MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI ÎNVĂŢĂMÎNTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

ing. Liviu Toma

CONTRIBUŢII LA METODELE DE ANALIZA SPECTRALA

Teză de doctorat

Conducător ştiinţific
Prof. dr. ing. EUGEN POP

Timişoara 1984

1. INTRODUCERE

Prelucrarea numerică a semnalelor a devenit o disciplină majoră odată cu apariţia şi dezvoltarea calculatoarelor de mare viteză, reprezentînd un domeniu de mare interes, prin aplicaţiile tot mai numeroase în ramuri dintre cele mai diverse ale ştiinţei şi tehnicii. Evoluţia rapidă a tehnicilor de prelucrare numerică a semnalelor este determinată de avantajele pe care le oferă faţă de prelucrarea analogică. Aceste avantaje se referă în principal la performanţă, flexibilitate, reproductibilitate, gabarit şi preţ de cost. Progresele realizate de tehnologie, integrarea pe scară largă, mărirea vitezei de lucru a circuitelor numerice, apariţia, perfecţionarea, diversificarea şi creşterea complexităţii microprocesoarelor, apariţia sistemelor bit-slice şi microprogramarea au contribuit la evoluţia rapidă a tehnicilor de prelucrare numerică a semnalelor /65/.

Prelucrarea numerică a semnalelor cuprinde reprezentarea semnalelor prin secvenţe de numere şi prelucrarea acestor secvenţe. Scopul acestei prelucrări este de a extrage anumite informaţii despre semnale, sau despre sistemele care le-au generat. Tehnicile de prelucrare urmăresc în general transformarea unui semnal în alt semnal care este mai convenabil dintr-un anumit punct de vedere. O astfel de transformare, utilizată în analiza semnalelor, este transformarea spectrală. Prin calculul spectrului se obţine distribuţia amplitudinii, fazei, puterii sau energiei unui semnal în funcţie de frecvenţă. Analiza spectrală a semnalelor este utilizată în inginerie, economie, medicină, geofizică, acustică, comunicaţii, navigaţie, radiolocaţie, /15/, /18/, /20/, /24/, /31/, /36/, /37/, /71/.

De exemplu, prin analiza spectrală a datelor privind repetarea în timp a unor evenimente seismice se pot determina periodicităţi. Acestea pot fi corelate cu perioadele unor fenomene astronomice. De asemenea, prin analiză spectrală se determină adîncimea de la suprafaţa pămîntului la care s-a declanşat un eveniment seismic /31/. Un alt exemplu se referă la determinarea unor componente periodice ale evoluţiei climei, prin analiza spectrală a datelor rezultate din studiul parametrilor biologici şi chimicial sedimentelor depuse pe fundul oceanelor /31/. Dispunerea în adîncime a acestor sedimente este calibrată în timp geologic. In radiolocaţie, analiza spectrală este utilizată la detectarea ţintelor /71/.

In cele ce urmează se prezintă o ccint metodele tradiţionale şi optimizate de analiză spectrală. Pentru reprezentarea matematică a unui semnal discret $\{x_n\}$ de energie infinită, acesta se consideră ca fiind o realizare a unui proces aleatoriu compus din variabile aleatoare x_n, $-\infty < n < \infty$ şi de funcţiile de probabilitate ataşate variabilelor aleatoare /6/. Un semnal discret de energie infinită este dat, în general, sub forma unei secvenţe de numere cu lungime finită $\{x_n\}$, n=o,1,... ..N-1. Dacă se cunosc funcţiile de probabilitate ale procesului aleatoriu, pentru $-\infty < n < \infty$, nu înseamnă că se pot determina valorile semnalului discret în afara intervalului de observare n=0,1,...,N-1. In schimb pot fi prevăzute mediile procesului aleatoriu care servesc pentru caracterizarea incompletă a semnalului discret de energie infinită, considerat o realizare a procesului aleatoriu. Dintre aceste medii se remarcă secvenţa de autocorelaţie. Densitatea spectrală de putere $P_x(f)$ a unui proces aleatoriu staţionar în sens larg este definită /24/, /59/, /27/ ca transformată Fourier a secvenţei de autocorelaţie. In cazurile practice procesul aleatoriu nu este determinat statistic, adică nu se cunosc toate funcţiile de probabilitate /49/. Informaţia principală despre procesul aleatoriu o reprezintă secvenţa de date $\{x_n\}$, de lungime finită n= 0,1,...,N-1. Rezultă deci posibilitatea de a determina doar estimaţii /3/, /57/ ale secvenţei de autocorelaţie şi ale densităţii spectrale de putere.

Metodele tradiţionale de estimare spectrală utilizează operatorul de transformare Fourier aplicat secvenţei de autocorelaţie sau secvenţei de date. Estimarea Blackman-Tukey a densităţii spectrale de putere este dată de relaţia /24/, /67/.

$$\hat{P}_{BT}(f) = T \sum_{m=-L}^{L} \hat{R}_{xx}(m) \exp(-j2\pi fmT), \quad -\frac{1}{2T} \leqslant f \leqslant \frac{1}{2T} \tag{1.1}$$

unde $\{\hat{R}_{xx}(m)\}$ reprezintă o estimaţie de lungime L a secvenţei de autocorelaţie obţinută pe baza secvenţei de date de lungime finită N. Estimarea densităţii spectrale de putere în funcţie de secvenţa de date este exprimată prin relaţia /24/,/67/.

$$\hat{P}_{PER}(f) = \frac{1}{NT}\left| T \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi fnT)\right|^2, \quad -\frac{1}{2T} \leqslant f \leqslant \frac{1}{2T} . \tag{1.2}$$

Estimatorul $\hat{P}_{PER}(f)$ este cunoscut în literatură sub denumirea pe periodogramă. Utilizarea transformatei Fourier rapide /6/,/13/ permite evaluarea estimării $\hat{P}_{PER}(f)$ pentru frecvenţele $f_m = m\Delta f$, $m=0,1,\ldots,N-1$ şi $\Delta f = 1/NT$, /24/

$$\hat{P}_m = \hat{P}_{PER}(f_m)\cdot\Delta f = \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi mn/N)\right|^2 . \tag{1.3}$$

Estimarea $\hat{P}_m$ se numeşte periodogramă discretă şi permite obţinerea spectrului sub formă de linii.

Principala cauză care conduce la erori în estimarea spectrală cu metodele tradiţionale constă în prelucrarea unei secvenţe de date de lungime finită. Astfel se presupune implicit că secvenţa de date este nulă în afara intervalului de observare, în locul secvenţei reale de lungime infinită se prelucrează produsul acesteia cu o funcţie fereastră dreptunghiulară, ceea ce în domeniul frecvenţă reprezintă convoluţia celor două transformate. Dacă puterea unui semnal este concentrată într-o bandă îngustă de frecvenţe, această convoluţie va produce o scurgere de putere spre regiunile de frecvenţă adiacente sub forma unor lobi laterali. Fenomenul de scurgere a puterii are implicaţii nedorite şi asupra procesului de detectare şi estimare a puterii unor componente sinusoidale. Astfel, lobii laterali corespunzători unei componente sinusoidale de putere mare pot masca lobul principal al unei componente de putere mai mică. Utilizarea ferestrelor diferite de cea dreptunghiulară pot conduce la reducerea fenomenului de scurgere, dar întotdeauna prin lărgirea lobului principal al transformatei ferestrei, deci cu preţul reducerii rezoluţiei /4/,/19/,/45/,/7o/.

Metodele optimizate de analiză spectrală se bazează pe faptul că de multe ori în cazurile practice se cunosc, în afara secvenţei de date şi alte informaţii despre procesul care generează această secvenţă, sau se pot face anumite presupuneri plauzibile. In funcţie de aceste informaţii sau presupuneri se poate alege un model exact sau aproximativ al procesului care generează secvenţa de date. Avînd modelul, se procedează la identificarea parametrilor modelului pe baza secvenţei de date. Analiza spectrală, bazată pe tehnica modelării şi identificarea parametrilor, se face prin determinarea estimării spectrale în funcţie de parametrii modelului. Rezoluţia şi fidelitatea estimării spectrale este funcţie de abilitatea cu care se face corelarea modelului şi a parametrilor lui cu secvenţa de date şi cu informaţiile apriori pe care le deţinem asupra procesului care generează secvenţa de date. Deoarece tehnica modelării implică extrapolarea secvenţei de date în afara intervalului de observare /3/, rezultă posibilitatea obţinerii unor estimaţii spectrale îmbunătăţite faţă de cele obţinute prin metodele tradiţionale, în special în cazul secvenţelor scurte /24/. Principalele modele utilizate la estimarea spectrală sînt : modelul autoregresiv, modelul de mediere, modelul ARMA, modelul Prony de estimare a densităţii spectrale de energie şi modelul Prony de estimare a liniilor spectrale /24/, /51/.

In lucrarea de faţă, analiza spectrală se bazează pe modelul Prony de estimare a liniilor spectrale. Procesul este modelat ca o sumă de sinusoide pentru care nu se impune corelarea armonică. Astfel, estimarea vizează numărul de sinusoide, frecvențele, amplitudinile şi fazele lor.

In capitolul 2 se arată că un proces format din sinusoide este un proces autoregresiv cu coeficienții de autoregresie simetrici. Estimarea coeficienților de autoregresie permite calculul frecvențelor, amplitudinilor şi fazelor sinusoidelor. Contribuțiile lucrarii în acest capitol constau în definirea matricii de date sumă şi estimarea numărului de sinusoide şi a coeficienților de autoregresie prin utilizarea descompunerii valorilor singulare a matricei de date sumă.

In capitolul 3 se prezintă o metodă optimizată de estimare a liniilor spectrale, care este contribuție a lucrării de față. Metoda se bazează pe mărirea simulată a pasului de eşantionare şi permite reducerea erorilor de estimare a frecvențelor sinusoidelor, simultan cu reducerea volumului de calcul necesar estimării. In condiția menținerii constante a erorilor de estimare, metoda permite reducerea intervalului de timp de observare a procesului.

Capitolul 4 prezintă partea experimentală prin care se susțin contribuțiile lucrării. Experimentele se bazează pe simularea unor procese compuse din sinusoide în zgomot.

In capitolul 5 se prezintă concluziile rezultate din contribuțiile lucrării.

x x

x

Autorul aduce mulțumiri prof.dr.doc.ing.Edmond Nicolau, de la Institutul Politehnic Bucureşti, dr.ing.Aurel Millea, de la Institutul Național de Metrologie Bucureşti şi conf.dr.ing.Iosif Hoffman, de la Institutul Politehnic Timişoara, pentru discuțiile, sfaturile şi recomandările primite în perioada de elaborare a tezei.

Lucrarea de față îşi datorează existența climatului moral şi îndrumării ştiințifice de care a beneficiat autorul din partea prof.dr.ing. Eugen Pop.

2. ESTIMAREA LINIILOR SPECTRALE

Prin estimarea liniilor spectrale se înţelege reprezentarea unui semnal în domeniul frecvenţă, ca o sumă de sinusoide. Se consideră secvenţa de numere x_o, $x_1,\ldots,x_{N-1}$ obţinută prin eşantionarea cu pasul T, a unui semnal analog x(t). Semnalul x(t) se modelează ca o sumă de N sinusoide complexe de frecvenţe alese arbitrar $f_o, f_1, \ldots, f_{N-1}$. Rezultă secvenţa $\{\hat{x}_n\}$, care modelează semnalul discret $\{x_n\}$, conform relaţiei

$$\hat{x}_n = \sum_{m=0}^{N-1} a_m \exp(j2\pi f_m nT), \quad n=o,1,\ldots,N-1. \qquad (2.1)$$

Relaţia (2.1) se scrie sub formă matriceală

$$\hat{x} = Fa , \qquad (2.2)$$

unde

$$\hat{x} = [\hat{x}_o, \hat{x}_1, \ldots , \hat{x}_{N-1}]^T ,$$

$$a = [a_o, a_1, \ldots , a_{N-1}]^T ,$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \exp(\lambda_o) & \exp(\lambda_1) & \ldots & \exp(\lambda_{N-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \exp(\lambda_o[N-1]) & \exp(\lambda_1[N-1]) & \ldots & \exp(\lambda_{N-1}[N-1]) \end{bmatrix}$$

şi

$$\lambda_m = j2\pi f_m T. \qquad (2.3)$$

Se pune problema de a determina coeficienţii a_m, astfel încît secvenţa $\{\hat{x}_n\}$ să modeleze cît mai bine semnalul discret $\{x_n\}$, în cazul în care frecvenţele f_m şi numărul lor N sînt impuse. Pentru aceasta se minimizează eroarea patratică

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| x_n - \hat{x}_n \right|^2 , \tag{2.4}$$

adică se rezolvă sistemul (2.2) în sensul celor mai mici patrate. Se obţine soluţia /33/

$$a = (F^H F)^{-1} F^H x , \tag{2.5}$$

unde

$$x = \left[x_0, x_1, \dots , x_{N-1} \right]^T$$

şi F^H reprezintă matricea transpusă complex conjugată a matricei F.

Se consideră modelul seriei Fourier /48/ pentru care frecvenţele sinusoidelor sînt

$$f_m = m \, \Delta f , \tag{2.6}$$

unde

$$\Delta f = \frac{1}{NT} . \tag{2.7}$$

Din relaţia (2.3), se obţine

$$\lambda_m = j \frac{2\pi}{N} m , \quad m = 0,1,\dots,N-1 . \tag{2.8}$$

In acest caz coloanele matricei F sînt vectori ortogonali /61/.

Rezultă

$$F^H F = \frac{1}{N} I , \tag{2.9}$$

unde I este matricea unitate. Se obţine soluţia sistemului (2.2)

$$a = \frac{1}{N} F^H x ,$$

adică

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi mn/N),$$

pentru m= 0,1,...,N-1. Rezultă că puterea unei sinusoide complexe de frecvenţă impusă f_m este

$$|a_m|^2 = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi mn/N) \right|^2 . \qquad (2.10)$$

Relaţia (2.10) reprezintă expresia de calcul a periodogramei discrete (1.3). Rezultă că metoda periodogramei discrete de estimare a liniilor spectrale corespunde unui model compus dintr-un număr dat de sinusoide complexe cu frecvenţe armonice /24/, /2/. Cu acest model se consideră semnalul discret ca repetîndu-se periodic în afara intervalului de observare NT. Deoarece numărul şi frecvenţele sinusoidelor se impun, rezultă că este necesară doar estimarea puterii sinusoidelor, ceea ce se realizează cu relaţia (2.10) de definire a periodogramei discrete.

In lucrarea de faţă se tratează metodele de estimare a liniilor spectrale utilizînd modelul Prony. Acest model este nearmonic şi necesită estimarea numărului, frecvenţelor, amplitudinilor şi fazelor sinusoidelor. Pentru estimarea frecvenţelor sinusoidelor se corelează secvenţa de date cu parametrii unui model autoregresiv. Rezultă să, spre deosebire de periodograma discretă care presupune desfăşurarea periodică a semnalului în afara intervalului de observare, modelul Prony presupune desfăşurarea semnalului în afara intervalului de observare conform unui proces autoregresiv. Această presupunere, mult mai realistă, ... conduce la obţinerea unor catimații spectrale mult îmbunătățite sub aspectul rezoluției și fidelității, în special pentru semnale disponibile pe un interval de timp scurt.

2.1. Modelarea autoregresivă a secvențelor de date corespunzătoare semnalelor sinusoidale

Se consideră secvența de date $\{x_n\}$, $n=1,2,\ldots,N$ obținută prin eșantionarea unui proces format din L sinusoide de amplitudini A_k, frecvențe f_k și faze φ_k, $k=1,2,\ldots,L$. Un eșantion x_n aparținînd secvenței de date are expresia

$$x_n = \sum_{k=1}^{L} A_k \sin(2\pi f_k nT + \varphi_k), \quad n=1,2,\ldots,N \qquad (2.11)$$

unde T reprezintă pasul de eșantionare.

Relația (2.11) poate fi exprimată ca sumă de exponențiale complexe

$$x_n = \sum_{k=1}^{L} (a_k e^{s_k n} + a_k^* e^{s_k^* n}), \quad n=1,2,\ldots,N \qquad (2.12)$$

unde a_k și s_k sînt numere complexe. Prin identificarea relațiilor (2.11) și (2.12) se obține

$$a_k = \frac{A_k}{2j} e^{j\varphi_k}, \quad k=1,2,\ldots,L \qquad (2.13)$$

$$s_k = j2\pi f_k T, \quad k=1,2,\ldots,L. \qquad (2.14)$$

In cazul general în care numerele complexe s_k au partea reală diferită de zero, secvența de date corespunde unui proces format din sinusoide atenuate exponențial.

2.1.1. Modelul autoregresiv

In acest paragraf se demonstrează că un proces format din M sinusoide atenuate exponențial este un proces autoregresiv de ordinul 2M.

Pentru aceasta se definesc matricile de date. Astfel, matricea de date directe este definită /29/ prin relația

$$A_d = \begin{bmatrix} x_{L+1} & x_L & \cdots & x_1 \\ x_{L+2} & x_{L+1} & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_N & x_{N-1} & \cdots & x_{N-L} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

cu $2M \leqslant L \leqslant N-2M$. Matricea de date directe cu dimensiunea $(N-L)x(L+1)$ este de tip Toeplitz /1/. Elementele matricei A_d situate pe orice linie paralelă cu diagonala principală sînt egale.

Se definește matricea de date inverse /29/

$$A_i = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{L+1} \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{L+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N-L} & x_{N-L+1} & \cdots & x_N \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

cu $2M \leqslant L \leqslant N-2M$. Matricea de date inverse cu dimensiunea $(N-L, L+1)$ este de tip Hankel /1/. Elementele matricei A_i situate pe orice linie perpendiculară pe diagonala principală sînt egale.

Se definește matricea de date directe-inverse

$$A_{di}=\begin{bmatrix} A_d \\ A_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{L+1} & x_L & \cdots & x_1 \\ x_{L+2} & x_{L+1} & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_N & x_{N-1} & \cdots & x_{N-L} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{L+1} \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{L+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N-L} & x_{N-L+1} & \cdots & x_N \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

de dimensiunea $2(N-L)x(L+1)$.

Se pune problema de a determina rangurile matricilor de date definite mai sus, în funcţie de numărul L de sinusoide atenuate exponenţial ce compun procesul din care s-a prelevat secvenţa de date $\{x_n\}$, $n= 1,2,\ldots,N$. In acest scop se consideră vectorii daţi prin relaţiile :

$$v_{1k}=\left[e^{s_k(L+1)}, e^{s_kL}, \ldots, e^{s_k2}, e^{s_k}\right]^T, \quad k = 1,2,\ldots,L \qquad (2.18)$$

$$v_{2k}=\left[e^{s_k^*(L+1)}, e^{s_k^*L}, \ldots, e^{s_k^*2}, e^{s_k^*}\right]^T, \quad k = 1,2,\ldots,L \qquad (2.19)$$

$$v_{3k}=\left[e^{s_k}, e^{s_k2}, \ldots, e^{s_kL}, e^{s_k(L+1)}\right]^T, \quad k = 1,2,\ldots,L \qquad (2.20)$$

$$v_{4k} = \left[e^{s_k^*}, e^{s_k^* 2}, \ldots, e^{s_k^* L}, e^{s_k^*(L+1)}\right]^T,$$

$$k = 1,2,\ldots,M \qquad (2.21)$$

In cazul general în care numerele complexe s_k au partea reală diferită de zero, ceea ce corespunde unui proces format din sinusoide atenuate exponențial, toți vectorii v_{1k}, v_{2k}, v_{3k}, v_{4k}, $k=1,2,\ldots,M$ sînt liniar independenți. Din relația (2.12) se deduce că orice linie a matricei de date directe A_d se obține din combinația liniară a 2M vectori liniar independenți v_{1k}, v_{2k}, $k=1,2,\ldots,M$. Similar, orice linie a matricei de date inverse A_i se obține din combinația liniară a 2M vectori independenți v_{3k}, v_{4k}, $k=1,2,\ldots,M$. Rezultă că, dacă numărul de linii ale matricilor A_d și A_i este mai mare sau egal cu 2M, adică $N-L \geq 2M$, rangul acestor matrici este egal cu 2M. Din modul de definire al matricei de date directe-inverse A_{di} rezultă că aceasta este de rang 4M.

Deoarece rangul matricei de date directe (inverse) este 2M rezultă că orice coloană a acestei matrice se obține prin combinații liniare ale altor 2M coloane ale aceleiași matrice. Se obține

$$x_n = -\sum_{m=1}^{2M} b_m x_{n-m}, \qquad (2.22)$$

unde $n = 2M+1, 2M+2, \ldots, N$. Relația (2.22) exprimă faptul că un proces format din M sinusoide atenuate exponențial este un proces autoregresiv de ordinul 2M cu coeficienții de autoregresie b_m reali /24/.

2.1.2. Modelul autoregresiv simetric. Matricea de date sumă

In cele ce urmează se demonstrează că un proces format din M sinusoide neatenuate este un proces autoregresiv de ordinul 2M cu coeficienții de autoregresie reali și simetrice. Problemele tratate în această lucrare se referă la sinusoide neatenuate şi nu se va mai specifica acest fapt. Deoarece, în acest caz, numerele s_k, k= 1,2,..., M sînt pur imaginare, conform relaţiei 2.14, rezultă

$$e^{s_k^*} = e^{-s_k}, \quad k= 1,2,\ldots,M. \tag{2.23}$$

Avînd în vedere modul de definire a vectorilor v_{1k}, v_{2k}, v_{3k}, v_{4k}, se obţine

$$\begin{aligned} e^{-s_k^*(L+2)} v_{1k} &= v_{4k}, \quad k= 1,2,\ldots,M, \\ e^{-s_k(L+2)} v_{3k} &= v_{2k}, \quad k= 1,2,\ldots,M. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Relaţiile (2.24) exprimă faptul că vectorii v_{1k} şi v_{4k}, respectiv v_{2k} şi v_{3k}, k= 1,2,...,M devin liniar dependenţi doi cîte doi. Rezultă că, în cazul unui proces format din M sinusoide, rangul matricei de date A_{di} este 2M.

Deoarece rangul matricei de date direct-inverse A_{di} este 2M rezultă că orice coloană a acestei matrice se obţine prin combinaţii liniare ale altor 2M coloane. Rezultă relaţiile

$$x_n = -\sum_{m=1}^{2M} b_m x_{n-m}, \tag{2.25}$$

$$x_{n-2M} = -\sum_{m=1}^{2M} b_m x_{n-2M+m}, \tag{2.26}$$

unde n= 2M+1, 2M+2,...,N. Din compatibilitatea relaţiilor (2.25) şi (2.26) se obţine

$$\begin{aligned} b_{2M} &= 1, \\ b_m &= b_{2M-m}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Rezultă că un proces format din M sinusoide este un proces autoregresiv de ordinul 2M cu coeficienţii de autoregresie b_m reali şi simetrici /7/, /24/, /39/.

Avînd în vedere simetria coeficienţilor de autoregresie, rezultă că devine utilă definirea matricei de date, sub forma /2/

$$A' = \begin{bmatrix} x_{L+1}+x_1 & x_L+x_2 & \cdots & 2x_{L/2+1} \\ x_{L+2}+x_2 & x_{L+1}+x_3 & \cdots & 2x_{L/2+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_N+x_{N-L} & x_{N-1}+x_{N-L+1} & \cdots & 2x_{N-L/2} \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

cu $2M \leq L \leq N-M$ şi L un număr par. Matricea A' are o structură Toeplitz plus Hankel şi implică un vector al coeficienţilor de autoregresie de forma /2/

$$b = \left[b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_{L/2-1},\ b_{L/2}/2 \right]^T .$$

In lucrarea de [illegible] se defineşte matricea de date sumă sub forma

$$A_s = \begin{bmatrix} x_{L+1}+x_1 & x_L+x_2 & \cdots & x_{L/2+1} \\ x_{L+2}+x_2 & x_{L+1}+x_3 & \cdots & x_{L/2+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_N+x_{N-L} & x_{N-1}+x_{N-L+1} & \cdots & x_{N-L/2} \end{bmatrix} \qquad (2.29)$$

cu $2M \leq L \leq N-M$ şi L un număr par. Matricea A_s implică un vector al coeficienţilor de autoregresie de forma

$$b = \left[b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_{L/2-1},\ b_{L/2} \right]^T .$$

Matricea de date sumă are dimensiunea $(N-L)x(L/2+1)$.

Pentru a determina rangul matricei de date sumă A_s în funcție de numărul de sinusoide ce compun procesul din care s-a prelevat secvența de date $\{x_n\}$, $n=1,2,\dots,N$, se definesc vectorii

$$v_{5k}=\left[e^{s_k(L+1)}+e^{s_k},e^{s_kL}+e^{s_k2},\dots,e^{s_k(L+4)/2}+e^{s_kL/2},e^{s_k(L+2)/2}\right]$$

$$k=1,2,\dots,L$$

$$v_{6k}=\left[e^{s_k^*(L+1)}+e^{s_k^*},e^{s_k^*L}+e^{s_k^*2},\dots,e^{s_k^*(L/2+2)}+e^{s_k^*L/2},e^{s_k^*(L/2+1)}\right]$$

$$k=1,2,\dots,L. \qquad (2.30)$$

Avînd în vedere relația (2.23) se deduce

$$e^{-s_k(L+1)}v_{5k}=v_{6k}\ ,\quad k=1,2,\dots,L. \qquad (2.31)$$

Relația (2.31) exprimă faptul că vectorii v_{5k} și v_{6k}, $k=1,2,\dots,L$ sînt liniar dependenți doi cîte doi. Se menționează că vectorii v_{5k}, $k=1,2,\dots,L$ sînt liniar independenți, ca și vectorii v_{6k}, $k=1,2,\dots,L$. Din relația (2.11) se deduce că orice linie a matricei de date sumă A_s se obține din combinația liniară a 2L vectori v_{5k}, v_{6k}, $k=1,2,\dots,L$ dintre care L sînt liniar independenți. Rezultă că rangul matricei de date sumă A_s este L, egal deci cu numărul de sinusoide ce compun procesul.

Demonstrația privind rangul matricei de date A_s în funcție de numărul de sinusoide ce compun procesul din care s-a prelevat secvența de date $\{x_n\}$ este o contribuție a prezentei lucrări.

2.2. Determinarea frecvențelor, amplitudinilor și fazelor sinusoidelor

In paragraful precedent s-a demonstrat că un proces format din L sinusoide este un proces autoregresiv de ordinul 2M cu coeficienţii de autoregresie reali şi simetrici, ceea ce este exprimat prin relaţiile (2.25) şi (2.27). Se pune problema de a determina frecvenţele sinusoidelor în funcţie de coeficienţii de autoregresie. Pentru aceasta se formează cu coeficienţii de autoregresie polinomul caracteristic definit prin relaţia

$$P(z) = \sum_{m=0}^{2M} b_m z^{2M-m}, \qquad (2.32)$$

în care $b_o=1$. Deoarece coeficienţii de autoregresie sînt reali rezultă că polinomul $P(z)$ are rădăcini complex conjugate, fapt exprimat prin relaţia

$$P(z) = \prod_{k=1}^{M} (z-z_k)(z-z_k^*). \qquad (2.33)$$

Se scrie relaţia (2.25) sub forma

$$\sum_{m=0}^{2M} b_m x_{n-m} = 0 , \qquad (2.34)$$

unde $b_o=1$. Din relaţiile (2.12) şi (2.34) se obţine

$$\sum_{m=0}^{2M} b_m \sum_{k=1}^{M} \left[a_k e^{s_k(n-m)} + a_k^* e^{s_k^*(n-m)} \right] = 0 . \qquad (2.35)$$

In relaţia (2.25) se fac substituţiile

$$e^{s_k(n-m)} = e^{s_k(n-2M)}\, e^{s_k(2M-m)} ,$$

$$e^{s_k^*(n-m)} = e^{s_k^*(n-2M)}\, e^{s_k^*(2M-m)} .$$

Se obţine

$$\sum_{k=1}^{M} a_k e^{s_k(n-2M)} \sum_{m=0}^{2M} b_m e^{s_k(2M-m)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M} a_k^* e^{s_k^*(n-2M)} \sum_{m=0}^{2M} b_m e^{s_k^*(2M-m)} = 0 \qquad (2.36)$$

Relaţia (2.36), la fel ca şi (2.34), se menţine pentru orice n. Astfel, se obţine din relaţia (2.36) un sistem de ecuaţii care admite soluţia

$$\sum_{m=0}^{2M} b_m e^{s_k(2M-m)} = 0, \quad k=1,2,\ldots,M$$

$$\sum_{m=0}^{2M} b_m e^{s_k^*(2M-m)} = 0, \quad k=1,2,\ldots,M \qquad (2.37)$$

Rezultă că rădăcinile polinomului caracteristic P(z) definit prin relaţia (2.32) sînt

$$z_k = e^{s_k}, \quad k=1,2,\ldots,M$$

$$z_k^* = e^{s_k^*}, \quad k=1,2,\ldots,M . \qquad (2.38)$$

Inlocuind în (2.38) coeficienţii s_k daţi prin relaţia (2.14), se obţine

$$z_k = e^{j2\pi f_k T}, \quad k= 1,2,\ldots,M \qquad (2.39)$$

$$z_k^* = e^{-j2\pi f_k T}, \quad k= 1,2,\ldots,M . \qquad (2.40)$$

Rezultă că, pentru un proces format din sinusoide, coeficienţii de autoregresie sînt funcţii de frecvenţele sinusoidelor şi nu depind de amplitudinile şi fazele lor. Pentru determinarea frecvenţelor sinusoidelor în funcţie de coeficienţii de autoregresie se calculează rădăcinile polinomului caracteristic (2.32) şi apoi se foloseşte relaţia

$$f_k = \frac{1}{2\pi T}\left[\arg(z_k) + 2\pi r\right], \quad k=1,2,\ldots,M . \qquad (2.41)$$

Erorile alias /36/ se manifestă prin nedeterminarea numărului întreg r. Dacă secvenţa de date este obţinută prin eşantionare cu pasul T, astfel încît să se respecte teorema eşantionării $1/T > 2f_k$, k= 1,2,...,M, coeficientul r din relaţia (2.41) este egal cu zero.

In cele ce urmează se pune problema determinării amplitudinilor şi fazelor sinusoidelor în funcţie de secvenţa de date şi de frecvenţele sinusoidelor. In acest scop se scrie relaţia (2.11) sub forma

$$x_n = \sum_{k=1}^{M}\left[\alpha_k \sin(2\pi f_k nT) + \beta_k \cos(2\pi f_k nT)\right], \qquad (2.42)$$
$$n = 1,2,\ldots,N$$

unde

$$A_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}, \quad k= 1,2,\ldots,M \qquad (2.43)$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{\beta_k}{\alpha_k}, \quad k= 1,2,\ldots,M . \qquad (2.44)$$

Dacă se dă secvenţa de date $\{x_n\}$ n= 1,2,...,N şi se cunosc frecvenţele sinusoidelor f_k, k= 1,2,...,M, relaţia (2.42) reprezintă un sistem de ecuaţii liniare cu 2M necunoscute α_k, β_k, k= 1,2,...,M. Rezolvînd sistemul de ecuaţii liniare se obţin coeficienţii α_k şi β_k. Cu relaţiile (2.43) şi

(2.44) se obţin amplitudinile şi respectiv fazele sinusoidelor.

In cazul $N > M$, numărul de ecuaţii ale sistemului (2.42) este mai mare decît numărul de necunoscute, şi sistemul devine supradeterminat. Dacă pentru determinarea amplitudinilor şi fazelor se dispune de estimaţii ale frecvenţelor f_k, $k= 1,2,...,M$, sistemul de ecuaţii liniare supradeterminat se rezolvă în sensul celor mai mici pătrate.

Din cele prezentate rezultă că determinarea frecvenţelor, amplitudinilor şi fazelor sinusoidelor, în funcţie de coeficienţii de autoregresie şi de secvenţa de date, se face în două etape. In prima, se determină frecvenţele sinusoidelor, ca rădăcini ale polinomului caracteristic construit cu coeficienţii de autoregresie. In a doua etapă se determină amplitudinile şi fazele sinusoidelor în funcţie de coeficienţii de autoregresie şi de secvenţa de date, prin rezolvarea sistemului de ecuaţii liniare (2.42).

2.3. Estimarea numărului de sinusoide

In paragraful 2.1 s-a demonstrat că, pentru un proces format din M sinusoide, rangul matricilor de date directe A_d, inverse A_i şi directe-inverse A_{di} este 2M, iar rangul matricei de date simple A_s este M. Rezultă că numărul de sinusoide poate fi determinat ca rang al matricilor de date. In acest paragraf se pune problema estimării numărului de sinusoide în situaţia în care secvenţa de date este afectată de zgomot. Această estimare se face prin calculul numeric al rangului matricilor de date. Dificultăţile reale privind soluţionarea acestei probleme rezultă din faptul că rangul unei matrice este o funcţie discontinuă de elementele matricei /12/. Astfel, perturbaţii mici ale elementelor unei matrice A cu dimensiunea $m \times n$ $(m>n)$, de rang $r<n$, conduc la o matrice de rang $r= n$ /58/. Se afirmă /5/, /25/, /26/ că utilizarea descompunerii valorilor singulare (DVS) constituie singurul mijloc sigur de determinare a rangului unei matrice de formă generală.

Teorema referitoare la descompunerea valorilor singu-
l /5/, /25/ afirmă că pentru orice matrice reală A de di-
m lune m x n şi rang r, există matricile ortogonale U, m x m
ş V, n x n, astfel încît

$$A = U \Sigma V^T, \tag{2.45}$$

unde Σ se numeşte formă canonică pseudodiagonală a matricei A

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.46}$$

şi S este o matrice diagonală

$$S = \mathrm{diag}\,(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r), \tag{2.47}$$

cu

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0. \tag{2.48}$$

In relaţia (2.45) s-a notat cu V^T transpusă matricei V.

Numerele $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ împreună cu $\sigma_{r+1} = 0, \sigma_{r+2} = 0, \ldots, \sigma_n = 0$ se numesc valorile singulare ale matricei A şi sînt rădăcinile patrate pozitive ale valorilor proprii ale matricei A^TA. Coloanele matricei U se numesc vectori singulari la stînga ai matricei A şi sînt vectorii proprii ortonormali ai matricei AA^T. Coloanele matricei V se numesc vectori singulari la dreapta ai matricei A şi sînt vectorii proprii ortonormali ai matricei A^TA.

Din cele prezentate mai sus rezultă că rangul unei matrice este dat de numărul valorilor singulare diferite de zero obţinute prin DVS.

Fiind dată o matrice reală A de dimensiune m x n şi rang r, toate matricile B, m x n, care satisfac relaţia

$$\|B - A\|_2 < \sigma_r \tag{2.49}$$

sînt de rang mai mare decît r. In relaţia (2.49) prin $\|\cdot\|_2$ s-a notat norma spectrală a unei matrice, definită ca normă matriceală indusă de norma vectorială euclidiană /30/, prin relaţia

$$||A||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||Ax||_2 , \tag{2.50}$$

unde vectorul $x \in R^n$. Se arată /30/, /64/ că

$$||A||_2 = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\} = \sigma_1, \tag{2.51}$$

unde σ_1 reprezintă valoarea singulară maximă a matricei A. Matricea

$$B = U \hat{\Sigma} V^T, \tag{2.52}$$

unde

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{S} = \mathrm{diag}\,(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{r-1}),$$

are rangul r-1 şi

$$||B - A||_2 = \sigma_r . \tag{2.53}$$

Rezultă că valoarea singulară minimă σ_r a matricei A exprimă cît de departe, în sensul normei spectrale, este matricea A faţă de matricile de rang mai mic decît r. Pentru exprimarea relativă a acestei depărtări se foloseşte raportul

$$\frac{\sigma_r}{||A||_2} = \frac{\sigma_r}{\sigma_1} .$$

Pentru toate matricile B care satisfac relaţia (2.49) se defineşte rangul efectiv egal cu r /12/. Rangul efectiv al unei matrice, fiind o funcţie întreagă, este discontinuă de elementele matricei, dar numărul de discontinuităţi este mult mai mic decît cel al funcţiei definită de rangul unei matrice.

In prezenta lucrare numărul de sinusoide dintr-un proces compus din sinusoide în zgomot se estimează ca rang efectiv al matricei de date sumă A_s. Rangul efectiv se obţine prin analiza valorilor singulare rezultate din DVS a matricei A_s. Dacă intervalul de timp pe care sînt prelevate eşantioanele unei linii a matricei de date este foarte scurt relativ la perioadele frecvenţelor mici, aportul acestor frecvenţe în eşantioanele liniei respective este aproximativ constant. In consecinţă valorile singulare indică numai prezenţa frecvenţelor mari. Această concluzie este susţinută prin rezultatele experimentului 2.1 (Capitolul 4) în care se consideră un proces format din cinci sinusoide în zgomot aditiv : f_1= 2 Hz; f_2= 6 Hz; f_3= 2o Hz; f_4= 25 Hz şi f_5= 3o Hz. Pasul de eşantionare este T= 1/256 s. Intervalul de timp pe care sînt prelevate eşantioanele unei linii a matricei de date A_s, cu L= 2L= lo, este 1/25,6 s, mult mai mic relativ la perioadele frecvenţelor f_1 şi f_2. Astfel, în experimentul 2.1 se obţin valorile singulare σ_1=45,1; σ_2= 24,5; σ_3= 3.2; σ_4= 0,0[illegible]; σ_5= 0,028; σ_6= 0,015. Deoarece $\sigma_4 \ll \sigma_3$, rangul efectiv al matricei A_s se ia egal cu trei. Rezultă că valorile singulare indică numai prezenţa sinusoidelor cu frecvenţele mai mari f_3, f_4 şi f_5.

Pentru a obţine estimaţii corecte pentru numărul de sinusoide este necesară utilizarea matricilor de date sumă cu mărire simulată a pasului de eşantionare A_{sK}, K= 2,3,..., definite prin prezenta lucrare (relaţia 3.22 Capitolul 3). Intervalul de timp corespunzător unei linii a matricei de date A_{sK} este de K ori mai mare decît intervalul de timp corespunzător unei linii a matricei A_s. In acest fel se impune prezenţa frecvenţelor mici, ceea ce se confirmă prin experimentele 2.2, 2.3 şi 2.4, în care se utilizează matricea de date sumă A_{s4}, cu K= 4. Astfel, în experimentul 2.4, se obţin valorile singulare ale matricei A_{s4}, cu L= 2L= 10 : σ_1= 19,9; σ_2= 17,6; σ_3= 8,23; σ_4= [illegible],51; σ_5= 3,59; σ_6= 0,025. Deoarece $\sigma_6 \ll \sigma_5$, rangul efectiv al matricei A_{s4} este cinci. Rezultă că valorile singulare indică prezenţa celor cinci sinusoide.

Dintr-un punct de vedere mai general valorile singulare indică posibilitatea corelării modelului cu secvenţa de date. In această lucrare modelul este format dintr-o sumă de sinusoide. O valoare singulară σ a matricei A_s exprimă cît de departe, în sensul normei spectrale, este matricea A_s faţă de matricile de rang mai mic decît r. Exprimarea relativă a acestei depărtări se face prin raportul σ_r/σ_1. Rezultă că raportul σ_r/σ_1 este o măsură a corelării unui model format din (r-1) sinusoide cu secvenţa de date. Cu cît acest raport este mai mic corelarea este mai bună.

In cazul unui proces format din (r-1) sinusoide în zgomot, raportul σ_r/σ_1 este cu atît mai mic cu cît raportul semnal-zgomot este mai mare. Aceasta în condiţia ca intervalul de timp corespunzător unei linii a matricei de date să nu fie mult mai mic relativ la perioadele frecvenţelor mici conţinute în proces.

Estimarea numărului de sinusoide prin utilizarea DVS a matricilor de date sumă şi observaţia că estimaţii mai bune se obţin prin utilizarea matricilor de date sumă cu mărire simulată a pasului de eşantionare, reprezintă contribuţii ale prezentei lucrări.

2.4. Estimarea coeficienţilor de autoregresie

In paragraful 2.1 s-a demonstrat că un proces format din M sinusoide este un proces autoregresiv de ordinul 2M cu coeficienţii de autoregresie reali şi simetrici. Se pune problema estimării coeficienţilor de autoregresie în cazul în care procesul format din sinusoide este afectat de zgomot aditiv. Dacă se notează cu $\{y_n\}$ $n=1,2,\ldots,N$ secvenţa obţinută prin eşantionarea unui proces format din M sinusoide în zgomot, cu $\{x_n\}$, $n=1,2,\ldots,N$ secvenţa corespunzătoare aceluiaşi proces în absenţa zgomotului şi cu $\{w_n\}$, $n=1,2,\ldots,N$ secvenţa de zgomot, se obţine

$$y_n = x_n + w_n, \quad n=1,2,\ldots,N. \tag{2.54}$$

Avînd în vedere relaţia (2.29) rezultă

$$y_n = -\sum_{i=1}^{2M} a_i x_{n-i} + w_n . \tag{2.55}$$

Inlocuind $x_{n-m} = y_{n-m} - w_{n-m}$ în relaţia (2.55) se obţine

$$y_n = -\sum_{m=1}^{2M} b_m y_{n-m} + \sum_{m=1}^{2M} b_m w_{n-m} + w_n \quad (2.56)$$

Din relaţia (2.56) rezultă că un proces format din M sinusoide în zgomot aditiv este un proces ARMA de ordinul 2M cu coeficienţii de autoregresie egali cu cei de mediere /24/, /67/, /69/. Această proprietate a procesului impune metode de estimare a parametrilor procesului diferite faţă de metodele generale utilizate în cazul modelului ARMA.

2.4.1. Estimarea coeficienţilor de autoregresie în funcţie de secvenţa de autocorelaţie

Metoda descompunerii armonice Pisarenko permite estimarea coeficienţilor de autoregresie b_m în cazul în care se cunoaşte secvenţa de autocorelaţie $\{R_{yy}(k)\}$, $k = 0,1,\ldots,2M$, iar zgomotul aditiv este alb cu media zero şi dispersia σ_w^2 /24/, /67/, /53/.

Se scrie relaţia (2.56) sub formă matriceală

$$y^T b = w^T b \quad (2.57)$$

unde

$$y^T = [y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-2M}],$$
$$w^T = [w_n, w_{n-1}, \ldots, w_{n-2M}], \quad (2.58)$$

iar b reprezintă vectorul coeficienţilor de autoregresie

$$b^T = [1, b_1, \ldots, b_{2M}] \quad (2.59)$$

Se înmulţesc la stânga cei doi termeni din relaţia (2.57) cu vectorul y şi se aplică operatorul de mediere pe ansamblu. Se obține

$$E\left[yy^T\right] b = E\left[yw^T\right] b . \qquad (2.60)$$

Matricea

$$E\left[yy^T\right] = R_{yy} = \begin{bmatrix} R_{yy}(0) & \dots & R_{yy}(-2M) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ R_{yy}(2M) & \dots & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \qquad (2.61)$$

este matricea de autocorelație a procesului și este de tip Toeplitz.

Dacă se face notația

$$x^T = \left[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-2M}\right],$$

se obține

$$E\left[yw^T\right] = E\left[(x+w)w^T\right] = E\left[ww^T\right] = \sigma_w^2 I , \qquad (2.62)$$

unde I este matricea unitate.

In relația (2.62) s-a avut în vedere că $E\left[xw^T\right] = 0$ deoarece sinusoidele nu sînt corelate cu zgomotul.

Din relațiile (2.60), (2.61) și (2.62) rezultă

$$R_{yy} b = \sigma_w^2 b \qquad (2.63)$$

Se observă că dispersia zgomotului este o valoare proprie a matricei de autocorelație, iar vectorul coeficienților de autoregresie b este vectorul propriu asociat valorii proprii σ_w^2 și normat astfel încît primul element să fie egal cu unu.

Relația (2.63) permite estimarea coeficienților de autoregresie b_i, $i = 0,1,\dots,2M$. Dacă secvența de autocorelație $\{R_{yy}(k)\}$, $k = 0,1,\dots,2M$ se cunoaște exact este posibilă determinarea exactă a coeficienţilor de autoregresie şi implicit a celor M frecvenţe. Amplitudinile A_k ale sinusoidelor şi dispersia σ_w^2 rezultă din relaţiile

$$R_{yy}(o) = \sigma_w^2 + \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i^2}{2} ,$$

$$R_{yy}(k) = \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i^2}{2} \cos(2\pi f_k nT), \text{ pentru } k \neq o, \qquad (2.64)$$

unde T reprezintă pasul de eşantionare. Deoarece s-a presupus că se cunoaşte numai secvenţa de autocorelaţie, informaţiile privind fazele sinusoidelor nu există.

In cazul în care nu se cunoaşte numărul de sinusoide M, dar se cunoaşte exact secvenţa de autocorelaţie se rezolvă (2.63) pentru ordine M crescătoare pînă cînd dispersia σ_w^2 atinge valoarea minimă şi rămîne constantă, ceea ce indică valoarea corectă a lui M. In cazurile practice se cunosc doar estimaţii ale secvenţei de autocorelaţie, astfel încît ordinul M se alege corespunzător variaţiei minime a mărimii σ_w^2, rezultată prin rezolvarea ecuaţiei (2.63) pentru ordine M succesive.

In cele ce urmează se prezintă un algoritm care reduce calculele necesare rezolvării ecuaţiei (2.63) şi care utilizează structura Toeplitz a matricei de autocorelaţie R_{yy}. Pentru aceasta se precizează că dispersia σ_w^2 este o valoare proprie a matricei R_{yy}, iar b este un vector propriu asociat valorii proprii σ_w^2. Se arată /33/ că pentru un proces format din M sinusoide în zgomot alb, σ_w^2 corespunde valorii proprii minime a matricei de autocorelaţie R_{yy}, cînd dimensiunea minimă a acesteia este (2M+1) x (2M+1). Valoarea proprie minimă a matricei R_{yy} şi vectorul propriu corespunzător pot fi determinate prin metoda puterii /5/ în care secvenţa de vectori

$$b(k+1) = R_{yy}^{-1} . b(k) \ , \quad k = o,1,\ldots \qquad (2.65)$$

...

converge la limită spre vectorul propriu corespunzător valorii proprii minime, pentru b(o) ales inițial.

Relația (2.65), scrisă sub forma

$$R_{yy}b(k+1) = b(k), \tag{2.66}$$

se rezolvă obținînd vectorul b(k+1) în funcție de vectorul b(k). Rezolvarea sistemului (2.66) prin metoda eliminării Gauss necesită un număr de operații elementare de ordinul M^3. Dacă se utilizează algoritmi de rezolvare a sistemului (2.66) care valorifică structura Toeplitz a matricei R_{yy} /11/, numărul de operații elementare este de ordinul M^2. Se recomandă /24/ alegerea inițială

$$b^T(o) = \left[\, 1,\ldots,1 \,\right].$$

Vectorul $b(\infty)$ se obține în general după cîteva iterații. Dacă vectorul coeficienților de autoregresie b este determinat, se poate obține dispersia σ_w^2 ca valoare proprie minimă a matricei R_{yy}

$$\sigma_w^2 = \frac{b^T R_{yy} b}{b^T b} \tag{2.67}$$

Determinarea coeficienților de autoregresie b permite determinarea frecvențelor sinusoidelor, prin intermediul rădăcinilor polinomului caracteristic (2.32) și a relației (2.41).

Avînd în vedere relația (2.64), determinarea amplitudinilor sinusoidelor se face cu sistemul de ecuații

$$Fp = r, \tag{2.68}$$

unde

$$F = \begin{bmatrix} \cos(2\pi f_1 T) & \ldots & \cos(2\pi f_L T) \\ \vdots & & \vdots \\ \cos(2\pi f_1 LT) & \ldots & \cos(2\pi f_L LT) \end{bmatrix},$$

$$p^T = \left[\frac{A_1^2}{2}, \ldots, \frac{A_M^2}{2}\right],$$

$$r^T = \left[R_{yy}(1), \ldots, R_{yy}(M)\right].$$

Dispersia zgomotului se determină din relația

$$\sigma_w^2 = R_{yy}(o) - \sum_{i=1}^{L} \frac{A_i^2}{2} \qquad (2.69)$$

Din cele prezentate rezultă că în cadrul metodei descompunerii armonice Pisarenko, estimarea numărului de sinusoide se face prin rezolvarea succesivă a ecuației (2.63) pentru ordine M crescătoare și analiza dispersiilor σ_w^2 rezultate. Această metodă necesită un volum mare de calcule și, deoarece, în practică sînt utilizate estimații ale secvenței de autocorelație, se pot obține estimații greșite ale numărului de sinusoide. Dacă numărul de sinusoide estimat este prea mare apar componente sinusoidale false. Dacă numărul de sinusoide estimat este prea mic se obțin erori mari la estimarea frecvențelor sinusoidelor. Deoarece procesul compus din sinusoide în zgomot este dat prin secvența de date $\{y_n\}$, $n = 1,2,\ldots,N$, se pot calcula estimații pentru secvența de autocorelație /46/ /23/

$$\hat{R}_{yy}(k) = \frac{1}{N - |k|} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} y_{n+k} y_n, \quad \text{pentru } |k| < N \qquad (2.70)$$

$$\hat{R}'_{yy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} y_{n+k} y_n, \quad \text{pentru } |k| < N. \qquad (2.71)$$

Estimatorul $\hat{R}_{yy}(k)$ este nedeplasat, iar estimatorul $\hat{R}'_{yy}$ este deplasat /24/, /46/. Aplicînd operatorul de medie estimetorului deplasat se obține

$$E\left[\hat{R}'_{yy}(k)\right] = \frac{N-k}{N} R_{yy}(k) \; . \qquad (2.72)$$

Rezultă că media secvenței de autocorelație $\hat{R}'_{yy}(k)$ corespunde secvenței de autocorelație adevărată $R_{yy}(k)$ ponderată cu fereastră triunghiulară /14/. Dacă în cadrul metodei descompunerii armonice Pisarenko se utilizează estimatorul nedeplasat al secvenței de autocorelație $\hat{R}_{yy}(k)$, matricea de autocorelație nu rezultă în mod necesar pozitiv definită, ceea ce poate conduce la valori proprii negative și la estimații fără sens pentru frecvențe. In cazul utilizării estimatorului deplasat $\hat{R}'_{yy}$, matricea de autocorelație rezultă pozitiv definită, dar ponderarea secvenței de autocorelație cu fereastră triunghiulară conduce la estimații eronate ale frecvențelor și la introducerea unor componente de frecvență false /14/.

2.4.2. Estimarea coeficienților de autoregresie în funcție de secvența de date

Se consideră un proces format din M sinusoide în zgomot aditiv din care s-a prelevat secvența de date

$$y_n = x_n + w_n \; , \quad n = 1, 2, \ldots, N. \qquad (2.73)$$

Secvența $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, N$ corespunde aceluiași proces în absența zgomotului, iar w_n reprezintă un eșantion al secvenței de zgomot.

Se pune problema estimării coeficienților de autoregresie

$$b = \left[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{2M}\right]^T, \quad b_0 = 1 \qquad (2.74)$$

în funcție de secvența de date $\{y_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, N$ astfel ca necesita estimarea secvenţei de autocorelaţie, ca în cazul metodei descompunerii armonice Pisarenko.

In paragraful 2.2 s-a demonstrat că rădăcinile polinomului caracteristic

$$P(z) = \sum_{m=0}^{2M} b_m z^{2M-m} , \qquad (2.75)$$

permit determinarea frecvenţelor sinusoidelor. Rădăcinile polinomului P(z) se numesc rădăcini adevărate.

Relaţia (2.25) se poate scrie sub forma

$$\sum_{m=0}^{2M} b_m x_{n-m} = 0 , \quad b_0=1 \qquad (2.76)$$

de unde rezultă că vectorul coeficienţilor de autoregresie este ortogonal pe orice vector x format din 2M+1 eşantioane consecutive ale secvenţei $\{x_n\}$, n= 1,2,...,N.

Se defineşte /21/ matricea

$$G_L = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{2M} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{2M-1} & b_{2M} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & b_0 & \dots & & b_{2M} \end{bmatrix}^T \qquad (2.77)$$

de dimensiunea (L+1) x (L+1 - 2M). Deoarece coloanele matricei G sînt liniar independente rezultă că rangul ei este egal cu L+1-2M. Se demonstrează /21/ că orice vector

$$c_t = [c_0, c_1, \dots, c_L]^T , \qquad (2.78)$$

care aparţine spaţiului liniar generat de liniile matricei G_L^T, adică

$$c_t = G_L a , \qquad (2.79)$$

cu

$$s = \left[s_0, s_1, \ldots, s_{L-2M} \right]^T$$

un vector oarecare, conduce la polinomul caracteristic

$$P_L(z) = \sum_{m=0}^{L} c_m z^{L-m} , \qquad (2.80)$$

care are rădăcinile adevărate ale polinomului $P(z)$, precum şi $L-2M$ rădăcini suplimentare. Aceste rădăcini suplimentare sînt date de polinomul

$$P_{L-2M}(z) = \sum_{m=0}^{L-2M} d_m z^{L-2M-m} \qquad (2.81)$$

Deoarece elementele vectorului s sînt reale rezultă că şi rădăcinile suplimentare sînt perechi complex conjugate.

Se deduce /[illegible]/ că spaţiul liniar generat de liniile matricei G_L^T este ortogonal pe orice vector format din $L+1$ eşantioane consecutive ale secvenţei $\{x_n\}$, $n= 1,2,\ldots,N$. Considerînd vectorul c_t ca aparţinînd acestui spaţiu liniar şi definit prin relaţiile (2.78), (2.79) rezultă

$$\sum_{m=0}^{L} c_m x_{l-m} \ [illegible] \qquad (2.82)$$

In cazul în care $L=2M$, relaţia (2.82) devine identică cu relaţia (2.[illegible]). In particular, în relaţia (2.[illegible]) vectorul c_t poate fi ales ca oricare din liniile matricei G_L^T. Dacă se consideră matricea de date directe

$$A_d = \begin{bmatrix} x_{L+1} & x_L & \cdots & x_1 \\ x_{L+2} & x_{L+1} & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_N & x_{N-1} & \cdots & x_{N-L} \end{bmatrix} , \qquad (2.83)$$

din relaţia (2.82) se obţine

$$A_d G_L = 0 \ . \tag{2.84}$$

Rezultă că spaţiul liniar generat de liniile matricei G_L^T este identic cu spaţiul nul al matricei A_d sau $A_d^T A_d$. Spaţiul nul al matricei A_1 este definit /3o/ ca mulţimea tuturor vectorilor c_t care satisfac relaţia

$$A_d c_t = 0 \ . \tag{2.85}$$

Deci, orice soluţie a sistemului de ecuaţii liniare (2.85) conduce la un polinom caracteristic $P_L(z)$ definit prin relaţia (2.8o), care are rădăcinile adevărate ale polinomului $P(z)$ dat prin relaţia (2.7), precum şi un număr de L-2M rădăcini suplimentare.

Avînd în vedere simetria coeficienţilor de autoregresie b în cazul unui proces format din sinusoide, se deduce că spaţiul nul al matricei de date inverse

$$A_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{L+1} \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{L+2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{N-L} & x_{N-L+1} & \cdots & x_N \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

este identic cu spaţiul nul al matricei de date directe A_d. Rezultă că şi spaţiul nul al matricei de date directe-inverse

$$A_{di} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_d \end{bmatrix} \tag{2.87}$$

coincide cu spaţiul nul al matricei de date directe A_d. Cu alte cuvinte, în cazul unui proces format din sinusoide, sistemul de ecuații liniare (2.85) este echivalent /34/ cu sistemele

$$A_i c_t = 0 , \qquad (2.88)$$

$$A_{di} c_t = 0 , \qquad (2.89)$$

adică au aceleași soluții.

Se consideră din spațiul nul al matricei A_c vectorii c_t simetrici, adică

$$c_t = \left[c_0 , c_1 , \ldots , c_L \right]^T , \quad c_m = c_{L-m} \qquad (2.90)$$

pentru $m = 0, 1, \ldots, L/2$. Dacă se face notația

$$c = \left[c_0 , c_1 , \ldots , c_{L/2} \right]^T , \qquad (2.91)$$

sistemul de ecuații liniare (2.85) devine

$$A_s c = 0 , \qquad (2.92)$$

unde A_s este matricea de date sumă

$$A_s = \begin{bmatrix} x_{L+1}+x_1 & x_L+x_2 & \cdots & x_{L/2+1} \\ x_{L+2}+x_2 & x_{L+1}+x_3 & \cdots & x_{L/2+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_N+x_{N-L} & x_{N-1}+x_{N-L+1} & \cdots & x_{N-L/2} \end{bmatrix} . \qquad (2.93)$$

In cazul în care L=2M și vectorul c_t este simetric, relația (2.82) devine identică cu relația (2.76), cu coeficienții b_m simetrici. Aceasta corespunde unui proces format din sinusoide. Deoarece vectorii c_t simetrici reprezintă un subspaţiu al spaţiului nul al matricei A_d, rezultă că orice soluţie a sistemului de ecuaţii liniare (2.92) va conduce la un polinom caracteristic $\varphi_L(z)$ cu 2L rădăcini adevărate şi L-2L rădăcini suplimentare. Rădăcinile adevărate permit calculul frecvenţelor celor ... sinusoide. Rezultă că determinarea coeficienţilor polinomului se poate face prin rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare (2.84), (2.88), (2.89) sau (2.92). Se observă că sistemul (2.92) este de dimensiuni mai mici decît celelalte, ceea ce conduce la reducerea calculelor necesare soluţionării.

Prezenţa zgomotului aditiv în procesul format din sinusoide conduce la obţinerea prin eşantionare a secvenţei $\{y_n\}$, n= 1,2,...,N legată de secvenţa $\{x_n\}$ prin relaţia (2.73). Astfel, matricile de date se vor construi conform relaţiilor (2.83), (2.86), (2.87) şi (2.93), în care eşantioanele x_n sînt înlocuite cu eşantioanele y_n. In acest caz soluţionarea sistemelor (2.84), (2.88), (2.89) şi (2.92) reprezintă probleme de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare supradeterminate /5/ .

Din cele prezentate mai sus, rezultă că, dacă L > 2L , polinomul caracteristic are cele 2L rădăcini adevărate şi L-2L rădăcini suplimentare. Se afirmă /21/, /28/, /32/ că în prezenţa zgomotului, rădăcinile suplimentare au un efect de absorbţie a acestuia, protejînd rădăcinile adevărate. Astfel, introducerea rădăcinilor suplimentare prin estimarea unui vector al coeficienţilor de autoregresie c_t de dimensiune (L+1) mai mare decît dimensiunea (2L+1) a vectorului b (2.74), este o practică comună care conduce la estimaţii mai bune pentru frecvenţe. Se recomandă /32/ ca alegerea numărului L să se facă conform relaţiei

$$\frac{N}{3} \leqslant L \leqslant \frac{N}{2} , \tag{2.94}$$

pentru a obţine estimaţiile cele mai bune pentru frecvenţe. In relaţia (2.94) numărul N reprezintă lungimea secvenţei de date $\{y_n\}$. Separarea rădăcinilor adevărate de cele suplimentare se poate face pe baza unor informaţii suplimentare despre proces, în afara secvenţei de date $\{y_n\}$, sau prin determinarea a două soluţii pentru sistemele de ecuaţii supradeterminate şi identificarea rădăcinilor adevărate ca rădăcini comune corespunzătoare celor două soluţii. Pentru un proces format din M sinusoide în zgomot se propune, în prezenta lucrare, utilizarea algoritmului de reducere. Aceasta constă în determinarea spaţiului nul al matricilor A_d, A_i sau A_{di} şi identificarea acestuia cu subspaţiul generat de liniile matricei G_L^T. Spaţiul nul al matricilor A_d, A_i sau A_{di} este determinat dacă se cunosc (L+1-2M) vectori liniar independenţi aparţinînd spaţiului. Cu aceşti vectori se construieşte o matrice G^T avînd ca linii aceşti vectori. Matricea G^T este de aceeaşi dimensiune cu matricea G_L^T definită prin relaţia (2.77). Pentru a determina coeficienţii de autoregresie b, care permit rădăcinilor adevărate ale polinomului caracteristic, se urmăreşte transformarea matricei G^T la forma matricei G_L^T, prin algoritmul de reducere. In acest scop se aduce matricea G^T la forma trapezoidală superior, producînd un triunghi de zerouri în colţul din stînga jos, prin eliminare Gauss directă cu pivotare parţială /5/, /63/. In matricea obţinută se produce un triunghi de zerouri în colţul din dreapta sus prin eliminare Gauss inversă fără permutarea liniilor matricei. Se obţine o matrice de forma matricei G_L^T cu liniile multiplicate cu nişte constante. Se aliniază liniile matricei G^T eliminînd zerourile. Matricea rezultată Q de dimensiune (L+1-2M) x (2M+1) este de rang unu, în absenţa perturbaţiilor. Liniile matricei Q sînt colineare şi oricare poate fi luată ca b^T pentru calculul rădăcinilor adevărate ale polinomului caracteristic. In prezenţa perturbaţiilor se alege b ca vectorul propriu corespunzător valorii proprii maxime a matricei Q^TQ, ceea ce echivalează cu aproximarea matricei Q cu o matrice de rang unu. Calculul vectorului propriu se poate face cu metoda puterii /5/, /63/, sau prin utilizarea descompunerii valorilor singulare a matricei Q.

In cele ce urmează se vor analiza metodele de rezolvare a unui sistem de ecuaţii liniare supradeterminat .

$$Ax = o \,, \tag{2.95}$$

unde A este o matrice cu dimensiunea $I \times J$, de rang R şi x este un vector cu dimensiunea J. Pentru ca sistemul de ecuaţii liniare (2.95) să fie supradeterminat se impune

$$I > J > R \,. \tag{2.96}$$

O primă metodă de rezolvare a sistemului de ecuaţii liniare supradeterminat (2.95) începe prin înlăturarea unui număr de I-R linii ale matricei A obţinînd astfel o matrice B cu dimensiunea R x J. S-a înlăturat numărul maxim de linii astfel încît rangul matricei B să fie egal cu R. Se obţine sistemul

$$Bx = o \,. \tag{2.97}$$

Se trec în partea dreaptă a sistemului (2.97) un număr de J-R coloane ale matricei B. Se obţine sistemul

$$B_s x_s = -B_d x_d \,, \tag{2.98}$$

unde :

- B_s este o matrice pătrată nesingulară cu dimensiunea R x R, formată din R coloane ale matricei B,
- B_d este o matrice cu dimensiunea R x (J-R), formată din J-R coloane ale matricei B,
- x_s este un vector cu dimensiunea R, format din elementele vectorului x ce corespund cu coloanele matricei B_s,
- x_d este un vector cu dimensiunea J-R, format din elementele vectorului x ce corespund cu coloanele matricei B_d.

Rezolvarea sistemului (2.98) constă în alegerea arbitrară a vectorului x_d şi determinarea vectorului x_s cu relaţia

$$x_s = -B_s^{-1} B_d x_d \,. \tag{2.99}$$

Soluţia x a sistemului (2.95) se obţine din vectorii x_s şi x_d. Alegerea arbitrară a vectorului x_d indică faptul că soluţia o este oricare dintr-un spaţiu liniar cu dimensiunea J-R.

Această metodă este bună numai în cazul în care elementele matricei A nu sînt afectate de perturbaţii şi calculele efectuate sînt exacte. In cazul în care apar perturbaţii este nejustificată înlăturarea unui număr de I-R linii ale matricei A, ceea ce înseamnă utilizarea incompletă a datelor conţinute în matricea A.

O a doua metodă de rezolvare a sistemului de ecuaţii liniare supradeterminat (2.95) porneşte de la faptul că spaţiul nul al matricei A este acelaşi cu spaţiul nul al matricei A^TA. Matricea A^TA este patrată cu dimensiunea $J \times J$. Rezultă că soluţia sistemului (2.95) coincide cu soluţia sistemului

$$A^TAx = 0 . \qquad (2.100)$$

Din matricea A^TA se înlătură J-R linii obţinîndu-se o matrice B cu care se operează la fel ca şi în prima metodă prezentată. Această a doua metodă este o procedură de rezolvare a sistemului de ecuaţii liniare supradeterminat în sensul celor mai mici patrate.

Din relaţia (2.96) rezultă că rezolvarea sistemului (2.100) necesită înlăturarea unui număr mai mic de linii ale matricei decît în cazul rezolvării sistemului (2.95). De asemenea, rezolvarea sistemului (2.100) presupune utilizarea integrală a datelor. Totuşi, datele nu sînt tratate uniform în sensul că liniile matricei A^TA care se înlătură, precum şi coloanele matricei rezultante care se transferă în dreapta sistemului, în mod arbitrar. Aceasta înseamnă că datele conţinute în matricea A nu au contribuţii egale în stabilirea soluţiei. In situaţia în care datele sînt afectate de perturbaţii există posibilitatea obţinerii unei soluţii deplasate din punct de vedere statistic.

In cele ce urmează se tratează această metodă pentru cazul în care

$$J = R+1 . \qquad (2.101)$$

Soluţia sistemului (2.100) este de forma

$$x = \lambda x_0 ,$$

unde λ este un număr arbitrar, iar x_0 este un vector. Matricea B_d din relaţia (2.98) este un vector care se notează cu b_d, iar vectorul x_d este un scalar. Dacă se alege acest scalar ca ultim element al vectorului x, matricea B din (2.97) se separă conform relaţiei

$$B = \left[B_s \; ; \; b_d \right] . \qquad (2.10\ldots)$$

Soluţia sistemului este

$$x^T = \left[x_s^T \; ; \; x_d \right] .$$

Din relaţia (2. ...) se obţine

$$x^T = \left[(-B_s b_d)^1 \quad 1 \right] x_d , \qquad (2.10\ldots)$$

unde x_d este un scalar arbitrar.

Se separă matricea A conform relaţiei

$$A = \left[A_s \; ; \; a \right] ,$$

unde a este un vector format din ultima coloană a matricei A. Deoarece la formarea matricei B se elimină numai ultima linie a matricei $A^T A$, în condiţia (2.101), se obţine

$$B_s = A_s^T A ,$$

$$b_s = A_s^T a .$$

Soluţia finală a sistemului de ecuaţii liniare supradeterminat Ax = o, cu ..., este

$$x^T = \left[\left\{ -(A_s^T A_s)^{-1} A_s^T a \right\}^T \; ; \; 1 \right] x_d , \qquad (2.104)$$

pentru x_d un scalar arbitrar. Acest procedeu de rezolvare a sistemului în sensul celor mai mici patrate, pentru cazul particular precizat, se numeşte metoda covarianţei /21/, /36/.

O a treia metodă de rezolvare a sistemului de ecuaţii liniare supradeterminat (2.95) constă în utilizarea descompunerii valorilor singulare DVS. Teorema referitoare la DVS a fost prezentată în paragraful 2.3. Astfel, matricea A de rang K, cu dimensiunea I x J, poate fi scrisă sub forma

$$A = U \Sigma V^T . \tag{2.105}$$

Matricea Σ cu dimensiunea I x J este diagonală, avînd elementele de pe diagonala principală

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdot \cdot \cdot \geqslant \sigma_K > \sigma_{K+1} = \sigma_{K+2} = \ldots = 0,$$

numite valori singulare. Matricile U şi V, cu dimensiunile I x I şi respectiv J x J, sînt ortogonale, adică $U^T = U^{-1}$ şi $V^T = V^{-1}$.

Dacă în sistemul (2.95) se utilizează descompunerea valorilor singulare pentru matricea A se obţine

$$U \Sigma V^T x = b . \tag{2.106}$$

Prin multiplicarea la stînga a relaţiei (2.106) cu matricea U^T rezultă

$$\Sigma \alpha = c , \tag{2.107}$$

unde s-a notat

$$\alpha = V^T x . \tag{2.108}$$

Avînd în vedere forma diagonală a matricei Σ, se obţine

$$\alpha^T = [\,c, \ldots, 0 , d^T], \tag{2.109}$$

unde d este un vector arbitrar cu dimensiunea J-K.

Din relaţiile (2.108) şi (2.109) se obţine soluţia sistemului de ecuaţii supradeterminat

$$x = V\alpha = V \ldots , \tag{2.110}$$

unde matricea V_d este constituită din ultimele J-R coloane ale matricei V. Rezultă că soluţia sistemului Ax = o este compusă din spaţiul liniar generat de ultimele J-R coloane ale matricei V.

Dacă datele conţinute în matricea A sînt afectate de perturbaţii, rangul matricei A creşte peste valoarea R. Astfel, numărul valorilor singulare diferite de zero, rezultate din DVS a matricei A, este mai mare decît R. Se defineşte pentru matrice A afectată de perturbaţii aproximaţia de rang R prin relaţia

$$A_R = U \quad \Sigma_R \, V^T \qquad (2.111)$$

unde matricea Σ_R se obţine din matricea Σ prin anularea tuturor valorilor singulare cu excepţia primelor R valori, cele mai mari. Matricea A_R este cea mai apropiată matrice cu rangul R de matricea A, apropiere măsurată în sensul normei spectrale sau Frobenius /6/. Norma spectrală a fost definită în paragraful 2.3, iar norma matriceală Frobenius este definită prin relaţia

$$\|A\|_F = \Big(\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} |a_{ij}|^2\Big)^{1/2} . \qquad (2.112)$$

Rezultă că este logic să se estimeze spaţiul nul al matricei A cu spaţiul nul al matricei A_R, care este generat de ultimele J-R coloane ale matricei V.

Utilizarea descompunerii valorilor singulare la soluţionarea sistemelor de ecuaţii liniare supradeterminate este avantajoasă în condiţiile existenţei zgomotului şi a erorilor de calcul /21/. Astfel, se propune în lucrarea de faţă estimarea coeficienţilor de autoregresie pentru un proces compus din sinusoide în zgomot, prin spaţiul liniar generat de ultimele coloane ale matricei V. Obţinînd soluţia sistemului sub forma unui spaţiu liniar, rezultă şi posibilitatea aplicării algoritmului de reducere pentru obţinerea numai a frecvenţelor adevărate .

Pentru aplicarea metodelor de rezolvare a sistemului de ecuaţii liniare supradeterminat $As=o$, metode prezentate mai sus, la rezolvarea sistemelor (2.35), (2.38), (2.39) şi (2.92), se prezintă în tabelul 2.1 corespondenţa între dimensiunile şi rangurile matricilor, în absenţa perturbaţiilor.

Matrice	Nr.linii	Nr.coloane	Rang
A'	1	J	
A_d	N-L	L+1	2[illegible]
A_i	N-L	L+1	2[illegible]
A_{di}	2(N-L)	L+1	2[illegible]
A_s	N-L	L/2+1	[illegible]

Tabelul 2.1

Din cel[illegible] [illegible]entate rezultă c[illegible] problema estimării coeficienţilor de [illegible]regresie în funcţie de secvenţa de date, corespunzătoare [illegible] proces format din sinusoide, se reduce la rezolvarea [illegible] [illegible]istem de ecuaţii liniare supradeterminat. Soluţia un[illegible] [illegible]tfel de sistem nu este unică, ci este constituită di[illegible] [illegible]ul nul al matricei de date. Dacă matricile de date sînt [illegible]struite cu $L=2M$, soluţia sistemului se obţine ca produs [illegible] un vector şi o constantă arbitrară. O soluţie unic[illegible] [illegible]ţine dacă se impune valoarea unuia dintre coeficienţi[illegible] [illegible]utoregresie. Construirea matricilor de date cu $L>2M$ [illegible] ce la obţinerea unor estimaţii mai bune pentru rădăcinil[illegible] [illegible]rete ale polinomului caracteristic, deci implicit pentru frecvenţele sinusoidelor. In acest caz, soluţia sistemel[illegible] [illegible] ecuaţii liniare supradeterminate $A_dc_t=o$, $A_ic_t=o$ [illegible] $A_{di}c_t=o$ este un spaţiu liniar de dimensiune

(L+1-2M), iar soluţia sistemului $A_g c=o$ este un spaţiu liniar de dimensiune (L/2+1-M). Identificarea rădăcinilor adevărate se poate face pe baza unor informaţii suplimentare, sau prin determinarea a doi vectori soluţie şi identificarea rădăcinilor comune ale polinoamelor caracteristice corespunzătoare celor doi vectori. Pentru sistemele cu matricile A_d, A_1, A_{di} se poate utiliza algoritmul de reducere, care conduce la obţinerea unui vector soluţie de dimensiunea 2M+1. Rădăcinile adevărate se obţin din polinomul caracteristic construit cu acest vector.

Soluţionarea sistemelor de ecuaţii liniare supradeterminate se face, în sensul celor mai mici pătrate, prin metoda covarianţei sau prin utilizarea descompunerii valorilor singulare. Se prezintă în /39/, /40/, un algoritm eficient care corespunde soluţionării sistemului

$$A'c' = o \,, \qquad (2.113)$$

în sensul celor mai mici pătrate. In relaţia (2.113) matricea A' este

$$A' = \begin{bmatrix} y_1+y_{L+1} & y_2+y_L & \cdots & 2y_{L/2+1} \\ y_2+y_{L+2} & y_3+y_{L+1} & \cdots & 2y_{L/2+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{N-L}+y_N & y_{N-L+1}+y_{N-1} & \cdots & 2y_{N-L/2} \end{bmatrix} \qquad (2.114)$$

Rezultă vectorul c' de forma

$$c' = \left[c_0, c_1, \ldots, c_{L/2-1}, c_{L/2}/2\right]^T \,. \qquad (2.115)$$

Algoritmul utilizează structura Toeplitz plus Hankel a matricei A'. O soluţie unică se obţine impunînd $c_{L/2}=1$. Numărul de operaţii elementare necesare aplicării algoritmului este de ordinul $(L/2)^2$. Algoritmul permite obţinerea simultană a soluţiilor pentru toate ordinele 1, 2, ... , L/2. Prin urmărirea erorii patratice rezultate pentru ordine succesive, se poate selecta ordinul de la care eroarea patratică scade nesemnificativ. Astfel se poate estima numărul de sinusoide ce compun procesul /39/.

Utilizarea descompunerii valorilor singulare la soluţionarea sistemelor de ecuaţii liniare supradeterminate este avantajoasă în condiţiile existenţei zgomotului şi a erorilor de calcul /21/. Prezenţa acestor perturbaţii este indicată prin apariţia valorilor singulare mici. Din analiza valorilor singulare este posibilă determinarea rangului matricei de date, deci implicit a numărului de sinusoide ce compun procesul. Algoritmul de calcul al descompunerii valorilor singulare este extrem de eficient şi stabil. /5/, /12/, /45/.

3. METODA [illegible] DE ESTIMARE A LINIILOR SPECTRALE

In acest capitol [illegible] prezintă o metodă originală care permite îmbunătățirea [illegible] pentru frecvențele sinusoidelor. Se consideră un [illegible] format din L sinusoide în zgomot aditiv și disponibil [illegible] eșantionare pe intervalul de timp Δt. Alegerea [illegible] eșantioane N ce se prelevează pe [illegible] intervalul de timp Δt, [illegible] face astfel încît, pentru estimarea coeficienților [illegible] resie, să se obțină un sistem de [illegible] ecuații liniare supra[illegible]inat. In cele ce urmează se arată că această alegere [illegible] la obținerea unui pas de eșantionare mic față de limita [illegible] teorema eșantionării, în cazul în care intervalul [illegible] timp Δt este scurt.

Se consideră mat[illegible] date A_s, utilizată în lucrarea de față la estimarea [illegible] coeficienților de autoregresie corespunzători unui proces [illegible] din sinusoide în zgomot aditiv. Pentru a obține un sist[illegible] ecuații liniare supradeterminat cu matricea A_s, de dime[illegible] $(N-L) \times (L/2+1)$, se impune

$$N-L > \frac{L}{2} + 1 . \tag{3.1}$$

Rezultă că num[illegible] eșantioane N, care se prelevează, trebuie să satisfac[illegible]

$$N > \frac{3}{2} L + 1 . \tag{3.2}$$

Din teorema eșantionării se obține /44/

$$T \leq \frac{1}{2 f_{kmax}} , \tag{3.3}$$

unde T reprezintă pasul [illegible] eșantionare, iar f_{kmax} reprezintă frecvența maximă conținută de procesul considerat. Avînd în vedere că procesul este disponibil pentru eșantionare pe intervalul Δt, se obține

$$T = \frac{\Delta t}{N-1} . \tag{3.4}$$

Din relațiile (3.3) și (3.4) rezultă

$$N \geqslant 2 \Delta t f_{max} + 1 . \tag{3.5}$$

Relația (3.5) reprezintă condiția impusă numărului de eșantioane de teorema eșantionării. Dacă intervalul de timp Δt este scurt, limita impusă pentru N prin relația (3.5) este mai mică decît limita impusă de condiția de supradeterminare (3.2). Astfel, alegînd numărul de eșantioane N_1, conform condiției (3.2), rezultă

$$N_1 \gg 2 \Delta t f_{max} + 1 . \tag{3.6}$$

Dacă se notează cu T_1 pasul de eșantionare rezultat, se obține

$$T_1 = \frac{\Delta t}{N_1 - 1} . \tag{3.7}$$

Din relațiile (3.6) și (3.7) se obține

$$T_1 \ll \frac{1}{2 f_{max}} . \tag{3.8}$$

Rezultă, din cele prezentate mai sus, că alegerea numărului de eșantioane din condiția de supradeterminare conduce la un pas de eșantionare mic față de valoarea limită impusă de teorema eșantionării, pentru un proces disponibil pe un interval de timp scurt.

3.1. Erori de estimare a frecvenţelor sinusoidelor

In cele ce urmează se analizează erorile ce apar la estimarea frecvenţelor sinusoidelor ca rădăcini ale polinomului caracteristic

$$P(z) = \prod_{k=1}^{M} (z-z_k)(z-z_k^*) . \qquad (3.9)$$

Conform demonstraţiei din paragraful 2.2, relaţiile (2.39) şi (2.4o), polinomul caracteristic are rădăcinile

$$z_k = e^{j2\pi f_k T}, \quad k = 1,2,\ldots,M \qquad (3.1o)$$

$$z_k^* = e^{-j2\pi f_k T}, \quad k = 1,2,\ldots,M . \qquad (3.11)$$

Astfel, relaţia (3.9) poate fi scrisă sub forma

$$P(z) = \prod_{k=1}^{M} (z^2 + a_k z + 1) , \qquad (3.12)$$

unde

$$a_k = -(e^{j2\pi f_k T} + e^{-j2\pi f_k T}) .$$

Rezultă

$$a_k = -2 \cos 2\pi f_k T , \quad k = 1,2,\ldots,M. \qquad (3.13)$$

Relaţia (3.13) permite calculul frecvenţelor sinusoidelor în funcţie de coeficienţii a_k. Se pune problema de a determina eroarea de determinare a frecvenţei f_k în funcţie de eroarea de estimare a coeficientului corespunzător a_k. Din (3.13) se obţine

$$\Delta a_k = \frac{\partial(-2\cos 2\pi f_k T)}{\partial f_k}\, \Delta f_k \,. \tag{3.14}$$

Rezultă succesiv

$$\Delta a_k = 4\pi T(\sin 2\pi f_k T)\, \Delta f_k$$

$$\Delta f_k = \frac{1}{4\pi T \sin 2\pi f_k T}\, \Delta a_k \tag{3.15}$$

Reprezentarea grafică a relaţiei (3.15), pentru Δa_k constant şi T constant, este dată în fig.3.1.

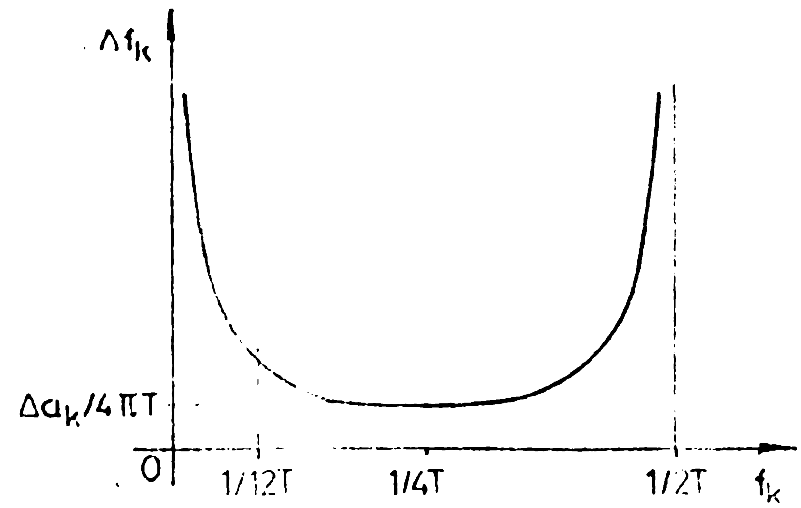


Fig.3.1

S-a considerat, pentru f_k, domeniul de frecvenţă delimitat de teorema eşantionării /55/

$$f_k \leqslant \frac{1}{2T} \tag{3.16}$$

Se observă, în figura 3.1, că eroarea Δa_k de estimare a coeficientului a_k este multiplicată cu atît mai mult cu cît frecvența f_k este mai apropiată de limitele intervalului delimitat de teorema eșantionării. Rezultă că, pentru erori de estimare a coeficienților de autoregresie constante, estimațiile pentru frecvențele mici și mari din intervalul specificat rezultă cu erori mari.

Considerînd procesul format din M sinusoide în zgomot se constată că pe durata Δt a prelevării secvenței de date $\{y_n\}$, n= 1,2,...,N, frecvențele mari sînt eșantionate pe mai multe perioade decît frecvențele mici. Pentru un interval de timp Δt scurt, frecvențele mici sînt eșantionate pe mai puțin de o perioadă. Aceasta conduce la obținerea unor estimații mai bune pentru coeficienții a_k corespunzători frecvențelor mari în comparație cu estimațiile pentru coeficienții a_k corespunzători frecvențelor mici.

Din cele prezentate rezultă că, la estimarea frecvențelor sinusoidelor în funcție de secvența de date prin utilizarea modelului autoregresiv, erori de estimare mari se obțin pentru frecvențele mult mai mici în comparație cu frecvența de eșantionare (fig.3.1)

$$f_k < \frac{1}{12T} = \frac{f_e}{12} \qquad (3.10)$$

Această concluzie este susținută prin rezultatele experimentului 2 (capitolul 4), în care se consideră un proces format din cinci sinusoide în zgomot. În tabelul (3.1) se prezintă valorile reale ale sinusoidelor, precum și erorile relative procentuale de estimare a frecvențelor pentru trei algoritme. Erorile relative de estimare sînt calculate ca raport între abaterile standard și frecvențele reale corespunzătoare. Abaterile standard sînt obținute prin repetarea experimentelor pentru 20 secvențe de zgomot diferite, dar pentru același raport semnal-zgomot.

Din tabelul (3.1) rezultă, în mod evident, că erorile de estimare sînt cu atît mai mari cu cît frecvența estimată este mai mică. Supradeterminarea sistemului de ecuații linire pentru estimarea coeficienților de autoregresie este mai mică în experimentul 2.3 decît în experimentul 2.2. Rezultă

Frecvențe reale	Hz	2	6	2o	25	3o
Erori.Bibliografie /1o/	%	1o	1,o	o,6	o,36	0
Erori.Experimentul 2.2	%	o,67	o,1o3	o,o57	o,o46	o,o12
Erori.Experimentul 2.3	%	2,52	o,47	o,2o	o,o47	o,o82

Tabelul 3.1

erori mai mari de estimare a coeficienților de autoregresie în cazul experimentului 2.3. In acelaşi experiment frecvența de 3o Hz apare plasată foarte aproape de extremitatea dreaptă a curbei din fig.3.1. Rezultă erori mari la determinarea acestei frecvențe în funcție de coeficienții de autoregresie. Astfel se explică creşterea erorii la frecvența de 3o Hz față de cea de 25 Hz, în experimentul 2.3. Se remarcă erorile mult mai mari corespunzătoare frecvenței de 2 Hz plasată aproape de extremitatea stîngă a curbei din fig.3.1, simetric față de frecvența de 3o Hz.

Avînd în vedere că erori mari de estimare apar pentru frecvențele mult mai mici decît frecvența de eşantionare, relația (3.16), se impune mărirea pasului de eşantionare astfel încît (fig.3.1).

$$f_{kmin} > \frac{1}{12T} = \frac{f_e}{12} ,$$

unde f_{kmin} este frecvența minimă conținută de procesul considerat. Rezultă

$$T > \frac{1}{12\, f_{kmin}} . \qquad (3.17)$$

Mărirea pasului de eşantionare este limitată de teorema eşantionării

$$T \leq \frac{1}{2\, f_{k\ max}}\ , \tag{3.18}$$

unde f_{kmax} este frecvenţa maximă conţinută de proces. In condiţia (3.18) se evită egalitatea şi apropierea exagerată a pasului de eşantionare de limita impusă de teorema eşantionării. In caz contrar, apar erori mari la calculul frecvenţei f_{kmax} în funcţie de coeficienţii de autoregresie (fig.3.1). Dacă inecuaţiile (3.17) şi (3.18) nu au soluţie, se utilizează numai condiţia (3.18) cu precizările indicate mai sus.

Mărirea efectivă a pasului de eşantionare, pentru un număr de eşantioane dat, înseamnă de fapt mărirea intervalului de timp pe care este cunoscut procesul, ceea ce evident conduce la îmbunătăţirea estimaţiilor pentru frecvenţe.

3.2. Reducerea erorilor de estimare a frecvenţelor sinusoidelor prin mărirea simulată a pasului de eşantionare şi reducerea supradeterminării sistemului cu care se estimează coeficienţii de autoregresie

Se pune problema ca, pentru o secvenţă de date $\{y_n\}$, n= 1,2,...,N, obţinută prin eşantionare cu pasul T, să se simuleze mărirea pasului de eşantionare T prin algoritmul de estimare a coeficienţilor de autoregresie. In cele ce urmează se prezintă algoritmul general de estimare a frecvenţelor sinusoidelor şi care simulează mărirea pasului de eşantionare.

Pentru aceasta se definesc, prin lucrarea de faţă, matricile de date

$$A_{dK}=\begin{bmatrix} y_{KL+1} & y_{K(L-1)+1} & \cdots & y_1 \\ y_{KL+2} & y_{K(L-1)+2} & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_N & y_{N-K} & \cdots & y_{N-KL} \end{bmatrix}, \tag{3.19}$$

$$A_{iK}=\begin{bmatrix} y_1 & y_{K+1} & \cdots & y_{KL+1} \\ y_2 & y_{K+2} & \cdots & y_{KL+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{N-KL} & y_{N-K(L-1)} & \cdots & y_N \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

$$A_{diK} = \begin{bmatrix} A_{iK} \\ \\ A_{dK} \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

$$A_{sK}=\begin{bmatrix} y_{KL+1}+y_1 & y_{K(L-1)+1}+y_{K+1} & \cdots & y_{K(L/2+1)} \\ y_{KL+2}+y_2 & y_{K(L-1)+2}+y_{K+2} & \cdots & y_{K(L/2+1)+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_N+y_{N-KL} & y_{N-K}+y_{N-K(L-1)} & \cdots & y_{N-K(L/2-1)-1} \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

unde K este un număr întreg. Dimensiunile matricilor de date sînt $A_{dK}(N-KL) \times (L+1)$, $A_{iK}(N-KL) \times (L+1)$, $A_{diK}(2(N-KL))x(L+1)$ şi $A_{sK}(N-KL) \times (L/2+1)$.

Matricile definite mai sus sînt construite cu aceleaşi eşantioane şi pe aceleaşi principii cu matricile A_d, A_i, A_{di}, şi A_s definite în paragraful 2.1, cu diferenţa că în liniile matricilor A_{dK}, A_{iK}, A_{diK} şi A_{sK} eşantioanele nu sînt luate unul după celălalt ci din K în K. Relaţiile (3.19), (3.2o), (3.21) şi (3.22) reprezintă un mod general de definire a matricilor de date. In particular, pentru K=1, se obţin matricile de date definite în paragraful 2.1. Pentru estimarea numărului de sinusoide şi coeficienţilor de autoregresie se operează cu matricile A_{dK}, A_{iK}, A_{diK} şi A_{sK} la fel ca şi cu matricile A_d, A_i, A_{di} şi A_s. Determinarea frecvenţelor sinusoidelor în funcţie de rădăcinile polinomului caracteristic se face cu relaţia

$$f_k = \frac{1}{2\pi KT} \arg(\quad) \quad , \quad k = 1,2,\dots,M. \qquad (3.2\ )$$

Faptul că în liniile matricilor de date eşantioanele sînt luate din K în K echivalează, din punct de vedere al estimării frecvenţelor, cu mărirea pasului de eşantionare de K ori. Se defineşte pasul simulat de eşantionare

$$T_{sK} = KT \; , \qquad (3.24)$$

unde T reprezintă pasul cu care s-a prelevat secvenţa de date $\{y_n\}$. Factorul de multiplicare K se alege astfel încît să se respecte teorema eşantionării

$$K < \frac{1}{2T\, f_{kmax}} \; , \qquad (3.25)$$

unde f_{kmax} este frecvenţa maximă conţinută în procesul considerat.

Mărirea simulată a pasului de eşantionare, în condiţiile unei secvenţe de date de lungime constantă N prelevată pe un interval de timp constant Δt, conduce la reducerea supradeterminării sistemelor de ecuaţii construite cu matricile de date. Supradeterminarea este proporţională cu numărul de ecuaţii ale sistemului, deci cu numărul de linii ale matricei de date.

Numărul de linii ale matricilor de date A_{dK}, A_{iK}, A_{sK} este (N-KL), iar numărul de linii ale matricei A_{diK} este (2(N-KL)). Rezultă o reducere a supradeterminării sistemelor cu atît mai mare cu cît K este mai mare. Reducerea supradeterminării sistemelor conduce, în principiu, la obţinerea unei estimaţii mai puţin bune pentru coeficienţii de autoregresie. Pe de altă parte, reducerea numărului de linii ale matricilor de date conduce la reducerea volumului şi deci a timpului de calcul necesar rezolvării sistemului de ecuaţii supradeterminat.

Din cele prezentate rezultă că, fiind dată o secvenţă de date de lungime constantă N prelevată prin eşantionarea unui proces format din sinusoide în zgomot aditiv pe un interval de timp constant Δt, utilizarea matricilor de date cu $K > 1$ are mai multe consecinţe. Astfel se obţine mărirea simulată a pasului de eşantionare, ceea ce conduce la estimaţii mai bune pentru frecvenţe. Reducerea supradeterminării este o altă consecinţă şi are un efect contrar cu cel obţinut prin mărirea simulată a pasului de eşantionare. Ultima consecinţă constă în reducerea timpului de calcul afectat estimării frecvenţelor sinusoidelor.

In cele ce urmează se va analiza corelarea dintre consecinţele expuse mai sus pentru cazul matricei de date sumă. Utilizarea matricei A_{sK} pentru estimarea frecvenţelor sinusoidelor se justifică prin aceea că numărul de coeficienţi de autoregresie estimaţi este redus la jumătate faţă de cazul utilizării matricilor A_{dK}, A_{iK} sau A_{diK}.

Se defineşte factorul de mărire relativă a pasului de eşantionare

$$\eta_K = \frac{T_s}{T_{s1}} . \qquad (3.26)$$

Avînd în vedere relaţia (3.24) se obţine

$$\eta_K = K . \qquad (3.27)$$

Se defineşte factorul de supradeterminare ca raport între numărul de linii şi numărul de coloane ale matricei de date sumă

$$\varepsilon_K = \frac{N-KL}{\frac{L}{2}+1} . \qquad (3.2[illegible])$$

Pentru o analiză [illegible] ecințele utilizării matricilor A_{sK}, cu K >1 se interpretează rezultatele experimentelor 1 și [illegible] (capitolul 4). În experimentul 1 se consideră un proces format din o sinusoidă în zgomot aditiv. Estimarea frecvenței sinusoidei în experimentul 1.[illegible] [illegible] cu matricea $A_s = A_{s1}$, de dimensiune 7 x 2, rezultînd [illegible] sistem de ecuații cu factorul [illegible] supradeterminare 3,5. Utilizarea matricei de date A_{s2} (K=[illegible]), de dimensiune 5 x 2 și [illegible] de supradeterminare 2,5, în experimentul 1.3, conduce la reducerea abaterii standard a estimațiilor pentru frecvență [illegible] aproape jumătate din cea obținută în experimentul 1.2. [illegible] [illegible]ile standard sînt obținute prin repetarea experimentel[illegible] [illegible]tru 200 secvențe de zgomot diferite, dar pentru același [illegible] semnal-zgomot. Rezultă că reducerea supradeterminări[illegible] [illegible] 3,5 la 2,[illegible] are un efect mult mai mic decît dublarea sim[illegible] [illegible] pasului de eșantionare. In experimentul 1.4 se util[illegible] matricea de date A_{s3} (K=3) de dimensiune 3 x 2, rezultîn[illegible] sistem cu factor de supradeterm[illegible] [illegible] 1,5. Se obține aproxi[illegible]tiv aceeași abatere standard a e[illegible] [illegible]mațiilor pentru frec[illegible] ca și în experimentul 1.3. Rezult[illegible] că, din punctul de [illegible] [illegible]l estimațiilor pentru frecvențe, e[illegible]ectul măririi simul[illegible] [illegible]sului de eșantionare de la 2[illegible] la 3[illegible] s-a compensat cu ef[illegible] [illegible] reducerii supradeterminării de la 2,5 la 1,5. Totuși, pri[illegible] [illegible]rimentul 1.4, s-a obținut o reducere a dimensiunii si[illegible] [illegible] de ecuații, deci implicit calculelor necesare pentru [illegible] [illegible]nare. In aprecierile prezentate nu s-au implicat valorile [illegible] [illegible]le estimațiilor pentru frecvențe deoarece variațiile [illegible] [illegible] sînt mult mai mici decît valorile abaterilor standard.

In experimentul [illegible] (capitolul 4) se consideră un proces format din cinci sinus[illegible] [illegible] zgomot. Utilizarea matricei de date $A_s=A_{s1}$ în experim[illegible] [illegible].1, de dimensi[illegible] [illegible]1 x 6, conduce la obținerea unor e[illegible] [illegible] eronate grosolan. Valorile singulare ale matricei A_s [illegible] rangul trei pentru matricea A_s.

Rezultă că este evidenţiată doar prezenţa celor trei sinusoide cu frecvenţe mari. Aceasta se explică prin aceea că durata corespunzătoare linii a matricei A_8 nivelul frecvenţelor mici se schimbă puţin. Altfel spus, aportul frecvenţelor mici în eşantioanele corespunzătoare unei linii a matricei A_8 este aproximativ constant. In experimentul 2.2 se utilizează matricea de date A_{84} (K=4), de dimensiune 31 x 6, rezultînd un sistem cu factor de supradeterminare 5,16. Valorile singulare ale matricei A_{84} indică clar prezenţa celor cinci sinusoide. Pentru a putea aprecia estimaţiile obţinute pentru frecvenţe se face compararea cu rezultatele obţinute în /lo/ pentru aceleaşi procese aceleaşi date. In /lo/ estimarea frecvenţelor se face prin tr-un algoritm ce corespunde utilizării matricei de date A_{di}, de dimensiune 7o x 36. Se constată prezenţa rădăcinilor suplimentare ale polinomului caracteristic cu coeficienţii de autoregresie. In tabelul 3.1 se erorile relative de estimare pentru frecvenţe, obţinute în /lo/ şi în experimentul 2.2. Erorile relative sînt ca raport între abaterile standard şi frecvenţele corespunzătoare. Abaterile standard sînt obţinute prin experimentului pentru 2o secvenţe de zgomot diferit, pentru acelaşi raport semnal-zgomot. Din rezultatele prezentate în tabelul 3.1 rezultă că multiplicarea simulată cu de eşantioane, în experimentul 2.2, conduce la îmbunătăţirea substanţială a estimaţiilor pentru frecvenţe estimaţiile publicate în /lo/. Reducerea erorii relative de estimare este cu atît mai pronunţată cu cît frecvenţa sinusoidei este mai mică. In experimentul 2.3 se doar primele eşantioane din cele 71 utilizate în experimentul 2.2. Rezultă o matrice A_{84} de dimensiune 13 , conduce la un sistem cu factor de supradeterminare , . Din tabelul (3.1) se observă că şi în acest caz se estimaţii mai bune decît cele publicate în /lo/.

In cele se evidenţiază posibilitatea reducerii numărului eşantioane şi menţinerea constantă sau relucerea erorilor de esti..., prin mărirea simulată a pasului de eşantionare şi ... supradeterminării. In acest caz apare şi o mărire ... a pasului de eşantionare deoarece se prelevează mai ... eşantioane pe un interval de timp dat. Pe de altă parte, ... numărului de eşantioane micşorează valoarea maximă ... factorului de multiplicare K ce poate fi utilizat, ... sistemul de ecuaţii liniare să fie supradeterminat.

Astfel, în experi... 1.5 se prelevează pe intervalul de timp $\Delta t=0,4$ s ... $h=7$ eşantioane, faţă de nouă eşantioane prelevate în ...imentul 1.2. Valoarea maximă a factorului de multiplicare ...tilizabil este K=2, pentru care rezultă matricea A_{s2}, de ...ensiune 3 x 2. Factorul de supradeterminare este $\varepsilon = 1,...$ ...iel ce obţine, în experimentul 1.5, o reducere a abaterii ...tandard a estimaţiilor pentru frecvenţă cu peste 40% mai ... decît cea obţinută în experimentul 1.2, unde se utiliza ...atricea $A_s=A_{s1}$. Acest rezultat susţine posibilitatea ... numărului de eşantioane prelevate pe un interval ... şi menţinerea constantă, sau reducerea erorilor ...timare, prin mărirea simulată a pasului de eşantionare ... reducerea supradeterminării.

Pe baza consideraţiilor teoretice şi a rezultatelor experimentale prezentate ... că mărirea simulată a pasului de eşantionare conduce ... îmbunătăţirea estimaţiilor pentru frecvenţe în da... ...ucerii supradeterminării sistemului de ecuaţii liniare ... care se estimează coeficienţii de autoregresie. La fac... ... supradeterminare mici, apropiaţi de unu, efectul ... ...ii supradeterminării poate compensa efectul măririi ... a pasului de eşantionare. In acest caz rămîne avanta... privind reducerea volumului şi deci a timpului de calc... ...ar estimării frecvenţelor sinusoidelor.

In plus, mărirea ... a pasului de eşantionare permite reducerea numărului ... eşantioane prelevate pe un interval de timp dat şi menţi... constantă sau reducerea erorilor de estimare a frecv... ... sinusoidelor, în aceeaşi reducerii supradeterminării ... de ecuaţii liniare cu care se estimează coeficien... ...utoregresie.

Mărirea simulată a pasului de eşantionare conduce la mărirea intervalului de timp pe care sînt prelevate eşantioanele unei linii a matricei de date ca şi în cazul introducerii rădăcinilor suplimentare. Rezultă că, prin utilizarea matricilor de date cu $K>1$, se elimină necesitatea introducerii rădăcinilor suplimentare. Se obţine o simplificare a algoritmului deoarece nu mai este necesară operaţia de identificare a frecvenţelor adevărate şi în plus se elimină posibilitatea apariţiei efectului de despicare a liniilor spectrale (experimentul 2.4).

3.3. Reducerea erorilor de estimare a frecvenţelor sinusoidelor prin mărirea simulată a pasului de eşantionare şi mărirea numărului de eşantioane

Se consideră procesul format din M sinusoide în zgomot aditiv şi disponibil pentru eşantionare pe intervalul de timp Δt. Din cele prezentate anterior a rezultat că, pentru un număr de eşantioane N impus, utilizarea matricilor de date A_{gK}, $K>1$, conduce la reducerea factorului de supradeterminare al sistemului cu care se estimează coeficienţii de autoregresie. În cele ce urmează se impune ca la utilizarea matricei de date A_{gK}, $K>1$, factorul de supradeterminare al sistemului rezultant să fie acelaşi ca şi în cazul utilizării matricei de date A_{g1}. Aceasta se poate realiza numai prin mărirea numărului N de eşantioane prelevate pe intervalul de timp Δt. Menţinerea unui factor de supradeterminare constant garantează, din punct de vedere statistic, erori constante de calcul la rezolvarea sistemului de ecuaţii liniare supradeterminat. Mărirea numărului de eşantioane presupune, pentru Δt constant, micşorarea pasului efectiv de eşantionare. Totuşi, prin utilizarea matricilor de date A_{gK}, $K>1$, se obţine mărire simulată a pasului de eşantionare faţă de cazul utilizării matricei de date A_{g1}. Rezultă estimaţii mai bune pentru frecvenţele sinusoidelor.

Se afirmă /.../ că un pas de eşantionare mic nu este util deoarece vectorii compuşi din eşantioane consecutive tinde să devină egal cu vectorul constant $(1,1,\dots,1)^T$. Este cazul liniilor matricei de date A_{g1} construite prin combinaţia unor eşantioane consecutive. Deoarece la formarea liniilor matricilor A_{gK}, $K>1$, eşantioanele sînt luate din K în K, acest dezavantaj este eliminat. In prezenta lucrare se afirmă şi se demonstrează că prelevarea pe durata Δt a unui număr cît mai mare de eşantioane, deci utilizarea unui pas de eşantionare cît mai mic, conduce la obţinerea unor estimaţii mai bune pentru frecvenţe, prin mărire simulată a pasului de eşantionare. Acest [illegible] devine posibil numai prin utilizarea matricilor de date A_{gK}, $K>1$. Se precizează că aceasta se realizează fără a mări volumul de calcul necesar estimării frecvenţelor sinusoidelor.

In cele ce urmează [illegible] demonstrează posibilitatea măririi simulate a pasului [illegible] eşantionare prin mărirea numărului d[illegible] eşantioane prelevate [illegible] intervalul de timp constant Δt, î[illegible]ndiţia menţinerii [illegible] supradeterminări constante a sistemului de ecuaţii.

Dacă se notează [illegible] şi N_K, pasul de eşantionare şi respectiv numărul de [illegible] prelevate pe intervalul Δt, în cazul utilizării [illegible] de date A_{gK}, $K=1,2,\dots$, se obţine

$$\frac{\Delta t}{T_K} = N_K - 1 \,. \tag{3.29}$$

Pasul simulat [illegible]nare este dat de relaţia

$$T_{gK} = K T_K \,. \tag{3.30}$$

Factorul de supra[illegible]nare este

$$\varepsilon = \frac{N_K - KL}{\frac{L}{2} + 1} \,. \tag{3.31}$$

Prin notaţie fără [illegible] a factorului de supradeterminare se precizează că [illegible] este funcţie de K. Din rel ţia (3.31) se [illegible] numărul de eşantioane necesar construirii matricei A_{eK}, K=1,2,... în funcţie de factorul de supradeterminare impus

$$N_K = KL + \mathcal{E}(\frac{L}{K} + 1) . \qquad (3.32)$$

Se obţine [illegible] relativă a numărului de eşantioane

$$\frac{N_K}{N_1} = \frac{KL + \mathcal{E}(\frac{L}{K} + 1)}{L + \mathcal{E}(L + 1)} . \qquad (3.33)$$

Relaţia (.) arată de cîte ori trebuie mărit numărul de eşantioane [illegible] pe intervalul de timp Δt, la utilizarea matricei A_{eK}, K=1,2,..., faţă de cazul utilizării matricei A_{e1}=[illegible] [illegible] încît supradeterminarea sistemelor de ecuaţii [illegible] să fie aceeaşi.

Rezultă [illegible] a frecvenţei de eşantionare

$$\frac{f_{eK}}{f_{e1}} = \frac{T_1}{T_K} = \frac{N_K - 1}{N_1 - 1} . \qquad (3.34)$$

Avînd [illegible] relaţia (3.32) se obţine mărirea relativă a frecvenţei de eşantionare

$$\frac{f_{eK}}{f_{e1}} = \frac{KL + \mathcal{E}(\frac{L}{K} + 1) - 1}{L + \mathcal{E}(L + 1) - 1} . \qquad (3.35)$$

Factorul [illegible] relativă a pasului de eşantionare este

$$\eta_K = \frac{T_K}{T_1} . \qquad (3.36)$$

Din [illegible] (3.35) şi (3.36) se obţine

$$\eta_K = K \frac{T_K}{T_1} = K \frac{f_{e1}}{f_e} . \qquad (3.37)$$

Rezultă

$$\eta_K = K \frac{L + \varepsilon(\frac{L}{2} + 1) - 1}{KL + \varepsilon(\frac{L}{2} + 1) - 1} . \qquad (3.38)$$

Deoarece $\varepsilon > 1$ şi $L \geq 2$, [illegible]

$$\eta_K > 1 , \qquad (3.39)$$

pentru K= 2,3,... . Relaţia (3.39) indică posibilitatea [illegible] simulate a pasului de [illegible] mare prin mărirea numărului de eşantioane prelevate pe intervalul de timp constant Δt, în condiţia obţinerii unei [illegible] determinări consecutive a sistemului de ecuaţii. Relaţia ([illegible]) arată de cîte ori se măreşte pasul simulat de eşantionare în cazul utilizării matricei A_{cK}, K = 1,2,... faţă de cazul utilizării matricei $A_{c1} = A_s$. Această mărire este limitată [illegible]

$$\eta_\infty = \frac{L + \varepsilon(\frac{L}{2} + 1) - 1}{L} . \qquad (3.40)$$

Pentru cazul în [illegible] se introduc rădăcini suplimentare, adică

$L = 2M$,

relaţiile (3.38), (3.39) [illegible]) devin

$$\frac{N_K}{N_1} = \frac{2KL + \varepsilon(L+1)}{2L + \varepsilon(L+1)} , \qquad (3.41)$$

$$\frac{f_{eK}}{f_{e1}} = \frac{2\ldots + \varepsilon(\ldots+1) - 1}{2\ldots + \varepsilon(\ldots+1) - 1}, \tag{3.42}$$

$$\eta_K = K\,\frac{\ldots + \varepsilon(\ldots+1) - 1}{\ldots + \varepsilon(\ldots+1) - 1}. \tag{3.43}$$

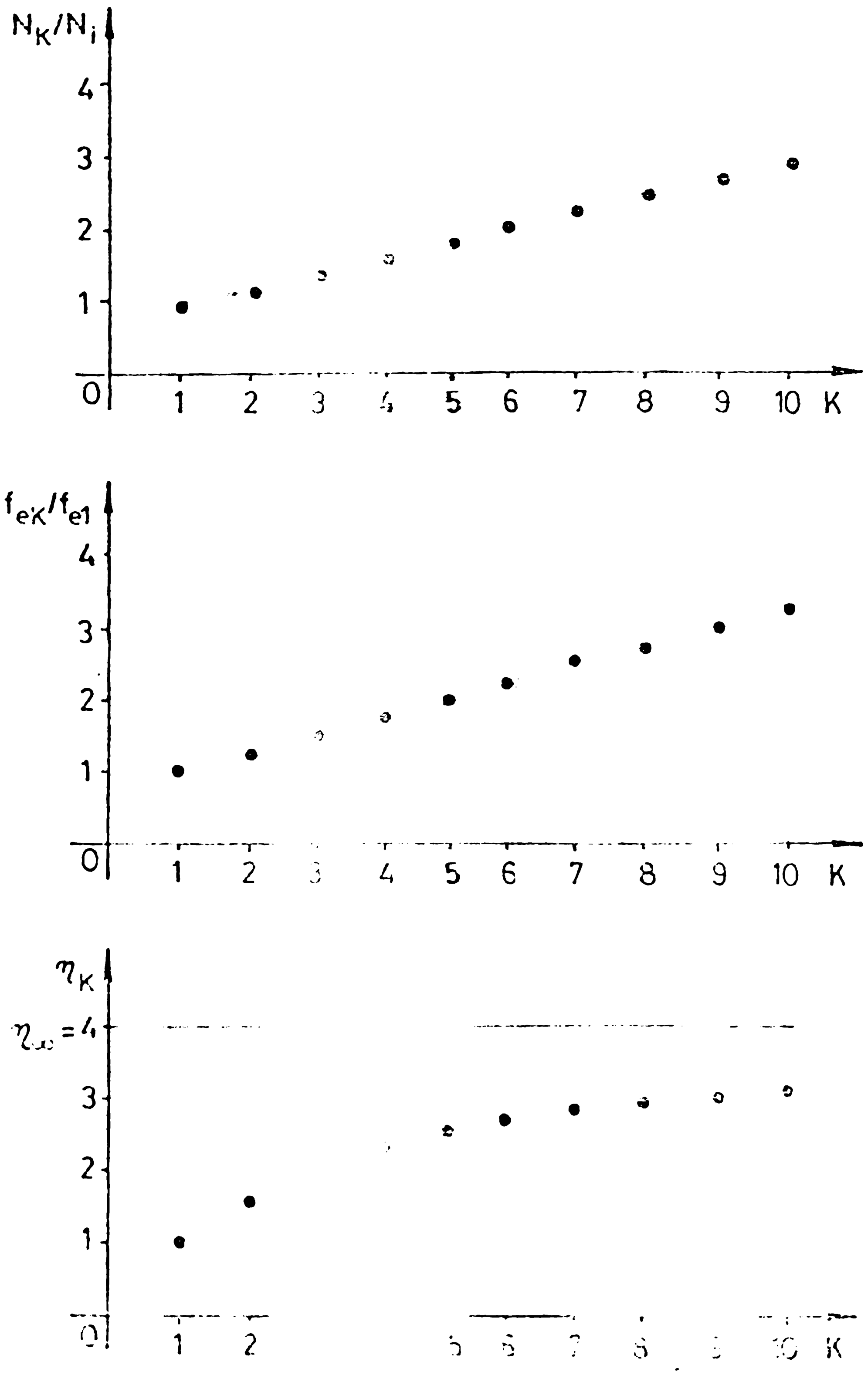
Pe baza relațiilor deduse mai sus se analizează procesul prezentat în experimentul 1 (Capitolul 4). Scopul analizei constă în a stabili criterii de alegere a factorului de multiplicare K. Semnalul menționat constă din o sinusoidă cu frecvența de 1 ... zgomot aditiv și este disponibil pentru eșantionare pe un interval de timp $\Delta t = 0,4$ s. In experimentul 1.2 numărul de eșantioane este $N_1 = 9$ și avînd în vedere că $L = 2M = 2$, se obține o matrice A_s de dimensiune 7 x 2. Rezultă factorul de supradeterminare $\varepsilon = 3,5$. In aceste condiții relațiile (3.41), (3.42) și (3.43) devin

$$\frac{N_K}{N_1} = \frac{2K + \ldots}{9}, \tag{3.44}$$

$$\frac{f_{eK}}{f_{e1}} = \frac{K + \ldots}{\ldots}, \tag{3.45}$$

$$\eta_K = \frac{4K}{K + \ldots}. \tag{3.46}$$

Reprezentarea grafică a relațiilor de mai sus, pentru K= 1,2,...,10, este prezentată în figura 3.2. Se constată că în timp ce numărul de eșantioane și frecvențe de eșantionare cresc cu o pantă constantă în funcție de K, factorul de mărire relativă a pasului de eșantionare crește cu o pantă ce scade odată cu creșterea lui K. Rezultă că la mărirea exagerată a factorului de multiplicare, cîștigul în mărirea relativă a pasului de eșantionare este mic, în timp ce frecvența de eșantionare și numărul de eșantioane cresc mult.



. .3.2

Imbunătăţirea esti[illegible]ilor pentru frecvenţe, prin mări-
[illegible]e numărului de eşantio[illegible] relevate pe intervalul de timp Δt
utilizarea matricilor [illegible]te A_{aK}, K [illegible] 1, este susţinută prin

compararea rezultatelor experimentului 1.2 ($K=1$; $N_1=9$; $T_1=0,05s$; $\varepsilon=3,5$) cu rezultatele experimentului 1.6. ($K=7$; $N_7=21$; $T_7=0,...$; $\varepsilon=3,5$; $\eta_7=2,3$). Astfel prin experimentul 1.6 se remarcă micşorarea abaterii standard a estimaţiilor pentru frecvenţă de 2,3 ori faţă de abaterea standard corespunzătoare experimentului 1.2. Abaterile standard sînt obţinute prin repetarea fiecărui experiment pentru 2oo secvenţe de zgomot diferite, dar pentru acelaşi raport semnal-zgomot. Reducerea abaterii standard de 2,3 ori, în condiţiile măririi numărului de eşantioane de la 9 la 21 şi a măririi frecvenţei de eşantionare de 3,5 ori, este posibilă prin mărirea simultană a pasului de eşantionare de 2,[illegible] ori cu matricea de date A_{s7}. Volumul şi timpul de calcul necesar estimării frecvenţei sinusoidei este acelaşi în ambele experimente.

Din considerentele teoretice şi rezultatele experimentale prezentate rezultă că, în condiţia obţinerii unui sistem de ecuaţii cu acelaşi factor de supradeterminare, este posibilă mărirea simultană a pasului de eşantionare prin mărirea numărului de eşantioane prelevate pe intervalul de timp Δt constant. Rezultă o îmbunătăţire a estimaţiilor pentru frecvenţă, fapt ce devine posibil numai prin utilizarea matricilor de date A_{sk}, $K>1$. Deoarece factorul de supradeterminare este constant rezultă un acelaşi volum de calcule şi deci de timp de calcul necesar pentru estimarea frecvenţelor sinusoidelor.

3.4. Reducerea intervalului de timp pe care se prelevează eşantioanele şi menţinerea constantă a erorilor de estimare a frecvenţelor sinusoidelor prin mărirea simultană a pasului de eşantionare şi mărirea numărului de eşantioane

Se consideră procesul format din L sinusoide în zgomot aditiv. Se [illegible] că la utilizarea matricilor de date A_{sK}, $K>1$, factorul de supradeterminare al sistemelor rezultante să fie aceleşi ca şi în cazul utilizării matricei A_{ai}. Avînd în vedere că eşantioanele sînt prelevate pe un interval de timp mai scurt şi că subdeterminarea este constantă rezultă creşterea erorilor de estimare a coeficienţilor de autoregresie. In cazul în care frecvenţele sinusoidelor conţinute în proces sînt mult mai mici decît frecvenţa de eşantionare este posibilă compensarea creşterii erorilor de estimare a coeficienţilor de autoregresie prin reducerea erorilor la determinarea frecvenţelor în funcţie de aceşti coeficienţi. In acest scop se procedează la mărirea simulată a pasului de eşantionare, astfel încît

$$T_{sK} > T_1 = T , \qquad (3.47)$$

unde T_{sK} reprezintă pasul simulat de eşantionare. Rezultă că factorul de mărire relativă a pasului de eşantionare trebuie să fie supraunitar

$$\tau_K = \frac{T_{sK}}{T_1} > 1 .$$

In cele ce urmează [illegible] demonstrează că utilizarea matricilor de date A_{sK}, $K > 1$, în condiţiile precizate mai sus, conduce la reducerea intervalului de timp pe care se prelevează eşantioanele, dacă se [illegible] numărul de eşantioane şi implicit frecvenţa de eşantionare.

Dacă se notează Δt_K intervalul de timp pe care se prelevează eşantioanele [illegible] utilizării matricilor A_{s}, $K = 1,2,...$ se obţine

$$\frac{\Delta t_K}{T_K} = N_K - 1 . \qquad (3.48)$$

Pasul simulat de eşantionare este

$$T_{sK} = K T_K . \qquad (3.49)$$

Rezultă mărirea relativă a frecvenței de eșantionare

$$\frac{f_{eK}}{f_{e1}} = \frac{T_1}{T_K} = \frac{T_1}{T_{eK}} . \qquad (3.50)$$

Din relația de definire a factorului de supradeterminare pentru numărul de date sumă

$$\varepsilon = \frac{N_K - KL}{\frac{L}{2} + 1} , \qquad (3.51)$$

se obține

$$N_K = KL + \varepsilon(\frac{L}{2} + 1) , \qquad (3.52)$$

unde K= 1,2,... Rezultă mărirea relativă a numărului de eșantioane

$$\frac{N_K}{N_1} = \frac{KL + \varepsilon(\frac{L}{2} + 1)}{L + \varepsilon(\frac{L}{2} + 1)} . \qquad (3.53)$$

Se definește reducerea relativă a intervalului de timp pe care se prelevează eșantioanele prin raportul $\Delta t_K / \Delta t_1$. Din relația (3.43) se obține

$$\frac{\Delta t_K}{\Delta t_1} = \frac{T_K(N_K - 1)}{T_1(N_1 - 1)} . \qquad (3.54)$$

Inlocuind relațiile (3.50) și (3.52) în (3.54), rezultă

$$\frac{\Delta t_K}{\Delta t_1} = \frac{1}{K} \cdot \frac{KL + \varepsilon(\frac{L}{2} + 1) - 1}{L + \varepsilon(\frac{L}{2} + 1) - 1} \cdot \frac{T_{eK}}{T_1} . \qquad (3.55)$$

Avînd în vedere ... (3.47), se obține

$$\frac{\Delta t_K}{\Delta t_1} > \frac{1}{K}\cdot\frac{KL + \varepsilon(\frac{L}{\cdot} + 1) - 1}{L + \varepsilon(\frac{L}{\cdot} + 1) - 1}\cdot \qquad (3.56)$$

Deoarece $\varepsilon > 1$ și ..., termenul din dreapta al relației (3.56) este subunitar, ... K= 2,3,... , rezultă deci posibilitatea ca raportul $\Delta t_K / \Delta t_1$ să fie subunitar ceea ce corespunde reducerii int... de timp pe care se prelevează eșantioanele.

Pentru cazul în ... se introduc relații suplimentare, adică

$$L = 2L ,$$

relațiile (3.53) și (3...) devin

$$\frac{N_K}{N_1} = \frac{2KL + \varepsilon(L+1)}{2L + \varepsilon(L+1)}, \qquad (3.57)$$

$$\frac{\Delta t_K}{\Delta t_1} = \frac{1}{K}\cdot\frac{2KL + \varepsilon(\ldots)-1}{2L + \varepsilon(\ldots) -1}\cdot\frac{T_{eK}}{T_1}\cdot \qquad (3.58)$$

Pe baza relațiil... ... mai sus se analizează procesul prezentat în experiment... (capitolul 4). Procesul menționat ... din o sinusoidă ... frecvența de 1 Hz în zgomot aditiv și ... te disponibil pentru ... funcționare pe un interval de timp Δt_1 = o,4s. In experim... ... numărul de eșantioane este N_1 = 9 și, avînd în vedere ... L=2L=2, se obține o matrice A_e de dimensiune 7 x 2. ... un factor de supradeterminare ε = 3,5. In cele ce urm... ... impune o anumită reducere a intervalului de timp pe care ... prelevează eșantioanele și se analizează posibilitat... ...rii simulate a pasului de eșantionare, mărire destin... ... compensează reducerea intervalului de timp din punctul de vedere al erorilor de estimare a frecvenţelor. ... se impune o reducere cu 25% a intervalului de timp ... se prelevează eşantioanele, adică

$$\frac{\Delta t_K}{\Delta t_1} = 0,7 ...$$

Pentru ... precizate mai sus, relaţiile (3.57) şi (3.58) devin

$$\frac{N_K}{N_1} = \frac{2K+ ...}{...} \qquad (3.59)$$

$$\eta_K = \frac{T_{...}}{...} \qquad (3.6o)$$

Din rel... (3.5o) şi (3.6o) rezultă

$$\frac{f_{eK}}{f_{e1}} = ... \qquad (3.61)$$

Reprezentarea grafică a relaţiilor (3.59), (3.6o) şi (3.61), pentru ... 1,...,...lo este prezentată în figura 3.3.

Se constată ... numărul de eşantioane şi frecvenţa de eşantionare cresc ... pantă constantă în funcţie de K, în timp ce panta ... a factorului de mărire relativă a pasului de eşantionare scade odată cu creşterea lui K. Rezultă că la ... exagerată a factorului de multiplicare, cîştigul în ... relativă a pasului de eşantionare este mic, în timp ce ... de eşantionare şi numărul de eşantioane cresc mult.

Posibilitatea reducerii intervalului de timp ... care se prelevează eşantioanele şi menţinerea constantă a erorilor de estimare ... susţinută experimental. Astfel în experimentul 1.7 ... ; N_0=19; T_0=0,01..s; ε=3,5; Δt=0,3s), erorile de estimare ... frecvenţei sînt cu puţin mai mici decît cele obținute în experimentul 1.2 (K=1 N_1=9; T_1=o,o5; ε=3,5; Δt_1=o,4s). Se evidențiază faptul că în experimentul 1.7 in-

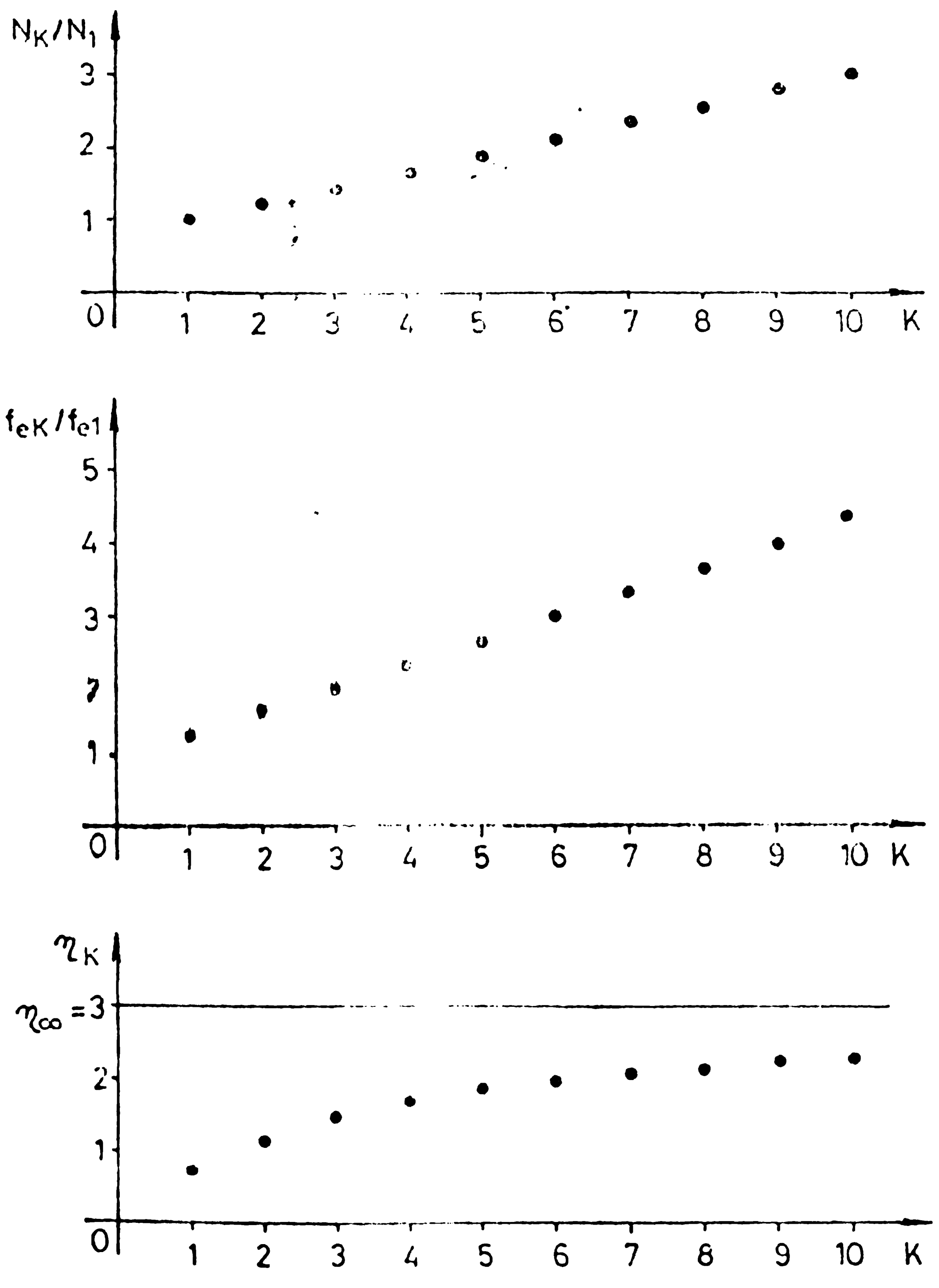


Fig.3.3

tervalul de timp pe care procesul trebuie să fie disponibil pentru eșantionare este redus cu 25% față de cel necesar în experimentul 1.2. Aceasta în condițiile măririi numărului de eşantioane de la 9 la 19 şi a măririi frecvenţei de eşantionare de trei ori. Obţinerea unor erori comparabile în cele două experimente este posibilă numai prin mărirea simulată a pasului de eşantionare care compensează reducerea intervalului de timp pe care se prelevează eşantioanele. Volumul de calcul necesar estimării frecvenţei sinusoidei este acelaşi în ambele experimente şi rezultă din condiţia de supradeterminare constantă.

Din considerentele teoretice şi din rezultatele experimentale prezentate rezultă că este posibilă reducerea intervalului de timp pe care se prelevează eşantioanele cu menţinerea constantă a erorilor de estimare. Erori de estimare constante [illegible]t obţine prin impunerea unei supradeterminări constante [illegible] prin compensarea efectului reducerii intervalului de timp cu efectul măririi simulată a pasului de eşantionare. Pentru aceasta este necesară mărirea numărului de eşantioane [illegible] a frecvenţei de eşantionare. Deoarece factorul de supradeterminare este constant rezultă menţinerea constantă a volumului şi deci a timpului de calcul necesar estimării frecvenţelor sinusoidelor.

4. REZULTATE EXPERIMENTALE

Partea experimentală a lucrării are scopul de a susține principalele contribuții teoretice ale lucrării și se bazează pe simularea unor procese aleatoare compuse din sinusoide și din zgomot aditiv. Acest procedeu de experimentare este utilizat frecvent în literatura de specialitate /9/, /1o/, /22/, /24/, /39/, /57/.

Considerînd un proces format din L sinusoide de amplitudini A_k, frecvențe f_k și faze φ_k, $k= 1,2,\ldots,L$, se calculează eșantioanele x_n cu relația

$$x_n = \sum_{k=1}^{L} A_k \sin(2\pi f_k nT + \varphi_k), \quad n= 1,2,\ldots,N \qquad (4.1)$$

unde T reprezintă pasul de eșantionare, iar N reprezintă lungimea secvenței de date. Pentru a simula zgomotul se generează o secvență, $\{w_n\}$, $n= 1,2,\ldots,N$, de numere aleatoare Gaussiene de medie nulă și dispersie funcție de raportul semnal-zgomot impus. Secvența de zgomot s-a generat pe baza subrutinei GAUS, din /53/, care utilizează teorema limitei centrale de generare a unui eșantion al secvenței aleatoare Gaussiene din 12 numere aleatoare uniform distribuite.

Secvența de date corespunzătoare procesului format din sinusoide în zgomot aditiv se obține prin relația

$$y_n = x_n + w_n, \quad n= 1,2,\ldots,N. \qquad (4.2)$$

Pentru interpretarea statistică a rezultatelor, fiecare experiment este reluat cu secvențe diferite de zgomot.

dar cu acelaşi raport semnal-zgomot. Se calculează, astfel, valori medii şi abateri standard pentru mărimile estimate, frecvenţe, amplitudini şi faze.

Pentru descompunerea valorilor singulare a matricilor de date se utilizează subrutina LSVD, din /58/. Subrutina se bazează pe un algoritm stabil şi eficient /17/.

Algoritmul constă în reducerea matricei la forma bidiagonală prin două secvenţe de transformări Householder la stînga şi la dreapta, urmînd diagonalizarea ca o variantă a procedurii [illegible].

Pentru calculul rădăcinilor polinomului caracteristic se utilizează subrutina RPRAD1, din /58/, bazată pe procedeul iterativ Newton-Raphson. Pentru determinarea amplitudinilor şi fazelor sinusoidelor, în funcţie de secvenţa de date şi de estimaţiile pentru frecvenţe, se utilizează subrutinele [illegible] şi [illegible] /58/ de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare supradeterminate.

Programele sînt în FORTRAN.

Alegerea experimentelor corespunde contribuţiilor originale ale lucrării. Astfel, pentru estimarea numărului de sinusoide se utilizează matricea de date A_s sau A_{sm}. Numărul de sinusoide se estimează ca rang efectiv al acestei matrice, prin analiza valorilor singulare rezultate din DVS. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare supradeterminate pentru estimarea coeficienţilor de autoregresie se face prin utilizarea descompunerii valorilor singulare. Soluţia unui sistem este dată de spaţiul liniar generat de ultimele coloane ale matricei V rezultată din DVS. In cazul introducerii rădăcinilor suplimentare pentru polinomul caracteristic, se utilizează algoritmul de reducere pentru determinarea rădăcinilor adevărate. Se certifică experimental că erorile mari de estimare se obţin pentru frecvenţele mult mai mici decît frecvenţa de eşantionare. Pentru mărirea simulată a pasului de eşantionare se utilizează matricile A_{sK}, K= [illegible] . Se evidenţiază reducerea erorilor de estimare a frecvenţelor sinusoidelor prin mărirea simulată a pasului de eşantionare şi reducerea supradeterminării, pentru un număr de eşantioane dat. Mărirea simulată a pasului de eşantionare conduce la mărirea intervalului de timp pe care sînt prelevate eşantioanele unei linii a matricei de date, ca şi în cazul introducerii rădăcinilor suplimentare. Rezultă că prin utilizarea matricilor de date A_{sk}, k= 2,3,..., se elimină necesitatea introducerii rădăcinilor suplimentare. In acest caz soluţia sistemului de ecuaţii liniare supradeterminat este ultima coloană a matricei V rezultată din DVS a matricei de date. Se obţine o simplificare a algoritmului deoarece nu mai este necesară operaţia de identificare a frecvenţelor adevărate şi în plus se elimină posibilitatea apariţiei efectului de despicare a liniilor spectrale. Se dovedeşte experimental reducerea erorilor de estimare a frecvenţelor, chiar în cazul reducerii numărului de eşantioane prelevate pe un interval de timp dat. Aceasta rezultă prin mărirea simulată a pasului de eşantionare şi reducerea supradeterminării. Se evidenţiază reducerea erorilor de estimare a frecvenţelor sinusoidelor prin mărirea simulată a pasului de eşantionare şi mărirea numărului de eşantioane prelevate pe un interval de timp dat. In acest caz supradeterminarea se menţine constantă. Se dovedeşte experimental posibilitatea reducerii intervalului de timp pe care se prelevează eşantioanele în condiţia menţinerii constante a erorilor de estimare a frecvenţelor sinusoidelor. Aceasta se obţine prin mărirea simulată a pasului de eşantionare, mărirea numărului de eşantioane şi menţinerea unei supradeterminări constante.

Experimentul 1

In cadrul primului experiment se simulează un proces format din o sinusoidă in zgomot aditiv. Sinusoida are frecvenţa, f= 1 Hz, amplitudinea, A=1 şi faza, $\varphi=0^{o}$. Intervalul de timp pe care se consideră procesul ca fiind disponibil este Δt= 0,4 s, mai mic decît jumătatea perioadei sinusoidei. Raportul semnal-zgomot, definit prin relaţia

$$SNR = 10 \lg \frac{\left\{\sum_{n=0}^{N-1} A \sin(2\pi f n T + \varphi)\right\}^2}{N\sigma^2}, \qquad (4.3)$$

este de 10 dB. In relaţia (4.3), N reprezintă numărul de eşantioane prelevate pe intervalul de timp Δt, iar σ^2 reprezintă dispersia secvenţei de zgomot.

Experimentul 1.1

Prin acest experiment se evidenţiază utilizarea descompunerii valorilor singulare la estimarea coeficienţilor de autoregresie. Acest sistemul de ecuaţii liniare supradeterminat este [illegible] de spaţiul liniar generat de ultimele coloane ale matricei V rezultat din DVS a matricei de date. De asemenea, prin acest experiment, se evidenţiază utilizarea algoritmului [illegible] pentru determinarea coeficienţilor de autoregresie corespunzători sinusoidei adevărate.

Pe intervalul de timp Δt=o,4 s se prelevează un număr de eşantioane [illegible]. Rezultă un pas de eşantionare T=o,o5s. Pentru estimarea coeficienţilor de autoregresie se utilizează matricea de date A_{d1}, cu L=4, ceea ce implică prezenţa unei sinusoide [illegible]. Dimensiunea matricei A_{d1} este 10 x 5. Sistemul de ecuaţii liniare supradeterminat, prin care se estimează coeficienţii de autoregresie, se rezolvă prin utilizarea [illegible]. Soluţia sistemului rezultă ca spaţiu liniar generat de ultimele trei coloane ale matricei V, obţinută din DVS a matricei A_{d1}. Pentru determinarea coeficienţilor de autoregresie corespunzători sinusoidei adevărate se aplică algoritmul de reducere. In tabelul 4.1 se prezintă rezultatele experimentului 1.1, adică valorile medii şi abaterile standard ale estimaţiilor calculate prin repetarea experimentului [illegible] secvenţe diferite de zgomot.

	Valoare reală	Valoare medie	Abatere standard
f	1	1,0021	0,0635
A	1	1,0033	0,0342
φ	0^o	$-1,0310^o$	$3,6903^o$

Tabelul 4.1

Experimentul 1.2.

Prin acest experiment se evidențiază utilizarea matricei de date A_s pentru estimarea coeficienților de autoregresie, cu consecința reducerii volumului de date și timpului de calcul necesar față de experimentul 1.1.

Pe intervalul de timp $\Delta t=0,4s$ se prelevează un număr de eșantioane N=9. Rezultă un pas de eșantionare T=0,05s. Pentru estimarea coeficienților de autoregresie se utilizează matricea de date A_s, cu k=4, ceea ce indică că nu se introduc sinusoide suplimentare. Dimensiunea matricei A_s este 7x2, rezultînd un factor de supradeterminare $\varepsilon=3,5$. Sistemul de ecuații liniare supradeterminat se rezolvă prin utilizarea DVS. Coeficienții de autoregresie rezultă ca ultimă coloană a matricei V obținută din DVS a matricei A_s. In tabelul 4.2 se prezintă rezultatele experimentului 1.2, adică valorile medii și abaterile standard ale estimațiilor calculate prin repetarea experimentului pentru 20 secvențe diferite de zgomot.

	Valoare reală	Valoare medie	Abatere standard
f	1	1,0062	0,0697
A	1	1,0051	0,0362
φ	0^o	-1,2630	$5,9125^o$

Tabelul 4.2

Se constată că erorile de estimare sînt cu puțin mai mari decît cele obținute în experimentul 1.1. Avînd în vedere că diferențele valorilor medii sînt mici în comparație cu abaterile standard, rezultă că pentru compararea estimațiilor trebuie să se aibă în vedere abaterile standard care sînt foarte apropiate în cele două experimente. Se remarcă faptul că în experimentul 1.2 dimensiunea matricei de date $A_{[illegible]}$ este 7 x 2, mult mai mică decît dimensiunea matricei A_{di}, [illegible], utilizată în experimentul 1.1. De asemenea în experimentul 1.1 este necesară aplicarea algoritmului de reducere. Rezultă, în experimentul 1.2, o simplificare a algoritmului și o reducere a timpului de calcul necesar estimării frecvenței sinusoidei, în condițiile menținerii unor erori de estimare comparabile cu cele obținute în experimentul 1.1.

Experimentul 1.3

Prin acest experiment se evidențiază posibilitatea utilizării matricei de date A_{s2} pentru estimarea coeficienților de autoregresie, cu consecința măririi simulate a pasului de eșantionare. Se demonstrează reducerea erorilor de estimare a frecvenței sinusoidei prin mărirea simulată a pasului de eșantionare și reducerea factorului de supradeterminare. Se obține de asemenea reducerea volumului și deci a timpului de calcul.

Pe intervalul de timp t= 0,4s se prelevează un număr de eșantioane N=9, cu pasul de eșantionare T= 0,05s. Pentru estimarea coeficienților de autoregresie se utilizează matricea de date A_{s2}, cu L=2. Dimensiunea matricei A_{s2} este 5 x 2, obținînd un factor de supradeterminare ε_2= 2,5. Prin utilizarea matricei de date A_{s2}, K=2, se obține un factor de mărire relativă a pasului de eșantionare η_2=2. Sistemul de ecuații liniare supradeterminat se rezolvă prin utilizarea DVS. Coeficienții de autoregresie se obțin ca ultima coloană a matricei V, obținută din DVS a matricei A_{s2}. În tabelul 4.5 se prezintă rezultatele experimentului 1.3, adică valorile medii și abaterile standard ale estimaţiilor calculate prin repetarea experimentului pentru 2oo secvenţe diferite de zgomot.

	Valoare reală	Valoare medie	Abatere standard
f	1	1,oloo	o,o369
A	1	1,oo63	o,o278
φ	0^{o}	$-1,3784^{o}$	$2,4279^{o}$

Tabelul 4.3

In comparaţie cu rezultatele experimentului 1.2, se constată că valoarea medie a estimaţiilor pentru frecvenţă este mai deplasată în acest experiment cu o,oo38. Pe de altă parte se constată în experimentul 1.3, o reducere cu o,o32 a abaterii standard faţă de cea obţinută în experimentul 1.2. Avînd în vedere că abaterea standard se reduce de aproape două ori şi că este mult mai mare decît deplasarea valorii medii, rezultă că erorile de estimare se reduc considerabil. Aceasta este consecinţa măririi simulate, de două ori, a pasului de eşantionare, cu toate că factorul de supradeterminare s-a redus de la 3,5 la 2,5. Se remarcă faptul că în acest experiment dimensiunea matricei de date ... este 5 x 2, mai mică decît dimensiunea matricei A_{8}, 7 x 2, utilizată în experimentul 1.2. Rezultă o reducere a volumului şi deci a timpului de calcul necesar estimării frecvenţei sinusoidei.

Experimentul 1.4

In acest experiment se evidenţiază posibilitatea utilizării matricei de date A_3 pentru estimarea coeficienţilor de autoregresie. ... că efectul măririi simulate a pasului de eşantionare ... este compensat cu efectul reducerii supradeterminării, pentru factori de supradeterminare mici. In acest caz, rămîne avantajul privind reducerea volumului şi deci a timpului de calcul necesar estimării frecvenţei sinusoidei.

Pe intervalul de timp Δt=o,4s se prelevează un număr de eşantioane n=9, cu pasul de eşantionare T=o,o5s. Pentru estimarea coeficienţilor de autoregresie se utilizează matricea de date A_{a3}, cu m=2. Dimensiunea matricei A_{a3} este 3 x 2, rezultînd un factor de supradeterminare ε_3 =1,5. Prin utilizarea matricei de date A_{a3}, K=3, se obţine un factor de mărire relativă a pasului de eşantionare η_3=3. Sistemul de ecuaţii liniare supradeterminat se rezolvă prin utilizarea SVD. Coeficienţii de autoregresie rezultă ca ultima coloană a matricei V, obţinută din SVD a matricei A_{a3}. In tabelul 4.4 se prezintă rezultatele experimentului 1.4, adică valorile medii şi abaterile standard ale estimaţiilor calculate prin repetarea experimentului pentru 2oo secvenţe diferite de zgomot.

	Valoarea reală	Valoare medie	Abatere standard
f	1	1,o112	o,o392
A	1	1,oo68	o,o28[illegible]
φ	0°	-1,4456°	2,492[illegible]

Tabelul 4.4

Se constată că erorile de estimare sînt comparabile cu cele obţinute în experimentul 1.3 şi, în consecinţă, sînt mult mai mici decît cele obţinute în experimentul 1.2. Rezultă că mărirea [illegible]carea simultană a pasului de eşantionare de la η_2=[illegible], în experimentul 1.3, la η_3=3, în experimentul 1.4, şi r[illegible] [illegible] corespunzătoare a supradeterminării de la $\varepsilon_2=2,5$, la $\varepsilon_3=1,5$, cu efecte ce se compensează. Deoarece, în acest experiment, dimensiunea matricei A_{03} este 3 x 2, mai mică decît dimensiunea matricei A_{02}, 5 x 2, utilizată în experimentul 1.3, rezultă o reducere a volumului şi deci a timpului de calcul necesar estimării frecvenţei sinusoidei.

Experimentul 1.5

Prin acest experiment se evidenţiază posibilitatea reducerii numărului de eşantioane prelevate pe un interval de timp constant şi obţinerea unor estimaţii comparabile, sau mai bune, prin mărirea efectivă şi simulată a pasului de eşantionare şi reducerea supradeterminării.

Pe intervalul de timp $\Delta t=0,4s$ se prelevează un număr de eşantioane N=7, cu pasul de eşantionare $T=0,066s$. Pentru estimarea coeficienţilor de autoregresie se utilizează matricea de date A_{02}, ... In acest caz, dimensiunea matricei A_{02} este 3 x 2, rezultînd un factor de supradeterminare $\varepsilon=1,5$. Prin utilizarea matricei A_{02} se obţine un pas de eşantionare simulat ... ,132. Sistemul de ecuaţii liniare supradeterminat se ... prin utilizarea DVS. Coeficienţii de autoregresie ... ca ultimă coloană a matricei V, obţinută din ... matricei de date A_{02}. In tabelul ... se prezintă rezultatele experimentului 1,5, adică valorile medii şi abaterile standard ale estimaţiilor calculate din repetarea experimentului pentru 200 secvenţe de zgomot diferite.

	Valoare reală	Valoare medie	Abatere standard
f	1	1,0103	0,0399
A	1	1,0073	0,0299
φ	0°	$-1,6433^\circ$	$2,551^\circ$

Tabelul 4.5

Se constată că erorile de estimare sînt comparabile cu cele obţinute în experimentele 1,3, 1.4 şi sînt mult mai mici decît cele obţinute în experimentul 1.2. Rezultă că mărirea simultană a pasului eşantionare conduce la estimaţii mai bune, cu toate că pe intervalul de timp Δt=o,4s se prelevează un număr de şapte eşantioane, faţă de nouă în experimentul 1., şi factorul de supradeterminare scade la 1,5, de la 2,. In plus, se obţine o reducere a volumului şi timpului de calcul necesar estimării frecvenţei sinusoidei.

Experimentul 1.6

Prin acest experiment se evidenţiază posibilitatea reducerii erorilor de estimare a frecvenţei sinusoidei, prin mărirea simultană a pasului de eşantionare şi mărirea numărului de eşantioane prelevate pe un interval de timp dat, fără a mări volumul de calcul necesar estimării coeficienţilor de autoregresie.

Pe intervalul de timp Δt=o,4s se prelevează un număr de eşantioane =21, cu pasul de eşantionare T=o,o2s. Pentru estimarea coeficienţilor de autoregresie se utilizează matricea de date A_{s7}, cu L=2. Dimensiunea matricei A_{s7} este 7 x , rezultînd un factor de supradeterminare ε=3,5. Prin utilizarea matricei A_{s7} se obţine un pas de eşantionare simulat de o,14s. Sistemul de ecuaţii liniare supradeterminat se rezolvă prin DVS. Coeficienţii de autoregresie rezultă din ultima coloană a matricei V, obţinută din DVS a matricei de date A_{s7}. In tabelul 4.6 se prezintă rezultatele experimentului 1.6, adică valorile medii şi abaterile standard ale estimaţiilor calculate prin repetarea experimentului pentru 2oo secvenţe diferite de zgomot.

Valoare [illegible]		Valoare medie	Abatere standard
f	1	1,oo17	o,o3o[illegible]
A	1	o,9996	o,o19[illegible]
φ	[illegible]	-o,4312^{o}	1,716[illegible]

Tabelul 4.6

Se constată că în acest experiment se obțin cele bune estimații pentru frecvență, atît sub aspectul valorii medii cît şi al abaterii standard, în comparație cu estimațiile obținute în experimentele 1.1,...,1.5. Estimațiile pentru amplitudine şi fază, fiind obținute în funcție de estimațiile pentru frecvență, rezultă şi ele cele mai bune. Prin referire la experimentul 1.2, rezultă că reducerea erorilor de estimare se obține prin mărirea simulată a pasului de eşantionare de [illegible] ori (η_7=2,8), menținerea constantă a supradeterminării, ε=[illegible] şi mărirea numărului de eşantioane prelevate pe intervalul Δt=o,4 de la 9 la 21. Se precizează că volumul [illegible] şi timpul de calcul necesar estimării coeficienților de autoregresie este acelaşi ca şi în experimentul 1.2 deoarece matricile de date au aceeaşi dimensiune 7 x 2 (ε=3,[illegible]).

Experimentul 1.[illegible]

Prin acest experiment se evidențiază posibilitatea reducerii intervalului [illegible] pe care se prelevează eşantioanele, în condiția menținerii constante a erorilor de estimare. Această posibilitate rezultă din mărirea simulată a pasului de eşantionare [illegible] permite mărirea numărului de eşantioane fără a mări timpul de calcul necesar estimării coeficienților de autoregresie.

Pe intervalul [illegible] Δt=o,3s se prelevează un număr de eşantioane N=19, cu [illegible] de eşantionare h=o,o166. Pentru estimarea coeficienților de autoregresie se utilizează matricea de date A_{36}, cu [illegible]. Dimensiunea matricei A_{36} este 7 x 2 rezultînd un factor de supradeterminare ε=3,5. Prin utilizarea matricei A_{36} se obține un pas de eşantionare simulat de o,1s. Sistemul de ecuații liniare supradeterminat se rezolvă prin DVS. Coeficienții de autoregresie rezultă ca ultimă coloană a matricei V, obținută din DVS a matricei de date A_{36}. In tabelul 4.7 se prezintă rezultatele experimentului 1.7, adică valorile medii şi abaterile standard ale estimațiilor calculate prin repetarea experimentului pentru 2oo secvențe diferite de zgomot.

	Valoare reală	Valoare medie	Abatere standard
f	1	0,9966	0,0658
A	1	1,004	0,0202
φ	0^{0}	$-0,4766^{0}$	$1,9671^{0}$

Tabelul 4.7

Se constată că erorile de estimare sînt cu puţin mai mici decît cele obţinute în experimentul 1.2. Astfel, efectul reducerii intervalului de timp la 0,3s, de la 0,4s în experimentul 1.2, se compensează cu efectul măririi simulate a pasului de eşantionare. In acest experiment pasul de eşantionare simulat este 0,1s, de două ori mai mare decît pasul utilizat la construcţia matricei de date în experimentul 1.2. Pentru a fi posibilă această mărire simulată a pasului de eşantionare, se prelevează 19 eşantioane pe intervalul de timp $\Delta t=0,3s$, faţă de [illegible] eşantioane pe intervalul de timp $\Delta t=0,4s$, în experimentul 1.2. Se precizează că timpul de calcul necesar estimării coeficienţilor de [illegible] regresie este acelaşi ca şi în experimentul 1.2 deoarece matricile de date au aceeaşi dimensiune 7 x 2 [illegible].

Experimentul [illegible]

In acest experiment se simulează un proces format din cinci sinusoide şi un zgomot aditiv /10/. Valorile reale ale frecvenţelor, amplitudinilor şi fazelor sinusoidelor sînt prezentate în tabelul 4.8. Se prelevează un număr de 71 eşantioane, [illegible], cu un pas de eşantionare $1=1/256s$. Intervalul de [illegible] care sînt prelevate eşantioanele este $\Delta t=0,27$ [illegible], puţin mai mare decît jumătate din perioada corespunzătoare sinusoidei cu frecvenţa cea mai mică.

	Valoare reală	Valoare medie	Abatere standard
f_1	2,00	1,92	0,20
f_2	6,00	[illegible],01	0,06
f_3	20,00	[illegible]	0,12
f_4	25,00	[illegible]	0,09
f_5	30,00	[illegible],00	0,00
A_1	1,50	1,54	0,08
A_2	1,25	1,24	0,04
A_3	0,375	[illegible],38	0,01
A_4	0,625	[illegible],62	0,01
A_5	1,25	1,25	0,01
A_1	90^0	93^0	9^0
2	120^0	[illegible]	3^0
3	150^0	[illegible]	7^0
4	90^0	[illegible]	5^0
5	135^0	[illegible]	1^0

Tabelul 4.8

Raportul semnal-zgomot,

$$SNR = 10 \lg \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sum_{k=1}^{5} A_k \sin(2\pi f_k n\Delta + \varphi_k) \right\}^2}{N\sigma^2}, \quad (4.4)$$

este de 31 dB. [illegible] σ^2 reprezintă dispersia secvenţei de zgomot.

Acest [illegible] tratat în /15/ printr-un algoritm ce corespunde [illegible] matricei de date A_{di}, cu dimensiunea 70 x 30. Se constată introducerea unui număr mare de sinusoide suplimentare. Rezultatele publicate în /15/ sînt prezentate în tabelul 4.8. Valorile medii şi abaterile standard ale [illegible] pentru frecvenţe, amplitudini şi faze sînt obţi[illegible] prin repetarea experimentului pentru 20 secvenţe de z[illegible] diferite. Se constată că erorile cele mai mari apar [illegible] frecvenţele mici.

Experimentul 4.1

Prin acest experiment se evidenţiază necesitatea măririi simulate [illegible] de eşantionare la estimarea numărului şi frecvenţelor sinusoidelor.

Se utilizează matricea de date A_8, cu L=2 [illegible], ceea ce indică că [illegible] introduc sinusoide suplimentare. Dimensiunea matricei [illegible] este 51 x 6, rezultînd un factor de supradetermin[illegible] ε=10,16. Se procedează la descompunerea valorilor [illegible] matricei A_8. Corespunzător unei secvenţe de z[illegible] se obţin valorile singulare : σ_1=45,1; σ_2=24,5; σ_3=3,[illegible]; σ_4=0,067; σ_5=0,028; σ_6=0,015. A[illegible] valorile singul[illegible] indică rangul trei pentru matricea de date A_8. Rezult[illegible] evidenţiază doar prezenţa [illegible] sinusoide cu frecv[illegible] cea mai mare dintre cele cinci conţinute de proces. Ac[illegible] se explică prin aceea că pe d[illegible] corespunzătoare [illegible] linii a matricei A_8 nivelul frecvenţelor mici se schimb[illegible]. Altfel spus, aportul frecvenţelor mici în eşant[illegible] corespunzătoare [illegible] linii [illegible]tricei

A_8 este aproximativ constant. In consecinţă estimaţiile pentru frecvenţe rezultă cu erori foarte mari.

Din cele de mai sus rezultă necesitatea utilizării matricilor de date A_{8k}, $k > 1$, deci a măririi simulate a pasului de eşantionare. Astfel, intervalul de timp corespunzător unei linii va creşte, ceea ce va determina evidenţierea, prin valorile singulare, a celor cinci sinusoide şi obţinerea unor estimaţii bune pentru frecvenţe.

Experimentul 2.2

Prin acest experiment se evidenţiază posibilitatea estimării numărului de sinusoide ca rang al matricei de date sumă şi posibilitatea [illegible] erorilor de estimare a frecvenţelor sinusoidelor prin mărirea simulată a pasului de eşantionare. Se remarcă eliminarea sinusoidelor suplimentare şi reducerea volumului de calcul necesar estimării frecvenţelor sinusoidelor.

Pentru estimarea coeficienţilor de autoregresie se utilizează matricea de date A_{84}, cu L=10. Dimensiunea matricei A_{84} este 31 x 6, rezultând un factor de supradeterminare ε=5,16. Se procedează la descompunerea valorilor singulare a matricei A_{84}. Pentru o secvenţă de zgomot se obţin valorile singulare : σ_1=19,[illegible]; σ_2=17,[illegible]; σ_3=8,23; σ_4=7,51; σ_5=3,[illegible]; σ_6=0,025. Deoarece $\sigma_6 \ll \sigma_5$, rezultă că matricea A_{84} este foarte aproape, în sensul normei spectrale sau Frobenius, de o matrice de rang egal cu cinci. Astfel, se evidenţiază prezenţa celor cinci sinusoide conţinute de proces şi se confirmă posibilitatea estimării numărului de sinusoide ca rang al matricei de date sumă. Coeficienţii de autoregresie rezultă din ultimă coloană a matricei V obţinută din DVS a matricei de date A_{84}. In tabelul 4.[illegible] se prezintă rezultatele experimentului 2.2, adică valorile medii şi abaterile standard ale estimaţiilor calculate prin repetarea experimentului pentru 20 secvenţe diferite de zgomot.

Se constată, faţă de rezultatele din tabelul 4.8 şi publicate în /15/, o îmbunătăţire substanţială a estimaţii-

	Valoare rea..	Valoare medie	Abatere standard
f_1	2,00	1,997	0,0135
f_2	6,00	6,001	0,0062
f_3	20,00	19,997	0,0115
f_4	25,00	25,001	0,0117
f_5	30,00	29,999	0,0036
A_1	1,50	1,500	0,0031
A_2	1,25	1,349	0,0024
A_3	0,375	0,375	0,0005
A_4	0,625	0,624	0,0003
A_5	1,25	1,249	0,0006
1	90^o	$90,09^o$	$0,60^o$
2	120^o	$119,95^o$	$0,22^o$
3	150^o	$150,12^o$	$0,62^o$
4	90^o	$89,92^o$	$0,58^o$
5	135^o	$135,04^o$	$0,19^o$

Tabelul 4.9

lor pentru frec... , amplitudini şi faze, atît c... ...ri medii cît şi c... ...i standard. Abaterile stand... ...

estimaţiilor se reduc cu [illegible] mult de un ordin, în special la frecvenţele mici. Aceasta este consecinţa măririi simulate a pasului de eşantionare de patru ori. Se remarcă faptul că în experimentul 2.2 dimensiunea matricei de date A_{84} este [illegible], mult mai mică decît dimensiunea matricei A_{di} (7o x 35), utilizată în /lo/. De aceea [illegible] în acest experiment nu se introduc sinusoide suplimentare, astfel încît nu se pune problema utilizării unui algoritm [illegible] selectare a sinusoidelor adevărate. Rezultă, în experimentul 2.2, o simplificare a algoritmului şi o reducere s[illegible] a volumului de calcul necesar estimării frecvenţelor sinusoidelor în comparaţie cu experimentul realizat [illegible]/.

Experimentul [illegible]

Prin acest experiment se evidenţiază posibilitatea reducerii erorilor de [illegible] a frecvenţelor sinusoidelor prin mărirea simulată [illegible]lui de eşantionare.

Pentru estimarea coeficienţilor de autoregresie se utilizează numai prim[illegible] de eşantioane din cele 71 utilizate în /lo/ şi în experimentul 2.2. Aceasta înseamnă o reducere a intervalului [illegible] Δt, pe care procesul se consideră disponibil, cu [illegible] construieşte matricea de date [illegible] A_{84}, cu L=lo. Dimensiunea [illegible] matricei de date este 13 x 6, reţinînd un factor de supr[illegible] ε=[illegible],16. Pentru o secvenţă de zgomot se obţin [illegible] singulare: σ_1=1[illegible],7; σ_2=9,[illegible]; σ_3=4,16; σ_4=2,75; σ_5=o,[illegible]; σ_6=[illegible],oo35. Deoarece $\sigma_6 \ll \sigma_5$ rezultă că rangul efectiv [illegible] matricei A_{84} este cinci. Astfel valorile singulare indică [illegible] celor cinci sinusoide. Sistemul de ecuaţii liniar[illegible] determină [illegible] se rezolvă prin L[illegible]. Coeficienţii de autore[illegible] rezultă ca ultima coloană a matricei V, obţinută din [illegible] matricei de date A_{84}. In tabelul 4.lo se prezintă [illegible] experimentului 2.3, adică valorile medii şi abaterile [illegible] estimaţiilor calc[illegible] prin repetarea [illegible] pentru 20 [illegible] diferite de zgomot.

Faţă de rezultatele [illegible] în /lo/, tabelul 4.8, se constată o îmbunătăţire [illegible] estimaţiilor pentru

	Valoare [illegible]	Valoare medie	Abatere stan[illegible]d
f_1	2,00	1,993	0,0505
f_2	6,00	6,004	0,0234
f_3	20,[illegible]	19,991	0,0402
f_4	25,[illegible]	25,001	0,0118
f_5	20,[illegible]	30,005	0,0257
A_1	1,[illegible]	1,499	0,0070
A_2	1,[illegible]	1,247	0,0184
A_3	0,[illegible]	0,374	0,0042
A_4	0,[illegible]	0,623	0,0058
A_5	1,[illegible]	1,249	0,0019
1	9[illegible]	$90,25^{0}$	$2,09^{0}$
2	12[illegible]	$119,81^{0}$	$1,03^{0}$
3	15[illegible]	$150,33^{0}$	$1,52^{0}$
4	9[illegible]	89,80	$0,89^{0}$
5	13[illegible]	$134,79^{0}$	$0,97^{0}$

[illegible]belul 4.10

frecvenţele mici. [illegible]te este consecinţa mărimii [illegible]ulate a pasului de [illegible] [illegible] de patru ori, cu toate c[illegible] proce- sul este consi[illegible] [illegible]ponibil pentru [illegible]ţionare [illegible] un interval de timp Δt redus cu 25% şi se prelucrează un număr de eşantioane redus, de asemenea, cu 25%. Estimaţiile obţinute în acest experiment sînt mai puţin bune decît cele obţinute în experimentul 2.1, tabelul 4.9. Aceasta se explică prin reducerea intervalului de timp Δt şi prin reducerea factorului de supradeterminare al sistemului de ecuaţii liniare cu care se estimează coeficienţii de autoregresie, de la 5,16 la 2,16. Volumul de calcul necesar estimării frecvenţelor sinusoidelor în acest experiment este foarte redus. Se au în vedere dimensiunile matricilor de date utilizate la estimarea frecvenţelor : A_{s4} de dimensiune 76 x 36 în /lo. , A_{s4} de dimensiune 31 x ... experimentul 2.2 şi A_{s4} de dimensiune 13 x 6 în experimentul 2.3.

Experimentul ...

Prin acest experiment se evidenţiază posibilitatea estimării numărului de sinusoide ca rang efectiv al matricei de date sumă prin utilizarea DVS. De asemenea se evidenţiază fenomenul de despicare a liniilor spectrale în cazul utilizării sinusoidelor suplimentare.

Se utilizează matricea de date A_{L4}, cu L=14, ceea ce indică prezenţa a două sinusoide suplimentare. Pentru secvenţa de date compusă din ... eşantioane rezultă matricea A_{s4} de dimensiune 19 x 8, cu factorul de supradeterminare $\mathcal{E}$=1, 37. Corespunzător unei secvenţe ... zgomot se obţin valorile singulare : $\mathcal{E}_1$=15,4; $\mathcal{E}_2$=13,..; $\mathcal{E}_3$=7,10; $\mathcal{E}_4$=2,60; $\mathcal{E}_5$=1,00; $\mathcal{E}_6$=0,016; $\mathcal{E}_7$ ... 097; $\mathcal{E}_8$=0,035. Deoarece $\mathcal{E}_6 \ll \mathcal{E}_5$, rezultă că valorile singulare indică prezenţa a cinci sinusoide şi deci se susţine experimental posibilitatea estimării numărului de sinusoide ca rang efectiv al matricei de date sumă prin utilizarea DVS. Coeficienţii de autoregresie se iau ca ultima coloană a matricei V rezultate din DVS a matricei de date. Experimentul se repetă pe ... secvenţe diferite de zgomot. În tabelul 4.11 se prezintă frecvenţele obţinute pentru două realizări semnificative ale experimentului.

Se constată că în ... 1^0 a experimentului se obţin estimaţii foarte ... pentru frecvenţele sinusoidelor

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
1^o	1,9971	6,[illegible]	12,232	14,072	20,002	25,0002	30,0003
2^o	2,0451	5,[illegible]	[illegible],[illegible]29	17,765	20,002	25,004	30,0005

Tabelul 4.11

adevărate, care [illegible] identificate ușor în tabelul 4.11. In realizarea 2°, [illegible] constată prezența fenomenului [illegible] despicare a liniilor spectrale. Astfel puterea sinusoidei cu frecvența 6,[illegible] este împărțită între componentele cu frecvențele 5,[illegible] și [illegible],2829. Oricare dintre acestea reprezintă o estimare cu eroare mare a frecvenței sinusoidei.

In cele [illegible] se va preciza aportul experimentelor prezentate în susținerea contribuțiilor originale ale lucrării. Astfel, [illegible] timarea numărului de sinusoide [illegible] rang efectiv al matricii [illegible] de date [illegible], rezultat din analiza valorilor singulare, [illegible] este evidențiată prin experimentele 2.2, 2.3 și 2.4. [illegible] intervalul de timp corespunzător unei linii a matricii [illegible] este foarte scurt în raport cu perioada frecvenței [illegible], aportul acestora în [illegible] unei linii a [illegible] este aproximativ constant. In consecință valorile [illegible] indică numai prezența frecvențelor mari, ceea [illegible] în experimentul 2.1. In acest caz este necesar [illegible] matricilor de date cu [illegible]rire simulată a pasului [illegible] menționat, rezultînd o creștere a intervalului [illegible] corespunzător unei linii a matricei de date. Astfel, [illegible] din estimații corecte pentru numărul de sinusoide, [illegible] este confirmat prin experimentele 2.2, 2.3 și 2.4.

Estimarea [illegible] ficienților de autoregresie cu spațiu liniar generat [illegible] ultimele coloane ale matricei V, rezultată din DVS a [illegible] de date directe-inverse, [illegible] evidențiată prin experimentul 1.1. Deoarece în acest experiment este introdusă o sinus[illegible] suplimentară, se utilizează algoritmul de reducere car[illegible] ite separarea sinusoidei adevărate.

Utilizarea matr[illegible] de date sumă și a DVS, pentru e[illegible]area coeficienților [illegible] autoregresie este susținută prin e[illegible]imentul 1.2. Astfel [illegible] obțin erori de estimare comparabile cu cele din exper[illegible] 1.1, bazat pe matricea de date directe-inverse, cu av[illegible] reducerii considerabile a volumului de calcul.

Concluzia, rezul[illegible] din analiza teoretică a erorilor de estimare a frecvenț[illegible] sinusoidelor, conform căreia erorile de estimare sînt [illegible] mai mari cu cît frecvențele [illegible] sinusoidelor sînt mai [illegible] raport cu frecvența de eșantionare, este susținută p[illegible] [illegible]ltatele publicate în /lo/ (tabelul 4.8), precum și [illegible] experimentele 2.2 (tabelul 4.9) și 2.3 (tabelul 4.lo).

Utilizarea matr[illegible] de date sumă cu mărire simulată a pasului de eșantionar[illegible] estimarea coeficienților de autoregresie este susținut[illegible] experimentele 1.3,...,1.7, 2.2, 2.3 și 2.4.

Reducerea eroril[illegible] estimare a frecvențelor sinusoidelor și a volumului d[illegible] [illegible]ul prin mărirea simulată a pasului de eșantionare și [illegible] supradeterminării este susținută prin experiment[illegible] [illegible], 1.4, 2.2 și 2.3. Aceasta se obține în condiția men[illegible] constante a numărului de eșantioane prelevate pe un [illegible] [illegible]val de timp dat, pe care procesul se consideră disponibil. [illegible] [illegible], prin utilizarea matricei de date A_{s2} și A_{s3}, în exp[illegible] [illegible]ntul 1.3 și respectiv 1.4, se obține o reducere a abate[illegible] standard a estimaților pentru frecvență de aproape d[illegible] [illegible] față de experimentul 1.2, în care se utilizează matr[illegible] $A_s=A_{s1}$. Reducerea volumului și deci a timpului de calc[illegible] [illegible] estimării coeficienților de autoregresie este dat[illegible] reducerea dimensiunilor matricilor de date : A_{s1} (7 x 2), A_{s2} (5 x 2) și A_{s3} (3 x 2). [illegible] utilizarea matricei de [illegible] A_{s4}, în experimentul 2.2 cu u proces format din cinci sinusoide, se obţine o îmbunătăţire substanţială a estimaţiilor pentru frecvenţe faţă de rezultatele publicate în /1o/. Abaterile standard se reduc cu mai mult de un ordin, în special la frecvenţele mici. Pentru a sublinia importanţa mărimii simulate a pasului de eşantionare se consideră experimentul 2.3 în care se formează matricea A_{s4} nr. 1 cu primele 75% din eşantioanele utilizate în experimentul 2.2 şi în /1o/. Şi în aceste condiţii se obţine o scădere substanţială a erorilor de estimare faţă de rezultatele publicate în /1o/, în special pentru frecvenţele mici. Reducerea volumului de calcul necesar estimării coeficienţilor de autoregresie este dată de dimensiunile matricelor de date A_{di} (7o x 36) în /1o/, A_{s4} (31 x 6) în experimentul 2.2 şi A_{s4} (13 x 6) în experimentul 2.3.

Eliminarea necesităţii introducerii sinusoidelor suplimentare este susţinută prin rezultatele experimentelor 2.2 şi 2.3 în comparaţie cu rezultatele publicate în /1o/. Mărirea simulată a pasului de eşantionare conduce la mărirea intervalului de timp corespunzător eşantioanelor ce compun o linie a matricei de date, efect ce se constată şi în cazul introducerii sinusoidelor suplimentare. Astfel, în experimentele 2.2 şi 2.3 nu se introduc sinusoide suplimentare şi se obţin estimaţii mult mai bune faţă de cele publicate în /1o/, unde se introduce un număr mare de sinusoide suplimentare. Eliminarea sinusoidelor suplimentare conduce la o simplificare a algoritmului de calcul deoarece nu mai este necesară selectarea sinusoidelor adevărate. În plus se elimină posibilitatea apariţiei efectului de despicare a liniilor spectrale, efect evidenţiat în experimentul 2.4.

Posibilitatea reducerii numărului de eşantioane şi menţinerea constantă sau reducerea erorilor de estimare, prin mărirea simulată a pasului de eşantionare şi reducerea supradeterminării, este susţinută prin experimentul 2.5. Eşantioanele în număr redus sînt prelevate pe acelaşi interval de timp pe care procesul se consideră disponibil. In experimentul 1.5 se utilizează un număr de şapte eşantioane şi matricea de date A_{s2}, obţinîndu-se o reducere a abaterii standard a estimaţiilor pentru frecvenţă cu peste 40% mai mică decît cea obţinută în experimentul 1.2, unde se utilizează un număr de 9 eşantioane şi matricea $A_s=A_{s1}$. In plus se obţine o reducere a volumului de calcul ceea ce se constată din dimensiunile matricilor de date A_{s2} (3 x 2) în experimentul 1.5 respectiv A_{s1} (7 x 2) în experimentul 1.2.

Reducerea erorilor de estimare a frecvenţelor sinusoidelor prin mărirea simultană a pasului de eşantionare, mărirea numărului de eşantioane şi menţinerea constantă a supradeterminării, este susţinută prin experimentul 1.6. Eşantioanele în număr mărit sînt prelevate pe acelaşi interval de timp pe care procesul se consideră disponibil. Astfel prin prelevarea unui număr de 21 eşantioane şi utilizarea matricei de date A_{s7} se obţin cele mai bune estimaţii pentru sinusoida considerată în experimentul 1, atît ca valoare medie cît şi ca abatere standard (tabelul 4.5). Se precizează că volumul de calcul necesar estimării coeficienţilor de autoregresie este acelaşi ca şi în experimentul 1.2 şi rezultă din menţinerea constantă a supradeterminării.

Posibilitatea reducerii intervalului de timp pe care se prelevează eşantioanele în condiţia menţinerii constante a erorilor de estimare, prin mărirea simulată a pasului de eşantionare, mărirea numărului de eşanticane şi menţinerea constantă a supradeterminării, este susţinută prin experimentul 1.7. Astfel, prin utilizarea matricei de date A_{s6} construită cu un număr de 19 eşantioane prelevate pe un interval de timp redus cu 25% faţă de cel corespunzător experimentului 1.2, în care se utilizează matricea $A_s=A_{s1}$ construită cu 9 eşantioane, se obţin erori de estimare cu puţin mai mici decît cele obţinute în experimentul 1.2. Se precizează că volumul de calcul necesar estimării coeficienţilor de autoregresie este acelaşi ca şi în experimentul 1.2 şi rezultă din menţinerea constantă a supradeterminării.

[illegible]. C O N C L U Z I I

Problem[illegible] [illegible]entate în lucrarea de față [illegible] referă la metoda de a[illegible] spectrală a semnalelor bazat[illegible] [illegible] modelul Prony de est[illegible] [illegible] a liniilor spectrale. Conform [illegible]acestui model, un semnal [illegible] [illegible]prezintă în domeniul frecven[illegible] ca o sumă de sinusoid[illegible] [illegible] în care nu se impune corelare[illegible] [illegible]monică. Astfel, pentru [illegible] [illegible]al dat printr-[illegible] secvență de [illegible] $\{y_n\}$, $n= 1,2,\ldots,N$, [illegible] problema estimării numărului [illegible] sinusoide, a frecven[illegible], amplitudinilo[illegible] și fazelor [illegible]toare. Estimarea frecv[illegible] [illegible] sinusoidelor se face print[illegible] procedură în două et[illegible], [illegible] se bazează [illegible] faptul că [illegible] proces format din sin[illegible] [illegible] este un p[illegible] ces autoregresiv [illegible] coeficienții de auto[illegible] [illegible]sie simetr[illegible] [illegible]i al[illegible] căror valori d[illegible]pind de frecvențele si[illegible] [illegible] și nu [illegible]epind de amplitud[illegible] și fazele lor. Ast[illegible], în prima etapă, se estimează c[illegible]ficienții de autoregresi[illegible] [illegible] corelarea modelului autoregresiv cu secvența de da[illegible] [illegible] două etapă se determină frecvențele sinusoidelor în [illegible] [illegible] coeficienții de autoregr[illegible]sie. Estimarea amplitud[illegible] [illegible] fazelor se face în funcți[illegible] de frecvențele sinuso[illegible] [illegible] de secvența de date.

Contrib[illegible] lucrării de fa[illegible] se referă l[illegible] estimarea numărului și a [illegible] sinusoidelor. In cele [illegible] urmează se prezintă c[illegible] [illegible]ile lucrării și concluziile [illegible]zultate din ele.

1. Avîn[illegible] [illegible] că un proce[illegible] format din sinusoide este un proces [illegible] [illegible]esiv cu coeficienții de autore[illegible]resie simetrici, se [illegible] [illegible]matric[illegible] de [illegible] sumă. [illegible] rece aceast[illegible] matrice [illegible] un număr [illegible] coeficienți de autoregresie redus l[illegible] [illegible] de matri[illegible] [illegible] date [illegible], in-

verse sau direct-inverse, se creează premiza reducerii volumului de calcul necesar estimării numărului și frecvențelor sinusoidelor.

2. Se demonstrează în lucrarea de față, că rangul matricei de date sumă, corespunzătoare unui proces format din sinusoide, este egal cu numărul de sinusoide. Astfel, numărul de sinusoide cu care se modelează un proces, se estimează ca rang efectiv al matricei de date sumă. Rangul efectiv se obține din analiza valorilor singulare rezultate din DVS a matricei de date sumă, sing[illegible] metodă generală de încredere pentru determinarea numerică [illegible] unei matrice în prezența perturbațiilor și a erorilor [illegible] calcul. Se arată, în lucrarea de față, că valorile sing[illegible] indică și posibilitatea corelării [illegible] ului format din si[illegible] cu procesul analizat.

3. Pentru estim[illegible] coeficienților de autoregresie se utilizează matricea de [illegible] care permite reducerea volumului de calcul necesar [illegible], prin reducerea la jumătate a numărului de coeficie[illegible] autoregresie, față de cazul utilizării matricilor de [illegible] directe, inverse sau directe-inverse.

4. Rezolvarea si[illegible] de ecuații liniare supradeterminat pentru estimare[illegible] coeficienților de autoregresie se face prin utilizarea de[illegible] valorilor singulare. Se propune, în lucrarea de [illegible], estimarea coeficienților de autoregresie, pentru proc[illegible] modelat ca o sumă de sinusoide, ca spațiu liniar nul gener[illegible] ultimele coloane ale matricei V, rezultată din DVS a mat[illegible] de date. Se apreciază /21/ că utilizarea DVS la soluți[illegible] sistemelor de ecuații liniare supradeterminate este [illegible] în condițiile existenței perturbațiilor și a erori[illegible] calcul.

5. In cazul utili[illegible] sinusoidelor suplimentare se propune utilizarea algori[illegible] de reducere pentru identificarea sinusoidelor adevă[illegible]. Algoritmul este aplicabil în cazul utilizării matricilor [illegible] directe, inverse, sau directe-inverse.

6. In lucrarea de faţă se analizează erorile de estimare a frecvenţelor sinusoidelor corespunzătoare celor două etape de calcul. Din analiza teoretică rezultă că erori de estimare mari apar pentru frecvenţele mult mai mici decît frecvenţele de eşantionare, fapt constatat experimental în bibliografie precum şi în experimentele efectuate în prezenta lucrare. Se obţine, astfel, concluzia privind necesitatea măririi pasului de eşantionare.

7. Se [illegible], prin prezenta lucrare, matricile de date cu mărire simulată a pasului de eşantionare. Aceste matrici se construiesc pe baza aceleiaşi secvenţe de date ca şi matricile de date precizate anterior. Mărirea simulată a pasului de eşantionare rezultă din aranjarea eşantioanelor în liniile matricei, nu în ordine consecutivă, ci din K în K, unde K= 2,3,... Această definire a matricilor de date este o definire [illegible], deoarece pentru K=1 se obţin matricile de date precizate anterior.

8. Utilizarea matricilor de date cu mărirea simulată a pasului de eşantionare conduce la mărirea intervalului de timp corespunzător eşantioanelor ce intervin într-o linie a matricei de date. Se constată, în această lucrare, că mărirea acestui interval de timp se obţine şi în cazul introducerii sinusoidelor suplimentare, dar cu preţul măririi volumului de calcul, deoarece se estimează un număr mai mare de coeficienţi de [illegible] regresie şi cu preţul complicării algoritmului de calcul, [illegible] este necesară identificarea sinusoidelor adevărate. Mărirea intervalului de timp corespunzător unei linii a matricei de date conduce la reducerea substanţială a erorii de estimare a numărului şi a frecvenţelor sinusoidelor.

9. Utilizarea eşantioanelor secvenţei de date în matricile cu mărire simulată a pasului de eşantionare este mai uniformă, în sensul că se tinde ca, la mărirea lui K, fiecare eşantion să [illegible] o singură dată în matrice. Acest fapt conduce la [illegible] uniformizare a ponderii eşantioanelor secvenţei de date în [illegible] rezultate prin utilizarea matricilor de date cu mărirea pasului de eşantionare.

lo. Se arată, în lucrarea de față, că utilizarea matricilor de date sumă cu mărirea simulată a pasului de eşantionare conduce la reducerea erorilor de estimare a numărului de sinusoide conţinute de un proces. Numărul de sinusoide se estimează ca rang efectiv al acestor matrici de date. Rangul efectiv rezultă din analiza valorilor singulare.

11. Avînd în vedere că mărirea simulată a pasului de eşantionare şi introducerea sinusoidelor suplimentare au acelaşi efect de mărire a intervalului de timp corespunzător unei linii a matricei de date, se afirmă şi se demonstrează experimental eliminarea necesităţii introducerii sinusoidelor suplimentare. Se obţine, astfel, reducerea volumului de calcul, simplificarea algoritmului de estimare a frecvenţelor sinusoidelor şi eliminarea posibilităţii de apariţie a fenomenului de despicare a liniilor spectrale.

12. Se analizează teoretic şi se demonstrează experimental reducerea erorilor de estimare a frecvenţelor sinusoidelor şi a volumului de calcul prin mărirea simulată a pasului de eşantionare şi reducerea supradeterminării sistemului de ecuaţii liniare. Aceasta se obţine în condiţiile menţinerii constante a numărului de eşantioane prelevate pe un interval de timp dat, pe care procesul ... considerat disponibil. Pentru factori de supradeterminare ... mici, efectul reducerii supradeterminării poate compensa efectul măririi simulate a pasului de eşantionare. În acest caz, rămîne avantajul privind reducerea volumului şi deci a ... de calcul necesar estimării frecvenţelor sinusoidelor.

Astfel, în experimentul ... referitor la un proces format din cinci sinusoide ... aditiv, prin mărirea simulată cu patru a pasului de eşantionare, se obţine o reducere a erorilor de estimare a frecvenţelor cu mai mult de un ordin faţă de erorile obţinute în acelaşi experiment în /lo/. Dimensiunile matricilor ... care generează sistemele de ecuaţii liniare supradeterminate sînt 31 x 6 în experimentul ... şi 7o x 36 în /lo/.

13. Se afirmă şi ... demonstrează experimental posibilitatea reducerii numărului ... eşantioane şi menţinerea constan-

tă sau reducerea erorilor de estimare, prin mărirea simulată a pasului de eşantionare şi reducerea supradeterminării. In acest caz, apare şi o mărire efectivă a pasului de eşantionare deoarece se prelevează mai puţine eşantioane pe un interval de timp dat.

14. Se demonstrează că, în condiţia obţinerii unui sistem de ecuaţii liniare cu factor de supradeterminare dat, este posibilă mărirea simulată a pasului de eşantionare, prin mărirea numărului [illegible] eşantioane prelevate pe un interval de timp dat. Se a[illegible] /11/ că un pas de eşantionare mic nu este util deoarece [illegible] compus din eşantioane consecutive tinde să devină [illegible] vectorul constant $(1,1,\ldots,1)^{T}$. Deoarece la formarea li[illegible] matricilor cu mărire simulată a pasului de eşantionare, [illegible] eşantioanele nu sînt luate unul după celălalt ci din K în K, [illegible] că acest dezavantaj este eliminat. In prezenta lucrare [illegible] se afirmă şi se demonstrează că, prelevarea unui număr [illegible] mai mare de eşantioane pe un interval de timp dat, [illegible] utilizarea unui pas de eşantionare cît mai mic, poate conduce la obţinerea unor estimaţii mai bune pentru frecvenţele sinusoidelor, numai prin mărirea simulată a pasului de eşantionare. Deoarece supradeterminarea este constantă rezultă [illegible] acelaşi volum de calcul necesar estimării frecvenţelor si[illegible].

15. Din [illegible] nte teoretice şi din rezultate experimentale se a[illegible], în lucrarea de faţă, că este posibilă reducerea interval[illegible] de timp pe care se prelevează eşantioanele cu menţinerea constantă a erorilor de estimare. Erori de estimare [illegible] se obţin prin impunerea unei supradeterminări c[illegible] şi prin compensarea efectului reducerii intervalului de timp cu efectul măririi simulate a pasului de eşantionare. Pentru aceasta este necesară mărirea numărului de eşantioane. Deoarece supradeterminarea este constantă rezultă [illegible] acelaşi volum de calcul necesar estimării frecvenţelor si[illegible], Astfel, în experimentul 1.7 referitor la un proces [illegible] din o sinusoidă în zgomot aditiv, prin mărirea [illegible] pasului de eşantionare, se obţine o

reducere cu 25% a intervalului de timp pe care se prelevează eşantioanele, în condiţiile menţinerii constante a erorilor de estimare a frecvenţei sinusoidei.

Toate contribuţiile lucrării sînt susţinute prin rezultate experimentale prezentate în capitolul 4.

Contribuţia centrală a lucrării constă în definirea şi introducerea matricilor de date cu mărire simulată a pasului de eşantionare. Prin aceasta se măreşte intervalul de timp corespunzător eşantioanelor ce compun o linie a matricei de date. Se constată, prin această lucrare, că mărirea acestui interval de timp se obţine prin introducerea rădăcinilor suplimentare în polinomul caracteristic cu care se estimează coeficienţii de autoregresie. Mărirea simulată a pasului de eşantionare, ca şi introducerea rădăcinilor suplimentare se fac cu preţul reducerii supradeterminării sistemului de ecuaţii liniare, cu care se estimează coeficienţii de autoregresie. In cazul introducerii rădăcinilor suplimentare rezultă, în plus, o mărire a volumului de calcul necesar estimării, deoarece numărul coeficienţilor de autoregresie este mai mare şi o complicare a algoritmului, deoarece este necesară separarea rădăcinilor adevărate ale polinomului caracteristic. Se afirmă în literatură /21/, /.../, /63/, /69/, /54/, /62/, /41/, pe baza experimentală, că introducerea rădăcinilor suplimentare conduce la reducerea erorilor de estimare a coeficienţilor de autoregresie. Rezultă deci că această reducere a erorilor de estimare este de aşteptat în cazul utilizării matricilor de date cu mărire simulată a pasului de eşantionare. Se remarcă, de asemenea, că distribuţia frecvenţelor de apariţie a eşantioanelor în matricile de date cu mărirea simulată a pasului de eşantionare tinde să se uniformizeze. Astfel, pentru K suficient de mare fiecare eşantion este utilizat o singură dată în matrice. Acest fapt conduce la o uniformizare a ponderii eşantioanelor ce compun matricea de date în estimaţiile pentru coeficienţii de autoregresie.

Considerentele prezentate mai sus se referă la utilizarea matricilor de date cu mărire simulată a pasului de eşanţionare în cazul general al estimării coeficienţilor de autoregresie.

Utilizarea, în lucrarea de faţă, a matricei de date sumă cu mărire simulată a pasului de eşantionare la estimarea liniilor spectrale conduce la reducerea considerabilă a erorilor de estimare a frecvenţelor sinusoidelor simultan cu reducerea volumului de calcul şi simplificarea algoritmului.

Rezultă că, cercetări viitoare pot evidenţia utilitatea matricilor de date cu mărire simulată a pasului de eşantionare la reducerea erorilor de estimare şi a volumului de calcul, în cazul general al estimării coeficienţilor de autoregresie şi în particular la estimarea parametrilor modelului format din sinusoide atenuate exponenţial. Acest model este utilizat în metoda Prony de estimare a densităţii spectrale de energie.

BIBLIOGRAFIE

1. R.Bellman, Introducere în analiza matriceală. Editura Tehnică, Bucureşti, 19..

2. P.Bloomfield, Fourier Analysis of Time Series : An Introduction. New York, Wiley, 1976.

3. G.E.P.Box and G.M.Jenkins, Time Series Analysis. Forecasting and Control. San Francisco, CA: Holden-Day, 197o.

4. D.R.Brillinger, The ... of tapering in spectrum estimation, Trans.Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP-29, pp.1o7..., Oct.1981.

5. C.M.Bucur, C.A.Popea, ...Simion, Matematici speciale. Calculul numeric. Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.

6. Gh.Cartianu, Analiza ... circuitelor electrice, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.

7. Y.T.Chen, J.M.L.Lav..., ... J.B.Plant, A parameter estimation approach to ... of frequencies os sinusoids, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP-29, pp.214-219, Apr.1981.

8. G.Ciucu, V.Craiu, Teoria estimaţiei şi verificarea ipotezelor statistice, Editura didactică şi pedagogică, 1968.

9. T.van Eck, Periodicities in short-time series : frequency, amplitude and initial phase determinations, Report nr.... , Seismological Section, Uppsala University, Sweden, 198..

1o.T. van Eck, Quantitative determination of periodicities from short time series, ... Trans.Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP-..., pp.329-331, Apr.1981.

11. D.C.Farden, Solution of a Toeplitz set of linear equation, IEEE Trans. Antennas Propagat., vol.AP-24, pp.906-908, Nov.1976.

12. G.E.Forsythe, M.A.Malcolm, and C.B.Moler, Computer Methods for Mathematical Computations. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.

13. St.Gârlaşu, Prelucrarea în timp real a semnalelor fizice, Scrisul Românesc, Craiova, 1978.

14. S.Gârlaşu, C.Popa, S.Ionel, Introducere în analiza spectrală şi de corelaţie. Edit.Facla, Timişoara, 1982.

15. W.Gersch and J.Yonemoto, Automatic classification of EEG's: A parametric model new features for classification approach, in Proc. 1977 Joint Automatic Control Conf., pp.762-769, June 1977.

16. B.Gold and C.M.Rader, Digital Processing of Signals, McGraw Hill, New York, 1969.

17. G.H.Golub and C.Reinsch, Singular value decomposition and least squares solution, Numer.Math., vol.14, pp. 4o3-42o, 197o.

18. L.J.Griffiths and R.Prieto-Diaz, Spectral analysis of natural seismic events using autoregressive techniques, IEEE Trans. Geoscience Electronics, vol.GE-15, pp.13-25, Jan.1977.

19. F.J.Harris, On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform, Proc.IEEE, vol.66, pp.51-83, Jan.1978.

2o. S.S.Haykin, Ed., Nonlinear Methods of Spectral Analysis, New York, Springer-Verlag, 1979.

21. T.L.Henderson, Geometric methods for determining system poles from transient response, IEEE Trans.Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP-29, pp.982-988, Oct.1981.

22. E.K.Hung and R.W.Herring, Simulation experiments to compare the signal detection properties of DFT and MEM spectra", IEEE Trans.Acoust,Speech, Signal Processing, vol.ASSP-29, pp.1o84-1o89, Oct.1981.

23. G.M.Jenkins and D.G.Watts, Spectral Analysis and Its Applications. San Francisco, CA: Holden-Day, 1968.

24. S.M.Kay, S.L.Marple,Jr., Spectrum analysis - a modern perspective, Proceedings of the IEEE, vol.69, pp.138o-1419, Nov.1981.

25. V.C.Klemma and A.J.Laub, The singular value decomposition: Its computation and some applications, IEEE Trans. Automat.Contr., vol.AC-25, pp.164-176, Apr.198o.

26. K.Konstantinides and ..., Applications of singular value decomposition to system modeling in signal processing, IEEE Int.Conf.Acoustics, Speech and Signal Processing, 1983.

27. L.H.Koopmans, The Spectral Analysis of Time Series. Academic Press, New York and London, 1974.

28. R.Kumaresan and D.W.Tufts, Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise, IEEE Trans.Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP-3o, pp.833-84o, Dec.1982.

29. R.Kumaresan, On the zeros of the linear prediction-error filter for deterministic signals, IEEE Trans.Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP 31, pp.217-22o, Feb. 1983,

3o. P.Lancaster, Theory of Matrices. Academic, 1969.

31. T.E.Landers and R.T.Lacoss, Some geophysical application of autoregressive spectral estimates, IEEE Trans. Geoscience Electronics, vol.GE-15, pp.26-32, Jan.1977.

32. S.W.Lang and J.H. McClellan, Frequency estimation with maximum entropy spectral estimators, IEEE Trans.Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP-28, pp.716-724, Dec. 198o.

33. C.L.Lawson and R.J.Hanson, Solving Least-Squares Problems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974.

34. A.Leonte, C.Vraciu, Elemente de calcul matriceal cu aplicatii. Editura Tehnică, Bucuresti, 1975.

35. S.Levy, C.Walker, T.J.Ulrych and P.K.Fullager, A linear programming approach to the estimation of the power spectra of harmonic processes, Trans.Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-3o, pp.675-679, Aug.1982.

36. J.Makhoul, Linear prediction: A tutorial review, Proc. IEEE. vol.63, pp.561-58o, 1975.

37. J.Makhoul, Spectral Linear Prediction: Properties and Applications, IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP-23, pp. 283-296, June 1975.

38. S.L.Marple,Jr., Conventional Fourier, autoregressive, and special ARMA methods of spectrum analysis, Engineer's Dissertation, Stanford Univ., Stanford, CA, Dep.Elec.Eng., Dec.1976.

39. S.L.Marple,Jr., Spectral line analysis via a fast Prony algorithm, 1982, IEEE.

4o. S.L.Marple,Jr., Fast algorithms for linear prediction and system identification filters with linear phase, IEEE Trans.Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-3o, pp.942-953, Dec.1982.

41. S.L.Marple,Jr., A fast algorithm for and performance of the Kumaresan-Prony method of spectrum analysis, IEEE Int.Conf.Acoustics, Speech and Signal Processing, 1983.

42. Gh.Mihoc, V.Craiu, Tratat de statistică matematică, Selecţie şi estimaţie. Vol.1, Edit.Academiei R.S.R., Bucureşti, 1977.

43. Gh.Mihoc, V.Craiu, Tratat de statistică matematică. Vol.IV. Corelaţie şi regresie liniară. Editura Academiei RSR, 1981.

44. Ed.Nicolau, M.Popovici, Introducere în cibernetica sistemelor hibride. Editura tehnică, Bucureşti 1965.

45. A.H.Nuttall, Some windows with very good sidelobe behavior, IEEE Trans.Acoust., Speech, Signal Process., vol.ASSP-29, pp.84-[illegible], Feb.1981.

46. A.V.Oppenheim and [illegible]Schafer, Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, [illegible] Prentice-Hall, 1975.

47. R.K.Otnes and L.En[illegible], Digital Time Series Analysis. New York: Wiley, 1[illegible].

48. A.Papoulis, The Fourier Integral and its Applications, McGraw-Hill Book Company, 1962.

49. A.Papoulis, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. New York: McGraw-Hill, 1965.

5o. A.Papoulis, Signal Analysis. New York, McGraw-Hill,19[illegible]7.

51. A.Papoulis, Maximum entropy and spectral estimation: A.Review, Trans.Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-29, pp.1176-1[illegible], Dec.1981.

52. Gh.Pic, Algebră superioară. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 19[illegible].

53. V.F.Pisarenko, The retrieval of harmonics from a covariance function, Geophysical J.Royal Astronomical Soc., vol.33, pp.347-366, [illegible].

5[illegible] A.J.Poggio, [illegible].Van [illegible], E.K.Miller, and R.Mittra, [illegible]valuation of a pro[illegible] technique for transient data, IEEE Trans.Antenna[illegible] Propagat., vol.AP-26, pp.165-173, 1978.

55. E.Pop, V.Stoica, Pri[illegible]ii şi metode de măsurare numerică, Editura Facla, [illegible]77.

56. Rabiner L.R. and B.Gol[illegible], Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1[illegible]75.

5[illegible]. A.P.Sage and J.L.Melsa, Estimation Theory with Application to Communication and control. New York, McGraw-Hill, 1972.

58. x x x , SIPAC. Sistem de programe pentru identificarea şi proiectarea asistată de calculator a sistemelor automate. Manual de prezentare şi utilizare. Institutul Central pentru Conducere şi Informatică. Direcţia de cercetare. Laboratorul calculatoare de proces. 1980.

59. Al.Spătaru, Teoria transmisiunii informaţiei, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.

60. D.Stanomir, O. Stănăşilă, Metode matematice în teoria semnalelor, Editura tehnică, Bucureşti, 1980.

61. S.D.Stearns, Digital Signal Analysis. Hayden Book Company, Inc., New Jersey, 19[illegible].

62. K.Steiglitz, The simultaneous estimation of poles and zeros in speech analysis, IEEE Trans.Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP-25, pp.229-234, 1977.

63. G.W.Stewart, Introduction to Matrix Computations. New York: Academic, 1973.

64. G.W.Stewart, On the perturbation of pseudoinverses, projections and linear least squares problems, SIAM Rev., vol.[illegible], [illegible], pp.634-662, 1977.

65. G.Stolojanu, [illegible]odoru, F.Cetină, Prelucrarea numerică a semnalului [illegible], Editura Militară, Bucureşti, 1984.

66. V.Tiponuţ, [illegible] privind aplicarea eşantionării la aparatele [illegible]. Teză de doctorat. 1981.

67. L.Toma, [illegible] specializate de analiză spectrală. Referat 1983.

68. D.W.Tufts and R.Kumaresan, Singular value decomposition and improved frequency estimation using linear prediction, IEEE Trans.Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP-30, pp.671-675, Aug.1982.

69. T.J.Ulrych and R.W.Clayton, Time series modelling and maximum entropy, Phys.Earth and Planetry Interiors, vol.12, pp.1[illegible]-[illegible], Aug.1976.

BUPT

70. C.Van. Schooneveld and D.J.Frijling, Spectral Analysis: On the usefulness of tapering for leakage suppression, Trans.Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP-29, pp.323-329, Apr.1981.

71. J.L.Zolesio, J.L.Boscannec, Transformee de Fourier Discrete en Radar Doppler, Laboratoire Central de Télécommunications, Velizy-Villacoublay, novembre, 1979.

C U P R I N S