

INSTITUTUL POLITEHNIC „TRAIAN VUIA” TIMIȘOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICĂ

CONTRIBUȚIE
LA STUDIUL DESCĂRCĂRILOR ELECTRICE PARȚIALE ÎN
MATERIALELE ELECTROIZOLANTE

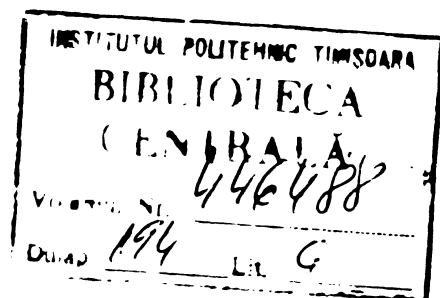
- Teză de doctorat -

Ing. Liviu Petrean

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

Conducător științific,
prof.dr.ing. Constantin Șora

- 1982 -



C U P R I N S

Pag

I. INTRODUCERE.....	6
II. UNELE PROBLEME PRIVIND DESCARCARILE ELECTRICE PARTIALE IN IZOLATIA ECHIPAMENTELOR ELECTRICE DE INALTA TENSIUNE.....	
2.1. Fenomenul de descărcare parțială în materialele electroizolante.....	9
2.1.1. Generalități. Schema electrică echivalentă..	9
2.1.2. Mărimi caracteristice ale descărcărilor par- țiale.....	11
2.2. Descărcări corona.....	16
2.2.1. Descărcări corona în curent continuu.....	16
2.2.2. Descărcări corona în curent alternativ.....	17
2.3. Analiza descărcărilor parțiale din incluziuni....	19
2.3.1. Incluziuni cu pereți metalici.....	19
2.3.2. Incluziuni cu pereți electroizolanți.....	24
2.3.3. Incluziuni adiacente unui electrod metalic..	32
2.3.4. Incluziuni în ulei și hârtie impregnată....	35
2.3.5. Autoextincția descărcărilor parțiale.....	40
2.4. Detectarea ,măsurarea și localizarea descărcări- lor parțiale.....	42
2.4.1. Fenomene caracteristice descărcărilor parți- ale. Generalități.....	42
2.4.2. Metode electrice de detectare a descărcărilor parțiale.....	43
2.5. Măsurători ale descărcărilor parțiale asupra echi- pamentului de înaltă tensiune.....	49
2.5.1. Cabluri de înaltă tensiune.....	51
2.5.2. Transformatoare de putere.....	55
2.5.3. Magini rotative.....	59
III. PROBLEME DE CIMP IN MEDII DIELECTRICE NEOMOGENE IN LE- GATURA CU DESCARCARILE PARTIALE.....	61

3.1. Aspecte generale.....	61
3.2. Rezolvarea analitică a problemelor de câmp electric	62
3.3. Rezolvarea numerică a problemelor de câmp electric	63
3.4. Metoda diferențelor finite.....	65
3.5. Calculul câmpurilor electrice cu metoda elementelor finite.....	67
3.5.1. Formularea variațională a problemei câmpului	67
3.5.2. Procedeeul Rayleigh-Ritz.....	69
3.5.3. Metoda elementelor finite.....	70
3.5.4. Funcții de formă ale elementelor finite tri- unghiulare.....	73
3.5.5. Funcționala elementelor finite de ordinul 1	78
3.5.6. Funcționala elementelor finite de ordinul 2	80
3.5.7. Funcționala pentru elemente finite de ordi- nul al treilea.....	82
3.5.8. Sisteme de ecuații algebrice.....	83
3.5.9. Calculul intensității câmpului electric....	100
3.5.10. Condiții de frontieră.....	102
3.5.11. Câmpuri în medii cu simetrie plan meridiană	104
3.6. Probleme de câmp rezolvate.....	105
3.6.1. Problema condensatorului cilindric.....	105
3.6.2. Problema condensatorului sferic.....	113
3.6.3. Rezolvarea unor probleme de câmpuri electrice plan-paralele în legătură cu descărcările par- țiale.....	117
3.6.4. Determinarea câmpului electric în incluzi- uni cilindrice.....	120
3.6.5. Algoritme de calcul utilizate.....	122
IV. STUDIUL PE MODELE MATEMATICE SI ANALOGICE A FENOMENULUI DE DESCARCARE PARTIALA.....	127
4.1. Modele matematice ale fenomenului de descărcare parțială.....	127
4.1.1. Descărcarea.....	127
4.1.2. Încărcarea.....	131
4.1.3. Descărcări parțiale în cazul limită $C=0$	134
4.1.4. Descărcări parțiale în curent continuu....	139
4.1.5. Descărcări parțiale în curent alternativ....	143
4.2. Modelul analogic al descărcării parțiale. Deter- minări experimentale.....	146

4.2.1. Influența tensiunii de alimentare.....	147
4.2.2. Influența rezistenței serie cu proba.....	149
4.2.3. Influența capacității C_1	150
4.2.4. Influența inductivității serie cu proba.....	152
4.2.5. Influența capacității probei.....	153
4.2.6. Influența rezistenței receptorului.....	153
4.2.7. Detecția în bandă largă.....	155
4.2.8. Detecția în bandă îngustă.....	156
4.2.9. Incercări la tensiune de frecvență variabilă..	158
4.3. Incercări pe modele analogice de înaltă tensiune....	159
4.4. Unele precizări sintetice.....	159
V. CONCLUZII.....	162
BIBLIOGRAFIE.....	169

I.

INTRODUCERE

Descărcările parțiale, ce se produc în incluziunile izolației sistemelor tehnice, deteriorează local izolația și reduc astfel durata de viață a cablurilor, mașinilor și aparatelor electrice având implicații nedorite asupra siguranței în funcționare a sistemului electroenergetic. Cunoașterea temeinică și interpretarea corectă a fenomenului de descărcare parțială furnizează date utile atât pentru proiectarea și realizarea sistemelor de izolare cât și pentru aprecierea stării izolației la încercările profilactice ale echipamentelor electrice, contribuind astfel la prevenirea unor avarii în instalațiile electrice.

Descărcarea parțială este o descărcare electrică ce se dezvoltă numai într-o porțiune a materialului izolant ce separă părțile metalice sub tensiune. Ea este însoțită de o serie de fenomene electrice, luminoase, termice, chimice și acustice care stau de altfel la baza diferitelor metode de detectare, localizare și măsurare a descărcărilor parțiale.

Cu toate rezultatele obținute privind studiul și încercările experimentale în acest domeniu, fenomenul de descărcare parțială nu este cunoscut în totalitatea sa, îndeosebi în ceea ce privește aspectele legate de interpretarea corectă a rezultatelor măsurărilor, corelațiile ce există între mărimile măsurate și parametri izolației și ai circuitelor electrice în care se produc descărcările parțiale ș.a. Nu sînt complet elucidate nici aspectele privind durata de viață a sistemelor de izolare supuse acțiunii descărcărilor parțiale.

În cadrul tezei, autorul a urmărit să dezvolte analiza teoretică și experimentală a descărcărilor parțiale, în principal în legătură cu determinarea cîmpului electric în materialele electrice izolante cu incluziuni în scopul relevării rolului important pe care îl are spectrul cîmpului electric precum și elaborarea unor modele matematice și analogice mai complete pentru studierea desfășurării fenomenului.

Ținând seama de complexitatea fenomenului, în studiu s-au admis anumite ipoteze simplificatoare. Astfel s-a considerat cazul unui singur loc de descărcare în incluziune și s-a admis că în timpul descărcării tensiunea pe incluziune scade la zero, iar tensiunile de străpungere ale incluziunii la cele două polarități sînt egale. Nu s-au analizat aspectele legate de comportarea materialelor electroizolante sub acțiunea descărcărilor parțiale.

Se poate constata din literatură că problema descărcărilor parțiale este de mare actualitate pe plan mondial menționînd că există preocupări în acest domeniu și în țara noastră. Astfel, Fl. Tănăsescu, A. Marinescu, C. Moldoveanu ș.a. au întreprins cercetări privind comportarea și măsurarea descărcărilor parțiale, iar acad. A. Avramescu are contribuții teoretice deosebite privind sintetizarea rezultatelor cercetărilor și prezentarea unor relații de similitudine ale descărcărilor parțiale.

Materialul elaborat de autor a fost organizat în cinci capitole, primul fiind introducerea iar ultimul referindu-se la concluzii. În capitolul al doilea autorul face o prezentare sistematică și sintetică a problemelor descărcărilor parțiale cunoscute pînă în prezent din literatură cu observații critice privind dependențe unor mărimi caracteristice ale descărcării parțiale de parametrii izolației cu incluziuni.

Capitolul al treilea abordează în detaliu aspectele teoretice ale aplicării metodei elementelor finite la determinarea cîmpului electric în izolația sistemelor tehnice. Se stabilesc ecuațiile generale ale sistemelor de ecuații pentru elemente finite triunghiulare de ordinul 1, 2 și 3 în coordonate carteziane și cilindrice precum și pentru elemente finite tetraedrice de ordinul întâi. Se mai obține o formă de scriere a sistemelor de ecuații generale în care apar ca necunoscute intensitățile cîmpului electric în interiorul elementelor finite. Cu ajutorul relațiilor stabilite se rezolvă problema condensatorului cilindric și sferic rezultînd concluzii importante privind relația dintre precizia de obținere a valorilor potențialului și a intensității cîmpului electric și pasul rețelei de divizare a domeniului studiat. Se rezolvă apoi probleme de cîmp în legătură cu fenomenul de descărcare parțială în incluziuni.

În capitolul al patrulea al tezei se prezintă un model matematic al fenomenului de descărcare parțială, care spre deosebire de cele cunoscute în literatură permite studiul atât al

procesului de descărcare cât și de încărcare din incluziune. Modelul ține seama de parametrii sursei de alimentare și de rezistențele de pierdere ale izolației. Sînt stabilite ecuațiile mărimilor caracteristice în cele două faze ale descărcării parțiale atît în curent continuu cît și în curent alternativ. Autorul a realizat și propune apoi un model analogic de studiere a descărcării parțiale în curent alternativ, ce permite analiza influenței parametrilor rețelei de alimentare, ai izolației și ai receptorului asupra mărimilor caracteristice ale descărcărilor parțiale. Rezultatele experimentale obținute pe modelul analogic confirmă justetea modelului matematic propus.

În concluziile prezentei lucrări sînt relevate principalele aspecte și rezultate noi ale problemei descărcărilor parțiale obținute în urma studiului întreprins și se fac aprecieri și observații privind circuitele de detecție ale descărcărilor parțiale.

Autorul își exprimă recunoștința față de conducătorul său științific, prof.dr.ing. Constantin Șora, cărui îi mulțumește pentru atenția și interesul deosebit acordat la elaborarea acestei lucrări. Indrumările de înaltă competență, de un ridicat nivel științific au fost extrem de utile autorului atît în activitatea de cercetare și elaborare a tezei de doctorat cît și pentru activitatea didactică.

Autorul mulțumește colegilor săi din catedră care prin sprijinul și discuțiile purtate au contribuit la fundamentarea ideilor prezentate în lucrare.

Autorul mulțumește conducerii I.R.E. Baia Mare și colegilor de muncă din această întreprindere pentru sprijinul acordat la realizarea standului de încercări și efectuarea unor măsurători.

CAPITOLUL II

UNELE PROBLEME PRIVIND DESCĂRCĂRILE PARTIALE DIN IZOLAȚIA ECHIPAMENTELOR ELECTRICE DE INALTA TENSIUNE

2.1. Fenomenul de descărcare parțială în materialele electroizolante

2.1.1. Generalități ; Schema electrică echivalentă

La o izolație electrică, în prezența unei incluziuni de gaz, se constată experimental că de la un anumit nivel de tensiune incluziunea devine sediul unor fenomene luminoase, termice, chimice, acustice și electrice fără ca izolația să fie străpunsă. Aceste fenomene sînt denumite descărcări parțiale. Descărcarea parțială este o descărcare electrică ce se dezvoltă numai pe o porțiune a intervalului ce separă părțile metalice sub tensiune și deteriorează local materialul electroizolant. Descărcarea parțială numită de unii autori "ionizare", iar în literatura americană "descărcare corona" este favorizată de intensitatea cîmpului electric mai mare din incluziune cît și de rigiditatea dielectrică mai redusă a gazului din incluziune.

Fenomenul de descărcare parțială în incluziuni cu ulei de transformator este mai complex deoarece, la străpungerea uleiului din incluziune, apar bule de gaz în care vor apare noi descărcări parțiale. Uleiul poate să absoarbă gazele astfel formate, stabilindu-se uneori un echilibru între formarea gazului și absorbția acestuia. Descărcările parțiale se pot astfel stinge, să crească sau să devină instabile. În plus, sarcina aparentă în bulele de gaz este considerabil mai mică decît în ulei.

În curent alternativ studiul fenomenului de descărcare parțială se face echivalînd dielectricul studiat (fig. 2.1, a) printr-un sistem de trei condensatoare reprezentînd izolația sănătoasă "C", incluziunea în care are loc descărcarea C_2 , și

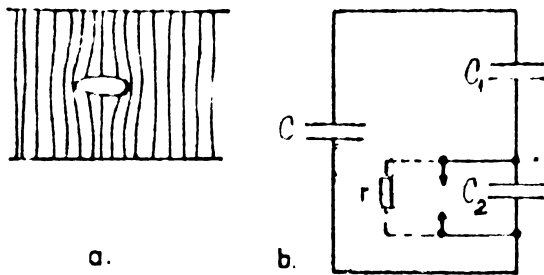


Fig. 2.1.

izolația sănătoasă situată în același tub de câmp ca și incluziunea "C₁" (fig. 2.1, b). Eclatorul conectat în paralel cu capacitatea C₂ simbolizează descărcarea parțială. Străpungerea incluziunii produce o variație bruscă de mică valoare a

tensiunii între electrozi de ordinul a câteva zeci de milivolți până la câțiva volți, iar variația de curent asociată fenomenului este atât de mică încât nu acționează dispozitivele de protecție. Tensiunea U₂ la bornele incluziunii este:

$$U_2 = U \cdot C_1 / (C_1 + C_2) \quad (2.1.)$$

unde U este tensiunea dintre electrozi. Capacitatea echivalentă a sistemului înainte de descărcare este $C_0 = C + C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$, iar prin descărcarea parțială are loc o variație a acestei capacități:

$$\Delta C = - C_1^2 / (C_1 + C_2) \quad (2.2)$$

În general capacitatea C a izolației sănătoase este mult mai mare decât valorile capacităților C₁ și C₂, iar când grosimea incluziunii are valori foarte mici C₂ ≫ C₁.

În literatură [36] se dau calcule ale regimului tranzitoriu ce apare la conectarea rezistenței r ce simbolizează rezistența arcului electric din canalul descărcării. Se analizează cazul descărcării considerând sursa cu impedanță internă foarte mare sau finită. Fenomenele ce însoțesc descărcarea parțială se petrec extrem de rapid în timp, durata frontului impulsului fiind de cca 15 ns, iar lățimea la 50% din amplitudine de cca 50 ns [113, 218, 219]. În regim staționar, în curent alternativ nu se ține seama de valorile rezistențelor de pierderi ale dielectricului.

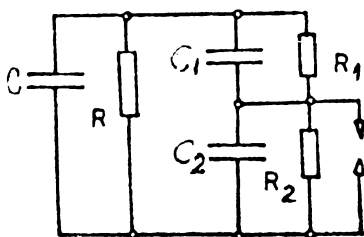


Fig. 2.2.

La alimentare în curent continuu schema echivalentă a izolației cu incluziune este cea din figura 2.2, unde se iau în considerare și rezistențele de pierderi ale dielectricului, care determină repartizarea tensiunii în schema electrică. Capacitatea C₂ a incluziunii este încărcată prin rezistența R₁ de pierderi a

dielectricului. Descărcările sînt în acest caz mai puțin frecvente, ele pot să apară cu intermitențe de ordinul orelor sau săptămînilor.

2.1.2. Mărimi caracteristice ale descărcărilor parțiale

Referindu-ne la schema echivalentă din figura 2.1, b se observă că în timpul descărcării parțiale tensiunea pe incluziune scade la zero, iar sarcina electrică transferată în incluziune este $C_2 U_2$. Deoarece valoarea lui C_2 și a lui U_2 este necunoscută, sarcina electrică transferată în incluziune este necunoscută. În acest timp condensatorul C_1 se încarcă, sarcina transferată de sursă circuitului fiind:

$$q = C_1 U_2 \quad (2.3)$$

Această mărime, numită sarcină aparentă a descărcării parțiale este sarcina care dacă ar fi injectată instantaneu la bornele sistemului încercat, ar schimba valoarea instantanee a tensiunii la bornele de alimentare cu aceeași valoare ca descărcarea parțială însăși.

Sarcina aparentă q diferă de sarcina electrică transferată în incluziune $q_n = C_2 \cdot U_2$, sarcina aparentă fiind cu atât mai mică cu cât C_1 este mai mic decât C_2 , deci cu cât grosimea izolației sârătoase în serie cu incluziunea este mai mare. Ținând seama de variația tensiunii de străpungere cu distanța dintre electrozi în câmp electric uniform pentru aer, s-a reprezentat în figura 2.3. variația densității de sarcină electrică transferată în incluziune în funcție de distanța d_2 între pereții izolanți și incluziunii perpendiculiari pe direcția câmpului. S-a presupus câmpul electric

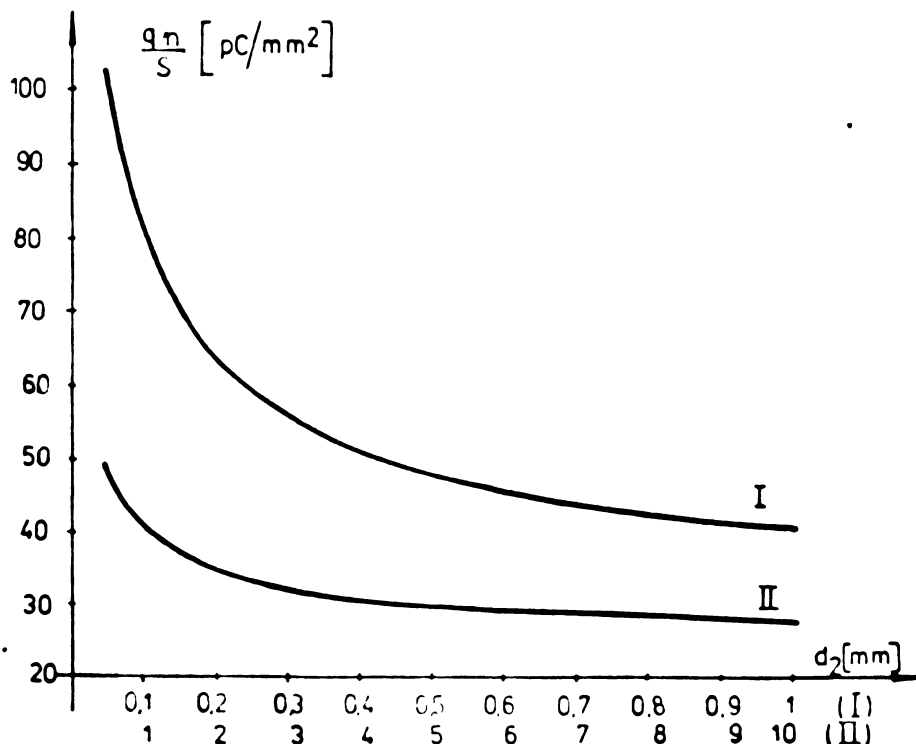


Fig. 2.3

uniform în incluziune.

În figura 2.4. s-a prezentat variația mărimii $q/\epsilon_r \cdot S = \rho/\epsilon_r$ în funcție de distanța între pereții incluziunii d_2 , raportată la distanța între electrozi d pentru diferite grosimi d ale izolației dintre electrozi. Se observă că pe măsură ce dimensiunea incluziunii crește, sarcina electrică transferată în incluziune

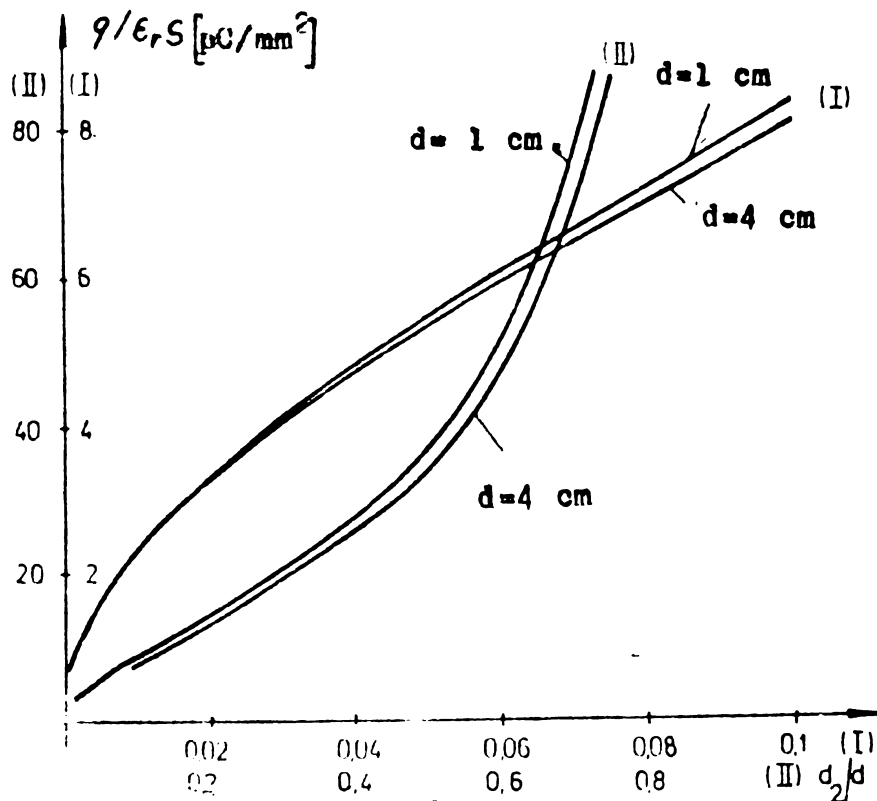


Fig. 2.4.

scade iar sarcina aparentă crește. De altfel, pentru cazul unei incluziuni ideale cu câmp uniform raportul $\epsilon_r \cdot q_n/q$ variază linear în funcție de raportul d/d_2 : $\epsilon_r \cdot q_n/q = d/d_2 - 1$. Metodele fotografice au arătat că descărcarea parțială într-o incluziune cu pereți izolanti influențează, de obicei, zone mici circulare, cu un diametru de circa 1 mm, zona afectată de descărcare este mai mare cu cât grosimea d_2 a cavității este mai mare.

După stingerea descărcării parțiale, capacitatea C_2 se încarcă din nou, iar când se atinge tensiunea de străpungere fenomenul se repetă. Se numește frecvență de repetiție sau rată de repetiție n numărul mediu de descărcări parțiale care se produc pe secundă. În cazul unei tensiuni continue frecvența de repetiție a descărcărilor parțiale în incluziune depinde de caracteristicile materialului electroizolant, de rezistivitatea de suprafață a pereților incluziunii, precum și de distribuția câmpului electric. La alimentarea cu tensiune alternativă au loc descărcări parțiale în fiecare

semiperioadă a tensiunii aplicate, iar impulsurile care apar au forma unor trenuri de impulsuri care se succed cu o frecvență de 50 Hz. Numărul de impulsuri pe fiecare semiperioadă depinde de valoarea tensiunii aplicate izolației și de distribuția acesteia pe capacitățile C_1 și C_2 .

Tensiunea de apariție a descărcărilor parțiale U_1 , denumită de unii autori tensiune de ionizare sau prag de ionizare este tensiunea la bornele izolației la care încep descărcările parțiale. Ea se poate defini pe baza relației (2.1) dacă tensiunea pe capacitatea C_2 devine egală cu tensiunea de străpungere a incluziunii U_{str} .

$$U_1 = U_{str} \cdot (C_1 + C_2) / C_1 \quad (2.4)$$

Cu ajutorul mărimilor definite mai sus se mai pot introduce următoarele mărimi:

- curentul mediu de descărcare

$$I = (1/T) \sum_{k=1}^p q_k \quad (2.5)$$

unde p este numărul de descărcări ce are loc în perioada de timp T iar q_k este sarcina aparentă a descărcării de rang k . Această mărime se exprimă uzual în coulomb/secundă, respectiv în amperi.

- debitul pătratic:

$$D = (1/T) \sum_{k=1}^p q_k^2 \quad (2.6)$$

care se exprimă în C^2/s ;

- puterea disipată prin descărcări parțiale:

$$P = (1/T) \sum_{k=1}^p q_k \cdot U_k \quad (2.7)$$

unde U_k este tensiunea la bornele incluziunii în momentul în care se produce descărcarea de rang k ;

- energia disipată în incluziune în timpul unei descărcări parțiale, este:

$$W = (1/2) C_2 \cdot U_2^2 \quad (2.8)$$

dacă se consideră că în timpul descărcării tensiunea la bornele incluziunii scade la zero. Această energie nu poate fi măsurată, dar poate fi corelată cu sarcina aparentă (2.3), măsurată de detectoarele de descărcări parțiale. Exprimând tensiunea U_2 în funcție de tensiunea de apariție a descărcărilor parțiale U_1 și ținând seama că $C_1 \ll C_2$ se obține:

$$W = (1/2) q \cdot U_1 \quad (2.9)$$

În practică se poate măsura energia totală a descărcării la o probă de izolație, care este $(1/2) \sum C_2 U_2^2$. Dacă s-ar putea considera că toate descărcările au aceeași sarcină aparentă atunci această energie totală ar fi o măsură a descărcărilor parțiale.

O practică larg folosită, îndeosebi în SUA la începutul măsurătorilor de descărcări parțiale a fost măsurarea nivelului perturbațiilor radio (r.i.v. measurement) ce caracterizează modul în care radiația electromagnetică emisă de descărcările parțiale poate interfera cu comunicațiile radio la frecvențele de emisie.

Sarcina aparentă q definită prin formula (2.3) este numită impropriu și mărime a descărcării parțiale. Subliniem faptul că sarcina aparentă q este diferită de sarcina electrică transferată în incluziune, așa cum rezultă din figurile 2.3 și 2.4. Pentru cazul unor incluziuni cu aer se prezintă în figura 2.5, a și b curbele de variație ale suprafeței S descărcate în timpul descărcării parțiale în funcție de distanța d_2 dintre pereții incluziunii pentru Q constant. Rezultă că sarcina electrică echilibrată în incluziunii curente poate fi de la $(1+500)$ pC, iar energia unei

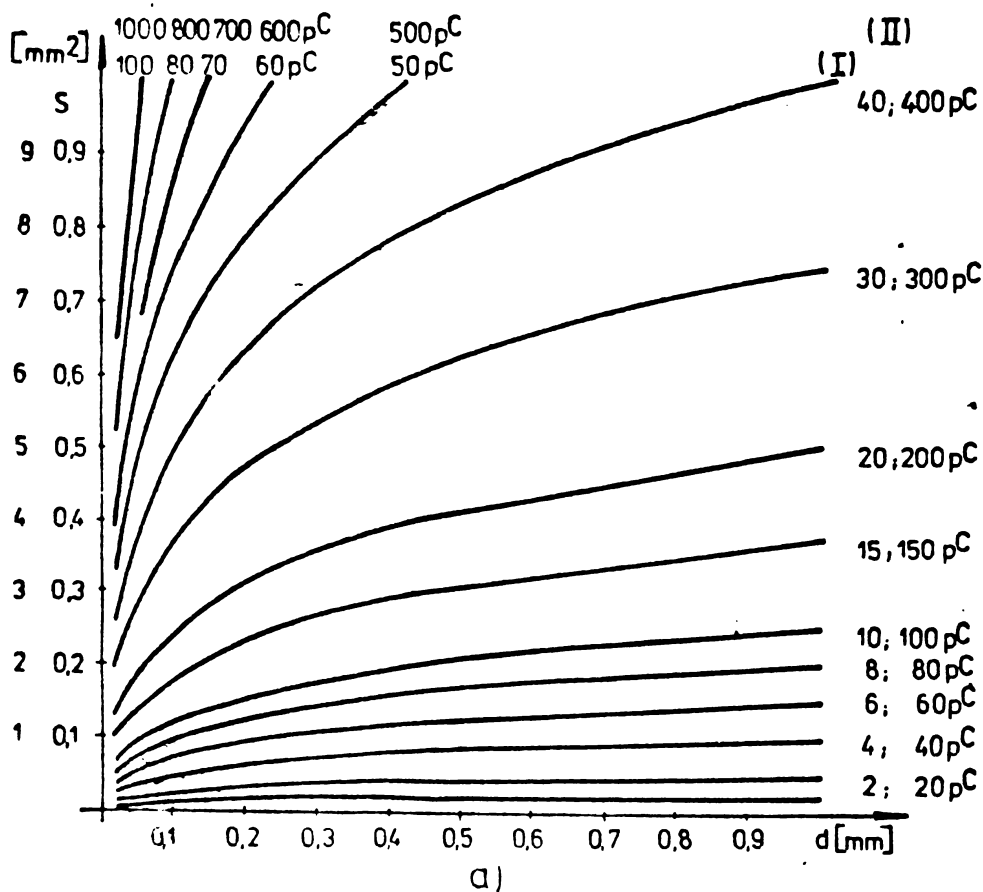


Fig.2.5, a.

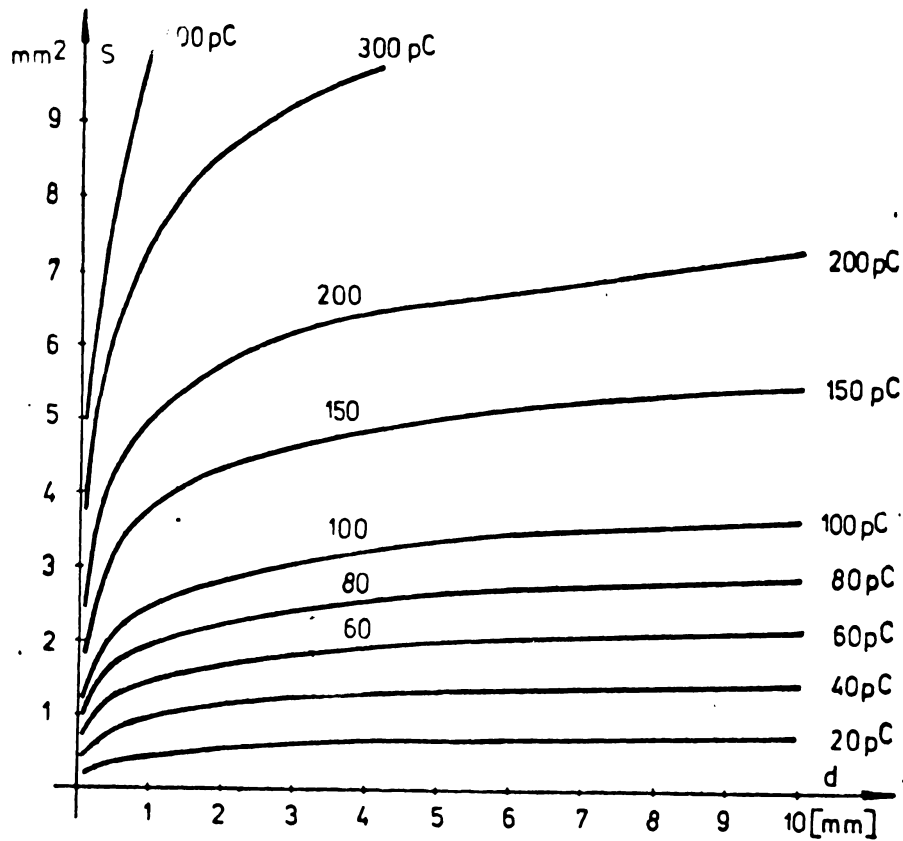


Fig.2.5,b.

singure descărcări raportată la suprafața descărcată este de ordinul a $(10+500) \text{ nJ/mm}^2$, așa cum rezultă din figura 2.6.

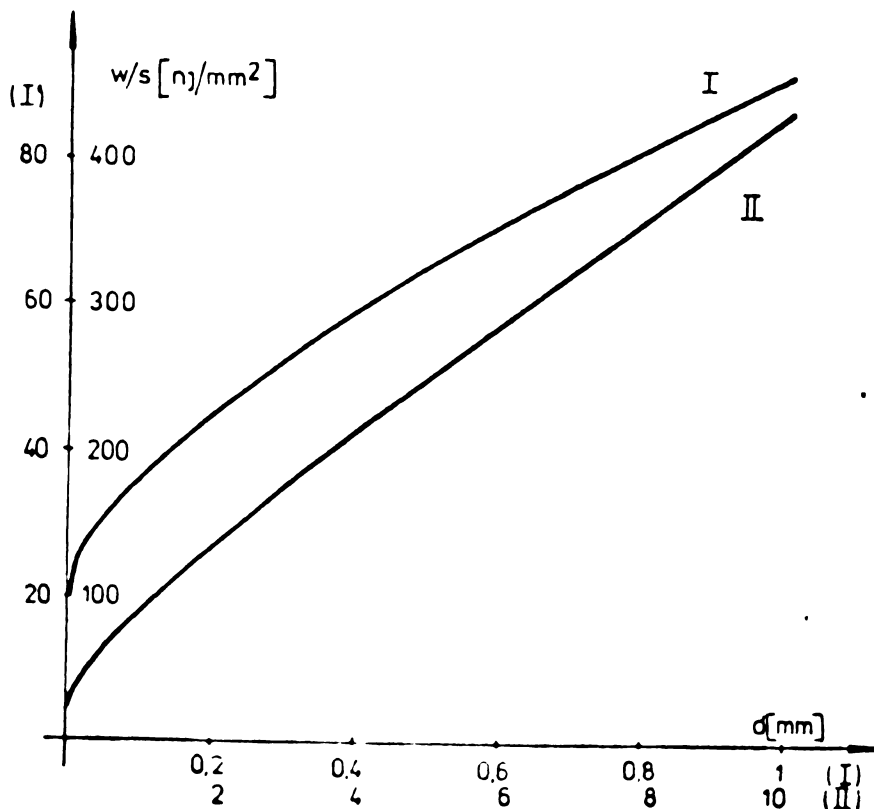


Fig.2.6.

2.2. Descărcări corōna

Fenomenul corōna, observat de M.O'Day a fost studiat de Trichel, iar ulterior a fost aprofundat de Loeb, Kip, G.C.Hudson, W.M.Bennett, W.Woboditsch, W.Flinke ș.a., dar în țara noastră de F.Tănăsescu. Descărcările corōna sînt descărcări în gaze în jurul unor conductori izolați sau neizolați aflați la distanță de o altă izolație solidă.

Fenomenul corōna nu a constituit un obiectiv al lucrării. Prezentarea din acest paragraf este justificată de faptul că efectul corōna este utilizat ca etalon de descărcări parțiale și de asemenea pentru a putea sesiza deosebirile care există între fenomenul corōna și descărcarea parțială.

2.2.1. Descărcări corōna în curent continuu

În curent continuu, la polaritate negativă a vîrfului apare un proces de străpungere a aerului în apropierea vîrfului, impulsurile Trichel ce apar avînd o succesiune regulată [113] cînd gazul în care are loc procesul conține molecule electronegative. Frontul impulsului este de ordinul a 20 ns, durata de cca 200 ns, iar forma se menține aproximativ aceeași la creșterea tensiunii (fig.2.7)

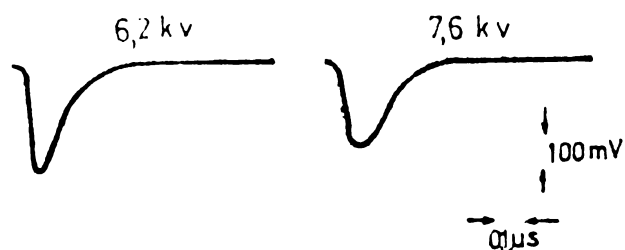


Fig.2.7.

Fenomenul este influențat de temperatură, umiditatea și presiunea aerului, de distanța dintre electrozi și de raza de curbură a vîrfului. Încercările efectuate de Tănăsescu [222] au relevat o creștere liniară a curentului cu tensiunea de alimentare (fig.2.8), iar la sisteme de electrozi cu mai multe vîrfuri apare un fenomen de compunere a impulsurilor, numărul maxim de impulsuri fiind la sistemul cu mai multe vîrfuri.

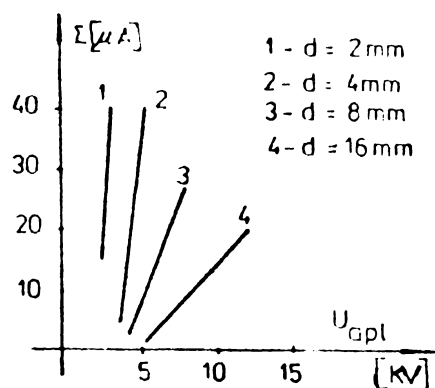


Fig.2.8.

În curent continuu la polaritate pozitivă a vîrfului, începînd de la o anumită valoare a tensiunii apar descărcări în formă

de impulsuri într-un domeniu de tensiune extrem de îngust, numite impulsuri de erupție. La creșterea tensiunii impulsurile se sting, au loc descărcări luminescente lipsite de impuls, iar de la o anumită valoare a tensiunii apar iar impulsuri de valoare mai mare, numite mari descărcări pozitive. Curentul crește rapid, scântele au o formă arborescentă, există o tensiune de perturbație radio mare. În tabelul 2.1. se prezintă domeniile de existență a diferitelor forme de descărcare după Woboditsch [11], la un sistem de electrozi vîrf placă în aer.

Tabelul nr.2.1.

Polaritatea electrodului vîrf	
Negativă	Pozitivă
<u>Domeniul A - 0,2÷2,4 kV</u>	<u>Domeniul A 0÷0,4 kV</u>
-descărcare întunecoasă	-idem negativ
-nici o descărcare sub formă de impuls	
-nici o descărcare luminescentă vizibilă	
<u>Domeniul B 2,4÷23 kV</u>	<u>Domeniul B 4,0÷4,8 kV</u>
-descărcare corona sub formă de impulsuri Trichel, vizibilă	-idem negativ
	-descărcări de abia vizibile
<u>Domeniul C 23-38 kV</u>	<u>Domeniul C 4,8-13,8 kV</u>
-descărcare corona fără impulsuri, luminescentă, vizibilă	-idem negativ
-nici o descărcare sub formă de impuls	
<u>Domeniul D > 38 kV</u>	<u>Domeniul D 13,8-16 kV</u>
-arc electric	-descărcări fasciculare, luminescente, vizibile
	-descărcări în formă de impuls
	<u>Domeniul de arc electric</u>
	<u>>16 kV</u>

2.2.2. Descărcări corona în curent alternativ

La alimentarea sistemului de electrozi vîrf-placă cu tensiune alternativă sinusoidală de 50 Hz apar aceleași fenomene ca în curent continuu, deoarece fenomenele sînt atît de rapide încît pe durata descărcării tensiunea se poate considera constantă.

446488
194 G

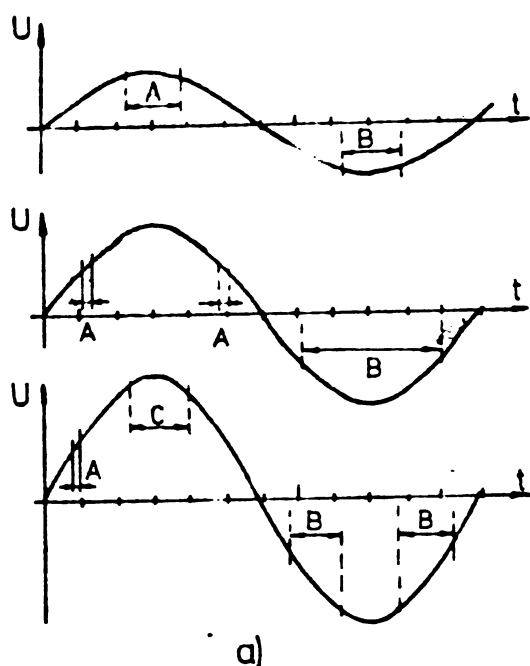
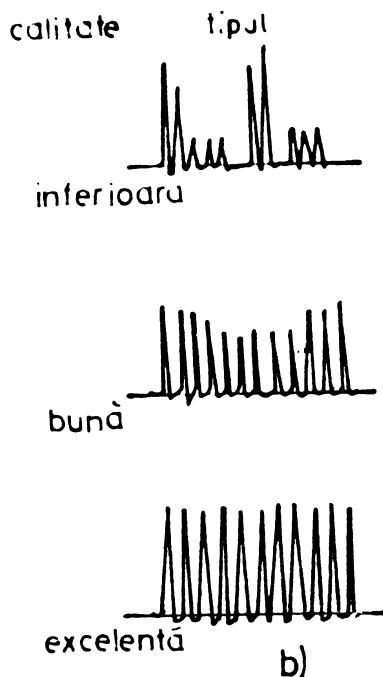


Fig.2.9.



In semioscila-
ția pozitivă
apar impușuri
de erupție, des-
cărcarea lumi-
niscență lipsită
de impule și im-
pulsuri corona
pozitive, iar în
semioscilația
negativă apar in-
tervalele impul-
surilor Trichel
(fig.2.9), iar în
cazul când dis-
tanța dintre
electrozi este

suficientă apare și domeniul descărcării luminescente lipsită de impuls. Străpungerea se produce în semialternanța pozitivă când între electrozi este aer.

Descărcarea corona prin impulsuri Trichel este reproducibilă, impulsurile având o formă, amplitudine și frecvență de repetiție suficient de stabile în timp. Ultimele măsurători [111] dau valori ale duratei de creștere a impulsului Trichel de 4 ns, iar durata de semiamplitudine de cca 12 ns. Pentru a asigura în jurul vârfului un câmp electric radial sistemul de electrozi vîrf placă a fost înlocuit cu un sistem vîrf-semisferă partea concavă a semisferei fiind spre arf. In figura 2.9, b se prezintă cîteva tipuri de impulsuri ce apar la fenomenul corona [113] :

-calitate inferioară, impulsurile sînt variabile în mărime și intermitente, la tensiunea de începere, apar simultan mai multe impulsuri, tensiunea de începere este mare;

-calitate bună, impulsurile interioare sînt oarecum mai mici decît cele laterale, la tensiunea de începere apar simultan cîteva impulsuri;

-calitate excelentă, toate impulsurile sînt constante și egale în mărime, dacă tensiunea este exact deasupra tensiunii de începere apar numai unul sau două impulsuri stabile.

In tabelul nr.2.2, se prezintă caracteristicile descărcării la un vîrf cu o rază de curbură de $40\mu m$, umiditatea relativă a aerului fiind 63% iar densitatea relativă 1,01.

Tabelul nr.2.2.

Tensiunea	Mărimea descărcării	Numărul impulsurilor	Tipul descărcării
1,8 kV	25 pC	un impuls instabil	-
1,85 kV	25 pC	4	excelent
1,9 kV	25 pC	7	excelent
2,1 kV	25 pC	20	începe descreșterea impulsurilor interioare
2,4 kV	numai descărcările exterioare sînt egale cu 25 pC	multe	bun
3,5 kV	-"-	multe	bun
4 kV	-	-	inferior

Forma electrodului opus vîrfului influențează foarte mult tipul impulsurilor. Astfel, la sistemul de electrozi vîrf-sferă numai în anumite condiții a fost posibilă obținerea unor tipuri de descărcări bune și excelente în timp ce la sistemele de electrozi vîrf-semisferă aproape toate vîrfurile folosite dau un aspect bun sau excelent al descărcării. F.Tănăsescu [219] a propus și brevetat un modul dublu de descărcări parțiale (fig. 2.10.)

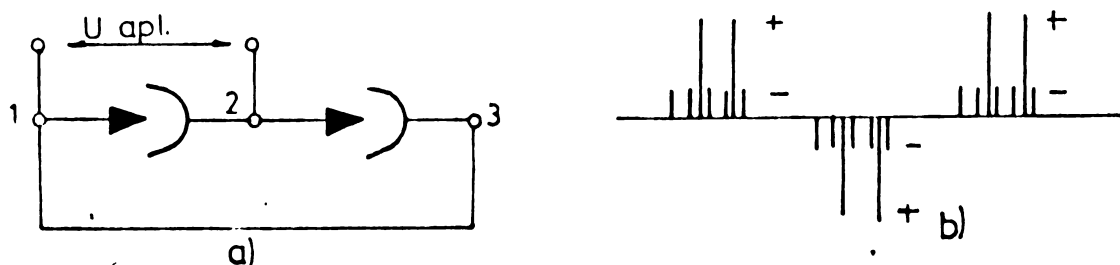


Fig.2.10.

care descarcă în ambele alternanțe, astfel că la creșterea tensiunii apar impulsurile corespunzătoare ambelor polarități (2.10, b).

2.3. Analiza descărcărilor parțiale în incluziuni

2.3.1. Incluziuni cu pereți metalici

Incluziunile cu pereți metalici nu se întîlnesc obișnuit în practică, decît în cazuri cu totul particulare, dar rezultatele obținute pe acemenea modele lămuresc o serie de aspecte fundamentale ale procesului de descărcare parțială [19]. Un model de studiu a descărcărilor parțiale de acest fel este realizat dintr-un eclator

cu electrozi metalici ce simulează sursele de descărcări parțiale din echipamentul electric, distanța dintre electrozi este reglabilă și măsurabilă cu un micrometru, iar întregul ansamblu este închis etanș, pentru a permite modificarea presiunii gazului din interior.

Schema utilizată (fig.2.11) cuprinde un transformator de înaltă tensiune T ce alimentează prin bobina de blocare B în înaltă frecvență circuitul format din condensatorul cu vid C_v care simulează dielectricul în serie cu incluziunea, electorul C_p ce simulează incluziunea și capacitatea C_p a cablului (restul izolației).

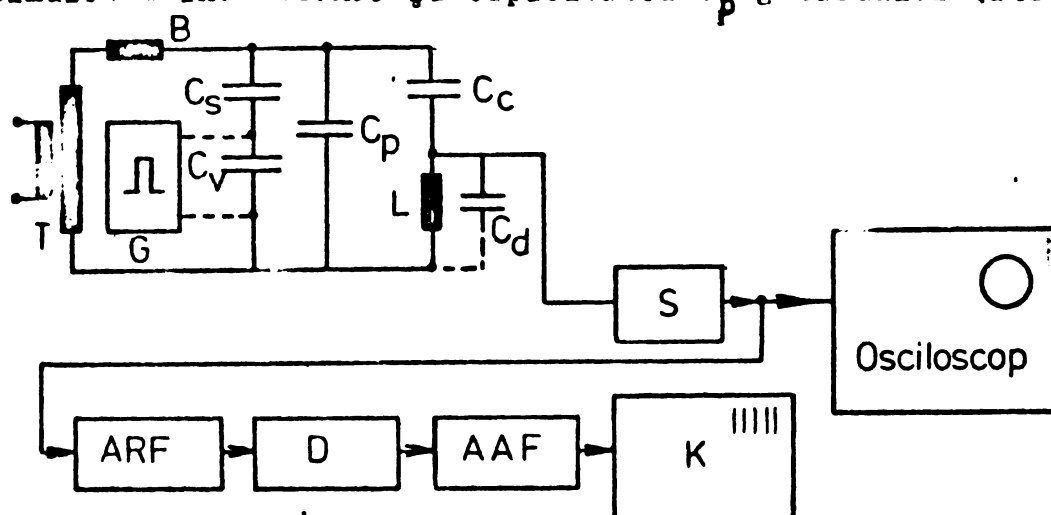


Fig.2.11.

Pentru detecție se utilizează condensatorul de blocare C_b , lipsit de descărcări parțiale la tensiunea de încercare, cu care se leagă în serie bobina de detecție L . Generatorul de impulsuri G este folosit în scop de calibrare. Capacitatea conductoarelor și a aparatelor în paralel cu bobina L s-a notat cu C_d . Impulsurile culese de pe bobina L sînt vizualizate pe un osciloscop după circuitul de siguranță S , iar după amplificare și demodulare numărare de contorul electronic K .

Conform celor stabilite încă de Gemant și von Philipoff [129] în incluziune au loc descărcări de patru ori pe perioadă atunci cînd valoarea de vîrf a tensiunii aplicate devine egală cu tensiunea de apariție a descărcărilor. Creșterea ulterioară a tensiunii aplicate nu provoacă descărcări suplimentare decît în momentul încercării valoarea tensiunii pe incluziune este dublă față de tensiunea de străpungere. În acest moment au loc opt descărcări pe perioadă, iar în continuare numărul de descărcări pe perioadă crește cu cîte 4 descărcări la fiecare multiplu al tensiunii de străpungere. În figura

2.12. este prezentată variația tensiunii ipotetice pe incluziune în cazul când tensiunea aplicată este egală cu de două ori tensiunea de străpungere, presupunînd că nu există tensiuni reziduale.

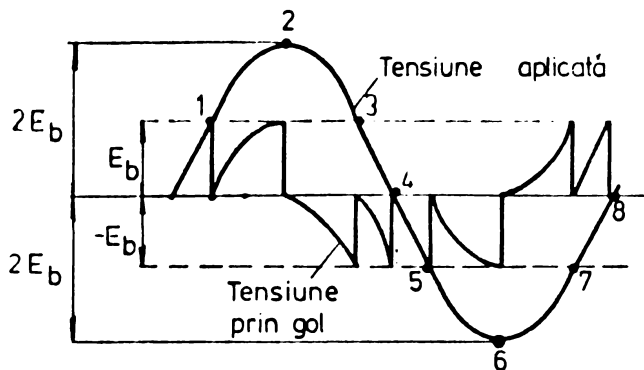


Fig. 2.12.

iar tensiunea de străpungere este aceeași pentru fiecare descărcare, fiind dată de curba lui Paschen. În momentul 1 când tensiunea între eclatori atinge valoarea tensiunii de străpungere, tensiunea scade la zero într-un timp mai scurt de 10^{-7} sec. Din acest motiv spectrul de frecven-

ță al impulsului se extinde pînă la 100 MHz, iar practic căderea de tensiune în incluziune poate fi considerată ca o tensiune treaptă. Tensiunea aplicată pe incluziune crește din nou pînă când în momentul 2 se produce o nouă descărcare. În cazul când tensiunile de străpungere în cele două polarități sînt diferite, iar tensiunile de stingere a descărcării sînt diferite de zero, și inegale, în cele două polarități, fenomenul se complică, poate apare un număr mai mare de descărcări pe o perioadă.

Caracteristicile obținute experimental de Bartnikas [19] nu sînt în trepte, ele reprezentînd curbele medii ale caracteristicilor în trepte prevăzute teoretic ca în figura 2.13, unde este prezentată frecvența de repetiție experimentală și teoretică în funcție de valoarea eficace a tensiunii aplicate unui interval de 0,1 mm la presiunea atmosferică. În figura 2.14, este prezentată variația numărului de impulsuri pe secundă în funcție de tensiunea aplicată pentru diferite distanțe între electrozi la presiunea atmosferică. În toate cazurile caracteristicile sînt liniare, numărul de descărcări fiind mai mare la aceeași tensiune aplicată în cazul intervalelor mai mici. Rezultatele prezentate sînt pentru o frecvență a tensiunii de alimentare de 60 Hz. Amplitudinea impulsurilor nu depinde de valoarea tensiunii aplicate, deoarece la o valoare dată a distanței dintre electrozi sarcina electrică transferată în incluziune depinde de tensiunea de străpungere și de capacitatea incluziunii. La incluziuni de formă simetrică impulsurile de descărcare se repetă periodic, ceea ce nu mai este valabil în cazul incluziunilor nesimetrice.

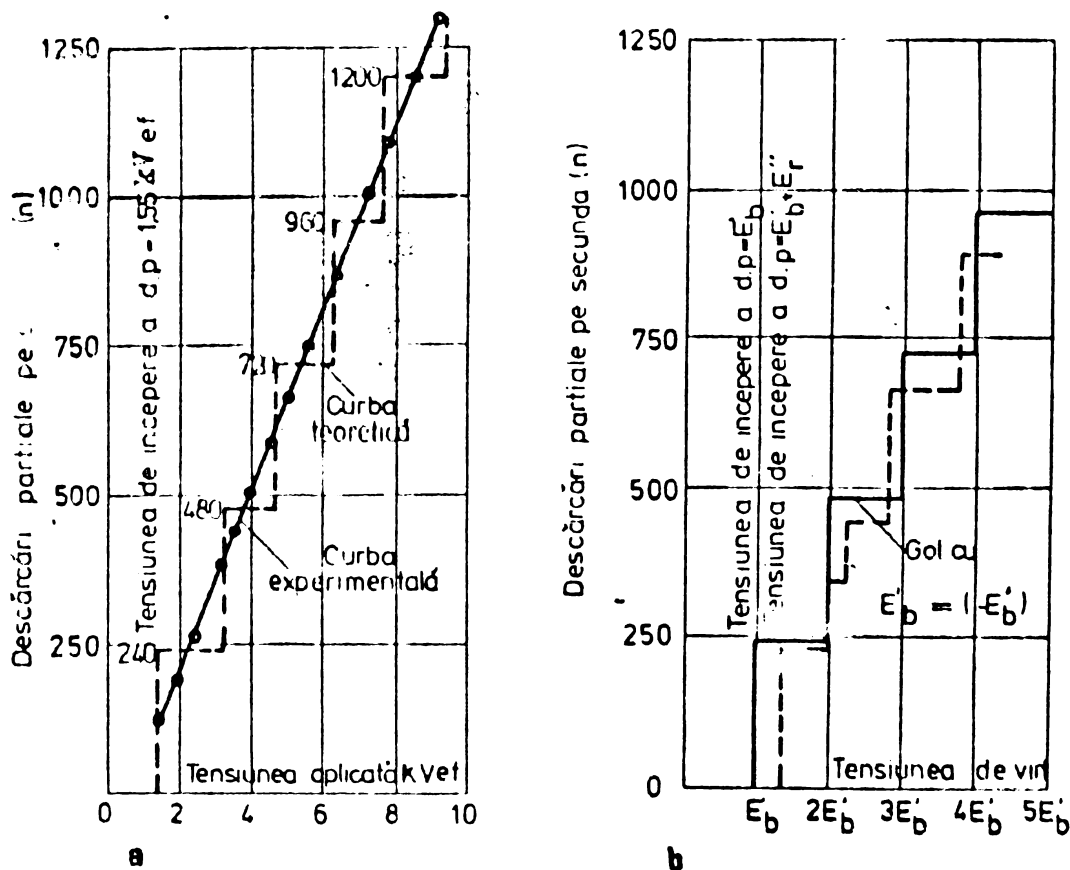


Fig.2.13.

La incluziunile nesimetrice frecvența de repetiție teoretică are de asemenea o variație în trepte ca în figura 2.13, b unde este reprezentată variația numărului de impulsuri pe secundă în cazul a două incluziuni, prima având tensiunile reziduale nule și tensiunile de străpungere în cele două polarități egale (curba cu linie plină, $E_b = |-E_b'|$), iar a doua având tensiunea de străpungere în polaritatea pozitivă dublă față de cea din polaritatea negativă și tensiunile reziduale E_r în cele două polarități egale cu $2/5$ din tensiunea de străpungere a polarității pozitive (curba cu linie întreruptă).

După cum rezultă din cele prezentate mai sus, fenomenul de descărcare parțială diferă de fenomenul corona atât prin natura sa cât și prin unele mărimi caracteristice, cum ar fi faza de apariție și frecvența de repetiție.

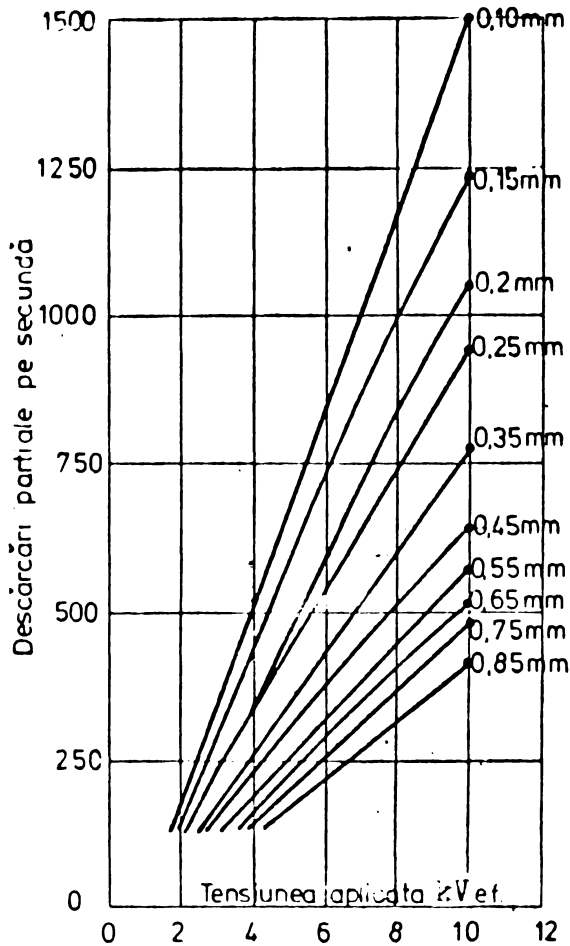


Figura nr.2.14.

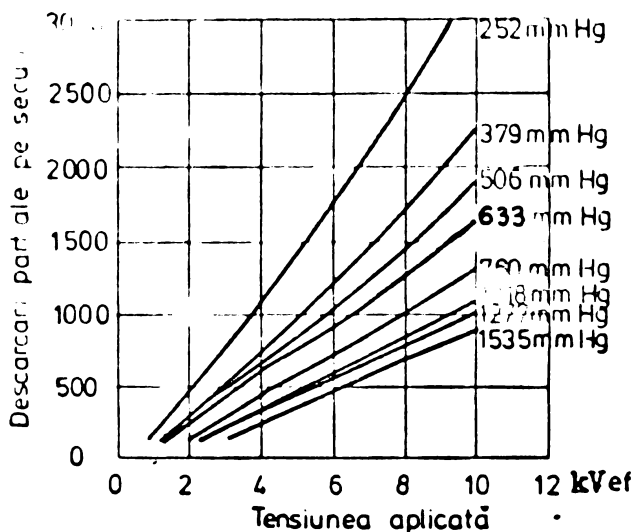


Figura nr.2.15.

parțială se produce în primul și al treilea sfert de perioadă al unei tensiunii aplicate în momentul în care tensiunea aplicată devine egală cu tensiunea de străpungere a incluziunii.

Deoarece incluziunile unei izolații pot conține gaze, a căror presiune poate avea diferite valori, în figura 2.15 se prezintă variația numărului de descărcări pe secundă în funcție de tensiune pentru diferite valori ale presiunii gazului. Se observă că efectul scăderii presiunii este același ca și efectul reducerii distanței între electrozi, iar la presiuni mai joase frecvența de repetiție a descărcărilor este mai mare decât cea teoretică. O altă constatare ce contravine ipotezelor teoretice este că la tensiunea de apariție a descărcărilor parțiale frecvența de repetiție, sau rata de repetiție este de 120 impulsuri pe secundă (100 impulsuri pe perioadă) în loc de 240 impulsuri pe secundă. Acest lucru a fost explicat de

Withead ca fiind posibil numai atunci când tensiunile de înțepere ale descărcărilor parțiale în cele două polarități sînt mai mari decît amplitudinea tensiunii aplicate, dar procesul de descărcare este totuși inițiat dintr-o cauză necunoscută. Cercetările efectuate cu ajutorul unor camere fotografice de mare viteză au demonstrat că descărcarea

Conform datelor existente pînă în prezent, în procesul de desfășurare al descărcărilor parțiale apar anomalii datorate prezenței sarcinii spațiale.

Descărcările parțiale care se produc în interiorul unor geluri artificiale cu pereți metalici sînt însoțite de pierderi de energie. În plus, capacitatea probei crește într-o oarecare măsură. În practică, la cablurile de forță creșterea capacității totale pe seama descărcărilor parțiale este infimitezimală și deci poate fi neglijată. Măsurătorile tangentei unghiului de pierderi, efectuate cu o punte Shering pe o combinație cablu-cavitate la diferite valori ale tensiunii, dau rezultate de forma celor prezentate în figura 2.16.

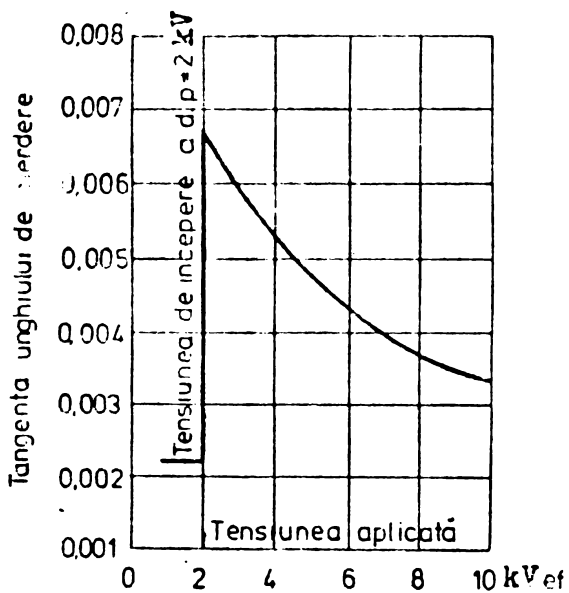


Fig. 2.16.

La o anumită valoare a tensiunii, tangenta unghiului de pierderi crește brusc, pentru ca ulterior aceasta să scadă. Valoarea tensiunii la care are loc creșterea bruscă a pierderilor de energie este tensiunea de apariție a descărcărilor parțiale. Scăderea ulterioară a pierderilor de energie se datorează faptului că viteza de creștere a pierderilor de energie cu tensiunea aplicată este mai mică decât viteza de creștere a valorii medii pătratice a tensiunii aplicate.

2.3.2. Incluziuni cu pereți electroizolanți

Cu toate anomaliile care apar la incluziuni cu electrozi metalici cu geometrie neregulată, ca intermitența descărcărilor sau fenomenul de histererezis, descrierea fenomenului cu ajutorul modelului din figura 2.5, b a fost destul de simplă. În realitate, fenomenul în incluziunile din izolație este mult mai complicat. Astfel, în locul unde canalul descărcării atinge dielectricul se formează figurile lui Lichtenberg și apare un câmp tangențial puternic. În timpul descărcării apare un câmp electric similar celui din figura 2.17, b. De asemenea, înainte de descărcare câmpul electric nu este uniform în incluziune (fig. 2.17, a), intensitatea câmpului electric

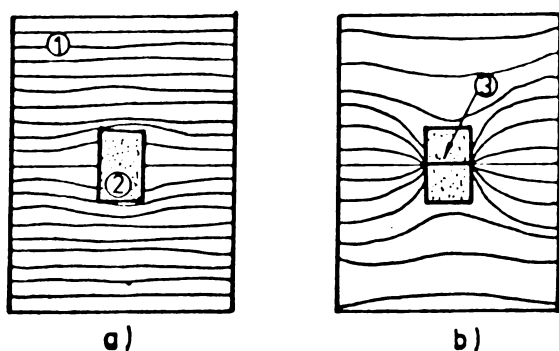


Fig. 2.17

Figurile lui Lichtenberg au formele tipice cunoscute și datorită formei diferite în cele două polarități apar sarcini de suprafață diferite, care chiar la incluziuni simetrice pot să ducă la un timp diferit între descărcările succesive sau la un număr diferit de descărcări în cele două polarități ale tensiunii aplicate.

La incluziuni a căror mărime depășește o anumită valoare [113, 129] pot apare mai multe locuri de descărcare în incluziune, iar frecvența de repetiție este de obicei mult mai mare decât în cazul incluziunilor cu electrozi metalici. Mason [129] a arătat că acest lucru se petrece la incluziuni având un diametru de 2 mm, așa cum se observă în figura 2.18, a unde sînt

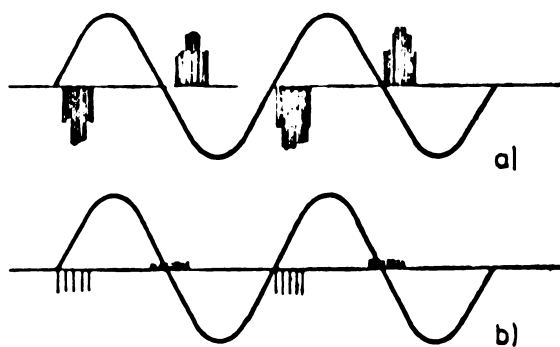


Fig. 2.18

prezentate descărcările parțiale la o tensiune dublă față de tensiunea de apariție pentru o cavitate de 2 mm diametru și 0,2 mm adîncime limitată de polietilenă. În ceea ce privește influența polarității, dacă incluziunea este pozitivă, iar electrodul metalic este negativ, sarcina aparentă va fi mai mare decât

în cazul polarității opuse, așa cum se vede din figura 2.18, b, dimensiunile cavității fiind aceleași. În polaritatea opusă numărul de descărcări este mai mare. Mason a constatat că la creșterea solicitării în incluziune crește frecvența de repetiție a descărcărilor fără ca mărimea descărcării într-o cavitate dată să fie influențată.

Experiențele lui Burnier [30] efectuate pe o machetă cu electrozi de formă cilindrică asigură un câmp practic uniform între electrozi (fig. 2.19).

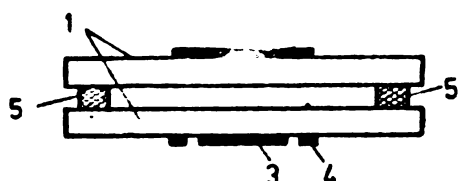


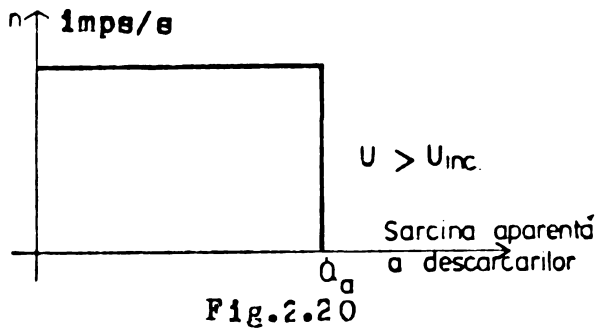
Fig. 2.19.

Se obțin rezultate similare, doar că la o tensiune ce depășea de 4 pînă la 5 ori tensiunea de începere a descărcărilor parțiale apăreau pe ecranul osciloscopului impulsuri cu o amplitudine de 2,5-3 ori mai mare, fenomen datorat suprapunerii impulsurilor corespunzătoare unor descărcări parțiale simultane.

În [15, 16] A. Avramescu a arătat de asemenea că descărcarea parțială în incluziuni cu pereți izolanti nu cuprinde în întregime fețele opuse ale incluziunii ci doar anumite zone circulare al căror număr crește cu scăderea distanței între fețele opuse ale incluziunii. În același timp, cu scăderea distanței diametrul zonelor circulare scade, deci în incluziuni cu fețe foarte apropiate au loc foarte multe descărcări de o mărime redusă. Descărcarea parțială este comparabilă ca fenomen fizic cu trăsnetul, în ambele cazuri sarcinile fiind adunate dintr-un spațiu dielectric și transferate printr-un canal de descărcare unic. Sarcinile superficiale se deplasează concentric spre picioarele descărcării; urmele acestor deplasări arată că ele se concentrează în canale care atrag sarcinile datorită rezistenței mai mici sau unor procese de ionizare mai intense.

Formarea zonelor circulare, a rozetelor, la piciorul canalului de descărcare a fost constatată experimental de R. Herou și B. Fallou [72] prin îndrărea suprafețelor izolante și examinarea lor la microscop după acțiunea descărcărilor parțiale.

Nu toate descărcările electrice parțiale din incluziunile cu pereți electroizolanti transferă aceeași sarcină electrică, deci și sarcina aparentă a descărcării nu este aceeași pentru toate descărcările parțiale. De aceea, pentru caracterizarea acestor descărcări este convenabil să se reprezinte variația frecvenței de repetiție în funcție de sarcina aparentă a descărcărilor parțiale. La o cavitate cilindrică cu câmp uniform impulsurile descărcărilor parțiale au aceeași sarcină aparentă și variația frecvenței de repetiție a impulsurilor descărcării are o formă rectangulară ca în figura 2.20. Pentru cavități cilindrice efectuate în polietilenă Tanaka și Ikeda [217] au constatat că frecvența de repetiție n a



impulsurilor în funcție de sarcina aparentă a descărcărilor q , sau spectrul impulsurilor cum este denumit în literatura franceză are o formă diferită de cea rectangulară (fig. 2.21) care depinde de diametrul cavității, de conținutul de umezeală al

aerului din cavitate și de durata expunerii incluziunii la acțiunea descărcărilor parțiale. În figura 2.21 pe ordonată este frec-

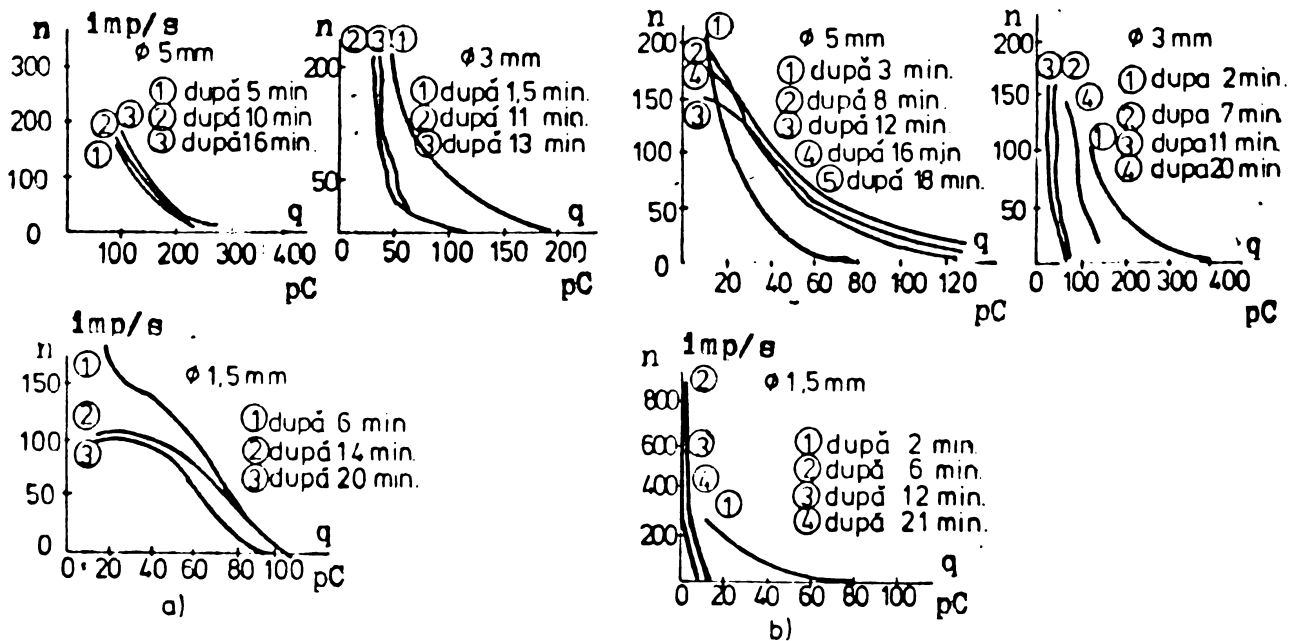


Fig. 2.21

vența de repetiție în impulsuri/s iar pe abscisă este sarcina aparentă în pC.

La incluziunile cu spectre de impulsuri diferite de forma rectangulară din figura 2.20 se mai introduc de obicei următoarele mărimi:

- numărul de impulsuri cel mai probabil n_0 , care este ordonata maximului spectrului;
- amplitudinea cea mai probabilă U_{R_0} sau sarcina aparentă cea mai probabilă q_{R_0} ;
- numărul total de impulsuri Σn ;
- sarcina aparentă a descărcărilor maxime generate q_{max} .

După cum rezultă din figura 2.21 unde este reprezentată frecvența de repetiție a impulsurilor în impulsuri pe secundă, în funcție de sarcina aparentă a descărcărilor în pC pentru o tensiune aplicată de 4 kV, 50 Hz unor probe realizate prin suprapunerea a trei folii de polietilenă cu o grosime a fiecăreia de 0,2 mm, folia din mijloc fiind găurită, există o tendință ca în incluziunile mari să fie generat un număr mai mare de impulsuri mici decât în cavitațiile mici, iar în timp, distribuția impulsurilor devine mai îngustă. Diferențele în distribuție cauzate de umezeală, în figura 2.21, a - cavitații uscate, iar în figura 2.21, b - cavitații umede, nu au putut fi clarificate. Sarcina aparentă a descărcărilor maxime în aceste incluziuni, de 0,2 mm grosime și 5 mm diametru efectuate în polietilenă, este practic independentă de tensiune peste 2 kV, iar pentru incluziuni cu diametrul de 3 mm, este independentă de tensiune peste 4 kV (fig.2.22).

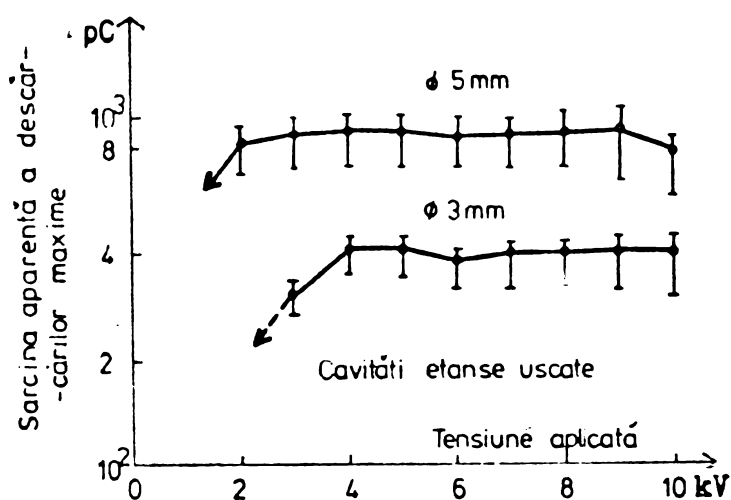


Fig.2.22

mari ale cavitații sarcina aparentă a descărcărilor maxime are o valoare apropiată de cea calculată, iar la incluziuni cu diametru mai mic valorile experimentale par a fi mai mari decât cele calculate. Incercările s-au făcut pe câte cinci probe identice.

Frecvența de repetiție a impulsurilor și sarcina aparentă a descărcărilor maxime depind de rezistența superficială a pereților. Cu toate că există o dispersie foarte mare a rezultatelor, sarcina aparentă a descărcărilor maxime crește cu creșterea rezistenței pereților cavitații. Observațiile microscopice asupra descărcărilor au arătat că în incluziuni perfect etanșe descărcările se concentrează în centrul incluziunii, în timp ce la incluziuni închise neetanșe

Sarcina aparentă a descărcărilor maxime la incluziuni cu pereți de polietilenă tinde să scadă în timp cu toate că uneori crește sau scade devenind intermitentă la intervale succesive de câteva secunde (fig.2.23) (în abscisă timpul în minute). Intervalul de variație este de la zecimi până la miimi ale valorii măsurată inițial. La diametre

descărcările sînt concentrate la margini. Bartnikas obiectează

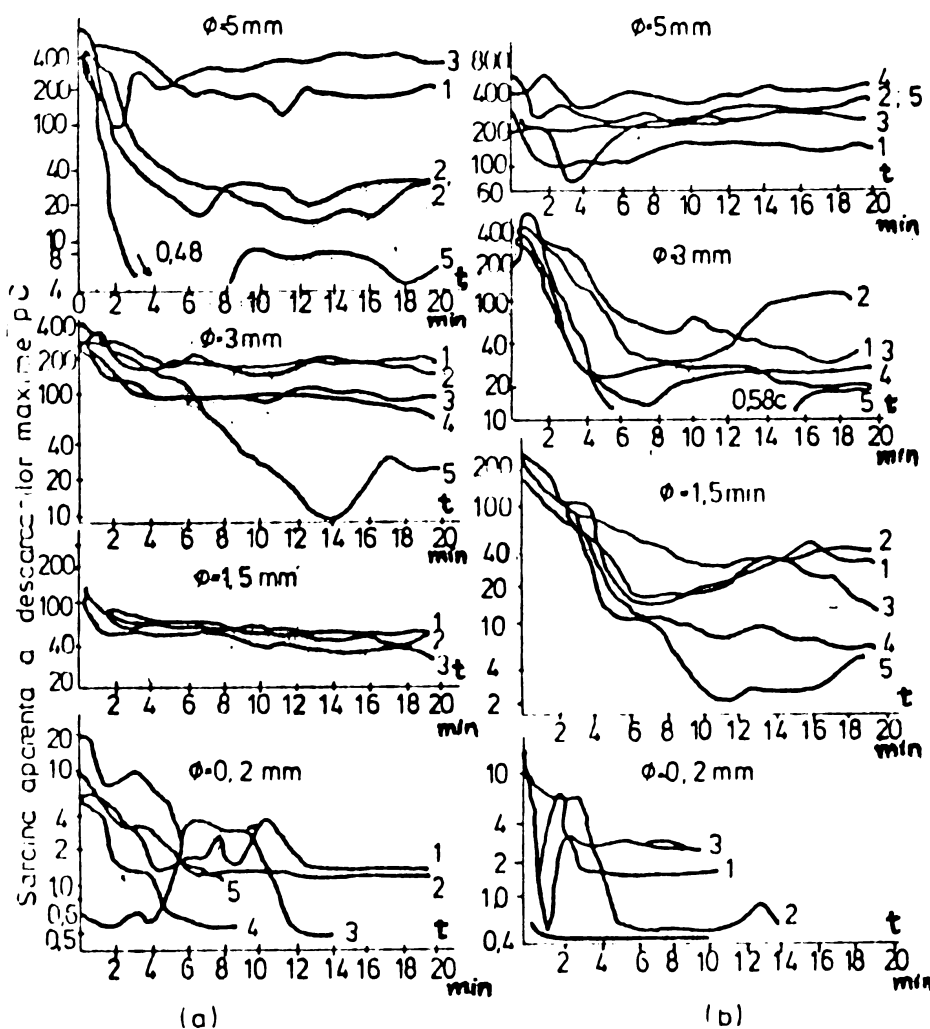


Fig. 2.23

mylar, mica foliu ș.a., au arătat de asemenea că sarcina echilibrată în incluziune este fricționată în timp și spațiu în n sarcini elementare de valoare egală q care sînt transferate prin descărcări astfel încît în orice moment și în orice punct al suprafeței incluziunii tensiunea la bornele stratului gazos din incluziune nu depășește valoarea tensiunii de străpungere. Fiecare descărcare se amorsează între două puncte opuse situate pe o parte și pe cealaltă a incluziunii gazoase atunci cînd tensiunea între aceste două puncte atinge valoarea de străpungere. Sarcina electrică transportată de curentul de descărcare fiind q_n și presupunînd celula de încercare alimentată cu o tensiune la borne sinusoidală $u = U_m \cos \omega t$, R. Herou, B. Fallou, și H. Bertein [79] au dedus valoarea sarcinii totale ce traversează incluziunea de gaz în timpul unei perioade de amorțire a descărcării.

$$Q = \pm 2 C_1 \left(U_m - U_{str} \cdot \frac{C_2}{C_t} \right) \quad (2.10)$$

asupra acestui aspect, arătînd că în timp descărcările electrice migrează pe suprafața pereților incluziunii, așa cum de altfel au stabilit și alți cercetători [30].

Studiile efectuate pe incluziuni de aer avînd pereți din diferite materiale electrolizante, [79] ca bachelita, mica,

unde U_{str} este tensiunea de străpungere a incluziunii, C_1 - capacitatea porțiunii de izolanț în serie cu incluziunea, C_2 - capacitatea lamei de gaz iar C_t - capacitatea totală a celulei de încercare, precum și numărul de descărcări N pe întreaga suprafață a izolanțului:

$$N = Q/Q_n = 2C_1 [U_m - U_{str}(C_2/C_t)] / C_2 U_{str} = (2C_1/C_2 \cdot U_{str}) [U_m - U_{str}(1+e/d)] \quad (2.11)$$

unde d este grosimea lamei de gaz 3 (fig. 3.24) iar e grosimea echivalentă a incluziunii 2 dintre electrozii 1.

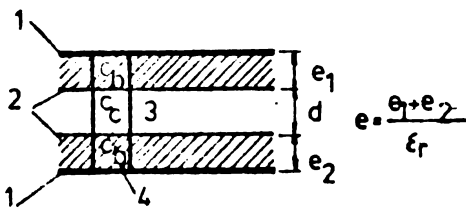


Fig. 3.24

lentă a incluziunii 2 dintre electrozii 1. Aceste relații permit să se prevadă evoluția calitativă a acestor mărimi în funcție de tensiunea aplicată celulei de încercare, de grosimea incluziunii, grosimea izolației și de

caracteristicile stratului de gaz, și incluziunii. Rezultă că sarcina corespunzătoare unei descărcări parțiale elementare este independentă de tensiunea aplicată în timp ce numărul de locuri care descarcă crește liniar cu tensiunea. Rezistența superficială a pereților incluziunii modifică însăși capacitatea elementară C_2 a descărcării, astfel că această rezistență scade, valoarea sarcinii elementare crește iar numărul de descărcări scade. Se observă că aceste considerații sînt infirmate de rezultatele experimentale ale lui Tanaka și Ikeda [217].

O mărime asupra căreia există un acord satisfăcător între constatările experimentale și calculele teoretice este puterea disipată la descărcare, respectiv energia consumată de la sursă pentru transferarea sarcinilor din incluziune.

Analiza energetică efectuată de Burnier [30] asupra machetei din figura 2.19 prin măsurarea tangentei unghiului de pierderi dielectrice cu ajutorul punții Shering relevă o dependență a pierderilor de energie similară cu aceea constatată la probele cu electrozi metalici (fig. 2.16) cu observația că la tensiunea de apariție (amorsare) a descărcărilor creșterea tangentei unghiului de pierderi $\tan \delta$ nu mai este bruscă (fig. 2.25). Datele din figură corespund unor incluziuni cu o grosimea de 2 mm, între pereți de sticlă cu grosimea de 4 mm, avînd drept parametru rezistența superficială a pereților izolanți ai incluziunii.

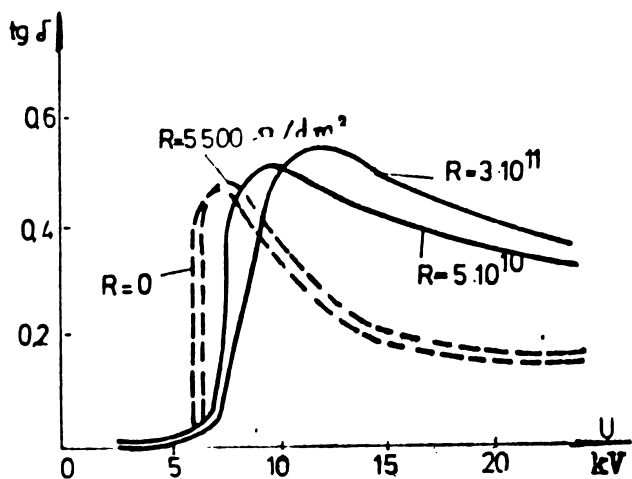


Fig. 2.25

În figura 2.26 sînt reprezentate curbele de variație ale energiei [30] - descărcărilor parțiale în funcție de tensiune, avînd ca parametru grosimea incluziunii, (fig. 2.26, a) și grosimea izolației solide (fig. 2.26, b). Se observă că energia W crește liniar cu tensiunea, în domeniul cuprins între

1,5 - 5 ori tensiunea de apariție a descărcărilor parțiale.

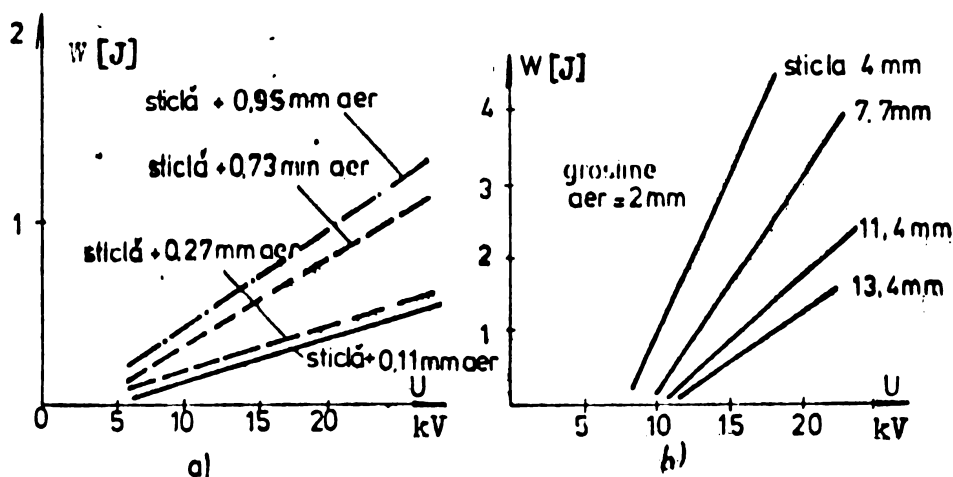


Fig. 2.26

În cazurile din practică suprafețele incluziunilor din materialul electroizolant nu sînt plane, grosimea lor nu este constantă, cîmpul electric este neuniform și incluziunile sînt diferite, astfel că fenomenele sînt mult mai complexe.

Încercările efectuate la tensiune continuă [137, 138], luînd în considerare schema echivalentă din figura 2.6, b, indică o succesiune a descărcărilor parțiale ca aceea din figura 2.27, unde tensiunea aplicată s-a considerat de n ori tensiunea de apariție a descărcărilor parțiale $U = nU_1$. Valoarea tensiunii pe incluziune fiind dată de relația:

$$U_c = U_1 \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \quad (2.12)$$

Mărimea descărcării, adică sarcina aparentă este dată de relația:

$$q = [C + C_1 C_2 / (C_1 + C_2)] \cdot [C_1 / (C + C_1)] \cdot [R_2 / (R_1 + R_2)] \cdot U_1 \quad (2.13)$$

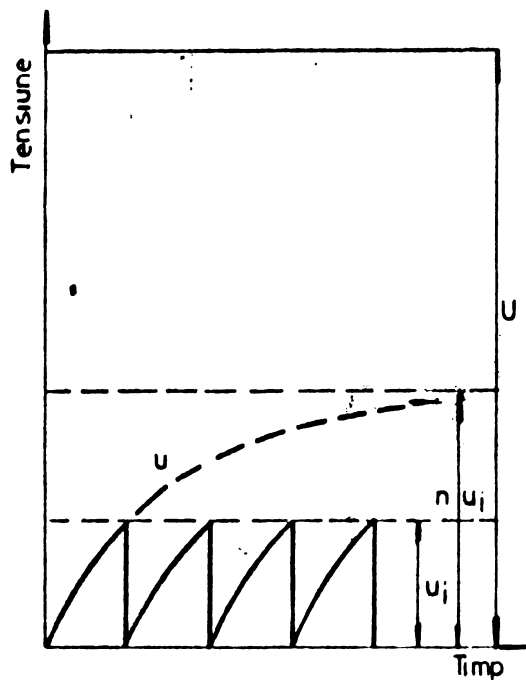


Fig.2.27

unde U_1 este tensiunea de apariție a descărcărilor parțiale.

Energia descărcării este:

$$W = \frac{1}{2} \cdot q \cdot U_1 \cdot r \quad (2.14)$$

unde

$$r = \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] \cdot \left[\frac{C_1 + C_2}{C_1} \right]$$

Expresia tensiunii U în timpul procesului de descărcare este:

$$U = n [1 - \exp(-t/\tau)] \cdot U_0 \quad (2.15)$$

unde constanta de timp

$$\begin{aligned} \tau &= (C_1 + C_2) R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \\ &= C_1 R_1 r = \rho \varepsilon_r \varepsilon_0 r \end{aligned} \quad (2.16)$$

unde ρ este rezistivitatea, ε_r permitivitatea relativă a materialului izolant solid, ε_0 - permitivitatea vidului, iar n este raportul între tensiunea aplicată și tensiunea de începere a descărcărilor parțiale.

Numărul de descărcări care apare în unitatea de timp, sau frecvența de repetiție a descărcării este:

$$N = -1/\tau \ln(1 - 1/n) = -1/\rho \varepsilon_r \varepsilon_0 r \ln(1 - 1/n) \approx n/\rho \varepsilon_r \varepsilon_0 r \quad (2.17)$$

Puterea disipată în cavitate este:

$$P = -qU/2\rho \varepsilon_r \varepsilon_0 r \ln(1 - 1/n) \approx q \cdot U/2\rho \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (2.18)$$

dacă $n \gg 1$. Prin urmare, la fel ca în cazul tensiunii alternative mărirea sarcinii aparente măsurată la borne este deosebit de importantă ea intervenind în expresia puterii disipate datorită descărcărilor parțiale în materialul izolant.

2.3.3. Incluziuni adiacente unui electrod metalic

Spectrul de impulsuri al descărcărilor parțiale ce au loc în incluziuni adiacente unui electrod metalic are o formă similară cu aceea din figura 2.28. Parametrul acestor curbe este grosimea d a incluziunii iar tensiunea aplicată probei era de 6000 V, incluziunea era

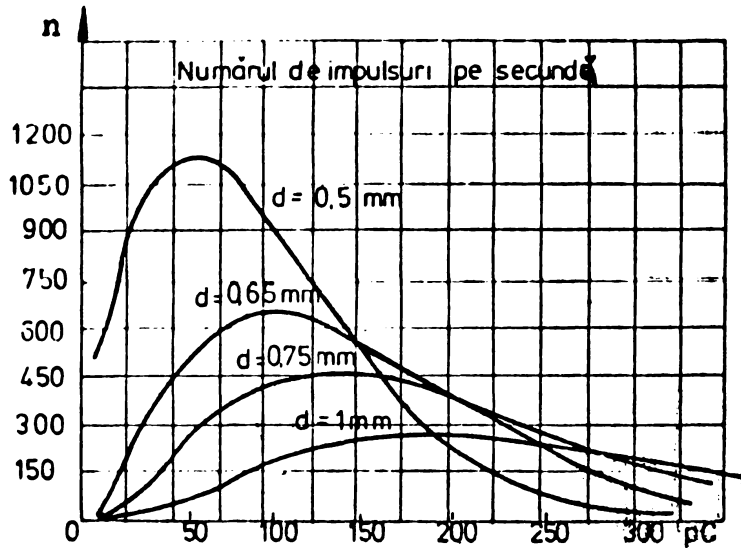
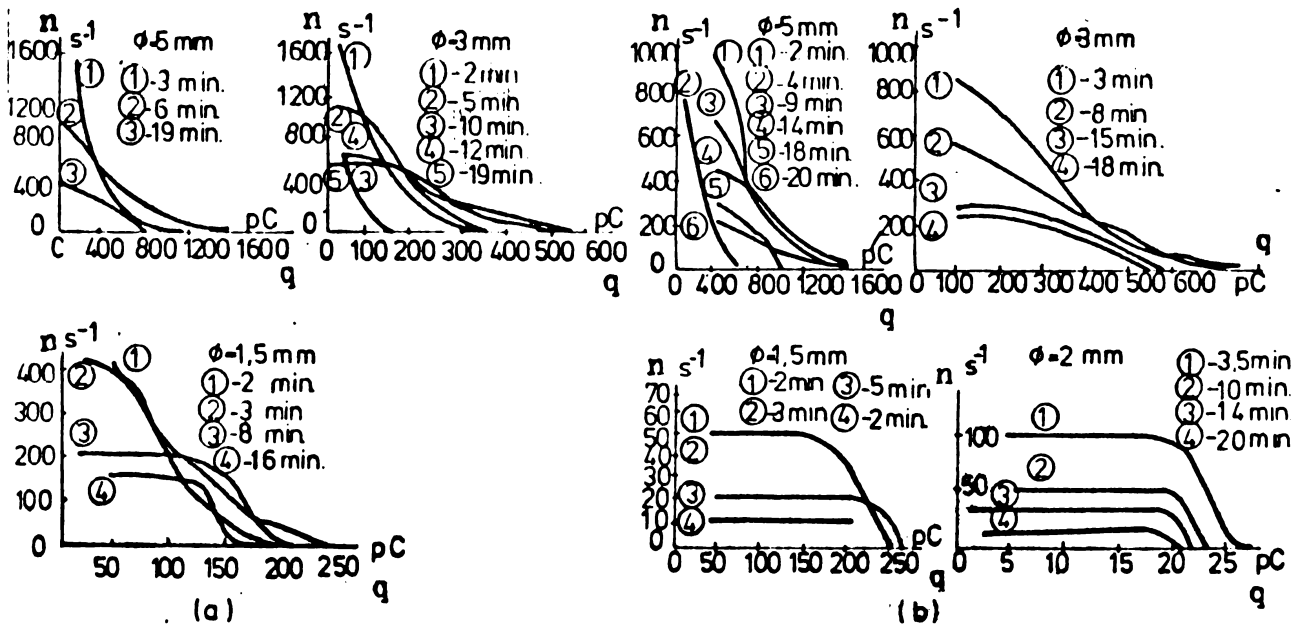


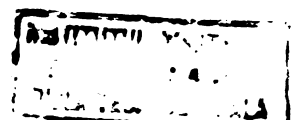
Fig. 2.28

limitată de cealaltă parte de un strat de polietilenă de $100\ \mu\text{m}$ grosime [118]. În figura 2.29 se prezintă spectrele de impulsuri obținute de Tonaka și Ikeda tot pentru incluziuni de polietilenă adiacente unui electrod metalic cu luarea în considerare a timpului de expunere a probei la descărcări parțiale și a stării de etanșare a cavității (a - cavități uscate, b - cavități umede). Tensiunea apli-



2.29

cată a fost 4 kV iar măsurarea s-a făcut după un timp de expunere la descărcări parțiale indicat pe diagramă. Se observă că spectrul de impulsuri este mai îngust la incluziuni adiacente unui electrod metalic decât în cazul incluziunilor cu pereți izolanți. Există de asemenea impulsuri cu sarcină aparentă considerabil mai mare, ceea ce concordanță cu datele prezentate în oscilograma din figura 2.18, b. Sarcina aparentă a descărcărilor maxime se modifică în timp după cum rezultă din figura 2.30, unde cavitățile erau uscate iar tensiunea aplicată 4 kV. În comparație cu incluziunile mărginite



nunai de izolație, la aceste cavități scăderea sarcinii descărcărilor maxime este mai puțin pronunțată, valoarea lor fiind mai

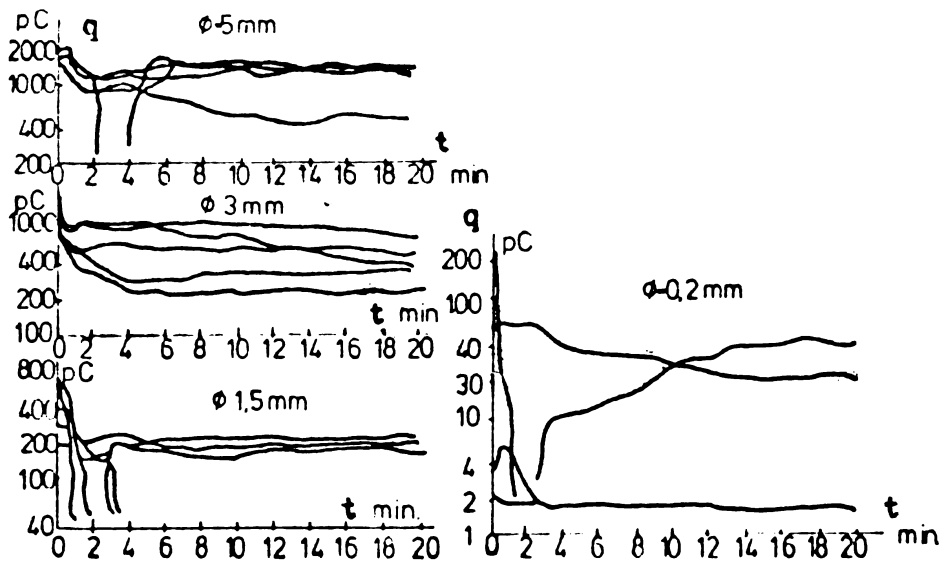


Fig.2.30

cărilor maxime. La cavitățile neetange deteriorările se produc la marginea lor.

La cavități limitate de un electrod metallic și de o folie de polietilenă având $100\mu\text{m}$ grosime, umplute cu azot variația amplitudinii celei mai probabile H_0 , a frecvenței de repetiție corespunzătoare f_0 și a numărului total de impulsuri pozitive $\sum n$ în funcție de grosimea stratului de azot este ca în figura 2.31 [118].

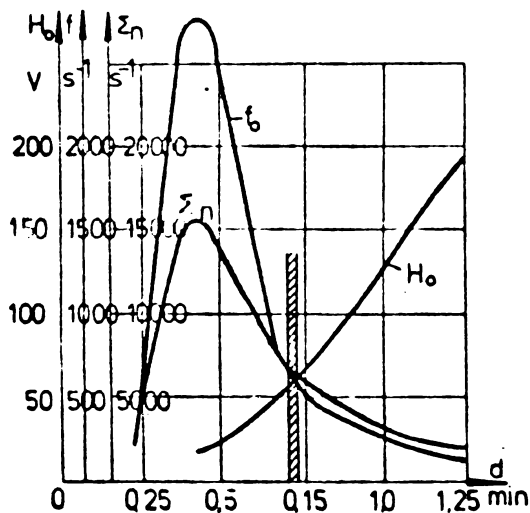


Fig.2.31

Se pot astfel remarca două regimuri de descărcări parțiale ce se situează deoparte și de alta a unei grosimi critice cu ordin de mărime bine definit. Pentru grosimi ale incluziunii mai mari decât d_c spectrele prezintă un aspect practic continuu când se spune că avem un regim de „descărcări normale”. Când grosimea stratului de gaz devine mai mică decât d_c se obțin niște spectre cu caneluri, impulsurile se grupează în benzi, ceea ce face să ne gândim la o localizare a descărcărilor, având un regim de „descărcări localizate” ce corespunde unor variații complexe a mărimilor caracteristice ale spectrului.

mare decât la cavitățile cu pereți izolați. Observațiile microscopice asupra acestor incluziuni arată că există un număr de descărcări vizibile care corespund probabil descăr-

Existența unui spectru de impulsuri se poate explica prin faptul că incluziunea este compusă dintr-un mare număr de celule elementare care diferă între ele fie prin suprafața care participă la descărcare fie prin diferența între tensiunea de străpungere a incluziunii sau cea reziduală.

Prin măsurătorile efectuate la noi în țară, F. Tănăsescu [218] a arătat încă din 1968 diferențele existente între impulsurile de descărcări parțiale la cele două polarități în cazul cavităților adiacente unui electrod metalic infirmând unele păreri mai vechi, conform cărora poziția incluziunii nu ar avea o influență asupra amplitudinii impulsurilor. De altfel cercetările din 1971 ale lui Tanaka și Ikeda au confirmat și extins aceste cunoștințe [217].

2.3.4. Incluziuni în ulei și hîrtie impregnată

În încercările efectuate pe modele simplificate conținând incluziuni de ulei între electrozi de metal sau în combinație cu hîrtie impregnată - cu ulei - s-a constatat că amplitudinea descărcărilor parțiale în ulei este considerabil mai mare decît în aer [2]. De exemplu, pentru un sistem de electrozi plan-disc cu o barieră de hîrtie avînd 0,317 cm grosime descărcările parțiale au apărut brusc la 22 kV cu o sarcină aparentă de 2000 pC.

În figura 2.32 se prezintă rezultatele obținute

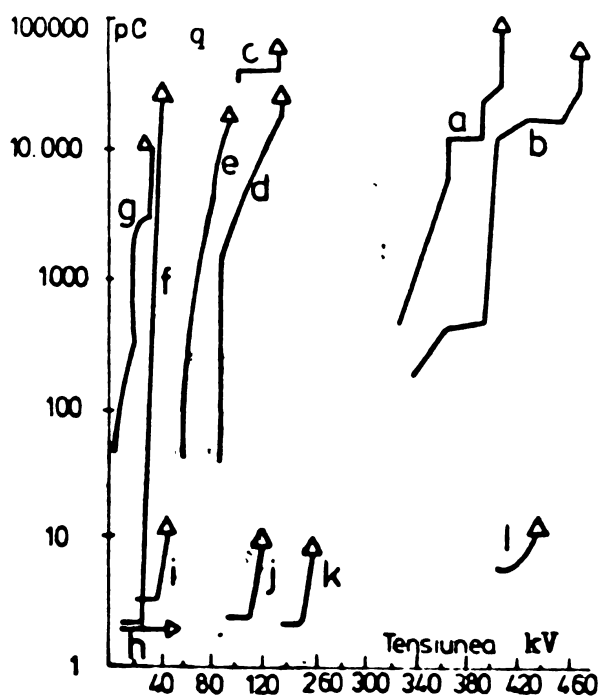
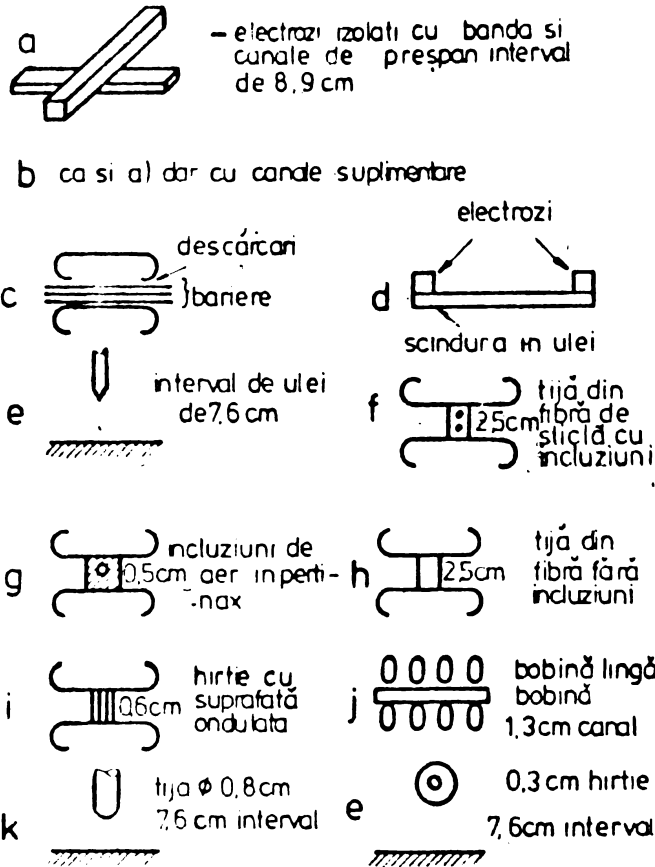


Fig.2.32.

de R.E. James [91] la măsurarea sarcinii aparente a descărcărilor parțiale pentru diferite structuri de electrozi în ulei (fig.2.33). Se menționează că există două surse evidente ale descărcărilor în ulei: incluziunile de aer prinse în capcane în structura izolației și izolație cu celuloza umedă. Aceste tipuri de incluziuni produc descărcări parțiale chiar la solicitări reduse conducînd uneori la deteriorare. În structurile luate în considerare în figura

2.33 s-a presupus că izolația este uscată corespunzător și umplută



sub vid, deci posibilitățile de apariție a descărcărilor parțiale se datorează cîmpului electric întens care produce străpungerea parțială a uleiului. În general, mecanismul real de producere a descărcării este destul de nesigur, dar s-a stabilit că la descărcare se produc bule de gaz în care apar noi descărcări. Într-o serie de cazuri, cum sînt curbele i, k, j, l, descărcarea conduce imediat la străpungere, în timp ce în celelalte situații străpungerea apare după ce în prealabil sînt detectate descărcări parțiale de $10^3 \div 10^4$ pC, deci considerabil mai mari decît în aer.

Fig. 2.33

Pentru comparație cu structura (e) din fig. 2.32,

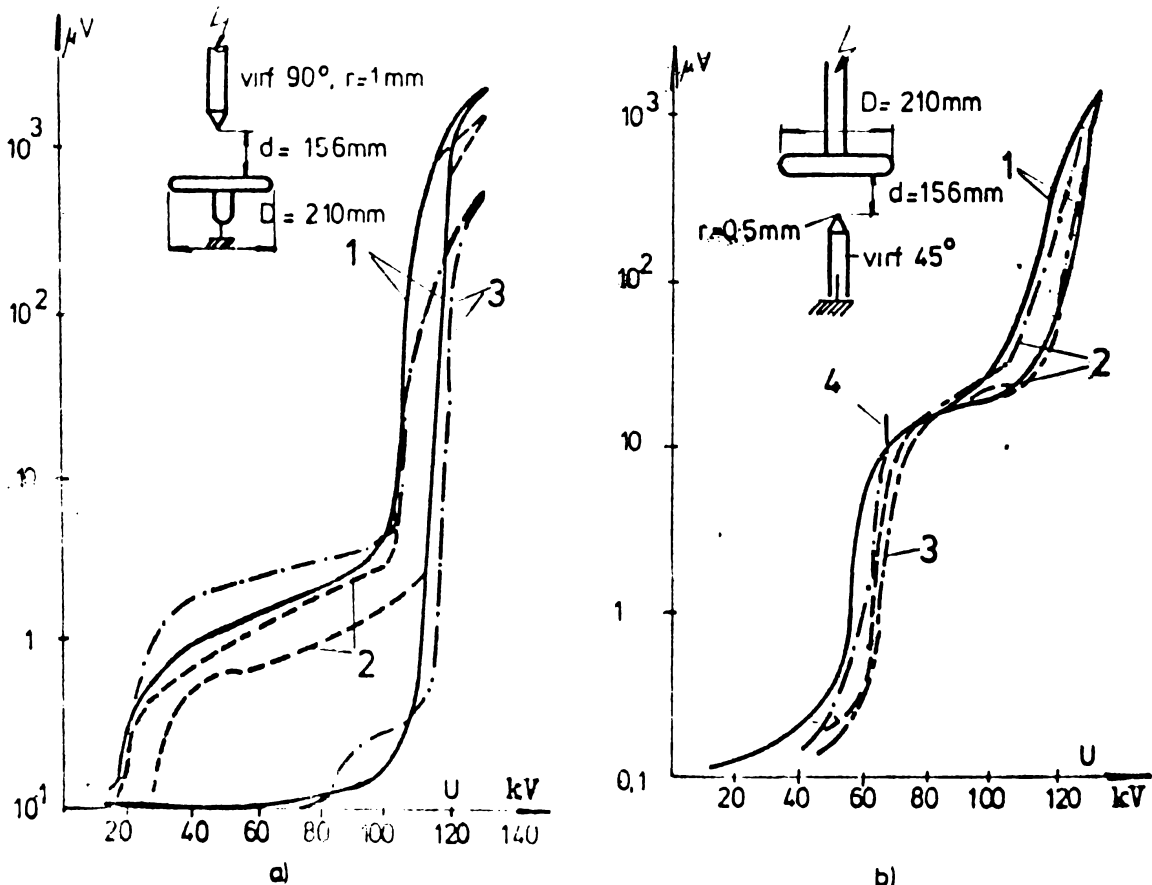


Fig. 2.34.

se prezintă în figura 2.34 rezultatele măsurătorilor tensiunii de perturbație radio (r.i.v) obținute de Wetzel [240] pentru sistemul de electrozi vîrf-placă cu unghi de 90° și 45° pentru vîrf de rază r și o distanță între vîrf și placă de 156 mm, măsurătorile fiind efectuate în cazul figurii 2.34 a imediat după aplicarea tensiunii curba 1, după 10 minute - curba 2, și la 17 ore după a doua - curba 3, iar în figura 2.34 ,b de asemenea imediat după aplicarea tensiunii - curba 1, după 10 minute - curba 2, după 20 minute -curba 3 și după 30 minute-curba 4. Un fenomen interesant este acela de histererezis : descărcările parțiale apar la o valoare relativ ridicată a tensiunii, iar cînd tensiunea este treptat redusă descărcările parțiale persistă sau se diminuează mai încet decît apariția lor; ele dispar pentru o valoare a tensiunii net mai mică decît valoarea tensiunii de apariție a lor. Același fenomen se petrece și la structuri cu hîrtie impregnată ,ca în figura 2.35,

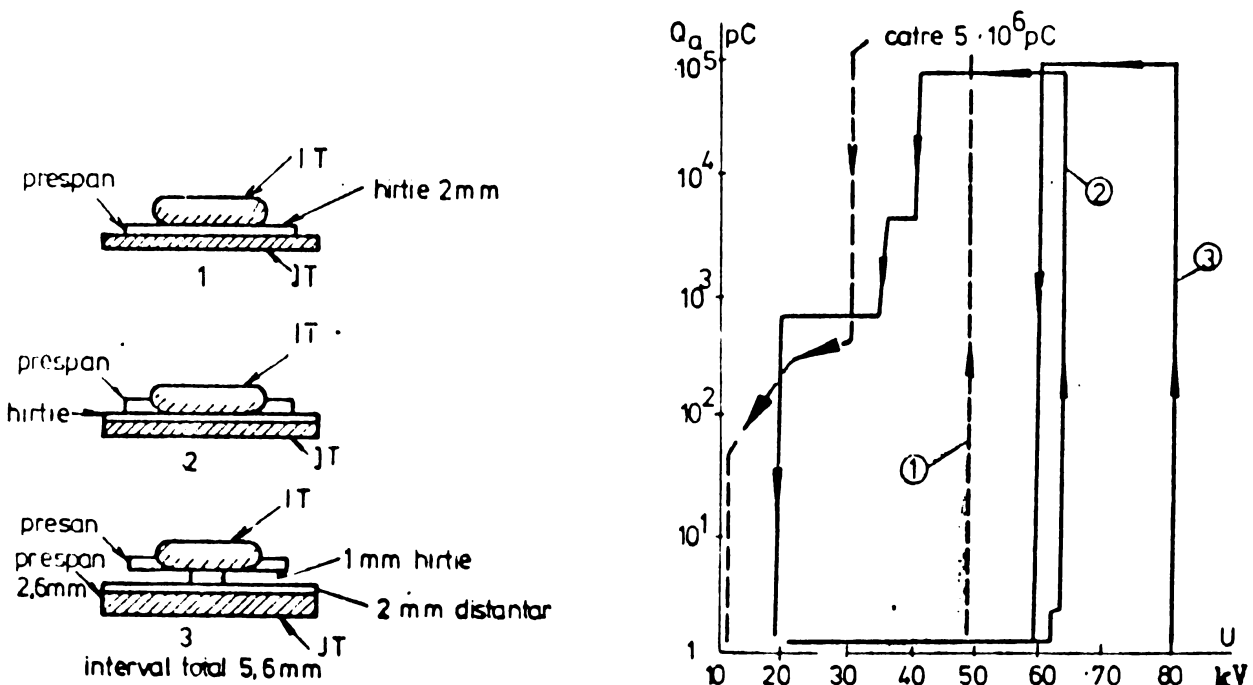


Fig.2.35

unde hîrtia conținea 0,3% apă, iar în ulei erau 7 g de apă la 1 dm³ ulei. Prezența apei în hîrtie și ulei precum și a gazului dizolvat în ulei provoacă scăderea tensiunilor de începere a descărcărilor parțiale.

Izeki, Kurahashi și Mateunra [90] folosind modelul din figura 2.36 au stabilit că la început descărcările parțiale măsurate sînt extrem de slabe și apar la intervale neregulate.

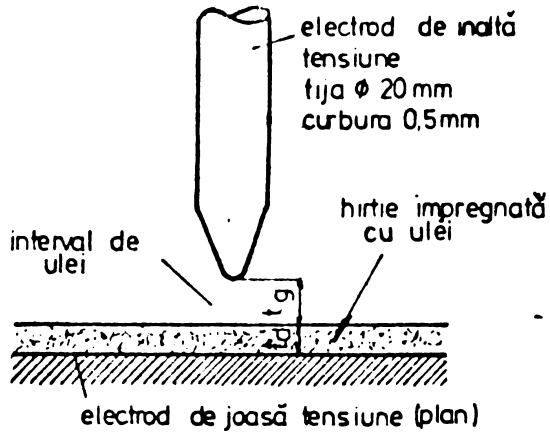


Fig.2.36

te sarcina aparentă crește exponențial cu tensiunea. La tensiuni mai mari descărcările parțiale devin stabile, se ajunge astfel în

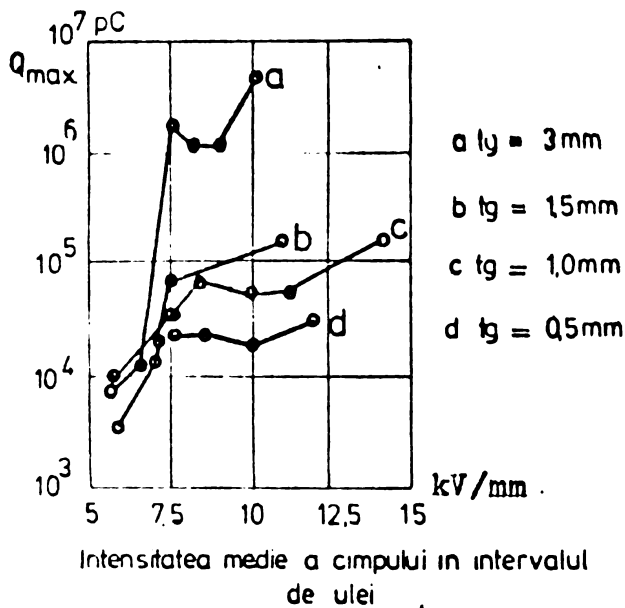


Fig.2.37

Acestea au fost denumite de ei "corona intermitentă" (termenul "corona" este folosit pentru a denumi descărcările parțiale în literatura americană). După cum se vede din figura 2.37, unde este reprezentată variația sarcinii aparente a descărcărilor maxime în funcție de intensitatea medie a cîmpului electric în intervalul de ulei, în domeniul coronei intermitente sarcina aparentă crește exponențial cu tensiunea. La tensiuni mai mari descărcările parțiale devin stabile, se ajunge astfel în zona descărcărilor parțiale constante, Dacă tensiunea crește în continuare descărcările de suprafață la hîrtia impregnată se extind și sarcina aparentă crește din nou. Ordinul de mărime al sarcinii aparente este de 10^3 pC în prima etapă, 10^4 - 10^5 pC în domeniul descărcărilor constante și de 10^6 pC în al treilea stadiu. Frecvența de repetiție a descărcărilor parțiale la acest sistem crește exponențial cu tensiunea în domeniul descărcărilor constante.

În figura 2.38 este reprezentată variația tensiunii de începere a descărcărilor parțiale în funcție de lungimea intervalului dintre electrozi în comparație cu tensiunea de începere a descărcărilor parțiale în aer. Durata impulsurilor descărcărilor parțiale în ulei este de $2 \cdot 10^{-6}$ sec, deci considerabil mai mare decât a impulsurilor pentru descărcările parțiale în aer; în același timp pe osciloscop au fost observate impulsuri de descărcări parțiale de durată foarte scurtă care apar în bulele de gaze.

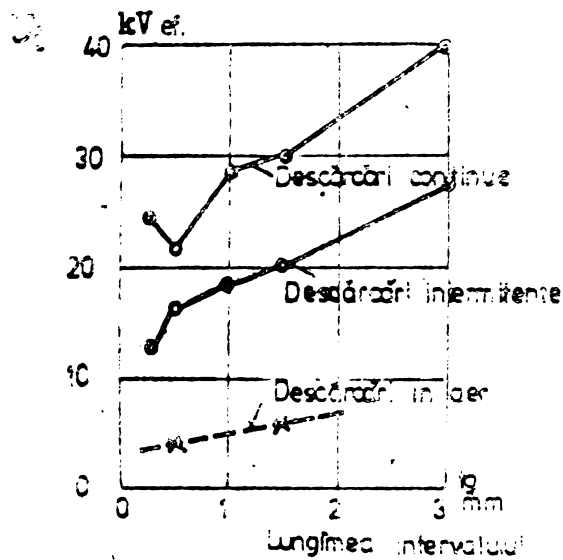


Fig. 2.38

în aer, dar sarcina q este mult mai mare decât în aer.

Pentru a urmări influența stării izolației și a timpului de repaus asupra fenomenului de descărcări parțiale în structuri cu ulei de transformator și hîrtie impregnată, se prezintă în figura 2.39 variația sarcinii aparente a celei mai mari descărcări

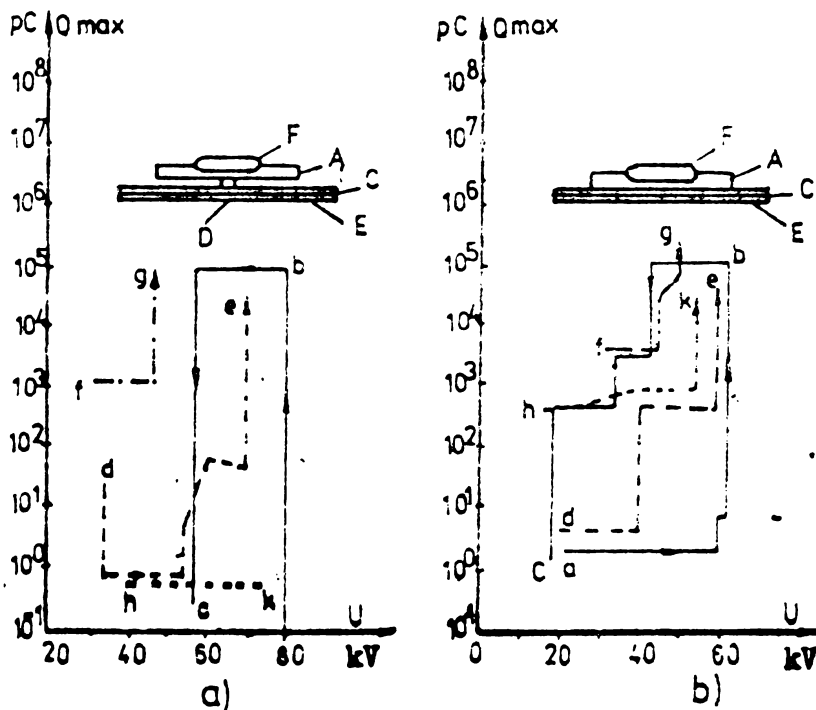


Fig. 2.39

sînt caracteristici determinate îndată după cele precedente; f și g corespund unei izolații degradate iar h și k sînt caracteristicile izolației degradate după 14 ore de repaus.

În figura 2.39, a structura este constituită dintr-un canal de ulei de 2 mm între doi pereți izolauți, unul de hîrtie

Măsurătorile efectuate de Tănăsescu [219] au arătat de asemenea că numărul de descărcări ce se stabilește între electrozi cufundați în ulei este mult mai mic decât cînd mediul este aer. Oscilogramele descărcărilor în ulei prezintă impulsuri mult mai lente, durata lor de semiamplitudine fiind pentru un sistem de electrozi de 700-800 μ sec față de 50-60 μ sec înregistrate în aer. Timpul de creștere al frontului este de 2-3 ori mai mare decât

în funcție de tensiunea aplicată obținută de Viale [231] pentru două structuri diferite. În aceste figuri în compunerea structurii lor intervin A, H- carton, C- hîrtie, D- bagheta de carton, F- electrod inferior și F- electrod superior. La figura 2.39 a și b curbele a, b, c corespund unei izolații noi, d și e

iar celălalt din carton de transformator aglomerat. Cei doi electrozi erau un disc cu marginea rotunjită așezat într-o alveolă metalizată frezată în carton pentru a evita descărcările parțiale între electrod și carton. După cum s-a putut observa vizual descărcarea critică a fost produsă de străpungerea canalului de ulei. Structura din figura 2.39, b era la fel ca prima, doar că lipsea canalul de ulei. Da data aceasta prin repaus nu se mai revine la caracteristicile inițiale. Deteriorarea pare să fie produsă de componenta tangențială a intensității câmpului electric.

În toate cazurile s-a observat că sarcina aparentă crește la anumite valori ale tensiunii numite de autor "critică" la valori ce pot produce deteriorarea structurii în timp scurt. Valorile sarcinii aparente se situează în acest caz între 10^4 - 10^6 pC și ele corespund unor descărcări în ulei.

Fenomenul de histerezis prezentat mai sus, valoarea ridicată a sarcinii aparente a descărcărilor parțiale, precum și durata impulsurilor sînt extrem de utile în deosebirea fenomenului de descărcare parțială în ulei de celelalte descărcări parțiale.

2.3.5. Autoextincția descărcărilor parțiale

Atît la incluziunile din izolația solidă cît și la descărcările parțiale în ulei poate apare un fenomen de stingere a descărcărilor după o anumită perioadă, de ordinul minutelor sau chiar zecilor, iar alteori devin intermitente. Fenomenul s-a observat la descărcările parțiale în incluziuni din material izolant cum ar fi polietilena cît și la incluziuni adiacente unui electrod metalic [181], [185, 186] și este atribuit unei creșteri a conductivității pereților incluziunii datorită depunerilor conductoare ce rezultă din descărcarea parțială însăși. Rogers [181], care s-a ocupat în mod special de studierea acestui fenomen a realizat un servomecanism cu ajutorul căruia a determinat variația tensiunii de stingere U_{st} a descărcărilor parțiale în timp, pentru incluziuni de diferite dimensiuni înconjurate complet de izolație sau adiacente unui electrod metalic din cupru.

S-a constatat că există în general patru tipuri de curbe caracteristice $U_{stingere}$ (timp), pentru cavități în polietilenă.

a) tensiunea de stingere rămâne constantă, egală practic cu valoarea inițială.

b) tensiunea de stingere prezintă fluctuații considerabile în timp, ea poate să depășească mult valoarea inițială, dar nu atinge tensiunea de încercare decât pentru perioade extrem de scurte, deci descărcările parțiale se sting ocazional;

c) tensiunea de stingere crește în primele ore pînă la valoarea tensiunii de încercare, rămînînd apoi în jurul acestei valori. În acest caz descărcările parțiale sînt intermitente sau se sting.

d) la fel ca și la tipul c tensiunea de stingere crește în timpul primelor cîteva ore la o valoare egală cu tensiunea de încercare după care scade astfel că descărcările sînt numai periodic stinse.

Rezultatele încercărilor au arătat că:

- la probe de polietilenă de gradul 2 sau 20 tensiunea de stingere a descărcărilor parțiale tinde să crească la tensiunea de încercare indiferent de diametrul d al cavității, adîncimea m a acesteia și tensiunea de încercare. Cînd raportul d/m este mic descărcările se sting iar cînd d/m este mare tensiunea de stingere rămîne sub cea de încercare, încît descărcările nu se mai sting;

- la probe de polietilenă de gradul 2 sau 20 cu incluziuni adiacente electrodului de cupru, curba $U_{stingere}$ (timp) depinde foarte mult de forma cavității. Cînd $d/m < 8$ tensiunea de stingere tinde să crească la cea de încercare și descărcările se pot stingea. Cînd $d/m > 12$ tensiunea de stingere rămîne constantă la valoarea inițială. Pentru valori intermediare ale lui d/m tensiunea de stingere prezintă fluctuații dar atinge rareori tensiunea de încercare. În cazul unor electrozi de platină la probe de polietilenă de gradul 20 tensiunea de stingere crește la U_{inc} numai cînd d/m este mic;

- după o perioadă de repaus cavitățile revine la starea inițială, deci efectele de stingere sînt temporare;

- în cazul cînd apare fenomenul de autoextincție se observă totuși izbucniri de descărcări la intervale de cîteva secunde sau minute;

- examinările la microscop au arătat că deteriorarea incluziunii adiacente unui electrod de cupru depinde de diametrul cavității. La cavități cu diametru mic, la care descărcările se sting, deteriorarea este observată la periferia cavității, în

timp ce la cavități cu diametru mare, la care descărcările nu se sting deteriorarea era observată în zona centrală;

- deteriorările la cavități interne în polietilenă sînt mult mai mici în comparație cu cele din cavitățile adiacente electrodului de cupru în condiții de încercare similare;

- fenomenul de autoextincție se observă și la alte materiale izolante, el fiind de asemenea temporar, reproducibil și dependent de forma și dimensiunile cavității. Deteriorarea observată la marginile cavității de diametre mici, unde descărcările se sting, dovedește faptul că autoextincția se datorează depunerilor conductoare pe pereții cavității, care șuntează descărcarea. Fenomenele chimice care însoțesc descărcarea sînt extrem de complexe, prin urmare fenomenul de autoextincție depinde și de structura materialului izolant, de natura electrodului etc.

2.4. Detectarea, măsurarea și localizarea descărcărilor parțiale

2.4.1. Fenomene caracteristice descărcărilor parțiale. Generalități

Descărcările parțiale care se produc în materialele izolante sînt însoțite de o serie de fenomene, care stau la baza metodelor de detectare, evaluare și localizare a lor. Fenomenele electrice sînt :

- impulsuri electrice, ce apar datorită transferului de sarcină electrică din incluziune;
- pierderi dielectrice, datorate energiei consumate de la sursa de alimentare, pentru producerea descărcărilor;
- radiația electromagnetică sub formă de unde sau lumină.

Aceste fenomene stau la baza metodelor electrice de detectare a descărcărilor parțiale, care sînt cel mai frecvent folosite și cele mai sensibile.

Descărcările parțiale din izolație sînt însoțite și de o serie de fenomene neelectrice;

- căldura dezvoltată în timpul descărcărilor parțiale produce creșterea temperaturii în zona unde acestea au loc;
- zgomotul sau "șuieratul", caracteristic de altfel și fenomenului corona de pe liniile de înaltă tensiune. Este feno-

menul cunoscut încă de la începuturile tehnicii de înaltă tensiune;

- presiunea gazului, scade în momentul apariției descărcărilor parțiale în incluziune datorită reacțiilor chimice ale oxigenului cu materialul izolant;

- transformările chimice ale izolației, sau conductorului datorită descărcărilor parțiale.

Detectarea descărcărilor parțiale înseamnă determinarea prezenței acestor descărcări și a tensiunii la care ele apar. Fenomenele electrice și în consecință metodele electrice sînt de cele mai sigure și mai sensibile pentru detectarea descărcărilor parțiale. Localizarea descărcărilor parțiale înseamnă determinarea locului unde se produc descărcările parțiale. Aceasta este mai dificilă decît detectarea. Pentru localizare pot fi folosite metode electrice, îndeosebi la cabluri de înaltă tensiune, precum și metoda acustică sau optică. Măsurarea sau evaluarea descărcărilor parțiale este cea mai dificilă problemă. Cu anumite metode electrice se poate determina mărimea descărcărilor parțiale sau sarcina aparentă a acestora, dar care după cum s-a văzut mai înainte nu reprezintă sarcina echilibrată în incluziune. De asemenea, ea depinde de grosimea izolației la locul unde se află tensiunea, care în general este necunoscută.

2.4.2. Metode electrice de detectare a descărcărilor parțiale

Metodele de detectare electrică au la bază fenomenele electrice care însoțesc descărcările parțiale: impulsurile electrice, pierderile dielectrice și radiația electromagnetică.

Impulsurile electrice care apar pot fi analizate cu ajutorul schemei echivalente din figura 2.1 b în serie cu care se plasează o rezistență R sau un circuit rezonant, L,C,R așa cum se arată în figura 2.40 a și b, în primul caz detecția fiind de bandă largă, iar în al doilea de bandă îngustă. În aceste cazuri K reprezintă capacitatea față de pământ a sursei de înaltă tensiune. Rezolvînd cele două circuite cu ajutorul transformatei Laplace, rezultă expresia tensiunii în forma:

$$u = \left\{ \frac{q}{[C(1+C_p/K)+C_p]} \right\} \exp \left\{ - t/R \cdot [C_p + C \cdot K / (C+K)] \right\} \quad (2.19)$$

pentru cazul detecției cu rezistență, care reprezintă o variație

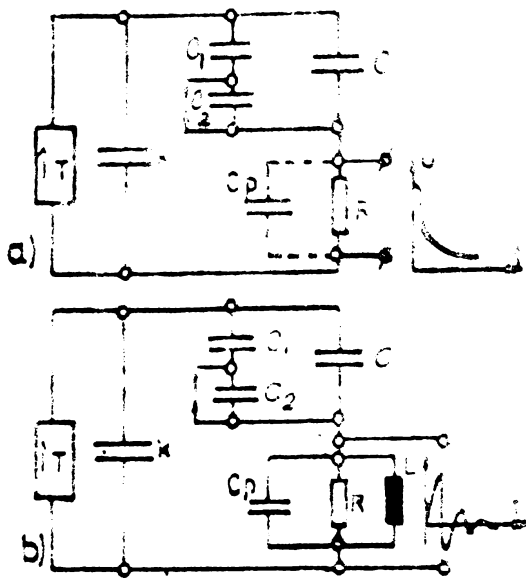


Fig.2.40

pulsul de tensiune ce rezultă în urma descărcării are ecuația aproximativă:

$$u = q / [(1 + C_p/K)C + C_p] \cdot \exp\{-t/R [C_p + C.K/(C+K)]\} \cos \omega t \quad (2.21)$$

unde C_p este capacitatea din circuitul rezonant de detecție iar

$$\omega = \sqrt{1/L [C_p + C.K(C+K)] - 1/4R^2 [C_p + C.K/(C+K)]^2} \quad (2.22)$$

Aceasta reprezintă o oscilație sinusoidală amortizată. Aceste impulsuri sînt amplificate în cazul din figura 2.40, a cu amplificatoare de bandă largă, iar în cazul detecției din figura 2.40, b cu amplificatorul de bandă îngustă. Amplificatearele de bandă largă au banda cuprinsă între cîteva zeci de KHz pînă la cîțivi MHz, iar amplificatoarele de bandă îngustă au frecvența medie a benzii egală cu frecvența de rezonanță a circuitului oscilant de detecție.

Metodele de detectare a impulsurilor și amplificarea acestora se numesc metode directe. În afară de aceasta există încă metode de compensare și metode de măsurare a pierderilor de energie disipată de descărcări în dielectric.

2.4.2.1. Metode directe

Metodele directe de detecție a descărcărilor parțiale au la bază circuitele de detecție prezentate în figura 2.40

aperiodică amortizată cu constanta de timp $T = R \cdot [(C_p + C.K/(C+K))]$, al cărei front de undă este extrem de scurt (10-20 ns), putînd fi considerată ca o creștere în treaptă. Dacă valoarea capacității parazitare a circuitului de detecție este mult mai mică decît C și K ($C_p \ll C, K$), atunci ecuația impulsului devine:

$$u = q/C \cdot \exp\{-t/R \cdot [(C_p + C.K/(C+K))]\} \quad (2.20)$$

La detecția de bandă îngustă im-

Un neajuns al acestor scheme de detecție este faptul că generatorul de impulsuri de calibrare trebuie să aibă ambele borne izolate față de masă, pentru a putea fi cuplat în paralel cu proba, iar capacitatea acestora față de masă trebuie să fie mică. Schema de detecție completă este prezentată în figura 2.41, unde TI este transformatorul de încercare de înaltă

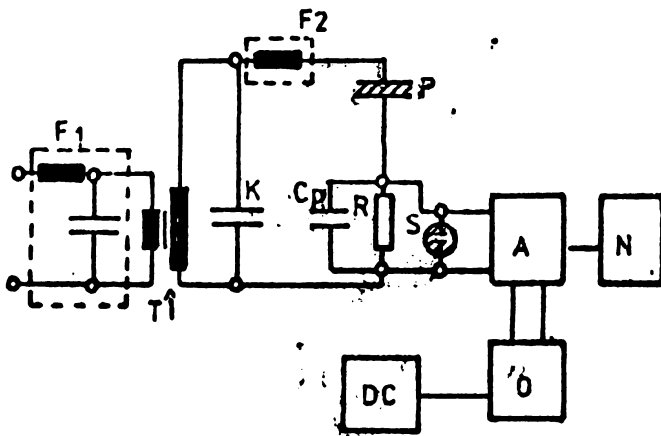


Fig.2.41

de încercare de înaltă tensiune, P este proba, K - capacitatea sursei de înaltă tensiune. Impulsurile culese de pe rezistența de detecție R sînt amplificate de amplificatorul cu bandă largă și prezentate pe ecranul unui osciloscop. De asemenea, ele pot fi numărate cu un numărător de impulsuri N. S servește

pentru protejarea intrării amplificatorului. Pentru a elimina perturbațiile de înaltă frecvență se folosește filtrul de blocare de înaltă frecvență F_1 sau F_2 . Folosirea filtrului F_2 este mai convenabilă deoarece elimină impulsurile parazite din sursa de înaltă tensiune, dar realizarea sa este mai dificilă trebuind să reziste la curentul de sarcină sau de mers în gol a probei. Pentru a obține o amplificare maximă trebuie ca valoarea constantei de timp τ_p a impulsului să fie mai mare decît constanta de timp τ_A a amplificatorului. De asemenea, valoarea maximă a rezistenței de detecție R trebuie să nu fie prea mare pentru a evita saturarea amplificatorului de către tensiunea de frecvență industrială de 50 Hz.

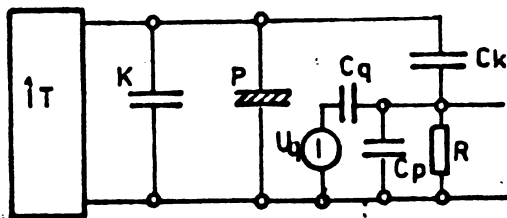


Fig.2.42

O altă variantă a metodei cu bandă largă este aceea din figura 2.42, unde C_k este un condensator de legătură sau de cuplaj, care trebuie să fie lipsit de descărcări parțiale la tensiunea de încercare, iar capacitatea lui trebuie să fie suficient de mare pentru ca valoarea detectată pe rezistența R să fie suficient de mare. În același timp capacitatea condensatorului de cuplaj trebuie astfel aleasă încît frecvența de tăiere a circuitului să fie mai mare decît frecvența maximă a circuitului de măsură.

Raportul între semnalul pe rezistența de intrare și sarcina aparentă depinde de caracteristicile circuitului de măsură, din care o serie nu sînt cunoscute cum ar fi capacitățile și inductanța parazită a circuitului. Pentru a cunoaște acest raport este necesară calibrarea circuitului cu ajutorul unui generator de impulsuri dreptunghiulare de impedanță foarte mare conectat între bornele obiectului încercat. Generatorul de calibrare mai poate fi conectat ca în figura 2.41 prin intermediul unui condensator C_0



Fig. 2.43

de capacitate mică (zeci de pF) cunoscută. De asemenea, sarcina impulsurilor generatorului de calibrare este cunoscută. Compararea este extrem de eficace cînd impulsurile descărcării și cel de calibrare sînt reprezentate simultan și suprapuse pe o bază de timp eliptică de 50 Hz așa cum se arată în figura 2.43 unde este vizibil simultan și impulsul de calibrare.

Avantajul metodei de detecție cu bandă largă este că realizează reproducerea formei impulsului de descărcare, așa cum apare în circuit deci este posibilă examinarea detaliată a fenomenului de descărcare parțială, în plus rezoluția impulsurilor poate fi crescută alegînd o valoare mică pentru constanta de timp $RC \cdot C_k (C + C_k)$ de circa (1-10) μ sec .

Pe de altă parte metoda de detecție cu bandă largă are cîteva dezavantaje:

- este necesar un filtru pentru eliminarea tensiunii de frecvență industrială și a armonicilor acestuia;
- zgomotul exterior afectează sensibilitatea circuitului de detecție;
- sensibilitatea redusă în cazul unor obiecte încercate avînd o valoare a capacității C mare.

Creșterea sensibilității precum și reducerea zgomotului, adică un raport mare semnal/zgomot se poate obține folosind detecția pe circuite acordate L,C. Schema principală a unui circuit de detecție acordat este prezentă în figura 2.44. Frecvența proprie

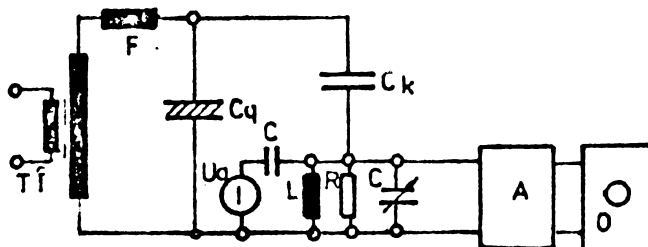


Fig. 2.44

de rezonanță a acestor circuite este astfel aleasă încît să se poată realiza factori de amplificare mari (cazul frecvenței de 10 kHz sau evitarea perturbațiilor radio (cazul frecvenței de

470-500 KHz). Amplificatorul este în acest caz de bandă îngustă, având frecvența medie a benzii egală cu frecvența de rezonanță a circuitului oscilant de detecție. Lățimea de bandă este de circa ± 5 KHz.

Varianta prezentată în figura 2.44 este cu condensator de cuplaj, fiind posibilă și la detecția cu circuit acordat conectarea circuitului L,C în serie cu proba, similar ca în figura 2.40,b.

2.4.2.2. Metode de compensare

Dacă perturbațiile exterioare au o valoare însemnată și nu pot fi eliminate este necesară utilizarea unui circuit de compensare. Metoda cea mai des utilizată este folosirea unei punți Shering, întâlnită frecvent în laboratoarele de înaltă tensiune. Schema de detecție a descărcărilor parțiale cu puntea Shering este prezentată în figura 2.45 unde C_x este proba, C_n este un condensator etalon, iar celelalte brațe conțin elementele de joasă tensiune R_3, R_4, C_4 . În diagonala punții sînt conectate filtrul, amplificatorul și osciloscopul, detecția fiind pe rezistență. Perturbațiile exterioare produc impulsuri pe ambele ramuri ale punții, iar diferența între acestea măsurată în punctele 1 și 2 este mult mai mică decît impulsurile în-

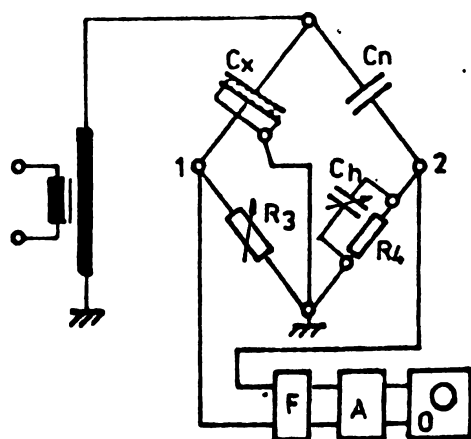


Fig.2.45

săși. Impulsul produs de descărcarea parțială din C_x dezechilibrează puntea și poate fi observat pe ecranul osciloscopului. Circuitul de detecție din diagonala punții poate fi combinat și cu un amplificator de bandă îngustă pentru a mări efectul de suprimare a perturbațiilor exterioare, dar în acest caz ea și la metodele directe rezoluția impulsurilor este mai mică. În acest caz elementele punții se aleg astfel încît puntea este în echilibru la frecvența medie a benzii amplificatorului.

Kreuger [113] a pus la punct un circuit în punte (fig. 2.46) la care în locul condensatorului etalon C_n se află o capacitate C_x avînd aceleași pierderi dielectrice ca și proba într-o bandă largă de frecvențe:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \delta'$$

$$(2.23)$$

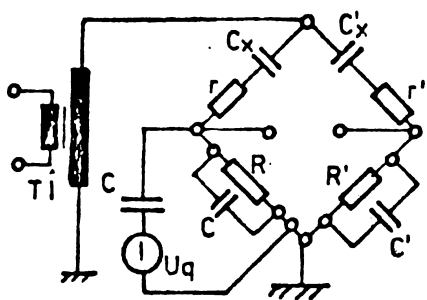


Fig. 2.46

2.4.2.3. Metode de detectare a pierderilor în izolație

Cea mai cunoscută metodă este puntea Shering (fig. 2.45) unde în locul dispozitivului de detecție, între punctele 1 și 2, se află un galvanometru de vibrații. Așa cum s-a arătat în 2.32. efectuând măsurătorile ale pierderilor în dielectrics ($\operatorname{tg} \delta$) la diferite tensiuni se poate determina tensiunea de începere a descărcărilor parțiale pentru un anumit echipament (fig. 2.25). La echipamente cu incluziuni de aceeași mărime tensiunea de începere poate fi determinată cu suficientă precizie, dar dacă incluziunile au forme și dimensiuni diferite este dificil de precizat valoarea tensiunii de amorsare a descărcărilor (ea fiind diferită pentru diferite incluziuni).

Gelez [54] a pus la punct o metodă de măsurare a pierderilor prin descărcări parțiale cu puntea Shering cu dublu echilibru. Se echilibrează mai întâi puntea folosind în diagonala de măsură un galvanometru cu rezonanță obținând astfel pierderile totale. Un al doilea echilibru este realizat folosind în diagonala de măsură un oscilograf catodic cu amplificator cu bandă largă. În acest fel componenta de 50 Hz nu apare direct pe ecran, echilibrul făcându-se numai pentru impulsurile datorate descărcărilor parțiale. Se obține în acest fel unghiul de pierderi corespunzător celorlalte pierderi care există în afara pierderilor prin descărcări parțiale.

Veverka și Chaldek au pus la punct o metodă wattmetrică de măsurare a pierderilor conform schemei din figura 2.47.

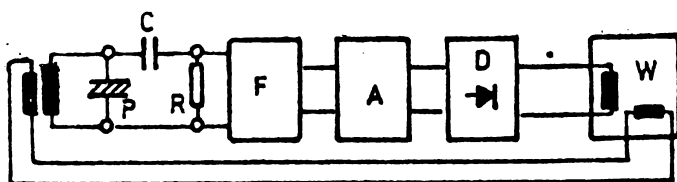


Fig. 2.47

bobina de tensiune a unui wattmetru.

Impulsurile de descărcări parțiale sînt trecute printr-un circuit de derivație RC iar după filtrarea componentei de 50 Hz, amplificarea și detecție alimentează

În afară de metodele directe, de compensare și de măsurare a pierderilor se mai întâlnesc în practică metode de explorare aplicabile la cabluri și metoda undei mobile aplicată la echipamentele care au parametrii electrici repartizați: cabluri de lungime mare și înfășurările transformatorului. Ele vor fi tratate în subcap.2.5.

2.5. Măsurători ale descărcărilor parțiale asupra echipamentului de înaltă tensiune

În general, toate părțile componente ale unei rețele electrice de înaltă tensiune sînt sediul unor descărcări parțiale sau descărcări corona. Este important de detectat aceste descărcări în anumite echipamente, cum ar fi: condensatoare, izolatoare de trecere, cabluri, transformatoare de forță, transformatoare de măsură și mașini rotative (îndeosebi generatoare). Pentru a judeca performanțele unui astfel de echipament se dispune în prezent de o serie de procedee de măsurare, unele distructive, iar altele nedistructive. Unul dintre procedeele nedistructive este detectarea, localizarea și măsurarea descărcărilor parțiale. Măsurarea descărcărilor parțiale și aprecierea calității echipamentului pe baza rezultatelor acestei măsurări se poate face corect, ținînd seama de aspectul construcției în ansamblu a echipamentului, cunoscînd materialele utilizate și configurația cîmpului electric în echipament, precum și aspectele mecanice: dilatarea datorită creșterii temperaturii, raza de curbura a părților metalice. Este necesară, de asemenea, corelarea măsurătorilor de descărcări parțiale cu rezultatele celorlalte încercări asupra echipamentului.

Un alt aspect important în măsurarea descărcărilor parțiale [114] este alegerea mărimii măsurate, care trebuie făcută pe baza tipului de izolație folosită în echipamentul de înaltă tensiune. Din punctul de vedere al descărcărilor parțiale există două tipuri de izolații:

- izolație omogenă, cel mai frecvent, masă plastică obținută prin extrudare sau turnare, Tehnologiile actuale de extrudare și turnare asigură, în general, obținerea unei izolații omogene lipsită de incluziuni, deci fără descărcări parțiale.

În unele cazuri, pot apărea incluziuni, numărul acestora fiind redus. Măsurarea descărcărilor parțiale într-o astfel de izolație trebuie să asigure pe producător de lipsa unor astfel de incluziuni sau să admită prezența unor incluziuni având valoarea mai mică decât o valoare minimă admisă. Pentru acest tip de izolație este important să se măsoare impulsurile individuale corespunzătoare incluziunilor izoțate, deci mărimea măsurată va fi sarcina aparentă a descărcării parțiale sau cea mai frecvent sarcina aparentă a descărcării maxime,

-izolație neomogenă, care prezintă o mulțime de incluziuni cum ar fi izolația cablurilor din hîrtie impregnată (incluziuni determinate de spiralele deschise între benzile de hîrtie) și izolația mașinilor sincrone (incluziuni de aer între fișile izo-lante ale conductorului). În acest caz dimensiunile incluziunilor depind de procedeul de fabricație folosit, iar o apreciere generală a calității izolației se obține prin integrarea impulsurilor descărcărilor parțiale. Sînt posibile de măsurat: curentul mediu al descărcărilor parțiale, debitul pătratic, factorul de pierderi prin descărcări parțiale.

În ambele cazuri, pentru a asigura o comparabilitate a rezultatelor este necesar să se indice sensibilitatea măsurătorii precum și sarcina aparentă a descărcării maxime în pC.

În final, măsurarea descărcării parțiale la un echipament implică alegerea aparatului de măsurare (a detectorului) și a schemei de măsurare, care este determinată de mărimea măsurată. Un factor ce influențează această alegere este posibilitatea de a distinge sau elimina perturbațiile, care constituie principala dificultate în măsurarea descărcărilor parțiale. Metodele de măsurare disponibile în prezent sînt în plus nesatisfăcătoare datorită fenomenelor de unde staționare, a fenomenului de autoextincție a descărcărilor, dependența de interpretarea operatorului, care duc la o serie de controverze [23, 52, 53] chiar între cercetători din aceeași țară și la lipsa unor specificații unanim acceptate pentru măsurarea descărcărilor parțiale.

Un procedeu destul de eficace de eliminare a perturbațiilor este folosirea, indiferent de detectorul ales, a osciloscopului unde descărcările apar pe ecran sincronizate cu tensiunea alternativă de încercare. Utilizarea unor scheme de compensare elimină perturbațiile sau permite observarea lor datorită dependenței amplitudinii de echilibrul punții.

Studiul fenomenului de descărcare parțială, prin natura fenomenului, precum și aprecierea stării echipamentului pe baza acestor măsurători implică colaborarea unor specialiști din tehnica tensiunilor înalte, electrotehnica teoretică, electronică, tehnică de calcul precum și a chimiștilor, domenii între care există o distincție netă în cele mai multe țări. Acest fapt explică lipsa unor prescripții unanim acceptate, controversate uneori deosebit de ascuțite între cercetători, precum și continuarea și în prezent a cercetărilor fenomenului de descărcare parțială folosind aparatură din ce în ce mai complexă. În cele ce urmează vor fi prezentate principiile de măsurare a descărcărilor parțiale pentru principalele echipamente de înaltă tensiune.

2.5.1. Cabluri de înaltă tensiune

Măsurarea descărcărilor parțiale la cabluri se poate efectua în faza de realizare a cablului înainte de aplicarea ecranului pe izolație sau după aplicarea ecranului pe izolație prin explorarea cablului pe întreaga sa lungime, sau după terminarea cablului măsurând cablul finit, eventual bobinat pe tambur.

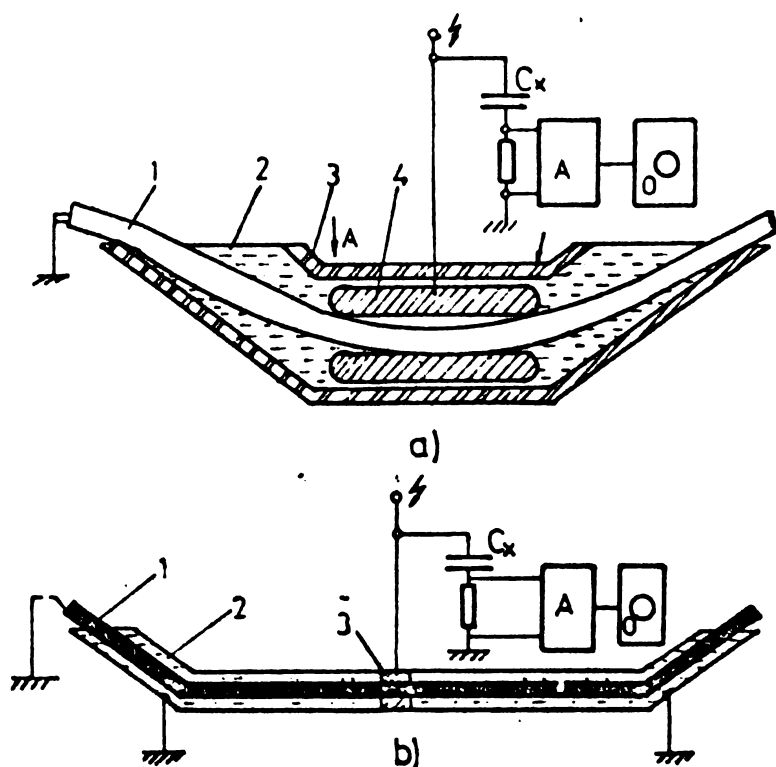


Fig.2.48

având capetele rotunjite. Tubul și miezul sunt cufundate într-un lichid electroizolant 2, care este situat în

Sistemele de explorare au la bază schemele prezentate în figura 2.48, a și b care permit examinarea miezurilor de cablu necranat, detectarea descărcării făcându-se pe o porțiune foarte scurtă din cablu, ceea ce face posibilă localizarea precisă a defectelor în cablu [113]. În cazul figurii 2.48, a sistemul de explorare (examinare) a cablului este umplut cu lichid izolant, iar cablul necranat este trecut printr-un tub de metal 4,

containerul izolant 3, astfel că nu apar descărcări parțiale între tubul de metal și cablu. Ca lichid se poate folosi uleiul de transformator sau tricloretilena, ultimul având avantajul că se evaporă de pe cablu și nu murdărește cablul.

Pentru diminuarea efectelor de capăt, tubul din material izolant a fost umplut cu apă distilată 2 (fig. 2.48, b). La mijlocul tubului se află electrodul metallic 3 în formă de inel cărui se aplică tensiunea înaltă, conductorul cablului neecranat 1 și capetele tubului izolant fiind legate la masă. Solicitarea este treptat dinspre capătul tubului spre centru, dar sistemul are dezavantajul lungimii mari a electrocului de măsură, precum și necesitatea reîmprospătării apei distilate pentru deionizare și menținerea constantă a temperaturii.

Kreuger [113] a pus la punct un sistem de explorare a cablurilor cu miezul ecranat folosind o metodă diferențială. Rezistența specifică a ecranului trebuie să fie de câțiva $k\Omega/m$. În principiu sistemul propus de Kreuger este prezentat în figura 2.49, a iar schemele electrice echivalente în figura 2.49, b. Cablul trece în jurul unui sistem de patru roți, din care cele exterioare sînt legate la pămînt iar roțile interioare A și B sînt conectate prin rezistențele R și R' la pămînt. Tensiunea înaltă alternativă este aplicată la conductorul cablului. Capacitățile C_a și C_a' ale porțiunilor de cablu care trec peste roțile A și B formează împreună cu rezistențele R_1 și R_1' o punte care este în echilibru cînd $R_1 = R_1'$. Dacă se produce o descărcare în capacitatea C_a sau C_a' echilibrul punții se strică iar impulsul de tensiune crește cînd locul incluziunii se deplasează de la prima roată pusă

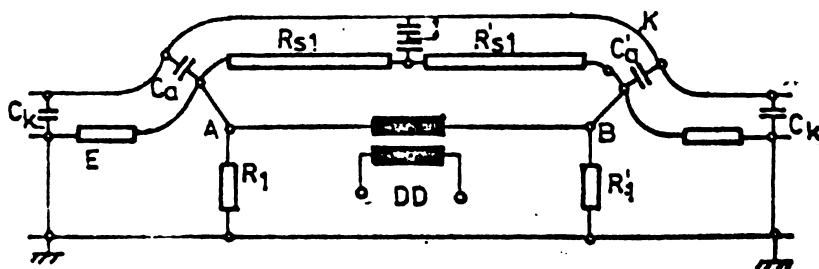
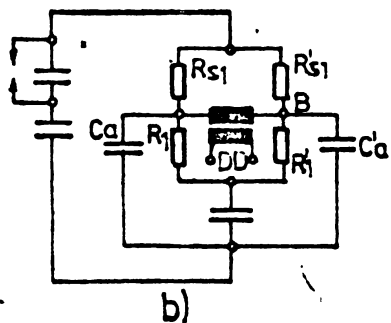
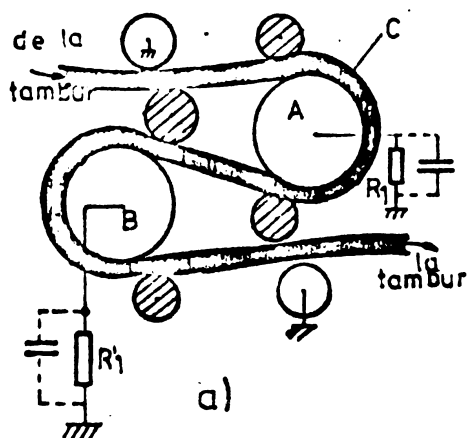


Fig. 2.49.

la pământ către roata A, scade când locul de deplasează de la A spre punctul median între A și B iar apoi crește din nou când locul descărcării se deplasează spre roata B. Semnalul detectat este maxim atunci când rezistența ecranului între roțile A și B este mai mare decât impedanța brațelor de joasă tensiune ale punții la frecvența tensiunii de încercare. Cu acest sistem interferențele datorate perturbațiilor exterioare sînt mult reduse, iar încercarea se poate face într-o încăpere necranată. Descărcările datorate contactului alunecător între roți și cablu limitează sensibilitatea sistemelor la 3 pC.

Un cablu rulat pe tambur, la care peste ecranul izolației au fost montate benzi de cupru, iar peste acestea este trasă teaca izolantă nu mai poate fi încercat cu metodele de explorare. El este accesibil pentru conexiune numai la cele două capete. Schema echivalentă a cablului împreună cu locul de descărcare este

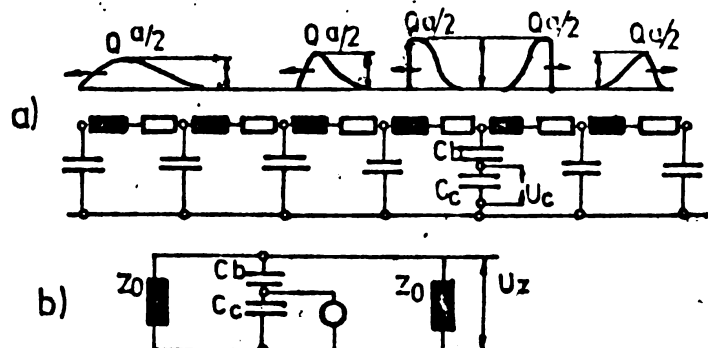


FIG.2.50

cablu de forță cu izolație de polietilenă ($\epsilon_r=2,2$), deoarece descărcarea parțială durează între 10+100 ns, rezultă o lungime a trenului de undă mobilă de câțiva metri. Undele mobile se deplasează de la locul descărcării spre cele două capete ale cablului, iar dacă locul descărcării este situat la o distanță mai mare de circa 10-20 metri de oricare capăt al cablului va exista un interval de timp la oricare din capete între sosirea undei directe și a undei reflectate de la celălalt capăt al cablului. Acest fenomen lipsește numai la cabluri avînd o lungime sub $10m$ (mai mică decît lungimea trenului de undă) care pot fi considerate ca niște elemente concentrate iar detectarea descărcărilor parțiale la acestea se fac cu una din metodele expuse anterior.

Față de locul descărcării, cablul poate fi reprezentat prin impedanța sa caracteristică (fig.2.50,b) Z_0 , care la un

prezentată în figura 2.50,a iar circuitul echivalent în figura 2.50,b. Viteza de propagare a undei de tensiune generată de descărcarea parțială este:

$$V_u = 1/\sqrt{\epsilon_r} = 3 \cdot 10^8 / \sqrt{\epsilon_r}$$

deoarece $\mu_r = 1$. La un

cablu fără pierderi este o rezistență pură [145]. Integrals în timp unei de tensiune este proporțională cu sarcina aparentă a descărcării parțiale. Modurile posibile de conectare a detectorului de descărcări parțiale la cablu încercat sînt prezentate în figura 2.51, a, b, c. Detectorul corona conectat în mod simplu ca în figura 2.51, a

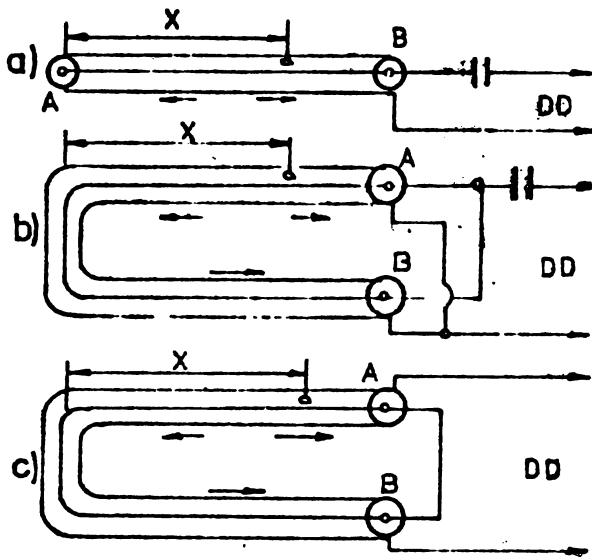


Fig. 2.51

va primi mai întâi unda incidentă iar apoi unda reflectată, răspunsul său fiind o combinație a celor două unde. Dacă locul incluziunii este aproape de capătul A, intervalul de timp între cele două unde poate fi atât de scurt încît să aibă loc dublarea amplitudinii răspunsului, iar cînd incluziunea este situată la o distanță x față de capătul A, mai mare decît $v_u \cdot \tau / 2$ (unde v_u este viteza undei în cablu, iar τ este timpul de rezoluție al detectorului), instrumentul de detecție va răspunde separat la cele două unde tranzitorii. Cînd capetele cablului sînt conectate împreună ca în figura 2.51, b fenomenele sînt similare cu cele descrise mai sus din cauza fenomenului de suprapunere a undelor la cele două capete. Reflexiile de la capete sînt în acest caz nesemnificative. Cînd detectorul de descărcare parțială este conectat ca în figura 2.51, c el va răspunde la diferența undelor tranzitorii care sosesc, astfel că nu pot fi detectate descărcările parțiale situate la mijlocul cablului. Din acest motiv această conexiune nu este utilizată.

Pentru eliminarea efectelor de suprapunere, cablul se conectează pe impedanța caracteristică iar detectorul de descărcare parțială se poate conecta la cablu utilizînd detecția pe rezistență în cazul unui aparat de bandă largă sau detecție cu circuit oscilant

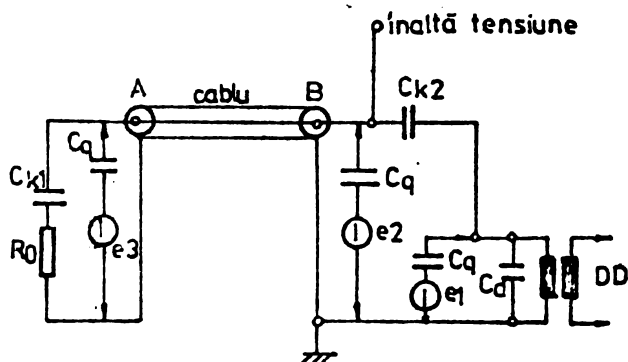
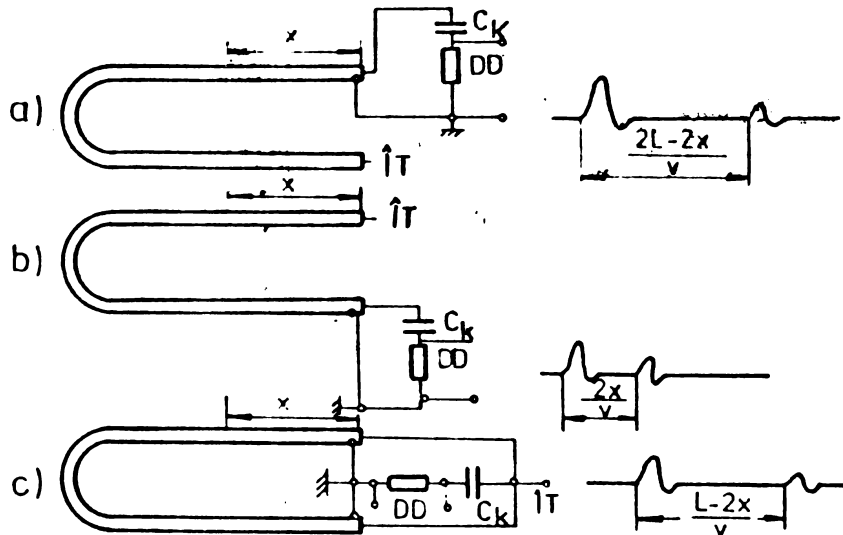


Fig. 2.52

LCR la aparat cu bandă îngustă. În figura 2.52 se indică schema de detectare și măsurare a descărcărilor parțiale la un singur cablu utilizînd un circuit de detecție cu bandă largă. R_0 este rezistorul pentru eliminarea fenomenului de reflexie, iar C_{k1} și C_{k2} sînt condensatoare de cuplare

la tensiunea de încercare ; e_1, e_2, e_3 sînt surse de calibrare conectate prin condensatorul de cuplare C_q . Mărimea descărcării poate fi apreciată prin compararea impulsului descărcării cu un impuls de calibrare.

Localizarea descărcării parțiale cu metoda undei mobile se face folosind circuitul din figura 2.53 efectuînd trei



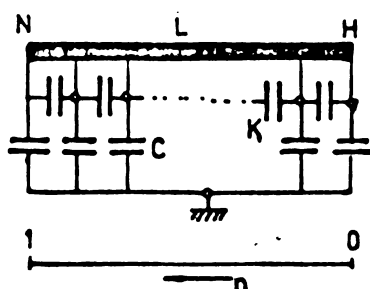
măsurători: de la cele două capete (fig.2.53,a și b) și una cu ambele capetele legate împreună (fig.2.53,c). Intervalele de timp indicate în figura 2.53 între unda incidentă și cea reflectată permit determinarea locului unde este situată descărcarea parțială. Precizia

Figura nr.2.53

localizării este determinată de constanta de timp a amplificatorului și a osciloscopului.

2.5.2. Transformatoare de putere

Transformatorul de forță este, probabil, echipamentul de înaltă tensiune cel mai complex dintre cele supuse la încercările de descărcări parțiale datorită dimensiunilor sale fizice, neuniformităților introduse de izolație și modului de amplasare a conductoarelor. Măsurarea descărcărilor parțiale se poate face numai de la borne, iar izolația nu se poate reprezenta printr-o capacitate echivalentă concentrată, schema echivalentă aproximativă



pentru o înfășurare este aceea din figura 2.54, unde C este capacitatea totală a incluziunii față de pământ, iar K este opacitatea serie totală a înfășurării L este inductivitatea înfășurării, iar n este distanța relativă față de borna H .

Figura nr.2.54

Principalele puncte de conectare a dispozitivului de măsurare a descărcărilor parțiale sînt indicate în figura 2.55. Dacă impedanța de măsură se plasează în punctul A, pe conductorul de legare la pămînt a nulului înfășurării descărcarea parțială produsă la extremitatea de înaltă tensiune a înfășurării va fi puternic amortizată, iar conectarea ei prin intermediul unui condensator de cuplaj în punctul C prezintă inconvenientul necesității a trei astfel de condensatoare la transformatoarele trifazate. Cel mai comod este să se utilizeze borna de măsură a izolatorului de trecere de tip condensator conectînd impedanța de măsură în B.

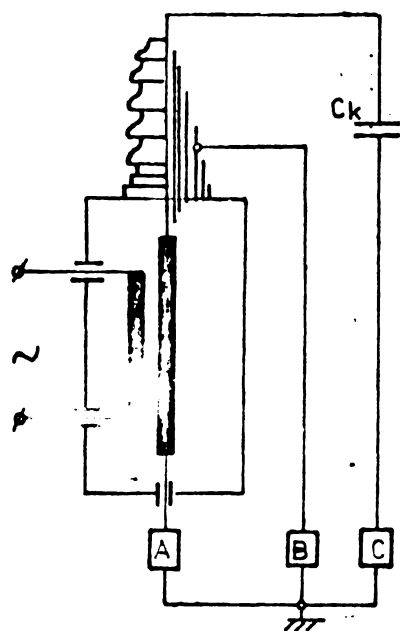


Fig.2.55

Experiențele [14, 91, 106, 227, 245] arată că în funcție de frecvența de măsură a aparatului se pot distinge în general trei zone în comportarea înfășurării transformatorului (fig.2.56). În figură este prezentat răspunsul detectorului raportat la mărimea măsurată, când impulsul se

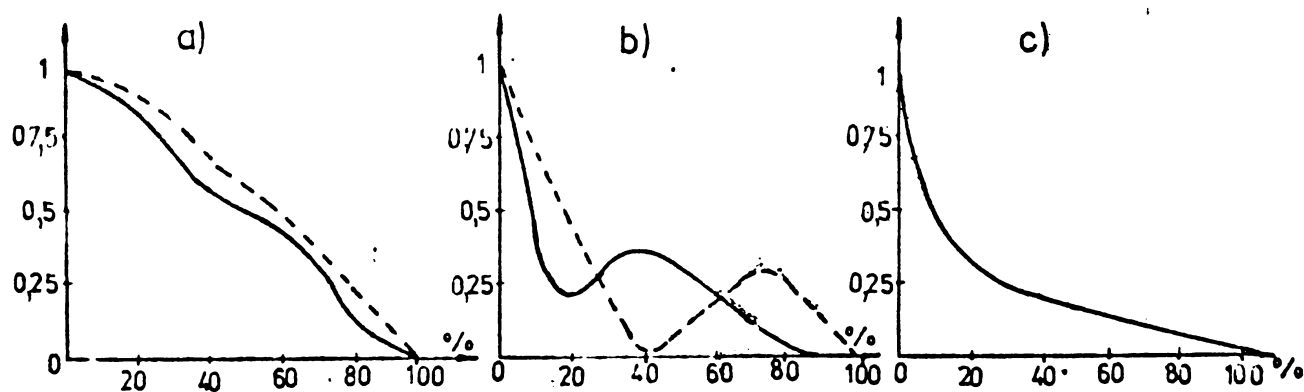


Fig.2.56

aplică pe borna de intrare a transformatorului, în funcție de lungimea raportată a înfășurării în procente. Se distinge:

a) zona 1 - Este situată la frecvențe joase, în general sub 10 KHz unde inductivitatea înfășurării joacă rolul principal, iar atenuarea semnalului este constantă în funcție de frecvență și descrește liniar cu lungimea înfășurării parcurse (fig. 2.56,a); este zona distribuției inductive $f = (7-10)$ KHz;

b) zona 2 - Este zona rezonanțelor. Atenuarea trece prin maxime și minime care depind atât de frecvență cât și de lungimea înfășurării. Această zonă se întinde pînă la 100 KHz la transformatoarele de distribuție și către 200-300 KHz la transformatoarele de înaltă tensiune (fig.2.56,b);

c) zona 3 - Este zona frecvențelor ridicate unde înfășurarea transformatorului se poate lua în considerare numai prin rețeaua de capacități repartizate. Atenuarea are forma din figura 2.56,c pentru transformatoarele de distribuție.

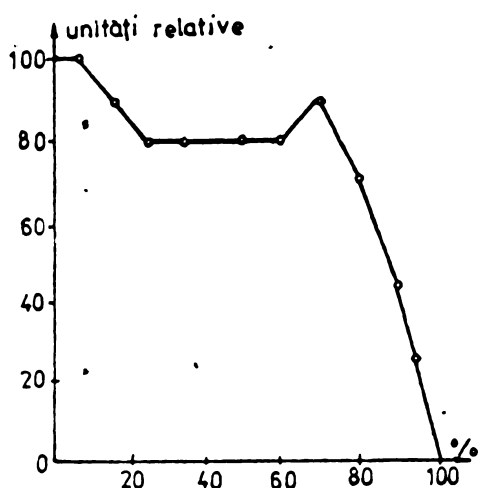


Fig.2.57

In figura 2.57 se indică răspunsul pentru înfășurări în galeți la folosirea unui detector cu bandă relativ largă de 10-50 KHz (ERA model III) unde se obține o valoare practic constantă pentru 80% din înfășurare cînd $\alpha = \sqrt{C/K}$ are valoare mare. Dacă α este mic, răspunsul are alura calculată folosind schema capacitivă a înfășurării similare cu cel din figura 2.56,c.

Analiza transiterii impulsurilor datorate descărcărilor parțiale pe înfășurarea unui transformator în galeți [227] a pus în evidență impulsuri avînd forma celor din figura 2.58. Un astfel de

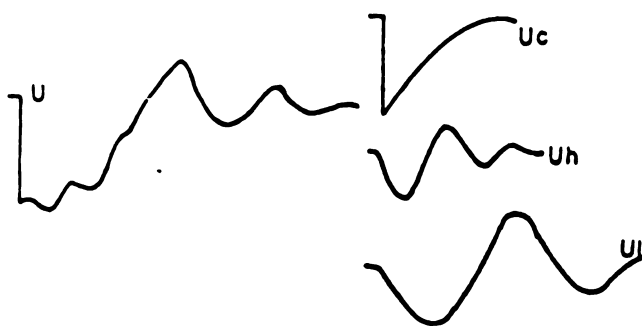


Fig.2.58

impuls se poate descompune în trei oscilații:

U_c - impuls cu front abrupt ce rezultă prin rețeaua capacitivă a înfășurării, la variația bruscă de la locul descărcării. Nu există nici un decalaj între momentul producerii descărcării parțiale și apariția

impulsului transmis capacitiv. Amplitudinea impulsului depinde neliniar de poziția descărcării din înfășurare.

U_h - unda electromagnetică mobilă care se deplasează

în lungul conductorului cu o viteză finită pînă la extremități.

Cu cît lungimea înfășurării parcurse de unda mobilă este mai mare, cu atît apariția undei mobile este întîrziată față de momentul producerii descărcării parțiale (începutul lui U_c).

U_1 - oscilație de frecvență mai joasă produsă de impulsul transmis capacitiv, unda mobilă și efectele de rezonanță ale impedanțelor din circuit. Impedanțele din circuit influențează puternic atît defazajul cît și amplitudinea oscilației de frecvență mai joasă.

Avînd în vedere cele trei oscilații componente ale impulsului recepționat la borne datorită unei descărcări parțiale sînt posibile, în principiu, trei metode de detectare a unei descărcări parțiale și de localizare a ei.

La noi în țară măsurători de descărcări parțiale se fac de prin 1971 de către ICEENERG[143] cu ajutorul unui aparat de bandă largă. Calcule efectuate pe calculatorul IBM-30 au arătat că pentru valori mai mari de 500 pF influența capacității condensatorului de cuplaj asupra amplitudinii semnalului măsurat este foarte mică și de asemenea forma impulsului la bornele aparatului datorită descărcării parțiale variază cu capacitatea condensatorului de cuplare, dar această influență este neglijabilă pentru valori mai mari de 500 pF. Măsurătorile efectuate asupra transformatoarelor de distribuție au scos la iveală nivelele ale descărcărilor parțiale foarte mari (de ordinul miilor și zecilor de mii de pC (la 1,2+1,3 U_m) la transformatoarele avînd tensiuni nominale de 20 kV. La aceste transformatoare s-a constatat procentul cel mai mare de deteriorare în exploatare.

Interpretarea rezultatelor măsurării descărcării parțiale pe transformatoare este extrem de dificilă. În general însă, sarcini de ordinul cîtorva mii de pC indică situații dăunătoare dacă acestea nu se datorează unor perturbații exterioare. Pot fi considerate ca acceptabile valori de ordinul zecilor de pC, chiar dacă acestea pot să reprezinte sute de picocoulombi în interiorul înfășurărilor. În orice caz, pare esențială încercarea la descărcări parțiale cînd sînt introduse elemente noi în izolația unui echipament.

2.5.3. Mașini rotative

Măsurătorile descărcărilor parțiale în izolația statorică a mașinilor rotative de medie tensiune sînt folosite pe larg atît pentru controlul fabricării elementelor componente ale bobinajului, cît și pentru controlul mașinii complet montate. Cum izolația mașinilor rotative este neomogenă mărimea celei mai des măsurate sînt variația tangentei unghiului de pierdere cu tensiunea și debitul mediu pătratic al sarcinilor aparente. În ultimul caz valorile obținute sînt transformate pentru a fi exprimate în unități relative.

Descărcările parțiale apar la mașinile sincrone în trei locuri principale: la extremitățile mașinii și în interiorul izolației, eventual lîngă conductorul de cupru. Dintre acestea, cele mai periculoase sînt ultimele; ele iau naștere în incluziuni gazoase între cupru și izolație sau interiorul izolației. Mărimea acestor descărcări diferă foarte mult fiind în funcție de dimensiunile și forma incluziunilor, natura și presiunea gazului din interior, conductivitatea pereților incluziunii și eventual forma electrodului de cupru precum și de temperatura de aer din mașină și valoarea maximă a intensității cîmpului electric prevăzută de constructor.

Prima și cea mai veche metodă de măsură este metoda punții Shering, cu conectarea detectorului de descărcări parțiale (aparat de măsurare a debitului pătratic) ca în figura 2.59. În general ca detectoare de descărcări parțiale se folosesc aparate acordate cu bandă îngustă, frecvența medie a benzii fiind 130 KHz sau la 10 KHz [105, 121, 243].

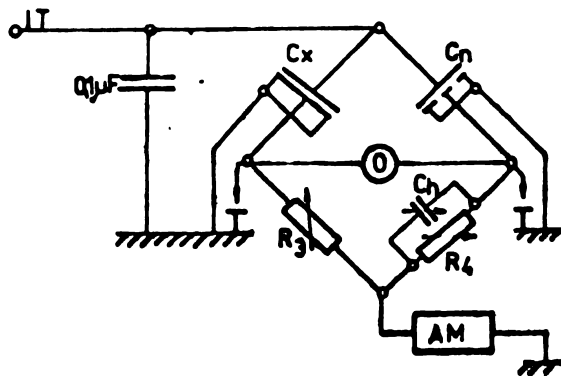


Fig.2,59

Primul a fost aparatul de 130 KHz, dar după studiul repartiției tensiunii pe înfășurarea mașinii efectuat de Gelez s-a trecut la folosirea aparatului de 10 KHz. În figura 2.60 este prezentată repartiția tensiunii în lungul înfășurării unei faze

pentru un generator de 10 kV, 3,5 MVA. Pentru frecvențe mai mari sau egale cu 20 KHz se observă fenomene de rezonanță și de propa-

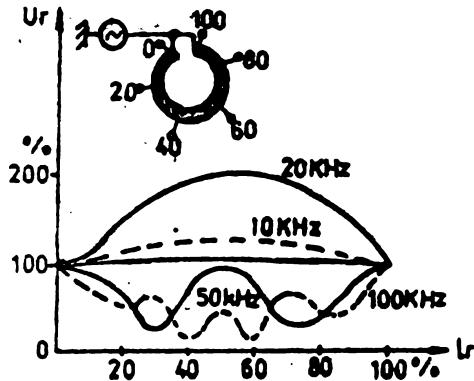


Fig. 2.60.

gare a undelor, astfel încât înfășurarea nu mai poate fi considerată concentrată. Pentru evitarea acestor fenomene de propagare a fost aleasă pentru aparatul de măsură o frecvență de 10 KHz cu o bandă de trecere de 200 Hz și detecție pătratică obținută cu ajutorul unei diode.

Criteriile de apreciere a calității izolației sînt următoarele:

- Variația tangentei unghiului de pierderi $\text{tg } \delta$ în miimi și luată între două limite: $0,2 U_n$ și $0,8 U_n$.
- Variația capacității $\Delta C/C$ exprimată în procente, cele două limite extreme de măsurare fiind $0,2 U_n$ și $1,4 U_n$.
- Debitul pătratic raportat al descărcărilor parțiale exprimat în decibeli deasupra bazei de un nanocoulomb pătrat per secundă per farad.

Valoarea debitului pătratic se ia la tensiune de $0,6 U_n$ sau $U_n/\sqrt{3}$ care este tensiunea maximă de funcționare, la U_n sau $1,5 U_n$.

Criteriul debitului pătratic este în general cel mai semnificativ privind deteriorarea prin descărcări parțiale; se poate considera periculos un nivel mai mare cu mai mult de 10 dB față de valoarea măsurată pe bare de același tip.

Este important de remarcat că toate aceste criterii sînt globale, fiind nesigură aprecierea dacă nivelul ridicat al descărcărilor se datorează unor descărcări puține de mare amplitudine sau unor descărcări numeroase dar de amplitudine redusă. Izolația, îndeosebi pe bază de mică, a mașinilor rotative este mult mai rezistentă la descărcări parțiale decît materialele organice, fiind lipsită de sens pretenția ca izolația statorului să fie complet lipsită de descărcări. Producătorul poate prin efectuarea măsurătorilor de descărcări parțiale să-și asigure constanța fabricației.

CAPITOLUL III

PROBLEME DE CIMP ÎN MEDII DIELECTRICE NEOMOGENE ÎN LEGĂTURA CU DESCĂRCĂRILE PARTIALE

3.1. Aspecte generale

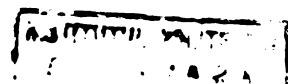
Apariția și desfășurarea fenomenului de descărcare parțială în izolația unui echipament electric este determinată de sollicitarea electrică, respectiv de spectrul câmpului electric din material, iar la rândul său, prin canalul de descărcare, deteriorarea ce o provoacă acest fenomen modifică continuu acest spectru pînă ce se ajunge ca în final intensitatea câmpului electric dintr-o porțiune a materialului să depășească rigiditatea dielectrică a acestuia, ducînd la străpungerea electrică.

Apariția fenomenului de descărcare parțială într-o incluziune se produce atunci cînd într-o porțiune a incluziunii, diferența de potențial între oricare două puncte ale incluziunii atinge tensiunea de străpungere a mediului din incluziune 2 (fig.2.17,a):

$$\int_A^B \vec{E} d\vec{l} = U_{str. AB} \quad (3.1)$$

Relația (3.1) presupune cunoașterea spectrului câmpului electric în incluziune și a valorii U_{str} în lungul porțiunii de drum AB. Tensiunea de străpungere a unui interval gazos depinde la rândul său de aspectul câmpului electric. Dacă în cîmp electric uniform tensiunea de străpungere satisface legea lui Paschen, în schimb în cîmp electric neuniform curbele de variație ale tensiunii U_{str} în funcție de distanță sînt diferite, fiind în general situate sub curba corespunzătoare câmpului uniform.

În timpul descărcării parțiale, prin legătura conductoare realizată de canalul descărcării (fig.2.17,b), o porțiune a materialului izolant e scurtcircuitată, restul materialului izolant situat în tubul de cîmp al canalului de descărcare fiind supra-solicitat cu atît mai mult cu cît lungimea canalului de descărcare



este mai mare. Prin urmare, solicitarea la care este supus materialul electroizolant crește cu creșterea grosimii incluziunii, dar după cum se observă din figura 2.3, cu creșterea grosimii incluziunii sarcina electrică transferată în incluziune scade, dacă suprafața incluziunii se păstrează aceeași. În schimb, se observă că sarcina aparentă a descărcării parțiale (fig.2.4) crește cu creșterea grosimii incluziunii, ceea ce ne determină să considerăm oportună din acest punct de vedere caracterizarea descărcării prin sarcina ei aparentă.

După stingerea descărcării, în ipoteza unei tensiuni reziduale nule, intensitatea câmpului electric în incluziune devine nulă, deci incluziunea se comportă ca un domeniu echipotențial, ceea ce face ca spectrul câmpului electric să fie altul decât cel din figura 2.17, a sau b. Cum însă modelul descărcării parțiale (fig.2.1 și 2.2) are la bază capacitatea incluziunii și rezistența acesteia, precum și capacitatea și rezistența materialului izolant situat în tubul de câmp ce conține incluziunea rezultă că parametrii R_1 , R_2 , C_1 și C_2 ai schemelor electrice echivalente din figurile 2.1 și 2.2 sînt variabili în timpul descărcării depinzînd de însăși faza în care se află incluziunea în timpul desfășurării fenomenului descărcării parțiale.

Considerațiile anterioare relevă interdependența strînsă dintre câmp și descărcarea parțială ce are loc în incluziunile materialelor electroizolante și cu toate că în cele de mai sus nu s-au avut în vedere aspectele legate de radiația electromagnetică ce însoțește descărcarea parțială rezultă necesitatea cunoașterii spectrului câmpului electric în cel puțin trei situații (însă înainte de descărcare, în timpul descărcării, imediat după descărcare) pentru o analiză cît mai realistă a desfășurării fenomenului de descărcare parțială și determinarea parametrilor ce influențează acest fenomen.

3.3. Rezolvarea analitică a problemei câmpului electric:

Determinarea intensității câmpului electric în regim staționar într-un domeniu dat impune rezolvarea ecuațiilor:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

unde, pentru medii omogene, izotrope și liniare $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Exprimînd intensitatea câmpului electric sub forma specifică unui câmp potențial $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$, se ajunge la ecuațiile Poisson sau Laplace, care în coordonate carteziane sînt:

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = -\rho / \epsilon \quad (3.3)$$

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = 0 \quad (3.4)$$

cu condiții de tip Dirichlet sau Neumann pe frontiera domeniului.

Rezolvarea directă a ecuațiilor (3.3), (3.4) este posibilă numai în cazul unor configurații simple, simetrice ale domeniului de studiat, uneori fiind utilă scrierea ecuațiilor (3.3) și (3.4) în coordonate cilindrice sau sferice.

Multe situații pot fi de asemenea soluționate prin metode analitice, cum ar fi:

- metode imaginilor electrice, în cazul când influența frontierelor domeniului se poate înlocui printr-un sistem de sarcini echivalent care să nu modifice situația de pe frontieră;

- metoda funcțiilor analitice, bazată pe proprietatea funcțiilor de variabilă complexă de a satisface condițiile Cauchy - Riemann, în cazul unor suprafețe de frontieră conductoare descrise de curbele $V=ct$ sau $U=ct$.

- metoda reprezentărilor conforme ce dă posibilitatea determinării câmpului unor electrozi formați din segmente de linie dreaptă, cercuri sau porțiuni eliptice;

- metoda separării variabilelor ce se poate aplica la rezolvarea ecuațiilor Laplace sau Poisson scrise într-un sistem de coordonate astfel încât suprafața de frontieră a domeniului să coincidă cu suprafețele de coordonate ale sistemului respectiv.

3.3. Rezolvarea numerică a problemelor de câmp electric

Rezolvarea câmpului electric în majoritatea problemelor practice, legate de proiectarea și realizarea echipamentului electric de înaltă tensiune, cât și de fenomenul de descărcări parțiale ce se poate produce în incluziunile materialului izolant, este posibilă practic pe cale numerică. Aceasta deoarece mediul este neomogen sau omogen pe porțiuni, iar forme electrozilor sau a suprafețelor de separație între medii cu caracteristici diferite este complicată. Cele mai răspândite metode numerice de calcul a câmpului electric sînt: metoda diferențelor finite (m.d.f), metoda elementelor finite (m.e.f), metoda ecuațiilor integrale (m.e.i) și metoda

sarcinilor echivalente (m.e.s).

Pentru problema descărcărilor parțiale în incluziuni prezintă un interes deosebit determinarea intensității câmpului electric maxim în domeniul studiat, a intensității câmpului electric în interiorul incluziunilor și în materialul izolant din jurul incluziunilor, fiind cunoscute de obicei valorile potențialului pe suprafețele electrozilor, sau sarcinile electrice ale unor electrozi (ecrane). Se impune de asemenea determinarea intensității câmpului electric cu o precizie bună (5%) sau cel mai adesea înaltă (1%).

După cum se știe [107] metodele numerice au fiecare anumite avantaje și limitări în funcție de mai multe considerente.

Metodele diferențelor finite și elementelor finite se pot aplica la calculul câmpurilor bidimensionale și tridimensionale în medii omogene pe porțiuni; în timp ce metoda sarcinilor echivalente se aplică pentru calcul în medii omogene. Metoda ecuațiilor integrale este de asemenea indicată pentru determinarea câmpului electric în domenii complicate cu medii omogene pe porțiuni, înăă creșterea numărului frontierelor de separație între diferiți izolantă duce la creșterea deosebită a volumului de calcul.

Dimensiunile domeniului de studiat trebuie să fie finite în cazul m.d.f. și m.e.f., deoarece acestea se bazează pe divizarea domeniului studiat pe subdomenii, în timp ce metoda sarcinilor echivalente și a ecuațiilor integrale se poate aplica și în cazul unor domenii nelimitate cu condiția ca suprafețele de calcul a sarcinilor să fie finite.

Soluțiile la m.d.f. și m.e.f. se obțin sub forma valorilor potențialului în anumite puncte nodale, iar intensitatea câmpului electric se poate determina apoi pe baza acestor valori nodale cu ajutorul unor formule aproximative, ceea ce scade precizia de determinare a intensității câmpului electric față de a potențialului. La utilizarea m.s.e. soluțiile se obțin sub forma unor sarcini fictive, iar la m.e.i. soluțiile sînt sub forma distribuției unei densități de suprafață a sarcinilor electrice pe frontierele de separație a mediului iar câmpul electric se poate determina prin calcule suplimentare.

La utilizarea m.d.f. și m.e.f. matricea sistemului de ecuații algebrice este simetrică și pozitivă determinată, în formă de bandă, banda matricii putînd conține un mare număr de zerouri dar la m.e.i. și m.s.e. matricea coeficienților este plină și în cazul general nesimetrică.

Pentru alcătuirea sistemului de ecuații algebrice liniare la m.d.f. și m.e.f. de ordinul I , sînt necesare aproximativ $20 N \cdot m$ operații, unde N este numărul de noduri iar m este semilățimea benzii matricii coeficienților (N și m pot să difere foarte mult între m.d.f. și m.e.f. la aceeași precizie). Pentru rezolvarea acestor sisteme de ecuații sînt necesare în general $2N(m^2 + 3m + 1)$ operații aritmetice. La m.e.i. formarea sistemului necesită circa $300 N^2$ operații iar rezolvarea lui $2N(N+1)(N+2)/3 + N(N-1)$ în timp ce m.s.e. necesită un număr de operații cu un ordin mai mic.

Considerațiile prezentate cît și unele aspecte legate de volumul memoriei necesare calculatorului electronic, timpul de pregătire al datelor inițiale și timpul de prelucrare al rezultatelor ne conduce la concluzia că pentru determinarea cîmpului electric în incluziunile unui material izolant și în porțiunea învecinată incluziunii sînt eficiente m.e.f. și m.d.f.

3.4. Metoda diferențelor finite

Rezolvarea unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea de tip eliptic, cum sînt ecuațiile lui Laplace, și Poisson se face prin aproximarea ecuației în domeniul studiat prin ecuații în diferențe finite. De exemplu, ecuației lui Laplace în plan:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (3.5)$$

îi corespunde în cazul mai general, cînd nodul central O este înegal distanțat de punctele vecine 1,2,3,4 [209, 210] ecuația în diferențe finite (fig.3.1):

$$\frac{1}{K_1 + K_3} \left(\frac{V_1}{K_1} + \frac{V_3}{K_3} \right) + \frac{1}{K_2 + K_4} \left(\frac{V_2}{K_2} + \frac{V_4}{K_4} \right) - \left(\frac{1}{K_1 K_3} + \frac{1}{K_2 K_4} \right) V_0 = 0 \quad (3.6)$$

iar în cazul cînd ecuația este de tip Poisson membrul drept al relației se înlocuiește cu $h^2 f_0(x,y)/2$.

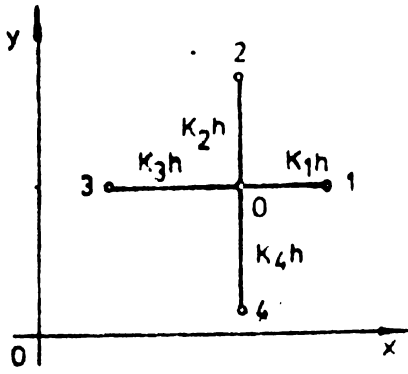


Fig. 3.1

Pentru a aplica metoda diferențelor finite, domeniul D studiat se divide într-o rețea dreptunghiulară sau de cele mai multe ori pătrată. În fiecare nod interior al domeniului se aplică relația (3.6), unde se ține seama că la o rețea pătrată $K_1=K_2=K_3=K_4$, iar la o rețea dreptunghiulară $K_1=K_3, K_2=K_4$. În nodurile

situate în imediata apropiere a frontierei este necesar să se aplice relația (3.6), iar la nodurile interioare situate pe suprafețele de discontinuitate ale mediului este necesară aplicarea condițiilor de trecere (continuitate) pentru câmpul considerat [209]. Se obține în astfel un sistem avînd numărul de ecuații egal cu numărul total de noduri din interiorul domeniului, necunoscutele fiind valorile potențialului în aceste noduri. În figura 3.2, c se prezintă soluția problemei determinării câmpului electric într-o incluziune azoasă de secțiune dreptunghiulară situată între plăcile unui condensator plan unde se află un mediu izolant de permittivitate $\epsilon_r = 5$ (fig. 3.2, a). Deoarece problema are două

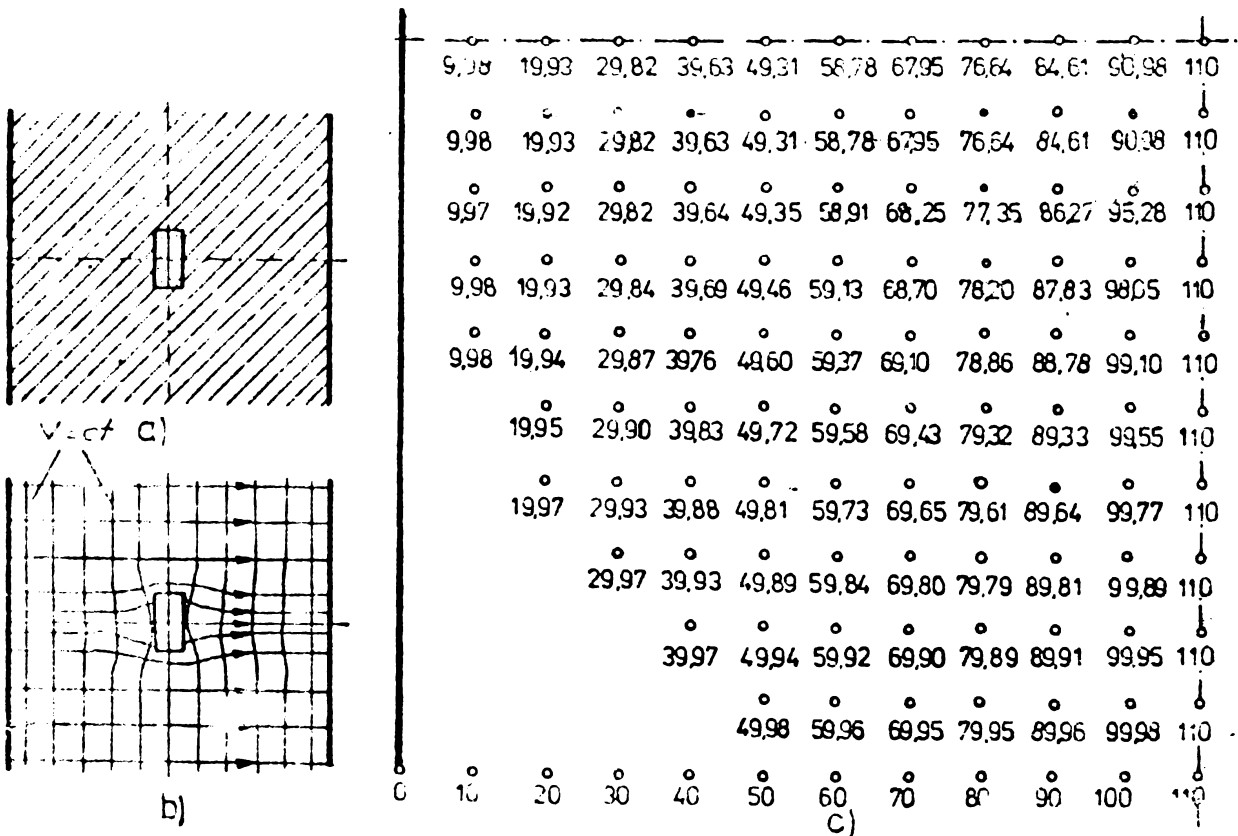


Fig. 3.2.

plane de simetrie calculele au fost efectuate pentru un sfert din domeniu. In figura 3.2,b este prezentat spectrul liniilor de câmp și al liniilor echipotențiale, unde s-a ținut seama că la suprafața de trecere în incluziune componenta normală a intensității câmpului electric este de 5 ori mai mare decât în dielectric. Deși problema presupune determinarea a 120 de valori nodale ale potențialului, distribuția câmpului electric în incluziune este numai aproximativ stabilită datorită dimensiunilor mici ale incluziunii. O îmbunătățire a soluției se poate obține prin alegerea unei rețele cu pas mai mic.

3.5. Calculul câmpurilor electrice cu metoda elementelor finite

3.5.1. Formulara variațională a problemei câmpului

Metoda elementelor finite, utilizată la început în mecanică la calculul structurilor, utilizată și în electrotehnică la determinarea unor câmpuri electromagnetice, se bazează pe formulara variațională a problemei conform ecuației lui Euler. Din punct de vedere matematic determinarea minimumului funcționalului [57, 139, 127] :

$$F = -\frac{1}{2} \int_V \text{grad } \varphi \cdot \bar{K} \text{ grad } \varphi \, dv - \int_V q \varphi \, dv - \int_{S_2} q_s \varphi \, ds \quad (3.7)$$

este echivalent cu a determina soluția ecuației:

$$\text{div } \bar{K} \text{ grad } \varphi + q = 0 \quad (3.8)$$

unde φ este mărimea necunoscută, \bar{K} este un tenzor simetric care descrie proprietățile fizice ale mediului, iar q este o funcție cunoscută de coordonatele x, y, z . Ecuației (3.8) îi sînt asociate condiții de frontieră de tip Dirichlet:

$$\varphi = \varphi_s \quad (3.9)$$

φ_s fiind valoarea funcției φ pe suprafețele de frontieră; sau condiții de tip Neumann:

$$\bar{K} \text{ grad } \varphi \cdot \bar{n} = q_s \quad (3.10)$$

unde de asemenea q_s este o funcție cunoscută pe suprafețele de frontieră.

In acest fel rezolvarea ecuației lui Poisson în coordonate carteziene:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (3.11)$$

cu condiții de frontieră $V(S_1) = V_{S_1}$ și $(\frac{\partial V}{\partial n})_{S_2} = -E_n(S_2)$ este echivalentă cu determinarea minimumului funcționalei:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon (\text{grad } V)^2 \cdot dv - \int_V \rho_v V dv - \int_{S_2} \epsilon \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right) V \cdot ds \quad (3.12)$$

unde V este volumul domeniului studiat, iar S_2 este suprafața de frontieră pe care sînt impuse condiții de tip Neumann. Condiția de tip Dirichlet nu apare în formă explicită în expresia funcționalei, aceasta fiind o condiție naturală (ce se îndeplinește automat) în procesul de minimizare al funcționalei. Cazul particular al ecuației Laplace ducă la o expresie a funcționalei în care lipsește termenul al doilea ($\rho_v=0$). Expresia de sub semnul integral al primului termen reprezintă în cazul câmpurilor electrostatice, densitatea volumetrică a energiei electrostatice în domeniul studiat, ceea ce înseamnă că soluția câmpului este aceea care face minimă energia electrostatică a sistemului considerat, un principiu energetic bine cunoscut în fizică.

Ecuația Laplace în coordonate cilindrice r, φ și z :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.13)$$

asociată cu condiții de frontieră de tip Dirichlet sau Neumann presupune minimizarea funcționalei:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \left[r \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + r \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dV - \int_{S_2} \epsilon \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right) \cdot V \cdot ds \quad (3.14)$$

iar pentru cazul ecuației Laplace în coordonate sferice:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3.15)$$

corespunde funcționala:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \left[r^2 \sin \theta \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \sin \theta \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 \right] dV \quad (3.16)$$

La rezolvarea problemelor cu condiții de frontieră de tip Dirichlet termenul referitor la suprafața S_2 cu condiții de tip Neumann dispare. De asemenea în cazul problemelor plane domeniul de studiat D este o suprafață S pe care se consideră integrala, iar condițiile de frontieră se dau pe curbele ce limitează suprafața S . De exemplu rezolvarea ecuației Laplace în spațiu, în cadrul problemelor cu simetrie plan mediană $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, presupune minimizarea funcționalei:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_S \varepsilon \left[r \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + r \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] ds - \int_{C_2} \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{C_2} \cdot V \cdot ds \quad (3.17)$$

unde C_2 este porțiunea de frontieră a domeniului S în care sînt date condiții de tip Neumann. Similar, determinarea cîmpului electric în spațiu, în cazul simetriei sferice $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, presupune determinarea funcției V care minimizează funcționala:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_S \varepsilon \left[r^2 \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 \right] ds - \int_{C_2} \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{C_2} \cdot V \cdot ds \quad (3.18)$$

3.5.2. Procedeul Rayleigh-Ritz

Pentru determinarea minimului funcționalei:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \cdot \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dV - \int_V \rho_V \cdot V \cdot dV \quad (3.19)$$

corespunzătoare rezolvării unei ecuații de tip Poisson cu condiții de frontieră de tip Dirichlet se presupune că funcția necunoscută V poate fi aproximată printr-o combinație liniară a unor funcții de coordonate liniar independente $f_0, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), \dots, f_n(x, y, z)$, convenabil alese astfel încît să satisfacă condițiile de frontieră ale problemei date, adică [57]:

$$\underline{V} = f_0(x, y, z) + C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f_2(x, y, z) + \dots + C_n f_n(x, y, z) \quad (3.20)$$

unde coeficienții constanți C_1, C_2, \dots, C_n urmează a fi determinați astfel, încît aproximația \underline{V} să realizeze minimul funcționalei (3.19). Înlocuind funcția V prin aproximația ei \underline{V} dată de (3.20) în expresia funcționalei (3.19), aceasta se transformă după efectuarea integralelor pe domeniul V considerat într-o funcție:

$$\underline{E} = \underline{E}(C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (3.21)$$

avînd drept variabile constantele C_1, C_2, \dots, C_n . Minimul acestei funcții de mai multe variabile se obține prin rezolvarea sistemului de ecuații:

$$\frac{\partial E}{\partial C_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.22)$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (3.22) rezultă valorile coeficienților necunoscuți C_i și deci soluția aproximativă V a potențialului în domeniul studiat.

Funcțiile f_0, f_1, \dots, f_n se numesc funcții de formă, ele pot fi polinoame complete de gradul 1, 2, 3 sau mai mare, sau alte funcții (de exemplu funcții asimptotice) care să satisfacă condițiile pe frontieră ale problemei date.

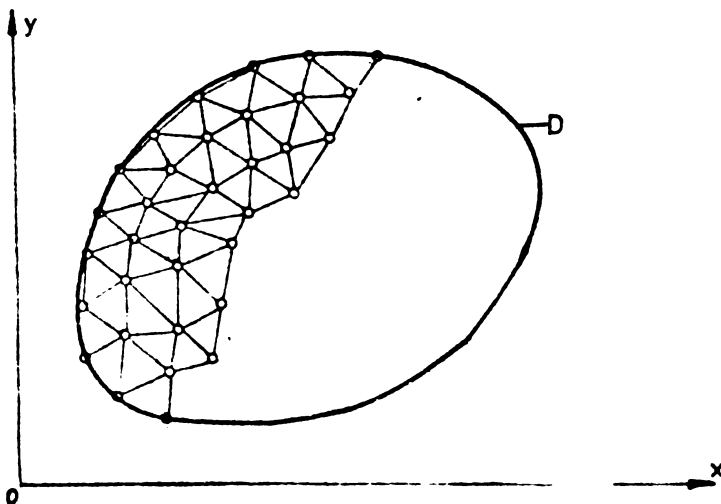
Cel mai des se utilizează funcții de formă polinomială de gradul 1, 2, 3 sau 5 [236], în cazul problemelor de determinare a unor câmpuri electrice, sau funcții de formă asimptotice [43].

3.5.3. Metoda elementelor finite

Se descrie metoda elementelor finite, bazată pe procedeul Rayleigh-Ritz de minimizare a unei funcționale pentru cazul rezolvării ecuației de tip Laplace (3.5) în plan, cu condiții de frontieră de tip Dirichlet, cînd este cunoscută valoarea funcției potențialului pe frontiera domeniului. Rezolvarea ecuației (3.5) este echivalentă cu determinarea minimului funcționalei

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_S \mathcal{E}(\text{grad } V)^2 \, dS \quad (3.23)$$

unde S este suprafața domeniului D studiat. Domeniul D se divide într-un număr finit de elemente finite, care pot fi de formă oarecare (dreptunghiuri, patrute, paralelograme, triunghiuri, elemente curbilinii etc). Să considerăm domeniul D divizat într-o rețea de



triunghiuri oarecare (fig. 3.3). Funcționala 3.23 se poate exprima în acest caz ca o sumă de funcționale, corespunzătoare fiecărui element finit din domeniu:

Fig. 3.3

$$\mathcal{F} \approx \mathcal{F}(V) = \sum_{m=1}^M \mathcal{F}_m(V) \quad (3.24)$$

unde M este numărul total de elemente finite din domeniu.

Divizarea efectuată, precum și aplicarea relației (3.24) este posibilă numai dacă este asigurată continuitatea funcției potențiale V între oricare două elemente finite vecine. Acest lucru se realizează prin alegerea corespunzătoare a funcțiilor de formă ce servesc la aproximarea variației potențialului în interiorul fiecărui element finit. Aceste funcții de formă fiind de obicei polinoame, se poate asigura continuitatea funcției U la trecerea de la un element finit la altul făcând să coincidă aceste funcții în câteva puncte ale frontierei celor două elemente finite.

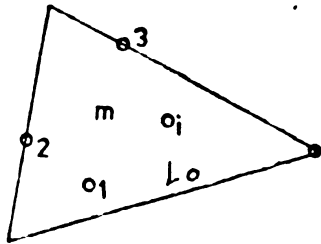


Fig. 3.4.

Astfel, în elementul finit oarecare m (fig. 3.4) alegem L puncte nodale $1, 2, \dots, l, \dots, L$. Fie $V_{m_1}, V_{m_2}, \dots, V_{m_L}$ valorile potențialului în aceste puncte nodale. Valoarea potențialului într-un punct oarecare (x, y) al elementului finit m se poate exprima în funcție de aceste valori nodale ale potențialului, astfel:

$$V_m(x, y) = f_{m_1} \cdot V_{m_1} + f_{m_2} \cdot V_{m_2} + \dots + f_{m_L} \cdot V_{m_L} \quad (3.25)$$

unde $f_{m_i}(x, y)$ sînt funcții de formă convenabil alese. În cazul unei legi de variație polinomială a potențialului în interiorul elementului finit m , pentru a asigura continuitatea potențialului între elementele finite este necesar ca pe latura comună celor două elemente finite valorile potențialului să coincidă în $n+1$ puncte dacă polinomul de interpolare are gradul n . Deosebit din acest punct de vedere triunghiuri de ordinul 1 în interiorul cărora potențialul are o variație liniară, elemente finite triunghiulare de ordinul 2 în interiorul cărora potențialul are o variație parabolică, triunghiuri de ordinul 3 în interiorul cărora potențialul are o variație cubică ș.a.m.d. În figura 3.5. sînt prezentate elemente finite triunghiulare de ordinul 1, 2 și 3 cu dispunerea punctelor nodale astfel încît să se asigure continuitatea potențialului între oricare două elemente finite vecine. La elementul

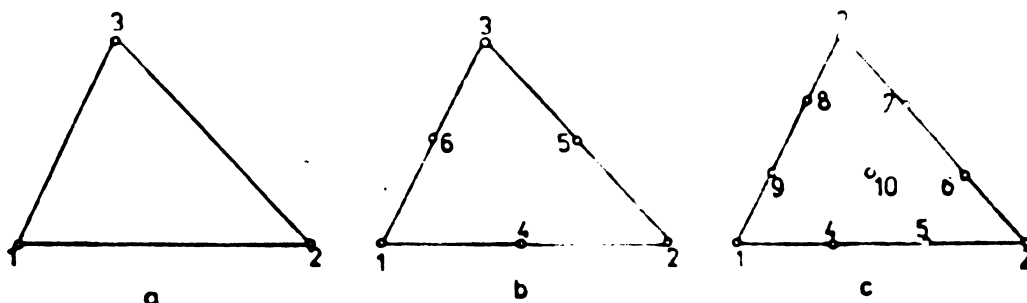


Fig. 3.5

finit de ordinul 3 este necesară introducerea unui nod central 10 pentru ca polinomul de interpolare al funcției potențiale să fie complet.

Funcționala $\tilde{F}_m(V)$ corespunzătoare elementului finit m din relația (3.24) este:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_m(V) &= \frac{1}{2} \int_{S_m} \varepsilon (\text{grad } V)^2 ds = \frac{1}{2} \int_{S_m} \varepsilon \left[(\partial V / \partial x)^2 + (\partial V / \partial y)^2 \right] dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_m} \varepsilon \left[\left(\sum_{i=1}^L \frac{\partial f_{mi}}{\partial x} \cdot V_{mi} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^L \frac{\partial f_{mi}}{\partial y} V_{mi} \right)^2 \right] dx dy\end{aligned}$$

Cu aceasta, expresia (3.24) a funcționalei întregului domeniu studiat devine:

$$F(V) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{2} \int_{S_m} \varepsilon \left[\left(\sum_{i=1}^L (\partial f_{mi} / \partial x) V_{mi} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^L (\partial f_{mi} / \partial y) V_{mi} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.26)$$

Sub forma (3.26) funcționala (3.23) s-a transformat într-o funcție de mai multe variabile $V_{m1}, V_{m2}, \dots, V_{mL}$ pentru fiecare element finit m ceea ce pentru întregul domeniu D înseamnă o funcție având drept variabile valorile potențialului în cele N puncte nodale ale domeniului V_1, V_2, \dots, V_N .

Condiția de minim a funcționalei (3.23) se reduce astfel la minimul funcției de mai multe variabile (3.26) care se determină rezolvînd sistemul de ecuații:

$$\partial F(V) / \partial V_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3.27)$$

care este un sistem liniar de N ecuații cu N necunoscute, necunoscutele fiind valorile potențialului în cele N puncte nodale ale domeniului considerat.

Derivata funcționalei unui element finit m în raport cu valoarea V_k a potențialului din nodul K are forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_m}{\partial V_k} &= \int_{S_m} \varepsilon \left[\left(\sum_{i=1}^L \frac{\partial f_{mi}}{\partial x} V_{mi} \right) \frac{\partial f_{mk}}{\partial x} + \left(\sum_{i=1}^L \frac{\partial f_{mi}}{\partial y} V_{mi} \right) \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial y} \right] dx dy = \\ &= \int_{S_m} \varepsilon \cdot \left[\sum_{i=1}^L V_{mi} \left(\frac{\partial f_{mi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial f_{mi}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial y} \right) \right] dx dy = \\ &= \sum_{i=1}^L V_{mi} \int_{S_m} \varepsilon \left(\frac{\partial f_{mi}}{\partial x} \frac{\partial f_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial f_{mi}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.28)\end{aligned}$$

Dacă nodul K aparține la M_1 elemente finite, atunci ecuația generală a sistemului (3.27) corespunzătoare punctului nodal K va fi:

$$\sum_{m=1}^{M_1} \partial F_m / \partial V_K = 0 \quad \text{adică:}$$

$$\sum_{m=1}^{M_1} \sum_{l=1}^L \int_{S_m} \varepsilon \left(\frac{\partial f_{mi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial f_{mi}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial y} \right) \cdot V_{mi} \, dx \, dy = 0 \quad (3.29)$$

$(K = 1, 2, \dots, N)$

Rezolvînd sistemul de ecuații (3.29) se obțin valorile nodale ale potențialului în cele N puncte ale domeniului studiat. Valoarea potențialului în interiorul oricărui element finit m se poate determina cu ajutorul relației (3.25). De remarcat faptul că ecuația generală a sistemului minimizant (3.29) dedusă mai sus este valabilă oricare ar fi forma elementului finit. Pentru forme ale elementelor finite date și pentru funcții de formă convenabil alese toate mărimile care apar în ecuația (3.29) pot fi calculate. Problema studiată este complet precizată dacă în punctele nodale situate pe frontiera domeniului valorile potențialului se aleg egale cu valorile potențialului pe frontieră în acele puncte. Prin aceasta numărul total de puncte nodale K în care valorile potențialului sînt necunoscute și numărul N de ecuații ale sistemului (3.29) se reduce cu numărul de puncte nodale situate pe frontiera domeniului.

3.5.4. Funcții de formă ale elementelor finite triunghiulare

3.5.4.1. Procedeu general de obținere a funcțiilor de formă

Vom deduce funcțiile de formă pentru elemente finite triunghiulare de ordinul 1. Continuitatea funcției potențiale este asigurată la frontiera dintre două elemente finite vecine prin alegerea a două puncte nodale pe latura triunghiului, deoarece două polinoame de gradul 1 coincid cînd trec prin aceleași două puncte. Este convenabil să se aleagă drept puncte nodale vîrfurile triunghiului (fig.3.6). Se presupune că potențialul V variază liniar în interiorul elementului finit, prin urmare intensitatea cîmpului electric este constantă în interiorul elementului finit. Rezultă

de aici necesitatea divizării atente a domeniului studiat, astfel încât dimensiunile elementelor finite să fie mai mici în zonele unde

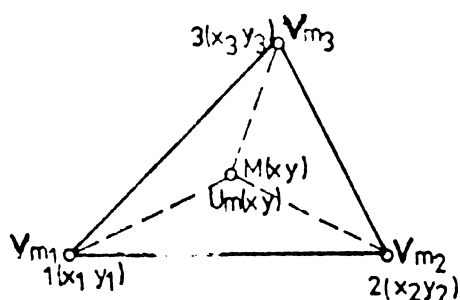


Fig. 36

se presupune că există variații rapide ale intensității câmpului electric (linii echipotențiale cu rază mică de curbură). Cele spuse mai sus înseamnă că la problemele plane liniile de câmp și cele echipotențiale sînt aproximate prin mici segmente de dreaptă, iar la problemele spațiale suprafețele echipotențiale sînt aproximate prin niște mici fețe triunghiulare. Valoarea potențialului într-un punct $M(x, y)$ din interiorul triunghiului se scrie:

$$V_m = f_{m1} V_{m1} + f_{m2} V_{m2} + f_{m3} V_{m3} \quad (3.30)$$

unde V_{m1}, V_{m2}, V_{m3} sînt valorile potențialului în vîrfurile 1, 2, 3 ale elementului finit m . Matricial relația (3.30) se scrie:

$$V_m = \|F_m\| \cdot \|V_m\| \quad (3.31)$$

unde matricile $\|F_m\|$ și $\|V_m\|$ ale elementului finit m sînt, matricea funcțiilor de formă:

$$\|F_m\| = \|f_{m1} \ f_{m2} \ f_{m3}\| \quad (3.32)$$

și matricea coloană a valorilor nodale ale potențialului elementului finit m :

$$\|V_m\| = \begin{Bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \\ V_{m3} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Domeniul studiat D , divizat în M elemente finite și avînd N puncte nodale, are în mod similar o matrice coloană a potențialelor:

$$\|V\| = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Cum V_m este o funcție liniară de x și y se poate scrie:

$$V_m = A_1 + A_2 x + A_3 y = \|1 \ x \ y\| \cdot \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Condiția (3.35) fiind valabilă în orice punct al elementului finit n avem:

$$\begin{aligned} V_{n1} &= A_1 + A_2 x_{n1} + A_3 y_{n1} \\ V_{n2} &= A_1 + A_2 x_{n2} + A_3 y_{n2} \\ V_{n3} &= A_1 + A_2 x_{n3} + A_3 y_{n3} \end{aligned} \quad \text{sau } \left\| V_n \right\| = \begin{vmatrix} 1 & x_{n1} & y_{n1} \\ 1 & x_{n2} & y_{n2} \\ 1 & x_{n3} & y_{n3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} \quad (3.36)$$

Rezolvând sistemul (3.36) în raport cu A_1, A_2, A_3 avem:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_{n1} & y_{n1} \\ 1 & x_{n2} & y_{n2} \\ 1 & x_{n3} & y_{n3} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{vmatrix} \quad (3.37)$$

Ținând seama de (3.37), potențialul V_n dat de relația (3.31) devine:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{n1} & y_{n1} \\ 1 & x_{n2} & y_{n2} \\ 1 & x_{n3} & y_{n3} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{vmatrix} \quad (3.38)$$

Comparând relațiile (3.38) cu (3.31) rezultă matricea funcți de formă:

$$\left\| F_n \right\| = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{n1} & y_{n1} \\ 1 & x_{n2} & y_{n2} \\ 1 & x_{n3} & y_{n3} \end{vmatrix}^{-1} \quad (3.39)$$

Calculând, avem:

$$\begin{aligned} f_{n1} &= \frac{1}{2\Delta_n} [(x_{n2}y_{n3} - x_{n3}y_{n2}) + (y_{n2} - y_{n3})x + (x_{n3} - x_{n2})y] \\ f_{n2} &= \frac{1}{2\Delta_n} [(x_{n3}y_{n1} - x_{n1}y_{n3}) + (y_{n3} - y_{n1})x + (x_{n1} - x_{n3})y] \\ f_{n3} &= \frac{1}{2\Delta_n} [(x_{n1}y_{n2} - x_{n2}y_{n1}) + (y_{n1} - y_{n2})x + (x_{n2} - x_{n1})y] \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\text{unde } \Delta_n = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_{n1} & y_{n1} \\ 1 & x_{n2} & y_{n2} \\ 1 & x_{n3} & y_{n3} \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

este aria triunghiului m , iar funcțiile de formă reprezintă chiar coordonatele de suprafață ale punctului M_i :

$$\begin{aligned} f_{m1} &= \frac{\text{aria triunghiului } M23}{\text{aria triunghiului } 123} \\ f_{m2} &= \frac{\text{aria triunghiului } M13}{\text{aria triunghiului } 123} \\ f_{m3} &= \frac{\text{aria triunghiului } M12}{\text{aria triunghiului } 123} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Procedeul descris pentru deducerea funcțiilor de formă poate fi utilizat și în cazul aproximării potențialului în interiorul elementului finit prin polinoame de ordin superior. Pentru un element finit de ordinul al doilea potențialul în interiorul elementului finit m se scrie:

$$V_m = f_{m1} V_{m1} + f_{m2} V_{m2} + \dots + f_{m6} V_{m6}$$

sau în funcție de coordonatele x și y :

$$V_m = A_1 + A_2 x + A_3 y + A_4 x^2 + A_5 xy + A_6 y^2$$

Condiția (3.36) se scrie acum:

$$\|V_m\| = \begin{vmatrix} 1 & x_{m1} & y_{m1} & x_{m1}^2 & x_{m1}y_{m1} & y_{m1}^2 \\ 1 & x_{m2} & y_{m2} & x_{m2}^2 & x_{m2}y_{m2} & y_{m2}^2 \\ 1 & x_{m3} & y_{m3} & x_{m3}^2 & x_{m3}y_{m3} & y_{m3}^2 \\ 1 & x_{m4} & y_{m4} & x_{m4}^2 & x_{m4}y_{m4} & y_{m4}^2 \\ 1 & x_{m5} & y_{m5} & x_{m5}^2 & x_{m5}y_{m5} & y_{m5}^2 \\ 1 & x_{m6} & y_{m6} & x_{m6}^2 & x_{m6}y_{m6} & y_{m6}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{vmatrix}$$

iar matricea funcțiilor de formă este în acest caz:

$$\|P_m\| = \begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \\ 1 & x_{m1} & y_{m1} & x_{m1}^2 & x_{m1}y_{m1} & y_{m1}^2 \\ 1 & x_{m2} & y_{m2} & x_{m2}^2 & x_{m2}y_{m2} & y_{m2}^2 \\ 1 & x_{m3} & y_{m3} & x_{m3}^2 & x_{m3}y_{m3} & y_{m3}^2 \\ 1 & x_{m4} & y_{m4} & x_{m4}^2 & x_{m4}y_{m4} & y_{m4}^2 \\ 1 & x_{m5} & y_{m5} & x_{m5}^2 & x_{m5}y_{m5} & y_{m5}^2 \\ 1 & x_{m6} & y_{m6} & x_{m6}^2 & x_{m6}y_{m6} & y_{m6}^2 \end{vmatrix}^{-1} \quad (3.43)$$

Expresia (3.43) dedusă pentru funcțiile de formă ale elementului finit de ordinul al doilea arată că se ajunge la calcule laborioase, fiind necesară inversarea unei matrici de ordinul 6 pentru elemente finite de ordinul al doilea. Pentru elemente finite de ordin superior complexitatea calculului crește foarte mult, procedeul general descris fiind neindicat.

3.5.4.2. Funcții de formă normalizate

Pentru elementul finit triunghiular de ordinul 1 din figura 3.6. se introduc coordonatele de arie L_1, L_2, L_3 prin relațiile:

$$\begin{aligned}x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \\y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \\l &= L_1 + L_2 + L_3\end{aligned}\tag{3.44}$$

Sistemul (3.44) stabilește o corespondență univocă între coordonatele x, y , și L_1, L_2, L_3 , coordonata L_1 reprezentând raportul:

$$L_1 = \frac{\text{aria triunghiului } M23}{\text{aria triunghiului } 123}$$

Rezolvând sistemul de ecuații (3.44) se obține:

$$\begin{aligned}L_1 &= (a_1 + b_1 x + c_1 y) / 2A_m \\L_2 &= (a_2 + b_2 x + c_2 y) / 2A_m \\L_3 &= (a_3 + b_3 x + c_3 y) / 2A_m\end{aligned}\tag{3.45}$$

A_m fiind aria triunghiului 1,2,3, dată de relația (3.41) iar:

$$\begin{aligned}a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\b_i &= y_j - y_k \\c_i &= x_k - x_j\end{aligned}\quad (i, j, k=1, 2, 3, \text{ în ordine ciclică})\tag{3.46}$$

Pentru elementul finit de ordinul 1 se aleg funcțiile de formă:

$$f_{m1} = L_1, \quad f_{m2} = L_2, \quad f_{m3} = L_3\tag{3.47}$$

fiecare din aceste funcții fiind egală cu 1 într-un nod și cu 0 în celelalte noduri, iar în interiorul elementului finit au o variație liniară.

Tinând seama de semnificația geometrică a funcțiilor de formă, dată de relațiile (3.42) sau (3.45), pot fi deduse formule pentru funcțiile de formă ale elementelor finite de ordin superior [236].

Pentru elementul finit de ordinul 2 (fig. 3.5, b) funcțiile de formă normalizate sînt:

$$\begin{aligned} f_{m1} &= (2L_1 - 1)L_1 & f_{m4} &= 4L_1L_2 \\ f_{m2} &= (2L_2 - 1)L_2 & f_{m5} &= 4L_2L_3 \\ f_{m3} &= (2L_3 - 1)L_3 & f_{m6} &= 4L_3L_1. \end{aligned} \quad (3.48)$$

iar pentru elementul finit triunghiular de ordinul 3 din figura 3.5, c funcțiile de formă normalizate sînt, pentru nodurile din vîrf:

$$f_{m1} = \frac{1}{2} (3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1 \text{ ș.a.m.d.} \quad (3.49)$$

pentru nodurile de pe laturi:

$$f_{m4} = \frac{2}{3} L_1L_2(3L_1 - 1) \text{ ș.a.m.d.} \quad (3.50)$$

iar pentru nodul central:

$$f_{m10} = 27 L_1L_2L_3 \quad (3.51)$$

La efectuarea operațiilor de integrare asupra funcțiilor de formă normalizate se va ține seama de formula de integrare pe aria triunghiului:

$$\int_{S_m} L_1^a L_2^b L_3^c dx dy = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} \cdot 2 A_m \quad (3.52)$$

unde se va considera $0! = 1$.

3.5.5. Funcționala elementelor finite de ordinul 1

Sistemul de ecuații care realizează minimul funcționalei (3.23) avînd ecuația generală (3.29) devine în cazul unui element finit triunghiular de ordinul 1:

$$\sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^3 \int_{S_m} \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial f_{mk}}{\partial x} \frac{\partial f_{mi}}{\partial x} + \frac{\partial f_{mi}}{\partial y} \frac{\partial f_{mk}}{\partial y} \right) \nu_{mi} dx dy = 0 \quad (3.53)$$

$(K=1, 2, \dots, N)$

unde:

$$\frac{\partial F_m}{\partial V_k} = \sum_{i=1}^3 \int_{S_m} \varepsilon \left(\frac{\partial f_{mi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial f_{mi}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial y} \right) V_{mi} dx dy$$

este derivata funcționalei elementului finit m de ordinul -1. Derivatele parțiale în raport cu x și y ale funcțiilor de formă date de relațiile (3.47) sînt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{mi}}{\partial x} = \frac{\partial L_i}{\partial x} &= \frac{b_i}{2A_m} \\ \frac{\partial f_{mi}}{\partial y} = \frac{\partial L_i}{\partial y} &= \frac{c_i}{2A_m} \quad (i=1,2,3) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Cu acestea $\partial F_m / \partial V_k$ pentru cazul $k=1$ este:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_m}{\partial V_{m1}} &= \sum_{i=1}^3 \int_{S_m} \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial f_{mi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{m1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{mi}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_{m1}}{\partial y} \right) \cdot V_{mi} dx dy = \\ &= \int_{S_m} \varepsilon \left(\frac{b_1^2 + c_1^2}{4A_m^2} V_{m1} + \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{4A_m^2} V_{m2} + \frac{b_1 b_3 + c_1 c_3}{4A_m^2} V_{m3} \right) dx dy \end{aligned}$$

Calculăm expresiile:

$$\begin{aligned} b_1^2 + c_1^2 &= (y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2 = \bar{l}_{23}^2 \\ b_2^2 + c_2^2 &= (y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2 = \bar{l}_{31}^2 \\ b_3^2 + c_3^2 &= (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 = \bar{l}_{12}^2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} b_1 b_2 + c_1 c_2 &= (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) = \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31} = -(\bar{l}_{23}^2 + \bar{l}_{31}^2 - \bar{l}_{12}^2) / 2 \\ b_2 b_3 + c_2 c_3 &= (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) = \bar{l}_{31} \cdot \bar{l}_{12} = -(\bar{l}_{31}^2 + \bar{l}_{12}^2 - \bar{l}_{23}^2) / 2 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 &= (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) = \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{23} = -(\bar{l}_{12}^2 + \bar{l}_{23}^2 - \bar{l}_{31}^2) / 2 \end{aligned}$$

unde am introdus vectorii laturi ai elementului finit:

$$\begin{aligned} \bar{l}_{12} &= (x_1 - x_2)\bar{i} + (y_1 - y_2)\bar{j} \\ \bar{l}_{23} &= (x_2 - x_3)\bar{i} + (y_2 - y_3)\bar{j} \\ \bar{l}_{31} &= (x_3 - x_1)\bar{i} + (y_3 - y_1)\bar{j} \end{aligned} \quad (3.56)$$

\bar{i} și \bar{j} fiind versorii axei Ox și Oy .

Efectuind acum integrarea pe suprafața S_m a elementului finit m și presupunând permitivitatea mediului în interiorul elementului finit constantă și egală cu ϵ_m , avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_m}{\partial V_{m1}} &= \epsilon_m \cdot \frac{1}{4 A_m} (\bar{l}_{23}^2 V_{m1} + \bar{l}_{23} \bar{l}_{31} V_{m2} + \bar{l}_{12} \bar{l}_{23} V_{m3}) = \\ &= (\epsilon_m / 4 A_m) [\bar{l}_{23}^2 V_{m1} - (\bar{l}_{23}^2 + \bar{l}_{31}^2 - \bar{l}_{12}^2) \cdot V_{m2} / 2 - \\ &- (\bar{l}_{12}^2 + \bar{l}_{23}^2 - \bar{l}_{31}^2) V_{m3} / 2] \end{aligned}$$

Derivatele funcționalei în raport cu cele trei noduri se pot deci scrie:

$$\begin{aligned} \partial F_m / \partial V_{m1} &= \epsilon_m (\bar{l}_{23}^2 V_{m1} + \bar{l}_{23} \bar{l}_{31} V_{m2} + \bar{l}_{12} \bar{l}_{23} V_{m3}) / 4 A_m = \epsilon_m \bar{l}_{23} \bar{L} V_m / 4 A_m \\ \partial F_m / \partial V_{m2} &= \epsilon_m (\bar{l}_{23} \bar{l}_{31} V_{m1} + \bar{l}_{31}^2 V_{m2} + \bar{l}_{12} \bar{l}_{31} V_{m3}) / 4 A_m = \epsilon_m \bar{l}_{31} \bar{L} V_m / 4 A_m \quad (3.57) \\ \partial F_m / \partial V_{m3} &= \epsilon_m (\bar{l}_{23} \bar{l}_{12} V_{m1} + \bar{l}_{31} \bar{l}_{12} V_{m2} + \bar{l}_{12}^2 V_{m3}) / 4 A_m = \epsilon_m \bar{l}_{12} \bar{L} V_m / 4 A_m \end{aligned}$$

sau uneori utilă pentru calcule, în forma:

$$\begin{aligned} \partial F_m / \partial V_{m1} &= \epsilon_m [2 \bar{l}_{23}^2 V_{m1} - (\bar{l}_{23}^2 + \bar{l}_{31}^2 - \bar{l}_{12}^2) V_{m2} - (\bar{l}_{12}^2 + \bar{l}_{23}^2 - \bar{l}_{31}^2) V_{m3}] / 8 A_m \\ \partial F_m / \partial V_{m2} &= \epsilon_m [(\bar{l}_{23}^2 + \bar{l}_{31}^2 - \bar{l}_{12}^2) V_{m1} + 2 \bar{l}_{31}^2 V_{m2} - (\bar{l}_{12}^2 + \bar{l}_{31}^2 - \bar{l}_{23}^2) V_{m3}] / 8 A_m \quad (3.8) \\ \partial F_m / \partial V_{m3} &= \epsilon_m [(\bar{l}_{23}^2 + \bar{l}_{12}^2 - \bar{l}_{31}^2) V_{m1} - (\bar{l}_{31}^2 + \bar{l}_{12}^2 - \bar{l}_{23}^2) V_{m2} + 2 \bar{l}_{12}^2 V_{m3}] / 8 A_m \end{aligned}$$

În formulele (3.57) s-a făcut notația $\bar{L} V_m = \bar{l}_{23} V_{m1} + \bar{l}_{31} V_{m2} + \bar{l}_{12} V_{m3}$.

3.5.6. Funcționala elementelor finite de ordinul 2

Pentru un element finit de ordinul 2 cum este cel din figura 3.5, b vom proceda în mod similar ca la elementul finit de ordinul 1. Expresia generală a ecuației sistemului minimizant este:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^6 \int_{S_m} \epsilon \left(\frac{\partial f_{mi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial f_{mi}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial y} \right) \cdot V_{mi} dx dy = 0 \quad (3.59)$$

unde $k=1, 2, \dots, N$.

Derivatele funcționalei unui element finit m în raport cu valoarea nodală V_k sînt:

$$\frac{\partial F_m}{\partial V_{mk}} = \int_{S_m} \varepsilon \left[\left(\frac{\partial f_{m1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial f_{m1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial y} \right) V_{m1} + \left(\frac{\partial f_{m2}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial f_{m2}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial y} \right) V_{m2} + \dots + \left(\frac{\partial f_{m6}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial f_{m6}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_{mk}}{\partial y} \right) V_{m6} \right] dx dy. \quad (3.60)$$

Funcțiile de formă ale elementului finit de ordinul doi fiind cele date în relațiile (3.48) se obțin pentru derivatele parțiale ale acestora, valorile:

$$\begin{aligned} \partial f_{m1} / \partial x &= (4L_1 - 1)b_1 / 2A_m; \quad \partial f_{m1} / \partial y = (4L_1 - 1)c_1 / 2A_m \\ \partial f_{m2} / \partial x &= (4L_2 - 1)b_2 / 2A_m; \quad \partial f_{m2} / \partial y = (4L_2 - 1)c_2 / 2A_m \\ \partial f_{m3} / \partial x &= (4L_3 - 1)b_3 / 2A_m; \quad \partial f_{m3} / \partial y = (4L_3 - 1)c_3 / 2A_m \\ \partial f_{m4} / \partial x &= 2(b_1L_2 + b_2L_1) / A_m; \quad \partial f_{m4} / \partial y = 2(c_1L_2 + c_2L_1) / A_m \\ \partial f_{m5} / \partial x &= 2(b_2L_3 + b_3L_2) / A_m; \quad \partial f_{m5} / \partial y = 2(c_2L_3 + c_3L_2) / A_m \\ \partial f_{m6} / \partial x &= 2(b_1L_3 + b_3L_1) / A_m; \quad \partial f_{m6} / \partial y = 2(c_1L_3 + c_3L_1) / A_m. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Înlocuind valorile de mai sus în relația (3.60) și ținând seama de relațiile (3.52), (3.46) și (3.56) se obțin în final derivatele în raport cu cele șase potențiale nodale în forma:

$$\begin{aligned} \partial F_m / \partial V_{m1} &= \varepsilon_m (3 \bar{l}_{23}^2 V_{m1} - \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31} V_{m2} - \bar{l}_{12} \bar{l}_{23} V_{m3} + 4 \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31} V_{m4} + 4 \bar{l}_{12} \bar{l}_{23} V_{m6}) / \\ & \quad / 12 A_m \\ \partial F_m / \partial V_{m2} &= \varepsilon_m (-\bar{l}_{23} \bar{l}_{31} V_{m1} + 3 \bar{l}_{31}^2 V_{m2} - \bar{l}_{12} \bar{l}_{31} V_{m3} + 4 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{31} V_{m5} + \\ & \quad + 4 \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31} V_{m6}) / 12 A_m \\ \partial F_m / \partial V_{m3} &= \varepsilon_m (-\bar{l}_{12} \bar{l}_{23} V_{m1} - \bar{l}_{12} \bar{l}_{31} V_{m2} + 3 \bar{l}_{12}^2 V_{m3} + 4 \bar{l}_{12} \bar{l}_{31} V_{m5} + \\ & \quad + 4 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{23} V_{m6}) / 12 A_m \\ \partial F_m / \partial V_{m4} &= \varepsilon_m [\bar{l}_{23} \bar{l}_{31} V_{m1} + \bar{l}_{23} \bar{l}_{31} V_{m2} + (\bar{l}_{12}^2 + \bar{l}_{23}^2 + \bar{l}_{31}^2) V_{m4} + 2 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{23} V_{m5} + \\ & \quad + 2 \bar{l}_{12} \bar{l}_{31} V_{m6}] / 3 A_m \\ \partial F_m / \partial V_{m5} &= \varepsilon_m [\bar{l}_{12} \bar{l}_{31} V_{m2} + \bar{l}_{12} \bar{l}_{31} V_{m3} + 2 \bar{l}_{12} \bar{l}_{23} V_{m4} + (\bar{l}_{12}^2 + \bar{l}_{23}^2 + \bar{l}_{31}^2) V_{m5} + \\ & \quad + 2 \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31} V_{m6}] / 3 A_m \\ \partial F_m / \partial V_{m6} &= \varepsilon_m [\bar{l}_{12} \bar{l}_{23} V_{m1} + \bar{l}_{12} \bar{l}_{23} V_{m3} + 2 \bar{l}_{12} \bar{l}_{31} V_{m4} + 2 \bar{l}_{31} \bar{l}_{23} V_{m5} + \\ & \quad + (\bar{l}_{12}^2 + \bar{l}_{23}^2 + \bar{l}_{31}^2) V_{m6}] / 3 A_m \end{aligned} \quad (3.62)$$

3.5.7. Funcționala pentru elemente finite de ordinul al treilea

Procedând similar ca în paragraful 3.5.6, pentru elementul finit de ordinul 3 prezentat în figura 3.5,c unde se va ține seama de expresiile funcțiilor de formă normalizate (3.49),(3.50), (3.51), de relația (3.52) precum și de relațiile (3.55) și (3.56) rezultă de asemenea expresii simetrice față de cele 10 noduri ale elementului finit. Se prezintă mai jos rezultatele acestor calcule pentru cazul unui nod situat în vârful elementului finit, a două noduri de pe latură și pentru nodul central 10, restul relațiilor fiind similare.

Pentru nodul 1 avem:

$$\begin{aligned} \partial P_m / \partial V_{m1} = \varepsilon_m [& 24 \bar{l}_{23}^2 V_{m1} + 7 \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31} V_{m2} + 7 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{23} V_{m3} + \\ & + 3 (\bar{l}_{23}^2 + 19 \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31}) V_{m4} + 3 (\bar{l}_{23}^2 - 8 \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31}) V_{m5} - \\ & - 3 \bar{l}_{23}^2 V_{m6} - 3 \bar{l}_{23}^2 V_{m7} + 3 (\bar{l}_{23}^2 - 8 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{23}) V_{m8} + \\ & + 3 (\bar{l}_{23}^2 + 19 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{23}) V_{m9}] / 160 A_m \quad (3.63) \end{aligned}$$

Pentru nodurile 4 și 5 de pe latura 12 avem:

$$\begin{aligned} \partial P_m / \partial V_{m4} = 3 \varepsilon_m [& (\bar{l}_{23}^2 + 19 \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31}) V_{m1} + (\bar{l}_{31}^2 - 8 \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31}) V_{m2} - \bar{l}_{12}^2 V_{m3} + \\ & + 22,5 (\bar{l}_{12}^2 + \bar{l}_{23}^2 + \bar{l}_{31}^2) V_{m4} - 9 (\bar{l}_{12}^2 - 4 \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31}) V_{m5} - \\ & - 9 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{23} V_{m6} - 9 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{23} V_{m7} - 9 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{31} V_{m8} + \\ & + 45 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{31} V_{m9} + 54 \bar{l}_{12} \bar{l}_{23} V_{m10}] / 160 A_m. \quad (3.64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial P_m / \partial V_{m5} = 3 \varepsilon_m [& (\bar{l}_{31}^2 + 19 \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31}) V_{m2} + (\bar{l}_{23}^2 - 8 \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31}) V_{m1} - \bar{l}_{12}^2 V_{m3} + \\ & + 9 (\bar{l}_{12}^2 - 4 \bar{l}_{23} \bar{l}_{31}) V_{m4} + 22,5 (\bar{l}_{12}^2 + \bar{l}_{23}^2 + \bar{l}_{31}^2) V_{m5} + \\ & + 45 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{23} V_{m6} - 9 \bar{l}_{12} \bar{l}_{23} V_{m7} - 9 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{31} V_{m8} - \\ & - 9 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{31} V_{m9} + 54 \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{31} \cdot V_{m10}] / 160 A_m \quad (3.65) \end{aligned}$$

Pentru nodul central 10, derivata funcționalei este:

$$\begin{aligned} \partial P_m / \partial V_{m10} = 81 \varepsilon_m [& \bar{l}_{12} \bar{l}_{23} V_{m4} + \bar{l}_{12} \bar{l}_{31} V_{m5} + \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31} V_{m6} + \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{23} V_{m7} + \\ & + \bar{l}_{12} \cdot \bar{l}_{31} V_{m8} + \bar{l}_{23} \cdot \bar{l}_{31} V_{m9} + (\bar{l}_{12}^2 + \bar{l}_{23}^2 + \bar{l}_{31}^2) V_{m10}] / 80 A_m \quad (3.66) \end{aligned}$$

3.5.8. Sistemele de ecuații algebrice

Vom considera domeniul studiat divizat în elemente finite de diferite ordine, dar astfel încât în interiorul fiecărui element valoarea permitivității să fie constantă. Pe baza relațiilor deduse în subcapitolul 3.5.5-3.5.7 se vor scrie formele generale ale ecuațiilor sistemelor de ecuații ce realizează minimumul funcționalei (3.23), prin rezolvarea cărora se obțin valorile nodale ale potențialului în domeniul considerat.

3.5.8.1. Domeniu divizat în elemente finite de ordinul 1

Domeniul de studiat se presupune divizat în elemente finite triunghiulare de ordinul 1, având punctele nodale în vîrfurile triunghiurilor. Pentru a deduce forma generală a ecuației sistemului minimizant (3.29) corespunzătoare unui punct nodal 0 vom considera elementele finite vecine nodului 0, și anume pentru care termenii din ecuația (3.29) sînt diferiți de zero (fig.3.7).

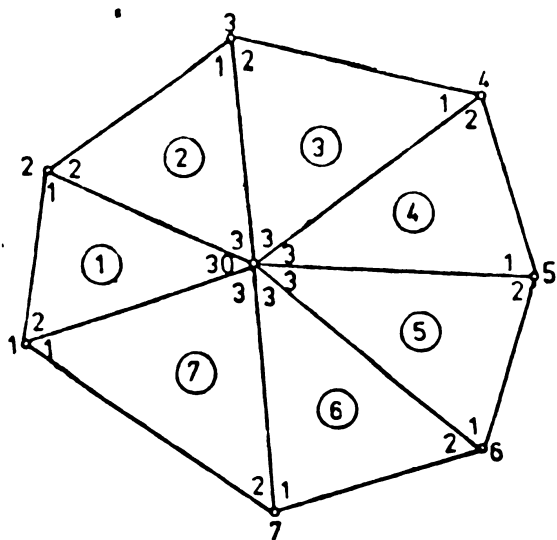


Fig. 3.7.

nod, de aceea derivata în raport cu V_0 este:

$$\frac{\partial F}{\partial V_0} = \frac{\partial F_1}{\partial V_{13}} + \frac{\partial F_2}{\partial V_{23}} + \dots + \frac{\partial F_7}{\partial V_{73}} = 0$$

pentru cazul din figură, în jurul nodului 0 există 7 elemente finite pe care le-am numerotat de la ① la ⑦. Deosebim de asemenea o numerotare interioară a nodurilor în fiecare element finit și o numerotare globală a nodurilor, de exemplu nodul 5 are numărul 1 în elementul finit 4 și numărul 2 în elementul finit 5. Funcționala pentru domeniul studiat va conține potențialul V_0 numai în cele 7 elemente finite vecine acestui

Tinând seama de relațiile (3.57) și însumând rezultă

$$\varepsilon_1(\bar{l}_{21}^2 V_0 + \bar{l}_{21} \cdot \bar{l}_{02} V_1 + \bar{l}_{10} \bar{l}_{21} V_2) / 4 A_1 + \varepsilon_2(\bar{l}_{32}^2 V_0 + \bar{l}_{32} \cdot \bar{l}_{03} V_2 + \bar{l}_{20} \bar{l}_{32} V_3) / 4 A_2 + \dots + (\bar{l}_{17}^2 V_0 + \bar{l}_{17} \cdot \bar{l}_{01} V_7 + \bar{l}_{70} \cdot \bar{l}_{17} V_1) / 4 A_7 = 0$$

Grupind termenii se obține ecuația corespunzătoare nodului 0 în forma:

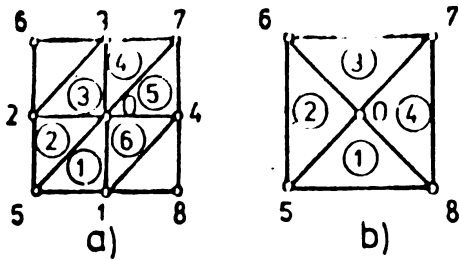
$$\begin{aligned} & [\varepsilon_1 \bar{l}_{21}^2 / A_1 + \varepsilon_2 \bar{l}_{32}^2 / A_2 + \varepsilon_3 \bar{l}_{43}^2 / A_3 + \dots + \varepsilon_7 \bar{l}_{17}^2 / A_7] V_0 + (\varepsilon_1 \bar{l}_{02} \cdot \bar{l}_{21} / A_1 + \\ & + \varepsilon_7 \bar{l}_{70} \cdot \bar{l}_{17} / A_7) V_1 + (\varepsilon_1 \bar{l}_{10} \cdot \bar{l}_{21} / A_1 + \varepsilon_2 \bar{l}_{03} \cdot \bar{l}_{32} / A_2) V_2 + \\ & + \dots + (\varepsilon_6 \bar{l}_{60} \cdot \bar{l}_{76} / A_6 + \varepsilon_7 \bar{l}_{01} \cdot \bar{l}_{17} / A_7) V_7 = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Ecuația (3.67) se mai poate scrie:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1 \bar{l}_{21}^2 / A_1 + \varepsilon_2 \bar{l}_{32}^2 / A_2 + \varepsilon_3 \bar{l}_{43}^2 / A_3 + \dots + \varepsilon_7 \bar{l}_{17}^2 / A_7) V_0 - \\ & - [\varepsilon_1 (\bar{l}_{02}^2 + \bar{l}_{21}^2 - \bar{l}_{10}^2) / 2 A_1 + \varepsilon_7 (\bar{l}_{70}^2 + \bar{l}_{17}^2 - \bar{l}_{10}^2) / 2 A_7] V_1 - \\ & - [\varepsilon_1 (\bar{l}_{10}^2 + \bar{l}_{21}^2 - \bar{l}_{20}^2) / 2 A_1 + \varepsilon_2 (\bar{l}_{03}^2 + \bar{l}_{32}^2 - \bar{l}_{20}^2) / 2 A_2] V_2 - \\ & - \dots - [\varepsilon_6 (\bar{l}_{60}^2 + \bar{l}_{76}^2 - \bar{l}_{70}^2) / 2 A_6 + \varepsilon_7 (\bar{l}_{01}^2 + \bar{l}_{17}^2 - \bar{l}_{70}^2) / 2 A_7] V_7 = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Ecuațiile (3.67) și (3.68) sînt ecuațiile generale ale sistemului de ecuații ce realizează minimul funcționalei F în domeniul studiat. Ele pot fi aplicate în forma prezentată oricărui punct nodal din domeniu. Se observă că ecuația este simetrică în raport cu nodurile elementelor finite, ceea ce permite scrierea ușoară a acestora. În această ecuație intervin permitivitățile $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_7)$ mediilor din elementele finite ce conțin nodul 0 (al cărui ecuație o scriem), vectorii laturi ai elementelor finite ce se pot exprima cu ajutorul relațiilor (3.56) în funcție de coordonatele punctelor nodale și arile elementelor finite care sînt toate cunoscute pentru o rețea de divizare dată în domeniul studiat. Necunoscutele, cu alte cuvinte valorile nodale ale potențialului se deduc prin rezolvarea sistemului de ecuații ce rezultă din aplicarea ecuațiilor (3.67) sau (3.68) fiecărui nod interior al domeniului studiat.

În cazul particular al unei rețele formată din triunghiuri dreptunghice echilaterale (fig. 3.8, a) ecuația generală a sistemului devine:



temului devine:

$$\begin{aligned} & [\varepsilon_1 l^2 / A + \varepsilon_2 l^2 / A + \dots + 2\varepsilon_6 l^2 / A] V_0 - \\ & - (\varepsilon_1 2l^2 / 2A + \varepsilon_6 2l^2 / 2A) V_1 - \\ & - \dots - (\varepsilon_5 2l^2 / 2A + \varepsilon_6 2l^2 / 2A) V_4 = 0 \end{aligned}$$

iar în final:

Fig. 3.8

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + 2\varepsilon_6) V_0 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_6) V_1 - (\varepsilon_3 + \varepsilon_2) V_2 - (\varepsilon_4 + \varepsilon_3) V_3 - (\varepsilon_5 + \varepsilon_6) V_4 = 0$$

Dacă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_6$ se obține forma particulară

$$4 V_0 - V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = 0 \quad (3.70)$$

care este chiar expresia laplaceanului în diferențe finite.

De remarcat că dacă divizarea domeniului este ca aceea din figura 3.8, b atunci ecuația este:

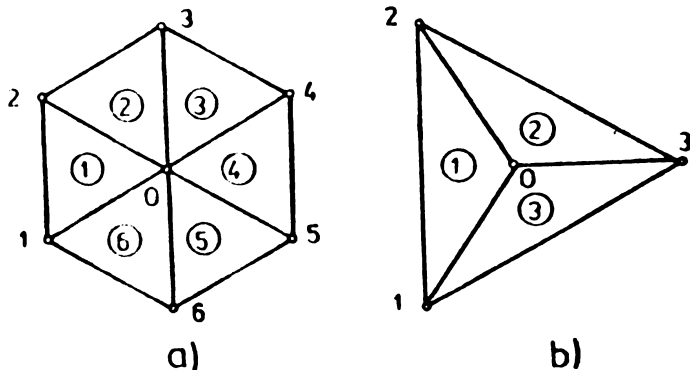
$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) V_0 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} V_5 - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} V_6 - \frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_4}{2} V_7 - \frac{\varepsilon_4 + \varepsilon_1}{2} V_8 = 0$$

sau în cazul mediului omogen:

$$4 V_0 - V_5 - V_6 - V_7 - V_8 = 0 \quad (3.71)$$

care este de asemenea ecuația lui Laplace în diferențe finite pentru o rețea de divizare regulată având pas dublu.

În cazul unei rețele de triunghiuri echilaterale (rețea



hexagonală) ca în figura 3.9, a, ecuațiile sistemului minimizant sînt:

$$\begin{aligned} & 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_6) V_0 - \\ & - (\varepsilon_1 + \varepsilon_6) V_1 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) V_2 - \\ & - (\varepsilon_6 + \varepsilon_5) V_6 = 0 \end{aligned}$$

Fig. 3.9

iar pentru mediu omogen:

$$6 V_0 - V_1 - V_2 - V_3 - V_4 - V_5 - V_6 = 0 \quad (3.72)$$

iar pentru rețeaua triunghiulară din figura 3.9 b:

$$2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) V_0 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) V_1 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) V_2 - (\varepsilon_3 + \varepsilon_2) V_3 = 0$$

91

$$3 V_0 - V_1 - V_2 - V_3 = 0$$

(3.73)

formule de asemenea cunoscute de la metoda diferențelor finite. Sînt posibile de scris o serie de alte formule corespunzătoare unor alte rețele de divizare, prin aplicarea relației generale deduse (3.67) sau (3.68). Aceste expresii scrise pentru rețele regulate sînt cazuri particulare ale ecuațiilor generale deduse în acest subcapitol. Metoda elementelor finite oferă posibilitatea unei aproximări foarte bune a frontierelor domeniului sau a suprafețelor de separație între medii diferite, relația generală (3.67) fiind aplicată de obicei numai pentru nodurile vecine frontierelor sau suprafețelor de discontinuitate din domeniu, în rest fiind posibilă aplicarea formulilor simplificate corespunzătoare divizării domeniului în rețele regulate.

3.5.8.2. Indesirea rețelei de elemente finite de ordinul 1

În cazul unor domenii ce conțin neomogenități de dimensiuni reduse, cum ar fi cazul incluziunilor dintr-o izolație solidă de exemplu, pentru determinarea cîmpului electric în interiorul zonei neomogene (incluziunii) este necesară indesirea rețelei de divizare a domeniului. Dacă indesirea rețelei se efectuează în întregul domeniu studiat, atunci numărul ecuațiilor sistemului de rezolvat crește considerabil, ceea ce face dificilă rezolvarea lui, de aceea este de preferat ca indesirea rețelei să se efectueze numai într-o

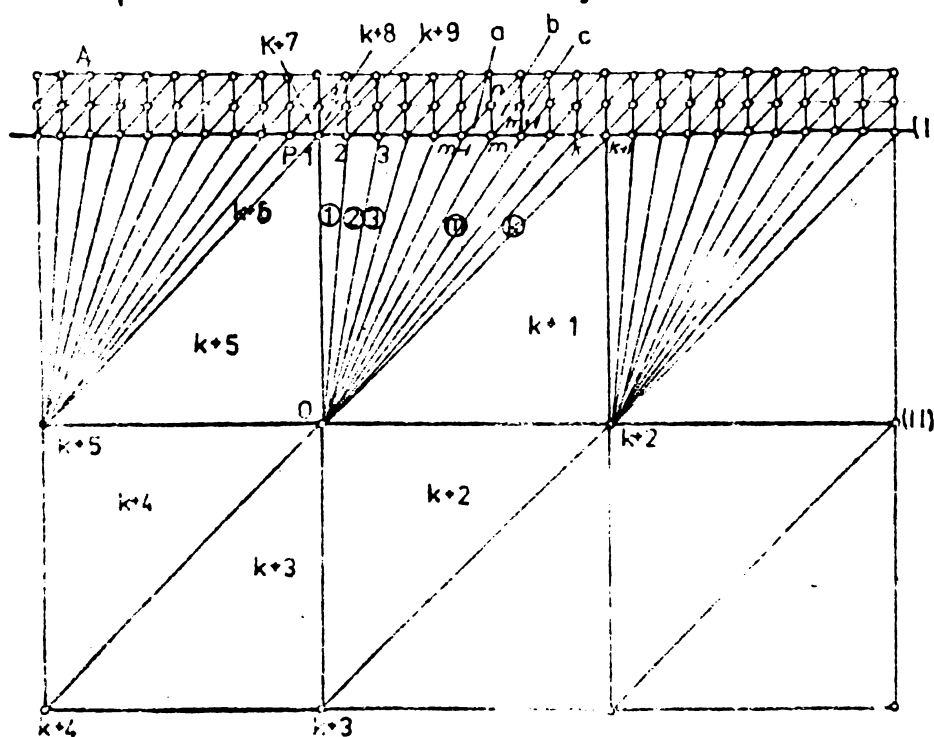


Fig. 3.10

porțiune a domeniului studiat. În figura 3.10 este reprezentată o porțiune din frontiera de separație a zonelor cu pas de discretizare diferit, de unde rezultă că pentru nodurile situate în straturile (I) și (II) ecuațiile

vor avea o formă aparte. Notăm cu l pasul de discretizare al rețelei mai fine și cu $k \cdot l$ pasul de discretizare al rețelei mari, de asemenea vom considera mai întâi cazul când permitivitățile sînt diferite de fiecare element finit.

Aplicînd relația generală pentru elemente finite de ordinul 1 (3.6B) rezultă următoarele ecuații. Pentru nodul 0:

$$V_0 \left[\frac{2}{k} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k) + 2\varepsilon_{k+1} + 4\varepsilon_{k+2} + 2\varepsilon_{k+3} + 2\varepsilon_{k+4} + 4\varepsilon_{k+5} \right] - \quad (3.74)$$

$$- V_1 (2\varepsilon_{k+5} + \frac{2}{k} \varepsilon_1) - \sum_{m=2}^k \frac{2}{k} V_m [(2-m)\varepsilon_{m-1} + m\varepsilon_m] - V_{k+1} \frac{2}{k} \varepsilon_k (1-k) -$$

$$- V_{k+2} (2\varepsilon_{k+1} + 2\varepsilon_{k+2}) - V_{k+3} (2\varepsilon_{k+2} + 2\varepsilon_{k+3}) - V_{k+4} (2\varepsilon_{k+4} + 2\varepsilon_{k+5}) = 0$$

În cazul unui mediu omogen, această ecuație devine:

$$8 V_0 - (1 + \frac{1}{k}) V_1 - \frac{2}{k} (V_2 + V_3 + \dots + V_k) + (1 - \frac{1}{k}) V_{k+1} - 2V_{k+2} -$$

$$- 2 V_{k+3} - 2V_{k+4} = 0 \quad (3.75)$$

Pentru nodul 1:

$$V_1 (\varepsilon_1 \frac{k^2+1}{k} + \varepsilon_{k+5} + \varepsilon_{k+6} \frac{2k^2-2k+1}{k} + 2\varepsilon_{k+7} + \varepsilon_{k+8} + \varepsilon_{k+9}) - \quad (3.76)$$

$$- V_0 (\varepsilon_{k+5} + \frac{1}{k} \varepsilon_1) - V_2 (k\varepsilon_1 + \varepsilon_{k+9}) - V_{k+6} (\varepsilon_{k+8} + \varepsilon_{k+7}) -$$

$$- V_{k+5} [\varepsilon_{k+7} + \varepsilon_{k+6} (2k-1) - V_{k+4} \varepsilon_{k+6} (\frac{1}{k} - 1)] = 0$$

În cazul mediului omogen, se obține:

$$\frac{2k^2+2k+2}{k} V_1 - \frac{k+1}{k} V_0 - (k+1)V_2 - 2 V_{k+6} - 2k V_{k+5} + \frac{k-1}{k} V_{k+4} = 0 \quad (3.77)$$

Pentru un nod oarecare m , ecuația în cazul unui mediu omogen este:

$$\frac{2k^2+4k+m^2+(m-2)^2}{k} V_m - \frac{2}{k} V_0 - \frac{k^2+k+m^2-2m+2}{k} V_{m-1} - 2 V_{m+1} -$$

$$- \frac{k^2+k+m^2-m}{k} V_{m+1} = 0 \quad (m=2, 3, \dots, k) \quad (3.78)$$

Ecuațiile (3.74)-(3.78) permit scrierea ecuațiilor sistemului minimizant al funcționalei pentru orice nod situat în structurile I și II. Se pot deduce ecuații similare și pentru alte

situații privind aranjarea rețelelor cu pași de discretizare diferiți.

O posibilitate de îndesire a rețelei ce duce la rezultate mai exacte în zona de trecere de la un pas mare de discretizare la unul mai mic este îndesirea treptată a rețelei prin divizări repetate ca în cazul din figura 3.11. Considerând mediul omogen

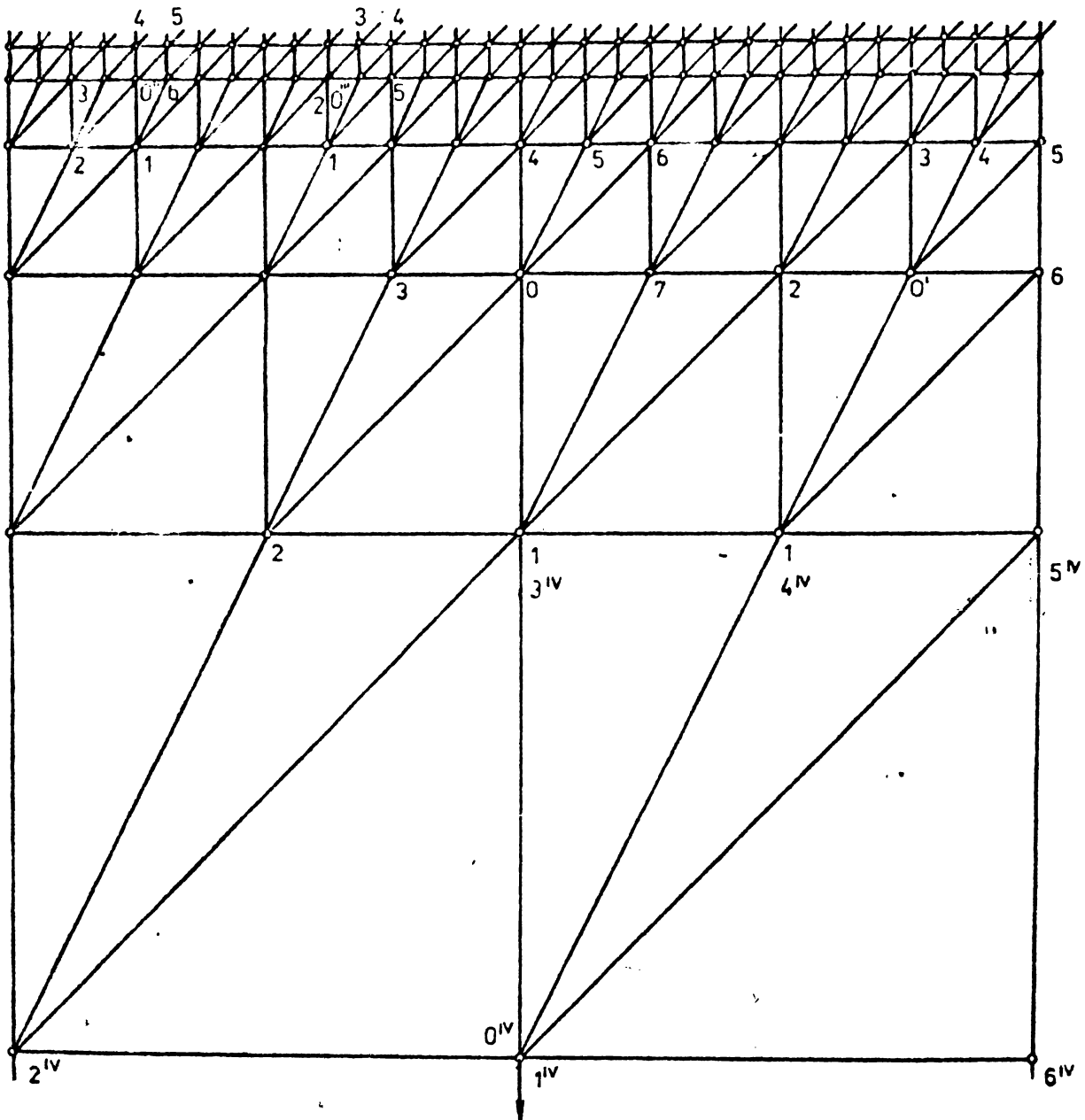


Figura 3.11.

ecuația pentru nodul 0 înconjurat de nodurile 1-7 este:

$$20V_0 - 3V_1 + V_2 - 8V_3 - 3V_4 - 2V_5 + V_6 - 6V_7 = 0 \quad (3.79)$$

iar pentru nodul 0' înconjurat de nodurile 1-6, ecuația este:

$$20 V_0 - 2V_1 - 6V_2 - 3V_3 - 2V_4 + V_5 - 8V_6 = 0 \quad (3.80)$$

Ecuațiile (3.79), (3.80) permit scrierea ecuațiilor sistemului minimizant pentru orice nod situat în zona de îndesire a rețelei de divizare a domeniului. Pentru nodurile situate la limitele zonei de îndesire, adică pe liniile (I) și (II) sînt valabile ecuațiile următoare:

- pentru nodul 0^I :

$$20 V_{0^I} - 3V_1 + V_2 - 8V_3 - 4V_4 - 6V_5 = 0 \quad (3.81)$$

- pentru nodul 0^{II} :

$$10 V_{0^{II}} - V_1 + 2V_2 - 2V_3 - 4V_4 = 0 \quad (3.82)$$

- pentru nodul 0^{IV} :

$$16 V_{0^{IV}} - 4 V_1 - 4V_2 - 2V_3 - 2V_4 + V_5 - 4V_6 = 0 \quad (3.83)$$

Se observă că, pe lângă avantajul oferit de îndesirea treptată a rețelei de diviziune, acest ultim procedeu necesită aplicarea la zona de îndesire a unor relații mai simple.

La o rețea de elemente finite triunghiulare de ordinul 1 formată din triunghiuri echilaterale (rețea hexagonală) în zona de îndesire a rețelei reprezentată în figura 3.12, sînt valabile următoarele ecuații:

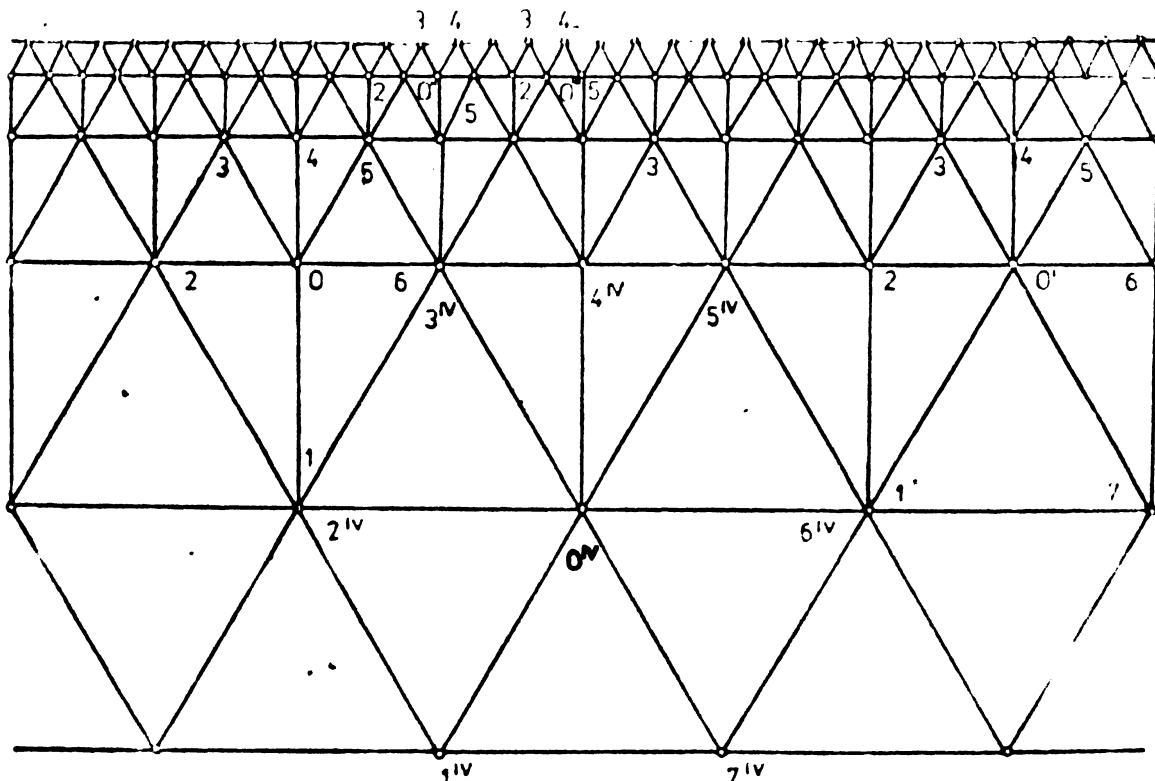


Fig. 3.12

- pentru punctul O :

$$14 V_0 - 2V_1 - 4V_2 - V_3 - 2V_4 - V_5 - 4V_6 = 0 \quad (3.84)$$

- pentru punctul O' :

$$14 V_{O'} - V_1 - 4V_2 - V_3 - 2V_4 - V_5 - 4V_6 - V_7 = 0 \quad (3.85)$$

- pentru punctul O'' :

$$7 V_{O''} - V_1 - 2V_2 - V_3 - V_4 - 2V_5 = 0 \quad (3.86)$$

- pentru punctul O''' :

$$14 V_{O'''} - V_1 - 4V_2 + 2V_3 - 2V_4 - 4V_5 + V_6 = 0 \quad (3.87)$$

- pentru punctul O^{IV} :

$$12 V_{O^{IV}} - 2V_1 - 2V_2 - V_3 - 2V_4 - V_5 - 2V_6 - 2V_7 = 0 \quad (3.88)$$

Ecuațiile (3.84) și (3.85) permit scrierea ecuațiilor pentru nodurile din zone de îndesire, iar ecuațiile (3.86)-(3.88) a ecuațiilor pentru nodurile de la marginea zonei de îndesire a rețelei.

3.5.8.3. Domeniu divizat în elemente finite de ordinul 2

Considerăm o porțiune din domeniul de studiat formată din cinci elemente finite triunghiulare de ordinul 2 ce înconjoară

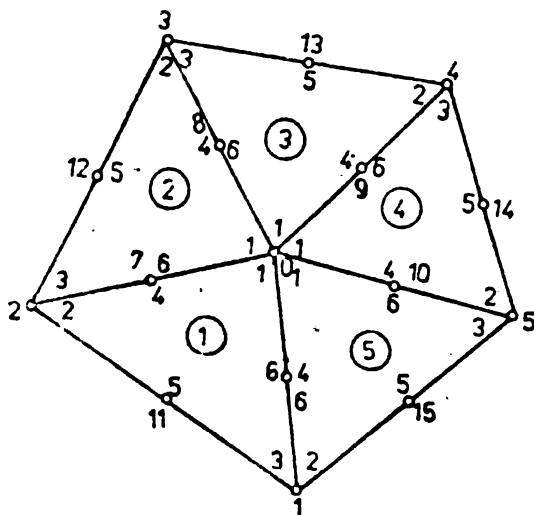


Fig. 3/3

nodul O (fig. 3.13). Elementele finite sînt numerotate cu cifre arabe încercuite. Nodurile au în interiorul fiecărui element finit o numerotare internă cu cifre arabe, caractere mici și o numerotare globală cu caractere mari. Derivata funcționalei în raport cu potențialul nodul V_0 va conține numai termenii aferenți celor cinci elemente finite ce conțin nodul O , prin urmare ecuația sistemului minimizant referitoare la nodul O este:

$$\frac{\partial F_1}{\partial V_0} + \frac{\partial F_2}{\partial V_0} + \frac{\partial F_3}{\partial V_0} + \dots + \frac{\partial F_5}{\partial V_0} = 0$$

Este nevoie de asemenea să determinăm și derivata funcționalei în raport cu un nod situat pe latura triunghiului, cum este de exemplu nodul 6. Aplicând formulele (3.62) pentru nodul 1 al fiecărui element finit și însumând se obține:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1(3\bar{l}_{21}^2 V_0 - \bar{l}_{21}\bar{l}_{10} V_2 - \bar{l}_{02}\bar{l}_{21} V_1 + 4\bar{l}_{21}\bar{l}_{10} V_7 + 4\bar{l}_{02}\bar{l}_{21} V_6) / 12 A_1 + \\ & + \varepsilon_2(3\bar{l}_{32}^2 V_0 - \bar{l}_{32}\bar{l}_{20} V_3 - \bar{l}_{03}\bar{l}_{32} V_2 + 4\bar{l}_{32}\bar{l}_{20} V_8 + 4\bar{l}_{03}\bar{l}_{32} V_7) / 12 A_2 + \\ & + \dots + \varepsilon_5(3\bar{l}_{15}^2 V_0 - \bar{l}_{15}\bar{l}_{50} V_1 - \bar{l}_{01}\bar{l}_{15} V_5 + 4\bar{l}_{15}\bar{l}_{50} V_4 + \bar{l}_{01}\bar{l}_{15} V_{10}) / 12 A_5 = 0. \end{aligned}$$

Grupind termenii în funcție de potențialele nodale, avem:

$$\begin{aligned} & 3[\varepsilon_1 \bar{l}_{21}^2 / A_1 + \varepsilon_2 \bar{l}_{32}^2 / A_2 + \varepsilon_3 \bar{l}_{43}^2 / A_3 + \varepsilon_4 \bar{l}_{54}^2 / A_4 + \varepsilon_5 \bar{l}_{15}^2 / A_5] V_0 - \\ & - (\varepsilon_1 \bar{l}_{02} \bar{l}_{21} / A_1 + \varepsilon_5 \bar{l}_{15} \bar{l}_{50} / A_5) V_1 - (\varepsilon_2 \bar{l}_{03} \bar{l}_{32} / A_2 + \varepsilon_1 \bar{l}_{21} \bar{l}_{10} / A_1) V_2 - \\ & - \dots - (\varepsilon_3 \bar{l}_{01} \bar{l}_{15} / A_5 + \varepsilon_4 \bar{l}_{54} \bar{l}_{40} / A_4) V_5 + \quad (3.90) \\ & + 4(\varepsilon_1 \bar{l}_{02} \bar{l}_{21} / A_1 + \varepsilon_5 \bar{l}_{15} \bar{l}_{50} / A_5) V_6 + 4(\varepsilon_2 \bar{l}_{03} \bar{l}_{32} / A_2 + \varepsilon_1 \bar{l}_{21} \bar{l}_{10} / A_1) V_7 + \\ & + \dots + 4(\varepsilon_3 \bar{l}_{01} \bar{l}_{15} / A_5 + \varepsilon_4 \bar{l}_{54} \bar{l}_{40} / A_4) V_{10} = 0 \end{aligned}$$

Ecuația pentru nodul 0 se mai poate scrie:

$$\begin{aligned} & 3(\varepsilon_1 \bar{l}_{21}^2 / A_1 + \varepsilon_2 \bar{l}_{32}^2 / A_2 + \dots + \varepsilon_5 \bar{l}_{15}^2 / A_5) V_0 - \\ & - (\varepsilon_1 \bar{l}_{02} \bar{l}_{21} / A_1 + \varepsilon_5 \bar{l}_{15} \bar{l}_{50} / A_5) (V_1 - 4V_6) - \dots - \\ & - (\varepsilon_3 \bar{l}_{01} \bar{l}_{15} / A_5 + \varepsilon_4 \bar{l}_{54} \bar{l}_{40} / A_4) (V_5 - 4V_{10}) = 0 \quad (3.91) \end{aligned}$$

Produsele scalare ce apar în această ecuație se pot exprima în funcție de pătratele laturilor triunghiurilor sau de coordonatele vîrfurilor triunghiurilor cu formulele cunoscute din matematică.

Ecuația aferentă unui nod situat pe latură este:

$$\frac{\partial F}{\partial V_6} = \frac{\partial F_1}{\partial V_{m_6}} + \frac{\partial F_5}{\partial V_{m_4}} = 0$$

Aplicînd formulele (3.62) rezultă succesiv:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 [\bar{l}_{02} \bar{l}_{21} V_0 + \bar{l}_{02} \bar{l}_{21} V_1 + 2\bar{l}_{02} \bar{l}_{10} V_7 + 2\bar{l}_{10} \bar{l}_{21} V_{11} + 2(\bar{l}_{02}^2 + \bar{l}_{21}^2 + \bar{l}_{10}^2) V_6] / 3A_1 + \\ & + \varepsilon_5 [\bar{l}_{15} \bar{l}_{10} V_0 + \bar{l}_{15} \bar{l}_{50} V_1 + 2(\bar{l}_{01}^2 + \bar{l}_{15}^2 + \bar{l}_{50}^2) V_6 + 2\bar{l}_{01} \bar{l}_{15} V_{15} + 2\bar{l}_{01} \bar{l}_{50} V_{10}] / 3A_5 = 0 \\ & [\varepsilon_1 (\bar{l}_{02}^2 + \bar{l}_{21}^2 + \bar{l}_{10}^2) / A_1 + \varepsilon_5 (\bar{l}_{01}^2 + \bar{l}_{15}^2 + \bar{l}_{50}^2) / A_4] V_6 + \\ & + (\varepsilon_1 \bar{l}_{02} \bar{l}_{21} / A_1 + \varepsilon_5 \bar{l}_{15} \bar{l}_{50} / A_5) V_0 + (\varepsilon_1 \bar{l}_{02} \bar{l}_{21} / A_1 + \varepsilon_5 \bar{l}_{15} \bar{l}_{50} / A_5) V_1 + \quad (3.92) \\ & + (2\varepsilon_1 \bar{l}_{02} \bar{l}_{10} / A_1) V_7 + (2\varepsilon_5 \bar{l}_{01} \bar{l}_{50} / A_5) V_{10} + (2\varepsilon_1 \bar{l}_{10} \bar{l}_{21} / A_1) V_{11} + (2\varepsilon_5 \bar{l}_{01} \bar{l}_{15} / A_5) V_{15} = 0 \end{aligned}$$

În expresiile ecuațiilor caracteristice ale sistemului minimizant pentru un domeniu divizat în elemente finite de ordinul 2 intervin vectorii laturi ai elementelor finite, ceea ce necesită cunoașterea coordonatelor vîrfurilor triunghiurilor, a arilor acestor triunghiuri și permitivitatea mediilor din interiorul triunghiurilor. Prin soluționarea sistemului de ecuații minimizant rezultă valorile nodale ale potențialului. Valoarea potențialului în orice punct poate fi determinată cu relația (3.30) sau (3.24).

Vom considera cazul particular al unei rețele de formă dreptunghiulară cu elemente finite de ordinul 2 triunghiulare ca în figura 3.14. Este util de utilizat în acest caz ecuațiile (3.91) și (3.92) în forma (vezi fig. 3.13):

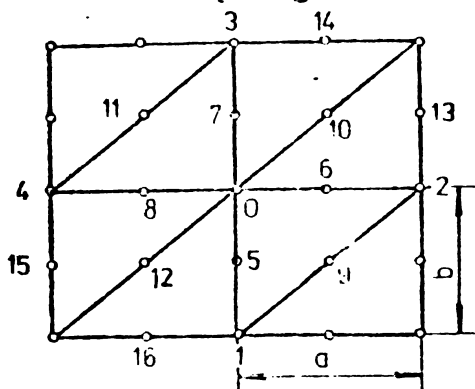


Fig. 3.14

Este util de utilizat în acest caz ecuațiile (3.91) și (3.92) în forma (vezi fig. 3.13):

$$\begin{aligned}
 & 6 V_0 (\varepsilon_1 \bar{l}_{21}^2 / A_1 + \varepsilon_2 \bar{l}_{32}^2 / A_2 + \dots + \varepsilon_5 \bar{l}_{15}^2 / A_5) + \\
 & + (V_1 - 4V_6) [\varepsilon_1 (\bar{l}_{02}^2 + \bar{l}_{21}^2 - \bar{l}_{10}^2) / A_1 + \\
 & + \varepsilon_3 (\bar{l}_{15}^2 + \bar{l}_{50}^2 - \bar{l}_{10}^2) / A_5] + (V_2 - 4V_7) \\
 & [\varepsilon_2 (\bar{l}_{03}^2 + \bar{l}_{32}^2 - \bar{l}_{02}^2) / A_2 + \varepsilon_1 (\bar{l}_{21}^2 + \bar{l}_{10}^2 - \bar{l}_{02}^2) / A_1] + \\
 & + \dots + (V_5 - 4V_{10}) [\varepsilon_5 (\bar{l}_{01}^2 + \bar{l}_{15}^2 - \bar{l}_{50}^2) / A_5 + \\
 & + \varepsilon_4 (\bar{l}_{54}^2 + \bar{l}_{40}^2 - \bar{l}_{50}^2) / A_4] = 0 \quad (3.93)
 \end{aligned}$$

respectiv:

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot [\varepsilon_1 (\bar{l}_{02}^2 + \bar{l}_{21}^2 + \bar{l}_{10}^2) / A_1 + \varepsilon_3 (\bar{l}_{01}^2 + \bar{l}_{15}^2 + \bar{l}_{50}^2) / A_5] V_6 - \\
 & - [\varepsilon_1 (\bar{l}_{02}^2 + \bar{l}_{21}^2 - \bar{l}_{10}^2) / A_1 + \varepsilon_3 (\bar{l}_{15}^2 + \bar{l}_{50}^2 - \bar{l}_{01}^2) / A_5] (V_0 + V_1) - \\
 & - 2 [\varepsilon_1 (\bar{l}_{02}^2 + \bar{l}_{10}^2 - \bar{l}_{21}^2) / A_1] V_7 - 2 [\varepsilon_5 (\bar{l}_{01}^2 + \bar{l}_{50}^2 - \bar{l}_{15}^2) / A_5] V_{10} - \\
 & - 2 [\varepsilon_1 (\bar{l}_{10}^2 + \bar{l}_{21}^2 - \bar{l}_{02}^2) / A_1] V_{11} - 2 [\varepsilon_5 (\bar{l}_{01}^2 + \bar{l}_{15}^2 - \bar{l}_{50}^2) / A_5] V_{15} = 0 \quad (3.94)
 \end{aligned}$$

Pentru nodul 0 rezultă:

$$\begin{aligned}
 & 3 [\varepsilon_1 (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + \varepsilon_2 \cdot \frac{b}{a} + \varepsilon_3 \cdot \frac{a}{b} + \varepsilon_4 (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + \varepsilon_5 \cdot \frac{b}{a} + \varepsilon_6 \cdot \frac{a}{b}] V_0 + \\
 & + (\varepsilon_6 + \varepsilon_1) \frac{a}{b} (V_1 - 4V_5) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{b}{a} \cdot (V_2 - 4V_6) + (\varepsilon_3 + \varepsilon_4) \frac{a}{b} \cdot (V_3 - 4V_7) + \\
 & + (\varepsilon_4 + \varepsilon_5) \frac{b}{a} (V_4 - 4V_3) = 0 \quad (3.95)
 \end{aligned}$$

Pentru nodul 5 avem:

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)(\varepsilon_6 + \varepsilon_1) V_5 - (\varepsilon_7 + \varepsilon_2) \frac{a}{b} (V_0 + V_1) - 2\varepsilon_2 \frac{b}{a} V_{12} - 2\varepsilon_1 \frac{b}{a} V_9 = 0 \quad (3.96)$$

Dacă rețeaua este patrată (triunghiuri dreptunghice isoscele) și mediul este omogen, atunci ecuațiile precedente devin, pentru nodul 0:

$$12 V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4(V_5 + V_6 + V_7 + V_8) = 0 \quad (3.97)$$

iar pentru nodul 5:

$$4 V_5 - V_0 - V_1 - V_{12} - V_3 = 0 \quad (3.98)$$

La o rețea formată din triunghiuri echilaterale de ordinul al doilea, ca în figura 3.15, se obțin ecuațiile, pentru nodurile din vîrfuri (nodul 0):

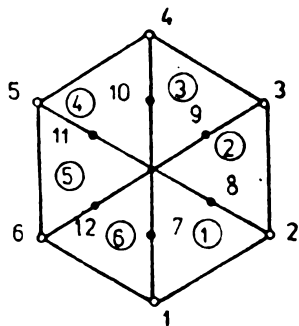


Fig. 3.15

$$6(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_6) V_0 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(V_1 - 4V_7) + \dots + (\varepsilon_6 + \varepsilon_5)(V_6 - 4V_{12}) = 0 \quad (3.99)$$

iar pentru nodul de pe latură (nodul 7):

$$6(\varepsilon_1 + \varepsilon_6) V_7 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_6)(V_0 + V_1) - 2\varepsilon_2 V_{12} - 2\varepsilon_1 V_8 - 2\varepsilon_6 V_{15} - 2\varepsilon_1 V_{13} = 0 \quad (3.100)$$

Dacă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_6$ ecuațiile devin:

$$18 V_7 + V_1 + V_2 + \dots + V_6 - 4V_7 - 4V_8 - \dots - 4V_{12} = 0 \quad (3.101)$$

respectiv

$$6 V_7 - V_0 - V_1 - V_{12} - V_8 - V_{15} - V_{13} = 0 \quad (3.102)$$

Se pot deduce de asemenea, utilizînd ecuațiile generale (3.91) și (3.94) formule corespunzătoare unor zone de indesire a elementelor finite ca în figurile 3.11 și 3.12, unde elementele finite ar fi de ordinul al doilea (conțin cîte un nod pe fiecare latură).

3.5.8.4. Domeniu divizat în elemente finite de ordinul 3

Pentru cazul domeniului de studiat divizat în elemente finite de ordinul al treilea vom lua în considerare un nod 0 înconjurat de cinci elemente finite triunghiulare de ordinul 3 (fig. 3.16). Se remarcă faptul că în afară de ecuația aferentă

Grupind convenabil termenii, se obține:

$$\begin{aligned}
 & 34 \left[\varepsilon_1 \bar{l}_{21}^2 / A_1 + \varepsilon_2 \bar{l}_{32}^2 / A_2 + \dots + \varepsilon_5 \bar{l}_{15}^2 / A_5 \right] V_0 + 7 \varepsilon_1 \bar{l}_{02} \cdot \bar{l}_{21} / A_1 + \varepsilon_5 \bar{l}_{15} \cdot \bar{l}_{50} / A_5 \\
 & \cdot V_1 + \dots + 7 (\varepsilon_5 \bar{l}_{01} \cdot \bar{l}_{15} / A_5 + \varepsilon_4 \bar{l}_{54} \cdot \bar{l}_{40} / A_4) V_5 + \\
 & + 3 \left[\varepsilon_1 (\bar{l}_{21}^2 - 8 \bar{l}_{02} \cdot \bar{l}_{21}) / A_1 + \varepsilon_5 (\bar{l}_{15}^2 - 8 \bar{l}_{15} \cdot \bar{l}_{50}) / A_5 \right] V_6 + \dots + \\
 & + 3 \left[\varepsilon_5 (\bar{l}_{15}^2 - 8 \bar{l}_{01} \cdot \bar{l}_{15}) / A_5 + \varepsilon_4 (\bar{l}_{54}^2 - 8 \bar{l}_{54} \cdot \bar{l}_{40}) / A_4 \right] V_{10} + \quad (3.1) \\
 & + 3 \left[\varepsilon_1 (\bar{l}_{21}^2 + 19 \bar{l}_{02} \cdot \bar{l}_{21}) / A_1 + \varepsilon_5 (\bar{l}_{15}^2 + 19 \bar{l}_{15} \cdot \bar{l}_{50}) / A_5 \right] V_{11} + \dots + \\
 & + 3 \left[\varepsilon_5 (\bar{l}_{15}^2 + 19 \bar{l}_{01} \cdot \bar{l}_{15}) / A_5 + \varepsilon_4 (\bar{l}_{54}^2 + 19 \bar{l}_{54} \cdot \bar{l}_{40}) / A_4 \right] V_{15} - \\
 & - 3 \varepsilon_1 (\bar{l}_{21}^2 / A_1) \cdot V_{16} - 3 \varepsilon_2 (\bar{l}_{32}^2 / A_2) V_{18} + \dots - 3 \varepsilon_5 (\bar{l}_{15}^2 / A_5) V_{24} - \\
 & - 3 \varepsilon_1 (\bar{l}_{21}^2 / A_1) V_{17} - 3 \varepsilon_2 (\bar{l}_{32}^2 / A_2) V_{19} + \dots - 3 \varepsilon_5 (\bar{l}_{15}^2 / A_5) V_{25} = 0
 \end{aligned}$$

Pentru nodul 11 situat pe o latură comună ecuația generală a sistemului minimizant are forma:

$$\begin{aligned}
 & \left[\varepsilon_1 (\bar{l}_{21}^2 + 19 \bar{l}_{21} \cdot \bar{l}_{02}) / A_1 + \varepsilon_5 (\bar{l}_{15}^2 + 19 \bar{l}_{15} \cdot \bar{l}_{50}) / A_5 \right] V_0 + \\
 & + \left[\varepsilon_1 (\bar{l}_{02}^2 - 8 \bar{l}_{02} \cdot \bar{l}_{21}) / A_1 + \varepsilon_5 (\bar{l}_{50}^2 - 8 \bar{l}_{50} \cdot \bar{l}_{15}) / A_5 \right] V_1 - \\
 & - \varepsilon_1 (\bar{l}_{10}^2 / A_1) V_2 - \varepsilon_5 (\bar{l}_{01}^2 / A_5) V_5 + 45 \left[\varepsilon_1 (\bar{l}_{02}^2 + \bar{l}_{21}^2 + \bar{l}_{10}^2) / A_1 + \right. \\
 & + \left. \varepsilon_5 (\bar{l}_{01}^2 + \bar{l}_{15}^2 + \bar{l}_{50}^2) / A_5 \right] V_{11} + 45 \varepsilon_1 (\bar{l}_{10} \cdot \bar{l}_{02} / A_1) V_{12} + \\
 & + 45 \varepsilon_5 (\bar{l}_{01} \cdot \bar{l}_{50} / A_5) \cdot V_{15} - 9 \left[\varepsilon_1 (\bar{l}_{01}^2 - 4 \bar{l}_{21} \cdot \bar{l}_{02}) / A_1 + \right. \\
 & + \left. \varepsilon_5 (\bar{l}_{01}^2 - 4 \bar{l}_{15} \cdot \bar{l}_{50}) / A_5 \right] V_6 - 9 \varepsilon_1 (\bar{l}_{10} \cdot \bar{l}_{02} / A_1) V_7 - 9 \varepsilon_5 \cdot \\
 & \cdot (\bar{l}_{01} \cdot \bar{l}_{50} / A_5) V_{10} - 9 \varepsilon_1 (\bar{l}_{21} \cdot \bar{l}_{10} / A_1) (V_{16} + V_{17}) - \\
 & - 9 \varepsilon_5 (\bar{l}_{01} \cdot \bar{l}_{15} / A_5) (V_{15} + V_{24}) + 54 \varepsilon_1 (\bar{l}_{21} \cdot \bar{l}_{10} / A_1) V_{26} + \\
 & + 54 (\bar{l}_{01} \cdot \bar{l}_{15} / A_5) V_{30} = 0 \quad (3.104)
 \end{aligned}$$

Ecuația nodului 6 situat de asemenea pe latura elementelor finite vecine 1 și 5 are o formă similară:

$$\begin{aligned}
 & \left[\varepsilon_1 (\bar{l}_{02}^2 + 19 \bar{l}_{02} \cdot \bar{l}_{21}) / A_1 + \varepsilon_5 (\bar{l}_{50}^2 + 19 \bar{l}_{50} \cdot \bar{l}_{15}) \right] V_1 + \left[\varepsilon_1 (\bar{l}_{21}^2 - 8 \bar{l}_{21} \cdot \bar{l}_{02}) / A_1 + \right. \\
 & + \left. \varepsilon_5 (\bar{l}_{15}^2 - 8 \bar{l}_{15} \cdot \bar{l}_{50}) / A_5 \right] \cdot V_0 - \varepsilon_1 (\bar{l}_{10}^2 / A_1) V_2 - \varepsilon_5 (\bar{l}_{01}^2 / A_5) V_5 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 45[\epsilon_1(\bar{l}_{02}^2 + \bar{l}_{21}^2 + \bar{l}_{10}^2)/A_1 + \epsilon_5(\bar{l}_{01}^2 + \bar{l}_{15}^2 + \bar{l}_{50}^2)/A_5] V_6 + 45\epsilon_1(\bar{l}_{21} \cdot \bar{l}_{10}/A_1) V_{16} + \\
 &+ 45\epsilon_5(\bar{l}_{01} \cdot \bar{l}_{15}/A_5) V_{25} - 9[\epsilon_1(\bar{l}_{01}^2 - 4 \bar{l}_{21} \cdot \bar{l}_{02})/A_1 + \epsilon_5(\bar{l}_{01}^2 - 4 \bar{l}_{15} \cdot \bar{l}_{50})/A_5] V_{11} - \\
 &- 9\epsilon_1(\bar{l}_{21} \cdot \bar{l}_{10}/A_1) V_{17} - 9\epsilon_5(\bar{l}_{01} \cdot \bar{l}_{15}/A_5) V_{24} - 9\epsilon_1(\bar{l}_{10} \cdot \bar{l}_{02}/A_1)(V_7 + V_{12}) - \\
 &- 9\epsilon_5(\bar{l}_{15} \cdot \bar{l}_{50}/A_5)(V_{10} + V_{15}) + 54\epsilon_1(\bar{l}_{10} \cdot \bar{l}_{02}/A_1) V_{26} + 54\epsilon_5(\bar{l}_{01} \cdot \bar{l}_{50}/A_5) V_{30} = 0
 \end{aligned}$$

In fine, ecuația caracteristică unui nod interior, 26, elementului finit triunghiular este de formă:

$$\begin{aligned}
 &(\bar{l}_{02}^2 + \bar{l}_{21}^2 + \bar{l}_{10}^2) V_{26} + \bar{l}_{10} \bar{l}_{02} \cdot V_6 + \bar{l}_{21} \bar{l}_{10} V_{11} + \bar{l}_{10} \bar{l}_{02} V_7 + \bar{l}_{02} \bar{l}_{21} V_{12} + \\
 &+ \bar{l}_{02} \bar{l}_{21} V_{16} + \bar{l}_{21} \cdot \bar{l}_{10} V_{17} = 0 \tag{3.106}
 \end{aligned}$$

In aceste ecuații intervin de asemenea vectorii laturi și elementelor finite triunghiulare și permitivitățile mediilor din interiorul triunghiurilor.

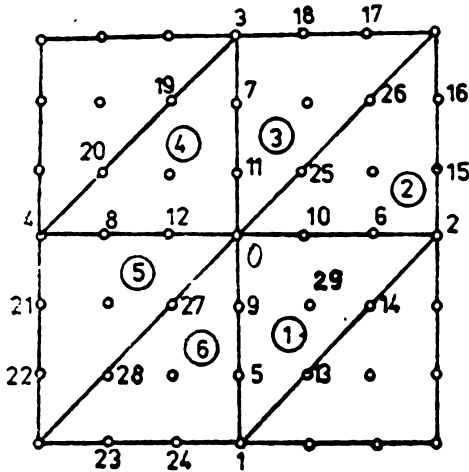


Fig. 3.17

In cazul unei rețele de triunghiuri dreptunghice de ordinul al treilea ca în figura 3.17 ecuațiile caracteristice ale sistemului minimizant sînt:

- pentru nodul central 0:

$$\begin{aligned}
 &34(2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + 2\epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6) V_0 - 7(\epsilon_1 + \epsilon_2) V_1 - \\
 &- (\epsilon_5 + \epsilon_4) V_4 + 3(10\epsilon_1 + 9\epsilon_6) V_5 + \dots \\
 &+ 3(9\epsilon_5 + 10\epsilon_4) V_8 - 3(17\epsilon_1 + 18\epsilon_6) V_9 - \dots \\
 &- 3(18\epsilon_5 + 17\epsilon_4) V_{12} + 3(\epsilon_2 + \epsilon_3)(V_{26} + V_{25}) + \\
 &+ 3(\epsilon_5 + \epsilon_6)(V_{27} + V_{28}) - 6\epsilon_1(V_{13} + V_{14}) - 3\epsilon_2(V_{15} + V_{16}) - \\
 &- 3\epsilon_3(V_{17} + V_{18}) - 6\epsilon_4(V_{19} + V_{20}) - 3\epsilon_5(V_{21} + V_{22}) - \\
 &- 3\epsilon_6(V_{23} + V_{24}) = 0 \tag{3.107}
 \end{aligned}$$

- pentru nodul 9:

$$\begin{aligned}
 &-(18\epsilon_6 + 17\epsilon_1) V_0 + (10\epsilon_6 + 9\epsilon_1) V_1 - \epsilon_6 V_{29} - \epsilon_1 V_2 + 90(\epsilon_1 + \epsilon_2) V_9 - \\
 &- 45(\epsilon_6 + \epsilon_1) V_5 - 9\epsilon_6(5V_{27} - V_{28}) + 9\epsilon_6(V_{13} + V_{14}) - 54\epsilon_1 V_{29} = 0 \tag{3.108}
 \end{aligned}$$

- pentru nodul 29:

$$4 V_{29} - V_{10} - V_9 - V_{13} - V_{14} = 0 \tag{3.109}$$

Dacă mediul este omogen ecuațiile (3.107) și (3.108) devin:

- pentru nodul 0:

$$+ \epsilon V(\epsilon \Delta)$$

$$\begin{aligned}
& 272V_0 - 14(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) + 57(V_5 + V_6 + V_7 + V_8) - 105(V_9 + V_{10} + V_{11} + V_{12}) - \\
& - 6(V_{13} + V_{14} + V_{19} + V_{20}) - 3(V_{15} + V_{16} + V_{17} + V_{18} + V_{21} + V_{22} + V_{23} + V_{24}) + \\
& + 6(V_{25} + V_{26} + V_{27} + V_{28}) = 0 \quad (3.110)
\end{aligned}$$

- pentru nodul 9:

$$\begin{aligned}
& 180V_9 - 35V_0 + 19V_1 - V_{29} - V_2 + 90V_5 - 45V_{27} + 9V_{28} + 9V_{13} + \\
& + 9V_{14} - 54V_{29} = 0 \quad (3.111)
\end{aligned}$$

3.5.8.5. Domeniu divizat de elemente finite de diferite ordine

Determinarea distribuției potențialului electric și a intensității câmpului electric în medii cu zone de variație mare a intensității câmpului electric impune uneori utilizarea în domeniu a unor elemente finite de ordine diferite [165]. În acest caz se aplică ecuațiile deduse anterior pentru domeniile divizate în elemente finite de ordinul 1, 2 sau 3, dar la frontiera între domenii divizate în elemente finite de ordine diferite (fig. 3.18)

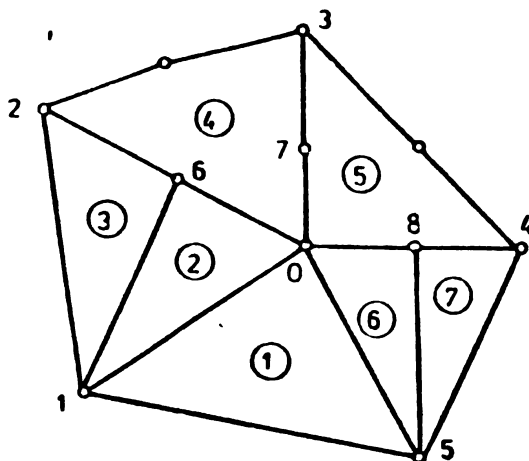


Fig. 3.18

se vor aplica ecuații specifice acestei zone. Important este ca nodurile situate de-a lungul frontierei dintre domeniile divizate diferit să fie prinse în rețea în mod corespunzător, de exemplu nodurile 6 și 8, care sînt noduri de pe laturi în elementele finite 4 și 5 de ordinul 2, sînt în vârfulurile triunghiurilor de ordinul întâi, 2, 3 respectiv 6, 7. Astfel nodurile 0, 6, 8 sînt înconjurate de elemente finite de diferite ordine, ecuațiile pentru acestea rezultînd pe baza expresiilor derivatelor funcționalelor (3.58) și (3.62). De exemplu, dacă mediul este omogen în cazul (fig. 3.19) ecuațiile vor fi pentru nodul 0:

$$54V_0 + 2V_1 + 4V_2 + 3V_5 - 9V_4 - 25V_9 - 12V_{14} - 16V_{16} = 0$$

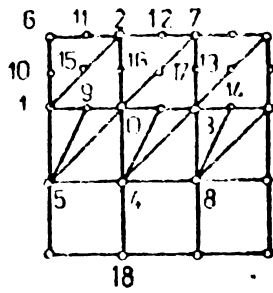


Fig. 3.19

- pentru nodul 4:

$$16 V_4 - V_5 - 4V_8 - V_{18} - 3 \cdot V_0 - 2V_{14} + V_3 = 0$$

- pentru nodul 9:

$$34 V_9 - 13 V_0 - 10 V_1 - 11 V_5 = 0$$

Se pot obține ecuații similare pentru zone de trecere dintre elemente finite de orice ordin.

3.5.8.6. Rezolvarea problemelor tridimensionale

La problemele de determinare a câmpului electric în spațiu, domeniul se poate diviza în elemente finite având forma unor prisme sau tetraedre, punctele nodale fiind situate în vîrfurile tetraedrului, pe muchii, pe fețele laterale sau în interiorul acestuia,

în funcție de gradul polinomului care aproximează variația potențialului în interiorul tetraedrului. În figura 3.20.a,b,c sînt prezentate tetraedre de ordinul 1,2 respectiv 3. Coordonatele normalizate spațiale L_1, L_2, L_3, L_4 se introduc prin relațiile [236]:

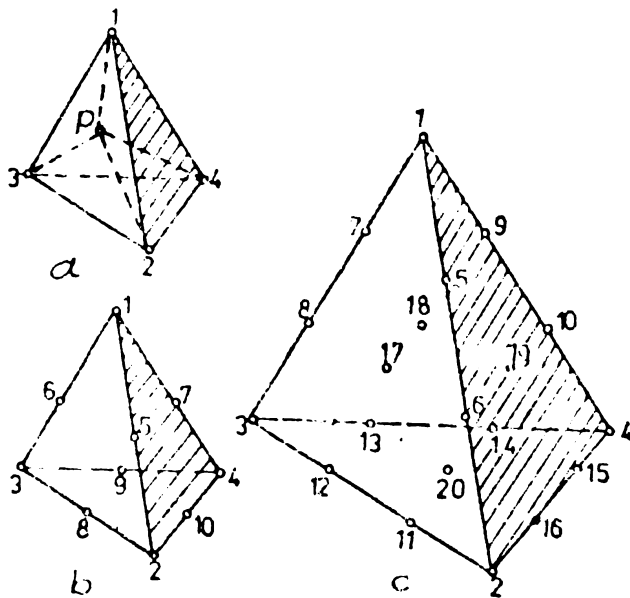


Fig. 3.20

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 \\ z &= L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4 \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Expresiile lui L_1, L_2, L_3, L_4 reprezintă coordonatele de volum ale punctului P situat în interiorul tetraedrului (fig.3.20,a

$$L_1 = \text{Volumul } P234 / \text{Volumul } 1234 \quad \text{s.a.m.d.}$$

Funcțiile de formă ale elementelor tetraedrice de ordinul 1 fiind chiar coordonatele generalizate L_1, L_2, L_3, L_4 se obțin în

mod similar ca în situația din plan, derivatele funcționalei elementului finit în raport cu potențialele nodale de forma:

$$\begin{aligned} \partial F_m / \partial V_{m1} &= \epsilon_m (\bar{S}_{234}^2 V_{m1} + \bar{S}_{234} \cdot \bar{S}_{134} V_{m2} + \bar{S}_{234} \cdot \bar{S}_{124} V_{m3} + \bar{S}_{234} \cdot \\ &\quad \cdot \bar{S}_{123} V_{m4}) / 6 V_m \\ \partial F_m / \partial V_{m2} &= \epsilon_m (\bar{S}_{134} \cdot \bar{S}_{234} V_{m1} + \bar{S}_{134}^2 V_{m2} + \bar{S}_{134} \cdot \bar{S}_{124} V_{m3} + \bar{S}_{134} \cdot \\ &\quad \cdot \bar{S}_{123} V_{m4}) / 6 V_m \quad (3.113) \\ \partial F_m / \partial V_{m3} &= \epsilon_m (\bar{S}_{124} \cdot \bar{S}_{234} V_{m1} + \bar{S}_{124} \cdot \bar{S}_{134} V_{m2} + \bar{S}_{124}^2 V_{m3} + \bar{S}_{124} \cdot \\ &\quad \cdot \bar{S}_{123} V_{m4}) / 6 V_m \\ \partial F_m / \partial V_{m4} &= \epsilon_m (\bar{S}_{123} \cdot \bar{S}_{234} V_{m1} + \bar{S}_{123} \cdot \bar{S}_{134} V_{m2} + \bar{S}_{123} \cdot \bar{S}_{124} V_{m3} + \\ &\quad + \bar{S}_{123}^2 V_{m4}) / 6 V_m, \end{aligned}$$

unde \bar{S}_{123} , \bar{S}_{234} , \bar{S}_{134} , \bar{S}_{124} sînt vectorii arie ai suprafețelor tetraedrului avînd modulul egal cu aria suprafețelor tetraedrului iar sensul dinăpre interior spre exteriorul tetraedrului. Relațiile de calcul pentru arii și volumele V al tetraedrului sînt date în tratatele de geometrie analitică [64, 149].

Cu ajutorul relațiilor (3.113) se deduce ecuația generală a sistemului minimizant pentru un punct nodal 0 înconjurat de tetraedre de ordinul întâi (fig. 3.21):

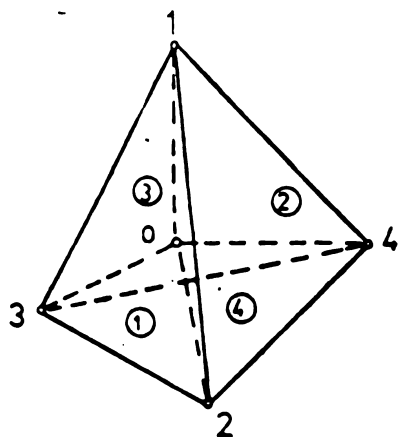


Fig. 3.21

$$\begin{aligned} & (\epsilon_1 \bar{S}_{123}^2 / V_{0123} + \epsilon_2 \bar{S}_{214}^2 / V_{0124} + \\ & + \epsilon_3 \bar{S}_{143}^2 / V_{0143} + \epsilon_4 \bar{S}_{234}^2 / V_{0234}) V_0 + \\ & + (\epsilon_1 \bar{S}_{123} \cdot \bar{S}_{023} / V_{0123} + \epsilon_2 \bar{S}_{214} \cdot \bar{S}_{204} / V_{0124} + \\ & + \epsilon_3 \bar{S}_{143} \cdot \bar{S}_{034} / V_{0143}) V_1 + \dots + \quad (3.114) \\ & + (\epsilon_2 \bar{S}_{214} \cdot \bar{S}_{012} / V_{0124} + \\ & + \epsilon_3 \bar{S}_{143} \cdot \bar{S}_{013} / V_{0143} + \\ & + \epsilon_4 \bar{S}_{234} \cdot \bar{S}_{032} / V_{0234}) V_4 = 0 \end{aligned}$$

În ecuația (3.114) coeficienții potențialelor V_1, V_2, V_3, V_4 conțin produsele scalare ale vectorilor arie opuși punctelor nodal 1, 2, 3 respectiv 4 și punctului nodal 0 din elementele finite

1, 2, 3 și 4. Se pot deduce relații similare pentru elemente finite de ordinul 2 și 3, funcțiile de formă ale acestora fiind:

- pentru ordinul 2:

$$f_{m1} = (2L_1 - 1)L_1 \quad \text{s.a.m.d.} \quad (3.115)$$

$$f_{m5} = 4 L_1 L_2 \quad \text{s.a.m.d.}$$

- pentru ordinul 3:

$$f_{m1} = \frac{1}{2} (3 L_1 - 1) (3 L_1 - 2) L_1 \quad \text{s.a.m.d.}$$

$$f_{m5} = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3 L_1 - 1) \quad \text{s.a.m.d.} \quad (3.116)$$

$$f_{m8} = 27 L_1 L_2 L_3 \quad \text{s.a.m.d.}$$

3.5.9. Calculul intensității câmpului electric

În majoritatea problemelor de rezolvare a câmpului electric interesează în final intensitatea câmpului electric, care se poate exprima în funcție de potențialul V , pentru cazul plan:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = -(\partial V / \partial x) \vec{i} - (\partial V / \partial y) \vec{j} \quad (3.117)$$

Pentru elemente finite de ordinul întâi ținând seama de (3.92) și (3.54) intensitatea câmpului electric devine:

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{\left\| \begin{matrix} E_x \\ E_y \end{matrix} \right\|^2} = - \frac{1}{2 A_m} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \left\| \begin{matrix} V_{m1} \\ V_{m2} \\ V_{m3} \end{matrix} \right\|^2} \quad (3.118)$$

În interiorul unui element finit de ordinul doi intensitatea câmpului electric se deduce sub forma:

$$E_x = - \left[(4L_1 - 1)b_1 V_{m1} + (4L_2 - 1)b_2 V_{m2} + (4L_3 - 1)b_3 V_{m3} + 4(b_1 L_2 + b_2 L_1) V_{m4} + \right. \\ \left. + 4(b_2 L_3 + b_3 L_2) V_{m5} + 4(b_1 L_3 + b_3 L_1) V_{m6} \right] / 2 A_m \quad (3.119)$$

$$E_y = - \left[(4L_1 - 1)c_1 V_{m1} + (4L_2 - 1)c_2 V_{m2} + (4L_3 - 1)c_3 V_{m3} + 4(c_1 L_2 + c_2 L_1) V_{m4} + \right. \\ \left. + 4(c_2 L_3 + c_3 L_2) V_{m5} + 4(c_1 L_3 + c_3 L_1) V_{m6} \right] / 2 A_m$$

Aceste expresii permit determinarea intensității câmpului electric în orice punct din interiorul oricărui element finit cunoscând valorile nodale ale potențialului. Se observă și din aceste expresii că intensitatea câmpului electric este constantă în interiorul elementelor finite de ordinul 1 și are variație liniară în interiorul elementelor finite de ordinul 2. În cazul particular al unor triunghiuri dreptunghice echilaterale componentele intensității câmpului electric sînt:

- la elemente de ordinul întâi:

$$E_x = (V_{m2} - V_{m1})/l; \quad E_y = (V_{m3} - V_{m1})/l \quad (3.120)$$

- la elemente de ordinul al doilea:

$$\begin{aligned} E_x = & [3 - 4(x-x_1) - 4(y-y_1)] V_{m1}/l^2 + \\ & + [4(x-x_1) - 1] V_{m2}/l^2 + [4 - 8(x-x_1) - \\ & - 4(y-y_1)] V_{m4}/l^2 + 4(y-y_1) V_{m5}/l^2 - \\ & - 4(y-y_1) V_{m6}/l^2 \\ E_y = & [3 - 4(x-x_1) - 4(y-y_1)] V_{m1}/l^2 + [4(y-y_1) - 1] V_{m3}/l^2 - \\ & - 4(x-x_1) V_{m4}/l^2 + 4(x-x_1) V_{m5}/l^2 + [4 - 4(x-x_1) - \\ & - 8(y-y_1)] V_{m6}/l^2. \end{aligned} \quad (3.121)$$

La elementele finite de ordinul 1 sistemul de ecuații minimizant al funcționalei se poate aduce la o formă care să conțină ca necunoscute intensitățile câmpului electric în interiorul elementelor finite. În acest sens, pe baza relațiilor (3.11B) se poate scrie:

$$\begin{aligned} \bar{E}_m = & [(y_3 - y_2)\bar{i} + (x_2 - x_3)\bar{j}] V_{m1}/2Am + [(y_1 - y_3)\bar{i} + (x_3 - x_1)\bar{j}] V_{m2}/2Am + \\ & + [(y_2 - y_1)\bar{i} + (x_2 - x_1)\bar{j}] V_{m3}/2Am = [\bar{k} \times \bar{l}_{23}] V_{m1}/2Am + \\ & + [\bar{k} \times \bar{l}_{31}] V_{m2}/2Am + [\bar{k} \times \bar{l}_{12}] V_{m3}/2Am = [\bar{k} \times \bar{LV}_m]/2Am, \text{ adică:} \\ \bar{LV}_m = & [\bar{E}_m \times \bar{k}] \cdot 2Am, \text{ unde } \bar{LV}_m = \bar{l}_{23} V_{m1} + \bar{l}_{31} V_{m2} + \bar{l}_{12} V_{m3} \end{aligned}$$

Derivatele funcționalei în raport cu potențialele nodale (3.57) se pot scrie acum:

$$\partial F_m / \partial V_{m1} = \epsilon_m \bar{l}_{23} [\bar{E}_m \times \bar{k}] / 2 \quad (3.122)$$

$$\partial F_m / \partial V_{m2} = \epsilon_m \bar{l}_{31} [\bar{E}_m \times \bar{k}] / 2$$

$$\partial F_m / \partial V_{m3} = \epsilon_m \bar{l}_{12} [\bar{E}_m \times \bar{k}] / 2$$

Cu aceste ecuații sistemului minimizant (3.67)

se poate scrie succesiv:

$$\epsilon_1 [\bar{l}_{21} \times \bar{E}_1] + \epsilon_2 [\bar{l}_{32} \times \bar{E}_2] + \dots + \epsilon_7 [\bar{l}_{17} \times \bar{E}_7] = 0$$

$$\epsilon_1 l_{21} (\bar{E}_1 \cdot \bar{n}_{21}) + \epsilon_2 l_{32} (\bar{E}_2 \cdot \bar{n}_{32}) + \dots + \epsilon_7 l_{17} (\bar{E}_7 \cdot \bar{n}_{17}) = 0$$

$$l_{21} (\bar{D}_1 \cdot \bar{n}_{21}) + l_{32} (\bar{D}_2 \cdot \bar{n}_{32}) + \dots + l_{17} (\bar{D}_7 \cdot \bar{n}_{17}) = 0 \quad (3.123)$$

unde $\bar{n}_{12} = [\bar{k} \times \bar{l}_{12}] / l_{12}$ și similar $\bar{n}_{32}, \dots, \bar{n}_{17}$ sînt normalele la laturile elementului finit dirijate dinspre nodul 0 spre exterior (fig. 3.7). Expresia (3.123) conține ca necunoscute vectorii inducției electrice $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ în interiorul elementelor finite și este chiar legea fluxului electric scrisă pentru o primă dreaptă a cărei secțiune transversală este conturul poligonal 1 2 3 ... 7 ce înconjoară nodul 0, sarcina electrică liberă din interiorul prisme fiind nulă.

3.5.10. Condiții de frontieră

Forma frontierei domeniului de studiat se poate aproxima suficient de bine prin utilizarea unor elemente finite triunghiulare convenabil alese. Același lucru se poate realiza la frontierele de separație între medii cu proprietăți diferite.

Condițiile de tip Dirichlet se impun pentru potențialele din punctele nodale situate pe frontieră, numărul ecuațiilor sistemului minimizant al funcționalei fiind așadar mai mic decât numărul total de noduri cu numărul de noduri situate pe frontiera unde se cunoaște valoarea potențialului.

Cînd pe frontieră sau pe o porțiune S_2 a acesteia sînt date condiții de tip Neumann în expresia funcționalei (3.12) apare funcționala suplimentară:

$$F_N = - \int_{S_2} (\partial V / \partial n)_{S_2} \cdot \epsilon V ds \quad (3.124)$$

integrarea făcîndu-se pe suprafața S_2 . În cazul problemelor plan paralele frontiera se reduce la o curbă C_2 , iar integrala (3.124) la o

integrală curbilinie. În figura 3.22 se prezintă o porțiune din-

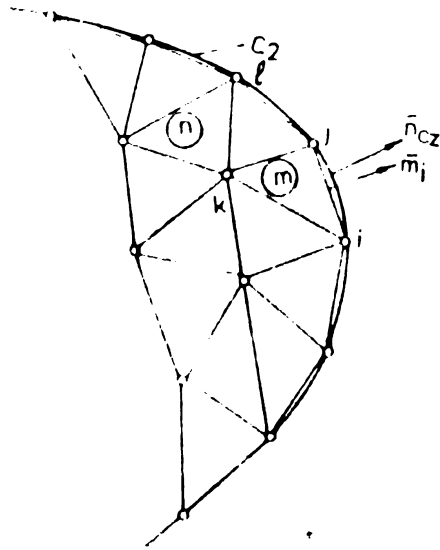


Fig. 3.22

tr-o frontieră C_2 pe care sînt date condiții de tip Neumann, frontiera fiind aproximată prin segmente de dreaptă. Pentru un element finit m nu sînt cunoscute valorile nodale ale potențialului în punctele i, j , iar pentru elementul finit n nu este cunoscută valoarea potențialului în nodul l . Notînd cu V_i, V_j, V_k valorile nodale ale potențialului în elementul finit m , valoarea potențialului în orice punct al elementului finit m se poate exprima în funcție de acestea cu o relație de tipul (3.25) sau (3.30). Ter-

menul suplimentar F_N se poate exprima de asemenea, integrându-se într-o sumă extinsă asupra tuturor elementelor finite care au latură cel puțin situată pe frontiera C_2 :

$$F_N = \sum_{m=1}^{N_2} F_{Nm} \quad (3.125)$$

unde

$$F_{Nm} = \int_{C_{2m}} \epsilon \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{C_2} V \, dl$$

În ecuațiile sistemului minimizant aferente nodurilor situate pe frontieră, va apărea deci termenul:

$$\partial F_{Nm} / \partial V_i = - \int_{C_2} \epsilon \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{C_2} f_{mi} \, dl \quad (3.126)$$

astfel că forma generală a ecuației sistemului minimizant în cazul unor condiții de frontieră de tip Neumann este:

$$\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{k=1}^L \int_{S_m} \epsilon \left(\frac{\partial f_{mi}}{\partial x} \frac{\partial f_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial f_{mi}}{\partial y} \frac{\partial f_{mk}}{\partial y} \right) V_m \, dx \, dy + \sum_{m=1}^{N_2} \epsilon_m \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_m \int_{C_2} f_{mi} \, dl = 0 \quad (3.127)$$

unde ϵ_m este permitivitatea dielectrică a mediului din elementul finit m iar $(\partial V / \partial n)_m$ este valoarea derivatei după normala curbei C_2 a potențialului, presupusă constantă în interiorul unui element finit. Primul termen se referă la cele M_1 elemente finite ale domeniului vecin nodului K inclusiv elementele situate lângă frontieră, pe cînd al doilea termen se referă numai la cele N_2 elemente vecine nodului K situate lângă frontiera C_2 .

3.5.11. Câmpuri în medii cu simetrie plan meridiană

Determinarea câmpului electric într-un domeniu V se reduce în acest caz la o problemă plană având o axă privilegiată. Funcționala de minimizat este în acest caz ($\partial V / \partial \varphi = 0$):

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon r \left[\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dr dz \quad (3.128)$$

dacă pe frontieră sînt date condiții de tip Dirichlet. Axa Oz a sistemului de axe este axa de simetrie a domeniului. Aplicînd un procedeu similar cu cel de la elementele finite de ordinul 1 în plan se obțin funcțiile de formă:

$$f_{m1} = (a_1 + b_1 r + c_1 z) / 2A_m \quad (3.129)$$

unde constantele a_1, b_1, c_1 sînt:

$$a_1 = r_j z_k - r_k z_j, \quad b_1 = z_j - z_k, \quad c_1 = r_k - r_j \quad (1, j, k = 1, 2, 3) \quad (3.130)$$

Derivatele parțiale ale funcționalului în raport cu valorile nodale ale potențialului (fig. 3.23) sînt:

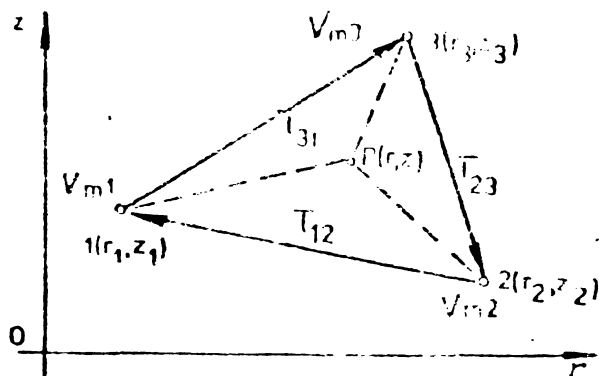


Fig. 3.23.

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{F}_m / \partial V_{m1} &= \epsilon_m (\bar{l}_{23} V_{m1} + \bar{l}_{31} V_{m2} + \\ &+ \bar{l}_{12} V_{m3}) \bar{l}_{23} (r_1 + \\ &+ r_2 + r_3) / 6A_m \\ \partial \mathcal{F}_m / \partial V_{m2} &= \epsilon_m (\bar{l}_{23} V_{m1} + \bar{l}_{31} V_{m2} + \\ &+ \bar{l}_{12} V_{m3}) (\bar{l}_{31} (r_1 + \\ &+ r_2 + r_3)) / 6A_m \quad (3.131) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{F}_m / \partial V_{m3} &= \epsilon_m (\bar{l}_{23} V_{m1} + \bar{l}_{31} V_{m2} + \\ &+ \bar{l}_{12} V_{m3}) \bar{l}_{12} (r_1 + r_2 + r_3) / \\ &/ 6A_m \end{aligned}$$

Pentru un nod O (fig. 3.24) inconjurat de elemente finite de ordinul întâi, ecuația sistemului minimizant este:

$$\begin{aligned} &[\epsilon_1 \bar{l}_{21}^2 (r_0 + r_2 + r_1) / 6A_1 + \epsilon_2 \bar{l}_{32}^2 (r_0 + r_3 + r_2) / 6A_2 + \dots + \epsilon_5 \bar{l}_{65}^2 (r_0 + r_5 + r_6) / \\ &/ 6A_5 + \epsilon_6 \bar{l}_{16}^2 (r_0 + r_1 + r_6) / 6A_6] V_0 + [\epsilon_7 \bar{l}_{02} \cdot \bar{l}_{21} (r_0 + r_2 + r_1) / 6A_1 + \\ &+ \epsilon_6 \bar{l}_{60} \cdot \bar{l}_{16} (r_0 + r_1 + r_6) / 6A_6] \cdot V_1 + [\epsilon_2 \bar{l}_{03} \cdot \bar{l}_{32} (r_0 + r_3 + r_2) / 6A_2 + \\ &+ \epsilon_7 \bar{l}_{10} \cdot \bar{l}_{21} (r_0 + r_2 + r_1) / 6A_1] \cdot V_2 + [\epsilon_3 \bar{l}_{04} \cdot \bar{l}_{43} (r_0 + r_4 + r_3) / \end{aligned}$$

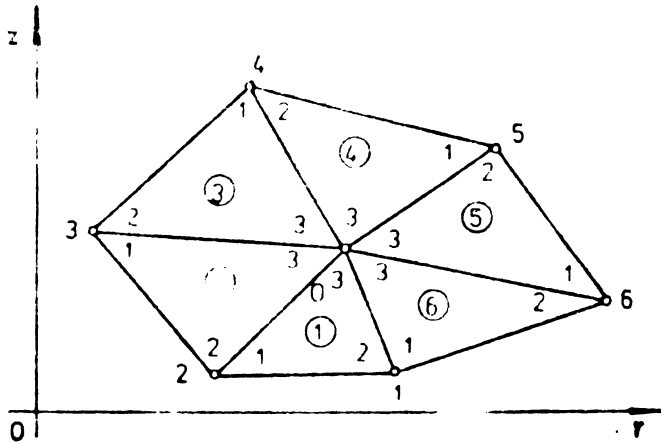


Fig. 3.24.

$$\begin{aligned}
 & /6A_3 + \epsilon_2 \bar{l}_{20} \cdot \bar{l}_{32} (r_0 + r_3 + r_2) / \\
 & /6A_2] \cdot V_3 + [\epsilon_4 \bar{l}_{05} \cdot \bar{l}_{54} \cdot (r_0 + r_3 + \\
 & + r_4) / 6A_4 + \epsilon_3 \bar{l}_{30} \cdot \bar{l}_{43} \cdot (r_0 + r_4 + \\
 & + r_3) / 6A_3] \cdot V_4 + [\epsilon_3 \bar{l}_{01} \cdot \bar{l}_{15} \cdot \\
 & \cdot (r_0 + r_1 + r_5) / 6A_5 + \epsilon_4 \bar{l}_{40} \cdot \bar{l}_{54} \cdot \\
 & \cdot (r_0 + r_5 + r_4) / 6A_4] \cdot V_5 = 0
 \end{aligned}$$

(3.132)

care in cazul particular al mediului omogen devine ecuația Laplace in diferențe finite scrisă in coordonate cilindrice.

3.6. Probleme de câmp rezolvate

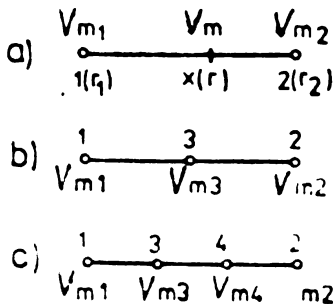
Precizia de obținere a valorilor potențialului și intensității câmpului electric la rezolvarea unor probleme de câmp prin metoda elementelor finite depinde de o serie de factori, cum ar fi pasul rețelei de divizare a domeniului studiat, ordinul elementelor finite utilizate, criteriul de limitare a procesului de iterație. In vederea stabilirii unor corelații ce există între acești factori s-a rezolvat pe cale numerică două probleme cu soluții analitice cunoscute: problema condensatorului cilindric și sferic.

3.6.1. Problema condensatorului cilindric

Problema plană din § 3.5.11 se reduce in acest caz la o problemă unidimensională, funcționala de minimizat fiind:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int \epsilon \cdot r \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 dr \tag{3.133}$$

Elementele finite unidimensionale de ordinul întâi sînt segmente de dreaptă (fig. 3.25, a), iar funcțiile de formă sînt:



$$\begin{aligned}
 f_{m1} &= L_1 = (r_2 - r) / (r_2 - r_1); \\
 f_{m2} &= L_2 = (r - r_1) / (r_2 - r_1);
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

Pentru elementele finite de ordinul doi și trei (fig. 3.25, b și c) funcțiile de formă se exprimă in funcție de L_1 și L_2 prin relații de tipul (3.48) și respectiv (3.49)-(3.51).

Fig. 3.25.

Derivatele funcționalei în raport cu potențialele nodale sînt, pentru elemente finite de ordinul întâi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_m}{\partial V_{m1}} &= \varepsilon_m (r_1 + r_2) (V_{m1} - V_{m2}) / 2 (r_2 - r_1) \\ \frac{\partial F_m}{\partial V_{m2}} &= \varepsilon_m (r_1 + r_2) (V_{m2} - V_{m1}) / 2 (r_2 - r_1)\end{aligned}\quad (3.135)$$

- pentru elemente finite de ordinul doi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_m}{\partial V_{m1}} &= \varepsilon_m [(11 r_1 + 3 r_2) V_{m1} + (r_1 + r_2) V_{m2} - 4(3 r_1 + r_2) V_{m3}] / 6(r_2 - r_1) \\ \frac{\partial F_m}{\partial V_{m2}} &= \varepsilon_m [(r_1 + r_2) V_{m1} + (3 r_1 + 11 r_2) V_{m2} - 4(r_1 + 3 r_2) V_{m3}] / 6(r_2 - r_1) \\ \frac{\partial F_m}{\partial V_{m3}} &= 2\varepsilon_m [- (3r_1 + r_2) V_{m1} - (r_1 + 3r_2) V_{m2} + 4(r_1 + r_2) V_{m3}] / 6(r_2 - r_1)\end{aligned}\quad (3.136)$$

- pentru elemente finite de ordinul trei:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_m}{\partial V_{m1}} &= \varepsilon_m [34 r_2 + 262 r_1] V_{m1} - 13(r_2 + r_1) V_{m2} - 3(17 r_2 + 109 r_1) V_{m3} + \\ &+ 6(5 r_2 + 13 r_1) V_{m4}] / 80 (r_2 - r_1) \\ \frac{\partial F_m}{\partial V_{m2}} &= \varepsilon_m [-13(r_1 + r_2) V_{m1} + (34 r_1 + 262 r_2) V_{m2} + 6(5 r_1 + 13 r_2) V_{m3} - \\ &- 3(17 r_1 + 109 r_2) V_{m4}] / 80 (r_2 - r_1) \\ \frac{\partial F_m}{\partial V_{m3}} &= \varepsilon_m [-3(109 r_1 + 17 r_2) V_{m1} + 6(5 r_1 + 13 r_2) V_{m2} + 54(11 r_1 + 5 r_2) V_{m3} - \\ &- 297 (r_1 + r_2) V_{m4}] / 80 (r_2 - r_1) \\ \frac{\partial F_m}{\partial V_{m4}} &= \varepsilon_m [6(13 r_1 + 5 r_2) V_{m1} - 3(17 r_1 + 109 r_2) V_{m2} - \\ &- 297(r_1 + r_2) V_{m3} + 54(r_1 + 11 r_2) V_{m4}] / 80 (r_2 - r_1)\end{aligned}\quad (3.137)$$

Ecuațiile caracteristice ale sistemului minimizant al funcționalei sînt: - pentru elemente finite de ordinul 1 (fig. 3.26, a)

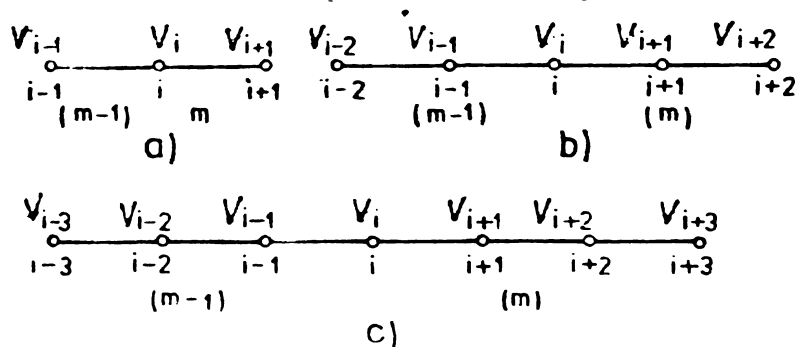


Fig. 3.26

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon_m (r_{i-1} + r_i) / (r_i - r_{i-1}) + \varepsilon_m (r_i + r_{i+1}) / (r_{i+1} - r_i) \right] V_i - \\ & - \varepsilon_m (r_{i-1} + r_i) V_{i-1} / (r_i - r_{i-1}) - \varepsilon_m (r_i + r_{i+1}) V_{i+1} / (r_{i+1} - r_i) = 0 \quad (3.138) \end{aligned}$$

- pentru elemente finite de ordinul doi (fig. 3.26, b), nodul i:

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon_m (3 r_{i-2} + 11 r_i) / (r_i - r_{i-2}) + \varepsilon_m (11 r_i + 3 r_{i+2}) / (r_{i+2} - r_i) \right] \cdot V_i + \\ & + \varepsilon_m (r_{i-2} - r_i) V_{i-2} / (r_i - r_{i-2}) - 4 \varepsilon_m (r_{i-2} + 3 r_i) V_{i-1} / (r_i - r_{i-2}) - \\ & - 4 \varepsilon_m (3 r_i + r_{i+2}) V_{i+1} / (r_{i+2} - r_i) + \varepsilon_m (r_i + r_{i+2}) V_{i+2} / (r_{i+2} - r_i) = 0 \quad (3.139) \end{aligned}$$

nodul i+1:

$$4(r_i + r_{i+2}) V_{i+1} - (3r_i + r_{i+2}) V_i - (r_i + 3r_{i+2}) V_{i+2} = 0 \quad (3.140)$$

- pentru elemente finite de ordinul 3 (fig. 3.26, c), nodul i:

$$\begin{aligned} & \left[2\varepsilon_m (17 r_{i-3} + 131 r_i) / (r_i - r_{i-3}) + 2\varepsilon_m (131 r_i + 17 r_{i+3}) / (r_{i+3} - r_i) \right] V_i - \\ & - 13\varepsilon_m (r_{i-3} + r_i) V_{i-3} / (r_i - r_{i-3}) + 6\varepsilon_m (5 r_{i-3} + 13 r_i) V_{i-2} / (r_i - r_{i-3}) - \\ & - 3\varepsilon_m (17 r_{i-3} + 109 r_i) V_{i-1} / (r_i - r_{i-3}) - 3\varepsilon_m (109 r_i + 17 r_{i+3}) V_{i+1} / \\ & / (r_{i+3} - r_i) + 6\varepsilon_m (13 r_i + 5 r_{i+3}) V_{i+2} / (r_{i+3} - r_i) - 13\varepsilon_m (r_i + r_{i+3}) V_{i+3} / \\ & / (r_{i+3} - r_i) = 0 \quad (3.141) \end{aligned}$$

nodul i+1:

$$\begin{aligned} & (109 r_i + 17 r_{i+3}) V_i - 18(11 r_i + 5 r_{i+3}) V_{i+1} + 99(r_i + r_{i+3}) V_{i+2} - \\ & - 2(5 r_i + 13 r_{i+3}) V_{i+3} = 0 \quad (3.142) \end{aligned}$$

nodul i+2:

$$\begin{aligned} & 2(13 r_i + 5 r_{i+3}) V_i - 99(r_i + r_{i+3}) V_{i+1} + 18(5 r_i + 11 r_{i+3}) V_{i+2} - \\ & - (17 r_i + 109 r_{i+3}) V_{i+3} = 0 \quad (3.143) \end{aligned}$$

Ca exemplu de aplicare a metodei elementelor finite pe un asemenea caz s-a considerat un condensator cilindric cu dielectric omogen avind raza armaturii interioare r_1 , raza armaturii

exterioare r_e , cu intervalul dintre armături divizat în n elemente

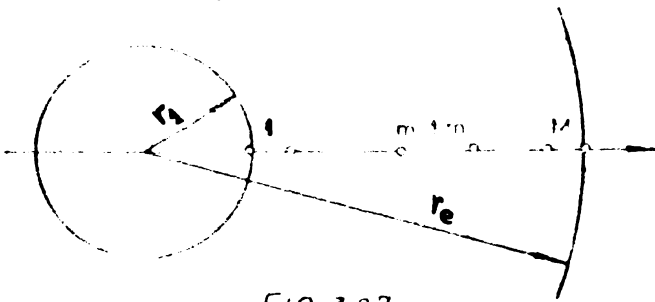


Fig. 3.27

finite echidistante de lungime $l = (r_e - r_1)/n = r_1/p$. (fig. 3.27). Ecuațiile sistemului algebric au fost rezolvate pentru valorile numerice $r_1 = 1$, $r_e = 11$, domeniul fiind divizat în $2^2, \dots, 2^6$ elemente finite

unidimensionale. Valorile inițiale în punctele nodale au fost luate considerînd o variație lineară, iar abaterea maximă admisă între două iterații succesive a fost de 0,01 V, tensiunea între armături fiind de 1000 V, adică o abatere raportată de 10^{-5} . Cu programul s-au calculat valorile nodale ale potențialului, erorile de determinare ale potențialului, valorile intensității câmpului electric în fiecare nod al elementelor finite și erorile de determinare a acestora față de cele exacte. S-a calculat de asemenea eroarea medie pătratică pe întregul domeniu. În fiecare caz s-a listat și numărul de iterații efectuate. Pentru calcularea intensității câmpului electric s-au folosit formulele în 5 puncte [45].

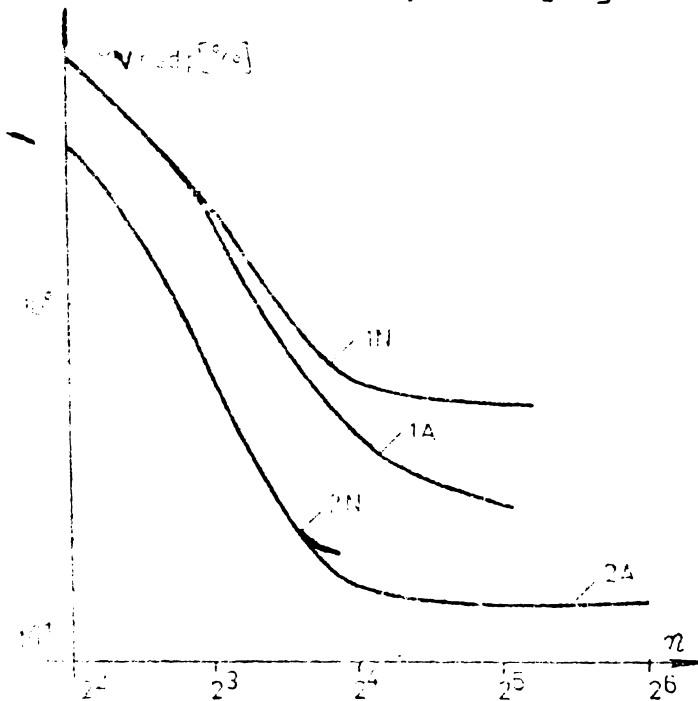


Fig. 3.28

finite, divizarea în continuare a intervalului, la aceeași abatere maximă admisă între două iterații succesive, nu duce la creșterea preciziei.

În figura 3.28 se prezintă variația erorii medii pătratice de determinare a potențialului în funcție de numărul de intervale în care a fost divizat, iar în figura 3.29 distribuția erorii relative de determinare a potențialului între cele două armături ale condensatorului. În cazul utilizării elementelor finite de ordinul 1, curba 1 N, eroarea medie pătratică de determinare a potențialului scade de la cca 5% în cazul 4 elemente finite la 0,5% când avem 32 de elemente

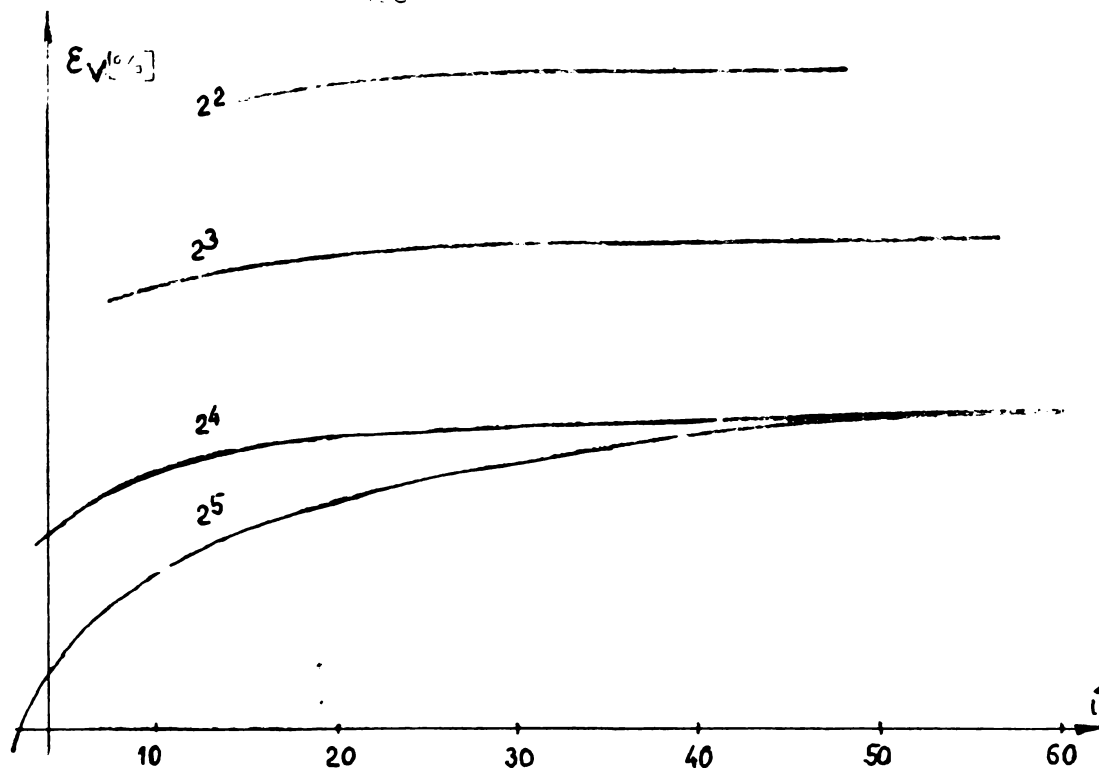


Fig. 3.29.

Utilizând un algoritm ascendent, în care se admit ca valori inițiale ale potențialului cele determinate anterior când rețeaua de divizare conținea de două ori mai puține elemente finite (curba 1A) se obține o reducere a erorii medii pătratice a potențialului la 0,3% tot pentru 32 de elemente finite.

Când se utilizează elemente finite de ordinul 2, pentru

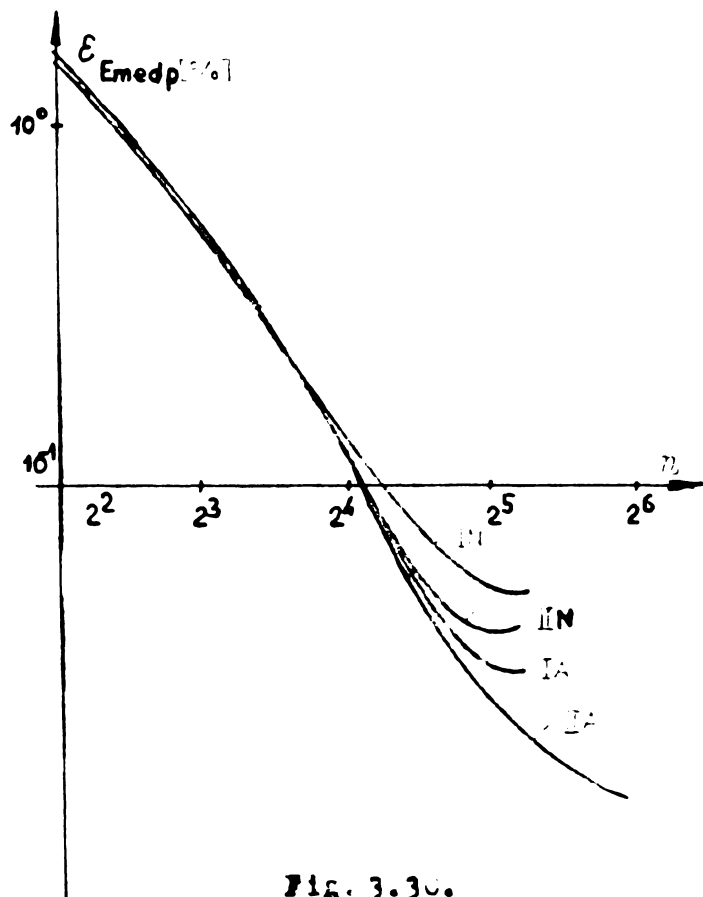


Fig. 3.30.

același număr de puncte nodale ca în cazul anterior eroarea de determinare a potențialului scade la 0,14% atât la algoritmul cu inițializare lineară cât și la cel ascendent.

Erorile de determinare a intensității câmpului electric (fig. 3.30) sînt de 0,5% la calculul cu elemente finite de ordinul 1, algoritmul cu inițializare lineară și 0,3% la algoritmul ascendent pentru cazul cînd intervalul e divizat în 32 de elemente finite. Cînd se utilizează elemente finite de ordinul 2 erorile medii pătratice de

determinare a intensității câmpului electric sînt de cca. 0,4% la algoritmul cu inițializare liniară și de 0,14% la algoritmul ascendent.

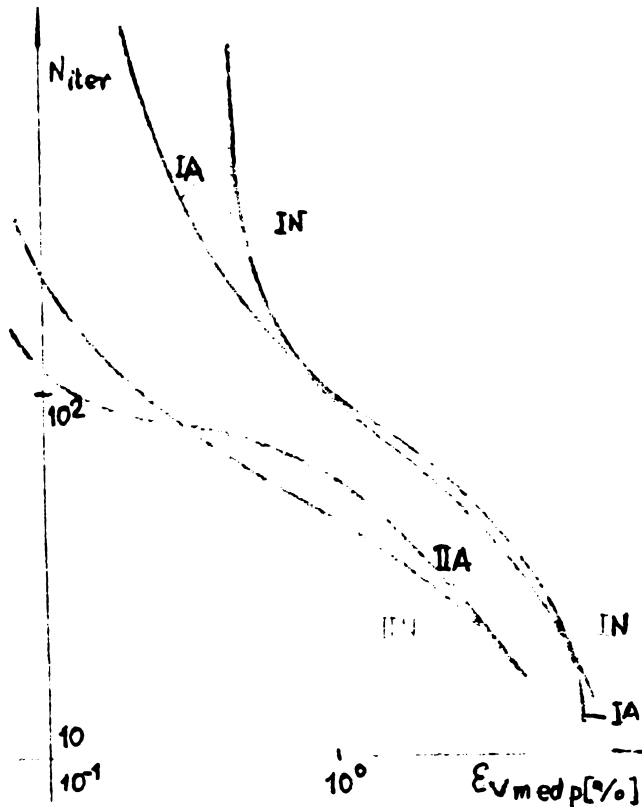


Fig. 3.31.

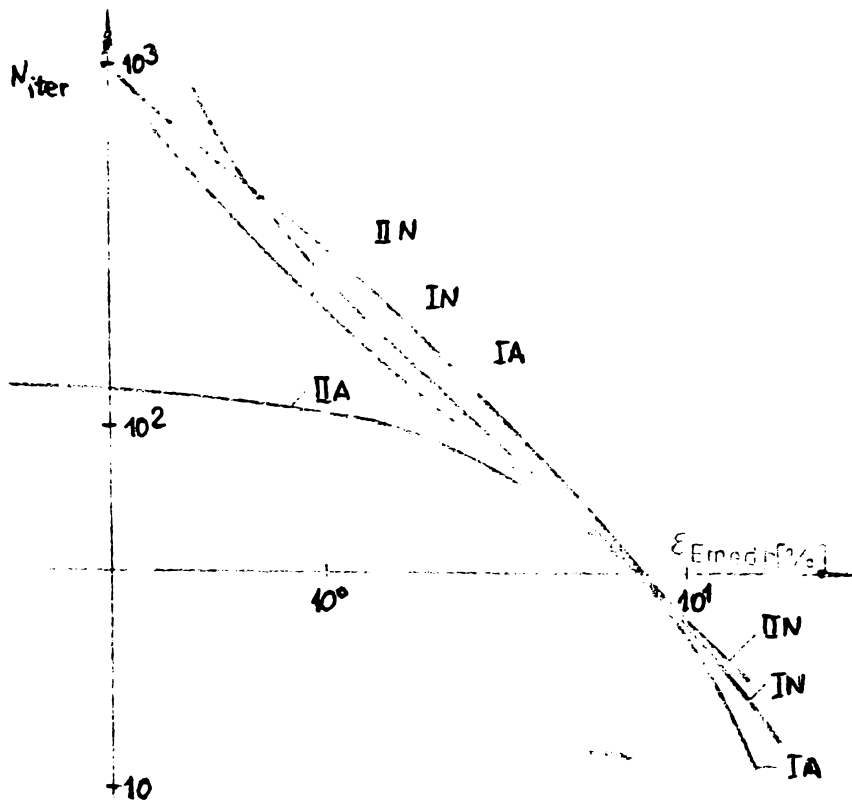


Fig. 3.32.

Graficele din figurile 3.31 și 3.32, unde este reprezentat numărul de iterații în funcție de eroarea de determinare a potențialului, respectiv eroarea de determinare a intensității câmpului electric, arată că începînd de la o anumită precizie numărul de iterații este mai mic la algoritmul ascendent decît la cel cu inițializare liniară și de asemenea este mai mic la elemente finite de ordinul 2 decît la elemente finite de ordinul 1.

Pentru a aprecia dependența între pasul rețelei de divizare a domeniului și abaterea maximă admisă între două iterații succesive s-a extins studiul problemei anterioare a condensatorului cilindric utilizînd algoritmul ascendent și elemente finite de ordinul 1, divizînd intervalul dintre armătura interioară și cea exterioară în $2^1, 2^2, \dots, 2^{10}$ intervale, iar procesul de iterație a fost

seprit cind abaterea maximă între două iterații succesive a fost $\Delta V = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ și 10^{-4} V.

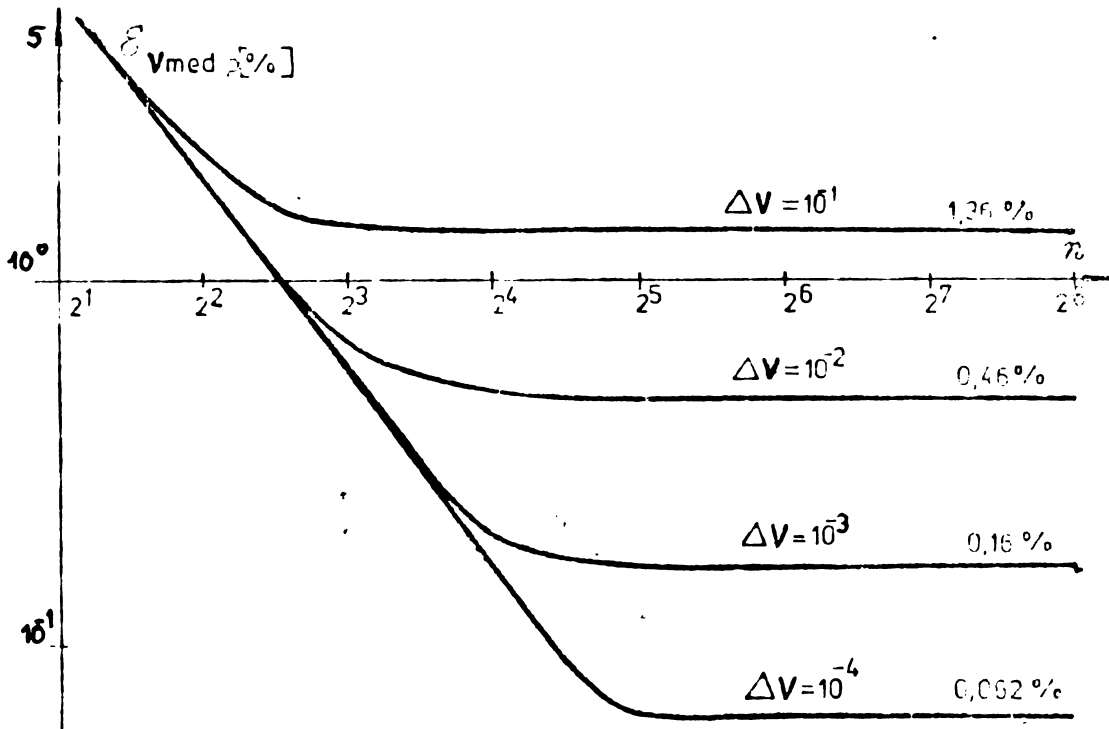


Fig. 3.33

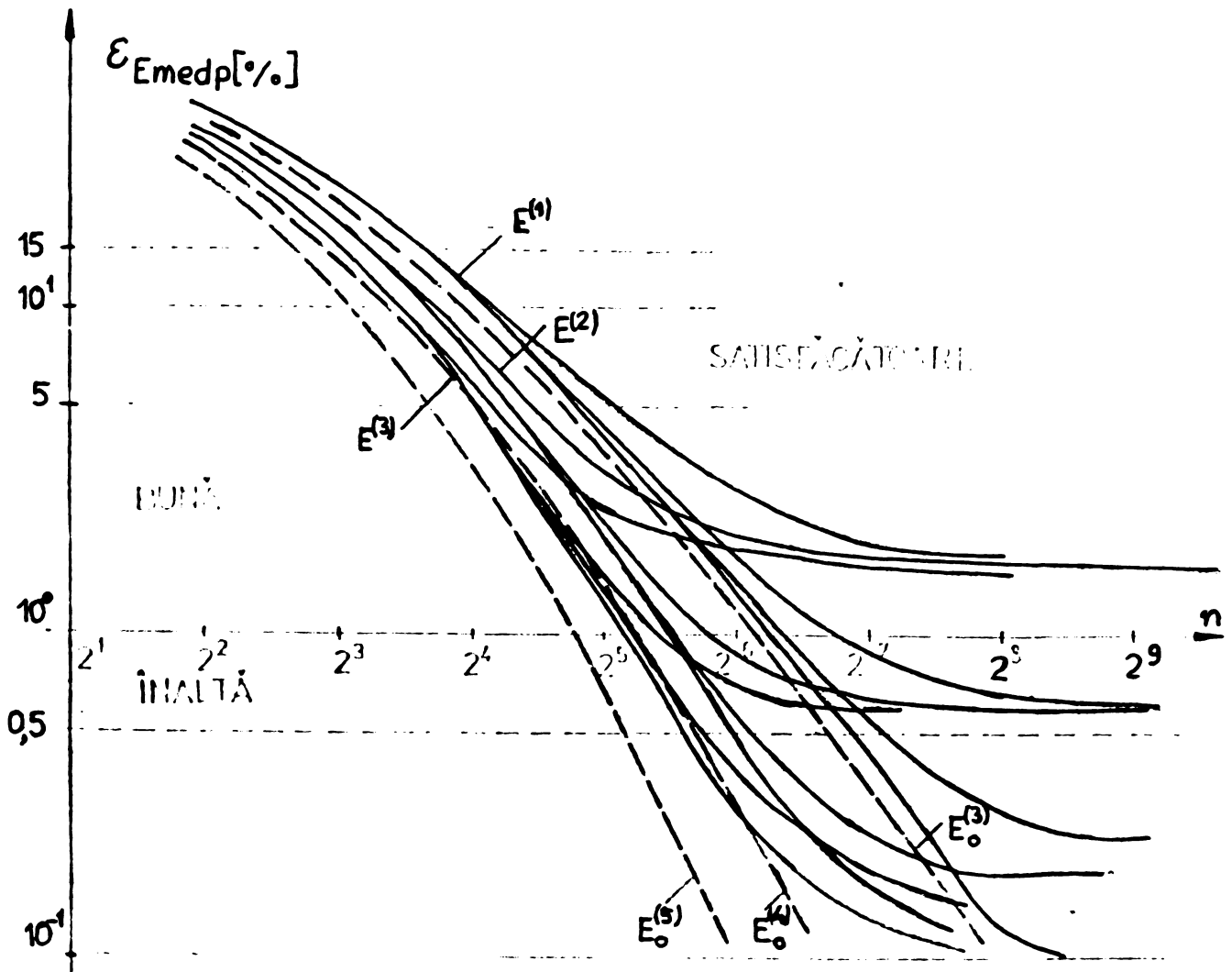


Fig. 3.34

În figura 3.33 este prezentată variația erorii medii pătratice a potențialului, iar în figura 3.34 a erorii medii pătratice a intensității câmpului electric, în funcție de numărul n de intervale (elemente finite) de divizare a domeniului studiat, avînd drept parametru abaterea admisă între două iterații succesive. Pentru a generaliza rezultatele obținute s-au reprezentat în figurile 3.35 și 3.36 variațiile erorilor medii pătratice ale potențialului și

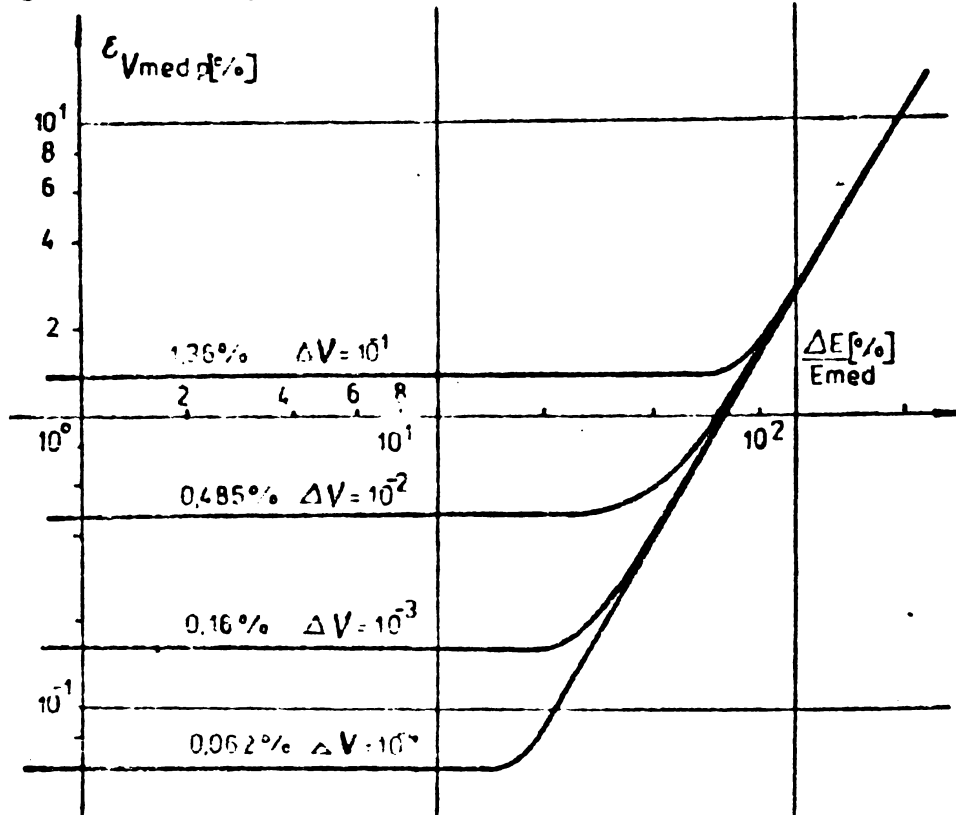


Fig. 3.35

și ale intensității câmpului electric în funcție de variația relativă maximă a intensității câmpului electric în interiorul elementelor finite. Din aceste curbe se observă că la un criteriu dat de oprire a procesului de

iterație există un număr de intervale maxim, respectiv o variație relativă a intensității câmpului electric minimă peste care îndesirea rețelei nu mai duce la creșterea preciziei de determinare a potențialului sau a intensității câmpului electric. Rezultă deci necesitatea corelării pasului de divizare a rețelei cu criteriul de oprire al procesului de iterație. Intensitatea câmpului electric a fost calculată cu formulele de derivare în 3, 4 și 5 puncte rezultînd curbele $E^{(3)}$, $E^{(4)}$ și $E^{(5)}$ din figura 3.36. În aceeași figură sînt date erorile de determinare ale intensității câmpului electric în cazul cînd se utilizează pentru calcul valorile exacte ale potențialului (curbele $E_0^{(3)}$, $E_0^{(4)}$ și $E_0^{(5)}$). În conformitate cu limitele de apreciere a preciziei rezultatelor admise de literatură [107] pentru atingerea unei precizii înalte este necesar ca variația intensității câmpului electric în interiorul elementelor finite să fie sub 8%.

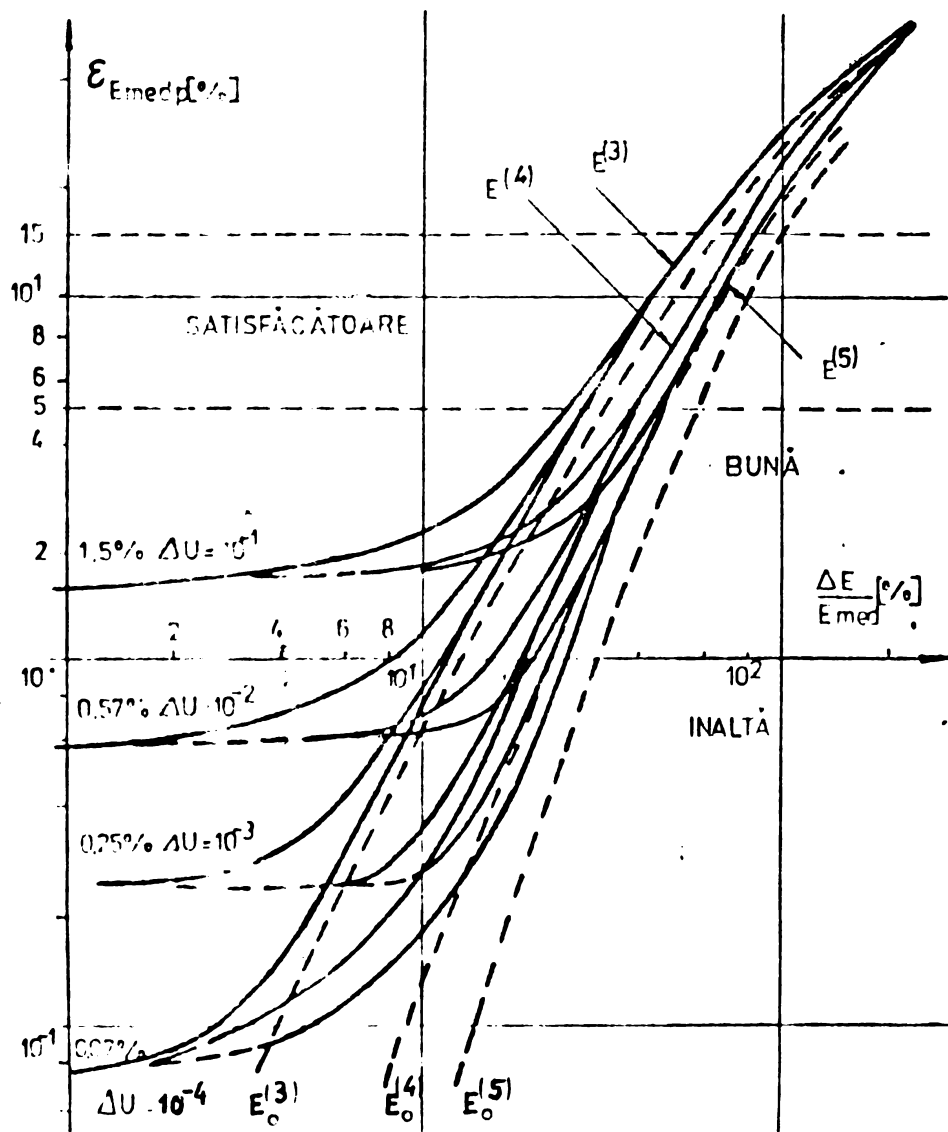


Fig. 3.36.

oînd $\Delta V = 10^{-2}$ V iar intensitatea cîmpului electric este calculată în funcție de valorile potențialului în 3 puncte, sau să fie sub 25% oînd $\Delta V = 10^{-4}$ V iar intensitatea cîmpului electric se calculează în funcție de valorile potențialului în cinci puncte.

3.6.2. Problema condensatorului sferic

Rezolvarea unor probleme de cîmpuri laplaciene în coordonate sferice presupune minimizarea funcționalei (3.16). În cazul condensatorului sferic, unde $\partial v / \partial \varphi = \partial v / \partial \theta = 0$, funcționala de minimizat este:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int \epsilon r^2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 dr \quad (3.144)$$

iar derivatele funcțiilor elementelor finite unidimensionale în raport cu potențialele nodale (fig.3.25,a) ale elementului finit de ordinul 1 sînt:

$$\begin{aligned} \partial F_m / \partial V_{m1} &= \varepsilon_m (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) (V_{m1} - V_{m2}) / 3(r_2 - r_1) \\ \partial F_m / \partial V_{m2} &= \varepsilon_m (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) (V_{m2} - V_{m1}) / 3(r_2 - r_1) \end{aligned} \quad (3.145)$$

iar ecuația generală a sistemului minimizant al funcției pentru domeniu divizat în elemente finite unidimensionale de ordinul întâi (fig.3.25,a), în coordonate sferice, este:

$$\begin{aligned} & [\varepsilon_m (r_{i-1}^2 + r_{i-1} r_i + r_i^2) / (r_i - r_{i-1}) + \varepsilon_m (r_i^2 + r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2) / (r_{i+1} - r_i)] \cdot V_i - \\ & - \varepsilon_m V_{i-1} (r_{i-1}^2 + r_{i-1} r_i + r_i^2) / (r_i - r_{i-1}) - \varepsilon_m V_{i+1} (r_i^2 + r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2) / \\ & / (r_{i+1} - r_i) = 0 \end{aligned} \quad (3.146)$$

La elemente finite unidimensionale de ordinul al doilea (fig.3.25,b), în coordonate sferice, derivatele funcției în raport cu potențialele nodale sînt:

$$\begin{aligned} \partial F_m / \partial V_{m1} &= \varepsilon_m [(23 r_1^2 + 9 r_1 r_2 + 3 r_2^2) V_{m1} + (3 r_1^2 - r_1 r_2 + 3 r_2^2) V_{m2} - \\ & - (26 r_1^2 + 8 r_1 r_2 + 6 r_2^2) V_{m3}] / 15(r_2 - r_1) \\ \partial F_m / \partial V_{m2} &= \varepsilon_m [(3 r_1^2 - r_1 r_2 + 3 r_2^2) V_{m1} + (3 r_1^2 + 9 r_1 r_2 + 23 r_2^2) V_{m2} - \\ & - (6 r_1^2 + 8 r_1 r_2 + 26 r_2^2) V_{m3}] / 15 (r_2 - r_1) \quad (3.147) \\ \partial F_m / \partial V_{m3} &= \varepsilon_m [(26 r_1^2 + 8 r_1 r_2 + 6 r_2^2) V_{m1} - (6 r_1^2 + 8 r_1 r_2 + 26 r_2^2) V_{m2} + \\ & + (32 r_1^2 + 16 r_1 r_2 + 32 r_2^2) V_{m3}] / 15(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Ecuația generală a sistemului minimizant al funcției pentru domeniu divizat în elemente finite unidimensionale de ordinul doi (fig.3.26,b), în coordonate sferice este:

- pentru nodul 1:

$$\begin{aligned} & [\varepsilon_m (3 r_{i-2}^2 + 9 r_{i-2} r_i + 23 r_i^2) / (r_i - r_{i-2}) + \varepsilon_m (23 r_i^2 + 9 r_i r_{i+2} + 3 r_{i+2}^2) / \\ & / 15(r_{i+2} - r_i)] V_i + \varepsilon_m V_{i-2} (3 r_{i-2}^2 - r_{i-2} r_i + 3 r_i^2) / \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & /15(r_i - r_{i-2}) - \varepsilon_{m-1} V_{i-1} (6r_{i-2}^2 + 8r_{i-1}r_i + 26r_i^2) / 15(r_i - r_{i-2}) - \varepsilon_m V_{i+1} (26r_i^2 + 8r_i r_{i+2} + 6r_{i+2}^2) \\ & / 15(r_{i+2} - r_i) + \varepsilon_{m-1} V_{i+2} (3r_i^2 - r_i r_{i+2} + 3r_{i+2}^2) / 15(r_{i+2} - r_i) = 0 \quad (3.148) \end{aligned}$$

- pentru nodul $i+1$:

$$\begin{aligned} & (3r_i^2 + 4r_i r_{i+2} + 3r_{i+2}^2) V_i - 8(2r_i^2 + r_i r_{i+2} + 2r_{i+2}^2) V_{i+1} + \\ & + (3r_i^2 + 4r_i r_{i+2} + 3r_{i+2}^2) V_{i+2} = 0 \quad (3.149) \end{aligned}$$

La elemente finite unidimensionale de ordinul al treilea (fig. 3.25, c), în coordonate sferice, derivatele funcționalei în raport cu cele patru potențiale nodale sînt:

$$\begin{aligned} \partial P_m / \partial V_{m1} = & \varepsilon_m [2494 r_1^2 + 514 r_1 r_2 + 100 r_2^2] V_{m1} - (163 r_1^2 - 53 r_1 r_2 + \\ & + 163 r_2^2) V_{m2} - 3(1059 r_1^2 + 171 r_1 r_2 + 93 r_2^2) V_{m3} + \\ & + 6(141 r_1^2 - 9 r_1 r_2 + 57 r_2^2) V_{m4}] / 840(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial P_m / \partial V_{m2} = & \varepsilon_m [(163 r_1^2 - 53 r_1 r_2 + 163 r_2^2) V_{m1} + (100 r_1^2 + 514 r_1 r_2 + \\ & + 2494 r_2^2) V_{m2} + 6(57 r_1^2 - 9 r_1 r_2 + 141 r_2^2) V_{m3} - \\ & - 3(93 r_1^2 + 171 r_1 r_2 + 1059 r_2^2) V_{m4}] / 840(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial P_m / \partial V_{m3} = & \varepsilon_m [(1059 r_1^2 + 171 r_1 r_2 + 93 r_2^2) V_{m1} + 2(57 r_1^2 - 9 r_1 r_2 + \\ & + 141 r_2^2) V_{m2} + 2(864 r_1^2 + 351 r_1 r_2 + 297 r_2^2) V_{m3} - \\ & - (783 r_1^2 + 513 r_1 r_2 + 783 r_2^2) V_{m4}] / 280(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial P_m / \partial V_{m4} = & \varepsilon_m [2(141 r_1^2 - 9 r_1 r_2 + 57 r_2^2) V_{m1} - (93 r_1^2 + 171 r_1 r_2 + \\ & + 1059 r_2^2) V_{m2} - (783 r_1^2 + 513 r_1 r_2 + 783 r_2^2) V_{m3} + \\ & + 2(297 r_1^2 + 351 r_1 r_2 + 864 r_2^2) V_{m4}] / 280(r_2 - r_1) \quad (3.150) \end{aligned}$$

Ecuațiile sistemului minimizant la un domeniu divizat în elemente finite unidimensionale de ordinul trei (fig. 3.26, c) în coordonate sferice sînt, pentru nodul i :

$$\begin{aligned} & \varepsilon_m [(2494 r_1^2 + 514 r_1 r_{i+3} + 100 r_{i+3}^2) / 840(r_1 - r_{i+3}) + \varepsilon_m (2494 r_i^2 + \\ & + 514 r_i r_{i+3} + 100 r_{i+3}^2) / 840(r_{i+3} - r_i)] V_i - \varepsilon_m V_{i-3} (163 r_{i-3}^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -53 r_{1-3} \cdot r_1 + 163 r_1^2) / 840(r_1 - r_{1-3}) + 6 \varepsilon_m V_{1-2} (57 r_{1-3}^2 - 9 r_{1-3} \cdot r_1 + \\
& + 144 r_1^2) / 840 (r_1 - r_{1-3}) - 3 \varepsilon_m V_{1-1} (93 \cdot r_{1+3}^2 + 171 r_{1-3} r_1 + 1059 r_1^2) / \\
& / 840(r_1 - r_{1-3}) - 3 \varepsilon_m V_{1+1} (1059 r_1^2 + 171 r_1 r_{1+3} + 93 r_{1+3}^2) / 840(r_{1+3} - r_1) + \\
& + 6 \varepsilon_m V_{1+2} (141 r_1^2 - 9 r_1 r_{1+3} + 57 r_{1+3}^2) / 840 (r_{1+3} - r_1) - \varepsilon_m V_{1+3} (163 r_1^2 - \\
& - 53 r_1 r_{1+3} + 163 r_{1+3}^2) / 840 (r_{1+3} - r_1) = 0 \quad (3.151)
\end{aligned}$$

- pentru nodul 1+1:

$$\begin{aligned}
& (1059 r_1^2 + 171 r_1 r_{1+3} + 93 r_{1+3}^2) V_1 - (1728 r_1^2 + 702 r_1 r_{1+3} + 594 r_{1+3}^2) V_{1+1} + \\
& + (783 r_1^2 + 513 r_1 r_{1+3} + 783 r_{1+3}^2) V_{1+2} - (114 r_1^2 - 18 r_1 r_{1+3} + 282 r_{1+3}^2) \cdot \\
& \quad V_{1+3} = 0 \\
& \quad \quad \quad - \text{pentru nodul } 1+2: \quad (3.152)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (282 r_1^2 - 18 r_1 r_{1+3} + 114 r_{1+3}^2) V_1 - (783 r_1^2 + 513 r_1 r_{1+3} + 783 r_{1+3}^2) V_{1+1} + \\
& + (594 r_1^2 + 702 r_1 r_{1+3} + 1728 r_{1+3}^2) V_{1+2} - (93 r_1^2 + 171 r_1 r_{1+3} + \\
& + 1059 r_{1+3}^2) V_{1+3} = 0. \quad (3.153)
\end{aligned}$$

S-a considerat cazul unui condensator sferic avînd raza armăturii interioare r_1 și raza armăturii exterioare r_0 , valorile acestora fiind aceleași ca la condensatorul cilindric din subcap. 3.6.1. Domeniul dintre armături a fost divizat în elemente finite de ordinul întâi și s-a aplicat formula de calcul (3.128) particularizată pentru mediu omogen. Programul de calcul POT 1, utilizînd un algoritm ascendent, cu divizare repetată a domeniului, a permis determinarea valorilor potențialului și intensității câmpului electric în domeniul studiat listînd și valorile exacte ale acestor mărimi și erorile de calcul ale potențialului și intensității câmpului electric.

După cum se observă din figura 3.37 unde curba 1 reprezintă eroarea medie patritică de determinare a potențialului, iar curba 2 eroarea medie pătratică de determinare a intensității câmpului electric reprezentate în funcție de numărul de elemente finite, aceste

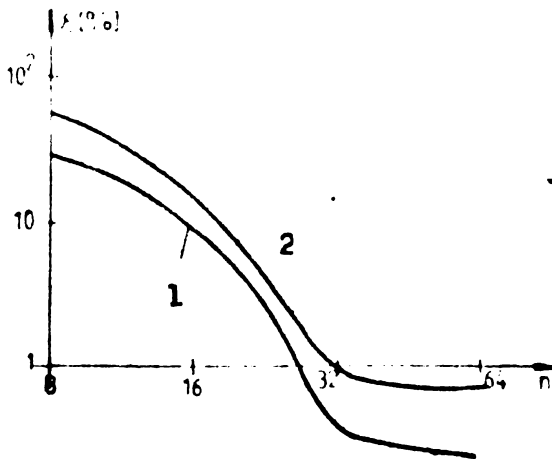


Fig. 3.37

riații ale intensității câmpului electric de pînă la 50% erorile

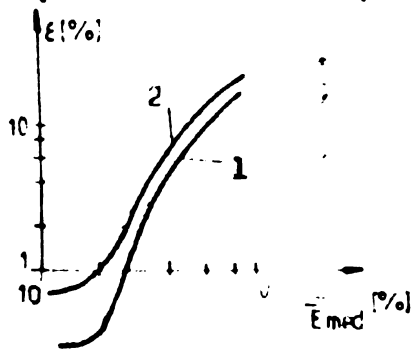


Fig. 3.38

erori scad pe măsură ce numărul de intervale crește, astfel că la un număr de 32 de intervale erorile sînt sub 1%. Procesul de iterație a fost oprit cînd $\Delta V_{\max} = 0,01 \text{ V}$. Dependența erorilor de calcul ale potențialului (curba 1) și cîmpului electric (curba 2) în funcție de variația relativă a intensității cîmpului electric este dată în figura 3.38, din care rezultă că pentru va-

riații ale intensității cîmpului electric de pînă la 50% erorile potențialului și intensității cîmpului electric sînt sub 10% iar pentru variații mai mici de 20% erorile vor fi sub 1%. De remarcat că această constatare este valabilă și în cazul condensatorului cilindric pentru cazul $\Delta V = 10^{-2} \text{ V}$.

3.6.3. Rezolvarea unor probleme de cîmpuri electrice plan-paralele în legătură cu descărcările parțiale

S-a considerat cazul unui condensator plan (fig. 3.39) avînd între armături un dielectric de permitivitate ϵ_1 , cu o in-

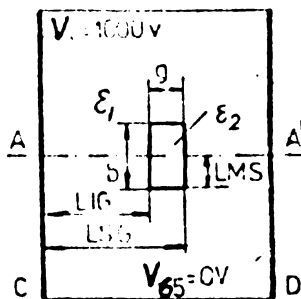


Fig. 3.39

cluziune dreptunghiulară al cărui material are permitivitatea ϵ_2 , iar $k = \epsilon_1/\epsilon_2 = 5$. Potențialul armăturii din stînga $V_1 = 1000 \text{ V}$ iar al armăturii din dreapta $V_{65} = 0 \text{ V}$. Considerînd problema plan paralelă, avînd planul de simetrie A-A', domeniul de studiat a fost divizat alegînd ND=65 puncte nodale între armături iar între planul de simetrie AA' și marginea CD s-au considerat NH=45 puncte nodale. Necunoscutele de determinat au fost cele 2457 valori ale potențialului din nodurile rețelei. Pe frontiera CD s-a considerat o distribuție liniară a potențialului, această distribuție fiind considerată și valoarea inițială în procesul de iterație. Cu programul PROCSARC realizat, s-au determinat valorile potenție-

lului în nodurile rețelei utilizând procedeul Gauss-Seidel, iar procesul de iteratie a fost oprit când abaterea între două iterații succesive a fost mai mică decât $\epsilon_{PS}=0,01$ V. Incluziunea era poziționată în interiorul condensatorului prin cotele LIG, LSG și LMG.

S-au considerat incluziuni de diferite dimensiuni având raportul între grosimea g și lățimea b cuprins între 0,17 și 2,5, pentru fiecare reprezentându-se liniile echipotențiale. În incluziunea având $g/b=0,17$ intensitatea câmpului electric în mijlocul incluziunii pe axa de simetrie E_1 este de 3,3 ori mai mare decât intensitatea câmpului electric în dielectric la distanță mare de incluziune E_d . În materialul dielectric de lângă incluziune în planul de simetrie (la mijlocul incluziunii) intensitatea câmpului electric E_{mi} este numai 66% din E_d , în timp ce în materialul dielectric de la marginea incluziunii intensitatea câmpului electric E_{m1}^1 este de 1,75 ori mai mare ca E_d . În figura 3.40, a sînt prezentate liniile echipotențiale în domeniul analizat iar în figura 3.40, b liniile echipotențiale în interiorul incluziunii. Câmpul în incluziune este practic uniform în mijloc, iar spre margini se deformează. Pe măsură ce raportul g/b crește ca în figurile 3.41 unde $g/b=0,27$ și 3.42 unde $g/b=0,55$ intensitatea câmpului electric în incluziune scade. De asemenea se constată o reducere a intensității

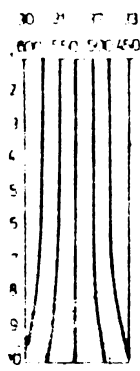
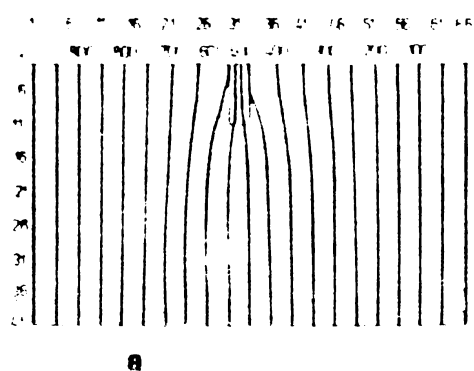
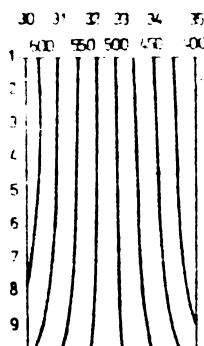
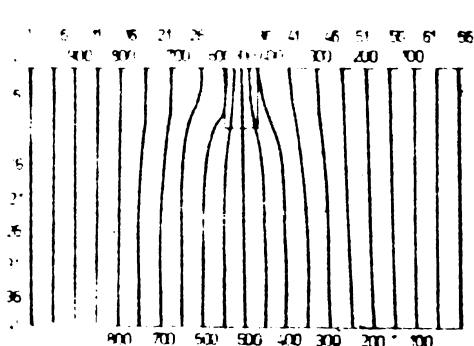


Fig. 3.40

câmpului electric în mijlocul incluziunii față de cea de lângă marginile paralele cu armăturile. Perturbarea câmpului electric dintre armăturile condensatorului este tot mai mică pe măsură ce incluziunile iau forma unui canal, după cum se observă din figura 3.43



a

b

Fig. 3.41

unde $g/b=1$ și 3.44 unde $g/b=2,5$, câmpul în incluziune fiind mai intens lângă dielectric față de zona centrală. La incluziuni

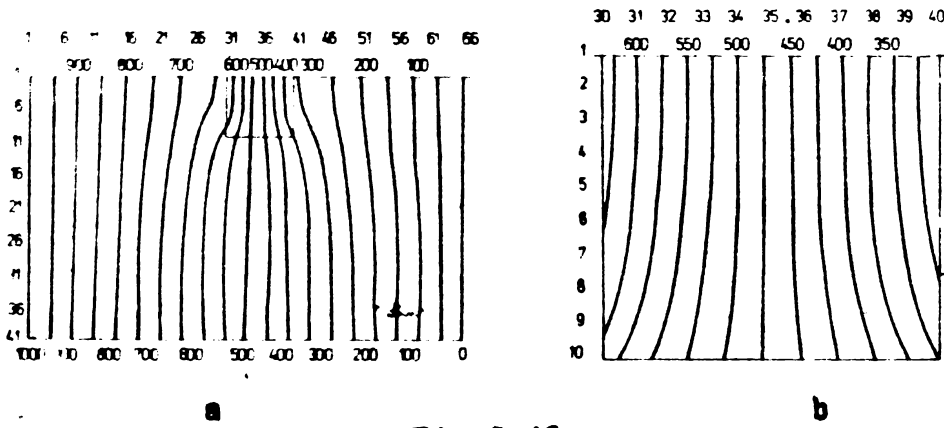


Fig. 3.42.

apropriate de una din armături ca în figura 3.45, cîmpul electric este mai distorsionat în incluziune în partea opusă armăturii.

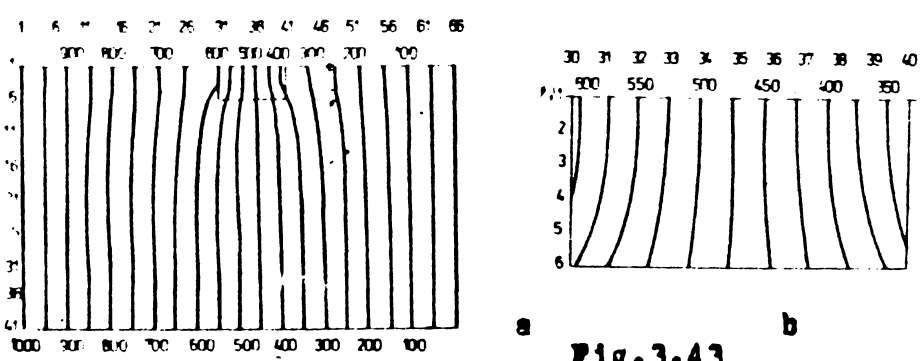


Fig. 3.43

În figura 3.46 s-a reprezentat variația rapoartelor dintre intensitatea cîmpului electric în incluziune și în materialul din imediata apropiere

re a incluziunii și intensitatea cîmpului electric în material în lipsa incluziunii pentru cazul $k=5$.

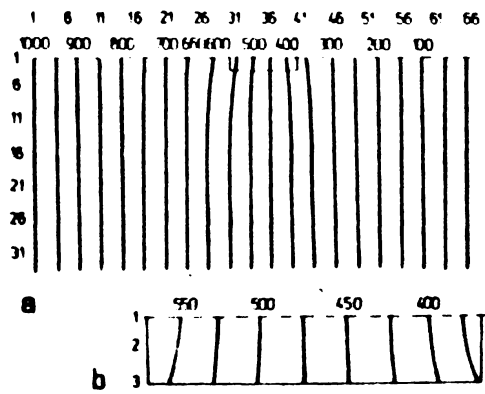


Fig. 3.44

două margini paralele cu armăturile la care grosimea g (fig. 3.39) este mică în comparație cu lățimea b cîmpul electric este practic uniform în interiorul incluziunii. Pe măsură ce raportul g/b crește intensitatea cîmpului electric scade în centrul incluziunii în raport cu cea de lângă marginile incluziunii perpendiculare pe liniile de cîmp. În apropierea marginilor incluziunii perpendiculare pe armături apar deformări ale cîmpului electric ce conduc la apariția unor solicitări tangențiale puternice. Incluziunile în formă

Cînd raportul $k=0,01$ liniile echipotențiale au forma prezentată în figura 3.47. Acest caz ar corespunde și situației ce are loc imediat după o descărcare electrică, deci cînd cîmpul electric în incluziune este practic nul.

Se remarcă faptul că în interiorul incluziunilor dreptunghiulare avînd

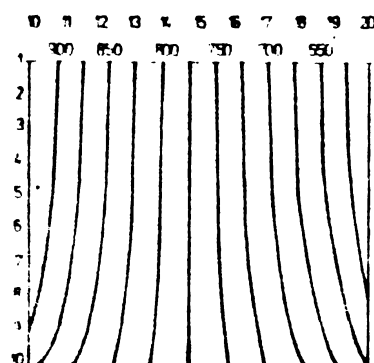
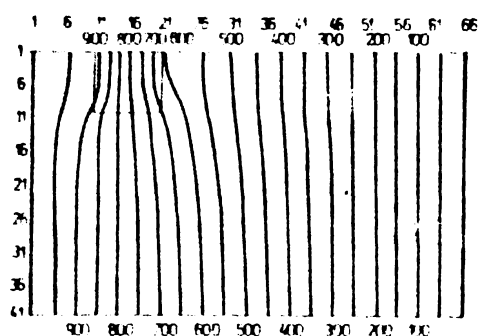


Fig. 3.45

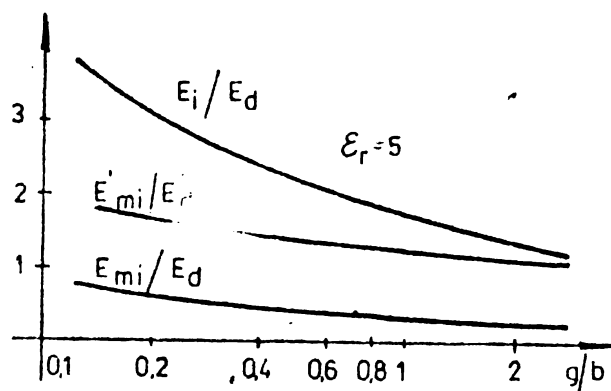


Fig. 3.46

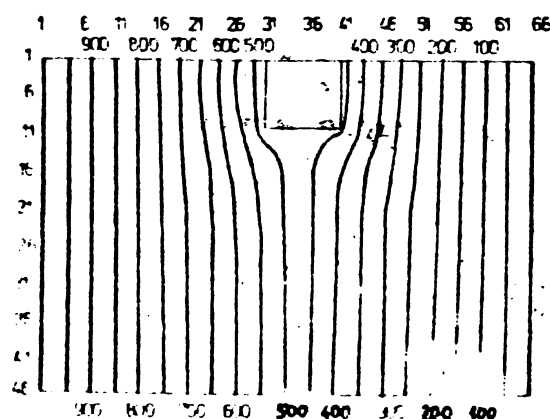


Fig. 3.47.

de fentă situată perpendicular pe liniile de cîmp vor fi străpuse în zona centrală în timp ce incluziunile alungite în direcția liniilor de cîmp vor fi solicitate la descărcări parțiale îndeosebi la margini

3.6.4. Determinarea cîmpului electric în incluziuni cilindrice

S-a considerat cazul unui condensator plan avînd în interior o incluziune cilindrică cu bazele paralele cu armăturile ca în figura 3.39, unde A-A' corespunde în acest caz cu axa incluziunii și axa de simetrie a problemei studiate. Semnificația celorlalte mărimi din figură este aceeași ca la subcapitolul 3.6.3. Aplicînd ecuația (3.132) s-au dedus ecuațiile pentru diferitele situații concrete ale domeniului studiat. Cu programul RESOL s-au determinat valorile potențialului în nodurile rețelei pe baza cărora au fost ridicate apoi curbele echipotențiale în domeniul studiat. Rezultatele obținute arată că solicitarea în incluziune crește pe măsură ce raportul între înălțimea cilindrului și diametru scade. Solicitățile sînt mai reduse decât situația plan paralelă din subcap. 3.6.3. de oca

1,2 ori. Se remarcă faptul că la rapoarte g/b mici (fig.3.48 și 3.49) câmpul electric este uniform în incluziune și distorsionat la marginea incluziunii, unde apare o componentă tangențială a

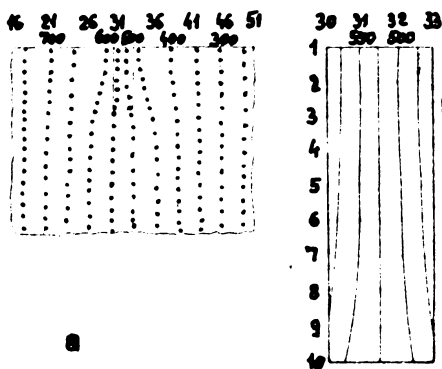


Fig.3.48

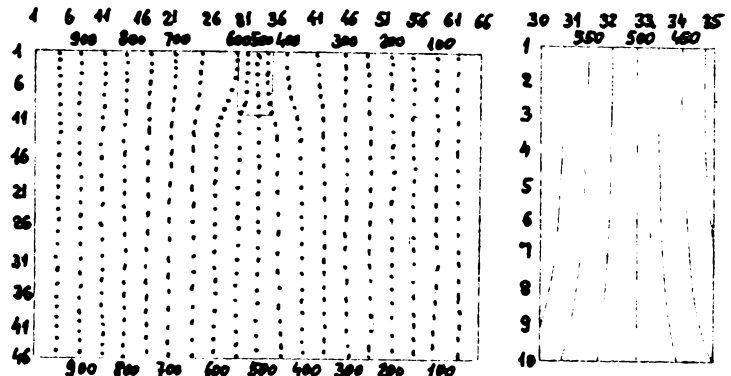


Fig.3.49

intensității câmpului electric. Pe măsură ce raportul g/b crește (fig. 3.50 -g/b=0,55, fig. 3.51 -g/b=1), intensitatea câmpului electric crește lângă bazele cilindrului față de valoarea din centrul

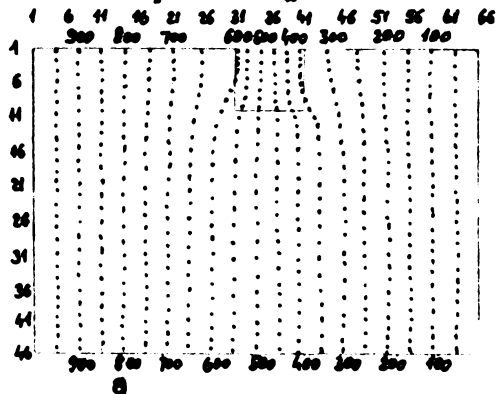
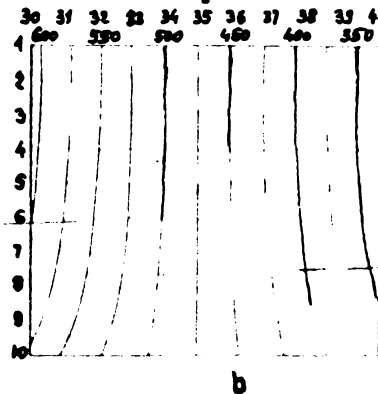


Fig.3.50



incluziunii. La un raport g/b=2,5 (fig. 3.52) câmpul electric în centrul incluziunii este doar de 70% din valoarea de lângă bazele cilindrului.

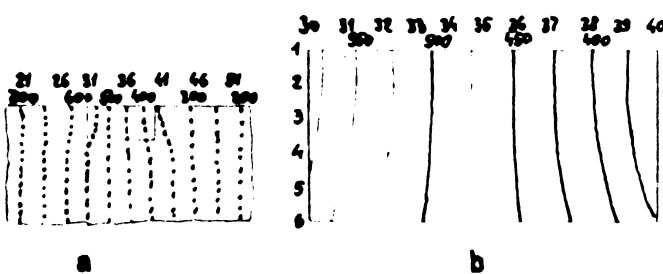


Fig.3.51

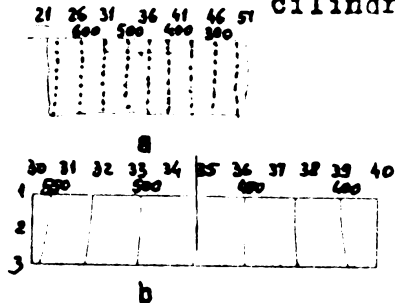


Fig.3.52

Rapoartele între intensitatea câmpului electric în incluziune E_i și intensitatea câmpului electric în dielectric E_d precum și E'_{mi}/E_d variază cu raportul g/b ca în figura 3.53.

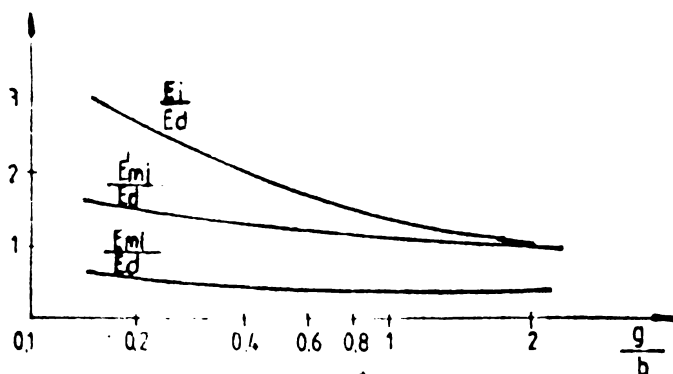


Fig.3.53.

Se observă că valorile acestor rapoarte sînt mai mici decît în figura 3.46 corespunzător problemei plan paralele. Se poate conchide și în acest caz că incluziunile în formă de fantă situată perpendicular pe liniile de cîmp electric vor fi solicitate la descărcări

parțiale, îndeosebi în zona centrală în timp ce incluziunile în formă de canal cu axa paralelă cu liniile de cîmp vor fi solicitate la descărcări parțiale pe suprafața laterală și mai ales, lîngă cele două baze ale cilindrului.

3.6.5. Algoritme de calcul utilizate

Determinarea distribuției potențialului la problemele condensatorului cilindric și sferic s-a realizat cu ajutorul unor algoritmi de calcul iterativi. Pornind de la un set de valori inițiale, s-au efectuat operațiile succesive specifice problemei respective, pînă cînd se obține precizia dorită a rezultatelor. Este important criteriul de oprire a procesului de iterație și îndeosebi corelarea acestuia cu finețea rețelei de divizare a domeniului studiat în vederea obținerii unui timp de calcul rezonabil.

Algoritmul general al metodei elementelor finite de rezolvare a problemei condensatorului cilindric este prezentat în figura 3.54. La primul pas se citesc valorile abaterii admise între două iterații succesive ϵ_{PS} , razei interioare R_0 , razei exterioare R_1 și numărului de noduri N . Se citesc de asemenea valorile inițiale ale potențialului și valorile pe frontiere, după care au loc inițializările contoarelor și a variabilelor de lucru. La pasul al doilea al algoritmului se calculează noile valori $U(I)$ ale potențialului în nodurile rețelei. La al treilea pas se testează abaterea între valorile potențialului $U(I)$ și valorile de la iterația precedentă $(UMAG)I$. Cînd criteriul de oprire este satisfăcut se oprește calculul și se tipăresc rezultatele. Dacă valoarea $|U(I) - UMAG(I)|$ este mai mare decît ϵ_{PS} se înmagazinează valorile obținute și se revine la pasul 2.

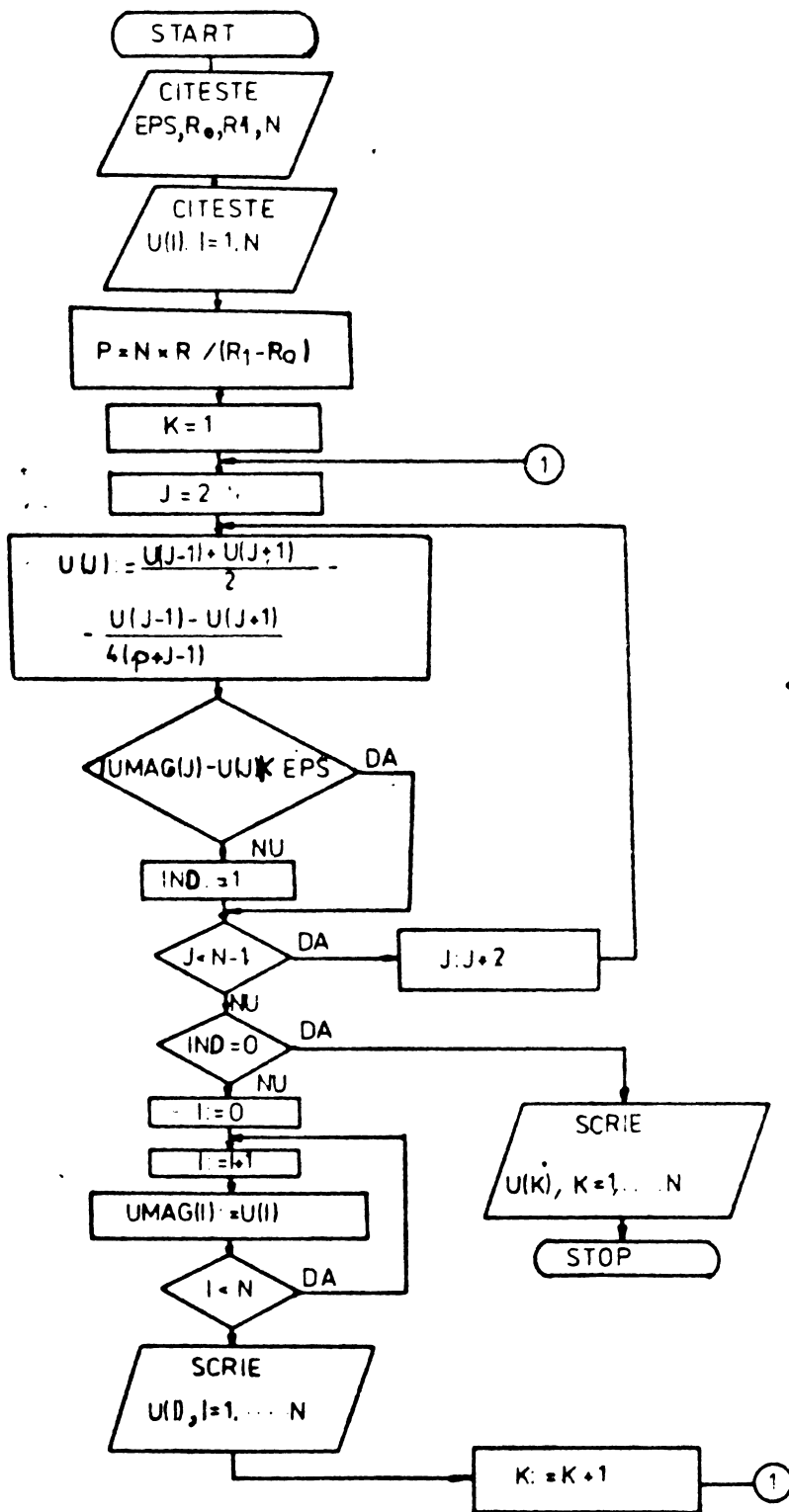


Fig. 3.54

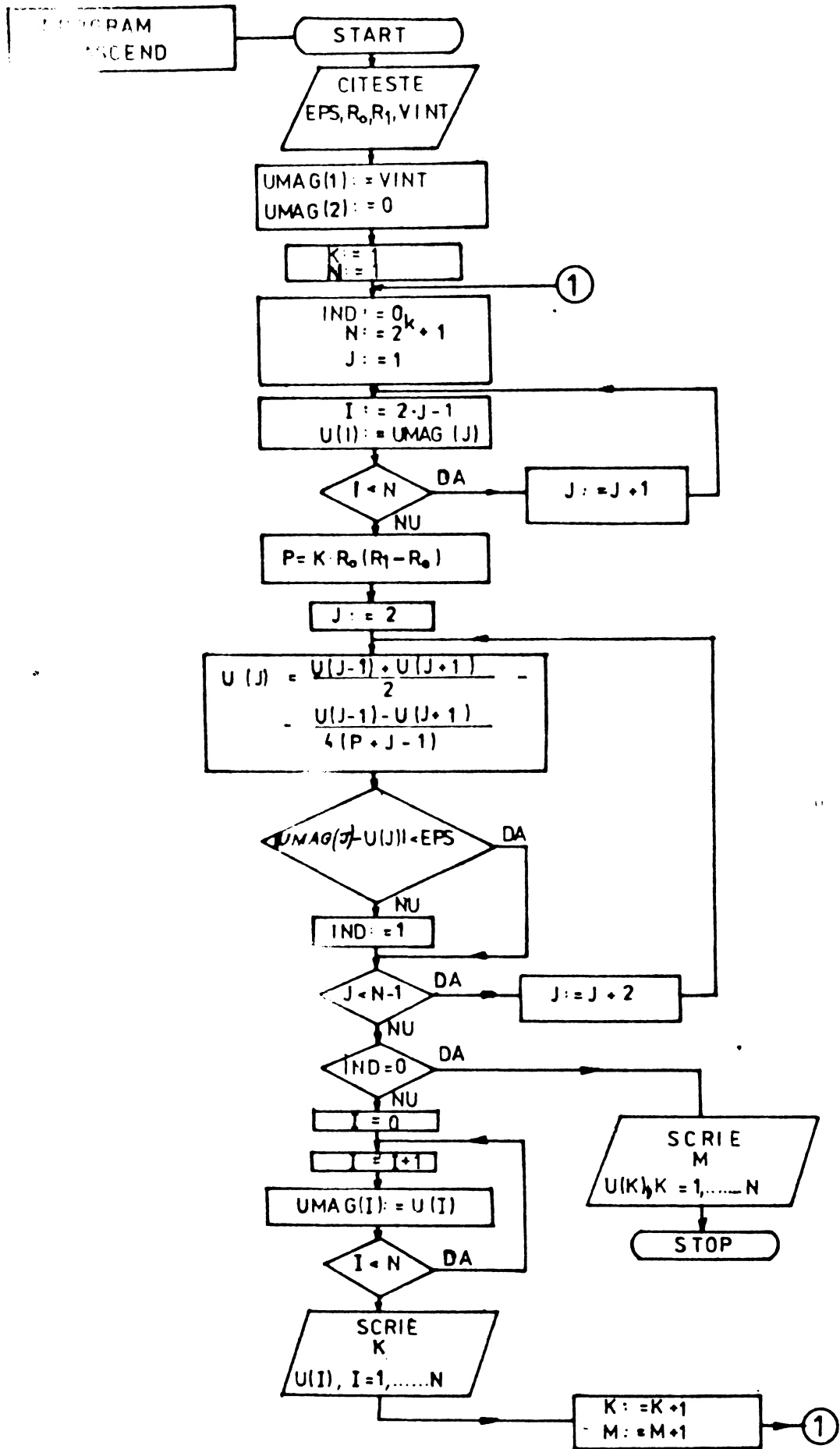


Fig. 3.55

Algoritmul ascendent de determinare a valorilor potențialului la condensatorul cilindric, avînd echema logică din figura 3.55, realizează în prima etapă divizarea domeniului în 4 elemente finite, iar după terminarea calculului, divide fiecare element finit în două, rezultînd 2×4 elemente finite. Pentru noua rețea de divizare se admit ca valori inițiale cele obținute la etapa precedentă ceea ce conduce la reducerea timpului de calcul. S-a realizat astfel programul ASCEND 1 care a divizat domeniul studiat în 256 de elemente finite.

Pentru determinarea distribuției potențialului într-o problemă plană cuprinsă între plăciile unui condensator plan cu o neomogenitate între plăci, s-a realizat algoritmul ²ROCSARC (fig. 3.56). Acest algoritm cuprinde la primul pas citirea valorilor pe frontiere ale potențialului, a limitelor domeniului, a poziției incluziunii și a raportului k între permitivitatea materialului izolant dintre plăci și permitivitatea mediului din incluziune. La al doilea pas se calculează limitele de ciclare ale domeniului studiat, după care în al treilea pas se inițializează valorile nodale ale potențialului printr-o variație liniară. La pasul patru se inițializează cu zero valorile UMAG, contorul iterațiilor N și variabila de control S. (UMAG I, J) sînt valorile potențialului la iterația precedentă. La al cincilea pas se calculează valorile nodale ale potențialului cu formulele corespunzătoare fiecărei zone din domeniul studiat, calculul fiind contorizat. La pasul șase se compară valorile obținute ale potențialului cu cele de la iterația precedentă, iar dacă abaterea este mai mică decît constanta EPS se tipărește rezultatul. În caz contrar, după verificarea numărului de iterații, se reia ciclul de la inițializarea variabilei de control S.

Funcțiile D 11, D 12, D 13, D 01, D M1, DM2, DM3 au fost introduse în program pe baza formulelor de calcul rezultate prin particularizarea formulei (3.67) la condițiile concrete ale problemei. Acest program s-a aplicat în varianta RESO 1 și pentru determinarea cîmpului electric în incluziuni cilindrice situate între armăturile unui condensator plan. În acest caz funcțiile amintite au fost introduse pe baza formulei (3.132).

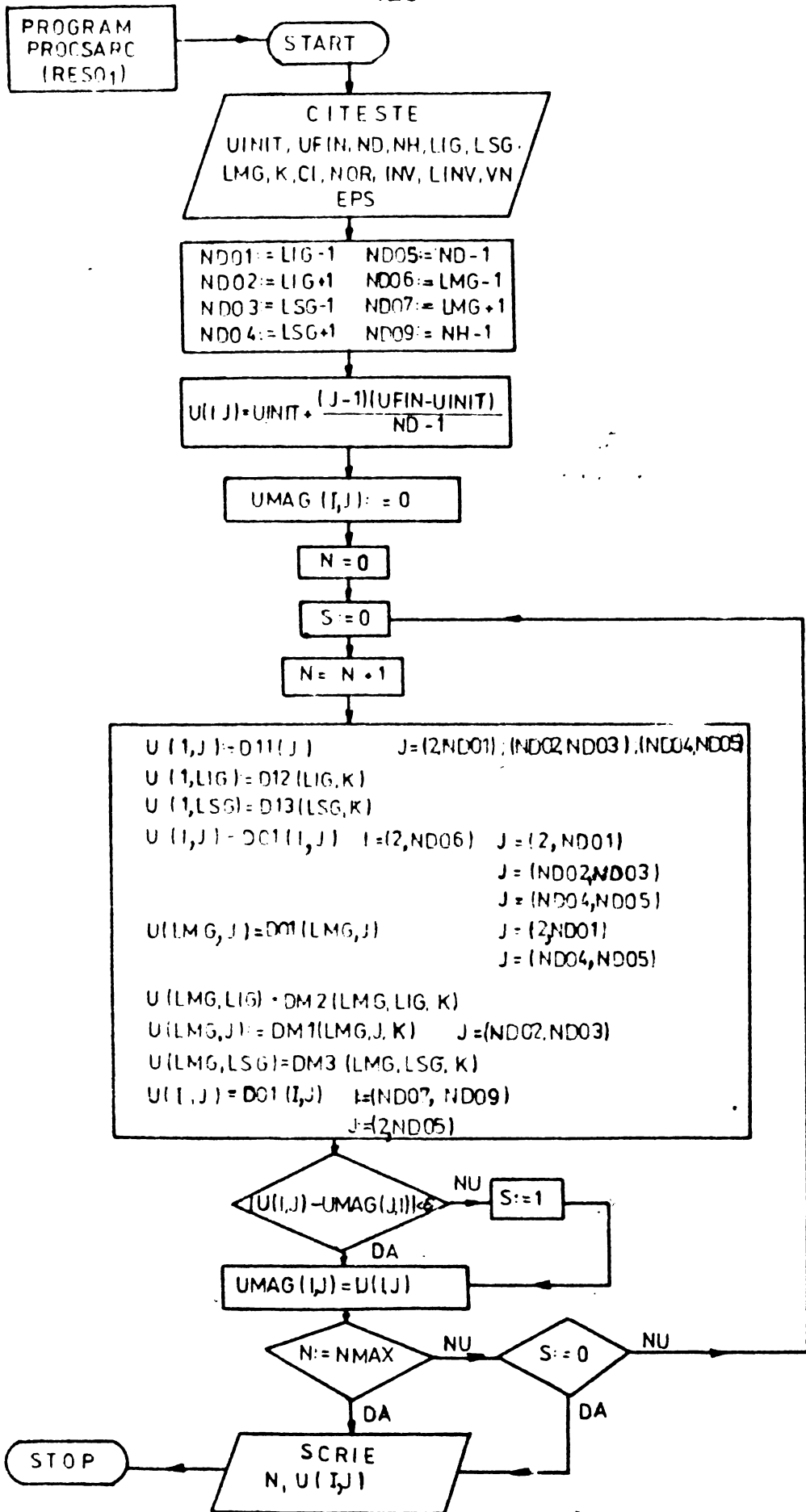


Fig. 3.56

CAPITOLUL IV

STUDIUL PE MODELE MATEMATICE SI ANALOGICE
A FENOMENULUI DE DESCARCARE PARTIALA4.1. Modele matematice ale fenomenului de
descărcare parțială

Pentru studierea fenomenelor tranzitorii ce apar la producerea descărcărilor parțiale în izolația echipamentelor electrice s-a considerat modelul din figura 4.1, unde: R, L sînt parametrii sursei de alimentare cu energie electrică, C este capacitatea

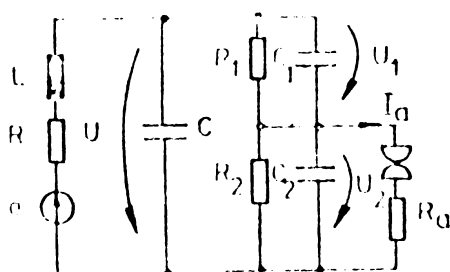


Fig.4.1.

izolației sănătoase a echipamentului, incluzînd și capacitatea parazită a sursei, C_2 este capacitatea incluziunii, C_1 , capacitatea izolației situate în tubul de cîmp electric în care se află incluziunea, R_1 și R_2 sînt rezistențele de pierderi ale materialului izolant și a incluziunii, iar R_a este rezistența arcului electric prin care se produce descărcarea. Modelul considerat corespunde cazului cînd în izolant există o singură incluziune; spre deosebire de modelul BUI-AI [223] se ține seama de parametrii sursei de alimentare și de rezistența arcului electric, iar în comparație cu modelul lui Cristescu [36] se are în vedere că rezistențele de pierderi ale materialului izolant și a incluziunii pot fi diferite.

În studiul teoretic pe model se vor trata separat cele două procese de DESCARCARE și INCARCARE ce intervin de fapt la descărcarea parțială. Se va studia de asemenea separat cazul limită cînd $C=0$, ce corespunde unor situații particulare de studiu pe modele analogice a fenomenului de descărcare parțială [19, 230].

4.1.1. Descărcarea

La studiul descărcării vom ține seama că se poate neglija prezența rezistențelor R_1 și R_2 astfel încît schema

operațională echivalentă de calcul a componentelor tranzitorii este aceea din figura 4.2.

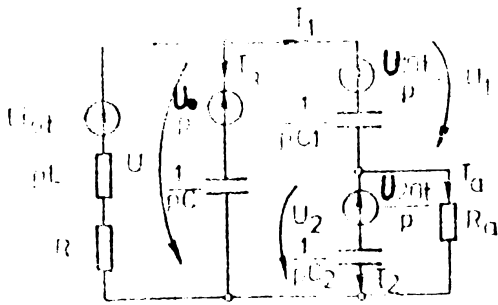


Fig.4.2.

Aplicînd metoda potențialelor la noduri, necunoscute fiind U și U_2 , rezultă ecuațiile:

$$U \left(\frac{1}{R+pL} + pC+pC_1 \right) - U_2 pC_1 = \frac{L i_0}{R+pL} + U_0 C + U_{10} C_1 \quad (4.1)$$

$$-U \cdot pC_1 + U_2 \left(\frac{1}{R_a} + pC_1+pC_2 \right) = U_{20} \cdot C_2 - U_{10} C_1$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, rezultă pentru tensiunea U_2

$$U_2 = \frac{p^2 U_{20} + p \left(\frac{R}{L} U_{20} + \frac{C_{12}}{C_2} \frac{i_0}{C+C_{12}} \right) + \frac{C_2 U_{20} - C_1 U_{10}}{C_1 + C_2} \cdot \frac{1}{L(C+C_{12})}}{p^3 + p^2 \left(\frac{R}{L} + \frac{C+C_1}{C+C_{12}} \cdot \frac{1}{R_a(C_1+C_2)} \right) + p \left(\frac{C+C_1}{C+C_{12}} \cdot \frac{1}{R_a(C_1+C_2)} + \frac{1}{L(C+C_{12})} \right) + \frac{1}{R_a(C_1+C_2)L(C+C_{12})}} \quad (4.2)$$

unde $C_{12} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$.

$$\text{Dacă se notează } T = \frac{L}{R}; T_a = R_a (C_1 + C_2); \omega_1^2 = \frac{1}{L(C+C_{12})}$$

$$n = (C+C_1)/(C+C_{12}) \quad (4.3)$$

expresia (4.2) devine:

$$U_2 = \frac{p^2 U_{20} + p \left(\frac{U_{20}}{T} + \frac{C_{12}}{C_2} \cdot \frac{i_0}{C+C_{12}} \right) + \frac{C_2 U_{20} - C_1 U_{10}}{C_1 + C_2} \cdot \omega_1^2}{p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{n}{T_a} \right) + p \left(\frac{n}{T T_a} + \omega_1^2 \right) + \frac{\omega_1^2}{T_a}} \quad (4.4)$$

Pentru celelalte mărimi din circuit se obțin expresiile:

$$U = \frac{p^2 U_0 + p \left(\frac{U_0}{T} + \frac{C_2}{C_{12}} \cdot \frac{U_{20}}{T_a} + \frac{n}{T_a} \frac{C_1 U_{10} - C_2 U_{20}}{C_1} + \frac{i_0}{C+C_{12}} \right) + \frac{\omega_1^2}{T_a}}{p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{n}{T_a} \right) + p \left(\frac{n}{T T_a} + \omega_1^2 \right) + \frac{\omega_1^2}{T_a}} + \frac{C_2}{C_{12}} \cdot \frac{U_{20}}{T T_a} + \frac{i_0}{(C+C_{12}) T_a} + \frac{n}{T T_a} \frac{C_1 U_{10} - C_2 U_{20}}{C_1} \quad (4.5)$$

$$U_1 = \frac{p^2 U_{10} + p \left(\frac{U_{10}}{T} + \frac{C_2}{C_{12}} \cdot \frac{U_{20}}{T_a} + \frac{n}{T_a} \frac{C_1 U_{10} - C_2 U_{20}}{C_1} + \frac{C_{12}}{C_1} \cdot \frac{i_0}{C+C_{12}} \right) + \frac{\omega_1^2}{T_a}}{p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{n}{T_a} \right) + p \left(\frac{n}{T T_a} + \omega_1^2 \right) + \frac{\omega_1^2}{T_a}} + \frac{C_2}{C_{12}} \cdot \frac{U_{20}}{T T_a} + \frac{i_0}{(C+C_{12}) T_a} + \frac{n}{T T_a} \cdot \frac{C_1 U_{10} - C_2 U_{20}}{C_1} + \frac{C_1 U_{10} - C_2 U_{20}}{C_1 + C_2} \omega_1^2 \quad (4.6)$$

$$I = \frac{p^2 i_0 + p \left(\frac{n}{T_a} i_0 - \frac{U_0}{L} \right) - \frac{C_2}{C_{12}} \cdot \frac{U_{20}}{LT_a} + n \frac{C_2 U_{20} - C_1 U_{10}}{C_1} \cdot \frac{1}{LT_a}}{p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{n}{T_a} \right) + p \left(\frac{n}{TT_a} + \omega_1^2 \right) + \frac{\omega_1^2}{T_a}} \quad (4.7)$$

La numitorul soluțiilor (4.4)-(4.7) apare un polinom de gradul trei ale cărui soluții se deduc conform [110], ținând seama de ordinele de mărime ale constantelor de timp T și T_a , precum și a pulsației. Factorul n are valori cuprinse între 1, când $C \gg C_2$, și C_1/C_{12} , când $C=0$. Dat fiind că $C_2 > C_1$ n poate avea cel mult valoarea 2 doar când $C_2=C_1$.

Ținând seama de valorile indicate de Meek și Craggs [136] pentru curentul în canalul descărcării și căderea de tensiune pe arc, rezultă pentru rezistența R_a valori cuprinse între 1 și 100 Ω . Capacitatea incluziunii gazoase din izolație are valori în general de 10^{-15} și 10^{-12} F. Parametrii sursei sînt în general pentru L între $(10^{-3}-1)$ H iar pentru R între $(10^{-2}-10)$ Ω astfel încît se pot reține următoarele ordine de mărime:

$$n=1-2; T_a \leq 10^{-12} \text{ sec. } T=(10^{-1}-10^{-2}) \text{ sec, } \omega_1^2=10^8 (\text{rad/s})^2. \quad (4.8)$$

În ceea ce privește influența rezistențelor de pierdere R_1 și R_2 asupra fenomenului de descărcare parțială, se constată că aceasta este neglijabilă datorită valorii mari a constantelor de timp $R_1 C_1$ și $R_2 C_2$ de cea $(1-10^3)$ sec) în comparație cu constantele de timp T și T_a .

În condițiile menționate ecuația:

$$p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{n}{T_a} \right) + p \left(\frac{n}{TT_a} + \omega_1^2 \right) + \frac{\omega_1^2}{T_a} = 0 \quad (4.9)$$

admite rădăcinile:

$$P_1 = -\frac{n}{T_a}; \quad P_{2,3} = -\frac{1}{2T} \pm j \omega_1 \quad (4.10)$$

Originalele expresiilor (4.4)-(4.7) au pentru componentele tranzitorii ale tensiunilor pe capacități și curentului prin bobină următoarele expresii:

$$u_{2t} = U_{20} t \cdot \exp \left(-\frac{n}{T_a} t \right) + \frac{C_{12}}{C_2} \cdot U_{0t} \cdot \exp \left(-\frac{t}{2T} \right) \sin (\omega_1 t) \quad (4.11)$$

$$\alpha = -\text{arc tg} \frac{i_{0t}}{\omega_1 (C+C_{12}) U_{0t}} = \text{arc tg} \frac{\omega_1 T_a}{n}$$

$$\begin{aligned}
 u_1(t) = & - \left[\frac{C}{C+C_1} U_{20t} + \left(\frac{C_{12}}{C_1} U_{20t} - \frac{C_{12}}{C_2} U_{10t} \right) (\omega_1 T_a)^2 \right] \exp \left(- \frac{nt}{T_a} \right) + \\
 & + \left(U_{10t} + \frac{C}{C+C_1} U_{20t} \right) \exp \left(- \frac{t}{2T} \right) \sin (\omega_1 t + \alpha) \quad (4.12) \\
 \alpha = & \text{arc tg} \frac{\omega_1 \left(1 + \frac{C}{C+C_1} \frac{U_{20t}}{U_{10t}} \right)}{\frac{1}{2T} + \frac{1}{2T} \cdot \frac{C}{C+C_1} \cdot \frac{U_{20t}}{U_{10t}} + \frac{1_{0t}}{n(C+C_{12})U_{10t}}} \\
 \approx & \text{arc tg} \frac{\omega_1 T_a}{n} \approx 90^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2(t) = & \left(\frac{C_1}{C+C_1} U_{20t} + \frac{C}{C+C_1} \cdot \frac{C+C_{12}}{C+C_1} \cdot \frac{T_a}{T} U_{20t} \right) \exp \left(- \frac{nt}{T_a} \right) + \\
 & + \left(U_{10t} + \frac{C}{C+C_1} U_{20t} \right) \exp \left(- \frac{t}{2T} \right) \sin (\omega_1 t + \alpha) \quad (4.13) \\
 \alpha = & \text{arc tg} \frac{\omega_1 \left(1 + \frac{C}{C+C_1} \frac{U_{20t}}{U_{10t}} \right)}{\frac{1}{2T} + \frac{1}{2T} \frac{C}{C+C_1} \cdot \frac{U_{20t}}{U_{10t}} + \frac{1_{0t}}{n(C+C_{12})U_{10t}}} \\
 \approx & \text{arc tg} \frac{\omega_1 T_a}{n} \approx 90^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i_1(t) = & - (\omega_1 T_a) \frac{C_1}{C+C_1} \omega_1 (C+C_{12}) U_{20t} \exp \left(- \frac{nt}{T_a} \right) + \\
 & + \left(U_{10t} + \frac{C}{C+C_1} U_{20t} \right) \omega_1 (C+C_{12}) \exp \left(- \frac{t}{2T} \right) \sin (\omega_1 t + \alpha) \quad (4.14) \\
 \alpha = & \text{arc tg} \frac{1_{0t}}{\left(-U_{10t} - \frac{C}{C+C_1} U_{20t} \right) \omega_1 (C+C_{12})} \approx \text{arc tg} \frac{\omega_1 T_a}{n} \approx 0^\circ
 \end{aligned}$$

Expresiile (4.11)-(4.14) pentru originalele componentelor tranzitorii au un termen aperiodic amortizat cu constanta de timp $T_a/n \approx 10^{-12}$ sec și un termen oscilatoriu amortizat de pseudopulsatie ω_1 , constanta de amortizare fiind $2T$. Datorită factorului $(\omega_1 T_a) \approx 10^{-8}$ ordinul de mărime al componentei oscilatorii amortizate din expresia componentei tranzitorii a tensiunii U_2 este nesemnificativ, prin urmare tensiunea pe cavitate scade rapid cu valoarea U_{20t} .

Timpul de scădere al tensiunii fiind de ordinul de mă-

rime al constantei de timp T_a , variația termenului sinusoidal amortizat față de valoarea sa inițială este neglijabilă, ceea ce face ca expresiile (4.11)-(4.13) să poată fi scrise simplificat astfel:

$$u_{2t} = U_{2ot} \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) \quad (4.15)$$

$$u_{1t} = U_{1ot} + \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{C_2}{C_{12}} - \frac{C_2}{C_1}\right) U_{2ot} + \left[\left(\frac{C_2}{C_1}(n-1)-1\right) \frac{U_{2o1}}{n} + \left(\frac{C_{12}}{C_2} U_{1ot} - \frac{C_{12}}{C_1} U_{2ot}\right) (\omega, T_a)^2\right] \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) \quad (4.16)$$

$$u_t = U_{1ot} + \left(\frac{C_2}{nC_{12}} - \frac{C_2}{C_1}\right) U_{2ot} + \left[\frac{C_2}{C_{12}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) U_{2ot} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{C_2}{C_{12}} - n \frac{C_2}{C_1}\right) \frac{T_a}{T} U_{2ot}\right] \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) \quad (4.17)$$

Avînd în vedere că componenta permanentă a tensiunii pe incluziune este practic nulă în timpul scurtcircuitării capacității C_2 prin rezistența R_a , rezultă că tensiunea la bornele incluziunii scade în $(3+5) T_a$ secunde la o valoare foarte mică astfel că arcul electric în incluziune se stinge. În timpul descărcării așa cum a arătat Kreuger [113] în incluziune sînt neutralizate sarcinile legate de pe cei doi pereți ai cavității, smulse din materialul izolant datorită cîmpului electric extrem de intens de la picioarele canalului de descărcare. După stingerea arcului electric începe procesul de încărcare a capacității C_2 .

4.1.2. Încărcarea

La încărcarea incluziunii, adică a capacității C_2 din figura 4.1, în porțiunile descărcate din incluziune se aduc sarcini electrice prin rezistențele de pierderi ale condensatoarelor C_1 și C_2 , prin urmare schema echivalentă de calcul trebuie să țină seama și de acestea, rezultînd astfel schema operațională din figura 4.3., pentru componentele tranzitorii ale tensiunilor și curenților din circuit.

Procedînd în mod similar ca în cazul descărcării se obțin imaginile Laplace ale componentelor tranzitorii ale tensiunilor și curenților în forma:

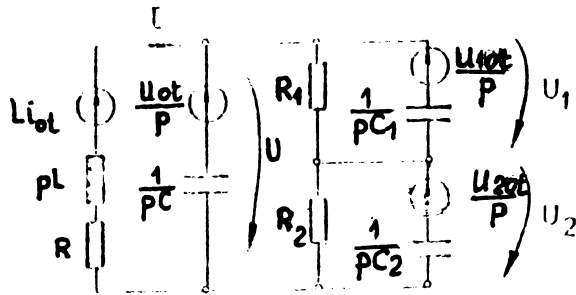


Fig. 4.3.

$$U_2 = \frac{p^2 U_{20} + U \left(\frac{U_{20}}{T} + \frac{m+n_2}{T_1} U_{20} + \frac{m}{T_1} U_{10} + \frac{C_{12}}{C_2} \frac{I_0}{C+C_{12}} \right) + p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{m+n_2}{T_1} + \frac{m+n_1}{T_2} \right) + p \left(\frac{m+n_2}{TT_1} + \frac{m+n_1}{TT_2} + \frac{n_1+n_2}{T_1 T_2} + \omega_l^2 \right) + \frac{1}{T_1} \frac{I_0}{C+C_{12}} + \frac{m+n_2}{TT_1} U_{20} + \frac{m}{TT_1} U_{10} + \frac{C_2 U_{20} - C_1 U_{10}}{C_1 + C_2} \omega_l^2}{\omega_l^2 + \frac{\omega_l^2}{T_1} + \frac{\omega_l^2}{T_2} + \frac{n_1+n_2}{TT_1 T_2}} \quad (4.18)$$

$$U_1 = \frac{p^2 U_{10} + p \left(\frac{U_{10}}{T} + \frac{m+n_1}{T_2} U_{10} + \frac{m}{T_2} U_{20} + \frac{C_{12}}{C_1} \frac{I_0}{C+C_{12}} \right) + p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{m+n_2}{T_1} + \frac{m+n_1}{T_2} \right) + p \left(\frac{m+n_2}{TT_1} + \frac{m+n_1}{TT_2} + \frac{n_1+n_2}{T_1 T_2} + \omega_l^2 \right) + \frac{1}{T_2} \frac{I_0}{C+C_{12}} + \frac{m+n_1}{TT_2} U_{10} + \frac{m}{TT_2} U_{20} + \frac{C_1 U_{10} - C_2 U_{20}}{C_1 + C_2} \omega_l^2}{\omega_l^2 + \frac{\omega_l^2}{T_1} + \frac{\omega_l^2}{T_2} + \frac{n_1+n_2}{TT_1 T_2}} \quad (4.19)$$

$$U = \frac{p^2 U_0 + p \left(\frac{U_0}{T} + \frac{m+n_1}{T_2} U_{10} + \frac{m+n_2}{T_1} U_{20} + \frac{m}{T_1} U_{10} + \frac{m}{T_2} U_{20} + \frac{I_0}{C+C_{12}} \right) + p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{m+n_2}{T_1} + \frac{m+n_1}{T_2} \right) + p \left(\frac{m+n_2}{TT_1} + \frac{m+n_1}{TT_2} + \frac{n_1+n_2}{T_1 T_2} + \omega_l^2 \right) + \frac{1}{T_1} \frac{I_0}{C+C_{12}} + \frac{1}{T_2} \frac{I_0}{C+C_{12}} + \frac{m+n_1}{TT_2} U_{10} + \frac{m+n_2}{TT_1} U_{20} + \frac{m}{TT_2} U_{20} + \frac{m}{TT_1} U_{10}}{\omega_l^2 + \frac{\omega_l^2}{T_1} + \frac{\omega_l^2}{T_2} + \frac{n_1+n_2}{TT_1 T_2}} \quad (4.20)$$

$$I = \frac{p^2 I_0 + p \left(\frac{m+n_2}{T_1} I_0 + \frac{m+n_1}{T_2} I_0 - U_0 (C+C_{12}) \omega_l^2 \right) - \left(\frac{m+n_2}{T_1} U_{20} + \frac{m+n_1}{T_2} U_{10} \right) + p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{m+n_2}{T_1} + \frac{m+n_1}{T_2} \right) + p \left(\frac{m+n_2}{TT_1} + \frac{m+n_1}{TT_2} + \frac{n_1+n_2}{T_1 T_2} + \omega_l^2 \right) +$$

$$\frac{\frac{m}{T_2} U_{20} + \frac{m}{T_1} U_{10} (C+C_{12}) \omega_1^2 + \frac{n_1+n_2}{T_1 T_2} I_0}{\frac{\omega_1^2}{T_1} + \frac{\omega_1^2}{T_2} + \frac{n_1+n_2}{T_1 T_2}} \quad (4.21)$$

unde s-au făcut notațiile:

$$T = \frac{L}{R}; \quad T_1 = R_1(C_1+C_2); \quad T_2 = R_2(C_1+C_2); \quad \omega_1^2 = \frac{1}{L(C+C_{12})} \quad (4.22)$$

$$m = \frac{C}{C+C_{12}}; \quad n_1 = \frac{C_1}{C+C_{12}}; \quad n_2 = \frac{C_2}{C+C_{12}}$$

Constanta de timp T și pulsația ω_1 sînt aceleași care au fost definite prin relațiile (4.3) la descărcare, iar constantele T_1 și T_2 au ordinul de mărime al constantei de relaxație $\rho \cdot \epsilon$, unde ρ este rezistivitatea iar ϵ permitivitatea dielectrică. Acest produs are valori medii de $5 \cdot 10^2$ sec la aer, 10^3 sec la polietilenă, 10 sec la ulei de transformator și cca 5 sec la PVC moale.

Factorul m ia valori între 1 și 0 cînd C variază de la valori $C \gg C_{12}$ pînă la $C=0$, iar n_1 și n_2 au valori de la $\frac{C_1}{C+C_{12}}$, respectiv $\frac{C_2}{C+C_{12}}$ cînd $C=0$ la cca $(10^{-6} \div 10^{-3})$ cînd C are valori între $(10^{-6} \div 10^{-9})$ F.

În condițiile de mai sus polinomul de ordinul trei de la numitorul expresiilor (4.18)-(4.21) are rădăcinile:

$$p_1 = -\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = -\frac{1}{T_3}; \quad p_{2,3} = -\frac{1}{2T} \pm j \cdot \omega_1 \quad (4.23)$$

Cu aceste originalele componentelor tranzitorii pentru tensiunile pe capacități și curentul prin bobină rezultă:

$$u_{2t}(t) = \left(\frac{C_{12}}{C_1} U_{20t} - \frac{C_{12}}{C_2} U_{10t} \right) \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) + \frac{C_{12}}{C_2} U_{0t} \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2\omega_1 T - \operatorname{arctg} \frac{1_{0t}}{(C+C_{12})U_{0t}} \approx 90^\circ \quad (4.24)$$

$$u_{1t}(t) = \left(\frac{C_{12}}{C_2} U_{10t} - \frac{C_{12}}{C_1} U_{20t} \right) \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) + \frac{C_{12}}{C_1} U_{0t} \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \times \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (4.25)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2\omega_1 T - \operatorname{arctg} \frac{1_{0t}}{(C+C_{12})U_{0t}} \approx 90^\circ$$

$$u_t(t) = \frac{1}{\omega_1 T} \frac{C_{12}}{C+C_{12}} \frac{C_1 U_{10t} - C_2 U_{20t}}{\omega_1} \left(\frac{1}{C_2 T_2} - \frac{1}{C_1 T_1} \right) \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) + U_{0t} \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2\omega_1 T - \operatorname{arctg} \frac{1_{0t}}{(C+C_{12})U_{0t}} \approx 90^\circ \quad (4.26)$$

$$i_t(t) = C_{12}(C_1 U_{10t} - C_2 U_{20t}) \left(\frac{1}{C_1 T_1} - \frac{1}{C_2 T_2} \right) \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) +$$

$$U_{0t}(C+C_{12})\omega_1 \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2\omega_1 T + \operatorname{arctg} \frac{U_{0t} C_{12} \omega_1}{i_{0t}} \quad (4.27)$$

În expresiile (4.24)-(4.27) apare termenul aperiodic avînd constanta de timp T_3 cu ordinul de mărime 10^2 sec mult mai mare stît față de perioada oscilației de pulsație ω_1 , al cărei ordin de mărime este $2\pi/\omega_1 = 6,28 \cdot 10^{-4}$ sec cît și față de perioada de oscilație a tensiunii de frecvență industrială. Rezultă de aici că procesul de încărcare a capacității C_2 este determinat în curent continuu de constanta de timp T_3 , iar în curent alternativ de componenta permanentă de frecvență industrială.

Se remarcă de asemenea prezența unei componente sinusoidale de pulsație ω_1 amortizată cu constanta de timp $2T$ avînd valoarea de amplitudine proporțională cu valoarea inițială a componentei transitorii U_{0t} a tensiunii la borne. Această componentă poate să grăbească momentul stingerii tensiunii de străpungere pe includerea de capacitate C_2 , mai ales cînd C_2 scade, adică la creșterea dimensiunii transversale a incluziunii.

4.1.3. Descărcări parțiale în cazul limită $C=0$

Intrucît în expresiile deduse la paragrafele 4.1.1 și 4.1.2. apar coeficienții n , m , n_1 și n_2 definiți de relațiile (4.3) și (4.22) care au variații rapide cînd C tinde spre valori mici este oportun să se studieze procesul de încărcare și descărcare și pentru cazul limită cînd $C=0$. Acest caz corespunde situațiilor ce apar la modelele de înaltă tensiune pentru studierea descărcărilor parțiale.

Schemele operaționale de calcul ale mărimilor pentru procesul

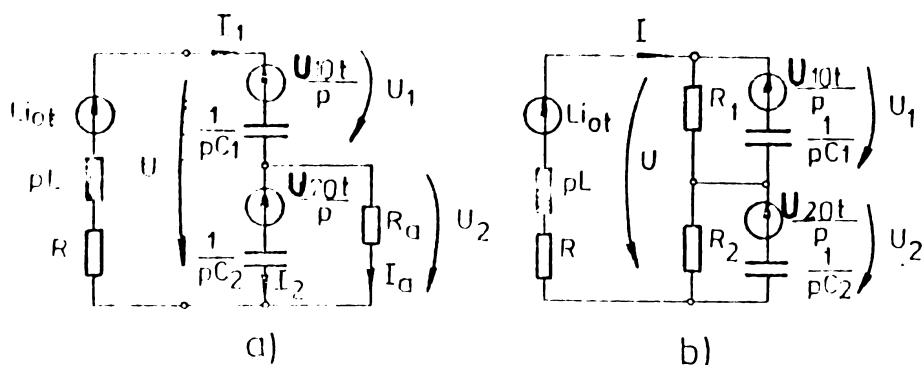


Fig.4.4.

de descărcare și încărcare sînt cele din figurile 4.4,a respectiv 4.4,b.

În cazul descărcării rezultă următoarele ex-

presii pentru componentele tranzitorii ale mărimilor din circuit:

$$U_2 = \frac{p^2 U_{20} + p \left(\frac{U_{20}}{T} + \frac{I_{10}}{C_2} \right) + \frac{U_{20} C_2 - U_{10} C_1}{C_1 + C_2} \omega_l^2}{p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_a} \right) + \left(\frac{1}{T T_a} + \omega_l^2 \right) + \frac{C_{12}}{C_1} \cdot \frac{\omega_l^2}{T_a}} \quad (4.28)$$

$$U_1 = \frac{p^2 U_{10} + p \left(\frac{U_{10}}{T} + \frac{U_{10}}{T_a} + \frac{I_{10}}{C_2} \right) + \frac{U_{10}}{T T_a} + \frac{I_{10}}{C_1 T_a} + \frac{U_{10} C_1 - U_{20} C_2}{C_1 + C_2} \omega_l^2}{p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_a} \right) + p \left(\frac{1}{T T_a} + \omega_l^2 \right) + \frac{C_{12}}{C_1} \cdot \frac{\omega_l^2}{T_a}} \quad (4.29)$$

$$U = \frac{p^2 U_0 + p \left(\frac{U_0}{T} + \frac{U_{10}}{T_a} + \frac{I_{10}}{C_{12}} \right) + \frac{U_{10}}{T T_a} + \frac{I_{10}}{C_1 T_a}}{p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_a} \right) + p \left(\frac{1}{T T_a} + \omega_l^2 \right) + \frac{C_{12}}{C_1} \cdot \frac{\omega_l^2}{T_a}} \quad (4.30)$$

$$I_1 = \frac{p^2 I_{10} + p \left(\frac{I_{10}}{T} - \frac{U_0}{L} \right) - \frac{U_{10} C}{L T_a}}{p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_a} \right) + p \left(\frac{1}{T T_a} + \omega_l^2 \right) + \frac{C_{12}}{C_1} \cdot \frac{\omega_l^2}{T_a}} \quad (4.31)$$

$$\text{unde } T = \frac{L}{R}; \quad T_a = R_a C_2; \quad \omega_l^2 = \frac{1}{LC_{12}} \quad (4.32)$$

iar rădăcinile polinomului de gradul trei de la numitor sînt:

$$p_1 = -\frac{1}{T_a}; \quad p_2 = -\frac{1}{2T} \pm j \omega_l \quad (4.33)$$

Componentele tranzitorii ale mărimilor din circuit se obțin în continuare în forma:

$$u_{2t}(t) = U_{2ot} \exp\left(-\frac{t}{T_a}\right) + (\omega_1 T_a) \frac{C_{12}}{C_2} U_{ot} \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \times \\ \cdot \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (4.34)$$

$$\alpha = -\arctg \frac{1_{2ot}}{C_{12} U_{ot}} - \arctg \omega_1 T_a \approx 0^\circ$$

$$u_{1t}(t) = (\omega_1 T_a)^2 \left(\frac{C_{12}}{C_2} U_{ot} - \frac{C_{12}}{C_1} U_{2ot} \right) \exp\left(-\frac{t}{T_a}\right) + \\ + U_{1ot} \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (4.35)$$

$$\alpha = \arctg \frac{\omega_1}{\frac{1}{2T} + \frac{1_{1ot}}{C_1 U_{1ot}}} - \arctg \omega_1 T_a \approx 90^\circ$$

$$u_t(t) = U_{2ot} \exp\left(-\frac{t}{T_a}\right) + U_{1ot} \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (4.36)$$

$$\alpha = \arctg \frac{\omega_1}{\frac{1}{2T} + \frac{1_{1ot}}{C_1 U_{1ot}}} - \arctg \omega_1 T_a \approx 90^\circ$$

$$i_{1t}(t) = -U_{1ot} \omega_1 C_{12} \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha) + \\ + (\omega_1 T_a) \omega_1 C_{12} U_{2ot} \exp\left(-\frac{t}{T_a}\right) \quad (4.37)$$

$$\alpha = -\arctg \frac{\omega_1}{\frac{1}{2T} + \frac{U_{1ot} C_{12}}{1_{1ot}} \omega_1^2} - \arctg \omega_1 T_a \approx 0^\circ$$

Aceste expresii comparate cu (4.11)-(4.14) scot in evidenta și comportarea diferită a circuitului, pe măsură ce valoarea capacității C crește. Constanta de timp a componentei aperiodice crește de la valoarea $R_a C_2$ când $C=0$, la valoarea $R_a(C_1+C_2)$ când $C \gg C_2$, lucru care este nesemnificativ dată fiind valoarea foarte mică a acesteia (10^{-12} sec). Comparînd expresiile (4.11) și (4.34)

rezultă că tensiunea pe cavitate scade cu U_{20t} într-un timp de câteva μsec .

Tensiunea pe capacitatea C_1 rămâne practic constantă în timpul descărcării în cazul când $C=0$, în schimb când $n=1$, deci $C \gg C_2$ tensiunea pe aceasta crește rapid cu U_{20t} . Tensiunea la borne scade rapid (în 10^{-12} sec) cu valoarea U_{20t} când $C=0$, dar când $C \gg C_2$ variația acesteia este foarte redusă datorită factorului (T_a/T) . În ambele situații variația intensității curentului electric prin bobină (debitat de rețea) este mică datorită factorului (ωT_a) ce înmulțește termenul în $\exp(-\frac{t}{T_a})$ în ambele expresii.

La încărcare (fig.4.4,b), rezolvînd schema operațională rezultă:

$$U_2 = \frac{p^2 U_{20} + \left(\frac{U_{20}}{T} + \frac{U_{20}}{T_1} + \frac{i_0}{C_2} \right) + \frac{i_0}{C_2 T_1} + \frac{U_{20}}{T T_1} + \frac{U_{20} C_2 - U_{10} C_1}{C_1 + C_2} \omega_f^2}{p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + p \left(\frac{1}{T T_1} + \frac{1}{T T_2} + \frac{1}{T_1 T_2} + \omega_f^2 \right) + \frac{1}{T T_1 T_a} + \frac{C_{12}}{C_2} \frac{\omega_f^2}{T_1} + \frac{C_{12}}{C_1} \cdot \frac{\omega_f^2}{T_2}} \quad (4.38)$$

$$U_1 = \frac{p^2 U_{10} + p \left(\frac{U_{10}}{T} + \frac{U_{10}}{T_2} + \frac{i_0}{C_1} \right) + \frac{i_0}{C_1 T_2} + \frac{U_{10}}{T T_2} + \frac{U_{10} C_1 - U_{20} C_2}{C_1 + C_2} \omega_f^2}{p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + p \left(\frac{1}{T T_1} + \frac{1}{T T_2} + \frac{1}{T_1 T_2} + \omega_f^2 \right) + \frac{1}{T T_1 T_a} + \frac{C_{12}}{C_2} \frac{\omega_f^2}{T_1} + \frac{C_{12}}{C_1} \cdot \frac{\omega_f^2}{T_2}} \quad (4.39)$$

$$U = \frac{p^2 U_0 + \left(\frac{U_0}{T} + \frac{U_{10}}{T_2} + \frac{U_{20}}{T_1} + \frac{i_0}{C_{12}} \right) + \frac{i_0}{C_2 T_1} + \frac{i_0}{C_1 T_2} + \frac{U_{20}}{T T_1} + \frac{U_{10}}{T T_2}}{p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + p \left(\frac{1}{T T_1} + \frac{1}{T T_2} + \frac{1}{T_1 T_2} + \omega_f^2 \right) + \frac{1}{T T_1 T_a} + \frac{C_{12}}{C_2} \frac{\omega_f^2}{T_1} + \frac{C_{12}}{C_1} \cdot \frac{\omega_f^2}{T_2}} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{p^2 i_0 + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - U_0 C_{12} \omega_1^2 \right) + \frac{I_0}{T_1 T_2} - \frac{U_{10} C_{12} \omega_1^2}{T_2}}{p^3 + p^2 \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) + p \left(\frac{1}{T_1 T_2} + \frac{1}{T_1 T_3} + \frac{1}{T_2 T_3} + \omega_1^2 \right) +} \\
 & - \frac{U_{20} C_{12} \omega_1^2}{T_1} \\
 & + \frac{1}{T_1 T_2} + \frac{C_{12}}{C_2} + \frac{\omega_1^2}{T_1} + \frac{C_{12}}{C_1} \cdot \frac{\omega_1^2}{T_2}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\text{unde: } T = \frac{L}{R}; \quad T_1 = R_1 C_1; \quad T_2 = R_2 C_2; \quad \omega_1^2 = \frac{1}{LC_{12}} \tag{4.42}$$

Iar rădăcinile polinomului de la numitor sînt:

$$p_1 = -\frac{1}{T_3} = -\left(\frac{C_{12}}{C_2} \frac{1}{T_1} + \frac{C_{12}}{C_1} \frac{1}{T_2} \right); \quad p_{2,3} = -\frac{1}{2T} \pm j \omega_1 \tag{4.43}$$

Expresiile pentru originalele componentelor tranzitorii sînt:

$$\begin{aligned}
 u_{2t}(t) = & \left(\frac{C_{12}}{C_1} U_{20t} - \frac{C_{12}}{C_2} U_{10t} \right) \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) + \frac{C_{12}}{C_2} U_{0t} \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \cdot \\
 & \cdot \sin(\omega_1 t + \alpha)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\alpha = \arctg \frac{2\omega_1 T}{\omega_1 C_{12} U_{0t}} \approx 90^\circ$$

$$\begin{aligned}
 u_{1t}(t) = & \left(\frac{C_{12}}{C_2} U_{10t} - \frac{C_{12}}{C_1} U_{20t} \right) \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) + \frac{C_{12}}{C_1} U_{0t} \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha)
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\alpha = \arctg \frac{2\omega_1 T}{\omega_1 C_{12} U_{0t}} \approx 90^\circ$$

$$\begin{aligned}
 u_{1t}(t) = & \frac{1}{\omega_1 T} \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \left(\frac{C_{12}}{C_1} U_{20t} - \frac{C_{12}}{C_2} U_{10t} \right) \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) + \\
 & + U_{0t} \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha)
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\alpha = \arctg 2\omega_1 T - \arctg \frac{1}{\omega_1 C_{12}} \frac{U_{ot}}{U_{ot}} \approx 90^\circ$$

$$i_t(t) = C_{12} \left(\frac{C_{12}}{C_2} U_{1ot} - \frac{C_{12}}{C_1} U_{2ot} \right) \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) + U_0 C_{12} \omega_1 \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (4.47)$$

$$\alpha = \arctg 2\omega_1 T + \arctg \left(\frac{1}{\omega_1 T} + \frac{U_{ot} C_{12} \omega_1}{I_{ot}} \right)$$

Comparând expresiile (4.44)-(4.47) obținute cu expresiile (4.24)-(4.27) din cazul $C \neq 0$ se constată că variațiile componentelor tranzitorii ale tensiunilor pe capacitățile C_1 și C_2 sînt identice, nefiind influențate de capacitatea C .

Componentele tranzitorii ale curentului și tensiunii la borne diferă prin factorul $C_{12}/(C+C_{12})$ care înmulțește termenul în $\exp(-\frac{t}{T})$. Acest termen are o valoare practic nesemnificativă în expresia tensiunii u_t datorită factorului $(1/\omega T)$ și $\frac{1}{\omega C}$. $(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2})$ care au ordinele de mărime 10^{-2} respectiv 10^{-8} .

4.1.4. Descărcări parțiale în curent continuu

În curent continuu repartiția tensiunii pe condensatoarele C_1 și C_2 este determinată de rezistențele de pierdere ale celor două condensatoare (fig.4.1):

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U; \quad U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U \quad (4.48)$$

Vom lua în considerare cazul cînd tensiunea U_{2m} este egală cu tensiunea de străpungere a incluziunii.

Condițiile inițiale pentru mărimile de stare din circuitul din figura 4.2. sînt ($R \ll R_1, R_2$):

$$U_{20} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = U_B \quad U_{10} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E = \frac{R_1}{R_2} U_B$$

$$U_0 = E = \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_B \quad I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad (4.49)$$

unde E este tensiunea electromotoare a sursei.

În regimul permanent de după descărcare valorile acestor mrimi sînt:

$$\begin{aligned} U_{2op} &= \frac{R_a}{R_1 + R_a} \cdot E = 0 & U_{1op} &= E \\ U_{op} &= E & i_{op} &= \frac{E}{R_1} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Componentele tranzitorii au în acest caz valorile inițiale:

$$\begin{aligned} U_{2ot} &= U_s & U_{ot} &= 0 & U_{1ot} &= -U_s \\ i_{ot} &= -\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{E}{R_1 + R_2} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Înlocuind valorile date de (4.51) în expresiile (4.11)-(4.14) și ținînd seama de valorile de regim permanent, se obține:

$$u_2(t) = U_s \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= E - \left[\frac{C}{C+C_1} + (\omega_1 T_a)^2 \right] U_s \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) - \\ &\quad + \frac{C_1}{C+C_1} U_s \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha) \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\text{unde } \alpha = \arctg 2\omega_1 T \approx 90^\circ$$

$$\begin{aligned} u(t) &= E + \left(\frac{C_1}{C+C_1} + \frac{C}{C+C_1} \cdot \frac{C+C_{12}}{C+C_1} \cdot \frac{T_a}{2T} \right) U_s \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) - \\ &\quad - \frac{C_1}{C+C_1} U_s \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha) \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\text{unde } \alpha = \arctg 2\omega_1 T - \arctg \frac{\omega_1 T_a}{\eta} \approx 90^\circ \quad (4.55)$$

$$i(t) = \frac{E}{R_1} - (\omega_1 T_a) \frac{C_1}{C+C_1} \omega_1 (C+C_{12}) U_s \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) -$$

$$- \frac{C_1}{C+C_1} U_B \omega_1 (C+C_{12}) \exp\left(-\frac{t}{T_a}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (4.55)$$

$$\text{unde } \alpha = \arctg \frac{i\omega t}{\frac{C_1}{C+C_1} \omega_1 (C+C_{12}) U_B} = \arctg \frac{\omega_1 T_a}{n} \approx 90^\circ$$

Pentru cazurile cele mai frecvente, în care C nu scade sub valoarea lui C_1 , raportul $C_1/(C+C_1)$ are valori cuprinse între 0,5 și 10^{-6} , cînd $C=(C_1 \div 10^6 C_1)$ și $T_a \ll (2\pi/\omega_1)$, relațiile devin:

$$u_2(t) = U_B \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) \quad (4.56)$$

$$u_1(t) = E - \frac{C_1}{C+C_1} \cdot U_B - \frac{C}{C+C_1} U_B \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) \quad (4.57)$$

$$u(t) = E - \frac{C_1}{C+C_1} \cdot U_B + \frac{C_1}{C+C_1} U_B \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) \quad (4.58)$$

$$i(t) = \frac{E}{R_1} - \frac{C_1}{C+C_1} \cdot U_B \cdot \omega_1 (C+C_{12}) \sin\alpha - (\omega_1 T_a) \frac{C_1}{C+C_1} \omega_1 \cdot \\ \cdot (C+C_{12}) U_B \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) \quad (4.59)$$

Din relațiile de mai sus rezultă că tensiunea la borne scade într-un timp foarte scurt ($\sim 10^{-12}$ sec) cu valoarea:

$$\Delta U = \frac{C_1}{C+C_1} \cdot U_B,$$

ceea ce corespunde injectării de către rețea a unei sarcini:

$$Q = U \cdot (C+C_1) = C_1 U_B,$$

care este chiar sarcina aparentă a descărcării parțiale q . Variația curentului este nesemnificativă datorită factorului $(\omega_1 T_a)$ ce înmulțește termenul în $\exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right)$. La terminarea descărcării condițiile inițiale pentru procesul de încărcare vor fi:

$$U_{20} = 0 \quad U_{10} = \frac{C}{C+C_1} E + \frac{C_1}{C+C_1} \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} E$$

$$U_0 = \frac{C}{C+C_1} E + \frac{C_1}{C+C_1} \frac{R_1}{R_1+R_2} E \quad i_0 = \frac{E}{R_1+R_2} \quad (4.60)$$

Valorile inițiale ale mărimilor corespunzătoare regimului permanent fiind date de relațiile (4.49) rezultă pentru componentele tranzitorii:

$$\begin{aligned}
 U_{2ot} &= -U_B & U_{1ot} &= \frac{C}{C+C_1} U_B & U_{ot} &= -\frac{C_1}{C+C_1} U_B \\
 i_{ot} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.61}$$

Înlocuind (4.61) în (4.24)-(4.27) și ținând seama de valorile de regim permanent rezultă:

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= U_B - \frac{C+C_{12}}{C+C_1} U_B \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) - \frac{C_{12}}{C_2} \cdot \\
 &\cdot \frac{C_1}{C+C_1} \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha)
 \end{aligned}
 \tag{4.62}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2\omega_1 T$$

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= \frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot E + \frac{C+C_{12}}{C+C_1} \cdot U_B \cdot \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) + \\
 &+ \frac{C_{12}}{C_1} \frac{C_1}{C+C_1} U_B \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha)
 \end{aligned}
 \tag{4.63}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2\omega_1 T$$

$$\begin{aligned}
 u(t) &= E + \frac{1}{\omega_1 T} \cdot \frac{C_1 C_2}{C+C_1} \cdot \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1}{C_2 T_2} - \frac{1}{C_1 T_1} \right) U_B \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) - \\
 &- \frac{C_1}{C+C_1} \cdot U_B \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha)
 \end{aligned}
 \tag{4.64}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2\omega_1 T$$

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{E}{R_1+R_2} + \frac{C+C_{12}}{C+C_1} C_1 C_2 U_B \left(\frac{1}{C_1 T_1} - \frac{1}{C_2 T_2} \right) \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) - \\
 &- \frac{C+C_{12}}{C+C_1} C_1 \omega_1 U_B \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha)
 \end{aligned}
 \tag{4.65}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2\omega_1 T + \operatorname{arctg} \frac{U_0 C_{12} \omega_1}{I_0}$$

Conform ecuațiilor (4.62)-(4.65) procesul de încărcare a incluziunii este determinat de constanta de timp T_3 . Această constantă de timp, dată de relația (4.23) este mai mică decât cea mai mică dintre constantele de timp T_1 și T_2 (rel 22). Componenta sinusoidală amortizată influențează procesul de încărcare a incluziunii când capacitatea C_2 este mai mică iar C nu este deosebit de mare în raport cu C_1 . Cum, în general, $T_1 > T$ componenta sinusoidală se

amortizează practic complet înainte de încărcarea incluziunii, excepție cazurile când constanta de timp a izolației ar avea valori foarte scăzute, deci tangentă a unghiului de pierderi mare ($10^{-1} - 10^{-2}$).

4.15. Descărcări parțiale în curent alternativ

În curent alternativ repartiția tensiunii pe condensatoarele C_1 și C_2 este determinată de capacitatea acestor condensatoare (la valori uzuale ale tangentei unghiului de pierderi):

$$U_1 = \frac{C_{12}}{C_1} U; \quad U_2 = \frac{C_{12}}{C_2} U \quad (4.66)$$

Vom lua în considerare cazul când amplitudinea tensiunii pe condensatorul C_2 este egală cu tensiunea de străpungere. Înainte de producerea descărcării, neglijind în regim permanent valorile rezistențelor, mărimile din circuit sînt:

$$e = \sqrt{2} E \sin \omega t$$

$$i = \sqrt{2} E \omega (C + C_{12}) \sin(\omega t + \varphi); \quad \varphi \approx 90^\circ \quad (4.67)$$

$$u = \sqrt{2} U \sin[\omega t - (\frac{\pi}{2} - \varphi)] \approx \sqrt{2} U \sin \omega t; \quad U \approx E$$

$$u_1 = \sqrt{2} U \cdot \frac{C_{12}}{C_1} \cdot \sin[\omega t - (\frac{\pi}{2} - \varphi)] \approx \sqrt{2} U \cdot \frac{C_{12}}{C_1} \sin \omega t$$

$$u_2 = \sqrt{2} U \cdot \frac{C_{12}}{C_2} \cdot \sin[\omega t - (\frac{\pi}{2} - \varphi)] \approx \sqrt{2} U \cdot \frac{C_{12}}{C_2} \sin \omega t.$$

Străpungerea are loc cînd:

$$U_{20} = \sqrt{2} E \cdot \frac{C_{12}}{C_2} \sin \varphi = U_B \quad U_{10} = \frac{C_2}{C_1} \cdot U_B \quad (4.68)$$

$$U_0 = \frac{C_2}{C_{12}} \cdot U_B \quad I_0 = (C + C_{12}) \frac{C_2}{C_{12}} \cdot U_B K_u,$$

$$\text{unde } K_u = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2} E}{U_B} \cdot \frac{C_{12}}{C_2}\right)^2 - 1}.$$

Avînd în vedere că în regim permanent valorile mărimilor (4.68) sînt, la momentul inițial:

$$U_{2op} = 0; \quad U_{1op} = U_{op} = \frac{C_2}{C_{12}} U_S; \quad i_{op} = \omega (C + C_1) \frac{C_2}{C_{12}} \cdot U_S \cdot K_u \quad (4.69)$$

rezultă pentru valorile inițiale ale componentelor tranzitorii:

$$U_{2ot} = U_S; \quad U_{1ot} = -U_S; \quad U_{ot} = 0; \quad i_{ot} = -\omega C_1 U_S K_u, \quad (4.70)$$

care împreună cu valorile de regim permanent din timpul descărcării și ținând seama de (4.11) ne dau variațiile în timp ale tensiunilor și curentului în timpul primei descărcări;

$$u_2(t) = U_S \cdot \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) \quad (4.70')$$

$$u_1(t) = -\frac{C}{C+C_1} U_S \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) - \frac{C_1}{C+C_1} U_S \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha) +$$

$$+\sqrt{2} E \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.71)$$

$$u(t) = \frac{C_1}{C+C_1} U_S \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) - \frac{C_1}{C+C_1} U_S \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha) +$$

$$+\sqrt{2} E \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.72)$$

$$\alpha = \arctg \frac{\omega_1}{\frac{1}{2T} + \omega \frac{C+C_1}{C+C_{12}}} - \arctg \frac{\omega_1 T_a}{n} \approx 90^\circ$$

$$i(t) = (\omega_1 T_a) \cdot \frac{C_1}{C+C_1} \cdot \omega_1 (C+C_{12}) U_S \exp\left(-\frac{nt}{T_a}\right) -$$

$$-\omega C_1 U_S \cdot \frac{C+C_2}{C+C_{12}} \cdot \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha) +$$

$$+\sqrt{2} E \omega (C+C_1) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) \quad (4.73)$$

$$\alpha = -\arctg \frac{\omega}{\omega_1} \cdot \frac{C+C_1}{C+C_{12}} \cdot K_u$$

Relațiile (4.70)-(4.73) arată că tensiunea pe incluziune scade în timp foarte scurt la zero. În același timp tensiunea pe capacitatea C_1 a izolației sănătoase crește cu aproximativ U_S când $C \gg C_1$, iar tensiunea la borne scade cu $U_S C_1 / (C+C_1)$. Deoarece $T_a \ll \frac{2\pi}{\omega_1} < \frac{2\pi}{\omega}$ componenta sinusoidală amortizată și cea permanentă nu influențează procesul descărcării. Se observă că variația curentului este afectată de factorul $(\omega_1 T_a)$ care are valori foarte mici, deci scăderea curentului este practic neglijabilă.

După stingerea arcului electric din incluziune începe procesul de încărcare, când valorile inițiale ale tensiunilor și curenților sînt:

$$U_{20} = 0; U_{10} = \frac{C_2}{C_{12}} \cdot \frac{C+C_{12}}{C+C_1} U_B; U_0 = \frac{C_2}{C_{12}} \cdot \frac{C+C_{12}}{C+C_1} U_B; \\ i_0 = \frac{C_2}{C_{12}} \omega (C+C_{12}) U_B K_U. \quad (4.74)$$

Ținînd seama de valorile inițiale ale mărimilor de stare de regim permanent, valorile inițiale ale componentelor tranzitorii sînt:

$$U_{20T} = -U_B; U_{10T} = \frac{C}{C+C_1} U_B; U_{0T} = -\frac{C_1}{C+C_1} U_B; i_{0T} = 0 \quad (4.75)$$

Înlocuind (4.75) în (4.24)-(4.27) și ținînd seama de valorile de regim permanent din timpul încărcării se obține în final:

$$u_2(t) = -\frac{C+C_{12}}{C+C_1} U_B \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) - \frac{C_{12}}{C_2} \frac{C_1}{C+C_1} U_B \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega t + \alpha) \\ + \sqrt{2} E \frac{C_{12}}{C_2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.76)$$

$$u_1(t) = \frac{C+C_{12}}{C+C_1} U_B \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) - \frac{C_{12}}{C_1} \frac{C_1}{C+C_1} U_B \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega t + \alpha) \\ + \sqrt{2} E \frac{C_{12}}{C_1} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.77)$$

$$u(t) = \frac{1}{\omega_1 T} \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1}{R_2 C_2} - \frac{1}{R_1 C_1} \right) \cdot \frac{C_{12}}{C+C_1} U_B \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) - \\ - \frac{C_1}{C+C_1} U_B \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha) + \sqrt{2} E \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.78)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2\omega_1 T \approx 90^\circ$$

$$i(t) = \frac{C_{12}}{C+C_1} (C+C_{12}) \left(\frac{1}{R_2 C_2} - \frac{1}{R_1 C_1} \right) U_B \exp\left(-\frac{t}{T_3}\right) - \\ - \omega_1 (C+C_{12}) \frac{C_1}{C+C_1} U_B \exp\left(-\frac{t}{2T}\right) \sin(\omega_1 t + \alpha) + \\ + \sqrt{2} E \omega (C+C_{12}) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) \quad (4.79)$$

$$\alpha = 2\omega_1 T + 90^\circ \approx 180^\circ.$$

Tinând seama că în general $T_3 \gg T > \frac{2\pi}{\omega_1}$, termenul aperiodic în $\exp(-\frac{t}{T_3})$ rămâne practic constant pe timpul încărcării, în afară de cazul când constanta de timp T_3 ar scădea foarte mult. Procesul de încărcare este determinat de componente de regim permanent. Componenta sinusoidală amortizată influențează procesul de încărcare doar atunci când capacitatea C a izolației nu este prea mare în comparație cu C_1 , iar dimensiunile incluziunii sînt mai mari, decît cînd C_2 este mic, de același ordin de mărime cu C_{12} . Cum $\omega_1 > \omega$ componenta sinusoidală mărește numărul de descărcări parțiale pe secundă. Dacă $T < 2\pi/\omega_1$ componenta sinusoidală este amortizată practic în primul sfert de perioadă al ei, deci tensiunea pe cavitate crește cu termenul $U_s \cdot C_{12} \cdot C_1 / C_2 (C + C_1)$ într-un timp de ordinul a $3T$ secunde.

4.2. Modelul analogic al descărcării parțiale

Determinări experimentale

Pentru modelarea fenomenului de descărcare parțială din incluziunea unui izolanț s-a realizat circuitul din figura 4.5. unde C_2 reprezintă capacitatea incluziunii ce descarcă, C_1 reprezintă capacitatea izolației sănătoase din tubul de cîmp al incluziunii iar C este capacitatea restului echipamentului de înaltă

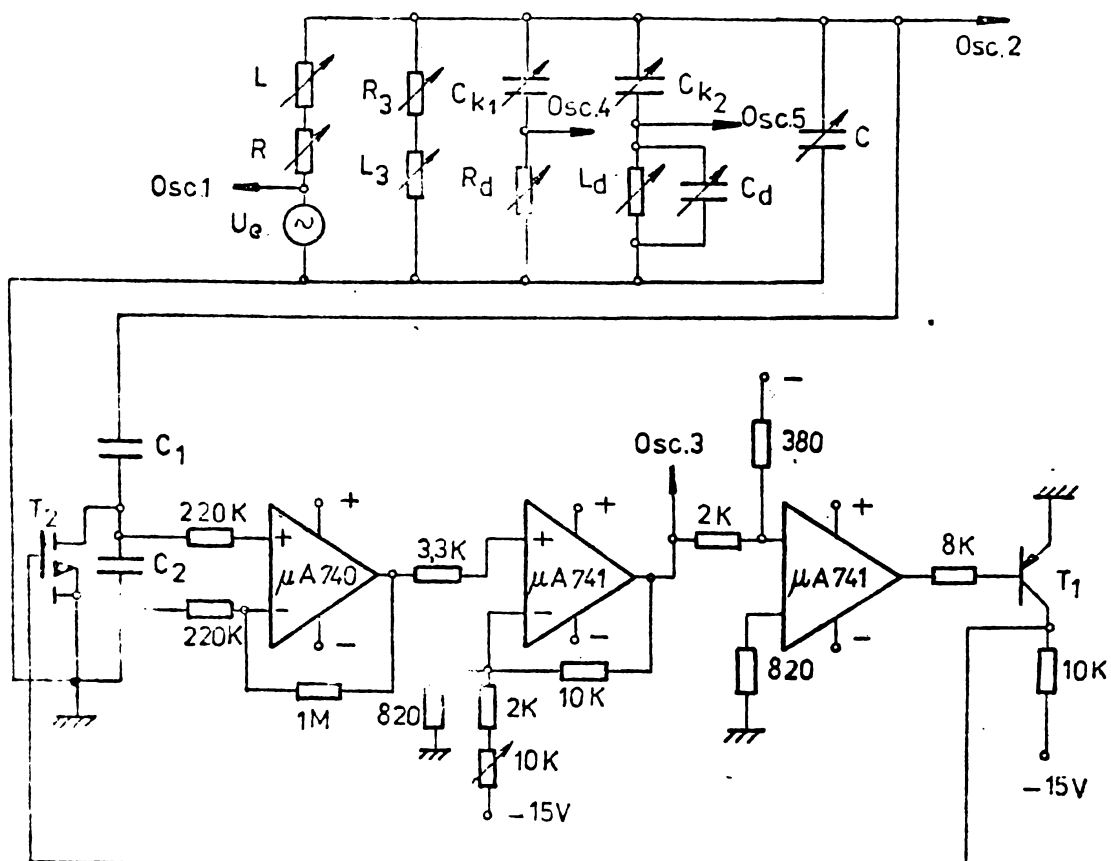


Fig. 4.5.

tensiune. După amplificarea cu circuitele integrate $\mu A740$ și $\mu A741$ - semnalul este aplicat unui comparator, care prin intermediul tranzistorului T_1 comandă grila tranzistorului cu efect de câmp T_2 . În timpul unei semialternanțe, când tensiunea la bornele condensatorului C_2 amplificată atinge valoarea prescrisă la comparator (tensiunea de străpungere) tranzistorul T_2 scurtcircuitază condensatorul C_2 , iar după aceea tranzistorul T_2 revine în starea blocată și condensatorul C_2 se încarcă din nou. În felul acesta circuitul prezentat simulează fenomenele ce au loc într-o incluziune cu electrozi metalici pe durata unui sfert de perioadă a tensiunii aplicate. Pentru studierea influenței diferiților parametri ai schemei electrice asupra fenomenului s-au mai prevăzut în schemă inductivitatea L și rezistența R , parametrii R_2, L_2, C ai consumatorului precum și parametrii circuitelor de detecție C_{k1}, R_d pentru detecție în bandă largă și C_{k2}, C_d, L_d pentru detecție în bandă îngustă.

Tensiunile din punctele 1, 2, 3, 4 ale circuitului au fost oscilografiate și măsurate. Tensiunea de alimentare se poate regla continuu.

Coeficientul de amplificare calculat și măsurat al amplificatorului este de 13,65. Curentul de comandă al circuitului integrat $\mu A740$ este pentru schema realizată de cca 145 pA, astfel că rezistența de scurgere a condensatorului C_2 trebuie să fie mai mică de $0,10^{10} \Omega$ pentru ca semnalul de curent continuu pe condensatorul C_2 să nu depășească 0,01 V. Aceasta limitează valoarea inferioară a lui C_2 la cca 100 pF pentru valori ale tangentei unghiului de pierderi de cca 10^{-3} , $f = 50$ Hz.

4.2.1. Influența tensiunii de alimentare



Fig 4.6.

T: 1 ms/div
U: 0,2 V/div
U₂: 5 V/div

La atingerea tensiunii de străpungere, după cum se observă din figura 4.6, tensiunea la bornele incluziunii (curba superioară) scade în timp foarte scurt la valoarea zero, după care urmează imediat încărcarea, când tensiunea pe cavitate urmărește forma de variație a tensiunii de alimentare. Peste componenta de frecvență industrială (50 Hz) se suprapune componenta sinusoidală amortizată a cărei

frecvență este determinată de parametrii L, C și R_{12} ai circuitului, în acest caz fiind $f_1 = 2,95$ kHz, ceea ce corespunde cu valoarea calculată din oscilogramă de 3 kHz. Amplitudinea acesteia este determinată de raportul $C_1 / (C + C_1) = 0,28$ și de nivelul tensiunii de străpungere al ineluziunii, iar constanta de timp $T = L/R = 3,6$ msec corespunde cu cea de pe oscilograma din figura 4.6. În curba tensiunii la borne (cea inferioară) la străpungere apare o scădere bruscă urmată de componenta sinusoidală amortizată de frecvența f_1 ce se suprapune peste componenta permanentă de 50 Hz.

La creșterea tensiunii de alimentare (fig.4.7) se constată creșterea componentei de 50 Hz a tensiunii pe cavitate,

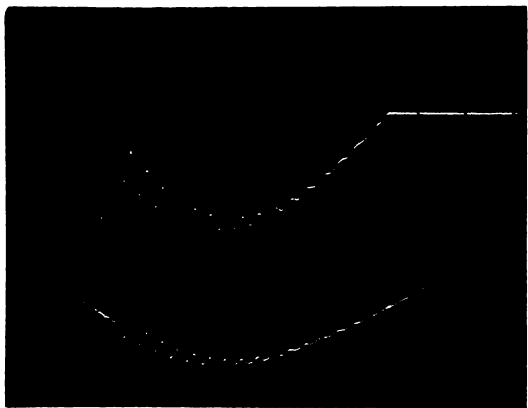


Fig.4.7.

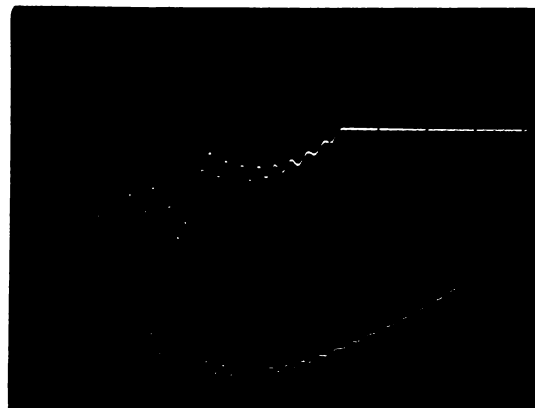


Fig.4.8.

componenta sinusoidală amortizată avînd aceeași valoare. La un moment dat se produce o a doua descărcare (fig.4.8), cînd în curba tensiunii la borne apare o întrerupere a componentei sinusoidale amortizate. Baza de timp și poziția comutatorului de nivel la ultimele două oscilograma sînt aceleași ca la figura 4.6.

Creșterea în continuare a tensiunii de alimentare (fig.4.9 și 4.10) duce la apariția unor descărcări suplimentare ajungînd la 13 descărcări pe sfert de perioadă în figura 4.11 și la 21



Fig.4.9
T: 1 ms/div
U: 0,5 V/div

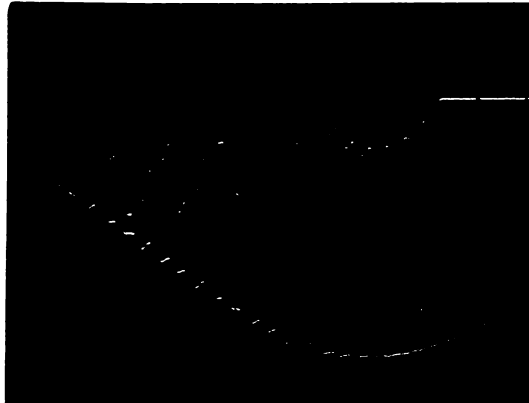


Fig.4.10
T: 1 ms/div
U: 0,5 V/div

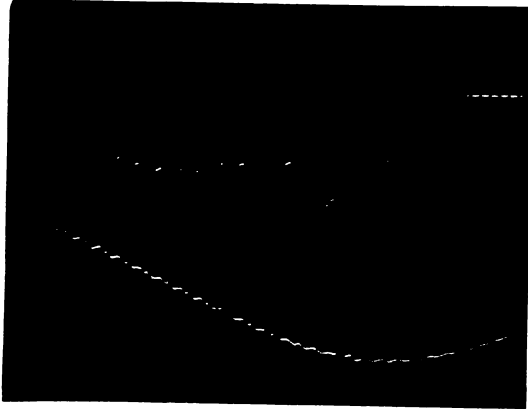


Fig.4.11.
T:1 ms/div;
U:1 V/div.

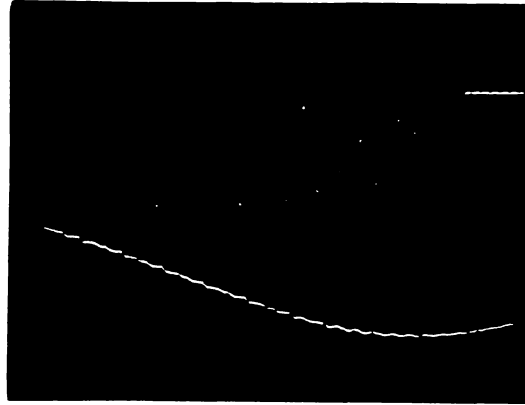


Fig.4.12
T:1 ms/div;
U:2 V/div.

descărcări pe sfert de perioadă în figura 4.12, când nivelul tensiunii de alimentare era de 4 ori, respectiv 6 ori mai mare decât în figura 4.6. Comutatorul de nivel pentru tensiunea pe cavitate a fost la toate oscilogramele prezentate cât și la cele următoare în poziția 5 V/div.

4.2.2. Influența rezistenței serie cu proba

Rezistența R conectată în serie cu proba supusă la încercarea de descărcări parțiale determină valoarea constantei de timp a oscilației sinusoidale amortizate, astfel că la creșterea de trei ori a rezistenței se obține situația din figura 4.13.



Fig.4.13.
T:2 ms/div
U: 0,2 V/div

Creșterea rezistenței nu influențează valoarea inițială a amplitudinii componentei sinusoidale amortizate, fapt ce se observă și din figurile 4.14 și 4.15 unde valoarea rezistenței R era de 30 respectiv 300 ori mai mare ca în figura 4.6.

În figura 4.15 constanta de timp a procesului de amortizare este de cca $24 \mu\text{sec}$, deci mult mai mică decât perioada oscilației sinusoidale care este complet atenuată.

Creșterea tensiunii de alimentare conduce la apariția unor noi descărcări, așa cum se arată din oscilogramele 4.16 și 4.17 unde nivelul tensiunii era de 2 ori respectiv de 3 ori mai mare ca în figura 4.15.

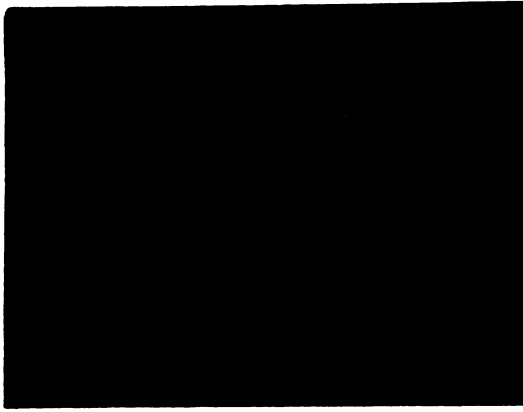


Fig. 4.14.

T: 1 ms/div; U: 0,2 V/div

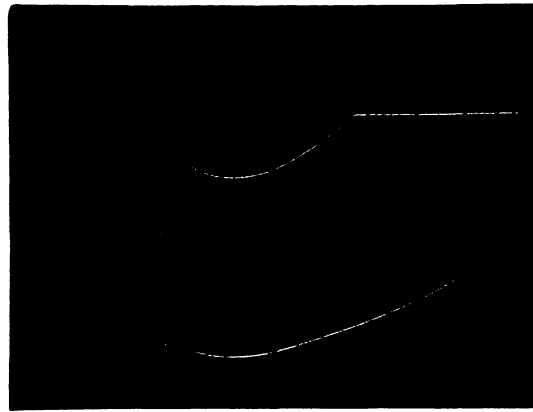


Fig. 4.15.

T: 1 ms/div; U: 0,2 V/div

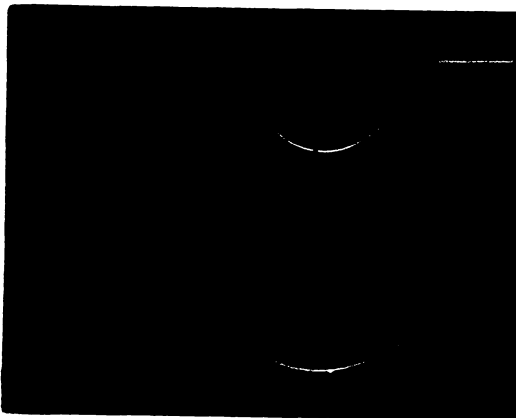


Fig. 4.16.

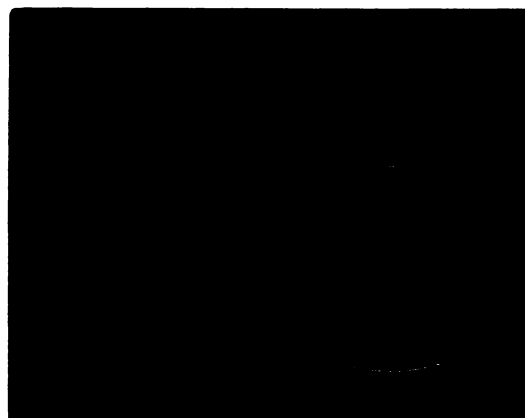
T=1 ms/div
U: 0,2 V/div

Fig. 4.17.

T= 1 ms/div
U: 0,5 V/div

4.2.3. Influența capacității C_1

Capacitatea C_1 a izolației sănătoase situată în tubul de câmp al incluziunii influențează amplitudinea componentei sinusoidale amortizate ce se suprapune peste tensiunea de încărcare a lui C_2 și peste tensiunea de alimentare cât și valoarea variației tensiunii de alimentare în momentul producerii descărcării datorită raportului $C_1/(C+C_1)$ ce intervine în relațiile (4.72) și (4.75). Astfel, la scăderea lui C_1 se obțin curbele din figurile 4.18 și 4.19 unde raportul $C_1/(C+C_1)$ a fost de 0,1, respectiv 0,05. De remarcat că creșterea nivelului tensiunii nu influențează nici în această situație amplitudinea componentei sinusoidale așa cum rezultă din figurile 4.20 și 4.21 unde tensiunea era de cca 2,5 ori, respectiv 4 ori mai mare decât la oscilograma 4.18. În figura 4.21 raportul $C_1/(C+C_1)$ era 0,025.

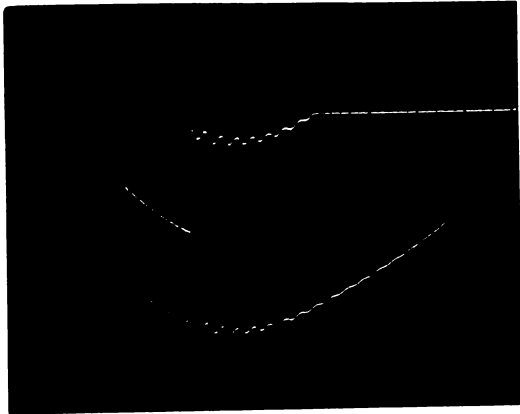


Fig.4.18.
 $T = 1 \text{ ms/div}$
 $U: 0,2 \text{ V/div}$

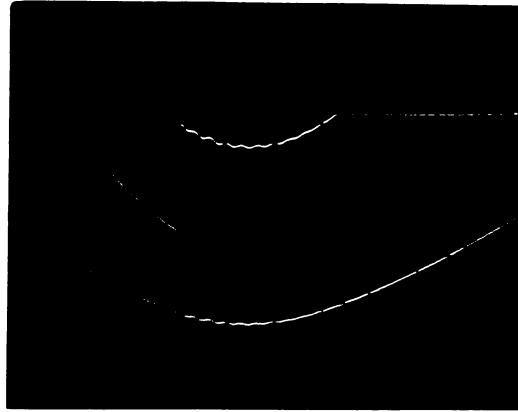


Fig.4.19.
 $T = 1 \text{ ms/div}$
 $U: 0,5 \text{ V/div}$

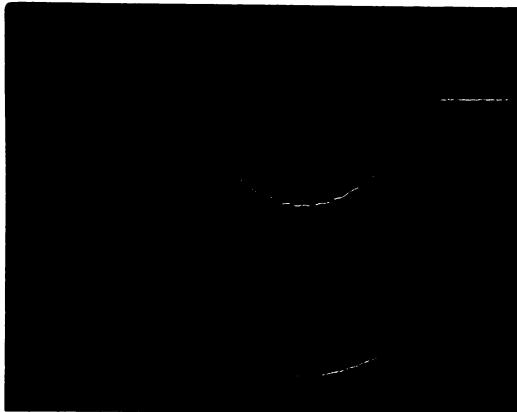


Fig.4.20.
 $T = 1 \text{ ms/div}$
 $U: 0,5 \text{ V/div}$

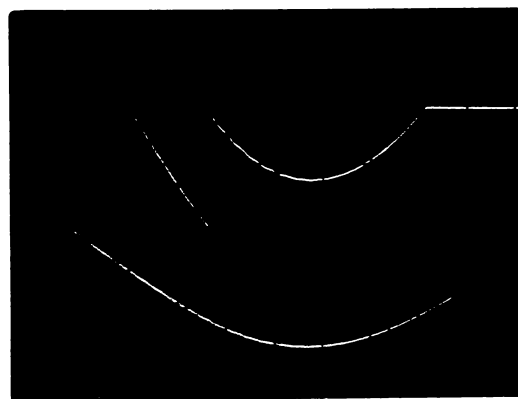


Fig.4.21.
 $T = 1 \text{ ms/div}$
 $U: 1 \text{ V/div}$

Creșterea capacității C_1 , adică scăderea gradului de izolație duce la creșterea amplitudinii componentei simetrice amortizate ca în figura 4.22, unde $C_1/(C+C_1)=0,33$. De remarcat, așa

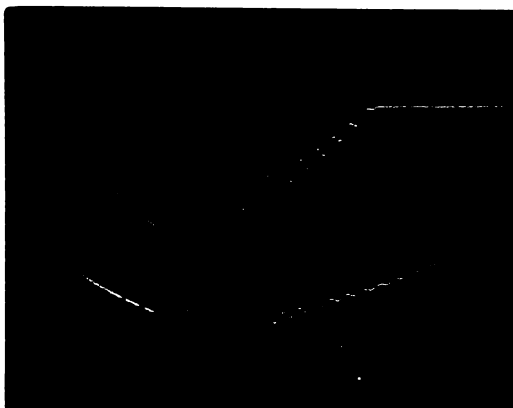


Fig.4.22.
 $T = 1 \text{ ms/div}$
 $U: 0,2 \text{ V/div}$

cum se vede în figurile 4.23 și 4.24, că această componentă poate conduce în unele situații la apariția unor descărcări suplimentare. În aceste figuri raportul menționat era 0,58 respectiv 0,85, în ultimul caz părăind trei descărcări suplimentare imediat după prima.

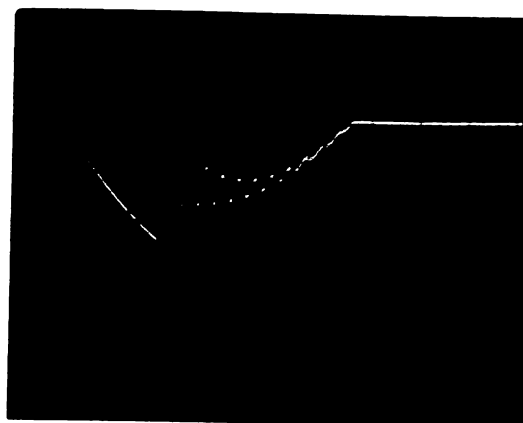
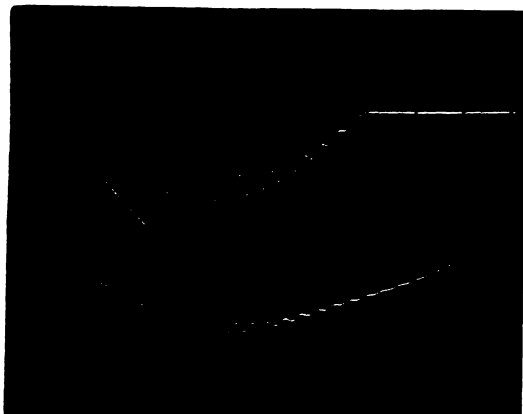


Fig. 4.23.
U: 0,5 V/div; T: 1 ms/div;

Fig. 4.24.
U: 0,5 V/div; T: 1 ms/div

4.2.4. Influența inductivității serie cu proba

Inductivitatea L conectată în serie cu proba determină frecvența componentei sinusoidale amortizate și constanta de timp a amortizării acesteia. La scăderea inductivității crește frecvența componentei oscilațiilor amortizate, dar crește și gradul de amortizare al acestora așa cum se observă din figurile 4.25 și 4.26, unde



Fig. 4.25

T: 1 ms/div ; U: 0,2 V/div

inductivitatea L era de 60 mH respectiv 30 mH față de 120 mH în figura 4.6. Creșterea tensiunii de alimentare duce la apariția unor

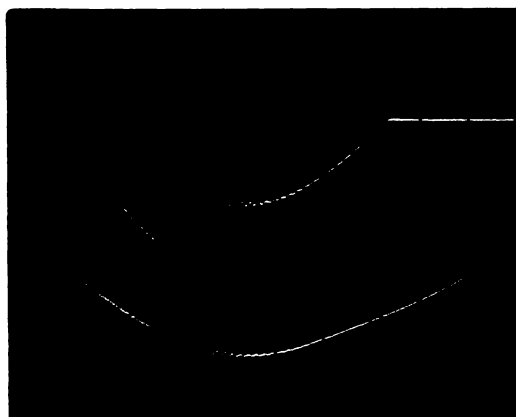


Fig. 4.26

T: 1 ms/div ; U: 0,2 V/div

noi descărcări așa cum se observă în figura 4.27, unde $L = 10$ mH iar tensiunea era de 2,7 ori mai mare ca în figura 4.26.

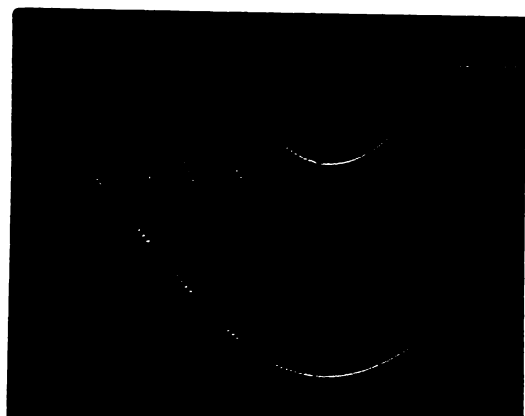


Fig. 4.27
T: 1 ms/div ; U: 0,2 V/div

Modificarea valorii rezistenței R are efectele menționate în paragraful 4.3.2. așa cum se poate constata din figurile 4.28 și 4.29 unde rezistența a fost de 4 ori respectiv 40 de

ori mai mare ca în figura 4.27.



Fig.4.28
T: 1 ms/div ; U:0,2 V/div



Fig. 4.29
T:1 ms/div , U:0,2 V/div

4.2.5. Influența capacității probei

Capacitatea C a obiectului încercat influențează atât frecvența componentei sinusoidale amortizate cât și amplitudinea acesteia. De asemenea, la valori foarte mari ale lui C , scăderea tensiunii la bornele de alimentare devine foarte mică. La creșterea capacității C , așa cum reiese și din figurile 4.30 și 4.31 frecvența componentei sinusoidale amortizate scade și de-

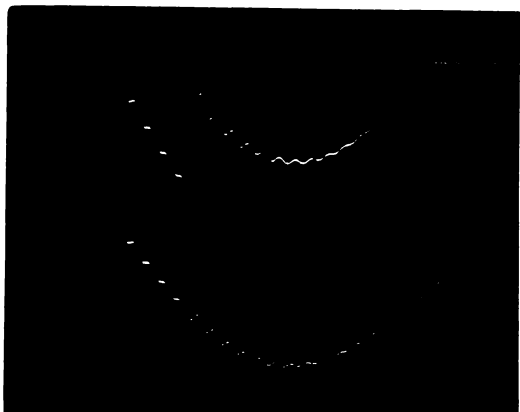


Fig.4.30
T:1 ms/div ; U:0,2 V/div
asemenea scade și amplitudinea acesteia. În figura 4.30 raportul $C_1/(C+C_1)$ era 0,125 iar în figura 4.31 era 0,03.

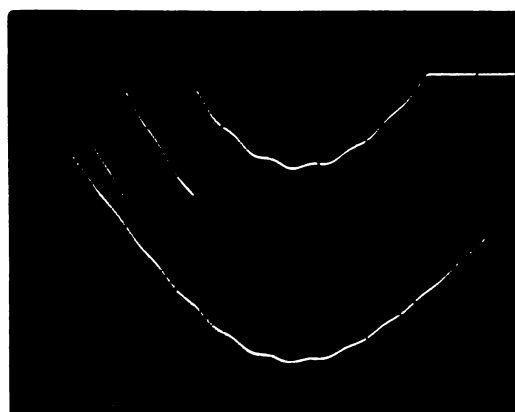


Fig.4.31
T: 1 ms/div ; U:0,2 V/div

4.2.6. Influența rezistenței receptorului

Rezistența R_3 a receptorului influențează de asemenea fenomenul în sensul atenuării mai puternice a componentei sinusoidale amortizate la scăderea rezistenței R_3 după cum

se constată în figurile 4.32 și 4.33 în a doua oscilogramă rezistența R_3 fiind de 5 ori mai mică decât în prima.

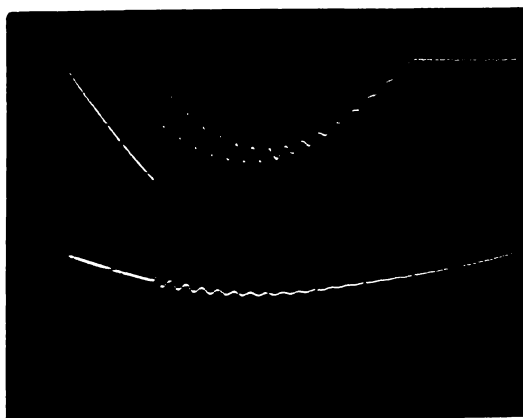


Fig.4.32.

T:1 ms/div; U: 0,5 V/div

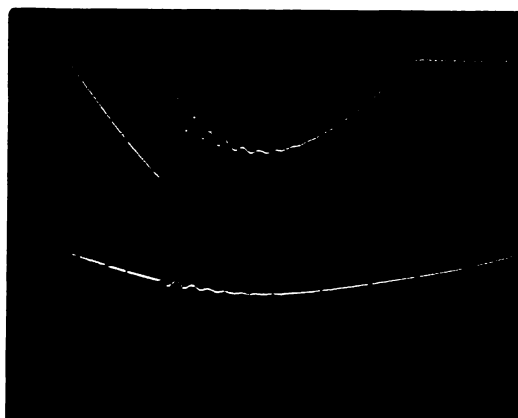


Fig.4.33

T:1 ms/div; U:0,5 V/div

În oscilograma din figura 4.32 valoarea lui R_3 era aproximativ egală cu reactanța capacitivă a probei.

Creșterea rezistenței R_3 influențează și amplitudinea componentei sinusoidale amortizate, fapt ce se constată mai ales din figurile 4.34 și 4.35 unde rezistența R_3 era de 20 de ori, respectiv 100 ori mai mică decât în figura 4.32.

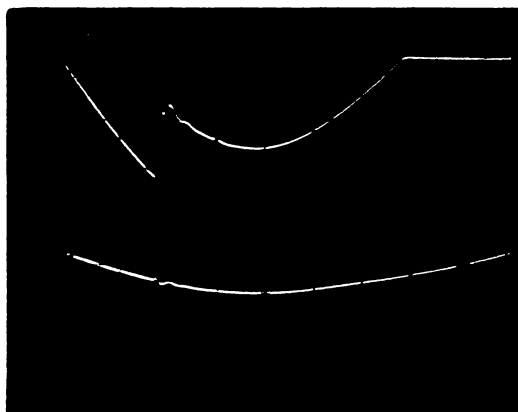


Fig.4.34.

T:1 ms/div; U: 0,5 V/div

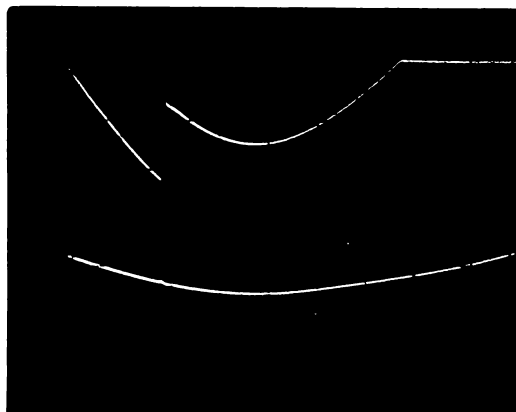


Fig.4.35

T:1 ms/div; U:0,5 V/div

Creșterea nivelului tensiunii de alimentare (Fig.4.3) duce la apariția mai multor descărcări, detectabile sub formă unor mici impulsuri în unda tensiunii de alimentare. Durata acestor impulsuri scade la scăderea valorii rezistenței R_3 , așa cum se constată din figurile 4.37 și 4.38 unde rezistența R_3 era de

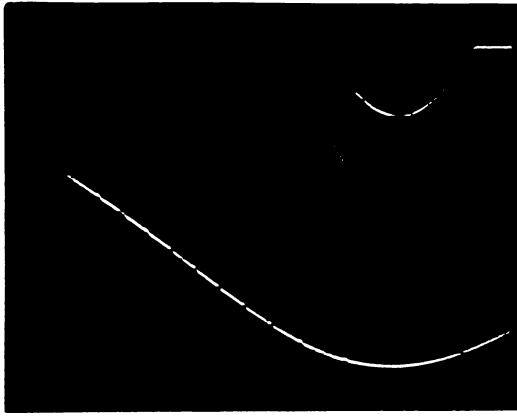


Fig.4.36
 $T: 1 \text{ ms/div}$
 $U: 0,5 \text{ V/div}$

300 ori, respectiv de 1000 de ori mai mică decât în oscilograma 4.32.

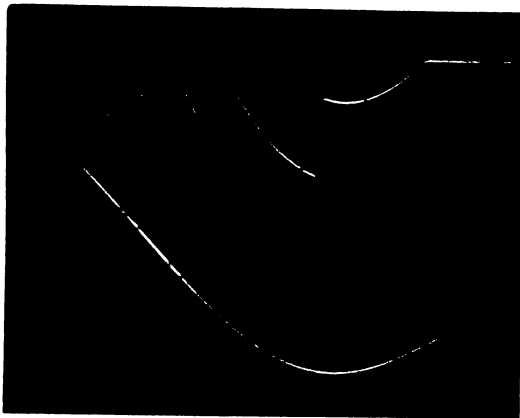


Fig.4.37
 $T: 1 \text{ ms/div}; U: 0,2 \text{ V/div}$

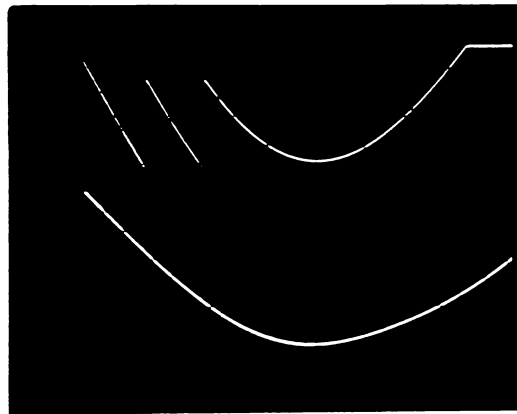


Fig.4.38
 $T: 1 \text{ ms/div}; U: 0,2 \text{ V/div}$

4.2.7. Detectia în bandă largă

Signalul detectat printr-un condensator de cuplaj $C_{cp} = 1 \text{ nF}$, rezistența de detecție fiind $R_d = 4100 \Omega$ se prezintă (fig.4.39) sub forma unor trenuri de impulsuri oscilatorii amortizante, curba inferioară, curenții de încălzire fiind clar marcat pe oscilogramă de scărare a raportului

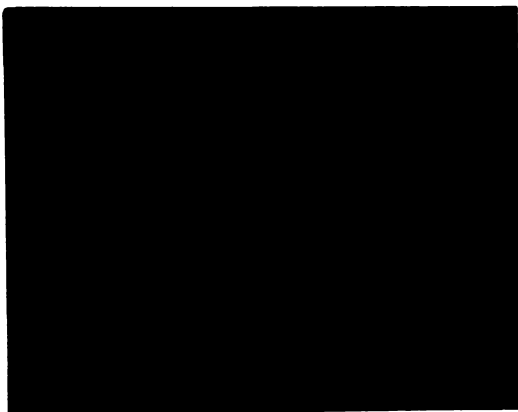


Fig.4.39
 $T: 1 \text{ ms/div}$
 $U_d: 0,05 \text{ V/div}$

la tensiunii detectate U_d . Cu creșterea nivelului tensiunii de alimentare și deci a numărului de încălziri parțiale duce la mărirea acestor impulsuri (fig. 4.40, 4.41). La creșterea valorii rezistenței R serie cu grăba componenta sinusoidală amortizată



Fig. 4.40

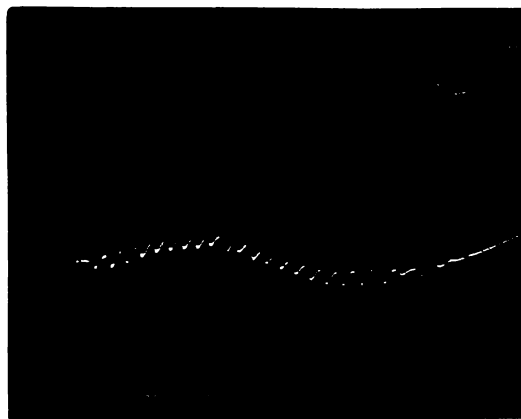
T: 1 ms/div; U_d: 0,05 V/div

Fig. 4.41

T: 1 ms/div; U_d: 0,05 V/div

din treburile de impulsuri detectate pe rezistența R_d se absoarbează puterile (Fig. 4.41, 4.42) pînă la disipație. Semnalul rămîne celor două de semnalul generat de sursa tensiunii detectate.

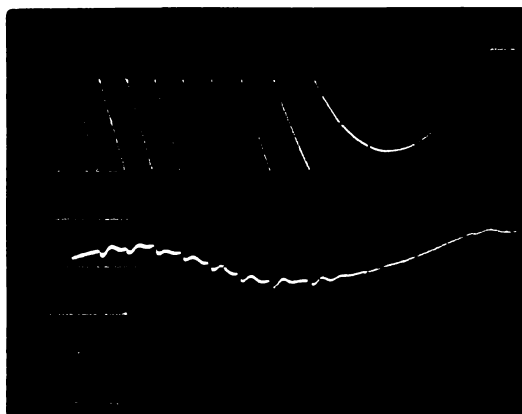


Fig. 4.42

T: 1 ms/div; U_d: 0,02 V/div

Fig. 4.43

T: 0,5 ms/div; U_d: 0,02 V/div

4.2.B. Detectia în bandă îngustă

Semnalul detectat la bornele unui circuit oscilant conectat în serie cu proba se prezintă ca în figura 4.44 rezultată în figura 4.45 cu o bază de timp mai mică. Se constată că peste componenta sinusoidală amortizată ce însoțește fenomenul de descărcare parțială se suprapune o oscilație amortizată a cărei frecvență depinde de parametrii L_d , C_d ai circuitului de detecție. În creșterea capacității C_d frecvența oscilației amortizate suplimentare scade (fig. 4.46, 4.47) iar amplitudinea acesteia crește (fig. 4.47 (4.48) pe măsură ce frecvența de oscilație a circuitului de detecție se apropie de frecvența oscilației amortizate ce însoțește procesul de descărcare parțială.

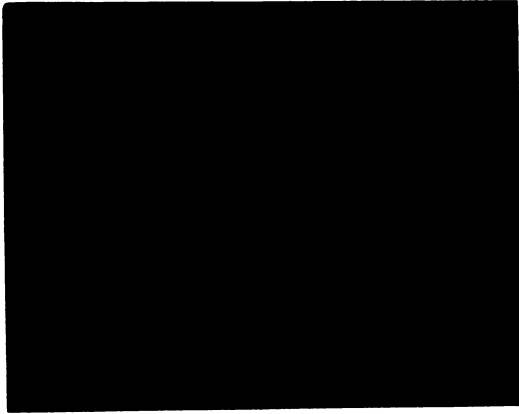


Fig. 4.44
 $T: 1 \text{ ms/div}; U_d: 0,02 \text{ V/div}$

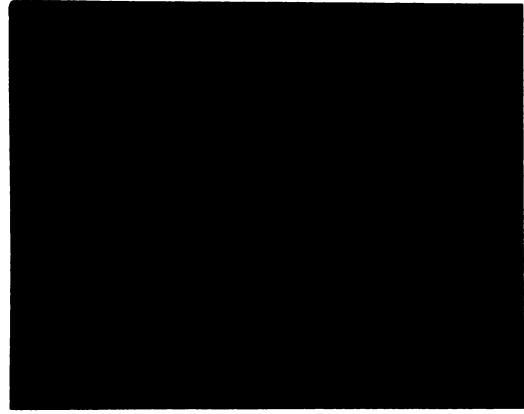


Fig. 4.45
 $T: 0,5 \text{ ms/div}; U_d: 0,02 \text{ V/div}$



Fig. 4.46
 $T: 0,5 \text{ ms/div}; U_d: 0,02 \text{ V/div}$



Fig. 4.47
 $T: 0,5 \text{ ms/div}; U_d: 0,02 \text{ V/div}$

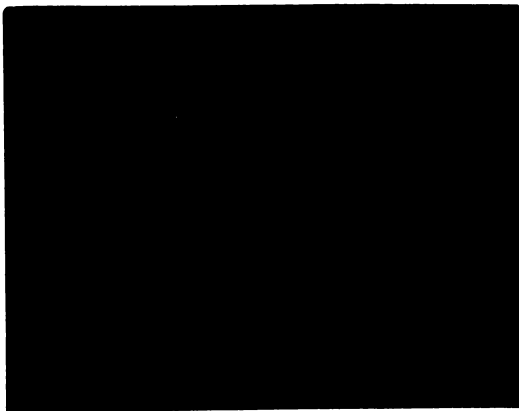


Fig. 4.48
 $T: 0,5 \text{ ms/div}$
 $U_d: 0,02 \text{ V/div}$

4.2.9. Incercări la tensiune de frecvență variabilă

Alimentând modulul analogic cu o sursă de tensiune alternativă sinusoidală de frecvență variabilă s-a constatat că la creșterea frecvenței de descărcări pe o semiperioadă rămâne practic constant (fig.4.49) - $f=50$ Hz, fig.4.50 - $f=95$ Hz, fig.4.51 - $f=120$ Hz, fig. 4.52, $f=200$ Hz), prin urmare frecvența de repetiție crește liniar cu



Fig. 4.49.

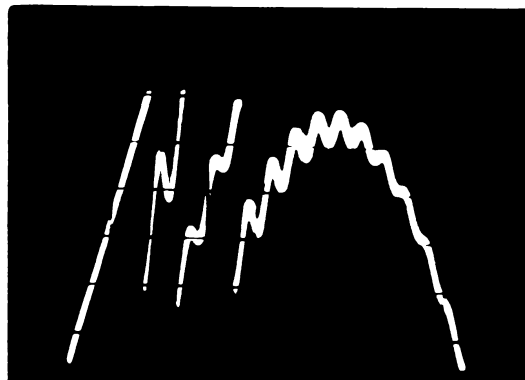


Fig.4.50.

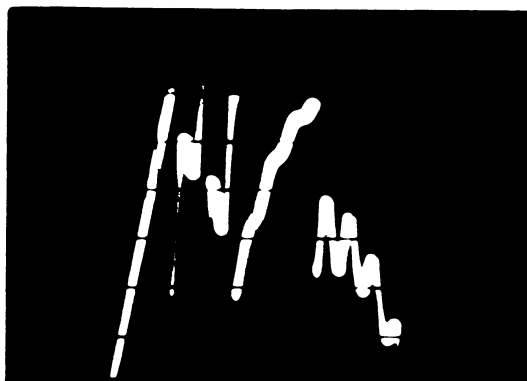


Fig.4.51.



Fig.4.52

frecvenței tensiunii de alimentare. Amplitudinea componentei sinusoidale prezentate rămâne aceeași la creșterea frecvenței tensiunii de alimentare. Este posibil, prin urmare, ca prin efectuarea unor încercări cu frecvență mărită să se accelereze procesul de deteriorare a izolajului sub acțiunea descărcărilor parțiale.

4.3. Incercări pe modele analogice de înaltă tensiune

Pe baza modelului matematic considerat a fost realizat un model analogic de înaltă tensiune al descărcării parțiale având schema de principiu din figura 4.53. În această schemă TI reprezintă

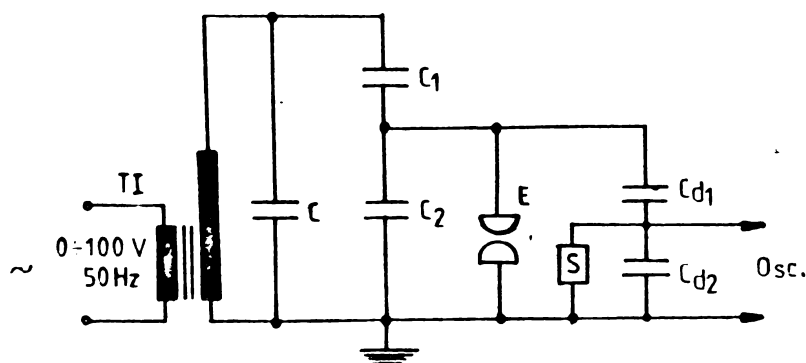


Fig.4.53.

în vederea oscilografierii. Oscilogramele obținute, având forma din figura 4.54 confirmă ipotezele lui Gemant și Philipoff privind

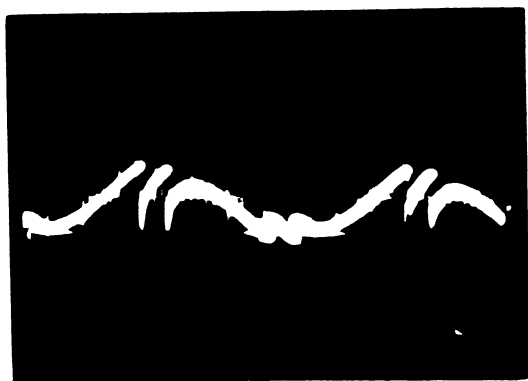


Fig.4.54.

desfășurarea procesului de descărcare parțială în curent alternativ și de asemenea confirmă justetea rezultatelor obținute pe modelul matematic și cel analogic electronic.

Montajul din figura 4.53 a fost realizat și încercat de asemenea într-o stație electrică de 35 kV, oscilogramele obținute fiind aceleași cu cele din figura 4.54.

4.4. Unele precizări sintetice

Pe baza rezultatelor analitice și experimentale obținute se poate aprecia că fenomenul de descărcare parțială din incluziunile unui dielectric cuprinde două procese de bază: descărcarea electrică prin care sînt transferate sarcini electrice între pereții incluziunii, urmată de procesul de reîncărcare a incluziunii. Ambele procese sînt însoțite de apariția, în anumite condiții, a unei componente aperiodice și a unei componente tranzitorii oscilatorii amortizată

Procesul de descărcare este extrem de rapid, tensiunea la bornele incluziunii scăzând cu constanta de timp $T_a \leq 10^{-12}$ s până la o valoare corespunzătoare tensiunii de stingere a arcului din clăziune. Datas fiind dimensiunile reduse ale incluziunilor din materialele izolante și valorile caracteristice ale tensiunilor și curenților în canalul de descărcare, se poate considera tensiunea de stingere a arcului de cel mult 100 V. În timpul descărcării tensiunea pe izolația strătoasă din tubul de câmp al incluziunii crește cu valoarea: $\Delta U = U_s C_1 / (C + C_1)$ iar tensiunea la borne scade cu aceeași valoare ΔU . În unda curenților absorbit de probă apare de asemenea o variație bruscă (cu constanta de timp T_a) de valoare $\Delta I = (\omega_1 T_a) \omega_1 C_1 U_s [C_1 / (C + C_1)]$. Singurul parametru al circuitului ce influențează valoarea șocului de tensiune ΔU este capacitatea C.

Mărimile electrice caracteristice procesului de încărcare, avînd în curent alternativ expresiile (4.76)-(4.79), au o altă de formă celor obținute experimental cu ajutorul modelului analog. Acest fapt este confirmat și prin compararea tensiunii pe cavități din oscilograma din figura 4.7 cu alura rezultată analitic pe baza expresiei (4.76) și prezentată în figura 4.55. Termenii ce

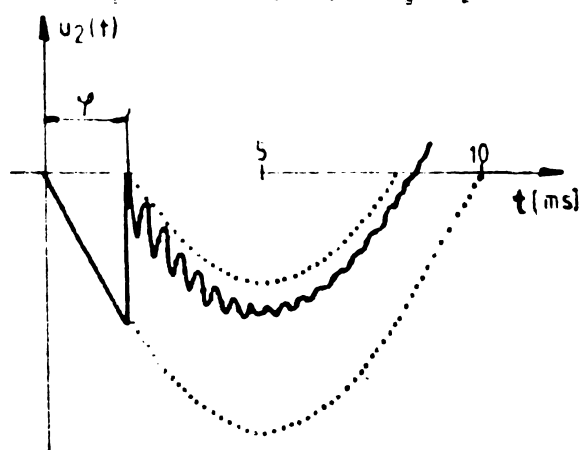


Fig.4.55.

apar în expresiile (4.76)-(4.79) sînt influențați îndeosebi de valorile capacităților C, C₁, C₂ din schema electrică echivalentă.

Tensiunea de la bornele incluziunii în timpul încărcării conține un termen practic constant, datorită valorii mari a constantei de relaxație a materialului izolant $\rho \cdot \epsilon$ ce determină valoarea lui T₃, un termen

oscilatoriu amortizat și termenul corespunzător componentei forței. Amplitudinea termenului oscilatoriu amortizat pentru t=0 influențează durata procesului de încărcare numai atunci cînd $(1 + C_2/C_1)(1 + C/C_1) \leq 10$, deci, la valori C₁ și C₂ comparabile, doar atunci cînd C/C₁ ≤ 4. De remarcat că în cazul cînd valorile capacităților corespund zonei hașurate din graficul 4.56 pot apărea descărcări parțiale cauzate chiar de acest termen oscilatoriu

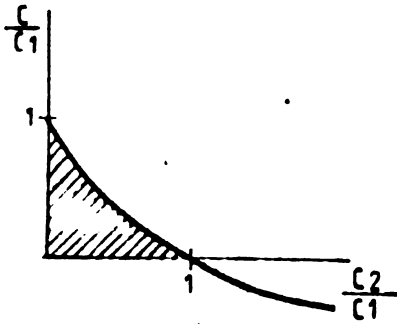


Fig.4.56.
fiind raportul C/C_1 .

amortizat, după cum s-a confirmat prin experiențele pe modelul analogic (oscilogrammele 4.23 și 4.24). Observațiile anterioare sînt valabile în condițiile unei constante de timp $T=L/R$ mari. Amplitudinea termenului oscilatoriu amortizat pentru $t=0$ are o variație în funcție de raportul C_2/C_1 ca aceea din figura 4.57, parametru

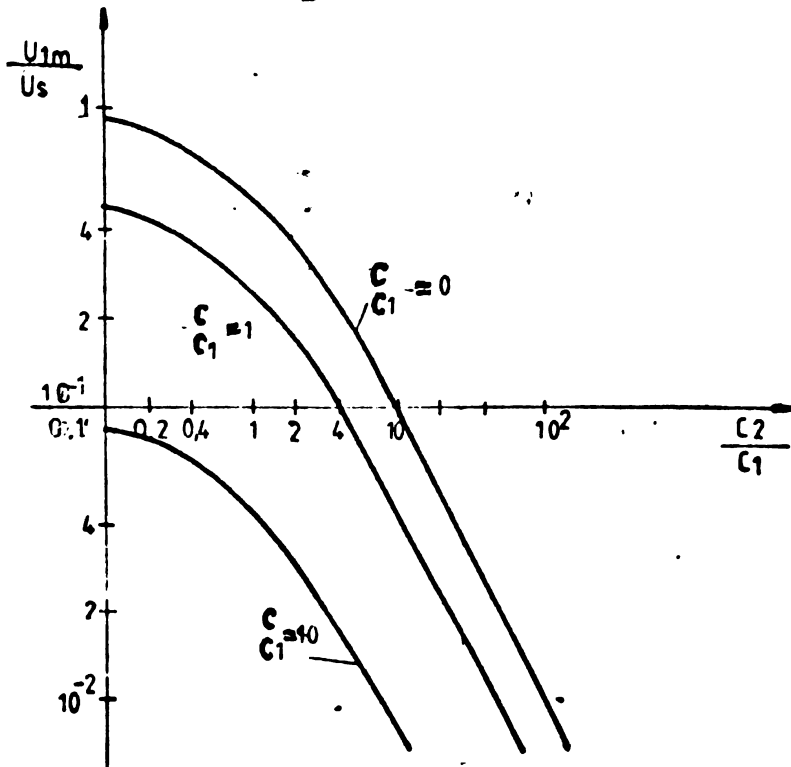


Fig.4.57.

În expresia tensiunii la bornele probei termenul oscilatoriu amortizat are o amplitudine la $t=0$ egală cu șocul de tensiune ΔU produs în timpul descărcării, astfel că măsurarea acestei componente poate furniza date importante privind parametrii izolației din tubul de câmp al inclu-

ziunii și valoarea tensiunii de străpungere din incluziune.

Rezultatele experimentale obținute cu ajutorul modelului analogic confirmă expresiile deduse analitic și completează informațiile cu date privind influența rezistenței receptorului asupra mărimilor caracteristice fenomenului de descărcare parțială.

CAPITOLUL V

C O N C L U Z I I

5.1. În legătură cu diferitele mărimi caracteristice ale descărcărilor parțiale se relevă faptul că acestea descriu anumite aspecte ale fenomenului, iar alegerea lor pentru interpretarea stării izolației depinde de tipul izolației și de problema urmărită. Astfel, sarcina aparentă a descărcării parțiale nu este egală cu sarcina reală transferată în incluziune în timpul descărcării. La creșterea dimensiunilor incluziunii sarcina aparentă crește, iar sarcina transferată în incluziune scade, la aceeași zonă descărcată de pe pereții incluziunii.

5.2. Condițiile de apariție și de desfășurare a fenomenului de descărcare parțială trebuie analizate în strânsă legătură cu spectrul câmpului electric și solicitările corespunzătoare în materialul izolant în prezența incluziunilor. În timpul descărcării parțiale configurația câmpului electric se modifică fiind importante de sesizat cel puțin trei situații: înainte de producerea descărcării parțiale, în timpul existenței canalului de descărcare și după stingerea descărcării parțiale.

5.3. Ținând seama de complexitatea problemei de determinarea câmpului electric în incluziunile izolației și în materialul izolant învecinat incluziunii, în lucrare s-a aplicat metoda elementelor finite care s-a dovedit mai eficientă și rațională datorită posibilității bune de aproximare a frontierelor și suprafețelor de separație din izolație precum și datorită îndeplinirii în mod natural a condițiilor de trecere la aceste suprafețe în cadrul procesului de minimizare a funcționalei asociate problemei date. În lucrare autorul stabilește sistemele de ecuații generale asociate procesului de minimizare a funcționalei în cazul utilizării elementelor finite de ordinul întâi, doi și trei pentru probleme plane în coordonate carteziane. Se prezintă o serie de cazuri particulare de divizare a domeniului și se

deduc formulele corespunzătoare fiecărui caz în parte. Se deduc ecuațiile generale corespunzătoare unor elemente finite triunghiulare de ordinul întâi în coordonate cilindrice, cât și pentru elemente tetraedrice în coordonate carteziane.

Se deduce o formă nouă a ecuației generale a sistemului de rezolvat în care apar ca necunoscute componentele intensității câmpului electric în interiorul elementelor finite de ordinul întâi. Această formă de scriere a sistemului de ecuații corelată cu legile generale ale electromagnetismului dă posibilitatea abordării într-un mod nou a problemei determinării câmpului electric prin metoda elementelor finite. Sînt stabilite modalitățile de aplicare a condițiilor de frontieră de tip Neumann.

5.4. Sînt rezolvate problemele condensatorului cilindric și sferic utilizînd elemente finite unidimensionale de ordinul întâi și doi în scopul stabilirii unei corelații între pasul de divizare al rețelei și precizia rezultatelor obținute pentru diferite criterii de limitare a procesului de iterație. În scopul generalizării rezultatelor obținute la aceste probleme rezolvabile analitic, s-a introdus un criteriu de estimare a preciziei soluțiilor bazat pe variația relativă a intensității câmpului electric în interiorul elementelor finite de ordinul întâi și s-au prezentat curbele de variație ale erorii potențialului și intensității câmpului electric în funcție de acest criteriu. Pe baza acestui criteriu pot fi estimate preciziile soluțiilor obținute la rezolvarea unor probleme practice complexe utilizînd elemente finite de ordinul întâi. Autorul prezintă de asemenea un algoritm ascendent de rezolvare a sistemului general de ecuații ce permite accelerarea convergenței procesului de iterație și reducerea volumului de calcul.

5.5. Sînt rezolvate unele probleme plan-paralele și plan-meridionale în legătură cu descărcările parțiale. Se prezintă curbele echipotențiale rezultate și se fac comparații între solicitările corespunzătoare celor două tipuri de simetrii. Se remarcă creșterea intensității câmpului electric în apropierea bazelor la incluziunile cilindrice alungite avînd axa paralelă cu direcția câmpului electric și apariția unor componente tangențiale ale intensității câmpului electric pe suprafața laterală a incluziunii. În baza criteriului propus se estimează o precizie satisfăcătoare a soluțiilor, cu erori sub 10% ale valorilor potențialului și intensității câmpului electric.

5.6. Se propune un model matematic mai complet de studiere a fenomenului de descărcare parțială, care spre deosebire de cele cunoscute în literatură analizează distinct procesele de descărcare și încărcare și de asemenea ia în considerare parametri sursei de alimentare și admite valori diferite ale rezistențelor de pierdere ale izolației și incluziunii. Pentru acest caz mai general se stabilesc expresiile tensiunilor și curentului din circuit în timpul descărcării și încărcării incluziunii.

Referindu-ne la procesul de descărcare, se pot menține următoarele rezultate:

a) Constanta de timp T_a a procesului aperiodic de descărcare este determinată de capacitățile incluziunii și izolației sănătoase situate în tubul de câmp al incluziunii și de rezistența arcului electric din canalul descărcării. Se estimează un ordin de mărime al lui T_a mai mic de 10^{-12} s, confirmând valorile mai reduse ale duratei frontului impulsului măsurate experimental de cercetători în ultimii ani. Se confirmă astfel și afirmația conform căreia impulsul descărcării prezintă un front foarte abrupt.

b) În expresiile stabilite pentru procesul de descărcare termenul oscilatoriu amortizat de pulsație ω_1 și constantă de timp $2T$ se poate practic neglija datorită valorii foarte mici a lui T_a în comparație cu perioada $T_1 = 2\pi/\omega_1$ și constanta de timp T , iar amplitudinea acestui termen este înmulțită cu factorul $\omega_1 T_a$ de valoare extrem de redusă ($< 10^{-8}$).

c) Se confirmă pe cazul general când se ține seama de parametri R și L ai sursei de alimentare că descărcarea este însoțită de o scădere bruscă a valorii instantanee a tensiunii la bornele obiectului încercat, ce corespunde injectării de către sursă a unei sarcini electrice egală cu sarcina aparentă a descărcării parțiale. Dacă valoarea capacității C a izolației sănătoase este redusă, sarcina transferată în incluziune este preluată parțial de la capacitatea C_1 a izolației sănătoase din tubul de câmp al incluziunii.

d) În curent continuu tensiunea la bornele incluziunii scade în timpul descărcării cu constanta de timp T_a , tensiunea pe izolația sănătoasă din tubul de câmp al incluziunii crește cu $U_S C / (C + C_1)$ iar tensiunea la borne scade cu valoarea $U_S C_1 / (C + C_1)$.

Atunci cînd C este foarte mare creșterea tensiunii pe izolație sîntoasă din tubul de cîmp al incluziunii este egală cu tensiunea de străpungere U_B , iar scăderea tensiunii la borne devine foarte mică.

e) În curent alternativ procesul de descărcare se petrece ca și în curent continuu datorită duratei extrem de mici a descărcării în comparație cu perioada tensiunii de frecvență industrială.

În legătură cu procesul de încărcare al incluziunii, neabordat încă în literatură ca o fază distinctă a fenomenului de descărcare parțială, se menționează următoarele rezultate stabilite:

a) Fenomenul tranzitoriu este determinat de doi termeni: unul aperiodic cu constanta de timp T_3 avînd același ordin de mărime cu constantele de relaxație ale incluziunii și izolației și un altul oscilatoriu amortizat de pulsație ω_1 și constantă de timp $2T$. Pulsația ω_1 depinde de inductivitatea L în serie cu sursa și de capacitatea echivalentă a probei, iar constanta de timp T depinde de inductivitatea L în serie cu sursa și de rezistența R din circuit.

b) În curent continuu, încărcarea incluziunii are loc prin sarcinile electrice transportate de curentul de scurgere al izolației cu constanta de timp T_3 . Componenta oscilatorie amortizată influențează procesul de încărcare numai la izolații avînd constanta de relaxație de același ordin de mărime sau mai mică decît constanta de timp T a circuitului și dacă valoarea capacității C a probei are același ordin de mărime cu C_1 . Deoarece aceste condiții sînt rareori întîlnite în practică putem considera că încărcarea și prin urmare frecvența de repetiție a descărcărilor parțiale în curent continuu este determinată în principal de constanta de timp T_3 . Prin urmare frecvența de repetiție a descărcărilor parțiale în curent continuu este foarte mică.

c) În curent alternativ procesul de încărcare se petrece sub acțiunea tensiunii aplicate de frecvență industrială rezultînd sarcini de polarizație corespunzătoare pe suprafețele incluziunii. Termenul corespunzător încărcării prin curenții de scurgere ai izolației se poate neglija în afară de cazul în care constanta de relaxație a izolației are același ordin de mărime cu perioada

tensiunii de alimentare.

d) Componenta oscilatorie amortizată ce însoțește procesul de încărcare influențează durata încărcării atunci când capacitatea C_1 este mai mare față de C_2 și C . Amplitudinea acestui termen pentru $t=0$ este $U_g \cdot C_1 / (C + C_1)$, iar pulsația ω_1 este aceeași ca la procesul de descărcare. La constante de timp T mici acest termen se amortizează rapid, astfel că frecvența de repetiție va fi determinată de frecvența și valoarea tensiunii de alimentare.

Se poate constata că modelul matematic propus a permis stabilirea unor concluzii noi și mai cuprinzătoare față de cele din literatură privind fenomenul de descărcare parțială.

5.7. În lucrare se prezintă un model analogic electronic al descărcării parțiale în curent alternativ, care ține seama de parametrii sursei de alimentare, ai izolației și probei încercate, precum și de parametrii receptorului. După cunoștința autorului astfel de modele analogice nu au mai fost elaborate. Se poate stabili experimental, cu ajutorul modelului analogic propus, influența tuturor factorilor enumerați asupra fenomenului de descărcare parțială și anume:

a) Se relevă influența rezistenței receptorului în sensul atenuării mai rapide a componentei oscilatorii amortizate la scăderea rezistenței, fără a fi influențată amplitudinea acestei oscilații la $t=0$.

b) Se confirmă experimental faptul stabilit analitic că rezistența R în serie cu proba influențează forma impulsurilor detectate, ceea ce conduce la concluzia că circuitul de detecție în bandă largă cu conectarea rezistenței de detecție în serie cu proba perturbă desfășurarea fenomenului de descărcare parțială, pe când la detecție în bandă largă cu condensator de cuplaj, rezistența de detecție nu influențează fenomenul de descărcare parțială.

c) Se constată că prin conectarea circuitului de detecție în bandă îngustă în serie cu proba, în unda tensiunii de alimentare apare o componentă oscilatorie amortizată suplimentară a cărei frecvență este determinată de parametrii circuitului oscilant de detecție. Această componentă se suprapune peste oscilația amortizată din unda tensiunii de alimentare ce însoțește fenomenul

de descărcare parțială, dar nu apare în unda tensiunii pe incluziune. Semnalul detectat la bornele circuitului oscilant este maxim atunci când frecvența proprie de oscilație a circuitului este egală cu frecvența componentei oscilatorii amortizate de pulsație ω_1 .

d) Se confirmă faptul stabilit analitic că valoarea capacității C a probei precum și capacitatea parazită a sursei atenuază atât șocul de tensiune din unda tensiunii de alimentare în momentul descărcării cât și amplitudinea componentei oscilatorii amortizate. Factorul de atenuare este $C_1/(C+C_1)$.

e) Se constată că la modificarea frecvenței tensiunii de alimentare succesiunea descărcărilor parțiale rămâne aceeași în cadrul semiperioadei tensiunii de alimentare.

f) Se remarcă faptul că circuitele de detecție în bandă largă a descărcărilor parțiale utilizează o rezistență în serie cu proba, influențând astfel desfășurarea fenomenului de descărcare parțială.

Rezultatele obținute pe modelul analogic pe de o parte, confirmă corectitudinea expresiilor stabilite pe baza modelului matematic propus, iar pe de altă parte permit extinderea studiului descărcărilor parțiale.

5.8. Modelul analogic de înaltă tensiune propus și experimentat în laborator și într-o stație electrică a dat posibilitate să se oscilografieze pentru prima dată tensiunea la bornele unei incluziuni ipotetice în timpul descărcării parțiale. Rezultatele experimentale obținute confirmă ipotezele admise privind desfășurarea descărcărilor parțiale în incluziunile echipamentelor electrice.

5.9. Rezultatele obținute pe baza modelelor matematice și analogice considerate în ansamblu reprezintă contribuții originale la clarificarea și aprofundarea cunoștințelor privind desfășurarea proceselor ce au loc în timpul descărcării parțiale și la stabilirea corelațiilor între parametrii circuitului electric și mărimile electrice măsurate. Pe baza rezultatelor obținute se pot estima valorile parametrilor izolației din tubul de câmp al incluziunii și valoarea tensiunii de străpungere a incluziunii. Datele noi obținute și precizările făcute sînt de o deosebită

importanță în aprecierea fenomenului de descărcare parțială din izolație și contribuie la luarea unor decizii mai corecte privind posibilitatea de funcționare în continuare a echipamentelor în condițiile de siguranță mărită și înaltă economicitate cerute de către conducerea superioară de partid și de stat.

Se poate aprecia că rezultatele obținute pe lângă faptul că permit o mai corectă și aprofundată cunoaștere a fenomenului de descărcare parțială, ele constituie totodată o bază pentru cercetări teoretice și experimentale în acest domeniu.

B I B L I O G R A F I E

- 1.-Abdullah,M.,Kuffel,E. - Development of spark discharge in nonuniform field gaps under impulse voltage.Proc. IEE,vol.112, Nr.5, mai 1965, p.1018-1024.
- 2.-Adolphson ,E.J.,Vogel,F.J. -Corona Measurements on Oil-Insulated Transformers.IEEE Trans.on PAS,octombrie 1957,p. 797-802.
- 3.-Andersen O.,W. -Laplacian electrostatic field calculations by finite elements with automatic grid generation.IEEE Trans.on PAS, nr.5,sept.-oct.,1973,p.1485-1492.
- 4.-Andersen,O.W. - Finite element solution of complex potential electric fields. IEEE Trans on PAS, vol.96, nr.4, iulie/august 1977, p.1156-1161.
- 5.-Andronescu,Pl. - Bazele electrotehnicii ,vol.I,EDP,Bucuresti.
- 6.-Andronescu,Pl.- Bazele electrotehnicii, vol.II,EDP,Bucuresti.
- 7.-Angerer,W. -Effect of organic additives on electrical break - down in transformer oil and liquid paraffin. Proc.IEE vol.112, nr.5 mai, p.1025-1034.
- 8.-Angot,A. - Complements de matematici, E.T.,Bucuresti, 1965.
- 9.-Antoniou,I.S. - Bazele electrotehnicii,vol.I,E.D.P.Bucuresti, 1974.
- 10-Antoniou,I.S. - Bazele electrotehnicii, vol.II, E.D.P., Bucu- resti, 1974.
- 11-Artsimovici,L.- Mouvement des particules chargées dans des champs électriques et magnétiques, Éditions de Mos- cou, 1975.
- 12-Austin,J.,Marschal,P. - Partial discharge location in trans- formers and reactors by waveshape recognition.IEEE Trans. on PAS, vol.97, nr.6, nov./dec.,1978, p. 1041-1044.
- 13-Ayramescu,A.,Popescu,Ch.- Problemele descărcărilor parțiale în transformatoare ,Electrotehnica, vol.14, nr.5, mai,1966, p.149-155.

- 14-Avramescu, A., ș.a. - Metode și aparatură de măsurare a descărcărilor parțiale în transformatoare, *Electrotehnica*, vol. 14, nr.11, noiembrie 1966, p.381-393.
- 15-Avramescu, A. - Relații de similitudine ale descărcărilor parțiale în alveole din izolați solizi. *Electrotehnica*, vol.15, nr.4, aprilie 1967, p.117-121.
- 16-Avramescu, A. - Legi de similitudine ale descărcărilor între pereți izolați în ser. *Electrotehnica*, vol.16, nr.5, mai 1968, p.161-165.
- 17-Bahder, G., ș.a. - In service evaluation of polyethylene and crosslinked polyethylene insulated power cables. *IEEE Trans on PAS* vol.96, nr.6 Nov/sec., 1977, p.1754-1766.
- 18-Balabanian, N., Bickart, T.A. - Teoria modernă a circuitelor. P.T., București, 1974.
- 19-Bartnikas, R., d'Ombresin, G.L. - Un studiu asupra vitezei efectului corona și a pierderii de energie în scatoare. *IEEE Trans. on PAS*, vol.84, nr.9, sept.1965, p.770-779.
- 20-Basonov, L.A. - Teoreticheskie osnovi elektrotehniki. Moskva, „Vysșiaia șkola”, 1978.
- 21-Binns, K.J., Lowrenson, P.J. - Analysis and computation of electric and magnetic field problems, Pergamon Press, Oxford, 1963.
- 22-Bishop Electric - Prospect - Manșoane și cutii terminale la cabluri extrudate de tensiune medie și înaltă.
- 23-Blodget, R.B., Eigen, D. - Cable Corona Signals - Their Origin and Detection, *IEE Trans. on PAS*, vol.87, nr.6 iunie 1968, p.1492-1507.
- 24-Bruce, F.M. - High voltage spark discharges, *Endeavour*, aprilie, 1953, p.61-71.
- 25-Buchholtz, H. - Răscet elektriceskih i magnetih polei, (trad. l. germană), Moskva, 1961.
- 26-Bui Ai, ș.a. - Étude de l'action des décharges partielles sur les isolants. *R.G.E.*, vol.78, nr.1 ian.1969, p.53-66.
- 27-Bui Ai, ș.a. - Recherche de critères de classement des matériaux isolants d'après leur résistance à l'action des décharges partielles *R.G.E.*, vol.77, nr.5, mai 1968, p.483-491.
- 28-Buju M., - *Electrotehnica Litrografia Institutului Pólitehnic, Cluj, 1975*
- 29-Buju, M., Petrean, L. - Curs de măsuri și masini electrice, Lit. IIS Baia Mare, 1977.

- 30-Burnier, P. - Étude de l'ionisation des couches gazeuses ou liquides insérées dans les isolation solides des grosses machines ou des transformateurs, R.G.E., vol.72, décembre, 1956, p.767-780.
- 31-Carlier, J., Grangeot, F. - Mesures de décharges partielles dans les machines tournantes. Leur intérêt pour le constructeur. R.G.E., vol.77, nr.5, mai 1968, p.511-519.
- 32-Carpenter, C.J. - Finite - element network models and their application to eddy-current problems. Proc. IEE, vol.122, nr.4, aprilie 1975, p.455-462.
- 33-Cazacu, C., Jucan, T. - Programarea în limbajul FORTRAN, Ed. Junimea Iasi, 1978.
- 34-Collatz, L. - Cîslenie metodî rezona diferencialnîh uravnenii (trad. l. germană), Izd. I.L. Moskva, 1953.
- 35-Corduneanu, A. - Ecuații diferențiale cu aplicații în electrotehnică, Ed. Facla, Timișoara, 1981.
- 36-Cristescu, D. - Fenomenul de descărcare parțială în încercările de înaltă tensiune. St. cerc. energ. și electrotehn., vol.24, nr.2, 1974, p.375.
- 37-Cuteanu, E., Marinov, R. - Metoda elementelor finite în proiectarea structurilor. Ed. Facla, Timișoara, 1980.
- 38-Czolczynski, M. - Budowa prostownika impulsow oraz sprawdzanie poprawności działania układu przeznaczanego do badania wpływu jonizacji na dielektryki. Zestyty Naukowo Polit. Lodzkiej, nr.94, Elektryka 223, 1967.
- 39-Daffe, J., Olsen, R.G. - An integral equation technique for solving rotationally symmetric electrostatic problems in conducting and dielectric material. IEEE Trans. on PAS, vol.98, nr.5, sept./oct.1979, p.1609-1616.
- 40-Dancea, I. - Programarea calculatoarelor numerice, Ed. Dacia, Cluj, 1973.
- 41-Danzner, J. - Kĕkterĕ sonvislasti nezi tvarem impulsu a jeho Kmitaĕtsveko spektra. Elektrod.obzor R.S.C.S. 60(1471), nr.7, p.353-358.
- 42-Davies, A.J., Evans, C.J. - Field distortion in gaseous discharges between parallel-plate electrodes. Proc. IEE vol.114, nr 10 oct.1967, p.1547-1550.
- 43-Decreton, A. - Calculul cîmpurilor electromagnetice prin metoda elementelor finite. Bull. ASE vol.64, nr.19, 1973, p. 1196 -1203.

- 44-Demerdash, N.A., Kehl, T.W. - An evaluation of the methods of finite elements and finite differences in the solution of non-linear electromagnetic fields in electrical machines
IEEE Trans.on PAS, vol.98, nr.1, ian./febr.1979, p.74-87.
- 45-Damidovici, B., Maron, I. - Éléments de calcul numérique. Ed. MIR, Moscou, 1973.
- 46-Denholm, A.S. - The Pulse and Radio Influence Voltage of Power-Frequency Corona, IEEE Trans.on PAS, vol.79, oct.1960, p.698-707.
- 47-Divan, F. - Décharges partielles et durée de vie des isolations. Quelques aspects des problèmes posés aux utilisateurs par l'évolution des matériels électriques. R.G.E. vol. 77, nr.5, mai 1968, p.507-510.
- 48-Dordea, T. - Magini electrice, E.D.P., Bucuresti, 1970.
- 49-Dorn, W.S., Mc Cracken, D.D. - Metode numerice cu programe in FORTRAN. IV. E.T., Bucuresti, 1976.
- 50-Drăgan, G. - Asupra efectului corona de curent continuu în cazul a două conductoare paralele. Rev.Rorom.des.Sci.Tehn.- Electrot.et Energ., vol.15, nr.2, 1960, p.203-214.
- 51-Dupuy, J. - Éffet de corone et champs ionisés, R.G.E., vol.67, februarie, 1958, p.85-104.
- 52-Eager, G.S., Bader, G. - Discharge Detection in Extruded Polyethylene Insulated Power Cables. IEEE Trans.on PAS, vol. 86, nr.1, ianuarie 1967, p.10-34.
- 53-Eager, G.S. ș.a. - Corona detection experience in comercial production of power cables with extruded insulation. IEEE Trans.on PAS, vol.88, nr.4, aprilie 1969, p.342-364.
- 54-Fabre, J., Gelez, J.P. - Les mesures d'ionisation gazeuse dans les isolants. RGE vol.67, nr.21, septembrie 1958, p. 130 L-140 L.
- 55-Fallou, B. ș.a. - Contribution a l'étude de la rupture au service d'isolations solides. Influence des décharges superficielles et de la présence de charges internes. RGE vol.80 nr.1, ian.1971, p.54.
- 56-Fallou, B., ș.a. - Utilization des mesures de décharges partielles pour le contrôle des alternateurs en service. RGE, vol. 77, nr.5 mai 1968, p.520-526.
- 57-Fanelli, M. - Metoda elementelor finite: posibilitatea de aplicare la probleme de interes ale electrotehnicii (l.italiană). L'Elettrotecnica vol.LXII, nr.6, iunie 1975, p.513-520.

- 58-La Forest, J.J. - Efectul murelor de paraziți radio ai stațiilor asupra nivelului paraziților liniilor de transmisie. IEEE Trans.on PAS, vol.84, nr.9, septembrie 1965, p. 833-838.
- 59-Friedrich, M. - Die Störepannungsmessung un Rahmen der Korona - Isolationsmesstechnik. S.1.Z.m nr.27, iulie 1965,
- 60-Fryxell, J. ș.a. - Realisation d'essais de décharges partielles sur les transformateurs de puissance. CIGRE, Rap.12-04, august 1968.
- 61-Gahov, F.D. - Kraevie zadaci, Gosudarstvennoe Izd. Fiz.Mat.Lit., Moskva, 1958.
- 62-Galand, J. ș.a. - La détection des décharges partielles. Mesures des diverses grandeurs. Calibrage des circuits d'essais. R.G.E., vol.81, nr.12, decembrie 1972, p.844.
- 63-Gary, C., Moreau, M. - Contribution à l'étude des perturbations radioélectriques engendrées par les lignes à moyenne tension. R.G.E., vol.72, nr.10, octombrie, 1963, p. 503-518.
- 64-Gheorghiu, Gh.Th. - Algebră lineară, geometrie analitică și diferențială și programare. F.D.², București, 1977.
- 65-Gheorghiu, I.S., Fransua, Al.S. - Tratat de mașini electrice, vol.I, Ed. Acad. R.S.R., 1968.
- 66-Gheorghiu, I.S., Fransua, Al.S. - Tratat de mașini electrice, vol.II, Ed. Acad., R.S.R., 1970.
- 67-Gheorghiu, I.S., Fransua, Al.S. - Tratat de mașini electrice, vol. III, Ed. Acad. R.S.R., 1971.
- 68-Gheorghiu, I.S., Fransua, Al.S. - Tratat de mașini electrice, vol. IV, Ed. Acad. R.S.R., 1972.
- 69-Giao, T.N., Jordan, J.B. - Modes of Corona Discharges in Air, IEE Trans.on PAS, vol.87, nr.5, mai 1968, p.1207-1215.
- 70-Godunov, S.K., Rebenki, V.S. - Scheme de calcul cu diferențe finite, E.T., București, 1977.
- 71-Golinecki, J., Labas-Kowrat, K. - Badanie wyladowan niezapelnich. Pomiary intensywnosci. Przegląd Elektr. vol. XLII, nr.6, 1971, p.259.
- 72-Gradstein, L.S., Rîjik, I.M. - Tabliți integralov, summ, riadov, i proizvedenii. Izd. Nauka, Moskva, 1971.
- 73-Gurin, V.V. ș.a. - Ciasticinie razriadi v izolaii visokovoltnih transformatorov. Elektricesstvo, nr.3, 1971, p.20.

- 74-Hemouda, E.D. - Space - charge fields of positive point-plane discharges in air and nitrogen. Proc.IEE, vol.117, nr.3, martie 1970, p.653-659.
- 75-Harrold, R.T. - Voltage vector analysis for corona location in transformers. IEEE Trans.on PAS, vol.89, nr.10, noiembrie 1970, p.2339-2348.
- 76-Harrold, R.T., Sletten, A.M. - Corona location in transformers by radio frequency spectrum analysis. Part.I, IEEE Trans.on PAS, vol.89, nr.7, sept./oct., 1970, p.1584-1590.
- 77-Harrold, R.T. - Corona location in transformers by radio frequency spectrum analysis. Part.II, IEEE Trans.on PAS, vol.89, nr.7, sept./oct., 1970, p.1591-1602.
- 78-Herceg, Z., Huey, R.S. - Model for corona modes in point-to-plane device with coated electrodes. Proc.IEE, vol.114, nr.3, martie 1973, p.394-399.
- 79-Herou, R. s.a. - Contribution à l'étude des processus de dégradation des matériaux isolants en feuilles soumis en cellule conventionnelle à l'action de l'ionisation gazeuse. Bull.de la Soc.Fanç. des Électr., vol.III, nr.26, februarie 1962, p.102-118.
- 80-Haylen, A.F.D. - Correspondence: Partial-discharge detection between parallel - plate gaps. Proc. IEE, vol.117, nr.7, iulie 1970, p.1466.
- 81-Hickling, G.H., Ridley, F.G. - Discussion: Effects of internal discharges on prospective life and overvoltage-withstand behaviour of e.h.v. oil - impregnated paper bushings. Proc. IEE, vol.117, nr.7, iulie 1970, p.1363-1364.
- 82-Higaki, M. s.a. - Static electrification and partial discharges caused by oil flow in forced oil cooled core type transformers. IEEE Trans. on PAS, vol.98, nr.4, iulie/august, 1979, p.1259-1267.
- 83-Higaki, M. s.a. - A calculation of potential distribution caused by static electrification and it's application to partial discharge phenomena in oil. IEEE Trans.on PAS, vol.96, nr.4, iulie/august, 1979, p.1275-1282.
- 84-Horii, K. s.a. - Tuning type corona detector and its application in insulation tests of high voltage equipment. J.I.E.E., Japan, 96, 1966, p.87-94.

- 85-Hutzler, D. - Prédécharges entre point et plan sous tension variable. Bull.de la Direction des Études et des Recherches, serie B, 1970.
- 86-Hytén-Cavallius, N. - Mesure des décharges partielles dans les appareils à haute tension. Bull.de la Soc. Franç.des Electr., vol.V, nr.57, sept., 1964, p.588-594.
- 87-Iacob, C. ș.a. - Matematici clasice și moderne, vol.I, E.T., București, 1978.
- 88-Iacob, C. ș.a. - Matematici clasice și moderne, vol.II, E.T. Bucuresti, 1979.
- 89-Ionkina, P.A. - Teoreticeskie osnovi elektrotehniki, Moskva, Vîsgaia șkola, 1976.
- 90-Jzeki, N., Kurahashi, A., Matsuura, K. - Behaviour of oil corona and damage of transformer insulation. IEEE Trans.on PAS, vol.89, nr.12, 1970, p.2330-2338.
- 91-James, R.E. - Discharge detection in high -voltage power transformers. Proc. IEE, vol.117, nr.7, iulie 1970, p. 1352-1362.
- 92-Janischewskyi, W., Gela, G. - Finite element solution for electric fields of coronating DC transmission lines. IEEE Trans.on PAS, vol.98, nr.3, mai/iunie 1979.
- 93-Jeziarski, E. ș.a. - Transformatoare electrice, E.T. București, 1966.
- 94-Jolley, E.W. - Methods and techniques for obtaining significant discharge measurements of high - voltage bushings. Proc. IEE, vol.112, nr.5, mai 1965, p.1061-1070.
- 95-Kanoun, Y. ș.a. - Étude théorique et expérimentale du spcetre d'amplitude des décharges apparaissant dans des cavités sphériques au sein d'un isolant. R.G.E., vol.77, nr.5, mai 1968, p.492-499..
- 96-Kapřov, H.A. - Electronica, E.T. București, 1956.
- 97-Karmaker, H.C., Robertson, S.D.T. - An integral equation formulation for electromagnetic field analysis in electrical apparatus. IEEE Trans.on PAS, vol.98, nr.2, martie/ aprilie, 1979, p.465-472.
- 98-Karmaker, H.C., Robertson, S.D.T. - Integral equation formulation for the solution of magnetic field problems. IEEE Trans.on PAS, vol. 91 nr. ,1972, p.815-823.

- 99-Kawaguki, Y., Yanabu, S. - Partial Discharge measurement on High Voltage Power Transformers. IEEE Trans. on PAS, vol. 88, nr. 8, august, 1969, p. 1187-1191.
- 100-Keib, G., Windt, G. - Étude des dielectriques gazeux. R.G.F., vol. 78, nr. 1, janvier 1969, p. 67-74.
- 101-Kelen, A. - Investigations dans les pays nordiques des actions des décharges électriques sur les matériaux et structures isolantes. Bull. de la Soc. Franç. des Électr. 8, vol. 5, nr. 57, septembre 1964, p. 563-566.
- 102-Khaled, M. - Computation of corona onset using the ring-charge, method. Proc. IEE, vol. 122, nr. 1, janvier 1975, p. 107-110.
- 103-Kindij, F. - Hochspannungskorona. E.T.Z.-8, nr. 2, februarie 1969, p. 30.
- 104-Knoep, R. - Usages et tendances actuelles dans la mesure de l'intensité de décharges partielles. Bull. de la Soc. Franç. des Électr. 8, vol. V, nr. 7, septembre 1964, p. 595-6006.
- 95-Knoep, R. - La mesure globale du phénomène d'ionisation sur les machines tournantes. Bull. de la Soc. Franç. des Électr. 8, vol. III, nr. 26, februarie 1962, p. 88-101.
- 106-Knoep, R., Moreau, J. - La mesure de l'intensité de décharges partielles dans les transformateurs. R.G.F., vol. 71, decembre 1962, p. 297 L-316 L.
- 107-Kolecičkii, E.S. ș.a. - Metodî raspeta elektriceskih polei visokovoltnîh aparatov. Elektrotehnika, nr. 4, 1980, p. 13-15.
- 108-Kopchenova, N.V., Maron, I.A. - Computational Mathematics. MIR Publishers, Moskow, 1975.
- 109-Kopeček, J., Tvořák, M. - Transformatoare de măsură, E.T. București, 1970.
- 110-Korn, G., Korn, T. - Spravocinîk po matematike. Izd. Nauka, Moskva, 1973.
- 111-König, D. - Über die Vergleichbarkeit von Koronamessungen an Spitze-Platte Funkenstrecken in Luft bei Wechselspannung. Bull. de l'Asoc. Suisse des Électr. 57, nr. 25, decembre, 1966. p. 1155.
- 112-Kraenov, M. ș.a. - Equations integrales, Ed. MIR, Moscou, 1977.
- 113-Kreuger, F.H. - Detection and location of discharges. Delft, Holland: N.V. Nederlandse Kabelfabrieken, 1961.

- 114-Kreuger, F.H. - Les trois aspects principaux de la détection des décharges partielles. Bull. de la Soc. Franç. des Électr. 8, vol.V, nr.57, sept., 1964, p.583-587.
- 115-Kreuger, F.H. - The mean or maximum stress theory: possible solution of an old dilemma. IEEF Trans. on PAS, vol.88, nr. 4, aprilie 1969, p.330.
- 116-Kreuger, F.H. - Durée de vie et décharges internes dans les isolations plastiques. R.G.F. vol.77, nr.5, mai 1968, p. 540-542.
- 117-Lacoste, R. - Etude physique des phénomènes .Aperçu des recherches en cours et de l'orientation des programmes en France. Bull. de la Soc. Franç. des Electr. 8, vol.V, nr.57, sept. 1964, p.567-576.
- 118-Lacoste, R., Wind, G. - étude des phénomènes de décharges partielles. R.G.F., vol.77, nr.1, janvier 1968, p.43.
- 119-Lacoste, R. - Méthodes nouvelles d'étude du phénomène d'ionisation Bull. de la Soc. Franç. des Électr. 8, vol.III, nr.26, februarie 1962, p.118-132.
- 120-Lavrentiev, M., Chabat, M. - Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Editions MIR, Moscou, 1972.
- 121-Leroy, G. - Les problèmes d'ionisation dans les enroulements statoriques des grandes machines synchrones. Bull. de la Soc. Franç. des Électr. 8, vol.III, nr.26, febr. 1962, p. 69-87.
- 122-Leuzinger, S., Galand, J. - mesureur d'intensité de décharges partielles type 472. R.G.F. vol.75, nr.10, oct. 1966, p. 1161-1177.
- 123-Leuzinger, S., Moreau, J.L. - La mesure de l'intensité de décharges partielles dans les transformateurs. R.G.F., vol.72, nr.4, aprilie 1963, p.229-241.
- 124-Levitov, V.I. - Korona peremennogo toka, Energhia, Moskva, 1969.
- 125-Levitov, V.I. s.a. - O nekotoryh osobennostyah probn pri položitelnom postoiannom napriazhenii v sisteme elektrodov provod-ploskosti. Energetika i transport, nr.2, 1969, p.133.
- 126-Lirenman, S.L., Pucikovskij, V.V. - O prohojdenii impulsov razriadov po mnogoslainim obmotkam transformatorov. Elektricitstvo, p.24, 1968.

- 127-Maergoiz, I.D. - Calculul câmpurilor electrostatice prin metoda ecuațiilor integrale de ordinul al 2-lea (l.rusă). Elektricesvo, nr.12, 1975, p.11-15.
- 128-Marinescu, A., Popescu, S. - Ciclul de istereză al nivelului de descărcări parțiale - indiciu asupra stării izolației transformatoarelor. Electrotehnica, 26, nr.2, febr.1968, p.41.
- 129-Mason, J.M. - Discharge detection and measurement. Proc. IEE, vol. 112, nr.7, iulie 1965, p.1407-1423.
- 130-Mason, J.M. - L'avarie des isolants par les décharges partielles. Bull. de la Soc. Franç. des Électr., vol.V, nr.57, sept. 1954, p.557-562.
- 131-Mateescu, Ad. - Analiza și sinteza circuitelor electrice, E.D.P., București, 1975.
- 132-Mateescu, Ad. și Stanomir, D. - Probleme de analiză și sinteza circuitelor, F.T., București, 1976.
- 133-Mathé, B. ș.a. - Incercarea aparatelor electrice, E.T. București, 1976.
- 134-McKean, A.L. ș.a. - Breakdown mechanism studies in XLPE cable - Part. II, IEEE Trans. on PAS, vol.97, nr.4, iulie/ august, 1978; p.1167-1176.
- 135-Meador, J.R. ș.a. - Transformer corona testing. IEEE Trans. on PAS, vol.85, nr.8, august 1966, p.893-900.
- 136-Meek, J.W., Craggs, J. - Elektriceskii proboi v gazah. Izd. inostr. lit. Moskva, 1960 (trad. l. engl.).
- 137-Melville, D.R.G., Salvage, B. - Detection and measurement of discharges in gaseous cavities in solid dielectrics under direct-voltage condition. Proc. IEE, vol.112, nr.5, mai 1965, p.1071-1073.
- 138-Melville, D.R.G. ș.a. - Correspondence: Discharge detection and measurement under direct-voltage conditions: significance of discharge magnitude. Proc. IEE, vol.112, nr.9, sept. 1965, p.1815-1817.
- 139-Mihlin, S.G. - Cislennaja realizacija variacionnih metodov. Izd. Nauka, Moskva, 1966.
- 140-Miroliubov, N.P. ș.a. - Metode de calcul al câmpurilor electrostatice (l.rusă).
- 141-Mitra, G. ș.a. - Detection and measurement of discharges in gaseous cavities in solid dielectrics under impulse voltage conditions. Proc. IEE, vol.112, nr.5, mai 1965, p. 1056-1060.

- 142-Moldoveanu, C. - Contribuții teoretice și experimentale privind metodele de măsurare a descărcărilor parțiale la transformatoare. Teză de doctorat, Iași, 1980.
- 143-Moldoveanu, C., Bălan, G. - Defectoscopia izolației transformatorilor de înaltă tensiune prin măsurarea intensității descărcărilor parțiale. Generalizarea experiențelor de exploatare. ICEMENERG, București, 1977.
- 144-Mole, G. - Basic characteristics of corona detector calibrators. IEEE Trans. on PAS, vol. 89, nr. 2, februarie, 1970, p. 198-204.
- 145-Mole, G. - Measurement of the magnitude of interval corona in cable. IEEE Trans. on PAS, vol. 89, nr. 2, februarie 1970, p. 204-212.
- 146-Mole, G. - Étude d'essais de décharges en Grande-Bretagne. Bull. de la Soc. Franç. des Electr. B, vol. V, nr. 57, sept. 1964, p. 577-582.
- 147-Di Monaco, A. ș.a. - Studiul câmpurilor electrice și magnetice staționare cu metoda elementelor finite. Aplicație la transformatoare. L'Elettrotecnica, vol. LXII, nr. 7, iulie 1975, p. 585-598.
- 148-Moser, H. P. - Corona problems. IEEE Trans. on PAS, Discuții.
- 149-Murgulescu, E. ș.a. - Geometrie analitică și diferențială. E. D. P., București, 1965.
- 150-Napoli, A. Di., Mazzetti, C. - Electrostatic and electromagnetic field computation for the H.V. resistive divider design. IEEE Trans. on PAS, vol. 98, nr. 1 ian./febr. 1979, p. 197-206.
- 151-Nicolaide, A., Aplicarea metodei sarcinilor distribuite pentru rezolvarea problemelor de câmp electromagnetic în mediu neomogen cu ajutorul sistemului DATA 88. Nr. 2. 1976, p. 53-57.
- 152-Nicolaide, A. - A method of distributed charges for solving problems of electromagnetic field in non-homogeneous media. IEEE Trans. on PAS, vol. 98, nr. 2 martie/aprilie 1979, p. 493-497.
- 153-Niculescu, St. - Inițiere în FORTRAN, E. T., București, 1972.
- 154-Nojima, T. - Asupra mecanismului de străpungere a dielectricilor solizi neomogeni.
- 155-Okamoto, H. ș.a. - Deterioration of insulating materials by internal discharge. IEEE Trans. on PAS, vol. 96, nr. 1 ian./febr. 1977, p. 166-177.

- 156-Palkin, L.V. - Rolii sil trenia i inertii pri dvizhenii clastit v pole unipoliarnoi koroni. Energetika, nr.3, 1968, p.33-37.
- 157-Pederscu, A. - The effect of field nonuniformity and asymmetry on ionization current growth measurements in sulfur hexafluoride. IEEE Trans.on PAS, vol.'O, nr. , 1971, p.2175-2180.
- 158-Perelman, L.G., Ciernobrodov, M.I. - Isledovanie šmpulsov položitelnoi koroni i radiopomeh s provoda v realnih usloviah. Elektricesstva, nr.4, 1966, p.62-65.
- 159-Perelman, L.S. - Metodika rasčeta radiopomeh ot koroni na provodah linii elektrōperedaci. Elektricesstvo, nr.10, 1964, p.57-62.
- 160-Plins, J.F., Parker, A.B. - Mechanism of dielectric recovery in uniform and nonuniform field gaps after high-current high-pressure spark discharges. Proc.IEE vol. 117, nr.7, iulie 1970, p.1460-1465.
- 161-Petrean, L.E. - Aspecte teoretice și practice privind apariția și efectele descărcărilor parțiale în sistemele energetice. Referat parțial doctorat, 1978, Facultatea de electrotehnică, Timișoara.
- 162-Petrean, L.E. ș.a. - Metode moderne de studiu a cîmpului electromagnetic în medii neomogene din subteran. Bul.șt. al Sesiunii interjudețene de referate și comunicări tehnico-științifice, p.225, vol.I, Baia Mare, 1980.
- 163-Petrean, L.E. ș.a. - Tendințe noi în cercetarea comportării materialelor dielectrice în cîmpuri electrice intense. Bul.șt. al Sesiunii interjudețene de referate și comunicări tehnico-științifice, p.229, vol.I, Baia Mare.
- 164-Petrean, L.E. - Cîmpuri de medii cu simetrie plan meridiană. Buletinul științific al I.I.S. Baia Mare, seria C, 1981, p.
- 165-Petrean, L.E. ș.a. - Metoda elementelor finite utilizată la calculul cîmpului electric în cable. Buletinul științific al I.I.S. Baia Mare, seria C, vol.I, p.
- 166-Petrean, L.E. ș.a. - Cîmpul electrocinetic în subteran: Buletinul științific al I.I.S. Baia Mare, seria C, vol.I, 1981, p.

- 167-Petrean, L.E. - Contribuții privind studiul câmpului electric în incluziuni. Buletinul științific al I.I.S. Baia Mare, seria C, vol.I, 1981, p.
- 168-Petrean, L.E., Berinde, V. - Contribuții privind aprecierea influenței pasului de rețea asupra preciziei câmpurilor electrice. Sesiunea a VII-a de referate și comunicări tehnico-științifice, Baia Mare, 24 ianuarie 1981.
- 169-Petrean, L.E., Buju, M. - Analiza procesului tranzitoriu al descărcărilor parțiale pe un circuit electric echivalent. Sesiunea științifică, I.I.S. Baia Mare, 6-7 Nov. 1981.
- 170-Petrean, L.E., Berinde, V. - Influența condițiilor inițiale asupra reducerii volumului de calcul la determinarea câmpurilor electrice prin metoda elementelor finite. Sesiunea a VII-a de referate și comunicări tehnico științifice, 24 ianuarie 1981, Baia Mare.
- 171-Plinke, W. - Die Ausbildung von Teilentladungen an Spitzen in Luft. E.T.Z., A, vol.89, nr.12, 1967, p.282.
- 172-Popescu, Gh. - Materiale electrotehnice, E.T., București, 1976.
- 173-Popkov, V.I. - K teorii unipolarnoi koroni postoiannogo toka. Elektricesstvo, nr.1, 1949, p.33-48.
- 174-Freda, M. ș.a. - Bazele electrotehnicii, E.D.P., București, 1978.
- 175-Freda, M., Cristea, P. - Bazele electrotehnicii, E.D.P., București, 1978.
- 176-Razevig, D.V. - O nacialnîh napriajennostiah v odnorodnom i neadnorodnom elektriceskih poliah. Elektricesstvo, nr.6, 1963, p.85-86.
- 177-Răduleț, R. - Bazele electrotehnicii, Probleme I, E.D.P. București, 1970.
- 178-Răduleț, R. - Bazele electrotehnicii. Probleme II, E.D.P., București, 1975.
- 179-Rekomendații po izmereniam ciastinainîh razriadov v silovîh transformatorah. Elektrotehnika, nr.9, 1967, p.60.
- 180-Rerolle, I. - Contribution a l'étude du vieillissement des isolations. R.G.E., vol.77, nr.5, mai 1968, p.543-547.
- 181-Rogers, E.C. - The self -extinction of gaseous discharges in cavities in dielectrics. IEE Paper No.2730, M.Dec., 1958.
- 182-Sabata, I.De - Bazele electrotehnicii, vol.I, Lit. I.P. Traian Vuia, Timișoara,
- 183-Sabata, I.De - Bazele electrotehnicii, vol.II, Lit.I.P. Traian Vuia, Timișoara,

- 184-Salvadori, G.G., Baron, M.L. - Metode numerice în tehnică, E.P. București, 1972.
- 185-Salvage, B., Topupere, O. - Measurement of current pulses due to discharges in a gaseous cavity in solid electric. Electronics Letters 29, noiembrie 1964, vol.4, nr.24, p.529.
- 186-Salvage, B. - Discharge repetition in an air-filled cavity in polythene under high direct electric stresses. Electronics Letters, 29 noiembrie 1968, vol.4, nr.24.
- 187-Samarski, A., Andreev, V. - Méthodes aux différences pour équations elliptiques. Ed. MIR, Moscou, 1978.
- 188-Schmitt, J. - Étude systématique des caractéristiques d'une cigarette isolée. E.D.F., Bull.de la Direction des Études et Recherches, serie B, nr.1, 1971, p.89.
- 189-Schmitt, J. - Calcul théorique du seuil critique de l'effet couronne. Une démonstration de la loi empirique de Peck. E.D.F. Bull.de la Direction des Études et Recherches, serie B, nr.1, 1971, p.115.
- 190-Schvah, A. - Über die Anstiegszeiten von Koronaentladungs impulsen in einer Spitze-Platte Funkenstrecke. Disertatie Technische Hochschule Karlsruhe. 1963, p.59.
- 191-Shibuya, Y. s.a. - Void formation and electrical breakdown in epoxy resin. IEEE Trans.on PAS, vol.96, nr.1, jan./ febr.1977, p.198-207.
- 192-Silvester, P. - Elemente finite triunghiulare polinomiale de ordin ridicat pentru probleme potențiale. Int.J.Engng. Sci.vol.7. p.849-861.Pergamon Press, 1969.
- 193-Simion, E. - Electr. tehnică, E.D.P., București, 1978.
- 194-Simonyi, K. - Electrotehnica teoretică, EIT. București, 1974.
- 195-Singer, H. s.a. - A charge simulation method for the calculation of high voltage fields. IEEE Trans.on PAS, vol. nr. , 1974, p.1660-1668.
- 196-Sirotinski, L.I. - Tehnica tensiunilor înalte, E.F.S., 1964, vol.I.
- 197-Sirotinski, L.I. - Tehnica tensiunilor înalte, E.F.S., 1956, vol.II.
- 198-Slişalov, V.K. - K približennomu reşeniu o platnosti toka v koronnom razriade i ionizirovannom gaze. Energetika i transport, nr.3, 1968, p.136-139.
- 199-Smirnov, V.I. - Curs de matematici superioare, E.T., 1953, vol.I.
- 200-Smirnov, B.I. - Curs de matematici superioare, E.T., 1954, vol.2

- 201-Smirnov, V.I. - Curs de matematici superioare, F.T., 1955, vol.3.
- 202-Smirnov, V.I. - Curs de matematici superioare, F.T., , vol.4.
- 203-Smirnov, V.I. - Curs de matematici superioare, F.T., 1963, vol.5.
- 204-Smirnov, V.I. - Cours de mathematiques superieures, vol.IV, Ed. MIR, Moscou, 1975.
- 205-Strong, W.G. s.a. - Visual, ultraviolet and ultrasonic display of corona fields in air. Proc. IEE, vol.117, nr.7, iulie, 1970, p.1453-1459.
- 206-Szczepanski, Z. - W sprawie badan adporności dielektrików na degradacje wywolana wyladowaniami niezapelnymi. Arch. Elektrotechniki, XIX, nr.1, 1970.
- 207-Şabac, Gh.I. - Matematici speciale, vol.1, E.D.P. Bucureşti, 1964.
- 208-Şabac, Gh.I. - Matematici speciale, vol.2, E.D.P. Bucureşti, 1965.
- 209-Şora, C. - Bazele electrotehnicii, vol.1, Lit. I.P. Traian Vuia, Timişoara, 1973.
- 210-Şora, C. - Bazele electrotehnicii, vol.2, Lit. I.P. Traian Vuia, Timişoara, 1973.
- 211-Şora, C. - Bazele electrotehnicii, vol.3, partea I, Lit. I.P. Traian Vuia, Timişoara, 1976.
- 212-Şora, C. - Bazele electrotehnicii, vol.3, partea II, Lit. I.P. Traian Vuia, Timişoara, 1976.
- 213-Şora, C. s.a. - Bazele electrotehnicii. Probleme, partea I, vol. 1, I.P. Traian Vuia, Timişoara, 1971.
- 214-Şora, C. s.a. - Bazele electrotehnicii, Probleme, partea I, vol. 2, I.P. Traian Vuia, Timişoara, 1971.
- 215-Takahashi, E. s.a. - Partial discharge characteristics of oil - immersed insulation systems under DC, combined AC-DC and DC reversed polarity voltage. IEEE Trans. on PAS, vol.95, nr.1, ian./febr.1976, p.414-420.
- 216-Takashima, T., Ishibashi, R. - Expression of electric fields for systems of dielectric coated cylindrical conductors. IEEE Trans. on PAS, vol.97, nr.5, sept./oct.1978., p.1847-1852.
- 217-Tanaka, T., Ikeda, Y. - Internal discharges in polyethylene with an artificial cavity. IEEE Trans. on PAS, vol.90, nr.6, nov./dec, 1971, p.2692-2702.
- 218-Tănăsescu, F. - Studiul descărcărilor parţiale în alveolele unui dielectric. Electrotehnica 16, nr.4, aprilie, 1968, p.136.

- 219-Tănăsescu, F. - Oscillograme caracteristice pentru descărcările parțiale ce se dezvoltă în aer și ulei. *Electrotehnica*, 17, nr.1, ianuarie 1969, p.25.
- 220-Tănăsescu, F. - Aplicații ale sistemului de electrozi vîrf-placă și vîrf-semisferă în tehnica descărcărilor parțiale. *Electrotehnica*, 18, nr.3, 1970, p.99.
- 221-Tănăsescu, F. - Cîteva efecte ale descărcărilor parțiale în izolația transformatoarelor mari. *Electrotehnica* 22, nr. 7-8, 1974, p.196.
- 222-Tănăsescu, F., Răulescu, I. - Descărcări corona la sistemele de electrozi vîrf-placă, alimentate de curent continuu. *Electrotehnica*, 15, nr.9, 1967, p.322.
- 223-Tănăsescu, F. - Contribuții la studiul măsurării unor fenomene caracteristice în tehnica descărcărilor parțiale. Teză de doctorat, U.P. Iași, Fac. de electrotehnică, 1968.
- 224-Tănăsescu, F., Cramariuc, R. - *Electrostatica în tehnică*, E.T. București, 1972.
- 225-Tetelbaum, I. " - Modelarea electrică (l.rusă).
- 226-Thibault, M., Galand, J. - Moyens physique - chimiques d'étude des dégradation d'isolation en service. *R.G.E.* vol.80, nr.1, ianuarie 1971, p.46.
- 227-Thoeng, A.T. - Localisation des décharges partielles dans les transformateurs. Quelques aspects de la méthode basée sur la detection de l'onde progressive. *CIGRE*, Rapp 12.02, august, 1968.
- 228-Tîrlin, L.F. - Izbranié zadaci rasceta elektriceskih i magnitnih polei. Moskva, "Svetskoe radio", 1977.
- 229-Ușinin, G.T. - Rascet polia i karakteristik unipoliarnogo koronnogo razriada postoiannogo toka. *Energetika i transport*, nr.4, 1966, p.56-70.
- 230-Viale, F. - Applications des mesures de décharges partielles a l'étude de l'isolation du matériel électrique. *Bull. de la Soc. Franç. des Électriciens* 8, vol.V, nr.57, sept. 1969, p.601-608, Rezumatul discuțiilor, 609-620.
- 231-Viale, F. - Contribution à l'étude de correlations entre l'intensité des décharges partielles et leur nocivité vis-à-vis d'une isolation de transformateur dans l'huile. *R.G.E.*, vol.77, nr.5, mai 1968, p.527-539.
- 232-Volînskii, B.A., Buhman, V.F. - *Medeli dlia rezenia kraevih zadaci*, Izd. Fiz. Mat. Lit., Moskva, 1960.

- 233-Volkov, V.M., Pelkin, L.N. - O masete polie unipolishoi koroni s pomosciu elektrostatičeskogo polia. Energetika i transport, nr.4, 1966, p.71-74.
- 234-Vuillemoz, J., Jocteur, R. - Étude de l'ionisation dans les vagues d'un isolant en polyéthylène. R.G.E. 70, nr.12, decembrie 1961, pag.592-598.
- 235-Zaky, S.G., Robertson, S.D.T. - Integral equation formulation for the solution of magnetic field problems. IEEE Trans. on PAS, vol. 91, nr. , 1972, p.808-815.
- 236-Zenkevici, O. - Metod konečnih elementov v tehnike. Izd. MIR, Moskva, 1975 (trad. l. engleză).
- 237-Zoengl, W. - Zur Ermittlung der vollständigen Übertragungseigenschaften eines Störspannungsmesskreises. ETZ A, 901, nr.19, 12 sept. 1969, p.457.
- 238-Watters, R.T. ș.a. - Influența ionilor atmosferici asupra descărcării efectului corona de impuls (l. engleză), Proc. IEEE vol.118, nr.7, iulie, 1965, p.1471.
- 239-Wendling, J. - Décharges partielles dans les isolations. Procédés de mesure - Applications. E.D.F. - Bull. de la Direction des Études et Recherches, serie B, 1971, nr.1, p.43.
- 240-Wetzel, R.F., Praeschauser, T.H. - Mesure des décharges partielles dans les transformateurs et leur éléments CIGRE, Rapp. 12-10, august, 1968.
- 241-Wherry, F.E. ș.a. - The significance of corona measurements on transformers. IEEE Trans. on PAS, vol.87, nr.11, nov. 1968, p.1889-1898.
- 242-Wilson, A. - Discharge detection under noisy conditions Proc. IEE, vol.121, nr.9, sept., 1974, p.993-996.
- 243-Wind, G. - Détection et localisation des décharges partielles par ultrason. R.G.E., vol.77, nr.1, ian. 1968, p.63.
- 244-Wind, G., Morel, J.F. - Décharges partielles dans le papier imprégné. Aspect des phénomènes et conditions de leur apparitions. R.G.E., vol.77, nr.5, mai 1968, p.500-506.
- 245-Yanabu, S., Kawaguchi, Y. - Partial discharge measurement on high-voltage power transformers. IEEE Trans. on PAS, vol.88, nr.8, august 1969, p.1187.
- 246-Yializis, A. ș.a. - An optimized charge simulation method for the calculation of high voltage fields. IEEE Trans. on PAS, vol.97, nr. , , 1978. p.2434-2440.