm, ca și în cazul unidimensional, $\Phi x = (f[P_{11},x(P_{11})], \dots, f[P_{m1},x(P_{m1})], \dots, f[P_{1m},x(P_{1m})], \dots, f[P_{mm},x(P_{mm})])^T$ obținem următorul sistem de ecuații neliniare

$$(1.19)\qquad Ax - \Phi x = 0 ,$$

cu A dat de (1.16), sistem care constituie ecuațiile cu diferențe finite standard corespunzătoare problemei (1.12).

In continuare vom analiza existența și unicitatea unei soluții x^n a ecuațiilor (1.19) și convergența șirului $\{x^n\}$ la soluția problemei (1.12), în analogie cu teoria lui M.Lees [27] pentru probleme la limită bilocală slab neliniară. Ipoteza fundamentală pe care o vom face este că f satisface condiția (1.14) considerată de J.Douglas [10] pentru studiul metodei direcțiilor alternate, condiție analoagă cu (1.3) pentru cazul unidimensional.

Vom da în prealabil două leme pregătitoare.

LEMA 1.3. <u>Presupunem că</u> f <u>satisface condiția</u> (1.14) <u>și fie</u> h_0 <u>astfel încît</u>

$$\eta < 2\pi^2\left[1 - (h_0^2/12)\pi^2\right] .$$

<u>Dacă</u> $h < h_0$ <u>și</u> $x,y \in X_n$ <u>verifică relațiile</u>

$$Ax = f(P,x) + q_1(P),$$
$$Ay = f(P,y) + q_2(P),$$

<u>pentru orice</u> $P \in d$, <u>atunci</u> $\|x - y\|_d \le k_0\|q_1 - q_2\|_0$, <u>unde</u>

$$k_0 = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2\pi^2\left[1-(h_0^2/12)\pi^2\right] - \eta} .$$

Demonstraţia este întru totul analoagă cu demonstraţia lemei C din [27]. Singura deosebire care apare este aceea că cea mai mică valoare proprie a matricei A dată de (1.16) este $\Lambda_1 = 8h^{-2}\sin^2(\pi h/2)$ ([11] sau [1e]) în loc de $\Lambda_1 = 4h^{-2}\sin^2(\pi h/2)$ şi prin urmare limitele lui Λ_1 sînt

$$2\pi^2\left[1 - (h^2/12)\pi^2\right] \le \Lambda_1 \le 2\pi^2.$$

Din această lemă rezultă imediat următorul corolar :

COROLAR. <u>Dacă</u> f <u>satisface</u> (1.14), <u>problema discretă</u> (1.18) <u>are soluţie unică</u>.

LEMA 1.4. <u>Dacă</u> f <u>satisface condiţia</u> (1.14) <u>şi</u> x <u>este o soluţie a ecuaţiei</u> (1.18) <u>atunci</u>

$$(1.20) \qquad \|x\|_d \le (2\sqrt{2})^{-1}\|x\|_A \le (2\sqrt{2})^{-1}k_0\|f_0\|_0 ,$$

<u>unde</u> $f_0 = f(P,o)$.

<u>Demonstraţie</u>. Prima inegalitate rezultă direct din lema 1.2. Pentru demonstrarea celei de a doua inegalităţi, aplicăm lema 1.3 în care $q_1(P) = 0$ şi luăm $y = 0$. In acest caz $q_2(P) = -f(P,o) = -f_0$ astfel încît $\|x\|_A \le k_0\|f_0\|_0$.

TEOREMA 1.5. <u>Dacă</u> f <u>satisface condiţia</u> (1.14) <u>atunci ecuaţiile cu diferenţe finite</u> (1.18) <u>sau, echivalent</u>, (1.19) <u>au o soluţie unică</u> $x^n \in X_n$.

<u>Demonstraţie</u>. Să notăm

$$\nabla(P,u) = \int_0^1 f_u\left[P,\xi u(P)\right]d\xi .$$

Pentru fiecare $x \in X_n$ considerăm următoarea problemă la limită discretă

$$(1.21) \qquad \begin{aligned} Ay &= \nabla(P,x)y + f_o(P), \quad P \in d \\ y|_\Gamma &= 0. \end{aligned}$$

Vom arăta că (1.21) are o soluţie unică. In acest scop considerăm următoarele probleme discrete cu valori iniţiale

$$Ay_1 = \nabla(P,x)y_1 + f_0(P),$$
$$y_1(t,s) = o \ , \quad y_1(o,s) = o \ ,$$
$$y_1(t,h) = o \ , \quad y_1(1,s) = o \ ,$$

$$Ay_{1k} = \nabla(P,x)y_{1k} \ , \quad k = 1,\dots,m \ ,$$
$$y_{1k}(t,o) = o \ , \quad y_{1k}(o,s) = o$$
$$y_{1k}(t,h) = \alpha_{kj} \ , \quad y_{1k}(1,s) = o$$

unde $\alpha_{kj} = 1$ pentru $k = j$ şi $\alpha_{kj} = o$ pentru $k \neq j$. Este clar că aceste probleme au soluţii unice care se pot determina printr-un proces de calcul recursiv. Fie y_1 şi respectiv y_{1k} soluţiile acestor probleme şi fie

$$(1.22) \qquad z(t,s) = y_1(t,s) - \sum_{k=1}^{m} c_k y_{1k}(t,s) \quad , \quad (t,s) \in \overline{d}.$$

Să observăm că z satisface (1.21) (fără condiţia $z|_{\Gamma} = o$) şi că $z(o,s) = o$, $z(1,s) = o$, $z(t,o) = o$. Vom determina acum constantele c_k astfel încît $z(t,1) = o$ şi atunci $z|_{\Gamma} = o$, adică z va fi o soluţie a problemei (1.21). Din 1.22 şi din condiţia $z(t,1) = o$, rezultă pentru c_k următorul sistem liniar

$$c_1 y_{11}(t_1,1) + \dots + c_m y_{1m}(t_1,1) = y_1(t_1,1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_1 y_{11}(t_m,1) + \dots + c_m y_{1m}(t_m,1) = y_1(t_m,1).$$

Determinantul acestui sistem este diferit de zero. Intr-adevăr dacă acest determinant ar fi zero, atunci ar exista constantele $c_1^o,\dots,c_m^o$, nu toate nule, astfel încît

$$c_1^o y_{11}(t,1) + \dots + c_m^o y_{1m}(t,1) = o.$$

Fie atunci $z_1 = c_1^o y_{11} + \dots + c_m^o y_{1m}$; este clar că z_1 verifică problema la limită

$$Az_1 = \nabla(P,x)z_1$$
$$z_1|_{\Gamma} = o.$$

Pe de altă parte, dacă $c_k^o \neq o$, atunci $z_1(t_k,h) = c_k^o \neq o$ şi această problemă nu mai admite soluție unică, în contrazicere cu corolarul lemei 1.3.

Prin urmare, problema (1.21) admite soluția (1.22) cu constantele c_k determinate de (1.23) și conform corolarului amintit, această soluție este unică.

Fie acum $r = (2\sqrt{2})^{-1}k_0\|f_0'\|_0$ și $S = \{ x \mid \|x\|_d \leq r \} \subset X_n$. Definim operatorul $T : S \longrightarrow X_A$ prin $Tx = y$ unde y este soluția problemei (1.21). Conform lemei 1.4 $\|Ty\|_d = \|y\|_d \leq r$ și deci T aplică sfera S în ea însăși.

Să arătăm că T este un operator continuu. Fie $x_1, x_2 \in S$ și y_1, y_2 valorile corespunzătoare ale lui T, deci

$$Ay_1 = \nabla(P,x_1)y_1 + f_0(P),$$

$$Ay_2 = \nabla(P,x_2)y_2 + f_0(P).$$

Dacă notăm $y = y_1 - y_2$ și $H = \nabla(P,x_1) - \nabla(P,x_2)$, obținem

$$\begin{aligned} Ay &= \nabla(P,x_1)y_1 - \nabla(P,x_2)y_2 = \\ &= \nabla(P,x_1)y + Hy_2. \end{aligned}$$

De aici rezultă

$$(Ay,y) = (\nabla(P,x_1)y,y) + (Hy_2,y)$$

sau

$$\|y\|_A^2 = (\nabla(P,x_1)y,y) + (Hy_2,y).$$

Cum $-\nabla(P,x_1) \leq \eta$ și $\|y\|_0 \leq \lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|y\|_A$ obținem

$$\begin{aligned} \|y\|_A^2 &\leq \eta\|y\|_0^2 + \|H\|_d\|y_2\|_0\|y\|_0 \leq \\ &\leq \frac{\eta}{\lambda_1}\|y\|_A^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|H\|_d\|y_2\|_0\|y\|_A. \end{aligned}$$

Așa dar

$$\|y\|_A \leq \frac{\|H\|_d\|y_2\|_0}{\sqrt{\lambda_1}(1 - \frac{\eta}{\lambda_1})} \leq k_0\|H\|_d\|y_2\|$$

și prin urmare, ținînd cont de lema 1.2 și de (1.15) rezultă

$$\| y\|_d \leq (2\sqrt{2})^{-1}\| y\|_A \leq (2\sqrt{2})^{-1}k_0\| H\|_d\| y_2\|_0 \leq (2\sqrt{2})^{-1}h^{-1/2}k_0 r\| H\|_d$$

Fie acum $\varepsilon > 0$ arbitrar ; întrucît f_u este continuă, există $\delta > 0$ astfel încît, dacă $\| x_1 - x_2\| \leq \delta$ atunci

$$\| f_u(P, \xi x_1) - f_u(P, \xi x_2)\|_d \leq 2\sqrt{2}\,\varepsilon\, h^{1/2}(k_0 r)^{-1},$$

pentru orice $\xi \in [0,1]$. Prin urmare $\| H\|_d \leq 2\sqrt{2}\,\varepsilon\, h^{1/2}(k_0 r)^{-1}$ şi $\| y\|_d \leq \varepsilon$, adică F este un operator continuu pe S cu valori în S. Conform teoremei lui Browder F are un punct fix $x^D \in S$.

Pe de altă parte x^D este o soluţie a lui (1.18) întrucît $\sigma(P,x^D)x^D + f_D = f(P,x^D)$ şi ţinînd cont de corolarul lemei (1.3), x^D este unică. Teorema este deci demonstrată.

TEOREMA 1.6. <u>Dacă</u> f <u>satisface condiţia</u> (1.14), x^D <u>este soluţia ecuaţiilor cu diferenţe</u> (1.19) <u>iar</u> u <u>este o soluţie a problemei</u> (1.12), <u>atunci</u>

$$\| x^D - u\|_d \leq (2\sqrt{2})^{-1}\| x^D - u\|_A \leq \frac{h^2}{24\sqrt{2}}\, k_0\| M_4\|_0 .$$

<u>unde</u> $M_4 = u_{t^4}(\xi_t, s) + u_{s^4}(t, \xi_s), t-h < \xi_t < t + h, s-h < \xi_s < s + h.$

<u>Demonstraţie</u>. Este suficient să demonstrăm inegalitatea a doua. Ţinînd cont de (1.17), avem

$$Au = \Delta u + \frac{h^2}{12} M_4 = f(P,u) + \frac{h^2}{12} M_4 .$$

Cum $Ax^D = f(P,x^D)$, inegalitatea cerută rezultă imediat din lema 1.3 în care $q_1 = (h^2/12)M_4$ iar $q_2 = 0$.

CAPITOLUL 2.

CONVERGENŢA LOCALĂ A UNOR METODE ITERATIVE

In acest capitol se studiază convergenţa locală a unor metode iterative pentru ecuaţii neliniare în spaţii finit dimensionale sau în spaţii Hilbert reale. S-au considerat ecuaţii de forma (1.4) care provin din discretizarea unor ecuaţii diferenţiale neliniare (probleme cu condiţii la limită) sau de formă mai generală (1.11). Astfel, se generalizează [51] o metodă iterativă directă clasică [5] pentru ecuaţii de forma (1.11), se studiază [57] o variantă a metodei direcţiilor alternate pentru cazul neliniar considerată de Kellog [23] şi se generalizează [52] o metodă de tip gradient considerată de Altman [1],[2] . In cazuri particulare se obţin unele metode iterative cunoscute, în general cu condiţii de convergenţă mai slabe, ceea ce corespunde cu faptul că condiţiile considerate asigură numai o convergenţă locală.

Menţionăm că problema rezolvării numerice a ecuaţiilor care provin din discretizarea unor ecuaţii diferenţiale neliniare, în mod special a ecuaţiilor cu diferenţe corespunzătoare problemelor la limită de tip eliptic clasa neliniare a fost considerată de numeroşi autori. Astfel, Bers [6], Ortega şi Rockoff [39] iar mai recent Gergei [14] au considerat metoda Gauss - Seidel neliniară (metoda SOR - Successive Over Relaxation - cu parametru de relaxare 1). Douglas [10] şi Gunn [15] au studiat metoda direcţiilor alternate a lui Peaceman - Rachford [44] pentru ecuaţii eliptice neliniare iar Scorobogatko şi Asmuye [61] au considerat o metodă specială de aproximaţii succesive.

2.1. INTRODUCERE

In acest paragraf introductiv vom prezenta unele leme simple de analiză pe spaţii Banach şi două teoreme de convergenţă locală.

De asemenea vom preciza noţiunea de operator monoton şi vom prezenta teorema de surjectivitate a lui Minty.

2.1.1. Leme preliminare. Fie B un spaţiu Banach real, $L(B)$ spaţiul Banach al operatorilor liniari şi mărginiţi de la B în B şi A un operator (neliniar) definit pe B cu valori în $L(B)$.

LEMA 2.1. Presupunem că A este diferenţiabil Fréchet în $x^0 \in B$ şi fie y un element arbitrar din B. Atunci operatorul $T : B \longrightarrow B$ definit de $Tx = A(x)y$ este diferenţiabil Fréchet în x^0.

Demonstraţie. Rezultă imediat din diferenţiabilitatea Fréchet a operatorului A în x^0 şi din faptul că operatorul $A_1 : B \to B$ definit de $A_1 h = A'(x^0)hy$ este liniar.

In continuare vom nota derivata Fréchet a operatorului T în punctul x^0 cu $\left[A(x)y\right]'_{x^0}$, deci

$$T'(x^0)h = \left[A(x)y\right]'_{x^0}h = A'(x^0)hy.$$

LEMA 2.2. Dacă operatorii $A : B \longrightarrow L(B)$ şi $F : B \longrightarrow B$ sînt diferenţiabili Fréchet în x^0, atunci operatorul $T : B \longrightarrow B$ definit de $Tx = A(x)Fx$ este de asemenea diferenţiabil Fréchet în x^0 şi

(2.1) $$T'(x^0) = \left[A(x)Fx^0\right]'_{x^0} + Ax^0F'(x^0).$$

Demonstraţie. Deoarece operatorii A, F şi $A(\cdot)Fx^0$ sînt diferenţiabili Fréchet în x^0, avem

$$\| Fx - Fx^0 - F'(x^0)(x - x^0)\| \le \varepsilon \| x - x^0 \| ,$$

$$\| A(x) - A(x^0) - A'(x^0)(x - x^0)\| \le \varepsilon \| x - x^0 \|$$

$$\| A(x)Fx^0 - A(x^0)Fx^0 - \left[A(x)Fx^0\right]'_{x^0}(x - x^0)\| \le \varepsilon \| x - x^0 \| ,$$

unde ε este un număr pozitiv dat iar x aparţine unei sfere centrată în x^0. Din primele două relaţii rezultă

$$\| Fx - Fx^0 \| \le (\varepsilon + \| F'(x^0)\|)\| x - x^0 \| ,$$

$$\| A(x) - A(x^0)\| \le (\varepsilon + \| A'(x^0)\|)\| x - x^0 \| .$$

Printr-un calcul simplu se obţine

$$\| Tx - Tx^0 - T'(x^0)(x - x^0)\| \le [\varepsilon + \varepsilon\|A(x^0)\| +$$
$$+ (\varepsilon + \|F'(x^0)\|)(\varepsilon + \|A'(x^0)\|)\|x - x^0\|]\|x - x^0\| ,$$

unde $T'(x^0)$ este dat de (2.1).

Observaţie. Formula (2.1) generalizează formula binecunoscută de derivare a unui produs.

2.1.2. Convergenţa locală. Dacă $x^0 \in B$ şi r este un număr real pozitiv, vom nota cu $\Delta(x^0,r)$ discul deschis centrat în x^0 şi de rază r, $\Delta(x^0,r) = \{x \in B, \|x - x^0\| < r\}$; prin $\bar{\Delta}(x^0,r)$ notăm discul închis de asemenea centrat în x^0 şi de rază r. Fie $D \subset B$ o mulţime deschisă şi $T : D \subset B \to B$ un operator neliniar. Vom considera în continuare şirul $\{x^k\} \subset B$ definit de procesul iterativ

(2.2) $$x^{k+1} = Tx^k.$$

DEFINIŢIA 2.1. Vom spune că x^* D este un punct de atracţie pentru iteraţia (2.2) dacă există un disc $\Delta(x^*,r) \subset D$ astfel încît pentru orice $x^0 \in \Delta(x^*,r)$ şirul $\{x^k\}$ generat de (2.2) să aparţină lui D şi $x^k \to x^*$, $k \to \infty$.

Dacă x^* este un punct de atracţie pentru iteraţia (2.2) vom spune că şirul $\{x^k\}$ converge local la x^* sau că metoda asigură o convergenţă locală. In aplicaţii concrete convergenţa unui şir generat de o metodă local convergentă se asigură prin alegerea convenabilă a iteraţiei iniţiale.

Vom nota cu $Q_t(x^k), R_t(x^k)$, Q şi respectiv R - factorii de convergenţă corespunzători şirului $\{x^k\}$ [40]. Dacă $A \in L(B)$ vom nota cu $\rho(A)$ raza spectrală a operatorului A. Următoarea teoremă dată de Ostrowski [41] constituie o condiţie suficientă de convergenţă locală :

TEOREMA 2.1. Fie $T : D \subset B \to B$ un operator neliniar şi $x^* \in D$ un punct fix al lui T. Presupunem că T este diferenţiabil Fréchet în x^* şi că $\rho[T'(x^*)] = \sigma < 1$. Atunci x^* este punct de atracţie pentru iteraţia (2.2) şi $R_t\{x^k\} \leq Q_t\{x^k\} \leq \sigma$.

Condiţia $\sigma < 1$, greu de verificat în cazuri concrete, se poate înlocui cu condiţia $\|T'(x^*)\| < 1$, ţinînd cont că pentru orice normă $\rho[T'(x^*)] \leq \|T'(x^*)\|$. In cazul unui spaţiu Banach finit dimensional, dacă $\sigma > 0$ atunci convergenţa este liniară mai exact, q şi r-ordinele de convergenţă sînt unu).

2.1.3. <u>Operatori cvasi-neexpansivi</u>

DEFINIŢIA 2.2. Vom spune că operatorul $T : D \subset B \longrightarrow B$ este cvasi-neexpansiv pe D în raport cu x^* D dacă

(2.3) $$\|Tx - x^*\| < \|x - x^*\|, \quad \forall x \in D.$$

De obicei T se consideră cvasi-neexpansiv în raport cu mulţimea punctelor fixe ale lui T în D ; de asemenea în (2.3) inegalitatea strictă este uneori înlocuită cu semnul $\leq$. In continuare vom considera proprietatea de cvasineexpansivitate în raport cu un element $x^* \in D$ (în general punct fix al lui T) şi nu vom mai menţiona punctul relativ la care T este cvasi-neexpansiv.

Să observăm că dacă x^* este punctul fix al lui T şi (2.3) are loc, atunci x^* este punct fix unic pentru T în D.

In cazul unui spaţiu de dimensiune finită $\mathbb{R}^n$ are loc următoarea proprietate de convergenţă locală pentru operatori cvasi-neexpansivi :

LEMA 2.3. <u>Fie</u> D <u>o mulţime deschisă din</u> $\mathbb{R}^n$, $x^* \in D$ <u>şi fie</u> $T : D - \{x^*\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ <u>un operator continuu pe</u> $D - \{x^*\}$. <u>Presupunem că</u> T <u>este cvasi-neepansiv pe</u> $S = \bar{S}(x^*,r) - \{x^*\}$, <u>unde</u> $\bar{S}(x^*,r) \subset D$. <u>Atunci</u> $x^k = T^k x^0 \longrightarrow x^*$, $k \longrightarrow \infty$, $\forall x^0 \in S$.

<u>Demonstraţie</u>. Ţinînd cont de (2.3) rezultă $\|x^{k+1} - x^*\| < \|x^k - x^*\|$, $\forall k \in \mathbb{N}$, astfel încît şirul $\{x^k\}$ rămîne în S şi $\|x^k - x^*\| \to \alpha$, $k \longrightarrow \infty$. Să presupunem că $\alpha > 0$. Fie atunci $\{x^{k_j}\}$

un subşir convergent al lui x^k, $x^{k_j} \longrightarrow y^*$, $k_j \longrightarrow \infty$. Presupunem $y^* \neq x^*$. Evident $\| y^* - x^* \| = a$ şi din continuitatea lui T rezultă

$$\lim x^{k_j+1} = \lim Tx^{k_j} = Ty^*.$$

Deci

$$a = \lim \| x^{k_j+1} - x^* \| = \| Ty^* - x^* \| < \| y^* - x^* \| = a$$

ceea ce este o contrazicere. Pentru $y^* = x^*$ avem

$$\lim \| x^{k_j} - x^* \| = 0$$

şi prin urmare

$$\lim \| x^k - x^* \| = 0.$$

Lema este demonstrată.

Această lemă constituie o generalizare a unui rezultat al lui Tricomi [65] relativ la convergenţa locală a iteraţiei $x^{k+1} = f(x^k)$, f fiind o funcţie reală definită pe un interval (a,b). Sub o formă puţin modificată lema 2.3 apare în [45] şi este utilizată pentru demonstrarea convergenţei unor şiruri de aproximaţii succesive în spaţii metrice. In afara condiţiei de cvasi-neexpansivitate [considerată în raport cu mulţimea punctelor fixe $F(T)$] se mai impune şi condiţia ca să existe un subşir $\{x^{k_j}\}$ al lui $\{x^k\}$ astfel încît $d[x^{k_j}, F(T)] \longrightarrow 0$, $k_j \longrightarrow \infty$ unde prin $d[x^{k_j}, F(T)]$ se înţelege distanţa de la punctul x^{k_j} la mulţimea $F(T)$. Menţionăm că condiţia ca T să fie continuu pe D se poate înlocui cu condiţia mai slabă ca $F(T)$ să fie o mulţime închisă [10] .

Proprietatea de cvasi-neexpansivitate a fost utilizată în mai multe lucrări [45],[9],[31] , pentru studiul convergenţei unor metode iterative. De exemplu în [31] se arată că funcţiile de iteraţie din metoda lui Newton şi din metoda gradientului, sînt cvasi-neexpansive, convergenţa acestor metode rezultînd pe această bază. In cazul funcţiilor reale, Steplemen [63] a arătat că condiţia necesară şi suficientă ca şirul $\{x^k\}$ generat de $x^{k+1} = f(x^k)$ să fie convergent este ca f^2 să fie cvasi-neexpansivă pe un anumit interval $(x^* - \varepsilon , x^* + \varepsilon)$.

2.1.4. <u>Operatori monotoni</u>. Fie H un spaţiu Hilbert real (produs scalar $\langle \cdot,\cdot \rangle$ şi normă $\| \cdot \|$) şi fie $T : H \longrightarrow H$ un operator neliniar.

DEFINIŢIA 2.3. Vom spune că operatorul T este strict monoton pe H dacă există o constantă $c > 0$ astfel încît

$$(2.4) \qquad \langle Ty - Tx , y - x \rangle \geq c\|y - x\|^2 , \quad \forall\, x,y \in H.$$

Dacă $c = 0$ T se numeşte monoton.

Dacă T este diferenţiabil Fréchet în $x \in H$ şi $T'(x)$ este pozitiv definit atunci T este strict monoton pe o anumită sferă centrată în x.

Relativ la operatorii monotoni, menţionăm următoarea teoremă de surjectivitate a lui Minty [34] pe care o vom utiliza în continuare la analiza convergenţei unei variante a metodei ADI pentru cazul neliniar :

TEOREMA 2.2. <u>Dacă</u> T <u>este continuu şi strict monoton pe</u> H <u>atunci</u> T <u>este surjectiv</u>.

Noţiunea de monotonie în sensul definiţiei 2.3. a fost introdusă de Minty [34] în cadrul mai general al spaţiilor Hilbert complexe (produsul scalar din stînga relaţiei (2.4) se înlocuieşte în cazul spaţiilor complexe, cu partea reală). Teorema 2.2 reprezintă unul din rezultatele de bază din teoria operatorilor monotoni. Menţionăm că teoria operatorilor monotoni joacă un rol deosebit în studiul ecuaţiilor neliniare, atît în ce priveşte existenţa soluţiilor ecuaţiilor cît şi convergenţa unor metode iterative [7],[66],[60] .

2.2. METODA ITERAŢIILOR SIMPLE PENTRU ECUAŢII DE FORMA $A(x)x - \Phi x = 0$.

In acest paragraf se studiază convergenţa locală a unei variante a metodei iteraţiilor simple pentru ecuaţii cu diferenţe finite corespunzătoare problemelor la limită bilocale neliniare. Ca aplicaţie se obţine o metodă iterativă pentru ecuaţiile cu diferenţe corespunzătoare unei probleme la limită bilocală slab neliniară, în care numărul de iteraţii nu depinde de numărul de puncte al diviziunii intervalului.

2.2.1. Algoritmul de calcul şi analiza convergenţei. In [5] este studiată metoda iteraţiilor simple $Ax^{k+1} = x^k$ pentru rezolvarea numerică a ecuaţiilor cu diferenţe de forma (1.4) corespunzătoare unei probleme la limită bilocală slab neliniară de forma (1.2). Această metodă generează un şir convergent $\{x^k\}$ dacă funcţia f este Lipschitz - continuă şi dacă constanta Lipschitz L satisface relaţia $L < 8$. Să observăm că fiecare pas de iteraţie comportă rezolvarea unui sistem liniar cu matrice A şi cu coloana termenilor liberi Φx^k, ceea ce reprezintă un volum substanţial de calcule. In cazuri particulare, de exemplu dacă A este lacunară pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, diagonală sau bloc diagonală, se pot utiliza algoritmi speciali de stocare în memoria internă şi de prelucrare [48], [25] şi volumul de calcul devine rezonabil.

Fie B un spaţiu Banach, $A : B \longrightarrow L(B)$ şi $\Phi : B \longrightarrow B$, operatori neliniari. Vom considera ecuaţia

(2.5) $$A(x)x - \Phi x = 0$$

şi următoarea metodă iterativă [49], [51]

(2.6) $$A(x^k)x^{k+1} = \Phi x^k \ , \ x^0 \ \text{arbitrar},$$

pe care o vom numi metoda iteraţiilor simple. Să observăm că această metodă generalizează metoda amintită şi că comportă de asemenea rezolvarea unei ecuații liniare la fiecare pas.

TEOREMA 2.3. Presupunem că operatorii A și Φ sînt Lipschitz continui pe B (fie L_A și respectiv L_Φ constantele Lipschitz) și că operatorul $A(x)$ are invers mărginit pentru orice x B. Presupunem de asemenea că $\|A(x)^{-1}\| \le \alpha$, $\|\Phi x\| \le \beta$, $\forall x \in B$ și că constantele L_A, L_Φ, α, β satisfac relația

$$\alpha L_\Phi + \alpha^2 \beta L_A < 1. \tag{2.7}$$

Atunci ecuația (2.5) are o soluție unică $x^* \in B$ iar iterația (2.6) generează un șir $\{x^k\}$ convergent la x^*.

Demonstrație. Fie $T : B \longrightarrow B$ definit de $Tx = A(x)^{-1}\Phi x$. Evident, T este definit pentru orice x B iar iterația (2.6) este identică cu $x^{k+1} = Tx^k$. Avem

$$\begin{aligned}\| Tx - Ty \| &\le \|A(x)^{-1}\Phi x - A(x)^{-1}\Phi y\| + \|A(x)^{-1}\Phi y - A(y)^{-1}\Phi y\| \le \\ &\le \|A(x)^{-1}\| \, \|\Phi x - \Phi y\| + \|\Phi y\| \, \|A(x)^{-1} - A(y)^{-1}\| \le \\ &\le \alpha L_\Phi \|x - y\| + \beta \|A(x)^{-1}\| \, \|[A(x) - A(y)] A(y)^{-1}\| \le \\ &\le (\alpha L_\Phi + \alpha^2 \beta L_A) \|x - y\| .\end{aligned}$$

Prin urmare T este o contracție și teorema rezultă din principiul contracției. ∎

OBSERVAȚIE. Un rezultat similar se poate obține și dacă condițiile din teoremă au loc numai pe o anumită mulțime D din B. In acest caz este necesar să se impună anumite condiții suplimentare, de exemplu ca $T(D)$ să fie inclusă în D sau ca ecuația (2.5) să aibă o soluție.

Teorema care urmează este în esență o variantă a teoremei 2.3.

TEOREMA 2.4. Presupunem că operatorii A și Φ sînt diferențiabili Fréchet pe B și că $A(x)$ are invers mărginit pentru orice $x \in B$. Dacă în plus $\|A(x)^{-1}\| \le \alpha$ și

$$\|[A(x)^{-1}\Phi x]'_x + A(x)^{-1}\Phi' x\| \le \beta < 1 , \quad \forall x \in B, \tag{2.8}$$

<u>atunci ecuaţia</u> (2.5) <u>are o soluţie unică</u> $x^* \in \mathcal{B}$ <u>iar iteraţia</u> (2.6) <u>generează un şir</u> $\{x^k\}$ <u>convergent la</u> x^*.

<u>Demonstraţie</u>. Vom aplica formula (2.1) pentru a calcula derivata operatorului T definit ca mai sus.

Să notăm cu A^{-1} operatorul definit de $A^{-1}x = A(x)^{-1}$ şi să arătăm că A^{-1} este diferenţiabil Fréchet pe $\mathcal{B}$. Fie $K : \mathcal{B} \to L(\mathcal{B})$ un operator definit pentru orice $x^0 \in \mathcal{B}$ de $Kh = A(x^0)^{-1} A'(x^0)h\, A(x^0)^{-1}$. Se vede că operatorul K este liniar şi mărginit. Avem

$$
\begin{aligned}
&\| A^{-1}x - A^{-1}x^0 - K(x - x^0) \| \leq \\
&\leq \| A(x)^{-1} - A(x^0)^{-1} + A(x)^{-1}A'(x^0)(x - x^0)A(x^0)^{-1} \| + \\
&+ \| [A(x)^{-1} - A(x^0)^{-1}]A'(x^0)(x - x^0)A(x^0)^{-1} \| \leq \\
&\leq \| A(x)^{-1}[A(x) - A(x^0) - A'(x^0)(x - x^0)]A(x^0)^{-1} \| + \\
&+ \| A(x)^{-1} - A(x^0)^{-1} \| \, \| A'(x^0) \| \, \| x - x^0 \| \, \| A(x^0)^{-1} \| \leq \\
&\leq (\alpha^2 \varepsilon + \alpha \| A'(x^0) \| \, \| A(x)^{-1} - A(x^0)^{-1} \|) \| x - x^0 \| .
\end{aligned}
$$

Deoarece $A(x)^{-1} \longrightarrow A(x^0)^{-1}$ dacă $x \longrightarrow x^0$ rezultă că operatorul K este derivata Fréchet a lui A^{-1}.

Acum conform formulei de derivare (2.1) rezultă

$$T'(x) = [A(x)^{-1}\Phi x]'_x + A(x)^{-1}\Phi'(x)$$

astfel încît $\|T'(x)\| \leq \beta < 1$, $\forall\, x \in \mathcal{B}$ şi ţinînd cont de formula de medie, avem

$$\| Ty - Tx \| \leq \sup_{t \in [0,1]} \| T'(x + t(y - x)) \| \, \| y - x \| \leq \beta \| y - x \|$$

T este o contracţie şi teorema 2.4 rezultă din principiul contracţiei.#

OBSERVAŢIE. Teorema 2.4 nu este un corolar al teoremei 2.3. De exemplu, dacă $\mathcal{B} = \mathbb{R}$ iar $A(x) = 2$, $\Phi x = x$ atunci toate condiţiile teoremei 2.4 sînt îndeplinite dar Φ nu este o funcţie mărginită. De asemenea, condiţia (2.8) nu implică mărginirea derivatelor Fréchet a operatorilor A şi Φ din care să rezulte continuitatea Lipschitz a acestora.

2.2.2. <u>Aplicaţie la rezolvarea ecuaţiilor cu diferenţe corespunzătoare problemelor la limită bilocale cvasiliniare</u>. Considerăm problema la limită (1.1o) şi ecuaţiile cu diferenţe corespunzătoare (1.14). Vom scrie aceste ecuaţii sub o formă puţin modificată şi anume vom pune $A(x) = A_1 + h^2 A_2(x)$, unde $A_1 = -h^2 A$ şi $A_2(x) = \mathrm{Diag}[a(x_1),\dots,a(x_n)]$, A fiind matricea (1.1). De asemenea vom nota $\Phi x = h^2[f(t_1,x_1),\dots,f(t_n,x_n)]^T$. Obţinem astfel o ecuaţie neliniară de forma (2.5) pe un spaţiu finit dimensional pentru rezolvarea căreia vom aplica iteraţia (2.6). Vom utiliza în $\mathbb{R}^n$ norma $\|\cdot\|$ definită de $\|x\| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i|$, unde x_i sînt componentele lui x iar în spaţiul $L(\mathbb{R}^n)$ norma operatorială corespunzătoare. Vom face ipoteza că funcţiile a şi f satisfac următoarele condiţii :

$$
(2.9)\qquad
\begin{aligned}
&|a(u)| \le M_a\,, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}\,,\\
&|a(u) - a(v)| \le L_a |u - v|\,, \quad \forall\, u,v \in \mathbb{R}\,,\\
&|f(t,u)| \le M_f\,, \quad \forall\, t,u \in \mathbb{R}\,,\\
&|f(t,u) - f(t,v)| \le L_f |u - v|\,, \quad \forall\, t,u,v \in \mathbb{R}\,,
\end{aligned}
$$

şi vom presupune că constantele M_a, L_a, M_f, L_f satisfac relaţiile

$$
(2.1o)\qquad
\begin{aligned}
&M_a < 8\,,\\
&\frac{L_f}{8-M_a} + \frac{L_a M_f}{(8-M_a)^2} < 1.
\end{aligned}
$$

In aceste ipoteze vom arăta că toate condiţiile teoremei 2.3 sînt satisfăcute.

Pentru simplicitate vom presupune că n este un număr par. Dacă notăm cu a_{ij}^{-1} elementul (i,j) al matricei A_1^{-1}, atunci [48], [24]

$$
a_{ij}^{-1} = \begin{cases} \dfrac{i(n-j+1)}{n+1}\,, & i \le j \\[2mm] \dfrac{j(n-i+1)}{n+1}\,, & i \ge j \end{cases}
$$

Suma S_i a elementelor matricei A_1^{-1} de pe linia i este

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-1} = \frac{i(n+1-i)}{2} .$$

Maximul lui S_i se obţine pentru $i = n + 1/2$, astfel încît

$$\| A_1^{-1} \| = \max_i S_i = \frac{(n+1)^2}{8} .$$

Pe de altă parte, norma matricei $h^2A_2(x)$ este mărginită de h^2M_a şi prin urmare dacă $M_a < 8$ atunci matricea $A(x) = A_1 + h^2A_2(x)$ este inversabilă şi $\| A(x)^{-1} \| \leq (n + 1)^2/(8 - M_a)$. Deci constanta α din teorema 2.3 este $\alpha = (n + 1)^2/(8 - M_a)$.

Acum ţinînd cont de (2.9) avem

$$\| A(x)- A(y)\|= h^2 \max_i |a(x_i)- a(y_i)| \leq h^2L_a\|x - y\| ,$$

$$\| \Phi x - \Phi y\|= h^2\max_i \left|f(t_i,x_i)- f(t_i,y_i)\right| \leq h^2L_f\|x - y\| ,$$

$$\| \Phi x\|= h^2\max_i |f(t_i,x_i)| \leq h^2M_f.$$

Prin urmare, celelalte constante din teorema 2.3 sînt $L_A = h^2L_a$, $L_\Phi = h^2L_f$, $\beta = h^2M_f$. Inegalitatea (2.7) se reduce la (2.10). In acest mod, toate condiţiile teoremei 2.3 sînt satisfăcute, ecuaţia (1.1a) are soluţie unică x^* iar şirul $\{x^k\}$ generat de (2.6) converge la x^*.

CAZ PARTICULAR. Dacă $a(u) = a$ pentru orice $u \in \mathbb{R}$, atunci $M_a = L_a = 0$ iar (2.10) se reduce la condiţia cunoscută $L_f < 8$ [5].

OBSERVATII. 1. Se vede uşor că condiţia (2.10) este independentă de n. Aceasta înseamnă că numărul de iteraţii depinde numai de precizia cu care dorim să obţinem soluţia x^*. In conformitate cu testele numerice efectuate (a se vedea paragraful 3.1), numărul de iteraţii se încadrează în limitele evaluate după relaţia (2.10), rămînînd constant cînd n creşte.

2. In cazuri particulare, condiţiile de convergenţă ale ite-

rației (2.6) pot să fie îndeplinite în timp ce condițiile de convergență ale iterației simple ($Ax^{k+1} = x^k$) nu sînt satisfăcute. De exemplu în cazul ecuațiilor cu diferențe corespunzătoare problemei la limită $u'' - u \sin u + 1 = 0$, $u(0) = u(1) = 0$, condițiile de convergență ale iterației (2.6) sînt satisfăcute (avem $M_a = L_a = M_p = 1$, $L_f = 0$ și $L_f/(8 - M_a) + L_a M_f/(8 - M_a)^2 = 1/49 < 1$) în timp ce condițiile de convergență ale iterației simple nu sînt satisfăcute (în acest caz $f(t,u) = u \sin u - 1$ și f nu este Lipschitz continuă în raport cu u).

3. Teorema 2.3 și aplicația de la acest punct se găsesc în [51].

Un rezultat similar relativ la ecuațiile cu diferențe (1.11) se poate obține aplicînd teorema 2.4. Vom presupune că a și f sînt mărginite și că au derivate parțiale în raport cu u mărginite ; vom nota aceste margini cu M_a, M_f și respectiv M_a', M_f'. Vom presupune de asemenea că $M_a < 8$ și că

(2.11) $$\frac{M_f'}{8-M_a} + \frac{M_a' M_f}{(8-M_a)^2} < 1.$$

Ca și mai sus, $A(x)$ este o matrice inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ și $\| A(x)^{-1} \| \le (n+1)^2/(8 - M_a)$ și întrucît A și Φ sînt evident diferențiabile Fréchet pe $\mathbb{R}^n$, rămîne de verificat relația (2.8).

Deoarece $\| h^2 A_1^{-1} A_2(x) \| \le h^2 (n+1)^2 M_a/8 = M_a/8 < 1$, rezultă

$$A(x)^{-1} = \left[I + h^2 A_1^{-1} A_2(x) \right]^{-1} A_1^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h^{2k} A_1^{-k} A_2(x)^k A_1^{-1}.$$

Fie x^0 un element arbitrar din $\mathbb{R}^n$ și fie $y^0 = A_1^{-1} \Phi x^0$. Avem

$$\left[A(x)^{-1} \;\; x^0 \right]'_{x^0} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k h^{2k} A_1^{-k} \left[A_2(x)^k y^0 \right]'_{x^0}$$

și

$$\left\|\left[A(x)^{-1}\Phi x^{o}\right]'_{x^{o}}\right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} h^{2k}\|A_1^{-1}\|^{k}\left\|\left[A_2(x)^{k}y^{o}\right]'_{x^{o}}\right\| .$$

Dar $\left[A_2(x)^{k}y^{o}\right]'_{x^{o}} = \mathrm{Diag}\left[ks^{k-1}(x_1)s'(x_1)y_1^{o},\ldots,ks^{k-1}(x_n)s'(x_n)y_n^{o}\right]$ astfel încît

$$\left\|\left[A(x)^{-1}\Phi x^{o}\right]'_{x^{o}}\right\| \le \|y^{o}\|M_s' \sum_{k=0}^{\infty} k\, 8^{-k}M_s^{k-1} =$$

$$= \frac{8\|y^{o}\|M_s'}{(8-M_s)^2} \le \frac{M_s'\,M_f}{(8-M_s)^2} .$$

Prin urmare, ţinînd cont că $\|\Phi'(x^{o})\| \le h^2 M_f'$, obţinem

$$\left\|\left[A(x)^{-1}\Phi x^{o}\right]'_{x^{o}} + A(x^{o})^{-1}\Phi'(x^{o})\right\| \le$$

$$\le \left\|\left[A(x)^{-1}\Phi x^{o}\right]'_{x^{o}}\right\| + \|A(x^{o})^{-1}\|\,\|\Phi'(x^{o})\|$$

$$\le \frac{M_f'}{8-M_s} + \frac{M_s'\,M_f}{(8-M_s)^2}$$

astfel încît (2.8) este verificată avînd în vedere (2.11).

OBSERVAŢIE. Dacă s şi f sînt mărginite şi cu derivate parţiale mărginite în raport cu u , rezultă că condiţiile (2.9) sînt satisfăcute cu $L_s = M_s'$ şi $L_f = M_f'$. Evident, dacă $M_s < 8$ şi (2.11) are loc, atunci este satisfăcută şi relaţia (2.10) astfel încît acest ultim rezultat este un corolar al rezultatului precedent.

2.3. METODA DIRECŢIILOR ALTERNATE

In acest paragraf se studiază o variantă a metodei direcţiilor alternate pentru ecuaţii neliniare [57],variantă care păstrează anumite avantaje de calcul de la ecuaţiile cu diferenţe corespunzătoare problemelor la limită bilocale slab neliniare. Toate consideraţiile din acest paragraf au fost făcute în spaţii finit dimensionale dar ele se pot transpune fără modificări în spaţii Hilbert reale.

2.3.1. Introducere. Metoda direcţiilor alternate a fost considerată în cazul liniar de D.Peaceman şi H.Rachford [44] şi aplicată pentru rezolvarea numerică a ecuaţiilor cu diferenţe corespunzătoare problemelor la limită de tip eliptic sau parabolic. R.Kellogg [23] a extins această metodă pentru cazul neliniar. Rezultatele sale le-a aplicat pentru rezolvarea ecuaţiei propagării radiaţiilor (ecuaţia căldurii) cu condiţii la limită neliniare de tipul Stefan Boltzman [4] .

Metoda direcţiilor alternate comportă rezolvarea a două sisteme de ecuaţii neliniare la fiecare pas de iteraţie. In particular, în cazul ecuaţiilor cu diferenţe corespunzătoare problemelor la limită bilocale slab neliniare primul sistem este liniar cu matrice tridiagonală iar al doilea revine la rezolvarea unor ecuaţii cu cîte o singură necunoscută fiecare. Evident, pentru probleme la limită neliniare de formă generală aceste avantaje nu se păstrează.

In acest paragraf se presupune o variantă a metodei direcţiilor alternate [57] pentru ecuaţii neliniare de o formă particulară, variantă în care primul sistem este întotdeauna liniar,păstrîndu-se astfel unul din avantajele metodei de la cazul slab neliniar.

Fie următoarea ecuaţie neliniară

$$A(x)x + \Phi x = 0 , \tag{2.12}$$

unde $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T = (x_1,\dots,x_n)$ iar $A : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n)$ şi $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sînt operatori neliniari. Metoda direcţiilor alternate pentru (2.12) dată în [23] va avea forma

$$\begin{aligned} rx^{k+1/2} + A(x^{k+1/2})x^{k+1/2} &= rx^k - \Phi x^k , \\ rx^{k+1} + \Phi x^{k+1} &= rx^{k+1/2} - A(x^{k+1/2})x^{k+1/2} , \end{aligned} \tag{2.13}$$

unde r este un număr real pozitiv. Ambele ecuaţii (2.13) sînt neliniare şi deci atît iteraţia intermediară $x^{k+1/2}$ cît şi iteraţia următoare x^{k+1} se obţin prin rezolvarea unor sisteme neliniare.

Varianta pe care o propunem rezultă din 2.13 înlocuind valoarea lui A în punctul $x^{k+1/2}$ cu valoarea lui A în punctul x^k, astfel încît (2.13) devine

$$
\begin{aligned}
&rx^{k+1/2} + A(x^k)x^{k+1/2} = rx^k - \Phi x^k ,\\
(2.14)\qquad &\\
&rx^{k+1} + \Phi x^{k+1} = rx^{k+1/2} - A(x^k)x^{k+1/2}.
\end{aligned}
$$

Astfel prima ecuaţie este întotdeauna un sistem liniar cu matricea $rI + A(x^k)$.

2.3.2. <u>Leme preliminare</u>. Fie $\langle \cdot,\cdot \rangle$ şi $\|\cdot\|$ produsul scalar obişnuit şi respectiv norma euclidiană pe spaţiul $\mathbb{R}^n$. Vom presupune că $A(x)$ este o matrice semipozitiv definită pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$. Atunci $rI + A(x)$ este pozitiv definită şi prima ecuaţie (2.14) are soluţie unică în raport cu $x^{k+1/2}$. De asemenea, dacă Φ este un operator continuu şi monoton atunci $rI + \Phi$ este continuu şi strict monoton şi conform cu teorema de surjectivitate a lui Minty (teorema 2.2), a doua ecuaţie (2.14) are de asemenea soluţie unică în raport cu x^{k+1}. Prin urmare, relaţiile (2.14) definesc în mod unic şirul $\{x^k\}$ pentru orice valoare iniţială $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

LEMA 2.4. <u>Dacă</u> $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ <u>este continuu şi strict monoton, atunci</u> T^{-1} <u>există şi este Lipschitz continuu</u>.

<u>Demonstraţie</u>. Existenţa lui T^{-1} este imediată. Fie $u,v \in \mathbb{R}^n$. Există $x,y \in \mathbb{R}^n$ astfel încît $Tx = u$, $Ty = v$, adică $T^{-1}u = x$, $T^{-1}v = y$. Din monotonia strictă a lui T rezultă

$$\| T^{-1}u - T^{-1}v \| \leq \frac{1}{c} \left\langle u - v, \frac{T^{-1}u - T^{-1}v}{\|T^{-1}u - T^{-1}v\|} \right\rangle \leq \frac{1}{c} \| u - v \| ,$$

astfel încît T^{-1} este Lipschitz continuu cu constanta Lipschitz $1/c$.∎

Fie B un operator continuu şi monoton şi fie r un număr real pozitiv. Atunci există operatorul $(rI + B)^{-1}$ şi fie $T_B = (rI - B)(rI + B)^{-1}$. Următoarea lemă dată de Kellogg [23] este esenţială pentru analiza convergenţei metodei direcţiilor alternate în cazul neliniar precum şi a variantei propuse.

LEMA 2.5. <u>Dacă</u> B <u>este continuu şi monoton atunci</u> T_B <u>este neexpansiv</u>.

Mai exact, dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$ şi $x_1 = (rI + B)^{-1}x$, $y_1 = (rI+B)^{-1}y$, atunci

$$\| T_B x - T_B y \|^2 \leq \frac{a - b}{a + b} \| x - y \|^2 ,$$

unde

$$a = r^2 + \frac{\| Bx_1 - By_1 \|^2}{\| x_1 - y_1 \|} , \quad b = 2r \frac{\langle Bx_1 - By_1 , x_1 - y_1 \rangle}{\| x_1 - y_1 \|^2} .$$

Să presupunem că $\langle A(x)u, u \rangle \geq \lambda \| u \|^2$ pentru orice $x, u \in \mathbb{R}^n$ şi fie $B = A(x)$; atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ operatorul $T_{A(x)}$ este definit şi avem

$$a = r^2 + \frac{\| A(x)(x_1 - y_1) \|^2}{\| x_1 - y_1 \|^2} \leq r^2 + \| A(x) \|^2 ,$$

$$b = 2r \frac{\langle A(x)(x_1 - y_1), x_1 - y_1 \rangle}{\| x_1 - y_1 \|^2} \geq 2r\lambda .$$

Se poate vedea uşor că

$$\frac{a - b}{a + b} \leq \frac{r^2 + \| A(x) \|^2 - 2r\lambda}{r^2 + \| A(x) \|^2 + 2r\lambda} .$$

Dacă presupunem acum că $\| A(x) \| \leq \beta$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, atunci

$$\frac{a - b}{a + b} \leq \frac{r^2 + \beta^2 - 2r\lambda}{r^2 + 2r\lambda} = \alpha , \tag{2.15}$$

şi pentru r suficient de mare, $\alpha < 1$ şi $T_{A(x)}$ este o contracţie pe $\mathbb{R}^n$.

LEMA 2.6. <u>Să presupunem că</u> $A(x)$ <u>este o matrice pozitiv definită şi că</u> $\| A(x) \| \leq \beta$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ <u>şi fie</u> $r > \beta$. <u>Atunci</u>

$$\| T_{A(x)} - T_{A(y)} \| \leq \frac{2r}{(r-\beta)^2} \| A(x) - A(y) \| .$$

<u>Demonstrație</u>. Avem

$$\begin{aligned} \| T_{A(x)} - T_{A(y)} \| \leq & \| (rI-A(x))(rI+A(x))^{-1} - (rI-A(x))(rI+A(y))^{-1} \| + \\ & + \| (rI-A(x))(rI+A(y))^{-1} - (rI-A(y))(rI+A(y))^{-1} \| \leq \\ & \leq \| rI-A(x) \| \| (rI+A(x))^{-1} - (rI+A(y))^{-1} \| + \\ & + \| (rI+A(y))^{-1} \| \| A(x)-A(y) \| . \end{aligned}$$

Ținînd cont că $\| r^{-1}A(y) \| \leq r^{-1}\beta < 1$ rezultă că

$$(rI+A(y))^{-1} = r^{-1}(I+r^{-1}A(y))^{-1} = r^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^{-k} A(y)^k$$

și deci

$$\| (rI+A(y))^{-1} \| \leq r^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (r^{-1}\beta)^k = \frac{1}{r-\beta} .$$

De asemenea, printr-un calcul simplu obținem

$$\begin{aligned} \| (rI+A(x))^{-1} - (rI+A(y))^{-1} \| \leq & \; r^{-2} \| A(x)-A(y) \| \sum_{k=0}^{\infty} k(r^{-1}\beta)^{k-1} = \\ = & \; \frac{1}{(r-\beta)^2} \| A(x) - A(y) \| . \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \| T_{A(x)} - T_{A(y)} \| \leq & \; \frac{1}{(r-\beta)^2} \| A(x)-A(y) \| \| rI-A(x) \| + \\ & + \frac{1}{r-\beta} \| A(x)-A(y) \| \leq \frac{2r}{(r-\beta)^2} \| A(x)-A(y) \| . \end{aligned}$$

2.3.3. <u>Analiza convergenței</u>. Studiul convergenței metodei (2.14) are la bază ideile din [23], fără însă ca demonstrațiile din lucrarea amintită să se poată transpune în mod banal la cazul nostru.

Fie $y^k = (rI + \Phi)x^k$, $y^{k+1/2} = (rI + A(x^k))x^{k+1/2}$. Din (2-14) rezultă

$$y^{k+1/2} = T_{\Phi}\, y^k \; , \; y^{k+1} = T_{A(x^k)} y^{k+1/2} .$$

Vom presupune că ecuația (2.12) are o soluție $x^* \in \mathbb{R}^n$ și fie $x^*_{\Phi} = (rI + \Phi)x^*, x^*_A = (rI + A(x^*))x^*$. Deoarece $A(x^*)x^* = -\Phi x^*$ rezultă că $x^*_{\Phi} = T_{A(x^*)} x^*_A$, $x^*_A = T_{\Phi}\, x^*_{\Phi}$.

TEOREMA 2.5. <u>Presupunem că ecuația</u> (2.12) <u>are o soluție</u> $x^* \in \mathbb{R}^n$ <u>și că</u> A, Φ <u>satisfac următoarele condiții</u>

1) matricea $A(x)$ este pozitiv definită, $\langle A(x)u,u \rangle \geq \lambda \|u\|^2$, $\forall\, x,u \in \mathbb{R}^n$,

2) $\|A(x)\| \leq \beta$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

3) $\|A(x) - A(y)\| \leq L\|x - y\|$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$,

4) Φ <u>este continuu și monoton,</u>

5) <u>constantele</u> λ <u>și</u> L <u>verifică inegalitatea</u>

$$2\lambda > L\|x^*\| .$$

<u>Atunci pentru</u> r <u>suficient de mare, iterația</u> (2.14) <u>definește un șir unic</u> $\{x^k\}$ <u>care converge la</u> x^*.

<u>Demonstrație</u>. Existența și unicitatea șirului $\{x^k\}$ au fost analizate la punctul 2.3.2. Rămîne să arătăm convergența șirului $\{x^k\}$ la x^*.

Din lemele 2.5, 2.6 și din condiția 3) rezultă

$$\|y^{k+1} - x^*\| = \|T_{A(x^k)}y^{k+1/2} - T_{A(x^*)}x^*_A\| \leq$$

$$\leq \|T_{A(x^k)}y^{k+1/2} - T_{A(x^k)}x^*_A\| + \|T_{A(x^k)}x^*_A - T_{A(x^*)}x^*_A\|$$

$$\leq \alpha\|y^{k+1/2} - x^*_A\| + L\|x^*_A\|\frac{2r}{(r-\beta)^2}\|x^k - x^*\| =$$

$$= \alpha\|T_{\Phi}y^k - T_{\Phi}x^*\| +$$

$$+ L\|x^*_A\|\frac{2r}{(r-\beta)^2}\|(rI+\Phi)^{-1}y^k - (rI+\Phi)^{-1}x^*\| .$$

Din condiția 4) rezultă că $rI + \Phi$ este continuu și strict monoton cu constanta r iar din lema 2.4 rezultă că $(rI+\Phi)^{-1}$ este Lipschitz continuu cu constanta $1/r$. Ținînd cont de acest fapt și de lema 2.5, avem

$$\|y^{k+1} - x^*_\Phi\| \leq \left[\alpha + L\|x^*_A\|\frac{2}{(r-\beta)^2}\right]\|y^k - x^*_\Phi\|$$

$$\leq \left[\alpha + 2L\|x^*\|\frac{r+\beta}{(r-\beta)^2}\right]\|y^k - x^*_\Phi\| .$$

Să notăm cu α_1 constanta $\alpha + 2L\|x^*\|(r+\beta)/(r-\beta)^2$, unde α este dat de (2.15). Vom impune condiţia $\alpha_1 < 1$ şi atunci şirul $\{y^k\}$ converge la x^*_Φ ; dar această condiţie este echivalentă cu

$$(\lambda - 2L\|x^*\|)r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 > 0,$$

unde a_1, a_2, a_3, depind de λ, β, L, $\|x^*\|$. Pentru r suficient de mare, această condiţie este satisfăcută întrucît $2\lambda > L\|x^*\|$ conform cu ipoteza 5). Prin urmare $\alpha_1 < 1$ şi deci $y^k \longrightarrow x^*_\Phi$, $k \longrightarrow \infty$. Acum deoarece $x^k = (rI + \Phi)^{-1}y^k$ şi $(rI + \Phi)^{-1}$ este un operator continuu rezultă că $x^k \longrightarrow (rI + \Phi)^{-1}x^* = x^*$. ∎

2.4. METODE DE TIP GRADIENT

In acest paragraf se studiază convergenţa unor metode de tip gradient utilizînd în mod sistematic conceptul de operator cvasi-neexpansiv (definiţia 2.2). Pe această bază se demonstrează convergenţa locală a unei metode de tip gradient generalizată [52] şi se obţin în particular unele rezultate cunoscute [1], [12], [16]. Menţionăm că rezultatul principal din acest paragraf (teorema 2.6) constituie generalizarea teoremei 2 din [32].

2.4.1. Introducere. In lucrarea [31], utilizînd conceptul de operator cvasi-neexpansiv, s-au obţinut condiţii de convergenţă locală a metodei lui Newton şi a metodei gradientului pentru ecuaţii neliniare pe spaţii finit dimensionale. Condiţiile obţinute în acest mod pentru metoda lui Newton sînt asemănătoare cu cele din teoremele bine cunoscute de convergenţă globală ale lui Kantorovici [19], [21] ; pentru metoda gradientului condiţiile obţinute sînt de acelaşi tip.

Vom considera în acest paragraf ecuaţii de forma $Fx = 0$, unde $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este un operator neliniar (pe spaţiile

$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ vom considera normele euclidiene iar D este o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$). După cum se ştie [4e] metoda gradientului are forma

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k F^1(x^k)^T Fx^k , \quad k = 0,1,\ldots$$

unde λ_k reprezintă "lungimea pasului" (steep lenght). Din punct de vedere geometric această metodă revine la deplasări succesive pe direcţia gradientului funcţionalei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $fx = \|Fx\|^2$ cu pasul λ_k, $k = 0,1,\ldots$

In cele ce urmează vom considera iteraţia mai generală

$$x^{k+1} = x^k - \|F'(x^k)\|^{-2} F'(x^k)^T A(x^k) Fx^k , \quad k = 0,1,\ldots \tag{2.16}$$

unde $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow L(\mathbb{R}^m)$ este un operator neliniar, iteraţie pe care o vom numi metoda gradientului generalizată. După cum se ştie, metoda gradientului are convergenţă liniară ; alegînd în mod convenabil operatorul A se pot obţine metode cu ordin de convergenţă superior. De exemplu, dacă se ia $A(x) = \left[F'(x)F'(x)^T\right]^{-1} \|F'(x)\|^2$ atunci (2.16) coincide cu metoda lui Newton care are, după cum se ştie, convergenţă patratică.

2.4.2. <u>Analiza convergenţei</u>. Vom demonstra mai întîi o lemă simplă de tipul formulelor de medie din analiza n-dimensională.

LEMA 2.7. <u>Fie</u> D <u>o mulţime deschisă din</u> $\mathbb{R}^n$ <u>şi</u> $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ <u>un operator diferenţiabil Fréchet pe</u> D. <u>Atunci</u>

$$Fy - Fx = \left[F'(x) + \delta(x,y)\right](y - x), \quad \forall\, x,y \in D, \tag{2.17}$$

<u>şi</u> $\delta(x,y) \longrightarrow 0$, $y \longrightarrow x$.

<u>Demonstraţie</u>. Plecăm de la identitatea evidentă

$$Fy - Fx = \left[F'(x) + (Fy - Fx - F'(x)(y-x)) \frac{(y-x)^T}{\|y-x\|^2}\right](y-x)$$

şi luăm

$$\delta(x,y) = (Fy - Fx - F'(x)(y-x)) \frac{(y-x)^T}{\|y-x\|^2} .$$

Se vede că $\|\delta(x,y)\| = \|Fy - Fx - F'(x)(y-x)\| / \|y-x\| \longrightarrow 0$, $y \longrightarrow x$.

TEOREMA 2.6. <u>Fie</u> $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ <u>un operator neliniar şi</u>

x^* D o soluție a ecuației $Fx = 0$. Presupunem că F este diferențiabil Fréchet pe $S = S(x^*, r) \subset D$, aplicația $G : D \to L(R^m, R^n)$ definită de $G(x) = F'(x)^T$ este continuă pe S și matricea $F'(x)$ este de rangul n, $\forall x \in S$. Fie $A : D - \{x^*\} \to L(R^m)$ un operator continuu care satisface relația

(2.18) $$\| A(x) - I \| \le \eta < 1 \ , \ \forall x \ S - \{x^*\} .$$

Atunci x^* este punct de atracție pentru iterația (2.16).

Demonstrație. Deoarece $F'(x)$ este de rang n rezultă că $\| F'(x) \| \neq 0$ pe S. Fie atunci operatorul $T : S - \{x^*\} \to \mathbb{R}^n$ definit de

$$Tx = x - \| F'(x) \|^{-2} F'(x)^T A(x) Fx.$$

Ținînd cont de (2.17) avem

$$Tx - x^* = x - x^* - \| F'(x) \|^{-2} F'(x)^T A(x) [F'(x) + \delta(x, x^*)](x - x^*) =$$
$$= [I - \| F'(x) \|^{-2} F'(x)^T A(x) F'(x) -$$
$$- \| F'(x) \|^{-2} F'(x)^T A(x) \delta(x, x^*)](x - x^*).$$

Pentru prescurtarea scrierii vom nota $F'(x) = F'$, $A(x) = A$, $\delta(x, x^*) = \delta$. Obținem

(2.19) $$\| Tx - x^* \| \le (\| I - \| F' \|^{-2} (F')^T A F' \| + \| F' \|^{-2} \| A \| \, \| \delta \|) \| x - x^* \| .$$

Fie $z \in \mathbb{R}^n$, $\| z \| = 1$. Avem

$$\| z - \| F' \|^{-2} (F')^T A F z \|^2 \le 1 - 2 \| F' \|^{-2} \langle F'z, AF'z \rangle + \| F' \|^{-2} \| AF'z \|^2 =$$
$$= 1 - \| F' \|^{-2} (\| F'z \|^2 - \| (A - I) F'z \|^2)$$
$$1 - (1 - \| A - I \|^2) \| F' \|^{-2} \| F'z \|^2.$$

Ținînd cont de (2.18) rezultă

$$\| z - \| F' \|^{-2} (F')^T A F'z \|^2 \le 1 - (1 - \eta^2) \| F' \|^{-2} \| F'z \|^2.$$

Să observăm că $\| F'(x) \| \le \beta_1$, $\forall x \in S_1(x^*, r) \subset S$ și deci $\| F'(x) \|^{-2} \ge \beta_1^{-2}$ apoi că $\| F'(x) z \| \ge \beta_2 > 0$, $\forall x \in S$ și $\| z \| = 1$ (în caz contrar $F'(x)$ nu ar avea rangul n). Prin urmare

(2.20) $$\| I - \| F' \|^{-2} (F')^T A F' \| = \max_{\| z \| = 1} \| z - \| F' \|^{-2} (F')^T A F'z \| \le$$
$$\le \left[1 - (1 - \eta^2) \beta_1^{-2} \beta_2^2 \right]^{1/2}.$$

Să mai observăm că $\|F'(x)\| \geq \beta_2$ și deci $\|F'(x)\|^{-1} \leq \beta_2^{-1}$, $\forall x \in S$. Din (2.18) rezultă că $\|A(x)\| \leq 1+\eta$, $\forall x \in S - \{x^*\}$. Să notăm $\beta = [1-(1-\eta^2)\beta_1^{-2})\beta_2]^{1/2}$. Conform lemei 2.7, $\delta(x,x^*) \to 0$, $x \to x^*$ și deci putem determina o constantă r_2 astfel încît $S(x^*,r_2) \subset S_1$ și

$$\|\delta\| < \frac{(1-\beta)\beta_2}{1+\eta}, \quad \forall x \in S(x^*,r_2)-\{x^*\}.$$

Așa dar

$$\|F'\|^{-1}\|A\|\,\|\delta\| < 1-\beta \quad , \forall x \in S(x^*,r_2).$$

Ținînd cont acum și de (2.20) avem

$$\|I-\|F'\|^{-2}(F')^T A F'\| + \|F'\|^{-1}\|A\|\,\|\delta\| < 1$$

astfel încît din relația (2.19) rezultă

$$\|Tx-x^*\| < \|x-x^*\|, \quad \forall x \in S(x^*,r_2),$$

adică T este cvasi-neexpensiv pe $S(x^*,r_2)-\{x^*\}$ și se aplică lema 2.3.∎

OBSERVAȚIE. Dacă operatorul A este definit și continuu în x^*, condiția (2.18) se poate înlocui cu

$$\|A(x^*) - I\| < 1.$$

In continuare vom aplica teorema 2.6 pentru a obține condiții de convergență locală pentru unele metode iterativ cunoscute.

2.4.3. <u>Metoda gradientului</u>. Dacă în (2.16) luăm $A \equiv I$ obținem metoda gradientului cu $\lambda_k = \|F'(x^k)\|^{-2}$, adică

$$(2.21) \qquad x^{k+1} = x^k - \|F'(x^k)\|^{-2} F'(x^k)^T F x^k.$$

Condiția (2.18) este evident satisfăcută și din teorema (2.6) rezultă

COROLARUL 1. <u>Fie</u> $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>un operator neliniar și</u> $x^* \in D$ <u>o soluție a ecuației</u> $Fx = 0$. <u>Presupunem că</u> F <u>este diferențiabil Fréchet pe</u> $S(x^*,r) \subset D$ <u>și că (matricea)</u> $F'(x)$ <u>este mărginită pe</u> $S(x^*,r)$ <u>și de rang</u> n. <u>Atunci</u> x^* <u>este punct de atracție pentru iterația</u> (2.21).

Metoda gradientului a fost considerată printre primii de

H.Curry [8] precum şi de M.Vainberg [68],[69], M.Altman [1],[2], M.Nashed [36]. Sub forma (2.21) şi pentru cazul particular $m = 1$, această metodă a fost considerată de M.Altman [1],[2]. De asemenea metoda gradientului a fost considerată în [41],[30] pentru cazul $n = m$, obţinîndu-se condiţii de convergenţă substanţial mai tari. Astfel se cere ca F să fie diferenţiabil Fréchet pe o sferă $S(x^*,r)$ şi să satisfacă următoarele condiţii :

1) matricea $F'(x)$ să fie inversabilă şi $\| F'(x)\|^{-1} \leq \beta$, $\forall\, x \in S(x^*,r)$,

2) $\| F'(x)- F'(y) \| \leq \gamma \|x - y\|$, $\forall\, x,y \in S(x^*,r)$,

3) $\beta\gamma r<2$.

Sub o formă asemănătoare, dar cu condiţii de asemenea mai tari, corolarul 1 apare în lucrarea [30].

2.4.4. <u>Metoda Newton - gradient combinată</u>. Fie din nou $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un operator neliniar, f_i, $i = 1,\ldots,m$ componentele lui F şi f_i' derivatele Fréchet ale componentelor, deci $f_i' = (\partial f_i/\partial x_1,\ldots,\partial f_i/\partial x_n)$ unde x_j ; $j = 1,\ldots,n$ sînt componentele unui element $x \in \mathbb{R}^n$. Vom presupune că $\|f_i'(x)\| \neq 0$, $i = 1,\ldots,m$, $x \in D$. Luăm acum pe A din teorema 2.6 de forma

$$A(x) = \lambda \|F'(x)\|^2 B(x)^{-1}$$

unde

$$B(x) = \begin{pmatrix} \|f_1'(x)\|^2 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & \|f_m'(x)\|^2 \end{pmatrix},$$

iar λ este un număr pozitiv. Obţinem următoarea metodă iterativă, numită metoda Newton - gradient combinată [16] ,

$$x^{k+1} = x^k - \lambda F'(x^k)^T B(x^k)^{-1} F(x^k).$$

Ţinînd cont că

$$A(x) - I = \begin{pmatrix} \lambda \frac{\|F'(x)\|^2}{\|f_1'(x)\|^2} - 1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & \lambda \frac{\|F'(x)\|^2}{\|f_m'(x)\|^2} - 1 \end{pmatrix}$$

rezultă

$$\| A(x) - I \| = \max_i \left| \lambda \frac{\|F'(x)\|^2}{\|f_i'(x)\|^2} - 1 \right\|$$

astfel încît condiția (2.18) este satisfăcută pe $S = S(x^*, r) \subset D$ dacă

$$(2.22) \qquad \lambda < \frac{2\|f_i'(x)\|^2}{\|F'(x)\|^2}, \quad i = 1,\dots,m \quad \forall\, x \in S.$$

Din teorema 2.6 obținem

COROLARUL 2. Fie $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un operator neliniar, f_i, $i = 1,\dots,m$ componentele lui F și $x^* \in D$ o soluție a ecuației $Fx = 0$. Presupunem că F este diferențiabil Fréchet pe $S = S(x^*, r) \subset D$ și că (matricea) $F'(x)$ este mărginită pe S și de rang n; presupunem de asemenea că $\|f_i'(x)\| \neq 0$ pe S, $i = 1,\dots,m$ și că λ satisface (2.22). Atunci x^* este punct de atracție pentru metoda Newton - gradient combinată

Această metodă a fost considerată de H.Hart și T.Motzkin [16]. Corolarul 2 este identic cu teorema centrală din lucrarea amintită (teorema 5.1) pentru cazul neliniar cu excepția limitei superioare pentru λ care în [16] este dată de $1/(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)$, λ_i fiind valorile proprii ale matricei $F'(x^*)^T F'(x^*)$.

2.4.5. Metoda lui Fridman. Să luăm acum pe A de forma

$$(2.23) \qquad A(x) = \frac{\|F'(x)\|^2 \|F(x)\|^2}{\|F'(x)^T Fx\|^2} I .$$

Se vede că, în acest caz, dacă F este diferențiabil Fréchet pe

$S = S(x^*, r) \subset D$, atunci A este un operator diagonal definit pe $S - \{x^*\}$. Metoda gradientului generalizată (2.16) va avea forma

(2.24) $$x^{k+1} = x^k - \frac{\|Fx^k\|^2}{\|F'(x^k)^T Fx^k\|^2} F'(x^k)^T Fx^k .$$

Să verificăm condiţia (2.18). Avem

$$\|A(x) - I\| = \left| \frac{\|F'(x)\|^2 \|Fx\|^2}{\|F'(x)^T Fx\|^2} - 1 \right|$$

astfel încît (2.18) este satisfăcută dacă

$$\frac{\|F'(x)\|^2 \|Fx\|^2}{\|F'(x)^T \; Fx\|^2} \le \eta^2 < 2 \quad \forall x \in S.$$

Să presupunem că $F'(x)$ este mărginită pe S, $\|F'(x)\| \le \beta_1$. Vom impune condiţia

(2.25) $$\frac{\|F'(x)^T z\|}{\|z\|} \ge m > 0 , \quad \forall x \in S, \; z \in R^n$$

şi vom cere ca m să satisfacă relaţia $\beta_1 m^{-1} < \sqrt{2}$. In acest caz A dat de (2.23) satisface relaţia (2.18). Să observăm de asemenea că în condiţia (2.25) matricea $F'(x)$ are rangul n. Pe baza teoremei 2.6 obţinem următorul rezultat asupra metodei (2.24):

COROLARUL 3. Fie $F: D \subset R^n \to R^n$ un operator neliniar şi $x^* \in D$ o soluţie a ecuaţiei $Fx = 0$. Presupunem că F este diferenţiabil Fréchet pe $S = S(x^*, r) \subset D$ şi că (matricea) $F'(x)$ este mărginită pe S ($\|F'(x)\| \le \beta_1$, $\forall x \in S$) şi satisface relaţia (2.25). Presupunem de asemenea că constantele β_1 şi m verifică relaţia $\beta_1 m^{-1} < \sqrt{2}$. Atunci x^* este punct de atracţie pentru iteraţia (2.24).

Metoda 2.24 a fost considerată de V.Fridman [12],[13], pentru rezolvarea ecuaţiilor (liniare sau neliniare) în spaţii Hilbert reale. Pentru cazul neliniar condiţiile de convergenţă sînt asemănătoare cu cele din corolarul 3. Să observăm că (2.24) coincide cu metoda gradientului considerată la punctul 2.4.1 în care pasul λ_k are valoarea $\|Fx^k\|^2 / \|F'(x^k)^T Fx^k\|^2$. In lucrarea amintită V.Fridman a dedus această valoare din condiția de minimizare a funcționalei $\|x^k - F'(x^k)Fx^k\|^2$ după parametrul λ, făcîndu-se apoi aproximarea $F'(x^k)(x^k - x^*) \approx Fx^k$.

2.4.6. <u>Observație asupra metodei gradientului generalizată cu ordin superior de convergență</u>. După cum am văzut (punctul 2.4.1) operatorul A se poate alege astfel încît metoda gradientului generalizată să coincidă cu metoda lui Newton. Să luăm deci $n = m$ şi

$$A(x) = \|F'(x)\|^2 (F'(x)^T)^{-1} F'(x)^{-1}.$$

Iterația (2.16) se reduce în acest caz la metoda cunoscută a lui Newton.

Vom presupune că

$$\|F'(x)\| \, \|F'(x)^{-1}\| \le \eta < \sqrt{2} \quad , \quad \forall x \in S(x^*, r)$$

unde r este un număr real pozitiv şi fie $z \in R^n$, $\|z\| = 1$. Avem

$$\|z - \|F'(x)\|^2 (F'(x)^T)^{-1} F'(x)^{-1} z\|^2 \le$$

$$\le 1 - 2\|F'(x)\|^2 \langle z, (F'(x)^{-1})^T F'(x)^{-1} z \rangle + \|F'(x)\|^4 \|F'(x)^{-1}\|^2 \|F(x)^{-1} z\|^2 =$$

$$= 1 - \|F'(x)\|^2 \|F'(x)^{-1} z\|^2 (2 - \|F'(x)\|^2 \|F'(x)^{-1}\|^2).$$

Dacă mai presupunem că $F'(x)$ este o matrice inversabilă pentru orice $x \in S(x^*, r)$, atunci $\|F'(x)\|, \|F'(x)^{-1} z\|$ sînt mărginite inferior (fie β_1 şi β_2 constantele pozitive respective) şi prin urmare

$$\|I - \|F'(x)\|^2 (F'(x)^T)^{-1} F(x)^{-1}\|^2 \le 1 - \beta_1^2 \beta_2 (2 - \eta^2) < 1,$$

relație care constituie condiția (2.18) din teorema 2.6. Rezultă de aici că x^* este punct de atracție pentru metoda lui Newton. Dar acest rezultat este în mod practic neinteresant, întrucît se ştie că metoda lui Newton este local convergentă cu singurele condiţii ca F să fie diferenţiabil Fréchet în punctul x^* iar matricea $F'(x^*)$ să fie nesingulară.

2.5. O METODĂ ITERATIVĂ SPECIALĂ PENTRU ECUAŢII DE FORMA (1.11)

In [33],[30],[32] s-a studiat o metodă iterativă specială pentru rezolvarea ecuaţiilor neliniare de forma (1.11) metodă care prezintă anumite avantaje de programare (paragraful 3.4). In acest paragraf se generalizează [54] unele rezultate din [33], [30],[32] prin slăbirea condiţiilor de convergenţă. In particular, se obţine metoda liniilor paralele, de asemenea cu condiţii de convergenţă mai slabe.

2.5.1. <u>Algoritmul de calcul şi analiza convergenţei</u>. Vom considera ecuaţii de forma (1.11), deci de forma

$$(2.26) \qquad A(x)x + \Phi x = 0,$$

unde $A : D\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow L(\mathbb{R}^n)$ şi $\Phi : D\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sînt operatori neliniari. Vom presupune că ecuaţia (2.26) are o soluţie $x^*\in D$ şi vom considera următorul proces iterativ pentru aproximarea soluţiei

$$(2.27) \qquad x^{k+1} = x^k - \lambda A(x^k)^T\left[A(x^k)x^k + \Phi x^k\right],$$

λ fiind o constantă reală pozitivă.

OBSERVAŢII. 1. In esenţă această metodă este o variantă a metodei gradientului pentru ecuaţii de forma (2.26). Dacă A şi Φ sînt operatori constanţi (2.27) coincide cu metoda gradientului pentru ecuaţii liniare, considerată de numeroşi autori [46],[56],[9].

2. Metoda iterativă (2.27) a fost considerată în lucrările [33],[30],[32] unde s-au dat condiţii de convergenţă locală iar în cazuri particulare s-au obţinut unele rezultate cunoscute.

Vom considera pe spaţiul $\mathbb{R}^n$ norma euclidiană.

TEOREMA 2.7. Presupunem că operatorii A şi Φ sînt diferentiabili Fréchet în punctul x^*, soluţie a ecuaţiei (2.26) şi că matricea $A(x^*)$ este nesingulară. Presupunem de asemenea că este îndeplinită următoarea condiţie

$$(2.28) \qquad \| A(x^*)^{-1} \| \, \| [A(x)x^*]'_{x^*} + \Phi'(x^*) \| < 1$$

şi că $\lambda \leq \| A(x^*)\|^{-2}$.

Atunci x^* este punct de atracţie pentru iteraţia (2.27).

Demonstraţie. Fie $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definit de

$$Tx = x - \lambda A(x)^T [A(x)x + \Phi x] .$$

Utilizînd lema 2.2 avem

$$(2.29) \qquad T'(x^*) = I - \lambda A(x^*)^T \{ A(x^*) + [A(x)x^*]'_{x^*} + \Phi'(x^*) \} .$$

Deoarece $\lambda \|A(x^*)\|^2 \leq 1$ obţinem pentru orice $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| = 1$

$$\| T'(x^*)y \|^2 = \| y - A(x^*)^T \{ A(x^*) + [A(x)x^*]'_{x^*} + \Phi'(x^*) \} y \|^2 \leq$$

$$\leq 1 - 2\lambda \langle \{ A(x^*) + [A(x)x^*]'_{x^*} + \Phi'(x^*) \} y, A(x^*)y \rangle +$$

$$+ \lambda \| A(x^*)y + \{ [A(x)x^*]'_{x^*} + \Phi'(x^*) \} y \|^2 \leq$$

$$\leq 1 - \lambda \| A(x^*)y \|^2 + \lambda \| [A(x)x^*]'_{x^*} + \Phi'(x^*) \|^2 \leq$$

$$1 - \lambda (\| A(x^*)^{-1} \|^{-2} - \| [A(x)x^*]'_{x^*} + \Phi'(x^*) \|^2 .$$

Ţinînd cont de condiţia (2.28) rezultă că $\| T'(x^*) \| < 1$ şi convergenţa locală a metodei rezultă din teorema 2.1.

OBSERVAŢIE. In general $\| T'(x^*) \| \neq 0$ şi metoda (2.27) are numai convergenţă liniară. Acest fapt poate provoca în cazuri particulare creşterea substanţială a volumului de timp calculator, chiar dacă se lucrează exclusiv în memoria internă (paragraful 3.4).

Putem da şi următoarea variantă a teoremei 2.7 :

TEOREMA 2.8. Fie A şi Φ ca în teorema 2.7. In locul relaţiei (2.28) vom considera că este satisfăcută relaţia

$$(2.30)\qquad \langle A(x^*)y,\ \{[A(x)x^*]'_{x^*}+\Phi'(x^*)\}y\rangle \geq 0,\ \forall y\in\mathbb{R}^n.$$

De asemenea, presupunem că λ satisface relațiile

$$(2.31)\qquad \lambda \leq \|A(x^*)\|^{-2}$$
$$\lambda < \|A(x^*)^{-1}\|^{-2}\|A(x^*)\|^{-2}\|[A(x)x^*]'_{x^*}+\Phi'(x^*)\|^{-2}.$$

Atunci x^* este punct de atracție pentru iterația (2.27).

Demonstrație. Utilizînd expresia (2.29) a derivatei $T'(x^*)$, putem scrie

$$\|T'(x^*)y\|^2 \leq 1-\lambda\|A(x^*)y\|^2-2\lambda\langle A(x^*)y,\{[A(x)x^*]'_{x^*}+\Phi'(x^*)\}y\rangle$$
$$+2\lambda^2\|A(x^*)\|^2\langle A(x^*)y,\{[A(x)x^*]'_{x^*}+\Phi'(x^*)\}y\rangle+$$
$$+\lambda^2\|A(x^*)\|^2\ \|[A(x)x^*]'_{x^*}+\Phi'(x^*)\|^2.$$

Acum, ținînd cont de (2.30),(2.31) rezultă

$$\|T'(x^*)y\|^2 \leq 1-\lambda(\|A(x^*)^{-1}\|^{-2}-$$
$$-\lambda\|A(x^*)\|^2\|[A(x)x^*]'_{x^*}+\Phi'(x^*)\|^2 < 1,$$

şi se aplică din nou teorema 2.1.

OBSERVAȚIE. Teoremele 2.7 şi 2.8 sînt prezentate în [30] pentru cazul unui spațiu Hilbert real de dimensiune finită şi cu condiții de convergență mai tari. Astfel se cere ca operatorii A şi Φ să fie diferențiabili Fréchet pe o anumită sferă centrată în x^* şi ca derivatele acestor operatori să fie mărginite.

2.5.2. Metoda liniilor paralele. Pe baza teoremei 2.8 se poate obține o teoremă de convergență locală pentru metoda liniilor paralele.

Fie $F: D\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ un operator neliniar şi x^* o soluție a ecuației $Fx = 0$. Pentru a putea aplica teorema 2.8 vom scrie această ecuație sub forma $Ix + (Fx-x) = 0$ astfel încît $A(x)= I$ şi $\Phi x = Fx-x$. Deoarece $\Phi'(x) = F'(x)-I$, condiția (2.30) devine

(2.32) $$\langle F'(x^*)y,y \rangle \geq \|y\|^2 \ , \quad \forall\, y\in \mathbb{R}^n,$$

iar condițiile impuse lui λ (2.31) se reduc la

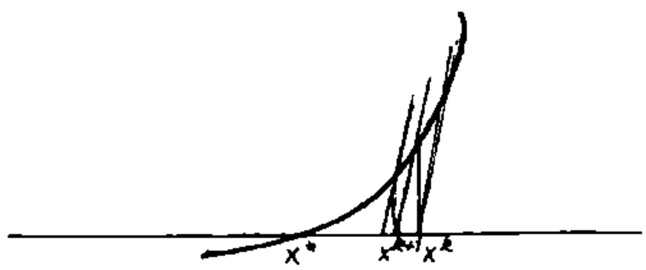
(2.33) $$\lambda \le 1 \ , \quad \lambda < \|F'(x^*) - I\|^{-2}.$$

Iterația (2.27) va avea forma $x^{k+1} = x^k - \lambda Fx^k$, iterație cunoscută sub numele de metoda liniilor paralele.

Pe baza teoremei 2.8 se obține :

TEOREMA 2.9. <u>Presupunem că</u> F <u>este un operator diferențiabil Fréchet în punctul</u> x^*, <u>soluție a ecuației</u> $Fx = 0$ <u>și că</u> $F'(x^*)$ <u>este o matrice pozitiv definită cu constanta</u> 1 [relația (2.22)]. <u>Atunci</u> x^* <u>este punct de atracție pentru iterația</u> $x^{k+1} = x^k - \lambda Fx^k$ <u>unde</u> λ <u>este un număr pozitiv care satisface</u> <u>relațiile</u> (2.33).

OBSERVAȚII. 1. In cazul $n = 1$ metoda liniilor paralele are următoarea interpretare : iterația următoare x^{k+1} se obține intersectînd axa Ox cu o paralelă la o direcție fixă (λ), dusă prin punctul de coordonate $(x^k, f(x^k))$ (figura alăturată).



este clar că în acest caz șirul $\{x^k\}$ generat de metoda liniilor paralele converge dacă f este o funcție continuă strict crescătoare într-o vecinătate a soluției x^* și dacă $\lambda < 1$. Condiția (2.32) obținută pentru convergența metodei în cazul n dimensional implică monotonia operatorului F într-o vecinătate a punctului x^*. Prin urmare teorema 2.9 reprezintă o generalizare naturală a metodei liniilor paralele de la cazul uni-dimensional.

2. Teorema 2.9 este prezentată în [30] cu condiția mai tare ca F să aibă derivata Fréchet mărginită pe o sferă centrată în x^*.

3. Metoda liniilor paralele a fost considerată de numeroşi autori în spaţii finit dimensionale sau în spaţii Hilbert [67], [26], [38], [62].

2.5.3. <u>Aplicaţie la ecuaţiile cu diferenţe corespunzătoare problemei Dirichlet eliptice slab neliniare</u>. Considerăm problema Dirichlet eliptică slab neliniară (1.12) şi ecuaţiile cu diferenţe standard (1.19). Vom scrie aceste ecuaţii sub o formă puţin modificată înmulţindu-le cu $-h^2$; obţinem astfel sistemul

$$Ax + \Phi x = 0 ,$$

unde A este o matrice bloc tridiagonală de dimensiuni $n \times n$ $(n = m^2)$ de forma

$$A = \begin{pmatrix} B & I & & 0 \\ I & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & I \\ 0 & & I & B \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ -1 & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & -1 \\ 0 & & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

iar Φx este dat de $h^2\left[f(t_1,s_1,x_{11}),\dots,f(t_m,s_1,x_{m1}),\dots,f(t_1,s_m,x_{1m}),\dots,f(t_m,s_m,x_{mm})\right]^T$.

Pentru rezolvarea numerică a sistemului aplicăm metoda iterativă (2.27). Vom presupune că funcţia f are derivată parţială în raport cu u pe $[0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}$ şi că

$$\left|f_u(t,s,u)\right| \le \beta \quad , \quad \forall (t,s,u) \in [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}.$$

In acest caz este clar că Φ este diferenţiabil Fréchet pe X_n şi

$$\left\| \Phi'(x^*) \right\| = \max_{i,j} h^2 \left|f_u(t_i,s_j,x^*_{ij})\right| \le h^2\beta .$$

Pe de altă parte ţinînd cont că valorile proprii ale matricei A sînt $\lambda_j = 4(\sin^2 \frac{i\pi h}{2} + \sin^2 \frac{j\pi h}{2})$, avem

$$\| A \| = \max_{i,j} 4(\sin^2 \frac{i\pi h}{2} + \sin^2 \frac{j\pi h}{2}) < 8 ,$$

$$\| A^{-1}\| = \max_{i,j} \left[4(\sin^2 \frac{i\pi h}{2} + \sin^2 \frac{j\pi h}{2})\right]^{-1} = (8 \sin^2 \frac{\pi h}{2})^{-1} .$$

de unde rezultă

$$\| A^{-1} \| \, \| \Phi'(x^*) \| \leq \frac{h^2 \beta}{8 \sin^2 \frac{\pi h}{2}} \longrightarrow \frac{\beta}{2\pi^2}, \ h \longrightarrow 00.$$

Prin urmare, dacă punem condiția $\beta < 2\pi^2$, atunci pentru n suficient de mare $\| A^{-1} \| \, \| \Phi'(x^*) \| < 1$ și condiția (2.28) din teorema 2.7 este satisfăcută. Să mai observăm că deoarece $\| A \| < 8$ constanta λ se poate lua 1/64 (în acest caz $\lambda = 1/64 < \| A \|^{-2}$). Ținînd cont și de teorema 1.5 obținem

COROLARUL 1. <u>Presupunem că f are derivată parțială în raport cu u pe $[0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}$ și că</u>

$$| f_u(t,s,u) | \leq \beta < 2\pi^2, \ \forall (t,s,u) \in [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}.$$

<u>Atunci, pentru n suficient de mare, ecuația $Ax + \Phi x = 0$ are soluție unică $x^* \in \mathbb{R}^n$ care este punct de atracție pentru iterația</u>

$$x^{k+1} = x^k - 64^{-1} A(Ax^k + \Phi x^k).$$

OBSERVAȚIE. După cum rezultă din testele numerice efectuate (paragraful 3.4) rata de convergență a acestei metode de calcul este scăzută. Dar acest rezultat are o anumită importanță de principiu. Teoremele 1.5 și 1.6 asigură existența și unicitatea soluțiilor ecuațiilor cu diferențe standard și respectiv convergența acestora la soluția problemei continue (1.12) dacă $f_u \geq -\eta - 2\pi^2$; prin urmare, este interesant să dispunem și de o metodă numerică de calcul care să asigure obținerea soluțiilor ecuațiilor cu diferențe în aceleași condiții. Metoda considerată satisface în parte acest deziderat, condiția principală care se cere pentru convergență ($|f_u| \leq \beta < 2\pi^2$) fiind de aceeași natură cu condiția principală din teoremele 1.5 și 1.6.

Un rezultat similar se poate obține și prin aplicarea metodei liniilor paralele. Vom scrie ecuațiile cu diferențe sub forma $Ax + \Phi x = 0$, unde A are forma (1.16) dar cu semn schimbat iar

Φ este definit în 1.3.3. Cea mai mică valoare proprie a lui A este $\lambda_1 = 8h^{-2}\sin^2\frac{\pi h}{2}$ şi $\lambda_1 \to 2\pi^2$, $h \to 0$. Luăm $Fx = Ax + \Phi x$ şi dacă presupunem că $f_u \geq -\eta$, obţinem

$$\langle F'(x)y,y\rangle = \langle [A + \Phi'(x)]y,y\rangle = \langle Ay,y\rangle + \langle \Phi'(x)y,y\rangle$$
$$\geq (\lambda_1 - \eta)\|y\|^2 \longrightarrow (2\pi^2 - \eta)\|y\|^2.$$

Condiţia (2.32) se reduce la $2\pi^2 - \eta > 1$ sau $\eta < 2\pi^2 - 1$. Din teorema 2.9 rezultă

COROLARUL 2. <u>Presupunem că</u> f <u>are derivată parţială în raport cu</u> u <u>pe</u> $[0,1] \times [0,1] \times R$ <u>şi că</u>

$$f_u(t,s,u) \geq -\eta > -2\pi^2 + 1, \quad \forall (t,s,u) \in [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}.$$

<u>Atunci, pentru</u> n <u>suficient de mare, ecuaţia</u> $Ax + \Phi x = 0$ <u>are soluţie unică</u> $x^* \in \mathbb{R}^n$ <u>care este punct de atracţie pentru metoda liniilor paralele</u>

$$x^{k+1} = x^k - \lambda(Ax^k + \Phi x^k).$$

<u>Rezultate asemănătoare se pot enunţa şi pentru ecuaţiile cu diferenţe corespunzătoare problemei la limită bilocale slab neliniare</u> (1.2).

2.6. METODA LUI FRIDMAN

Ţinînd cont de eficienţa deosebită a metodei lui Fridman pentru rezolvarea ecuaţiilor neliniare (paragraful 3.3) vom prezenta în cele ce urmează o analiză separată a convergenţei acestei metode în spaţii finit dimensionale [53],[56]. Condiţiile de convergenţă sînt substanţial mai slabe decît cele din corolarul 3 (punctul 2.4.5), sau decît cele din lucrarea [12].

2.6.1. <u>Introducere</u>. După cum s-a mai precizat, metoda lui Fridman (2.24) este o metodă de tip gradient în care lungimea pasului este $\lambda_k = \|Fx^k\|^2 / \|F'(x^k)^T Fx^k\|^2$. Această valoare se obţine printr-o anumită aproximare a valorii λ care minimizează funcţionala $\|x^k - F'(x^k)^T Fx^k\|^2$.

Metoda lui Fridman se poate obţine şi pe calea următoare : Pornim de la metoda lui Newton $x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1}Fx^k$ şi determinăm iteraţia următoare x^{k+1} rezolvînd sistemul liniar

$$F'(x^k)z = F'(x^k)x^k - Fx^k.$$

Să notăm $F'(x^k) = A$, $b = F'(x^k)x^k - Fx^k$. Vom rezolva acest sistem cu metoda iterativă propusă de Altman [1]

$$z^{j+1} = z^j - \frac{\| Az^j - b\|^2}{\| A^T(Az^j - b)\|^2} A^T(Az^j - b),$$

care converge cu singura condiţie ca A să fie nesingulară. Soluţia acestui sistem z^* este tocmai iteraţia următoare x^{k+1}. Întrucît z^*(sau x^{k+1}) este apropiat de x^k vom lua $z^0 = x^k$ şi vom lua în procesul iterativ de mai sus o singură iteraţie, deci vom face aproximarea $z^* \approx z^1$. Efectuînd calculele se obţine

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\| Fx^k\|^2}{\| F'(x^k)^T Fx^k\|^2} F'(x^k)^T Fx^k \quad (2.34)$$

adică tocmai metoda lui Fridman (2.24).

Să observăm că în cazul $n = 1$ această metodă coincide cu metoda lui Newton.

2.6.2. <u>Analiza convergenţei</u>. Vom demonstra mai întîi o lemă ajutătoare. Ca şi în paragraful precedent vom considera norma euclidiană pe spaţiul $\mathbb{R}^n$.

LEMA 2.8. <u>Presupunem că</u> F <u>este un operator diferenţiabil Fréchet pe o sferă deschisă</u> $S = S(x^0,r)$ <u>şi că următoarele condiţii sînt îndeplinite</u>

1) $\| F'u - F'(v)\| \le K\|u - v\|$, $\forall\, u,v \in S$,

2) <u>există</u> $F'(x)^{-1}$ <u>şi</u> $\| F'(x)^{-1}\| \le B$, $\forall\, x \in S$,

3) $rKB < 1$.

<u>Atunci</u>

$$2\langle y - x,\ F'(x)^T(Fy - Fx)\rangle \ge \| Fy - Fx\|^2 , \quad \forall\, x,y \in S. \quad (2.35)$$

Demonstrație. Ținînd cont de condiția 1) putem aplica formula de medie cunoscută

$$\| Fy - Fx - F'(x)(y - x)\| \leq \frac{1}{2} K\|y - x\|^2, \quad \forall\, x,y \in S.$$

Dacă notăm $Fy - Fx - F'(x)(y - x) = R(x,y)$ și utilizăm această relație și condițiile 2),3) obținem pentru orice $x,y \in S$

$$\begin{aligned} \| F'(x)(y - x) \| &\geq \| F'(x)^{-1}\|^{-1} \|y - x\| \\ &\geq M^{-1}\|y - x\| \geq r K\|y - x\| > \frac{1}{2} K\|y - x\|^2 \\ &\geq \|R(x,y)\|^2. \end{aligned}$$

Aşa dar

$$\begin{aligned} & 2 \langle y - x, F'(x)^T(Fy - Fx) \rangle - \|Fy - Fx\|^2 = \\ &= 2 \langle F'(x)(y-x), F'(x)(y-x) + R(x,y) \rangle - \|F'(x)(y-x) + R(x,y)\|^2 = \\ &= \|F'(x)(y-x)\|^2 - \|R(x,y)\|^2 > 0. \blacksquare \end{aligned}$$

OBSERVAȚII. 1. Lema rămîne valabilă în spații Hilbert reale cu singura modificare ca în condiția 2) să presupunem că operatorul $F'(x)$ are inversa mărginit pentru orice $x \in S$.

2. Dacă pentru un $x^0 \in S$ există o vecinătate $V \subset S$ a lui x^0 astfel încît $y \in V$, $y \neq x^0 \Rightarrow Fy \neq Fx^0$ atunci din continuitatea lui F și a lui F' rezultă că $\langle y - x, F'(x^0)^T(Fy - Fx)\rangle > 0$ pe o anumită sferă centrată în x^0 și pentru $x \neq y$. Aceasta înseamnă că operatorul $F'(x^0)^T F$ este monoton. O astfel de situație apare ca naturală dacă se ține cont că metoda (2.34) poate fi considerată ca o metodă a liniilor paralele aplicată operatorului $F'(x^0)F$.

In particular, dacă x^* este soluție a ecuației $Fx = 0$ și luăm $y = x^*$, relația (2.35) devine

$$2 \langle x - x^*, F'(x)^T Fx \rangle \geq \| Fx\|^2. \tag{2.36}$$

TEOREMA 2.10. <u>Presupunem că toate condițiile din lema 2.8 sînt satisfăcute și că</u> x^* <u>este soluție a ecuației</u> $Fx = 0$. <u>Atunci șirul</u> $\{x^k\}$ <u>generat de</u> (2.34) <u>converge la</u> x^*.

Demonstrație. Vom arăta că operatorul $T : S - \{x^*\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definit de

$$Tx = x - \frac{\|Fx\|^2}{\|F'(x)^T Fx\|^2} F'(x)^T Fx$$

este cvasineexpansiv pe $S - \{x^*\}$.

Avem

$$\|Tx - x^*\|^2 = \|x - x^* - \frac{\|Fx\|^2}{\|F'(x)^T Fx\|^2} F'(x)^T Fx\|^2 =$$

$$= \|x - x^*\| - 2\frac{\|Fx\|^2}{\|F'(x)^T Fx\|^2}\langle x - x^*, F'(x)^T Fx\rangle + \frac{\|Fx\|^4}{\|F'(x)^T Fx\|^2}$$

$$= \|x - x^*\|^2 - \frac{\|Fx\|^2}{\|F'(x)^T Fx\|^2}(2\langle x - x^*, F'(x)^T Fx\rangle - \|Fx\|^2).$$

Ținînd cont de (2.36) rezultă

$$\|Tx - x^*\|^2 < \|x - x^*\|^2.$$

Prin urmare T este cvasi-neexpansiv și deci putem aplica lema 2.3.

OBSERVAȚII. 1. Condițiile lemei 2.8 sînt asemănătoare cu cele din teorema lui Kantorovici [20].

2. Condițiile de convergență în cazul nostru sînt mai slabe decît cele impuse de Fridman [12].

CAPITOLUL 3.

ALGORITMI DE CALCUL SI PROGRAME FORTRAN

In acest capitol se analizează algoritmii de calcul corespunzători metodelor numerice prezentate în capitolul 2 şi se dau schemele logice şi programele FORTRAN corespunzătoare. Exemplele numerice considerate sînt ecuaţii cu diferenţe corespunzătoare unor probleme la limită neliniare concrete (ecuaţii diferenţiale ordinare sau cu derivate parţiale) selectate astfel încît să se pună în evidenţă particularităţile metodelor numerice aplicate. In redactarea schemelor logice s-au folosit simbolurile convenţionale obişnuite [64],[35] şi s-au dat explicaţii cu caracter general.

3.1. METODA ITERATIILOR SIMPLE

In acest paragraf se consideră ecuaţia (2.5) şi metoda iterativă (2.6) (metoda iteraţiilor simple), pentru care se prezintă un program FORTRAN general. Exemplul tratat la punctul 3.1.3 reprezintă ecuaţiile cu diferenţe corespunzătoare unei probleme la limită bilocală slab neliniară de forma (1.10).

3.1.1. Algoritmul de calcul. Metoda iterativă (2.6),

$$A(x^k)x^{k+1} = \Phi x^k ,$$

comportă ca rezolvare principală, rezolvarea unui sistem liniar cu matricea $A(x^k)$ şi termenii liberi Φx^k, la fiecare pas de iteraţie. Algoritmul de calcul se poate concepe pentru ecuaţii neliniare de forma (2.5) oarecare sau pentru ecuaţii particulare, de exemplu pentru ecuaţii cu diferenţe corespunzătoare unor probleme la limită neliniare. In cazul general este necesară o procedură pentru rezolvarea sistemelor liniare oarecare sau utilizarea subprogramelor corespunzătoare din biblioteca matematică (RESOL, DRESOL, etc., în cazul sistemului FELIX) ; în cazuri particulare se pot utiliza procedeuri speciale în scopul reducerii consumului de timp și de memorie.

Vom trata în continuare cazul general și cazul ecuațiilor cu diferențe corespunzătoare unei probleme la limită bilocale slab neliniare.

Cazul general. Principalele etape de calcul sînt :

Etapa 1. Se atribuie lui x valoarea x^0 ; prin x notăm iterația curentă (x^k) iar x^0 se citește dintr-un fișier de intrare sau se generează cu instrucția DATA ;

Etapa 2. Se calculează matricea A și termenul liber B utilizînd valoarea x (iterația curentă) ;

Etapa 3. Se calculează iterația următoare y prin rezolvarea sistemului liniar $Ay = B$;

Etapa 4. Se compară iterația actuală x cu iterația următoare y ; dacă $\|x - y\| \approx \varepsilon$ procesul de calcul se oprește ; în caz contrar se înlocuiește x cu y și se continuă etapa a doua.

Cazul ecuațiilor cu diferențe (1.4). Vom înmulți ecuațiile (1.4) cu $-h^2$ astfel încît obținem

$$Ax = \Phi x ,$$

unde matricea A este dată de (1.1), exceptînd factorul $-h^2$ și $\Phi x = -h^2(f(t_1,x_1),\ldots,f(t_n,x_n))^T$. Intrucît matricea A^{-1} se poate determina explicit [48],[24], vom scrie procesul iterativ (2.6) sub forma

$$x^{k+1} = A^{-1}\Phi x^k . \tag{3.1}$$

Este clar că în acest caz calculul se simplifică substanțial, rezolvarea unui sistem liniar la fiecare pas de iterație înlocuindu-se cu operația mai simplă de înmulțire a unei matrici cu un vector. Să mai observăm că întrucît valoarea numerică a unui element a lui A^{-1} depinde numai de cei doi indici ai elementului, este suficient să generăm succesiv cîte o linie a matricei A^{-1}, ceea ce permite obținerea succesivă a elementelor produsului $A^{-1}\Phi x^k$. Se evită astfel stocarea matricei A^{-1} și un consum mare de memorie.

Principalele etape de calcul sînt :

Etapa 1. Se atribuie lui x valoarea inițială x^0;

Etapa 2. Se calculează iterația următoare y prin înmulțirea matricei A^{-1} cu Φx, $y = A^{-1}\Phi x$;

Etapa 3. Se compară iterația curentă x cu iterația următoare y ; dacă $\|x - y\| \simeq 0$, procesul de calcul se oprește ; în caz contrar se înlocuiește x cu y și se continuă cu etapa a doua.

<u>In cazul ecuațiilor cu diferențe (1.11)</u> principalele etape de calcul sînt cele prezentate la cazul general.

3.1.2. <u>Scheme logice și programe FORTRAN.</u>

<u>Cazul general.</u> Rezolvarea sistemului liniar se realizează cu un subprogram propriu numit SIMEAN, cu trei parametri formali A,B,N, reprezentînd respectiv matricea coeficienților, coloana termenilor liberi și dimensiunea sistemului. Subprogramul utilizează procedura obișnuită de eliminare Gauss ; după apel subprogramul furnizează soluția în zona B. In cazul în care determinantul sistemului este zero (această situație este testată cu o constantă EPS a subprogramului), calculul este oprit și se editează un mesaj corespunzător.

Generarea matricei A și a termenilor liberi B se realizează cu subprogramul GC (N,A,B,HP,X).

N = dimensiunea sistemului ;

A = matricea sistemului de dimensiune N x N — $A(x^k)$;

B = coloana termenilor liberi (N x 1) — $B = \Phi(x^k)$;

HP = 1./(N + 1)^2 ;

X = iterația curentă —— x^k.

Procedura ITSIM descrie metoda iterațiilor simple, putînd fi stocată într-o bibliotecă sursă. In acest caz utilizatorului îi revine doar sarcina de-a apela această subrutină, precizînd iterația inițială x_0 dimensiunea sistemului (N), precizia de calcul (EPS), numărul maxim de iterații LK precum și matricea A,B prin subrutina SC. ITSIM va furniza un cod prin care utilizatorul va putea deduce modul în care s-au desfășurat calculele :

KOD = 0 SOLUTIE NORMALĂ

KOD = 2 DEPĂȘIREA NUMĂRULUI DE ITERATII.

După calculul fiecărei iterații se imprimă numărul curent al iterației și componentele iterației curente ; numărul de iterații este limitat de LK.

Schema logică este dată în figura 3.1 iar programul FORTRAN corespunzător este prezentat în continuare.

Blocul 1. Inițializarea pe zero a indicelui iterațiilor K și a codului de funcționare al programului, precizarea pasului de discretizare H ;

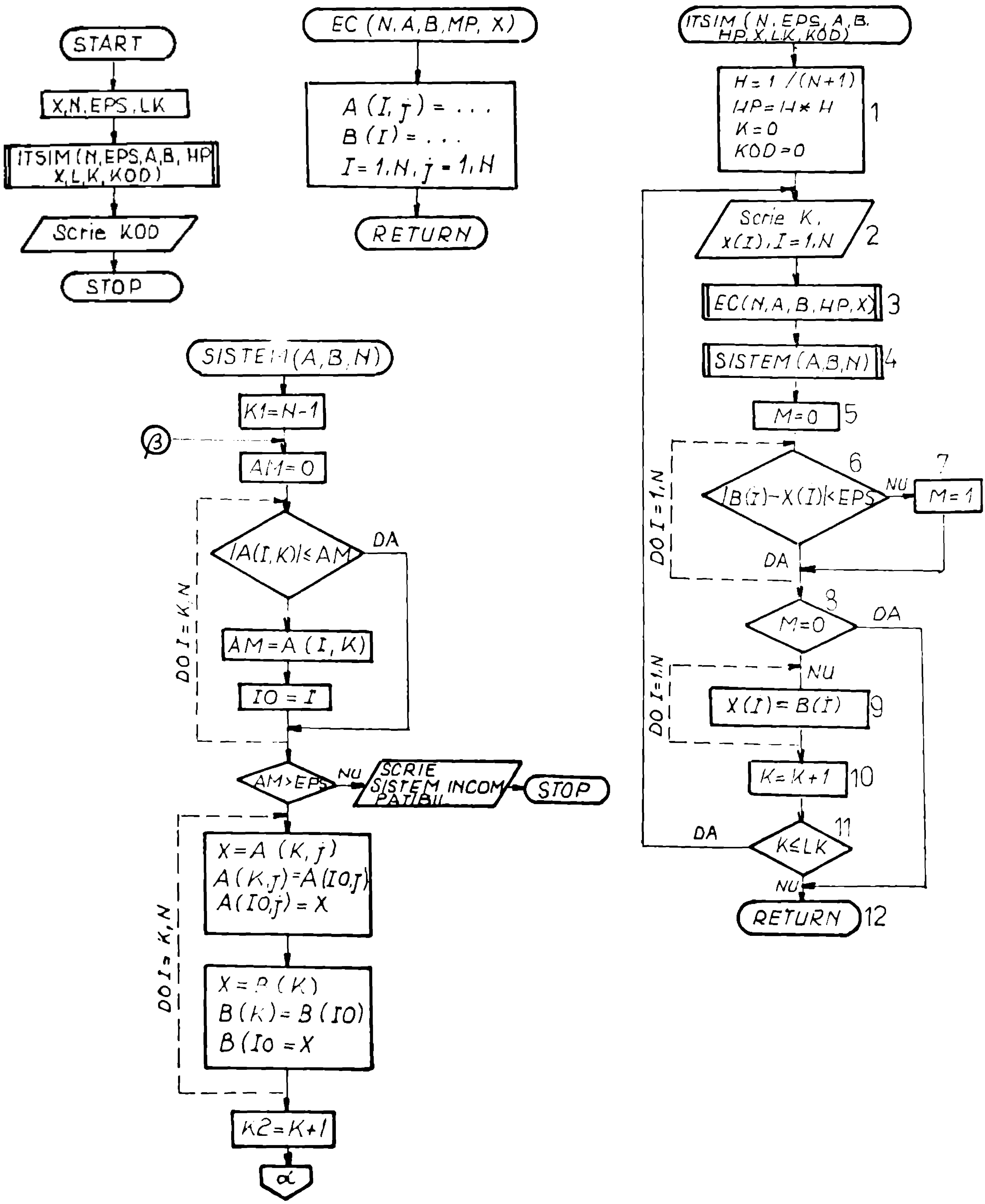
Blocul 2. Tipărirea indicelui iterațiilor și a componentelor iterației curente X ;

Blocul 3. Generarea matricei A și a coloanei termenilor liberi B utilizînd iterația curentă X , prin subrutina SC ;

Blocul 4. Apelarea subprogramului SISTEM pentru calculul iterației următoare y ; componentele acestea se obțin în zona B ;

Blocurile 5,6,7,8,12. Efectuarea testului $\| y - x\| = \|B - x\| =$ $= o$ (s-a considerat norma max și o constantă EPS a programului) și oprirea calculelor (blocul 12) dacă testul este verificat,

Blocul 9. Inlocuirea iterației curente X cu iterația următoare B.



START
X,N,EPS,LK
ITSIM(N,EPS,A,B,HP X,L,K,KOD)
Scrie KOD
STOP
EC (N,A,B,MP, X)
A (I, j) = . . .
B (I) = . . .
I = 1,N, j = 1,N
RETURN
ITSIM (N,EPS,A,B, HP,X,LK,KOD)
H = 1 /(N+1)
HP = H * H
K = 0
KOD = 0
1
Scrie K, x(I), I = 1,N
2
EC(N,A,B,HP,X)
3
SISTEM (A,B,N)
4
M = 0
5
DO I = 1,N
6
\|B(I)−X(I)\|< EPS
NU
7
M = 1
DA
8
M = 0
DA
NU
DO I = 1,N
X (I) = B(I)
9
K = K + 1
10
11
DA
K≤LK
NU
RETURN
12
SISTEM(A,B,N)
K1=N-1
β
AM= 0
DO I = K,N
\|A(I,K)\|≤ AM
DA
AM = A (I, K)
IO = I
AM>EPS
NU
SCRIE SISTEM INCOMPATIBIL
STOP
DO I = K,N
X = A (K, j)
A(K,j)=A(IO,j)
A(IO,j) = X
X = B (K)
B (K) = B (IO)
B (Io = X
K2=K+1
α

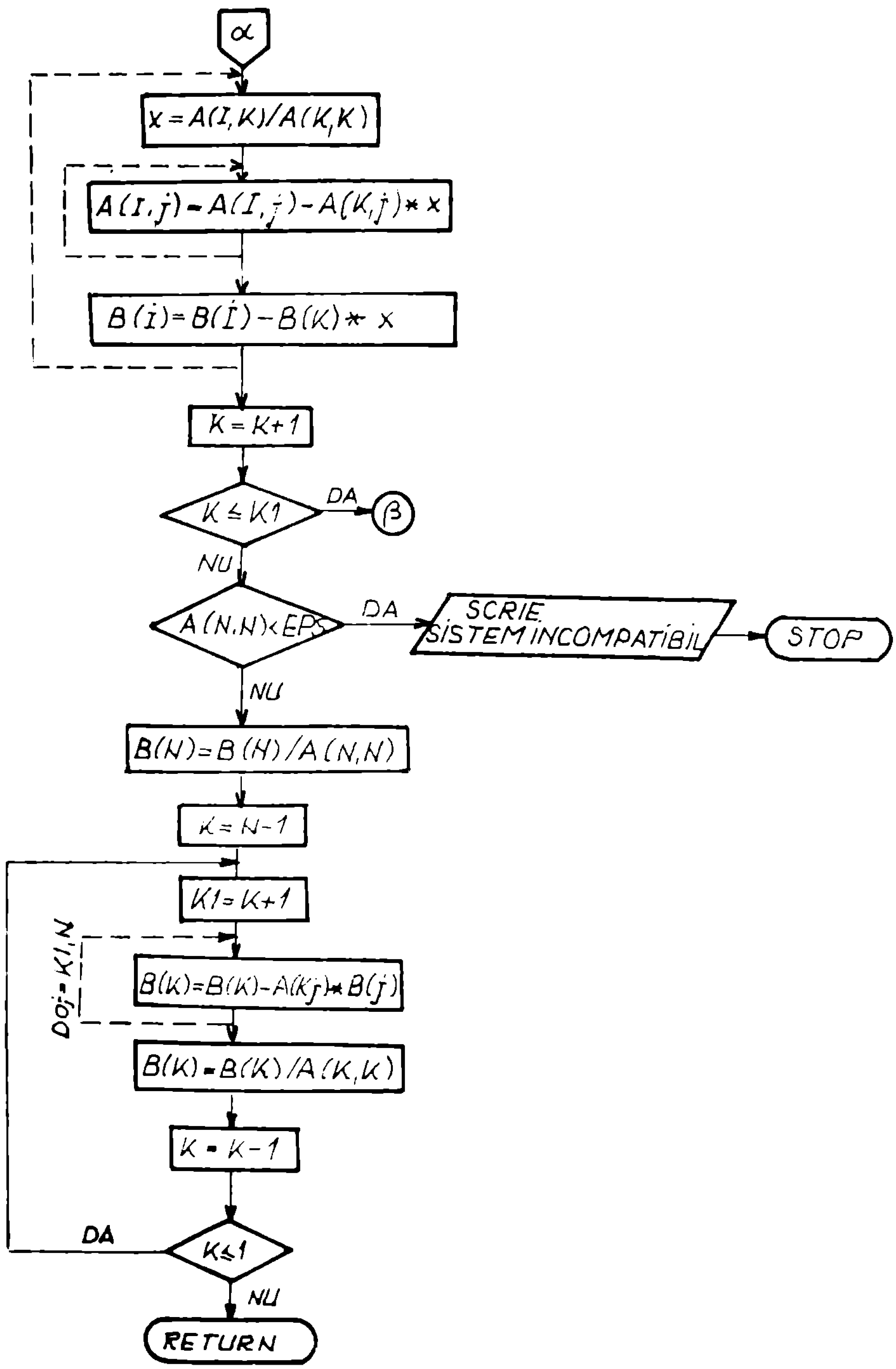

α
X = A(I,K)/A(K,K)
A(I,j) = A(I,j) - A(K,j) * X
B(I) = B(I) - B(K) * X
K = K+1
K ≤ K1
DA
β
NU
A(N,N) < EPS
DA
SCRIE
SISTEM INCOMPATIBIL
STOP
NU
B(N) = B(N)/A(N,N)
K = N-1
K1 = K+1
Doj = K1,N
B(K) = B(K) - A(K,j) * B(j)
B(K) = B(K)/A(K,K)
K = K-1
DA
K ≥ 1
NU
RETURN

Fig. 3.1.

Blocurile 10 şi 11. Actualizarea indicelui iteraţiilor şi limitarea valorii acestuia la IK.

```
      DIMENSIØN X(6),A(6,6),B(6)
      DATA X/6*0./
      DATA N,EPS,IK/6,0.001,100/
      CALL ITSIM(N,EPS,A,B,HP,X,IK,KØD)
      WRITE(108,1)KØD
    1 FORMAT(1X,'KØD=',I3)
      STØP
      END

C PRECIZAM SISTEMUL A(X)X=FIX PRIN A=A(X) SI B=FIX
      SUBRØUTINE SC(N,A,B,HP,X)
      DIMENSIØN A(N,N),B(N),X(N)
      DØ 10 I=1,N
      DØ 10 J=1,N
   10 A(I,J)=0.
      A(1,1)=2+HP*SIN(X(1))
      A(1,2)= -1
      A(N,N)=2+HP*SIN(X(N))
      A(N,N-1)= -1
      B(1)=HP
      B(N)=HP
      L=N-1
      DØ 5 I=2,L
      A(I,I-1)= -1
      A(I,I+1)= -1
      A(I,I)=2+HP*SIN(X(I))
    5 B(I)=HP
      RETURN
      END

C REZØLVAREA SISTEMULUI
      SUBRØUTINE SISTEM(A,B,N)
      DIMENSIØN A(N,N),B(N)
      EPS=1.E-8
      K1=N-1
      DØ 10 K=1,K1
      AM=0
      DØ 11 I=K,N
```

```
      IF(ABS(A(I,K)).LE.AM)GØ TØ 11
      AM=ABS(A(I,K))
      IO=I
   11 CØNTINUE
      IF(AM.GT.EPS)GØ TØ 20
   22 WRITE(108,21)
   21 FORMAT(5X,'SISTEM LINIAR INCØMPATIBIL')
      STØP
   20 DØ 12 J=K,N
      X=A(K,J)
      A(K,J)=A(IO,J)
   12 A(IO,J)=X
      X=B(K)
      B(K)=B(IO)
      B(IO)=X
      K2=K+1
      DØ 13 I=K2,N
      X=A(I,K)/A(K,K)
      DØ 14 J=K,N
   14 A(I,J)=A(I,J)-A(K,J)*X
   13 B(I)=B(I)-B(K)*X
   10 CØNTINUE
      IF(ABS(A(N,N)).LT.EPS)GØ TØ 22
      B(N)=B(N)/A(N,N)
      K=N-1
   23 K1=K+1
      DØ 15 J=K1,N
   15 B(K)=B(K)-A(K,J)*B(J)
      B(K)=B(K)/A(K,K)
      K=K-1
      IF(K.GE.1)GØ TØ 23
      RETURN
      END
C METØDA ITERATIILOR SIMPLE A(X)X-FI(X)=0
      SUBRØUTINE ITEDM(N,EPS,A,B,HP,X,IE,KØD)
      DIMENSION A(N,N),B(N),X(N)
      H=1./N+1)
      HP=H*H
      K=0
      KØD=0
      WRITE(108,20)
```

```
20 FØRMAT(1X,'ITERATIA',10X,'SØLUTIA')
 4 PRINT 1,K,(X(I),I=1,N)
 1 FØRMAT(1X,I3,6X,(10F12.6))
   CALL EC(N,A,B,HP,X)
   CALL SISTEM(A,B,N)
   M=0
   DØ 2 I=1,N
   IF(ABS(B(I)-X(I)).GE.EPS)M=1
 2 CØNTINUE
   IF(M.EQ.0)RETURN
   DØ 30 I=1,N
30 X(I)=B(I)
   K=K+1
   IF(K.LE.LK)GØ TØ 4
   KØD=2
   RETURN
   END
```

Pentru N=6 în două iterații s-a obținut soluția (LISTING 1)
$x=(0{,}060637 \quad 0{,}100942 \quad 0{,}121048 \quad 0{,}121048 \quad 0{,}100942 \quad 0{,}060637)$.

<u>Cazul ecuațiilor cu diferențe (1.4)</u>. Produsul dintre matricea A^{-1} și Φx se efectuează fără generarea matricei A^{-1}, ținînd cont că

$$a_{ij}^{-1} = \begin{cases} \dfrac{i(n-j+1)}{n+1}, & i \leq j \\ \dfrac{j(n-i+1)}{n+1}, & i \geq j. \end{cases}$$

Componentele lui Φx se calculează cu ajutorul unei funcții definite F cu doi parametri T și Z, reprezentînd respectiv valorile actuale ale lui t_j și x_j (partea dreaptă a funcției definite coincide cu f). In general într-o problemă la limită de forma (1.2) funcția f este definită cu o singură formulă explicită, astfel încît utilizarea unei funcții definite apare ca cel mai simplu și mai natural procedeu de a calcula componentele lui Φx; dacă f este definită în alt mod, calculul acestor componente se va efectua într-un subprogram iar în programul principal se vor prevedea instrucțiile de apel corespunzătoare.

Ca şi în cazul general, după calculul fiecărei iteraţii se imprimă numărul curent al iteraţiei şi componentele iteraţiei curente ; numărul de iteraţii este limitat de LK.

Schema logică este dată în figura 3.2 iar programul FORTRAN corespunzător este prezentat în continuare.

Blocurile 1,2,3,4. Precizarea funcţiei f(t,u), a pasului de discretizare, a preciziei de calcul, a numărului maxim de iteraţii, α , β şi a iteraţiei iniţiale x_0 ;

Blocul 5. Tipărirea indicelui iteraţiilor şi a componentelor iteraţiei curente X ;

Blocurile 6,7. Limitarea numărului de iteraţii la LK şi oprirea programului în caz de depăşire (blocul 8) ;

Blocurile 10,11,12,13,14,15. Calculul iteraţiei următoare Y ;

Blocurile 9,16,17,18,8. Efectuarea testului $\|Y-X\| \simeq 0$ (s-a considerat norma max şi o constantă EPS a programului) şi oprirea calculelor (blocul 8) dacă testul este verificat.

Blocul 19. Inlocuirea iteraţiei curente X cu iteraţia următoare Y ;

```
      DIMENSIØN Y(100),X(100)
      F(TJ,Z)=TJ-TJ+Z**3
      DATA N,EPS,ALFA,BETA,LK/6,0.00001,0.,1.,100/
      H=1./(N+1)
      HP=H*H
      K=0
      T=H
      DØ 1 I=1,N
      X(I)=(BETA-ALFA)*T+ALFA
    1 T=T+H
    7 WRITE(108,2)K,(X(I),I=1,N)
    2 FØRMAT(5X,'ITERATIA',I4/(5X,10F10.6))
      K=K+1
      IF(K.GT.LK)STØP
      M=0
      DØ 3 I=1,N
```

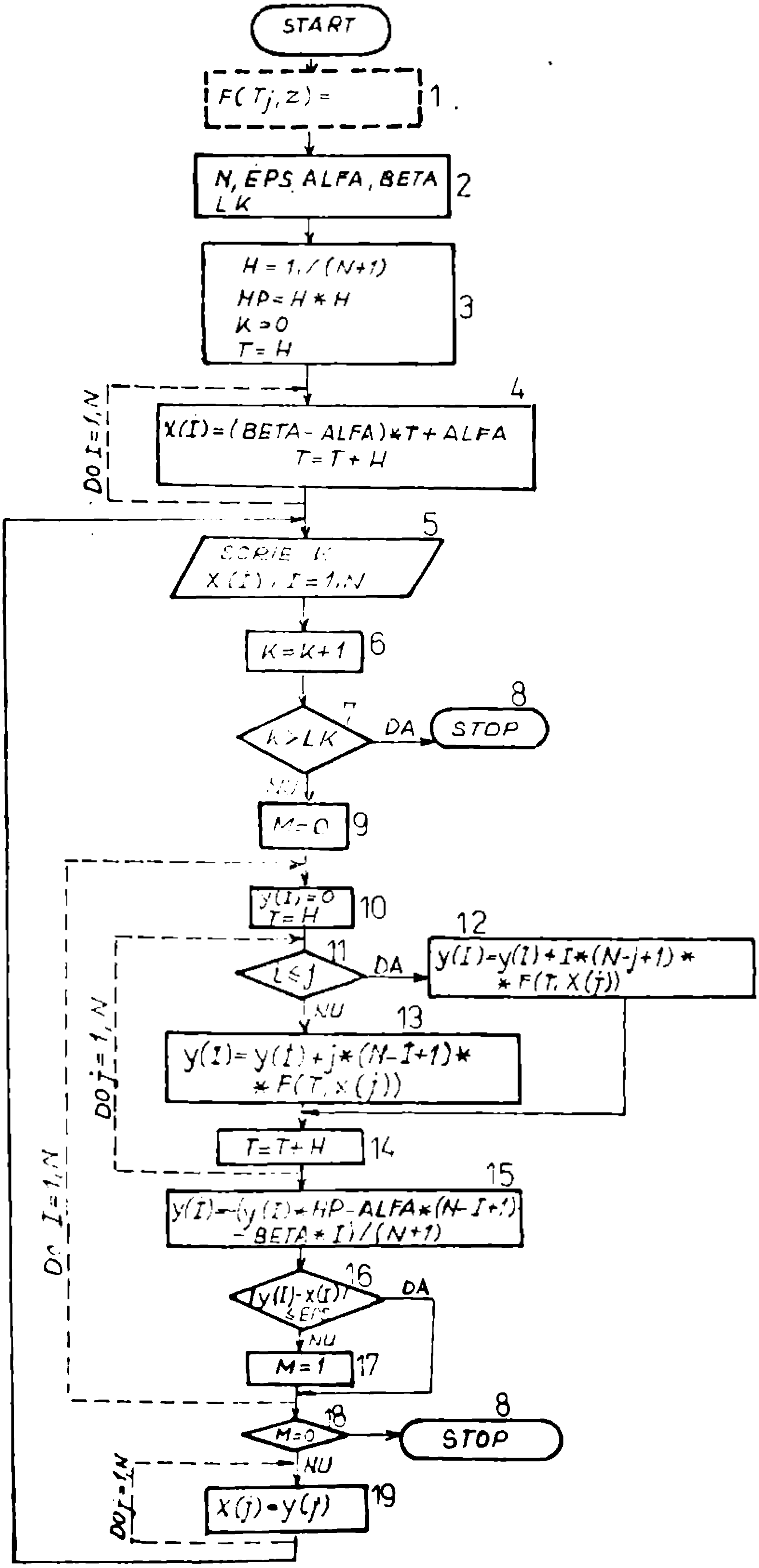

START
F(Tj, z) =
1
N, EPS ALFA, BETA
LK
2
H = 1./(N+1)
HP = H * H
K = 0
T = H
3
DO I = 1, N
4
X(I) = (BETA - ALFA) * T + ALFA
T = T + H
5
X(I), I = 1, N
K = K + 1
6
7
K > LK
DA
8
STOP
M = 0
9
y(I) = 0
T = H
10
11
I ≤ j
DA
12
y(I) = y(I) + I * (N-j+1) *
* F(T, X(j))
NU
13
y(I) = y(I) + j * (N-I+1) *
* F(T, X(j))
DO j = 1, N
T = T + H
14
15
y(I) = -(y(I) * HP - ALFA * (N-I+1)
- BETA * I) / (N+1)
16
y(I)-x(I)
DA
NU
M = 1
17
18
M = 0
8
STOP
NU
X(j) = y(j)
19
DO j = 1, N

Fig.3.2.

```
      Y(I)=0
      T=H
      DØ 4 J=1,N
      IF(I.LE.J)GØ TØ 5
      Y(I)=Y(I)+J*(N-I+1)*F(T,X(J))
      GØ TØ 4
    5 Y(I)=Y(I)+I*(N-J+1)*F(T,X(J))
    4 T=T+H
      Y(I)= -(Y(I)*HP-ALFA*(N-I+1)-BETA*I)/(N+1)
      IF(ABS(Y(I)-X(I)).LE.EPS)GØ TØ 3
      M=1
    3 CØNTINUE
      IF(M.EQ.0)STØP
      DØ 6 J=1,N
    6 X(J)=Y(J)
      GØ TØ 7
      END
```

După 4 iterații, pentru N=6 s-a obținut soluția (LISTING 2)

x = (0.136618, 0.273288, 0.410374, 0.548871, 0.690741, 0.839337).

<u>Cazul ecuațiilor cu diferențe (1.11)</u>. Considerăm ecuația (1.11) sub forma

$$A(x)x = \Phi x$$

cu

$$(3.2)\qquad A(x) = \begin{pmatrix} 2+h^2a(x_1) & -1 & & 0 \\ -1 & 2+h^2a(x_2) & -1 & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2+h^2a(x_n) \end{pmatrix}$$

și

$$(3.3)\qquad \Phi x = -h^2 \begin{pmatrix} f(t_1,x_1) \\ \vdots \\ f(t_n,x_n) \end{pmatrix}$$

Generarea elementelor matricei A o vom face cu ajutorul unei funcții definite AC(X1) cu parametrul X1, reprezentînd valorile actuale ale lui x_j (partea dreaptă a funcției definite coincide cu $s(u)$). In mod asemănător componentele lui Φx le vom calcula cu funcţie definită F cu doi parametri T_j şi X, reprezentînd respectiv valorile actuale ale lui t_j şi x_j (partea dreaptă a funcţiei definite coincide cu f). In general într-o problemă la limită de forma (1.1o) funcţiile f şi $s(u)$ sînt definite cu cîte o singură formulă explicită, astfel încît utilizarea funcţiilor explicite apare ca cel mai simplu şi mai natural procedeu de a calcula componentele lui Φx şi $A(x)$.

Rezolvarea sistemului liniar se realizează cu subprogramul SISTAM prezentat la cazul general. După calculul fiecărei iteraţii se imprimă numărul curent al iteraţiei şi componentele iteraţiei curente, numărul de iteraţii limitîndu-se la 1oo. Schema logică (Fig.3.3) şi programul FORTRAN, le vom prezenta în continuare.

Blocul 1. Precizarea funcţiei $s(u)$ şi $f(t,u)$.

Blocul 2. Matricea $A(x^k)$ fiind o matrice rară, vom pune pe zero toate elementele ei urmînd să generăm numai elementele diferite de zero (blocurile 6,7). Se precizează pasul de discretizare şi precizia de calcul.

Blocurile 3 şi 4. Alegerea iteraţiei iniţiale x_0.

Blocul 5. Tipărirea indicelui iteraţiilor şi a componentelor iteraţiei curente.

Blocurile 6,6',7. Generarea matricei $A(x^k)$ şi a lui Φx^k = = B.

Blocul 8. Se apelează subprogramul SISTAM pentru calculul iteraţiei următoare ; componentele acesteia se obţin în zona B.

Blocurile 9,1o,11,12,13. Efectuarea testului $\|x^{k+1}- x^k\|=$ $= \|B - X\| \approx 0$ (s-a considerat norma max şi o constantă EPS a programului) şi oprirea calculelor (blocul 13) dacă testul este verificat.

Blocul 14. Inlocuirea iteraţiei curente X cu iteraţia ur-

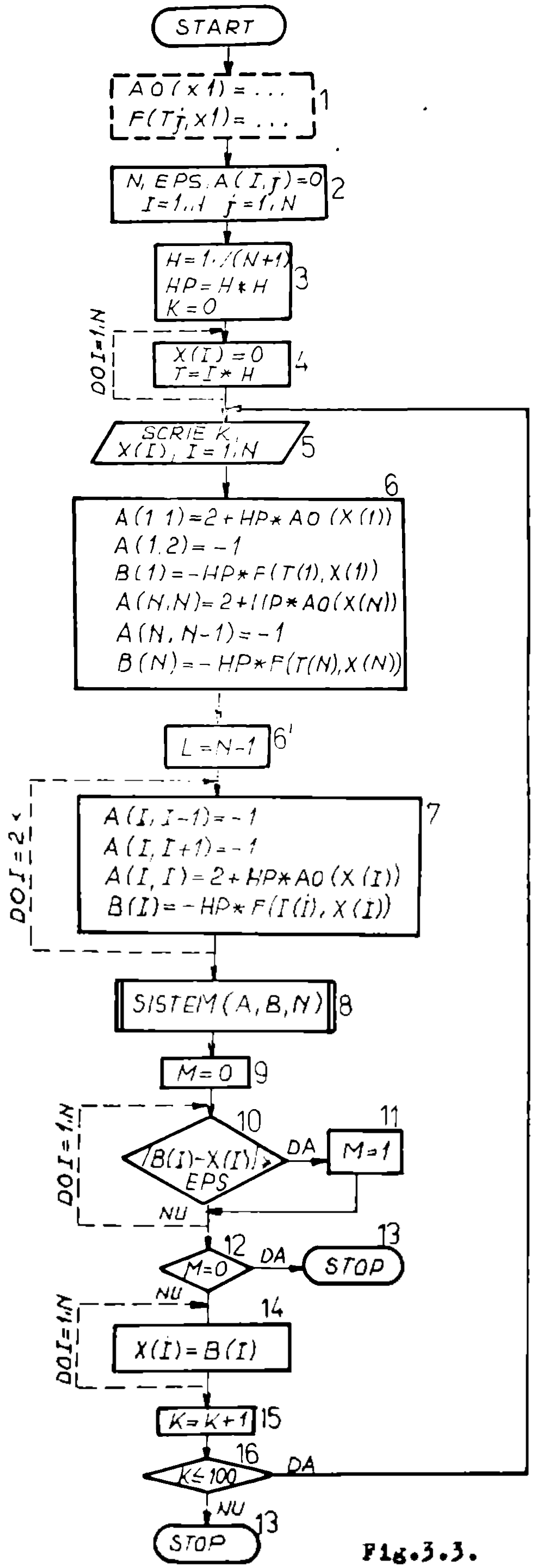

START
A0(x1) = ...
F(Tj,x1) = ...
1
N, EPS, A(I,J)=0
I=1,N J=1,N
2
H=1./(N+1)
HP=H*H
K=0
3
DO I=1,N
X(I)=0
T=I*H
4
SCRIE K,
X(I), I=1,N
5
6
A(1,1)=2+HP*A0(X(1))
A(1,2)=-1
B(1)=-HP*F(T(1),X(1))
A(N,N)=2+HP*A0(X(N))
A(N,N-1)=-1
B(N)=-HP*F(T(N),X(N))
L=N-1
6'
DO I=2,L
A(I,I-1)=-1
A(I,I+1)=-1
A(I,I)=2+HP*A0(X(I))
B(I)=-HP*F(T(I),X(I))
7
SISTEM(A,B,N)
8
M=0
9
DO I=1,N
10
|B(I)-X(I)|>EPS
DA
NU
M=1
11
12
M=0
DA
STOP
13
NU
DO I=1,N
14
X(I)=B(I)
K=K+1
15
16
K≤100
DA
NU
STOP
13

Fig.3.3.

următoare B.

Blocurile 15,16,13. Actualizarea indicelui iteraţiilor şi limitarea valorii acestuia la 100.

```
      DIMENSIØN A(10,10),B(10),X(10),T(10)
      AO(X1)=SIN(X1)
      F(TJ,X1)=TJ-TJ+X1-X1-1
      DATA N,EPS,A/10,0.00001,100*0./
      H=1./(N+1)
      HP=H*H
      K=0
      DØ 10 I=1,N
      X(I)=0.
   10 T(I)=I*H
      WRITE(108,20)
   20 FØRMAT(1X,'ITERATIA',10X,'SØLUTIA')
    5 WRITE(108,1)K,(X(I),I=1,N)
    1 FØRMAT(1X,I3,6X,(10F12.6))
      A(1,1)=2+HP*AO(X(1))
      A(1,2)= -1
      B(1)= -HP*F(T(1),X(1))
      A(N,N)=2+HP*AO(X(N))
      A(N,N-1)= -1
      B(N)= -HP*F(T(N),X(N))
      L=N-1
      DØ 2I=2,L
      A(I,I-1)= -1
      A(I,I+1)= -1
      A(I,I)=2+HP*AO(X(I))
    2 B(I)= -HP*F(T(I),X(I))
      CALL SISTEM(A,B,N)
      M=0
      DØ 3I=1,N
      IF(ABS(B(I)-X(I)).GE.EPS)M=1
    3 CONTINUE
      IF(M.EQ.0)STØP
      DØ 4I=1,N
    4 X(I)=B(I)
      K=K+1
      IF(K.LE.100)GØ TØ 5
      STØP
      END
```

Urmează subrutina LISTAM descrisă la cazul general.

Iterațiile succesive pentru diferite valori ale lui N sînt:

N=10 LISTING 3

NO.	x_1	x_2	...	x_{10}
0	0.000000	0.000000	...	0.000000
1	0.041372	0.074380	...	0.041322
2	0.040946	0.073646	...	0.040948
3	0.040952	0.073654	...	0.040952

N=6 LISTING 4

NO.	x_1	x_2		x_6
0	0.000000	0.000000	...	0.000000
1	0.061224	0.102041	...	0.061224
2	0.060637	0.100942	...	0.060637
3	0.060644	0.100954	...	0.060644

3.2. METODA DIRECTIILOR ALTERNANTE

In acest paragraf se consideră ecuația (2.12) și metoda iterativă (2.13) sub forma (2.14), pentru care se prezintă un program FORTRAN general. Exemplele tratate la punctele 3.2.2, 3.2.3 reprezintă ecuațiile cu diferențe (1.4) corespunzătoare unei probleme la limită bilocală slab neliniară de forma (1.2), respectiv (1.11) corespunzătoare problemei la limită bilocală cvasiliniară (1.10).

3.2.1. Algoritmul de calcul. Metoda iterativă

$$r x^{k+1/2} + A(x^k) x^{k+1/2} = r x^k - \Phi x^k$$

$$r x^{k+1} + \Phi x^{k+1} = r x^{k+1/2} - A(x^k) x^{k+1/2}$$

comportă pentru rezolvarea primei ecuații, rezolvarea unui sistem liniar cu matricea $rI + A(x^k)$ și termenii liberi $rx^k - \Phi x^k$, iar pentru cea de-a doua ecuație rezolvarea unui sistem neliniar, la fiecare pas de iterație. Pentru ecuațiile neliniare de forma 2.14

oarecare, algoritmul de calcul necesită o procedură specială - SISTEM (§3.1.2) sau utilizarea subprogramelor corespunzătoare din biblioteca matematică (REZØL, MREZØL, etc., în cazul sistemului FELIX) pentru rezolvarea sistemului liniar. Cea de-a doua ecuaţie 2.12 scrisă sub forma

$$r x^{k+1} + \Phi x^{k+1} - T = 0 \quad \text{unde}$$

$$T = \left[rI - A(x^k) \right] x^{k+1/2}$$

comportă rezolvarea a n ecuaţii cu o singură necunoscută

(3.4) $$r x_i^{k+1} + \Phi_i x_i^{k+1} - T_i = 0 \quad i = \overline{1,n} \, ,$$

pentru care putem aplica una din metodele cunoscute (Newton, coardei, secantei etc.). Vom trata în continuare cazul general, cazul ecuaţiilor cu diferenţe corespunzătoare problemei (1.2) şi (1.7).

<u>Cazul general</u>. Dacă $\Phi_i \in C^2(\mathbb{R})$ şi $\partial \Phi_i / \partial x_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, cele n ecuaţii (3.4) pot fi rezolvate folosind metoda secantei, pornind cu valoarea iniţială x_i^k (x_i^{k+1} se va afla în apropierea acesteia). Principalele etape de calcul sînt următoarele :

Etapa 1. Se atribuie lui X - iteraţia curentă (x^k) valoarea x^0 ;

Etapa 2. Se generează matricea $A(x^k)$ şi Φx^k utilizînd valoarea X ;

Etapa 3. Se rezolvă sistemul liniar $A1 x^{k+1/2} = B$, cu $A1 = rI + A(x^k)$ şi $B = rx^k - \Phi x^k$ utilizînd subrutina SISTEM (§3.1.2). In B vom obţine $x^{k+1/2}$.

Etapa 4. Se rezolvă cu metoda secantei fiecare din cele n ecuaţii (3.4) pentru a obţine x_i^{k+1}, $i = \overline{1,n}$. Salvînd în prealabil pe X în Y, noua iteraţie x^{k+1} va fi păstrată tot în X.

Etapa 5. Se compară vechea iteraţie Y cu noua iteraţie X ; dacă $\| X-Y \| < \varepsilon$ procesul de calcul se opreşte ; în caz contrar se continuă cu etapa a doua.

<u>Cazul ecuaţiilor cu diferenţe 1.4</u>. Vom considera ecuaţia sub

forma $Ax + \Phi x = 0$ unde

$$(3.5)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi x = h^2 \begin{pmatrix} f(t_1,x_1)-\alpha/h^2 \\ f(t_2,x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(t_{n-1},x_{n-1}) \\ f(t_n,x_n)-\beta/h^2 \end{pmatrix}$$

A este Lipschitz continuu şi strict monoton iar Φ este continuu şi monoton [30] . Vom rezolva sistemul cu metoda direcţiilor alternate după algoritmul descris la cazul general.

Cazul ecuaţiilor cu diferenţe 1.11. Considerăm ecuaţia (1.11) sub forma $A(x)x + \Phi x = 0$ cu

$$(3.6)\quad A(x) = \begin{pmatrix} 2+h^2 a(x_1) & -1 & & & 0 \\ -1 & 2+h^2 a(x_2) & -1 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & -1 \\ 0 & & & -1 & 2+h^2 a(x_n) \end{pmatrix}$$

şi

$$(3.7)\quad \Phi x = h^2 \begin{pmatrix} f(t_1,x_1) \\ \vdots \\ f(t_n,x_n) \end{pmatrix} .$$

Vom face ipoteza că $a(x)$ este Lipschitz continuu şi $a(x) \geq 0$ $\forall$ R. Avem $A(x) = A_1 + h^2 A_2(x)$ cu A_1 şi A_2 precizate în § 2.2.2. Vom aplica metoda direcţiilor alternate (2.14). Pentru convergenţa metodei este suficient să arătăm că $A(x)$ este continuu Lipschitz şi strict monoton, iar Φ continuu şi monoton ; atunci existenţa soluţiei x^* a ecuaţiei de mai sus, existenţa şirului $x^{1/2}, x^1, \ldots$ şi convergenţa acestuia la x^* rezultă din teorema 2.5.

Faptul că $A(x)$ este continuu Lipschitz este evident, iar monotonia strictă a lui $A(x)$ rezultă din faptul că $A(x)$ este o matrice pozitiv definită. Intr-adevăr, întrucît cea mai mică valoare proprie a lui A_1 este $\lambda_1 = 2 - 2\cos[\pi/(n+1)]$, cea mai mică valoare proprie a lui $A(x)$ este

$$\inf_{\|x\|=1} \langle A(x)x,x \rangle \geq \lambda_1 + \frac{1}{(n+1)^2}(x_1^2 s(x_1)+\ldots+x_n^2 s(x_n)) \geq \lambda_1 .$$

Atunci

$$\langle A(x)x-A(x)y,x-y\rangle = \langle A(x)(x-y),x-y \rangle \geq \lambda_1 \|x-y\|^2.$$

Să presupunem că f este continuu diferențiabilă pe $[0,1] \times \mathbb{R}^1$ și că $f_u(t,u) \geq 0$, $\forall (t,u) \in [0,1] \times \mathbb{R}^1$. Atunci este evident că Φ este funcție continuă pe $\mathbb{R}^n$. Derivata Fréchet a lui Φ este dată de

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} h^2 f_{x_1}(t_1,x_1) & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & h^2 f_{x_n}(t_n,x_n) \end{pmatrix}$$

și este evident o matrice semipozitiv definită. Prin urmare

$$\langle \Phi y - \Phi x, y-x \rangle = \langle \int_0^1 \Phi'(x + t(y-x))(y-x)dt, y-x \rangle =$$
$$= \int_0^1 \langle \Phi'(x + t(y-x))(y-x), y-x \rangle dt \geq 0,$$

adică Φ este monoton.

Pentru rezolvarea numerică, folosim algoritmul descris la cazul general.

3.2.2. <u>Scheme logice și programe FORTRAN</u>

<u>Cazul general</u>. Componentele lui Φx le vom calcula cu subprogramul de tip FUNCTION F cu parametrii formali X,I,N,T,MP reprezentînd :

X = componenta i a iterației curente ;

I = ordinul componentei ;

N = dimensiunea sistemului ; dacă sistemul se obţine prin discretizarea unor ecuaţii diferenţiale (1.4, 1.11) va preciza şi pasul de discretizare   H = 1./(N+1).

T = t_1 cînd programul este folosit la rezolvarea sistemelor obţinute prin discretizarea unor ecuaţii diferenţiale.

HP = 1./(N+1)^2 = H*H.

Generarea matricei $A(x^k)$ se face cu subrutina MATR de parametrii formali A,X,N,HP. In A vom avea matricea (de tipul nxn) pentru iteraţia curentă X.

Procedura MDA descrie metoda direcţiilor alternate care poate fi stocată într-o bibliotecă de subprograme sursă. Utilizatorul va apela această subrutină generînd în programul principal prin DATA : N,EPS (precizia de calcul), r (notat prin R) α şi β dacă sistemul se obţine prin discretizarea unei probleme la limită bilocală şi LK - numărul maxim de iteraţii. Prin subprogramele MATR şi F va preciza matricele A(x) respectiv Φ x. Subrutina MDA va furniza codul de funcţionare al programului :

KOD = 0   SOLUTIE NORMALA

KOD = 1   DEPASIREA NUMARULUI DE ITERATII.

După fiecare iteraţie se imprimă numărul curent al iteraţiei şi componentele acesteia. Prezentăm în continuare schema logică - fig.3.4. şi programul FORTRAN corespunzător.

Blocul 1. Iniţializarea pe zero a indicelui iteraţiilor K şi a codului de funcţionare al programului ; precizarea pasului de discretizare H ;

Blocul 2. Se porneşte cu iteraţia (iniţială) care are toate componentele nule ;

Blocul 3. Tipărirea indicelui iteraţiilor şi a componentelor iteraţiei curente X ;

Blocul 4. Generarea matricei $A(x^k)$ utilizînd iteraţia curentă X cu subrutina MATR ;

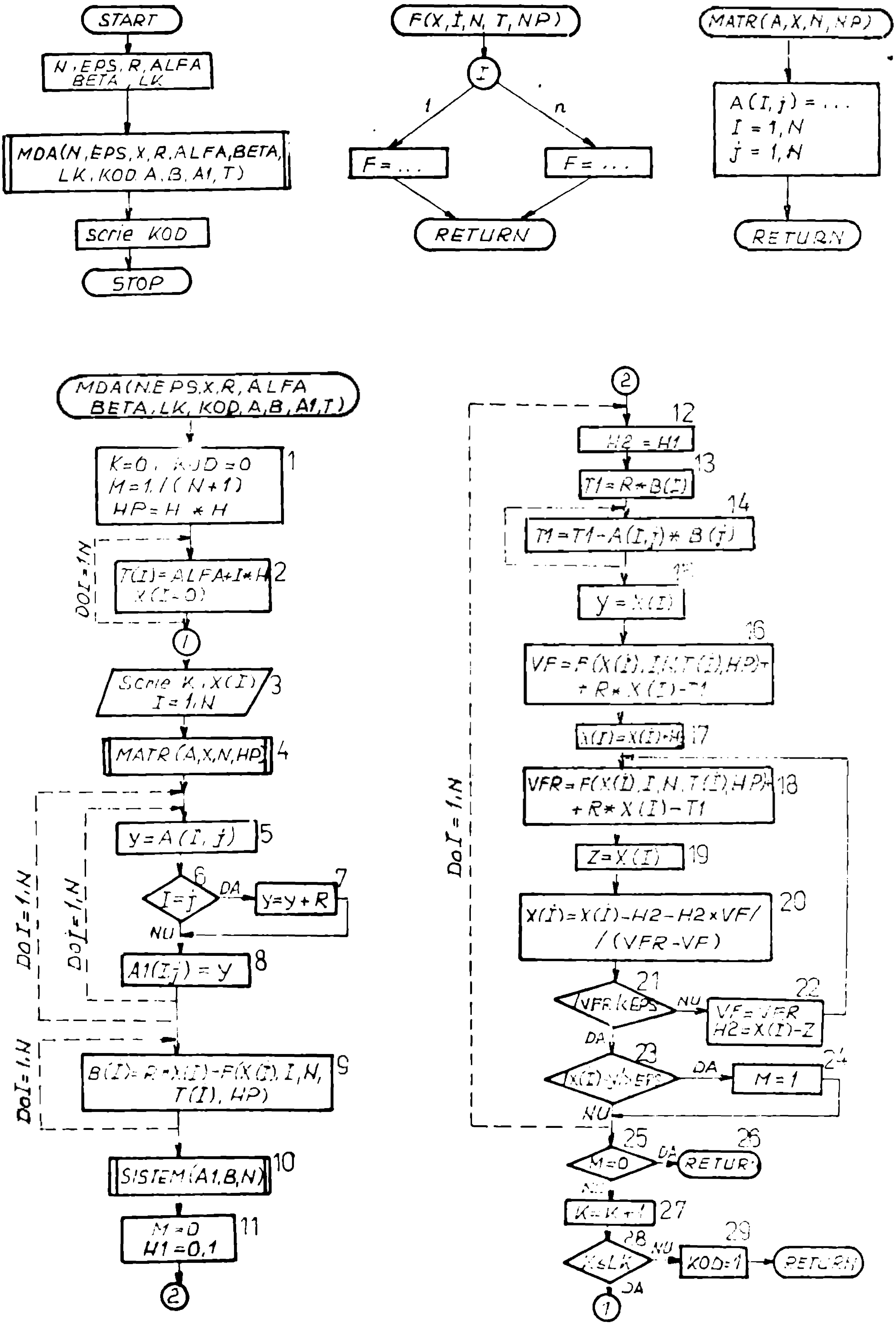

START
N, EPS, R, ALFA BETA, LK
MDA(N, EPS, X, R, ALFA, BETA, LK, KOD, A, B, A1, T)
Scrie KOD
STOP
F(X, I, N, T, NP)
I
1
n
F = ...
F = ...
RETURN
MATR(A, X, N, NP)
A(I, j) = ...
I = 1, N
j = 1, N
RETURN
MDA(N, EPS, X, R, ALFA BETA, LK, KOD, A, B, A1, T)
1
M=1./(N+1)
HP=H * H
DO I=1,N
2
1
Scrie K, X(I) I=1,N
3
MATR(A,X,N,HP)
4
Do I=1,N
Do j=1,N
y=A(I, j)
5
6
I=j
DA
y=y+R
7
NU
A1(I,j) = y
8
Do I=1,N
9
T(I), HP)
SISTEM(A1,B,N)
10
M=0
H1=0,1
11
2
2
12
H2 = H1
13
14
y = X(I)
16
17
VFR=F(X(I),I,N,T(I),HP)+
+R*X(I)-T1
18
Z=X(I)
19
X(I)=X(I)-H2-H2×VF/
/(VFR-VF)
20
21
NU
22
H2=X(I)-Z
DA
23
DA
M=1
24
NU
Do I=1,N
25
M=0
DA
26
K=K+1
27
28
NU
KOD=1
29
DA
1

Fig.3.4.

Blocurile 5,6,7,8. Calculul elementelor matricei $A_1(x) = rI + A(x^k)$;

Blocul 9. Se generează $B = rx^k - \Phi x^k$ utilizînd iterația curentă, cu subprogramul F.

Blocul 1o. Se rezolvă sistemul liniar $A_1 x^{k+1/2} = B$ folosind subrutina SISTEM; în zona B vom obține $x^{k+1/2}$.

Blocurile 11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22. Rezolvarea sistemului neliniar. Pentru fiecare din cele n ecuații (3.4) se utilizează metoda secantei. Se obține x^{k+1}.

Blocurile 23,24,25,26. Efectuarea testului $\| x^{k+1} - x^k \| = \| X-Y \| \approx 0$ (s-a considerat norma max și constanta EPS a programului), oprirea calculelor (blocul 26) dacă testul este verificat.

Blocurile 27,28,29. Actualizarea indicelui iterațiilor, limitarea valorii acesteia la LK și fixarea codului pe 1 în caz de depășire.

```
      DIMENSIØN X(6),B(6),A(6,6),A1(6,6),T(6)
      DATA N,EPS,R,ALFA,BETA,LK/6,0.0001,2.,0.,0.,300/
      CALL MDA(N,EPS,X,R,ALFA,BETA,LK,KØD,A,B,A1,T)
      PRINT 1,KØD
    1 FØRMAT(10X,'KØD=',I1)
      STØP
      END
C METODA DIRECTIILOR ALTERNATE
      SUBRØUTINE MDA(N,EPS,X,R,ALFA,BETA,LK,KØD,A,B,A1,T)
      DIMENSIØN X(N),B(N),A(N,N),A1(N,N),T(N)
      K=0
      KØD=0
      H=1./(N+1)
      HP=H*H
      DØ 20 I=1,N
      T(I)=ALFA+I*H
   20 X(I)=0.
      PRINT 2
    2 FØRMAT(1X,'ITERATIA',10X,'SØLUTIA')
```

```
 1 PRINT 3,K,(X(I),I=1,N)
 3 FØRMAT(1X,I3,6X,(10F12.6))
   CALL MATR(A,X,N,MP)
   DØ 4 I=1,N
   DØ 4 J=1,N
   Y=A(I,J)
   IF(I.EQ.J)Y=Y+R
 4 A1(I,J)=Y
   DØ 5 I=1,N
 5 B(I)=R*X(I)-F(X(I),I,N,T(I),HP)
   CALL SISTEM(A1,B,N)
   M=0
   H1=0.1
   DØ 6 I=1,N
   H2=H1
   T1=R*B(I)
   DØ 7 J=1,N
 7 T1=T1-A(I,J)*B(J)
   Y=X(I)
   VF=F(X(I),I,N,T(I),MP)
   VF=VF+R*X(I)-T1
   X(I)=X(I)+H2
11 VFR=F(X(I),I,N,T(I),HP)+R*X(I)-T1
   Z=X(I)
   X(I)=X(I)-H2-H2*VF/(VFR-VF)
   IF(ABS(VFR).LT.EPS)GØ TØ 10
   VF=VFR
   H2=X(I)-Z
   GØTØ 11
10 IF(ABS(X(I)-Y).GT.EPS)M=1
 6 CØNTINUE
   IF(M.EQ.0)STØP
   K=K+1
   IF(K.LE.LK)GØ TØ 1
   KØD=1
   RETURN
   END
C PRECIZAREA FUNCTIEI Φ:
   FUNCTIØN F(X,I,N,T,HP)
   F=-HP
   RETURN
```

```
C MATRICEA A(X)
      SUBRØUTINE MATR(A,X,N,HP)
      DIMENSIØN A(N,N),X(N)
      DØ 1 I=1,N
      DØ 1 J=1,N
    1 A(I,J)=0
      A(1,1)=2+HP*SIN(X(1))
      A(N,N)=2+HP*SIN(X(N))
      A(1,2)= -1
      A(N,N-1)= -1
      L=N-1
      DØ 2 I=2,L
      A(I,I)=2+HP*SIN(X(I))
      A(I,I-1)= -1
    2 A(I,I+1)= -1
      RETURN
      END
C REZØLVAREA SISTEMULUI LINIAR
      SUBRØUTINE SISTEM(A,B,N)
      DIMENSIØN A(N,N),B(N)
      EPS=1.E-8
      K1=N-1
      DØ 10 K=1,K1
      AM=0
      DØ 11 I=K,N
      IF(ABS(A(I,K)).LE.AM)GØ TØ 11
      AM=ABS(A(I,K))
      IO=I
   11 CONTINUE
      IF(AM.GT.EPS)GØ TØ 20
   22 WRITE(108,21)
   21 FORMAT(15X,'SISTEM LINIAR INCØMPATIBIL')
      STØP
   20 DØ 12 J=K,N
      X=A(K,J)
      A(K,J)=A(IO,J)
   12 A(IO,J)=X
      X=B(K)
      B(K)=B(IO)
      B(IO)=X
      K2=K+1
      DØ 13 I=K2,N
```

```
      X=A(I,K)/A(K,K)
      DØ 14 J=K,N
   14 A(I,J)=A(I,J)-A(K,J)*X
   13 B(I)=B(I)-B(K)*X
   10 CØNTINUE
      IF(ABS(A(N,N).LT.EPS)GØ TØ 22
      B(N)=B(N)/A(N,N)
      K=N-I
   23 K1=K+1
      DØ 15 J=K1,N
   15 B(K)=B(K)-A(K,J)*B(J)
      B(K)=B(K)/A(K,K)
      K=K-I
      IF(K.GE.1)GØ TØ 23
      RETURN
      END
```

Am considerat ecuaţia $A(x)x + \Phi x = o$ cu

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2+\sin x_1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2+\sin x_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2+\sin x_n \end{pmatrix}, \quad \Phi x = h^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pentru $n = 6$, $h^2 = 1./(n+1)^2$, după 27 iteraţii s-a obţinut soluţia (LISTING 5)

$x = (0.060412,\ 0.100537,\ 0.120544,\ 0.120544,\ 0.100537, 0.060412)$.

<u>Cazul ecuaţiilor cu diferenţe 1.4</u>. Fie ecuaţia

$$u'' = u^3 \qquad u \in \mathbb{R}$$
$$u(o) = o$$
$$u(1) = 1.$$

A şi Φx vor fi cei precizaţi de (3.5) unde $f(t,u) = u^3$.
Pentru compararea rezultatelor obţinute prin această metodă, cu cele obţinute prin metoda iteraţiilor simple, am luat, în subrutina MDA prezentată la cazul general, iteraţia iniţială - iteraţia de componente $x_i = (\beta - \alpha)t_i + \alpha$, $i = \overline{1,n}$. Ciclul de etichetă 20 din această subrutină va deveni :

```
      DØ 20 I=1,N
      T(I)=ALFA+I*H
   20 X(I)=(BETA-ALFA)*T(I)+ALFA
```

Cu EPS=0.0001, r = 2, n = 6, α = 0, β = 1, A şi Φ_x cei precizaţi mai sus, structura programului este următoarea :

```
      DIMENSIØN X(6),B(6),A(6,6),A1(6,6),T(6)
      DATA N,EPS,R,ALFA,BETA,LK/6,0.0001,2.,0.,1.,300/
      CALL MDA(N,EPS,X,R,ALFA,BETA,LK,KØD,A,B,A1,T)
      PRINT 1,KØD
    1 FORMAT(10X,'KØD=',I1)
      STØP
      END
C PRECIZAM FUNCTIA F(T,X)
      FUNCTIØN F(X,I,N,T,HP)
      IF(I.EQ.N)GØ TØ 1
      F=HP*X**3
      RETURN
    1 F=HP*X**3-1
      RETURN
      END
C MATRICEA A
      SUBRØUTINE MATR(A,X,N,HP)
      DIMENSIØN A(N,N),X(N)
      DØ 1 I=1,N
      DØ 1 J=1,N
    1 A(I,J)=0
      A(1,1)=2
      A(N,N)=2
      A(1,2)= -1
      A(N,N-1)= -1
      L=N-1
      DØ 2 I=2,L
      A(I,I)=2
      A(I,I-1)= -1
    2 A(I,I+1)= -1
      RETURN
      END
C METØDA DIRECTIILØR ALTERNATE
      SUBRØUTINE MDA(N,EPS,X,R,ALFA,BETA,LK,KØD,A,B,A1,T)
      .
      .
      .
```

```
      RETURN
      END
C REZOLVAREA SISTEMULUI LINIAR
      SUBROUTINE SISTEM(A,B,N)
      :
      RETURN
      END
```

După 18 iterații (LISTING 6) am obținut soluția

$x = (0.106076,\ 0.273659,\ 0.410831,\ 0.549320,\ 0.691090, 0.839531)$

<u>Cazul ecuațiilor cu diferențe 1.11</u>. Algoritmul de calcul descris în figura 3.4 pentru rezolvarea ecuației cu diferențe (1.11) (corespunzătoare ecuației 1.10) scrisă sub forma $A(x)x + \Phi x = 0$, cu $A(x)$ și Φx precizați în (3.6) respectiv (3.7) pentru $a(x) = \sin^2 x$, $f(t,x) = -1$, luînd pentru EPS= 0.0001, N = 6, R = 2, ALFA=BETA=0, determină următorul program FORTRAN:

```
      DIMENSIØN X(6),B(6),A(6,6),A1(6,6),T(6)
      DATA N,EPS,R,ALFA,BETA,LK/6,0.0001,2.,0.,0.,300/
      CALL MDA(N,EPS,X,R,ALFA,BETA,LK,KØD,A,B,A1,T)
      PRINT 1,KØD
    1 FORMAT(10X,'KØD=',I1)
      STØP
      END
C FUNCTIA F(T,X)
      FUNCTIØN F(X,I,N,T,HP)
      F= -HP
      RETURN
      END
C MATRICEA A(X)
      SUBRØUTINE MATR(A,X,N,HP)
      DIMENSIØN A(N,N),X(N)
      DØ 1 I=1,N
      DØ 1 J=1,N
    1 A(I,J)=0
      A(I,1)=2+HP*SIN(X(1))**2
      A(N,N)=2+HP*SIN(X(N))**2
      A(1,2)= -1
      A(N,N-1)= -1
      I=N-1
```

```
      DØ 2 I=2,L
      A(I,I)=2+EP*SIN(X(I))**2
      A(I,I-1)= -1
    2 A(I,I+1)= -1
      RETURN
      END
C METØDA DIRECTIILØR ALTERNATE
      SUBRØUTINE EDA(N,EPS,X,R,ALFA,BETA,LX,KØD,A,B,A1,T)
      :
      RETURN
      END
C REZØLVAREA SISTEMULUI LINIAR
      SUBRØUTINE SISTEM(A,B,N)
      :
      RETURN
      END
```

În 28 iteraţii se obţine soluţia (LISTING 7) :

$x = (0.060951,\ 0.101540,\ 0.121817,\ 0.121817,\ 0.101540,\ 0.060951)$

3.5. METODA LUI FRIDMAN

În acest paragraf vom prezenta algoritmul de calcul pentru metoda 2.34 şi programul FORTRAN corespunzător. Subrutina ce descrie metoda lui Fridman este astfel organizată încît ea poate fi stocată într-o bibliotecă sursă. Cel ce doreşte să utilizeze metoda lui Fridman (pentru rezolvarea sistemelor neliniare) va trebui să precizeze sistemul $Fx = 0$, derivata Fréchet a lui F şi să apeleze subrutina FRIDMAN [58].

3.5.1. <u>Algoritmul de calcul</u>. Considerăm ecuaţia $Fx = 0$ cu $F : D \subset R^n \to R^n$, F operator neliniar, diferenţiabil Fréchet pe D. Vom utiliza norma euclidiană $\|\cdot\|_2$ pe spaţiul R^n şi norma de aplicaţie liniară corespunzătoare pe $L(R^n)$. În condiţiile teoremei 2.10 (în care evident se consideră norma euclidiană) şirul 2.34

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\|Fx^k\|^2}{\|F'(x^k)Fx^k\|^2} F'(x^k)^T Fx^k$$

converge la soluţia x^* a ecuaţiei $Fx = 0$. Am notat cu A^T transpusa unei matrici A. Distingem următoarele etape principale de calcul.

Etapa 1. Se atribuie lui X - iteraţia curentă x^k, valoarea x^0 ;

Etapa 2. Se calculează $\|Fx^k\|^2$. Dacă $\|Fx^k\|^2 \approx 0$ procesul de calcul se opreşte ; în caz contrar se continuă cu etapa 3.

Etapa 3. Se calculează $F'(x^k)^T Fx^k$;

Etapa 4. Se calculează $\|F'(x^k)^T Fx^k\|^2$;

Etapa 5. Dacă la etapa 4 se obţine zero, sau dacă se depăşeşte numărul de iteraţii (propus), procesul de calcul se opreşte ; în caz contrar se calculează iteraţia următoare tot în X. Se reiau operaţiile cu etapa 2.

3.3.2. Schema logică şi programul FORTRAN. La fiecare pas de iteraţie cu metoda 2.34 avem nevoie de diferenţiala Fréchet $F'(x^k) \in L(R^n)$. Dacă notăm cu $f_1, f_2, \ldots, f_n$ componentele lui F atunci

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Calculul fiecărui element al derivatei Fréchet îl vom efectua cu subprogramul FUNCTION DIF de parametrii formali X,I,J,N :

X = tablou de dimensiune n în care vom avea iteraţia curentă x^k ;

I = indicele de linie al elementului derivatei Fréchet, calculată pentru X ;

J = indicele de coloană al aceluiaşi element ;

N = dimensiunea n a sistemului.

Calculul valorii funcţiei f_i îl vom realiza cu subprogramul

FUNCTION F de parametrii X,I,N a căror semnificație am prezentat-o mai sus cu precizarea că aici I specifică rangul componentei funcției F. După apel în F vom avea valoarea funcției f_i pentru necunoscutele x_i, $i = \overline{1,n}$. Prima instrucție executabilă a subprogramului este un GØ TØ calculat de forma

GØ TØ(1,2,...,N),I

unde 1,2,...,N sînt etichete în subprogram corespunzătoare funcțiilor $f_1, f_2, \ldots, f_N$.

Produsul $F'(x^k)^T Fx^k$ îl vom obține în PR, tablou de dimensiune N al subrutinei FRIDMAN. Această subrutină de parametrii formali N,EPS,LK,X,KØD,PR descrie metoda lui Fridman, al cărui algoritm de rezolvare îl prezentăm în figura 3.5. Terminarea programului este condiționată de îndeplinirea condiției $\|Fx^k\|^2 \leq$ EPS, EPS fiind o constantă a programului, în exemplul considerat EPS = = 1.E-4. Subrutina furnizează prin parametrul KØD, codul de funcționare al programului :

KØD = 0 SØLUTIE NØRMALĂ

KØD = 1 ÎMPĂRTIRE CU ZERØ (S1=0)

KØD = 2 DEPĂSIREA NUMĂRULUI DE ITERATII LK.

Subrutina FRIDMAN poate fi stocată într-o bibliotecă sursă. Utilizatorul va precisa în programul principal dimensiunea - N a sistemului, a produsului PR - tot N, va genera prin DATA pe lîngă N , EPS și iterația inițială x^0. Prin F și DIF (după algoritmul din figura 3.5) va stabili funcția respectiv derivata Fréchet a funcției F.

Prezentăm în continuare schema logică și programul FORTRAN. Am considerat ca exemplu ecuația

$Fx = 0$ cu

$$Fx = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cos x_1 + x_2 \\ \vdots \\ \cos x_9 + x_{10} \end{pmatrix}.$$

$F'(x)$ va fi :

$$F'(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ -\sin x_1 & 1 & & & \\ & -\sin x_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -\sin x_9 & 1 \end{pmatrix}$$

Blocul 1. Inițializarea pe zero a indicelui iterațiilor K și a codului de funcționare al programului;

Blocul 2. Tipărirea indicelui iterațiilor și a componentelor iterației curente X.

Blocurile 3,4,5,6. Se calculează $\|Fx^k\|^2$. Dacă $\|Fx^k\|^2 \simeq 0$ procesul de calcul se oprește (blocul 6). S-a considerat norma max și constanta EPS a programului.

Blocurile 7,8. Calculul lui $PR = F'(x^k)^T Fx^k$;

Blocurile 9,10. Calculul normei la pătrat, pentru PR($S1 = \|PR\|^2$).

Blocurile 11,12,13,14,15,16. Se precizează codul de funcționare al programului ; oprirea calculelor dacă KØD = 1 sau KØD = 2 (blocul 16) ;

Blocurile 17,18. Actualizarea indicelui iterațiilor ; calculul iterației următoare :

```
C METØDA LUI FRIDMAN PENTRU SISTEME NELINIARE. VARIANTA 1.
      DIMENSIØN X(4),PR(4)
      DATA N,EPS,LK,X/4,1.E-4,100,0.5,-1.2,0.3,0.8/
      CALL FRIDMAN(N,EPS,LK,X,KØD,PR)
      PRINT 1,KØD
    1 FORMAT(10X,'KØD=',I1)
      STØP
      END
C PRECIZAREA ECUATIEI F(X)=0
      FUNCTIØN F(X,I,N)
      DIMENSIØN X(N)
      GØ TØ(1,2,3,4),I
    1 F=X(1)*X(1)-1
```

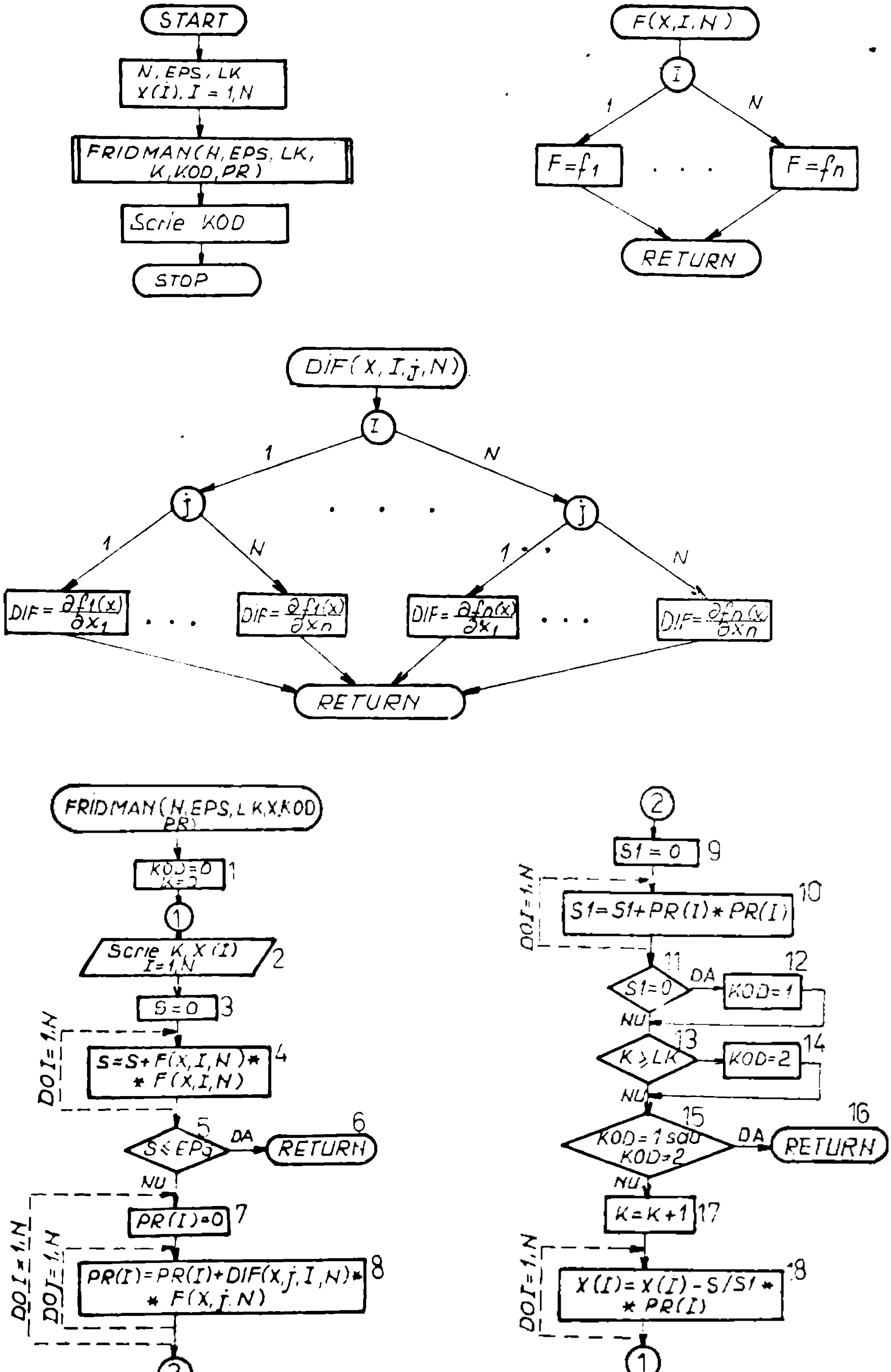

START
N, EPS, LK
X(I), I = 1,N
FRIDMAN(N, EPS, LK, K, KOD, PR)
Scrie KOD
STOP
F(X,I,N)
I
1
N
F = f1
F = fn
RETURN
DIF(X, I, j, N)
I
1
N
j
j
1
N
1
N
DIF = ∂f1(x)/∂x1
DIF = ∂f1(x)/∂xn
DIF = ∂fn(x)/∂x1
DIF = ∂fn(x)/∂xn
RETURN
FRIDMAN(N, EPS, LK, X, KOD, PR)
KOD=0
K=0
1
1
Scrie K, X(I)
I=1,N
2
S = 0
3
DO I=1,N
S = S + F(X,I,N) *
* F(X,I,N)
4
5
S ≤ EPS
DA
RETURN
6
NU
PR(I)=0
7
DO I=1,N
DO J=1,N
PR(I)=PR(I)+DIF(X,j,I,N)*
* F(X,j,N)
8
2
2
S1 = 0
9
DO I=1,N
S1=S1+PR(I)*PR(I)
10
11
S1=0
DA
KOD=1
12
NU
13
K ≥ LK
KOD=2
14
NU
15
KOD=1 sau KOD=2
DA
RETURN
16
NU
K=K+1
17
DO I=1,N
X(I)=X(I)-S/S1 *
* PR(I)
18
1

Fig.3.5.

```
      RETURN
    2 F=X(1)*X(3)+1
      RETURN
    3 F=X(1)+X(2)+SIN(X(3))
      RETURN
    4 F=CØS(X(3))-X(4)**2
      RETURN
      END
C DERIVATA FRECHET
      FUNCTIØN DIF(X,I,J,N)
      DIMENSIØN X(N)
      GO TØ(1,2,3,4),I
    1 GØ TØ(11,12,13,14),J
    2 GØ TØ(21,22,23,24),J
    3 GØ TØ(31,32,33,34),J
    4 GØ TØ(41,42,43,44),J
   11 DIF=2*X(1)
      RETURN
   12 DIF=0.
      RETURN
   13 DIF=0
      RETURN
   14 DIF=0.
      RETURN
   21 DIF=X(3)
      RETURN
   22 DIF=0.
      RETURN
   23 DIF=X(1)
      RETURN
   24 DIF=0.
      RETURN
   31 DIF=1.
      RETURN
   32 DIF=1.
      RETURN
   33 DIF=CØS(X(3))
      RETURN
   34 DIF=0.
      RETURN
   41 DIF=0.
```

```
      RETURN
   42 DIF=0.
      RETURN
   43 DIF= -SIN(X(3))
      RETURN
   44 DIF= -2*X(4)
      RETURN
      END
C METODA LUI FRIMAN
      SUBRØUTINE FRIMAN(N,EPS,LK,X,KØD,PR)
      DIMENSIØN X(N),PR(N)
C
C 1.  N=DIMENSIUNEA SISTEMULUI
C 2.  EPS=PRECIZIA DE CALCUL
C 3.  LK=LIMITA MAXIMĂ A NR.DE ITERAŢII
C 4.  X=TABLØU DE DIMENSIUNEA N IN CARE AVEM ITERATIA CUREN
C     TA(INITIAL AICI VA FI XO GENERAT PRIN DATA)
C 5.  KØD=CØD DE EROARE
C         KØD=0. SOLUTIE NORMALĂ
C
C         KØD=1 IMPARTIRE CU ZERØ(S1=3)
C         KØD=2 DEPĂSIREA NUMĂRULUI DE ITERATII
C
          KØD=0.
          K=0
          PRINT 2
        2 FØRMAT(1X,'ITERATIA',10X,'SOLUTIA')
        1 PRINT 3,K,(X(I),I=1,N)
        3 FØRMAT(1X,I2,6X,(10F12.6))
          S=0.
          DØ 7I=1,N
        7 S=S+F(X,I,N)*F(X,I,N)
          IF(S.LE.EPS)RETURN
          DØ 6 I=1,N
          PR(I)=0.
          DØ 6 J=1,N
        6 PR(I)=PR(I)+DIF(X,J,I,N)*F(X,J,N)
          S1=0.
          DØ 8 I=1,N
        8 S1=S1+PR(I)*PR(I)
          IF(S1.EQ.0)KØD=1
          IF(K.GE.LK)KØD=2
```

```
      IF(KØD.EQ.0.OR.KØD.EQ.2)RETURN
      K=K+1
      DØ 9 I=1,N
    9 X(I)=X(I)-S/S1*PR(I)
      GØ TØ 1
      END
```

VARIANTA 1, clasică, pentru metoda lui Fridman, prezentată mai sus presupune calculul valorii lui $f_i(x)$ şi al $\partial f_i / \partial x_j$ în momentul în care se solicită valoarea acestora pentru x^k. Deci nu se generează în memoria centrală valorile tuturor componentelor lui F şi ale tuturor componentelor derivatei Fréchet în x^k. Totuşi numărul mare de instrucţiuni folosit pentru descrierea (precizarea) lor, reduce în parte acest avantaj, întrucît este descrie calculul şi pentru componentele nule ale derivatei Fréchet.

In cazul matricelor rare de dimensiuni mari, schema de memorare standard şi chiar tehnica prezentată în Varianta 1, devin ineficiente. In acest caz este indicat să se memoreze numai elementele nenule, salvînd astfel memoria şi timp de calcul. Intrucît zona de memorare a matricei nu va fi identică cu matricea originală, este necesar ca tehnicile de memorare să încorporeze pe lîngă elementele nenule şi mijloace de identificare a poziţiilor acestor elemente în matrice.

Se cunosc mai multe tehnici de memorare a matricelor rare [3]. Pentru metoda lui Fridman şi metoda Gradientului (§3.4.2), cînd derivata Fréchet este o matrice rară am folosit memorarea compactă aleatoare [58]. Memorarea compactă aleatoare constă în utilizarea unei zone primare, VALA, conţinînd numai elementele nenule ale matricei şi a două zone secundare conţinînd indicii de linie, ILIN şi de coloană, ICOL, ai elementelor nenule. Deoarece fiecare element al matricei, nenul, este identificat individual, este posibil ca matricea să fie memorată în ordine aleatoare. Avantajele memorării compact aleatoare constau în faptul că noi elemente nenule ale matricei pot fi adăugate la afîrşitul zonelor de memorare fără a perturba celelalte elemente, precum şi o manevrabilitate rapidă a datelor.

In cazul matricelor simetrice această schemă de memorare se poate simplifica prin memorarea numai a elementelor de deasupra diagonalei principale, utilizînd zonele VALA, ILIN şi ICOL precum şi a elementelor diagonale într-o zonă secundară DIAG.

Numărul total de cuvinte necesar memorării unei matrice rare A (m,n)-dimensionale, (nesimetrice) prin intermediul celor trei zone VALA, ILIN şi ICOL este 3 m n r. Raportul dintre cerinţele de memorie a acestei scheme şi a celei standard este

$$C = 3r.$$

Raportul de memorare notat r este raportul dintre numărul de elemente şi numărul total de elemente.

Se observă că această schemă este eficientă pentru memorarea matricelor rare cu o densitate de maximum 33,3%.

In VARIANTA 3, fig.3.7, am descris metoda lui Fridman folosind memorarea compactă aleatoare (cu stocare în memoria centrală).

In VARIANTA 2, fig.3.6, pentru metoda Fridman am utilizat tehnica descrisă la Varianta 1, cu ideile de la memorarea compactă aleatoare.

Pentru exemplificare am ales sistemul neliniar

$$Fx = 0$$

cu

$$Fx = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cos x_1 + x_2 \\ \vdots \\ \cos x_9 + x_{10} \end{pmatrix}.$$

Să observăm că derivata Fréchet

$$F'(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ -\sin x_1 & 1 & & & \\ & -\sin x_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -\sin x_9 & 1 \end{pmatrix}$$

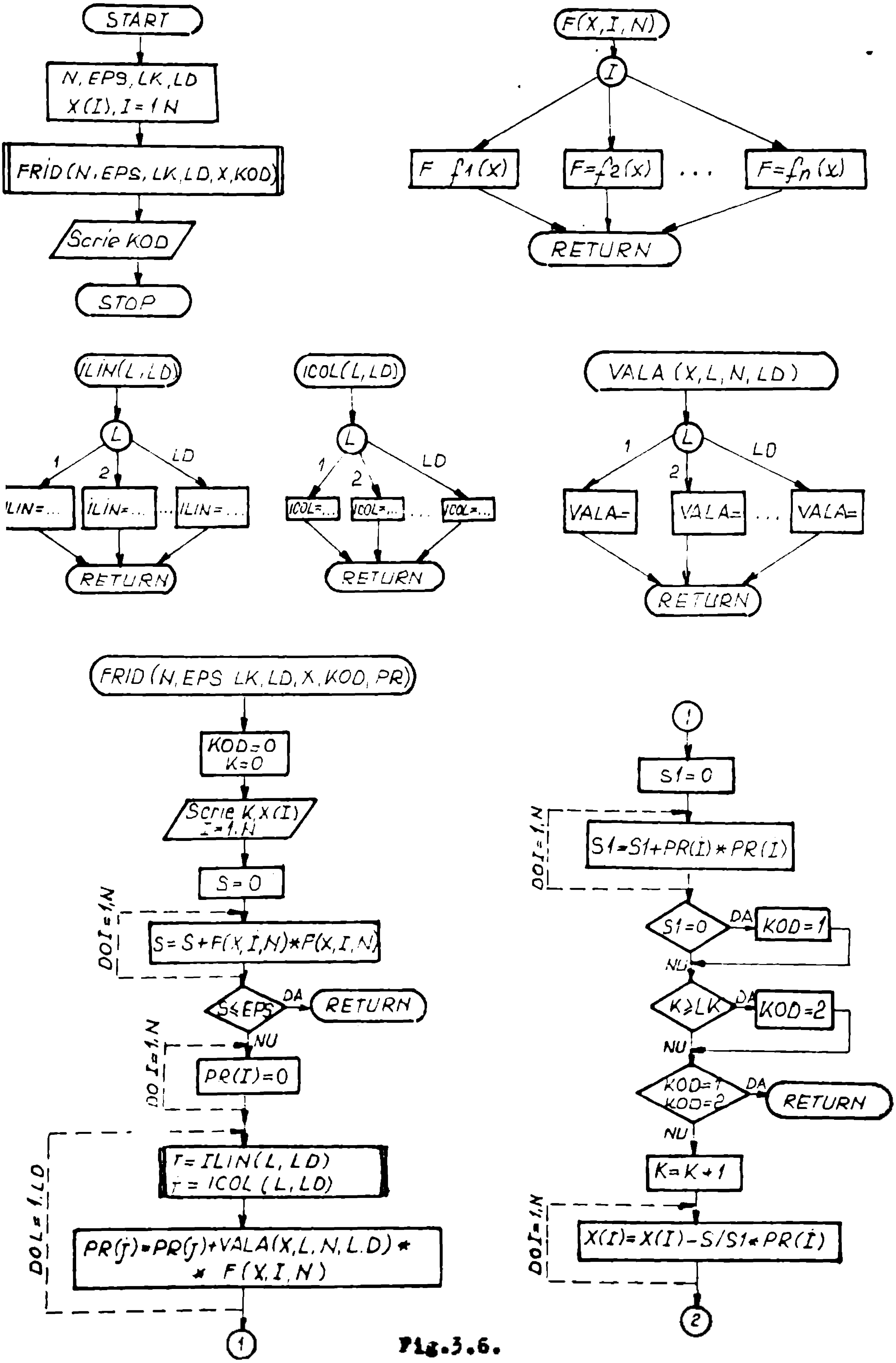

START
N, EPS, LK, LD
X(I), I=1,N
FRID(N,EPS,LK,LD,X,KOD)
Scrie KOD
STOP
F(X,I,N)
I
F=f1(x)
F=f2(x)
...
F=fn(x)
RETURN
ILIN(L,LD)
L
1
2
LD
ILIN=...
ILIN=...
ILIN=...
RETURN
ICOL(L,LD)
L
1
2
LD
ICOL=...
ICOL=...
ICOL=...
RETURN
VALA(X,L,N,LD)
L
1
2
LD
VALA=
VALA=
VALA=
RETURN
FRID(N,EPS,LK,LD,X,KOD,PR)
KOD=0
K=0
Scrie K,X(I)
I=1,N
S=0
DO I=1,N
S=S+F(X,I,N)*F(X,I,N)
S≤EPS
DA
RETURN
NU
DO I=1,N
PR(I)=0
DO L=1,LD
I=ILIN(L,LD)
J=ICOL(L,LD)
PR(J)=PR(J)+VALA(X,L,N,L.D)*
* F(X,I,N)
1
1
S1=0
DO I=1,N
S1=S1+PR(I)*PR(I)
S1=0
DA
KOD=1
NU
K≥LK
DA
KOD=2
NU
KOD=1
KOD=2
DA
RETURN
NU
K=K+1
DO I=1,N
X(I)=X(I)-S/S1*PR(I)
2

Fig.3.6.

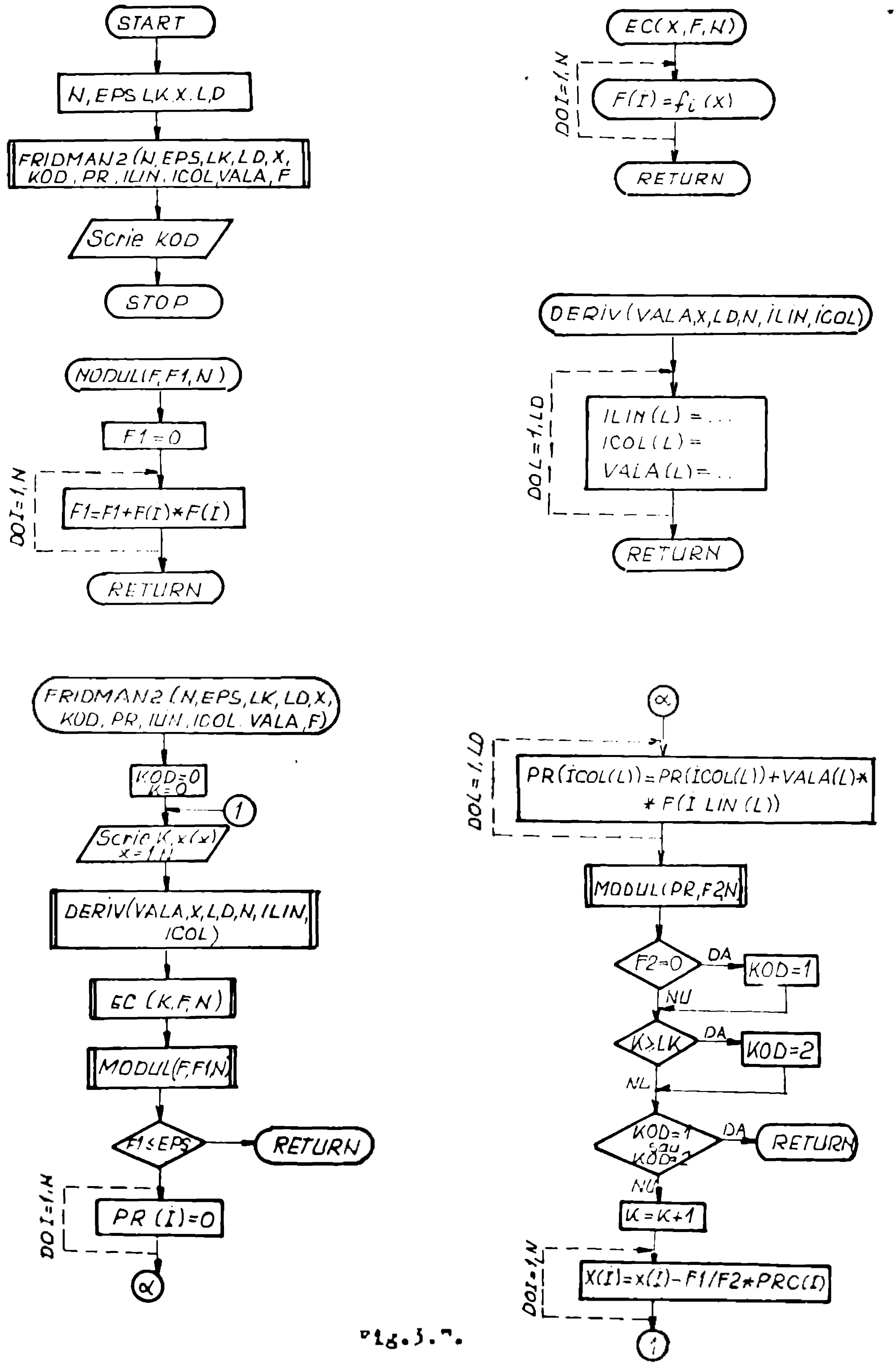

START
N, EPS LK X L D
FRIDMAN2 (N, EPS, LK, LD, X, KOD, PR, ILIN, ICOL, VALA, F
Scrie KOD
STOP
MODUL(F, F1, N)
F1=0
DO I=1,N
F1=F1+F(I)*F(I)
RETURN
FRIDMAN2 (N, EPS, LK, LD, X, KOD, PR, ILIN, ICOL, VALA, F)
KOD=0
K=0
1
Scrie K, x(x)
x=1,N
DERIV(VALA, X, L, D, N, ILIN, ICOL)
EC (K, F, N)
MODUL(F, F1, N)
F1≤EPS
RETURN
DO I=1,N
PR (I)=0
α
EC(X, F, N)
DO I=1,N
F(I)=fi(x)
RETURN
DERIV(VALA, X, LD, N, ILIN, ICOL)
DO L=1,LD
ILIN(L)=...
ICOL(L)=
VALA(L)=...
RETURN
α
DO L=1,LD
PR(ICOL(L))=PR(ICOL(L))+VALA(L)*
*F(I LIN(L))
MODUL(PR, F2, N)
F2=0
DA
KOD=1
NU
K>LK
DA
KOD=2
NU
KOD=1 sau KOD=2
DA
RETURN
NU
K=K+1
DO I=1,N
X(I)=x(I)-F1/F2*PRC(I)
1

Fig.3.7.

este o matrice rară și deci este indicată memorarea compactă aleatoare. Indicii de linie, coloană ai elementelor nenule ai lui $F'(x)$, elementele nenule sînt precizate în ordinea în care apar coloană după coloană.

Prezentăm programele FORTRAN pentru Varianta 2 și Varianta 3 astfel încît subrutinele FRID (Varianta 2) și FRIDMAN2 (Varianta 3), să poată fi stocate într-o bibliotecă sursă.

Pentru apelarea subrutinei FRID care descrie metoda lui FRIDMAN utilizînd tehnica descrisă la Varianta 1, cu ideile de la memorarea compactă aleatoare, utilizatorul va precisa :

- Ecuația Fx = o prin subprogramul FUNCTION F cu structura de la Varianta 1 ;

- Elementele nenule ale derivatei Fréchet prin subprogramul FUNCTION VALA de parametrii X,L,N cu

X = tablou de dimensiune n, în care se reține iterația curentă x^k ;

L = numărul de ordine al elementului nenul din derivata Fréchet (luat în considerare) ;

N = dimensiunea n a sistemului ;

- Indicii de linie ai elementelor nenule, în ordinea dată în VALA , prin subprogramul FUNCTION ILIN (L) ;

- Indicii de coloană ai elementelor nenule, în ordinea dată în VALA, prin subprogramul FUNCTION ICOL (L).

La apelarea subrutinei FRIDMAN 2, care este și cea mai indicată pentru metoda lui Fridman cînd se lucrează cu matrice rare, se va descrie :

- Ecuația Fx = o prin subprogramul FUNCTION F ;

- Derivata Fréchet prin subrutina DERIV de parametrii

VALA = tablou de dimensiune LD ce conține elementele nenule ale derivatei, LD fiind numărul de elemente nenule ale derivatei Fréchet ;

X = tablou de dimensiune n, în care se reține iterația curentă x^k ;

N = dimensiunea sistemului n ;

ILIN = tablou de dimensiune LD ; conține indicii de linie ai elementelor nenule ale derivatei, cu ordinea din VALA ;

ICØL = tablou de dimensiune LD ; conține indicii de coloană ai elementelor nenule ale derivatei, cu ordinea din VALA;

```
C METØDA LUI FRIEMAN PENTRU SISTEME NELINIARE. VARIANTA 2.
      DIMENSIØN X(10),PR(10)
      DATA N,EPS,LK,X,LD/10,1.E-3,50,10*0.3,19/
      CALL FRID(N,EPS,LK,LD,X,KØD,PR)
      PRINT 1,KØD
    1 FØRMAT(10X,'KØD=',I1)
      STØP
      END
C PRECIZAREA ECUATIEI F(X)=0.
      FUNCTIØN F(X,I,N)
      DIMENSIØN X(N)
      GØ TØ(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10),I
    1 F=X(1)
      RETURN
    2 F=CØS(X(1))+X(2)
      RETURN
    3 F=CØS(X(2))+X(3)
      RETURN
    4 F=CØS(X(3))+X(4)
      RETURN
    5 F=CØS(X(4))+X(5)
      RETURN
    6 F=CØS(X(5))+X(6)
      RETURN
    7 F=CØS(X(6))+X(7)
      RETURN
    8 F=CØS(X(7))+X(8)
      RETURN
    9 F=CØS(X(8))+X(9)
      RETURN
   10 F=CØS(X(9))+X(10)
```

```
      RETURN
      END
C ELEMENTELE NENULE ALE DERIVATEI FRECHET
      FUNCTION VALA(X,L,N)
      DIMENSION X(N)
      GO TO(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19),L
    1 VALA=1.
      RETURN
    2 VALA= -SIN(X(1))
      RETURN
    3 VALA=1.
      RETURN
    4 VALA= -SIN(X(2))
      RETURN
    5 VALA=1
      RETURN
    6 VALA= -SIN(X(3))
      RETURN
    7 VALA=1
      RETURN
    8 VALA= -SIN(X(4))
      RETURN
    9 VALA=1
      RETURN
   10 VALA= -SIN(X(5))
      RETURN
   11 VALA=1
      RETURN
   12 VALA= -SIN(X(6))
      RETURN
   13 VALA=1
      RETURN
   14 VALA= -SIN(X(7))
      RETURN
   15 VALA=1
      RETURN
   16 VALA= -SIN(X(8))
      RETURN
   17 VALA=1
      RETURN
   18 VALA= -SIN(X(9))
```

```
      RETURN
   19 VALA=1
      RETURN
      END
C INDICII DE LINIE AI ELEMENTELØR NENULE IN ØRDINEA DATĂ IN VALA.
      FUNCTIØN ILIN(I)
      GØ TØ(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19),I
    1 ILIN=1
      RETURN
    2 ILIN=2
      RETURN
    3 ILIN=2
      RETURN
    4 ILIN=3
      RETURN
    5 ILIN=3
      RETURN
    6 ILIN=4
      RETURN
    7 ILIN=4
      RETURN
    8 ILIN=5
      RETURN
    9 ILIN=5
      RETURN
   10 ILIN=6
      RETURN
   11 ILIN=6
      RETURN
   12 ILIN=7
      RETURN
   13 ILIN=7
      RETURN
   14 ILIN=8
      RETURN
   15 ILIN=8
      RETURN
   16 ILIN=9
      RETURN
   17 ILIN=9
      RETURN
   18 ILIN=10
```

```
      RETURN
   19 ILIN=10
      RETURN
      END
C INDICII DE CØLØANĂ AI ELEMENTELOR NENULE DUPĂ ØRDINEA DIN VALA.
      FUNCTION ICØL(L)
      GØ TØ(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19),L
    1 ICØL=1
      RETURN
    2 ICØL=1
      RETURN
    3 ICØL=2
      RETURN
    4 ICØL=2
      RETURN
    5 ICØL=3
      RETURN
    6 ICØL=3
      RETURN
    7 ICØL=4
      RETURN
    8 ICØL=4
      RETURN
    9 ICØL=5
      RETURN
   10 ICØL=5
      RETURN
   11 ICØL=6
      RETURN
   12 ICØL=6
      RETURN
   13 ICØL=7
      RETURN
   14 ICØL=7
      RETURN
   15 ICØL=8
      RETURN
   16 ICØL=8
      RETURN
   17 ICØL=9
      RETURN
```

```
   18 ICØL=9
      RETURN
   19 ICØL=10
      RETURN
      END
C METØDA LUI FRIDMAN
      SUBRØUTINE FRID(N,EPS,IK,LD,X,KØD,PR)
      DIMENSIØN X(N),PR(N)
      KØD=0
      K=0
      PRINT 2
    2 FØRMAT(1X,'ITERATIA',10X,'SØLUTIA')
    1 PRINT 3,K,(X(I),I=1,N)
    3 FØRMAT(1X,I2,6X,(10F12.6))
      S=0
      DØ 4 I=1,N
    4 S=S+F(X,I,N)*F(X,I,N)
      IF(S.LE.EPS)RETURN
      DØ 5 I=1,N
    5 PR(I)=0
      DØ 6 L=1,LD
      J=ICØL(L)
      I=ILIN(L)
    6 PR(J)=PR(J)+VALA(X,L,N)*F(X,I,N)
      S1=0
      DØ 7 I=1,N
    7 S1=S1+PR(I)*PR(I)
      IF(S1.EQ.0)KØD=1
      IF(K.GE.IK)KØD=2
      IF(KØD.EQ.1.OR.KØD.EQ.2)RETURN
      K=K+1
      DØ 8 I=1,N
    8 X(I)=X(I)-S/S1*PR(I)
      GØ TØ 1
      END
```

Considerînd x^0=(0.3,0.3,0.3,0.3,0.3,0.3,0.3,0.3,0.3,0.3), după 13 iterații (LISTING 9) s-a obținut soluția

x =(0.000000,-0.995968, -0.554246, -0.854521, -0.665221,-0.802156,

-0.697052, -0.785152, -0.705464, -0.769332).

```
C METØDA LUI FRIDMAN PENTRU SISTEME NELINIARE.ECA.VARIANTA 3.
      DIMENSIØN X(10),PR(10),ILIN(19),ICØL(19),VALA(19),F(10)
      DATA N,EPS,IK,X,LD/10,1.E-3,300,10*0.3,19/
      CALL FRIDMAN2(N,EPS,IK,LD,X,KØD,PR,ILIN,ICØL,VALA,F)
      PRINT 1,KØD
    1 FORMAT(10X,'KØD=',I1)
      STØP
      END
C PRECIZAREA ECUATIEI F(X)=0
      SUBRØUTINE EC(X,F,N)
      DIMENSIØN X(N),F(N)
      F(1)=X(1)
      DØ 1 I=2,N
    1 F(I)=CØS(X(I-1))+X(I)
      RETURN
      END
      SUBRØUTINE MØDUL(F,F1,N)
      DIMENSIØN F(N)
      F1=0.
      DØ 1 I=1,N
    1 F1=F1+F(I)*F(I)
      RETURN
      END
C PRECIZAREA DERIVATEI FRECHET PRIN VALA,ILIN,ICØL
      SUBROUTINE DERIV(VALA,X,LD,N,ILIN,ICØL)
      DIMENSIØN VALA(LD),X(N),ILIN(LD),ICØL(LD)
      L=1
      DØ 3 I=1,9
      ICØL(L)=I
      ILIN(L)=I
      L=L+1
      ICØL(L)=I
      ILIN(L)=I+1
      L=L+1
    3 CØNTINUE
      ICØL(19)=10
      ILIN(19)=10
      DO 1 I=1,19,2
    1 VALA(I)=1
      DO 2 I=2,18,2
      I1=I/2
```

```
    2 VALA(I)= -SIN(X(I1))
      RETURN
      END
C METODA LUI FRIDMAN
      SUBROUTINE FRIDMAN2(N,EPS,IK,LD,X,KOD,PR,ILIN,ICOL,VALA,F)
      DIMENSION X(N),PR(N,VALA(LD),ILIN(LD),ICOL(LD),F(N)
      KOD=0
      K=0
      PRINT 2
    2 FORMAT(1X,'ITERATIA',10X,'SOLUTIA')
    1 PRINT 3,K,(X(I),I=1,N)
    3 FORMAT(1X,I3,6X(10F12.6))
      CALL DERIV(VALA,X,LD,N,ILIN,ICOL)
      CALL SC(X,F,N)
      CALL MODUL(F,F1,N)
      IF(F1.LE.EPS)RETURN
      DO 4 I=1,N
    4 PR(I)=0
      DO 5 L=1,LD
    5 PR(ICOL(L))=PR(ICOL(L)+VALA(L)*F(ILIN(L))
      CALL MODUL(PR,F2,N)
      IF(F2.EQ.0)KOD=1
      IF(K.GE.IK)KOD=2
      IF(KOD.EQ.1.OR.KOD.EQ.2)RETURN
      K=K+1
      DO 6 I=1,N
      X(I)=X(I)-F1/F2*PR(I)
    6 CONTINUE
      GO TO 1
      END.
```

Am considerat aceleşi exemplu de la varianta 2, aceeaşi iteraţie iniţială şi precizie de calcul şi, după 13 iteraţii (firesc să fie astfel), am obţinut aceeaşi soluţie.

3.4. METODA GRADIENTULUI

Pentru metoda iterativă (2.21) este prezentată o subrutină FORTRAN cu numele GRADIENT, o implementare eficientă, a metodei Gradientului pentru ecuaţii de forma $Fx = o$ cu derivata Fréchet o matrice rară. Subrutina este astfel organizată încît poate fi stocată într-o bibliotecă sursă. Pentru utilizarea ei în vederea rezolvării sistemelor neliniare se va preciza sistemul $Fx = 0$ şi derivata Fréchet a lui F.

3.4.1. Algoritmul de calcul. Considerăm ecuaţia $Fx = 0$ cu $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, F operator neliniar şi $x^* \in D$ o soluţie a ecuaţiei. Presupunem că F este diferenţiabil Fréchet pe $S(x^*,r) \subset \subset D$ şi că matricea $F'(x)$ este mărginită pe $S(x^*,r)$ şi de rang n. Atunci (§ 3.4 Corolarul 1) x^* este punct de atracţie pentru iteraţia (2.21)

$$x^{k+1} = x^k - \|F'(x^k)\|^{-2} F'(x^k)^T Fx^k.$$

Alegînd ca valoare de plecare x^0 D, vom obţine o soluţie aproximativă x^k a ecuaţiei, pentru care avem $\|F(x^k)\|^2 < \varepsilon$ parcurgînd următoarele etape :

E1. Se atribuie lui X - iteraţia curentă x^k, valoarea x^0.

E2. Se calculează $\|F(x^k)\|^2$. Dacă $\|F(x^k)\|^2 \lesssim \varepsilon$ procesul de calcul se opreşte ; în caz contrar se continuă cu etapa 3 ;

E3. Se calculează $F'(x^k)^T Fx^k$;

E4. Se calculează $\|F'(x^k)\|^2$;

E5. Dacă la etapa 4 se obţine zero, sau dacă se depăşeşte numărul de iteraţii (propus), procesul de calcul se opreşte, în caz contrar se continuă cu etapa 6 ;

E6. Se calculează iteraţia următoare tot în X. Se reiau operaţiile cu E2.

3.4.2. Schema logică şi programul FORTRAN. Ca şi la metoda lui Fridman, pentru metoda 2.21, la fiecare pas de iteraţie avem nevoie de derivata Fréchet $F'(x^k) \in L(\mathbb{R}^n)$.

In § 3.3.2 am prezentat avantajele memorării compacte aleatoare pentru matricele rare. Şi pentru metoda Gradientului, am utilizat pentru stocarea derivatei Fréchet, cînd aceasta este o matrice rară, tehnica memorării compacte aleatoare utilizată la varianta 2 a metodei lui Fridman (Listing 12) cît și memorarea compactă aleatoare cu stocare în memoria centrală (Listing 11).

Vom prezenta în cele ce urmează schema logică (fig.3.8) și programul FØRTRAN, pentru metoda Gradientului, utilizînd pentru $F'(x^k)$ matrice rară, memorarea compactă aleatoare (cu stocare în memoria centrală) fiind cea mai eficientă.

Programul poate fi folosit întocmai și cînd $F'(x^k)$ nu este matrice rară, dar în această situație, memorarea compactă aleatoare nu aduce nici un avantaj în raport cu memorarea clasică.

Subrutina SC(X,F,N) calculează valoarea lui f_i pentru x^k , f_i , $i = \overline{1,n}$ fiind componentele lui F

$$Fx = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} .$$

X = tablou de o dimensiune cu n elemente ce conține iterația curentă x^k ;

N = dimensiunea n a sistemului ;

F = tablou de o dimensiune, cu componentele $f_i(x^k)$, $i = 1,n$;
Pentru calculul elementelor nenule ale derivatei Fréchet în x^k , folosim subrutina DERIV(VALA,X,LD,N,ILIN,ICØL).

VALA = conține elementele nenule ale derivatei Fréchet în x^k, iterația curentă ; este un vector cu LD elemente

X = vector cu n elemente ; iterația curentă x^k ;

LD = numărul de elemente nenule ale derivatei Fréchet ;

N = dimensiunea n a sistemului ;

ILIN = vector cu LD elemente ; conține indicii de linie ai elementelor nenule, în ordinea din VALA ;

ICØL = vector cu LD elemente ; conține indicii de coloană ai elementelor nenule, în ordinea dată în VALA ;

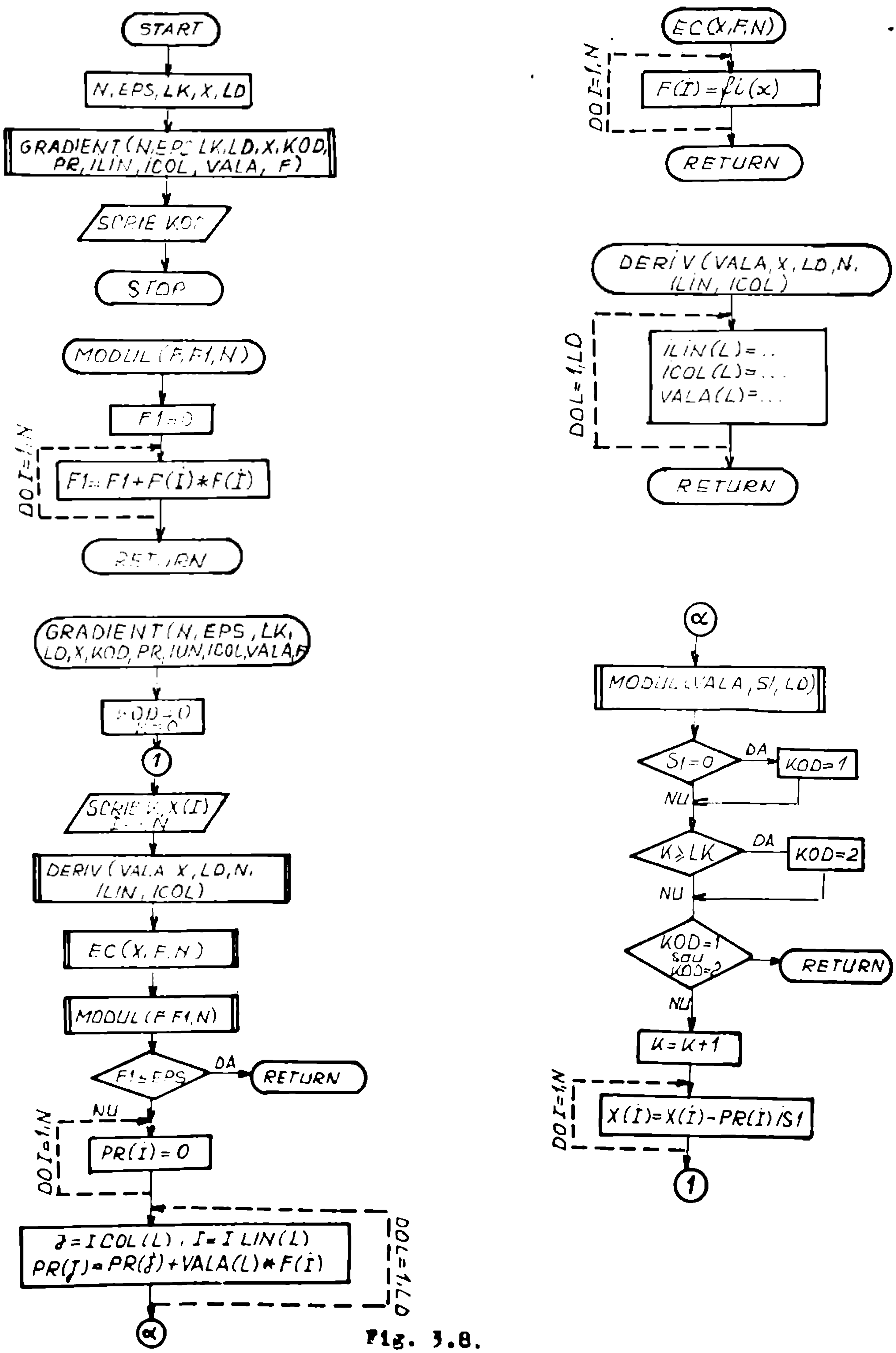

START
N, EPS, LK, X, LD
GRADIENT (N,EPS,LK,LD,X,KOD, PR,ILIN,ICOL,VALA,F)
SCRIE KOD
STOP
MODUL (F,F1,N)
F1=0
DO I=1,N
F1=F1+F(I)*F(I)
RETURN
GRADIENT (N,EPS,LK, LD,X,KOD,PR,ILIN,ICOL,VALA,F)
KOD=0
1
DERIV (VALA X,LD,N, ILIN, ICOL)
EC(X,F,N)
MODUL (F F1,N)
F1≤EPS
DA
RETURN
NU
DO I=1,N
PR(I)=0
J=ICOL(L), I=ILIN(L)
PR(J)=PR(J)+VALA(L)*F(I)
DO L=1,LD
α
EC(X,F,N)
DO I=1,N
F(I)=fi(x)
RETURN
DERIV (VALA,X,LD,N, ILIN, ICOL)
DO L=1,LD
ILIN(L)=...
ICOL(L)=...
VALA(L)=...
RETURN
α
MODUL (VALA,S1,LD)
S1=0
DA
KOD=1
NU
K≥LK
DA
KOD=2
NU
KOD=1 sau KOD=2
RETURN
NU
K=K+1
DO I=1,N
X(I)=X(I)-PR(I)/S1
1

Fig. 3.8.

Observație. Deoarece norma de aplicație liniară a unei matrici corespunzătoare normei euclidiene este dificil de calculat, se poate utiliza o normă care o majorează, de exemplu $\|A\|_{z} = (\sum a_{ij}^{2})^{1/2}$, unde a_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$ sînt elementele matricei A.

Astfel pentru $\|F'(x^{k})\|^{2}$ cu observația de mai sus și $\|F(x^{k})\|^{2}$ vom folosi subrutina MØDUL(F,F1,N) în care

F = este un vector cu n elemente, a cărui normă dorim s-o calculăm ;

F1 = conține pătratul normei vectorului F ;

N = numărul de elemente ale vectorului F ;

```
C METØDA GRADIENTULUI PENTRU SISTEME NELINIARE. MCA.
      DIMENSIØN X(10),PR(10),ILIN(19),ICØL(19),VALA(19),F(10)
      DATA N,EPS,LK,X,LD/10,1.E-3,300,10*0.3,19/
      CALL GRADIENT(N,EPS,LK,LD,X,KØD,PR,ILIN,ICØL,VALA,F)
      PRINT 1,KØD
    1 FØRMAT(10X,'KØD',I1)
      STØP
      END
C PRECIZAREA ECUATIEI F(X)=0
      SUBRØUTINE EC(X,F,N)
      DIMENSIØN X(N),F(N)
      F(1)=X(1)
      DØ 1 I=2,N
    1 F(I)=CØS(X(I-1)*X(I))
      RETURN
      END
C PRECIZAREA DERIVATEI FRECHET PRIN VALA,ILIN,ICØL
      SUBROUTINE DERIV(VALA,X,LD,N,ILIN,ICØL)
      DIMENSIØN VALA(LD),X(N),ILIN(LD),ICØL(LD)
      L=1
      DØ 3 I=1,9
      ICØL(L)=I.
      ILIN(L)=I
      L=L+1
      ICØL(L)=I
      ILIN(L)=I+1
      L=L+1
```

```
    3 CONTINUE
      ICOL(19)=10
      ILIN(19)=10
      DO 1 I=1,19,2
    1 VALA(I)=1
      DO 2 I=2,18,2
      I1=I/2
    2 VALA(I)= -SIN(X(I1))
      RETURN
      END
C CALCULUL PATRATULUI NORMEI
      SUBROUTINE MODUL(F,F1,N)
      DIMENSION F(N)
      F1=0.
      DO 1 I=1,N
    1 F1=F1+F(I)*F(I)
      RETURN
      END
C METODA GRADIENTULUI
      SUBROUTINE GRADIENT(N,EPS,LK,LD,X,KOD,PR,ILIN,ICOL,VALA,F)
      DIMENSION X(N),PR(N),VALA(LD),ILIN(LD),ICOL(LD),F(N)
      KOD=0
      K=0
      PRINT 2
    2 FORMAT(1X,'ITERATIA',10X,'SOLUTIA')
    1 PRINT 3,K,(X(I),I=1,N)
    3 FORMAT(1X,I3,6X,(10F12.6))
      CALL DERIV(VALA,X,LD,N,ILIN,ICOL)
      CALL EC(X,F,N)
      CALL MODUL(F,F1,N)
      IF(F1.LE.EPS)RETURN
      DO 4 I=1,N
    4 PR(I)=0.
      DO 7 L=1,LD
      J=ICOL(L)
      I=ILIN(L)
    7 PR(J)=PR(J)+VALA(L)*F(L)
      CALL MODUL(VALA,S1,LD)
      IF(S1.EQ.0)KOD=1
      IF(K.GE.LK)KOD=2
      IF(KOD.EQ.1.OR.KOD.EQ.2)RETURN
```

```
      K=K+1
      DØ 9 I=1,N
    9 X(I)=X(I)-PR(I)/S1
      GØ TØ 1
      END
```

In program am ales exemplul de la metoda lui Fridman, aceeaşi iteraţie iniţială, aceeaşi precizie de calcul. Este cunoscut faptul că metoda Gradientului este mai lent convergentă (avînd convergenţă liniară) decît metoda lui Fridman. De astă dată soluţia, în aceleaşi condiţii ca la Fridman, am obţinut-o în 114 iteraţii, spre deosebire de metoda lui Fridman, cînd soluţia am obţinut-o în numai 13 iteraţii.

3.5. REZOLVAREA NUMERICĂ A UNOR SISTEME DE ECUAŢII NELINIARE ÎNTÎLNITE ÎN ELECTROENERGETICĂ.

Studiul unor probleme de electroenergetică conduce adesea la rezolvarea unor sisteme de ecuaţii neliniare de forma

(3.8) $$I_p = \sum_{q=1}^{n} Y_{pq} U_q \quad \text{sau}$$

(3.9) $$S_p^* = U_p^* I_p^* \; , \quad p = 1,\dots,n$$

pentru care se cunoaşte matricea de admitanţă Y_{pq}. In plus, dacă p este nod consumator se mai cunoaşte valoarea puterii S_p şi se cere determinarea tensiunii U_p. Dacă p este nod generator se cunosc valorile $R_e(S)$ şi U_p, se cere determinarea lui U_p şi $I_m(S)$. Dacă p este nod de balansare se cunoaşte $|U_p|$ iar sistemul (3.8) permite uşor determinarea lui S_p.

Rezolvarea numerică a sistemelor de această formă, [50], constituie o parte a contractului Institutului Politehnic pe probleme de electroenergetică.

3.5.1 Algoritmul de calcul. Am analizat un asemenea sistem cu diverse metode numerice (Newton, Gauss-Seidel). Cele mai bune rezultate s-au obţinut cu o variantă a metodei Gauss-Seidel : forma pătratică a metodei Gauss-Seidel.

Prezentăm mai jos cîteva elemente ale metodei şi schema logică a programului (Fig.3.9) :

a) Pentru nodurile consumatoare scriind sistemul (3.8) sub forma

(3.10) $I_p = Y_{pp}U_p + \sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{n} Y_{pq}U_q$ şi folosind 3.9, obţinem

(3.11) $S_p^* = U_p^* Y_{pp}U_p + U_p^* \sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{n} Y_{pq}U_q$, de unde

(3.12) $U_pU_p^* = \frac{S_p^*}{Y_{pp}} - \frac{1}{Y_{pp}}\left(\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{n} Y_{pq}U_qU_p^*\right).$

Notînd

$$S_p = P_p + jQ_p \text{ , } U_p = e_p + jf_p \text{ , } Y_{pq} = G_{pq} + jB_{pq}$$

(3.13) $\frac{S_p^*}{Y_{pp}} = C_1 + jC_2$, $\frac{1}{Y_{pp}} \sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{n} Y_{pq}U_q = C_3 + jC_4$

valorile lui C_1, C_2, C_3, C_4 se pot calcula din datele cunoscute, iar relaţia (3.12) devine

(3.14) $e_p^2 + f_p^2 = C_1 + jC_2 - (C_3 + jC_4)(e_p - jf_p).$

Egalînd părţile reale, respectiv imaginare se obţine sistemul

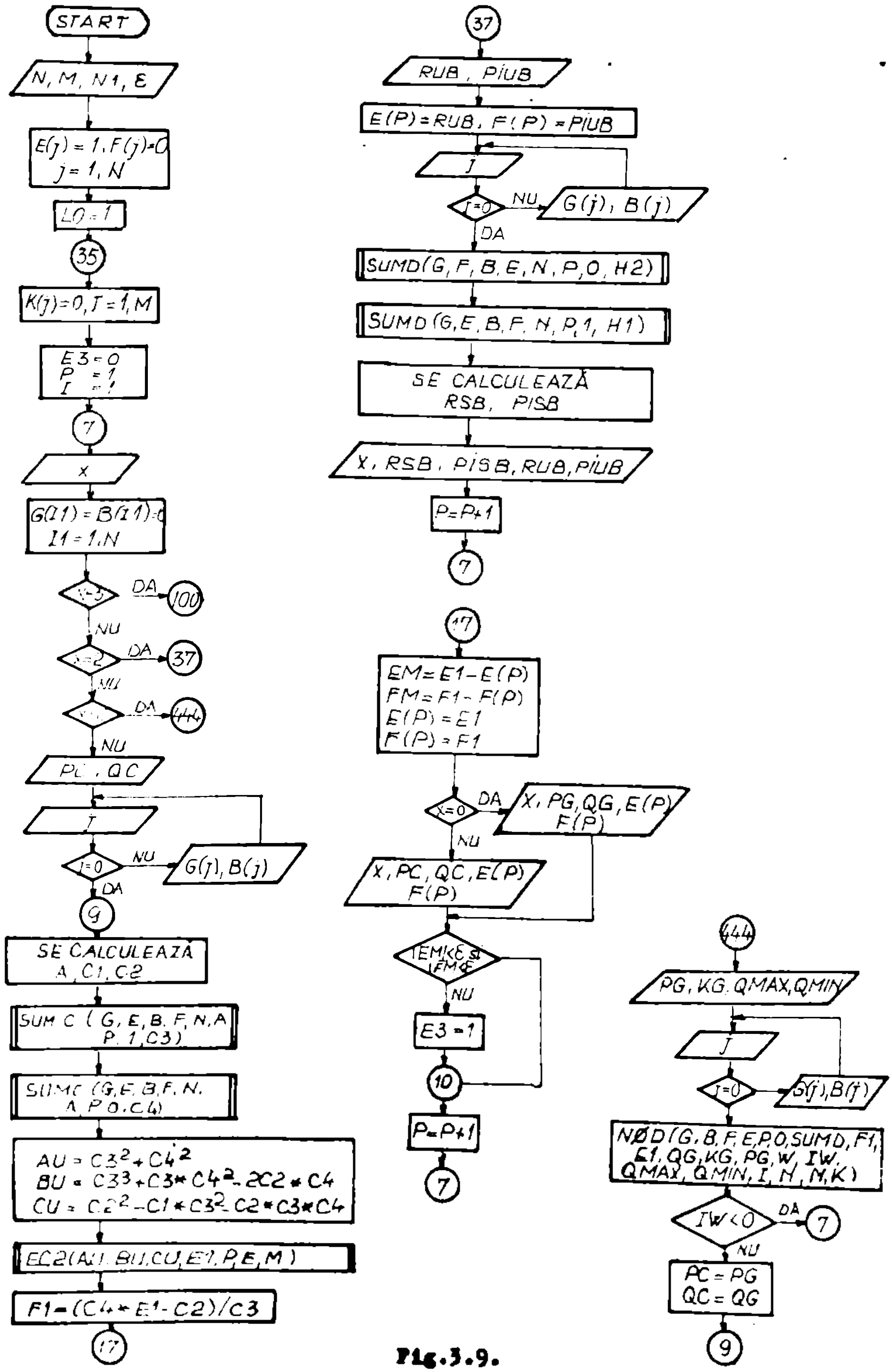
(3.15) $\begin{cases} e_p^2 + f_p^2 = C_1 - C_3e_p - C_4f_p \\ 0 = C_2 + C_3f_p - C_4e_p \end{cases}$

sau echivalent

(3.16) $\begin{cases} f_p = \frac{1}{C_3}(C_4e_p - C_2) \\ (C_3^2 + C_4^2)e_p^2 + (C_3^3 + C_3C_4^2 - 2C_2C_4)e_p + (C_2^2 - C_1C_3^2 - C_2C_3C_4) = 0. \end{cases}$

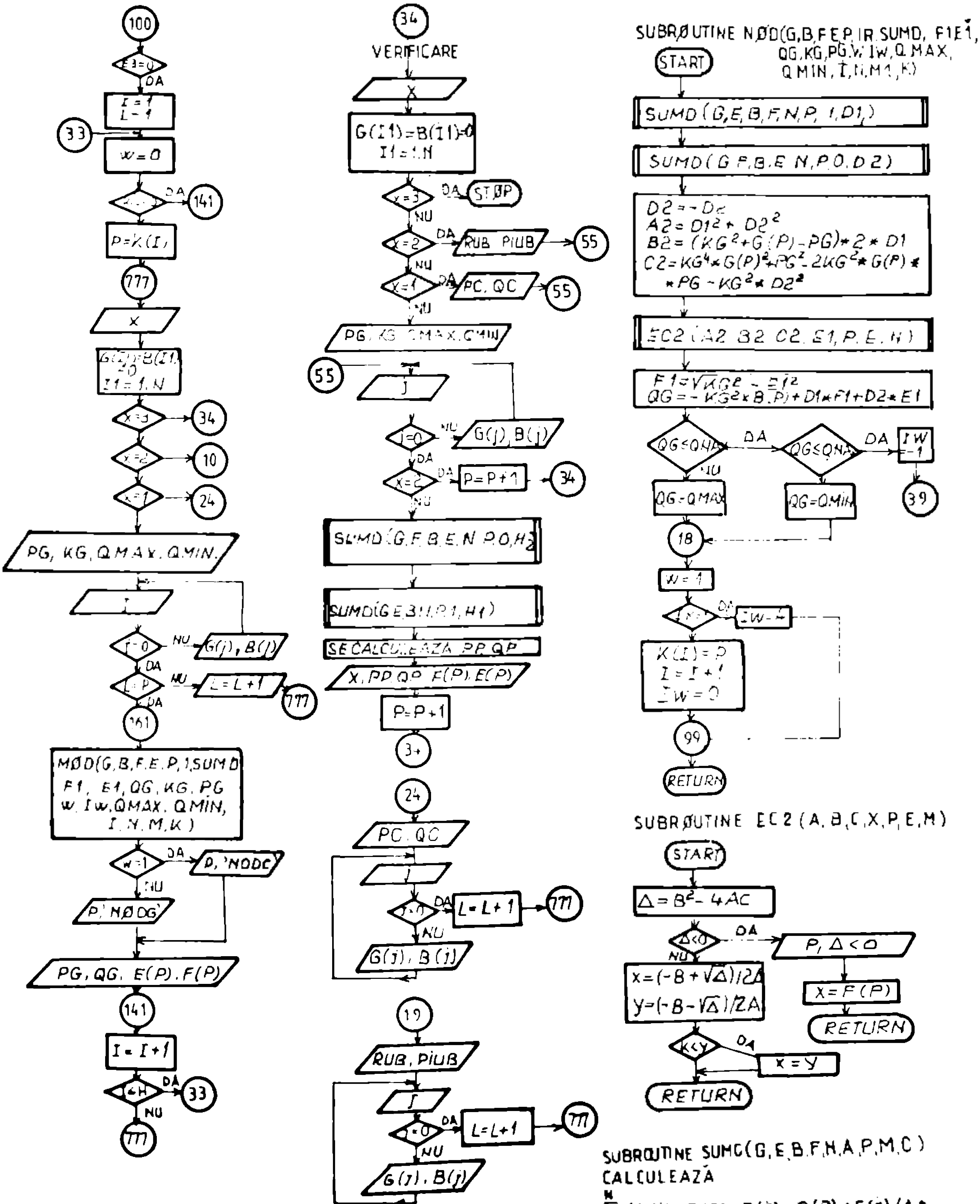
Din ecuaţia a doua a sistemului rezultă două valori pentru e_p. Se alege valoarea cea mai mare cu care se calculează f_p şi apoi U_p.

b) Pentru nodurile generatoare se scrie sistemul (3.8) sub forma :



START
N, M, N1, E
E(j) = 1, F(j) = 0
j = 1, N
L0 = 1
35
K(j) = 0, J = 1, M
E3 = 0
P = 1
I = 1
7
X
G(I1) = B(I1) = 0
I1 = 1, N
DA
100
NU
DA
37
NU
DA
44
NU
PC, QC
J
J=0
NU
G(j), B(j)
DA
9
SE CALCULEAZĂ
A, C1, C2
SUM C (G, E, B, F, N, A
P, 1, C3)
SUMC (G, E, B, F, N,
A, P, 0, C4)
AU = C3² + C4²
BU = C3³ + C3 * C4² - 2C2 * C4
CU = C2² - C1 * C3² - C2 * C3 * C4
EC2(AU, BU, CU, E1, P, E, M)
F1 = (C4 * E1 - C2)/C3
17
37
RUB, PIUB
E(P) = RUB, F(P) = PIUB
J
J=0
NU
G(j), B(j)
DA
SUMD(G, F, B, E, N, P, 0, H2)
SUMD (G, E, B, F, N, P, 1, H1)
SE CALCULEAZĂ
RSB, PISB
X, RSB, PISB, RUB, PIUB
P = P+1
7
17
EM = E1 - E(P)
FM = F1 - F(P)
E(P) = E1
F(P) = F1
X=0
DA
X, PG, QG, E(P)
F(P)
NU
X, PC, QC, E(P)
F(P)
NU
E3 = 1
10
P = P+1
7
44
PG, KG, QMAX, QMIN
J
J=0
G(j), B(j)
NØD(G, B, F, E, P, 0, SUMD, F1,
E1, QG, KG, PG, W, IW,
QMAX, QMIN, I, H, N, K)
IW < 0
DA
7
NU
PC = PG
QC = QG
9

Fig.3.9.



SUBRØUTINE SUMC(G, E, B, F, N, A, P, M, C)

CALCULEAZĂ

$$\sum_{\substack{I=1\\I\neq P}}^{N} (G(I)*Q(P)+B(I)*B(P)*E(I)/A \pm B(I)*G(P)-G(I)*B(P)*F(I)/A$$

M = 1 pentru -

M = 0 —"— +

SUBRØUTINE SUMD(G, E, B, F, N, P, M, D)

CALCULEAZĂ

$$\sum_{\substack{I=1\\I\neq P}} G(I)*E(I)\pm B(I)*F(I)$$

M = 1 ⟶ -

M = 0 ⟶ +

Fig.5.9.

(3.17) $\hat{S}_p = |U_p|\ 2Y^*_{pp} + U_p \sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{n} Y^*_{pq}U^*_q$ şi notînd

(3.18) $|U_p|^2 = k^2, \sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{n} Y^*_{pq}U^*_q = D_1 + jD_2$

relaţia (3.17) devine

(3.19) $P_p + jQ_p = k^2(G_{pp} - jB_{pp}) + (e_p + jf_p)(D_1 + jD_2).$

Egalînd din nou părţile reale, respectiv imaginare, se obţine sistemul

$$(3.20)\quad \begin{cases} P_p = k^2G_{pp} + D_1e_p - D_2f_p \\ \\ Q_p = -k^2B_{pp} + D_1f_p + D_2e_p \end{cases}$$

sau folosind (3.18)

$$(3.21)\begin{cases} f_p = \sqrt{k^2-e_p^2} \\ (D_1^2+D_2^2)e_p^2+2D_1(k^2G_{pp}-P_p)e_p+(k^4G_{pp}^2+P_p^2-2k^2G_{pp}P_p-D_2^2k^2)=0. \end{cases}$$

Din ecuaţia a doua se calculează valorile lui e_p, se reţine valoarea mai mare şi se calculează f_p. Valoarea lui Q_p rezultă din ecuaţia a doua a sistemului (3.20).

Se verifică dacă $Q_p\min \leq Q_p \leq Q_p\max$ ($Q_p\min$, $Q_p\max$ daţi). Dacă $Q_p > Q_{p\ max}$ sau $Q_p < Q_{p\ min}$ se ia $Q_p = Q_{p\ max}$, respectiv $Q_p = Q_{p\ min}$ şi se atribuie nodului caracter de nod consumator.

c) Pentru noduri de balansare se cunoaşte U_p, deci $\hat{S}_p$ se calculează uşor din relaţia (3.9).

3.5.2. Programul FORTRAN corespunzător. Informaţiile despre noduri le-am organizat într-un fişier nedefinit "CØNECŢIUNI" pornind de la un fişier pe cartele care conţine pentru :

Noduri de balansare	Noduri generatoare	Noduri consumatoare
$X = 2$	$X = 0$, Q_{max}, Q_{min}	$X = 1$, $PC = P_p$, $QC = Q_p$
$RUB = Re(U_p)$	$PQ = P$	j, $G(j)$, $B(j) \neq 0$
$PIUB = I_m(U_p)$	$KG = k$	
j = numărul nodului	j, $G(j)$, $B(j) \neq 0$	
$G(j) = Re(Y_{ij})$		
$B(j) = Im(Y_{ij})$		

Fişierul pe disc are ca înregistrări imaginile cartelelor. Programul poate fi folosit pentru N noduri, mai întîi fiind tratate nodurile de balansare, apoi cele generatoare şi în final cele consumatoare. Prin program verificăm şi corectitudinea rezultatelor (LISTING - contract). Am obţinut rezultate cu patru zecimale exacte.

```
* DEFINE FILE 10(DAT:RD)=10
      REAL KG
      DIMENSION G(200),B(200)
      DATA N/5/
      INTEGER X
      DØ 1 I=1,N
      G(I)=0.
    1 B(I)=0.
      I=1
    7 READ(105,2)X
      WRITE(108,21)X,I
   21 FØRMAT('','X=',I1,2X,'NØD=',I3)
      I=I+1
      WRITE(10,2)X
    2 FØRMAT(I1)
      IF(X.EQ.3)GØ TØ 100
      IF(X.EQ.2)GØ TØ 3
      IF(X.EQ.0)GØ TØ 4
      READ(105,5)PC,QC
      WRITE(10,5)PC,QC
    5 FØRMAT(2F5.2)
      WRITE(108,51)PC,QC
   51 FØRMAT('',10X,'PC=',F6.2,'QC=',F6.2)
   11 READ(105,6)J
    6 FØRMAT(I3)
      WRITE(10,6)J
      IF(J.EQ.0)GØ TØ 7
      READ(105,8)G(J),B(J)
    8 FØRMAT(2F10.6)
      WRITE(10,8)G(J),B(J)
      WRITE(108,9)J,J,G(J),J,B(J)
    9 FØRMAT(13X,'J=',I3,2X,'G(',I3,')',F11.6,2X,'B(',I3,')=',
     -F11.6)
```

```
      GØ TØ 11
    3 READ(105,12)RUB,PIUB
   12 FØRMAT(2 F4.2)
      WRITE(10,12)RUB,PIUB
      WRITE(108,13)RUB,PIUB
   13 FØRMAT(11X,'RUB=',F4.2,'PIUB=',F4.2)
      GØ TØ 11
    4 READ(105,14)PG,KG,QMAX,QMIN
   14 FØRMAT(F3.1,F10.8,2F3.1)
      WRITE(10,14)PG,KG,QMAX,QMIN
      WRITE(108,15)PG,KG,QMAX,QMIN
   15 FØRMAT(11X,'PG=',F3.1,2X,'KG=',F10.8,2X,'QMAX=',F3.1,
     -'QMIN=',F3,1)
      GØ TØ 11
  100 ENDFILE 10
      REWIND 10
      I=1
   77 READ(10,2)X
      WRITE(108,21)X,I
      I=I+1
      IF(X.EQ.3)GØ TØ 200
      IF(X.EQ.2)GØ TØ 33
      IF(X.EQ.0)GØ TØ 44
      READ(10,5)PC,QC
      WRITE(108,51)PC,QC
  111 READ(10,6)J
      IF(J.EQ.0)GO TO 77
      READ(10,8)G(J),B(J)
      WRITE(108,9)J,J,G(J),J,B(J)
      GØ TØ 111
   33 READ(10,12)RUB,PIUB
      WRITE(108,13)RUB,PIUB
      GØ TØ 111
   44 READ(10,14)PG,KG,QMAX,QMIN
      WRITE(108,15)PG,KG,QMAX,QMIN
      GØ TØ 111
  200 STØP
      END
C REZOLVAREA SISTEMULUI
* DEFINE FILE AO(DVT:RD)=10
      EXTERNAL SUMD
```

```
      INTEGER X,P,W
      REAL KG
      DIMENSION G(200),B(200),E(200),F(200),K(100)
      DATA N,M/5,2/,N1/1/
      EPS=0,000001
      DØ 1 J=1,N
      E(J)=1
    1 F(J)=0
      LG=1
   35 DØ 2 J=1,M
    2 K(J)=0
      A3=0
      P=1
      I=1
    7 READ(10,3)X,
    3 FØRMAT(I1)
      DØ 5 I1=1,N
      G(I1)=0
    5 B(I1)=0
      IF(X.EQ.3)GØ TØ 100
      IF(X.EQ.2)GØ TØ 37
      IF(X.EQ.0)GØ TØ 444
      READ(10,4)PC,QC
    4 FØRMAT(2F5.2)
   11 READ(10,6)J
    6 FØRMAT(I3)
      IF(J.EQ.0)GØ TØ 9
      READ(10,8)G(J),B(J)
    8 FØRMAT(2F10.6)
      GØ TØ 11
    9 A=G(P)**2+B(P)**2
      C1=(PC*G(P)-QC*B(P))/A
      C2= -(PC*B(P)+QC*G(P))/A
      CALL SUMC(G,E,B,F,N,A,P,1,C3)
      CALL SUMC(G,F,B,E,N,A,P,0,C4)
      AU=C3**2+C4**2
      BU=C3**3+C3*C4*C4-2*C2*C4
      CU=C2**2-C1*C3*C3-C2*C3*C4
      CALL EC2(AU,BU,CU,E1,P,E,N)
      F1=(C4*E1-C2)/C3
   17 EM=E1-E(P)
      FM=F1-F(P)
```

```
      WRITE(108,74)LO,EM,FM
   74 FORMAT(21X,'ITERATIA NR. 'I3,/11X,'DIF.PT.E=',F10.7,
     -11X,'DIF.PT.F=',F10.7)
      E(P)=E1
      F(P)=F1
      IF(I.EQ.0)GØ TØ 80
      WRITE(108,82)PC,QC,E(P),F(P)
   82 FØRMAT(11X,'E',25X,'U',/(/,' ',2(5X,F10.7,2X,'+I',F10.7)))
      GØ TØ 83
   80 WRITE(108,82)PG,QG,E(P),F(P)
   83 EM=ABS(EM)
      FM=ABS(FM)
      IF(EM.LT.EPS.AND.FM.LT.EPS)GØ TØ 10
      E3=1
   10 P=P+1
      GØ TØ 7
  100 IF(E3.EQ.0)GØ TØ 18
      LO=LO+1
      ENDFILE 10
      REWIND 10
      GØ TØ 35
   18 ENDFILE10
      REWIND 10
      I=1
      L=1
   33 W=0
      IF(K(I).EQ.0)GØ TØ 141
      P=K(I)
  777 READ(10,3)X
      DØ 60 I1=1,N
      G(I1)=0
   60 B(I1)=0
      IF(X.EQ.3)GØ TØ 34
      IF(X.EQ.2)GØ TØ 19
      IF(X.EQ.1)GØ TØ 24
      READ(10,14)PG,KG,QMAX,QMIN
   25 READ(10,6)J
      IF(J.EQ.0)GØ TØ 26
      READ(10,8)G(J),B(J)
      GØ TØ 25
   26 IF(L.EQ.P)GØ TØ 161
```

```
      L=L+1
      GØ TØ 777
  161 CALL NØD(G,B,F,E,P,1,SUMD,F1,E1,QG,KG,PG,W,IN,QMAX,QMIN,
     -I,N,M,K)
      IF(W.EQ.1)GØ TØ 22
      WRITE(108,20)P
   20 FØRMAT(' ',T5,'NODUL ',I3,'NODG')
      GØ TØ 23
   22 WRITE(108,21)P
   21 FØRMAT(' ',T5,'NODUL 'I3,'NØDC')
   23 WRITE(108,82)PG,QG,E(P),F(P)
      GØ TØ 141
   19 READ(10,12)EUB,PIUB
   27 READ(10,6)j
      IF(j.EQ.0)GØ TØ 28
      READ(10,8)G(J),B(J)
      GØ TØ 27
   28 L=L+1
      GØ TØ 777
  444 READ(10,14)PG,KG,QMAX,QMIN
   14 FØRMAT(F3.1,F10.8,2F3.1)
  111 READ(10,6)J
      IF(j.EQ.0)GØ TØ 16
      READ(10,8)G(j),B(j)
      GØ TØ 111
   16 CALL NØD(G,B,F,E,P,0,SUMD,F1,E1,QG,KG,PG,W,IN,QMAX,QMIN,I,N,M,
      IF(IN)40,41,41
   40 GØ TØ 17
   41 PO=PG
      QO=QG
      GØ TØ 9
   37 READ(10,12)RUB,PIUB
   12 FØRMAT(2F4.2)
      E(P)=RUB
      F(P)=PIUB
  112 READ(10,6)J
      IF(J.EQ.0)GØ TØ 15
      READ(10,8)G(j),B(j)
      GØ TØ 112
   15 CALL SUMD(G,F,B,E,N,P,0,E2)
      CALL SUMD(G,E,B,F,N,P,1,E1)
```

```
      RSB=H1*RUB+H2*PIUB
      PISB=H1*PIUB-H2*RUB
      H1=G(P)*E(P)-B(P)*F(P)
      H2=G(P)*F(P)+B(P)*E(P)
      RSB=RSB+H1*RUB+H2*PIUB
      PISB=PISB+H1*PIUB-H2*RUB
      WRITE(108,82)RSB,PISB,RUB,PIUB
      P=P+1
      GO TO 7
   24 READ(10,4)PC,QC
   30 READ(10,6)J
      IF(J.EQ.0)GO TO 29
      READ(10,8)G(J),B(J)
      GO TO 30
   29 L=L+1
      GO TO 777
  141 I=I+1
      IF(I.LE.M)GO TO 33
      GO TO 777
   34 ENDFILE 10
      REWIND 10
      WRITE(108,52)
   52 FORMAT(//,' VERIFICARE')
      P=1
  400 READ(10,3)X
      DO 59 I1=1,N
      G(I1)=0
   59 B(I1)=0
      IF(X.EQ.3)GO TO 58
      IF(X.EQ.2)GO TO 53
      IF(X.EQ.1)GO TO 54
      READ(10,14)PG,KG,QMAX,QMIN
   55 READ(10,6)J
      IF(J.EQ.0)GO TO 56
      READ(10,8)G(J),B(J)
      GO TO 55
   56 IF(X.EQ.2)GO TO 401
      CALL SUMD(G,F,B,E,N,P,0,H2)
      CALL SUMD(G,E,B,F,N,P,1,H1)
      PP=H1*E(P)+H2*F(P)
      QP=H1*F(P)-H2*E(P)
```

```
      H1=G(P)*E(P)-B(P)*F(P)
      H2=G(P)*F(P)+B(P)*E(P)
      PP=PP+H1*E(P)+H2*F(P)
      QP=QP+H1*F(P)-H2*E(P)
      WRITE(108,57)PP,QP,E(P),F(P)
   57 FORMAT(11X,'S',25X,'U',/(/' ',2(5X,F10.7,2X,'+I',F10.7)))
      P=P+1
      GØ TØ 400
   54 READ(10,4)PC,QC
      GØ TØ 55
   53 READ(10,12)RUB,PIUB
      GØ TØ 55
  401 P=P+1
      GØ TØ 400
   58 STØP
      END
      SUBRØUTINE NØD(G,B,F,E,P,IR,SUMD,F1,E1,QG,KG,PG,W,IW,QMAX,
     -QMIN,I,N,M1,K)
      INTEGER P,W
      REAL KG
      DIMENSIØN G(N),B(N),E(N),F(N),K(M1)
      CALL SUMD(G,E,B,F,N,P,1,D1)
      CALL SUMD(G,F,B,E,N,P,0,D2)
      D2= -D2
      A2=D1**2+D2**2
      B2=(KG**2*G(P)-PG)*2*D1
      C2=KG**4*G(P)**2+PG**2-2*KG**2*G(P)*PG-KG**2*D2**2
      CALL EC2(A2,B2,C2,E1,P,E,N)
      F1=KG**2-E1**2
      F1=SQRT(F1)
      QG= -KG**2*B(P)+D1*F1+D2*E1
      IF(QG.LE.QMAX)GØ TØ 16
      QG=QMAX
   18 W=1
      IF(IR.EQ.1)GØ TØ 66
      K(I)=P
      I=I+1
      IW=0
      GO TO 99
   16 IF(QG.GE.QMIN)GØ TØ 55
      QG=QMIN
```

```
      GO TO 18
55    IW= -1
      GO TO 99
66    IW=4
99    RETURN
      END

      SUBROUTINE EC2(A,B,C,X,P,E,N)
      INTEGER P
      DIMENSION E(N)
      DELTA=B**2-4*A*C
      IF(DELTA.LT.0)GO TO 10
      X=(-B+SQRT(DELTA))/(2*A)
      Y=(-B-SQRT(DELTA))/(2*A)
      IF(X.LT.Y)X=Y
      GO TO 12
10    WRITE(108,11)P
11    FORMAT(' ','DELTA < 0','P=',I2)
      X=E(P)
12    RETURN
      END

      SUBROUTINE SUMC(G,E,F,N,A,P,M,C)
      INTEGER P
      DIMENSION G(N),B(N),E(N),F(N)
      C=0
      I=1
50    IF(I.EQ.P)GO TO 10
      C=C+(G(I)*G(P)+B(I)*B(P))*E(I)/A
      CO=(B(I)*G(P)-G(I)*B(P))*F(I)/A
      IF(M.EQ.1)GO TO 30
      C=C+CO
      GO TO 10
30    C=C-CO
10    I=I+1
      IF(I.LE.N)GO TO 50
      RETURN
      END

      SUBROUTINE SUMD(G,E,B,F,N,P,M,D)
      INTEGER P
      DIMENSION G(N),B(N),E(N),F(N)
      D=0
      I=1
```

```
50 IF(I.EQ.P)GØ TØ 10
   D=D+G(I)*E(I)
   DO=G(I)*F(I)
   IF(M.EQ.1) GØ TØ 30
   D=D+DO
   GØ TØ 10
30 D=D-DO
10 I=I+1
   IF(I.LE.N)GØ TØ 50
    RETURN
   END
```

BIBLIOGRAFIE

1. Altman,M. , Connection between the method of steepest descent and Newton's method, Bull.Acad.Polon.Sci.Ser.Sci.Math., Astronom.Phys. 5(1957), 1o31-1o36.

2. Altman,M. , Connection between gradient methods and Newton's method for functionals, Bull.Acad.Polon.Sci.Ser.Sci.Math. Astronom.Phys. 9(1961), 877-88o.

3. Andrei,N., Răsturnoiu,C. , Matrice rare şi aplicaţiile lor, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1983.

4. Belukina,I.,G., Asupra aproximării cu diferenţe a unor ecuaţii paraoolice cu condiţii la limită neliniare, Metode numerice şi programare, Ed.Univ. Moscova (1965), 225-231.

5. Berezin,I.S., Jidkov,N.P., Metode numerice, Vol.2, Fizmatgiz, Moscova, 1959.

6. Bers,L. , On mildly nonlinear partial difference equations of elliptic type, J.Res.Nat.Bur.Standards,Sect.B 51(1953),229-236.

7. Browder,F., Prooléмes non-linéaires, Séminaire de mathematiques supérieures, Université de Montreal, 1965.

8. Curry,H., The method of steepest descent for nonlinear minimisation problems, Quart.Appl.Math. 2(1944), 258-261.

9. Diaz,J., Metcalf,F., On the set of subsequential limit points of successive approximations, Trans.Amer.Math.Soc.135(1969), 459-485.

1o. Douglas,J.,Jr., Alternating direction iteration for mildly nonlinear elliptic difference equations, Numer.Math.3(1961), 92-98.

11. Forsythe,G., Wasow,W., Finite-difference methods for partial differential equations, John Wiley, New York, 196o.

12. Fridman,V., Un proces iterativ cu erori minime pentru ecuaţii

operatoriale neliniare, Dokl.Akad.Nauk.SSSR 139(1961) 1063-1066.

13. Fridman,V. Despre convergenţa metodelor de tipul pantei celei mai rapide, Uspehi Mat.Nauk. 17(1962), 201-204.

14. Gergei,I., O metodă pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii neliniare,J.Vicial.Mat.i Mat.Fis. 16(1976),776-778.

15. Gunn,J., On the two-stage iterative method of Douglas for mildly nonlinear elliptic difference equations, Numer.Math. 6(1964), 243-249.

16. Hart,H., Motzkin,T., A composite Newton-Raphson gradient method for the solution of systems of equations, Pacific J.Math. 6(1956), 691-707.

17. Henrici,P., Discrete variable methods for ordinary differential equations, John Wiley, New York, 1962.

18. Kaniel,S., Quasi-compact nonlinear operator in Banach space and applications, Arcive Rat.Mech.Anal.21(1966),259-278.

19. Kantorovich,L., On Newton's method for functional equations (Russian),Dokl.Akad.Nauk SSSR 59(1948), 1237-1240.

20. Kantorovich,L., Functional analysis and applied mathematics (Russian),Uspehi Mat.Nauk, 3(1948), 89-185.

21. Kantorovich,L., On Newton's method (Russian), Trudy Mat.Inst. Steklov 28(1949), 104-144.

22. Keller,H., Numerical methods for two-point boundary value problems, Ginn, Boston, 1968.

23. Kellogg,R., A nonlinear alternating direction method, Math. Comp. 23(1969), 23-28.

24. Kershaw,D., The explicit inverses of two commonly occuring matrices, Math.Comp. 23(1969), 189-191.

25. Knuth,D.E., Tratat de programarea calculatoarelor. Sortare şi căutare, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1976.

26. Lémarechal,C., Une méthode de résolution de certains systemes

nonlineaires olen poses, C.R.Acad.Sci.Paris,Ser.A-B, 272 (1971), A.605-A.607.

27. Lees,M., Discrete methods for nonlinear two-point boundary value problems, Numerical solution of partial differential equations, Ed.J.H.Bramble,Academic Press,New York (1966), 59-72.

28. Lees,M., Schultz,M.H., A Leray-Schauder principle for A-compact mappings and the numerical solution of two-point boundary value problems, Numerical solutions of nonlinear differential equations, Ed.D.Greenspan, John Wiley,New York (1966), 167-179.

29. Levinson,N., The Dirichlet problem for u = f(P,u), J.Math. Mech. 12(1963), 567-576.

30. Măruşter,Şt., Metode numerice în rezolvarea ecuaţiilor neliniare, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1981.

31. Măruşter,St., Quasi-nonexpansivity and two classical methods for solving nonlinear equations, Proc.Amer.Math.Soc. 62 (1977), 119-129.

32. Măruşter,St., The numerical solution of nonlinear equations, Seminarul de informatică şi analiză numerică, preprint, Univ.Timişoara, Nr.2, 1981.

33. Măruşter,St., An iterative method for nonlinear difference equations, An.Univ.Timişoara,Ser.Sti.Mat.14(1976),118-124.

34. Minty,G., Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, Duke Math.J. 29(1962), 341-346.

35. Moldovan,G., Scheme logice şi programe FORTRAN, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978.

36. Nashed,M., Steepest descent for singular linear operator equations, SIAM J.Numer.Anal. 7(1970), 358-362.

37. Nashed,M., The convergence of the method of steepest descent for nonlinear equations with variational or quasi-variatio-

nal operators. J.Math.Mech. 13(1964), 765-794.

38. Ocorsie ,M.R., O metodă iterativă pentru rezolvarea sistemelor de ecuații, Calcolo 4(1976), 625-631.

39. Ortega,J., Rockoff,M., Nonlinear difference equations and Gauss-Seidel type iterative methods, SIAM J.Numer.Anal. 3(1966), 497-513.

40. Ortega,J., Rheinboldt,W. , Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York, 1970.

41. Ortega,J., Rheinbolat,W., Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press,New York, 1970.

41. Ostrowski,A., Rezolvarea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații, Ed.pentru literatură străină, Moscova, 1963.

42. Porter,S.V., Remarks on the numerical computation of solution of $\Delta u = f(P,u)$, Numerical solution of partial differential equations, Ed.J.H.Bramble, Academic Press,New York (1966), 73-82.

43. Porter,S.V., Numerical methods for mildly nonlinear elliptic partial differential equations, Numer.Math.7(1965),113-128.

44. Peaceman,D., Rachford,H., The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, SIAM J.Appl.Math.(1955) 28-41.

45. Petryshyn,W., Williamson,T.E.,Jr., Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings, J.Math.Anal.Appl.43(1973),459-497.

46. Petryshyn,W.V., Direct and iterative methods for the solution of linear operator equations in Hilbert space, Trans.Amer. Math.Soc. 105(1962), 136-175.

47. Petryshyn,W.V., On a fixed point theorem for nonlinear P-compact operators in Banach space, Bull.Amer.Math.Soc.72(1966), 329-334.

48. Popovici,P., The numerical solution of the finite-difference equations for mildly nonlinear two-point boundary value problems, Seminarul de informatică și analiză numerică, preprint, Univ.Timișoara, Nr.1, 1981.

49. Popovici P., Măruşter,Şt., A simple iteration for solving the nonlinear finite-difference equations, Seminarul de informatică și analiză numerică, preprint, Univ.Timișoara, Nr.5, 1981.

50. Popovici,P., Topuzu,A., Asupra rezolvării numerice a unor sisteme de ecuații neliniare, Matematica, școala și producție, Deva, 1982.

51. Popovici,P., An iterative solution of nonlinear finite-difference equations, An.Univ.Timișoara, Ser.Şti.Mat. Vol.XX, 1982.

52. Popovici,P.. Măruşter,Şt., Generalised Gradient's method, An. Univ.Timișoara, Ser.Şti.Mat.Vol.XXI, fasc.1-2, 1983.

53. Popovici,P., On Fridman's method, Seminarul de informatică și analiză numerică, preprint, Univ.Timișoara,Nr.15, 1983.

54. Popovici P., A variant of the Gradient's method for equations $A(x)x + \Phi x = a$, Seminarul de informatică și analiză numerică preprint, Univ.Timișoara, Nr.16, 1983.

55. Popovici,P., The Dirichlet problem for mildly nonlinear elliptic equations, preprint, Univ.Timișoara, Nr.17, 1983.

56. Popovici P., On Newton's method, An.Univ.Timișoara, Ser.Şti. Mat., Vol.XXII, fasc.1-2, 1984.

57. Popovici,P., O variantă a metodei direcțiilor alternate, Colocviul național de "Aproximare și optimizare"),Cluj-Napoca, 1984.

58. Popovici,P., Asupra rezolvării numerice a metodei lui Fridman pentru sisteme neliniare, Seminarul de informatică și analiză numerică, preprint, Univ.Timișoara, va apare.

59. Samanskii,V., The method of linearization for solving non-linear boundary value problems (Russian), Ukrain.Mat.J. 20(1968), 218-227.

60. Sculop,A.I., Metode aproximative în analiza neliniară, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1972.

61. Sorobogatko,A., Mamunia,L., O metodă iterativă pentru rezolvarea ecuaţiilor de tip eliptic slab neliniare, Vicisl. Prikl.Mat., Kiev, 22(1974), 68-73.

62. Simeonov,S.V., Rezolvarea unui sistem de ecuaţii neliniare prin aproximaţii succesive, Godisnik Inz. Stroitel Inst. 16(1966), 29-33.

63. Steplemen,R.S., A caracterization of local convergence for fixed point iterations in R, SIAM J.Numer.Anal.12(1975, 887-894.

64. Toma,M., Odăgescu,I., Metode numerice şi subrutine, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1980.

65. Tricomi,F., Un teorema sulla convergenza delle successioni formate delle successive iterate di una funzione di una variabile reale, Giorn.Math.Battaglini, 54(1916), 1-9.

66. Vainberg,M.M., Metode variaţionale şi metoda operatorilor monotoni, Nauka, Moscova, 1972.

67. Vainberg,M.M., Ecuaţii neliniare cu operatori monotoni, Dokl. Acad.Nauk 188(1969), 511-513.

68. Vainberg,M., Asupra convergenţei metodei pasului descendent, Dokl.Acad.Nauk SSSR, 129(1960), 9-12.

69. Vainberg,M., Asupra convergenţei metodei pasului descendent, Sibirsk.Mat.J. 2(1961), 201-220.

BUPT

C U P R I N S

pag.

pag.