P R E F A Ţ Ă

Moto : » Prefaţa supermatematicii este chiar **matematica**,
matematica centrică sau matematica ordinară.
Conţinutul matematicii excentrice şi a
supermatematicii este **SUPER**.. »
Autorul

Dedicăm această carte celei de a 90-a aniversări de existenţă a
Şcolii Politehnice din Timişoara.

PREFAŢĂ

Superalbi, superfini, supergingaşi, superfiravi, cad din înaltul cerului, într-un superb dans superhalucinant, fulgii de nea. Ninge. Paienjenişul de fire albe de argint a învăluit natura într-o mantie de zibelină albă, străvezie. E iarnă. E iarnă iar şi vor trece multe la rând, să-şi despletească neaua albă în vânt.

Iarna care vine, însă, este una aniversară, în care se sărbatoresc **90 de ani** de la infinţarea **Şcolii Politehnice din Timişoara** (Decret Lege 4822 / 11. 11. 1920).

Anii aniversări au fost benefici pentru autor:

- La **a 55-a aniversare**, au fost descoperite, sau mai bine zis, inventate « **Funcţiile circulare excentrice** » publicate 3 ani mai târziu [1] la Prima Conferinţă Naţională de Vibraţii în Construcţia de Maşini, prilej prin care Prof. Em. Dr. Doc. Ing. **Gheorge Silaş** a constatat că « acestea nu sunt numai « nişte funcţii », ci **o nouă matematică**, o **supermatematică** » ;
- La festivitaţile prilejuite de **a 70-a aniversare**, autorul, impreună cu soţia sa, au câştigat concursul de dans cu premii ;
- Prima lucrare ştiinţifică cu denumirea de **SUPERMATEMATICĂ** [10], susţinută la **The VII-TH INTERNATIONAL CONFERENCE OF MANUFACTURING ENGINEERING**, a fost dedicată celei de a **75-a aniversări** a Şcolii Politehnice din Timişoara ;
- Această primă carte de « **SUPERMATEMATICA. Fundamente** », care va apăre în doua volume, este dedicată celei de a 90 aniversări a **Şcolii Politehnice din Timişoara.**
- La aniversarea centenarului …………………………… nu ştim ce va urma.

Funcţiile supermatematice (FS) stau la baza generării obiectelor **neogeo-metrice**, cum le-a denumit reputatul matematician şi fizician Prof. **Dr. Florentin Smarandache**, şeful Departamentului de Matematica de la Universitatea Gallup din New Mexico (SUA), care le-a găsit o primă aplicaţie în domeniul artistic [21], deşi autorul dorea, ca acest lucru, să se producă în domeniul lui, cel tehnic. Mai mult sau mai puţin artistice, toate figurile 2D şi 3D, incluse în acestă lucrare, sunt realizate cu noile funcţii matematice, denumite **funcţii supermatematice (FSM).**

Aceste funcţii sunt rodul a 46 de ani de cercetări, începute în 1969 la Universitatea din Stuttgart, timp în care au fost publicate peste 100 de lucrări în acest domeniu, scrise de peste 25 de autori, aşa cum se poate deduce şi din bibliografie.

Denumirea aparţine, aşa cum am afirmat anterior, şi-mi face placere să repet, regretatului matematician Prof. em. dr. doc.ing. **Gheorghe Silaş** care, la susţinerea primei lucrări din acest domeniu, la Prima Conferinţă Naţională de Vibraţii în Construcţia de Maşini, Timişoara, 1978, intitulată „**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE**” a declarat „**Tinere**, dumneata n-ai descoperit numai „**nişte funcţii**” ci o nouă matematică, o **supermatematică”.** M-am bucurat, la cei 40 de ani, ca un adolescent. Şi am constatat cu multă satisfacţie că s-ar putea să aibă dreptate!

Prefixul **super** se justifică, astăzi, pentru a scoate în evidenţă apariţia noilor complemente de matematică, reunite sub denumirea de **matematică excentrică (ME)** cu entităţi mult mai importante şi infinit mai numeroase decât entităţiile existente în **actuala matematică**, pe care suntem obligaţi s-o denumim **matematica centrică (MC)**.

Fiecărei entităţi din **MC** îi corespund o infinitate de entităţi similare în **ME**, astfel că **supermatematica** (**SM**) este reuniunea celor două domenii, adică **SM = MC ∪ ME** şi **MC** este un caz particular, de excentricitate nulă, a **ME**. Adică, **MC = SM(e = 0)**. Fiecărei entităţi şi funcţii, cunoscute în **MC,** îi corespund o familie infinită de funcţii în **ME** şi, în plus, apar o serie de funcţii noi, cu largi utilizări în matematică şi tehnologie.

Astfel, la **x** = **cos α** îi corespunde familia de funcţii **x** = **cexθ = cex(θ, s, ε),** în care, **s = e**/**R** şi **ε** sunt coordonatele polare ale **excentrului S**(**s, ε**), corespunzător cercului unitate/trigonometric, sau **E(e, ε)** corespunzător cercului oarecare, de rază **R**, considerat **pol** al unei drepte **d** care se roteşte în jurul lui **E** sau **S** cu unghiul de poziţie **θ,** generând astfel funcţiile trigonometrice excentrice, sau funcţii supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**), prin intersecţia dreptei excentrice **d** cu cercul unitate (v.**Fig.1**). Printre care şi pe **cosinus excentric** de **θ,** cu notaţia **cexθ = x**, în care **x** este proiecţia punctului **W**, de intersecţie al dreptei cu cercul trigonometric **C(1,O),** sau coordonata carteziană a punctului **W(x, y).** O dreaptă, dusă prin **S**, interior cercului (**s** ≤ 1 → **e** < **R**), intersectează cercul în două puncte $\mathbf{W_1}$ şi $\mathbf{W_2}$, notate concentrat $\mathbf{W_{1,2}}$.

Ca urmare, vor exista **două determinări** ale funcţiilor supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE) :** una principală, de indice **1-** $\mathbf{cex_1\theta}$ şi una secundară $\mathbf{cex_2\theta}$, de indice **2**, notate concentrat $\mathbf{cex_{1,2}\theta}$**. E** şi **S** au fost denumite **ex-centre** pentru că au fost expulzate din centrul **O(0,0).** Această expulzare a condus la aparitţa **ME** şi, implicit, a **SM**. Prin ea, toate obiectele matematice s-au multiplicat de la unu la infinit**:** unei **unice** funcţii din **MC**, de exemplu **cosα,** corespunzându-i o **infinitate** de funcţii **cexθ**, graţie posibilităţilor de plasare în plan a **excentrului S** şi/sau **E.**

S(e, ε) poate ocupa o infinitate de poziţii în planul în care se află cercul unitate sau trigonometric. Pentru fiecare poziţie, a lui **S** şi **E**, se obţine câte o funcţie **cexθ.** Dacă **S** este un punct fix, atunci se obţin funcţii **SM** circulare excentrice (**FSM –CE)** de **excentru fix**, sau cu **s** şi **ε** constante. Dar **S** sau **E** se pot deplasa, în plan, după diverse reguli sau legi, în timp ce dreapta care generează funcţiile, prin intersecţia ei cu cercul, se roteşte cu unghiul **θ** în jurul lui **S** şi **E.** În cazul din urmă, avem de-a face cu **FSM-CE** de excentric **S/E** punct variabil, adică **s = s (θ)** şi/sau **ε = ε (θ).**

Dacă poziţia variabilă a lui **S/E** este reprezentată tot de **FSM-CE**, de acelaşi excentru **S(s, ε)**, sau de un alt excentru $\mathbf{S_1}[s_1 = s_1(\theta), \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\theta)]$, atunci se obţin funcţii de dublă excentricitate. Prin extrapolare, se obţin funcţii de triplă şi de multiplă excentricitate. Prin urmare, **FSM-CE** sunt funcţii de atâtea variabile câte dorim, sau de câte avem nevoie.

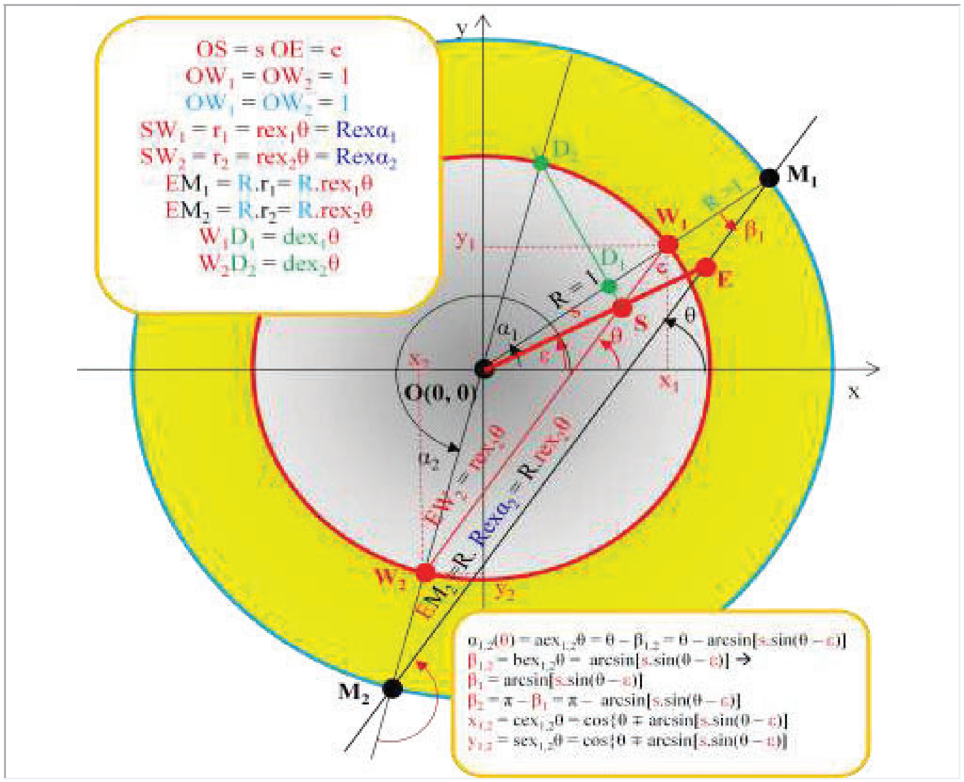


Fig.1 Schiţa explicativă pentru definirea funcţiilor **supermatematice** circulare excentrice (**FSM-CE**) de variabilă excentrică **θ**

Dacă distanţele de la **O** la punctele $\mathbf{W_{1,2}}$, de pe cercul **C(1,O),** sun**t** constante şi egale cu raza **R = 1** a cercului trigonometric **C**, distanţe pe care le vom denumi **raze centrice**, distanţele de la **S** la $W_{1,2}$ notate cu $\mathbf{r_{1,2}}$ sunt variabile şi sunt denumite **raze excentrice** ale cercului unitate **C**(1,O) şi reprezintă, totodată, noi funcţii super-matematice **circulare excentrice** (FSM-CE), care au fost denumite **funcţii radiale excentrice** şi notate cu $\mathbf{rex_{1,2}\theta}$, dacă se exprimă în funcţie de **variabila** denumită **excentrică** şi **motoare θ**, care este unghiul de la excentrul **E**. Sau, notate $\mathbf{Rex_{1,2}\alpha}$, dacă se exprimă în funcţie de unghiul **α** sau **variabila centrică**, unghiul din **O(0,0).**

Punctele $\mathbf{W_{1,2}}$ se văd sub unghiurile $\mathbf{\alpha_{1,2}}$ din **O(0,0)** şi sub unghiurile **θ** şi **θ + π** din **S(e, ε)** şi **E**. Dreapta **d** este împărţită de **S ⊂ d** în cele două **semidrepte**, una pozitivă $\mathbf{d^+}$ şi una negativă $\mathbf{d^-}$. De aceea, se poate considera $\mathbf{r_1}$ = $rex_1\mathbf{\theta}$ un segment orientat pozitiv pe d^+ ($\rightarrow$ $r_1 > 0$) iar $r_2 = rex_2\theta$ un segment orientat în sens negativ pe d^+ ($\rightarrow$ $r_2 < 0$) şi în sensul semidreptei negative d^-.

Prin relaţii trigonometrice simple, în triunghiurile oarecare **$OEW_{1,2}$**, sau, mai precis, scriind teorema sinusului (în funcţie de θ) şi teorema lui **Pitagora** generalizată (pentru variabilele $\alpha_{1,2}$) în aceste triunghiuri, rezultă imediat expresiile **invariante** ale funcţiilor radial excentrice, şi anume:

$$r_{1,2}(\theta) = rex_{1,2}\theta = - s.\cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)} \qquad \text{şi}$$

$$r_{1,2}(\alpha_{1,2}) = Rex\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{1 + s^2 - 2s\cos(\theta - \varepsilon)}\,.$$

Toate **FSM–CE** au expresii **invariante**, din care cauză ele nu trebuie tabelate; tabelate fiind funcţiile centrice, din **MC**, cu ajutorul cărora se exprimă.

În toate expresiile lor, se va găsi, invariabil, unul dintre radicalii din expresiile anterioare, ale funcţiilor **radial excentrice** $r_{1,2}(\theta)$.

Depistarea celor două determinări este simplă: pentru + **(plus)** în faţa radicalilor se obţine întotdeauna prima determinare ($r_1 > 0$) şi pentru semnul **— (minus)** se obţine cea de a doua determinare ($r_2 < 0$). Regula rămâne valabila pentru toate **FSM–CE.**

Prin convenţie, prima determinare, principală, de indice **1**, se poate utiliza / scrie şi fără indice.

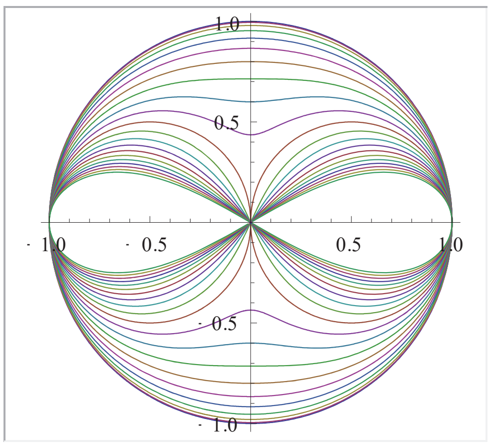


Fig.2,a Lemniscatele lui Booth
pentru **R = 1** şi excentricitatea numerică
s ∈ [1 ; 2] în 2D

Fig. 2,b Lemniscatele lui Booth
pentru R = 1 şi excentricitate numerică
e ∈ [-1 ; 1] în 3D

Câteva observaţii, legate de aceste funcţii **REX** (″rege″), se impun:

- Funcţiile radial excentric exprimă distanţa, în plan, în coordonate polare, dintre două puncte: $S(s, \varepsilon)$ şi $W_{1,2}$ (**R** $=1$, $\alpha_{1,2}$) sau $W_{1,2}$ ($x_{1,2}$, $y_{1,2}$), pe direcţia dreptei excentrice **d**, înclinată cu unghiul θ faţă de axa **Ox**;
- Ca urmare, cu ajutorul lor, şi numai al lor, pot fi exprimate ecuaţiile **tuturor curbelor plane** cunoscute, cât şi a altora noi, care au apărut odată cu apariţia **ME.**

Un exemplu îl reprezintă **lemniscatele lui Booth** (v. **Fig.2, a, b, c**), exprimate prin relaţiile, în coordonate polare, de ecuaţie

$$\boldsymbol{\rho(\theta) = R\,(rex_1\,\theta + rex_2\,\theta) = -2\,s.R\cos(\theta - \varepsilon)}, \quad \text{pentru } \mathbf{R = 1},\ \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \text{ şi } s \in [0, 2]$$

- O altă consecinţă constă în **generalizarea definiţiei cercului**:***Cercul este curba plană ale cărei puncte M se găsesc la distanţele***

$$r(\theta) = R.rex_{1,2}\theta = R.rex_{1,2}\,[\theta, E(e, \varepsilon)]$$

faţă de un punct oarecare, denumit excentru, din planul cercului E(e, ε).

Dacă **S ≡ O**(0,0) atunci **s = 0** → **rexθ** = 1 = constant şi **r(θ)** = **R** = constant, obţinându-se **definiţia clasică** a cercului: puncte M situate la aceeaşi distanţă **R** de centrul cercului **O**(0,0).

s ∈ [-1, 1]	s ∈ [-2, +2]

Fig. 2,c Lemniscatele lui **Booth** în 3D

- Funcţiile **rexθ** şi **Rexα** exprimă **funcţiile de transmitere de ordinul zero**, sau de transfer a poziţiei, din teoria mecanismelor şi este raportul dintre parametrul $\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha_{1,2}})$ ce poziţionează elementul condus $\mathbf{OM_{1,2}}$ şi parametrul $\mathbf{R}.\mathbf{r_{1,2}(\theta)}$ ce poziţionează elementul conducător $\mathbf{EM_{1,2}}$. Între aceşti doi parametri, există următoarele relaţii, care se deduc, la fel de simplu, din schiţa **figurii 1** de definire a **FSM–CE**.

Între unghiurile de poziţie ale celor două elemente, condus şi conducător, există relaţiile

$$\boldsymbol{\alpha_{1,2}(\theta)} = \boldsymbol{\theta} \mp \arcsin[e.\sin(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon})] = \boldsymbol{\theta} \mp \boldsymbol{\beta_{1,2}(\theta)} = \mathbf{aex_{1,2}}\boldsymbol{\theta} \qquad \text{şi}$$

$$\boldsymbol{\theta(\alpha_{1,2})} = \boldsymbol{\alpha_{1,2}} \pm \boldsymbol{\beta_{1,2}(\alpha_{1,2})} = \boldsymbol{\alpha_{1,2}} \pm \arcsin\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}} = \mathbf{Aex}(\boldsymbol{\alpha_{1,2}}).$$

Funcţiile $\mathbf{aex_{1,2}}\boldsymbol{\theta}$ şi $\mathbf{Aex}\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ sunt denumite **amplitudine excentrică** deoarece ele se pot utiliza la definirea **FSM-CE** cosinus şi sinus excentrice, tot aşa cum funcţia amplitudine sau amplitudinus am,(k,u) se foloseşte la definirea funcţiilor eliptice **Jacobi**: sn (k,u) = sin [am(k,u)], cn(k,u) = cos[am(k,u)], adică:

$\mathbf{cex_{1,2}\theta = cos(aex_{1,2}\theta)}$, $\mathbf{Cex\ \alpha_{1,2} = cos(Aex\ \alpha_{1,2})}$ şi

$sex_{1,2}\mathbf{\theta = sin\ (aex_{1,2}\theta)}$, $\mathbf{Sex\ \alpha_{1,2}} = \cos\ (\mathbf{Aex\ \alpha_{1,2}}\ )$

- Funcţiile radial excentrice pot fi considerate ca module ale vectorilor $\vec{r}_{1,2}$ de poziţie ai punctelor $\mathbf{W_{1,2}}$ de pe cercul unitate **C (1,O)**, vectori exprimaţi prin relaţiile

$\vec{r}_{1,2} = rex_{1,2}\ \mathbf{\theta.rad\ \theta}$,

în care, **radθ** este vectorul unitate, de direcţie variabilă, sau versorul /**fazorul** direcţiei dreptei $\mathbf{d^+}$, a cărui derivată este fazorul **derθ** = **d(radθ)/dθ** şi reprezintă vectori perpendiculari pe direcţiile dreptelor $\mathbf{OW_{1,2}}$, tangenţi la cerc, în punctele $\mathbf{W_{1,2}}$. Ei sunt denumiţi fazorii **derivat centric.** Totodată, modulul funcţiei **radθ** este corespondentul în **MC** al funcţiei **rex θ** pentru **s = 0 → θ = α** când **rex θ = 1** iar $\mathbf{der\alpha_{1,2}}$ sunt versorii tangenţi la cercul unitate în punctele $\mathbf{W_{1,2}}$.

- Derivatele vectorilor $\vec{r}_{1,2}$ sunt vectorii viteză

$$\vec{v}_{1,2} = \frac{d\,\vec{r}_{1,2}}{d\theta} = dex_{1,2}\theta.der\alpha_{1,2}$$

ai punctelor $\mathbf{W_{1,2}}$ $\subset$ **C(O, 1),** în mişcarea lor de rotaţie pe cerc, cu viteze de module variabile $\mathbf{v_{1,2} = dex_{1,2}\theta}$, când dreapta generatoare **d** se roteşte în jurul excentrului **S** cu viteza unghiulară constantă şi egală cu unitatea, adică **Ω = 1.**

Vectorii viteză au expresiile anterior prezentate, în care $\mathbf{der\alpha_{1,2}}$ sunt fazorii razelor centrice $\mathbf{R_{1,2}}$ de modul **1** şi de direcţii $\alpha_{1,2}$. Expresiile funcţiilor **SM–CE** $\mathbf{dex_{1,2}\theta}$**, derivată excentrică** de **θ** sunt, totodată, şi derivatele unghiurilor $\mathbf{\alpha_{1,2}(\theta)}$ în funcţie de variabila motoare sau independentă **θ,** adică

$$\mathbf{dex_{1,2}\theta = d\alpha_{1,2}(\theta)/d\theta = 1 -} \frac{s.cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}}$$

ca funcţie de **θ şi**

$$\mathbf{Dex\alpha_{1,2} = d(\theta)/d(\alpha_{1,2}) = 1 -} \frac{s.cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}},$$

ca funcţii de $\mathbf{\alpha_{1,2}}$ **.**

S-a demonstrat că funcţiile **SM-CE derivată excentrică** exprimă ***funcţiile de transfer de ordinul 1***, sau ***a vitezelor unghiulare***, din teoria mecanismelor, pentru **toate (!)** mecanismele plane cunoscute.

- Funcţia radial excentric **rexθ** exprimă exact deplasarea mecanismului bielă-manivelă **S = R.rexθ,** a cărui manivelă motoare are lungimea **r**, egală cu excentricitatea reală **e** şi lungime bielei este egală cu raza cercului **R**, un mecanism atât de cunoscut, ce întră în componenţa tuturor autoturismelor, cu excepţia acelora cu motor **Wankel**. Şi enumerarea aplicaţiilor funcţiilor radial excentric ar putea continua, dar vom reveni la aplicaţiile mai generale ale **FSM - CE**.

Concret, unicelor forme de cerc, pătrat, parabolă, elipsă, hiperbolă, diverse spirale, ş.m.a. din **MC**, grupate acum sub denumirea de **centrice**, le corespund o infinitate de **excentrice** de acelaşi gen: **excentrice** circulare, pătratice (cuadrilobe), parabolice, eliptice, hiperbolice, spirale, ş.m.a. Oricare **excentrică**, pentru excentricitate nulă (**e = 0**), degenerează într-o **centrică**, care reprezintă, totodată, şi curba ei **generatoare**. De aceea, însăşi **MC** aparţine **ME** pentru unicul caz (**s = e** = 0), din infinitatea de cazuri posibile, în care poate fi plasat, în plan, un punct denumit **excentru E(e, ε)**, caz în care **E** se suprapune peste unul sau două puncte denumite **centru**: **originea O(0,0)** a unui reper, considerat,totodată, **originea O(0,0)** a sistemului referenţial şi / sau **centrul C(0,0)** al cercului unitate, pentru **funcţii circulare**, respectiv, centrul de simetrie al celor două ramuri ale hiperbolei echilaterale, pentru funcţii hiperbolice.

A fost suficient ca un punct **E** să fie expulzat din centru (**O** şi/sau **C**) pentru ca, din lumea **MC,** să apară o nouă lume a **ME**, iar reuniunea celor două lumi să dea naştere lumii **SM**. Şi această apariţie a avut loc în ***orasul revoluţiei române*** din 1989, **Timişoara,** acelaşi oraş, în care, la 3 noiembrie 1823 **Janos Bolyay** scria: ***" Din nimic am creat o nouă lume"***. Cu aceste cuvinte el a anunţat descoperirea formulei fundamentale a primei **geometrii neeuclidiene**.

El din **numic**, eu din efortul colectiv de multiplicare a funcţiilor periodice, funcţii necesare inginerului pentru a descrie anumite fenomene periodice, am completat matematica cu noi entităţi şi obiecte matematice.

Dacă **Euler,** la definirea funcţiilor trigonometrice, ca funcţii circulare directe, **n-ar fi ales trei puncte confundate**: originea **O**, centrul cercului **C** şi **S** ca pol al unei semidrepte, cu care a intersectat cercul trigonometric / unitate, **FSM**-CE ar fi putut fi cunoscute demult, eventual sub o altă denumire.

În funcţie de modul în care se **„spliteaza”** (separă câte un punct din cele suprapuse sau toate), apar următoarele tipuri de **FSM**:

O ≡ C ≡ S → Funcţii Centrice aparţinând MC ;

iar cele aparţinând **ME** sunt

O ≡ C ≠ S → Funcţii Supermatematice Circulare Excentrice (FSM-CE);

C ≠ O ≡ S → Funcţii Supermatematice Circulare Elevate (FSM-CEL);

O ≠ C ≠ S → Funcţii Supermatematice Circulare Exotice (FSM-CEX);

Aceaste **complemente noi de matematici,** reunite sub denumirea **provizorie** de **SM**, sunt unelte sau instrumente deosebit de utile, demult aşteptate, dovada fiind numărul mare şi diversitatea funcţiilor periodice introduse în matematică şi modul, uneori complicat, de a se ajunge la ele, încercându-se substituirea cercului cu alte curbe, în majoritate inchise. Se pare că nimic nu durează mai mult decât provizoratul !

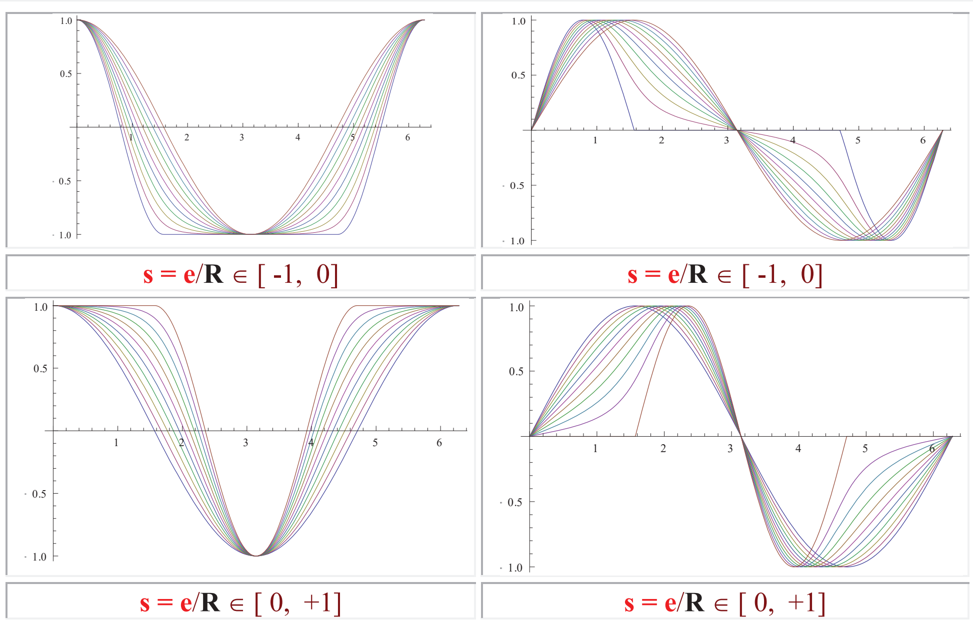
Pentru obţinerea unor funcţii speciale şi periodice noi, s-a încercat înlocuirea cercului trigonometric cu **pătratul** sau cu **rombul**, aşa cum a procedat fostul şef al Catedrei de Matematică de la Facultatea de Mecanică din Timişoara, profesorul universitar Dr. mat. **Valeriu Alaci,** descoperind funcţiile trigonometrice **pătratice** şi **rombice**. Apoi, profesorul de matematică timişorean **Eugen Vişa** a introdus funcţiile **pseudo**-hiperbolice, iar profesorul de matematici **M.O. Enculescu** a definit funcţiile **poligonale**, înlocuind cercul cu un poligon cu n laturi; pentru n = 4 obţinând funcţiile trigonometrice pătratice **Alaci**.

De curând, matematiciana americană, de origine română, Prof. **Malvina Baica** de la Universitatea Wisconsin, împreună cu **Mircea Cârdu** au completat spaţiul dintre funcţiile circulare **Euler** şi funcţiile pătratice **Alaci** cu funcţiile **transtrigonometrice (Periodic Transtrigonometric Functios).**

Matematicianul sovietic **Marcuşevici** a descris, în lucrarea sa “**Funcţii sinus remarcabile**” funcţiile trigonometrice **generalizate** şi funcţiile trigonometrice lemniscate.

Încă din anul 1877, matematicianul german **Dr. Biehringer**, substituind triunghiul dreptunghic cu unul oarecare, a definit **funcţiile trigonometrice înclinate**.

Savantul englez de origine română ing. **George (Gogu) Constantinescu** a înlocuit **cercul** cu **evolventa** şi a definit **funcţiile trigonometrice româneşti**: cosinus **românesc** şi sinusul românesc, exprimate de funcţiile **Corα** şi **Sirα** cu care a soluţionat, exact, unele ecuaţii diferenţiale neliniare ale teoriei sonicităţii creată de el. Şi ce puţin cunoscute sunt toate aceste funcţii chiar în **Ro**mânia!



s = **e**/**R** ∈ [-1, 0] | s = **e**/**R** ∈ [-1, 0]

s = **e**/**R** ∈ [0, +1] | s = **e**/**R** ∈ [0, +1]

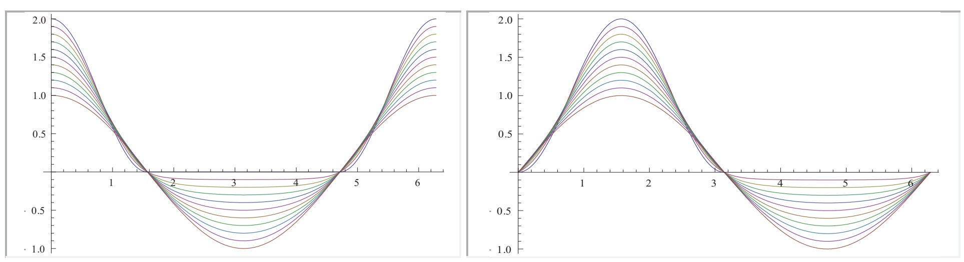
Fig. 3 Funcţii supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**)
cosinus excentric de θ **cex** θ ← stânga şi sinus excentric de θ sex θ → dreapta
pentru ε = 0, θ ∈ [0, 2π] şi excentricitatea numerică **s = e**/**R** ∈ [-1, 1]

Şi funcţiile eliptice sunt definite pe o elipsă. Una rotită, cu axa mare pe direcţia axei Oy, în funcţie de arcul de elipsă **u**. Autorul a definit funcţiile eliptice centrice şi excentrice ca funcţii de arcul cercului unitate, ceeea ce simplifică mult lucrurile.

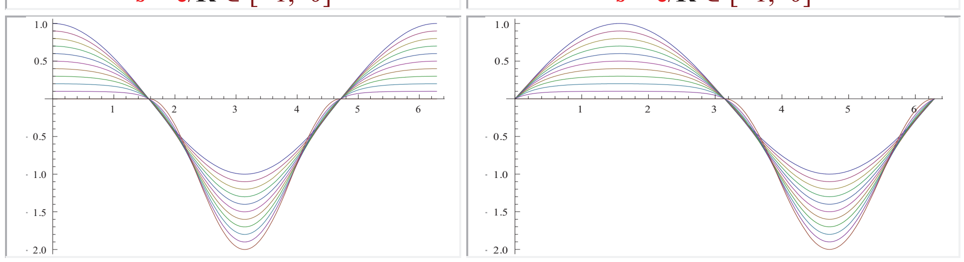
Ce simple pot deveni şi, de fapt, sunt lucrurile « complicate »! Acest **paradox**(ism) sugerează că prin simpla deplasare / expulzare a unui **punct** dintr-un

centru şi prin apariţia **excentrului**, poate să apară o nouă lume, lumea **ME** şi, totodată, un nou univers, universul vast al **SM.**

Noţiuni ca „**Supermathematics Functions**” şi „**Funcţii circulare excentrice**” au apărut pe cele mai utilizate motoare de căutare ca Google, Yahoo, Altavista ş.a,. încă de la apariţia Internetului. Noile noţiuni, cum ar fi cea de **cuadrilobe** „quadrilobas”, cu care sunt numite **excentricele** care umplu continuu spaţiul dintre un **cerc** şi un **pătrat** circumscris cercului, au fost incluse şi în dicţionarul de matematică. Intersecţia **cudrilobei** cu drepta **d** generează noile funcţii denumite funcţii quadrilobe (cvadrilobe): **cosinus cuadrilob**-ic, **sinus cuadrilob**-ic **ş.m.a.**



s = **e**/**R** $\in$ [-1, 0] | **s** = **e**/**R** $\in$ [-1, 0]



s = **e**/**R** $\in$ [0, +1] | **s** = **e**/**R** $\in$ [0, +1]

Fig. 4 Funcţii supermatematice circulare elevate (FSM-CEL)
cosinus elevat de **θ** – **cel θ**, pentru **s**∈[-1,+1], **ε**=0, **θ**∈[0,2π] ←stânga şi
sinus elevat de **θ** – **sel θ**, pentru **s** ∈ [-1,+1], **ε**=π/2, **θ** ∈[0,2π] → dreapta.

Beneficiile pe care **SM** le aduce, în ştiinţă şi în tehnologie, sunt mult prea numeroase pentru a fi etalate aici. Dar, ne face o deosebită plăcere să amintim că **SM** şterge graniţele dintre **liniar** şi **neliniar**; liniarul aparţinând **MC**, iar neliniarul fiind apanajul **ME**, ca şi dintre **ideal** şi **real**, sau dintre **perefecţiune** şi **imperfecţiune**.

Se afirma că **Topologia** este matematica care nu face deosebire între un covrig şi o ceaşcă. Ei bine, **SM** nu face distincţie dintre un **cerc** (e = 0) şi un **pătrat perfect** (s = ± 1), dintre un **cerc** şi un **triunghi perfect**, dintre **elipsă** şi un **dreptunghi perfect**, dintre **sferă** şi un **cub perfect** ş.m.a; cu aceleaşi ecuaţii parmetrice obţinându-se atât formele **ideale** ale **MC** (cerc, elipsă, sferă ş.a) cât şi cele **reale** (pătrat, dreptunghi, cub ş.a.). Pentru **s** ∈ [-1,1], în cazul funcţiilor de variabilă excentrică **θ**, ca şi în cazul funcţiilor de **variabilă centrică α,** pentru **s** ∈ [-∞, +∞], se obţin o infinitate de forme intermediare, ca de exemplu, pătrat, dreptunghi sau cub cu colţuri rotunjite şi cu laturi, respectiv, feţe uşor curbate. Ceea ce faciliteaza utilizarea noilor funcţii **SM** la desenarea şi reprezentarea unor piese tehnice, cu muchii rotunjite sau teşite, în programele **SM-CAD/CAM**, care nu mai utilizează computerul ca pe o planşetă de desen, ci realizează obiectul tehnic dintr-odată, prin ecuaţii parametrice, cu consecinţe remarcabile în economia de memorare a acestora; memorate fiind ecuaţiile şi nu imensitatea de pixeli care definesc / mărginesc o piesă tehnică.

Numeroasele funcţii, prezentate, sunt pentru întâia oară introduse în matematică. Pentru fixarea lor în memorie, autorul a considerat necesară o prezentare a ecuaţiilor lor, astfel încât, cei ce doresc să contribuie la extinderea aplicaţiilor lor să o poată face şi a figurilor lor pentru plăcerea ochilor (v. **Fig.5**).

SM nu este o lucrare încheiată ci, de abia o **introducere** în acest domeniu vast, un prim pas, un pas mic al autorului şi un ***pas uriaş al matematicii***.

Funcţiile **SM circulare elevate** (**FSM**- **CEL**), denumite astfel pentru că, prin modificarea excentricităţii numerice s**,** punctele curbelor funcţiilor sinus elevat **selθ** ca şi a funcţiei circulare elevate cosinus elevat **celθ** se **elevează**, adică se ridică pe verticală, ieşind din ecartul de [-1, +1] al celorlalte funcţii sinus şi cosinus **centrice** şi **excentrice**. Graficele funcţiilor **cexθ** şi **sexθ** sunt prezentate în **figura 3,** în care, se observă, că punctele acestor grafice se modifică pe direcţia orizontală, toate rămânând în ecartul [-1, +1], denumit domeniu de existenţă al acestor funcţii.

Graficele funcţiilor cel**θ şi selθ** pot fi simplu reprezentate prin produsele:

$\mathbf{cel_{1,2}\theta = rex_{1,2}\theta.\cos\theta}$ şi $\mathbf{Cel\alpha_{1,2} = Rex\alpha_{1,2}.\cos\theta}$

$\mathbf{sel_{1,2}\theta = rex_{1,2}\theta.\sin\theta}$ şi $\mathbf{Sel\alpha_{1,2} = Rex\alpha_{1,2}.\sin\theta}$

fiind prezentate în **figura 4.**

Cele mai generale funcţii **SM** sunt **funcţiile circulare exotice** care sunt definite pe un cerc unitate necentrat în originea sistemului de axe x**O**y şi nici în excentrul **S,** ci într-un punct oarecare **C(c, γ)** din planul cercului unitate, de coordonate polare (**c, γ**) în reperul x**O**y .

Foarte multe dintre planşele cuprinse în albumul [http://fs.unm.edu/SelariuFunctions.pdf (12,9MB)] sunt realizate cu **FSM-CE** de excentru variabil şi de arce care sunt multiplii n de **θ(**n.**θ).** Relaţiile folosite, pentru fiecare caz în parte, sunt prezentate explicit, în majoritatea cazurilor, utilizându-se funcţiile matematice **centrice** prin care, aşa cum s-a văzut, pot fi exprimate toate funcţiile **SM,** mai ales atunci când programele de vizualizare a graficelor nu dispun de programme cu **FSM**. Ceea ce nu înseamnă că, în viitor, computerele nu vor avea implementate noile complemente de matematică, pentru a le lărgi vast domeniul lor de utilizare.

Şi nici specialiştii în realizarea de programe de proiectare, asistate de calculator **CAD/CAM/CAE,** nu vor întârzia prea mult în realizarea noilor programe, fundamental diferite, prin care obiectele tehnice sunt realizate cu FSM **circulare** sau **hiperbolice** parametrice, aşa cum sunt exemplificate unele realizări ca avioane, case ş.a. în http://www.eng.upt.ro/~mselariu şi cum o şaiba poate fi reprezentată ca o excentrică toroidală (sau ca un “tor excentric”) pătrat sau dreptunghiular într-o secţiune axială şi, respectiv, o placă pătrată cu un orificiu central pătrat poate fi un “tor pătrat de secţiune pătrată”. Toate acestea, deoarece **SM** nu face distincţie între cerc şi pătrat sau între elipsă şi dreptunghi, aşa cum s-a mai afirmat.

Dar, cele mai importante realizări pot fi obţinute în ştiinţă, prin soluţionarea unor probleme neliniare, deoarece **SM** reuneşte într-un tot unitar cele două domenii atât de diferite în trecut, dintre care **domeniul neliniar** necesită ingenioase abordări pentru fiecare problemă în parte. Astfel, în domeniul vibraţiilor, caracteristici elastice statice (**CES**) neliniare moi (regresive) sau tari (progresive) se pot obţine foarte simplu scriind y = m.x , numai ca **m** nu mai este m = tan α ca în cazul liniar (**s** = 0) ci **m** = $\mathbf{tex_{1,2}\theta}$ şi, în funcţie de semnul excentricităţii numerice **s**, pozitiv sau negativ, sau pentru **S** plasat pe axa x negativă

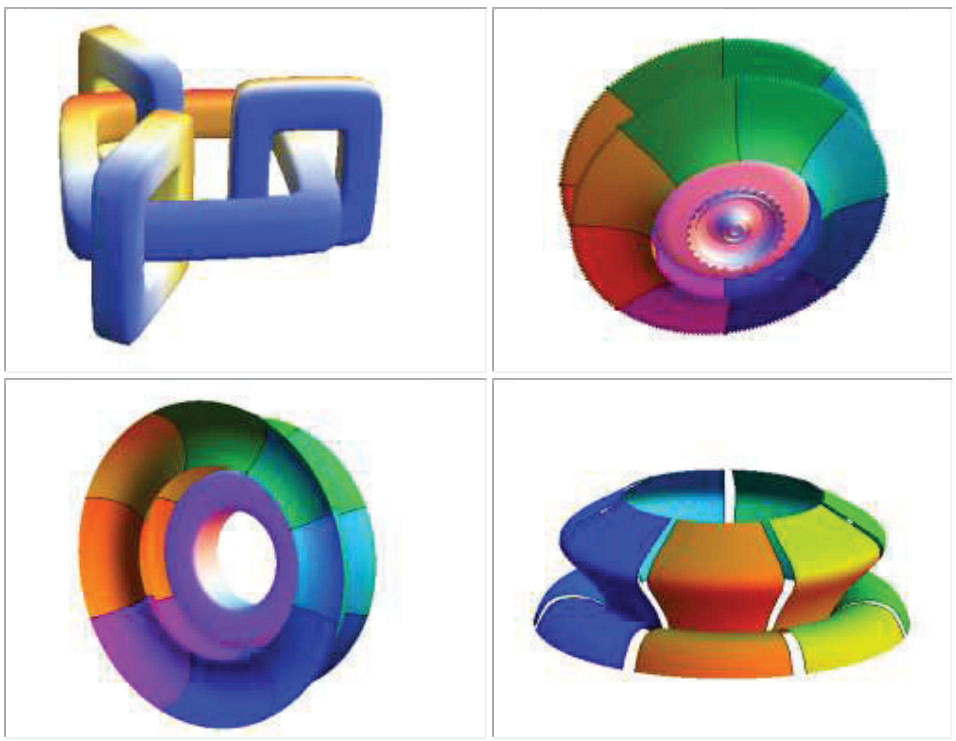


Fig. 5 Obiecte tehnice realizate cu FSM-CE

(**ε = π**) sau pe axa x pozitivă (ε = 0), se obţin cele două tipuri de caracteristici elastice neliniare şi, evident, pentru s **= 0** se va obţine **CES** liniară.

Deoarece, funcţiile **cexθ** şi **sexθ** ca şi **Cexα** şi **Sexα** şi combinaţiile lor, sunt soluţii ale unor ecuaţii diferenţiale de ordinul doi cu coeficienţi variabili, s-a constatat că şi pentru **s** = **± 1,** şi nu numai pentru **s = 0 ,** se obţin sisteme liniare (**Cebâşev**). La acestea, masa (punctul **M**) se roteşte pe cerc cu o viteză unghiulară **ω** = 2.**Ω** dublă (faţă de sistemul liniar de **s** = 0 de **ω = Ω = constant**) o jumătate de perioadă, iar în cealaltă jumătate de perioadă stagnează în punctul **A**(**R**,0) pentru **e** = **sR** = **R** sau ε = 0 şi în punctul **A'**(— **R**, 0) pentru **e** = — **s.R** = —1, sau ε = π. În acest fel, perioada de oscilaţie **T** a celor **trei sisteme liniare** este aceeaşi şi egală cu **T** = **Ω/2π**.

Pentru celelalte valori, intermediare, ale lui **s** şi **e** se obţin sisteme de **CES** neliniare. Proiecţia, pe oricare direcţie, a mişcării de rotaţie a punctului **M** pe cercul de rază **R,** egală cu amplitudinea oscilaţiei, cu viteza unghiulară **ω = Ω.dexθ** variabilă (după funcţia **dexθ**) este o mişcare oscilantă **neliniară**.

Apariţia funcţiei **„rege" rexθ şi** a proprietăţiilor ei, a facilitat apariţia unei metode **hibride** (analitico-numerice) prin care s-a obţinut o **relaţie** simplă, cu numai doi termeni, de **calcul** a integralei eliptice complete de prima speta **K**(**k**), cu o precizie

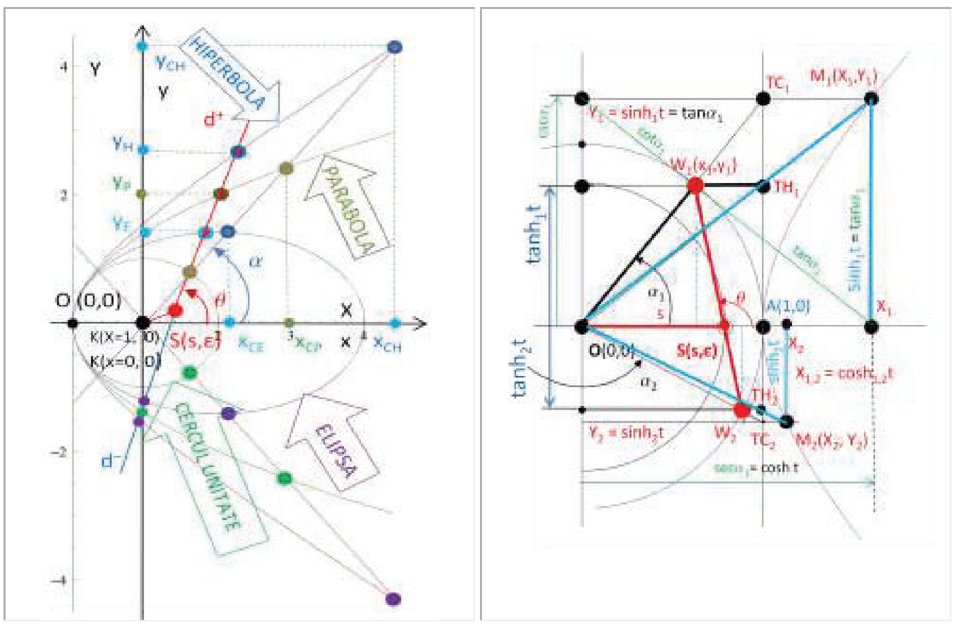


Fig. 6 Funcţii matematice centrice şi excentrice pe conice
în funcţie de arcul cercului unitate

incredibil de mare, de minimum **15 zecimale exacte**, după numai 5 paşi. Realizarea paşilor următori, poate conduce la obţinerea unei noi relaţii de calcul a lui **K**(**k**), cu precizie considerabil mai mare şi cu posibilităţi de extindere şi la alte integrale eliptice şi nu numai. Relaţia lui **E**(**k**) după 6 paşi are aceeaşi precizie de calcul.

Apariţia **FSM** a facilitat apariţia unei noi metode de integrare, denumită **integrarea prin divizarea diferenţialei**.

Nu putem încheia, fără să evidenţiem introducerea în matematică, prin această lucrare, a funcţiilor eliptice, parabolice şi hiperbolice, în funcţie de arcul cercului unitate, aşa cum este schiţat în **figura 6**, precum şi a **funcţiilor hiperbolice excentrice**.

Ne oprim aici, pentru a nu vă răpi din plăcerea de-a vă delecta cu studiul prezentei lucrări.

Autorul
selariume@gmail.com
selariu_m@yahoo.ro

www.supermatematica.ro;
www.supermathematica.com;
www.supermathematica.org;
www.supermatematicaonline.blogspot.ro;
www.cartiAZ.ro

Preface

SUPERMATHEMATICS FUNCTIONS

The Functions, which are the base to generate the most often, technical objects, so less artistical, neogeometrical, included in this book, are named

Supermathematics functions (SMF)

These functions are are the fruit of 38 research years, begun in 1969 at University of Stuttgart. Meanwhile, 42 related works were published, written by over 19 authors, as can be seen in the bibliography.

The name belongs to the regretted mathematician Prof. em. dr. doc.ing. **Gheorghe Silaş** which, at the presentation of the very first work in this domain, at the First National Conference in Vibrations in Machine Constructions, Timişoara, Romania, 1978, named „CIRCULAR ECCENTRIC FUNCTIONS", declared: „Young man, you just descovered not only „some functions", but a new mathematics, a **supermathematics**!" I was glad, at my 40 years old, like a teenager. And I proudly found that he might be right!

The prefix **super** is justified today, to point out the birth of new complements in mathematics, joined together under the name of **Eccentrical Mathematics (EM)** with much more important entities and infinitely more numerous than the existing entities in the **actual mathematics,** which we are obliged to name it **Centric Mathematics (CM)**

To each entity from CM is corresponding an infinity of similar entities in EM, so Supermathematics (SM) is the reunion of the two domains, it means **SM = CM $\cap$ EM** and **CM** is a particular case, of null eccentricity of **EM**. Namely, **CM = SM(e = 0)**.

To each known function in **CM** is corresponding an infinity family of functions in **EM**, and in addition, a series of new functions appears, with a wide range of applications in mathematics and technology.

In this way, to **x** = **cos α** is corressponding the functions family **x** = **cexθ = cex (θ, s, ε)** where **s= e/R** and **ε** are the polar coordinates of the **eccenter S(s, ε)**, corresponding to the unity / trigonometrical circle or **E(e, ε)** corresponding to certain circle of R radius, consedered as **pole** of a straight line **d** which is rotating around **E or S** with position angle **θ,** generating in this way the eccentrictrigonometric functions, or eccentric circular supermathematical functions (**EC-SMF**), by the cross of **d** with unity circle (see **Fig.1**).

Among them the **eccentric cosine** of **θ,** noted **cexθ** = **x**, where **x** is the projection of **W** point, the cross of the straight line with the trigonometric circle **C(1,O),** or the carthesian coordinate of **W** point.

Because a straight line, taken by **S**, interior to the circle (**s** ≤ 1 → **e** < **R**), is crossing the circle in two points, $\mathbf{W_1}$ and $\mathbf{W_2}$, briefly named $\mathbf{W_{1,2}}$,

It results that **two determinations** of the Eccentric circular supermathematics functions (**EC-SMF**) will exist, one principal of indice **1-** $\mathbf{cex_1\theta}$ and one secodary $\mathbf{cex_2\theta}$, of indice **2**, noted briefly $\mathbf{cex_{1,2}\theta}$. **E** and **S** were named **ex-centre** because they were droped out of the center **O(0,0).** This expulsion lead to the birth of **EM** and implicitly, of **SM**. Trough this, all the mathematical objects were multiplied from one to infinity: To the **unique** function from **CM**, let's say **cos α,** is corresponding an **infinity** of functions **cexθ**, thanks to the possibilities to place the **eccenter S** and / or **E** in the plane.

S(e, ε) can take an infinity of positions in the plane where is the unity or trigonometric circle . For each position of **S** and **E** a function **cexθ** is obtained**.** If **S** is a fixed point, then eccentric circular **SM** functions are obtained **(EC- SMF)** , with **fixed eccenter**, or with constant **s** and **ε**. But **S** or **E** can move, in the plane, by various rules or laws, while the straight line which generates the functions by crossing the circle, is rotating by the angle **θ** around **S** and **E.** In this last case, we have a **EC-SMF** by variable point

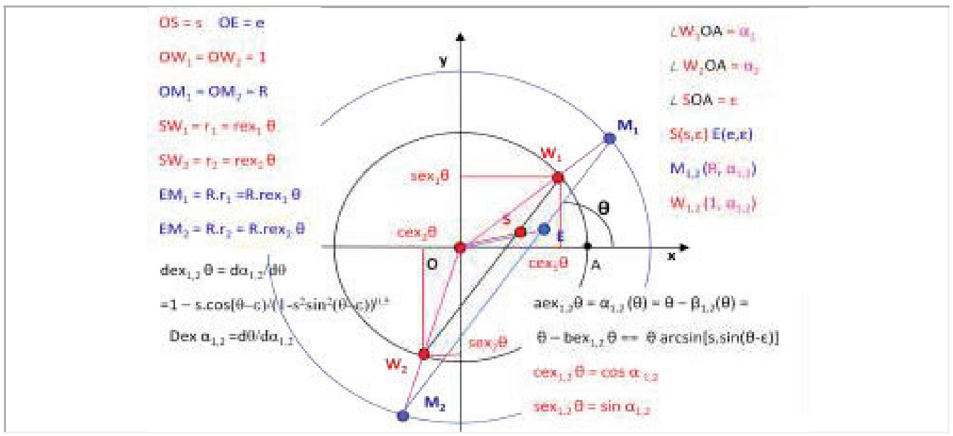


Fig.1 Defining of **Eccentric Circular Supermathematics Functions** (**EC**-SMF)

S/E eccenter, it means **s = s(θ)** and/or **ε = ε (θ).** If the variableposition of **S/E** is represented still by **EC-SMF** of same eccenter **S(s, ε)** or by another eccenter **S_1[s_1 =** $s_1(\theta)$, **$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\theta)$],** then double eccentricity functions are obtained. Trough extrapolation, triple and multiple eccentricity functions are obtained. Therefore, **EC-SMF** are functions of so many variables as we wish or we need**.**

If the distances from **O** to **$W_{1,2}$** points from **C(1,O)** circle are constants and equals with the radius **R = 1** of the trigonometric circle **C**, distances we will name **eccentric radiuses** pe care le vom denumi **raze centrice**, the distances from **S** to **$W_{1,2}$** noted by **$r_{1,2}$** are variables and are named **eccentric radiuses** of the unity circle **C**(1,O) and represent, at the same time, new eccentric circular supermathematics functions (**EC-SMF**), which were named **eccentric radial functions** and are noted with **$rex_{1,2}\theta$**, if is expressed as function of the **variable** named **eccentric θ** and **motor**, which is the angle from the eccenter **E**. Or, noted **$Rex\alpha_{1,2}$**, if it is expressed as function of the angle **α** or **centric variable**, the angle of **O(0,0).**

The points $W_{1,2}$ are seen under the angles $\alpha_{1,2}$ from **O(0,0)** and under the angles θ and $\theta + \pi$ from **S(e, ε)** and/or **E**. The straight line **d** is divided by $S \subset d$ in two semi-straight lines, one positive d^+ and the other negative d^-. Therefore, we can consider $r_1 = rex_1\theta$ a positively oriented segment on **d** ($\rightarrow r_1 > 0$) and $r_2 = rex_2\theta$ a negatively oriented segment on **d** ($\rightarrow r_2 < 0$) and in the sense of the negative semi-straight line d^-.

Trough simple trigonometric relations, in certain triangles $OEW_{1,2}$, or, more precisely, writing sine theorem (as function of θ) and **Pitagora**'s generalized theorem (for $\alpha_{1,2}$ variables) in these triangles, immediately we find the **invariant expressions** of the eccentric radial functions :

$$r_{1,2}(\theta) = rex_{1,2}\,\theta = -s.\cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2\sin^2(\theta - \varepsilon)} \qquad \text{and}$$

$$r_{1,2}(\alpha_{1,2}) = Rex\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(\theta - \varepsilon)}$$

All **EC–FSM** has **invariant** expressions, and because this they don't need to be tabulated; tabulated being the centric functions, from **CM**, which help to express them. In all their expressions, we will find constantly, one of the square roots of previous expressions, of eccentric radial functions.

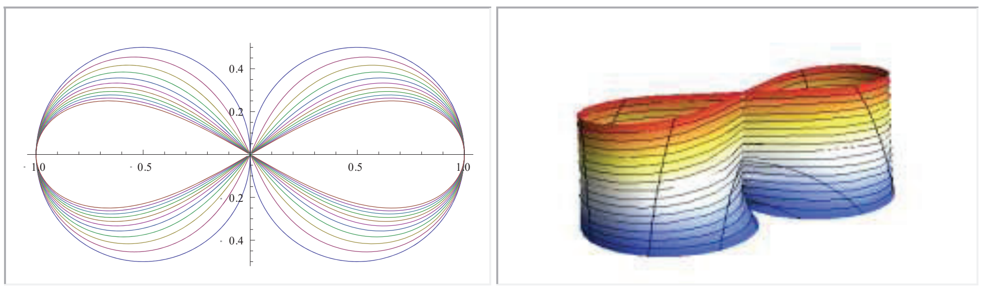


Fig.2,a Booth's Lemniscates for **R = 1** and numerical eccentricity **e** ∈ [1 ; 2]

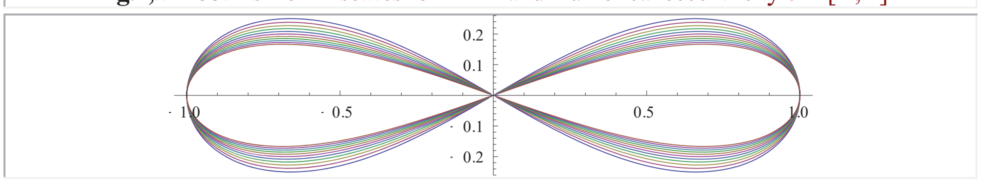


Fig. **2,b Booth's Lemniscates** for **R = 1** and numerical eccentricity **e** ∈ [2 ; 3]

Finding these two determinations is simple : for **+ (plus)** in the front of square roots we always obtain the first determination ($r_1 > 0$) and for the **− (minus)** sign we obtain the second determination ($r_2 < 0$). The rule is still available for all **EC–FSM.** By convention, the first determination, of index **1**, we can be use/write without index number.

About these **REX („King")** functions, we have to make some obeservations:

The eccentric radial functions are the expression, in the plane, in polar coordinates, of the distance between two points: **S**(s, ε) and **W**$_{1,2}$(**R**=1, **α**$_{1,2}$), on direction of straight line **d,** inclined by **θ** angle reported to **Ox** axis;

- Therefore, with their help and only (exclusively) their, it can be expressed the ecuations of **All known plane curves,** as of other new ones, which appeared together with the birth of **ME. An** example is represented by **Booth's lemniscates** (see **Fig. 2, a, b, c**), expressed, in polar coordinates, by the equation:

$$\rho(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{R}\,(\mathbf{rex_1}\theta + \mathrm{rex}_2\theta) = -2\,s.R\cos(\theta - \varepsilon) \text{ for } \mathbf{R = 1}, \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \text{ and } \mathbf{s} \in [0, 3]$$

- Another consequence is the generalization of circle's definition:

„**The Circle** is the plane curve which's M points we find at the distances **r(θ)** = **R**.rex**θ** = **R**.**rex**[**θ,E(e,** ε**)**] regarding to a **certain** point from the circle's plane **E**(e, ε)".
If **S ≡ O**(0,0), then **s** = **0** and rexθ = 1 = constant and **r**(**θ**) = **R** = constant, the **classical definition** of the circle is obtained : points placed at the same **R** distance from de center of the circle.

- The **rexθ** and **Rexα** functions asserts the transfer functions of zero degree, or of position transfer, from the

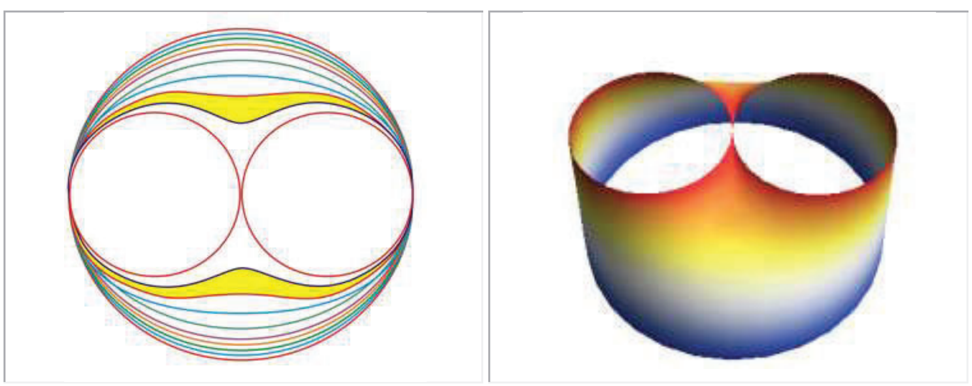


Fig. **2,c Booth's lemniscates** for s ∈ [0, 1]

Mechanism theory, an it is the ratio between **R**(**α**$_{1,2}$) parameter which position the conducted element **OM**$_{1,2}$ **and R.r**$_{1,2}$**(θ)** parameter which position the leader element **EM**$_{1,2}$. Between these two parameters, the following relations exists, which can simply deduced from fig 1, the defining of **EC–SMF** figure.

Between the position angles of the two elements, leader and leaded, the following relations exists:

$$\boldsymbol{\alpha}_{1,2} = \boldsymbol{\theta}\Upsilon \arcsin[\mathbf{e}.\sin(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon})] = \boldsymbol{\theta}\Upsilon\, \boldsymbol{\beta}_{1,2}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{aex}_{1,2}\,\boldsymbol{\theta} \qquad \text{and}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\alpha}_{1,2} \pm \boldsymbol{\beta}_{1,2}(\boldsymbol{\alpha}_{1,2}) = \boldsymbol{\alpha}_{1,2} \pm \arcsin[\pm \frac{s.\sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}} = \mathbf{Aex}\,(\boldsymbol{\alpha}_{1,2}).$$

The functions **$aex_{1,2}\theta$** and **$Aex\alpha_{1,2}$** are the **EC-SMF** named **eccentric amplitude because** deoarece they can be used for defining **EC-SMF** cosine and sine eccentrics, as amplitude function or amplitudinus am,(k,u) is used for defining of elliptical **Jacobi** functions: sn (k,u) = sin [am(k,u)], cn(k,u) = cos[am(k,u)], or :

$cex_{1,2}\theta = \cos(aex_{1,2}\theta)$, **$Cex\alpha_{1,2} = \cos(Aex\alpha_{1,2})$** and

$sex_{1,2}$**$\theta = \sin(aex_{1,2}\theta)$,** **$Sex\alpha_{1,2}$** $= \cos$ **$(Aex\alpha_{1,2})$**

- The radial eccentric functions can be considerred as modules of the position vectors $\vec{r}_{1,2}$ of the points **$W_{1,2}$** from the unit circle **C (1,O)**, vectors expressed trough the following relations :

$\vec{r}_{1,2} = rex_{1,2}\theta.rad\theta$, where **$rad\theta$** is the unit vector of variable direction or the versor / **fazor** of d^{+} straight line direction, which derivative is the fazor **der θ = d(radθ)/dθ** and is representing normal vectors on the straight lines **$OW_{1,2}$**, directions, tangents to the circle in **$W_{1,2}$** points. They are named the **centric derivative** fazors. Meanwhile, the modulus of **$rad\theta$** function is the corresponding in **CM** of the function **rex θ** for **s = 0** **→ $\theta = \alpha$** when **rex θ = 1** and **$der\alpha_{1,2}$** are the tangent versors to the unit circle in **$W_{1,2}$** points.

- The derivative of the $\vec{r}_{1,2}$ vectors are the speed vectors $\vec{v}_{1,2} = \frac{d\vec{r}_{1,2}}{d\theta} =$

$= dex_{1,2}\theta.der\alpha_{1,2}$ of the **$W_{1,2} \subset$ C** points in their rotating motion on the circle, with speeds of variable modulus **$v_{1,2} = dex_{1,2}\theta$**, when the generating straight line **d** is rotating around the eccenter **S** with constant angular speed and equal with the unity, namely **Ω** = **1.** The speed vectors has the previously presented expressions, where **$der\alpha_{1,2}$** are the fazors of centric radiuses **$R_{1,2}$** of module **1** and of **$\alpha_{1,2}$** directions. The expressions of the functions **EC–SM $dex_{1,2}\,\theta$, eccentric derivative of θ,** are, meanwhile, also the **$\alpha_{1,2}$** (**θ**) angles derivatives, as function of the motor or independent variable **θ,** namely

$$dex_{1,2}\,\theta = d\alpha_{1,2}(\theta)/d\theta = 1 - \frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{\pm\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}}$$ as function of **θ** and

$$Dex\alpha_{1,2} = d(\theta)/d\alpha_{1,2} = \frac{1-s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)} = \frac{1-s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{Rex^2\alpha_{1,2}},$$

as functions of **$\alpha_{1,2}$.**

It was demonstrated that the **eccentric derivative EC-SM** functions shows the first order transfer functions, or angular speeds, from the Mechanisms Theory, for **all (!)** known plane mechanisms.

- The radial eccentric function **$rex\theta$** exactly express the movement of push-pull mechanism **S = R. $rex\theta$,** which motor connecting rod has the **r**, length, equal with the real eccentricity **e** and the length of the crank is equal with the radius of the circle **R**, a such well-known mechanism, because it is a component of all automobiles, except those with Wankel engine. The applications of radial eccentric functions could continue, but we will insist on more general applications of **EC-SMF**.

Concrete, to the uniques forms of circle, square, parabola, ellipse, hyperbola, different spirals, etc from **CM**, grouped now under the name of **centrics**, correspond an infinity of the same type of **eccentrics**: circular, square (quadrilobe), parabolic, ellyptic, hyperbolic, spiral **eccentrics**, etc. Any **eccentric**, for null eccentricity (e = 0), is degenerating into a **centric**, which represents, at same time, it's **generating** curve. Therefore, the **CM** himself belongs to **EM** for the unique case (**s = e** = 0), from the infinity possible cases where it can be placed, in the plane, a point named **eccenter E(e, ε)**. In this case, **E** is superposing on one or two points named **center** : the **origine O(0,0)** of a frame of a refferential system, and/or the **center C(0,0)** of te unit circle, for circular functions, or, respectively, the symetry center of the two arms of the equilateral hyperbola, for hyperbolic functions.

It was enough that a point **E** be expeled from the center (**O** and/or **C**) and from the **MC** world appears a new world of **EM**, and the reunion of these two worlds give birth to the **SM** world. And this occured in the town of romanian Revolution from 1989, **Timişoara,** the same town where at november 3-th, 1823 **Janos Bolyay** wrote : „From **nothing** I've created a new world". With these words, he anounced the discovery of the fundamental formula of the first **non-euclidean geometry**.

He – from nothing, me – from the collective effort to multiply the periodical functions, functions which are necessaries to an engineer to describe some periodical phenomena. I this way, I have completed the mathematics with new objects.

If **Euler,** when defined the trigonometric functions, as direct circular functions, wouldn't be chosen **three superposed points** : the origine **O**, the center of the circle **C** and **S** as a pole of a semistraight line, which intersects the trigonometric/unit circle, the **FSM**-CE coul be known much earlier, maybe under other name. Depending on the way to „**split"** (we separe one point by one of the superposed ones, or all of them), the following types of **SMF** appears: **O ≡ C ≡ S → Centric functions belonging to CM ;** and those which belongs to **EM** are :

O ≡ C ≠ S → Eccentric Circular Supermathematics Functions (EC-SMF);
C ≠ O ≡ S → Elevated Circular Supermathematics Functions (ELC-SMF);
O ≠ C ≠ S → Exotic Circular Supermathematics Functions (EXC-SMF);

These **new mathematics complements,** joined together under the **temporary** name of **SM**, are tools or instruments of extreme utility, of a long ago waiting, the proof beig the large number and the diversity of periodical functions introduced in mathematics, and the way sometimes complicated to reach them, trying to substitute the circle with other curves, most of them closed.

For obtaining some special and periodical new functions, it was tried the replacement of trigonometric circle with a **square** or a **diamond**. This was the proceeding of the former chief of Mathematics Department from Mechanics College from Timişoara, prof. Dr. Mat. **Valeriu Alaci,** discovering the **square** and **diamond** shape trigonometric functions.

Hereafter, mathematics teachers **Eugen Vişa** introduced the **pseudo-hyperbolic** functions, and **M.O**. **Enculescu** defined the **polygonal** functions, replacing the circle with a n-sided polygon; for n = 4 he obtained the square **Alaci** trigonometric functions.

Low, the romanian origin american mathematician, Prof. **Malvina Baica** from University of Wisconsin together with **Mircea Cârdu,** completed the gap between the circular **Euler** functions and **Alaci** square functions, with the so-called **Periodic Transtrigonometric Functios.**

The russian mathematician **Marcusevici** describe, in his work "**Remarcable sine functions**" the **generalized trigonometric functions** and the **lemniscate**.

Even since 1877, the german mathematician **Dr. Biehringer**, replacing right triangle with an oblique triangle, defined the **inclined** trigonometric functions.

The romanian origin british scientist ing. **George (Gogu) Constantinescu** replaced the **circle** with the **evolvent** and defined the **romanian** trigonometric functions: **romanian cosine** and **romanian sine**, experssed by Cor α and Sir α functions, which helped him to resolve exactly some non-linear differential equations of the Sonicity Theory, created by him-self. And how little known are all these functions even in Romania!

The elliptical functions are defined on an ellipse. A rotated one, with the main axis along Oy axis.

How simple can become, and, as a matter a fact, are the complicated things ! This **paradox**(ism) suggest that by the simple dispacement/expulsion of a **point** from a **center** and trough the apparition of the **eccenter**, a new world may appear, the world of **EM** and, concurrently, a new Universe, the **SM** Universe.

Notions like „**Supermathematics Functions"** and „**Functii circulare excentrice"** appeared on most search engines like Google, Yahoo, Altavista a.a, since the birth of Internet. The new notions, like **cuadrilobe** „quadrilobas", which help to name the **eccentrics** which continuosly fill the space between a **circle** and a **square,** circumscribed to the circle, were included in Mathematics Dictionary.

The cross of the **quadriloba** with the straight line **d** generate the new functions called **cosine quadrilobe-**ic and **sine quadrilobe**-ic**.**

The benefits of **SM** in science and technology are too numerous to show them all here. But we are please to remind that **SM** wipe the boundaries between **linear** and **non-linear**; The linear belongs to **CM**, and the non-linear is the appanage of **EM**, like between **ideal** and **real**, or between **perfection** and **imperfection**.

It says that **Topology** is the mathematics which doesn't make the difference between a pretzel and a tea cup. Well, **SM** doesn't make the difference between a **circle** ($e = 0$) and a **perfect square** ($s = \pm 1$), between a **circle** and a **perfect triangle**, between an **ellipse** and a **perfect oblong**, between a **sphere** and a **perfect cube,** a.a; with the same parametric equations it can be obtained besides the **ideal** forms of **CM** (circle, ellipse, sphere a.a) , as the **real** ones (square, oblong, cube, a.a.).

For $\mathbf{s} \in [-1,1]$, in the case of eccentric variable **θ**, as in the case of centric variable **α,** for $\mathbf{s} \in [-\infty, +\infty]$, it can be obtained in infinity of intermediate forms, like square, oblong or cube with rounded corners and slightly curved sides or, respectively, faces. What makes easier to use the new **SM** functions for drawing and representing some technical parts, with rounded or splayed edges, in the programms **SM – CAD / CAM**, which doesn't use the computer any more as a drawing board, but make the technical object at once, trough parammetric equations, with remarcable consequences memory spare ; Only the equations are memorized, not the vaste number of pixels which define/bounds a technical piece.

The numerous presented functions, being for the first time introduced in mathematics, for an easier fixing in memory, the author considered as necessary a short presentation of their equations, so anyone wants to contribute to their application development, can do it.

SM is not a finished work, it's still an **introduction** in this vaste domain, a first step, a small author's step and a giant leap for mathematics.

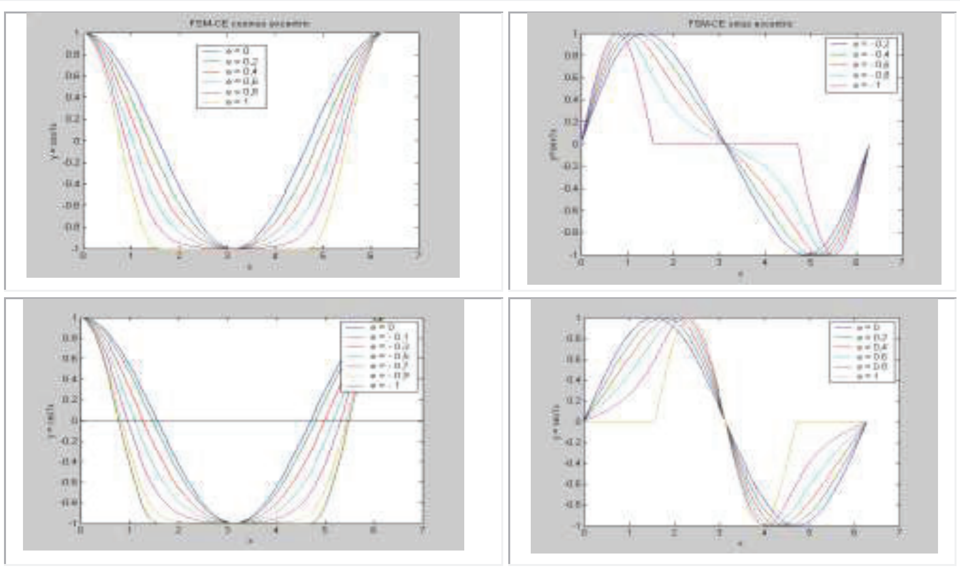


Fig. 3,a The eccentric circular supermathematics function (**EC-SMF**) eccentric cosine of θ **cex**θ for $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, $\boldsymbol{\theta} \in [0, 2\pi]$	Fig. 3,b The eccentric circular supermathematics function (**EC-SMF**) ecentric sine of θ sexθ for $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, $\boldsymbol{\theta} \in [0, 2\pi]$

Numerical eccentricity $\mathbf{s = e/R} \in [-1, 1]$

The **elevated circular SM** functions (**ELC-SMF**), named so because trough modification of numarical eccentricity **s** the points of the curves of elevated sine functions **sel θ** as of the elevated circular function elevated cosine **celθ** is elevating – in other words it rise on the vertical, getting out from the space {-1, +1] of the other sine and cosine functions, centrical or eccentrical.

The plots of the functions **cexθ** and **sexθ** are shown in fig. **3,** where it can see that the points of thes plots are modifying in horizontal direction, all of them remaining in the space [-1, +1], named domain of existance of these functions.

The plots of cel**θ** and sel**θ** **functions** can be simply represented by the products:

$\mathbf{cel_{1,2}\theta = rex_{1,2}\theta.cos\theta}$ and $\mathbf{Cel\alpha_{1,2} = Rex\alpha_{1,2}.cos\theta}$

$\mathbf{sel_{1,2}\,\theta = rex_{1,2}\theta.sin\theta}$ and $\mathbf{Sel\alpha_{1,2} = Rex\alpha_{1,2}.sin\theta}$

and are shown **fig. 4.**

The most general **SM** are the **exotic circular functions** which are defined on an unit circle un-centered in the origin of axis system x**O**y neither in the eccenter **S,** but in a certain point **C(c, γ)** from the unit circle plane, with the polar coordinates **(c, γ)** in the coordinate system x**O**y .

Many of the drawings from this album are made with **EC-SMF** of variable eccenter and with arcs which are *n* multiples of **θ(** n.**θ).** The used relations, for each particular case, are explicitly shown, in most cases using the **centric** mathematical functions, which trough, as we could see, can be expressed all **SM** functions, especially when the visualisation programs cannot use **SMF**.

This doesn't means that, in the future, the new math complements will not be implemented in computers, for largely expand their useful domain.

Neither the specialists in making computer assisted design programs **CAD/CAM/CAE,** won't be late too much to make these new programs, fundamantaly differents, trough which the technical objects are made with parametric **circular** or **hyperbolic SMF**'s, in the way there are examplified some achievements such as airplanes, buildings, etc in http://www.supermatematica.ro;

www.eng.upt.ro/~mselariu and www. supermathematica.com and how a washer can be represented asaa toroid eccentricity (or an "eccentric torus"), square or oblong in an axial section, and, respectively, a square plate with a central square hole can be a "square torus of square section". And all these, because **SM** doesn't make distinction between a circle and a square or between an ellipse and an oblong, as said before.

But the most important achievements can be obtained in science trough solutioning some non-linear problems, because **SM** reunite in a single entity these two domains, such different in the past. Among these, the non-linear domain ask ingenious approaches for each particular problem. Therfore, in the domain of vibrations, static elastical characteristics (**SEC**) soft non-linear (regressive) or hard non-linear (progressive) can be simply obtained writing y = m.x, only **m** is not anymore m = tan α as in linear case (**s** = 0), but **m** = $tex_{1,2}\boldsymbol{\theta}$ and depending on numerical eccentricity **s** sign, postive or negative, or for **S** placed on negative x axis (**ε** = π) or on positive x axis (ε = 0), the two nonlinear elastical characteristics is obtained, and obviously for s=0 a linear CES will be obtained.

Because the functions **cexθ** and **sexθ**, as **Cex**α and **Sexα** and their combinations, are solutions of some differntial equations of second order with variable coefficients, it being stated that **even** for **s** = ± **1,** and not only for **s = 0,** linear systems (Cebasev) are obtained. At these, the mass (**M** point) is rotating on the circle with a double angular speed **ω** = 2.**Ω** (reported to the linear system of **s** = 0 at **ω** = **Ω** = **constant**) a half of a period, and in the other half of period stops in the point **A**(**R**,0) for **e** = **s**R = **R** or ε = 0 and in the point **A'**(**—** **R**, 0) for **e** = **— s.R** = **—**1, or ε = π. In this way, the oscilation period **T** of the **three linear systems** is the same and equal with **T** = **Ω** / **2π** For the others values, intermediates, of **s** and **e** the nonlinear **CES** systems are obtained. The projection, on any direction, of the rotating motion of **M** point on **R** radius circle, equal with the oscillation amplitude, with variable angular speed **ω = Ω.dex θ** (after **dex θ** function) is an **non-liear** oscillating motion**.**

s ∈ [-2; 0]	s ∈ [0; +2]

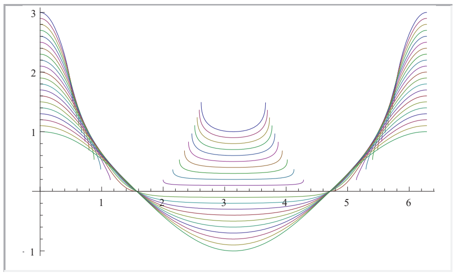
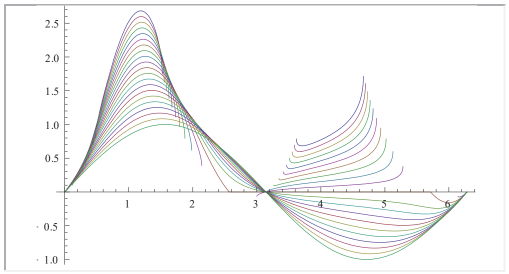
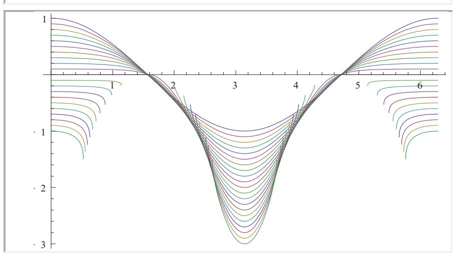
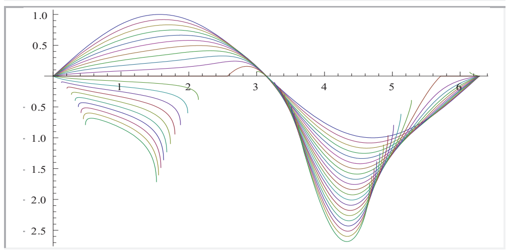

	
	

Fig. 4,a SMF-ELC elevated cosine of **θ → cel θ**, for **s** ∈ [-2, +2], **ε** = 0	**Fig. 4,b SMF-ELC** elevated sine of **θ → sel θ**, for **s** ∈ [-2, +2], **ε = 0**

The apprition of **„king"** function **rex θ** and of his properties made easier tha apparition of a **hybrid** method (analytico-numerical), through which o simple **relation** was obtained, with only two terms, to **calculate** the first kind complete elliptic integral **K**(**k**), with an unbelievable precision, with minimum **15 accurate decimals,** after only 5 steps. Making the next steps, can lead to a new relation to calculate **K**(**k**), with a considerable higher precision and with the possibility to expand the method to other elliptic integrals and not only to these. The relation of **E(k)** after 6 steps has the same precision to calculate.

The apparition of **FSM** facilitated the apparition of a new integration method, named **integration through the differential dividing**.

We will stop here, letting you the pleasure to delight yourselves looking the drawings of this album.

The Autor

Mircea Eugen Şelariu selariume@gmail.com; selariu_m@yahoo.ro

www.supermathematica.com;www.supermatematica.ro;www.supermathematica.org;
www.supermatematicaonline.blogspot.ro

A B R E V I E R I și NOTAȚII

utilizate în cuprinsul lucrării

A B R E V I E R E A			
M A R I M I L O R G E O M E T R I C E		F U N C T I I L O R **F**	
A	Amplitudine	Am, am	F Amplitudinus
AI	Autoindus(e)	amh	Am hiperbolică
B	Beta	amhex	Amh excentrică
βSOE	Beta sistem oscilant excentric	aex	FSM-CE amplitudine excentrică de V E (θ sau x)
C	Cerc ∨ Centric ∨ Circular	aexai	Aex autoindusă
CC	Circular Centric	Aex	FSM-CE amplitudine excentrică de VC (α sau y)
CE	Circular Excentric	bex	FSM-CE beta excentrică de VE
CEl	Circulare Elevate	Bex	FSM-CE beta excentrică de VC
CEx	Circulare Exotice	ce	Cosinus eliptic definit pe cerc
CT	C Trigonometric	ceex	Cosinus eliptic excentric
CU	C Unitate	ceai	Ce utoindusă
D	Direcţie ∨ Dreapta	cel	FSM-CEl cosinus (elevat) de VE
DR	D Radială	Cel	FSM-CEl cel de VC
DRC	DR Centrică ($\mathbf{D}^+ \cup \mathbf{D}^-$)	celh	FSM-Hel cosinus hiperbolic elevat de VE
DRE	DR Excentrică ($\mathbf{d}^+ \cup \mathbf{d}^-$)	Celh	FSM-HEl celh de VC
E	Excentru ∨ Excentrice Integrala eliptică de speţa a doua	cex	FSM-CEx cosinus (excentric) de VE
e	Excentricitatea liniară reală	Cex	FSM-CE cex de VC
El	Elevate	cexai	Cosinus excentric autoindus de VE
Ex	Exotice	Cexai	Cosinus excentric autoindus de VC
F	Funcţie ∨ Final	cexh	FSM-HE cosinus hiperbolic de VE
f	final	Cexh	FSM-HE cexh de VC
FAI	F autoindusă	cexoh	FSM-HEx cosinus hiperbolic de VE

FAIC	FAI Centrică	Cexoh	FSM-HEx cosinus hiperbolic de VC
FAIE	FAI Excentrică	ci	Cosinus intratrigonometric
FC	F Circulare	ciex	Cosinus intratrigonometric excentric de VE
FCC	**F Circulare centrice**	**cos, sin**	**Cosinus şi sinus centrice**
FCE	**FC Excentrice**	Ciex	Cosinus intratrigonometric excentric de VC
FCEl	**FC Elevate**	cosai	Cosinus autoindus
FCEx	**FC Exotice**	cotai	Cotangenta autoindusă
FE	**F Eliptice**	ctexai	Cotangenta excentrică de VE
FEC	**FE Centrice**	Ctexai	Cotangenta excentrică de VC
FEE	**FE Excentrice**	cexai	Cosinus excentric autoindus de VE
FG	F **Gudermann**, F **Gheorghiu** Em. Octav	Cex	Cosinus excentric autoindus de VC
FGC	FG Centrice	Cexai	Cosinus excentric autoindus de VC
FG E	FG Excentrice	cqa	FSM-CC cosinus cuadrilob Alaci Valeriu
FH	**F Hiperbolice, F Hibride**	coq	FSM-CC cosinus cuadrilob
FHC	**FH Centrice**	cscai	Cosecanta autoindusă
FHE	**FH Excentrice**	csci	Cosecanta indusă
FHSM	**FH superMatematice**	cscex	Csc excentrică de VE
FHSMC	FHSM Centrice	Cscex	Csc excentrică de VC
FHSME	FHSM Excentrice	ctex	FSM-CE tangentă excentrică de VE
FI	F Indusă	Ctex	FSM-CE ctex de VC
FIT	F IntraTrigonometrică	der	FCC derivata (der(x) = $i.e^{i.x}$)
FM	F Matematice	dex	FSM-CE derivat excentric
FMC	**FM Centrice**	Dex	FSM-CE dex de VC
FME	FM Excentrice	del	FCC delta, del(x,k) = $(1- k^2 \sin^2 x)^{0,5}$
FP	F Periodică	der	FCC derivata (der(x) = $i.e^{i.x}$)
FSM	Funcţii SuperMatematice	dex	FSM-CE derivat excentric
FSm	F **Smarandache** Florentin	Dex	FSM-CE dex de VC
FT	F Trigonometrică	dexai	dex autoinduse de V E

FTC	**FT Centrică**	Dexai	Dex autoinduse de VC
FTE	**FT Excentrică**	rad	FCC Radial centric de VC (rad(x) = $e^{i.x}$)
FTT	F TransTrigonometrică	rexai	FSM-CE radial excentric autoindusă de VE
G	**Gudermman, Gheorghiu O.**	Rexai	FSM-CE radial excentric autoindusă de VC
H	Hiperbolă ∨ hiperbolic	se	Sinus eliptic de variabilă circulară
i	Iniţial	sel	FSM-CEl sinus elevat de VE
I	Indus(e)	Sel	FSM-CEl sinus elevat de VC
IT	IntraTrigonometric	selh	FSM-HEl sinus hiperbolic elevat deVE
K	Integrala eliptică de prima speţă	Selh	FSM-HEl sinus hiuperbolic elevat de VC
k	Modulul integralelor şi a F eliptice,	sex	FSM-CE sinus excentrice de VE
M	Matematică	Sex	FSM-CE sinus excentrice de VC
m	Modulul integralelor şi a F eliptice	seex	Sinus eliptic excentric de variabilă circulară
MC	**M Centrică**	sexai	Sex autoindus de VE
ME	**M Excentrică**	Sexai	Sex autoindus de VC
MEl	**M Elevată**	sexi	Sex indus de VE
MEx	**M Exotică**	Sexi	Sex indus de VC
O	Originea	sexo	FSM-CEx sinus exotic de VC
Q	Quadrilob , Cvadrilob	Sexo	FSM-CEx sinus exotic de VC
R	Rază constantă (în modul)	sexh	FSM-HE sinus hiperbolic excentric de VE
r	R variabilă (în direcţie şi modul)	Sexh	FSM-HE sinus hiperbolic excentric de VC
S	Super ∨ Solar ∨ Excentrul CU	sexoh	FSM-HEx sinus hiperbolic exotic de VE
s	Excentricitatea liniară numerică	Sexoh	FSM-HEx sinus hiperbolic exotic de VC
SM	**SuperMatematica**	si	Sinus intratrigonometric
Sm	**Smarandache**	siex	Sinus intratrigonometric excentric de VE
T	Tangent(ă)	Siex	Sinus intratrigonometric excentric de VC
TV	T Voinoiu	siq	FSM-CC sinus cuadrilob

A B R E V I E R I

TT	TransTrigonometric	sqa	FSM-CC sinus cuadrilob Alaci Valeriu
V	Variabilă **Voinoiu**	tel	FSM_CEl tangenta elevata de VE
VC	V Centrică	Tel	FSM-CEl tangenta elevata de VC
VE	V Excentrică	tev	FCE Noua tangenta excentrica Voinoiu de VE
		Tev	FCE noua tangenta excentrica Voinoiu de VC
		tex	FSM-CE tangenta excentrica de VE
		Tex	FSM-CE tangenta excentrica de VC
		texai	Tangenta excentrică autoindusă de VE
		Texai	Tangenta excentrică autoindusă de VC

Motto: " **CREAŢIA**- singurul surâs al tragediei noastre"
Lucian Blaga

Capitolul 1. INTRODUCERE

1.1 ESENŢA (SUPER)MATEMATICII (SM) : TRECEREA DE LA CENTRIC LA EXCENTRIC ŞI REUNIUNEA CELOR DOUĂ DOMENII

Omenirii i-au trebuit aproape 100 de ani ca să ia în serios teoria heliocentrică a lui **Nicholaus Copernic** (1514) şi mult mai mult timp pentru a o întelege şi a o accepta. Şi aceasta, pentru că orice prost poate să ştie, dar numai cei inteligenţi şi înteleg. Şi pentru că vedem soarele cum, aparent, se deplasează pe bolta cerească, ca şi Luna şi stelele, iar pentru întelegerea realităţii, a adevărului, avem nevoie de cunoaştere, de ştiinţă şi, toate acestea, presupun un efort de gândire. Gândirea, o spune **Sorin Comoroşan**, care şi-a câstigat, prin creaţia sa, dreptul la cuvânt, este nu numai una dintre cele mai nobile activităţi umane, dar şi una dintre cele mai grele. Nici **supermatematica (SM)** n-a avut o soartă mai bună. I-au fost necesari peste 45 de ani de acumulări cantitative pentru a se cristaliza şi a prinde viaţă într-o carte. În cartea de faţă, în cea de a 3-a ediţie, din **Editura Matrix Rom**.

Să nu ne mirăm că, în scurta sa existenţă, la scară cosmică, şi extrem de îndelungată, raportată la durata de viaţă a unui om, omenirea n-a creat decât două lumi noi, lipsite, până de curând, de o a treia dimensiune – inteligenţa.

Trezit într-o lume dinamică şi agresivă, omul, ca şi toate vieţuitoarele pământului, sunt într-o continuă luptă de supravieţuire: **care pe care**. Provenit, zice-se, din maimuţă, cu darul de-a imita şi călăuzit, în scurta sa existenţă, de minunata aventură a cunoaşterii, cele două lumi noi, create de om, sunt

☼ **ETNOSFERA – lumea simbolurilor şi a limbajelor** şi

☻ **TEHNOSFERA** – lumea **uneltelor (maşini, dispozitive, aparate, scule)** prin care el, omul, se bazează în lupta sa de supravieţuire şi apoi de cucerire şi de dezvoltare a supremaţiei în lume / cosmos.

O **a treia lume**, a mecatronicii şi a integronicii, rezultată din combinarea tehnologiilor mecanice cu cele electronice şi cu informatica, este în curs de formare. Ea şi-a impus **inteligenţa** ca atribut şi dimensiune suplimentară a dezvoltării sale şi criteriu de apreciere a calităţii ei. Apariţia ei ar fi fost de neconceput fără dezvoltarea uneia dintre cele mai mari creaţii ale geniului uman – **matematica**.

Matematica, care este inteligenţă în stare pură, este în curs de dezvoltare şi de transformare într-o **super→matematică**, transformare la care aspiră şi lucrarea de faţă.

Aşa cum a demonstrat **Claude Levi-Strauss**, trecerea de la **natură** la **cultură** presupune aptitudinea de a utiliza **simboluri** (*"**La Science des symboles"** René Alleau.)*

1 INTRODUCERE

O componentă esenţială a gândirii umane abstracte o constituie limbajul. El ne oferă posibilitatea de-a gândi clar, concis şi fără dificultăţi, despre concepte din ce în ce mai abstracte şi mai sofisticate. “**Matematica**, cea care permite **simplitatea** atractivă şi **concizia** expresiei - necesare pentru o discuţie a legilor fizicii şi a consecintelor lor, este însăşi **limbajul fizicii**” [Curs de fizica Berkley, Vol.1 Mecanica, p.26].

Acceptând, astăzi, teoria Big Bang-ului, înseamnă că suntem pe această **planetă albastră**, numită **Pamânt**, ca pe o navă cosmică, în zbor continuu şi halucinant spre necunoscutul denumit viitor, oricare ar fi el, în spaţii ale căror dimensiuni savanţii le multiplică necontenit. Dacă nu putem să ne oprim, pentru a gândi, atunci măcar să gândim din mers, la îndemnul lui **S. Comoroşan**, şi în mare viteză, la perpetua întrebare: **cine suntem, de unde venim, încotro ne îndreptam** şi în ce stadiu de dezvoltare se află **inteligenţa** noastră, adică **matematica** ?

Prezenta lucrare este un răspuns concret la ultima întrebare : **matematica** suferind o explozie, **nemaiîntâlnită în istoria ei**, un salt **de la unu la infinit**, sau de la **matematica centrică (MC)**, actuală, de dimensiunea topologică zero - a unui punct O(0,0), dintr-o suprafaţă plană - la **matematica excentrică (ME)** – de dimensiune topologică de minim doi - a unei suprafeţe - şi, de aici, totodată, la **supermatematică (SM).**

Se poate demonstra, matematic, că ordinea perfectă şi haosul perfect (absolut sau desăvârşit) reprezintă una şi aceeaşi stare, sau unul şi acelaşi obiect: sfera matematică – perfectă şi nemărginită. Spunem perfectă, pentru că, acum, odată cu apariţia **SM**, sfera perfectă şi cubul perfect, ca şi cercul şi pătratul perfect, pot fi exprimate prin aceleaşi ecuaţii parametrice şi, între ele, mai există o infinitate de **excentrice** sferice sau ”sfere excentrice’’. Excentricitatea **e** sau **s** asigurând diferenţa: **e = s = 0** reprezentând **sfera** şi **cercul**, iar **s** = e / **R** = ± **1** sau e = R (raza sferei) reprezentând **cubul** şi **pătratul**. Între **e** = **s** = **0** şi **e** = R, sau excentricitatea numerică **s** = **e**/R = ± 1, există o infinitate de forme intermediare, care reprezintă o transformare continuă a unei sfere într-un cub perfect, ca şi a unui cerc într-un pătrat perfect, sau invers. Pentru s $\in [-\infty, +\infty]$, apar şi mai multe entităţi, dar nu toate sunt curbe închise.

Astfel de transformări, ca şi multe altele, sunt vizibile pe website-urile :
www.supermatematica.ro; www.supermathematica.com; www.supermathematica.org; www.supermatematicaonline.blogspot.ro.

Sfera este, prin natura ei, un obiect neorientabil, De exemplu, o bilă de rulment, este deja gata ordonată, deoarece este lipsită de elemente de tipul axelor de simetrie (distincte) şi având gradul de dezordine maximă a ordonării (D_{MO}) cel mai redus posibil: $D_{MO} = 0$.

Nu se poate afirma că o bilă sferică este cu capul în sus sau în jos, că este rotită spre stânga sau spre dreapta ş.a.m.d., pentru că nu are « **excentricitatea** » sau excrescenţa numită cap sau coadă. Sfera matematică, indiferent de dimensiunea ei, reprezintă, în acest caz, ordinea perfectă sau dezordinea minimă.

Ordonarea obiectelor de lucru, s-a dovedit a fi cel mai complex proces de automatizare, ultimul realizat în tehnică, de-abia parţial, prin care s-a închis lanţul proceselor complet şi complex automatizate şi s-a deschis calea robotizării, cibernetizării, mecatronizării şi s-a deschis calea apariţiei sistemelor integrate, sistemelor de producţie, în care omul devine anacronic, cu consecinţe viitoare greu de imaginat, sesizabile deja.

Complexitatea procesului de ordonare a obiectelor poate fi exprimată de **raportul convenţional de complexitate K_C**, a cărui expresie este (**Mircea Şelariu**, « **DISPOZITIVE DE AUTOMATIZARE A PROCESELOR DE PRODUCTIE** », Cap. 20 din « **PROIECTAREA DISPOZITIVELOR** » coordonator **Vasii-Roşculeţ Sanda**, EDP, Buc., 1982, pag. 573 … 664) raportul dintre coeficientul de complexitate al obiectului ideal $\mathbf{K_I}$ şi a celui real $\mathbf{K_R}$, adică $\mathbf{K_C} = K_I / K_R$, ambii coeficienţi determinându-se cu relaţia :

(1.1) $K_{I,R} = 1 + 1.\mathbf{A_2} + 2.\mathbf{A_3} + 3.\mathbf{A_4} + \ldots + (n - 1).A_n + \ldots$

în care $\mathbf{A_n}$ reprezintă numărul de axe de simetrie de ordinul **n** pe care le are obiectul real şi, respectiv, cel ideal, din grupa în care se încadrează obiectul real.

Un obiect prezintă o axă de simetrie de ordinul **n** dacă, prin rotirea lui, în jurul acestei axe, cu $2\pi / n$, obiectul se va oglindi / proiecta identic pe un plan oarecare.

Dezordinea, ca şi **haosul**, care reprezintă o dezordine maximă, conform relaţiei (1.1), cresc cu creşterea numărului axelor de simetrie ale obiectelor şi cu ordinul n al acestora. Dar, tot sfera matematică prezintă o infinitate de axe de simetrie de ordin maxim (infinit), deoarece, o rotire oricât de neînsemnată, în jurul unei axe imaginare, ce trece sau nu prin centrul sferei, nu modificâ cu nimic oglindirea sub formă de disc circular / cerc a sferei pe un plan.

În spaţiul unei astfel de **sfere amfotere**, de rază nedeterminată, **spaţiul** nu există din cauza **haosului** şi **timpul** nu poate exista din cauza **ordinii perfecte**; **timpul** fiind perceput numai dacă spaţiul este ocupat şi scurgerea lui este sesizabilă numai prin schimbarea a ceea ce îl ocupă.

Această sferă nevăzută, absolut transparentă, pare a fi un nimic. Dar, din « nimic » s-a născut întregul univers. Acest nimic este de fapt « totul ». Să nu uităm că, aşa cum se zice că s-ar fi constatat prin observaţii recente, un orificiu spaţio-temporal, numit **gaură neagră**, de dimensiunea unui graunte de nisip, în acest moment, « înghite » galaxii întregi. Impresia că o întregă galaxie **trece** printr-o **gaură neagră**, ca prin « urechea unui ac », este o iluzie falsă. De fapt nu « înghite », pentru că « *nimic nu dispare şi nimic nu apare, ci totul se transformă* ». În acest punct, are loc fie un proces de ordonare, încă nedesăvârşit, care se termină mai rapid decât în mod obişnuit, într-o ordine perfectă, fie că are loc un proces de revenire, la fel de rapid, la starea iniţială a dezordinii absolute, din care s-a pornit, ceea ce conduce la acelaşi obiect nevăzut.

Albul imaculat este un amestec al tuturor culorilor ! Sticla, cel mai transparent material, se obţine din nisip. **Organizarea** face diferenţa ! Nisipul rămâne în sticlă, nu dispare! Adică, se modifică poziţia / organizarea reciprocă a diverselor elemente componente în cadrul sistemului, ceea ce este dat de dimensiunile de coordonare sau excentricitatea, într-un sens mai general, ale părţilor componente. Un cilindru şi o ţeavă cilindrică (la care cele două corpuri cilindrice, cel plin şi cel gol, au axele coliniare, adică situate la distanţa e = 0) au acelaşi centru de simetrie şi acelaşi grad de dificultate al ordonării, deci, aceeaşi dezordine maximă $D_{MO} = 2$. Dar, dacă unul dintre aceste obiecte işi pierde centrul de simetrie, prin existenţa unui orificiu excentric, la distanta **e** faţă de fostul centru de simetrie, atunci dezordinea lui se amplifică. Este, deci, suficientă apariţia unei **excentricităţi e**, oricât de reduse, pentru ca un proces de ordonare să înceapă, sau, dimpotrivă, să revină la starea iniţială de haos, sensul procesului depinzând de semnul excentricităţii.

« **Nava** » noastră cosmică, **Pamântul**, se deplasează în sensul în care dezordinea se transformă în ordine, entropia sistemului scade şi organizarea sistemului urcă pe trepte din ce în ce mai înalte şi saltă de pe un nivel de organizare pe un altul, din ce în ce mai complex, cu inteligenţă din ce în ce mai ridicată, complexitatea fiind o caracteristică a tuturor sistemelor. Complicarea, mai ales cea inutilă – **nu** !

SM, care este o reuniune dintre **MC** şi **ME**, este în mod evident mai complexă decât **MC** actuală, nu numai datorită excentricităţii, care i-a dat naştere, dar nu mult mai complicată. In **SM,** excentricitatea liniară reală **e** sau cea numerică **s** poate reprezenta o a 3-a dimensiune a spaţiului bidimensional (2D) sau o a 4-a dimensiune a spaţiului tridimensional (3D), dacă un punct E(e, **ε)** sau **S(s, ε)** denumit **excentru**, pentru că a fost expulzat din centru, este un punct fix într-un plan. Dacă E(e, **ε)** sau **S(s, ε)** sunt puncte mobile, adică, una dintre coordonatele excentrului, **e** sau ε, sunt variabile, **E** se deplasează pe o dreaptă (de direcţie ε = constant), dacă excentricitatea liniară reală **e** este variabilă şi pe un cerc (cu centrul în **O(0,0)** sau în oricare alt punct fix $\mathbf{E_0}$ $(\mathbf{e_0}, \boldsymbol{\varepsilon_0})$ şi de rază **e** = constant) dacă excentricitatea unghiulară **ε** este variabilă, după o lege oarecare, care va imprima viteza punctului **E** pe acest cerc.

Dar, $\mathbf{e_i}$ pot fi şi cele **n** dimensiuni ale spaţiului 2D, în cazul funcţiilor **supermatematice** de excentricitate multiplă, în care, toate excentrele $\mathbf{E_i}$ sunt puncte mobile într-un plan, deplasându-se pe anumite curbe, după diverse legi de mişcare.

Două dintre coordonatele (s, t) ale universului determină un plan, denumit **plan energetic**, în care se poate reprezenta mişcarea de expansiune a ordinii în domeniul dezordinii şi, ca urmare, în care creşte masa **materiei vizibile** a universului, odată cu creşterea stării de ordonare, din ce în ce mai completă şi mai compexă a acesteia, fară să ajungă la apogeu. **Materia vizibilă** apare ca urmare a **organizării** sau a **dezorganizării materiei invizibile**. A **organizării**, dacă **materia invizibilă** reprezintă **haosul absolut** şi a **dezorganizării,** dacă ea reprezintă **ordinea perfectă**.

Perpendicular pe acest plan, înălţat majestos pe verticală, este **planul sinergetic**, în care, o a treia coordonată, verticală, exprimă fie gradul de organizare (ordonare), fie cantitatea de informaţie, fie calitatea, în esenţă **inteligenţa** la un moment dat a sistemului în expansiunea lui continuă.

Deşi lungă, pornind de la facerea universului, această introducere o considerăm utilă scopului propus, deoarece precum în **Ceruri** şi în **SM,** aşa şi pe **Pământ** sau în **MC.**

Să luăm aminte, că sensul dezvoltării matematicii este acelaşi cu cel al dezvoltării universului, din care ea face parte, ca să nu mai încercăm, în zadar, aşa cum obişnuim de prea multe ori, să « înotăm » **în contra curentului** sau în contra sensului dezvoltării, ca să ne exprimăm cuviincios.

Acum reţinem, că matematica evoluează prin sporirea şi mărirea **insulelor de cunoaştere** (spaţiul ordonat) din **oceanul ignoranţei** (haosului), prin sporirea informaţiei, a organizării, a calităţii, pe scurt, a utilizării inteligenţei în detrimentul cantităţii, a mişcării şi a forţei.

Matematica este, deci, şi un **limbaj**. Un limbaj în continuă completare şi dezvoltare. **Supermatematica (SM)** la fel, este un limbaj provizoriu, pentru noile complemente de matematică descoperite şi introduse în matematică de autor. In viitor, când noile concepte se vor fi cristalizat, prefixul **super,** un element de compunere însemnând « **supra** », « **deasupra** » sau « **peste** », care dă cuvântului un sens de superioritate sau de superlativ, va deveni **superfluu**, putând fi abandonat.

Supermatematica, privită ca matematică centrică (**MC**) plus complementele de matematică ce se încadrează în **matematica excentrică** (**ME**), prin multitudinea de funcţii, curbe, forme şi obiecte matematice noi, ilustrează faptul că şi **SM** este şi un limbaj, dar nu numai. Numai că, aceste complemente - cuprinse în matematica excentrică- sunt ieşite din comun. Pe de o parte, pentru că ele depăşesc, din punct de vedere numeric, referitor la numărul entităţilor / obiectelor matematice, cu mult matematica ordinară, numită în continuare — **centrică** — care are de-abia dimensiunea topologica zero – a unui punct, **centrul O**. În timp ce, matematica **excentrică** are dimensiunea topologica de minimum doi, a unei suprafeţe, în care centrul **O** este un punct originar, din care s-a născut, fiind **expulzat** şi, apoi, deplasat în plan, punctul care a devenit **excentrul E** (**S** sau **K**). Pe de altă parte, pentru că raportul dintre posibilităţile de aplicare şi gradul de complexitate al complementelor depăşeşte cu mult tot ce este consemnat ca salt (cantitativ şi calitativ) în istoria matematicii, aşa cum va rezulta şi din conţinutul prezentei lucrări.

Şi, astfel, procesul apariţiei, din nimic (**O(0, 0) ≡ MC**), a noului **univers supermatematic** (**SM**) a început şi prin publicarea prezentei lucrări.

Vechii **greci** divinizau **cercul**, ca fiind o formă perfectă şi uşor de realizat practic. Şi, parcă, au presimţit că nu e nevoie să-l abandonezi în favoarea altor curbe, mai sofisticate, pentru a diversifica, în sensul de a înmulţi sau completa, matematica cu funcţii **periodice** noi, cele mai utilizate funcţii în ştiinţă şi în tehnologie.

De exemplu, în grădinărit: un ţăruş se înfinge în centrul cercului şi cu celălalt tăruş se înregistrează pe sol forma circulară a straturilor concentrice de flori. Chiar şi anticii agreau frumosul ! Frumosul **SM** poate fi admirat în albumul « **Tehno Art of Şelariu Supermathematics Functions** » Ed. ARP (American Research Press), 2007.

Apollonius din Perga (sec. III î.e.n.), cel mai mare geometru al antichităţii, a studiat, descoperit şi introdus în matematică parabola, **elipsa**, şi **hiperbola** şi le-a denumit astfel, în funcţie de coeficientul q a lui x^2 din expresia conicelor

(1.2) $y^2 = 2px + qx^2$, în care, pentru

$q = 0$ ► **para**velin (**egalitate** în limba greacă veche), rezultă o ► **parabolă**

$q < 0$ ► **eli**pin (în **lipsă** / minus) corespunde la o ► **elipsă**

$q > 0$ ► **hiper**valin (în surplus / peste/**plus**) se obţine o ► **hiperbolă.**

Abia dupa cca. **1000** de ani, elipsele "urâte" ale lui **Apollonius** au fost imaginate ca orbite ale Pământului şi ale altor planete. Din fericire, **excentricele**

circulare, care multiplică la infinit forma matematică centrică, cunoscută sub denumirea de **cerc**, acum denumit **centrică circulară,** au fost demult descoperite de **Kepler**, atunci când a formulat prima lui lege, în felul urmator: “Planetele se rotesc / învârtesc (de fapt se deplasează învârtindu-se în jurul axei proprii) în jurul **Soarelui** pe **cercuri**, dar Soarele nu se gaseşte în centrul cercurilor” [**V.I. Arnold**, « Metodele matematice ale mecanicii clasice », Editura Ştiintifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980, pag.54]. Că traiectoria Pământului, în spaţiul cosmic, nu este nici cerc şi nici elipsă (de excentricitate numerică s = e / R = 0,0016, cât este cea a orbitei Pământului), datorită interacţiunii cu celelalte planete ale sistemului solar, cu Luna şi cu alte obiecte cosmice, este o certitudine.

Excentricele eliptice, de excentricitate variabilă, sunt orbitele care se pot apropia şi mai mult de forma reală a orbitelor planetelor, dacă se face abstracţie de deplasarea, cu viteze uluitoare, a întregului sistem solar şi a galaxiei în spaţiul cosmic.

Apollonius, înlocuind cercul prin conice şi întroducând în matematică **elipsa,** a întrodus, implicit, şi **excentricitatea**, stricând imaginea grecilor asupra perfecţiunii **cercului**. Arătând că cercul este un caz particular al elipsei, şi anume: când doi, dintre cei trei ţăruşi, se înfig în pământ în acelaşi loc (**excentricitate e** = 0), el a fost **hulit** de greci, contemporanii săi, pentru distrugerea imaginii perfecţiunii: **cercul**.

Kepler a utilizat **excentricitatea** în practică, în cadrul mişcării planetelor şi nouă ne-a revenit sarcina de-a consolida, din punct de vedere matematic şi mecanic, această mişcare, întroducând **mişcarea circulară excentrică (MCE),** mai generală decât **mişcarea circulară centrică** (**MCC**, care derivă din **MCE** pentru **e = s** = 0), mişcare studiată cu ajutorul noilor **funcţii supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) în capitolul 6, §6.4 al prezentei lucrări.

Imaginaţi-vă ce va păţi cel care a multiplicat, de la unul la infinit, **toate** formele şi entităţile/obiectele matematice cunoscute şi, în plus (dacă după infinit se mai poate plusa), a introdus în matematică o infinitate de noi forme / obiecte / entităţi matematice.

1.2 CUM S-AU DESCOPERIT ŞI CE SUNT MATEMATICA EXCENTRICĂ (ME) ŞI SUPERMATEMATICA (SM).

Ocupându-ne de determinarea experimentală a amortizărilor, provenite de la cuplele cinematice arbore principal – pană – roată dinţată, ale strungurilor universale, în ideea de a mări aceste amortizări şi a diminua amplitudinile de vibraţii la torsiune ale maşinilor-unelte, masurările experimentale au eşuat, datorită prezenţei şi a altor amortizări, mult mai puternice, provenite de la standul de încercare, pe de o parte, iar, pe de altă parte, datorită puternicelor neliniarităţi ale cuplei cinematice arbore-stand.

Astfel, a apărut necesitatea realizării unui studiu teoretic al unor sisteme elastice neliniare, în cadrul grupei de Vibraţii ale Maşinilor-Unelte, condusă de dr. Ing **Wolfgang Bühler**, de la Catedra de Maşini-Unelte a Prof. Dipl.-Ing. **Karel Tuffentsammer,** de la Universitatea din Stuttgart, universitate la care autorul a activat în perioada 1969-1970 cu o bursă **DAAD**.

Dacă simulăm mişcarea vibratorie, prin proiecţia mişcării de rotaţie a unui punct de pe un cerc, pe o direcţie oarecare, atunci, unei caracteristici elastice liniare îi corespunde mişcarea punctului pe cerc cu o viteză unghiulară constantă $\boldsymbol{\Omega}$.

Poziţia, la un moment dat, a masei (punctuale) pe cerc, este dată de unghiul la centru $\boldsymbol{\alpha}$ având expresia $\alpha = \Omega.t$ şi reprezintă o dreaptă ce trece prin originea **O**, într-un sistem de coordonate rectangular drept **αOt**. Rezultă că masa, sau punctul reprezentativ **M**, se roteşte pe cercul de raza R = A, în care A este amplitudinea oscilaţiei, cu viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega} = \Omega$ = constantă şi unghiul de poziţie al lui **M** pe cerc, este dat de $\alpha(t)$ şi creşte proportional / liniar cu timpul.

Unui sistem liniar, de pulsaţie proprie $\boldsymbol{\Omega}$, îi corespund o **infinitate** de sisteme neliniare echivalente, având aceeaşi pulsaţie proprie $\boldsymbol{\Omega}$, de viteze unghiulare

(1.3) $\omega(t) = d\alpha(t)/dt$, în care (1.3') $\alpha(t) = \Omega.t + \varphi(t) = \int_0^t \omega(t).dt$

Funcţia $\alpha(t)$ = **am** (u, k) este funcţia eliptică amplitudine sau amplitudinus a lui **Jacobi** [v. relaţia (1.32) şi figura **1.1,a**], de variabilă u şi/sau modificată θ

(1.4) u → $\theta = 2uK(k)/\pi$, în care K(k) este integrala eliptică completă de prima speţă

(1.5) $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}}$

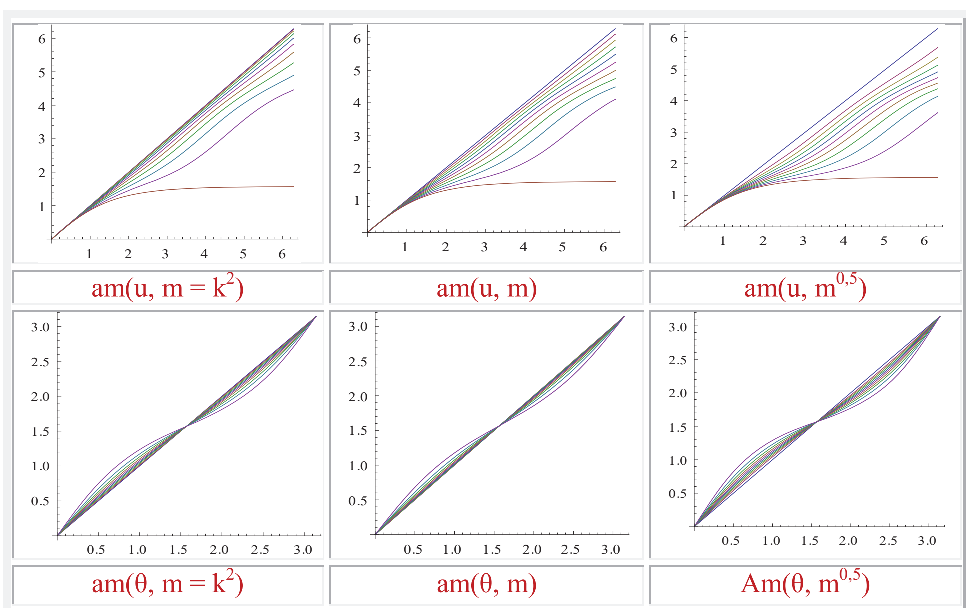
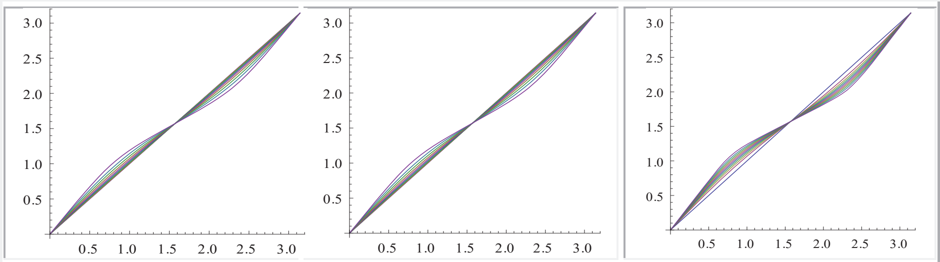


Fig. **1.1,a** Funcţii eliptice **Jacobi** de module $m = k^2$, $k = m^2$ şi $m^{0,5}$ precum şi de variabilele u , $\theta = 2uK(m = k^2)/\pi$, şi $\theta = 2\,u\,K(m^{0,5})/\pi$; $(m \in [0; 0,9])$

Modulele, care au domeniul normal de variaţie m, k ∈ [0 ; 1], au fost limitate la domeniul m, k ∈ [0 ; 0,9], deoarece programul de matematică nu înregistrează funcţiile eliptice şi pentru m = k =1.

Pentru unele sisteme neliniare, α(t) poate fi, cu destul de bună aproximare (v. Fig.**1.1,c**), funcţia supermatematică trigonometrică circulară excentrică amplitudine excentrică modificată (**Fig.1.1,b**) aexm[θ(t)], iar φ(t) este o funcţie periodică care « şerpuieste » / oscilează de o parte şi de alta a dreptei Ω.t. Acum, această curbă este denumită **strâmbă** [18], de genul celor prezentate în **figurile 1.2,a**.



s = k	$s = k^2$	$s = k^{0,5}$

Fig. 1.1,b **FSM-CE** amplitudine excentrică modificată aexmθ de s = k, $s = m = k^2$ şi $s = m^{0,54}$, pentru s ∈ [0; 0,9] şi ε = 0

Relaţiile utilizare pentru **FSM-CE** amplitudine excentrică modificată

Plot[Evaluate[Table[{JacobiAmplitude[2 t EllipticK[0.01 u^2]/ Pi, 0.01 u^2]-(t+0.3 ArcTan[0.01 u^2 Cos[t] Sin[t]/Sqrt[(1- 0.01 u^2 Cos[t]^2)]])}, {u,0,10}], {t,0,Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{t/2+ArcSin[0.005m^2Cos[t/2] Sin[t/2]/(1-0.005 m^2Cos[t/2]^2)]+0.0075Cos[t/4]/ Sqrt[1- Sin[t/4]^2]-0.0075 +0.015 Sin[t]–Jacobi Amplitude [t EllipticK[0.1 m]/Pi,0.1 u]}, m,0,10}]}, { t, 0, 2 Pi}]]

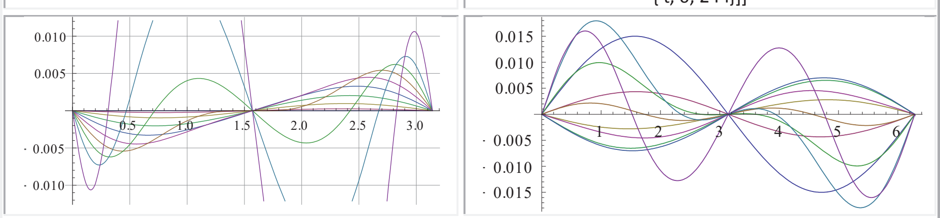


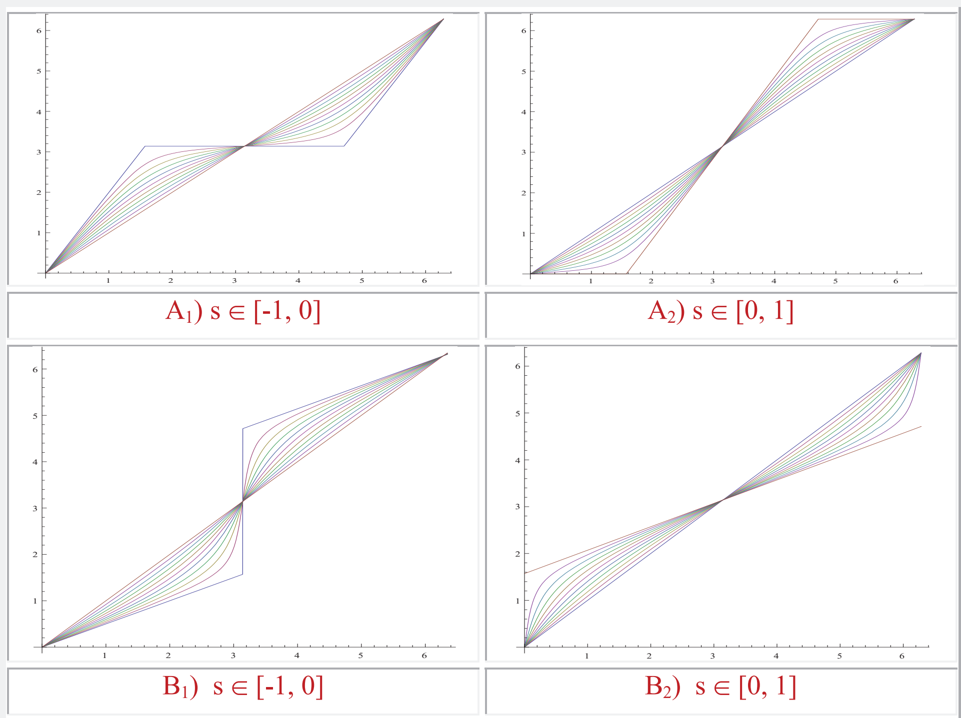
Fig. 1.1,c Diferenţa dintre **FSM-CE** amplitudine excentrică modificată şi funcţia eliptică **Jacobi** de **s** = k ∈ [0; 0,9]

În privinţa parametrului/modulului m sau k, cu care operează diverse programe de matematică, e necesară o mare atenţie, mai ales la programele de matematică care exprimă funcţiile eliptice prin modulul $\mathbf{m = k^2}$. Aceasta nu înseamnă că, de aici, se deduce / rezultă sau se va considera $\sqrt{m} = k$, deoarece, luând, pentru m ∈ [0, 1] rezultă → k^2 ∈ [0, 1], or, e enecesar să fie k ∈ [0, 1].

De aceea, la **m^2** = k → **m^2** = k ∈ [0, 1] şi rezultă că, în relaţiile de definire a funcţiilor sau integralelor eliptice, să se modifice **m** → **m^2**, pentru că, numai aşa,

(1.6) **m^2** ∈ [0, 1] → k ∈ [0, 1].

Pentru sistemul studiat, funcţia **φ(t)** seamăna cu o funcţie – sin(t), cu deosebirea că punctele de extrem sunt defazate, în sensul că extremele puteau să apară ceva mai devreme sau ceva mai târziu faţă de t = π/2 ± k.π, k = 0,1, 2,…în timp ce punctele de nul ramâneau neschimbate, de genul graficelor din **figura 1.2,b** care, pentru Ω = 1 reprezintă o famile de funcţii supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) de variabilă centrică α. Aveam, astfel, nevoie imperioasă de « un fel de sinus » la care primul maxim să nu apară la α = π/2 ci, ceva mai repede, sau ceva mai târziu.



A_1) s ∈ [-1, 0] | A_2) s ∈ [0, 1]

B_1) s ∈ [-1, 0] | B_2) s ∈ [0, 1]

Fig. 1.2,a Strâmbe de variabilă excentrică (A_1, A_2) şi de variabilă centrică (**B_1, B_2, B_3, B_4**) ca **FSM-CE** amplitudine excentrică, toate pentru ε = 0

Acest « ceva », care dă « alunecarea » punctelor de maxim, este, acum, fie **FSM-CE**

(1.7) **bex[θ, S(s, ε)] =** arcsin[s.sin(θ-ε)], fie

(1.8) **Bex**[α, S(s, ε)] = $\arcsin\frac{s.\sin(\propto-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2.s.\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \arctan\frac{s.\sin(\propto-\varepsilon)}{1-s.\cos(\propto-\varepsilon)}$,

(**Fig.1.2,b**) funcţii ce exprimă deplasarea maximelor **FSM-CE** sinus excentrice de variabilă excentrică θ

(1.9) **sex** θ = sin[aex θ] = sin[θ - arcsin[s.sin(θ – ε)],

maxime care apar, pentru ε = 0, primul la θ = π/2 şi următoarele la θ = π/2 + β(2kπ) = π/2 ± bex[θ = π/2, S(s,ε)] sau de variabilă centrică **Sex**α.

S-a constatat că acest fapt este posibil, dacă polul semidreptei nu se alege în originea sistemului O(0,0) de coordonate, cum a procedat **Euler,** la definirea funcţiilor trigonometrice ca funcţii circulare directe, ci, mai în dreapta, sau mai în stânga originii **O**, pe axa absciselor. Pe cât de simplu, pe atât de util ! S-a denumit această expulzare (deplasare), din centru, **excentricitate liniară e** (reală) sau **s** = **e** / **R** şi, uneori, **k** = e / **R** (excentricitatea numerică) şi polul s-a notat cu **E(e,ε),** respectiv, **S(s,ε)** sau **K (k,ε),** puncte denumite **excentre** (ex-centre).

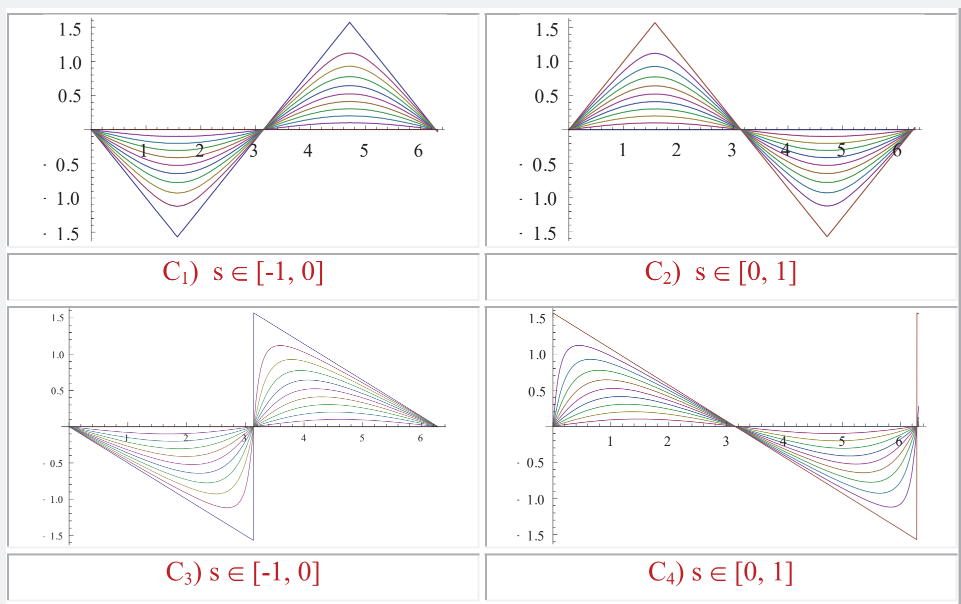
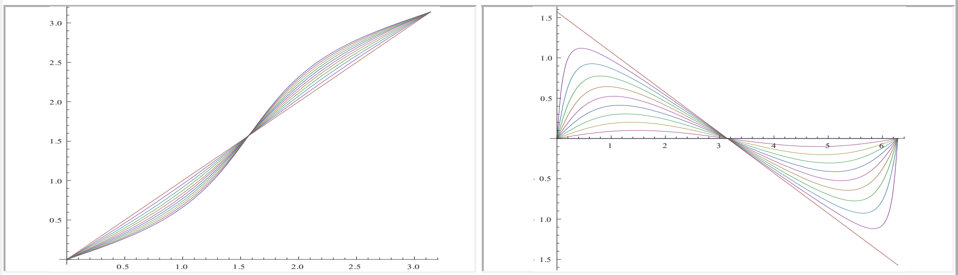


Fig. **1.2,b** Funcţii **SM-CE** periodice beta excentrice de variabilă excentrică **bex*θ*** (C_1, C_2) şi de varabilă centrică Bex*α* (C_3, C_4)

Acesta a fost începutul (**Big-Bang**ul **SM**) şi, pentru generalizare, expulzarea lui **E** din **O** s-a realizat nu numai pe direcţia axei absciselor (**ε** = 0) ci pe oricare altă **direcţie radială centrică ε**. Astfel că, excentrul **E** are coordonatele polare **E**(e, ε) şi cele carteziene **E** (e_x, e_y), iar **S** are coordonatele polare **S**(s, ε) şi cele carteziene **S** (s_x = s.cosε, s_y = s.sinε) şi **K** are coordonatele polare (k, ε) şi carteziene (k_x = kcos ε i k_y = k. sinε). De la caz la caz, **excentrul**, corespunzator cercului unitate, va fi **S** – punct **solar -**

sau **K** – punct **modular** – utilizat cu precădere la mecanica vibraţiilor, funcţii eliptice de modul k sau $m = k^2$.



C_1) $s = s_0 \cos\alpha$, $s_0 \in [-1, 0]$ C_2) $s = s_0 \cos\alpha$, $s_0 \in [0, 1]$

Fig. **1.2,c** Funcţii **SM-CE** periodice excentrice amplitudine excentrică modificate de varabilă centrică Aexmα (C_3, C_4)

www.SuperMatematica.ro, www.eng.upt.ro/mselariu, www.SuperMathematica.com,

Pentru evitarea confuziilor cu constanta sau numarul lui **Euler e** = 2,718281828…., număr care stă la baza logaritmilor naturali, **excentricităţile numerice**, iniţial notate cu **e**, se vor nota în continuare cu **s** sau **k**, când **s** poate fi şi un modul.

Visul, de-a avea o infinitate de matematici, şi de a opera simplu cu ele, a devenit realitate în 1978, prin publicarea lucrării "Funcţii Circulare Excentrice" [1], în care, se arată că fiecărui punct solar **S**(s,ε), din planul cercului trigonometric, denumit şi **excentru**, îi corespunde o matematică. **SM** **multiplică la infinit** toate funcţiile trigonometrice cunoscute, toate obiectele şi formele matematice cunoscute şi pe care acum suntem obligaţi să le denumim **centrice** şi a întrodus funcţii, forme şi obiecte matematice noi, denumite **excentrice**, deosebit de utile pentru ştiinţă şi pentru tehnică.

Acum, există o infinitate de cosinusuri, sinusuri, tangente (vechi) şi tangente **Voinoiu** (noi), ş.a., o infinitate de cercuri, elipse, parabole, hiperbole, spirale **Arhimede**, spirale logaritmice ş.a., precum şi o infinitate de forme noi ca trilobe, cuadrilobe, polilobe, forme hibride, cum ar fi conopiramida, cilindroprisma, ş.m.a. care, încă, nu şi-au găsit nici măcar o denumire (v. **www.supermatematica.ro**, **www.supermathematica.com; www.supermatematicaonline.blogspot.ro;**).

Trigonometria excentrică (**TE** [33]) foloseşte punctul **S**(s,ε), denumit **excentru**, fiindcă a fost expulzat din centrul C(0,0) al cercului unitate / trigonometric **CT**(O,1) şi din originea O(0,0) a unui reper cartezian drept, ca **pol** al unei drepte mobile **d,** de direcţie **θ**, (turnantă în jurul polului **S**), denumită şi **variabilă independentă (argument) excentrică**, ale cărei intersecţii cu **CT** sunt punctele $W_1 = d^+ \cap$ **CT(O,1)** şi $W_2 = d^- \cap$ CT(O,1), scrise concentrat $W_{1,2}$ şi ale căror coordonate sunt :

(1.10) $x_{1,2}$ = **cex**$_{1,2}\theta$, denumit **cosinusul excentric** de variabilă excentrică θ şi de excentru S (s,ε), scris şi sub forma **cex$_{1,2}$(θ, S)** sau **cex$_{1,2}$(θ,s,ε)** şi

(1.11) $y_{1,2}$ = **sex**$_{1,2}\theta$, denumit **sinusul excentric** de variabilă excentrică θ şi de excentru S (s,ε), iar

(1.12) $y_{1,2} / x_{1,2}$ = **tex**$_{1,2}\theta$ este denumită **tangentă excentrică** de excentru **S**, sau de **excentricitate liniară reală e** şi excentricitate numerică **s = e / R**; **R** fiind raza unui cerc oarecare. Cotangenta, secanta şi cosecanta excentrice sunt definite prin aceleaşi rapoarte, de funcţii excentrice, ca şi funcţiile similare trigonometrice centrice.

Toate aceste funcţii, **centrice** şi **excentrice**, sunt dependente de originea **O** şi centrul cercului unitate **C**, care, în acest caz, pentru **funcţii excentrice**, se coincid, adică **C ≡ O**.

Funcţiile excentrice noi, nu depind de poziţia reciprocă a punctelor **O** şi **C**, ci numai de poziţia reciprocă a punctelor **S** şi **C**, situate la distanţa relativă **s** pe direcţia **ε**.

Evidenţiate **numai** în domeniul excentric, aceste funcţii noi sunt radial excentric, derivată excentrică, amplitudine excentrică ş.a.

Prima dintre ele, o adevarată funcţie « **rege** », cu ajutorul căreia pot fi exprimate ecuaţiile tuturor curbelor plane cunoscute, şi a multor curbe noi, este funcţia supermatematică circulară excentrică (**FSM-CE**) **radial excentric** de variabilă excentrică θ. Ea exprimă distanţa, dintre două puncte în plan, de la **S** la **W$_{1,2}$**, în coordonate polare, aşa cum bine a observat Prof. dr. math. **Octavian Em. Gheorghiu**, cel care a denumit această funcţie « o adevărată **funcţie rege** ». Totodată, reprezintă şi funcţia de transmitere de ordinul zero, sau a poziţiei punctelor $W_{1,2}$, faţă de punctul S din planul cercului unitate şi are **expresia invariantă**

(1.13) $\mathbf{rex}_{1,2}(\theta, s) = -s.\cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta - \varepsilon)}$,

ca **FSM-CE** de variabilă excentrică θ

Aceeaşi funcţie, dar de variabilă centrică α, are **expresia invariantă**

(1.14) $\mathbf{Rex}(\alpha_{1,2}, s) = \pm\sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}$,

ambele exprimând, în funcţie de cele două variabile independente, distanţa în plan, aici, în coordonate polare, dar poate fi exprimată şi în alte coordonate, ca cele carteziene, de la excentrul **S(s, ε)** la punctuele de intersecţie **W$_{1,2}$(1,α)** ale cercului unitate (**CT**) sau a cercului trigonometric cu **dreapta excentrică d**.

Dependenţa dintre cele două variabile, centrică şi excentrică, denumită funcţia **amplitudine excentrică** de variabilă excentrică θ are expresia invariantă

(1.15) $\mathrm{aex}_{1,2}(\theta) = \alpha_{1,2}(\theta) = \theta - \beta_{1,2}(\alpha) \rightarrow \begin{cases} \mathrm{aex}_1\theta = \theta - \arcsin[\mathrm{s.}\sin(\theta - \varepsilon)] \\ \mathrm{aex}_2\theta = \theta - \arcsin[\mathrm{s.}\sin(\theta - \varepsilon)] - \pi \end{cases}$

ştiind că

(1.16) $\beta_1 + \beta_2 = \pi$.

Aceeaşi **FSM-CE,** dar de variabilă centrică α, are expresia invariantă

(1.17) $\mathbf{Aex}(\alpha_{1,2}) = \boldsymbol{\theta}(\alpha_{1,2}) = \propto_{1,2} + \beta(\propto_{1,2}) = \propto_{1,2} \pm \frac{\arcsin[s.\sin(\propto_{1,2} - \varepsilon)]}{\sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(\propto_{1,2} - \varepsilon)}}$

Ele sunt, poate, cele mai importante funcţii noi, a căror denumire derivă de la funcţia eliptică amplitudine / (amplitudinus) **am(u,k)** a lui **Jacobi.**

Aşa cum cos[am(u,k)] = cn (u, k) şi sin[am(u, k)] = sn(u, k), tot aşa, prin înlocuirea variabilei $\alpha \rightarrow \alpha(\theta)$ = aex(θ) în funcţiile trigonometrice centrice cosα, sinα, tanα /(tgα) etc, cu funcţia amplitudine excentrică aexθ, se obţin funcţiile excentrice de variabilă excentrică **cex**θ, **sex**θ, **tex**θ ş.a. Se deduce că **FSM-CE** sunt funcţii de funcţie sau, sub denumirea mai nouă, dar nefericită, funcţii compuse.

Prin înlocuirea variabilei independente cu **Aexα** se obţin **FSM-CE** de variabilă centrică **Cex**α, **Sex**α, **Tex**α ş.a. Adică,

(1.18) **cos[aex(θ)]** = cex[**θ**, S(s,ε)] = cexθ,

(1.19) **sin[aexθ]**= sex**θ**, iar

(1.20) cos[**Aex(α)]** = Cex[α, S(s, ε)] = Cexα şi

(1.21) sin[Aex(α)] = Sex [α, S(s, ε)] = Sex α.

O altă funcţie, complet nouă, cea mai frumoasă funcţie periodică (*de gustibus non est disputandum*), care exprimă raportul (funcţia) de transmitere de **ordinul 1**, a turaţiilor sau a vitezelor, pentru **toate mecanismele plane cunoscute**, este funcţia supermatematică circulară excentrică (FSM-CE) derivată excentrică **dexθ** de variabilă excentrică θ, definită ca raport al derivatei uneia dintre variabile (α) în raport cu cealaltă (θ), şi are expresia invariantă, ca funcţie de variabila excentrică **θ**

(1.22) $\mathrm{dex}_{1,2}\theta = \frac{d\alpha_{1,2}(\theta)}{d\theta} = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\pm\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}} = \frac{rex_{1,2}\theta}{\cos[\beta_{1,2}(\theta)]} = \frac{rex_{1,2}\theta}{\cos[bex_{1,2}\theta]}$

Între variabila centrică α, sau unghiul la centrul O(0,0) şi variabila excentrică θ, sau unghiul la excentrul **S(s, ε)** sau **E(e, ε)** şi unghiul cu vârful pe cercul unitate $\beta_{1,2}$, din punctele $\mathbf{W_{1,2}}$, pentru R = 1 şi / sau $M_{1,2}$, pentru R ≠ 1, unghi notat cu $\boldsymbol{\beta_{1,2}}$, există relaţiile

(1.23) $\alpha_{1,2}(\theta) = \theta - \beta_{1,2}(\theta) = \theta - \mathrm{bex}_{1,2}\,\theta$ şi, respectiv,

(1.24) $\theta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2}(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \mathrm{Bex}(\alpha_{1,2})$,

aşa cum se poate observa şi în **figura 1.3,a** şi **1.3,b.**

Funcţia **SM**–**CE** derivată excentrică de **variabilă centrică α** are expresia invariantă

(1.25) $\mathrm{Dex}\ \alpha_{1,2} = \frac{d\theta}{d\alpha_{1,2}} = \frac{1-s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)} = \frac{1-s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{Rex^2\alpha_{1,2}} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)$

Se observă / deduce, imediat, că cele două funcţii derivate excentrice $\mathbf{dex_{1,2}\theta}$ şi $\mathbf{Dex\alpha_{1,2}}$, sunt inverse una alteia.

Observatii :

- Cei doi indici **1,2** reprezintă cele **două determinări** ale **FSM-CE**, corespunzatoare celor două puncte de intersecţie ale dreptei **d,** formată din cele două **semidrepte** ($\mathbf{d^+}$ semidreapta **pozitivă** şi $\mathbf{d^-}$ semidreapta **negativă**) cu cercul trigonometric (**CT**) sau cu cercul unitate (**CU(O, 1)): principală** de indice **1(+)** şi **secundară (-)** de indice **2**; diferenţa dintre ele constând doar din schimbarea semnelor **+** cu **-** , între ele, în faţa radicalului

(1.26) $\Delta(\theta) = \pm\sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)} = \mathrm{del}_{1,2}\theta$,

radical cunoscut în literatura funcţiilor matematice speciale ca funcţia « del » sau **delta amplitudine**, radical prezent în expresiile de definire a tuturor **FSM-CE**.

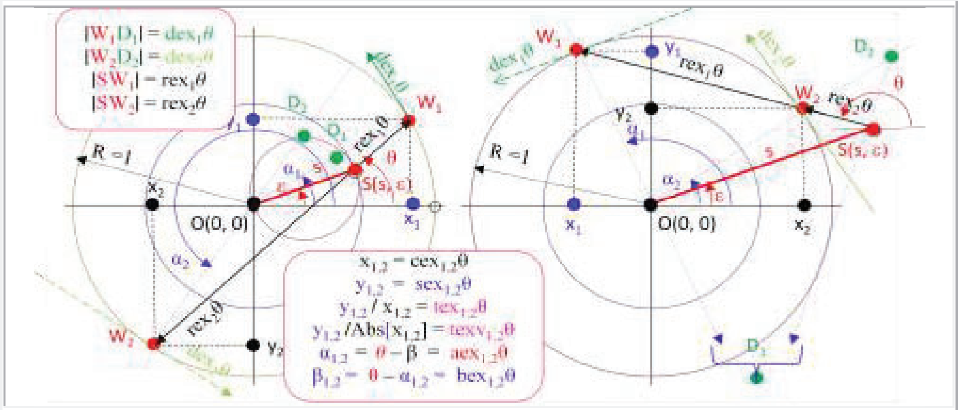


Fig. 1.3,a Schiţă explicativă pentru definirea funcţiilor supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) de variabilă excentrică θ

www.SuperMatematica.ro, www.eng.upt.ro/mselariu, www.SuperMathematica.com,

Dacă se utilizează în exclusivitate prima determinare **1**, atunci nu mai este necesar să se treacă şi indicele 1; confuziile dintre cele două determinări nefiind posibile.

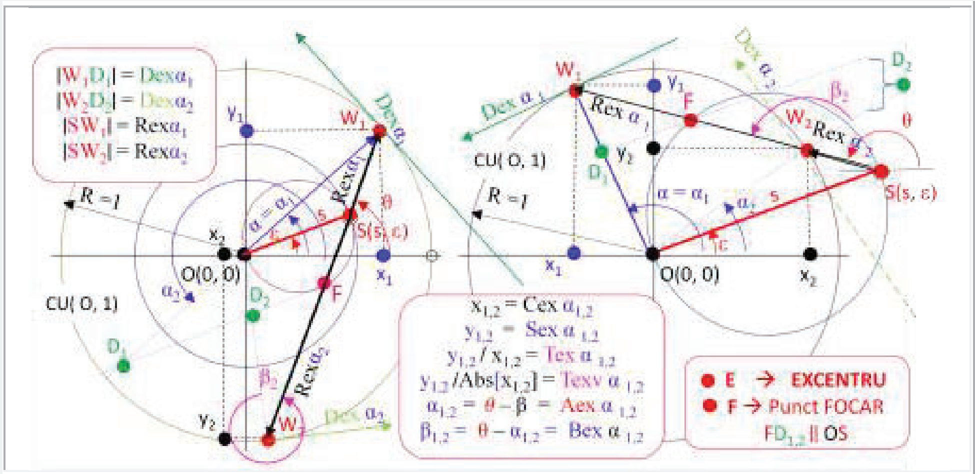


Fig. **1.3,b** Schiţă explicativă pentru definirea funcţiilor supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) de variabilă centrică α

www.SuperMatematica.ro, www.eng.upt.ro/mselariu, www.SuperMathematica.com,

- Redefinirea funcţiilor circulare excentrice, ca intersecţie cu o dreaptă şi nu cu o semidreaptă, precum în cazul funcţiilor trigonometrice centrice **Euler**, s-a făcut la sfatul matematicianului şi mecanicistului Prof. dr. mat. **Klepp Horst**, pentru a aduce de acord **Trigonometria** cu **Geometria Analitică**.

- Cu această ocazie, funcţia **rex**θ, definită iniţial cu dimensiunea lungimii [L], a fost normată, adică, definită ca o funcţie adimensională, prin împarţirea ei cu raza **R** a cercului, la sugestia Prof. dr. ing. **Dan Perju**.
- Ca şi în cazul funcţiilor eliptice, se va nota **cex**θ, respectiv **Cex**α, funcţiile cosinus excentric de o singură variabilă θ şi, respectiv **α**, pentru a nu complica scrierea.

Dacă **θ** sau **α** se păstrează constante, cum este cazul pendulului matematic excentric şi coordonatele excentrului **ε** sau **s** sunt variabile sau devin argumente, atunci notaţia va fi sexε sau sexs, Sexε sau Sexs, iar dacă ambele entităţi (**θ** şi **s)** sau (**α** şi **s**) sunt considerate variabile, atunci notaţia va fi tex(θ, s), Tex(α, s).

În fine, dacă excentrul **S** evoluează pe o curbă, în planul cercului, având atât pe **s** cât şi pe **ε** variabile, atunci notaţia va fi rex(θ, S), Rex(α,S) sau rex[θ, S(s, ε)] şi Rex[α, S(s, ε)]. Dacă **S** este variabil, ca de exemplu, conform relaţiei $s = s_0.\sin 3\theta$ şi e=cos 2θ, atunci se poate scrie **dex[θ, S(s = s_0 sin 3θ, ε = cos 2θ)].**

- Echivalentele, în **centric**, a funcţiilor excentrice rexθ şi **dexθ** sunt **radα** şi **derα**, funcţii centrice, denumite, prin analogie cu cele excentrice, **radial centric** şi, respectiv, **derivat centric** şi sunt **fazori**, de direcţie variabilă şi, evident, de modul unu. Aceşti **vectori unitate**, sau **versori** / fazori, sunt rad**α** = $e^{i.\alpha}$ şi der**α** = i.$e^{i\alpha}$ şi reprezintă, aşa cum se cunoaşte, funcţiile lui **Euler-Cotes**, subliniind, totodată, apartenenţa la trigonometrie ale acestor funcţii. Aici **e** nu este excentricitatea liniară reală, ci numărul / constanta lui **Euler** (e = 2,718281828…).

Astfel, funcţiile **Euler-Cotes** vechi sunt, deci, funcţii trigonometrice circulare **centrice** « noi ».

1.3 PIRAMIDELE MATEMATICII

Supermatematica **(SM)** este o nouă treaptă, **superioară**, de dezvoltare a matematicii. Trebuie să te sprijini pe matematica **centrică** (**MC**) pentru a ajunge pe treapata următoare, a matematicii **excentrice (ME).** Avem de-a face cu o "**piramidă**" cu vârful în jos. În vârful piramidei, stau simbolurile (**+, □, =, <, >, !, … x, y, z, ..),** nu toate şi nu neaparat matematice şi, mai sus, deasupra simbolurilor, se află numerele intregi (**1, 2, 3, …9, …0, …**).

Omenirii i-au trebuit mii de ani ca să constate că între două numere întregi n şi n+1, n = 1, 2, 3…mai există o infinitate de numere şi, mult mai mult, cu peste două mii de ani (! !), ca să constate că între două **FCC** cos nα şi cos (n+1)α, ca şi între sin (n-1)α şi sin nα, funcţii care fac parte dintr-o aşa zisă bază a sistemului trigonometric de funcţii (BSTFC), mai există o infinitate de funcţii cosinus dar excentrice cex nθ, cex (nθ), pentru s ∈ [– ∞, +∞] şi sinus excentrice sex (n-1)θ, sex nθ, apoi **FSM-CE** elevate cel nθ, cel (n+1)θ şi sel (n –1)θ, sel nθ, ca şi **FSM-CE** exotice cexo nθ, cexo (n+1)θ şi sexo (n-1)θ, sexo nθ. Şi au fost enumerate doar cele de variabilă excentrică θ, dar mai sunt cele de variabilă centrică α. Rezultă că **FCC** formează o bază discretă de funcţii trigonometrice, în timp ce **FSM-CE** formează o bază continuă de funcţii trigonometrice (**BSTFE**). Deosebit de important este faptul că, utilizând **bază continuă** în locul celei **discrete**, o serie enormă de suprafeţe **ne**matematice devin matematice, mai precis **supermatematice**.

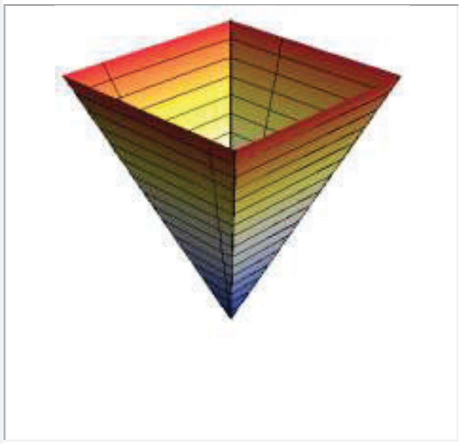


Fig.1.4, a **P I R A M I D A** matematicii centrice (**MC**)

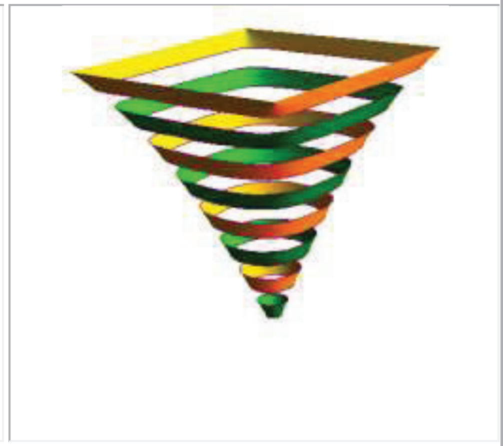


Fig. 1.4, b CONO**PIRAMIDA** – piramida matematicii excentrice (**ME**)

www.SuperMatematica.ro, www.eng.upt.ro/mselariu, www.SuperMathematica.com,

Ca urmare, ele pot fi exprimate şi descrise prin funcţii **(super)matematice**, pot fi vizualizate şi prelucrate pe maşini-unelte cu comenzi numerice de conturare (CNC). Mai rezultă că istoria numerelor s-a repetat şi în cea a funcţiilor. Din păcate.

Cu ajutorul numerelor intregi pot fi definite, într-o treaptă superioară, diverse alte **numere**, mai mari, mai complexe, apoi **funcţii**, implicit cele trigonometrice, ca de exemplu, expresiile invariante ale funcţiilor cosinus şi sinus, aşa cum au fost cunoscute de antici

(1.27) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n!)}$, $n \subset \mathbb{N} = 1,\ 2{,}3$ ....

(1.28) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n=1}}{(2n+1)!}$, $n \subset \mathbb{N} = 1,\ 2{,}3$ ....

Cu acestea pot fi definite / exprimate funcţii speciale, aflate pe un palier mult superior, cum sunt : **cosinusul eliptic** **Jacobi**

(1.29) $\mathrm{cn}\,(u,k) = \frac{2\pi}{k.K(k)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}\cos\,(2n-1)\frac{\pi.u}{2K(k)}$, sinusul eliptic **Jacobi**

(1.30) $\mathrm{sn}(u,k) = \frac{2\pi}{k.K(k)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}\sin\,(2n-1)\frac{\pi.u}{2K(k)}$ şi amplitudine **Jacobi**

(1.31) $\mathrm{am}(u,k) = \frac{\pi.u}{2K(k)} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{q^n}{1+q^{2n}}sin\frac{n\pi u}{K(k)}$,

în care **q** este parametrul lui **Jacobi**

(1.32) $q = e^{-\pi\frac{K'(k)}{K(k)}}$, în care **K(k)** şi K'(k) sunt integrale eliptice complete de prima speţă, în funcţie de modulul k sau m = k^2 şi, respectiv, de modulul complementar k' $=\sqrt{1-k^2}$ sau m'= $\sqrt{1-m}$.

1.4 CORECTAREA MULTIPLELOR COINCIDENŢE ALE LUI EULER, CARE AU SĂRĂCIT MATEMATICA

După multe sute de ani, **Leonhard Euler** (1707-1783) a definit funcţiile trigonometrice pe cercul **trigonometric**, acum cercul **unitate**, şi le-a denumit funcţii **circulare** directe. Dar, spre **ne**norocul matematicii, a ales trei puncte confundate:

- **O-originea** unui sistem de axe rectangular drept,
- **C- centrul** cercului unitate şi
- **E ≡ S → polul** unei semidrepte mobile, turnante în jurul acestui punct.

Şi, din această cauză, această matematică, atât de **sărăcită**, pe care acum o denumim, din motive lesne de înteles, **centrică** (**MC**), s-a ales cu câte o singură formă matematică, din infinitatea de forme care există, acum, în matematica **excentrică (ME)**.

Pe cea mai înaltă treaptă, o platformă nemarginită, care este, deocamdată, şi ultima treaptă a piramidei, se ajunge la **matematica excentrică**, bazându-ne / sprijinindu-ne pe cea **centrică**. Referindu-ne la aceleaşi exemple, ale funcţiilor cosinus şi sinus, cosinusul excentric (**cexθ**) şi sinusul excentric (**sexθ**) de excentru **S** şi de variabilă la excentru **θ** sau **x** au expresiile **invariante**, construite cu funcţiile circulare **centrice**, de pe treapta anterioară a matematicii:

(1.33) $\mathbf{cex}_{1,2}(\theta, S)=\mathbf{cos}(\theta\mp \mathrm{bex}_{1,2}\theta) = s.\sin\theta.\sin(\theta-\varepsilon) \pm \cos\theta\sqrt{1-s^2sin^2(\theta-\varepsilon)}$

sau, considerând variabila θ notată cu x şi excentricitatea unghiulară ε cu z , se poate scrie

(1.33') $\mathbf{cex}_{1,2}(x, S) = \mathbf{cos}(x\mp \mathrm{bex}_{1,2}x) = s.\sin x.\sin(x-z) \pm cos\sqrt{1-s^2sin^2(x-z)}$ şi

(1.34) $\mathbf{sex}_{1,2}(\theta, S) = \mathbf{sin}(\theta\mp \mathrm{bex}_{1,2}\theta) = -\ s.\cos\theta\sin(\theta-\varepsilon) \pm \sin\theta\sqrt{1-s^2sin^2(\theta-\varepsilon)}$

sau

(1.34') $\mathbf{sex}_{1,2}(x, S) = \mathbf{sin}(x\mp \mathrm{bex}_{1,2}x) = -\ s.\cos x.\sin(x-z) \pm \sin x\sqrt{1-s^2sin^2(x-z)}$.

Altfel spus, prin înlocuirea variabilei independente **y**, sau a unghiului **α**, la **centru O**, din diversele funcţii centrice, cu variabila dependentă **y(x)**, sau cu unghiul **α(θ)** date de :

(1.35) $\boldsymbol{\alpha}(\theta, E) = \theta \mp \beta_{1,2}(\theta) = \theta \mp \{\arcsin[s.\sin(\theta - \boldsymbol{\varepsilon})] - {}^{0}_{\pi}\}$ sau

(1.36) $\mathbf{y}(x, E) = x \mp \beta_{1,2}(\theta) = \theta \mp \{\arcsin[s.\sin(x - z)] - {}^{0}_{\pi}\}$,

în care **x** sau **θ** este **unghiul la excentrul S**.

Concis, variabila se înlocuieşte cu o funcţie (**amplitudine excentrica** aex θ sau Aex α), rezultând, astfel, o funcţie de funcţie (denumită, mai nou, funcţie compusă) pentru a evada din universul mai sărac al funcţiilor **centrice** în universul, mult mai bogat, al funcţiilor **excentrice**. Pentru funcţiile anterior exprimate, se obţin funcţiile supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) de variabilă excentrică şi, respectiv, centrică.

Supermatematica (**SM**) putea fi demult descoperită dacă, la exprimarea funcţiilor trigonometrice, ca funcţii circulare, repetăm, pentru că "repetiţia este mama invăţăturii": **Euler** n-ar fi ales **trei puncte confundate**: centrul **C** al cercului trigonometric, **originea O** a unui reper cartezian drept şi **polul E** al unei semidrepte variabile.

Dacă **O ≡ C ≠ E** se obţin funcţiile supermatematice (**FSM**) **circulare excentrice** (**FCE**). Dacă **C ≠ O ≡ E** se obţin **FSM** circulare **elevate** (**FCEl**), iar dacă toate cele 3 puncte sunt distincte, se obţin cele mai generale **FSM** denumite **FSM circulare exotice** (**FCEx**), aşa cum se arată în schema urmatoare:

$$(\mathbf{SM})\quad \begin{cases} Mat.centric\breve{a}\ (MC) \Rightarrow C \equiv O \equiv P \Rightarrow & Func\c{t}ii\ \ CENTRICE\ (FC) \\ Mat.excentric\breve{a}\ (ME) \Rightarrow \begin{cases} C \equiv O \neq S \Rightarrow & Func\c{t}ii\ EXCENTRICE\ (FE) \\ C \neq O \equiv S \Rightarrow & Func\c{t}ii\ \ ElEVATE\ (FEl) \\ C \neq O \neq S \Rightarrow & Func\c{t}ii\ EXOTICE\ (FEx) \end{cases} \end{cases}$$

Deoarece, coincidenţa / identicul este unică / unic, în timp ce diversitatea este infinită, rezultă că **FC** ale **MC**, fie ele circulare, hiperbolice sau de altă natură, sunt unice / singulare, în sensul că numai ele aparţin MC şi fiecare dintre funcţiile conţinute în MC are câte un singur membru, în timp ce, **ME** este mai diversificată, conţinind **trei tipuri** / clase de funcţii, fiecare tip fiind format dintr-o familie de funcţii cu o **infinitate** de membri.

Se observă, fără dificultate, că din **FCEx**, dacă distanţa **e** = $|OE| \to 0$ se vor obţine **FCEl**, iar dacă distanţa $|OC| \to 0$, atunci se vor obţine **FCE** şi, în fine, dacă atât distanţa $|OC| \to 0$, cât şi distanţa $|CE| \to 0$, atunci cele 3 puncte redevin confundate şi se vor obţine **FCC**. În consecinţă, ar rezulta că studiul **FCEx** ar fi suficient pentru a acoperi toate funcţiile matematicii excentrice. Concluzie adevarată, numai că, aceste funcţii sunt cel mai puţin utilizate, deocamdată, şi cele mai complicate ca expresii matematice. Procedănd astfel, aparatul matematic, pentru celelalte funcţii - FCE şi FCEl- mai frecvent utilizate s-ar încărca / complica în mod inutil.

Prin considerarea hiperbolei echilatere, în asociaţie cu cercul trigonometric, au fost definite şi **FSM hiperbolice excentrice**, **elevate** şi **exotice.**

Parafrazându-l pe **Philip Davis** şi pe matematicianul american, de origine română, **Isaac J. Schoenberg** **SM** *"conţine paradoxul delicios al Simfoniei Clasice a lui **Prokofiev**: pare ca şi cum ar fi putut fi descoperită în urmă cu multe secole, dar, fireşte, nu ar fi putut".*

Toate **FSM** se exprimă prin expresii analitice **invariante,** în funcţie de cele centrice, astfel că ele **nu necesită tabelarea** lor; tabelate fiind cele centrice.

Toate aceste familii de funcţii s-au dovedit deosebit de utile la soluţionarea unor probleme de complexitate foarte ridicată ca, de exemplu, exprimarea sub formă trigonometrică a sumei şi a diferenţei numerelor complexe, sau soluţionarea exactă a unor ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili şi respectiv la găsirea soluţiilor unor sisteme oscilante mecanice de caracteristică elastică neliniară, din care, pentru **e** =

0 (dar şi pentru **e = ± 1 !!**), se obţin soluţiile sistemelor **liniare, ş.a.**. Toate acestea fiind prezentate în cadrul prezentei lucrări.

SM survolează spaţiile superioare ale tuturor disciplinelor ştiinţifice şi tehnice şi produce la baza lor un **tsunami** (solitoni) care sfidează şi spulberă graniţele dintre ele. Pentru fiecare punct S(s, ε), din planul cercului unitate, de coordonate polare **(s, ε)** sau carteziene **(s_x, s_y)**, pentru x = θ (modulo 2 π), y = α (modulo 2 π) si z = ε (modulo 2 π) - obţinem o altă formă a funcţiei; o infinitate de funcţii sinus excentrice cu una şi aceeaşi expresie matematică. Pentru Abs [s] < 1, **FSM-CE** sunt continue. Pentru Abs[s] > 1, sau e > R, funcţiile **SM**, de variabilă excentrică θ, există numai în domeniul în care, dreapta excentrică **d**, turnantă în jurul punctului excentric **S**, în acest caz, un excentru exterior cercului unitate, **intersectează** cercul unitate.

Pentru a avea **FSM-CE** continue, pe toată axa reală, pentru s ∈ (- ∞, +∞) au fost definite şi **FSM-CE** de **variabilă centrică** y = y(x) = α(θ) (mod.2π).

Pentru evitarea confuziilor, această familie de funcţii se notează cu prima literă mare / majusculă. Astfel, cosinusul excentric, de variabilă centrică **α** sau **y**, este notat cu **Cex**($\alpha_{1,2}$; **S**) sau **Cexy**$_{1,2}$ şi sinusul excentric de variabilă centrică este **Sex**($\alpha_{1,2}$; **S**) sau **Sexy**$_{1,2}$. Aceste funcţii s-au obţinut prin înlocuirea variabilei independente **θ** sau **x** cu o nouă variabilă independentă **α** sau **y** şi a variabilei dependente α(θ) sau y(x) cu variabila dependentă θ(α) sau x(y), ale cărei expresii invariante sunt:

(1.37) $$\theta(\alpha_{1,2}, S) = \alpha_{1,2} \pm \beta_{1,2} = \alpha_{1,2} \pm \arcsin\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}}$$
$$= \alpha_{1,2} + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{Rex\alpha_{1,2}} = \mathbf{Aex}\alpha_{1,2}$$ şi

(1.38) $$x(y_{1,2}, S) = y_{1,2} \pm \beta_{1,2} = y_{1,2} \pm \arcsin\frac{s.\sin(y_{1,2}-z)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(y_{1,2}-z)}} =$$
$$= y_{1,2}\ \arcsin\frac{s.\sin(y_{1,2}-z)}{Rexy_{1,2}} = \mathbf{Aexy_{1,2}}$$

Se obţine:

(1.39) $$\mathbf{Sex}(\alpha_{1,2}; S) = \mathbf{sin}\,[\theta(\alpha_{1,2})] = \sin\alpha_{1,2}.\cos\beta(\alpha_{1,2}) \pm \cos\beta(\alpha_{1,2}).\sin\alpha_{1,2} =$$
$$= \mathbf{sin}\,\alpha_{1,2}.\arcsin\frac{1-s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{Rex\alpha_{1,2}} \pm \mathbf{cos}\alpha_{1,2}\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}} =$$
$$= \frac{\sin\alpha_{1,2} - s.\sin[\alpha_{1,2} \mp (\alpha_{1,2}-\varepsilon)]}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}} = \frac{\sin\alpha_{1,2} - s.\sin[\alpha_{1,2} \mp (\alpha_{1,2}-\varepsilon)]}{Rex\alpha_{1,2}}$$

Între două puncte, oricât de apropiate, dar fără a fi confundate, există o infinitate de alte puncte. Tot aşa, între două curbe diferite, concentrice, de exemplu o mică elipsă în centrul unui mare dreptunghi sau, transformatele afine ale acestora, un mic cerc în mijlocul unui pătrat de mai mari dimensiuni, există o infinitate de alte curbe închise. Funcţiile **SM** ne oferă posibilitatea de-a « umple » **continuu** acest spaţiu plan, cu o infinitate de curbe noi, denumite **excentrice** (în aceste cazuri, **eliptice** şi/sau **circulare**) Ecuaţiile parametrice ale acestor excentrice sunt:

(1.40) $\begin{cases} x = a.dex\theta \\ y = b.dex(\theta \mp \frac{\pi}{2}) \end{cases}$, dacă a = b = R şi **e** = 0 se obţine transformarea continuă a cercului, de raza R (pentru **e** = 0), în pătratul de latură L = 2R (pentru **e** = $\pm$1) şi dacă a $\neq$ b, se obţine transformarea continuă a elipsei (e = 0) în dreptunghi (e = 1).

Cercul şi pătratul (v.secţiuni prin conopiramidă, **figura 1.4, b**), ca şi elipsa şi dreptunghiul, sunt, astfel, **homografice**. Aceeaşi familie de curbe, denumite **quadrilobe** / **cvadrilobe**, se obţine cu urmatoarele ecuaţiile parametrice, în care **coq** şi **siq** sunt cosinusul şi sinusul **quadrilob**, denumiri introduse de autor [19] şi acceptate:

(1.41) $\begin{cases} x = \frac{cos\theta}{\sqrt{1-s^2sin^2\theta}} = coq\theta \\ y = \frac{sin\theta}{\sqrt{1-s^2cos^2\theta}} = siq\theta \end{cases}$, reprezentate în figura **1.5,a** cu $\begin{cases} x = R.coq\theta \\ y = R.siq\theta \end{cases}$,

în care R este variabil, în domeniul R $\in$ [0.5, 2,5], iar cuadrilobele **Alaci Valeriu** (**Fig. 1.5,b**) au introduse, în relaţiile anterioare, o rotaţie cu π/4 şi au raza **R** variabilă, pentru ca toate colţurile cuadrilobelor să treacă prin punctul A(1, 0).

Transformarea continuă a unor curbe închise în alte curbe închise, cum este exemplul prezentat al cuadrilobelor, cu ajutorul **FSM** este un succes de seamă al noilor complemente de matematică. Alte curbe, noi, pot umple continuu spaţiul dintre un cerc şi cele 2 triunghiuri isoscele, rezultate prin secţionarea în două a pătratului, circumscris cercului, prin una din diagonalele sale. Ele au fost denumite **trilobe**. Notând cercul cu ***C*** (O,R), pătratul centrat în **O** şi de latură L = 2R cu ***P*** (O, 2R) şi triunghiul isoscel, format dintr-o diagonală a pătratului şi două laturi ale acestuia, cu ***T*** (D, 2 x 2R), transformarile anterioare se poate scrie prescurtat:

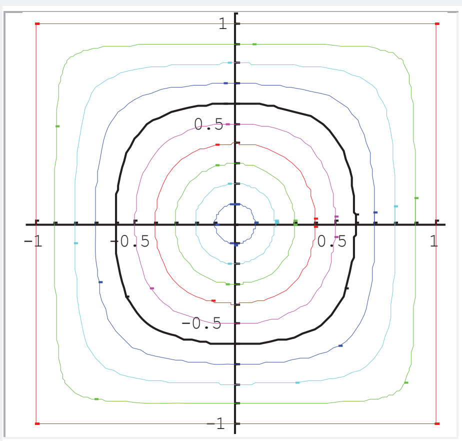


Fig. 1.5,a Cuadrilobe SM sau transformarea continuă a cercului în pătrat:
e = 0 ⇒ **CERC**, e = ± 1 ⇒ **PĂTRAT**

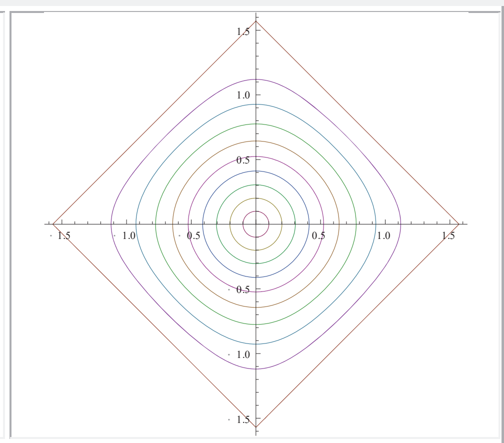


Fig. **1.5,b** Cuadrilobe **Valeriu Alaci** sau cuadrilobe **SM** rotite cu π / 4

www.SuperMatematica.ro, www.eng.upt.ro/mselariu, www.SuperMathematica.com, (1.42) $$\begin{cases} C(O,R) \overset{dex}{\underset{cex}{\rightrightarrows}} P(O,2R) \\ C(O,R) \rightrightarrows T(D,2*2R) \end{cases} \Rightarrow \} P(O,2R) \Rightarrow T(D,2*2R)$$, pentru a = b = 1.

Pentru a ≠ b se obţine transformarea continuă a elipsei ***E*** (a,b) în dreptunghiul **D**(a,b) sau în triunghiul oarecare **TO** (a, b, c) şi, în consecinţă, apare posibilitatea transformării dreptunghiului în triunghi oarecare, ceea ce, prescurtat, se poate scrie astfel :

(1.43) $$\begin{cases} \mathrm{E(a,b)} \overset{\mathrm{dex\theta}}{\underset{\mathrm{cex\theta}}{\rightrightarrows}} \mathrm{D(a,b)} \\ \mathrm{E(a,b)} \rightrightarrows \mathrm{TO(a,b,c)} \end{cases} \rightarrow \} \mathrm{D(a,b)} \Rightarrow \mathrm{TO(a,b,c)}.$$

Fiind vorba de limbaj, cum ar putea fi denumite **noile curbe,** rezultate în transformarea cercului în pătrat şi / sau a elipsei în dreptunghi sau a cercului în triunghi isoscel şi / sau a elipsei în triunghi oarecare **?**

Primele au fost denumite **cuadrilobe** [18. M. Şelariu, « QUQDRILOBIC VIBRATION SYSTEMS », The 11th International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, 2005], iar următoarele **trilobe**: deoarece, primele dispun de 4 lobi, iar ultimele de 3 lobi.

Nu toate curbele închise, cu un număr oarecare de lobi, fac parte din această categorie / familie de curbe **polilobe** sau **n**-lobe, ci numai acelea care au, la cele două capete ale transformarilor directe şi / sau inverse, **cercul** (**s** = 0) şi, respectiv, un **poligon** **perfect** (s =±1), nu neapărat şi regulat, ca în cazul cuadrilobelor.

Există multe alte curbe închise cu n lobi care, însă, nu sunt polilobe. Astfel, cu funcţia **Rex** (nα) se obţin curbe închise cu n lobi, care pentru s = 0 degenerează în cerc, dar, pentru s = ± 1 nu se obţine un poligon, ci se obţin roze cu n petale.

Denumirea de **excentrice**, dată noilor curbe, ce apar prin înlocuirea funcţiilor centrice cu cele excentrice, a fost dată de Prof. math. **Anton Hadnagy**, unul dintre matematicienii timişoreni cu vaste cunoştinţe şi mari perspective, ale cărui aripi s-au frânt mult prea brusc şi mult prea devreme. Entuziasmat de vastele aplicaţii ale noilor complemente de matematică el a “decretat”: “*Acum, tot ce ştim în matematică trebuie cuprins într-un domeniu denumit **CENTRIC** şi tot ce apare nou, graţie complementelor supermatematice, trebuie înglobat într-un domeniu denumit **EXCENTRIC*** “. Şi care, pentru e = **s** = **0**, il cuprinde şi pe cel centric.

Noul domeniu, rezultat prin reuniunea celor două domenii, a fost denumit **SUPERMATEMATICĂ (SM).** Deci **:** **SM = MC ∩ ME**

Dacă matematica a fost, cândva, numai un limbaj, ce se servea de o mulţime de simboluri şi aparţinea exclusiv etnosferei, ea s-a furişat /difuzat şi în lumea uneltelor, în care este folosită astăzi din plin, la soluţionarea multor probleme tehnice.

Matematica este **liantul** dintre cele două lumi noi, dintre etnosferă şi tehnosferă şi **forţa** sau **resortul** care le-a înălţat pe axa verticală a calităţii şi le-a marcat dezvoltarea continuuă a inteligenţei lor. Este germenele care a făcut posibilă dezvoltarea pe verticală a tehnosferei şi apariţia “copilului minune” al informaticii: **CALCULATORUL**. Apoi s-a nascut “**ROBOTUL**” - “operatorul în salopetă de oţel” (cum l-a denumit Prof. Dr. Ing. **Dolphi Drimer**) ca, mai târziu, să se dezvolte, impetuos, **MECATRONICA** şi **INTEGRONICA**, primele **sisteme artificiale inteligente** create de om.

Orice dezvoltare sau revoluţie dintr-un domeniu, de exemplu în **etnosferă**, atrage după sine dezvoltări şi revoluţii în tehnosferă, dar şi invers, condiţionându-se reciproc. Prin decantarea celor mai reuşite realizări, din cele două sfere şi prin organizarea lor superioară, **sinergetică**, au dat naştere celei de **a treia sfere**, aceea a sistemelor/dispozitivelor artificiale **inteligente**, cum sunt, aşa cum s-a aratat anterior, mecatronica şi, apoi, **integronica**.

E de necontestat că teoria relativităţii, a lui **Einstein**, a constituit un pas enorm în domeniul cunoaşterii ştiinţifice a universului în care trăim. Şi în care, în principiu, un sistem inerţial Oxy se deplaseaza cu viteza **v**, faţă de un alt sistem inerţial (sau considerat « fix », scris între ghilimele, pentru că în natură nimic nu-i fix: totul e în continuă mişcare..) O'x'y'. Astfel, încât **O'** se deplasează pe direcţia x şi distanţa **OO'** creşte proporţional cu produsul dintre viteza relativă **v** şi timpul **t**, adică cu $s = \mathbf{v}.\mathbf{t}$.

S-a considerat că timpul ar fi o a **patra** dimensiune a spaţiului (?). În realitate, **O'** este un **excentru** (pentru că a plecat, sau a fost expulzat, din centrul **O(0, 0)** la momentul **t = 0**) şi care se deplasează, pe direcţia $\varepsilon = 0$, direcţia axei x, cu distanţa **OO'**, care este, tocmai, o excentricitate **variabilă e** şi care creşte continuu, adică **O'** ≡ **E** (**e** = vt, **ε** = 0).

Excentricitatea variabilă este, sau poate fi, o **a patra dimensiune a spaţiului**; timpul neputând fi spaţiu şi nici spaţiul nu poate fi timp. Dacă, cele două sisteme se deplasează relativ, printr-o translaţie circulară, având şi o direcţie **ε** variabilă, atunci **ε** devine o a cincea dimensiune a spaţiului, sau $e_x = e.\cos \varepsilon$ şi $e_y = e.\sin \varepsilon$ sunt două noi dimensiuni variabile ale spaţiului, dacă planele xOy şi x'O'y' rămân confundate în timpul translaţiei, adică, **z' = z** în permanenţă. Dacă nu, apare o a şasea dimensiune variabilă a spaţiului $\mathbf{e_z = v_z.t}$, pentru translaţia sistemului **x'O'y'** pe direcţia **z**.

Pentru mai multe dimensiuni suplimentare ale spaţiului, acesta trebuie să se curbeze. Adică, traiectoria lui **O'≡ E** nu mai este liniară /**rectilinie** şi nici **circulară**, ci este o **curbă strâmbă** în spaţiu 3D. Schimbând continuu curbele strâmbe, savanţii pot multiplica progresiv, oricât, dimensiunile universului / spaţiului, cu ajutorul **FSM**.

Apariţia şi dezvoltarea teoriei relativităţii a dat aripi cercetării ştiinţifice, care a îndrăznit, în cele din urmă, să se extindă în spaţiul cosmic. Pentru a-l cuceri, sprijinită din plin de noua revoluţie a informaticii, de apariţia calculatoarelor electronice numerice, de trecerea de la semnale analogice la semnale numerice şi, nu în ultimul rând, de **îndrazneală,** care este cel mai bun « corăbier ».

1.5 DEZLEGAREA ENIGMEI MATEMATICE A MARII TEOREME A LUI FERMAT

Prin eforturi susţinute şi eşecuri repetate, într-o perioadă de peste 350 de ani, matematica a rezolvat « Marea teorema a lui **Fermat** ». Autorul (dar, mai precis, ar trebui spus autorii) care a dus la bun sfârşit acestă aventură a cunoaşterii, în mai 1995, este considerat **Andrew Wiles**, care a făcut, totodată, un mare pas înainte în teoria algebrică a numerelor.

Istoria acestui succes este descrisă de **Simon Singh**, care la pag. 209 [**Simon Singh**, « MAREA TEOREMA A LUI **FERMAT**, povestea unei enigme care a contaminat cele mai luminate minţi ale lumii vreme de 358 de ani », Ed. Humanitas, Bucuresti, 2005] afirmă că « **Matematica** e formată din **insule de cunoaştere** într-un **ocean de** **ignoranţă** ». Fiecare insulă aparţine unei « secte » : a geometrilor, analiştilor, algebriştilor ş.a.m.d. care dezvoltă limbaje noi, numai de ei ştiute, încât băştinaşii unei insule nu se mai înţeleg cu alţii de pe alte insule. Acest lucru scoate în evidenţă faptul că evoluţiile esenţiale în matematică s-au produs cu precădere în lumea etnosferei şi mai puţin în cea a tehnosferei. Matematica şi-a schimbat continuu **limbajul matematic**, pretinzând, de fiecare dată, că acum el este **mai adecvat**, fără să se muncească, cu aceeaşi râvnă, la multiplicarea **uneltelor matematicii**. Şi, este recunoscut, că matematica este, sau ar trebui să fie, un puternic **instrument** sau **unealtă,** cu ajutorul căreia omul să modeleze natura. **Simon Singh** afirma, în lucrarea lui, că la susţinerea conferinţei, cu privire la demonstrarea marii teoreme a lui **Fermat**, în lume nu existau mai mult de 6 (şase !) persoane care să înţeleagă, pe deplin, cele discutate. Ne referim la ecuaţiile eliptice, sistemele modulare, conjectura **Taniyama - Shimura** ş.a. Dacă se schimbă mereu limbajul şi nu unealta, cine să mai înţeleagă…., cine să mai îndrăgească…., cine să mai servească… matematica ?

Dar, inainte de-a servi matematica, trebuie să servim adevărul în matematică.

Din respect pentru adevăr, e necesar să amintim că aceeaşi teoremă a fost soluţionată şi de reputata matematiciană americană de origine română Dr. **Malvina Florica Baica**, profesor la Universitatea Wisconsin, membră a Academiei de Ştiinţe din New York, aşa cum se vor prezenta în continuare, relatările acestei **doamne a matematicii.**

"*Adevărul cu FLT (Fermat Last Theorem) sau Teorema mare (ultima) a lui **Fermat** este urmatorul:*

Teorema originară a fost expusa în Geometria Euclideana (EG).

*Cum nu se poate calcula într-o geometrie, se **inventează** Algebra geometriei respective. Algebra geometriei Euclidiene a fost inventată de **Gauss** şi este numită Algebraic Number Theory. Mai nou, în fiecare Algebră, există un rezultat major numit EULER SYSTEM (**ES**) în care, dacă se implementează corect condiţiile oricărui rezultat, ce se doreşte a fi demonstrat în algebra respectivă, acel rezultat devine o consecinţă a acestui **Euler** System (**ES**).*

*Ce a facut **Wiles** ? A folosit Algebra curbelor eliptice, adică (Elliptic Geometry-EG) descoperită de **E. Schmidt** în 1940 şi desvoltată de **Hecke** în zilele noastre şi a încercat să rezolve FLT în Elliptic (**ELFLT**), zicând că-i acelaşi lucru ca şi EFLT (teorema în Euclidean).*

*Acest lucru nu-i adevărat. Mai mult, el nu a rezolvat nici **ELFLT**. A folosit un **ES** pentru cazul n = 3, ca să demonstreze un caz general. Nu au putut să inventeze un **ES** pentru cazul general **n**. Dacă ar fi descoperit un **n**-dimensional **ES**, în Algebra Curbelor Eliptice, atunci ar fi demonstrat că EFLT este echivalentă cu ELFLT. Aşa că,* *nu s-a putut demonstra nici măcar echivalenţa. **G.Faltings** a abandonat **ES** şi a folosit deformaţiile, astfel demonstrând **ELFLT**, fără să demonstreze că sunt echivalente.*

*Prof. Dr. **Malvina Baica** a descoperit BGEA (**Baica**'s General Euclidean Algorithm – BGEA-), care a arătat că-i **ES** în algebra **GE** şi a demonstrat originala EFLT (în Euclidean).*

*Folosind solvabilitatea prin radicali, a demonstrat că ELFLT, demonstrată de **Faltings**, este echivalentă cu EFLT, demonstrată de **Baica**. Tot ea a demonstrat că nu-i acelaşi lucru, căci în Eliptic nu se poate demonstra cum se demonstrează în Euclidean, căci, pentru n = 2, sunt soluţii parametrice determinate prin fracţii continue, care-i Algorithmul lui **Euclid** original şi-i n = 2 în **B**GEA.*

În Eliptic nu se poate aplica cazul n = 2, din moment ce în Eliptic se începe numai cu n = 3 şi nu există cazul n = 2.

*IN CONCLUZIE, pentru restabilirea adevărului: **A.Wiles** a încercat să demonstreze ELFLT şi nu a reuşit, cu tot ajutorul lui **R.Taylor**. **G.Faltings** a rezolvat **ELFLT**, de unde s-a încurcat **A.Wiles**, cotind-o pe deformaţii ca să obţină modularitatea.*

*În timp ce, **Malvina Baica** a rezolvat*

1) în Euclidean (originala) EFLT,

2) a demonstrat că ELFLT este echivalentă cu EFLT şi

3) a demonstrat că nu sunt acelaşi, fiind în geometrii şi, ca atare, în algebre (Algebraic Geometries) diferite."

Matematica este cu siguranţă, pe lângă limbaj şi simboluri, totodată, şi **unealta**, fără de care ştiinţa n-ar fi putut să se dezvolte atât de impetuos şi apariţia dispozitivelor inteligente era de neconceput. În domeniul etnosferei, prin înmulţirea insulelor şi prin extinderea suprafeţelor lor, oceanul de ignoranţă s-a redus considerabil. Deşi pare de necrezut, în domeniul tehnosferei « **petele albe** » sau « oceanul ignoranţei » au rămas, fără exagerare, mai întinse decât în geografia dinainte de **Columb**. Astfel se explică de ce matematica actuală, pe care o denumim şi **centrică**, are doar dimensiune topologică **zero**, a unui punct, conţinut într-o suprafaţă, în timp ce noua matematică, denumită **excentrică**, ca şi **SM**, are dimensiunea topologică de **minimum doi**, a suprafeţei, în care, un punct, denumit excentru **E**, poate fi plasat şi deplasat.

La 3 noiembrie 1823, **Janos Bolyay** scria, la Timişoara:" **Din nimic am creat o nouă lume".** Cu aceste cuvinte a anunţat descoperirea formulei fundamentale a primei **geometrii neeuclidiene**. Tot la Timişoara, tot din nimic, pentru că un punct este nimicul de dimensiune topologica zero, în 1978, prin publicarea lucrării " **Funcţii circulare excentrice**", în care se arăta că fiecărui punct **E**(e,ε) din planul cercului trigonometric, denumit **excentru**, îi corespunde o matematică, s-a născut noua matematică, matematica excentrică (**ME**), care, asociată cu vechea matematică, matematica centrică, a dat naştere **supermatematicii** (**SM**).

La prezentarea acestei lucrari, în cadrul « Primei Conferinţe Naţionale de Vibraţii în Construcţia de Maşini », Prof. Em. Dr. Doc. Ing. **Gheorghe Silaş** a declarat: » **Tinere**, dumneata nu ai descoperit « **niște** » funcţii noi, ci o **nouă matematică, o**

supermatematică » . Şi profesorul emerit de mecanică şi vibraţii era, înainte de toate, profesor de matematică; vorbea în cunoştinţă de cauză.

Supermatematica s-a născut din efortul milenar şi disperat al omului de-a modela lumea, aşa cum este ea: **complexă şi neliniară** şi nu liniară şi simplistă.

SM este împlinirea visul matematicienilor de-a avea o infinitate de matematici şi de-a opera cât mai simplu cu ele şi, dacă este posibil, de-a renunţa la sistemele de referinţă. Şi, cu supermatematica (**SM**), acest lucru este parţial posibil !

SM nu mai face distincţie între liniar şi neliniar. **MC**, cu **e = s = 0**, este domeniul propriu sistemelor **liniare**, ideale, perfecte, în timp ce, **ME**, cu **s = e / R ≠ 0**, este domeniul sistemelor **neliniare**, reale, imperfecte. Rezultă că **SM**, ca reuniune, cuprinde atât liniarul cât şi neliniarul într-un **singur tot, fără graniţe.**

Dărâmarea zidului, care a existat de mii de ani şi atât de nepenetrabil, între liniar şi neliniar, este un alt succes de prestigiu al noilor complemente de matematică, reunite sub denumirea de **SM.** Neexistând, până în prezent, o matematică a neliniarului, rezolvarea problemelor neliniare era o adevarată artă; unealta matematică **centrică** trebuind să se modeleze special pentru rezolvarea fiecărei probleme neliniare în parte. Cel puţin aşa afirmă matematicienii.

Descoperirea trecerii **de la centric la excentric** în matematică este, fără exagerare, similară trecerii **de la geocentric la heliocentric** în cosmologie / cosmogonie; ambele domenii beneficiind de saltul uriaş de la unu la infinit.

Înlocuindu-se, de exemplu, în ecuaţiile parametrice ale diverselor curbe cunoscute, precum cerc, elipsă, parabolă, hiperbolă ş.a., pe care le numim **centrice**, funcţiile trigonometrice centrice **cosα**, **sinα** ş.a. cu cele excentrice **cexθ**, **sexθ**, ş.a se obţine o altă formă de curbă, denumită **excentrică**, pentru fiecare poziţie posibilă a excentrului **S** sau **E** în planul curbei. Se vor obţine o infinitate de **excentrice** circulare, eliptice, hiperbolice ş.a.m.d. şi, pentru e = 0, se va obţine curba generatoare, **centrică**, de la care s-a plecat.

Se deduce, că matematica centrică (**MC**) este un caz particular, de excentricitate nulă, a **SM** şi că matematica excentrică (**ME**) a **SM** are dimensiune topologică de **minimum 2**, în timp ce, matematica centrică are numai dimensiunea **topologică zero**, a unui punct (E ≡ **O** ≡ **C**).

În plus, la funcţii noi se obţin o infinitate de forme 2D sau 3D noi (vizibile pe www.supermathematica.org,**www.supermatematica.ro**; www.supermathematica.com; www.supermatematicaonline.blogspot.ro) dintre care, amintim obiectele geometrice hibride:

- **conopiramida**, (**Fig. 1.4**), care începe ca o piramidă cu baza un pătrat şi se termină ca un con circular drept, conopiramidă obţinută prin transformarea continuă a cercului în pătrat, cu funcţia **dexθ,** sau cu funcţiile cvadrilobe **coqθ** şi **siq θ**;
- **ţeava cilindro-pătrato-triunghiulară** la care, pe lângă transformarea anterioară, se adaugă şi transformarea continuă a cercului în triunghi, cu ajutorul funcţie cex**θ;** ş.m.a. care stau la baza unei noi metode de reprezentare a pieselor tehnice, denumită **SM - CAD / CAM** şi care permite desenarea, pur supermatematică, a oricărei piese tehnice (v. casa şi avionul). Cu avantajele majore, care derivă din

această acţiune şi care se referă la o enormă economisire de memorie; memorându-se doar expresiile matematice ale formei piesei şi nu imensitatea de puncte (pixeli) ce o alcătuiesc.

Aceaste complemente noi de matematici, reunite sub denumirea de **SM**, sunt unelte sau instrumente deosebit de utile, de mult aşteptate, dovadă fiind numărul mare şi diversitatea funcţiilor periodice introduse în matematică şi modul, uneori complicat, de a se ajunge la ele, aşa cum se prezintă situaţia în capitolul următor. Capitolul 2 a fost introdus, în prezenta lucrare, pentru **a releva multiplele contribuţii româneşti** şi străine la dezvoltarea matematicii şi pentru a sublinia, astfel, că prezentele complemente de supermatematică, introduse în matematică, sunt un fenomen firesc, normal.

1.6 CE NE OFERĂ MATEMATICA EXCENTRICĂ ŞI SUPERMATEMATICA

Pe lângă multiplicarea la infinit a tuturor funcţiilor centrice şi spulberarea graniţelor dintre liniar şi neliniar, pe lângă multiplicarea dimensiunilor spaţiului 2D şi 3D cu un număr oarecare, nelimitat, de dimensiuni şi obţinerea, prin hibridare matematică, a noi entităţi şi obiecte matematice, numite din această cauză hibride, anterior inexistente / necunoscute, mai sunt demne de etalat urmatoarele realizari :

A) ÎNTRODUCEREA / DESCOPERIREA ÎN MATEMATICĂ A UNOR FAMILII DE FUNCŢII PERIODICE NOI, DENUMITE SUPERMATEMATICE:

A1. Funcţii circulare excentrice de variabilă excentrică (cexθ, sexθ, texθ, rexθ, dexθ, aexθ, bexθ ş.a.) şi de variabilă centrică (Cexα, Sexα, Texα, Rexα, Dexα, Aexα, Bexα ş.a.), a celor **elevate** de variabila excentrică (celθ, selθ, telθ ş.m.a) şi de variabilă centrică (Celα, Selα, Telα ş.m.a), precum şi a celor **exotice** de variabilă excentică (cexoθ, sexoθ, texo θ ş.a) şi de variabilă centrică (Cexoα, Sexoα, Texoα ş.m.a). Pentru excentricitate nulă, toate aceste funcţii degenerează în funcţiile circulare (trigonometrice) centrice, clasice (cosα, sinα, tanα), iar rexθ şi dexθ degenerează în funcţiile circulare centrice noi (radθ şi derθ) care sunt funcţiile lui **Euler-Cotes**

(1.44) $\text{rad}\theta = \mathbf{e}^{i\theta}$ şi $\text{der}\theta = i.e^{i\theta}$.

Se observă, fără dificultate, că, astfel, matematica centrică (clasică, ordinară) devine un caz particular de $e = 0$ al supermatematicii.

A2. Funcţii hiperbolice excentrice de variabilă excentrică (cexhθ, sexhθ, texhθ, rexhθ, dexhθ ş.m.a.) şi de variabilă centrică (Cexhα, Sexhα, Texhα, Rexhα, Dexhα ş.m.a.), a celor **elevate** de variabilă excentrică (celhθ, selhθ, telhθ ş.m.a.) şi de variabilă centrică (Celhα, Selhα, Telhα ş.a.) şi a celor **exotice** de variabilă excentrică (cexoh, sexoh, texoh, rexoh, dexoh ş.m.a.) şi de variabilă centrică (Cexohα, Sexohα, Texohα ş.m.a.).

Pentru excentricitate nulă şi aceste funcţii degenerează în cele **hiperbolice centrice** (chα, shα, thα).

A3. Funcţii pe curbe închise necirculare, cum ar fi funcţii trilobe, cvadrilobe, polilobe ş. a., unele dintre acestea fiind prezentate anterior.

A4. Funcţii induse şi funcţii autoinduse, circulare şi hiperbolice, **centrice**, excentrice, elevate şi exotice prezentate în volumul II al lucrării. Exemple de astefel de funcţii sunt Asin[B.sin[C.sin[...G.sin[x]...]]], A.cex[B.cex[C.cex[...G.cex[θ]...]]] ş.m.a.

A5. Funcţii hiperbolice, parabolice şi **eliptice** definite în **funcţie de arcul cercului** unitate, **centrice** şi **excentrice** (Vol. II).

A6. Funcţii intratrigonometrice circulare şi hiperbolice (Vol. II), **centrice** şi **excentrice**, **elevate** şi **exotice**, care completează continuu spaţiul dintre funcţiile circulare directe **Euler** şi funcţiile pătratice ale lui **Alaci Valeriu**.

B. APLICAŢII MATEMATICE ALE FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE:

B1. Descoperirea şi introducerea în matematică a **excentricelor**, curbe plane noi, care multiplică la infinit curbele centrice corespondente (sau generatoare: cerc, elipsă, hiperbolă, spirale, cuadrolobe, polilobe ş. m. a.)

B2. Descoperirea şi introducerea în matematică a unor noi **transformări continue** a formelor obiectelor matematice, ca de exemplu: transformarea continuă a cercului în pătrat, a elipsei în dreptunghi, a cercului în triunghi dreptunghic echilateral şi a elipsei în triunghi dreptunghic oarecare, a elipsei în profile aerodinamice (**Jukowski**, **Carafoli** simetrice sau asimetrice), a sferei în cub ş. m. a.

B3. Descoperirea şi introducerea în matematică a ecuaţiilor parametrice ale triunghiului, pătratului, dreptunghiului cu sau fără colţuri rotunjite (quadrilobe / cvadrilobe); a cubului, piramidei cu baza un pătrat, sau alt poligon cu muchii rotunjite sau nerotunjite, a prismelor ş.m.a.

B4. Descoperirea şi introducerea în matematică ale **corpurilor 3D hibride** (cono-piramide, cilindri cu secţiune triunghiulară, pătrată, poligonală, cu colţuri ascuţite sau rotunjite, care se transformă continuu unul în altul, sau se transformă într-o secţiune circulară.

B5. Stabilirea unei dependenţe mult mai generale, decât dintre unghiul cu vârful pe cerc şi unghiul cu vârful în centrul cercului (caz obţinut pentru excentricitate s = -1), la dependenţa dintre unghiurile cu vârful plasat **oriunde în** planul cercului (în **S** sau **E**) şi unghiurile cu vârful pe cerc (în $\mathbf{W_{1,2}}$), dependenţă care este reprezentată chiar de funcţiile amplitudine excentrică de θ sau de α (aexθ şi, respectiv, Aexα)

B6. Determinarea unor relaţii de calcul, **oricât de exacte**, ale integralei eliptice complete de prima speţă **K(k)** şi tranformarea, implicită, a unei metode numerice (**LANDEN**) într-o metodă analitică, cu păstrarea avatajelor preciziei, specifice metodelor numerice şi a comodităţii relaţiilor analitice de calcul.

Relaţia de calcul, astfel obţinută, după numai 5 paşi, conţinând numai doi termeni simpli, asigură precizia de minimum **15 (cincisprezece !)** zecimale exacte, mai multe decât conţin tabelele din cartea de funcţii speciale a lui **Milton**

Abramowitz şi **Irene Stegun** "HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS with formulas, graphs and mathematical tables".

Precizia de 9 zecimale exacte este echivalentă cu considerarea a 162 de termeni în seria lui K(k). Prin continuarea paşilor, se pot obţine relaţii de calcul şi mai precise, iar metoda se poate extinde şi la alte aplicaţii, cum are fi integrala eliptică de speţa 2-a **E (k)** ş.m.a., la care s-a obţinut acelaşi grad extraordinar de ridicat de precizie.

B7. Soluţionarea unor ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul doi, cu coeficienţi variabili şi, respectiv, a unor sisteme mecanice oscilante cu caracteristică elastică neliniară cu **FSM** **cexθ** şi **sexθ** de variabilă excentrică şi / sau de variabilă centrică.

B8. Extinderea **FSM**, de la excentru E(e, ε) punct **fix** în plan (**e** şi **ε** - constante), la excentru mobil (**e**(**θ**) şi **ε**(**θ**) -variabile) şi la **FSM** de dublă, triplă şi multiplă excenticitate.

B9. Extinderea **FSM** de la funcţii circulare la funcţii hiperbolice excentrice, elevate şi exotice.

B10. Introducera funcţiilor matematice de transfer informational.

B11. Descoperirea şi introducerea în matematică a funcţiilor excentrice pseudohiperbolice.

B12. Descoperirea şi introducerea în matematică a domeniului FRACTALELOR TRANSFORMISME (DINAMICE) prin repetarea nu identică a reproducerii curbelor matematice, ci prin repetarea lor cu modificări progresive, abia vizibile, posibile prin modificarea continuă a excentricitaţii **e** şi / sau a direcţiei **ε**.

B13. Descoperirea proprietăţii funcţiilor **rexθ** şi **Rexα** de a reprezenta ecuaţiile tuturor curbelor plane cunoscute, ca şi a multora noi, prin observarea faptului că ele reprezintă, în coordonate polare, expresia distanţei dintre două puncte în plan.

B14. Exprimarea, în premieră, a formei trigonometrice a sumei şi a diferenţei numerelor complexe, cu ajutorul funcţiilor **rex*θ*** şi / sau **radα** şi **derα**.

B15. Întroducerea în matematică a funcţiilor **rad*α*** **şi** **der*α*** (funcţii **Cotes-Euler**) ca funcţii centrice corespondente, a celor excentrice **rexθ** şi **dexθ**. Fazorii **radθ** şi derθ fiind derivata şi, respectiv, integrala celuilalt fazor.

B16. Descoperirea şi introducerea în matematică a unei **noi metode de integrare**, denumită prin **divizarea diferenţialei** şi stabilirea derivatelor şi integralelor unor FSM.

B17. Exprimarea cu **FSM** a sumei unor serii matematice, a căror sumabilitate nu s-a cunoscut, până în prezent, pentru că nici **FSM** respective nu erau cunoscute.

B18. Reprezentare epi- şi hipo cicloidelor cu funcţia **Rex(n.α, S(s,ε)).**

B19. Stabilirea faptului că **FSM**, reprezintând suma unor dezvoltări în serie, realizează operaţia inversă a dezvoltării în serie (de exemplu **Fourier**), de sumare a acestora. Adică, de la o serie cu o infinitate de termeni se poate trece la o relaţie exactă cu numai doi termeni.

B20. Produsul celor două determinări ale funcţiei **rex(θ, E)** reprezintă puterea unui punct (a excentrului **E**) faţă de cerc şi poate înlocui teorema coardelor, teorema secantelor şi teorema tangentelor (Cap. 4,§ 4.2.3).

B21. Inversa funcţiei **Rex(α,E)** reprezintă funcţia generatoare a polinoamelor **Legendre**. Prin schimbarea variabilei centrice **α** cu cea excentrică **θ**, sau a lui **Rex(α,E)** cu rex(θ,E), se realizează o schimbare de variabilă în polinoamele **Legendre** şi se obţin expresii cu mult mai simple.

B22. Inversa funcţiei Dexα reprezintă funcţia generatoare a polinoamelor **Cebâşev**.

B23. Pentru θ şi ε variabile, se obţin funcţii dublu periodice.

B24. Pentru θ variablă independentă şi excentricitatea e/s un parametru constant, iar ε variabil (**E** se roteşte în jurul unui punct, ca de exemplu în jurul originii şi centrului cercului O) se obţine o mişcare pendulară a unui punct pe cerc, mişcare denumită a pendulului **supermatematic**.

B25. Cele două determinări (principală -1 şi secundară - 2) ale FSM rexθ sunt, totodată, cele două rădacini (soluţii) ale ecuaţiilor algebrice de gradul 2.

C. APLICAŢII ALE SUPERMATEMATICII IN INFORMATICA ŞI ÎN PROGRAMARE:

C1. Dezvoltarea unui nou procedeu denumit **SM-CAD/CAM**, de generare şi vizualizare a suprafeţelor pieselor tehnice şi de programare a generării lor pe maşini-unelte cu CNC. Procedeul se bazează pe facilităţile pe care le asigură noua matematică (**SM**) la definirea numerică a suprafeţelor complexe denumite "**nematematice**", anterior descoperirii **FSM** (v. procedeul UNISURF a lui **P. Bezier** de definire numerică a acestor suprafeţe).

Prin saltul de la unu la infinit, realizat de **SM**, aproape toate suprafeţele "**nematematice**" **devin matematice**, sau, mai precis, **supermatematice**.

C2. Realizarea unor programe de reprezentare şi simulare a unor mecanisme mecanice şi a mărimilor cinematice şi dinamice ale acestora.

C3. Realizarea unor programe de simulare a cinematicii şi ale mărimilor dinamice ale oscilaţiilor sistemelor mecanice neliniare (descrierea curbei integrale din planul fazelor $V_x(x)$ şi $V_y(y)$ şi a caracteristicilor elastice statice neliniare (CES), pentru diverse valori ale excentricităţii **e**, rezultând **3 sisteme** de caracteristică elastică liniară, pentru e = 0 (normal, **e** = 0 fiind domeniul funcţiilor centrice, ideale, liniare), dar şi pentru **e = +1** şi **e** = **-1**, cazuri în care, punctul de masă **m** se opreşte, o jumatate de perioadă, la una dintre extremităţile cursei de oscilaţie şi care corespund **sistemelor oscilante Cebâşev**.

C4. Realizarea unui program de proiectare a camelor cu **FSM** pentru îmbunătăţirea calităţii mişcării (marirea cronosecţiunii, de exemplu, fără transformări proiective) şi reducerea acceleraţiilor maxime. O astfel de camă echipează deja o maşină de indreptat bare şi de sudat plase de sârmă, fabricată de **S.C. Electrotimiş** din Timişoara, la care alte tipuri de came au dat greş.

D. APLICAŢII TEHNICE ALE FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE:

D1. FSM rexθ este funcţia universală de transfer de ordinul 0 (a poziţiei) şi **dexθ** - funcţia universală de transfer de ordinul 1 (a vitezelor sau a turaţiilor) **tuturor mecanismelor plane cunoscute.**

D2. FSM-CE rexθ, rex'θ, rex''θ sunt expresile **exacte** ale cursei, vitezei şi, respectiv, ale acceleraţiei **mecanismelor bielă-manivelă**, centrice şi excentrice.

D3. FSM-CE rexθ transformă elipsele (centricele eliptice) în profile **Joukovski** (care sunt denumite, acum, **excentrice eliptice**), **Carafoli**, ş.m.a. şi reprezintă, totodată- prin Rexα, de excentricitae egală cu pătratul pulsaţiei normate, expresia rigidităţii dinamice a sistemelor mecanice oscilante liniare şi neliniare.

D4. Inversa **FSM-CE** Rexα reprezintă, totodată, expresia complianţei dinamice sau răspunsul în frecvenţă ale sistemelor vibrante.

D5. Descrierea cu **FSM-CE** rexθ şi / sau **Rexα** a traiectoriilor roboţilor industriali cu module de rotaţie (Tip RRTR).

D6. Introducerea în mecanică a "**mişcării circulare excentrice**", o mişcare neuniformă a mobilului pe cerc, mişcare condusă din excentrul **E**(e,ε).

În lipsa perfecţiunii sistemelor reale, toate sistemele considerate cu mişcare circulară (**centrică**) sunt, de fapt, mai mult sau mai puţin**, excentrice**. De aceea, domeniul (sistemele) **excentric** este al sistemelor reale (**neliniare**), iar cel **centric** al sistemelor ideale (**liniare**). Din aceste cauze, matematicile centrice n-au putut soluţiona, decât cu mari dificultăţi şi complicaţii, sistemele reale neliniare. Nu de la liniar se ajunge la neliniar, cum ne-am fi aşteptat, ci exact invers: liniarul este un caz particular, de **e = 0**, al neliniarului, adică **centricul este un caz particular al excentricului**; idealul este un caz particular al realului. Dacă el exista !?

Pentru **e** = 0, mişcarea circulară excentrică devine centrică, arhicunoscută.

Dacă cercul şi pătratul au aceleaşi ecuaţii parametrice (x = dex(θ), y = dex(θ ± π / 2)), pentru **e** = **s** = 0 obţinându-se cercul şi pentru **s** = 1 sau **s** = -1 obţinăndu-se pătratul cu colţuri în unghiuri riguros drepte, se conchide că **cercul** este un caz particular al **pătratului** şi nu invers: perfecţiunea fiind un caz particular (teoretic- ideal, **matematic** posibil, dar practic prea puţin atins, dacă nu chiar deloc) al imperfecţiunii.

Pornind de la pătrat, prin micşorarea excentricităţii **s** de la 1 la 0, se obţin colţurile rotunjite ale pătratului, astfel că, la **s** = 0, raza de rotunjire este exact jumatate din latura pătratului.

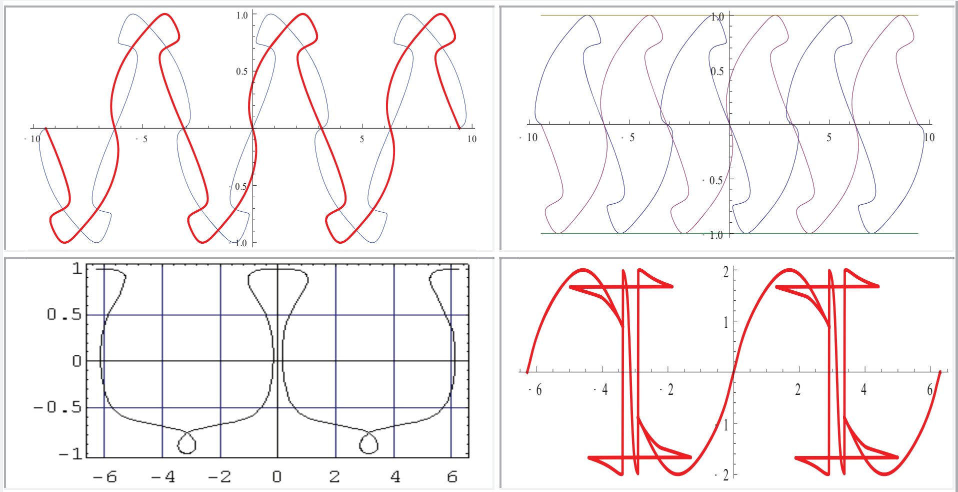


Fig. 1.6 Funcţii unicursale reprezentate cu funcţii supermatematice

www.SuperMatematica.ro, www.eng.upt.ro/mselariu, www.SuperMathematica.com,

D7. Reprezentarea semnalelor dreptunghiulare cu **FSM-CE** dexθ de e = ±1, care poate înlocui funcţiile **Rademacher** rad(n, θ) şi wal(m, θ) utilizate la prelucrarea numerică a semnalelor. Totodata, se vor elabora ecuaţiile unor semnale (curbe unicursale) ce nu pot fi obţinute cu matematica actuală, centrică. Astfel de exmple, sperăm concludente, a fost prezentate în **figură 1.6**.

D8. Utilizarea **FSM-CE dex(nθ, e =1)** la eşantionarea semnalelor (în locul funcţiei **Hevisaid**);

D9. Dezvoltarea unui nou mod de reprezentare exactă a vibraţiilor sistemelor liniare cu amortizare vâscoasă, prin care diagrama polară (locul geometric al fazorului amplitudine / complianţă) a receptanţei devine **riguros exact un cerc**, prezentând şi multe alte avantaje faţă de metodele actuale, pentru care, la frecvenţe mici, abaterile de la circularitate sunt foarte mari.

Noul mod de reprezentare, permite exprimarea amortizării, prin lărgimea de bandă şi pentru sistemele cu amortizare foarte mare, a căror amplitudine maximă normată (raportată la amplitudinea statică) ca funcţie de amplificare, în sistemele actuale, pare a fi în origine (la frecvenţa / pulsaţie normată nulă) şi de ordonată egală cu unitatea, sau cu deformaţia statică, dar care, în realitate, este doar un punct de trecere (nod) al famililor de curbe, ale căror maxime sunt situate la o abscisă de pe **axa** $\chi = \frac{\omega}{\omega_0}$ **negativă** (**!!**).

Ce însemnă frecvenţă negativă ?

Dacă, pentru o rotaţie în sens sinistrorum / levogin sau trigonometric, frecvenţa este considerată pozitivă, atunci la schimbarea sensului de rotaţie în sensul dextrorum/dextrogin sau invers trigonometric se obţin frecvenţe negative.

D10. Amplitudinea elastică - componenta reală a receptanţei **Re(x)-** în funcţie de pulsaţia normată, sau de raportul dintre pulsaţia de excitaţie şi pulsaţia proprie, a sistemelor liniare cu amortizare vâscoasă, este dată de **FSM-CE cosinus elevat - cel(θ).**

D11. Amplitudinea absorbtivă - componenta imaginară a receptanţei **Im(x)** - a asistemelor vibrante, anterior menţionate, sunt exprimate de **FSM-CE sinus elevat - sel(θ)**.

D12. **FSM-CE** oferă posibilitatea "teleportării "mecanismelor din domeniul tehnic în cel matematic; între mecanismele tehnice şi cele matematice existând o similitudine perfectă. Cândva, matematica şi mecanica formau un tot unitar. Se va revenii ?

D13. **FSM-CE**, împreună cu o nouă metodă, dezvoltata de autor, denumită **METODA SEPARĂRII** (**FORŢELOR** şi a) **MOMENTELOR** (pe scurt **MSM**), o metodă de cinetostatică geometrică, prin care soluţionarea sistemelor de ecuaţii de echilibru **d'Alambert** se reduce la o problemă de geometrie (plană, pentru sisteme solicitate de forţe plane sau reductibile la acestea, iar pentru sisteme 3D la matrici partiţionate), permite soluţionarea **exactă, rapidă, simplă şi intuitivă** a tuturor sistemelor mecanice.

Prin MSM, o serie de elemente şi sisteme mecanice cunoscute (pană, pârghie, excentric, plunjer, etc) obţin relaţii ale funcţiilor de transmitere (transfer) a forţelor (şi, prin aceasta, a tuturor celorlalte funcţii de transfer) **exacte**, fără scrierea şi soluţionarea ecuţiilor de echilibru, ci pur şi simplu pe cale pur geometrică, elementară, mai simple şi mai uşor de manipulat în cadrul sistemelor complexe, iar pentru unele elemente şi sisteme, pentru care astfel de expresii exacte nu erau cunoscute până în prezent, în literatură, acum se pot determina, fără dificultate.

MSM se poate aplica fiecărui element în parte, al unui sistem, dar şi **sistemului în ansamblul lui** .(v.Cap. 8)

D14. **FSM** pot descrie figurile de interferenţa ale cristalelor biax.

D15. **FSM** pot descrie caracteristici elastice statice neliniare de orice tip (moi - regresive, tari - progresive sau combinate) cu **FSM-CE texθ**, precum şi o serie de curbe de histerezis şi de modele reologice.

D16. **FSM** pot **descrie suprafeţele complexe ale pieselor tehnice**, [v. **Mircea Şelariu**, **DISPOZITIVE DE PRELUCRARE**, Cap 17 din PROIECTAREA DISPOZITIVELOR, E.D.P, Buc., 1982, coordonator **Vasii Sanda Roşculeţ**], servind, deja, la prelucrarea acestora cu directoare programată pe calculator. Un mare număr de corpuri de legatură ale pieselor se descriu cu ajutorul **FSM**, care realizează diverse transformări continue a unei forme în altă formă matematică şi, totodată, tehnică.

D17. **FSM**, descriind profilele aerodinamice şi hidrodinamice, aidoma excentrelor eliptice, au fost concepute dispozitive şi maşini-unelte de generare, cu directoare cinematică şi / sau programată, a suprafeţelor complexe ale unor piese prin operaţii de strunjire, frezare, rectificare ş.a., astfel că, manopera îndelungată şi costisitoare, altfel necesară, de exemplu, după realizarea paletelor de turbină pe maşini-unelte CNC, să se elimine complet.

D18. **FSM** au sugerat posibilităţile realizării unor sisteme tehnologice de prelucrare pe **principii complet noi**. La baza acestor procedee se află generarea unor curbe de rostogolire de tip cicloidale (cele normale obţinându-se, prin definiţie, fără alunecare) dar noile curbe (**excentrice cicloidale**) se obţin cu alunecare controlată. În acest mod, cu două motoare, eventual pas-cu-pas, comandate de un calculator, pot fi generate, cu directoare cinematică (sau obţinute cu directoare programată pe maşini-unelte CNC), toate curbele plane cunoscute.

Tot astfel, pot fi obţinute **mese turnante**, a căror axă de rotaţie poate fi teleportată şi localizată **oriunde**, într-un plan perpendicular pe axa de rotaţie.

Pot fi realizate şi mese, cunoscute sub denumirea de **tripod şi hexapod**, cu trei şi, respectiv, cu şase grade de libertate, trei translaţii şi trei rotaţii, cu ajutorul cărora, un obiect poate fi poziţionat (localizat şi orientat) oricum în spaţiul 3D.

Tipic descoperirilor de până acum, afirma savantul anglo-sovietic **Kapitza**, este că valoarea unor descoperiri, deşi importante, este recunoscută de abia după 20...30 de ani. În România, această perioadă este cu mult mai lungă. Noi am aşteptat peste **35** de ani, timp în care **SM** s-a îmbogăţit cu **FSM** circulare şi hiperbolice, elevate şi exotice, de excentru **E** punct fix sau punct **variabil**, ce evoluează pe o anumită curbă, după anumite legi, cu **FSM** de variabilă centrică, cu **FSM** de **dublă excentricitate** şi de **excentricitate** multiplă, precum şi cu o pleiada de aplicaţii dintre cele mai importante, dacă e să amintim doar **SM-CAD / CAM** şi **fractalele dinamice**, iniţiate de noi şi **haosul excentric** al Prof. Dr. Math**. Emilia Petrişor**.

În acest domeniu, sunt publicate peste 40 de lucrari ştiintifice, scrise de peste 30 de autori. Noi ne considerăm **schilozii** care şchioapătă pe un **drum drept şi bun şi suntem convinşi** că vom întrece trăpaşii care zburdă pe un **drum greşit**.

Dar, considerăm că n-ar fi "**fair play**" să aşteptăm finalul şi ne-am hotărât să vă desvăluim acest drum **simplu şi drept**, motiv pentru care ne-am adresat **Dvs**., prin intermediul acestei cărţi. Fiind convinşi că aveţi un ascuţit simt al umorului, şi o neţărmurită dragoste faţă de matematică şi faţă de tot ce este nou în ştiinţă şi tehnologie, ne-am luat permisiunea să vă sugerăm amintirea păţaniei lui **Napoleon** cu **Fulton** şi, bazaţi pe disponibilitatea Dvs., în apreciarea noii realităţi, aşteptăm, cu mare încredere, să contribuiţi la extinderea suprafeţei « insulei **SM** » în **oceanul ignoranţei** şi, eventual, la o posibilă colaborare într-un viitor apropiat.

Pentru orice informaţii suplimentare şi observaţii, vă stăm cu cea mai mare plăcere la dispoziţie. Noi am facut un prim pas. **Un pas mic**...

CONSTATARE

Toate beneficiile rezultate din descoperirea noilor **fucţii super-matematice**, etalate anterior, pălesc faţă de constatarea că **excentricitatea**

constitue o nouă dimensiune a spaţiului: minimum a treia, pentru spaţiul bidimensional 2D şi cel puţin a patra, pentru spaţiul tridimensional 3D.

Excentricitatea este aceea care deformează spaţiul şi forma obiectelor din acesta, transformând un tip de obiecte centrice în alte tipuri de obiecte centrice şi făcând posibilă, în domeniul **excentric**, apariţia obiectelor **super-matematice** hibride, printr-o operaţie denumită de **hibridare matematică** (amănunte în Vol. II al lucrării).

****

E consternant cât de simplist pot să gândească unii, aşa-zişi specialişti, care declară, fără jenă, că dacă o funcţie, ca unele dintre funcţiile supermatematice şi nu numai, cum ar fi **cexθ**, **sexθ**, ş.m.a., se pot exprima prin funcţiile **cosα**, **sinα**, **tanα** ş.a **pentru ei** nu mai prezintă niciun interes.

Extrapolând acest mod primitiv şi păgubos de gândire, rezultă că nici funcţiile trigonometrice centrice **cosx, sinx, tanx** ş.a. nu prezintă niciun interes, deoarece ele se pot exprima prin argumentul x la diverşi exponenţi, numere întregi şi prin factorialele (!) aceloraşi numere întregi.

E oare suficient să se cunoască doar numerele întregi, (singurele cunoscute într-o anumită perioadă (pre)istorică, de foate mult apusă) pe x şi semnul factorial ? A, mai sunt necesare şi semnele **+** , **−** şi !

Funcţiile hiperbolice shx, chx ş.a se exprimă şi ele în funcţie de cele circulare centrice, prin expresiile

(1.45) ch x = cosix, i.sh x =sinix.

Le eliminăm din matematică ? De ce să nu eliminăm si **FCC cosα** şi **sinα** şi să păstrăm doar funcţile **Euler – Cotes** e^{ix} şi e^{-ix}, cu care aceste se pot exprima:

(1.46) $\cos x = 0,5(e^{ix} + e^{-ix})$ şi $\sin x = 0.5\,(e^{ix} – e^{-ix})$?

Toate **integralele şi funcţiile speciale** ar trebui eliminate din matematică, pentru că şi ele se pot exprima cu ajutorul **FCC** cosα şi sinα. S-ar elimina **integralele eliptice** K(φ,k), E(φ,k), D(φ,k), **funcţiile eliptice Jacobi cn(u), sn(u)** şi **dn(u)** şi toate **funcţiile Theta**, definite ca sume de serii trigonometrice ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4, ca de exemplu

(1.47) $\vartheta_3\ (u) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}.cos2nu.$

Ce să mai caute în matematică **funcţia lui Lobacevski**

(1.48) $L(x) = x.\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{sin2kx}{k^2}$, dacă se exprimă printr-o serie de funcţii sinus ?

Şi exemplele ar putea continua, frizând ridicolul şi, totodată, absurdul pentru că s-ar ajunge ca matematica să se nege pe sine.

Sperăm să fi fost corect înteleşi.

Mircea Eugen Şelariu

selariume@gmail.com
selariu_m@yahoo.ro

1 INTRODUCERE

Pentru utilizarea integrală şi raţională a spaţiului şi pentru a începe capitolele pe pagini impare, vă prezentăm unele desen realizat cu **FSM**-CE, vizibile şi pe website-urile

www.supermatematica.ro; www.supermathematica.org; www.supermathematica.com;
www.supermatematicaonline.blogspot.ro

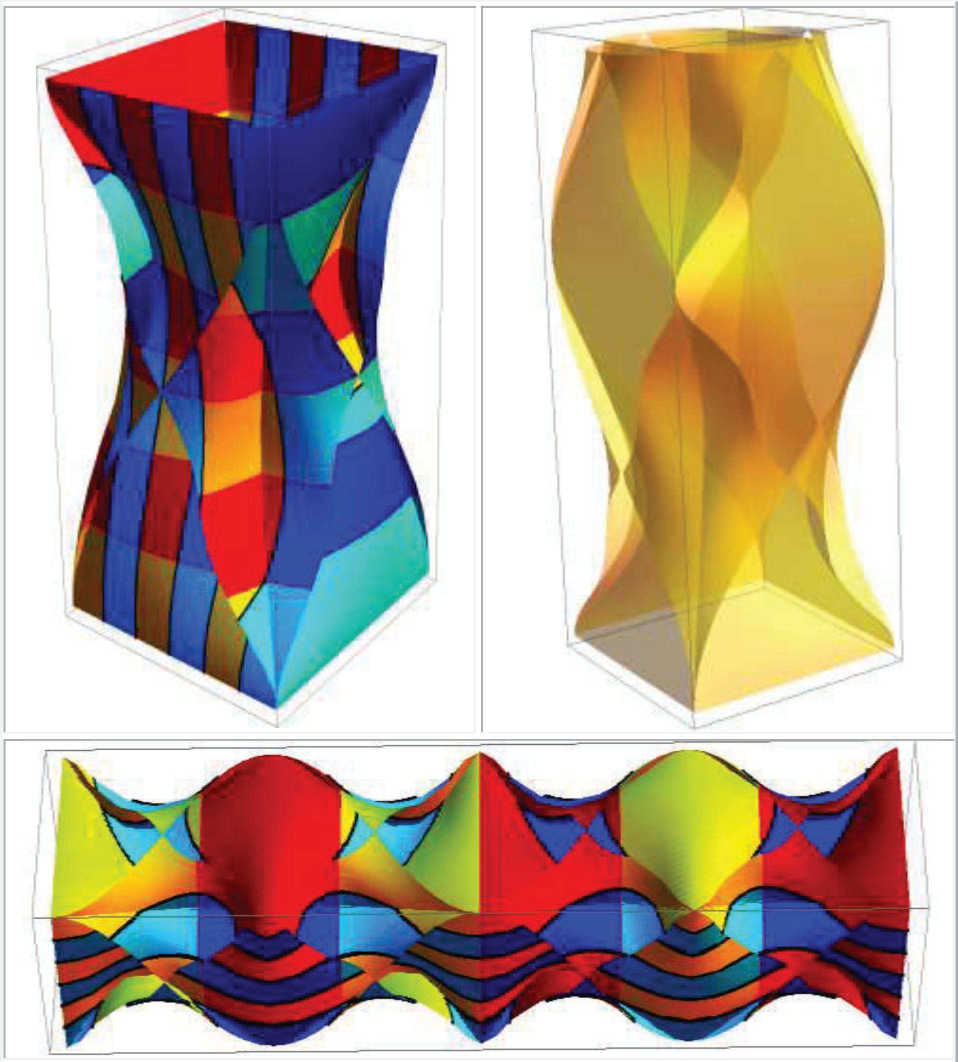


Fig. 1.7 Vaze de flori ↑ şi coloane ↓ realizate cu **FSM**-CE

www.SuperMatematica.ro; www.supermathematica.org; www.SuperMathematica.com

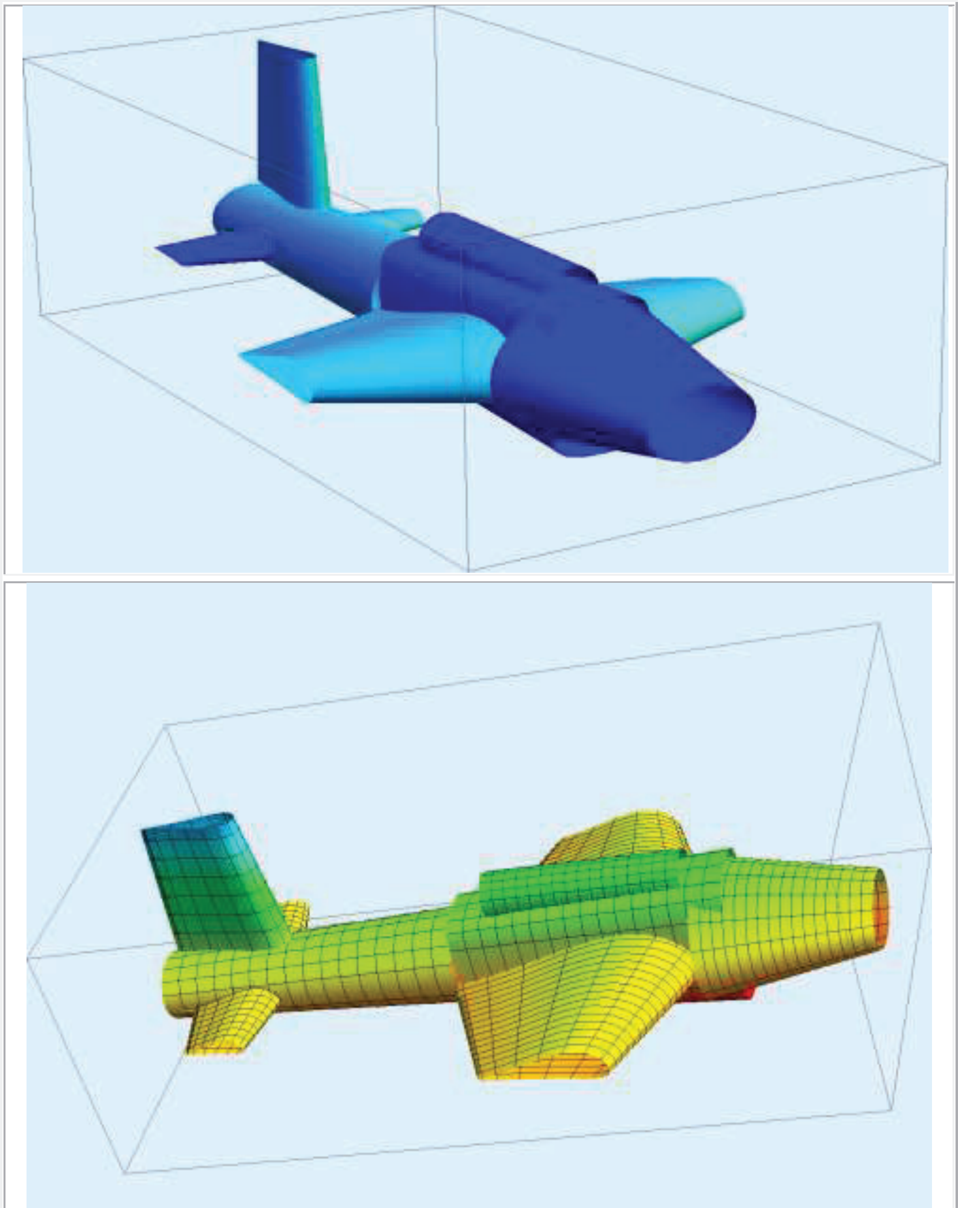


Fig. 1.8 Avioane desenate cu **funcţii supermatematice** (**FSM**-**CE**)

www.SuperMatematica.ro; www.supermathematica.org; www.SuperMathematica.com

Motto :” După ce a descoperit celebra sa teoremă, **Pythagoras a** sacrificat o sută de boi. De atunci, de fiecare dată, când se descoperă vreun **adevăr nou**, vitele cornute mari au mari palpitaţii.
(**Ludwig Björne**)

2. DIVERSIFICAREA FUNCŢIILOR PERIODICE

2.1 Contribuţii mai recente la diversificarea funcţiilor periodice, prin înlocuirea cercului unitate (trigonometric) cu alte curbe închise.

Experienţa pe care o deţinem, acum, ne permite să afirmăm, încă de la început, că această direcţie, pe care s-a căutat diversificarea funcţiilor periodice, s-a dovedit a fi un drum întortocheat, complicat şi, în final, închis.

Pentru obţinerea unor funcţii speciale şi periodice noi, s-a încercat înlocuirea **cercului** trigonometric cu **pătratul** sau cu **rombul**, aşa cum a procedat fostul şef al Catedrei de Matematică a Facultăţiia de Mecanică a Universităţii „**POLITEHNICA**” din Timişoara, profesorul universitar timişorean dr. mat. **Valeriu Alaci,** descoperind (definind şi introducând în matematica centrica **MC**) funcţiile **trigonometrice pătratice şi funcţiile trigonometrice rombice**.

Apoi, profesorul de matematici **Eugen Vişa** a introdus funcţiile **pseudo-hiperbolice**, iar profesorul de matematici **M.O. Enulescu** a definit **funcţiile poligonale**, înlocuind **cercul** cu un **poligon** cu n laturi; pentru n = 4 obţinându-se funcţiile trigonometrice pătratice **Alaci**.

În lucrarea matematicianului sovietic **Marcusevici** [SINUSURI REMARCABILE] sunt introduse funcţiile trigonometrice **generalizat**e şi funcţiile trigonometrice **lemniscate**.

Încă din anul 1877, matematicianul german **Dr. Biehringer**, substituind triunghiul dreptunghic cu unul oarecare, a definit şi publicat **funcţiile trigonometrice înclinate**.

Savantul englez, de origine română, ing. **George** (Gogu) **Constantinescu** a înlocuit **cercul** cu **evolventa** şi a definit **funcţiile evolventice**, denumite de el **funcţii trigonometrice româneşti**: cosinus **rom**ân**esc** **Cor**α şi sinusul **rom**ân**esc** **Sir**α, cu care a soluţionat, exact, unele ecuaţii diferenţiale, neliniare, ale **teoriei sonicităţii**, creată de el. Dar, prea **puţin** cunoscute tocmai în **România**. Toate aceste realizări vor fi prezentate succint în continuare. Dece ? Pentru a demonstra că şi în matematică, ca şi în natură, nimic nu-i imuabil, ci totul se transformă / evoluează, prin mici acumulări cantitative, de la simplu la complex, ducând la un brusc salt calitativ, salt care, în acest domniul, conduce de la **matematica centrică** (**MC**) la la **matematica excentrică** (**ME**) şi, totodată, la **supermatematică** (**SM**).

2.2 TRIGONOMETRIA PĂTRATICA ŞI TRIGONOMETRIA ROMBICĂ ALE LUI VALERIU ALACI

Profesorul Dr. Mat. **Valeriu Alaci** i-a urmat la şefia Catedrei de Matematici, profesorului **Traian Lalescu**, matematician de nivel mondial, primul rector şi întemeiator al **Şcolii Politehnice din Timişoara**, astăzi Universitatea „POLITEHNICA” din Timişoara.

În 1939 a publicat **„Trigonometria patratică”** cu funcţii pătratice, denumire pe care a atribuit-o unei clase de funcţii periodice, prezentate succint în continuare, prin care se pot exprima unghiuri abstracte şi funcţii trigonometrice din spaţii **Banach**, după aprecierea matematicienilor.

Fie pătratul **P ≡ ABA‘B’** înscris în cercul unitate (**Fig. 2.1,a**) de rază **R = OA = 1** şi o semidreaptă, turnantă în jurul polului **P,** situat în centrului de simetrie al pătratului **O**, care este şi originea unui reper cartezian drept **xOy**. Cele trei **puncte esenţiale (**originea **O**, centrul **C** şi polul **P)** fiind confundate, ne situăm în cadrul **matematicii centrice** (**MC**). Rezultă, încă de la început, că dacă **P** este expulzat din **O** în **S**, pătrundem în domeniul **matematicii excentrice** (**ME**) şi că pot fi definite şi **funcţii pătratice excentrice**, **elevate** şi **exotice** şi nu numai **centrice**.

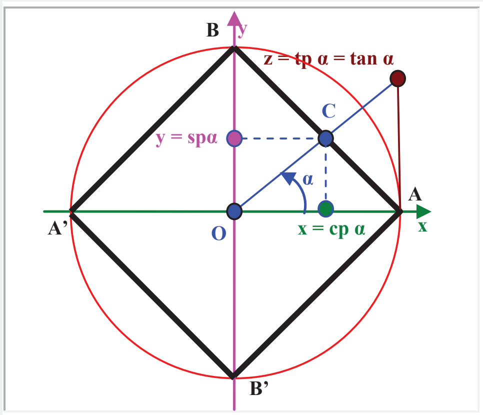


Fig. 2.1,a Funcţii pătratice Alaci

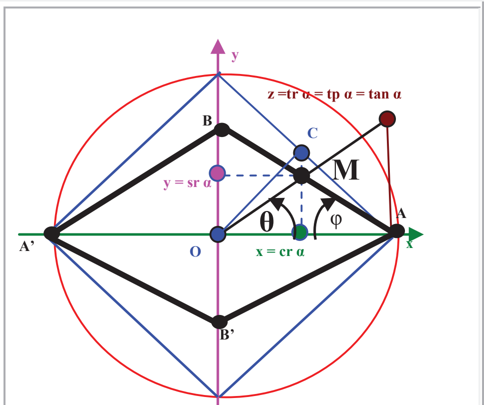


Fig. 2.1,b Funcţii rombice Alaci

Semidreapta **D⁺** intersectează pătratul în punctul **C(x, y)** ale cărui coordonate carteziene sunt, prin definiţia dată de **Valeriu Alaci**:

(2.1) **Cosinusul pătratic**, notat **cp** definit prin $\mathbf{cp}\alpha = \frac{x}{R}$ cu graficul din **figura 2.2, a;**

(2.2) **Sinusul patratic**, notat **sp** şi definit prin $\mathbf{sp}\alpha = \frac{y}{R}$, cu graficul din **figura 2.2, b**;

Deoarece funcţia trigonometrică centrică suplimentară **versinus** (notată **vers**) este definită de relaţia **vers**α = 1 – **cos**α, se va defini, în mod asemănător **FCC** pătratică suplimentară **versinus pătratic,** notată **versp**α cu relaţia **vers**pα **= 1 – cpα** .

Se observă, din **figura 2.1,a,** că sinusul pătratic este egal cu **1 – cpα**, adică **verspα = spα**, în cadranul I şi, pentru toate cadranele, **1 – Abs[cpα] = Abs[spα],** este o proprietate importantă a funcţiilor pătratice.

Tangenta pătratică, notată **tp** este definită prin

(2.3) **tp**$\alpha = \frac{z}{R} = \frac{sp\alpha}{cp\alpha} = \frac{y}{x} = \boldsymbol{tan\alpha} \equiv \boldsymbol{tg\alpha}$, aşa cum rezultă şi din **figura 2.1,a**.

Tangenta ordinară este **greşit introdusă în matematică**, ca raport dintre sinus şi cosinus, aşa cum a demonstrat **Octavian Voinoiu** în a sa **"MATEMATICĂ SIGNADFORASICĂ"**, iar corect, este acelaşi raport dar cu semnul funcţiei sinus, adică **tangenta Voinoiu** are notaţia **tav** şi expresia **tav**α = **sin**α / Abs[**cos**α].

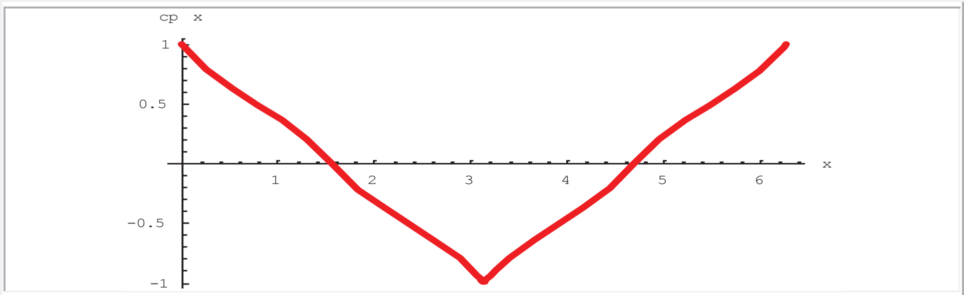


Fig. 2.2,a Cosinusul pătratic **Valeriu Alaci** **cpx**

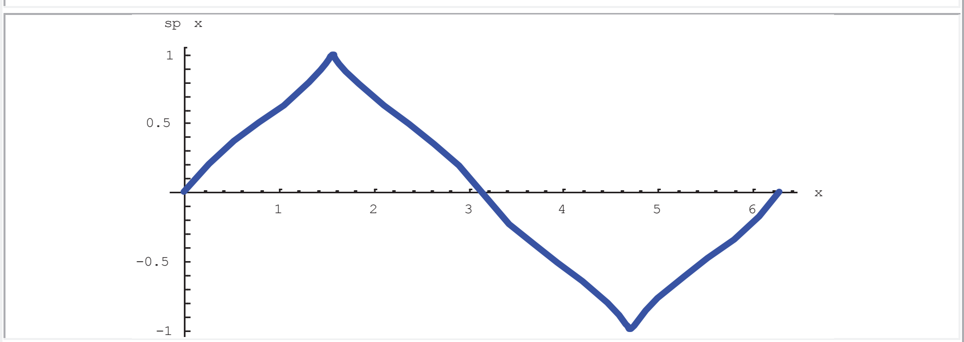


Fig. 2.2,b Sinusul pătratic **Valeriu Alaci** **spx**

În acest mod, **tangentă pătratică Voinoiu** poate fi definită corect, prin :

(2.4) **tpv**α = **sin**α / Abs[**cosα**] = $\frac{y}{Abs[x]}$.

cotangenta pătratică Voinoiu, notată **ctp**, este definită de

(2.5) **ctpv**α = $\frac{cos\alpha}{Abs[sin\alpha]} = x/|y|$ şi **versinus pătratică Voinoiu** este

(2.6) **verspv**α = 1− **cpv**α.

Tangenta pătratică şi cotangenta pătratică sunt identice cu tangenta şi cotangenta. Secanta pătratică şi cosecanta pătratică au fost definite, în cazul funcţiilor circulare centrice (**FCC**), ca inverse ale funcţiilor cosinus şi sinus pătratice sau rombice (v. **Fig.**

2.1,b) şi cu tangenta funcţiilor circulare centrice (**FCC**) **Euler tanα** sau **tg**α. De aceea, **Valeriu Alaci** nu le-a mai notat, cum n-a mai notat nici funcţiile secantă şi cosecantă pătratică. Notaţiile au fost introduse de noi astfel :

(2.7) **scp**α = **1** / **sp** α şi **cscp**α = **1** / **cp** α.

O formulă fundamentală arată cu suma modulelor funcţiilor cosinus şi a sinus pătratice este egală cu unitatea

(2.8) $$|\,\mathbf{x}\,| + |\,\mathbf{y}\,| = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{cp\alpha + sp\alpha} = \begin{cases} ...1.........in..cadranul...I \\ -1....in...cadranu........III \end{cases}$$

$$\mathbf{cp\alpha - sp\alpha} = \begin{cases} -1....incadranul...II \\ 1...in...cadranul...IV \end{cases} \quad \text{sau} \quad \mathbf{cp}x + \mathbf{sp}x = \mathbf{Sign[cos\ x].1}$$

Suma pătratelor funcţiilor pătratice nu mai este egală cu unitatea, ca în cazul funcţiilor circulare centrice (**FCC**) sau **excentrice** (**FSM-CE**). Notând cu **r „raza polară”** variabilă**,** cu polul în **O**(0,0) a **pătratului Alaci** **r** = |**OC**|

(2.9) **cp**^{2}α + **sp**^{2}α = **r**^{2} sau **cp**^{2}x + **sp**^{2}x = **r**^{2}, aşa cum rezultă şi din (2.10).

Pentru reprezentarea computaţională a graficelor funcţiilor **cp**x şi **s** x, ecuaţiile de definiţie ale acestora se exprima prin relaţii diferite de cele elaborate de **V. Alaci,**

(2.10) $$\mathbf{cp}\ x = \frac{Sign[\cos x]}{1 + Abs[\tan x]} \quad \text{şi} \quad \mathbf{sp}\ x = \frac{Sign[\sin x].Abs[\tan x]}{1 + Abs[\tan x]}$$

care au şi fost utilizate la elaborarea graficelor din **figura 2.2.**

S-a constatat că, funcţia **spx** poate exprima variaţia intensităţii curentului, ca funcţie de perioada **ωt**, în care **ω** este pulsaţia sau frecvenţa circulară, la liniile electrice lungi, fără dezvoltare în serii **Fourier**.

Un pătrat **Valeriu Alaci**, ale cărui laturi sunt rotite cu π/4, faţă de axele de coordonate (x, y) şi ale cărui semidiagonale sunt, evident, egale între ele şi egale cu **R**, poate fi reprezentat de ecuaţiile parametrice

(2.11) (**C**) $$\begin{cases} x = R.cp\alpha \\ y = R.sp\alpha \end{cases}$$

Dacă cele două semidiagonale sunt **a** şi **b** (**a** > **b**), atunci rezultă un romb ale cărui ecuaţiile parametrice vor fi

(2.12) (**M**) $$\begin{cases} x = a.cp\alpha \\ y = a.sp\alpha \end{cases}$$

Profesorul **Valeriu Alaci** a demonstrat urmatoarele :

Teorema 1. *Într-un triunghi dreptunghic **TD**(a,b,c) ≡ △ **ABC**, de laturi, **a**, **b**, **c**, cu unghiul drept în **A**, o catetă este egală cu suma catetelor înmulţită cu sinusul pătratic al unghiului opus catetei respective sau cu cosinusul pătratic al unghiului adiacent, adică:*

(2.13) b = (b + c) **cpC,** b = (b + c) **spB**, sau

(2.14) c = (b + c) **cp**B, c = (b + c) **spC** deoarece

(2.15) **cp**C = **sp**B

Teorema 2. *Într-un triunghi dreptunghic **TD** (a, b, c) ≡ △ **ABC,** de laturi **a**, **b**, **c**, cu unghiul drept în **A** şi de perimetru **p = a + b + c**, o catetă este egală cu perimetrul înmulţit cu sinusul pătratic al semiunghiului opus sau a semiunghiului adiacent, conform relaţiilor*

(2.16) $\quad$ **b** = p **sp** $\frac{B}{2}$, $\qquad$ **c** = p **sp** $\frac{C}{2}$.

Aplicând **trigonometria pătratică** la un triunghi oarcare **T**(a,b,c) ≡ Δ **ABC, Valeriu Alaci** a demonstrat şi urmatoarele relaţii:

(2.17) $\quad$ $\mathbf{sp}\,\frac{A}{2}\,\mathbf{sp}\,\frac{B}{4}\,\mathbf{sp}\frac{C}{4} + \mathbf{cp}\frac{A}{2}\,\mathbf{cp}\frac{B}{2}\,\mathbf{cp}\,\frac{C}{2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ $\quad$ şi o relaţie asemănătoare cu teorema sinusurilor

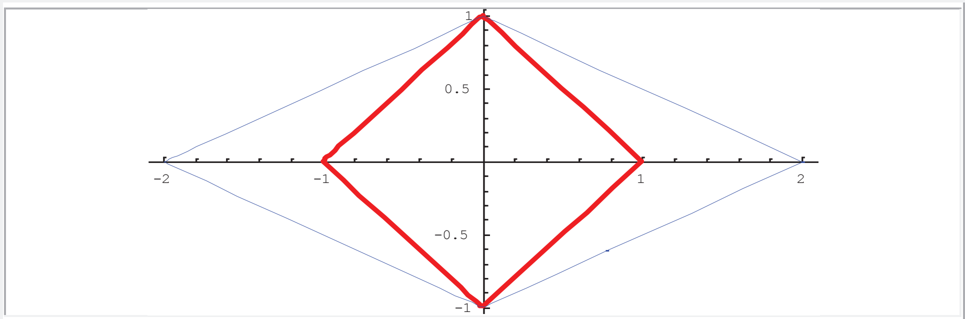


Fig. 2.3 Pătrat şi romb desenate cu funcţii matematice.

(2.18) $\quad$ $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{sp\alpha}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{sp\beta}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{sp\gamma}} = \frac{\boldsymbol{b+c}}{\boldsymbol{cp\alpha}} = \frac{\boldsymbol{c+a}}{\boldsymbol{cp\beta}} = \frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{cp\gamma}} = \boldsymbol{p},$ $\qquad$ în care **α, β, γ** sunt unghiurile opuse laturilor a, b, c din 3 **triunghiuri asociate**, cum le-a numit **Valeriu Alaci**, care sunt trei triunghiuri dreptunghice, în care, unghiul drept este format de laturile **a** şi **b + c** ; **b** şi **c + a**; şi al treilea, din **c** şi **a + b**.

Pătratul şi rombul au fost reprezentate computerizat în **figura 2.3** cu ajutorul relaţiilor (2.10), în care **R** = **b** = 1 şi a = 2.

Notând **modulul** funcţiilor rombice cu **k**

(2.19) $\quad$ **k** = **tan** φ ≡ **tg** φ, $\;$ în care **φ** ∈ [**0, π/2**] a fost numit de **Alaci** **unghi auxiliar**, reprezentat în varful **A** al rombului din **figura 2.1, b**, cu **R** = │**OA**│= **1.**

Atunci, coordonatele unui punct curent **M**(x,y), aparţinând rombului **ABA'B'**, determinat de raza polară **r** şi de unghi polar **θ** din **O** cu axa x, sunt

(2.20) $\quad$ (**M**) $\begin{cases} x(\theta) = R.cp\alpha \\ y(\theta) = R.k.sp\alpha \end{cases}$ $\qquad$ în care

(2.21) $\quad$ **tg** α ≡ **tan** α $=\frac{tan\theta}{tan\varphi} = \frac{tan\theta}{k}$ $\;$ şi **α** este unghiul polar, din **O,** al razei polare a punctului **C** (**x_P = cpα , y_P = spα),** al pătratului; punct **C** situat pe aceeaşi verticală cu **M**, adică, pentru care **x_P (α)** = **x(θ)**. Pentru φ = π/4 sau φ = 45 ^{0} ⇒ k = tan φ = 1 şi relaţiile (2.20) reprezintă un pătrat de **semi**diagonale egale cu **R = 1.**

În acest mod, **Valeriu Alaci** a reprezentat cosinusul şi sinusul rombice prin cosinusul şi sinusul pătratice, evitând să definească explicit funcţiile rombice. Ceea ce putem încerca să facem noi, considerând **R = 1** şi introducând, în locul lui **Valeriu Alaci**, notaţiile **cr** şi **sr** pentru **cosinusul** şi sinusul rombice astfel:

(2.22) $\begin{cases} x(\theta) = R.cr\theta = R.cp\alpha = cp\alpha \\ y(\theta) = R.sr\theta = k.R.sp\alpha = k.sp\alpha \end{cases}$, relaţii care dau dependenţele dintre coordonatele rectangulare (x, y) şi coordonatele rombice (R, θ, φ) ale unuia punct **M.**

2.3 FUNCŢIILE TRANSTRIGONOMETRICE (FTT) ale Malvinei Baica şi Mircea Cârdu, FUNCŢII QUADRILOBE /(CVADRILOBE) SM (FQ), FUNCŢII PĂTRATICE SM (FPSM) şi FUNCTII QUADRILOBE / (CVADRILOBE) Alaci (FQA)

Între cercul unitate al lui **Euler** şi pătratul rotit cu π/4 al lui **Valeriu Alaci**, **înscris** în cercul unitate, există un spaţiu bidimensional (**2D**) care, după descoperirea **FSM-CE,** s-a reuşit umplerea lui continuă cu funcţiile, denumite de noi, **funcţii cvadrilobe Alaci,** pentru a le distinge de **funcţiile quadrilobe SM** (**Fig.1.4,a**), în care cvadrilobele drepte sunt nerotite ; ambele tipuri de **quadrilobe** / **cvadrilobe** fiind prezentate în figura **1.4** şi în figurile **2.4** şi **2.5**.

Această acţiune constitue, totodată, şi unificare funcţiilor circulare centrice **Euler** (**FCC**) cu **funcţiile pătratice centrice Alaci** (**FPC**); cercul fiind obţinut pentru o excentricitate numerică **s = 0** şi pătratul **Alaci**, pentru **s =** 1. **Quadrilobele Alaci** (**QA**) sunt exterioare pătratului **Alaci** şi interioare cercului unitate, în timp ce **quadrilobele SM** (**QS**) sunt exterioare cercului unitate şi interioare pătratului **SM**, aşa cum se observă în **figura 2.4**. În consecinţă, aceste noi curbe închise umplu continuu spaţiul **2D**, dintre pătratul **SM** (**PSM**), cu laturile paralele cu axele x şi y şi pătratul **Alaci** (**PA**), rotit cu π/4 şi înscris în pătratul **SM**. Aşa cum rezultă din figura **2.4**, procesul poate fi continuat cu astroide de diverse ordine.

Plecând de la relaţiile de bază, existente între coordonatele x şi y, de la funcţiile circulare centrice **Euler** (**FCC**) şi cele din trigonometria pătratică **Valeriu Alaci** (**FPC**), adică

(2.23) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ de la **FCC** şi

(2.24) $cp\, \alpha + sp\, \alpha = 1$, de la **FPC,** doi autori, **Malvina Baica** şi **Mircea Cârdu,** au constatat că ele reprezintă sumele

(2.25) $x^k + y^k = 1$, pentru k = 2 şi, respectiv, k = 1.

Aceste curbe sunt prezentate în figura **2.6** pentru **α** ∈ [0, π/2], k ∈ [1 ,2], cu pasul 0,2.

Observând că pentru **k** ∈ (1, 2) spaţiul dintre cercul unitate **Euler** şi pătratul **Valeriu Alaci** poate fi completat, dând valori intermediare, între **2** şi **1** exponentului **k**, reputata matematiciană **Malvina Baica,** profesoară la Universitatea din Wisconsin (USA), împreună cu **Mircea Cârdu,** au publicat lucrarea „**Periodic Transtrigonometric Functios** „sau, pe romaneşte „**Funcţii periodice transtrigonometrice"** prin care spaţiu 2D, dintre cercul unitate **Euler** şi **PA,** l-au completat / umplut continuu cu funcţiile exponentiale de generare a **funcţiilor transtrigonometrice**.

Deoarece, aceste funcţii sunt **între** funcţiile trigonometrice circulare şi funcţiile trigonometrice pătratice, şi nu în afara lor sau **peste**, considerăm că denumirea de **funcţii intratrigonometrice** ar fi fost mai potrivită.

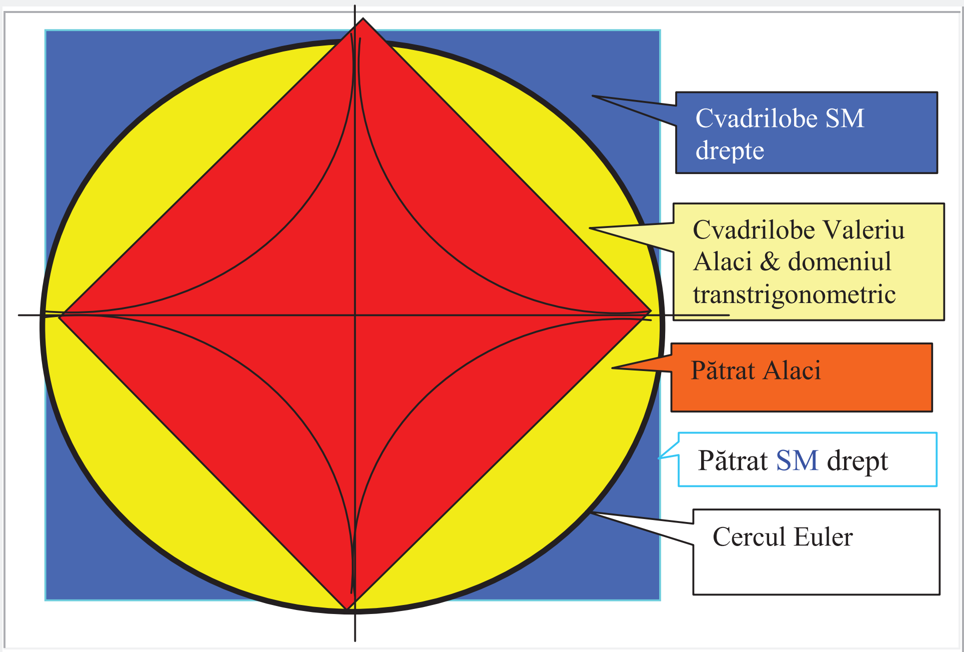
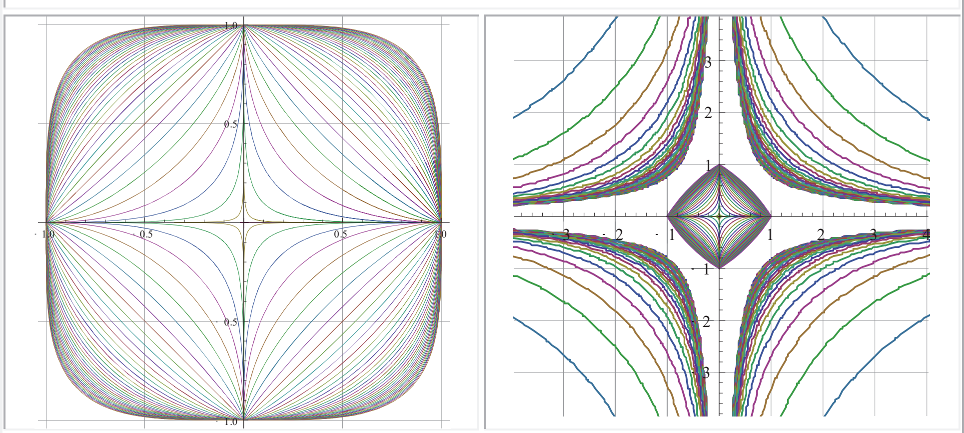


Fig. **2.4,a** Domeniile diverselor funcţii **centrice circulare** şi **necirculare**



$s \in [0, 4]$ | $s \in [-3, +3]$

Fig. 2.4,b Funcţii transtrigonometrice în 2 D

Pe baza relaţiei (2.25) rezultă

(2.26) $\mathbf{st_k}^k\alpha + \mathbf{ct_k}^{\,k}\,\alpha = 1$ în care, s-a notat cu x = $\mathbf{ct_k}\,\alpha$ **cosinusul transtrigonometric** de exponent **k** şi argument α şi cu y = $\mathbf{st_k}\,\alpha$ **sinusul transtrigonometric** de exponent **k** şi argument α**.**

Rezultă imediat că, pentru k =2 ⇒ $\mathbf{ct_2}\,\alpha$ = **cos**α şi $\mathbf{sp_2}\alpha$ = **sin**α, iar pentru k= 1 ⇒$\mathbf{ct_1}\alpha$=**cp**α şi $\mathbf{st_1}\alpha$ = **sp** α. Prin urmare, şi aceste funcţii unifică funcţiile trigonometrice centrice **Euler** cu funcţiile trigonometrice pătratice **Alaci**, dar cu funcţii exponenţiale, distincte de funcţiile cvadrilobe.

Se observă din **figurile 2.5,a** domeniul dintre pătratul **Alaci** şi cerc, acoperit de **funcţiile transtrigonometrice** şi de funcţiile cuadrilobe **Alaci** şi din **figura 2.5,b** domeniul dintre cerc şi pătratul **SM**.

Tangenta transtrigonometrică **tgt α** este aceeaşi cu tangenta pătratică **tpα** şi aceeaşi cu tangenta circulară centrică **tg α ≡ tan α,** adică

(2.27) **tgt** α = **tp** α = **tan** α = **tg α**

Cu această observaţie, funcţiile transtrigonometrice pot fi exprimate cu ajutorul **FCC** prin relaţiile **Malvinei Baica** şi ale lui **Mircea Cấrdu** sub forma

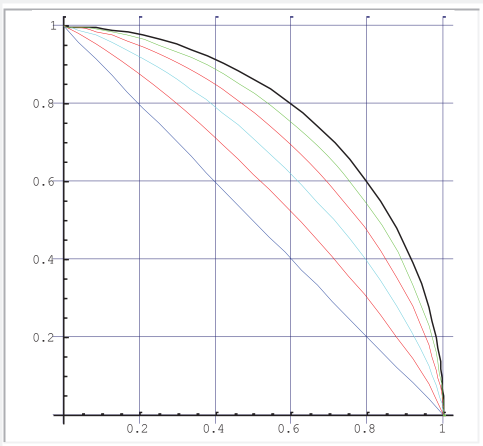


Fig. 2.5,a Funcţii transtrigonometrice

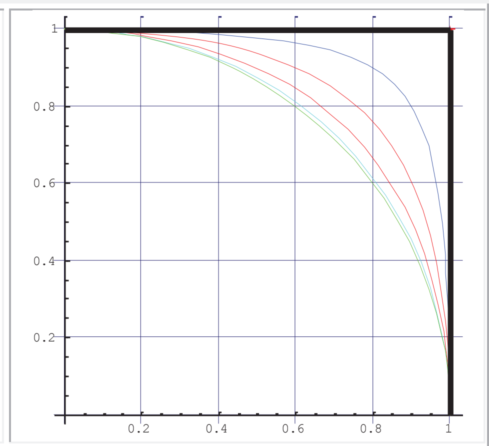


Fig. 2.5,b Funcţii cuadrilobe SM

(2.28) $\mathbf{ct_k}\,\alpha = \pm\,(1+\mathbf{tan}\ \ \alpha)^{-1/k}$

(2.29) $\mathbf{st_k}\ \alpha = \pm\ (1\ +\ \mathrm{ctan}^k\ \alpha)^{-1/k}$ sau cu relaţiile, cu care au fost reprezentate computaţional aceste funcţii în graficele din **figurile 2.6, a** şi **2.6, b**,

(2.30) $\mathbf{ck_k}\,x = \dfrac{Sign[cosx]}{(1+Abs[tan^k x])^{\frac{1}{k}}}$ şi

(2.31) $\mathbf{st_k}\ x = \dfrac{Sign[sinx].Abs[tanx]}{(1+Abs[tan^k x])^{\frac{1}{k}}}$

Funcţiile cvadrilobe **SM**, notate cu **coqθ** - cosinusul cuadrilob şi cu **siqθ** - sinusul cvadrilob, de variabilă excentrica **θ** şi de **excentricitate numerică s** au expresiile

(2.32) $\quad \mathbf{coq}\ \theta = = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-s^2\sin^2\theta}}$ şi, respectiv,

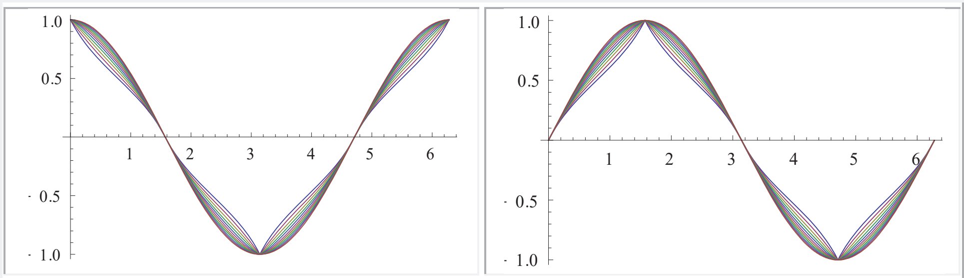
(2.33) $\quad \mathbf{siq}\ \theta = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-s^2\cos^2\theta}}$ cu graficele din **figurile 2.7,a** şi **2.7,b** .

Se observă, din aceste figuri, că pentru **s=1**, funcţiile cosinus şi sinus cvadrilobe degenerează în funcţii dreptunghiulare, fără utilizarea dezvoltărilor în serii **Fourier** şi care, pentru un număr limitat de termeni, aşa cum este cunoscut, în colţurile graficelor, dau erori destul de mari.

Aceste funcţii pot fi denumite **funcţii pătratice** SM, pentru a le distinge de cele **Alaci**. Ele au expresiile analitice, rezultate din relaţiile anterioare pentru **s = 1** :

(2.34) $\quad \mathbf{cps}\ \theta = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \dfrac{\cos\theta}{\mathrm{Abs}[\cos\theta]}$ şi

(2.35) $\quad \mathbf{sps}\ \theta = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \dfrac{\sin\theta}{\mathrm{Abs}[\sin\theta]}$



a₁) ct$_k$ α — **a₂) st$_k$ α**

Fig. 2.6,a Funcţia **transtrigonometrice** (**FTT**) pentru **k** ∈ [1, 2]

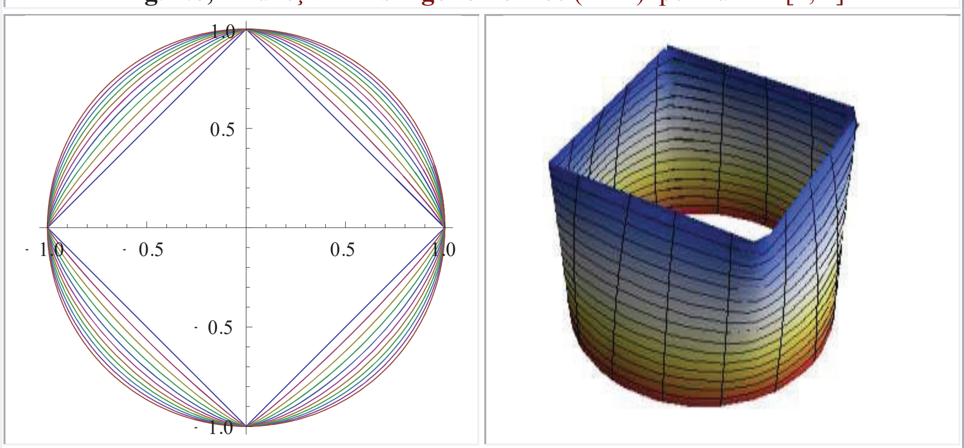


Fig. 2.6,b Entităţi **transtrigonometrice** (**FTT**) în 2D şi în 3D pentru **k** ∈ [1, 2]

Graficele lor au fost reprezentate pentru **s** ∈ [0,1] cu pasul 0,2. Pentru **s** = 0 se obţin **FCC** iar pentru **s** = 1 funcţiile pătratice **SM** (**FPS**).

Cvadrilobele **SM** rotite cu π/4 sunt reprezentate în **figura 2.8,a** iar coadrilobele **Alaci** în figura **2.8,b** Trecerea de la cuadrilobe **SM** drepte la cele rotite se face cu relaţiile de la rotaţiile de acelaşi centru **O(0,0)**; cuadrilobele **SM** rotite având ecuaţiile parametrice

$$(2.36)\qquad \textbf{(P)}\quad \begin{cases} x = coq\theta.cos\frac{\pi}{4} - \; siq\theta.sin\frac{\pi}{4} \\ x = coq\theta.sin\frac{\pi}{4} - \; siq\theta.cos\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Trecerea, de la acestea la cudrilobele **Alaci,** se realizează prin multiplicarea relaţiilor anterioare cu valoarea inversei razei **r(θ)** a cvadrilobelor drepte.

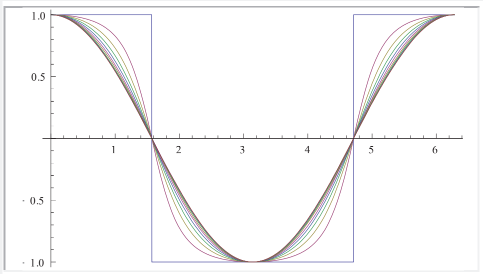


Fig. 2.7,a Cosinus cuadrilob coq θ

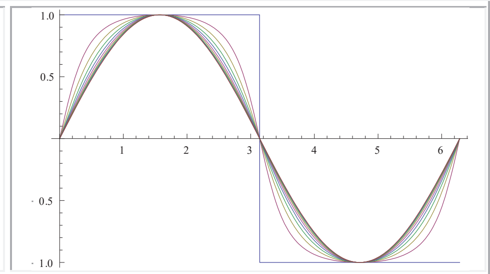


Fig. 2.7,b Sinus cuadrilob siq θ

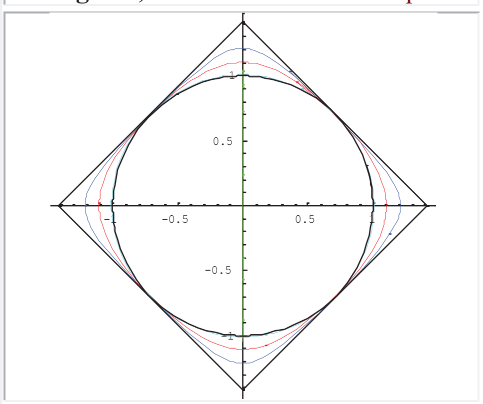


Fig. 2.8,a Cuadrilobe **SM** rotite cu π/4

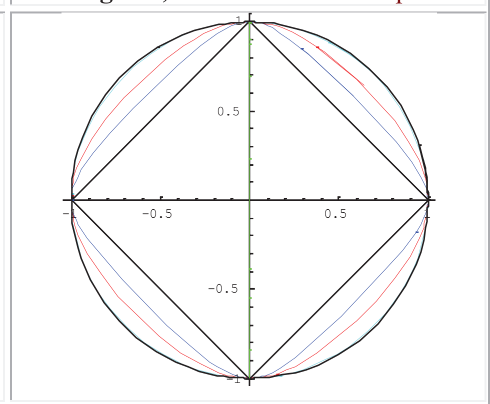


Fig. 2.8,b Cuadrilobe **Valeriu Alaci**

Raza r(θ) a cuadrilobelor **SM** drepte are expresia

$$(2.37)\qquad \mathbf{r}(\theta) = \sqrt{coq^2\theta + siq^2\theta} = \sqrt{\frac{1-s^2(cos^4\theta+sin^4\theta)}{1-s^2(1-s^2cos^2\theta.sin^2\theta\,)}} \qquad \text{şi pentru } \boldsymbol{\theta} = \pi/4$$

$$(2.38)\qquad \mathbf{r}(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{s^2}{2}}}$$

În acest mod, cuadrilobele **Valeriu Alaci** (**QA**) au ecuaţiile parametrice

(2.39) **(QA)** $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{s^2}{2}}(coq\theta - siq\theta) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{s^2}{2}}(siq\theta - coq\theta) \end{cases}$ cu ajutorul cărora au fost realizate curbele şi graficele prezentate anterior. Atragem atenţia că aceste funcţii cuadrilobe sunt de variabilă excentrică **θ** şi aparţin, în consecinţă, **matematicii excentrice** (**ME)**.

2.4 FUNCŢIILE POLIGONALE ALE LUI M. OVIDIU ENULESCU

Aceste funcţii periodice noi au fost prezentate de autorul lor, **M. O. Enulescu**, fără grafice şi fără ecuaţiile lor de definire, în primul număr al revistei „Revista de Matematica POZITIVA", iar în numărul 2, al aceleiaşi reviste (pag.1 .. 3), **Valeriu Alaci** intervine cu unele observaţii şi completări, recomandându-i autorului să încerce să prezinte expresiile lor, graficele funcţiilor şi derivatele lor, ceea ce vom face noi aici.

Domnul **Valeriu Alaci** a remarcat *„concepţia de generalizare – a funcţiilor sale pătratice* **—** *şi, mai ales, de realizare a ei într-o forma matematică*" şi a prezentat o formă modificată a *„formulei fundamentale exacte pentru funcţii poligonale de ordinul n*".

Fie poligonul regulat $\mathbf{P_n}$, convex, de **n** laturi $\mathbf{P_n} \equiv A_1A_2\ldots A_n$ înscris în cercul unitate / trigonometric **C**(O, R=1) orientat, cu originea în **A (1, 0)** $\equiv \mathbf{A_1}$.

Fie **M** un punct de pe latura A_iA_{i+1} (i = 1, 2, … , n) şi **MN** perpendiculara pe OA (**Fig. 2. 9)** sau pe axa **x**.

Este evident că, pentru n → ∞, poligonul tinde spre cercul unitate - $\mathbf{P_n} \to$ ***C***(O,R=1), iar pentru **n = 4** spre pătratul **Valeriu Alaci** (**PA ≡** $\mathbf{P_4}$**).** Astfel, că apare o nouă completare a spaţiului dintre cerc şi pătrat, cu funcţii poligonale de n ≥ 4, spaţiu deja copletat fie cu funcţii cuadrilobe **Alaci**, fie cu funcţiile **transtrigonometrice Malvina Baica**, fiind o **zonă aglomerată** cu diverse funcţii periodice vechi şi noi.

Se vor nota cu L_i =1,2,. ., n, ştiind ca $L_1 = L_2 = L_3 = \ldots = L_n$ **-** laturile poligonului P_n, circumscris cercului de raza $\mathbf{R_M = 1}$, în care se înscrie cercul de rază R_m, rază egală cu apotema poligonului, dată de relaţia

(2.40) $R_m = OP_i = R_M.\cos\frac{\alpha}{2}$, în care α este unghiul la centrul **O**, sub care se vede fiecare latura L_i, şi este

(2.41) $\boldsymbol{\alpha} = \frac{2\pi}{n}$

Păstrând notaţiile originare, unghiul de poziţie **β** al punctului curent $\mathbf{M \subset P_n}$ sau **AOM ≡ ∢** $\mathbf{A_1OM}$ este evident că

(2.42) $\boldsymbol{\beta} = \frac{2(i-1)\pi}{n} + \alpha$, în care $\boldsymbol{\alpha}$ = ∢ A_iOM , $\boldsymbol{\alpha} \in [\,0, 2\pi/n]$

M. O. Enulescu a definit geometric funcţiile poligonale, cosinus şi sinus poligonale, ale poligoanelor cu n laturi, pe care le-a notat cu $\mathbf{cp_n}\ \boldsymbol{\beta}$ şi, respectiv, $\mathbf{sp_n}\ \boldsymbol{\beta}$ prin următoarele expresii

(2.43) $\mathbf{M}(x, y)\begin{cases} cp_n\beta = \pm|ON| = \frac{x}{R} \\ sp_n\beta = \pm|NM| = \frac{y}{R} \end{cases}$, semnele ± ale segmentelor ON şi OM şi ale funcţiilor cosinus şi sinus poligonale, în cele IV cadrane, sunt afectate de aceleaşi reguli ca şi în Trigonometria Pătratică, adică de funcţia **Sign**[cos**β**].

Prima latură şi ultima, a poligonului, intersectează axa x în punctul $B_1(1,0) \equiv A(1,0) \equiv A_1 \equiv A_0$. Dreptele suport ale laturilor a doua L_2 şi a (n-2) a laturii L_{n-2} intersectează axa x în punctul $B_2(s_2, 0)$ ş.a.m.d. astfel că prelungirile dreptelor suport, ale laturilor $L_i = |A_i A_{i+1}|$ şi $L_{n-i} = |A_{n-i+1} A_{n-i}$, intersectează axa x în B_i (s_i, 0).

Unele puncte, ca pentru n = 4, 6, 8, 12, .., fiind simetrice faţă de axa y şi originea O(0, 0), dintre care **n** = 6, 12, .. având câte două puncte la $B_i \to \pm\infty$. Pentru numere impare, n = 3, 5, 7, .., punctele B_i nu mai sunt dispuse simetric faţă de axa y şi de originea O(0, 0).

Oricare ar fi dispunerea acestor puncte $\mathbf{B_i}$, pe axa x, ele pot fi alese drept **excentre S_i (s_i, ε_i)**, în care, dacă $\mathbf{s_i > 0}$, pentru toate punctele B_i, atunci $\mathbf{\varepsilon_i = 0}$ pentru toate punctele $\mathbf{B_i}$ de pe semiaxa x > 0 şi $\mathbf{\varepsilon_i = \pi}$ pentru toate punctele $\mathbf{B_i}$ situate pe semiaxa x < 0. Situaţia este echivalentă cu aceea în care se consideră întotdeauna $\mathbf{\varepsilon_i = 0}$ dar $\mathbf{s_i}$ se ia cu semn**ul** semiaxei **x** pe care se situează punctele $\mathbf{B_i}$, adică, cu semnul absciselor $\mathbf{s_i}$ ale punctelor $B_i(\mathbf{s_i}, 0)$. Astfel, coordonatele celor două puncte S_i şi B_i devin identice şi, în consecinţă, $\mathbf{S_i \equiv B_i}$.

Este evident că, exceptând polinomul $\mathbf{P_3}$, este singurul care are excentrul $P_2 \equiv E_2(-0,5;\ 0)$ în interiorul cercului unitate (**Fig. 2.9,b,** $\mathbf{s_2 = -0,5}$), toate celelalte polinoame au cel mult două excentre $E_1(1, 0)$ şi $E_{n/2}(-1, 0)$ dispuse pe cercul unitate, la intersecţia lui cu axa **x**, iar restul excentrele sunt exterioare discului unitate. Rezultă că $\mathbf{s_i \geq 1}$ şi există cel mult patru excentre, simetrice faţă de axa y, la distanţe infinite, pentru laturile poligoanelor care sunt dispuse paralel cu axa **x**.

Notând cu $\mathbf{\beta_i}$ unghiurile la centrul **O**, corespunzatoare vârfurilor $\mathbf{A_i}$ ale polinoamelor $\mathbf{P_n}$, rezultă ca expresiile funcţiilor polinomiale $\mathbf{cp_n\beta_i}$ şi $\mathbf{sp_n\beta_1}$ <u>vor fi aceleaşi</u> cu ale funcţiilor **SM-CE** de variabilă centrică $\boldsymbol{\alpha = \beta_i}$, sau de variabilă excentrică **θ**, care exprimă şi direcţia laturilor poligonului în raport cu axa x, variabilă excentrică dată de relaţia (1.12)

(2.44) $\theta = \beta_i + \arcsin\frac{s_i \sin\beta_i}{\pm\sqrt{1+s_i^2-2s_i\cos\beta_i}} = \beta i + \arcsin\frac{s_i \sin\beta_i}{\mathrm{Rex}\beta_i}$, în care, unghiurile β_i sunt date de relaţia (2.42).

Excentricităţiile numerice s_i = OB_i sunt date de relaţia

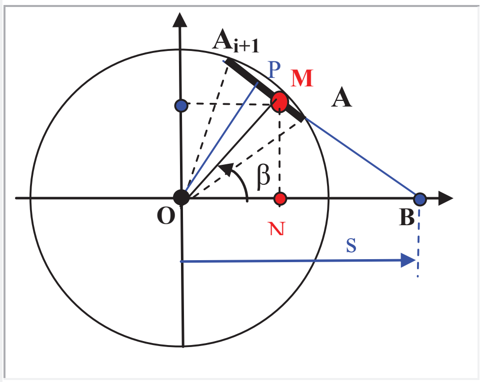
(2.45) $\mathbf{s_i} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{(2i-1)\pi}{n}}$ fiind deduse din triunghiurile $\mathbf{OP_i\ B_i}$, şi egale cu raportul dintre apotemele $\mathbf{OP_i}$, perpendicularele pe mijloacele laturilor $\mathbf{L_i}$, date de relaţia

(2.46) $OP_i = OA_i \cos\frac{\pi}{n} = \cos\frac{\pi}{n}$ (deoarece $A_i \subset \boldsymbol{C}(O,1)$ T $OA_i = 1$) şi cosinusul unghiului $\boldsymbol{\varphi_i} = \sphericalangle P_iOB_i$, dat de

(2.47) $\cos\boldsymbol{\varphi_i} = \cos\frac{(2i-1)\pi}{n}$.

Utilizarea variabilei excentrice **θ** are avantajul de a oferi, dintrodată, ambele valori ale funcţiilor de la ambele capetele ale unei laturi $\mathbf{L_i}$ ale poligonului $\mathbf{P_n}$, care sunt, tocmai, cele două determinări ale **FSM-CE.**

Dacă **excentrul** este situat pe semiaxa **x** > 0, atunci punctul A_{i+1}, care se roteşte în acelaşi sens, sinistrorum / levogin, ca şi semidreapta pozitivă în jurul excentrului **S** în sensul creşterii lui **θ,** constitue prima determinare principala **1**, iar punctul A_i, care se roteşte în sens invers- dextrorum / dextrogin - pe cerc, este a doua determinare, secundară **2**.



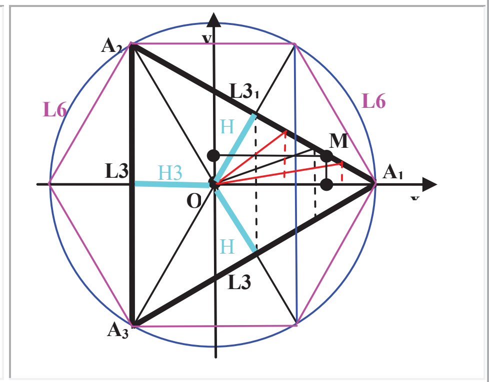


Fig. 2.9,a Funcţii poligonale **Enulescu**

Fig.2.9,b Funcţii poligonale **P3**

Sensul creşterii lui **θ,** constitue prima determinare principală **1**, iar punctul $\mathbf{A_i}$, care se roteşte în sens invers- dextrorum / dextrogin - pe cerc, care este a doua determinare secundară **2**.

Dacă excentrul $\mathbf{S_i}$ este situat pe semiaxa x negativă, atunci, situaţia se inversează: $\mathbf{A_i}$ va fi prima determinare şi $\mathbf{A_{i+1}}$ cea de a doua.

Se va nota unghiul la centrul **O**, de poziţie al punctelor $\mathbf{P_i}$**,** situate la mijlocul laturilor $\mathbf{L_i}$**,** ale poligonului $\mathbf{P_n}$**,** cu $\psi_i = \measuredangle P_i O A_1$, date de relaţiile

(2.48) $\qquad \psi_i = i.\alpha - \alpha / 2$

Între două vârfuri consecutive A_i şi A_{i+1}, pentru punctele curente de pe laturile $\mathbf{L_i}$ ale polinoamelor, date de unghiurile $\beta \in [\beta_i, \ \beta_{i+1}]$, valorile funcţiilor vor fi, dacă $R_M = 1$:

(2.49) $\quad (M_i) \begin{cases} cp_n\beta = r_i cos(\psi_i - \beta_i)cos\beta \\ sp_n\beta = r_i cos(\psi_i - \beta_i)sin\beta \end{cases}$, pentru $s_i > 0$, în care $\mathbf{r_i}$ este raza unui punct curent M_i, de pe latura L_i, a poligonului P_n, care se poate exprima în funcţie de apotema OP_i a laturii L_i cu relaţiile

(2.50) $\quad \mathbf{r_i} = OP_i / \cos(\psi_i - \beta) = \dfrac{cos\frac{\alpha}{2}}{\cos(\psi_i - \beta)} \in [R_m, R_M]$, $\forall\, i \in [1, n]$ şi pentru valorile lui $\beta \in [\beta_i, \ \beta_{i+1})$, pentru care punctul M_i aparţine laturii $\mathbf{L_i}$ a poligonului $\mathbf{P_n}$.

În colţurile poligonului, funcţiile poligonale au aceleaşi valori cu ale funcţiile circulare.

De aceea, graficele funcţiilor poligonale ale poligonului $\mathbf{P_3}$ (Fig. **2.11**) au fost prezentate împreună cu funcţiile circulare cosβ şi sinβ, separat pentru fiecare latură, la capetele laturilor cosβ şi $cp_3\beta$, ca şi sinβ şi $sp_3\beta$ având puncte comune, aşa cum se observă în **figura 2.10**. Pentru $\mathbf{P_3}$, $OP_i = 0.5$; poziţiile punctelor P_i fiind date de unghiurile de poziţie $\psi_1 = \pi/3$, $\psi_2 = \pi$ şi $\psi_3 = 5\pi / 3$, iar domeniile de variaţie ale unghiului β, pe fiecare latură, fiind $\beta \in [0, 2\pi/3]$, $\beta \in [2\pi/3, 4\pi/3]$ şi $\beta \in [4\pi/3, 2\pi]$.

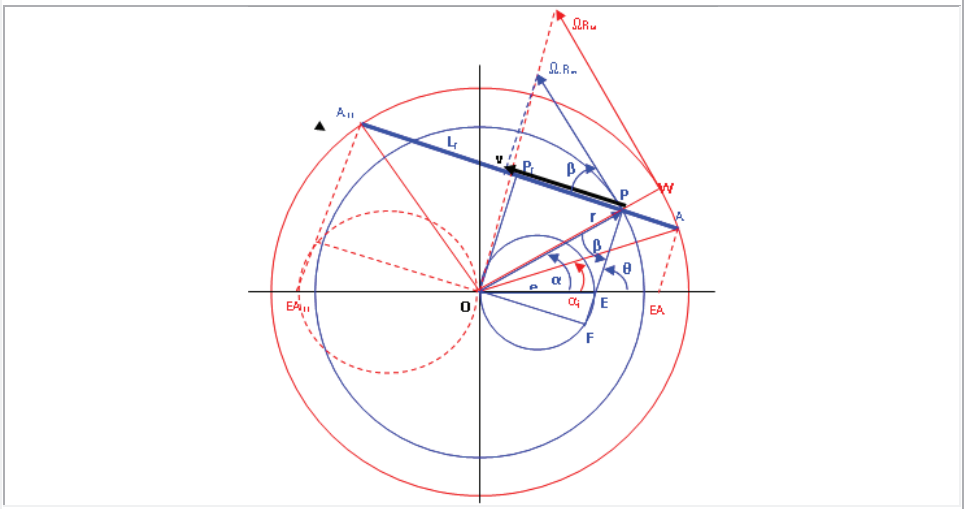


Fig. 2.10 Funcţii poligonale ca FSM-CE şi vitezele de maturare a laturilor

Punctele $\mathbf{P_i}$ sunt dispuse pe cercul inscris în $\mathbf{P_n}$ şi, în aceste puncte, razele $\mathbf{r_i}$ au dimensiunea minimă $\mathbf{r}(\psi_i) = R_m$. Din această cauză, la o rotaţie, cu viteza unghiulară $\mathbf{\Omega}$ constantă, a semidreptei OM, viteza **v** a punctului pe latura L_i în acest punct, va fi minimă şi egală cu $\Omega.R_m$. De la A_i spre P_i vitezele scad, iar de la acest punct spre A_{i+1}, vitezele cresc progresiv. De aceea, aceste puncte constituie puncte de **inflexiune** ale funcţiilor $\mathbf{cp_n}\beta$ şi $\mathbf{sp}_n\beta$, aşa cum se observă şi din graficele acestor funcţii.

Pentru a soluţiona problemele funcţiilor polinomiale, pentru oricare polinom, utilizând **FSM–CE**, va trebui să se renunţe la notaţiile anterioare date de **Enulescu** şi **Alaci** şi să se introducă notaţiile din **figura 2.10**.

Dacă poligonul este inscriptibil, atunci punctele A_i şi A_{i+1} sunt pe acelaşi cerc, de rază R_M, dar acest lucru nu este necesar.

Aşa cum s-a arătat, în punctele extreme ale laturii L_1, care aparţin cercului de raza R_M, în **figura 2.11** (sau de raze R_{Mi} şi R_{Mi+1}, dacă cele două puncte A_i şi $A_{i=1}$ nu sunt pe acelaşi cerc) funcţiile poligonale sunt aceleaşi cu **FCC** şi aceleaşi cu cele ale **FSM–CE**

$$(2.51) \qquad \mathbf{P\ (xi\,,\, y_i\,) \equiv A_i} \begin{cases} x_i = R_M \cos\alpha_i = R_M cp\alpha_i = R_M Cex(\alpha_i, E_{A_i}) \\ y_i = R_M \sin\alpha_i = R_M sp\alpha_i = R_M Sex(\alpha_i, E_{A_i}) \end{cases}$$

Vectorul viteză, tangent la cercul de rază R_M, este $\overline{V} = \Omega.R_M der\alpha_i$ şi are modulul $\Omega.R_M$. Viteza, pe direcţia laturii L_i, este proiecţia acesteia pe direcţia laturii L_i, unghiul dintre ele fiind β_{Ai} şi $\Omega = d\alpha/dt$ astfel că

(2.52) $\overline{v}_{A_i} = \Omega.R_M.\cos\beta_{Ai} der\psi_i$ şi este aceeaşi ca şi în punctul A_{i+1} şi în toate vârfurile poligonului, dacă el este inscriptibil, deoarece $\cos\beta_{Ai+1} = \cos(-\beta_i) = \cos\beta_i$.

Coordonatele unui punct $P(x, y) \subset L_i$ între A_i şi P_i, de rază polară $r(\alpha) = R_m./\cos(\psi_i - \alpha)$ variabilă, sunt

(2.54) $$\mathbf{P}(x, y)\begin{cases} x = r.cp\alpha = r.\mathrm{Cex}(\alpha, E) = r.\cos\alpha = R_m \dfrac{\cos\alpha}{\cos(\psi_i - \alpha)} \\ y = r.sp\alpha = r.\mathrm{Sex}(\alpha E) = r.\cos\alpha = R_m \dfrac{\sin\alpha}{\cos(\psi_i - \alpha)} \end{cases}$$

şi vitezele lui P pe L_i vor fi

(2.55) $\vec{V} = \Omega.r.\cos\beta.der\psi_i$, cu componentele pe direcţiile axelor x şi y

(2.56) $$\begin{cases} \vec{V}_x = \dot{x} = \Omega.r.\cos\beta.\cos\varphi_i.rad0^0 \\ \vec{V}_y = \dot{y} = \Omega.r.\cos\beta.\sin\varphi_i.rad\frac{\pi}{2} = \Omega.r.\cos\beta.\sin\varphi_i der0^0 \end{cases}$$

Dacă se derivează relaţiile (1.70) se obţin derivatele funcţiilor poligonale, cerute de **Alaci** lui **Enulescu**

(2.57) $$\begin{cases} x' = \dfrac{dx}{d\alpha} = -R_m \dfrac{\sin\psi_i}{\cos^2(\psi_i - \alpha)} \\ y' = \dfrac{dy}{d\alpha} = -R_m \dfrac{\cos\psi_i}{\cos^2(\psi_i - \alpha)} \end{cases}$$ şi, pentru $R_m = \cos\dfrac{\pi}{n}$ (2.47), rezultă

(2.58) $$\begin{cases} x' = -\cos\dfrac{\pi}{n}.\dfrac{\sin\psi_i}{\cos^2(\psi_i - \alpha)} = -\cos\dfrac{\pi}{n}.\dfrac{\sin\psi_i}{\cos^2\beta} \\ y' = \cos\dfrac{\pi}{n}.\dfrac{\cos\psi_i}{\cos^2(\psi_i - \alpha)} = \cos\dfrac{\pi}{n}.\dfrac{\cos\psi_i}{\cos^2\beta} \end{cases}.$$

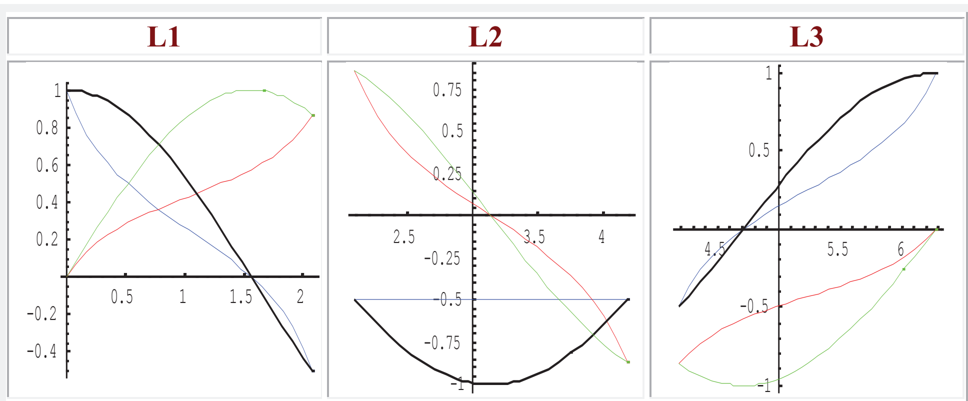


Fig. 2.11 Funcţii poligonale, ale poligonului $\mathbf{P_3}$, separate pe cele n =3 laturi
LEGENDA : ____cos α , ____sin α, ____cp_3 α, ____sp_3 α

Se ştie că

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{d\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt} = x'\dot{\alpha} \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{d\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt} = y'\dot{\alpha} \end{cases} \quad \text{astfel că} \quad \dot{\alpha} = \frac{\dot{x}}{x'} = \frac{\dot{y}}{y'} = \Omega = \text{constant}$$

Intersecţia perpendicularei din P, pe latura L_i, intersectează axa x în excentrul **E(e,0)**, punct care variază pe axa x în limitele $e \in [L.\cos\varphi_i/2,\ -L.\cos\varphi_i/2]$, având expresia

(2.59) $e = r.\sin(\psi_i - \alpha).\cos\varphi_i = r.\sin\beta.\cos\varphi_i$.

În timp ce excentricitatea reală **e** este variabilă, direcţia **θ** = **ψ_i** a razei excentrice din **E** este constantă, pentru fiecare latură în parte. Rezultă că funcţiile poligonale sunt un caz tipic de **FSM-CE** de argument excentric **θ** constant şi de excentricitate – reală şi/sau numerică- şi raze variabile.

În figura **2.11** sunt prezentate funcţiile poligonale $cp_3\alpha$ şi $sp_3\,\alpha$, ale poligonului n = 3. Ele au fost prezentate separat, pentru cele 3 laturi ale lui P_3, împreună cu **FCC** cos α şi sin α cu care au puncte comune în vârfurile $A_1(1,0)$, $A_2(-0.5;\ \sqrt{3}/2)$ şi $A_3(-0,5;\ -\sqrt{3}/2)$, adică pentru $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2\pi/3$ şi $\alpha_3 = 4\pi/3$.

Formula fundamentală dintre aceste noi funcţii, stabilită iniţial eronat de **Enulescu** şi corectată de **Alaci**, cu notaţiile autorilor, este:

(2.60) $\sin\dfrac{(2i-1)\pi}{n} sp_n\beta + \cos\dfrac{(2i-1)\pi}{n} cp_n\beta = \cos\dfrac{\pi}{n}$, pentru i = 1,2, …, n şi

(2.61) $\beta_i = \alpha + \dfrac{2(i-1)\pi}{n}$

2.5 FUNCŢIILE PSEUDOHIPERBOLICE ALE LUI EUGEN VIŞA

Într-un extras din „**GAZETA MATEMATICA din Timişoara**" anul XX, Nr. 1,2, 4 şi 5, **Eugen Vişa** afirma că „***raportul dintre aceste noi funcţiuni şi cele hiperbolice, este de aceeaşi natură ca şi raportul dintre funcţiunile pătratice Alaci şi funcţiunile circulare***". Şi că „***funcţiunile pseudo-hiperbolice sunt de-aproape înrudite cu funcţiunile hiperbolice propriu-zise***".

Pseudohiperbola, este definită de autor, ca două unghiuri, situate într-un acelaşi plan, cu vârfurile A şi A' situate pe axa x, care este şi dreapta de simetrie şi bisectoarea unghiului. Dacă unghiurile din A şi A' sunt drepte, atunci pseudohiperbola este echilateră.

În **figura 2.12** este prezentată o astfel de pseudohiperbola echilaterală, împreună cu o hiperbolă echilaterală ataşată ei şi cu cercul unitate care conţine vârfurile A(1,0) şi A'(-1,0).

O semidreaptă pozitivă $\mathbf{d}^+$ intersectează hiperbola în punctul **N** şi pseudohiperbola în punctul **M**(x,y). Dublul ariei sectorului hiperbolic **OANO** se notează cu **α**.

A fost denumit **cosinus pseudohiperbolic** al argumentului **α** şi notat cu **cph** lungimea segmentului **OP** care este întotdeauna pozitiv.

(2.62) **cph** $\alpha = |\overline{OP}| > 0$. Ea este o funcţie pară, deoarece **cph** α = **cph (-**α).

A fost denumit **sinus pseudohiperbolic** al argumentului α şi notat cu **sph** lungimea perpendicularei **MP**, dusă din **M**, luată cu semnul + sau - , după cum punctul **M** se găseşte în cadranul I sau în cadranul IV

(2.69) **sph** $\alpha = \pm|\overline{MP}|$. Ea este o funcţie impară, deoarece **sph** (-α) = **- sph** α.

Din aceste definiţii geometrice, rezultă că aceste funcţii există şi sunt continue pe toată axa reală $\alpha \in [-\infty, +\infty]$.

Tangenta, cotangenta, secantă şi cosecantă **pseudohiperbolice** sunt definite similar cu cele hiperbolice, ca rapoarte, formate cu funcţiile anterioare, cu observaţia că, pentru simplificarea scrierii funcţiilor, secantă şi cosecanta pseudohiperbolice, s-au folosit litere mari. Astfel

(2.70) $$\mathbf{tph}\alpha = \frac{sph\alpha}{cph\alpha},\ \mathbf{ctph}\alpha = \frac{cph\alpha}{sph\alpha},\ \mathbf{Sph}\alpha = \frac{1}{cph\alpha} \text{ şi } \mathbf{Cph}\alpha = \frac{1}{sph\alpha}$$

Eugen Vişa prezintă următoarele formule fundamentale cu privire la aceste funcţii:

Dacă **α** este un argument **pozitiv**, atunci

(2.71) $$\mathbf{cps}\alpha - \mathbf{sph}\alpha = \mathbf{1},\quad \mathbf{sph}\alpha = \frac{th\alpha}{1-th\alpha},\quad \mathbf{cph}\alpha = \frac{1}{1-th\alpha}$$

Dacă **α** este un argument **negativ**, atunci

(2.72) $$\mathbf{cph}\alpha + \mathbf{sph}\alpha = \mathbf{1},\quad \mathbf{sph}\alpha = \frac{1}{1+th\alpha},\quad \mathbf{cph}\alpha = \frac{1}{1+th\alpha}$$

Sunt demonstrate următoarele formule / teoreme de adiţiune:

Teorema 1 : Dacă **α** şi **β** sunt argumente de acelaşi semn (+ + sau **- -**) atunci

(2.73) **sph(**α + β **) = sph**α **. cphβ + cph**α **. sph β**

(2.74) **cph(**α + β**) = cphα . cphβ + sphα . sphβ,** iar, dacă ambele sunt pozitive,

(2.75) $$\mathbf{sph}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = \frac{sph\alpha.cph\beta - cph\alpha.sph(-\beta)}{1+2sph\gamma}$$

(2.76) $$\mathbf{cph}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = \frac{cph\alpha.cph\beta - sph\alpha.sph\beta}{1+2sph\gamma}$$, în care γ = **min[**α, β],

Dacă ambele argumente sunt negative (- şi -), atunci

(2.77) $$\mathbf{sph}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = \frac{sph\alpha.cph\beta - cph\alpha.sph\beta}{1-2.sph\gamma}.$$

(2.78) $$\mathbf{cph}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = \frac{cph\alpha.cph\beta - sph\alpha.sph\beta}{1-2sph\gamma}$$

Dacă, cele două argumente sunt de semne contrare, sunt prezentate relaţiile

(2.79) **sph(**α **-** β **) = sph**α **. cphβ - cph**α **. sphβ**

(2.80) **cph(**α **-** β**) = cphα . cphβ - sphα . sphβ.**

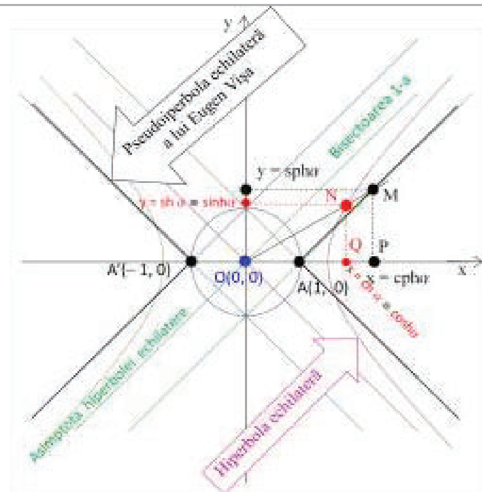


Fig. 2.12 Pseudohiperbolele lui **Eugen Vişa**

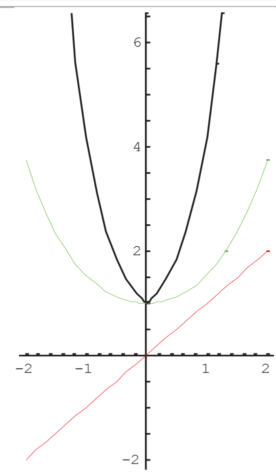


Fig. 2.13,a Cosinus **pseudohiperbolic**
______**cph x,** ______cosh x**,** ______y = x

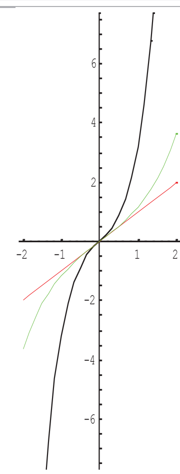


Fig. 2.13,b Sinus **pseudohiperbolic**
______**sph x,** ______sinhx**,** _______y = x

Derivatele acestor funcţii sunt

(2.81) $(\mathbf{cph}x)' = \dfrac{d(cphx)}{dx} = \pm\,(\mathbf{cph}x \pm \mathbf{sph}x)$

(2.82) $(\mathbf{sph}x)' = \dfrac{d(sphx)}{dx} = \mathbf{cph}x \pm \mathbf{sph}x,$

în care semnul + sau – corespunde semnului argumentului x.

În figurile **2.13, a** şi 2.**13, b** sunt prezentate funcţiile **cph x** şi **sph x** cu relaţiile

(2.83) **cph** x = $\frac{1}{1-Abs[thx]}$ şi **sph** x = $\frac{thx}{1-Abs[thx]}$

2.6 TRIGONOMETRIA EVOLVENTICĂ A LUI George (Gogu) Constantinescu. Cosinusul (Corα) şi sinusul (Sirα) româneşti

Creatorul „**Teoriei sonicitaţii**" (1912), lucrare tiparită pentru prima oară la Londra în 1918, într-un număr limitat şi controlat de exemplare, lucrare declarată secret de guvernul Britanic, din cauza aplicaţiilor în domeniul armelor şi mijloacelor de război, **Gogu Constantinescu**, inventator şi constructor de **maşini şi dispozitive sonice**, a fost nu numai un inginer român de valoare mondială dar şi un bun matematician, fiind creatorul unei **maşini de integrat** ecuaţii diferenţiale.

Revista engleză „**The Graphyc**" (10 01 1926) în articolul „**Leaders (Pioneers) in the March of Progress"** (Conducători (Iniţiatori) în mersul spre progres) prezintă figurile a 17 mari inventatori şi oameni de ştiinţă, din intervalul 1900-1925. Printre aceştia, alături de Albert **Einstein**, Guglielmo **Marconi**, Lord **Rayleigh**, Thomas **Edison**, Marie **Curie**, se află şi **George Constantinescu**.

Considerând următoarele ecuaţiile diferenţiale, în care **H** este presiunea alternativă maximă [daN/cm^2] şi **I** este debitul alternativ maxim [cm^3 / s],

(2.84) $\begin{cases} \frac{d^2H}{d\propto^2}+\frac{2}{\propto}\frac{dH}{d\propto}+H=0 \\ \frac{d^2I}{d\propto^2}+\frac{2}{\propto}\frac{dI}{d\propto}+I=0 \end{cases}$ **Gogu Constantinescu** a găsit următoarea soluţie generală

(2.85) $\begin{cases} H=\frac{1}{\alpha}(A.cos\alpha\ +B.sin\alpha) \\ I=A_1.coa\ +B_1.sir\alpha) \end{cases}$ în care, funcţiile **Cor**α şi **Sir**α sunt

cosinusul românesc

(2.86) **Cor**α = **cos** α + **α** .**sin** α = 1 + 1.$\frac{\propto^2}{2\,!}-3\frac{\propto^4}{4\,!}+5\frac{\propto^6}{6\,!}-7\frac{\propto^2}{8!}+\cdots+(2n-1)\frac{\propto^{2n}}{(2n)!}+$

sau **Corα** = $\int \alpha.\cos\alpha.d\alpha$ şi

sinusul românesc

(2.87) **Sir**α = **sin**α–**α.cos**α=$2\frac{\propto^3}{3\,!}-4\frac{\propto^5}{5\,!}+6\frac{\propto^7}{6\,!}-8\frac{\propto^9}{9\,!}+\cdots+(-1)^{2n+1}2n\frac{\propto^{2n}}{(2n)!}+$

sau **Sir**α = $\int \alpha.\sin\alpha.d\alpha$

Formula fundamentală a **funcţiilor trigonometrice româneşti,** prezentată de **Gogu Constantinescu,** este

(2.88) **Cor**^{2}α + **Sir**^{2}α = 1 + **α**^{2} .

Au mai fost prezentate relaţiile

(2.89) **Cor**α. sin α – **Sir**α. cos α = α

(2.90) **Cor**α. cos α + **Sir**α .sin α = 1.

Se poate arăta geometric că, **funcţiile trigonometrice româneşti** (**FTR**) sunt definite pe o evolventă (desfăşurantă sau desfăşurătoarea) unui cerc unitate, care este totodată şi evolută, situaţie prezentată în **figura 2.14**.

Evolventa (evolvere = a se desfăşura) cercului ***C***(O,R) poate fi obţinută prin desfăşurarea unui fir, bine întins, de pe un tambur cilindric de rază R, ca loc geometric al vârfului acestui fir. Rezultă că distanţa, de la punctul de tangentă **T**(x = cosα, y = sinα) al firului de pe cercul ***C***, la punctul **E**(X, Y) al **evolventei**, are lungimea egală cu arcului / unghiului **α** de pe care s-a desfăşurat firul.

Deoarece lungimea segmentului este **TE = α**, proiectându-l pe direcţia axelor x şi y, rezultă, fără dificultate, relaţiile (2.86) şi (2.87) ale funcţiilor **cosinus şi sinus româneşti** ca funcţii **cosinus şi sinus evolventic**.

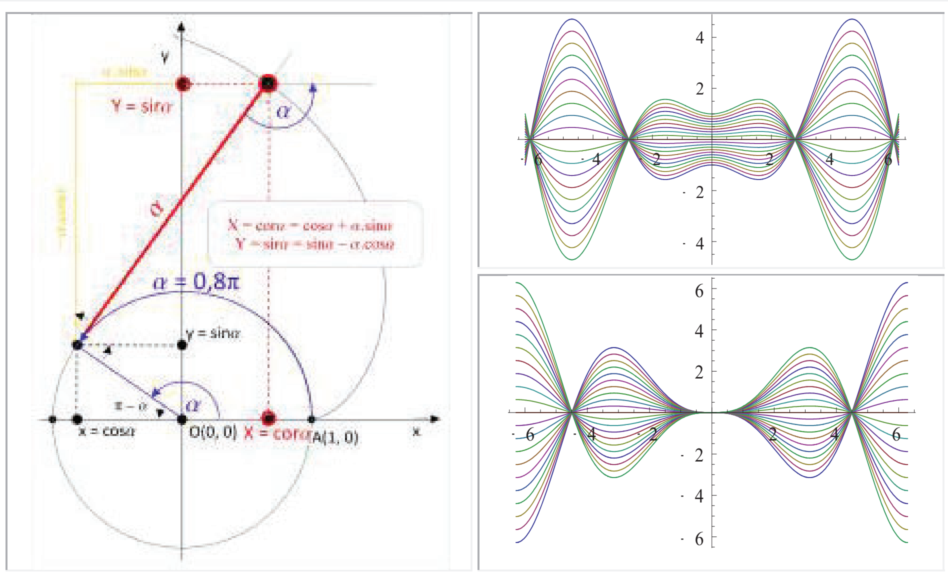


Fig.2.14 Funcţiile trigonometrice româneşti R.Corα şi R.Sirα→dreapta ca funcţii pe evolventă ← stâga, pentru R ∈ [-1,1]

Se deduce imediat că funcţia **Sir** (- α) = **- Sir** α este impară, iar funcţia **Cor**(-α) = ***Corα*** este pară.

Derivatele de ordinul întâi ale acestor funcţii sunt

(2.91) $$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{d(Cor\propto)}{d\propto} = \propto.cos\propto \\ \dot{y} = \dfrac{d(Sir\propto)}{d\propto} = \propto.sin\propto \end{cases}$$ şi derivatele de ordinul doi au expresiile

(2.92) $$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{d^2(Cor\propto)}{d\propto^2} = Cor\propto - 2\propto.sin\propto \\ \ddot{y} = \dfrac{d^2(Sir\propto)}{d\propto^2} = Sir\propto + 2\propto.cos\propto \end{cases}$$

Între două variabile / argumente **α** şi **β** există formulele / teoremele de adiţiune:

(2.93) **cor**(α + β) = **cor** α .cor β – **sir** α. **sir** β + α .β. cos(α + β)

(2.94) **sir** (α + β) = **sir** α **.cor** β **+ cor** α **. sir** β **+ α.β** sin(**α + β**) si se mai pot demonstra unele formule asemănătoare

(2.95) cos(α + β) = **cos** α .cor β – **sin** α. **sir** β - β. sin (α + β) şi

(2.96) sin (α + β) = **sin** α **.cor** β **+ cos** α **. sir** β **+ β** cos(**α + β**)

2.7 FUNCŢIILE TRIGONOMETRICE ÎNCLINATE ALE Prof. Dr. AUGUST BIEHRINGER

Aceste funcţii trigonometrice **noi** au fost publicate în lucrarea „**ŰBER SCHIEFE TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONENE UND IHRE ANVENDUNGEN**” în Editura Nordlingen, în anul 1877 de către **August Biehringer**, profesor de matematică la Şcoala Regală Industrială din Nűrenberg.

Considerând triunghiul oarecare **ABC**, cu notaţiile originare ale lui **Biehringer**, din **figura 2.15**, în care latura **BC**, perpendiculară pe axa x, în cazul trigonometriei clasice, pe care o vom denumi şi trigonometria „dreapată”, datorită unghiului drept din B, este, acum, înclinată cu unghiul **φ** iar ipotenuza **AC** face unghiul **α** cu axa x.

În acest triunghi oarecare, **A. Biehringer** a definit următoarele **funcţii trigonometrice înclinate:**

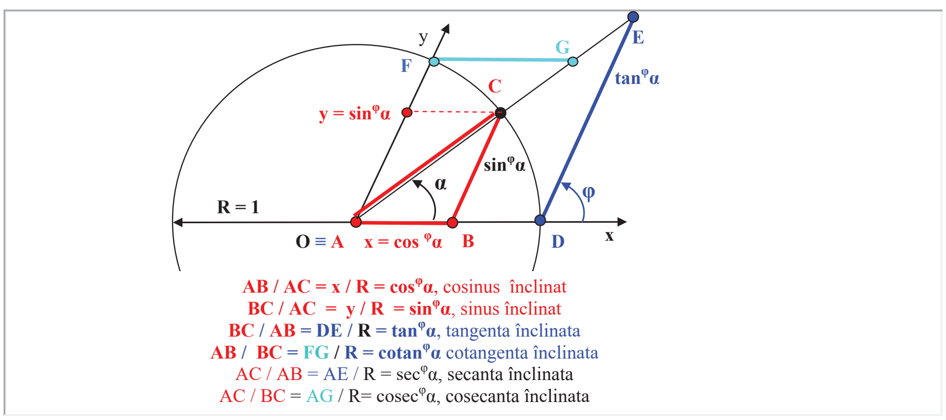


Fig. 2.15 Funcţii trigonometrice înclinate **Biehringer**

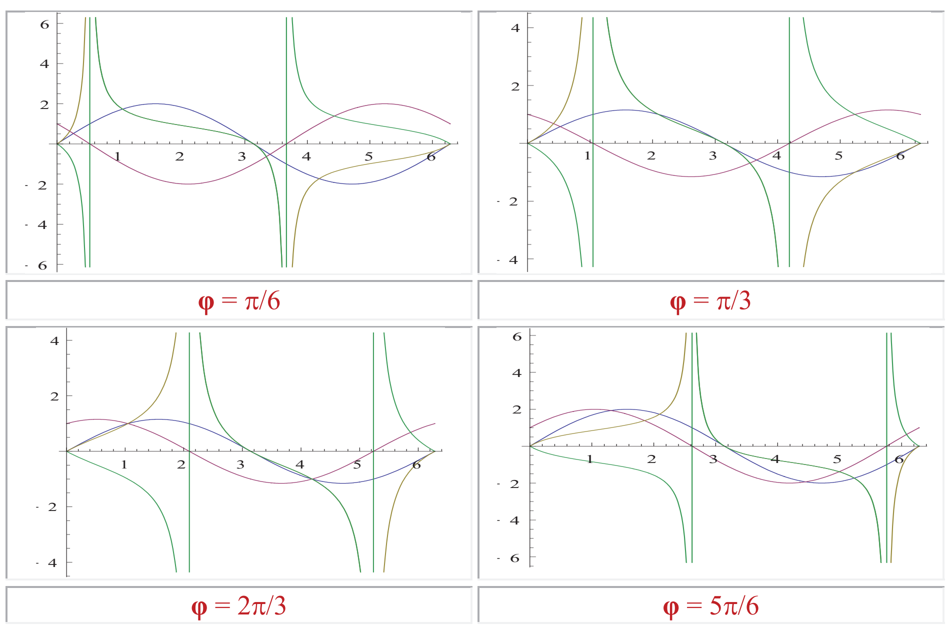
(2.97) $\cos^{\varphi}\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{x}{R} = x$, **cosinusul înclinat** cu unghiul **φ** de rgument **α,** (2.98) $\sin^{\varphi}\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y}{r} = y$, **sinsusul înclinat** cu unghiul **φ** de rgument **α,**

(2.99) $\tan^{\varphi}\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{DE}{R} = y_E$, **tangenta înclinată** cu unghiul **φ** de rgument **α,**

(2.100) $\mathrm{ctan}^{\varphi}\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{FG}{R} = x_G$, **cotangenta înclinată** cu unghiul **φ** de rgument **α,**

(2.101) $\sec^{\varphi}\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AE}{R} = z_E$, **secanta înclinată** cu unghiul **φ** de rgument **α** şi

(2.102) $\mathrm{cosec}^{\varphi}\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AG}{R} = z_G$, **cosecanta înclinată** cu unghiul **φ** de rgument **α.**



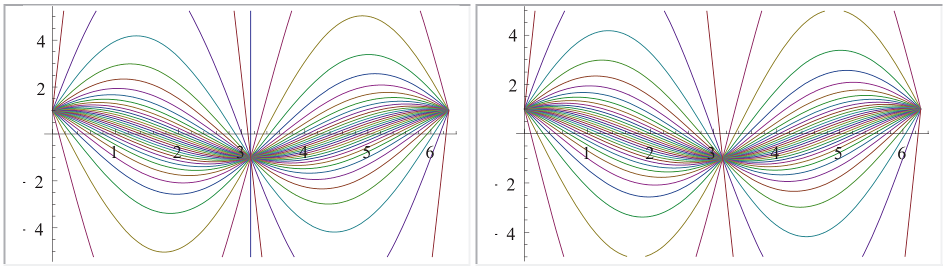
Legendă: **cos**$^{\varphi}$α, **sin**$^{\varphi}$**α,** **tan**$^{\varphi}$**α,** **tanv**$^{\varphi}$α

Fig. 2.16,a *Graficele funcţiilor trigonometrice înclinate* ***Bihringer*** *împreună cu tangenta* ***Voinoiu*** *înclinată* ***tanv***$^{\varphi}$***α***

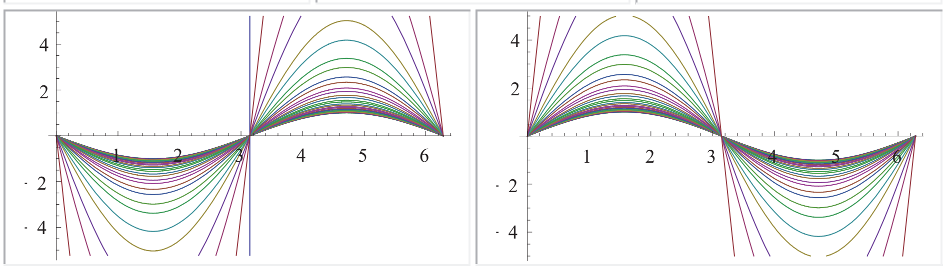
Axa **z** a fost considerată semidreapta pozitivă din **O,** înclinată cu unghiul **α**.

Spre deosebire de notaţiile anterioare, **Dr. A. Bieringer** a notat tangenta şi cotangenta cu **tang** şi respectiv **cotang**. Pentru comparaţie, s-a introdus şi tangenta **Voinoiu**

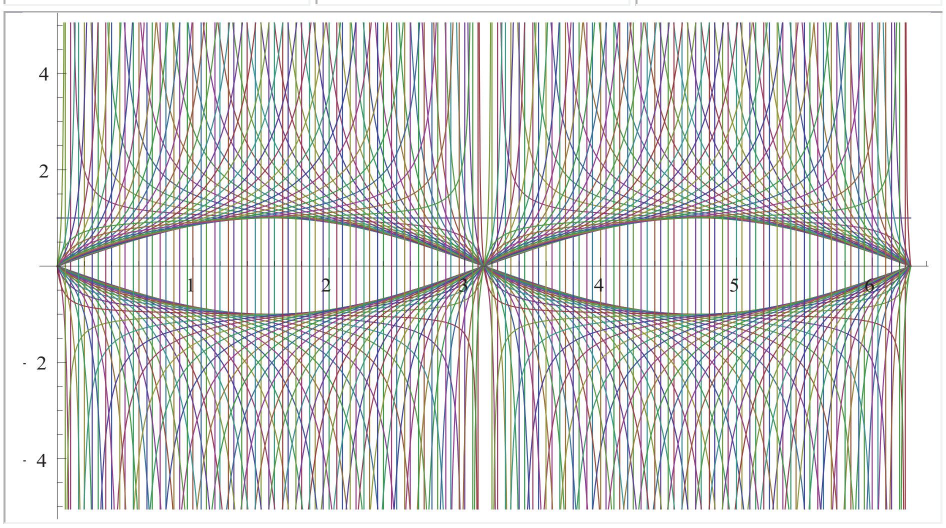
$\mathrm{tanv}^{\varphi}\alpha = \sin^{\varphi}\alpha/\mathrm{Abs}[\cos^{\varphi}\alpha]$.



s ∈[-π; 0]	**cos**$^{\varphi}$α, φ =s	s ∈[0, +π]



s ∈[-π; 0]	**sin**$^{\varphi}$**α, φ** = s	s ∈[0, +π]



tan$^{\varphi}$**α, φ** ∈[- π, +π]

Fig**. 2.16,b** Graficele unor funcţii trigonometrice înclinate **Bihringer**
pentru **φ** ∈ [-π, π], $\alpha \in [0, 2\pi]$

Este evident că, pentru **φ = π/2,** funcţiile trigonometrice înclinate degenerează în funcţii trigonometrice drepte, trigonometrice sau circulare ordinare / centrice.

Dacă privim, cu atenţie, schiţa din **figura 2.15,** se poate observa că punctul **B** poate fi considerat un excentru **S(s,** 0), situat pe axa x, cu excentricitatea liniară numerică **s** şi unghiulară **ε = 0**, dacă cercul este unitate şi raza lui este **R = 1**, iar punctul **C** poate fi asimilat ca punct **W_1**. Unghiul **α → α_1** va fi variabila la centrul **O** (0,0), iar variabila la excentrul **S** este **θ ≡ φ.**

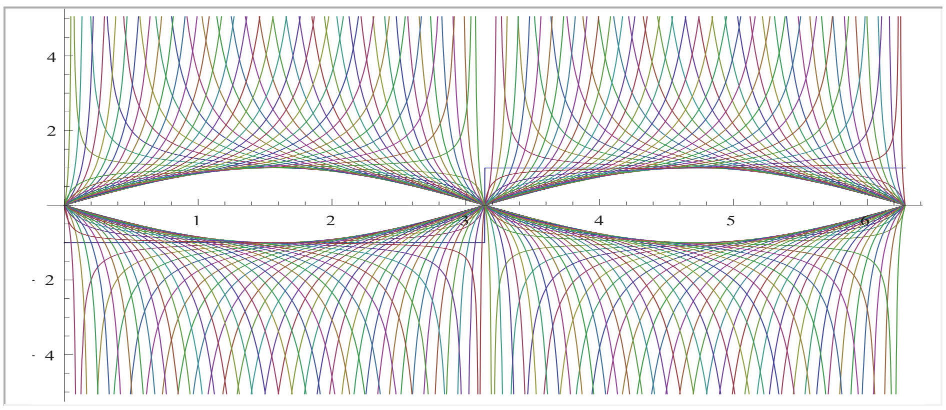


Fig**. 2.16,c** Graficele funcţiilor trigonometrice înclinate **Bihringer tanv$^{\varphi}$α, pentru** φ ∈[- π, +π] şi $\alpha \in [0, 2\pi]$

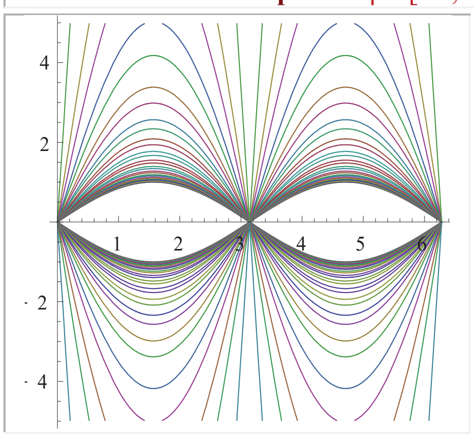


Fig. **2.17,a** Funcţia ± **Rex** α **= sin$^{\varphi}\alpha$,** pentru φ ∈ [-π, π]

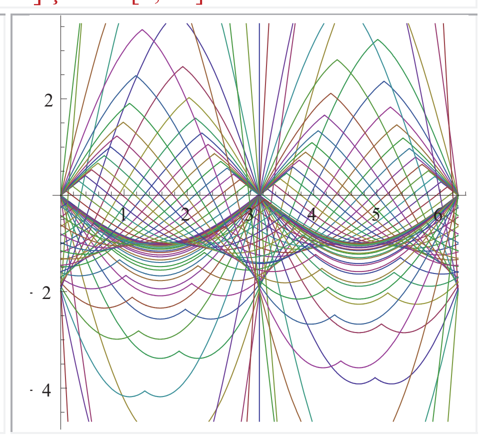


Fig. **2.17,b** Funcţia **rex(φ,S)= sin$^{\varphi}\alpha$,** pentru S(s = cos$^{\varphi}\alpha$, ε = 0), φ ∈ [-π, π]

În aceste condiţii, rezultă că

(2.103) $$BC = SW_1 = rex_1\,[\theta = \varphi, S(s = \cos^{\varphi}\alpha, \varepsilon = 0)] = rex_1\theta = \frac{sin\alpha}{sin\varphi} = \mathbf{sin^{\varphi}\varphi}$$

cu graficele din **figura 2.16,a,** pentru câteva valori discrete ale lui φ şi cu graficele din **figura 2.16,b,** pentru valori continue ale lui **φ** ∈[- π, +π].

În **figura 2.16,c** sunt prezentate funcţiile înclinate tangenta **Voinoiu** **tanv$^{\varphi}$α = sin$^{\varphi}$φ/Abs[cos$^{\varphi}\alpha$].**

Relaţia (2.103) ne permite să reprezentăm, mai simplu, graficul funcţiei trigonometrice înclinate **sinus inclinat Fig.2.17,a,** ceea ce **A. Bihringer** n-a făcut-o în lucrarea sa. **FSM-CE** radial excentric de variabilă excentrică θ = φ **rexθ**, permite exprimarea şi reprezentarea greficelor funcţiilor trigonometrice înclinate în funcţie de înclinarea variabilă φ, aşa cum sunt prezentate în **figura 2.17,b**.

Din grafice, rezultă că alura funcţiei **sin$^{\varphi}$**α este a funcţiei sin**α**, atât timp cât unghiul φ este constant, el intervenind doar ca o amplitudine A = 1/sinφ = constantă şi supraunitară.

In cazul funcţiei **cos$^{\varphi}$α** apare, în plus, şi o defazare cu φ a **FCC** cosα (**Fig. 2.16,a**).

Dacă **α** şi **θ = φ** sunt într-o relaţie în care **cos**$^{\varphi}$α = s = constant şi AC = R =1, relaţie dată de funcţia **α** (θ) = aex **θ**, sau de **θ**(α_1) = Aex **α_1**, atunci **sin$^{\varphi}$ α** este funcţia **SM-CE** **rex$_1$ θ** şi, respectiv **Rexα$_1$,** de excentricitate numerică **s = cos$^{\varphi}$α** şi de variabilă excentrică **θ = φ** sau centrică **α$_1$**, a căror grafice sunt prezentate în **figurile 2.17,a** şi **2.17,b**.

Dând unghiului **φ** variaţii cu funcţia **φ** = s^{0,75}.cos2α, sau **φ** = s.cos2α, de diverse excentricităţi **s** ∈ [0, 1], se obţin graficele funcţiilor înclinate din **figura 2.18.**

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Abs[Sin[0.1 s^0.75 Cos[2 t]]]},{s, 0, 10 Pi}],{t, 0, 2 Pi}]]

ParametricPlot3D[t,Sin[t]/Abs[Sin[0.1sCos[2t]]], 0.1 s, {s, 0, 10 Pi}, {t, 1, 2}]

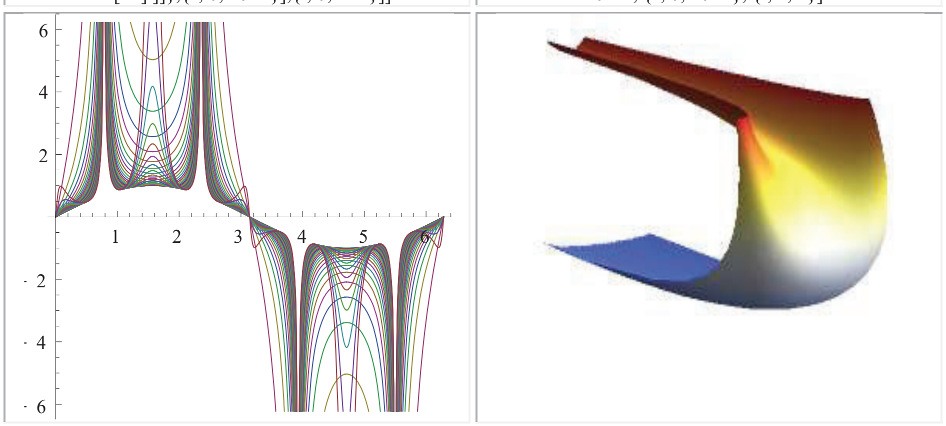


Fig. 2.18 Graficele funcţiei **sin$^{\varphi}$ α** de înclinare variabilă **φ→ φ.sinφ** în 2 D şi în 3D

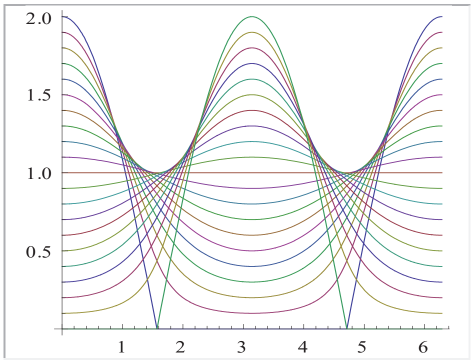
Funcţia **cosinus înclinat** reprezintă tocmai excentricitatea numerică **s** ca funcţie de **α** şi de parametrul φ, care dă amplitudine exprimată de inversul funcţiei sinφ, conform relaţiei

(2.104) $$s=\frac{AB}{AC}=\frac{e}{R}=\frac{\sin[\beta(\alpha)]}{\sin(\theta=\varphi)}=\frac{1}{\sin\varphi}\frac{s.\sin\alpha}{\mathrm{Re}\,x\alpha}$$ din care rezultă ecuaţia

(2.105) $$s(\alpha)=\cos\alpha-\sin\alpha\tan(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\cos\alpha-\sin\alpha.\cot\varphi=\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\varphi}=\mathbf{cos^{\varphi}\alpha}$$

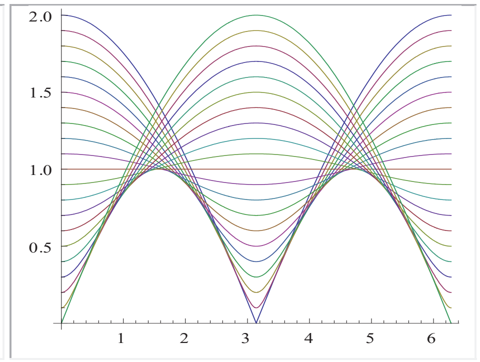
Domeniul de variaţie al funcţiei $\sin^{\varphi}\alpha$ este $[-\infty, \infty]$. Valorile extreme apar atunci când $\alpha = \pm\varphi$ şi punctul de intersecţie **C** → ± ∞, **BC** → ± ∞ (**Fig. 2.15**).

Plot[Evaluate[Table[{-0.1 s Cos[t]+Sqrt[1-(0.1 s Sin[t])^2]},{s,-10,10}],{t,0,2 Pi}]]



rex[θ, S(s, ε = 0)] , θ = φ, s ∈ [-1,1]

Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1+(0.1 s)^2-0.2 s Cos[t]]},{s,-10,10}],{t,0,2 Pi}]]



Rex[α, S(s, ε = 0)], s ∈ [-1,1]

Plot[Evaluate[Table[{-t Cos[0.1 s] + Sqrt[1-(t Sin[0.1 s])^2]},{s, 0, 10 Pi}],{t, -1, 1}]]

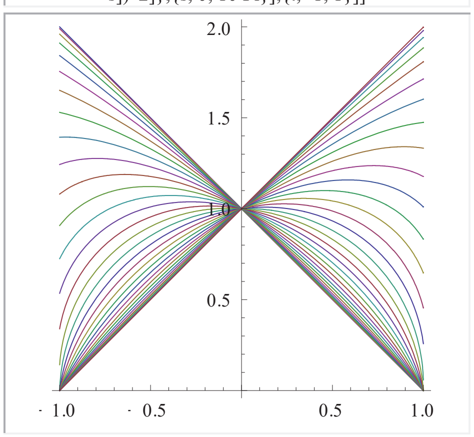


Fig. 2.19,a Funcţii $\sin^{\varphi}\alpha$=F(θ=φ, s=α)

Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1+(t)^2-2 t Cos[0.1 s]]},{s,0,10 Pi}],{t,-1,1}]]

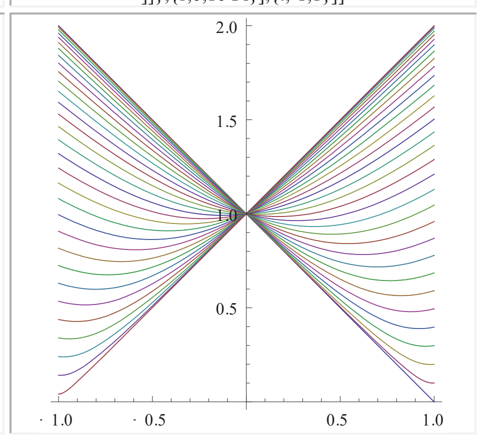


Fig. 2.19,b Funcţii $\sin^{\varphi}\alpha$=F(α, s=φ)

În partea superioară a **figurii 2.19 a** şi **b** sunt prezentate funcţiile radiale excentrice de variabilă excentrică **rexθ** şi, respectiv, de variabilă centrică **Rexα.** Ambele funcţii reprezintă aceeaşi marime, segmentul BC, pentru **AC** = **R** = **1**, adică pe **sin**$^{\varphi}\alpha$**,** dar prima **FSM-CE** o reprezintă în funcţie de variabila excentrică θ, iar a doua în funcţie de cea centrică α.

Deoarece, **FSM-CE** sunt definite pe cercul unitate de **R** = **AC** = 1, rezultă că **Rexα** poate exprima o funcţie trigonometrică, sau mai precis, circulară inclinată a cărui domeniu să nu depăşească diametrul cercului unitate, adică cifra 2, dacă excentrul S(s,ε) este interior cercului unitate. O funcţie **Rexα** este prezentată în partea de sus a **figurii 2.19,b,** ca funcţie de argumentul $\alpha \in [0, 2\pi]$ şi de parametrul **s** = φ ∈ [-1, 1] şi, în partea de jos, cu α ca parametru şi de argument φ.

În **figura 2.19,a** – jos ▼, sunt prezentate graficele unor funcţii înclinate **sin**$^{\varphi}\alpha$, ca funcţii de $\varphi \in [0, 2\pi]$ şi de parametru $\alpha \in [-1,1]$.

Concluzia este că se pot defini, **geometric,** funcţii periodice pe oricare curbă închisă. Însă, exprimarea relaţiilor lor analitice şi realizarea graficelor acestor funcţii necesită, în majoritatea cazurilor, aşa cum s-a putut observa anterior, existenţa **FSM-CE**.

Variabilele **dependente,** de alegerea originii **O**(0,0), sunt **lungimea arcului circularizat.** În figura **2.20** se arată posibilităţiile de generare a unor familii de funcţii periodice **centrice** (Fig. **2.20,a**) şi, respectiv, **excentrice** (Fig.**2.20,b**).

Drept argument sau variabilă **independentă** de sistemul de referinţă ales, este lungimea arcului **AB**, lungime exprimată de relaţia

(2.106) $$\breve{AB} = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_A^B \sqrt{1 + (y')^2}dx = \int_A^B \sqrt{1 + (x')^2}\mathrm{dy}$$

şi lungimea arcului circularizat este

(2.107) $$\breve{AB}^O = \int_A^B r.d\varphi = \int_A^B \sqrt{(r.d\varphi)^2 + dr^2 dr} = \int_A^B \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\varphi})^2}.d\varphi$$

iar dublul suprafeţei triunghiului **OAB** se exprimă prin integrala definită

(2.108) $$2 * \blacktriangle \mathrm{OAB} = \int_A^B r^2 d\varphi$$

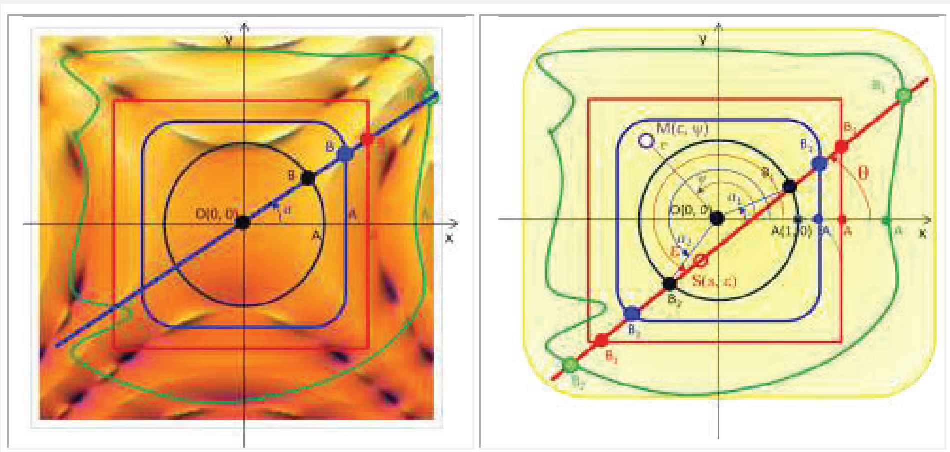


Fig. 2.20,a Funcţii periodice **centrice** definitivabile pe diverse curbe închise

Fig. 2.20,b Funcţii periodice **excentrice (O ≡ C ≠ S), elevate (C ≠ O ≡ S)** şi exotice **(C ≠ M ≠ S);**

Numai funcţiile **circulare centrice** au aceleaşi grafice, pentru toate variabilele anterior prezentate. În celelalte cazuri, graficele sunt dependente de variabila aleasă şi, în toate cazurile, de natura curbei închise, pe care se defineşte familia de funcţii periodice.

Variabila, cea mai comodă şi mai simplă, este unghiul **α,** pe care dreapta generatoare **centrică** îl face cu axa x, sau unghiul **θ,** pe care dreapta generatoare **excentrică** îl face cu axa **x**.

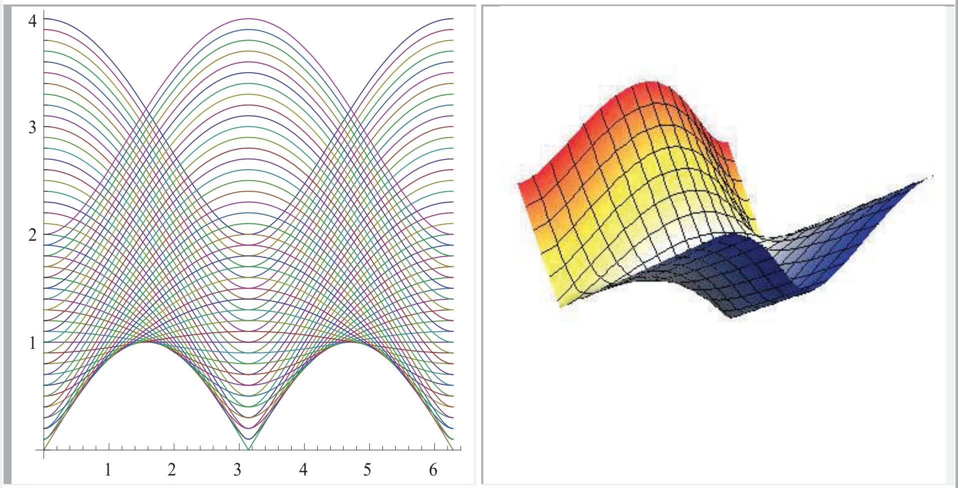


Fig. 2.21,a FSM-CE Rexα s ∈ [-3, +3]

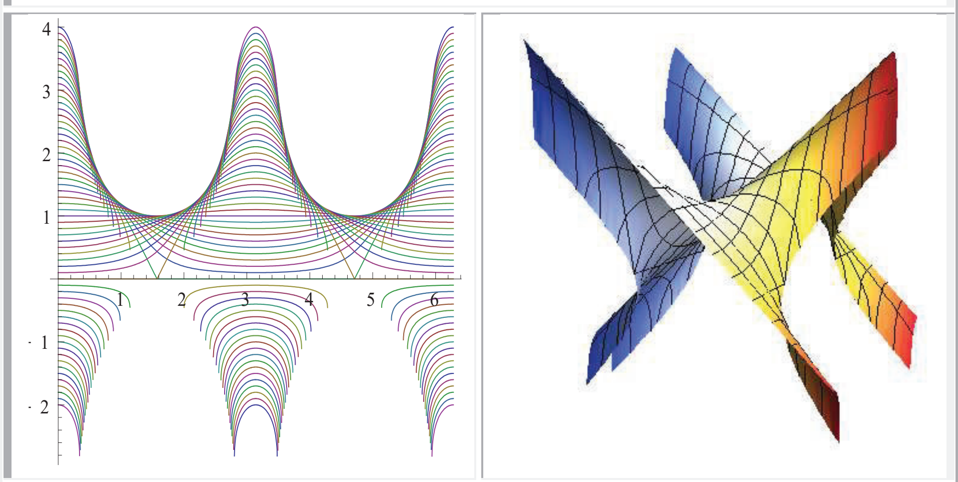


Fig. 2.21,b FSM-CE rexθ, s ∈ [-3, +3] în 2D şi s ∈ [-2, +2] în 3D

Dreapta generatoare este dreapta mobilă, în jurul unui **pol**, pol care poate fi **O**, în cazul funcţiilor **centrice** şi **E** în cazul funcţiilor **excentrice** (cu originea în **O**), **elevate** (cu originea în **S**) şi **exotice** (cu originea oarecare în planul cercului, dar diferită de originea sistemului de referinţă **O** şi de excentrul **S** sau **E**).

Dacă matematica **centrică** (**MC**) operează ca argument doar cu **unghiul α la centru centru**, în **ME** se operează atât cu argument **unghiul θ la excentrul E** cât şi cu **unghiul α la centrul O**.

Funcţiile supermatematice circulare excentrice FSM-CE de variabilă excentrică θ sunt continue numai pentru excentricitatea liniară numerică $s \in [-1,1]$ şi discontinue în rest, deoarece, o dreaptă excentrică **d**, turnantă în jurul unui excentru **S** exterior cercului unitate ($s^2 > 1$), intersecteaza cercul numai pentru anumite valori ale lui $\boldsymbol{\theta}$.

FSM-CE de variabilă centrică sunt continue pentru oricare poziţie a excentrului $S(s \in [-\infty,+\infty], \varepsilon)$ adică pe toată axa reală $\mathbb{R}$. Se vor exemplifica aceste proprietăţi pe funcţiile radiale excentrice **rexθ** şi **Rexα** ale căror grafice sunt prezentate în **figura** 2.21 pentru $s \in [-3, 3]$ în 2D şi în 3D. Reprezentarea funcţiilor în 3D, pe lângă atributul lor artistic, are menirea să elucideze suprapunerile de curbe care apar în 2D.

In acest caz şi funcţiile trigonometrice înclinate care pot fi reprezentate prin **FSM-CE** pot lua aceleaşi valori ca şi funcţiile înclinate **Biehringer**.

(3.74) $\ddot{\vec{r}} + 2\zeta.\omega_0^2.\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \omega_0^2\frac{F}{k}rad\omega t$, in care ζ este factorul de amortizare, sau fracţiunea din amortizarea critica $\mathbf{c_c}$, exprimată de relaţia

(3.75) $\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_0}$ şi se vor nota

(3.76) $1-2.\zeta^2 = \cos\alpha_1$ sau $\alpha_1 = 2.\arcsin\zeta = \arccos(1-2.\zeta^2)$.

Admiţând că $\vec{r} = R.rad(\omega t + \theta)$ este o **soluţie a ecuaţiei diferenţiale** şi introducând-o în (3.74) , rezultă, ordonând termenii în funcţie de versorii **rad** ωt şi **der** ωt

(3.77) $R\{\, \mathbf{rad}\omega t\, [(\omega_0^2 - \omega^2).\cos\theta - 2.\zeta.\omega_0\, \omega.\sin\theta - F.\omega_0^2 / k.R] +$
$+\, \mathbf{der}\omega t\, [(\omega_0^2 - \omega^2).\sin\theta + 2\zeta.\omega_0.\omega.\cos\theta]\} = 0$

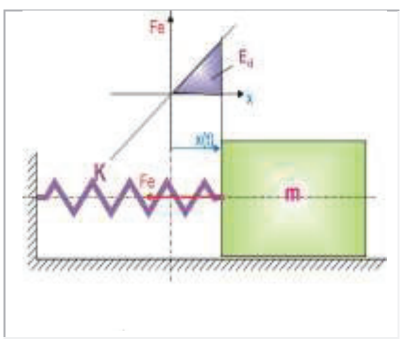


Fig. 2.22,a Modelul dr.ing.**Titus Cioară** al unui sistem vibrant conservativ cu un singur grad de libertate

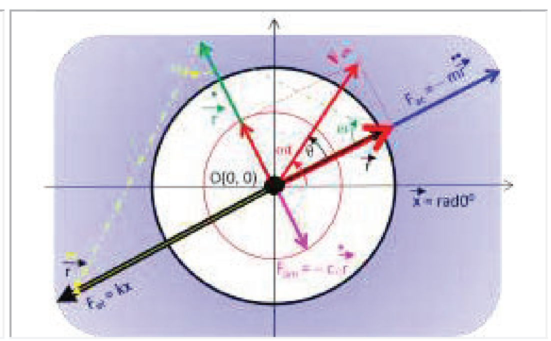


Fig. 2.23 Vectorii deplasare $\vec{r}$, viteză $\dot{\vec{r}}$ şi acceleraţie $\ddot{\vec{r}}$ ai vibraţiilor sistemelor liniare, forţate, amortizate **vâscos.**

y = coqθ + siqθ , s ∈ [0, 3], θ ∈ [- 2π, 2π]

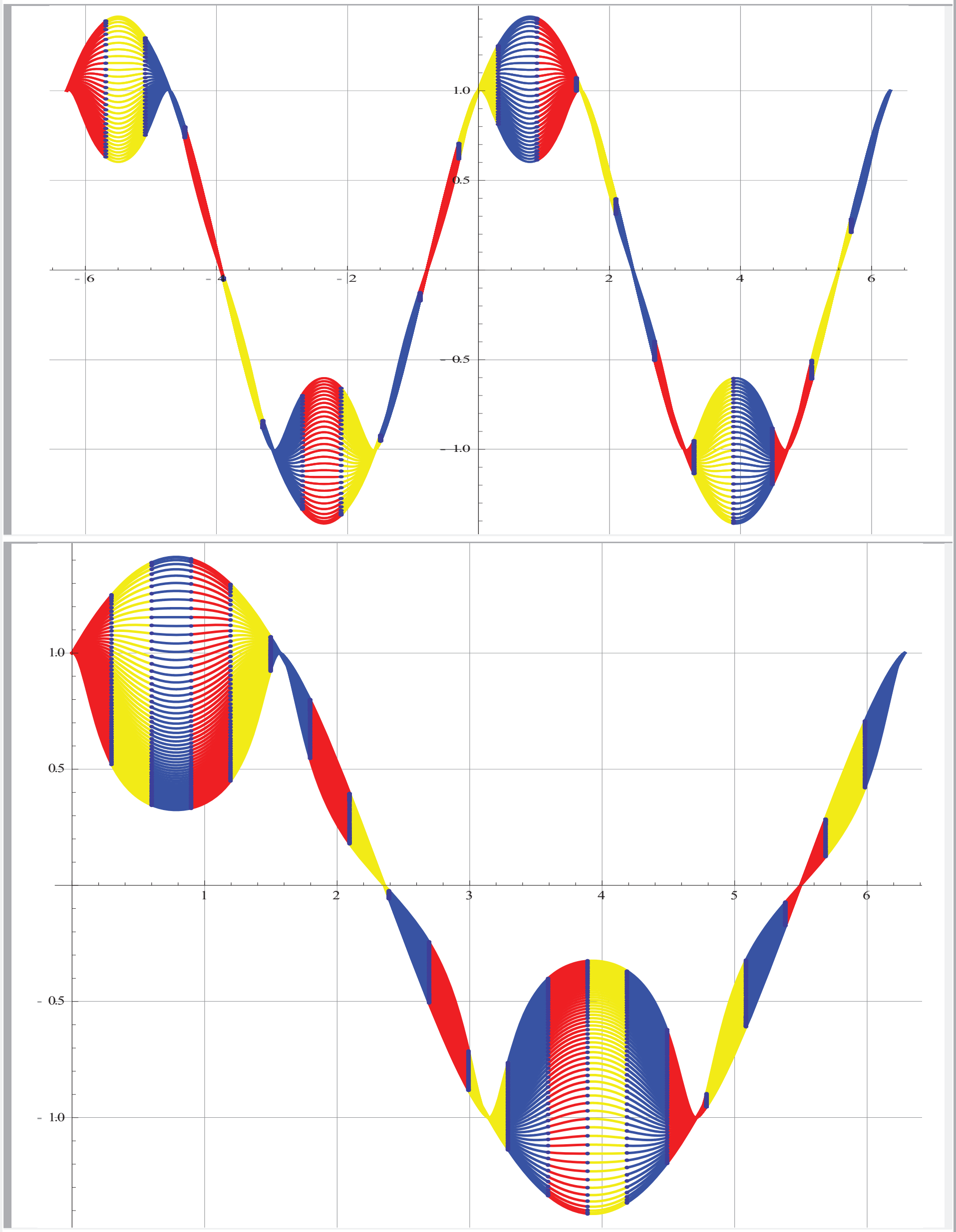


Fig. 2.24,b CURIOZITĂŢI SUPER MATEMATICE

Motto: "Errare humanum est, perseverare diabolicum"
Sofocle

Capitolul 3

COMPLETĂRI ŞI REDEFINIRI CORECTE ÎN MATEMATICĂ CENTRICĂ

3.1 DIVAGATII ASUPRA MATEMATICII CULESE DE PE INTERNET

Există multe discuţii contradictorii şi chiar dure, pe internet, cu privire la matematică şi la locul ei în ştiinţă. Redăm câteva opinii din portalul de matematică **Wikipedia**

Matematica este, în general, definită ca ştiinţa ce studiază modelele de structură, schimbare şi spaţiu. În conversaţii amicale, poate fi descrisă ca ***„analiza cifrelor şi a numerelor"***, în timp ce, cu alte ocazii, poate fi utilizată o descriere pedantă, de genul *„cercetarea axiomatică a structurilor abstracte folosind raţionamente logice şi notaţii matematice"*. Un compromis se obţine prin *„studiul obiectelor sau noţiunilor a căror existenţă este independentă de această investigaţie ştiinţifică"* .

Datorită utilizării sale, în majoritatea disciplinelor ştiinţifice, matematica a fost numită ***'limbajul ştiinţei'*** sau ***'limbajul universului'***". Această afirmaţie, pe care am făcut-o şi noi în capitolul anterior, îi irită la maximum pe unii matematicieni.

Structurile, anume investigate de matematică, îşi au deseori rădăcinile în ştiinţele naturale, cel mai ades în fizică. Matematica defineşte şi investighează şi structuri şi teorii proprii, în special pentru a sintetiza şi unifica multiple câmpuri matematice sub o teorie unică, o metodă ce facilitează în general metode generice de calcul. Ocazional, matematicienii studiază unele domenii ale matematicii strict pentru interesul abstract exercitat de acestea, ceea ce le transformă într-o abordare mai degrabă legată de artă decât de ştiinţă.

Cuvântul "**matematică**" vine din grecescul *μάθημα* (*máthema*) care înseamnă "ştiinţă, cunoaştere sau învăţare"; *μαθηματικός* (*mathematikós*) înseamnă "cel care îndrăgeşte învăţarea".

Din punct de vedere istoric, ramurile majore ale matematicii au derivat din necesitatea de a face calcule comerciale, de a măsura terenuri şi de a predetermina evenimente astronomice. Aceste domenii specifice pot fi folosite pentru a delimita în mod generic tendinţele matematicii până în ziua de astăzi, în sensul delimitării a trei tendinţe specifice: studiul structurii, spaţiului şi al schimbărilor.

Studiul structurii se bazează în mod generic pe teoria numerelor: iniţial studiul numerelor naturale, apoi numere întregi, continuând cu numere raţionale şi în sfârşit numere reale, întotdeauna corelate cu operaţiile aritmetice între acestea, toate acestea făcând parte din algebra elementară. Investigarea în profunzime a acestor teorii şi abstractizarea lor a dus în final la algebra abstractă care studiază printre altele inele (algebră) şi corpuri, structuri care generalizează proprietăţile numerelor în sensul obişnuit. Conceptul indispensabil în fizică de vector, generalizat în sensul de spaţiu vectorial şi studiat în algebra lineară este comun studiului structurii şi studiului spaţiului.

Studiul spaţiului porneşte în mod natural de la geometrie, începând de la geometria euclidiană şi trigonometria familiară în trei dimensiuni şi generalizată apoi la geometrie neeuclidiană, care joacă un rol esenţial în teoria relativităţii. O mulţime de teorii legate de posibilitatea unor construcţii folosind rigla şi compasul au fost încheiate de teoria **Galois**. Ramurile moderne ale geometriei diferenţiale şi geometriei algebrice abstractizează studiul geometriei în direcţii distincte: geometria diferenţială accentuează uzul sistemului de coordonate şi al direcţiei, pe când geometria algebrică defineşte obiectele mai degrabă ca soluţii la diverse ecuaţii polinomiale. Teoria grupurilor investighează conceptul de simetrie în mod abstract, făcând legătura între studiul structurii şi al spaţiului. Topologia face legătura între studiul spaţiului şi studiul schimbărilor, punând accent pe conceptul continuităţii.

Studiul schimbării este o necesitate mai ales în cazul ştiinţelor naturale, unde măsurarea şi predicţia modificărilor unor variabile este esenţială. Calculul diferenţial a fost creat pentru acest scop, pornind de la definiţia relativ naturală a funcţiilor dintre diverse dimensiuni şi rata lor de schimbare în timp, metodele de rezolvare ale acestora fiind ecuaţiile diferenţiale. Din considerente practice, este convenabil să se folosească numerele complexe în această ramură.

Schimbarea poate fi şi o metamorfozare sau o hibridare matematică, graţie **SM**, prin care apar entităţi matematice noi, de care s-a amintit (conopiramida ş.m.a) şi care pot transforma suprafeţele complexe, considerate până în prezent **nematematice**, în suprafeţe complexe **matematice** şi, astfel, se pot lărgi nedefinit posibilitaţiile de exprimare, reprezentare, descriere şi, prin acestea, de simplificare şi îmbunătăţire a generării suprafeţelor tehnice complexe, din ce în ce mai numeroase.

Înainte de-a arăta cum **SM** realizează această transformare, e necesar să spunem ce este **supermatematica** (**SM)** ? Dar, înainte de asta, e necesar să ştim ce este **matematica**?

Conform declaraţiei, făcută de matematicianul de prestigiu Acad. **Solomon Marcus**, nimeni n-a reuşit să dea o definiţie acceptabilă matematicii. „***Nu putem spune ce este matematica, dar putem spune <u>ce nu este</u> matematica***”, declara domnia sa.

În aceste circumstanţe, definiţia **supermatematicii** (**SM)** este posibilă şi uşor de stabilit: **supermatematica** este o extensie nelimitată, infinită, a ceea ce nu ştim ce este, adică a matematicii.

Este incredibil, dar adevarat, că **supermatematica** s-a născut prin simpla expulzare a unui singur punct, a polului **P**, din originea **O(0,0),** în oricare alt punct din planul cercului, şi care pol P a fost denumit ex-centru **E(e,ε)** sau **S(s,ε).** Şi, în acest mod, toate **funcţiile trigonometrice centrice** au fost <u>multiplicate de la unu la infinit</u>, corespunzator numărului infinit de puncte în care poate fi plasat excentrul **E** sau **S**. Şi, mult mai important, au apărut o pleiadă de funcţii noi, deosebit de utile în ştiinţă şi în tehnologie. O ramură importantă a matematicii aplicate, despre care se va vorbi în continuare, este **trigonometria** şi, evident, funcţiile trigonometrice **centrice** şi, mai ales, **excentrice**, care pot defini o **trigonometrie excentrică**, aşa cum a denumit-o Dr. Ing. **Sorin George Le Mac**.

Trigonometria (din limba greacă τρίγωνος *trígonos* = *triunghiular* şi μέτρον *métron* = măsură) e o parte a matematicii care studiază unghiuri, triunghiuri şi funcţii trigonometrice precum sinusul, cosinusul şi tangenta. Unii matematicieni consideră trigonometria o subdiviziune a geometriei iar alţii ca o ştiinţă matematică distinctă.

Originea trigonometriei se consideră a fi în cultura antică din Egipt, Babilon şi Valea Indului, acum mai mult de 3000 de ani. Matematicienii indieni au fost pionerii calculului algebric, cu aplicaţii în astronomie şi în trigonometrie. **Lagadha** e unicul matematician cunoscut care a utilizat geometria şi trigonometria pentru astronomie în cartea sa **VEDANGA JYOTISHA**, cu toate că multe din lucrările sale au fost distruse de către invadatorii Indiei.

Matematicianul grec **Hipparchus** a compilat un tabel trigonometric pentru triunghiuri cu circa 150 î.Hr.. Un alt matematician grec, **Ptolemeu** (circa 100 î.Hr.) a continuat să dezvolte calculul trigonometric.

Savantul **Shia Musulman Nasir al-Din Tusi** a fost probabil primul care a considerat trigonometria ca o disciplină matematică distinctă şi a fost primul care a descris şase cazuri ale unui triunghi dreptunghic în trigonometria sferică.

Mathematicianul, de origină silesă, **Bartholemaeus Pitiscus** a publicat o lucrare importantă în trigonometrie în anul 1595 şi a introdus cuvântul în limbile franceză şi engleză.

Există un număr enorm de aplicaţii pentru trigonometrie. O importanţă specială deţine tehnica de triangulaţie care este utlizată în astronomie pentru a măsura distanţa până la stelele apropiate, în geografie pentru a măsura distanţele între repere terestre şi în sisteme de satelit pentru navigaţie (maritimă, în aviaţie şi în spaţiul extraterestru). Alte domenii care utilizează în mod deosebit trigonometria este **topografia**. În acest domeniu, **trigonometria excentrică**, adică **FSM-CE** vor simplifica mult soluţionarea problemele de planimetrie.

Deoarece corecţiile aduse matematicii, prin complementele de matematică signadforasică (**MS**), cât şi a celor de supermatematică (**SM**) influentează profund această ştiinţa, nu putem încheia această introducere a capitolului fără să ne referim şi la anumite aspecte / probleme filozifice ale matematicii.

Filozofia (filosofia) (gr. *φιλοσοφια*, *philein* şi *sophia*, *dragoste de înţelepciune*) este o modalitate de gândire şi investigare, formată dintr-un ansamblu de noţiuni şi idei, care tinde să cunoască şi să înţeleagă sensul existenţei sub aspectele sale cele mai generale, o concepţie generală despre lume şi viaţă. Filosofia se deosebeşte de ştiinţă, prin faptul că îşi pune întrebări la *probleme* cu caracter general, în timp ce **ştiinţa** acumulează *cunoştinţe* particulare în urma observării realităţii şi experienţei.

În filosofie nu se obţin niciodată răspunsuri definitive (deşi şi postulatele ştiinţifice sunt valabile până la dovedirea contrariului, nefiind absolute), cu fiecare răspuns primit, problema rămâne mai departe deschisă. De aceea, se poate spune că ***„istoria filosofiei este istoria întrebărilor care revin şi a răspunsurilor care trec”***. S-ar putea spune că filosofia este chintesenţa cunoaşterii, baza tuturor ştiinţelor, în mod **paradoxa**l nefiind însă o ştiinţă la rândul ei.

Metafizica este un domeniu al filozofiei al cărui obiect de studiu îl constituie explicarea naturii lumii. Este studiul fiinţei şi fiinţării, deci al realităţii. Metafizica adresează gândirii întrebări de tipul, "Care este natura realităţii?", "Care este locul omului în Univers?"

O ramură esenţială a metafizicii este ontologia, investigarea categoriilor de lucruri care există în lume şi a relaţiilor dintre acestea. Metafizicianul încearcă să clarifice noţiunile prin care oamenii înţeleg lumea, incluzând existenţa, noţiunea de obiect, proprietatea, spaţiul, timpul, cauzalitatea, interconexiunile şi posibilitatea.

Mult mai recent, termenul metafizică a fost asociat pentru a caracteriza subiecte care sunt "deasupra" sau "în afara" acestei lumi fizice, neavând o conotaţie ontologică academică. Termenul "metafizică", folosit într-un **sens peiorativ**, având denominarea de **senzaţional**, supranatural, asociat cu alte pseudoştiinţe cum ar fi spiritismul, "citirea" în cristale, rune sau tarot, prezicerea viitorului, ocultismul, etc. nu este recunoscut de filozofia academică, aidoma sus-numitelor pseudoştiinţe care nu au nimic de-a face cu metafizica.

În **filozofia matematicii**, termenul de **constructivism** presupune că este necesar şi **suficient** ca un obiect matematic **să fie "găsit"** sau "**construit**" pentru a demonstra că **există**. In prezenta lucrare vor fi etalate o infinitate de noi obiecte matematice, majoritatea celor esenţiale evident inventate şi destul de multe, în special cele cu veleităţi artistice, „**găsite**", pentru că au fost pierdute de **Euler** prin alegerea neinspirată a trei puncte confundate (originea, polul şi centrul cercului unitate) la redefinirea funcţiilor trigonometrice ca funcţii circulare directe.

Dacă se presupune că obiectul matematic există şi această presupunere conduce la o contradicţie, atunci obiectul nu a fost găsit şi, în concluzie, existenţa nu i-a fost dovedită, conform constructiviştilor.

Constructivismul este adeseori confundat cu intuiţionismul, deşi de fapt, **intuiţionismul** este doar un anumit tip de constructivism.

Intuiţionismul susţine că fundamentele matematicii constau în intuiţia matematică individuală, făcînd astfel matematica o activitate subiectivă intrinsecă.

„Matematica este regina ştiinţelor, pentru că aici nu există loc pentru interpretări, aproximări, greşeli sau măsurări greşite, ş.a.m.d. Aici nu se mai revine aproape niciodată cu reevaluări în lumina noilor descoperiri: "***să vedeţi că ceea ce credeam acum 50 de ani nu mai este valabil astăzi***". Lucrurile se demonstrează clar, odată pentru totdeauna, dacă sunt aşa sau sunt pe dos.

Şi totuşi…

3.2 MATEMATICA SIGNADFORASICĂ (MS) A LUI Octavian Nicolae Voinoiu

Cele câteva noţiuni de matematică signadforasică (**MS**), ce vor fi prezentate în continuare, sunt extrase din magistrala lucrare a profesorului **Octavian N. Voinoiu** „**BAZELE MATEMATICII SIGNADFORASICE**" publicată în editura Nemira din Bucureşti în anul 1996.

S-au înserat aceste complemente de matematică, în prezenta lucrare, pentru a justifica introducerea noilor noţiuni de tangentă **Voinoiu** (tanvα ≡ **tgv α**), cotangenta **Voinoiu** (cotvα ≡ **ctgvα**) ş.a. alături de funcţiilor corespondente, introduse în mod greşit în matematica centrică, aşa cum se demonstrează în **MS** şi aşa cum se va putea observa, simplu, în **SM**. Ambele matematici converg spre aceleaşi soluţii, în domeniul funcţiilor compuse tan α ≡ tgα, cot α≡ ctgα, secα şi cosecα. Şi, totodată, de a stârni curiozitatea cititorilor pentru revoluţionarele concluzii cuprinse în **MS**.

După părerea competentă a Acad. **Alexandru Surdu**, din prefaţă lucrării **„Matematica signadforasică”, MS** reconsideră întreaga matematică elementară, superioară, trigonometria şi geometria în baza noilor ei axiome, aducând la rampă, pe de o parte, noi modalităţi de interpretare a unor noţiuni clasice ca: derivată, diferenţială, dezvoltare în serie, etc. iar, pe de altă parte, **impunând reguli şocante**, într-o totală contradicţie cu spiritul clasic al gândirii matematice.”.. ” Iată un fenomen straniu, fără precedent în istoria gândirii. O ştiinţă care a ajuns în stare pozitivă, revine la starea metafizică. Iar această ştiinţă este cea mai **veche**, cea mai **simplă** şi cea mai **exactă** dintre toate - este **matematica**”

Pentru înţelegerea matematicii signadforasice (**MS**: **signa** = semn, ad **foras** = afară, pus în faţă) autorul ne trimite la noţiunile de număr, semn, variabilă, finalizate prin procedee de prezentare, de diferenţiere şi reguli de calcul.

Noţiunea, de la care pleacă **MS**, este cea de **variabilă signadforasică**, prezentă în componentele ei **diacronice** de **semn** şi **valoare**. Necunoscuta **x,** în forma generală, este expresia unei forme dihotomice **/x/ | x |** în care **semnul grafic /x /** desemnează semnul variabilei, iar **| x |** pune în evidenţă **valoarea** ei absolută (aritmetică), fiecare dintre părţi supunându-se axiomelor specifice **semnului** şi, respectiv, **modulului**.

Semnul / x /, asociat valorii absolute, ca element, este studiat în două ipostaze:

- Dacă este identificabil cu unul dintre elementele (+) sau (—), el face parte din **mulţimea semn „SEMASIA” S (- ; +)**
- Dacă **/x/** nu aparţine acestei mulţimi, atunci el intră în componenţa mulţimii **M(/x/),** rânduită, cum afirma autorul, prin intermediul unei funcţii **„SIGNUM”** Sg(r) de cu totul alte axiome. Axiomele specifice, atât mulţimii **SEMASIA** cât şi funcţiei **SIGNUM**, sunt strâns legate de noţiunea de **accedere**, definită ca o prezenţă, în vecinatate a elementelor, noţiune pusă în evidenţă prin semnul grafic **//.**

Operaţiunea de **scădere** a fost înlocuită cu o **accedere**, în care **scăzătorul** este înlocuit prin **opusul** lui, notat simbolic $\underline{x}$. Noţiune de **„opus”** al unui element aparţinând mulţimii **SEMASIA.**

Accederile de semn pot să apară în urma supunerii variabilelor signadforasice operaţiilor matematice de **accedere**, înmulţire, logaritmare, derivare ş.a.

Într-un anumit fel, operaţia de **accedere** rezolvă problemele de **poziţionare**, sau de **spaţiu**. Pentru reglementerea acţiunilor în **timp**, s-a introdus noţiunea de **succedere**, notată **\ \,** pe elementele unei mulţimi, iar în cazul manifestării unor însuşiri atât poziţionale cât şi temporale se aplică operaţia **Wolner** (/ \ \ /).

Plecând de la noţiunea de variabilă signadforasică, s-a definit noţiunea de **„Masor”** ca produs dintre o variabilă signadforasica şi o constantă signadforasică, expresie de forma

(/x/ |x|)●(/A/ |A|),

în care, ordinea celor două paranteze este fundamentală. A mai fost definită noţiunea de „**Polimasor**” prin operaţia de accedere aplicată pe mulţimea masorilor.

În cazul produsului a doi, sau mai multi masori, sau în cazul general al unor expresii signadforasice, s-a plecat de la o dependenţă a semnului produsului de semnele factorilor, dată de o relaţie generală de forma

(/x/ | x|) ●(/y/ |y|) = /x/$_n$ /y/$_m$ |x|●|y| în care, ţinând cont de axiomele accederii pe elementele mulţimii **SEMASIA**, această relaţie dezvăluie trei cazuri distincte:

- Pentru **n = m = | 1 |** rezultă regulile de semn ale înmulţirii din algebra clasică;
- Pentru **n = 2, m = 2** rezultă regulile înmulţirii din **aritmetică**.
- Variantele **n = 1** şi **m = 2** ca şi pentru **n = 2** şi **m = 1** constituie una din **axiomele matematicii signadforasice poziţionale**, factor principal stânga, cu sigla (**MSPS**) şi, respectiv, factor principal dreapta, matematică ce constituie obiectul matematicii signadforasice (**MS**).

Legea de bază a înmulţirii în **MSPS** devine

(/x/ |x|)●(/y/ |y|) = /x/ (|x|●|y|) valabilă pentru 2 sau mai mulţi factori.

Pentru 3 factori este:

x●y●z = / x / (| x |●| y |●| z |)

Din axiomele de bază ale **MSPS** se deduc şi rezultatele care stau la baza împărţirii în **MS**:

x●y = z → / **x** / (|x|●|y|) = / z / | z | → / **x** / = / **z** / din care rezultă

/ **x** / | x | = / x / | z | / | y | = / x / | z | / y sau

/ x / | y | = / x / | z | / x

Rezultă de aici că, în matematica signadforasica, semnul unei fracţii este dat **numai** de semnul numărătorului, cu **implicaţii profunde** dacă amintim că

$$\lim_{x\to 0}\frac{A}{x} = /\,A\,/\,\left|\infty\right|$$

sau că fracţia signadforasică, care defineşte tangenta centrică **tgx ≡ tan x,** a cărei expresie este

$$\frac{sinx}{cosx} = /s/\left|sinx\right|/cosx\ = /s/tanx,$$

face ca perioada acesteia să devină egală cu perioada funcţiei sinx, adică **2π**, în acord deplin cu o teorema de bază a matematicii, care afirmă ca ***o funcţie compusă***, cum este şi tangenta, ***trebuie să se bucure de toate proprietăţile funcţiilor componente.***

Vom denumi, în continuare, această funcţie trigonometrică centrică, **tangenta Voinoiu** şi se va nota **tgvx** sau **tanvx;** cele două tipuri de tangente centrice fiind prezentate în figura **3.1**.

În cazul ridicării la putere se obţine egalitatea

x^n = / x / | x |^n, ∀ (x ∈ /R/ | r |), egalitate care, pentru exponenţi pari şi valori negative ale variabilei signadforasice devine, în cazul particular n = 2

(/ - / | **1** |)^2 = / - / | **1** | sau $\sqrt{/-/\left|1\right|} = /-/\left|1\right|$,

rezultate **complet diferite** de cele din matematica clasică.

Rezultă că, axioma fundamentală a **MSPS** transformă semiaxa negativă **(/-/| R|)** în sediul unei structuri de grup abelian în care convenţiile clasice sunt total înlăturate, dezvăluind, după afirmaţiile autorului **MS**, o **altă lume**, bazată pe cu totul **alte reguli** într-un univers **eminamente real**, în care

3 COMPLETĂRI ŞI REDEFINIRI CORECTE ÎN MATEMATICĂ CENTRICĂ

- logaritmii cu baza negativă au aceeaşi legitimitate ca şi cei cu baza pozitivă;
- funcţiile de grad **par** nu mai sunt obligate să-şi schimbe **curbura** când variabila trece prin valori negative;
- semnele „infiniţiilor” sunt impuse de alte reguli;
- ecuaţiile de grad **par** nu mai fac „notă discordantă” şi, ca o consecinţă, între numărul rădăcinilor şi gradul ecuaţiilor apar **alte legi**;
- derivatele signadforasice sunt mult mai **generalizatoare** şi capătă alte interpretări.
-

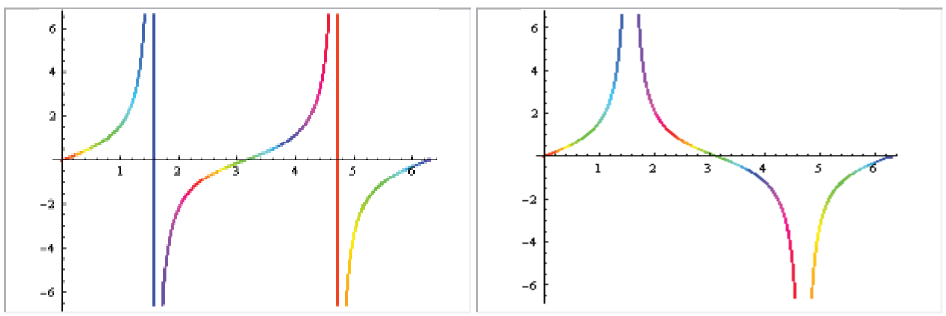


Fig. 3.1,a Tangenta clasică (**Euler**) tg x ≡ **tan x** = sin x / cos x	**Fig. 3.1,b** Tangenta nouă **Voinoiu** **tav x = sin x / Abs**[cos x]

Odată cu apariţia **SM**, prin definirea celor două determinari ale funcţiilor circulare excentrice, **prima**, de indice **1,** dată de intersecţia semidreptei turnante **pozitive** cu cercului unitate sau cu **tangenta** la acesta în A(+1, 0) şi, o **a doua**, de indice **2**, dată de intersecţia cercului unitate sau a **tangentei** în A(+1, 0) cu semiaxa **negativă**, a ieşit în evidenţă lipsa de **consecvenţă** la definirea funcţie circulare centrice **Euler** **tg x** ≡ **tan x**, prin faptul că, în primul cadran şi în cadranul IV, intersecţia **tangentei** la cercul unitate din A(+1, 0) se realizează cu **semidreapta pozitivă**, iar în cadranele II şi III cercul unitate este intersectat de **semidreapta negativă**, ambele semidrepte fiind adiacente în **O** şi turnante în jurul originii **O(0,0)**.

Prin introducerea în matematică a **tangentei** **Voinoiu**, intersecţia se realizează cu **aceeiaşi semidreaptă** turnantă **pozitivă**, dar cu cele **două tangente** la cercul unitate, una în A(+1, 0) şi a doua în A’(-1,0) la cercul unitate. Aşa cum se poate observa din figurile **3.1**, tangenta **Voinoiu** nu mai realizează salturi la x = π/2 + k.π de la un infinit la celălalt.

3.3. FUNCŢII CIRCULARE / TRIGONOMETRICE CENTRICE radα ŞI derα, ECHIVALENTELE ÎN CENTRIC ALE funcţiilor SM CIRCULARE EXCENTRICE (FSM-CE) radial excentric rexθ ŞI DERIVAT EXCENTRICE dexθ

În planul euclidian $\mathbb{R}^2$ se consideră cercul unitate **CU**(O, R = 1) din figura **3.2**, de raza **R=1** şi cu centrul în originea **O(0,0)** a sistemului de coordonate cartezian drept xOy.

Fie W(0) ≡ A(1,0) si α → W(α) **funcţia de reducere la primul cerc**.

Funcţiile trigonometrice centrice (**FTC**) sau funcţiile circulare centrice (**FCC**), deoarece se referă la definirea lor pe cerc de către **Euler**, sunt funcţii reale de variabilă reală a unghiului orientat $\measuredangle\boldsymbol{\alpha}$ asociat lui α. Unghiul orientat este $\measuredangle\boldsymbol{\alpha}$ **= W(0) ○ W(α),** iar W(**α**) = (x, y).

Pentru orice număr real **α** şi **θ**, corespondenţele

(3.1) $$\left\{\begin{array}{l} \alpha \to \cos\measuredangle\alpha = \cos\alpha = x, \quad sau \quad \theta \to \cos\measuredangle\theta = \cos\theta = x \\ \alpha \to \sin\measuredangle\alpha = \sin\alpha = y, \quad sau \quad \theta \to \sin\measuredangle\theta = \sin\theta = y, \\ \alpha \to \tan\measuredangle\alpha = \tan\alpha = \frac{y}{x}, \quad sau \quad \tan\measuredangle\theta = \tan\theta = \frac{y}{x} \end{array}\right\} \text{când } x \neq 0$$

(şi altele: ctg ≡ cot, sec, cosec ≡ csc, versin) sunt **funcţii circulare centrice** (**FCC**).

În acord cu interpretarea geometrică, dată de **Gauss** (1797), mulţimea numerelor complexe poate fi interpretată ca fiind mulţimea punctelor planului euclidean, unde x, y reprezintă abscisa şi ordonata punctului P = (x, y).

Dacă **z** = (x, y) este un număr complex oarecare, atunci

(3.2) **z** = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + i.y este expresia algebrică a numărului complex.

În această scriere

(3.3) x = **Re z**, y = **Imz** reprezintă partea **reală** şi, respectiv, partea **imaginară** a numărului complex **z.** Modulul numărului complex **z** este

(3.4) | **z** | = r = $\sqrt{x^2+y^2}$, iar θ = arg z = arc tan $\frac{y}{x}$ este argumentul acestuia.

În acest fel, **forma trigonometrică** de scriere a numărului complex **z** este

(3.5) **z** = **r**(cos θ + i.sin θ), iar **forma exponenţială**, dată de **Leonhard Euler** (1707 - 1783), pe baza notaţiei lui **Roger Cotes** (1714)

(3.6) cos θ + i sin θ = $e^{i.\theta}$ este

(3.7) **z = r. e$^{i.\theta}$**, în care r = | **z** | şi θ = arg **z.**

3.4 DEFINIREA FUNCŢIILOR RADIAL (radα) ŞI DERIVAT (derα) CENTRICE

Din punct de vedere **istoric**, aceste funcţii centrice noi (şi vechi în acelaşi timp) au fost introduse în matematică după **FSM-CE rex**θ şi **dex**θ. Deoarece **FCE cex, sex, tex, ctx** ş.a. au **echivalente** în domeniul **FCC** pe **cos, sin, tan, ctg**, s-a pus, în mod justificat, întrebarea: care sunt **echivalentele** în centric ale noilor funcţii **rexθ** şi **dex**θ ?

Şi, o întrebare bine pusă, dă şi soluţia: ele sunt **rad** şi **der** de θ = α, în acest caz, al excentricităţii nule (e = **s** = 0).

Funcţia **rad** nu trebuie confundată cu funcţiile **Rademacher** [**Pop Eugen**, ş.a. „Metode în prelucrarea numerică a semnalelor”, Vol. I, Ed. Facla, Timişoara, 1986, pag. 22 ş.u.], cu ajutorul cărora se pot construi familii de funcţii ortonormate totale

(3.8) rad (n,θ) = sgn (sin2nθ), θ = t / T, care permite construirea funcţiei **Walsh**

(3.9) wal (m,θ) = $\prod_{k=1}^{n}[rad(k,\theta)]^{p_{nk}}$, m = 1, 2, …,(2^n -1), deci, ca produs de funcţii **Rademacher**; exponentul p_{nk} având valoarea 0 sau 1 după anumite **reguli**, numite **de ordonare** şi servind sintezei semnalelor de diferite forme în impulsuri dreptunghiulare. Se va vedea, în continuare, că aceleaşi funcţii dreptunghiulare, ca şi multe alte funcţii speciale, pot fi mult mai simplu şi mai eficient reprezentate cu ajutorul **FSM-CE dexθ, coqθ** si **siqθ**.

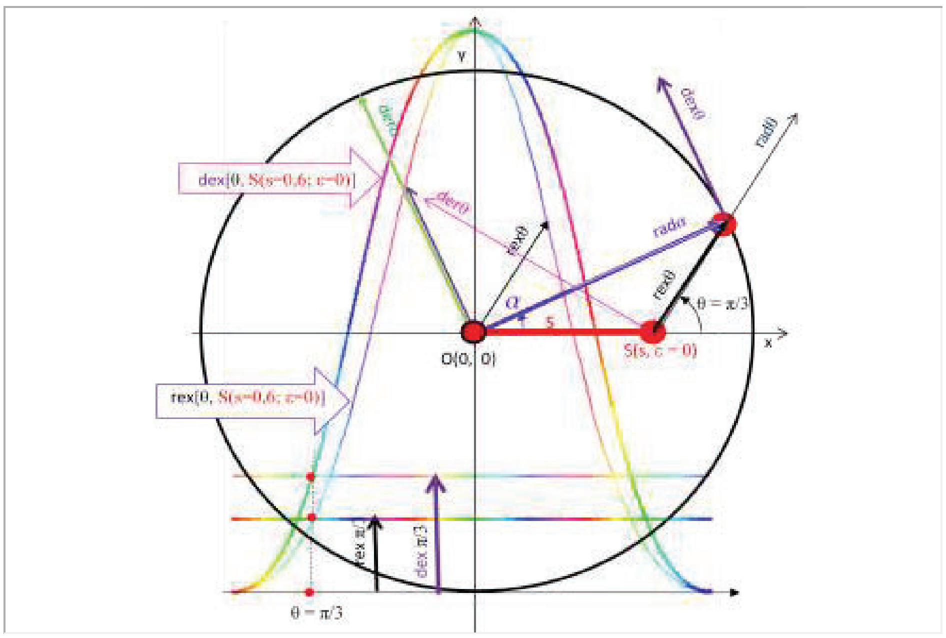


Fig. 3.2 **FCC** noi **radα** şi **derα** precum şi **FSM-CE** **rex**θ şi **dex**θ

În schimb, funcţiile radial – **rad** - şi derivat – **der**- centrice sunt aceleaşi cu funcţiile **e** definite de **P. Hamburg** [**Hamburg, P.** ş.a.. ” Analiză matematică. Funcţii complexe” EDP, Buc., 1982, pag 7…16]

e (θ) = [1 + i.β(θ)] / [1 – i.β(θ)], cu proprietăţiile

e (θ + 2π) = **e**(θ), |**e** (θ)| = 1, **e** (0) = 1, **e** ($\theta_1 + \theta_2$) = **e**(θ_1). **e**(θ_2),

proprietăţi care sunt aceleaşi cu cele ale funcţiilor **radα** şi **derα**

rad 0 = 1, der 0 = rad π/2 = i, rad π = - 1, rad(α + 2 π) = rad α,

der (α + 2 π) = der α, | rad α | = | der α | = 1,

der α = d(rad α) / d α = rad (α + π / 2)

rad($\alpha_1 + \alpha_2$) = rad α_1. rad α_2 , rad ($\alpha_1 - \alpha_2$) = rad α_1 / rad α_2.

Toate punctele planului, aparţinând cercului unitate centric ***CU(O,1)***, au coordonatele egale cu ale punctelor **W** = (x, y) = (cosα, sinα) şi modulul

(3.10) $|\mathbf{z}| = \mathbf{R} = \sqrt{cos^2\alpha + sin^2\alpha} = 1$

Atunci, pentru arg z = α, apare o corespondenţă directă între numerele reale α şi **funcţia de reducere la primul cerc W(α).** Corespondenţa

(3.11) $\alpha \rightarrow rad\angle\,\alpha = rad\,\alpha = e^{i\alpha}$ se numeste FCC „radial centric de ***α***”, notată **rad** α

Ea are expresiile

(3.12) $rad\,\alpha = e^{i\,\alpha} = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!} = \cos\alpha + i.\sin\alpha = W(\alpha) = (x, y)$

Punctul W = (x, y), afixul numărului complex z = x + i y este determinat de vectorul $\vec{r}(\alpha)$ denumit versorul directie α, deoarece are punctul de aplicaţie în **originea O(0,0)** a axelor xOy şi este de modul egal cu unitatea şi de argument ***α***.

La notaţia vectorului unitate al direcţiei α **(**radα**)** **nu mai necesită o bară deasupra**, deoarece, radα nu poate fi altceva decât **vector unitate**, **versor**, sau **fazor**, astfel că se poate scrie

(3.13) $\vec{r}(\alpha)$ = rad α.

Prin derivarea funcţiei rad α, data de (3.12) rezultă

(3.13) $\frac{d(rad\alpha)}{d\alpha} = i.e^{i.\alpha} = -sin\,\alpha + i.cos\,\alpha = W_1\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Vom denumi această funcţie **derivata excentrică** de α şi va fi notată **der*α***, fiind exprimată de corespondenta

(3.15) $\alpha \rightarrow der\measuredangle\,\alpha = der\,\alpha = i.e^{i.\alpha} = rad(\alpha + \pi/2)$

Notând cu $\vec{d}$ versorul, **vectorul unitate** (fazorul, sau cronoidul, cum mai sunt numiţi vectorii unitate) direcţiei tangente în $W_1(\alpha)$ la cercul unitate **CU**, din aceleaşi considerente, ca cele anterioare, se poate scrie

(3.16) $\vec{d}$ = der***α***,

<u>fără utilizarea barei deasupra vectorului</u> unitate der***α*.**

Vectorii unitate $\vec{\imath}$ şi $\vec{\jmath}$, ai axelor de coordonate x şi y, pot fi exprimaţi cu ajutorul noilor vectori unitate astfel:

(3.17) $\begin{cases} \vec{u}_x = \vec{\imath} = rad0^0 = der(-\pi/2) \\ \vec{u}_{yx} = \vec{\jmath} = der0^0 = rad(+\pi/2) \end{cases}$

Apelând la regula paralelogramului, de însumare a vectorilor şi a numerelor complexe, se obţine

(3.18) $\frac{rad\alpha + rad(-\alpha)}{2} = \vec{x} = cos\alpha.\vec{u}_x = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$,

una dintre formulele deduse de **Leonhard Euler** în 1740, din relaţia lui **Roger Cotes**.

În acelaşi mod rezultă

(3.19) $\frac{rad\alpha + rad(\pi-\alpha)}{2} = \vec{y} = sin\alpha.\vec{u}_y = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2.i}$

a doua formulă a lui **Euler**.

Din aceste formule, **Euler** a obţinut dezvoltarea în serie de puteri, în care variabila ***α*** s-a înlocuit cu **x** pentru a respecta notaţia tradiţională a lui **cosx** şi **sinx**, cu expresiile (1.1) şi (1.2). Cu aceste formule **Euler** a construit integral **trigonometria** ca un **capitol al algebrei**.

Deoarece, aşa cum s-a demonstrat, funcţia radx, ca şi derx, pot exprima funcţiile trigonometrice cosx şi sinx, **considerate** fundamentale (pentru că pot exprima funcţiile tanx, ctgx, secx şi cscx), rezultă că, de fapt, noile funcţii circulare centrice **rad**x şi **der**x sunt, **de fapt,** şi de drept, funcţii circulare centrice **fundamentale**, deoarece ele pot exprima, aşa cum s-a văzut, pe cosx şi pe sinx şi, implicit, celelalte **FCC**. Funcţiile **rad**α şi **der**α sunt, aşadar, corespondentele în **MC** ale **FSM-CE** **rex**θ şi **dex**θ din **ME**.

3.5 TEOREME DE ADIŢIUNE ALE FCC radα ŞI derα

Ca şi celelalte **FCC** şi noile **FCC rad** şi **der** au teoreme de adiţiune sau formule de adunare şi, respectiv, de scădere, foarte asemănătoare cu ale **FCC cos**α **(**pentru **der**α**)** şi **sin**α (pentru **rad**α).

Fie unghiurile

(3.20) $\gamma = \theta + \beta$ şi $\alpha = \theta - \beta$ şi funcţia radial (**centric**) de sumă de arce **rad**$(\theta \pm \beta)$.

Pe baza egalităţii (3.12), se poate scrie

(3.21) **rad(θ ± β)** = cos (θ ± β) + **i.** sin(θ ± β) = cos θ. cos β ± sin θ.sin β + **i** (sin θ.cosβ ± cosθ. sin β) = (cosθ + i. sinθ).**cos**β ± (sinθ + i.cosθ) **sin**β =

$$= \mathbf{rad\ \theta}\ .\cos\beta \pm \mathbf{der\ \theta}.\ \sin\beta = \begin{cases} rad\gamma & \rightarrow pentru + \\ rad\alpha & \rightarrow pentru\ - \end{cases}$$

Pentru $\beta = \frac{\pi}{2}$, din (3.21) rezultă

(3.22) $rad(\theta + \frac{\pi}{2}) = der\ \theta$

În mod asemănător, au fost deduse relaţiile

(3.23) $\mathbf{der\ (\theta \pm \beta) = der\ \theta.\ cos\ \beta \mp rad\theta\ sin\ \beta} = \begin{cases} der\gamma & \rightarrow pentru - \\ der\alpha & \rightarrow pentru + \end{cases}$

Se mai pot demonstra, facil, relaţiile

(3.24) $e^{i(\theta+\beta)} = e^{i\theta}e^{i\beta} = e^{i\theta}(cos\beta \pm i.sin\beta) = e^{i\theta}(cos\beta \pm i.sin\beta) =$

$$= rad(\theta \pm \beta) = \begin{cases} e^{i\gamma} & \rightarrow pentru\ + \\ e^{i\alpha} & \rightarrow pentru\ - \end{cases}$$

(3.25) $i.e^{i.(\theta \pm \beta)} = i.rad\ (\theta \pm \beta) = der\ (\theta \pm \beta) = \begin{cases} der\alpha & \rightarrow pentru - \\ der\gamma & \rightarrow pentru + \end{cases}$

(3.26) $(rad\ \alpha)^n = rad\ n.\alpha$ şi $(rad\ \alpha)^2 = rad\ 2\alpha$

(2.27) $\sqrt[n]{rad \propto} = rad\frac{\propto + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$

Astfel, pentru n = 2, → k = 2 - 1 = 1 → k = 0, 1 şi

(3.28) $\sqrt{rad \propto} = \begin{cases} rad\frac{\propto}{2} \\ rad\frac{\propto + 2\pi}{2} = rad\frac{\alpha}{2} + \pi \end{cases}$ şi, pentru n = 3, rezultă

(3.29) $$\sqrt[3]{rad\ \alpha} = \begin{cases} rad(\frac{\alpha}{3}) \\ rad(\frac{\alpha}{3}) + \frac{2\pi}{3} \\ rad(\frac{\alpha}{3}) + 2\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$. Pentru n = 4, k = 0, 1, 2 şi 3, astfel că

(3.30) $$\sqrt[4]{rad\frac{\pi}{2}} = \sqrt[4]{i} = \begin{cases} rad(\frac{\alpha}{4}) \\ rad(\frac{\alpha}{4}) + \frac{\pi}{2} \\ rad(\frac{\alpha}{4}) + \pi \\ rad(\frac{\alpha}{4}) + 3\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pe lângă relaţiile (3.21) şi (3.23), de însumare a funcţiilor rad şi der, de suma şi diferenţa de arce, poate fi obţinută şi ralaţia lui **Pontreaghin**

(3.31) a.rad α.b.rad β = a.b.rad(α + β) care reprezintă înmulţirea vectorului de modul **a** şi de argument **α (**arg **α)** sau de direcţia **α** cu vectorul de modul **b** de pe direcţia β sau arg β, iar înmulţirea a doi vector unitate, pentru a = b = 1, este

(3.32) rad θ. rad β = rad (θ + β) = cos (θ + β) + i sin (θ + β) .

Mai pot fi deduse următoarele relaţii:

(3.33) der (θ + β) = derθ .radβ = derβ. radθ .

(3.34) cos n.α = [rad ^{n} α + rad ^{n}(-α)] / 2

(3.35) rad0^0 . rad0^0 = rad 0^0

(3.36) radπ/2 . radπ/2 = radπ = — rad0^0

(3.37) rad0^0. der0^0 = rad0^0. radπ/2 = rad π/2 = der0^0

(3.38) der0^0. der0^0 = radπ /2 .radπ/2 = radπ = — rad0^0 = derπ/2.

În teza sa de doctorat (pag 17), **Mihail Germanescu** (1899-1962), matematician român, profesor la Politehnica din Timişoara (1940), demonstrează, evident cu alte mijloace, relaţia

(3.39) $1 - e^{2x} = 2sinx.e^{\frac{3\pi}{2}+x}$ în care, utilizând noile **FCC** şi schimbând variabila x cu variabila **α**, este echivalentă relaţiei

(3.40) 1 – rad2**α** = rad 0^0 – rad 2**α** = 2 sinα .rad ($\frac{3\pi}{2}$ + α).

Demonstraţie:

Utilizându-se noile **FCC**, relaţia (3.40) se poate scrie succesiv

rad0^0 – rad2α = rad0^0 – rad (0+2α) = rad0^0 – [rad0. cos2α + der0. sin2α] =
= rad0^0 .(1 – cos2α) + der0^0. sin2 α = 2.sin^{2}α.rad0^0 - der0^0.sin2α =
= 2.sin^{2}α.rad0^0 – 2.sinα.cosα.der0^0 = 2sinα(rad0^0.sinα - der0^0.cosα) =
= —2.sinα.der(0 + α) = 2.sinα rad($\frac{3\pi}{2}$ + α).

În **Addenda** lucrării „MATEMATICI SPECIALE” a lui **Vasile Brânzescu** şi **Octavian Stănaşilă** (Ed. All, Buc. 1994) se afirmă că un sondaj, realizat în mediile universitare, cu privire la cel mai remarcabil rezultat al matematicii, pe locul întâi s-a clasat relaţia lui **Euler**, care stabileşte o dependenţă între patru numere importante e, i, π şi -1.

(3.41) $e^{i\pi}$ = —1 , relaţie care, acum devine evidentă cu vectori şi se poate scrie

(3.42) rad π = der (π + π/2) = der(3 π/2) = −1.
Mai rezultă că
rad 0^0 = 1, rad π/2 = i, radπ = –1, rad$\frac{3\pi}{2} = -i$

3.6 DERIVATELE ŞI INTEGRALELE FUNCŢIILOR radα ŞI derα

Derivatele acestor funcţii se obţin, fără dificultate, prin derivarea uneia dintre relaţiile lor de definiţie şi / sau prin derivarea lor ca vectori unitate. Astfel, de exemplu, se ştie că derivata lui i este j, a lui j este – i, a lui – i este – j şi a acestuia este din nou i, ş.a.m d. Cu alte cuvinte, prin derivarea unui versor, acesta se roteşte cu + π/2, în sens trigonometric sau levogin / sinistrorum. În mod asemănător, dacă **α** este variabila şi modulul este unitate

(3.43) d (radα) / d α = der α
(3.44) d (derα) / d α = − rad α
(3.45) d (-radα) / d α = −der α
(3.46) d (-derα) / d α = rad α, adică, prin derivare, vectorii unitate rad**α** şi der**α** se rotesc în sens trigonometric **pozitiv** (levogin, sinistrorum) cu π/2. Rezultă că derivatele de ordinul **n** vor fi

(3.47) d^n(radα) /d $α^n$ = rad (α + n$\frac{\pi}{2}$) si d^n (der α) / d $α^n$ = der (α + n$\frac{\pi}{2}$)

Se deduce imediat ca primitivele acestor FCC sunt

(3.48) $\int rad.d\alpha = -der\alpha$ = rad(α - $\frac{\pi}{2}$) = rad(α+ 3$\frac{\pi}{2}$)

(3.49) $\int der\alpha.d\alpha = adr\alpha$ = der(α - $\frac{\pi}{2}$) = - der (α + π), rezultând că, prin integrarea vectorilor unitate rad şi/sau der, aceştia se rotesc în sens **negativ** (dextrorum / dextrogin) cu $\frac{\pi}{2}$.

Câteva **aplicaţii** ale noii **FCC** sau trigonometrice centrice rad α sunt prezentate în continuare, la exprimarea sub formă trigonometrică a sumei şi a diferenţei numerelor complexe, la exprimarea grafică a exponenţialelor de diverse ordine, ş.a.

3.7 FORMA TRIGONOMETRICĂ CENTRICĂ A SUMEI ŞI A DIFERENŢEI NUMERELOR COMPLEXE

Lanţul de incluziuni **N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R ⊂ C ⊂ ..** exprimă **extensia noţiunii de număr**.

Introducerea **numerelor negative** şi a celor **întregi Z** a fost necesară pentru exprimarea soluţiilor ecuaţiilor de forma

a + x = b, a, b ∈ **N**, (**N** - Mulţimea numerelor **naturale 1,2,3, ,n)**

Numerele raţionale au fost introduse pentru a exprima soluţiile ecuaţiilor algebrice de gradul **I** ax + b = 0 , a, b ∈ **N** (sau **a, b,** ∈ **Z).**

Numerele reale sunt obiecte ale gândirii umane rezultate printr-un îndelungat proces de abstractizare. Mulţimea **numerelor reale R** se justifică, în analiza matematică şi în geometrie, iar pentru exprimarea tuturor soluţiilor posibile ale ecuaţiilor algebric de gradul **II**

$$\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0, \qquad a, b, c \in R}$$

s-au introdus, în matematică, **numerele complexe**. Ele au fost descoperite de **Niccolo Tartaglia** (1499 – 1557) şi **Gerolamo Cardan** (1501 – 1575) din dorinţa lor de a rezolva, prin radicali, ecuaţiile algebrice de gradul III şi/sau IV cu coeficienţi reali.

Se cunosc forme algebrice, aritmetică şi exponenţială, trigonometrică, geometrică- în planul numerelor lui **Gauss**- şi vectorială ale numerelor **complexe C**.

Forma **trigonometrică** a operaţiilor cu numere complexe este cunoscută numai pentru înmulţirea şi împărţirea lor, precum şi pentru ridicarea la o putere, ca o operaţie repetată de îmulţire a numărului complex cu el însuşi (formula lui **Moivre**), sau extragerea radicalului de un ordin oarecare.

Până în prezent, nu a existat o formă trigonometrică a sumei şi a diferenţei numerelor complexe, deoarece nu au existat nici funcţiile trigonometrice radα şi derα (rexθ şi dexθ), cu ajutorul cărora acest lucru să devină posibil.

Şi nici **ME** care realizează **şi mai bine** acest lucru, ceea ce se va vedea într-un capitol cu privire la funcţia radial excentric **rex**θ.

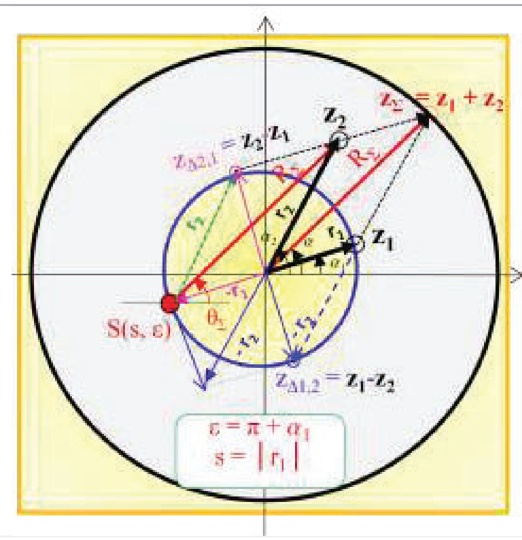


Fig. 3.3 Suma şi diferenţa vectorială a numerelor complexe

Se cunoaşte [**Homentcovshi, D.** „Funcţii complexe cu aplicaţii în ştiinţa şi tehnica”, Ed. Tehnică, Buc.,1986] ca sumă şi diferenţa a două numere complexe z_1 şi z_2 este numărul complex **Z**, definit de cele două diagonale ale paralelogramului construit pe cei doi vectori $\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$; diagonala cea mai lungă reprezentând suma ($Z_\Sigma = z_1+z_2$) şi diagonala mai scurtă diferenţa ($Z_{\Delta 2,1} = z_2 - z_1$). Lungimile diagonalelor $\mathbf{R}_{\Sigma,\,\Delta}$, care sunt şi modulele numerelor complexe $\mathbf{Z}_{\Sigma,\Delta}$, formează cu vectorii $\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$ câte un triunghi (Fig. **3.3**) în care se poate aplica teorema cosinului sau teorema lui **Pitagora** generalizată.

Unghiul $\boldsymbol{\gamma}_{\Sigma,\gamma}$ dintre cele două laturi opuse rezultantelor $\mathbf{R}_{\Sigma,\Delta}$, care interesează, în acest caz, este

(3.50) $\gamma_\Sigma = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1)$ şi $\gamma_\Delta = \alpha_2 - \alpha_1$, astfel $\cos\gamma_{\Sigma,\gamma} = \pm\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$ şi,

în consecinţă, rezultă, scris concentrat, **modulele rezultantelor**

(3.51) $\mathbf{R}_{\Sigma,\Delta} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2cos\gamma_{\Sigma,\Delta}}$,

sau, scoţând forţat pe $\mathbf{r_2}$ în faţa radicalului, rezultă

(3.51') $\mathbf{R}_{\Sigma,\Delta} = \mathbf{r_2}\sqrt{1 + s^2 - 2scos\gamma_{\Sigma,\Delta}}$ $= \mathbf{r_2}$ $\mathbf{R}_{\Sigma,\Delta} = \mathbf{r_2}\sqrt{1 + s^2 \pm 2scos(\alpha_2 - \alpha_1)}$,

în care, semnul **plus** este pentru **sumă** şi semnul minus pentru diferenţă, iar **s** este raportul **s** = r_1/r_2 (sau **excentricitatea liniară numerică**) şi se poate anticipa că, modulul sumei şi a diferenţei numerelor complexe, este dat de **FSM-CE** radial excentric de **α** (**Rexα**) exprimata pe cercul de raza R = r_2.

În final, expresia **trigonometrică** a sumei şi a diferenţei celor două numere complexe, exprimate cu ajutorul **FCC radα** este

(3.52) $\mathbf{Z}_{\Sigma,\Delta} = z_1 \pm z_2 = r_1.\text{rad}\,\alpha_1 \pm r_2.\text{rad}\,\alpha_2 = r_2.\sqrt{1 + s^2 \pm 2scos(\alpha_2 - \alpha_1)}\,.\mathbf{rad}\boldsymbol{\theta}_{\Sigma,\Delta}$

în care $\theta = \alpha - \beta = \alpha - \arcsin[s.\sin(\alpha - \varepsilon)]$, β fiind unghiul dintre $R_{\Sigma,\Delta}$ şi r_2 astfel că

(3.53) $\theta_{\Sigma,\Delta} = \alpha_2 \mp \arcsin\left[\frac{r_1}{R_{\Sigma,\Delta}}\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\right]$

În rezumat, modulul sumei şi a diferenţei a două numere complexe este dat de **FSM-CE** de **variabila centrică α** sau poate fi exprimată prin teorema cosinus (**Pitagora** generalizată), iar direcţia este dată de unghiul la excentru **θ** şi, astfel, numărul complex sumă şi, respectiv, diferenţă $\mathbf{Z}_{\Sigma,\Delta}$ fiind **complet** determinat / definit.

3.8 FORMA GEOMETRICĂ A EXPRESIILOR EXPONENŢIALE DE FORMA x^n şi $x^{1/n}$

Fie triunghiul dreptunghic **OSW** (**Fig. 3.4**) cu unghiul drept în **S** şi de unghi **α** în centrul **O**(0,0). Astfel, latura **OW**, numită de noi **segmentul subunitar** al **semidreaptei exponenţialelor,** poate fi exprimată prin relaţia

(3.54) $\overrightarrow{OW} = R.rad\alpha$ şi, pentru R = 1, rezultă

(3.55) $\vec{z} = \overrightarrow{OW} = rad\alpha$ a cărui proiecţii pe direcţiile x şi y, ale unui reper cartezina drept, sunt

(3.56) $\vec{x} = \overrightarrow{OS} = cos\alpha.rad0^0$, de modul x = cos α şi $\vec{y} = \overrightarrow{SW} = sin\alpha.der0^0$.

Rotindu-l pe $\vec{x}$ cu + α, în sens trigonometric / levogin (sinistrorum), latura **OS** se suprapune peste latura O**W** şi proiectându-l din nou pe axa x rezultă

(3.57) $\vec{x}_2 = cos^2\alpha.rad0^0 = x^2rad0^0$, a cărui modul $x_2 = \cos^2\alpha$.

Rotindu-l pe x_2 cu + α şi proiectândul, din nou, pe direcţia x în x_3 rezultă

(3.58) $\vec{x}_3 = cos^3\alpha.rad0^0 = x^3rad0^0$.

Repetând, în mod analog, operaţiile vor rezulta, în continuare, diversele puteri ale lui x: x^4, x^5, …x^n, ..

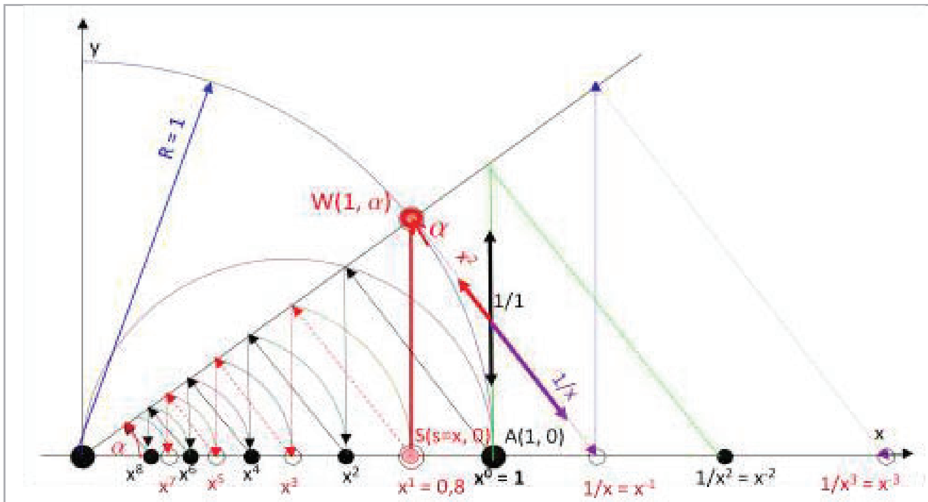


Fig. **3.4** Reprezentarea grafică a exponenţialelor x^n şi $x^{-n} = 1/x^n$, x < 1

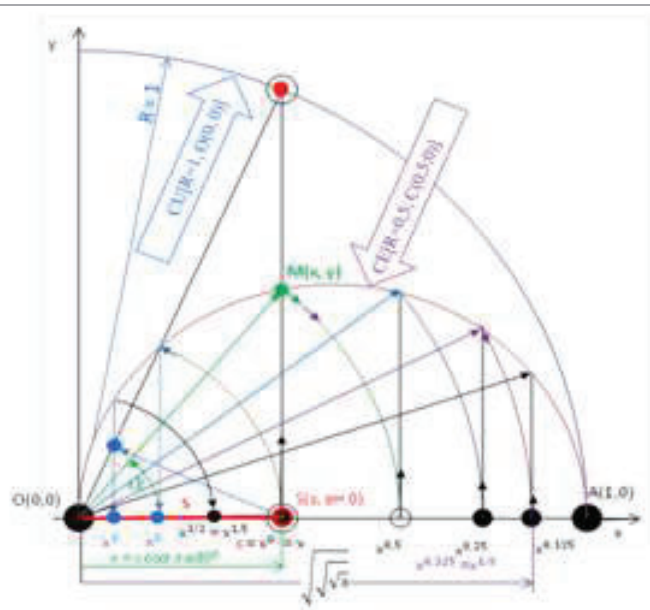


Fig. 3.5 Reprezentarea **radicalului** de ordinul n ($\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$) şi a exponenţialelor de forma $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ din numărul x < 1

În acest fel, a rezultat una din multiplele **metode grafice** de exprimare a diverselor puteri x^n ale unui număr oarecarei x < 1.

Pentru X = 1/x > 1, se consideră vectorul $\vec{z}$, ca proiecţie a vectorului $\vec{X}$ de pe axa x, pe direcţia OW, în care X rezultă

Rotindu-l pe acesta cu +α peste OW şi considerând-ul proiecţie a lui X_2 pe OW rezultă

(3.59) $\vec{X} = X.rad0^0 = \frac{rad0^0}{cos\alpha} = \frac{1}{x}rad0^0.$

(3.60) $\vec{X}_2 = \frac{rad0^0}{cos^2\alpha} = \frac{1}{x^2}rad0^0 = X^2.rad\ 0^0.$

Repetând operaţiile, vom obţine, în continuare, diferitele puteri ale unui număr oarecare X : X^3, X^4, .. ,X^n, ..în care X = 1/x >1.

Pentru **exprimarea radicalilor** de diverse ordine dintr-un număr 0 < x < 1, se consideră vectorul $\vec{r}$ = R .rad α (Fig. **3.5**), care, pentru R = 1, este versorul direcţiei α **rad** α, a cărui proiecţie pe axa x este

(3.61) $\vec{x} = cos\alpha.rad0^0$

Procedeul grafic prezentat în figura anterioară seamană foarte mult cu instrumentul XYZ al lui **René Descartes** [René Descartes, La Géometrie]

O verticală, ridicată din vârful lui $\vec{x}$, intersectează cercul **CE**[R = 0.5; C(0,5; 0)], denumit de noi **cercul exponenţialelor**, care trece prin centrul **O(0,0)** al cercului unitate orientat **CU**[R=1,O(0, 0)] şi prin originea lui **A**(1,0), într-un punct **M** (x, y) de rază polară $\overrightarrow{OM} = \sqrt{x}$ din O(0,0).

Demonstraţie: Triunghiul **OMA** este dreptunghic, cu unghiul drept în M, deoarece **M** se află pe cercul exponenţialelor **CE** şi latura opusă acestui unghi este un diametru al cercului **CE** şi ipotenuză a triunghiului OMA.

Se ştie, din teorema înălţimii, că înălţimea unui triunghi dreptunghic, care este perpendiculară pe ipotenuza acestuia **(y)** este egală cu produsul segmentelor determinate de ea pe ipotenuza OA, adică

(3.62) $y^2 = x\ .\ (1-x) = x - x^2$

Pe de altă parte, modulul **razei polare** $\vec{r}_M$ din O a lui M este

(3.63) $\| \vec{r}_M \| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (x - x^2)} = \sqrt{x}$, ceea ce era de demonstrat.

Concluzii: Dacă pe cercul unitate **CU** se alege un punct W(1, α) ≡ W (cos α, sin α), pe aceeaşi verticală cu **M (x,y)**, a căror proiecţii pe axa **Ox** sunt aceleaşi şi egale cu **x** = cosα, atunci modulul vectorul **OM** este egal cu radicalul lui **x**, adică

(3.64) $\| \vec{r}_M \| = OM = \sqrt{x} = \sqrt{cos \propto}.$

Rotind vectorul $\vec{r}_M$ până ce se suprapune peste axa x, obţinem, pe această axă, valoarea radicalului din x şi vectorul

(3.65) $\sqrt{x}.rado^0$. Ridicând o perpendiculară din vârful acestui vector, ea intersectează pe **CE** într-un punct M_1 a cărui rază polară r_1 este

(3.66) $\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_1 = \sqrt{\sqrt{x}}.rad\beta_1 = x^{\frac{1}{4}}.rad\beta_1,$ în care $cos\beta_1 = x^{1/4}$, ş.a.m.d. pentru următorii exponenţi. Se observă imediat că, pentru n → ∞, punctul $M_n \subset X_E$ tinde pe cercul exponenţialelor spre originea cercului unitate A(1,0), adică $OM_n \to 1$, oricare ar fi $x < 1$.

Deci, ridicând o perpendiculară în $x<1$, $\vec{x}$ = cosα.rad0^0, pe axa **Ox**, ia intersectează cercul exponenţialelor în M şi OM $=\sqrt{x}$. Dacă-l rabatem pe OM $= \sqrt{x}$ pe axa Ox obţinem, pe axă, punctul de modul $x_1=\sqrt{x}$. Ridicând din nou o perpendiculară pe Ox în x_1 şi intersectând-o cu **CE**, obţinem punctul $M_1 \subset X_E$ şi raza polară centrică, din O, OM_1 a cărui modul este $\sqrt{x_1} = \sqrt{\sqrt{x}}$, ş.a.m.d.

Prin urmare, prin creşterea lui n, al exponentul 1/n, punctele M_i se deplasează pe **CE** din M spre A(1, 0) şi proiecţiile acestor puncte pe Ox sunt diversele puteri ale radicalului lui x.

Procedând în mod invers, întâi rotindu-l pe x, până ce vârful vectorului ajunge pe **CE**, se vor obţine succesiv, pe **CE**, punctele P_2, P_4, P_6 …P_n, apoi, proiectându-le pe Ox , obţinem succesiv o parte din puterile **pare** ale lui lui x^{n^2} : x^2, x^4, x^8, x^{16} , x^2 (n = 1, 2, …) şi pentru $n \to \infty$, $P_n \to O(0, 0)$ şi x^n ca şi $x^{n^2} \to 0$, pentru $x < 1$. Rezultă că, cercul exponenţialelor **CE** oferă de la M (x,y) spre A (1,0) exponenţii **radicalilor** de diverse ordine 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, … $1/n^2$, iar de la M spre O(0,0) exponenţii puterilor 2, 4, 8, 16, …lui x^{n^2} pentru $x < 1$.

Aşa cum s-a prezentat anterior, prin rotirea lui OS peste OW, pe segmentul subunitar al semidreptei exponenţialelor OW se obţin diverse puncte P_i , (i = 0, 1, 2 … n) a căror proiecţii pe axa x au abscisele $x^0 = x, x^2, x^3, x^4$, .. ş.a.m.d.; punctele P_i tinzând, pe aceast segmentul subunitar al semidreptei exponenţialelor, din $P_0 \equiv W(x, y)$ sper O(0, 0), pentru $x<1$. Razele polare ale punctelor P_i, de pe segmentul exponenţialelor, au toate acelaşi argument α şi au razele polare de modul r_i care exprimă pe x la exponenţialele n, x^n : $x^0 = 1$, x^2, x^3, x^4 ,…, $x^n = 0$, pentru $x < 1$. Punctul iniţial al segmentul subunitar al semidreptei exponenţialelor este $\mathbf{P_0 \equiv W}$ (x = cos α, y = sin α) şi punctul final $\mathbf{P_n \equiv O}$, pentru $n \to \infty$**.**

Pentru $x > 1$, punctele P_i se deplasează tot pe semidreapta exponenţialelor dar evoluează pe **segmentul supraunitar**, de la $P_0 \equiv W$ spre infinit.

Dacă nu rabatem segmentele de pe axa x pe segmentul subunitar al semidreptei exponenţialelor, ci coborâm perpendiculare pe ea din punctele axei x, începând din **S**(x,0) obţinem punctele a căror reproiectări pe axa x dau exponenţialele exponenţilor impari x^3 , x^5, x^5, … x^{2n+1}, n = 1, 2, 3, .. . Cu această observaţie, putem obţine exponenţiale cu exponenţi fracţionări. De exemplu, plecând din **S**(x, 0) prin două rotaţii, proiectări pe x şi rabateri pe semiaxa x, obţinem valoarea lui x^3. Ridicând o perpendiculară în x, ea intersectează semicercul exponentialelor într-un punct a cărui rază polară este

(3.67) $r =\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} = x^{1,5}$.

Dacă repetam operaţia, pe semicercul exponenţialelor, obţinem

(3.68) $r_1 = \sqrt{r} = \sqrt{\sqrt{x^3}} = x^{\frac{3}{4}} = x^{0,75}$ şi procesul poate continua pentru a obţine şi alţi exponenţi fracţionări.

Rezultă că, numărătorul exponentului este obţinut prin rotire (+) pe semidreapta exponenţialelor pe **segmentul subunitar**, iar numitorul **par** prin rotaţii (–) de pe semicercul exponenţialelor. Pentru valorile lui x = 0, 1 şi ∞, procesul nu poate fi antamat şi, spre norocul nostru, pentru aceste valori ale lui x nici nu sunt necesare astfel de operaţii.

Se ştie că inversul unui cerc, ce trece prin centrul de inversiune, este o dreaptă şi inversa unei drepte arbitrare este un cerc, care trece prin centrul de inversiune.

Astfel, inversa cercului exponentialelor **CE**, cu O(0,0) $\subset$ **CE** drept centru de inversiune, este dreapta tangentă la acesta în punctul A(1,0). Vom denumi această dreaptă $\mathbf{D_I}$ **- dreapta inverselor**, deoarece inversa unui punct de pe **CE** este un punct pe $\mathbf{D_I}$ la intersecţia prelungirii razei polare, ce trece prin punctul de pe cerc şi această dreaptă. Ea serveşte la determinarea inverselor lui x pentru a determina valorile X = 1/x, atât pentru determinarea exponenţialelor supraunitare cât şi a celor fracţionare.

3.9 Aplicaţie: TRANSFORMAREA RIGUROASĂ ÎN CERC A DIAGRAMEI POLARE A COMPLIANŢEI

Diagrama polară este cunoscută şi sub denumirile de **diagrama Nyquist**, **curbă polară,** cercul lui Smith – care, de fapt, nu este un cerc, în cazul metodei clasice şi a amortizării **vâscoase**, ci un arc de curbă ce se apropie mai mult de un cerc la frecvenţe înalte, mult mai mult în apropierea rezonanţei şi mult mai puţin de acesta la frecvenţe joase.

În acest paragraf se va aduce corecţia necesară soluţiei şi, implicit, curbei polare, în sensul că ea devine **riguros** un cerc, denumit **cerc de răspuns**, prin utilizarea funcţiei radial centric rad **ωt** şi radial excentric $\mathbf{Rex\alpha_{1,2}}$ ca soluţii ale răspunsului în frecvenţă a sistemelor oscilante amortizate vâscos şi forţate de o forţă armonică de excitaţie $\mathbf{F_e}$ (Fig. **3.6**)

(3.69) $\mathbf{F_e} = F.e^{i.\omega t} = F.\text{rad } \omega t = F \text{ rad } \alpha$

Vibraţiile forţate se pot clasifica, în funcţie de tipul sistemului, cu şi fără amortizare, cele cu amortizare putând fi cu amortizare **vâscoasă**, ca cel considerat acum, de coeficient de amortizare **c** şi masa **m**, cu amortizare **uscată** (**columbiana**), cu amortizare histeretică (pentru care diagrama **Nyquist** este un cerc) şi, aşa cum sunt majoritatea sistemelor reale, cu amortizare combinată sau **oarecare**. După excitaţie, ele pot fi cu excitaţie aleatoare sau cu excitaţie deterministă **periodică** (armonică sau oarecare), ca cel de faţă, prin impuls şi oarecare sau combinată. S-a ales acest sistem, pentru că el este cel mai studiat în literatura de specialitate, dintre toate sistemele cu caracteristică elastică liniară. Dar metoda poate fi extinsă, fără dificultate, la oricare alt sistem liniar şi, mai important, el se poate extinde la sistemele cu caracteristica elastică neliniară.

Ecuaţia diferenţială a sistemului considerat, ca suma a tuturor forţelor ce-l solicita, este

(3.70) $m.\ddot{\vec{r}} + c.\dot{\vec{r}} + k.\vec{r} = F.rad \propto$, în care vectorii $\ddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}$ şi $\vec{r}$ sunt vectorii **acceleraţie**, **viteza** şi, respectiv, **deplasare**, prezentaţi în **figura 3.6**

Vectorul **deplasare**, sau deformaţie, a elementului elastic, sau complianţa $\vec{r}$ este

(3.71) $\vec{r} = R.\text{rad}(\omega t + \theta) = R(\mathbf{rad}\,\omega t.\cos\theta + \mathbf{der}\,\omega t.\sin\theta)$ şi se roteşte cu viteza unghiulară constanta **ω** în jurul centrului **O**. Proiecţiile acestuia, pe oricare direcţie, reprezintă o vibraţie liniară, forţată, **amortizată vâscos**. Prin derivarea lui se obţine vectorul viteză, perpendicular pe vectorul deplasare, rotit cu (+) π/2 (în avans) coliniar, deci, cu fazorul **der**ωt

(3.72) $\dot{\vec{r}} = R.\omega.$**der** (ωt + θ), a cărui derivată, la randul ei, este vectorul acceleraţie

(3.73) $\ddot{\vec{r}} = - R.\ \omega^2.$ **rad**(ωt + θ) = - $R.\omega^2$.(**rad**t. cosθ + **der**ωt.sinθ).

Prin divizarea cu **m** a ecuaţiei diferenţiale cu coeficienţi constanţi (3.70) se obţine

(3.74) $\ddot{\vec{r}} + 2\zeta.\omega_0^2.\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \omega_0^2\frac{F}{k}rad\omega t$, in care ζ este factorul de amortizare, sau fracţiunea din amortizarea critica $\mathbf{c_c}$, exprimată de relaţia

(3.75) $\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_0}$ şi se vor nota

(3.76) $1–2.\zeta^2 = \cos\alpha_1$ sau $\alpha_1 = 2.\arcsin\zeta = \arccos(1–2.\zeta^2)$.

Admiţând că $\vec{r} = R.rad(\omega t + \theta)$ este o **soluţie a ecuaţiei diferenţiale** şi introducând-o în (3.74) , rezultă, ordonând termenii în funcţie de versorii **rad** ωt şi **der** ωt

(3.77) R{ **rad**ωt [$(\omega_0^2 – \omega^2).\cos\theta – 2.\zeta.\omega_0\ \omega.\sin\theta – F.\omega_0^2 / k.R$] +
+ **der**ωt [$(\omega_0^2 – \omega^2).\sin\theta + 2\zeta.\omega_0.\omega.\cos\theta$]} = 0

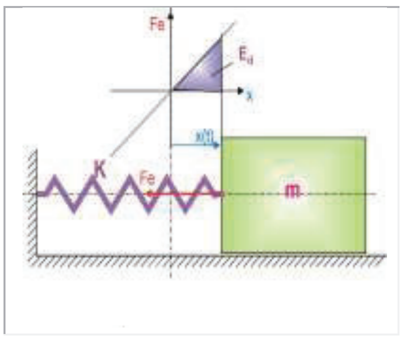


Fig. 3.6,a Modelul lui **Titus Cioară** al unui sistem vibrant conservativ cu un singur grad de libertate

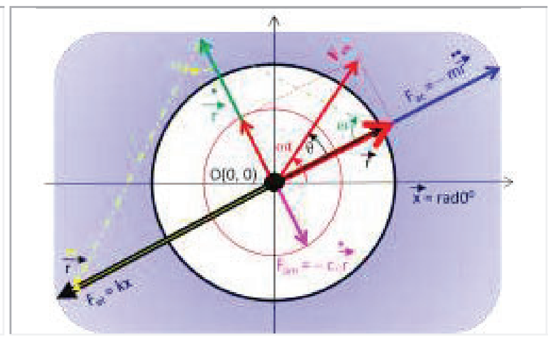


Fig. 3.6 Vectorii deplasare $\vec{r}$, viteză $\dot{\vec{r}}$ şi acceleraţie $\ddot{\vec{r}}$ ai vibraţiilor sistemelor liniare, forţate, amortizate **vâscos.**

Deoarece versorii **rad**ωt şi **der**ωt sunt reciproc perpendiculari şi de modul constant şi, evident, unitari, egalitatea anterioară devine posibilă **numai** dacă ambii coeficienţi ai celor doi versori sunt simultan nuli, adică

(3.78) $(\omega_0^2 – \omega^2).\cos\theta – 2.\zeta\omega_0.\omega.\sin\theta – F.\omega_0^2 / k.R = 0$, coeficientul lui rad şi

(3.79) $(\omega_0^2 – \omega^2).\sin\theta + 2\zeta.\omega_0.\omega.\cos\theta = 0$, coeficientul lui der.

Din ecuaţia (3.79) rezultă unghiul de fază **θ** dintre răspunsul în deplasare $\vec{r}$ şi forţa de excitaţie F_e aplicată asupra masei **m**

(3.80) $\theta = -arctan\frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = -\arctan\frac{2\zeta}{1-\chi^2}$, în care s-a notat cu χ raportul, denumit **pulsaţie** (sau, impropiu, frecvenţă) **normată** sau adimensională, (3.81) $\chi = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}}$ dintre pulsaţia de excitaţie **ω** şi pulsaţia proprie a sistemului cu amortizare vâscoasă liniară ω_0, considerată a fi pulsaţia de rezonanţă a vitezei ω_v

(3.82) $\omega_v = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

celelalte pulsaţii de rezonanţă fiind **pulsaţia de rezonanţă a deplasării ω_S**

(3.83) $\omega_s = \omega_0\sqrt{1-2\varsigma^2}$, pulsaţia de rezonanţă a **acceleraţiei ω_a**

(3.84) $\omega_a = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\varsigma^2}}$ şi pulsaţia proprie sau de **rezonanţă a sistemului ω_P**, considerată a fi

(3.85) $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\varsigma^2}$ căreia-i corespunde **pulsaţia proprie normată** sau adimensională

(3.86) $\chi_p = \frac{\omega_p}{\omega_0} = \sqrt{1-\varsigma^2}$.

Din ecuaţia (3.78) rezultă modulul R al vectorului $\vec{r}$

(3.87) $R = \frac{\omega_0^2 \frac{F}{k}}{(\omega_0^2-\omega^2)cos\theta - 2\varsigma\omega_0\omega sin\theta}$ şi notând amplitudinea, complianţa sau deformaţia statică (ω = 0) cu A_S, care este raportul

(3.88) $A_S = F / k$, astfel că modulul R, sau amplitudinea A, va fi produsul

(3.89) $R = A = A_1 . A_S$, în care A_1 este factorul (sau funcţia) de amplificare, ca raport dintre deplasarea (complianţa, admitanţa sau receptanţa) corespunzătoare pulsaţiei normate curente χ şi cea statică ($\chi_S = \chi = 0$), pentru care rezultă expresia

(3.90) $A_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\chi^4-2\chi^2(1-2\varsigma^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2-2s cos\alpha_1}} = \frac{1}{Rex[\alpha_1, S(s=\chi^2, \varepsilon=0)]}$,

expresie în care se recunoaşte, la numitor, funcţia radial excentric **Rexα₁** de variabilă centrică α_1, cu expresia (3.76) şi excentru **S**, notat acum şi cu **E**, de coordonate polare (e ≡ s, ε) cu $s = \chi^2$ şi de direcţie ε = 0, pentru s < 1 şi ε = π pentru s > 1.

Se ştie că **inversa complianţei A_1** este **rigiditatea dinamică R_d** astfel că aceasta are expresia

(3.91) $\mathbf{R_d} = 1/A_1 = Rex\alpha_1$, fiind reprezentata în **figura 3.7,b** şi **3.14,a** şi **3.14,b**.

Inversa, funcţiei $Rex\alpha_{1,2}$ este şi funcţia generatoare a polinoamelor **Legendre**, astfel că

(3.92) $\mathbf{A_1} = \frac{1}{Rex\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)s^n = e^{\sum_0^{\infty}\frac{s^n}{n}cosn\alpha}$, în care **x** = cos α şi s-a notat excentricitatea numerică e cu s, reprezentată în **figura 3.8,b** şi **3.15,a** şi **3.15**,**b**.

În concluzie, **FSM-CE** $Rex\alpha_1$ reprezintă **rigiditatea dinamică** a unui sistem dinamic de ordinul doi, cu amortizare vâscoasă liniară şi inversa ei reprezintă **complianţa normată sau factorul** (de fapt, **funcţia**) de **amplificare A_1.**

(3.93) $A_1 = \frac{A}{A_{st}}$, ca raport dintre amplitudinea A de vibraţie la pulsaţia normata χ şi amplitudinea statică A_{st}, pentru χ = 0.

3.9.1 UN ALT CERC AL AMORTIZARILOR VASCOASE LINIARE

Pulsaţia proprie a sistemului cu amortizare ω_d este, aşa cum s-a văzut,

(3.94) $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = \frac{c}{2m}$

Când pulsaţia de excitaţie ω ia valoarea pulsaţiei sistemului amortizat ω_d rezultă pulsaţia normată a sistemului amortizat χ_d

(3.95) $\chi_d = \frac{\omega_d}{\omega_0} = \sqrt{1-\zeta^2} = \chi_p$, din care rezultă că

(3.96) $\varsigma_d^2 + \varsigma^2 = 1$, care este ecuaţia cercului unitate (**CU**) , sau trigonometric (**CT**), **CU(O, 1)** şi curba de dependenţă $\zeta = \zeta(\chi_d) < 1$ este un arc de cerc de unghi π/2, cerc cu centrul în originea O(0, 0) a unui sistem rectangular drept şi de raza 1 (**Fig. 3.9**). Sau de arc π al aceluiaşi cerc, dar de măsură $\alpha \in [0, \pi]$ pentru $\zeta \in [0,1]$, dacă, în locul sistemului cartezian drept, se consideră un sistem bipolar, de reper format de punctele fixe A_1 şi A_2 . Polii $A_1(1, 0)$ si A_2 (-1, 0) aparţin cercului ***C*** al carui punct mobil **PO = f [α(ζ)]** de pe **CU** , pe care îl vom numi, în aceast capitol **pol** al unei transformări de inversiune complexă, are unghiul polar α, din centrul şi originea **O**, în care α = 2arcsin(ζ) sau α = arccos(1-2ζ^2).

Coordonatele polului **PO** pe $C \equiv$ **CT** sunt măsurile segmentelor $r_i = A_i$, (i = 1,2) sau a razelor vectoare duse din polii A_i şi reprezintă valorile $r_1 = 2.\zeta$ din A_1 şi $r_2 = 2.\chi_d$ din A_2 , aşa cum se poate observa în **figura 3.11**.

Transformarea homotetica **H**(A_1, 1/2) de pol A_1 şi modul k =1/2, transformă cercul **C** în *C*'(O'(1/2,0) ,1/2), A_1 fiind punct fix, comun celor două cercuri, **O** fiind transformatul punctului A_2. Coordonatele bipolare ale unui punct aparţinând cercului *C*' sunt $r'_1 = \zeta$ din A_1 şi $r'_2 = \chi_d$ din O.

Aşa cum s-a afirmat anterior, acest cerc ***C'*** este **cercul exponentialelor** (**CE**), deoarece cu ajutorul lui putem construi grafic mărimile exponenţiale ale absciselor x subunitare (x^2, x^3, ..., x^n, sau$\sqrt{x}, \sqrt{\sqrt{x}}, \ldots \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ şi alte combinaţii, (v. § 3.8) în felul următor: din punctul de abscisa $x \in [0, 1]$ se ridică o perpendiculară care intersectează **C'** în punctul P'(x'=x, y'=$\sqrt{x-x^2}$) şi pe C în P.

Coordonata bipolară din **O** este $r'_2 = \sqrt{x}$.

Intersectând abscisa cu vârful compasului în **O** şi deschiderea (raza) r'_2, în sens dextrogin, obţinem pe axa absciselor, în dreapta lui x, mărimea $\sqrt{x}$. Luând în compas raza r'_2 = x, cu acelaşi centru O dar în sens invers (levogin / trigonometric) intersectăm C' în P''. Abscisa lui P'' este x^2 şi va fi situată în stânga lui x.

Repetând operaţiile, într-un sens obţinem $(x^2)^2 = x^4$, apoi x^6 şi toate puterile pare ale lui x, până se ajunge în originea O, în care, $\lim_{n\to\infty} x^{nn}$, pentru n < 1, este evident zero.

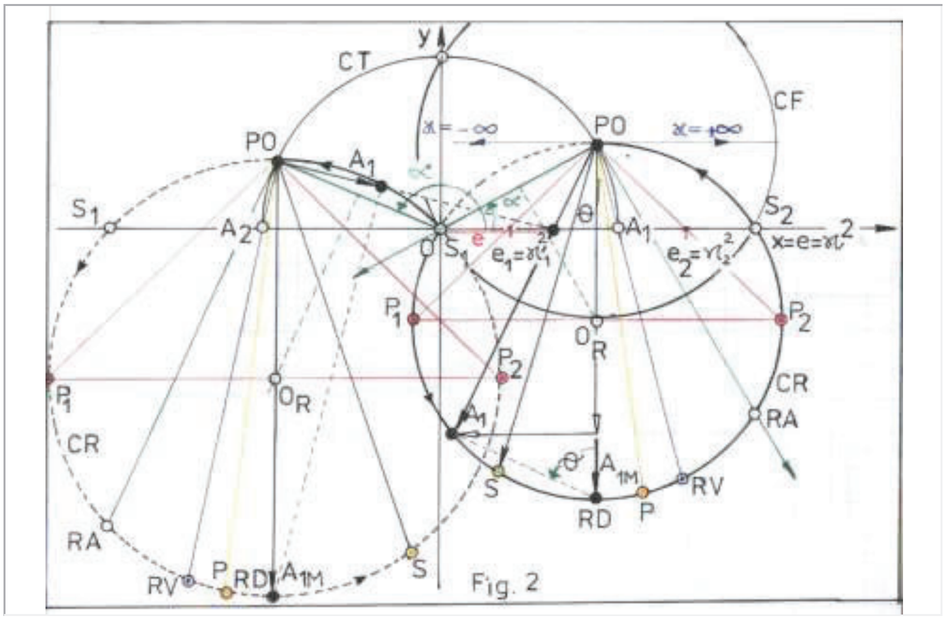


Fig. 3.9 Cercul unitate / trigonometric **CT**, cercul de răspuns **CR** şi cercul fundamental **CF**

Din relaţiile (3.75) şi (3.86) sau (3.95) se deduce că, în punctul de pe axa absciselor $\chi = \chi_d$, pe axa ordonatelor se obţine $\zeta = \zeta_d$, coordonate carteziene de aceeaşi mărime ($\zeta_d = \chi_d = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071..$). Se deduce că punctul se află la mijlocul arcului sfertului de cerc, adică la un unghi de măsură $\pi/4$, pe prima bisectoare a primului cadran, în cazul primului mod de reprezentare.

În cea de a doua reprezentare, bipolară, rezultă pentru $\zeta = 0 \rightarrow \alpha = 0$ şi polul PO $(1, \alpha)$ va fi plasat pe C în punctul $\mathbf{A_1}$. Pentru $\zeta = 0{,}7071..$ poziţia polului **PO** va fi la un unghi $\alpha = \arcsin 0{,}7071.. = \pi/2$, iar pentru limita maximă, pentru care mişcare oscilantă încetează, $\zeta = 1 \rightarrow \alpha = \pi$ polul va fi plasat în $\mathbf{A_2}$.

3.9.2 RIGIDITATEA DINAMICĂ, FACTORUL DE RĂSPUNS ADIMENSIONAL SAU FACTORUL DE AMPLIFICARE A_1 (χ) ŞI DIAGRAMA POLARA A COMPLIANŢEI (RECEPTANŢEI SI ADMITANŢEI)

Funcţiile de amplificare A_1 trebuie considerate, determinate şi trasate pe <u>toată axa absciselor</u> χ, deci **şi pe semiaxa χ negativă**, mai ales pentru amortizări mari ($\zeta \geq 0{,}7071$, pentru care polul **PO** este plasat pe CT în cadranul II).

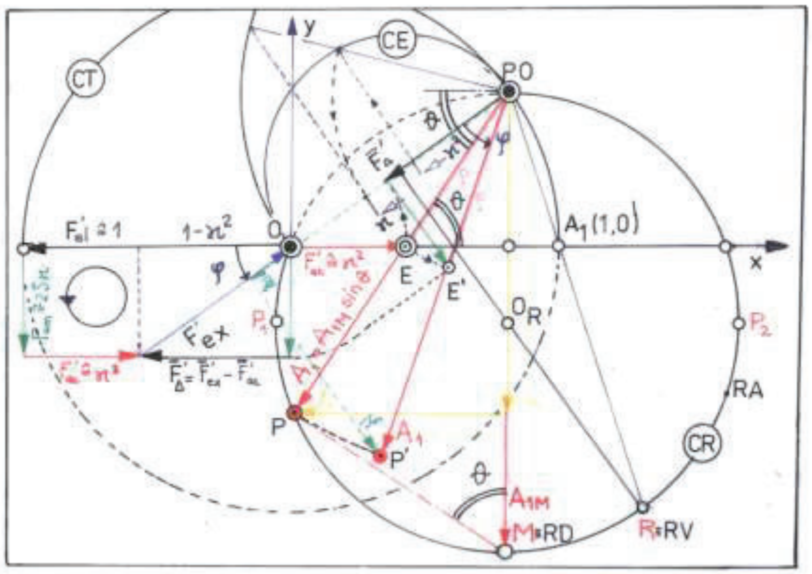


Fig. 3.10 Echilibrul forţelor pentru o pulsaţie normată χ oarecare
CT – cercul trigonometric / unitate pe care se deplasează polul **PO(ζ)**
CE - cercul exponenţialelor pe rază **O**P, PO$\rightarrow$ **pol, CR -** cercul de răspuns

În aceste cazuri, curbele A_1, corespunzătoare reprezentărilor clasice, din literatura mondială de specialitate, **apar eronat** ca având (aparent) un maxim în punctual (0,1). Şi o absenţă efectivă a posibilităţii de determinare a amortizării sistemului, prin determinarea lăţimii de bandă a frecvenţelor pentru punctele de semiputere $P_{1,2}$, corespunzătoare amplitudinii maxime împărţită cu $\sqrt{2}$, datorită absenţei (aparente a) punctului P_1, punct care, pentru amortizări mari, **apare pe semiaxa negativă (Fig 3.7** şi **Fig. 3.8)**. În reprezentări, apare doar curba corespunzătoare punctului P_2, pe când, în realitate, ele au maximul pe axa χ negativă; **punctul (0, 1)** fiind un **nod** prin care trec toate curbele A_1.

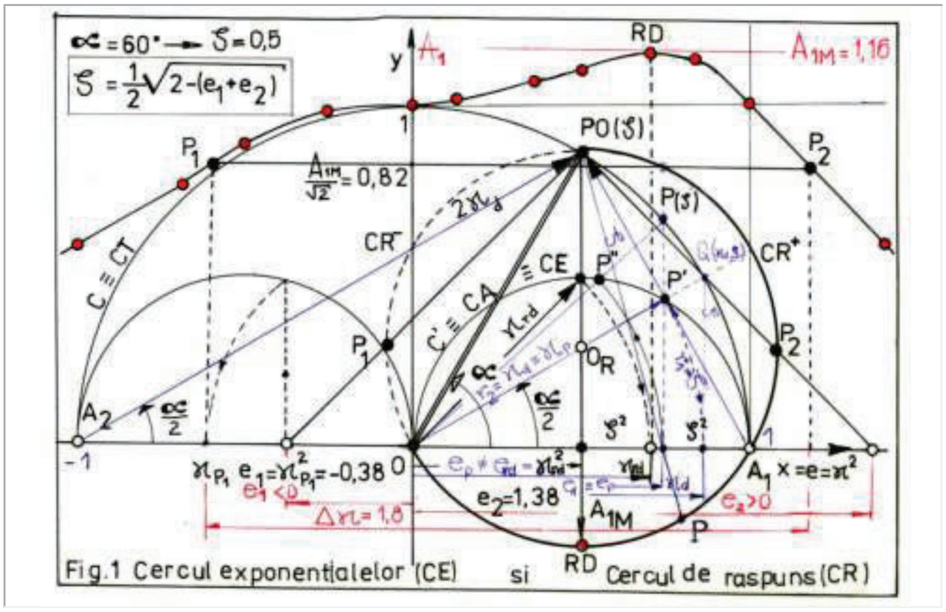


Fig. 3.11 Răspunsul în frecvenţă al unui sistem oscilant cu o puternică amortizare vascoasă **PO [α(ζ)]**

În punctul în care rigiditatea dinamică (adică **FSM** Rexα) are valoarea minimă, inversa, adică A_1 va avea valoarea maximă. Rex ia valoarea minimă atunci când **E**(e,0) se află situat pe abscisă, sub punctul PO de pe CT, astfel încât **E** (sau S) devine şi proiecţia pe abscisă a polului PO. Dacă PO este pe CT în cadranul doi, atunci şi proiecţia lui va fi pe semiaxa negativă a absciselor, ca şi maximul lui A_1, aşa cum se arată în figura **3**.**9, 3.11** şi în diagramele din **figurile 3.14** şi **3.15.**

Punctul O $\equiv S_1$, ca şi punctual S_2 = CR = $\chi \cap$ CF, sunt puncte staţionare ale transformării de inversiune complexă ca şi celelalte puncte de pe **cercul fundamental CF**. Distanţa de la O la PO fiind egală cu unitatea, punctual **O** de pulsaţii $\omega = \chi = 0$ are inversa de valoare tot 1.

Valorile $\chi < 0$ corespund transformări inverse a semiaxei negative şi reprezintă arcului de cerc, marcat cu linii întrerupte în figura **3.9**, de a **O** la polul PO. Se deduce că pulsaţia de excitaţie ω, ca şi cea normată χ, evoluează pe arcul de cerc, marcat, în figura **3.9**, pe cercul de răspuns (**CR**) de la **O** la **PO** în sens levogin (sinistrorum), **arc de cerc** corespunzător **transformării inverse a axei** $\chi > 0$ **pozitive** şi pe **arcul de cerc marcat cu linie întreruptă**, de la **O** la polul PO în sens dextrogin (dextrorum), arc corespunzător **transformării inverse a semiaxei** $\chi < 0$ **negative**.

În acest fel, polul PO corespunde şi pulsaţiei $\omega = \chi \rightarrow \infty$, dar şi pulsaţiei $\omega = \chi \rightarrow -\infty$,; diferenţa rezultând din **sensul de rotaţie,** pe cercul de răspuns CR, care este locul geometric (hodograful) al vârfului vectorului A_1 cu originea în polul PO.

Astfel**, axa x este inversa cercului de răspuns CR.**

FSM circulara excentrică (**CE**) Rex$\alpha_{1,2}$ reprezentâd, prin definiţie, distanţa de la **E** la punctele $\mathbf{W}_{1,2}$ de pe cercul trigonometric **CT**, iar excentrul E, evoluând pe toată axa absciselor (x = **s ≡ e** =χ^2), rezultă că inversa funcţiei Rex$\alpha_{1,2}$, faţă de punctual fix PO de pe CT ales şi denumit pol al inversiunii complexe, revine la inversa axei x faţă de punctul PO exterior dreptei, care este **riguros** un cerc, denumit cerc al inversiunii şi care este cercul de raspuns CR, fiind, totodată, locul geometric al vârfului versorului/fazorului A_1.

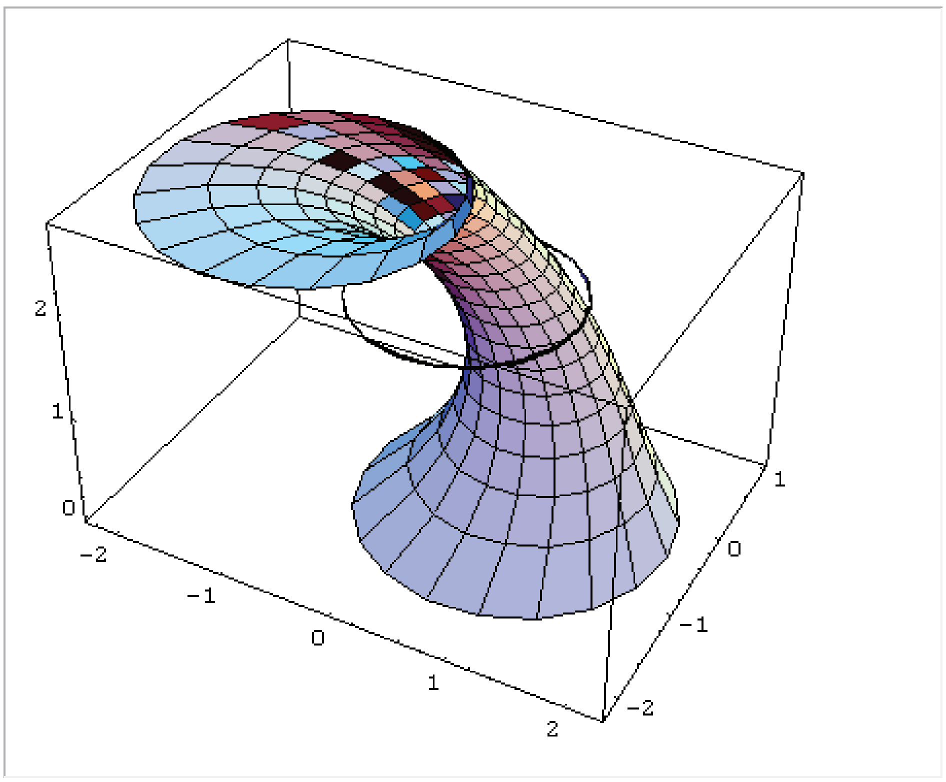


Fig. 3.12 Familia de cercuri de răspuns şi cercul **unitate**

Urmărind evoluţia pe CR a unor puncte (**Fig. 3.9**), corespunzătoare evoluţiei pulsaţiei normate (adimensionale) $\chi \in [0, \infty]$ se disting punctele:

- $\mathbf{S}_{1,2}$ ▸ **Staţionare** $S_1(0) \equiv O(0,0)$ şi $S_2(\sqrt{2})$ de e=0 şi, respectiv,
- $e = \zeta^2 = 2 \rightarrow \chi = \sqrt{2}$;
- $\mathbf{P}_{1,2}$▸**Semiputere** de excentricitate $e_{1,2} = \cos\alpha \mp \sin\alpha$ sau

$\chi_{1,2} = \sqrt{1 - 2\varsigma^2 \mp 2\varsigma\sqrt{1-\varsigma^2}}$, corespunzătoare amplitudinii de vibraţie $A_1 = \frac{A_{1M}}{\sqrt{2}}$, în care A_{1M} este diametrul cercului de raspuns **CR** sau valoarea maximă a amplitudinii (compliantei) de vibraţie, corespunzătoare punctului:

- **RS / S ► Rezonanţa sistemului dinamic de ordinul II** de $\chi_5 = \sqrt{1-\varsigma^2}$;
- **RD / M ► Rezonanţa compliantei** (deplasării), pentru $e_M = \chi^2 = 1-2\zeta^2$ şi $\chi_{rd} = \sqrt{1-2\zeta^2}$;
- **RP / P ► Rezonanţa proprie,** aleasă pentru $e_P = \sqrt{1-\zeta^2}$ şi $\chi_p = 1-\zeta^2$
- **RV/ V ► (Rezonanţa vitezei) Rezonanţa** de $\chi_{rv} = \chi_R = 1$;
- **RA / A ► Rezonanţa acceleraţiei** de $\chi_{ra} = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$;
  - **RE / E ► Rezonanţa de eşantionare** de $\chi_E = 2\sqrt{1-\zeta^2}$, urmează P_2, S_2 şi, în final, dar pentru un singur capăt, PO de $\chi \to \infty$ pe CR cu o mişcare în sens levogin. Pentru amortizări mari, axa x < 0 se parcurge de la minus infinit la zero şi de aici spre plus infinit.

3.9.3 UNGHIURILE DE FAZA

Pe curbele loc geometric ale complianţei, din literatura de specialitate, exprimate clasic şi care diferă sensibil de un cerc, poziţia (orientarea) vectorului A_1 este dată de argumentul

(3.97) $\varphi = \theta_v = \arctan\frac{-2\zeta\chi}{1-\chi^2}$, denumit unghi de fază sau, mai corect, defazajul dintre deplasarea r (sau x) şi direcţia forţei de excitaţie F_{ex} sau unghiul format de vectorul A_1 cu axa reală *Re*(x).

În noua reprezentare a diagramei polare a compliantei, din figura **3.11,** poziţia vectorului A_1, cu vârful pe CR, este dată de variabilă excentrică θ, care este unghiul format de semidreapta pozitivă din **E** cu axa **x** şi reprezintă, totodată, şi orientarea / direcţia vectorului A_1.

Defazajul fiind notat, în literatura de specialitate, şi cu θ, în lucrarea de faţă, i-am adăugat şi un indice v (de la vechi), pentru a evita confuziile, altfel posibile. Evident ca $\theta_v \equiv \varphi$ diferă semnificativ de θ, care este dat de relaţiile de dependenţă dintre cele două variabile, **centrică α** şi **excentrica θ**. Unghiul de fază nou (**Fig. 3.13**), care exprimă poziţia vârfului vectorului A_1, pe cercul (de aceasta dată riguros) CR, are expresia:

(3.98) $\theta = \frac{\pi}{2} - arctan\frac{\cos\alpha - \chi^2}{\rho_m} = \frac{\pi}{2} - arctan\frac{1-2\zeta^2-\chi^2}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$, în care,

(3.99) $\rho_m = Rex\alpha_{1,2\,m} = rex(\theta = \frac{\pi}{2}, e = s = cos\alpha = \chi_M^2)$ este valoarea minimă pe care o ia funcţia radial excentric, adică rigiditatea dinamică, pentru o anumită amortizare, sau inversa ei, care este amplitudinea maximă A_{1M}.
Noile curbe de fază θ(χ, ζ) sunt prezentate în figura **3.13** şi au marele avantaj că în secţiunea χ = 0 (limita din stânga) curbele au ordonatele egale cu amortizarea sistemului α(ζ), facilitând, astfel, identificarea **curbelor S** (denumire sugerată de forma lor) în funcţie de amortizare.

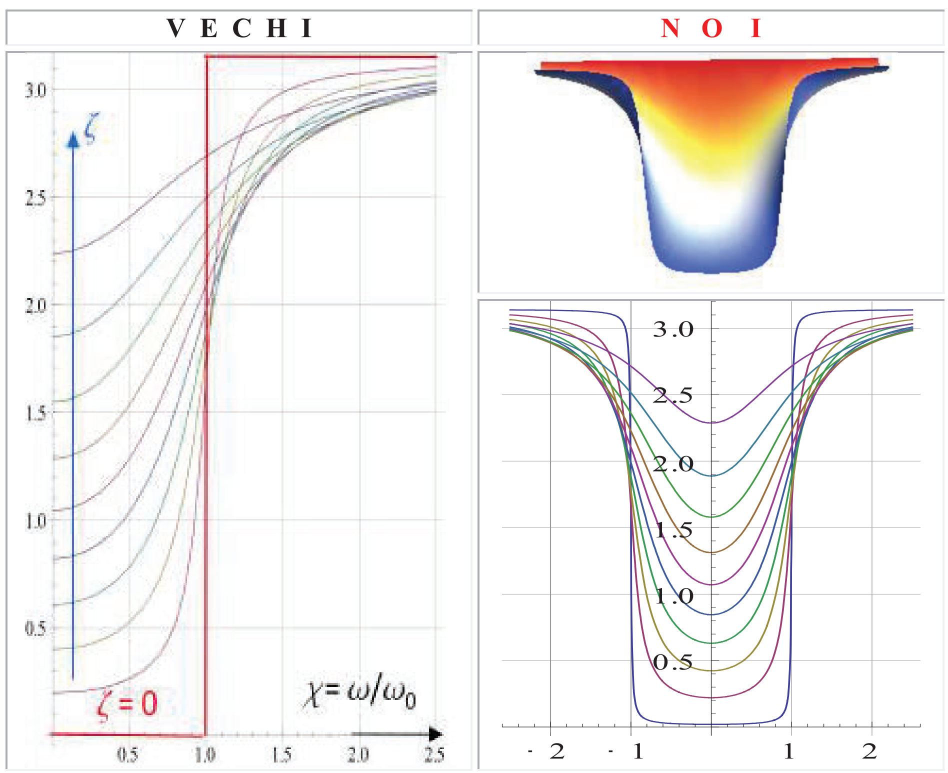


Fig. 3.13 Unghiul de faza θ(α) ca funcţie de pulsaţia normată (adimensională) χ = ω / ω_0 . **Curbe S** în 2D şi în 3D

3.9.4 O RELAŢIE SIMPLĂ, RIGUROS EXACTĂ, DE CALCUL A FRACŢIUNII DIN AMORTIZAREA CRITICĂ ζ

Punctele de semiputere $P_{1,2}$ corespund, în noua reprezentare, excentricităţiilor şi respectiv pătratelor frecventelor (pulsaţilor) normate $e_{1,2} = \chi_{1,2}^2$, fiind situate la intersecţia dintre axa absciselor, cu două drepte duse din polul PO, paralele cu direcţiile celor două bisectoare; unghiul dintre ele, în PO, fiind un unghi drept. Perpendiculara coborâtă din PO pe axa absciselor este înălţimea unui triunghi isoscel dreptunghic şi reprezintă minimul distanţei de la axa la PO, adică, minimul rigidităţii dinamice şi inversa compliantei maxime:

(3.100) $\rho_m = sin\alpha$, $A_{1M} = \frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{sin\alpha} = \text{cosec}\alpha \equiv \csc\alpha$

şi piciorul perpendicularei pe abscisa **x** este

(3.101) $x = e_{RM} = e_M = \cos\alpha$, iar ipotenuza triunghiului este

(3.102) $a = e_2 - e_1 = \chi_2^2 - \chi_1^2 = 2sin\alpha$,

deoarece ipotenuza, în acest triunghi, este dublul inalţimii

Piciorul perpendicularei din PO pe x are abscisa

(3.103) $x = \cos\alpha = e_1 + \frac{e_2 - e_1}{2}$ sau $2\cos\alpha = e_1 + e_2 = \chi_1^2 + \chi_2^2$

Ţinând cont de relaţia sinusului de jumătate de arc, rezultă relaţia exactă:

(3.104) $\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{2 - (e_1 + e_2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - (\chi_1^2 + \chi_2^2)}$

Din această relaţie, rezultă că pentru amortizare nulă $e_1 = e_2 = 1$ şi pentru amortizarea maximă, în condiţii de oscilaţie, $e_1 = e_2 = -1$ şi $\zeta = 1$.

3.9.5 CONCLUZII

Avantajele care derivă din noua metodă de reprezentare a diagramelor polare ale compliantei sunt:

a. Locul geometric al vârfului vectorului compliantei normate sau adimensionale A_1 nu se mai **aproximează** cu un cerc ci **este** riguros **un cerc**. Diametrul acestuia este maximul lui A_1, notat A_{1M} şi are expresia simpla

(3.105) $A_{1M} = \frac{1}{Rex\alpha_{1,2min}} = \frac{1}{sin\alpha} = \frac{1}{\sin(2arcsin\zeta)} = \frac{1}{1-2\zeta^2}$.

Centrul cercului de răspuns CR este plasat invariabil la intersecţia dintre o dreaptă verticala din OP şi una perpendiculară pe mijlocul razei din **O** a punctului OP . Că urmare centrului O_A este plasat sub polul OP, invariant pe o verticală, la distanţa

(3.106) $y_A = -\frac{1}{2}\sin\alpha = -\frac{A_{1M}}{2}$ şi locul geometric al centrului O_A este o curbă simetrică, sub forma de $\cap$, având ecuaţiile parametrice:

(3.107) $$\begin{cases} x = \cos\propto \\ y = \frac{1}{2}\sin\propto - \frac{\cos^2\propto}{2\sin\propto} = \frac{-\cos 2\propto}{2\sin\propto} \end{cases}$$

b. Punctul de maxim al deplasării (compliantei) (RD)/M este plasat invariant în partea inferioară a CR la $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dacă PO este plasat pe CT în cadranul I, pentru amortizări relativ mici, atunci M aparţine arcului de cerc corespunzător inversiunii semiaxei pozitive. Dacă PO este plasat pe CT în cadranul II, corespunzător unor amortizări mari, atunci M se situează pe arcul de cerc corespunzător inversiunii semiaxei negative.

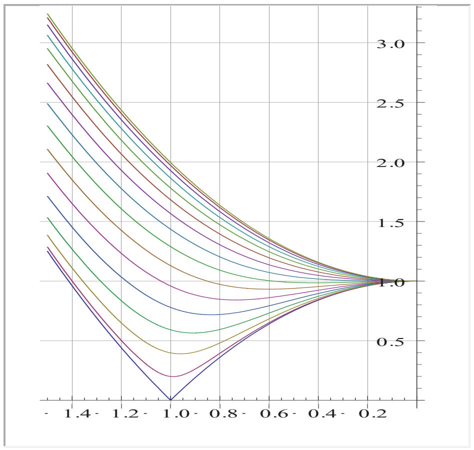


Fig. 3.14,a Rigiditatea dinamică pentru $\chi < 0$

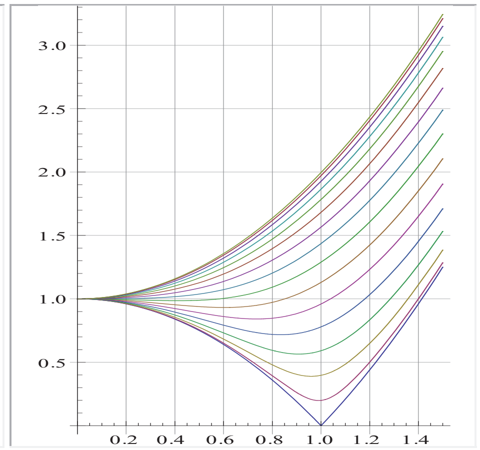


Fig. 3.14,b Rigiditatea dinamică Pentru $\chi > 0$

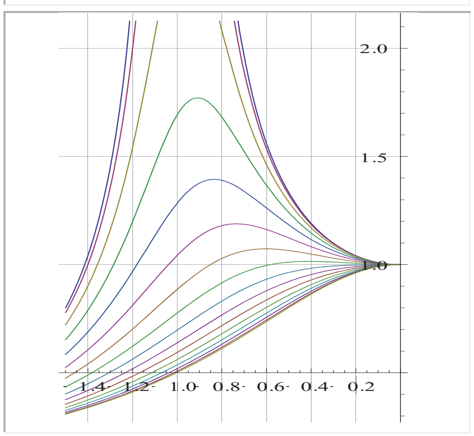


Fig. 3.15,a Funcţia de amplificare $A_1 = 1/ \text{Rex}\ \alpha$ pentru x < 0

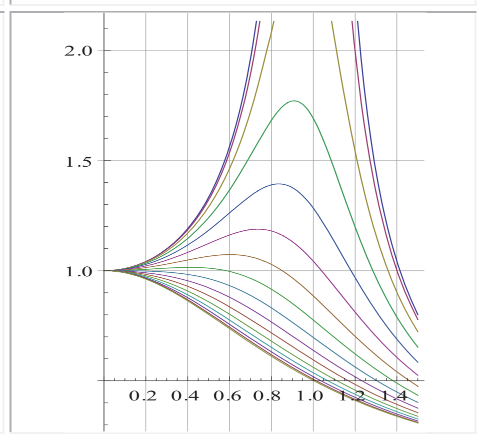


Fig. 3.15,b Functia de amplificare $A_1 = 1/ \text{Rex}\ \alpha$ pentru x > 0

Amortizarea, pentru care OP este plasat la $\propto = \frac{\pi}{2}$ pe CT are punctul M situat în punctul adiacent al celor două arce ale CR, punct ce corespunde inversului punctului adiacent al celor două semiaxe, pozitivă şi negativă, care este tocmai originea **O** şi care va coincide cu M, pentru ca Rexα= 1 = A_{1M} .

c. Punctele de putere jumătate **$P_{1,2}$** ocupă **invariant** o poziţie pe CR **pe un dimetru orizontal**, oricare ar fi amortizarea sistemului şi nu se rotesc pe cercul de răspuns, ca în cazul reprezentărilor clasice. Ele pot fi localizate astfel pe CR mult mai simplu, decât în reprezentările clasice, coborând din polul OP două direcţii înclinate cu $\pm\frac{\pi}{2}$ faţă de diametrul vertical al CR. Totodată, s-a obţinut o relaţie mai simplă de calcul a amortizării, **riguros exactă** în tot domeniul posibil al fracţiunii din amortizarea critică din domeniul 0 ... 1.

d. Punctele **staţionare** $\mathbf{S_{1,2}}$ se localizează şi ele foarte uşor, fiind determinate de $\theta_{P_1} = \alpha = 2arcsin\zeta$ şi, respectiv, $\theta_{P_2} = \pi - \alpha$ şi situate pe CR la intersecţia acestuia cu axa absciselor x.

e. Punctul **RV**(V) de **rezonanţă a vitezei** se localizează pe **CR** la intersecţia CR cu dreapta dusă din PO prin $A_1(1,0)$ originea cercului unitate orientat (CT), adică prin punctul (1,0).

f. Alegând o direcţie orizontal, prin O, ca **axă reală *Re*(x)** şi una verticală ca **axă** imaginară ***Im***(x), expresiile componentelor reale şi imaginare ale complianţei (deplasarii x) se simplifică, deoarece A_{1M} este situat permanent pe axa ***Im***(x) şi direcţia vectorului A_1 este invariant unghiul θ (variabila excentrică din (**FSM**). Astfel, aceste componente sunt:

$$\begin{cases} Re(x) = A_1 cos\theta = A_{1M} sin\theta . cos\theta = \frac{A_{1M}}{2} sin2\theta \\ Im(x) = A_1 sin\theta = A_{1M} sin^2\theta \end{cases} \tag{3.108}$$

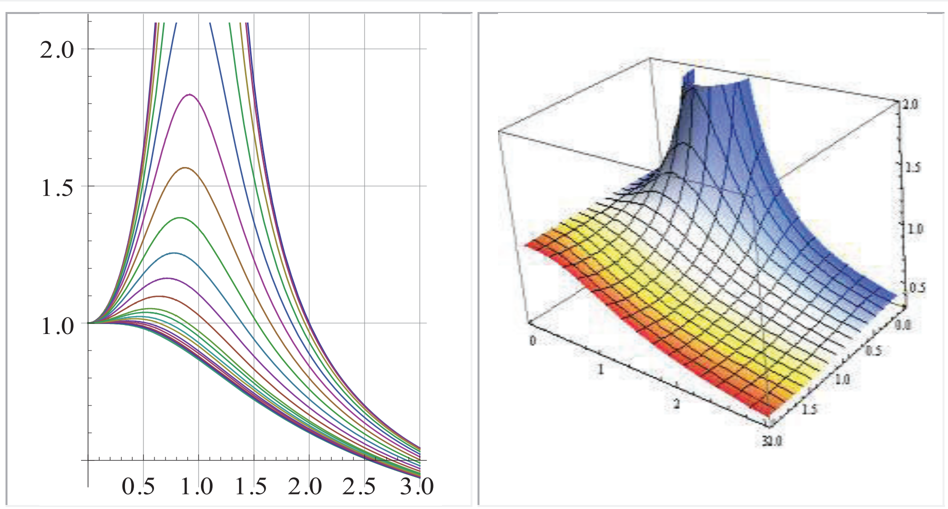


Fig. 3.16 Transmisibilitatea **T** a forţei şi a mişcării

Metoda, anterior prezentată, poate fi extinsă la toate tipurile de vibraţii liniare şi chiar la cele neliniare, aşa cum se va prezenta în capitolul de aplicaţii tehnice ale **funcţiilor SM circulare excentrice.** Se poate observă că sensul de parcurgere al cercului de răspuns **CR** este levogin, invers sensului clasic de parcurgere a curbelor polare de acest gen.

În **figura 3.12** sunt reprezentate în 3D cercurile de răspuns, corespunzătoare diverselor valori ale amortizarii sistemului oscilant amortizat excitat de o forţă cu variaţie sinusoidală.

În **figura 3.16** este prezentată transmisibilitatea forţei şi a mişcării sistemului cu amortizare vâscoasă dată de relaţia

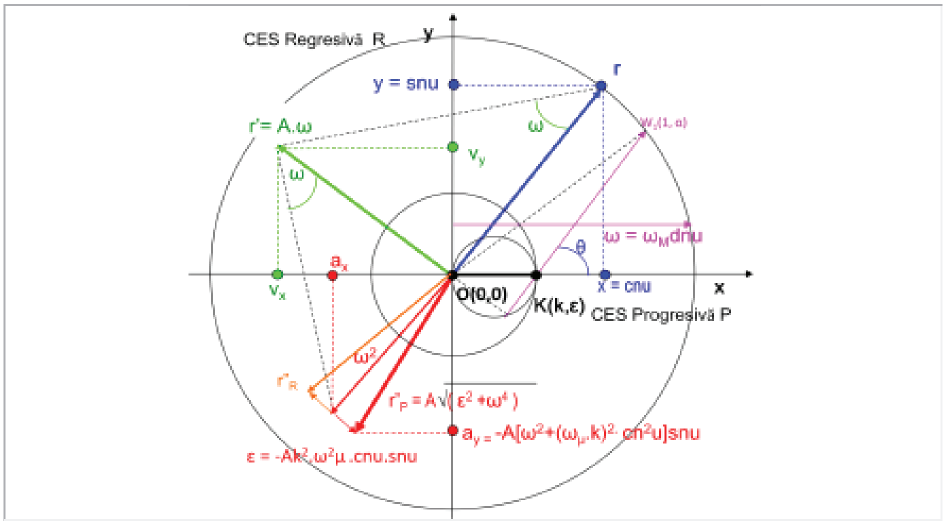
(3.109) $$\mathbf{T} = \frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\sqrt{1+\chi^4-2\chi^2(1-2\varsigma^2)}} = \frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\alpha_1}} = \frac{\sqrt{1-\chi^2}}{Rex[\alpha_1,S(s=\chi^2,\varepsilon=0)]} \ .$$

Transmisibilitatea forţei se referă la forţa F_T transmisa suportului, care este

(3.110) $$F_T = c\dot{x} + kx \rightarrow |F_T| = \sqrt{c^2\dot{x}^2 + k^2x^2} \rightarrow \frac{F_T}{F_e} = T.\sin(\omega t - \psi),$$

în care

(3.111) $$\psi = arctan\frac{2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2\,(1-4\varsigma^2)} \ .$$



$e = \omega_M.k,\ \ \theta = \int_0^t \omega.dt,\ \ \bar{\theta} = \Omega.t,\ u = \omega_M.t = \bar{\theta}\,\omega_M/\Omega,\ u = \theta.R_n = \bar{\theta}$

$\omega = d\theta / dt = du/dt.d\theta/du = \omega_M.dnu = \omega_M.rex\theta / dex\theta = \omega_M.\cos\beta\ \ = \omega_M.(1-k^2.\sin^2\theta)^{0.5}$

$\Omega = \omega_M,\ \ \ \omega_{\mu P} = A\,(\mu/m)^{0,5},\ \ \omega_{\mu R} = A\,(\mu/2m)^{0,5},\ \ \varepsilon = -\,A.\omega 2\mu.snu.cnu$

Fig. 3.17 V I B R A Ţ I I L I N I A R E Ş I N E L I N I A R E L I B E R E N E A M O R T I Z A T E

Motto: ”Este suficient să arăţi, că un lucru oarecare este **imposibil**, că îndată se va găsi **matematicianul** care-l va face posibil ” **W. W. Sawager**

Partea I-a

FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE

Capitolul 4

FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (FSM-CE) DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ

Funcţiile supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**), denumite mai scurt şi **funcţii circulare excentrice** (**FCE**), pot fi de variabilă **motoare** excentrică **θ,** unde variabilele centrice $\alpha_1(\theta)$ şi $\alpha_2(\theta)$ sunt, la rândul lor, funcţii de **variabila motoare excentrică θ** şi de **variabilă motoare centrică α** unde variabila excentrică $\theta_1(\alpha)$ şi $\theta_2(\alpha)$ sunt funcţii de variabilă motoare centrică **α**.

Dintre **FCE,** o parte, cele care au echivalente în centric (**FCC**), ca **cex** ↔ cos, **sex** ↔ sin, **tex** ↔ tan, **texv** ↔ tav**, ctex** ↔ ctan ş.a. sunt **dependente** de poziţia originii **O**(0,0), a unui reper (cartezian drept şi/sau polar). **FCE** noi, ca **aex**, **bex**, **rex**, **dex** ş.m.a. sunt independente de poziţia aleasă a originii **O** a reperului (**Fig. 4.1,a**).

Din această cauză, **numai** aceste **FCE** sunt aceleaşi cu funcţiile **SM** circulare elevate (**FSM-CEl**) şi cu funcţiile **SM** circulare exotice (**FSM-CEx**). Ca urmare, funcţiile **aex, bex, rex, dex** vor fi definite o singură dată, doar în acest capitol, capitolul de **FCE**.

4.1 DEFINIREA FUNCŢIILOR SM CIRCULARE / TRIGONOMETRICE EXCENTRICE DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ

Fie **C** cercul unitate, cu centrul în originea sistemului de coordonate xOy şi **W**(α) şi $W_1(\theta)$ două puncte aparţinând cercului unitate **CU** (Fig. **4.1,b**).

Fie **S** un punct **excentric**, denumit **excentru**, de coordonate

(4.1) **S** = (s_x, s_y) , în reperul cartezian drept

(4.2) **S** = (s, ε), în reperul **polar**, astfel că

(4.3) **S** = (s_x= s.cos ε, s_y= s.sinε**)** şi o deplasare rigidă de translaţie a planului cu punctul (s_x, s_y) astfel încât segmentul SW'_1- în care W'_1 este imaginea lui W_1 după translaţie – să intersecteze cercul **C** în punctul **W(α)** (**Fig.4.1,b**).

În acest fel, coordonatele punctului W pot fi exprimate atât ca funcţii de unghiul **α** la centrul **O(0,0)** cât şi ca funcţii de unghiul **θ** la excentrul **S**. În coordonate polare, acestea sunt:

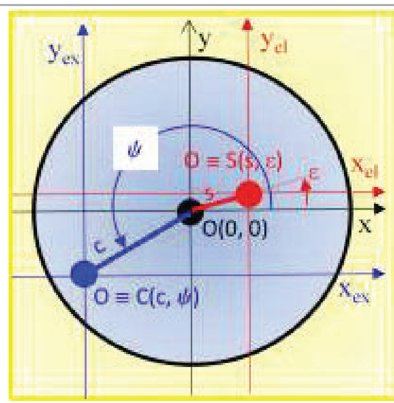


Fig. 4.1,a Poziţiile relative ale originilor **O(0, 0)** ale axelor de coordonate pentru diferite tipuri de funcţii supermatematice (**FSM**): **Exentrice** (**O**), **Elevate** (**O ≡ S**) şi **Exotice** (**O ≡ C**)

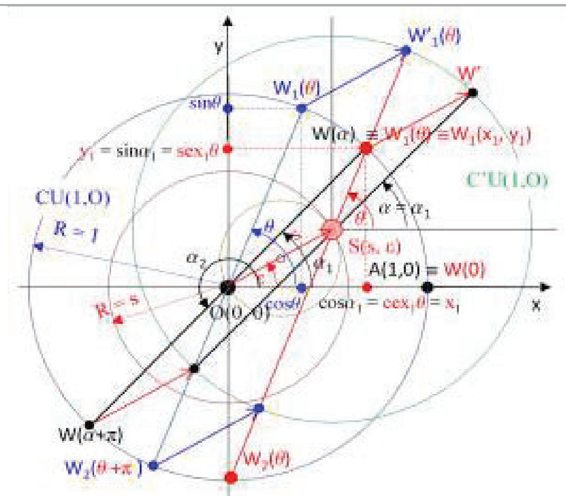


Fig. 4.1,b Cercul unitate **centric (CU)** şi cercul unitate **excentric (C'U)** translatat cu vectorul **s.rad ε**

(4.4) $\mathbf{W} = (R, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta})$, iar în cele carteziene, pentru R = 1:

(4.5) $\mathbf{W} = (\cos \boldsymbol{\alpha}, \sin \boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{s}_x + \mathbf{r}.\cos \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}_y + \mathbf{r}.\sin \boldsymbol{\theta})$.

Coordonatele punctelor **W**, de pe cercul **CU**, vor fi denumite, în continuare, **centrice**, dacă se exprimă în funcţie de centrul cercului, adică de coordonatele polare (R, **α**) şi / sau cele carteziene (x = cos **α** , y = sin **α**).

Coordonatele punctelor **W**, de pe cercul unitate **CU**, care se exprimă în funcţie de polul sau excentrul **S = (s, ε)** vor fi denumite **coordonate excentrice**. Ele sunt:

(4.6) $r = -s\cos(\theta-\varepsilon) + \sqrt{1 - s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}$, denumită **rază excentrică**

(4.7) $x = s_x + r.\cos\theta$, abscisa şi

(4.8) $y = s_y + r.\sin\theta$, ordonata punctului **W,** în reperul cartezian drept **xOy**.

Unghiul polar **excentric** este

(4.9) $\theta(\alpha) = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \arcsin\frac{e.\sin(\alpha-\varepsilon)]}{R^2\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}} =$

$= \alpha + arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)]}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}}$ sau

$\theta(\alpha) = \alpha + \arctan\frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{1-s\cos(\alpha-\varepsilon)}$ şi unghiul polar **centric** este

(4.10) $\alpha(\theta) = \theta - \beta(\theta) = \theta - \arcsin[\frac{e}{R}\sin(\theta-\varepsilon)]=$

$= \theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]$.

Aceste două unghiuri vor fi alese drept variabile esenţiale ale **FSM** în general şi ale **FCE** în special. Prezentarea începe cu **FSM-CE** de variabilă excentrică **θ.**

Partea I.1 FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ

Relaţiile anterioare sunt imediate şi rezultă aplicând teorema sinus în triunghiul **WOS.** Prin analogie cu **FCC** / **FTC** (**Euler**) – se definesc următoarele funcţii circulare / trigonometrice – **excentrice** (**FCE / FTE**) :

(4.11) $r = rex(\theta; s; \varepsilon)$, **RADIAL** EXCENTRIC de **θ, s** şi **ε**

(4.12) $x = cex(\theta; s; \varepsilon)$, **COSINUS** EXCENTRIC de **θ, s** şi **ε**

(4.13) $y = sex(\theta; s; \varepsilon)$, **SINUS** EXCENTRIC de **θ, s** şi **ε**

(4.14) $\overline{d} = d\overline{\rho}/d\theta = \overline{dex}(\theta; s; \varepsilon) =$ dex**θ**.der**θ** - **DERIVATĂ VECTORIALĂ** EXCENTRICĂ de **θ, s** şi **ε** şi de modul:

(4.15) $d = d\alpha/d\theta = dex(\theta; s; \varepsilon)$, **DERIVATĂ** EXCENTRICĂ de **θ, s** şi **ε**.

Pentru simplificarea scrierii lor, în condiţiile precizării excentrului **S = (s, ε)** = S(s_x = s.cos ε, s_y = s.sin ε) funcţiile anterior prezentate (**FCE**) se pot exprima şi sub forma prescurtată:

(4.11') r = rex **θ** = rex (**θ, S**) - R E X de **θ** -

(4.12') x = cex **θ** = **cex (θ, S)** - **C E X** de **θ**

(4.13') y = sex **θ** = **sex (θ, S)** - **S E X** de **θ** -

(4.14') $\vec{d} = \overrightarrow{dex\theta} = \overrightarrow{dex(\theta,S)}$ = dex **θ. der θ** - **D E X** vector de **θ**

(4.15') d = dex **θ** = **dex (θ, S)**, - **D E X** de **θ**.

Aceste **FCE** / FTE sunt denumite ***elementare*** deoarece stau la baza definirii altor **FCE** prin combinarea lor. Astfel:

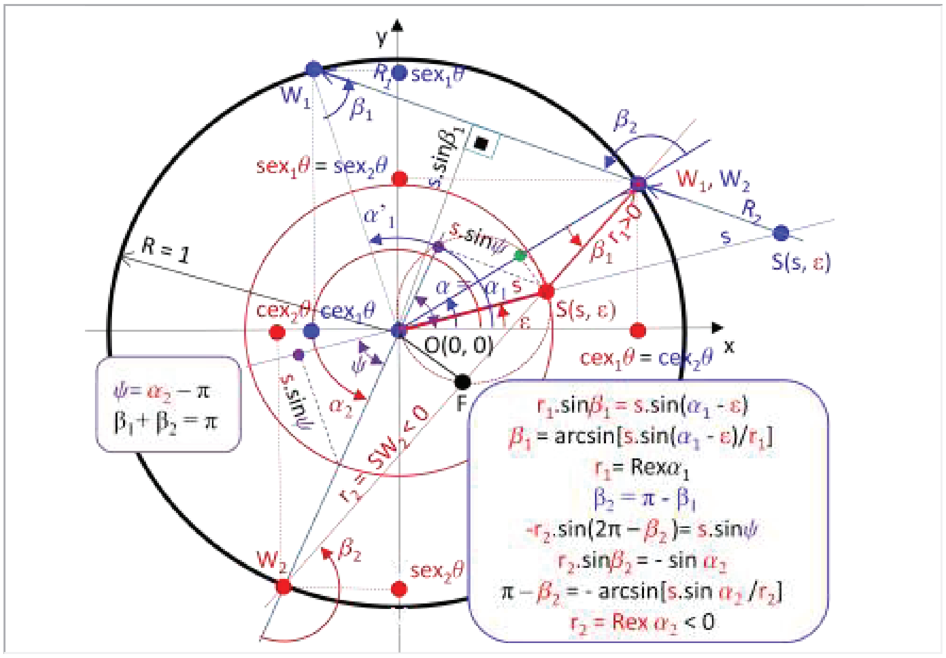


Fig. 4.2,a Elementele geometrice de definire ale **FCE** prin coordonatele punctelor $W_{1,2}$ de intersecţie ale cercului unitate **CU** cu dreapta **d ≡ L** în care **S ≡ E**

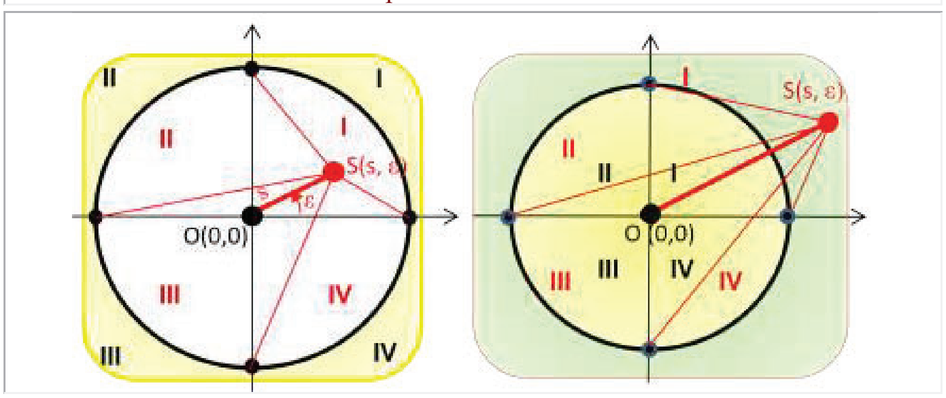


Fig. 4.2, b Semnele **FCE** în cele **IV** cadrane **centrice** şi **excentrice** pentru **s < 1** ← stânga **şi** **s > 1** → dreapta

(4.16) $\text{tex}\theta = \frac{y}{x}, (\forall x \backslash x = 0) = \frac{sex\theta}{cex\theta}$ - **T E X** de **θ** - este denumită **TANGENTĂ** EXCETRICĂ de **θ** şi **S(s, ε)** şi tangenta excentrică **Voinoiu** este

(4.17) texv **θ** = x / │y│ = sex θ / **Abs**[cex θ] -TEX **VOINOIU** – de **θ** şi **S(s, ε)**

(4.18) ctex **θ** = x / y, (y ≠ 0) = cex **θ** / sex **θ** - **C T E X** de **θ** - este denumită **COTANGENTĂ** EXCENTRICĂ de **θ** şi **S(s, ε)**, şi cotangenta excentrică **Voinoiu**

(4.19) ctexv **θ** = y / │ x │= cex **θ / Abs**[sex **θ]**

(4.20) scex **θ** = 1 / x = 1 / cex **θ** - **S E C E X** de **θ** - este denumită **SECANTĂ** EXCENTRICĂ de **θ** şi **S(s, ε)**,

(4.21) $\mathrm{csex}\theta = \frac{1}{y}, (y \neq 0) = \frac{1}{sex\theta}$ - **C O S E X de θ** - este denumită **COSECANTĂ** EXCENTRICĂ de **θ** şi **S(s, ε)**.

În relaţia (4.10), **R=1** şi **s** este excentricitatea numerică. Dacă **e** ar fi excentricitatea naturală, atunci **s = e / R** ar fi excentricitatea numerică. Păstrarea lui R = 1 în relaţie s-a făcut în scopul evidenţierii formei expresiei, asemănătoare cu a relaţiei (4.9), astfel mai uşor de reţinut. Definiţiile, astfel date, **FCE** sunt echivalente cu cele date anterior de autor şi publicate în [1], prin intersecţia cercului trigonometric cu o **semidreaptă** cu polul în excentrul (polul) **S ≡ E** şi care face cu direcţia axei **x** unghiul de **θ**. Astfel definite, **FCE** sunt uniforme.

Pentru a aduce de acord trigonometria, care operează **numai** cu o **semidreaptă,** cea pozitivă $\mathbf{d^+ \equiv L^+}$, cu **geometria analitică**, care operează cu **drepte**, $\mathbf{d = d^+ \cup d^-}$, în lucrarea [2], autorul a revenit asupra definirii **FCE**, realizând definirea lor prin intersecţia cercului trigonometric cu o **dreaptă**, adică, considerând şi **extensiile (**denumire dată de math. **Anton Hadnady)** acestor **FCE**, la sugestia Prof. Dr. **Horst Klepp**. Totodată, **FSM-CE** rex a fost normată, la sugestia Prof. Dr. Ing. **Dan Perju**. În acest fel, **FCE** sunt **multiforme** pentru oricare valoare a excentricităţii numerice **s**.

Pentru **s** < 1, prima determinare, denumită **principala** şi notată cu indicele **1**, apare ca intersecţie a cercului cu semidreapta **pozitivă** $\mathbf{d^+}$**; FCE** fiind introduse prin coordonatele punctului $\mathbf{W_1} = \mathbf{CU} \cap d^+$, în care **CU** este cercul trigonometric sau alt cerc cu centrul în originea sistemului de coordonate x0y. Astfel, exprimarea coordonatelor lui $\mathbf{W_1}$ prin unghiul la centru **α** conduce la obţinerea **FCE** devariabilă centrică iar exprimarea aceloraşi coordonate prin unghiul **θ** la excentru**l S** conduce la obţinerea **primei determinări – principale**, de indice **1** – a **FCE** de **varioabilă excentrică**.

Al doilea punct $\mathbf{W_2}$, rezultat din intersecţia cercului **CU** cu semidreapta $\mathbf{d^-}$**,** pentru **s** ≤ 1 şi, respectiv, cu semidreapta $\mathbf{d^+}$ pentru **s** > 1, prin coordonatele sale, determină o a doua familie de funcţii, notate cu indicele **2** şi denumite **determinarea secundară** a **FCE**.

În primul caz, adică pentru **s < 1**, determinarea secundară face parte din extensia **FCE**, deoarece W_2, în acest caz, rezultă din intersecţia lui C cu semidreapta negativă $\mathbf{d^-}$**.** Pentru **s** > 1, $\mathbf{W_{3,4}} = \mathbf{CU} \cap \mathbf{d^-}$, aceste două puncte determinând extensiile **FTE**. În cazul acesta, având două determinări: una principală (a extensiei) notată cu indicele **3** şi una secundară **-** a extensiei – notată cu indicele **4**. Determinările principale sunt date, prin definiţie, de punctele $\mathbf{W_{1,3}}$ care se rotesc în acelaşi sens pe cerc ca şi sensul de rotaţie a dreptei d în jurul excentrului **S**, iar cele secundare sunt date de punctele $\mathbf{W_{2,4}}$, care se rotesc în sens invers (dextrogin sau dextrorum).

În **figura 4.2**,**a** intersecţia este prezentată pentru cercul unitate **CU(O,1)**, deci prin reducerea desenului la scara 1/R, R fiind raza cercului oarecare. Semidreapta $\mathbf{d^-}$

fiind defazată cu **π** faţa de semidreapta **d^+** şi extensiile **FCE** vor fi defazate cu **π** faţă de funcţiile circulare / trigonometrice excentrice – **FCE** -. În acest fel, confuziile posibile dintre funcţii şi extensiile lor pot fi lesne evitate şi scrierea poate fi simplificată, păstrându-se doar doi indici: - indicele **1** pentru determinarea principală, considerată ca fiind dată de punctele de intersecţie de indici impari (**W_1 pentru s < 1** şi **W_1 şi** W_3 pentru **s > 1**) şi de indicele **2**, pentru determinarea secundară, considerată ca fiind dată de punctul de indici **numere pare**: W_2 (**Fig. 4.2.a**) pentru **s < 1** şi de punctele de intersecţie W_2 **şi** W_4 pentru **s > 1**, (**Fig.4.2.a**).

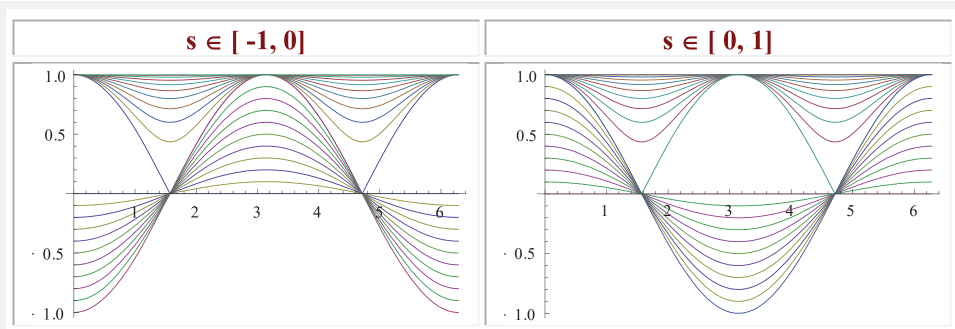


Fig. 4.3 Graficele funcţiilor **del $_1$ θ** şi **s.cos θ,** pentru **s ∈ [-1, 1]**cu pasul 0,1

Aşa cum va rezulta în continuare, toate expresiile **FCE** au **forme invariante** şi conţin unul şi **acelaşi radical** pe care îl notăm cu **Δ (θ, S)** şi îl vom numi **funcţia delta**, denumită, în literatura funcţiilor matematice speciale, ca delta amplitudine / amplitudinus, notată şi astfel:

(4.22) $$\mathbf{del}_{1,2}(\theta, S) = \pm\sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta - \varepsilon)} = \Delta_{1,2}(\theta, S)$$

Atunci, ori de câte ori, în expresiile analitice ale unei **FCE** oarecare, se ia semnul (**+**) **plus**, în faţa radicalului, se va obţine prima determinare – ***principală*** -de indice **1**, iar pentru semnul **(-) minus** se va obţine cea de a doua determinare – **secundară** – de indice **2**. Acelaşi indice îl va purta şi funcţia **del(θ**, S): **1-** pentru determinarea principală (**del$_1$** θ) şi **2** – pentru determinarea secundară (**del$_2$ θ**). Scrierea cu doi indici (del$_{1,2}$ **θ**) are rolul de a concentra scrierea ambelor determinări.

Observaţia cu indicii este valabilă pentru toate **FSM**.

Vom da, în continuare, semnificaţiile geometrice şi tehnice ale funcţiei **delθ**.

Fie elipsa rotită cu + π/2, astfel încât axa mare a elipsei (a) să fie dispusă pe axa y, de ecuaţii parametrice

M $\begin{cases} x = b.cos\,\alpha \\ y = a.sin\,\alpha \end{cases}$ cu derivatele **M'** $\begin{cases} x' = \frac{dx}{d\alpha} = -b.\sin\alpha \\ y' = \frac{dy}{d\alpha} = a.\cos\alpha \end{cases}$,

atunci elementul de arc **ds** al acestei elipse este

ds = $\sqrt{x'^2 + y'^2}d\,\alpha = \sqrt{b^2 sin^2\alpha + a^2 cos^2\alpha}\;d\,\alpha = R\sqrt{1 - s^2 sin^2\alpha}\,d\alpha$, în care R=a şi $s^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 1 - b^2/a^2$.

În consecinţă, relaţia (4.22) exprimă, geometric, pentru R = a şi ε = 0, derivata lungimii elementului de arc în raport cu variabila θ = α, adică

(4.22') $del_{1,2}\boldsymbol{\theta} = \pm\ ds/d\,\boldsymbol{\theta}$ şi, anticipând, $del_{1,2}\theta = \pm\ \cos\beta = \frac{rex_{1,2}\theta}{dex_{1,2}\theta} = \pm cos(bex_{1,2}\theta)$.

În cazul funcţiilor eliptice **Jacobi** (**cn**u, **sn**u, **dn**u) şi al vibraţiilor neliniare, variabila **u** = Ω_M.t este dată de integrala eliptică incompletă de prima speţă

(4.22 '') $u = \int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 sin^2\theta}} = \Omega_M t$

şi reprezintă tocmai lungimea arcului elipsei începând din punctul B(1,0) şi până în punctul curent de unghi θ = **Ω.t**, de pe elipsa cu A(0,a), în care a = $1/\sqrt{1-k^2}$ este pe axa y şi în care **Ω** este pulsaţia proprie a sistemului neliniar, adică

(4.22 ''') $\sqrt{1-s^2 sin^2\propto} = \frac{d\theta}{du} = \frac{d\theta}{\Omega_M dt} = \frac{\omega}{\Omega_M}$, în care **ω** este viteza unghiulară variabilă a punctului curent **M**[r(**θ**), **θ]** de pe elipsă, când raza polară **r** din originea **O(0,0)** a punctului curent se roteşte cu viteza unghiulară (pulsaţia proprie a sistemului) constanta $\boldsymbol{\Omega} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\frac{\Omega_M}{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}}$ şi în punctul **A(0, a)** trece cu viteza unghiulară maximă $\boldsymbol{\Omega_M}$**,** în care,

$K(k) = F(\pi/2, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n!!}{2^n n!}\right)^2 k^{2n}]$

este integrala eliptică completă de prima speţă.

Radicalul (4.22''') exprimă, totodată, raza polară din centrul **O** al unui punct curent al elipsei, anterior considerate, cu axa mare a = $1/\sqrt{1-k^2}$ pe direcţia y şi b = 1, pe direcţia x.

4.2 DEFINIREA FSM-CE NOI, INDEPENDENTE DE POZIŢIA ORIGINII SISTEMULUI DE REFERINŢĂ

Funcţia **del** $_{1,2}$ **θ** are, ca interpretare geometrică, distanţa de la punctul **F**, piciorul perpendicularei, coborâte din **O** pe dreapta de direcţie variabilă **d**, la punctele $\mathbf{W_{1,2}}$ (**Fig.4.2, a**).

Segmentul orientat $\mathbf{FW_1}$, fiind orientat în sensul (+) al dreptei **d** şi în sensul pozitiv al semidreptei $\mathbf{d^+}$, este pozitiv şi constituie prima determinare a funcţiei, iar segmentul FW_2 fiind orientat invers pe semidreapta d^+, dar în sensul semidreptei $\mathbf{d^-}$**,** va fi negativ şi reprezintă a doua determinare, secundară, a funcţiei, deci:

(4.23) $FW_1 = del_1\,\boldsymbol{\theta} > \mathbf{0}$ şi $FW_2 = del_2\,\boldsymbol{\theta} < 0$

Graficele funcţiilor $del_{1,2}$ **θ** sunt prezentate în **figurile 4.3.**

4.2.1 FSM-CE radial excentric de θ: $rex_{1,2}\theta$

Este una dintre cele mai importante **FSM-CE noi** deoarece, aşa cum a observat Prof. Dr. **Octavian Em. Gheorghiu**, în tinereţe asistent al Prof. Dr. Math. **Grigore C. Moisil** şi şef al Catedrei de Matematica a Universităţii Politehnica din Timişoara, după decesul Prof. Dr. Math. **Valeriu Alaci**, reprezintă distanţa în plan, exprimată în coordonate polare, dintre două puncte **S(s, ε)** sau **E(e, ε)** şi **W**$_{1,2}$ (R = 1, α) ⊂ X_1 (O, R = 1) sau $\mathbf{M_{1,2}}$ ⊂ X (O, R) şi este o adevarată **FSM-CE rege**.

Acesta este motivul pentru care, cu ajutorul celor două determinări ale fucţiilor **rex**$_{1,2}$**θ,** pot fi exprimate ecuaţiile **tuturor curbelor plane**, cunoscute şi a multor curbe plane noi.

Razele vectoare –polare– ale punctelor de intersectie $\mathbf{W_{1,2}}$, sunt notate cu $r_{1,2}$ = $SW_{1,2}$, când sunt exprimate ca funcţii de variabila excentrică **θ** şi cu $\mathbf{R_{1,2}}$, dacă sunt exprimate ca funcţii de variabila centrică α. Ele reprezintă cele două determinări ale funcţiei **radial excentric** în funcţie de unghiul **θ** sau α pe care $\mathbf{d}^+$ îl face cu axa x.

Cu notaţiile din figurile **4.2,a** rezultă:

(4.24) $SW_{1,2} = EF + FW_{1,2} = EF + del_{1,2}\theta$ şi

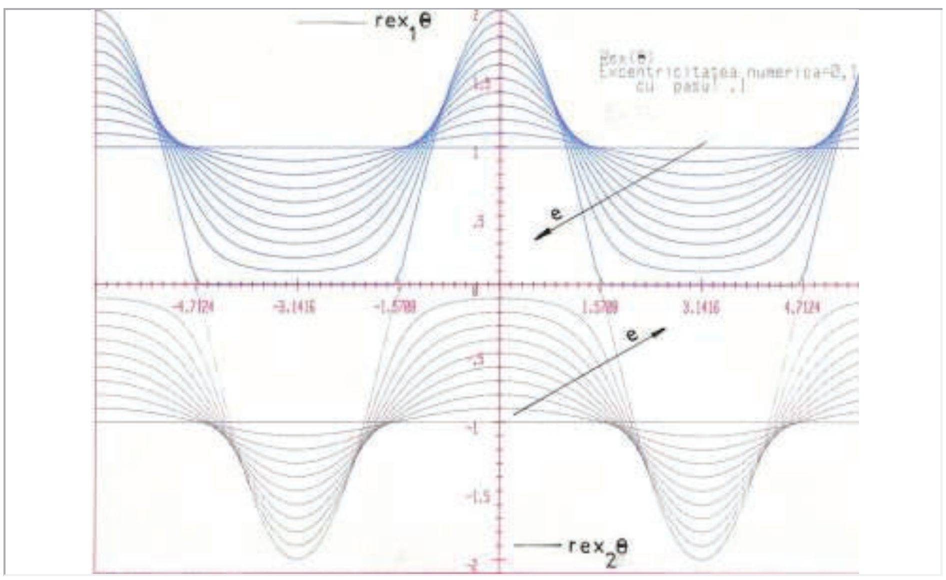


Fig.4.4,a Graficele **FSM–CE rex**$_1$ **θ** şi rex $_2$ **θ** pentru **s** ∈ **[0,+1**] cu pasul 0,1

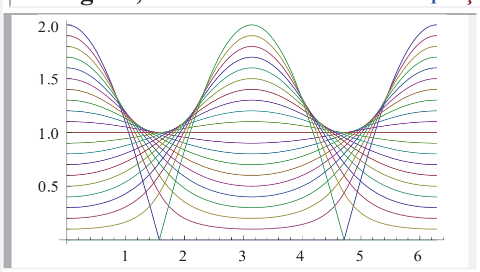


Fig. 4.4,b Graficele funcţiilor rex$_1$ **θ** pentru s ∈ [-1, 1] cu pasul 0,1

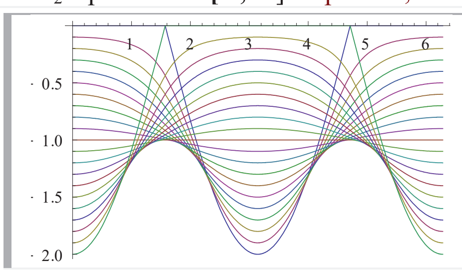


Fig. 4.4 c Graficele funcţiilor rex$_2$ **θ ,** pentru s ∈ [-1, 1] cu pasul 0,1

(4.25) EF = $-$ s.cos (θ – ε) astfel că

(4.26) $SW_{1,2} = rex_{1,2}(\theta, S) = -\,s.\cos(\theta-\varepsilon) \pm\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}$

şi distanţele de la excentrul E(e, ε) la punctele $M_{1,2}$, de pe cercul de raza oarecare R, vor fi

(4.27) $EM_{1,2} = R.rex_{1,2}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{S})$.

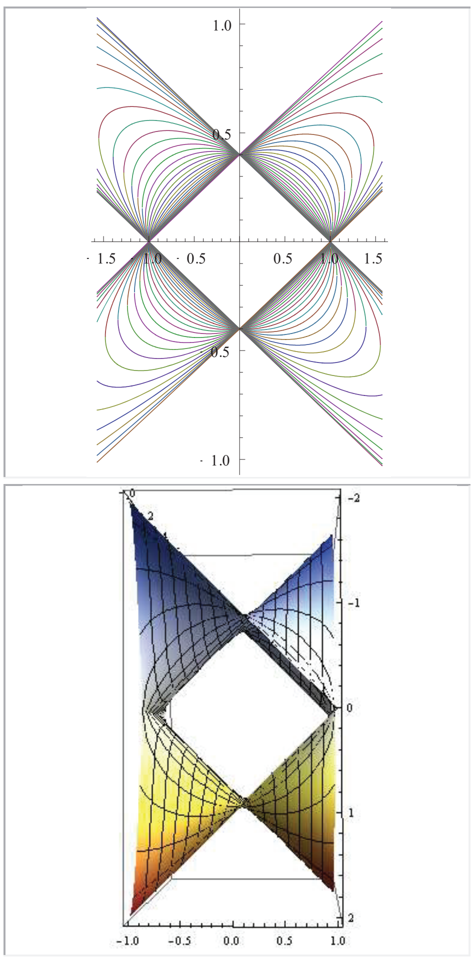


Fig. 4.5,a Graficele funcţiilor **rex$_{1,2}$ s** cu **S{s** $\in$[0, 2], **ε = 0},** pentru θ $\in[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

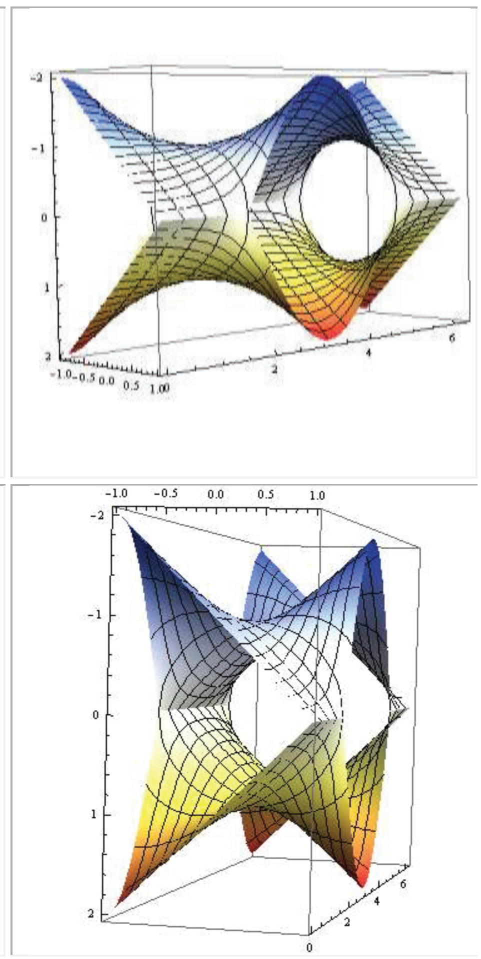


Fig. **4.6** Graficele functiilor **rex$_{1,2}$ θ** cu **S{s** $\in$ [-1, 1], ε = 0} în **3D** pentru θ $\in$ [0, 2π]

Graficele funcţiilor **rex$_{1,2}$θ** sunt reprezentate în **figura 4.4,a, 4.4,b** şi **4.4,c** în **2D, c**a funcţii de variabila **θ** la excentru **S ≡ E,** pentru excentricitatea liniară numerică **s ≡ e** ∈ [0, 1] şi în **figura 4.6** în **3D.**

Pentru **θ** un parametru **constant,** cuprins în domeniul **θ** ∈ [0**,** π] cu pasul π/6 şi excentricitatea **s** considerată ca **variabilă**, graficele sunt prezentate în figurile **4.5,a, 4.5,b** şi **4.5,c.** În aceste grafice, se remarcă forme ca cerc, pătrat, drepte înclinate cu ± 45^0, paralele cu cele două bisectoare ale cadranelor centrice, elipse şi hiperbole
Culoarea **albastră** corespunde primei determinari **(1)** şi cea **verde** celei de a doua determinări **(2)** ale funcţiilor şi punctele de graniţă/aderenţă se situează pe hiperbole echilaterale (**Fig. 4.5,c)**.

Din relaţiile de definiţie (4.22) rezultă că funcţia **del$_1$θ** este strict pozitivă, în timp ce funcţia **del$_2$θ** este strict negativă. Deoarece, toate **FCE** conţin un termen cu această funcţie, domeniul de existenţă al acesteia este şi domeniul de existenţă al tuturor **FCE**.

Pentru o excentricitate liniară numerică subuniutară **s**∈[–1,+1] sau pentru o excentricitatea liniară reală **e**∈ [– R, +R], radicalul există, astfel că **FCE** există pe toată axa reală, adică, pentru oricare **θ** ∈ (– ∞, +∞).

Pentru o excentricitate numerică supraunitara $\mathbf{s}^2 > 1$, sau pentru excentricităţi reale $e^2 > \mathbf{R}^2$, **FCE** există în intervalele în care expresia de sub radical este pozitivă, ceea ce, geometric, revine la a considera intervalele sau unghiurile **θ** pentru care dreapta excentrică **turnanta d**, în jurul lui **S** sau a lui **E**, intersectează cercul unitate **C(O,1)** şi respectiv, cercul oarecare **C(O,R).**

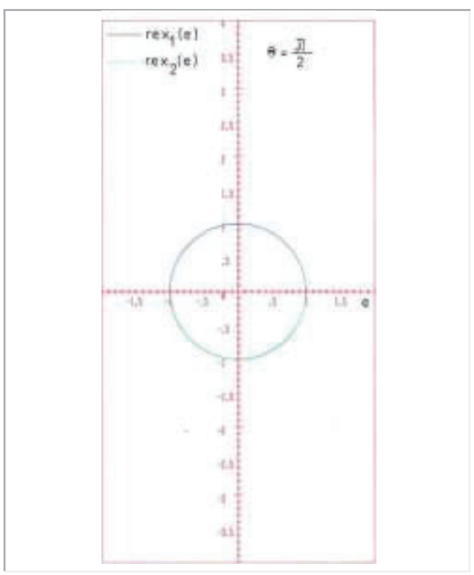


Fig. 4.5,b **FSM** – **CE** radial excentric **rex s** de excentricitate variabila **s** ≡ e pentru **θ= π / 2, s∈[-1, 0]** şi **s ∈[0, 1]**

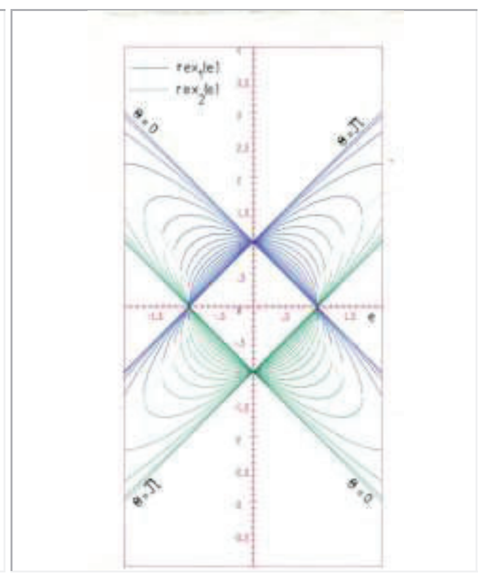


Fig. 4.5,c **FSM** – **CE** radial excentric **rexs** de excentricitate **s** ≡ e variabilă pentru **θ = 0** şi **θ = π**

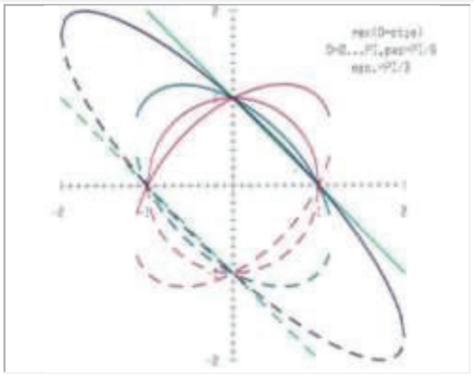


Fig. 4.5.d Graficele funcţiilor **rex**$_{1,2}$ **s** cu **S{s** $\in$[-2, 2], **ε = π /3},**pentru $\theta \in$ [0, π] cu pasul π / 6

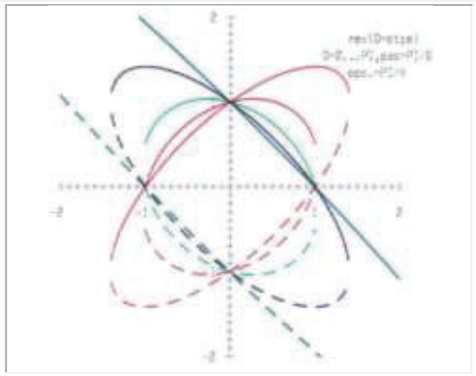


Fig. 4.5.e Graficele functiilor **rex**$_{1,2}$ **s** cu **S{s** $\in$[-2, 2], **ε = π /4}** pentru $\theta \in$ [0, π] cu pasul π / 6

Notând cu $\boldsymbol{\theta_e}$ intervalul de existenţă, din condiţiile amintite, rezultă,

(4.28) $\boldsymbol{\theta_e}$ = arcsin (**R / e**), şi este semiunghiul format de celor două tangente din **S** la cerul unitate **CU(O,1).** Notand cu $\boldsymbol{\theta_i}$ inceputul intervalului, pentru prima perioadă, rezultă

(4.29) $\boldsymbol{\theta_i = \pi + \varepsilon - \theta_e}$, iar $\alpha_{1i} = \alpha_{2i} = \pi/2 + \varepsilon - \theta_e$ şi finalul intervalului $\boldsymbol{\theta_f}$ va fi

(4.30) $\boldsymbol{\theta_f = \pi + \varepsilon + \theta_e}$, iar $\alpha_{1f} = 3\pi/2 + \varepsilon + \theta_e$ şi $\alpha_{2f} = -\pi/2 + \varepsilon + \theta_e < 0$.

Pentru $\boldsymbol{\theta = \theta_i}$, dreapta **L≡d** (**Fig. 4.2,a**) intersectează cercul **CU(O, 1)** în punctele de tangenţă (dedublate) în care $\mathbf{W_{i1}} \equiv \mathbf{W_{i2}}$ şi $\mathbf{W_{f1}} \equiv \mathbf{W_{f2}}$; **L** fiind tangenta la cercul unitate.

În intervalul $\boldsymbol{\theta \in (\theta_i, \theta_f)}$ dreapta **d** nu intersectează cercul unitate **CU(O,1),** astfel că, în acest interval, **FCE nu există**.

Notind cu $\mathbf{I}^+$ intervalul în care $\mathbf{L}^+ \equiv d^+$ intersectează pe **CU** şi cu $\mathbf{I}^-$ intervalul în care $\mathbf{L}^- \equiv d^-$ intersectează pe **CU**, rezultă intervalele de existenţă ale **FCE**:

(4.31) $\theta \in [\theta_i+2k\pi, \theta_f= 2k\pi] = \mathbf{I}^+$, intervalul de existenţă al **FCE** (uniforme) şi

(4.32) $\theta \in [\theta_i+\pi+2k\pi, \theta_f+\pi+2k\pi] = \mathbf{I}^-$, intervalul de existenţă al **extensiilor FCE**.

Dând lui **ε** o creştere continuă, graficul funcţiei rex**θ** va primi o deplasare continuă în direcţia pozitivă a axei **θ.** O animaţie de acest gen se poate obţine folosind programul **MAPLE** în care se scriu urmatoarele comenzi pentru **rexθ** de excentricitate numerică **s = 0,6** şi **ε ≡ i**

```
STUDENT >   with(plots,animate,display):
   a:=plots[animate](-0.6*cos(x-i) + sqrt(1-(0.6*sin(x-i))^2), x=0..2*Pi,i=0..6):
  b:=plot(-0.6*cos(x) + sqrt(1-(0.6*sin(x))^2), x=0..2*Pi):plots[display]({a,b});
```

şi va rezulta un grafic al funcţiei **rexθ.** Aplicând **click,** întâi pe grafic şi apoi pe semnul **►,** graficul funcţiei se va deplasa în sensul amintit (pozitiv) şi repetând operaţia, se va deplasa din nou în acelaşi sens.

Animaţia poate fi repetată ori de câte ori dorim. Pentru o deplasare mai amplă, se va mări intervalul lui **i.**

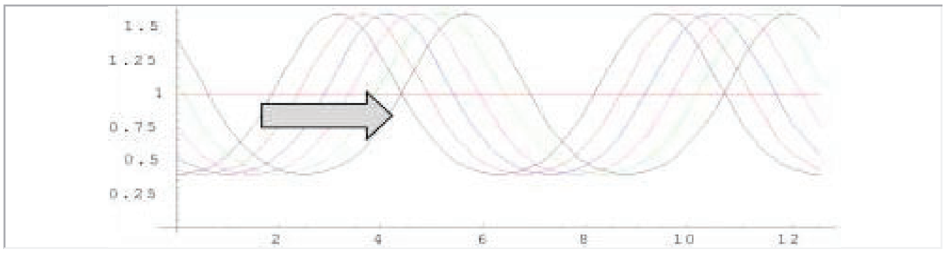


Fig. 4.7 Translaţia graficelor funcţiilor rex**θ,**
pentru s = 0,6; **ε ∊ [0; 2,5]** cu pasul 0,5

Din **figura 4.7** se observă că domeniul de existenţă al functiei **rex**$_1$**θ** este [1- **s**, 1+ **s**], adică, graficul funcţiei este al unei cicloide care oscilează simetric faţă de drepta y = 1 (**Fig.4.4,b)** şi că funcţia există pe toată axa reală dacă $s^2 < 1$, sau $e^2 < R$.

Funcţia **rex**$_2$**θ** fiind **strict** negativă, va oscila simetric faţă de dreapta y = —1, aşa cum se poate observa şi în **figura 4.4,c .**

Dacă excentricitatea **s** = const., vom denumi **excentricitate complementară,** şi se va notata cu **s',** expresia:

(4.33) $s' = \sqrt{1-s^2} = rex_1(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)$

Produsul celor două determinări ale funcţiei radial excentric $r_1 = rex_1\,\theta$ şi $r_2 = rex_2\theta$, aşa cum rezultă din relaţia (invariantă) (4.26) de definire a acestor **FCE**, este:

(4.34) $\prod_{1,2} = r_{1,2} \bullet r_{2,1} = -(1-s^2) = s^2 - 1 = -s'^2$

Rezultă de aici că, cele două determinări sunt funcţii inverse, având **modulul** inversiunii **k,**

(4.35) $k = \sqrt{s^2-1} = i\,.\,s'$ in care $i = \sqrt{-1}$ şi **puterea** de inversiune **k²**.

Se deduce, pe baza proprietaţilor inversiunii, că **W₁** şi **W₂** sunt puncte **inverse** sau **reciproce**, în inversiunea de putere de inversiune $k^2 = EW_1.EW_2$ şi centru de inversiune **E,** între coordonatele cărora se stabilesc următoarele dependenţe:

(4.36) $x_2 = \frac{k^2 x_1}{x_1^2+y_1^2} = k^2.R.cos\propto_1$

(4.37) $y_2 = \frac{k^2 y_1}{x_1^2+y_1^2} = k^2.R.sin\propto_1$

In relaţiile anterioare, s-a considerat (v. **Fig.**4.2) $x_1^2 + y_1^2 = R^2$ deoarece $W_{1,2} \subset C$ şi **R** este raza cercului **CU**. Totodată: $\frac{x_1}{R} = cos\propto_1$ şi $\frac{y_1}{R} = sin\propto_1$ deoarece şi $W_2 \subset C$. Rezultă că $\frac{x_2}{R} = cos\propto_2$ şi $\frac{y_2}{R} = sin\propto_2$, astfel că relaţiile anterioare (4.36) şi (4.37) devin:

(4.38) $\begin{cases} \frac{cos\alpha_2}{cos\alpha_1} = k^2 = s^2 - 1 \\ \frac{sin\alpha_2}{sin\alpha_2} = k^2 = s^2 - 1 \end{cases}$ sau $\frac{cos\alpha_2}{cos\alpha_1} = \frac{sin\alpha_2}{sin\alpha_2} = k^2 = s^2 - 1$

Din relaţia (4.35), rezultă că puterea de inversiune $\mathbf{k^2}$ poate fi şi puterea $\mathbf{p^2(E)}$ lui **E** faţă de cercul **CU**, considerând funcţiile ca vectori $EW_{1,2}.rad\theta = rex_{1,2}\ \theta \bullet rad\theta$ şi, totodata,:

(4.39) $rex_1\boldsymbol{\theta}.rex_2\boldsymbol{\theta} = \begin{cases} k^2 < 0 \leftrightarrow s < 1 \rightarrow e < R \rightarrow Teorema\ COARDELOR \\ k^2 = 0 \leftrightarrow s = 1 \rightarrow e = R \rightarrow Teorema\ INĂLŢIMII\ ş.a \\ k^2 > 0 \leftrightarrow s > 1 \rightarrow e > R \rightarrow Teorema\ SECANTELOR \end{cases}$

şi reprezintă poziţia excentrului **E** în raport cu cercul **C(O,R)**: în interiorul şi, respectiv, pe cerc şi în exteriorul lui, poziţii care vor servi, în continuare, la demonstrarea teoremelor specificate cât şi a altora.

Din teorema asupra puterii unui punct (**S**), faţă de un cerc **C**, dacă **S** este exterior cercului (**s > 1**, **Fig.4.2.a**) sau interior lui (**s** <1, **Fig.4.2, b**) rezultă că produsul celor două determinari este acelaşi, oricare ar fi **θ**. Alegând două valori $\boldsymbol{\theta_1}$ şi θ_2 ,din domeniul – intervalul – de existenţă al funcţiei rex**θ,** se obţine relaţia:

(4.40) $R.rex_1\boldsymbol{\theta}_1 \bullet R.rex_2\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{R^2}\ rex_1\ \boldsymbol{\theta_2}.rex_2\ \boldsymbol{\theta_2} = \mathbf{p^2(E)} = \mathbf{e^2 - R^2}$

şi exprimă puterea excentrului **E**, ca pol, în raport cu cercul C(O,R) şi în raport cu cercul unitate pentru **R** = **1**.

În particular, pentru **s > 1** sau e > R, dacă una dintre valorile lui **θ** se alege $\boldsymbol{\theta_i}$, sau $\boldsymbol{\theta_f}$, se observă pe figura **4.2.a** că $rex_1\boldsymbol{\theta}_i = rex_2\boldsymbol{\theta}_i$ astfel că $\Rightarrow rex_1\boldsymbol{\theta_i}.rex_2\boldsymbol{\theta_i} = (\mathbf{SW_i})^2 = \mathbf{s^2 – 1}$**.** În acest caz, puterea inversiunii este pozitivă şi modulul inversiunii **k** este un **număr real,** reprezentând lungimea tangentelor din S la cercul unitate ($k = \|EWi\| = \|EW_f\|$).

Pentru **s < 1**, alegând pentru una dintre valorile lui **θ** pe $\boldsymbol{\theta = \pi / 2}$**,** din (4.34) se obţine, considerând pentru simplificare ε = 0 şi R = 1,

(4.41) $rex_1\frac{\pi}{2} rex_2\frac{\pi}{2} = -(1-s^2) = p^2 < 0$

In acest caz, puterea inversiunii $\mathbf{k^2}$ este negativa, modulul inversiunii **k** fiind un **numar imaginar**.

Dacă $M_{1,2} \subset C(O,R)$ si M_2 este diferit de punctul $M_2' = I_E^k(M_1)$, care este inversul punctului M_1, în inversiunea de centru **E** şi modul **k** şi putere $k^2 \neq p^2$, atunci locul geometric al punctului M_2' este homoteticul cercului **C(O, R)**, deci un **alt cerc** C'(O',R') cu centrul în **O'** dat de $EO' = (k/p)^2.EO$ şi de rază R' dată de relaţia $R' = (k/p)^2.R$. De aici rezultă că, dacă

(4.41') $k^2 = p^2$, atunci EO' = EO şi R' = R , adică cele două cercuri sunt confundate şi $M_2' \equiv M_2$, de unde se deduce ca M_1 şi $M_2 \subset C(O,R)$ ca şi W_1 şi $W_2 \subset C_1(O,1)$ pot fi atat inverse unul celuilalt cât şi transformatul homotetic de centru de homotetie **E** şi, respectiv **S**, şi de modul k = 1, ceea ce devine evident din insăşi definirea homotetiei.

Utilizând (3.26), **diferenţa** celor două determinări ale **FCE** rex**θ** este:

(4.42) $2.\boldsymbol{\Delta}_{1,2} = r_{1,2} - r_{2,1} = rex_{1,2}\theta – rex_{2,1}\theta = \pm 2\sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta - \varepsilon)} = 2.del_{1,2}\theta$

şi reprezentarea graficelor, în polar, este dată în figura **4.11,a,b** şi **c**, constituind un exemplu de reprezentare **numai** cu funcţiile rex**θ** a lemniscatelor lui **Booth**, asemănătoare curbelor lui **Cassini**, dar care nu au puncte comune pentru **θ = 0** şi **θ =π,** iar **suma** acestor funcţii este

(4.43) 2. $\Sigma_{1,2} = r_{1,2} + r_{2,1} = \text{rex}_{1,2}\theta + \text{rex}_{2,1}\theta = -2\ s\cos(\theta-\varepsilon)$

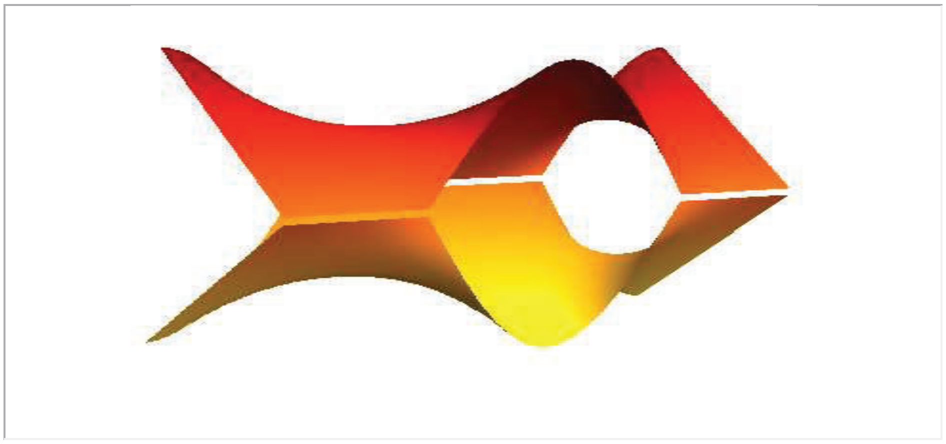


Fig. 4.8 **Rexoizi** . Suprafeţele funcţiilor rex$_1$**θ** şi rex$_2$**θ,** deplasate relativ cu ± 0,05

Pentru **θ – ε = 0 ⇒ del θ =** 1 şi rezultă urmatoarele mărimi pentru diferenţa şi suma celor două determinări ale funcţiei rex **θ**

(4.42') 2. $\mathbf{\Delta_{1,2}} = r_{1,2} - r_{2,1} = 2 \Rightarrow \mathbf{\Delta_{1,2} = 1}$

(4.43') 2. $\mathbf{\Sigma_{1,2}} = r_{1,2} + r_{2,1} = -2.s \Rightarrow \mathbf{\Sigma_{1,2} = -s.}$

Aşa cum rezultă din (3.26), variabilele **θ** şi **ε** pot fi schimbate între ele – inversate –, fără ca forma expresiei **FCE rexθ** să se modifice.

Considerând excentricitatea **s** ca **variabilă** (în intervalul –2, +2) şi pe **θ** ∈ [0, π] cu pasul π/6, graficele celor două determinări ale **FTE** **rex$_{1,2}$s** sunt prezente în **figurile 4.5,a**, **4.5.b**, **4.5.c, 4.5,d** şi **4.5,e**, în care se pot urmări modificările ce au loc, prin baleerea variabilei **s** şi a parametrului **ε**. Pentru **θ** = 0 (**Fig.4.5,a** şi **c**) se obţin două drepte paralele între ele şi paralele cu bisectoarea a 2-a (m = –1), desenată cu linie continuă, pentru prima determinare. Pentru **θ** = π / 2 se obţine cercul, iar pentru **θ** = **π** se obţin din nou drepte paralele, dar paralele cu prima bisectoare (m = 1). Pentru celelalte valori ale lui **θ** se obţin elipse.

Aşa cum s-a mai afirmat, modificarea lui **ε** de la valoarea 0 la valoarea π echivalează cu **schimbarea semnului excentricităţii** adică, a considera **excentricităţi negative**. Prin urmare, prezenţa excentrului **S(s, ε)** pe axa x negativă poate fi exprimată considerând **ε = 0** şi un **s < 0** sau **ε = π** şi **s** > 0.

Considerând **FCE** rexθ ca funcţii de două variabile, **θ** şi **s**, pentru fiecare determinare se obţine câte o suprafaţă în spaţiu (**Fig.4.8**). Aşa cum arată **figurile 4.6** cele două suprafeţe, sunt continue în zona lor de contact – joncţiune - astfel că ele mărginesc un corp pe care îl vom denumi **rexoid**, o parte din acest corp fiind reprezentată în **figurile 4.6** **şi** **4.8** în **3D**.

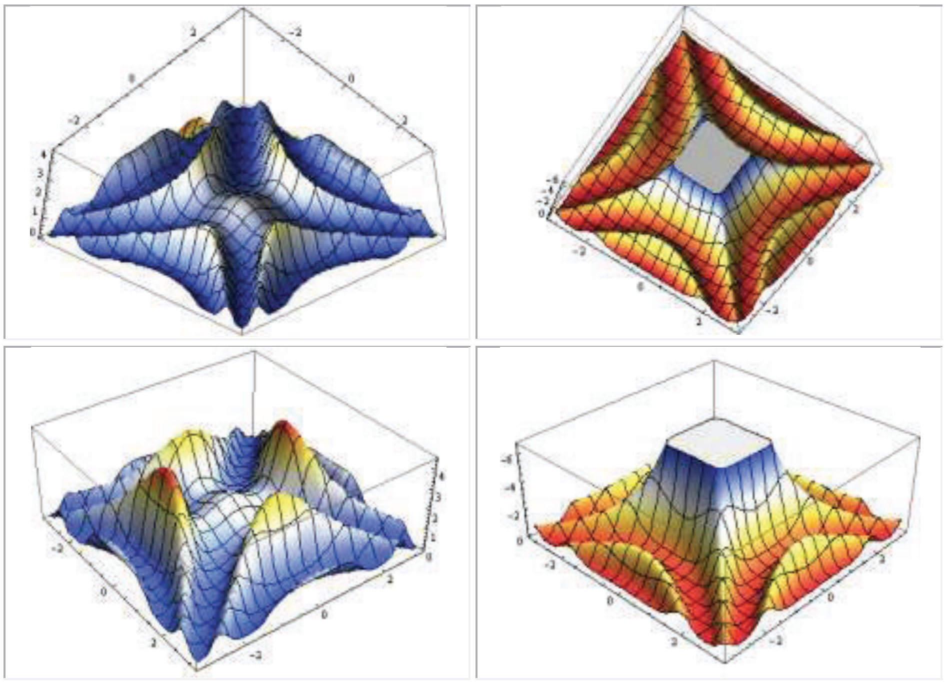


Fig. 4.9.a Suprafaţa $10/[1+1{,}3x^2+y^2]$ rex$_1$[**$\theta=x^2-y^2$,s = 0,8**] pentru x, y $\in$ [- π, π]	Fig. **4.9.b** Suprafaţa $10/[1+1{,}3\,x^2+y^2]$ rex$_2$[**$\theta=x^2-y^2$,s= 0,8**] pentru x, y $\in$ [- π, π]

Rexoidul are planele bisectoare ale diedrelor ca plane de simetrie. Prin urmare, şi intersecţia acestora, axa **θ**, este o axă de simetrie a rexoidului.

În **figura 4.9.a** şi **4.9.b** sunt reprezentate două suprafeţe descrise de inversele funcţiilor rex$_1$ **θ** şi, respectiv, rex$_2$ **θ, cu** $\boldsymbol{\theta = x^2 - y^2}$ şi **x, y** $\in$ [- π, π].

Funcţia rex **θ** exprimă, printre altele, distanţa de la punctul **S** la un punct de pe cerc, punct determinat de unghiul **α** la centrul **O**(0,0). Pentru puncte, situate pe cercuri de rază **R**, diferită de unu, distanţele de la **E** la aceste două puncte $\mathbf{M_{1,2}}$ se obţin amplificând funcţiile rex**θ** cu raza **R** a cercului oarecare:

(4.44) $EM_{1,2} = r_{1,2} = R.\mathrm{rex}_{1,2}(\theta,S) = R[-\,s.\cos(\theta-\varepsilon) \pm \sqrt{1-s^2 sin^2\theta}]$

Produsul dintre **R** şi excentricitatea numerică liniară **s** fiind excentricitatea liniară naturală **e**, relaţia anterioară va fi:

(4.45) $EM_{1,2} = r_{1,2} = R.\mathrm{rex}_{1,2}\ \boldsymbol{\theta} = -\,e.\cos(\theta-\varepsilon) \pm \sqrt{R^2 - e^2 sin^2\theta}$

Utilizând formula uzuală a distanţei în coordonate polare, sau teorema cosinusului, denumită şi teorema lui **Pitagora** generalizată, formulată explicit de către **F. Viéte** (1593), dar cunoscută şi de **Euclid** (sec. 3 î.e.n.) rezultă:

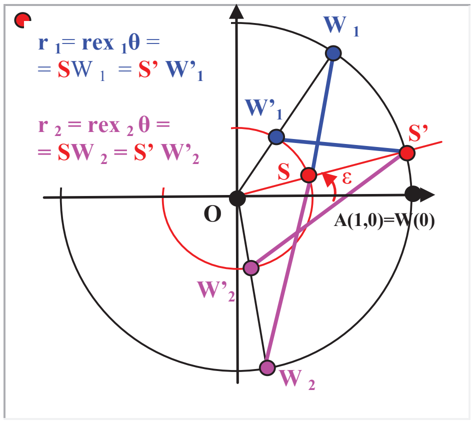


Fig. 4. 10 Două reprezentări geometrice diferite ale funcţiilor radial excentric **rex$_1$ θ** şi **rex$_2$ θ**

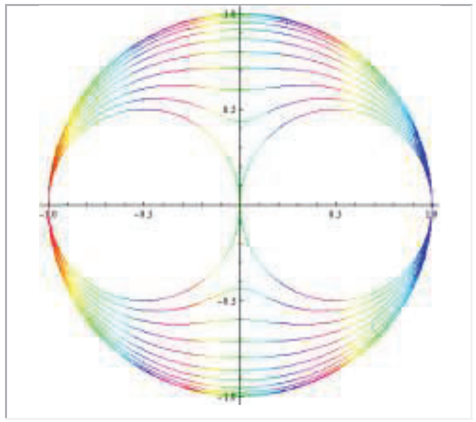


Fig. 4.11.a Lemniscatele lui **Booth** exprimate în polar cu ρ = rex$_2$ **θ** – rex$_1$ **θ**, s ∈ [0, 1]

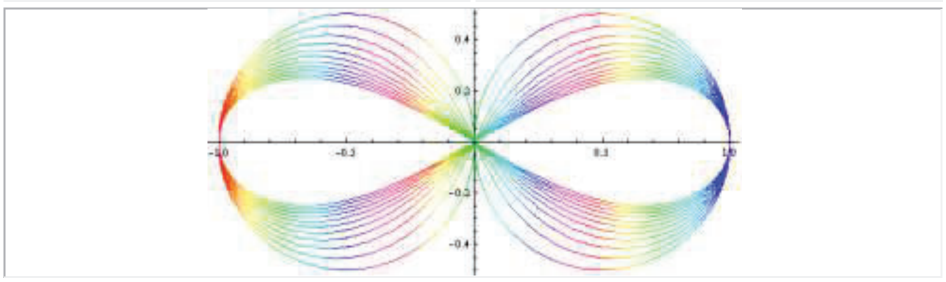


Fig. 4.11.b Lemniscatele lui **Booth** exprimate în polar cu ρ = rex$_2$ **θ** – rex$_1$ **θ**, s ∈ [1, 2]

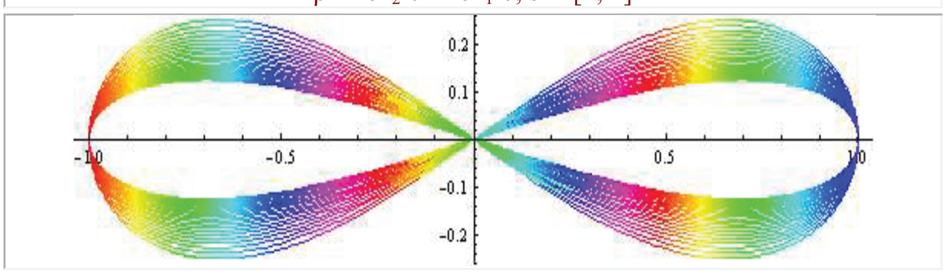


Fig. 4.11.c Lemniscatele lui **Booth** exprimate în polar cu ρ = rex$_2$ **θ** – rex$_1$ **θ**, s ∈ [2, 3]

(4.46) $\quad EM_{1,2} = R_{1,2} = \mathbf{R}.\text{rex}_{1,2}\boldsymbol{\theta} = \text{R.Rex}\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{R^2 + e^2 - 2eR.\cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}$, devenind, acum, o **FSM-CE** radial excentrică de variabilă $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$, la rândul ei de variabilă excentrică **θ**, în care unghiul la centru $\boldsymbol{\alpha}_{1,2}$ în funcţie de **θ** se determină cu relaţia (4.10) pentru **R** =1.

Dând factor comun pe $\mathbf{R}^2$ sub radical şi scotându-l în afară, forţat, rezultă:

(4.47) $\quad EM_{1,2} = R_{1,2} = R.Rex\alpha_{1,2} = \pm R\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}$.

Aceasta este o **nouă formă** a funcţiei Rexα, de variabilă $\boldsymbol{\alpha_{1,2}(\theta)}$.

Funcţiile de variabilă **motoare** centrică $\boldsymbol{\alpha}$ vor fi studiate, pe îndelete, în capitolul de **FSM-CE** de variabilă centrică $\boldsymbol{\alpha}$. Funcţia se notează cu majusculă (**Rex**$\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$), ca toate funcţiile de variabilă centrică, pentru evitarea confuziilor şi graficul funcţiei reprezintă o **cicloidă** de rază R şi excentricitate **e** = **R**.**s**. în care unghiul la centru $\boldsymbol{\alpha}_{1,2}$ în funcţie de $\boldsymbol{\theta}$ se determină cu relaţia (4.10) pentru **R** =1.

Dacă **S** se situează pe un cerc de rază **s** şi punctele $W_{1,2}$ pe cercul de rază **R** = 1, poziţiile acestor puncte pot fi interconvertite, adică, punctele **W'**$_{1,2}$ pot fi situate pe cercul de rază **s** şi excentrul **S** poate fi situat pe cercul de raza **R** = 1, aşa cum este prezentat cazul în figura **4.10**, fără ca expresiile geometrice a funcţiilor rex$_{1,2}$**θ**, care definesc distanţele $SW_{1,2}$, să se modifice.

Se deduce că razele cercurilor de definire **R** şi e şi excentricitaăţiile reale pot fi **interconvertite**, adică R.rex$_1$ (**θ,** s = e / R) = e rex$_1$ ($\pi - \beta_1$, s = R / R = 1) (v. şi Fig. **4.15**).

În figura **4.12** sunt prezentate curbele parametrice în **2D** (Fig.**4.12.a**) şi cu completarea lor cu 3D, în **figura 4.12.b.** Ecuaţiile parametrice sunt

(4.48) $$\mathbf{M}\begin{cases} x = \mathrm{rex}_1\theta \\ y = \mathrm{rex}_1(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ z = -s, s \in [0, 1] \end{cases}$$

În coordonate polare, ecuaţia

(4.49) $\quad \rho = \mathrm{rex}_1(\theta, s, \varepsilon)$ reprezintă o deplasare a cercului unitate, pe direcţia ε, în sens invers semnului excentricităţii. În figura **4.13.c**, în care s-a ales ε = – π/6 radiani, cercurile s-au deplasat pe direcţia determinată de unghiul **π - ε,** cu valoarea excentricităţii numerice, în sens invers lui **s** ∈ [0, +1], adică, în sensul **─ s** sau s ∈ [0, -1].

Pentru **FSM-CE** radial excentric de multiplu de unghi rex$_{1,2}$(n.**θ**) se obţin în 2D curbe închise de forma **rozelor** cu n lobi, aşa cum se prezintă situaţia în figura **4.13.a**, pentru **n = 2** şi ε = – π/4 şi în figura **4.13.d,** pentru **n = 5,** ε = 0 şi s∈ [–1,+1] .

În figura **4.13.b** ecuaţiile parametrice sunt hibride, adică, de tipul (4.50)

(4.50) $$\mathbf{M}\begin{cases} x = 2\sqrt{\mathrm{rex}4\theta}\,.\mathrm{cex}\theta = 0{,}5\mathrm{cex}5\theta \\ y = \mathrm{rex}_1 4\theta.\mathrm{sex}4\theta - 0.5\ \mathrm{sex}7\theta \end{cases}$$

obţinându-se curbe care sugerează senzaţia de pasăre în **zbor.**

Aşa cum s-a afirmat, şi s-a arătat un exemplu din matematica centrică (**MC**), în **figurile 4.11,a, 4.11,b** şi **4.11,c**, la descrierea lemniscatelor lui **Booth**, curbe închise, asemănătoare curbelor lui **Cassini**, din familia cărora fac parte şi cercul. ovalul, lemniscata, ovalele separate în jurul focarelor ş.a., funcţiile rex$_{1,2}$θ, **singure**, pot exprima şi ecuaţiile altor funcţii importante din matematica excentrică (**ME**).

Un astfel de exemplu este exprimarea ecuaţiei de definire a funcţiei dex$_{1,2}$**θ** (v. pag. 10) prin expresia

(4.51) $$\mathrm{dex}_{1,2}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathrm{rex}_{1,2}\theta}{\pm\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} = \frac{\mathrm{rex}_{1,2}\theta}{\mathrm{del}_{1,2}\theta} = \frac{\mathrm{rex}_{1,2}\theta}{\mathrm{rex}_{1,2}\theta-\mathrm{rex}_{2,1}\theta} \qquad \text{sau}$$

$\mathrm{dex}_{1,2}\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\coprod_{1,2}}$, în care s-a ţinut cont de relaţiile (4.52) şi s-au notat **rapoartele** funcţiilor $\mathrm{rex}_{1,2}\,\boldsymbol{\theta}$ cu inversul simbolului produsului $\prod$, adică $\coprod_{1,2} = 1 / \prod_{1,2}$.

Rezultă rapoartele celor două determinări ale **FSM-CE** radial excentric de **θ**

(4.52) $\coprod_{1,2} = \frac{\mathrm{rex}_{1,2}\theta}{\mathrm{rex}_{2,1}\theta} = \frac{\mathrm{rex}^2{}_{1,2}\theta}{s^2-1} < 0$ şi $\coprod_{2,1} = \frac{\mathrm{rex}_{2,1}\theta}{\mathrm{rex}_{1,2}\theta} = \frac{\mathrm{rex}^2{}_{2,1}\theta}{s^2-1} < 0$, pentru s < 1.

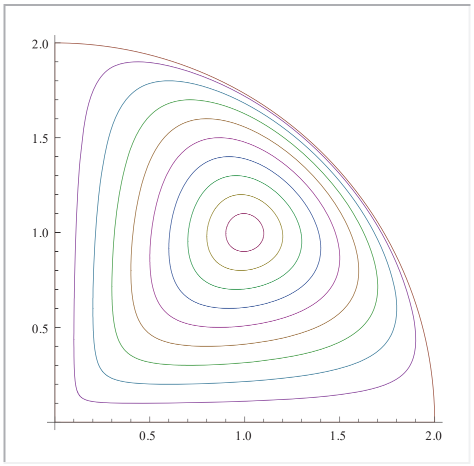


Fig. 4.12.a Curbe în ecuaţii parametrice cu x = $\mathrm{rex}_1\boldsymbol{\theta}$ şi y = $\mathrm{rex}_1(\boldsymbol{\theta} \pm \boldsymbol{\pi}/2)$, pentru ε = 0 şi s∈[0, 1] cu pasul 0.1

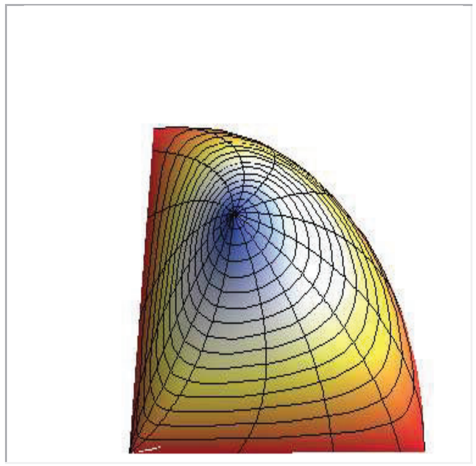


Fig. 4.12.b Rexoidul x = $\mathrm{rex}_1\boldsymbol{\theta}$ şi y= $\mathrm{rex}_1(\boldsymbol{\theta} \pm \boldsymbol{\pi}/2)$, z = - s, cu s∈ [0,1] şi ε = 0

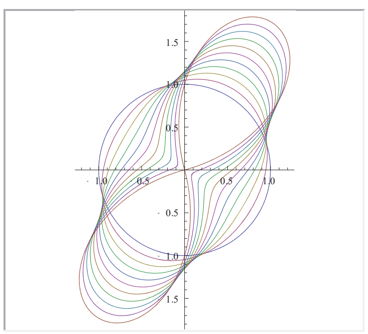


Fig. **4.13.a**

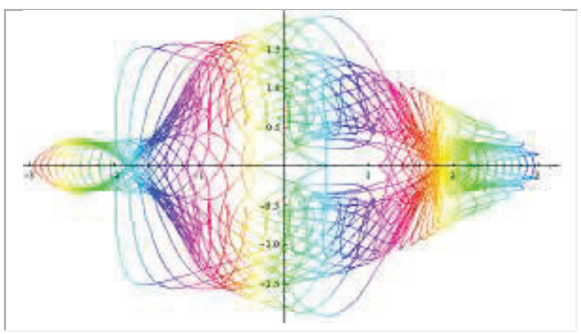
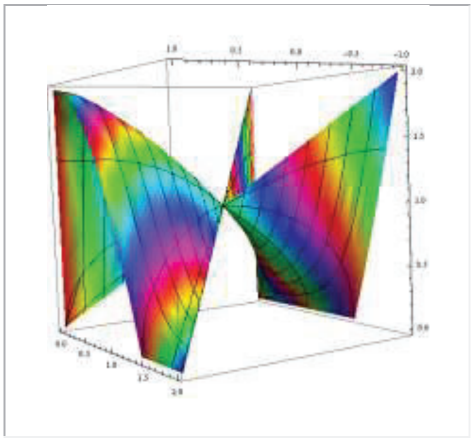


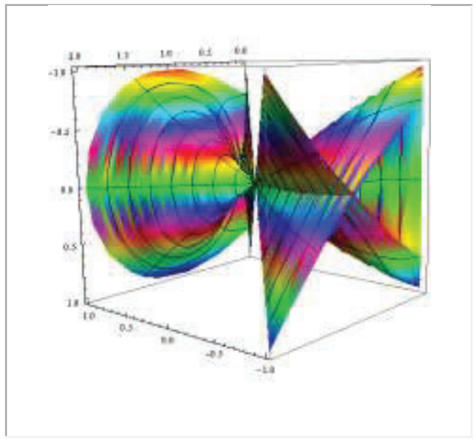
Fig. **4.13.b**

Diferenţele dintre valorile funcţiilor **rex** de variabilă **θ** şi cele de variabilă $\boldsymbol{\alpha_1}$ sunt vizibile în figurile **4.14.a** în coordonate **polare**, pentru n=3 şi, respectiv, n=4, prin **rozele** de excentricitate numerică **s** ∈[0, 1] şi în figura **4.14.b** în coordonate **carteziene**.

Se observă că **rozele** de $\boldsymbol{\alpha_1}$ au lobi mai laţi decât **rozele** de variabilă **θ.** Totodată



ParametricPlot3D[{rexθ, rex2θ, s},
{ s, -1, 1},{θ, 0, 2 Pi}]]



ParametricPlot3D[{-cos[3θ], rex(2θ), s},
{s, -1, 1},{θ, 0, 2 π}]]

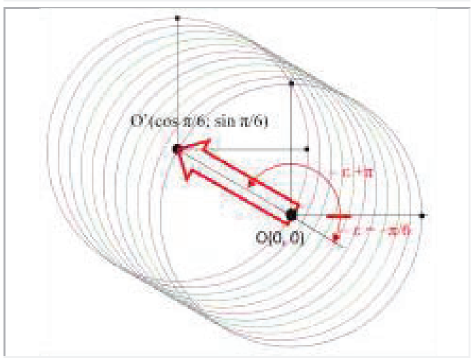


Fig. **4.13.c**

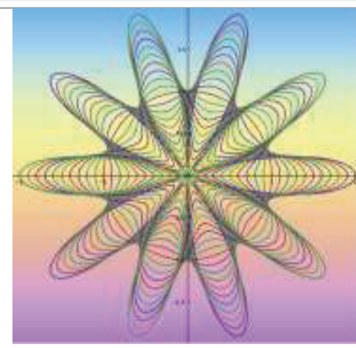


Fig. **4.13.d**

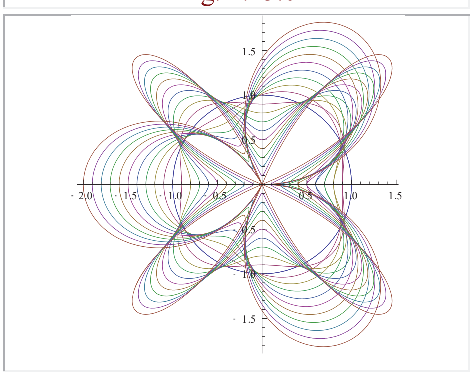


Fig. 4.14,a Deosebirile, în **polar,** dintre rex$_1$**4θ** şi Rex 3**α$_1$**, pentru s ∈[0, 1]

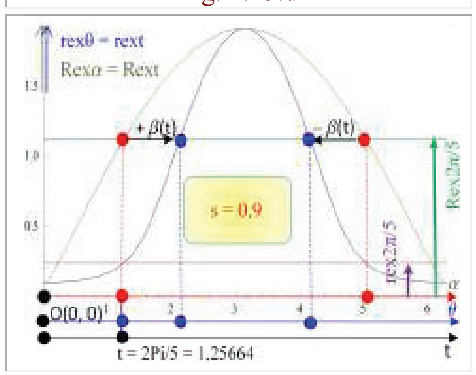


Fig. **4.14.b** Deosebirile în **cartezian** 2D dintre rex$_1$**θ** şi Rex**α$_1$**, pentru s = 0,9 şi ε = 0 **; t = α = θ ∈ [0, 2π]** se observă (Fig.**4.14.b**) că valorile funcţiei **rex** de **θ** sunt inferioare, valoric, celor de variabilă α_1, adică, **rex**$_1$t $\leq$ **Rext**$_1$, egalitatea având loc în punctele de extrem, atât de **maximum** (t = π k + ε, k = 1, 2, ... ; y = **1+s**) cât şi de minimum (t = 2kπ + ε , k = 0, 1,… ; y = **1- s**).

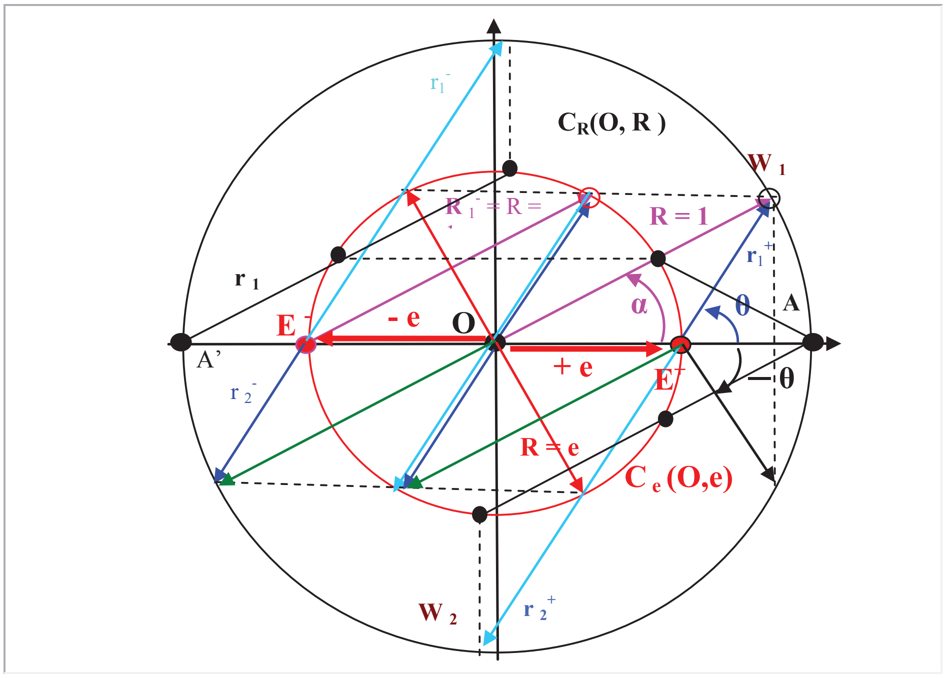


Fig. **4.15 Transpoziţia** mărimilor **FSM-CE**: Relaţii dintre funcţiile radial excentric rex de variabilă excentrică **θ** şi cele de variabilă centrică Rexα_1.

Din **figura 4.15** se observă, fără dificultate, ca şi din relaţiile de definire a lor, că

(4.53) $\forall\ \boldsymbol{\theta} \in [-\infty,\ +\infty] \Rightarrow$ rex$_{1,2}$ **θ = rex$_{1,2}$ (– θ)** şi, în consecinţă, şi

(4.53') $\forall\ \alpha_{1,2} \in [-\infty,\ +\infty] \Rightarrow$ Rex$\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ **= Rex(– α$_{1,2}$)** şi proprietăţile se extind şi la alte **FCE pare**, cum ar fi

(4.54) $\forall\ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ cex$_{1,2}\boldsymbol{\theta}$ = cex$_{1,2}$(– θ) şi $\forall \alpha_{1,2} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Cex$\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ **= Cex(– α$_{1,2}$).**

Se mai observă că **FCE** rex, de excentricitate negativă, sunt egale şi de semn contrar cu cele de excentricitate pozitivă, adică

(4.55) **R** rex$_{1,2}$ **(θ, s) = – R** rex$_{1,2}$ **(θ, -s) =R.** Rex(**α$_{1,2}$(θ), s) = – R.** Rex **(α$_{1,2}$(θ) ,- s)**

Totodată, cele două raze, centrică R şi excentrică **r$_1$** sunt interconvertibile, în sensul că, pentru excentricităţile numerice **e** şi – **e** date, există o valoare a unghiului **θ** pentru care

(4.56) $\exists\ \theta\ \&\ \exists\ \alpha_1 \Rightarrow$ **R**. rex **(θ, s = R/e) = r$_1$** şi **r$_1$** Rex(α_1, -1) = **e**.Rex (α_1, -1) = **R**.

(4.57) **r_1** = **R** rex$_1$ **(θ, + s) = e** rex **(θ, - 1)** şi dacă se alege un excentru pe cercul de rază R în punctul A'(-R,0) simetricul lui A(1,0) faţă de originea O, atunci

(4.58) **r_2** = **R rex$_2$(θ, + s) = e** rex$_2$ (α$_1$, **s** = R / **e > 1**) şi rezultă urmatoarea

Teoremă:

O **FSM-CE rexθ**, radial excentric de variabilă **excentrică θ**, definită pe cercul de rază R şi de excentru **E**(e, ε), cu excentricitate numerică **s** = e / R < 1, de exemplu, este egală cu o **FSM-CE Rexα** de variabilă **centrică α**, definită pe cercul de rază **e** şi excentru **A**(R, **ε**) şi excentricitate numerică **s' = R/ e > 1**. Şi, pentru **s** > 1, va rezulta o excentricitate **s'** < 1. În **figura 4.15** s-a ales **ε** = 0.

O altă formulare este: Variabilele excentrică **θ** şi cea centrică **α** a **FSM-CE** radial excentric pot fi interconvertite **simultan** cu interconvertirea razelor cercurilor lor cu excentricităţile reale, adică, raza **R** a variabilei excentrice **θ** devine excentricitatea reală **(e'=R)** a variabilei centrice **α** şi excentricitatea reală **e** a variabilei excentrice, devine raza (R' = **e**) a cercului de definire a **FSM-CE** Rex de variabilă centrică.

4.2.2 APLICAŢII MATEMATICE ALE FSM-CE RADIAL EXCENTRICE

Teorema lui Apollonius. Locul geometric al vârfurilor **W$_i$** ale tuturor triunghiurilor **S S'W$_i$** (**Fig. 4.16**) cu latura **S S'** dată**,** având celelalte două laturi într-o proporţie constantă SW$_i$ **:** S'W$_i$ = **λ**, este cercul lui **Thales** de diametru **AA'** a căror puncte **A** şi **A'** împart segmentul **SS'** în raportul **λ**, interior şi exterior. Sau, mai simplu, dacă două puncte (S şi S') sunt inverse în raport cu un cerc, distanţele lor la un punct de pe cerc (W$_i$) sunt într-un raport constant.

RAPOARTE ARMONICE ŞI ANARMONICE

În consecinţă, rezultă că raportul a două funcţii radial excentrice de excentricităţi diferite este acelaşi şi egal cu **raportul anarmonic** sau cu **biraportul** (SS'AA'). Raportul **interior**, notat (SS'A) este

(4.59) (SS'A) = $\lambda_e = \frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{AS'}} = \frac{1-s}{s'-1} > 0$ şi raportul **exterior**, notat (SS'A') este

(4.60) (SS'A') = $\lambda_i = \frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{A'S'}} = -\frac{1+s}{1+s'} < 0$,iar biraportul, sau raportul anarmonic, este

(4.61) (SS'AA') = $\lambda = \lambda_e / \lambda_i = \frac{(1-s)(1+s')}{(1+s)(1-s')} = \frac{rex_1(0,\ s).rex_1(\pi,\ s')}{rex_2(0,\ s).rex_2(\pi,\ s')} < 0$, sau λ este raportul dintre maximul şi minimul funcţiilor radial excentric de variabilă **θ** sau **α** şi de cele două excentricităţi numerice **s < 1** şi **s' > 1**, ţinând cont de faptul că, pentru **ε** = 0, maximele sunt date de prima determinare şi minimele de cea de a doua determinare a acestor funcţii, dacă excentrele **S** şi **S'** sunt situate pe axa x > 0, ca în **figura 4.16**.

Deoarece, cele două determinări ale funcţiei rex de s' >1 sunt ambele pozitive (1 şi 2) şi, respectiv, (3, 4) sunt ambele negative, iar cele două determinări pentru **s** < 1 sunt de semne contrare, rezultă că raportul anarmonic este negativ (λ < 0). Se poate scrie

(4.62) $\lambda = (SS'AA') = \frac{r_1(0)}{r_2(0)} \cdot \frac{r'_1(0)}{r'_2(0)} = \frac{r_M}{r_m} \cdot \frac{r'_M}{r'_m} < 0$ cu notaţiile din figură şi cu indicii inferiori simbolizând **M** ⇒ **M**aximum şi **m** ⇒ **m**inimum.

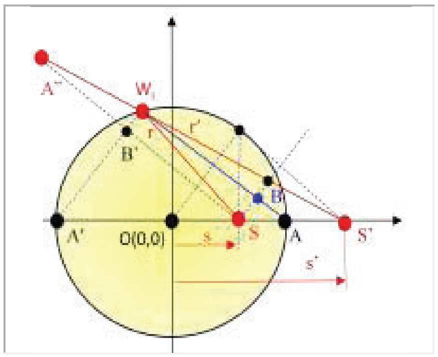


Fig. **4.16** Schiţă explicativă pentru teorema **REX** sau **Apollonius**

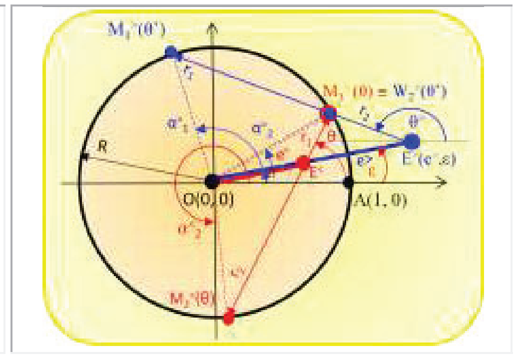


Fig. **4.17** Ecuaţia cercului faţă de polul E exprimată cu **FSM-CE rexθ** sau **Rexα**

FSM-CE radiale excentrice şi, pentru s' > 1, r'(π) de indici 1 şi 2 au aceleaşi valori, dar de semne contrare, cu determinările 3 şi 4 ale funcţiei r'(0), astfel că, dacă în (4.60) o singură funcţie este negativă, în (4.62) trei din cele patru funcţii sunt negative, semnul (bi)raportului rămânând negativ.

Dacă cele patru puncte au biraportul **λ = 1**, atunci ele sunt **conjugate armonic** şi cele patru puncte coliniare S, S', A, A' sunt într-un **raport armonic.**

Dacă excentricităţiile sunt inverse, una alteia, adică s' = 1 / s, atunci, din (4.59) rezultă raportul $\lambda_1 = s$ şi din (4.60) $\lambda_2 = -s$ astfel că raportul $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_1 / \lambda_2 = -1$ şi cele patru puncte sunt conjugate **armonic**. Se zice că SS' este **medie armonica** a lui SA şi SA'.

Dacă raportul este armonic, atunci unghiul interior şi cel exterior din $W_1 \equiv W_i$ al triunghiului SW_iS'sunt înjumătăţite de dreptele AW_i şi, respectiv, $A'W_i$.

Se mai observă că, dacă punctele $\mathbf{W_i \equiv W_1 \equiv W'_1}$ sunt identice şi, în consecinţă, $\alpha_1 = \alpha'_1$, deşi $\boldsymbol{\theta_1 \neq \theta'_1}$, nu acelaşi lucru se întâmplă cu celalalte puncte, deoarece $\mathbf{W_2 \neq W'_2}$. De aceea, relaţiile anterioare sunt valabile numai în punctul $\mathbf{W_i \equiv W_1 \equiv W'_1}$.

Dacă excentrele sunt simetrice faţă de originea **O**, atunci **s** = —s' şi rezultă $\lambda = (1 - s)^2 : (1 + s)^2$. În final poate fi enunţată următoarea teoremă:

TEOREMA REX :

Raportul primelor determinări ale **FSM-CE** radial excentrice de aceeaşi variabilă (argument) centrică ($\alpha_1 = \alpha'_1$) şi de excentricităţi diferite **s** şi s' (sau **e** şi **e'** pe acelaşi cerc de raza **R**) este egal cu raportul anarmonic (biraportul) λ, în care segmentul SS' sau EE' este împărţit de punctele A şi A' (pentru ε = 0) :

(4.63) $\lambda = \frac{Rex(\propto_1,s)}{Rex(\propto_1,s\prime)} = \frac{(1-s)(1+s')}{(1+s)(1-s\prime)} = \frac{rex_1(0,s).rex_1(\pi,s\prime)}{rex_2(0,s).rex_2(\pi,s\prime)} = \frac{rex_1(0,s).rex_3(\pi,s\prime)}{rex_2(0,s).rex_4(\pi,s\prime)}$

Ecuaţia cercului faţă de un pol **E** {Lexicon Tehnic Roman nr. 4 pag. 190], cu notaţiile din figura **4.17**, în care polul are coordonatele **E(e, ε)** şi cercul **C(R,O)** are raza **R** şi originea în **O**(0,0), este

(4.64) $r^2 - 2.r.e.\cos(\theta - \varepsilon) + e^2 - R^2 = 0$, sau

(4.65) $\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{R} \bullet \frac{e}{R}\right)\cos(\theta - \varepsilon) + \left(\frac{e}{R}\right)^2 - 1 = 0$ o ecuaţie algebrica de gradul II, în care, notând $\mathbf{s = e / R}$ şi $rex_{1,2}(\theta) = r_{1,2} = r / R$, rezultă rădăcinile

(4.66) $\mathbf{r}_{1,2} = rex_{1,2}(\theta, s) = - s\cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{s^2cos^2(\theta - \varepsilon) - (s^2 - 1)}$ sau

(4.67) $\mathbf{r}_{1,2} = rex_{1,2}(\theta, s) = -s\cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2sin^2(\theta - \varepsilon)}$

şi se recunoaşte imediat **FSM-CE** $\mathbf{rex_{1,2}\theta}$. Se deduce că ambele determinări ale funcţiei rexθ descriu cercul **C(O,R) şi** că, indiferent de poziţia polului, în acest caz al excentrului $\mathbf{E^<(e^<, \theta)}$ sau $\mathbf{E^>(e^>, \theta')}$, **FSM-CE** rexθ descriu cercul. Observaţia este deosebit de importantă, pentru programarea roboţilor industriali de sudare, în cazul sudării unui cordon circular, a cărui centru **O** se află la distanţa **e** de centrul de rotaţie **E** al braţului robotului pe direcţia **ε**. În plus, pentru **e** > **R**, se ştie precis punctul de început/iniţial θ_i (4.29) în care începe operaţia şi punctul final θ_f (4.30) în care înceteaza programarea cu $rex_1\,\theta$, care sunt punctele de tangenta ale tangentelor din **E** la cercul **C** şi din care începe programarea cu funcţia $rex_2\,\theta$, parcurgând intervalul $\theta_i \ldots \theta_f$ în acelaşi sens sau revenind în M_i şi parcurgându-l în sens invers (dextrorim), de la M_i spre M_f. Din relaţia (4.64) mai rezultă ca raza **R** a unui cerc **C** este

(4.68) $\mathbf{R} = \pm\sqrt{r^2 + e^2 - 2ercos(\theta - \varepsilon)}$, în care se recunoaşte forma funcţiei $Rex\alpha_{1,2}$.

Se deduce că, dacă în relaţia **FSM-CE** $Rex\alpha_{1,2}$ se înlocuieşte variabila centrică α cu valoarea variabilei excentrice θ, în locul raziei **excentrice r**, se obţine raza **centrică R**, cu precizarea că, în timp ce, dacă **R** este o **constantă**, **r** este variabilă. Altfel spus, convertirea variabilelor conduce la convertirea razelor, pentru acelaşi excentru **real**, deoarece excentricităţiile numerice diferă: în primul caz **s = e / R** şi în cel din urmă este **s'= e / r.**

Între variabilele centrice $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ şi variabila centrică **θ** există următoarele dependenţe. În toate cazurile, independent de mărimea excentricităţii numerice s,

(4.69) $\boldsymbol{\theta = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2}}$, ceea ce arată că, la **θ = constant,** $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ şi $\boldsymbol{\beta_{1,2}}$ au variaţii de semn opus la creşterea excentricităţii **s** sau **e** şi

(3.70) $\beta_1 + \beta_2 = \pi$ din care rezultă $\beta_2 = \pi - \beta_1$ şi

(3.71) $\alpha_{1,2} = \theta - \beta_{1,2} = \begin{cases} \propto_1(\theta) = \theta - \beta_1(\theta) = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)] \\ \propto_2(\theta) = \theta - \beta_2 = \theta - \pi + \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)] \end{cases}$

relaţii care se pot deduce, fără dificultate, din figurile ce conţin punctele $W_{1,2}$, ţinând cont de sensul de creştere al unghiurilor $\beta_{1,2}$, formate de direcţiile $SW_{1,2}$ cu direcţiile $OW_{1,2}$ din punctele $W_{1,2}$, la creşterea excentricităţii numerice **s** şi / sau reale **e**, pentru un unghi **θ** dat.

Astfel, pentru **e** < **R** ⇒ **s** < **1**, ca şi pentru **e** > **R** ⇒ **s** > **1**, rezultă ⇒ $\boldsymbol{\beta_1 > 0}$ şi β_2 > 0, iar suma lor este constanta şi egală cu **π,** oricare ar fi **θ, s** şi **ε.**

În schimb, dacă pentru **s** < **1**, o creştere a unghiului **θ** induce o creştere simultană a unghiurilor α_1 şi α_2, pentru **s** > **1**, la creşterea lui **θ,** unghiul α_1 creşte iar unghiul α_2 scade, întrucât, prin definiţie, W_1 a fost ales punctul care se roteşte pe cercul unitate în acelaşi sens cu rotaţia dreptei d, adică cu creşterea lui **θ**, iar W_2 este punctul care se roteşte pe cerc în sens invers rotaţiei dreptei d, deci α_2 scade, ceea ce rezultă şi din relaţiile (4.70) şi (4.71).

4.2.3 DEMONSTRAREA UNOR TEOREME CU AJUTORUL FSM-CE RADIAL EXCENTRIC

1) Teorema lui Pitagora.

Se consideră un triunghi dreptunghic $E_PW\pi\ W_0$ ≡ **ABC** înscris în cercul **C(R, O)** din **figura 4.18.a** şi un excentru E_P (R,ε) ≡ **A** situat chiar pe cercul **C**, având, deci, excentricitatea numerică **s** = **1**. Laturile triunghiului b şi c pot fi exprimate ca **FSM-CE** de variabile **θ,** dar aceste unghiuri sunt mai greu de precizat. De aceea, se utilizează variabilele centrice $\alpha_{1,2}$ care sunt zero şi, respectiv **π**, astfel că, utilizând relaţia (4.47), de definire a acestor funcţii, rezultă în final expresiile laturilor b şi c

$$\begin{cases} b = AC \equiv E_P W_O = r_1(0) = R.Rex(\alpha_1 = 0, s = 1, \varepsilon) = R\sqrt{2 - 2cos\varepsilon} \\ c = AB \equiv E_P W_\pi = r_1(\pi) = R.Rex(\alpha_1 = \pi, s = 1, \varepsilon) = R\sqrt{2 + 2cos\varepsilon} \end{cases} \quad (4.72)$$

Suma pătratelor acestora este $b^2 + c^2 = 4R^2$, adică tocmai a^2, astfel ca $a^2 = b^2 + c^2$, care reprezintă tocmai expresia algebrică a teoremei lui **Pitagora**. Se mai deduce că, ne depinzând de **ε**, punctul E_P, poate ocupa orice poziţie pe cercul **C** şi, ne depinzând de **R**, mărimea triunghiului poate fi oricât de mare. S-ar parea ca aceste precizări ar fi de prisos, dar nu e chiar aşa.

2) Teorema înălţimii

Pentru demonstrarea ei, se alege un excentru E_I **(s, 0)** pe axa x (⇒ **ε** = 0). De această dată, vom folosi **FSM-CE** de variabilă **θ,** deoarece valoarea pentru înălţimea h, perpendiculara pe ipotenuza, este uşor de dedus, ea este **π/2**, iar pentru celelalte două vârfuri ale triunghiului dreptunghic, sunt **0** şi respectiv **π**, fiind aceleaşi cu α_1**,** întrucât, în aceste puncte, razele centrice şi excentrice se suprapun, astfel că unghiurile β_1 sunt nule: $\beta_1(0) = \beta_1(\pi) = 0$. Utilizând relaţia (4.26) rezultă h = E_IE_P = R.rex (**π/2, s, ε= 0**) = $R\sqrt{1-s^2}$, iar cele două segmente determinate de înălţimea pe ipotenuză sunt

$$\begin{cases} r_1(0) = E_I W_O = R.rex_1(0, E_I) = R(-s+1) \\ r_1(\pi) = E_I W_\pi = R.rex_1(\pi, E_î) = R(s+1) \end{cases} \quad (4.73)$$

, astfel că produsul lor este

(4.74) $r(0) \bullet r(\pi) = R^2(1 - s^2) = h^2$, adică, tocmai expresia algebrica a

Teoremei înălţimii, ce afirmă că, într-un triunghi dreptunghic, înălţimea, corespunzătoare ipotenuzei, este medie între segmentele determinate de ea pe ipotenuză. Adică, relaţia (4.75)

(4.74) $h^2 = R^2\ rex_1(0) \bullet rex_2(0) = R^2\ rex_1(0) \bullet rex_1(\pi) = R^2\ rex_1(\pi/2)$, din care rezultă dependenţa dintre funcţiile rex de 0, π/2 şi π

(4.75) $\quad rex_1(\pi/2) = rex_1 0 \bullet rex_1\, \pi$, relaţie ce va sta la baza unei metode hibride, de mare precizie, de determinare a unei relaţii de calcul oricât de precise (dorim) a integralei eliptice de prima speţă K(k), prezentată în [14] ca şi în prezenta lucrare.

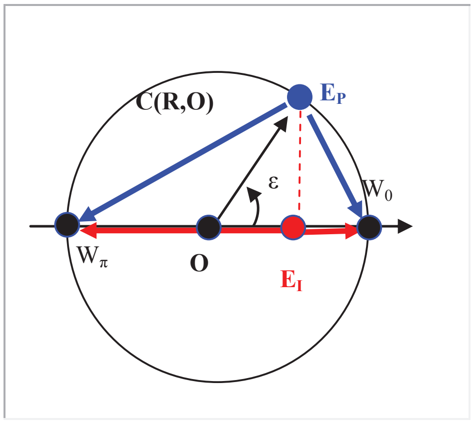


Fig. 3.18.a Desen explicativ pentru teoremele **Pitagora** şi înălţimii.

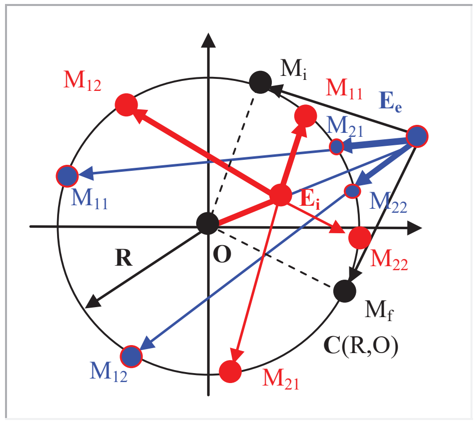


Fig. 3.18.b Desen explicativ pentru teoremele coardelor, secantelor şi a tangentelor

3) Teorema catetei sau teorema lui **Euclid**

Această teoremă afirmă că, într-un triunghi dreptunghic, o catetă este medie proporţională între ipotenuză şi proiecţia ei pe ipotenuză. Ceea ce algebric, cu notaţiile anterioare, se exprimă astfel

(4.76) $$\begin{cases} b^2 = a.r(0) = 2R.R(1-s) = 2R^2(1-s) \\ c^2 = a.r(\pi) = 2R.R(1+s) = 2R^2(1+s) \end{cases}$$

Ţinând cont de faptul că

(4.77) R.cos**ε**=**e**=**R.s** ⇒ **cosε**=**s**, excentricitatea reală **e**, corespunzătoare excentrului $\mathbf{E_I}$, ca produs dintre excentricitatea numerică **s** şi raza **R** a cercului (v. Fig. **4.18.a**), relaţiile (4.76) devin

(4.78) $$\begin{cases} b = R\sqrt{2(1-s)} \\ c = R\sqrt{2(1+s)} \end{cases}$$ şi

(4.78') $$\begin{cases} b^2 = 2R^2(1-s) \\ c^2 = 2R^2(1+s) \end{cases},$$ astfel că teorema este demonstrată.

4) Sinteza / unificarea teoremelor coardelor, secantelor şi a tangentelor

În figura **4.18.b** sunt schiţate o pereche de **coarde** ($M_{11}M_{21}$ şi $M_{12}M_{22}$).

Pentru **s** < **1** sau **e** < **R**, punctul comun $\mathbf{E_i}$, interior cercului **C (R,O)**, le secţionează pe fiecare în două.

Alte două secante (E_eW_{11} şi E_eW_{12}), sunt reprezentate pentru **s** > **1** sau **e** > **R** precum şi două tangentele (E_eW_i şi E_eW_f) în punctele $\mathbf{W_i}$ şi în punctul $\mathbf{W_f}$ duse din excentrul $\mathbf{E_e}$, evident, exterior cercului **C (R,O)**.

Relaţiile (4.39) exprimă produsul celor două determinări (principala 1 şi secundară 2) dintre două funcţii radial excentrice, produs independent de unghiul **θ**.

Prima relaţie din (4.39), pentru **s** < **1**, şi două poziţii **θ** şi **θ**'ale dreptei d, exprima tocmai

Teorema coardelor :

Produsul segmentelor în care se taie două coarde este constant.

Acum se poate merge mai departe şi se poate determina valoarea acestei constante, considerând segmentele ca segmente orientate (cu semn). Produsul segmentelor (r_{11} şi r_{21} pentru prima coarda şi r_{12} şi r_{22} pentru cea de a doua coardă) în care sunt împărţite două coarde oarecare de punctul lor de intersecţie ($\mathbf{E_i}$) este constant şi egal cu diferenţa pătratelor razei vectoare a punctului de intersecţie (e) şi raza cercului **R**, adică

(4.79) $\quad \mathbf{r_{11} \bullet r_{21} = r_{12} \bullet r_{22}} = e^2 - \mathbf{R^2 < 0}$ sau $\quad rex_1\boldsymbol{\theta}.rex_2\boldsymbol{\theta} = rex_1\boldsymbol{\theta}'.rex_2\boldsymbol{\theta}' = (\mathbf{s^2} - \mathbf{1})$

În ultima relaţie s-a simplificat cu R^2.

A treia relaţie din (4.39), pentru **s > 1** şi două poziţii distincte (**θ** şi **θ'**) ale dreptei d^+ exprima tocmai

Teorema secantelor :

Produsul segmentelor a două secante, care se intersectează, este constant. Sau, după **N.N.Mihaileanu** [Complemente de geometrie sintetică, EDP, Buc. 1965, pag.24] :

« O secantă mobilă, dusă dintr-un punct E, taie un cerc în punctele M_1 şi M_2. Produsul $EM_1 \bullet EM_2$ este constant. » Şi în acest caz, se poate merge mai departe, determinând valoarea acestui produs care este dat de a treia relaţie (4.39), deoarece **s > 1** sau **e** > **R**. Deoarece, ambele puncte de intersecţie sunt pe aceeaşi semidreaptă, produsul lor este pozitiv şi egal cu

(4.80) $\quad \mathbf{r_{11} \bullet r_{21} = r_{12} \bullet r_{22} = e^2 - R^2 > 0}$ sau $\; rex_1\boldsymbol{\theta}.rex_2\boldsymbol{\theta} = rex_1\boldsymbol{\theta}'.rex_2\boldsymbol{\theta}' = (\mathbf{s^2} - \mathbf{1})$

Aceeaşi relaţie din (4.39), dar pentru $\boldsymbol{\theta = \theta_i}$ şi dreapta de unghi **θ'** intersectează cercul în două puncte distincte exprimă

Teorema secantă-tangentă:

("Kleine Enzyklopädie. Mathematik." Ed. Enciclopedică Leipzig, pag. 205)

Oricare tangentă, dusă dintr-un punct la un cerc, este medie proporţională cu segmentele unei secante dusă din acelaşi punct ($t^2 = a \bullet b$). Acum putem afirma că această medie proporţională este pozitivă şi are valoarea $\mathbf{e^2 - R^2}$, în care, **R** este raza cercului şi **e** distanţa de la centrul O al cercului la punctul din care se duce tangenta şi secanta, adică $\mathbf{E_e}$.

În fine, tot din a treia relaţie (4.39) dar pentru $\boldsymbol{\theta = \theta_i}$ **si** $\boldsymbol{\theta = \theta_f}$, rezultă

Teorema tangentelor

care afirmă că cele două tangente duse dintr-un punct la cerc sunt de lungimi egale.

Acum putem adăuga că, lungimea acestor tangente este $\mathbf{t^2} = \mathbf{e^2} - \mathbf{R^2}$, în care, deşi se poate deduce, **R** este raza cercului şi **e** distanţa de la punctul, din care s-au dus cele două tangente ($\mathbf{E_e}$) la centrul **O** al cercului, adică

(4.81) **$t_i = t_f = t$ şi $t^2 = e^2 - R^2$.**

Astfel, prin una şi aceeaşi **teoremă, a produselor celor două determinări ale funcţiei REX,** sunt condensate/concentrate sau **unificate 4** teoreme şi, mai important, toate aceste teoreme sunt **completate** cu expresii cantitative care dau valoarea egalităţilor enunţate în cele 4 teoreme. Dacă cele două determinări ale funcţiei radial excentric rex sau Rex se iau în valoare absolută, adică nu se ţine seama de sensul / semnul determinărilor pe dreapta d, atunci, atât pentru **$s < 1$** cât şi pentru **$s > 1$,** expresia produsul este aceeaşi şi egal cu Abs[$1- s^2$], deoarece Abs[$e^2 - R^2$] = R^2 $\bullet$Abs[$s^2 - 1$] şi, evident, valoarea este întotdeauna pozitivă.

Vom nota constanta pozitivă cu **p^2**, ea fiind denumită **puterea punctului** E(e,ε) în raport cu cercul **C(R,O)**

(4.82) $p^2 = e^2 - R^2$

Axa, determinată de punctele **O** şi **E**, adică de centrul **O** şi excentrul **E**, este denumită **axă centrală**, deoarece împarte coarda W_iW_f în părţi egale [Mica enciclopedie matematică (**MEM**), Ed, Enciclopedică, Buc. pag. 207].

5) Inversiune de centru dat

Rezultă că inversul cercului **C**, în inversiunea de centru (de inversiune) **E** şi de modul **k** şi putere de inversiune $k^2 = e^2 - R^2$, este cercul însuşi şi ca M_1 şi M_2 sunt inverse unul altuia,.

O inversiune de centru (pol) **E** şi de modul **k** se notează $\mathbf{i_E^k}$ sau **I(E,k)** sau se poate scrie ca M_2 este inversul punctului M_1, în inversiunea dată, adică $M_2 = \mathbf{I}(M_1)$.

Proprietatea de **idempotenţă** a unei inversiuni **I** arată că **I**(**I**(M)) = M, $\forall$ M $\in$ E^2, adică, inversul inversului unui punct **M** este punctul însuşi.

Dacă k > 0 sau **e > R**, atunci se poate alege **E(e ,ε)**, drept centru al cercului $C_i(E,R_i)$ - de rază R_i = k= $\sqrt{e^2 - R^2}$, egală cu lungimea tangentei din **E(e,ε)**, la cercul C(O,R).

În acest fel, toate punctele acestui cerc coincid cu transformatele lor, deoarece, puterea de inversiune k^2 este aceeşi cu puterea p^2(E) punctului **E** faţă de cercul $\mathbf{C_1}$(E,R_i) şi, ca urmare, modulul de homotetie **k = 1**,-vezi relaţia (4.42'), astfel că punctele acestui cerc rămân fixe în inversiunea dată. Acest cerc poartă denumirea de **cerc de inversiune** sau **cerc fundamental**.

Două puncte inverse sunt conjugate în raport cu cercul de inversiune şi sunt situate pe acelaşi diametru al cercului. Cercul de inversiune este **invariant**, punct cu punct, în inversiunea **I**(E,k). Se deduce că, cercul de inversiune este locul geometric al punctelor care coincid cu inversele lor. El este un cerc cu centrul în polul **E(e,ε)** al inversiunii şi de raza **R'**= k = $\sqrt{e^2 - R^2} = R\sqrt{s^2 - 1}$ = p(E), adică este cercul C_i[E(e, ε) , R'= k]

Modulul de inversiune **k** şi p^2(E) -puterea punctului / **excentrului E** faţă de cercul **C(O,R),** are dimensiunea lungimii [**L**] şi se exprimă în aceleaşi unităţi de lungime în care se exprimă şi segmentele figurii şi are expresia $p^2(E) = \overrightarrow{EM_1} \bullet \overrightarrow{EM_2}$ =

$e^2 - R^2$, în care M_1 şi M_2 sunt punctele de intersecţie ale unei secante duse prin **E** cu cercul **C**(O,R).

Putem presupune, întotdeauna, punctele M_1 şi M_2 de aceeaşi parte a centrului (de inversiune) **E**, deoarece cealaltă situaţie (**e** < **R**), revine la precedenta, printr-o simetrie de centru **E**, aplicată punctului M_2, de exemplu.

Fie o a doua secantă dusă din **E** care intersectează acelaşi cerc **C** în punctele N_1 şi N_2, astfel că

(4.83) $EM_1 \bullet EM_2 = EN_1 \bullet EN_2 = k^2$, care arată că triunghiurile EM_1N_1 şi EM_2N_2, cu un unghi comun (din **E**) şi două perechi de laturi proporţionale, sunt asemenea, de unde rezultă egalitatea unghiurilor

(4.84) $\angle EN_1M_1 = \angle EM_2N_2$, care arată ca patrulaterul $M_1\,N_1\,N_2\,M_2$, cu unghiurile opuse din M_2 şi din N_1 suplementare este inscriptibil, ceea ce este evident. Rezultă că două perechi de puncte omoloage într-o inverisune sunt conciclice.

O dreaptă mobilă din **E** este tangenta la cercul **C** în punctele T_i şi T_f în care cele două puncte secante sunt confundate $M_1 \equiv M_2$.

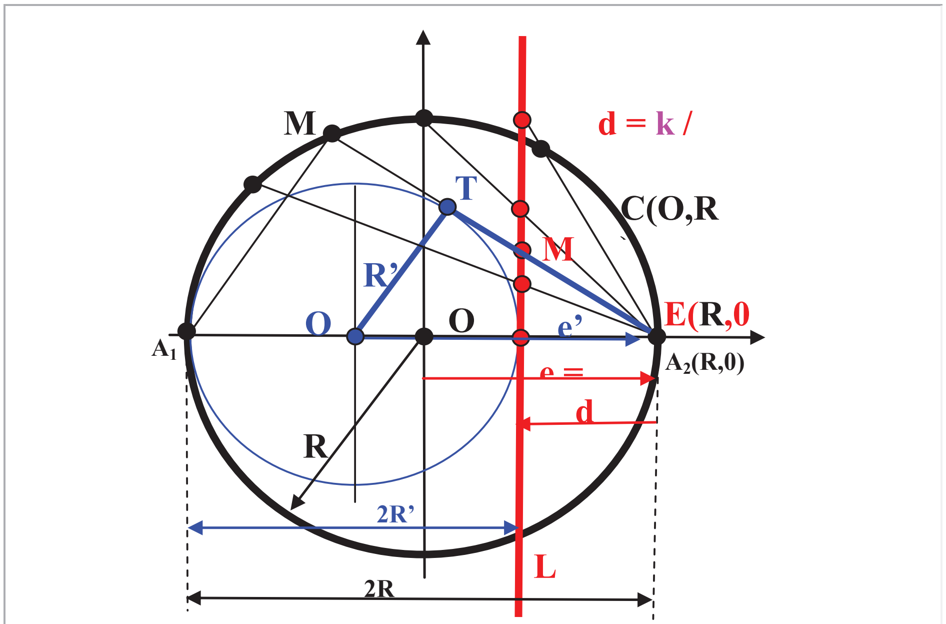


Fig. 4.19 Dreapta L ca inversă a **cercului C(O,R)** şi **$M_2 = I(M_1)$**

Deoarece

(4.85) $ET_i^2 = ET_f^2 = e^2 - R^2 = k^2$,

rezultă semnificaţia geometrică a modulului de inversiune **k**, ca fiind tocmai lungimea tangentei, adică a segmentului $ET_{i,f}$.$T_{i,f}$ sunt punctele de tangentă din **E** la cercul de raza **R**, echivalentele punctelor de tangentă $W_{i,f}$ din **S** la cercul de raza **R = 1**, iar $M_{1,2} \subset$ C(R,O) sunt echivalentele punctelor $\mathbf{W_{1,2}} \subset \mathbf{C_1}$ (R=1,O).

În timp ce punctele M_1 şi N_1 parcurg arcul T_iT_f în sens sinistrorum /levogin, punctele M_2 şi N_2 îl parcurg în sens dextrorum/dextrogin. Dacă E este situat pe cerc, atunci $EM_2 = EN_2 = 0$ şi în **E** se confundă şi punctele de tangentă $T_{i,f}$, tangentele confundându-se (în una singură tangentă în **E** la cercul **C**). În acest caz, dacă dreapta d se roteşte în jurul excentrului **E**(cu **e** = **R** sau **s** = **1**) de la $\boldsymbol{\theta = \pi/2}$ la $\boldsymbol{\theta = 3\pi/2}$ numai punctul $\mathbf{M_1}$, aparţinând semidreptei d^+, care se confundă cu tangenta EM_i, intersectează cercul C şi descrie complet cercul **C,** în timp ce punctul $\mathbf{M_2}$ staţionează în **E**. În continuarea rotaţiei dreptei d, de la $\boldsymbol{\theta = 3\pi/2}$ la $\boldsymbol{\theta = 2\pi}$**,** numai semidreapta negativă d^-, care se confundă cu tangenta EM_f, intersectează cercul, într-un punct mobil M_2, care va parcurge o rotaţie completă pe cercul **C**, în timp ce punctul $\mathbf{M_1}$ va staţiona în **E**, apoi situaţiile se repetă.

Aceste observaţii sunt deosebit de importante, pentru inţelegerea comportării **FSM-CE**, în condiţiile particulare, ale excentricităţii numerice **s = ± 1**.

Dacă excentrul E se află pe cerc [$E \subset C(R,O) \Rightarrow s = 1$], lungimea tangentei este nulă ($k = 0$, $e = R$), astfel că $EM_1 \bullet EM_2 = 0$ şi în timp ce M_1 parcurge integral cercul **C**, M_2 staţioneaza în **E**, o semiperioadă, apoi staţionează M_1 în **E** o semiperioadă şi M_2 parcurge integral cercul **C**.

Dacă punctul $M_{1,2}$ parcurge o linie **L** (coarda M_1 M_2 de exemplu), locul geometric al punctelor $N_{1,2}$ va fi linia L', inversă liniei L. Inversa unei secante (raze) dusă prin **E** este secanta însăşi. Dacă polul **E** ≡ **O**, coincide cu centrul cercului **C**(**O, R**), atunci **e** = **0** şi $p^2(O) = -\mathbf{R}^2$ astfel că inversiunea I_O^k invariază punct cu punct cercul **C**(**O, R**) şi transformă interiorul lui (discul circular) în exteriorul lui şi exteriorul cercului **C** în interiorul lui.

Inversiunea de pol **E** ≡ **O** şi de modul **k** este o transformare a planului **Π,** prin care, fiecărui punct $M_1 \subset \Pi - \{O\}$ din plan i se asociază punctul M_2 de pe dreapta $OM_1 \equiv EM_1$ astfel încât $EM_1 \bullet EM_2 = OM_1 \bullet OM_2 = k$, iar polului **O** i se asociază însăşi punctul **O**. Punctul **O** fiind un punct invariant al inversiunii $\mathbf{I_O}^k$, rezultând că toate dreptele care trec prin **E** ≡ **O** sunt invariante în inversiunea $\mathbf{I_O}^k$. Dacă punctul M_1 aparţine unui cerc **C**(**O, R**), atunci punctul invers M_2 va fi diametral opus, adică $R.rex_1(\theta = \alpha, s = 0) = -R.rex_2(\theta = \alpha, s = 0)$, astfel că $OM_1 \bullet OM_2 = k^2 = -R^2$.

Transformatul prin inversiunea $\mathbf{i_E}^{\mathbf{k}}$ de putere $\mathbf{k^2}$ a unui cerc **C,** care trece prin polul **E** (**Fig. 4.19**), dacă **E** ⊂ **C(O,R)** aparţine cercului C(O,R), sau e = R şi s = 1, este o dreaptă **L** perpendiculara pe diametrul cercului dus prin **E**.

În cele ce urmează, vom indica şi poziţia (**d**) dreptei L, în raport cu cercul de centru **O** şi raza **R** ca şi puterea de inversiune **k**, considerate ca date / cunoscute.

Alegând cercul **C**(**O,R**) şi **E** (R, **O**) ⊂ **C**(**O,R**) rezultă că inversul lui **C** este dreapta **L** care trece la distanţa **d** = e' – R' de **E** şi este perpendiculară pe **OE**. Ştiind că lungimea tangentei ET este **k**, rezultă sistemul de ecuaţii

(4.86) $\begin{cases} k = \sqrt{e'^2 - R'^2} \\ e' + r' = 2R \end{cases}$ din care, fără dificultate, rezultă că dreapta **L** se află la distanţa

(4.87) $d = \frac{k^2}{2R}$ de excentrul **E** care a fost ales drept centru de inversiune de modul **k**.

Rezultă că, pentru **k = 1,** ⇒ d = 1/ **R** şi dreapta **L** se află la o distanţă egală cu inversul razei **R** a cercului **C**(**O, R**).

Dacă şi **R** = 1, atunci şi d = 1 şi **L** trece prin centrul **O** al cercului **C**. Pentru **R = 0** ⇒ un cerc **C**, de dimensiune 0, plasat în **O**(**0,0**) şi pol **E(e,ε)** puterea de inversiune este $\mathbf{k}^2 = p^2(E) = \mathbf{e}^2$.

Dacă şi polul, sau centrul de inversiune **E,** se suprapune cu centrul **O** şi, inversele acestor puncte, în inversiunea de putere diferită de zero (k ≠ 0) se află aruncate pe o dreaptă la infinit!.

Este deosebit de interesant, că o infinitate de puncte, M_{1i}, suprapuse unele peste altele în acelaşi loc [**E ≡ O**(**0,0**)], deoarece **R = 0**, din spaţiu plan E^2, au inversele lor M_{2i} distribuite pe o dreaptă de la infinit, aşa cum rezultă din relaţia (4.82), astfel că distanţele dintre ele, iniţial 0 ($\|M_{1i}M_{1j}\| = 0$), devin infinite ($\|M_{2i}M_{2j}\| = \infty$).

Se deduce că, transformarea prin inversiunea de putere k^2 a unei drepte, ce nu trece prin polul de inversiune, sau, mai precis, care trece la distanţa d de polul **E** de inversiune, este un cerc care trece prin centrul **E** de inversiune şi are raza **R**, obţinută din relaţia (4.82)

(4.88) R = k / d .

Transformarea prin inversiunea de putere k^2 a unui cerc **C**(**O,R**), care nu trece prin centrul / polul **E** de inversiune, este un cerc **C'**(**O',R'**) care nu trece, nici el, prin polul de inversiune. Să încercăm să determinăm poziţia şi mărimea cercului inversat **C'**.

Există două inversiuni în plan, una de putere $p^2(E) > 0$ pozitivă şi una de putere $p^2(E') < 0$ negativă, având polurile în **E** şi, respectiv, în **E'**, care transformă un cerc în celălalt. Poli **E** şi **E'** corespund intersecţiilor tangentelor exterioare şi, respectiv, interioare la cele două cercuri [Fig.4.20].

Considerând cercul $\mathbf{C_2}$ că transformatul prin homotetia de modul **k** a cercului $\mathbf{C_1}$, atunci, pentru **k > 0** se obţine o asemănare de genul unu şi pentru **k < 0** o asemănare de genul doi.

O asemănare A_k:Π → Π se numeşte de **genul unu** dacă A_k păstrează orientarea oricărui triunghi din planul Π. Dacă A_k schimbă orientarea, oricărui triunghi din planul Π, atunci orientarea este de genul doi. Homotetia de centru **E** este de genul unu iar cea de centru **E'** este de genul doi.

Dacă cercurile $\mathbf{C_1}$ şi $\mathbf{C_2}$ sunt **congruente**, atunci există o singură homotetie ($H_{E'}^{k=-1}$) care transformă cercul $\mathbf{C_1}$ în $\mathbf{C_2}$; homotetie de modul k = – 1 şi de centru **E'**, astfel că $R_2 = R_1$ şi $e'_1 = O_1E'\text{rad}0 = e = -e'_2/2 = O_2E'.\text{rad}\pi$.

Dacă cercurile $\mathbf{C_1}$ şi $\mathbf{C_2}$ sunt **concentrice**, atunci, de asemenea, există o singură homotetie $\mathbf{H^k_{O1}} \equiv \mathbf{H^k_{O2}}$ modulul **k** fiind egal cu raportul razelor $\mathbf{k = R_2 / R_1}$.

Două cercuri **tangente**, interior sau exterior sunt homotetice în raport cu punctul lor de tangentă. Dacă sunt tangente interioare în excentrul **E**, atunci **k** > 0, pentru că cele două cercuri sunt la fel orientate: au aceeiaşi origine W(0) şi punctele M_{11} şi M_{21} se rotesc pe cerc în acelaşi sens (trigonometric) şi pe aceleaşi semicercuri ale celor două cercuri, în timp ce punctele M_{21} şi M_{22} staţionează în E.

Dacă cercurile sunt tangente exterior, atunci **k** < 0 şi punctele $M_{12} \subset C_2$ şi $M_{21} \subset C_1$ se rotesc pe semicercuri diferite, primul pe semicercul superior al cercului C_2 cu

$y_2 > 0$, iar al doilea pe semicercul inferior al cercului C_1 cu $y_1 < 0$, ceea ce arată o schimbare a orientării.

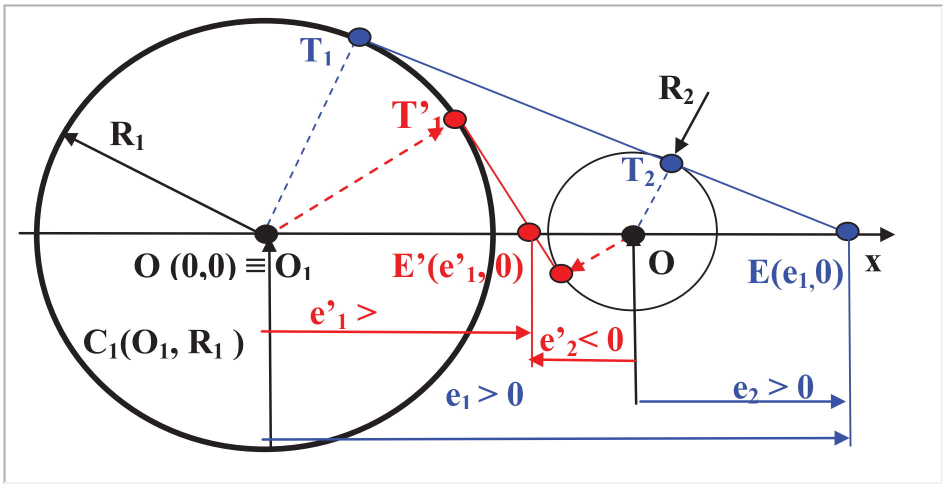


Fig. 4.20 Cercul C_2 **(O₂, R₂)** ca transformare homotetică, de module $k = R_2 / R_1 > 0$ şi $k = R_2 / R_1 < 0$ şi centru de homotetie excentrul E ($e = e_1$, $\varepsilon = 0$) , a cercului C_1

Se mai ştie că, dacă $|k| < 1$, asemănarea figurilor conduce la o reducere a dimensiunilor figurii, rezultate prin transformarea homotetică respectivă şi la o majorare a dimensiunilor, dacă $|k| > 1$, ştiind că EM' = k EM, M' fiind transformatul prin homotetia H_E^k al lui M.

La putere pozitivă, punctele M_1 şi $M_2 = I_E(M_1)$ se află pe aceeaşi semidreaptă, dusă prin **E(e, ε)**, astfel că $k^2 = r_1 \bullet r_2 = R^2.\text{rex}_1\theta \bullet \text{rex}_2\theta = e^2 - R^2 > 0$, de unde rezultă că, cele două cercuri se află cu centrele de aceeaşi parte a excentrului **E**, iar dacă cele două puncte M_1 şi $M_2 = I_{E'}(M_1)$ se situează pe semidrepte diferite, atunci, de exemplu

$$r_1 = R.\ \text{rex}_1\ \theta > 0 \text{ şi } r_2 = R.\ \text{rex}_2\ \theta < 0,$$

astfel că cele două cercuri se află de o parte şi de cealaltă a excentrului **E'**.

Considerăm cercul **C(O₁, R₁)** şi inversiunea I_E^k cunoscute, adică coordonatele punctelor polul **E(e, ε)** şi centrul cercului $\mathbf{O_1}(0,0)$ precum şi raza $\mathbf{R_1}$ a acestuia ca date, urmând să se determine centrul $\mathbf{O_2}(c, \varepsilon)$ al cercului transformat precum şi raza acestuia $\mathbf{R_2}$. Evident că $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$ şi **E** sunt pe aceeaşi dreaptă (axa centrelor), înclinată cu $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, în figura **4.20**, faţă de axă x, pentru ca tangentele la cele două cercuri se intersectează pe axa centrelor.

Se mai ştie că două cercuri, care nu sunt concentrice şi nici congruente, se pot transforma unul în celălalt prin două homotetii, una de centru **E** şi alta de centru **E'** ; cele două homotetii sunt H_E^k şi $H_{E'}^{-k}$ având modulele de semne diferite.

Dacă $k^2 > 0$, $\mathbf{O_2}$ se află, între $\mathbf{O_1}$ şi **E** şi din **E** sunt două tangente exterioare comune la celor două cercuri, astfel că, din cele două triunghiuri dreptunghice asemenea E T_1O_1 şi E T_2O_2, cu unghiurile drepte în T1 şi T_2, rezultă proporţionalitatea laturilor şi o primă constatare

(4.89) $\frac{O_1T_1}{O_1E} = \frac{O_2T_2}{O_2E} = \sin\theta_e \to \frac{e_1}{R_1} = \frac{e_2}{R_2} = \frac{1}{sin\theta_e} \leftrightarrow s_1 = s_2$

că excentricităţiile numerice ale lui **E**, faţă de cele două cercuri, sunt aceleaşi, chiar dacă excentricităţiile reale sunt diferite.

Deoarece, cercul $\mathbf{C_2}$ este transformatul prin homotetia de modul **k** a cercului $\mathbf{C_1}$ şi presupunând $R_1 > R_2$ rezultă proporţionalitatea razelor cercurilor $\mathbf{C_1}$ şi $\mathbf{C_2}$ şi a distanţelor de la centrele cercurilor la centrul E de homotetie, care sunt tocmai excentricităţiile reale, ambele pozitive $e_1 = O_1E$ şi $e_2 = O_2E$, deoarece centrele O_1 şi O_2 se află de eceeaşi parte (stânga, de exemplu) a excentrului **E**(e_1, 0)

(4.90) $k = \frac{R_1}{R_2} > 1$ şi $k = \frac{\|EO_1\|}{\|EO_2\|} = \frac{R_1}{R_2}$

Rezultă imediat că

(4.91) $R_2 = R_1/k$ şi $R_2 < R_1$, iar $e_2 = \frac{R_2}{R_1}e_1 = \frac{e_1}{k} < e_1$, ceea ce arată ca cercul $\mathbf{C_2}$ se află între **E** şi $\mathbf{O_1}$.

Dacă **k** < 0, centrul de homotetie **E'**(e_1',0) este plasat între centrele celor două cercuri şi relaţiile anterioare se păstrează, cu observaţia că la o rază $\mathbf{R_1}$ orientată în direcţia + α rezultă o rază $\mathbf{R_2}$ orientată în sens invers, adică pe aceeaşi direcţie dar în sens invers (- α).

Dacă excentricităţiile numerice $\mathbf{s_1}$ şi $\mathbf{s_2}$ sunt aceleaşi, atunci toate valorile **FSM-CE** , definite pe cele două cercuri $\mathbf{C_1}$ şi $\mathbf{C_2}$, sunt deasemenea egale, adică $rex_{1,2}(\theta, s_1) = rex_{1,2}(\theta, s_2)$, precum şi $\alpha_{1,2}(\theta, s_1) = \alpha_{1,2}(\theta, s_1)$, astfel că şi $Rex[\alpha_{1,2}(\theta, s_1),s_1] = Rex[\alpha_{1,2}(\theta, s_2), s_2]$.

Deoarece

(4.92) $s.\sin\alpha = r_1.\sin\beta = rex_1\,\theta.\sin\beta$ din care $\sin\beta = \frac{e}{r_1} sin\varepsilon$, astfel că

(4.93) $del_1\theta = \sqrt{1 - e^2sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{e^2}{r_1^2}} = \sqrt{1 - e^2\left(\frac{sin\propto}{rex_1\theta}\right)^2}$

rezultă că funcţiile radial excentric pot fi exprimate şi de raportul funcţilor sinus, atât centrice cât şi excentrice, ţinând cont că $\sin\alpha_{1,2} = sex_{1,2}\theta$, unde s-a considerat excentrul plasat pe axa x, adică pentru $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$

(4.94) $rex_{1,2}\theta = \frac{sin\propto_{1,2}}{sin\theta} = \frac{sex_{1,2}}{sin\theta}$.

În final, se mai poate arăta că, ţinând cont de relaţia (4.22') din care rezultă

(4.95) $rex_{1,2}\theta = \cos\beta.dex_{1,2}\,\theta = \frac{d\theta}{du}.\ dex_{1,2}\,\theta$ şi, în care, prin definiţie,

(4.96) $dex_{1,2}\,\theta = d\alpha_{1,2} / d\theta$, astfel că se obţin expresiile funcţiilor radial excentric sub forma raportului unor infiniti mici

(4.97) $rex_{1,2}\theta = Rex\alpha_{1,2} = \frac{\boldsymbol{d\propto_{1,2}}}{\boldsymbol{du}}$

6) Problema Murray Klamkin

Prezentată în lucrarea matematicianului român, stabilit în SUA, **Isaac J. Echoenberg** ["Privelişti matematice", Ed. Tehnica, Buc.1989, pag 40] ca problemă dată la a XX-a Olimpiadă Internaţională de Matematică, ea devine banală prin utilizarea **FSM-CE** radial excentric rex**θ.** Problema este de geometrie în spaţiu **3D** şi se referea la un punct din interiorul unei sfere, dar rezolvarea este aceeaşi ca şi în plan, pentru un punct din interiorul unui cerc.

Problema cere să se arate / demonstreze că suma vectorilor de poziţie **r' = r(θ)** şi **r"= r(θ + π/2)** ambii cu originea într-un punct oarecare **E(e,ε),** interior cercului **C(O,R)** şi cu vârful pe acest cerc, este un vector **r** cu vârful în permanenţă pe un alt cerc **C_C(O,R_C)** şi să se determine / calculeze raza **R_C** a acestui cerc.(Care este şi raza sferei în 3D).

Vectorii **r'** **şi** **r"** vor avea expresiile, exprimate cu funcţiile rex **θ,**

(4.98) $\vec{r}'$= R.rex$_{1,2}$θ . radθ = R[– s.cos(θ–ε) ± $\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}$].radθ =

= [– e.sin(θ – ε) ± $\sqrt{R^2-e^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}$].radθ şi

(4.99) $\vec{r}$"= R. rex$_{1,2}$(θ + π/2).rad(θ + π/2) =

= [e.sin(θ – ε)±$\sqrt{R^2-e^2 cos^2(\theta-\varepsilon)}$].rad(θ + π/2)

şi sunt reprezentaţi în figura **4.21** pentru cel mai general caz posibil. Se observă, din figură, că vectorul **R_C** este suma vectorilor R'şi R**",** care se obţin cu ajutorul proiecţilor vectorul **e.radε** pe cei doi vectori **r'** şi **r"** şi sunt

(4.100) $\vec{R}' = \vec{r}' + e.\cos(\theta-\varepsilon).rad\theta = \pm\sqrt{R^2-e^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}\,.rad\theta$ şi

(4.101) $\vec{R}" = \vec{r}"$-e.sin$(\theta-\varepsilon)$.rad$(\theta+\pi/2)$=

$= \pm\sqrt{R^2-e^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}\,.rad(\theta+\pi/2)$

Raza **R_C** este modulul vectorului **R_C.rad α_C**, în care unghiul la centru **α_C** este

(4.102) $\propto_C = arctan\frac{R"}{R'} = arctan\sqrt{\frac{R^2-e^2cos^2(\theta-\varepsilon)}{R^2-e^2sin^2(\theta-\varepsilon)}}$ şi modulul vectorului este

(4.103) $R_c = \sqrt{R'^2+R"^2} = \sqrt{2R^2-e^2}$, care este şi raza cercului **C_C(O,R_C).**

Se poate verifica imediat relaţia anterioară, deoarece pentru e = 0, **R_C** este diagonala R$\sqrt{2}$ a pătratului de latura **R**, ceea ce rezulta şi din (3.98).

Relaţia anterior dedusă este valabila şi pentru un excentru situat chiar pe cercul C(O,R), adică pentru e = R, în care caz **R_C** = **R**, astfel că vectorul sumă **r** are vârful pe acelaşi cerc, aşa cum rezultă şi din relaţie.

Există **trei** posibilităţi în acest caz. Primul, când **θ** are o valoare pentru care atât **M' (θ)** cât şi **M''(θ + π/2) staţionează** în **E(R,ε),** caz în care **θ** şi **θ + π/2,** aparţin intervalului în care una dintre funcţiile rex$_{1,2}$**θ** nu există, semidreapta care generează punctele nu intersectează cercul decât în E, astfel că ambii vectori sunt **nuli** şi vârful vectorului lor sumă este tocmai excentrul **E** situat pe cerc. În cel de-al doilea caz, una dintre valorile **θ** sau **θ + π/2** este în afara domeniului în care funcţia rex**θ sau** rex(**θ + π/2)** nu există, astfel că unul dintre cei doi vectori este nul şi vârful vectorului sumă este tocmai vârful celuilalt vector, care are, evident, vârful pe acelaşi cerc **C**(**O,R**),.

Al treilea caz este acela în care ambii vectori există, pentru că atât **θ** cât şi **θ + π/2** sunt în domeniul de existenţa al **FSM-CE,** iar suma acestor doi vectori este un vector situat pe diametrul cercului **C**(**O,R**) şi cu vârful pe cerc, în punctul diametral opus punctului **E(e,ε)** de pe cerc.

Aşa cum rezultă din relaţia (4.103) pentru $e \leq R \Rightarrow R_C \geq R$. Există şi puncte, din **exteriorul** discului circular, în care poate fi plasat excentrul **E**, pentru care, însă, vârful vectorului sumă se află pe un cerc $\mathbf{C_C}$ dispus în interiorul cercului **C**(**O**,**R**) dat, astfel că există şi posibilitatea ca $R_C < R$, caz în care $R < \mathbf{e} < R\sqrt{2}$, adică excentrul **E** poate fi plasat numai în interiorul pătratului de latrura 2R în care se înscrie cercul **C**(**O**,**R**).

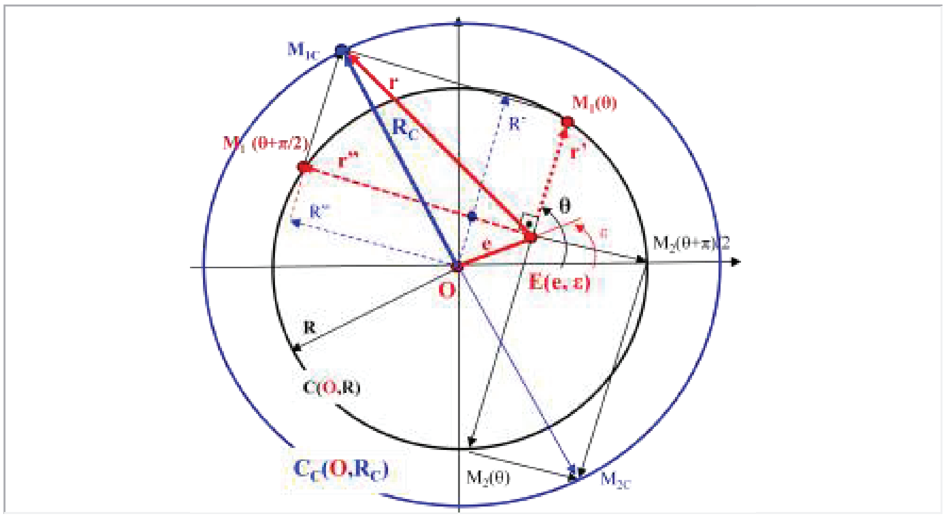


Fig. 4.21. Schiţa la problema **Murray Klamkin**

Dacă **E** este plasat în colţul acestui pătrat, atunci cei doi vectori r' şi r'' sunt tangenţi la cercul **C** şi vârful vectorului suma este plasat în centrul O al cercului, astfel că $R_C = 0$.

Expresia razei putea fi şi mai simplu dedusă, considerând vectorii **r'** şi **r''** pentru $\boldsymbol{\theta = 0}$, pentru care modulul lui **r'** este

(4.104) $\mathbf{r'} = R - e$ şi, respectiv $\boldsymbol{\theta = \pi/2}$, pentru care modulul lui **r''** este

(4.105) $\mathbf{r''} = \sqrt{R^2 - e^2}$, astfel că modulul vectorului suma **r** este $\sqrt{2R^2 - 2eR}$, cu originea în **E**(**e**,0) şi modulul vectorului R_C, cu originea în O, este

(4.106) $R_C = \sqrt{[e + (R - e)]^2 + [R^2 - e^2]^2} = \sqrt{2R^2 - e^2}$, numai că, în acest caz, **particular**, demonstraţia n-ar fi fost generală, valabilă pentru oricare punct **E** din discul circular.

Deoarece, relaţia lui R_C nu depinde de **θ,** indică faptul că este independentă de **θ,** deci valabilă pentru oricare **θ,** iar faptul că nu depinde nici de **ε,** indică posibilitatea plasării indiferente a lui **E(e, ε)** în jurul originii **O** la distanţa **e**. Singurele mărimi care influentează mărimea razei R_C sunt raza **R** a cercului considerat şi excentricitatea reală

e; mai precis raportul lor **s**, creşterea razei **R** conducând la creşterea lui $\mathbf{R_C}$ şi creşterea excentricităţii **e** la scăderea ei.

Considerând în problema anterioară **R = 1** rezultă că, din relaţia de definire a funcţiilor $rex_{1,2}\boldsymbol{\theta}$, oricare ar fi **θ** şi excentrul **S(s,ε), radicalul** sumei pătratelor funcţiilor radial excentric de **θ** şi de **θ + π/2** este o **constanta,** iar aceasta constantă este

(4.107) $\sqrt{rex_{1,2}^2\theta + rex_{1,2}^2(\theta + \pi/2)} = \sqrt{2 - s^2}$ = constant.

În acest mod, problema enunţată a fost mult mai simplu rezolvată, pe de o parte, iar pe de alta parte, ea a fost extinsă şi la punctele exterioare cercului şi la cele situate pe cerc, stabilind, totodată, o altă proprietate şi o altă valoare constantă pentru operaţiile cu **FSM-CE** radial excentric.

Dacă, dintre cei doi vectori, unul este nul şi vârful vectorului suma este tocmai vârful celuilalt vector, el are, evident, vârful pe acelaşi cerc C(O,R).

Al treilea caz este acela în care ambii vectori există, pentru că atât **θ** cât şi **θ + π/2** sunt în domeniul de existenţă al **FSM-CE,** iar suma acestor doi vectori este un vector situat pe diametrul cercului **C**(**O,R**) şi cu vârful pe cerc, în punctul diametral opus punctului **E(e,ε)** de pe cerc.

7) Reprezentarea într-un plan a triunghiurilor cu ajutorul FSM-CE radial excentric.

Notând cu **OEM** vârfurile unui triunghi oarecare (scalen) şi cu **α** unghiul din **O** (0,0), cu **π – θ** unghiul din **E**(e,ε) şi cu **β** unghiul din **M**(α, R), rezultă mărimile laturilor ca fiind

(4.108) OE = **e**, OM = **R** şi $\mathbf{r_{1,2}} = EM_{1,2} = R.rex_{1,2}\,\boldsymbol{\theta}$ sau

(4.108') $EM_{1,2} = R\ Rex\ \boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ şi, în acest fel, atât poziţia cât şi mărimea acestui triunghi sunt **complet determinate** de expresia:

(4.109) $R_{1,2} = R.\ rex_{1,2}\ \boldsymbol{\theta}$ sau de expresia

(4.110) $\mathbf{R_{1,2} = R.\ Rex\ \alpha_{1,2}}$,aşa cum se poate observa în figurile **3.22** şi **3. 23.**

În prima formă, ca funcţii de **θ- variabila motoare**, **R**, **e** şi **ε, R** şi **e** dau mărimea triunghiului iar **θ** tipul triunghiului, care poate fi , cu referire la triunghiul din cadranul I

- **Ascutitunghic,** pentru **θ – ε > π / 2** şi $\boldsymbol{\alpha_1(\theta) - \varepsilon < \pi / 2}$
- **Dreptaunghic,** pentru **θ – ε = π / 2** şi $\boldsymbol{\alpha_1(\theta) - \varepsilon < \pi / 2}$
- **Obtuzunghic,** pentru **θ – ε < π / 2** şi $\boldsymbol{\alpha_1(\theta) - \varepsilon < \pi / 2}$

Unghiul **ε** dă poziţia rotită a triunghiului în jurul varfului **O(0,0),** astfel, pentru **ε = 0 ,** triunghiul dreptunghic este în cadranul I pentru prima determinare ($\mathbf{M_1^+}$) şi în cadranul IV pentru cea de a doua determinare ($\mathbf{M_2^+}$).

Pentru **ε = π,** ceea ce echivalează, aşa cum s-a mai arătat, cu E^- pe semiaxa **x** negativă, adică o excentricitate **e** < 0, cu prima determinare, triunghiul dreptunghic se situează în cadranul II, iar cu cea de a doua determinare în cadranul III, aşa cum rezultă şi din figura **4.22.b**. Cu **ε = π / 2,** excentrele, ca şi triunghiurile, se rotesc cu **π / 2,** E^+ situându-se pe semiaxa y > 0 şi E^- pe semiaxa y < 0. Se poate alege un unghi θ > π/2 pentru **e** > 0 şi un $\theta < \pi/2$ în cazul unui **e** < 0, astfel încât $\boldsymbol{\alpha}$ **(θ) = π / 2** şi unghiul drept din **E** să apară în O.

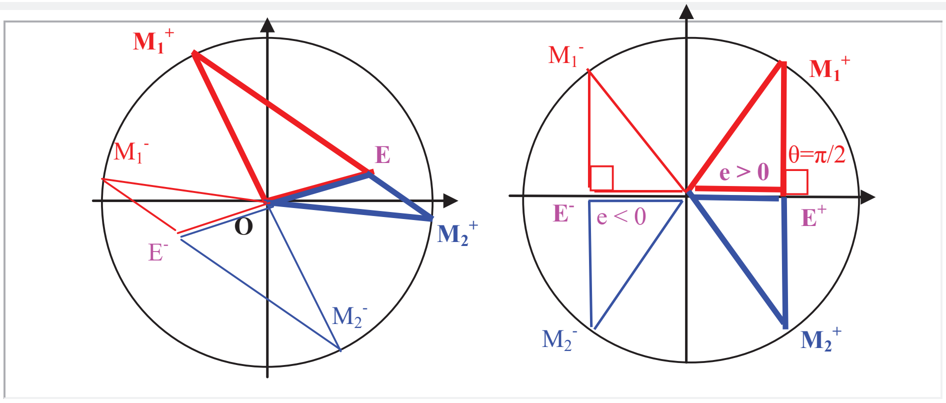


Fig. 4.22 Exprimarea mărimii şi a poziţiei triunghiurilor în plan cu ajutorul **FSM-CE** R.rex$_{1,2}\theta$

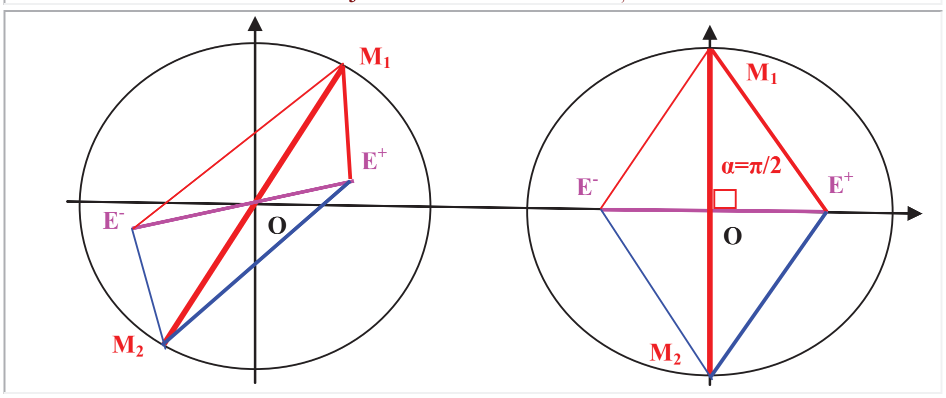


Fig. 4. 23 Exprimarea mărimii şi a poziţiei triunghiurilor în plan cu ajutorul **FSM-CE** **R.** Rex $_{1,2}$ **α**

În cea de a doua formă, (Fig. **4.23**) ca funcţie de **α – variabilă motoare-, R, e** şi **c** situaţia este asemănătoare, cu observaţia că mărimea triunghiului este dată tot de dimensiunile liniare R şi e, iar **ε** dă poziţia rotită a triunghiului, în jurul lui **O(0,0)** şi **α** este variabila care stabileşte tipul triunghiului, aşa cum se poate observa în figura **4.23,** pentru triunghiul din cadranul I,

- **Ascutitunghic,** pentru $\alpha - \varepsilon < \pi / 2$ şi $\theta_1(\alpha) - \varepsilon > \pi / 2$
- **Dreptunghic,** pentru $\alpha - \varepsilon = \pi / 2$ şi $\theta_1(\alpha) - \varepsilon > \pi / 2$
- **Obtuzunghic,** pentru $\alpha - \varepsilon > \pi / 2$ şi $\theta_1(\alpha) - \varepsilon > \pi / 2$.

În cazurile în care $\alpha_{1,2}(\theta) = \theta$, când $\varepsilon = \alpha_{1,2} = \theta$, sau $\theta_{1,2}(\alpha) = \alpha$, când $\varepsilon = \theta_{1,2} = \alpha$, triunghiurile sunt **degenerate,** laturile OE şi $EM_{1,2}$ suprapunându-se peste latura $OM_{1,2}$.

Pot fi deduse, fără dificultate, şi condiţiile în care un anumit triunghi este **scalen (oarecare), isoscel** sau **echilateral.** Pentru $\mathbf{R \neq e \neq r_{1,2}}$ triunghiul este scalen, pentru $\mathbf{R = e \neq r_{1,2}}$, adică **s = 1,** triunghiul este **isoscel** şi pentru $\mathbf{R = e = r_{1,2} \Rightarrow \beta(\alpha) = \pi - \theta + \varepsilon = \alpha - \varepsilon}$ triunghiul este **echilateral.** Mai există, evident, şi alte posibilităţi, pe lângă cele enumerate.

Entităţiile/mărimile **R**, **e** şi $\mathbf{r_{1,2}}$, considerate anterior, se consideră **segmente orientate**. Dacă **R > 0** pentru un unghi **α** oarecare, atunci, pentru **α'= α ± π,** segmentul/ vectorul **R** este orientată în sens invers, astfel că se poate considera **R < 0**.

La fel, dacă pentru un unghi **ε** oarecare **e > 0, E** situându-se iniţial pe semidreapta pozitivă OE^+, atunci, pentru un **ε' = ε ± π** excentrul E^- se va situa simetric faţă de originea O, pe semidreapta negativă, astfel că se consideră **e** < 0. Pentru $\mathbf{r_{1,2}(\theta) = R.rex_{1,2}\theta = R.Rex_{1,2}(\alpha)}$ ca şi pentru $\mathbf{r_{1,2}(\theta) = R.Rex_{1,2}(\alpha) = R.rex(\theta_{1,2})}$ au fost deja stabilite semnele plus şi minus în funcţie de una dintre cele două determinăi posibile pentru **e ≤ R** şi pentru cele patru determinări posibile ale **FSM-CE** radial excentric şi, respectiv, a extensiilor lor pentru **e > R**. Şi în acest caz, dacă $r_{1,2}(\theta) > 0$, atunci $r_{1,2}(\theta \pm \pi) < 0$ iar dacă $r_{1,2}(\alpha) > 0$, atunci $r_{1,2}(\alpha \pm \pi) < 0$, din aceleaşi motive, ale schimbării cu **π a** sensului segmentului / vectorului $\mathbf{r_{1,2}}$ (impropiu / greşit denumită şi schimbare „a **orientarii**", care rămâne neschimbată, pe aceeaşi direcţie **θ** şi, respectiv, **α**; orientarea indicând doar **direcţia** (**θ** sau **α**) nu şi sensul [+ sau –] pe direcţia respectivă).

8) FSM-CE $rex_{1,2}\theta$ ca soluţii ale ecuaţiilor algebrice de gradul al doilea cu o singură necunoscută

1. Fie ecuaţia algebrică **completă** sub **forma generală** de gradul al doilea cu o singură necunoscută **x**

(4.111) $\quad \mathbf{x^2 + p.x + q^2 = 0}$ şi $\mathbf{a.x^2 + b.x + c + 0}$ sub forma **completă normală** ale carei radacini sunt [2]

(4.112) $\quad x_{1,2} = R.rex_{1,2}[\theta, E(e,\varepsilon)]$, în care s-a înlocuit q cu q^2 pentru omogenizare

(4.113) $\quad R = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4cos^2(\theta-\varepsilon)} - q^2}$ şi

(4.114) $\quad e = R.s = \parallel OE \parallel = \frac{p}{2\cos(\theta-\varepsilon)}$ astfel că $R = \pm\sqrt{e^2 - q^2}$ şi

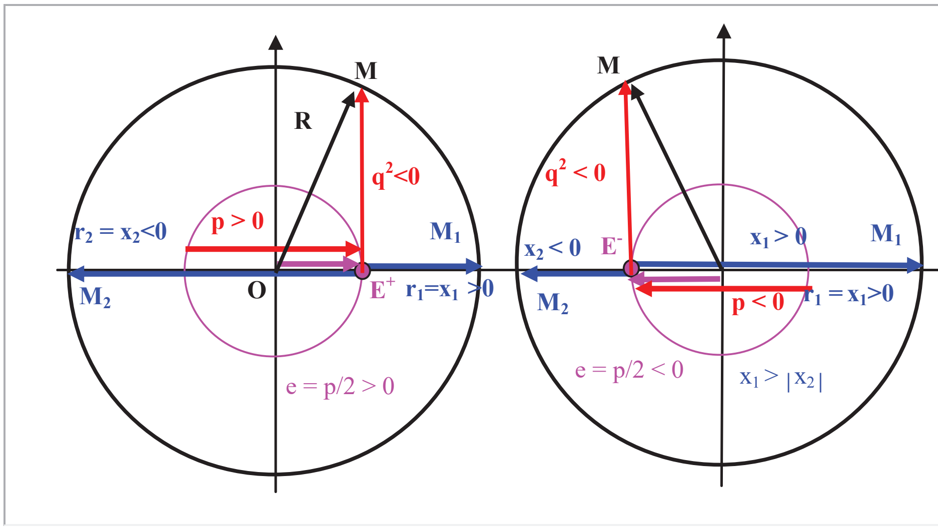
(4.115) $\quad q^2 = e^2 - R^2$, reprezinta puterea punctului E(s, ε) faţă de cercul C(R,O) şi,maşa cum s-a arătat, reprezintă,totodată, pătratul lungimii $\parallel ET_{i,f} \parallel^2$ a tangentei din E la cercul C(O, R).

Mai rezultă din (4.110) că

(4.116) $\quad p = 2e\cos(\theta-\varepsilon) \rightarrow e.\cos(\theta-\varepsilon) = p/2$

Se ştie că suma şi produsul radăcinilor sunt date de formulele lui **François Viète**

(4.117) $\quad \begin{cases} \Sigma \equiv x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a} \\ \Pi \equiv x_1 x_2 = q^2 = \frac{c}{a} \end{cases}$, iar suma şi produsul celor două determinări ale funcţiilor $R.rex_{1,2}\theta$ sunt



a. Radacina negativă mai mare $x_1 < |x_2|$

b. Radacina pozitivă mai mare $x_1 > |x_2|$

Fig. 4.24 Soluţii goniometrice reale şi distincte $x_1 > 0$ şi $x_2 < 0$ ale ecuaţiei algebrice de gradul doi cu o singură necunoscută **x**.

(4.118) $$\begin{cases} R.rex_1\theta + R.rex_2\theta = R(1 - s^2) = -2Rscos(\theta - \varepsilon) = -2ecos(\theta - \varepsilon) \\ Rrex_1\theta.Rrex_2\theta = -R^2(1 - s^2) = e^2 - R^2 \end{cases}$$

Soluţiile, arhicunoscute, ale ecuaţiei sunt

(4.119) $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, iar $R.rex_{1,2}\boldsymbol{\theta}$ se poate scrie, înlocuind sinusul prin cosinus în relaţiile de definire ale **FSM-CE** radial excentric de **θ**

(4.120) $r_{1,2} = R.rex_{1,2}\,\boldsymbol{\theta} = -ecos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{[ecos(\theta - \varepsilon)]^2 - (e^2 - R^2)}$

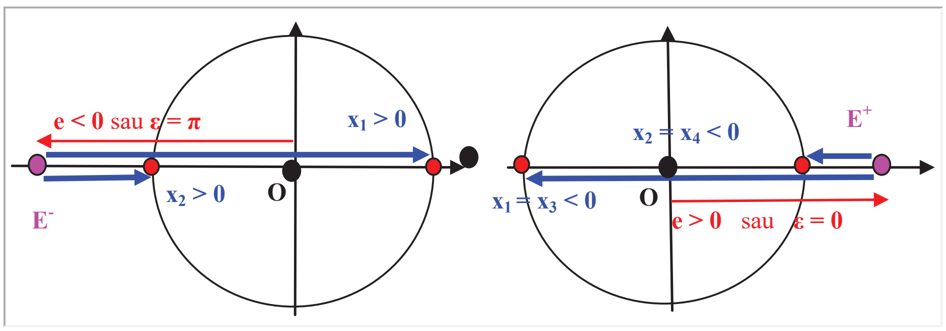
Comparand cele două seturi de relaţii (4.119) cu (4.120), rezultă

(4.121) $$\begin{cases} p = \frac{b}{a} = 2ecos(\theta - \varepsilon) \\ q^2 = \frac{c}{a} = e^2 - R^2 \end{cases}$$, ceea ce demonstrează că $r_{1,2} = R.rex_{1,2}\boldsymbol{\theta}$ sunt radacinile ecuatiei algebrice de gardul doi cu o singură variabilă **x**, aşa cum s-a afirmat prin relaţia (4.112).

2. Din prima relaţie (4.116) mai rezultă că

(4.122) $\cos(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2e}}$ şi poate fi **considerat ± 1, în toate cazurile** [2], deci şi pentru **rădăcini reale**, când discriminantul ecuaţie **Δ > 0,** iar din relaţia (4.120) rezultă că, în acest caz, discriminantul **Δ** este chiar raza cercului

(4.123) **Δ = ± R** **ş**i, din condiţia $\cos(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon}) = \pm \mathbf{1}$, rezultă **θ = 0** şi **ε = 0,** când **e > 0** pentru semnul plus (+) şi **ε = π** când **e < 0** pentru semnul **minus (−).**



a. Rădacini pozitive $x_1, x_2 > 0$	b. Rădăcini negative $x_1, x_2 < 0$

Fig. 4.25 Rădăcinile reale şi de acelaşi semn ale ecuaţiilor algebrice de gradul doi cu o singură necunoscută **x**, exprimate cu ajutorul **FSM-CE** rex$_{1,2}$ $\boldsymbol{\theta}$

În toate cazurile, în care rădăcinile sunt **reale**, vectorii $\overrightarrow{r_{1,2}}$ trebuie să aibe componente numai pe axa x, adică ei se aşează / confundă cu această axă, în care caz, este strict necesar ca $\boldsymbol{\theta = 0}$ şi $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$ **(e > 0)** sau $\boldsymbol{\varepsilon = \pi}$ (e < 0). În acest caz, aşa cum se prezintă în figura **4.24,a** şi **4.24,b** şi cum rezultă din relaţia (4.120), pentru radacini reale de semne contrare

(4.124) $\quad x_{1,2} = r_{1,2} = R.\text{rex}_{1,2} = -e \pm R \Rightarrow x_1 = R - e > 0$ şi $x_2 = -R - e < 0$

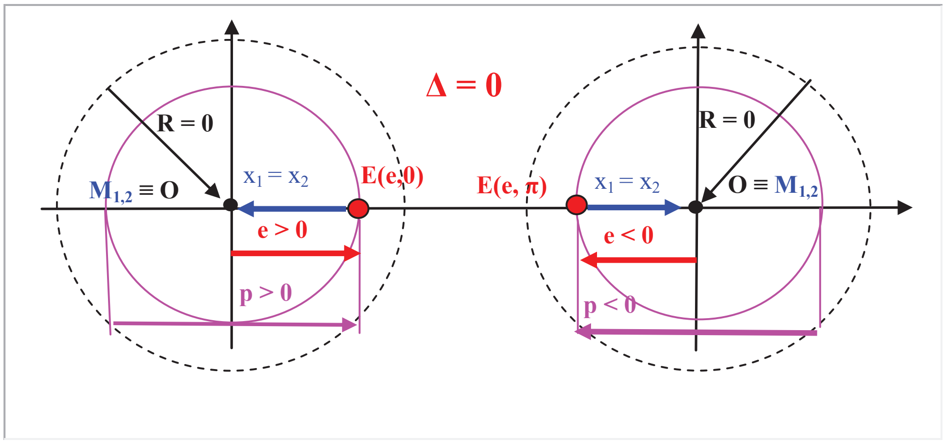
(Fig. **4.24,a**), pentru p, e > 0, când, se ştie că $x_1 < |x_2|$, iar pentru p, e < 0 rezultă

(4.125) $\quad x_{1,2} = r_{1,2} = R.\text{rex}_{1,2}[\boldsymbol{\theta} = 0, E^-$ (e < 0 sau $\varepsilon = \boldsymbol{\pi}$)] $= e \pm R \Rightarrow x_1 = e + R > 0$ şi $x_2 = e - R < 0$, deoarece e < R sau s < (Fig. **4.24,b**), caz în care $x_1 > |x_2|$.

3. Soluţiile goniometrice [Hűtte, Vol I, pag. 45] ca şi rădacinile exprimate cu ajutorul **FTC** [**Rogai,E**, Tabele şi formule matematice, Ed. Tehnică, pag 42] sunt cu mult mai simplu de determinat, analitic, aşa cum s-a arătat, prin funcţiile rex$_{1,2}$$\boldsymbol{\theta}$ şi grafic, aşa cum se indică în figurile **4.24,a** şi **4.24,b,** pentru rădăcini reale şi distincte: perpendicular pe extremitatea lui **p** se ridică inalţimea **h = q** care este medie proporţională între segmentele deterinate pe ipotenuză şi care sunt tocmai rădăcinile căutate x_1 şi x_2**.** Jumătatea lui p este e şi R este distanţa de la mijlocul lui p la extremitatea lui q.

O metodă mai simplă ca aceasta n-a apărut incă şi o vom denumi **rădăcinile ecuaţiei de gradul doi exprimate cu ajutorul funcţiilor trigonometrice circulare excentrice (FCE)**. Această metodă se va dovedi deosebit de productivă la inecuaţiile de gradul doi, pentru că, în funcţie de poziţia excentrului E faţă de O pe axa x, semnele rădăcinilor x_1 şi x_2 sunt mult mai evidente.

Astfel, dacă **E** este **interior** cercului **C(O,R),** atunci radacinile reale sunt de semne diferite. Dacă **E** este **exterior** cercului (Fig. **4.25** a şi b) pe axa **x > 0**, pentru p = 2e > 0, atunci ambele rădăcini sunt negative, deoarece cercul C este intersectat la $\boldsymbol{\theta = 0}$ numai de semidreapta negativă **d⁻**, iar dacă **E** este situat la stânga lui O şi în afara cercului, pe semiaxă **x < 0**, pentru p = 2e < 0, atunci ambele rădăcini sunt pozitive (pentru **θ = 0),** deoarece cercul este intersectat doar de semidreapta pozitivă **d** $^{+}$**.**



a. Radacini egale şi negative | **b.** Radacini egale şi pozitive

Fig. 4.26 Rădăcinile reale şi egale, negative (a) şi pozitive (b), ale ecuaţiilor algebrice de garadul doi cu o singură necunoscută **x**, exprimate cu **FSM-CE** rex$_{1,2}$**θ**

4. Dacă discriminantul ecuaţiei **Δ = 0,** se ştie că **rădacinile** sunt **egale.** Considerând a > 0, atunci pentru b, p > 0 ⇒ e > 0 cele două radacini sunt negative, iar pentru b,p < 0 ⇒ e < 0 cele două radacini egale sunt pozitive, aşa cum este ilustrat în figura **4.26**,a şi **4.26,b**.

Din relaţia (4.123) rezultă că, pentru **Δ = 0 ⇒ R = 0,** iar din relaţia (3.115) rezultă că

(4.126) $x_{1,2} = -e.\cos(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon})$ şi, pentru $\cos(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varepsilon}) = \pm 1$, rezultă

(4.127) $x_{1,2} = r_{1,2} = \mp \mathbf{e}$**,** rădăcinile ecuaţie în acest caz, în care **e = p / 2 .**

5. Din relaţia (4.122) mai rezultă că, pentru **p = 0 ⇒ e = 0,** ecuaţia este **incompletă**, **pur pătratică** şi rădăcinile sunt **egale** şi de **semne contrare** $x_1 = -x_2$, sau $r_1 = -r_2$, sau $r_2 = -r_1$, caz în care, din relaţiile (4.119) şi (4.121), pentru p = 0 şi pentru $\mathbf{q^2 < 0}$ se obţine

(4.128) $\mathbf{x_{1,2}} = \pm\sqrt{-q^2} = \pm\sqrt{R^2 - e^2} = \pm R = \pm q$, iar pentru $\mathbf{q^2 > 0}$

(4.129) $\mathbf{x_{1,2}} = \pm\, \mathbf{i.\, R}$, aşa cum se poate observa în figura **4.27,a** şi **4.27,b.**

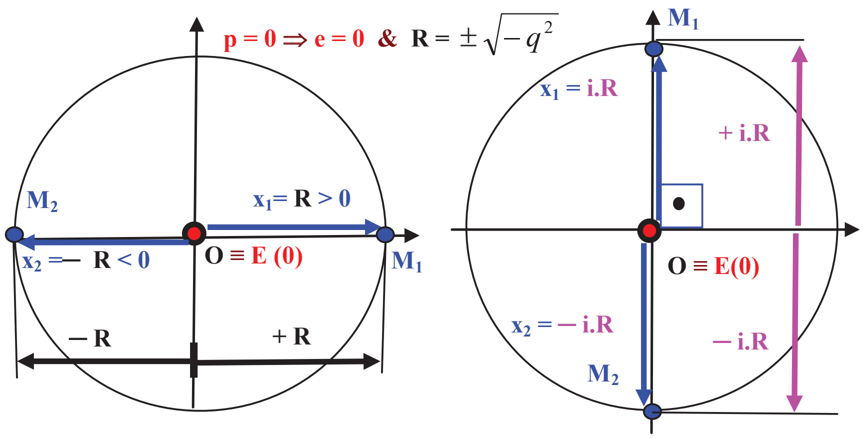
În exemplul $\mathbf{q^2 > 0}$, argumentele $\varphi_{1,2}$ ale numerelor pur **compexe** şi conjugate $\mathbf{x_{1,2}}$ sunt

(4.130) $\varphi_{1,2} = \pm \pi / 2$**,** pentru că cele două rădăcini, pur imaginare, nu au, avident, componente pe axa reală (Fig**. 3. 27.b**).

6. In cazul $\Delta < 0$ rădăcinile sunt **complexe conjugate**. Considerand $\theta - \varepsilon = 0$, rezultă

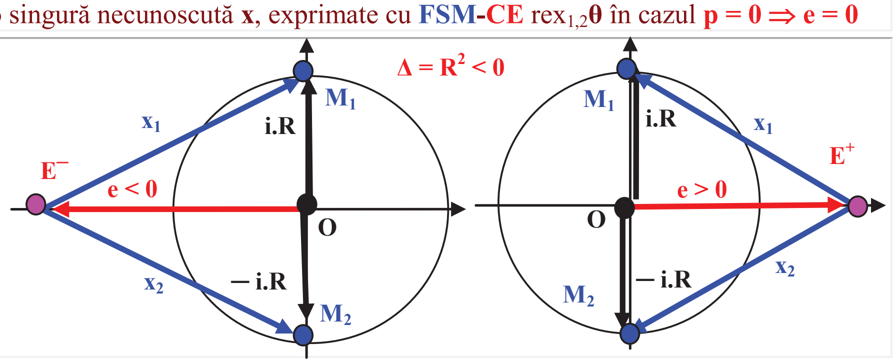
(4.131) $\Delta = R^2 = -q^2 < 0 \Rightarrow q^2 > 0 \Rightarrow R^2 < 0$ astfel că radacinile sunt

(4.132) $x_{1,2} = -e \pm i.R = -p/2 \pm \Delta = -p/2 \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}$,



a. $q^2 < 0$, $x_{1,2} = \pm R$ | **b.** $q^2 > 0$, $x_{1,2} = \pm i.R$

Fig. 4.27 Rădăcinile reale (a) şi imaginare (b), de **semne contrare**, ale ecuaţiilor algebrice, **incomplete, pur pătratice** ($x^2 + q = 0$), de gradul doi, cu o singură necunoscută **x**, exprimate cu **FSM-CE** $rex_{1,2}\theta$ în cazul $p = 0 \Rightarrow e = 0$



a.Partrea reală (**- e**) pozitivă | **b.** Partea reală (**- e**) negativă

Fig. 3.28 Rădăcinile complexe ale ecuaţiilor algebrice **complete** de garadul doi exprimate cu **FSM-CE** $R.rex_{1,2}\ \theta$ în cazul $\Delta = R^2 < 0$

Pentru p,e < 0, componenta reală – e > 0 este pozitivă şi situaţia este prezentată în figura **4.28.a**, iar pentru p,e > 0 şi componenta reală negativă (– e < 0), situaţia este prezentată în figura **4.28,b.**

Rădăcinile complexe sunt şi **conjugate**, ceea ce nu se subliniază întotdeauna suficient în literatura de specialitate, pentru ecuaţiile de **gradul doi**; nu şi pentru ecuaţii de grad superior.

Dacă rădăcinile sunt conjugate, atunci punctele $\mathbf{M_{1,2}}$ sunt simetrice faţă de axa x, astfel că cele două componente imaginare sunt egale, de modul **R** şi de semne contrare

(4.133) $$y_{1,2} = \pm i.R = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2} = \sqrt{\Delta} = \sqrt{R^2} = \pm R \,,$$

pentru p/2 < q şi componentele reale sunt

(4.134) $x_{1,2} = \pm(-e) = \mp e$, aşa cum se arată în figura **4.28,a** şi **4.28,b**.

Argumentele numerelor complexe, în acest caz, sunt

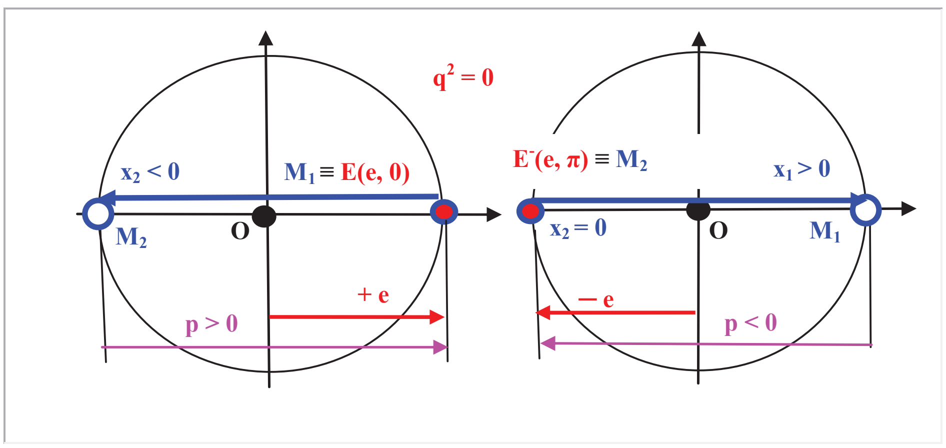
(4.135) $\boldsymbol{\varphi_{1,2} = \pm \arctan(R/e) = \pm \arctan(1/s)}$

7. Ecuaţia **incompletă, fără termen liber** ($\mathbf{q^2 = 0}$) sub forma normală este

(4.136) $x^2 + p.x = 0 \;\Rightarrow\; x(x + p) = 0$ şi are radacinile

(4.137) $x_1 = 0$ şi $x_2 = -p = -\mathbf{e}$ şi din (3.126), pentru $q^2 = 0$, rezultă acelaşi lucru

(4.138) $x_{1,2} = -p/2 \pm p/2$ sau $x_{1,2} = r_{1,2} = -\mathbf{e} \pm \mathbf{e} \Rightarrow x_1 = 0$ şi $x_2 = -2e = p$, aşa cum este ilustrat în figura **4.29,a**, pentru p > 0 şi **b** pentru p < 0.



a. $p > 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -p$	**b.** $p < 0 \Rightarrow x_1 = -p, x_2 = 0$

Fig. **4.29.** Rădăcinile ecuaţie incomplete, fără termen liber ($\mathbf{q^2 = 0}$), exprimate cu ajutorul **FSM-CE** R. $rex_{1,2}(\theta = 0, e)$

8. In concluzie

- În **toate cazurile** soluţiile sunt **reprezentate** de funcţiile radial excentric

(4.139) $x_{1,2} = r_{1,2} = R.rex_{1,2}\theta$, pentru $\theta = 0$ şi $\varepsilon = 0$ ($\Rightarrow e = \pm e$) $\Rightarrow \cos(\theta - \varepsilon) = \pm 1$ astfel că şi $e.\cos(\theta - \varepsilon) = \pm e$ şi relaţia de definire a funcţiilor (3.132) va avea expresia simplă

(4.140) $x_{1,2} = r_{1,2}(\varphi_{1,2}) = -e \pm R$, în care, aşa cum s-a văzut,

(4.141) $-e = -p$ şi

(4.142) $R^2 = \Delta$, astfel că $\sqrt{\Delta} = \begin{cases} \pm R, dacă\ \Delta > 0 \\ \pm i.R, dacă\ \Delta < 0 \end{cases}$ şi $R = 0$ dacă $\Delta = 0$

- In **toate cazurile,** soluţiile sunt **reprezentate** de excentrul **E(e, ε) ≡ E(± e, 0)** situat **invariabil** pe axa x ($\varepsilon = 0 \Rightarrow e \Rightarrow + e$ sau $\varepsilon = \pi \Rightarrow e = \Rightarrow - e$) şi de punctele $M_{1,2}(x_{1,2}, y_{1,2})$; vectorii $r_{1,2}(\varphi_{1,2}) = EM_{1,2}.rad\ \varphi_{1,2}$ fiind rădăcinile căutate, sau soluţiile ecuaţiei.
- Dacă rădăcinile sunt reale atunci **invariabil** $\varphi_{1,2} = \theta = 0$
- Dacă rădăcinile sunt complexe conjugate, cu sau fără parte reală, atunci $\theta = 0$, iar argumentele $\varphi_{1,2}$ ale numerelor complexe conjugate sunt date de relaţiile

(4.143) $\varphi_{1,2} = \arctan(R / e) = \arctan(1 / s)$

- Raza cercului **R,** de definire a funcţiilor $R.rex_{1,2}(0,E)$ este nulă (**R = 0**) numai când $\Delta = 0$, iar excentricitatea **e** este nulă ($e = 0$) numai când $p = 0$ şi ecuaţia este incompletă, pur pătratică, cu sau fără termen liber. În ultimul caz (şi $q^2 = 0$) şi **R = 0**, astfel că ecuaţia are soluţiile banale $x_{1,2} = 0$ ($e = R = 0$), punctele $M_{1,2} \equiv E \equiv O$.
- Funcţiile radial excentric ($R.rex_{1,2}\ \theta$) sunt, deci, definite pe acelaşi cerc de rază **R**, de acelaşi excentru **E(e,ε)** şi, evident, de aceeaşi excentricitate **e (în modul)** sau de **± e,** ceea ce inseamnă $\varepsilon = 0$, pentru semnul plus (+) şi $\varepsilon = \pi$ pentru semnul minus (—) al lui **e**. Ca urmare, determinarea rădăcinilor ecuaţiei consistă în determinarea a trei mărimi (**R**, $|e|$ şi **ε** sau, mai precis, numai a două mărimi (**R şi ± e,** deoarece $\varepsilon = 0$), pentru rădăcini **reale**, pentru care $\theta = \varphi_{1,2} = 0$. Pentru radacini **complexe** ($\Delta < 0$) trebuie determinată, în plus, şi valoarea argumentelor numerelor complexe $x_{1,2}$, adică unghiurile $\varphi_{1,2}$.

9. Notâd funcţia de gradul doi

(4.144) $F(x) \equiv a.x^2 + b.x + c = x^2 + p.x + q^2$ se ştie că ea poate fi scrisă, cu ajutorul rădăcinilor $x_{1,2}$ astfel

(4.145) $F(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2)$, pentru forma **normală completă (a = 1) modificată.**

In figura **4.30** s-a luat un exemplu în care x_1 şi x_2 sunt ambele pozitive şi corespund cazului $p = 2e < 0$. Rădacinile x_1 şi x_2 au originea în excentrul E^- pe care îl vom considera o nouă origine **O',** de la care se marchează variabila $x \in [x_2, x_1]$ a unui punct curent M_i de pe axa **x**.

În figura **3.30,** se observă că diferenţele $(x - x_1)$ şi $(x - x_2)$ sunt, pe de o parte, valorile **FSM-CE** $rex_{1,2}(0, E \equiv M_i)$ şi, pe de altă parte, aşa cum s-a arătat deja, tocmai segmentele determinate de înalţimea unui triunghi dreptunghic, cu unghiul drept în $P_i(x, ih)$ înscris în cercul **C(O,R)**. Ca urmare, produsul lor, din relaţia (3.138) este chiar pătratul înalţimii $-h^2$. Se observă că, pentru $x = x_2$ şi $x = x_1$ rezultă $i.h = o$. Ca urmare, dacă $M_i(x)$ parcurge diametrul cercului **C(O,R),** punctul P_i parcurge arcul cercului **C** de la M_2 la M_1. Relaţia (3.138) devine

(4.146) $\quad$ **F(x) ≡ – h^2(x)** pentru **M_i** interior cercului, adică **x∈ [x_2, x_1]**.

Dacă **M_i** se asimilează unui excentru **E_i** şi excentricitatea **e_i** abscisei lui **M_i** cu originea în **O** atunci

(4.147) $\quad$ **(x – x_1)** = **– R.**rex$_1$ (0, **e** $_i$), iar **(x – x_2)** = **– R.** rex$_2$(0, **e** $_i$), astfel că

(4.148) $\quad$ **F(x)** ≡ **R**^{2}rex$_1$(0, **e** $_i$)•rex$_2$(0, **e** $_i$) , pentru **e** $_i$ ∈ [**– R, + R**].

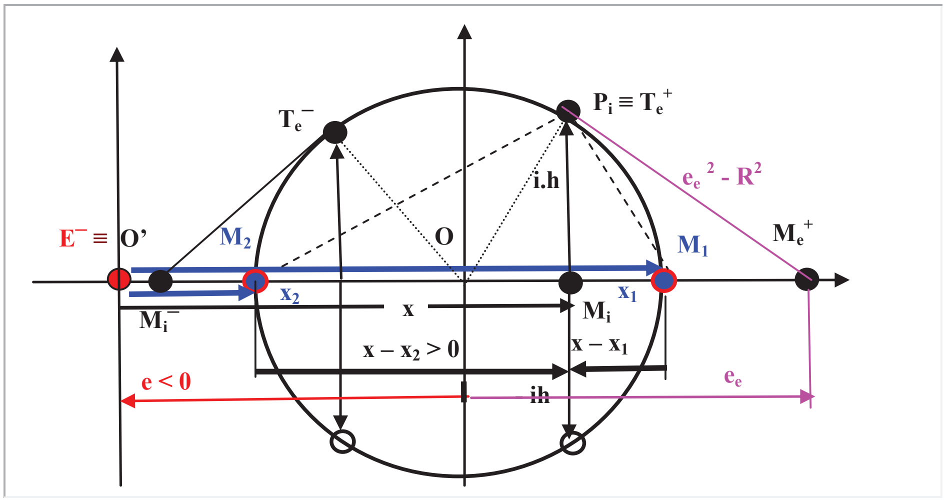


Fig. 4.30 **Schiţă explicativă**

Dacă punctul curent este exterior cercului, ca **M_e^+** şi **M_e^-**, atunci ambele paranteze sunt de acelaşi semn, astfel că produsul lor este pozitiv şi egal cu puterea punctului M_e^+ şi, repectiv, M_e^- faţă de cercul C(O,R), putere dată de expresia

(4.149) $\quad$ **F(x) ≡ $e_e{}^2$ – R ^{2}, (e > R)** pentru **x** exterior cercului, adica **x > x_1** şi **x < x_2,** în care **e_e** este abscisa punctului curent **M**e, considerată din originea **O** care este şi centrul cercului **C(O,R)** şi, ţinând cont de rădacinile exprimate de **FSM-CE** radial excentric, sub forma

(4.150) $\quad$ **F(x)≡ [x– R.rex$_1$(θ = 0)].[x – R.rex$_2$ (θ = 0)] = (x– r_1).(x– r_2) = $e_e{}^2$ – R** ^{2}

9. Inecuaţii fundamentale de gradul al doilea

Considerând în locul ecuaţiei $x^2 + px - q^2$ funcţia $y = x^2 + px - q^2$, imaginea ei este o parabolă cu vârful în punctul **V**($x_V = -p/2$, $y_V = q^2 - p^2 / 2$).

Abscisele punctelor, în care această parabolă se intersectează cu ax Ox, sunt soluţiile (rădăcinile) ecuaţiei (**Fig. 4.31.a**).

În **figura 3.31.a** s-a reprezentat şi cercul

(4.151) $\quad$ $y = \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$ cu centrul pe axa Ox, în care $R = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}$

şi a = $\frac{x_1+x_2}{2}$ care demonstrează că radacinile ecuaţiei algebrice de gradul al doilea, cu o singură necunoscută **x**, se pot obţine şi ca intersecţie dintre **cercul** cu centrul pe axa Ox şi axa Ox, adică pentru **$\theta = 0$,** aşa cum s-a afirmat deja.

Polinomul de gradul doi mai poate fi scris şi sub forma

(4.152) $x^2 = -\,p.x - q^2$ şi notând

(4.153) $F_1(x) = x^2$ şi $F_2(x) = -\,p.x - q^2$, cele două rădăcini pot fi determinate ca **abscise** ale punctelor de intersecţie $[F_1(x) = F_2(x)]$ ale curbei $y = x^2$ cu dreapta $y = -\,p.x - q^2$ (Fig. **4.31.b**).

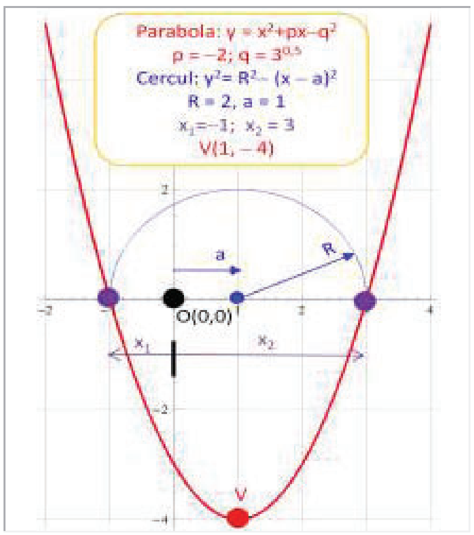


Fig. 4.31.a Soluţiile ecuaţiei de gradul doi ca intersecţie a parabolei cu axa Ox

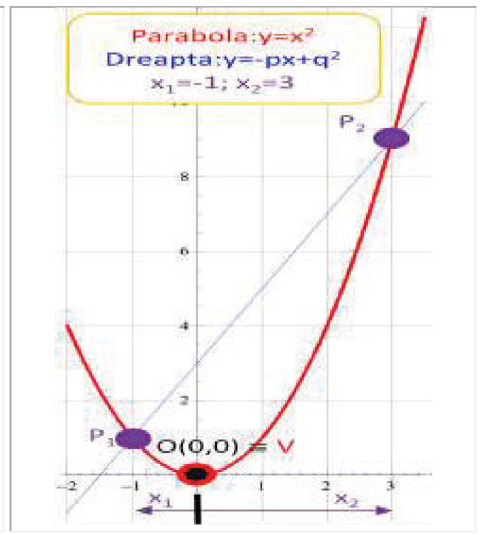


Fig. 4.31.b. Soluţiile ecuaţiei de gardul doi ca intersecţie a parabolei $y = x^2$ cu dreapta $y = -\,p.x + q^2$

Din prima figură **4.31.a,** rezultă că, pentru $a = 1 > 0$, funcţia **F(x)** este pozitivă în domeniul $\mathbf{x} \in (-\infty, x_2) \cap (x_1, +\infty)$ şi negativă între rădăcini, adică pentru $\mathbf{x \in (x_2, x_1)}$.

Din cele expuse, rezultă că aceste intersecţii pot constitui şi metode geometrice/ grafice de soluţionare a ecuaţiilor de gradul al doilea.

Considerând inecuaţia

(4.154) $ax^2 + bx + c > 0$, $a,b,c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ şi $\mathbf{\Delta > 0}$

mulţimea $\mathbf{S^+}$ a soluţiilor este dată de relaţia

(4.155) $\mathbf{S^+} \in (-\infty, x_2) \cap (x_1, +\infty)$, iar soluţiile inecuaţiei

(4.156) $ax^2 + bx + c < 0$, $a,b,c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ şi $\mathbf{\Delta > 0}$ sunt cuprinse în mulţimea $\mathbf{S^-}$

(4.157) $\mathbf{S^-} \in (x_2, x_1)$ deoarece $x_2 < x_1$.

Ca tratarea să fie completă, în cazul inecuaţiei (4.154), tabloul soluţiilor este

$$(4.158)\qquad \begin{cases} \Delta > 0 \begin{cases} a > 0 \rightarrow S \in (-\infty, x_2) \cup (x_1, +\infty) \\ a < 0 \rightarrow S \in (x_2, x_1) \end{cases} \\ \Delta = 0 \begin{cases} a > 0 \rightarrow S \in \mathbb{R}\{x_2\} \\ a < 0 \rightarrow S \in \{\Phi\} \end{cases} \\ \Delta < 0 \begin{cases} a > 0 \rightarrow S \in \mathbb{R} \\ a < 0 \rightarrow S \in \{\Phi\} \end{cases} \end{cases}$$

Este suficient să se studieze cazul a > 0, deoarece, în caz contrar, se înmulţeşte inecuaţia cu **– 1,** simultan cu schimbarea sensului / semnul inecuaţiei.

10. MATEMATICA ATOMICA (MDSCCNS)
Metoda determinării succesive a cifrelor consecutive ale numărului soluţie.

Este o metodă nouă, extrem de importantă, de ezolvare a oricărei ecuaţii, de orice tip şi de orice ordin, ca şi a intersecţiilor diverselor curbe plane.

Metoda, extrem de simplă şi uşor de aplicat, dacă avem la dispoziţie un calculator numeric, cu un program de matematică, constă în scrierea de 10 ori a ecuaţiei date şi considerarea pe rând, în aceste ecuaţii, a celor zece cifre existente / posibile (0, 1, 2, 3…, 8, 9) drept primă **cifră** a **numărului-soluţie**. În zona în care erorile schimbă de semn este prima **cifră-soluţie exactă** şi se alege cifra a cărei eroare este cu semnul + sau cu semnnul **-** în funcţie de modul în care curba / (funţia din ecuaţie) intersectează axa x: de la valori negative la cele pozitive, se alege cifra corespunzătoare erorii cu minus şi invers.

Cifra, considerată ca o **primă cifră exactă**, se trece în faţa celor 10 cifre existente / posibile introduse anterior în cele 10 ecuaţii şi se "dă enter", obţinându-se, din nou, alte 10 valori ale erorilor. În zona în care erorile schimbă de semn, se alege drept **a doua cifră exactă** cifra care dă eroarea cu acelaşi semn ca şi în cazul anterior (prima cifră). Dacă, la un moment dat, o eroare apare zero, însemnă că procesul s-a încheiat şi cifra care a dat această eroarea nulă este **ultima cifră exactă** a soluţiei. Dacă nu, procesul se continuă, până când obţinem atâtea cifre exacte câte se cer, sau câte dorim în **numărul-soluţie**.

Metoda a fost denumită **atomică**, deoarece, ca şi atomul, **numărul** a fost **disecat** în **cifre**, iar acestea au fost la rândul lor disecate în **partea întregă a numărului-soluţie,** cifre corespondente denumite **cifre protonice** şi în **partea zecimală** a căror cifre au fost denumite **cifre electronice**.

O metodă mai simplă nu s-a întâlnit încă, dar ea este posibilă numai în prezenţa unui computer. (V. lucrările **Mircea Eugen Şelariu** "**MATEMATICA ATOMICĂ**. **METODA DETERMINĂRII SUCCESIVE A CIFRELOR CONSECUTIVE ALE UNUI NUMĂR** (www.cartiaz.ro) şi "**CIFRELE, PARTICULELE ELEMENTARE ALE MATEMATICII**" (www.cartiaz.ro).

Motto:" **Matematica** este singura metafizică buna"
William Thomson Baron Kelvin
„**Supermatematica**, una şi mai bună"
Autorul

Capitolul 5

APLICAŢII MATEMATICE ŞI TEHNICE ALE FUNCŢIEI SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE RADIAL EXCENTRIC rexθ

5.1 Determinarea oricât de exactă a relaţiei de calcul a integralei eliptice complete de speţa întâia K(k)

1. Prezentare pe scurt

Frecvenţa este mărimea fizică care, astăzi, se poate măsura cu cea mai mare precizie. De aceea, definiţia unităţii de lungime (metrul etalon de la Sèvres-Paris) a fost înlocuită, în 1983, cu multiplii lungimii de undă a unei oscilaţii (radiaţia kriptonului 86), iar unitatea de timp a fost redefinită prin multiplii de perioade ale unei anumite radiaţii. Calculul frecvenţelor diverselor sisteme tehnice, în special neliniare, nu s-a ridicat, însă, până în prezent, la acelaşi nivel dorit de precizie.

Integrala eliptică completă de speţa întâia **K(k)** poate oferi soluţia determinării cu precizie a frecvenţelor unor sisteme neliniare, dar seria de puteri, prin care ea se exprimă, este slab convergentă. De aceea, au apărut metode numerice, ca metoda **Landen** sau a **mediei aritmetico-geometrice**, care oferă cu precizie valoarea **numerică** a lui K(**k**) pentru un modul **k** dat, valori prezentate tabelar (**m = k^2**), cu diverse zecimale exacte, de exemplu, cu 9 în **Abramowitz** [Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Edited by **Milton Abramowitz** and **Irene A. Stegun**, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series – 55, 1964] .

Media aritmetică-geometrică (**AGM** *arithmetic-geometric mean*, în limba engleză), notată şi **M(x_2, x_1)** a două numere pozitive x_1 şi x_2 se defineşte/calculează în următorul mod. În primul rând, se calculează **media aritmetică** a numerelor x_1 şi x_2 .

În această lucrare, x_1 şi x_2 sunt cele două rădăcini ale ecuaţiei algebrice de gardul al doilea, problemă tratată anterior, arătându-se că **$x_1 = rex_1\,(0, e) = -e + R > 0$**, iar **$x_2 = rex_2\,(0,e) = -e - R = -(e + R) < 0$.**

În cazul de faţă, **excentrul S ≡ E** şi **$s = e = k \in [0, 1]$** în faza iniţială (de plecare / start) este interior cercului iniţial de rază **R = 1** şi **$s_i = e_i / R_i < 1$** în permanenţă, adică pentru toţi paşii **$i \in [1, \infty$**), excentricitatea reală ajungând, în final, la zero când raza ultimei orbite ia valoarea căutată **$R_i \equiv R_N \equiv R_\infty \equiv R(k)$** cu ajutorul căreia se exprimă valoarea lui K(**k**).

Media aritmetică a acestor două numere (x_1 şi x_2), unul pozitiv şi celălalt negativ, a fost denumită **media aritmetică, de semne opuse** sau **negativă** şi este

$A^{-} = (x_1 + x_2) / 2 = - e$

Se construieşte apoi **media geometrică G** a numerelor x_1 şi $+ x_2$, care este

$$G = \sqrt{x_1 . x_2} = \sqrt{(-e+R)\bullet(e+R)} = \sqrt{R^2 - e^2} > 0, ... R > e$$

Aşa cum s-a arătat la **teorema înălţimii** într-un triunghi dreptunghic, G reprezintă tocmai valoarea funcţiei radial excentric pentru **$\theta = \pi / 2$,** adică

$G = p = rex_1 (\pi / 2, e)$

Având calculate mediile **$A_n^+ = R_n$, $A_n^- = e_n$** şi **$G_n = p_n$** se trece la pasul următor **n + 1** prin relaţiile

$$A^{+}_{n+1} = \frac{A_n^+ + G_n}{2} = R_n, \quad A^{+}_{n-1} = \frac{A_n^- + G}{2} = e_n \quad \text{şi} \quad G_{n+1} = \sqrt{A_n^+ \bullet G_n}\,.$$

Metoda **Landen,** sau a **mediei aritmetico-geometrice,** de determinare a valorii unei integrale eliptice de prima speta **K(k)**, **porneşte** de la **numerele**

$$a_0 = 1,\ b_0 = k' = \sqrt{1-k^2} \text{ şi } c_0 = k,$$

pentru care se calculează media aritmetică pozitivă **$a_1, a_2, ... a_n$**, media geometrică **$b_1, b_2, ... b_n$** precum şi media aritmetică negativă a numerele **$c_1, c_2, ..., c_n$.**

Numerele succesive **a_i** şi **c_i** scad succesiv şi, în final, **$c_\infty \to 0$**, în timp ce valorile numerelor **a_n** şi **b_n**, pentru $n \to \infty$, (scad în mărime absolută (adică valorile reale) şi cresc relativ (cele numerice) până în final, când se egalizează (**$a_\infty = b_\infty = R_n$** = **$R_\infty$**) şi tind spre funcţia **R(k)**, pe care o numim "**raza finală**" aşa cum se poate observă în figura **5.1**.

Razele **$R_i \equiv a_i$** scad în mărime absolută şi înălţimile **$h_i = p_i \equiv k'_i$** cresc relativ, până în final, când se egalizează. Din figura **5.1** se poate observa convergenţa foarte puternică a metodei. În pofida alegerii unui modul **k ≡ e** foarte mare (**0.98**), după numai doi paşi, **R_2** devine aproape egal cu **p_2**, astfel că, mărimile din cel de al treilea pas nu mai pot fi desenate lizibil.

Se ştie că valoarea integralei **K(k)** este dată de relaţia

$$K(k) = \frac{\pi}{2.R(k)}$$

Chiar dacă se ia drept **rază finală R(k)** după numai 2 sau 3 paşi (**R(k) = R_3**), rază determinată prin metoda grafică din figura **5.1**, precizia de calcul a lui **K(k),** calculată cu relaţia anterioară, depăşeşte precizia necesară calculelor inginereşti. Aşa cum s-a mai afirmat, dupa 5 paşi precizia de calcul a **relaţiei** astfel obţinute cu **R(k) = R_5**, atinge precizia de **15 (cincisprezece !) zecimale exacte**.

Se mai ştie că, media aritmetico - geometrică **M (a_0, b_0)** a numerelor **a_0** şi **b_0** converge spre relaţia

$$M(a_0, b_0) = \frac{\pi}{4}\frac{a_0 + b_0}{K(\frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0})} = \frac{\pi}{4}\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{K(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}})}$$

Ideea autorului a fost de a obţine **nu** valoarea **numerică** a lui **K(k)**, ci o **expresie** algebrică (**relaţie de calcul**) din care să rezulte, cu o precizie impusă (**oricât de ridicată** se doreşte), valoarea integralei pentru oricare valoare **k**, şi nu numai pentru cele existente în tabele, evitându-se, astfel, interpolările uneori necesare. Pentru precizii nelimitate, această relaţie de calcul este **K(k) = π/2.R(k)** şi, pentru **minimum 15 zecimale exacte (!)**, s-a constatat că funcţia $\mathbf{R_N(k)}$ necesită doar **5** paşi, astfel că $\mathbf{R_5(\,k\,)}$ este pătratul perfect

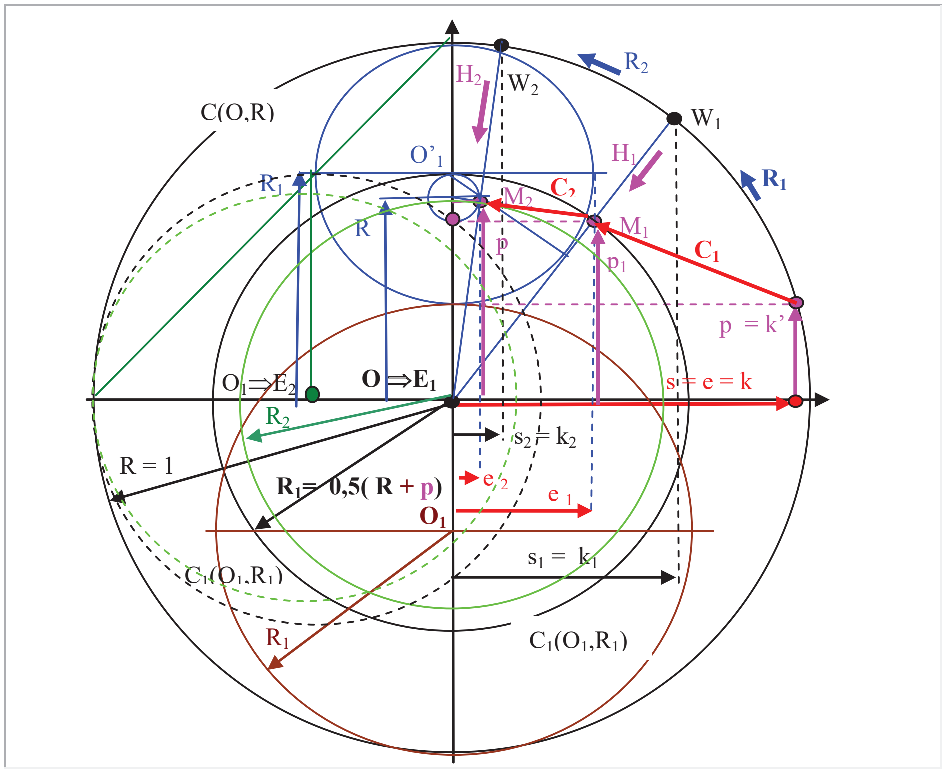


Fig. 5.1 Primii doi paşi ai **transformării de centrare**

(5.1) $$\mathbf{R_5(k)} = \frac{1}{4}\left[\frac{A+G}{2}+\sqrt[4]{\frac{A^2+G^2}{2}AG}\right]^2 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{A_2(R_2,p_2)}+\sqrt{G_2(R_2,p_2)}\right]^2$$

cu notaţiile

(5.2) $$\mathbf{G} = \sqrt[8]{1-k^2} = \sqrt[4]{k'} = \sqrt[4]{\sqrt{1-k^2}} = \sqrt{p_1}$$ şi

(5.3) $$\mathbf{A} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+G^4}{2}} = \sqrt{R_1}$$

Algoritmul de calcul, prezentat în lucrare, ce constituie, totodată, şi o transformare geometrică nouă, denumită de "**centrare**" - pentru că la N ⇒ ∞ cercul trigonometric excentric, cu excentricitatea numerica **k** ≠ 0, se transforma în cercul cu excentricitate numerică nulă (**k_N** = 0), deci centric - stabileşte transformările din pas în pas, peste doi, trei sau patru paşi şi poate stabili, în continuare, şi peste mai mulţi paşi.

De exemplu, relaţia anterioara **R_5,** de dependenţă dintre mărimile din pasul 5 cu cele obţinute după pasul întâi, adică peste patru paşi. Se poate obţine **R_9** cu o relaţie asemănătoare în care $\sqrt{R_5} \to A$ şi $\sqrt{p_5} \to G$, dar preciziile astfel obţinute ar depăşi cu mult cerinţele practice inginereşti.

2. Introducere în integrale eliptice

Integralele de forma $\int R(z,w)dz$, în care **R** este o **funcţie raţională** de două argumente **şi** w^2 = P(z) este un polinom de gradul 3 sau 4, sunt denumite **eliptice.**

Oricare integrală eliptică poate fi adusă în una din cele trei forme denumite de **speţa întâia K(k), speţa a doua E(k) sau de speţa a treia Π(k).**

Integralele eliptice <u>reale</u> de speţa întâi, notată cu ***F***(k, **φ**) şi de speţa a doua, notată cu ***E*** (k, **φ**), sunt integralele definite, în forma normală trigonometrică şi, respectiv, forma normală (standard) **Legendre** de expresiile:

(5.4) $$\boldsymbol{F}\,(\varphi, k) \equiv \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u,$$ de **speţa întâia** şi

(5.5) $$\boldsymbol{E}\,(\varphi, k) \equiv \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}dx \quad,$$ de **speţa a doua**.

Forma **trigonometrică** rezultă din cea **standard** prin schimbarea de variabilă

(5.6) x = sin ψ

Parametrul **k**, subunitar în valoare absolută, este denumit **modulul** acestor integrale, ca de altfel şi al funcţiilor eliptice **Jacobi** în notaţia lui **Gudermann**

(5.7) sn (u, k) = sin **φ**, cn (u, k) = cos **φ** şi dn (u, k) = $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ şi reprezintă, totodată, excentricitatea numerică (**e ≡ k**) a funcţiilor supermatematice circulare excentrice, iar expresia

(5.8) **k'**=$\sqrt{1-k^2}$ = **p** se numeşte **modulul complementar**, notat în această lucrare şi cu **p** (perpendiculară în E pe axa absciselor) şi denumită şi **pondere**.

Pentru limitele superioare ale integralelor reale **φ** = **π**/2 şi, respectiv, sin **φ** = 1, se obţin **integralele eliptice complete** de speţa întâia **K(k)** sau a doua **E(k).**

(5.9) **F(π/2, k) ≡ K(k) ≡** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$

Dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei **K(k)** este

(5.10) **K**(k) = $\frac{\pi}{2}\left\{1+(\frac{1}{2})^2 k^2+(\frac{1.3}{2.4})^2 k^4+(\frac{1.3.5.}{2.4.6.})^2 k^6+...+[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2 k^{2n}+...\right\}$ =

= $\frac{\pi}{2}\boldsymbol{F}(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2)$ şi prezintă o convergenţă foarte slabă, pentru $|\mathbf{k}| < 1$.

În cea de a doua expresie (5.10), $\boldsymbol{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$ este funcţia sau seria **hipergeometrică**, cu notaţia **Gauss**, în care ***Re*(α + β - γ) = 0** ⇒ seria este convergentă în tot cercul de rază unu (trigonometric- **CT** sau unitate **CU**), cu excepţia punctului z = $\mathbf{k}^2$ = 1; punct în care nici relaţia de calcul ce va fi dedusă nu este valabilă, metoda în sine, însă, oferind valori **exacte** (K(1) **= / →** ∞**).**

În anul 1826, **Adrien Marie Legendre** (1752-1833) în "Traite des functions elliptiques et des integrales Euleriennes", care reprezenta sinteza celor 40 de ani de cercetări în teoria integralelor eliptice şi euleriene, prezintă tabelele valorilor integralelor F(**φ**, k) şi E(**φ**, k). Ele sunt date pentru toate valorile unghiului **φ** din grad în grad şi pentru 90 de valori ale lui **k**, corespunzatoare unghiului

(5.11) $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{M}}$ = arcsin k, (unghi notat în literatura de specialitate cu **α** ≡ $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{M}}$)

tot din grad în grad. Sunt, deci, 16.200 rezultate cu zece zecimale exacte pentru **φ** ∈ [0, π/4] şi cu nouă zecimale exacte pentru **φ** ∈ [π/4, π/2]; calculele fiind efectuate de el cu 14 şi, respectiv, 12 zecimale exacte.

Problemele de calcul numeric, privitoare la integralele şi funcţiile eliptice, se tratează mai uşor cu funcţiile **theta-eliptice.** Ele se definesc ca sume de parametrul **q** al lui **Jacobi** pentru $|\mathbf{q}| < 1$. De exemplu,

(5.12) $\vartheta_3(\mathrm{u}) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nu$ şi legătura cu **K**(**k**) este

(5.13) **K(k)** = $\frac{\pi.\vartheta_3^2}{2} = \frac{\pi/2}{R_N}$

La comunicările lunare ale Academiei din Berlin, în anul 1883, **Weierstrass** a prezentat posibilitatea sporirii preciziei de calcul a parametrului **q** prin **metoda Landen**, oprindu-se la o singură iteraţie, după care a obţinut, ceea ce, în această lucrare, s-a denumit excentricitatea **numerică** $\mathbf{k}_1$, după primul pas, din **transformarea de centrare** ce va fi prezentată în continuare.

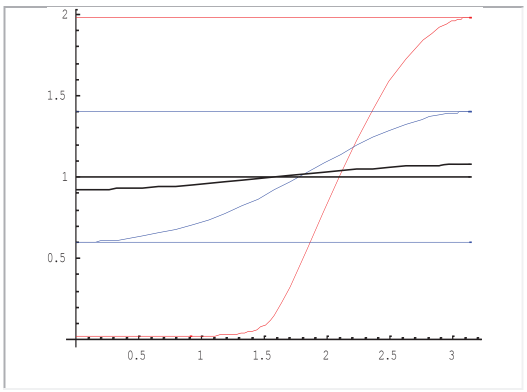
Cu notaţiile actuale, din prezenta lucrare, care se referă la raza cercului $\mathbf{R}_1$ şi la excentricitatea reală $\mathbf{e}_1$, toate după un prim pas al transformării de centrare, excentricitatea numerică $\mathbf{k}_1$ este

(5.14) $k_1 = \frac{e_1}{R_1} = \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{2q+2q^9+2q^{25}+...}{1+2q^4+2q^{16}+...}$

şi prin inversarea acestei serii s-a obţinut parametrul **q**, care este seria infinită

(5.15) $\mathbf{q} = \frac{k_1}{2} + 2\left(\frac{k_1}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{k_1}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{k_1}{2}\right)^{13} + 1701\left(\frac{k_1}{2}\right)^{17} + ...$

Weierstrass a prevăzut posibilitatea sporirii în continuare a preciziei lui **q**, prin continuarea algoritmului de calcul, **dar nu a continuat astfel**, preferând alte căi. Păcat!



R = 1 **p = 0,199**
e = k = 0,98 **s = 0,98**
R_1 = 0,599 **p_1 =0,4460**
e_1 = k_1 = 0,40005 **s_1 = 0, 67**
R_2 = 0,523 **p_2 = 0,5171**
e_2 =0,0767 **s_2 = 0, 1466**
R_3 = 0,519 **p_3 =0,51995**
e_3 = 0,0028 **s_3 = 0,0053**
R_4 = 0,599 **p_4 = 0,51996**
e_4 = 0,000004 **s_4 = 0,000000**

Fig. 5.2 Funcţia **R_i** rex_i (**θ**, s_i) pe primele **4** orbite, **θ ∈ [0, π]**

Funcţia **rex θ** are proprietatea de **omogenitate de gradul unu** deoarece, fiind o funcţie de raza cercului (**R = 1** a cercului unitate/trigonometric (**CT**) şi **R_i** a unui cerc oarecare) şi excentricitatea lui (**e = s = k** pe **CT** şi **e_i.R_i** pe alte cercuri, dar de aceeaşi **excentricitate numerică k**), pentru **ε** = 0, funcţia **f(R = 1, e)**, prin amplificarea variabilelor cu scalarul **R_i** > 0 se obţine

(5.16) **f(R_i.R, e.R_i)** = R_i.f (R =1, e), aşa cum rezultă şi din relaţiile de definire ale funcţiei **R.rexθ**, ca şi a funcţiei **R.Rexα (θ).**

În prezenta lucrare, se vor folosi numai determinările **principale (1)**, renunţându-se la aceşti indici. Indicii, ce vor fi să apară, se referă la numărul pasului (**n ≡ i = 1, 2, 3, ... , N**) **transformării geometrice de centrare.**

Pentru **θ** = 0, **π**/2 şi **π** şi **e = k** se obţin valorile **<u>reale</u>:** minimă (**m**), ponderată (**p**) şi, respectiv, maximă (**M**) şi cele numerice (raportate la raza) **s = k** şi **s' = k'** ale lui **rexθ**.

În faza iniţială, pe **CT**sau **CU**(O,1), deoarece raza **R = 1**, toate valorile reale sunt egale cu cele numerice

(5.17) **m** = **1** - **e** = 1 – **k** = **1** - **s**,

p = $\sqrt{1-e^2} = \sqrt{m.M} = \sqrt{1-k^2}$ = **k'= s'** şi, respectiv,
M = **1** + **e** = **1** + **k** = **1** + **s**

Pentru un cerc de rază oarecare $\mathbf{R_i}$, excentricitatea reală $\mathbf{e_i}$, maximul M_i, ponderea p_i şi minimul $\mathbf{m_i}$ sunt **mărimi reale** şi **excentricitate numerică** $\mathbf{s_i = k_i}$ este

(5.18) $\mathbf{k_i} = \dfrac{e_i}{R_i} = \dfrac{M_i - m_i}{2R_i} = \dfrac{M_i - m_i}{M_i + m_i}$ şi complementara ei

(5.19) $\mathbf{k'_i} = \dfrac{p_i}{R_i} = \dfrac{\sqrt{M_i . m_i}}{M_i + m_i}$ sunt **mărimi numerice**.

Mărimile reale, corespunzatoare, sunt

(5.20) $\mathbf{m_i} = R_i - e_i = R_i\,(1 - k_i)$,

$p_i = \sqrt{m_i . M_i} = \sqrt{R_i^2 - e_i^2} = R_i\sqrt{1-k_i^2}$ şi

$\mathbf{M_i} = R_i + e_i = R_i\,(1 + k_i)$

Se observă, fără dificultate, că **M** = $\sup\limits_{\theta\in I}$ rex**θ** şi **m** = $\inf\limits_{\theta\in I}$ rex**θ** astfel că rex**θ** aparţine clasei funcţiilor cu variaţie mărginită de un număr fix V_Δ = **M - m** = **2 e** şi, în consecinţă, o astfel de funcţie este diferenţa a două funcţii nedescrescătoare şi reciproc [**Bădescu R**., **Maican C-tin**, INTEGRALE UTILIZATE în MECANICĂ, FIZICĂ, TEHNICĂ şi CALCULUL LOR, Ed. Tehnică, Buc., 1968].

3. Exprimarea unor medii cu funcţia rex θ

Notând cu $\mathbf{A^+}$ media **aritmetică +** (semisuma) a două numere pozitive, $\mathbf{A^-}$ (semidiferenţa) sau media **aritmetică —** în care minimum **m** schimbă de semn (**m** ⇒ **— m**) şi cu **G** media lor **geometrica** rezultă

(5.21) $\mathbf{A^+}$ (**m**, **M**) = **R** = **1**, $\mathbf{A^-}$ (**— m**, **M**) = **e** = **k** şi **G** (m, M) = **p** = **k'**, în momentul iniţial, pe cercul trigonometric (**CT**) de **R = 1** şi, pentru oricare alt cerc de parametrii $\mathbf{R_i}$, $\mathbf{e_i}$ şi $\mathbf{p_i}$, ele sunt

(5.22) $\mathbf{A_i^+}(m_i, M_i) = \mathbf{R_i}$, $\mathbf{A_i^-}(-m_i, M_i) = \mathbf{e_i}$, şi $\mathbf{G_i}(m_i, M_i) = \mathbf{p_i} = \sqrt{m_i M_i}$

O perpendiculară, ridicată în excentrul **E ≡ S**(e=s, ε=0) ≡ **K**(**k**,0), intersectează **cercul trigonometric CT** în punctul **W** ≡ **M** şi

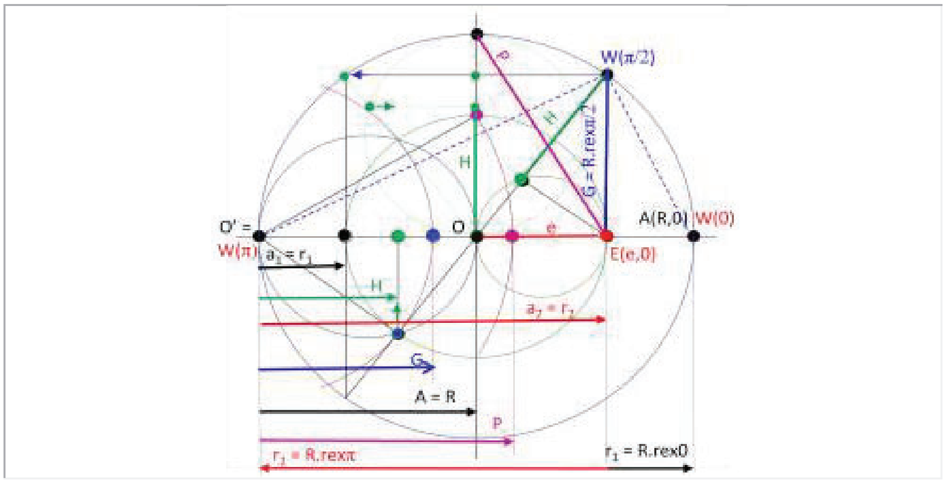
(5.23) $\|EW\|$ = rex(π /2, **e** = s = k) = **p**(π/2, k) = $\sqrt{(1-k)(1+k)} = \sqrt{m.M}$

= $\sqrt{1-k^2}$ = **k'** = **p** şi din punctele $\mathbf{K_i}$ intersectează **CT** în punctele $\mathbf{W_i}$ pentru care

(5.24) $\|K_i W_i\|$ = rex (π/2, k_i) = $\sqrt{(1-k_i)(1+k_i)} = \sqrt{1-k_i^2}$ = $\mathbf{k'_i} = \mathbf{p_i} / \mathbf{R_i}$ şi din excentrele $\mathbf{E_i}$ intersectează cercurile interioare în punctele $\mathbf{M_i}$ pentru care

(5.25) $\|E_i M_i\| = R_i$ rex (π/2, k_i) = $\sqrt{(R_i - e_i)(R_i + e_i)} = R_i\sqrt{1-k_i^2} = R_i k'_i = \mathbf{p_i}$

p fiind denumită ***pondere***, sau valoarea **medie geometrică ponderată**, de **pondere 1**, a funcţiei **rexθ**, deoarece reprezintă media geometrică a valorilor extreme pe care le ia funcţia radial excentric **rexθ**. Cele mai importante medii cunoscute sunt reprezentate în figura următoare şi sunt susceptibile reprezentării lor cu **FSM-CE.**



Media numerelor $\mathbf{a_1= r_1=R.rex0^0}$ şi $\mathbf{a_2=r_2=R.rex\pi}$
(**aritmetică A=R**, geometrică $G = R.rex\frac{\pi}{2}$, armonică H, ponderată P)
exprimate ca **FSM-CE**

Mărimea obţinută, formând **mediile aritmetică** şi **geometrică** ale valorilor a două mărimi, apoi formând mediile aritmetică si geometrică ale acestor medii şi repetând operaţiile până când mediile astfel obţinute devin egale, se numeste **media aritmetică - geometrică** a celor două valori. În cazul de faţă, astfel de medii se pot obţine în două moduri.

Alegând drept mărimi iniţiale valorile extreme **m** şi **M** ale funcţiei **rexθ,** se pot obţine mărimile caracteristice **R** şi **e** specifice **FSM** pe un cerc de raza **R=1**, sau oarecare $\mathbf{R_i}$, pe care le vom denumi **medii interne** şi mediile de acelaşi gen, care permit saltul de pe un cerc (**orbită**) pe altul, de altă rază, sau de pe o **orbită** pe alta, făcând legătura dintre două orbite consecutive, denumite **medii externe** şi care sunt (v. **Fig.5.1**)

(5.26) $A_1^+(R, p) = (1+\sqrt{1-k^2})/2 = \mathbf{R_1}$ şi $A_1^-(R, -p) = (1-\sqrt{1-k^2})/2 = \mathbf{e_1}$, astfel că, se pot enunţa următoarele **principii excentrice (PE)** importante

PE 1: **Raza** unei orbite este egală cu semisuma **razei** şi a **ponderii** orbitei exterioare (mai mari), adică $\mathbf{R_{i+1} = R_i} + p_i$ şi

PE 2: **Excentricitatea** unei orbite este egală cu semidiferenţa **razei** şi a **ponderii** orbitei exterioare, adică, $\mathbf{e_{i+1} = R_i} - \mathbf{p_i}$, care sunt scrise, în continuare, concentrat (prin simbolul ±).

Cele două medii aritmetice, scrise concentrat, sunt

(5.27) R_1, $e_1 = A_1^{\pm}(R \pm p) = (1 \pm \sqrt{1-k^2})/2$ şi dau cele **două mărimi principale** ale unei orbite circulare: **raza** şi **excentricitatea reală** şi care servesc la calcularea extremelor orbitelor

(5.28) $m_1, M_1 = (R_1 \mp e_1), \Rightarrow m_1 = \sqrt{1-k^2} = p$ şi $M_1 = R = 1$ şi a ponderii

(5.29) $p_1 = G_1(m_1, M_1) = \sqrt{m_1 . M_1} = \sqrt{1.\sqrt{1-k^2}}$, ca **medie internă** după primul salt (pas).

Relaţiile (5.27) şi (5.29) dau dependenţa dintre mărimile de pe orbita iniţială (CT: **R = 1**, **e = s = k** şi **p = k'**$=\sqrt{1-k^2}$) şi cele de pe orbita următoare, de indice 1.

Raza şi excentricitatea reală, ale noii orbite, sunt

(5.30) $R_1 = A_1^+(R, p)$, $e_1 = A_1^-(R, -p)$, astfel că, o altă proprietate a transformării este

PE 3: <u>Suma **excentricităţii** reale şi a **razei** de pe o orbită oarecare este egală cu raza orbitei circulare mai mari</u>. Această rază aparţine orbitei anterioare la saltul de pe o orbită mai mare pe una mai mică şi orbitei următoare, la trecerea inversă de la mic la mare.

Acestea sunt cele două transformări posibile: **directă** sau de **impandare**, spre centru, denumită **centrare** şi, respectiv, inversa sau de **expandare**, denumită **transformare excentrică** sau **descentrare**.

(5.31) $M_1 = R_1 + e_1 = R = 1$, deoarece $A^+(A^+_1, A^-_1) = A_1^+ + A_1^- = R = 1$, proprietate de seamă a **FCE**, ce se va folosi în continuare. Dar, suma (5.31) exprimă valoarea lui M_1 astfel că

PE 4 : La trecerea de pe o orbită pe alta, <u>**maximum** orbitei de raza mai mică este valoric egal cu **raza** orbitei de rază mai mare.</u>

Aceasta este şi **proprietatea pe orizontală**, sau pe **axa x**, a transformatei geometrice a **FCE** rexθ, la trecerea de la/pe o orbită la/pe alta. Pe de altă parte, deoarece

$A^-(A^+_1, A^-_1) = A^+_1 - A^-_1 = p = k'$ rezultă

(5.32) $m_1 = R_1 - e_1 = p = k'$ şi

PE 5 : <u>**Minimul** orbitei de rază mai mică (m_{i+1}) este egal cu ponderea p_i a orbitei de rază mai mare.</u>

Deoarece **ponderea** este dirijată pe direcţia verticală, direcţia axei **y** (θ = π / 2), denumim această proprietate ca fiind **“ pe verticala “** a transformării.

Se observă, fără dificultate, că

(5.33) $M_1 - m_1 = 2e_1 = 1 - p = 1 - k' = 1 - \sqrt{1-k^2}$ iar noua pondere va rezulta ca

(5.34) $p_1 = G_1(m_1, M_1) = G_1(p, R) = \sqrt{1.\sqrt{1-k^2}} = \sqrt[4]{1-k^2} = \sqrt{p} = \sqrt{k'}$, astfel că

$$p_1^2 = p \text{ sau } (R_1.k'_1)^2 = R.k' \quad \sqrt{R_1} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}} \text{ şi } \sqrt{p_1} = \sqrt[8]{1-k} .$$

Valorile funcţiei **rex$_i$ (π/2),** sau ponderile succesive, cresc în progresie geometrică cu raţie variabilă, proprietate care rezultă şi din faptul ca $p_1^2 = R_1^2 - e_1^2 = (R_1 - e_1)(R_1 + e_1) = M_1.m_1 = R.p = p$, pentru primul pas, deoarece **R = 1**.

Pentru paşii urmatori, ţinând cont de (5.34)

(5.35) $p_{i+1} = G_{i+1}(m_{i+1}, M_{i+1}) = \sqrt{p_i . R_i}$ şi $(R_{i+1}\, k'_{i+1})^2 = k'_i R_i . R_i = k'_i R_i^2$ din care

(5.36) $k'_i = [\frac{R_{i+1}}{R_i} k'_{i+1}]^2$ sau $\sqrt{k_i^{'}} = \sqrt{1-k_i^2} = \frac{p_{i+1}}{R_i}$ şi algoritmul trecerii de pe o orbită pe cea următoare devine simplu, transparent şi ilustrat în figura **5.1.**

4. Transformarea geometrică excentrică şi transformarea geometrică de centrare

Salturile punctelor, de pe o orbită pe alta, pot avea loc în două sensuri.

În transformarea **directă**, rotaţiile punctelor **W$_i$** pe **CT** au loc în sens levogin de la **W(k)** - punctul iniţial - spre punctul final **W$_N$** ($k_N = 0$), care tinde spre punctul **B(0,1).** În sens invers, de **descentrare**, din **W(k)** se ajunge în punctul de origine al cercului unitate **A(1,0),** astfel că **s_{-N} = 1, N → — ∞.**

Salturile din **W** în **M$_i$** au loc de pe orbita iniţială **CT/CU** (de start sau de plecare de **R = 1**) pe cele interioare acesteia (de raze mai mici, **R$_i$ < 1**), din punctul **W(k)**, trecând prin punctele **M$_i$ (e$_i$)** şi până în **punctul final M$_N$ (e$_N$ = 0; R$_N$)**, iar **W$_N$(k)** prin care excentricităţiile orbitelor scad, în salturi, până la valoarea **e$_N$ = k$_N$ = 0** şi pe care o denumim, din această cauză, **CENTRARE** (v. Fig. **5.5**).

Centrarea este o transformare conformă circulară, compusă dintr-o **homotetie** de raţie/modul **h= R$_i$ + 1/R$_i$** combinată cu o **rotaţie** de unghi

$$\Delta\alpha = \alpha_{i+1} - \alpha_i = \arcsin(p_{i+1}/R_{i=1}) - \arcsin(p_i / R_i) =$$

$$= \arcsin k'_{i+1} - \arcsin k'_i = \arcsin (k'_{i=1}\sqrt{1-k'^2_i} - k'_i \sqrt{1-k'^2_{i=1}}).$$

În figura **5.1** primele două rotaţii au fost notate cu **R$_1$** şi **R$_2$,** iar homotetiile cu **H$_1$** şi **H$_2$,** astfel că, prin compunerea lor, se obţin primele două transformări de centrare notate cu **C$_1$** şi **C$_2$.**

Mulţimea centrărilor, transferă punctul iniţial **W**, de pe **CT**, în punctul final **M$_N$**, de pe cercul de rază **R$_N$**, situat pe axa **y**, pentru $N \to \infty$. Se va nota raza orbitei circulare finale a centrării cu **R$_N$**, care este, evident, o constantă, pe de o parte - fiind raza unui cerc - şi variabilă, pe de altă parte **R(k)**, deoarece depinde de excentricitatea **e=s=k** (aleasă egală cu modulul integralelor eliptice) şi de la care va pleca transformarea. De aceea,

(5.37) **R$_N$ = R (k)**, pentru **n = N** → ∞.

Independent de poziţia iniţiala a lui **W** pe **CT**, transformatul acestuia după primul salt, punctul **M$_1$**, va fi situat pe o parabolă cu focarul în originea O, vârful pe axa **x** în punctul **V**(½, 0) şi trecând prin punctul **B**(0, 1) ≡ $\mathbf{W_N}\big|_{N\to\infty} \subset$ **CT**.

În cazul **k = 0**, transformarea de centrare nu modifică poziţia punctului **W**(**k = 0**) - care rămâne el însuşi -şi ca urmare **R**(**k = 0**) = **1** şi **K**(**0**) = π/2.

În cazul **k** = 1, punctul iniţial **A**(1, 0) ≡ **W**(**k = 1**) ⇒ **p = 0** şi chiar după prima transformare ajunge în **O**(**0, 0**), ceea ce înseamnă că raza **R**(**k =1**), a ultimului cerc al transformării de centrare, va fi nulă **R**(**1**) = $\mathbf{R_1}$ = 0 şi **K (1) = ∞.** Metoda, în sine, oferind, cum am afirmat anterior, valoarea exactă pentru **k** = **1**.

Transformarea în sens invers, de pe **CT** pe orbite circulare de raze din ce în ce mai mari ($\mathbf{R_i}$ > **1**), când şi excentricitatea orbitelor va creşte de la **k** la $\mathbf{k_N}$ = **1**, pentru **N** $\rightarrow -\infty$, o denumim, din aceste considerente, transformare geometrică **EXCENTRICĂ** (**Fig. 5.6**).

În ambele transformări, se porneşte de pe **CT** cu **e = s = k**, cu valoare diferită de valorile **0** sau **1**, discutate anterior, se trece prin excentricităţile reale $\mathbf{e_i}$, valoric diferite de cele numerice $\mathbf{k_i}$, pentru ca, în finalul fiecărei transformări, să se ajungă din nou la egalizarea acestora: la valoarea **0,** în cazul transformării de centrare şi la valoarea **1** în cazul transformării **excentrice**. În cazul centrării, cele două puncte finale $\mathbf{W_N}$ şi $\mathbf{M_N}$ se vor situa pe aceeaşi verticală ($\boldsymbol{\alpha_N}$ = π / 2): punctul iniţial **W**, corespunzător unghiului la centru **α** = arccos**k**, suferind exclusiv transformări de rotaţie, în salturi, în sens sinistrorum pe **CT**, prin punctele intermediare $\mathbf{W_i}$ ($\boldsymbol{\alpha_i}$ = arccos$\mathbf{k_i}$ = arcsin$\mathbf{k'_i}$), până în cel final $\mathbf{W_N}$ (de $\boldsymbol{\alpha_N}$ = π /2) ≡ **B(0,1).** Mulţimea tuturor rotaţiilor fiind de unghi β_M = arcsin**k** = arccos**k'**.

Punctele $\mathbf{W_N}$ şi M_N au acelaşi argument $\boldsymbol{\alpha_N}$ = π / 2 dar modulele (razele orbitelor) sunt **R = 1** şi, respectiv, $\mathbf{R_N}$ = **R**(**k**)**.**

FSM-CE, exprimate pe cercuri de raze $\mathbf{R_i}$ ≠ **1**, i = n = 1 ... N, au punctele definitorii, care au fost note cu $\mathbf{M_i}$ şi ele sunt transformatele prin homotetie H_i (O, h_i) -de centru de homotetie în originea **O** şi raport de homotetie $\mathbf{h_i}$ - ale punctelor $\mathbf{W_i}$ de pe **CT**

(5.38) $\mathbf{h_i = R_i / R = e_i / e}$,

pentru o transformarea de centrare, pe orbita **i** de rază $\mathbf{R_i}$ a punctului $\mathbf{M_i}$, căruia îi corespunde punctul $\mathbf{W_i}$ de pe **CT** cu **R = 1**.

În transformarea de centrare, punctele $\mathbf{W_i}$ se rotesc exclusiv, rămânând pe **CT**, în timp ce punctele $\mathbf{M_i}$ se rotesc şi sunt acelea care sar de pe o orbită pe alta, de raze diferite. Astfel, transformarea din **W** în $\mathbf{M_1}$ are loc printr-o rotaţie $\Re(O, \Delta\alpha_1)$ (pe **CT** din **W** în $\mathbf{W_1}$) urmată de o translaţie sau homotetie $\mathbf{H_1(O, h_1)}$ din $\mathbf{W_1}$ în $\mathbf{M_1}$. Toate rotaţiile fiind de acelaşi centru **O**, produsul a două rotaţii va fi tot o rotaţie, iar mulţimea rotaţiilor formează un grup comutativ în raport cu operaţia de compunere.

Produsul rotaţiilor prin care **W** se transferă în $\mathbf{W_N}$ este

(5.39) $\Re_1 \circ \Re_2 \circ \Re_3 \circ\circ\circ \Re_N = \Re(O, \Delta\alpha_N = \pi/2 - \alpha) = \Re$ (**O**, β_M), pentru $N \rightarrow \infty$

Homotetiile fiind de acelaşi centru **O**, mulţimea lor formează un grup comutativ izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.

Produsul a două sau mai multe homotetii va fi tot o homotetie

(5.40) $H_1 \circ H_2 \circ H_3 \circ \circ\circ H_N$ = H (**O**, h = $\prod h_i$) = H [**O**, h = R (k)]

Scriind proprietatea (5.31) a **FSM-CE**, începând cu prima orbită şi terminând cu ultima, în prima coloană, iar, în a doua coloană, aceleaşi **relaţii normate** sau adimensionale, obţinute prin împărţirea cu razele $\mathbf{R_i}$, rezultă

(5.41)
$$\begin{cases} e_1 + R_1 = R = 1, \Leftrightarrow 1 + k_1 = R / R_1 = 1/R_1 \\ e_2 + R_2 = R_1, \Leftrightarrow 1 + k_2 = R_1 / R_2 \\ e_3 + R_3 = R_2, \Leftrightarrow 1 + k_3 = R_2 / R_3 \\ e_4 + R_4 = R_3, \Leftrightarrow 1 + k_4 = R_3 / R_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_{i+1} + R_{i+1} = R_i, \Leftrightarrow 1 + k_{i+1} = R_i / R_{i+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_N + R_N = R_{N-1}, \Leftrightarrow 1 + k_N = R_{N-1} / R_N \end{cases}$$

Efectuând produsul **relaţiilor normate**, de pe **coloana a doua**, se obţine

(5.42) $\prod_{i=1}^{N}(1+k_i)$ = 1/R $_N$ sau **R** $_N$ =1 / $\prod_{i=1}^{N}(1+k_i)$ şi, pentru **i** $\to \infty$, rezultă **R(k)**

(5.43) **R**(k) = 1/ $\prod_{i=1}^{\infty}(1+k_i)$ din care, pe baza relaţiei (5.13), se obţine una din formele **cunoscute** ale integralei eliptice complete de speta întâia

(5.44) **K** (**k**) = $\frac{\pi}{2}\prod_{i=1}^{\infty}(1+k_i)$

În aceste relaţii, pentru i = 1, rezultă $k_0 = k$ şi k_i are expresia

(5.45) $k_i = e_i / R_i = \frac{1-\sqrt{1-k_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}^2}}$.

5. Metoda hibridă de determinare a lui K(k)

Din această relaţie, pentru un număr mare de paşi, se obţine o expresie algebrică mult prea voluminoasă, ea fiind potrivită în cazul în care se realizează un program de calcul pentru calculatoare electronice numerice, deoarece are un algoritm foarte simplu.

În baza proprietăţiilor **PE 1 ... PE 4**

(5.46) $\mathbf{M}_{i+1} = \mathbf{R}_i$, $\mathbf{m}_{i+1} = p_i$, astfel că, din suma şi diferenţa acestor relaţii, se obţine

(5.47) 2 $\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i + \mathbf{p}_i$, 2 $\mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{R}_i - \mathbf{p}_i$ şi $\mathbf{R}_{i+1} = A^+_i = A^+(\mathbf{R}_i, \mathbf{p}_i)$,

$\mathbf{p}_{i+1} = \sqrt{R_i p_i} = \mathbf{G}_i = \mathbf{G}(\mathbf{R}_i, \mathbf{p}_i)$, iar pentru un salt dublu, ca de exemplu de pe **CT** pe a doua orbită, sau de pe a doua orbită pe a patra, pentru i = 2 ş.a.m.d.

(5.48) 2 $\mathbf{R}_{i+2} = \mathbf{R}_{i+1} + \mathbf{p}_{i+1} = (\mathbf{R}_i + \mathbf{p}_i)/2 + \sqrt{p_i R_i}$ sau 4$\mathbf{R}_{i+2} = \mathbf{R}_i + \mathbf{p}_i + 2\sqrt{R_i p_i}$

$2\,\mathbf{e}_{i+2} = R_{i+1} - \mathbf{p}_{i+1} = (\mathbf{R}_i + \mathbf{p}_i)/2 - \sqrt{R_i p_i}$ sau $4\mathbf{e}_{i+2} = \mathbf{R}_i + \mathbf{p}_i - 2\sqrt{R_i p_i}$

Din (5.48) se obţine

(5.49) $$\mathbf{R}_{i+2} = \left(\frac{\sqrt{R_i}+\sqrt{p_i}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A_i^+}+\sqrt{G_i}}{2}\right)^2$$ şi

$$\mathbf{e}_{i+2} = \left(\frac{\sqrt{R_i}-\sqrt{p_i}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A_i^+}-\sqrt{G_i}}{2}\right)^2$$ şi, **scris concentrat,**

(5.50) $$(\mathbf{e}, \mathbf{R})_{i+2} = \left(\frac{\sqrt{R_i}\mp\sqrt{p_i}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A_i^+}\mp\sqrt{G_i}}{2}\right)^2$$

(5.51) $$\mathbf{p}_{i+2} = \sqrt{R_{i+1}.p_{i+1}} = \sqrt[4]{R_i p_i}\sqrt{\frac{R_i+p_i}{2}} = \sqrt{\frac{R_i+p_i}{2}\sqrt{R_i p_i}} = \sqrt{G_i}\sqrt{A_i^+} = \sqrt{A_i^+.G_i}$$

Dacă, în (5.50), se face $i \to i+2 \Rightarrow i+4$ se obţine

(5.52) $$(\mathbf{e}, \mathbf{R})_{i+4} = \left(\frac{\sqrt{R_{i+2}}\mp\sqrt{p_{i+2}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A_{i+2}^+}\mp\sqrt{G_{i+2}}}{2}\right)^2$$ iar $\mathbf{p}_{i+4} = \sqrt{A_{i+2}^+.G_{i+2}}$

Pentru **i = 1** în (5.50) şi respectiv în (5.51) se obţin radicalii mărimilor de pe orbita a **3-a**

(5.53) $$\sqrt{R_3} = (\sqrt{A_1^+}+\sqrt{G_1})/2 = (\sqrt{R_1}+\sqrt{p_1})/2 =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}} + \sqrt{\sqrt{1-k^2}}\right)/2$$

(5.54) $$\sqrt{p_3} = \sqrt{\frac{R_1+p_1}{2}\sqrt{R_1}\sqrt{p_1}}$$

Şi, pentru **i = 1**, în (5.52), rezultă raza celei de a **5-a** orbite (v.**Fig. 5.2**)

(5.55) $$\mathbf{R}_5 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{R_3}+\sqrt{p_3}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{A+G}{2}+\sqrt[4]{\frac{A^2+G^2}{2}AG}\right)^2$$ astfel că

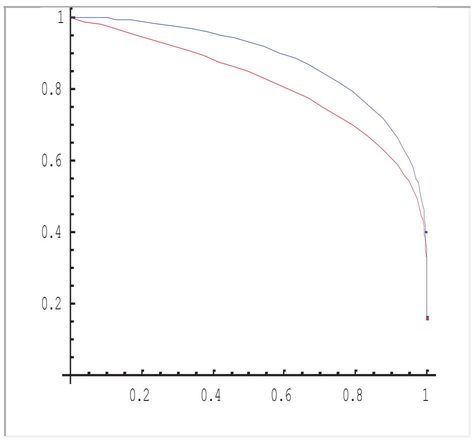
(5.56) $$\mathbf{K}(\mathbf{k}) \cong \frac{\pi}{2R_5} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\frac{1}{2}\left(\frac{A+G}{2}+\sqrt[4]{\frac{A^2+G^2}{2}AG}\right)^2},$$ în care s-a notat

(5.57) $$\mathbf{G} = \sqrt{p_1} = \sqrt[8]{1-k^2} \quad \text{şi} \quad \mathbf{A} = \sqrt{R_1} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+G^4}{2}}$$

6 Concluzii

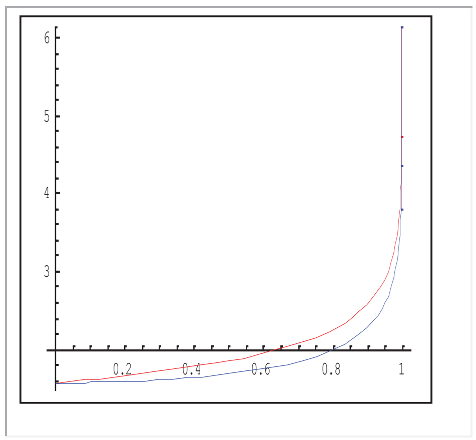
6.1 Relaţiile (5.55 …5.57) obţinute, a căror grafice sunt prezentate în figura **5.3** şi, respectiv, **5.4** sunt cu mult mai simple decât alte relaţii similare, care nu asigură precizia de minimum **15 zecimale exacte**, precizie constatată practic prin compararea rezultatelor cu cele din tabele şi prin calculul pe calculator cu cele două relaţii (v.Fig.**5.8**). De aceea, din punct de vedere practic, în domeniul ingineriei mecanice, ea poate fi asimilată cu o relaţie exactă pentru determinarea frecvenţei proprii a unor sisteme dinamice neliniare. Ea poate fi memorată, în memoria calculatoarelor, în locul tabelelor de valori ale lui **K**(**k**), având marele avantaj că spaţiul alocat memorării este cu mult mai redus: se memorează doar relaţia de calcul şi nu valorile integralei eliptice complete de prima speţă.

6.2 Transformarea prezentată poate fi considerată şi ca o transformare liniară (fuchsieana), după **H. Poincare**, cu punct fix dublu, care este punctul **C**(–1, 0) de pe **CT**, denumită transformare parabolică. Privită în acest mod, transformarea se realizează prin schimbarea succesivă a centrului ca excentru pentru orbita următoare: $O \rightarrow E_1$, $O_1 \rightarrow E_2$, ş.a.m.d. până când $O_N \equiv E_N$, pentru $e_N \rightarrow 0$, prezentată în partea stângă a **figurii 5.5.**



Linia rosie ___________ **R**(**m** = **k**^{2})
Linia albastră _____________ **R** (**k**)

Fig. 5.3 Raza **R**$_N$ (**k**) şi **R** (**m**) pentru modulele **k** şi **m** $\in$ [**0,1**)



Linia rosie__________**K** (**m** = **k**^{2})
Linia albastră_____________**K**(**k**)

Fig. 5.4 Valorile integralei eliptice de prima speţă **K**(**k**) şi **K**(**m**) pentru **e** = **k** şi **e** = **m** = **k**^{2} $\in$ [**0,1**)

Cercul $\mathbf{C_1}$ de rază $\mathbf{R_1}$ intersectează axa **Oy** în punctul de ordonată $\mathbf{y_1} = \mathbf{p_1}$ iar distanţa $\mathbf{O_1O}$ este tocmai excentricitatea $\mathbf{e_1}$ a următoarei orbite (cea de a doua).

În acest caz, apare o nouă proprietate a transformării

(5.58) $\mathbf{R_j} + \sum_{1}^{j} e_j = 1$, din care rezulta, la limită, $\mathbf{R_N} = \mathbf{1} - \sum_{i=1}^{N} e_i$.

6.3 De asemenea, este valabilă transformarea lui **Landen**

(5.59) $(1 + k'_i)(1 + \mathbf{k}_{i+1}) = 2$ sau $(1 + \cos \beta_{Mi+1})(1 + \sin \beta_{Mi+1}) = 2$

Această transformare stipulează, de fapt, că, în cursul transformărilor de centrare, suprafaţele dreptunghiurilor de bază $\mathbf{1} + \mathbf{k}_{i+1}$ şi de înălţime $\mathbf{1} + \mathbf{k'}_i$ sunt constante şi egale cu jumatate din suprafaţa pătratului în care este înscris cercul unitate (**CT**) de raza **R = 1**.

6.4 Se vede din **figura 5.1** că $\mathbf{R_N}$ este valoarea pe care funcţia **rexθ** o ia în punctul ξ , de existenţa a unui subinterval, denumit <u>interval de contracţie</u>. De existenţa acestui punct, din teorema de medie a lui **Lagrange**, sau din teorema creşterilor finite, s-a ocupat **D. Pompeiu**, iar exemple importante de funcţii şi intervalele lor de contracţie au fost prezentate de **Miron Nicolescu**. În acest domeniu, studii cu privire la generalizarea noţiunii de diferenţa divizată a unei funcţii şi proprietăţiile de medie ale acestora au fost studiate de **Tiberiu Popoviciu.**

6.5 Un **exemplu numeric**, pentru un modul intenţionat ales foarte mare (k = 0, 98), ca un număr cât mai mare de transformări să fie distincte (lizibile), este prezentat în continuare, în tabelul $\mathbf{T_1}$. El corespunde curbelor din **figura 5.2**, în care reprezentarea celei de-a 5-a orbite n-a mai putut fi realizată, din cauză că diferenţa dintre graficul orbitei 4 se confundă/suprapune peste cel al orbitei a 5-a.

6.6 Între cele două medii aritmetice (+ şi —) şi media geometrică există următoarea relaţie

(5.60) $\mathbf{A^{+2} - A^{-2} = G^2}$

Tabelul **T 5. 1**

ORBITA i	RAZA ORBITEI	PONDEREA		EXCENTRICITATEA	
		REALĂ	NUMERICĂ	REALĂ	NUMERICĂ
	$R_{i+1} = (R_i + p_i)/2$	$p_i = R_i k'_i$	k_i	$e_{i+1} = (R_i - p_i)/2$	$k_i = e_i/R_i = s_i$
0	1	0, 1989974	0, 1989974	0, 98	0, 98
1	0, 59949870	0, 4460898	0, 7441047	0, 4005013	0, 66806030
2	0, 52279420	0, 5171365	0, 9891780	0, 0767044	0, 14672000
3	0, 51996530	0, 5199576	0, 9999852	0, 0028288	0, 00544403
4	0, 51996114	0, 5199614	1	0, 0000038	0, 00000730
N =5	0, 51996140	0, 5199614	1	0	0

Transformarea de centrare în care excentricitatea scade de la o valoare iniţială **k** $\in$ **(0, 1)** la valoarea finală **zero** poate da naştere unei spirale ca cea din figura **5.5** iar transformarea inversă, denumită **transformare excentrică**, în care excentricitatea creşte de la valoarea **k** până la valoarea $\mathbf{k_N = 1}$ dă naştere unei **porţiuni** ale aceleaşi spirale, porţiune şi mai neobişnuită care, ca şi "Spirala lui **Cornu**" are două capete, însă al doilea capăt al noii spirale se termină cu un pătrat (v. **Fig. 5.6**). Spirala lui **Cornu** are la ambele capete un cerc.

Noua spirală are la un capăt un cerc şi la celălalt capăt un pătrat. Din păcate cele două capete ale spiralei n-au putut fi reprezentate într-un singur desen, din motive lesne de înţeles.

Nici măcar pătratul n-a putut fi prezentat în întregime, ci este doar sugerat, observând că raportul dintre porţiunile liniare, ale acestui capăt al spiralei, şi cele curbe (circulare) este în continuă creştere, urmând ca porţiunile circulare să dispară la un moment dat.

Pentru a putea continua calculele şi a obţine precizii şi mai ridicate, decât cele 15 zecimale exacte, a fost întocmit şi prezentat **tabelul T.5.2**. În acest tabel, fiecare linie conţine datele unei orbite, începând cu cea iniţială de rază **R = 1**, excentricitatea **s = e = k** şi ponderea **p** $= \sqrt{1-k^2}$ şi terminând pe orbita a 7-a cu $\mathbf{R_7}$, $\mathbf{e_7}$ şi $\mathbf{p_7}$.

Aşa cum s-a mai afirmat, salturile se pot realiza de pe o orbită pe cea următoare, dar şi **peste mai multe orbite deodată**. Astfel, dacă se cunosc expresiile de pe primele două orbite se pot determina cele de pe orbita a 4-a, apoi a 8-a, a 16-a ş.a.m.d.

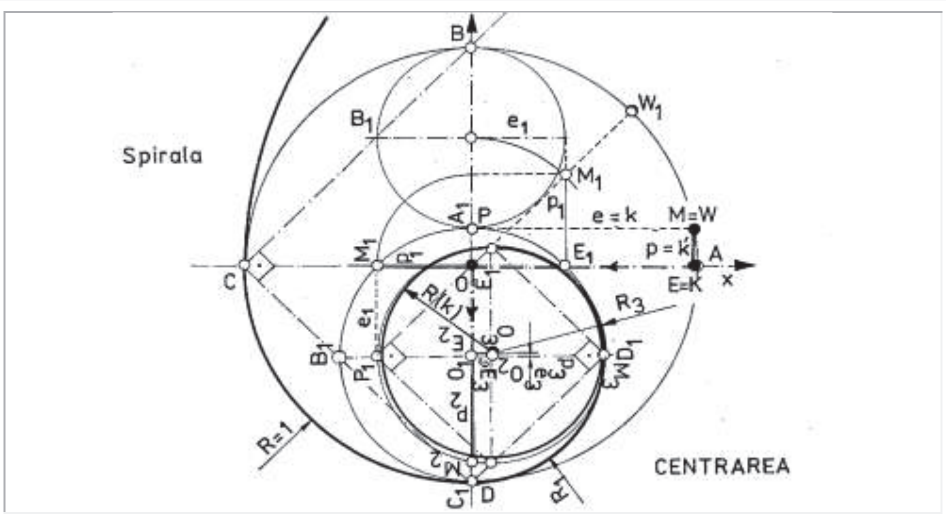


Fig. 5.5 Transformarea **de centrare**

Este de observat că în linia a 6-a, unde s-a trecut $\mathbf{R_5}$ expresia acesteia este un **pătratul perfect**. Fiecare linie are o linie verticală de separare. În stânga acesteia, începând cu rândul al 2-lea, sunt trecute raza $\mathbf{R_i}$ şi excentricitatea reală $\mathbf{e_i}$ a orbitei, iar în dreapta ponderea $\mathbf{p_i}$.

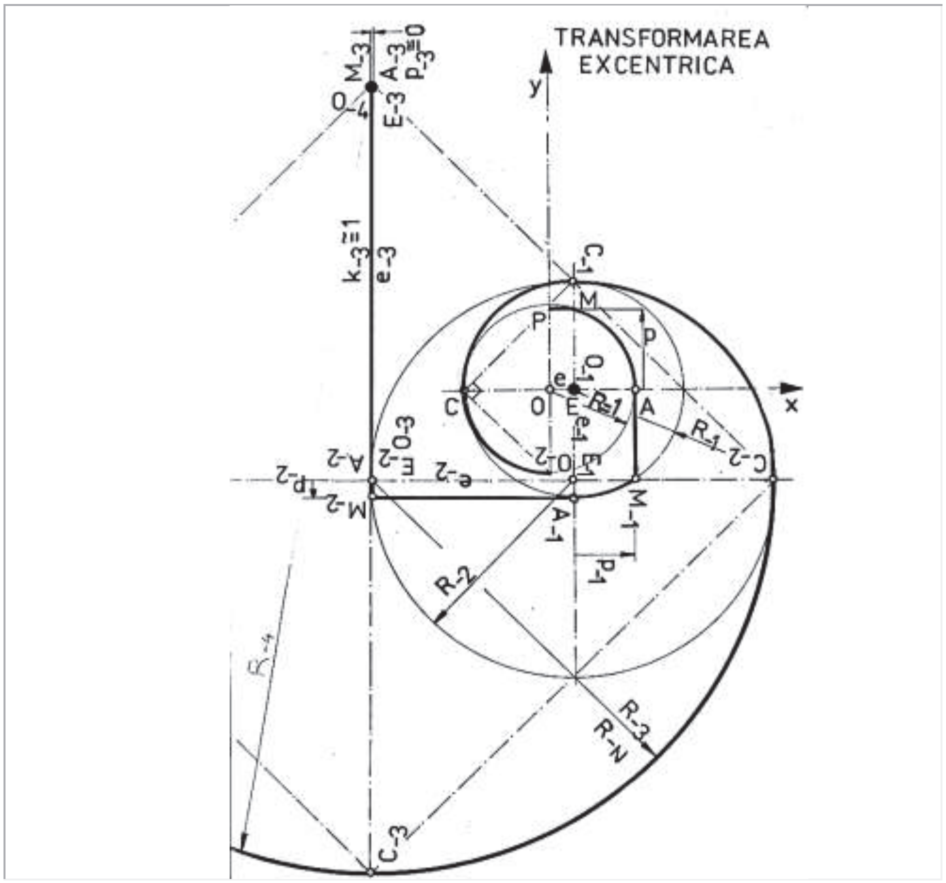


Fig. 5.6 Transformarea **excentrică**, inversa transformării **de centrare**

În primele două rânduri, relaţiile de calcul ale razei şi excentricităţii sunt distincte, iar începând cu rândul al 3-lea au fost scrise concentrat; semnul + fiind pentru raza $\mathbf{R_i}$ şi semnul – pentru excentricitatea $\mathbf{e_i}$.

Ponderile dintr-un rând (ultima poziţie a rândului) se determină ca radical din produsul relaţiilor din stânga cu **semn plus (**+ pentru că este vorba de raza **R)** şi din dreapta liniei vertical de separaţie din rândul anterior, adică dintre **rază** şi **ponderea** anterioară. Astfel,

$$p_1 = \sqrt{1.p}\,, \qquad p_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)\bullet\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{1+p}{2}\sqrt{p}}\,,$$

$$p_3 = \sqrt{\left(\frac{1}{2^2}+\frac{p}{2^2}+\frac{\sqrt{p}}{2}\right)\bullet\sqrt{\frac{1+p}{2}\sqrt{p}}} = \sqrt{\left(\frac{1+p}{2}+\frac{\sqrt{p}}{2}\right)\sqrt{\frac{1+p}{2}\sqrt{p}}}$$

şi algoritmul devine simplu şi uşor de aplicat în continuare.

Două dintre transformările posibile de centrare sunt prezentate în **figura 5.7**, în dreapta şi, respectiv, stânga desenului, pentru primele două salturi sau paşi, însă, aşa cum se poate observa din **figura 5.5**, în care este prezentată o parte din **spirala de centrare**, este posibilă şi o a treia variantă, în care, excentrele reale E_i cu excentricităţiile reale corespunzătoare, ca şi originele cercurilor cu razele lor din ce în ce mai mici, până la limita R_N sunt plasate succesiv pe axa **Ox** şi, respectiv, **Oy**.

Tabelul T 5.2

R = 1 **e = k**	**1**	$p = (1-k^2)^{0,5}$ Raza R_i, excentricitatea reala e_i şi ponderea p_i a orbitelor în **transformarea de centrare**
$R_1 = (R+p)/2$ $e_1 = (R-p)/2$	$1/2 \pm p/2$	$p_1 = G_1 = (R\bullet p)^{0,5} = p^{0,5}$
$R_2 = (R_1+p)/2$ $e_1 = (R_1-p_1)/2$	$1/2^2 + p/2^2 \pm p^{0,5}/2$	$p_2 = G_2 = (R_1\bullet p_1)^{0,5} = [p^{0,5}\bullet(1+p)/2]^{0,5}$
$R_3 = (R_2 \pm p_2)/2$ $e_3 =$	$1/2^3+p/2^3+p^{0,5}/2^2 \pm 0,5[0,5(1+p).p^{0,5}]^{0,5}$	$p_3 = \{0,5[(1+p)/2+p^{0,5}]\,[0,5(1+p)p^{0,5}]^{0,5}\}^{0,5}$
$R_4 = (R_3 \pm p_3)/2$ $e_4 =$	$1/2^4+p/2^4+p^{0,5}/2^3+[0,5(1+p)p^{0,5}]^{0,5}/2^2 \pm \{0,5[(1+p+p^{0,5})](0,5(1+p)p^{0,5})^{0,5}\}^{0,5}/2$	$p_4 = G_4 = \{R_3\, p_3\}^{0,5}$
$R_5 = (R_4 \pm p_4)/2$ $e_5 =$	$1/2^5+p/2^5+p^{0,5}/2^4+[0,5(1+p)p^{0,5}]^{0,5}/2^3+\{0,5[(1+p+p^{0,5})](0,5(1+p)p^{0,5})^{0,5}\}^{0,5}/2^2 \pm p_4/2$	$p_5 = (R_4\, p_4)^{0,5}$
$R_6 = (R_5 \pm p_5)/2$ $e_6 =$	$1/2^6+p/2^6+p^{0,5}/2^5+[0,5(1+p)p^{0,5}]^{0,5}/2^4+\{0,5[(1+p+p^{0,5})](0,5(1+p)p^{0,5})^{0,5}\}^{0,5}/2^3+p_4/2^2 \pm p_5/2$	p_6
$R_7 = (R_6 \pm p_6)/2$ $e_7 =$	$1/2^7+p/2^7+p^{0,5}/2^6+[0,5(1+p)p^{0,5}]^{0,5}/2^5+\{0,5[(1+p+p^{0,5})](0,5(1+p)p^{0,5})^{0,5}\}^{0,5}/2^4+p_4/2^3+p_5/2^2 \pm p_6/2$	

Astfel O_1 şi E_1 sunt pe axa **Ox**, O_2 şi E_2 sunt plasate în jos pe direcţia axei **Oy**, apoi O_3 şi E_3 sunt din nou pe direcţia pozitivă a axei **Ox** ş.a.m.d. Şi, în acest fel, se poate observa convergenţa extraordinar de rapidă a metodei spre valoarea limită R_N, din care cauză nu pot fi reprezentaţi distinct prea mulţi paşi ai transformării.

În **transformarea** inversă, denumită **excentrică** (**Fig. 5.6**), excentrele sunt notate cu **indici negativi**, vrând să sugereze faptul că sensul deplasării centrelor $\mathbf{O}_{-i}$ şi excentrelor $\mathbf{E}_{-i}$ sunt inverse sensului transformării de centrare.

Astfel, excentrul iniţial **E** este plasat tot pe axa **Ox**. Dar, s-a ales o valoare mult mai mică a excentricităţii numerice şi reale **s = e = k,** pentru a putea executa cât mai mulţi paşi din aceasta transformare excentrică.

Se observă, fără dificultate, că valoarea excentricităţii reale $\mathbf{e}_{-i}$ ca şi valorile razelor $\mathbf{R}_{-i}$ cresc continuu de la **R = 1** şi **s = e = k** la valoarea pentru care punctul $\mathbf{M}_{-i}$ şi $\mathbf{A}_{-i}$ se confundă. Punctul $\mathbf{M}_{-i}$ separă **linia dreaptă** din stânga de **arcul de cerc** dintre $\mathbf{M}_{-i}$ şi $\mathbf{A}_{-i}$. Punctele $\mathbf{A}_{-i}$ reprezintă punctele de origine (α = 0) pentru fiecare cerc, astfel ca $\mathbf{E}_{-i}$ să fie situat între A_{-i} şi $\mathbf{O}_{-i}$.

Dacă în transformarea de centrare se egalizează **R** şi p pentru **N** → ∞ ($\mathbf{R}_N$ = p_N), în transformarea **excentrică** se egalizează raxa $\mathbf{R}_{-i}$ cu excentricitatea $\mathbf{e}_{-i}$, astfel că

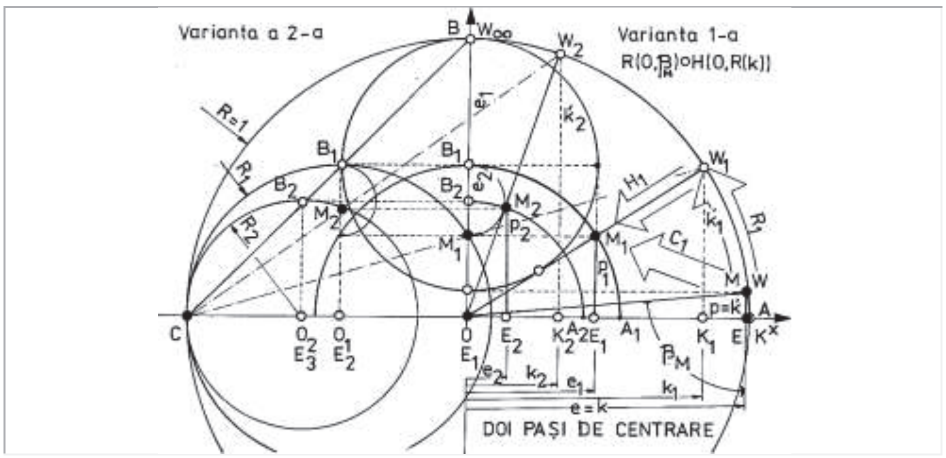


Fig. 5.7 Cele **două variante** ale **transformării de centrare,** pentru determinarea funcţiei $\mathbf{R}_N$, necesară calculării lui **K**(**k**), sau a determinării unei **relaţii de calcul**

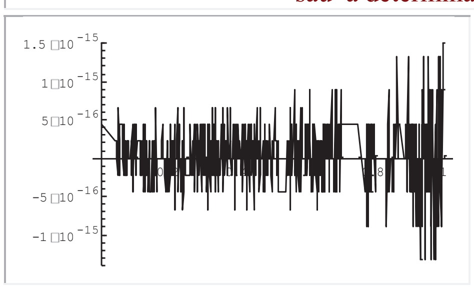


Fig. 5.8 Diferenţele dintre seria **K**(**k**) şi relaţia **F5** obţinută de autor

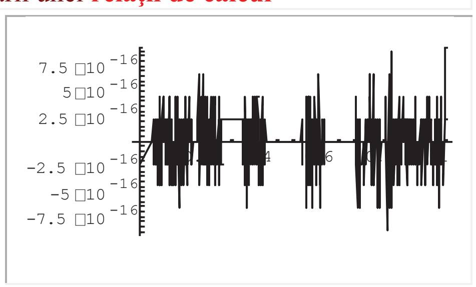


Fig. 5.9 Diferenţele dintre seria **E**(**k**) şi relaţia **E6** obţinuta de autor

$\mathbf{R}_{-N}$ = $\mathbf{e}_{-N}$ şi $\mathbf{s}_{-N} \rightarrow \mathbf{1}$ pentru $\mathbf{-N \rightarrow -\infty}$, aşa cum se poate observa, în stânga sus, în **figura 5.6** .

Aprecierea preciziei relaţiei deduse, notată cu **F5(m)** în **figura 5.8**, s-a făcut prin comparaţie (diferenţa) cu seria lui $\mathbf{K(m = k^2)}$ rulată în unul dintre cele mai performante programe de matematică (**MATHEMATICA 7**) a lui **Stephen Wolfram** (**Fig. 5.8),** în care, cu siguranţă, au fost consideraţi foarte mulţi termeni (peste 165).

O relaţie de calcul, puţin mai complicată, obţinută însă după 6 paşi de centrare, a fost obţinută şi pentru integrala eliptică completă de speţă a doua **E(k).** Precizia ei este, însă, la fel de ridicată, aşa cum rezultă din diferenţele înregistrate în **figura 5.9**.

Pentru determinarea razei **R,** ca **medie aritmetică**$^+$ sau **pozitivă** $\mathbf{A^+}$ se consideră numai valorile primei determinări ale funcţiei $\mathbf{rex_1\theta}$**,** ambele valori, în acest caz $\mathbf{s_i} < \mathbf{1}$, fiind pozitive, adică $\mathbf{x'_1 = rex_1(0, e) \equiv x_1}$ şi $\mathbf{x'_1 = rex_1(\pi, e) = e + R = -x_2 > 0}$. S-a lucrat în continuare cu $\mathbf{x_1}$ şi $\pm\,\mathbf{x_2}$**,** adică cu funcţiile $\mathbf{rex_1\theta}$ pentru $\mathbf{\theta = 0}$ şi $\mathbf{\theta = \pi}$**,** astfel că **mediile aritmetice plus (+) şi minus (─)** sunt

$A^+ = (x_1 + x_2) / 2 = e$ şi

$A^- = (x_1 - x_2) / 2 = R$

După 5 paşi, relaţia lui $\mathbf{E(k) \equiv E5}$ avea eroarea (diferenţa) maximă de 8×10^{-16}. Se pare că preciziile seriilor **K(k) şi E(k)**, calculate de calculatoarele obişnuite, nu pot depăşi preciziile de 15 sau 16 zecimale exacte, în simplă precizie, deoarece, continuând cu alţi paşi şi comparând valorile expresiilor cu cele ale seriilor, diferenţele se păstrează cvazi constante, ceea ce denotă că apare o saturaţie a preciziei de calcul a calculatoarelor sau, mai precis, a **programelor** lor de calcul.

Dacă relaţia de calcul a lui **K(k)** nu oferă valoarea precisă de $\mathbf{R_N(1) = 0}$ pentru $\mathbf{k = 1}$, pentru care $\mathbf{K(k)} \rightarrow \infty$, metoda, însă, oferă această valoare, deoarece la $\mathbf{k = 1} \Rightarrow \mathbf{p = 0}$ şi $\mathbf{e_1}$ = $\mathbf{R_1} = \mathbf{R_N} = 0$, astfel (N = 1) şi $\mathbf{K(1)} = \pi/2\mathbf{R_N} \rightarrow \infty$.

La fel se întâmplă şi în cealaltă extremitate, pentru $\mathbf{s = e = k = 0}$, când $\mathbf{p = 1}$ şi $\mathbf{R_1} = \mathbf{R_N} = \mathbf{p = 1}$**,** astfel încât $\mathbf{K(0)} = \pi/2\mathbf{R_N} = \pi/2$.

Se pune întrebarea firească, de ce o relaţie de calcul, atât de exactă, nu oferă valori exacte şi pentru excentricităţile şi, respectiv, modulele **extreme** $\mathbf{k = 0}$ şi $k = 1$**?** Răspunsul este relativ simplu: pentru că relaţia este dedusă pentru **N = 5**, iar în cazurile amintite anterior nu depăşesc **N = 1.** Considerând relaţia $\mathbf{R_{N=1}}$**,** care pot fi luate din linia a doua a tabelului **T 5.2,** se observă imediat că se vor obţine valorile reale **exacte** ale lui $\mathbf{K(0) = \pi/2}$ şi $K(1) = \infty$.

5.2 Rex α – funcţia generatoare a polinoamelor Legendre centrice $P_n(x) = P_n(\alpha)$

Polinoamele ortogonale, ca polinoamele **Legendre, Hermite, Laguerre, Cebâşev, Jacobi** ş.a., constituie o clasă importantă de sisteme ortogonale de funcţii.

Sistemele ortogonale de funcţii joacă un rol important în analiza matematică, în legătură cu posibilitatea dezvoltării unor funcţii arbitrare, aparţinând unor clase de funcţii foarte largi, în serii de funcţii ortogonale ca, de exemplu, serii **Fourier**, Serii **Fourier-Bessel**, ş.a.

Polinoamele **Legendre** $P_n(x)$ sunt ortogonale în raport cu ponderea / punctul $\rho(x) = 1$ în intervalul (-1, 1) şi sunt definite prin relaţia (5.61), denumită şi formula lui **Rodriques**

(5.61) $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n],\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ele reprezintă un caz particular al polinoamelor **Jacobi** $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, pentru $\alpha = \beta = 0$ şi al polinoamelor **Gegenbauer** $C_n^v(x)$, pentru v = ½.

Polinoamele **Legendre** $P_n(x)$ formeaza sistemul ortogonal cu norma $N_n = \frac{2}{2n+1}$:

(5.62) $$\int_{-1}^{1} P_m(x).P_n(x).dx = \begin{cases} 0, & pentru \Rightarrow m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & pentru \Rightarrow m = n \end{cases}$$

Expresiile $y = P_n(x)$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale, numită şi ecuaţia lui **Legendre**:

(5.63) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$, ($y' = dy/dx$), x o variabila complexă.

Ecuaţia diferenţială poate fi scrisă şi sub forma

(5.64) $\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + n(n+1)y = 0$, cu punctele singulare x=±1 care anulează ecuaţia (5.64).

Plasând în polul **N** (Nord), al unei sfere de rază R, o sarcină pozitivă unitară (q = +1), într-un punct variabil **M** de coordonate sferice r, α, φ, **potenţialul columbian** V(M) va fi direct proporţional cu sarcina q şi invers proporţional cu distanţa d dintre punctele M şi **N**, adică

(5.65) $$V(M) = \frac{q}{d} = \begin{cases} \frac{1}{R\sqrt{1+s^2-2s\cos\alpha}} \\ \frac{1}{r\sqrt{1+s^2-2s\cos\alpha}} \end{cases} pentru \Rightarrow s = \begin{cases} \frac{r}{R} < 1 \\ \frac{R}{r} < 1 \end{cases}$$

Notând cu x = cos α, în ambele cazuri, apare funcţia Ψ(s, α) = Ψ(s,x), denumită **funcţia generatoare** a polinoamelor **Legendre**, data de expresiile

(5.66) $$\begin{cases} \Psi(s,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\alpha}} = \frac{1}{Rex(\alpha,s)} \\ \Psi(s,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2-2sx}} = \frac{1}{Rex(x,s)} \end{cases}$$ în care, la numitor,

se remarcă prezenţa funcţiei radial excentric $Rex\alpha_1$, de variabilă centrica α şi, respectiv, x(α) cu restricţia x = cosα ∈ [-1, 1] şi s ∈ (0, 1).

În relaţiile (5.65), excentricitatea reală e = r, pentru r < R şi este e = R, pentru r > R, astfel încât excentricitatea numerică s = e/R să fie întotdeauna subunitară.

Dezvoltând pe (5.66) în serie după puterile excentricităţii numerice s se obţine

(5.67) $$\Psi(s, x) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2-2sx}} = 1-\frac{1}{2}(s^2-2sx) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(s^2-2sx)^2 + \cdots =$$
$$= 1 + sx + s^2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right) + s^3\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}\right) + \ldots = \sum s^n.P_n(x)$$

Aşa cum se observă, coeficientul $P_n(x)$ a lui s^n este un polinom de gradul n. Dacă n este par, atunci P_n conţine numai termeni în x la puteri pare, iar dacă n este impar, atunci P_n conţine numai termeni în x la puteri impare.

Expresiile primelor cinci polinoame Legendre sunt

(5.68)
$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x = \cos\alpha$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\alpha + 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{1}{8}(5\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$$
$$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \frac{1}{64}(35\cos 4\alpha + 20\cos 2\alpha + 9)$$
$$P_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15) = \frac{1}{128}(63\cos 5\alpha + 35\cos 3\alpha + 30\cos\alpha)$$

Prin derivarea expresiei (5.66), în funcţie de excentricitatea numerică, considerată variabilă, se va obţine

(5.69) $$(1 + s^2 - 2sx)\frac{\partial\Psi}{\partial s} - (x - s)\Psi = 0$$

şi substituind (5.67) şi efectuând derivata lui, rezultă relaţia de recurenţă, care leagă trei polinoame succesive între ele

(5.70) $(n+1)\, P_{n+1}(x) - x(2n+1)\, P_n(x) + n\, P_{n-1}(x) = 0$

Prin derivarea relaţiei (5.66), în funcţie de excentricitatea numerică **s** se obţine

(5.71) $(1 + s^2 - 2sx)\frac{\partial\Psi}{\partial x} - s\Psi = 0$ şi, ţinând seama de (5.65), rezultă

(5.72) $s\frac{\partial\Psi}{\partial s} - (x - s)\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0$ şi o a doua formulă de recurenţă este

(5.73) $n.P_n(x) - x.P'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0$

Expresia generală a polinoamelor **Legendre** de grad n se obţine din relaţia (5.61) folosind formula binomului

(5.74) $(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}$ din care rezultă

(5.75) $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

5.2.1 Funcţia rexθ - funcţia generatoare a polinoamelor Legendre excentrice

Considerând funcţia generatoare a polinoamelor **Legendre** **centrice** (5.66) egală cu funcţia generatoare a polinoamelor excentrice, adică:

(5.76) Ψ(s, α)=Ψ(s, θ) = $\dfrac{1}{-s.\cos\theta+\sqrt{1-s^2.\sin^2\theta}}$ şi, ţinând cont de a doua relaţie, din câtul celor două determinări ale funcţiilor radial excentrice (4.34), rezultă funcţia generatoare a polinoamelor **Legendre** **excentrice** (de variabilă excentrică θ, înlocuind variabila centrică α)

(5.77) $$\Psi(s,\theta) = \frac{r_2}{s^2-1} = \frac{s.\cos\theta+\sqrt{1-s^2.\sin^2\theta}}{1-s^2} =$$
$$= \frac{1}{1-s^2}(s.\cos\theta+\sqrt{1-s^2.\sin^2\theta}) = A(B+C)$$

Dezvoltările în serie de puteri a termenilor A şi C din (5.75) sunt

(5.78) $$A = \frac{1}{1-s^2} = \sum (s^2)^n = 1+s^2+s^4+\ldots+s^{2n}+\ldots$$

(5.79) B = s.cos θ

(5.80) $$C = \sqrt{1-s^2.\sin^2\theta} = 1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}.(n+1)!}s^{2n}.\sin^{2n} =$$
$$=1-\frac{1}{2}s^2\sin^2\theta-\frac{1.1}{2.4}s^4\sin^4\theta-\frac{1.1.3}{2.4.6}s^6.\sin^6\theta-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}s^8\sin^8\theta-\ldots$$
$$\ldots-\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}s^{10}.\sin^{10}\theta-\ldots-\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}s^{2n}\sin^{2n}\theta-\ldots$$

Există mai multe posibilităţi de-a definitiva polinoamele **Legendre** excentrice, dar cea mai simplă este de-a executa înmulţirile din relaţia (5.77) a seriei A cu termenul B şi a celor două serii A şi C. Din prima înmulţire rezultă polinoamele **Legendre** **excentrice** **impare** **PLE$_I$** (**S$_I$**), iar din înmulţirea celor două serii rezultă expresiile polinoamelor **Legendre** **excentrice** **pare** **PLE$_P$** (**S$_P$**). Din prima înmulţire, rezultă termenii **impari** ai funcţiei $\Psi(s,\theta)_I$

(5.81) $\Psi(s,\theta)_I = \Sigma\, S_I.s^{2n-1} =$
$$= S_{2n-1}\sum_{n=1}^{\infty}s^{2n-1} = \cos\theta\sum_{1}^{\infty}s^{2n-1} = \cos\theta(s+s^3+s^5+\ldots+s^{2n-1}+..)$$

şi, din înmulţirea celor două serii (A x C), conform regulii adunării termenilor paraleli cu prima diagonală a matricii:

$$\begin{vmatrix} 1.1 & 1.(-\frac{1.}{2}s^2\sin^2\theta) & 1.(-\frac{1.1}{2.4}s^4\sin^4\theta) & 1.(-\frac{1.1.3}{2.4.6}s^6\sin^6\theta) \\ s^2.1 & s^2.(-\frac{1}{2}s^2\sin^2\theta) & s^2.(-\frac{1.1}{2.4}s^4\sin^4\theta) & s^2.(-\frac{1.1.3}{2.4.6}s^6\sin^6\theta) \\ s^4.1 & s^4.(-\frac{1}{2}s^2\sin^2\theta) & s^4.(-\frac{1.1}{2.4}s^4\sin^4\theta) & s^4.(-\frac{1.1.3}{2.4.6}s^6\sin^6\theta) \\ s^6.1 & s^6.(-\frac{1}{2}s^{2.}\sin^2\theta & s^6.(-\frac{1.1}{2.4}s^6\sin^6\theta) & s^6.(-\frac{1.1.3}{2.4.6}s^6\sin^6\theta) \end{vmatrix}$$

rezultă termenii **pari** ai funcţiei generatoare $\Psi(s,\theta)_P$

(5.82) $$\Psi(s,\theta)_P = \sum_{n=0}^{\infty} s^{2n}.S_{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} s^{2n}\left(1-\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\sin^{2n}\theta\right)$$

Expresia funcţiei generatoare a polinoamelor **Legendre** **excentrice** este

(5.83) $$\Psi(s,\theta) = \cos\theta\sum_{n=1}^{\infty} s^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} s^{2n}.S_{2n}$$

Notând cu x = cos θ şi cu y = sin θ se constată că toate polinoamele **Legendre** **impare** au aceeaşi expresie, oricare ar fi gradul impar (2n-1) al polinomului:

(5.84) $\mathbf{PLE_I} = \cos\theta = x$ iar cele pare sunt:

(5.85) $$\mathbf{PLE_P} = S_{2n} = 1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\sin^{2n}\theta = 1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}y^{2n}$$

Din (5.83) rezultă

(5.86) $$\mathrm{PLE_I} = S_1 = S_3 = S_5 = \ldots = S_{2n-1} = \cos\theta = x$$

Din (5.85) rezultă primele 10 polinoame **Legendre** **excentrice** **pare**:

(5.87)
$$S_0 = 1$$
$$S_2 = 1-\frac{1}{2}\sin^2\theta = 1-\frac{1}{2}y^2$$
$$S_4 = 1-\frac{1}{2}\sin^2\theta-\frac{1}{2.4}\sin^4\theta = 1-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2.4}y^4$$
$$S_6 = 1-\frac{\sin^2\theta}{2}-\frac{\sin^4\theta}{2.4}-\frac{3.\sin^6\theta}{2.4.6} = 1-\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{2.4}-\frac{1.3.y^6}{2.4.6}$$
$$S_8 = 1-\frac{\sin^2\theta}{2}-\frac{\sin^4\theta}{2.4}-\frac{1.3.\sin^6\theta}{2.4.6}-\frac{1.3.5.\sin^8}{2.4.6} =$$
$$= 1-\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{2.4}-\frac{1.3.y^6}{2.4.6}-\frac{1.3.5.y^8}{2.4.6.8}$$

Se poate constata, fără dificultate, comparând relaţiile anterioare cu cele ale polinoamelor centrice (5.68), că expresiile polinoamelor **Legendre** excentrice, **pare** şi **impare**, sunt cu mult mai simple, putându-se memora sau deduce fără dificultate.

5.2.2 Ortogonalitatea unor polinoame Legendre excentrice

Toate polinoamele **Legendre** excentrice impare sunt identice, ceea ce arată că, de fapt, există un singur polinom **Legendre** excentric **impar** S_I = cos θ = x. Ca urmare, produsul a două polinoame impare de acelaşi indice impar ca şi de indici impari diferiţi este x^2 şi integrala acestui produs, între limitele +1… -1 este 2/3. Fiind diferită de zero, arată că, **astfel considerate**, acestea polinoame nu sunt ortogonale. Dar, pentru m = n = **impar**, produsul a două astfel de polinoame este $\cos^2\theta = x^2$ şi

(5.87) $$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left|\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

Şi integrala produselor a două polinoame **Legendre** excentrice, de acelaşi indice ca şi de indici diferiţi, între limitele = +1 … -1, este diferită de zero, astfel că două polinoame **pare** nu sunt ortogonale.

Singurele combinaţii de polinoame **Legendre** excentrice, care sunt ortogonale, sunt cele dintre unicul polinom **Legendre** excentric **impar** şi oricare dintre polinoamele **Legendre** excentrice **pare**. Deoarece

(5.88) $$\int_{-1}^{1} S_I . S_P dx = \begin{cases} 0, \Rightarrow I \neq P \\ \frac{2}{3}, \Rightarrow P = I \Rightarrow produsPLE - impare \\ 0, \Rightarrow P = P \Rightarrow produsPLE - pare \end{cases}$$

Pătratul **PLE** **pare** este

$$S^2_{P2n} = 1 + 1^2.(1 - \frac{1-x^2}{2})^2 + 1^2.(1 - \frac{1-x^2}{2})^2.[1 - \frac{1-x^2}{2} - \frac{1.3.(1-x^2)^3}{2.4.6}]^2 + ...$$

şi se observă că integrala acestei funcţii este nulă deoarece toţi termenii primitivei funcţiei sunt impari, astfel că pe intervalul -1 … +1 integrala este nulă.

În mod asemănător, pot fi definite şi alte polinoame excentrice.

Câteva funcţi generatoare sunt prezentate în lucrarea lui **Gh. Mocica** « Probleme de funcţii speciale" şi au expresiile cu **FSM-CE** de mai jos:

(5.89) $$\begin{cases} \frac{1 - s.\cos\alpha}{1 + s^2 - 2s\cos\alpha} = \frac{1 - sx}{1 + s^2 - 2sx} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x = \cos\alpha).s^n = Dex\alpha \\ \frac{1}{1 + s^2 - 2s\cos\alpha} = \frac{1}{1 + s^2 - 2sx} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x = \cos\alpha)s^n = \frac{1}{\operatorname{Re} x^2\alpha} \\ \frac{1 - s^2}{1 + s \quad - 2s\cos\alpha} = \frac{1 - s^2}{1 + s^2 - 2sx} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x = \cos\alpha) = 2Dex\alpha - 1 \\ \ln(1 + s^2 - 2s\cos\alpha) = \ln(1 + s^2 - 2sx) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(x = \cos\alpha)}{n} s^n = 2\ln(\operatorname{Re} x\alpha) \\ \ln\frac{1 + s^2 + 2s.\cos\alpha}{1 + s^2 - 2s\cos\alpha} = \ln\frac{1 + s \quad + 2sx}{1 + s \quad - 2sx} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{2n+1}(x = \cos\alpha)}{2n+1} = 2\ln\left|\frac{\operatorname{Re} x_2\alpha}{\operatorname{Re} x_1\alpha}\right| \end{cases}$$

În care, polinoamele **Cebâşev** de primul gen T_n şi de genul al doilea U_n sunt date de expresiile:

(5.90) $$\begin{cases} T_n(x = \cos[n.\arccos(x = \cos\alpha)] = \cos n\alpha, n \in Z_+ \\ U_n(x = \cos\alpha) = \frac{\sin[(n+1).\arccos(x = \cos\alpha)]}{\sin[\arccos(x = \cos\alpha)]} = \frac{\sin[(n+1)\alpha]}{\sin\alpha}, n \in Z_+ \end{cases}$$

şi formează un şir ortogonal pe intervalul [-1, 1] în raport cu ponderea

(5.91) $$\rho = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\sin\alpha$$

EXPRESII cu FUNCŢII **CENTRICE** EXPRIMABILE PRIN **FSM-CE**	
FUNCŢII **CENTRICE**	FUNCŢII **EXCENTRICE**
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\sin(n\alpha) = arctan\frac{s.sin\alpha}{1-scos\alpha} =$ $=\arcsin\frac{s.sin\alpha}{\sqrt{1+e^2-2escos\alpha}} =$	$= Bex(\alpha, s) = \arcsin\frac{s.sin\alpha}{Rex(\alpha,s)}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\cos(n\alpha) = \frac{s.sin\alpha}{1+e^2-2escos\alpha} =$	$= -\ln \mid Rex\alpha \mid$
$\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+e^2-2escos(\alpha-\varepsilon)}} =$	$= \sin[\beta(\alpha)] = \sin[Bex(\alpha, S(s,\varepsilon))]$
$\frac{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+e^2-2escos(\alpha-\varepsilon)}} =$	$= \cos[\beta(\alpha)] = \cos[Bex(\alpha, S(s,\varepsilon))]$
$\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)} =$	$= \tan[\beta(\alpha)] = \tan[Bex[\alpha, S(s,\varepsilon)]]$
$\frac{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+e^2-2escos(\alpha-\varepsilon)} =$	$= Dex[\alpha, S(s,\varepsilon)] = \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{d(\alpha+\beta)}{d\alpha}$
$\sum_{n=1}^{\infty} s^n cosn\alpha = \frac{s(\cos(\alpha-\varepsilon)-s)}{1+e^2-2escos(\alpha-\varepsilon)}$	$= \frac{d}{d\alpha}(Bex(\alpha, S) = \frac{d\theta}{d\alpha} - 1 = Dex(\alpha, S) - 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} s^n sinn\alpha =$	$= \frac{1}{Rex\alpha}\frac{d}{d\alpha}(Rex\alpha) = \frac{s.sin\alpha}{Rex^2\alpha}$
$1+2\sum_{n=1}^{\infty} s^n cosn\alpha = \frac{1-s^2}{1+e^2-2escos(\alpha-\varepsilon)} =$ Nucleul integralei Poisson	$=1+2\frac{d}{d\alpha}[Bex(\alpha,s,\varepsilon)] = \frac{d(\theta+\beta)}{d\alpha} = \frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{Rex\alpha_2}{Rex\alpha_1}$

5.2.3 Derivatele funcţiei rex θ

Se obţin fără dificultate prin derivarea expresiei invariante a acestei funcţii (4.26).

Astfel, derivata r'= d(**rexθ**)/d**θ** depinde de tipul excentrului **E** şi sau **S**, dacă sunt puncte fixe în planul cercului unitate sau sunt variabile, ca şi de curba închisă pe care se definesc: dacă este un cerc, atunci **R** = constant, iar dacă este o altă curbă (eventual închisă) **R** este o variabilă.

Ca să cuprindem şi cazul la care ne vom referi în paragraful următor, vom considera cel mai general caz, în care toţi factorii sunt variabili ca funcţie de **θ.** Şi, mai

precis, vom considera ca **θ** variază uniform continuu, adică **θ = Ω.t**, iar dacă şi **Ω** este variabil, derivarea nu ridică probleme.
Se va nota cu **S** funcţia **rexθ** pe cercul de raza **R,** şi excentricitate reală **E(e,ε)**, adică

(5.92) $\mathbf{S_{1,2}} = \mathbf{R}.\mathbf{r_{1,2}} = \mathbf{R}.\mathbf{rex_{1,2}\theta} = \mathbf{R}.[-s.\cos\theta \pm \sqrt{1-s^2\sin^2\theta}\,]$
funcţie pe care o vom numi spaţiu.

Prima derivată a acesteia, pe care o denumim viteză, notată cu **V** (de la modulul vitezei) reprezentată în diferite ipostaze, anterior amintite, este:
R = ct şi **E** şi **S** puncte fixe în plan, adică **e = R. s, s** şi **ε** = constante.

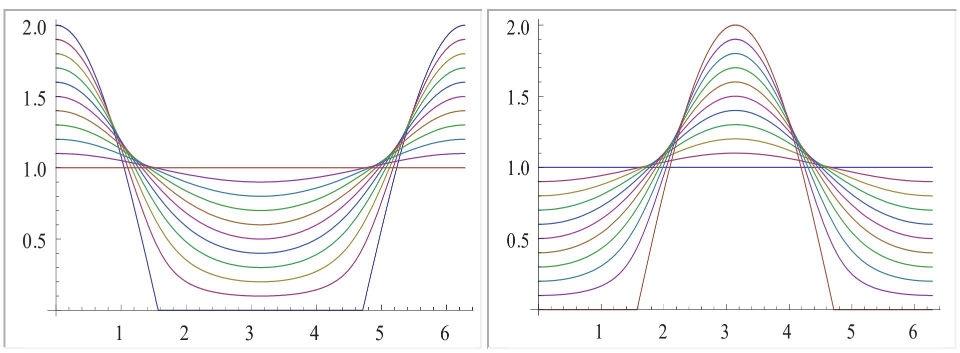
Rezultă

(5.93) $\mathbf{V_{1,2}} = \mathbf{R}.\frac{d(rex\theta)}{dt} = \mathbf{R}.\frac{d(rex\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{R}.\mathbf{\Omega}.d(rex\theta)/d\theta =$

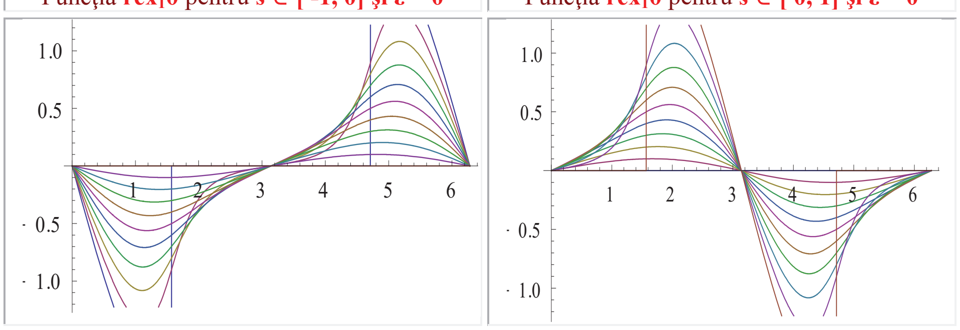
$$R\Omega[s.\sin(\theta-\varepsilon) \mp \frac{s^2\sin(\theta-\varepsilon).\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}] = R\Omega.s.\sin(\theta-\varepsilon.).dex_{1,2}\theta \quad \text{şi}$$

$$= \pm R\Omega.\sqrt{dex_{1,2}^2\theta - rex_{1,2}^2\theta} = \Omega e.\sin(\theta-\varepsilon).dex_{1,2}\theta = R.\Omega dex_{1,2}\theta.\sin\beta$$

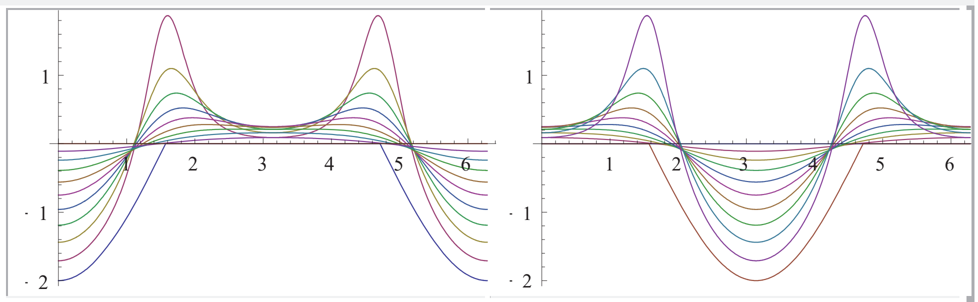
şi este o relaţie dintr-un caz mai des utilizat**.**



Funcţia $rex_1\theta$ pentru $s \in [-1, 0]$ şi $\varepsilon = 0$ | Funcţia $rex_1\theta$ pentru $s \in [0, 1]$ şi $\varepsilon = 0$



Prima derivată a **primei** determinări a FSM-CE $rex'_1\theta$



A doua derivata a **primei** determinari a FSM-CE **rex”$_1$θ**

Fig. 5.10,a Functia **rex$_1$θ** şi derivatele sale **rex'$_1$**θ şi **rex$_1$''θ**

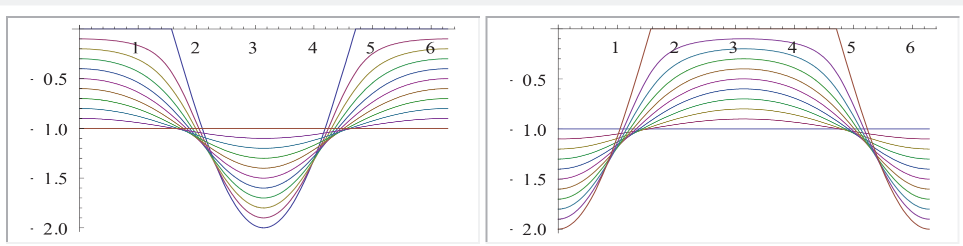
Graficele funcţiilor şi a primelor două derivate ale **FSM-CE** rex$_{1,2}$ **θ,** în funcţie de **θ** sunt prezentate în figura **5.10,a** pentru prima determinare **principală**, de indice **1** şi în figura **5.10,b** pentru cea de a doua determinare **secundara**, de indice **2**

Şi, în fine, cel mai general caz posibil, din care se pot deduce şi celelalte, inclusiv cazul anterior, în care derivatele în raport cu θ sunt notate cu “prim”, este

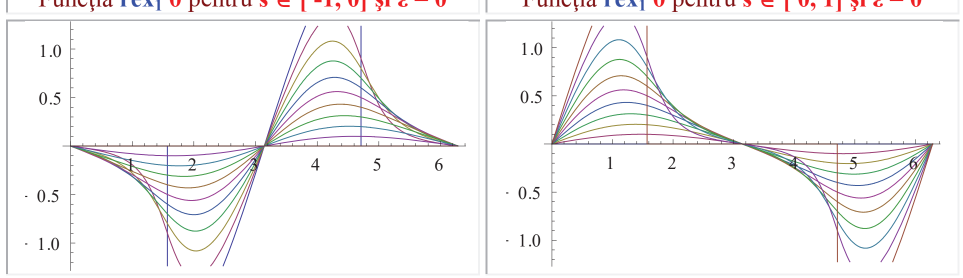
(5.94) $\mathbf{V_{1,2}} = d\mathbf{R}/dt.\ \mathrm{rex}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{R}.\ d(\mathrm{rex}\boldsymbol{\theta})/dt = \boldsymbol{\Omega}.[d\mathbf{R}/d\theta.\mathbf{rex\theta} + \mathbf{R}.d(\mathrm{rex}\boldsymbol{\theta})/d\boldsymbol{\theta}] =$

$= \boldsymbol{\Omega}.[\mathbf{R'}.\mathbf{rex\theta} + \mathbf{R}.\ \mathbf{rex'\theta}] = \boldsymbol{\Omega}.\{\mathbf{R'}.\mathbf{rex\theta} + \mathbf{R}[-\mathbf{s'}.\cos(\theta - \varepsilon) + \mathbf{s}.(1-\varepsilon')\sin(\theta - \varepsilon)$

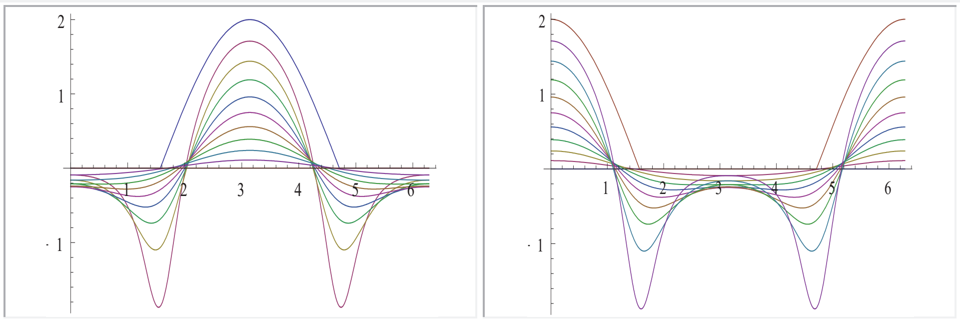
$$\mp \frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)[s'.\sin(\theta-\varepsilon) - s.(1-\varepsilon').\cos(\theta-\varepsilon)]}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}\ ]\}$$



Funcţia **rex$_1$ θ** pentru **s ∈ [-1, 0] şi ε = 0** Funcţia **rex$_1$ θ** pentru **s ∈ [0, 1] şi ε = 0**



Prima derivată a celei de a **doua** determinări a FSM-CE **rex’$_2$ θ**



A doua derivată a celei de a **doua** determinări a **FSM-CE rex”$_2$ θ**

Fig. 5.10,b Funcţia rex$_1$θ şi derivatele sale rex$_2$’θ şi rex$_2$‘’θ

A doua derivată în raport cu timpul, numai pentru primul caz, este notată cu **A** (de la modulul acceleraţiei) şi este:

(3.95) $\mathbf{A} = d\mathbf{V}/dt = (d\mathbf{V}/d\,\boldsymbol{\theta}).(d\,\boldsymbol{\theta}/dt) = \boldsymbol{\Omega}.\ d\mathbf{V}/d\,\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Omega}..\ \mathbf{V}' =$

$= \boldsymbol{\Omega}^2\,[e.\cos(\theta - \varepsilon).dex\boldsymbol{\theta} + e.\sin(\theta - \varepsilon).dex'\boldsymbol{\theta}\,] =$

$$= \boldsymbol{\Omega}^2\,[e.\cos(\theta - \varepsilon).dex\ \boldsymbol{\theta} + e.\sin(\theta - \varepsilon).\frac{e(R^2 - e^2).\sin(\theta - \varepsilon)}{[R^2 - e^2.\sin^2(\theta - \varepsilon)]^{\frac{3}{2}}}$$

în care, derivata funcţiei dex **θ**, în condiţiile unui excentru **S (s, ε)** punct fix este

(3.96) $$dex'\theta = \frac{d(dex\theta)}{d\theta} = \frac{s(1 - s^2).\sin(\theta - \varepsilon)}{[1 - s^2.\sin^2(\theta - \varepsilon)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1 - s^2)\sin\beta(\theta)}{\cos^3\beta(\theta)}$$

5.3 FSM-CE rexθ - expresia deplasării mecanismului motor bielă–manivelă sau manivelă – piston

1) Mecanismul motor bielă – manivelă centric

Deşi mecanismul motor bielă - manivelă (Fig.**5.11**) este extrem de utilizat, în special la acţionarea autovehiculelor, în literatura de specialitate se folosesc relaţii aproximative atât pentru **deplasarea S**, cât şi pentru **viteza V** şi **acceleraţia A**.

Practic, fiecare posesor de autoturism deţine informaţii despre acest mecanism de transformare a mişcării rectilinii oscilante a pistonului în mişcarea de rotaţie a arborelui cardanic, care-l transferă printr-un diferenţial la roţile motoare.

Anecdotic este faptul că deşi, iniţial, în literatura de specialitate, relaţia este dedusă sub forma exactă, care coincide cu expresia funcţiei rex$_1$**θ** de excentru negativ **(e < 0)**

(5.97) $\mathbf{S = R.\ rex\theta = -\,e\,.\cos\theta} + \sqrt{R^2 - e^2\sin^2\theta} = \mathbf{R.\ [-\,s.\cos\theta} + \sqrt{1 - s^2\sin^2\theta}\ \mathbf{]},$

în care

- **R = L** lungimea bielei;
- **e = — l** lungimea manivelei, **dacă ε = 0** sau, echivalent, **e = l şi ε** = π ;
- **θ** poziţia bielei faţă de axa **Ox** sau faţă de direcţia mişcării oscilante a pistonului.

FSM-CE rexθ nefiind cunoscută, pentru simplificarea relaţiei, s-a dezvoltat în serie de puteri radicalul şi s-au reţinut doar doi termeni.

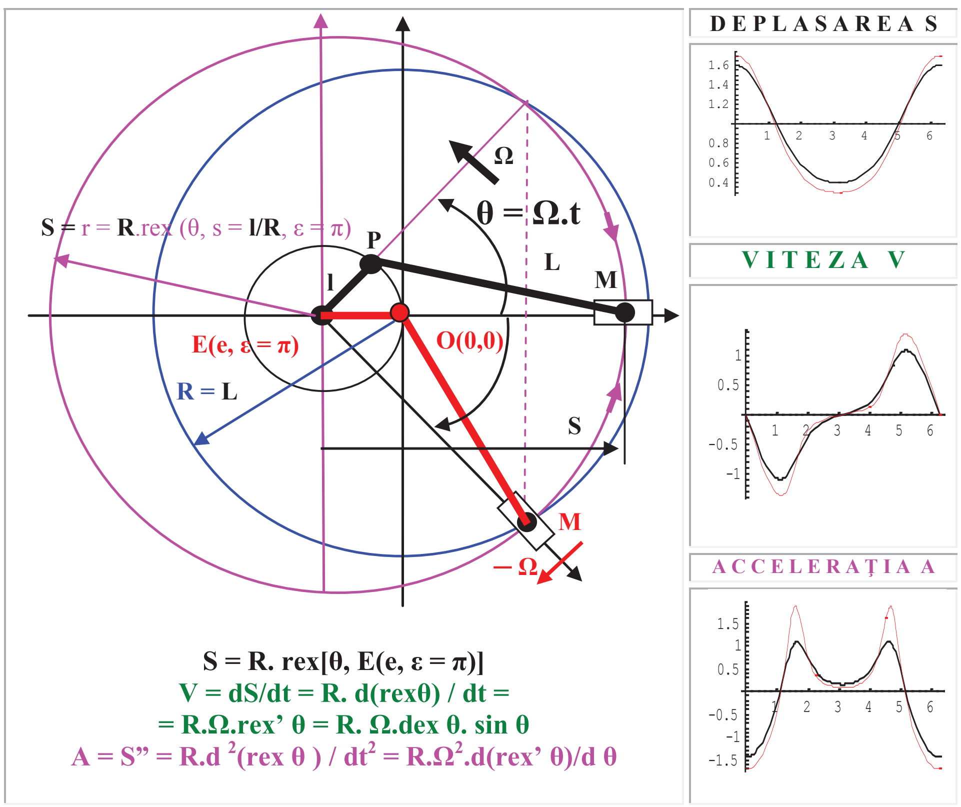


Fig.5. 11 Mecanismul motor bielă–manivelă centric cu graficele deplasare/spaţiu-viteză-acceleraţie corespunzătoare excentricităţii numerice s de **s = e / R = — 0,6 (negru)** şi **— 0,7 (rosu)** la **ε** =0 şi pozitivă pentru **ε = π**

Din relaţia 5.97 rezultă, astfel

(5.98) **S** $\cong R[s.\cos\theta + 1 - \frac{1}{2}s^2 \sin^2\theta - ...]$ relaţia uzuală din literatura, care arată că deplasarea ar varia după funcţiile matematice centrice **cosθ** şi **sin²θ** ceea ce este neadevărat, aşa cum se poate constata din alura spaţiului reprezentat de funcţia **rexθ,** pentru o excentricitatea reală egală cu cea numerică (**e** = **s** = **l** = - 0,6 şi - 0,7 şi **ε** = **0**) întrucât, la reprezentarea **spaţiului S**, **vitezei V** şi a **acceleraţie** A, s-a ales **R** = **L** = **1**.

Se ştie că mişcarea unui mecanism, în general şi a acestuia în particular, este aceeaşi dacă se roteşte manivela motoare de lungime **l** în jurul punctului fix **E** din **figura 5.11** cu **θ = Ω.t, iar** ghidajul pistonului rămâne fix, aşa cum este situaţia reală a mecanismului, sau se menţine manivela motoare **EO** fixă şi se dă o mişcare de rotaţie restului mecanismului în jurul punctului **O** cu **θ = + Ω.t,** sau cu **θ = - Ω.t.** În cel din urmă caz, se observă că deplasarea pistonului sau spaţiu **S** = **EM** reprezintă tocmai **FSM-CE rexθ** de excentricitate negativă, dacă se alege un **ε = 0** sau de excentricitate pozitivă, dacă se alege un **ε** = **π**, rezultatul fiind acelaşi.

Aşa cum **FMC** au derivate cunoscute şi **FSM-CE** **rexθ** de excentricitate negativă are derivatele care vor deveni cunoscute şi prin prezenta lucrare. Astfel, modulele vectorilor **viteza V** **şi** **acceleratie A** sunt prezentate, împreună cu deplasarea / **spaţiul S** în dreapta figurii **5.11** pentru două excentricităţi numerice, alese arbitrar de - 0,6 şi - 0,7.

Mecanismul anterior prezentat este unul **centric**, în sensul ca direcţia mişcării de translaţie alternativa a pistonului trece prin centrul de rotaţie **E** al manivelei motoare.

2) Mecanismul motor bielă – manivelă excentric

Un mecanism motor bielă - manivelă **excentric** are direcţia mişcării de translaţie alternativa a pistonului pe o dreaptă ce trece la o distanţă **a** de punctul fix **E** care este şi centrul de rotaţie al manivelei motoare **EP** (**Fig. 5.12**).

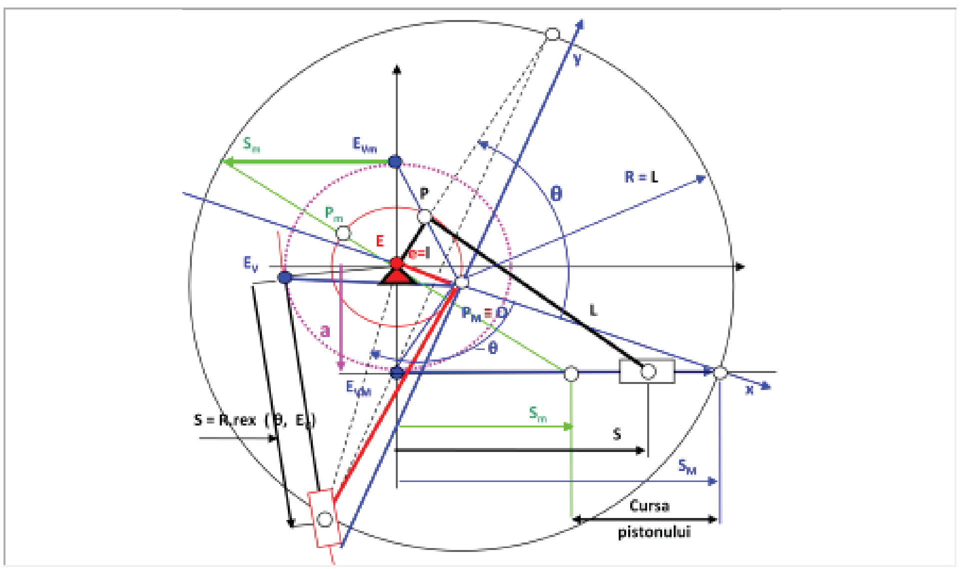


Fig. 5.12 Mecanismul bielă-manivela excentric

Dând o mişcare inversă întregului mecanism excentric, direcţia de translaţie va trece în permanenţă la aceeaşi distanţă **a** de **E**, adică va trece în permanenţă tangentă la un cerc **C_a(E,a)**, de rază **a** cu centrul în centrul de rotaţie fix **E. Aşa** cum s-a reprezentat în **figura 5.12,** punctul de tangenţă la cercul de rază **a** este un excentru variabil **E_V**. Poziţia iniţială este cea corespunzatoare deplasării maxime **S_M** faţă de care punctul **M**, de pe cercul de raza **R = L** se roteşte cu unghiul **— θ**.

Distanţa de la **E_V** la punctul **M**, de pe cercul de raza R **= L,** adică, lungimea distanţei **E_V M** este, prin definiţie, o **FSM-CE** radial excentric dar de excentru variabil **E_V**, funcţie multiplicată cu raza **R** = **L** = constantă a cercului.

În acest caz, **excentrul variabil E_V** se roteşte în jurul **excentrului fix E(e_F = l, $\varepsilon_F = \pi$)** . Excentrul fix **E** situându-se, aşa dar, pe semiaxa negativă, **x** rotită cu unghiul **ψ**

(5.99) **ψ** = arcsin[a/(**l** + **L**))] = arcsin[**a/(e** + **R)** faţă de orizontală, sau faţă de direcţia de mişcare a pistonului. **E_V(e_V ,ε_V)** se roteşte pe cercul de rază **a**, de excentricitate reală egală cu distanţa de la **O** la E_V şi de excentricitate numerică

(5.100) **s = e_V / R = OE_V / R**

Unghiurile polare, faţă de polul **O ≡ P_M** ale punctulelor $E_{V\,m}$, E_{VM} şi al unui punct curent oarecare E_V se pot determina tot cu ajutorul **FSM-CE** în cercul de raza a şi de excentru fix P_M ≡ **O**. Faţă de centrul **E** al cercului **C_a(E,a)** se cunosc unghiurile **α** la **centru** ale punctelor **P** de articulaţie dintre manivelă şi bielă în diferite poziţii şi prin relaţia

$$(5.101)\ \theta(\alpha)=\alpha+\beta(\alpha)=\left\{\begin{Bmatrix}\alpha+\arcsin\dfrac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}}\\ \alpha+\arctan\dfrac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}\end{Bmatrix}\right\}=\alpha+\sum_1^{\infty}\frac{s^n}{n}\sin n\varepsilon\,.$$

anterioară se determină unghiurile la excentru **θ(α)** care sunt tocmai unghiurile polare ale excentrului **ε**

Astfel

(5.102) **α_m = ψ + π/2** pentru punctul **E_{Vm}**, situat în partea superioară maximă a cercului **C_a(E,a)** şi care dă deplasarea minimă **S_m** ;

(5.103) **α_M = ψ + 3π/2** pentru punctul **E_{VM}** situat în partea inferioară minimă a cercului **C_a(E,a)** şi care dă deplasarea maximă **S_M**; iar pentru punctul curent

(5.104) **α=α_M — θ = ψ + 3π/2 — θ**, ţinând cont de rotaţia ansamblului mecanismului din poziţia iniţială (pentru **S_M** — maxim) cu **— θ**.

Excentricitatea reală **e_V** a excentrului **E_V(e_V =a, ε_V)** turnant este

(5.105) **s_V = e_V / R = a / R** şi este o **constantă faţă de E** fix, excentrul variabil **E_V** rotindu-se pe cercul de rază **a** = constant şi egală cu excentricitatea **mecanismului bielă-manivelă,** dar **variabilă** faţă de **O.** Ca urmare **ε_V** variază de la **ε_{Max}** poziţia corespunzătoare lui **S_{Max}** la **ε_{min}**, cea corespunzătoare lui **S_{min}**, măsurate, aşa cum este prezentat şi în figură, de la poziţia punctului / excentrului fix E.

Rezultă că distanţa de la **O** la **E_V** este variabilă şi reprezintă valoarea **excentricităţii reale de calcul e_C**, valoare ce se poate obţine prin însumarea corespunzătoare a celor două excentricităţi amintite anterior. Sau, folosind **FSM-CE** excentricităţile variabile de calcul sunt date, din nou, de funcţia **a.rex[θ(α)]** = **a.Rex(α)** în cercul de rază **a** şi de excentricitate reală **e** = **l** şi numerică **s** = **l**/**a.**

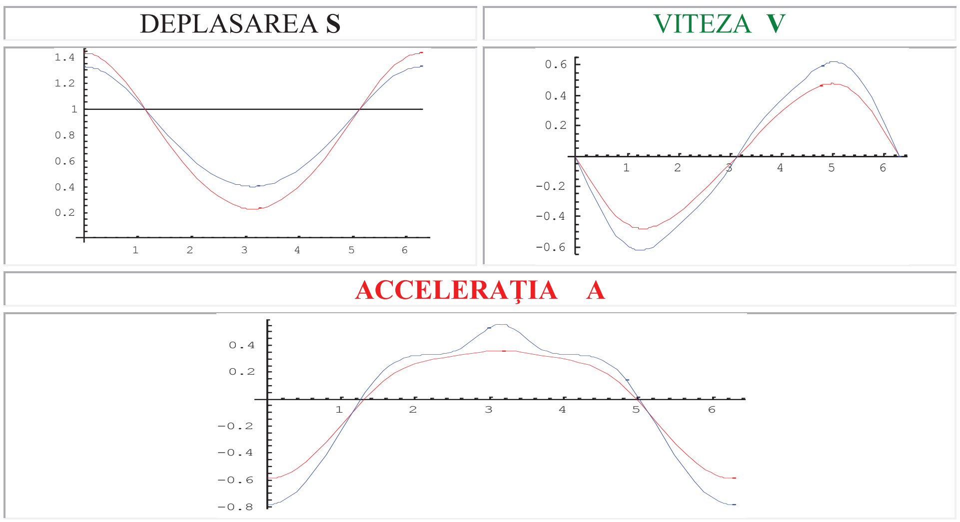


Fig. 5.13 Deplasarea, **viteza** şi **acceleraţia** mecanismului bielă-manivelă **excentric** cu lungimea bielei **L = 1**, lungimea manivelei **l = 0.4** (**albastru**) şi, respectiv, **0,5**(**rosu**), având excentricitatea **a = 0,2**

Aşa cum rezultă imediat din **figura 5.12**, pentru poziţia la deplasarea maximum a pistonului (S_{Max}) E_V se situează pe cercul de rază **a** în poziţia inferioară maximă. Ca urmare

(5. 106) $\theta_{Max} = 0 \rightarrow e_{CMax} = \sqrt{e_F^2 + e_V^2}$ şi $\varepsilon_{CMax} = [\pi + \arctan(e_V / e_F)] =$

$= [\pi + \arctan(a / l)]$, cele două excentricităţi, componente ale excentricităţii de calcul e_{CMax}, fiind cele două catete ale unui triunghi dreptunghic, iar direcţia lui $r_{Max} = S_{Max} = R.\mathrm{rex}\theta_{Max}$ este orizontală ($\theta_{Max} = 0$), adică pe direcţia ghidajului pistonului.

Pentru un alt punct extrem $M_{min} \subset C(O,R)$, diametral opus punctului $M_{Max} \subset C(O,R)$, corespunzator lui S_{min} şi pentru o valoare $\theta_{min} = \pi$, excentrul E_V se află situat în partea superioară a cercului de rază **a,** astfel că excentricitatea de calcul este aceeaşi, ca şi în cazul anterior ($e_{Cmin} = \sqrt{e_F^2 + e_V^2}$), iar unghiul de poziţie ε_{Cmin} al lui E_V faţă de **Ox** este

(5.107) $\varepsilon_{Cmin} = [\pi - \arctan(e_V / e_F)] = [\pi + \arctan(a / l)]$,

Pentru un punct curent $M \subset [M_{min}, M_{Max}]$ poziţia excentrului E_V faţă de **O** va fi dată de

(5.108) $$\varepsilon_C = \psi + 3\pi/2 - \theta + \arcsin\frac{l.\sin(\psi + 3\pi/2 - \theta)}{\sqrt{a^2 + l^2 - 2l.a.\cos(\psi + 3\pi/2 - \theta)}}$$

Nu vom continua în acest mod, pentru a nu complica în mod inutil rezolvarea problemei. E suficient că se ştie că şi acesta este un mod de rezolvare şi că are soluţii. **FSM-CE** radial excentric are, aşa cum s-a mai subliniat, şi avantajul multitudinii reprezentării lor.

Astfel, dacă în situaţia anterioară a unei raze **R = L** = constant şi a unui excentru E_V având **e** şi **ε variabile,** o observaţie atentă ne arată că se pot considera **FSM-CE** radial excentric pe un cerc de **rază variabilă** $R_V = \|PM\| = \|OM\|$, în care $M \subset C(O,R=L)$ şi care este tocmai deplasarea mecanismului bielă manivelă **centric**, având acelaşi excentru E_V, dar, care, faţă de noul centru **E,** are excentricitatea reală egală cu **a** şi **unghiul polar ε = 0**, iar unghiul la excentru E_V este egal în permanenţă cu **π/2** ; direcţia de oscilaţie a pistonului fiind în permanenţă tangentă la cercul de rază **a.**

În consecinţă, deplasarea pistonului poate fi exprimată extrem de simplu prin relaţia

(5.109) $S = R_V.\text{rex}[\pi/2, E_V(s_V = a / R_v, \varepsilon_V = 0)]$, în care

(5.110) $S = R_V = R.\text{rex}[\theta, s = l/R, \varepsilon = \pi)] = l.\cos\theta + \sqrt{L^2 - l^2.\sin^2\theta}$.

Pe baza relaţiei anterioare, deplasările mecanismului bielă-manivelă **centric**, sunt

(5.111) $S_M = R.\text{rex}[\theta = 0, E(e = l, \varepsilon = \pi)] = L + l = R_{VM}$

(5.112) $S = R.\text{rex}[\theta, E(e = l, \varepsilon = \pi)] = R_V$, pentru punctul curent **M** (**Fig. 5.11**) şi

(5.113) $S_m = R.\text{rex}[\theta = \pi, E(e = l, \varepsilon = \pi)] = L - l = R_{Vm}$

Ştiind expresia razelor variabile, rezultă deplasările **S** ale mecanismului bielă-manivelă excentric

(5.114) $S_{ME} = S_M.\ \text{rex}\ \pi/2 = \sqrt{R_{VM}^2 - a^2} = \sqrt{(L+l)^2 - a^2}$, deplasarea maximă

(5.115) $S_E = S.\text{rex}\pi/2 = \sqrt{[l\cos\theta + \sqrt{L^2 - l^2\sin^2\theta}]^2 - a^2}$, o deplasare curentă, oarecare şi deplasarea minimă

(5.116) $S_{mE} = S_m.\text{rex}\pi/2 = \sqrt{R_{Vm}^2 - a^2} = \sqrt{(L-l)^2 - a^2}$.

Rezultă cursa mecanismului bielă-manivelă excentric, ca diferenţă dintre deplasarea maximă şi cea minimă, adică

(5.117) $C = S_{ME} - S_{mE} = \sqrt{(L+l)^2 - a^2} - \sqrt{(L-l)^2 - a^2}$

Graficele deplasării, vitezei şi a acceleraţiilor pentru L = 1, l = 0, 4 şi 0,5, iar a/L = 0,2 sunt prezentate în **figura 5.13.**

5.4 Mecanismul cu camă cilindrică

Acest mecanism poate funcţiona cu tachet cu vârf ascuţit (**Fig. 5.14**) sau cu tachet cu taler sau cu rolă (**Fig. 5.15**).

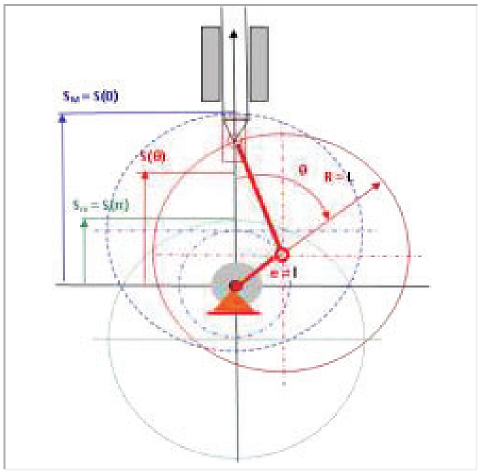


Fig. 5.14 Mecanismul cu camă circulară şi cu tachet cu vârf ascuţit şi mecanismul echivalent sau înlocuitor: bielă – manivelă centric

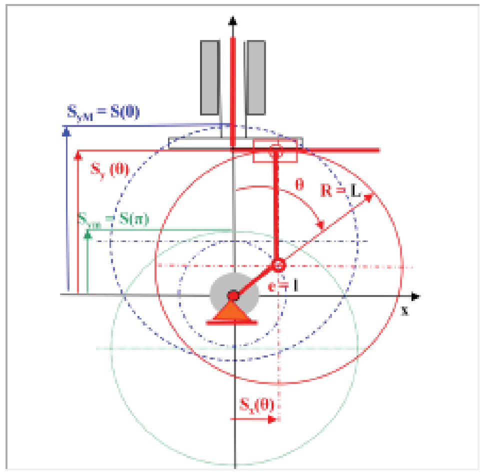
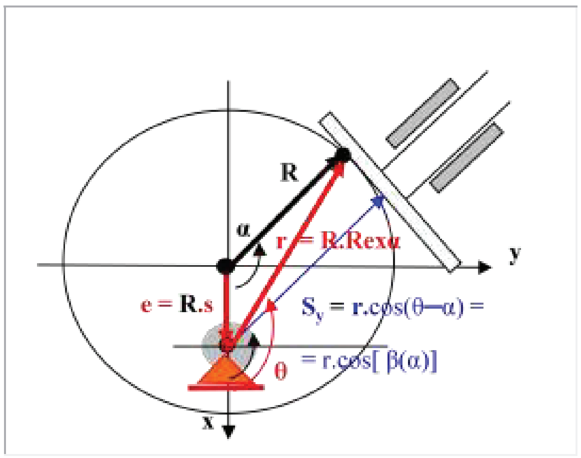


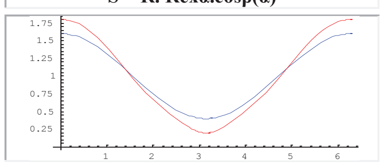
Fig. 5.15 Mecanismul cu camă circulară şi tachet plan împreună cu mecanismul înlocuitor / echivalent: mecanismul cu culisă de translaţie

În primul caz, aşa cum se poate observa fără dificultate din figură, mecanismul cu tachet cu vârf este echivalent cu mecanismul bielă – manivelă centric, studiat anterior. Ca urmare, **spaţiul**, **viteza** şi **acceleraţia** sunt aceleaşi:

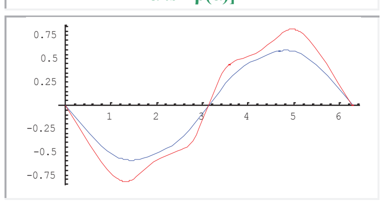
$S = R.rex\theta$, $V = R.\Omega.rex'\theta$ şi **$A = R.\Omega^2.rex\ ''\theta$** cu **$\theta = \Omega.t$.**



DEPLASAREA S
S = R. Rexα.cosβ(α)



VITEZA V = R.Ω [Rex'α.cosβ(α) - Rex α .sinβ(α)]



ACCELERAŢIA A = R.Ω² [Rex"cos β (α) – Rex'α .sinβ(α) — — Rex' α.sinβ(α) — Rex α. cos β(α)]

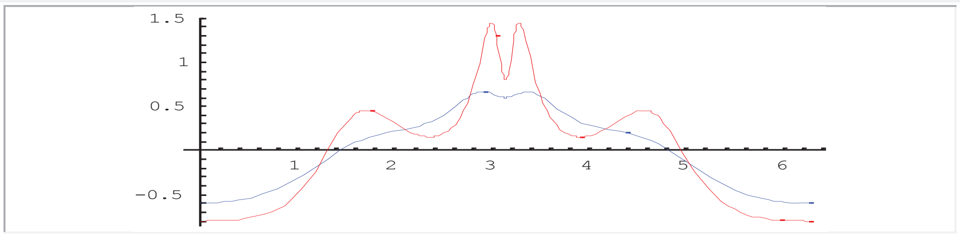


Fig. 5.16 Deplasarea, **viteza** şi **acceleraţia** mecanismului cu cama circulară şi tachet plan pentru **R = 1**, şi **E(0,6 ; 0) - albastru** şi **E(0,8 ; 0) – roşu**

Cursa acestui mecanism fiind

(5.118) **C=** $S_M - S_m = 2e = 2l$, dublul lungimii manivelei motoare şi, respectiv, dublul excentricităţii camei cilindrice denumită şi excentric circular.

Mecanismul cu tachet plan (**Fig. 5.15**) are, aşa cum se poate observa, aceleaşi deplasări extreme, pe direcţia y, maximă (S_{yM}) şi minimă (S_{ym}) şi pe cale de consecinţă, aceeaşi cursă $C = 2e = 2l$.

Distanţa de la centrul de rotaţie al camei circulare la centrul de rotaţie al culisei orizontale de translaţie este o funcţie radial excentrioca de **variabilă centrică** α , adică

(5.119) $r[\alpha = (\pi - \theta)] = R.\mathrm{Rex}\,\alpha.\cos\beta(\alpha) = R.\sqrt{1+s^2-2s..\cos\alpha}\,.\cos\beta(\alpha) =$

$$= R.\sqrt{1+s^2-2s..\cos(\pi-\theta)}\,\cos[\arcsin\frac{s.\sin(\pi-\alpha)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\pi-\alpha)}}]$$

pentru $E(s > 0, \varepsilon = 0)$ şi $\alpha = \pi - \theta$ aşa cum se arată în **figura.5.16**, în care s-a menţinut cama pe loc şi s-a rotit tachetul în jurul centrului de rotaţie, conform unui pincipiu cunoscut în teoria mecanismelor şi folosit şi anterior.

Pentru $\theta = 0 \rightarrow \alpha = \pi$ şi deplasarea maximă va fi

(5.120) $S_{yM} = r(0) = R.\sqrt{1+s^2+2s} = R.(1+s) = R + e$, iar pentru $\theta = \pi \rightarrow \alpha = 0$

şi rezultă deplasarea minimă

(5.121) $S_{ym} = r(\pi) = R.\sqrt{1+s^2-2s} = R.(1 - s)$, astfel cursa camei va fi

(5.122) $C_y = S_{yM} - S_{ym} = 2R.s = 2e$

Deplasările orizontale, pe direcţia x, sunt , pentru o poziţie curentă oarecare

(5.123) $S_x = R.s.\sin\theta = e.\sin\theta$ şi cele extreme sunt nule

(5.124) $S_{xM} = S_{xm} = 0$.

Deşi deplasările diverselor mecanisme cu came par asemănătoare, aşa cum este şi cazul din **figura 5.16**, vitezele şi, în special, acceleraţiile sunt acelea care diferenţiază net calitatea mişcărilor obţinute cu mecanisme cu came, ca şi, de altfel, multe alte mecanisme tehnice.

Motto : " Viteza este dimensiunea naturala a **timpului** "
A. Suarès, Variables

Capitolul 6

6. FUNCŢIA DERIVATĂ EXCENTRICĂ dexθ ŞI UNELE APLICAŢII MATEMATICE ŞI TEHNICE

Aşa cum s-a mai arătat, această funcţie face parte din aceeaşi grupă cu funcţia radial excentric **rexθ,** grupa **FSM-CE** independente de originea **O(0,0)** a sistemul de referinţă, astfel că funcţiile derivată excentrică, derivată elevată şi derivată exotică sunt aceleaşi**.**

Deşi nu este o „**funcţie rege**" precum funcţia **rexθ,** ea poate exprima funcţia de transfer de ordinul doi, a vitezelor, sau raportul de transmitere a turaţiilor tuturor mecanismelor plane cunoscute, aşa cum se va prezenta într-o aplicaţie, în continuare.

6.1 Coordonate excentrice

Fie cercul **C(R,O)** din **figura 6.1** şi excentrul **E(e, ε).**

Dreapta **d** de direcţie **θ**, cu axa **x,** a reperului excentric **xEy** şi cu axa **X** a reperului **centric XOY,** intersectează cercul în punctele **M_1** şi **M_2** sau **$M_{1,2}$** scrise concentrat.

Coordonatele punctelor **$M_{1,2}$** sunt, **simultan**, coordonate polare **$M_{1,2}$** ($\alpha_{1,2}$**, $R_{1,2}$**) **centrice** şi respectiv **$M_{1,2}(\theta, \rho_{1,2})$** coordonatele polare **excentrice** în care **raza polară $r_{1,2} \equiv \rho_{1,2}$**, dusă din excentrul **E(e,ε),** are expresia invariantă

$$
\begin{aligned}
(6.1)\qquad \rho_{1,2} &= R.rex\theta = R[-s.\cos(\theta-\varepsilon) \pm \sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}] = \\
&= -e\cos(\theta-\varepsilon) \pm \sqrt{R^2 - e^2.\sin^2(\theta-\varepsilon)}, in...care...e = s.R
\end{aligned}
$$

Presupunând **e < R,** adică **E(e,ε)** în interiorul discului circular de rază **R**, raza polară excentrică **$\rho_{1,2}$** este, aşa cum s-a mai afirmat, şi raza excentrică variabilă a cercului **C(O,R).** Dacă un **„compas inteligent"** are vârful în **E** şi **deschiderea variabilă $\rho_{1,2}$** după expresia (6.1), rotindu-se cu **θ ∈ [0, 2π]**, el va descrie integral cercul **C(O,R)** atât cu **ρ_1** cât şi cu **ρ_2**, diferenţa constând în punctele de început şi, evident, de sfârşit ale descrierii cercului, defazate între ele cu **π.** Daca **e** > **R**, atunci cercul se va descrie din două arce: primul cu **ρ_1** şi cu $\theta \in [\theta_i, \theta_f]$ şi al doilea cu **ρ_2** în domeniul $\theta \in [\theta_f, \theta_i]$.

Pentru excentricitate **s = e = 0 → $rex_{1,2}\theta$** = ± 1 şi ecuaţia cercului este cea cunoscută din matematica centrică, şi anume

(6.2) **$\rho_{1,2}$ = ± R** , deducându-se că ea este un caz particular, de **e = 0**, al ecuaţiei din matematica excentrică. Ceea ce ne-a permis să generalizăm definiţia cercului, ca fiind

Definiţie :

Cercul ***este curba plană a căror puncte se situaează la distanţa $\rho_{1,2}$ = R. $rex_{1,2}\,\theta$ faţă de oricare punct E din planul cercului, sau a cărui rază polară excentrica, din E, variază după funcţia R.$rex_{1,2}\theta$.***

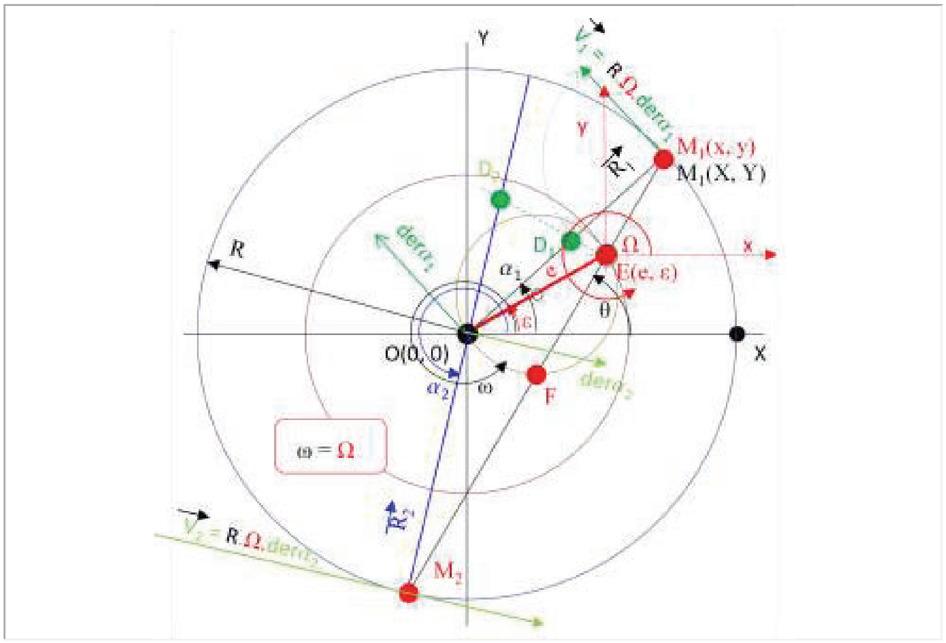


Fig. 6.1 **Coordonate centrice** şi **coordonate excentrice**

Coordonatele carteziene **centrice** sunt $\mathbf{M_{1,2}(X_{1,2},Y_{1,2})}$ şi coordonatele cartreziene **excentrice** sunt $\mathbf{M_{1,2}\,(x_{1,2},\ y_{1,2})}$, în care

(6.3) $\mathbf{M_{1,2}\,(X_{1,2}\,,\,Y_{1,2})}\begin{cases} X_{1,2} = R.\cos\alpha_{1,2} \\ Y_{1,2} = R.\sin\alpha_{1,2} \end{cases}$ şi coordonatele excentrice

(6.4) $\mathbf{M_{1,2}\,(x_{1,2}\,,\,y_{1,2})},\begin{cases} x_{1,2} = R.cex_{1,2}\theta \\ y_{1,2} = R.sex_{1,2}\theta \end{cases}.$

6.2. Funcţia derivată excentrică dex θ ca modul al derivatei vectorului radial excentric de variabilă excentrică θ : (rexθ. radθ)' = dexθ.derα

Dacă excentrul **E(e,ε)** este un punct fix, în planul cercului **C**, atunci vectorul de poziţie al lui **E** $\vec{e}$ = R. $\vec{s}$ este vectorul constant în modul şi direcţie şi ecuaţia vectorială a punctelor $\mathbf{M_{1,2}}$ ca şi a cercului **C(O,R)** este

(6.5) $\vec{R} = \vec{e} + \vec{\rho}_{1,2}$

Derivând ecuaţia (6.5), în raport cu timpul t, se obţine

(6.6) $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}}$ sau $\dot{\vec{v}}_{1,2} = \frac{d\vec{\rho}_{1,2}}{dt} = \vec{V}_{1,2} = \frac{d\vec{R}_{1,2}}{dt}$, ceea ce arată că vitezele punctelor $\mathbf{M_{1,2}}$ exprimate în coordonate centrice sau excentrice, pe cercul **C(O,R)**, sunt aceleaşi. Rezultat aşteptat, întrucât cei doi vectori de poziţie exprimă poziţia aceloraşi puncte pe aceeaşi curbă hodograf, însă din două origini / puncte diferite **O** şi, respectiv, **E**.

Dacă variabila excentrică **θ** este variabila motoare, dreapta **d** rotindu-se în jurul excentrului **E** cu viteza **unghiulară constantă Ω = dθ/dt**, atunci modulele vitezelor unghiulare **variabile** $\boldsymbol{\omega_{1,2}}$ ale punctelor $\mathbf{M_{1,2}}$ pe cerc sunt:

(6.7) $\boldsymbol{\omega_{1,2}} = \mathbf{R.\Omega}\ \mathbf{dex_{1,2}}\theta = \mathbf{R.}\ \frac{d\alpha_{1,2}}{dt} = R.\frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = R.dex_{1,2}\theta.\Omega$ **,**

vitezele fiind exprimate de **FSM-CE** derivat excentric $\mathbf{dex_{1,2}}$ de variabilă excentrică **θ.**

Dacă, în timp ce dreapta **d** se roteşte cu viteza unghiulară constantă **Ω** iar excentrul **E** se deplasează pe o curbă oarecare, după o anumită lege, având viteza la un moment dat $\mathbf{V_E}$, atunci vitezele punctelor $\mathbf{M_{1,2}}$ pe cercul **C(O,R)** vor fi date de o relaţie asemănătoare, în care **FSM-CE dexθ** este de excentru variabil.

Situaţia este prezentată în **figura 6.2.** În figură sunt prezentate, pentru comparaţie, atât vitezele pentru un excentru fix $\mathbf{E_F}$, cât şi pentru cel variabil.

Cunoscându-se, vector viteza **V** tangent în **M** la cercul **C**(R,O), adică de direcţie **derα,** expresia generală a modulului vitezei este

(6.8) $\mathbf{V} = \mathbf{R}.\omega = \mathbf{R}.\ d\alpha/dt = \mathrm{R}\ \frac{d\alpha}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{R}.\boldsymbol{\Omega}.d\alpha/d\theta = \mathbf{R}.\ \boldsymbol{\Omega}.\ \mathrm{dex}\theta$

Este necesar să se determine expresia **FSM-CE dexθ** pentru cel mai general caz posibil, în care excentrul **E(e,ε)** se deplasează pe o curbă oarecare, adică **e** şi **ε** sunt variabile.

Notând cu $\mathbf{V_E}$ **modulul** vectorului viteză $\vec{V_E}$ al excentrului mobil $\mathbf{E_V}$ **compus din** $\dot{\vec{e}}$**,** o componentă (în **modul**) a vitezei lui **E** la un moment dat, vector unitate/fazor de direcţie **rad ε** şi cu

(6.9) $\dot{\vec{\varepsilon}} = \frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\varepsilon}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \Omega\frac{d\vec{\varepsilon}}{d\theta}$ componenta în **direcţie,** dată de produsul vectorial $\dot{\vec{\varepsilon}} \times \vec{e}$, a vectorului excentricitate **e** (vector **e.radε**), de direcţie normală pe vectorul $\dot{\vec{e}}$, deci de direcţiea fazorului **derε = rad(ε + π)**, expresia funcţiei **dexθ** de excentru variabil va fi

(6.10) $\mathrm{dex}_{1,2}\boldsymbol{\theta} = d\alpha_{1,2}/d\boldsymbol{\theta} = d\{\boldsymbol{\theta} \mp \arcsin[s.\sin(\boldsymbol{\theta}-\varepsilon)]\}/d\boldsymbol{\theta} = d\{\boldsymbol{\theta} \mp \arcsin[\frac{e}{R}.\sin(\boldsymbol{\theta}-\varepsilon)]\}/d\boldsymbol{\theta} =$

$$= 1 \mp \frac{\frac{1}{R}\frac{ds}{d\theta}\sin(\theta-\varepsilon) + \frac{s}{R}\cos(\theta-\varepsilon)\left(1-\frac{d\varepsilon}{d\theta}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{s}{R}\right)^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} = 1 \mp \frac{s'\sin(\theta-\varepsilon) + s(1-\varepsilon')\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{R^2-s^2.\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$$

în care, s-au notat cu accent derivatele în raport cu variabila excentrică motoare **θ.**

Pe lângă componentele anterior definite ale vitezei excentrului $\mathbf{E_V}$, pot fi definite şi componentele pe direcţiile vectorilor unitate (versori sau, mai precis, fazori) **radθ** şi **derθ.**

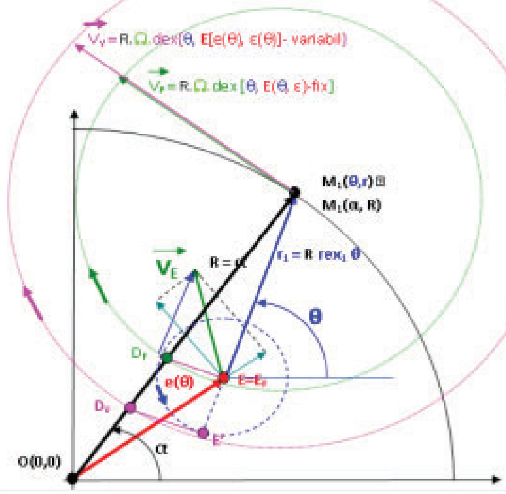


Fig.6.2 Vitezele în cazul unui excentru **E** variabil

Se observă din figură că viteza punctului $\mathbf{M_1}$ pe cercul **C(O,R)** nu se modifică prin deplasarea excentrului $\mathbf{E_V}$ pe direcţia **radθ**, deoarece poziţia punctului $\mathbf{M_1}$ pe cercul **C** rămâne ne modificată (aceeaşi), ci numai prin deplasarea lui pe oricare altă direcţie, în special pe una perpendiculară, de direcţie a versorului / fazorului **derθ** prin care $\mathbf{M_1}$ primeşte o mişcare suplimentară pe direcţia mişcării.

Se observă că relaţia (6.10) poate fi descompusă în relaţia lui **dexθ** de excentru considerat punct fix **($\mathbf{E_F}$)**, de modul egal cu segmentul $\mathbf{D_FM}$ de pe direcţia razei centrice **R**, pe cercul de rază **R** şi un termen care exprimă proiectţa lui $\mathbf{V_E}$ pe aceeaşi direcţie **OM,** reprezentând segmentul $\mathbf{D_VD_F}$ din figură.

Derivata $d\alpha_{1,2}/d\theta = \text{dex}_{1,2}\,\theta$, într-un caz foarte general este

$$(6.11)\quad \text{dex}_{1,2}\,\theta = 1\ \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{R^2 - s^2.\sin^2(\theta-\varepsilon)}} \mp \frac{s'.\sin(\theta-\varepsilon) - s.\varepsilon'.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{R^2 - s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} =$$

$$= \text{dex}_{1,2}(\theta, E_F) \mp \frac{s'.\sin(\theta-\varepsilon) - s.\varepsilon'.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{R^2 - s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} = \mathbf{D_fM_{1,2}} + \mathbf{D_{1,2v}D_{1,2\,f}}\ .$$

Graficele **FSM-CE dexθ** şi de excentru **S** punct fix, adică **s** şi **ε** → constante, sunt prezentate în **figura 6.3.**

Pentru un excentru fix şi/sau variabil funcţia dex θ are expresiile

(6.12) **dexθ = 1 –{ [s.cos(θ — ε) –s.ε'cos(θ — ε) +s'.sin (θ — ε)}/del(θ — ε)**

S (s, ε) → fix

S [s = ct, ε(θ)] → variail

pe un cerc de raza s

S [s(θ), ε(θ)] variabil dar definită pe cercul **R = ct**

Dacă şi cercul unitate se înlocuieşte cu o altă curbă închisă **R(θ),** atunci la expresia anterioară se mai **adaugă** termenul / expresia

(6.13) **— R'(θ)(1 — 1 / R(θ)).s.sin(θ — ε) / del(θ — ε)**

În figura **6.3** se poate remarca, pentru **s = ± 1, ε = 0** şi **ε = π/2** funcţiile dreptunghiulare perfecte de amplitudine **2**. Dacă scădem o unitate din aceste funcţii, se obţin funcţii simetrice faţă de axa **θ**; noua funcţie (**dexθ — 1)** fiind cuprinsă în intervalul de valori **[-1, +1**], ca şi **FCC** cos **θ** şi coqθ, precum şi sin **θ.**
Derivatele funcţiilor dexθ, de excentru **S** punct fix, sunt prezentate în figura **6.4.**

Aşa cum se va prezenta într-un capitol în continuare, funcţia **dexθ** intră în expresia derivatelor celorlalte **FSM-CE** precum cex**θ**, sex**θ** ş.a.

Anticipând, se poate arăta că derivatele **FSM-CE** **cexθ** şi **sexθ** sunt:

$$(6.14)\quad \begin{cases} cex'\theta = \dfrac{d(cex\theta)}{d\theta} = \dfrac{d(\cos\alpha)}{d\alpha}.\dfrac{d\alpha}{d\theta} = dex\theta.(-\sin\alpha) = -dex\theta.sex\theta \\ sex'\theta = \dfrac{d(sex\theta)}{d\theta} = \dfrac{d(\sin\alpha)}{d\alpha}.\dfrac{d\alpha}{d\theta} = dex\theta.(+\cos\alpha) = +dex\theta.cex\theta \end{cases}$$

Se observă că pentru **s = 0 → θ = α, β = 0,** dexθ = 1, sexθ = sinθ, cexθ = cosθ şi din (6.14) rezultă derivatele cunoscute ale **FCC** cos'θ = — sinθ şi sin'θ = cosθ.

6.3 Derivatele funcţiei dexθ

Considerând un excentru **S** punct fix, adică **s** şi **ε** constante, prima derivată are expresia, mai frecvent utilizată

$$(6.15)\quad \mathbf{dex'\theta} = [1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}]' = \frac{s(1-s^2)\sin(\theta-\varepsilon)}{[1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)]^{3/2}}$$

şi curbele din **figura 6.4**.

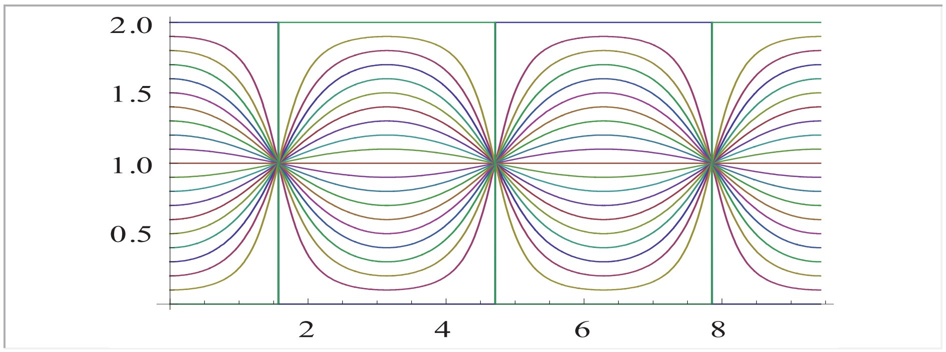
Deoarece, **α** = θ — β şi dex**θ** = d**α** / d**θ** = 1 — d**β**/dθ, rezultă că

$$(6.16)\quad d\beta_{1,2}/d\theta = d(bex_{1,2}\,\theta)/d\,\theta = \mathbf{bex'_{1,2}\,\theta} = \mp\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$$

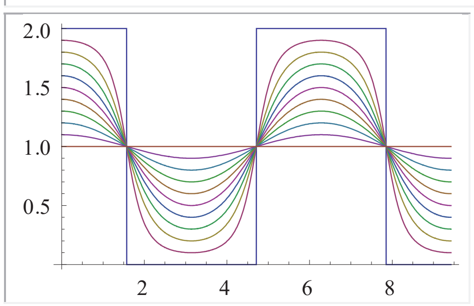
(6.17) dex'**θ** = — $d^2\beta/d\theta^2$ = — d^2\{arcsin[s.sin(θ — ε)]\}/d$\boldsymbol{\theta}^2$ astfel că

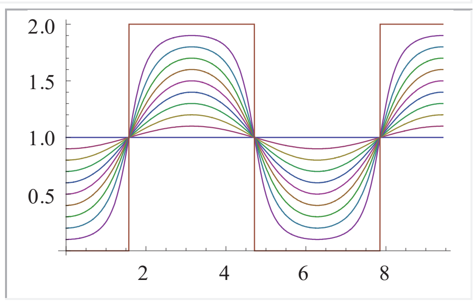
$$(6.18)\quad d(bex\boldsymbol{\theta})/d\,\boldsymbol{\theta} = \mathbf{bex'\theta} = -\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$$ şi

(6.19) $\quad d^2(\text{bex}\ \theta)/d\theta^2 = \mathbf{bex''\theta} = \dfrac{s(1-s^2)\sin(\theta-\varepsilon)}{[1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)]^{3/2}}$.



s∈ [-1, +1]





s∈ [-1, 0] s∈ [0, +1]

Fig. 6.3. Graficele funcţiilor **dex₁θ** pentru un excentru **S** [**s** ∈ [-1, +1] şi **ε** = 0], fix şi θ ∈ [0, 3π] - **sus** şi pentru un excentru fix şi θ ∈ [0, 2π]- **jos.**

Prin derivarea relaţiei (6.15) se obţine a doua derivată a funcţiei dex**θ**

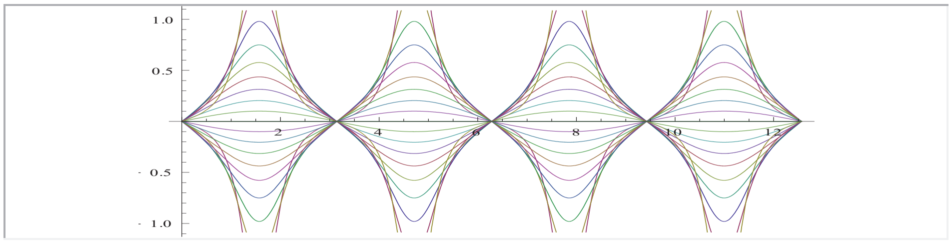
(6.20) $\quad d^2(\text{dex}\ \theta) / d\,\theta^2 = \text{dex}\ ''\theta =$

$$\pm\frac{s.(1-s^2)\cos(\theta-\varepsilon)[1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)-3s^2\sin(\theta-\varepsilon)]}{[1-s^2.\sin^2(\theta-\varepsilon)]^{3/2}}$$

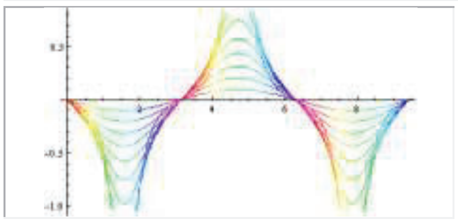
cu graficele din **figura** 6.5.

FSM-CE $\text{dex}_{1,2}$ **θ** reprezintă, aşa cum s-a mai afirmat, viteza punctelor $\mathbf{M}_{1,2}$ pe cercul **C(O, R=1).** Ca urmare $\mathbf{dex'}_{1,2}\boldsymbol{\theta}$ va reprezenta modulul vectorului primei acceleraţii, iar $\mathbf{dex''}_{1,2}\boldsymbol{\theta}$ va reprezenta modulul vectorului celei de a doua acceleraţii.

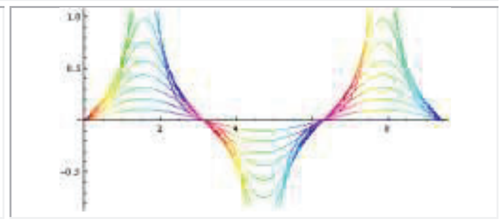
Se observa că, atât funcţia dexθ cât şi derivatele sale de e > 0 şi e < 0, sunt simetrice faţă de axa Oy .



s∈ [-1, +1] şi **θ ∈ [0, 3π].**

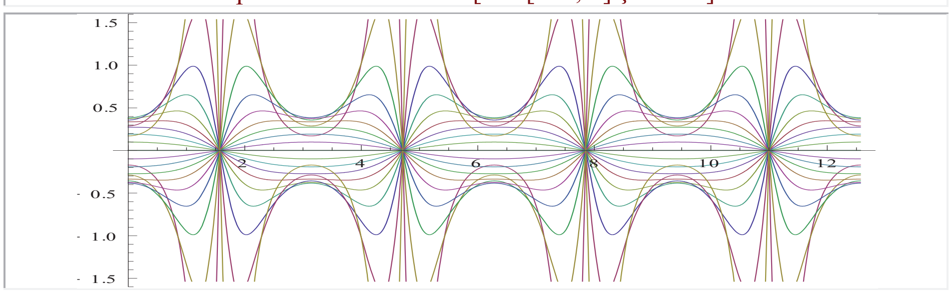


s∈ [-1, 0] şi **θ ∈ [0, 2π].**

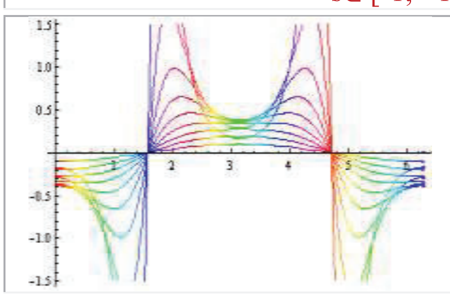


s∈ [0, +1] şi **θ ∈ [0, 2π].**

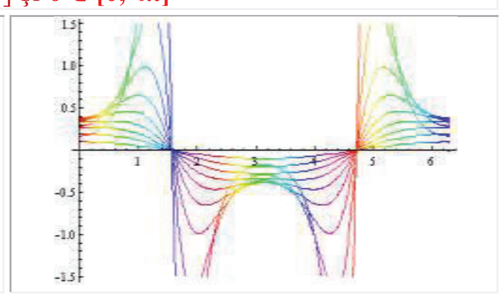
Fig. **6.4** Prima derivată a funcţiei **dex θ: dex' θ = d²α / dθ²** de excentru **S(s, ε) fix** pentru un excentru **S** [**s** ∈ [—1, 0] şi **ε** = 0]



s∈ [-1, +1] şi **θ ∈ [0, 4π]**



s∈ [-1, 0] şi **θ ∈ [0, 2π]**



s∈ [0, +1] şi **θ ∈ [0, 2π]**

Fig. 6.5 A doua derivată a funcţiei **dexθ: dex''θ = d²(dex)/dθ² = d³α/dθ³** de excentru **S(s, ε) fix** pentru un excentru **S**[**s** ∈ [—1, +1] şi **ε** = 0

PRIMA DERIVATĂ	
$\frac{d}{d\theta}(\text{dex}\theta)$ = = dex'θ	D[1- s Cos[t] / Sqrt[1- (s Sin[t])^2], t]
	- ((s^3 Cos[t]^2 Sin[t]) / (1-s^2 Sin[t]^2)$^{3/2}$) + (s Sin[t]) /$\sqrt{1-s^2 Sin^2[t]}$
SIMPLIFICARE	FullSimplify[-((s^3 Cos[t]^2 Sin[t])/(1-s^2 Sin[t]^2)$^{3/2}$) + (s Sin[t])/ $\sqrt{1-s^2 Sin^2[t]}$]
$\frac{d}{d\theta}(\text{dex}\theta)$ =	-((s (-1+s^2) Sin[t])/(1-s^2 Sin[t]^2)$^{3/2}$)
DERIVATA A DOUA	
$\frac{d^2}{d\theta^2}(\text{dex}\theta)$ =	D[-((s (-1+s^2) Sin[t])/(1-s^2 Sin[t]^2)$^{3/2}$),t]
	-((3 s^3 (-1+s^2) Cos[t] Sin[t]^2)/(1-s^2 Sin[t]^2)$^{5/2}$)- (s (-1+s^2) Cos[t])/(1-s^2 Sin[t]^2)$^{3/2}$
SIMPLIFICARE	FullSimplify[-((3 s^3 (-1+s^2) Cos[t] Sin[t]^2)/(1-s^2 Sin[t]^2)$^{5/2}$) -(s (-1+s^2) Cos[t])/(1-s^2 Sin[t]^2)$^{3/2}$]
$\frac{d^2}{d\theta^2}(\text{dex}\theta)$ =	(4 $\sqrt{2}$ s (-1+s^2) Cos[t] (-1-s^2+s^2 Cos[2 t])) / (2-s^2+s^2 Cos[2 t])$^{5/2}$
Derivarea automată cu **Matematica 6** (**Stephan Wolfram**)	

6.4 MIŞCAREA CIRCULARĂ EXCENTRICĂ (MCE)

1. Introducere

Mişcarea circulară excentrică (**MCE**) este o mişcare, în general, neuniformă a unor puncte pe cerc, dirijată dintr-un pol **E**, expulzat din centrul cercului **O(0,0)** şi denumit **excentru**/ex-centru.

Este aceeaşi „*mişcare*” prin care, dintr-un singur domeniu, existent în matematică, şi pe care, acum, îl denumim **centric**, s-au născut o infinitate de domenii **excentrice** ale matematicii.

Apariţia **supermatematicii** permite descrierea mişcării circulare excentrice; determinarea vitezelor şi a acceleraţiilor pe cale analitică sau pur geometrică, denumită **cinematica geometrică**, aşa cum se va prezenta în continuare.

Mişcarea este obiectul de studiu al tuturor domeniilor ştiinţifice. Ea este strâns legată de de spaţiu şi de timp. Mişcarea mecanică este schimbarea în timp a poziţiei corpurilor, sau a părţilor sale, în raport cu alte corpuri, alese drept sisteme de referinţă.

Un corp, de dimensiuni foarte mici, neglijabile în raport cu alte corpuri mult mai mari, se poate asimila cu un punct. Punctele pot fi fixe sau într-o mişcare oarecare.

Spaţiul reflectă raportul de coexistenţă dintre obiecte şi fenomene, sau părţi ale acestora, indicând întinderea, sau **dimensiune de gabarit** şi poziţiile relative sau distanţele dintre obiecte, sau părţi ale acestora, denumite **dimensiuni de coordonare**.

Poziţia obiectelor în spaţiu depinde de coordonate ce pot fi dimensiuni **liniare**, denumite de **localizare (x, y, z)** şi dimensiuni **unghiulare** (θ, φ, ψ) sau (A, B, C - cum sunt notate în robotică), denumite de **orientare** a obiectului în spaţiu.

Localizarea şi **orientarea** determină **poziţionarea** în spaţiu şi sunt cei doi parametri ai unui vector: **modulul** - care ***localizează*** vârful vectorului, în raport cu originea sa, sau a unui punct în raport cu un alt punct; distanţa dintre puncte constituind **modulul şi argumentul** – care indică orientarea vectorului în spaţiu.

Denumirile anterioare, subliniate, numesc aceleaşi mărimi în diverse domenii ale ştiinţei şi / sau tehnicii, printre care, dimensiunile de gabarit şi cele de coordonare, ca şi localizarea şi orientarea sunt, din păcate, neglijate sau insuficient utilizate.

Timpul este expresia duratei de trecere a obiectelor în dreptul diverselor repere şi de coexistenţă a fenomenelor, care permite sesizarea simultaneităţii şi succesiunii lor.

Timpul este perceput numai dacă este ocupat şi trecerea lui este sesizabilă numai prin schimbarea a ceea ce îl ocupă; remanenţa unui obiect poate fi observată numai prin comparaţie cu cele care se schimbă şi alături de care coexistă; imaginea coexistenţei în timpul pur nu există. În spaţiul pur nu există schimbare, pentru că orice schimbare sau modificare presupune o succesiune, care este posibilă numai în timp.

Coexistenţa nu există în timp şi succesiunea nu există în spaţiu.

Cele două forme –timp şi spaţiu– sunt fundamental diferite: ce este important pentru o formă este lipsit de valoare pentru cealaltă.

Ca actori, timpul şi spaţiul sunt aceia care dezvoltă universul în haos. Se poate demonstra că haosul şi, ca şi ordinea, absolute sunt unul şi acelaşi lucru. Într-un moment anterior bing-bang-ului, spaţiul nu există din cauza haosului absolut şi timpul nu există din cauza ordinii perfecte / absolute (v. Cap.1).

O asimetrie, cât de mică, schimbă perfecţiunea ordinii şi apare timpul, iar prima ordonare relativă a două puncte, ca de exemplu, centrul **O** şi excentrul **E**, face posibilă apariţia simultană şi a spaţiului. Unde există spaţiu şi timp, există şi matematică şi mecanică şi alte ştiinţe.

Timpul şi spaţiul, astfel apărute, sunt ale supermatematicii, care s-a născut doar din deplasarea polului **E** din centrul **O**, în care l-a plasat **Euler**. Astfel, toate obiectele matematice s-au multiplicat de la unul la infinit.

Se admite că natura şi tehnica sunt destul de departe de ceea ce se înţelege prin perfecţiune. Ca urmare, nici una din mişcările circulare – dirijate din centrul **O** al cercului şi denumite **centrice** – nu va fi, în realitate, perfect centrică, ci, datorită imperfecţiunilor tehnice, a erorilor de localizare relativă a axei de rotaţie, a jocurilor şi a multor altor cauze, mecanismele cu culisă circulară şi/sau oscilantă nu vor fi acţionate exact din centrul de rotaţie **O** al cercului ci dintr-un alt punct excentric **E**, situat la distanta **e**, denumită excentricitate reală, de **O** şi expulzat pe direcţia **ε**.

Dovedind că toate mişcările din natură şi implicit cele din tehnică sunt, de fapt, **mişcări circulare excentrice**. O **MCE** pentru **e → 0** degenerează într-o **MCC**.

Excentricităţiile numerice liniare **s = k = e / R** ale orbitelor planetelor sunt foarte mici. Pentru **e = s = k = 0** orbita este circulară. O elipsă cu k foarte mic este asemănătoare cu un cerc. Dacă distanţa de la focar la centrul este o mărime mică, de ordinul întâi, atunci diferenţa dintre semiaxe este de ordinul doi $[(b/a)^2 = 1 - k^2]$.

Excentricitatea numerică a orbitei planetei **Tera** este **k = 0,0016**. Din acest motiv, **Kepler** a formulat prima sa lege în modul următor: „***planetele se învârtesc în jurul soarelui pe cercuri, dar Soarele nu se găseşte în centrul cercurilor***”. Aceasta este mişcarea circulară excentrică. Ea a fost definită, deci, de **Kepler** şi se poate studia deosebit de simplu şi elegant cu ajutorul funcţiilor **SM circulare excentrice**.

2. Poziţia pe traiectorie în MCE

Notăm cu **W** punctele de pe cercul unitate (R = 1) şi cu **M** de pe un cerc oarecare de rază **R**. Ele se pot suprapune printr-o transformare homotetica **H (O, R)** de centru **O** şi de raport k = **R**. Toate mărimile cinematice ale lui **M** pot fi deduse din cele ale lui **W** prin amplificare cu **R**. De aceea, se va insista pe cercul unitate, pe care sunt definite şi funcţiile trigonometrice excentrice (FTE sau **FCE**).

MCE a fost utilizată, fără a fi denumită astfel, la obţinerea unor mişcări oscilante neliniare [4], a căror soluţii sunt date de cexθ, sexθ şi combinaţile liniare ale acestora.

Cosinusul şi sinusul excentrice reprezintă proiecţiile mişcării celor două puncte $\mathbf{W_{1,2}}$ de intersecţie a cercul unitate **CT** cu dreapta **d**, turnantă în jurul excentrul **S(s, ε)** cu viteza unghiulară **Ω**, dreaptă care face unghiul **θ** cu axa x, denumit variabilă (motoare) excentrică. Punctul $\mathbf{W_1}$ = **CT** $\cap$ $\mathbf{d^+}$ şi $\mathbf{M_1}$ = **C(O,R)** $\cap$ $\mathbf{d^+}$ este determinarea principala şi $\mathbf{W_2}$ = **CT** $\cap$ $\mathbf{d^-}$ sau $\mathbf{M_2}$ = **C(O,R)** $\cap$ $\mathbf{d^+}$ este determinarea secundară.

Coordonatele polare ale celor două puncte faţa de centrul **O(0,0)** sunt $\mathbf{W_{1,2}}$ **(R,** $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ **)** iar faţa de **S(s, ε)** sunt $\mathbf{W_{1,2}}$ **(**$\mathbf{r_{1,2}}$**, θ),** în care **R** este raza cercului **CT(O,R=1)** şi $\mathbf{r_{1,2}}$ sunt razele polare ale punctelor din **S**, denumite şi **raze excentrice**, date de funcţia radial excentric, în funcţie de **θ** notată $\text{rex}_{1,2}\theta$, sau, în funcţie de **α**, notată $\mathbf{Rex\alpha_{1,2}}$ a căror expresii sunt cunoscute din capitolul anterior:

$$\mathbf{R}.\text{rex}_{1,2}\,\theta = -e.\cos(\theta-\varepsilon) \pm \sqrt{R^2 - e^2\sin^2(\theta-\varepsilon)} =$$

$$\mathbf{R}\,[-s.\cos(\theta-\varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}\,] \qquad \text{şi}$$

$$\mathbf{R}.\text{Rex}\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{R^2 + e^2 - 2eR\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)} =$$

$$= \pm\,\mathbf{R}.\sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}$$

Această funcţie este, repetăm, o adevarată funcţie „rege”, deoarece cu ea se pot exprima ecuaţiile tuturor curbelor plane cunoscute. Ea reprezintă şi expresia distanţei dintre două puncte din plan (**E** şi **$W_{1,2}$** pentru R = 1 şi, respectiv, **$M_{1,2}$** pentru R ≠ 1), în coordonate polare, aşa cum a observat Prof.dr. mat. **Octav Em. Gheorgiu**.

Cele două funcţii $rex_{1,2}\theta$ sunt, totodată, şi cele două rădăcini/soluţii ale ecuaţiilor algebrice de gradul II, aşa cum s-a demonstrat într-un capitol anterior.

Dependenţele dintre variabila excentrică **θ** şi cele centrice **$\alpha_{1,2}$** sunt exprimate de funcţiile amplitudine excentrică aex**θ** şi, respectiv Aex**$\alpha_{1,2}$** date de relaţiile

$$\alpha_{1,2}(\theta)=aex_{1,2}\theta = \theta - \boldsymbol{\beta_{1,2}(\theta)} = \theta \mp \arcsin[s \sin(\theta-\varepsilon)] + \begin{cases} \mathbf{0, \; pentru \; indicele \; 1} \\ \mathbf{-\pi, \; pt \; indicele \; 2} \end{cases} \text{ şi}$$

$$\theta(\alpha_{1,2}) = Aex\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2} = \alpha_{1,2} + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}}$$

Revenirea, din **excentric** în **centric**, se face cu **s = k** =/→ **0**, astfel că şi $\alpha_1 \to \theta$ şi $\alpha_2 \to \theta + \pi$. Corespondenţa, în centric, a funcţiei radial excentric rexθ este funcţia radial centric radα, sau pe scurt, radial, notată **radα**, a cărei expresie este

radα = $e^{i\alpha}$ care este, pe de o parte, funcţia exponenţială **Euler - Cotes** şi, pe de altă parte, un vector unitate / versor sau fazor de direcţie α.

Prin derivarea funcţiilor amplitudine excentrică se obţin funcţiile derivat excentric

$$dex_{1,2}\theta = \frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta} = 1 - \frac{k.\cos(\theta-\varepsilon)}{\pm\sqrt{1-k.\sin(\theta-\varepsilon)}} \qquad \text{şi}$$

$$Dex\alpha_{1,2} = \frac{d\theta}{d\alpha_{1,2}} = \frac{1-k\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{1+k^2-2k.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)} = \sum_{s=0}^{\infty} k^s \cos s\alpha_{1,2}$$

Corespondenţa în centric a acestei funcţii este derivat centric, sau, pe scurt, derivat, notată derα şi reprezintă derivata lui redα, de expresie

der α = $i.e^{i.\alpha}$

În coordonate polare, poziţia punctelor **$W_{1,2}$** este dată de

$$(6.21) \quad \begin{cases} R_{1,2}(\alpha_{1,2}) = rad\alpha_{1,2} \Leftrightarrow Fata..de..centrul/polul..O(0,0) \\ r_{1,2}(\theta) = R.rex_{1,2}\theta.rad\theta \Leftrightarrow Fata..de..ex-centrul/polul..E(e,\varepsilon) \end{cases}$$

iar în coordonate carteziene, faţă de centrul **O(0,0)** şi respectiv ex-centrul **E(e,ε)** de

$$(6.22) \quad \begin{cases} \begin{cases} x_{1,2}(\alpha_{1,2}) = R.\cos\alpha_{1,2} \\ y_{1,2}(\alpha_{1,2}) = R.\sin\alpha_{1,2} \end{cases} \\ \begin{cases} x_{1,2}(\theta) = R.cex_{1,2}\theta \\ y_{1,2}(\theta) = R.sex_{1,2}\theta \end{cases} \end{cases}$$

3.Funcţia de transmitere de ordinul zero (funcţia de poziţie)

Determinarea stării relative a elementului condus faţă de cel conducător, la un moment dat, considerată stare statică (sau îngheţată), a stării cinematice sau de mişcare şi a celei dinamice, în care se consideră şi masele obiectelor, frecările din sistem şi multe alte cauze care pot condiţiona funcţionarea mecanismelor, dispozitivelor şi a maşinilor, constituie problemele de baza cu care se confruntă studiul mecanismelor a dispozitivelor şi a maşinilor.

O metodă modernă de studiu o constituie introducerea funcţiilor de transmitere (de **transfer**) de diverse ordine[**V. Handra-Luca**, „FUNCŢIILE DE TRANSMITERE ÎN STUDIUL MECANISMELOR", Ed. Academiei 1983]. Ele stabilesc o dependenţă, în diversele stări (statice, cinematice şi dinamice), dintre elementul condus sau de la ieşire şi cel conducător sau de la întrare.

Dacă funcţiile se referă nu la elementele unui mecanism oarecare ci la elementele geometrice ale unor figuri matematice, ele au fost denumite FUNCŢII DE TRANSMITERE **INFORMAŢIONALĂ**. [16] (**FTI**). În acest fel, raportul funcţiilor care leagă poziţia unui punct, pe o curbă oarecare, faţă de două sisteme de referinţă / repere distincte reprezintă funcţia de transfer informaţional a poziţiei sau funcţia de transfer informaţional de ordinul **zero** sau a poziţiei.

Funcţia de transmitere **informaţională** de ordinul **ZERO**, în cazul mişcării circulare excentrice $\mathbf{P_{I0}}$, ca raport al vectorilor de poziţie ai punctelor $\mathbf{M_{1,2} \subset C(O,R)}$ cu polul în ex-centrul **E**(e, ε) şi, respectiv în centrul **O(0,0)** este raportul a doi vectori, raport care este vectorul

(6.23) $$\overrightarrow{\boldsymbol{P_{I0}}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\vec{R}_{1,2}(\theta)}{\vec{r}_{1,2}(\theta)} = \frac{R.rad_{1,2}(\theta)}{R.rex_{1,2}\theta.rad\theta} = \frac{rad(\theta-\beta_{1,2}(\theta))}{rex_{1,2}\theta.rad\theta} = \frac{rad(-\beta_{1,2})}{rex_{1,2}\theta}$$

Acest raport conţine două mărimi distincte şi anume: raportul dimensiunilor liniare sau a mărimilor/dimensiunilor de **localizare** $\mathbf{L_I}$ a vectorilor de poziţie, sau **modulul** vectorului $\mathbf{P_{I0}}(\theta)$, care dau **FTI** de **localizare** a punctelor $\mathbf{M_{1,2}}$ ca funcţie de variabilă excentrică **θ** şi care este

(6.24) $\mathbf{L_{I0}} = \frac{\mathbf{1}}{rex_{1,2}\theta}$, un scalar care ne arată în ce raport se află modulele vectorilor de poziţie şi, o a doua entitate/mărime, care indică în ce raport se află dimensiunile unghiulare a acestor vectori, mai precis, modificarea orientării vectorilor, respectiv **diferenţa** dintre argumentele acestor doi vectori de poziţie, denumită şi $\mathbf{FTI_0}$ de **orientare** $\mathbf{O_{I0}}$ şi care este vectorul unitate / versorul sau fazorul / cronoidul

(6.25) $\mathbf{O_{I0}}$ = rad(− $\beta_{1,2}$)

În concluzie, $\mathbf{FTI_0}$ ne arată că, în cazul în care o **influenţă** / mişcare se transmite prin $\mathbf{r_{1,2}}$ la $\mathbf{R_{1,2}}$, atunci modulul vectorului $\mathbf{R_{1,2}}$ creşte cu $\mathbf{L_{I0}}$ şi $\mathbf{R_{1,2}}$ are o orientare faţă de $\mathbf{r_{1,2}}$ modificată cu $\mathbf{O_{I0}}$ **= rad(−** $\beta_{1,2}$), adică se roteşte în jurul punctului comun $M_{1,2}$ cu − $\beta_{1,2}$.

Dacă influenţa / mişcarea se transmite invers: **O** fiind centrul conducător şi **α** variabila motoare, iar **E** fiind ex-centrul condus şi **θ** variabila excentrică condusă, va rezulta o $\mathbf{FTII_0}$ **inversă de ordinul zero,**

Raportul modulele vectorilor de poziţie $\mathbf{r_{1,2}}$ / $\mathbf{R_{1,2}}$ sunt

(6.26) $\mathbf{r_{1,2}}(\alpha)/R_{1,2} = R\cdot Rex\alpha_{1,2} / \mathbf{R}$, modulele R_1 şi R_2 fiind egale între ele şi egale cu raza cercului **R** iar între orientarea vectorilor $\mathbf{r_{1,2}}$ faţă de $\mathbf{R_{1,2}}$ există o diferenţă de + $\beta_{1,2}$, aceasta **FTI inversă** de ordinul zero fiind, deci

(6.27) **FTII$_0$** $= \dfrac{\overrightarrow{r_{1,2}(\alpha_{1,2})}}{\overrightarrow{R_{1,2}(\alpha_{1,2})}} = \dfrac{R.\mathrm{Re}x\alpha_{1,2}.rad\theta}{R.rad\alpha_{1,2}} = \mathrm{Re}x\alpha_{1,2}.rad(\theta-\alpha_{1,2}) = \mathrm{Re}x\alpha_{1,2}rad\beta_{1,2}$

Verificarea împărţirii vectorilor se face aidoma verificării oricărei împărţiri, adică, prin înmulţirea câtului cu numitorul / împărţitorul fracţiei:

$R.Rex\alpha_{1,2}.rad\beta_{1,2}\cdot R.rad\alpha_{1,2}=R.Rex\alpha_{1,2}.rad(\alpha_{1,2}+\beta_{1,2})= R.Rex\alpha_{1,2}.rad\ \theta$

şi, se observă, că se obţine expresia numărătorului / deîmpărţitului. Deci, se verifică.

4. Vitezele mişcării circulare excentrice

Se obţin prin derivarea vectorilor de poziţie $\vec{R}$ sau $\vec{r}$ ale punctelor turnante pe cerc $W_{1,2}$ în funcţie de timp, pentru **$\theta = \Omega.\ t.$**

Deoarece, **rad** şi **der** nu pot exprima altceva decât nişte vectori unitate sau versori ori fazori, notarea lor cu o bară deasupra devine **superfluă**, motiv pentru care, aşa cum s-a putut observa, s-a renunţat la ea. Aceşti vectori sunt :

(6.28) $\overrightarrow{R_{1,2}} = R.rad\alpha_{1,2}$ şi $\vec{r}_{1,2} = R.rex_{1,2}\theta.rad\theta$ şi derivatele lor rezultă

(6.29) $\dfrac{d\overrightarrow{R_{1,2}}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{R_{1,2}}}{d\alpha_{1,2}}\dfrac{d\alpha_{1,2}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = R.der\alpha_{1,2} \bullet dex_{1,2}\theta \bullet \Omega = R.\Omega.dex_{1,2}\theta.der\alpha_{1,2}$

şi, respectiv,

(6.30) $\dfrac{d\overrightarrow{r_{1,2}}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{r_{1,2}}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \mathbf{R}.\boldsymbol{\Omega}.[dex_{1,2}\theta.rad\theta + rex_{1,2}\theta.der\theta] =$

$\mathbf{R}.\Omega.dex_{1,2}\theta[rad\theta.\sin\beta_{1,2} + der\theta.\ \cos\beta_{1,2}] = \mathbf{R}.\boldsymbol{\Omega}.dex_{1,2}\theta.der\ \alpha_{1,2}$

în care derivata funcţiei $rex_{1,2}\boldsymbol{\theta}$ este

(6.31) $\dfrac{d(rex_{1,2}\theta)}{d\theta} = dex_{1,2}\theta.\sin\beta_{1,2}$ şi reprezintă, la scară, segmentul **$ED_{1,2}$**, iar

(6.32) $der\ \alpha_{1,2} = der\ (\theta - \beta_{1,2}) = der\theta\ \cos\beta_{1,2} + rad\ \theta\ \sin\beta_{1,2}$.

5. Expresia generala a funcţiei de transmitere / transfer a vitezelor unghiulare sau a turaţiilor tuturor mecanismelor plane.

Se notează cu **1** elementul de **intrare** a **MCE**, cel de acţionare sau conducător, cu axa de rotaţie plasată în **$E \equiv I_{01}$**, considerat şi **centrul instantaneu de rataţie** al lui **1** şi se notează cu **2** elementul condus sau de **ieşire,** cu axa de rotaţie plasată în **$O \equiv I_{02}$** şi **centru instantaneu de rotaţie** al lui **2**.

Fie **$W_{1,2}$** punctul comun de contact al celor două elemente, prin care mişcarea se transmite prin frecare, de exemplu, fără alunecare, de la elementul (**1**) la celălalt (**2**), printr-o **infimă** abatere de paralelism a celor două axe de rotaţie, într-un sens **W_1** sau în celălalt **W_2** (**Fig.6.6**).

Prin definiţie, funcţia de transmitere de ordinul **1**, sau a mişcării, vitezelor unghiulare şi/sau a turaţiilor, este raportul dintre mărimea corespunzatoare de **ieşire** şi cea de **intrare**, adică

(6.33) $$i_{\omega} = i_{n} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{d\alpha_{1,2}/dt}{d\theta/dt} = \frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta} = dex_{1,2}\theta .$$

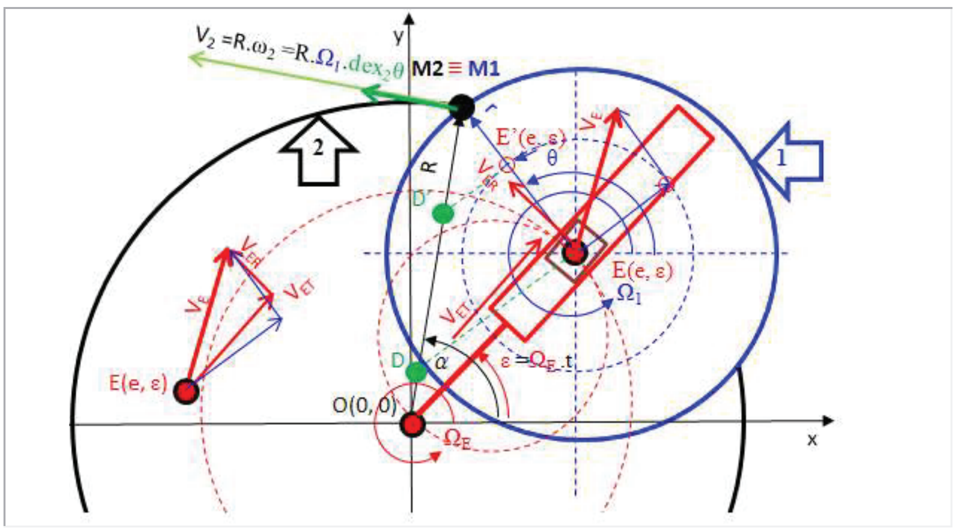


Fig.6.6 Transmisie prin fricţiune frontală.
Roata conducătoare (1) are o mişcare de translaţie radială centrică, oscilantă, cu viteza instantanee V_e, într-o patină cu mişcare circulară, în jurul excentrului **E**(e,ε = Ωt), cu viteza unghiulară constantă $\mathbf{\Omega_E}$

În conformitate cu teorema lui **Menelaus**, a **coliniarităţii** celor trei centre instantanee de rotaţie, **centrul instantaneu de rotaţie** relativ $\mathbf{I_{21}}$ se va situa pe dreapta definită de punctele **O** şi **E** la intersecţia ei cu o dreaptă perpendiculară în $\mathbf{W_{1,2}}$ pe $\mathbf{SW_{1,2}}$ sau $\mathbf{EM_{1,2}}$ (**Fig. 6.7,a**).

Dependenţa dintre viteze este dată de relaţia vectorială a lui **Euler**

(6.34) $$\frac{\overrightarrow{v_2}}{R} = \frac{\overrightarrow{v_1}}{r} + \frac{\overrightarrow{v_{21}}}{WI_{21}}$$ din care se deduce, cunoscându-se direcţiile a doi vectori $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ şi mărimile razelor **R** şi **r** ale roţilor de fricţiune, că al treilea vector, care trebuie să închidă poligonul (triunghiul) vectorilor şi să-l parcurgă în acelaşi sens, este orientat pe direcţia $\mathbf{EM_2}$ (**Fig. 6.6**).

Se ştie că, vitezele unghiulare relative sunt invers proporţionale cu segmentele definite de centrele instantanee de rotaţie, adică

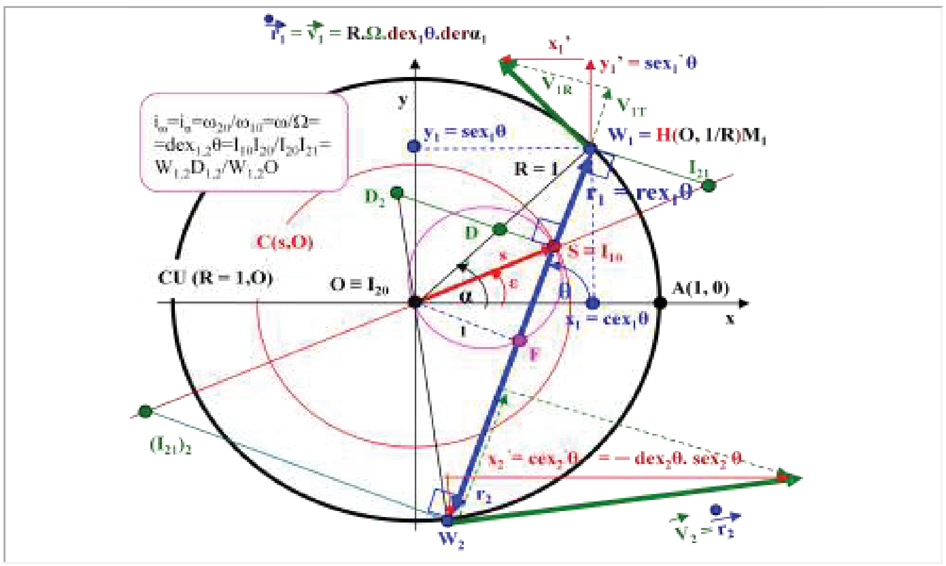


Fig. 6.7,a **FSM-CE dexθ** expresia universală a raportului de transmitere de ordinul 1 a vitezelor unghiulare sau a turaţiilor, pentru E < R**.**

(6.35) $$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{I_{10}I_{21}}{I_{20}I_{21}} = \frac{\omega}{\Omega} = dex\theta$$

Cu notaţiile din figura **6.7,a**, cu R = Ω = 1, punctul $D_{1,2}$ se obţine la intersecţia razei centrice **OW**$_{1,2}$ cu o perpendiculară în E pe raza excentrică **E**W$_{1,2}$; segmentul $W_{1,2}D_{1,2}$, la scară, reprezintă mărimea lui $dex_{1,2}\theta$

Viteza punctului $\mathbf{W_{1,2}}$ pe cerc este

(6.36) $$\overrightarrow{v_{1,2}} = \overrightarrow{\omega_{1,2}} x \vec{R} = \omega_{1,2}.R.der\alpha_{1,2} = \Omega.R.\frac{d(rex_{1,2}\theta.rad\theta)}{d\theta} =$$

$$= \Omega.R.\ r_{1,2}' = \frac{d\overrightarrow{r_{1,2}}}{dt} = \Omega R(rex_{1,2}'\ \theta.rad\ \theta + rex_{1,2}\ \theta.der\ \theta) = \Omega.R.dex_{1,2}\theta.der\alpha_{1,2}.$$

şi are două componente: una datorită rotaţiei dreptei suport turnante $\mathbf{d}^{+}$

(6.37) $\overrightarrow{v_{1,2R}} = \Omega.R.rex_{1,2}\theta.\text{der}\theta$ pe direcţia **der θ** şi, o a doua,

datorită deplasării, prin translaţie, a lui $\mathbf{W_{1,2}}$ pe dreapta suport **d**

(6.38) $$\overrightarrow{v_{T1,2}} = \Omega.R.rex_{1,2}'\theta.rad\theta$$

Proiecţiile lui $\overrightarrow{v_{1,2}}$ pe cele două axe sunt

(6.39) $\overrightarrow{v_{1,2x}} = \overrightarrow{\dot{x}_{1,2}} = \Omega.R.dex_{1,2}\theta.cex_{1,2}\theta$ şi

(6.40) $\overrightarrow{\dot{y}_{1,2}} = \Omega.R.dex_{1,2}\theta.sex_{1,2}\theta$, în care

(6.41) $cex_{1,2}\,\theta = \cos\alpha_{1,2}$ şi $sex_{1,2}\,\theta = \sin\alpha_{1,2}$.

Pentru un excentru exterior discului circular, adică **e** > **R** sau **s** > **1**, situaţia este prezentată în **figura 6.7,b**. Se observă că, în acest caz, cele două puncte $\mathbf{M_{1,2}}$ se rotesc pe cerc în sensuri contrare: M_1 în sensul creşterii lui θ, adică în sens sinistrorum sau levogin şi $\mathbf{M_2}$ în sens invers , dextrorum sau dextrogin. Pe cale de consecinţă şi vitezele vor fi de semne contrare, faţă de cazul anterior, când cele două puncte se roteau pe cerc în acelaşi sens, aşa cum se poate observă şi în **figura** 6.7,a.

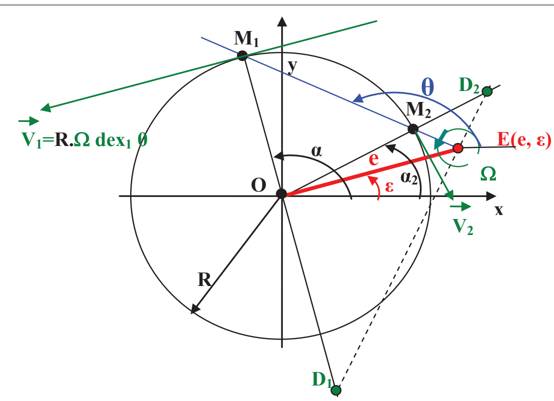


Fig. 6.7,b **FSM-CE** dexθ expresia universală a raportului de transmitere de ordinul 1, a vitezelor unghiulare sau a turaţiilor, pentru **e** > **R**→ **s** > **1**

Dacă în excentrul **E**, exterior cercului **C(R,O)**, se plasează axa unei roţi conducătoare cu fricţiune frontală, atunci, dacă contactul se face între cele două roţi de fricţiune în punctul $\mathbf{M_1}$, roata condusă se va roti în acelaşi sens cu roata conducătoare, iar dacă, contactul se va produce în punctul $\mathbf{M_2}$, roata condusă se va roti în sens invers cu roata conducătoare.

Acest lucru se datorează funcţiei $\mathbf{dex_{1,2}\theta}$ care-şi schimbă **de la sine**, în mod **corespunzător** semnul: pentru **e** < **R** atât $\mathbf{dex_1\theta}$ cât şi $\mathbf{dex_2\theta}$ sunt pozitive, ceea ce arată că o roată dinţată interioara, cu axa de rotaţie în **E**, care se angrenează cu o coroană dinţată sau cu fricţiune cu axa de rotaţie în **O (0,0)** şi cu contacte în $\mathbf{M_1}$ sau în $\mathbf{M_2}$ se vor roti în acelaşi sens cu roata conducătoare, iar dacă cele două roţi se angrenează exterior, **e** > **R** cu contact în $\mathbf{M_2}$, atunci se vor roti în sensuri opuse.

Contactul în $\mathbf{M_1}$ în cazul roţilor dintate, conduce iarăşi la angrenare interioară, numai că roata conducătoare, cu axa în **E**, este de mari dimensiuni, iar cea condusă, cu axa de rotaţie în **O(0,0),** este interioară ei.

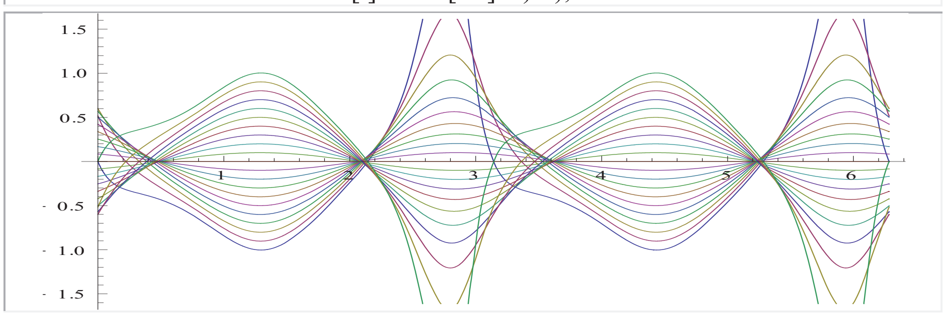
Spre deosebire de metoda clasică de exprimare a funcţiilor de transmitere de ordinul 1, exprimarea actuală, universală, uzând de facilităţiile **FSM-CE** $\mathbf{dex_{1,2}\theta}$ nu mai necesită explicaţii cu privire la sensul de rotaţie a două roţi dinţate sau cu fricţiune pentru diversele cazuri analizate anterior, aşa cum este cazul în exprimările clasice; funcţia $\mathbf{dex_{1,2}\theta}$ luând semnele corespunzătoare pentru fiecare dintre cazuri în parte, aşa cum se va vedea, în continuare, într-o aplicaţie.

6. Acceleraţiile mişcării circulare excentrice

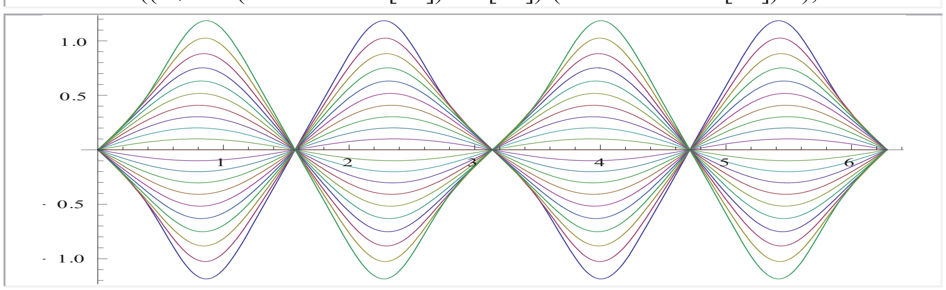
Se obţin, evident, prin derivarea, în funcţie de timp, a vitezelor.

Prin derivarea vitezei unghiulare **ω** se va obţine acceleraţia unghiulară **€**

€ = (s (s^2 Sin[1-4 t]+(-8+3 s^2) Sin[1-2 t]+s^2 (3 Sin[1]+Sin[1+2 t])))/(8 (1-s^2 Cos[t]^2 Sin[1-t]^2)$^{3/2}$), **ε = 1**



€ = -((4$\sqrt{2}$ s (-4+s^2+s^2 Cos[2 t]) Sin[2 t])/(8-s^2+s^2 Cos[4 t])$^{3/2}$), **ε = 0**



S ∈ [-1, +1]

Fig. 6.8 Acceleraţiile unghiulare € în mişcarea circulară excentrică de excentru punct mobil (s→scosθ), pentru s ∈ [-1, +1] şi ε = 1.

(6.42) $\text{€} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \Omega\frac{d(R.\Omega.dex_{1,2}\theta)}{d\theta} = R.\Omega^2.dex'_{1,2}\theta = R.\Omega^2.\frac{d^2\alpha_{1,2}}{d\theta^2}$

care, pentru un excentru considerat punct fix, adică **e** şi **ε** constante şi **R = 1** este

(6.43) $\text{€} = s\,(1 - s^2)\sin(\theta - \varepsilon) / [\pm(1 - s^2\sin^2(\theta - \varepsilon)]^{3/2}$

Relaţie identică cu (6.19) şi cu graficele din **figura 6.4.**

Dacă excentrul **S(s,ε)** este un punct mobil a cărui excentricitate liniară numerică **s** variază după legea **s** → s.cosθ, atunci graficele acceleraţiei şi expresia ei sunt date în figura 6.8, pentru ε = 1 şi ε = 0.

Acceleraţia $\overrightarrow{a_{1,2}(\theta)}$ a punctelor $M_{1,2} \subset C(O,R)$ se obţine prin derivarea vitezei (6.36). Rezultă

(6.44) $\vec{\mathbf{a}}_{1,2}(\square) = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_{1,2}(\square) = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{v}}_{1,2}(\square)}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{v}}_{1,2}(\square)}{\mathbf{d}\square}\frac{\mathbf{d}\square}{\mathbf{dt}} = \mathbf{R.\Omega}\frac{\mathbf{d(rex'_{1,2}\theta)}}{\mathbf{dt}} =$

$$= \mathbf{R\Omega^2 rex''_{1,2}\theta = R\Omega^2\left(dex'_{1,2}\theta.der\alpha - dex^2_{1,2}\theta.rad\alpha\right)} =$$

$$= R(\text{€}.der\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\omega^2.rad\alpha}) = \ddot{\vec{\boldsymbol{R}}}$$

Modulul vectorului acceleraţie este

(6.45) $a_{1,2}(\theta) = \left|\overrightarrow{a_{1,2}(\theta)} = R.\sqrt{(\frac{d\omega}{dt})^2 + \varpi^4}\right|$ şi se recunoaşte modulul acceleraţiei din mişcarea generală neuniformă a unui punct oarecare pe o traiectorie circulară, rezultat absolut normal; mişcarea circulară excentrică fiind un caz particular, de excepţie, al mişcării neuniforme pe o traiectorie circulară.

Acceleraţia Coriolis este un vector reprezentată de dublul produsului vectorial dintre vectorul vitezei unghiulare $\vec{\omega}$, perpendicular pe planul mişcării circulare excentrice, şi derivata vectorului viteza relativă a punctului $M_{1,2}$ de pe cerc, care este vectorul viteza de translaţie a punctului pe dreapta d

(6.46) $\vec{V}_{1,2R} = \vec{v}_T = rad\theta.\frac{d(rex_{1,2}\theta)}{dt}$, astfel că acceleraţia Coriolis $\vec{a}_C$ va fi orientată pe direcţia fazorului derθ şi rezultă

(6.47)
$$\vec{a}_{1,2C} = 2.\overrightarrow{\varpi_{1,2}}x\vec{v}_{1,2R} = 2.\vec{\varpi}_{1,2}xrad\theta.\frac{d(rex_{1,2}\theta)}{dt} =$$
$$= 2.R.\Omega^2.dex^2_{1,2}\theta.\sin\beta_{1,2}der\theta = 2.R.\varpi^2.\sin\beta_{1,2}\theta.der\theta$$

a cărui modul este, aşa cum se poate observă în figura **6.7,a** dublul segmentului orientat **$ED_{1,2}$** şi care este

(6.48) $\mathbf{a_C = 2.\,dex_{1,2}\,\theta.\,\sin\beta_{1,2}} =$

$$= 2[1 - \frac{s.\cos(\theta - \varepsilon)}{\pm\sqrt{1 - s^2\sin^2(\theta - \varepsilon)}}]\sin\{\mp\arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]\} =$$

$$= \pm\ \mathbf{2}.s.\sin(\theta - \varepsilon).rex_{1,2}\,\theta\,/del\theta.$$

Hodograful vitezei unghiulare ω_1 (sus) şi ω_2 (jos) pentru R = 1, Ω = 1 sunt prezentate în figura **6.9.** Se observă că pentru **s = 1** acceleraţia unghiulară pe o semiperioada este nulă, timp în care câte unul dintre punctele $\mathbf{W_{1,2}}$ rămâne confundat în excentrul **S(1,0)** sau de **S (1, π) ↔ S(-1,0)**, iar, în cealaltă semiperioadă, punctul $\mathbf{W_{1,2}}$ se deplasează pe cercul **CT(R = 1,O)** cu o viteză unghiulară constantă, dar dublă şi egală cu

(6.49) $\omega_{1,2}(\theta) = 2.\mathbf{\Omega}$

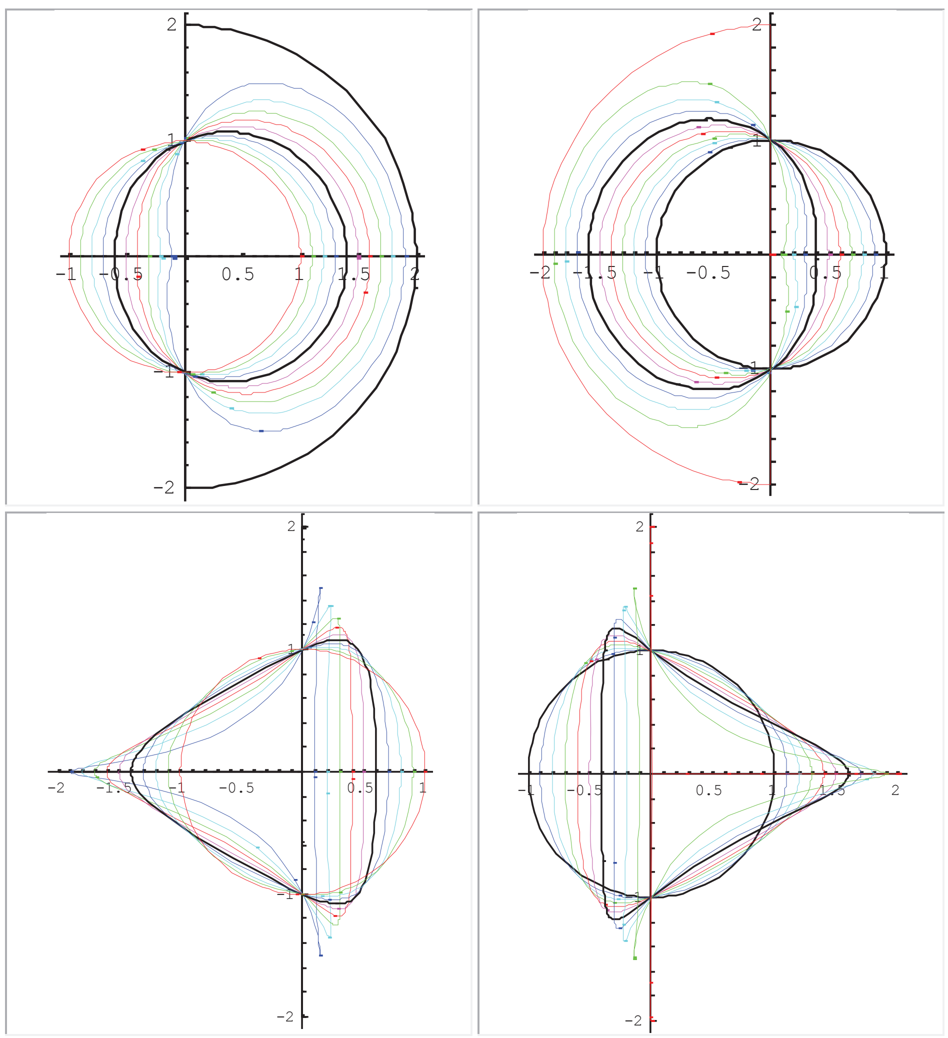


Fig. 6.9 Hodograful vitezelor unghiulare $\omega_{1,2}(\theta)$

În figura 6.10 sunt prezentate hodografele acceleraţiei unghiulare **€.**

Determinarea pe cale grafică a vitezelor şi a accceleraţiei $\mathbf{a_1}$, numai a punctului $\mathbf{M_1(R, \alpha_1)}$, sunt prezentate în **figura 6.11**, în care s-a considerat, pentru simplificare, **R = 1** şi **Ω** = 1.

Determinarea grafică a vectorului acceleraţie $\mathbf{a_1}$ s-a făcut cunoscându-se câte două componente ale acestuia din două dezvoltări diferite.

Astfel, din prima s-a cunoscut acceleraţia normală centrică $\mathbf{a_{1v}}$ ca fiind

$$(6.50)\quad \mathbf{a_{1v}} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = -\,(\mathbf{R.\Omega.dex_1\theta})^2\mathbf{.rad\alpha_1} = \ -\mathbf{v_1}^2\mathbf{.\ rad\alpha_1} = \mathbf{R.}\ \omega^2\ \mathbf{rad\alpha_1}$$

egală, în figura, cu segmentul $\mathbf{d_1}^2$ şi orientată, evident, pe direcţia normală în $M_1(\alpha_1)$ la cercul **C(R,O)**, adică, pe direcţia radială centrică a vectorului $-\ \mathbf{R_1}$, sau pe direcţia fazorului $\mathbf{rad}\ (\alpha_1 + \pi) = -\,\mathbf{rad}\alpha_1$.

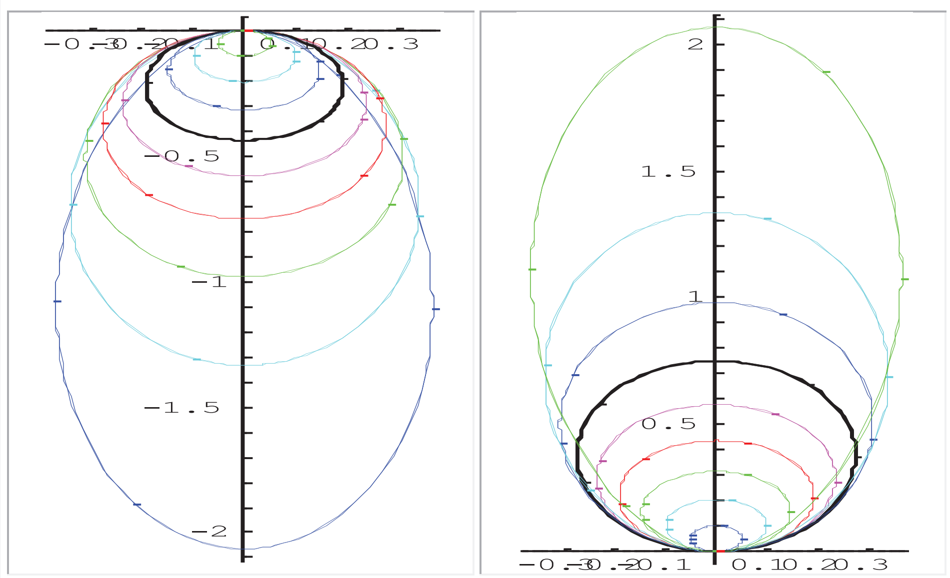


Fig. 6.10 Hodograful acceleraţiilor unghiulare

Perpendicular pe acest vector normal se află, evident, vectorul tangent

$$(6.51)\qquad \vec{\mathbf{a}}_{1\tau} = \vec{\mathbf{e}}^{\,\cdot\cdot} + \vec{€}_1 \times \vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\mathbf{r}}_1) = \mathbf{R.\ €_1.der\alpha_1}$$

De la componenta tangenţială interesează doar direcţia acesteia, perpendiculară în $\mathbf{d_1}^2$ pe direcţia radială centrică de fazor $\overrightarrow{\mathbf{rad\alpha_1}}$.

La intersecţia acesteia, cu o perpendiculară dusă din extremitatea vectorului **acceleraţie Coriolis** a_C, se va afla un punct în care se va situa vârful vectorului acceleraţie $\mathbf{a_1}$ al punctului $\mathbf{M_1}$ în **MCE** pe cercul **C(O,R)**, aşa cum rezultă şi din figură.

Se vor sintetiza cele afirmate într-un tabel, în care, **MCE** se va exprima atât faţa de reperul cu polul în **O(0,0)** cât şi faţă de reperul cu polul în excentrul punct fix **E(e,ε)**. În ambele cazuri, valorile obţinute fiind aceleaşi.

Câteva **concluzii** cu privire la această nouă mişcare mecanică, am numit astfel **MCE**, se impun:

- Suma **modulelor** razelor vectoare $\mathbf{R_1}$ şi $\mathbf{R_2}$ din **O(0,0)** este, evident egală cu **diametrul** cercului **2R**, care este şi **coarda centrică**, pentru că trece prin **O(0,0),** iar suma **modulelor** razelor vectoare $\mathbf{r_1}$ şi $\mathbf{r_2}$ din excentrul **E(e, ε)** este egală, în fiecare moment t, cu **coarda excentrică**, denumită astfel pentru că trece prin excentrul **E(e, ε)** şi pe care o vom nota cu **cdexθ**, adică

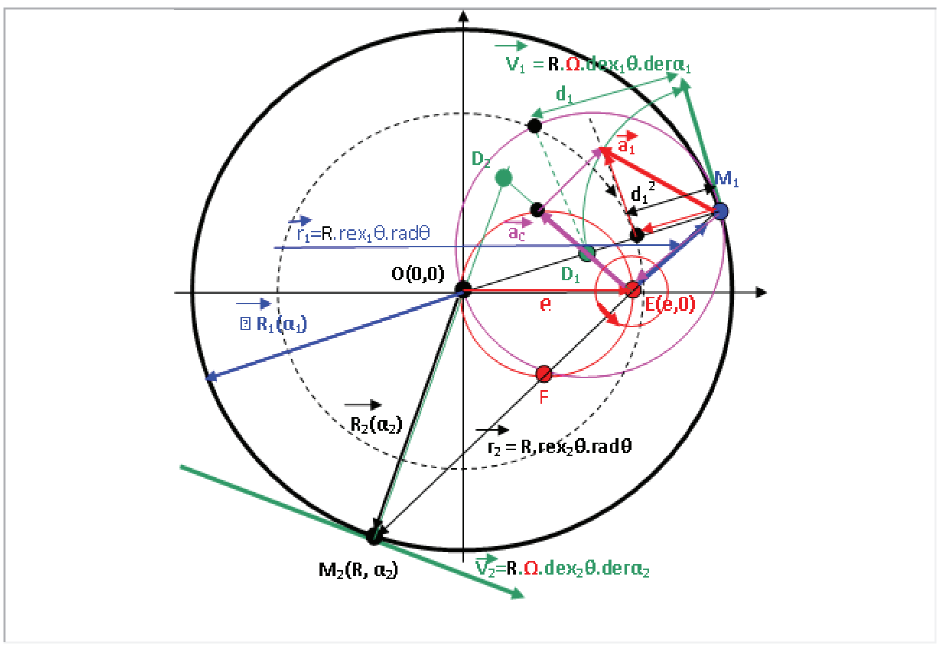


Fig.6.11 Cinematica geometrica a **MCE**.
Poziţia $\mathbf{r_{1,2} = rex_{1,2}\theta}$, viteza $\mathbf{r'_{1,2} = dex_{1,2}\theta}$ şi prima acceleraţie $\mathbf{r''_{1,2} = dex'\theta}$
a punctelor $M_{1,2} \subset \mathbf{C}$ **(O, R)** în mişcarea circulară excentrică cu $\boldsymbol{\theta = \Omega.t}$

(6.52) $\mathbf{R}(rex_1\theta + rex_2\theta) = 2.\ \mathbf{R.cdex\theta}$**, comuna** pentru ambele determinări.

Dacă cele două **raze** (vectoare) **centrice** $\mathbf{R_1}$ şi $\mathbf{R_2}$ sunt coliniare numai pentru **e = s = 0**, dar au modulele în permanenţă egale cu raza **R** a cercului, razele vectoare excentrice, sau, pe scurt, **razele excentrice** $\mathbf{r_1}$= $\mathbf{R.rex_1\theta}$ şi $\mathbf{r_2}$ = $\mathbf{R.rex_2}\theta$ sunt în permanenţă coliniare dar nu sunt egale în modul, decât pentru $\boldsymbol{\theta = \pi/2 + \varepsilon}$ când $\mathbf{rex_1\ \theta} = -\ \mathbf{rex_2}\theta$.

În acelaşi caz, cele două determinări ale funcţiilor **$dex_{1,2}\theta$** sunt egale între ele şi de acelaşi semn şi egale cu unitatea, însă vectorii viteza **$v_1.der\alpha_1$** şi **$v_2.der\alpha_2$** au şi ei modulele egale între ele şi egale cu **R.Ω**, însă sunt orientaţi diferit: direcţiile acestor doi vectori viteza intersectându-se într-un punct pe dreapta determinată de punctele **O(0,0)** şi **E(e, ε)**.

Faţă de reperul O(0, 0)	Faţă de reperul E(e, ε)
$M_{1,2}(R_{1,2}, \alpha_{1,2})$, $\alpha_{1,2} = \theta - \beta_{1,2}$ **POZIŢIA**	$M_{1,2}(r_{1,2}, \theta)$, $\theta = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2}$
$\vec{R}_{1,2} = \vec{e} + \vec{r}_{1,2}$	
$\vec{R}_{1,2} = R.rad\alpha_{1,2}(\theta)$ $\alpha_{1,2} = \theta\ \Upsilon\ \arcsin[e.\sin(\theta - \varepsilon)] = aex_{1,2}\theta$	$\vec{r}_{1,2} = R.rex_{1,2}\theta.rad\theta$ $\theta = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2} = Aex\alpha_{1,2}$
$\vec{v}_{1,2} = \vec{\omega}_{1,2} \times \vec{R}_{1,2}$ **VITEZA**	$\vec{v}_{1,2} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{1,2}$
$\dot{\vec{R}}_{1,2} = R.\dfrac{d[rad\alpha_{1,2}(\theta)]}{dt} =$ $R.\dfrac{d\alpha_{1,2}}{dt}\dfrac{d[rad\alpha_{1,2}(\theta)]}{d\theta} =$ $R.\omega_{1,2}.der\alpha_{1,2}(\theta) = R.\Omega.dex_{1,2}\theta.der\alpha_{1,2}$	$\dot{\vec{r}}_{1,2} = R\dfrac{d(rex_{1,2}\theta.rad\theta)}{dt} =$ $R\Omega(rex'_{1,2}\theta.rad\theta + rex_{1,2}\theta.der\theta)$
ACCELERAŢIA	
$\ddot{\vec{R}}_{1,2} = R.\Omega^2\dfrac{d(dex_{1,2}\theta.der\alpha_{1,2})}{d\theta} =$ $= R.\Omega^2[dex'_{1,2}\theta.der\alpha_{1,2} -$ $- dex_{1,2}\theta.rad\alpha\dfrac{d\alpha}{d\theta}] =$ $= R.\Omega^2[dex'_{1,2}\theta.der\alpha_{1,2} -$ $- dex^2_{1,2}\theta.rad\alpha_{1,2}] =$ $= R[\varepsilon.der\alpha_{1,2} - \omega^2.rad\alpha_{1,2}] =$ $= \vec{a}_{1,2T} + \vec{a}_{1,2N}$ T, N → Tangential, Normal (centric)	$\ddot{\vec{r}}_{1,2} = R.\Omega^2(rex''_{1,2}\theta.rad\theta +$ $+ rex_{1,2}\theta.der\theta + rex'_{1,2}\theta.der\theta -$ $- rex_{1,2}\theta.rad\theta) =$ $= R.\Omega^2[2rex'_{1,2}\theta.der\theta +$ $+ (rex''_{1,2}\theta - rex_{1,2}\theta)rad\theta] =$ $= R.\Omega^2[\vec{a}_{1,2C} + \vec{a}_{1,2RE}] =$ $= R.\Omega^2(\vec{a}_{1,2TE} + \vec{a}_{1,2RE})$ TE → Tangential Excentric RE → Radial Excentric **C → Coriolis**

Tab. **6.1** **Pozitia**, **viteza** si **acceleratia** in **MCE** exprimate fata de doua repere distincte

- În **matematica centrică (MC)**, pe lângă funcţiile arhicunoscute **cos**, **sin**, **tan**

/ **tg**, **ctan** / **ctg**, **sec** şi **cosec**, mai sunt utilizate şi următoarele **funcţii derivate**, mai rar utilizate, dar definite în lucrarea lui **Milton Abramowitz** şi **Irene A. Stegun** „HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS” Ed. National Bureau of Standards Applied Mathematics, Series 55,1964 şi tradusă în l.rusa (pag. 43…44)

(6.53) **Versine** de **α**, notată **vers α** şi definită ca **vers α = 1 – cos α**

(6.54) **Coversine** de **α**, notată **cversα** şi definită ca **cversα = 1 – sinα**

(6.55) **Haversine** de **α**, notată **havα** şi definită ca $\mathbf{hav\alpha = \frac{1}{2}vers\alpha}$ şi

(6.56) **Exsecanta** de **α**, notată **exsecα = secα — 1**

Dacă **coarda centrică** nu-şi găsea rostul, ca să fie introdusă în matematică, ea fiind o constantă, se vede din relaţia (6.52) că nu acelaţi lucru se întâmplă cu **coarda excentrică**, coardă care este o nouă funcţie supermatematică circulară excentrică (**FSM-CE**), care merită privită cu mai mult interes în viitor decât în prezent.

- Deoarece

(6.57) $\mathbf{dex_1}\theta + \mathbf{dex_2}\theta = \mathbf{2}$, aşa cum se poate constata din relaţiile lor de definiţie, dar şi din figura **6.11**. rezultă pe cale de consecinţă că

(6.58) $\boldsymbol{\omega_1 + \omega_2 = 2\Omega}$ şi că suma vitezelor celor două puncte $\mathbf{M_{1,2} \subset C(O,R)}$, în fiecare moment t, este dublul vitezei medii pe o perioadă, adică

(6.59) $|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| = 2\,R.\boldsymbol{\Omega} = 2\,\mathbf{V_{medie}}$

Mai rezultă că $\mathbf{D_1}$ şi $\mathbf{D_2}$ sunt centre **instantanee de rotaţie**, întrucât

(6.60) $\mathbf{v_1} = \boldsymbol{\Omega}.\,|D_1M_1| = \boldsymbol{\Omega}..\mathbf{d_1}$ şi $\mathbf{v_2} = \boldsymbol{\Omega}\,|D_2M_2| = \boldsymbol{\Omega}.\,\mathbf{d_2}$

Vitezele extreme, maximă (M) şi minimă (m) sunt egal distanţate faţă de dreapta **y = R Ω**, ca şi funcţiile $\mathbf{dex_1}\theta$ şi $\mathbf{dex_2}\theta$ faţă de dreapta y = **1**, deoarece

(6.61) $\mathbf{v_{1,2m,M}} = \mathbf{R}.\,\Omega\,(\mathbf{1} \pm \mathbf{s}) = \boldsymbol{\Omega}\,(\mathbf{R} \pm \mathbf{e})$, astfel că

(6.62) $\mathbf{v_{1,2m} + v_{1,2M} = v_{med} = 2.R.\Omega}$

La aceeaşi concluzie se ajunge şi în felul următor: Ştiind că

(6.63) $\alpha_{1,2} = \theta - \beta_{1,2} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \theta - \beta_1 \\ \alpha_2 = \theta - \beta_2 \end{cases}$ şi că $\boldsymbol{\beta_1 + \beta_2 = \pi}$, rezultă

(6.64) $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\theta - \pi$ şi $d\alpha_1 + d\alpha_2 = 2d\theta$ şi, prin împărţire cu **dt**, rezultă

(6.65) $\boldsymbol{\omega_1 + \omega_2} = 2.\boldsymbol{\Omega}$.

- Considerând **Ω = ct** şi diferenţiind relaţia anterioară rezultă

(6.66) $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega_1} + \mathbf{d}\boldsymbol{\omega_2} = \mathbf{0}$ şi împărţind relaţia cu **dt** se obţine egalitatea modulelor, dar de semne contrare, în fiecare moment, a acceleraţiilor unghiulare

(6.67) $\boldsymbol{\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0 \rightarrow \epsilon_1 = -\epsilon_2}$.

- Vectorul acceleraţie (absolută), ca oricare alt vector poate fi descompus după oricare pereche de direcţii ortogonale. Mai importante sunt direcţia normală (ν) şi tangentă (τ) în $M_{1,2}$ la cercul C(R,O), apoi direcţiile radială ($\vec{r}$ sau **rad θ**) şi derivată ($\vec{d}$ sau **derθ**) precum şi componentele clasice ale acceleraţiei absolute: acceleraţia de **transport** ($\mathbf{a_t}$), acceleraţia **relativă** (a_r) şi accelaraţia **Coriolis** (a_C), dintre care a_t şi a_r sunt orientate pe direcţia radială excentrică ($\vec{r}$ sau rad θ) şi sunt de semne contrare, aşa cum se poate constata şi din figura **6.11**. Prin urmare, neglijând scrierea cu indicii 1,2

(6.68) $\vec{a} = \vec{a}_\nu + \vec{a}_\tau = \vec{a}_r + \vec{a}_d = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_C$

Aşa cum s-a enunţat anterior, vectorul acceleraţiei punctului M_1 din figura **6.11** a fost dedus cunoscându-se mărimile / modulele componentelor acceleraţiilor normală

$\vec{a}_{\nu 1,2} = -\mathbf{R}.\boldsymbol{\Omega}^2 \mathrm{dex}_{1,2}{}^2\theta.\mathrm{rad}\alpha_{1,2}$ şi acceleraţia **Coriolis**

$$\vec{a}_{C_{1,2}} = 2.\vec{\Omega}\times\frac{d\vec{r}_{1,2}}{dt} = 2.R.\Omega^2.\sqrt{dex_{1,2}^2 - rex_{1,2}^2}.der\theta = 2R..\Omega^2.dex_{1,2}\theta.\sin\beta_{1,2}.der\theta$$

precum şi direcţiile acceleraţiilor tangenţiale ($\vec{a}_\tau$) şi a celei radiale excentrice **r** sau de fazor **radθ**, perpendiculară pe vectorul acceleraţie **Coriolis** de pe direcţia $\vec{d}$ sau a fazorului derθ.

7. Cel mai general caz posibil al transmisiilor prin fricţiune şi particularizări la transmisii cu roţi (dinţate şi/ sau cu fricţiune)

Cazul a fost prezentat în **figura 6.6**, în care, roata cu fricţiune **1,** conducătoare, are axa fixată într-o culisă oscilantă, în excentrul - punct mobil **E(e, ε)**.

Culisa, la rândul ei, este fixată în **braţul turnant** denumit şi **portsateliţi**, care se roteşte în jurul centrului roţii conduse **2**, cu axa în centrul **O(0,0)** cu viteza unghiulară **Ω = 1** rad/s. Acelaşi caz este prezentat mai schematizat şi în prima parte a **tabelului 6.2** în care mai sunt prezentate, în continuare, diversele variante posibile plecând de la cel mai general caz posibil, denumit **transmisie generală sau universală cu roţi,** caz nestudiat în literatura de specialitate (Teoria mecanismelor şi a maşinilor).

Cel mai general caz, studiat în literatura de specialitate, este cel al diferenţialului, care se obţine din cazul general pentru o poziţie fixă pe braţul port satelit al axei roţii satelit, adică pentru o viteză relativă a centrului roţii **2** pe braţul port satelit nulă ($\mathbf{V_E = 0}$).

Dacă braţul port satelit este fix, împreună cu cele două centre **O(0,0)** şi E(e,ε) şi, evident şi cu **„linia centrelor”** atunci cazul general se reduce la cel mai simplu caz studiat, al unor transmisii cu roţi dinţate, angrenate interior sau exterior, aşa cum se prezintă în primele aplicaţii din **tabelul 6.2**.

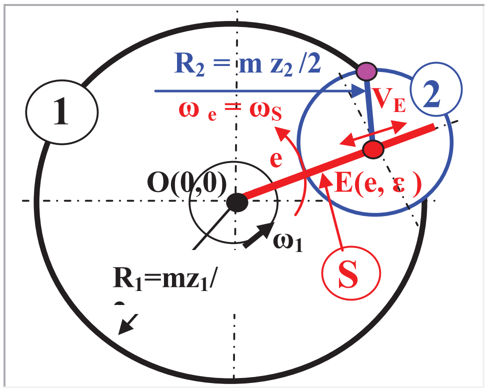
În continuarea **tabelului 6.2** sunt prezentate cazurile unor **mecanisme planetare**, în care coroana dinţată interior sau cu fricţiune şi, respectiv, roata dinţată exterior sau cu fricţiune are rotaţia blocată, adică este fixă ($\boldsymbol{\omega_1 = 0}$).

8. Transmisii cu manivele paralele şi cu roţi (dinţate sau cu fricţiune)

Se folosesc în construcţia capetelor multiaxe la multiplicarea şi distribuirea mişcărilor de rotaţie. Transmisile în exclusivitate cu manivele paralele au marele avantaj că pot asigura distanţe **L** (v.**Tab. 6.3**) foarte apropiate dintre axele arborilor portsculă şi dezavantajul că toate sculele primesc o aceeaşi turaţie $\mathbf{n_{S1}} = \mathbf{n_C}$, egală cu turaţia arborelui conducător $\mathbf{n_C}$.

Tabelul 6.2

Transmisia generală / universală cu roţi



$R_1 = mz_1/2$, $R_2 = m\,z_2/2 \rightarrow$ ct.

$\alpha, \beta, \theta, e, s = e/R_1, \varepsilon \rightarrow$ Variabile

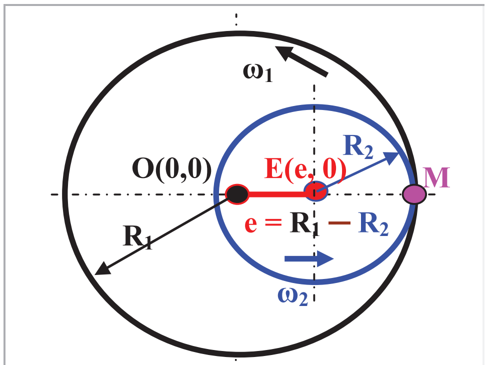
$$\alpha = \theta - \beta, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega_1, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_2$$

$$\alpha = \theta - \arcsin[e.\sin(\theta - \varepsilon)] \rightarrow$$

$$\omega_1 = \omega_2 - \frac{\dfrac{\omega_2 - \omega_e}{R_1}[e.\cos(\theta-\varepsilon) + V_E.\sin(\theta-\varepsilon)]}{\sqrt{1 - s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$$

$V_E = e'$, $\omega_e = d\varepsilon/dt$

Roţi (dinţate sau cu fricţiune) cu angrenare interioară



$\theta = \varepsilon = 0 \rightarrow \Omega = \omega_e = 0$

$e = R_1 - R_2 =$ ct. $\rightarrow V_E = e' = 0$

$R_1 = m.\,z_1/2$, $R_2 = m.\,z_2/2$

$$\omega_1 = \omega_2\left(1 - \frac{R_1 - R_2}{R_1}\right)$$

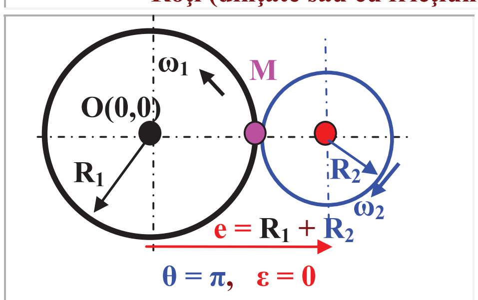
$$\omega_1 = \omega_2\,(R_2/R_1)$$

si

$$n_2 = n_1\,(z_2/z_1)$$

$$\omega_i = 2\pi n_i \rightarrow n_i = \omega_i/2\pi$$

Roţi (dinţate sau cu fricţiune) cu angrenare exterioară



$\theta = \pi$, $\Omega = \omega_e = 0$, $\varepsilon = 0$

$e = R_1 + R_2 =$ ct. $\rightarrow V_E = e' = 0$

$R_1 = m.\,z_1/2$, $R_2 = m.\,z_2/2$

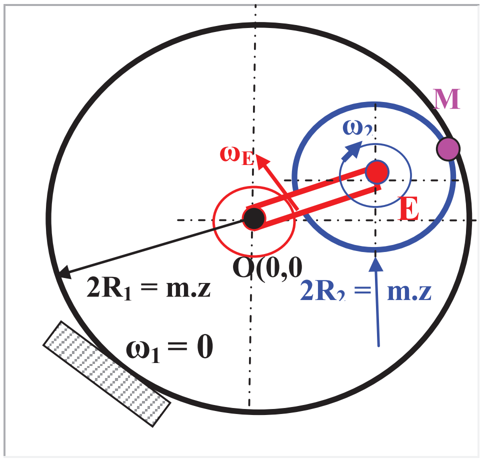
$$\omega_1 = \omega_2\left(1 - \frac{R_1 - R_2}{R_1}\right)$$

$$\omega_1 = \omega_2\,(-\,R_2/R_1)$$

si

$$n_2 = -\,n_1\,(z_2/z_1)$$

Mecanism planetar cu angrenare interioară



$$\Omega = \omega_E = \omega_S \rightarrow \omega_S \text{ braţ satelit}$$

$$e = R_1 - R_2 = ct. \rightarrow V_e = 0$$

$$\theta = \varepsilon = \Omega.t = \omega_E\, t = \omega_S.t$$

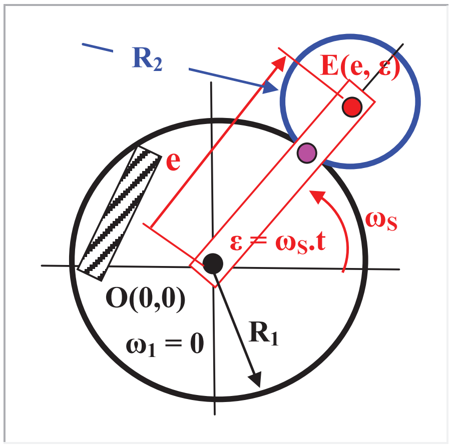
$$\omega_1 = 0 \rightarrow$$

$$0 = \omega_2 - \frac{R_1 - R_2}{R_1}(\omega_2 - \omega_S)$$

$$\omega_2\, R_2 / R_1 + \omega_S\,(1 - R_2 / R_1) = 0$$

$$\omega_2 = -\,\omega_S \frac{R_1 - R_2}{R_1}$$

Mecanism planetar cu angrenare exterioară



$$\Omega = \omega_E = \omega_S \rightarrow \omega_S \text{ braţ satelit}$$

$$e = R_1 + R_2 = ct. \rightarrow V_e = 0$$

$$\theta = \pi + \varepsilon = \pi + \Omega.t =$$

$$= \pi + \omega_E\, t = \pi + \omega_S.t$$

$$\theta - \varepsilon = \pi, \quad \omega_1 = 0 \rightarrow$$

$$0 = \omega_2 - \frac{R_1 + R_2}{R_1}(\omega_2 - \omega_S)$$

$$\omega_2\left(1 + \frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) = \omega_S \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

$$\omega_2 = \omega_S\left(1 + \frac{R_1}{R_1}\right)$$

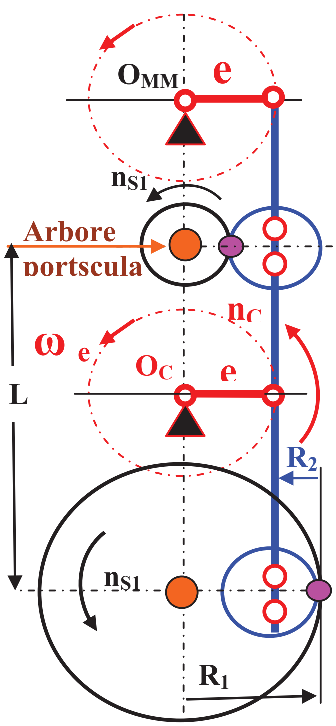
Pentru a diversifica turaţiile sculelor, în funcţie de necesităţile schemei de prelucrare, adică în funcţie de dimensiunile / diametrele orificiilor de prelucrat, se folosesc sisteme hibride de transmisii cu manivele paralele şi cu roţi dinţate [v. **Mircea Eugen Şelariu**, ş.a PROIECTAREA DISPOZITIVELOR. **CAPETE MULTIAXE**, Partea I-a: Construcţie şi exploatare, Centru de Multiplicare al IPTVT, 1980].

O astfel de transmisie este prezentată schematic în **tabelul 6.3.**

Se compune dintr-un **arbore conducător** care imprimă o turaţie $n_e = n_C$, datorită rotirii braţului excentric **e** al manivelei, denumită manivelă conducătoare, unei plăci cu o mişcare de **translaţie rotativă**, prin care fiecare punct al acestei plăci (denumită şi intermediară) descrie o mişcare circulară cu aceeaşi **rază e**, egală cu **excentricitatea e a manivelei** şi cu aceeaşi turaţie $\mathbf{n_C}$.

Pentru evitarea rotirii plăcii intermediare în jurul axei arborelui conducător, s-a introdus o a doua manivelă, cu aceeaşi excentricitate **e**, denumită şi **manivelă moartă**, cu axa de rotaţie fixă în punctul $\mathbf{O_{MM}}$. În figură, placa intermediară este simbolizată de **bara verticală** pe care sunt fixate, fără posibilităţi de rotire faţă de această bară, două roţi (dinţate sau cu fricţiune de rază $\mathbf{R_2}$) care transmit mişcarea la roţile denumite şi **roţi finale** de rază $\mathbf{R_1}$ de pe arborii portsculă.

Tabelul 6.3

	**Relaţia generală:** $$\omega_1 = \omega_2 - \frac{(\omega_2-\omega_1)[e.\cos(\theta-\varepsilon)+V_e\sin(\theta-\varepsilon)]}{\sqrt{R_1^2-e^2\sin\ (\theta-\varepsilon)}}$$
	Condiţii pentru angrenarea exterioară (sus) $\omega_2 = 0$, $\omega_e = 2\pi.n_C$, $V_e = 0$, $(\theta-\varepsilon) = \pi$, $\omega_C = \omega_e$, $e = R_1 + R_2$ **Rezultă** $\omega_1 = \omega_2 - (\omega_2 - \omega_C)(1 + R_1 / R_2)[(-1)]$ $\omega_1 = \omega_C(1 + R_1 / R_2)$ **sau** $n_{S1} = n_C(1 + z_2 / z_{S1})$
	Condiţii pentru angrenarea interioară (jos) $\omega_2 = 0$, $\omega_e = 2\pi.n_C$, $V_e = 0$, $(\theta-\varepsilon) = \pi$, $\omega_C = \omega_e$, $e = R_1 - R_2$ **Rezultă** $\omega_1 = \omega_2 - (\omega_2 - \omega_C)(1 + R_1 / R_2)$ $\omega_1 = \omega_C(1 - R_1 / R_2)$ **sau** $n_{S1} = n_C(1 - z_2 / z_{S1})$
Transmisii hibride cu **manivele paralele** şi cu **roţi** (dinţate sau cu fricţiune)	

Roata **superioară** se angreneaza în **exterior** cu **roata finală**, în timp ce **roata inferioară** se angrenează cu o **coroană**, deci sunt într-o angrenare interioară.

Condiţiile prin care de la relaţia generală $\omega_2 = \omega_1.\mathbf{dex}[\theta, E(e,\varepsilon)]$, cu **FSM-CE dex**θ, pentru cel mai general caz, când toţi parametri sunt variabili, se ajunge la particularizările acestei transmisii sunt indicate în **tabelul 6.3**.

Se va considera un nou caz, neprezentat în **tabelul 6.3**. Fixarea, în locul roţilor exterioare, din partea superioara a desenului, a unei **coroane** interioare, de raza $R_2 = m.z_2/2$, pe placa intermediară şi angrenarea ei cu aceeiaşi roată (cu angrenare exterioară) de pe arborele port sculă cu roata, din partea superioara a desenului, de rază $R_1 = m.z_1/2$, în care **m** este **modulul** roţilor dinţate din angrenare şi $z_2 >> z_1$. În acest ultim caz, se observă că arborele portsculă se va roti în acelaşi sens cu coroana, deci, faţă de situaţia anterioară, va schimba de sens, obţinându-se relaţia pentru turaţia sculei, exprimată de vitreza unghiulară ω_S sau de turaţia n_s

(6.69) $\omega_S = \omega_1 = -\, \omega_2 (1 - R_1/R_2)$ sau $n_s = n_1 = -\, n_C (1 - n_1/n_2)$.

Alte exemple de utilizare a **FSM-CE** în tehnică, utilizând şi funcţia **dex**θ, la intermitoarele cu cruce de **Malta**, de exemplu, sunt prezentate în capitolul următor.

Nu putem încheia acest capitol fără a prezenta construcţia unui cap multiax de burghiere.

Cap multiax

Motto: ” **Calitatea** este **defectul** care ştie să se facă **util** ”
M.Maeterlinck Le double jardin

Capitolul 7
ANALIZA CALITĂŢII MIŞCĂRILOR PROGRAMATE CU FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE

7.1 Asupra calităţii

Calitatea exprimă însuşirile principale, esenţiale, ale obiectelor şi ale sistemelor, în raport cu procesele materiale şi/sau spirituale la care iau parte, prin stabilirea unor criterii cantitative de satisfacere optimă a exigenţelor societăţii.

Asigurarea calităţii (**CAQ: C**omputer **A**ided **Q**uality Assurance) cuprinde conceptul de calitate începând de la controlul calităţii de conformanţă (fidelitate) cu modelul specificat, controlul serviciilor oferite de produs, controlul defectelor şi până la controlul calităţii concepţiei şi a proiectării produsului, adică a design-ului. În acest fel calitatea parcurge într-un circuit închis ansamblul economiei.

Există o politică a calităţii, **calitatea** se planifică, calitatea se fabrică, calitatea se comercializează (se vinde şi se cumpără) şi calitatea se ameliorează prin aşa-zisa. „**pârghie a calităţii**”.

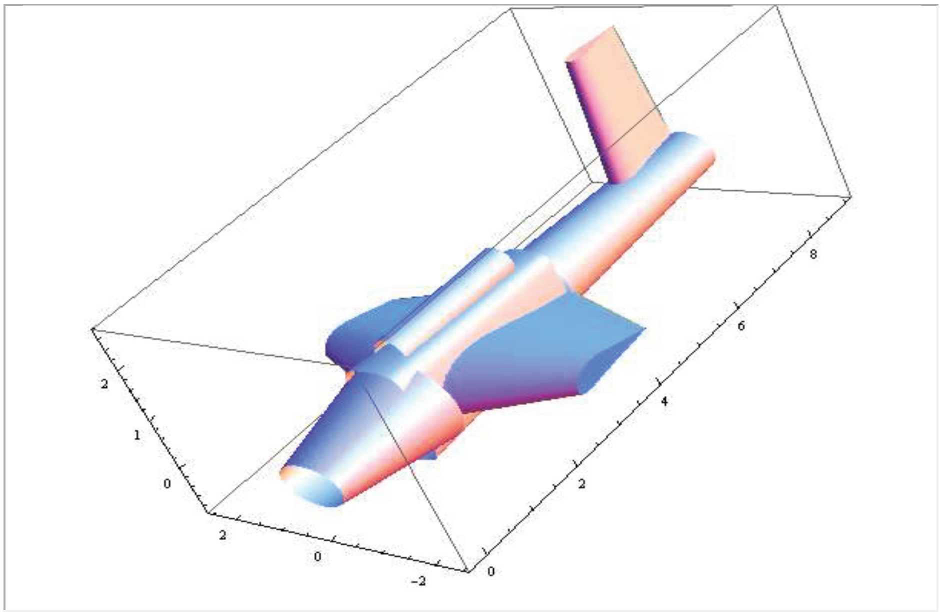
Aceasta indică faptul că, dacă **ameliorarea calităţii** produsului, la fabricarea lui, se poate realiza într-un raport al pârghiei de **1 : 1**, la concepţia tehnologiei lui de fabricare raportul parghiei poate fi de **10 : 1**, în timp ce la concepţia şi proiectarea lui, adică la realizarea design-ului lui acest raport este de **100 : 1**.

Acest lucru reliefează pregnant importanţa primei faze, din activitatea de creere a unui nou produs, cea de **design** al acestuia, adică de **concepţie** şi **proiectare**.

Aşa cum s-a mai specificat [v. articolul **Mircea Şelariu**, „CALITATEA CONTROLULUI CALITATII”, Lucrările Simpozionului AGIR „Controlul calităţii” Drobeta-Tr.-Severin] există o activitate, înaintea **design**-ului şi pe care acesta se bazează, care poate realiza o amplificare şi mai mare a pârghiei calităţii, şi anume, de **1000 : 1** şi consistă în ridicarea calităţii cunoştinţelor noastre din domeniul de vârf al ştiinţei, domeniu în care se cuprinde şi **Matematica** şi, în special, **Supermatematica**, care multiplică la infinit toate funcţiile periodice şi introduce, aşa cum s-a văzut, multe funcţii periodice noi, de importanţă majoră, oferindu-ne o plajă vastă de noi posibilităţi de afirmare în domeniul ridicării calităţii **design**-ului.

7.2 Despre design şi conexiunea lui cu supermatematica

O parte din ce în ce mai însemnată a omenirii, cea cu o calificare din ce în ce mai înaltă, la care va contribui din plin, în viitor şi **supermatematica**, folosindu-se de o tehnică din ce în ce mai înaltă, mai perfecţionată şi mai sofisticată, de informare,



Parametric Plot3D[{{0,4s.cosθ + 8; 0,1s.bex(θ,s=0,8); 9,5-4,5s},

$$\{3{,}5s - 2;\ \frac{(0{,}7-0{,}1s).\cos\theta}{\sqrt{1-0.6\sin^2\theta}};\ \frac{(1-0{,}1(s+0{,}25s.^2))\cos(\theta+\pi/2)}{\sqrt{1-0{,}6\sin^2(\theta+\pi/2)}}\},$$

{4- 2,1s; (1,4 - 0,4s)cos θ ; (1,2 - 0,45s)sinθ },
{2,5s - 0,5; 0,3.cos θ; 0,3Sin θ +0,8},{1+4s; (0,7 -0,1s)cosθ; (0,8 – 0,2s)sin θ},
{0,8s.cos θ +3,5; - 4,5 + 2s; 0,2s.sin[θ –arcsin[0,8 sin(θ-5,8)]]},
{0,8s.cosθ + 3,5; 4,5 – 0,2s; 0,2s sin[θ-arcsin[0,8.sin(θ – 5,8)]]}},
{ θ; 0; 2 Pi}, {s; 1;2}]

Fig. 7.1 **Avion** reprezentat cu funcţii **supermatematice** circulare excentrice

vizualizare, programare, dimensionare, verificare şi de execuţie, îşi desfăşoară activitatea în domeniul **design**-ului.

Designul tehnologic utilizează imaginaţia, informaţia tehnică şi principiile ştiinţifice pentru definirea unei structuri, a unui sistem tehnic sau a unui element destinat să efectueze **funcţii prestabilite**, cu **performanţe impuse**, în condiţii **raţionale**. Adică, cu **minimum** de efort uman (fizic şi intelectual) şi efort material să se obţină **maximum** de calitate şi de eficienţă economică.

Evident, o situaţie ideală: fără cheltuieli (prea mari) să devii miliardar. Numai în Romania acest lucru este, după cum se ştie, posibil şi, se cunoaşte şi prin ce mijloace. Ei bine, acum şi ştiinţa supermatematicii v-a facilita, prin mijloace corecte, acestă posibilitate. Dar, de la posibilitate la realizare e un drum lung ! Fără « găuri de vierme » !

Urmărind stabilirea, în mod corect, a componentelor unei structuri fizice, **design**-ul este o activitate cu scop precis, orientată spre rezolvarea unor probleme tehnice concrete /date, care implică un proces de decizie în condiţii de incertitudine, deci de risc, cu penalizări mari în caz de eşec.

Design-ul este o activitate creatoare, ce dă viaţă unui lucru/produs nou şi util, anterior inexistent, constituind un act de încredere foarte complicat, o muncă pe care mulţi o fac cu greu şi pe care nimeni nu o poate explica în mod satisfăcător, după afirmaţiile lui **Chr. Jones** [**DESIGN**. **METODE SI APLICATII**, Editura Tehnica, Bucureşti, 1975, Traducere din limba engleză].

Tot el a enunţat una dintre cele mai generale şi mai apropiate de realitate definiţii ale **design**-ului:

O iniţiere a shimbării lucrurilor create de om

şi, adăugăm noi, cuprinzând piese scrise şi piese desenate, ale unui proiect, înmagazinate pe hârtie în epoca **Gutemberg**, sau pe un alt suport de memorare, în epoca modernă, şi, de ce nu, în una sau mai multe relaţii matematice, acum şi, în special, în viitorul apropiat. Pentru exemplificare, s-a prezentat în figura **7.1** un **avion** şi relaţiile sale matematice care-l descriu.

Aripile avionului din figură nu au profilele descrise cu funcţii spline, un fel de florar matematic, ci sunt profile aerodinamice **Carafoli** cu bot de fugă rotunjit, asimetrice, iar **coada** cu aceleaşi profile simetrice.

Fuselajul poate fi modificat după dorinţă, doar schimbând valoarea excentricităţii numerice **s**, de la unul pătrat sau dreptunghiular, de excentricitate numerică **s = 1** la unul circular sau eliptic de excentricitate numerică **s = e = 0**; în matematica excentrică (**ME**), aşa cum s-a mai spus, cercul şi pătratul, elipsa şi dreptunghiul au aceleaşi ecuaţii parametrice, aşa cum s-a văzut într-un capitol anterior.

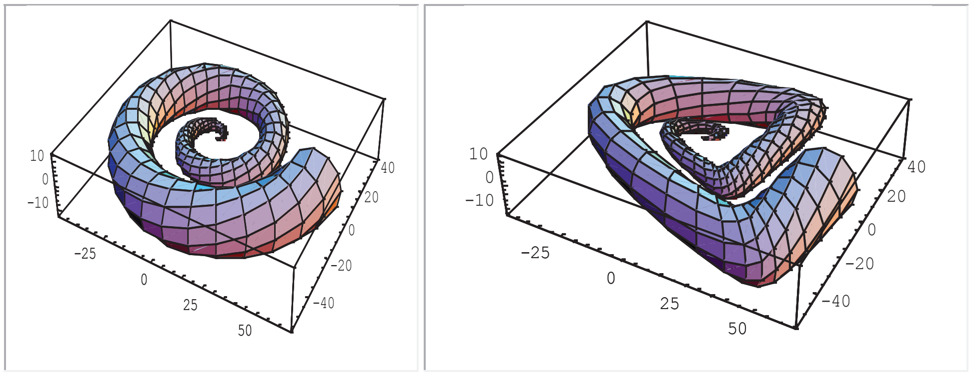
Pe website-urile **http://www.supermatematicaonline.blogspot.ro,** **http://www. supermathematica.org** ; http://www.supermathematica.com şi pe http://www.SuperMatematica.ro pot fi văzute, ca să nu zicem admirate, pe lângă avion şi alte obiecte / forme cum sunt **casă**, **fotoliul**, **pernă** şi multe altele obiecte (super)matematice hibride.

Multiplele programe de proiectare asistate de calculator folosesc acum calculatorul ca pe o planşetă de desen, în sensul că se trag linii, se intersectează, ce-i de prisos se şterge s.a.m.d.. Utilizându-se **FSM** există posibilitatea realizării dintr-odată / direct a diverselor forme plane sau în 3D, printr-un nou sistem de programare denumit **SM-CAD-CAM**.

Realizând saltul imaginativ de la faptele prezentului la posibilităţiile viitorului, **design**-ul este un act temerar, cutezător. El este o activitate hibridă, ale cărui şanse de izbândă depind de îmbinarea armonioasă şi fericită a **artei** cu **ştiinţa** şi cu **matematica**, sau, dece nu, în special cu supermatematica.

Artiştii şi oameni de ştiinţă operează asupra lumii fizice actuale, iar **matematicienii** asupra unor relaţii abstracte, independente de timpul istoric.

Specialiştii în **design** – **inginerii** – sunt condamnati pe veci să trateze ca reale lucruri care vor exista doar în viitorul imaginat de ei şi trebuie să precizeze căile şi mijloacele prin care, cele prevăzute, pot fi făcute să existe.



$$\begin{cases} x = u \cos u[4 + \cos(u + v)] \\ y = u \sin u[4 + \cos(u + v)] \\ z = u \sin(u + v) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = u.cex[u, S(s = 0{,}8, \varepsilon = 0)].[4 + \cos(u + v)] \\ y = u \sin u[4 + \cos(u + v] \\ z = u \sin(u + v) \end{cases}$$

Fig. 7.2,a Melc **centric** (stânga) şi melc excentric (dreapta)

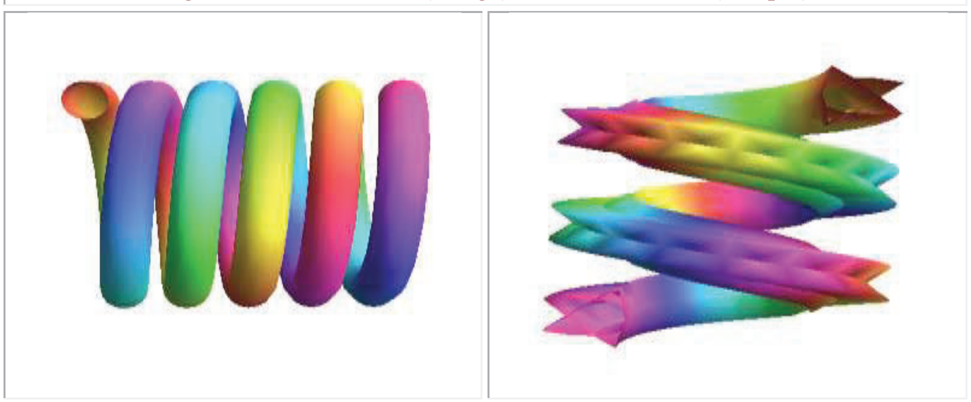


Fig. 7.2,b Elice **centrică** (stânga) şi elice excentrică (dreapta)

Astăzi, **inginerului proiectant** i se cere tot mai mult să fie un **creator**. După **Lucian Blaga,** creaţia este **singurul surâs** al tragediei noastre. ” *Creator este acela care vede ca toată lumea, dar visează ca nimei altul* ”, a zis **Sorin Comoroşan**.

Informatica şi, în primul rând, **matematica**, este aceea care vine în sprijinul proiectantului, ajutându-l să-şi vizualizeze visele pe ecranul unui calculator sau a unei staţii grafice.

Realitatea virtuală a apărut şi, în domeniul imaginii calculate, **supermatematica** va aduce cu siguranţă substanţiale facilităţi.

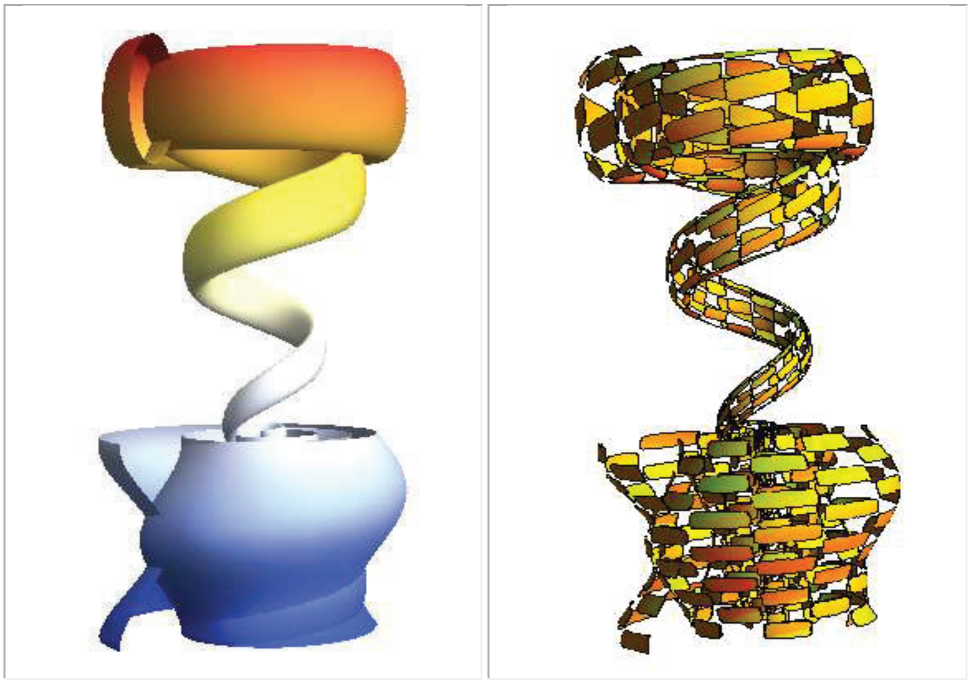


Fig. 7.2,c Elice excentrice conice cu soclu

Printre primele se află multiplicarea la infinit a tuturor entităţiilor matematice. Pornind de la **melcul centric**, reprezentat exclusiv cu funcţii centrice, în stânga figurii **7.2**,a prin înlocuirea funcţiei cos **u** cu **FSM-CE** cex**u,** pentru fiecare valoare dată excentricităţii numerice **s** se va obţine o altă formă de **melc excentric** (dreapta). În dreapta **figurii 7.2,a S(s = 0,8, ε = 0)**. În **figura 7.2,b** sunt prezentate elice centrice şi excentrice, care pot constitui piese mecanice frecvent utilizate în tehnică, denumite arcuri elicoidale. Unele elice, ca cele prezentate în figura **7.2,c** au, pe lângă utilitate tehnică şi atribute estetice.

Este suficient să se privească graficele unor **FSM-CE**, ca cele din figurile **7.3 şi 7.4** pentru a se observa posibilitatea utilizării lor în locul funcţiilor polinomiale.

Funcţia **$sex_1\theta$** a şi fost utilizată cu succes la proiectarea unei came de comandă a unui mecanism de retezare a maşinii de îndreptat bare, fabricată de Electrotimiş din Timişoara şi livrată cu dispozitivul de sudat plase. Cu noua funcţie, în locul celor polinomiale, recomandate de literatura de specialitate, acceleraţia maximă s-a redus la jumătate, cama având o comportare în funcţionare excelentă, peste aşteptări.

Dacă, cu mulţi ani în urmă, proiectantul se mulţumea să realizeze anumite mişcări cu diverse dispozitive, acum pretenţiile sunt cu mult mai mari.

Astăzi se vorbeşte de calitatea sunetului, de calitatea produselor, de calitatea serviciilor ş.a, dar şi de **calitatea mişcării**. Se zice că oricine poate să **mişte** dar numai specialiştii o fac în mod **inteligent**, adică, obţin o **mişcare de calitate**. Ce înseamnă o mişcare de calitate?

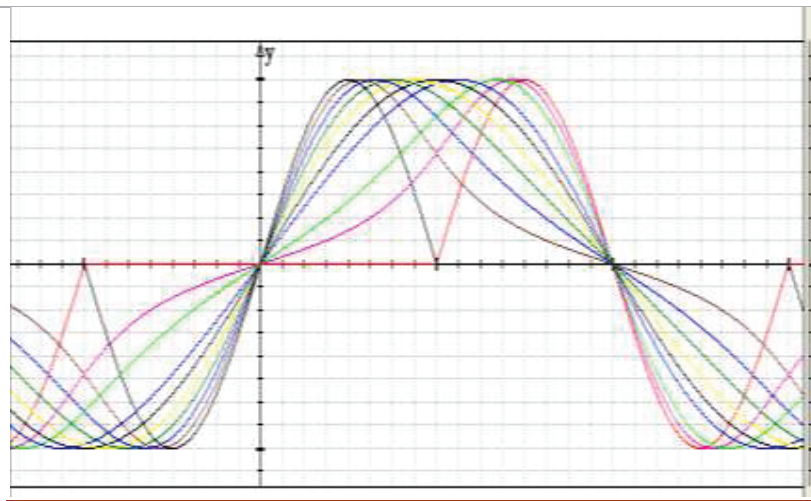


Fig.**7.3** **FSM-CE sex$_{1,2}$ [θ]**, cu **S(s ∈ [-1, 1], ε = 0)** şi pasul **0,2**

1. Asigurarea continuităţii spaţiului/deplasării, vitezei şi a acceleraţiei, pentru reducerea forţelor de inerţie, a şocurilor şi a vibraţiilor parazite;
2. Reducerea vitezelor şi/sau, în special, a acceleraţiilor **maxime**, pentru reducerea puterii maxime şi efective de acţionare şi/sau reducerea timpilor de realizare a anumitor operaţii tehnologice, ca şi pentru realizarea unui mers cât mai uniformă şi mai linistit;
3. Realizarea unei integrale a deplasării în funcţie de timp (denumită **cronosecţiune**) maximă, la mecanismele de distribuţie, de exemplu, pentru reducerea consumului de carburant.

Un exemplu cunoscut de specialişti, este prezentat de firma germană **Schütte** la construcţia dispozitivului de divizare (intermitor cu **cruce de Malta**) al strungului automat multiax, fabricat de ea şi necesar mişcării circulare intermitente a celor 6 arbori principali ai acestui strung. Prin înlocuirea unui intermitor normal/clasic, cu antrenor cu mişcare **circulară,** cu unul cu mişcare **epicicloidală**, mişcare realizabilă cu ajutorul **FSM-CE**, aşa cum s-a prezentat în mai multe lucrări [**Mircea Şelariu,** „DISPOZITIVE DE PRELUCRARE**”**, Cap.17 din **Sanda-Vasii Rosculet, Şelariu**

Mircea, ş.a. „**PROIECTAREA DISPOZITIVELOR”** EDP, Buc, 1982, pag 474…542 şi **Staicu Florenţiu, Mircea Şelariu „CICLOIDE EXPRIMATE PRIN FUNCŢII rexθ** şi **Rexα „TEHNO'95**, Vol.7: Mecatronica, dispozitive şi roboţi industriali, Timişoara], acceleraţia maximă s-a redus la jumătate.

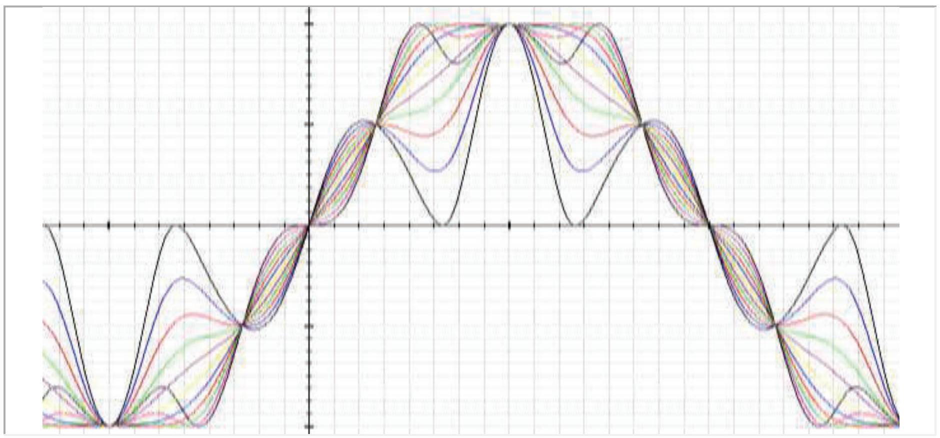


Fig. 7.4 FSM-CE $\mathbf{sex_{1,2}}$ [θ, E(e ⇒ e.sin3θ, ε = 0)]

Ca urmare, la aceaşi durată de realizare a unei divizări, puterea de acţionare s-a micşorat considerabil, iar, la aceeaşi putere, durata divizării a putut fi scurtată, conducând la importante economii de timp şi la creşterea capacităţii de lucru a strungului şi, implicit, la creşterea productivităţii muncii; la timpul de prelucrare al unei piese, pe strunguri cu 6 axe (de fapt, denumirea corectă este de «arbori principali »), timpul de divizare întrând de 6 ori.

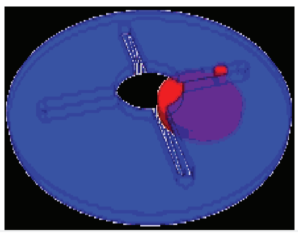
Impresionaţi de realizările/succesele firmei **Schütte** s-a trecut la realizarea unui studiu mai aprofundat [35] al intermitoarelor cu cruce de **Malta**, realizându-se o generalizare importantă a mai multor tipuri de astfel de intermitoare, aşa cum se va prezenta în continuare, generalizare facilitată de apariţia/existenţa **FSM-CE**.

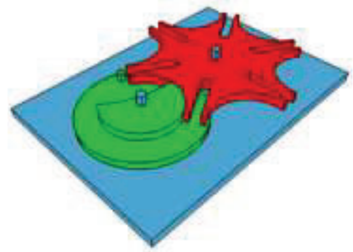
7.3 Generalizarea studiului intermitoarelor cu cruce de Malta clasice.

Două tipuri de intermitoare cu cruce de **Malta**, primul cu antrenare interioară (tip **1**) şi a doilea cu antrenare exterioară (tip **2**) sunt prezentate schematic în figura **7.5**.

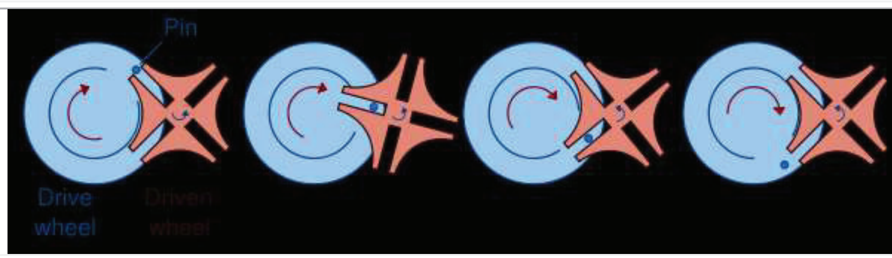
În literatura engleză acest mecanism este cunoscut sub denumirea de “Geneva mecanism” şi, un astfelk de mecanism cu divizarea in 6 părti (z = 6), preluat de pe **Wikipedia** (http://en.wikipedia.org/wiki/Geneva_drive), acolo cu posibilităţi de animaţie este prezentat în figura **7.5-sus**.

Intermitoarele sunt dispozitive cu mişcare de rotaţie periodică, denumite şi dispozitive de divizare a unei rotaţii sau circumferinţe de 2π în **z** părţi egale, utilizate în componenţa maşinilor unelte agregate de prelucrare mecanică, când li se cere o rigiditate mare şi la linii automate rotorice sau dispozitive agregate de asamblare mecanică a unor produse de dimensiuni mai reduse, când li se cere o viteză mare de divizare. Mecanisme de divizare ale acestor dispozitive, transformă mişcarea continuă a antrenorului, cu viteza unghiulară α_1 **= Ω = ct.**, în sens **sinistrorum** sau levogin, la

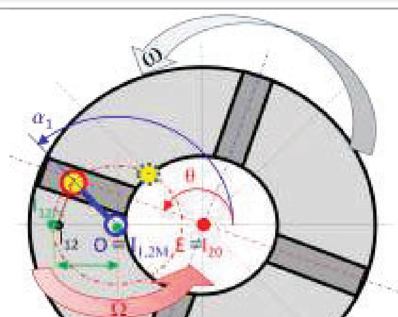




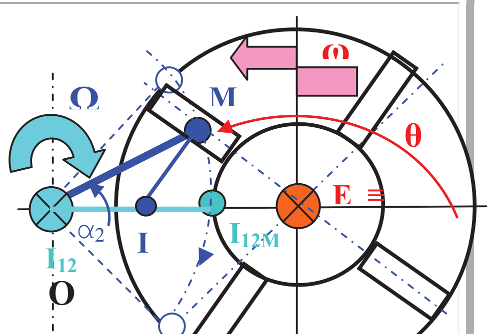
http://en.wikipedia.org/wiki/Geneva_drive



Mecanism intermitor **Geneva** tip 1 cu z = 4 şi tip 2 cu z = 6



Tip 1 cu antrenare interioară



Tip **2** cu antrenare exterioară

Fig. 7.5. Intermitoare clasice cu cruce de **Malta** de tip **1** şi 2

tip 1 (**Fig. 7.5**) şi în sens invers, **dextrorum** sau dextrogin la **tipul** 2 într-o mişcare intermitentă a discului sau a mesei/platoului 2. Antrenorul **1** este fixat printr-un bolţ de un disc special, care are şi funcţia de frânare, sau de împiedecare a rotirii discului divizor, în momentele în care antrenorul iese din cele **z** canale ale acestuia, neprezentat în figuri, timp în care discul divizor staţioneaza într-una din cele **z** poziţii .

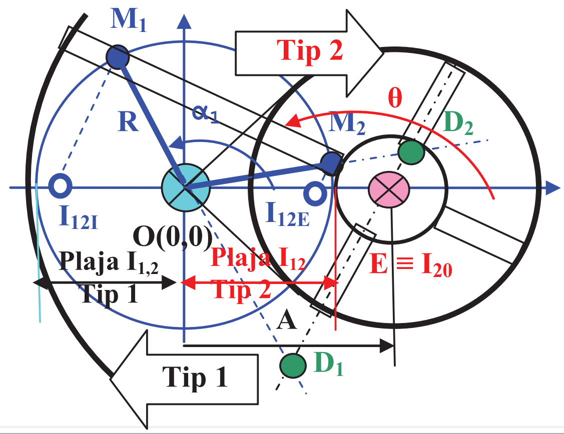
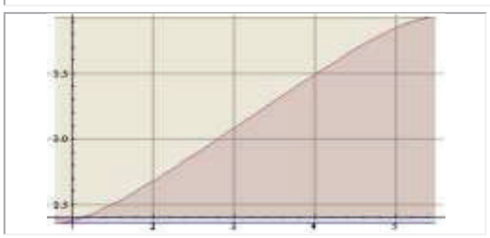


Fig. 7.6 Intermitor cu cruce de **Malta** (mecanism **Geneva**) generalizat

ROTAŢIA / SPĂŢIUL



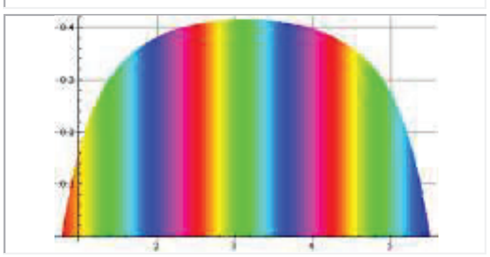
$\alpha \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow$

$\rightarrow \theta \in [3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{2}]$

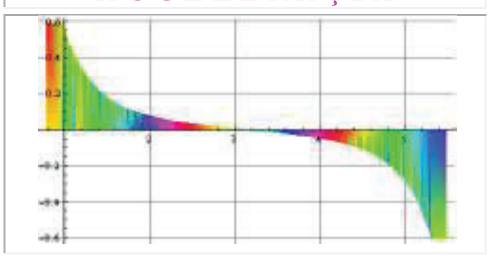
$$\theta = \pi - \arctan\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}} - \cos\alpha}$$

$$R = 1,\ e = s = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}},$$

VITEZA UNGHIULARĂ



ACCELERAŢIA



Mărimi cinematice ale mecanismuli intermitor
cu crice de Malta (**MICM**)de Tip 1

În **figura 7.5**, z = 4 şi z = 6 şi rareori se construesc astfel de dispozitive cu z mai mare, deoarece pentru o divizare în mai mult decât 4 sau 6 părţi, între discul divizor şi platou/masă se interpune o transmisie cu roţi dinţate care transforma z = 4 într-un z oarecare, dorit. Transmisia cu roţi dinţate nu împietează asupra preciziei de divizare, dacă se prevăd fixatori care stabilesc precis poziţia finală, după divizare.

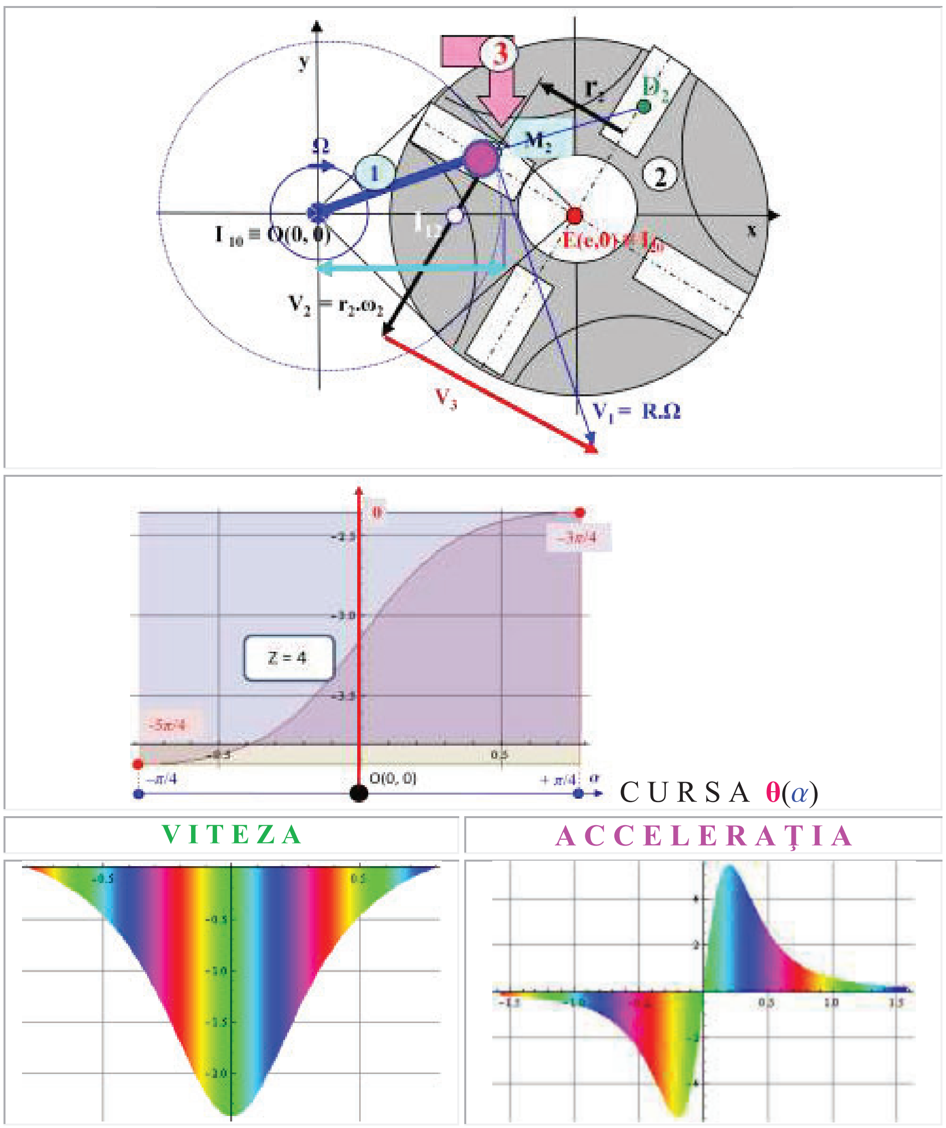


Fig. 7.7 Poligonul vitezelor elementelor **1**, **2** şi **3** ale intermitorului de tip **2**.

Antrenorul M_1 la tipul 1 şi M_2 la tipul 2 se corespund cu cele două determinări ale **FSM–CE** **sugerând** posibilitatea şi **facilitând**, astfel, **generalizarea** intermitorului, aşa cum se ilustrează schematic în figura **7.6.**

În figura **7.6** este prezentat modul de generalizare a acestor două tipuri de intermitoare cu cruce de **Malta**.

Axa de rotaţie **O(0,0)** a antrenorului M_1 şi M_2 este centrul cercului de rază **R** pe care sunt definite FSM-CE, iar axa de rotaţie a discului divizor este ex-centrul **E(e, 0)** cu $e = A > R$ şi $s = e / R$.

Elementul **1** este antrenorul şi elementul **2** este discul divizor.

Punctul $I_{10} \equiv O(0,0)$ şi punctul $I_{20} \equiv E(e,0)$ sunt centre instantanene de rotaţie **permanente** ale elementelor **1** şi, respectiv, **2**, iar I_{12I} şi I_{12E} sunt centre instantanee de rotaţie, sau al vitezelor, **nepermanente**, ele deplasându-se de la un moment la altul într-o plajă/domeniu, marcată în figură.

Centrele instantanee de rotaţie (CIR), punctele I_{12I}, $O(0,0) \equiv I_{10}$ şi $E \equiv I_{20}$ ca şi I_{12E} sunt ale elementelor care sunt în angrenare şi care sunt, conform **teoremei** lui **Aronhold – Kennedy** (bazată pe teorema lui **Menelaus,** a **coliniarităţii** celor trei centre instantanee de rotaţie), coliniare pe axa **x**, aşa cum se poate observa în figurile anterioare şi în figura **7.7**.

Suportul lor comun, axa **x**, este denumită **dreapta centrelor** - a centrului **O(0,0)** şi a ex-centrului **E(e,0)** - Pe aceasta se află **plaja** pe care o poate ocupa **CIR nepermanente** I_{12I} **şi,** respectiv, I_{12E} ale dispozitivelor de **tip1** şi, respectiv, **tip 2**.

` Se observă din figura **7.6** că, cele două **plaje**, ale celor două tipuri de mecanisme, sunt complementare, adiacente şi, evident, coliniare.

Triunghiul OM_2E, pentru o **poziţie iniţială de intrare** a punctului M_2 într-unul din cele **z** canale radiale centrice de divizre din elementul **2**, este un triunghi dreptunghic, cu unghiul drept în M_2, oricare ar fi numărul de divizări **z**.

Unghiul OEM_2 este, datorită simetriei în acest moment, jumătatea unghiului dintre două canale radiale centrice, adică, unghiul **π/z.** Rezultă astfel, din triunghiul OM_2E**,** o prima relaţie dintre excentricitatea reala **e** şi /sau cea numerică **s** şi numărul de divizări **z**

(7.1) $$e = \frac{R}{\sin\frac{\pi}{z}} \rightarrow s = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$$, valabilă pentru toate tipurile de intermitoare cu cruce de **Malta** şi oricare $z \in [3, n]$.

Pentru intermitoarele cu angajare exterioară (tip.2), **unghiurile limită** la excentrul **E**, care dau poziţia iniţială θ_i la care rola întră în canalul radial al crucii de **Malta** (**2**) şi începe mişcarea periodică a discului divizor, şi poziţia finală θ_f, la care antenorul părăseşte canalul radial şi mişcarea intermitentă a discului divizor încetează, sunt date de relaţiile

(7.2) $\theta_{i,f} = \pi / Z + k.\ \pi/Z$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ şi $Z = 3,4,5, \ldots, N$ şi

(7.3) $\theta_{i,f} = \pm [\ \pi - (\pm \pi / Z \pm k.\ \pi/Z)\ ]$, la tipul **1**

Viteza de rotaţie a antrenorului V_1 este

(7.4) $\quad V_1 = R.\ \Omega =$ **constant**, deoarece **R** şi **Ω** sunt, în acest caz, **constante**, ceea ce nu se va mai întâmpla la un **nou tip** de intermitor, la care traiectoria axei antrenorului este o **epicicloidă** (roză cu **z** ramuri / lobi) exprimabilă cu funcţia **Rex z.α**, aşa cum se va prezenta puţin mai departe.

Din **figura 7.7** se vede că V_2 este proiecţia vectorului V_1 pe o direcţie normală pe direcţia radială excentrică, adică, a vectorului $\mathbf{r_2}$

(7.5) $\quad \vec{r}_2 = R.\ \mathrm{rex}\theta.\ \mathbf{rad\theta}$

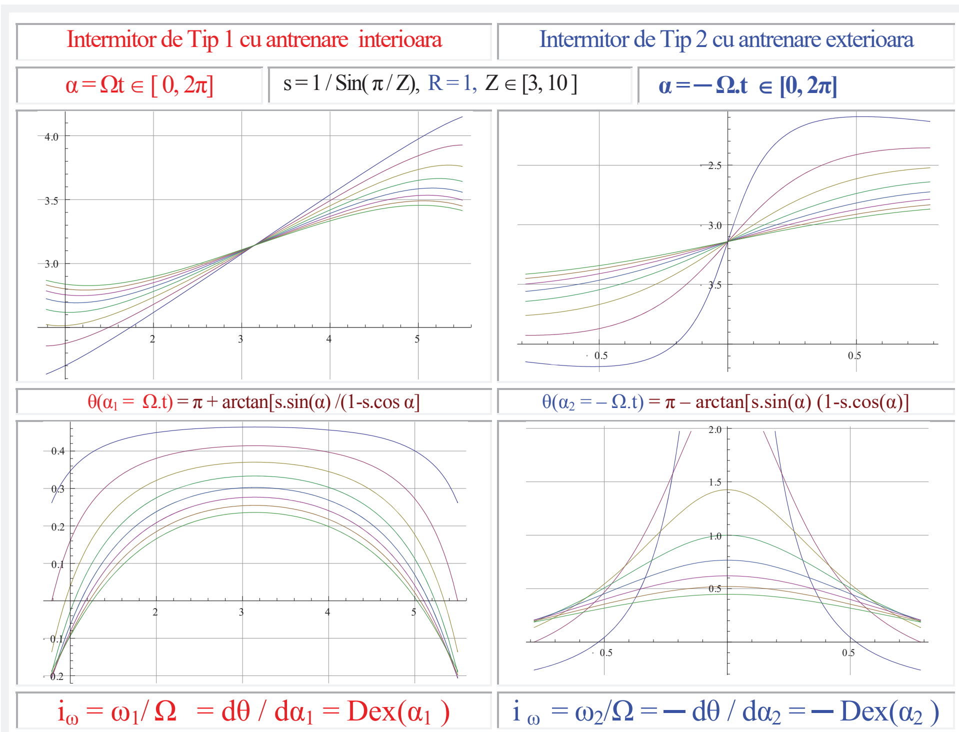


Fig. 7.8. Rotaţia $\theta(\alpha_{1,2})$ şi raportul de transmitere al vitezelor unghiulare $i_\omega = \omega_{1,2}\,(\alpha_{1,2} = \pm\,\Omega.t) / \Omega$ ale intermitoarelor clasice generalizate

Ca urmare a coliniarităţii vectorilor $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_3$**,** care exprimă viteza de translaţie, în canalul radial centric, de antrenare a unei role cu rostogolire sau a culisei cu alunecare **3**, introdusă pentru a sugera mişcarea rectilinie în canalul radial centric al rolei de antrenare, vectorul V_2, care exprimă viteza de rotaţie a discului divizor **2**, este nul, echilibrul poligonului vitezelor degenerând într-o dreaptă radială centrică (direcţia fazorului **rad** $\theta_{i,f}$) ce trece prin ex-centrul **E** **(Fig.7.7),** astfel că, dacă $V_1 = V_3$**,** rezultă $\rightarrow V_2 = 0 \rightarrow \omega_2 = 0$ când $\mathbf{r_2}$ este **maxim** şi egal cu jumatatea diametrul exterior al discului divizor **2,** iar punctul instantaneu de rotaţie relativă I_{12} coincide cu **O(0,0),** adică este în punctul $I_{1,2\ min}$, la începutul **plajei** pe care acest punct îl poate parcurge,

dus-intors, de la minim (**m**) spre maxim (**M**) şi înapoi la minim, la fiecare divizare în parte.

Acest lucru arată că mişcarea intermitentă de rotaţie debutează **fără şocuri**, începând de la o viteză minimă nulă şi trecând printr-o viteză de rotaţie $\boldsymbol{\omega_{2Max}}$, care, aşa cum se poate observa fără dificultate, apare la cealaltă extremitate a plajei, când

$\mathbf{r_2 \rightarrow r_{2\,min}}$ şi $\mathbf{OI_{1,2} = R}$,

astfel că $\mathbf{I_{1,2}}$ ocupă cealaltă limită extremă a plajei $\mathbf{I_{12\,Max}}$. (**Fig. 7.5**, jos).

Unghiul la centrul O este $\alpha_{1,2}$ iar cel de la excentrul E este θ. Raportul de transmitere al vitezelor unghiulare este

(7.6) $i_{\omega 1,2} = \omega_2/\omega_1 = -(d\theta/dt)/(d\alpha_{1,2}/dt = -d\theta/d\alpha_{1,2} =$
$- 1/(d\alpha_{1,2}/d\theta) = - 1/dex_{1,2}\theta = - Dex\ \alpha_{1,2}$,

semnul minus indicând faptul că rotaţiile sunt de sensuri contrare.

Se ştie că pentru **e** < R, **FSM-CE** sunt continue pe toată axa $\theta \in [-\infty, +\infty]$, în timp ce, pentru **e** > **R**, cum este acest caz, **FSM-CE** sunt discontinue, ele existând doar în domeniul în care dreapta d, turnantă în jurul lui **E**, intersectează cercul **C(O,R),** adică, există doar în intervalul $\theta \in [\theta_i, \theta_f]$ dat de relaţiile (7.2) şi, respectiv, (7.3).

În intervalul $\theta \in [\theta_f, \theta_i]$ crucea de **Malta** staţionează. Faptul că **FSM-CE** sesizează deosebirile dintre diversele tipuri de mişcări, continue sau intermitente, constitue încă un avantaj în favoarea utilizării lor.

Coordonata $y_{1,2}$ a punctului $M_{1,2}$ este

(7.7) $y_{1,2} = \mathbf{R}.\sin\alpha_{1,2} = (\mathbf{e} - \mathbf{R}.\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha_{1,2}})\ .\tan(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta})$, din care rezultă

(7.8) $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\pi} - \arctan(\mathbf{R}.\sin\boldsymbol{\alpha_{1,2}} /(\mathbf{e} - \mathbf{R}\mathbf{cos}\boldsymbol{\alpha_{1,2}})\ ) = \boldsymbol{\pi} - \arctan(\sin\boldsymbol{\alpha_{1,2}} /(\ \mathbf{s} - \mathbf{cos}\boldsymbol{\alpha_{1,2}}\ )$

La intermitoarele de tipul **1**, α_1 creşte în acelaşi sens, cel trigonometric, cu θ , astfel că $\omega_1 = \Omega$ şi ω_2 sunt de acelaşi semn, pozitive, iar la intermitoarele de tipul **2** sunt de sensuri diferite, astfel că în relaţia anterioară, pentru tipul **2,** $\boldsymbol{\alpha_2 \rightarrow - \alpha_1}$.

Prin derivare, în raport cu $\alpha_{1,2}$ se obţine raportul de transmitere al vitezelor unghiulare ale celor două elemente

(7.9) $$Dex\ \alpha_{1,2} = d\,\theta/\,d\alpha_{1,2} = \frac{(s-\cos\alpha_{1,2})^2}{1+s^2-2s.\cos\alpha_{1,2}} = \left(\frac{s-\cos\alpha_{1,2}}{\operatorname{Re}x\alpha_{1,2}}\right)^2 = i_\omega = \frac{\omega_{1,2}}{\Omega},$$

în care indicii 1,2 indică punctele $M_{1,2}$, care coincid şi cu tipul **1**, respectiv, 2 al mecanismului intermitor, iar

(7.10) $\boldsymbol{\alpha_{1,2}} = \pm\, \boldsymbol{\Omega}.t$

Graficele funcţiilor $\theta(\alpha = \Omega.t)$ si $i_\omega = \omega(\alpha_{1,2} = \pm\,\Omega.t) / \Omega$ pentru cele două tipuri de intermitoare sunt prezentate în **figura 7.8**. pentru $\boldsymbol{\alpha_1 = \Omega t \in [0, 2\pi]}$ şi, respectiv, $\alpha_2 = -\Omega.t \in [0, 2\pi\,]$.

7.4 Intermitoare speciale cu antrenor cu traiectorie epicicloidală.

Un astfel de intermitor special, derivat dintr-un intermitor clasic tip **2** cu antrenare exterioară, este prezentat schematic în **figura 7.9**. iar traiectoriile antrenorului, pentru $\mathbf{Z} \in [3, 6]$ şi $\mathbf{Z} \in [3, 10]$ cu s = 0,3 – sus- şi **Z** = 4 şi s $\in$ [0,1 ; 0,3] - jos în **figura 7.10**.

La acest sistem, braţul port rolă, de antrenare a intermitoarelor clasice, a fost divizat în două braţe, unul mai lung, ce se roteşte în jurul centrului **O(0,0),** ca şi în

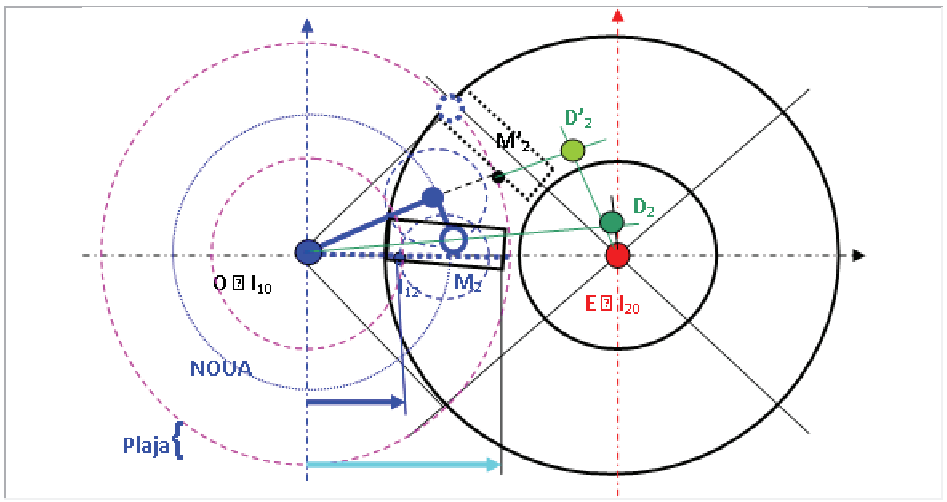


Fig. 7.9 Intermitor tip **2** optimizat cu antrenor cu traiectorie epicicloidală **Z = 4**

cazul clasic, cu viteza unghiulară $\mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbf{\Omega_1}$ = constantă, şi unul mai scurt, articulat în capătul primului braţ, ce se roteşte tot cu viteză constantă $\mathbf{\Omega_2}$ în jurul articulaţiei, datorită roţii solare (satelit) care se rostogoleşte cu angrenare exterioară pe o roată centrală cu centrul în **O**. Raportul turaţiilor depinde de raportul numărului de dinţi ale celor două roţi dinţate şi se alege astfel, încât la o rotaţie completă, traiectoriile curbelor descrise de axa rolei antrenorului să se închidă şi să se suprapună, aşa cum se vede în **figura 7.10**.

Printr-un sistem de angrenare cu roţi dinţate, neprezentat în schiţă, rola de antrenare a crucii de **Malta** (discului divizor) execută traiectoria de **Z = 4** din **figura 7.10,** care este un **epiciclu** sau o roză (pentru **s = 1**) descrisă de funcţia

(7.11) $\rho = \mathrm{R.\ Rex}\ (Z\alpha) = \mathrm{R.}\sqrt{1+s^2-2s.\cos(Z\alpha)}$.

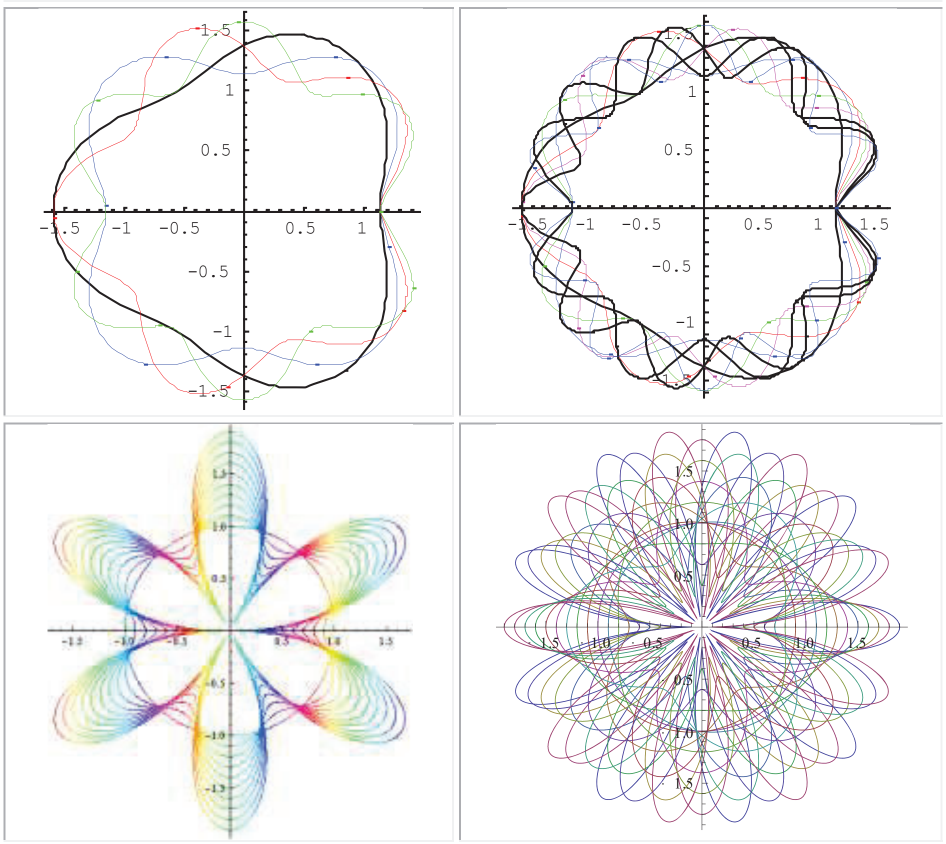
În figura **7.9,** se observă că poziţia plajei ($\mathbf{I_{12Min}}$ .. $\mathbf{I_{12Max}}$) ocupate de centrul instantaneu de rotaţie $\mathbf{I_{12}}$, a intermitorului special optimizat, se reduce substanţial în comparaţie cu cel clasic, prin deplasarea spre stânga a lui $\mathbf{I_{12Max}}$ comparativ cu $\mathbf{I_{12Max}}$ din **figura 7.5**.

Conform teoremei lui **Tahles**, o paralelă $\mathbf{M_2I_{12E}}$ şi, respectiv $\mathbf{M_1I_{12I}}$, la una din laturile unui triunghi ($\mathbf{ED_2}$ şi, respectiv, $\mathbf{ED_1}$), împarte celelalte două laturi ($\mathbf{OD_2}$ şi, respectiv, **OE**, ca şi pe $\mathbf{EI_{12I}}$ şi, respectiv, $\mathbf{M_1D_1}$) în segmente proporţionale (**Fig. 7.5**). Rezultă astfel

(7.12) $\frac{M_{1,2}D_{1,2}}{OM_{1,2}} = \frac{I_{12I,E}I_{20}}{I_{10}I_{12I,E}} = X_2 / X_1 = \omega_{10} / \omega_{20} = \omega_1 / \Omega$, în care $X_1 = OI_{12}$ **şi** $X_2 = EI_{12}$

pe dreapta centrelor **OE**. Relaţia (7.12) este o consecinţă a teoremei coliniarităţii centrelor instantanee de rotaţie (permanente şi temporare) care exprimă şi raportul de transmitere al vitezelor unghiulare relative la acelaşi element $\omega_{13} / \omega_{23}$. Se ştie că

Z ∈ [3, 6] , **s = 0,3,** **Z ∈ [3, 10]**



Z = 6, **s ∈ [0 ; 0,9]** **Z = s,** **s ∈ [-0,9 ; 0,9]**

Fig. 7.10 Traiectorile antrenorului, roze descrise de **FSM-CE** Rex (Z α)

biraportul format de cele trei centre instantanee de rotaţie, reprezintă, totodată, raportul vitezelor instantanee ale celor două elemente ale intermitorului [v. **Manolescu,N.I.**& **Popovici, M.M.,** „Lucrări teoretice complementere, structura, cinematica, cinetostatica şi dinamica mecanismelor", EDP, Buc. 1981]. Cu privire la metoda proiecţiilor vitezei [v. **Levenson L.B.** „TEORIA MECANISMELOR ŞI A MAŞINILOR", Ed.Tehnică, Buc. 1951, pag.80] se arată că, dacă se cunoaşte viteza unui punct al unui mecanism oarecare, atunci se pot determina vitezele tuturor punctelor mecanismului prin metoda amintită.

O teoremă stipulează că proiecţiile vitezelor a două puncte ale unui element, pe dreapta ce uneşte aceste două puncte, sunt **egale** şi de **acelaşi sens**, aşa cum se poate observa în **figura 7.7** pentru veriga **3** care are o mişcare liniară în canalul discului divizor sau a crucii de **Malta**.

La intermitoarele clasice tip 2, viteza unghiulară maximă a crucii de **Malta** era (7.13) $\omega_M = \mathbf{R}.\ \Omega$, iar la intermitorul special optimizat, prin scurtarea braţului de antrenare de la **R** la **R** – **r** viteza unghiulară maximă scade la

(7.14) $\omega_M = (\mathbf{R - r})\ .\ \Omega$.

Astfel se va obţine o uniformitate mai bună a vitezelor unghiulare şi, cel mai important, o acceleraţie maximă mult mai redusă, deoarece, la intermitoarele de tipul 2, viteza maximă apare pentru $\alpha = 0$ şi $\theta = \pi$ din (7.11) rezultă

(7.15) $\rho\ (0) = \mathbf{R}.\ \mathrm{Rex}(4\alpha) = \mathbf{R}\ (\mathbf{1} - \mathbf{s})$, din care rezultă că lungimea braţului mai scurt al antrenorului special este

(7.16) $\mathbf{r} = \mathbf{R}\ .\mathbf{s} = \mathbf{e}$.

Exprimarea cu ajutorul **FSM-CE** şi realizarea curbelor epiciclice, periciclice şi hipociclice pe maşini unelte, cu directoare şi/sau generatoare programate sau cinematice, se poat consulta în lucrarea **Şelariu Mircea** Cap 8. „DISPOZITIVE DE PRELUCRARE A SUPRAFEŢELOR COMPLEXE" din tratatul de „Proiectarea Dispozitivelor" de **Sanda-Vasii Roşculeţ**, ş.a. EDP, Buc 1982.

Pentru o calitate superioară a analizei mişcării intermitoarelor, şi nu numai, se impune o metodă nouă de abordare a problemelor de mecanică, calitativ superioară metodelor clasice, denumită **metoda separării forţelor** şi a **momentelor**, sau mai scurt, **metoda separării momentelor** (**MSM**), care va fi prezentată în capitolul următor.

Ea permite o analiză mai simplă şi mai evidentă a problemelor determinării rapoartelor de transmitere ale **vitezelor**, **acceleraţiilor**, **forţelor** şi a **randamentelor** acestor mecanisme. Ea este o **nouă metodă de cinetostatică**, o metoda deosebit de **utilă**, care înlocuieşte cu succes metoda clasică **d'Alembert**, reducând problemele de **cinetostatică** la simple probleme de **geometrie elementară**.

Dacă **Mecanica,** şi în special **Mecanismele,** s-a dezlipit, cu mulţi ani în urmă din **Matematică**, ca o disciplină aparte, iată că ea poate reveni din nou în cadrul reginei ştiinţelor: **Matematica**.

Motto:"**Metoda** este înţelegerea esenţei ideii adevărate "
B. Spinoza

Capitolul 8

METODA SEPARĂRII FORŢELOR ŞI A MOMENTELOR

Metoda separării **forţelor** şi a momentelor, sau pe scurt **metoda separării momentelor** (**MSM**) a fost publicată iniţial la "Primul Simpozion Naţional de Roboţi Industriali" din Bucureşti - octombrie 1981- sub denumirea de "**Cinetostatică geometrică**" de **M.E. Şelariu [45]**. Datorită multiplelor facilităţi pe care le oferă, **MSM** s-a extins rapid, în prezent fiind publicate peste 20 lucrări cu peste 9 autori.

Cu ajutorul **MSM** au fost soluţionate **exact** şi **rapid** probleme de **cinetostatică** care anterior au avut numai soluţii aproximative. De exemplu, determinarea funcţiei de transmitere a forţelor la elementele de tipul excentricului circular, evolventic şi spiral, a plunjerului; în relaţiile existente în literatură fiind neglijate momentele forţelor de frecare din ghidajele lui şi multe altele.

Metoda se poate aplica cu acelaşi succes şi în **dinamică**.

Totodată, relaţiile analitice exacte obţinute (ale unor elemente, ca de exemplu, pana) sunt mult mai simple şi mai uşor de manipulat, la elementele legate în serie, decât cele clasice, deşi elementele considerate au fost alese mai complexe (în sensul că pana, de exemplu (**Fig. 8.1**), are toate feţele înclinate).

8.1. Principiul metodei separării momentelor

MSM este o metodă analitică **exactă** şi rapidă de determinare a funcţiilor de transfer a forţelor, curselor, vitezelor ş.a. ale unor elemente, grupe de elemente sau ale unui mecanism în ansamblul lui, <u>ocolind scrierea şi rezolvarea unor sisteme de ecuaţii de echilibru</u> .

Se cunoaşte faptul că soluţionarea acestor tipuri de probleme, în mecanica clasică, după metodele lui **d'Alembert**, conduce la scrierea şi rezolvarea celor şase ecuaţii de echilibru a forţelor: trei de proiecţie a acestora pe direcţiile celor trei axe de coordonate, ale unui sistem rectangular drept, şi trei de echilibru a momentelor forţelor în jurul acestor axe.

De asemenea, se cunoaşte că rezolvarea unui astfel de sistem de ecuaţii conduce la formarea unor matrici, în cazul de faţă de 6 x 7 din care rezultă apoi determinanţii sistemului şi determinanţii celor 6 necunoscute. Aplicând acestei matrici principiul **matricilor partiţionate**, denumite şi **matrici compuse** (aceste matrici au ca elemente componente tot matrici), pot fi eliminate dintr-odată necunoscutele, care nu ne interesează (**secundare**) în primul moment, obţinându-se rapid şi elegant o dependenta dintre două mărimi, de exemplu forţa rezultantă de **ieşire** şi forţa rezultantă de **intrare**, care reprezintă tocmai **funcţia de transfer** sau **de transmitere a forţelor rezultante** pentru elementul, subansamblul sau sistemul mecanic studiat, considerat în echilibru static sub acţiunea forţelor exterioare şi de legătură.

Există **trei** astfel de **funcţii** (expresii), corespunzătoare celor **trei stări posibile** de existenţă ale elementului, sau ale sistemului considerat:

1. De mişcare, sau tendinţă de mişcare, spre **stânga** sau de rotire în sens **sinistrorum** (levogin), sau în sensul **strângerii**, din care cauză toţi indicii mărimilor sunt notaţi cu **S**

2. De mişcare, sau tendinţă de mişcare, spre **dreapta** sau de rotire în sens **dextrorum** (**dextrogin**), sau în sensul **destrângerii**, din care cauză toţi indicii mărimilor sunt notaţi cu **D** şi

3. De staţionare, **fără tendinţă de mişcare** (translaţie, rotaţie sau combinate).

În acest caz forţele de frecare din sistem nu-şi fac apariţia, sistemul comportându-se **ca şi / precum** un **sistem ideal**, în care se consideră că frecările lipsesc cu desăvârşire. În acest ultim caz indicii sunt cei ai sistemelor ideale **id**.

În concepţia sistemică, raportul dintre oricare mărime de la ieşire, a unui element sau sistem şi o aceeaşi mărime sau a alteia de la intrarea elementului sau a sistemului, este denumită **funcţie de transfer (FT)** a mărimilor respective.

Dacă mărimile sunt de acelaşi gen, atunci **FT** este **adimensională** sau **normată**, iar dacă mărimile sunt de natură diferită, **FT** este cu dimensiunea ce rezultă din raportul mărimilor respective.

FT mai este denumită şi **raport de transmitere** sau de transfer (**informaţional**) şi, pentru simplificarea scrierii, se noteaza cu **i** şi cu indicele mărimii transmise (forţelor rezultante $\mathbf{i_R}$, forţelor normale $\mathbf{i_N}$, **cursei** sau **deplasării** $\mathbf{i_X}$, sau $\mathbf{i_h}$, sau $\mathbf{i_C}$,vitezelor $\mathbf{i_V}$, acceleraţiilor $\mathbf{i_a}$)

Funcţia de transfer a rezultantelor forţelor ($\mathbf{FT_R} \equiv i_R$), este **cea mai importantă**, deoarece, din expresia ei, **exactă** şi numai în acest caz, pot fi deduse expresiile exacte ale oricăror altor mărimi. Ea este, prin definiţie:

(8.1) $\mathbf{FT_R} \equiv \mathbf{i_R} = \dfrac{R_2}{R_1}$, în care $\mathbf{R_2}$ şi $\mathbf{R_1}$ sunt modulele rezultantele forţelor de la **ieşirea** şi, respectiv, de la **întrarea** în element sau sistem.

$\mathbf{FT_R}$ se obţin, în mod curent, pentru sensul **S** sau **D**.

Dacă ele se calculează pentru sensul **S**, atunci există **convenţia** renunţării la indicele **S**, pentru simplificarea scrierii relaţiilor ($\mathbf{FT_R} \equiv \mathbf{FT_{RS}}$).

Din expresia **exactă**, şi numai dintr-o astfel de expresie, prin schimbarea **sensului** (**semnului** din faţa termenilor respectivi) **frecărilor** (unghiurilor de frecare $\boldsymbol{\varphi_i}$, coeficienţilor $\boldsymbol{\mu_i}$ şi a razelor de frecare $\boldsymbol{\rho_i}$) se obţin, imediat, $\mathbf{FT_{RD}}$ în sensul invers **D**, iar prin anularea termenilor de frecare (unghiuri, coeficienţi şi raze $\boldsymbol{\varphi_i = \mu_i = \rho_i = 0}$) se obţine imediat expresia **raportului de transmitere a forţelor ideal** $\mathbf{FT_{id} = FT_N}$, acelaşi cu **FT** a forţelor normale, deoarece, în lipsa frecărilor, rezultantă se confundă cu normala în punctul de contact ($\overline{R} \equiv \overline{N}$). Adică:

(8.2) $$\begin{cases} FT_{RD} = FT_R(\varphi_i, \mu_i, \rho_i \Rightarrow -\varphi_i, -\mu_i, -\rho_i) \\ FT_{id} = FT(\varphi_i, \mu_i, \rho_i \Rightarrow 0) \end{cases}$$

$FT_x \equiv i_x \equiv i_C$ a **deplasărilor** unui element, subansamblu sau sistem este, prin definiţie, raportul dintre deplasarea de la ieşire **x_2** sau **h_2** şi deplasarea de la întrare **x_1** sau **h_1**, măsurate pe direcţia normalelor din punctele de contact, la suprafeţele de la **ieşire** şi, respectiv, de la cea de **intrare**:

(8.3) **FT_X** $= \dfrac{x_2}{x_1} =$ **i_x**, iar randamentul unui element sau sistem este **FT** a **energiei**, **puterii** sau a **lucrului mecanic** şi este:

(8.4) $$\eta = FT_E = FT_L = \frac{L_2}{L_1} = \begin{cases} \dfrac{N_2.x_2}{N_1.x_1} = \dfrac{R_2.\cos\varphi_2.x_2}{R_1.\cos\varphi_1.x_1} = \\ \dfrac{R_2}{R_1}.\dfrac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}.\dfrac{h_2}{h_1} = FT_R \bullet FT_X \bullet FT_C \end{cases}$$

în care forţele normale **N_i** s-au obţinut ca proiecţii ale rezultanţelor **R_i** (i =1,2) şi **raportul cosinusurilor** este notată **FT_C**. În majoritatea cazurilor, **coeficienţii de frecare** sunt consideraţi egali ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$) şi raportul cosinusurilor este **1**.

Randamentul, astfel obţinut, este corespunzător tendinţei de mişcare, sau a mişcării, în sensul **S**. Prin schimbarea semnelor frecărilor în (8.4) se va obţine pentru sensul **D**, iar prin anularea frecărilor se obţine randamentul unui sistem ideal, care este, evident, egal cu unitatea ca şi raportul cosinusurilor, astfel că:

(8.5) $\eta_{id} = 1 = FT_{id} \bullet FT_X$, în care rezultă că raportul curselor (**FT_X**) este inversul raportului de transmitere a forţelor sistemului ideal (**FT_{id}**) :

(8.6) **FT_X** $= \dfrac{1}{FT_{id}}$, astfel că, înlocuind în (8.4) rezultă ceea ce, în literatura de specialitate, poartă denumirea de **legea cutiei negre:**

(8.7) $\dfrac{FT_R \bullet FT_C}{FT_{id} \bullet \eta} = 1$ sau (8.7 ') $\dfrac{i_R \bullet i_C}{i_{id} \bullet \eta} = 1$ şi $\dfrac{i_{RD} \bullet i_C}{i_{id} \bullet \eta_D} = 1$, pentru sensul **D.**

Pentru exemplificare, se consideră un sistem solicitat de forţe plane, sau reductibile la acesta, deci plan sau bidimensional, a cărui ecuaţii de echilibru sunt:

(8.8) $$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$. Primele două ecuaţii scalare din (8.8) sunt echivalente cu prima ecuaţie vectoriala din (8.9) care exprimă faptul că, în condiţii de echilibru, cei patru vectori $\overline{\mathbf{Ri}}$ (i =1..4) formează un patrulater (poligon) închis, parcurs în acelaşi sens.

$$(8.9)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_1}+\overrightarrow{R_2}+\overrightarrow{R_3}+\overrightarrow{R_4} \\ \sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{M_1}\Big|_M = \overrightarrow{M_1}+\overrightarrow{M_2}+\overrightarrow{M_3}+\overrightarrow{M_4} = 0 \\ s\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{M_i}\Big|_S = \overrightarrow{M_1}+\overrightarrow{M_2} = 0 \end{cases}$$

, ultima ecuaţie din (8.9), scrisă vectorial, este $\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{M_i}\Big|_S = \overrightarrow{M_1}+\overrightarrow{M_2} = \overrightarrow{R_1}\times\overrightarrow{d_1}+\overrightarrow{R_2}\times\overrightarrow{d_2} = 0$

Primele două ecuaţii din (8.8) - de proiecţie a forţelor pe axele x şi, respectiv, y - sunt echivalente cu ecuaţia vectorială de echilibru a celor <u>4 forţe rezultante posibile</u> ce pot solicita un element în cazul **plan**: **R₁** şi **R₂** denumite, <u>**arbitrar**</u>, în funcţie de scopul urmărit, dar una dintre ele trebuie să fie de modul cunoscut, rezultante **principale:** de **intrare** $\mathbf{R_1}$ (**activă**, presupusa dată sau cunoscută) şi, respectiv, de **ieşire** $\mathbf{R_2}$, precum şi $\mathbf{R_3}$ şi $\mathbf{R_4}$ numite rezultante **secundare**, a căror mărimi- în acest **prim** moment nu interesează.

Vectorii forţă sunt ec**hipolenţi**, astfel că ei se pot translata pe suportul lor şi intersecta, doi câte doi: rezultantele **principale** în **punctul principal P** şi, respectiv, cele **secundare** în **punctul secundar S**

$$(8.10)\quad \begin{cases} \overrightarrow{R_1}\cap\overrightarrow{R_2} = P \\ \overrightarrow{R_3}\cap\overrightarrow{R_4} = S \end{cases}$$

Ei se pot însuma, doi câte doi, rezultând vectorul $\mathbf{R_{12}}$ numit **rezultanta rezultantelor principale** şi, respectiv $\mathbf{R_{34}}$ **- rezultanta rezultantelor secundare**.

$$(8.11)\quad \begin{cases} \overrightarrow{R_1}+\overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{R_{12}} \\ \overrightarrow{R_3}+\overrightarrow{R_4} = \overrightarrow{R_{34}} \end{cases}$$

Cu aceste observaţii şi/sau defalcări sistemul (8.9) devine

$$(8.9')\quad \begin{cases} \overline{R_1}+\overline{R_2}+\overline{R_3}+\overline{R_4} = 0 \\ P = \overline{R_1}\cap\overline{R_2},.....S = \overline{R_3}\cap\overline{R_4} \\ \overline{R_{12}} = \overline{R_1}+\overline{R_2};..\overline{R_{34}} = \overline{R_3}+\overline{R_4} \\ \Big|\ \sum_{1}^{4}\overline{M}\ \Big|_S = 0 \Rightarrow R_1 d_1 - R_2 d_2 = 0 \end{cases}$$

Există **maximum** <u>4 forţe rezultante posibile</u> ce pot solicita un element <u>în cazul</u> <u>**plan**</u>, deoarece din (8.8) se pot determina mărimile **modulelor a trei vectori forţă rezultantă**; al patrulea fiind dat (cunoscut):

- **R₁ şi R₂ denumite, <u>arbitrar</u>, în funcţie de scopul urmărit, <u>rezultante principale</u>** dintre care
- **R₁ <u>de intrare</u>**, care este **forţa activă de acţionare** (presupusă **dată sau cunoscută**) şi toate celelalte forţe sunt de **reacţiune**

- R_2 o forţă rezultantă principală pasivă (sau reacţiune) şi, respectiv, **de ieşire**
- R_3 şi R_4 numite rezultante **secundare**, a căror mărimi- în acest prim moment nu ne interesează- ambele fiind forţe de reacţiune, deobicei cele din articulaţii, ghidaje ş.a..

Dacă două (sau toate cele 4) direcţii sunt paralele între ele, atunci unul (sau ambele) puncte, **P** şi/sau **S**, de intersectare şi separare a forţelor şi a momentelor rezultante (în principale şi în secundare) sunt aruncate la infinit; însumarea forţelor făcându-se pentru forţe paralele, ceea ce simplifică mult însumarea lor.

Astfel, sistemul de 4 vectori în echilibru a fost redus la unul de doi vectori în echilibru care sunt egali, de semn opus şi acţionează de-a lungul segmentului $\left\|\overline{\mathbf{PS}}\right\| = \mathbf{d}$, direcţie ce constitue, totodată, şi **axa centrală** a elementului sau a sistemului considerat.

Lucrând, **nu** cu forţe componente (**normale** şi de **frecare**), aşa cum se practică curent în mecanica teoretică, practica care s-a dovedit păguboasă ci, **numai cu forţe rezultante**, sistemul (8.8) de 3 ecuaţii, fiecare putând să conţină, în general, până la **8** termeni, se reduce la **2** ecuaţii vectoriale, din care, ecuaţia de echilibru a momentelor forţelor din (8.9 şi 8.9') - **nu** faţă de **oricare punct** din planul forţelor ci- **faţă de punctul secundar S** situat la distanţele (braţele forţelor faţă de **S**) $\mathbf{d_1}$ şi, respecrtiv, $\mathbf{d_2}$ de suporturile rezultantelor **principale**, se reduce la numai doi termeni

$$\mathbf{R_1 d_1 = - R_2 d_2}.$$

Există, deci, în plan, şi nu numai aici, anumite **puncte mai deosebite**, cum este de exemplu punctul secundar **S**, faţă de care ecuaţia de momente are o formă cu un număr minim de termeni, întrucât vectorii $\mathbf{R_3}$ şi $\mathbf{R_4}$, fiind concurenţi în acest punct, au momente nule. Ca urmare, din această ultimă ecuaţie din (8.9'), funcţia de transfer $\mathbf{i_R}$ sau raportul de transmitere a forţelor, definit ca raport dintre forţa de ieşire şi cea de intrare, **rezultă imediat** şi este:

(8.12) $$\mathbf{i}_{R} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin\psi_1}{\sin\psi_2}, \quad \text{în care: } \mathbf{d_1 = d.sin}\,\psi_1 \ \ \textbf{şi} \ \ \mathbf{d_2 = d.sin}\,\psi_2$$

În acest fel, problema de cinetostatica s-a redus la una de **geometrie elementară,** fiind necesar să se determine doar punctul de intersecţie **S** a două drepte suport ale vectorilor $\mathbf{R_3}$ cu $\mathbf{R_4}$ şi distanţele $\mathbf{d_1}$ şi $\mathbf{d_2}$ de la acest punct **S** la alte două drepte suport ale vectorilor principali $\mathbf{R_1}$ şi $\mathbf{R_2}$.

Dacă, în sistem acţionează şi un cuplu cunoscut **C**, cuplu care poate fi scris ca produs dintre modulul care se cunoaşte (se dă) al vectorului, adică

(8.13) $$\mathbf{C} = \begin{cases} R_1.d_{1C} \\ R_2.d_{2C} \end{cases}$$ atunci, suma momentelor faţă de **S** rezultă

(8.14) $$\begin{cases} R_1.d_1 - R_2.d_2 + C = 0 \Rightarrow R_1.d_1 - R_2.d_2 + R_1.d_{1C} \\ R_1.d_1 - R_2.d_2 + C = 0 \Rightarrow R_1.d_1 - R_2.d_2 + R_2.d_{2C} \end{cases}$$ **,** astfel că (8.12) devine

(8.12’) $\quad \mathbf{i}_{R} = \begin{cases} \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{d_1 + d_{1C}}{d_2} = \dfrac{d_{1C}s + \sin\psi_1}{\sin\psi_2} \\ \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{d_1}{d_2 + d_{2C}} = \dfrac{\sin\psi_1}{d_{2C} + \sin\psi_2} \end{cases},$

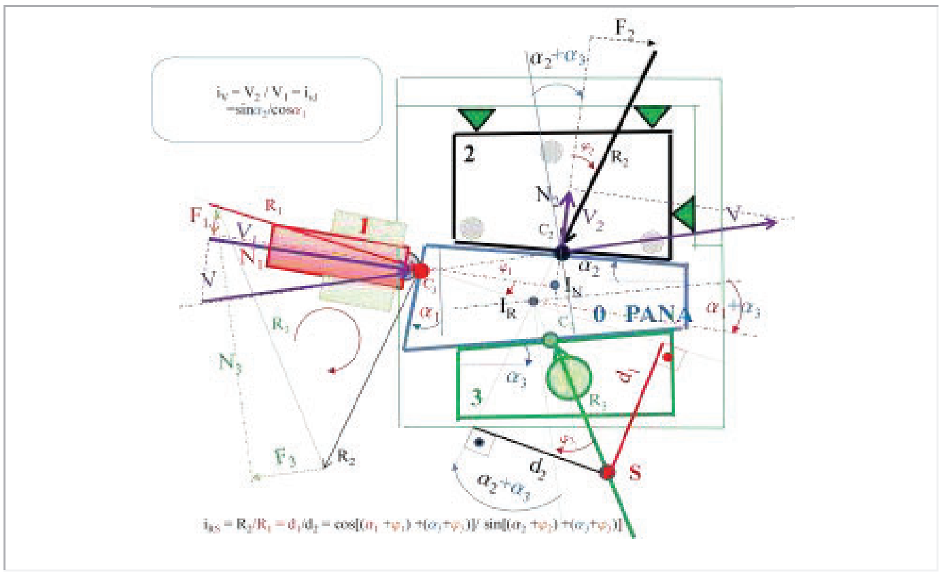


Fig.8.1 Exemplu de aplicare a **MSM** la mecanismele de fixare cu pană
Schiţă pentru sensul strângerii **S**

Un exemplu de aplicare a metodei **SM** este prezentat în figura 8.1, la un dispozitiv de instalare a unei piese paralelipipedice, cu mecanism de fixare cu pană.

În desen sunt figurate toate forţele rezultante care acţionează asupra penei din partea plunjerului 1 de la intrare, a piesei 2 de la ieşire şi a a piesei de sprijin şi de echilibrare 3.

Forţa $\mathbf{R_3}$, fiind unica forţă rezultantă secundară din sistem, punctul secundar **S** se alege **arbitrar** pe suportul lui $\mathbf{R_3}$.

Scriind suma momentelor forţelor faţă de S, rezultă imediat că

(a) $\quad \mathbf{R_1 . d_1} = \mathbf{R_2\ d_2} \rightarrow \mathbf{R_2} = \mathbf{R_1} \dfrac{d_1}{d_2} = R_1 \dfrac{\sin\psi_1}{\sin\psi_2}, \rightarrow \mathbf{i}_{RS} = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{d_1}{d_2}$

în care braţele forţelor rezultante $\mathbf{d_1}$ şi $\mathbf{d_2}$ sunt

(b) $\quad \mathbf{d_1} = \mathbf{d} \sin\left(\frac{\pi}{2} - [(\alpha_1 + \varphi_1) + (\alpha_3 + \varphi_3)]\right) = \mathrm{d} \cos[(\alpha_1 + \varphi_1) + (\alpha_3 + \varphi_3)]$

şi

(c) $\quad \mathbf{d_2} = \mathbf{d} \sin[(\alpha_2 + \varphi_2) + (\alpha_3 + \varphi_3)]$,

în care, s-a notat cu **d** segmentul arbitrar d = ‖ $\overline{\mathbf{I_R S}}$ ‖.

Cu acestea, din relaţia (a) rezultă imediat funcţia de transfer / transmitere a forţelor rezultante în sensul strângerii **S**

(d) $$\mathbf{i}_{RS} = \frac{R_{2S}}{R_{1S}} = \frac{d_{1S}}{d_{2S}} = \frac{\cos\,[(\alpha_1+\varphi_1)+(\alpha_3+\varphi_3)]}{\sin[(\alpha_2+\varphi_2)+(\alpha_3+\varphi_3)]}$$

pentru cel mai complex mecanism de fixare cu pană.

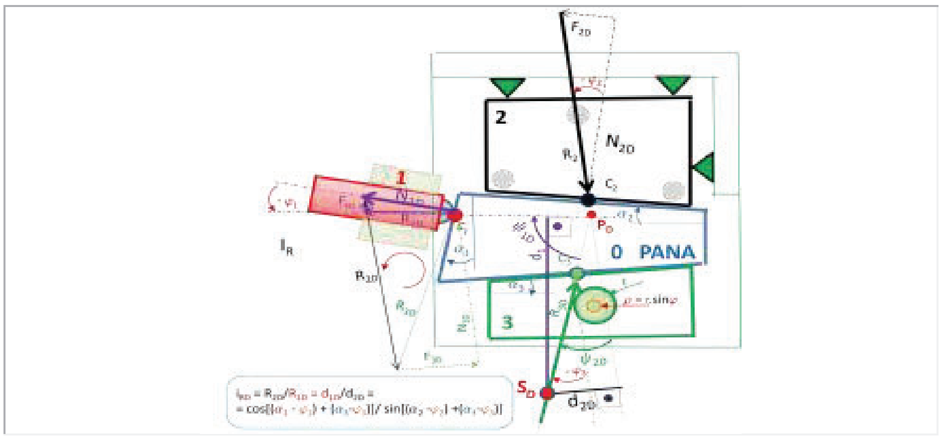


Fig.8.1,b Exemplu de aplicare a **MSM** la mecanismele de fixare cu pană
Schiţă pentru sensul desfacerii **D**

Funcţia de transfer / transmitere a forţelor rezultante în sens invers, al desfacerii, **D** se obţine prin schimbarea sensului frecărilor şi este

(d') $$\mathbf{i}_{Rd} = \frac{R_{2D}}{R_{1D}} = \frac{d_{1D}}{d_{2D}} = \frac{\cos\,[(\alpha_1-\varphi_1)+(\alpha_3-\varphi_3)]}{\sin[(\alpha_2-\varphi_2)+(\alpha_3-\varphi_3)]}$$

Funcţia de transmitere a curselor /deplasărilor în sensul strângerii **S** va fi

(d'') $$\mathbf{i}_x = \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{i_{id}} = \frac{\sin[(\alpha_2-0)+(\alpha_3-0)]}{\cos\,[(\alpha_1-0)+(\alpha_3-0)]} = \frac{\sin\,(\alpha_2+\alpha_3)}{\cos\,(\alpha_1+\alpha_3)}$$

In fine, randamentul mecanismului cu pană, în sensul strângerii, va fi

(e) $$\eta = \frac{L2}{L1} = \frac{N_2\,x_2}{N_1\,x_1} = \frac{R_2\,cos\varphi_2\,x_2}{R_1\,cos\varphi_1\,x_1} = \frac{\cos\,[(\alpha_1+\varphi_1)+(\alpha_3+\varphi_3)]}{\sin[(\alpha_2+\varphi_2)+(\alpha_3+\varphi_3)]}\,\frac{cos\varphi_2}{cos\varphi_1}\,\frac{\sin\,(\alpha_2+\alpha_3)}{\cos\,(\alpha_1+\alpha_3)}$$

8.2 Stabilirea condiţiilor de autoblocare şi de autofrânare

Din relaţia (8.12), rezultă că, pentru o valoare negativă sau nulă a raportului $\mathbf{i}_R$, forţa rezultantă $\mathbf{R}_2$, şi, ca urmare, şi celelalte forţe- normală $\mathbf{N}_2$ şi de frecare $\mathbf{F}_2 = \mu_2\,\mathbf{N}_2$, sunt negative sau nule.

Fizic, acest lucru exprimă faptul că, oricât de mare ar fi forţa rezultantă **activă** (de **acţionare**) $\mathbf{R}_1$ de la **intrare**, forţa rezultantă $\mathbf{R}_2$, de la **ieşire**, va fi nulă sau negativă şi, deci, dacă elementul este, de exemplu, de fixare prin strângere a unei piese într-un dispozitiv, piesa nu va fi fixată. Elementul sau mecanismul neputând să-şi îndeplinească rolul funcţional pentru care a fost conceput şi realizat.

Dacă raportul este negativ, pentru a funcţiona, elementul trebuie acţionat nu numai de la intrare cu R_1 ci şi de la ieşire, prin schimbarea semnului (sensului) forţei $R_2 \rightarrow - R_2$. Adică, a schimbării naturii acestei forţe, dintr-o forţă de **reacţiune** (pasivă) într-una activă, de **acţionare**.

Deoarece, întrarea se mai denumeşte şi element (mărime) **conducător** iar ieşirea element **condus**, rezultă două elemente conducătoare şi nici un element sau mărime condusă. Halal mecanism, impins şi tras de la ambele capete!

În rezumat, un astfel de element sau mecanism **nu funcţionează**, ceea ce se mai denumeşte ca fiind **autoblocat** şi, în consecinţă, pentru a evita autoblocarea trebuie cunoscută condiţia de autobocare (C_{AB}), care este

(8.15) $\quad C_{AB} : i_{RS} \leq 0$

Privind cu atenţie ultima relaţie de echilibru a momentelor forţelor rezultante principale (R_1 şi R_2) în jurul punctului secundar **S** din sistemul (8.9 şi 8.9'), se constată că inecuaţia (8.15) este satisfăcută dacă momentele celor două forţe sunt de **acelaşi sens**. Prin urmare, rezultă următoarea regulă, deosebit de importantă pentru tinerii proiectanţi, aflaţi în faţa planşetei de desen sau a monitorului staţiei grafice, pe care se pot urmări direcţiile celor 4 forţe rezultante:

R1: Dacă forţele rezultante principale R_1 şi R_2 (d)au momente de acelaşi sens (semn) faţă de punctul secundar **S la strângere** (S_S), de intersecţie a celorlalte forţe rezultante secundare R_3 şi R_4, atunci mecanismul este **autoblocat** şi **nu funcţionează** !

Ca urmare, condiţia ca un element sau un mecanism să funcţioneze C_F este ca:

(8.16) $\quad C_F : i_{RS} > 0$

Dacă inversăm indicii **1** cu **2**, adică, dacă considerăm întrarea ca ieşire şi iesirea ca întrare şi suntem în situaţia anterioară, atunci mecanismul sau elementul este **autoblocat** la mişcarea sau la tendinţa lui de mişcare în **sens invers**. Dar sensul invers al lui **S** este sensul **D**. Ceea ce revine la a afirma că:

(7.17) $\quad C_{AF} : i_{RD} \leq 0$, adică, autoblocarea **în sensul D**, invers de mişcare (sau tendinţa de mişcare) a unui element sau a unui mecanism, este **autofrânare,** deoarece, oricât de mari ar fi forţele care acţionează de la ieşire spre întrare, în sensul desfacerii **D**, acesta rămâne în echilibru, deci nu se desface, chiar dacă forţele de la întrare sunt nule sau acţionează în sens invers, **până la o anumită valoare maximă**, dată de **rezerva de autofrânare**.

Rezerva de autofrânare există dacă $i_{RD} > 0$ şi este cu atât mai mare cu cât distanţa d_{2D} de la suportul rezultantei R_{2D} la punctul S_D creşte. Ea nu depinde de d_{1D} . Astfel, în cazul în care această distanţă d_{2D} este nula şi rezerva de autofrânare este nulă; inecuaţia (8.17) fiind satisfacută la limită, adică $i_{RD} = 0$.

Rezultă acum **regula 2**:

R2: Dacă forţele rezultante principale în sensul desfacerii R_{1D} şi R_{2D} ($\mu_S \rightarrow \mu_D$) deobicei simetricele faţă de direcţiile normalelor în punctele de contact ale aceloraşi forţe R_1 şi R_2 (din sensul strângerii **S**) (d)au momente de **acelaşi sens** **faţă de punctul secundar la desfacere** S_D atunci, elementul sau sistemul (ca şi mecanismul din care face parte acest element) prezintă proprietăţi de **autofrânare.**

Această proprietate este **benefică**, deoarece conduce la creşterea rigidităţii unor sisteme tehnologice, cu atât mai mult, cu cât elementul cu astfel de proprietăţi, de autofrânare, este plasat spre ieşirea din sistem – mecanism, dispozitiv, maşina -. Proprietatea este obligatorie la dispozitivele cu mecanismele de fixare cu acţionare mecanică (**manuală** sau cu piciorul).

MSM facilitează posibilitatea **optimizării** concepţiei constructive a elementelor şi/ sau a sistemelor tehnologice mecanice pentru o funcţie scop dată, optimizare care reprezintă asigurarea unei **calităţi supreme** a sistemului conceput şi proiectat. Un exemplu concludent, în acest sens, este tratat în continuare.

8.3 Patrulaterele frecărilor la rezemarea în 2 (PF2) şi în 3 puncte (PF3)

Se consideră poziţionarea unei piese în dispozitiv pe trei reazeme (**Fig.8.2**), denumite şi elemente de poziţionare, dintre care $\mathbf{P_2}$ realizează orientarea piesei, prin rotirea ei pe cele două feţe ale unei prisme de semicentrare în punctele $\mathbf{P_3}$ şi $\mathbf{P_4}$. Punctele de reazem sunt situate în acelaşi plan cu forţele normale $\mathbf{N_i}$, (i = 2,3,4), de legatură dintre reazeme şi obiectul (piesa sau semifabricat) instalat, contact stabilit sub acţiunea unei forţe rezultantă de **fixare prin forţă** (strângere) $\mathbf{R_S} \equiv \mathbf{R}_1$ a obiectului în dispozitiv.

Sub acţiunea forţelor de strângere, reprezentate de rezultanta lor R_S , la contactul dintre reazeme şi obiect, apar reacţiunile normale $\mathbf{N_i}$, de frecare $\mathbf{F_i}$ şi, ca sumă a acestora, reacţiunile rezultante $\mathbf{R_i}$.

Reacţiunile trebuie să respecte anumite legi (reguli), care derivă din condiţia impusă reazemelor <u>fixe</u>, ca suporturile reacţiunilor normale <u>să nu aparţină aceluiaşi complex liniar sau de gradul I:</u>

R3: Suporturile a două reacţiuni să nu <u>coincidă</u> (să nu fie confundate).

R4: Suporturile reacţiunilor, <u>coplanare</u>, nu trebuie să fie <u>şi concurente</u> într-un singur punct din plan.

R4': Nici în punctul de la infinit, deci cele trei reacţiuni nu pot fi **toate** <u>paralele</u> între ele <u>şi coplanare</u>.

În funcţie de poziţia (localizarea şi orientarea) vectorului $\mathbf{R_S}$, în raport cu cele 3 puncte $\mathbf{P_i}$, din plan, de contact dintre obiect şi dispozitiv şi de aplicare a reacţiunilor, apar două sensuri de mişcare posibile, coroborate între ele în cele 3 puncte pentru obiecte (considerate) rigide şi lipsite de coroborare pentru obiecte elastice care, datorită deformaţiei lor pot avea deplasări relative de sensuri opuse pe una şi aceeaşi suprafaţă !

În fiecare din cele 3 puncte de contact P_i, rezultantele $\mathbf{R_i}$ pot să se rotească, faţă de direcţiile normalelor în punctele $\mathbf{P_i}$, cu cel mult $\pm\varphi_i$. Pentru simplificare, considerăm două din cele trei puncte ($\mathbf{P_2}$ şi $\mathbf{P_3}$) pe o suprafaţă plană a obiectului, formând o bază de poziţionare de <u>dirijare</u>, având astfel două reacţiuni paralele între ele, iar în $\mathbf{P_1}$ considerăm o bază de rezemare (de <u>localizare</u> prin translaţie) .

Cele 3 puncte $\mathbf{P_i}$ unite între ele formează un triunghi, în planul considerat, denumit **(FPC) figura(triunghiul) punctelor de contact $\mathbf{P_i}$**.

Dacă cele două suprafeţe ale obiectului, care sunt baze de referinţă de poziţionare - dirijare şi rezemare- sunt ortogonale, atunci triunghiul rezultat este dreptunghic, **(triunghiul) punctelor de contact $\mathbf{P_i}$**.

Rezultă, astfel, în plan **6** direcţii şi intersectând suporturile două câte două se obţin **2** până la **4 patrulatere interioare ale frecărilor** şi tot atâtea patrulatere adiacente - cu câte două dintre patrulatere închise-: $PF2_{42}$ şi $PF2_{43}$ corespunzătoare contactelor în numai 2 din cele 3 puncte: $\mathbf{P_4}$ şi în $\mathbf{P_2}$ şi, respectiv, în $\mathbf{P_4}$ şi în $\mathbf{P_3}$.

Două dintre laturile acestor patrulatere sunt în coincidere, deoarece sunt cele două direcţii limită posibile ale reacţiunii $\mathbf{R_4}$. În consecinţă, adiacent celor două patrulatere **PF2** se află un al treilea patrulater **PF3**, care corespunde cazului în care apar simultan reacţiuni în (toate) cele 3 puncte de contact cu reazemele.

Din **R4** rezultă că $P_2 \neq P_3$, considerate, de exemplu, situate pe o aceeaşi suprafaţă plană a piesei care este o bază de dirijare, (şi, evident, distinct de P_4 situat pe o altă suprafaţă a obiectului, considerată bază de rezemare sau de localizare), astfel că cele două patrulatere ale frecărilor în 2 puncte sunt disjuncte, adică:

$PF_{42} \cap PF_{43} = \Phi$ şi sunt mulţimi complementare cu PF3 în mulţimea patrulaterului de frecare PF, obţinut din asocierea (însumarea suprafeţelor) celor 3 patrulatere şi denumit simplu **PF sistemului**.

Pentru a exista tendinţa de mişcare pe suprafaţa de dirijare δ în punctele $\mathbf{P_2}$ şi $\mathbf{P_3}$, astfel încât, prin alunecarea piesei, să apară reacţiune şi în punctul $\mathbf{P_4}$, este necesar ca $\mathbf{R_S}$ să fie înclinată cu un unghi $\pm\beta \geq \pm\varphi_\delta\,(\delta = 2{,}3)$.

Pentru a exista mişcare în punctul $\mathbf{P_4}$, astfel încât să apară reacţiuni în $\mathbf{P_2}$ şi în $\mathbf{P_3}$, este necesar ca forţa $\mathbf{R_S}$ să fie înclinată cu un unghi $\pm\alpha \geq \pm\varphi_4$.

De aceea, când cele două baze de referinţă de poziţionare, fac între ele unghiul solid (din materialul obiectului) γ, condiţia de deplasare relativă posibilă a obiectului, în toate cele 3 puncte $\mathbf{P_i}$ este ca direcţia forţei active $\mathbf{R_S}$ să fie cuprinsă în unghiul solid (format de generatoarele unui con)

$\chi \leq \gamma - (\alpha + \beta)$ şi, pentru cazul considerat, $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ şi rezultă

$$\chi \leq \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \leq \frac{\pi}{2} - (\varphi_4 + \varphi_\delta) \tag{7.18}$$

Considerând condiţia anterioară satisfăcută, dacă suportul lui $\mathbf{R_S}$ trece prin punctul de intersecţie dintre $\mathbf{R_4}$ şi $\mathbf{R_2}$, punct notat cu $\mathbf{P_{42}}$, atunci R_S se va descompune exclusiv după aceste două direcţii, astfel că $\mathbf{R_3} = \mathbf{0}$; reacţiunea în cel de al treilea punct fiind nulă.

Dacă $P_{43} = R_4 \cap R_3 \Rightarrow \overline{\mathbf{R}_4} + \overline{\mathbf{R}_3} = \overline{\mathbf{R}_S} \Rightarrow R_2 = 0$.

Dacă $\mathbf{R_S}$ intersectează segmentul $\overline{\mathbf{P}_{42}\mathbf{P}_{43}}$, atunci vom avea contactul dintre obiect şi dispozitiv (reazema) în toate cele 3 puncte, cu observaţia că, în extremele segmentului, vom avea contact (la limită) dar mărimea câte unei reacţiuni va fi nulă.

În exteriorul acestui segment, dar interior PF, vom avea contactul doar în două puncte. Pierderea contactului este sinonimă cu pierderea controlului asupra rotirilor piesei în dispozitiv, şi, totodată, cu erori de fixare, datorate deformaţiilor şi deplasărilor obiectului în dispozitiv, inacceptabil de mari. Păstrarea contactului dintre piesă şi dispozitiv, în toate punctele de contact, este o condiţie obligatorie (prima condiţie a concepţiei corecte a unui mecanism de fixare al unui dispozitiv **a**, iar a doua, **b,** este să nu apară mişcare globală între piesă şi dispozitiv).

Pierderea contactului poate surveni în timpul:

- amplasării piesei pe reazemele dispozitivului, când se afirmă că nu există **stabilitate la amplasare**, sub acţiunea greutăţii proprii a piesei **G**.
- în timpul fixării piesei în dispozitiv, sub acţiunea forţei rezultante de fixare R_S, în cazul inexistenţei **stabilităţii piesei la fixare** şi
- în timpul prelucrării piesei, sub acţiunea forţelor de prelucrare **F**, în lipsa **stabilităţii la prelucrare.**

R5: Pentru că, în toate cazurile enumerate, să existe stabilitate este necesar, nu şi suficient, ca direcţia lui $\overline{\mathbf{G}}$, direcţia lui $\overline{\mathbf{G}} + \overline{\mathbf{R}_S}$ şi directia lui $\overline{\mathbf{G}} + \overline{\mathbf{R}_S} + \overline{\mathbf{F}}$ să intersecteze simultan patrulaterul frecărilor în trei puncte **PF3** şi **figura (triunghiul) punctelor de contact.**

Ultima condiţie rezultă din posibilitatea rotirii piesei în jurul elementelor de reazem într-un sens în care piesa pierde contactul cu reazemele.

8.4. Optimizarea localizării şi orientării forţei rezultante de fixare

În sistemele solicitate de forţe coplanare (Fig.**8.2**), considerate în aceast capitol, dintre cele 4 forţe rezultante posibile, numai una este forţa **activă** (eventual ca sumă a mai multor forţe active date) de a**cţionare** care provoacă tendinţa de mişcare în sensul **S**, toate celelalte (şi pot fi cel mult 3) fiind de reacţiune.

Cele 3 forţe de reacţiune, în cel mai general caz (în care nu există două normale paralele între ele), se intersectează, două câte două, în 3 puncte (ne coliniare şi ne concurente) care sunt vârfurile unui triunghi P_{ij}, denumit **TS-triunghiul stabilităţii** piesei pe cele 3 reazeme. Există 3 astfel de **TS,** după cum punctele P_{ij} S_{ij} sunt în sensul **S**, P_{ij} D_{ij} -în sensul **D** sau, în cazul ideal sau fără tendinţa de mişcare, când P_{ij} N_{ij}.

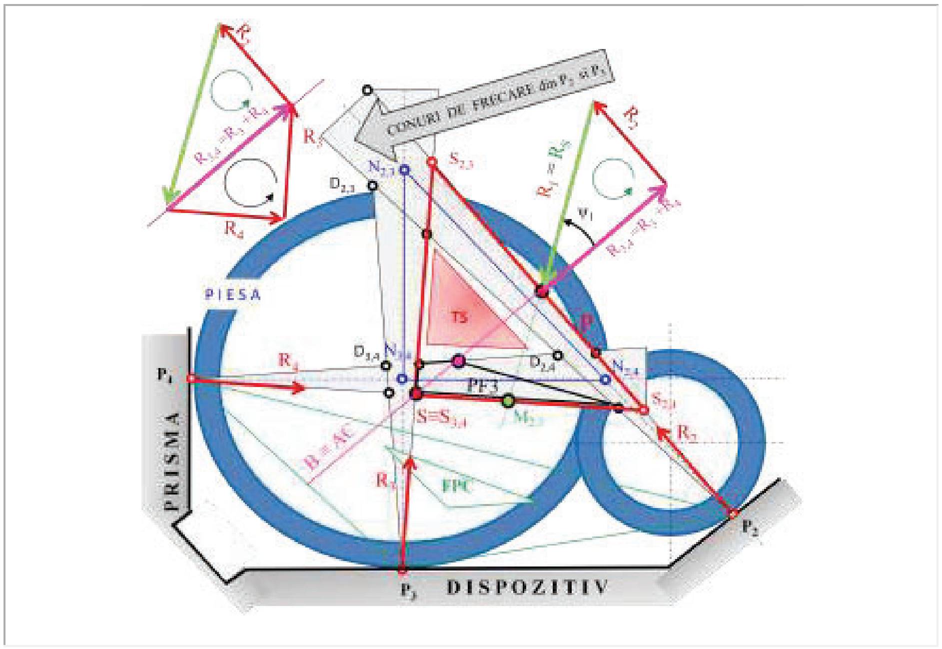
Unul dintre aceste puncte de intersecţie ar putea fi aruncat la infinit, dacă suporturile a două reacţiuni sunt paralele, adică, dacă reazemele sunt pe o suprafaţă plană şi coeficienţii de aderenţă (sau de frecare) sunt de valori egale.

Pot fi formate **TS** mixte sau **hibride TSH**, alegând, pentru intersecţie, direcţiile rezultantelor fortelor în unul sau în două puncte şi direcţiile normalelor reacţiunilor în celelalte puncte de reazem.

Fiecare dintre vârfurile acestui triunghi reprezintă limita de stabilitate pe cele trei reazeme, în sensul că, dacă forţa rezultantă de fixare $\mathbf{R_S}$ este **localizată** în plan, astfel încât să treacă prin unul din aceste vârfuri, de exemplu $\mathbf{P_{34}}$, atunci reacţiunea în cel de al 3-lea punct $\mathbf{P_2}$ va fi nulă; piesa rămânând însă, la limita, în contact în acest punct.

Se desprinde regulile:

R6: Dacă unul dintre punctele de intersecţie ale reacţiunilor rezultante aparţin forţei active, atunci rezerva de stabilitate este nulă într-un punct de reazem şi forţele de reacţiune rezultante sunt maxime în celelalte două puncte în care se va descărca acţiunea.



Legendă :FPC - Figura/configuraţia Punctelor de Contact;
PF3 - Patrulaterul Frecărilor cu contact in 3 puncte ;
TS – Triunghiul Stabilităţii ; P – Punct Principal ;S - -Punct Secundar ;
$M_{2,3}$ - Mijlocul laturii PF3 ; ----Bisectoarea B în S → $\psi_3 = \psi_4$;
AC - Axa Centrală ≡ Bisectoarea B → $R_3 = R_4$

Fig.8.2 Optimizarea instalării unei piese în dispozitiv, astfel încât, reacţiunile cu elementele de poziţionare P_2, P_3 şi P_4 să fie de module egale $R_2 = R_3 = R_4$.

În cazul **TS** hibrid, dacă cele două puncte sunt de intersecţie ale normalelor reacţiunilor, atunci $\mathbf{R_s}$ se descompune (descarcă) exclusiv pe cele două normale şi, în lipsa frecărilor în reazeme, dispare tendinţa de mişcare relativă în aceste puncte de contact, ceea ce arată că, în aceste două puncte, stabilitatea este maximă posibilă.

Şi, ca un corolar**:**

R7. Cu cât rezultanta forţelor active este mai îndepărtată de vârfurile triunghiului stabilităţii, format de punctele de intersecţie ale reacţiunilor, cu atât mai apropiate între ele vor fi valorile reacţiunilor.

Dacă forţa activă $\mathbf{R_S}$ trece prin mijlocul ($\mathbf{M_{ij}}$) unei laturi a **TS**, a căror forţe rezultante de la capete sunt paralele între ele (situate pe o aceeaşi suprafaţa plană a piesei, de ex.), atunci cele 2 reacţiuni rezultante de la capetele laturii **TS** pot avea valori egale între ele.

Dacă axa centrală, pe care se situează punctele **P** şi **S**, este şi **bisectoarea unghiului** din S, S_{34} din **TS**, atunci unghiurile din S sunt egale ($\psi_3 = \psi_4$) şi, deoarece $d_3 = d.\sin\psi_3$ şi $d_4 = d.\sin\psi_4$, rezultă $\mathbf{d_3 = d_4}$.

Suma momentelor faţă de punctul principal **P** este:

(8.19) $R_3.d_3 - R_4.d_4 = 0$ din care, raportul forţelor rezultante secundare va fi:

(8.20) $\mathbf{i_{R34} = k_S}$ şi, în condiţiile anterior amintite, $i_{R34} = k_S = 1$,

astfel că reacţiunile rezultante secundare sunt egale între ele: $\mathbf{R_3 = R_4}$ **.**

Rezultă următoarea <u>regulă de optimizare</u>:

R8: În condiţia în care axa centrală se alege ca **bisectoare** a unghiului din **S** al **TS**, atunci cele două reacţiuni considerate secundare sunt de module egale.

Determinarea modulelor a trei vectori R_2, R_3, R_4 de direcţii date, când se cunoaşte modulul şi direcţia vectorului $\mathbf{R_1} \equiv \mathbf{R_S}$, revine la descompunerea unui vector după trei direcţii date. Regula fiind următoarea:

1) Se intersectează vectorii doi câte doi (de exemplu $\mathbf{R_1}$ cu $\mathbf{R_2}$ **şi** R_3 cu $\mathbf{R_4}$). Punctele lor de intersecţie (fiind **P** şi **S**), determină o direcţie ajutătoare (care este şi **axa centrală**).

2)Se descompune vectorul dat ($\mathbf{R_1} = \mathbf{R_S}$) după direcţia ajutătoare şi direcţia vectorului $\mathbf{R_2}$ (Prin extremităţile vectorului dat, se duc paralele cu direcţiile date. Triunghiul astfel format are drept laturi cei trei vectori, printre care şi cei doi căutaţi).

3)Direcţia ajutătoare este tocmai direcţia vectorului rezultant al rezultantelor secundare $\mathbf{R_{34}}$. Rezultă că

(8.21) $$\vec{R}_1 = \vec{R}_2 + \vec{R}_{3,4} = \vec{R}_2 + \overrightarrow{\vec{R}_3 + \vec{R}_4} = \vec{R}_2 + \vec{R}_3 + \vec{R}_4$$

8.4.1 Metoda grafică

Se pune problema determinării **reacţiunilor secundare** într-un raport prestabilit $\mathbf{k_S}$ (8.20) şi a reacţiunii principale $\mathbf{R_2}$ într-un raport $\mathbf{k_p}$ faţă de rezultanta

$\mathbf{R_{12} = R_{34}}$, adică :

(8.22) $$\frac{R_2}{R_{12}} = \frac{R_2}{R_{34}} = k_P$$

Se alege o mărime arbitrară a unei reacţiuni, de exemplu $\mathbf{R_3 = 1}$. Cunoscându-se raportul $\mathbf{k_S}$, dat- dintre rezultantele secundare, rezultă $\mathbf{R_4 = k_S.\ R_3 = k_S.1 = k_S}$.

Se însumeaza grafic cei doi vectori secundari şi se obţine **rezultanta rezultantelor secundare** $\mathbf{R_{34}}$, egală, în modul, aşa cum s-a demonstrat anterior, cu rezultanta rezultantelor principale $\mathbf{R_{12}}$.

(8.23) $$\mathbf{R_{12} = R_{34}} = \sqrt{\boldsymbol{R_3^2 + R_4^2 + 2.R_3R_4\cos(\theta_3 - \theta_4)}} =$$

$=\mathbf{R_3}.\sqrt{1+k_S^2+2k_S.\cos(\theta_3-\theta_4)}=\mathbf{R_3}$ .Rex[**α = θ₃** , **E(s = k_S, ε = θ₄)**]

Se deplasează, de-a-lungul axei centrale din **S** în **P**, vectorul $\mathbf{R_{34}}$ (v. **Fig.8.2**) şi se însumează cu vectorul R_2, de raport dat k_P, rezultând

(8.24) $\mathbf{R_2} = \mathbf{k_P}.\mathbf{R_{34}} = k_P.R_3.\sqrt{1+k_S^2+2k_s\cos(\theta_3-\theta_4)}$, astfel că, prin scăderea grafică a lui $\mathbf{R_2}$ cu $\mathbf{R_{12}}$, rezultă direcţia grafic şi modulul lui $\mathbf{R_1}$

(8.25) $\mathbf{R_1}=R_{12}\sqrt{1+k_P^2+2.k_P.\cos(\theta_2-\theta_{34})}=\mathbf{R_{12}}$. **Rex [α = θ₂ , E(s = k_P, ε = θ₃,₄)]**

şi, utilizând (8.23) şi/sau (8.24) rezultă

(8.26) $R_1= R_3\sqrt{[1+k_S^2+2k_s\cos(\theta_3-\theta_4)].[1+k_P^2+2k_p\cos(\theta_2-\theta_{34})]}=$

$=\mathbf{R_3}$. **Rex[α = θ₃, E(s = — k_s, ε = θ₄)] . Rex[α=θ₂, E(s = — k_P, ε = θ₃,₄)]**

pentru care se obţine valoarea aleasă arbitrar **1** a lui $\mathbf{R_4}$.

Pentru alte valori ale lui $\mathbf{R_4}$ sau ale lui $\mathbf{R_1}$ se realizează o transformare homotetică simplă, prin care se măresc sau se micşoreaza modulele vectorilor la valoarea dorită, care nu modifică direcţiile acestora.

8.4.2. Metoda analitică

Notând cu α_i, (i = 2,3,4) direcţiile forţelor normale ale reacţiunilor, atunci direcţiile rezultantelor vor fi $\theta_i = \alpha_I - \varphi_i$, în sensul **S** şi cu semnul + în faţa unghiurilor de aderenţă φ_i (frecare) pentru sensul opus **D**.

Rezultantele rezultantelor secundare $\mathbf{R_{34}}$ şi principale $\mathbf{R_{12}}$, fiind coliniare pe **axa centrală**, formează, cu o axă de referinţă (orizontală în **Fig.8.2**) unghiurile $\theta_{3,4} = \theta_{1,2} + \pi$, iar axa centrală formează cu $\mathbf{R_3}$ şi $\mathbf{R_4}$ unghiurile ψ_3 şi ψ_4 a căror sumă este

$\psi_S = \theta_3 - \theta_4$.

Se deplasează vectorul ajutător R_{34} pe suportul său în S şi se descompune după cele două direcţii ale vectorilor şi rezultă modulele lor $\mathbf{R_3}$ şi $\mathbf{R_4}$. Cele două module vor fi egale, dacă direcţia R_{34} este **bisectoarea unghiului** format de cele două direcţii date $\mathbf{R_3}$ şi $\mathbf{R_4}$, adică,

(8.27) $\psi_3 = \psi_4 = \frac{\psi_S}{2} = \frac{\theta_3-\theta_4}{2}$, unghiurile din S al TS.

În acest caz direcţia rezultantei rezultantelor secundare este

(8.28) $\theta_{3,4} = \theta_3 + \frac{\theta_3-\theta_4}{2} = \frac{3\theta_3-\theta_4}{2} = \theta_{1,2}+\pi$

Scriind teorema sinusurilor în cele două triunghiuri de însumare a rezultantelor secundare se poate scrie:

(8.29) $\frac{R_4}{\sin\psi_3} = \frac{R_3}{\sin\psi_4} = \frac{R_{3,4}}{\sin(\theta_3-\theta_4)} = 2r_C$ din care, se obţin unghiurile

(8.30) $\psi_3 = \arcsin\frac{k_S\sin(\theta_3-\theta_4)}{\sqrt{1+k_S^2+2k_S\cos(\theta_3-\theta_4)}}$,

iar ca unghi β (din **trigonometria excentrică**)

(8.31) $\beta = \theta - \alpha = \arctan\dfrac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}$ cu vârful pe cerc, cu **ε = π** sau, ceea ce este acelaşi lucru, considerând **excentricitatea numerică (s =– k_S)** negativă, sub forma echivalentă, dar mai practică prin lipsa radicalului din expresia (8.30):

(8.32) $\psi_3 = -\,arcsin\frac{k_S \sin(\theta_3-\theta_4)}{1+k_S\cos(\theta_3-\theta_4)}$,

Considerând punctele **S** şi **P** drept **excentre**, modulul rezultantelor rezultantelor ca **FSM-CE** **radial excentric** (rex ca raport dintre modulul rezultantelor rezultantelor - secundare şi principale- şi razele cercurilor în două cercuri distincte) şi utilizând relaţiile dintre unghiul la excentru şi unghiul la centru de la funcţiile supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**)

(8.33) $\theta = \alpha + \beta = \alpha + \arctan\dfrac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}$,

în care **s = k_S** se consideră excentricitate numerică în cercul de rază $\mathbf{R_3}$, iar **s = - k_P** excentricitate numerică în cercul de raza $\mathbf{R_2}$, se obţine, considerând aceeaşi axă de referinţă, direcţia lui $\mathbf{R_{34}}$:

(8.34) $\theta_{3,4} = \theta_S = \theta_3 - arctan\frac{k_S\sin(\theta_3-\theta_4)}{1+k_S\cos(\theta_3-\theta_4)} = \theta_{1,2} + \pi$,

fiind direcţia rezultantei rezultantelor secundare.

Cu ajutorul aceloraşi **funcţii supermatematice**, considerând ca excentru punctul **P**, $\mathbf{R_2}$ ca **rază** şi $\mathbf{R_{34} = R_{12}}$ ca **excentricitate reală**, rezultă

(8.35) $\psi_1 = \theta_P = \alpha_P + \beta_P = \theta_2 - \theta_{3,4} - arctan\frac{k_P\sin(\theta_2-\theta_{3,4})}{1+k_P\cos(\theta_2-\theta_{3,4})}$ şi, in final :

(8.36) $\theta_1 = \theta_{3,4} + \psi_1$ şi rezultă direcţia căutată a rezultantei $\mathbf{R_1}$

(8.37) $\theta_1 = \theta_2 - arctan\dfrac{k_P\sin[\theta_2-\theta_3-arctan\frac{k_S\sin(\theta_3-\theta_4)}{1+k_S\cos(\theta_3-\theta_4)}]}{1+k_P\cos[\theta_2-\theta_3-arctan\frac{k_S\sin(\theta_3-\theta_4)}{1+k_S\cos(\theta_3-\theta_4)}]}$

Aceasta este direcţia pe care trebuie să o aibe $\mathbf{R_1 = R_S}$ pentru a obţine **rapoartele prestabilite** k_S şi k_p dintre cele trei reacţiuni.

Pot fi exprimate următoarele reguli

R9: Faţă de TS_{id}, cele 3 reacţiuni vor fi confundate cu cele normale şi vor avea valori egale între ele.

În acest caz $\vec{R}_S = \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{N}_4$, iar $\mathbf{F_2 = F_3 = F_4 = 0}$; în nici unul dintre punctele de reazem neexitând tendinţa de mişcare relativă (dintre obiect şi dispozitiv, de exemplu) rezerva de stabilitate va fi cea maximă posibilă.

Pentru a putea fi maximă, în toate punctele, rezultanta $\mathbf{R_S}$, trebuie astfel **orientată** încât la descompunerea ei după trei direcţii date (direcţiile normalelor) să se obţină fie egalitatea tuturor normalelor ($N_2 = N_3 = N_4$), fie rapoartele dorite dintre acestea. Soluţia este posibilă deoarece în sistemele **perfect rigide** şi coeficienţii de aderenţă (frecare) în reazeme sunt nuli.

În sisteme reale, cu rigiditate limitată, în punctele de contact, între direcţiile axelor de rigiditate, direcţia forţei $\mathbf{R_s}$ şi valorile coeficienţilor de aderenţă în punctele de contact există o dependenţă bine determinată, faţă de nedeterminările actuale ale direcţiilor forţelor rezultante în interiorul conului de frecare şi implicit ale unghiurilor şi a coeficienţilor de aderenţă în domeniul definit de **ecartul limitelor extreme** $\pm\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{i}}$ de rotire ale **rezultantelor forţelor** reactive faţă de direcţiile normalelor din punctele de contact.

R8 : Rezerva de stabilitate este nulă în două puncte (în care forţele sunt nule $\mathbf{R_2 = R_3 = 0}$), dacă forţa activă este poziţionată (dirijata, conţinută, suprapusă) pe una dintre laturile triunghiului de stabilitate şi va rezulta o forţă maximă în cel de-al 3-lea punct, în care reacţiunea va fi egală cu forţa activă de acţionare $\mathbf{R_4} = \mathbf{R_S}$, dacă direcţia lui $\mathbf{R_S}$ este astfel orientată încât să coincid cu direcţia rezultantei R_4.

Dacă $\mathbf{R_S = N_4}$, atunci în cel de-al 3-lea punct şi stabilitatea va fi maximă.

8.5.Optimizarea concepţiei sistemelor mecanice

Optimizarea constă în asigurarea diverselor condiţii extreme impuse sistemului, rezultate din condiţiile de raţionalitate impuse acestora, printre care sunt:

- **Creşterea calităţii** produselor fabricate, prin **creşterea preciziei de prelucrare** a pieselor componente, ca rezultat al **diminuării erorilor** de fixare a pieselor în dispozitive, datorate deformaţiilor sub acţiunea forţelor de fixare şi a erorilor de fabricaţie, determinate de deformaţiile sub acţiunea forţelor de prelucrare.

Dacă suportul forţelor de aşchiere este invariant în spaţiu, ca de exemplu, la găurire, alezare, filetare, presare, ştanţare ş.a, atunci problema se rezolvă foarte simplu: se plasează **Z** elementele nemijlocite de fixare astfel încât suma forţelor normale de strângere $\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{z}} \mathbf{S_k}$ să fie localizată în coincidere cu forţa axială de prelucrare **F**, iar elementele de rezemare, ca de exemplu cele 3 de aşezare, se plasează astfel încât suportul forţelor $\overline{\mathbf{R}_1} = \overline{\mathbf{S}} + \overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{S} + \mathbf{F}}$ să treacă prin centrul de greutate al figurii (triunghiului) celor 3 puncte de contact cu reazemele de aşezare.

Astfel, rezultă o comprimare centrică a sistemului, axa elastică principala fiind în coincidere cu direcţia forţei rezultante de fixare şi acestea cu direcţia forţei axiale de prelucrare.

Dacă, din diverse motive, acest aranjament nu este posibil, atunci se renunţă la coinciderea suporturilor a două forţe, dar se păstrează paralelismul lor; axa elastică principală a sistemului tehnologic fiind menţinută în coincidere cu suportul rezultantei acestor forţe paralele, astfel că piesa să se deplaseze **exclusiv prin translaţie** în direcţia axei elastice principale.

Astfel, se asigură precizia de poziţionare a elementelor geometrice de fabricaţie, faţa de cele de cotare (proiectare), ca de exemplu, perpendicularitatea axei orificiilor prelucrate faţă de suprafaţa piesei, care este baza de poziţionare şi pe care sunt dispuse elementele de reazem.

Păstrarea paralelismului, dintre suprafeţele prelucrate şi baza de poziţionare de dirijare, se obţine menţinând constante reacţiunile din cele două reazeme, ale acestei baze, aşa cum s-a arătat anterior.

Deformaţiile, în punctele de contact piesă-dispozitiv, fiind egale între ele, influenţa lor poate fi eliminată prin corijarea cotei de reglare dimensionala a sistemului tehnologic maşină-dispozitiv-piesă-sculă (**MDPS**).

Şi exemplele pot continua..

8.6. Calculul expresiei generale a $FT_R \equiv i_R$ a oricărui element solicitat de un sistem de forţe plane sau reductibil la acesta

Fie **P_i (x_i,y_i)** punctele de aplicaţie ale celor 4 forţe rezultante **R_i,** care pot solicita acest element sau sistem (« Bolovanul » din Fig.**8.3**) şi ecuaţiile direcţiilor suporturilor (**D_i**) a celor 4 vectori - forţă de forma:

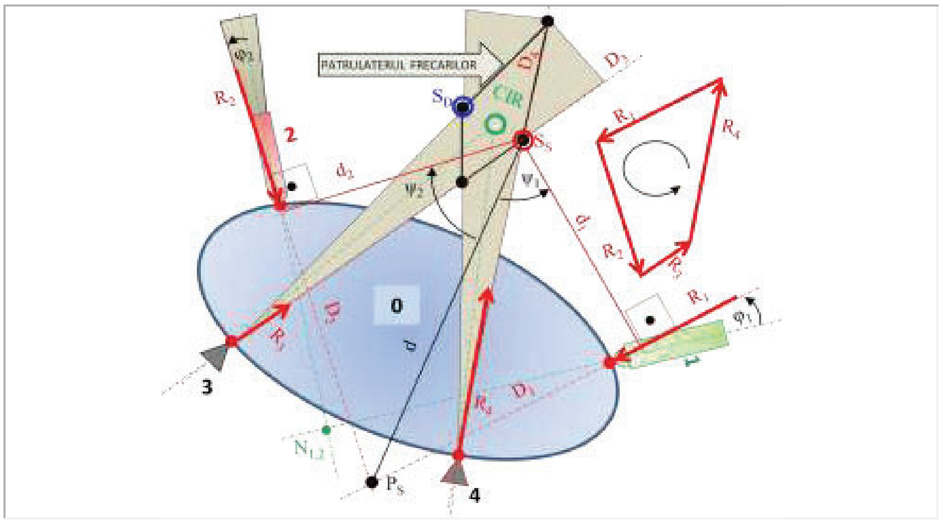


Fig.8.3 Schiţă la cazul general

(8.38) **D_i:** $A_i x + B_i y + C_i = 0.$

Atunci, punctul principal **P** de intersecţie va avea coordonatele:

(8.39) $R_1 \cap R_2 = P \begin{pmatrix} x_P = \dfrac{C_1B_2 - B_1C_2}{A_1B_2 - B_1A_2} \\ y_P = \dfrac{A_1C_2 - C_1A_2}{A_1B_2 - B_1A_2} \end{pmatrix}$, iar punctul secundar **S coordonatele:**

(8.40) $\mathbf{R_3} \cap \mathbf{R_4} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{x_S} = \dfrac{\mathbf{C_3B_4 - C_4B_3}}{\mathbf{A_3B_4 - A_4B_3}} \\ \mathbf{y_S} = \dfrac{\mathbf{A_3C_4 - C_3A_4}}{\mathbf{A_3B_4 - A_4B_3}} \end{pmatrix}$

Distanţele (braţele forţelor) $\mathbf{d_i}$ (i = 1, 2) de la punctul **S** la suportul rezultantelor principale $\mathbf{R_1}$ şi $\mathbf{R_2}$ sunt date de relaţia:

(8.41) $\mathbf{d_i} = \dfrac{\mathbf{A_i x_S + B_i y_S + C_i}}{\mathrm{sgn}\,\mathbf{B_i}\sqrt{\mathbf{A_i^2 + B_i^2}}}$, astfel că funcţia de transfer $\mathbf{FT_R}$, sau raportul de transmitere a forţelor rezultante este $\mathbf{i_R}$, conform primei părţi a relaţiei (8.9), este:

(8.42) $\mathbf{i_R} = \dfrac{\mathbf{R_2}}{\mathbf{R_1}} = \dfrac{\mathbf{d_1}}{\mathbf{d_2}} = \dfrac{\mathbf{A_1x_S + B_1y_S + C_1}}{\mathbf{A_2x_S + B_2y_S + C_2}} \bullet \dfrac{\mathrm{sgn}\,\mathbf{B_2}\sqrt{\mathbf{A_2^2 + B_2^2}}}{\mathrm{sgn}\,\mathbf{B_1}\sqrt{\mathbf{A_1^2 + B_1^2}}}$

Dacă în sensul **S** direcţiile $\mathbf{D_i}$ fac unghiurile $\boldsymbol{\varphi_i}$ cu direcţiile normalelor în punctele $\mathbf{P_i}$, atunci, în sensul invers **D** (**desfacere**) direcţiile forţelor rezultante vor face, în general, unghiurile $-\boldsymbol{\varphi_i}$ cu aceleaşi direcţii ale forţelor normale din punctele de contact $\mathbf{P_i}$, fiind simetricele acestora faţă de normalele din punctele de contact.

Este uşor de observat, din cazul anterior prezentat, că **MSM** transferă, o problemă de **mecanică pură**, din domeniul mecanic în cel matematic, **pur geometric**.

Mecanica revenind, astfel, în matca de unde s-a desprins cu secole în urmă.

8.7 Reducerea numărului forţelor rezultante cheia MSM

În mod natural, elementele sistemelor mecanice solicitate de **forţe coplanare** pot fi cu un număr **n** de forţe rezultante: **n = 2, 3** şi **4**.

S-a văzut că, prin separarea arbitrară a forţelor şi, în consecinţă, şi a momentelor, în **principale** şi **secundare**, prin introducerea noţiunii de rezultantă a rezultantelor, un sistem solicitat de **n = 4** forţe rezultante s-a redus la unul cu numai **n=2** forţe, care sunt tocmai **rezultantele rezultantelor**. Astfel **MSM** a reuşit să rezolve atât de simplu problemele suficient de complicate ale mecanicii.

Dacă **n = 2**, ca de exemplu în cazul **tijelor** şi a **bielelor** de transmitere a mişcărilor, neexistând şi forţe secundare, echilibrul se stabileşte exclusiv între cele două forţe principale $\mathbf{R_1}$ şi $\mathbf{R_2}$ care, în aceste condiţii, vor fi **egale**, de sens (semn) contrar şi pe **acelaşi suport**. Fiind elemente atât de simple, proiectanţii nu le acordă atenţia cuvenită. Aşa se face că, o tija de comandă a schimbătorului de viteze de la istorica maşinuţă « Lăstun », fabricată la Mecatim din Timişoara, se manevra greu, pentru că era proiectată şi construită în apropierea domeniului de autoblocare (**Fig.8.4**).

Există doua tipuri de tije de transmitere a mişcarilor: Tip e_1, cu excentricitatea la întrare, care se pot autobloca în anumite condiţii (**Fig. 8.4,B**) când momentele rezultantelor principale au momente de acelaşi sens (semn) faţă de secundar S.

Dacă se notează cu h = L.tanφ = L.μ distanţa de la **S** la direcţia ghidajului tijei, cu distanţa L între reazeme, atunci pentru tip e_1, braţul rezultantei de la întrare d_1 va fi

(8.43) $d_1 = h - e_1 = L.\mu - e_1$, iar pentr R_2, braţul d_2 al rezultantei R_2, de la ieşire este

(8.44) $d_2 = h = L.\mu$, ca urmare raportul de transmitere în sensul strângerii va fi

(8.45) $i_{RS1} = \frac{R_2}{R_1}\frac{d_1}{d_2} = \frac{\mu L - e_1}{\mu L} = 1 - \frac{e_1}{\mu L} < 1$

La tipul e_2 mărimile anterioare sunt

(8.46) $\begin{cases} d_1 = h = L.\mu \\ d_2 = h + e_2 = L.\mu + e_2 \end{cases}$, astfel că rezultă $i_{RS2} = \frac{R_2}{R_1}\frac{d_1}{d_2} = \frac{\mu L}{\mu L + e_2} = \frac{1}{1+\frac{e_2}{\mu L}} < 1$.

În concluzie, datorită frecărilor din ghidaje, ambele variante au raportul de transmitere subunitar, dar numai în cazul tipului e_1 acest raport poate fi negativ, şi, ca urmare, numai la acest tip poate să apară autoblocarea, aşa cum apare în **figura 8.4,B**.

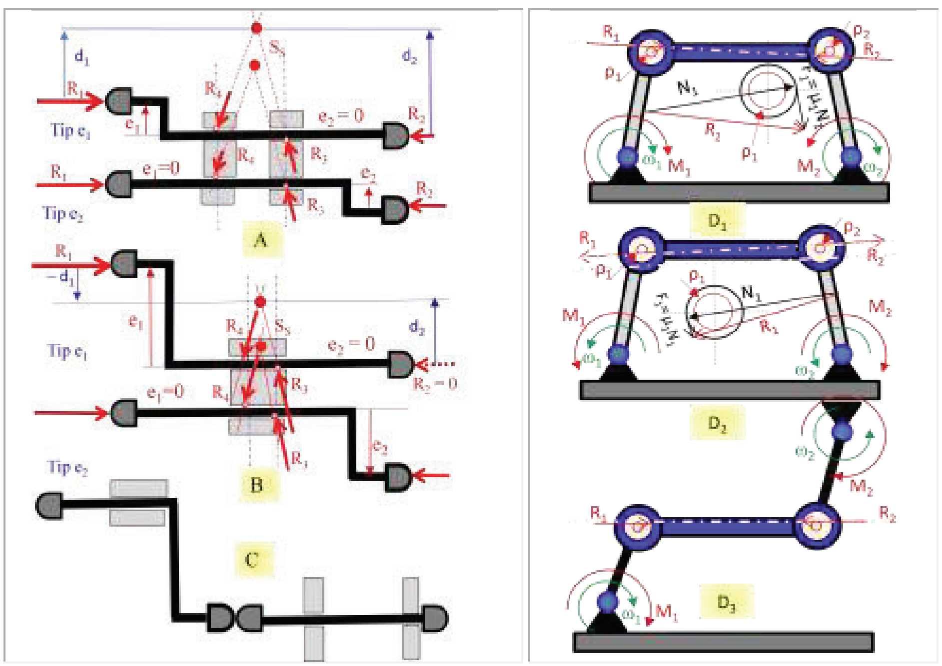


Fig.8.4 Transmiterea mişcării cu tije şi cu biele.

Condiţiile în care autoblocarea tijelor e_1 este posibilă pot fi : o excentricitate e_1 prea mare sau un ghidare al tijei de lungime/distanţă L prea scurtă. Autoblocarea se poate recunoaşte imediat, urmărind sensul momentelor forţelor principale, faţă de S : daca au acelaşi semn autoblocarea este prezenta, deoarece + cu + şi – cu – nu se pot anula !

Tijele de tip e_2, sunt cele care nu se pot autobloca, deoarece momentele lor sunt, în toate condiţiile, de semne contrare, ca urmare, echilibrul, static există, $1 > i_{RS} > 0$ şi mişcarea este posibilă. Ele pot fi utilizate la legarea în serie a mai multor tije pentru transmiterea la distanţă a mişcarilor (**Fig. 8.4,C**) cu excentricitate **e** ridicată/mare, între intrare şi ieşire.

În cazul bielei, suportul forţelor rezultante (principale, pentru că cele secundare nu există) este constituit din una din cele 4 direcţii tangente la cele două **cercuri de frecare**, de raze ρ_1 şi ρ_2, din cele două **ochiuri** ale bielei.

În **figura 8.4** sunt prezentate 3 tipuri de biele. În D_1 şi D_3 bielele sunt solicitate la compresiune, iar în D2 este solicitată la întindere. Toate forţele şi momentele, reprezentate în **figura 8.4,D**, acţionează asupra bielei şi, pentru articulaţia din ochiul de acţionare, sunt reprezentate şi forţele normale şi de frecare din fus.

De aceea, rezulta imediat: $\mathbf{i_R = 1}$, pentru **n = 2**, (**Fig.8.4 D**).

Dacă **n = 3,** ca de exemplu în cazul unei element de amplificare a forţelor cu pană (**Fig.8.1**), cu mişcare de translaţie, pe suprafaţa plană de dirijare a mişcării de translaţie, înclinată cu un unghi α_3, faţă de o axă oarecare de referinţă, apare forţa rezultantă de legătură din ghidaj R_3, ca sumă a forţelor distribuite pe această suprafaţă, **singura** forţă rezultantă secundară din sistem.

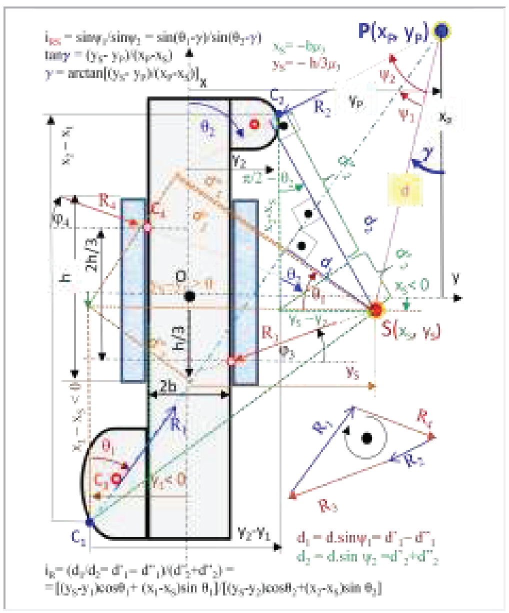


Fig. 8.5 Plunjerul, element universal cu mişcare de **translaţie**

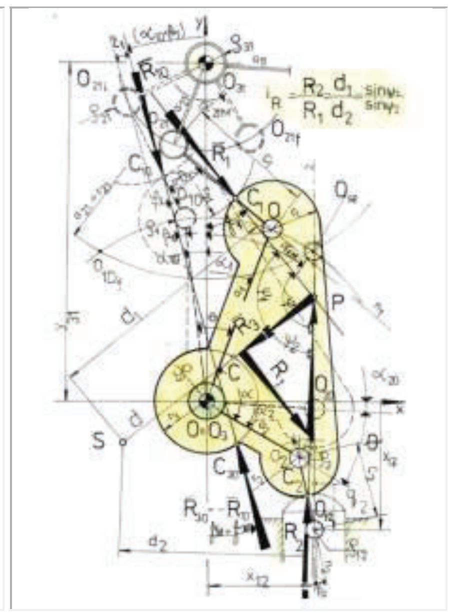


Fig. 8.6 Pârghia, element universal cu mişcare de **rotaţie**

La aceste elemente, echilibrul forţelor este **posibil numai** dacă toate cele **3** forţe rezultante sunt **concurente într-un singur punct**. Acest punct este punctul principal **P** prin care va trece şi $\mathbf{R_3}$. În lipsa celei de a doua rezultante secundare,

lipseşte şi punctul secundar **S**, de intersecţie a rezultantelor secundare. Se poate arăta, fără dificultate, că, în acest caz, **S se alege arbitrar pe direcţia lui $\mathbf{R_3}$.**

În consecinţă, suportul lui $\mathbf{R_3}$ este **axa centrală** a elementului şi segmentul **d** = $\left\|\overline{\mathbf{PS}}\right\|$ se situiază pe direcţia vectorului secundar $\mathbf{R_3}$.

Rezultă, pentru o astfel de **pană**, raportul de transmitere a rezultantelor:

(8.43) $\mathbf{i_R} = \dfrac{\sin\psi_1}{\sin\psi_2} = \dfrac{\cos[(\alpha_1+\varphi_1)+(\alpha_3+\varphi_3)]}{\sin[(\alpha_2+\varphi_2)+(\alpha_3+\varphi_3)]}$ în care **unghiurile α_i, i = 1, 2, 3** sunt inclinaţiile celor trei feţe ale unei **pene** faţă de feţele unui dreptunghi, iar indicii corespund cu tipul rezultantelor:

- **1(forţa activă de intrare)** şi
- **2 (forţa de ieşire de strângere)** în sens levogin şi
- **3 (forţa secundară din ghidajul penei)** în sens dextrogin.

Se observă forma mai avantajoasă a relaţiei (8.43), mai ales la legarea în serie a penei cu alte elemente, la care raportul de transmitere global al mecanismului va fi dat, aşa cum se ştie, de produsul:

(8.44) $$\mathbf{i_{RM}} = \prod_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{i_{Rk}} = \mathbf{i_{R1}}.\mathbf{i_{R2}}.\mathbf{i_{R3}}....\mathbf{i_{Rn}}$$

faţă de relaţia clasică (la care $\alpha_1 = 0$; rezultanta $\mathbf{R_1}$ confundându-se cu normala $\mathbf{N_1}$)

(8.45) $\mathbf{i_R} = \dfrac{1}{\tan(\alpha_2+\varphi_2)+\tan(\alpha_3+\varphi_3)}$, păstrând notaţiile anterioare.

La un element de tipul plunjerului dublu ghidat bilateral (Fig.**8.5**), denumit şi element universal cu mişcare de translaţie, se obţine relaţia

(8.46) $i_R = \dfrac{(y_S-y_1)\cos\theta_1+(x_1-x_S)\sin\theta_1}{(y_S-y_2)\cos\theta_2+(x_2-x_S)\sin\theta_2}$, în care axa **X** a fost aleasă pe **direcţia de** mişcare de **translaţie** a plunjerului, în sensul **S**, cu originea **O(0,0)** în mijlocul lungimii h de ghidare (coeficientul de aderenţă (frecare) fiind considerat acelaşi pe ambele feţe ale plunjerului, în care lucrează rezultantele secundare, ca sumă a forţelor triunghiular distribuite în ghidaj) şi în axa plunjerului de lăţime 2b.

Punctul secundar **S** are coordonatele:

(8.47) $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{R}}_3 \cap \overline{\mathbf{R}}_4 \begin{pmatrix} \mathbf{x_s} = -\mathbf{b}.\mu_{3,4} \\ \mathbf{y_S} = -\dfrac{\mathbf{h}}{3.\mu_{3,4}} \end{pmatrix}$,iar $\theta_{1,2}$ sunt direcţiile rezultantelor principale, $\mathbf{R_{1,2}}$ cu axa **X,** care acţionează în cele două puncte de coordonate $\mathbf{P_{1,2}}(\mathbf{x_{1,2}}, \mathbf{y_{1,2}})$.

Există şi cazuri, justificate din punct de vedere constructiv, când numărul rezultantelor nu scade, ci, dinpotrivă, creşte.

O bielă poate prelua mişcarea de la un singur element şi să o transmită, cu multiplicarea mişcarilor, la două elemente simultan, legate la acelaşi bolţ / fus. În acest caz, bolţul este suprasolicitat şi pentru evitarea acestui fapt se dispun două ochiuri la ieşire, cu două bolţuri în paralel. Un astfel de caz este al unei **biele modificate**, sau, mai precis, al unei "**triele**", pentru că are trei ochiuri.

Astfel de **triele** echipează presele hidraulice, pentru mase plastice, care au fost fabricate la Electrotimiş din Timişoara, în colaborare şi după un proiect al unui partener din Italia.

8.8 Aplicaţii la elementele unor mecanisme plane

Fiind o metodă deosebit de simplă şi expresivă, **MSM** permite constructorului, de sisteme mecanice, **optimizarea** construcţiei, astfel încât, diversele funcţii scop, impuse, să se poată realiza fără dificultăţi.

MSM se poate aplica sub formă **grafică** şi / sau **grafo-analitică** în primele faze ale design-ului, acelea de concepţie a sistemului, în care construcţia mecanică se află sub forma unor schiţe de principiu, urmând ca în ce-a de a doua fază, de proiectare a construcţiei, în varianta optimă, determinată în prima fază, să fie utilizată sub forma **analitică** pentru verificarea condiţiilor de funcţionare, de autofrânare şi de evitare a autoblocării, ca şi de determinare rapidă şi exactă a tuturor forţelor care solicită sistemul, în vederea dimensionării şi a verificării elementelor componente.

Desenele prezentate, în prezenta lucrare, sunt astfel realizate încât să se preteze şi la metodele grafice, la fel de bine, ca şi la cele analitice.

Determinarea rapoartele de transmitere a forţelor la diverse elemente şi mecanisme a fost o veche preocupare a inaintaşilor, din cele mai vechi timpuri. Ei au soluţionat aceste probleme cum au putut şi cum s-au priceput.

Cele mai cunoscute şi utilizate "unelte" în vechime au fost pana şi pârghia. Cine nu ştie că forţele dezvoltate de pană depind de unghiul penei, iar forţele transmise, de obicei urmarindu-se amplificarea lor, depind de lungimea braţelor pârghiei.

Concluzii care astăzi nu ne mai satisfac pe deplin. Pentru că, în milemniul III, pretenţiile privind precizia de exprimare a rapoartelor de transmitere a forţelor, vitezelor, acceleraţiilor ş.a. sunt cu mult mai mari: Se cere determinarea cu precizie absolută a acestor parametri. Numai **MSM** oferă facil un pas uriaş spre soluţionarea acestui deziderat, aşa cum s-a demonstrat deja şi aşa cum se va trata în continuare, analizând cele mai vechi element de transmitere şi amplificare a forţelor, la fel de vechi ca şi pana, e vorba de pârghie (**Fig. 8.6**) şi de excentricul circular din **figura 8.7**.

La prima vedere, desenul pârghiei pare exagerat de complicat. Dar nu este.

Parghia, fiind un element care se roteşte în jurul unui bolţ, cu centrul în punctul O_3, forţa rezultantă dintre acest bolţ şi pârghie va fi în permanenţă tangentă la cercul de frecare de rază ρ_3, rază dată, aşa cum se cunoaşte, de produsul razei bolţului r_3 cu sinusul unghiului de frecare φ_3 dintre bolţ şi parghie, adică de relaţia $\rho_3 = r_3.\sin\varphi_3$.

Ca şi pana, pârghia este solicitată de 3 forţe rezultante: de întrare R_1 şi de ieşire R_2, care sunt, totodată considerate ca forţe principale; R_1 fiind presupusă cunoscută şi singura forţă secundara este R_3, care apare la interacţiunea dintre bolţ şi pârghie.

Suprafeţele de la întrare şi dela ieşire, având forma unor calote sferice sau a unor zone cilindrice, rezultantele R_1 şi R_2 vor fi aplicate în punctele de contact C_i şi vor fi în permanenţă tangente la cercurile respective de frecare de raze ρ_1 şi ρ_2.

Cunoscându-se direcţiile forţelor rezultante, problema este ca şi rezolvată.

Pe direcţia rezultantei R_3 se alege arbitrar punctul secundar S, aşa cum este ilustrat în figura **8.6** şi, pentru metoda grafică, se măsoara lungimile d_1 şi d_2 a căror raport este tocmai raportul de transmitere a forţelor in sensul strângerii S.

Rezolvarea exactă a pârghiei, prin metoda clasica d'Alambert, combinată cu MSM, este prezentata în lucrarea [48].

Ştiind că cele trei forţe rezultante, în condiţii de echilibru, formează un poligon (triunghi) închis, parcurs în acelaşi sens şi considerând modulul vectorului R_1 ca rază a unui cerc, modulul lui R_2 ca excentricitate liniară reala şi raportul $i_{RS} = \frac{R_2}{R_1}$, care este şi raportul de transmitere a fortelor rezultante în sensul S, ca excentricitate liniară

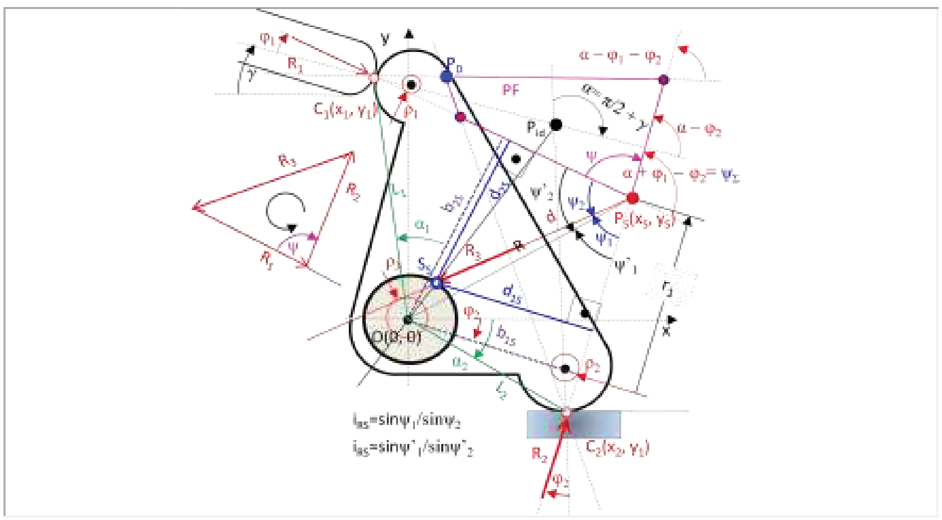


Fig.8.7 Schiţă explicativă pentru pârghie. Metoda clasică combinată cu **MSM**

numerica şi pe R_3 ca funcţie radial excentrică, se poate scrie, ca şi în cazul utilizării teoremei lui **Pitagora** generalizate:

$$(8.48)\quad R_3 = R_1\, Rex[\alpha = \psi, S\left(s = \frac{R_2}{R_1}, \varepsilon = 0\right)] = R_1\sqrt{i_{RS}^2 + 1 - 2 i_{RS}\cos\psi}$$

Dar, în acest caz, pentru simplificarea rezolvării analitice a problemei, se utilizează, totuşi, ecuaţia de momente a forţelor faţă de centrul/axa de rotaţie O(0, 0), uzând de braţele acestor forţe b_1 şi b_2, faţă de punctul O, braţe care se deduc fără dificultate; construcţia pârghiei fiind dată/determinată. Astfel

$$(8.49)\quad \begin{cases} b_1 = L_1 cos\alpha_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.cos\alpha_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sin(\gamma + \varphi_1) \\ b_2 = L_2 \cos(\alpha_2 - \varphi_2) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.\cos(\alpha_2 - \varphi_2) \end{cases}$$

Ecuaţia de momente este

$$(8.50)\quad \begin{cases} R_1 b_1 - R_2 b_2 - R_3 \varrho_3 = 0\,, \\ \text{sau} \\ b_1 - i_{RS} b_2 - \frac{R_3}{R_1}\varrho_3 = 0 \end{cases}$$

şi înlocuind pe R_3 din (8.48) în (8.50) rezultă ecuaţia algebrică de gradul al II-lea în i_{RS}

$$(8.51)\quad i_{RS}^2(b_2^2 - \varrho_3^2) - 2i_{RS}(b_1 b_2 - \varrho_3^2 cos\psi) + (b_1^2 - \varrho_3^2) = 0$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt

$$(8.52)\quad i_{RS,D} = \frac{(b_1 b_2 - \varrho_3^2 cos\psi) \pm \sqrt{(b_1 b_2 - \varrho_3^2 cos\psi)^2 - (b_2^2 - \varrho_3^2)(b_1^2 - \varrho_3^2)}}{b_2^2 - \varrho_3^2}$$

şi, pentru semnul minus din faţa radicalului îl reprezintă pe i_{RS}, iar pentru semnul plus din faţa radicalului îl reprezintă i_{RD} , cu condiţia să se schimbe şi semnul frecărilor, adică $\varphi_1 \to -\varphi_1$ şi $\varphi_2 \to -\varphi_2$, în relaţiile anterioare.

Aceasta, deoerece se ştie, că rapoartele de transmitere sunt în relaţia

$$(8.53)\quad i_{RD} > i_{id} > i_{Rs}$$

Prin anularea frecărilor, în relaţia (8.52), rezultă raportul ideal de transmitere a forţelor dezvoltate de pârghie, cel cunoscut şi de înaintaşi

$$(8.54)\quad i_{id} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{b_1}{b_2}.$$

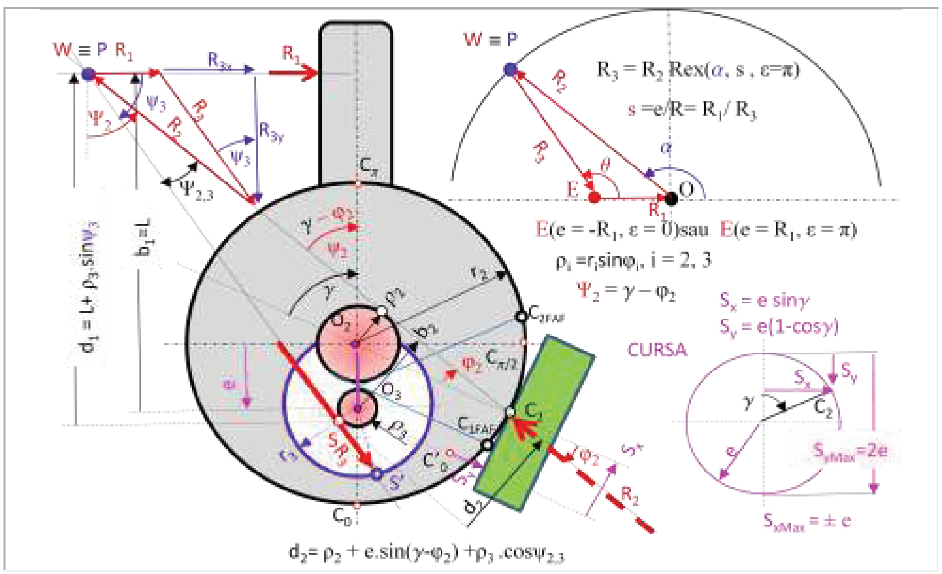


Fig.8.8 Excentricul circular

Este de remarcat faptul, că radăcinile unei ecuţii de gardul II, cunoscute şi de antici, sunt soluţiile exacte ale forţelor dezvoltate de o pârghie, soluţii exacte care deabea acum, în epoca modernă, devin/sunt cunoscute.

Istoria este şi mai hilară în cazul excentricului circular. În multe lucrări de specialitate se afirmă că el ar lucra ca o pană (! infăşurată pe un cilindru) şi, în consecinţă, forţele dezvoltate de acesta imită, chipurile, relaţia de la pana clasică.

În realitate, realţia exactă arată că el funcţionează, de fapt, ca o pârghie [47].

Este suficient să înlocuim, în relaţia pârghiei (8.52), pe b_1 cu lungimea braţului excentricului L, adică $b_1 = L$ şi pe b_2 cu relaţia (Fig. **8.8**)

(8.55) $b_2 = \varrho_2 + e.\sin(\gamma - \varphi_2)$ şi rezultă relaţia pentru excentricul circular [47]

(8.56) $i_{Rs,D} = \frac{Lb_2 \pm \sqrt{[L.b_2 - \varrho_3^2 \sin(\gamma-\varphi_2)]^2 - (L^2-\varrho_3^2)(b_2^2-\varrho_3^2)}}{L^2-\varrho_3^2}$, tot dintr-o ecuaţie algebrică de gradul al 2-lea.

Concluzia ? Excentricul circular, ca şi cel evolventic, ca şi cel spiral lucrează ca o pârghie şi nu ca o pană. Mai precis, el lucrează ca un …excentric.

8.9 Aplicarea metodei separării momentelor (MSM) la sisteme în ansamblul lor

Revenim la sistemele de forţe plane, sau reductibile la acestea, care formează 90 % din problemele de mecanică.

Pentru început, se va considera un caz general, în plan, ales fictiv pentru o ilustrare clară, în care ambele elemente, ale mecanismului considerat, sunt solicitate de câte 4 forţe rezultante, aşa cum se ilustrează în **figura 8.9**.

În acest caz, un element component al sistemului vine în contact cu celelalte elemente în maximum 4 puncte, în care apar şi forţele rezultante principale **$R1_1$** şi **$R1_2$**, cea care întră (se transmit de la elemntul anterior - **$R1_1$**) şi cea de ieşire sau care se transmit mai departe la elementul următor (**$R1_2$**) şi forţele rezultante secundare **$R3_1$**, **$R3_2$** şi $R4_1$, **$R4_2$** din reazeme, în cazul din figură şi, în general, şi din ghidaje, articulaţii ş.a.

Ca să simplificăm, considerăm doar două elemente ale sistemului. Amandouă vor avea câte un punct secundar **S1** şi, respectiv, **S2** în care se intersectează suportul forţelor secundare : În **S1**→ **$R3_1$** cu **$R4_1$** şi în **S2** → **$R3_2$** cu **$R4_2$**. Rezultă

(8.57) $\begin{cases} \mathbf{S1} = \mathbf{R1_3} \cap \mathbf{R1_4} \\ \mathbf{S2} = \mathbf{R2_3} \cap \mathbf{R2_4} \end{cases}$

La fel vor exista punctele principale **P1** şi **P2**, în care se intersectează forţele principale **$R1_1$** şi **$R1_2$** → în **P1**şi **$R2_1$** cu **$R2_2$** →în **P2**, ale celor două elemente. Astfel

(8.58) $\begin{cases} \mathbf{P1} = \mathbf{R1_1} \cap \mathbf{R1_2} \\ \mathbf{P2} = \mathbf{R2_1} \cap \mathbf{R2_2} \end{cases}$

În punctele de contact dintre cele doua elemente, forţele rezultante sunt egale şi de semne contrare

(8.59) $\mathbf{R2_1} = -\mathbf{R1_2}$

Deci, pe ansamblul sistemului / mecanismului, cele două forţe **$R2_1$** cu $R1_2$ se anulează reciproc.

Vectorii

(8.60) $$\begin{cases} \overrightarrow{R1}_{12} = \overrightarrow{R1}_1 + \overrightarrow{R1}_2 \\ \overrightarrow{R1}_{34} = \overrightarrow{R1}_3 + \overrightarrow{R1}_4 \end{cases}$$

însumaţi dau **rezultanta rezultantelor principale** a primului element, vectori care sunt poziţionati, ca direcţie, pe suportul **axei centrale** a primului element al mecanismului (linia verde, determinată de punctele **S1** şi **P1**). Ei sunt egali în modul şi de sensuri opuse:

(8.61) $$\overrightarrow{R1}_{34} = -\overrightarrow{R1}_{12}$$

În mod asemănător, pentru al doilea element al mecanismului

(8.62) $$\begin{cases} \overrightarrow{R2}_{12} = \overrightarrow{R2}_1 + \overrightarrow{R2}_2 \\ \overrightarrow{R2}_{34} = \overrightarrow{R2}_3 + \overrightarrow{R2}_4 \end{cases} \rightarrow$$

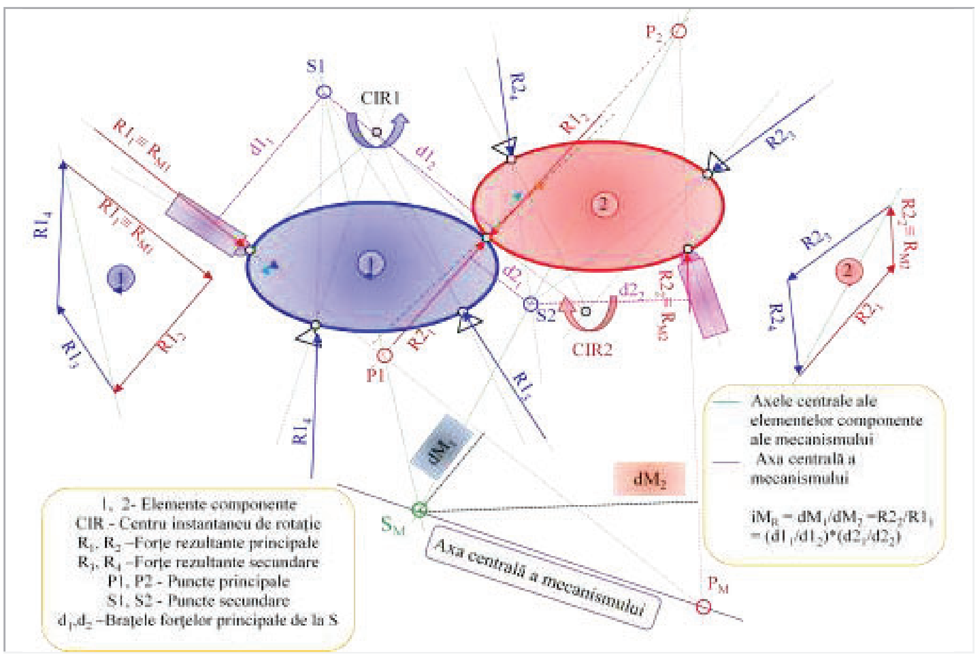


Fig.8.9 Exemplu de aplicare a **MSM** la mecanismele cu două elemente universale fictive.Schiţă pentru determinarea grafica a funcţiei de transfer sau a raportului de transmitere a forţelor rezultante **iM_R** ale mecanismului în sensul strângerii **S**

(8.63) $\overrightarrow{R2}_{34} = -\overrightarrow{R2}_{12}$, plasaţi pe axa centrală a celui de al doilea element (linie verde).

Şi acum, urmează **cea mai importantă decizie** a **MSM**, prin care, de la două elemete, cu 4 forţe rezultante fiecare, se poate trece la un singur **element echivalent**, care este mecanismul în ansamblul lui, tot cu 4 forţe rezultante: $\mathbf{R1_1}$ şi $\mathbf{R2_2}$ forţele rezultante principale **ale mecanismului**, de la întrare $\mathbf{R1_1}$ şi ,respectiv, de la ieşire $\mathbf{R2_2}$. Forţele rezultante secundare vor fi: $\overrightarrow{\mathbf{R1}_{34}}$ şi $\overrightarrow{\mathbf{R2}_{34}}$ rezultantele rezultantelor secundare ale celor două elemente componente.

Mecanismul cu doua elemente, considerat ca un singur element, va avea două forţe rezultante principale, de la întrare $\mathbf{R1_1}$ şi de la ieşire $\mathbf{R2_2}$ şi două forţe rezultante secundare, care sunt rezultantele rezultantelor secundare ale celor două elemente $\overrightarrow{\mathbf{R1}_{34}}$ şi $\overrightarrow{\mathbf{R1}_{34}}$. Aceasta, deoarece, aceste rezultante ale rezultantelor secundare, însumate, sunt egale şi de semn opus cu rezultanta rezultantelor principale ale mecanismului, care este

(8.64) $\overrightarrow{RM}_{12} = \overrightarrow{\mathbf{R1}_1} + \overrightarrow{\mathbf{R2}_2}$

forţă poziţionată pe **axa centrală a mecanismului**, determinată de punctul principal al mecanismului

(8.65) $\mathbf{PM} = \overrightarrow{\mathbf{R1}_1} \cap \overrightarrow{\mathbf{R2}_2}$

Punctul secundar al mecanismului **SM** se determină intersectând suporturile (verzi) **rezultantelor rezultantelor secundare** a celor două elemente

(8.66) $\mathbf{SM} = \overrightarrow{\mathbf{R1}_{34}} \cap \overrightarrow{\mathbf{R2}_{34}}$

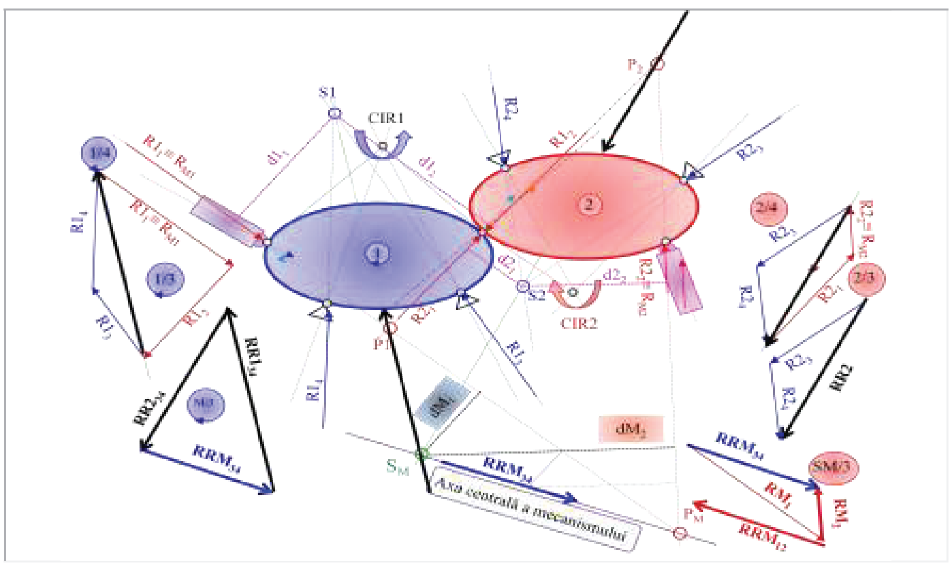


Fig.8.10 Exemplu de aplicare a **MSM** la mecanismele cu două elemente universale fictive cu exemplificarea reducerii forţelor rezultante de la 4 la 3, la elemente şi la mecanism.

Însumând rezultantele rezultantelor secundare ale elementelor se va obţine o rezultantă a rezultantelor rezultantelor secundare, orientată pe **axa centrala a mecanismului**.

Axa centrală a mecanismului este determinată de punctele **PM** şi **SM** şi este suportul a două forţe egale şi opuse ca semn, pentru un sistem aflat în echilibru static.

Axa centrală, a unui element sau a unui mecanism, este locul geometric în care torsorul sistemului are valoare minimă. În cazul de faţă, această valoare minimă este zero, sistemul fiind considerat în echilibru static.

De la punctul secundar al mecanismului **SM** se măsoara distanţele $\mathbf{dM_1}$ şi $\mathbf{dM_2}$, care sunt şi braţele forţelor principale ale mecanismului.

Alegând punctu **SM** al aceastei axe, ca şi oricare alt punct situat pe axă, pentru a scrie echilibrul de momente, deoarece $\overrightarrow{\mathbf{R1}_{34}}$ *şi* $\overrightarrow{\mathbf{R2}_{34}}$ trec prin **SM**, ele au braţele forţelor şi, în consecinţă, şi momentele faţă de **SM** nule, astfel că ecuaţia de momente va fi

(8.67) $(\sum M)_{SM} = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{R1_1} * \mathbf{dM_1} - \mathbf{R2_2} * \mathbf{dM_2} = \mathbf{0}$

din care rezultă **funcţia de trensfer** a forţelor rezultante ale mecanismului sau raportul de transmitere al forţelor lui

(8.68) $\mathrm{FTM} \equiv iM_R = \frac{\mathbf{R2_2}}{\mathbf{R1_1}} = \frac{\mathbf{dM_1}}{\mathbf{dM_2}}$

În acest mod, două elemente, solicitate fiecare de 4 forţe coplanare, a fost redus la un singur element echivalent (mecanismul în ansambul lui) solicitat de 4 forţe coplanare.

Detalii, cu privire la trecerea elementelor solicitate efectiv de 4 forţe rezultante la elemente solicitate de 3 forţe rezultante, prin utilizarea forţei rezultante rezultante secundare (RRS1,2 = R1,23 + R1,24) şi apoi mecanismului solicitat de 3 forţe rezultante ($R1_1$,$R2_2$ şi RRRM) sunt ilustrate in **figura 8.10**.

8.10 Cazul a două elemente legate în serie, fiecare element fiind solicitat de un număr diferit de forţe rezultante

În **figura 8.11** este prezentat mecanismul de fixare cu pârghii articulate, acţionat pneumatic, al unui dispozitiv de instalare a unei piese paralelipipedice.

Motorul, pneumatic actionează un mecanism de amplificare a forţelor cu pârghii articulate 1, denumit şi "genunchi" (ştiindu-se că piciorul uman amplifica la maximum foţele dezvoltate când unghiul la genunchi este de cca. 120^0.

Forţele care se dezvoltă în diverse puncte ale mecanismului, articulatiile 1, 2 şi 3, rezulta din triunghiurile forţelor prezentate in **figura 8.11**. Se observă că forţa de acţionere dezvoltată de motorului pneumatic $\mathbf{R1_1}$ este amplificata la forţa de strângere / fixare a piesei în dispozitiv $\mathbf{R3_2}$.

Fig.8.12 prezintă mecanism de fixare a piesei în dispozitiv cu **pană circulară 1** şi cu **plunjer dublu ghidat 2.** În mod mai frecvent, **pană circulară** este utilizată ca element de echilibrare a forţelor distribuite în două puncte.**Pana sferică** este utilizată la echilibrarea forţelor transmise / distribuite în 3 puncte /zone. Dar ea poate fi utilizata si ca element de transmitere si modificare a direcţiei forţelor transmise, aşa cum este cazul mecanismului din **figura 8.12**.

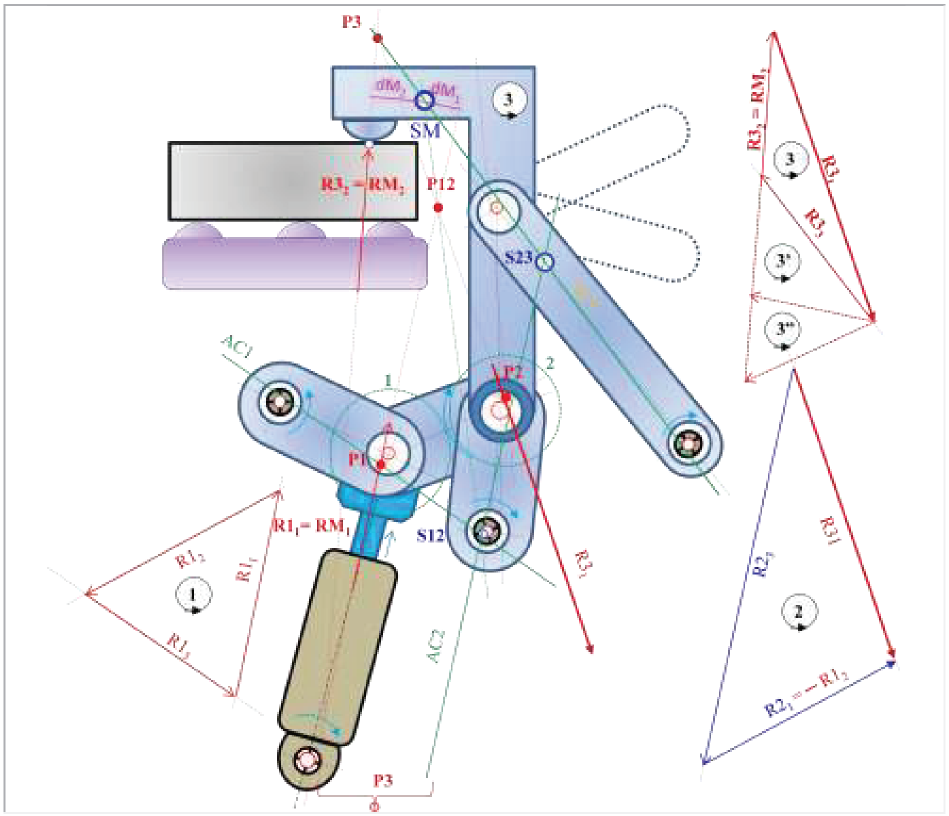


Fig.8.11 Mecanism de fixare cu pârghii articulate, a unei piesei paralelipipedice într-un dispozitiv acţionat pneumatic

$R1_1$ este forţa de acţionare a mecanismului şi forţa de intrare pentru pana circulară iar $R2_2$ este forţa la ieşirea din mecanism şi, totodată, forţa rezultantă de fixare a piesei în dispoxitiv.

Se observă simplu ca acest tip de mecanism nu amplifica forţele ci le demultiplică, din care cauză, astfel de construcţii mecanice trebuie evitate.

Dacă punctele de contact, dintre pana circulară şi cele două elemente de contact, ar avea braţe diferite, în sensul ca $d_1 >> d_2$, atunci este posibil ca şi acest element să poată lucra asemănător upârghii si să asigure o amplificare a forţelor. Avantajul acestui element faţă de o părghie este că este mult mai rigid şi dezavantajul este că ocupă un volum mai mare şi consumă mai jult material.

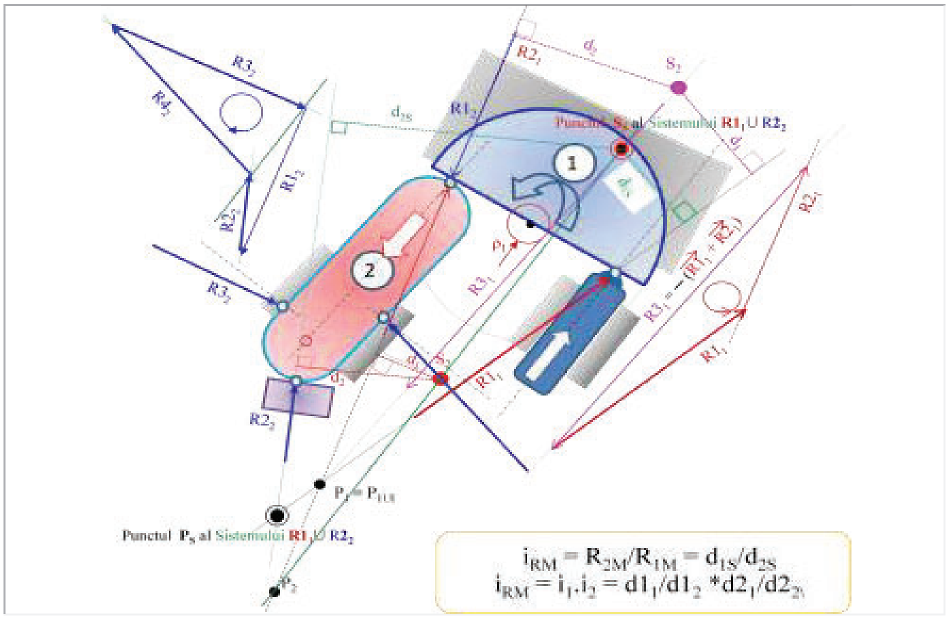


Fig.8.12 Mecanism de fixare a piesei în dispozitiv cu pană circulară 1 şi cu plunjer dublu ghidat 2

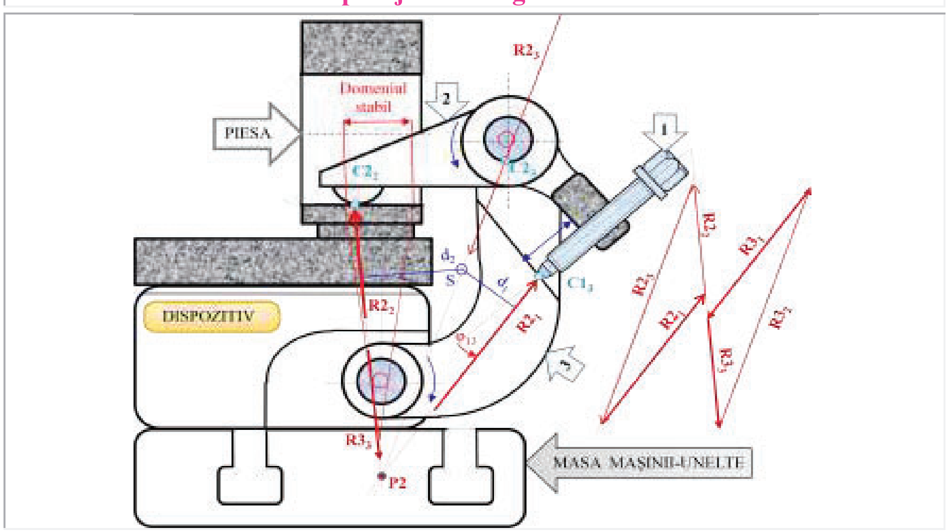


Fig.8.13 Determinarea **grafică** a raportului de transmitere a forţelor rezultante $\mathbf{i_R}$ prin **MSM** ($\mathbf{i_R} = \frac{dM_1}{dM_2}$) şi prin metoda clasica a poligonului (trigon) forţelor rezultante

Motto: ”**Filosofia**, acţiunea raţiunii libere, se opreşte acolo…
unde făclia ştiinţei ne lipseşte”
Voltaire, Dictionnaire philosophique

Capitolul 9

FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE CIRCULARE COSINUS cexθ ŞI SINUS sexθ EXCENTRICE

9.1 Definirea funcţiilor cexθ şi sexθ

Fie $\mathbf{E_2}$ planul euclidian orientat, raportat la un reper polar de pol **O** şi axă polară **Ox**. Simultan se consideră şi sistemul cartezian asociat **xOy**, orientat pozitiv.

Cercul **C(O,R)** de rază **R** şi cercul unitate **CU(O,1)** sunt centrate în **O(0,0),** fiind concentrice. O transformare homotetică de pol **O** şi raport **k = 1/R** transformă toate cercurile oarecare, de raza **R**, într-un cerc unitate **C1 ≡ CU = C(O,1).**

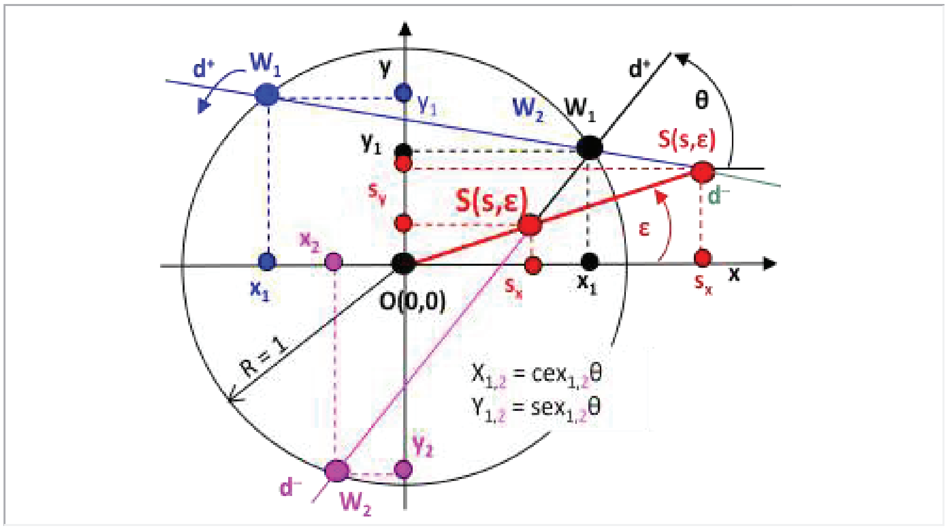


Fig. 9.1 Desen explicativ la definirea **FSM-CE cexθ** şi **sexθ**

Relativ la reperul polar, este dat punctul **E(e, ε)** numit **excentru**, al cercului **C(O,R)**. Punctul **S(s,ε)** este denumit **excentrul cercului unitate** şi se poate obţine printr-o transformare homotetică, de raport **1/R** şi pol **O(0,0)** a oricărui excentru oarecare **E**.

Dacă **e**, **s** = **e** / R şi **ε** sunt constante, atunci **E** şi **S** sunt excentre (puncte) **fixe** în planul $\mathbf{E_2}$. Dacă sunt variabile, atunci excentrul este un punct variabil în plan, care se mişcă după anumite legi date.

Numerelor reale $\mathbf{v_1}$ şi $\mathbf{v_2}$ li se asociază, pe cercul unitate, punctele $\mathbf{W_1}$ şi $\mathbf{W_2}$ (sau $\mathbf{W_{1,2}}$) şi pe cercul **C(O,R)** punctele $\mathbf{M_{1,2}}$, de coordonate polare **centrice** $\boldsymbol{\alpha_1}$ şi $\boldsymbol{\alpha_2}$ (sau $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$) cu polul în **O(0,0).** Acestora le corespunde numărul real **u** denumit coordonata polară **excentrică**, cu polul în **S(s,ε)** sau în **E(e, ε)** ce exprimă direcţia **θ** a dreptelor turnante $\mathbf{d^+}$ şi $\mathbf{d_S^+}$**,** paralele între ele, în jurul puncte lor **S** şi, respectiv, **E**, a căror intersecţii cu cercurile **C** şi **C1** sunt punctele $M_{1,2}$ şi, respectiv, $\mathbf{W_{1,2}}$.

Rezultă că, la un unghi **θ** = **u** (modulo 2 π), care indică direcţia dreptei turnante în **E** sau **S** faţă de **Ox**, corespund două unghiuri $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ = $\mathbf{v_{1,2}}$ (modulo 2π), corespunzatoare celor două puncte de intersecţie ale unui cerc cu o dreaptă, aşa cum va rezulta în continuare.

Prin definiţie, coordonatele carteziene $\mathbf{x_{1,2}}$ ale punctelor $\mathbf{W_{1,2}}$, notate cu $\mathbf{x_{1,2}}$ = $\mathbf{cex_{1,2}\theta}$ şi $\mathbf{y}_{1,2}$ = $\mathbf{sex_{1,2}\theta}$, sunt denumite **cosinus excentric** şi, respectiv, **sinus excentric**, de variabilă excentrica **θ** şi reprezintă prima determinare, de indice **1- principală** şi, respectiv a doua determinare, de indice **2 - secundară** a **FSM-CE** dependente de originea **O** a reperului polar sau cartezian drept, (Fig. **9.1**).

Dacă **e** > R rezultă **s** > **1**, atunci **E** şi **S** sunt **exterioare** cercurilor lor şi intersecţiile dreptelor cu aceste cercuri au loc doar într-un interval / domeniu **I** în care $\theta \in [\theta_i = \theta_{initial}, \theta_f = \theta_{final}]$, interval ce se repetă periodic, cu perioada 2π. Pentru primul interval:

(9.1) $$\boldsymbol{\theta_{i,f}} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\pi} \mp \arcsin\left(\frac{1}{}\right) = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\pi} \mp \arcsin\left(\frac{R}{}\right)$$

Din (9.1) rezultă că pentru **s** → ∞ intervalul se reduce la punctul **ε** + **π**, caz în care se obţin funcţii de distribuţie de tip impuls, care, faţă de cele clasice, sunt periodice cu perioada 2π, aşa cum se arată în lucrarea [20 → **Mircea Şelariu**, ''Smarandache Stepped Functions'', Rev. « Scienta Magna », Vol.3, Nr.1 (2007), pag. 81 .. 92].

Geometric, punctele $\mathbf{W_{1,2}}$ sunt punctele de intersecţie ale dreptei turnante, în jurul polului **S**, cu cercul unitate **C1**, iar punctele $\mathbf{M_{1,2}}$ sunt intersecţiile cu cercul **C**(**O,R**) ale dreptei turnante, în jurul punctului **E**.

Unghiurile $\boldsymbol{\theta_{i,f}}$ reprezintă unghiurile de direcţie ale celor două drepte tangente la **C1** duse din **S**, aceleaşi **unghiuri** $\boldsymbol{\theta_{i,f}}$ ca şi ale tangentelor din **E** la **C**.

Punctelor $\mathbf{W_{1,2}}$, de coordonate polare ($\mathbf{r_{1,2}}$ **,** **θ**) cu polul în **S**, le corespund pe cercul **C** câte un unic punct $\mathbf{M_{1,2}}$, cari, în reperul polar de pol **O,** au coordonatele (**R,** $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$), iar în reperul polar de pol **S,** au coordonatele polare (**R**.$\mathbf{r_{1,2}}$, **θ**), în care **R**.$\mathbf{r_{1,2}}$ sunt razele polare, variabile, ale cercului **C**, exprimate prin funcţiile **radial excentric** de variabilă excentrică **R**.$\mathbf{rex_{1,2}\theta}$ sau de variabile centrice **R**.$\mathbf{Rex\alpha_{1,2}}$.

Se ştie că, prin schimbarea originii reperului din **O** în **S**, respectiv **E**, adică, pentru **O** ≡ **S** ≠ **C, C** fiind centrul cercului unitate**,** se obţin funcţiile supermatematice circulare **elevate (FSM-CEl)**. De aceea, proiectând razele excentrice $\mathbf{r_{1,2}}$ pe noile axe de coordonate X şi Y, cu originea în **S**, rezultă expresiile **FSM-CEl** cosinus **cel$_{1,2}$θ** şi sinus **sel$_{1,2}$θ elevate**

(9.2) $$\begin{cases} X_{1,2} = cel_{1,2}\theta = rex_{1,2}\theta.\cos\theta \\ Y_{1,2} = sel_{1,2}\theta = rex_{1,2}\theta.\sin\theta \end{cases}$$, în care, aşa cum s-a mai afirmat, **FSM-CE** redial excentric **rex$_{1,2}$θ** sunt independente de originea **O** a reperului. Ele sunt dependente numai de **E** şi **C**, ceea ce face ca şi funcţiile elevate să nu depindă nici ele de reper, dacă sunt exprimate în funcţie de unghiul la excentru **θ**, ştiind că, prin definiţie, ele se obţin pentru **O** ≡ **S** ≠ C .

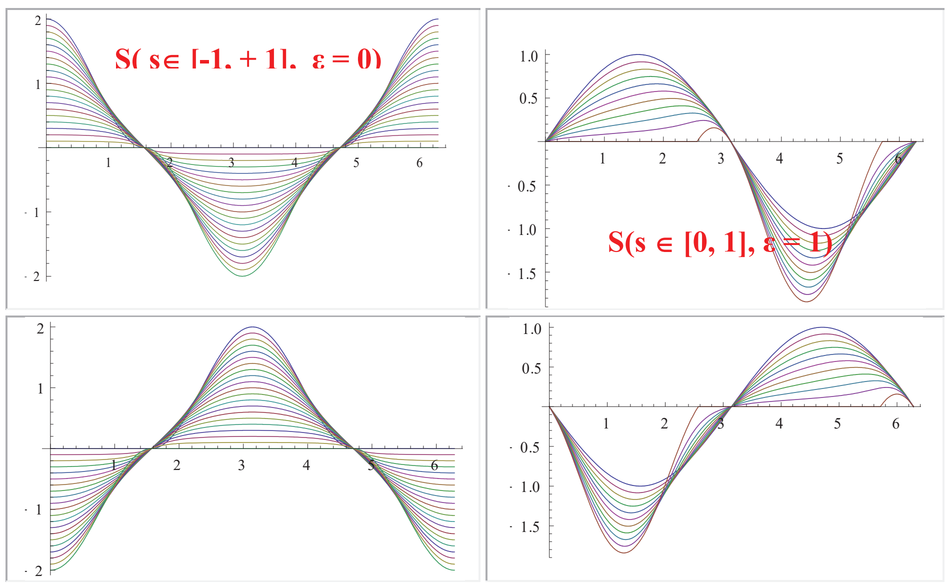


Fig. 9.2 FSM-CEl cel$_1$θ sus şi **cel$_2$θ jos** cu s ∈ [-1, +1] şi ε = 0 **stânga**, **sel$_1$θ sus** şi **sel$_2$θ** cu s ∈ [0, +1] , **ε = 1 dreapta**

Graficele acestor funcţii sunt prezentate în **figura 9.2**.

În cazul în care, excentrul **S** este plasat pe axa **y**, adică, **ε = π/2** sau **ε = 3π/2,** funcţiile cel$_{1,2}$θ sunt egale şi graficele se confundă cu cele ale funcţiilor cex$_{1,2}$θ, iar dacă, excentrul **S** este plasat pe axa **x**, adică **ε = 0** sau **ε = π** , atunci sel$_{1,2}$θ se confundă cu sex$_{1,2}$θ. Din această cauză, în **figura 9.2** s-au prezentat graficele funcţiilor cex$_{1,2}$θ pentru **ε = 0** iar garficele funcţiilor sel$_{1,2}$θ pentru **ε = 1**. Rezultă

(9.3) $$\begin{cases} x_{1,2} = cex_{1,2}\theta = cel_{1,2}(\theta, S \subset Oy) \\ y_{1,2} = sex_{1,2}(\theta, S \subset Ox) \end{cases}$$

Au fost denumite **elevate,** deoarece, aşa cum se poate observa din graficele lor, prin modificarea excentricităţii graficul funcţie **urcă sau coboară**, adică **este elevat**.

Din **figura 9.1**, se observă că punctele $\mathbf{W_{1,2}}$ au, simultan, aceleaşi coordonate $\mathbf{x_{1,2}}$, $\mathbf{y_{1,2}}$, exprimabile odată cu ajutorul variabilei centrice $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$, prin **FCC** $\cos\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ şi $\sin\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ şi, altădată, prin variabila excentrică **θ, coordonate** care devin, geometric, prin definiţie, funcţiile **FSM–CE** cosinus $\mathbf{cex_{1,2}\theta}$ şi sinus $\mathbf{sex_{1,2}\theta}$ **excentrice** de variabilă excentrică **θ**. Expresiile lor sunt, aşa cum s-a mai arătat

$$(9.4)\qquad \begin{cases} x_{1,2}(\theta) = cex_{1,2}\theta = \cos\alpha_{1,2} = \cos[aex_{1,2}\theta] = \cos[\theta \mp \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]] \\ y_{1,2}(\theta) = sex_{1,2}\theta = \sin\alpha_{1,2} = \sin[aex_{1,2}\theta] = \sin[\theta \mp \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]] \end{cases}$$

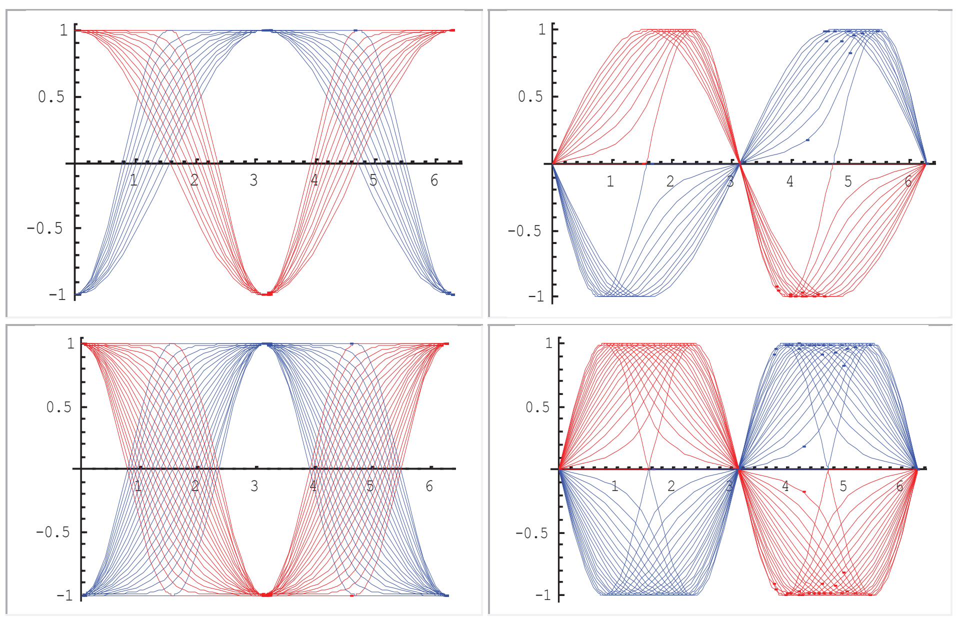


Fig. 9.3 Graficele **FSM-CE stânga** : $\mathbf{cex_1\theta}$ **(roşu)** şi $\mathbf{cex_2\theta}$ (**albastru**) sus şi $\mathbf{c2ex_{1,2}\theta}$ **(jos)** şi în **dreapta** $\mathbf{sex_1\theta}$ **(roşu)** şi $\mathbf{sex_2\theta}$ (**albastru**) sus şi $\mathbf{s2ex_{1,2}\theta}$ **(jos)** pentru **S(s ∈ [0, 1], ε = 0)**

In **figura 9.3,** sus, sunt prezentate graficele **FSM-CE** $\mathbf{cex_{1,2}\theta}$ - stanga şi $\mathbf{sex_{1,2}\theta}$ în dreapta, pentru un excentru punct fix şi excentricitate **simplă**, adică **S(s ∈ [0, 1] , ε = 0**) şi în partea inferioară de **dublă excentricitate**, notate convenţional cu $\mathbf{c2ex_{1,2}\theta}$ şi, respectiv, cu $\mathbf{s2ex_{1,2}\theta}$ şi a căror expresii de definiţie sunt

(9.5) $$\begin{cases} c2ex_{1,2}\theta = cex_{1,2}\{\theta \mp \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)], S(s,\varepsilon)\} \\ s2ex_{1,2}\theta = sex_{1,2}\{\theta \mp \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)], S(s,\varepsilon)\} \end{cases}$$

În exemplul anterior, cele două excentricităţi $s_1 = s_2 = s$ erau egale, ca şi unghiurile **ε_1=ε_2 =ε**. Ele pot fi, însă, şi diferite **$S_1(s_1, \varepsilon_1) \neq S_2(s_2, \varepsilon_2)$**, în care caz, funcţiile se pot nota **$c1;2ex_{1,2}\theta$** şi, respectiv, **$s1;2ex_{1,2}$ θ.**

Pentru un excentru **S(s ∈ [0, 1], ε = 1)** cu **ε = 1**, graficele sunt prezentate în **figura 9.4.**

Aşa cum s-a prezentat în lucrarile [5], [6], [7] şi [8], curbele plane, sau din 2 D, obţinute prin utilizarea **FSM** au fost denumite **excentrice,** spre deosebire de cele cunoscute din matematica centrica (**MC**) care au fost denumite **centrice.**

Denumirile aparţin regretatului matematician **Anton Hadnagy.**

Excentricele elevate ale căror ecuaţii parametrice sunt **FSM-CEl** (9.3), adică

(9.6) **M $_{1,2}$** $\begin{cases} x_{1,2} = cel_{1,2}\theta \\ y_{1,2} = sel_{1,2}\theta \end{cases}$, sunt prezentate, în 3D, în **figura 9.4**: în stânga pentru prima determinare, de indice **1** şi în dreapta pentru a doua determinare, de indice

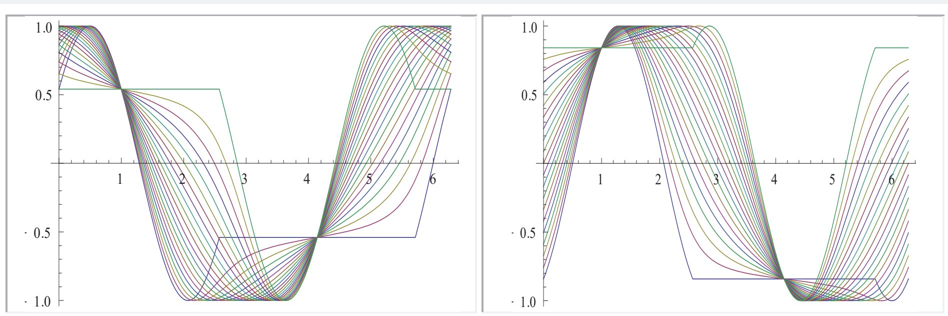


Fig. 9.4 Graficele **FSM-CE** cexθ şi sexθ de **S** (**s∈ [-1, +1], ε = 1).**

Pentru excentrictate numerică supraunitară (**s>1**), **FSM-CE** sunt **discontinue**.

O familie de funcţii **$cex_{1,2}\theta$** (sus) şi **$sex_{1,2}\theta$** (jos) cu **s ∈ [1, 3]** sunt prezentate în **figura 9.6**.

În aceleaşi figuri, s-au prezentat şi funcţiile **sinα** (sus) şi **cosα** (jos), funcţii care delimitează zonele de **adiacenţă** dintre extremitaţiile celor doua determinări, principală şi secundară, care, împreună dau o curbă închisă. Cu creşterea excentricităţii numerice **s∈ [1, 3]**, maximele curbelor **$sex_{1,2}\theta$** se apropie de axa **y**, la fel ca şi punctele de nul ale funcţiilor **$cex_1\theta$**.

Îaceste garfice **ε** s-a ales nul (**ε = 0**). Comparand **figura 9.3** cu **9.6** se observă că, dacă, în prima, **$sex_{1,2}\theta$**, pentru **s < 1** cele două determinări sunt de semne contrare, pentru **s > 1** sunt de acelaşi semn, aşa cum rezultă şi din **figura 9.1**, deoarece, ambele puncte $W_{1,2}$ se situează pe aceeaşi semidreapta d^+, ceea ce nu se mai potriveşte pentru funcţia **$cex_{1,2}\theta$,** care are un punct M_1 în cadranul **2**, pentru **θ∈ [− π/2, π/2]**, şi punctul M_2 în cadranul **1**. De aceea, prima determinare este negativă şi cea de a doua este pozitivă, în domeniul amintit, reprezentat în **figura 9.6**-sus ↑.

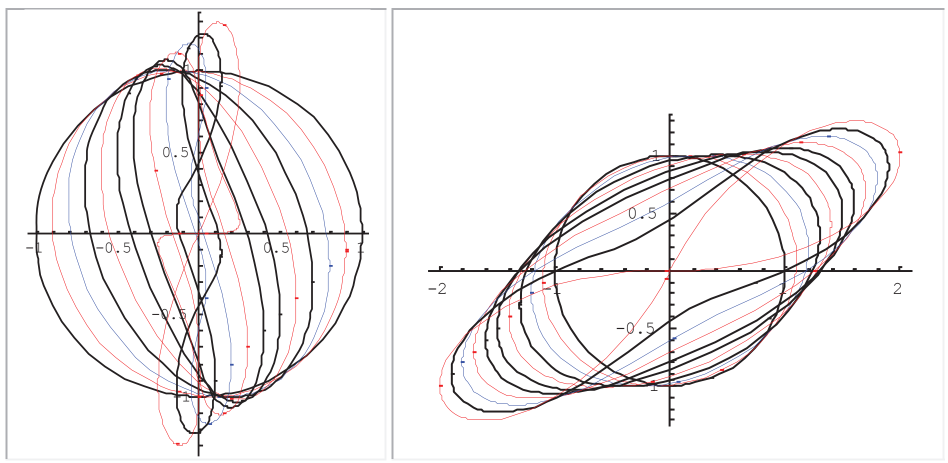


Fig. 9.5 Excentrice elevate

Fie cercul **C (R,O),** plasat cu centrul în originea **O(0,0)** şi de rază **R**, a cărui ecuaţie este

(9.7) **C** : $x^2 + y^2 = R^2$.

Prin intersectarea lui cu dreapta **d**, care trece prin punctul **E(e, ε),** având coeficientul unghiular **m** = tan**θ** şi ecuaţia

(9.8) $\mathbf{d} : y - R.e.\sin\varepsilon - \tan\theta\,(x - R.\,e.\cos\varepsilon) = 0$,

se obţin punctele de intersecţie

$$(9.9)\qquad M_{1,2}\begin{cases} \mathbf{x1,2} \;=\; R[\, e.\sin(\theta).\sin(\theta-\varepsilon) \pm \cos\theta\,\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}\;] \\ \mathbf{y1,2} \;=\; R[\,-e.\cos(\theta).\sin(\theta-\varepsilon) \pm \sin\theta\,\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}\,] \end{cases}$$

Expresiile din relaţiile (9.9) reprezintă produsul dintre raza **R,** a cercului **C(R,O)** şi **FSM-CE** $cex_{1,2}\theta$ şi, respectiv $sex_{1,2}\theta$, astfel că aceste **FSM-CE** au, pentru **R =1** şi expresiile

$$(9.10)\qquad x_{1,2} = cex_{1,2}\theta \;=\; e.\sin\theta.\sin(\theta-\varepsilon) \pm \cos\theta\,\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)} \;\text{ şi}$$

$$(9.11)\qquad y_{1,2} = sex_{1,2}\theta = -\,e.\cos\theta.\sin(\theta-\varepsilon) \pm \sin\theta\,\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}$$

Aşa cum s-a mai afirmat, toate **FSM-CE** conţin radicalul

del$_{1,2}\theta$ = $\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}$, prin care Prof. Dr. Math. **Octav Em. Gheorghiu** afirma că aceste funcţii se alatură, sau că aparţin familie funcţiilor eliptice.

Semnul plus (+) din faţa radicalului corespunde primei determinări, principale **1**, iar semnul minus (—) celei de a doua determinări secundare **2**.

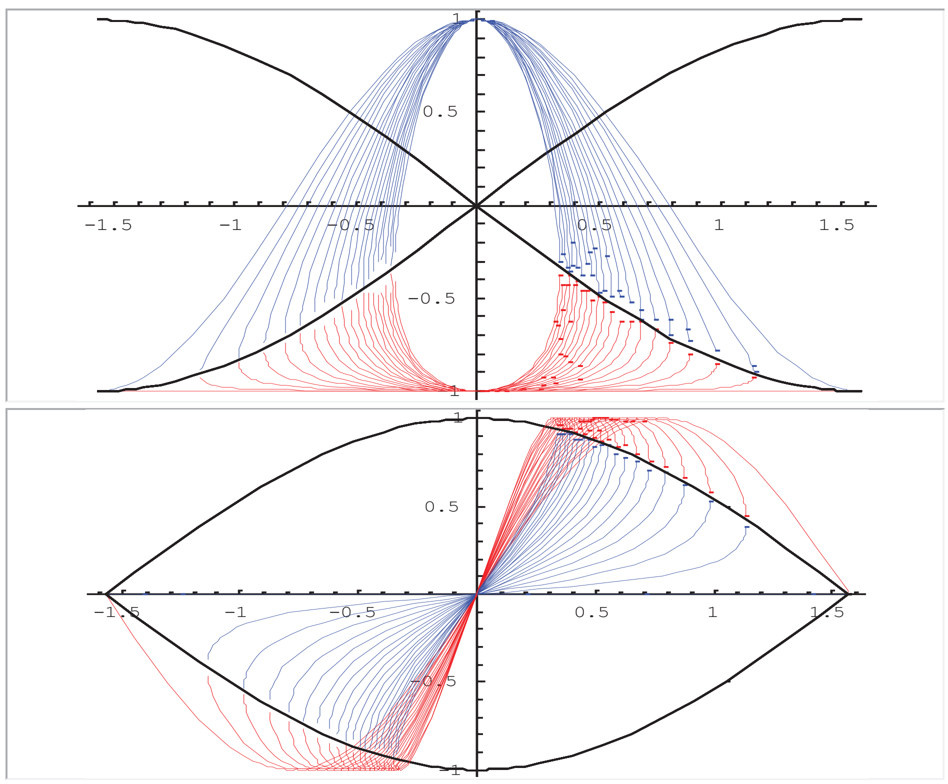


Fig. 9.6. FSM-CE cex şi sex de excentricitate numerică supraunitară **s ∈ [1, 3]**

Se observă, din relaţiile de definiţie (9.10) şi (9.11) că

(9.12) **cex**$_1$**(θ + π) = cex**$_2$**θ** şi **cex**$_2$**(θ + π) = cex**$_1$**θ** şi

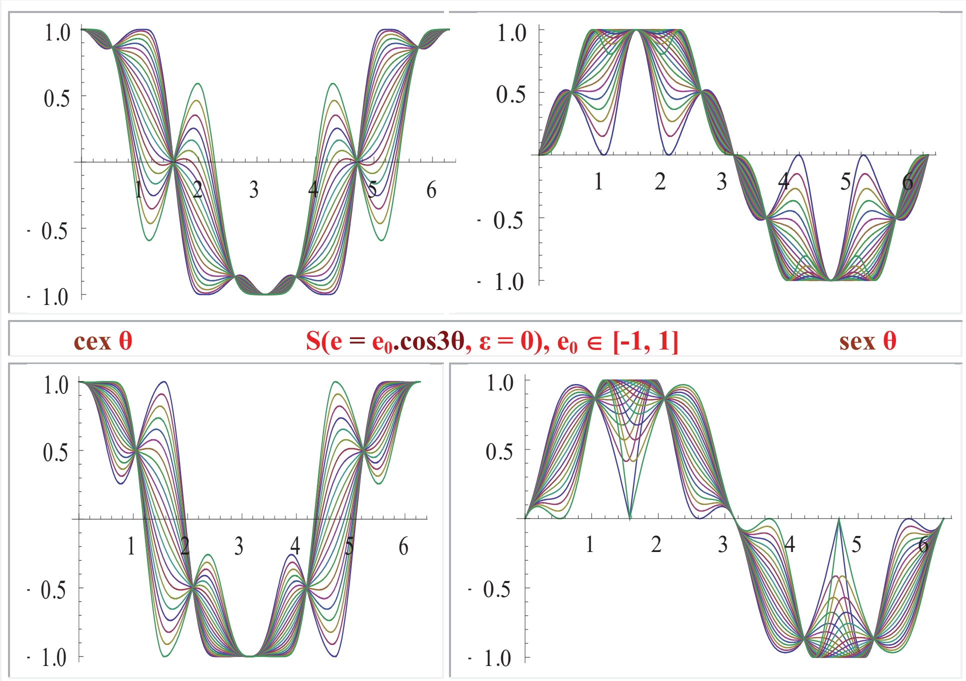
(9.13) **sex**$_1$**(θ + π) = sex**$_2$**θ** şi **sex**$_2$**(θ + π) = sex**$_1$**θ**, ceea ce, prescurtat, se scrie

(9.14) $$\begin{cases} cex_{1,2}(\theta+\pi) = cex_{2,1}\theta \\ sex_{1,2}(\theta+\pi) = sex_{2,1}\theta \end{cases}$$

Pe baza relaţiei dintre unghiuri **θ** = **α**$_{1,2}$ + β$_{1,2}$ → **α**$_{1,2}$ = **θ — β** $_{1,2}$ şi pe baza relaţiei (9.4), de corespondenţă dintre funcţiile circulare centrice şi excentrice, rezultă

(9.15) $$\begin{cases} x_{1,2} = cex_{1,2}\theta = \cos\alpha_{1,2} = \cos(\theta - \beta_{1,2}) = \cos\theta\cos\beta_{1,2} + \sin\theta.\sin\beta_{1,2} \\ y_{1,2} = sex_{1,2}\theta = \sin\alpha_{1,2} = \sin(\theta - \beta_{1,2}) = \sin\theta.\cos\beta_{1,2} - \cos\theta.\sin\beta_{1,2} \end{cases}$$

o nouă formă a expresiilor **FSM-CE** **$cex_{1,2}\theta$** şi **$sex_{1,2}\theta$.**



cex θ **S(e = e_0.cos3θ, ε = 0), $e_0 \in$ [-1, 1]** **sex θ**

cexθ **S(e = e_0.sin3θ, ε = 0), $e_0 \in$ [-1, 1]** **sexθ**

Fig. 9.7 **FSM-CE** **cexθ** şi **sexθ** de excentricitate numerică variabilă (**3θ**)

Deoarece $\beta_{1,2}$= $bex_{1,2}$**θ** → bex_1**θ**= arcsin[**s.sin(θ—ε)**] pentru prima determinare, principală şi bex_2**θ = π -** arcsin[**s.sin(θ—ε)**], ştind că **$\beta_1 + \beta_2 = \pi$**, rezultă o altă formă a expresiilor funcţiilor, dată, în exclusivitate, de variabila excentrică **θ.**

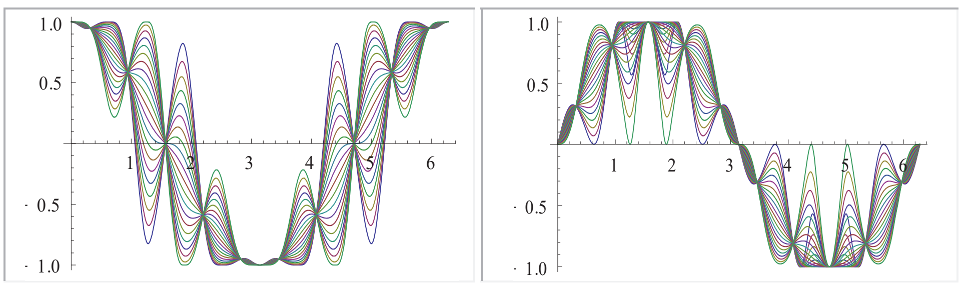
(9.16) **$W_{1,2}$**

$$\begin{cases} x_{1,2} = cex_{1,2}\theta = \cos(\theta - bex_{1,2}\theta) = \cos\theta\cos(bex_{1,2}\theta) + \sin\theta.\sin(bex_{1,2}\theta) \\ y_{1,2} = sex_{1,2}\theta = \sin(\theta - bex_{1,2}\theta) = \sin\theta.\cos(bex_{1,2}\theta) - \cos\theta.\sin(bex_{1,2}\theta) \end{cases}$$

În cazul în care, excentrul este un punct variabil, adică e şi/sau ε sunt variabile, după diverse legi date, se obţin grafice ale funcţiilor **$cex_{1,2}\theta$** şi **$cex_{1,2}\theta$** precum cele din **figura 9.7**. Ele pot fi utilizate fie pentru reprezentarea şi prelucrarea unor semnale complexe, fie, ca atare, pentru frumuseţea lor, aşa cum sunt cele publicate în lucrarea

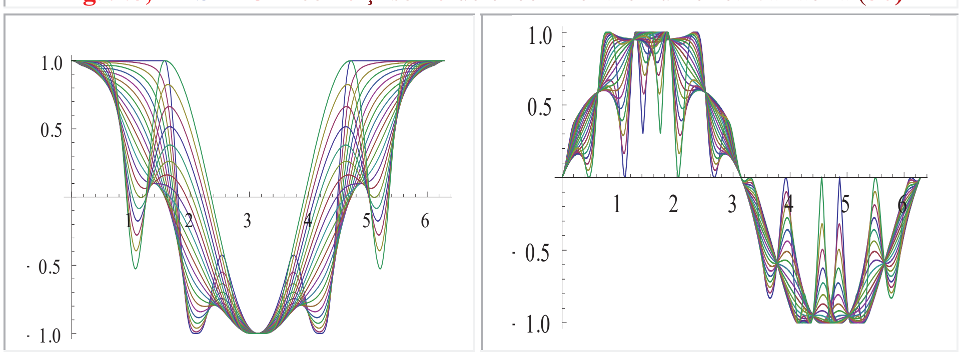
[21] care se bucura în SUA de succes, ocupând locul 10 în topul de 10, din luna august 2007, din cele peste 1650 de lucrări.

În **figura 9.7** sunt prezentate primele determinări ale **FSM-CE cexθ** și **sexθ** a cărui excentru **S** se deplasează din originea **O(0,0)** → **(s = 0, θ = 0, cos3θ = 1)**, pe axa **x(ε = 0** și **ε = π**), până în punctele **X** de pe axa **Ox** − **X(s > 0, 0)** - puncte care evoluează progresiv pană în extremitatea **A(1, 0)** → **(s = 1, θ = 0 → cos3θ** = 1), ajungând și în extermitatea **A '(− 1, 0)** → **(s = 1, cos3θ = − 1 → 3θ = π → θ = π/3)**.



cexθ **S(e = e_0.cos5θ, ε = 0), e_0 ∈ [-1, 1]** **sexθ**

Fig. 9.8,a FSM-CE cex θ și sex θ de excentricitate numerică variabilă **(5θ)**



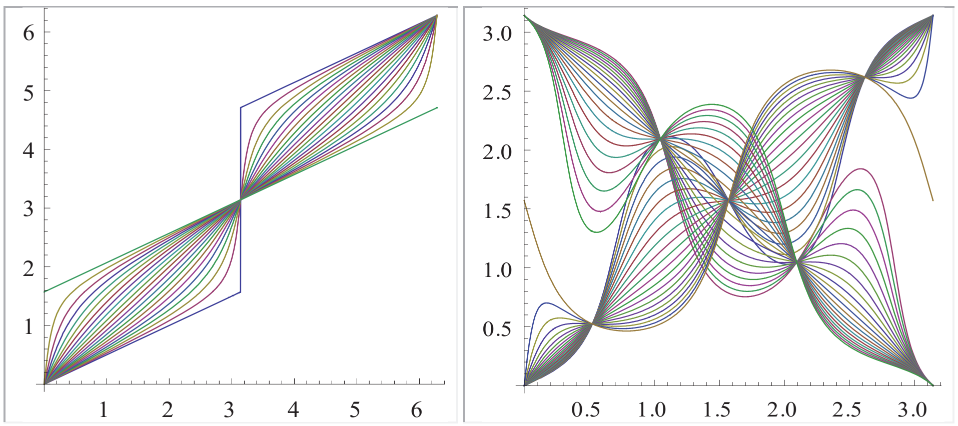
cexθ S(e = e_0.cex 3θ, ε = 0), e_0 ∈ [0, 1]

sexθ S(e = e_0.sex 5θ, ε = 0), e_0 ∈ [0, 1]

Fig. 9.8,b FSM-CE cexθ și **sexθ** de excentricitate numerică variabilă cu **FSM-CE**

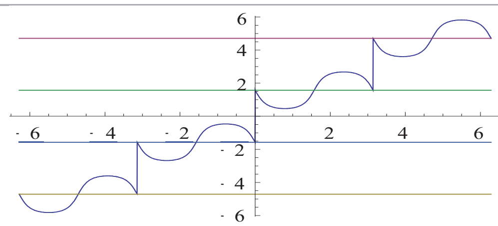
La fel pot fi determinate și deplasările excentrului **S(s, ε)** dacă **s = s_0.sin**3θ pentru **s_0** ∈ [0, 1], cu **ε** = 0 și **θ** ∈ [0, 2 **π**] ce corespund graficelor din figura **9.7** jos.

In **figura 9.8** sunt prezentate primele determinări ale **FSM-CE cexθ** și **sexθ** a cărui excentru **S** se deplasează pe axa **x** după legea **e = e_0.cos5θ** și **ε** = 0 cu **e_0 ∈ [0, 1]** .



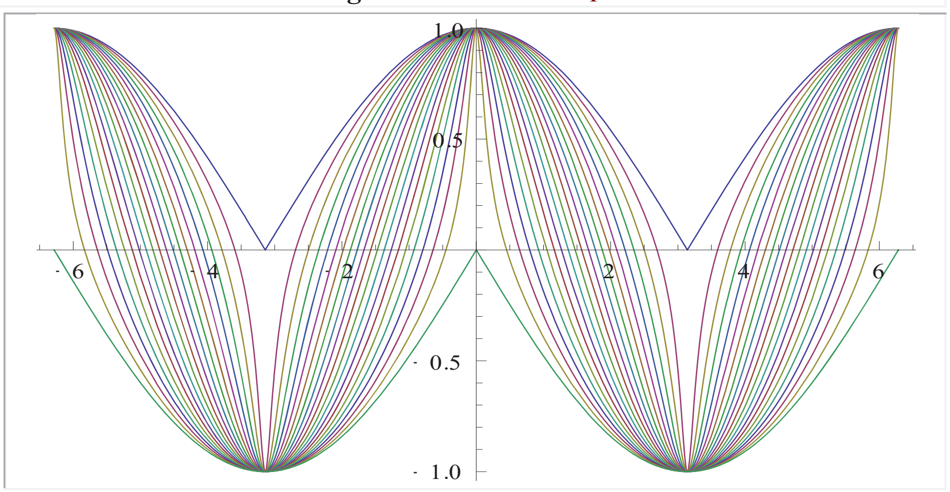
aexα_1, **S(s** $\in$ **[-1, 1], ε = 0)**

aexα_1, **s = s**$_0$**cos3**α şi **s = s**$_0$sin3α
S(s$_0$ $\in$ **[-1, 1], ε = 0),** suprapuse



aexα, pentru S(s=cos3α, **ε = 0**)

Fig. 9.9 FSM-CE aex$_1$ **θ**



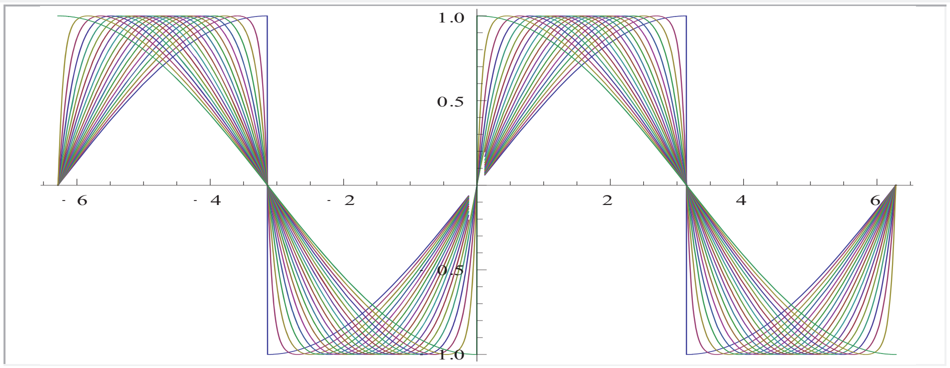


Fig. 9.10 FSM-CE cexθ → Cexα$_1$ sus şi **sexθ → Sexα$_1$** jos, de excentru **s** = — **s$_0$** / Rex(α$_1$ = θ)

FSM-CE, având multiple utilizări, ele pot fi folosite şi la exprimarea legii de deplasare pe axa **x** a excentrului mobil **S**, aşa cum se poate observa din graficele prezentate în **figura 9.9**.

In aceasta figură, legea de variaţie a **FSM-CE** este dată tot de o **FSM-CE**, şi anume, **cex3θ** pentru **cexθ** şi **cex5θ** pentru **sexθ**.

O situaţie mai deosebită o reprezintă graficele **FSM-CE** din **figura 9.10** pentru care excentrul S variază dupa legea

(9.17) $\mathbf{s} = \dfrac{-s_0}{\sqrt{1-s^2-2s.\cos(\theta-\varepsilon)}}$ = — **s$_0$**/Rex(**α→ θ**) astfel că funcţia amplitudine excentrică de variabilă excentrică devine

(9.18) **aex$_1$θ = θ** — arcsin[**s.sin(θ — ε)**] =

=**θ** + arcsin[**s.sin(θ — ε)** / $\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\theta-\varepsilon)}$] = **Aex(α$_1$ → θ)**

cu graficele din **figura 9.9.** În stânga -sus- excentrele S$_i$ sunt puncte fixe, iar în dreapta sunt mobile dupa legile indicate în desen.

Funcţiile de **s** = s$_0$sin3α au fost suprapuse peste cele de **s** = s$_0$cos3α, care oscilează în jurul primei bisectoare, după ce li s-au schimbat semnul şi s-a adăgat constanta π/2, ca să oscilze faţă de direcţia celei de a doua bisectoare.

Din prima familie de funcţii, de excentricitate numerică variabilă, pentru **s** = 1.cos3α, rezultă **funcţii periodice în salturi,** care oscileaza în jurul valoriilor de -3π/2, -π/2, π/2, 3π/2 ş.a.m.d, (**Fig. 9.9** jos) având câte o priodă completă de oscilaţie în jurul fiecărei constante amintite.

Graficele funcţiilor, reprezentate în **figura 9.10,** sunt ale funcţiilor **cosinus - Cex(α$_1$ = θ) -** şi **sinus - Sex(α$_1$ = θ) - excentrice de** <u>**variabilă centrică**</u> **α$_1$ → θ**.

Forma graficelor nu depinde, evident, de denumirea pe care o atribuim variabilei şi nici de litera grecească cu care o notăm.

Dacă, în locul radicalului Rex($\alpha_1 = \theta$), introducem funcţia $del_1\theta$, adică

(9.19) $s = s_0 / del_1\ \theta$ **se** obţin graficele din **figura 9.11.**

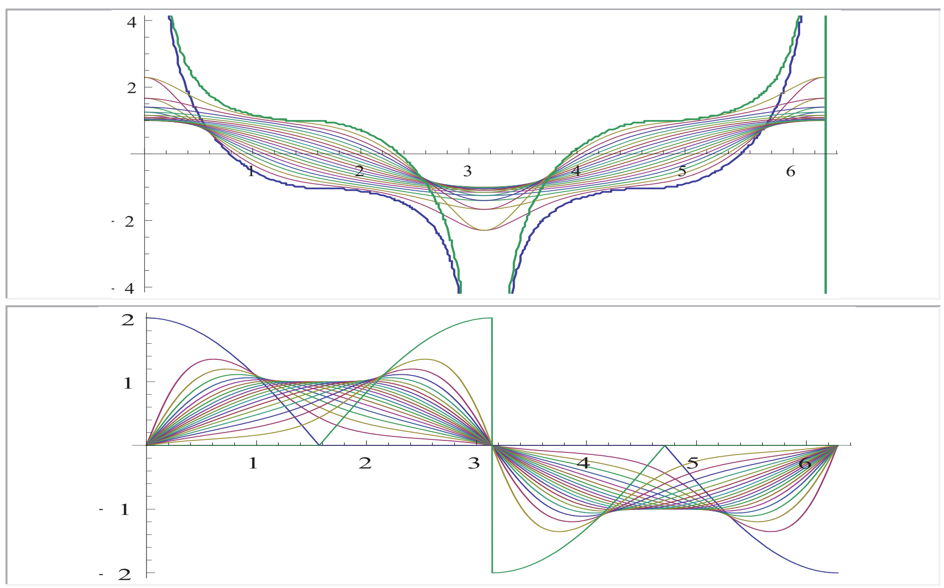


Fig. 9.11 FSM-CE cexθ sus şi **sexθ** jos
de excentru **S**($s = s_0$/del(θ), ε = 0) cu $s_0 \in [-1,\ 1]$

În **figura 9.13 sus** este prezentată funcţia

(9.20) **C**(**θ**) = bex**θ** – bex(**θ** $-\pi$), cu ajutorul căreia, pentru **e** = **1,** se obţine o formă de cremalieră, aşa cum este reprezentat şi în figură. Ea, funcţia, ca şi multe alte **FSM-CE**, ar putea servi la desenarea sau reprezentarea unui organ de maşină, de acest gen, în cadrul unui nou tip de programare asistată de calculator denumită şi abreviată prin **SM – CAD - CAM**.

9.2 DERIVATELE FUNCŢIILOR cexθ şi sexθ.

Derivatele acestor funcţii se obţin, fără nicio dificultate, prin derivarea expresiilor lor de definire. Astfel, derivata lui cosinus excentric, ca funcţie de variabila excentrică **θ**, notată **cex'$_{1,2}$θ,** este

(9.21) $\mathbf{cex'_{1,2}\theta} = d(cex_{1,2}\theta)/d\theta = \frac{d(cex_{1,2}\theta)}{d\alpha_{1,2}}\frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta} = \frac{d(\cos\alpha_{1,2})}{d\alpha_{1,2}}.\frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta} =$

$= -\sin\alpha_{1,2}.dex_{1,2}\theta = -\,\mathbf{sex_{1,2}\theta}\ .\ \mathbf{dex_{1,2}\theta}$

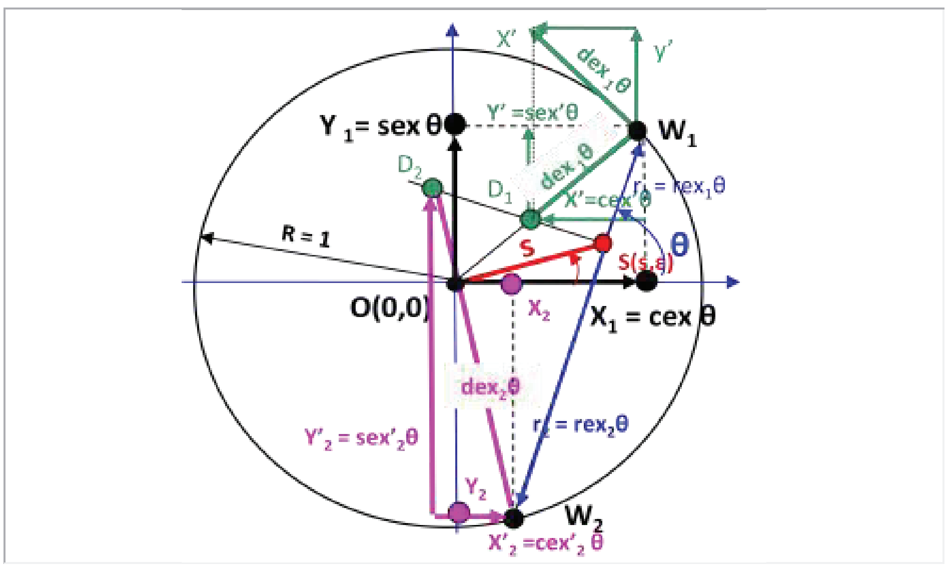


Fig.9.12,a Derivatele **FSM-CE** $\mathbf{cex_{1,2}\ \theta}$ şi $\mathbf{sex_{1,2}\ \theta}$

În mod asemănător, şi la fel de simplu, se determină derivata funcţiei sinus excentric **sexθ.**

(9.22) $\mathbf{sex'_{1,2}\theta} = d(sex_{1,2}\theta)/d\theta = \frac{d(sex_{1,2}\theta)}{d\alpha_{1,2}}\frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta} = \frac{d(\sin\alpha_{1,2})}{d\alpha_{1,2}}.\frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta} =$

$= \cos\alpha_{1,2}.\ dex_{1,2}\theta = \mathbf{cex_{1,2}\theta}\ .\ \mathbf{dex_{1,2}\theta}$

Grafic, derivatele primelor determinări ale funcţiilor sunt prezentate în **figura 9.12.** Se observă că, pentru **s = 0**, se obţin cunoscutele derivate ale **FCC**:

cos**θ'** = — sin**θ** şi sin**θ'** = cos**θ**, deoarece, în acest caz, **FSM-CE dexθ = 1.** Fiindcă, în acest caz, **θ = α** , rezultă că şi (cosα)' = — sinα şi (sinα)' = cos α.

Deoarece

(9.23) $\mathbf{cex_{1,2}\theta} = \mathbf{cel_{1,2}\theta} + \mathbf{e_x} = \mathbf{cel_{1,2}\theta} + \mathbf{e}.\mathbf{cos\varepsilon}$ şi

(9.24) $\mathbf{sex_{1,2}\theta} = \mathbf{sel_{1,2}\theta} + \mathbf{e_y} = \mathbf{sel_{1,2}\theta} + \mathbf{e}.\mathbf{sin\varepsilon}$, rezultă că derivatele **FSM - CEl (elevate)**, pentru un excentru **S punct fix**, sunt aceleaşi cu ale **FSM-CE (excentrice)**.

Aceste derivate exprimă proiecţiile vitezelor variabile ale punctelor $\mathbf{W_{1,2}}$ de pe cercul **C(O,1),** pe axele de coordonate **x** şi, respectiv, **y**, în **mişcarea circulară**

excentrică (**MCE**), pentru o viteză unghiulară de rotaţie a dreptei d, în jurul excentrului **S**, **constantă** şi egală cu unitatea (**Ω = 1**).

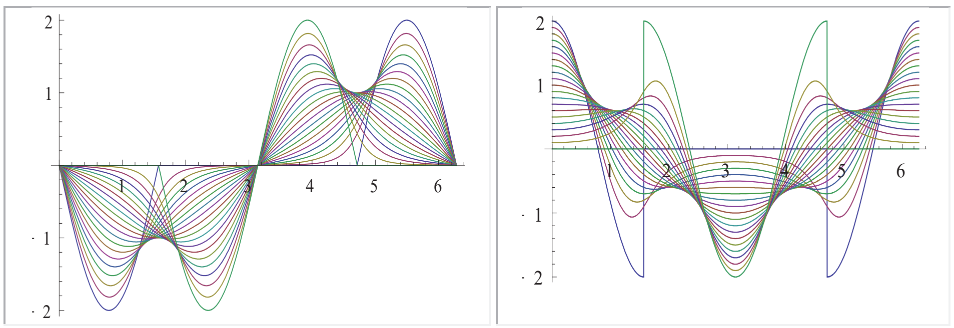


Fig.9.12,b Graficele derivatelor **FSM-CE** **$cex'_{1,2}\theta$** – stânga- şi **$sex'_{1,2}\theta$**-dreapta- pentru **s** $\in$ [-1, +1]

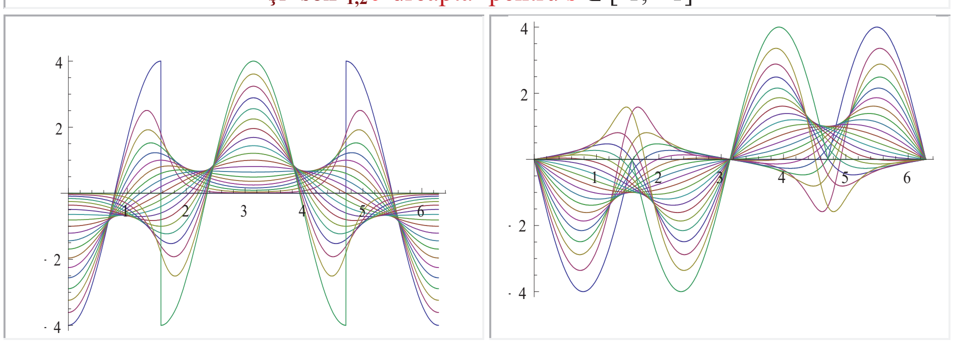


Fig.9.12,c Graficele derivatelor **FSM-CE de ordinul doi** **$cex''_{1,2}\theta$** $\leftarrow$ stânga - şi **$sex''_{1,2}\theta$** $\rightarrow$ dreapta- pentru **s** $\in$ [-1, +1]

Vitezele punctelor sunt exprimate prin derivatele **FSM-CE,** faţă de centrul **O(0,0)** şi, prin derivatele **FSM-CEL,** faţă de ex-centrul **S(s, ε)**.

Derivatele acestor funcţii fiind aceleaşi, rezultă că vitezele nu depind de originea sistemul de coordonate ales. Concluzie la care s-a ajuns şi în cadrul capitolului dedicat **MCE**, arătându-se că **derivatele** vectorilor de poziţie ai punctelor **$M_{1,2}$** de pe cercul **C(O,1)**, exprimate atât de vectorii **$R_{1,2}(\alpha_{1,2})$** de modul constant şi egal cu unitatea, cu polul în **O(0,0),** cât şi de vectorii de poziţie, de modul variabil **$r_{1,2}(\theta)$** = **R.$rex_{1,2}\theta$** cu polul în **S(s, ε)**, erau egale şi egale cu vitezele de modul $v_{1,2}$ = **R. Ω.$dex_{1,2}\theta$.**

Se observă şi din **figura 9.12,** că sumele vectoriale ale vectorilor derivată ale lui **$x_{1,2}$** şi **$y_{1,2}$** sunt

(9.25) $\overrightarrow{x'}_{1,2} + \overrightarrow{y'}_{1,2} = \vec{v}_{1,2} = dex_{1,2}.der \propto_{1,2},$ pentru R = 1, Ω = 1,
fiind, deci, egale cu vitezele din punctele $W_{1,2}$.

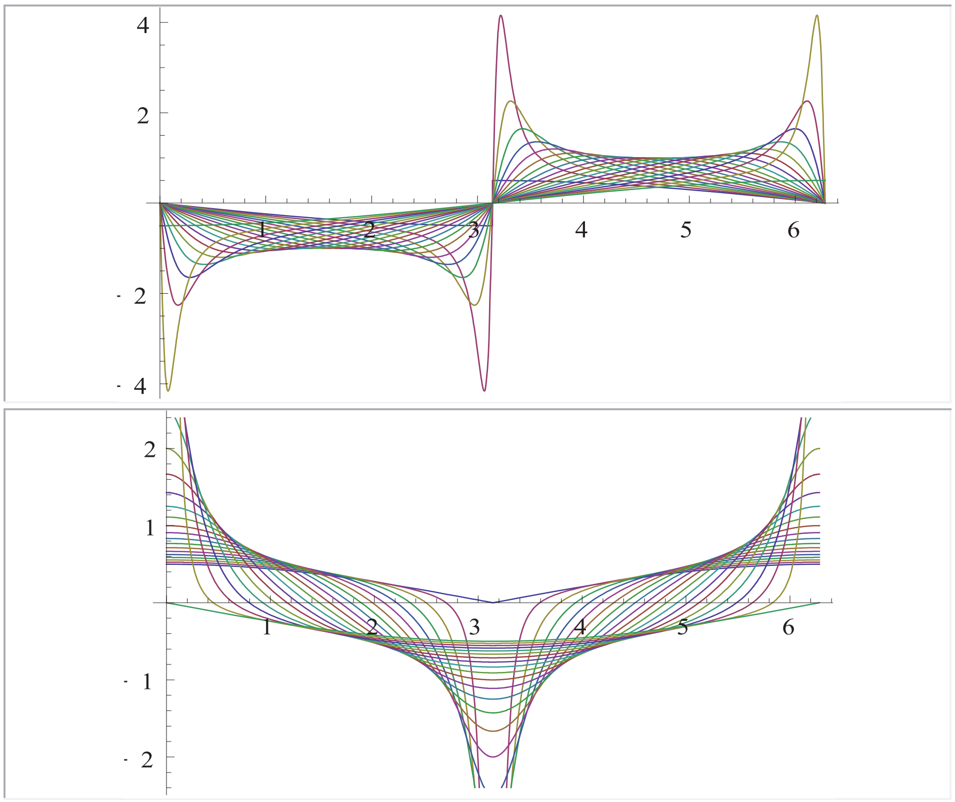


Fig.9.12,d Graficele derivatele **FSM-CE Cex'**α **– sus-** şi **Sex'**α - jos- pentru **s** ∈ [-1, +1]

Cea de a doua derivată a acestor funcţii, excentrice şi elevate, sunt

(9.26) **cex''$_{1,2}$θ** = d(**cex'$_{1,2}$θ**) /d **θ** = d(— **sex$_{1,2}$θ . dex$_{1,2}$θ**) / d**θ** =
= — (**cex$_{1,2}$θ . dex$^2_{1,2}$θ** + **sex$_{1,2}$θ dex'$_{1,2}$θ**) şi

(9.27) **sex''$_{1,2}$θ**= d(**sex'$_{1,2}$θ**) /d **θ** = d(**cex$_{1,2}$θ . dex$_{1,2}$θ**) / d**θ** =
= (— **sex$_{1,2}$θ . dex$^2_{1,2}$θ** + **cex$_{1,2}$θ dex'$_{1,2}$θ**) .

Ele reprezinta **proiecţiile** acceleraţiilor punctelor $\mathbf{W_{1,2}}$ din **MCE** pe cele două axe **x** şi **y**. Observaţia anterioară, de la viteze, fiind valabilă şi pentru acceleraţii.

Graficele derivatelor de ordinul doi ale **FSM-CE cexθ** şi **sexθ** sunt prezentate în **figura 9.12,c**, iar graficele primei derivate a funcţiilor cexα şi sexα, de variabilă centrică, sunt prezentate în **figura 9.12,d**.

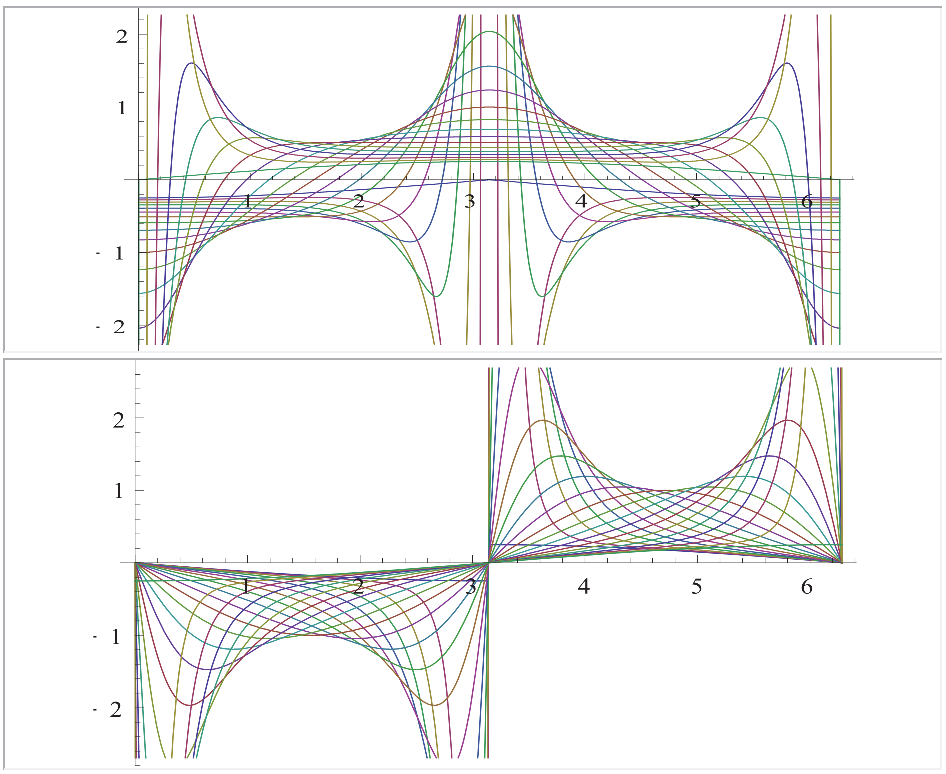
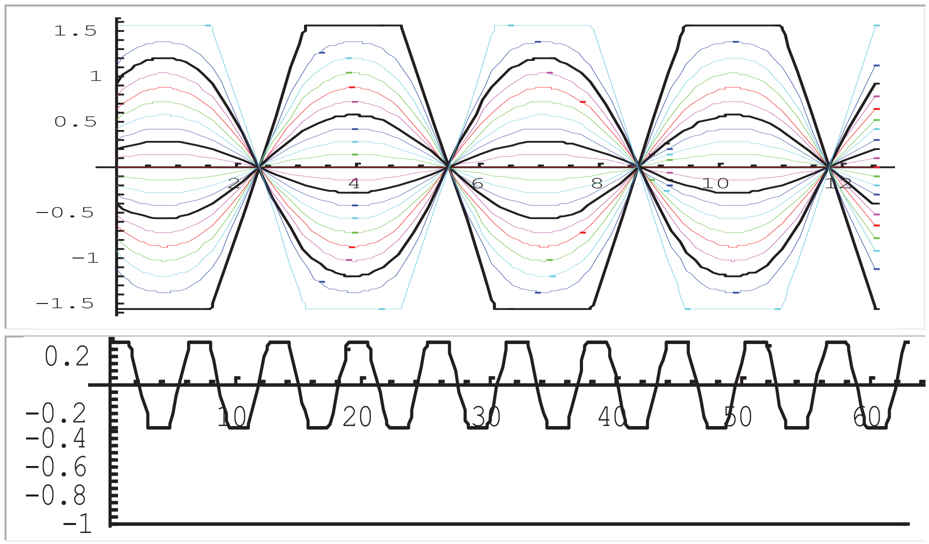


Fig.9.12,e Graficele derivatele **FSM-CE de ordinul doi Cex″α ↑ sus-** şi **Sex″α** ↓ jos- pentru **s** $\in$ [-1, +1]

9.3 APLICAŢII MATEMATICE şi TEHNICE ale FSM-CE cexθ şi sexθ

Aşa cum s-a afirmat anterior, una dintre aplicaţiile cele mai importante, după părerea autorului, consistă în aplicaţia tehnică ce constă în desenarea unor organe de maşini (cremalieră, care a fost amintita anterior - **Fig.9.13,a** -) şi chiar a unor sisteme tehnice în ansamblul lor (avion **Fig.7.1**, casă ş.a) şi ele prezentate succint în aceasta lucrare, precum şi a unor entităţi artistice (Meduze, Fig. **9,13,b**).



Funcţia **C** = bex θ – bex(θ — π/2) şi **cremaliera** desenată cu această funcţie pentru **e** = **1**

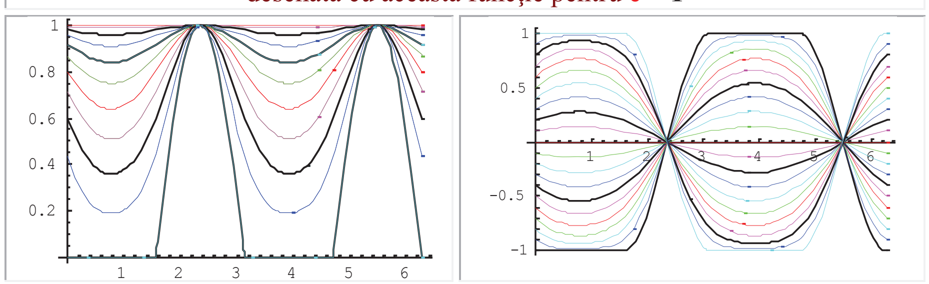


Fig. 9.13,a Funcţiile cos **C** şi sin **C**

SM - CAD-CAM, de care s-a amintit, ar fi o aplicaţie în care **matematica** şi **tehnica** s-ar regăsi / contopi într-un singur tot: obiectele tehnice (**Fig. 9.13,b**) s-ar putea înlocui prin reprezentările lor matematice, cecea ce ar fi un început promiţător pentru economia de memorie şi pentru un viitor de succes al ştiinţei şi al tehnicii.

In partea de jos a **figurii 9.13,a** sunt reprezentate funcţiile cos**C** şi sin**C.** Întrebarea este dacă aceste funcţii aparţin **ME** sau **MC ?** Sigur este că ele aparţin supermatematicii (**SM**), care înglobează/cuprinde ambele domenii.

Alte aplicaţii, mult mai importante, ale noilor funcţii **cexθ** şi **sexθ** vor fi prezentate în continuare, începand cu diversificarea obiectelor matematice sau, mai precis, la obţinerea unor obiecte matematice noi cum este, de exemplu, strâmba, ca o generalizare a dreptei, torul cu secţiune pătrată, tiunghiulară sau hexagonală şi de formă rotundă/circulară, ca şi torul cu secţiunile amintite şi de forme triunghiulare, pătrate, hexagonale, tor (bi)pătrat, **Fig. 9.13,b** ş.a.

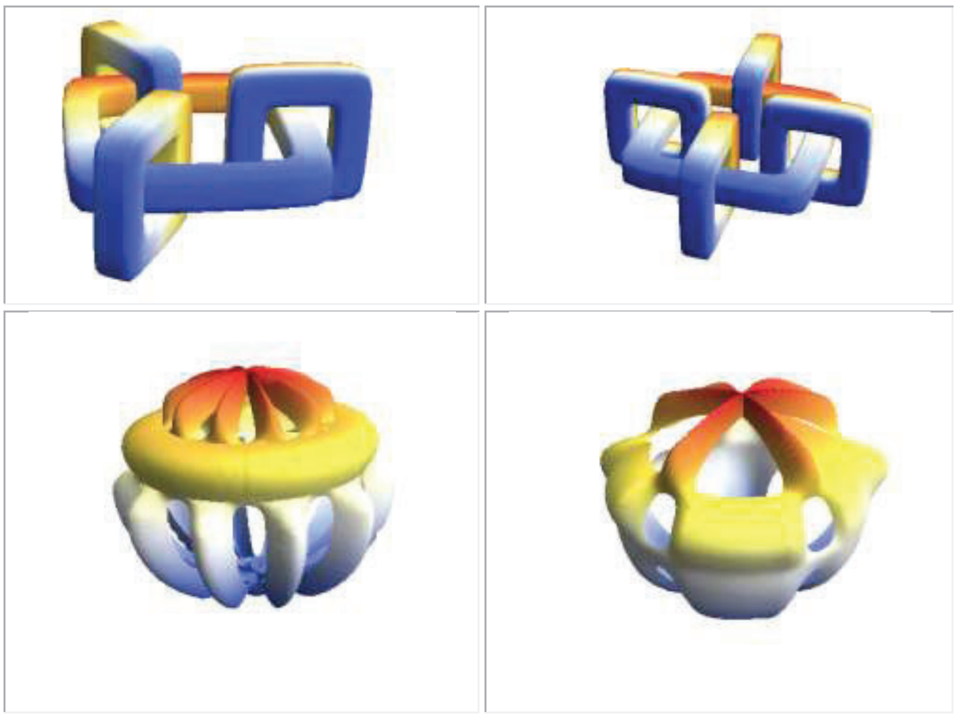


Fig. 9.13,b Obiecte tehnice (Toruri (bi)pătrate înlănţuite) şi obiecte artistice (Meduze) realizate cu **FSM-CE**

În domeniul 3 D se pot aminti şi reprezenta elice de diverse forme (circulare, pătrate, tringhiulare ş.a.) de pas variabil, în sensul că pentru 2n rotaţii pasul poate fi stabilit constant, apoi, pentru următoarele 2n rotaţii elicea are pasul zero.

9.3.1 INTRODUCEREA NOŢIUNII DE STRAMBĂ ÎN MATEMATICĂ

Aflându-ne, acum la finele primului volum, poate rezulta mai clar, ceea ce s-a afirmat în introducerea lucrării, şi anume, că **matematica centrică** are dimensiunea topologică zero, a unui punct, în timp ce, **matematica excentrică** are dimensiunea topologică de minimum 2, a unei suprafeţe. De asemenea, că **matematica centrică** este proprie sistemelor ideale, perfecte, liniare, în timp ce, **matematica excentrică** este proprie sistemelor reale, imperfecte, neliniare.

Între cele două matematici nu există nicio graniţă, niciun obstacol real, de aceea se poate afirma că noile complemente de matematică şterg graniţele, care au existat până acum, dintre liniar şi neliniar !

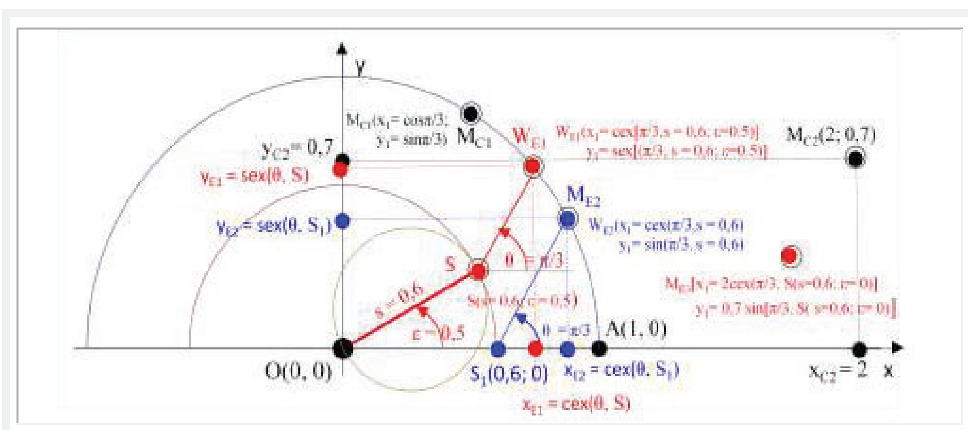
Aşa cum a propus regretatul maematician **Anton Hadnady**, toate curbele cunoscute din matematica centrică se vor denumi în continuare **centrice** şi cele corespondente matematicii excentrice se vor denumi **excentrice** [1],[4],[5],[6], [7]**.**

Fiecărei curbe cunoscute din centric, adică fiecărei centrice, îi corespund o infinitate de excentrice. Astfel, unui cerc, unei elipse, unei hiperbole, unei spirale ş.a.m.d. îi corespund o infinitate de excentrice circulare, eliptice, hiperbolice ş.a.m.d., evident de forme care se abat de la **centricele generatoare,** cu atât mai mult, cu cât excentricitatea are valori mai mari. Din ecuaţiile **excentricelor**, pentru **e** = **s** = 0, se obţin, în mod evident, **centricele.**

În mod analog, fiecărei centrice liniare, denumita **dreptă**, din matematica centrică (**MC**), în matematica excentrica (**ME**) îi vor corespunde o infinitate de excentrice "liniare" ce vor fi denumite **strâmbe**. Deoarece, ceea **ce nu e drept e stramb** şi totodată "liniar", pentru că are o singura dimensiune, lungimea, pentru a se deosebi de dreaptă, chiar dacă-i mai spunem şi excentrică. Prin urmare şi dreapta este un caz particular de strâmbă : o strâmbă de excentricitate nulă, aşa cum este prima bisectoare din **figura 9.14**.

PUNCTUL

Punctul şi dreapta sunt entităţi şi noţiuni elementare ce nu pot fi definite în matematică; dar numai dreapta este o figură fundamentală în geometria centrică.



În plus, punctul este singura entitate de dimensiune nulă, astfel că el este acelaşi, ca formă sau, mai precis, fară ea, în ambele matematici: **centrică** şi **excentrică**, întrucât el (ne- având "figură") nu-şi poate modifica forma prin creşterea valorii excentricităţii.

Totodată, punctul nu are coordonate unghiulare (unghiurile lui **Euler** θ, φ, ψ) ci numai coordonate liniare x, y, z. În consecinţă, el este **neorientabil,** fiind doar **localizabil** în spaţiul bi- sau tridimensional **3D**.

Localizarea punctului în spatiul **2D** (planul **centric**), dat de $\mathbf{M_{C2}(x,y)} = \mathbf{M_{C2}(2, 0,7)},$ diferă, însă, de localizarea lui în planul **excentric** M_{E2} şi M_{E3}.

Coordonatele punctului, în planul excentric, prezentate în figura alaturată, în care ambele axe sunt excentrice, de acelaşi **excentru S** (**s**, **ε** = **z** [rad]) = **S** [**0,6** ; **0,5**] sunt: $\mathbf{M_E}$ { cos[**x** - arcsin[**s**.sin[**x-z**]]= cexθ ; sin[**y** - arcsin[**s**.sin[**x-z**]]= sexθ}, aici **θ → x, ε → z** şi **α → y**

DISTANŢA DINTRE DOUĂ PUNCTE

Distanţa dintre două puncte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$, exprimate în coordonate carteziene, se calculeaza, aşa cum se ştie, cu formula :

(9.28) $$(M_1 M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Identificăm pe $\mathbf{M_1}$ cu excentrul $\mathbf{S(s_x, s_y)}$ exprimat prin coordonate carteziene $\mathbf{S}(\mathbf{s_x} = \mathbf{s}.\cos\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s_y} = \mathbf{s}.\sin\boldsymbol{\varepsilon})$ sau în coordonate polare **S(s, ε)** şi pe $\mathbf{M_2}$ cu punctul **W** de intersecţie a semidreptei $\mathbf{d}^+$**,** turnante în jurul excentrului **S**, cu **cercul unitate** exprimat prin **W** (**x** = cex **θ**, **y** = sex **θ**), în coordonate carteziene sau, în coordonate polare, cu **W**(**R**.rex **θ**, **θ**), dacă funcţia rex **θ** este exprimată în funcţie de variabila excentrică **θ** şi cu **W** (**R** Rexα, α) dacă este exprimată în funcţie de variabila la centru (sau centrică) α.

Atunci, relaţia (9.28) va exprima şi distanţa dintre excentrul **E** şi punctul **W** de pe cercul de raza **R** care este, prin definiţia funcţiei radial excentric (**rex θ**) - multiplicată cu raza cercului **R**, adică, tocmai distanţa de la **E** la **W** :

(9.29) $\mathbf{d(M_1, M_2)} = d(E, W)$

$$= \begin{cases} R.rex\theta = R[-s.\cos(\theta-\varepsilon) + \sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}] \\ R.rex\alpha = R\sqrt{1 + s^2 - 2s.cos(\propto -\varepsilon)}] \end{cases}$$

în care: **s** este excentricitatea numerică şi e = **sR** este excentricitatea reală, **e** - distanţa de la originea **O** la excentrul **E**.

S-a mai afirmat în lucrare, că **FSM-CE** radial excentric $rex_{1,2}\boldsymbol{\theta}$ exprimă distanţa, în plan, dintre două puncte **S** şi $\mathbf{M_{1,2}}$ în coordonate polare.

Relaţiile (9.29) rezultă prin înlocuirea coordonatelor punctelor $\mathbf{E} \equiv \mathbf{M_1}$ şi $\mathbf{W} \equiv \mathbf{M_2}$ în relaţia (9.28), dar sunt cunoscute şi ca expresiile invariante ale funcţiei supermatematice circulare excentrice **radial excentric** (rexθ sau Rexα) [1], [8], [11].

Observaţia prin care funcţia rex şi Rex, o adevarata **funcţie "rege"**, poate exprima toate curbele plane cunoscute şi o infinitate de curbe plane noi, dar exprimă şi distanţa dintre două puncte în plan, în coordonate polare, aparţine Prof. em. dr. math. **Octav Emilian Gheorghiu**, regretatul şef al Catedrei de Matematica de la Facultatea de Mecanică din Timişoara. Totodată, trebuie reamintit că, normarea funcţiilor radial excentrice s-a făcut la propunerea Prof. Dr. Ing.**Dan Perju**, în vremea în care era decan al Facultăţii de Mecanică din Timişoara.

STRÂMBA DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ

Dreapta, având o (singură) dimensiune, **liniară**, işi modifică forma la trecerea din liniar (centric) în neliniar (excentric), adică **se strâmbă** din ce în ce mai mult, prin creşterea **excentricităţii numerice s**, aşa cum se poate observa în **figura 9.14**.

Ca şi în cazul altor **excentrice** [4] [5] [6], **strâmba** se va obţine prin înlocuirea funcţiilor centrice, din ecuaţiile dreptelor, cu cele excentrice corespondente.

Funcţiile supermatematice, obţinându-se prin înlocuirea **variabilei centrice α** cu funcţia (de variabila excentrica θ) denumită în **SM** funcţia amplitudine excentrică **aexθ**.

De aceea, ecuaţia

(9.30) $\alpha(\theta) = \text{aex}\,\theta = \theta - \arcsin[\mathbf{s}.\sin(\theta-\varepsilon)]$,

va reprezenta **ecuaţia strâmbei primei bisectoare**.

Ca sa fie mai uşor de recunoscut, prin funcţia de reducere la primul cerc, ea se poate scrie nu în funcţie de unghiul **θ,** ci în funcţie de variabila reală $\mathbf{x} \in \Re$ astfel :

(9.30’) $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \text{aex}\,(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \arcsin\,[\mathbf{s}.\sin(\mathbf{x} - z)]$, funcţie reprezentată în **figura 9.14** pentru excentricităţi numerice variind în domeniul $\mathbf{s} \in [-1, +1]$, în care **strâmbele** prezintă grafice continue.

Pentru | **s** | > 1, strâmbele sunt continue numai pe porţiuni. Pe acele porţiuni pe care, dreapta turnantă din excentrul **S**, acum exterior cercului unitate, intersecteaza cercul unitate.

Principiul este valabil şi pentru distanţa dintre două puncte: pentru e = 0 → **E** ≡ **O** şi distanţa **SW** = **OW** = **R**, raza cercului. În acest caz, rex ((**θ**, **s = e** = 0) = Rex((**α**, **s = e** =0) = **1**; ceea ce rezultă şi din relaţiile (9.29) pentru **s = e** = **0** .

Ecuaţia dreptei ce trece prin originea **O** (**0, 0**) a sistemului cartezian drept **xOy** este

(9.31) $\mathbf{y} = \mathbf{m}.\mathbf{x} = \tan k.\,\mathbf{x}$,

astfel că ecuaţia strâmbei, de variabilă excentrică **x** va fi

(9.32) $\mathbf{y} = \mathbf{m}.\text{aex}\,(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = \tan k.\text{aex}\,[\mathbf{x}, \mathbf{S}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\varepsilon})] = \mathbf{m}.\{\mathbf{x}\text{-}\arcsin[\mathbf{s}.\sin(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{z})]\}$,

în care **s** şi $z = \varepsilon \bmod (2\pi)$ sunt coordonatele polare ale excentrului **S**.

Ecuaţia strâmbei (şi a dreptei) determinată (ce trece prin) de punctul $M_0(x_0, y_0)$ şi de direcţie **m** este

(9.33) $y = \mathbf{m}\{x - x_0 - \arcsin[s.\sin(x-z)]\} + y_0$,

obţinută din ecuaţia dreptei generatoare

(9.33’) $y - y_0 = m\,(x - x_0)$

Plecând de la forma generală a dreptei şi a ecuaţiei de gradul întâi, dată de **Pier Fermat** (1637), rezultă ecuaţia generală a strambei :

(9.34) **A.**{**x**-arcsin[**s**.sin(**x-z**)]} + **B**.y + **C** = 0 .

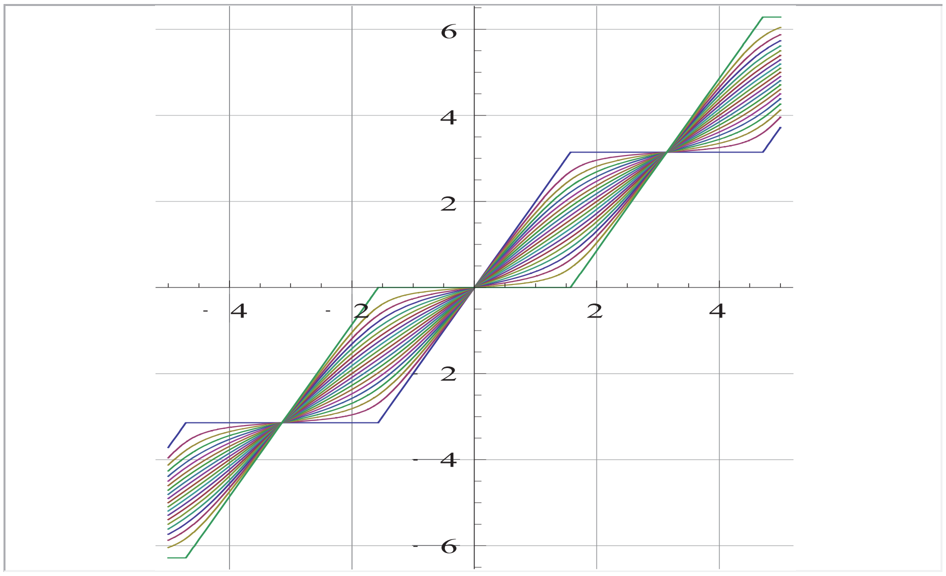


Fig. 9.14. Familie de **STRÂMBE** rezultate din ecuaţia primei bisectoare **ca FSM-CE amplitudine excentrică**.
Pentru **s** = ± 1 se obţin **linii frânte(**Curbe «în trepte » **Florentin Smrandache** şi Curbe « linii drepte frânte » **Octav Gheorgiu)**

Ecuaţia normală a strâmbei, rezultată din ecuaţia normală a dreptei, dată de **A. Cauchy** (1826), este

(9.35) {**x**-arcsin[**s**.sin(**x-z**)]}.cos **a** + y. sin a – p = 0 ,

în care **p** este lungimea normalei la strâmba de **e** = 0, dusă din originea reperului, iar **a** este unghiul pe care normala îl face cu direcţia pozitivă a axei absciselor **x**.

Asemănător, se pot obţine ecuaţiile strâmbelor ce trec prin doua puncte, plecând de la forma data de **S. Lacroix** (1798);

(9.36) $$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{\{x-\arcsin[s.\sin(x-z)]\}-x_1}{x_2-x_1}$$

sau ecuaţia strâmbei de **s** = 0 (dreptei)

''prin taieturi'' data de **A. Crelle** (1821)

(9.37) $$\frac{x-\arcsin\,[s.\sin\,(x-z)]}{a}+\frac{y}{b}-1=0\ .$$

Importanţa strâmbei consistă în aceea că ea poate reprezenta caracteristici elestice neliniare, strict necesare în dinamica sistemelor tehnice, a vibraţiilor sistemelor neliniare, caracteristici elastice statice (**CES**) greu de obţinut anterior numai cu **MC**.

În **figurile 9.15** şi **9.16** sunt prezentate strâmbe de **m = 1** şi excentricitate supraunitară şi, respectiv, strâmbe ce trec printr-un anumit punct M_0 şi de pantă **m = 3.**

Funcţiile supermatematice, de **variabilă centrică α,** elimină dezavantajul discontinuităţii, prezentat de funcţiilor supermatematice circulare excentrice de variabilă excentrică θ, aşa cum s-a arătat în lucrarea [8].

STRÂMBE DE VARIABILĂ CENTRICĂ α

Se obţin în mod asemănător, cu observaţia că variabila x, din ecuaţiile dreptelor, exprimate în diverse forme, se înlocuieşte cu funcţia de variabilă centrică Aex (α, **S**), dată de expresia cunoscută :

$$\text{Aex}\,\alpha = \theta(\alpha) = \alpha + \beta(\alpha) = \propto + arcsin\frac{s.\sin(\propto-\varepsilon)}{Rex\alpha} = \propto + arcsin\frac{s.\sin(\propto-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\propto-\varepsilon)}}$$

În cazul funcţiilor de variabilă excentrică, dreapta generatoare **d** se rotea în jurul excentrului **S** şi intersecta cercul unitate în punctele $\mathbf{W_{1,2}}$. Apoi, din centrul **O** rezultau direcţiile radiale centrice $\alpha_{1,2}$. De aceea, pentru excentrul **S,** exterior cercului unitate, funcţiile existau numai în anumite domenii.

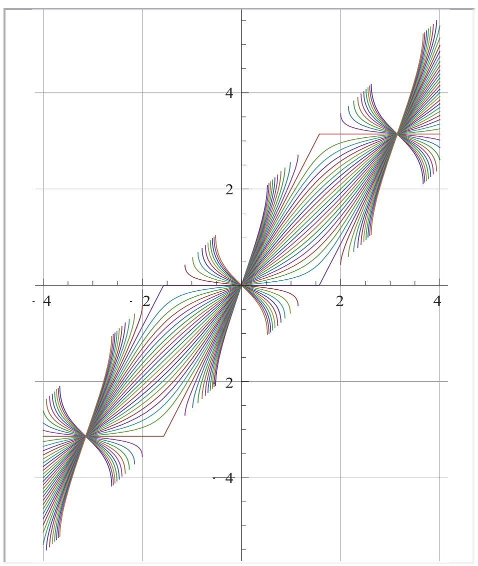


Fig.9.15 Strâmbe de excentricitate numerica e supraunitară $s \in [-2, 2]$, m = 1

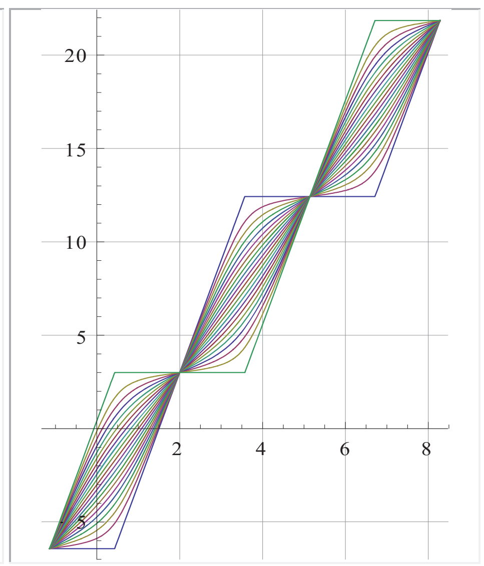


Fig.9.16 Strambe ce trec pin punctul M_0 (2, 3), m = 3

În cazul funcţiilor de **variabilă centrică**, dreapta generatoare se roteste în jurul centrului **O** al cercului unitate, astfel că, oriunde ar fi **excentrul S,** în planul cercului, dreapta intersectează în permanenţă cercul unitate în punctele $\mathbf{W_{1,2}}$, diametral opuse, într-o variantă posibilă şi segmentele **$SW_{1,2}$** vor defini direcţiile radiale excentrice de unghiuri **$\theta_{1,2}$** cu axa absciselor.

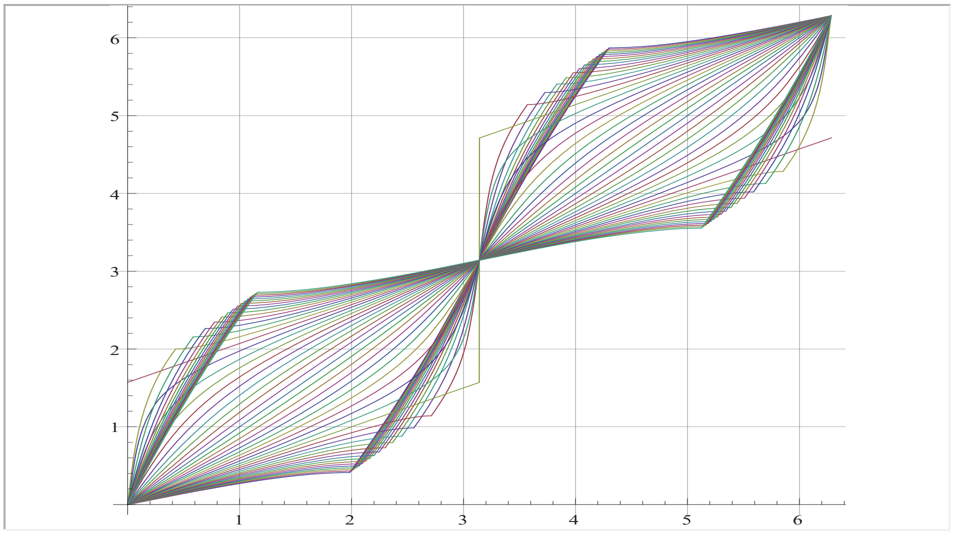


Fig.9.17 Familie de STRÂMBE de **variabilă centrică**, pentru excentrictate numerică **s** ∊ [-2,5; 2,5] şi coeficient unghiular **m = 1**

Funcţiile supermatematice circulare excentrice şi hiperbolice de **variabilă centrică** vor fi tratate în extenso în continuarea acestei lucrari (Vol. II).

Ecuaţia familiilor de **strâmbe** de variabilă **centrică**, ce trec prin punctul M_0 (x_0, y_0) şi de coeficient unghiular **m = tan k**, este :

(9.38) $y - y_0 = m\,[\, x + \arcsin\frac{e.\sin(x-z)}{1+e^2-2e\cos(x-z)} - x_0]$

şi pentru **M_0 (2, 3)** şi coeficient unghiular **m = 3** sunt prezentate în **figura 9.17.**

CONCLUZII LA STRÂMBE

La intrebarea pusă de **Fourier**, într-o discuţie cu **Monge** în 1795 şi relatată de **Jeremy Gray** în "**Idei despre spaţiu**" , "**CE ARE DREPT O LINIE DREAPTĂ ?** " acum se poate răspunde cu certitudine : "**EXCENTRICITATE NULĂ**"

Strâmba, ca şi degenerata ei **- dreapta**, împarte planul în două **semiplane** pentru Abs[**s**] < **1**.

Dacă **A. G. Köstner** afirma la 2 august 1789 " **Nu există o definiţie clară a dreptei**", acum se poate afirma cu claritate că **dreapta este o strâmbă de excentricitate nulă**.

Mai ramâne de aprofundat / definit **clar ce-i strâmba** ? Pentru că există foarte multe curbe diferite de dreaptă dar şi de strambă.

Şi strâmbele sunt de mai multe genuri. Aşa, de exemplu, utilizand funcţia amplitudine (sau amplitudinus) **am**(u,k) a lui **Jacobi,** din teoria funcţiilor speciale eliptice, foarte asemănătoare cu funcţiile **aexθ** şi Aexα, care sunt denumite, din această cauză, chiar amplitudune excentrică de variabilă excentrică şi, respectiv, centrică, prin analogie cu fauncţia amplitudinus, se obţin curbe foarte apropiate de strambele prezentate în prezenta lucrare. Aceste strambe ar putea fi definite ca **strambe eliptice Jacobi**.

Şi alte funcţii supermatematice circulare şi hiperbolice excentrice, elevate şi exotice pot la fel de bine exprima caracteristici elastice neliniare, asemănătoare strâmbelor de excentricitate diferită de zero.

Vom denumi **strâmbele** obţinute cu funcţii circulare excentrice **strâmbe excentrice**, iar cele obţinute cu funcţii circulare elevate şi exotice, **strâmbe elevate** şi, respectiv, **exotice**.

Toate acestea pot fi de simplă, dublă sau multiplă excentricitate, iar excentrul poate fi un punct fix (**e**, **ε** = constante) sau de punct mobil ce evoluează pe diverse curbe.

9.3.2 LOBE, CVADRILOBE ŞI SISTEME VIBRANTE CVADRILOBICE

Lobele sunt familii de curbe inchise, rezultate din transformarea continuă a cercului într-un poligon perfect, fiecare curbă închisă a familiei, dispunând de mai mulţi lobi (**Fig.9.18**), cu excepţia curbei generatoare, care, în toate cazurile, este un cerc, cu zero lobi.

Curbele din familia de lobe se disting printr-o anumită rază **R** şi excentricitate **e**, sau o anumită excentricitate numerică **s = e**/**R**, denumită şi modul.

In toate cazurile, pentru **s** = 0 se obţine cercul, care nu dispune de niciun lob, fiind considerată curbă generatoare a familiilor de lobe şi, pentru **s** = 1, se obţine un poligon cu **n** laturi, **perfect** rectilinii.

Pentru valori intermediare **s** $\in$ (0, 1) se obţin **n**-lobele. Raza **R** a cercului generator al lobelor, aceeaşi pentru o familie de lobe, imprimă mărimea curbelor din familie, în timp ce, excentricitatea **e** sau **s** modifică continuu forma lobelor din familie: de la cerc (s = 0) la un poligon perfect cu 3, 4…n laturi (s = ± 1).

Transformare continuă a cercului într-un poligon cu n laturi perfect rectilinii este posibilă prin utilizarea funcţiilor supermatematice circulare excentrice de variabila excentrica **θ** [1], [2], [3] sau centrica **α** [10], dependenţa dintre variabile fiind dată de relaţia cunoscută

$\alpha = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]$ **Cvadrilobele (QL)** sunt o familie de curbe închise cu 4 lobi, rezultate din transformarea continuă a cercului în pătrat, de forma pătratelor cu laturi curbe şi colţuri rotunjite (**Fig.9.19**), exprimate de ecuaţiile parametrice

(9.40) **M** $\begin{cases} x = R.dex\theta \\ y = R.dex(\theta \pm \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

sau, mai simplu**:**

(9.40') **M** $\begin{cases} x = \frac{R.cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{R^2-e^2sin^2(\theta-\varepsilon)}} = R.coq\theta \\ y = \frac{R.sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{R^2-e^2cos^2(\theta-\varepsilon)}} = R.siq\theta \end{cases}$

pentru $\mathbf{s}^2 \in [0,\ 1]$.

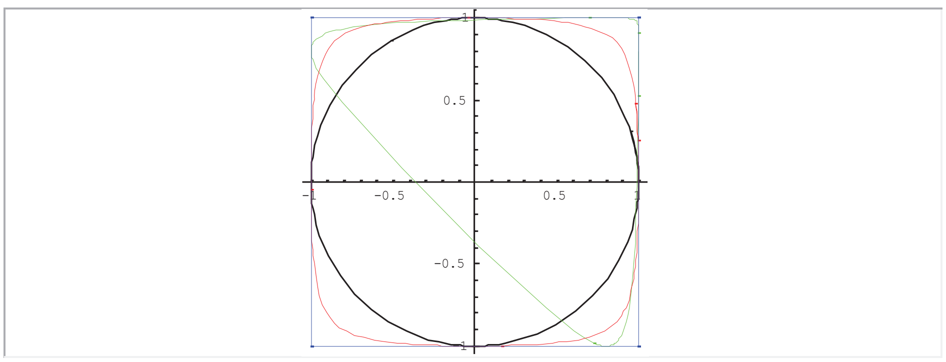


Fig. 9.18 O trilobă (**verde**) şi o cvadrilobă (**roşie**)

FUNCŢII CVDRILOBE (FQL)

Coordonatele punctului curent $M(x,y) \subset [QL(s)]$, ce aparţine unei cvadrilobe (de rază **R = 1** şi de excentricitate numerică **s = k**, cu excentrul **S** pe axa x$\Rightarrow$ **ε** = 0) şi semidreptei $\mathbf{d}^+$ (**θ = φ**), cu polul în originea **O(0,0),** adică **M** = $\mathbf{d}^+$ (φ)∩ **QL**(s = k), sunt, totodată, funcţiile cvadrilobe centrice (**FQC**) **cosinus cvadrilob** (**coqθ**) şi **sinus cvadrilob** (**siq**θ) **centrice** de variabilă **excentrică θ** [**Fig.9.19**].

Coordonatele polare ale lui M(r, φ) , de variabilă excentrică sunt

(9.41) **M** $\begin{cases} \mathbf{x = coq\theta = \frac{cos\theta}{\sqrt{1-k^2sin^2\theta}}} \\ \mathbf{y = siq\theta = \frac{sin\theta}{\sqrt{1-k^2cos^2\theta}}} \end{cases}$ şi utilizând (9.39),

(9.41') **M** $\begin{cases} \mathbf{x = coq\alpha} \\ \mathbf{y = siq\alpha} \end{cases}$, de **variabilă centrică α**:

Coordonatele polare ale lui M(r, φ) sunt

(9.42) **M** $\begin{cases} \mathbf{r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{coq^2\theta + siq^2\theta}} \\ \mathbf{\varphi = arcsin\frac{y}{x} = arcsin\frac{siq\theta}{\sqrt{coq^2\theta+siq^2\theta}}} \end{cases}$

astfel că pot fi definite şi funcţiile **cvadrilobe centrice** de variabilă centrică φ

$$(9.43)\quad \mathbf{M}\ \begin{cases} \boldsymbol{x = r.coq\varphi} \\ \boldsymbol{y = r.siq\varphi} \end{cases}$$

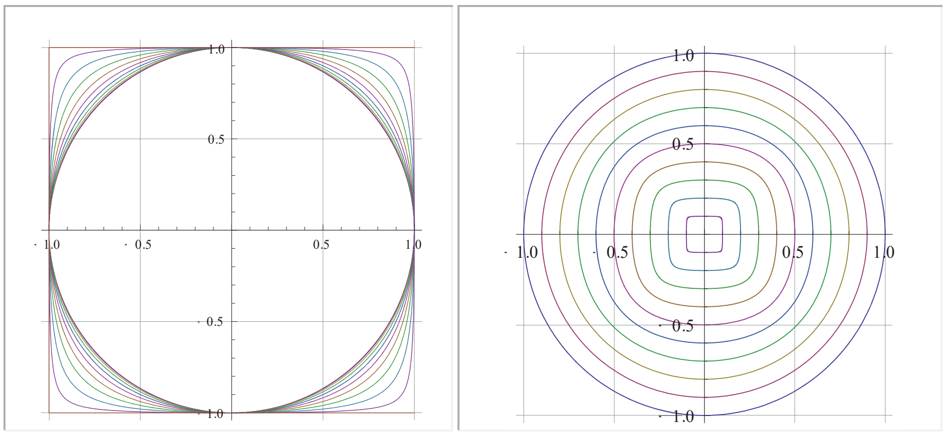


Fig. 9.19 Cvadrilobe centrice de R = 1 şi de R variabil (R = 1– s)

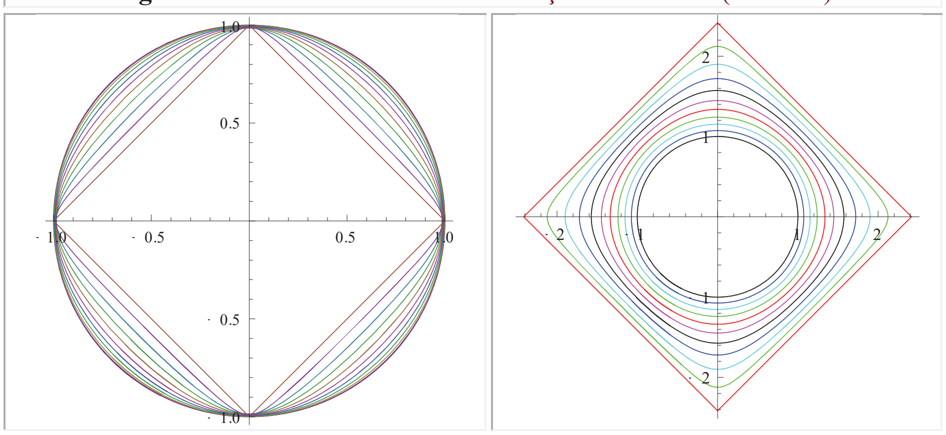


Fig. 9.20 Cvadrilobe **Alaci Valeriu** R =1– $s^2(1-\sqrt{2})$ rotite cu π/4, pentru s ∈ [0, 1]

Cercul generator R = 1 este **inscris** tuturor cvadrilobelor, inclusiv **pătratului** sau cvadrilobei de s = k = 1.

Prin rotirea cvadrilobelor cu **π/4** şi modificarea razei cercului generator de la **R = 1** la $\mathbf{R = 1 - k^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$, astfel, încât cercul generator, din cerc înscris, să devină cerc **circumscris** tuturor cvadrilobelor, inclusiv pătratului rotit cu **π/4**, se obţin cvadrilobele **Valeriu Alaci** (Fig.**9.20**) centrice (**QLAC**) şi, prin intersecţia acestora cu semidreapta $\mathbf{d^+}(\varphi)$, se vor obţine funcţiile cvadrilobe **Valeriu Alaci** (**FQLA**).

Ele constitue o trecere continua de la funcţiile **circulare**, din **trigonometria centrică Leonhard Euler** (**e = s = k** = 0), la **funcţiile pătratice Valeriu Alaci**, din **trigonometria pătratică**, introdusă în matematică, înainte de anul 1940, de fostul şef al Catedrei de Matematică al **Şcolii Politehnice din Timişoara**, profesorul universitar dr. mat. **Valeriu Alaci**.

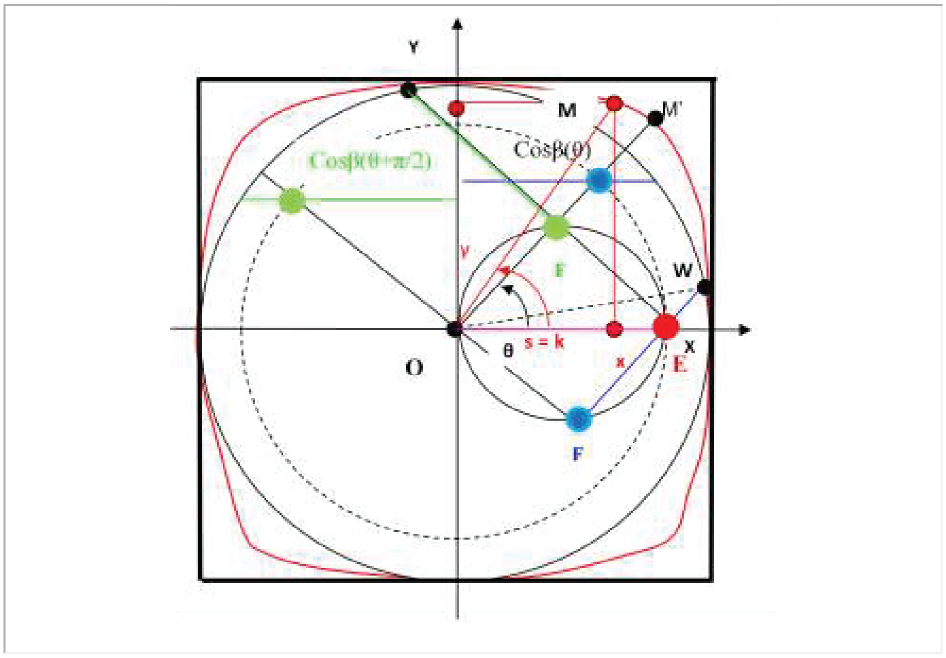


Fig. 9.21 Funcţii cvadrilobe. Desen explicativ

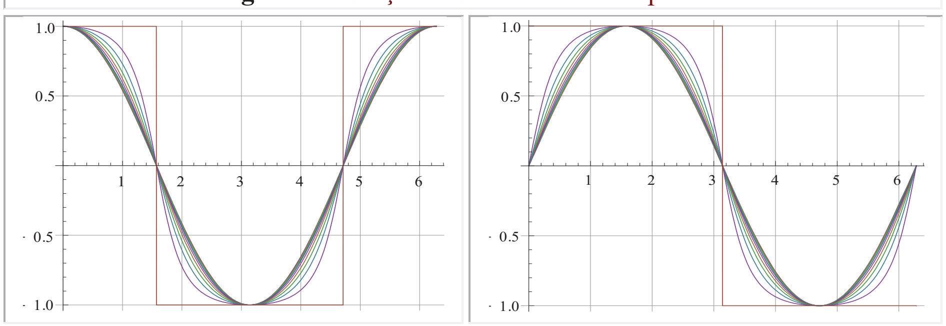


Fig. 9.22 Cosinusul **coqφ** şi sinusul **siqφ quadrilobe (cvadrilobe)**

De variabilă **θ**, **α** sau **φ**, aceste funcţii au cosinusul cuadrilob **Valeriu** Alaci **cqaφ** şi sinusul cuadrilob Alaci **sqaφ** exprimate de relaţiile :

(9.44) $M \begin{cases} cqa\varphi = \left[1 - k^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right](x\cos\frac{\pi}{4} - y\sin\frac{\pi}{4}) \\ sqa\varphi = \left[1 - k^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right](x\sin\frac{\pi}{4} - y\cos\frac{\pi}{4}) \end{cases}$

în care x şi y sunt **FQLC** (9.44).

SISTEME VIBRANTE CVADRILOBE

Punctul reprezentativ **M** al QL(k) se poate roti cu viteză unghiulară constantă **Ω** în jurul centrului **O**, caz în care, **M** se va roti şi el pe QL(k) cu aceeaşi viteză **unghiulară** constantă, dar cu viteza $\vec{v}$ („liniara") pe QL(k) variabilă în modul şi în direcţie, cu excepţia cazului **s = k** = 0, când modulul vitezei este constant (**r = R = 1**).

Considerand, în contiunare, variabila excentrică **θ** ce poate varia în jurul excentrului **S** (s = **k**, **ε**), pentru **ε** = 0, după legea

(9.45) **θ** = **Ω**t ,

rezultă că variabila centrică **α,** dată de (9.38), va avea expresia

(9.46) **α** = Ωt – arcsin[**k**.sin(Ωt)]

a cărei derivată, dă viteza unghiulară variabilă **ω,** cu care punctul **W** se roteşte pe cercul unitate generic.

(9.47) $\dot{\alpha} = \omega = \Omega\left[1 - \frac{\cos\Omega t}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Omega t}}\right] = \Omega.dex\Omega t.$

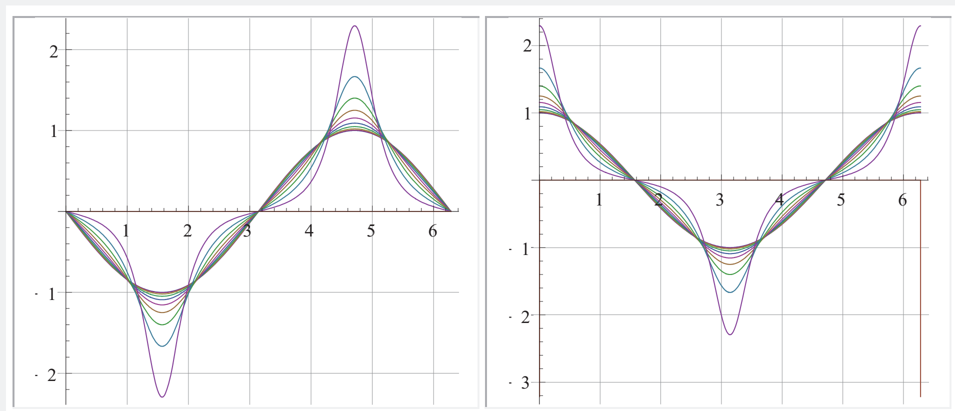


Fig. **9.23,a** Derivatele funcţiilor cvadrilobe: **coq'φ** şi **siq' φ**

Punctul **M** de pe QL(k) se va roti şi el în jurul lui **O** cu o alta viteză unghiulară variabilă.

In punctele în care cercul unitate este tangent QL, pentru **α** = 0 + n.**π/2**, (n = 1,2,3,…), în care şi **r = R = 1** şi **φ = α**, vitezele unghiulare ale punctului **M** vor fi egale cu acelea ale semidreptei centrice din **O**, care face unghiul **α** cu axa **x**, deci cu **ω**.

Proiecţiile mişcării lui **M** (x,y) de pe QL pe axele x şi y vor genera câte o mişcare de vibraţie, iar sistemele vibrante, astfel obţinute, sunt definite ca **sisteme vibrante cvadrilobe** (**SQL**).

Dacă se consideră poziţia lui M la momentul t şi, respectiv, x şi y poziţiile proiecţiilor lui **M** pe axa x şi, respectiv y, atunci vitezele de deplasare ale proiecţiilor lui **M** pe aceste axe sunt date de derivatele acestora, care sunt şi derivatele **FQL** în funcţie de timp.

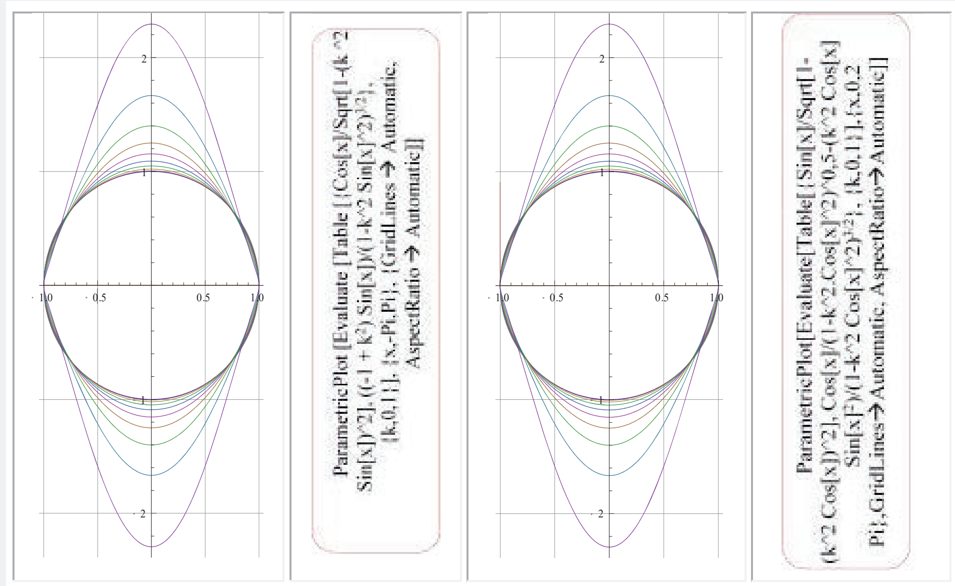


Fig. 9.23,b Curbe integrale în spaţiul fazelor $\dot{x}(x)$şi $\dot{y}(y)$

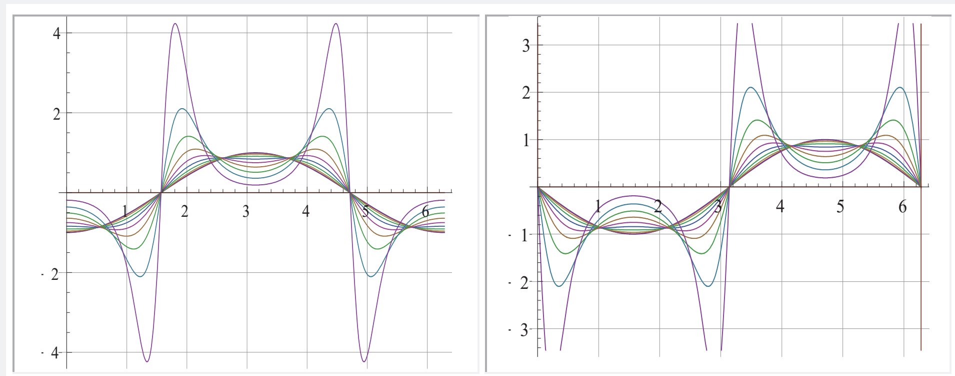


Fig. 9.24 A doua derivata a funcţiilor **quadrilobe / cvadrilobe**: acceleraţiile sistemelor vibrante cvadrilobe

Ţinând cont de (9.41) acestea sunt :

(9.48) $M\begin{cases}\dot{x} = \frac{-\Omega(1-k^2)sin\Omega t}{(1-k^2 sin^2\Omega t)^{1,5}} \\ \dot{x} = \frac{-\Omega(1-k^2)cos\Omega t}{(1-k^2 cos^2\Omega t)^{1,5}}\end{cases}$, cu graficele din **figurile 9.23, a** şi **9.23, b**

şi acceleraţiile

(9.49)

$$\ddot{M}\begin{cases}\ddot{x} = \frac{-\Omega^2(1-k^2)(1+2k^2 sin^2\Omega t)cos\Omega t}{(1-k^2 sin^2\Omega t)^{2,5}} = -\Omega^2 cos\Omega t\frac{1-k^2+(2k^2-2k^4)sin^2\Omega t}{(1-k^2 sin^2\Omega t)^{\frac{5}{2}}} \\ \ddot{y} = \frac{-\Omega^2(1-k^2)(1+2k^2 cos^2\Omega t)sin\Omega t}{(1-k^2 cos^2\Omega t)^{2,5}} = -\Omega^2 sin\Omega t\frac{1-k^2+(2k^2-2k^4)cos^2\Omega t}{(1-k^2 cos^2\Omega t)^{\frac{5}{2}}}\end{cases}, \text{ sau}$$

(9.49’) $\ddot{M}\begin{cases}\ddot{x} = -\Omega^2(1-k^2)cos\Omega t\frac{1+2k^2 sin^2\Omega t}{(1-k^2 sin^2\Omega t)^{\frac{5}{2}}} \\ \ddot{y} == -\Omega^2 sin\Omega t(1-k^2)\frac{1+2k^2 cos^2\Omega t}{(1-k^2 cos^2\Omega t)^{\frac{5}{2}}}\end{cases}$

ECUAŢIA DIFERENTIALĂ A VIBRAŢIILOR SISTEMELOR QUADRILOBE \ CVADRILOBE (VSQL)

Matricea **Wronskiana** a QLSV este:

(9.50) $$W = \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y}\end{vmatrix} = \frac{\Omega(1-k^2)(1-2k^2 cos^2\theta sin^2\theta)}{1-k^2+k^2 cos^2\theta sin^2\theta} = \frac{\Omega(1-k^2)(1-\frac{k^2 sin^2 2\theta}{2})}{1-k^2(1-\frac{sin^2 2\theta}{2})} \neq \mathbf{0}$$

astfel că funcţiile QL (9.41) şi combinaţii acestora

(9.51) z = C_1 coq θ + C_2 siq θ

sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale

(9.52) $A\ddot{z} + B\dot{z} + C = 0$

în care A ≡W şi

(9.53) $$B = \begin{vmatrix} x & y \\ \ddot{x} & \ddot{y}\end{vmatrix} = \frac{-\Omega^2(1-k^2)k^2\left(4-k^2-\frac{k^4 sin^2 2\theta}{2}\right)sin4\theta}{4(1-k^2+\frac{k^4 sin^2 2\theta}{2})^{2,5}}$$

iar coeficientul variabil **C** este dat de determinantul

(9.54) $$C = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y}\end{vmatrix} = \frac{\Omega^2(1-k^2)(1-k^2 cos^2 2\theta+\frac{k^2(1-k^2)sin^2 2\theta}{2})}{(1-k^2+\frac{k^4 sin^2 2\theta}{2})^{2,5}}$$

CARACTERISTICILE ELASTICE STATICE (CES) ALE SVQL

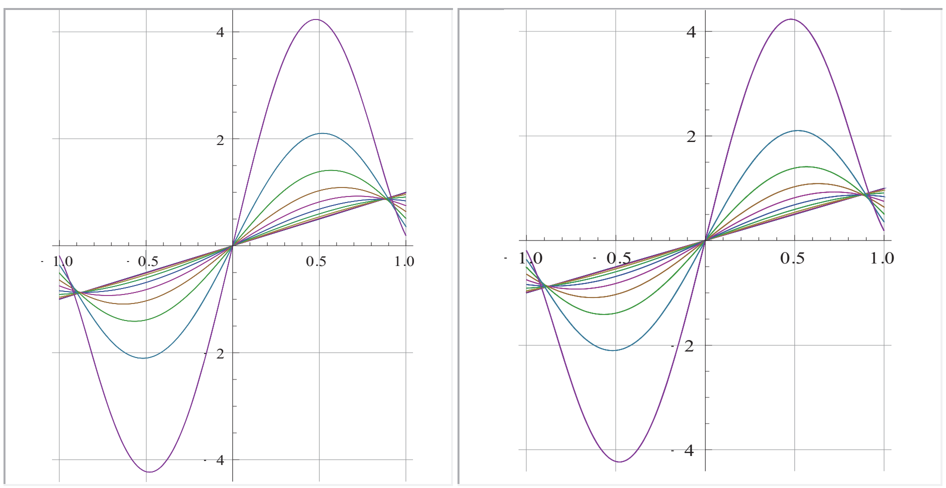
Considerand un SVQL de masa **m = 1** şi de pulsaţie proprie Ω = 1, forţa de acceleraţie $\mathbf{F_a}$, în funcţie de **θ**, este dată de relaţiile (9.49).

Prin schimbarea de variabilă în (9.49), ţinând cont de relaţiile (9.41), se obţine **forţa de acceleraţie** în funcţie de deplasarea **x** şi, respectiv, **y**.

In lipsa forţei de excitaţie şi în cazul unui sistem neamortizat C = 0 sau $\zeta = 0$ – singurele forţe din sistem sunt: **forţa de acceleraţie** $\mathbf{F_a}$ şi **forţa elastică** $\mathbf{F_e}$ care sunt egale şi de sens contrar $\mathbf{F_e = -F_a}$. În consecinţă, prin schimbarea semnului fortei $F_a(x)$ şi, respectiv $\mathbf{F_a(y)}$, se obţin forţele elastice $\mathbf{F_e(x)}$ şi, respectiv, $\mathbf{F_e(y)}$ date de relaţiile parametrice, pentru **m** = 1

$$(9.55) \qquad F_e \begin{cases} F_e(x) \begin{cases} x(t) = coq\Omega t = \frac{\cos\Omega t}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Omega t}} \\ -m.\ddot{x}(t) = -\frac{d^2x(t)}{dt} = -\Omega^2\cos\Omega t\,\frac{1-k^2-2k^2(1-k^2)\sin^2\Omega t}{(1-k^2\sin^2\Omega t)^{\frac{5}{2}}} = -\Omega^2\cos\Omega t\,\frac{(1-k^2)(1+2k^2\sin^2\Omega t)}{(1-k^2\sin^2\Omega t)^{\frac{5}{2}}} \end{cases} \\ F_e(y) \begin{cases} y(t) = siq\Omega t = \frac{\sin\Omega t}{\sqrt{1-k^2\cos^2\Omega t}} \\ -m.\ddot{x}(t) = -\frac{d^2x(t)}{dt} = -\Omega^2\sin\Omega t\,\frac{1-k^2-2k^2(1-k^2)\cos^2\Omega t}{(1-k^2\cos^2\Omega t)^{\frac{5}{2}}} \end{cases} \end{cases}$$

sau de cele explicite, în funcţie de delasarea x şi, respectiv, y



ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1-(0.1 u Sin[t])^2],- (Cos[t] (-1+0.01 u^2+u^2 (-0.02+ 0.0002 u^2) Sin[t]^2)/(1 -0.01 u^2 Sin[t]^2)$^{2.5}$)}, {u,0,9}], {t,-Pi,Pi},GridLines→Automatic]]

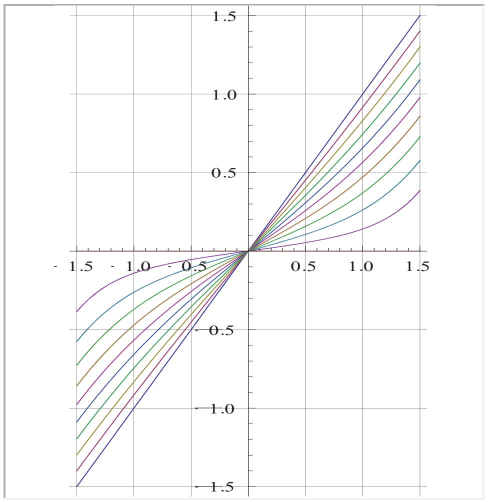
Plot[Evaluate[Table[{((1+0.02 u^2) x-0.02 u^2 (2+0.01 u^2) x^3+0.0003 u^4 x^5)/(1-0.01 u^2)},{u,0,10}], {x,-1,1}, AspectRatio→1.5]]

Fig. 9.25,a Caracteristici elastice statice (**CES**) neliniare cvadrilobe

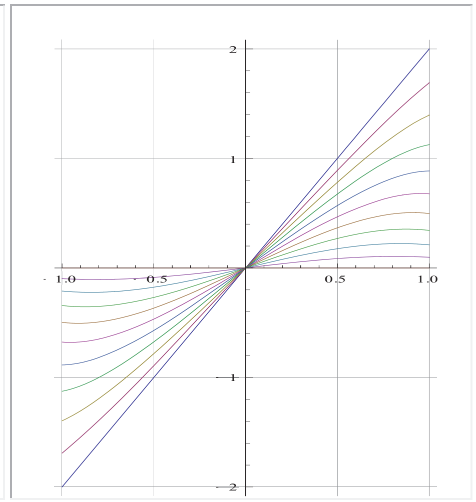
$$(9.55') \qquad \begin{cases} F_e(x) = \frac{\Omega^2}{1-k^2}\left[(1-k^2)x + 2k^2(2+k^2)x^3 + 3k^4x^5\right] \\ F_e(y) = \frac{\Omega^2}{1-k^2}\left[(1-k^2)y + 2k^2(2+k^2)y^3 + 3k^4y^5\right] \end{cases}$$

care reprezintă, totodată, şi **CES** neliniare **moi** (**regresive**) ale SVQL, redate în figura **9.25,a**.

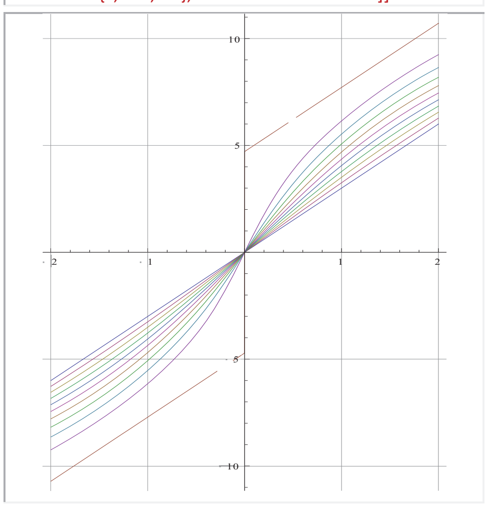
Atât **CES** în funcţie de x cât şi CES în funcţie de y sunt, evident, identice pentru că exprimă **CES** a aceluiaşi sistem cvadrilob (unic), de aceea, în figura **9.25,a** au fost reprezentate **CES** cvadrilobe prin relaţiile(9.55) şi (9.55').



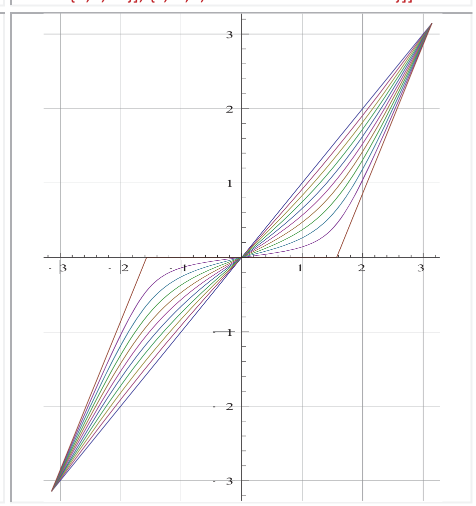
Plot[Evaluate[Table[{x-ArcSin[0.1 u Sin[x]]}, {u,0,10}], {x,-1.5,1.5}, GridLines→Automatic]]



Plot[Evaluate[Table[{2 (x-ArcTan[0.1 u Tan[x]])}, {u,0,10}], {x,-1,1, GridLines→Automatic }]]



Plot[Evaluate[Table[{{3 (t+ArcSin[0.1 u Sin[t]/Sqrt[(1-(0.1 u Cos[t])^2)]])}}, {u,0,10}], {t,-Pi/1.5,Pi/1.5}, GridLines→Automatic]]



Plot[Evaluate[Table[{x-ArcSin[0.1 u Sin[x]]}, {u,0,10}], {x,-Pi,Pi}, GridLines→Automatic]]

Fig. 9.25,b Caracteristici elastice statice (**CES**) **neliniare** regresive sau moi şi progresive sau tari şi liniare cu **frecare** (stânga → s = 1) şi cu **joc** (dreapta→s =1)

Alte tipuri de **CES,** împreună cu relaţiile lor, sunt prezentate în **figura 9.25,b**. Primele, din stânga - sus, sunt progresive sau tari, iar cele din dreapta-sus sunt regresive sau moi. Mult mai interesante sunt **CES** din partea de jos a **figurii 9.25,b**.

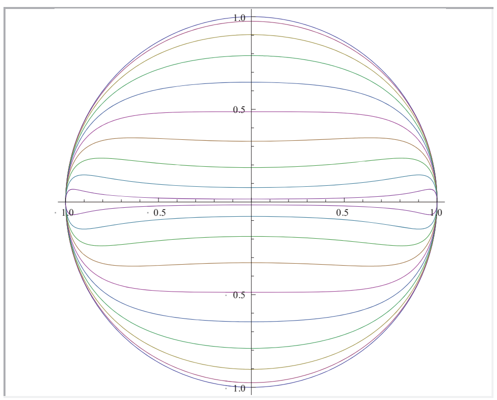
Astfel, în stânga-jos sunt prezentate **CES** moi sau regresive care pentru s = 0 sunt **CES** liniare, iar pentru s = 1 sunt **CES** liniare ale unui sistem cu strângere prin fricţiune, la care deplasarea apare numai când forţa exterioară de excitaţie depăşeşte valoarea forţei de frecare din sistem.

În dreapta-jos sunt **CES** liniare care pentru s = 0 sunt liniare continue,iar pentru s = 1 reprezintă **CES** ale unor sisteme cu joc; în domeniul jocului forţele fiind nule.

CURBE INTEGRALE ÎN PLANUL FAZELOR

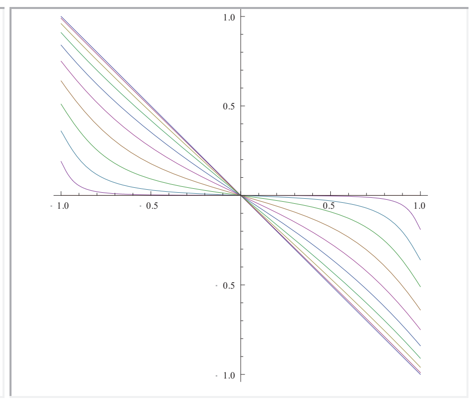
În consecinţă, **curbe integrale în planul fazelor** $\dot{x}(x)$ vor avea şi ele aceleaşi forme, prezentate în **figura 9.26** pentru **s = k** $\in$ [0, 1] cu pasul **0,1**.

Curbele acceleraţiilor pe x sau y au aceeaşi formă, aşa cum sunt reprezentate în **figura 9.27.**



```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1-0.01 k^2 Cos[t]^2], -(1-0.01 k^2) Cos[t] /(1-0.01 k^2  Cos[t]^2)^ -1.5},   {k,0,10}], {t,0,2 Pi}, AspectRatio→1]]
```

Fiog. **9.26** Curbe integrale în planul fazelor $\dot{x}$ (x)



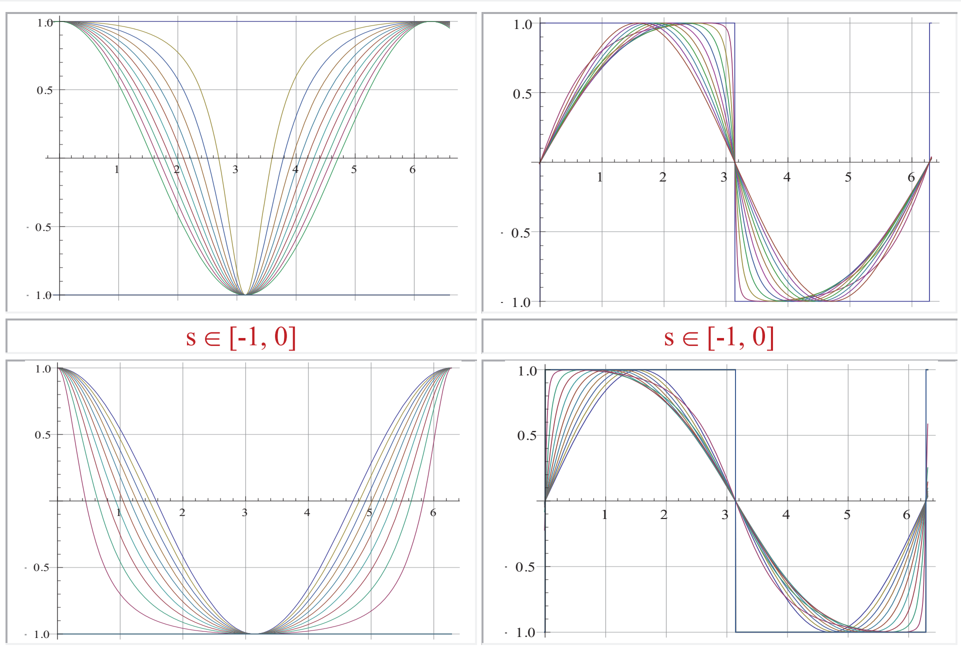
```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1-0.01 k^2 Sin[t]^2], -(1-0.01 k^2) Cos[t] (1+0.02 k^2 Sin[t]^2)/
  (1-0.01 k^2  Sin[t]^2)^-2.5},   {k,0,10}],{t,0,Pi}]]
```

Fig. **9.27** Acceleraţiile $\ddot{x}$ **(x) şi** $\ddot{y}$**(y)**

CONCLUZII

- Au fost introduse în matematică obiecte geometrice (QL şi QLA) şi funcţii noi şi utile, care sunt soluţii ale unor sisteme vibrante neliniare de caracteristici elastice statice regresive (**Fig.9.25**), prezentate în prezenta lucrare ca funcţie de variabila excentrică **θ**.

- La fel de importante sunt şi soluţiile date de celelalte variabile α şi φ, care vor fi prezentate în lucrări viitoare.
- Noile curbe închise şi funcţiile aferente lor, realizează o transformare continuă a cercului într-un poligon perfect; între două dintre cele mai importante forme geometrice ale matematici, eliminand, astfel, graniţele dintre ele: dintre cerc şi pătrat.
- **FQL** de variabilă centrică **α** coq**α** şi, respectiv, siq**α** au graficele prezentate în figura următoare (**9.28**) şi au alura asemănătoare cu **FQL** de variabilă φ.
- Curbe închise de forma n-lobelor sau polilobelor se pot obţine şi cu ajutorul funcţiilor **SM - CE** Rex(**n** α), care nu tind la limită spre un n-poligon perfect ci spre **n**-roze, aşa cum se observă în **figura 9.29** pentru **n = 4** şi **n = 8**.
- Funcţiile QL **Valeriu Alaci**, prezentate succint, unifică funcţiile circulare cu cele din trigonometria patratică a lui **Valeriu Alaci**, întroducand o infinitate de alte funcţii **între** cele mai uzuale funcţii matematice (**circulare Euler** şi **pătratice Alaci**).



s ∈ [-1, 0] | s ∈ [-1, 0]

s ∈ [0, + 1] | s ∈ [0, + 1]

Fig. 9.28 Funcţii cuadrilobe **coqα** şi **siqα** de **variabilă centrică α**

- Dacă sistemele vibrante **Duffing** având **CES** de forma: $\mathbf{F_e = k_0\ x \pm \beta x^3}$, reprezintă primii doi termeni ai dezvoltării în serie de puteri **Taylor**, în jurul originii, **CES** a **SVQL** reprezintă aceeaşi dezvoltare dar cu **un termen în plus, aşa cum rezultă din ecuaţia explicită (9.55')**. Deci cu un pas mai apropiată de o oarecare **CES** reală, neliniară.

9.3.3 TOR EXCENTRIC

Torul **centric** este o suprafaţă închisă, generată de un cerc care se roteşte în jurul unei axe palele şi exterioare planului cercului. Dacă Oz este axa de rotaţie, cercul generator având raza R iar centrul fiind la distanta A de această axă, ecuaţiile parametrice ale torului **centric** vor fi

$$(9.56)\quad \begin{cases} x = (A + cos\theta)\cos\alpha \\ y = \ (A + cos\theta)\sin\alpha \Rightarrow \quad \propto \in [0, 2\pi] \qquad și \qquad \theta \in [0, 2\pi \\ \qquad z = sin\theta \end{cases}$$

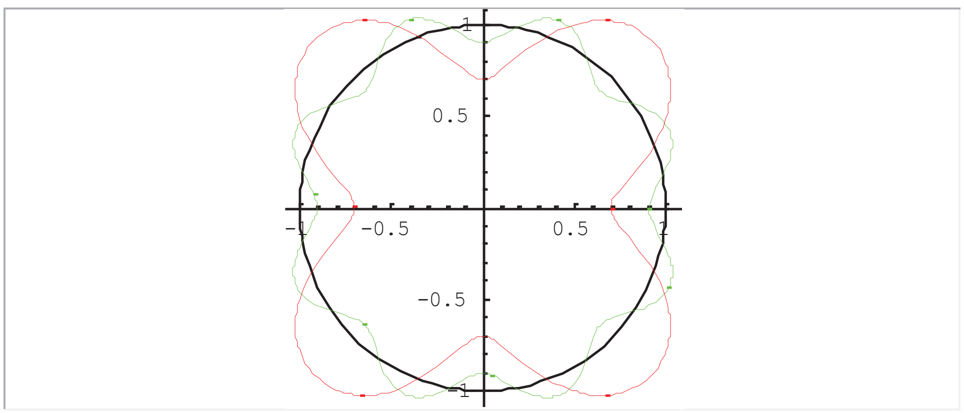


Fig. **9.29** Rex (**nα**) în polar → epicicloide (roze)

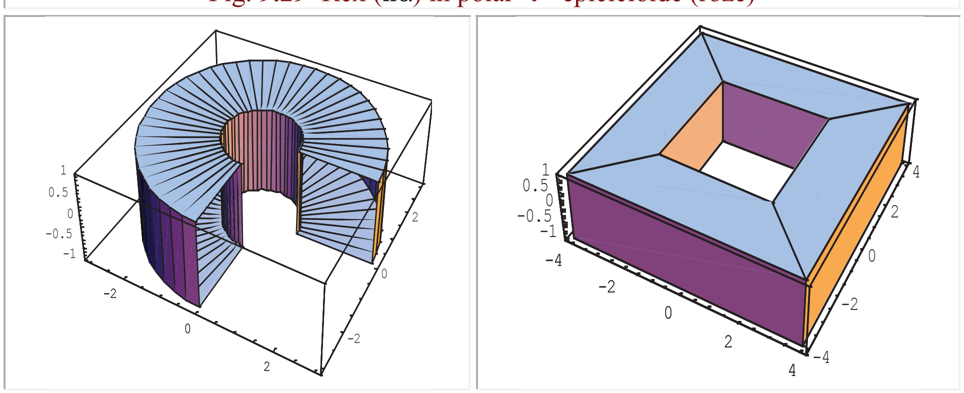


Fig. 9.30 Tor excentric circular si pătrat de secţiuni pătrate

Faţă de notaţiile clasice, cu **t** şi **u**, s-au întrodus alte notaţii care să corespundă **FSM-CE**.

De funcţia de variabila **α** depinde **forma torului :** circulară (cu **FCC**) sau necirculară (**FSM-CE**), în jurul axei **Z**, iar de funcţiile de variabila **θ** depinde **forma secţiunii :** circulare sau necirculare ale torului.

Aşa cum s-a mai afirmat, prin simpla înlocuire a **FCC** cu **FCE** , de exemplu, se obţin noi forme matematice, sau, mai precis **supermatematice**.

Astfel, înlocuind în (9.56) funcţiile circulare centrice de variabila **θ** cu cele cvadrilobe (cos**θ** → **coqθ** şi pe sin**θ** → **siqθ)** se obţine un **tor circular de secţiune pătrată,** reprezentat în **figura 9.30**. de ecuaţiile parametrice (9.57).

Prin înlocuirea tuturor **FCC** cu funcţii cuadrilobe, rezultă un tor pătrat de secţiune pătrată (**Fig. 9.30**) cu ecuaţiile parametrice din relaţia (9.58).

(9.57) $$\begin{cases} x = (A + coq\theta)\cos\alpha \\ y = (A + coq\theta)\sin\alpha \Rightarrow \; A = 2, \quad \propto \in [0, 3\pi/2] \quad și \quad \theta \in [0, 2\pi \\ \qquad z = siq\theta \end{cases}$$

In **figura 9.31** sunt prezentate un tor pentagonal şi unul hexagonal de secţiuni circulare, obţinute prin artificii de programare, în sensul că s-a dat comanda **PlotPoints→(60, 6)** pentru pentagon şi **PlotPoints→(60, 7)** pentru hexagon.

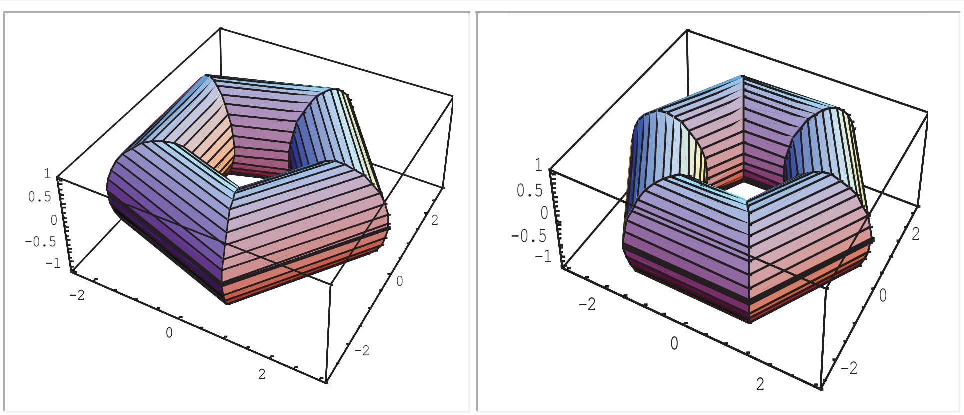


Fig. 9.31 Tor pentagonal şi tor hexagonal trucat

Dacă **FCC** de **θ** (cos**θ** şi **sinθ**) din (9.56) se înlocuesc cu **FSM-CE**, (cex **θ** şi sex **θ**), se obţin ecuaţiile parametrice (9.59) şi torul excentric din figura 9.32.

(9.58) $$\begin{cases} x = coq\,\alpha(A + coq\,\theta) \\ y = \sin q(A + coq\,\theta) \qquad \boldsymbol{\alpha} \in [0,\, 2\pi/2] \;\; \text{si} \;\; \boldsymbol{\theta} \in [0,\, 2\pi]\,,\; \mathbf{A = 3} \\ \qquad z = siq\,\theta \end{cases}$$

9.3.4 FORME DE ŢEVI ŞI ÎMBINAREA LOR DE COLŢ

Deoarece, un cilindru **circular** drept este reprezentat de ecuaţiile parametrice

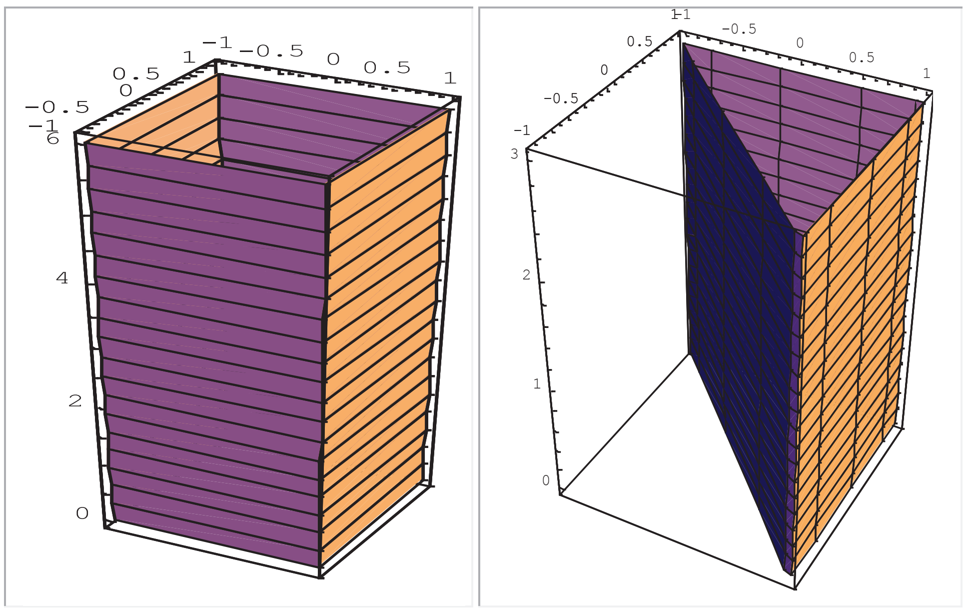


Fig. 9.33 Cilindri drepţi de secţiune pătrată şi triunghiulară

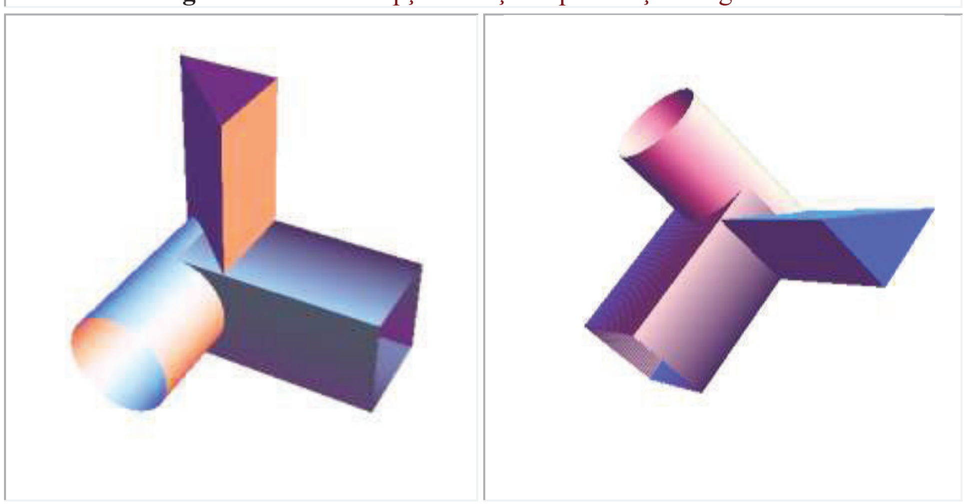


Fig.9.34 Îmbinare de colţ cu ţevi de secţiuni diferite

(9.59) $\begin{cases} x = cos \propto \\ y = sin \propto, \\ z = \theta \end{cases}$

în care α ∈ [0, 2π] şi θ = H, înalţimea cilindrului, prin înlocuirea **FCC** în (9.59) cu funcţiile cuadrilobe corespunzatoare sau cu funcţiile dex (θ = α) şi dex (θ ± π/2) de excentricitate numerică **s = 1**, se obţin cilindri drepţi de secţiune **pătrată (**Fig**.9.33).**

În fine, prin programarea corespunzatoare a celor trei tipuri de cilindri se obţin îmbinări de colţ, ca cea din **figura 9.34.**

Obiecte 3D, interesant pentru că demonstrează faptul că ecuaţii simple **SM** pot reprezenta corpuri complexe sunt prezentate în mai multe vederi în **figura 9.35**.

Încheiem cu corpuri 3D de forma unor elice (**Fig.9.36**), circulare, pătrate şi triunghiulare, cu pas constant într-o rotaţie 2n şi cu pas nul în urmatoarele rotaţii cu 2n. Aici, n = 1. Situaţia descrisă se repetă periodic, după 4n rotaţii.

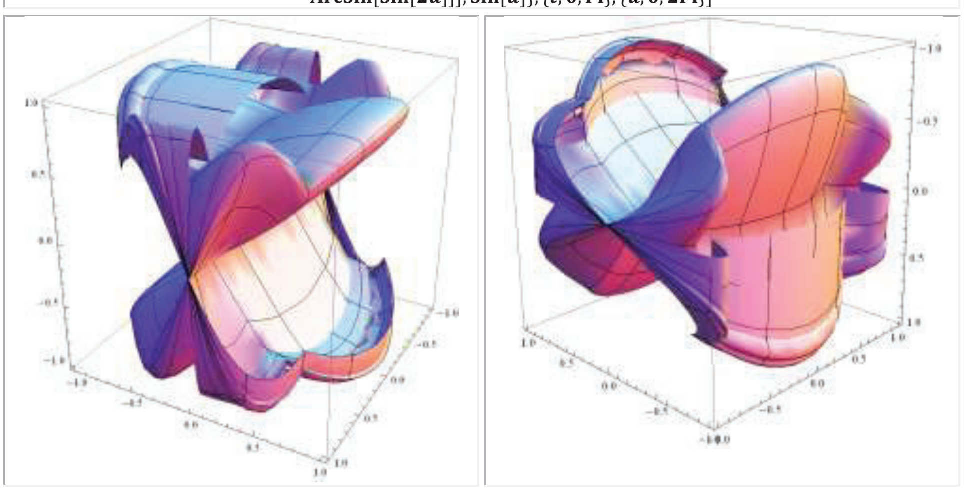
Referindu-ne la onbiecte 3D complexe, exprimate matematic de relaţii simple, nu putem să omitem „cuburile supermatematice" din **figurile** 9.37.

Unele ecuaţii parametrice sunt de excentricitate constantă, iar altele de excentricitate variabilă. În toate cazurile, excentrul S a variat doar pe axa Ox (ε = 0), deobicei pe partea ei pozitivă (s > 0).

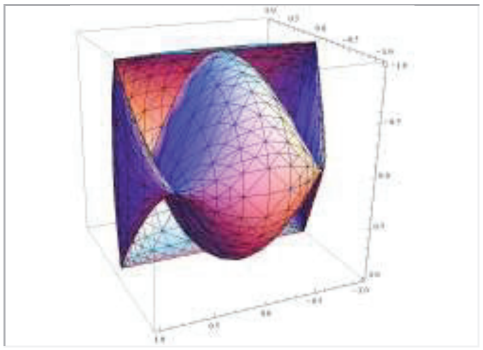
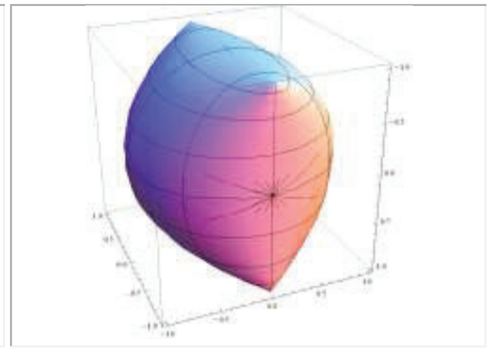
9.3.5 ALTE ALICAŢII

Alte aplicaţii pot fi văzute pe website-ul www.SuperMathematica.com în lucrarea "Tehno-Art of Selariu Supermathematics Functions" Editura ARP, 2007, USA.

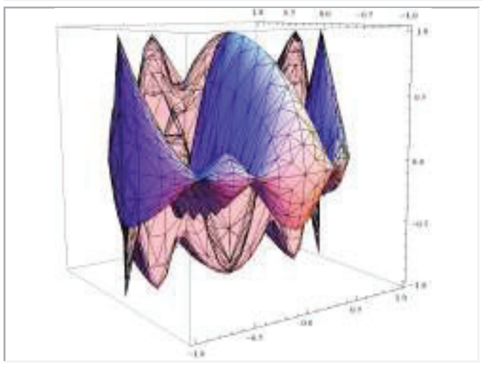
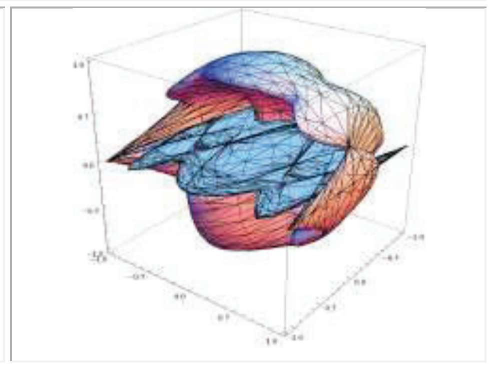
ParametricPlot3D[{Sin[t − ArcSin[Sin[3t]]]Cos[u], Cos[t − ArcSin[Sin[2t]]]Cos[u − ArcSin[Sin[2u]]], Sin[u]}, {t, 0, Pi}, {u, 0, 2Pi}]



ParametricPlot3D[{ Sin[t-ArcSin[Sin[t]]] Cos[nu], Cos[t-ArcSin[Sin[t]]] Cos[u-ArcSin[Sin[u]]], Sin[nu]}, {t,0,Pi}, {u,0, 2 Pi}]

n = 1	**n=2**
	

ParametricPlot3D[{Sin[t − ArcSin[Sin[t]]]Cos[u], Cos[t − ArcSin[Sin[3t]]]Cos[u − ArcSin[Sin[3u]]], Sin[u]}, {t, 0, Pi}, {u, 0, 2Pi}

ParametricPlot3D[{Sin[t − ArcSin[Sin[t]]]Cos[u]^2, Cos[t − ArcSin[Sin[t]]]Cos[u − ArcSin[Sin[u]]], Sin[u]^2}, {t, 0, Pi}, {u, 0, 2Pi}

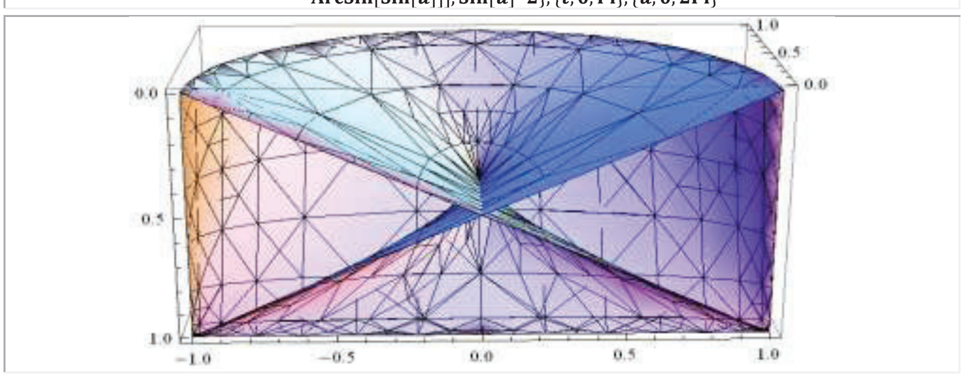


Fig.9.35 Obiect **SM** 3D

Fig.9.35,b Obiecte SM diverse in 3D

Elicele circulare din **figura 9.36** pot să realizeze succesiunea de rotire cu 2n rotaţii fără inalţare/pas pe z, apoi cu rotire de 2n ori şi pasul pe z cu ajutorul **FSM-CE** derivat excentric de variabila excentrică dexθ de excentricitate s = 1. Elicele pătrate sunt realizate cu aceeaşi funcţie.

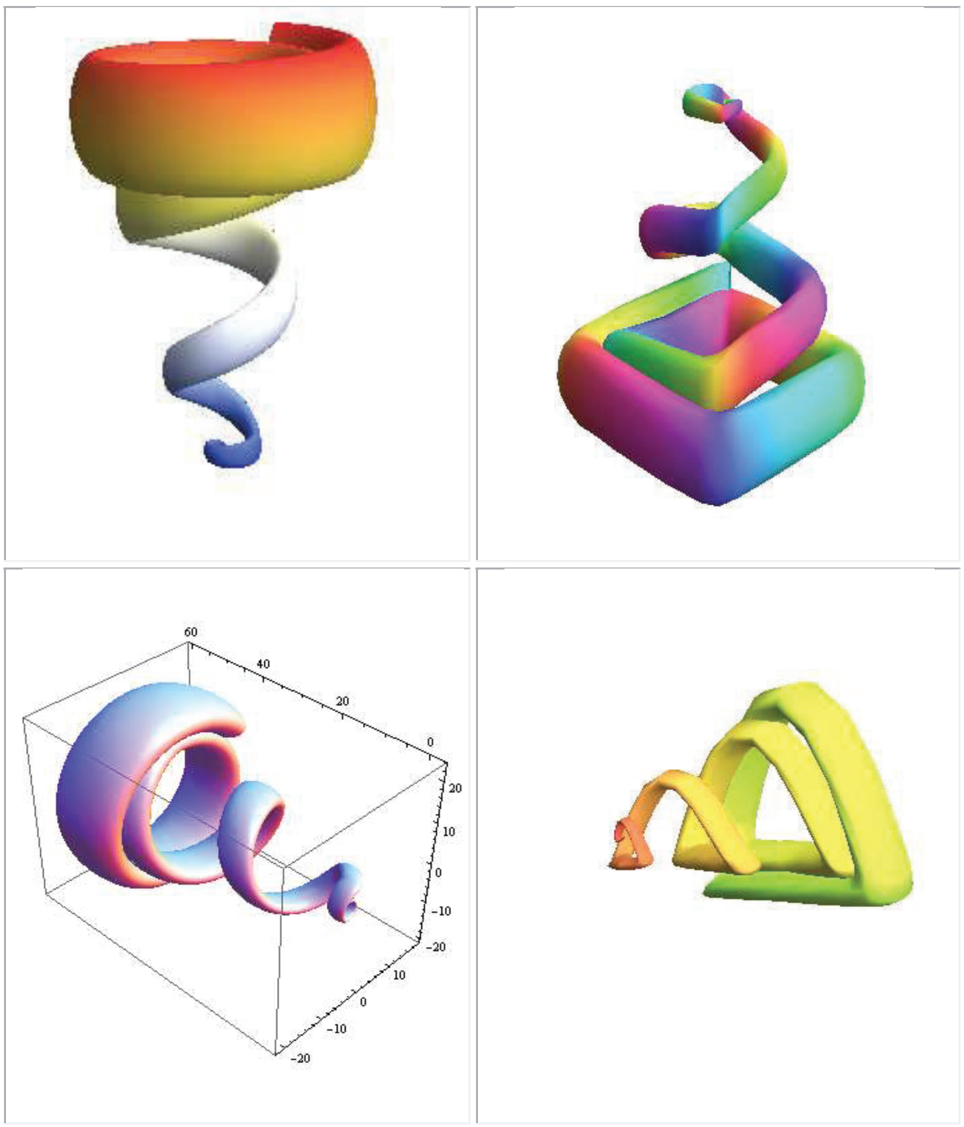
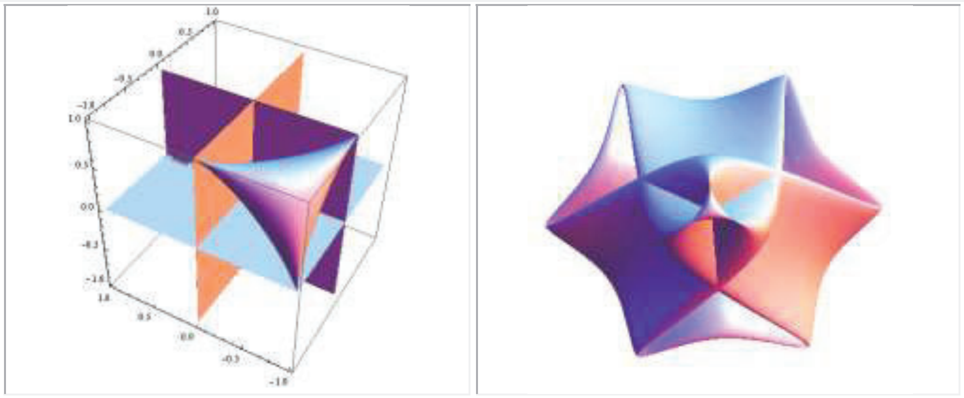


Fig.9.36 Elice supermatematice circulare, pătrate şi triunghiulare



$$\begin{cases} x = sex[u, S(1{,}0)] \\ y = sex[v, S(1{,}0)] \\ z = sex[u+v, S(1{,}0)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = sex[u, S(0{,}8; 0)] \\ y = sex[v, S(0{,}8; 0] \\ z = sex[u+v, S(0{,}8; 0)] \end{cases}$$

Fig.9.37,a Obiecte matematice de excentricitate s constantă (s =1← şi s = 0,8→)

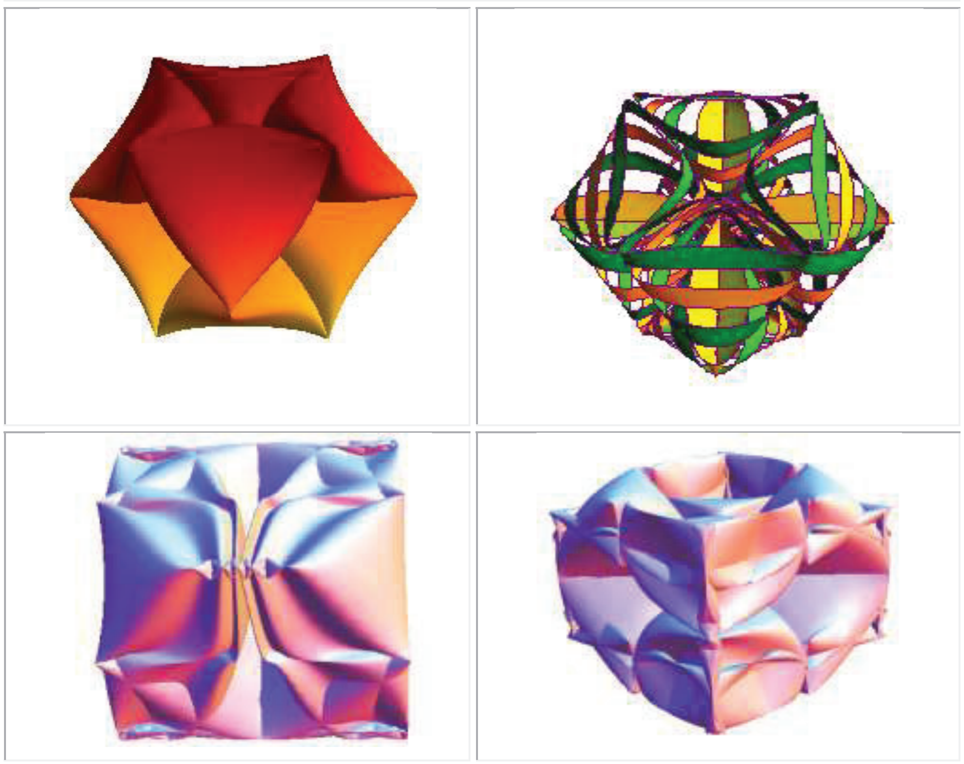
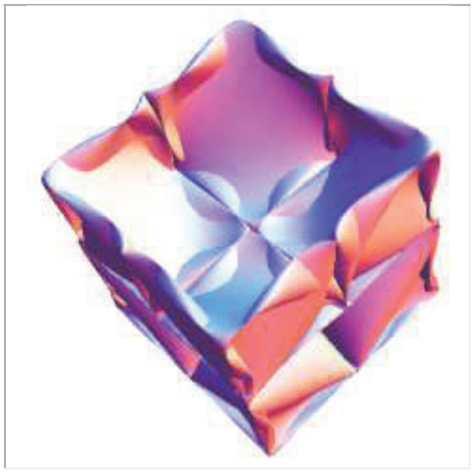
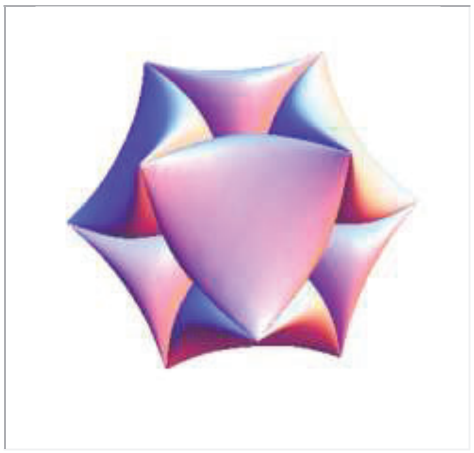


Fig.9.37,b Obiecte supermatematice de excentricitate s variabilă

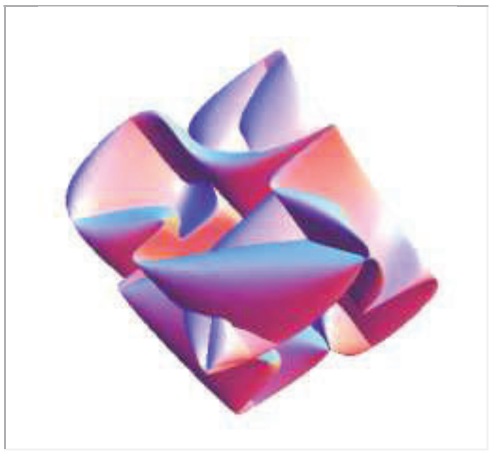


ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[0.9 Cos[3 u] Sin[u]]],Sin[v-ArcSin[0.9 Cos[3 v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[0.9 Sin[2 u+2 v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}, PlotPoints→40, PlotStyle→Specularity[White,50],Mesh→None, Axes→False, Boxed→False]

ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[0.9 Cos[3 u] Sin[u]]],Sin[v-ArcSin[0.9 Cos[3 v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[0.9 Tan[2 u+2 v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}, PlotPoints→40,PlotStyle→Specularity[White,50], Mesh→None, Axes→False, Boxed→False]

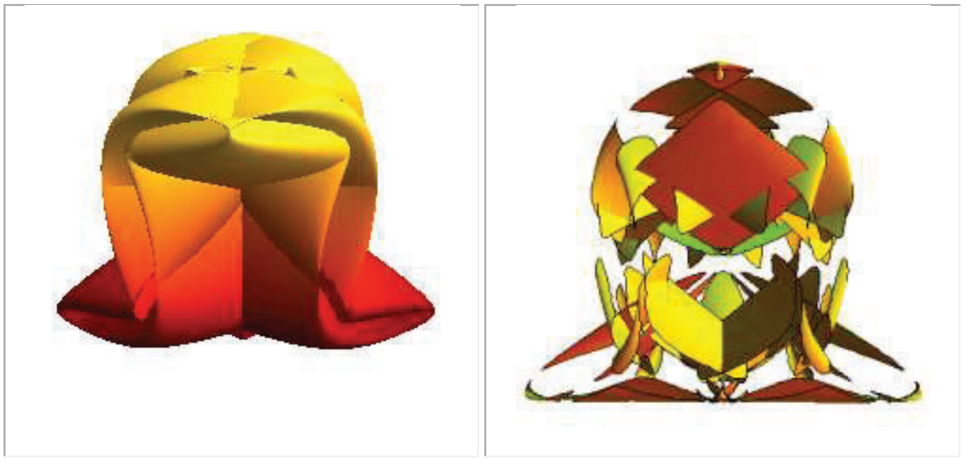


ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[0.9 Cos[u] Sin[u]]],Sin[v-ArcSin[0.9 Cos[v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[0.9 Cos[u+v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi},PlotPoints→40, PlotStyle→Specularity[White,50],Mesh→None, Axes→False, Boxed→False]

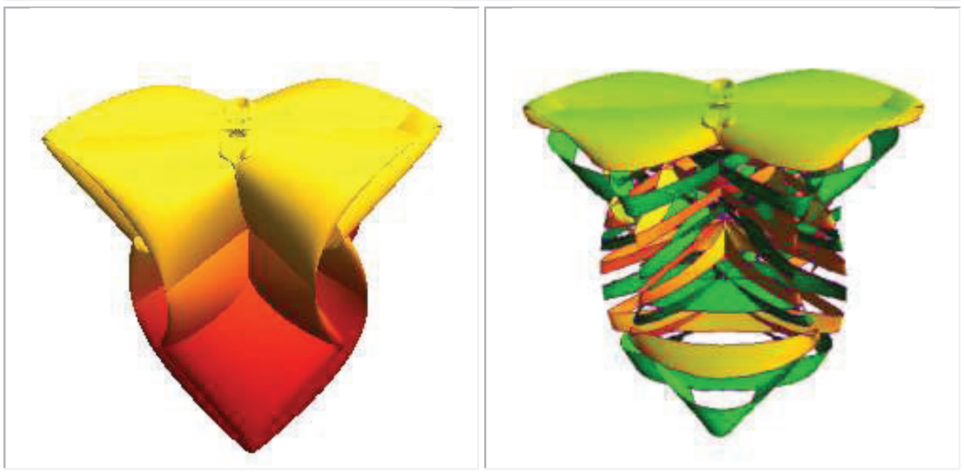


ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[0.9 Cos[2 u] Sin[u]]],Sin[v-ArcSin[0.9 Cos[2 v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[0.9 Cos[u+v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}, PlotPoints→40,PlotStyle→Specularity[White,50], Mesh→None, Axes→False, Boxed→False]

Fig.9.37,c Obiecte supermatematice de **excentricitate s variabilă**



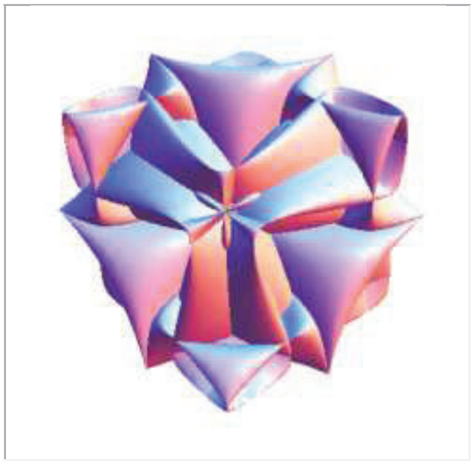
ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[Sin[u] Sin[u]]],Sin[v-ArcSin[Sin[v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[0.1 Sin[u+v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi},PlotPoints→40,PlotStyle→Specularity[White,50],Axes→None, Boxed□False, Mesh□None,ColorFunction→"SolarColors"]



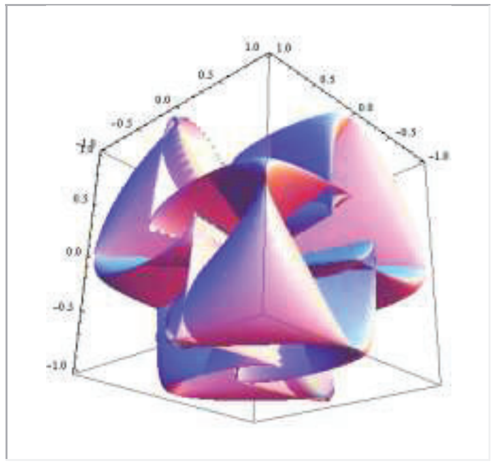
ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[Sin[u] Sin[u]]], Sin[v-ArcSin[Sin[v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[0.1 Sin[u+v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}, PlotPoints→40, Boxed→False,Axes→None,PlotPoints→25, MeshFunctions→{#3&},MeshStyle→Purple,MeshShading→ {None,Green,None,Yellow}]

$$\begin{cases} x = sexu.sinv \\ y = sexu.sinv \\ z = sex(u+v).\sin(u+v) \end{cases}$$

Fig.9.37,c Obiecte supermatematice de **excentricitate s variabilă**



ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[0.9 Cos[2 u] Sin[u]]],Sin[v-ArcSin[0.9 Cos[2 v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[0.9 Cos[2 u+2 v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi},PlotPoints→40, PlotStyle→Specularity[White,50], Mesh→None, Axes→False, Boxed→False]



ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[Sin[u] Sin[u]]],Sin[v-ArcSin[Sin[v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[Sin[u+v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}, PlotPoints→40, PlotStyle→Specularity[White,50], Mesh→None]

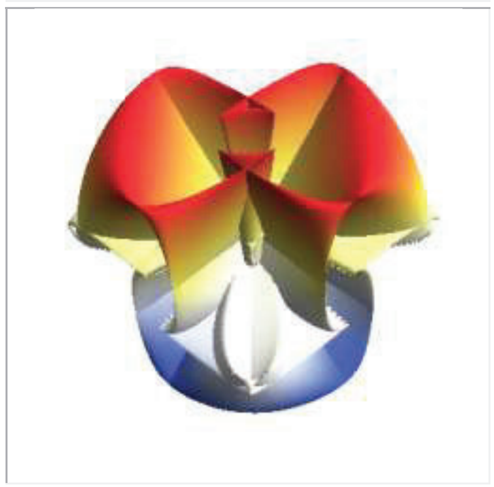
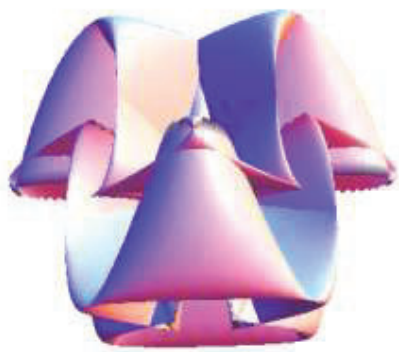
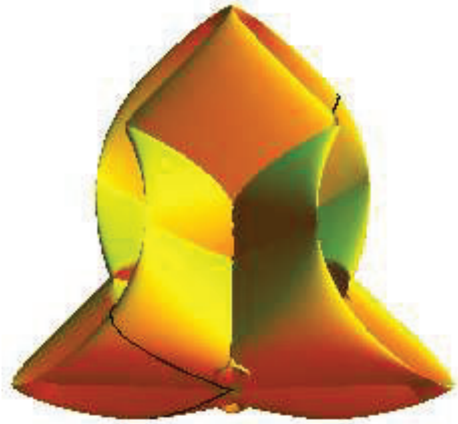


Fig.9.37,d Obiecte supermatematice de **excentricitate s variabilă**

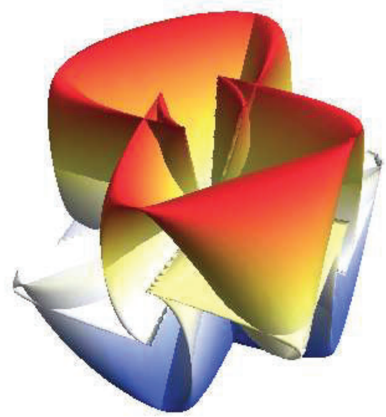


ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[Sin[u] Sin[u]]],Sin[v-ArcSin[Sin[v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[Sin[u+v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi]



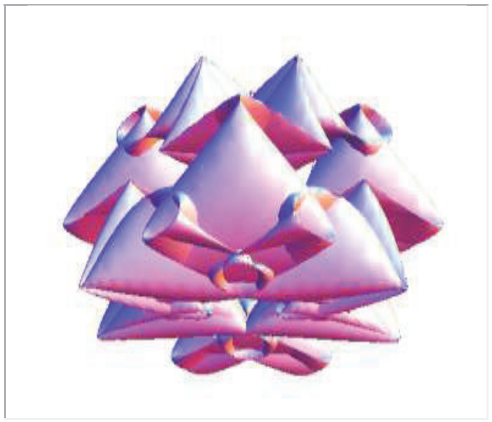
ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[Sin[u] Sin[u]]],Sin[v-ArcSin[Sin[v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[0.1 Sin[u+v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}]

ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[0.4 Cos[u] Sin[u]]],Sin[v-ArcSin[0.4 Cos[v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[0.9 Cos[u+v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}, PlotPoints→40, PlotStyle→Specularity[White,50],Mesh→None, Axes→False, Boxed→False]

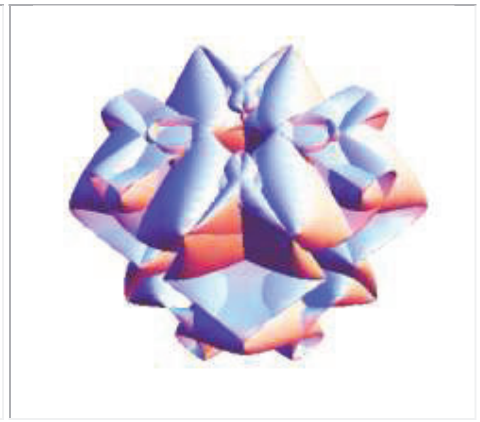


ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[Sin[u] Sin[u]]],Sin[v-ArcSin[Sin[v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[Sin[u+v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}, PlotPoints→40, PlotStyle→Specularity[White,50],Mesh→None, Axes→False, Boxed→False]

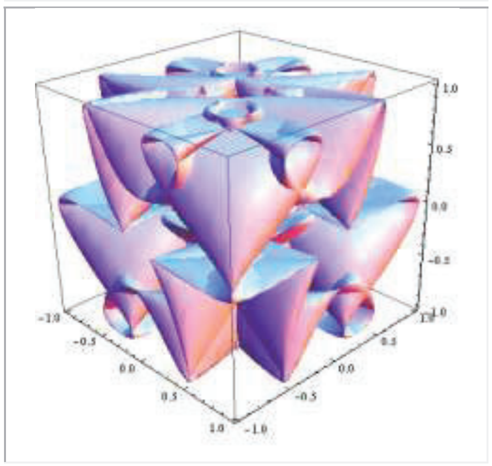
Fig.9.37,e Obiecte supermatematice de excentricitate s variabilă



ParametricPlot3D[{Sin[u+ ArcSin[0.9 Cos[3 u] Sin[u]]],Sin[v+ArcSin[0.9 Cos[3 v] Sin[v]]],Sin[u+v+ArcSin[0.9 Sin[3 (u+v)] Sin[u+v]]]}, {u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}, PlotPoints→40, PlotStyle→Specularity[White,50], Mesh→None, Axes→False, Boxed→False]



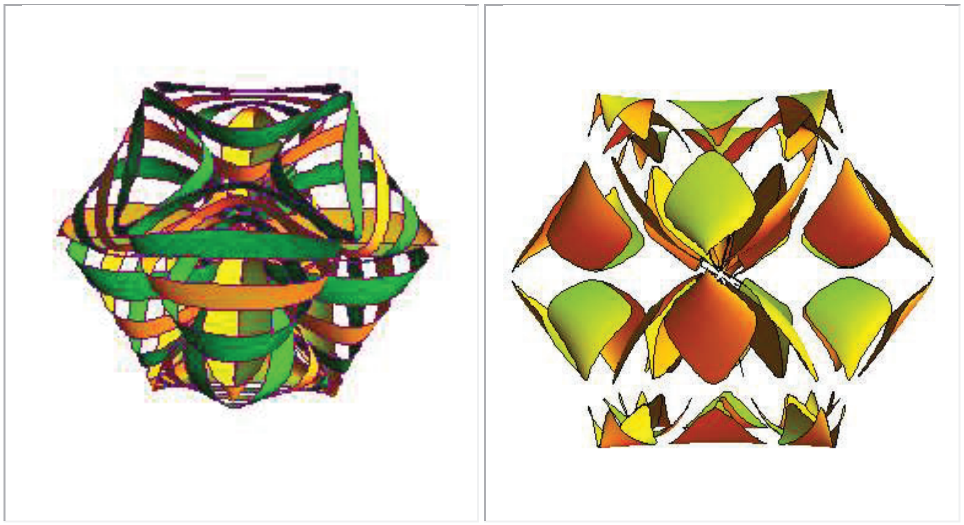
ParametricPlot3D[{Sin[u+ ArcSin[0.9 Cos[3 u] Sin[u]]],Sin[v+ArcSin[0.9 Cos[3 v] Sin[v]]],Sin[u+v+ArcSin[0.9 Sin[3 (u+v)] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}, PlotPoints→40, PlotStyle→Specularity[White,50], Mesh→None, Axes→False, Boxed→False]



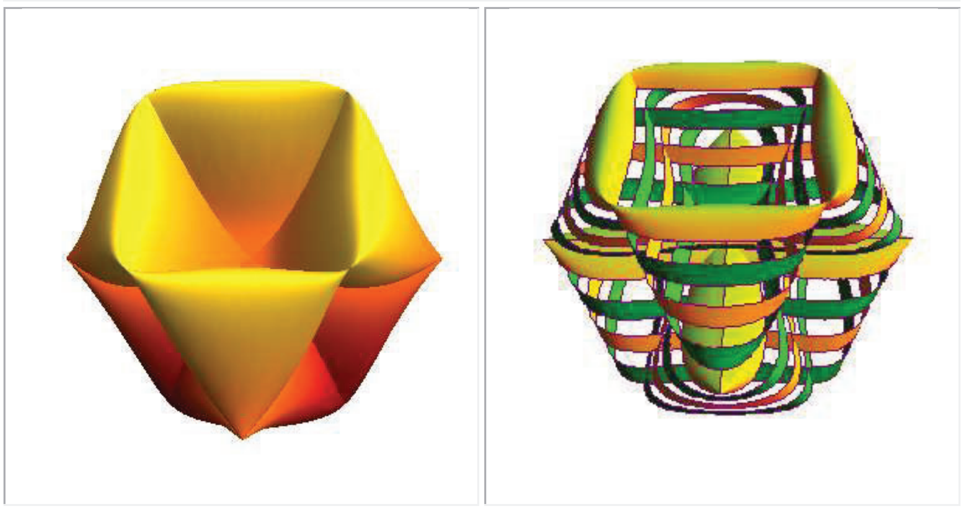
ParametricPlot3D[{Sin[u+ ArcSin[0.9 Cos[3 u] Sin[u]]],Sin[v+ArcSin[0.9 Cos[3 v] Sin[v]]], Sin[u+v+ArcSin[0.9 Sin[3 (u+v)] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi}, {v,0,2 Pi}, PlotPoints□40, PlotStyle→Specularity[White,50], Mesh→None]

ParametricPlot3D[{Sin[u+ ArcSin[0.9 Cos[3 u] Sin[u]]],Sin[v+ArcSin[0.9 Cos[3 v] Sin[v]]], Sin[u+v+ArcSin[0.9 Cos[3 (u+v)] Sin[u+v]]]},{u,0,2Pi}, v,0,2 Pi}, PlotPoints→40, PlotStyle→Specularity[White,50], Mesh→None, Axes→False, Boxed→False]

Fig.9.37,f Obiecte supermatematice de excentricitate s variabilă



ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[0.9 Cos[u] Sin[u]]], Sin[v-ArcSin[0.9 Cos[v] Sin[v]]], Sin[u+v-ArcSin[0.6 Cos[u+v] Sin[u+v]]]}, {u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}]



ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[0.4 Cos[u] Sin[u]]],Sin[v-ArcSin[0.4 Cos[v] Sin[v]]],Sin[u+v-ArcSin[0.9 Cos[u+v] Sin[u+v]]]},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi},PlotPoints→40,PlotStyle→Specularity[White,50],Axes→None, Boxed→False, Mesh→None,ColorFunction→"SolarColors"]

Fig.9.37,g Obiecte supermatematice de excentricitate s variabilă

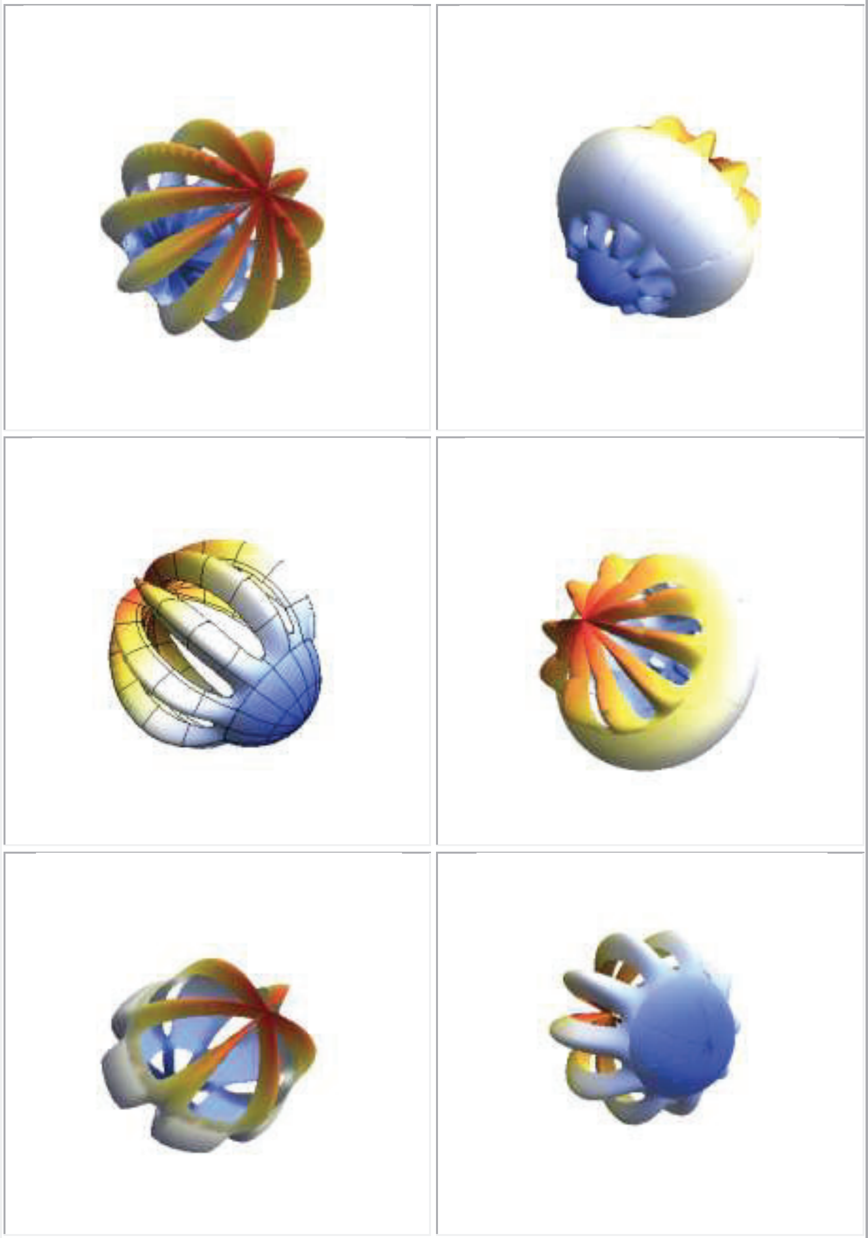


Fig.9.38 Obiecte supermatematice de excentricitate s variabilă

www.SuperMatematica.Ro

Motto: "Fiecare ştie ce este o **curbă**, până când nu va învăţa matematică.
Atât, încât se va încurca în nenumărate excepţii."
Felix Klein

Capitolul 10.

EXCENTRICELE – CURBE SUPERMATEMATICE

10.1 ÎN LOC DE INTRODUCERE

Denumirea de **excentrice** a fost introdusă în matematică de regretatul matematician, al **Universitaţii "POLITEHNICA" din Timişoara**, **Anton Hadnady**. Ea a fost atribuită tuturor curbelor noi, obţinute cu ajutorul **funcţiilor supermatematice** (**FSM**).

FSM excentrice, elevate şi **exotice, circulare** şi **necirculare**, **hiperbolice**, **cuadrilobe** ş.a. au fost introduse, la rândul lor, în matematică de autor.

Prima lucrare din acest domeniu, al noilor complemente de matematică, reunite sub denumirea provizorie de **SuperMatematică** (**SM**), se referea la "**Funcţii circulare excentrice**" şi a fost publicată [1] la prima Conferinţa Naţională de "Vibraţii în Construcţia de Maşini", în anul 1978.

O sinteză a lucrărilor din domeniul **SM**, ulterior publicate, precum şi a unor cercetări şi rezultate noi, nepublicate, fac obiectul prezentei lucrări. Printre acestea se numără şi noile curbe, denumite **excentrice**, prezentate în acest capitol.

10.2 DEFINIREA ŞI CLASIFICAREA EXCENTRICELOR.

Cercul este cea mai simplă şi mai regulată curbă închisă. Este curba pe care o divinizau grecii antici. Aceiaşi greci care l-au hulit pe **Apollonius din Perga** (260..170 î.e.n) pentru "**defăimarea" cercului** şi introducerea în matematică a "**curbelor urâte**", a **parabolei**, elipsei şi a hiperbolei. Şi a introdus în matematică doar trei curbe derivate din cerc. Ce va păţi cel care a multiplicat la infinit toate curbele existente / cunoscute în **MC** şi a introdus în matematică o pleiadă de curbe noi ?

Dar **poligoanele** regulate, ca de exemplu pătratul şi cele neregulate, ca de exemplu, patrulaterul, triunghiul dreptunghic echilateral şi oarecare (scalen) ş.a. sunt oare **curbe** ?

Cercul este definit ca un **loc geometric** sau ca **mulţimea** punctelor cu o anumită proprietate. Al punctelor, din plan, egal depărtate, la o distanţă **R,** denumită raza cercului, de un punct fix- de exemplu O(0,0) - numit centru.

Definiţie pe care noi am generalizat-o, ca fiind "***locul geometric al punctelor, din plan, pentru care distanţa, pe care am numit-o rază excentrică - de variabilă excentrică $r_{1,2}(\theta)$, sau de cea centrică $r(\alpha_{1,2})$, de la un punct oarecare din plan, denumit excentru $E(e,\varepsilon)$, se poate exprima cu una dintre relaţiile***

(10.1) $$\mathbf{r_{1,2}(\theta)} = R.\mathbf{rex_{1,2}\theta} = \mathbf{r(\alpha_{1,2})} = R.\mathrm{Rex}\alpha_{1,2}$$

De ce este mai generală această nouă definiţie ?

Pentru că, dacă **E** coincide cu O, atunci excentricitatea devine nulă ($e = s = 0$) şi funcţiile radial excentrice (**$rex_{1,2}\theta$** $= Rex\alpha_{1,2} =$ **1** şi $\alpha_1 = \theta$ iar $\alpha_2 =$ **θ** $+ \pi$) devin egale cu unitatea şi **$r_{1,2}$** **= ± R**. Adică, se obţine definiţia anterioară, din matematica centrică (**MC**), matematica "actuală" sau ordinară.

Poligoanele sunt definite fie ca o figură geometrică plană, formată dintr-un număr finit de segmente de linii drepte, numite laturi, fie ca o linie frântă închisă, fie ca o suprafaţă plană marginită de segmente de linii drepte, numite laturi.

Cuvântul "CURBĂ" lipseşte !

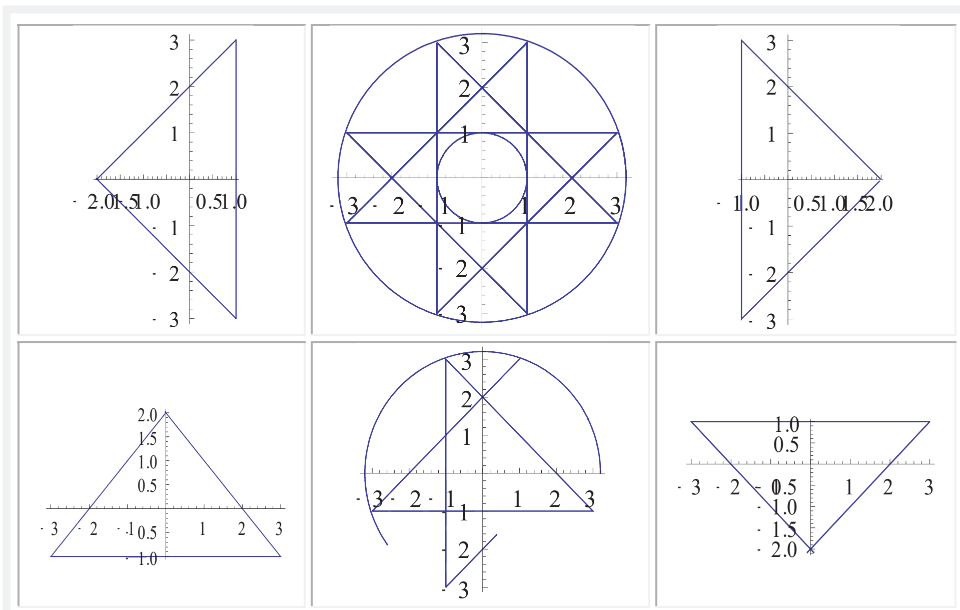


Fig. 10.1 Poligon stelat înscris în cerc, exprimate cu **FSM-CE**

Dreapta şi cercul sunt primele curbe studiate în **MC**. Atunci şi porţiuni ale dreptei, denumite **segmente** de dreaptă, sunt porţiuni de curbă. Rezultă că atât cercul cât şi poligonul **sunt curbe** plane. Deşi, în definiţiile acestora, cuvântul **curbă** lipseşte cu desăvârşire.

Dar cine şi-ar fi închipuit, cu puţini ani în urmă, că ele, cercul şi poligoanele, pot fi exprimate cu aceleaşi relaţii **(super)matematice**. Diferită fiind doar **excentricitatea**, această **nouă dimensiune a spatiului**: **$e = s = 0$** pentru **cerc** şi **$s = 1$**, sau $e = R$, pentru diverse **poligoane** (**Fig. 10.1**).

Cine şi-ar fi închipuit că multe **profilele aerodinamice**, inclusiv profilul aerodinamic **Jukowski, Carafoli** ş.a. (**Fig.10.2**), nu sunt altceva decât nişte **elipse supermatematice** sau, mai precis nişte **excentrice eliptice**, aşa cum se va demonstra în acest capitol.

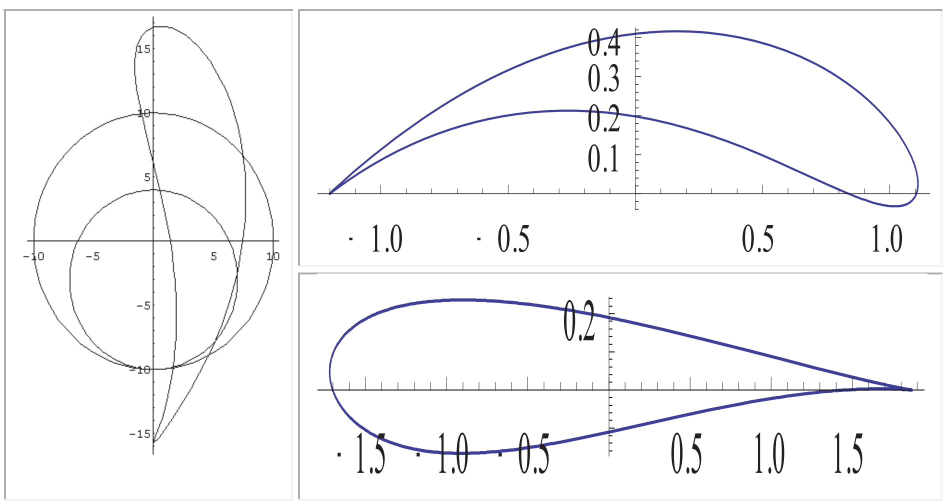
În **figura 10.1** cercul are raza R = 3,2 şi ecuaţiile parametrice arhicunoscute

(10.2) $\begin{cases} x = R.\cos\theta \\ y = R.\sin\theta \end{cases}$, iar **poligonul stelat** se obţine cu ecuaţiile parametrice ale funcţiilor **cvasicvadrilobe**, cosinus ***coqq***nθ şi sinus ***siqq***nθ cuasicvadrilobe de $\frac{3}{1}$nθ şi, aşa cum s-a mai spus / arătat, de **excentricitate numerică s = 1** şi marime / rază **R**

(10.3) $$\begin{cases} x = R.coqqn\theta = R\frac{\cos 3n(\theta-\mathcal{E})}{\sqrt{1-s^2\sin^2 n(\theta-\mathcal{E})}} \\ y = R.siqqn\theta = R\frac{\sin 3n(\theta-\mathcal{E})}{\sqrt{1-s^2\cos^2 n(\theta-\mathcal{E})}} \end{cases}, \quad \text{în care } n \in \mathbb{R},$$

de marime/ raza R = 1în **figura 10.1** şi de excentru **S(s = 1, ε = 0).**

Notaţia $\frac{3}{1}$n(θ – ε) indică faptul că, în ecuaţiile de definire ale funcţiilor **cvadrilobe** (v. Cap. 9), la numărator se iau funcţii de 3n(θ – ε), iar la numitor numai de1n(θ – ε), adică, raportul variabilelor este de $\frac{3}{1}$; n poate lua orice valoare.

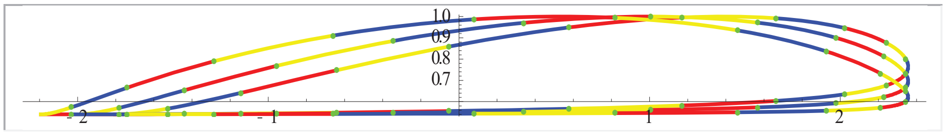


Profil aerodinamic **Jukowski**	Profil aerodinamic **Kármán-Trefftz şi Carafoli**

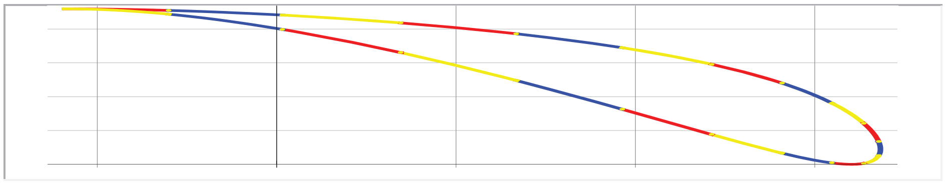
Fig. 10.2, a Excentrice eliptice cunoscute ca profile aerodinamice

Pentru o înţelegere mai facilă a generării poligonului stelat, în aceeaşi figură, au fost prezentate şi secvenţele care corespund unor triunghiuri dreptunghice achilaterale, rotite cu π (cele din stânga faţă de cele din dreapta) şi, respectiv, cu $\frac{\pi}{2}$ (cele de jos faţă de cele de sus) ca părţi / secvenţe şi, respectiv, segmente componente ale poligonului stelat.

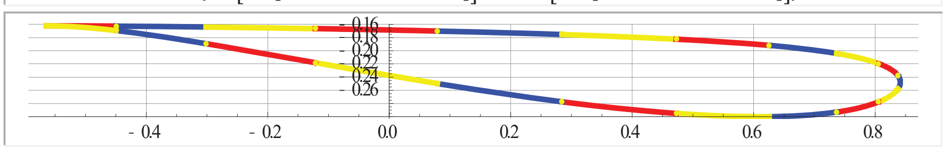
ParametricPlot[Evaluate[Table[{2.8Sin[Sin[t − ArcSin[0.1sCos[t]]]], Cos[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, 7,9}], {t, 0, Pi}]



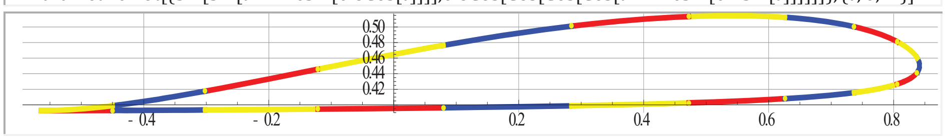
ParametricPlot[Evaluate[Table[{2Sin[Sin[t − ArcSin[0.3Cos[t]]]], −2Cos[Cos[t − ArcSin[0.3Sin[t]]]]}], {t, 0, Pi}]



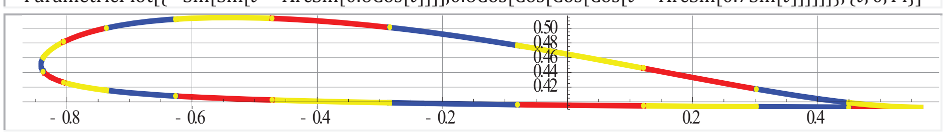
ParametricPlot[{Sin[Sin[t − ArcSin[0.6Cos[t]]]], 0.3Cos[Cos[t − ArcSin[0.6Sin[t]]]]}, {t, 0, Pi}]



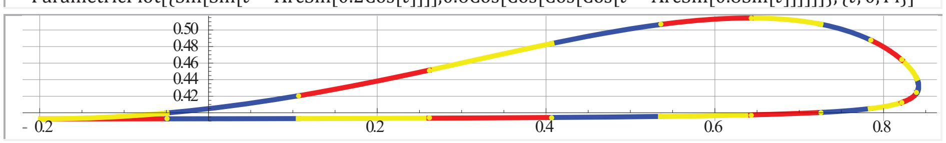
ParametricPlot[{Sin[Sin[t − ArcSin[0.6Cos[t]]]],0.6Cos[Cos[Cos[Cos[t − ArcSin[0.7Sin[t]]]]]]}, {t, 0, Pi}]



ParametricPlot[{−Sin[Sin[t − ArcSin[0.6Cos[t]]]],0.6Cos[Cos[Cos[Cos[t − ArcSin[0.7Sin[t]]]]]]}, {t, 0, Pi}]



ParametricPlot[{Sin[Sin[t − ArcSin[0.2Cos[t]]]],0.6Cos[Cos[Cos[Cos[t − ArcSin[0.8Sin[t]]]]]]}, {t, 0, Pi}]



ParametricPlot[Evaluate[Table[{2Sin[Sin[t − ArcSin[0.1sCos[t]]]], Cos[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]]}, {s, 2,2}], {t, 0, Pi}]

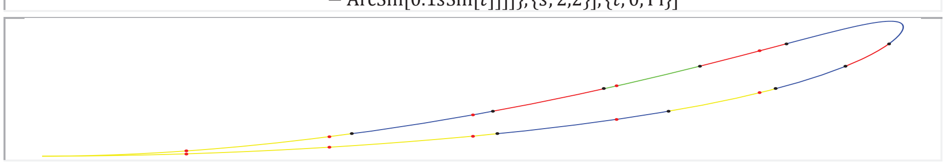
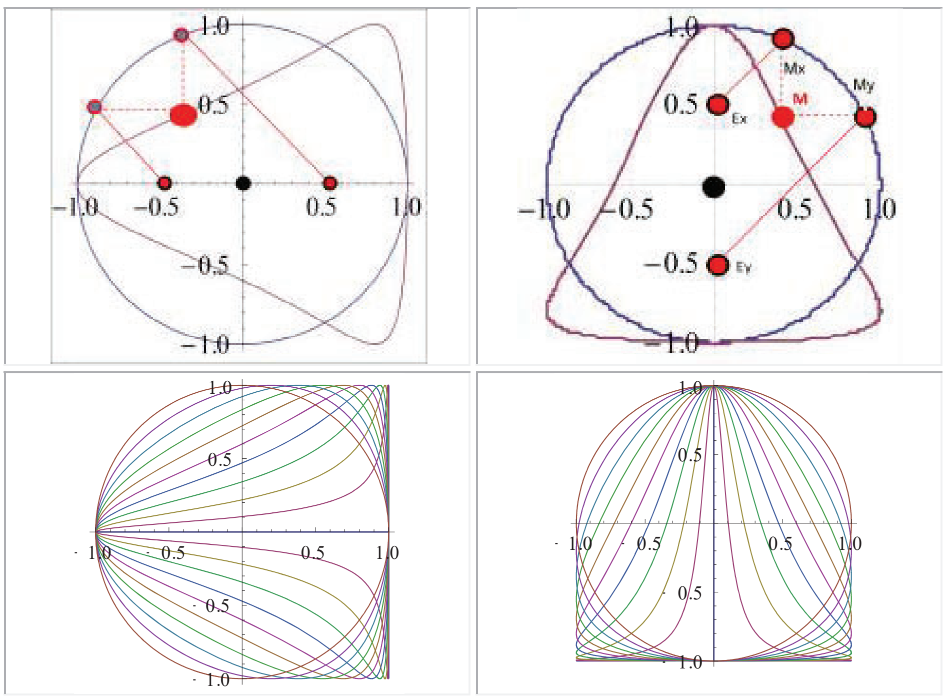


Fig. 10.2,b Alte profile aerodinamice reprezentate cu **FSM-CE**

Poligonul stelat din **figura 10.1** este regulat, deoarece are toate laturile şi unghiurile egale şi admite un cerc circumscris poligonului şi un cerc inscris în poligon, aşa cum sunt reprezentate cercurile şi în centrul **figurii 10.1**.



Ex(0,5; 0) şi Ey (0,5; π) ⊂ Ox	Ex(0,5; $\frac{\pi}{2}$) şi Ey(0,5; 3 $\frac{\pi}{2}$) ⊂ Oy

Fig. 10.3 Excentrice circulare de excentre Ex şi Ey fixe

Alte transformări (continue) ale cercului în pătrat au fost prezentate deja, fiind reprezentate de cvadrilobele şi funcţiile **cvadrilobe SM** şi de cele **Valeriu Alaci**, rotite cu $\frac{\pi}{4}$ faţă de cele **SM**.

Aceleaşi transformări pot fi obţinute, aşa cum s-a mai arătat, cu ecuaţiile parametrice x = dexθ şi y = dex(θ ± $\frac{\pi}{2}$).

Transformarea continuă a cercului în triunghi se obţine cu ecuaţiile parametrice x = cexθ şi y = **cex(θ ±** $\frac{\pi}{2}$**)** $= \mp \boldsymbol{sin\theta}$ **,** aşa cum a mai fost prezentat anterior în acest volumul I al lucrării.

Obţinerea **profilelor aerodinamice**, ca **excentrice eliptice**, reprezentate în figura **10.2**, va fi prezentată în continuare într-un capitol dedicat acestei transformări a elipsei în diverse profile aerodinamice.

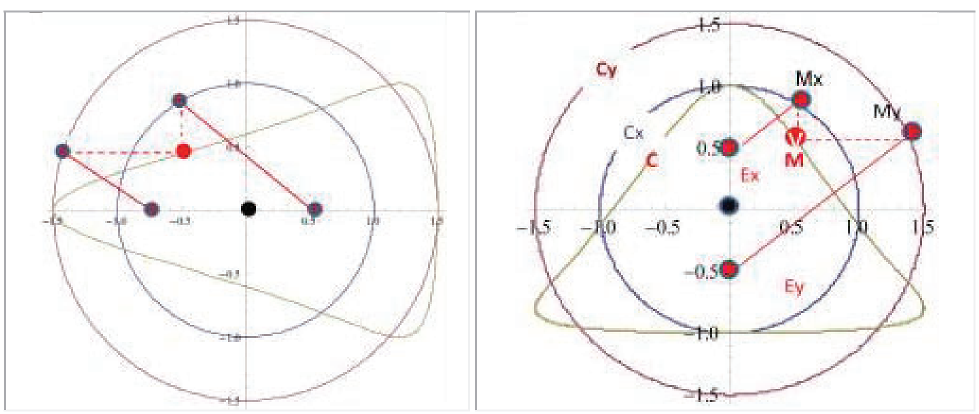
Înainte de a defini excentricele, este necesar să fie definite **centricele**. Operaţie relativ simplă, deoarece, toate curbele cunoscute în matematica centrică, actuală sau ordinară, vor fi numite în continuare **centrice**.

Se va vorbi, astfel, de **centrice** circulare (cercul), eliptice (elipsele), hiperbolice (hiperbolele), parabolice (parabolele), spirale (spiralele), cicloidale (cicloidele), elicoidale (elicele), sinusoidale (sinusurile şi cosinusurile), ovoidale (ovalele), lemniscate (lemniscatele) ş.a.

10.3 EXCENTRICE CIRCULARE ŞI EXCENTRICE ELIPTICE

Excentricele sunt curbe **(super)matematice** a căror ecuaţii sunt exprimate de funcţii supermatematice, în principal, de noile funcţii ale **matematicii excentrice** (**ME**).

Toate **excentricele**, care au corespondente în **MC,** pentru excentricitate nulă, degenerează în curbele **centrice** corespondente, denumite şi **curbe generatoare**.



Ex(0,5;0) şi Ey(0,5;π) ⊂ Oy	Ex(0,5; $\frac{\pi}{2}$) şi Ey(0,5; 3$\frac{\pi}{2}$) ⊂ Ox

Fig. 10.4 Excentrice eliptice a = 1.5, b = 1 de **excentre Ex şi Ey** fixe

Astfel, pentru **e** = s = 0, excenticele circulare degenerează în cerc, excentricele eliptice degenerează în elipsă ş.a.m.d. Fiecărei centrice îi corespund o infinitate de excentrice, pentru infinitatea de valori pe care pot să le ia **excentricitatea reala e** şi cea **numerică s** $\in$ [- ∞, + ∞; \0]. Pe când, numai într-un singur caz, acela al excentricităţii nule, **e = s** = 0, printre **infinitatea de excentrice** se află şi câte **o singură centrică**.

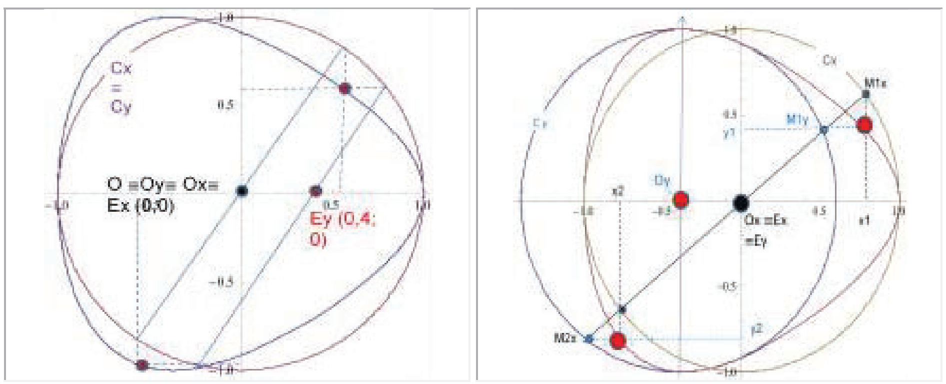
Prima clasificare a excentricelor se face, aşa cum s-a operat deja, în funcţie de curba generică de la care se porneşte: excentrice **circulare**, eliptice, **hiperbolice** etc.

Ele se obţin prin simpla înlocuire a funcţiilor circulare centrice (**FCC**) sau hiperbolice **centrice** (**FHC**) cu cele **excentrice, elevate** sau **exotice** corespondente, circulare (**FCE, FCEl, FCEx**) sau hiperbolice (**FHE, FHEl, FHEx**).

Astfel, de exemplu, se pot deosebi **excentrice spirale excentrice**, **elevate** sau **exotice**, circulare sau hiperbolice.

Deoarece, toate aceste **FSM,** pot fi de **variabilă excentrică θ** sau de **variabilă centrică α** şi în denumirea şi definirea excentricelor se va specifica acest lucru. Astfel, de exemplu, putem deosebi excentrice eliptice **de variabilă excentrică θ** ca şi excentrice eliptice **de variabilă centrică $\alpha_{1,2}$** .

Dacă excentrul **E(e, ε)** este un punct fix sau unul variabil în plan, care se mişcă după anumite legi, atunci şi excentricele se vor denumi **de excentru fix** sau **de excentru variabil**.



Metoda I-a: **Centrele O** în coincidere	Metoda a II-a **Excentrele E** în coincidere

Fig. 10.5 Cele două metode de construcţie a unei excentre circulare.

Dacă excentrul **E(e,ε)** are **ε** = constant, atunci se poate vorbi de execentrice **de excentricitate constantă** (**e** = constant), care în general nu se mai specifică; insăşi lipsa de specificaţie indicând că este vorba de **e = ct**, sau **de excentricitate variabilă**, trebuind sau (putându-se) să se specifice legea de variaţie a excentricitaţii.

Ecuaţiile parametrice ale excentricelor circulare şi a celor eliptice sunt

$$\begin{cases} x = a.cex(\theta, Ex) \\ y = b.sex(\theta, Ey) \end{cases} \tag{10.4}$$

Dacă a = b = R se obţin excentrice circulare de raz R, a căror curbe în 2D sunt reprezentate în **figura 10.3**. În partea superioară a figurii se prezintă construcţia lor, într-o prima metodă, în care centrele celor două cercuri, de aceeaşi rază R = 1, se coincid, împreună cu centrele lor (Ox ≡ Oy) iar excentrele **Ex** şi **Ey** sunt distincte.

Cele două metode sunt prezentate comparativ în **figura 10.5**. Literele x şi, respectiv, y adăugate centrelor, excentrelor şi, în general, tuturor mărimilor cu privire la excentrice, indică coordonata x şi, respectiv, y pe care o determină / desemnează respectivul element geometric.

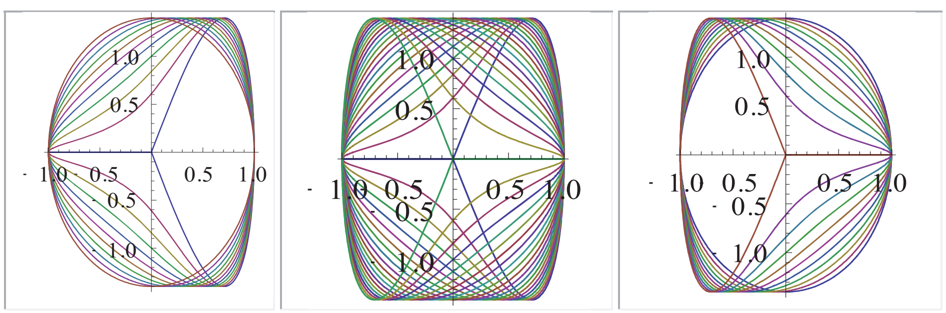
În partea inferioară a **figurii 10.3** sunt prezentate graficele excentricelor circulare, pentru R = 1, e = s ∈ [0,1]. Dacă a şi b sunt semiaxele elipsei, a ≠ b, atunci se obţin excentrice eliptice, ca cele prezentate în **figura 10.4.**

Se observă, şi din aceste figuri, că excentricele, circulare sau eliptice, sunt curbe simetrice faţă de axa pe care sunt plasate ambele excentre **Ex** şi **Ey**. Pe x, în stânga figurii şi pe axa y în dreapta ei.

În **figura 10.5** sunt prezentate, comparativ, cele două metode de desenare grafică a unei excentrice. Fie ele circulare sau eliptice.

10.4 CONSTRUCŢIA EXCENTRICELOR

Prima metodă păstrează cercurile **Cx** şi **Cy** în coincidere, în cazul excentricelor circulare, iar în cazul excentricelor eliptice, coincid doar centrele **Ox** şi **Oy** ale celor două cercuri: Ox, centrul cercului Cx, care va genera coordonata x a excenticei şi Oy, centrul cercului Cy, care va genera coordonata y a excentricei. Prin excentrele **Ex** şi **Ey** se duc două drepte d_x şi d_y paralele intre ele şi care fac unghiul $\theta \in [0, 2\pi]$ cu axa x. Intersecţiile celor două drepte cu cele două cercuri vor da cele două coordonate x şi y ale punctului M(x,y) al excentrei.



$e_y \in$ [-1,0]	$e_y \in$ [-1,1]	$e_y \in$ [0,1]

Fig. 10.6 Excentrice eliptice (a = 1, b = 1,3)
$Ex \equiv Ox \rightarrow Ex(e_x = 0)$, $Ey(e_y \in [-1,1], \varepsilon_y = 0)$

Metoda a doua necesită doar o singură dreaptă $d \equiv d_x \equiv d_y$, deoarece se coincid cele două excentre **Ex ≡ Ey**. Coinciderea este posibilă prin translatarea reciprocă, corespunzatoare, a celor două cercuri Cx şi Cy, pe baza teoremei următoate.

10.5 TEOREMA EXCENTRELOR EXCENTRICELOR:

Excentricele nu-şi modifică forma prin deplasarea nedeterminată a cercului Cx (împreuna cu centrul Ox şi Excentrul Ex) pe direcţia y şi a cercului Cy (împreuna cu centrul Oy şi excentrul Ey) pe direcţia x, deoarece, deplasările

exclusive pe direcţia y nu modifică coordonata x, iar deplasările exclusive pe direcţia x nu modifică coordonata y.

Oricare ar fi poziţiile excentrelor **Ex** şi **Ey**, ducând prin Ex o paralelă cu axa y sau o verticală şi prin **Ey** o paralelă cu axa x, sau o orizontală, la intersecţia lor se vor plasa cele două excentre **Ex** şi **Ey**, care vor fi, acum, în coincidere.

Faţă de acest punct comun, se vor stabili poziţiile relative ale celor doua centre, Ox şi Oy, care nu vor mai fi, în acest caz, în coincidere, centre din care, cu razele R, sau, respectiv, a şi b, se vor trasa cercurile Cx şi Cy.

Intersecţiile celor două cercuri, cu singura dreaptă **d**, dusă prin excentrele Ex şi Ey, în coincidere, vor determina coordonatele punctelor M(x,y) ale excentricei : x = d ∩ Cx şi y = d ∩ Cy.Teorema este valabila numai dacă dreapta comună ale excentrelor este axă (x sau y). În **figura 10.6** sunt prezentate graficele excentricelor eliptice simetrice faţă de axa x.

10.6 EXCENTRICE HIPERBOLICE.

Ecuaţia hiperbolei

(10.5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ are ecuaţiile parametrice

(10.6) $\begin{cases} x = \dfrac{a}{cos\alpha} \\ y = b\, tan\alpha \end{cases}$, astfel că, prin înlocuirea funcţiilor circulare centrice (**FCC**) cu cele excentrice (**FSM-CE**) corespondente, se obţin excentrice hiperbolice de ecuaţii parametrice

(10.7) $\begin{cases} x = \dfrac{a}{cex\theta} \\ y = b\, tex\theta \end{cases}$ cu graficele din **figura 10.7,a** pentru a = b = 1 şi câte unul dintre excentre, pe rând, a fost menţinut în originea O(0,0); **Ey** sus şi Ex jos.

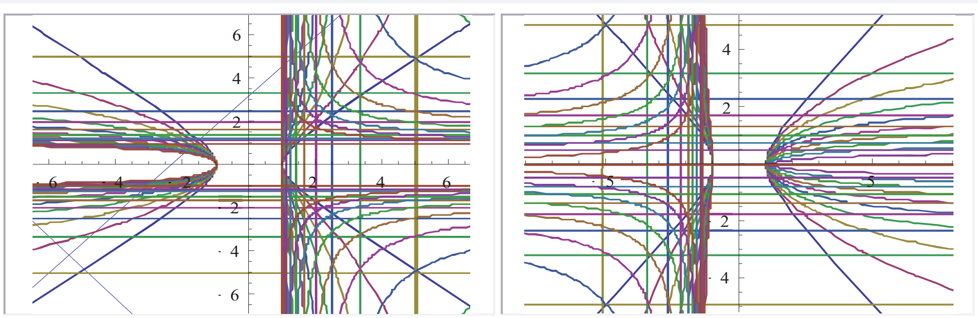


Fig.**10.7,a** Excentrice hiperbolice de excentre fixe
Stânga: $e_x \in [0,1]$, $e_y = 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ Dreapta : $e_x = 0$, $e_y \in [0,1]$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$

Pentru a putea urmări, mai bine, evoluţia formelor excentricelor hipoerbolice, în funcţie de modificarea excentricităţii, au fost reprezentate, separat, în **figura 10.7,b**, câte o singură excentrică hiperbolică. Împreuna cu centrica hiperbolică (pentru comparaţie), cu excepţia cazului $e_y = 0$, pentru a ilustra că, în acest caz, se obţine funcţia generatoare, adică, centrica hiperbolică (hiperbola ordinară) de la care s-a plecat. Înregistrările au fost efectuate pentru **Ex** ≡ Ox şi **Ey** ≠ Oy, cu excepţia lui $e_y = 0$ → centrică hiperbolică.

În figuri se observă modificările formelor excentricelor hiperbolice, a căror ramuri se rotesc în sens dextrorum / dextrogin, faţă de originea O(0,0). Adică, ramura din dreapta se apropie de axa x şi cea din stânga de axa y, odată cu creşterea excentricităţii. În final, adică pentru **s** = 1, ramura din dreapta se suprapune complet peste axa x > 0. Pe lângă modificarea formei excentricelor hiperbolice are loc şi o modificare a orientării asimptotelor, de la direcţia bisectoarelor (**s** = 0) la cea de drepte paralele cu axa x şi, respectiv, cu axa y.

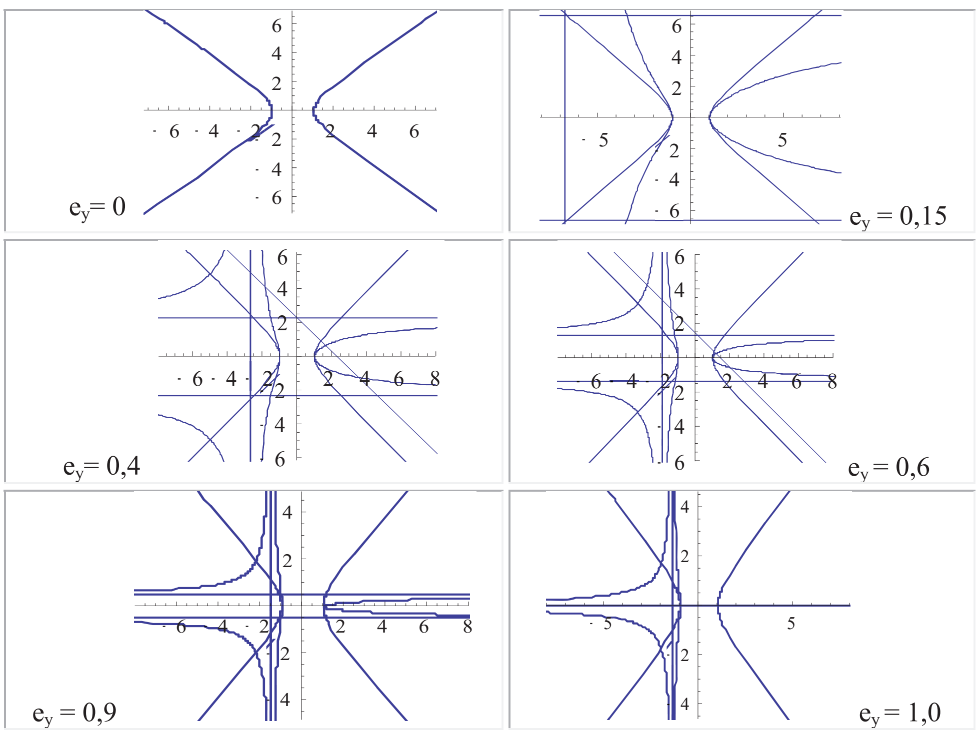


Fig. **10.7,b** Excentrice hiperbolice şi centrica hiperbolică ($e_x = 0$) pentru Ex ≡ Ox → $e_x = 0$, şi Ey cu $e_y = 0$; 0,15; 0,4; 0,6; 0,9; 1,0 şi $\varepsilon_y = 0$

10.7 EXCENTRICE HIPERBOLICE PARAMETRICE.

Alte ecuaţii parametrice ale hiperbolei sunt

(10.8) $$\begin{cases} x = \frac{a}{2}(\propto + \frac{1}{\propto}) \\ y = \frac{b}{2}(\propto - \frac{1}{\propto}) \end{cases},$$

în care **α** este un parametru real (centric) care, înlocuit cu un parametru real **excentric** **θ**(α) = $aex_{1,2}$ (θ, s) = θ − arcsin[s.sin(θ−ε)] , conduce la obţinerea altor forme de excentrice hiperbolice parametrice, notate cu **II**, prezentate în **figura 10.8**.

Dacă **excentricitaea numerica s** este aceeaşi, atât pentru coordonata $x(s_x)$ cât şi pentru coordonata $y(s_y)$ ale excentricelor, atunci, în toate cazurile, se obţine o singura curbă, care este curba generatoare, aşa cum s-a văzut în cazul excentricelor eliptice, la care proporţionalitatea/raportului dintre semiaxele elipsei generatoare cu raportul sau cu proporţionalitatea excenticităţiilor reale ($\frac{a}{b} = \frac{e_x}{e_y}$), corespunzatoare coordonatelor şi pe aceeaşi direcţie (**$\varepsilon_x = \varepsilon_y$**), conduce la egalitatea excentricităţiilor numerice **$s_x = s_y$**.
Deoarece, raportul poate fi scris sub forma $\frac{a}{e_x} = \frac{b}{e_y}$ → $1/s_x = 1/s_y$, → **$s_x = s_y$**.

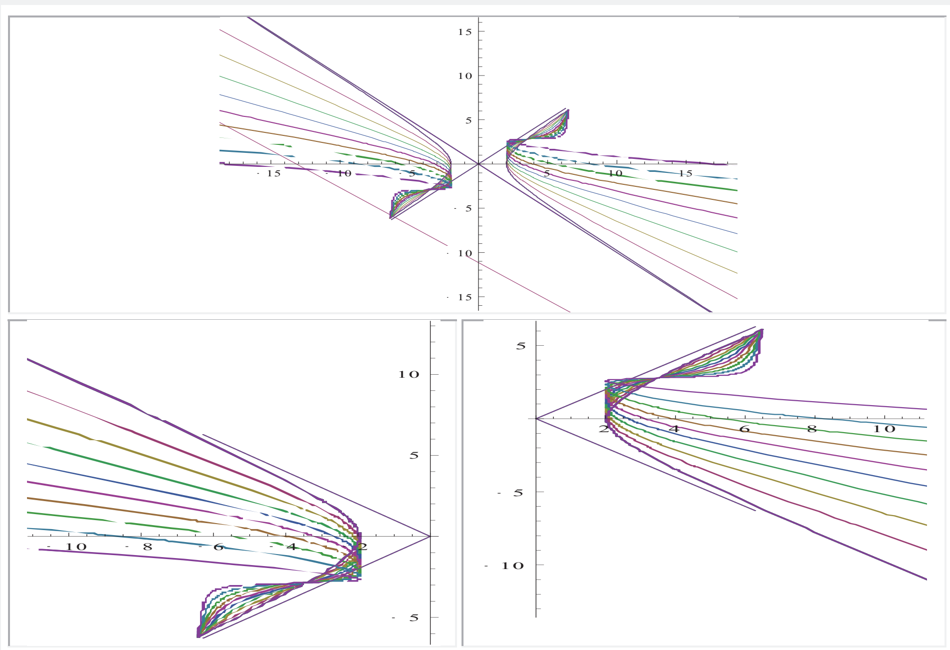
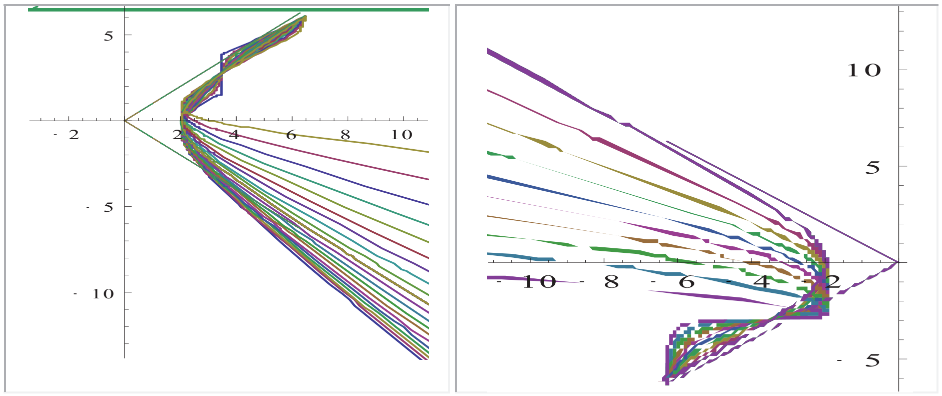
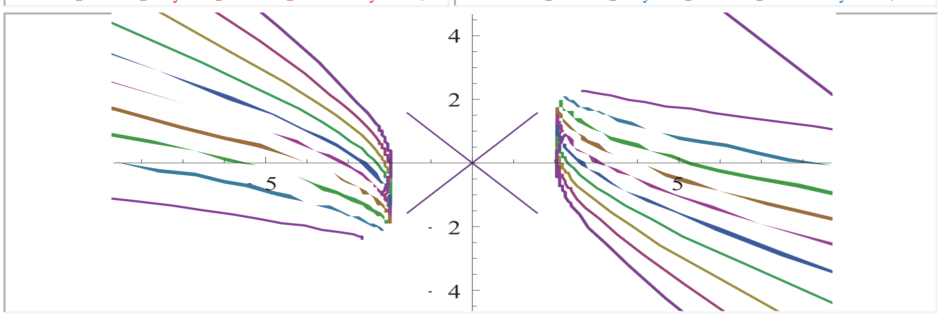


Fig. 10.8 Excentrice hiperbolice parametrice II

În partea superioara a **figurii 10.8** sunt prezentate excentricele hiperbolice parametrice II cu a = b = 2, pentru parametrul **θ** ∈ [− 2π, + 2π], iar în partea inferioară sunt prezentate, separat, pentru **θ** ∈ [− 2π, 0] în stanga şi **θ** ∈ [0, 2π] în dreapta. Ambele excentre sunt plasate pe axa x, simetrice faţă de axa y, adică, au excentricităţile numerice egale **$s_x = s_y$** ∈ [0; 0,9] şi $\varepsilon_x = 0$ iar **ε_y** = π.

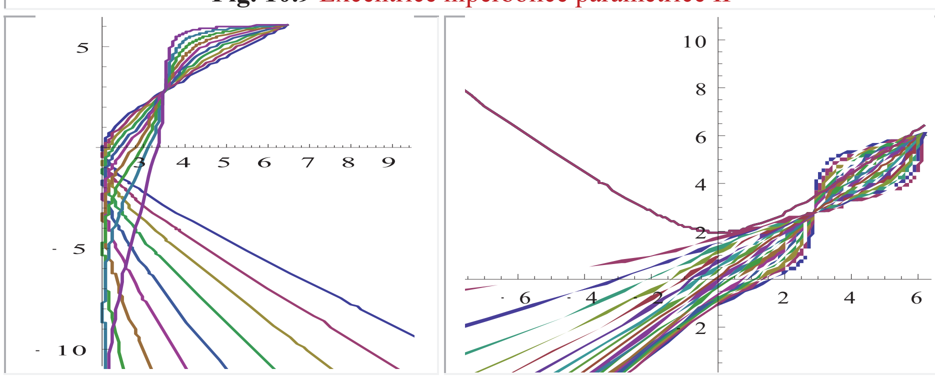


$s_x \in [\,0;\,1\,]$, $s_y \in [0;\,0{,}5]$ $\varepsilon_x = s_y = 0)$	$s_x \in [\,0;\,1\,]$, $s_y \in [0;\,0{,}5]$ $\varepsilon_x = s_y = 0)$



Ex şi **Ey** pe axa x simetrice faţă de axa y, cu $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a = b = 2

Fig. 10.9 Excentrice hiperbolice parametrice II



A = b = 2, $e_x = e_y \in [\,0;\,0{,}9]$, $e_x = \pi$ şi $\varepsilon_y = 0$	$\begin{cases} x = 1 - 1/cex\theta \\ y = 1 + 1/sex\theta \end{cases}$

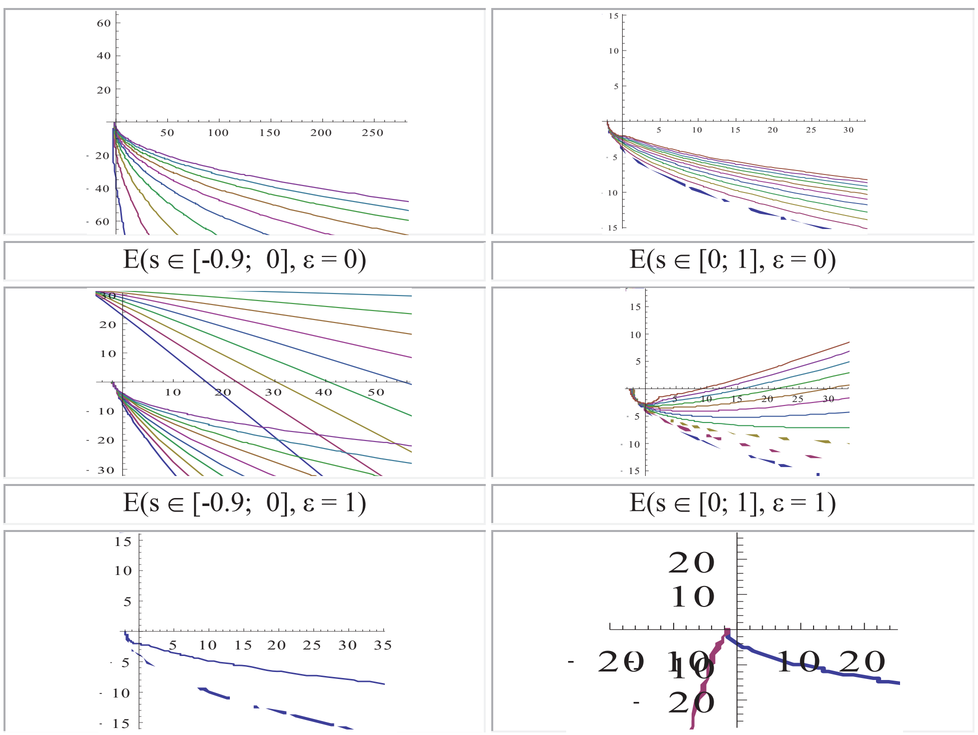
Fig. 10.10 Excentrice hiperbolice parametrice II
cu Ex pe axa x < 0 şi Ey pe axa x > 0 în stanga şi rotite cu + π/2 în dreapta

Asimptotele excentricelor hiperbolice sunt cele doua bisectoare, care, din cauza reducerii la scară a desenului s-au rotit, apropindu-se. Acelaşi fenomen apare şi în **figura 10.9**, în care, în partea superioară a figurii sunt curbele de $\theta \in [-2\pi, 0]$ în stânga şi de $\theta \in [0, 2\pi]$ în dreapta figurii. În partea inferioară $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ cu **Ex** şi **Ey** pe axa x, simetrice faţa de axa y , având $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_y = \pi$ şi cu $s \in [0; 0,9]$.

În **figura 10.10**, din stânga, poziţiile celor doua excentre suferă o transpoziţie. În sensul că **Ex** şi **Ey** îşi schimbă reciproc poziţiile pe axa x, faţă de situaţia din figura anterioara; **Ex** trecând pe semiaxa negativa şi **Ey** pe cea pozitiva.În partea dreaptă a **figurii 10.10**, prin schimbarea semnelor în relaţiile parametrice (10.8) curbele se rotesc cu $\pi/2$ în sensul dextrogin şi se deschid în partea stângă, tinzând spre linii drepte.

10.8 EXCENTRICELE PARABOLICE

Se pot genera plecând de la ecuaţiile conicelor în coordonate polare, pe care le vom denumi excentrice parabolice **polare**, spre deosebire de excentricele parabolice **parametrice** (**Fig. 10.12**), de care se deosebesc net.



$E(s \in [-0.9; 0], \varepsilon = 0)$ | $E(s \in [0; 1], \varepsilon = 0)$

$E(s \in [-0.9; 0], \varepsilon = 1)$ | $E(s \in [0; 1], \varepsilon = 1)$

$E(-1,0)$ | $E(1,0)$

Fig. 10.11 Excentrice parabolice polare de excentru E(s, ε) fix

Ecuaţia polară a conicelor este

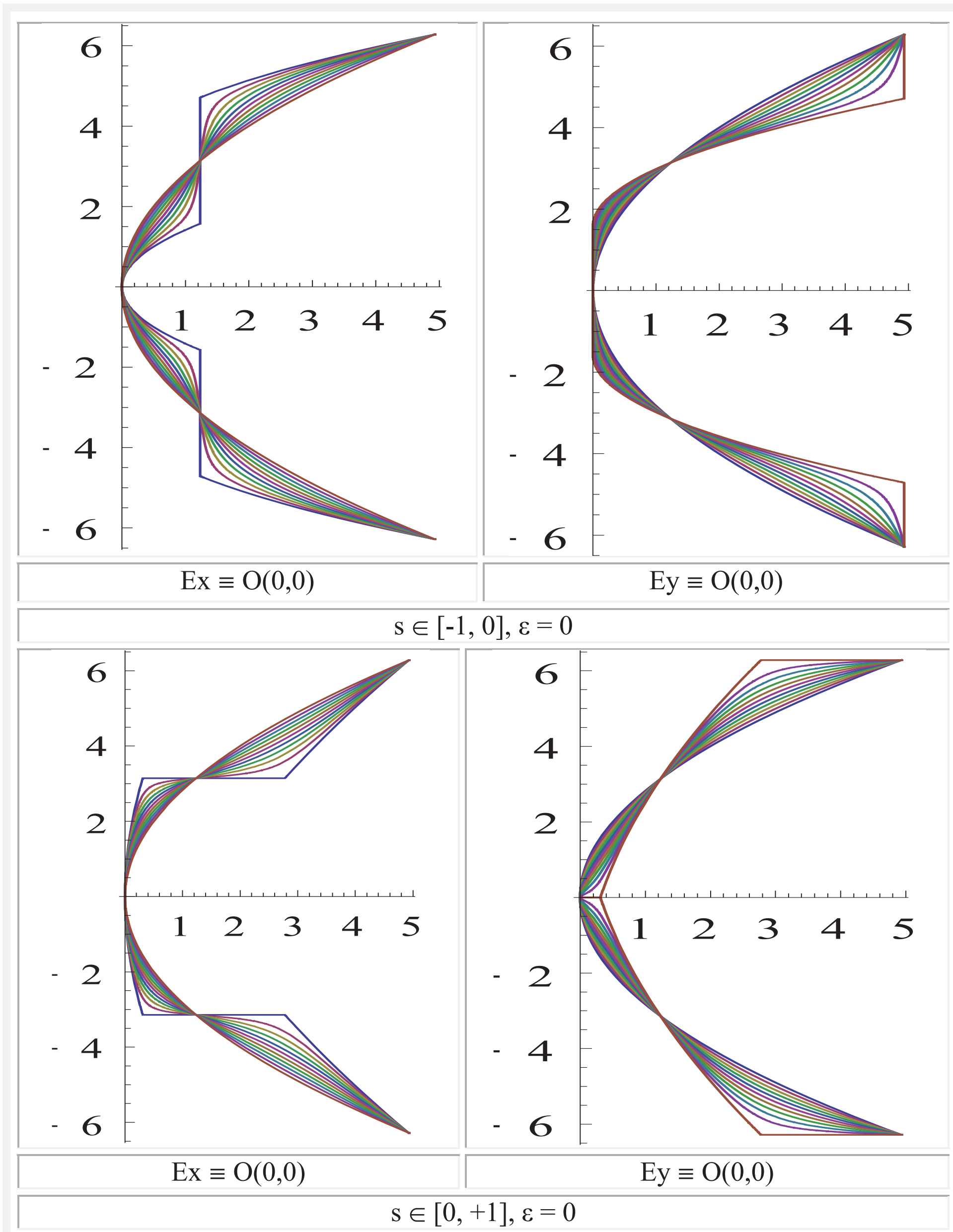


Fig. 10.12 Excentrice parabolice parametrice de excentru fix

(10.9) $r = \frac{p}{1+\varepsilon cos\alpha}\begin{cases}\varepsilon = 0 \to CERC \\ \varepsilon = 1 \to PARABOLĂ \\ \varepsilon > 1 \to HIPERBOLĂ \\ 0 < \varepsilon < 1 \to ELIPSĂ\end{cases}$

în care, aşa cum s-a mai afirmat, **FCC** cosα se înlocuieşte cu **FSM-CE cexθ**.

Astfel ecuaţiile, în coordonate polare, ale excentricelor parabolice polare (**Fig.10.11**) vor fi

(10.10) $r = \frac{p}{1+\varepsilon.cex_{1,2}\,\theta}$,

aici **ε ≡ s** este **excentricitatea conicei** !

Excentricele parabolice polare prezentate au p = − 4, pentru ca centrica parabolică (s = 0) să aibe o deschidere mai pronunţată, deoarece, prin creşterea excentricitaţii numerice **s** de la 0 la 1, ramurile excentricelor parabolice se îndepartează de ramura centricei parabolice şi se apropie de axa x > 0.

Se observă, că vârfurile excentrticelor parabolice sunt comune în originea O(0,0) a sistemului de axe de coordonate. În centrul figurilor superioare a fost prezentată excentrica parabolică polară de s = 1.

Pentru **s** < 0 şi **ε** = 0, sau s > 0 şi **ε** = π, ramurile excentricelor parabolice polare se apropie de axa y pe care o şi depaşeşte, aşa cum se poate observa în **figura 10.11**, centrală-jos pentru **e** = −1. Tot în partea inferioară a **figurii 10.11**, sunt prezentate excentricele parabolice polare de ε = 1 radian, excentrice care suferă o rotire a graficelor lor în sens trigonometric pentru s > 0 şi în sens invers pentru **s** < 0, de fapt, pentru **s** > 0 şi ε = −1.

10.9 EXCENTRICELE PARABOLICE PARAMETRICE

Se generează pornind de la ecuaţiile parametrice ale parabolei

(10.11) M $\begin{cases} x = \frac{\alpha^2}{2p} \\ y = \alpha \end{cases}$, în care **α** este un parametru real şi, adăugam noi, **centric**

Prin înlocuirea parametrului (variabilei) centric cu variabila (parametrul) excentrică

(10.12) **α** = θ - arcsin[**s**.sin(θ −ε)] se face trecerea de la centric la excentric şi de la centrica parabolică la excentricele parabolice parametrice (**Fig.10.12**).

Rezultă că ecuaţiile parametrice ale **excentricelor parabolice parametrice** sunt

(10.13) M $\begin{cases} x = \frac{\alpha(\theta)^2}{2p} = \frac{\{\theta - \arcsin[s_x.\sin(\theta-\varepsilon_x)]\}^2}{2p} = \frac{aex^2(\theta,Ex)}{2p} \\ y = \alpha(\theta) = \theta - \arcsin[s_y.\sin(\theta-\varepsilon_y)] = aex(\theta,Ey) \end{cases}$

Dacă excentrele Ex şi Ey se coincid, **Ex ≡ Ey**, atunci excentricele parabolice, ca şi
cele hiperbolice, degenerează în centricele corespondente.

Tot aşa, dacă **excentricităţile e_x** şi **e_y** ale excentricelor eliptice şi circulare de aceeaşi orientare ($\varepsilon_x = \varepsilon_y$) sunt în acelaşi raport cu raportul semiaxelor, adică

(10.14) $\frac{e_x}{e_y} = \frac{a}{b}$, atunci acestea degenerează şi ele în curba generatoare, adică, în elipsă şi, respectiv, în cerc (pentru $e_x = e_y$).

10.10 O NOUĂ ECUAŢIE A ELIPSEI

Vom da o demonstraţie, pentru cazul excentricelor eliptice de excentru fix, care este imediată.

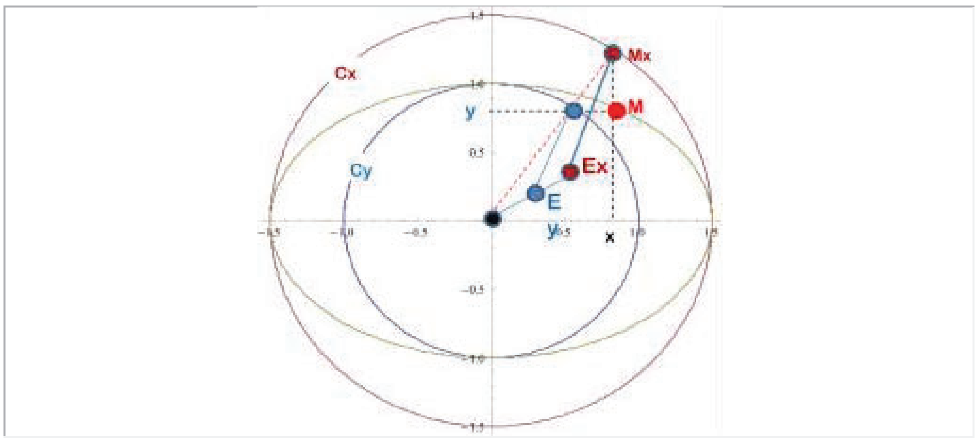


Fig.**10.13** Elipsa ca excentrică eliptică cu $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ şi $e_x/e_y = a/b$

Se observă în **figura 10.13** că, din cele două triunghiuri formate, cu vârful comun în O(0,0), există proporţionalitate între razele celor două cercuri, care sunt tocmai semiaxele **a** şi, respectiv, **b** ale elipsei şi mărimile excentricitaţiilor $\mathbf{e_x}$ şi $\mathbf{e_y}$.

De asemenea, că punctele generatoare Mx şi My de pe cercurile Ca(O,a) şi Cb(O,b) se obţin, atât prin intersectarea celor două cercuri, cu o singură semidreaptă, de direcţie $\boldsymbol{\alpha}$ cu axa x, dusă din O(0,0), cât şi cu cele două semidrepte, de direcţie $\boldsymbol{\theta}$, duse din excentrele corespunzatoare. Ceea ce dovedeşte egalitatea dintre coordonatele excentricei eliptice şi a elipsei.

În concluzie, dacă există proporţionalitatea (10.14), atunci ecuaţiile excentricelor eliptice sunt şi ecuaţiile centricelor eliptice.

10.11 EXCENTRICE ELIPTICE DE FORME AERODINAMICE

Excentricele eliptice de Ex ≡ O(0,0) cu a >> b şi Ey(s_y, $\varepsilon_y \in [3\frac{\pi}{2}, 2\pi]$) au forme de profile aerodinamice. Astfel, în **figura 10.14** sunt prezentate profile aerodinamice, denumite de specialişti, l-am numit aici pe regretatul prof. dr. ing. **Victor Ancuşa**, profile **Carafoli** cu bot de fugă rotunjit, simetrice şi asimetrice, primele din partea de sus a **figurii 10.14**.

Prof. dr. ing. **Victor Ancuşa** a fost cel dintâi care, cu mijloacele rudimentare existente atunci (1972), a reuşit sa înregistreze în “3D”, prin deplasarea corespunzătoare a hartiei în ploter, **forme supermatematice** de rexoid, dexoid ş.a.

10.12 CONSTRUCŢIA EXCENTRICEI ELIPTICE DE FORMĂ AERODINAMICĂ *Carafoli*

Construcţia excentricei eliptice de formă aerodinamică ***Carafoli*** , simetrică cu bot de fugă rotunjit, este prezentată în **figura 10.15**, pentru două puncte ale acesteia,

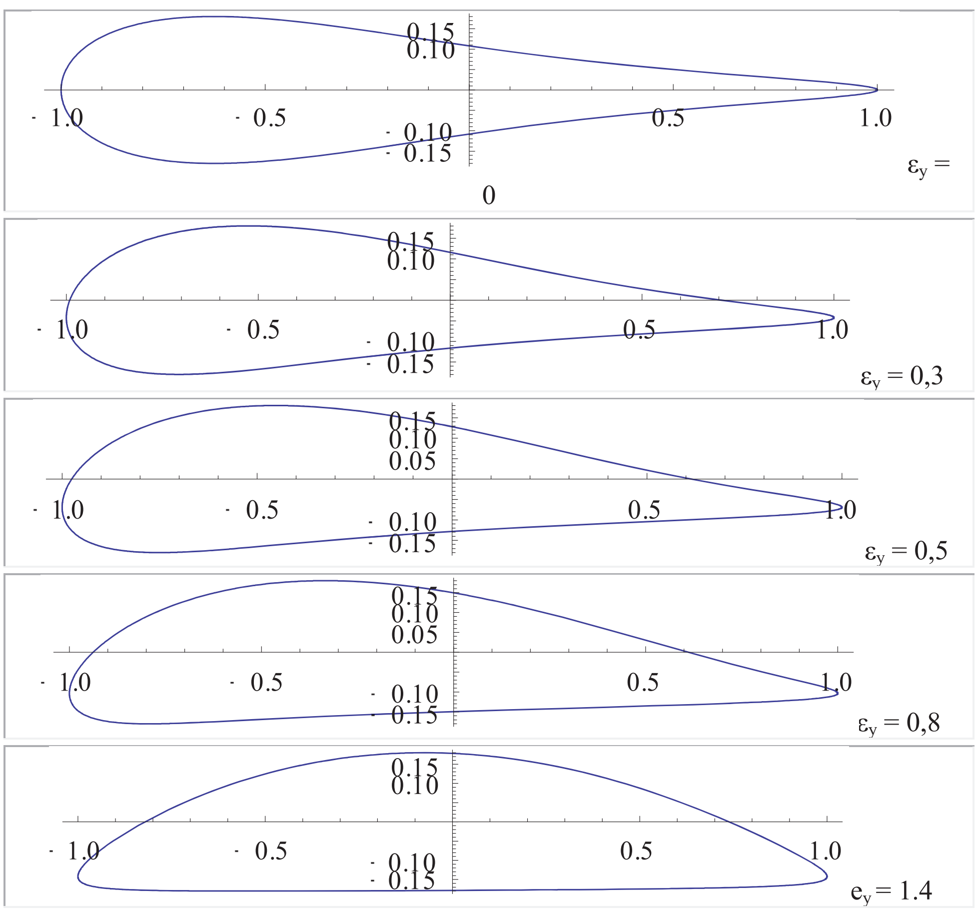


Fig. 10.14,a Excentrice eliptice ca profile aerodinamice **Carafoli** de ε_y variabil.
În toate cazurile a =1, b = 0,18; Ex ≡ O → e_x = 0 şi e_y = 0,8

unul în cadranul I şi celălalt în cadranul II. S-a folosit metoda coinciderii excentrelor **Ex(0,0)** cu **Ey(0.8; 0)**.

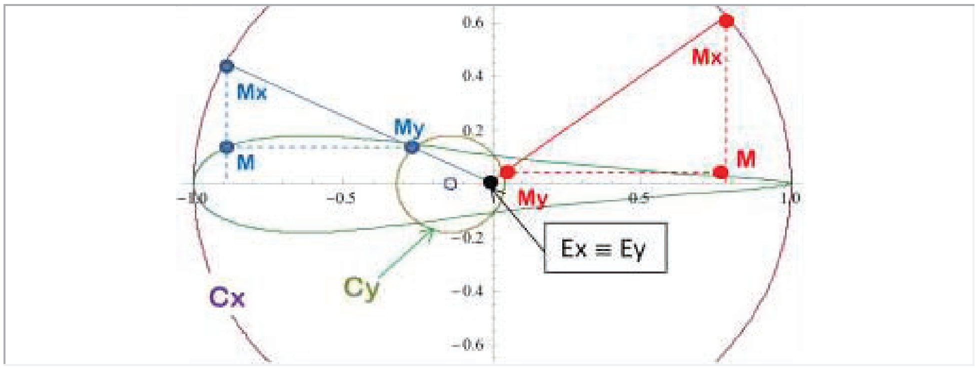


Fig. **10.15** Construcţia profilului aerodinamic **Carafoli** simetric cu bot de fugă rotunjit prin metoda coinciderii excentrelor cu a = 1, b = 0.18; Ex ≡ O(0,0) şi Ey(s_y = 0,8; ε_y = 0)

10.13 EXCENTRICE OVOIDALE CASSINI

Pleacă de la ecuaţiile curbelor (ovalelor) lui **Cassini** a căror ecuaţii cunoscute sunt

(10.15) $$r^2 = e^2.cos2\varphi \pm \sqrt{a^4 - e^4 sin^2(2\varphi)}$$

şi, se observă că, poate fi exprimată cu **FSM-CE** radial excentric **rex2θ** pe cercul de rază R = a^2, de variabila excentrica 2θ = 2φ şi de excentru **E**(e, ε = 0) cu excentricitatea reală **− e^2** şi de excentricitate numerica **s** = $\frac{e}{R}$ = $-\frac{e^2}{a^2}$.

Scoţând forţat pe a^4 de sub semnul radical, rezultă

(10.16) $$r^2{}_{1,2} = a^2[-\frac{e^2}{a^2}cos2\theta \pm \sqrt{1-(\frac{e^2}{a^2})^2.sin^2 2\theta}] =$$

$$= R[-s.cos2\theta \pm \sqrt{1-s^2.sin^2 2\theta}\,]$$

$$r^2{}_{1,2} = R.\ \mathbf{rex_{1,2}}\,[2\theta, E(s = -\frac{e^2}{a^2},\ \varepsilon 0)]$$, sau **Rexα** de **E** şi R = a^2.

Graficele acestor familii de curbe **Cassini** sunt prezentate în **figura 10.16,a** în stânga-sus, iar în dreapta-sus sunt prezentate lemniscatele lui **Booth**, curbe asemănătoare cu cele ale lui **Cassini**, având ecuaţiile în coordonate polare exprimate de ambele determinări ale **FSM-CE** radial excentric de variabilă excentrică **$rex_{1,2}θ$**

(10.17) $$\rho = R(rex_1\theta + rex_2\,\theta) = 2.R\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta - \varepsilon)}$$

Prin înlocuirea, în relaţiile (10.16), a **FCC** cos2θ şi sin2θ cu **FSM-CE** cex2θ şi sex2θ se obţin excentricele **Cassini** din partea inferioară-stânga a **figurii 10.16** şi pentru **Ey** ≡O(0,0), în partea din dreapta-jos. **Ey** este excentricitatea **FSM-CE** sex2θ de sub semnul radical, care, pentru cazul **Ey** ≡ O(0,0), → sin2θ. Excentrul a fost notat cu indicele y pentru că sinusul asigură coordonata y a curbelor în general şi a celor **Cassini**, în acest caz.

Pentru frumuseţea formelor spaţiale pe care le reprezintă (de gustibus non est disputandum) s-au prezentata şi graficele 3D din **figura 10.16,b**.

În **figura** din dreapta-sus, lemniscatele lui **Booth** asigură o transformare continuă a unui cerc C(O, R = 2) într-o lemniscată (curba în nod de fundă a lui **Bernoulli**) pentru e = R sau s = 1.

Întroducând în relaţia (10.16) valoarea **s** = 1 se obţine ecuaţia polară a lemnniscatei lui **Bernoulli**

(10.18) $r_{1,2} = a\sqrt{cos2\varphi}$

Dacă, în relaţia (10.17), se limitează excentricitatea numerică la **s** $\in$ [0,1], atunci obţinem o transformare continuă a unui cerc în două cercuri tangente exterior.

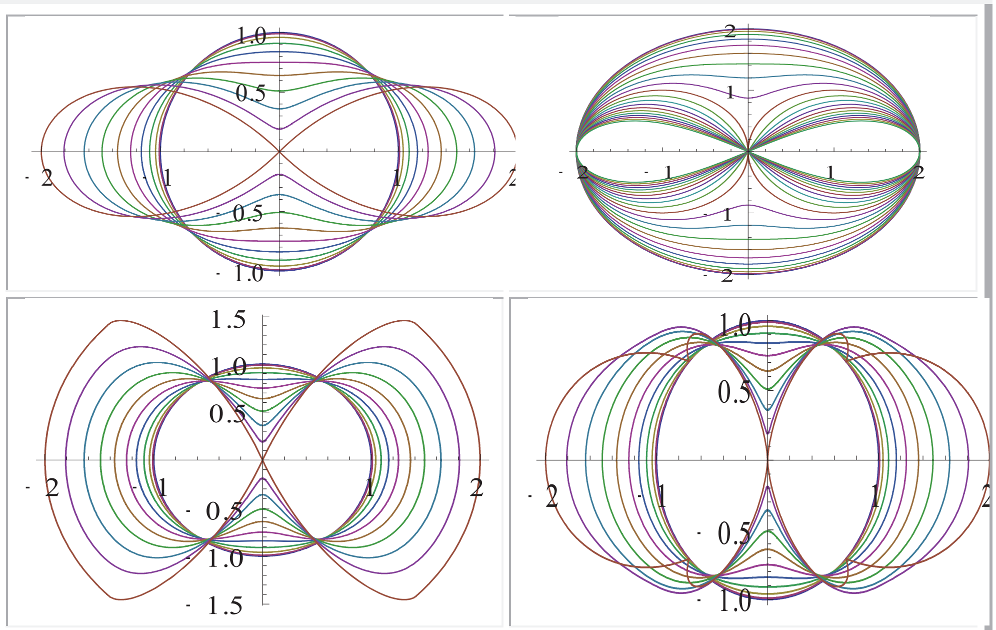
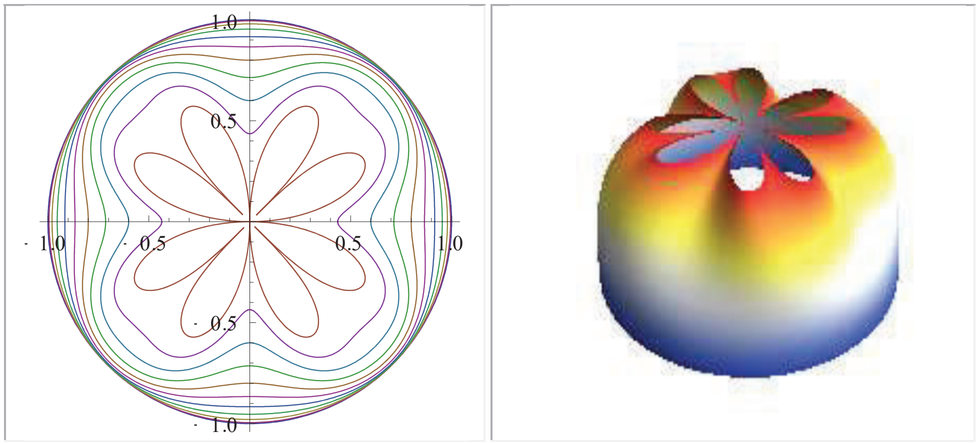


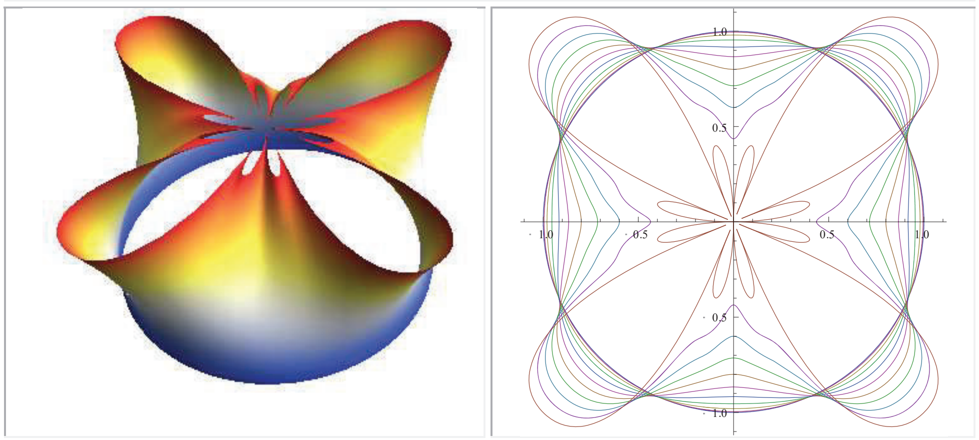
Fig. 10.16,a Ovalele lui **Cassini** şi lemniscatele lui **Booth** (sus) precum şi **excentricele** ovale ale lui lui **Cassini**, pentru E(e $\in$ [0,1], ε = 0), R = 1

Cu ocazia vizitei unei delegaţii a Universitaţii din Budapesta, la Universitatea POLITEHNICA din Timişoara, autorul a fost solicitat să prezinte unele desene “artistice” (v. www. → Tehno Art of **Şelariu** Supermathematics Functions).

Printre acestea a fost şi “amestecatorul” (sau “distribuitorul”) din **figura 10.16,c**. Profesorul dr. ing. **Horvath**, pe atunci, şeful **Departamentului de Tehnologie** al **Universitaţii Budapesta**, a rămas surprins cât de simplu poate fi reprezentat un astfel de corp cu ajutorul **FSM-CE** (care, după declaraţiile lui, i-a luat multe zile pentru a fi reprezentat în ACAD) şi a zis " ***Nu vii şi la noi să ne înveţi*** ? "



ParametricPlot[Evaluate[Table[{ Sqrt[-(0.1 s Cos[2 t])^2 +Sqrt[1-(0.1 s Sin[2 t])^4]] Cos[t], Sqrt[-(0.1 s Cos[2 t])^2 +Sqrt[1-(0.1 s Sin[2 t])^4]] Sin[t]},{s,0,10}],{t,0,2 Pi}]]



ParametricPlot3D[{ Sqrt[-(0.1 s)^2 Cos[4 t] +Sqrt[1-(0.1 s Sin[4 t])^4]] Cos[t], Sqrt[-(0.1 s)^2 Cos[4 t] +Sqrt[1-(0.1 s Sin[4 t])^4]] Sin[t], 0.1 s },{s,0,10},{t,0,2 Pi}]

Fig. 10.16,b Excentricele ovale ale lui lui **Cassini**,
pentru E(e $\in$ [0,1], ε = 0), R = 1

Acestei transformări, îi corespunde în 3D, o transformare a unui cilindru în doi cilindri tangenţi exterior, sau având axa cilindrului de rază 2R (mare) ca generatoare comună a celor doi cilindri de raze mai reduse (R).

Aplicaţiile tehnice ale acestei transformări se referă la reprezentarea şi proiectarea asistată de calculator a unor bifurcaţii de ţevi. Fie pentru aducţiunea unor fluide, prin două conducte, într-o singură conductă, de dimensiuni / debite mai mari, eventual în vederea amestecării lor, când această joncţiune de conducte este denumită şi **amestecător.** Fie invers, de ramificare, când debitul de fluid din conducta magistrală este distribuit pe două conducte de debite şi, evident, de dimensiuni mai reduse, când poate fi denumit distribuitor.

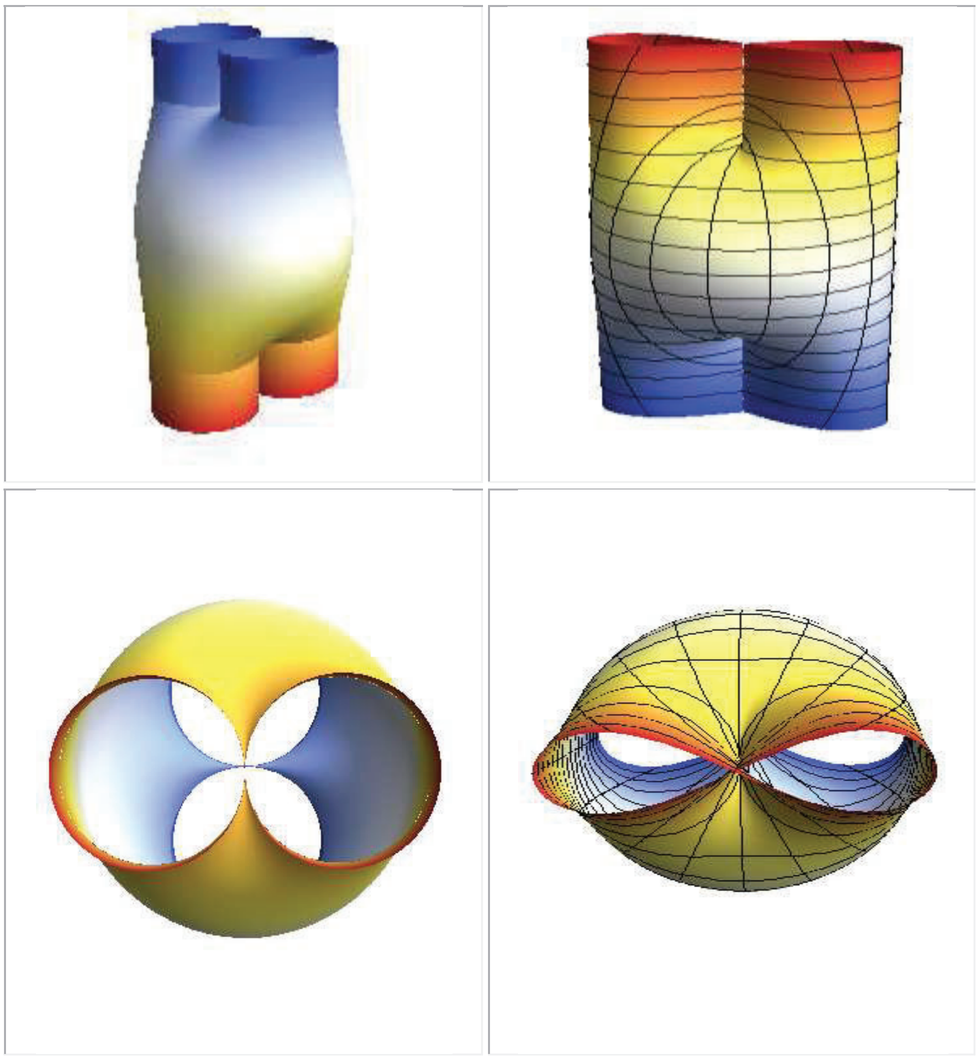


Fig. 10 16,c Transformarea continuă a unui cilindru circular în doi cilindri circulari stânga şi ovali, dreapta

Aşa se face ca la 3 decembrie 1998, autorul a ţinut o scurtă conferinţă despre "**Funcţii supermatematice**" la departamentul tehnologic al d-lui **Horvath**, unde a fost invitată şi Catedra de Matematică a **Universităţii din Budapesta**.

Un doctorand român, de origine maghiară, care urma să se specializeze în lentile optice speciale (ochi de muscă) pe care Universitatea din Budapesta le livrează şi agenţiei NASA, pentru stabilirea poziţie sateliţilor şi a altor corpuri cosmice în spaţiul cosmic, a făcut cu brio serviciul de translator.

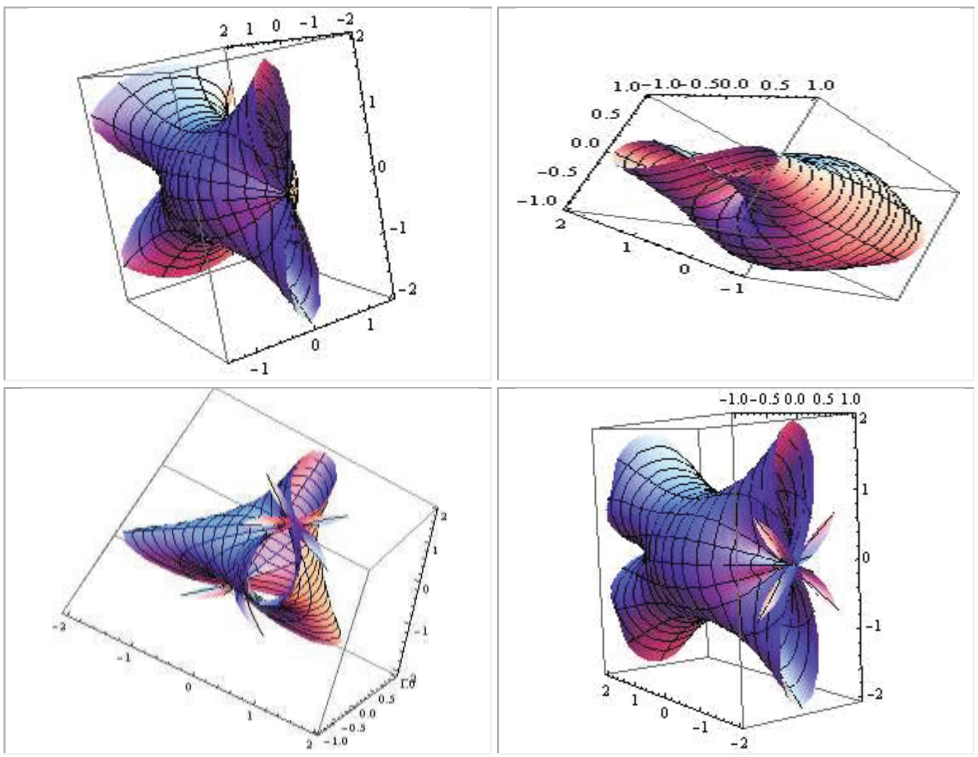


Fig. 10.16,d Ovalele lui **Cassini** şi lemniscatele lui **Booth** (sus) în 3D precum şi excentricele ovale ale lui lui **Cassini** pentru E(e ∈ [-1,1], ε = 0), R = 1

Imediat după Conferinţă, au fost stabilite două teme de cercetare comune, una în domeniul "**Funcţiilor Supermatematice** şi aplicaţiile lor tehnice" şi a doua cu privire la o nouă metodă de cinetostatică, prezentată în aceasta lucrare şi denumită de autor "**Metoda separării forţelor şi a momentelor**", sau, mai scurt, " Metoda separării momentelor (**MSM**)", iar profesorul **Horvath** i-a oferit autorului spaţiu publicitar într-o revistă de specialitate, din domeniul maşinilor-unelte, revistă de mare prestigiu internaţional.

10.14 EXCENTRICELE LEMNISCATE

Se vor obţine prin simpla înlocuire a **FCC** cos2θ cu **FSM-CE** cex2θ în relaţia anterioară (10.18). Excentrele astfel obţinute sunt prezentate în **figura 10. 17**, în plan pentru ε = 0, ε = $\frac{\pi}{2}$ şi ε = − 1 cât şi în 3D pentru ε = 0.

Se remarcă, încă odată, posibilităţiile extrem de vaste ale **FSM-CE** radial excentric, despre care s-a afirmat că este o adevărată “**funcţie rege**”, de a exprima ecuaţiile diverselor curbe plane, unele cunoscute în **MC** şi altele noi, prezente doar în noua **ME**.

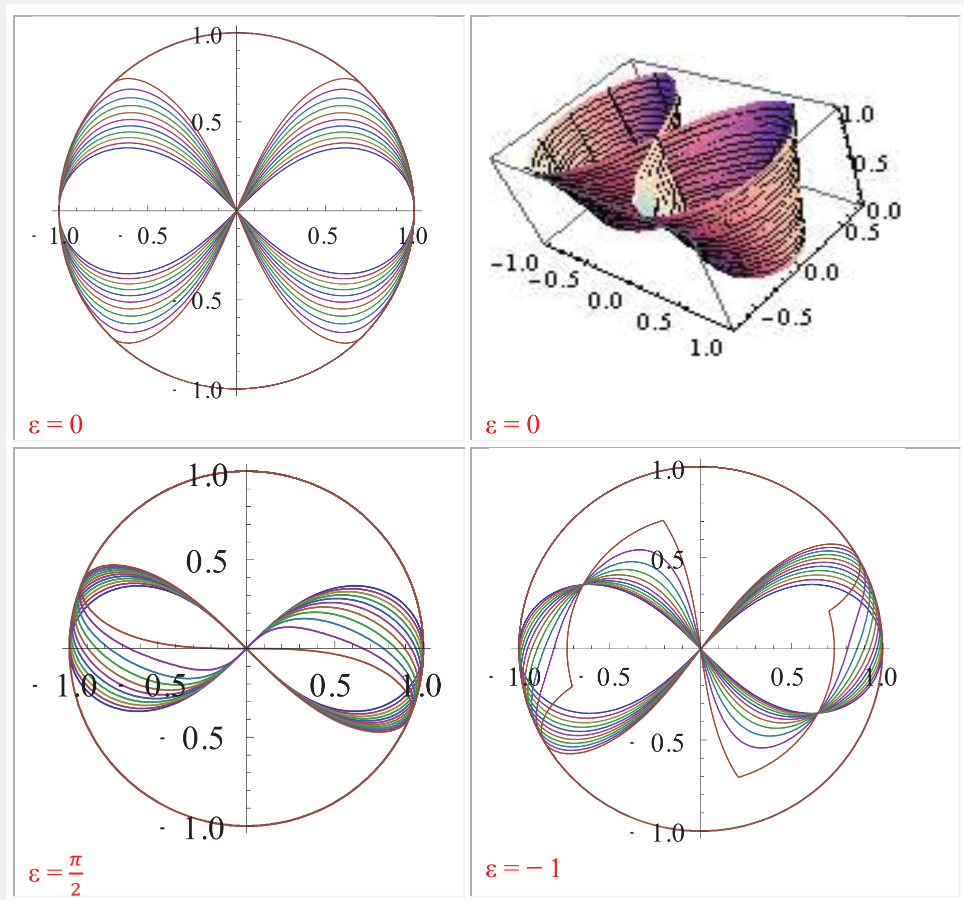


Fig. 10.17 Excentrice lemniscate polare,
pentru R = a = 1→ **s = e** ∈ [0,1], **ε variabil**

Toate curbele **Cassini** se bucură de proprietatea că produsul razelor din cele două focare, care nu sunt altceva decât doua excentre **E**$^{+}$ şi **E**$^{-}$, de pe axa **x,** de aceeaşi excentricitate **e** dar de direcţie $\varepsilon = 0$ şi, respectiv, $e = \pi$, sau, aşa cum s-a repetat, de $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, dar de excentricităţi reale **+ e** şi, respectiv, **− e**, este constantă şi egala cu $R^2 = a^2$, adică

(10.19) $$R^2 = r_{1,2}^{+} \, . \, r_{1,2}^{-} \; > 0 \, ,$$

în care r_1^{+} şi r_1^{-} sunt pozitive, iar r_2^{+} şi r_2^{-} sunt negative şi aceste raze din focare (excentre) nu reprezintă altceva decât **FSM-necirculare radial excentrice** definite nu pe cercul unitate, ci pe pe curbele **Cassini**.

În cazul **FSM-CE**, de două excentre **E**$^{+}$ şi **E**$^{-}$, simetrice faţă de centrul şi originea O(0,0), situaţia este prezentată în **figura 10.18**. Se observă, fără dificultate, că, aşa cum s-a prezentat într-un capitol anterior (& 4.2.1), produsul celor două determinări ale **FSM-CE** radial excentric este şi el constant şi nu depinde de semnul excentricităţii **e**

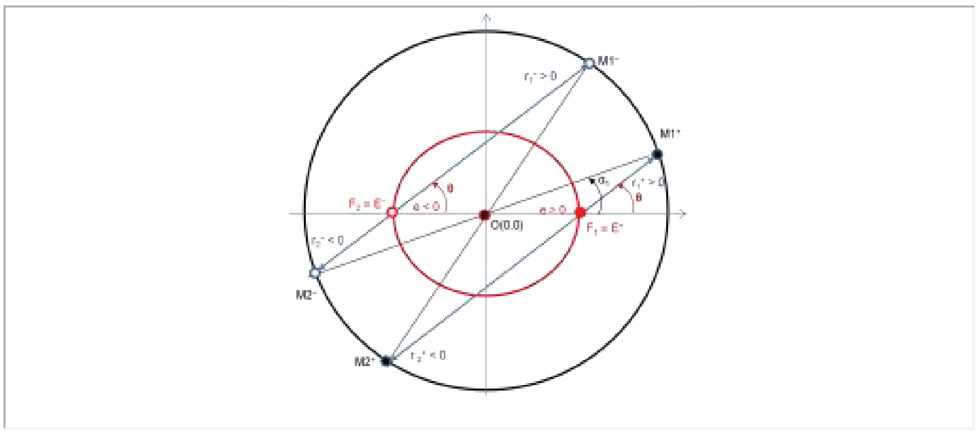


Fig. 10.18 **FSM-CE** de excentre **E** $^{+}$ şi **E**$^{-}$ simetrice faţă de originea O(0,0)

(10.20) $$r_{1,2} = R^2.\text{rex}_1\theta.\text{rex}_2\theta = -\,(R^2 - e^2) = -\,[R.\ \text{rex}_1(\theta = \tfrac{\pi}{2},\ s = \tfrac{e}{R})]^2 =$$
$$= -\,R^2.\text{rex}^2{}_2(\theta = \tfrac{\pi}{2},\ s = \tfrac{e}{R})]\ .$$

Ca urmare, $r_1^{+} = -\,r_2^{-} > 0$ şi $r_2^{+} = -\,r_1^{-} < 0$, astfel că

(10.21) $$r_{1,2}^{-} . r_{1,2}^{+} \; = \; R^2 - e^2 \; > 0.$$

Deci, şi în cazul cercului, produsul razelor excentrice **de acelaşi unghi θ**, deci ale punctelor $M^{\pm}{}_1$ sau ale punctelor $M^{\pm}{}_2$ este constanta

$$(R^2 - e^{\,2}) = R^2.\text{rex}^2{}_1(\theta = \tfrac{\pi}{2},\ s = \pm\,\tfrac{e}{R},\ \varepsilon = 0).$$

Se vede din **figura 10.18** că, de exemplu, $M^{+}{}_1$ are razele excentrice, din cele două excentre simetrice **E**$^{+}$ şi **E**$^{-}$, diferite, dar o singură rază centrică din O(0,0) de direcţie $\boldsymbol{\alpha_1}$.

Exprimând razele excentrice r_1^+ şi r_1^-, scrise concentrat $r_1^{\pm}$, în funcţie de variabila centrică α_1 se obţin expresiile

(10.22) $r_1^{\pm}=\sqrt{R^2+\ e^2\ \mp e.R.cos\alpha_1}$ a căror produs este

(10.23) $r_1^-.r_1^+=\sqrt{(R^2+\ e^2)^2-4e^2R^2.cos^2\alpha_1}=$

$$=\sqrt{(R^2-\ e^2)^2+4e^2R^2.sin^2\alpha_1}\ =R^2\sqrt{rex_1^4\left(\frac{\pi}{2}\right)+4e^2sin^2\alpha_1}=$$

$$=\mathrm{R}^2\ rex_1^2(\tfrac{\pi}{2})\sqrt{1+4\frac{e^2}{R^2}\frac{sin^2\alpha_1}{rex_1^4(\frac{\pi}{2})}}=\mathrm{R}^2\ rex_1^2(\tfrac{\pi}{2})\sqrt{1+s'^2sin^2\propto_1}$$

Acest produs este valoric mai mare decât cel anterior, de acelaşi unghi **θ**, cu valorile radicalului (> 1) şi mai mare decât produsul funcţilor radial excentrice pe curbele lui **Cassini,** adică, al razelor polare din cele două focare ale uni punct curent al curbelor lui **Cassini** şi nu mai este constant.

10.15 EXCENTRICELE EVOLVENTICE ALE CERCULUI.

10.15.1 EXCENTRICELE ŞI FUNCŢIILE EXCENTRICE ALE LUI GOGU CONSTANTINESCU.

Evolventele (latinescul evolvere = a desfăşura) se pot obţin pentru o serie de curbe şi sunt desfaşurătoarele curbelor respective.

Ecuaţiile parametrice ale evolventei unei curbe, de punct curent P(x,y) şi de arc **s** = R.**α**, sunt

(10.24) $$\begin{cases}X=x+\ s.\sin\boldsymbol{\alpha}\\ Y=y-\ s.cos\boldsymbol{\alpha}\end{cases}$$

Evolventa cercului C(O,R) va avea ecuaţiile parametrice

(10.25) $$\begin{cases}X=R(cos\boldsymbol{\alpha}+\propto.sin\boldsymbol{\alpha})\\ Y=R(sin\boldsymbol{\alpha}-\propto.cos\boldsymbol{\alpha})\end{cases}$$

şi, aşa cum s-a mai procedat, prin înlocuirea **FCC** cu **FSM**-**CE** se vor obţine ecuaţiile parametrice ale excentricelor evolventice parametrice

(10.26) $$\begin{cases}x=R(cex_{1,2}\theta\ +aex_{1,2}\theta.sex_{1,2}\theta)\\ y=R(sex_{1,2}\theta-aex_{1,2}\theta.cex_{1,2}\theta)\end{cases},$$

în care, $\alpha \rightarrow \alpha_{1,2}(\theta)=aex_{1,2}\theta$.

Excentricele evolventice din **figura 10.19** sunt reprezentate pentru R = 1, $\theta\in[0, 2\pi]$ şi în figura **10.20**, pentru $\theta\in[0, 3.5\pi]$ în stânga şi $\theta\in[0, -3{,}5\pi]$ în dreapta.

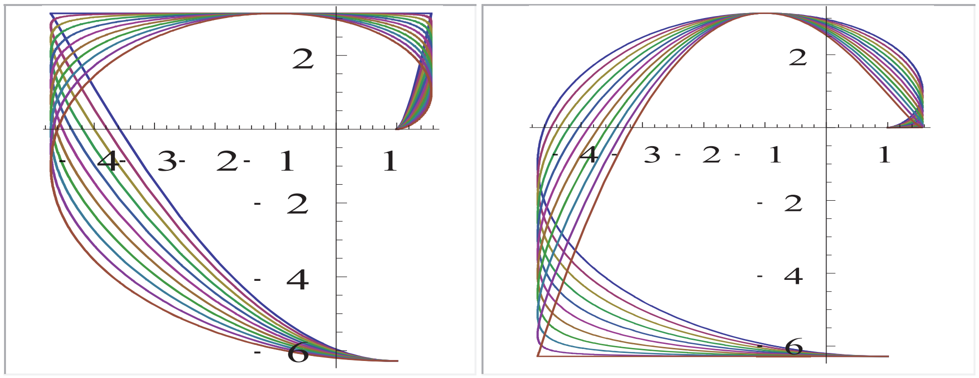


Fig. 10.19 Excentrice evolventice circulare parametrice **Gogu Constantinescu**
Pentru R = 1 → $e_{x,y} = s_{x,y}$, Ex ≡ Sx ≡ O(0,0), Ey ≡ Sy ($s_y \in [-1; 0]$, $\varepsilon_y = 0$)

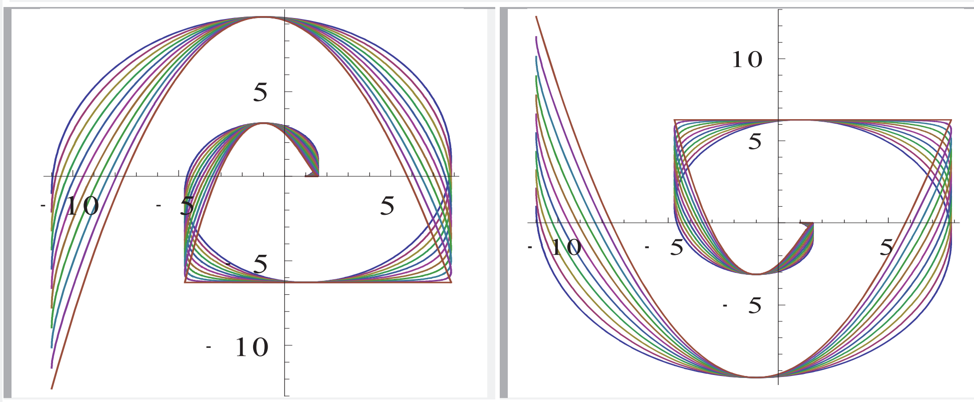


Fig. **10.20** Excentrice evolventice circulare polare **Gogu Constantinescu**
pentru $\theta \in [0, 3.5\pi]$ în stânga şi $\theta \in [0, -3{,}5\pi]$ în dreapta

Dacă niciun excentru nu coincide cu centrul şi originea O(0,0), **Sx** şi **Sy** fiind pe axa x, simetrice faţă de axa y, atunci alura excentricelor evolventice circulare polare este cea din **figura 10.21**.

Pot fi obţinite multe alte curbe excentrice de acest gen, foarte diferite între ele, prin acceptarea unor valori pentru direcţiile $\boldsymbol{\varepsilon_x}$ şi $\boldsymbol{\varepsilon_y}$ diferite de 0 şi de π.

Pentru soluţionarea unor ecuaţii diferenţiale neliniare, ivite în teoria sonicitaţii, teorie creată de savantul englez de origine română **Gogu Constantinescu** el, a introdus în matematica centrică (**MC**), aşa cum s-a afirmat şi în Cap. 2 al primului volum al acestei lucrări, funcţiile **cosinus românesc Corα** şi **sinus românesc Sirα**, care sunt funcţii definite pe evolventa cercului unitate C(O, R = 1), având expresiile

$$(10.27) \qquad \begin{cases} \mathrm{Cor}\,\propto = \cos\alpha + \propto.\sin\alpha \\ \mathrm{Sir}\,\propto = \sin\alpha - \propto.\cos\alpha \end{cases}$$

Mai pot fi definite **funcţiile româneşti compuse**, ca tangeta românească **Tarθ**, cotangenta românească **Ctarθ**, secanta românească **Serθ**, ordinare şi funcţiile redefinite corect în matematica centrica de **Octavian Voinoiu**, ca tangenta românească **Voinoiu** Tarvθ ş.a., adică de expresii

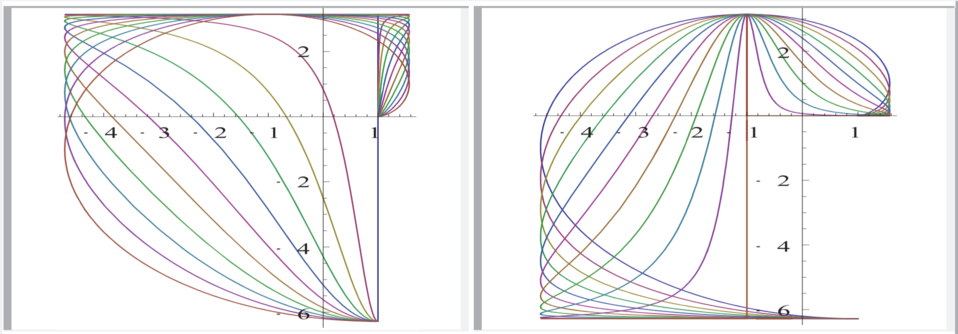
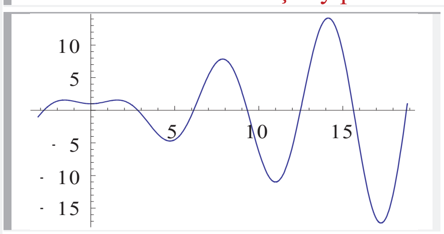
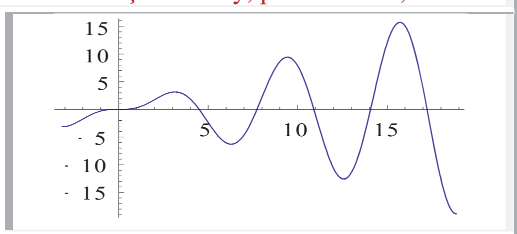


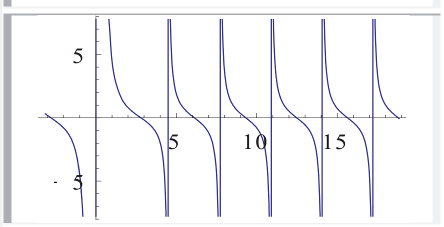
Fig. 10.21 Excentrice evolventice circulare polare **Gogu Constantinescu** de excentre Sx şi Sy pe axa x simetrice faţă de axa y, pentru R = 1,



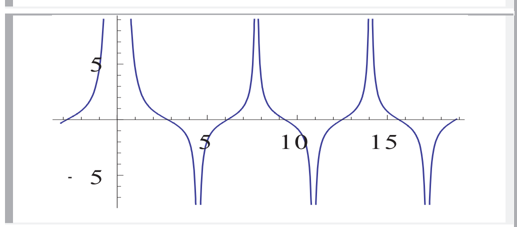
Corα



Sirα



Tarα



Trvα

Fig.10.22 Funcţiile lui **George (Gogu) Constantinescu**:
cosinusul românesc Corα, sinusul românesc Sirα,
tangenta românească Tarα şi **tangenta românească Voinoiu** Trvα

(10.29) $\text{Tar}\boldsymbol{\alpha} = \frac{Sir\propto}{Cor\propto}$, $\text{Ctar}\boldsymbol{\alpha} = \frac{Cor\propto}{Sir\propto}$, $\text{Ser}\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{Cor\propto}$, $\text{Cser}\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{Sir\propto}$

şi cele **Voinoiu**

(10.30) $\text{Tr}v\boldsymbol{\alpha} = \frac{Sir\propto}{Abs[Cor\propto]}$, $\text{Ctr}v\boldsymbol{\alpha} = \frac{Cor\propto}{Abs[Sir\propto]}$, $\text{Ser}v\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{Abs[Cor\propto]}$, $\text{Cser}v\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{Abs[Sir\propto]}$

Toate aceste **funcţii centrice** au corespondente în **matematica excentrică**, care se obţin prin înlocuirea variabilei centrice **α** cu funcţia excentrică **$\alpha(\theta) = aex_{1,2}\theta$**.

Astfel, cosinusul românesc şi sinusul excentric româneşti vor fi

(10.31) $Corex_{1,2}\theta = Cor(\alpha(\theta)) = cex_{1,2}\theta + aex_{1,2}\theta.\ sex_{1,2}\theta$

(10.32) $Sirex_{1,2}\theta = Sir(\alpha(\theta)) = sex_{1,2}\theta - aex_{1,2}\theta.\ cex_{1,2}\theta$,

tangenta româneascâ este

(10.33) $Tarex_{1,2}\theta = \frac{Sir(\alpha(\theta))}{Cor(\alpha(\theta))} = \frac{sex_{1,2}\theta - aex_{1,2}\theta.cex_{1,2}\theta}{cex_{1,2}\theta + aex_{1,2}\theta.sex_{1,2}\theta}$

şi tangenta românescă **Voinoiu** este

(10.34) $Trvex_{1,2}\theta = \frac{Sir(\alpha(\theta))}{Abs[Cor(\alpha(\theta))]} = \frac{sex_{1,2}\theta - aex_{1,2}\theta.cex_{1,2}\theta}{Abs[cex_{1,2}\theta + aex_{1,2}\theta.sex_{1,2}\theta]}$,

prezentate în figura **10.23, a** şi **b**.

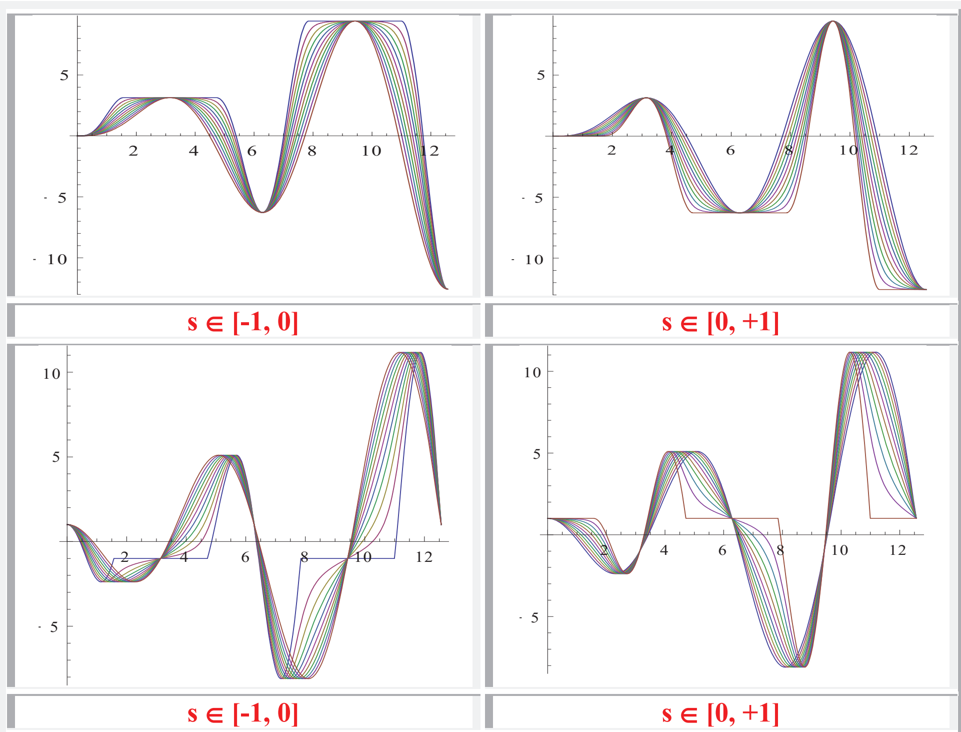


Fig. **10.23,a** **FSM** româneşti cosinus românesc excentric Corexθ şi sinus românesc excentric Sirexθ pentru S (s ∈[-1, 1], ε = 0) ,θ ∈ [- π, 6π]

În figura **10.22** sunt date graficele funcţiilor trigonometrice româneşti – cosinus şi sinus romaneşti, definite de **George (Gogu) Constantinescu** – sus-, ca şi tangenta românească şi tangenta românească în sensul Voinoiu - jos.

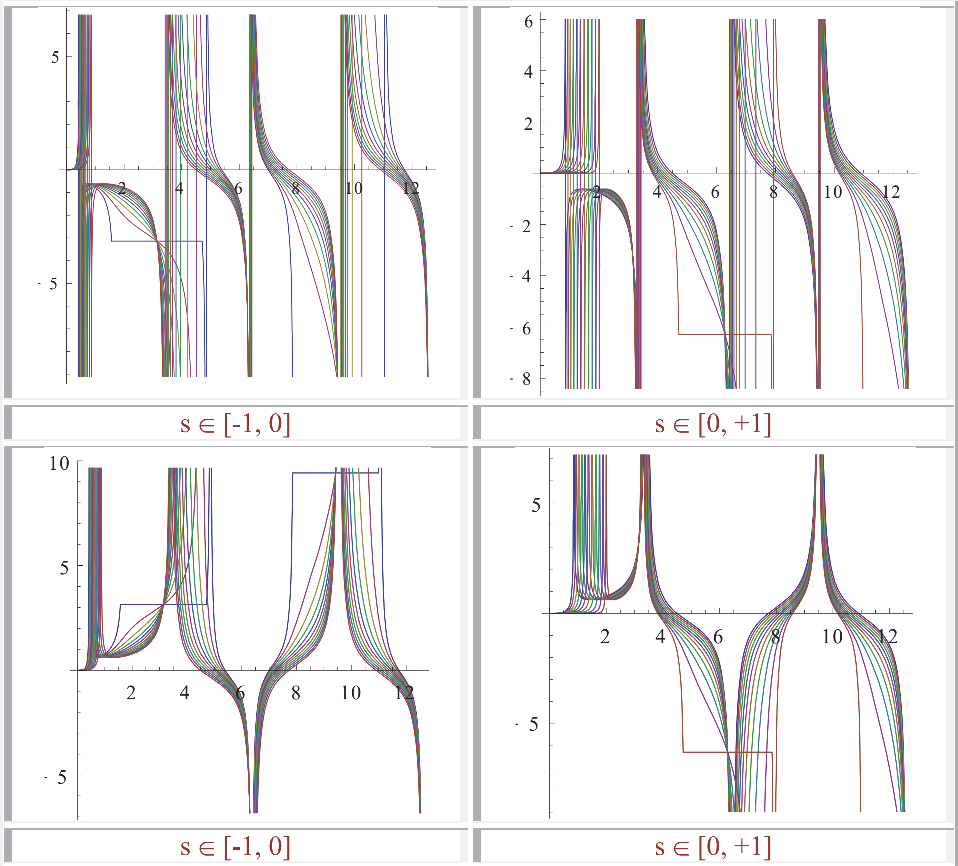


Fig. 10.23,b **FSM** româneşti tangenta românescă excentrică Tarexθ şi tangenta românească excentrică **Voinoiu** Trvexθ pentru S (s ∈[-1, 1], ε = 0) ,θ ∈ [- π, 6π]

Funcţiile supermatematice evolventice excentrice, de variabilă excentrică, se obţin prin înlocuirea variabilei centrice α, din ecuaţiile 10.27, cu variabila centrică θ(α) = aexθ

Se obţin, astfel, **FSM** româneşti excentrice Corexθ, Sirexθ, Trexθ, precum şi tangenta excentrică Voinoiu Trvexθ cu expresiile de definiţie

(10.35) $\quad \mathrm{Corex}\theta = \mathrm{cex}\theta + \mathrm{aex}\theta.\mathrm{sex}\theta$

(10.36) $\quad \mathrm{Sirex}\theta = \mathrm{sex}\theta - \mathrm{aex}\theta.\mathrm{cex}\theta$

(10.37) $\quad \mathrm{Trex}\theta = \dfrac{Corex\theta}{Sirex\theta} = \dfrac{\mathrm{sex}\theta - \mathrm{aex}\theta.\mathrm{cex}\theta}{\mathrm{cex}\theta + \mathrm{aex}\theta.\mathrm{sex}\theta}$

(10.38) $\quad \mathrm{Trvex}\theta = \dfrac{Corex\theta}{Abs[Sirex\theta]} = \dfrac{\mathrm{sex}\theta - \mathrm{aex}\theta.\mathrm{cex}\theta}{\mathrm{Abs}[\mathrm{cex}\theta + \mathrm{aex}\theta.\mathrm{sex}\theta]}$

cu graficele din **figura 10.23**

Funcţiile supermatematice evolventice excentrice de variabilă excentrică, se obţin prin înlocuirea variabilei centrice α, din ecuaţiile 10.27, cu variabila centrică θ(α) = aexθ

Se obţin, astfel, **FSM** româneşti excentrice Corexθ, Sirexθ, Trexθ, precum şi tangenta excentrică Voinoiu Trvexθ cu expresiile de definiţie

(10.35) Corexθ = cexθ + aexθ.sexθ

(10.36) Sirexθ = sexθ – aexθ.cexθ

(10.37) $\text{Trex}\theta = \frac{Corex\theta}{Sirex\theta} = \frac{\text{sex}\theta - \text{aex}\theta.\text{cex}\theta}{\text{cex}\theta + \text{aex}\theta.\text{sex}\theta}$

(10.38) $\text{Trvex}\theta = \frac{Corex\theta}{Abs[Sirex\theta]} = \frac{\text{sex}\theta - \text{aex}\theta.\text{cex}\theta}{\text{Abs}[\text{cex}\theta + \text{aex}\theta.\text{sex}\theta]}$

cu graficele din **figura 10.23**

De aceea, ecuaţiile parametrice ale evolventei cercului pot fi scrise sub forma

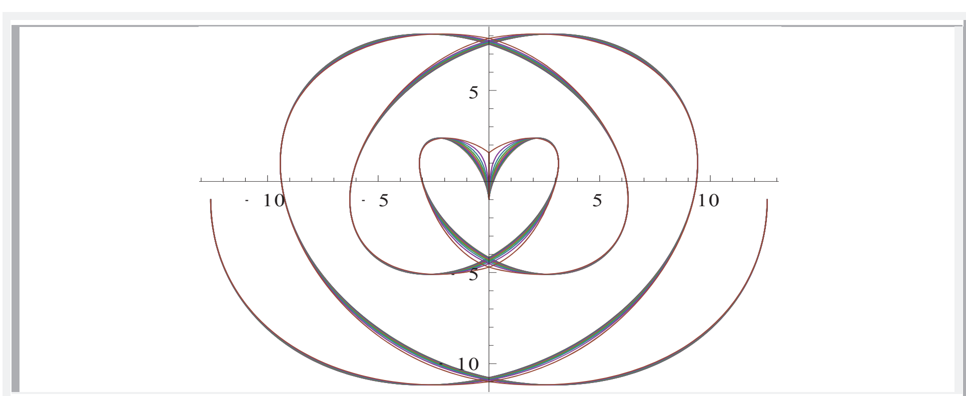
(10.39) $\begin{cases} x = R.Cor \propto \\ y = R.Sir \propto \end{cases}$

şi, în cinstea acestui savant, evolventele cercului pot fi denumite evolventele lui **Gogu Constantinescu**, iar cele exprimate de relaţia (10.26), adică, excentricele evolventice circulare vor fi denumite, din aceleaşi considerente, **excentrice evolventice Gogu Constantinescu**.

Dacă rotaţia dreptei tangente la cercul unitate se desfăşoară în ambele sensuri, sau dacă unghiul θ evoluează în ambele sensuri, adică θ ∈ [− n.π, + n.π], în **figura 10.24** n = 4, atunci se obţine o curbă excentrică spirală, ca toate excentricele evolventice, dar, de această dată, de forma unor inimi ce se cuprind şi se succed la infinit.

10.15.2 CURBELE LUI GOGU CONSTANTINESCU ÎN FORMĂ DE INIMI

S-au denumit aceste curbe “**Inimile Gogu Constantinescu”,** care sunt diferite de cardioide. Ecuaţiile parametrice ale inimilor **Gogu Constantinescu** (**Fig.10.24**), sunt



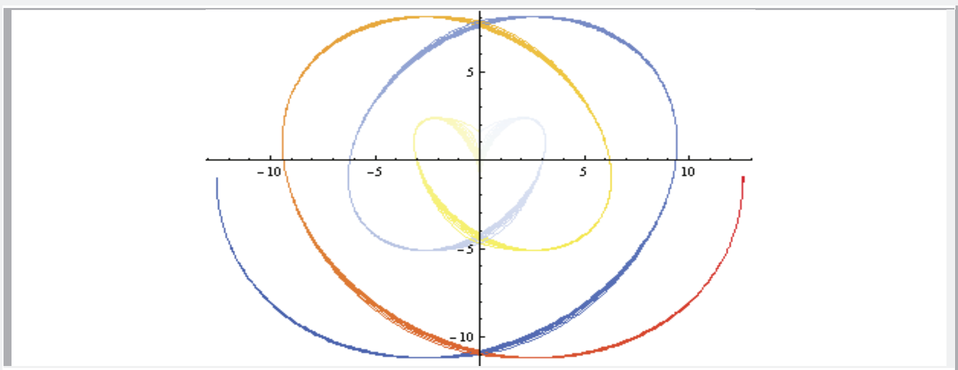


Fig. 10.24 Excentrică spirală botezată “ **Inimile Gogu Constantinescu”**

(10.40) $$\begin{cases} x = -sin[\theta - \arcsin(s.sin\theta)] + [\theta - \arcsin(s.sin\theta)]cos\theta \\ y = -cos\theta + \theta.sin\theta \end{cases}$$

sau

(10.40’) $$\begin{cases} x = -sex\theta + aex\theta.cos\theta \\ y = -cos\theta + \theta.sin\theta \end{cases}$$

şi au fost desenate chiar într-o zi de 14 februarie, “Valentine’s day”.

10.16 EXCENTRICE SPIRALE

Sunt deosebit de variate, ca şi spiralele însăşi.

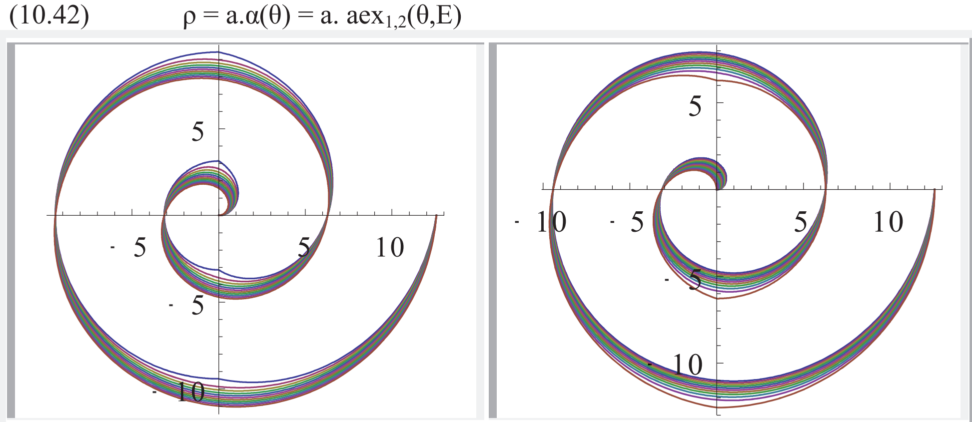
10.16.1 EXCENTRICE SPIRALE ARHIMEDICE.

Spirala arhimedică are expresia

(10.41) $\rho = a.\alpha$,

astfel că ecuaţia polară a excentricei spirale arhimedice polare (**Fig. 10.25**) va fi

(10.42) $\rho = a.\alpha(\theta) = a.\ aex_{1,2}(\theta,E)$



BUPT

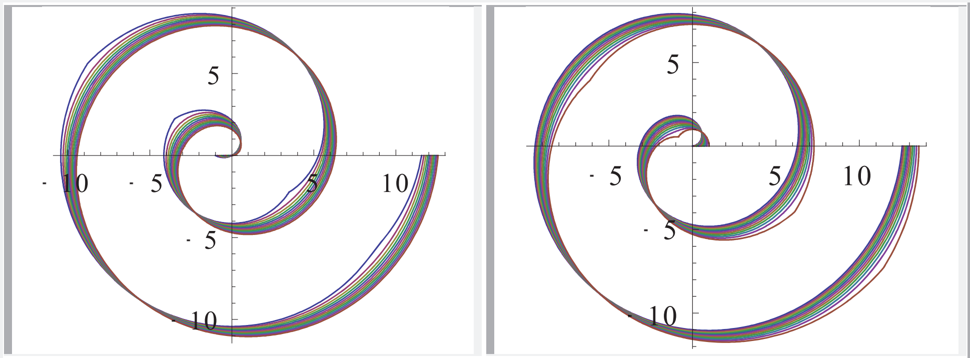


Fig. 10.25 Excentrice spirale arhimedice
Cu a = 1, s ∈[-1,0] stânga şi s ∈[0, 1] dreapta, ε = 0 sus şi ε = 1 radian jos

Se observa că, pe direcţia **ε** a expulzarii excentrului E din centrul O(0,0), toate curbele excentrice trec prin puncte comune, care sunt situate toate pe dreapta de direcţie ε cu axa x. Ele sunt pe axa x în **figurile 10.25** de sus, de ε = 0 şi pe o dreaptă de directie ε = 1 radian cu axa x > 0 în figurile de jos.

10.16.2 EXCENTRICE SPIRALE LOGARITMICE.

Spirala logaritmică are ecuaţia în coordonate polare (**Fig. 10.26-**stânga)
(10.43) $\rho = a\,.e^{b\alpha}$,
aici e fiind numărul lui **Euler** (e = 2.71828182846...)

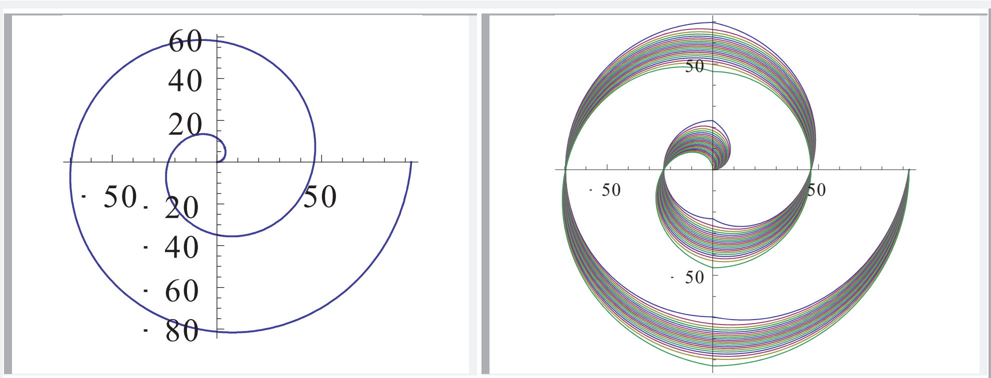


Fig. 10.26 Spirala logaritmică (stânga) şi excentricele spirale logaritmice (**dreapta)** de a =1, b = 2 şi E(e ∈ [-1, 1], ε=0)

Spirala logaritmică a fost descoperită de **René Du Perron Descartes** (Renatus Cartesius -1638), botezată astfel de **P. Varignon** (1702) şi studiată de **Jacques**

Bernoulli, care a constatat, în anul 1692, că are proprietatea de a fi asemenea cu ea însăşi.

(10.44) $\rho = a\, e^{b(\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)])} = e^{b.aex\theta}$

Ecuaţia excentricelor spirale logaritmice (Fig. **10.26**) va fi

(10.44) $\rho = a\, e^{b(\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)])} = e^{b.aex\theta}$

10.16.3 EXCENTRICE SPIRALE HIPERBOLICE.

Spirala hiperbolică are ecuaţia

(10.45) $\rho = \frac{a}{\propto}$

astfel că, ecuaţiile excentricelor spirale logaritmice vor fi

(10.46) $\rho_1 = \frac{a}{\propto_1} = \frac{a}{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]} = \frac{a}{aex_1\theta}$

reprezentate în **figura 10.27,a sus-dreapta** şi a doua determinare, de indice 2 este

(10.47) $\rho_2 = \frac{a}{\propto_2} = \frac{a}{\theta + \pi - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]} = \frac{a}{aex_2\theta}$

cu graficele din **figura 10.27,a jos.**

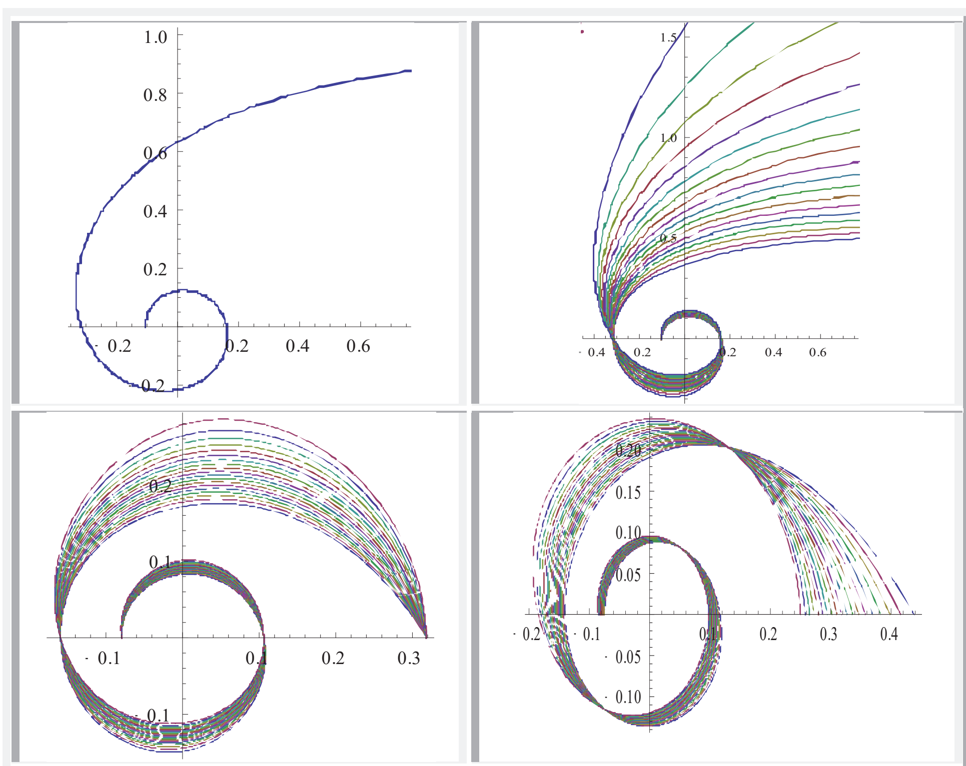
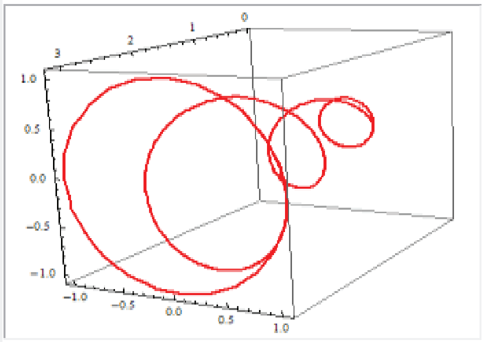
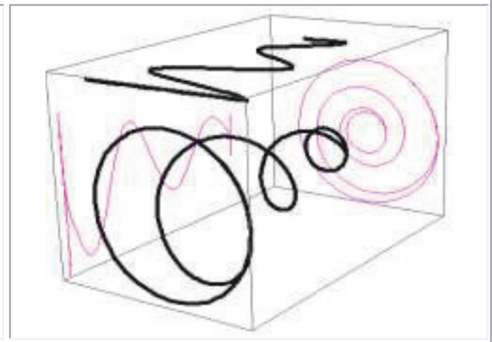


Fig. 10.27,a Spirala hiperbolică şi excentrice spirale hiperbolice, pentru a = 1, θ ∈ [0, 3π] , E(e ∈ [-0.9; 0.9], ε = 0)

ELICEA SUPERMATEMATICĂ

```
ParametricPlot3D[{{0.3 Cos[t] Exp[0.2 (0.25 t-ArcSin[1  Sin[0.25 t]])], 0.3
Sin[t] Exp[0.2  (0.25 t-ArcSin[1 Sin[0.25 t]])], 0.5 (0.25 t-ArcSin[Sin[0.25
t]])} }, {t,0,26}]
```





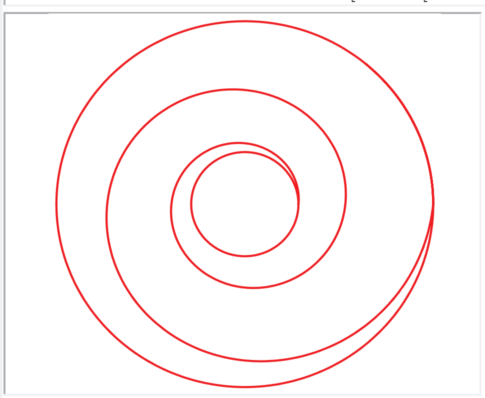
Cu **FSM-CE** amplitudine excentrică (aexθ) de variabilă excentrică θ,
de excentricitate numerică liniară s = 1 şi unghiulară ε = 0

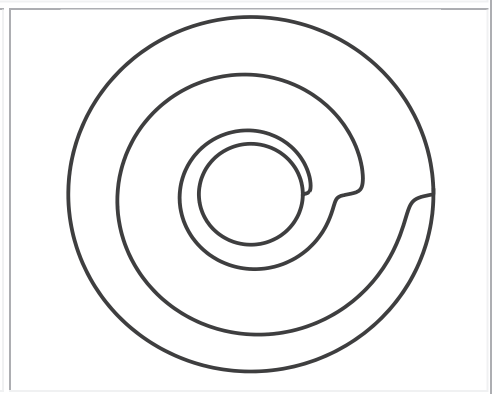
$$\begin{cases} x = 0{,}3cos\theta.e^{0{,}2.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)]} \\ y = 0{,}3sin\theta.e^{0{,}2.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)]} \\ z = 0{,}5.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)] \end{cases}$$

SPIRALĂ SUPERMATEMATICĂ

```
PolarPlot[{0.3  Exp[0.2 (t/4-ArcSin[ Sin[t/4]])]}, {t,0,10 Pi}]
```

```
ParametricPlot[{{0.3 Cos[t] Exp[0.2(0.25t-ArcSin[1Sin[0.25 t]])], 0.3Sin[t]
Exp[0.2 (0.25t-
ArcSin[1 Sin[0.25 t]])]}},{t,0,26}]
```





$$\begin{cases} x = 0{,}3cos\theta.e^{0{,}2.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)]} \\ y = 0{,}3sin\theta.e^{0{,}2.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)]} \end{cases}$$

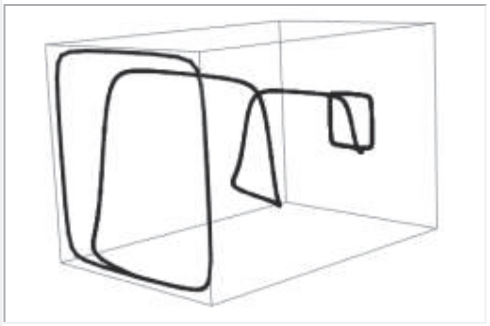
$$\begin{cases} x = 0{,}3cex[\theta, S(0{,}98;0)].e^{0{,}2.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)]} \\ y = 0{,}3sex[\theta, S(0{,}98;0)].e^{0{,}2.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)]} \end{cases}$$

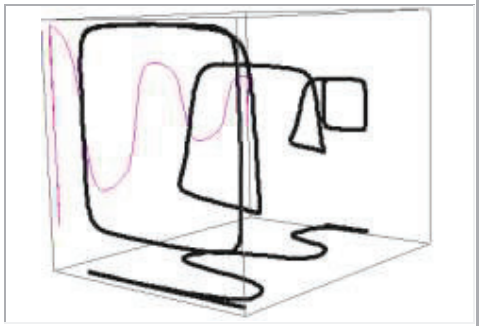
Ecuaţii parametrice în 2D cu **FSM-CE** amplitudine excentrică **aexθ**

www.supermathematica.com ; www.supermatematica.ro

SPIRALĂ SPECIALĂ PĂTRATĂ

ParametricPlot3D[{(0.3 Cos[t]/Sqrt[1-(0.9 Sin[t])^2]) Exp[0.2 (0.25 t-ArcSin[1 Sin[0.25 t]])], (0.3 Sin[t]/Sqrt[1-(0.9 Cos[t])^2]) Exp[0.2 (0.25 t-ArcSin[1 Sin[0.25 t]])], 0.5 (0.25 t-ArcSin[Sin[0.25 t]])} ,{t,0,26}]



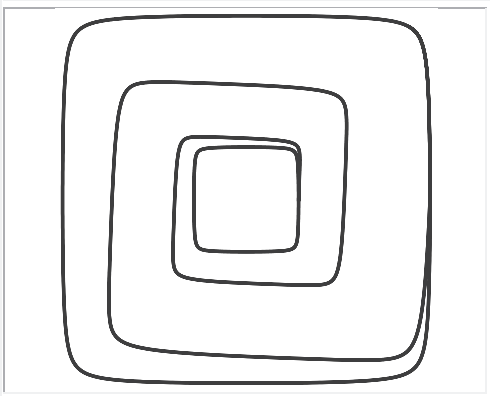


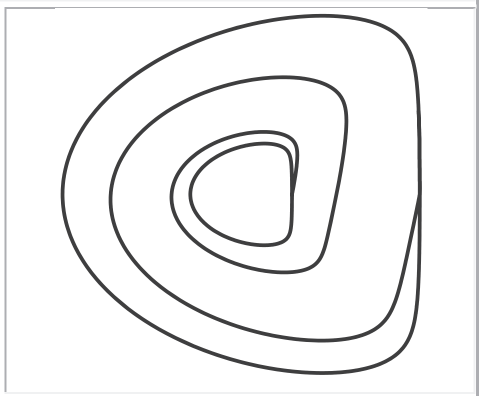
$$\begin{cases} x = 0{,}3coq[\theta, S(s=0.9, \varepsilon=0)].\, e^{0{,}2.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)]} \\ y = 0{,}3siq[\theta, (s=0.9, \varepsilon=0)].\, e^{0{,}2.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)]} \\ z = 0{,}5.\, aex[\frac{\theta}{4}, \quad S(s=1, \varepsilon=0)] \end{cases}$$

SPIRALE SUPERMATEMATICE

de excentricitate numerică s = 1, în care **FCC cos*θ*** și **sin*θ*** sunt înlocuite cu **FSM** cvadrilobe cosinus **coq*θ*** și sinus **siq*θ*** cvadrilobe (în engleză quadrlobics*)

ParametricPlot[{{(0.3 Cos[t]/Sqrt[1-(0.9 Sin[t])^2]) Exp[0.2 (0.25 t-ArcSin[1 Sin[0.25 t]])], (0.3 Sin[t]/Sqrt[1-(0.9 Cos[t])^2]) Exp[0.2 (0.25 t-ArcSin[1 Sin[0.25 t]])]} },{t,0,26}]





$$\begin{cases} x = 0{,}3coq[\theta, S(s=0.9, \varepsilon=0)].\, e^{0{,}2.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)]} \\ y = 0{,}3siq[\theta, (s=0.9, \varepsilon=0)].\, e^{0{,}2.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)]} \end{cases} \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \begin{cases} x = 0{,}3cex[\theta, S(s=0.9, \varepsilon=0)].\, e^{0{,}2.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)]} \\ y = 0{,}3sex[\theta, (s=0.5, \varepsilon=0)].\, e^{0{,}2.aex[\frac{\theta}{4},\ S(s=1,\varepsilon=0)]} \end{cases}$$

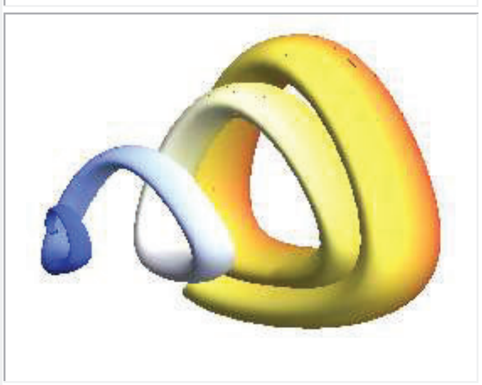
*	Șelariu Mircea Eugen	QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS	The 11–th International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, Sept.27-30, 2005 pag.77…82

www.supermathematica.com ; www.supermatematica.ro

ELICE SUPERMATEMATICE

```
ParametricPlot3D[{1/13 (2 t) Cos[t] (5+Cos[(2 π t)/13+u]),    1/13 (2 t)
Sin[t] (5+Cos[(2 π t)/13+u]),
8 (0.25 t+1/13 0.3 (2 t) Sin[(2 π t)/13+u]-ArcSin[Sin[0.25 t]])},{t, 0,
26},{u, 0,  2π}]
```

CIRCULARĂ | **PĂTRATĂ**

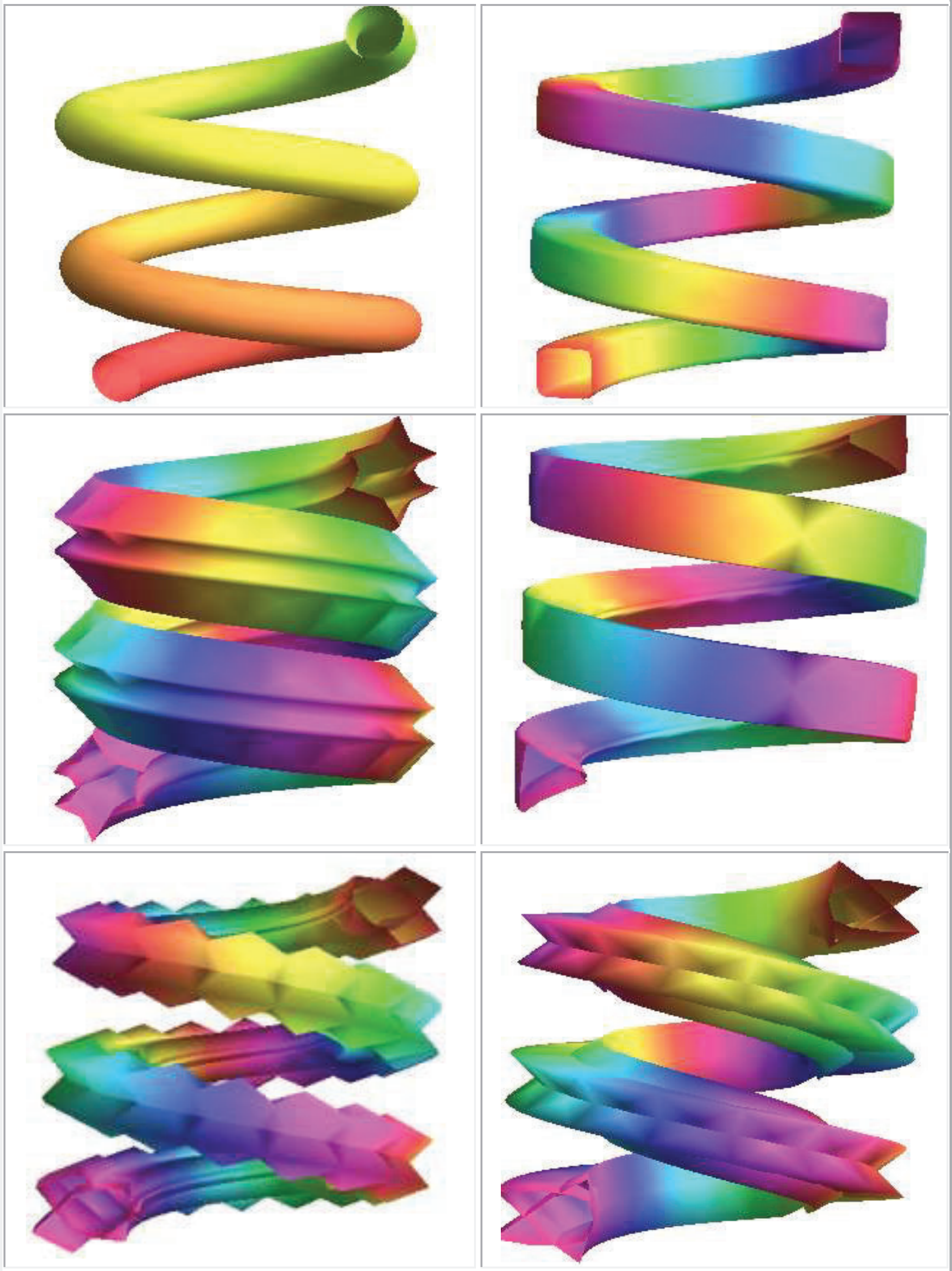


s_x =0,4; s_y =0; s_z = 0,25 ◄ **TRIUNGHIULARE** ► s_x =0,9; s_y =0; s_z = 0,25

```
ParametricPlot3D[{1/13 (2 t) Cos[t-ArcSin[0.9 Sin[t]]] (5+Cos[(2 π
t)/13+u]),  1/13 (2 t) Sin[t] (5+Cos[(2 π t)/13+u]),   8 (0.25 t+1/13 0.3 (2
t) Sin[(2 π t)/13+u]-ArcSin[Sin[0.25 t]])},{t, 0, 26},{u, 0,  2π}
```

www.supermathematica.com ; www.supermatematica.ro

ARCURI SPIRALE DE SECŢIUNI DIVERSE



www.supermathematica.com ; www.supermatematica.ro

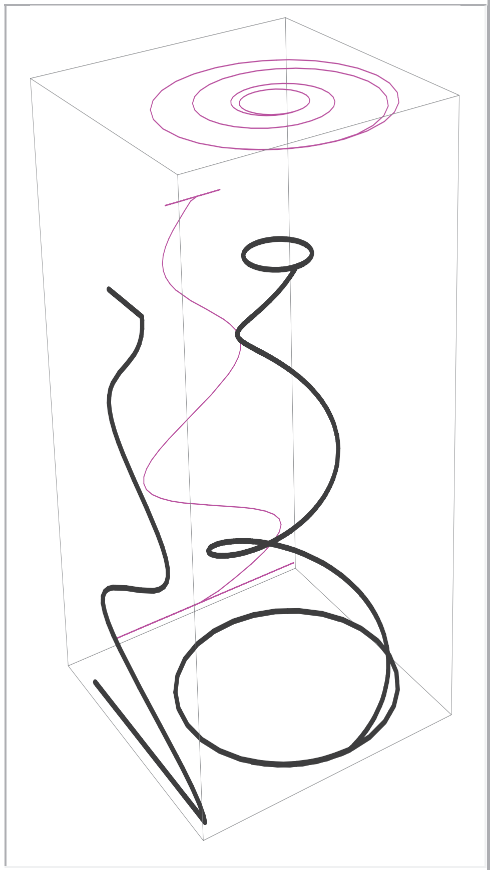


Fig.27,b **O sere de elice şi spirale SM**

www.supermathematica.com ; www.supermatematica.ro

Figura din stânga jos are $\varepsilon_2 = 0$ iar cea din dreapta –jos are $\varepsilon_2 = 1$. Pe direcţiile lui ε se situează toate punctele comune de intersecţie ale excentricelor de diverse excentricităţi.

Excentricele spirale de excentre variabile au forme deosebit de variate şi de înteresante, care frizează esteticul. Însă, spiralele care aduc forme şi proprietăţi eminamente noi, în matematică, sunt **spiralele supermatematice**, la care, punctul curent al spiralei se roteşte de **2n** ori pe o orbită, apoi prin alte **2n** rotaţii, pe spirale propriu-zuse, sare pe orbita următoare, fenomenul repetându-se nedefinit.

O serie de elice şi spirale au fost prezentate în **figura 10.27,b**

10.17 EXCENTRICE CICLOIDALE

Cicloida (gr. Kiklos = roată, eidos = aspect), amintită pentru prima dată de ***Aristotel***, a fost introdusă în matematică de **Galileo Galilei** (1640).

Din punct de vedere mecanic, o cicloidă este generată de un punct **excentric E(e = a)** , evident, faţă de centrul cercului **C(O_r, r),** sau faţă de axa unei roţi de rază r, când cercul (roata) se rostogoleşte, fără alunecare, pe o dreaptă.

Acestea sunt cicloidele **clasice**, care, în funcţie de poziţia excentrului E, pot fi

1. e = a = r → s = 1→ comune (propriu-zise)
2. e = a < r → s < 1→ scurtate
3. e = a > r → s > 1→ alungite

Dar curba poate fi, în general, oarecare şi, în cazul în care este tot un cerc **K(O_R, R)**, cercul care se rostogoleşte pe el va fi **C(O_r, r),** iar cicloidele pot fi clasificate în

- **Epi**cicloide, dacă **C** se rostogoleşte, fară alunecare pe exteriorul cercului **K.** **Cardioida** este o epicicloidă de r = R → e = a = r = R → s = 1;
- **Hipo**cicloide, dacă **C** se rostogoleste, fară alunecare, pe partea interioară a cercului **K.**

Astroida este o astfel de hipocicloidă, obţinută pentru R = 4r → e = a = r = $\frac{3}{4}R$ → s = $\frac{3}{4}$ = 0,75.

Oricare dintre acestea, la rândul lor, pot fi propriu-zise, scurtate sau alungite, ca şi în cazul precedent, al cicloidelor clasice.

Din punct de vedere tehnologic, obţinerea unor suprafete complexe, de formă triunghiulară, pătratică, pentagonală, hexagonală ş.a., ca şi curbe epiciclice, hipociclice, dar şi ca periciclice, precum şi a suprafeţelor de formă de elipsă, cardioidă, sau melcul lui **Pascal**, ovale, nefroida lui **Cristian Huygens** ş.a. se pot realiza prin directoare şi/sau generatoare cinematice, aşa cum sunt prezentate pe larg de autor în tratatul [**Sanda-Vasii Roşculeţ**, **Mircea Şelariu** ş.a, **PROIECTAREA DISPOZITIVELOR**, în Cap.17. **DISPOZITIVE DE PRELUCRARE** (pag. 474…664)].

Toate poligoanele obţinute pe cale pur mecanică (**cinematică**), aşa cum se indică în această lucrare de dispozitive de prelucrare, au laturile uşor rotunjite şi colţurile rotunjite pronunţat/proeminent şi nu sunt poligoane perfecte, ca cele obţinute, pentru **s** = 1 cu ajutorul **FSM-CE**, aşa cum se arată în prezenta lucrare în cele două volume.

Funcţiile noi, supermatematice pot contribui, însă, esenţial, la realizarea traiectoriilor complexe ale directoarelor şi/sau generatoarelor **programate** pentru generarea unor suprafeţe complexe. În cest mod, suprafeţele complexe, astfel obţinute, sunt, teoretic, exacte.

Oricum, **FSM-CE** pot programa exact, în principiu, orice tip de suprafaţă, inclusiv pe acelea care, până de curând, adică, până la apariţia noii matematici excentrice (**ME**) şi a **FSM**, erau considerate **suprafeţe nematematice.**

Practic, însă, intervin eroriile de prelucrare, inerente în toate sistemele tehnologice, ca şi în oricare alt sistem tehnic, nu şi în sistemele matematice.

Ca urmare, programarea oricărei suprafeţe complexe, acum, cu ajutorul **FSM**, poate fi realizată exact, nu, însă, şi execuţia prin prelucrarea mecanică a acestora.

Considerăm că, prin cele prezentate pâna acum, în această lucrare, rezultă suficient de clar contribuţiile vaste (infinite) pe care **supermatematica** (**SM**) le aduce în lărgirea domeniului suprafeţelor matematice, prin înglobarea multor suprafeţe, anterior, considerate nematematice.

Fie şi numai pentru acest lucru, lucrarea îşi justifică existenţa, merită să fie citită, înţeleasă şi aplicată în multitudinea de domenii în care matematica s-a aplicat şi până în prezent, ca şi în altele, în care s-a implicat mai puţin.

Subliniind, totodată, importanţa noilor complemente de matematică, nu numai pentru domeniul matematic, ci, poate, mult mai important, în domeniul stiinţei şi a tehnologiei, în general şi al tehnologiei informatice şi în domeniul tehnologiei constructiilor de maşini (**TCM**), în special.

Pentru facilitarea programării maşinilor – unelte, cu comandă numerică de conturare (**CNC**), s-a dat o extindere mai pronunţată acestui capitol, în general şi excentricelor cicloidale, în special. Cu atât mai mult, cu cât, prin imaginarea unor cicloide cu **alunecare controlată** pot fi concepute şi realizate dispozitive şi/sau maşini – unelte complet noi, aşa cum au apărut dispozitivele şi maşinile – unelte pe principii complet noi ale hexapodului.

10.17.1 HEXAPODUL

Prezentat în (Fig.**10.28**) este o platformă, numită şi platformă **Gough-Stewart**, universal localizabilă şi universal orientabilă -deci, universal poziţionabilă (**poziţionarea = localizare** ∪ **orientare**)– spaţial, adică, în 3D - cu cinematică paralelă.

Ea este susţinută de şase picioare telescopice, acţionate de motoare. Motoarele pot fi electrice liniare, sau rotative şi cu transformarea rotaţiilor în translaţii prin şuruburi cu bile de mare precizie.

Pot fi acţionate şi cu motoare hidraulice liniare, pentru sarcini mari.

Pentru precizii mai reduse, dar viteze de execuţie mai mari (simulatoare de zbor), pot fi acţionate şi cu motoare pneumatice liniare.

Numai cu ajutorul celor 6 translaţii ale picioarelor (extensii), platformei i se pot induce/aplica 3 mişcări de translaţie (notate cu X, Y, Z) şi 3 mişcări de rotaţie (notate cu A, B, C). Prin combinarea cărora, se pot obţine toate/orice poziţiile dorite ale platformei.

Ea a fost utilizată, în premieră, de **NASA**, pentru modificarea poziţiei telescopului spaţial orbital **Hubble.** Este aplicată şi la telescopul Universităţii Ruhr din Bochum. Apoi a fost extinsă la realizarea simulatoarelor de zbor, din domeniul aviaţiei militare şi apoi şi civile, în domeniul roboţilor industriali (Kuka) şi aplicaţiile se extind vertiginos. De curând, au fost realizate dispozitive şi maşini-unelte CNC pe principiul hexapodului, la Institutul de Tehnică de Producţie/Prelucrare şi Automatizări (Fraunhofer IPA) din Stuttgart.

Fig. 10.28 Hexapozi ai firmei PI

Dispozitivul hexapod a fost realizat iniţial de **D**. **Stewart** (1965) şi perfecţionat de Dr. **Eric Gough.**

10.17.2 TRIPODUL

Este o variantă simplificată a hexapodului, cu numai trei picioare telescopice, dispunând, în consecinţă, numai de mişcarea universală într-un singur plan (XOY) formată din două translaţii X şi Y şi o singură rotaţie C, în jurul unei axe Z, deobicei verticală, perpendiculară pe suprafaţa platoului central, planul XOY.

Schiţa de principiu este prezentată în figura **10.29**, cu translaţie pură (**a**) şi cu rotaţie pură (**b**).

Rotaţia pură, din poziţia **b,** ca şi translaţia pură, sau ambele simultan, cu centru O(0,0) de simetrie a ansamblului sistemului tripod, nu poate fi antamată, deoarece cele trei forţe radiale centrice, în poziţia iniţială, în acest caz, lucrând/acţionând **toate** spre centrul O(0,0), se echilibrează. De aceea, există un sistem suplimentar, neprezentat în figură, care crează un cuplu de rotaţie în jurul lui O(0,0), care să ajute la amorsarea/antamarea rotaţiei.Sensul cuplului este dictat de sensul de rotaţie sau de direcţia de translaţie a platoului central.

Acest fenomen nu apare la hexapod, deoarece, la hexapod, acesta forţele nu pot lucra niciodată într-un singur plan.

Pentru realizarea unei rotaţii sau/şi a unei translaţii este necesar să se determine cursele celor trei picioare (cilindri electromecanici), sau lungimile lor după efectuarea rotaţiei, $Z1_R$,$Z2_R$, $Z3_R$, a translaţiei $Z1_T$, $Z2_T$, $Z3_T$, sau a celor două mişcări realizate simultan Z1, Z2, Z3, cunoscându-se lungimile lor iniţiale $Z1_0$, $Z2_0$ şi $Z3_0$.

10.17.3 ROTAŢIA PURĂ

Cea mai simplă problemă de rezolvat este a rotaţiei (Fig.**10.29,b**). Articulaţiile fixe ale tripodului se aleg drept excentre (**E_1, E_2, E_3**), raza cercului pe care acestea sunt dispuse constructiv, este excentricitatea e şi raza pe care sunt dispuse articulaţiile platoului mobil se considera raza **R** a cercului cu punctele M_i, i = 1,2,3.

Poziţiile iniţiale, date de lungimile iniţiale **Zi_0**, pot fi exprimate cu ajutorul **FSM-CE** radial excentric, de variabilă centrică α, şi sunt egale toate, în modul, pentru cele 3 picioare, dacă centrul O al platoului coincide cu centrul de simetrie al tripodului.

(10.48) $\mathbf{Zi_0} = -\mathrm{R.Rex}\left(\alpha_{20}\mathrm{i}, \mathrm{s} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{R}}, \varepsilon_0 \mathrm{i}\right) = -R\sqrt{1+s^2-2s.\cos\left(\alpha_{20}i-\varepsilon_0 i\right)}$,

$$\text{în care}\begin{cases} \propto_{20} 1 = 0 = 0^0 \\ \propto_{20} 2 = 2\frac{\pi}{3} = 120^0 \\ \alpha_{20}3 = 4\frac{\pi}{3} = 240^0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \theta 1 = \pi \\ \theta 2 = 5\frac{\pi}{3} \\ \theta 3 = \frac{\pi}{3} \end{cases}, \ \mathrm{s} = \frac{e}{R}$$

(i = 1, 2, 3) iar, aşa cum rezultă şi din figură $\varepsilon_0 i = \alpha_{20} i \rightarrow \cos(\alpha_{20} i - \varepsilon_0 i) = \cos 0^0 = 1$, aşa încât toate lungimile iniţiale ale tripodului sunt egale între ele şi egale cu

(10.49) $z_0 = -R,(1\text{-}s) = e - R$.

Prin **rotaţia** **R(O, ρ),** adică în jurul centrului O al platoului cu unghiul ρ, lungimile celor trei "picioare" vor fi date de relaţia anterioară, pentru unghiurile modificate cu rotaţia impusă/necesară $\alpha'_2 i = \alpha_2 i + \rho$, i = 1, 2, 3. Datorită simetriei sistemului, şi aceste lungimi vor fi egale între ele

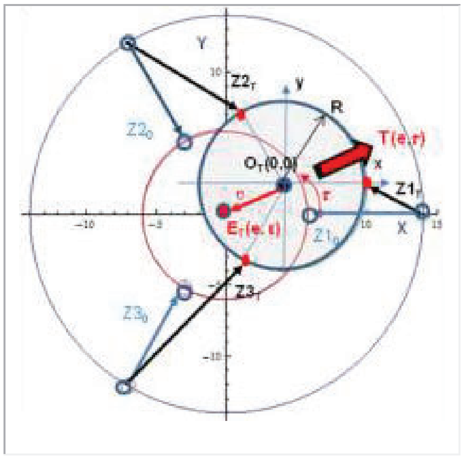


Fig. 10.29,a Tripod în translaţie.

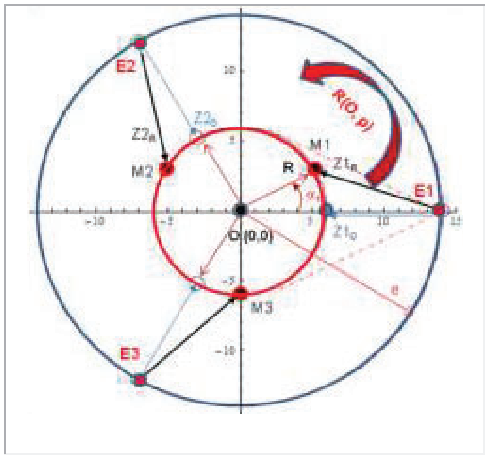


Fig. 10.29,b Tripod în rotaţie

(10.50) $Zi_R = -R.\,\mathrm{Rex}\left(\alpha'_2 i,\ s=\frac{e}{R},\ \varepsilon_0 i\right) = -\sqrt{1+s^2-2s.\cos\left(\alpha'_2 i-\ \varepsilon_0 i\right)}$,

în care $\begin{cases} \alpha'_2\,1 = 0+\rho=\rho^0 \\ \alpha'_2\,2 = 2\frac{\pi}{3}+\rho = \ 120^0+\rho^0 \\ \alpha'_2 3 = 4\frac{\pi}{3}+\rho = 240^0+\rho^0 \end{cases}$, $s=\frac{e}{R}$ şi egale cu

(10.51) $z_R = -\,R.\sqrt{1+s^2-2s.\cos\,\rho}$, aşa cum este cazul pentru punctul M1.

Unghiul de rotaţie ρ poate fi constant, de exemplu, în cazul folosirii tripodului ca dispozitiv de poziţionare, în coordonate, pentru realizarea unei scheme de găurire sau/şi de filetare /tarodare a mai multor orificii.

Dacă este folosit la frezarea unor canale circulare, la o distanţă **a** de centrul O, atunci unghiul ρ variază continuu, cu o viteză $\dot{\vec{\rho}}$ impusă, deobicei constantă. Considerând că unghiul ρ variază după legea

(10.52) $\rho = \rho_0 + a.\omega$,

atunci, tripodul se programeaza întâi pentru a ajunge în punctul de pornire, numai printr-o rotaţie iniţială, în care, probabil există un orificiu, anterior realizat şi în care va coborâ freza, după care se va programa rotirea continuă a platoului, în jurul centrului O(0,0), cu viteza unghiulară ω, constantă sau variabila, după caz.

Relaţiile (10.52) vor fi utilizate de două ori: odată pentru rotirea cu $\rho = \rho_0$ pentru poziţionarea platoului, cu piesa, în poziţia iniţială şi, a doua oară, cu $\rho = a.\omega$, ($\rho \in [\rho_i\,,\,\rho_f]$) pentru acţionarea platoului cu piesă (rotirea piesei) în vederea frezării ei.

În acest caz, avem de-aface cu **FSM-CE** de excentru variabil.

Evident că, unghiul de rotire a platoului nu poate fi mai mare decât unghiul maxim admis prin construcţia tripodului şi este limitat de interferenţa tijelor ("picioarelor") tripodului, fiind destul de redus.

De ce s-a ales a doua determinare, de indice 2, a **FSM-CE** radial excentric, în aceste două relaţii ? Pentru că, dreptele generatoare **di^+**, definită de punctele **Ei Mi**, intersectează cercul **C(O,R)** în doua puncte. Dintre care, **M_1i**, neprezentat în figură, se rotesc pe C în sens trigonometric pozitiv, la rotaţia dreptei în acelaşi sens. Pe când, cele reprezentate în figură (**M_2i**) – fară indicele 2 - se rotesc pe C(O,R) în sens trigonometric negativ (− → Sinistrorum/dextrogin) la rotaţiile cu unghiul θ_i, în jurul excentrelor **Ei**, în sens trigonometric pozitiv (+ → sinistrorum/dextrogin) a dreptei d^+.

Se poate urmări pe figură că, acest lucru, este valabil pentru toate punctele **Mi**, din toate excentrele **Ei**, deoarece, prin rotirea platoului, toate unghiurile θi, în jurul excentrelor Ei, se micşorează.

10.17.4 TRANSLAŢIA PURĂ

Este notată **T(e,τ)**, şi se determină în două faze. A nu se confunda această excentricitate de "translaţie" (- e = e_T), eglă cu amplitudinea translaţiei, care este variabilă, în funcţie de cerinţele impuse translaţiei, cu cea anterioară de "rotaţie" (e = e_R = constant).

În prima fază, se determină razele Ri = E_T Mi cu ajutorul**, FSM-CE** radial excentric, de variabilă centrică αi, pe cercul C(O,R), care vor fi considerate, ulterior, ca raze ale unor cercuri, nefigurate în desen, în faza a doua.

Ele sunt

(10.52) Ri = R.Rex(α_{10}i, e, ε = τ + π) = R.Rex(α_{10}i, - e, ε = τ),

ţinând cont de echivalenţa (e, ε = τ + π) ⇔ (− e, ε = τ)

Se observă că, în acest caz, se va uza de prima determinare, de indice 1, a **FSM-CE** (Rexα_1), deoarece, la rotirea dreptelor generatoare d^+ ,în jurul unicului excentru central E_T, în sens pozitiv şi punctele Mi se rotesc în acelaşi sens pe cercul C(O_T ,R).

Astfel

(10.53) $Ri = R.\sqrt{1+s^2-2.s.cos\alpha_{10}i}$, în care, $s = \frac{e}{R} = \frac{e_T}{R}$ şi $\alpha_{10} = \alpha_{20}$ din (10.48), adică, $\alpha_{10}1 = 0$, $\alpha_{10}2 = 2\frac{\pi}{3} = 120^0$, $\alpha_{10}3 = 4\frac{\pi}{3} = 240^0$.

În continuare, se pot calcula unghiurile la excentrul **E_T**, θi(α_{10}i), cu relaţiile cunoscute

(10.54) $$\theta i = \alpha_{10}i + \beta_1 i = \alpha_{10}i + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha_{10}i-\varepsilon)}{Rex(\alpha_{10}i,Ei(e,\varepsilon))} =$$

$$= \alpha_{10}i + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha_{10}i-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{10}i-\varepsilon)}}$$

şi se poate trece la faza a doua.

În această a doua fază, se consideră trei cercuri Ci(**E_T**, Ri), nefigurate în desen, toate având centrul comun în **E_T** şi de raze Ri, determinate în faza anterioară. Articulaţiile fixe Ei, aceleaşi ca la rotaţie, se consideră din nou excentre şi lungimile "picioarelor" Zi_T după translaţie vor fi calculate ca raze vectoare din Ei la punctele Mi (nefigurate în desen, ele fiind articulaţiile dintre platoul mobil şi cele 3 "picioare" / tije de acţionare) de pe cercul C(O,R), figurat în desen.

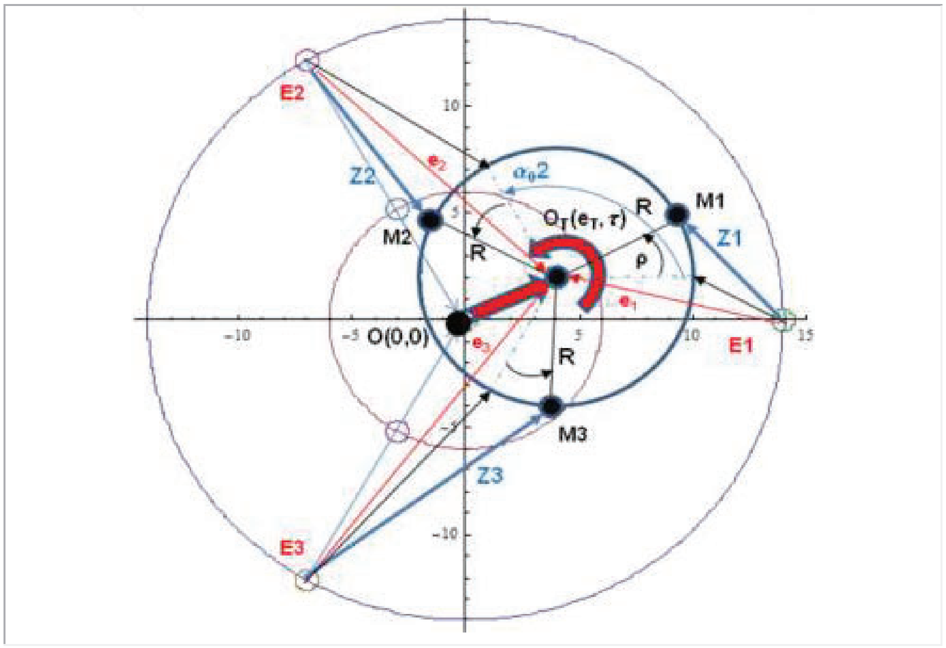


Fig. 10.30 Tripodul după translaţie şi rotaţie

Translaţia fiind considerată pură, platoul nu se roteşte, astfel ca unghiurile α_{10}i, din O_T, sub care se văd articulaţiile ramân neschimbate. Ca urmare $s_i = \frac{eR}{Ri}$ şi

(10.55) $Zi_T = Ri.\ rex_1\ [\theta i,\ \mathbf{Ei}(s_i,\ \varepsilon_i = \alpha_{10} i)] =$

$$= Ri[-s\cos(\theta i - \varepsilon_i) + \sqrt{1 - s_i^2.\sin^2(\theta i - \varepsilon i)}].$$

Problema determinării lungimii "picioarelor" tripodului, după o translaţie pură, poate fi rezolvată şi vectorial ştiind că

(10.56) $\overline{Zi_T} = \overline{Z_0 i} + \vec{T}$, în care s-a notat cu $\vec{T}$ vectorul de translaţie.

Scriind teorema lui Pitagora generalizată, care este aceeaşi cu funcţia Rexα de variabilă centrică.

În acest caz, se consideră articulaţiile mobile, ale platoului, ca centre ale unor cercuri Ci(Mi, e_T) cu centrele în articulatiile mobile ale platoului Mi şi de aceleaşi raze, egale toate cu lungimea cursei de translatie e_T, translaţia (pură) fiind aceeaşi pentru toate punctele platoului.

Unghiurile γi dintre cei doi vectori cunoscuţi sunt:

(10.57)
$$\begin{cases} \gamma 1 = \tau \\ \gamma 2 = \pi - \frac{\pi}{3} - \tau = 2\frac{\pi}{3} - \tau \\ \gamma 3 = \pi - \frac{\pi}{3} + \tau = 2\frac{\pi}{3} + \tau \end{cases}$$

şi lungimile necesare picioarelor pentru translaţia T(e, τ) sunt
(10.58)
$$\begin{cases} Z1 = e.Rex(\gamma 1, Z1_0/e) = \sqrt{e^2 + {Z1_0}^2 - 2.e.Z1_0.cos\gamma 1} = e\sqrt{1 + (\frac{Z1_0}{e})^2 - 2\frac{Z1_0}{e}cos\gamma 1} \\ Z2 = e.Rex(\gamma 2, Z2_0/e) = \sqrt{e^2 + {Z2_0}^2 - 2.e.Z2_0.cos\gamma 2} = e\sqrt{1 + (\frac{2}{e})^2 - 2\frac{Z2_0}{e}cos\gamma 2} \\ Z3 = e.Rex(\gamma 3, Z3_0/e) = \sqrt{e^2 + {Z3_0}^2 - 2.e.Z3_0.cos\gamma 3} = e\sqrt{1 + (\frac{Z3_0}{e})^2 - 2\frac{Z3_0}{e}cos\gamma 3} \end{cases}$$

în care, lungimile iniţiale Zi_0, aceleaşi pentru toate picioarele, pe care le notăm cu z_0, sunt considerate excentricităţi reale, iar împărţite cu razele e sunt excentricităţiile numerice.

Notând raportul $\frac{z_0}{e} = s_0$, care este excentricitatea numerică, rezultă

(10.58') $$Zi = e.Rex(\gamma i, s_0, \varepsilon = 0) = e.\sqrt{1 + s_0^2 - 2s_0 cos\gamma i}$$

Dacă viteza de translaţie a platoului nu are importanţă, translaţia fiind de poziţionare şi nu o mişcare de prelucrare, atunci e se poate considera o constantă, nefiind important cum se ajunge dintr-o poziţie a platoului în alta.

Dacă, în schimb, deplasarea pe direcţia τ, a translaţiei, trebuie să se execute cu o viteză V bine determinată (e = V.t), de condiţiile tehnologice de prelucare, atunci în relaţiile (10.58') se va considera raza e şi excentricitatea numerică $s_0 = z_0/e$ în consecinţă, adică, variabilă şi, din relaţiile anterioare, va rezulta Zi = Zi(t).

Fiecare "picior" al tripodului este, din punct de vedere tehnologic, o axă a unei mişcări de poziţionare, în cazul unor roboţi şi/sau de prelucrare, în cazul unor dispozitive sau maşini-unelte.

De precizia cu care fiecare axă realizeaza deplasarea Zi, depinde precizia traiectoriei ca şi precizia de asigurare a vitezei prescrise pe traiectorie.

10.17.5 TRANSLAŢIA ŞI ROTAŢIA SUCCESIVĂ SAU SIMULTANĂ

Dacă, după translaţie, e necesară o rotaţie, care, deci, nu se va mai realiza în jurul centrului de simetrie al tripodului, ci în jurul centrului O_T al platoului (Fig.**10.30**), translatat şi el la distanţele e_{Ri} de articulaţiile fixe Ei, atunci e necesar să se determine, în prealabil, aceste distanţe, pentru ca, ulterior, să se determine lungimile Zi ale "picioarelor" dupa translaţia urmată de o rotaţie, adică lungimea finală a acestora. Această situaţie este prezentată în figura **10.30**. Excentricităţiile $e_i = E_iO_T$ se pot determina tot cu **FSM-CE** radial excentric de variabilă centrică. Dar, să încercăm prin metodele matematicii centrice (**MC**) scriind distanţele e_i dintre două puncte în plan, Ei şi $O_T(e_T, \tau)$, cu relaţia arhicunoscută

(10.59) $e_i = \pm\sqrt{(x_{Ei} - x_{OT})^2 + (y_{Ei} - y_{OT})^2} =$

$$= \pm\sqrt{(R_E.\cos\alpha_{0i} - e_T.\cos\tau)^2 + (R_E.\sin\alpha_{0i} - e_T.\sin\tau)^2} =$$

$$= \pm R_E\sqrt{(\cos\alpha_{0i} - s_T.\cos\tau)^2 + (\sin\alpha_{0i} - s.\sin\tau)^2} =$$

$$= \pm R_E\sqrt{1 + s_T^2 - 2.s_T.\cos(\alpha_{0i} - \tau)} = \pm R_E.\ \mathrm{Rex}_1[\alpha_{0i}, S(s_T = e_T/R_E, \varepsilon = \tau)].$$

Şi, am ajuns din nou la **FSM-CE** radial excentric, de varioabilă centrică α_{0i}, prin care s-a dovedit, încă odată, că această **FSM-CE** nu reprezintă altceva decât distanţa în plan dintre două puncte, exprimată în coordonate polare.

Cu $\mathbf{R_E}$ s-au notat razele polare pe care se găsesc excentrele **Ei**, sau raza cercului pe care sunt dispuse cele trei articulaţii fixe ale tripodului.

Cu $\mathbf{e_T}$ s-a notat deplasarea OO_T prin translaţia $\mathbf{T(e_T,\tau)}$, care s-a ales şi excentricitate reală, astfel că, impărţită cu raza $\mathbf{R_E}$ a cercului, dă excentricitatea numerică $\mathbf{s_T = e_T / R_T}$.

Unghiurile $\boldsymbol{\alpha_{0i}}$ sunt unghiurile sub care se văd punctele **Ei** din centrul O(0,0), aceleaşi din relaţiile (10.48) şi reprezintă, totodată, variabilele centrice – din sau la centrul O(0,0)- .

Utilizând ,însă, de la bun început **FSM-CE** obţinem, aşa cum se poate observa, direct relaţia finală, scutindu-ne de calcule intermediare.

În **MC** nu există reguli pentru alegerea semnului din faţa radicalului, decât faptul că o distanţă trebuie să fie întotdeauna pozitivă.

Prin utilizarea **FSM-CE** Rex$\alpha_{1,2}$, semnul radicalului depinde de determinarea 1 sau 2 a funcţiei şi de poziţia excentrului faţă de discul circular: interior sau exterior.

În cazul de faţă, la rotirea în jurul lui O_T a dreptei generatoare, punctele Ei se rotesc pe cercul mare, exterior, $C(O,R_E)$, în acelaşi sens. Rezultă că avem de-a face cu prima determinare, principală, de indice 1 şi, în consecinţă, semnul din faţa radicalului va fi semnul +.

În continuare, determinarea razelor polare, notate cu Zi, ale punctelor Mi, care sunt articulaţiile picioarelor cu platoul mobil, situate pe cercul $C(O_T, R)$ al platoului, după o translaţie şi o rotaţie, succesive sau simultane, este o problemă de rutină.

Considerând cercul C şi Ei ca excentre exterioare cercului ($e_i > R \rightarrow s_i > 1$), cele anterior determinate, şi unghiurile la centrul O_T ca unghiuri la centru α_i, sau variabile centrice, în care aceste unghiuri se măresc sau se reduc cu unghiul de rotaţie τ al platoului

(10.60) $\alpha_i = \alpha_{0i} + \tau$

astfel că va rezulta

(10.61) $Zi = R.\mathrm{Rex}\,[\alpha_{2i}, S_i(s_i, \varepsilon_i)] = -R\sqrt{1 + s_i^2 - 2s_i.\cos\alpha_i}$,

în care $s_i = \frac{e_i}{R}$ şi $\varepsilon_i = \theta_i(\alpha_{0i}) = \alpha_{0i} + \beta_{0i} = \alpha_{0i} + \arcsin\frac{s_T\sin(\alpha_{0i} - \tau)}{\sqrt{1 + s_T^2 - 2.s_T.\cos(\alpha_{0i} - \tau)}}$ sunt unghiurile pe care direţiile excentricităţiilor $e_i = O_TE_i$ la fac cu axa Ox şi care, aşa cum se ştie de la **FSM-CE** aexθ şi Aexα, au expresiile anterioare în care sunt scrise concentrat trei expresii, pentru cele trei excentre E_i.

În concluzie, rezultă că, în cazul suprapunerii celor două mişcări, de translaţi şi de rotaţie, cotele/deplasările pe cele trei axe se determina cu **FSM-CE** $R_E.Rex\alpha_{2i}$ (10.61) în care excentricitatea numerică este exprimată de o altă **FSM-CE** $R.Rex\alpha_{1i}$ (10.59).

Evident că soluţionarea problemei programării tripodului poate fi realizată şi clasic, utilizând matrici de transformare.

S-a uzat de **FSM-CE** din două motive. În primul rând, pentru a exemplifica modul de utilizare a acestor funcţii la soluţionarea unor probleme tehnologice destul de complexe. În al doilea rând, pentru a compara tripodul, care, ca şi hexapodul, este un dispozitiv în vogă, cu un alt dispozitiv, mult mai adecvat realizării/prelucrării unor suprafeţe complexe cu CNC, dispozitiv care are la bază realizarea excentricelor cicloidale.

10.17.6 EXCENTRICE CICLOIDALE PE DREAPTĂ

Cicloida are ecuaţiile parametrice

(10.62) $\begin{cases} x = r.\propto - a.\sin\propto \\ y = r - a.\cos\propto \end{cases}$, în care r este raza cercului discului rostogolitor, a -excentricitatea punctului M(x,y) care descrie mişcarea/curba şi α –unghiul de rostogolire, fără alunecare. Atunci, excentrica cicloidală va avea ecuaţiile parametrice

(10.63) $\begin{cases} x = r.\theta - a.sex_{1,2}\theta \\ y = r - a.cex_{1,2}\theta \end{cases}$ sau $\begin{cases} x. = r.aex_{1,2}\theta - a.sex_{1,2}\theta \\ y = r - a.cex_{1,2}\theta \end{cases}$

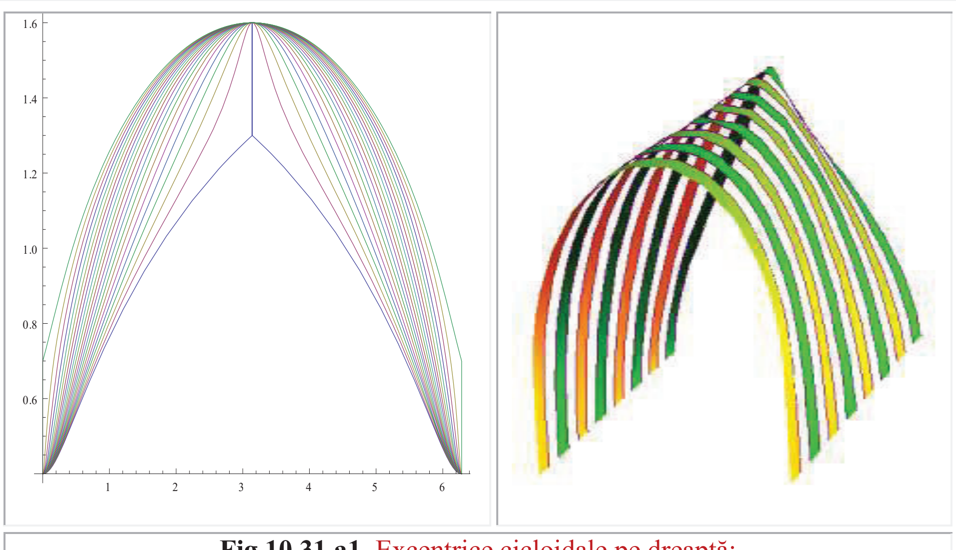


Fig.10.31,a1 Excentrice cicloidale pe dreaptă:
scurtate a = 0,6; comune a = 1 şi alungite a = 1,6 > r = 1
în care $Sx(s_x \in [-0,5; 0,5], \varepsilon_x = 0)$ şi $Sy(s_x \in [-1, +1], \varepsilon_y = 0)$

În **figura 10 .31,a** excentricele cicloidale au $s_x < s_y$ ($s_x = 0,5\ s_y$) iar în **figura 10.31,b** situaţia este inversă: $s_x > s_y$ ($s_y = 0,5\ s_x$).

Aceste arcade pot fi luate în considerare, ca forme, în domeniul arhitecturii industriale, la constructia stadioanelor acoperite şi în alte domenii.

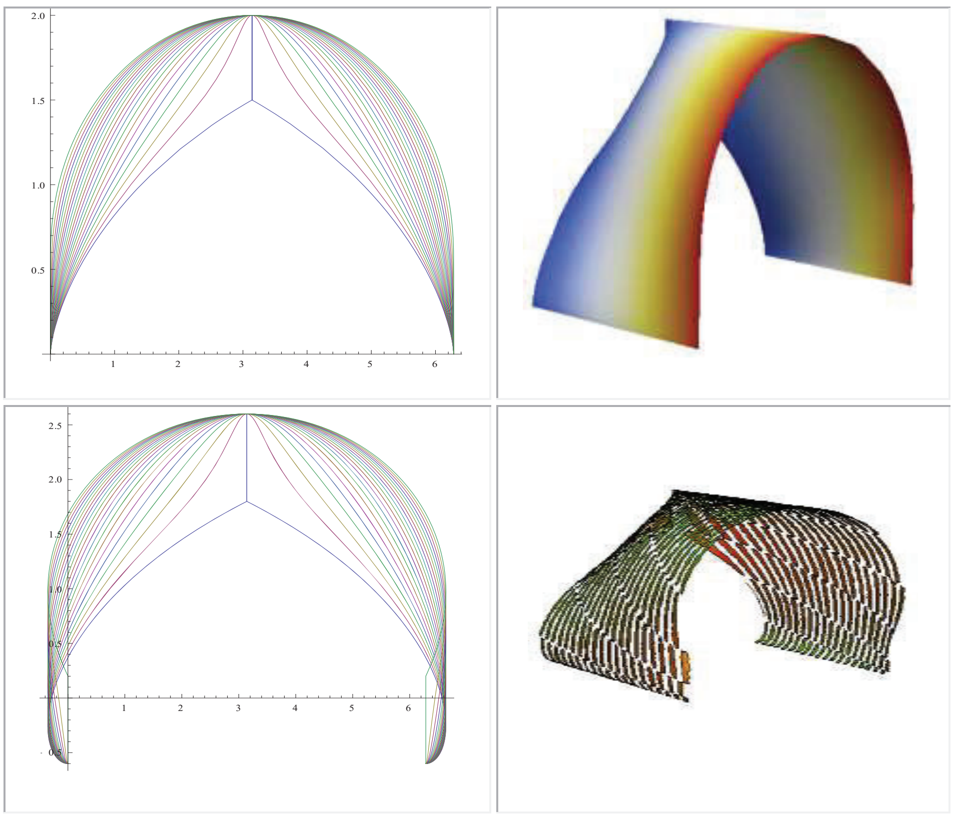


Fig.10.31,a2 Excentrice cicloidale pe dreaptă:
scurtate a = 0,6; comune a = 1 şi alungite a = 1,6 > r = 1
în care $Sx(s_x \in [-0,5; 0,5], \varepsilon_x = 0)$ şi $Sy(s_x \in [-1, +1], \varepsilon_y = 0)$

10.17.7 EXCENTRICE EPICICLOIDALE

Epicicloidele au ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos \propto - a.\cos\frac{R+r}{r} \propto \\ y = (R+r)\sin \propto - a.\sin\frac{R+r}{r} \propto \end{cases} \qquad (10.64)$$

şi reprezintă, aşa cum se ştie, curba descrisă de un punct, situat la distanţa/excentricitatea **a** de centrul cercului mic de rază **r**, cerc care se rostogoleşte, fără alunecare, pe exteriorul cercului mare, fix, de raza R.

Şi excentricele epicicloidale vor avea ecuaţiile parametrice

(10.65) $$\begin{cases} x = (R+r)cex_{1,2}\theta - a\,.\,cex_{1,2}\frac{R+r}{r}\theta \\ y = (R+r)sex_{1,2}\theta - a\,.\,sex_{1,2}\frac{R+r}{r}\theta \end{cases}$$

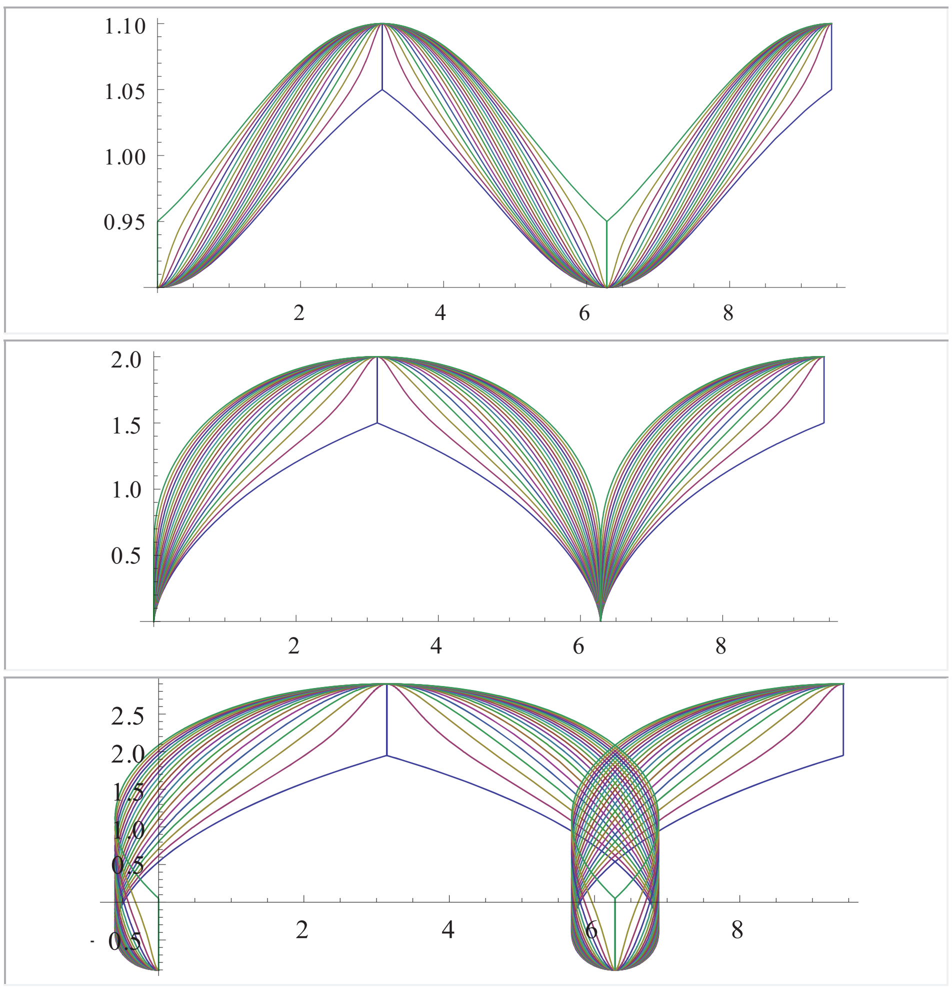
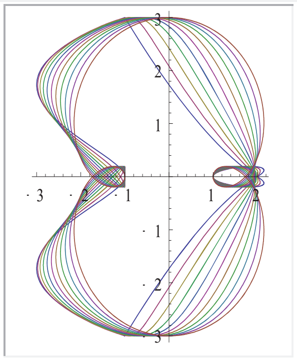
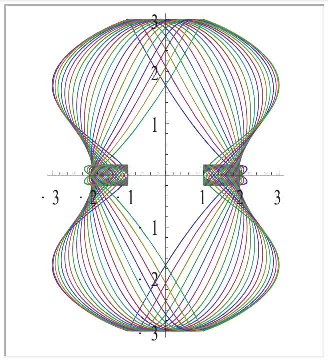


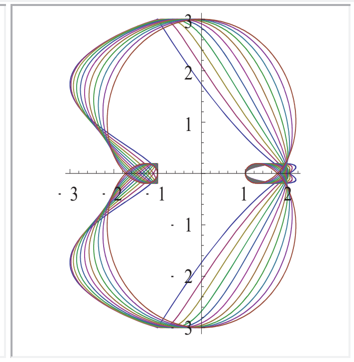
Fig.10.31,b Excentrice epicicloidale:
scurtate a = 0,1;comune a = 1 şi alungite a = 1,9 > r = 1
în care Sx($s_x \in$ [-1; 1], $\varepsilon_x = 0$) şi Sy($s_x \in$ [-0,5 ; +0,5], $\varepsilon_y = 0$)



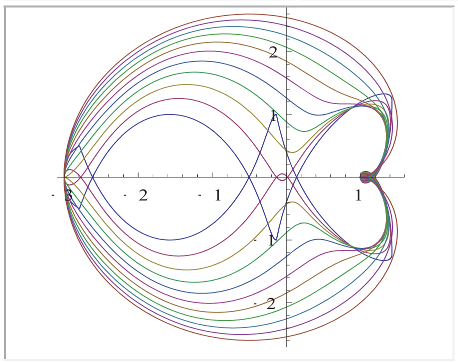
$Sx(s_x \in [-1,0], \varepsilon_x = 0)$, $s_y = 0$



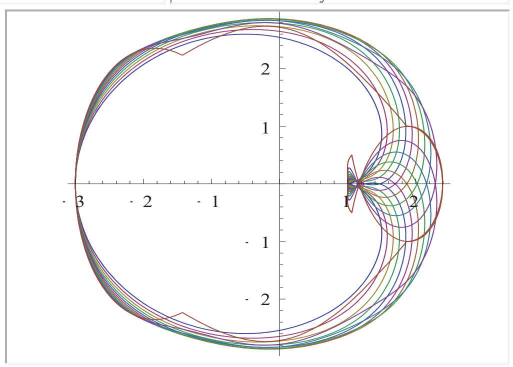
$Sx(s_x \in [-1,+1], \varepsilon_x = 0)$, $s_y = 0$



$Sx(s_x \in [0,+1], \varepsilon_x = 0)$, $s_y = 0$

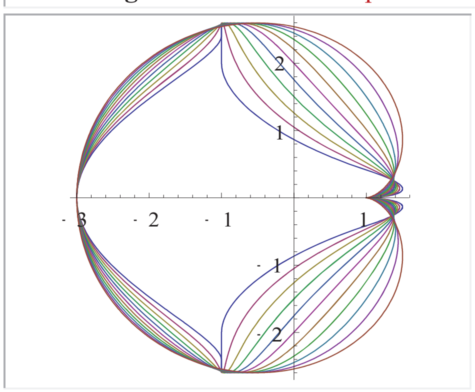


$s_x = s_y \in [-1,+1]$

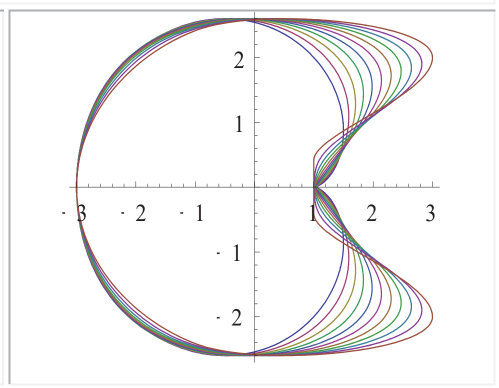


$s_x \in [-1,+1]$ $s_y \in \{-0{,}5;\ 0{,}5]$

Fig. 10.32 Excentrice epicicloidale comune (r = a = 1) pentru R = 2,

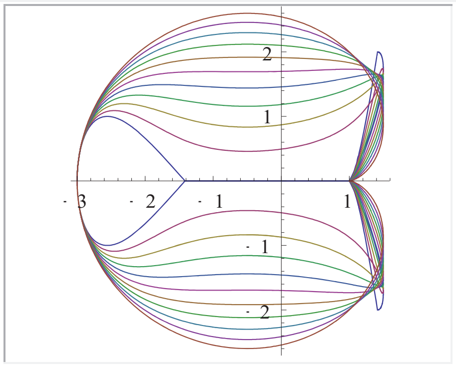


$Sx(s_x \in [-1,0], \varepsilon_x = 0)$, $Sy(s_y = 0)$

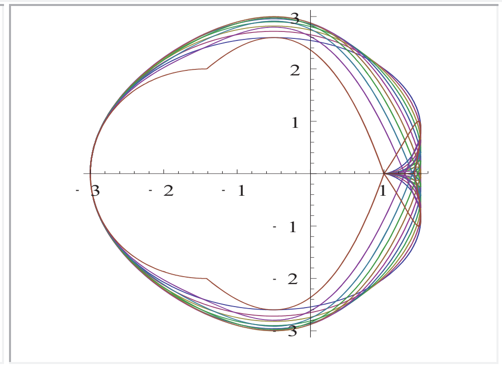


$Sx(s_x \in [0,+1], \varepsilon_x = 0)$, $Sy(s_y = 0)$

Fig.10.33,a Excentrice – epicicloidale - **cardioidale** r = R = a = 1,

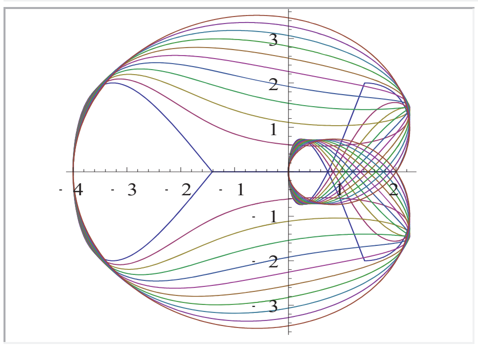


Sy($s_y \in [-1,0]$, $\varepsilon_y = 0$), Sx($s_x = 0$)

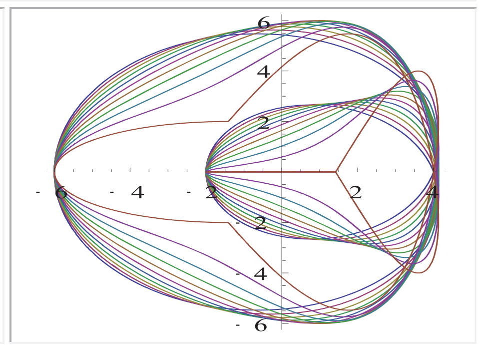


Sy($s_y \in [0,+1]$, $\varepsilon_y = 0$), Sx($s_x = 0$)

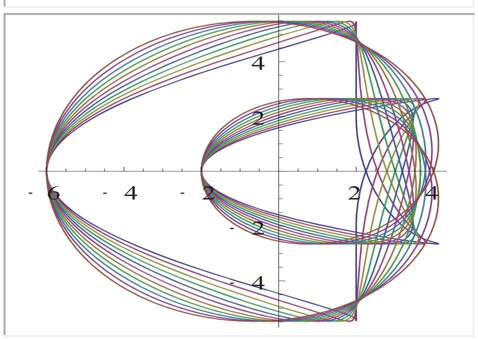
Fig.10.33,b Excentrice – epicicloidale - **cardioidale** r = R = a = 1,



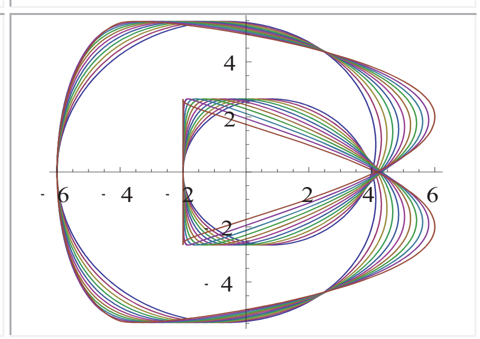
Sy($s_y \in [-1,0]$, $\varepsilon_y = 0$), Sx($s_x = 0$),a = 2



Sy($s_y \in [0,+1]$, $\varepsilon_y = 0$), Sx($s_x = 0$),a = 2



Sy($s_y \in [-1,0]$, $\varepsilon_y = 0$), Sx($s_x = 0$), a = 4



Sy($s_y \in [0,+1]$, $\varepsilon_y = 0$), Sx($s_x = 0$)

Fig. 10 34 Excentrice epicicloidale alungite a = 2, a = 4 > r = R = 1

Excentricele epicicloidale comune (a = r) sunt prezentate în **figura 10.32**, cele cardioidale în **figura 10.33**, iar cele alungite în **figura 10.34**.

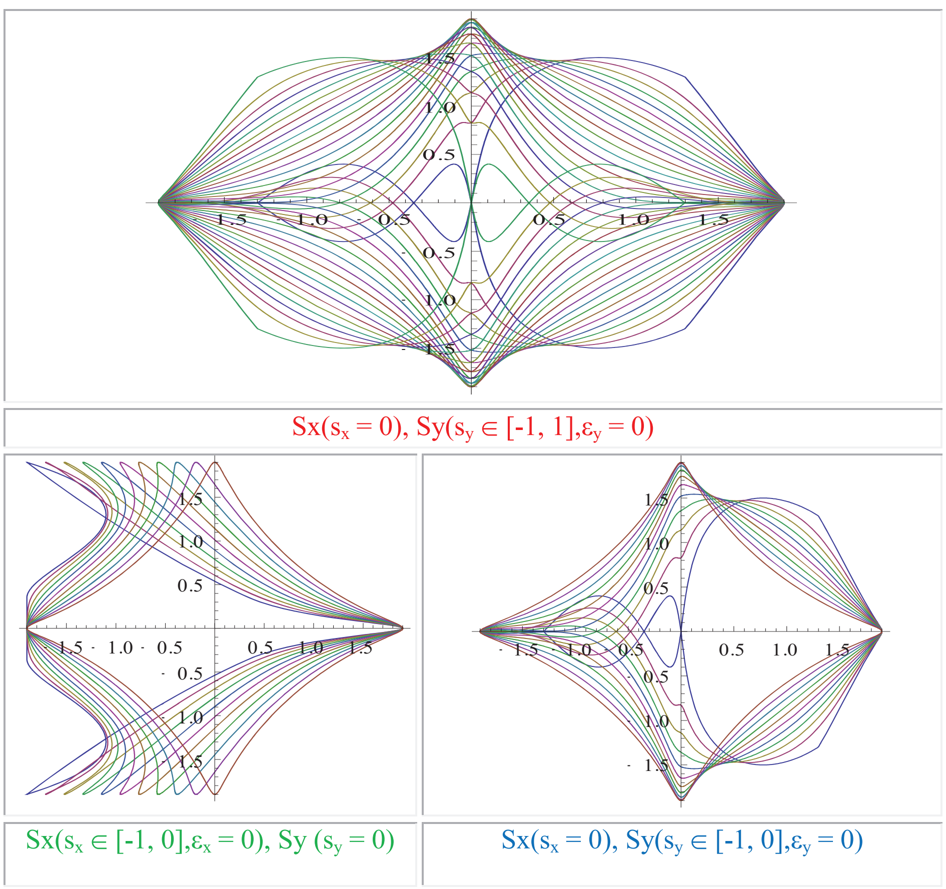
Se observă că, în toate cazurile, printre excentrice se afla şi curbele centricelor cicloidale pentru **s** = 0, iar pentru **s** = ± 1 curbele prezintă segmente de linii drepte, mai evidente în **figura 10.34** în dreapta-jos, unde este, clar, vizibil un triunghi echilateral.

În **figura 10.33** sunt prezentate curbele excentricelor cardioidale care se obţin din ecuaţiile (10.65) pentru r = R şi a = r = R, fiind excentrice epicicloidale.

10.17.8 EXCENTRICE HIPOCICLOIDALE.

Spre deosebire de epicicloidă (epi = peste), hipocicloida (hipo = sub, dedesubt) este generată, mecanic, de un punct, situat la o distanţa **a** de centrul O al unui cerc mic $C(O_r,r)$,care se rostogoleşta pe interiorul cercului mare, fix, $K(O_R,R)$, fără alunecare relativă.

Dacă hipocicloida are ecuaţiile parametrice

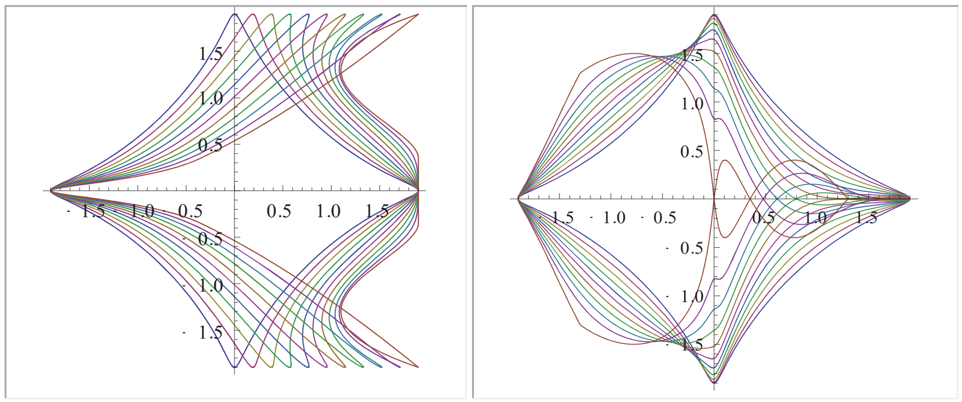


$Sx(s_x = 0), Sy(s_y \in [-1, 1], \varepsilon_y = 0)$

$Sx(s_x \in [-1, 0], \varepsilon_x = 0), Sy\ (s_y = 0)$

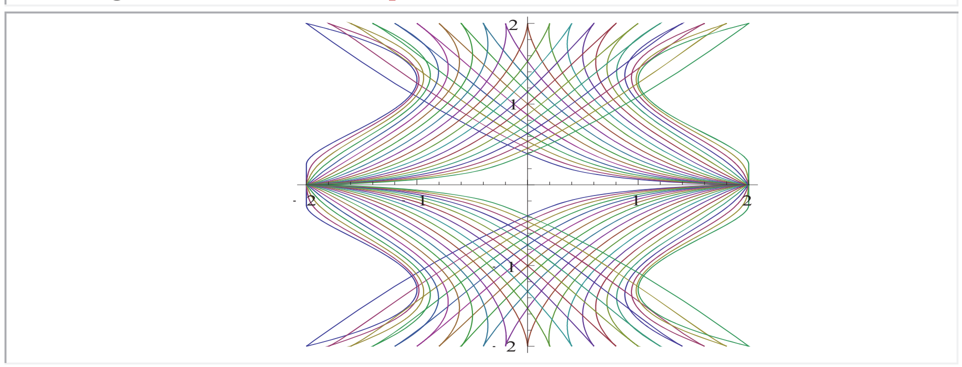
$Sx(s_x = 0), Sy(s_y \in [-1, 0], \varepsilon_y = 0)$

Fig.10.35,a Excentrice hipocicloidale scurtate R = 2, a = 0,4 < r = 0,5.

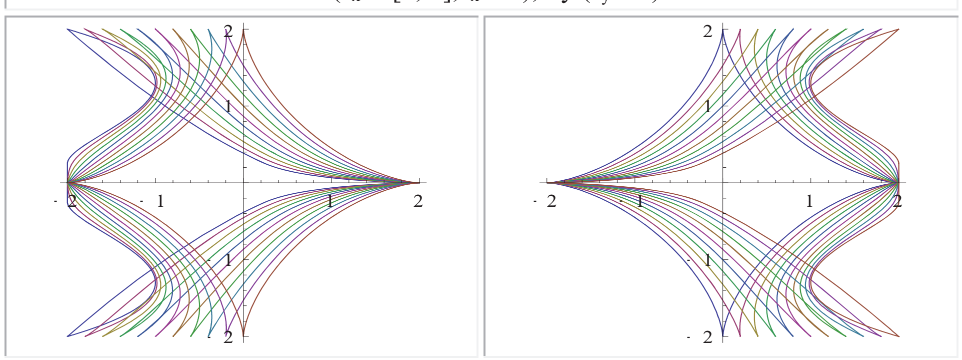


$Sx(s_x \in [0, 1], \varepsilon_x = 0)$, $Sy\ (s_y = 0)$ | $Sx(s_x = 0)$, $Sy(s_y \in [0, 1], \varepsilon_y = 0)$

Fig. 10.35,b Excentrice hipocicloidale scurtate R = 2, a = 0,4 < r = 0,5



$Sx(s_x \in [0, 1], \varepsilon_x = 0)$, $Sy\ (s_y – 0)$



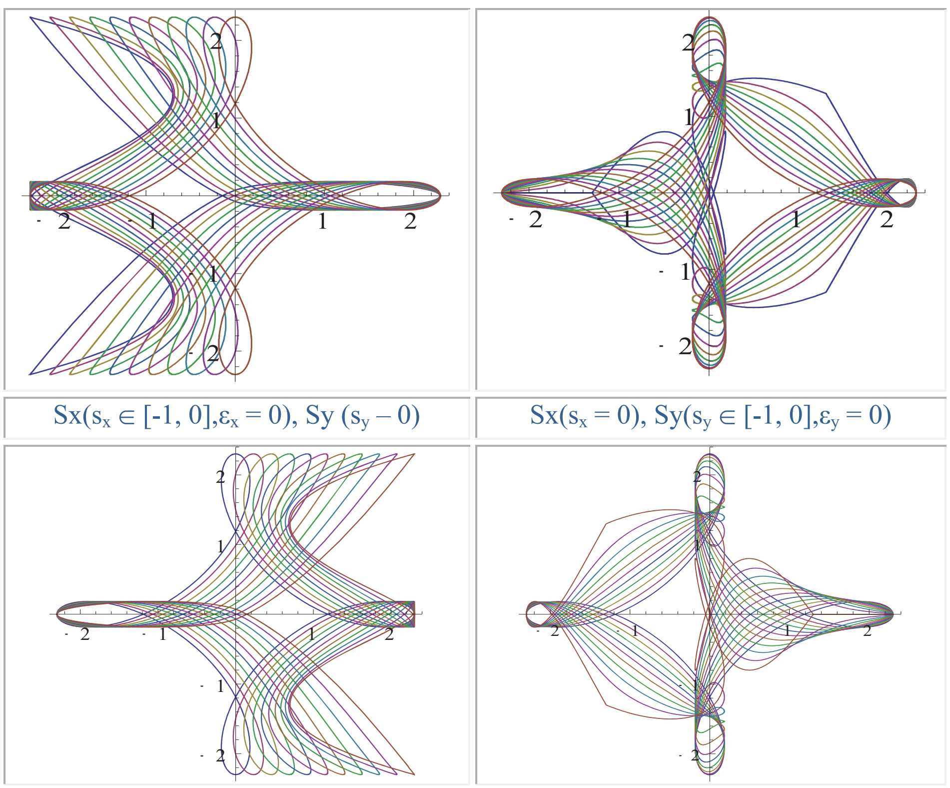
$Sx(s_x \in [0, 1], \varepsilon_x = 0)$, $Sy\ (s_y – 0)$ | $Sx(s_x = 0)$, $Sy(s_y \in [0, 1], \varepsilon_y = 0)$

Fig. 10.35,c Excentrice hipocicloidale astroidale R = 2, a = 0,5 = r = 0,5

(10.66) $$\begin{cases} x = (R-r)\cos\alpha + a.\cos\frac{R-r}{r}\alpha \\ y = (R-r)\sin\alpha - a.\sin\frac{R-r}{r}\alpha \end{cases}$$, atunci excentricele hipocicloidale vor avea ecuaţiile parametrice

(10.67) $$\begin{cases} x = (R-r)cex_{1,2}\theta + a.\,cex_{1,2}\frac{R-r}{r}\theta \\ y = (R-r)sex_{1,2}\theta - a.\,sex_{1,2}\frac{R-r}{r}\theta \end{cases}$$ şi familiile de curbe prezentate

în **figura 10.35**: **a** şi **b** → scurtate, **c** → comune, **d** şi **e** → alungite.



Sx($s_x \in [-1, 0]$,$\varepsilon_x = 0$), Sy ($s_y - 0$) | Sx($s_x = 0$), Sy($s_y \in [-1, 0]$,$\varepsilon_y = 0$)

Sx($s_x \in [0, 1]$,$\varepsilon_x = 0$), Sy ($s_y - 0$) | Sx($s_x = 0$), Sy($s_y \in [0, 1]$,$\varepsilon_y = 0$)

Fig. 10.35,d Excentrice hipocicloidale alungite. R = 2, a = 0,8 > r = 0.5

La aceste excentrice, s-a păstrat pe rând câte un excentru Ex sau Ey în origine ($e_x = 0$ sau $e_y = 0$) sau cele două excentricităţi s-au ales diferite, altminteri excentricele degenerează în centrice, pentru toate valorile egale date excentricitaţiilor numerice s_x = s_x, dacă şi $\varepsilon_x = \varepsilon_y$.

Se observă, în **figura 10.35,d**, că familiile de excentrice hipocicloidale alungite au forme estetice care sugerează, cu puţin efort de imaginaţie, zborul unor păsări sau a unor avioane stilizate.

De aceea, unele au fost utilizate în albumul "Tehno Art of **Şelariu** Supermathematic Functions" apărut în USA în august 2007 şi clasându-se, incă de la inceput, pe locul 10 în top, din peste 1650 de lucrări considerate în statisticile realizate de firma specializată Gallup-SUA.

Din păcate, toate graficele prezentate în această lucrare, care nu se vrea un album de artă, chiar dacă sunt realizate prin metode pur matematice, cu **FSM-CE**, au fost drastic reduse dimensional, pirzând astfel mult din estetica lor. Mai mult, chiar, unele au fost şi distorsionate, pentru a se încadra mai bine în suprafaţa avută la dispoziţie, cu aceleaşi consecinţe.

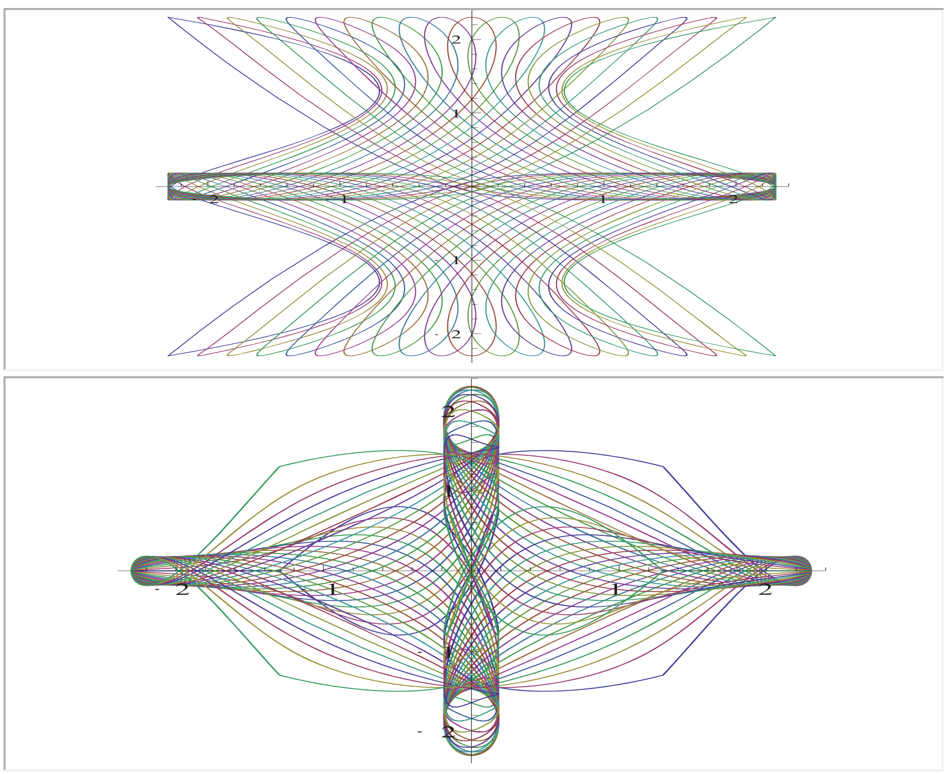


Fig. 10.35,e Excentrice hipocicloidale alungite.
R = 2, a = 0,8 > r = 0.5, s ∈ [-1, 1]

Aproape în toate cazurile, s-a ales direcţia de expulzare a excentrelor $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$. Adică, pe direcţia axei absciselor x.

Pentru a ilustra modificările ce apar, în cazul expulzării excentrelor şi pe o altă direcţie, în **figura 10.36** au fost prezentate excentrele hipocicloidale alungite din **figura 10.35,e** pentru aceleaşi excentre dar expulzate pe direcţia ε = 1 radian.
Aceste excentrice pot fi utilizate în **CAD/CAM** pentru reprezentarea pieselor tehnice mărginite de suprafeţe complexe. Un astfel de exemplu, de suprafaţă deosebit de complexă poate fi reprezentată cu excentrice astroidale de ε = 1, aşa cum se arată în figura **10.37**, în care au fost, intenţionat, prezentate, în paralel, curbele din plan (2D) şi suprafeţele din 3 D pe care le pot reprezenta şi/sau genera.

Sistemele de modelare geometrică sunt multiple şi se bazează pe reprezentarea şi manevrarea curbelor şi a suprafeţelor.

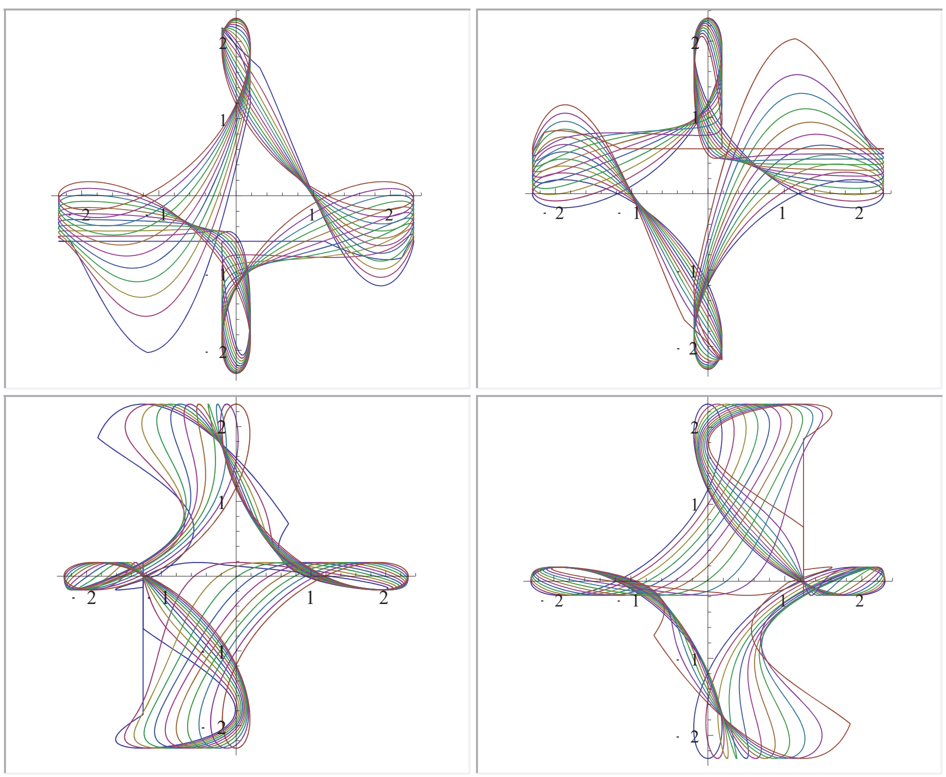


Fig. 10.36 Excentricele hipocicloidale alungite din figura 10.35, e cu $\varepsilon_x = 1$ sau $\varepsilon_y = 1$

Definirea şi reprezentarea curbelor şi a suprafeţelor parametrice complexe se face în prezent prin curbe **Hermite**, **Bezier**, **Beta-spline**, **NURBS**, **Coon** ş.a.

prezentate pe larg în lucrarea Prof. Dr. Ing **Nicolae-Valentin Ivan**, ş.a.["Sisteme **CAD/CAPP/CAM**. Teorie şi practică", Editura Tehnică, Buc. 2007], ca şi în multe alte lucrări de acest gen, dar toate reprezintă, cu mari aproximaţii şi prin complexe procedee, suprafeţele dorite.

De aceea, aceste metode pot fi definite, fără exagerare, ca nişte "florare" matematice. Pentru că, nici una dintre aceste metode, nu cuprinde, în totalitate, punctele prin care trebuie, sau se preconizează, să treacă curba şi/sau suprafaţa dorită. Curbele/suprafeţele trecând, în majoritatea cazurilor, printre ele, mai ales când apar puncte/vârfuri de discontinuitate ale curbelor şi/sau ale suprafeţelor.

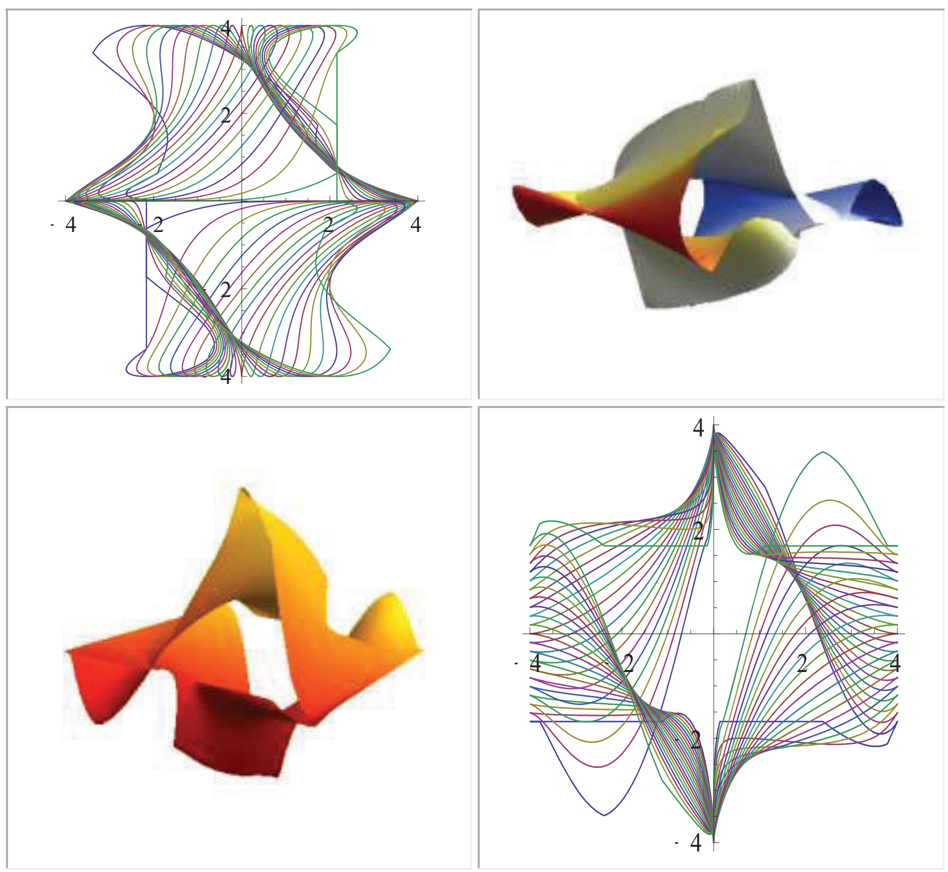


Fig. 10.37 Excentricele astroidale din figura **10.35,c**, aici de ε = 1, reprezentate simultan în 2D şi 3D

Ceea ce nu este cazul excentricelor care, aşa cum a rezultat din curbele şi suprafeţele prezentate, conţin segmente de linii drepte care se racordează cu diverse curbe şi au schimbări bruşte de direcţie care conţin şi puncte de discontinuitate.

De fapt, în lucrarea autorului, “Funcţii în trepte **Smarandache**” publicată în revista “ SCIENTA MAGNA. An international journal” Vol.3, No.1,2007, pag. 81 … 92 sunt prezentate o serie de curbe continue, alcătuite din segmente de linii drepte, care fac parte dintr-o familie de curbe obişnuite reprezentate cu **FSM-CE** şi care, în exclusivitate pentru s = ± 1, devin o succesiune continuă de segmente de linii drepte, unele schematizând diverse forme de trepte. De aceea au şi fost denumite funcţii în trepte şi vor fi prezentate într-un capitol următor.

10.20 EXCENTRICE DE EXCENTRE VARIABILE

Excentricele, prezentate până acum, au fost de excentre puncte fixe în plan. Excentricele de excentre $E_x(s_x, \varepsilon_x)$ şi $E_y(s_y, \varepsilon_y)$ variabile, sau puncte mobile după diverse legi şi/sau pe diverse curbe plane, sunt foarte diverse.

Se vor prezenta doar cele mai semnificative, care prezintă interes ştiinţifice, tehnic, matematic şi, dece nu, artistic.

10.20.1 EXCENTRICE CIRCULARE ŞI ELIPTICE DE EXCENTRE MOBILE

Acestea prezintă interes deoarece pot avea contribuţii în soluţionarea unor vibraţii neliniare. Construcţia unei astfel de excentrice are ecuaţiile parametrice

(10.70) ,

în care, pentru a = b = R se obţin excentrice **circulare**, pentru un cerc C(O,R), iar pentru a ≠ b se obţin excentricele **eliptice**, pentru elipsa cu semiaxele a şi, respectiv, b.

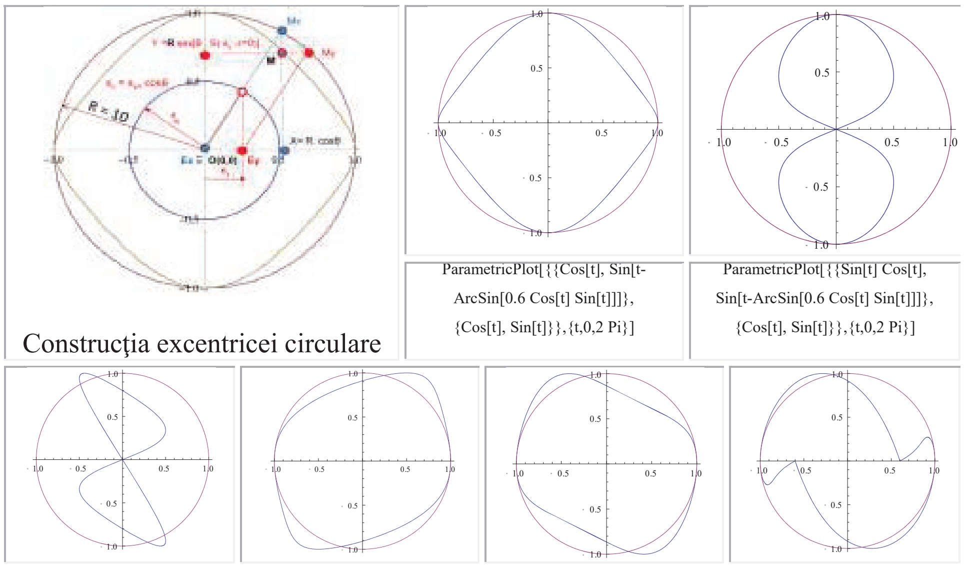
O astfel de excentrică este prezentată în **figura 10.51** şi are excentrul Ex fix în originea O(0,0) şi excentrul Ey mobil dupa legea/expresia

(10.71) $s_y = s_{y0}.cos\theta$ cu R = 10 şi $s_{y0} = 0,5$ → $e_{y0} = 5$ → e

Din figură, rezultă construcţia acestor excentrice. Din excentrele Ex şi Ey se duc două semidrepte, paralele între ele, de unghi θ cu axa Ox. Punctele de intersecţie ale acestor semidrepte cu cercul C(O,R) sunt punctele Mx şi My a căror abscisă şi, respectiv, ordonată sunt coordonatele punctului M al excentricei.

În partea dreaptă a figurii, sunt reprezentate alte patru excentrice circulare, dintre care, prima de sus are **Ey** ≡ O(0,0) şi Ex mobil pe axa x după legea $s_x = s_{x0} \cos\theta$, cu R = 1 şi $\mathbf{s_{x0} = e_{0x}}$ = 0,5. Mai jos, sunt prezentate excentrice de excentru Ex variabil – în stanga şi de Ey variabil - în dreapta; variaţia fiind data, în ambele cazuri, de $s_x = s_y = 0,5.\sin\theta$.

O varietate de excentrice circulare, de diverse forme, sunt prezentate în **figura 10.52**, împreună cu cercul C(O,1) pe care sunt definite. În toate cazurile $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, R = 1→$e_x = s_x$, $e_y = s_y$, $s_{x0} = s_{y0}$ = 0,5 sau 1 şi legea este fie sinusoidală fie cosinusoidală la diverşi exponenţi.



Construcţia excentricei circulare

ParametricPlot[{{Cos[t], Sin[t-ArcSin[0.6 Cos[t] Sin[t]]]}, {Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

ParametricPlot[{{Sin[t] Cos[t], Sin[t-ArcSin[0.6 Cos[t] Sin[t]]]}, {Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

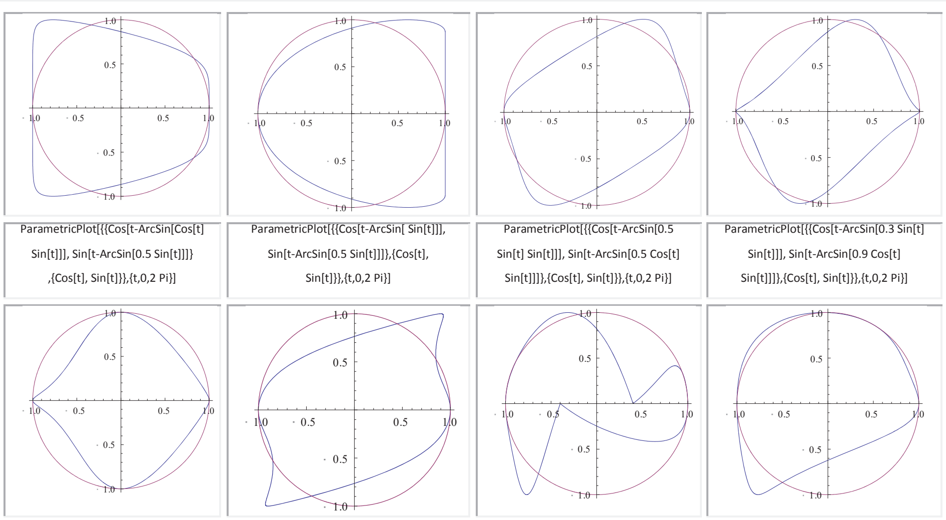
ParametricPlot[{{Sin[t] Cos[t], Sin[t-ArcSin [0.6 Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[0.5 Sin[t] Sin[t]]], Sin[t]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

ParametricPlot[{{Cos[t], Sin[t-ArcSin[0.5 Sin[t] Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[0.6 Sin[t] Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[Sin[t] Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

Fig. 10.51,a Excentrică circulare de excentre variabile



ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[Cos[t] Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.5 Sin[t]]]} ,{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.5 Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[0.5 Sin[t] Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.5 Cos[t] Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[0.3 Sin[t] Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.9 Cos[t] Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

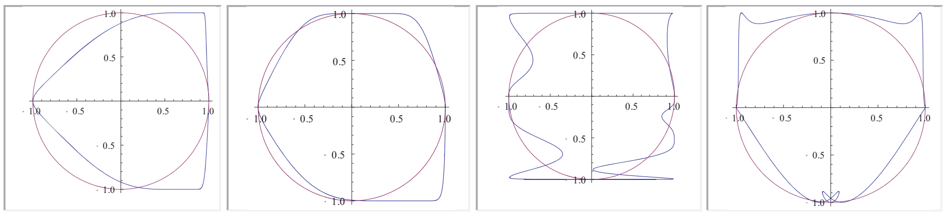
ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[0.3 Cos[t]^2 Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.8 Cos[t] Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2

ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[0.9 Sin[t]^3 Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.4 Cos[t] Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[0.4 Sin[t] Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[Sin[t]^2 Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[0.5 Sin[t] Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.5 Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

Pi}]			



ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[0.9 Sin[t^0.5] Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.4 Cos[3 t] Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]	ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[0.9 Tan[t/8] Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.4 Cos[3 t] Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]	ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[0.9 Sin[t^2] Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.4 Cos[3 t] Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]	ParametricPlot[{{Cos[t-ArcSin[0.7 Sin[2 t] Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.9 Cos[3 t] Sin[t]]]},{Cos[t], Sin[t]}},{t,0,2 Pi}]

Fig. 10.51,b Excentrice circulare de excentre variabile

Dacă **Ex** şi **Ey** variază după aceeaşi lege, oricare ar fi aceasta, atunci excentrica circulară degenerează în cerc. Din **figura 10.52** se observă că abaterile excentricelor de la circularitate sunt cu atât mai mari cu cât creşte valoarea maximă a aexcentricităţii numerice (s_0 = 0,5 sau s_0 = 1).

Pentru anumite legi de variaţie ale excentrelor, se pot obţine din nou excentrice de forma cvadrilobelor (**Fig. 10.53**) care, însă, pentru s = +1 nu mai descriu un pătrat perfect, ci unul cu colţuri rotunjite, iar pentru **s** = **-** 1 o altă curbă, asemănătoare cu o curbă de distribuţie a probabilitaţilor, mai ales dacă se trece pe excentrice eliptice cu b > a.

Forme extrem de variate, prezentand o simetrie aparte, se obţin când ambele excentre **Ex** şi **Ey** variază sincron, în sensuri opuse, pe aceeaşi axă **x** şi când modulul excentreicităţii numerice s_0 depăşeşte unitatea, aşa cum se prezintă situaţia în **figura 10.54**. În părţile laterale ale figurii, sunt prezentate extrase, de diverse valori s_0, din figura centrală.

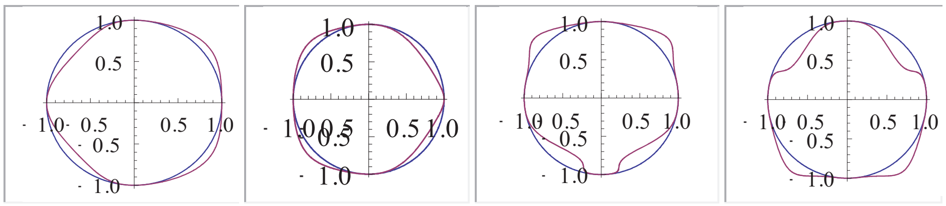
10.20.2 EXCENTRICE SPECIALE

O serie de grafice, prezentând unele valenţe / calităţi artistice şi nu numai din acest motiv, sunt prezentate în continuare.

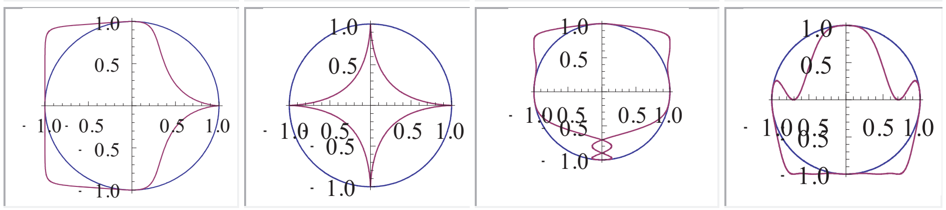
Ne avand echivalente în matematica centrică, ele nu pot degenera întotdeauna în curbe centrice cunoscute. Astfel, o familie de excentrice speciale pe care le vom numi şi **excentrice dexoidale** (pentru ca sunt realizate cu **FSM-CE dexnθ**) sunt prezentate în **figura 10.55,a** şi pot simboliza un “soare” roşu.

Cu această denumire, ele figureaza intr-un album “**Techno Art of Selariu Supermathematics Functions**”, editat la Universitatea New Mexico din USA în august 2007 şi s-a bucurat de succes, figurând în topul de 10, din peste 1650 de lucrări, al lunii august, statistică publicată de firma specializată Gallup din USA.

Ecuaţiile parametrice ale “soarelui” roşu, pentru R = 1→ e = s ∈ [-1,1] sunt

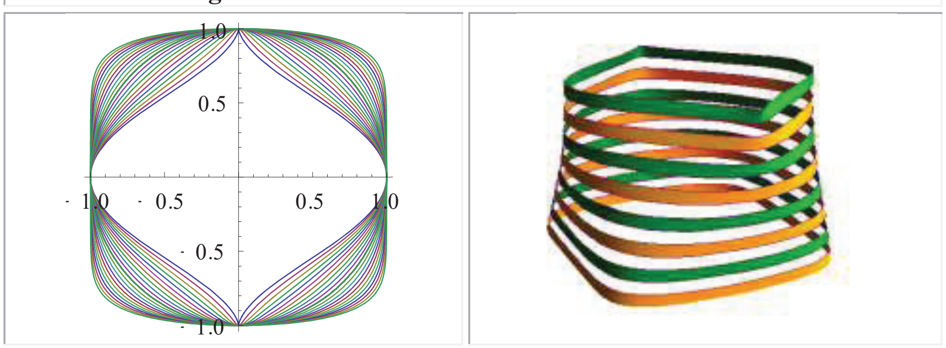


$e_x = -0{,}5.\cos^2\theta$, $e_y = 0$	$e_x = 0$, $e_y = -0{,}5.\cos^2\theta$	$e_x = 0{,}5.\sin^3 2\theta$, $e_y = 0$	$e_x = 0$, $e_y = 0{,}5.\sin^3 2\theta$

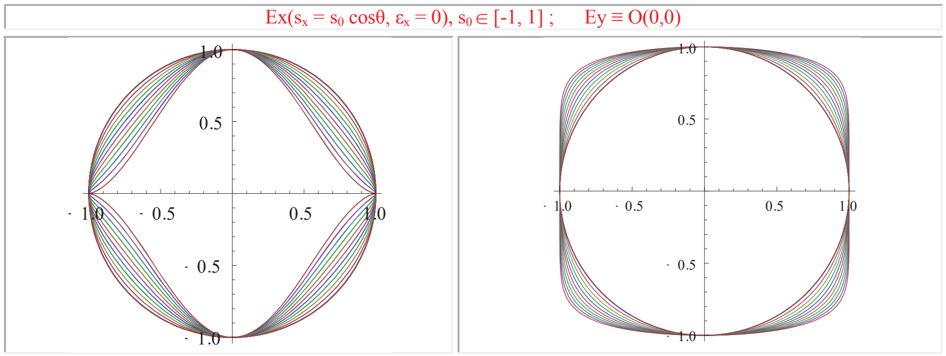


$e_x = -\cos^2\theta$, $e_y = +\cos^2\theta$	$e_x = -\cos\theta$, $e_y = +\cos\theta$	$e_x = \sin^3 2\theta$, $e_y = 0$	$e_x = 0$, $e_y = \sin^3 2\theta$

Fig. 10.52 Excentrice circulare de excentre variabile



$Ex(s_x = s_0 \cos\theta, \varepsilon_x = 0)$, $s_0 \in [-1, 1]$; $Ey \equiv O(0,0)$



Stanga $s_{y0} \in [-1, 0]$ $Ex \equiv O(0,0)$; $Ey(s_y = s_{y0} \cos\theta, \varepsilon_y = 0)$, Dreapta: $s_{y0} \in [0, 1]$

Fig.10.53 Excentrice circulare în 2D şi un cilindru excentric **SM** în 3D

(10.72) $$\begin{cases} x = R.dex2 0\theta.cos\theta \\ y = R.dex2 0\theta.sin\theta \end{cases}$$

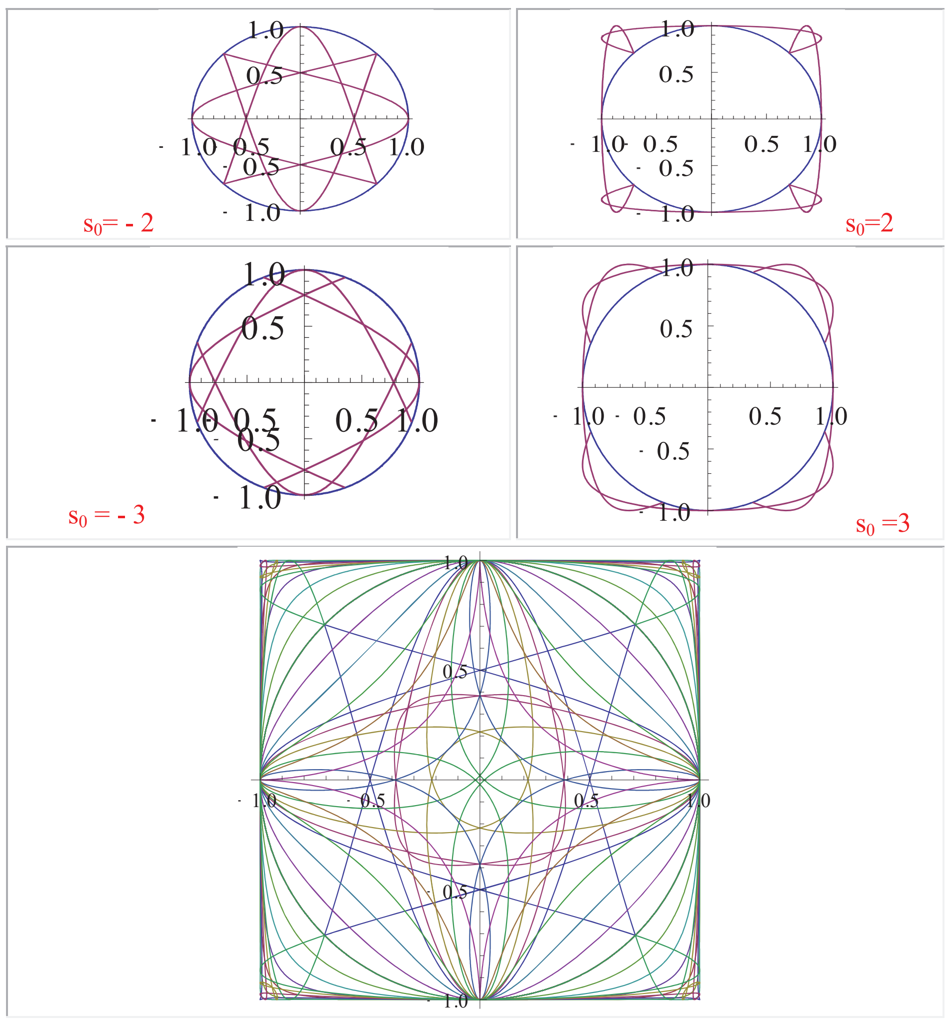


Fig. 10.54 Excentrice circulare de excentricitate variabilă supraunitară
(în figura din mijloc $s_0 \in [-2, +2]$)
Pentru $\theta \in [-1,+1]$, R = 1, $Ex \equiv Sx[s_x = s_0 \cos\theta, \varepsilon_x = 0]$, $E_y \equiv S_y[s_y = - s_0 \cos\theta, \varepsilon_x = 0]$

iar ecuaţia polară va fi
(10.72') ρ = R. **dex20**.θ ,
în polar simetria circulară fiind perfectă.

Dacă, la ecuaţiile (10.72) se mai adaugă şi coordonata z = - 0.05 s^2, atunci rezultă, în 3D forma spaţială, ce poate fi asemuită cu un brad stilizat, prezentată în **figura 10.55,b**.

Alte grafice din 2D, care dau senzaţia de a fi în 3D, sunt prezentate în **figura 10.56,** iar **chiar** în 3D, cu z = $4s^2$, se obţine un cilindru ondulat, prezentat în **figura 10.55,c**.

In partea de sus a **fugurii 10.56** sunt prezentate excentrice speciale rexoidale. Ele sunt denumite astfel pentru că sunt exprimate cu **FSM-CE radial excentric**, de variabilă centrică, de 10.α, având ecuaţiile parametrice

(10.73) $$\begin{cases} x = R.Rex10\boldsymbol{\alpha}.cos\boldsymbol{\alpha} \\ y = \ R.Rex10\boldsymbol{\alpha}.sin\boldsymbol{\alpha} \end{cases},$$

sau ecuaţia polară

(10.73') ρ = R.Rex10.α, în care, s-a ales R = 1, s ∈ [0, 1] în stânga şi **s** ∈ [- 1, + 1] în dreapta.

În aceeaşi figură, sunt prezentate şi excentrice dexoidale **modificate**, în sensul că, în ecuaţia a doua din (10. 72) **FSM-CE** derivat excentrică este numai de arc dublu - **dex2θ** -.

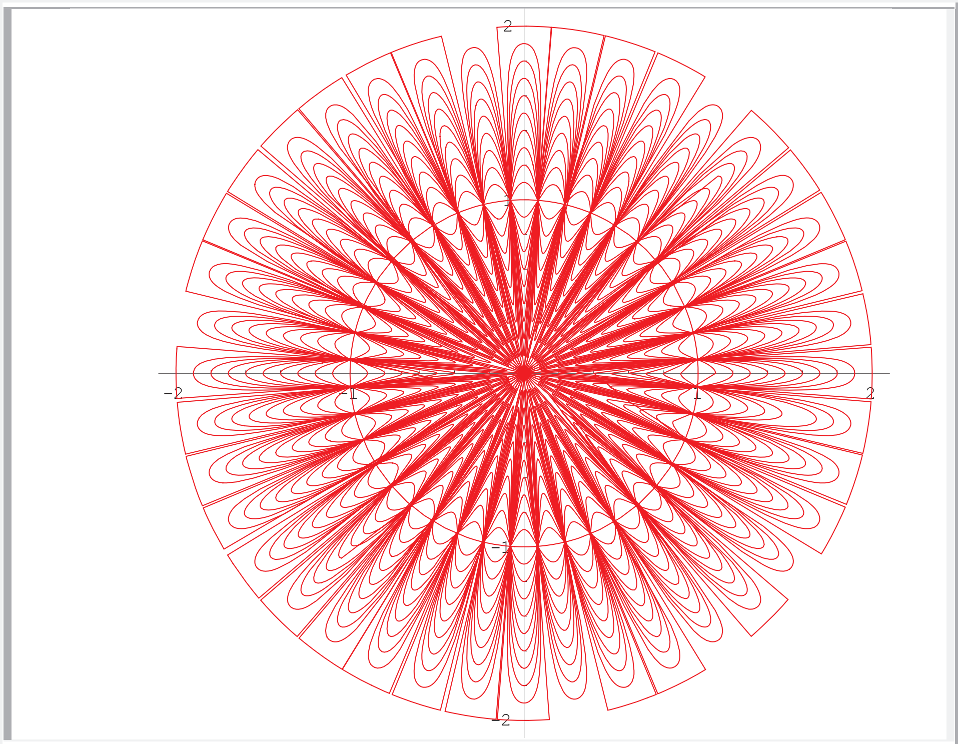
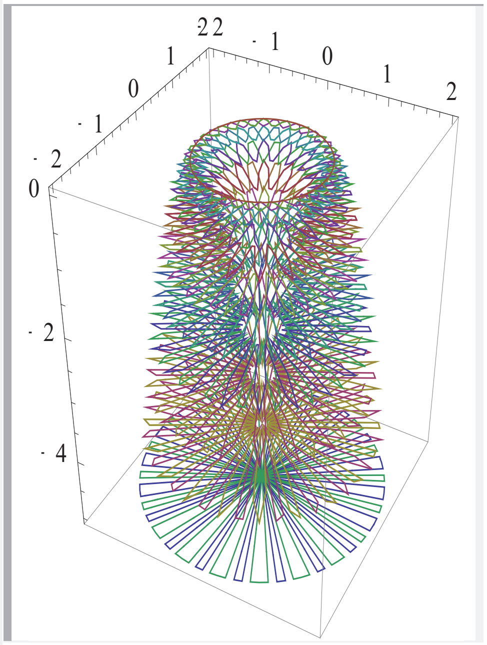


Fig. 10.55,a Familie de **excentrice dexoidale** în 2D

Dacă, în ecuaţiile (10.73) **FSM-CE** radial excentrică se alege de **2α** sau de **3α**, atunci, în 3D, se obţin obiecte matemnatice de forma ajutajelor rachetelor cosmice.

Astfel de obiecte tehnice sunt prezentate în **figura 10.57-st**ânga- şi pot fi utilizate la realizarea **primei rachete matematice româneşti** - dreapta.



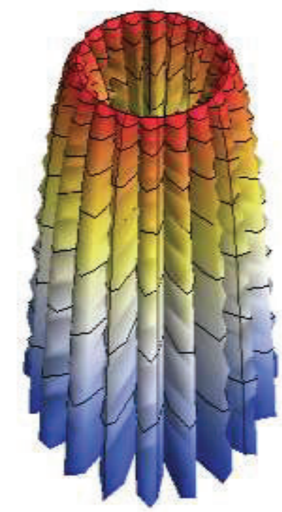
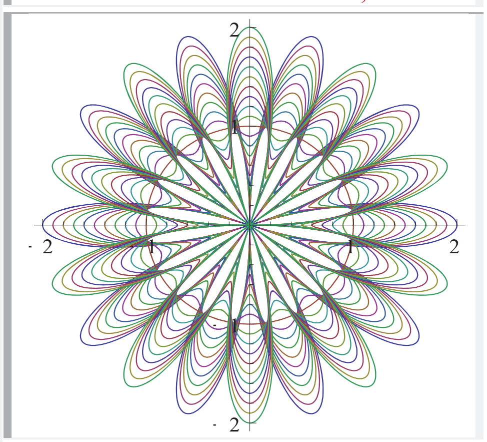
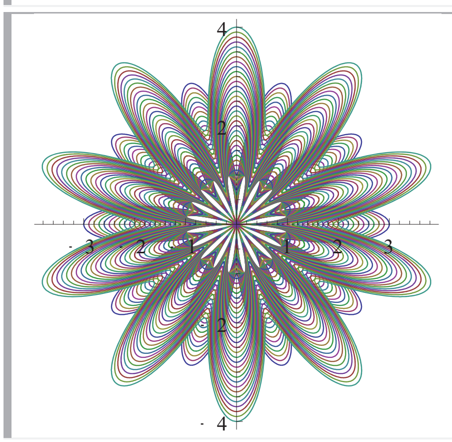


Fig. 10.55,b Familie de excentrice dexoidale în 3D cu $z = -0,05s^2$

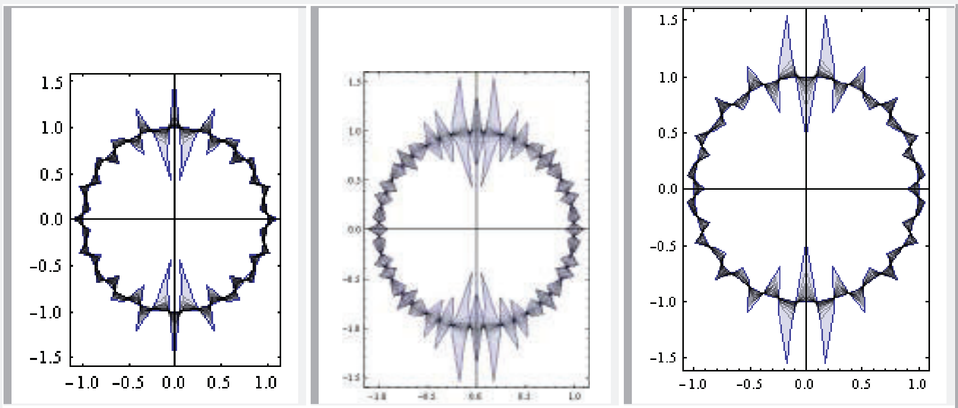
Fig. 10.55,c Familie de excentrice rexoidale în 3D cu $z = -4s^2$



$s \in [0, 1]$



$s \in [-1, 1]$



s ∈ [-1, 0] | s ∈ [-1, +1] | s ∈ [0, +1]

Fig. 10.56 Familii de excentrice speciale dexoidale – sus şi modificate – jos.

O călătorie sigură în cosmos trebuie să prezinte o protecţie sigură impotriva plasmei şi câmpurilor electro-magnetice puternice din timpul erupţiilor solare, erupţii sugerate de excenticele speciale prezentate în **figura 10.58**.

Ele sunt reprezentate de **FSM-CE** radial excentric de variabilă centrică **Rexα**

$$(10.74)\qquad \begin{cases} x = R\,Rex\,m\alpha.\cos\alpha \\ y = R.Rex\,n\alpha.\sin\alpha \end{cases},$$

pentru R = 1, **s = e** ∈ [0, 1].

Discurile colorate, din centru, au fost suprapuse pentru a mări senzaţia vizuală de soare.

10.20.3 EXCENTRICE DE EXCENTRE FIXE ŞI DE PROIECŢII VARIABILE. PROFILE AERODINAMICE.

Imită cu fidelitate construcţia grafică a unor profile aerodinamice, ca de exemplu, profilul **Jukovsky**, până la identificare completă. Construcţia grafică a unui profil **Jukovsky**, de caracteristici de profil a = 0,6, **s** = 0,08, d = 0,075 este prezentată în partea superioară a **figurii 10.59**, iar în partea inferioară sunt prezentate doua profile de acest gen.

Ecuaţiile parametrice, care descriu aceste profile, sunt

$$(10.75)\qquad \begin{cases} x = R.cel\,(\theta, s_1, \varepsilon_1) + r.cel(-\theta, s_2, \varepsilon_2) \\ y = R.sel\,(\theta, s_1, \varepsilon_1) + r.sel(-\theta, s_2, \varepsilon_2) \end{cases},$$

în care, **cel θ** şi **sel θ** sunt **FSM-CEl** (elevate) cosinus elevat şi sinusul elevat de **variabilă excentrică θ**.

Aceste funcţii se obţin prin proiectarea **FSM-CE** radial excentric **rexθ** pe cele doua axe de coordonate x şi, respectiv, y, deoarece în cazul **FSM-CEl** excentrul **E** coincide cu originea sistemului de coordonate şi nu mai coincide cu centrul cercului unitate (O ≡ E ≠ C), aşa cum s-a mai afirmat deja. Rezultă, pentru variabila excentrică

(10.76) $$\begin{cases} cel_{1,2}\theta = rex_{1,2}\theta.cos\theta \\ sel_{1,2}\theta = rex_{1,2}\theta.sin\theta \end{cases}$$

şi, pentru variabila centrică

(10.76') $$\begin{cases} Cel \propto_{1,2} = Rex\boldsymbol{\alpha_{1,2}}.cos\boldsymbol{\alpha_{1,2}} \\ Sel \propto_{1,2} = Rex\boldsymbol{\alpha_{1,2}}.sin\boldsymbol{\alpha_{1,2}} \end{cases}$$

Cele doua cercuri, pe baza cărora se realizează construcţia grafică, sunt cercul mare $C_1(R_1,E_1)$, ales de rază $R_1 = 1$ şi cercul mai mic $C2(R_2, E_2)$ rezultat de raza $R_2 = 0{,}8819511$. Excentrele $\mathbf{E_1}$ şi $\mathbf{E_2}$ au coordonatele

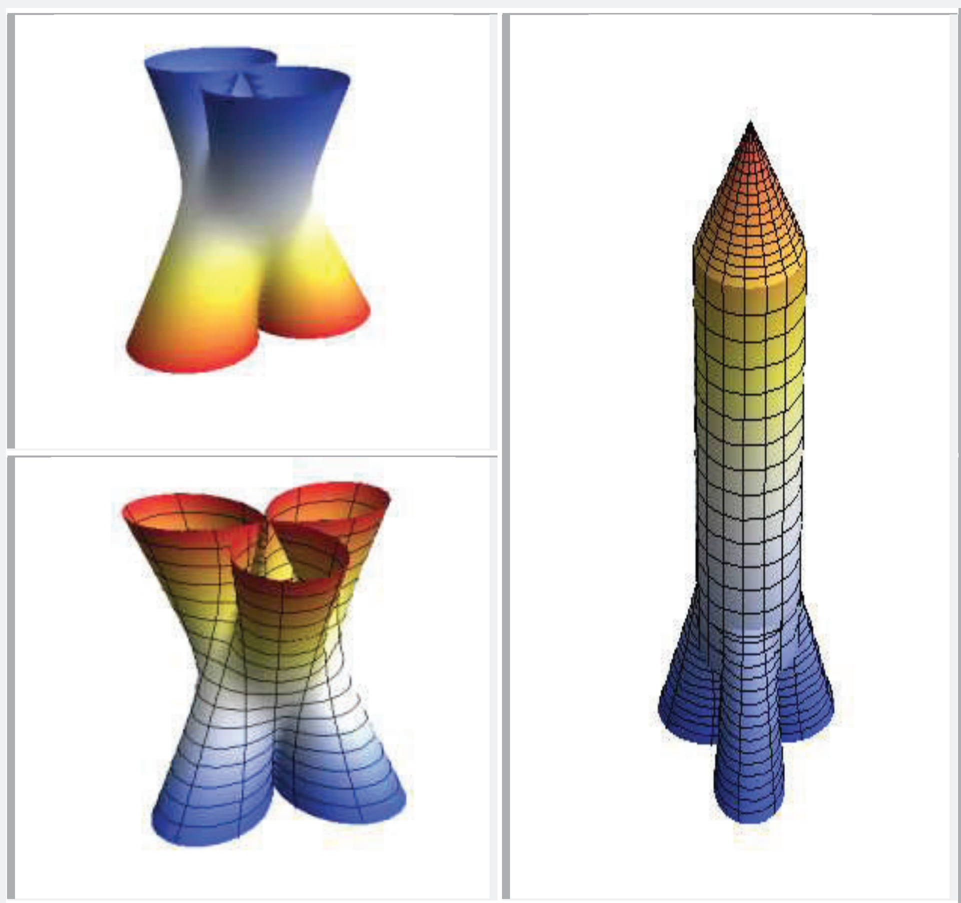


Fig. 10.57 Ajutaje de rachetă ◄ şi o rachetă **(super)matematică** ►

(10.77) $$\begin{cases} E1(\,e_1 = 0{,}1516373,\ \varepsilon_1 = 5{,}2247771\,) \\ E2(e_2 = 0{,}1719339,\ \varepsilon_2 = 4{,}4351047) \end{cases},$$

care au fost calculate cu mai multe zecimale, deoarece, mici modificări ale unor valori, modifică substanţial forma profilului, aşa cum rezultă şi comparând cele doua profile aerodinamice din figură.

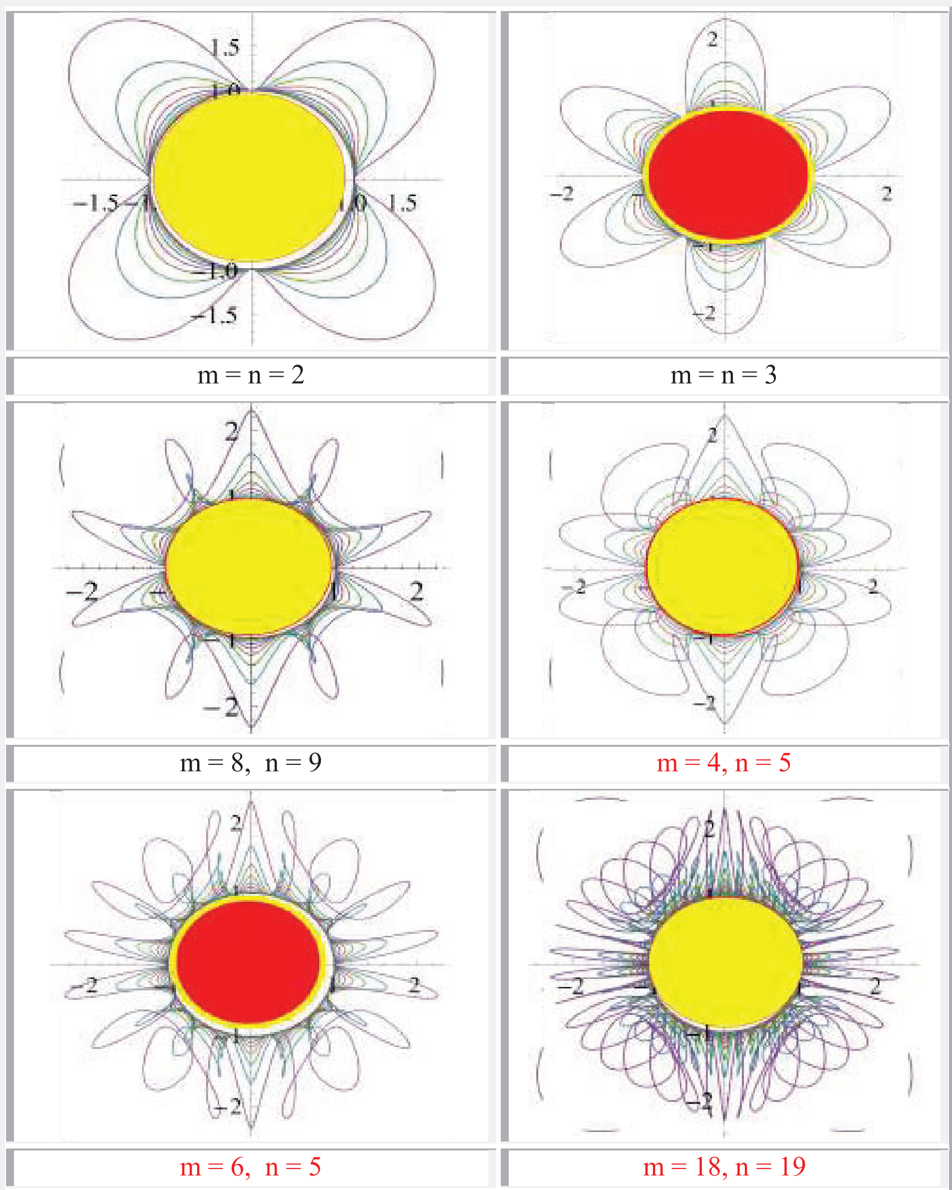
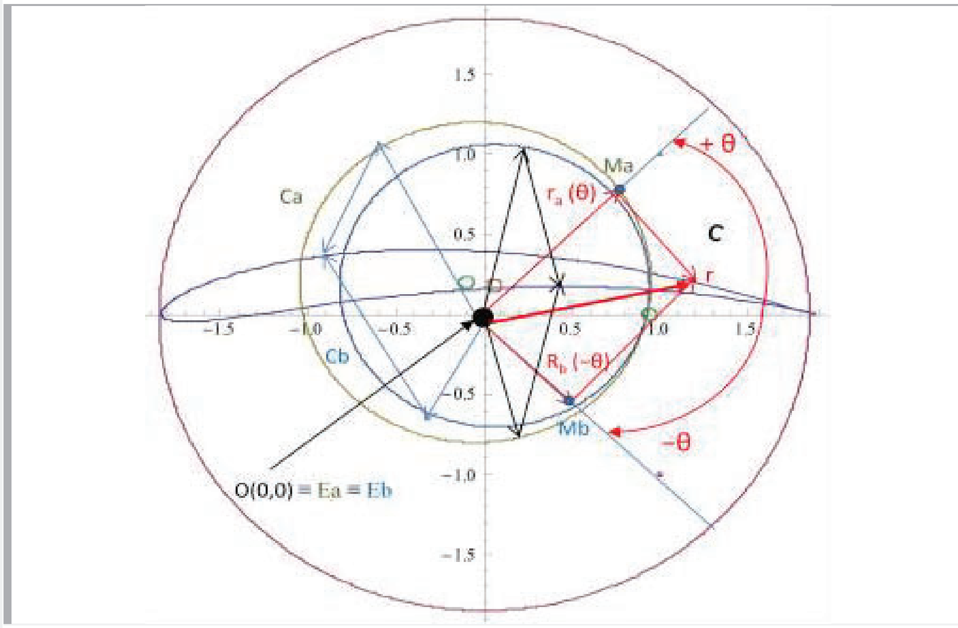
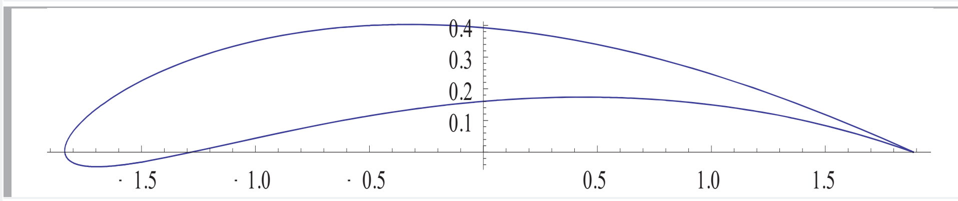


Fig. 10.58 Excentrice speciale



Ra = 1, $e_a = s_a = 5{,}224777$, $\varepsilon_a = 5{,}224777$; Rb = 0.882, $s_b = 0{,}171933$, $\varepsilon_b = -4{,}435$



Ra = 1, $e_a = s_a = 5{,}224777$, $\varepsilon_a = 5{,}224777$; Rb = 0.782, $s_b = 0{,}171933$, $\varepsilon_b = -4{,}435$

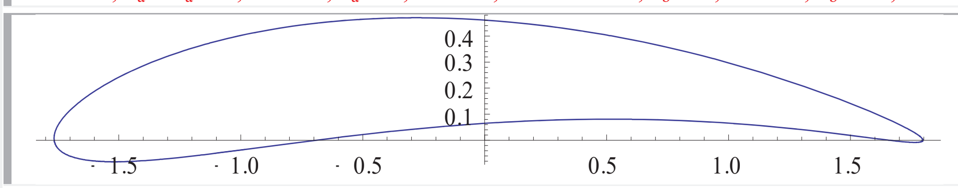


Fig. **10.59** Construcţia grafică a profilului aerodinamic Jukovski

Construcţia grafică a profilului **Jukovsky**, asemănătoare la început şi în principiu, cu construcţia excentricei circulare sau eliptice prin metoda coinciderii excentrelor, este următoarea. Cele doua cercuri, tangente într-un punct situat pe axa x, au excentrele comune în originea O(0,0) a unui reper drept xOy şi centrele în cadranele II şi, respectiv I. Din acest punct O(0,0), se duc două raze polare, $\overrightarrow{\rho_1}$ de unghi θ şi, respectiv, $\overrightarrow{\rho_2}$ de unghi − θ, cu axa x > 0, care intersectează cele două cercuri în două puncte Ma şi, respectiv, Mb.

Suma vectorială a celor doua raze polare este vectorul $\vec{\rho}$ a cărui vârf descrie profilul aerodinamic **Jukovsky**

(10.78) $\vec{\rho} = \overrightarrow{\rho_1} + \overrightarrow{\rho_2}$,

în care, $\overrightarrow{\rho_1} = \overrightarrow{OMa}$ şi $\overrightarrow{\rho_2} = \overrightarrow{OMb}$

Au fost reprezentate, în figură, trei puncte ale profilul Jukowsky.

Este cunoscut că, numai un număr redus de profile aerodinamice se pot obţine prin transformări matematice, în spaţiul în complex. Marea lor majoritate fiind obţinute experimental, după lungi şi laborioase încercări de laborator, dotate cu puternice tunele aerodinamice. Aşa sunt profilele **NACA**, utilizate de **NASA**.

Avem convingerea fermă că, în cel mai scurt timp şi aceste profile aerodinamice pot fi obţinute cu ajutorul **FSM**, aşa cum au fost obţinute şi alte profile, prezentate în această lucrare. Ca urmare, ele pot fi studiate prin mijloace **(super)matematice**, conducând la reducerea volumului de muncă, altfel necesar experimentărilor şi cu obţinerea unor spectaculoase imbunătăţiri ale performanţelor lor, în funcţie de necesităţile impuse de diverse game de viteze, precum şi de alte criterii de performanţă. Trebuie doar îndrăzneală.

10.20.4 EXCENTRICE SPIRALE SPECIALE : SPIRALA GALACTICĂ CU 4 BRAŢE

Sunt excentrice circulare, sau, mai precis eliptice, de proiecţii variabile, dar, spre deosebire de cele anterioare, sunt şi de excentre variabile. Eliptice, deoarece există două cercuri de dimensiuni diferite. Cercul Ca[Ra, O(0,0)] are raza Ra şi, un al doilea cerc, mai mic, Cb[Rb, Ob(0,-yb)] de rază Rb cu Ra > Rb.

Excentrica spirală specială, prezentată în figura **10.60**, are Ra = 1, Rb = 0,5, un excentru Ea fixat în originea O(0,0) şi al doilea excentru Eb[Rb = 0,5; Ob (0, -0,4)] plasat pe axa y < 0. Construcţia s-a realizat prin metoda coinciderii excenterlor Ea ≡ Eb ≡ O(0,0).

Din cele două excentre confundate se duce o semidreaptă d^+ de unghi θ cu axa x > 0. Ea intersectează cele două cercuri în punctele Ma şi, respectiv, Mb a căror coordonate sunt

$$(10.79)\qquad \begin{cases} Ca \cap d^+ = Ma \begin{cases} x_a = cos\theta \\ y_a = sin\theta \end{cases} \\ Cb \cap d^+ = Mb \begin{cases} x_b = Rb.rex(\theta, Eb).cos\theta = Rb.cel\theta \\ y_b = Rb.rex(\theta, Eb).sin\theta = Rb.sel\theta \end{cases} \end{cases}$$

Din punctul Mb se duce o direcţie de unghi $\alpha_b = \theta + \varphi$, iar din punctul Ma o direcţie simetrică faţă de axa y, adică, de unghi $\alpha_a = \pi - \alpha_b = \pi - \theta - \varphi$ cu axa x. La intersecţia celor doua direcţii/drepte se va afla un punct M (x,y) al excentricei spirale speciale, care sunt, totodată, şi relaţiile parametrice ale ei.

Ecuaţiile celor doua drepte, ce trec prin Ma şi Mb, sunt de forma

Ax + By + C = 0 şi au expresiile

(10.80) Da : $\tan(\pi - \theta - \varphi).x - y + \sin\theta - \tan(\pi - \theta - \varphi).\cos\theta = 0$ şi

(10.81) Db: $\tan(\theta + \varphi).x - y + Rb.rex\theta[\sin\theta - \tan(\theta + \varphi).\cos\theta]$

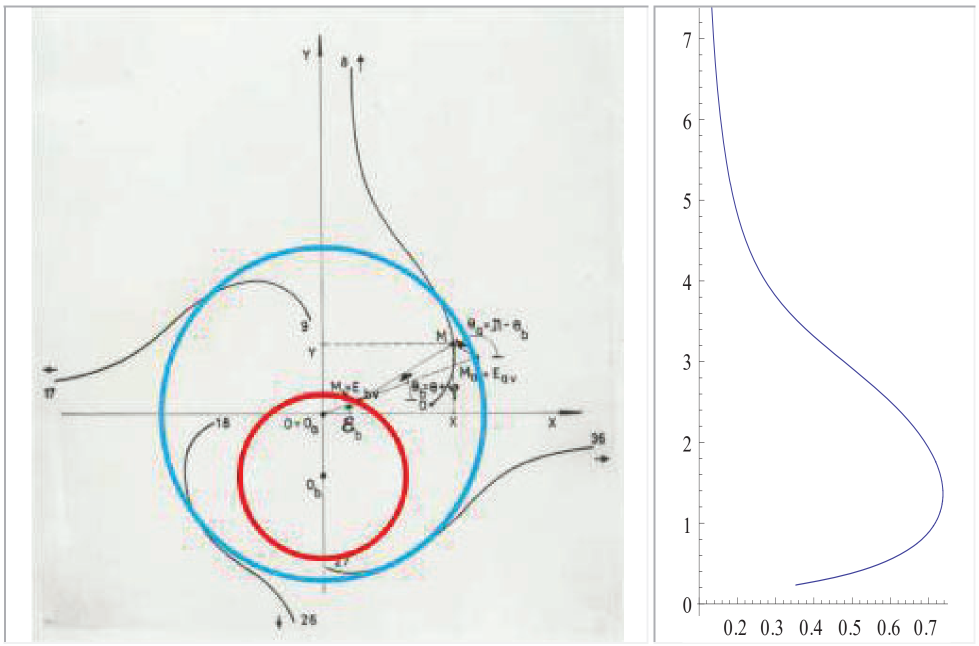


Fig. 10.60 Excentrică spirală specială de forma unei galaxi cu 4 braţe

Prin rezolvarea sistemului de ecuaţii rezultă punctele de intersecţie

(10.80) M(x,y) $$\begin{cases} x = -\dfrac{\tan(\pi-\theta-\varphi).cos\theta - sin\theta + Rb\ rex\theta\,[\tan(\theta+\varphi) - sin\theta]}{\tan(\theta+\varphi) - \tan(\pi-\theta-\varphi)} \\ y = \tan(\pi - \theta - \varphi)\,[x - cos\theta] + sin\theta \end{cases}$$

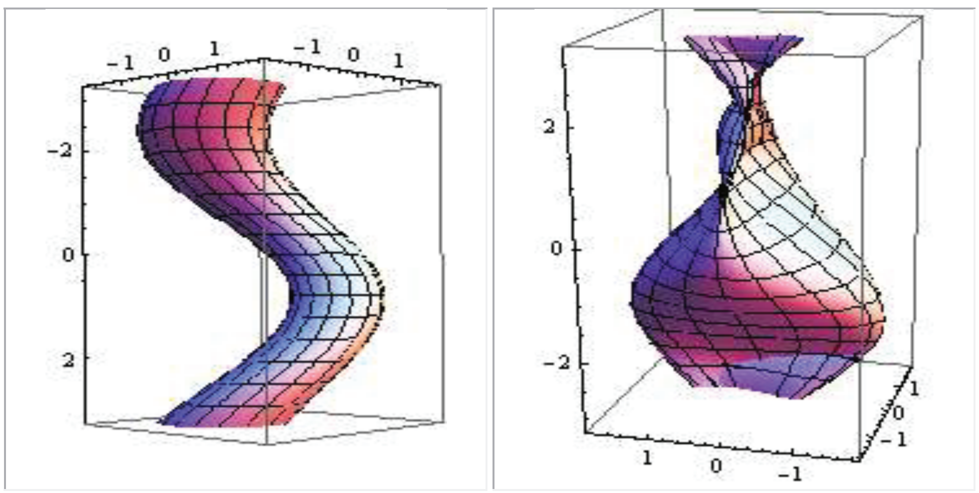
şi, totodată, ecuaţiile parametrice ale acestei excentrice speciale de forma unei spirale galactice cu patru braţe, pe care, o vom numi, în continuare, **spirală galactica cu 4 braţe**.

Spirale galactică, din **figura 10.60**, are $\varphi = 10^0 = 0{,}174533$ radiani.

În dreapta figurii este reprodus matematic primul braţ, din cadranul I, al **excentricei galactice** cu 4 braţe. Cele 4 braţe nu sunt la fel: fiecare braţ există doar într-un singur cadran, are punctul iniţial al curbei la distanţe diferite faţă de centrul O(0,0) şi punctul final tinzând la infinit. Ca urmare, în centru, **excentrica galactică** cu 4 braţe nu are puncte, adică, nu există, aidoma unei galaxi, care în centrul ei prezintă o gaură neagră (blackhole).

10.21 SUPRAFEŢE **SUPERMATEMATICE** (**SSM**)

Sunt suprafeţe matematice, mai puţin obişnuite, obţinute / generate cu ajutorul **FSM**. Unele au fost deja prezentate, drept excentrice în 3D, ca, de exemplu, cilindri rezultaţi din excentricele ovalelor lui **Cassini** şi din excentricele lemniscatelor lui **Booth** (**Fig. 10.16,b** şi **c**), din excentricele astroidale (**Fig. 10.37**), arcul elicoidal **SM** (**Fig. 10.46**), piramida (**Fig.10.48**) excentricele rexoidale şi din excentricele dexoidale (**Fig. 10.55,b**) ş.a.



$X = x_J Cosu/Cos\theta$, $Y = y_J sinu/sin\theta$, $Z = u$ | $X = x_J Cosu$, $Y = y_J sinu$, $Z = u$

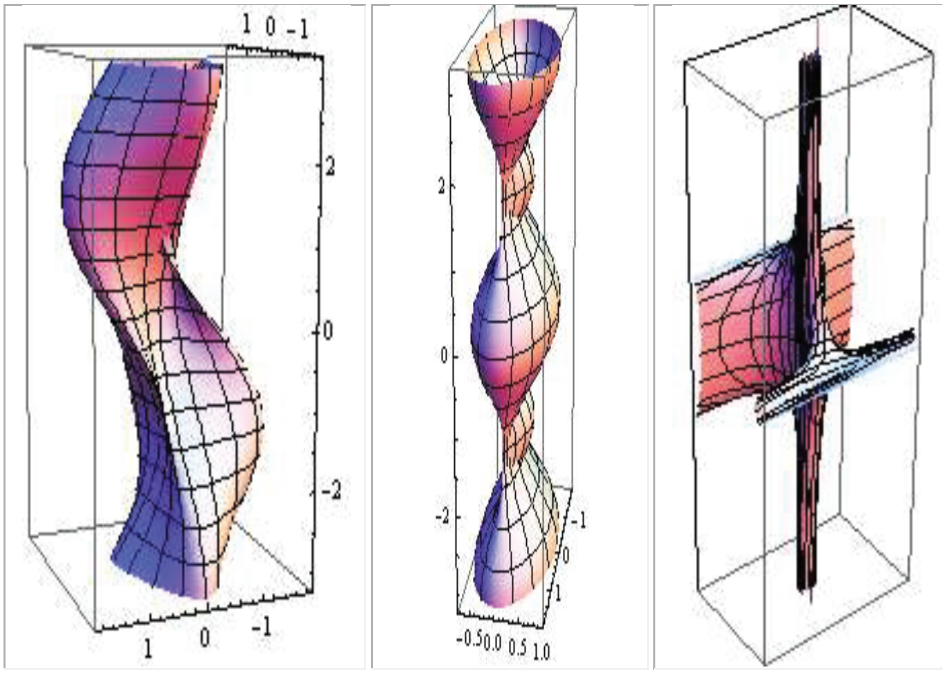
Fig. 10.61,a Suprafeţe derivate din ecuaţiile profilului Jukowsky (x_J, y_J)

In general, suprafeţele **SM** sunt foarte sensibile la mici schimbări în ecuaţiile lor de definiţie. Astfel, dacă în ecuaţiile profilului **Jukovsky** (10.75), se adaugă coordonata

(10.75') $Z = u$, $u \in [- Pi/2, Pi/2]$

şi coordonatele X şi Y se modifică, faţă de coordonatele x_J şi y_J ale profilului **Jukovsky**, aşa cum se indică în **figura 10.61,a**, atunci se obţin suprafeţele sub formă de stâlp circular cabrat sau de peşte, din aceeaşi figură. Dacă se folosesc şi anumiţi exponenţi, indicaţi în **figura 10.61,b**, atunci se obţin alte forme de suprafeţe indicate în aceeaşi figură. O **SSM**, de forma unei aripi de avion, cu profil aerodinamic (**Fig. 10.62**), se poate obţine cu ecuaţiile parametrice

$$(10.81) \qquad \begin{cases} x = 0{,}4u^{2}.cos\theta - 1{,}8u \\ y = 6.u \\ z = 0{,}1u^2 sex[\theta, S(s = 0{,}8;\ \varepsilon = 5{,}9)] + 1 \\ \hat{\imath}n\ care \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad u \in [1; 2] \end{cases}$$



$X = x_J.\cos u.\ \cos\theta, Y=y_J.\sin u\ \sin\theta$	$X = x_J.\cos^2 u, Y=y_J.\sin^2 u$	$X = x_J/\cos u, Y=y_J/\sin u$

$X = x_J.\cos u^{-0.5}, Y=y_J.\sin u^{-0.5}$ în toate cazurile $Z = u$

Fig. 10.61,b Suprafeţe derivate din ecuaţiile profilului **Jukovsky** (x_J, y_J)

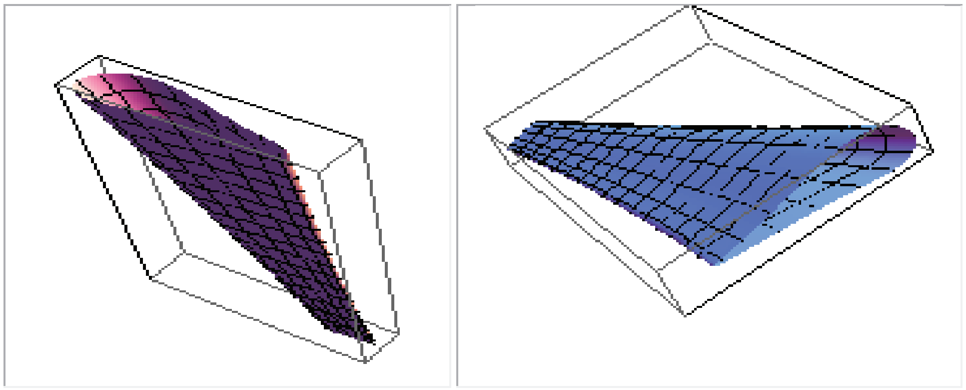


Fig. **10.62 SSM** de forma aripilor de avion cu profil aerodinamic

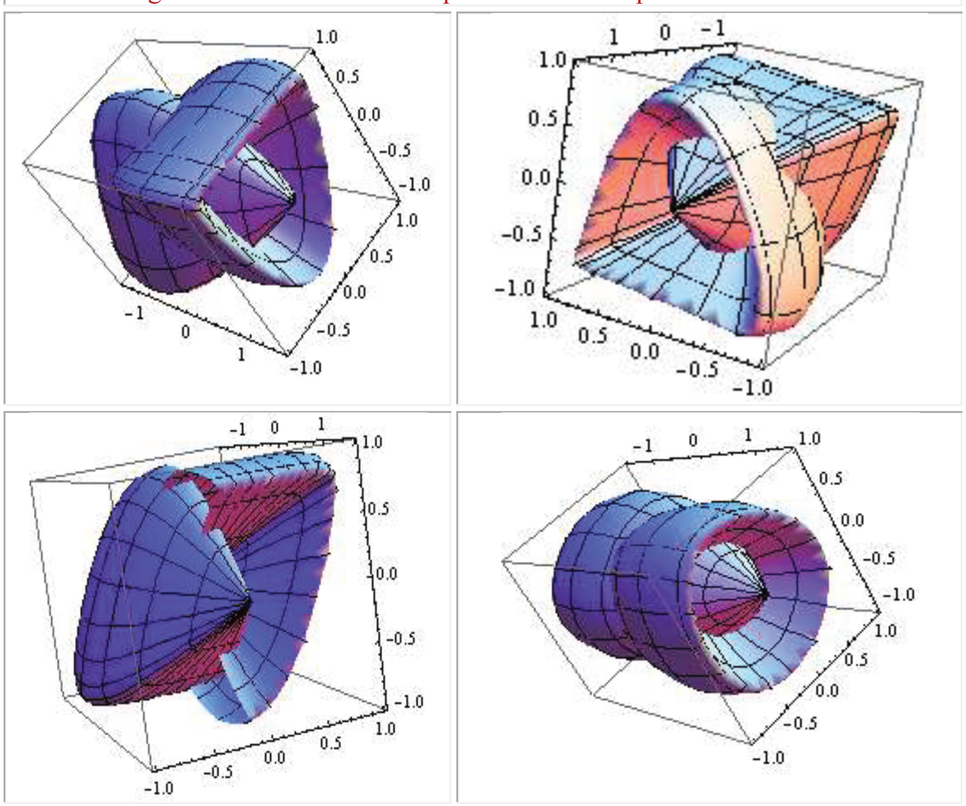


Fig. **10.63,a SSM** autopătrunsă

O **SSM** deosebit de interesantă, deoarece are un centru de simetrie şi se autointersectează, este prezentată în **figura 10.63**. Ea are ecuaţiile parametrice

(10.82) $$\begin{cases} x = arcsin3\theta \\ y = sin2\theta . sex(u, S_y(s_y, \varepsilon_y), \\ z = sin2\theta . cex(u, S_z(s_z, \varepsilon_z) \end{cases}$$

cu $\begin{cases} S_y(s_y, \varepsilon_y) = S_y(0{,}2;\ -1) \\ S_z(s_z, \varepsilon_z) = S_z(0{,}9; 0) \end{cases}$, θ∈[- $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$] şi u ∈[0,2Pi] în **figura 10.63,a** – sus şi u ∈[0, π] - jos, ca să se observe cât mai bine modul de autointrepătrundere a suprafeţei. Excentricele sunt de **excentre** $\begin{cases} S_y(s_y, \varepsilon_y) = S_y(0{,}9;\ -1) \\ S_z(s_z, \varepsilon_z) = S_z(0{,}5; 0) \end{cases}$,θ∈[- $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$] şi u ∈[0, 2Pi] în dreapta-sus şi de excentre $\begin{cases} S_y(s_y, \varepsilon_y) = S_y(0{,}2;\ -1) \\ S_z(s_z, \varepsilon_z) = S_z(0{,}05; 0) \end{cases}$, θ∈[- $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$] şi u ∈[0, 2Pi] – în dreapta jos.

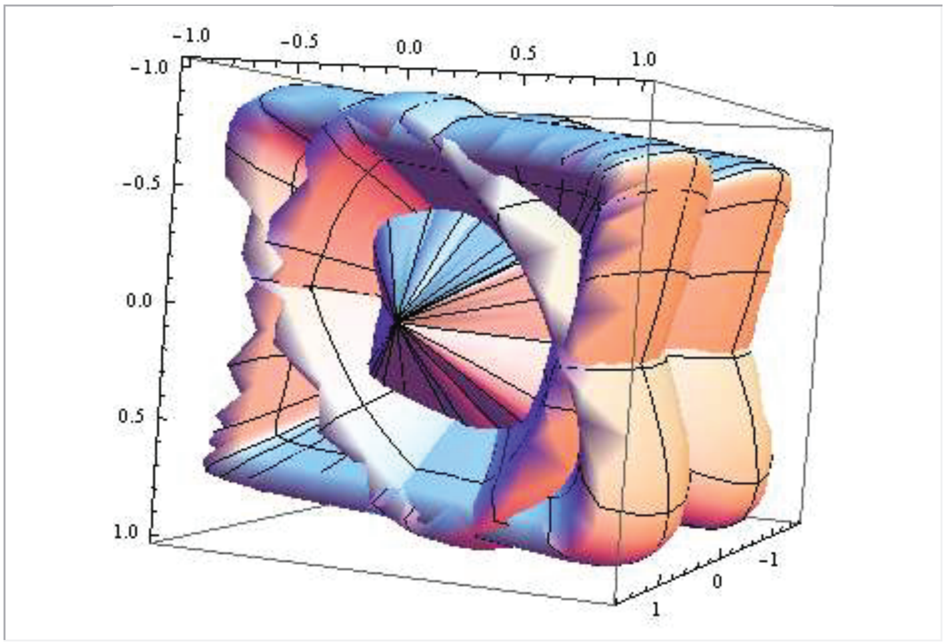


Fig. 10.63,b SSM autopătrunse cu u ∈ [-Pi, Pi]

In **figura 10.63,b** ecuaţiile sunt aceleaşi, cu cele din figura anterioară din stânga, diferenţa rezultând din dublarea domeniului variabilei θ, adică, $\theta\ \in [-\pi, +\pi]$.

FSM-CE au darul de-a putea reprezenta şi suprafeţele unor artefacte ca amforă (**Fig. 10.64**), vaze de flori (**Fig. 10.65 şi 10.66 -** dreapta), statui stilizate (**Fig.10.66 -** stânga), dansuri stilizate (**Fig. 10. 67**) ş.a.

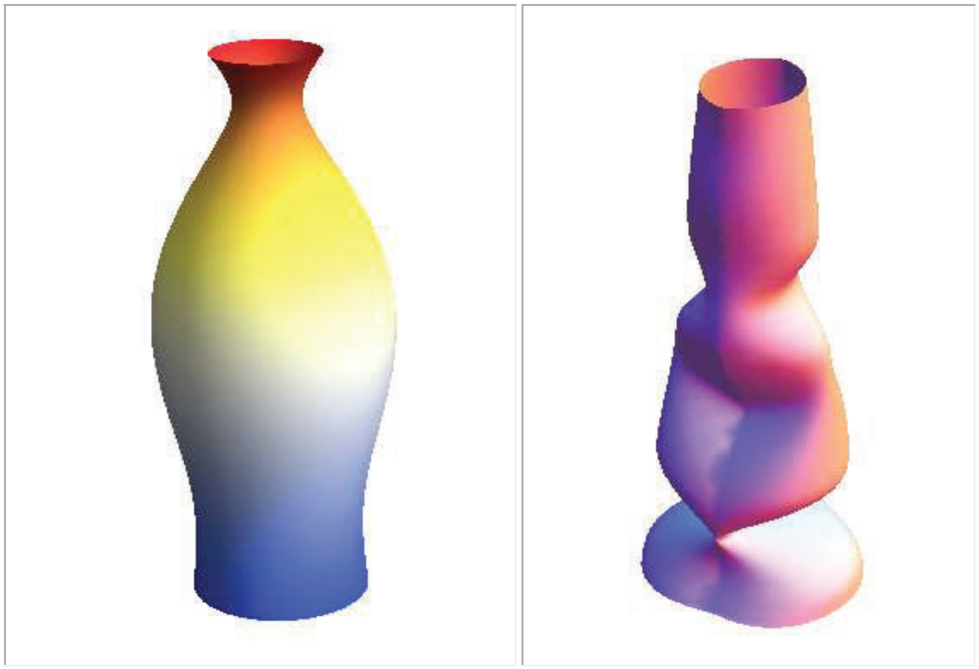


Fig. 10. 64,a Amforă **SM** şi amfora cobră sau suport de lumânare

Amfora din **figura 10.64** are ecuaţiile parametrice

(10.83) $$\begin{cases} x = Rex \propto . cos\theta \\ y = Rex \propto . sin\theta \\ z = u \end{cases}$$ cu α, θ ∈ [0, 2π],

iar amfora cobră, din aceeaşi figură, ecuaţiile parametrice în care Rexα s-a modificat prin înlocuirea **FCC cosα**, de sub semnul radical cu **FSM-CE cexs** şi cu **FSM-CE** modificată / combinată **sex(θ,s),** adică

(10.84) $$\begin{cases} x = cos\theta . \sqrt{1 + s^2 - 2s . cex(s, S(s = 0{,}89, \varepsilon = 0))} = \\ cos\theta . \sqrt{1 + s^2 - 2s . \cos[s - \arcsin(s . sins)])} \\ y = sin\theta . \sqrt{1 + s^2 - 2s . \sin(s - \arcsin[sin\theta])}\cos(\frac{s}{2}) \\ z = 0{,}9\, \alpha \end{cases}$$

în care θ ∈[0,2π] şi s ∈ [- 3,6 π; π/2].

Prima amforă din stânga figurii **10.65** are ecuaţiile parametrice

(10.85) $$\begin{cases} x = cos\theta . Rex[s, S(s \in [0{,}1], \varepsilon = 0)] \\ y = sin\theta . Rex[s, S(s \in [0{,}1], \varepsilon = 0)] \\ z = s \end{cases}$$, cu θ ∈ [0, 2π] şi s ∈ [-3,6π; 0]

în care se observă folosirea **FSM-CE** radial excentric de variabilă centrică în care variabila centrică α a fost înlocuită cu **excentricitatea numerica s**, adica Rexs.
Amfora din dreapta are ecuaţiile parametrice

$$(10.86)\qquad \begin{cases} x = cos\theta.\sqrt{1+\ s^2 - 2s.\cos\left[s - \arcsin\left(0{,}98\sin s\right)\right]} \\ y = sin\theta.\sqrt{1+\ s^2 - 2s.\sin\left[s - \arcsin\left(\sin s\right)\right]}.\,cos\frac{s}{2} \\ z = 0{,}9\, s \end{cases}$$

cu θ ∈ [0, 2π] şi s ∈ [-3,6π; 0,5π]. Aici,FCC cos a fost înlocuită cu cex[s, S(s = 0,98, ε = 0)] în prima ecuţie x(θ,s) şi cu sex[s, S(s = 1, ε = 0)] în a doua ecuaţie, adică în y (θ,s).

Fig. 10. 64,b Pocale supermatematice **SM**

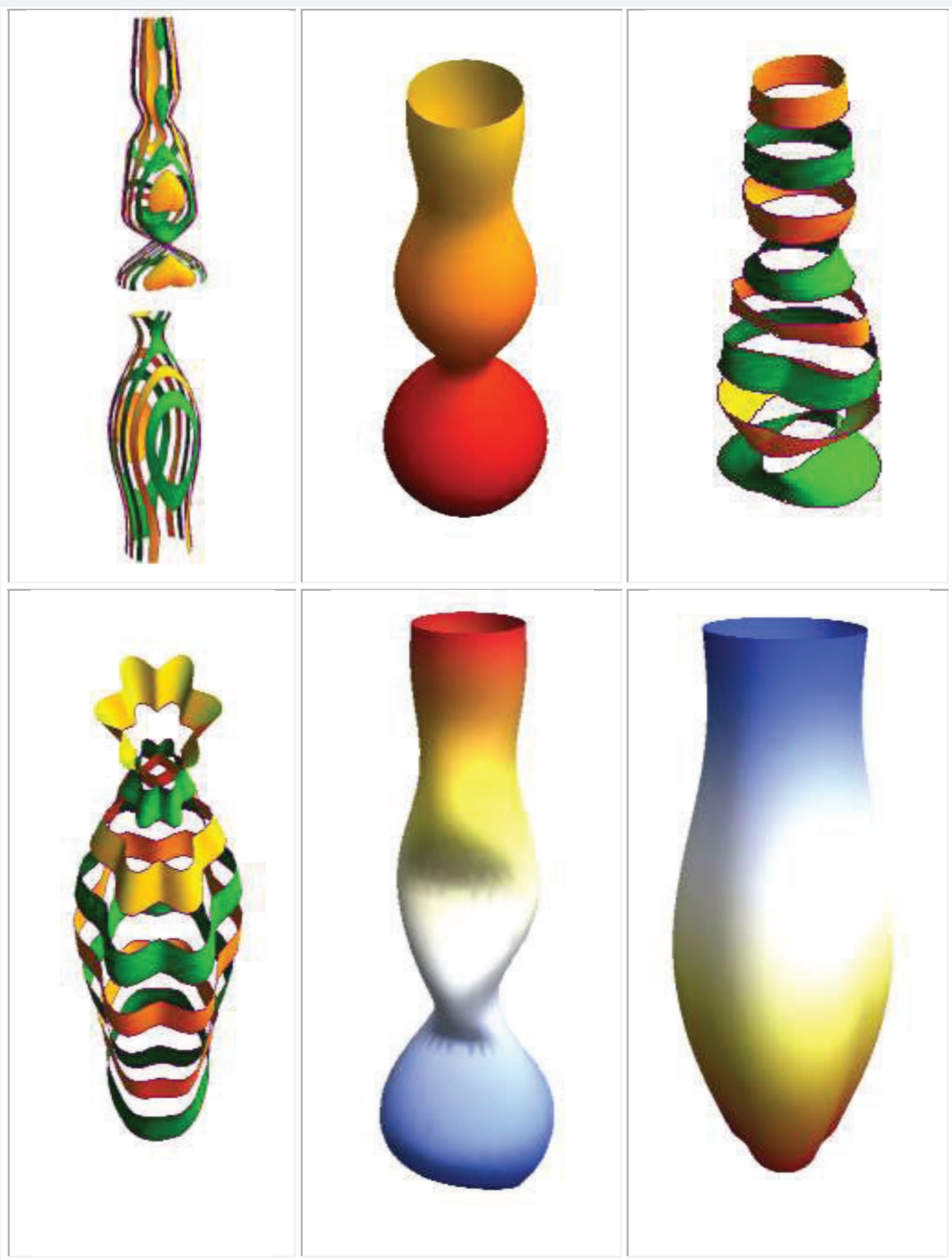


Fig. 10.65 SSM de forma unor vaze de flori

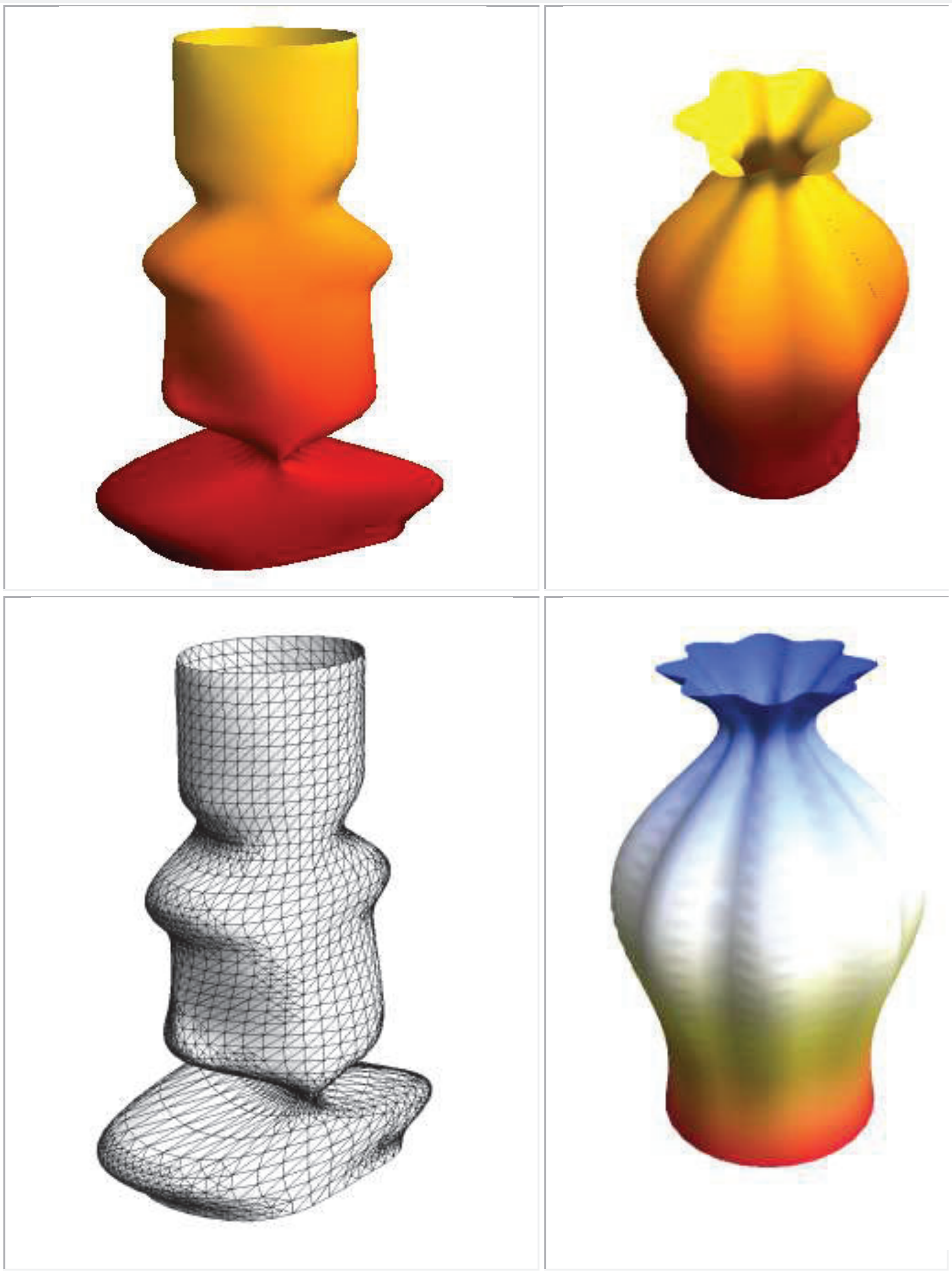


Fig. 10.66 SSM de forma unei statui stilizate a lui **Budha** şi o vază hexagonală

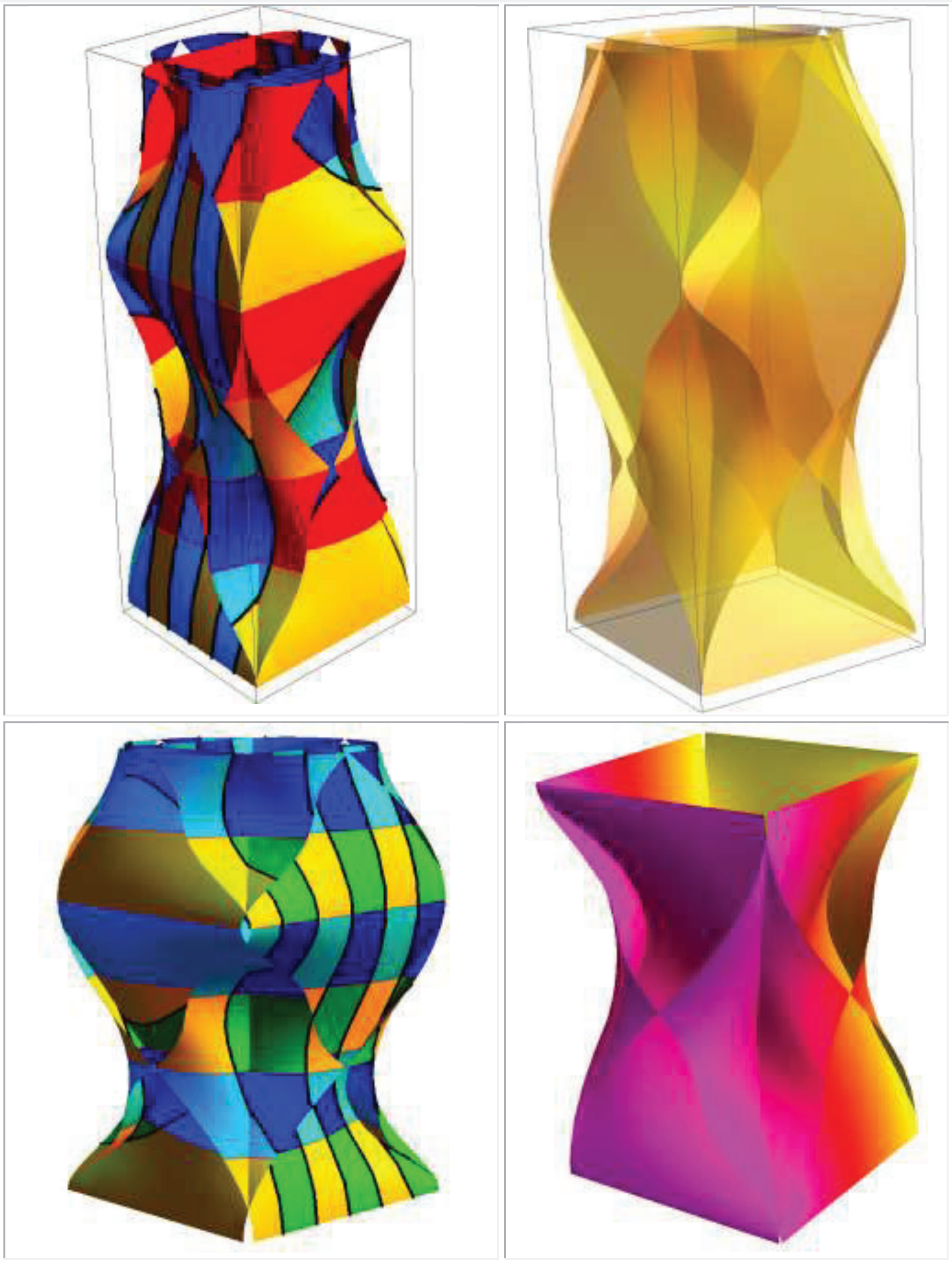


Fig. 10.67 Alte vaze de flori

Motto " Ceea ce este supus mişcării nu se poate odihni cu tâmpla pe static.
De aceea, când încearcă să se odihnească, de fapt visează**"**
Nichita Stănescu

Capitolul 11

FUNCŢIILE cexθ ŞI sexθ CA SOLUŢII ALE UNOR ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE DE ORDINUL DOI CU COEFICIENŢI VARIABILI

11.1 SISTEMUL OSCILAŢIILOR EXCENTRICE (SOE)

Fie cercul C(O,R), **excentrul E(e,ε),** dreapta **d** = **d**$^+$ $\cap$ **d**$^-$, cu cele două semidrepte [pozitivă (+) şi negativă (-)], adiacente în **E** şi punctele $M_{1,2}$ = C(O,R) $\cap$ d. Dreapta **d**, turnantă în jurul excentrului **E(e,ε),** cu viteza unghiulară constantă **Ω**, are direcţia dată de unghiul θ = **Ω**.t cu axa Ox > 0. În acest fel, punctele $M_{1,2}(R, \alpha_{1,2})$ se rotesc pe cercul C, într-o **mişcare circulară excentrică** (**MCE**), cu o viteză unghiulară $\omega_{1,2} = \Omega \mathrm{dex}_{1,2}\theta$. Ea este constantă, dacă e = 0 şi variabilă, dacă e ≠ 0 şi $e^2 \le R^2$ sau $-1 \le s = e/R \le 1$, adică pentru un **excentru E** aparţinând discului circular de rază R şi, **inclusiv**, cercului C. Modulele vitezelor punctelor $M_{1,2}$ pe C sunt date de relaţia $v_{1,2} = R.\omega_{1,2} = R.\Omega.\mathrm{dex}_{1,2}$.

Poziţiile punctelor $\mathbf{M_{1,2}}$ sunt date de coordonatele polare (R, $\alpha_{1,2}$) în reperul cu originea în centrul O(0,0) şi de ($r_{1,2}$, θ) în reperul cu originea în excentrul E, în care, razele polare excentrice $r_{1,2}$ sunt, aşa cum se ştie, date de funcţiile radial excentric, fie în funcţie de **variabila centrică** $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ fie de cea **excentrică θ** de expresiile

(11.1) $r_{1,2} = R.\ \mathrm{Rex}\alpha_{1,2} = R.\ \mathrm{rex}_{1,2}\theta$.

Coordonatele carteziene ale punctelor $M_{1,2}$ sunt

(11.2) ($x_{1,2} = R.\cos\alpha_{1,2}$; $y_{1,2} = R.\sin\alpha_{1,2}$) în reperul cu originea în O(0,0) şi

(11.3) ($x_{1,2} = R.\mathrm{cex}_{1,2}\theta$; $y_{1,2} = R.\ \mathrm{sex}_{1,2}\theta$) în acelaşi reper, dar exprimate cu ajutorul funcţiilor supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) cu excentrul în **E(e_x, e_y).**

Proiecţiile mişcării punctelor $M_{1,2}$, pe oricare două axe rectangulare, reprezintă o mişcare de oscilaţie / vibraţie a unui sistem, pe care Prof. dr. math. **Emilia Petrişor** l-a denumit **sistemul oscilaţiilor excentrice (SOE).**

În **figura 11.1**, sunt reprezentaţi vectorii de poziţie, vitezele şi acceleraţiile punctelor $M_{1,2}$ în **MCE** şi, prin proiecţiilea cestora, mărimile de vibraţie din **SOE**. Mărimi reprezentate grafic în **figurile 11.5, 11.6** şi **11.7**. Graficele vitezelor unghiulare şi a acceleraţiilor unghiulare sunt date în **figura 11.8**. Ele sunt reprezentate şi în schema explicativă din **figura 11.1**. În toate cazurile – ca şi în **figura 11.1-** s-a considerat raza R egală cu amplitudinea A a vibraţiei, adică R = A = 1→ **e = s** ∈ [0,1], **ε** = 0 → excentrul **E ≡ S** ⊂ Ox.

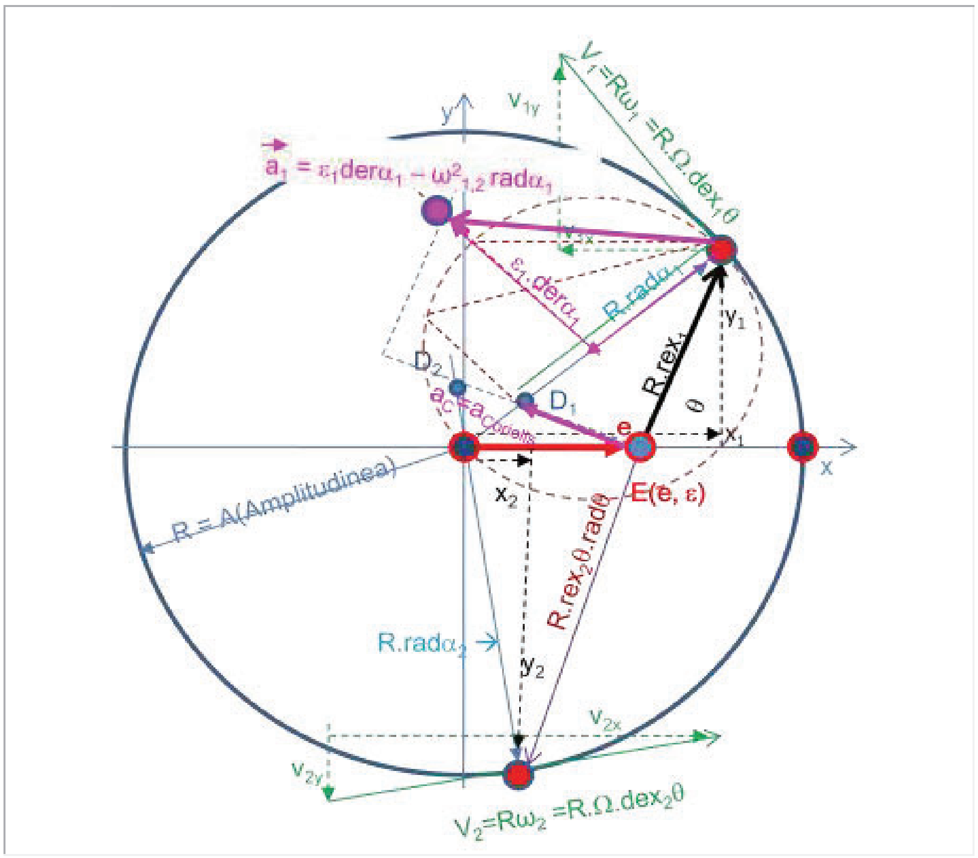


Fig. 11.1 Schemă explicativă la sistemul oscilaţiilor / vibraţiilor excentrice (**SVE**)

11.2 SISTEMUL OSCILAŢIILOR RADIALE EXCENTRICE (ORE)

Nu există nicio raţiune pentru care variaţiile în modul ale razelor polare excentrice $\mathbf{r}_{1,2}$ să nu poata fi considerate ca **oscilaţii** / pulsaţii sau vibraţii **radiale excentrice (ORE).**

Variaţia periodică **simetrică** a valorii unei marimi, în raport cu o anumită valoare (de referinţă), este denumită **oscilaţie**. Acesta este cazul variaţiilor lui $r_{1,2}(t)$ faţă de axa Y = R = 1, în cazul de faţă.

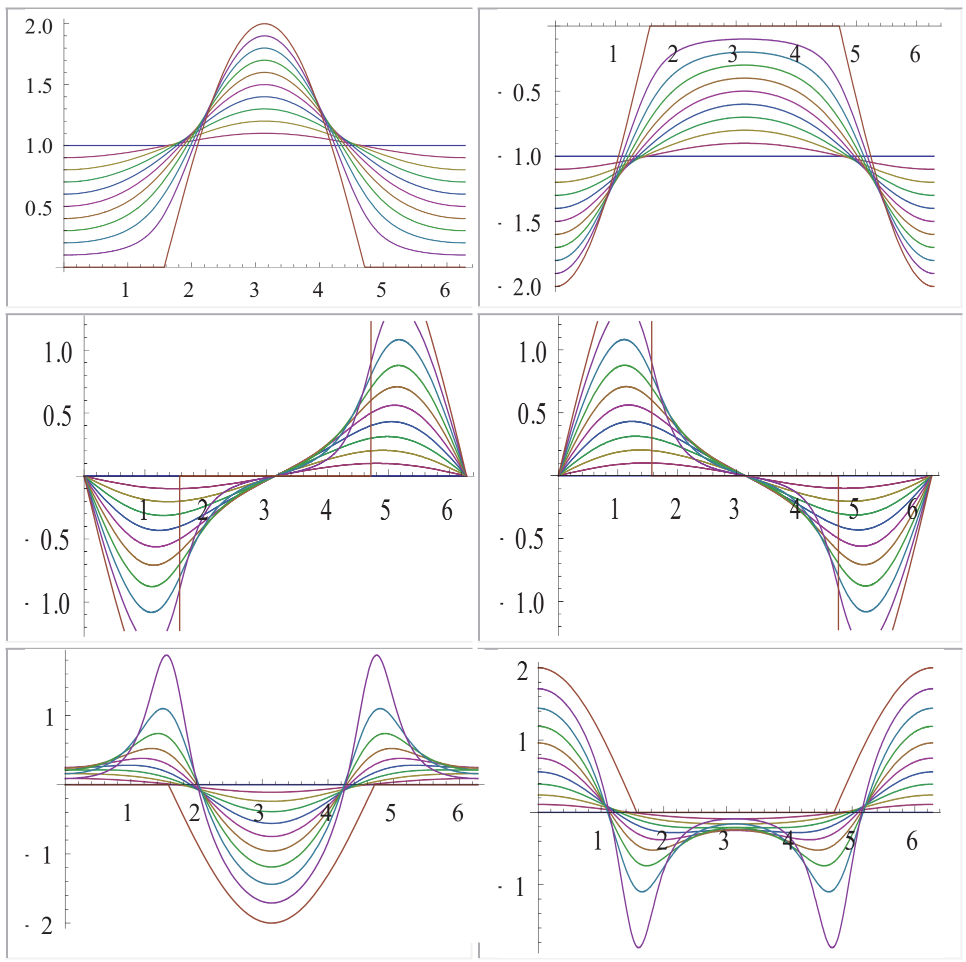
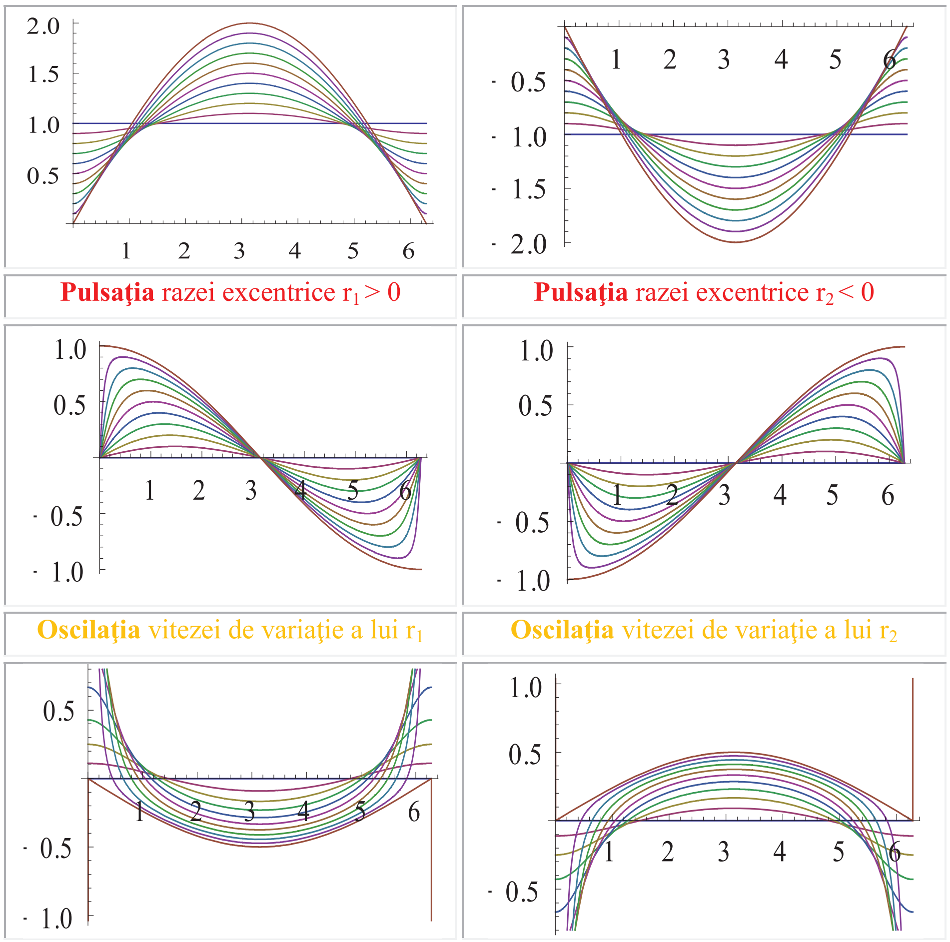


Fig. 11.2 Deplasarea, viteza şi acceleraţia oscilaţiilor radiale excentrice de θ.
Stânga: r_1= R rex$_1$Ωt, $\dot{r}_1$ şi $\ddot{r}_1$ θ = Ω.t Dreapta r_2= R.rex$_2$Ωt, $\dot{r}_2$ şi $\ddot{r}_2$
Pentru R = 1, $A_{1,2}$ = e = s ∈[0, 1], cu pasul 0,1şi ε = 0→ E ≡ S(s,0)

Dacă alternanţele sunt numai de un **singur sens,** cum este cazul aceloraşi mărimi $\mathbf{r_{1,2}}$, dar faţă de reperul Y = 0, atunci vibraţia se denumeste **pulsaţie**. O mişcare pulsatorie nu trebuie confundată cu **pulsaţia proprie Ω**, în cazul de faţă, a unui sistem vibrant.

Vibraţia este o denumire mult mai cuprinzătoare, care le include pe cele precedente şi, în plus, poate fi atribuită oricărei variaţii periodice.



Pulsaţia razei excentrice $r_1 > 0$ | **Pulsaţia** razei excentrice $r_2 < 0$

Oscilaţia vitezei de variaţie a lui r_1 | **Oscilaţia** vitezei de variaţie a lui r_2

Vibraţia acceleraţiei razei excentrice r_1 | **Vibraţia** acceleraţiei razei excentrice r_2

Fig. **11.3** Deplasarea, viteza şi acceleraţia **vibraţiilor** radiale excentrice de α.

Oscilaţiile, pulsaţiile şi vibraţiile sunt funcţii de timp, dar funcţia de timp poate fi exprimată prin intermediul variabilei excentrice **θ**(t), dacă mişcările / deplasările sunt reprezentate de razele polare excentrice de variabilă excentrică θ = **Ω**t, adică, $r_{1,2}(t)$ =

R.rex$_{1,2}\theta$ (**Fig. 11.2**) şi / sau **ORE** de **α(t),** dacă mişcarea este reprezentată de **FSM-CE** radial excentrică de variabilă centrică **α** = Ωt, (**Fig. 11.3**), adică, $r_{1,2}$ = R. **Rex**$\alpha_{1,2}$.

Pulsaţiile / impulsurile sunt de aceeaşi perioadă T, respectiv de aceeaşi pulsaţie proprie Ω şi de amplitudine (maximă pentru prima determinare de indice 1 şi minimă –sau maximă negativă- pentru a doua determinare, de indice 2) $A_{P1,2}$ = ±(A+ e), în care **e** este excentricitatea e = R.s ∈ (0, 1]. În acelaşi timp, oscilaţiile sunt de aceeaşi amplitudine, egală cu excentricitatea e ∈ (0, 1], considerate faţă de axa Y = ± R = ± A = ± 1, ambele tipuri de **ORE** sunt de **semi**perioade diferite, aşa cum rezultă şi din **figurile 11.2** şi **11.3**.

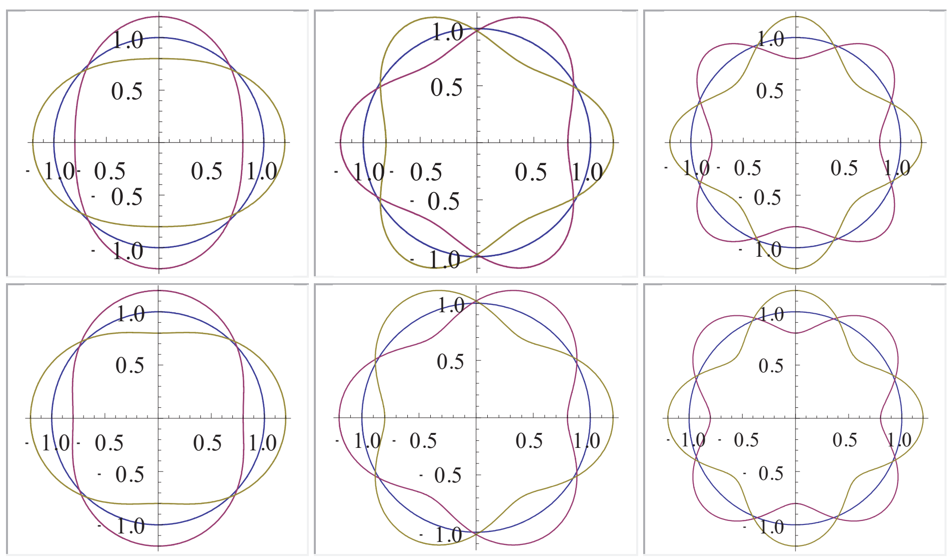


Fig. 11.4 Vibraţii radiale excentrice **polare** ale unui inel circular de rază R = 1 exprimate cu funcţiile de variabilă excentrică rexθ, rex2θ şi, respectiv, rex3θ SUS şi cu funcţiile Rex2α, Rex3α şi, respectiv, Rex4α JOS cu E ≡ S(0,2; 0) în **coordonate polare**

Asemănările dintre **vibraţiile radiale excentrice** şi **vibraţiile radiale clasice** (**Fig.11.4**), moduri de vibraţie atribuite unor inele circulare elastice, consistă în faptul că sunt exprimate în coordonate polare. Primele cu ajutorul aceloraşi funcţii radial excentrice, atât de variabile **θ** = Ωt, cât şi cele de variabilă **α** = Ω.t, iar cele clasice cu funcţii trigonometrice / circulare centrice (**FCC**).

Unele dintre **ORE** clasice sunt reprezentate, în coordonate polare de funcţia $\rho = R(1\pm e.\sin\alpha)$ şi diferă uşor de cele prezentate în prezenta lucrare, pentru **e** = 0,2, deci de valori mici şi diferă semnificativ dacă excentricitaea **e, şi** cu rolul de amplitudine a deformarii radiale, creşte.

Oscilaţii şi / sau pulsaţii reprezentate în **coordonate carteziene** se vor denumi **ORE / PRE** şi celelalte, reprezentate în coordonate polare, oscilaţii / pulsaţii radiale excentrice (**ORE**) **polare** → (**OREP/PREP**).

Rezultă că **ORE** sunt proiecţiile pe axele **x** şi, respectiv **y** ale **OREP**. Ambele sunt de aceeaşi perioadă **T**, respectiv de aceeaţi pulsaţie proprie **Ω**. Oscilaţiile sunt de amplitudine $A_P = \pm(A+ e)$, în care **e** = R.**s** ∈ (0, 1] este excentricitatea reală.

Pulsaţiile radiale excentrice au elongaţia maximă $r_M = R + e$ şi cea minimă $r_m = R - e$. Concentrat, se poate scrie că elongaţiile extreme sunt $r_{m,M} = R \mp e$

Când oscilaţiile **ORE** sunt de aceeaşi amplitudine, egală cu excentricitatea e ∈ (0, 1], considerate faţă de axa Y = ± R = ± A = ± 1, ambele tipuri de **OPRE** sunt de **semi-**perioade diferite, pulsatorii, în trepte simetrice faţă de valoarea de nul, în cele doua sensuri de mişcare, aşa cum rezultă şi din **figurile 11.2** şi **11.3**.

Diferenţele dintre cele doua semiperioade cresc, cu creşterea amplitudinii oscilaţiei, adică cu excentricitatea e, datorită alunecării punctelor de nul pe axa de referinţă, în timp ce punctele de extrem raman fixe.

Punctele de extrem sunt date de valorile variabilelor la care se anulează vitezele, adică la $\theta_{1,2}(t) = \alpha_{1,2}(t) = \pi \pm k.\pi \rightarrow t_{extrem} = \frac{\pi\pm k.\pi}{\Omega}$, aşa cum se poate urmări şi în graficele vitezelor **SOE** şi a **ORE**. Punctele de nul ale oscilaţiilor se obţin pentru $\boldsymbol{\alpha_{1,2}} = \frac{\pi}{2}\pm\ k\,\pi$ şi, respectiv, primul punct de nul, al variabilei excentrice, se obţine pentru $\theta_0 = \frac{\pi}{2} + \beta(\alpha = \pi/2)$.

Se ştie că pentru $\alpha = \alpha_1$

(11.4) $$\beta(\alpha) = \frac{s.\sin\alpha}{Rex\alpha} = \frac{s.\sin\alpha}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos\alpha}},$$ astfel că pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se obţine

(11.5) $$\beta\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \quad \text{şi} \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} .$$

Următorul punct de nul se obţine pentru $\theta_0' = \frac{3\pi}{2} - \beta\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$, apoi punctele se succed în acelaşi mod. Punctele de nul, în funcţie de timp, vor fi

(11.6) $$t_0 = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{1}{\Omega} \pm \frac{s}{\Omega\sqrt{1+s^2}} = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi \pm \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right).$$

Dacă excentricitatea **e = s** → 0, atunci **vibraţiile radiale** (**VR**) încetează, întrucât $r_{1,2} = R$ = constant, pentru că $rex_{1,2}\theta = Rex\ \alpha_{1,2} = \pm 1$.

11.3 DEPLASAREA, VITEZA ŞI ACCELERAŢIA ÎN SISTEMUL VIBRAŢIILOR EXCENTRICE (SVE)

Dacă relaţiile (11.2) şi/sau (11.3) reprezintă deplasarea în **MOE**, atunci vitezele sunt date de prima derivatelă în funcţie de timp ale acestora, iar acceleraţiile **SOE** de cea de a doua derivată. Scriind deplasarile, ca **vectori** în funcţii de timp,

$$(11.7)\qquad \begin{cases} \vec{x}_{1,2}(t) = R.cex_{1,2}(\Omega t).rad0 = R.cex_{1,2}\big(\theta = \Omega.t, E(e,\varepsilon)\big).rad0 \\ \vec{y}_{1,2}(t) = R.sex_{1,2}(\Omega t).der0 = R.sex_{1,2}\big(\theta = \Omega.t, E(e,\varepsilon)\big).der0 \end{cases}$$

ei reprezintă proiecţiile vectorilor de poziţie $\vec{R}_{1,2}(t)$ ai punctelor $M_{1,2}$, în **MCE** de excentru **E(e,ε)** punct fix, adică e şi ε mărimi constante, având expresiile

$$(11.8)\qquad \vec{R}_{1,2}(t) = R.rad\alpha_{1,2}(t) = \vec{e} + \vec{r}_{1,2}(t) =$$
$$= e.rad\varepsilon + R.rex_{1,2}(\Omega t).rad(\theta = \Omega.t).$$

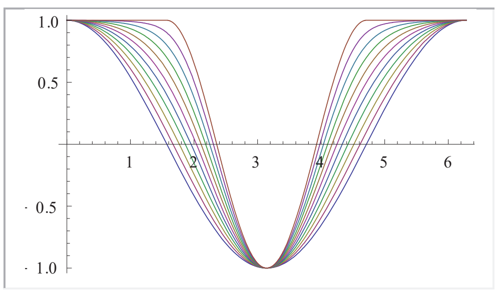


Fig.11.5,a Deplasările $x_1 = cex_1\theta$

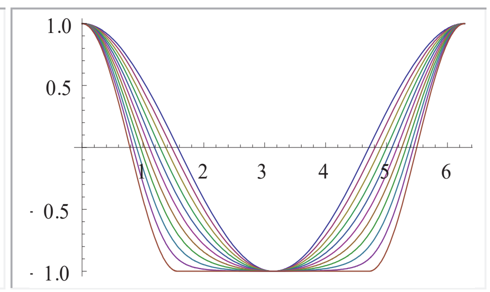


Fig.11.5,b Deplasarile $x_2 = cex_2\theta$

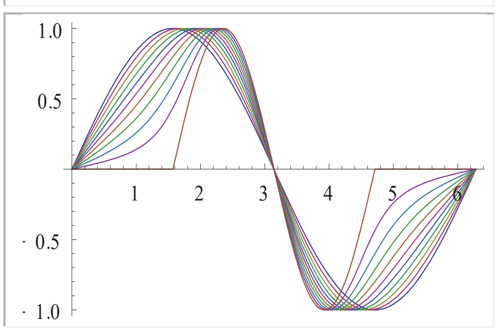


Fig.11.5,c Deplasările $y_1 = sex_1\ \theta$

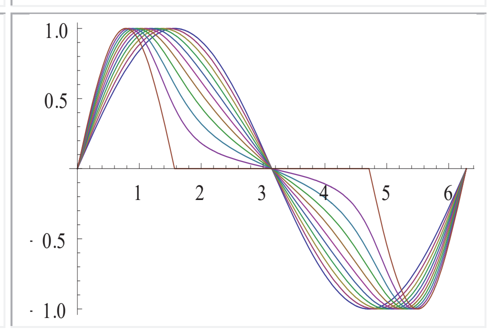


Fig.11.5,d Deplasările $y_2 = sex_2\ \theta$

Pentru R = 1, Ω = 1, E(e = s∈[0,1] , ε = 0) şi θ ∈[0, 2π], s cu pasul 0,1

Vectorii vitezelelor mişcarilor de vibraţii rectilinii, pe cele două axe x şi y, ca derivate ale deplasărilor, sunt

$$(11.9)\qquad \begin{cases} \dot{\vec{x}}_{1,2}(t) = \vec{v}_{x1,2}(t) = -R.\Omega.dex_{1,2}(\Omega t).sex_{1,2}(\Omega t).rad0^0 \\ \dot{\vec{y}}_{1,2}(t) = \vec{v}_{y1,2}(t) = +R.\Omega.dex_{1,2}(\Omega t).cex_{1,2}(\Omega t).der0^0 \end{cases}$$

şi sunt proiecţii ale vectorilor viteză $\vec{v}_{1,2}(t)$ ale punctelor $M_{1,2}$ din **MCE** a lor de pe cercul C

$$\vec{v}_{1,2}(t) = \dot{\vec{R}}_{1,2}(t) = R.\Omega.dex_{1,2}(\Omega t).der\alpha_{1,2}(t) \quad (11.10)$$

În aceste relaţii s-a ţint cont de derivatele cunoscute din volumul I al lucrării

$$r\dot{a}d_{1,2}(t) = \frac{d[rad_{1,2}(\Omega t)]}{dt} = \frac{d[rad_{1,2}(\theta=\Omega.t)]}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \Omega.der_{1,2}(\Omega t). \quad (11.11)$$

Cu puncte s-au notat derivatele în funcţie de timp şi cu accent au fost notate derivatele în raport cu **variabila excentrică θ.** Acceleraţiile aceloraşi mişcări rectiliniare sunt

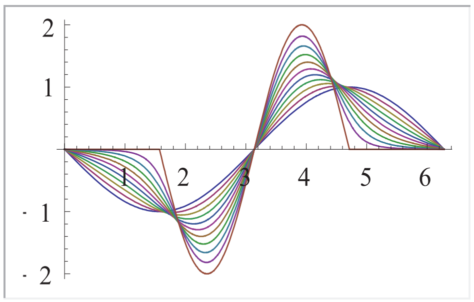


Fig.11.6,a **Vitezele** $\dot{x}_1$= — dex$_1$.sex$_1\theta$ = v_{1x}

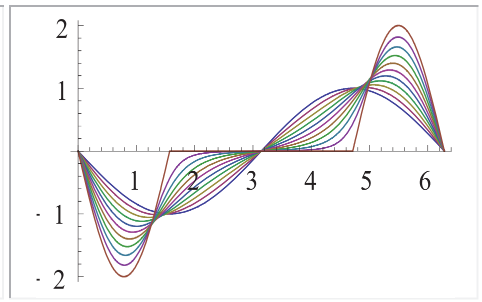


Fig.11.6,b **Vitezele** $\dot{x}_2$ = – dex$_2$.sex$_2\theta$ = v_{2x}

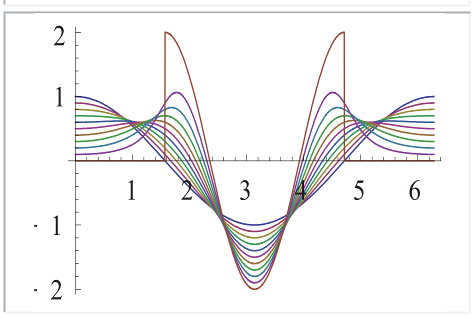


Fig.11.6,c **Vitezele** $\dot{y}_1$ = dex$_1$.cex$_1$ θ = v_{1y}

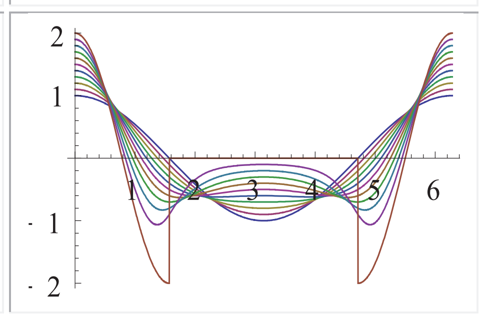


Fig.11.6,d **Vitezele** $\dot{y}_2$ = dex$_2$.sex$_2\theta$ = v_{2y}

Pentru R = 1, Ω = 1, E(e = s∈[0,1] , ε = 0) şi θ ∈[0, 2π], s cu pasul 0,1

$$(11.12)\quad \begin{cases} \ddot{\vec{x}}_{1,2}(t) = \vec{a}_{x1,2}(t) = \\ = R.\Omega^2\left[dex'_{1,2}(\Omega t).sex_{1,2}(\Omega t) + dex^2_{1,2}(\Omega t).cex_{1,2}(\Omega t)\right]rad0^0 \\ \ddot{\vec{y}}_{1,2}(t) = \vec{a}_{y1,2}(t) = \\ = R.\Omega^2\left[dex'_{1,2}(\Omega t).cex_{1,2}(\Omega t) - dex^2_{1,2}(\Omega t).sex_{1,2}(\Omega t)\right]der0^0 \end{cases}$$

şi reprezintă proiecţiile vectorilor acceleraţiilor punctelor în **MCE**, obţinute prin derivarea, în funcţie de timp, a vectorilor viteză (11.7) şi au expresiile

(11.13) $$\vec{a}_{1,2}(t) = \dot{\vec{v}}_{1,2}(t) = \ddot{\vec{R}}_{1,2}(t) = = R.\Omega\left[\varepsilon_{1,2}(t).der_{1,2}(\Omega t) - \omega_{1,2}^2(t).rad_{1,2}(\Omega t)\right] = = R.\Omega^2[dex'_{1,2}(\Omega\theta).der_{1,2}(\Omega t) - dex_{1,2}^2(\Omega t).rad_{1,2}(\Omega t)]$$

Modulele vectorilor acceleraţiilor din **MCE** vor fi

(11.14) $$\left|\vec{a}_{1,2}(t)\right| = R\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} = R.\Omega^2\sqrt{[\frac{d(dex_{1,2}(\Omega t)}{d\theta}]^2 + dex_{1,2}^4(\Omega t)}$$

în care, **acceleraţia unghiulară** $\epsilon_{1,2}$ este derivata vitezei unghiulare $\omega_{1,2}$ şi e dată de relaţia

(11.15) $$\vec{\epsilon}_{1,2}(t) = \frac{\vec{\omega}_{1,2}(t)}{dt} = \dot{\vec{\omega}}_{1,2}(t) = \frac{d[\Omega.dex_{1,2}(\Omega t).der\alpha_{1,2}(\Omega t)]}{dt} = = \frac{d[\Omega.dex_{1,2}(\Omega t).der\alpha_{1,2}(\Omega t)]}{d\theta} = \Omega^2[\varepsilon_{1,2}.der\alpha_{1,2}(t) - \omega_{1,2}^2(t).rad\alpha_{1,2}(t)] = \Omega^2.dex'_{1,2}(\Omega t).der\alpha_{1,2}(\Omega t) - \Omega^2.dex_{1,2}^2(\Omega t).rad\alpha_{1,2}(t) = \Omega^2[dex'_{1,2}(\Omega t).der\alpha_{1,2}(\Omega t) - dex_{1,2}^2(\Omega t).rad\alpha_{1,2}(t)].$$

Se observă că, pentru excentricitate nulă **e = s = 0**, viteza unghiulară este

(11.16) $\omega_{1,2}(t) = \Omega.dex_{1,2}(\theta = \Omega.t) = \Omega$,

deoarece **dex$_{1,2}$**($\theta = \Omega$.t; e = 0) = 1, deci, devine constantă, iar acceleraţia unghiulară (11.15) se anulează ($\vec{\epsilon}_{1,2}(t) = 0$). Ca urmare, mişcarea circulară excentrică (**MCE**) devine centrică, mişcarea de rotaţie neuniformă pe cercul C devine uniformă şi **SOE** degenerează într-un **sistem centric**.

Vibraţiile radiale excentrice polare (**VREP**), în cazul e = 0, încetează, deoarece $r_{1,2}(t, e = 0)rad_{1,2}\theta = R.rad\alpha_{1,2} \rightarrow \theta = \alpha_1$ şi $\alpha_2 = \theta + \pi$, deoarece $\beta_1 = 0$ şi $\beta_2 = \pi$, ştiindu-se că ($\beta_1 + \beta_2 = \pi$).

Vectorii de poziţie ai punctelor $M_{1,2}$ din **E** revin în O, sau razele excentrice devin centrice, adică, modulele vectoriilor $r_{1,2}$, care sunt $\left|\vec{r}_{1,2}\right| = R$, devin egale cu raza R a cercului pe care are loc, acum, mişcarea circulară centrică.

De la **MCE** se mai ştie că:

- Suma razelor excentrice $r_{1,2}$, respectiv a modulelor vectorilor de poziţie ai punctelor $M_{1,2}$ din polul E(e,ε), este egală cu produsul razei cercului R şi funcţia coardă **crd**, adică cu coarda R.crd[θ, E(e,ε)] din cercul de rază R, în care, cu crd[θ, E(e,ε)] s-a notat funcţia coardă dusă prin S(s, ε) în cercul unitate C(O,1), adică

(11.17) $R.\,crd[\theta, S(s,\varepsilon)] = r_1 + | r_2 |$

- Suma modulelor vectorilor viteză unghiulara $\omega_{1,2}$ este egala cu diametrul cercului unitate, adică

(11.18) $2 = \omega_1 + \omega_2$

- Suma modulelor vectorilor viteză $v_{1,2}$ este egală cu diametrul cercului R pe care are loc MCE, adică

(11.19) $\qquad 2R = v_1 + v_2$

- Suma accelerațiilor unghiulare $\epsilon_{1,2}$ ale punctelor $M_{1,2}$ este nulă, cele două accelerații fiind egale și de semne opuse, adică

(11.20) $\qquad \epsilon_1 + \epsilon_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \epsilon_2 = -\epsilon_1.$

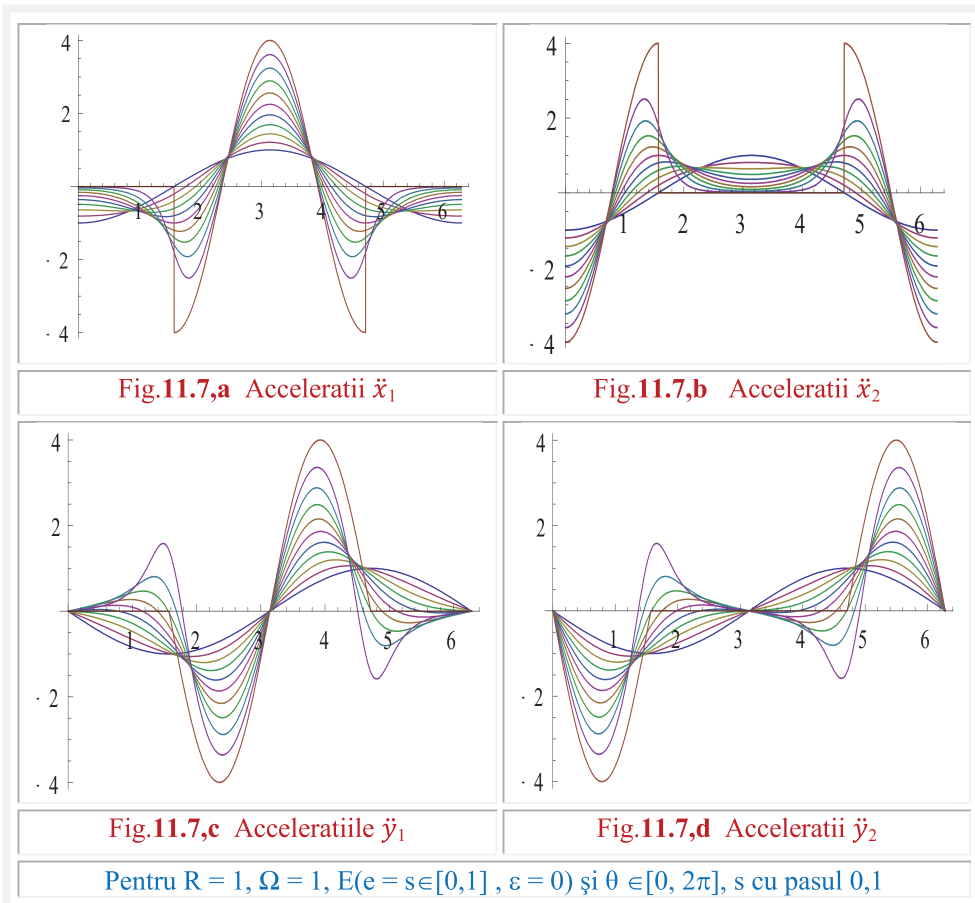


Fig.**11.7,a** Acceleratii $\ddot{x}_1$ | Fig.**11.7,b** Acceleratii $\ddot{x}_2$

Fig.**11.7,c** Acceleratiile $\ddot{y}_1$ | Fig.**11.7,d** Acceleratii $\ddot{y}_2$

Pentru R = 1, Ω = 1, E(e = s∈[0,1] , ε = 0) şi θ ∈[0, 2π], s cu pasul 0,1

Unghiurile $\psi_{1,2}$ pe care vectorii accelerațiilor $\overrightarrow{a_{1,2}}$, aplicați în $M_{1,2,}$ îl fac cu direcțiile radiale centrice, sau, mai precis, cu direcțiile negative ale vectorilor de poziție ($-\overrightarrow{\dot{R}_{1,2}}$) din O ale punctelor $M_{1,2}$, sunt date de raportul componentelor accelerațiilor; cea tangentă la cerc sau accelerația centrifugă $\mathbf{a\tau_{1,2}}$ și cea normală la cerc, numită accelerație centripetă $\mathbf{a\eta_{1,2}}$, adică

(11.21) $$\psi_{1,2} = \arctan\frac{a\tau_{1,2}}{a\eta_{1,2}} = arctan\frac{\epsilon_{1,2}}{\omega_{1,2}^2} = arctan\frac{s(1-s^2)\sin(\theta-\varepsilon)}{del_{1,2}\theta.rex_{1,2}^2\theta}$$

11.4 SISTEMUL FUNDAMENTAL DE SOLUŢII

Fie funcţiile (11.3) $x_{1,2}$, $y_{1,2}$: $\mathbb{R} \Longrightarrow [1,1]$, modulele vectorilor deplasare (11.7)

(11.22) $$\begin{cases} x_{1,2}(t) = Rcex_{1,2}(\Omega t, E) \\ y_{1,2}(t) = Rsex_{1,2}(\Omega t, E) \end{cases},$$

cu Ω = constant şi de **acelaşi excentru** E(e,ε).

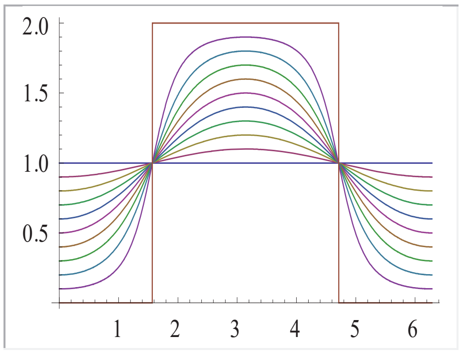


Fig.**11.8,a** Viteza unghiulară $\omega_1(\theta = \Omega t)$

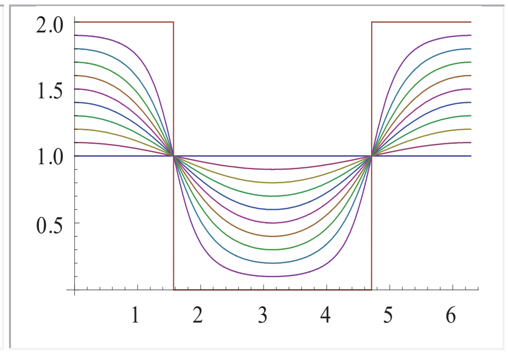


Fig.**11.8,b** Viteza unghiulară $\omega_1(\theta = \Omega t)$

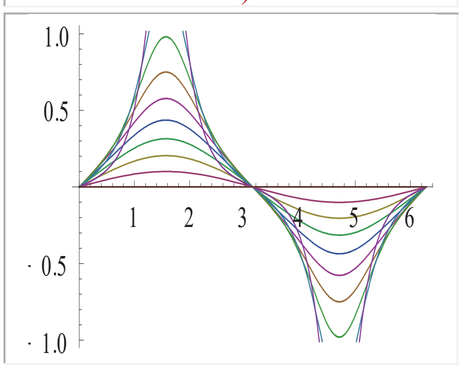


Fig.**11.8,c** Acceleraţiile unghiulare $\ddot{\varepsilon}_1$ $(\theta = \Omega t)$

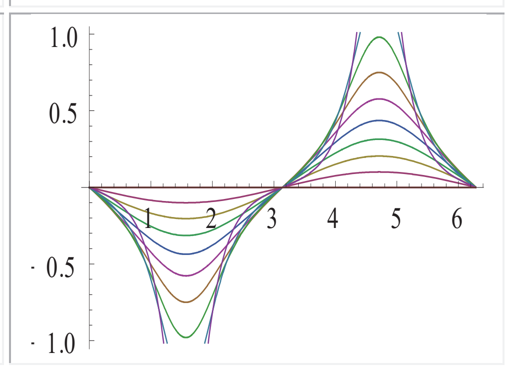


Fig.**11.8,d** Acceleraţii unghiulare $\ddot{\varepsilon}_2$ $(\theta = \Omega t)$

Pentru R = 1, Ω = 1, E(e = s∈[0,1] , ε = 0) şi θ ∈[0, 2π], s cu pasul 0,1

Ca ele, şi combinaţiile lor liniare, de forma

(11.23) $z(t) = C_1.cex_{1,2}\,\Omega t + C_2.sex_{1,2}\,\Omega t$

să fie soluţii ale ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul doi, de forma

(11.24) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0,$ sau

(11.25) $\ddot{z}_{1,2} + p_1.\dot{z}_{1,2} + p_2.z_{1,2} = 0,$

cu coeficienţii variabili $p_1(t)$ şi $p_2(t)$, este necesar ca matricea lui **H. Wronski**, sau wronskianul **W** să fie diferit de zero.

Matricea wronskiană este

(11.26) $\mathbf{W} = \begin{vmatrix} x_{1,2}(t) & y_{1,2}(t) \\ \dot{x}_{1,2}(t) & \dot{y}_{1,2}(t) \end{vmatrix} = R^2\Omega dex_{1,2}(\Omega t, E) = \omega_{1,2}(t)$

$W \begin{cases} \neq 0 \rightarrow e^2 < R^2 \\ = 0 \rightarrow e = \pm R \end{cases}$

şi, pentru o excentricitate numerică -1< s <1 , interval în care **FSM-CE** derivată excentrică $dex_{1,2}(\Omega t, E) > 0, \forall\, t \in \mathbb{R}$ este pozitivă şi diferită de zero, adică

(11.27) $dex_{1,2}(\theta = \Omega t, s^2 < 1) = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\theta}} = \frac{\dot{\alpha}}{\Omega} > 0,$

reprezinta condiţia suficientă ca cele două perechi de funcţii să fie liniar independente.

În punctele în care **W** = 0, dar **numai** timp de **o semiperioadă**, pentru că, în semiperioada urmatoare W = 2R.Ω pentru $e = \pm R$, s-a constatat [9] că şi pentru $s^2 = 1$ sau $s = \pm 1$, **FSM-CE** $cex_{1,2}(\theta = \Omega.t, s = \pm 1)$ şi $sex_{1,2}(\theta = \Omega.t, s = \pm 1)$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (11.25), care, în timpul în care **W** = 0, soluţiile sunt identic nule, iar în semiperioada următoare ele sunt $x_{1,2}(t) = R.cex_{1,2}\,\Omega.t = R.\cos 2\,\Omega.t$ şi $y_{1,2}(t) = R.sex_{1,2}\,\Omega.t = R.\sin 2\Omega.t$.

Rezultă că perioda de oscilaţie $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ ramâne aceeaşi în ambele situaţii.

Coeficienţii variabili $p_1(t)$ şi $p_2(t)$ se determina cu relaţiile cunoscute

(11.28) $p_1 = \frac{D_1}{W} = -\frac{x_{1,2}.\ddot{y}_{1,2} - y_{1,2}.\ddot{x}_{1,2}}{x_{1,2}.\dot{y}_{1,2} - y_{1,2}\dot{x}_{1,2}} = -\,\Omega\frac{1}{dex_{1,2}(\theta)}\frac{d(dex_{1,2}\theta)}{d\theta} = -\,\Omega\frac{d(\ln[dex_{1,2}\theta])}{d\theta}$

(11.29) $p_1 = -\,\Omega\frac{1}{dex_{1,2}(\theta)}\frac{d(dex_{1,2}\theta)}{d\theta} = -\frac{1}{.dex_{1,2}(\theta)}\frac{d(dex_{1,2}\theta)}{dt} = -\frac{\epsilon_{1,2}}{\omega_{1,2}}$

(11.30) $p_2 = \frac{D_2}{W} = \frac{\dot{x}_{1,2}\ddot{y}_{1,2} - \dot{y}_{1,2}\ddot{x}_{1,2}}{x_{1,2}.\dot{y}_{1,2} - y_{1,2}\dot{x}_{1,2}} = \Omega^2.dex^2_{1,2}\theta = \omega^2_{1,2} = \left(\frac{d\alpha_{1,2}}{dt}\right)^2 = \dot{\alpha}^2_{1,2},$

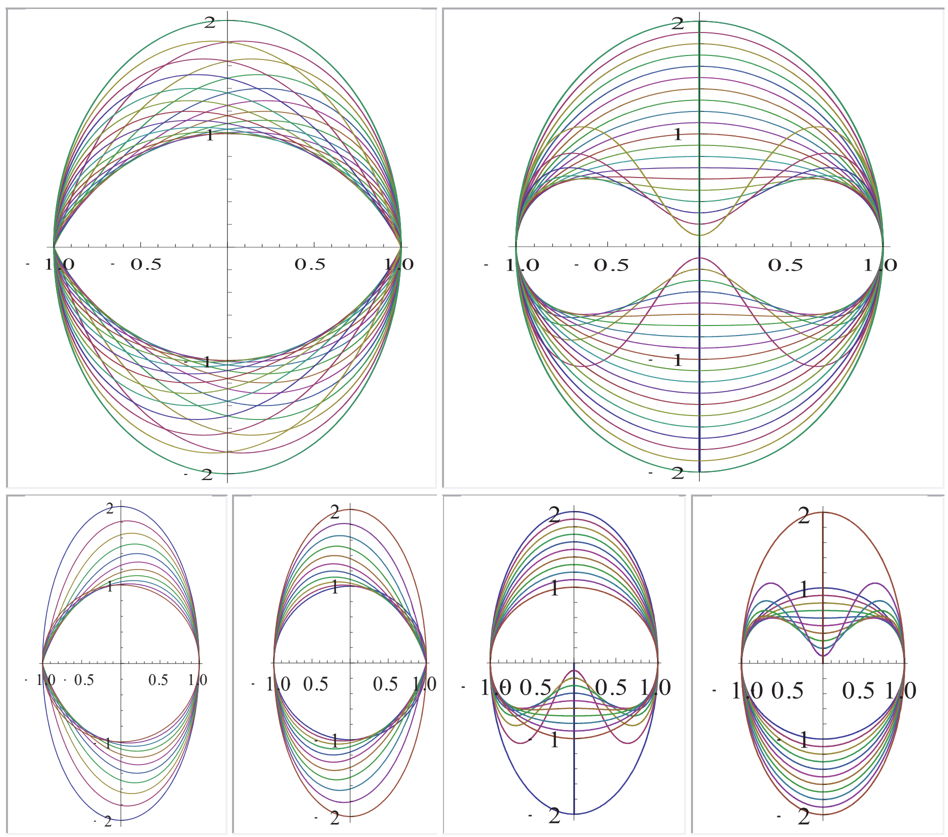
în care, determinanţii D_1 şi D_2 sunt

(11.31) $D_1 = -\begin{vmatrix} x_{1,2} & y_{1,2} \\ \ddot{x}_{1,2} & \ddot{y}_{1,2} \end{vmatrix} = -(x_{1,2}.\ddot{y}_{1,2} - y_{1,2}.\ddot{x}_{1,2}) = -R^2\Omega^2\, dex_{1,2}\theta$ şi

(11.32) $D_2 = +\begin{vmatrix} \dot{x}_{1,2} & \dot{y}_{1,2} \\ \ddot{x}_{1,2} & \ddot{y}_{1,2} \end{vmatrix} = \dot{x}_{1,2}\ddot{y}_{1,2} - \dot{y}_{1,2}\ddot{x}_{1,2} = R^2\Omega^3 dex^3_{1,2}$

În modurile de tratare clasice, din literatura matematică, se exclude cazul în care wronskianul **W = 0**, caz în care conicele degenerează în două drepte ce trec prin origine, pentru care se anulează numitorul din expresiile (11.22) şi (11.23) ale lui p_1 şi

p_2. Ceea ce nu este şi cazul de faţă, care, dimpotrivă, scoate în relief situaţii surprinzător de importante.



s∈[-1,0]	s∈[0,+1]	s∈[-1,0]	s∈[0,+1]

Fig. 11.9,a Traiectorii în planul fazelor pentru $C_1 = 1$ şi $C_2 = 0$ în stânga şi $C_1 = 0$ şi $C_2 = 0$ în dreapta.
cu $\Omega = 1$, R = A = 1, → e = s → E ≡ S (s, ε) şi ε = 0

Pentru **W** → 0, p_1 şi p_2 → ∞, cazul a două drepte ce trec prin origine, corespunde situaţiei **e** = ± R sau **s = ±1**, în care, aşa cum va rezulta şi din grafice (**Fig. 11.12**), în special în reprezentările din **3D**, în mod **surprinzător**, caracteristicele elastice statice (**CES**) ale **SOE** ***sunt din nou liniare***, ca şi pentru **e = s = 0** !

Prin urmare, SOE admite **trei sisteme liniare**: pentru **e = 0**, caz evident, întrucât SOE degenerează în sisteme liniare, centrice, iar **e = + R şi e = – R**, ***constitue surpriza SOE.***

Întroducând expresiile lui p_1 şi p_2 în (11.19) se obţine expresia finală, deosebit de simplă a ecuaţiei diferenţiale a **SOE**

$$\boxed{\ddot{z}_{1,2} - \frac{\epsilon_{1,2}}{\omega_{1,2}}\dot{z}_{1,2} + \omega_{1,2}^2 = 0} \tag{11.33}$$

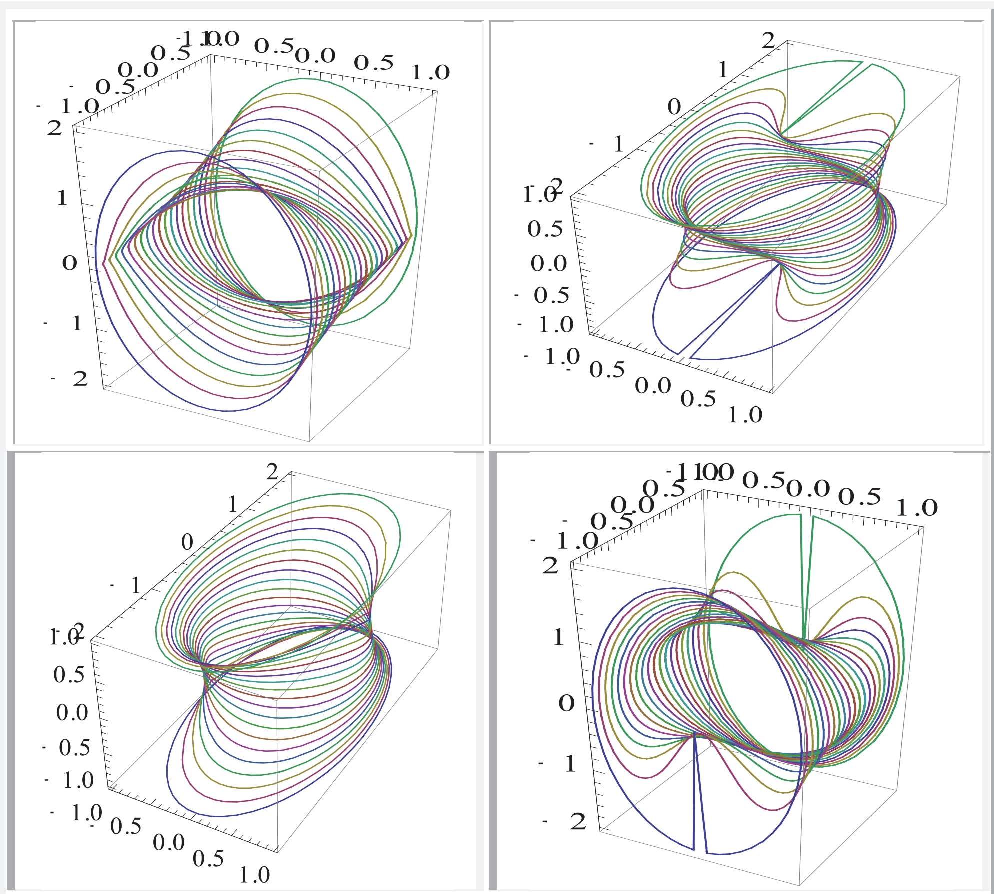
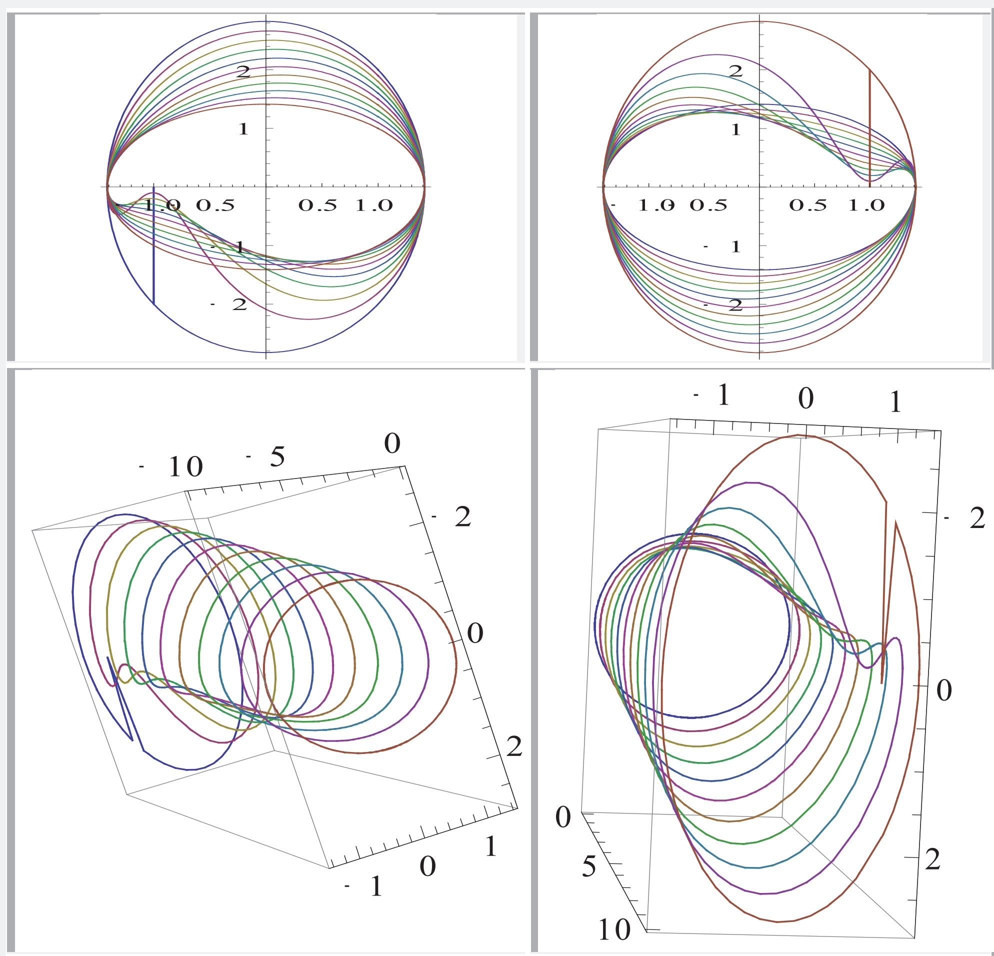


Fig. 11.9,b Traiectorii în planul fazelor pentru C1 = 1 şi C2 = 0 în stânga şi C1 = 0 şi C2 = 0 în dreapta cu $\Omega = 1$, $R = A = 1$, → $e = s$ → $E \equiv S$ (s, ε) şi $\varepsilon = 0$ reprezentate în 3D cu $z = s \in [-1,1]$



s∈[-1, 0] s∈[0, +1]

Fig. 11.10 Traiectorii în planul fazelor pentru C_1 = 1 şi C_2 = 1 în **2D** şi în **3 D**

Întroducând, pe rând, deplasările $x_{1,2} = C_1.cex_{1,2}\theta$ şi apoi pe $y = C_2.sex_{1,2}\theta$, în oricare dintre expresiile ecuaţiei diferenţiale, ea devine identic nulă, ceea ce arată că acestea (deplasarile) sunt soluţii / integrale ale ecuaţiie diferenţiale. Pentru că şi wronskianul **W** $\neq 0$ ($W \geq 0$, pentru e $\in[-1, 1]$) rezultă că şi combinaţiile liniare ale acestora (11.23) sunt integrale / soluţii ale ecuaţiei diferenţiale a **SOE**.

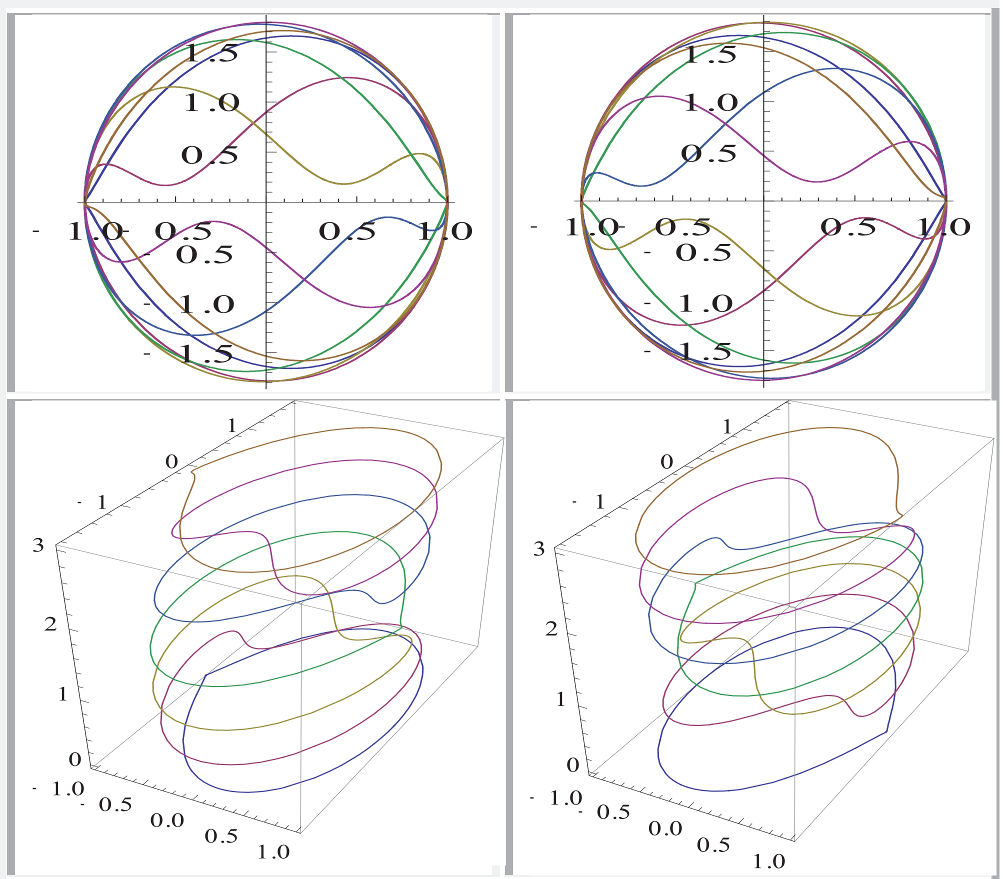
Curbele integrale din planul fazelor sunt reprezentate atât separat (**Fig. 11.9** a şi b), pentru $C_1 = 1$ $C_2 = 0$ → $z = cex\theta$ şi $C_1= 0$, $C_2 = 1$ → $z = sex\theta$, cât şi pentru C_1 =

$C_2 = 1$, adică, pentru z = cexθ + sex θ (**Fig. 11.10**), atât în plan (**2D**) cât şi în spaţiu**3D**. Ele pot fi reprezentate, fară dificultate, pentru oricare alte valori ale constantelor C_1 şi C_2.

Pentru un excentru **E(e, ε)** turnant în jurul originii O, adica e = constant şi ε ∈ [0, 2π], curbele integrale din planul fazelor sunt prezentate în **figura 11.11**.

Ecuaţiile parametrice ale curbelor integrale din planul fazelor sunt

$$(11.34) \qquad M_{1,2} \begin{cases} X_{1,2} = C_1 cex_{1,2}\theta + C_2 sex_{1,2}\theta \\ Y_{1,2} = \dot{X}_{1,2} = -\, dex_{1,2}\theta\,(C_1 . sex_{1,2}\theta + C_2 cex_{1,2}\theta \end{cases}$$



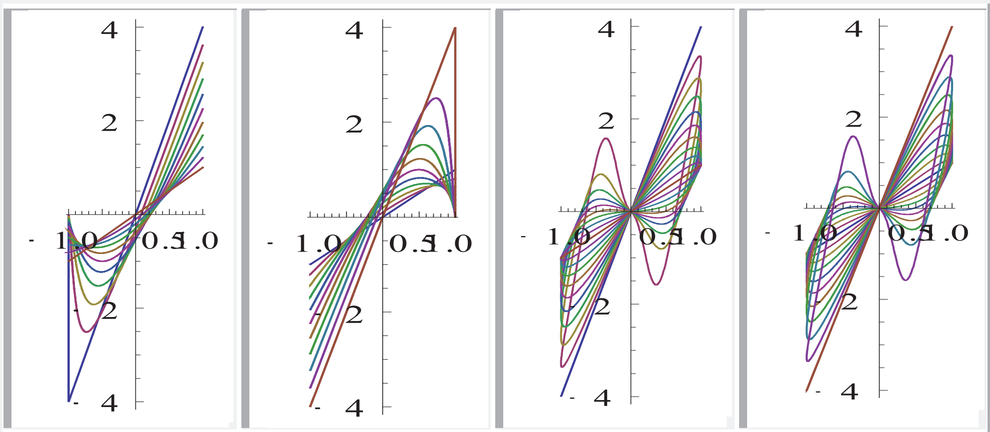
s = -0,8 s = + 0,8

Fig. 11.11 Traiectorii în planul fazelor pentru un excentru E ≡ S (±0,8; ε), turnant în jurul originii O(0,0), s = ± 0,8 = constant şi ε ∈ [0, 2π], pentru $C_1 = 1$ şi $C_2 = 0$

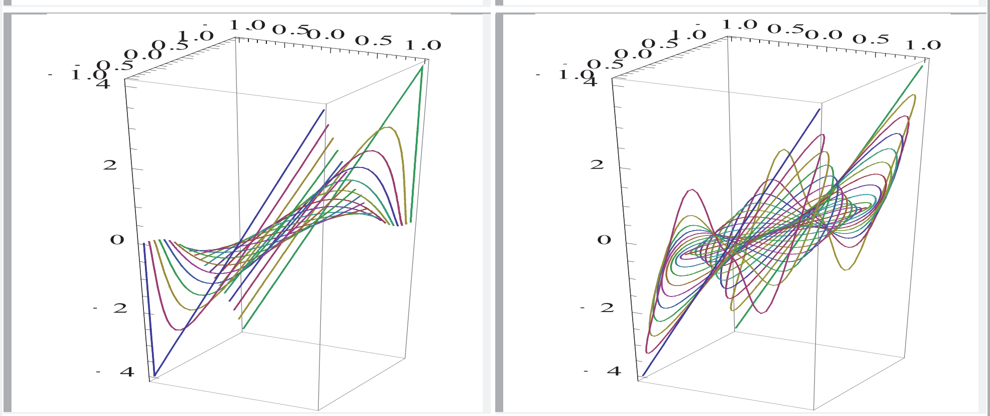
Au fost reprezentate, în figurile anterioare, doar primele determinări, principale, de indice 1, ale **FSM-CE**.

Dacă se consideră masa **m** de oscilaţie a **SOE** egală cu unitatea de masă (m = 1), atunci forţa de accelaraţie a **SOE** este egala cu acceleraţia masei.

(11.35) $F_{acc} = m.a = 1.a = \ddot{z}$



s∈[-1, 0]	s∈[0, +1]	s∈[-1, 0]	s∈[0, +1]
pentru $C_1 = 1$ şi $C_2 = 0 \rightarrow z = \text{cex}\theta$		pentru $C_1 = 1$ şi $C_2 = 0 \rightarrow z = \text{sex}\theta$	



$ax_{1,2}$ ($x_{1,2}$) sau $C_1 = 1$ şi $C_2 = 0$, s ∈[-1, +1]	$ay_{1,2}$($y_{1,2}$) sau $C_1 = 0$ şi $C_2 = 1$, s ∈[-1, +1]

Fig. 11.12 Forţele de acceleraţie, cu semn schimbat, în funcţie de deplasare sau **forţele elastice** reprezentate în **2D** şi în **3D,** reprezentând, totodată şi **(CES)**

11.5 FORMA CANONICĂ A ECUAŢIEI DIFERENŢIALE A SOE

Ecuaţia diferenţială (11.25) a **SOE**, în care $p_1=0$, poate fi adusă la forma canonică,

(11.36) $\frac{d^2z}{d\tau^2} + k(\tau).z = 0$, printr-o schimbare de parametru $\tau = \tau(t)$, în care $\frac{1}{k(\tau)}$ este curbura centroafină şi **s** este arcul centroafin.

Punând condiţia $p_1=0$ în ecuaţia (11.36) rezultă [**Mihaileanu, N.**, GEOMETRIE ANALITICĂ, PROIECTIVĂ şi DIFERENŢIALĂ. Complemente, EDP, Buc.,1972, pag. 255…268]

(11.37) $\tau = a\int e^{-\int p_1}.dt + b = a\frac{\alpha}{\Omega} + b$, a şi b fiind constante.

Pentru a = Ω şi b = 0, rezultă

(11.38) $\tau = \alpha = \int \omega.dt$ şi prima derivată este

(11.39) $\dot{\tau} = \frac{d\tau}{dt} = \Omega.dex\theta = \omega$, iar a doua derivată este

(11.40) $\ddot{\tau} = \frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \epsilon.$

Deoarece cosα = **cexθ** şi sinα = **sexθ**, derivatele lui X şi Y, în funcţie de noul parametru τ = α, sunt

(11.41) $\begin{cases} X' = -\sin\alpha, \\ X'' = -\cos\alpha \\ Y' = \cos\alpha, \\ Y'' = -\sin\alpha \end{cases}$

Funcţiile necunoscute p_1 şi p_2 sunt acum

(11.42) $p_1 = 0$ şi $p_2 = \omega^2$, astfel că ecuaţia (11.36) devine

(11.43) $\frac{d^2Z}{d\alpha^2} + \omega^2.Z = 0.$

Traiectoriile, în planul fazelor, sunt acum

(11.44) $\mathbf{M}_x \begin{cases} X_x = cos\alpha_{1,2} \\ Y_x = -sin\alpha_{1,2} \end{cases}$ şi $\mathbf{M}_y \begin{cases} X_y = sin\alpha_{1,2} \\ Y_y = cos\alpha_{1,2} \end{cases}$, iar caracteristicile forţă – deformaţie / deplasare sau **CES** au expresiile, pentru **m = 1**

(11.45) $\mathbf{P}_x \begin{cases} X_x = cos\alpha_{1,2} \\ Y_x = \omega^2.cos\alpha_{1,2} \end{cases}$ şi $\mathbf{P}_y \begin{cases} X_y = \sin\alpha_{1,2} \\ Y_y = \omega^2.\sin\alpha_{1,2} \end{cases}$, în care indicele x se referă la proiecţia **mişcarii circulare excentrice** (**MCE**) pe axa x şi indicele y la proiecţia mişcării pe axa y.

Aceste mărimi corespund deplasării, vitezei şi acceleraţiei de vibraţie pe axa X şi, respectiv, Y, ca urmare a proiecţiei mişcării unui punct, de masă m = 1, ce se roteşte pe cercul de rază R = 1, cu viteza unghiulara variabila $\omega_{1,2}$, în jurul centrului O(0,0), obţinută prin rotirea, în jurul excentrului **E(e,ε)** a dreptei generatoare $\mathbf{d} = \mathbf{d}^+ \cup \mathbf{d}^-$ cu o viteză unghiulară constantă Ω.

Un program, de reprezentare a acestor mărimi de vibraţie, a fost realizat şi prezentat în lucrarea [**Preda Horea**, **REPREZENTAREA GRAFICĂ A TRAIECTORIILOR DE FAZĂ ALE VIBRAŢIILOR NELINIARE CU SOLUŢII ÎN FUNCŢII (SM) EXCENTRICE**, Com. VI-a Conf. Nat. Vibr. în CM, Timişoara, 1993].

Dacă, în integrala generală (11.23), se notează

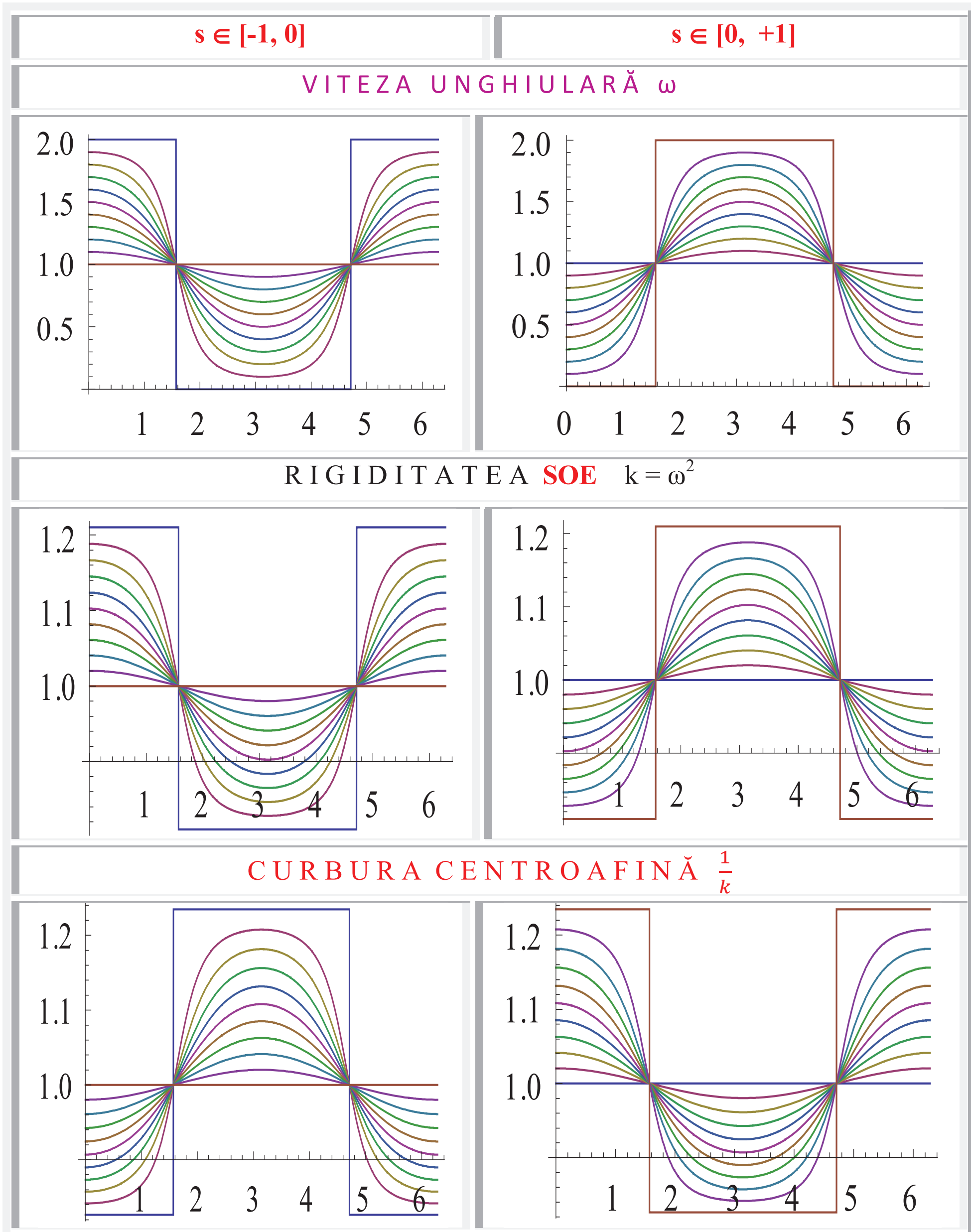


Fig. 11.13 Viteza unghiulară $\omega(\theta)$, rigiditatea k şi curbura centroafină $\frac{1}{k^2}$
ca funcţii de variabila excentrică θ

(11.46) $\tan\varepsilon \equiv \mathrm{tg}\varepsilon = \frac{C_2}{C_1} \rightarrow C = \frac{C_1}{\cos\varepsilon}$, rezultă (11.23) de forma

(11.47) $z(t) = C.\cos(\alpha - \varepsilon) = C.\mathrm{cex}(\theta - \varepsilon) = C.\mathrm{cex}\,[\theta, E(e,\varepsilon)]$.

Se constată, în concluzie, fără dificultate, că pentru **e = s** = 0, se obţin vibraţii liniare. De unde se deduce că sistemul liniar este conţinut în **SOE** şi este un caz particular, de excentricitate nulă, al **sistemului oscilaţiilor excentrice** (**SOE**).

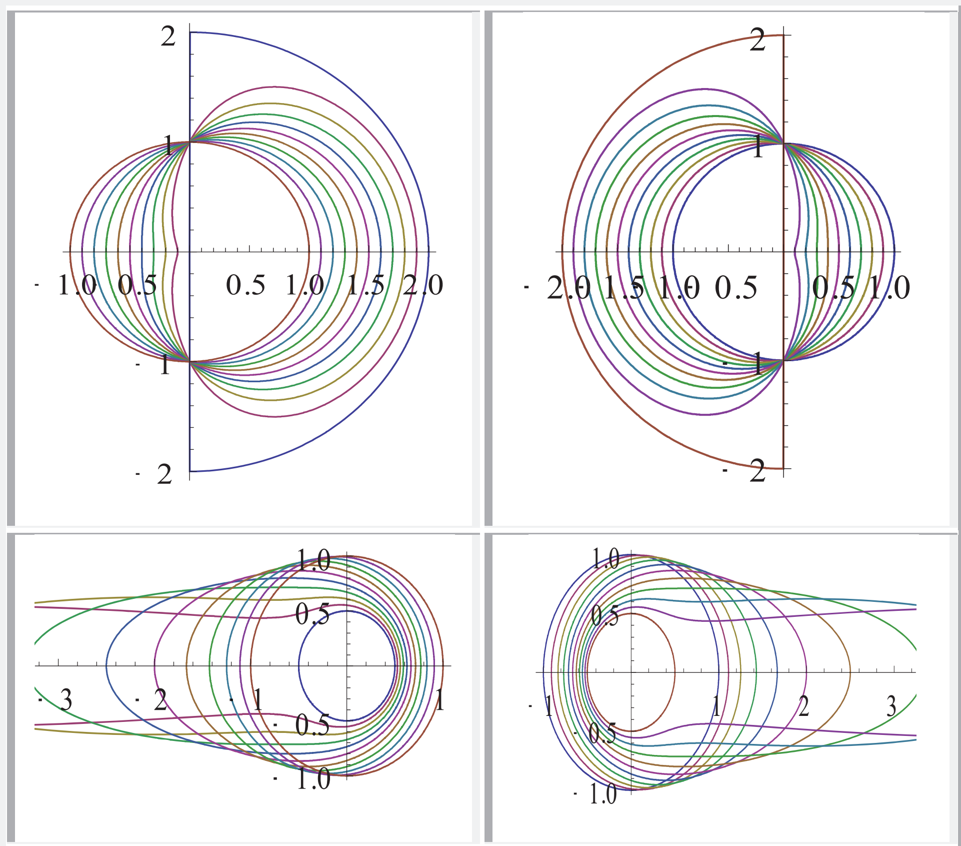


Fig. 11.14 Comparaţie între vitezele unghiulare ca funcţii de variabila excentrică θ (**sus** ↑) şi variabila centrică **α** (**jos** ▼) pentru un excentru numeric **s** cuprins în domeniile **s ∈ [-1, 0]** **stanga** ◄ **şi s ∈ [0, +1] dreapta** ►

Din toate diagramele prezentate în **figurile 11.13**, **11.14** şi **11.15** rezultă aceleaşi concluzii. Şi anume, că pentru **e** = R sau **s** = 1, mişcarea este circulară uniformă, sistemul vibrant este liniar, rigiditatea sistemului este, evident, constantă şi pulsaţia proprie este aceeaşi cu viteza unghiulară, în toate punctele de pe cerc, adică $\omega = \Omega = 1$, aşa cum s-a considerat pentru simplificarea reprezentărilor.

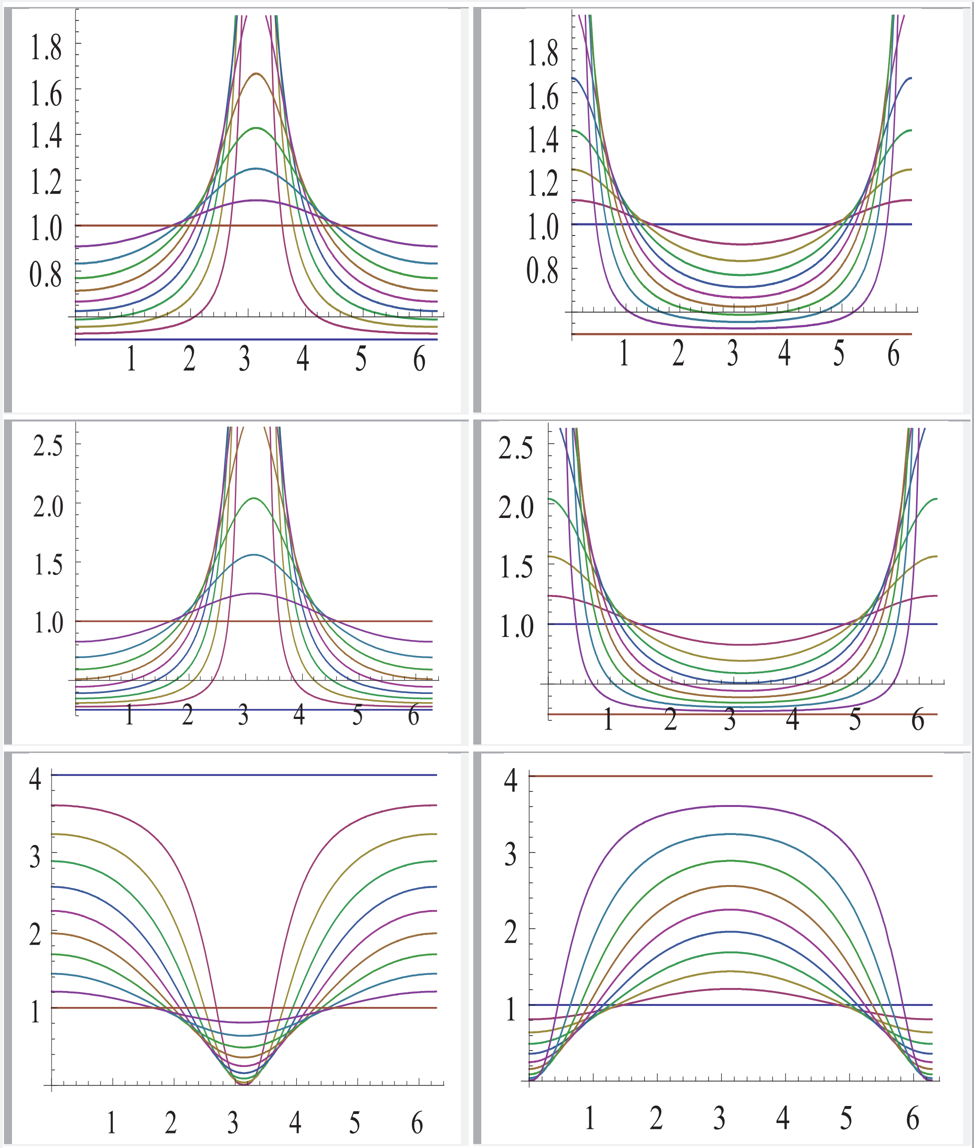


Fig. 11.15 Viteza unghiulara $\omega(\boldsymbol{\alpha})$, rigiditatea $k(\alpha)$ şi curbura centroafină $\frac{1}{k^2}$ ca funcţii de variabila centrică $\boldsymbol{\alpha}$

Rigiditatea sistemului, sau **CES**, este liniară şi curbura centroafină este constantă şi egală cu raza de curbură, adică cu R = 1. Rezultă că şi arcul s = α.

11.6 SISTEME TEHNOLOGICE ELASTICE (STE)

Ansamblul elementelor şi al relaţiilor unitate existente între ele, afară de relaţia conform căreia elementele aparţin sistemului, formează un **sistem**.

Sistemul tehnic, destinat efectuării unor operaţii tehnologice, în condiţii tehnico-economice impuse, este un **sistem tehnologic**. El este componenta fizică (hard) a **sistemului de producţie**, care cuprinde totalitatea relaţiilor unitare existente între diferitele sisteme tehnologice componente. Cealaltă componentă este **procesul** de producţie sau softul sistemului tehnologic.

Condiţia impusă sistemelor de producţie este de-a fi **raţionale**, adică, de-a se realiza cu **minimum de efort uman** (fizic şi intelectual) produse de calitate înaltă (superioară), la un preţ de cost cât mai scăzut. Această condiţie este realizată dacă toate procesele şi fiecare sistem tehnologic component în parte sunt raţionale.

Sistemul tehnologic reprezintă ansamblul elementelor fizice componente, ca, maşini de lucru, dispozitive, aparate, scule, semifabricate, piese ş.a. şi al relaţiilor unitare existente între acestea (procese de lucru, fenomene în interacţiunea lor).

Dintre componentele fizice ale sistemului tehnologic o parte, prin care se inchide fluxul de forţe şi energie, cauzând deformaţii ce influenţează asupra preciziei de prelucrare, alcătuiesc **sistemul tehnologic elastic,** notat prescurtat **STE.**

Dispozitivele de lucru sunt acelea care întră în componenţa **STE**; cele de **alimentare automată, interconectare** şi de **control** sunt, în general, exterioare **STE**.

În componenţa **STE**, cunoscut în literatura de specialitate şi ca sistem elastic **MDPS** – **maşină, dispozitiv, piesă- sculă -** pot fi incluse, pe lângă dispozitivele amintite şi cele de instalare sau numai de prindere a piesei şi a sculei, dispozitivele însoţitoare, dispozitivele de copiere ş.a. prin care se inchide fluxul forţelor de aşchiere, provocând deformarea lor şi, prin aceasta, modificând poziţia relativă a sculei în raport cu piesa şi provocând, implicit, imprecizii de prelucrare.

STE împreună cu procesele de producţie, în interacţiunea lor, formează **sistemul tehnologic dinamic (STD).**

Procesele de lucru sunt reprezentate prin procesele de **instalare** relativă a sculei în raport cu piesa (cuprinzând acţiunile de **localizare, orientare, reglare** şi de menţinere a acestora prin **fixare),** din procesele de **prelucrare dimensional**ă ca cele de **formare** (turnare, presare, forjare în matriţe, sinterizare), **deformare** la cald sau la rece (îndoire, ambutisare, sertizare, mandrinare ş.a), de **dislocare** (decupare, aşchiere, eroziune, netezire), de **agregare** (asamblare, sudare, lipire), precum şi din procesele care au loc în motoarele de acţionare, insoţite de fenomene electromagnetice, aero- sau hidrodinamice ş.a.

Acţiunea proceselor de lucru asupra **STE** se manifestă, în general, sub forma unor solicitări mecanice (forţe sau momente) sau termice, având drept rezultat deformarea sistemului şi deplasarea relativă a elementelor componente, care, la rândul lor, provoacă o acţiune inversă a **STE** asupra proceselor de lucru.

Rezultă că **sistemul tehnologic dinamic** este un sistem închis, complex şi zonele în care se desfaşoară diferitele procese de lucru sunt separate de elementele **STE**. Acestea sunt particularităţiile sistemului tehnologic dinamic (**STD**).

Acţiunile proceselor de lucru asupra **STE** şi acţiunile inverse (consonanţa sau reacţiunea), ale acestora asupra proceselor de lucru, sunt denumite **legături**.

Lanţul care cuprinde elementele şi legaturile **STD** reprezintă **circuitul** legăturilor, care poate fi închis sau deschis. Marimea fizică care determină acţiunea asupra elementelor şi/sau sistemului este denumită marime de **întrare**, iar rezultatul acţiunii este denumit marime de **ieşire**.

11.6.1 RIGIDITATEA SISTEMELOR TEHNOLOGICE ELASTICE

Dacă constanta elastică a **SOE**, sau rigiditatea ca funcţie de z, se notează k(z), deoarece, pentru e ≠ 0 are o caracteristică elastică statică (**CES**) neliniară, atunci forţa elastică a **SOE** va fi dată de relaţia

(11.48) $F_{el} = k(z).\, z$

Se ştie că, în lipsa unor forţe de amortizare în **SOE** (ς, D → 0), singurele două forţe existente în sistem, forţa elestică şi forţa de acceleraţie, sunt în permanenţă egale şi de semne opuse. Concluzia rezultată din condiţia de echilibru a singurelor două forţe din sistem, adică

(11.49) $F_{el} = -\, F_{acc}, \rightarrow k(z).z = a = \ddot{z}$

Forţele elastice, ca forţe de acceleraţie cu semn schimbat, sunt reprezentate grafic în 2 D şi în 3 D în **figura 11.12**. Ele reprezintă, totodată, în acest caz, şi caracteristicile elastice statice **CES,** sau caracteristicile **forţă-deformaţie**.

CES se măsoară, practic, prin aplicarea, peste un dinamometru, a unor forţe progresive, în trepte, cu creştere foarte lentă şi cu pauze de stabilizare a sistemului, astfel încât viteza de creştere a forţei să poată fi considerată aproape nulă, asupra elementului elastic şi măsurarea deplasărilor şi / sau a deformaţiilor acestuia.

Forţa se aplică până la o valoare maximă de unde începe modificarea în sens invers, adică, scăderea forţelor până la valoarea zero indicată de dinamometru.

În cazul unor sisteme tehnice complexe, ca maşini-unelte, dispozitive ş.a., de exemplu, datorită forţelor de fixare ale elementelor componente ale sistemului, deformaţiile şi deplasările relative ale elemenetelor se produc simultan.

Din cauza forţelor de frecare, existente între elementele sistemului, cauzate de forţele de strângere / fixare ale componentelor, la începerea încărcării cu forţe a sistemului, nu apar deformaţii / deplasări, pană în momentul în care forţele de frecare şi forţele de frecare interne ale materialului, forţe interne proprii unui singur element elastic, nu sunt depăşite. Altfel spus, forţa de încarcare a sistemului creşte şi deplasarile

/ deformaţiile înregistrate de comparatoarele de măsurare ale lor ramân cu indicatoarele imobile, adică nu indică deplasări.

Dacă treptele de creştere a forţei sunt foarte mici (fine) atunci se pot determina, experimental, forţele de frecare existente din sistem. Ele sunt egale cu forţele maxime înregistrate în momentul apariţiei deplasărilor / deformaţiilor.

În continuare există trei posibilităţi.

Rigiditatea **SOE** va fi data de

(11.50) $$k(z) = \frac{\ddot{z}}{z} \text{ [N/mm]}$$

Dată fiind importanţa rigidităţii, în comportarea dinamică a diverselor sisteme tehnice, în continuare se va aprofunda acest important subiect.

Cu mulţi ani în urmă, ocupandu-ne de rigiditatea şi, în general, de comportarea dinamică a diverselor maşini-unelte, fabricate în România şi exportate, am constatat cu stupoare că atât normele naţionale cât şi cele internaţionale, cu privire la determinarea experimentală a **rigidităţii statice**, ***sunt complet eronate / false***. Ele cerând încărcarea cu forţe, a strungului, de exemplu, pe un circuit al forţelor invers celui real / normal, plecând de la cuţitul de strung spre motorul electric de antrenare şi nu invers, cum este situaţia reală.

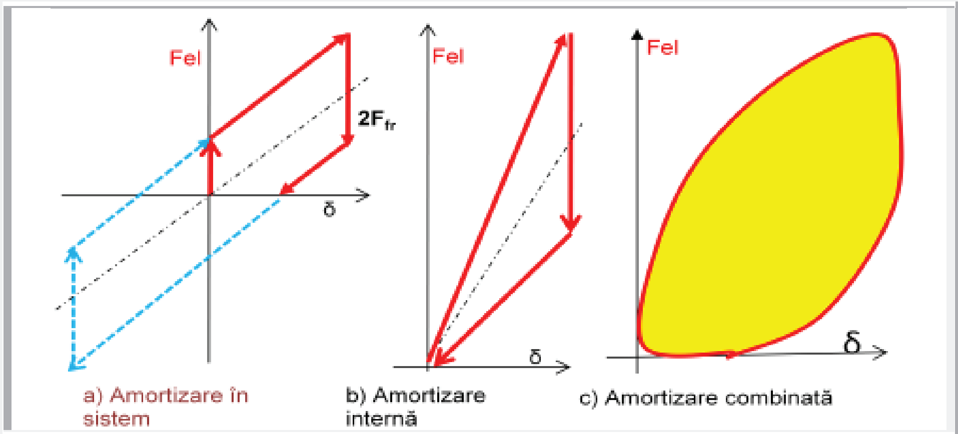


Fig. 11.13 Caracteristici elastice statice sau diagrame forţă-deformaţie (**CES**)
a) - cu amortizare columbiană în sistem, **b**)-cu amortizare interna a materialului şi **c**) cu amortizare reală / combinată

Normele prevedeau ca forţele de aşchiere să fie simulate prin deplasarea vârfului cuţitului, cu sania transversală a strungului, cuţit prevăzut cu o bilă care solicită un dinamometru. Forţele reale puteau fi create mult mai autentic prin rotirea manuală, sau cu un dispozitiv simplu, a rotorului motorului electric, sau prin tragerea curelelor de transmisie, motor, evident, deconectat de la reţea şi, printr-o suprafaţă excentrică a unui semifabricat / piesă, centrat în arborele principal al strungului, această suprafaţă acţionează cu forţe asupra dinamometrului, proporţional cu momentul existent la arborele principal al strungului. In acest fel, forţele se propagă, pe de o parte, prin acelaşi lanţ de mecanisme / piese, solicitand toate piesele sistemului ca şi în cazul real şi, în al doilea rând, ***sensul de propagare al forţelor*** coincide cu cel real.

S-a constatat că rigiditatea este în stransă şi directă legatură cu funcţia / raportul de transmitere al forţelor rezultante i_R prin sistem, raport care diferă sensibil în cele două sensuri posibile de deplasare ale elementelor, aşa cum s-a demonstrat în Cap. 8, pentru deplasarea în sensul strângerii **S** (i_{RS}) şi în sensul desfacerii **D** (i_{RD}).

Dacă, în cazul unor sisteme simple, cu puţine elemente, diferenţele sunt sensibile dar nu exagerat de mari, în cazul sistemelor tehnologice, deosebit de complexe, caracteristicile, forţă-deplasare / deformaţie sunt atât de diferite în cele două sensuri, încât caracteristicile forţă-deformaţie nici măcar nu se situează în acelaşi cadran; într-un caz fiind în cadranul I, iar în celălalt în cadranul II.

11.7 CARACTERISTICA ELASTICĂ STATICĂ (CES) a STE

Dacă mărimea de întrare a unui element sau sistem este forţa **F** şi mărimea de ieşire este deformaţia sau deplasarea **x**, atunci caracteristica elementului poartă denumirea de **caracteristica elastica statica (CAS)** sau **dinamic**ă (**CAD**), după cum forţa de la întrare este aplicată static, respectiv, dinamic.

Caracteristica elastică poate fi **static**ă sau **dinamic**ă, după cum exprimă dependenţa unor mărimi constante sau variabile în timp. Pentru determinarea **CA statice (CES),** valoarea mărimii de întrare trebuie modificată, în limitele domeniului de interes a **CES**.

Prin urmare, şi **CAS** se obţine prin varierea mărimii de întrare, dar viteza de variaţie este atât de mică, în trepte şi cu pauze suficient de mari, încât forţele de acceleraţie şi cele de amortizare să fie practic neglijabile, în raport cu forţele elastice şi de frecare.

Aici apare o mare problemă, deoarece, la viteze foarte mici, forţele de frecare (şi, deci, şi de amortizare columbiană) cresc foarte mult (se pot dubla), întrucât şi coeficientul de frecare static creşte foarte mult, faţă de cel cinematic. O soluţie practică consistă în creşterea cu viteză relativ ridicată a forţelor de întrare, pe fiecare treaptă, urmată de o pauză suficient de mare pentru stabilizarea sistemului.

Ideal ar fi ca aceste **CAS** sa fie determinate pentru fiecare element în parte, izolate faţă de celelalte componente ale sistemului, astfel ca forţele de frecare dintre elemente, interioare sistemului, care reprezinta amortizarile sistemului, să nu existe.

Apoi, se determina **CAS** a sitemului**,** pe baza **CAS** ale elementelor componente, după metodologia de însumare a **CES**, legate în serie, paralel sau mixt, ce va fi prezentata în continuare.

Considerând că mărime de întrare o forţă de excitaţie pulsatorie $\mathbf{F_e}$ de pulsaţie $\boldsymbol{\omega}$ = **2πf,** în care f este frecventa $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}}$ şi **T** perioada de oscilaţie, iar **F** este modul forţei F_e exprimată de relaţia

(11.51) $F_e = F.\ \sin \omega t$

Viteza de variaţie a acestei forţe este

(11.52) $\dot{F_e} = \frac{dF_e}{dt} = F.\omega.cos\omega t$

şi devine nulă pentru ω = 0 când $F_e \in [-F, +F] \neq 0$.

Pentru diferite valori **ω,** se obţin diferite cracteristici dinamice (**CD**) şi, în cazul particular **ω = 0**, se obţine, aşa cum s-a arătat, **CES**.

Prin întreruperea unei legături, dintre elementele sistemului, un sistem inchis poate fi transformat într-unul deschis.

Dacă se intrerup două legaturi, atunci se poate separa un element al sistemului, sau mai multe şi studia separat, sub forma dependenţei dintre mărimile sale de întrare şi de ieşire. Această dependenţă se numeşte, aşa cum s-a mai spus, **funcţie de transfer** (**FT**) sau raport de transmitere (**RT**) şi poate fi adimensional, dacă cele două mărimi, întrarea şi ieşirea, sunt de aceeaşi natură. **FT** sunt de **ordinul zero** sau a deplasării, **FT** de **ordinul unu** sau a vitezelor, **FT** de **ordinul doi** sau a acceleraţiilor, **FT** a forţelor, **FT** a momentelor), sau cu dimensiune, dacă cele două mărimi sunt de natură diferită, aşa cum s-a arătat pe larg în Cap.8.

Astfel, dacă marimea de întrare este forţa [F], care solicită un element sau un sistem, şi cea de ieşire este deformaţia sau deplasarea [L], atunci **FT** este denumită şi **caracteristic**ă **elastic**ă (**CA**) a elementului, subsistemului sau a sistemului, în funcţie de caz şi are dimensiunea [F/L], exprimandu-se în N/mm, daN/μm sau alte unităţi.

CES reale sunt mai mult sau mai puţin neliniare. In anumite cazuri / condiţii de aproximare, sau pentru deformaţii foarte mici, ele pot fi considerate liniare.

O **CES** poate fi **tare, liniară** şi **moale** după cum derivata funcţiei

(11.53) $k(x)= F(x) / x$

are semnul lui x, este nulă sau are semn contar lui x.

In **figura 11.14** au fost prezentate câteva **CES**, dintre care : a) tare, b) liniară, c) moale şi d) tare pentru x > 0 şi moale pentru x < 0.

CES mai pote fi **progresiv**ă**, liniar**ă sau **regresiv**ă după cum expresia derivatei

(11.54) $D^2[k(x),x] \equiv d^2k(x) / dx^2$

are semnul lui x, este nulă sau are semn contrar lui x.

Aşa cum se poate demonstra, orice **CES** progresivă este tare, oricare **CES** regresivă este moale, dar reciproca acestei teoreme nu este adevarată. Astfel, de exemplu, **CES** cu asimptotă oblică, reprezentată în **figura 11.15,a** este tare, dar, este progresivă pentru $x \in [0,a)$ şi regresivă pentru $x > x_{1.}$

În **figura 11.15,b** sunt reprezentate două familii de funcţii de acest gen care sunt tari în tot domeniul $x \in [-2, 2]$ dar, în punctele de intersecţie ale curbelor îşi schimbă reciproc caracterul de progresive şi regresive. Ele sunt exprimate de ecuaţiile

(11.55) $F(x) = x.\ aex[\theta = 1, S(s = s_0 \cos 2\theta, \varepsilon)]$, pentru $s_0 \in [\ 0,2; 0,5]$

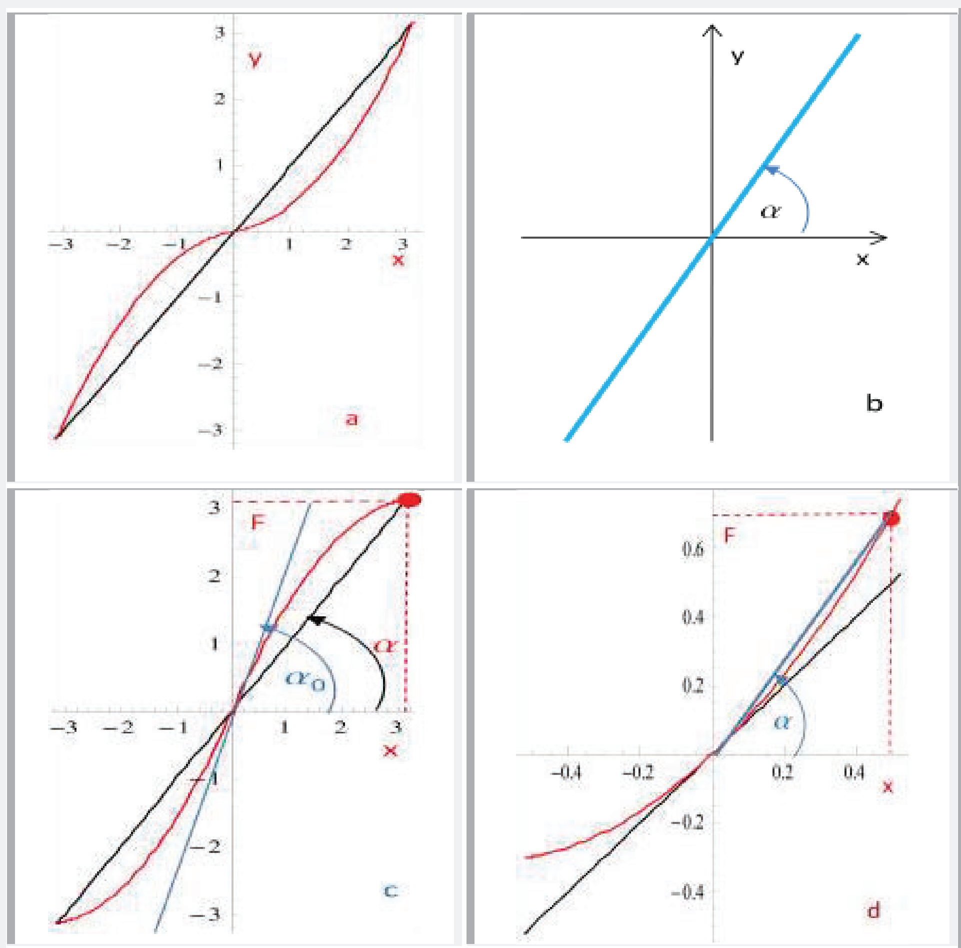


Fig. 11.14 Caracteristici elastice statice (**CES**) :
a. Tare şi progresivă ; b. Liniară, c. Moale şi regresivă, d. Tare şi progresivă, pentru x > 0 şi moale şi regresivă, pentru x < 0

În planul forţă-deplasare / deformaţie **CES** este reprezentată de curba F(x).

Funcţia F(x) poate fi dezvoltata în serie Taylor în jurul originii, sub forma

(11.56) $$F(x) = F'(x).x + F(x)\frac{x^2}{2!} + F'(x)\frac{x^3}{3!} + \ \ldots + F^{(n)}(x)\frac{x^n}{n!} + \ \ldots$$

Dacă **CES** este exprimată de o funcţie impară cu coeficienţii k_i pozitivi, atunci

(11.57) $F(x) = k_1x + k_3x^3 + k_5\ x^5 + \ldots$ea este progresivă si simetrică faţă de origine.

Determinarea expresiei analitice aproximative a unei **CES,** obţinute pe cale experimentală, se poate realiza prin diferite metode sau pe baza expresiilor analitice prezentate în literatură.

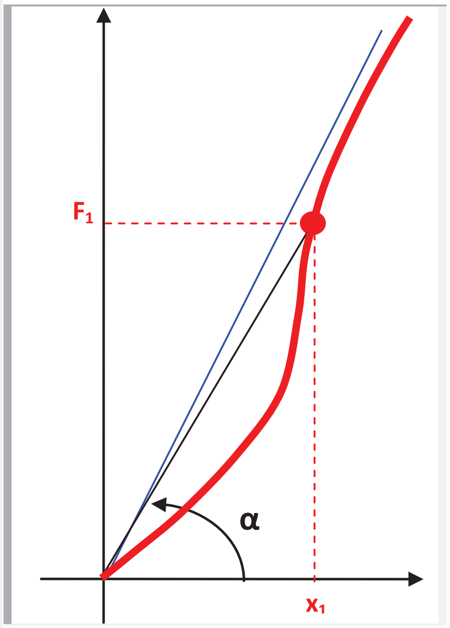


Fig. 11.15,a CES tare şi progresivă pentru $x < x_1$ şi regresivă pentru $x > x_1$

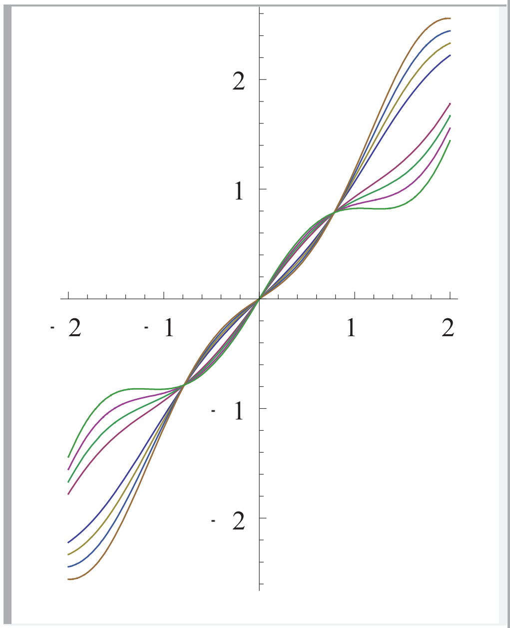


Fig. **11.15,b CES** tare / moale şi progresivă / regresivă pentru $x < \pm 1$ şi regresivă / progresivă pentru $x > \pm 1$

Aceste expresii analitice, depinzând de trei parametri (k, a şi b), pot modela **CES** de toate tipurile. Prima dintre aceste expresii poate fi scrisă sub forma

(11.58) $F(x) = k.x[1+kx^2/(x^2 + a^2)]$,

din care rezultă că pentru orice $x \in \Re$, dacă

- $b > 0$ – **CES** este **tare** şi atunci pentru
- $\text{Abs}[x] < \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ **CES** este progresivă, iar pentru
- $\text{Abs}[x] > \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ **CES** este regresivă şi invers pentru $b < 0$.
- $b = 0$ - **CES** este liniara;
- $b < 0$ – **CES** este **moale**

CES (11.46) admite ca asimptotă oblică dreapta de ecuaţie $y = k\ x\ (1+b)$ care trece prin origine.

O altă expresie analitică a **CES**, existentă în literatură este de forma

(11.59) $F(x) = kx[1+bx^2/(x^2 + a.Abs[x] + a^2)]$, care are avantajul că exprimă **CES** al căror caracter de progresivitate sau de regresivitate se păstrează pentru orice valoare a lui x. Astfel, pentru

- $b > 0$ – **CES** este **progresiv**ă şi implicit **tare ,** iar pentru
- $b < 0$ - **CES** este **regresiv**ă şi imlicit **moale.**

CES admite ca asimptotă oblică dreapta $F = k[(1+b)x \pm a.b]$.

În literatură se pune în evidenţă influenţa tipului **CES** asupra dependenţei perioadei T de oscilaţie de amplitudinea A, demonstrându-se urmatoarea

Teoremă : ***Perioada de oscilaţie T, a unui sistem oscilant conservativ, creşte, rămâne constantă sau scade, odată cu creşterea energiei totale E_0 (sau cu diferenţa elongaţiilor extreme $X_2 – X_1$, care creşte monoton cu E_0), după cum CES este tare, liniară sau moale. Frecventa f, sau pulsaţia (frecvenţa circulară $\omega = 2\pi f$), variază invers proporţional cu perioada***.

11.8 RIGIDITATE LOCALĂ ŞI RIGIDITATE GLOBALĂ

Pentru noţiunea de rigiditate sunt întrebuinţate în literatură [**Harris, E**. şi **Crede, C**., ŞOCURI şi VIBRAŢII, Vol 1..3, Edutura Tehnică, Bucuresti, 1968] şi [**Opitz, H.,** Aufbau und Auslegung hydrostatischer Lager und Fűhrungen und Konstruktive Gesichtspunkte bai der Gestaltung von Spindellagerungen mit Wälzlagern, Bericht űber die VDW- Konstrukteur- Arbeitstagung am Februar 1969] două definiţii, care rezultă din modul diferit de exprimare a constantei elastice k şi anume :

(11.60) 1) $k_G(x) = \frac{F(x)}{x}$, → rigiditatea **globala (G)** şi

(11.61) 2) $k_L(x) = \frac{d(F(x))}{dx}$, → rigiditatea **locala (L),**

în care, F(x) reprezintă forţa elastică şi x deformaţia (arcului) sau deplasarea (masei **m**).

Pentru sisteme cu **CES** liniară

(11.62) $F(x) = k_0.x$ – rezultă

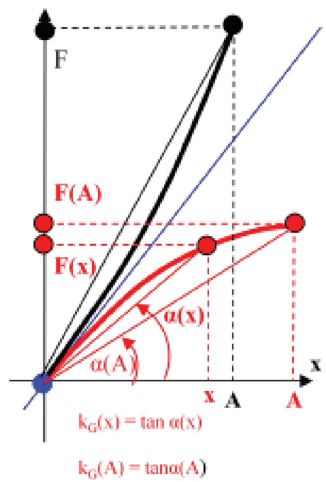
(11.63) $k_G = k_L = k_0$ şi ambele definiţii sunt identice.

Elementele şi sistemele cu **CES** neliniară au o deosebire considerabilă a rigidităţii afirmate după ambele definiţii. Acest lucru este ilustrat în **figura 11.16**, în care, este reprezentată o caracteristică elastica progresivă şi tare şi una regresivă şi moale.

Determinarea deformaţiei reale A, la o încarcare statică a sistemului F(A), este posibilă numai în cazul exprimării constantei elastice sau rigidităţii conform primei definiţii (11.59). Valoarea acestei rigidităţi depinde de poziţia originii O(0,0) pe curba F(x) şi de valoarea x = A a deplasarii globale a sistemului, din care cauză, se propune utilizarea denumirii de **rigiditate global**ă.

Suprapunând peste încărcarea statică F(A) o forţă variabilă F_V, atunci este importantă, pentru calcule, constanta elastică k_L, care exprimă, pentru deplasări mici, valoarea rigidităţii sistemului considerat liniar, în apropierea punctului x, fiind independentă de originea sistemului şi dependentă doar de locul pe curba elastică a punctului considerat. Din această cauză, în lucrarea [**Şelariu,M., STUDIUL VIBRAŢIILOR LIBERE ale UNUI SISTEM CU CARACTERISTICĂ ELASTICĂ STATICĂ NELINIARĂ, CU AJUTORUL SISTEMELOR LINIARE ECHIVALENTE**, Com. II-a Conf. PUPR, Timişoara, 1973, pag.175...186] se propune utilizarea denumirii de **rigiditate locală**.

RIGIDITATEA **GLOBALĂ**	RIGIDITATEA **LOCALĂ**
$\mathbf{K_G(x)} = \dfrac{F(x)}{x} = \mathbf{\tan\varphi(x)}$	$\mathbf{k_L\,(x)} = \dfrac{dF(x)}{dx} = \mathbf{\tan\varphi(x)}$



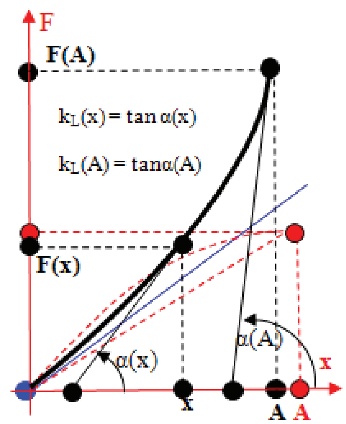


Fig. 11.16 Rigiditate locală şi rigiditate globală

În lucrare, dimensiunile sunt clasificate în dimensiuni de **coordonare**, care indică poziţia unui element geometric (punctul M(A) sau M(x), de exemplu) în raport cu un alt element geometric considerat de bază (originea O (0,0)).

Astfel că, rigiditatea globală este o **dimensiune de coordonare** în timp ce rigiditatea locală reprezinta o **dimensiune de gabarit**, dimensiune extrem de mică în jurul punctului curent M(A) sau M(x) de pe curba F(x), dimensiune care indică marimea unui element geometric, adică, valoarea rigidităţii sistemului în acel punct.

Dacă, într-un sistem elastic neliniar, având **CES** simetrică faţă de origine, masa **m** oscilează cu amplitudinea $x = \pm A$, atunci există un **sistem elastic liniar echivalent (SLE)** a cărui rigiditate **k** este valoarea medie a rigidităţii locale din intervalul $x \in [-A, +A]$, exprimată de relaţia

(11.63) $$k = \frac{1}{A}\int_0^A k_L(x)dx = \frac{1}{A}\int_0^A \frac{d(F(x))}{dx}dx = \frac{F(A)}{A} = k_G$$

Astfel, a rezultat dependenţa dintre rigiditatea globală şi cea locală, exprimată de relaţia

(11.64) $$k_G(A) = \frac{1}{A}\int_0^A k_L(x).dx$$

11.9 SISTEM LINIAR ECHIVALENT (SLE) SISTEMULUI NELINIAR, AVÂND ACELEAŞI AMPLITUDINI ŞI ACCELERAŢII MAXIME

Se consideră un sistem oscilant liber, neamortizat, de masă **m** şi **CES** neliniară, simetrică faţă de originea O – poziţia de echilibru- exprimată de funcţia impară **F(x).**

SLE sistemului neliniar, care are aceeaşi masă **m,** şi **CES** liniară, din condiţia egalităţii acceleraţiilor maxime, corespunzatoare deplasării x = A, rezultă condiţia egalităţii forţelor de acceleraţie maxime.

Din condţia de echilibru a sistemului, sub acţiunea forţei elastice şi a celei de acceleraţie, în oricare moment, rezultă că, pentru oricare deplasare x, forţa de acceleraţie este valoric egală cu cea elastică şi, deci, condiţia de egalitate a forţelor de acceleraţie implică egalitatea forţelor elastice în punctul x = A, unde acestea sunt maxime, ceea ce conduce la

(11.65) $$F(A) = m\,A\,\Omega^2$$

în care, Ω este **pulsatia proprie** a sistemului liniar echivalent (**SLE**), având expresia

(11.66) $$\Omega = \sqrt{\frac{F(A)}{m.A}} = \sqrt{\frac{k_G(A)}{m}}$$

Considerând, de exemplu, o **CES** neliniară, din ecuaţia lui **Duffing**, de forma

(11.67) $$\mathbf{F(x) = k_0x + \mu x^3},$$

care este o **CES** progresivă şi tare pentru $\mu > 0$ şi regresivă şi moale pentru $\mu < 0$, se obţine

(11.67’) $$F(A) = k_0\,A + \mu\,A^3,$$

astfel că rigiditatea globala în x = A este

(11.68) $$k_G = F(A)/A = k_0 + \mu\,A^2$$

şi pulsaţia proprie a **SLE** rezultă

(11.69) $$\Omega = \sqrt{\frac{k_0 + \mu A^2}{m}} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\mu}{m}A^2} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_\mu^2},$$

în care

(11.70) $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}$$

şi reprezintă pulsaţia unui **SLE** având rigiditatea egală cu rigiditatea locală a sistemului neliniar în punctul x= 0, în care tangenta la F(x) are coeficientul unghiular k_0, iar

(11.71) $$\omega_\mu = A\sqrt{\frac{\mu}{2.m}}$$

este **pulsaţia variabilă**, dependentă de termenul neliniar şi de coeficientul μ.
Relaţia (11.57) a fost obţinută în literatură prin metode grafice [**Rădoi, M., Deciu, E., Voiculescu, D**., **ELEMENTE DE VIBRAŢII MECANICE**, Ed. Tehnică, Buc., 1973, §6.6.2] şi prin metoda balanţei energietice [**Marin Rădoi,** §6.3.4].

11.9.1 SISTEM LINIAR ECHIVALENT (SLE) SISTEMELOR NELINIARE (SN) DE ACELEAŞI AMPLITUDINI ŞI VITEZE MAXIME

Considerând acelaşi sistem oscilant liber, de **CES** neliniară F(x), de la paragraful anterior, se cunoaşte că viteza unui astfel de sistem neliniar într-un punct x este

(11.72) $$v_{NL}^2 = \frac{2}{m}\int_x^A F(x).dx$$

şi viteza maximă apare în punctul x = 0, astfel că ea este

(11.73) $$v_{M.NL}^2 = \frac{2}{m}\int_0^A F(x).dx\,.$$

Pentru **SLE**, dependenţa dintre viteză şi pulsaţia proprie se obţine considerând expresia deplasării

(11.74) $x = A.\sin \Omega t$, din care rezultă că viteza este

(11.75) $$v = \frac{dx}{dt} = A\Omega.\cos\Omega.t\,.$$

Prin înlocuirea lui cosΩt cu valoarea dedusă din expresia deplasarii (11.62) rezultă

(11.76) $$v = \Omega.A\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}} = \Omega\sqrt{A^2-x^2}\,,$$ astfel că viteza maximă este

(11.77) $v_M = \Omega.A$, din care rezultă pulsaţia

(11.78) $$\Omega = \frac{v_M}{A}$$

Pulsaţia proprie a **SLE** , de aceeleaşi viteze maxime, notată cu Ω_v, este

(11.79) $$\Omega_v = \frac{v_{M.NL}}{A}$$

Înlocuind expresia vitezei maxime a **SN** (11.55) în relaţia (11.67) se obţine

(11.80) $$\Omega_v = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2}{m}\int_0^A F(x).dx}$$

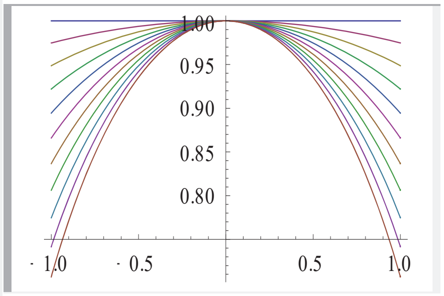


Fig. 11.17,a Pulsaţia Ω_{Pm} relaţia (11.77)

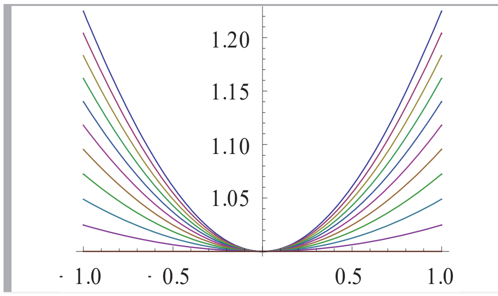


Fig. 11.17,b Pulsaţia Ω_{RM} relaţia (11.78)

Pentru x =A $\in$[-1,1], ω_0 = m = 1, $\mu \in$ [-1,1]

Considerand, de exemplu, sistemul neliniar **Duffing,** se obţine

(11.81) $$\Omega_v = \sqrt{\frac{k_0+\frac{\mu A^2}{2}}{m}}$$

sau, ţinând cont de pulsaţiile anterior stabilite / definite

(11.82) $$\Omega_v == \sqrt{\omega_0^2+\omega_\mu^2}$$

relaţie obţinută şi prin metoda balanţei energietice [**Rădoi Marin**, § 6.3.4].

Se poate demonstra că pulsaţia proprie, exprimată de relaţia (11.70), corespunde şi **SLE** care are aceeaşi energie cinetică maximă şi aceeaşi energie potenţială maximă ca şi **SN**.

Pentru $\mu > 0$, **CES** este tare (T) şi progresivă (P), relaţia (11.69) exprimă pulsaţia minimă (m) a acestui sistem **Duffing**, în care $\mu \rightarrow$ Abs[μ]

(11.83) $$\Omega_{Pm} = \sqrt{\omega_0^2+\omega_\mu^2} = \sqrt{\omega_0^2+\frac{\mu A^2}{2.m}} \quad ,$$

iar pentru $\mu < 0$ reprezintă pulsaţia maximă (M) a unui sistem moale şi regresiv (R)

(11.84) $$\Omega_{R\,M} = \sqrt{\omega_0^2-\omega_\mu^2} = \sqrt{\omega_0^2-\frac{\mu A^2}{2.m}}$$

11.9.2 DETERMINAREA DOMENIULUI DE EXISTENŢĂ AL SISTEMULUI LINIAR ECHIVALENT (SLE) SISTEMULUI NELINIAR (SN) DE PULSAŢII PROPRII EGALE

Relaţia (11.60), de determinare a vitezei, corespunzatoare unei deplasări oarecare $x \in [0, A]$, fiind valabilă pentru **SN** este, deci, o relaţie generală, ea putand fi particularizată şi la SL.

Comparând între ele vitezele celor două sisteme liniare echivalente (**SLE**), studiate anterior, cu a **SN**, presupus, de exemplu, de **CES** moale şi regresivă, rezultă:

- a) pentru $x = A$, $v^2_A = v^2_{NL} = v^2_V = 0$, în care v_A este viteza **SLE** de aceeaşi amplitudine A, iar v_V este viteza **SLE** de viteze egale, deoarece valoarea integralei (11.60) este zero ;
- b) pentru $x = 0$, $v^2_{MA} \le v^2_{MNL} = v^2_{MV}$; întrucat **CES** a **SLE** de amplitudini şi acceleraţii maxime (Macc) egale este

(11.85) $F_A(x) = \frac{F(A)}{A}x = k(A).x$ şi

(11.86) $\int_0^A \frac{F(A)}{A} x.dx \le \frac{2}{m}\int_0^A F(x).dx$, deoarece **CES** a F(x) a sistemului considerat poate fi exprimata sub forma

(11.87) $F(x) = \dfrac{F(A)}{A}x + F'(x)$ în care F'(x) este pozitivă, în acest caz şi negativă în cazul **SN** tari şi progresive.

Egalitatea între vitezele maxime (Mvit) ale **SN** şi cel **LE** de viteze maxime egale rezultă din definiţie (§ 11.9)

- c) pentru oricare deplasare $x \in [0,A]$ rezultă

(11.88) $v^2_A < v^2_{NL} < v^2_V$

Prima inegalitate este adevarată, deoarece, comparând vitezele celor două sisteme, pe baza relaţiei (11.60) şi ţinand cont de egalitatea (11.69) rezultă

(11.89) $$\frac{2}{m}\int_x^A \frac{F(A)}{A}x.dx < \frac{2}{m}[\int_x^A \frac{F(A)}{A}x.dx + \int_x^A F'(x).dx]$$

Pentru demonstrarea celei de a doua inegalităţi se determină

(11.90) $F(x)_V = k_V.x = m.\Omega^2_V.x = \dfrac{2x}{A^2}\int_0^A F(x).dx$ care, înlocuită în (11.60) dă

(11.91) $$v^2_V = \frac{2}{m}\int_x^A [\frac{2x}{A^2}\int_0^A F(x).dx].dx$$

Scriind F(x) sub forma (11.37) rezultă

(11.92) $$v^2_v = \frac{2}{m}\int_x^A [\frac{2x}{A^2}\int_0^A (\frac{F(A)}{A}x + F'(x))dx]dx$$

Intrucat F'(x) este continua pe segmentul [0, A] atunci, pe baza teoremei mediei, exista un $\xi \in [0,A]$ pentru care există egalitatea

(11.93) $\int_0^A F'(x).dx = A.F'(\xi)$ astfel că (11.74) devine

(11.94) $$v^2_V = \frac{2}{m}\int_x^A [\frac{2x}{A^2}(\frac{F(A)}{A}\frac{A^2}{2} + A.F'(\xi)]dx$$

Efectuând simplificările şi integrarea, rezultă

(11.95) $$v_v^2 = \frac{2}{m}[\frac{E(A)}{A}\frac{(A^2-x^2)}{2} + \frac{F'(\xi).(A^2-x^2)}{A}]$$

Dând factor comun pe ($A^2 - x^2$) se obţine

(11.96) $$v_v^2 = \frac{A^2-x^2}{m}[\frac{F(A)}{A} + \frac{2}{A}F'(\xi)]$$

Înlocuind expresia **CES** sub forma (11.37) în relaţia (11.74) se obţine viteza **SN**

(11.97) $$v_{NL}^2 \frac{2}{m}\int_x^A [\frac{F(A)}{A}x + F'(x)]dx$$

Pe baza teoremei medie se poate scrie

(11.98) $$\int_x^A F'(x).dx = (A-x).F'(\xi')$$ şi (11.79) devine

(11.99) $$v^2_{NL} = \frac{2}{m}[\frac{F(A)}{A}.\frac{A^2-x^2}{2} + (A-x).F'(\xi')]$$ sau

(11.100) $$v^2_{NL} = \frac{A^2-x^2}{m}[\frac{F(A)}{A} + \frac{2}{A+x}F'(\xi')]$$

Comparând (11.78) cu (11.80) rezulta că $v^2_V > v^2_{NL}$ dacă $F'(\xi) > F'(\xi')$ întrucât $\frac{2}{A} > \frac{2}{A+x}$ pentru $x \in (0,A)$, iar restul termenilor sunt identici.

Intr-adevăr, din (11.75) şi (11.80) rezultă

(11.101) $F'(\xi) - F'(\xi') =$

$$= \frac{1}{A}\int_0^A F'(x).dx - \frac{1}{A-x}\int_x^A F'(x).dx = \frac{1}{A}[\int_0^x F'(x).dx + \int_x^A F'(x)dx] -$$

$$-\frac{1}{A-x}\int_x^A F'(x)dx = \frac{1}{A}\int_0^A F'(x).dx + \frac{x}{A(x+A)}\int_x^A F'(x).dx$$

expresie care este pozitivă pentru **CES** regresive la care $F'(x) > 0$, $x \in [0, A]$ şi negativă în cazul **CES** progresive.

Deoarece viteza **SN** este cuprinsă între vitezele celor doua **SLE** (11.70), rezultă că şi pulsaţia proprie a **SN** este cuprinsă între cele doua valori ale pulsaţiilor **SLE**, adică

(11.102) $$\frac{F(A)}{mA} < \omega_{NL}^2 < \frac{2}{mA^2}\int_0^A F(x).dx$$

Pulsaţia proprie a **SN,** de **CES** exprimată de relaţia (11.49 - **Duffing**) rezultă cuprinsă în intervalul

(11.103) $$\Omega_{Rm}^2 = \Omega^2_{R\min} = \omega_0^2 - \frac{\mu}{m}A^2 < \omega_{NL}^2 < \omega_0^2 - \frac{\mu}{2.m}A^2 = \Omega^2_{RMax} = \Omega_{RM}^2$$

În mijlocul acestui interval există un **SLE** care are pulsaţia

(11.104) $$\Omega_m^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\frac{\mu}{m}A^2 = \Omega^2_{PRcalcul} = \frac{1}{2}(\Omega^2_{MaxPR} + \Omega^2_{inmPR})$$

valoare care mai rezultă şi prin impărţirea amplitudinii A în două şi considerarea pe fiecare porţiune a **SLE** care are valoarea vitezei, în acest interval, mai apropiată de viteza **SL**. Astfel, în domeniul x ∈ [0, A/2], viteza **SN** este mai apropiată de viteza **SLE** de viteze maxime egale, iar în domeniul x ∈ {A/2, A] de cel al **SLE** de acceleraţii maxime egale, rezultând

(11.105) $$\Omega_m^2 = \int_0^{\frac{A}{2}} \omega_V(x).dx + \int_{\frac{A}{2}}^{A} \omega_A(x).dx$$

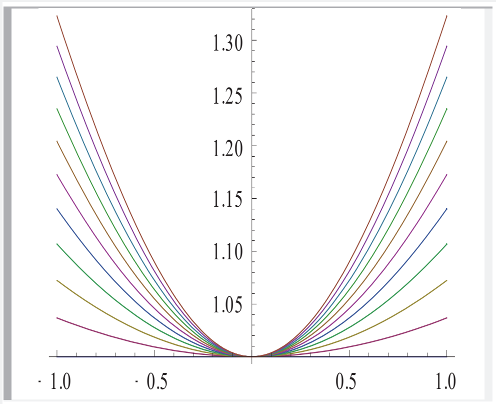


Fig. 11.18,a Pulsatia proprie Ω_m
Conform relaţiei (11.86)

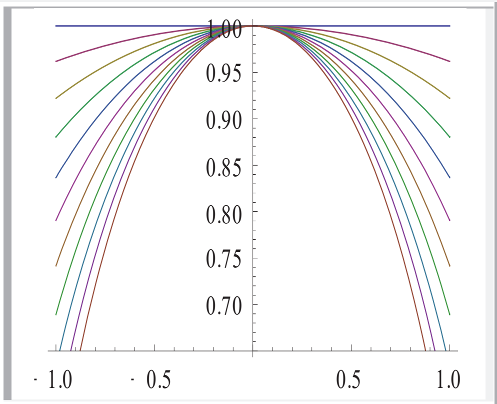


Fig. 11.18,b Pulsatia proprie Ω_{Rm}
Conform relaţiei (11.85)

Pentru x =A ∈[-1,1], ω_0 = m = 1, μ ∈ [-1, 1]

Expresia (11.86) corespunde pulsaţiei proprii, determinate prin metoda parametrului mic (perturbaţiei) [**Rădoiu**, §6.3.1] şi prin metoda balanţei armonice [**Rădoi,** §6.3.3]

11.9.3 SISTEM LINIAR (PE PORTIUNI INFINIT MICI) ECHIVALENT (SLE) SISTEMULUI NELINIAR (SN) DE AMPLITUDINI ŞI VITEZE INSTANTANEE EGALE.

Vitezele instantanee ale unui **SN** se exprimă prin relaţia (11.55) , iar a unui **SL** prin relatia (11.57). Egalând vitezele celor două sisteme rezultă

(11.106) $$\omega^2(x) = \frac{2}{m(A^2 - x^2)} \int_x^A F(x).dx$$

în care, ω(x) reprezintă tocmai pulsaţia instantanee a **SN** fiind o funcţie de complianţă / deplasarea / deformaţia x.

Se remarcă faptul că, pentru elongatia x = 0, se obţine o expresie a pulsaţiei **SLE** de viteze maxime egale, iar pentru x = A, folosind expresia vitezei sub forma (11.82), se obţine pulsaţia proprie a **SLE** de acceleraţii maxime egale.

Din expresia (11.88) mai rezultă că pulsaţiile proprii instantanee ale **SN** sunt cuprinse între aceste două valori limită, adică în domeniul determinat în lucrarea **Silaş, Gh.**, **MECANICA. VIBRAŢII MECANICE, EDP,** Buc., 1968 .

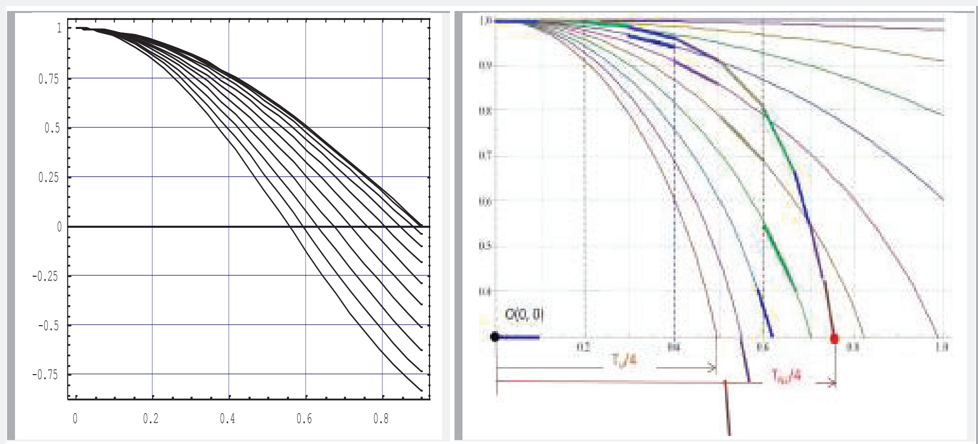


Fig. 11.19 Perioadele (T/4) ale **SN Duffing** în domeniul $x \in [0, A]$ cu A = 1 şi $\mu/2m = 1$ şi a **SLE** de acceleraţii (T_A) şi viteze (T_V) maxime egale.

Pentru **SN** de caracteristica elastică (11.49-**Duffing**), din relaţia (11.88) rezultă pulsaţia proprie instantanee

(11.107) $$\omega(x) = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\mu}{2m}(A^2 - x^2)}$$

Din relaţia (11.89) se obţine un şir de valori ω_i, i = 1,..,n pe baza cărora se obţine fascicolul de curbe

(11.108) $x_i = A.\cos\omega_i.t$,

toate trecând prin punctul (0, A) din planul tOx aşa cum se reprezintă un exemplu oarecare, fictiv, în **figura 11.19**.

Intersecţia acestei curbe cu axa x = 0 dă tocmai valoarea sfertului de perioadă ($T_{NL}/4$) a **SN** şi poate fi obţinută pe cale grafică, grafo-analitică sau numerică.

O valoare aproximativă a pulsaţiei proprii a **SN** se poate obţine considerând valoarea medie a pulsaţiei proprii instantanee din domeniul $x \in [\,0,A]$ exprimată de relaţia

(11.109) $$\omega = \frac{1}{A}\int_0^A \omega(x).dx = \frac{1}{A}\int_0^A \sqrt{\frac{2}{m(A^2 - x^2)}\int_x^A F(x).dxdx}$$

Utilizand relaţia (11.91) pentru **SN** de **CES** (11.49-**Duffing**) se obţine pulsaţia proprie :

(11.110)

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu}{m}A^2} + \left[\frac{\omega_0}{2A}\sqrt{2\frac{m}{\mu}} - \frac{A}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2m}}\right]\arcsin\frac{A}{\sqrt{\frac{2m\omega^2}{\mu} - A^2}}$$

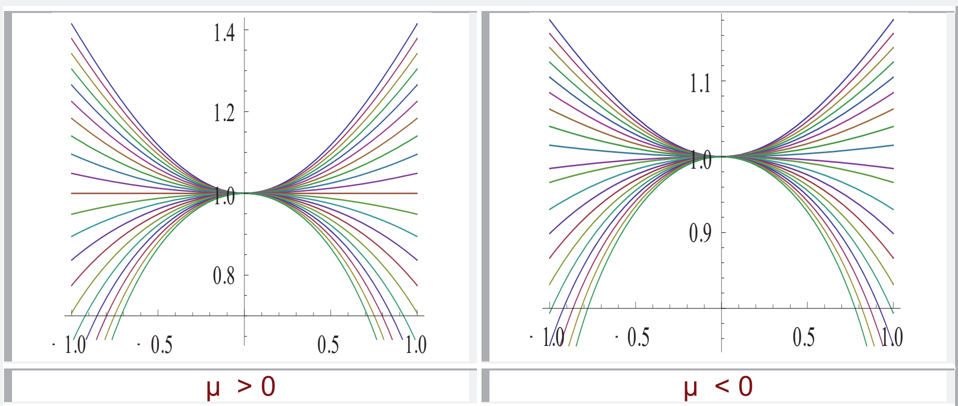


Fig. 11.20 Variaţiile pulsaţiei proprii ω în funcţie de amplitudinea A şi de coeficientul $\mu \in [-1,1]$,
pentru $x \in [-1, 1]$ şi $m = A = \omega_0 = 1$ date de relaţia (11.92)

11.10. VIBRAŢII NELINIARE (DE TIP DUFFING), LIBERE, NEAMORTIZATE

Fie sistemul vibrant neliniar (**SVNL**), neamortizat, liber

(11.111) $\quad m\ddot{z} + k_0.z \pm \mu z^3 = 0,$

în care **m** este masa sistemului vibrant şi $m\ddot{z}$ este forţa de acceleraţie, $k_0.z$ este componenta liniară a forţei elastice, $\mathbf{k_0}$ este rigiditatea locală în originea O(0,0), sau panta dreptei tangente în origine la **CES** neliniară şi $\pm\mu.z^3$ este componenta pur neliniară a **CES**, care, în funcţie de semn, dă o **CES** tare, sau progresivă (notată cu indicele **P**) pentru semnul + şi una moale sau regresivă (notată cu indicele **R**) pentru semnul – din faţa constantei **μ** a termenului neliniar al forţei elastice .

Împărtind ecuaţia diferenţială neliniară (11.111) cu **m** > 0 ($şi\ \neq 0$) ecuaţia devine

(11.112) $\quad \ddot{z} + z(\omega_0^2 - \frac{\mu}{m}.z^2) = 0$, sau

(11.113) $\quad \ddot{z} + z(\omega_0^2 - \omega_\mu^2\frac{z^2}{A^2})$ $\quad$ în care s-au notat

(11.114) $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, fiind o pulsaţie constantă, a parţii liniare a **CES**.

Notând cu **A** amplitudinea vibraţiei, se defineşte

(11.115) $\omega_\mu^2 = \frac{\mu}{m} A^2 \Rightarrow \omega_\mu = A\sqrt{\frac{\mu}{m}}$ numită componenta **pur neliniară** a pulsaţiei, care este şi pulsaţia globală pur neliniară de elongaţie maximă A.

11.10.1 SOLUŢII ALE ECUAŢIEI FAZORIALE DE TIP DUFFING CU AJUTORUL FAZORILOR radθ ŞI derθ

Funcţiile radθ = $e^{i\theta}$ şi derθ = i.$e^{i\theta}$, aşa cum s-a mai arătat în § 3.4, sunt echivalentele în matematica centrică (**MC**) ale funcţiilor supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) de variabilă excentrică rexθ şi dexθ din matematica excentrică (**ME**). Cu ajutorul lor şi a **FSM-CE** de **variabilă centrică α**, **Rexα**, s-a putut îmbunătăţi studiul vibraţiilor sistemelor elastice liniare (**SVL**), amortizate, forţate de o forţă sinisoidală aplicată asupra masei **m** a **SVL**, obţinându-se o transformare riguroasă în cerc a diagramei polare a complianţei, precum şi o extensie a studiului **SVL** cu amortizare puternică şi pentru pulsaţii negative, aşa cum s-a prezentat în aplicaţia din § 3.9.

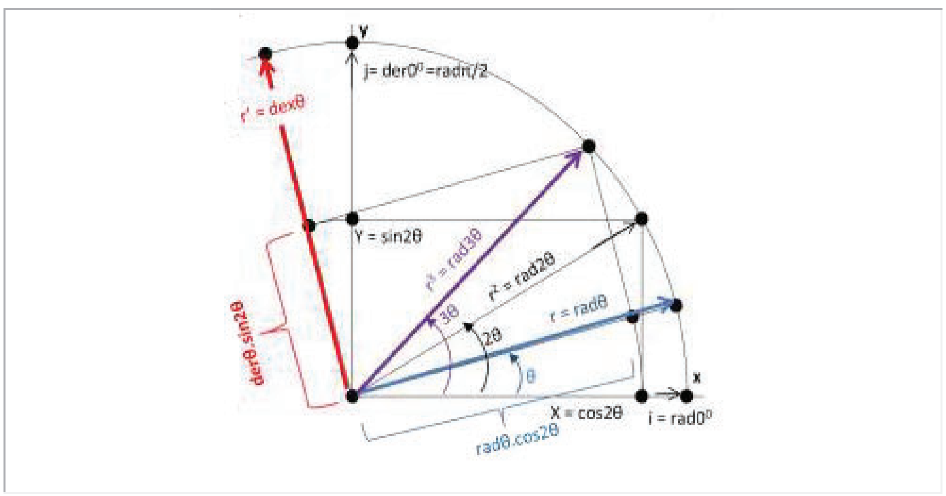


Fig.11.21 Fazori de arc simplu, dublu şi triplu

Aceleaşi funcţii ne ajută, în această aplicaţie, să determinăm pulsaţia instantanee ω[θ(t)] sau viteza şi acceleraţia $\epsilon[\theta(t)]$ unghiulare ale **SVNL** fazoriale de tip **Duffing**.

Se considera că **z** este proiecţia, pe una dintre axele x sau y, a fazorului $\vec{r}(\theta(t))$

(11.116) $\vec{r}$ = A.**radθ**(t)

considerat soluţie a ecuaţiei diferenţiale fazoriale

(11.117) $m.\ddot{\vec{r}} + k_0\vec{r} \pm \mu.\vec{r}^3 = 0$

în care, reamintim (§ 3.4 pag79) că funcţia radial centrică radθ(t) este un fazor/versor, cronoid sau un vector unitate, de direcţie θ(t) variabilă, în funcţie de timpul t.

Dacă $\vec{r}$ ar fi un vector obişnuit, atunci $\vec{r}^3$ poate fi:

- fie un produs **vectorial** a trei vectori coliniari si egali $\vec{r} \times \vec{r} = |\vec{r}|.|\vec{r}|\, sin0^0 = 0$, caz în care $\vec{r}^3 = 0$ şi ecuaţia diferenţială devine de **CES** liniară $F_{el} = k_0.\vec{r}$,
- fie un produs **scalar** a trei vectori coliniari şi egali în modul cu unitatea $\vec{r}\,.\,\vec{r} = |\vec{r}|.|\vec{r}|\,cos0^0 = 1.1.1$, asatfel că $\vec{r}^3 = \vec{r}\,.(\vec{r})^2 = \vec{r}.1 = \vec{r}$ şi, ca şi în cazul precedent, forţa elastică şi **CES** devin din nou liniare.

Situaţia se modifică radical, dacă, aşa cum am enunţat deja, $\vec{r}$ este fazorul de modul A ($\vec{r} = A\, rad\theta$), reprezentat pentru un unghi $\theta = \pi/12$ (15^0) în **figura 11.21** şi de $\pi/6$ (30^0) în **figura 11.22**.

Ce semnificaţie au produsele fazorilor, versorilor de direcţie $\theta(t)$ varibilă sau cronoizilor $\vec{r}\,(\theta(t))$ de tipul $\vec{r}^2, \vec{r}^3, \dots, \vec{r}^n$? → [v. (§ 3.4].

Se considera iniţial produsul scalar al fazorului $\vec{r}$ cu el însuşi, adică

(11.118) $\vec{r}^2 = \vec{r}\,.\,\vec{r}$ = [A.radθ(t)].[A.radθ(t)] $= A^2[rad\,\theta\,]^2 = A^2 rad2\theta$ şi

(11.119) $\vec{r}^3 = [A.rad\theta]^3 = Arad\theta.A^2rad^2 2\theta = A^3 rad3\theta$

Rezultă că produsele fazorilor/versorilor cu ei înşişi sunt

(11.120) $rad\theta.rad\theta$ = rad2θ şi derθderθ = der2θ ,

Înmulţirea a doi fazori perpendiculari între ei este

(11.121) $rad\theta\,.\mathrm{der}\theta = rad\theta.rad\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\theta}.e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = der2\theta$

Fazorii de sumă de arce şi produsele a n fazori vor fi

(11.122) $$\begin{cases} rad(\theta\pm\beta) = rad\theta.cos\beta \pm der\theta.sin\beta \\ der(\theta\pm\beta) = der\theta.cos\beta \mp rad\theta.sin\theta \\ rad\theta.rad\theta \dots.rad\theta = radn\theta \\ \mathrm{der\theta.der\theta.\dots\ der\theta\ =\ dern\theta} \\ \underbrace{\mathrm{(rad\theta.der\theta).\dots\ (rad\theta.der\theta)}}_{\text{n ori}}\ =\ \mathrm{der2n\theta} \end{cases}$$, ca urmare

(11.123) rad3θ = rad$\theta.rad2\theta = rad\theta$.rad($\theta+\theta$) = rad$\theta$(rad$\theta$.cos$\theta$ + derθ. sinθ)

Cu aceste observaţii şi împărţind ecuaţia diferenţială neliniară (11.117) cu masa **m** > 0, se poate scrie ecuaţia sub forma

(11.124) $\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} \pm \frac{\mu}{m}.\vec{r}^3 = 0$ →

(11.125) $\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2.A.rad\theta \pm \omega_\mu^2.A.rad3\theta = 0$, în care s-a notat

(11.125’) $\omega_\mu^2 = A^2\frac{\mu}{m}$, $\omega_\mu = A\sqrt{\frac{\mu}{m}}$ astfel că, ţinând cont de relaţia (11.105)

(11.126) $\ddot{\vec{r}}$ =$-$A.rad$\theta[\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 A^2(\ rad\theta.cos\theta + der\theta.sin\theta)]$,
care exprimă echilibrul, adică egalitatea cu semne opuse, dintre acceleraţie, sau forţa de acceleraţie redusă (prin împarţirea cu masa **SVNL m**) şi forţa elastică redusă. În relaţia (11.116) este explicitată acceleraţia masei **SVNL fazoriale** din (11.115).

Derivata lui radθ este funcţia derivată centrică derθ, echivalenta în **MC** a funcţiei derivată excentrică $dex_{1,2}\theta$ din **ME,** fazor rotit cu $\frac{\pi}{2}$ în avans. Derivata fazorului dexθ este un alt fazor rotit în avans cu $\frac{\pi}{2}$, deci de sens contrar cu radθ şi, deci egal cu –rad θ.

Prin derivarea soluţiei (11.98) se obţine viteza $\dot{\vec{r}}$ $(\theta(t))$, un fazor de modul A.ω(θ(t)), rotit cu $\frac{\pi}{2}$ în faţă/ avans, a cărui expresie este (Fig.**11.22**)

(11.127) $\dot{\vec{r}}$ $(\theta(t))$ = A. ω(θ(t)) derθ

şi a cărui derivată, la rândul ei, exprimă acceleraţia **SVNL**

(11.128) $\ddot{\vec{r}} = A[\epsilon.der\theta - \omega^2 rad\theta]$, în care $\epsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$.

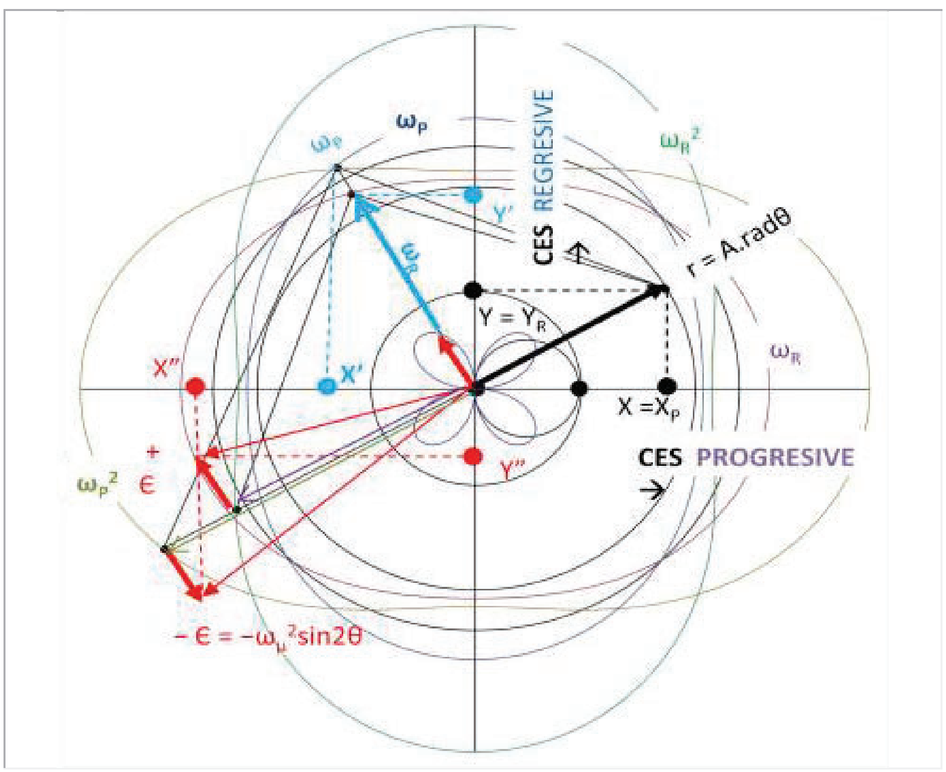


Fig.11.22 Deplasarea sau **elongaţia r**, **viteza r'** şi **acceleraţia r"** ale **SVNL fazoriale** regresive- R(y) şi progresive- P(x) pentru A = 1; ω_0 = 1,2; ω_μ = 0,6;

În relaţia anterioară (11.128) se recunoaşte uşor expresia clasică a acceleraţiei din mişcarea circulară neuniformă generală, sau, mai precis, din mişcarea circulară excentrică.

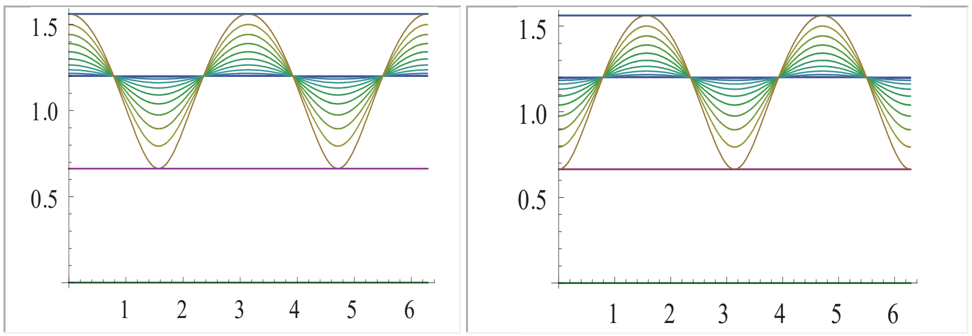
Punând condiţia ca r = A.radθ şi derivatele sale să fie o soluţie a sistemului, este necesar ca ele să satisfacă identic nul ecuaţia diferenţială fazorială (11.112) şi (11.125).

Această condiţie este îndeplinită dacă ambi coeficienţi ai versorilor rad θ şi der θ, ortogonali, sunt **simultan** nuli, adică

(11.129) $[\epsilon . der\theta - \omega^2 rad\theta] + \omega_0^2 rad\theta \pm \omega_\mu^2 cos2\theta . rad\theta \pm \omega_\mu^2 sin2\theta . der\theta = 0$

$$\left[-\omega^2 + \omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 cos2\theta\right] rad\theta + (\epsilon \pm \omega_\mu^2 sin2\theta) der\theta = 0, \text{ dacă}$$

(11.130) $$\begin{cases} -\omega^2 + \omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 cos2\theta = 0 \\ \epsilon \pm \omega_\mu^2 sin2\theta = 0 \end{cases}$$



$\omega_P = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_\mu^2 cos2\theta}$ $\omega_P \in [\omega_m, \omega_M]$ =[0.6633; 1,562]	$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\mu^2 cos2\theta}$ $\omega_R \in [\omega_m, \omega_M]$ =[0.6633; 1,562]

Fig. 11.23 Graficele pulsaţiilor instantanee ω_P –stânga - şi ω_R –dreapta, pentru ω_0 = 1,2 şi $\omega_\mu \in [0,1]$

Din prima ecuaţie rezultă expresia pulsaţiei **instantanee** sau a vitezei unghiulare

(11.131) $$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 cos2\theta = \omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 (1 - 2sin^2\theta) =$$
$$= \omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 \mp 2\omega_\mu^2\, sin^2\theta = \omega_L^2 \mp 2\omega_\mu^2\, sin^2\theta = \omega_L^2\,(1 - k^2 sin^2\theta),$$

(11.131') $$\omega[\theta(t)] = \sqrt{\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 cos2\theta} = \omega_L \sqrt{1 \mp k^2 sin^2\theta}$$

în care s-au notat valorile limită maxime (**M**) şi minime (**m**) cu $\boldsymbol{\omega_L}$ (**pulsaţiile limită**) ale pulsaţiei instantanee ω având expresia

(11.132) $$\omega_L = \sqrt{\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2} \quad \rightarrow \quad \omega_L^2 = \omega_0^2 \pm \omega_\mu^2$$ şi

(11.133) $k^2 = \pm 2\frac{\omega_\mu^2}{\omega_L^2}$ $\rightarrow$ $k = \sqrt{2}\,\frac{\omega_\mu}{\omega_L} = \frac{A}{\omega_L}\sqrt{2\frac{k}{m}}$

iar, din a doua ecuaţie, rezultă acceleraţia unghiulară $\boldsymbol{\epsilon}$ a sistemului

(11.134) $\epsilon = \mp\omega_\mu^2\, sin2\theta,$

aceeaşi în valoare absolută pentru **SVNL** cu **CES** progresive (P $\rightarrow$ +) şi regresive (R$\rightarrow$ −), dar de semne schimbate, respectiv, sensuri opuse.

Se observa că, prin derivarea vitezei unghiulare/pulsaţiei ω, din (11.113'), se obţine expresia acceleraţiei unghiulare ϵ, adică

(11.135) $\epsilon = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}[\sqrt{\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 cos2\theta}]^2 =$

$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}(\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 cos2\theta) = \pm\frac{1}{2}(-\,2\omega_\mu^2 \sin 2\theta) = \mp\omega_\mu^2\, sin2\theta.$

Faptul că derivata vitezei este acceleraţia, demonstrează compatibilitatea dintre acceleraţia ϵ şi viteza ω unghiulare şi, totodată, atestă, intr-o primă instanţă, justeţea soluţiei alese.

Este evivent că, întroducând acum soluţia r = A rad θ = A.rad$\int_0^t \omega\big(\theta(t)\big).dt$ şi a doua ei derivată (11.128), în ecuaţia diferenţiala **Duffing**, aceasta va fi satisfăcută identic nul, deoarece mărimile vitezei şi ale acceleraţiei unghiulare au rezultat tocmai din condiţia ca ecuaţia diferenţială să fie satisfacută, adică ecuaţia diferenţială să fie identic nulă.

Dacă introducem soluţia în expresia acceleratiei (11.126) se obţine

(11.136) $\ddot{\vec{r}} =$ A[$\mp\omega_\mu^2\, sin2\theta.der\theta - (\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 cos2\theta)$radθ]=

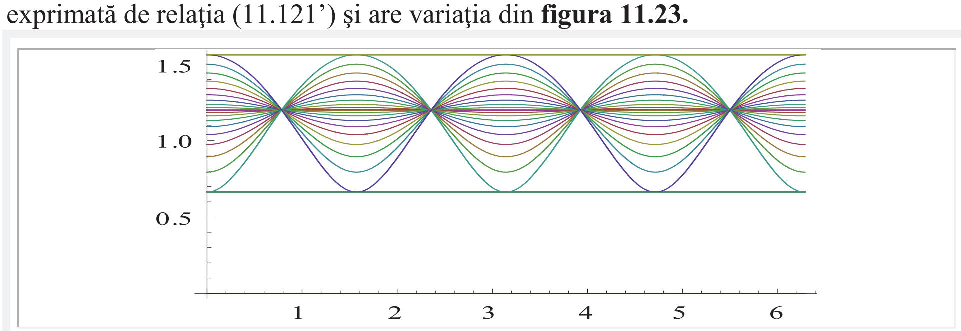
$= -A[\omega_0^2 rad\theta \pm \omega_\mu^2(rad\theta.cos2\theta + der\theta.sin2\theta)] =$

$= -\left[\omega_0^2.Arad\theta \pm \omega_\mu^2 A\, rad3\theta\right] = -\left[\frac{k_0}{m}.\vec{r} \pm \frac{\mu}{m}(\vec{r})^3\right] = -f(\vec{r})$

ceea ce demonstrează că r = A.rad θ, cu $\dot{\theta} = \omega$ şi $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \epsilon$, este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale fazoriale de tip **Duffing**, deoarece $-f(\vec{r}) = -\, f_{el}$ este forţa elastică redusă f_{el} cu semn schimbat.

11.10.2 PULSAŢII . PULSAŢIA INSTANTANEE

Pulsaţia instantanee sau viteza unghiulară de rotire a fazorilor r şi r' este exprimată de relaţia (11.121') şi are variaţia din **figura 11.23.**



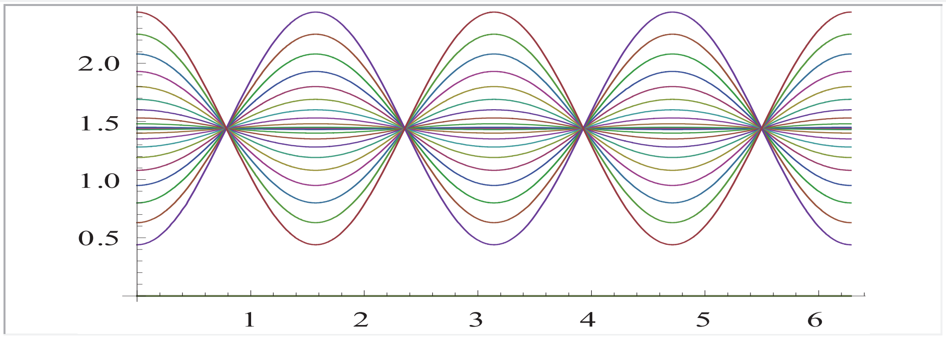


Fig. 11.24,a Graficele pulsaţiilor instantanee ω –sus- si ω^2 –jos, pentru ω_0 = 1,2 si $\omega_\mu \in [0,1]$

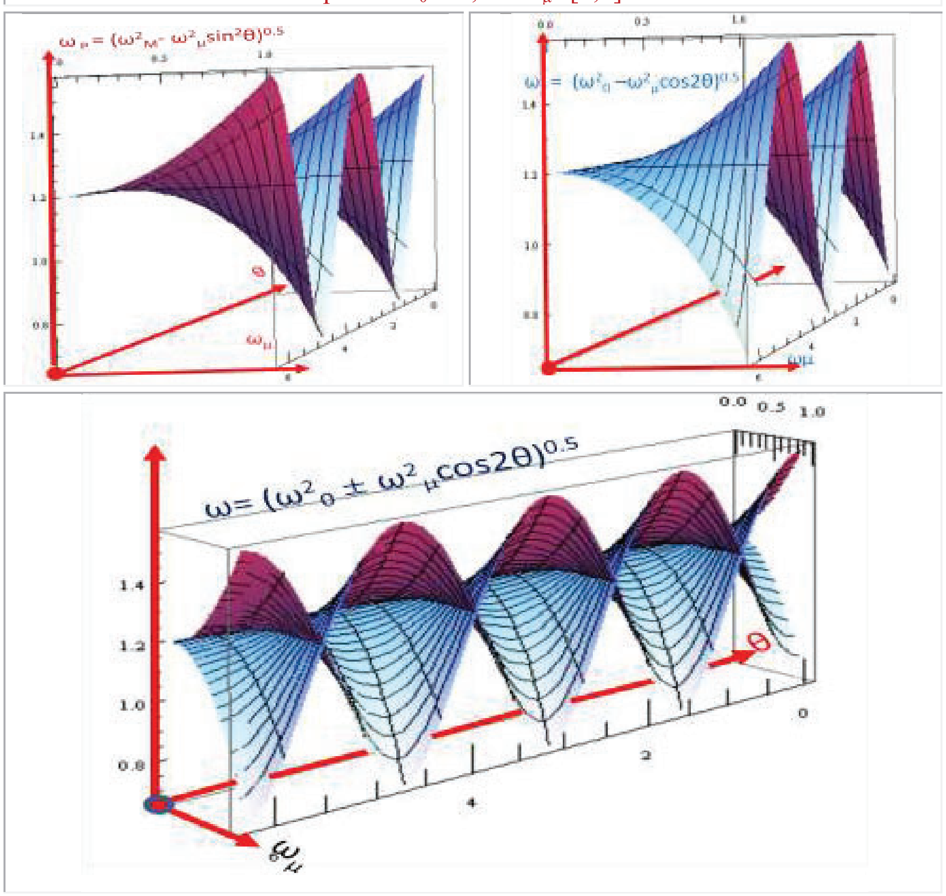


Fig. 11.24,b Pulsaţia instantanee în 3D ω_0 = 1,2 ; $\omega_\mu \in$ [0, 1]

Se observă că pulsaţia instantanee variază asimetric faţă de valoarea ω_0, cu care devine egală în punctele $\theta = \frac{\pi}{4} \pm n\pi$. Multiplii de π sunt notaţi aici şi acum cu n şi nu cu k, cum se obişnuieşte, pentru a nu se confunda cu modulul k al integralelor şi funcţiilor eliptice.

Egalitatea pulsaţiilor cu valoarea ω_0 este ilustrată şi în **figura 11.22** în care sunt reprezentate, în coordonate polare şi valorile lui ω şi ale lui ω^2, atât pentru **CES** progresive (**P**) cât şi pentru **CES** regresive (**R**). În punctele $\theta = \frac{\pi}{4} \pm n.\pi$ se egalizează valorile ω ale **CES** progresive ω_P cu valorile ω ale **CES** regresive ω_R ,adică

(11.137) $$\omega\left(\frac{\pi}{4} \pm n.\frac{\pi}{2}\right) = \omega_P\left(\frac{\pi}{4} \pm n.\frac{\pi}{2}\right) = \omega_R\left(\frac{\pi}{4} \pm n.\frac{\pi}{2}\right) = \omega_0$$

Se notează valorile maxime (**M**) şi minime (**m**) ale pulsaţie instantanee **ω(t)** cu $\boldsymbol{\omega_L}$ fiind denumite pulsaţii limită

(11.137') $$\omega_{Lim}^2 \equiv \omega_L^2 = \omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 \quad \rightarrow \quad \omega_L = \sqrt{\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2}$$

Valorile limită maxime cât şi cele minime, atât ale **SVNL** de **CES** progresive (**P**) cât şi a celor de **CES** regresive (**R**) sunt aceleaşi, dar se obţin din $\omega[\theta(t)]$ pentru valori ale unghiului θ decalate cu $\frac{\pi}{2}$. Astfel, pentru $\theta = 0 \pm n.\pi$ cele de **CES P** au un M, iar cele de **CES R** au un minim. La $\theta = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$ situaţia se inversează: **CES R** au un maxim şi **CES P** prezintă un minim.

Aşa cum s-a enunţat, inversarea valorilor **CES** P la minim când **CES** R este la maxim, rezultă şi din următoarele relaţii ale valorilor limită:

(11.138) $$\begin{cases} \omega_{LP} = \sqrt{\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2} = \begin{cases} \omega_{LPM} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_\mu^2} \\ \omega_{LPm} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\mu^2} \end{cases} \\ \omega_{LR} = \sqrt{\omega_0^2 \mp \omega_\mu^2} = \begin{cases} \omega_{LRm} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\mu^2} \\ \omega_{LRM} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_\mu^2} \end{cases} \end{cases}$$

Valorile limită ale pulsaţiilor instantanee, care se vor utiliza în continuare se obţin pentru

(11.139) $$\theta = \begin{cases} \theta_{PM} = 0 \pm n.\pi \rightarrow \quad \omega_{PM} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_\mu^2} \\ \theta_{Rm} = 0 \pm n.\pi \rightarrow \omega_{Rm} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\mu^2} \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

iar celelalte se obţin pentru

(11.140) $$\theta = \begin{cases} \theta_{RM} = \frac{\pi}{2} \pm n.\pi \rightarrow \omega_{MR} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_\mu^2} \\ \theta_{Pm} = \frac{\pi}{2} \pm n.\pi \rightarrow \omega_{mP} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\mu^2} \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

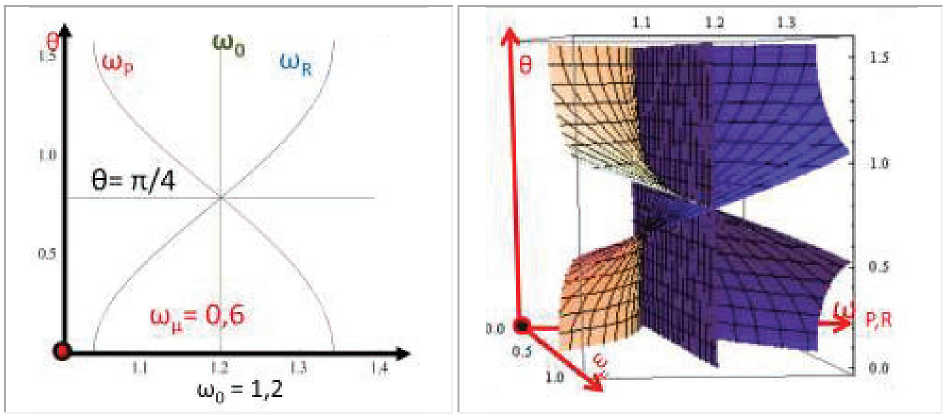


Fig.11.24,c Pulsaţia instantanee pentru ω_0 = 1,2 şi $\omega_\mu \in$ [0, 1]

Pulsaţiile maxime (**M**) pentru **CES** progresive (**P**) şi minime **(m**) pentru **CES** regresive (**R**) corespund rigidităţii globale a **CES** pentru elongaţiile de valoare x = ± A şi, respectiv, y = 0, sau pentru t = 0 + n.$\frac{T}{2}$ sau $\theta = 0 + n.\pi$. Şi invers, pulsaţiile maxime (**M**) pentru **CES** regresive (**R**), şi minime (**m**) pentru **CES** progresive (**P**) corespund poziţiei pe cercul C(O, A) a masei **m** în punctele pentru θ = $\frac{\pi}{2} \pm n.\pi$ sau t = $\frac{T}{4}$ + n. $\frac{T}{2}$, aşa cum se arată şi în **figurile 11. 22, 11.23** şi **11.24, a b,** şi **c** .

Toate cele expuse anterior, cu referire la sistemul de vibraţii neliniare fazoriale (**SVNL-F**), sunt prezentate concentrat în **tabelul T 11.1,** în ideea că, în acest mod, prezentarea sistemului fazorial şi a soluţiilor, ca şi derularea verificării soluţiilor este mai uşor de urmărit şi de înţeles.

11.10.3 CERCUL PULSAŢIILOR

Fie cercrile $C1_\omega(O,R_P = \omega_M)$ şi $C2_\omega(O,R_R = \omega_m)$ din **figura 11.25** şi un excentru E (e , ε = 0) de excentricitate reală $e_\omega = \omega_\mu\sqrt{2}$ sau de excentricitate numerica s egală cu modulul k al funcţiilor eliptice Jacobi

(11.141) $s = \frac{\omega\mu}{\omega_L}\sqrt{2} = k$

În care , pulsaţiile limită de calcul ω_L , utilizate în **figura 11.25**, sunt

(11.142) $$\omega_C \equiv \omega_L = \begin{cases} \omega_{CP} = \omega_M = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_\mu^2} \\ \omega_{CR} = \omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\mu^2} \end{cases}$$

Există mai multe posibilităţi de-a reprezenta viteza unghiulară sau pulsaţia instantanee la un moment dat, sau pentru un anumit unghi θ(t).

În figură sunt prezentate două cazuri pe cale geometrică şi unul pe cale analitică, pentru **CES** progresive (**P**)- culoarea albastră.

Direcţia radială centrică, de unghi θ, din O(0,0), intersecteaza cercul de raza $e_\omega = \omega_\mu\sqrt{2}$ într-un punct, prin care, ducând o direcţie orizontală, ea este segmentată în pulsaţia ω_P de axa Y şi de cercul de raza ω_M.

Aceeaşi direcţie radială centrică, intersectează curba polară $\omega_P(\theta)$ la o lungime din O egală, evident, cu ω_P şi constitue varianta analitică de determinare a pulsaţiei instantanee pentru comparaţie şi verificare.

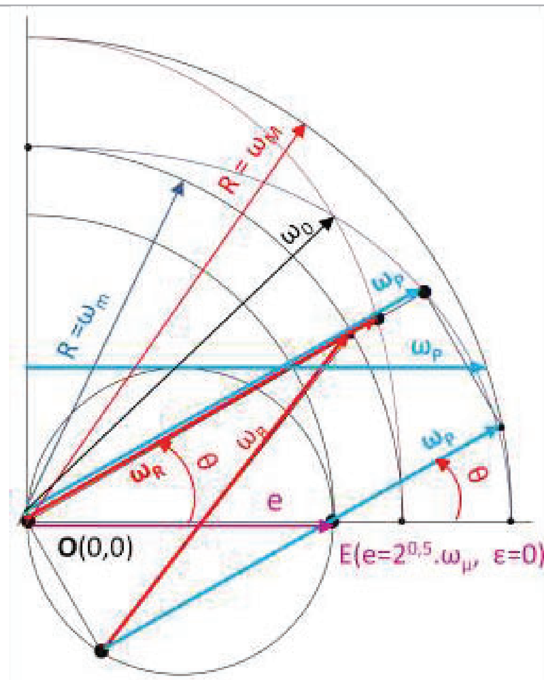


Fig. 11.25 Cercul pulsaţiilor SVNL fazoriale de tip **Duffing,** neamortizate, libere, al **CES progresive (P) şi regresive (R)**

A treia variantă consistă într-un segment de dreaptă, paralelă cu direcţia radială centrică, dar dusă dintr-un punct $F_\omega(\rho = e_\omega \,.\, \sin\theta, \frac{\pi}{2} - \theta)$, de pe cercul de diametru egal cu excentricitatea e_ω, care trece prin O(0,0) şi a cărui raxă polară din O(0,0) este $e_\omega \,.\, \sin\theta$. Această direcţie intersectează cercul de rază $R = \omega_M$ în punctul $P_M(\rho = \omega_M, \alpha = \theta - \beta(\theta) = \theta - \arcsin(\frac{e\omega \,.\sin\theta}{\omega M}))$.

Segmentul de dreaptă F_ω P_M reprezintă, la scară, aşa cum se poate verifica, mărimea $\omega_P(\theta)$. In desen, s-a ales $\theta = \frac{\pi}{6} \equiv 30^0$ şi s-au păstrat datele utilizate şi în **figura 11.22**, adică : $\omega_0 = 1{,}2$; $\omega_\mu = 0{,}6$; $e_\omega = \sqrt{2}$. $\omega_\mu = 0{,}848528$, $\omega_M = 1{,}34164$ $\omega_m = 1{,}03923$ şi $\omega_0 = 1{,}2$.

Pentru **CES** regresive (R), slabe sau moi, sunt prezentate numai două variante. Una grafică si una analitică, prin exprimarea pulsaţiei instantanee ω_R în coordonate polare.

În acest caz, exprimarea grafică a pulsaţiei instantanee este dată de segmentul de dreaptă de la F_ω la punctul P_m, de intersecţie a direcţiei radiale centrice de unghi θ cu cercul de rază $R = \omega_m$. Se verifică imediat că

(11.143) $$\omega(\theta)_R = \sqrt{\omega_m^2 + 2\omega_\mu^2 sin^2\theta} = \sqrt{\omega_m^2 + e_\omega^2 sin^2\theta}.$$

În **figura 11.25** prezentarea, în mai multe moduri a pulsaţiei instantanee, s-a făcut în ideea verificării facile a pulsaţiei instantanee prezentate.

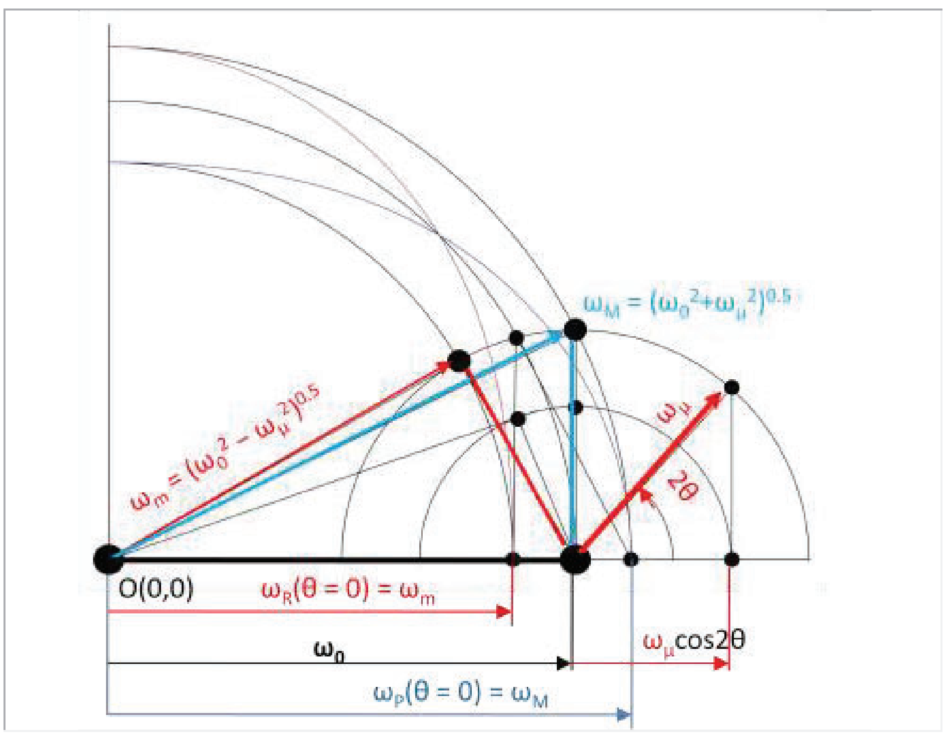


Fig. 11.26 Cercul pulsaţiilor **SVNL** fazoriale **P** şi **R** . Varianta a 2-a

Se poate deduce, imediat şi fără dificultate, că segmentul F_ω P_M reprezintă, în triunghiul dreptunghic de ipotenuză ω_M şi unghiul drept în punctul F_ω, o catetă exprimată de relaţia

(11.144) $$\omega = \sqrt{\omega_M^2 - (e.sin\theta)^2} = \sqrt{\omega_M^2 - 2\omega_\mu^2 sin^2\theta}$$

Se ştie că

(11.145) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \rightarrow -2\sin^2\theta = \cos 2\theta - 1$

Dacă se consideră ω_M ca valoarea limită maximă a **CES** progresive (P), atunci înlocuind (11.124) în (11.113') rezultă

(11.145') $$\omega_P(\theta) = \sqrt{\omega_M^2 - 2\omega_\mu^2 sin^2\theta} = \sqrt{\omega_{MP}^2 - 2\omega_\mu^2 sin^2\theta} = =\omega_{MP}\sqrt{1 - k^2 sin^2\theta}$$ în care

(11.142') $$\omega_{MP} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_\mu^2},$$ $e = -2\,\omega_\mu < 0$ şi pulsaţiile vor fi:

(11.146) $$\omega_R = \omega_{mR}\sqrt{1 + e^2 sin^2\theta} = \begin{cases} \propto = 0 \rightarrow \omega(0) = \omega_m \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega\left(\frac{\pi}{4}\right) = \omega_0 \\ \alpha = \pi \rightarrow \omega(\pi/2) = \omega_M \end{cases},$$

aşa cum se observa şi în **figura 11.24** şi **11.26.**

Dacă, în cazul sistemelor cu **CES** liniară, pulsaţia instantanee **ω** este constantă şi, deci, egală cu pulsaţia proprie **Ω** şi cu pulsaţia **ω_0** din O(0,0), în cazul **SVNL** pulsaţia instantanee este variabilă aşa cum se arata în **figura 11.28** în coordonate polare.

Un alt cerc al pulsaţiilor (varianta a 2-a) este prezentat în **figura 11.26**. La intersecţia cercul de rază ω_0 cu axa x > 0 este plasat centrul cercul C_μ(ω_0, 0) de rază ω_μ. O rază vectoare, de direcţie 2θ, determină mărimea $\omega_\mu.\cos 2\theta$ care este şi raza unui cerc concentric cu C_μ şi care determină lungimea unor catete, care, cu ω_0 drept ipotenuză determină o a doua catetă ca ω_R şi cu ω_0 drept o a doua catetă determină pe ω_P ca ipotenuză.

Se observă imediat că pentru $2\theta = \pi/2 \rightarrow \theta = \pi/4 \rightarrow \cos 2\theta = 0$ şi $\omega_P(\pi/4) = \omega_R(\pi/4) = \omega_0$ aşa cum se vede clar din figură.

Iar pentru $2\theta = \pi \rightarrow \theta = \pi/2 \rightarrow \omega_P(\pi/2) = \omega_M$ şi $\omega_R(\pi/2) = \omega_m$.

Există multe alte posibilităţi de exprimare grafică a pulsaţiei instantanee în funcţie de unghiul θ(t).

11.10.4 VERIFICAREA GRAFICĂ A SOLUŢIILOR SVNL FAZORIALE

Verificarea soluţiilor este prezentată în **figura 11.27** . Din figură, rezultă clar că cei doi fazori, reprezentând forţa elastică redusă şi, respectiv, forţa de acceleraţie

redusă, sunt în permanenţă egali şi de semne contrare. În figură sunt reproduşi fazorii care alcătuesc cele două forţe, de acceleraţie şi elastică.
Deoarece, acestea sunt singurele forţe existente în sistem, rezultă că sistemul este în echilibru dinamic şi, ca urmare, soluţia preconizată este viabilă. Iar sistemul vibraţiilor neliniare, fazoriale, libere, este unul original, cu posibilităţi nelimitate de extindere şi la alte **CES** polinomiale, şi nu numai, şi de generalizare la sistemele neliniare, libere.

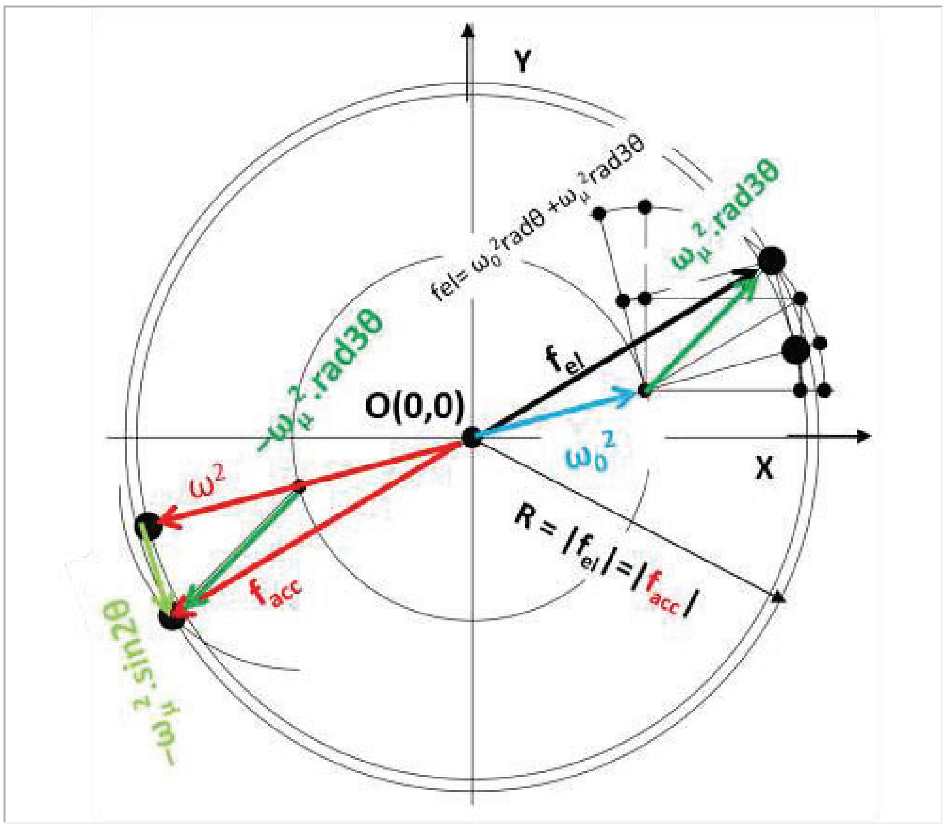


Fig. 11.27 Verificarea grafică a soluţiei r = A.radθ pentru **CES** progresiva (P), A = 1

Graficele pulsaţiilor instantanee sunt prezentate, în coordonate polare, şi în figura **11.28**. În partea superioară, sunt prezentate, separat, pulsaţiile instantanee pentru **CES** progresive (**P**) în stânga si ces regresive (**R**) în partea dreaptă.

În subsolul figurii, sunt prezentate, împreună, pulsaţiile instantanee ale **CES** progresive**(P)** şi regresive (**R),** pentru a ilustra modul armonios în care, cele două sisteme, se completează, fără să se suprapună.

Cercul, din centrul figurii, reprezintă sistemele vibrante liniare,care corespund coeficientului termenului pur neliniar $\mu = 0$.

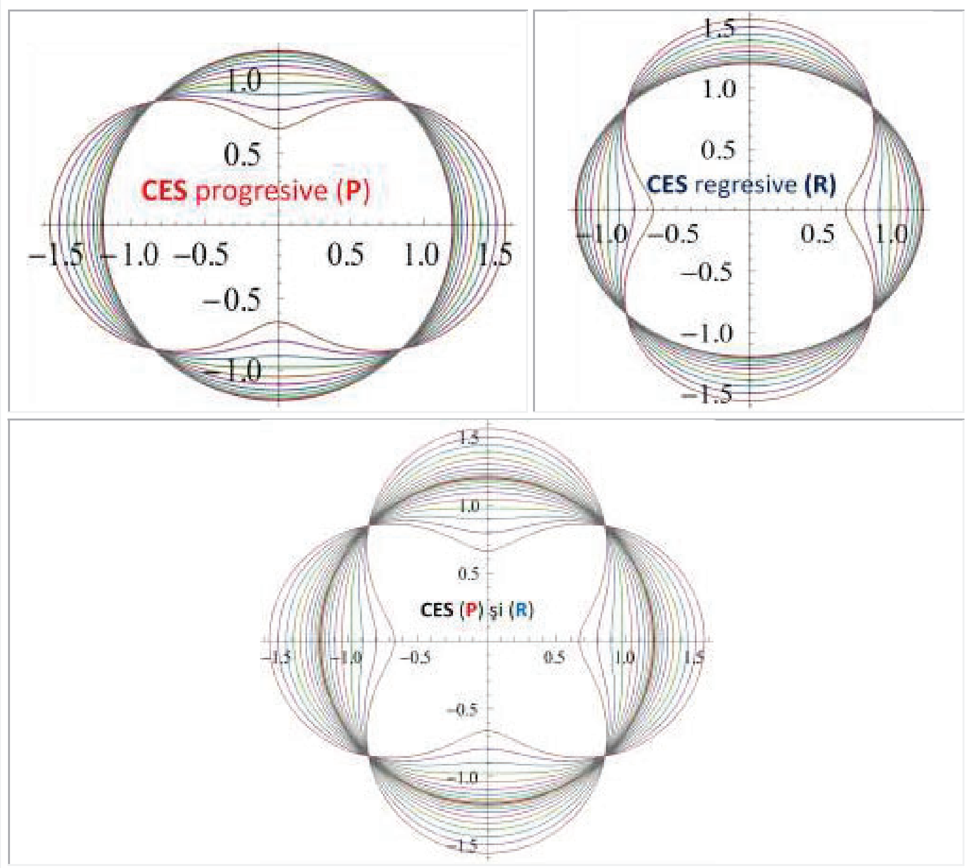


Fig. 11. 28 Pulsaţiile instantanee ale **SVNL** fazoriale în coordonate polare

11.10.5 FORŢA ELASTICĂ ŞI FORŢA DE ACCELERAŢIA ÎN COORDONATE POLARE

Aşa cum s-a putut constata, la verificarea analitică şi grafică a soluţiilor, cele două forţe sunt în permanenţă în echilibru dinamic, fiind egale şi de semne contrare.

Tabelul 11.1
E C U A Ţ I A   D I F E R E N Ţ I A L Ă   F A Z O R I A L Ă   A   S V N L
F($\vec{r}$) ≡ m $\ddot{\vec{r}}$ +$k_0\vec{r} \pm \mu\vec{r}^3$ = 0 / : m → f($\vec{r}$) ≡ $\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\,\vec{r} \pm \frac{\mu}{m}\,\vec{r}^3 = 0$ $\lVert\vec{r}\rVert = A$ $\vec{r}^2 = \lVert\vec{r}\rVert.\lVert\vec{r}\rVert.cos0^0 = A^2$ $\vec{r}^3 = \vec{r}^2.\vec{r} = A^2.\vec{r}$,   f($\vec{r}$) ≡ $\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\,\vec{r} \pm \frac{\mu}{m}\,A^2\vec{r} = 0$,   f($\vec{r}$) ≡ $\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\,\vec{r} \pm \omega_\mu^2\vec{r} = 0$
N O T A Ţ I I
$\omega_0^2 = \frac{k_0}{m}$, $\omega_\mu^2 = \frac{\mu}{m}A^2$
U N G H I U L   D E   P O Z I Ţ I E   Ş I   D E R I V A T E L E   L U I
$\theta = \int_0^t \omega.dt$ → $\dot{\theta} = \omega$, $\epsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$
E L O N G A Ţ I A
$\vec{r} = A\,rad\theta \rightarrow$
$\vec{r}^3 = A^3(rad\theta)^3 = A^3 rad3\theta$
f($\vec{r}$) ≡ $\ddot{\vec{r}} + (\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2\,)\mathrm{A.rad\theta} = 0$
V I T E Z A
$\dot{\vec{r}}$ =A.ω.derθ
A C C E L E R A Ţ I A
$\ddot{\vec{r}}$ = A($\epsilon.der\theta - \omega^2 rad\theta$)
I N T R O D U C E R E A   S O L U Ţ I I L O R   **Î N   E C U A Ţ I A   D I F E R E N Ţ I A L Ă**
A($\epsilon.der\theta - \omega^2 rad\theta) + \omega_0^2 A.rad\theta$ $\pm\,\omega_\mu^2$ A.$rad3\theta$ = 0 / : A
rad3$\theta = rad(\theta + 2\theta)$ = radθ cos2θ + derθ.sin2θ
$(\epsilon.der\theta - \omega^2 rad\theta) + \omega_0^2 rad\theta$ $\pm\,\omega_\mu^2$ [radθ cos2θ + derθ. sin2θ] = 0

Reprezentate în coordonate polare, în **figura 11.29**, se observă că fiecare curbă polară, în parte, din familia de curbe din figură, este simetrică faţă de originea O(0,0), ceea ce demonstrează încă odată, dacă acest lucru mai era necesar, egalitatea celor doua forţe reduse.

Cele două forţe reduse sunt proiectate pe direcţia radială centrică, a fazorului radθ, pentru forţa elastică şi – rad θ pentru componenta radială centrică a forţei de acceleraţie

Tabelul 11.1 Continuare
O R D O N A R E A   D U P Ă   F A Z O R I I   radθ şi derθ
radθ $[\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 \cos 2\theta - \omega^2]$ +   **der*θ*** $[\epsilon \pm \omega_\mu^2 \sin 2\theta] = 0$ →
$\begin{cases} \omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 \cos 2\theta - \omega^2 = 0 \\ \epsilon \pm \omega_\mu^2 \sin 2\theta = 0 \end{cases}$ →
V I T E Z A   U N G H I U L A R Ă sau P U L S A Ţ I A I N S T A N T A N E E
$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 \cos 2\theta$ $\omega^2 = \omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 (1 - 2\sin^2\theta) = \omega_L^2 \mp \omega_\mu^2 \sin^2\theta$
$\omega_L^2 = \omega_0^2 \pm \omega_\mu^2$
$k^2 = 2\dfrac{\omega_\mu^2}{\omega_L^2}$
$\omega = \omega_{M.} del(\theta, s = k) = \omega_M \sqrt{1 \mp k^2 \sin^2\theta}$
A C C E L E R A Ţ I A   U N G H I U L A R Ă
$\varepsilon = \mp \omega_\mu^2 \sin 2\theta = \mp \omega_\mu^2 \sin\theta.\cos\Theta = \mp\omega_\mu^2 \sin 2\theta$
V E R I F I C A R E A   S O L U Ț I I L O R
$\ddot{\vec{r}}$ = A($\mp \omega_\mu^2 \sin 2\theta . der\theta - (\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 \cos 2\theta) rad\theta$) $\ddot{\vec{r}}$ = -A[$\omega_0^2 rad\theta \pm \omega_\mu^2$ (radθ.cos2θ + derθ.sin2θ)] =   -A [$\omega_0^2 rad\theta \pm \omega_\mu^2\, rad3\theta$] = - [$\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2$)A. radθ = – f($\vec{r}$)
V E R I F I C A R E A G R A F I C Ă A S O L U Ț I I L O R   **→ V. Fig. 11.27**

(11.147) $\overrightarrow{f_{el}} = (\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 \cos 2\theta)$ radθ

(11.148) $\overrightarrow{f_{acc}} = -\omega^2$ radθ = $-(\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2 \cos 2\theta)$ radθ

Proiecţia acestor forţe, pe oricare alta direcţie radială centrică, stabileşte un echilibru între proiecţiile acestor forţe, inclusiv pe axele x şi y. De exemplu, proiecţia forţei de acceleraţie f_{acc} pe axa x este

(11.149) $\ddot{f_X} = -\omega^2 \cos\theta \pm \omega_\mu^2 \sin2\theta.\sin\theta =$

$= -\omega_0^2 \cos\theta \mp \omega_\mu^2 \cos2\theta.\cos\theta \pm \omega_\mu^2 \sin2\theta.\sin\theta =$

$= -\omega_0^2 \cos\theta \mp \omega_\mu^2(\cos2\theta.\cos\theta - \sin2\theta.\sin\theta) =$

$= -\left(\omega_0^2 \cos\theta \pm \omega_\mu^2 \cos3\theta\right) = -f_{elX}$,iar pe axa y este

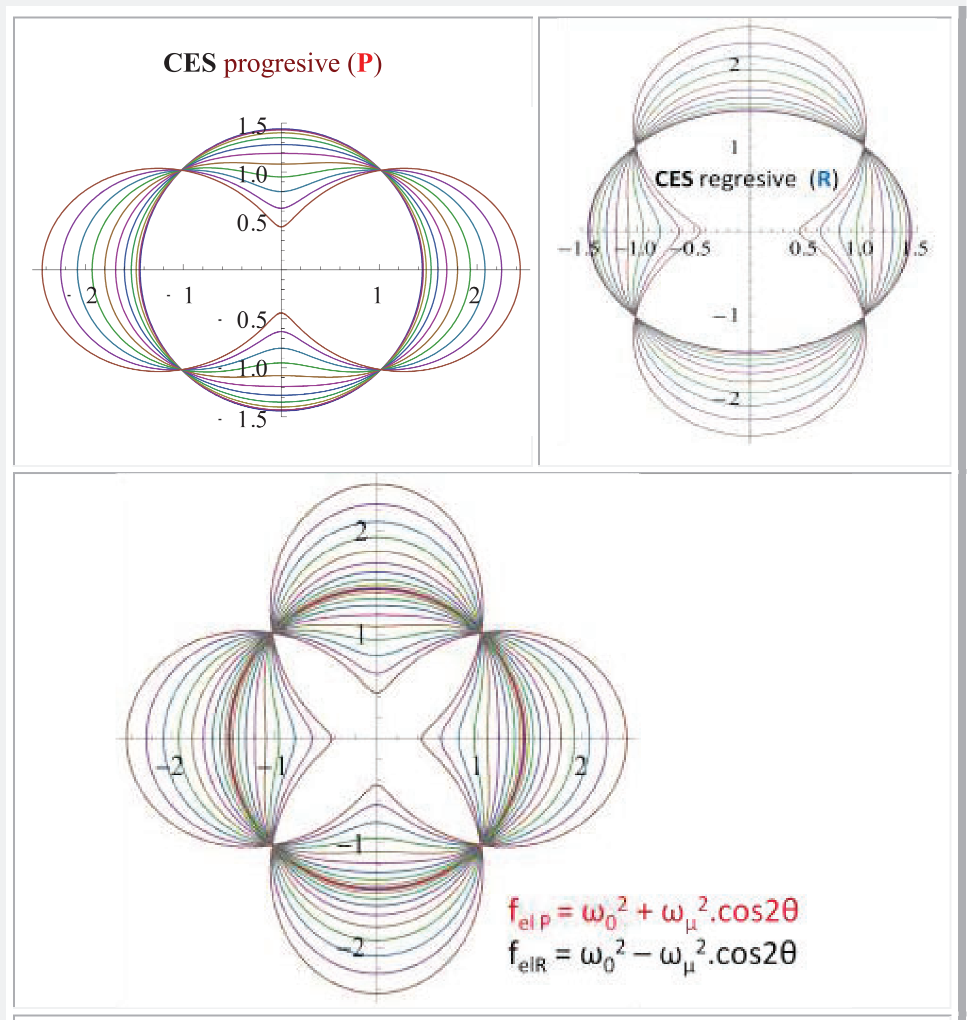


Fig.11.29 Componenta radială centrică a forţei elastice reduse şi a acceleraţiei **SVNL** fazoriale pe aceeaşi direcţie radθ şi, respectiv, − radθ

(11.150) $\ddot{f_Y} = -\omega^2 \sin\theta \mp \omega_\mu^2 \sin2\theta.\cos\theta =$

$= -\omega_0^2 \sin\theta \mp \omega_\mu^2 \cos2\theta.\sin\theta \mp \omega_\mu^2 \sin2\theta.\cos\theta =$

$$= -\omega_0^2\, sin\theta\ \mp \omega_\mu^2(cos2\theta.sin\theta + sin2\theta.cos\theta) =$$
$$= -\big(\,\omega_0^2\, cos\theta\ \pm \omega_\mu^2\, cos3\theta\big) = -f_{elY}$$

Atât în **figura 11.31** cât şi în **figura 11.30**, din partea inferioară, în care sunt suprapuse **CES** progresive şi **CES** regresive, se observă o dungă de culoare mai închisă în care sunt plasate graficele curbelor de neliniarităţi mai reduse, astfel că, în zona mijlocie se situează sistemul vibrant liniar de μ = 0.

Se observă că, în proiecţia pe axa Y, această forţă elastică liniară redusă variază sinusoidal (**Fig. 11.31**), iar in proiecţia pe axa X, variază cosinusoidal (**Fig. 11.30**). Adică, aşa cum se comportă un sistem liniar, la care, vectorul forţă redusă, de modul constant, se roteşte cu viteză unghiulară constantă ω_0, în acest caz, în jurul originii O(0,0).

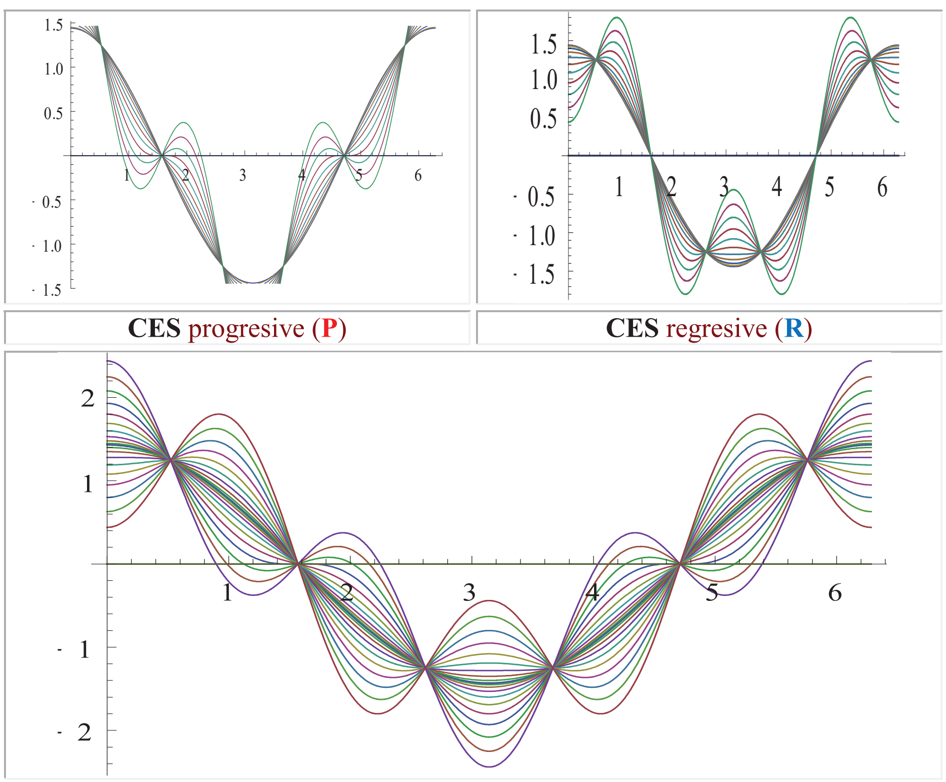


Fig.11.30 Forţa elastică proiectată pe axa X

11.10.6 CARACTERISTICILE ELASTICE STATICE ALE SVNL FAZORIALE

Prin reprezentarea parametrică a forţei elastice reduse şi a elongaţiie, adică

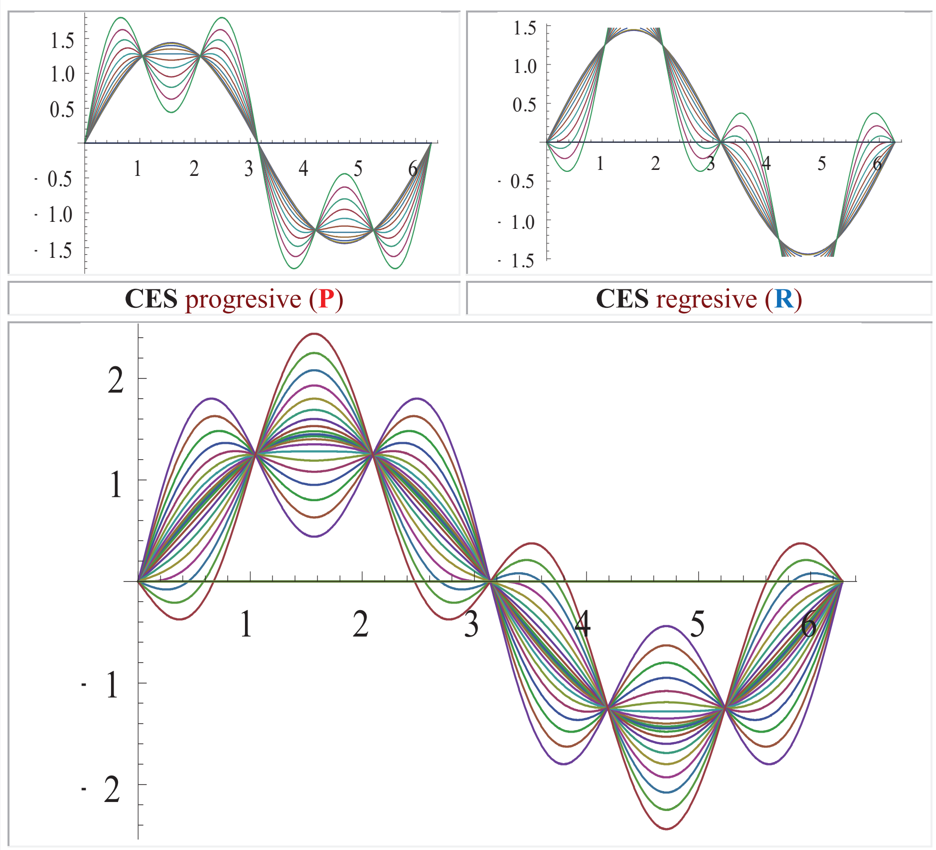
$$\begin{cases} x = A.\cos[\theta] \\ Fel(x) = A(\omega_0^2 \cos\theta + \omega_\mu^2 \cos 3\theta) \end{cases}, \tag{11.151}$$

pentru **CES** progresive (**P**) şi

$$\begin{cases} y = A.\sin\theta \\ Fel(Y) = A(\omega_0^2 \sin\theta - \omega_\mu^2 \sin 3\theta) \end{cases}, \tag{11.152}$$

pentru **CES** regresive (**R**) se obţin aceleaşi **CES** neliniare.

O observaţie, foarte importantă, se referă la faptul că indiferent de semnul **±** al lui **μ** şi $\boldsymbol{\omega_\mu}$, după care s-au catalogat **SVNL** fazoriale în progresive (P) şi în regresive (R), aşa cum rezultă din figurile prezentate, ambele tipuri sunt, în acest caz, progresive şi, prin inversarea proiecţtiilor, ambele tipuri devin regresive – în dreapta **figurii 11.32** şi **11.33**.



CES progresive (**P**) **CES** regresive (**R**)

Fig.11.31 Forţa elastică proiectată pe axa Y

BUPT

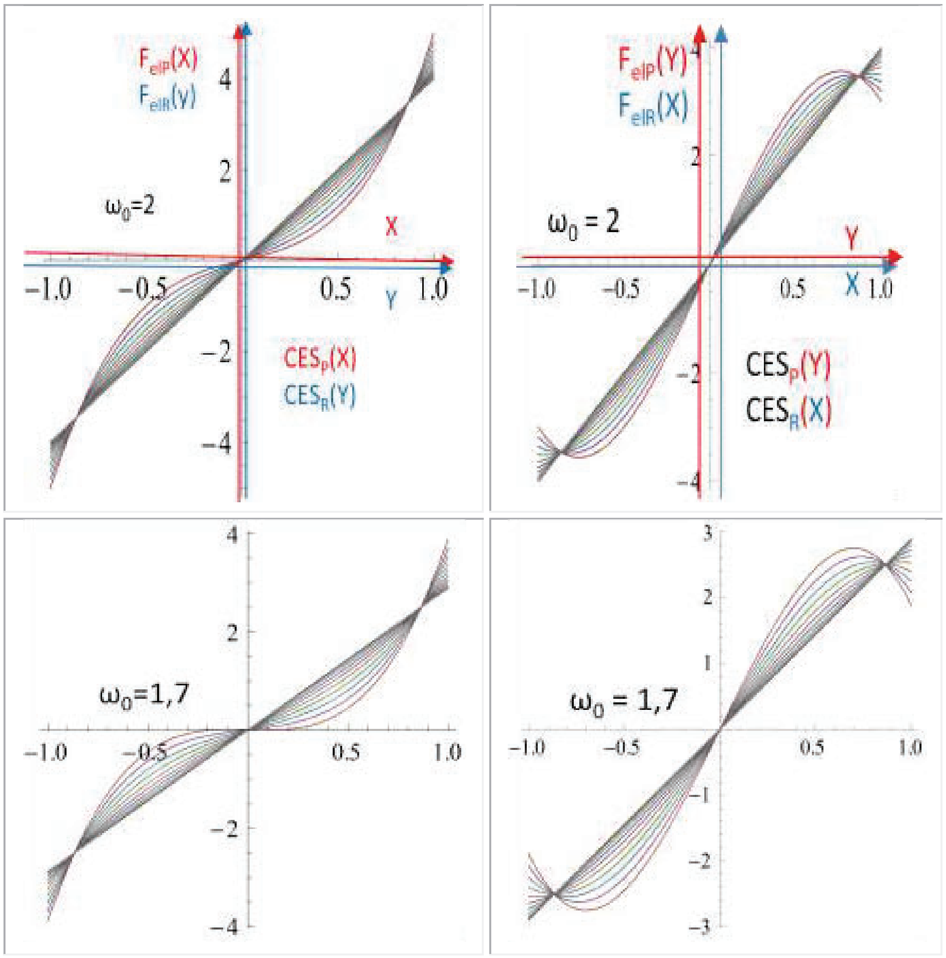


Fig. 11.32 Caracteristici elastice statice **CES** ale **VSNL** fazoriale pentru ω_0 = 1,7- jos- şi ω_0 = 2 –sus- cu $\omega_\mu \in [0,1]$

În stânga **figurii 11.32**, sunt prezentate **CES** neliniare **tari** descrise de ecuaţiile precedente, iar în dreapta, aceloraşi figuri, sunt prezentate **CES moi** descrise de ecuaţiile parametrice următoare, în care s-au inversat proiectiile pe axe: **CES** progresive – în funcţie de semnul termenului neliniar μ - sunt proiectate de axa Y şi cele, aşa-zise regresive (R), pe axa X.

(11.153) $\begin{cases} y = A.sin\theta \\ Fel(Y) = A(\omega_0^2\, sin\theta + \omega_\mu^2 sin3\theta) \end{cases}$, pentru **CES** progresive (**P**) şi

(11.154) $$\begin{cases} x = A.\cos[\theta] \\ Fel(x) = A(\omega_0^2 \cos\theta - \omega_\mu^2 \cos 3\theta) \end{cases}$$, pentru **CES** regresive (**R**).

Fenomenul descris anterior este general. Orice curbă Y(X) considerată o **CES** progresivă sau regresivă prin inversare, adică curba X(Y), fiind simetrică faţă de prima bisectoare îşi schimbă caracterul din progresivă devine regresivă şi invers, dacă a fost regresivă devine progresivă.

Din figurile anterioare, se observă că pentru **CES** moi sau regresive, la neliniarităţi puternice, (ω_μ ↗ faţă de valoarea lui ω_0), apar rigidităţi negative la valori mai ridicate ale elongaţiei/amplitudinii: zonele în care tangentele la **CES** sunt de pantă negativă (coeficientul unghiular al tangentei $m < 0$).

La **CES** progresive (v. **Fig. 11.33**- stânga- cu ω_0 =1,2), rigidităţile negative apar la valorile reduse ale elongaţiei, în apropierea originii şi nu apar dacă valoarea lui ω_0 este ridicată, faţă de valoarea lui ω_μ, aşa cum se prezintă situaţiile în figura **11.32** – stânga - cu $\omega_0 > 1,2$.

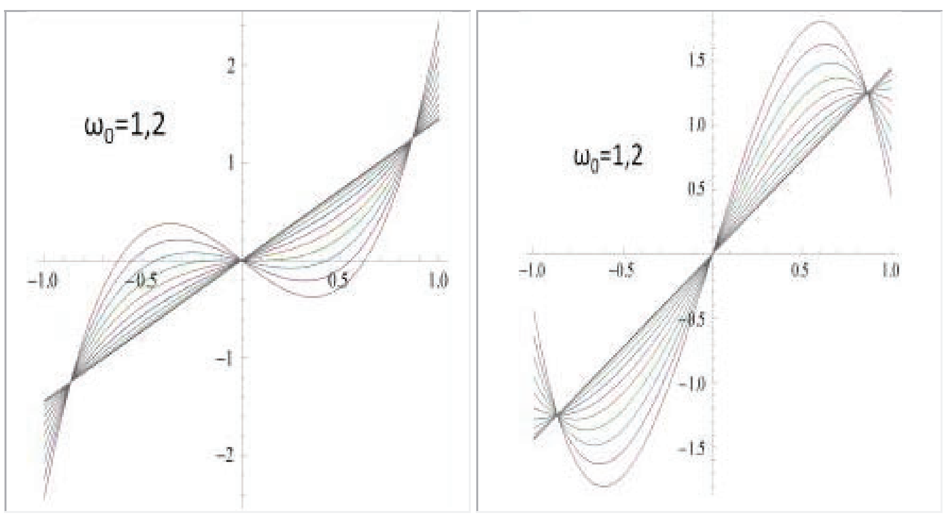
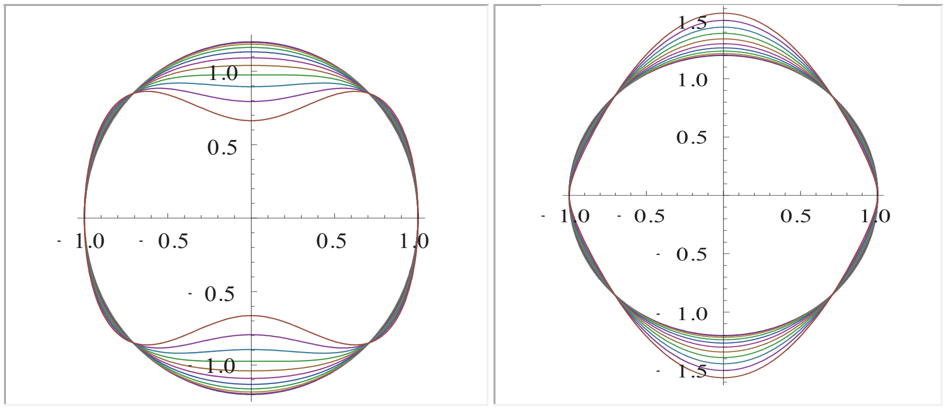


Fig. 11.33 Caracteristici elastice statice **CES** ale **VSNL** fazoriale pentru $\omega_0 = 1,2$ cu $\omega_\mu \in [0,1]$

11.10.7 CURBE INTEGRALE ÎN PLANUL FAZELOR

Din figura **11.34**, în care sunt prezentate curbele integrale din planul fazelor, ale vitezei în funcţie de elongaţie X'(X) şi Y'(Y), se observă că, zonele cu rigiditate negativă, sunt despărţite de cele cu rigiditate pozitivă printr-un punct de intersecţie a curbelor.

Pentru $\mu = 0$, **CES** este liniară şi se obţine o elipsă în planul fazelor.

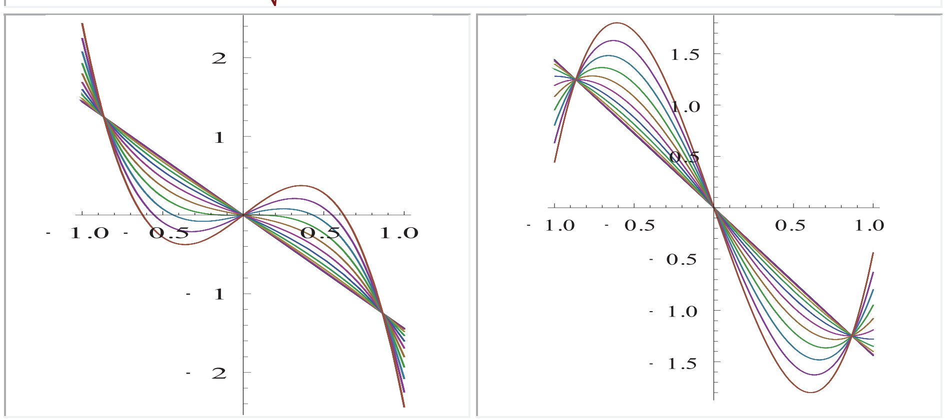


$\begin{cases} x_P = A.cos\theta \\ x'_P = -\,A.\omega.sin\theta \end{cases}$ şi $\begin{cases} y_R = A.sin\theta \\ y'_R = A.\omega.cos\theta \end{cases}$

$\begin{cases} y_R = A.cos\theta \\ y'_R = -A.\omega.sin\theta \end{cases}$ şi $\begin{cases} y_P = A.sin\theta \\ y'_P = A.\omega.cos\theta \end{cases}$

Fig. 11.34 **SVNL** fazoriale. Curbe integrale în planul fazelor $\dot{z}(z)$

Pentru $\omega = \sqrt{\omega_0^2 \pm \omega_\mu^2.cos2\theta}$ cu A = 1, ω_0 = 1,2 şi $\omega_\mu \in [0, 1]$



$\begin{cases} x_P = A.cos\theta \\ x''_P = -A(\epsilon_P.sin\theta - \omega^2.cos\theta) \end{cases}$

$\begin{cases} x_R = A.cos\theta \\ x''_R = -A(\epsilon_R.sin\theta + \omega^2.cos\theta) \end{cases}$

$\begin{cases} x_R = A.sin\theta \\ x''_R = -A(\epsilon_R.cos\theta - \omega^2.sin\theta) \end{cases}$

$\begin{cases} x_P = A.sin\theta \\ x''_P = -A(\epsilon.cos\theta + \omega^2.sin\theta) \end{cases}$

Fig. 11.35 Acceleraţiile **SVNL** fazoriale în funcţie de elongaţie

Pentru A = 1, $\epsilon_{P,R} = \mp\omega_\mu^2.sin2\theta$ cu $\omega_\mu \in [0, 1]$

Acceleraţiile **SVNL** fazoriale în funcţie de elongaţie sunt prezentate în **figura 11.35**. Comparând aceste grafice, cu cele ale **CES** din **figura 11.33**, se observă că unele sunt simetricele celorlalte faţă de axa x. Este încă o dovadă, în plus, că soluţiile atribuite **SVNL** fazoriale sunt valabile şi descriu un sistem aflat în permanenţă în echilibru dinamic.

Cazul **SVNL** de tip **Duffing**, în care **z, ż, z̈** nu mai sunt fazori, ci sunt mărimi scalare, nu diferă în esenţă prea mult de cazul anterior studiat şi va fi prezentat în continuare.

Acest caz, de vibraţii libere, neamortizate, este unul din cele mai studiate cazuri de acest fel din literatura de specialitate.

De aceea, considerăm că posibilitatea simplificarii studiului acestora, graţie noilor complimente de matematică, reunite sub denumirea de **supermatematică**, nu este lipsită de interes. Cu atât mai mult cu cât ***nu se folosesc metode aproximative***, ci ***metode exacte*** care verifică identic ecuaţia diferenţială a lui **Duffing**, fără membrul drept.

11.10.8 DETERMINAREA PULSAŢIILOR SISTEMELOR OSCILANTE LIBERE, CONSERVATIVE CU CARACTERISTICĂ ELASTICĂ(CES) NELINIARĂ DE TIP DUFFING

Metoda a fost prezentată de autor la prima Conferinţă de "Vibraţii în construcţia de maşini" din Timişoara, în anul 1975 şi este publicată în lucrările acesteia.

Se consideră simultan, în paralel, trei sisteme oscilante conservative, având aceeaşi masă **m**, aceeaşi amplitudine **A** şi aceeaşi perioadă **T** de oscilaţie. Şi, ca urmare, aceeşi pulsaţie proprie **Ω,** sau viteză unghiulată de rotaţie a unui punct reprezentativ **M** pe cercul **C**[O(0,0), R =A] ale cărui proiecţii, pe oricare dintre axele x şi/sau y, reproduc mişcările celor trei sisteme. Primele două sisteme, pentru comparaţie şi ultimul pentru exemplificarea metodei.

Primulul (**SLE**) are caracteristica elastică statică (**CES**) liniară (Fig. **11.36**)

(11.155) $F_L = K.x$,

în care K = constant este panta dreptei ce reprezinta **CES** liniară.

Al doilea sistem, neliniar (**SNL**), are **CES** reprezentată de funcţia / curba (mai precis: **excentra** → v.§. 9.3.1 Introducerea noţiunii de strambă in matematică),

(11.156) $F_N = F(x)$

excentră simetrică faţă de originea O(0,0).

Pentru exemplificare se mai consideră un al treilea sistem vibrant (**SND**) de **CES** a **SVNL** de tip **Duffing** având forţa elastică exprimată de relaţia

$F(z) = k_0 x - \mu.x^3$

Constanta elastică **K** a sistemului liniar echivalent (**SLE**) se alege astfel, încât, cele două mase identice **m,** pornind simultan la timpul $\mathbf{t_0 = 0}$ din poziţia $\mathbf{z_0 = A}$, să ajungă simultan, dupa un sfert de perioadă, **t = T/4**, în poziţia **z(T/4) = 0.**

Ca urmare, pulsaţiile proprii, sau viteza unghiulară constanta **Ω** pentru sistemul liniar şi viteză unghiulară medie **Ω,** care se consideră pulsaţie proprie a **SNL**, ale primelor două sisteme să fie egale între ele.

Pulsaţia proprie constantă a sistemului liniar este, după cum se ştie, arhicunoscuta relaţie

(11.157) $$\boldsymbol{\Omega} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{m}}},$$

iar sistemul oscilant liniar este denumit **echivalent** sistemului neliniar de mase **m**, amplitudini **A** şi pulsaţii propri **Ω** egale.

Ecuaţiile diferenţiale ale mişcărilor pentru cele trei sisteme sunt

(11.158) $$\begin{cases} \boldsymbol{SLE}: & m\ddot{x} + Kx = 0 \\ \boldsymbol{SNL}: & m\ddot{x} + F(x) = 0 \\ \boldsymbol{SND}: & m\ddot{x} + \ k_0 x - \mu x^3 = 0 \end{cases}$$

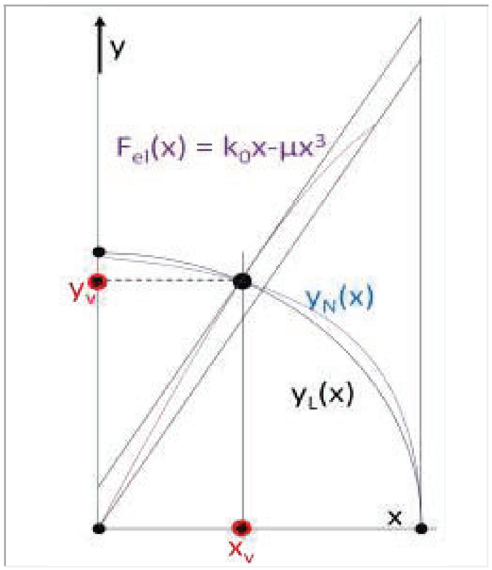


Fig. 11.36 Forţele elastice ale sistemelor neliniare (**SNL**) şi liniare echivalente (**SLE**) precum şi vitezele lor în funcţie de deplasarea x

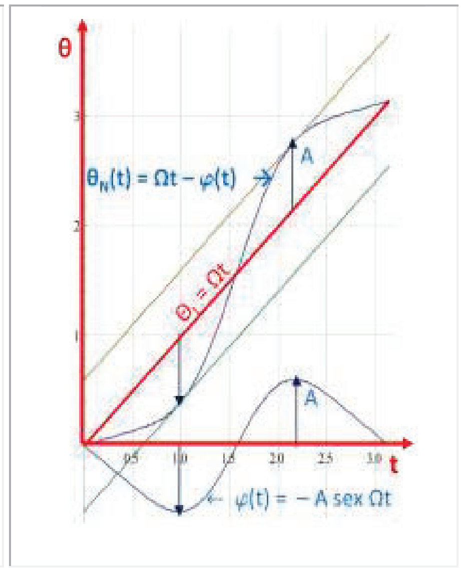


Fig. 11.37 Variabilele unghiulare ale **SNL** (**θ_N**) şi **SLE** (**θ_L**) ca funcţii de timpul t

Pentru sistemul liniar (**SLE**), cu condiţiile iniţiale amintite, lege de mişcare sau elongaţia, viteza şi accelerţia pot fi

(11.159) **SLE:** $$\begin{cases} x = A.\cos\theta = A.\cos\Omega t \\ \dot{x} = -A\,\Omega \sin\theta = -A\sin\Omega t = -\Omega\sqrt{A^2 - x^2} = -\Omega.y \\ \ddot{x} = -A\,\Omega^2 \cos\theta = -A\,\Omega^2 \cos\Omega t = -\Omega^2 x \end{cases}$$

Acceleraţia **SLE,** exprimată în funcţie de deplasarea x, verifică identic nul ecuaţia diferenţiala liniară a **SLE** din (11.158)

În mod analog, acceleraţia sistemului neliniar (**SNL**) trebuie să poată să se exprime în funcţie de deplasarea x şi, sub această formă, să verifice identic ecuaţia sa diferenţială **SNL** din (11.158).

Forţa elastică F(x), fiind o funcţie de deplasarea x se poate exprima şi sub forma

(11.160) $F(x) = k_a(x).x$,

în care rigiditatea variabilă $k_a(x)$, în funcţie de x, are expresia

(11.161) $k_a(x) = F(x)/x$

şi reprezintă **rigiditatea locală** sau, cum este cunoscută în literatură [**Gheorghiu, Al**. "Concepţii moderne în calculul structurilor", Ed. Tehnică, Buc. 1966], **rigiditatea secantă**.

Împărţind această rigiditate, cu masa **m,** obţinem pătratul pulsaţiei variabile sau instantanee a acceleraţie care se va nota cu $\boldsymbol{\omega_a}$

(11. 162) $\omega_a^2(x) = \frac{k_a(x)}{m} = \frac{F(x)}{m.x} \rightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{k_a(x)}{m}} = \sqrt{\frac{F(x)}{m.x}}$

Înlocuind expresia forţei elastice, ca funcţie de deplasarea x (11.160), în ecuaţia diferenţială (11.158), se obţine expresia acceleraţiei **SNL** ca funcţie de deplasare

(11.163) $\ddot{x}(x) = -\,\omega_a^2\,(x).x$

Pentru exemplul considerat, rezultă

(11.164) $k_a = k_0 - \mu.x^2$

şi pulsaţia instantanee a acceleraţiei

(11.165) $\omega_a^2 = \frac{k_0}{m} - \frac{\mu}{m}\,x^2 = \omega_0^2 - \frac{\mu}{m}x^2 \rightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{k_0}{m} - \frac{\mu}{m}\,x^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu}{m}x^2}$

Expresia vitezei **SNL** $\dot{x}(x)$ se poate determina pornind de la ecuaţia diferenţială (11.158) sau prin integrarea acceleraţiei **SNL** (11.163). Se obţine aceeaşi expresie a vitezei **SNL** în funcţie de deplasarea x sub formele

(11. 166) $\dot{x}^2(x) = 2\int_x^A \omega_a^2(x).x.dx = \frac{2}{m}\int_x^A F(x).dx$

care pot fi scrise şi sub formele

(11.167) $\dot{x}^2(x) = \omega_v^2(x)(A^2 - x^2\,) = \omega_v^2(x).y^2$, în care

(11.168) $\omega_v^2(x) = \frac{\dot{x}^2(x)}{A^2-x^2} = [\frac{\dot{x}\,(x)}{y}]^2$

reprezintă pulsaţia instantanee a vitezei **SNL** în funcţie de deplasarea x.

Din a treia relaţie (11.159) rezultă

(11.169) $y^2 = \left[\frac{\dot{x}}{\Omega}\right]^2$

în care $y^2 = A^2 - x^2$ reprezintă ordonata traiectoriei de fază a **SLE**, traiectorie care este un cerc.

Prin egalarea relaţiilor anterioare, rezultă că pentru oricare $x \in [0, A]$ se respectă egalitatea

(11.170) $\frac{\dot{x}}{\Omega} = \frac{\dot{x}(x)}{\omega_v(x)}$ sau $\dot{x}(x) = \dot{x}\,\frac{\omega_v(x)}{\Omega}$

care reprezintă o dependenţă între vitezele **SLE** şi a **SNL** şi pulsaţiile vitezelor lor corespunzătoare.

Pentru exemplul considerat se obţine

(11.171) $$\dot{x}^2 = \frac{1}{m}[k_0(A^2 - x^2) - \frac{\mu}{2}(A^4 - x^4)] =$$
$$= [\omega_0^2 - \frac{\mu}{2m}(A^2 + x^2)](A^2 - x^2) \text{ şi}$$

(11.172) $$\omega_v^2 = \omega_0^2 - \frac{\mu}{2m}(A^2 + x^2) \rightarrow \omega_v = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu}{2m}(A^2 + x^2)}$$

Viteza **SLE** variază în funcţie de deplasarea x după o elipsă care se intersectează cu curba de variaţie a vitezei **SNL** în funcţie de deplasarea x, în intervalul $x \in [0, A]$, în trei puncte, în care, deci, vitezele celor două sisteme sunt egale. Primul punct are abscisa x=A, în care vitezele sunt egale între ele şi egale cu zero. Celelalte două, sunt simetrice faţă de axa x şi au abscisa notată cu $x = x_v$ (**Fig. 11.36, 11.38** şi **11.39**).

Egalitatea vitezelor, cu semn pozitiv, se produce pentru deplasarea masei **m** de la x = 0 la x = A, iar egalitate lor, cu semn negativ, la sensul invers de deplasare. Rezultă că, în punctul $x = x_v$, pătratele vitezelor celor două sisteme, liniar şi neliniar, sunt egale, adică

(11.173) $$\dot{x}^2 = \dot{x}^2\,(x)$$

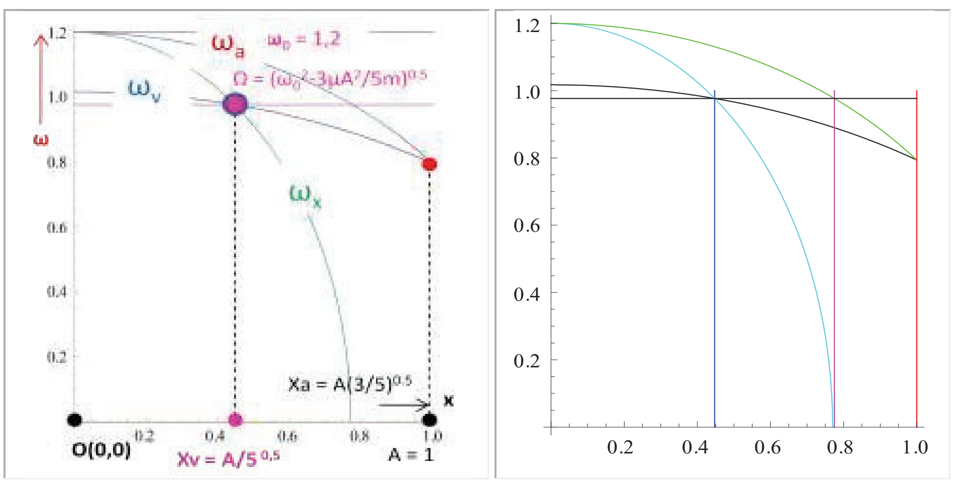


Fig. 11.38 Pulsaţiile instantanee ω_x, ω_v, ω_a şi intersecţia lui $\boldsymbol{\omega_x}$ cu $\boldsymbol{\omega_v}$ în punctul de abscisă x_v şi de ordonată egală cu pulsaţia proprie $\boldsymbol{\Omega}$ a **SN**.

$(\omega_0 = 1{,}2\ ;\ \mu\frac{A^2}{m} = 0{,}9\ ;\ A = 1)$

Egalând cele două viteze, exprimate de relaţiile (11.159), rezultă că, în x = x_v, funcţia $\omega_v^2(x)$ intersectează dreapta paralelă cu axa x, care exprimă constanţa pulsaţiei sistemului liniar (**Ω**) în funcţie de deplasarea x, adică

(11. 174) $\Omega^2 = \omega_v^2(x_v)$, cea ce rezultă şi din relaţia (11.170).

Notând cu $k_x(x)$ coeficientul unghiular al dreptei tangente la **CES** neliniară F(x), denumit în literatură **rigiditate locală** sau **rigiditate tangentă**, se obţine

(11.175) $k_x(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Împărţind (11.156) cu cu masa m se obţine pulsaţia

(11.176) $\omega_x^2(x) = \frac{k_x(x)}{m} = \frac{1}{m}\frac{dF(x)}{dx}$, denumită pulsaţie instantanee a deplasării x.

Pentru exemplul considerat, ea este

(11.177) $\omega_x^2(x) = \omega_0^2 - 3\frac{\mu}{m}x^2 \rightarrow \omega_x(x) = \sqrt{\omega_0^2 - 3\frac{\mu}{m}x^2}$

Cu ajutorul pulsaţiei instantanee a deplasării (11.176), forţa elastică F(x) se poate exprima prin

(11.178) $F(x) = \int_0^x \frac{dF}{dx}dx = m\int_0^x \omega_x^2 dx$, cu condiţiile iniţiale F(0) = 0.

Prin înlocuirea expresiei anterioare în relaţia (11.166) se obţine

(11.179) $\dot{x}^2(x) = 2\int_x^A (\int_0^x \omega_x^2(x)dx)\, dx$

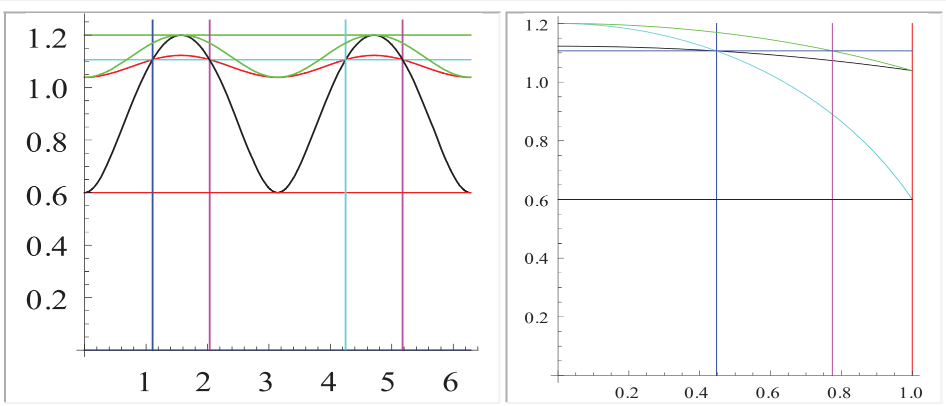


Fig. **11.39** Pulsaţii ca funcţii de θ – stânga- şi în funcţie de x –dreapta pentru A = m = 1; ω_0 = 1,2; μ = 0,6

În punctul în care $\omega_x(x)$ intersectează dreapta, care exprimă constanţa pulsaţiei (**Ω** = ct) a **SL,** se obţine

(11.180) $\omega_x(x_v) = \Omega$.

Considerând **CES** a **SNL** liniară pe porţiuni infinit mici dx, fiecare porţiune având pulsaţia ω_x (x, traiectoria acesteia y(x) în planul fazelor este o curbă închisă pentru care [v. Harris,C şi Crede,C.“Socuri şi vibratii “, Ed. Tehnicâ, Buc. 1968]

(11.181) $y^2(x) = (\frac{\dot{x}(x)}{\omega_v(x)})^2$

Egalând viteza **SNL** din relaţia anterioară (11.181), cu cea exprimată de relaţia (11.168) rezultă că, pentru oricare $x \in [0, A]$, se respectă egalitatea

(11.182) $y(x) = y\,\frac{\omega_v(x)}{\omega_x(x)}$

care reprezintă o dependenţă între ordonata traiectoriei de fază a **SNL** şi a **SLE** în funcţie de deplasarea x.

Intersectarea vitezei **SLE** cu a **SNL** în $x = x_v$ impune şi intersectarea traiectoriilor de fază ale celor două sistemela în acelaşi punct – abscisă şi ordonată - pentru care şi cele două ordonate ale celor două sisteme (Fig. **11.36** şi **11.38**), liniar şi neliniar, sunt egale, adică $y(x) = y$. Rezultă, pe de o parte, că

(11.183) $\omega_v(x_v) = \omega_x(x_v)$

şi, pe de altă parte, ţinând cont de relaţia (11.174) şi (11.180) că

(11.184) $\omega_v(x_v) = \Omega = \omega_x(x_v)$.

S-a demonstrat, în acest mod, că ordonata punctelor de intersecţie ale pulsaţiilor instantanee ale deplasării $\omega_v(x)$ cu ale vitezei $\omega_x(x)$ are valoarea pulsaţiei proprii **Ω** a **SLE** echivalent care este şi pulsaţia proprie a **SNL**.

În concluzie, metoda de determinare a pulsaţiei proprii **Ω** a unui **SNL** ca cel **SND - Dűffing**, constă în următoarele etape:

1) Determinarea pulsaţiilor instantanee ale deplasării $\omega_x(x)$, cu relaţia (11.176), precum şi a pulsaţiei instantanee a vitezei $\omega_v(x)$, cu relaţia (11.168);
2) Determinarea abscisei punctului de intersecţie a celor trei pulsaţii (11.184)
3) Determinarea relaţiei de calcul a pulsaţiei proprii Ω, prin introducerea valorii $x = x_v$ în una dintre relaţiile (11.174) sau (11.180).

Pentru exemplul considerat, egalând cele două pulsaţii instantanee, a deplasării (11.177) cu cea a vitezei (11.172), rezultă

(11.185) $x_v = \frac{A}{\sqrt{5}}$ pentru care, din (11.174) sau (11.180) se obţine

(11.186) $\boldsymbol{\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{3}{5}\frac{\mu}{m}A^2}}$

Pulsaţia instantanee a acceleraţiei devine egală cu pulsaţia proprie Ω, sau curba $y = \omega_a(x)$ se intersectează cu dreapta $y = \Omega = ct$, în punctul de abscisă

(11.187) $x_a = A\sqrt{\frac{3}{5}}$

în care acceleraţiile, sistemului neliniar (**SNL)** şi a celui liniar echivalent (**SLE**), sunt egale.

Aşa cum se poate observa în figura **11.39,** pulsaţia deplasării $\omega_v(x_v)$ şi pulsaţia vitezei $\omega_x(x_v)$ se intersecteaza la abscisa $x_v = \frac{A}{\sqrt{5}}$ ca funcţii de deplasare şi intersecţiile curbelor pulsaţiilor $\omega_v(\theta)$ cu $\omega_x(\theta)$

(11. 188) $\theta=\theta_v=\omega_v(\theta) \cap \omega_x(\theta) \rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{5} \rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \rightarrow \theta v = \arccos(\pm\sqrt{\frac{1}{5}})$

ca funcţii de θ, au loc la în punctele de pe cercul R = A, centrat în originea O(0,0) pentru valorile lui θ

(11.188') $\theta = \theta_v = \arc\cos x_v = \arc\cos \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{cases} 1{,}10715 \\ 2{,}03444 \end{cases} \pm n.\pi,\;$ n = 0, 1, 2, …

pentru A = m = 1, μ = 0,6 şi ω_0 = 1,2, valori adoptate în figură.

11.10.9 PULSAŢIA INSTANTANEE, CA VITEZĂ UNGHIULARĂ DE ROTAŢIE A PUNCTULUI M(θ,A) PE CERCUL DE RAZĂ R = A

În acest paragraf se va considera **SND-Duffing** şi ecuaţia diferenţială (11.111') a acestui sistem oscilant neliniar, liber şi neamortizat.

Expresia pulsaţiei instantanee a vitezei, ca funcţie de deplasarea x → ω_v(x), a acestui **SND** este dată de relaţia (11.172).

Se va demonstra în continuare că

(11.188) x = cosθ(t)

este o soluţie exactă a ecuaţiei de mişcare (11.111'), dacă şi numai dacă

(11.189) $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega(t) = \omega_v(t)$

şi relaţia de dependenţa lui $\omega_v = \omega_v(x)$ este cea dată de relaţia (11.170).

Introducând (11.188) în (11.172) pulsaţia instantanee şi, acum, viteza unghiulară $\omega_v(\theta)$ poate fi adusă la forma

(11.190) $\omega\big(\theta(t)\big) = \sqrt{\omega_c^2 - \frac{\mu a^2}{4m} cos2\theta},$

relaţie asemănătoare, ca formă şi prin prezenţa funcţiei circulare centrice(**CC)** cosinus de arc dublu ($cos2\theta$), cu relaţia vitezei unghiulare de la **SNLD** fazoriale.

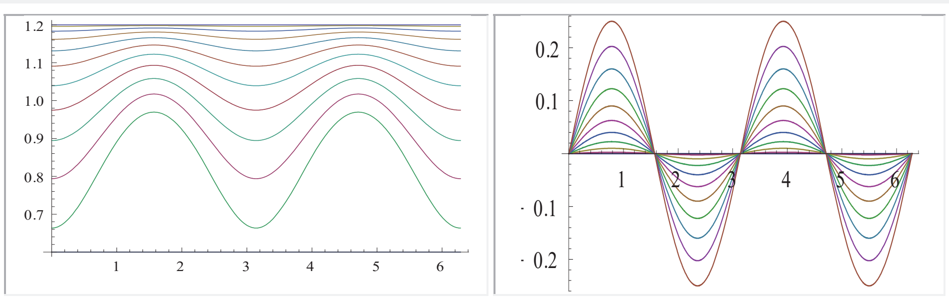


Fig. 11.39 Vitezele unghiulare ω_v şi acceleraţiile unghiulare ϵ ale **SNDűffing** pentru A = 1, ω_0 = 1,2 şi $\frac{\mu}{m} \in [0, 1]$

În relaţia anterioară s-a notat cu

(11.191) $\omega_C^2 = \omega_0^2 - \frac{3}{4}\frac{\mu}{m}A^2 \quad \rightarrow \quad \omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{3}{4}\frac{\mu}{m}A^2}$

pulsaţia denumită **pulsaţie de calcul $\boldsymbol{\omega_C}$.**

Este interesant faptul că, majoritatea metodelor aproximative, de determinare a pulsaţiei proprii a sistemelor neliniare, dau expresia pulsaţiei de calcul (11.191), în jurul căreie oscilează valorile pulsaţiei instantanee (v. 11.190), ca pulsaţie proprie a acestor sisteme.

Funcţia

(11.192) $\theta(t) = \int_0^t \omega(t)dt$

reprezintă unghiul de poziţie al punctului M(θ,A), pe cercul C[O(0,0), R=A], de rază R=A, centrat în originea O(0,0), la momentul t.

Pentru simplificarea scrierii relaţiilor care urmează, determinarea explicită a funcţiei θ(t) se va realiza în finalul acestui paragraf.

Prin derivarea soluţiei (11.188) şi ţinând cont de relaţia (11.192), se obţin viteza şi acceleraţia **SVNL Duffing** ecuaţii identice, ca formă, cu cele ale **SVNL** fazoriale:

(11.193) $$\begin{cases} x = A.cos\theta(t) \\ \dot{x} = -A.\omega.sin\theta(t) \\ \ddot{x} = -A(\epsilon.sin\theta(t) + \omega^2(t).cos\theta(t)) \end{cases}$$

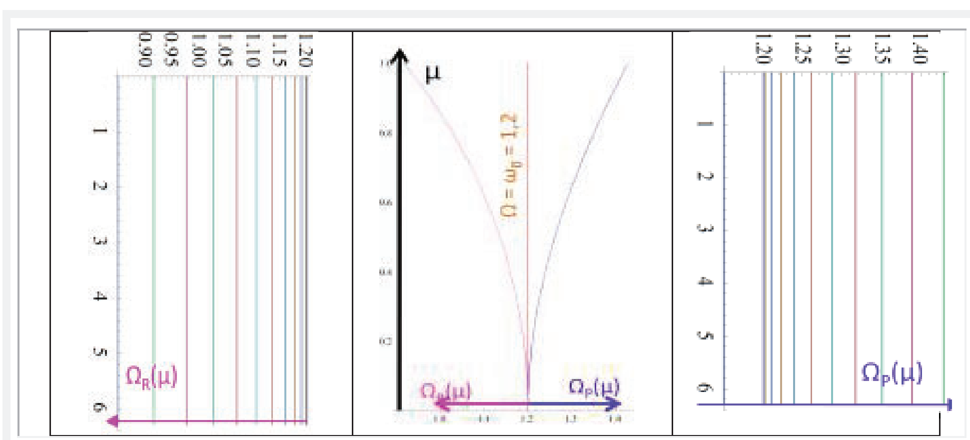


Fig. 11.40 Variaţia pulsaţiei proprii Ω(**μ**) a **SND** pentru **μ** ∈ [0, 1], A = 1 şi ω_0 = 1,2

În relaţiile anterioare, acceleraţia unghiulară ϵ [θ(t)] este

(11.194) $\epsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}(t)$

şi expresia ei se obţine prin derivarea lui ω_v din (11.172) sau (11.190), adică

(11.195) $\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{d(\omega^2)}{d\theta}$ şi rezultă

(11.196) $\epsilon = \frac{1}{2}\frac{\mu}{m} A^2 cos\theta . sin\theta = \frac{\mu A^2}{4.m} sin2\theta$

relaţie, ca şi cea a vitezei unghiulare ω_v, asemanătoare cu cea de la **SVNL** fazoriale; diferenţa fiind dată de constanta ¼ faţă de 1 de al **SVNL** fazoriale, ceea ce arată că acceleraţia unghiulară, în acest caz, este de 4 ori mai mica decât în cazul **SVNL** fazoriale.

Înlocuind în expresia acceleraţiei din (11.193), expresile obţinute pentru ϵ şi ω rezultă acceleraţia

(11.197) $\ddot{x} = -(A.\omega_v^2 \; cos\theta \; - \frac{\mu}{m} \; A^3 cos \; ^3\theta)$

în care, înlocuind expresia lui ω(θ) din (11.192) rezultă

(11.198) $\ddot{x} = -\left(\omega_0^2 x - \frac{\mu}{m} \; x^3\right) = -\frac{F(x)}{m}$

Se observă că acceleraţia, astfel obţinută, verifică identic ecuaţia diferenţială a **SND**

(11.199) $m\ddot{x} + k_0 x - \mu x^3 = 0$

sau impărţind ecuaţia cu masa **m** > 0, constantă, rezultă

(11.199’) $\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\mu}{m} x^3 = 0$

S-a demonstrat, astfel, că soluţiile preconizate pentru ω, x, $\dot{x}$ şi $\ddot{x}$ sunt viabile şi sunt soluţii care verifică exact **SNL Duffing**, libere, neamortizate, iar acceleraţia unghiulară ϵ este derivata vitezei unghiulare $\omega_v(x)$, pentru că ea a fost obţinută tocmai prin derivarea lui $\omega_v(x)$, aşa cum se poate vedea din (11.195).

Din graficele prezentate în **figura 11.39**, rezultă că acceleraţiile unghiulare ale **SNL** cresc cu creşterea valorii termenului pur neliniar, adică cu valoarea lui μ, fiind nule pentru **SL** de μ = 0**.**

Vitezele unghiulare au amplitudini de oscilaţie, faţă de valoarea lui ω_C, cu atât mai mari cu cât creşte μ şi devin nule pentru μ = 0. Iar ω_C se apropie de ω_0 prin scaderea lui μ; ω_0 ales de 1,2 în figură.

Figura 11.40 prezintă, în centru, deviaţiile valorilor pulsaţiilor proprii Ω(A, μ) ale SNL în funcţie de μ ∈ [0, 1], pentru A = 1 şi ω_0 = 1,2 pentru **SNL** progresive şi regresive, adică pentru μ → $\pm\,\mu$.

În figura din stânga, se observă scăderea valorilor lui Ω, de la Ω(μ=0) = ω_0 = 1,2, la Ω(μ = - 1) = 0.9 ; valoare ω_0 =1,2 fiind aleasă arbitrar, odată cu creşterea valorilor negative a lui - μ, iar, în figura din dreapta, se observă creşterile lui Ω, de la Ω (μ = 0) = ω_0 = 1,2, odată cu creşterea lui + μ [Ω(+μ = + 1) = 1,5].

11.10.10 SOLUŢII ÎN FUNCŢIE DE TIMPUL t

Sunt obţinute cu ajutorul **integralelor şi a funcţiilor eliptice**. Integrala eliptică completă de prima speţă **K(k)** dă perioada 4K(k) a funcţiilor eliptice (**cnu, snu, dnu**), iar cea de speţa a doua **E(k)** exprimă lungimea sfertului de elipsă.

Elipsa din **figura 11.41** are axa mare a = 1 şi axa mică b = $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ > a, fiind prezentată şi în lucrarea lui **Cebe László** “Elliptikus függvének” din revista

Hiradástechnika XXV , 1974, pag. 176 .. 189, impreună cu o serie de funcţii periodice remarcabile, printre care şi cele eliptice. Mai puţin **FSM-CE** care sunt prezentate numai în aceasta lucrare şi în această figură.

Ea are a = 1 şi b = $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ şi, deci, ecuaţia

(11.200) $$x^2 + \frac{y^2}{1-k^2} = 1$$

şi ecuaţiile parametrice

(11.201) $$\begin{cases} x = cos\theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\, sin\theta \end{cases} .$$

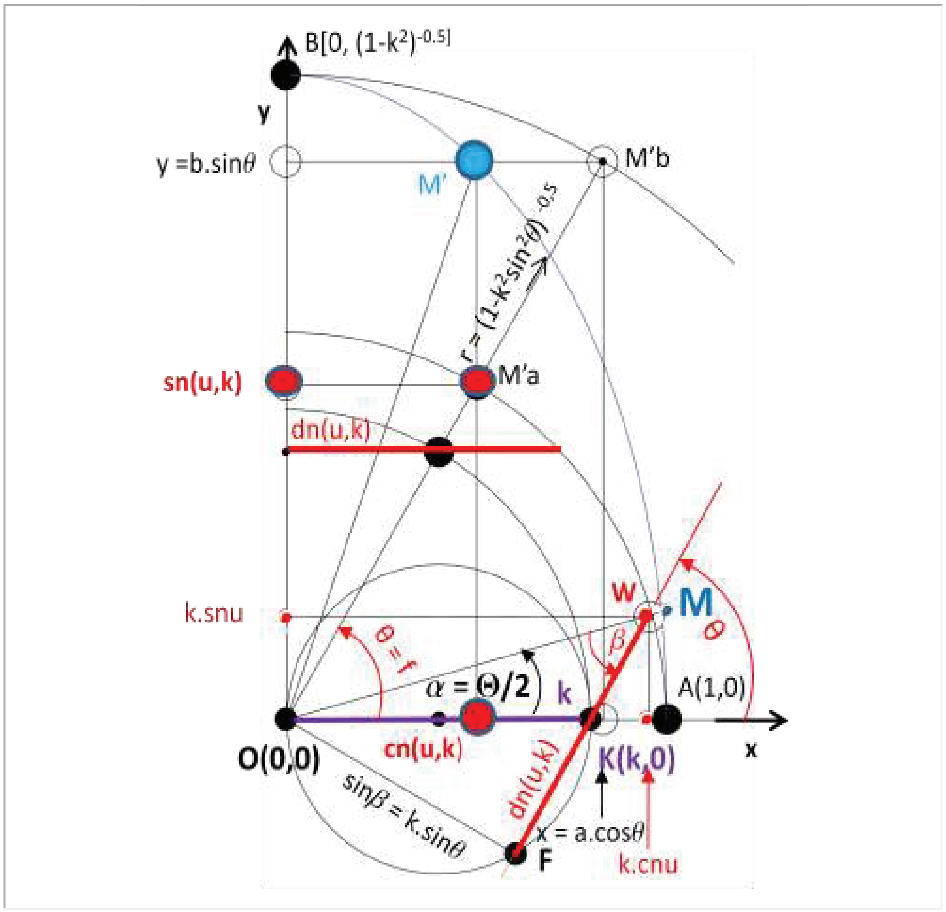


Fig. 11.41. Reprezentarea **funcţiilor eliptice** **Jacobi**
pe elipsa unitate şi pe cercul unitate

Raza polară a elipsei poate fi dată din centrul O(0,0) de relaţia

(11.201) $\rho = r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \rho = r = \frac{1}{\sqrt{1-k^2.sin^2\theta}}$

cu notaţiile din figură, sau din focarele, dispuse, în cazul elipsei rotite cu - π/2, pe axa y, fiind, totodată şi excentrele $E_1 = E^+(e, \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2})$ şi $E_2 = E^-(e, \varepsilon_2 = \frac{3\pi}{2})$ ce se corspund dispunerii lor pe semiaxa y > 0 şi, respectiv, pe y < 0 şi de relaţii

(11.203) $r_{1,2} = \sqrt{x^2 + (e \mp y)^2}$

şi a căror sumă, în cazul de faţă, şi în toate cazurile în care se exprimă una dintre proprietăţiile de bază ale unei elipse, care stipulează că suma distanţelor de la focarele elipsei la un punct curent de pe elipsă este constanta şi egală cu lungimea axei celei mai mari a elipsei,în cazul de faţă cu b > a, adică

(11.204) $r_1 + r_2 = 2b = \frac{2}{\sqrt{1-k^2}}$.

Excentricitatea liniara **e** a elipsei, acum pe direcţia axei y, adică de $\varepsilon = \pm \frac{\pi}{2}$, este dată de cunoscuta relaţie, aici modificată datorită rotirii elipsei,

(11.205) $e = \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} = b.k$

iar excentricitatea liniară numerică, notată acum cu **s**, este

(11.206) $s = \frac{e}{b} = k$.

Rezultă că **excentricitatea liniară numerică** **s** a elipsei este şi **modulul** **k** al integralelor şi al funcţiilor eliptice **Jacobi**.

Deoarece, cercul unitate, reprezentat în **figura 11.41** are raza R = a = 1, rezultă că excentricitatea reală e_{cerc} este egală cu excentricitatea numerica $s_{cerc} = e_{cerc}/a = e_{cerc}$.

Dacă modulul funcţiilor eliptice este k, se alege excentricitatea numerică, egală cu cea reală a **FSM-CE** pentru R = 1, atunci **e = s = k.**

Adică, excentricităţiile numerice ale elipsei şi ale cercului sunt aceleaşi; diferă doar excentricităţiile reale ale celor doua curbe închise. Diferenţă care face şi distincţia dintre **elipsa**, s-o numim **unitate,** deoarece are a = 1 şi **cercul unitate** de R = 1.

În rezumat: **cercul unitate** are ambele excentricităţi liniare egale între ele şi egale cu **k**, iar **elipsa unitate** le are diferite; dar excentricităţile numerice ale celor două curbe închise sunt egale între ele şi egale cu modulul **k** al integralelor şi al funcţiilor eliptice **Jacobi**.

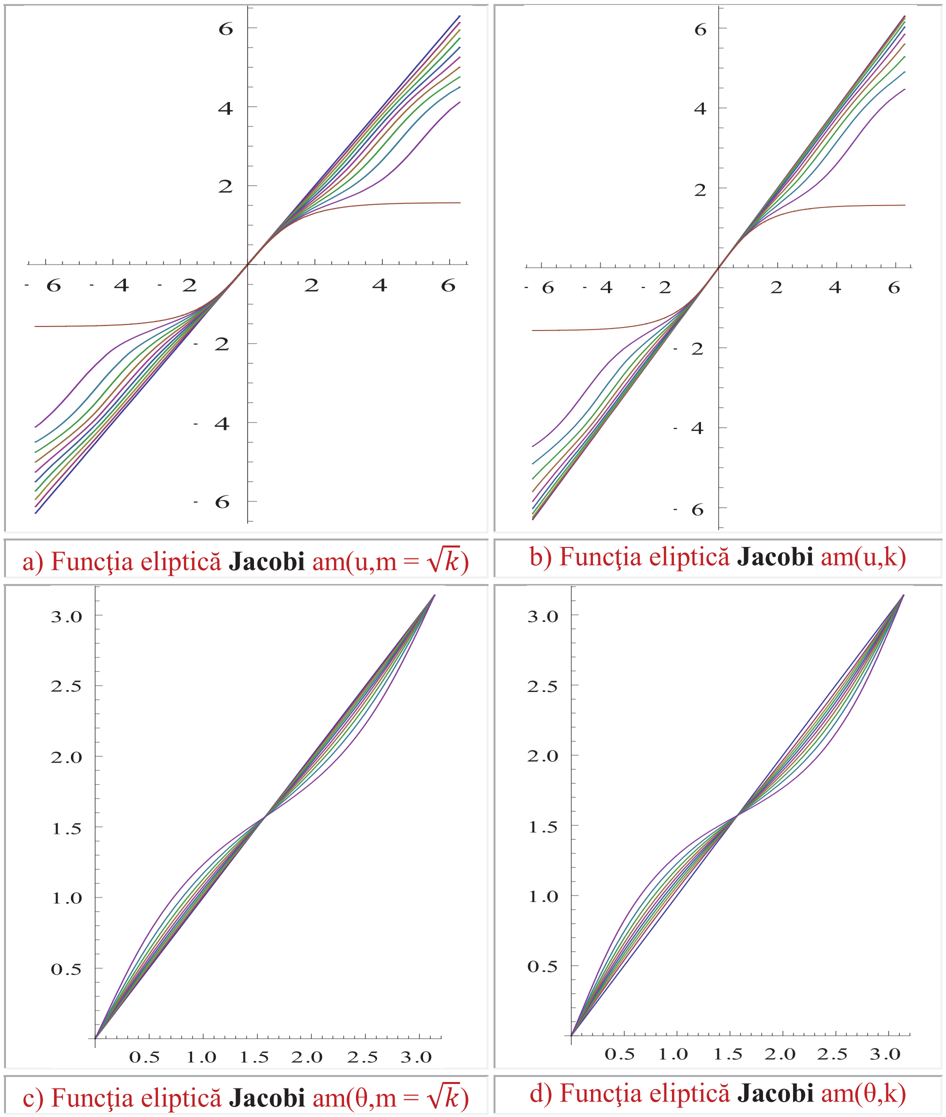
Sunt denumite funcţii eliptice, pe de o parte, pentru că sunt legate de integralele eliptice, de determinare a perimetrului elipsei - E(u,k) – şi, pe de altă parte, pentru că pe această curbă inchisă pot fi definite aceste funcţii şi, cu precădere, arcul de elipsa **u**, de la originea arcului elipsei unitate A(1,0) la un punct curent P(θ,ρ = 5) de pe elipsă.

Deoarece satisfac exact ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul doi, au o multitudine de aplicaţii în matematică, fizică şi în special în tehnică/tehnologie.

Fie integrala

(11.207) $\int R\,[x, \sqrt{P(x)}]dx$

în care R(x, y) este o funcţie raţională de argument x, iar P(x) – un polinom.



a) Funcţia eliptică **Jacobi** am(u,m = $\sqrt{k}$)

b) Funcţia eliptică **Jacobi** am(u,k)

c) Funcţia eliptică **Jacobi** am(θ,m = $\sqrt{k}$)

d) Funcţia eliptică **Jacobi** am(θ,k)

Fig. 11.42 **Funcţii eliptice** **Jacobi** amplitudine (amplitudinus) de u şi de θ

Dacă P(x) este un polinom de ordinul doi, atunci integrala (11.207) se exprimă prin funcţii elementare. În cazurile excepţionale, când integrala poate fi exprimată prin funcţii elementare, aceasta se numeşte **integrală pseudoeliptică**.

BUPT

În cazul când P(x) este o funcţie de ordinul trei sau patru, integrala (11.207) se numeşte integrală eliptică şi, în general, nu poate fi dată în formă finită, sub forma unei relaţii simple de calcul.

Pentru integrala eliptică completă de prima speţă K(k), s-a prezentat, în această lucrare [v.Cap.5 Aplicaţii matematice ale **FSM-CE** radial excentric rexθ, pag. 152 … 167], o metodă hibridă – numerico-analitică, bazată pe / (plecând de la) metoda **Landen-** prin care s-a reuşit obţinerea unei relaţii simple, cu numai doi termeni (5.55, 5.56 şi 5.57), care oferă o ***precizie, incredibilă de ridicată***, de calcul cu ***15 zecimale exacte !***

La fel de bine, ea poate fi calculată cu ajutorul unui seriei hipergeomatrice, dezvoltată după k având raza de convergenţă egală cu unitatea.

Se numeşte **serie hipergeometrică** seria (v. **Râjic I.M**. şi **Gradştein I.S**. "Tabele de integrale, sume, serii şi produse" Ed. Tehnică, Buc. 1955, pag. 415]

(11.208)

$$F(\alpha;\beta;\gamma;z) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{\gamma.1}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)1.2}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\propto+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}z^3 + \cdots$$

Cu ajutorul acestei serii, expresia care poate exprima, cu orice grad de precizie, valoarea integralei **K(k)** este

(11.209)

$$\mathbf{K(k)} = \frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;k^2\right) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \cdots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n.n!}\right]^2 k^{2n} + \cdots\right\},$$

în care simbolul !! exprimă produsul numai a numerelor impare sau namai a celor pare, de la caz la caz, în funcţie de indicaţiile/continutul parantezei care precede simbolul.

Astfel,

(11.210) $$\begin{cases}(2n-1)!! = 1^{n/2} = 1.3.5\ldots(2n-1)\\ 2n\,!! = 2^{n/2} = 2.4.5\ldots 2n = 2^n\, n!\end{cases}$$

şi, ca simbolurile să fie complete, n ! se mai simbolizează şi astfel

(11.210') n ! = $1^{n/1} = 1.2.3\ldots n$

Integrala eliptică de prima speţă **K(k)** din forma normală **Legendre**

(11.211) $$K(k) = \int \frac{dx}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

poate fi adusă sub forma trigonometrica normală prin substituţia

(11.212) x = sinθ.

Expresia lui **K(k)** poate fi scrisă, mai concentrat, astfel

[v.→ http://sfm.asm.md/vol1/fizica%20matematica.html]

(11.212') $$\mathbf{K(k)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 sin^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!} sin^{2n}\theta\right]d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 k^{2n}\right\}$$

Aşa cum rezultă şi din"Tabelele" lui Râjic [pag. 174, rel(3.413)], dublul integralelor eliptice de prima *şi* a doua speţă, sunt date şi de **FSM-CE,** de variabilă centrică α, radial excentric $Rex_{1,2}\alpha$ de excentricitate numerică **s = k**, → $k^2 < 1$

(11.213) $\mathbf{K(k)} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{Rex_{1,2}\alpha} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1+k^2 \mp 2k.cos\alpha}}$ şi

(11.214) $\pm\,\mathbf{E(k)} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} Rex_{1,2}\,\alpha.d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+k^2 \mp 2kcos\alpha}\; d\alpha.$

Lungimea unui arc de elipsa este **u**, variabila funcţiilor eliptice cn(u,k), sn(u,k) şi dn(u,k) şi se poate determina cu integrala

(11.215) u = **E** (θ, k) = $\int_0^{\theta}\sqrt{x^2(\theta)+y^2(\theta)}\; d\theta = \int_0^{\theta}\sqrt{1-k^2sin^2\theta}\; d\theta$

11.10.11 INFINIŢII MICI (DIFERENŢIALELE), FSM-CE ŞI FUNCŢIILE ELIPTICE Jacobi

Istoria confirmă că **Fourier** i-a acuzat pe **Jacobi** şi pe **Abel** ca-şi risipesc/pierd timpul cu funcţii eliptice, când sunt atâtea probleme mai utile care ar putea fi rezolvate.

Răspunsul se gaseşte pe site (V.**Google**→” Zâmbetul ştiinţei”).

Ca istoria să nu se mai repete, (deşi, tot istoria, ne învaţă ca nu se învaţă nimic din istorie, din moment ce ea se repetă, deci, fără prea multe speranţe şi fără să ne facem iluzii că vom pune punctul pe i), înserăm în acest capitol unele dependenţe dintre infiniţii mici, sub forma diferenţialelor, funcţiile eliptice **Jacobi** şi noile, introduse în matematică, **FSM-CE,** cu speranţa că, în acest mod, se simplifică inţelegerea funcţiilor eliptice **Jacobi,** din moment ce, ele, pot fi vizualizate şi pe cercul trigonometric/unitate cu care suntem mai familiarizaţi (**Fig. 11.41**).

Elementului de arc al elipsei ds = du din **figurile 11.41** şi **11.43** este

(11.216) ds = du = ρdθ = $\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2sin^2\theta}}$,

în care raza polară ρ a unui punct al elipsei, măsurată din originea O(0,0), este dată de relaţia (11.182).

Lungimea **u** a arcului de elipsă (Fig.**11.41**), corespunzător arcului **θ** a unui punct W(R=1, θ) de pe cercul unitate, se determină prin integrarea elementului de arc al eliposei, adică, este integrala eliptica de speta a 2-a, incompletă, notată şi cu *F(u,k)*

(11.217) *F(u,k)* = $\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2sin^2\theta}}$

Lungimea arcului unui sfert de elipsă, corespunzătoare lui θ = π/2, pe cercul unitate, este K(k) .

Se observă că integrala eliptică de prima speţă, *F(u,k)* este dată de diferenţiala $\frac{du}{d\theta}$, care, aşa cum s-a indicat în figura **11.42** reprezintă inversul segmentului

(11.218) FW = dn(u,k) = cos β = $\sqrt{1-\;k^2sin^2\theta}$

Din figură mai rezultă, fără să insistăm asupra deducerii acestor relaţii, că

(11.219) $\begin{cases} r = EW = rex\theta = Rex\alpha = \frac{d\alpha}{du} \\ FE = k.cos\theta = \frac{d\beta}{du} \\ FW = dnu = \frac{d\theta}{du} = \frac{d(\alpha+\beta)}{du} = \frac{d\alpha}{du}\frac{d\beta}{du} \\ 1 - FW = \frac{d\gamma}{du} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\alpha}{du} + \frac{d\beta}{du} + \frac{d\gamma}{du} = 1 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow d\alpha + d\beta + d\gamma = du \;\Rightarrow\; \alpha + \beta + \gamma = u = \;\theta + \gamma$$

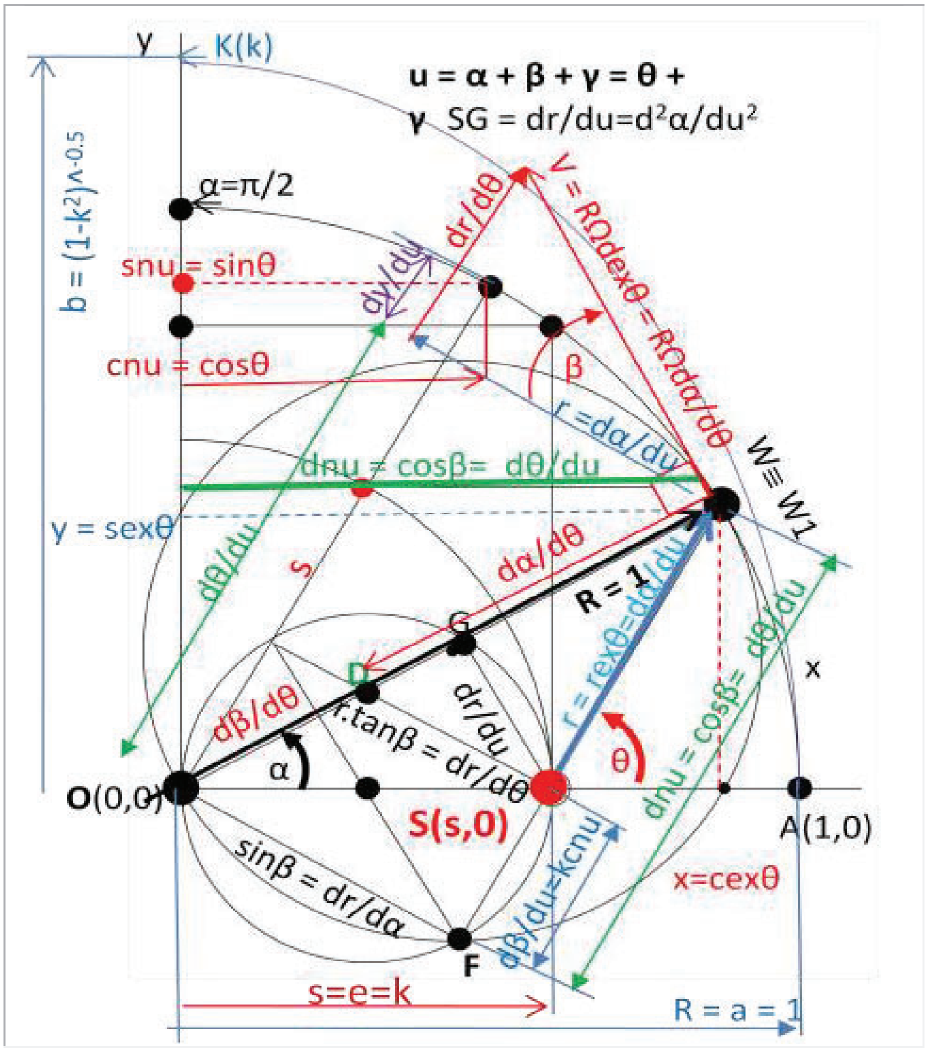
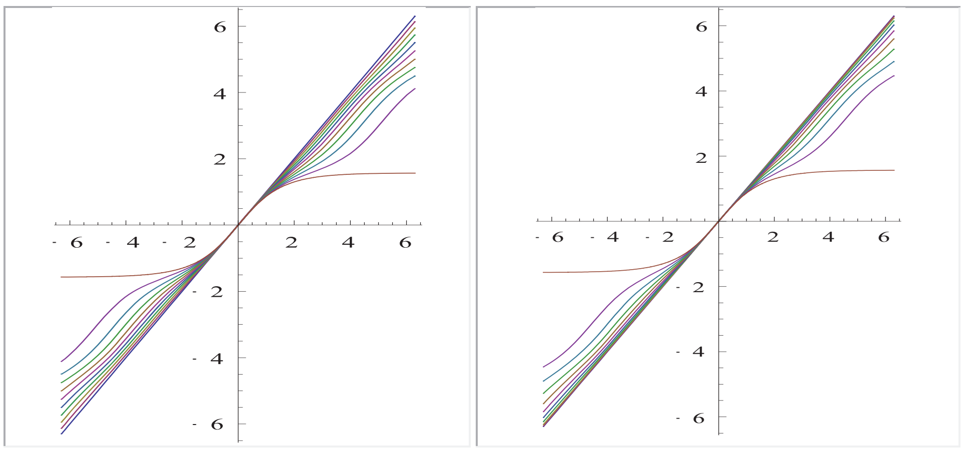


Fig.11.43 Infiniţi mici (diferenţiale), **FSM-CE** şi funcţii eliptice **Jacobi**

Rezultă că unghiul γ = u – θ este, deci, diferenţa dintre cele două argumente, cele ale funcţiilor eliptice **Jacobi** (u) şi ale **FSM-CE** de **variabilă excentrică** (**θ**).

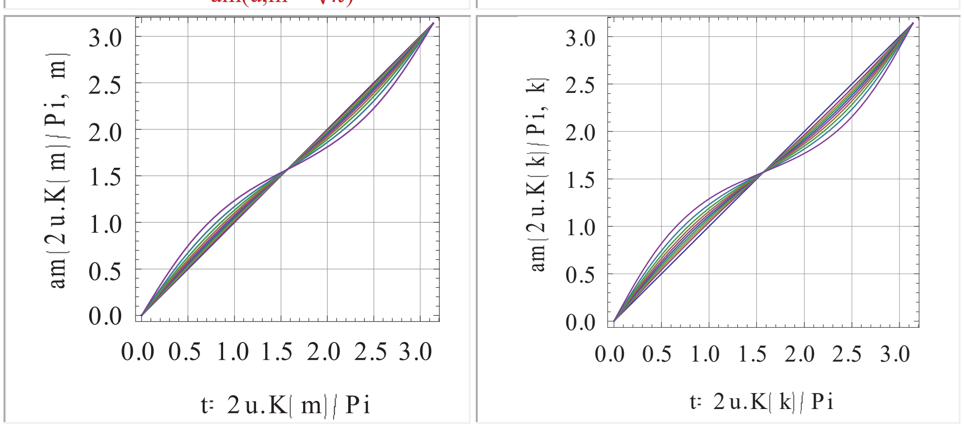
Transversal pe segmentul **FW,** apar segmente de drepte care pot fi exprimate prin diverse diferenţiale, cum sunt

$$(11.220)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{OF} = k.\sin\beta = \frac{dr}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}Rex\alpha = \frac{k.\sin\alpha}{Rex\alpha} = \frac{k.\sin\alpha}{\sqrt{1+k^2-2k.\cos\alpha}} \\ \boldsymbol{FP} = \frac{dr}{du}\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{dr}{du}Dex\alpha = \frac{dr}{du}\frac{1}{dex\theta} = \frac{d}{d\theta}(dex\theta) \rightarrow FP \perp OW \\ \boldsymbol{SD} = r.\tan\beta = dex\theta.\sin\beta = \frac{dr}{d\theta} = k\frac{sex\theta}{\cos\beta} \\ \boldsymbol{SG} = r.\sin\beta = \frac{dr}{du} = rex\theta.\sin\beta \end{cases}$$



a) Funcţia eliptică **Jacobi** am(u,m = $\sqrt{k}$)

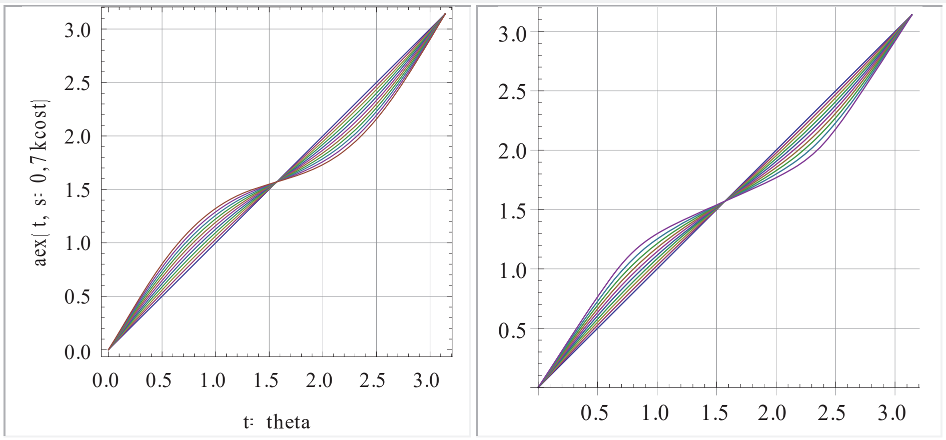
b) Funcţia eliptică **Jacobi** am(u,k)



b) Functia eliptică Jacobi am($\frac{2uK}{\pi}$, m = $\sqrt{k}$)

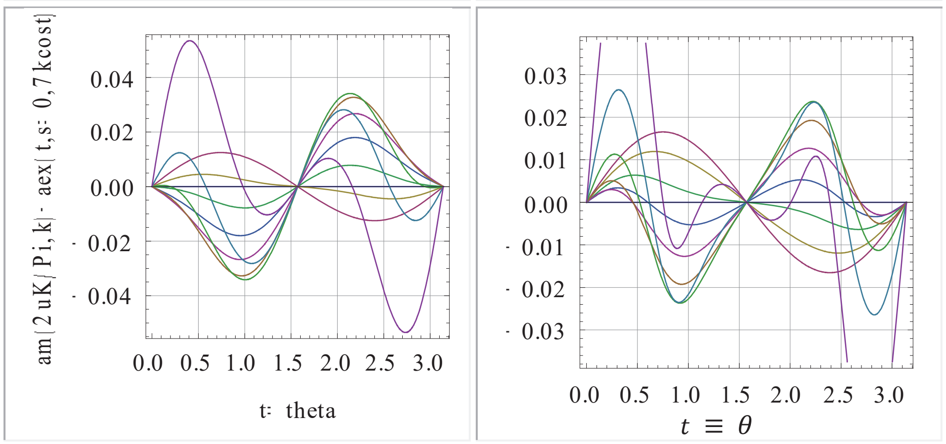
c) Functia eliptică Jacobi am($\frac{2uK}{\pi}$, k)

Fig. 11.43 **Funcţii eliptice** **Jacobi** de parametru **m** şi **k** şi de argumente u şi de **θ** = $\frac{2uK(k)}{\pi}$



FSM-CE aex[θ, S(s→0.7kcost, ε = 0)]

FSM-CE aexm[θ, S(s→0,5kcosθ, ε = 0)], aexm θ = θ + 0.309arcsin[0,5k Sin[2t]]



Diferenţa am(2uK/π ,k) – aex(θ, s=0,7 cosθ)

Diferenţa am(2uK/π,k) – aex(t, s = - 0.5kcost)

Fig.11.44 Funcţii amplitudine excentrică aex θ şi diferenţele faţă de am(2uK/π, k)

Pe direcţia dreptei OW, înclinată cu unghiul α faţă de axa x, apar două segmente a căror sumă este raza cercului unitate R = 1. Aceste segmente sunt

$$(11.221)\qquad \begin{cases} OD = \dfrac{d\beta}{d\theta} = \dfrac{k.\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \\ DW = \dfrac{d\alpha}{d\theta} = dex\theta \\ GW = r\dfrac{d\theta}{du} = \dfrac{d\alpha}{du}\dfrac{d\theta}{du} = 1 - k.\sin\alpha \end{cases}$$

Aşa cum s-a mai afirmat şi cum se cunoaşte, de fapt, derivata vectorului de poziţie $\vec{r}$ (θ) = R.rexθ, a punctului W în mişcarea lui pe cerc (v. **Vol.I**, Cap. 6.4 **MCE**, pag 197 … 202), este viteza $\vec{v}(\theta = \Omega t) = R.\Omega.dex\theta$. Pentru R = Ω = 1 rezultă

(11.200) $$\frac{d}{d\theta}[\vec{r}\,(\theta)] = \dot{\vec{r}}(\theta) = \frac{d}{d\theta}(rex\theta.rad\theta) = \frac{dr}{d\theta}rad\theta + r.der\theta =$$
$$= \frac{dr}{d\theta}rad\theta + \frac{d\alpha}{du}der\theta = \frac{d\alpha}{du}\,der\alpha = \vec{v} = \text{dex}\theta.\text{rad}\alpha$$

în care se evidenţiază cele două componente ale vitezei: una pe direcţia radθ, adică pe direcţia radială centrică (radθ), a razei vectoare $\vec{r}$, care exprimă derivata în modul a lui $\vec{r}$ şi o a doua componentă, perpendiculară pe prima, pe direcţia derivată centrică (derθ), care reprezintă derivata în direcţie a vectorului turnant $\vec{r}$ = rexθ radθ.

Derivata în direcţie este proiecţia lui $\vec{v}$ pe direcţia derθ, adică

(11.222) $$\frac{d\propto}{du} = dex\theta.cos\beta = \frac{d\alpha}{d\theta}\frac{d\theta}{du}$$

iar derivata în modul este proiecţia lui $\vec{v}$ pe direcţia fazorului radθ

(11.223) $$\frac{dr}{d\theta} = dex\theta.sin\beta = \frac{d\alpha}{d\theta}\frac{dr}{d\alpha}$$

ceea ce indică corectitudinea asocierii diferenţialelor, respectiv a diverşilor infiniţi mici, cu aceste segmente de dreapte, reprezentate în **figura 11.42**.

Dacă (11.217) dă pe u(θ), inversul ei θ(u) este dată de funcţia eliptică **Jacobi** amplitudinus/amplitudine (şi, adăugăm noi, **centrică**, pentru a evita confuziile cu amplitudinea excentrica aexθ)

(11.224) θ(u) = am(u,k)

Aceste funcţii au aliura din **figura 11.43**.

În partea de sus şi în stânga figurii, sunt reprezentate funcţiile am(u, m = $\sqrt{k}$), de modul **m =** $\sqrt{\mathbf{k}}$, care sunt funcţii eliptice **Jacobi** de perioadă 4K(k), iar în dreapta figurii sunt prezentate aceleşi funcţii dar de modul **k = m^2** şi de aceeaşi perioadă 4K(k).

În partea de jos sunt prezentate aceleaşi funcţii de aceiaşi parametri **m** şi, respectiv, **k**, dar de argument modificat prin t = 2uK(k)/π.

Aceleaşi argumente vor fi utilizate şi pentru reprezentarea celorlalte funcţii eliptice **Jacobi** : cn u, snu, dnu.

Pentru comparaţie şi pentru evidenţierea asemănării lot cu funcţiile amplitunide **Jacobi** şi, prin aceasta, a justificării denumirii date acestor funcţii, sunt prezentate **FSM-CE** amplitudine **excentrică** (aexθ) de variabilă excentrică θ cât şi **FSM-CE aexmθ** –aex **modificate-** în sensul că **FCC** inversă arc**sin** a fost înlocuită cu arc**tan**, aşa cum se indică în figura **11.44** – sus. Jos, sunt prezentate diferenţele dintre funcţiile eliptice **Jacobi** şi **FSM-CE**

(11.225) Δ = am(u, k) – aex (θ,s) sau

(11.226) ΔM = am(u, k) – aexm (θ,s) .

Precizii de aproximare mult mai ridicate, pentu k ∈ [0; 0,7] sunt reprezentate în **figura 11.45** fiind date de aexm (θ, s = k).

Modificarea consistă în următoarele: arcsin → 0,3arctan, s → (s.cosθ)^2 şi sinθ → sinq(θ, s), în care, reamintim că **sinq** sau **siq** este sinusul cvadrilob / quadrilob (v. pag. 32, 53 .. 56).

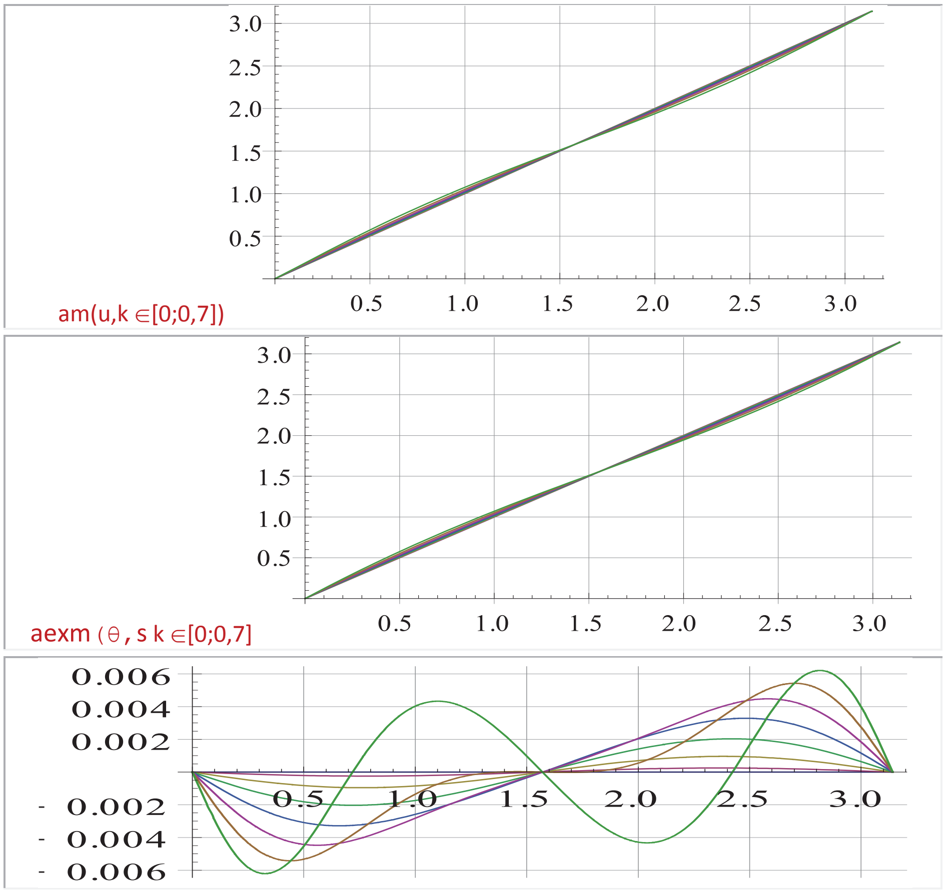


Fig. 11.45 Diferenţa $\Delta M = am(2uK/\pi, k) - aexm(\theta,s)$ în domeniul $k \in [0; 0,7]$
$aexm(\theta, s) = \theta + 0,3 \arctan[s^2\cos^2\theta.sinq(\theta,s)]$, $s = k \in[0;0,7]$

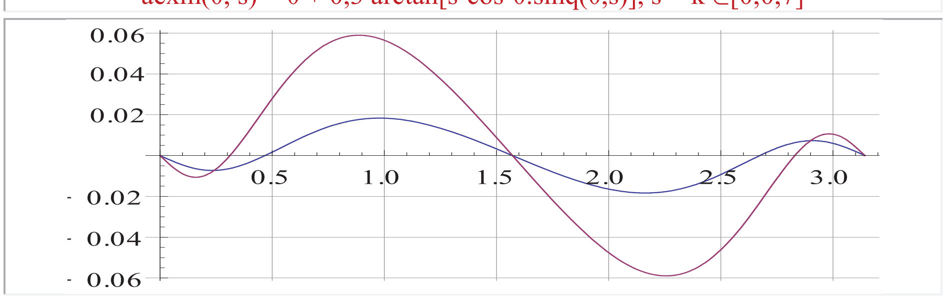


Fig. **11.46** Diferenţa $\Delta M = am(2uK/\pi, k) - aexm(\theta,s)$ în domeniul $k \in [0,7; 0,9]$
$aexm(\theta,s) = \theta + 0,3 \arctan[s^2\cos^2\theta.sinq(\theta,s)]$, $s = k \in[0,7; 0,9]$

Aşa cum se poate observa in **figura 11.45** – jos diferenţele maxime sunt foarte mici şi nu depăşesc valoarea de ± 0,006, iar cele minime (k = 0) sunt, evident, nule. Pentru domeniul k $\in$ [0,7; 0,9] diferenţele aceloraşi funcţii sunt prezentate în figura **11.46** şi nu depăşesc valoarea de 0,06, fiind, astfel, de 10 ori mai imprecise decât în domeniul k = 0 … 0,7 (k $\in$ [0; 0,7]).

O altă funcţie de aproximare, cu trei termeni, este

(11.227) $aexm(\theta,s) = \theta+\arctan[0{,}05\ s^2\cos\theta.\ \sin t/(1-0.05\ s^2\ \cos^2\theta)]+(0{,}1\ s+0.023)\ \sin 2\theta$

Cel de-al treilea termen a rezultat din diferenţa cu numai 2 termeni, diferenţă care era reprezentată de o familie de funcţii sinus.

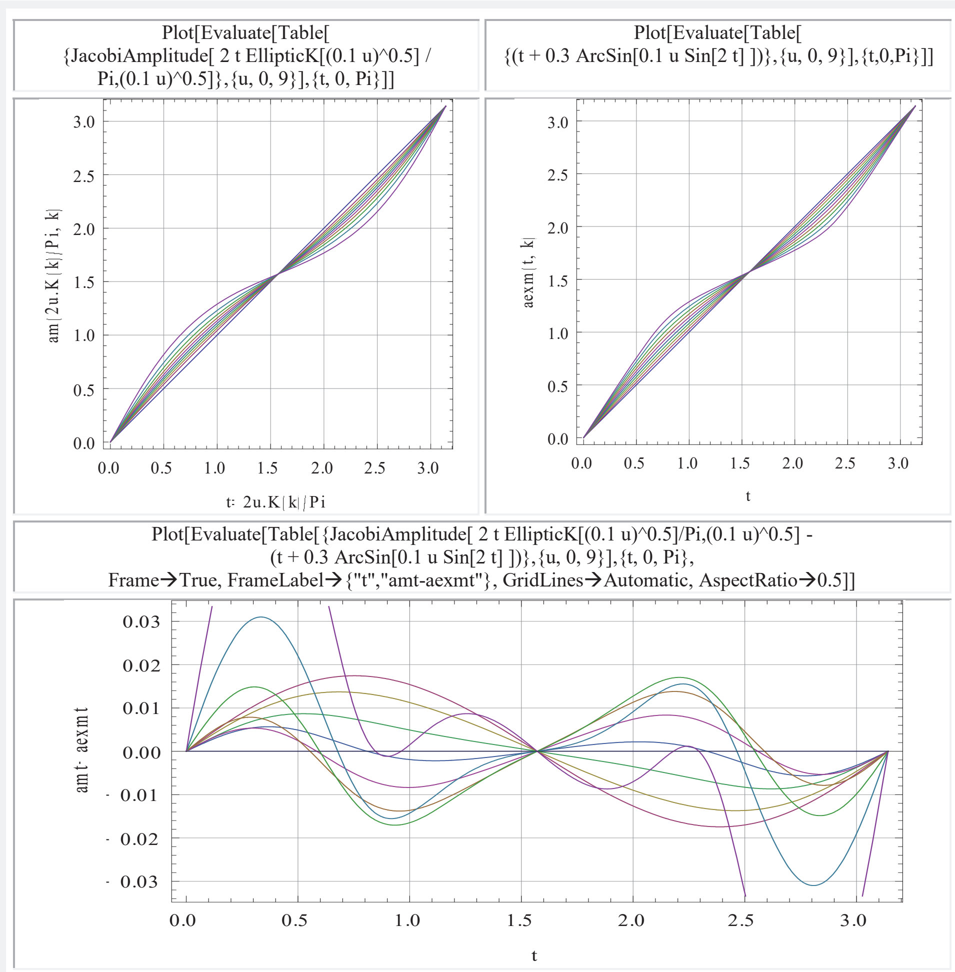


Fig.11.47 Funcţii amplitudine excentrică aexm θ şi diferenţele faţă de am(2uK/π, k)

Privind funcţiile diferenţă, simetrice faţă de axa θ, se observă că o îmbunătăţire globală a aproximării, în tot domeniul $k \in [0; 0{,}9]$, nu mai este posibilă. În schimb, este posibilă o imbunătăţire pe cele două grupe de funcţii, care prezintă diferenţe de semne opuse.

O astfel de metodă este prezentată mai pe larg în lucrarea **Mircea Şelariu** şi dr.ing. **Dumitru Bălă** "**Ways of presenting the delta function and amplitude function Jacobi**" Contemporary Science Association New York, Denbridge Press, Academic Division, New York, ISBN:978-973-88931-1-5 şi într-o lucrare cu privire la " Un sistem supermatematic cu baza continua de aproximare a funcţiilor" ca şi în lucrarea lui Dr. ing. **Dumitru Bălă** " Supermathematical-**Selariu** Functions Beta Eccentric bexθ" publicată în lucrarile "Proceedings of the 2nd World Congress on Science, Economics and Culture 25-29 August 2008, New York, ISBN: 78-973-88931-1-5(063)./

Cu siguranţă, pot fi găsite şi alte funcţii care să aproximeze şi mai bine funcţiile eliptice **Jacobi** am(u,k) şi, prin aceasta, şi funcţiile sn, cn dn, care se pot exprima, la rândul lor, cu ajutorul lui am(u,k).

Rezultă, din stânga **figurii 11.44**, că diferenţa maximă absolută nu depaşeşte valoarea de 0,06 – pentru $k = 0.9$ şi este sub 0.03 pentru $k \in [0; 0{,}8]$.

Pentru $k\in [0; 0{,}4]$ diferenţele sunt sub 0,02. Programul de calcul WOLFRAM-MATHEMATICA 6 nu a reprezentat/dat curba pentru $k = 1$.

Preciziile obţinute, de aproximare a funcţiilor am(u,k) prin aex(θ,s) de excentru variabil ($s = 0{,}7.k.\cos\theta$), sunt acceptabile pentru multe aplicaţii tehnice.

O aproximare satisfăcătoare a funcţiei am(u,m) este dată de următoarea relaţie a funcţiei **SM aexθ** modificată

(11.228) $\quad aexm(\theta,s) = \theta/2 + \arctan[0.05\, s^2 \cos[\theta /2].\, \sin[\theta /2] /$
$(1\text{-}0.05\, s^2 \cos[\theta /2]^2)] + 0.0075 \cos[\theta /4]/ \mathrm{Sqrt}[1\text{-} \sin[\theta /4]^2] - 0.0075 + 0.015 \sin[\theta].$

În fine, o aproximare foarte bună, cu diferenţe sub 0,03 până la $k = 0{,}8$, inclusiv, este prezentată în **figura 11.47**, împreună cu expresiile funcţiei de aproximare **aexθ** modificată.

Moto:" Omul e un animal care **aproximează** şi ale cărui variante, constante, sunt "**comodităţi mintale**. "
Petre Ţuţea

Capitolul 12
UN SISTEM SUPERMATEMATIC CU BAZĂ CONTINUĂ DE APROXIMARE A FUNCŢIILOR

12.1 INTRODUCERE

În acest capitol se prezintă un sistem nou de funcţii circulare / trigonometrice, denumite funcţii supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) [1], [4], [5], ca **cex**θ, **sex**θ, **bexθ, dexθ, rexθ** ş.a. care constitue o bază continuă pentru aproximarea funcţiilor, pe de o parte, şi oferă posibilitatea modelării exacte a unor funcţii / curbe şi / sau suprafeţe, până de curând considerate **nematematice**, pe de alta parte.

Deoarece, între două funcţii, de exemplu, **sin(ix)** şi **sin**(i+1)x, din baza **sistemului trigonometric centric** (**STC**), sistem format din funcţiile circulare centrice (**FCC**) **cos**ix ∪ **sin**ix, nu există alte funcţii, dacă ∈ **n** ⊂ Z. De aceea, **STC** este considerat un sistem cu o bază **discretă** de funcţii.

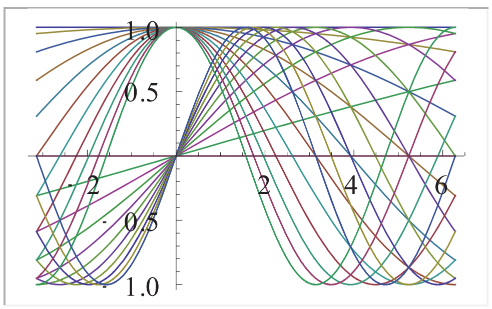


Fig. 12.1 Primele 10 funcţii ale **STC**

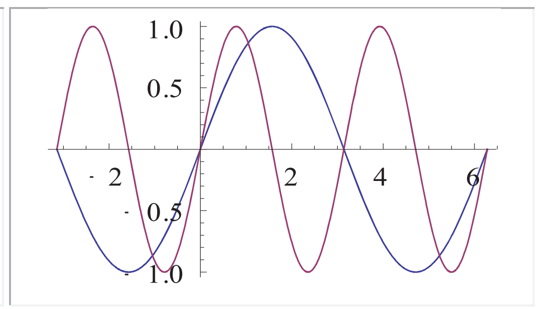


Fig.12.2 Funcţiile sinα şi sin2α

În aceleaşi condiţii (**n** ⊂ Z), sistemul **trigonometric supermatematic** (**STS**) **sex(**nx) ∪ **cex(**nx) constitue o **bază continuă** de funcţii de aproximare, deoarece, între două dintre funcţiile bazei **sex**[ix, **s** = 0) = sinx şi **sex**[(i + 1)x, **s** = 0] = sin (i+1)x se interpun o infinitate de alte funcţii, care pot completa continuu (**Fig.12.12** şi **Fig.12.13**) spaţiul dintre ele, când excentricitatea numerica **s** ia valorile din intervalul **s** ∈ [-∞, +∞] sau în domeniul s ∈ [-1, +1].

Aşa cum se arată, **sex**x, pentru o excentricitate numerică **s** ∈ [0, ±1], degenerază, la cele două limite extreme ale intervalului, în **sinx** şi, respectiv, în **sin2x**, adică în două dintre funcţiile adiacente / limitrofe ale bazei **STC**, dar numai într-un anumit interval. Se ştie că, toate **FSM-CE** pentru s = 0, degenereaza în **FCC**. Astfel, **sex**(x, s = 0) = sin x. Intervalul **periodic**, cu perioada 2π, în care **sex**x → sin2x este x ∈ [-π/2, +π/2] pentru s = - 1 şi x ∈ [π/2, 3 π/2], pentru s = +1, (**Fig. 12.12** şi **Fig.12.13**).

Lucrarea este „pigmentata" din belşug cu grafice care să ilustreze cele afirmate.

Există o multitudine de metode de aproximare a funcţiilor / curbelor. Dintre acestea, unele folosesc drept bază **sistemul trigonometric**, pe care suntem obligaţi să-l denumim şi **centric** (**STC**), pentru a-l distinge de noul sistem trigonometric excentric (**STE**), apărut odată cu descoperirea **funcţiilor supermatematice** circulare / **trigonometrice excentrice** (**FSM-CE**).

Sistemul trigonometric centric (STC) este format din asocierea funcţiilor cosinus şi sinus centrice de multiplii de arce

(12.1) $\begin{cases} \mathbf{1}, \boldsymbol{cos} \propto, \ \boldsymbol{cos2} \propto, \ .., \ \boldsymbol{cosn} \propto, .. \boldsymbol{n} \subset \mathbf{1}, \boldsymbol{N} \\ \mathbf{0}, \boldsymbol{sin} \propto, \ \boldsymbol{sin2} \propto, \ .., \boldsymbol{sinn} \propto, .. \boldsymbol{n} \subset \mathbf{1}, \boldsymbol{N} \end{cases}$

În realitate, doar mulţimea infinită (1) {1, sinα, cosα, sin2α, cos2α ,..., sinnα, cosnα,..} formează o bază a spaţiului de funcţii, care s-a dovedit suficient de eficientă în aproximarea funcţiilor periodice, adică pentru N → ∞.

Primele 10 funcţii, **cosnx** şi **sinnx** ale bazei **STC,** sunt prezentate în **figura 12.1**, iar două dintre sinusuri, pentru n = 1 şi n = 2 sunt extrase separat în **figura 12.2**.

Un alt sistem de funcţii, folosit pe larg drept bază a spaţiului de funcţii, este **sistemul exponenţial centric** (**SEC**)

(12.2) $\{\boldsymbol{e^{ik\propto}}\}$, k ia toate valorile întregi.

12.2 SISTEME SUPERMATEMATICE DE BAZE

Lucrarea **SUPERMATEMATICA. Fundamente** a scos în evidenţă faptul că, **doar prin separarea** celor 3 puncte **confundate**, alese de **Euler** la definirea funcţiilor circulare din **MC** (**O - originea** unui reper, **C - centrul** cercului unitate şi **excentrele S(s,ε)** pentru C(1,O) sau **E(e,ε)** pentru cercul oarecare C(R,O) - polul unei drepte turnante), se trece la **matematica excentrică (ME)**, în care, toate funcţiile trigonometrice (circulare şi hiperbolice) cunoscute (centrice) **se multiplică la infinit** şi, în plus, apar o serie de **FCC** ca şi de **FCE** noi.

Astfel, fiecărei funcţii **cos, sin, tan**, etc din **MC** îi corespund, în **ME,** câte o familie, cu o infinitate de membri, de **FSM-CE cex, sex, tex**, etc. pentru o excentricitate numerică **s** $\in[-\infty,+\infty]$. Se deduce că, **MC** este un caz particular, de **s = 0**, al **ME**, în care toate **FCE** degenerează în **FCC**. Rezultă, că **FCE** sunt o generalizare vastă şi extrem de utilă a **FCC**, iar **ME** este o extindere nemarginită a **MC**, aşa cum s-a putut constata din capitolele anterioare.

Reamintim **FCE** noi, deosebit de valoroase, care apar, grupate în **FSM-CE** sunt:

- **rexθ** şi **Rexα** - **radial excentric** de **variabilă excentrica θ** şi, respectiv, de variabilă centrica **α**, o adevarată **funcţie rege**, cum a denumit-o Prof dr.math, **Octav Em. Gheorghiu**, funcţie care, singură, poate exprima toate curbele plane din **MC** şi o infinitate de curbe noi [1]. Important este şi faptul că ele pot exprima forma trigonometrică a sumei şi a diferenţei numerelor complexe, aşa cum se arată în [7].
- **dexθ** şi **Dexα** – **derivată excentrică**, care exprima funcţia de transfer de ordinul unu, sau funcţia de transmitere a vitezelor sau a turaţiilor tuturor mecanismelor plane cunoscute, aşa cum se arată în lucrarea [8];
- **aexθ** şi **Aexα** – **amplitudine excentrica**, a cărei denumire este similară, nu din întâmplare, cu a funcţiei amplitudin(e)/(us) a lui **Jacobi**, deoarece **sin**[**aexθ**] = **sexθ**, **cos**[**aex θ**] = **cexθ** şi **cos**[**Aexα**] = **Cexα**, **sin**[**Aexα**] = **Sexα**, ş.a.m.d.
- **bexθ** şi Bexα - **beta excentrică** [1],
- **uexθ** şi **Uexα** – **unghiular excentrică**, ş.m.a.

Se cunosc devoltările în serii de puteri ale funcţiilor **cos, sin, tan**, etc., sau, altfel spus, că aceste funcţii constituie rezultatul însumării acestor serii de puteri, adică, o funcţie sumă. Multor serii de puteri nu li se cunoaşte, însă, o funcţie sumă, ci, eventual, o relaţie de mai multe funcţii. Acest neajuns este cauzat tocmai de lipsa din **MC** a unor funcţii, **funcţii noi**, care au apărut odată cu **ME**.

Unele dintre acestea vor fi prezentate în continuare. Mai mult, o multitudine de funcţii / semnale puteau fi reprezentate matematic doar prin dezvoltari în serii trigonometrice **Fourier**. Cu noile **FSM-CE**, ele pot fi reprezentate mai **simplu** şi mai **exact** şi, în plus, apare posibilitatea reprezentării matematice a transformării continue a semnalelor din unul în altul, aşa cum se va prezenta în continuare.

12.3 FUNCŢII MATEMATICE CENTRICE NOI

Funcţiile matematice centrice noi sunt funcţiile **Euler-Cotes** vechi:

(12.3) $\text{rad}\alpha = e^{i\alpha}$

şi reprezintă corespondenţa, în centric, a noii **FCE Rexα** ca şi **rexθ** pentru excentricitate **e** = **s** = 0, caz în care, **θ ≡ α** şi cele două funcţii radial excentrice degenerează în funcţia **radial centrică** – **radα**. Totodată, **radα** reprezintă vectorul de poziţie al punctului curent **W(x,y)** ≡ **W(α,1)** de pe cercul unitate, faţă de centrul **C** ≡ **O**(0,0) ≡ **S**(**s = 0**, ε) al acestuia.

În consecinţă, argumentul acestuia este **α ≡ θ** şi modulul lui este 1. El este, în acelaşi timp, un număr complex şi un vector unitate (versor / **fazor**) şi, neputând să aibă altă semnificaţie matematică, marcarea cu bară deasupra devine superfluuă.

Derivata lui **radα**, denumită **derivată centrică**, prin analogie cu **dexθ** – derivata excentrică - este

(12.4) **derα** = $i.e^{1\alpha}$ = rad(α + π/2)

şi este, de asemenea, un vector unitate, fazor defazat în avans cu π/2 (δ = - π/2) faţă de **radα**.

Funcţiile **rad** şi **der**, ca sumă şi diferenţă de arce, au expresii asemănătoare cu cele de la funcţiile **sin** şi **cos**, astfel:

(12.5) **rad(A ± B)** = **radA.cosB** ± **derA.sinB**

(12.6) **der(A ± B)** = **derA.cosB** ± **radA.sinB**

Cu ajutorul acestor funcţii, ca şi cu corespondentele lor din excentric, **rexθ** şi **Rexα**, pot fi exprimate formele trigonometrice ale sumei şi ale diferenţei numerelor complexe, aşa cum se prezintă în lucrarea [2]. Astfel, dacă doi vectori sau două numere complexe au expresia

(12.7) $Z_{1,2} = R_{1,2}.\mathrm{rad}\alpha_{1,2}$

suma Σ şi diferenta Δ lor este dată de

(12.8) $Z_{\Sigma,\Delta} = Z_2 \pm Z_1 = R_2 .\mathrm{Rex}\alpha_{\Sigma,\Delta}.\mathrm{rad}\alpha_{\Sigma,\Delta,}$

în care $R_{\Sigma,\Delta}=R_2$,

(12.9) $\mathrm{Rex}_{\Sigma,\Delta}\alpha_2 = \sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha_2-\varepsilon_{\Sigma,\Delta})}$.

Prin $\varepsilon_{\Sigma,\Delta}$ semnul din faţa lui 2s, de sub semnul radical, devine + pentru sumă şi minusul pentru diferenţă. Excentricitatea numerică este **s** = $R_1 / R_2 \leqq 1$ şi $\varepsilon_\Sigma = \alpha_1 + \pi$ şi $\varepsilon_\Delta = \alpha_1$, dacă se alege raza cercului $R = R_2 = \mathrm{Max}|R_1,R_2|$ şi **excentricitatea reală e** = $\min|R_1,R_2|$.

Coordonatele excentrului pentru cercul de raza $R = R_2$ sunt **E**(**e**,**ε**), iar pentru cercul unitate / trigonometric sunt **S**(**s**, ε), în care **s** = $\frac{e}{R}$.

12.4. SUME DE FUNCŢII CIRCULARE CENTRICE NOI

Notând modulul numărului complex **z** cu valoarea **s** a modulului coordonatei polare a excentrului **S**(**s**, **ε**), corespunzător cercului unitate, pentru un argument **α** rezultă

(12.10) z = **s**.rad**α** şi

(12.11) $z^n = s^n$.radn**α**, astfel că suma

(12.12) $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum sn.rads\alpha = \frac{z}{1-z} = s\,\frac{rad\theta}{rex\theta},$$ în care

(12.13) $$\theta = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \arcsin\frac{s.\sin\alpha}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}}.$$

Unghiul β(**α**) = Bexα , iar β(**θ**) = bexθ mai poate fi exprimat şi astfel:

(12.14) $$\beta(\alpha) = \mathrm{Bex}\alpha = \arctan\frac{s.\sin\alpha}{1-s.\cos\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n}\sin n\alpha,$$ sau

(12.15) β(θ) = bexθ = $\arcsin(s.\sin\theta) = s.\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{(s.\sin\theta)^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{(s.\sin\theta)^5}{5} + \ldots$

$$+ \frac{1.3.5...(2n-3)(s.\sin\theta)^s}{2.4....(2n-2)(2n-1)} + \ldots., \quad r = 1.$$

Proiecţiile lui **radα** sunt **cosα** şi, respectiv, **sinα**, astfel că suma **S,** dată de (5), se descompune în suma în cosinuşi :

(12.16) **C(α)** = ***Re***(**Σ**) = ***Re*** (s^n.**radnα**) =

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n.\cos n\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{1+s^2-2s.\cos\alpha} = \frac{\mathrm{Re}\,x\alpha.\cos\beta}{\mathrm{Re}\,x^2\alpha} = \frac{\cos\beta(\alpha)}{\mathrm{Re}\,x\alpha} =$$

$$= \mathbf{Dex\alpha} = \frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha}$$ şi suma în sinuşi:

(12.17) **S(α)=Im(Σ)=Im**(k^s.**radsα**) $= \sum_{s=0}^{\infty} k^s \sin s\alpha = \frac{s.\sin\alpha}{1+s^2-2s.\cos\alpha} = \frac{s.\sin\alpha}{\mathrm{Re}\,x^2\alpha} =$

$$\frac{\sin\beta(\alpha)}{\mathrm{Re}\,x\alpha} = \frac{k.\sin\theta}{rex\theta}$$ = sinβ(α)/Rexα = sin(Bexα)/Rexα = sin β(θ) / rexθ = sin(bexθ)/rexθ .

```
Plot[Evaluate[Table[{(1 − 0.1sCos[t])/(1 + 0.01s^2 − 0.2sCos[t])}, {s, 0,10}], {t, −2Pi, 2Pi}, AspectRatio
    → 0.75, GridLines → Automatic, PlotStyle
    → Table[{AbsoluteThickness[2], Hue[n/m]}, {n, 3,10}, {m, 3,10}], PlotStyle → Thick, Mesh
    → 20, MeshShading → {Red, Blue, Yellow}]]
```

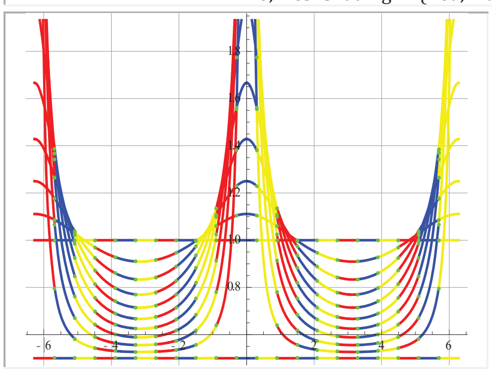


Fig.12.3 **Dexα** exprimat cu **relaţia (12.16)** pentru s = 0 .. 1, cu pasul 0,2 şi θ ∈ [-2π, 2π].

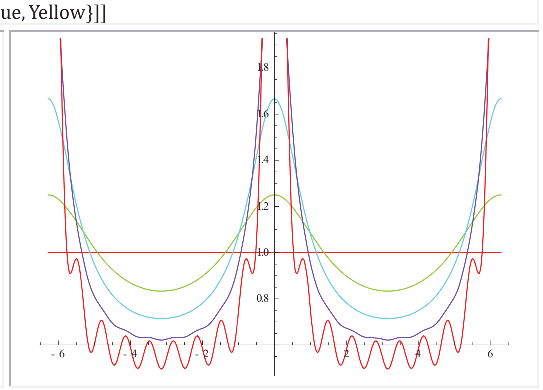


Fig.12.4 **Dexα** exprimat prin **suma (12.16),** pentru s = 0 … 0,8 cu pasul 0,2.

www.SuperMathematica.com www.SuperMatematica.ro

În relaţiile anterioare, s-au folosit dependenţele dintre cele trei unghiuri importante din **ME**: **α** – unghiul la centrul O(0,0), **θ** – unghiul la excentrul S(s,ε) şi **β** = **θ — α** unghiul sub care se văd punctele **O** şi **S** din punctul curent **W** de pe cerculo unitate. Dacă R = 1 este raza cercului unitate, distanţa dintre C(0,0) ≡ O(0,0) şi punctul curent de pe cerc **W**(x,y) ≡ **W**(1, α) ≡ W(r,θ), în care, cu

(12.18) **r** = **rexθ** = **Rex**α s-a notat **raza excentrică**, exprimată în funcţie de cele două variabile independente, adică, distanţa de la excentrul **S**(**s**, **ε**) la **W**, atunci [4], [5] :

(12.19) s.sinθ =1.sin β şi

(12.20) s.sinα = r.sinβ .

Figurile 12.3 şi **12.4** arată, comparativ, diferenţele care există la exprimarea funcţiei **Dexα** cu relaţia ei invariantă de definiţie şi, respectiv, prin dezvoltarea ei în serie trigonometrică, la care s-au reţinut primii 10 termeni din seria (12.16).

Un exemplu mai concludent, privind avantajele utilizarii **FSM-CE** de variabilă excentrică, îl constituie funcţia y = **dexθ** care, pentru **s = 0**, este dreapta y = 1, iar pentru **s =**

±1 este un **semnal dreptunghiular** sau funcţia poartă temporală care, prin dezvoltare în serie **Fourier**, se **apropie** de reprezentarea **exactă** dată de funcţia :

(12.21) $$\mathbf{dex\theta} = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$$

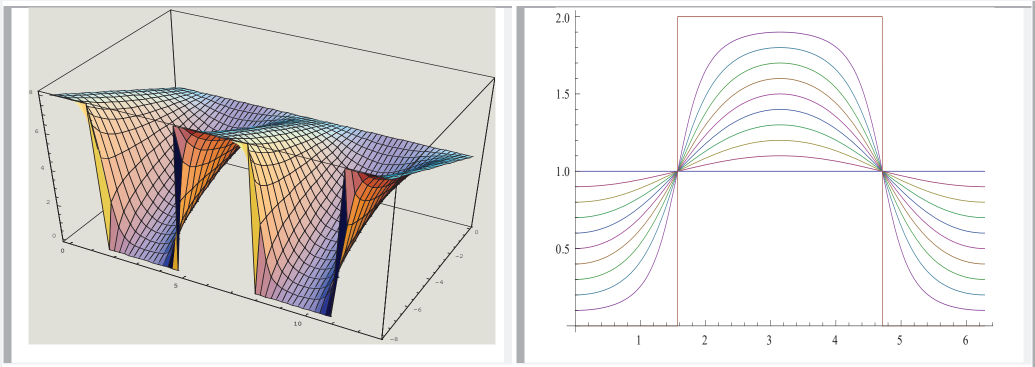


Fig. 12.5 Transformarea continua a unui semnal continuu în unul dreptunghiular

www.SuperMathematica.com; www.SuperMatematica.ro

ParametricPlot3D[{x, 1- 0.1 u Cos[x] (1-(0.1 u Sin[x])^2)^- 0.5, 0.1 u}, {u, -10, 10}, {x,- Pi, Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{1-0.1 u Cos[x] (1-(0.1 u Sin[x])^2)^-0.5}, {u, -10, 10}]], {x, -Pi, Pi}]

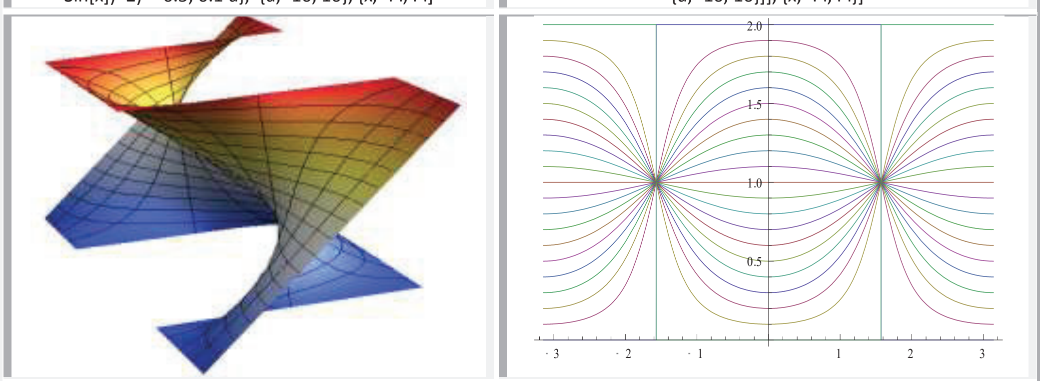


Fig.12. 6,a Funcţia supermatematică circulara excentrică (FSM-CE) derivată excentrică **dexθ**

Pentru o baleere continuă a excentricităţii numerice **s**, de la 0 la 1, se va obţine o transformare continuă a unui semnal continuu în unul dreptunghiular, aşa cum se ilustrează în **figura 12.5**.

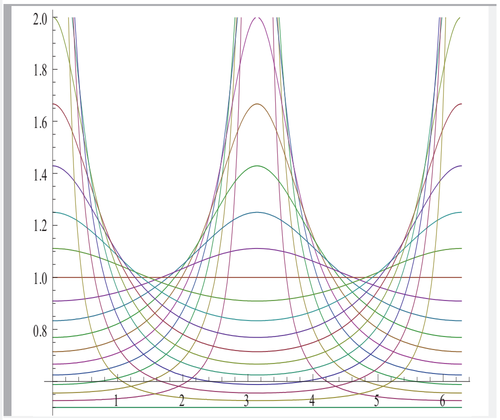
Relaţia (12.15) exprimă **FSM-CE** denumită **beta excentrică bexθ** care transformă continuu un semnal triunghiular simetric (**Fig.12.6,a**), în altul defazat cu π, iar pentru s = 0, trece printr-un semnal continuu, în timp ce, **FSM-CE Bexα** il transformă în unul triunghiular asimetric (**Fig.12.7**).

Un semnal trapezoidal se poate obţine prin funcţia y = bexθ – bex(θ-π/2) , reprezentata în **figura 12.9**. Aceeaşi diferenţă pentru funcţia Bexα are alura din **figura 12.9**.

Funcţia y = Bex(α+π/2) –Bex(α-π2) este identica cu

$\mathrm{Dex}_{1,2}\,\theta = 1 \mp \dfrac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$ (v. **Fig.12.10** şi **Fig. 12.5**).

Plot[Evaluate[Table[{1-0.1 u Cos[x] (1-(0.1 u Sin[x])^2)^-0.5}, {u, -20, 20}]], {x, -Pi, Pi}]



ParametricPlot3D[{x, (1-0.1 u Cos[x])/ (1+(0.1 u)^2 -0.2 u Cos[x]), 0.1 u}, {u,-10,10},{x,0,2 Pi}]

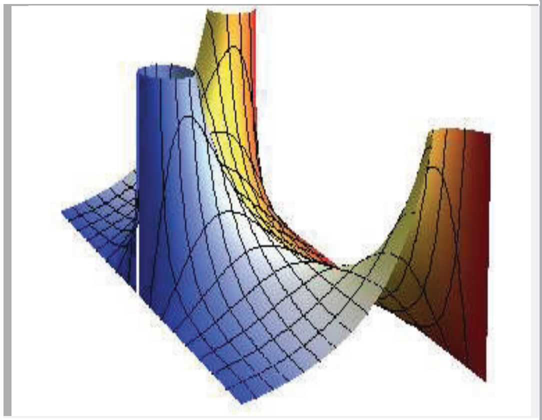
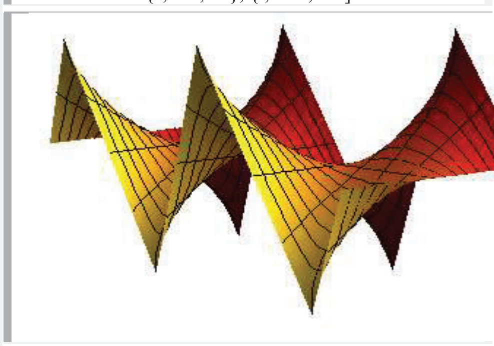


Fig. 12.6,b Funcţia supermatematică circulara excentrică (FSM-CE) derivată excentrică **Dexα**

ParametricPlot3D[{t, ArcSin[0.1 s Sin[t]], 0.1 s}, {s, -10, 10}, {t,-2 Pi,2 Pi}]



Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1 s Sin[t]]}, {s,-10,10}]],{t, 0, 2 Pi}]

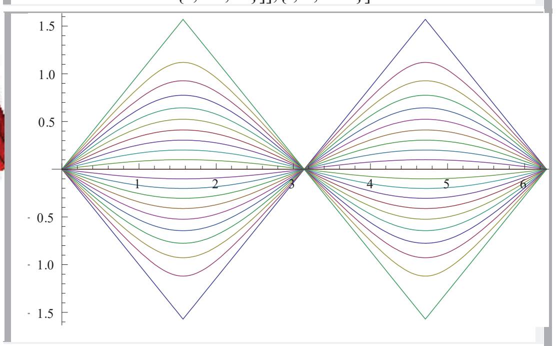
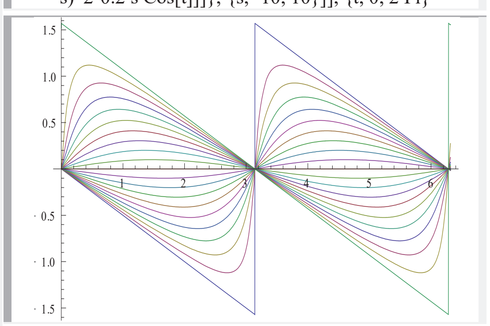


Fig. 12.7 Funcţia bexθ, s = -1 … +1, θ ∈ [- 2π, 2 π]

Plot[Evaluate[Table[{ ArcSin[0.1 s Sin[t]/Sqrt[1+(0.1 s)^2-0.2 s Cos[t]]]}, {s, -10, 10}]], {t, 0, 2 Pi}]



ParametricPlot3D[{t, ArcSin[0.1 s Sin[t]/Sqrt[1+(0.1 s)^2-0.2 s Cos[t]]], 0.1 s}, {s, -10, 10}, {t, -2 Pi, 2 Pi}

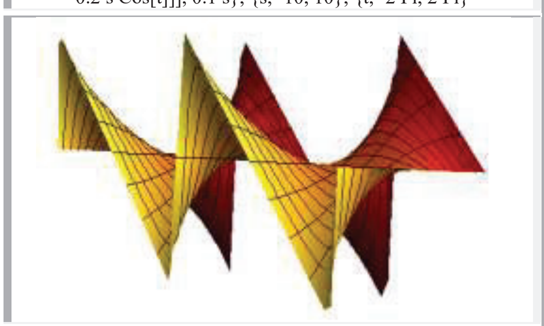


Fig. 12.8 Funcţia Bexα (k = -1…+1 cu pasul 0,1)

Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1 s Sin[t]]-ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]},{s, -10, 10}]], {t, - Pi, Pi}]

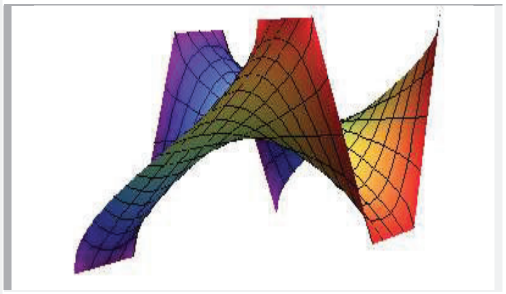
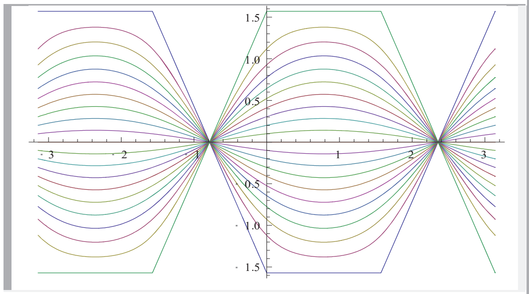



Fig. 12.9 Funcţia y = bexθ – bex(θ - π/2)

Plot[Evaluate[Table[{ ArcSin[0.1 s Sin[t]/Sqrt[1+(0.1 s)^2-0.2 s Cos[t]]] - (ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]/Sqrt[1+(0.1 s)^2-0.2 s Cos[t-Pi/2]]])},{s, -10, 10}]],{t, 0, 2 Pi}]	Plot[Evaluate[Table[{ ArcSin[0.1 s Sin[t+Pi/2]/Sqrt[1+(0.1 s)^2-0.2 s Cos[t+Pi/2]]] - (ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]/Sqrt[1+(0.1 s)^2-0.2 s Cos[t-Pi/2]]])},{s, 0, 10}]],{t,- 2 Pi, 2 Pi}]

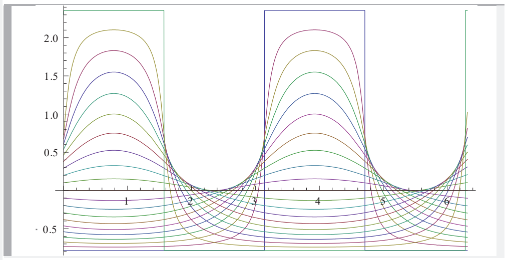
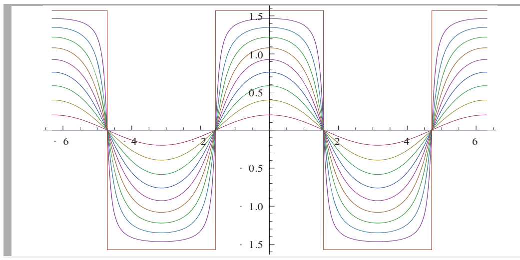
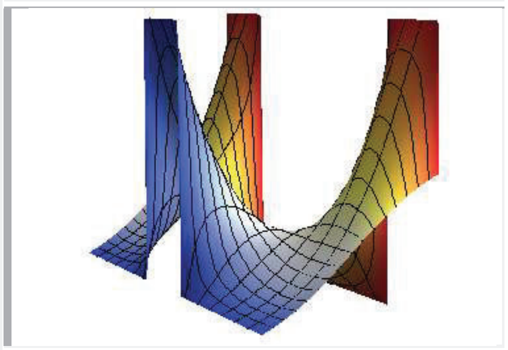
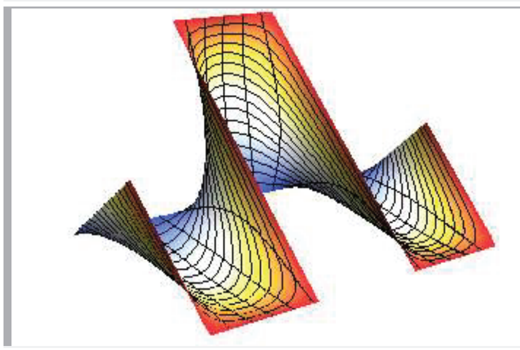

	
	

Fig. 12.10 Bexα –Bex(α-π/2)	**Fig. 12.11** Funcţia y = Bex(α+π/2) –Bex(α-π/2)
Fig. 12.12,a. Funcţia **Cexθ** de excentricitate numerică s = 10	**Fig. 12.12,b.** Funcţia **cexθ** de excentricitate numerică s = 40

FSM au două determinări: una **principală**, notată cu indice **1-** sau fară indice **-** şi una secundară, notată cu indicele **2**, corespunzatoare celor două puncte de intersecţie ale cercului unitate cu o dreaptă turnantă în jurul **polului unitate S** şi nu cu o semidreaptă ca în **MC-Euler**.

12.5. FUNCŢII DELTA SAU FUNCŢII DIRAC PERIODICE

În anul 1926 **P.A.M. Dirac** a introdus în mecanica cuantică **„funcţia” delta** (notată **δ**) care, d.p.d.v. fizic, reprezintă densitatea unei sarcini egale cu unitatea şi situată într-un anumit punct, de exemplu, originea axelor de coordonate. Dacă sarcina punctiformă este **m**, atunci densitatea liniara ρ(x) se exprimă cu relaţia;

(12.22) $\rho\,(x) = m\,.\delta(x)$.

Pentru ca distribuţia să fie punctiformă, este necesar ca funcţia δ(x) să fie nulă peste tot, cu excepţia punctului O(0,0), unde ia valoarea ∞ şi indeplineşte condiţia (23)

(12.23) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x).dx = 1.$$

Din punctul de vedere al analizei matematice clasice, nu există o funcţie care să indeplinească condiţiile anterior menţionate, astfel că funcţia delta nu este o funcţie obişnuită. Procedeul incorect d.p.d.v. al analizei matematice clasice, respectiv **CENTRICE**, a condus la crearea unei noi teorii, care să sintetizeze, să simplifice şi să justifice toate faptele d.p.d.v. matematic [20].

Aşa s-a ajuns la elaborarea **TEORIEI DISTRIBUTIILOR** sau a **funcţiilor generalizate**, ca un capitol al analizei matematice. Numai că generalizarea nu s-a făcut în cel mai fericit caz; apariţia matematicii **excentrice**, ca o generalizare a matematicii **centrice** (clasice), fiind mult mai productivă, aşa cum se va constata în continuare.

Una din cele două semidrepte din excentrul S(∞, 0) va intersecta cercul unitate numai pentru

θ = Pi ± 2kPi, k = 1, 2, 3, …

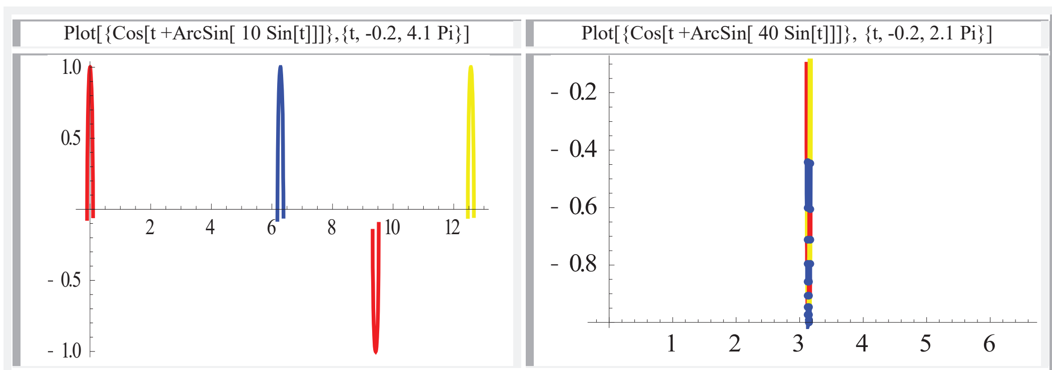


Fig.12.12,a **s = 10** **Fig.12.12,b** **s = 40**

O astfel de funcţie este prezentată în **figura 12.12,a** pentru **s = 10**, şi în **figura 12.12,b** pentru **s = 40**.

Cu creşterea excentricităţii **s**, cresc exponenţial şi punctele plotate, altfel „calculatorul" nu nimereşte ţinta din **S**: cercul unitate, la saltul dintr-un punct la cel următor şi graficele rezultă alterate.

Astfel, o funcţie cu proprietăţile menţionate anterior, mai mult, una periodică, de porioadă 2π, este **FSM - CE cexθ** pentru o **excentricitate numerica s = k ⇒ ∞.**

În acest caz, intervalul de integrare infinit trebuie redus la unul din intervalele în care apare doar o singură dată valoare funcţiei, condiţie ce poate fi acceptată în multe situaţii practice.

12.6 SISTEMUL TRIGONOMETRIC EXCENTRIC (STE).

STE este format prin asocierea funcţiilor **cosinus** (**cex**) şi **sinus excentrice** (**sex**) de **variabilă excentrică θ**

(12.24) **STE** $$\begin{cases} \mathbf{1}, \boldsymbol{cex\theta},\ \boldsymbol{cex2\theta}, \dots, \boldsymbol{cexn\theta}, .. \\ \mathbf{0}, \boldsymbol{sex\theta},\ \boldsymbol{sex2\theta}, \dots, \boldsymbol{sexn\theta}, .. \end{cases}$$

Aşa cum s-a afirmat, într-un anumit interval, vizibil în **figura 12.11**, o singura **FCE** din bază supermatematică **STE** poate reprezenta două **FCC** din baza centrică, pentru valorile

marginale ale excentricităţii numerice **s,** în domeniul **± 1** şi o infinitate de alte funcţii, pentru valorile intermediare ale lui **s**. În cazul din **figura 12.13, sexθ** exprimă pe **sinθ,** pentru s = 0 şi pe **sin2θ**, pentru **s = -1** şi **sin (2t + π)** pentru **s = +1**.

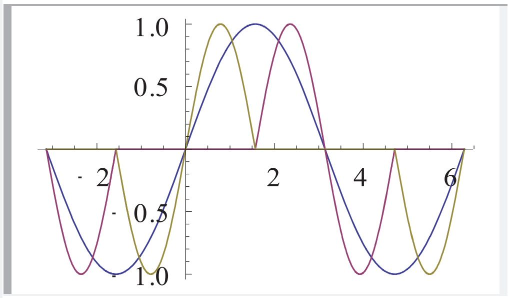


Fig. 13 FSM-CE sexθ pentru **s = 0** şi **s = 1**

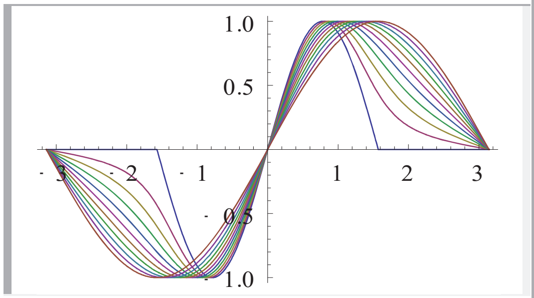


Fig. **14,a FSM-CE sexθ** pentru **s ∈ [-1, 0]**

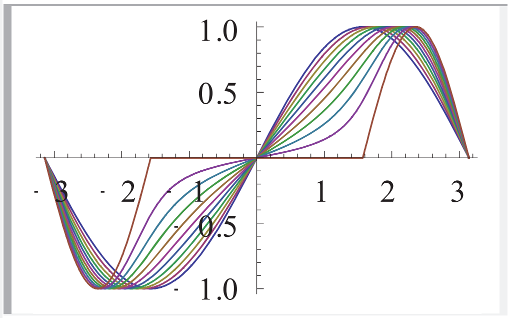


Fig. 12.14,b FSM-CE sexθ pentru **s ∈ [0, 1]**

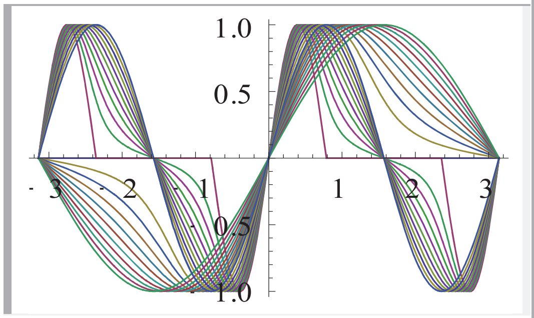


Fig. 12.15,a Familie de **FSM-CE sexθ** şi **sex2θ**

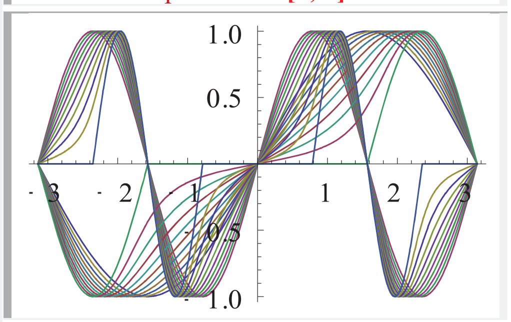


Fig. 12.15,b Familie de **FSM-CE sexθ** şi **sex 2θ**

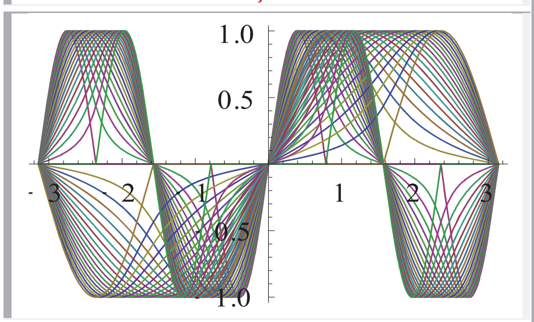


Fig.12.15,c

Celelalte funcţii intermediare ale bazei sunt prezentate în **figura 12.14,a** pentru **s ∈ [-1,0]** şi în **figura 12.14,b** pentru s ∈ [-1,0]. In ambele figuri θ ∈ [- π, + π].

Existenta unei baze, mult mai largi de funcţii in cadrul **STE**, prin care se poate opera simplu, faciliteaza aproximarea funcţiilor periodice cu grafice din cele mai complicate.

Dacă se reprezintă doar două dintre funcţiile bazei excentrice, pentru n = 1 şi n = 2, situaţia se prezintă ca în **figurile 12.15,a** pentru **s ∈ [-1,0]** şi în **12.15,b** pentru **s ∈ [0,1]** şi împreună în **12.15,c**.

Această bază de date a **STE** poate fi mult largită, pentru a acoperi şi mai bine domeniul, prin utilizarea **FSM-CE** de dublă, triplă sau multiplă excentricitate. Cu cât baza de funcţii este mai numeroasă şi mai diferită, cu atât aproximaţiile se pot realiza mai uşor şi mai precis.

FSM-CE cexθ de simplă, dublă şi de triplă excentricitate sunt prezentate în **figura 12.16**.

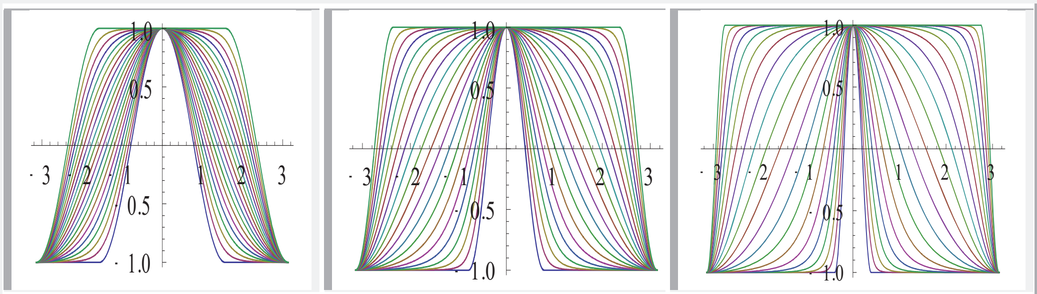


Fig. 12.16 FSM-CE cexθ de **simplă**, **dublă** şi **triplă** excentricitate,
pentru $\mathbf{s_0} \in$ **[-1,1],** $\theta \in[-\pi, \pi]$

Se observă, din **figura 12.16,** că spaţiul rămas neacoperit de funcţia cosinus excentric scade cu creşterea gradului de multiplicitate a excentricităţii funcţiilor.

Aşa cum **FSM-CE** se obţin din cele centrice, prin înlocuirea variabilei centrice **α** cu cea excentrică **θ**, sau cu funcţia amplitudine excentrica **aexθ**

(12.25) $\alpha = \text{aex}\,\theta = \theta - \arcsin(s.\sin(\theta - \varepsilon))$, adică,

(12.26) $\text{cex}\theta = \cos\alpha = \cos[\text{aex}\theta]$, procedând în continuare şi înlocuind pe **θ**, din expresia invariantă a lui **cexθ** cu funcţia **aexθ**, se va obţine un cosinus excentric de dublă excentricitate, notat **c2exθ** [1], adică

(12.27) **c2exθ** = **cex[aexθ]** şi procedând în continuare, în mod asemănător, se pot obţine **FSM-CE** de triplă, ... sau multiplă excentricitate.

Dacă primele 10 funcţii ale **STC (Fig. 12.1)** pot fi plotate simultan, nu acelaşi lucru are sens în cazul **STE** în care, din cauza numărului extrem de mare de funcţii, chiar dacă se alege doar domeniu **s** $\in [0, 1]$, din cel infinit posibil, nu s-ar mai putea desluşi nimic din grafice.

12.7 APROXIMAREA UNOR FUNCŢII ELIPTICE JACOBI.

Dacă se reuşeşte o bună aproximare a funcţiei amplitudine **Jacobi** am (u,k), atunci se pot aproxima cu succes implicit funcţiile sinus eliptice sn(u,k) şi cosinus eliptice cn(u,k) eliptice, deoarece, aşa cum se ştie

(12.28) $$\begin{cases} cn(u,k) = \cos\,[am(u,k)] \\ sn(u,k) = \sin[am\,(u,k)] \end{cases}$$

Funcţia **amplitudine / amplitudinus** a lui **Jacobi** este de perioadă **4K**. Convertită pentru a fi o funcţie de perioada 2π (**Fig.12.17**), se aseamănă foarte mult cu funcţia **amplitudine excentrica aexθ** (**Fig.12.18, a** şi **b**) de **excentricitate variabilă**.

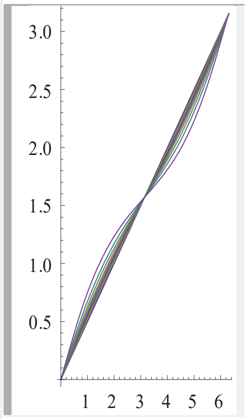


Fig. 12.17,a Functia **amplitudine** **Jacobi am (u,m)** modificată, $m = k^2 \in [0, 1]$

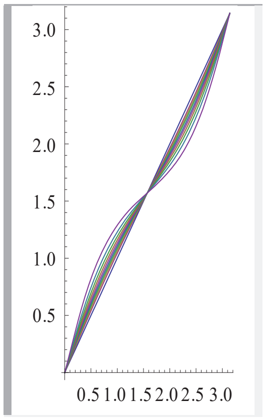


Fig. 12.17,b Funcţia **amplitudine** **Jacobi am(u,k)** modificată, $k \in [0, 1]$

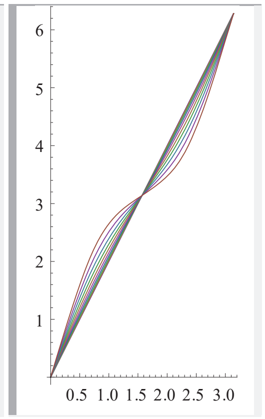


Fig.12.18,a **FSM-CE** aex(2θ, S(s = 2k²/3, ε = 0), $k \in [0, 1]$

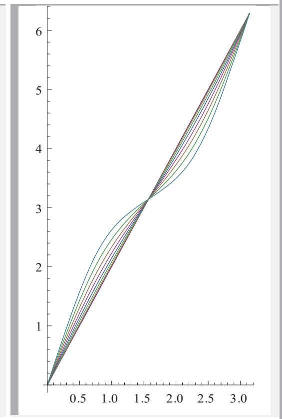


Fig.12.18,b **FSM-CE** aex[2θ, S(s = k², ε = 0)], $s \in [0; 0,8]$

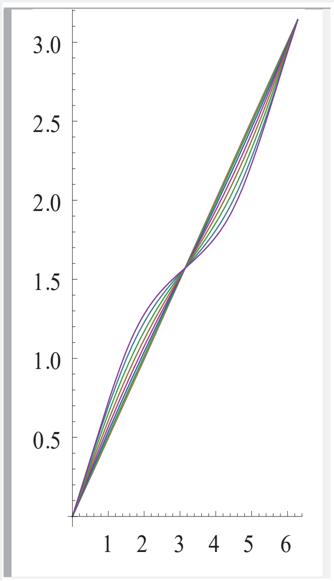


Fig. 12.19 Diferenţa aexθ – am(u,m)

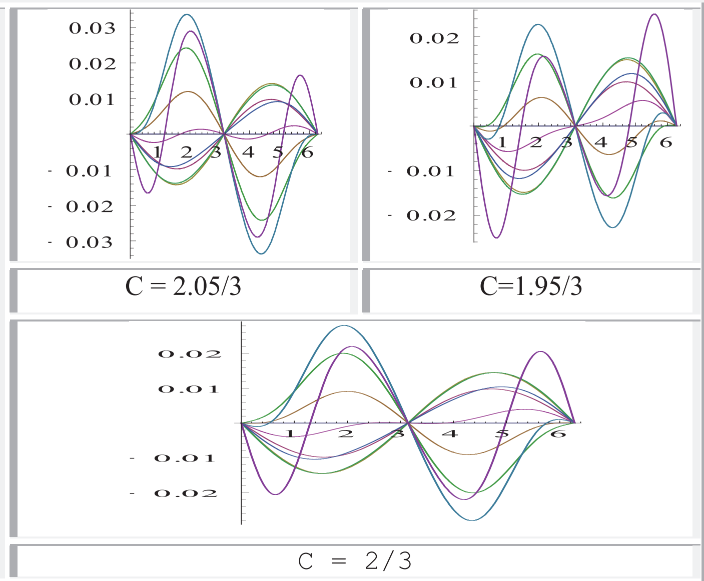


Fig. 12.20 Diferenţa $\frac{1}{2}$**aex(θ, s)** - aex(u$\frac{K}{\pi}$,k)

Funcţia **amplitudine** a lui **Jacobi** are expresia computaţională (29) şi se calculează cu

(12.29) JacobiAmplitude[u,m] = $z-\frac{mz^2}{6}+\frac{4m+m^2}{120}z^3+\frac{-16m-44m^2-m^3}{5040}z^4+O[m]^9$

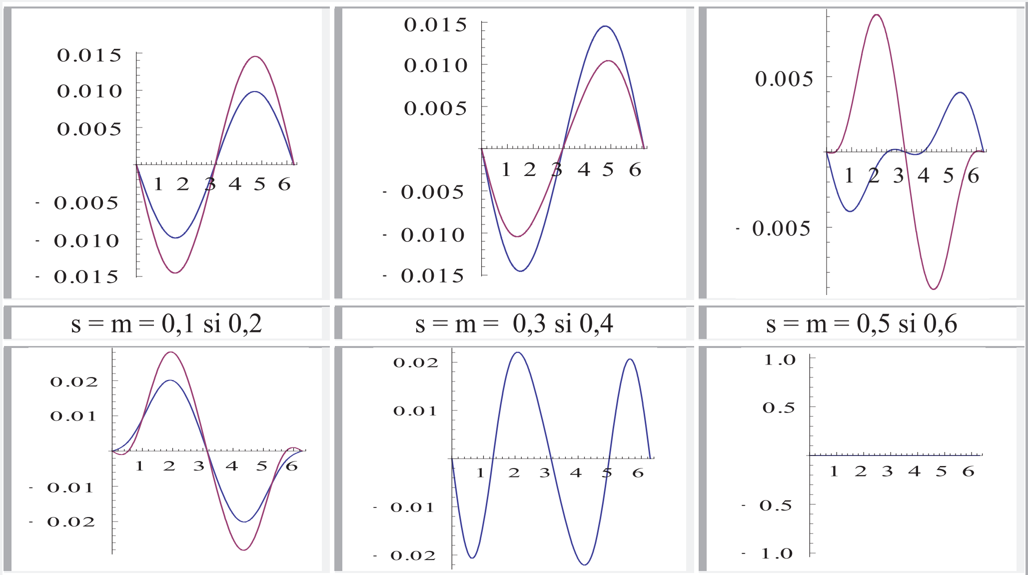
seria din aceeaşi relaţie. Atragem atenţia că $m = k^2 \rightarrow k = \sqrt{m}$.

În **figura 12.18,a excentricitatea s** este variabilă, fiind la puterea a doua şi are expresia

(12.30) $s \rightarrow \frac{2}{3}s^2$, sau $s = 2k^2/3$ astfel ca **FSM-CE** este

(12.31) $y = aex_2(2\theta, S(\frac{2}{3}\boldsymbol{s^2}, \boldsymbol{0})) = 2\theta + \arcsin[\frac{2}{3}\boldsymbol{s^2}\ \boldsymbol{sin2\theta}]$

Fără a evoca istoria, s-a ajuns la concluzia că o aproximare şi mai bună se obţine dacă coeficientul 2/3 → 1, dar domeniului **s** $\in$ [0,1] se converteşte în domeniu **s** $\in$[0; 0,7] sau în domeniul **s** $\in$[0; 0,8], ceea ce este cam acelaşi lucru (**Fig.12.18,b**), sau dacă, în relaţia (31) arcsin → arctan.



s = m = 0,1 si 0,2	s = m = 0,3 si 0,4	s = m = 0,5 si 0,6

s = m = 0,7 si 0,8	S = m = 0,9	S = m = 0 → Δ = 0

Fig. 12.21 Diferenţe pentru diverse valor s = m

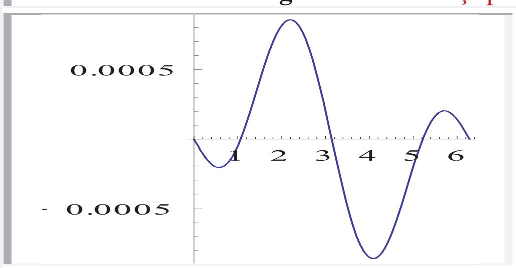


Fig. 12.22 Diferenţa după prima corecţie

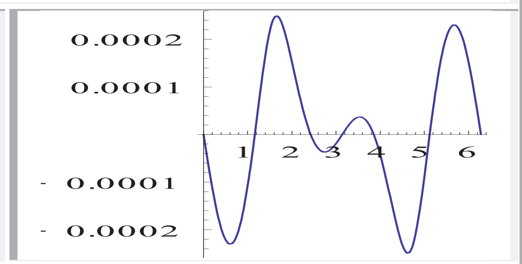


Fig. 12.23 Diferenţa după a doua corecţie

(12.32) $\text{am}(\boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{\pi}}, k) \cong \frac{1}{2}\boldsymbol{aex(\theta, s)}$.

Făcând acum diferenţa

(12.33) $\frac{1}{2}\boldsymbol{aex(\theta, s)} - \text{am}(\boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{\pi}}, k) = \Delta(\theta)$ ea este prezentata în **figura 12.20**.

Se observa, din **figurile 12.20**, că situaţia cea mai bună, dintre cele 3 analizate / încercate, este pentru C = 2/3, în care, diferenţa maximmaximorum nu depaşeste eroarea de 5 sutimi (5.10^{-2}) eroare aceptabilă în multe din situaţiile tehnice.

O îmbunătăţire este posibilă pentru valorile modulului **k** luate separat, facându-se diferenţa (33), nu pentru familia de funcţii, ci pentru anumite funcţii, de un anumit modul k.

Prezentăm în **figura 12.21** diversele diferenţe pentru valorile **k** indicate.

Se observă că diferenţele minime se obţin pentru valorile **s = m** din mijlocul domeniului, pentru s = m = 0,5 şi 0,6. Pentru s = m = 0,5, eroarea maximă, în domeniul de existenţă a funcţiilor $\theta \in [0, 2\pi]$, nu depăşeşte valoarea de 4 mimi ($0{,}004 = 4.\ 10^{-3}$), ceea ce, în acest domeniu, este o performanţă remarcabilă, dată fiind simplitatea **FSM-CE** amplitudine excentrică de variabilă excentrică şi excentricitate variabilă.

În continuare, ameliorarea preciziei se face separat pentru diversele valor s = m. Astfel, de exemplu, pentru s = m = 0,2 în diferenţa (33) mai trebuie adaugat termenul

(12.34) + 0.015 sinθ şi rezultă
(12.35) y_2 = aex (θ, $2s^2/3$, ε = 0) + 0.015 sin θ
şi noua diferenţă va fi de numai 6.10^{-4}, **de 10 ori mai bună** aşa cum se observa în **figura 12.22**.

Analizând forma funcţiei diferenţă, din **figura 12.22,** se constată că diferenţa se mai poate ameliorarea prin scăderea din diferenţa anterioară a funcţiei **sexθ**, adică, funcţia de aproximarea va lua forma
(12.36) $y_3 = y_2$ - 0.0008.Sex[θ, s = 0,95; ε=0)
şi rezultă noua diferenţă, care este numai jumatate din cea anteriaoară, aşa cum se poate observa în **figura 12.23**.

Şi procesul de amaliorare a preciziei de aproximare ar putea continua prin adaugarea unei funcţii care să reducă diferenţele maxime din **figura 12.23**, numai că, datorită erorilor de rotunjire, operaţia devine dificilă şi precizia deja obţinută este de notorietate matematică, ţinând cont de numărul redus de termeni ai funcţiei de aproximare a funcţiei eliptice amplitudine **Jacobi**.

În lucrarea [18] se prezinta aproximarea cu o extraordinar de ridicată precizie, de minimum 15 zecimale exacte, a functiie **K(k),** a integralei eliptice complete de prima speţă şi aplicaţiile funcţiilor supermatematice sunt de abia la începutul lor.

12.8. APROXIMAREA UNEI INTEGRALE ELIPTICE Jacobi CU EROARE DE SUB 0,03 %

Integralele de forma
(1) $\int R[x, \boldsymbol{P(x)}]dx$
în care **P(x)** este un polinom de gradul 3 sau 4, pot fi aduse la o funcţie ratională de integrale, care duc la funcţii elementare şi la una dintre integralele
(2) a) $F(x,k) = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, b) $E(x\,,k) = \int \frac{(1-k^2x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, c) $E(x,\ n,\ k) = \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$
care se numesc **integrale eliptice** de speţa: a) Întâia, b) A doua şi c) A treia **în formă normală Legendre.**

Prin substituţiile **sinθ = t** şi **sinφ = x** ele iau **forma trigonometrică** a integralelor eliptice incomplete **Jacobi**
(3) a) $F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2sin^2\theta}}$, b) $E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2sin^2\theta}d\theta$, c) $E(\varphi,\ n,\ k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{(1+nsin^2\theta)\sqrt{1-k^2sin^2\theta}}$

Integralele eliptice, luate între limitele θ ∈ [0, $\frac{\pi}{2}$], poartă denumirea de **integrale eliptice complete** şi primele două integrale complete sunt notate cu **K(k)** şi, respectiv, **E(k)**.

Pentru acestea, autorul a determinat relaţii de calcul care dau valoarea integralelor cu **15** (**cincisprezece** !) **zecimale exacte** după numai 5 paşi şi precizia poate fi ameliorată prin următorii paşi.

Graficele funcţiilor eliptice **Jacobi** incomplete sunt prezentate în **figura 12.24.**
În **figura 12.25** stânga-sus ◤este prezentată integrala incompletă de prima speţă de modul m = k^2 = 0,8, (m = 0,8 → k = 0,8944271909999159) notată ***F(x; 0,8)***, iar în dreapta-sus ◥ este prezentată aproximarea acesteia prin **funcţia supermatematică circulară excentrică** (**FSM-CE**) amplitudine excentrică **aexθ**, de variabilă excentrică θ, excentricitate numerică **s = 0,2** şi excentricitate ungiulară **ε = − θ** . Graficele celor două funcţii sunt suprapuse în **figura 12.25** ◣, iar diferenţele dintre ele sunt reprezentate în **figura 4** ◢, iar în **figura 12.25** ◢

sunt prezentate erorile față de funcția **aex[θ,S(0,2; θ)]** modificată cu diferența $-0,04\sin[4t] - 0,003$.

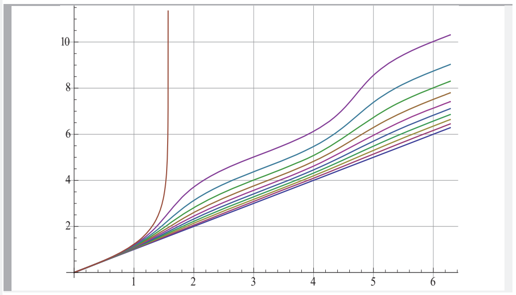
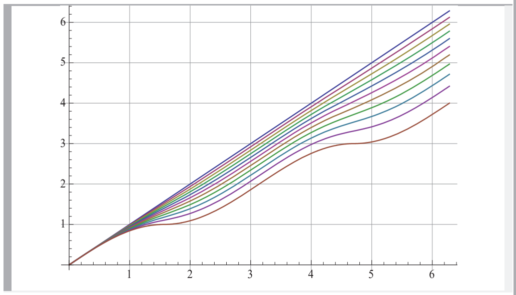
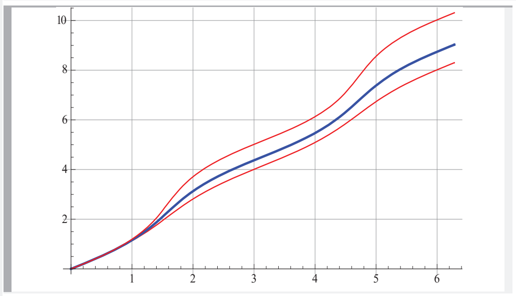
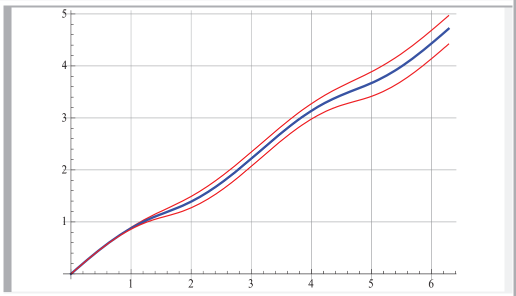
Plot[Evaluate[Table[{EllipticF[*t*, *s*]}, {*s*, 0, 1}], {*t*, 0, 2P	**Plot[Evaluate[Table[{EllipticE[*t*, *s*]}, {*s*, 0, 1}], {*t*, 0, 2P**
	
m = k² = 0,7; 0,8; **0,9**	
	

Fig. 12.24 Graficele funcţiilor eliptice incomplete **Jacobi F(t, m)** ◤ şi **E(t, m)** ◥ pentru $m = k^2 \in [0, 1]$ ▲şi **jos** ▼ pentru $m = k^2 \in [0,7;\ 0,9]$ cu pasul 0,1

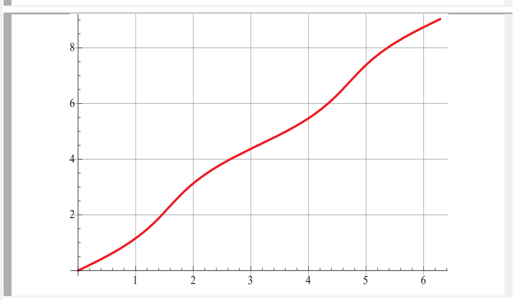
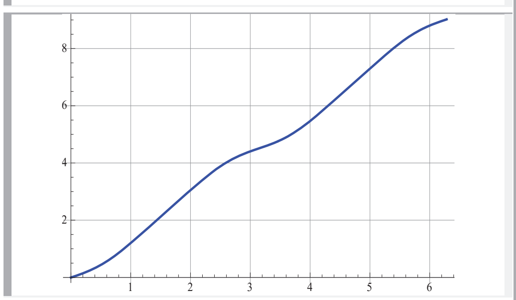
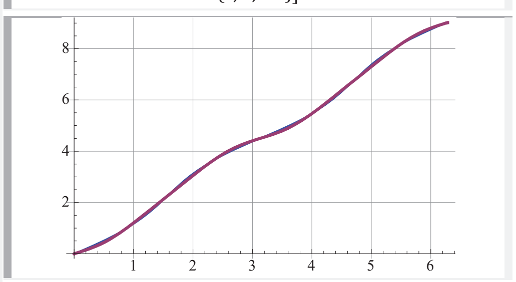
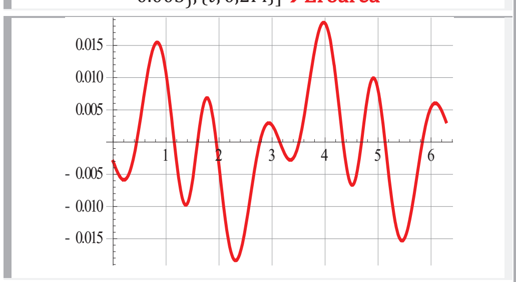
Cu **funcţii centrice**	Cu **funcţii supermatematice circulare excentrice**
	
$\text{Plot}[\{\text{EllipticF}[t, 0.8], 1.436(t - \text{ArcSin}[0.2\text{Sin}[2t]]) - 0.04\text{Sin}[4t] - 0.003\}, \{t, 0, 2\text{Pi}\}]$	$\text{Plot}[\{\text{EllipticF}[t, 0.8] - 1.436(t - \text{ArcSin}[0.2\text{Sin}[2t]]) - 0.04\text{Sin}[4t] - 0.003\}, \{t, 0, 2\text{Pi}\}]$ → **Eroarea**
	

Fig. 12.25 Graficele integralei **F(x, m = k² = 0.8)** şi aproximarea ei prin funcţia **1,436.aex(2θ, s = 0,2) - 0,04.sin(4θ) - 0,003=** $1,436(t - \arcsin[0.2\text{Sin}[2t]]) - 0,04\sin[4t] - 0,003$

Graficele **FSM-CE** amplitudine excentrică **aexθ** sunt prezentate în **figura 12.26** ◀ pentru un excentru **S(s,ε)** de coordonate polare **S(s∈[-1,0], ε = 0)◤**, **S(s∈[0, +1], ε = 0)◀** şi **S(s∈[-1,+1], ε = 0)◣**, iar cele de **ε = θ** în dreapta ▶ pentru aceleaşi valori ale lui **s**.

Dacă se foloseşte <u>exclusiv</u> funcţia **aexθ**, atunci graficele sunt prezetate în **figura 12.27** ◢.

Din figură rezultă că, în acest caz, eroarea maximă de aproximare este de cca. **4 %.** Cum poate fi ea micşorată? Prin paşi mici, dar numeroşi, după aşa-zisa “metoda Potrivescu şi Încercărescu” la noi şi Potrivenko în Rusia, a căror paşi rezultă şi din **figura 5**.

Deoarece eroarea variază după o funcţie asemănătoare cu o funcţie **sin(4θ)**, e normal să se încerce adăugarea acesteia la **FSM-CE aex(θ, s, ε = θ).** În acest fel, eroarea se diminuează la cca. **1,5 %**, aşa cum rezultă din **figura 5,a** ◤. Pentru a obţine grafice mai cunoscute, în sensul în care la valorile argumentului de θ = 0, θ = π şi θ = 2π funcţia erorii să fie nulă, s-a modificat amplitudinea functiei **sin4θ** de la 0,04 la 0,035, rezultând ceea ce s-a dorit, aşa cum rezultă din **figura 5,a** ◥.

aex(θ ,s, ε = 0) | **aex(θ, s, ε = - θ)**

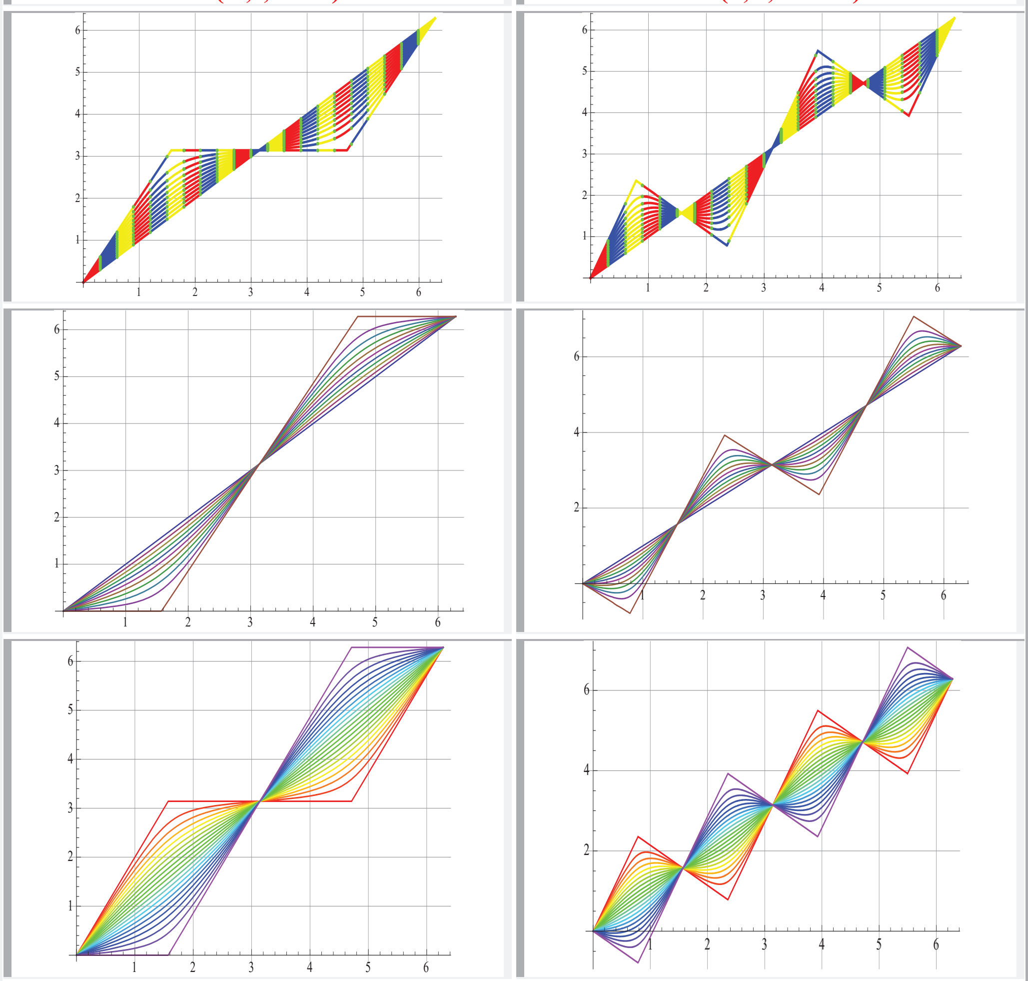
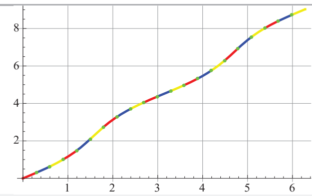
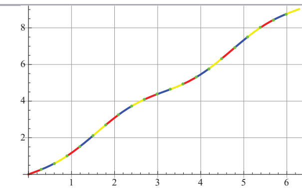


Fig.12.26 Graficele **FSM-CE aex(θ, s, ε = 0)** ◀ şi **aex(θ, s, ε = θ)** ▶

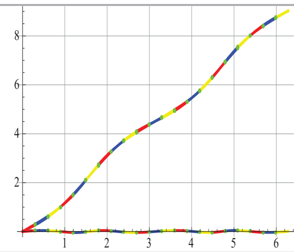
Plot[{EllipticF[t, 0.8]}, {t, 0,2Pi}]



Plot[1.436(t − ArcSin[0.2Sin[2t]]), {t, 0,2Pi}]



Plot[{EllipticF[t, 0.8], 1.436(t − ArcSin[0.2Sin[2t]]), EllipticF[t, 0.8] − 1.436(t − ArcSin[0.2Sin[2t]])}, {t, 0,2Pi}]



Plot[{EllipticF[t, 0.8] − 1.437(t − ArcSin[0.2Sin[2t]])}, {t, 0,2Pi}

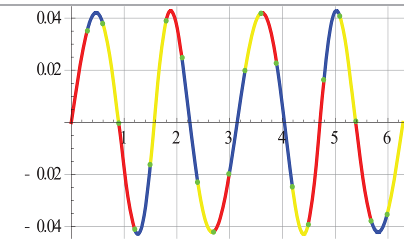
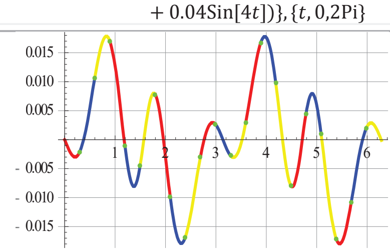
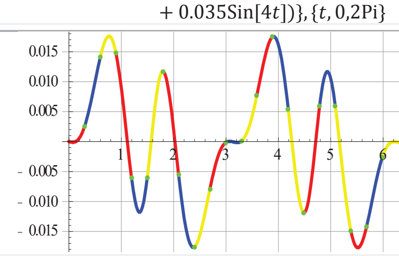


Fig.12.27 Aproximarea exclusiva cu FSM-CE aex(θ, s, ε = θ)

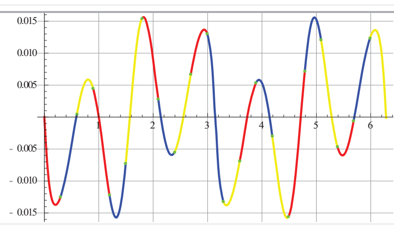
Plot[{EllipticF[t, 0.8] − (1.437(t − ArcSin[0.2Sin[2t]]) + 0.04Sin[4t])}, {t, 0,2Pi}



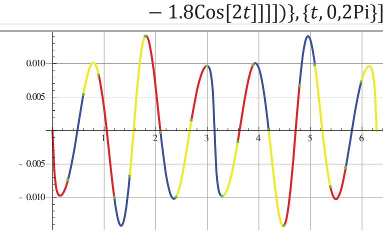
Plot[{EllipticF[t, 0.8] − (1.437(t − ArcSin[0.2Sin[2t]]) + 0.035Sin[4t])}, {t, 0,2Pi}



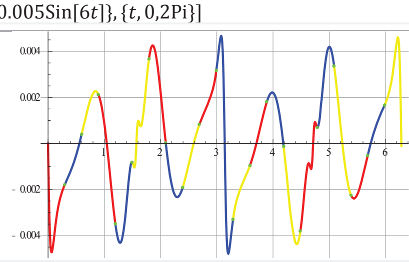
Plot[{EllipticF[t, 0.8] − (1.437(t − ArcSin[0.2Sin[2t]]) + 0.035Sin[4t]) − 0.015(Sin[2t + ArcSin[0.8 Sin[2t]/Sqrt[1 + (0.8)^2 − 1.6Cos[2t]]]])}, {t, 0,2Pi}]



Plot[{EllipticF[t, 0.8] − (1.437(t − ArcSin[0.2Sin[2t]]) + 0.035Sin[4t] − 0.01(Sin[2t + ArcSin[0.9Sin[2t] /Sqrt[+(0.9)^2 − 1.8Cos[2t]]]]])}, {t, 0,2Pi}]



Plot[{EllipticF[t, 0.8] − (1.437(t − ArcSin[0.2Sin[2t]]) + 0.035Sin[4t]) − 0.01(Sin[2t + ArcSin[0.9 Sin[2t]/Sqrt[1 + (0.9)^2 − 1.8Cos[2t]]]]) + 0.005Sin[6t]}, {t, 0,2Pi}]



Plot[{EllipticF[t, 0.8] − (1.437(t − ArcSin[0.2Sin[2t]]) + 0.035Sin[4t]) − 0.015(Sin[2t + ArcSin[0.85 Sin[2t]/Sqrt[1 + (0.85)^2 − 1.7Cos[2t]]]] + 0.005Sin[6t]}, {t, 0,2Pi}

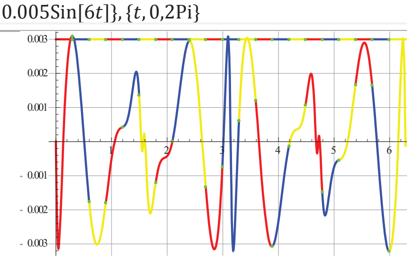
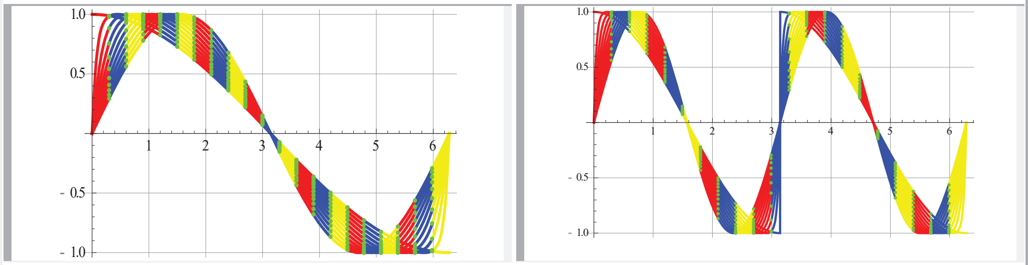


Fig.12.27,a Etapele şi funcţiile posibile de diminuare a erorilor de aproximare

Plot[Evaluate[Table[{Sin[2t + ArcSin[0.1s Sin[2t]/Sqrt[1 + $(0.1s)^2$ − 0.2sCos[2t]]]]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]	Plot[Evaluate[Table[{Sin[2t + ArcSin[0.1s Sin[2t]/Sqrt[1 + $(0.1s)^2$ − 0.2sCos[2t]]]]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[t + ArcSin[0.1s Sin[t]/Sqrt[1 + $(0.1s)^2$ − 0.2sCos[t]]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]	Plot[Evaluate[Table[{Sin[2t + ArcSin[0.1s Sin[2t]/Sqrt[1 + $(0.1s)^2$ − 0.2sCos[2t]]]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

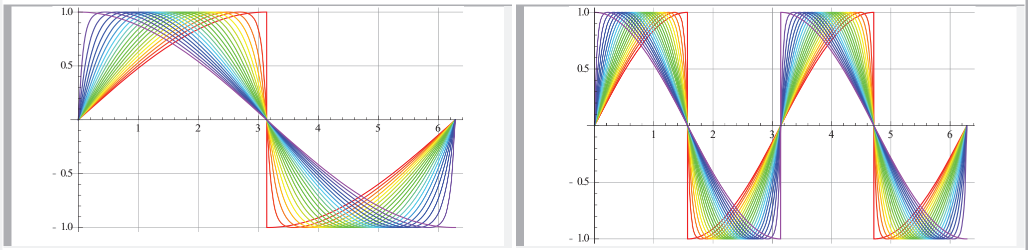
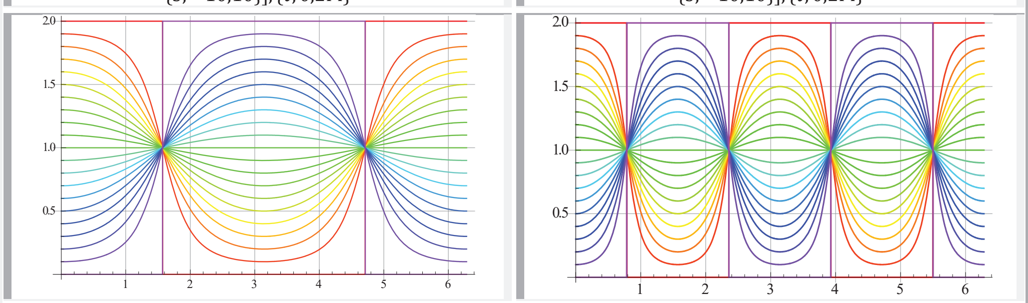


Fig.12.28,a FSM-CE Sex(θ, s, ε = θ) ◄ şi Sex(2θ, s, ε = θ) ►

Plot[Evaluate[Table[{1 − 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − $(0.1s\mathrm{Sin}[t])^2$]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]	Plot[Evaluate[Table[{1 − 0.1s Cos[2t]/Sqrt[1 − $(0.1s\mathrm{Sin}[2t])^2$]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − $(0.1s\mathrm{Cos}[t])^2$]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]	Plot[Evaluate[Table[{Sin[2t]/Sqrt[1 − $(0.1s\mathrm{Cos}[2t])^2$]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]

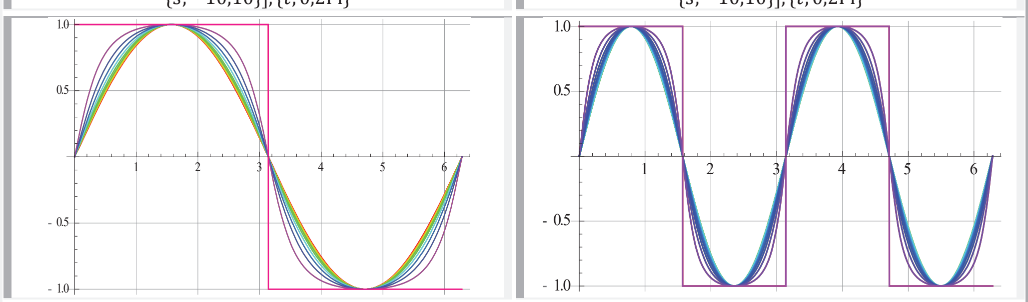


Fig.12.28,,b FSM-CE Sex(θ, s, ε = θ) şi Sex(2θ, s, ε = θ).

Deoarece graficele funcţiei erorilor sunt în trepte duble gândul ne duce la **FSM-CE** de variabilă centrică **α** şi anume, la **FSM-CE** sinus excentric de variabilă centrică Sex(θ, s, ε = θ), reprezentate în **figura 6** ◤ ca funcţii de **α** şi s ∈ [0, 1] şi în **figura 6** ◥ ca funcţi de **2α** pentru aceleaşi valori ale excentricităţii numerice **s**.

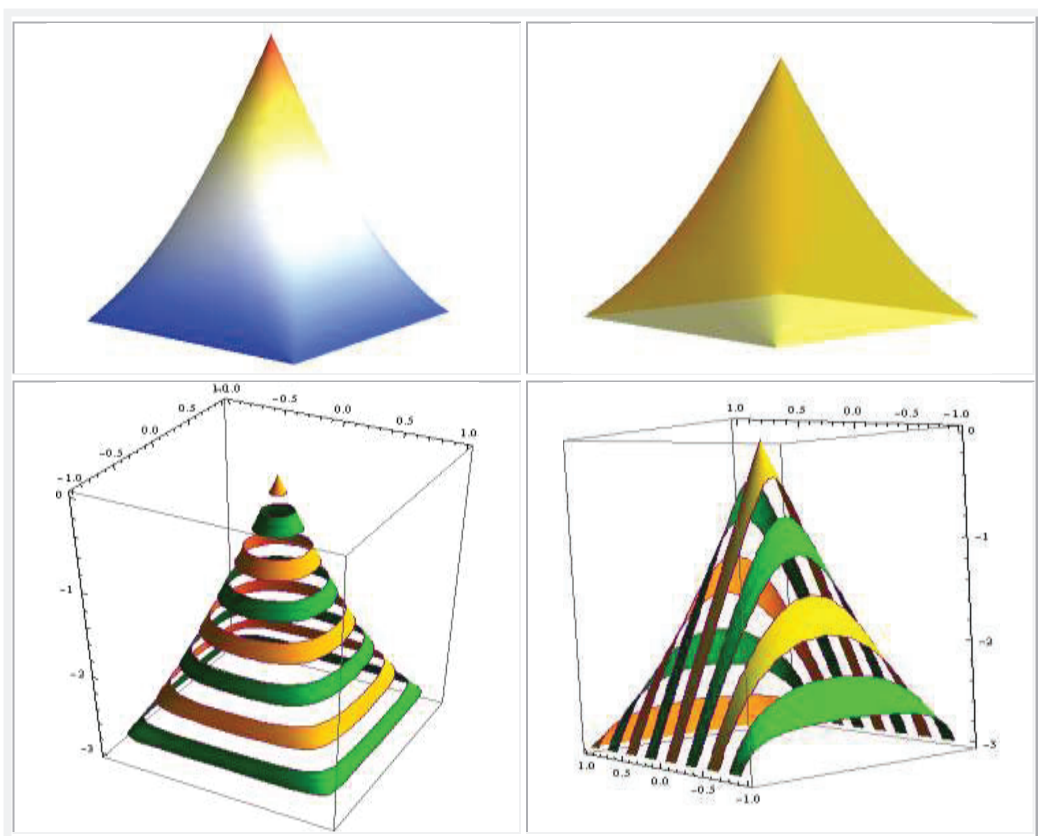
Pentru **s = 0,9** s-au obţinut graficele din **figura 5,a** ◣.Pentru a obţine graficele unor funcţii exprimabile mai simplu matematic sau supermatematic, s-a modificat valoarea excentricităţii de la **s = 0,9** la **s = 0,85** chiar dacă erorile maxime cresc puţin, însă forma graficelor lor este mai uşor de manipulat prin funcţii supermatematice periodice.

Astfel, amplitudinile maxime pot fi diminuate prin utilizarea funcţiei anterioare **Sexα** modificate, cu graficele din **figura 6,b** ◤◥, sau prin **FSM-CE** derivată excentrică **dexθ** **(Fig 6,b ━)** de variabilă excentrică **θ**, ca şi prin **funcţiile supermatematice** sinus cavadrilobe **siqθ**, prezentate în **figura 6,b** ◣◢ .

S-a apelat la prima variantă şi, aşa cum rezultă din graficele din **figura 5,b** ◣, erorile maxime au scăzut la **0,004**. Din forma graficelor, rezultă o posibilă îmbunătăţire, în continuare, a preciziei de aproximare prin dublarea amplitudinii funcţiei **Sexα** modificate în sensul amplificării lor de la **0,005** la **0,01** şi erorile maxime scad la **0,003**, adică la **0,3 %,** aşa cum se poate observa în **figura 5,b** ◢.

Reamintim că, pentru calcule inginereşti, erorile maxime admise sunt cu mult mai mari, şi anume, ele sunt de **± 2 %.**

Precizii la fel de ridicate au fost obţinute şi pentru **funcţiile eliptice Jacobi** **sn(u, k)** şi **cn(u, k)** şi sunt redate în lucrarea **Mircea Eugen Şelariu “APROXIMAREA FUNCŢIILOR ELIPTICE JACOBI”** lucrare existentă şi accesabilă pe internet.



CONOPIRAMIDELE, Obiecte **supermatematice** hibride

Motto:" Împotriva **prostiei** şi zeii luptă fără succes.**"** **Schiller**
E adevărat ! O spun din proprie experienţă:
Am susţinut în două articole **o MARE prostie**
şi niciun zeu nu m-a contrazis.

Capitolul 13

APROXIMAREA FUNCŢIILOR ELIPTICE JACOBI

13.1 PREAMBUL

Apropo de **motto**ul din dreapta ► sus ▲. Despre ce prostie este vorba ? Una mare, mare, … cât roata carului, cum se spune. Dar nu mă pot considera ***cel mai prost***, deoarece prostia nu are margini, aşa cum spunea **Albert Einstein** "Doar două lucruri sunt **infinite**: universul şi **prostia umană**; iar de univers nu sunt foarte sigur", pe de o parte, iar, pe de altă parte nu pot fi "***cel mai*** " că aş fi lipsit şi de modestie.

Conform părerii lui **Valeriu Butulescu** "Sunt prostii extrem de complexe, pe care numai înţelepţii le pot comite". O astfel de prostie am săvârşit şi despre ea este vorba.

M-am înşelat crezând că am găsit funţiile circulare excentrice de variabila centrica **Aexα**, **Cexα**, **Sexα** ca fiind identice cu funcţiile eliptice corespondente **amu, cnu** şi **snu modificate →** transferate din domeniul **eliptic centric** în domeniul **eliptic excentric**.

Ele au fost transformate din funcţii de perioada **4K(k)** în funcţii de perioada **2π**, prin înlocuirea variabilei / argumentului u →2**u**K(k) şi, apoi, prin înlocuirea lui **u** cu funcţia excentrică u = **aexθ = θ – arcsin[s.sinθ]** pentru o excentricitate **s = k**, prin care funcţiile **eliptice centrice** au fost transformate in **functii eliptice excentrice**. Până aici, totu-i bine şi corect !

Doi paşi înţelepţi !

Acum urmează (vorba unui neamţ, dintr-un banc, care reclama că în România se înjură prea mult: "*Jetzt kommt…*") **al treilea pas, greşit** şi prostia imensă: s-au considerat modulele k = m = 0, în funcţiile eliptice modificate, de perioada 2π, **excentrice**, fără să se observe că şi **după** doi paşi anteriori, în acest caz, funcţiile eliptice centrice ***tot degenerează*** în funcţii circulare centrice şi, ca urmare, egalitatea / identitatea a fost stabilită între funcţiile circulare excentrice şi … funcţiile circulare excentrice !!. Aceleaşi ! Evident identice ! După o mare bucurie a urmat o imensă tristeţe. De ruşine nici nu mai vorbim…

Ei bine, dacă identităţi nu s-au putut găsi, măcar să găsim nişte aproximaţii. Cât mai bune. Nu spun că sunt şi ***cele mai bune*** ! Nu mai îndrăznesc ! "Cine s-a fript cu ciorbă, sufla şi-n iaurt !" Ca să-l citez pe Topârceanu.

13.2 FUNCŢIILE ELIPTICE CENTRICE JACOBI

Graficele familiilor de **funcţii eliptice Jacobi**, cosinus eliptic x = **cn(u, k)** şi sinus eliptic y = **sn(u, k),** de perioade **4K(k),** sunt prezentate în **figura 1,a**.

Fiecare curbă a familiei corespunde unei valori a modulului k ∈ [0, 1] sau $m = k^2$, **m** ∈ [-1, +1]; modulele **m** şi **k** având aceeaşi semnificaţie ca şi **excentricitatea numerică liniară s,** coordonata polară a punctului **S**(**s**, **ε**), denumit excentru, pentru o **excentricitate unghiulară ε = 0**, din **matematica excentrică** (ME) şi, totodată, din **supermatematică**, care este o reuniune a **ME** cu **matematica centrică** (**MC**), ordinară, sau clasică. Iar modulul $\mathbf{m = k^2}$ este echivalent cu excentricitatea $\mathbf{s^2}$.

Deoarece, odată cu apariţia **supermatematicii**, au apărut şi **funcţiile eliptice excentrice cnex(u,k), snex(u, k)** ş.a., astfel că **funcţiile eliptice Jacobi** sunt denumite "**eliptice centrice**" (**FEC**), pentru a se deosebi de cele **eliptice excentrice**.

Ecuaţiile **FEC** pot fi date sub forma seriilor de puteri, prezentate în relaţiile (1) ... (4):

(13.1) $\mathrm{am}(u, m) = u - \frac{m}{3!}u^3 + \frac{m(4+m)}{5!}u^5 - \frac{m(16+44m+m)}{7!}u^7 + \frac{m(64+91m+408m^2+m^3)}{7!}u^9 - \ldots + \cdots$

(13.2) $\mathrm{sn}(u, m) = u - \frac{1+m}{3!}u^3 + \frac{1+14m+m^2}{5!}u^5 - \frac{1+135m+135m^2+m^3}{7!}u^7 + \frac{1+1228m+5478m^2+1128m^3+m^4}{9!} - ..$

(13.3) $\mathrm{cn}(u, m) = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1+4m}{4!}u^4 - \frac{1-44m+16m^2}{6!}u^6 + \frac{1+408m+912m^2+64m^3}{8!}u^8 - \ldots + \cdots$

(13.4) $\mathrm{dn}(u, m) = 1 - \frac{m}{2!}u^2 + \frac{m(4+m^2)}{4!}u^4 - \frac{m(16-44m+m^2)}{6!}u^6 + \frac{m(64+912m+408m^2+m^3)}{8!}u^8 - \ldots + \cdots$

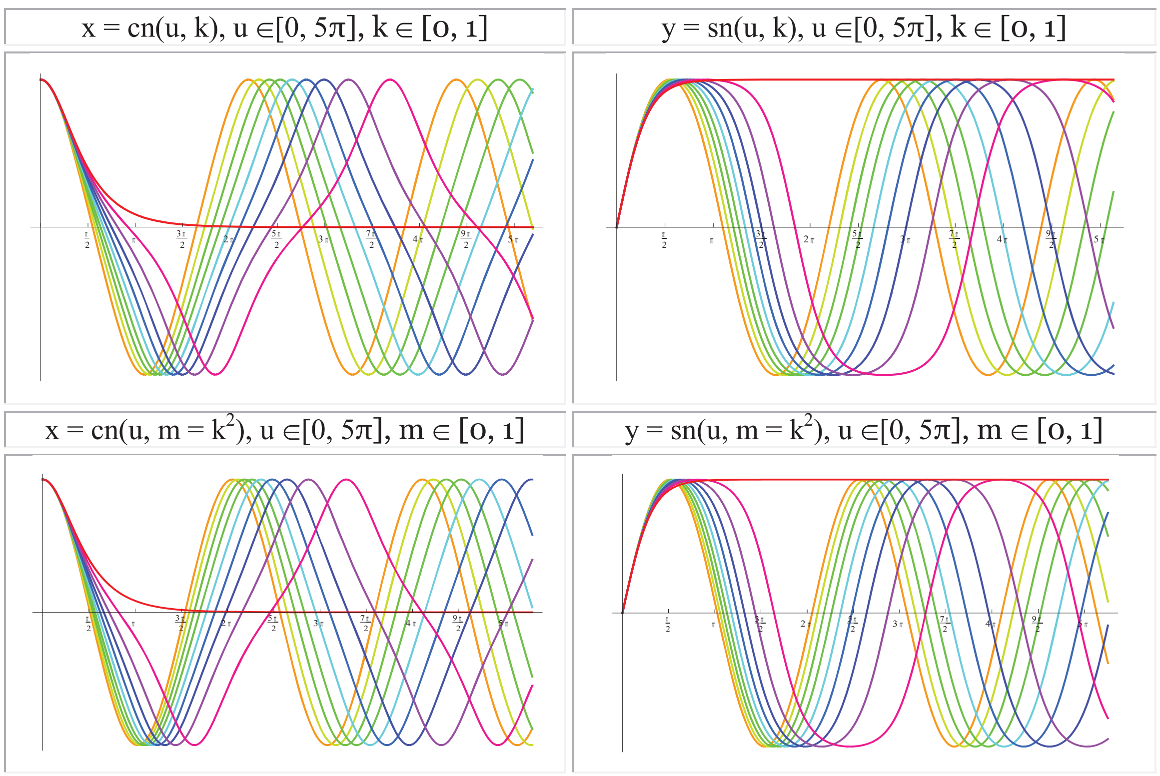
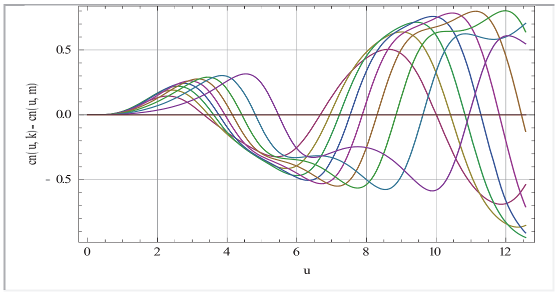


Fig. 13.1,a Graficele **funcţiilor eliptice** cosinus **cn**(u, k^2şi k) ◄ **şi** sinus **sn**(u, k^2şi k) ► **Jacobi** de perioadă **T = 4K(k)**

Pentru modulul k = 0 integrala eliptică completă de prima speţă **K(k)** ia vaoloarea K(0) = $\frac{\pi}{2}$ şi perioada funcţiilor eliptice centrice (**FEC**) de 4K(k)→ 4K(0) = 2π, astfel că, pentru această valoare, **FEC** ***degenerează*** într-o **funcţie circulară centrică** (**FCC**). Ca urmare, fiecare familie de funcţii / grafice din familiile de curbe din **figura 13.1,a** conţine câte o singură curbă **circulară centrică,** a funcţiei **cosu** şi, respectiv, **sinu** printre / alături de familia de **curbe eliptice centrice**.

Deoarece **k** ∈ [-1, +1] se poate afirma că **FEC** sunt o generalizare a **FCC**, iar pentru k = m = 0, **funcţiile eliptice** centrice degenerează (**FEC**) în funcţii **circulare centrice** (**FCC**). Tot aşa cum **funcţiile circulare excentrice** (**FCE**) cos excentric **cexθ** şi sinus excentric **sexθ** sunt şi ele o ganeralizare a **FCC** şi pentru **s = 0** degenerează şi ele, aşijderea, în **FCC.**

Plot[Evaluate[Table[{**JacobiCN** $[x, m^{0.5}]$ − **JacobiCN** $[x, m]$}, $\{m, 0,1\}$], $\{x, 0,4\text{Pi}\}$]]	Plot[Evaluate[Table[{**JacobiSN**$[x, m^{0.5}]$ − **JacobiSN**$[x, m]$}, $\{m, 0,1\}$], $\{x, 0,4\text{Pi}\}$]]



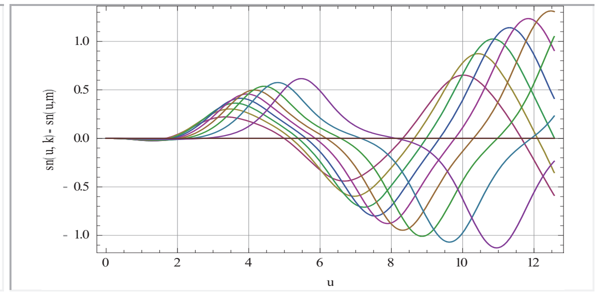
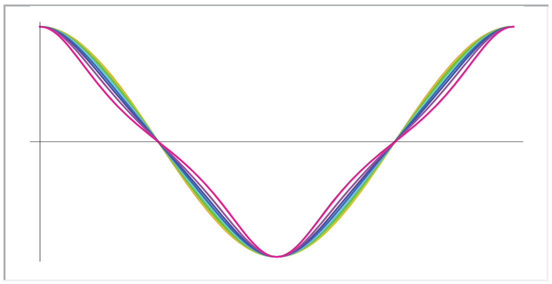
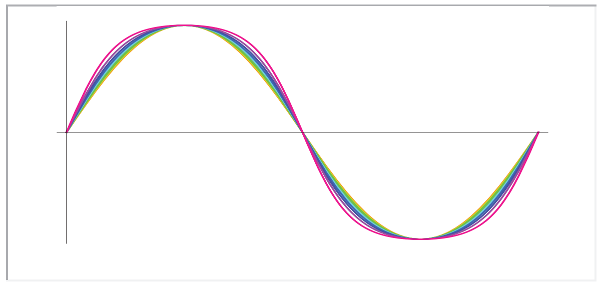


Fig. 13.1,b Graficele diferenţelor **funcţiilor eliptice** cosinus y = **cn**(u, k) - **cn**(u, m = k^2) **şi** sinus **y = sn**(u, k)- **sn**(u, m = k^2) **Jacobi** de perioadă **T = 4K(k)**

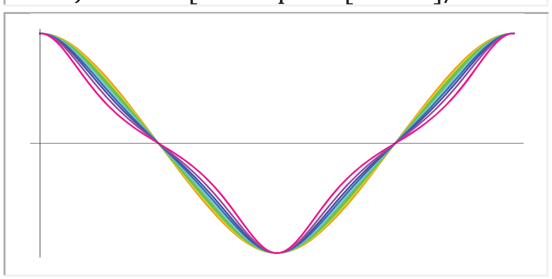
x = cn($2uK(k)/\pi$, m = k^2)= JacobiCN[$2u$ EllipticK[m]/Pi



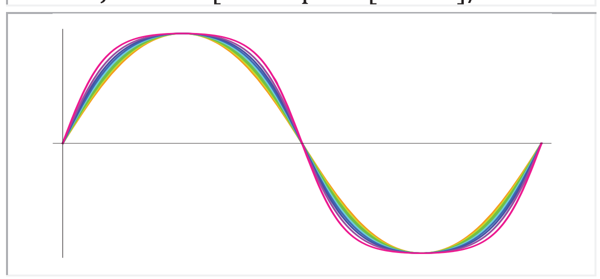
y = sn($2uK(k)/\pi$, m= k^2)= JacobiSN[$2u$ EllipticK[m]/Pi



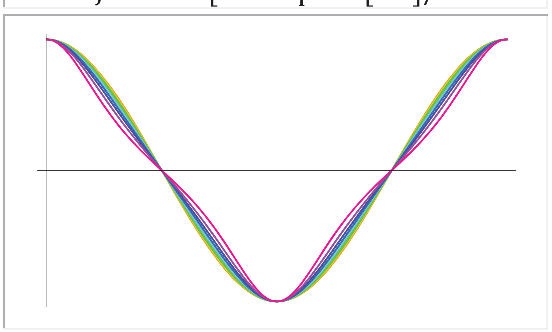
x= cn($2uK(k)/\pi$, k = $\sqrt{m}$)= JacobiCN[$2u$ EllipticK[m^0.5]/Pi



y = sn($2uK(k)/\pi$, k = $\sqrt{m}$)= JacobiSN[$2u$ EllipticK[m^0.5]/Pi



x= cn($2uK(k)/\pi$, m^2)= JacobiCN[$2u$ EllipticK[m^2]/Pi



y = sn($2uK(k)/\pi$, m^2)= JacobiSN[$2u$ EllipticK[m^2]/Pi

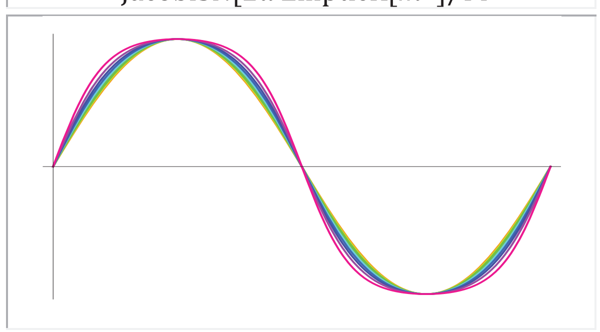


Fig. 13.2 Graficele **funcţiilor eliptice** cosinus **cnu** şi sinus **sn(u, m = k^2) Jacobi** de perioadă **T = 2π**

Prin multiplicarea argumentului / variabilei **u** a **FEC** de perioadă **T = 4K(k)** cu $\frac{2K(k)}{\pi}$, adică u → $\frac{2K(k)}{\pi}\boldsymbol{u}$, **FEC** devin de perioadă **T' = 2π**, aşa cum este ilustrat în **figura 13.2**, ca funcţii de m = k^2 → sus ▲, ca funcţii de k = $\sqrt{m}$ → la mijloc ▬ şi de $m^2 = k^4$ → jos ▼ şi rămân **funcţii eliptice centrice** cu excepţia cazului k = m = 0.

Din **figura 13.1,a** rezultă, aparent, că modificarea modulelor de la k, la m = k^2 nu influenţează prea mult forma curbelor, în schimb diferenţele valorice sunt semnificative şi cresc cu creşterea argumantului u, aşa cum se poate observa în diferenţele prezentate în **figura 13.1,b**. În principal, datorita defazajului lor.

13.3 FUNCŢII SUPERMATEMATICE QUADRILOBE (CVADRILOBE) EXCENTRICE

Quadrilobele sunt curbe **supermatematice** hibride, închise (**Fig.13.3,a**), rezultate prin hibridarea (**super**)matematică a cercului cu un pătrat, ce reprezintă, totodată, transformarea continuă a cercului în pătrat şi invers. Pentru **s = 0** se obţine cercul, iar pentru **s = ± 1** se obţine un pătrat perfect. În 2D, iar în 3D se obţine un corp geometric nou, un hibrid între con (**s = 0**) şi piramidă (**s = ± 1**), denumit **conopiramidă** sau **piramidocon** (**Fig. 13.3,b**), care pentru R = 1 = constant rezultă un cilindru circularo-pătrat, iar pentru R = s ∈ [0, 1] rezultă conopiramida (**Fig.13.3,b**)

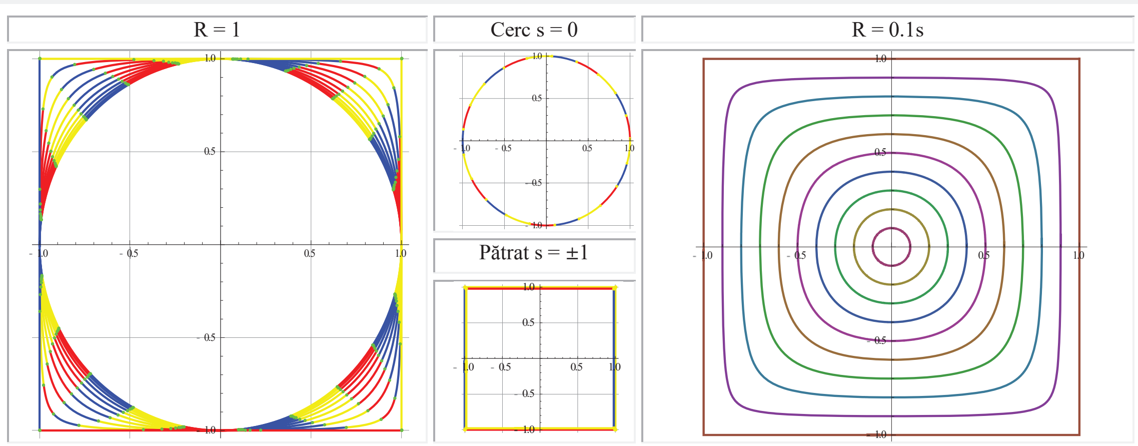


Fig.13.3,a Quadrilobe (cvadrilobe) excentrice (QE)

Rezultă că şi quadrilobele sunt o generalizare a cercului. Ecuaţiile parametrice ale acestora se exprimă prin funcţiile cosinus $\boldsymbol{coq\theta}$ şi, respectiv, sinusul $\boldsymbol{siq\theta}$ quadrilobe, dar şi prin **dexθ** şi **dex**$\left(\boldsymbol{\theta-\frac{\pi}{2}}\right)$

(13.5) $$\begin{cases} x = coq\theta = \dfrac{cos\theta}{\sqrt{1-s^2sin^2\theta}} \\ y = siq\theta = \dfrac{sin\theta}{\sqrt{1-s^2cos^2\theta}} \end{cases}$$

(13.5') $$\begin{cases} dex\theta = -scos(\theta-\varepsilon) + \sqrt{1-s^2sin^2(\theta-\varepsilon)} \\ dex\theta = -scos\left(\theta-\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) + \sqrt{1-s^2sin^2(\theta-\frac{\pi}{2}-\varepsilon)} \end{cases}$$

cu graficele din **figura 13.3,c** pentru R = 1 şi un excentru S(s ∈ [0,1], ε = 0) de coordonate polare (**s, ε**).

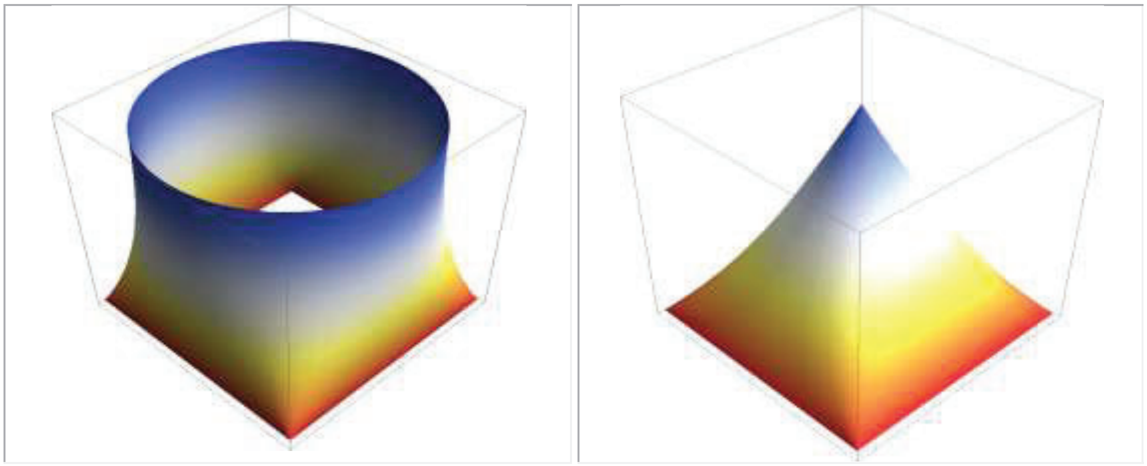


Fig.13.3,b Cilindru (circularopătrat) şi con (conopiramidă) excentrice (QE)

$Y = \mathrm{siq}(\theta, s) = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-(s.\cos\theta)^2}}$	$Y = \mathrm{coq}(\theta, s) = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-(s.\sin\theta)^2}}$

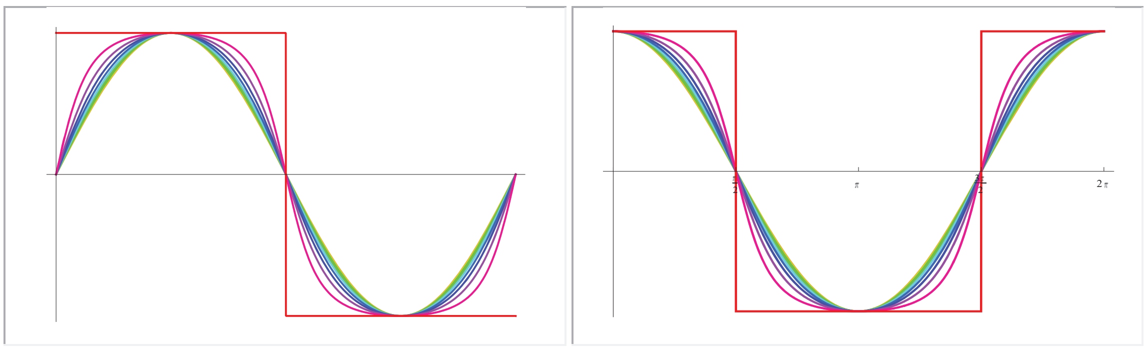


Fig.13.3,c Graficele funcţiilor **supermatematice** cosinus **coqθ** şi sinus **siqθ quadrilobe (cvadrilobe)** de **excentru S (s, ε = 0)**

$Y = \mathrm{siq}(\theta, s^2) = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-(s^2.\cos\theta)^2}}$	$Y = \mathrm{coq}(\theta, s^2) = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-(s^2.\sin\theta)^2}}$

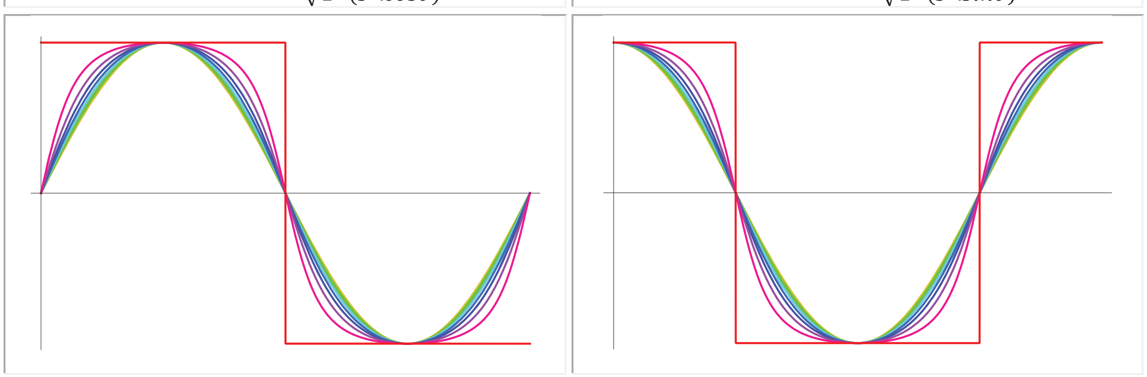
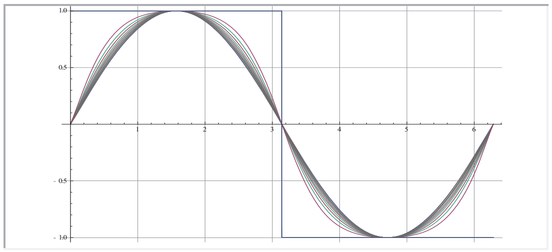


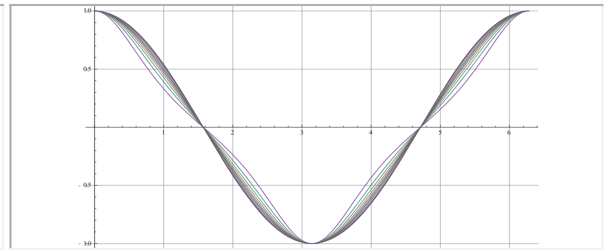
Fig.3,d Graficele funcţiilor cosinus şi sinus **quadrilobe (cvadrilobe) de excentru S (s^2, ε = 0)**

Din relţiile (5) rezultă imediat că, pentru s = 0, ***coqθ* = cosθ** şi ***siqθ* = sinθ**, care sunt ecuaţiile parametrice ale cercului unitate (R = 1), centrat în originea O(0, 0), adică CU(1,O) iar pentru s = 1, ***coqθ*** = ± cos*θ* / Abs[cosθ] şi siqθ = ± sinθ / Abs[sinθ], care sunt **<u>ecuaţiile parametrice ale unui pătrat</u> <u>perfect</u>**, aşa cum se poate constata în centrul (▌) **figurii 13.3,a**.

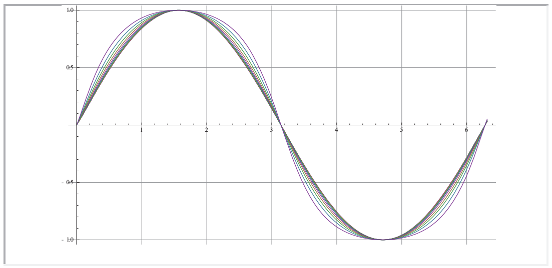
Plot[Evaluate[Table[{**JacobiSN**[2*x* EllipticK[0.1*m*]/Pi, 0.1*m*], Sin[*x*]/Sqrt[1 − Cos[*x*]^2]}, {*m*, 0,10}], {*x*, 0,2Pi}]]



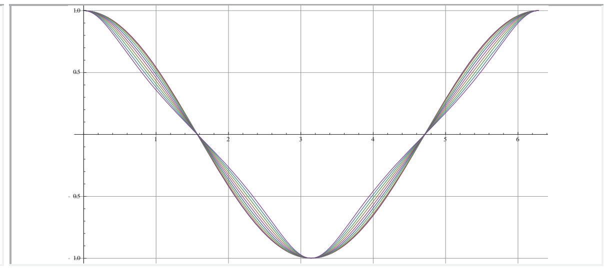
Plot[Evaluate[Table[{**JacobiCN**[2*x* EllipticK[0.1*m*]/Pi , 0.1*m*]}, {*m*, 0,9}], {*x*, 0,2Pi}]]



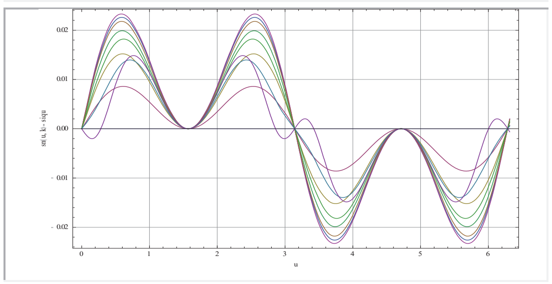
Plot[Evaluate[Table[{Sin[*x*]/Sqrt[1 − 1.4(0.075*s*Cos[*x*])^2] {*s*, 0,9}], {*x*, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Cos[*x*]/Sqrt[1 + (0.149*s*Sin[*x*])^2]}, {*s*, 0,9}], {*x*, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{**JacobiSN**[2*x* EllipticK[0.1*m*]/Pi , 0.1 − Sin[*x*]/Sqrt[1 − 1.4(0.075*m*Cos[*x*])^2]}, {*m*, 0,9}], {*x*, 0,2I



Plot[Evaluate[Table[{**JacobiCN**[2*x* EllipticK[0.1*m*]/Pi , 0.1*m*] − Cos[*x*]/Sqrt[1 + (0.15*m*Sin[*x*])^2]}, {*m*, 0,9}], {*x*, 0,2Pi}]]

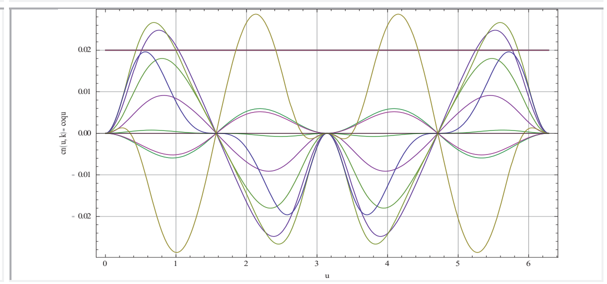
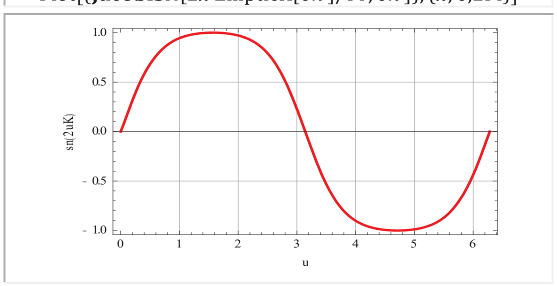
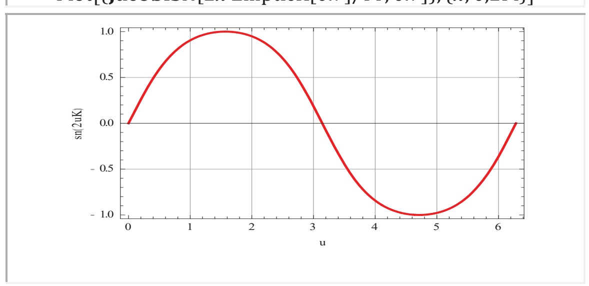


Fig.13.4 Graficele funcţiilor eliptice **Jacobi sn(u,m)** ◄ şi **cn(u,m)** ►, graficele **FSM**-QE cosinus quadrilob (cvadrilob) **coqu şi** sinus quadrilob **siqu,** precum şi erorile / diferenţele lor.

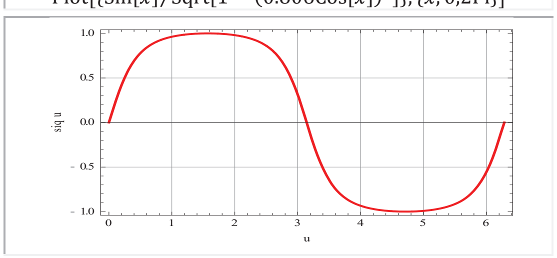
Plot[{**JacobiSN**[2*x* EllipticK[0.9]/Pi , 0.9]}, {*x*, 0,2Pi}]



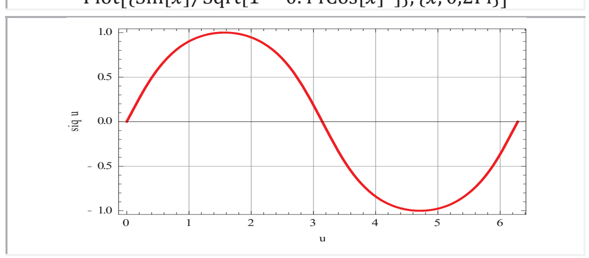
Plot[{**JacobiSN**[2*x* EllipticK[0.7]/Pi , 0.7]}, {*x*, 0,2Pi}]



Plot[{Sin[*x*]/Sqrt[1 − (0.806Cos[*x*])^2]}, {*x*, 0,2Pi}]



Plot[{Sin[*x*]/Sqrt[1 − 0.44Cos[*x*]^2]}, {*x*, 0,2Pi}]



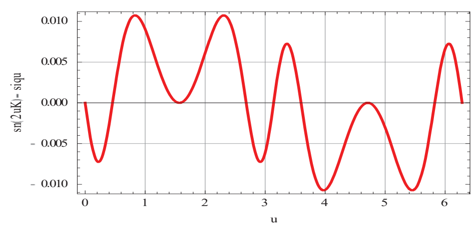
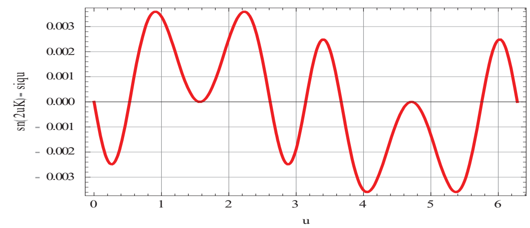
Plot[{**JacobiSN**[2*x* EllipticK[0.9]/Pi, 0.9] − Sin[*x*]/Sqrt[1 − (0.806Cos[*x*])^2]}, {*x*, 0,2Pi}]	Plot[{**JacobiSN**[2*x* EllipticK[0.7]/Pi, 0.7] − Sin[*x*]/Sqrt[1 − 0.44Cos[*x*]^2]}, {*x*, 0,2Pi}]
	

Fig.13. 5 Graficele funcţiilor eliptice **Jacobi sn(u,m)**, graficele sinus **quadrilobe (cvadrilobe) modificate** precum şi diferenţele lor.

Totodată, pentru **s = 0**, **funcţiile quadrilobe** (cvadrilobe) **excentrice** degenerează în **funcţii circulare centrice** (***coqθ*** →cosθ şi ***siqθ*** → sinθ), ceea ce rezultă din relaţiile (13.5).
În **figura 13.4** sunt prezentate **funcţiile eliptice Jacobi snu** şi **funcţiile supermatematice quadrilobe excentrice** (**FSM**-QE) **siqu** în stânga ◄ şi **cnu** şi **coqu** în dreapta ►, pentru un modul **m**, respectiv excentricitate **s**, cuprinse în domeniul **m, s** ∈ [0; 0,9].

Nu s-a admis şi valoarea m = k = s = 1, pentru că programele de matematică, utilizate de autor, nu pot plota curbele de această valoare, deoarece pentru m = k = 1 integrala eliptică completă de prima speţă **K(k)** tinde la infinit, adică, **K(1)** → **∞.**

Pentru a apropia cât mai mult forma graficelor celor două tipuri de funcţii şi, evident, pentru a asigura aproximaţii cât mai bune, s-a constatat, prin încercări, că raportul excentricitate / modul este **s = 1,49 m**, în cazul funcţiilor **cnu** şi **coqu** (**Fig.4** -dreapta►) şi de **s = 1,075 m** pentru funcţiile **snu** şi **siqu** din stânga ◄**figurii 4**, la acestea amplificându-se şi funcţia de sub semnul radical cu valoarea de **1,4**, adică, **1** − $(s.sinu)^2$ → **1**− 1,4 $(s.sinu)^2$

Se observă, din graficele diferenţelor (**Fig.4** ▼), că erorile de aproximare sunt acceptabile, ele fiind cu puţin mai mari decât valoarea de ± 0,02, adică ± 2 % cât se acceptă în domeniul ingineriei mecanice. Dacă, pentru ansamblul grupului de funcţii, îmbunătăţirea aproximării este dificilă, pentru valori oarecare **m** şi **s** ***precizate***, respectiv ale modulului şi excentricităţii, acest lucru poate fi realizat.

Astfel, s-au ales modulele de valori mai ridicate, de **m = 0,9** ◄ şi **m = 0,7** ►, care prezentau şi erorile anterioare mai ridicate / mari şi, prin încercări succesive, erorile au fost ***reduse considerabil*** (**Fig.13.5**), de la 0,02 la 0,003, adica la 0,3 % pentru **sn(u, m)** şi sub 1 % pentru **cn(u, m).**

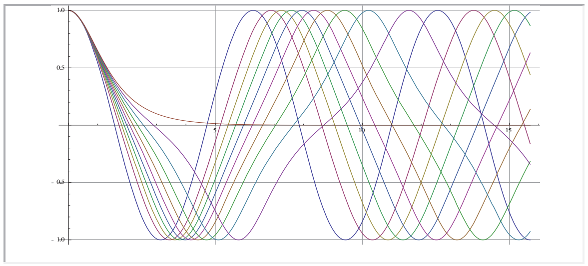
13.4 FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE QUADRILOBE (FSM-QE) DE PERIOADĂ 4K(k)

Dacă **functiile eliptice Jacobi** de perioada **T = 4K(k)** pot fi aduse la perioada de **T' = 2π**, înseamnă că este posibil şi invers, ca **funcţiile supermatematice quadrilobe** (**FSM-QE**) de perioadă **T' = 2π** să fie aduse la perioada de **T = 4K(k)**. Acest lucru este ilustrat în **figura 13.6,a** pentru **funcţiile eliptice Jacobi** de modul k = $\sqrt{m}$ şi în **figura 13.6,b** pentru modulele m = k^2.

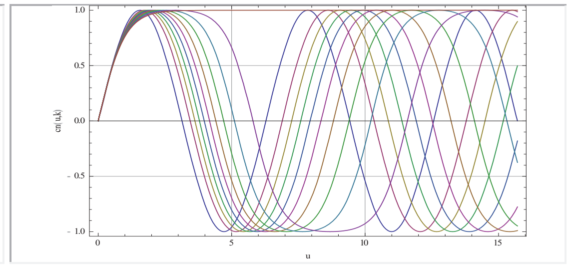
Din **figura 13.6,a** rezultă că diferenţele dintre **FSM-QE coqθ** de 4K(k) şi de s → 1,49**s** şi **FEJ cn(u, k)** de 4K(k) şi de k =$\sqrt{m}$, s, m ∈ [0, 1] sunt acceptabile, ele fiind cu puţin peste valoarea de 0,02 (2%).

În cazul funcţiilor **siqθ** şi **snu**, aceleaşi precizii se obţin pentru sn(u, m ∈ [0, 1]) şi, respectiv, siq[θ = u] modificat, în care radicalul este $\sqrt{1-s^2 sin^2\theta}$ → $\sqrt{1-1.5[(0.75s)^2 sin^2\theta]}$ cu modificarea corespunzătoare a argumentului / variabilei θ → $\pi\,\theta/2K(k)$, în ambele cazuri.

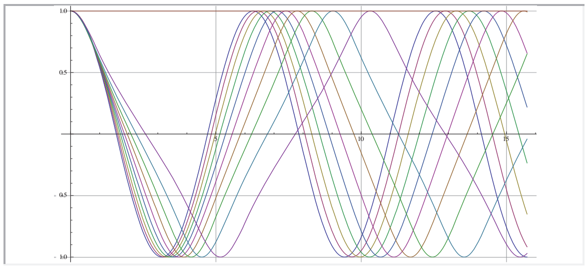
Plot[Evaluate[Table[{**JacobiCN**[x, $m^{0.5}$]}, {m, 0, 0.9}], {x, 0,5Pi}]]



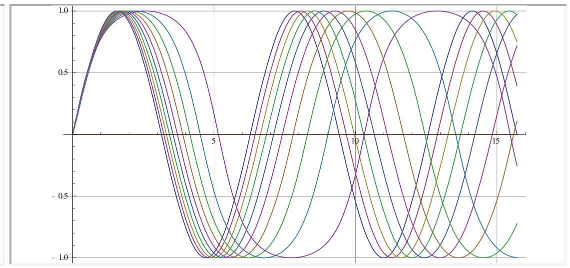
Plot[Evaluate[Table[{**JacobiSN**[x, $m^{0.5}$]}, {m, 0, 1}], {x, 0, 5Pi}]]



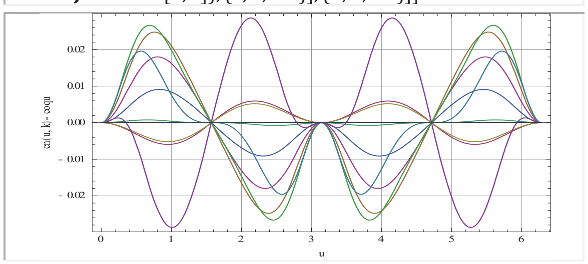
Plot[Evaluate[Table[{Cos[πx/(2EllipticK[s])]/Sqrt[1 + (1.49sSin[Pi/(2EllipticK[s])])^2]}, {s, 0,1}], {x, 0, 5π}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[Pi x/(2EllipticK[m])]/Sqrt[1 − 1.5 (0.75mCos[Pi x/(2EllipticK[m])])^2]}, {m, 0,1}], {x, 0, 5Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Cos[Pix/(2EllipticK[s])]/Sqrt[1 + (1.49sSin[Pix/(2EllipticK[s])])^2] − **JacobiCN**[x, s]}, {s, 0, 0.9}], {x, 0,5Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[Pi x/(2EllipticK[m])]/Sqrt[1 − 1.5(0.75mCos[Pi x/(2EllipticK[m])])^2] − **JacobiSN**[x, m]}, {m, 0,1}], {x, 0, 5Pi}]]

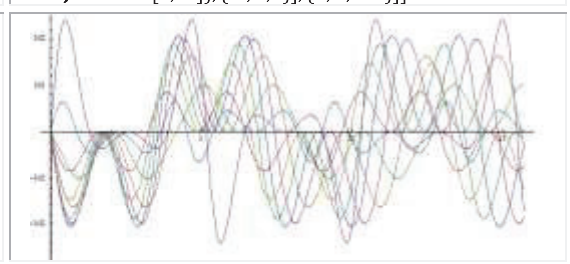
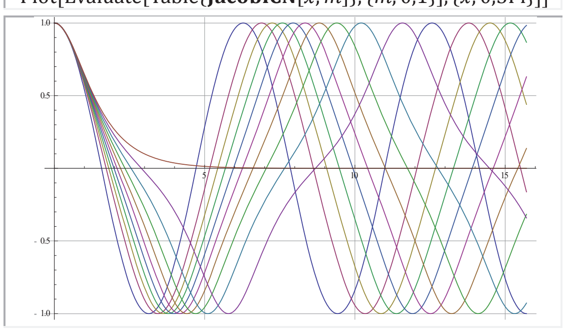


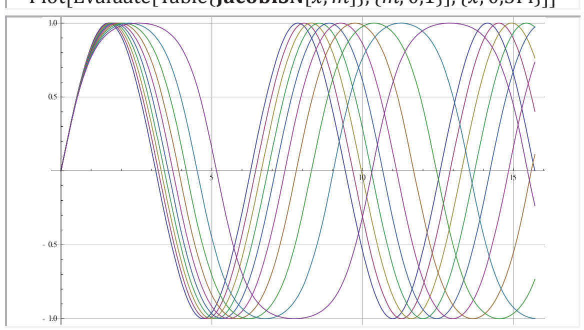
Fig.13.6,a FEJ şi FSM-QE de perioade **4K(k) si modul k** = $\sqrt{m}$ şi diferenţele lor

Plot[Evaluate[Table{**JacobiCN**[x, m]}, {m, 0,1}], {x, 0,5Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Cos[Pi x/(2EllipticK[m])]/Sqrt[1 + (1.5mSin[Pi x/(2EllipticK[m])])^2]}, {m, 0,1}], {x, 0.2,5Pi}]]

Plot[Evaluate[Table{**JacobiSN**[x, m]}, {m, 0,1}], {x, 0,5Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[Pix/(2EllipticK[m])]/Sqrt[1 − 1.5^2((0.75m)^2Cos[Pix/(2EllipticK[m])])^2]}, {m, 0,1}], {x, 0, 5Pi}]]

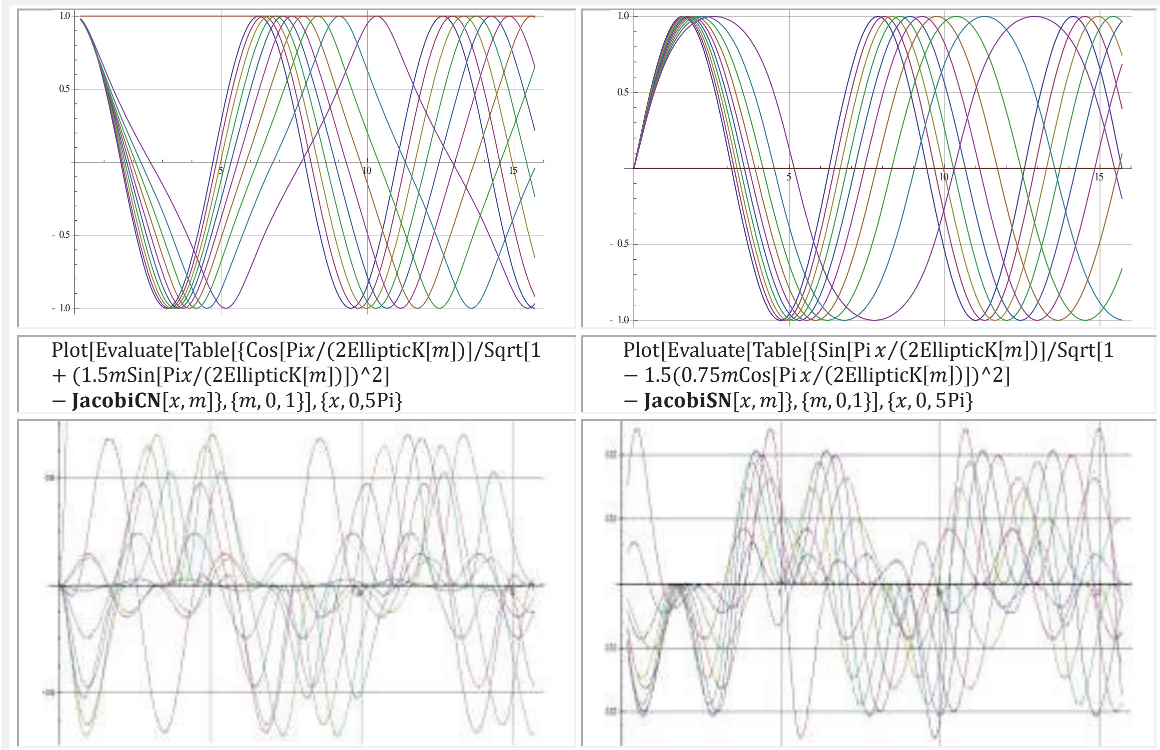


Fig. 13.6,b FEJ şi FSM-QE de perioade **4K(k) si modul** $m = k^2$ **şi diferentele lor**

Diferenţe / erori, aproximativ, de aceeşi mărime se obţin şi pentru **cn(u, m =** k^2**)** şi sn(u, m = k^2), aşa cum rezultă din **figura 13.6,b**.

13.5 FUNCŢII ELIPTICE JACOBI dn(u, k) Şi dn(u, m= k^2) DE PERIOADĂ T = 4K(k) CENTRICE ŞI SUPERMATEMATICE EXCENTRICE DE VARIABILE EXCENTRICĂ θ ŞI CENTRICĂ α

Funcţiile eliptice Jacobi de module **m =** k^2 şi **k** pot fi exprimate prin radicalul

(13.6) $$\begin{cases} dn(u,k) = \sqrt{1 - k^2.sn^2(u,k)} \\ dn(u,m) = \sqrt{1 - m.sn^2(u,m)} \end{cases},$$

sau de seriile (www. **Mathematica 8** - Wolfram Research)

Series[JacobiDN[z,m],{z,0,6}] =

= 1-(m z^2)/2+1/24 (4 m+m^2) z^4+1/720 (-16 m-44 m^2-m^3) z^6+O[z]^7

(13.7) Series[JacobiDN[z,m],{m,0,2}] =

= 1-1/2 Sin[z]^2 m+1/32 (8 z Cos[z] Sin[z]-5 Sin[z]^2-Sin[z] Sin[3 z]) m^2+O[m]^3

şi au graficele din **figura 13.7,a** în **2D** şi **13.7,b** în **3D**.

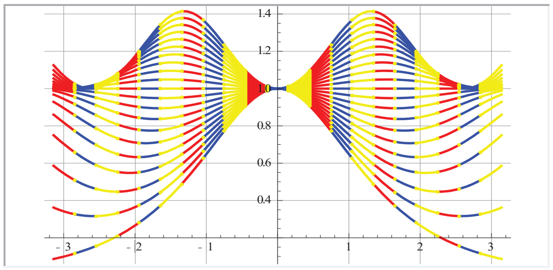
Funcţiile de modul **k** există doar pentru modulul k > 0, iar pentru k = 0 → dn(u, 0) = 1, de aceea, în **figura 7,a** n -au mai fost prezentate şi separat graficele, precum în cazul modulului **m** = k^2, pentru **m** < 0 şi **m** > 0.

Prin înlocuirea variabilei u ≡ x cu **funcţia supermatematică circulară excentrică** (**FSM-CE**) **amplitudine excentrică** de variabilă **θ, aex θ**

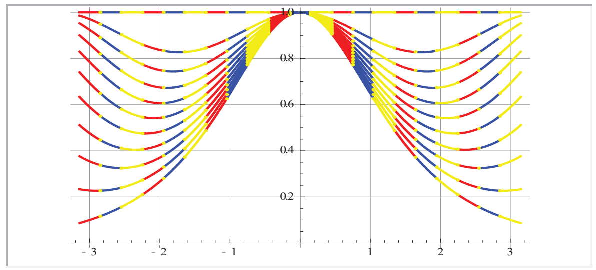
(13.8) u = **aexθ** = θ – arcsin[s.sin(**θ** − ε)]

se obţin funcţiile eliptice **SM** excentrice de variabilă θ, prezentate în **figura 13.8,a**, iar prin funcţia amplitudine **excentrică** de variabilă centrică **α, Aexα**

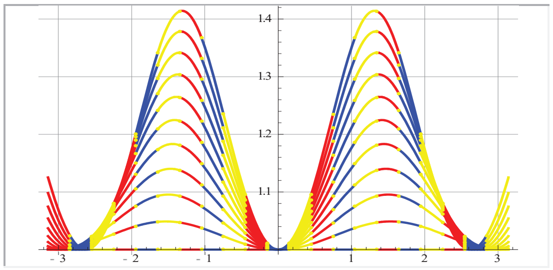
Plot[Evaluate[Table[{**JacobiDN**[*x*, *m*]}, {*m*, −1, 1}], {*x*, −Pi,



Plot[Evaluate[Table[{**JacobiDN**[*x*, *k*]}, {*k*, −1, 1}], {*x*, −Pi, Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{**JacobiDN**[*x*, *m*]}, {*m*, −1, 0}], {*x*, −Pi,



Plot[Evaluate[Table[{**JacobiDN**[*x*, *m*]}, {*m*, 0, 1}], {*x*, −Pi, Pi}]]

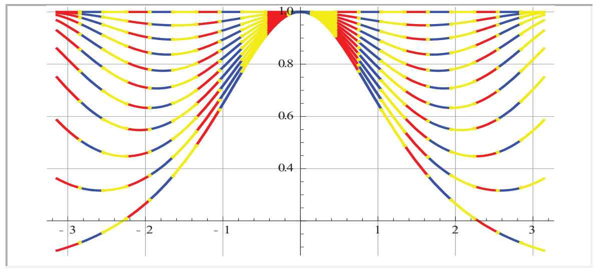
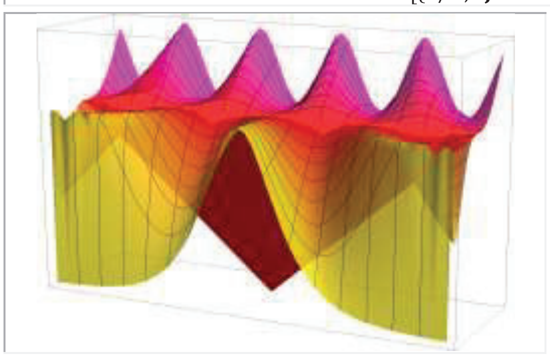


Fig. 13.7,a Funcţii eliptice Jacobi dnu centrice de module **m** ▲◄ ▼şi **k** ▲►de perioadă **T** = **4K(k)**

ParametricPlot3D[{*x*/2 , 3**JacobiDN**[*x*, *s*]. 2*s*}, {*s*, −1, +1}, {*x*, −2Pi, 2Pi}]



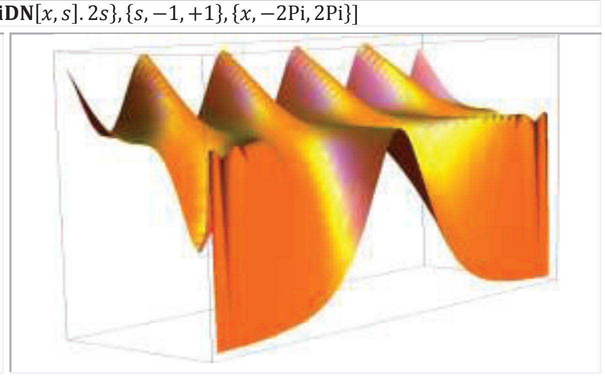
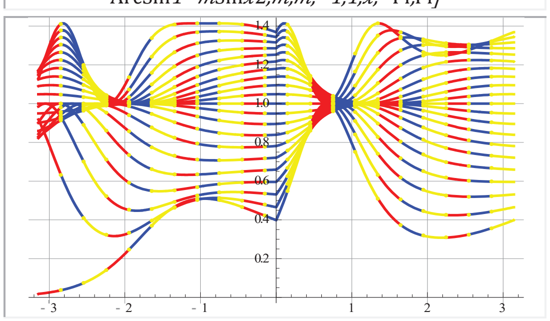
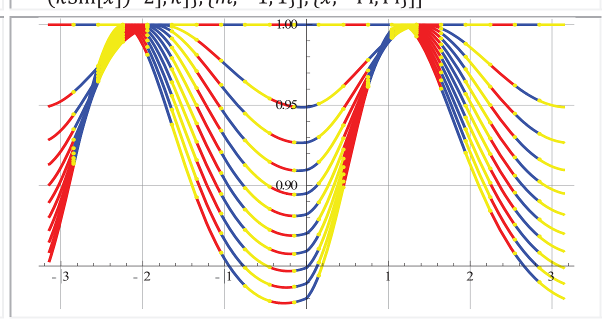


Fig. 13.7,b Funcţii eliptice Jacobi dnu centrice de module **m** în **3D** de perioadă **T** = **4K(k)**

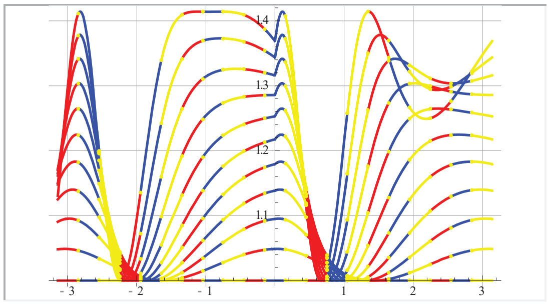
Plot[Evaluate[Table[{**JacobiDN**[*x* − ArcSin *1*−*m*Sin*x2*,*m*,*m*,− *1*,*1*,*x*,−Pi,Pi*]*



Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[*x* − ArcSin[1 − (*k*Sin[*x*])^2], *k*]}, {*m*, −1, 1}], {*x*, −Pi, Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[x − ArcSin[1 − (m Sin[x])^2], m]}, {m, −1,0}], {x, −Pi, Pi}	Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[−ArcSin[1 − (mSin[x])^2], m]}, {m, 0,1}], {x, −Pi, Pi}]]



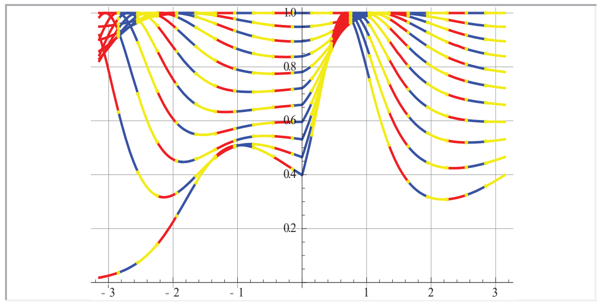
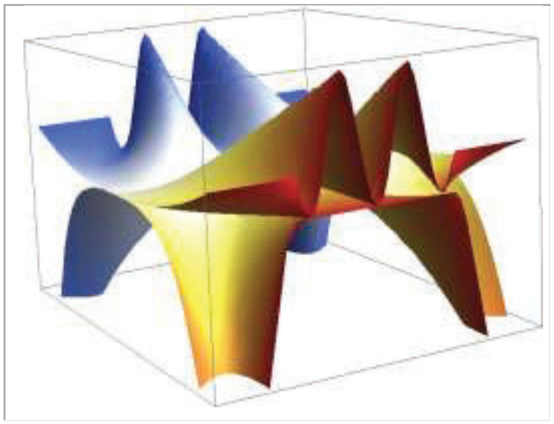
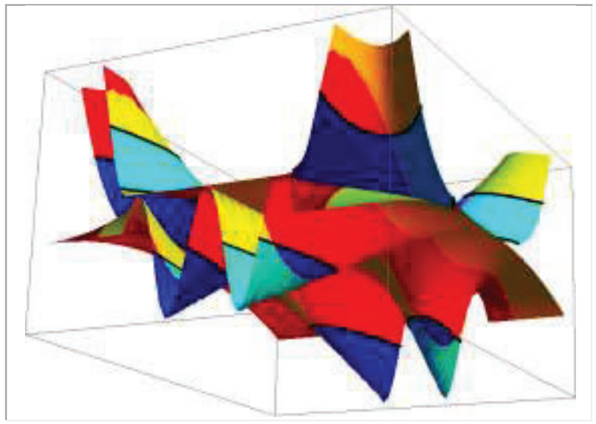


Fig. 13.8,a1 Funcţii eliptice Jacobi excentrice de module **m** ▲◀ ▼şi **k** ▲▶ de variabilă **excentrică θ** şi de perioadă **T = 4K(k)**

ParametricPlot3D[{ {x/2, 2.5**JacobiDN**[x − ArcSin[sSin[x]], s], −2s}, {x/2, 2.5**JacobiDN**[x − ArcSin[sSin[x]], s], +2s} }, {s, −1, +1}, {x, −Pi, Pi}





ParametricPlot3D[{{0.5x, 3JacobiDN[x − ArcSin[sSin[x]], s],2s}, {0.5x, 3**JacobiDN**[x − ArcSin[sSin[x]],1s], −0.2s}}, {s, −1,0}, {x, −2Pi, 2Pi}	ParametricPlot3D[{{0.5x, 3JacobiDN[x − ArcSin[sSin[x]], s],2s}, {0.5x, 3**JacobiDN**[x − ArcSin[sSin[x]],1s], −0.2s}}, {s, 0,1}, {x, −2Pi, 2Pi}

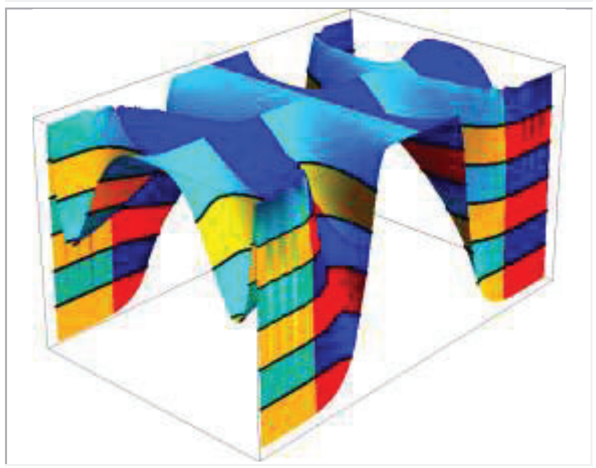
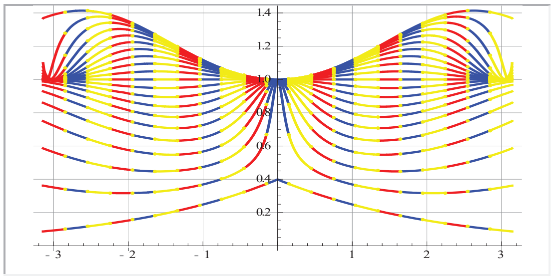


Fig. 13.8,a2 Funcţii eliptice Jacobi excentrice de module **m** de variabilă **excentrică θ** şi de perioadă **T = 4K(k)** în **3D**

```
Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[x + ArcSin[mSin[x]/
Sqrt[1 + m^2 − 2mCos[x]]], m]}{m, −1,1}], {x, −Pi, Pi}]]
```

```
Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[x
+ ArcSin[m^0.5Sin[x]/Sqrt[1 + m^0.5
− 2m^0.5Cos[x]]], m^0.5]}, {m, −1,1}], {x, −Pi, Pi}]
```



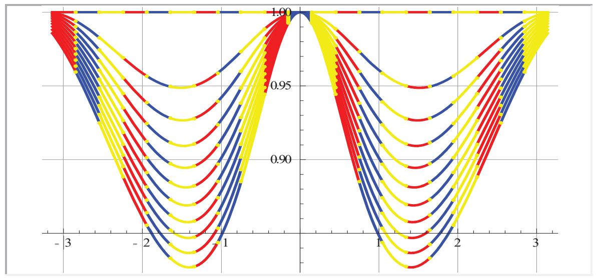
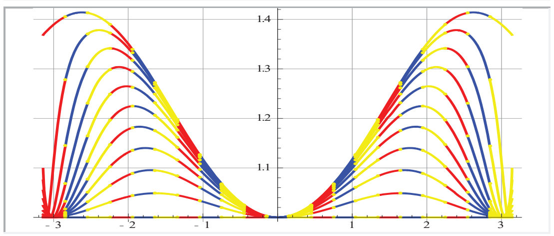
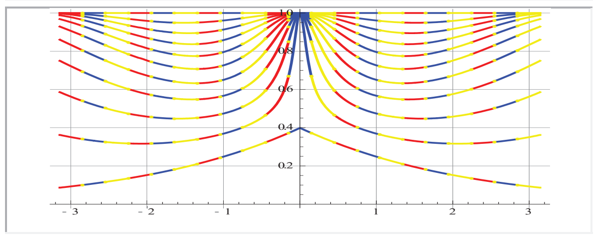


Fig. 13.8,b Funcţii eliptice Jacobi excentrice de module **m ◄** şi **k ►,**
de variabilă **centrică α** şi de perioadă **T = 4K(k)**

```
Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[x
+ ArcSin[0.1mSin[x]/Sqrt[1 + m^2
− 2mCos[x]]], m]}, {m, −1,0}], {x, −Pi, Pi}]]
```

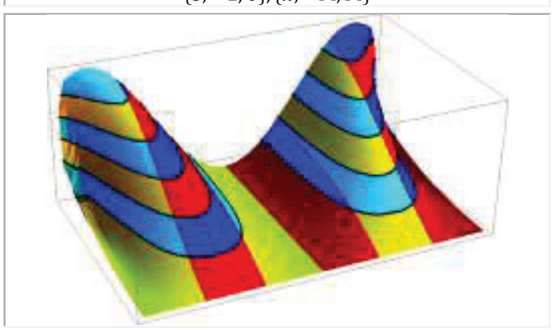
```
Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[x
+ ArcSin[0.1mSin[x]/Sqrt[1
+ m^2 − 2mCos[x]]], m]}, {m, 0, 1}], {x, −Pi, Pi}]]
```



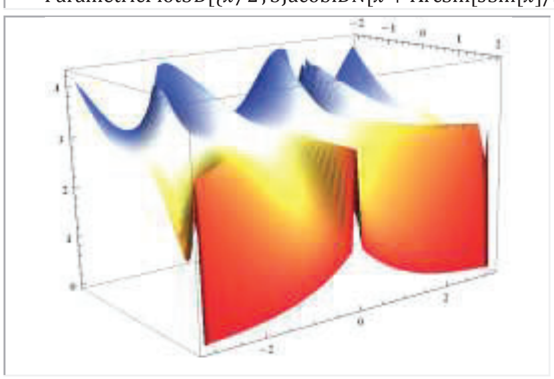


```
ParametricPlot3D[{x, JacobiDN[x
+ ArcSin[s Sin[x]/Sqrt[1 + s² − 2sCos[x]]], s],4s},
{s, −1, 0}, {x, −Pi, Pi}
```

```
ParametricPlot3D[{x, JacobiDN[x
+ ArcSin[s Sin[x]/Sqrt[1 + s² − 2sCos[x]]], s],4s},
{s, 0, +1}, {x, −Pi, Pi}
```



```
ParametricPlot3D[{x/2 , 3JacobiDN[x + ArcSin[sSin[x]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[x]]], s], 2s}, {s, −1, +1}, {x, −2Pi, 2Pi}]
```



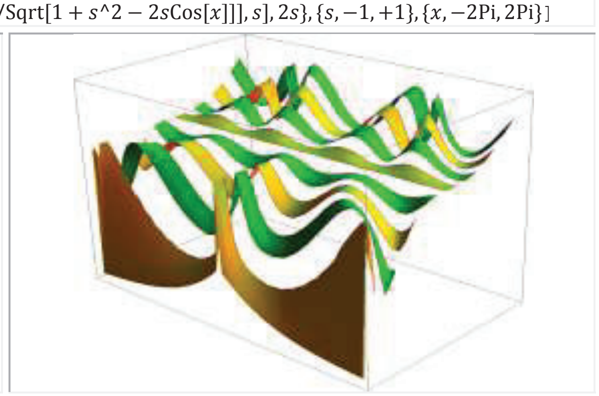


Fig. 8,b Funcţii eliptice Jacobi excentrice de module **m** ∈ [-1,0]◄ **şi m** ∈ [0,1]►,
de variabilă **centrică α** şi de perioadă **T = 4K(k)**

(13.9) u = **Aex**$\boldsymbol{\alpha}$ = α +arcsin$\frac{s.\sin(\boldsymbol{\alpha}-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\boldsymbol{\alpha}-\varepsilon)}}$

rezultă funcţiile eliptice **SM excentrice** de variabilă **centrică**, prezentate în **figura 13.8,b**.

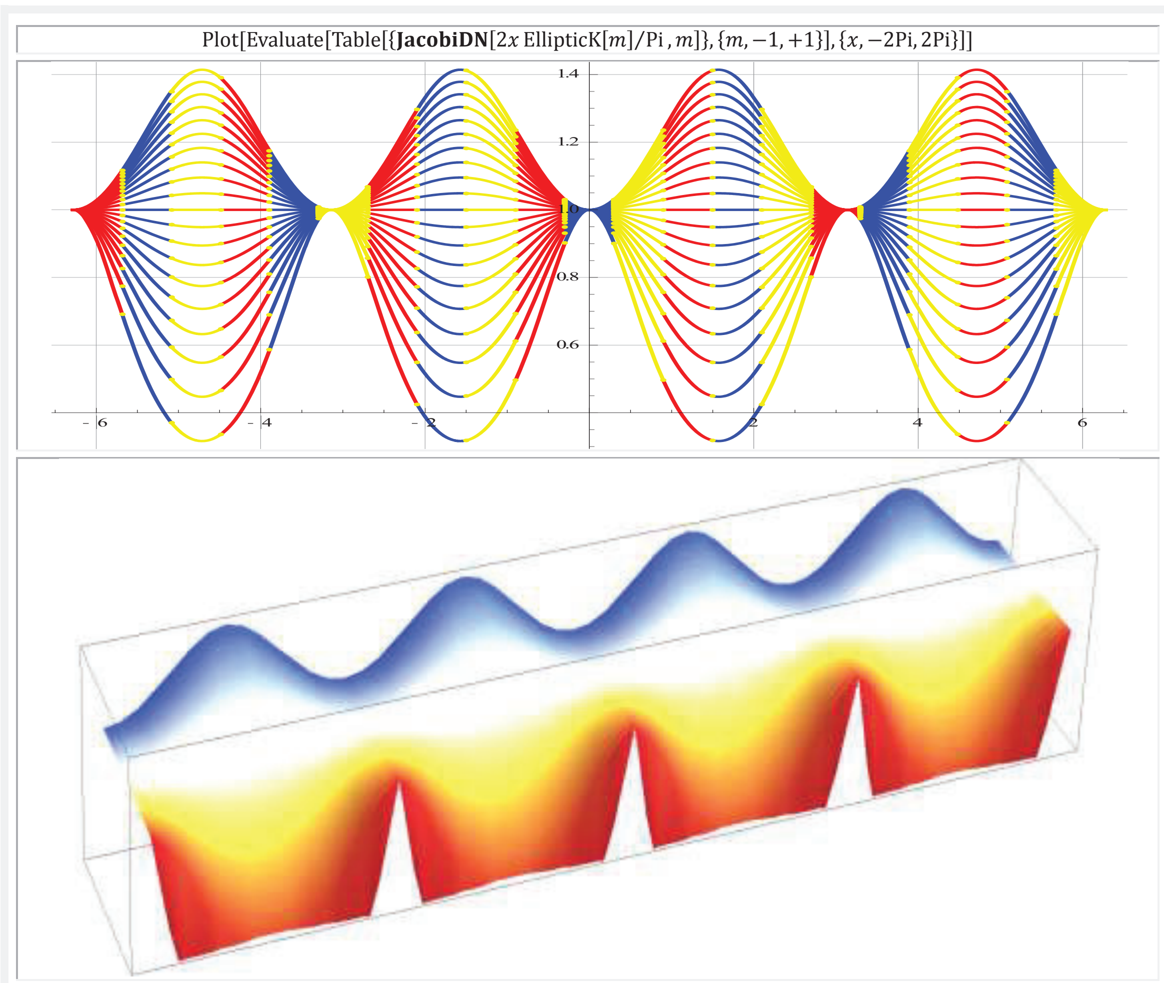
De precizat că aproximarea acestei **funcţii eliptice Jacobi** în momentul de faţă încă n-a reuşit cu suficentă precizie.

13.6 FUNCŢII ELIPTICE JACOBI dn(u, k) Şi dn(u, m= k^2) DE PERIOADĂ T = 2π CENTRICE ŞI SUPERMATEMATICE EXCENTRICE DE VARIABILE EXCENTRICĂ θ ŞI CENTRICĂ α

Funcţiile eliptice Jacobi centrice cât şi cele excentrice se obţin din cele de perioadă 4K(k) prin multiplicarea argumentului / variabilei **u**, respectiv, **θ** şi **α** cu 2K(k) /π, adică sunt de argument $\frac{2K(k)}{\pi}\boldsymbol{u}$ şi, respectiv, $\frac{2K(k)}{\pi}$ **θ şi** $\frac{2K(k)}{\pi}$ **α.**

Graficele **funcţiilor eliptice Jacobi** centrice de perioada 2π sunt redate în **figura 13.9** în 2D şi în 3D

Graficele **funcţiilor eliptice SM** excentrice de variabilă excentrică θ, ca funcţii de u ≡ θ, sunt redate în **figura 13.10,a**, iar ca funcţii de $\frac{2K(k)}{\pi}$ **θ** în figura **13.10,b.**



Plot[Evaluate[Table[{**JacobiDN**[2*x* EllipticK[*m*]/Pi , *m*]}, {*m*, −1, 0}], {*x*, 0,2Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{**JacobiDN**[2*x* EllipticK[*m*]/Pi , *m*]}, {*m*, 0, 1}], {*x*, 0,2Pi}]]

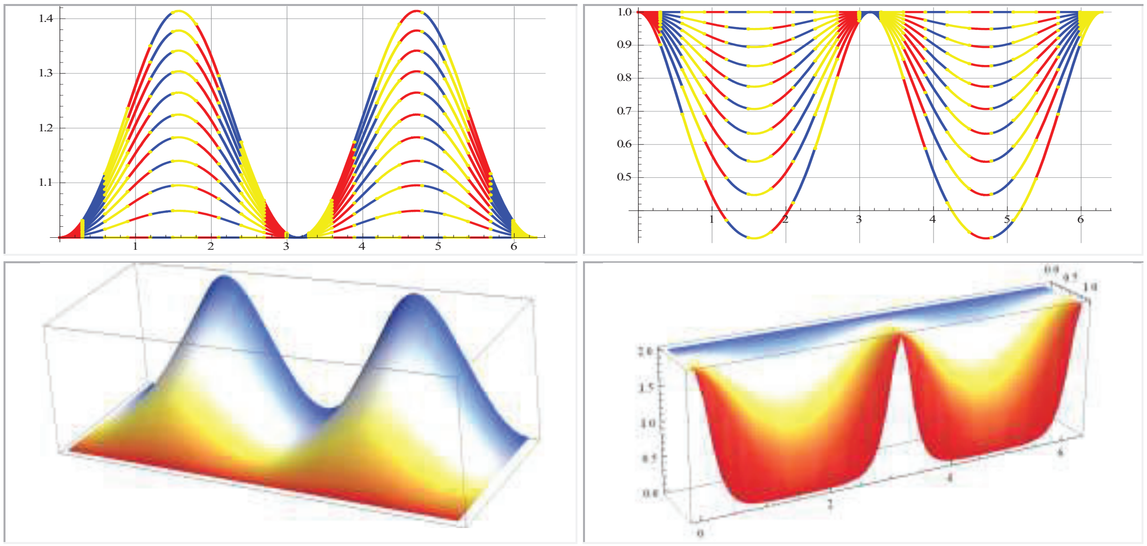
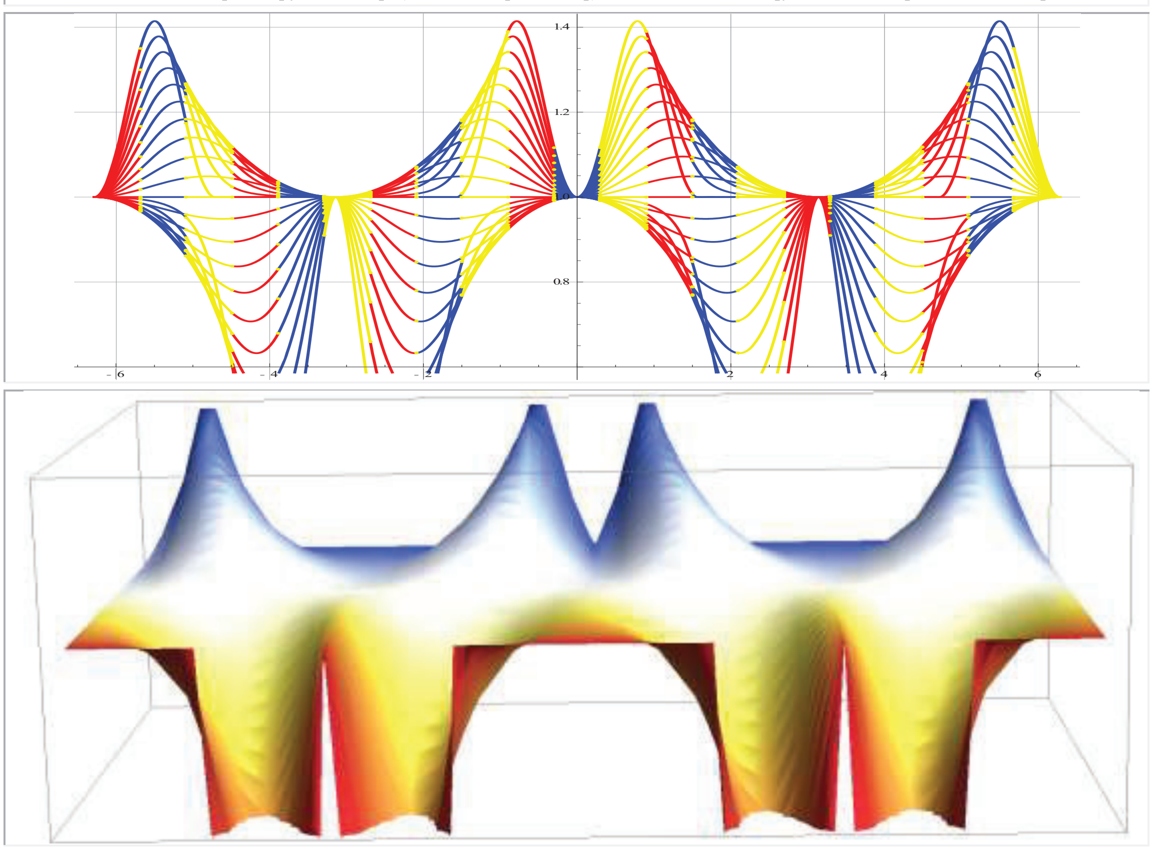


Fig. 13.9 Funcţii eliptice Jacobi centrice de module **m** ∈ [-1,0]◄ **şi m** ∈ [0,1]►
de perioadă **T = 2π**

Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[2(*x* − ArcSin[*m*Sin[*x*]]) EllipticK[*m*]/Pi , *m*]}, {*m*, −1, +1}], {*x*, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[2(𝑥 − ArcSin[𝑚Sin[𝑥]]) EllipticK[𝑚]/Pi , 𝑚]}, {𝑚, −1, 0}], {𝑥, 0,2Pi}

Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[2(𝑥 − ArcSin[𝑚Sin[𝑥]]) EllipticK[𝑚]/Pi , 𝑚]}, {𝑚, 0, +1}], {𝑥, 0,2Pi}

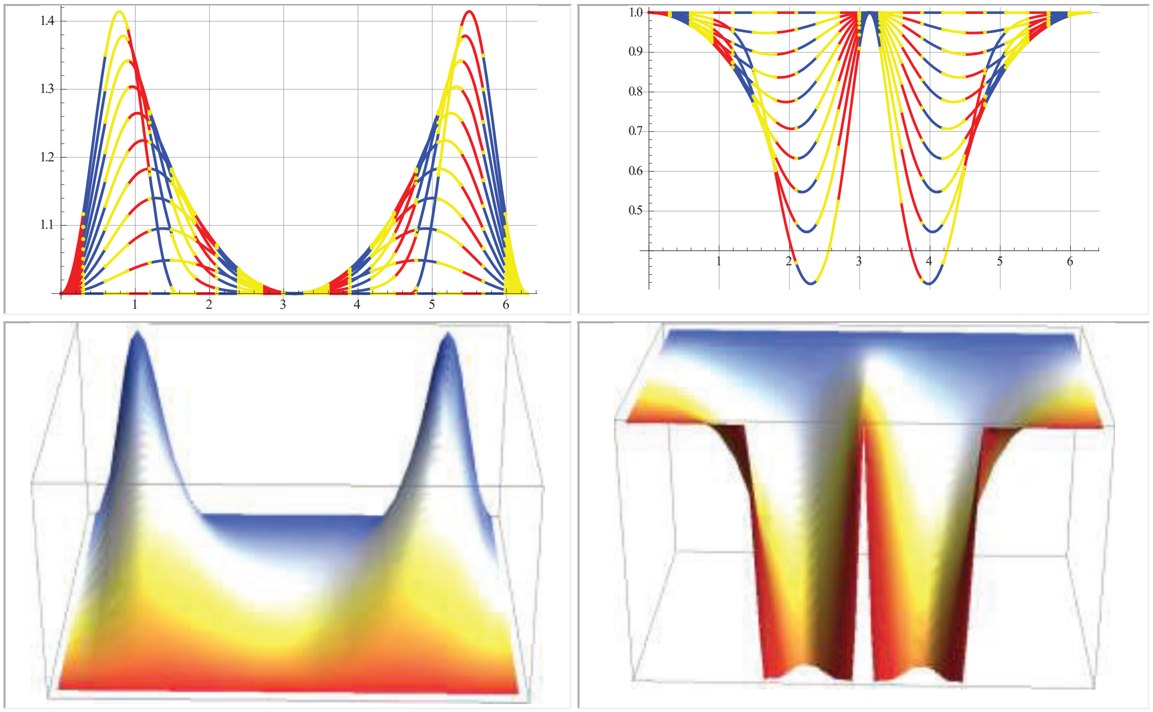
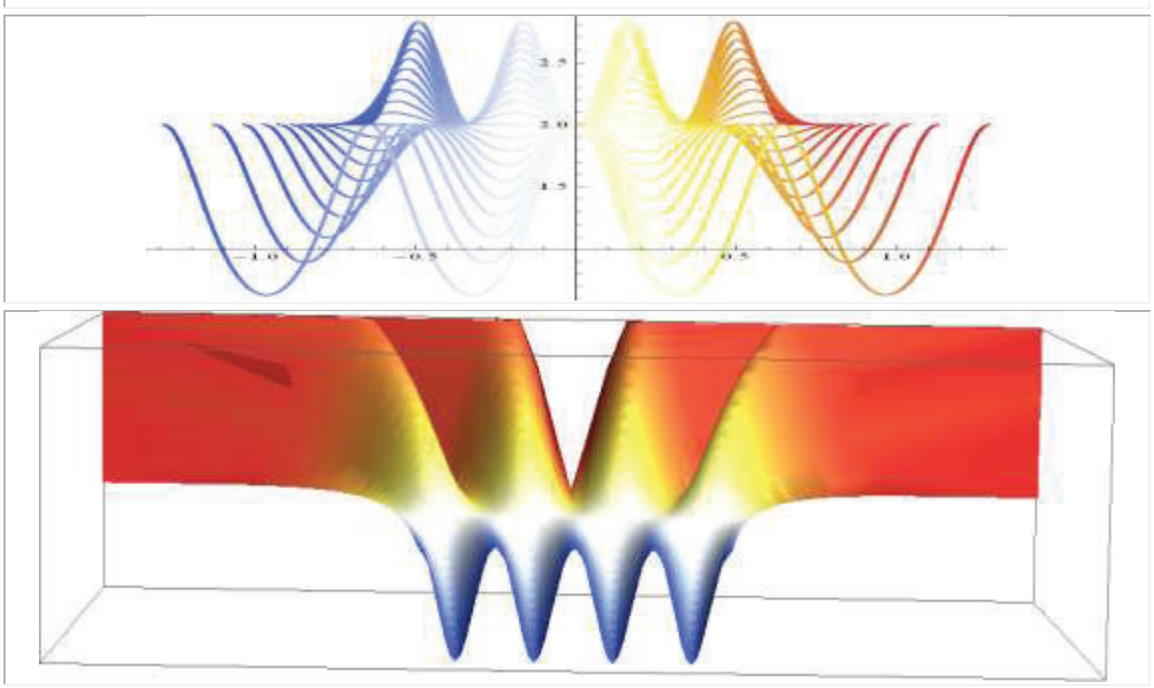


Fig. 13.10,a Funcţii eliptice SM excentrice de variabilă excentrică θ, de module **m** ∈ [-1,0]◄ **şi m** ∈ [0,1]►, de perioadă **T = 2π**

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.25𝑥 EllipticK[𝑚]/Pi , 2JacobiDN[2𝑥 EllipticK[𝑚]/Pi , 𝑚]}, {𝑚, −1, +1}], {𝑥, −2Pi, 2Pi}]]



ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.25𝑥 EllipticK[𝑚]/Pi,

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.25𝑥 EllipticK[𝑚]/Pi,

2**JacobiDN**[2x EllipticK[m]/Pi , m]}, {m, −1,0}], {x, −Pi, Pi}	2**JacobiDN**[2x EllipticK[m]/Pi , m]}, {m, 0, +1}], {x, −Pi, Pi}

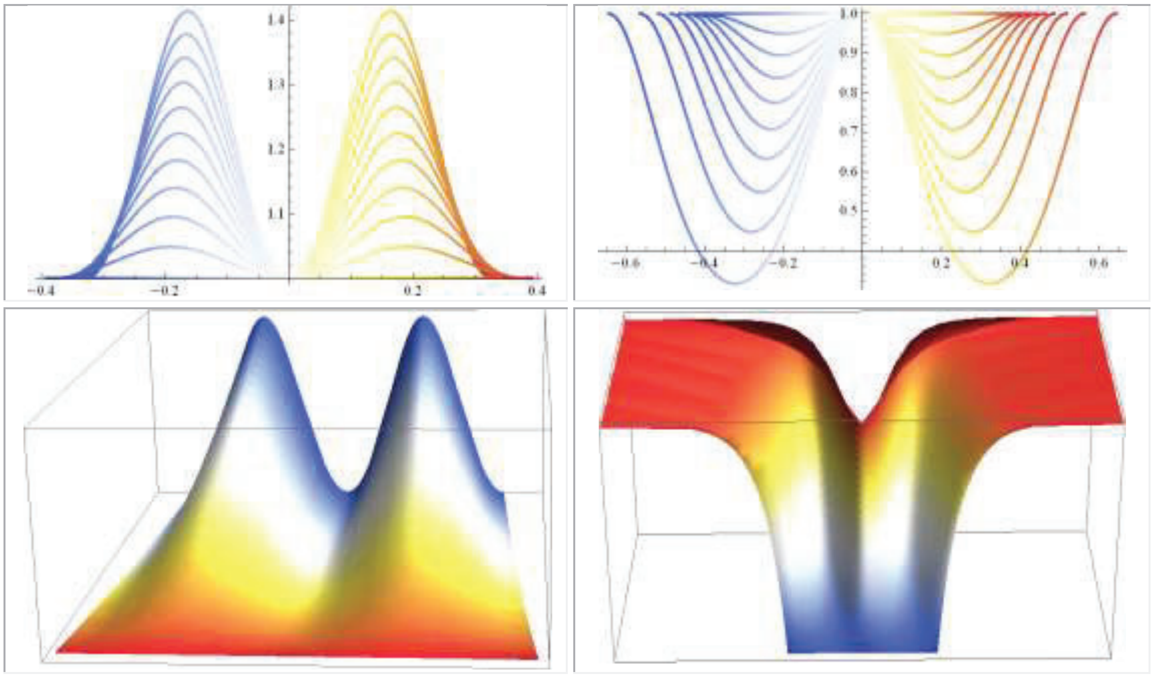
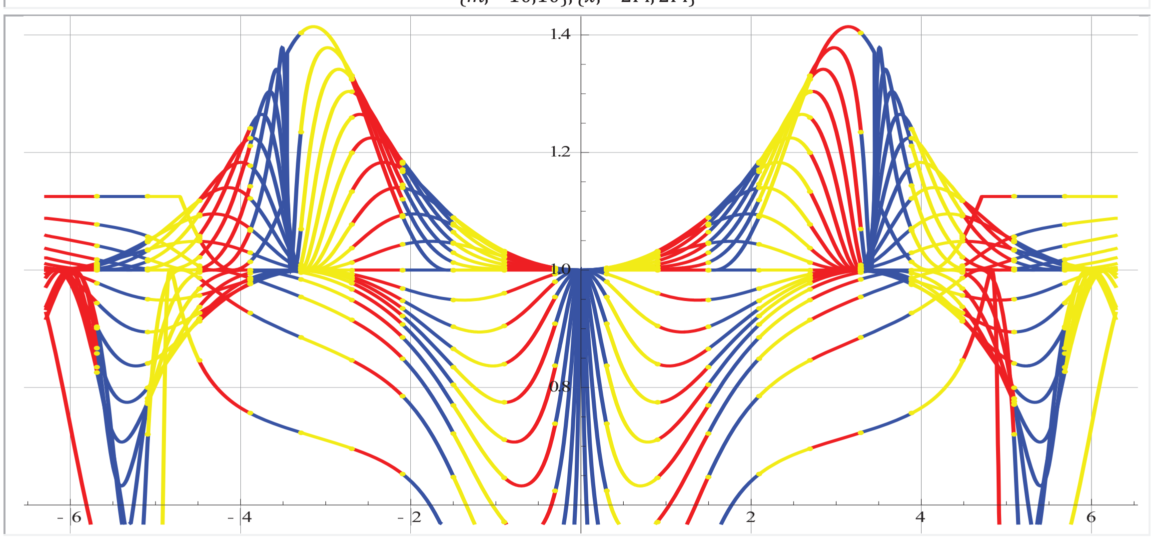


Fig. 13.10,b Funcţii eliptice SM excentrice de variabilă excentrică θ,
de module **m** ∈ [-1,0]◄ **şi m** ∈ [0,1]►, de perioadă **T = 2π,**
reprezentate prin abscisa $\frac{2K(k)}{\pi}$ **θ**

Plot[Evaluate[Table[{JacobiDN[2(x + ArcSin[mSin[x]]) EllipticK[m]/Pi
+ ArcSin[m Sin[2(x + ArcSin[mSin[x]]) EllipticK[m]/Pi]/Sqrt[1 + (m)² − 2mCos[2(x + ArcSin[mSin[x]]) EllipticK[m]/Pi]
{m, −10,10}, {x, −2Pi, 2Pi}



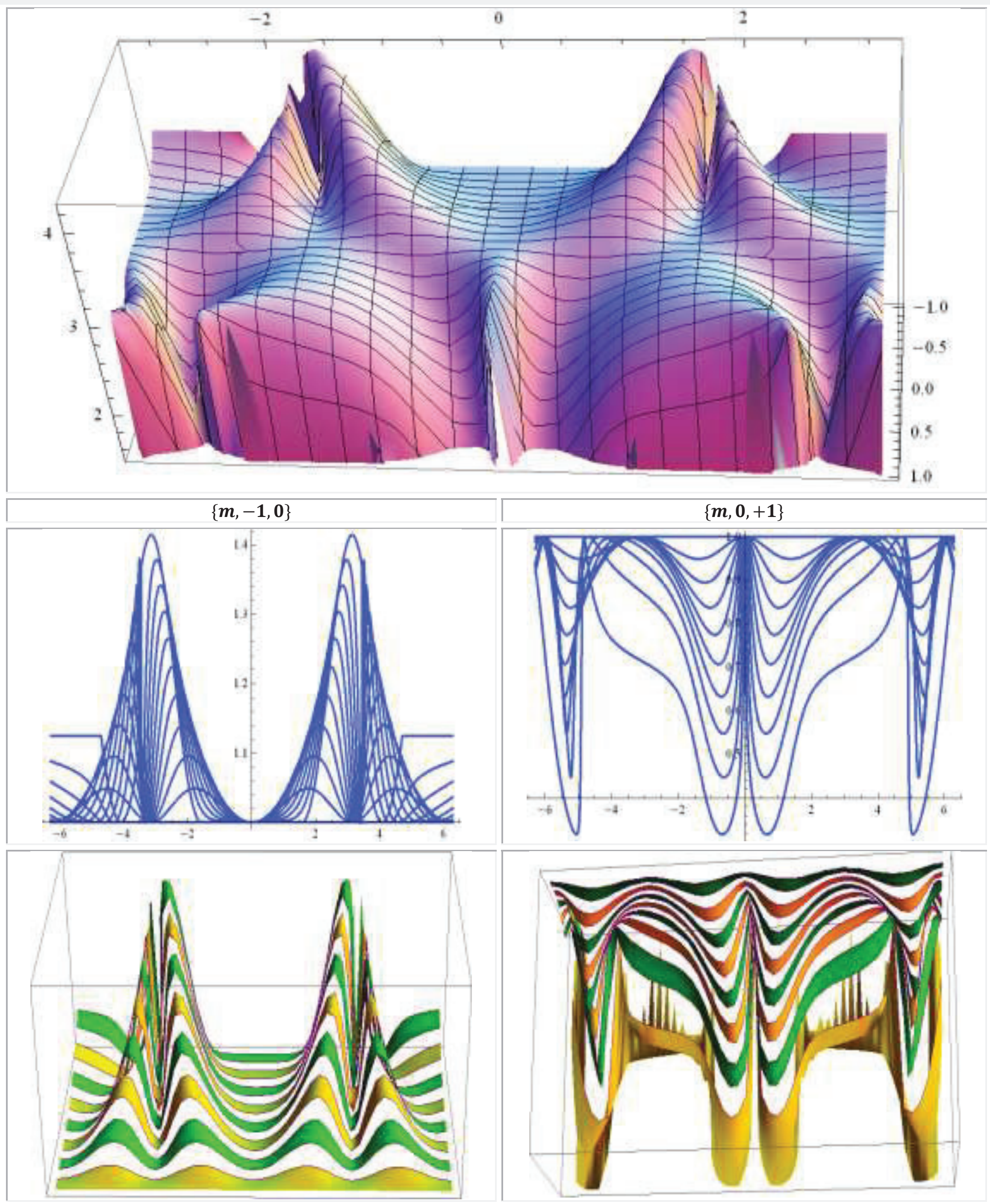


Fig. 13.11 Funcţii eliptice SM excentrice de variabilă **centrică α**, de module **m** ∈ [-1,0]◄ **şi m** ∈ [0,1]►, de perioadă **T = 2π**

Graficele **funcţiilor eliptice SM** excentrice de **variabilă centrică α** sunt redate în **figura 13.11.**

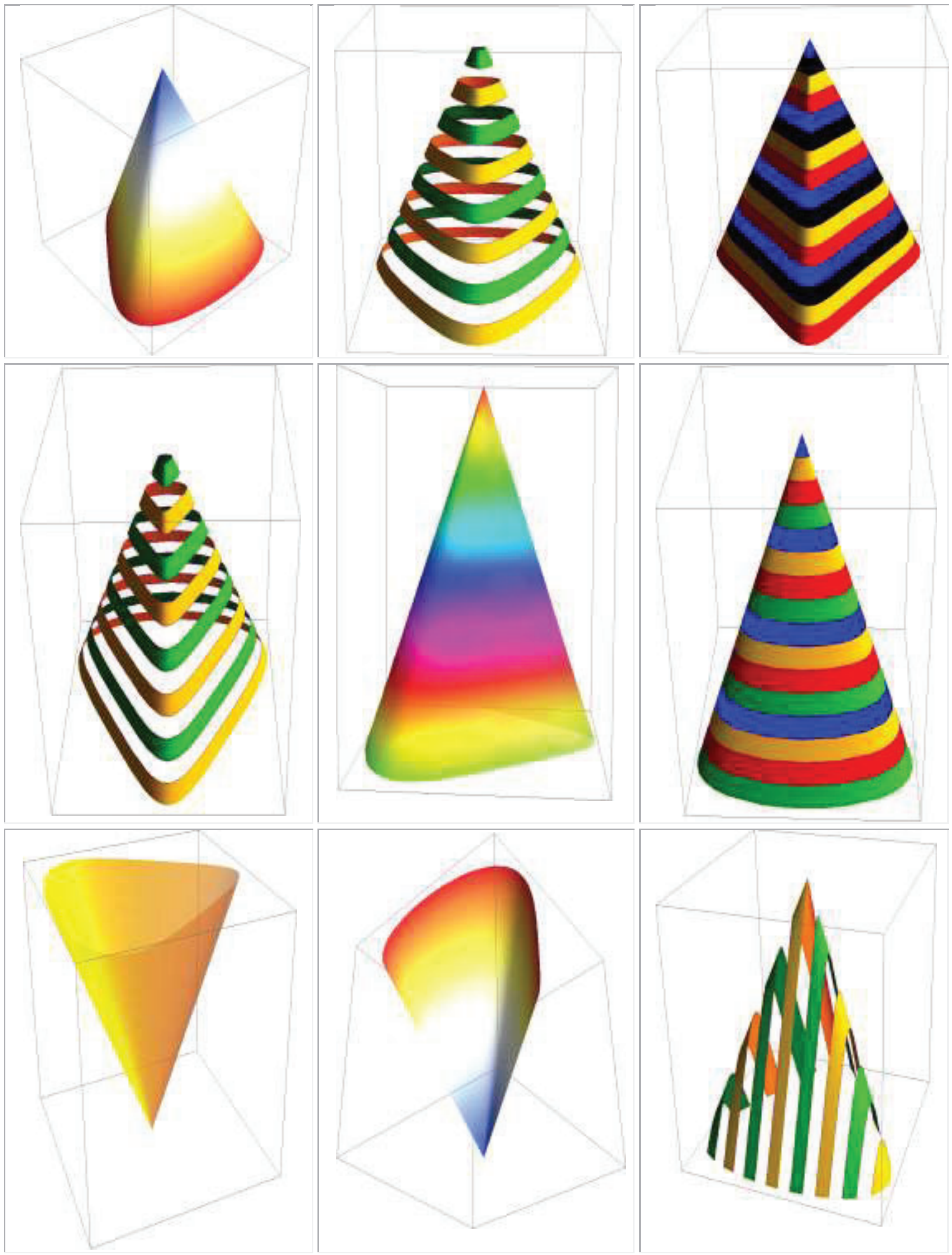


Fig. 13.12 **P I R A M I D E   T R I L O B E**

Motto: ” E necesar să fii cinstit şi bun măcar pentru a-ţi aduce prinosul de recunoştinţă, celor ce cred în aceste idealuri, le-au făcut rare şi le-au aşezat printre bestii ca o unică justificare a vieţii ”
Ilustrul Necunoscut

Capitolul 14

P O S T F A Ţ Ă

Din anul 1970 şi până în anul 2015 sunt exact 45 de ani. Aceasta-i vârsta supermatematicii. 45 de ani … e mult ? E puţin ? E extrem de puţin !

Matematica ordinară, sau matematica centrică, are o vârsta matusalemică, de mii de ani: “La steaua care-a răsărit (aici ne referim la steaua matematicii) e-o cale atât de lungă, că mii de ani i-au trebuit luminii să ne-ajungă“. Să ne-ajungă, să ne lumineze, să ştergă petele albe de pe harta matematicii, să mărească nedefinit insulele de cunoaştere din oceanul ignoranţei, să multiplice la infinit toate entităţile matematice, să şteargă graniţele dintre liniar şi neliniar, dintre cerc şi pătrat, dintre sferă şi cub, dintre elipsă şi dreptunghi, dintre cerc şi triunghi, dintre dorinţe şi posibilităţi…

Fig.14.1 Primele expuneri asupra « **Funcţiilor circulare excentrice** » la Clubul Studenţesc al Caminului 1 MV

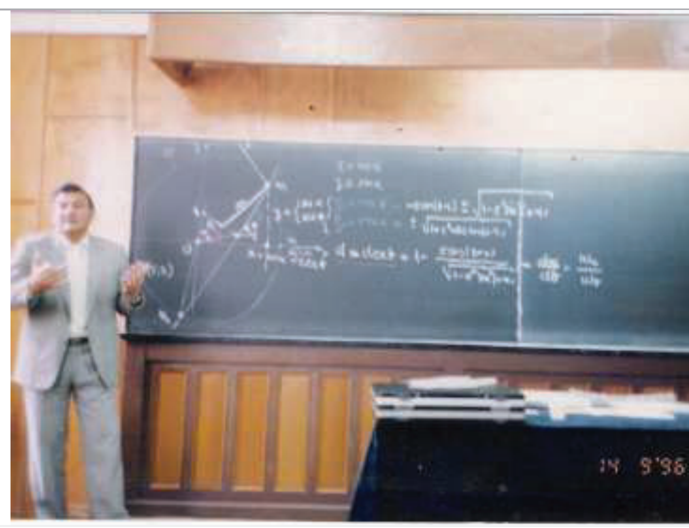


Fig.14.2 Primele expuneri despre « **Funcţiilor supermatematice** » în Amfiteatrul A1 « Traian Vuia » al Facultăţii de Mecanică din Timişoara.

Dar, chiar asta face **supermatematica** şi va veni o zi când se vor şterge graniţele dintre **matematică** şi **supermatematică**. Graniţe care, de fapt, există doar în închipuirea noastră, ca să discernem ce-i nou de ce-i vechi, ce-i deja cunoscut de mii de ani, de ce-i necunoscut de mii de ani, dar va fi cunoscut, graţie acestei lucrări.

Acesteia şi a multor altora care vor urma. De acelaşi autor, dar, mai bine, de alţi autori, noi, de matematicieni versaţi, de matematicieni de « **mâna întâia** » şi nu de « mâna a doua », ca în cazul de faţă, a unui inginer.

Patruzeci şi cinci de ani sunt puţini, foarte puţini pentru matematică, dar mulţi, foarte mulţi, extrem de mulţi pentru autorul supermatematicii.

La 45 de ani a descoperit noile funcţii şi de-abia la 70 de ani le-a publicat în prima sa carte despre ele: “**SUPERMATEMATICA.FUNDAMENTE**” **Editura Politehnica, Timişoara**, 2007 şi **“Tehno Art of Şelariu Supermathematics Functions”,** Editura ARP (American Research Press), 2007.

De ce le-a descoperit chiar el ?

Pentru că, din **pură întâmplare**, el avea stringentă nevoie de alte funcţii, destul de asemănătoare cu cele cunoscute, dar, totuşi, uşor diferite de acestea. A căutat, a întrebat, şi-a făcut prieteni dintre matematicieni, poate doar- doar careva să ştie câte ceva de existenta unor funcţii de acest gen: un fel de sinus dar cu maximele deplasate. Acuma ştim: este **sexθ** !

Constatând cu stupoare că astfel de funcţii nu există, nu se găsesc în literatura matematică, a trecut la pasul al doilea: **le-a inventat**. Că de aia-i inginer, să se descurce: să inventeze !

Le-a inventat ca să le aplice. Şi a fost intrebat: Şi la ce folosesc ?

A constatat că noile funcţii excentrice, ca şi cele eliptice şi ca multe alte funcţii speciale, nu necesită tabelarea lor, fiindcă se exprimă în funcţie de cele centrice, care sunt tabelate. Şi a fost apostrofat: Atunci ce rost mai au ?

Nu s-a descurajat. A continuat să le studieze, să le diversifice, să le extindă, să le găsescă aplicaţii din ce în ce mai importante, în matematică, în tehnică, în arta grafică. Cu mult entuziasm, cu mult efort, cu dragoste faţa de ele, faţă de nou. Şi a aşteptat şi a “săpat” şi iaraşi a aşteptat şi a trudit şi a scris pe biroul lui “ing. Şelariu Mircea - truditor” şi a sperat şi a sperat şi n-a mai sperat şi a trudit…vorba unui poet interzis, de aceea nu-i pronunţ numele

“Cine a încercat iubirea şi nu s-a încredinţat,
Că-i mai presus icoana ca lucru’ adevărat,
Că prima sărutare e cu muuuuult mai dulce,
Când n-o înfăptuieşte gura, ci arde doar în gând.
Las’ să iubescă alţii cu graba nerăbdării,
Eu vreau întârzierea, farmecul visării…”

De aceea s-a ajuns la o întârziere de 40 de ani şi o visare, care are, şi ea, farnecul ei. Speranţa moare ultima !

Studenţii sunt cei care au sesizat prompt utilitatea şi importanţa noilor complemente de matematică şi au solicitat expuneri pe această temă. Ca şi **Fundaţia Astra Română** din Timişoara, care a introdus un “Curs de Supermatematică”, în ideea de a încasa nişte fonduri pentru susţinerea diasporei româneşti din împrejurimile României.

Primele expuneri au avut loc în căminele studenţesti, din Complexul Studentesc şi la Clubul Studenţesc al Facultăţii de Mecanică (**Fig.14.1**), de la parterul Căminului Studenţesc 1MV, apoi de la Casa Studenţilor din Timişoara. Amatori puţini, foarte puţini, dar entuziaşti. Cu atâtea şedinţe, pe atunci, nici nu-i de mirare că una în plus, fie ea şi de supermatematică, care nu era obligatorie..

Apoi, au fost solicitate în cadrul Cursurilor Festive de încheiere a studiilor universitare (**Fig.14.2**). Prezenţa studenţilor absolvenţi din anul V **TCM** (**Tehnologia Construcţiilor de Maşini**): **100 %.** Zece ani consecutivi, schimbând uneori subiectul (**Fig.14.3,** v. **Cap.7**) să nu devin plictisitor, pâna când le-am spus studenţilor că mai sunt şi alte cadre universitare care ar putea susţine expuneri mult mai interesante, Şi nu m-am inşelat ! Astfel, rectorul Prof. Dr. Ing. **Ion Carţiş** le-a vorbit studenţilor despre cârdăşia dintre constructorii de drumuri / şosele şi constructorii de autoturisme. Succes garantat.

În rezumat / esenţă: primii le execută prost şi cu mari întârzieri, facilitând, astfel, vânzarea şi repararea autoturismelor. Temă de mare actualitate, deoarece, se vede, că fenomenul se continuă cu brio şi în zilele noastre !

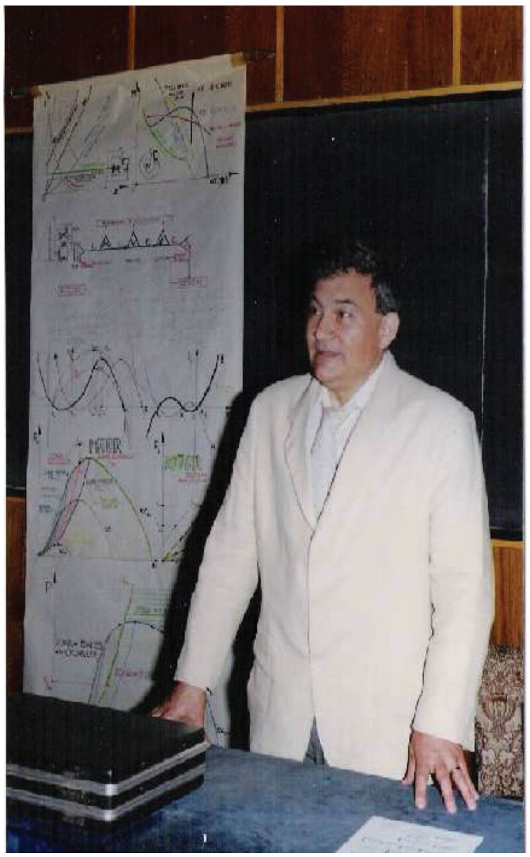


Fig. 14.3 Lânga motor şi antor vorbind despre « Caliatea mişcării » în amfiteatrul A1 ”Traian Vuia ”

Fig. 14.4 Universitatea din Budapesta, Departamentul de Tehnologie, 3 decembrie 1998

Fig.14.5 În amfiteatrul Nicolae Gheorghiu, aceeaşi temă

La prima Conferinţă de “**Vibraţii în Construcţia de Maşini**”, în 1978, unde s-au prezentat, în premieră, noile complemente de matematică, sub denumirea de “**Funcţii circulare excentrice**”, Prof. Em. Dr. Doc. Ing. **Gh Silaş** le-a elogiat spunând, aşa cum s-a mai spus, că acestea nu sunt numai “**nişte funcţii**” ci o nouă matematică, o **supermatematică**. Tot atunci, s-a prezentat şi o aplicaţie a acestora, cu privire la determinarea exactă a frecvenţei proprii a unui sistem neliniar (**Dűffing**), a căror rezultate au fost privite cu rezerve şi cu neîncredere.

În Cap. 11.§ 11.10.8, al prezentei lucrări, fost reluată acestă importantă temă şi, prin demonstrarea grafică şi analitică a viabilităţii expresiei pulsaţiei proprii, sperăm să fi îndepărtat cu succes aceste suspiciuni şi oricare altă îndoială.

La a **V-a Conferinţă Naţionala de Vibraţii în Construcţia de Maşini**” sau prezentat patru lucrări, în “l. engleză”, de aplicaţii ale **FSM-CE** [5], [6], [7] şi [8].

Fig. 14.6 Universitatea « POLITEHNICA » din Timişoara, Facultatea de Mecanică, Catedra de Tehnologia Construcţiilor de Maşini, Laboratorul de Dispozitive:
Primul robot (didactic) românesc şi autorul lui

Fig. 14.7 Tranformări, în funcţie de timp (la 40, 50 şi 60 de ani) şi nu numai, ale autorului

Traducerile, contra cost, au fost realizate de o traducătoare autorizată de la un mare Institut Naţional de Cercetare…. Nu spunem care.

Un profesor american, sosit la facultatea noastră pentru o perioadă mai îndelungată, a făcut o vizită şi în laboratorul nostru de **Proiectarea Dispozitivelor**, **Mecatronică**, **Manipulatoere si Roboti Industriali** (**Fig. 14.6**). În care, i s-au prezentat **primul robot (didactic) românesc**, care apuca obiecte cilindrice dintr-un acumulator şi le livra într-un post de lucru; **primul robot românesc complet pneumatic, Voinicel II**, frate cu **Voinicel I**, care a deservit o presă cu fricţiune la **Intreprinderea Ambalajul Metalic** din Timişoara şi care a fost primul robot românesc care şi-a pierdut braţul / mâna într-un accident de producţie: presa anclanşând defectuos.

A admirat, în laborator şi poza (**Fig.14.8** şi **Fig.14.9**), la o scară mare, aşa cum merita realizarea unică a primului robot industrial românesc, **REMT-1**, **laureat al Premiului "Traian Vuia" al Academiei Romaniei** pe anul 1981, botezat astfel de autorul prezentei lucrări, care, în calitate de conducător de proiect, aluturi de Prof. dr. ing. **Nicolae Gheorghiu**, a întocmit desenul de ansamblu al robotului, desen care trebuia să poarte un titlu, o denumire.

Care să fie agreeată / plăcută, în primul rând, beneficiarului..

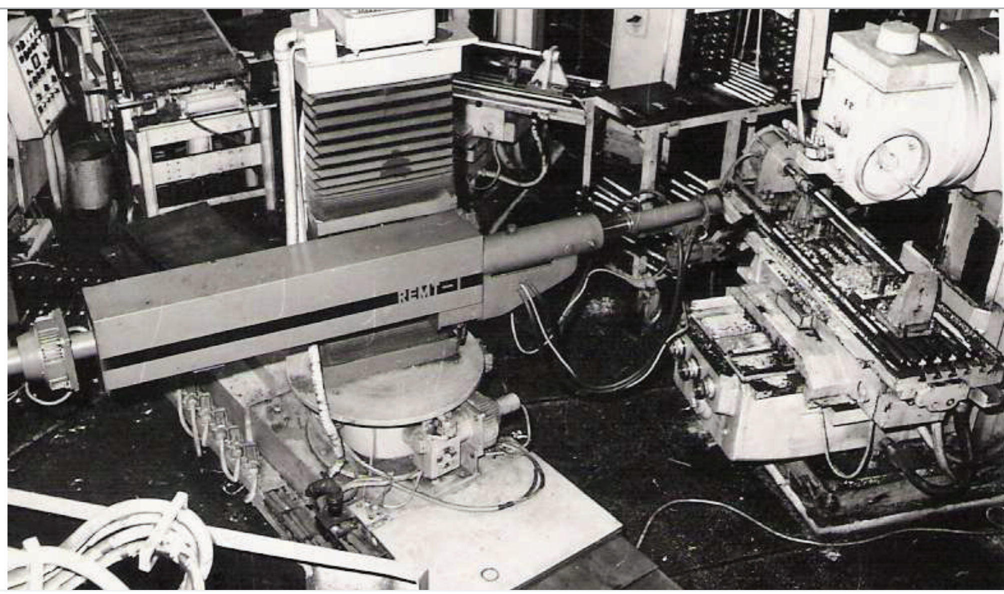


Fig. 14.8 Prima celulă de fabricaţie automatizată, deservită de primul robot industrial românesc REMT-1, pentru care toţi autorii lui au fost distinşi cu premiul « Traian Vuia » al Academiei Romaniei pe anul 1981

De aceea, l-a botezat **REMT** care însemna, pe de o parte, **R**obot **E**lectro**M**otor **T**imişoara, iar pe de altă parte **REMT** însemna şi **R**obot **E**conomist **M**arin **T**ănase, care era directorul general al acestei prestigioase, pe atunci, fabrici de motoare electrice, exportatoare în multe ţări, fabrică, acum, în paragină.

Interesat şi de eceste funcţii noi, i-au fost oferite / date aceste patru lucrări, singurele, pe atunci, "traduse" în "limba engleză" sau foarte (?) apropiată de aceasta.

N-a spus că a rămas surprins cât de mult se aseamănă limba română de limba engleză, ci a spus ca el nu poate să înţelegă nimic din text !

Să fie oare limba americană atât de diferită de limba engleză ? Sau am plătit de pomană traducerile ? M-am lecuit ! De atunci nu mai plătesc traduceri !

P O S T F A Ţ Ă

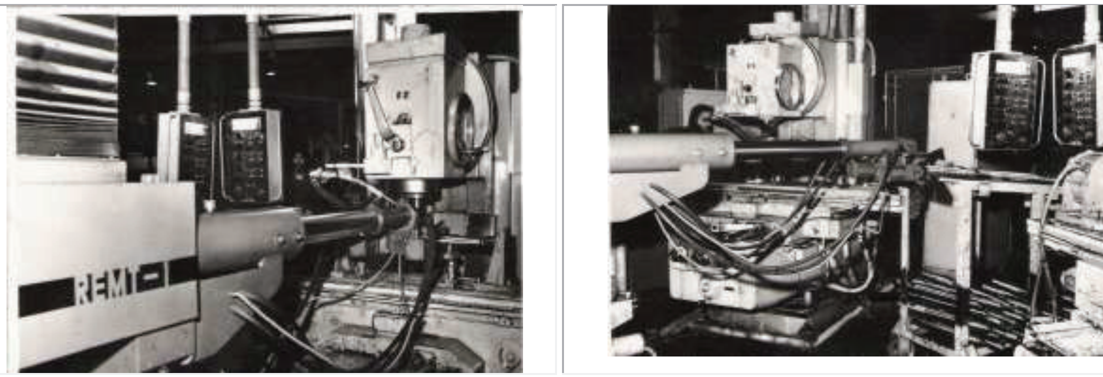


Fig. 14.9 REMT-1 preluând arborele de motor electric cu canalul de pană frezat
pe care-l evacuează din prima celulă de fabricaţie robotizată
de la ELECTROMOTOR din Timişoara

La a **VII-a Conferinţa Naţională de Vibraţii în Construcţia de Maşini** s-au prezentat, în l. română, lucrarea [9] "FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE cex şi sex- SOLUŢIILE UNOR SISTEME MECANICE NELINIARE, iar la a VIII-a Conferinţă Naţională de Vibraţii în Construcţia de Maşini, lucrarea [14] " DETERMINAREA ORICÂT DE EXACTĂ A RELAŢIEI DE CALCUL A INTEGRALEI ELIPTICE COMPLETE DE SPEŢA ÎNTÂIA K(k) ". Şi totuşi, la a 11- a Conferinţă Internatională de Vibraţii, Timişoara, Sept. 27 s-a prezentat, în limba engleză, lucrarea [19] "**QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**", tradusă de matematicieni.

La toate aceste conferinţe, lucrările s-au bucurat de un viu interes, dar la a V-a, din 1985, la care lucrările au fost conduse de Prof. dr. doc. **Dumitru Mangeron,** succesul a fost cu totul deosebit, chiar dacă din lucrările publicate în limba engleză nu se înţelegea mare lucru, susţinerea s-a facut în dulcea limbă a lui **Eminescu**.

Entuziasmat de noile complemente de matematică, reunite sub denumirea de **supermatematică**, **Mangeron** l-a intrebat pe **Silaş** sosit în control la Secţiunea I-a, "Măi, tu şti ce-a făcut **copilul** ăsta ? Trebue ajutat să publice imediat lucrările lui ". **Copilul eram eu**, autorul. Silaş era roşu la faţă ca focul, pentru că numai el ştia cum a făcut rost de hartie, cu intervenţii la fabrica de hartie de la Pallas-Constanţa ca să publice lucrările şi să nu se amâne sau să se anuleze Conferinţa. Era, pe atunci, criză nu mare, ci extrem de mare de hârtie: lucrarile de doctorat trebuia sa fie scrise pe ambele feţe, în cel mult 120 de pagini ! Nu-i basm, e adevărat ! O spune Stan Paţitu care a aflat de hotarîre când ajunsese la a 250 pagina !

Pe tratatul lui, în 3 volume "**MECANICA RIGIDELOR CU APLICAŢII ÎN INGINERIE**, Ed Tehnică 1978, **Dumitru Mangeron** mi-a dat următoarele autografe:

Vol I:" Scumpului coleg Mircea Şelariu cu urări de succese în continuare" Mangeron, 6 XII 1985. Pe atunci, încă nu s-a auzit de "succesuri" !

Vol II: " Talentatului coleg Şelariu cu rugămintea să publice volumul de curbe noi descoperite de dansul " Şi le-a publicat. După …22 de ani !

Vol III: " Talentatului coleg Mircea Şelariu cu urări de succes în toate ".

Vineeeeeeeeee…

Şi a venit ziua în care o delegaţie a Universităţii din Budapesta, în frunte cu Directorul Departamentului Tehnologic Prof. Dr. Ing. **Horvath**, a vizitat Catedra de TCM şi inclusiv **Disciplina de Dispozitive**, **Mecatronucă** şi **Roboţi, disciplină astăzi desfiinţată** precum şi **Catedra de TCM**, unde i s-au prezentat mai multe desene executate cu **FSM-CE**, printre care şi un vas de amestec, despre care s-a amintit şi în cuprinsul lucrării.

Profesorului nu-i venea să creadă că unul dintre desene a fost realizat cu o singură funcţie simplă în ecuaţii parametrice (e vorba de transformarea continuă a unui cerc de rază 2R în două cercuri tangente comune de raze R cu ajutorul **FSM-CE** radial excentric), pentru că lui i-au trebuit câteva zile să proiecteze, asistat de calculator, un astfel de vas de amestec pentru o instalaţie hidraulică.

"***Nu vii şi la noi să ne înveţi*** ?" am fost înterbat. Şi în 30 noembrie am fost primiţi cu gulaş, în 1 decembrie cu sarmale, în 2 decembrie am vizitat Universitatea şi în 3 decembrie s-a ţinut expunerea din domeniul supermatematicii "Aplicaţii tehnice ale funcţii circulare excentrice" la Departamentul de Tehnologie (**Fig. 14.4**), la care au fost invitate şi cadrele didactice de la **Departamentul de Matematică al Universitaţii din Budapesta**.

Cu această ocazie au fost antamate două colaborări ştiinţifice, derulate pe doi ani universitari, şi s-a oferit spaţiu redacţional pentru unele articole din domeniul super-matematicii, într-o revistă maghiară de mare prestigiu.

Cele două teme au fost:

1) "**Description of Industrial Robots Trajectory Defined by Characteristic Points, Using Supermatematics Functions**" şi
2) "**Griping Devices for Industrial Robots, Optimisation of their Construction Using Moments Separation Method**".

La data la care au fost stabilite, ele erau geja rezolvate şi expediate în scurt timp partenerului. Au fost expediate printr-un delegat şi nu ştim sigur dacă au fost (bine) primite, pentru că n-am primit confirmarea primirii lor şi nici alte semnale...

Erticolele n-au putut fi onorate deoarece ele trebuiau să fie scrise în limba engleză, iar ce-i pe care-i ştiam eu că ştiu bine engleza, erau ocupaţi, extrem de ocupaţi, iar alţii…. sau altele…. şi ca istoria să nu se mai repete … Eu nici atât !

Un absolvent de prestigiu al Universităţii de Vest din Timişoara, Facultatea de Fizică, coleg de birou la Institutul Naţional de Cercetare Dezvoltare pentru Electrochimie şi Materie Condensata din Timişoara, olimpic la Fizică în tinereţe, regretatul Dip. Univ. Fiz. **Marian Niţu**, s-a dovedit "olimpic" şi în traducerea lucrărilor în limba engleză, vorbită, de această dată, chiar de **William Sakespeare**. Graţie lui şi a supervizării traducerilor de reputatul om de ştiinţa american de origine română, fizician, matematician şi scriitor, Prof. Dr. **Florentin Smarandache**, seful Departamentului de Matematică de la Universitatea New Mexico (SUA), propus de **"Academia DacoRomână"** din Bucureşti pentru a candida la Premiul Nobel pentru literatură pe anul 2011, pentru cele 75 de lucrari literare, scrise în 3 limbi (română, engleză, franceză) şi traduse în mult mai multe, au fost scrise şi publicate lucrările [20], [21] şi [38], în limba engleză.

Editată cu sprijinul **Autorităţii Naţionale pentru Cercetare Stiinţifică**, sprijin în valoare de **700 Ron** şi sponsorizată, prin bunăvoinţa Dr. Fiz. **Ion Grozescu**, directorul INCDMC, cu **2.500 Ron**, a văzut lumina tiparului lucrarea "**SUPERMATEMATICA**. **FUNDAMENTE** ", într-un singur volum, de 268 pagini **editate color**, graţie Prof. Dr. Ing. **Sabin Ionel**, directorul **Editurii POLITEHNICA** din Timişoara, cărora le mulţumesc, pe această cale şi le rămân îndatorat.. pe veci.

La vârsta de 75 de ani, "veciul" e foarte aproape, deci durata îndatorării nu-i chiar atât de … mare / îndelungată.

Cele câteva exemplare (100) editate s-au epuizat instantaneu, astfel că foarte multe solicitari din partea prietenilor şi a cunoştintelor, a foştilor studenţi şi a altora, mai puţin din partea matematicienilor şi cu excepţia familiei, n-au putut fi onorate.

Ele n-au putut fi anorate nici în **a 2-a ediţie** a aceleiaşi edituri, prin tirajul de numai 30 de exemplare, în două volume, cu un total de cca. 1.000 de pagini, **realizate color** şi editate în **alb – negru,** pentru reducerea costurilor de autosponsorizare, exemplare suficente, însă, pentru expedierea lor la cei 4 recenzori şi la **AGIR** cu propunerea de premiere. Şi, în 2013, a fost premiată cu "**DIPLOMA AGIR**" în domeniul "**Tehnologia Informaţiei - IT**" pentru anul 2012.

Toată speranţa de-a disemina aceste minunate complemente de matematică, reunite sub denumirea de "**SUPERMATEMATICA**", **LUCRARE UNICĂ** în literatura mondială, pe care matematicieni universitari de prestigiu din USA au denumit-o "**matematica mileniului III**" ne-o punem în **Editura Matrix Rom,** în care, prin bunăvoinţa matematicianului de prestigiu *Ilie Iancu* apare ce-a de a 3-a ediţie a acestei lucrări. Fiind şi un manager de excepţie, v-a ştii să promoveze această lucrare. Matematicienii la metematică trag !

Sperăm să se ajungă la un tiraj suficient de mare pentru a onora cererile, acum, cu ocazia celei de a treia ediţii, revizuite, îmbogăţite şi îmbunătăţite a **Suprermatematicii**. Şi cu tirajul mai stufos, să ajungă cel puţin o carte la 10 librării...De biblioteci nu mai vorbim, pentru că majoritatea s-au desfinţat, ca şi casele de cultură, cinematografele, teatrele ş.a, care s-au transformate în birturi, restaurante, cazinouri, case de amanet şi alte case..

În asemenea circumstanţe, nu ştii dacă e bine, sau, dimpotrivă, să te lauzi cu un certificat de apreciere emis de o universitate de prestigiu din SUA pentru contribuţii aduse la dezvoltarea matematicii. Sau că în serverul de la **CERN** (**CERN Document Server**) figurează articole despre **supermatematică**.

Încercăm, şi-om mai vedea !

Bănuim că cititorul a studiat cuprinsul acestei cărţi, şi-a făcut o idee despre ce-i **supermatematica**, idee care, astfel, nu-i preconcepută, e o idee deja formată despre importanţa ei şi le rămânem recunoscători dacă ne-o impărtăşesc şi nouă. Şi veşnic îndatoraţi. Iar dacă vor să trudească şi ei la consolidarea edificiului **supermatematicii**, le stăm cu cea mai mare placere la dispoziţie cu informaţii suplimentare şi explicaţii.

Tuturor, le dorim lectură plăcută şi instructivă şi la volumul al II-lea !

Autorul

www.supermatematica.ro
www.supermathematica.com
www.supermathematica.org;
www.supermatematicaonline.blogspot.ro

BIBLIOGRAFIE

DIN DOMENIUL S U P E R M A T E M A T I C I I

1	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE**	Com. I Conferinţă Naţională de Vibraţii în Construcţia de Maşini, Timişoara , 1978, pag.101...108.
2	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE şi EXTENSIA LOR.**	Bul .St.şi Tehn. al I.P. "TV" Timişoara, Seria Mecanică, Tomul 25(39), Fasc. 1-1980, pag. 189...196
3	Şelariu Mircea Eugen	**STUDIUL VIBRAŢIILOR LIBERE ale UNUI SISTEM NELINIAR, CONSERVATIV cu AJUTORUL FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE**	Com. I Conf. Naţ. Vibr.în C.M. Timişoara,1978, pag. 95...100
4	Şelariu Mircea Eugen	**APLICAŢII TEHNICE ale FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE**	Com.a IV-a Conf. PUPR, Timişoara, 1981, Vol.1. pag. 142...150
5	Şelariu Mircea Eugen	**THE DEFINITION of the ELLIPTIC ECCENTRIC with FIXED ECCENTER**	A V-a Conf. Naţ. de Vibr. în Constr. de Maşini,Timişoara, 1985, pag. 175...182
6	Şelariu Mircea	**ELLIPTIC ECCENTRICS with MOBILE ECCENTER**	IDEM pag. 183...188
7	Şelariu Mircea Eugen	**CIRCULAR ECCENTRICS and HYPERBOLICS ECCENTRICS**	Com. a V-a Conf. Naţ. V. C. M. Timişoara, 1985, pag. 189...194.
8	Şelariu Mircea Eugen	**ECCENTRIC LISSAJOUS FIGURES**	IDEM, pag. 195...202
9	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE CEX şi SEX- SOLUŢIILE UNOR SISTEME MECANICE NELINIARE**	Com. a VII-a Conf.Naţ. V.C.M., Timişoara,1993, pag. 275...284.
10	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA**	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn.,TEHNO'95 Timişoara, 1995, Vol. 9: Matematica Aplicată,. pag.41...64

11	Şelariu Mircea Eugen	**FORMA TRIGONOMETRICĂ a SUMEI şi a DIFERENŢEI NUMERELOR COMPLEXE**	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn., TEHNO'95 Timişoara, 1995, Vol. 9: Matematică Aplicată, pag. 65...72
12	Şelariu Mircea Eugen	**MIŞCAREA CIRCULARĂ EXCENTRICĂ**	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn. TEHNO'95., Timişoara, 1995 Vol.7: Mecatronică, Dispozitive şi Rob.Ind.,pag. 85...102
13	Şelariu Mircea Eugen	**RIGIDITATEA DINAMICĂ EXPRIMATĂ CU FUNCŢII SUPERMATEMATICE**	Com.VII Conf. Internaţ. de Ing. Manag. şi Tehn., TEHNO'95 Timişoara, 1995 Vol.7: Mecatronică, Dispoz. şi Rob.Ind.,pag. 185...194
14	Şelariu Mircea Eugen	**DETERMINAREA ORICÂT DE EXACTĂ A RELAŢIEI DE CALCUL A INTEGRALEI ELIPTICE COMPLETE DE SPETA INTAIA K(k)**	Bul. VIII-a Conf. de Vibr. Mec., Timişoara,1996, Vol III, pag.15 ... 24.
15	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ**	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de Inginerie Menagerială şi Tehnologică, Timişoara 1998, pag 531..548
16	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢII DE TRANZIŢIE INFORMAŢIONALĂ**	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de Inginerie Managerială şi Tehnologică, Timişoara 1998, pag 549… 556
17	Şelariu Mircea Eugen	**FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ CA SOLUŢII ALE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE**	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de Inginerie Managerială şi Tehnologică, Timişoara 1998, pag 557…572
18	Şelariu Mircea Eugen	**INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ**	Lucr. Simp. Naţional "Zilele Universităţii Gh. Anghel" Ed. II-a, Drobeta Turnu Severin, 16-17 mai 2003, pag. 171 … 178
19	Şelariu Mircea Eugen	**QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**	The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 … 82
20	Şelariu Mircea Eugen	**SMARANDACHE STEPPED FUNCTIONS**	Revista: "Scienta Magna" Vol. 3, No. 1, 2007, ISSN

			1556-6706
21	Şelariu Mircea Eugen	**TEHNO ART OF ŞELARIU SUPERMATHEMATICS FUNCTIONS**	(ISBN-10):1-59973-037-5 (ISBN-13):974-1-59973-037-0 (EAN): 9781599730370
22	Şelariu Mircea Eugen	**PROIECTAREA DISPOZI-TIVELOR DE PRELUCRARE, Cap. 17 din PROIECTAREA DISPOZITIVELOR**	Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982, pag. 474 … 543
23	Petrişor Emilia	**ON THE DYNAMICS OF THE DEFORMED STANDARD MAP**	Workshop Dynamicas Days'94, Budapest, si Analele Univ.din Timisoara, Vol.XXXIII, Fasc.1-1995, Seria Mat.-Inf.,pag. 91…105
24	Petrişor Emilia	**SISTEME DINAMICE HAOTICE**	Seria Monografii matematice, Tipografia Univ. de Vest din Timişoara, 1992
25	Petrişor Emilia	**RECONNECTION SCENARIOS AND THE THERESHOLD OF RECONNECTION IN THE DYNAMICS OF NONTWIST MAPS**	Chaos, Solitons and Fractals, 14 (2002) 117…127
27	Cioara Romeo	**FORME CLASICE PENTRU FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE**	Proceedings of the Scientific Communications Meetings of "Aurel Vlaicu" University, Third Edition, Arad, 1996, pg.61 ..65
28	Preda Horea	**REPREZENTAREA ASISTATĂ A TRAIECTORILOR ÎN PLANUL FAZELOR A VIBRAŢIILOR NELINIARE**	Com. VI-a Conf.Naţ.Vibr. în C.M. Timişoara, 1993
29	Filipescu Avram	**APLICAREA FUNCŢIILOR (ExPH) EXCENTRICE PSEUDOHIPERBOLICE ÎN TEHNICA**	Com.VII-a Conf. Internat.de Ing. Manag. Şi Tehn. TEHNO'95, Timişoara, Vol. 9. Matematica aplicată., pag. 181 … 185
30	Dragomir Lucian (Toronto - Canada)	**UTILIZAREA FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE ÎN CAD / CAM : SM-CAD / CAM. Nota I-a: REPREZENTARE ÎN 2D**	Com.VII-a Conf. Internaţ.de Ing. Manag. şi Tehn. TEHNO'95, Timişoara, Vol. 9. Matematică aplicată., pag. 83 … 90
31	Şelariu Şerban	**UTILIZAREA FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE ÎN CAD / CAM : SM-CAD / CAM. Nota I I –a: REPREZENTARE ÎN 3D**	Com.VII-a Conf. Internaţ.de Ing. Manag. şi Tehn. TEHNO'95, Timişoara, Vol. 9. Matematică Aplicată., pag. 91 … 96
32	Staicu Florentiu	**DISPOZITIVE UNIVERSALE de PRELUCRARE a SUPRA-FEŢELOR COMPLEXE de TIPUL EXCENTRICELOR ELIPTICE**	Com. Ses. Anuale de Com.Şt. Oradea ,1994
33	George LeMac	**THE ECCENTRIC TRIGONOMETRIC FUNCTIONS: AN EXTENTION OF CLASSICAL TRIGONOMETRIC**	The University of Western Ontario, London, Ontario, Canada Depertment of Applied

		FUNCTIONS.	Mathematics May 18, 2001
34	Şelariu Mircea Ajiduah Cristoph Bozântan Emil (USA) Filipescu Avram	**INTEGRALELE UNOR FUNCŢII SUPERMATEMATICE**	Com. VII Conf.Internaţ.de Ing.Manag. şi Tehn. TEHNO'95 Timişoara. 1995,Vol.IX: Matem.Aplic. pag.73…82
35	Şelariu Mircea Fritz Georg (G) Meszaros A.(G)	**ANALIZA CALITĂŢII MIŞCĂRILOR PROGRAMATE cu FUNCŢII SUPERMATEMATICE**	IDEM, Vol.7: Mecatronică, Dispozitive şi Rob.Ind., pag. 163…184
36	Şelariu Mircea Szekely Barna (Ungaria)	**ALTALANOS SIKMECHANIZMUSOK FORDULATSZAMAINAK ATVITELI FUGGVENYEI MAGASFOKU MATEMATIKAVAL**	Bul.Şt al Lucr. Prem.IV,Universitatea din Budapesta, nov. 1992
37	Şelariu Mircea Popovici Maria	**A FELSOFOKU MATEMATIKA ALKALMAZASAI**	Bul.Şt al Lucr. Prem.IV, Universitatea din Budapesta, nov. 1994
38	Smarandache Florentin Şelariu Mircea Eugen	**IMMEDIATE CALCULATION OF SOME POISSON TYPE INTEGRALS USING SUPERMATHEMATICS CIRCULAR EX-CENTRIC FUNCTIONS**	http://arxiv.org/abs/0706.4238 Archiv arXiv (United States) viXra.org > Functions and Analysis > viXra:1004.0053
39	Konig Mariana Şelariu Mircea	**PROGRAMAREA MIŞCĂRII DE CONTURARE A ROBOŢILOR INDUSTRIALI cu AJUTORUL FUNCŢIILOR TRIGONOMETRICE CIRCULARE EXCENTRICE**	MEROTEHNICA, Al V-lea Simp. Naţ.de Rob.Ind.cu Part .Internaţ. Bucuresti, 1985 pag.419…425
40	Konig Mariana Şelariu Mircea	**PROGRAMAREA MIŞCĂRII de CONTURARE ale R I cu AJUTORUL FUNCŢIILOR TRIGONOMETRICE CIRCULARE EXCENTRICE,**	Merotehnica, V-lea Simp. Naţ.de RI cu participare internaţională, Buc.,1985, pag. 419 … 425.
41	Konig Mariana Şelariu Mircea	**THE STUDY OF THE UNIVERSAL PLUNGER IN CONSOLE USING THE ECCENTRIC CIRCULAR FUNCTIONS**	Com. V-a Conf. PUPR, Timişoara, 1986, pag.37…42
42	Staicu Florenţiu Şelariu Mircea	**CICLOIDELE EXPRIMATE CU AJUTORUL FUNCŢIEI SUPERMATEMATICE rex**	Com. VII Conf. Internaţională de Ing.Manag. şi Tehn, Timişoara "TEHNO'95"pag.195-204
43	Gheorghiu Em. Octav Şelariu Mircea Bozantan Emil	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE DE SUMA DE ARCE**	Ses.de com.st.stud.,Secţia Matematică,Timişoara, Premiul II la Secţia matematică pe 1983
44	Gheorghiu Emilian Octav Selariu Mircea Cojerean Ovidiu	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE. DEFINIŢII, PROPRIETĂŢI, APLICAŢII TEHNICE.**	Ses. De com.şt.stud. Secţia Matematică, premiul II la Secţia Matematică pe 1985.
45	Şelariu Mircea	**CINETOSTATICĂ GEOMETRICĂ**	Com. Primului Simpozion de

BIBLIOGRAFIE

	Eugen	**(METODA SEPARĂRII MOMENTELOR)**	Roboţi Industriali, Buc. 1981, pag. 378…384
46	Şelariu Mircea Eugen Mădăraş Lucian	**ANALIZA AUTOFRÂNĂRII MECANISMELOR DE PREHENSIUNE PRIN METODA SEPARARII MOMENTELOR**	Com.I Simp. Naţ.de Rob.Ind.,Buc.,1981
47	Savii Gh. Şelariu Mircea Vucu I.,Pop I. Demian Ioan	**STUDIUL RIGIDITĂŢII ANSAMBLULUI CĂRUCIOR AL STRUNGULUI SN-400,**	Bul.Şt.şi Tehn.al IP Timişoara, Tom.11 (25) Fasc.2, 1966, pag. 731…740
48	Savii Gh. Pop Ion Şelariu Mircea	**CONTRIBUŢII la DETERMINAREA RIGIDITĂŢII STRUNGURILOR NORMALE, CU REFERIRE LA STRUNGUL SN-400**	Bul. Şt. şi Tehn. Al IPT,1971 Tom 16(30), Fasc.1, Seria Mec. Pag.129…143
49	Savii Gh. Pop Ion Şelariu Mircea Micsa Ion	**INFLUENŢA RIGIDITĂŢII ASUPRA PRECIZIEI FORMEI GEOMETRICE la PRELUCRAREA pe STRUNG**	C.S.L.C.P. al IPTimisoara,1970, pag. 76 ... 77
50	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA.FUNDAMENTE EDIŢIA 1-a**	Editura " POLITEHNICA" Timişoara 2007
51	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA.FUNDAMENTE Vol I şi Vol. II, EDIŢIA a 2-a**	Editura " POLITEHNICA" Timişoara 2012

Lucrari publicate de www.cartiaz.ro

LUCRARI EXISTENTE LA www.CARTIAZ.ro IN 13 ianuarie 2013

Pagina 1-a

Aplicarea metodei separarii momentelor (MSM) la mecanisme si sisteme in ansamblul lor [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
157 Stiinta si Tehnica 0.66MB ★ (Carte donata de autor)

Aplicatii ale metodei separarii momentelor (MSM) la sisteme industriale concrete [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
104 Stiinta si Tehnica 0.67MB ★ (Carte donata de autor)

Aproximarea functiilor: Un sistem supermatematic cu baza continua de aproximare a functiilor [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
164 Stiinta si Tehnica 1.09MB ★ (Carte donata de autor)

Bucla centrica si versierele excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
141 Stiinta si Tehnica 0.83MB ★ (Carte donata de autor)

Cardinal functions and integral functions [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu, Florentin Smarandache, Marian Nitu
44 Stiinta si Tehnica 1.23MB ★ (Carte donata de autor)

Cercurile lui Apollonius din Perga [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
117 Stiinta si Tehnica 1.78MB ★ (Carte donata de autor)
Cercurile lui Apollonius si cercurile olimpice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
152 Stiinta si Tehnica 0.97MB ★ (Carte donata de autor)
Cifrele, particulele elementare ale Matematicii [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
117 Stiinta si Tehnica 0.71MB ★ (Carte donata de autor)
De la rezolvarea triunghiurilor la functii supermatematice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
191 Stiinta si Tehnica 1.59MB ★ (Carte donata de autor)
Definirea FSM-CE hipoelementare de variabila excentrica theta si centrica alpha [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
131 Stiinta si Tehnica 3.94MB ★ (Carte donata de autor)

Pagina a 2-a

Derivatele si integralele unor functii supermatematice circulare excentrice (FSM-CE) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
158 Stiinta si Tehnica 1.82MB ★ (Carte donata de autor)
Despre lobe si cvazilobe: Lobe exterioare si cvazilobe interioare cercului unitate [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
156 Stiinta si Tehnica 1.31MB ★ (Carte donata de autor)
Determinarea oricat de exacta a relatiei de calcul a integralei eliptice complete de speta I (Rom) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
111 Stiinta si Tehnica 0.21MB ★ (Carte donata de autor)
Determinarea oricat de exacta a relatiei de calcul a integralei eliptice complete de speta intaia (Engleza)[PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
116 Stiinta si Tehnica 0.34MB ★ (Carte donata de autor)
Determinarea punctelor de intersectie din Teorema Liniilor Concurente a lui Florentin Smarandache [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
88 Stiinta si Tehnica 0.88MB ★ (Carte donata de autor)
Dispozitive de acumulare si de transport (dat) prin vibratii [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
269 Stiinta si Tehnica 1.24MB ★ (Carte donata de autor)
Elemente neliniare legate in serie [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
107 Stiinta si Tehnica 1.3MB ★ (Carte donata de autor)

BIBLIOGRAFIE

Esantionarea semnalelor [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
114 Stiinta si Tehnica 1.18MB ★ (Carte donata de autor)
Functia supermatematica (FSM) radial excentrica cvadriloba [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
119 Stiinta si Tehnica 1.67MB ★ (Carte donata de autor)
Functii cardinale si functii integrale circulare excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu, Florentin Smarandache, Marian Nitu
112 Stiinta si Tehnica 2.2MB ★ (Carte donata de autor)

Pagina a 3-a

Functii hiperbolice excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
417 Stiinta si Tehnica 2.55MB ★ (Carte donata de autor)
Functii in trepte Smarandache [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
123 Stiinta si Tehnica 0.18MB ★ (Carte donata de autor)
Functii signadforasice Voinoiu [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
114 Stiinta si Tehnica 2.66MB ★ (Carte donata de autor)
Functii supermatematice (FSM) inverse (FSM-I) rexθ, Rexα, dexθ şi Dexα [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
114 Stiinta si Tehnica 3.39MB ★ (Carte donata de autor)
Functii supermatematice circulare excentrice inverse (FSM-CEI) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
107 Stiinta si Tehnica 2.75MB ★ (Carte donata de autor)
Functii supermatematice circulare excentrice inverse (FSM-CEI) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
167 Stiinta si Tehnica 2.43MB ★ (Carte donata de autor)
Functiile supermatematice circulare cosinus si sinus excentrice. Derivatele si integralele lor. [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
224 Stiinta si Tehnica 1.13MB ★ (Carte donata de autor)
Intamplarea in matematica: Jocul dragostei fata de matematica si al intamplarii [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
108 Stiinta si Tehnica 1.46MB ★ (Carte donata de autor)
Integrale si functii eliptice excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
160 Stiinta si Tehnica 6.29MB ★ (Carte donata de autor)
Integrale si functii eliptice excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
128 Stiinta si Tehnica 1.85MB ★ (Carte donata de autor)

Pagina a 4-a

Intersectii in plan [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
113 Stiinta si Tehnica 0.98MB ★ (Carte donata de autor)
Introducerea strambei in matematica [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
156 Stiinta si Tehnica 1.29MB ★ (Carte donata de autor)

Liniile concurente si punctele lor de intersectie intr-un triunghi [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
113 Stiinta si Tehnica 0.99MB ★ (Carte donata de autor)
Lobele - curbe matematice noi [DOC]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
141 Stiinta si Tehnica 19.65MB ★ (Carte donata de autor)
Matematica atomica. Metoda determinarii succesive a cifrelor consecutive ale unui numar [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
252 Stiinta si Tehnica 0.95MB ★ (Carte donata de autor)
Metoda pentru determinarea relatiei exacte de calcul a pulsatiei proprii a unui sistem oscilant liber, conservativ, cu caracteristica elastica neliniara [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
106 Stiinta si Tehnica 0.72MB ★ (Carte donata de autor)
Metoda separarii momentelor (partea I) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
103 Stiinta si Tehnica 0.3MB ★ (Carte donata de autor)
Metoda separarii momentelor (partea II-a) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
110 Stiinta si Tehnica 0.79MB ★ (Carte donata de autor)
Miscarea circulara excentrica de excentru punct fix [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
169 Stiinta si Tehnica 1.23MB ★ (Carte donata de autor)
Miscarea circulara excentrica de excentru punct mobil [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
148 Stiinta si Tehnica 1.28MB ★ (Carte donata de autor)

Pagina a 5-a

Miscarea oscilanta excentrica: Pendulul Supermatematic [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
104 Stiinta si Tehnica 0.99MB ★ (Carte donata de autor)
Multiplicarea dimensionala a spatiilor [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
115 Stiinta si Tehnica 1.89MB ★ (Carte donata de autor)
Noi posibilitati de generare a suprafetelor complexe [PPT]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
131 Stiinta si Tehnica 7.05MB ★ (Carte donata de autor)
O metoda noua de integrare: Metoda de integrare prin divizarea diferentialei [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
145 Stiinta si Tehnica 0.33MB ★ (Carte donata de autor)
Obiecte geometrice supermatematice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
173 Stiinta si Tehnica 0.3MB ★ (Carte donata de autor)

BIBLIOGRAFIE

Optimizarea conceptiei sistemelor tehnologice utilizand metoda separarii momentelor (MSM) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
106 Stiinta si Tehnica 0.19MB ★ (Carte donata de autor)
Optimizarea transportului vibrational cu ajutorul FSM-CE [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
176 Stiinta si Tehnica 0.72MB ★ (Carte donata de autor)
Optimization of workholding design using moments separation method (MSM) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu, Ion Grozav
52 Stiinta si Tehnica 0.14MB ★ (Carte donata de autor)
Optimization of workholding design using moments separation method (MSM) - lb. maghiara [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu, Kravecz Robert
51 Stiinta si Tehnica 0.14MB ★ (Carte donata de autor)
Polinoame ortogonale excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
121 Stiinta si Tehnica 0.37MB ★ (Carte donata de autor)

Pagina a 6-a

Punctul, liniile, triunghiurile si cercurile [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
124 Stiinta si Tehnica 0.31MB ★ (Carte donata de autor)
Rigiditatea dinamica exprimata cu functii supermatematice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
193 Stiinta si Tehnica 0.2MB ★ (Carte donata de autor)
Sisteme vibrante cuadrilobe [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
216 Stiinta si Tehnica 0.69MB ★ (Carte donata de autor)
Smarandache stepped functions [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
71 Stiinta si Tehnica 0.15MB ★ (Carte donata de autor)
Solutia simbolica exacta a unei ecuatii trigonometrice neliniare [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★
102 Stiinta si Tehnica 0.63MB ★ (Carte donata de autor)
Spatiul matematicii centrice si spatiul matematicii excentrice [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
102 Stiinta si Tehnica 1.08MB ★ (Carte donata de autor)
Super-mathematics functions [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
119 Stiinta si Tehnica 0.3MB ★ (Carte donata de autor)
Supermatematica (vol. I) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
3148 Stiinta si Tehnica 10.52MB ★ (Carte donata de autor)
Supermatematica (vol. II, partea a II-a) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
260 Stiinta si Tehnica 22.33MB ★ (Carte donata de autor)

Supermatematica (vol. II, partea a III-a) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
265 Stiinta si Tehnica 21.61MB ★ (Carte donata de autor)

Pagina a 7-a

Supermatematica (vol. II, partea I) [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
259 Stiinta si Tehnica 13.29MB ★ (Carte donata de autor)
Techno-Art of Selariu SuperMathematics Functions [PDF]
Autori: Florentin Smarandache ★★★★★
43 Stiinta si Tehnica 12.89MB ★ (Carte donata de autor)
Teorema S a bisectoarelor unui patrulater inscriptibil si teoremele S ale triunghiului [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
152 Stiinta si Tehnica 1.43MB ★ (Carte donata de autor)
Teoremele poligoanelor. Patrate, dreptunghiuri si trapeze isoscele [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
391 Stiinta si Tehnica 0.63MB ★ (Carte donata de autor)
Transformarea riguroasa in cerc a diagramei polare a compilantei [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
72 Stiinta si Tehnica 1.02MB ★ (Carte donata de autor)
Un discurs cu tema impusa, tinut absolventilor despre ... Supermatematica [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
46 Stiinta si Tehnica 1.7MB ★ (Carte donata de autor)
Un discurs despre Supermatematica [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★
229 Stiinta si Tehnica 0.99MB ★ (Carte donata de autor)
Vibratii [PDF]
Autori: Mircea Eugen Selariu ★★★★★★
70 Stiinta si Tehnica 4.48MB ★ (Carte donata de autor)

CUPRINS

Cap. 12 UN SISTEM SUPERMATEMATIC CU BAZĂ CONTINUĂ DE APROXIMARE A FUNCŢIILOR

Cap. 13. APROXIMAREA UNOR FUNCŢII ELIPTICE JACOBI

Albert Einstein şi supermatematica