

P R E F A Ț A

Primul volum, în care-au fost expuse **funcțiile supermatematice de variabilă excentrică** [cu excepția funcțiilor *cosinus excentric* (cex), *sinus excentric* (sex), *amplitudine și beta excentrice*, în editia 1-a], a facilitat familiarizarea (celor interesați) cu teme expuse în cadrul unor cursuri universitare, de-a lungul anilor 1986-2003, la Facultatea de Mecanică din Timișoara, la Asociația *Astra Română* Timișoara, la cursul de MECATRONICĂ (susținut de autor pentru studenții TCM din anii IV și V) etc. etc.

Apărut fără corectură, întâiul volum are, evident, destule greșeli, pe care și le asumă, la paritate, autorul și editura. Chiar și în aceste condiții, volumul s-a epuizat cvasiinstantaneu, *la succesul de public (avizat)* contribuind în egală măsură conținutul științific interesantissim (de care se face *vinovat* autorul), cât și grafica de excepție (pentru care se cuvin aprecieri superlative d-lui prof.dr.ing. **Sabin Ionel**, senior editor la Editura POLITEHNICA din Timișoara).

Dacă, în volumul anterior, pentru familiarizarea cititorului cu o *problematică* atât de insolită, autorul găsește necesar să insereze o PREFAȚĂ de 11 pagini (!) și capitolul INTRODUCERE de 29 pagini (!), în volumul de față, consacrat **funcțiilor supermatematice de variabilă centrică**, “inventariaza” nu mai puțin de 163 ABREVIERI și NOTAȚII !

Fiecare capitol “se deschide” cu câte un MOTTO inspirat, “semnat”, deopotrivă, de matematicieni (Bezikovici, Jacobi, Klein, Weierstrass etc.), fizicieni (Einstein, Heisenberg ș.a.), scriitori - filosofi (Nichita Stănescu, Ayn Rand) și chiar de politicieni (Charles Wilson)..!

Încântat de o asemenea bogată *secreție aforistică*, nici subsemnatul nu rezistă tentației citării. Astfel, nu pot omite confesiunea lui Ion Barbu, potrivit căreia “*Poezia este o prelungire a geometriei*”, iar, prin extensie, aș zice că, mai abtirit, **SUPERMATEMATICA** incită la *atitudine lirică* (chiar și) în cercetarea științifică.

Dacă renumitul compozitor francez, Claude Debussy, și-a “botezat” una dintre compozițiile pentru pian “*Terasa de audiență a clarului de lună*”, să nu ne mirăm când dl. prof. M.E.Șelariu, sub presiunea inflexiunilor și faldurilor gândului, reunește cuvinte care n-au mai stat alături de la întemeierea lumii, precum “*cerc al amortizărilor vâscoase liniare*”, “*funcții elevate*”, “*funcții exotice*”, “*dreapta definită ca degenerată a strâmbei*” ș.a.m.d...!

Capitolul prim din volumul doi [marcat cu 9 (9 fiind ultimul capitol, neterminat, al vol.I), pentru a da continuitate și unitate lucrării în ansamblu], tratează excepțiile menționate în primul paragraf. Impresionează acuratețea, claritatea, combinațiile coloristice ale nenumăratelor reprezentări grafice, încât se poate afirma, fără exagerare, că “**figurile**” respective sunt “**fructe**” ale unui **rasfăț metaforic**, care **tronează suveran** asupra formelor și cromaticii [căci, la o lucrare de genul acesta, ni se confirmă extinderea noțiunii de metaforă (și în afara domeniului strict literar)] !

EXCENTRICILE – CURBE SUPERMATEMATICE fac obiectul capitolului 10. După un documentat periplu istoric, aflăm ca “fiecărei **centrice** îi corespund o

infinitate de **excentrice**, pe când, numai într-un singur caz (al excentricității nule), printre înfinitatea de excentrice se află și câte o singură centrică”. Facem cunoștința cu **excentricele circulare, eliptice, hiperbolice, parabolice, evolventice, spirale, cicloidale** etc., cu **familii de excentrice dexoidale** sau **rexoidale**, cu **suprafețe derivate din ecuațiile profilului Jukowsky**, cu **SSM de forma unor vase de flori**, ori chiar de forma unei statui **stilizate a lui Budha..!** Toate în “veșmânt” grafic de excepție !

În continuare (cap.11), este sondat **SISTEMUL OSCILAȚIILOR EXCENTRICE**, respectiv se trece la **REZOLVAREA UNOR ECUAȚII DIFERENȚIALE cu funcțiile cosinus și sinus excentrice**, într-un amplu și doct expozeu. Autorul face **paradă (neostentativă)** de erudiție, mișcându-se dezinvolt într-un domeniu interdisciplinar (matematică-fizică-inginerie) și învederând, dacă mai era nevoie, **multiplele fațete ale poliedricei sale personalități !**

Ca să-l cităm pe însuși autorul, “pentru a reduce cât mai mult petele albe ale matematicii, e necesară introducerea secțiunii **INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE** “(cap.12), întrezărindu-le un “viitor luminos”, întrucât “e normal ca și **SUPERMATEMATICA** să se extindă nedefinit, deoarece **numai infinitul este locul unde se produce ceea ce nu se poate întâmpla**” !

Sub genericul **FUNȚII COMPUSE AUTOINDUSE ȘI FUNCȚII INDUSE** (cap.13), sunt inventariate diverse **FUNȚII MATEMATICE VECHI ȘI NOI, DERIVATELE FUNCȚIILOR CIRCULARE CENTRICE VOINOIU** etc. și , între multe altele, se valorifică prilejul pentru **REDEFINIREA FUNCȚIILOR SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ**.

Îmi fac o datorie de conștiință revenind cu aprecieri superlative pentru construcțiile grafice, între care nu puține, cu deosebire în ultimele capitole (14 – 20), **în reprezentare 3D !**

& & &

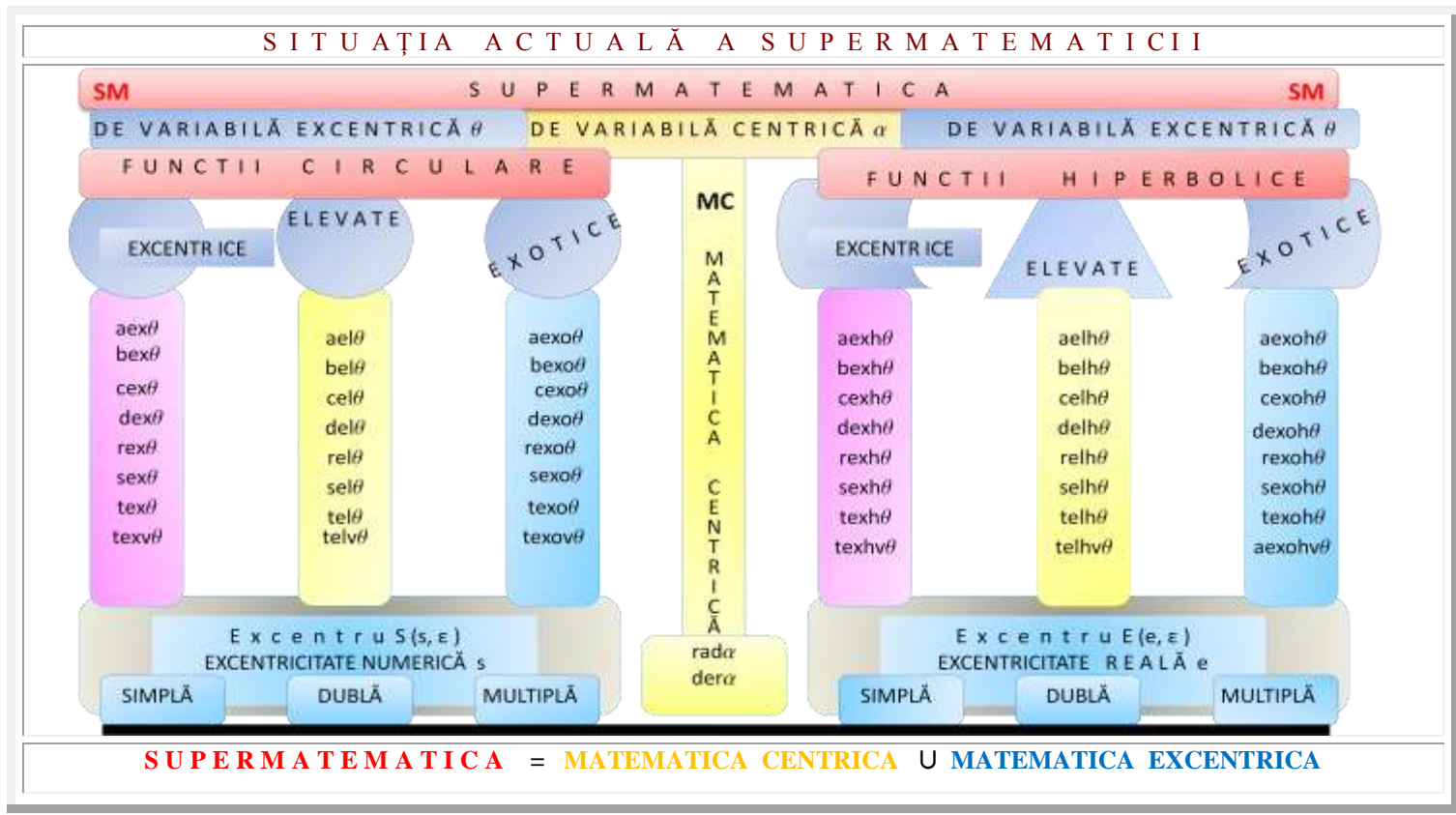
Este greu să rezum, în câteva rânduri, conținutul atât de dens al unei lucrări, precum cea prezentă. Pot afirma, fără teamă de exagerare, că orice “cititor” de bună credință, are de câștigat și va părăsi lectura cu **mintea și inima înălțate pe un soclu de certitudine**. Un text cu cea mai mare **acoperire de materie cenușie pe cm²**, al unui autor care **se mișcă numai printre repere fundamentate științific**, nu poate fi decât binevenit în orice bibliotecă personală.

Nu este exclus să apară și câte un **profesionist al căutării nodului în papură**, care să depisteze vreo virgulă lipsă, ori vreuna prisositoare... În această “materie” este de notorietate cazul pictorului **Apelles**, căruia un cizmar i-a făcut observație cu privire la modul în care erau reprezentate legăturile sandalelor într-un tablou...

Cu toată strădania de a-mi **acidula spiritul critic**, n-am găsit nici cel mai mic temei să pot aduce **acuzatii** cu adresă la **opul** prefațat. Dimpotrivă, recunosc, și o afirm cu toată răspunderea: e de ordinea **EVIDENȚEI** că **SUPERMATEMATICA este o VALOARE ...**

...Iar , contra **EVIDENȚEI probe nu există !**

Ing. Ioan Ghiocel



Situatia actuală a supermatematicii 7

**LISTA NOILOR FUNCȚII MATEMATICE CENTRICE (MC) și
SUPERMATEMATICE (SM) DIN LUCRARE**

ÎN MATEMATICA CENTRICA		ÎN MATEMATICA EXCENTRICA	
Funcții CENTRICE		Funcții EXCENTRICE	
DENUMIREA FUNCȚIEI	NOTAREA	DENUMIREA FUNCȚIEI	NOTAREA
F U N C T I I C I R C U L A R E			
	rad	Radial excentric de variabilă excentrică θ	$rex\theta$
		Radial excentric de variabilă centrică α	$Rex\alpha$
Derivată centrică	der	Derivată excentrică de variabilă excentrică θ	$dex\theta$
		Derivată excentrică de variabilă centrică α	$Dex\alpha$
Autoinduse centrice		Autoinduse excentrice de variabila centrică și de variabila excentrică	
Cosinus autoindus	cosai	Cosinus excentric autoindus	$Cexai\alpha, cexai\theta$
Sinus autoindus	sinai	Sinus excentric autoindus	$Sexai\alpha, cexai\theta$
Tangenta și cotangenta autoinduse	tanai cotai	Tangenta și cotangenta excentrice autoinduse	$Texai\alpha, texai\theta$ $Cexai\alpha, cexai\theta$
Secanta și cosecanta autoinduse	secai cscai	Secanta și cosecanta excentrice autoinduse	$Secexai\alpha, secexai\theta$ $Cscexai\alpha, cscexai\alpha$
Induse centrice		Induse excentrice	

Cosinus indus	cosi	Cosinus excentric indus	$cexi$
Sinus indus	sini	Sinus excentric indus	$sexi$
Tangenta și cotangenta induse	Tani coti	Tangenta și cotangenta excentrice induse	$texi$ $cexi$
Secanta și cosecanta	seci	Secanta și cosecanta excentrice induse	Secexi

induse	csci		cscexi
		Cosinus excentric de θ și de α	cex θ , Cex α
		Sinus excentric de θ și de α	sex, Sex α
		Tangenta și cotangenta excentrice	tex θ , Tex α ; ctex θ , Catex
Tangenta și cotangenta Voinoiu	tav cov	Tangenta și cotangenta excentrice Voinoiu	tavex θ , Tavex α ctavex θ , Ctavex α
		Secanta și cosecanta excentrice	scex θ , Secex α , cscex, Cscex α
Secanta și cosecanta Voinoiu	secv cscv	Secanta și cosecanta excentrice Voinoiu	secvex θ , Secvex α , cscvex θ , Cscvex α
	sev	ELEVATE	
	csv	Cosinus elevat	cel
		Sinus elevat	sel
		Tangenta, cotangenta elevate	tanel, cotel
		Secanta, cosecanta elevate	secel, csel
		EXOTICE	
		Cosinus exotic	cexo
		Sinus exotic	sexo
		Tangenta și cotangenta exotice	tanexo, cotexo
		Secanta și cosecanta exotice	secexo, csecexo
E L I P T I C E			
S U P E R M A T E M A T I C E (SM)			
Cosinus eliptic SM	ce	Cosinus eliptic excentric SM	ceex
Sinus eliptic SM	se	Sinus eliptic excentric SM	seex
Amplitudini eliptice SM	aece aese		
Derivate eliptice SM	dece dese		
Funcții eliptice în trepte Smarandache	smce smse		
P A R A B O L I C E S M			
Cosinus parabolic SM	cp	Cosinus parabolic SM excentric	cpex
Sinus parabolic SM	sp	Sinus parabolic SM excentric	spex
H I P E R B O L I C E S M			
Cosinus hiperbolic SM	ch, cosh	Cosinus hiperbolic SM excentric	cexh, chex
Sinus hiperbolic SM	Sh, sinh	Sinus hiperbolic SM excentric	Sexh, shex

10 Lista noilor funcții matematice și supermatematice (SM) din lucrare

C V A D R I L O B E S M			
Cosinus cvadrilob SM	coq	Cosinus cvadrilob excentric SM	coqex
Sinus cvadrilob SM	siq	Sinus cvadrilob excentric SM	siqex
CVADRILOBE TRANSTRIGONOMETRICE (TT)			
Cosinus cvadrilob TT	ct	Cosinus cvadrilob excentric TT	ctex
Sinus cvadrilob TT	st	Sinus cvadrilob excentric TT	stex
FUNCTII INTRATRIGONOMETRICE			
Cosinus intratrigonometric	cit	Cosinus intratrigonometric excentric	citex
Sinus intratrigonometric	sit	Sinus intratrigonometric excentric	sitex
FUNCTII PE CONICE CU VÂRFUL COMUN			
CENTRICE		EXCENTRICE	
Generală a CONICELOR	coc, sic	Generală excentrice	cocex, sicex
Conice tip ELIPTIC	coce, sice	Conice tip ELIPTIC excentrice	coceex, siceex
Conice tip HIPERBOLIC	coch, sich	Conice tip HIPERBOLIC excentrice	cohex, sichex
Conice eliptice	coe, sie	Conice eliptice excentrice	coeex, sieex
Conice PARABOLICE	cop, sip	Conice PARABOLICE excentrice	copex, sipex
Conice hiperbolice	coh, sih	Conice hiperbolice excentrice	cohex, sihex

- Toate funcțiile noi excentrice introduse în aceasta lucrare sunt de variabilă excentrică θ , dar și de variabilă cenitrică α ;

Motto: “Cercetarea fundamentală este ceia ce faci,
când nu știi ceia ce ai de gând a face”.

Charles Wilson

Cap. 12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

12.1 GENERALITĂȚI

Istoria confirmă faptul că **Fourier** i-a acuzat pe **Jacobi** și pe **Abel** ca-și risipesc/pierd timpul cu **funcții eliptice**, când sunt atâtea probleme mai utile care ar putea fi rezolvate.

Care erau acele probleme stresante, în acea vreme/dată, ca și răspunsul lui **Abel** se găsesc pe site-ul ”Zâmbetul științei”. (V. **Google** → ”Zâmbetul științei”).

După părerea lui **L. D. Landau** “Științele matematice, științele naturale și științele umanitare pot fi numite și, respectiv, științe **supranaturale**, științe **naturale** și științe **nenaturale**”. Ca urmare, științele matematice sunt științe **supranaturale**, iar complementele de matematică, ce se vor prezenta în continuare, aparțin, evident matematicii excentrice (**ME**) și, prin aceasta, **supermatematicii**. Deci, matematica este **supra...** și va fi (sau este deja ?) **super...** !

Cu siguranță, există, în acest moment, în lume/univers, probleme mult mai importante, pe care omenirea este chemată să le rezolve, decât studierea integralelor eliptice excentrice (**IEE**) și a funcțiilor eliptice excentrice (**FEE**) din acest capitol.

Fără hrană oamenii mor, fără funcții eliptice, fie ele și excentrice, supraviețuiesc/trăiesc și, poate, chiar mai bine.

Dacă omenirea a progresat vertiginos, din momentul adoptării în muncă a principiului diviziunii sociale a muncii, conform căruia, e necesar să-ți restrângi cât mai mult domeniul de activitate, pentru a realiza lucruri de calitate, în cel mai scurt timp, cu costuri cât mai scăzute. Adică, scopul oricărei activități este de-a fi **ratională**: de-a obține cu minimum de efort uman, fizic și intelectual, maximum de beneficii (calitate, eficiență economică, socială, ecologică, ergonomică ș.a.). Numai că, pe lângă șuruburi, cineva trebuie să producă și piulițele; fără piulițe șuruburile nu pot fi întrebuințate.

Contrar părerilor lui **Fourier**, despre inutilitatea unor studii, **E. P. Wigner** este de părere că “*Matematica este știința manevrării cu regulile și noțiunile născocite anume în acest scop. Este clar, că cel mai important rol aici (în matematică, n. n.) îl are invenția unor noțiuni noi. Rezerva teoremelor interesante ar fi epuizată repede în matematică, dacă ar fi fost nevoie să le formulăm numai cu ajutorul noțiunilor, conținute în axiome*”.

De aceea, pentru a reduce cât mai mult petele albe ale matematicii, considerăm, totuși, necesară introducerea acestor integrale și funcții eliptice excentrice, pentru a completa domeniul integralelor și a funcțiilor eliptice, pe care, acum, suntem

obligați să le denumim și **centrice** (**IEC** și **FEC**). Cu atât mai mult, cu cât se întrezăresc unele aplicații interesante și chiar importante.

Până unde se va extinde supermatematica ? Dacă matematica excentrică multiplică la infinit **toate** entitățile matematice, e normal ca și supermatematica să se extindă nedefinit, deoarece ”numai infinitul este locul unde se produce ceea ce nu se poate întâmpla”.

12.2 DEFINIREA INTEGRALELOR ELIPTICE EXCENTRICE (IEE)

Extinderea integralelor și a funcțiilor eliptice, din domeniul centric în domeniul excentric, se poate face în mod asemănător cu extinderea funcțiilor circulare centrice în domeniul excentric și, în general, identic cu multiplicarea la infinit a tuturor entităților matematice centrice: prin înlocuirea variabilelor centrice α cu variabila/ (funcția de variabilă) excentrică θ , utilizând relația [v. Vol. I, relația (3.70) și relația (3.71) rescrisă în relația (12.02)]

$$(3.70)/(12.01) \quad \beta_1 + \beta_2 = \pm \pi, s_x = s \cdot \cos \varepsilon \rightarrow \begin{cases} + \text{ pentru } s_x > 0 \\ - \text{ pentru } s_x < 0 \end{cases}$$

atât pentru $e < R$ sau $s < 1$ cât și pentru $e > R$ sau $s > 1$, iar

$$(3.71)/(12.02) \quad \alpha_{1,2} + \beta_{1,2} = \theta \rightarrow \alpha_{1,2} = \theta - \beta_{1,2} = \theta - \text{bex}_{1,2}(\theta, S(s, \varepsilon)), \\ \forall [e, s \in (-\infty, +\infty)]$$

Funcția **SM** beta excentrică este

$$(12.03) \quad \text{bex}_{1,2}(\theta, S(s, \varepsilon)) = \begin{cases} \beta_1 = \text{bex}_1 \theta = \arcsin [s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \\ \beta_2 = \text{bex}_2 \theta = \pi - \beta_1 = \pi - \arcsin [s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \end{cases},$$

iar **FSM-CE** amplitudine excentrică va fi

$$(12.04) \quad \alpha_{1,2} = \text{aex}_{1,2} \theta = \theta - \beta_{1,2} = \\ \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \theta - \arcsin (s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)) = \text{aex}_1 \theta \\ \alpha_2 = \theta + \arcsin (s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)) \mp \pi = \text{aex}_2 \theta \end{cases} \\ \forall [e, s \in (-\infty, +\infty)]$$

Prin convertirea anterioară $\sin \alpha \rightarrow \text{sex}[\theta, S(s, \varepsilon)]$, rezultă că înlocuirea variabilelor este echivalentă cu înlocuirea **FCC** cu **FCE**, așa cum v-a rezulta în continuare.

În **figura 12.0**, plecând de la un anumit unghi / variabilă excentrică θ , sunt prezentate mai multe sinusuri **centrice** ($\sin \theta$, $\sin \alpha$, $\sin \gamma$) și sinusuri **excentrice**: de variabilă excentrică $\text{sex} \theta$ și de variabilă centrică $\text{Sex} \alpha$. Se observă că, plecând de la variabila θ , prin transformările cunoscute, date de funcția amplitudine excentrică de variabilă excentrică și, respectiv, centrică, se obțin unghiurile / variabilele α și, respectiv, γ , între ele existând dependențele $\alpha < \theta < \gamma$, vizibile în **figura 12.0**.

Conform regulii de înlocuire a **FCC** cu **FSM - CE**, pentru a trece din domeniul centric în domeniul excentric, **IEE** vor fi definite prin integralele incompletă și, respectiv, completă, de prima speță și de **variabilă excentrică**, de integralele

$$(12.05) \quad \mathcal{FE}(\varphi, k, S) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \text{sex}^2(\varphi, S)}} \text{ și, pentru } \varphi = \frac{\pi}{2}, \rightarrow$$

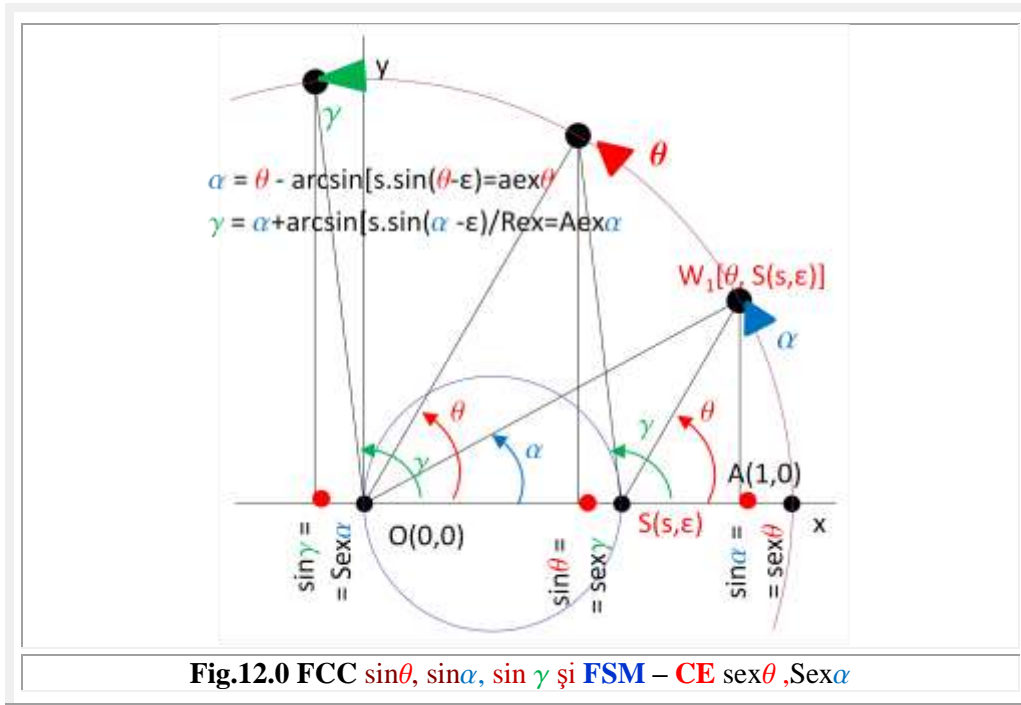


Fig.12.0 FCC $\sin\theta$, $\sin\alpha$, $\sin \gamma$ și FSM – CE $\text{sex}\theta$, $\text{Sex}\alpha$

$$(12.06) \quad \text{KE}(k, S(s, \varepsilon)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \text{sex}^2(\varphi, S)}}$$

iar cele de speța a doua, incompletă și, respectiv, completă vor fi

$$(12.07) \quad \text{EE}(\varphi, k, S(s, \varepsilon)) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \text{sex}^2(\varphi, S)} d\varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$(12.08) \quad \text{EE}(k, S) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \text{sex}^2(\varphi, S)} d\varphi$$

Și, pentru ca definițiile să fie complete, **IEE** incompletă și cea completă de a treie speță vor avea expresiile / (vor fi integralele)

$$(12.09) \quad \text{PIE}(n, \varphi \setminus k, S) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{1-n^2 \text{sie}(\varphi, S)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \text{sex}^2(\varphi, S)}}$$

$$(12.10) \quad \text{PIIE}(n, k, S) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-n^2 \text{sex}^2(\varphi, S)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \text{sex}^2(\varphi, S)}}$$

Integralele eliptice sub forma normală **Legendre**, prin transformarea $x = \sin\varphi$, se reduc la forma trigonometrică normală.

De exemplu, dacă $x = \sin\varphi \rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = \cos\varphi \rightarrow dx = \cos\varphi \cdot d\varphi$, astfel că

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\varphi)(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Același lucru se întâmplă și prin substituția $x = \text{sex}\varphi$, deoarece $\text{sex}\varphi = \text{sex}\theta = \sin\alpha$, iar $1 - \text{sex}^2\theta = \text{cex}^2\theta$, $\frac{dx}{d\varphi} = \text{dex}\varphi \cdot \text{cex}\varphi \rightarrow dx = \text{dex}\varphi \cdot \text{cex}\varphi \cdot d\varphi$, iar $\text{dex}\varphi = \frac{d\alpha}{d\varphi}$, în acest caz $\varphi \equiv \theta$, astfel că

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{\text{dex}\varphi \cdot \text{cex}\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{(1-\text{sex}^2\varphi)(1-k^2\text{sex}^2\varphi)}} = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\text{sex}^2\varphi}} = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$

denumirea variabilei, φ sau α , nu modifică valoarea integralei.

Considerând, în integrala anterioară, înlocuirea funcției $\sin\varphi = \sin\theta \rightarrow \text{sex}\theta$, variabila $\varphi \rightarrow \theta$ și diferențiala $d\varphi \rightarrow d\theta$, situația se schimbă radical, integrala anterioară de prima speță incompletă devenind integrala eliptică excentrică incompletă de **variabilă excentrică θ**

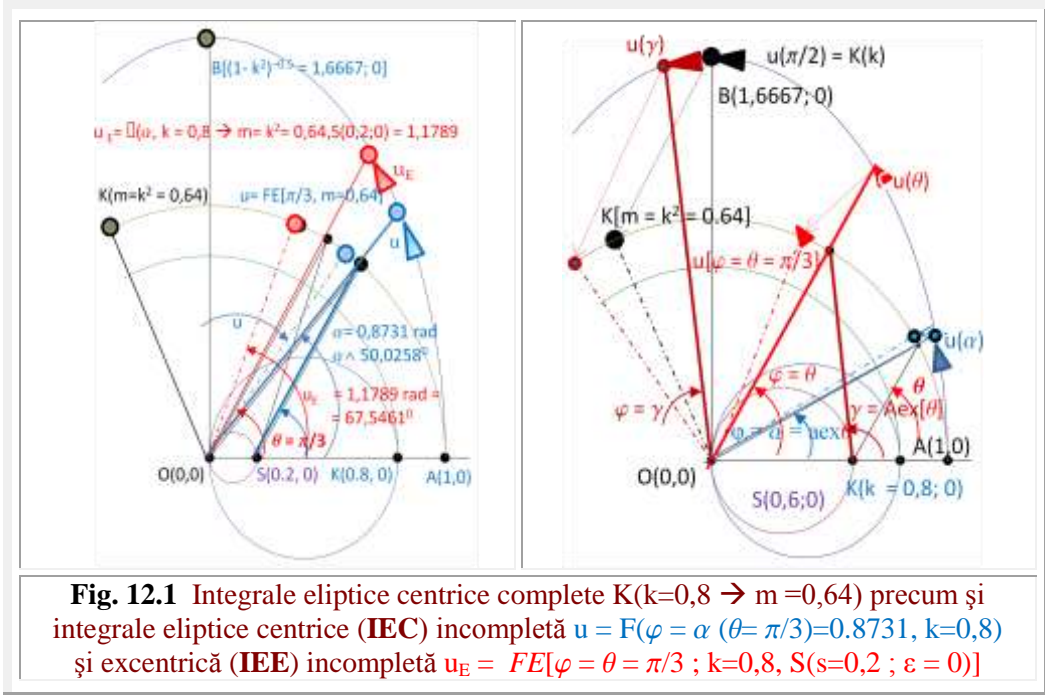


Fig. 12.1 Integrale eliptice centrice complete $K(k=0,8 \rightarrow m=0,64)$ precum și integrale eliptice centrice (IEC) incompletă $u = F(\varphi = \alpha (\theta = \pi/3)=0.8731, k=0,8)$ și excentrică (IEE) incompletă $u_E = FE[\varphi = \theta = \pi/3 ; k=0,8, S(s=0,2 ; \varepsilon = 0)]$

$$FE[\theta, k, S(s, \varepsilon)] = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \text{sex}^2[\theta, S(s, \varepsilon)]}} = u_E(\theta)$$

Dacă $x = \sin\varphi$ se înlocuiește cu **FSM-CE** $\text{Sex}\alpha$, $\sin\varphi \rightarrow \text{Sex}\alpha$ și $d\varphi \rightarrow d\alpha$, atunci integrala eliptică centrică se transformă într-o integrală eliptică excentrică de **variabilă centrică α**

$$FE[\alpha, k, S(s, \varepsilon)] = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \text{Sex}^2[\alpha, S(s, \varepsilon)]}} = u_E(\alpha)$$

Dacă se face substituția $x = \text{sex}\alpha = \text{sex}\varphi$ prin care variabila x și φ se înlocuiește cu $x = \text{sex}\alpha = \text{sex}[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] = \sin\alpha_{\text{EX}}$ și, respectiv, cu variabila excentrică θ care, acum, este o funcție de variabila centrică α prin relația cunoscută

$$\begin{aligned} \theta = \alpha + \beta(\alpha) &= \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}} = \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\text{Rex}\alpha} \\ &= \alpha + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)} \end{aligned}$$

În **figura 12.1** s-a ales $\varphi = \alpha[\theta = \frac{\pi}{3}, S(0,2;0)] = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] = 0,873115$ la care corespunde un unghi de $\alpha = 50,0258^\circ$.

Dacă **IEEC** complete au o singură valoare pentru un anumit modul k și cele incomplete pentru un anumit **modul** k și o anumită **amplitudine** φ , **IEE** au o infinitate de valori, ce corespund infinității de valori ale/date excentricității numerice s și, în general, infinității pozițiilor excentrului $S(s, \varepsilon)$ în planul cercului/elipsei unitate.

Bineînțeles că, pentru $s = 0$, $\theta = \varphi$, $\text{sex}\varphi \rightarrow \sin\varphi$ și **IEE** degenerază în integralele eliptice centrice **IEC** (\mathcal{F} , F ; \mathcal{E} , E ; \mathbb{I} , \mathbb{I}).

Ceea ce s-a spus despre integrale se poate extinde și la funcțiile eliptice excentrice (**FEE**). Dacă inversa **IEC** de prima speță $\mathcal{F}(\varphi, k) = u$ este funcția amplitudine $\text{am}(u, k) = \varphi$, pe care, acum, suntem obligați s-o denumim și centrică, inversa **IEE** de prima speță

$$(12.11) \quad \mathcal{FE}(\varphi = \alpha, k, S) = u_{\text{ex}} = \text{amex}(u_{\text{ex}}, k, S), \text{ (Fig.12.1)}$$

este funcția eliptică excentrică (**FEE**) denumită **amplitudine eliptică excentrică amex(u, k, S)**, (A nu se confunda cu **FSM-CE** $\text{aex}\theta$).

Cu ajutorul **FEE amex(u, k, S)** pot fi definite următoarele funcții eliptice excentrice (**FEE**)

$$(12.12) \quad \text{cnex}(u, k, S) = \cos[\text{amex}(u, k, S)]$$

$$(12.13) \quad \text{snex}(u, k, S) = \sin[\text{amex}(u, k, S)]$$

$$(12.14) \quad \text{dnex}(u, k, S) = \sqrt{1 - k^2 \cdot \text{sex}^2[\varphi, S(s, \varepsilon)]} = \sqrt{1 - k^2 \text{snex}^2[u, k, S]}$$

Mai pot fi definite și inversele și combinațiile acestor funcții

$$(12.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ncex}(u, k, S) = \frac{1}{\text{cnex}(u, k, S)}, \text{ nsex}(u, k, S) = \frac{1}{\text{snex}(u, k, S)}, \text{ ndex}(u, k, S) = \frac{1}{\text{dnex}(u, k, S)} \\ \text{csex}(u, k, S) = \frac{\text{cnex}(u, k, S)}{\text{snex}(u, k, S)}, \text{ scex}(u, k, S) = \frac{\text{snex}(u, k, S)}{\text{cnex}(u, k, S)}, \text{ dcex}(u, k, S) = \frac{\text{dnex}(u, k, S)}{\text{cnex}(u, k, S)} \\ \text{cdex}(u, k, S) = \frac{\text{cnex}(u, k, S)}{\text{dnex}(u, k, S)}, \text{ sdex}(u, k, S) = \frac{\text{snex}(u, k, S)}{\text{dnex}(u, k, S)}, \text{ dsex}(u, k, S) = \frac{\text{dnex}(u, k, S)}{\text{snex}(u, k, S)} \end{array} \right.$$

pe care ne limităm doar a le trece în revistă.

12.3 INTEGRALE ELIPTICE EXCENTRICE (IEE)

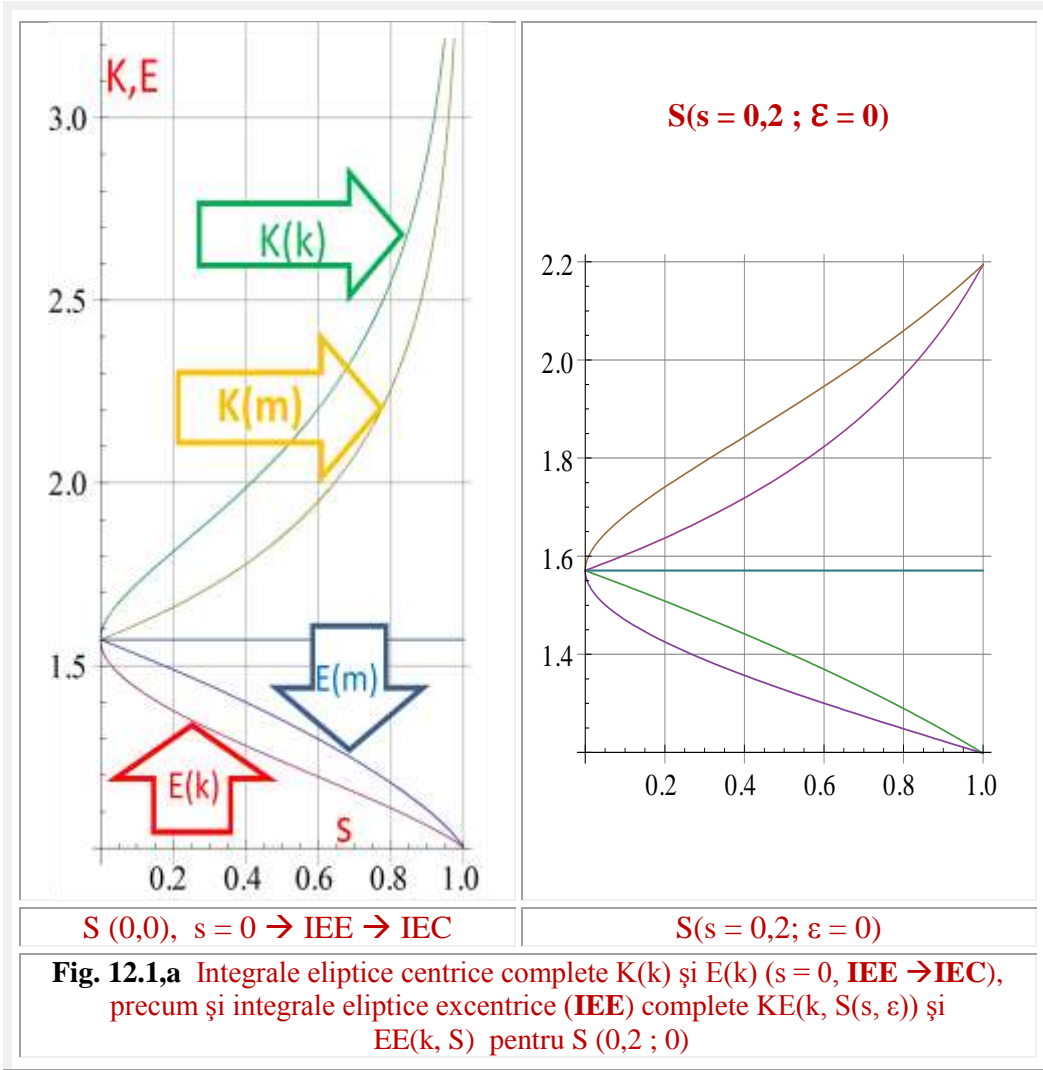
Au fost definite anterior, prin relațiile (12.05...12.10) și notate cu $\mathcal{FE}(u, k, S(s, \varepsilon))$ și cu $\mathcal{EE}(u, k, S(s, \varepsilon))$ cele incomplete și cu $\text{KE}(k, S)$ și $\text{EE}(k, S)$ ce complete, de prima și, respectiv, de a doua speță/tip.

În **figura 12.1,a** sunt prezentate graficele **IEE** complete $\text{K}(k, S)$ și $\text{E}(k, S)$.

Pentru $S(s = 0; \varepsilon = 0)$ se obțin **IEC** ($\text{IEE} \rightarrow \text{IEC}$) și pentru $S(s = 0, 2; \varepsilon = 0)$ modificările graficelor sunt aproape neobservabile, ca și pentru valori reduse ale modulelor $m = k^2$ și $k = \sqrt{m}$, dar modificările devin pregnante pentru valori ridicate ale acestor module.

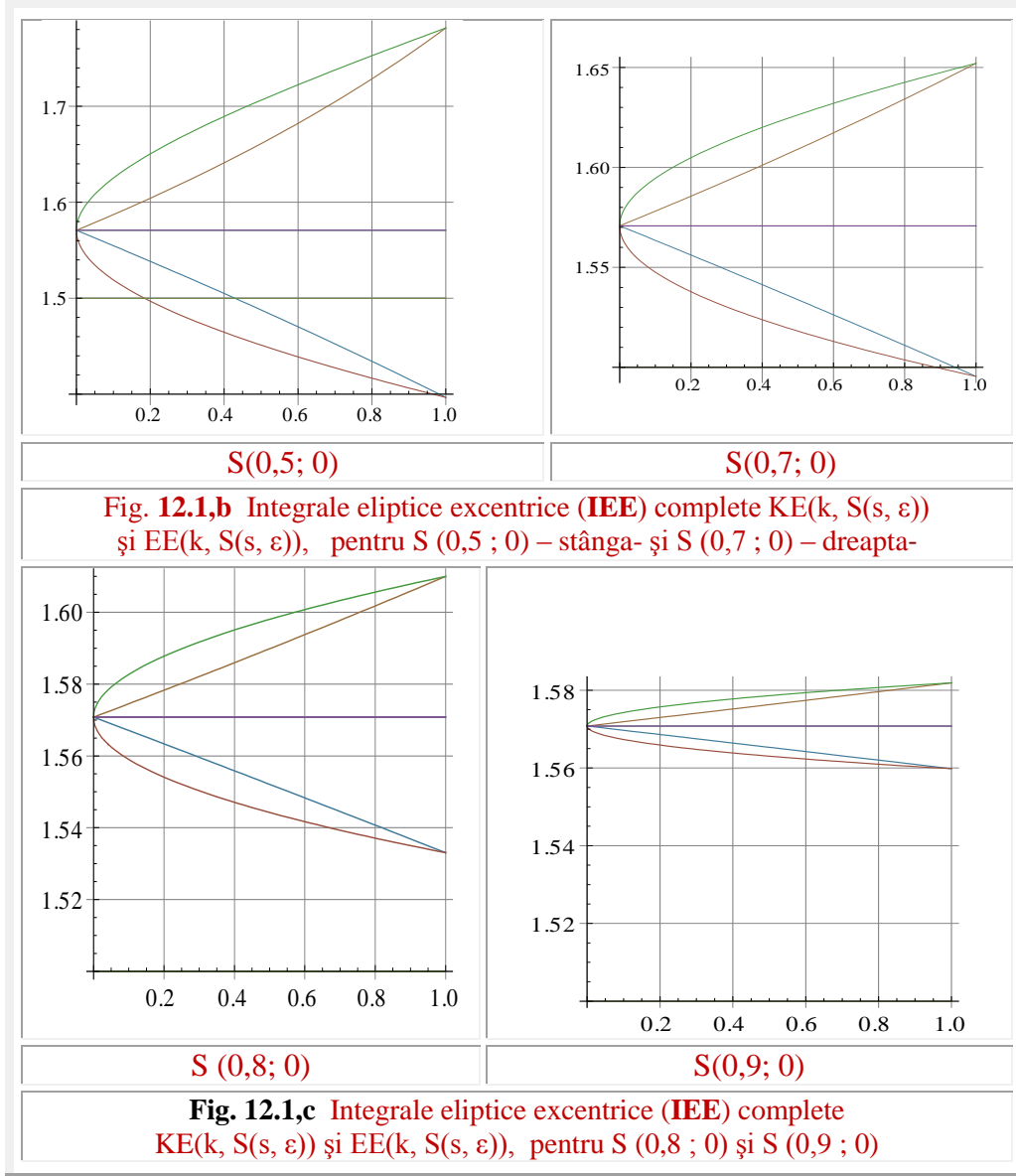
Pentru a discerne curbele de parametru $m = k^2$ de cele de parametru k , trebuie specificat că, pentru $m, k \in]0, 1[$, $\rightarrow \text{K}(k)$ (de culoare verde) $> \text{K}(m)$ - galben, iar $\text{E}(k)$ - roșu $< \text{E}(m)$ - albastru (**Fig. 11.51,a**), situație care se păstrează și în cazul **IEE**. Nu și culorile. Acest lucru este datorat faptului că, pentru o valoare oarecare $n \in]0, 1[$ $\rightarrow m(n) < k(n)$ și dacă $n \nearrow \Rightarrow \text{K}(k) \nearrow$ și $\text{E}(k) \searrow$. Așa cum este și normal, pentru

valorile extreme ale intervalului modulelor, de $m = k = 0$ și $m = k = 1$, **IEE** au aceleași valori ca cele centrice (**IEC**).



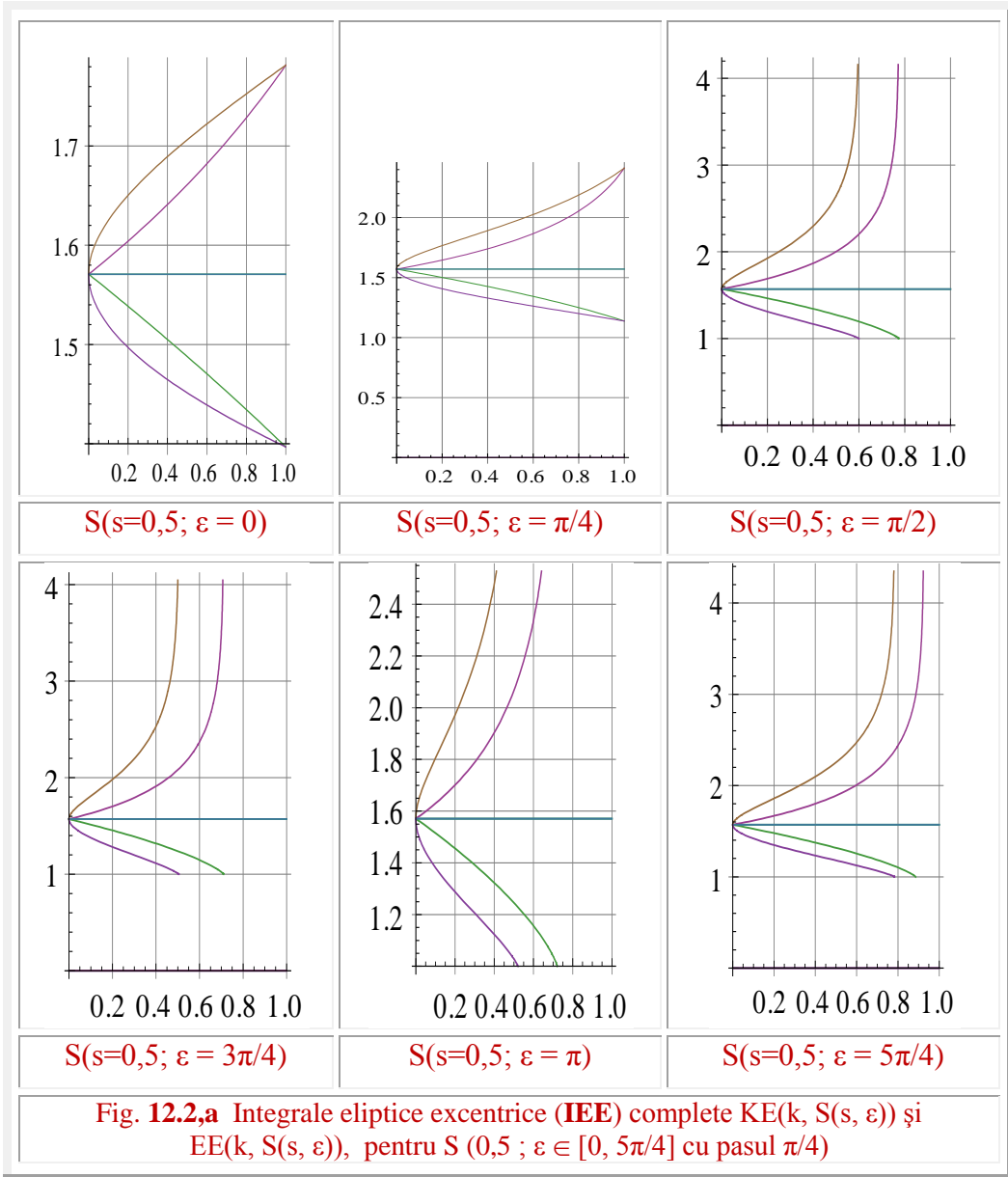
Figurile următoare, **12.1,b** și **12.1,c**, urmăresc evoluțiile (curelor) integralelor eliptice excentrice (**IEE**) odată cu creșterea excentricității numerice **s**. Adică, odată cu deplasarea excentrului $S(s,0)$ pe axa absciselor.

Se observă că, pentru același domeniu de variație al modulelor k și m , domeniul de variație al valorilor $[0, \infty]$ se reduce considerabil, ambele limite apropiindu-se / tinzând de/spre valoarea lui $\pi/2 = 1.5708\dots$. Pentru $s = 1 \rightarrow EE[k, S(1,0)] = KE[k, S(1,0)]$ și curbele degenerază într-un segment de linie paralelă cu axa absciselor Ok , respectiv, Om .



Acest lucru se explică prin faptul că, pentru $s = 1$ și $\theta \in [0, \pi/2]$ ca și în domeniul mai extins $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\text{sex}(\theta, s = 1) = 0$, astfel că **IEE**($k, s = 1$) sunt egale între ele $KE(k, s=1) = EE(k, s=1)$ și devin egale, valoric, cu **IEC** ($k=0$), adică, $K(0) = E(0) = \pi/2$, astfel că se poate exprima/scrie, simbolic, că **IEE**($k, s = 1$) = **IEC** ($k = 0$). Graficele **IEE**(s), ca funcții de excentricitatea numerică s , prezentate în figura 12.1, pentru $\epsilon = 0$ și $s \in [0, 1]$ relevă scăderea valorilor **IEE** $KE(s)$ cât și creșterea

valorii **IEE** $EE(s)$, odată cu creșterea valorii excentricității s și egalizarea lor la valoarea $\pi/2$, în extremitatea din dreapta, pentru $s = 1$.



Pentru o valoare oarecare a excentricității numerice, aleasă arbitrar de $s = 0,5$, se va urmări evoluția **IEE** în funcție de ϵ , adică, de rotația excentrului $S(s, \epsilon)$ pe cercul $C(R, O(0,0))$ de raza $R = s = 0,5$. Rotație în sens trigonometric sau sinistrorum / levogin

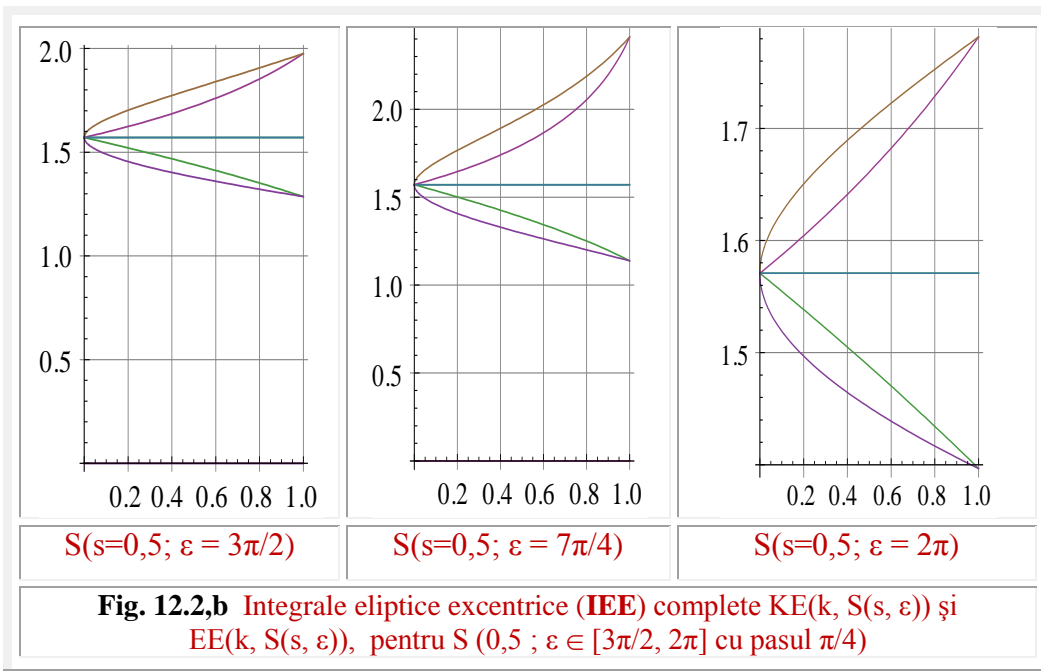
Astfel, în **figura 12.2** sunt prezentate secvențele acestei acțiuni cu pasul $\pi/4$, începând cu $\varepsilon = 0$ și sfârșind cu $\varepsilon = 2\pi$, ca rotația să fie completă și caracterul periodic al **IEE**, ca funcții de ε , să fie cât se poate de evident (v. $\varepsilon = 0$ și $\varepsilon = 2\pi$).

În **figura 12.2,a** ε evoluează între 0 și $5\pi/4$, iar în următoarea figură de la $\varepsilon = 3\pi/2$ la $\varepsilon = 2\pi$.

Periodicitatea **IEE** rezultă și din graficele din **figura 12.4**, în care sunt reprezentate integrale eliptice excentrice (**IEE**(ε)) complete $KE(k, S(s, \varepsilon))$ și $EE(k, S(s, \varepsilon))$, ca funcții de $\varepsilon \in [-\pi, 3\pi]$, pentru m, k considerate constante, cu valorile figurate sub fiecare figură.

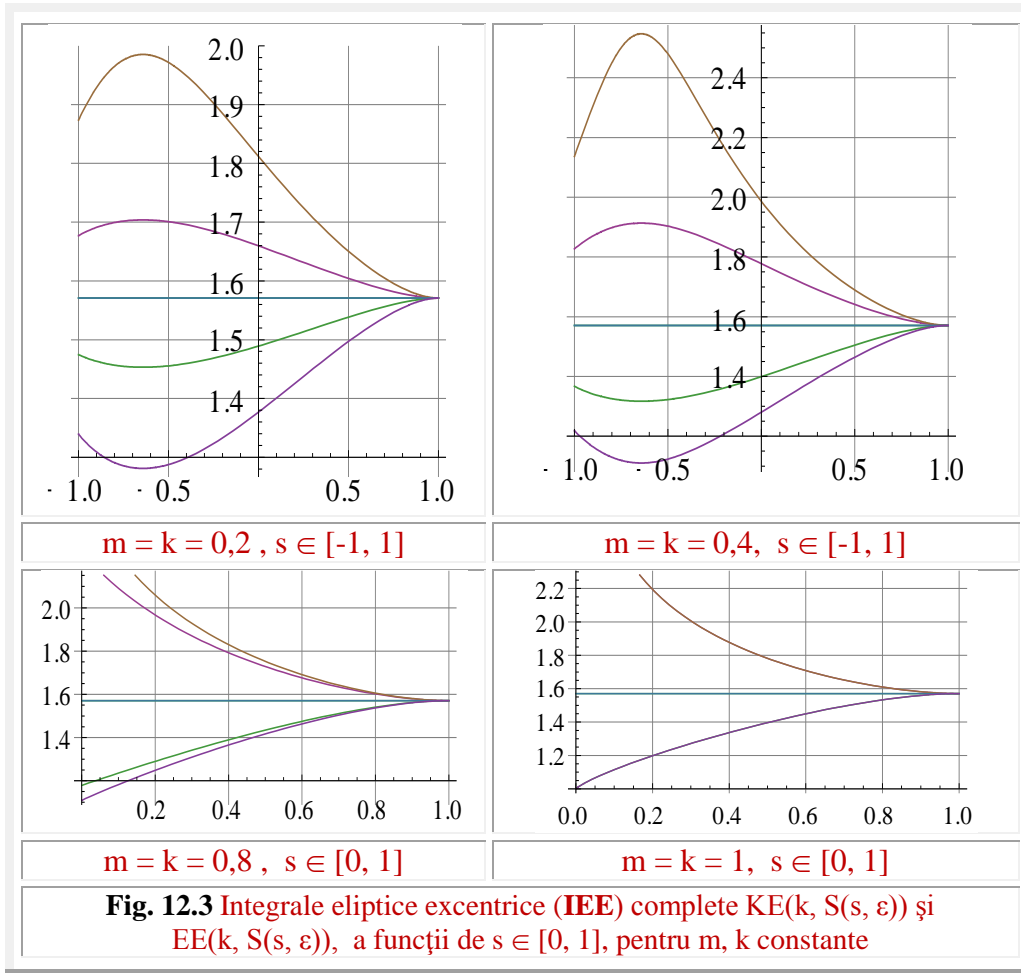
Figura 12.3 redă evoluția graficelor **IEE** ca funcții de excentricitatea numerică s , $FE(s)$ și $EE(s)$ pentru $\varepsilon = 0$, adică excentrul de coordonate polare $S(s, 0)$.

În primele două secvențe, pentru module de valori mai reduse ($k, m = 0,2$ și $k, m = 0,4$), excentrul S evoluează pe axa absciselor între limitele $s \in [-1, 1]$, iar în următoarele două secvențe numai în intervalul $s \in [0, 1]$, deoarece, pentru $k, m = 0,8$ și $k, m = 1$, graficele apar, aproape în exclusivitate, în acest domeniu. Deoarece $k = \sqrt{m}$, pentru $m \in [-1, 0]$ există doar **IEE**(m) și nu există **IEE** de modulul k **IEE**(k). De aceea, s-a utilizat, în majoritatea cazurilor, la înregistrarea graficelor **IEE**, doar intervalul modulelor $m \in [0, 1]$.



Pentru reprezentarea grafică a **IEE**, **FSM-CE** sinusurile excentrice de variabilă excentrică θ $sex_{1,2}(\theta, S(s, \varepsilon)) = \sin[\theta - \beta_{1,2}]$ au fost dezvoltată astfel

$$(12.16) \quad sex_{1,2}(\theta, S(s, \varepsilon)) = -s \cdot \cos\theta \cdot \sin(\theta - \varepsilon) \pm \sin\theta \cdot \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}$$



și sunt **FSM-CE** din relațiile (1.6) ... (1.9) - din Vol. I, pag. 29 ediția I-a 2007- scrise / redactate **acolo** eronat, fără termenul $\sin\theta$ din fața radicalului, în cazul lui $sex_{1,2} \theta$ și fără $\cos\theta$, în fața aceluiași radical, în cazul funcțiilor $cex_{1,2} \theta$.

Glumind, putem afirma, că știința nu este altceva decât un șir nesfârșit / infinit de greșeli corectate ! Altele decât cele de față.

Pentru **IEE** se va folosi doar prima determinare a **FSM-CE** de indice 1.

$$(12.06') \quad KE(k, S(s, \varepsilon)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 s e x^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 [\sin\varphi \sqrt{1-s^2 \sin^2(\varphi-\varepsilon)} - s \cdot \cos\varphi \cdot \sin(\varphi-\varepsilon)]^2}}$$

Pentru **IEE** de k și pentru $IEE(m)$, k^2 se înlocuiește cu m , deoarece $m = k^2$ și rezultă

$$(12.06'') \quad KE(m, S(s, \varepsilon)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m \cdot s e x^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m [\sin\varphi \sqrt{1-s^2 \sin^2(\varphi-\varepsilon)} - s \cdot \cos\varphi \cdot \sin(\varphi-\varepsilon)]^2}}$$

Pentru **IEE** completă de speța a doua, sau de tip doi, $EE(k)$ și, respectiv, $EE(m)$ rezultă

$$(12.08'') \quad EE(k,S(s,\varepsilon)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 s \varepsilon^2 \sin^2(\varphi, S(s, \varepsilon))} d\varphi =$$

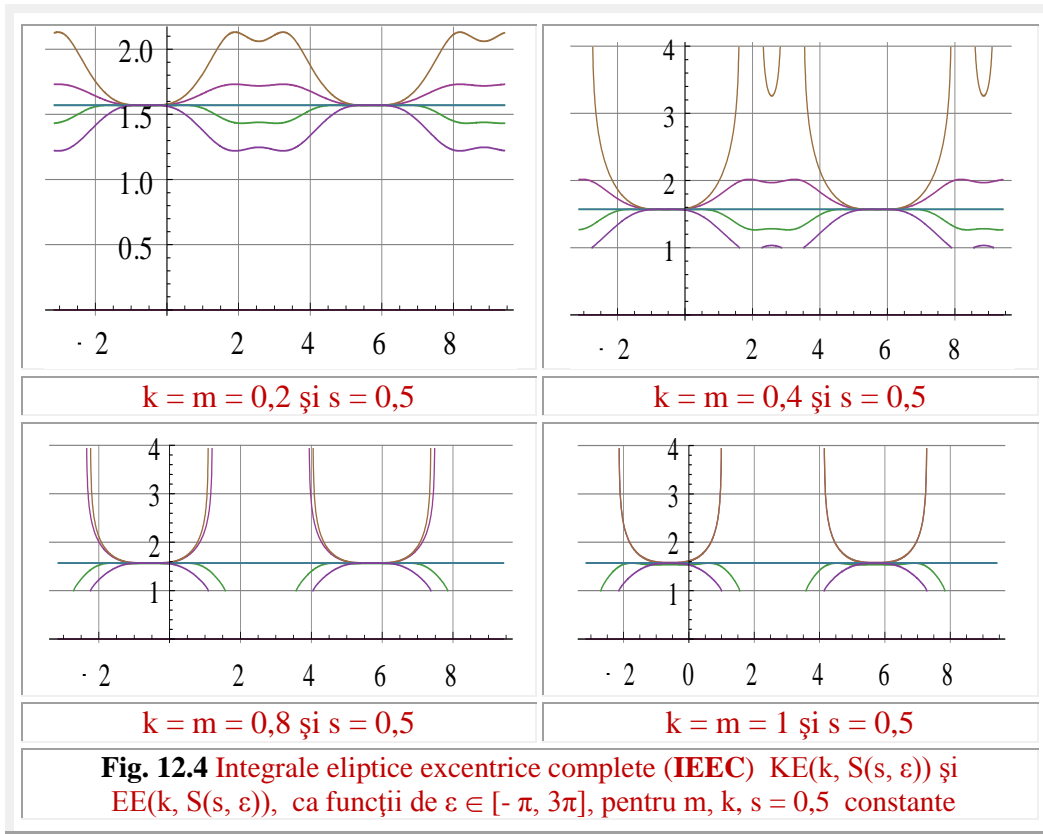
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 [\sin\varphi \sqrt{1 - s^2 \sin^2 \varphi} - s \cdot \cos\varphi \cdot \sin(\varphi - \varepsilon)]^2} d\varphi$$

și

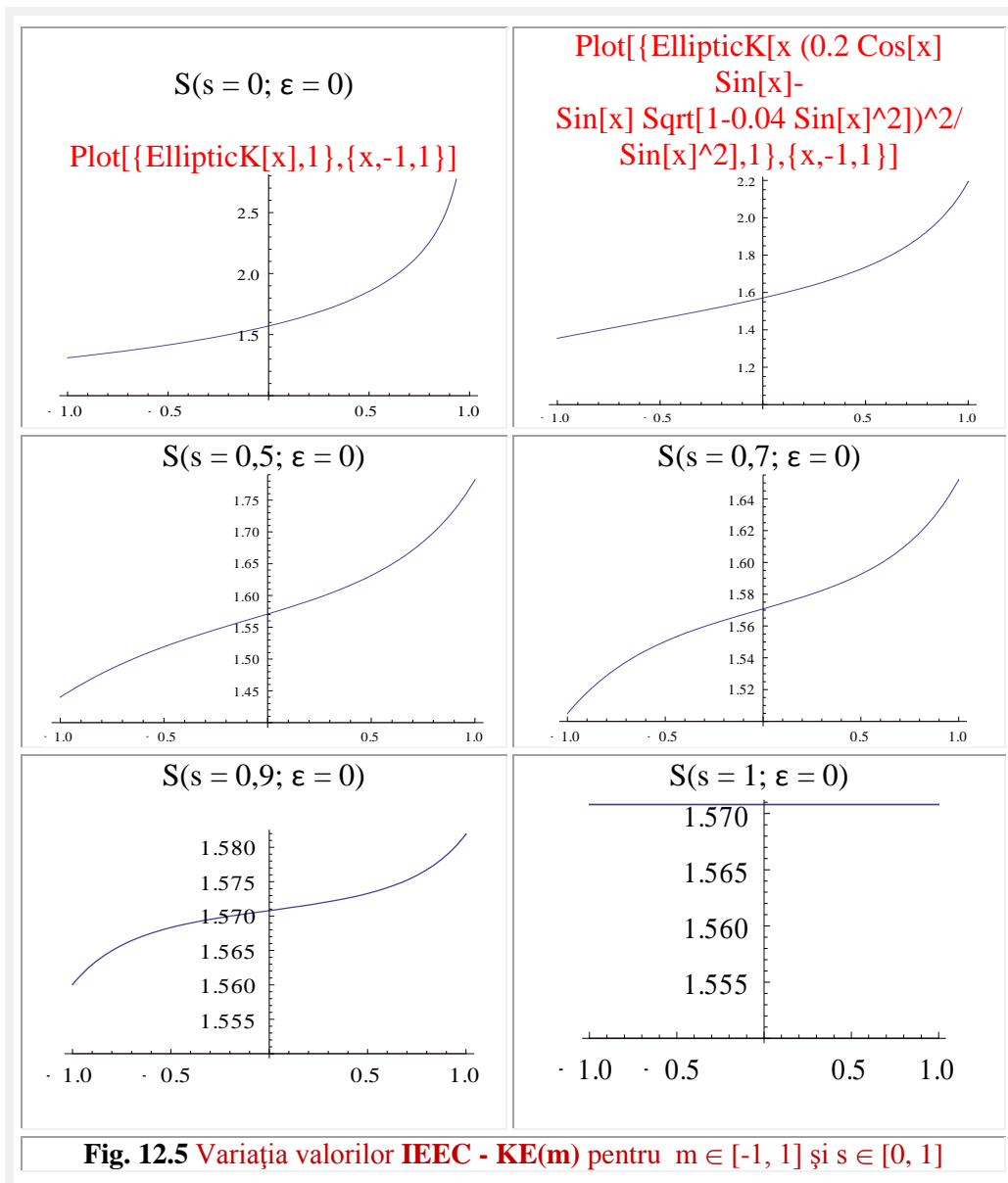
$$(12.8'') \quad EE(m,S(s,\varepsilon)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \cdot s \varepsilon^2 \sin^2(\varphi, S(s, \varepsilon))} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m [\sin\varphi \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\varphi - \varepsilon)} - s \cdot \cos\varphi \cdot \sin(\varphi - \varepsilon)]^2} d\varphi$$

cu graficele prezentate în figurile anterioare, comune pentru ambele tipuri de integrale excentrice complete (**IEEC**), întrucât, domeniul de variație al acestor funcții rămâne același ca și pentru cele centrice, adică $E, EE \in [0, \pi/2]$, iar $K, KE \in [\pi/2, \infty]$.



Pentru înregistrarea graficelor **IEEC** s-a procedat ingenerește: Inginerul, ori de câte ori, într-o relație, introduce o valoare greșită, o corectează împărțind cu valoarea greșită (considerată la numărător, la numitor este invers) și înmulțind cu cea corectă.



Prin împărțire elimină din relație valoarea greșită, sau veche și, prin înmulțire, introduce valoarea nouă sau pe cea corectă. La fel procedează și în cazul în care are de introdus o succesiune / serie de valori diferite într-o relație: împarte cu cea veche / anterioară și înmulțește cu valoarea nouă / următoare.

Pentru a profita de programele matematice existente, de înregistrare a IEC, ca de exemplu, în programul lui **Stephan Wolfram** MATHEMATICA 8 în care prin expresiile

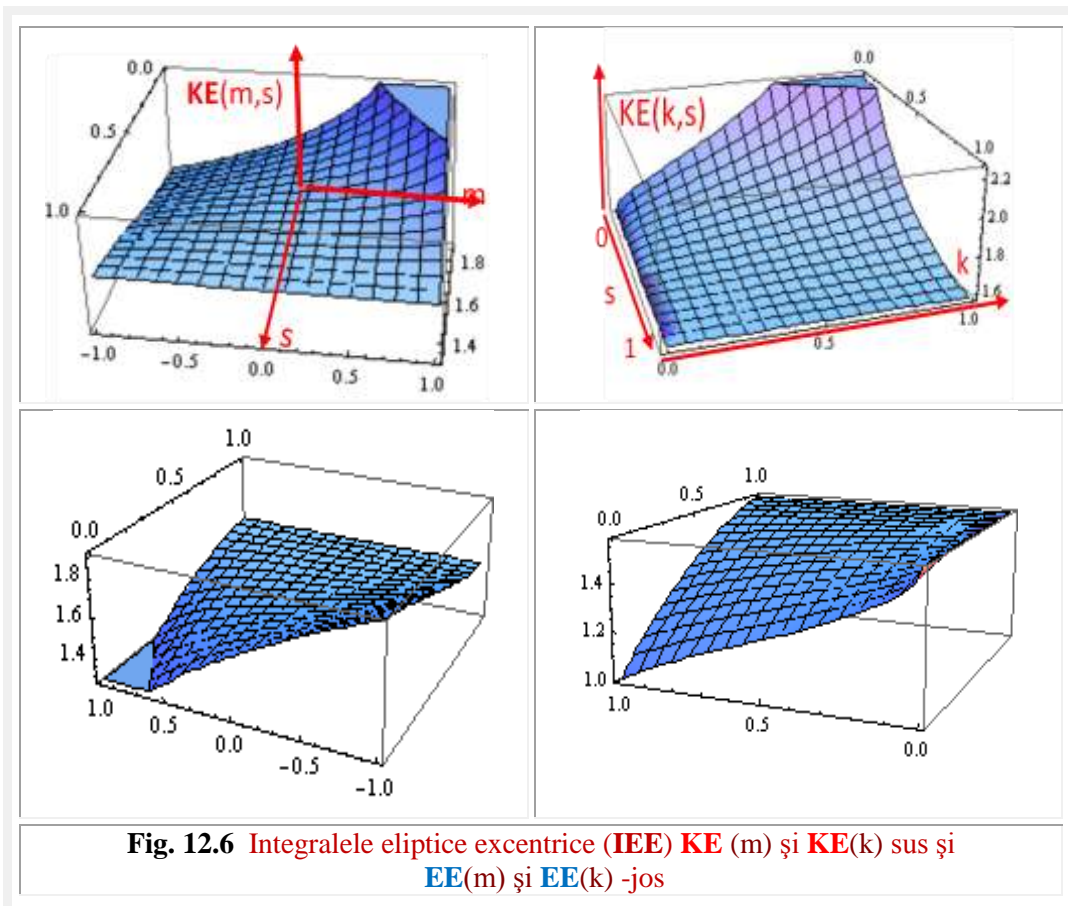
```
Plot[{EllipticK[m],Pi/2},{m,0,1},GridLines→Automatic]
```

```
Plot[{EllipticE[m],Pi/2},{m,0,1},GridLines→Automatic]
```

se înregistrează graficele **IEE**, în funcție de m , în mod separat, iar prin expresia

```
Plot[{EllipticE[m],EllipticE[m^0.5],  
EllipticK[m],EllipticK[m^0.5],Pi/2},{m,0,1,}]
```

se înregistrează simultan ambele grafice, atât ca funcții de modulul m cât și ca funcții de modulul $k = \sqrt{m} = m^{0.5} = m^{0.5}$.



Deoarece **IEE** sunt o familie de funcții pentru $s \in [-1, 1]$ și/sau $\varepsilon \in [0, 2\pi]$, comenzile se modifică astfel

```
Plot[Evaluate[Table[{ {EllipticK[m(-0.5Cos[x]Sin[x]+Sin[x]Sqrt[1-0.25  
Sin[x]^2])^2/Sin[x]^2]}, {EllipticK[m^0.5(-0.5Cos[x]Sin[x]+Sin[x]Sqrt[1-0.25  
Sin[x]^2])^2/Sin[x]^2]}, {EllipticE[m(-0.5Cos[x]Sin[x]+Sin[x]Sqrt[1-0.25  
Sin[x]^2])^2/Sin[x]^2]}, {Pi/2}, {EllipticE[m^0.5(-0.5Cos[x]Sin[x]+Sin[x]Sqrt[1-  
0.25Sin[x]^2])^2/Sin[x]^2]}, {1.5708}}, {x,0,Pi/2}], {m,0,1}]
```

în care se observă înmulțirea modulului m și/sau k^2 cu $\text{sex}^2 \varphi \rightarrow$ pentru introducerea expresiei noi, din relația (12.06) și împărțirea lui cu $\sin^2 \varphi$, pentru eliminarea expresiei vechi \rightarrow centrice.

O primă aplicație a **IEE** consistă în integrarea integralelor excentrice.

Astfel, utilizând același program a lui **Stephen Wolfram Mathematica 8**, dacă, de exemplu, pentru $m = 0,5$ se scriu expresiile din **figura 12.5** - sus, pentru $m \in [-1, 1]$ și diverse valori date lui $s \in [0, 1]$ se pot obține graficele integralelor eliptice complete excentrice de prima speță **KE(m)** și din graficele pentru un anumit modul k și excentricitate numerică s se pot obține și valorile, cu precizia metodelor grafice, ale acestor integrale. Dar se pot obține și valori numerice.

O imagine mai concludentă asupra **IEE** se poate obține prin reprezentarea lor în 3D (**Fig. 12.6**). Rezultă și diferențele dintre **IEE** de modul $m = k^2$ - stânga, față de acelea de modul k din dreapta figurii.

În partea superioară a figurii sunt prezentate integralele eliptice excentrice complete (**IEEC**) de speța / tip întâia / unu **KE**, iar în partea inferioară cele de speța / tip a doua / doi **EE**. Se observă, și din reprezentările 3D, că pentru excentricitatea numerică $s = 1$, toate **IEEC** ($k, S(s = 1, \varepsilon = 0)$) = $\pi/2$, atât cele de prima speță cât și cele de speța a doua.

De asemenea, că pentru $s = 0 \rightarrow$ **IEEC** ($k, s = 0$) \rightarrow **IEC**(k).

O a doua modalitate de reprezentare a **IEE** complete și incomplete este folosirea seriilor de puteri ale acestor integrale.

Seriile integralelor eliptice complete **K** de variabila $m \rightarrow K(m)$ și, respectiv, $k \rightarrow K(k)$ sunt

$$(12.17) K(m) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} m + \frac{9}{128} \pi m^2 + \frac{25}{512} \pi m^3 + \frac{1225}{32768} \pi m^4 + \frac{3969}{131072} \pi m^5 + \dots$$

$$(12.18) K(k) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} \pi k^2 + \frac{9}{128} \pi k^4 + \frac{25}{512} \pi k^6 + \frac{1225}{32768} \pi k^8 + \frac{1225}{131072} \pi k^{10} + \dots$$

Iar seriile integralelor eliptice complete de speța/tip a doua sunt

$$(12.19) E(m) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} m - \frac{3}{512} \pi m^2 - \frac{5}{512} \pi m^3 - \frac{175}{32768} \pi m^4 - \frac{441}{131072} \pi m^5$$

$$(12.20) E(k) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} k^2 - \frac{3}{512} \pi k^4 - \frac{5}{512} \pi k^6 - \frac{175}{32768} \pi k^8 - \frac{441}{131072} \pi k^{10}$$

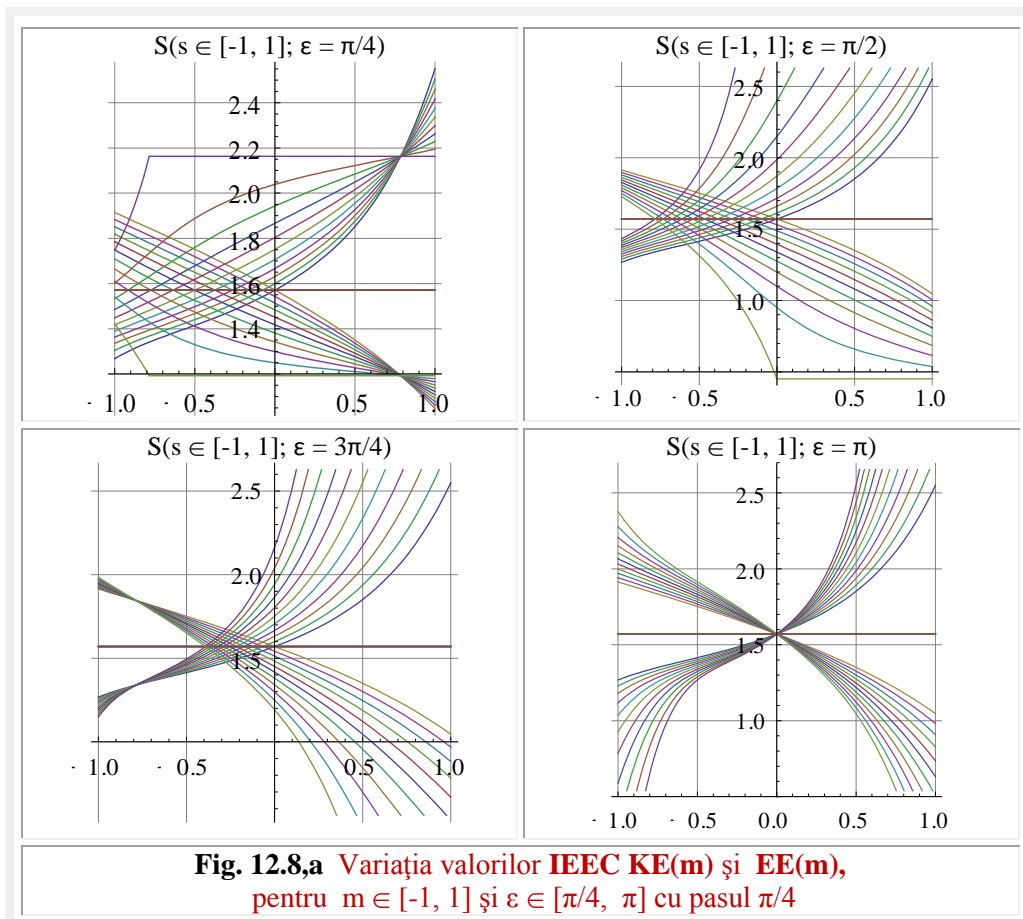
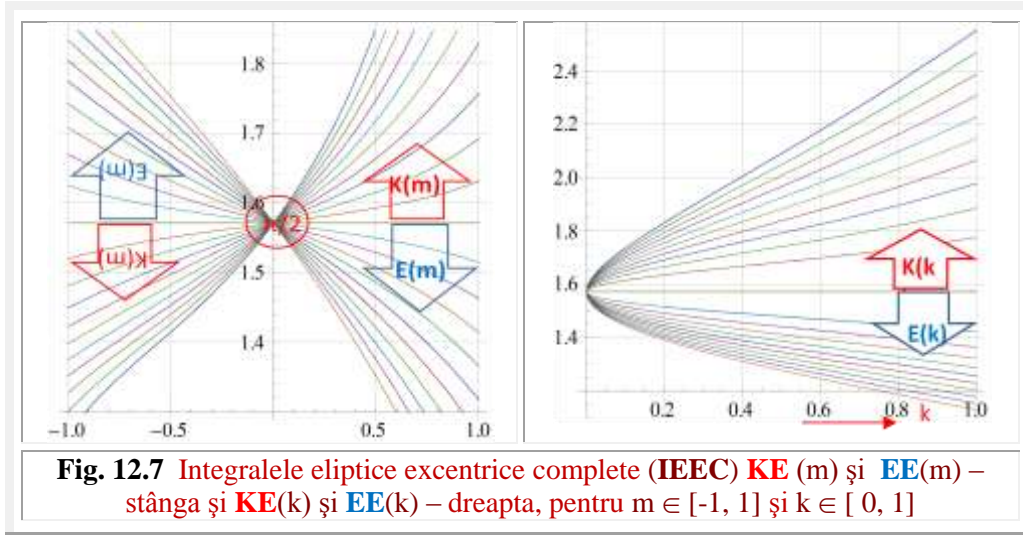
și au graficele din **figura 12.7**.

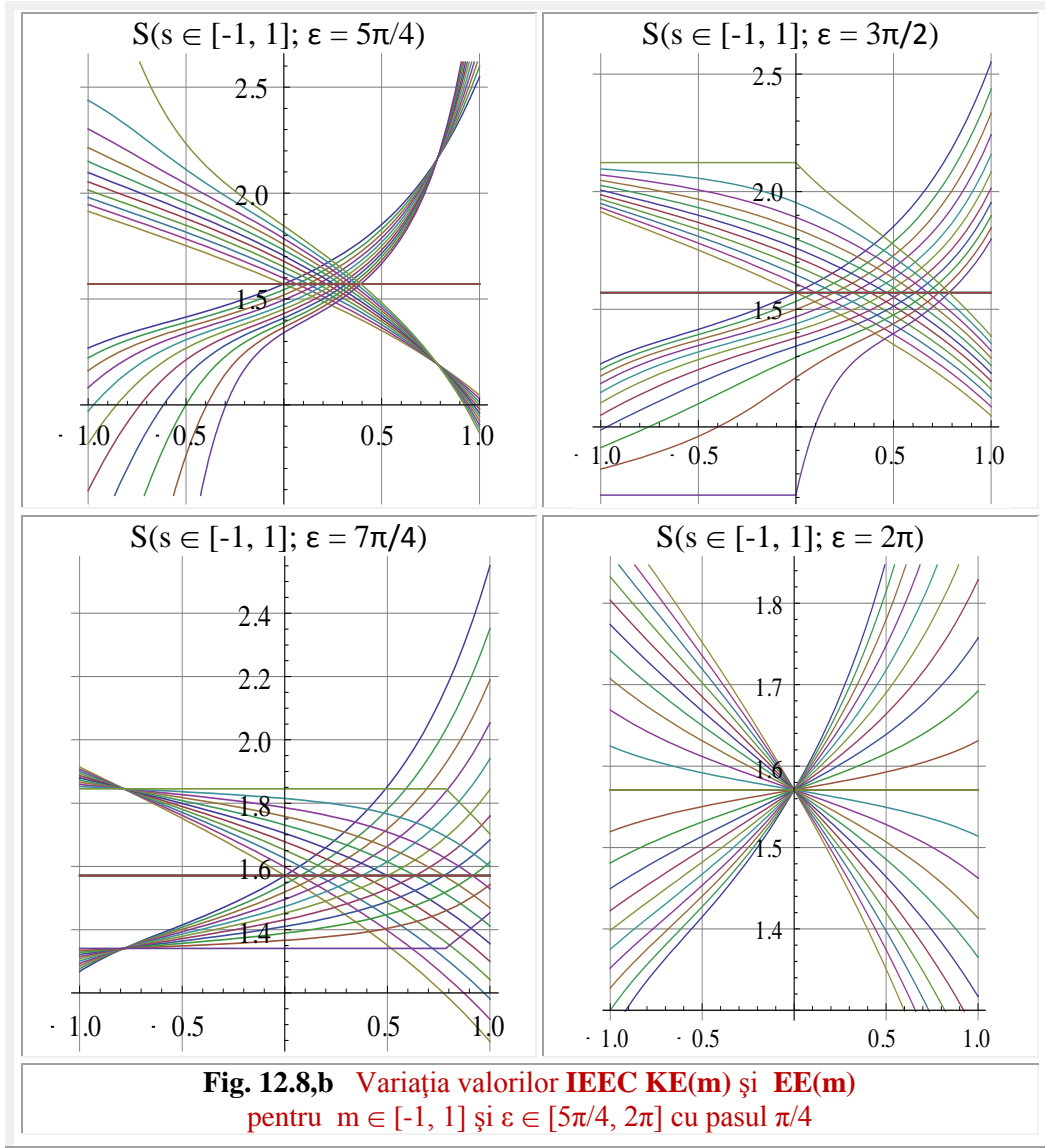
În toate secvențele din **figura 12.8,b**, $m \in [-1, 1]$, iar excentrul $S(s, \varepsilon)$ evoluează în jurul originii $O(0,0)$ cu $\varepsilon \in [0, 2\pi]$ cu pasul $\pi/4$.

O sinteză a **IEEC**, ca funcții de m și k , este vizibilă în **figurile 12.8,c**.

În **figura 12.8,d** sunt prezentate, comparativ, **IEEC KE**, în care, m variază atât în intervalul $[-1, 1]$, cât și în intervalul lui $k \in [0,1]$. Aceasta, pentru o comparație între **IEEC** de m și de k mai ușor de realizat, cu atât mai mult, cu cât graficele din 3D, ale celor doua tipuri de **IEEC**, au fost reprezentate separat : în **figura 12.8,d** pentru **KE** și în **figura 12.8,e** pentru **EE**.

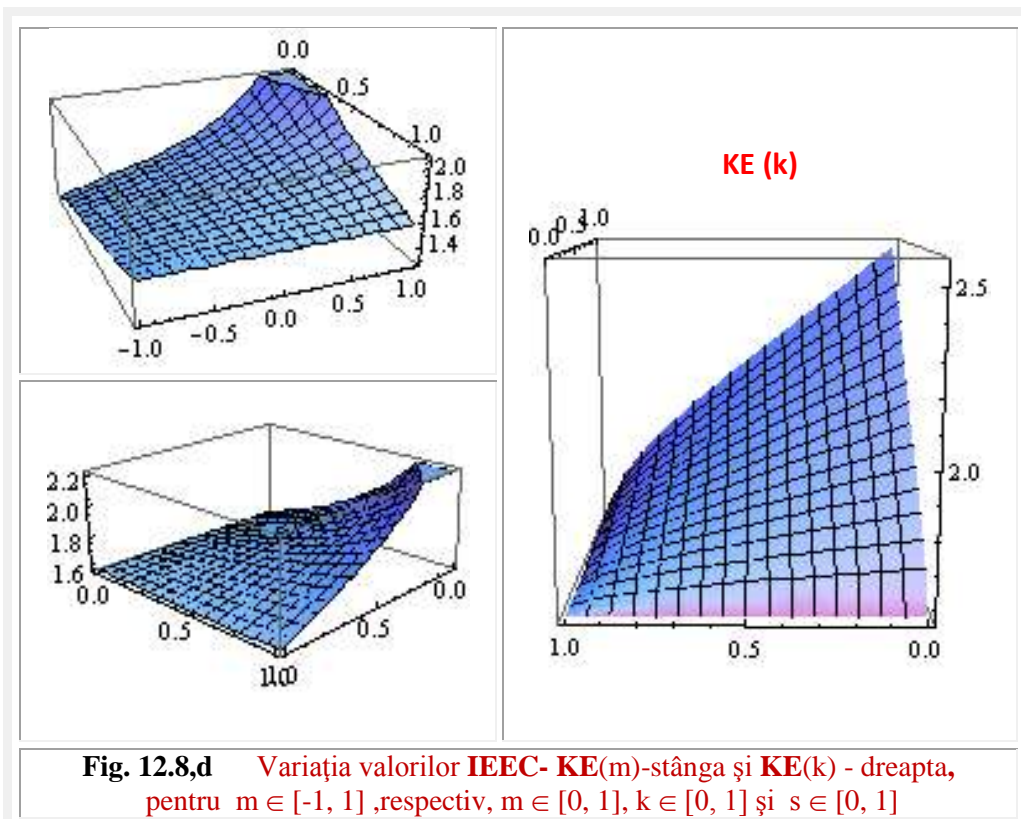
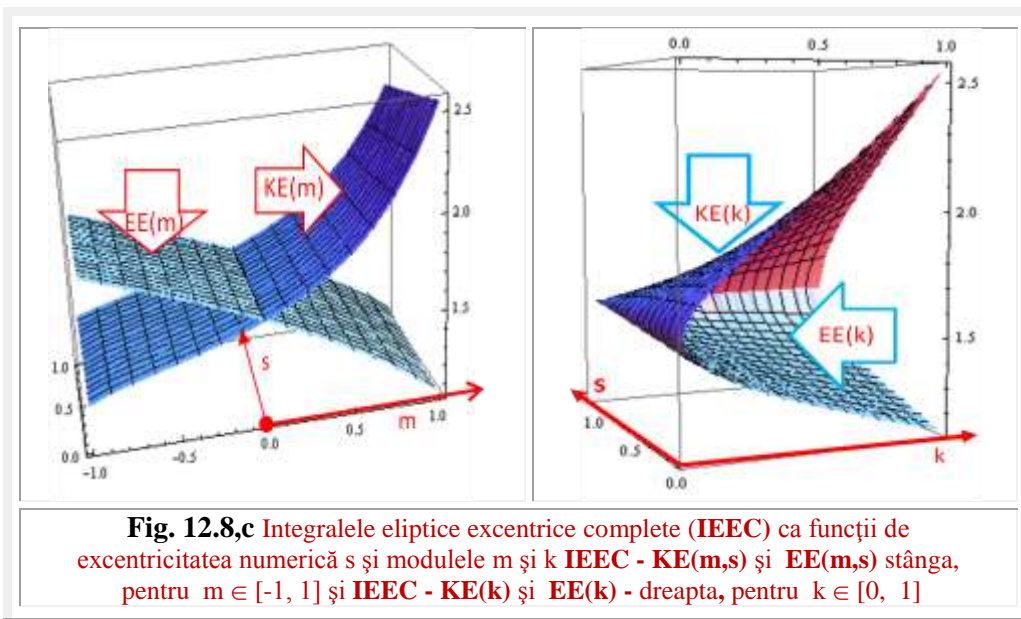
Graficele familiilor **IEEC** sunt prezentate în **figura 12.8**; cele care evoluează în cadranele I și III aparțin lui **KE(m)**, iar cele din cadranele II și IV aparțin lui **EE(m)**.

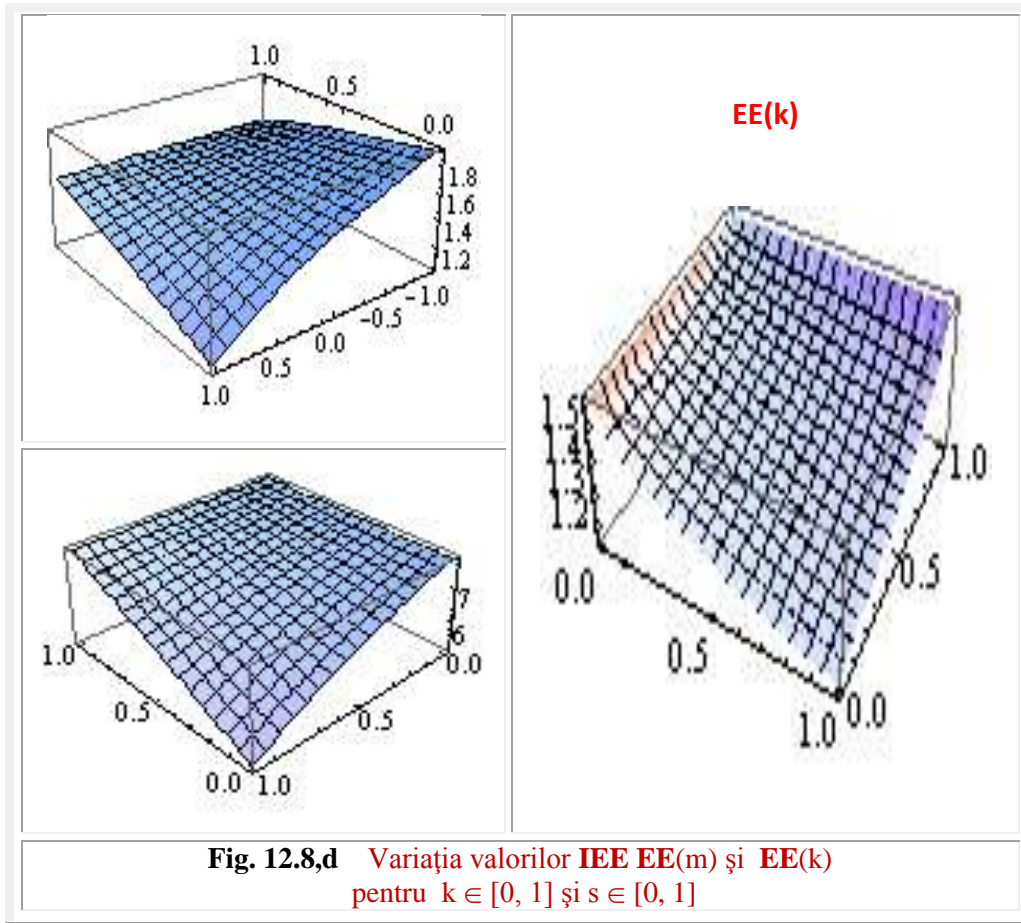




IEE de m au valori și pentru $m < 0$, ceea ce nu au cele de parametru/ modul k deoarece $k^2 = m$.

Se observă că suprafața $KE(m)$ este, **aparent**, concavă, iar suprafața $KE(k)$ este, aparent, convexă. La **IEEC** de speța a doua situația este inversă: $EE(m)$ sunt suprafețe aparent convexe, iar $EE(k)$ sunt suprafețe aparent concave, într-o primă aproximație sau privite la o scară globală. Deoarece, atât $K(k)$ cât și $K(m)$, deci **IEEC** pentru $s = 0$, sunt curbe care tind asimptotic spre $y = +\infty$, fiind, deci, concave, cel puțin pentru valorile mai ridicate ale lui m și/sau k , ceea ce pentru $K(k)$ este mai greu observabil și pentru $K(m)$ este evident în **figura 12.8,d**.





Caracterul convex al curbilor $E(m)$, adică **IEEC** de $s = 0$, este ușor observabil în **figura 12.8,e**, în timp ce, același caracter al curbei $E(k)$ este mai greu vizibil. Faptul derivă și din punctul/unghiul din care este “văzută” suprafața de programul matematic.

Aceleași **IEEC**, în **3D**, privite din alt unghi, pot arăta mult diferit, ca în **figura 12.8, c** –stânga, în care se observă că toate curbele $K(m)$ sunt concave și $E(m)$ convexe. În aceeași figură, în dreapta, se observa mai bine schimbarea caracterului curbelor din familia **IEEC** de k , din cave pentru $EE(s = 0)$, ajungând liniare, pentru $s = 1$, ca și $KE(k, s = 1)$.

Este evident că, pentru $k = 0$, indiferent de valoarea excentricității numerice s , $EE = KE = 1 = \text{constant}$, ceea ce rezultă și din relațiile de definire ale acestor **IEE**, cât și a celor centrice.

Ca și în cazul **FSM-CE** și **FSM** care reprezintă **IEE** și / sau **FEE**, dacă excentrul $S(s, \varepsilon)$ este un punct fix în planul excentricei eliptice, atunci s și ε sunt constante și suntem în domeniul **IEE** de excentru punct fix, iar dacă, în timp ce $k = \text{constant}$, $S(s, \varepsilon)$ se deplasează odată cu modificarea argumentului $\theta = \varphi$, în plan, după

anumite reguli sau pe anumite curbe, adică, dacă e și/sau ε sunt variabile, ne situăm în domeniul **IEE** de excentru variabil.

Dacă excentrul S variază după curbe excentrice (excentrice circulare, eliptice, hiperbolice etc.), atunci suntem în domeniul **IEE** de dublă, triplă sau multiplă excentricitate.

Chiar dacă excentricitățile numerice consecutive s_i și/sau ε_i sunt valoric diferite. Fiecare excentru $S_i(s_i, \varepsilon_i)$ poate fi fix și/sau variabil, putând evolua independent.

12.4 SEMNIFICAȚIA INTEGRALELOR ELIPTICE EXCENTRICE

Ce reprezintă **IEE**? Înainte de a examina care sunt semnificațiile geometrice ale **IEE** să urmărim care sunt semnificațiile geometrice ale **IEC**.

Trei cercuri și trei elipse importante, după părerea noastră, sunt prezentate în **figura 12.9**. $C_1(O, 1)$ este cercul unitate sau trigonometric, $C_2([s/2, 0], s/2 = k/2)$ este cercul pe care se află excentrul fix $S(s, 0) \equiv K(k, 0) - k$ excentricitatea liniară numerică a elipsozelor- și pe care evoluează excentrul variabil/mobil $F(x_F = s \cdot \sin^2 \theta, y_F = s \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta)$, iar $C_3(O, s)$ este cercul de rază egală cu excentricitatea numerică și, totodată, egală cu modulul integralelor eliptice, centrice și excentrice, ($s = k$).

Cele trei elipse importante sunt:

- $E_1(O, a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}})$, **elipsa unitate** ($R = a = 1$), a cărei punct curent are raza ρ polară, din $O(0,0)$, dată de relația care intră și în expresia **IEC** de prima speță/tip $F(k)$

$$(12.21) \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

- $E_2(O, a = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}, b = 1)$, inversa elipsei E_1 , sau, altfel spus elipsa E_1 rotită cu $\frac{\pi}{2}$ și
- $E_3(O, a = 1, b = \sqrt{1-k^2})$ a cărei rază polară, din $O(0,0)$, pentru aceleași coordonate x, y cu ale punctului $M(x = cn u, y = sn u)$ de pe C_1 este funcția **dn u** a cărei expresie este aceeași cu a integrandului integralei eliptice de speța a doua $E(k)$.

Poziția unui punct curent $M(x,y)$ al elipsei, în coordonate polare, se poate exprima în diverse moduri; trei dintre acestea fiind mai des utilizate:

- cu polul în $O(0, 0)$

$$(12.22) \quad \rho = \frac{a\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{b}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \varphi}}, \text{ în funcție de unghiul } \varphi \text{ la centrul } O(0,0);$$

în care e este excentricitatea liniară a elipsei, aceeași cu excentricitatea reală e din domeniul **FSM-CE**, iar $s \equiv k = \frac{e}{R} = \frac{e}{a}$ este excentricitatea numerică pentru $R = a$;

- cu polul în focarul $F_1(e, 0)$

$$(12.23) \quad r_1 = a - e \cdot \cos E = a(1 - k \cdot \cos E), \text{ în funcție de anomalia excentrică } E;$$

$$(12.24) \quad r_1 = \frac{p}{1+k \cdot \cos v}, \text{ în funcție de anomalia adevărată/reală } v$$

- cu polul în vârful elipsei $V(-a,0)$

$$(12.25) \quad R = \frac{2b^2 \cos \psi}{a(1-k^2 \cos^2 \psi)}, \text{ în funcție de unghiul din } V, \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Dacă $b = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$, atunci din (12.22) rezultă $\rho = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$ și

$$(12.26) \quad u = \int_0^\varphi \rho(\varphi) \cdot d\varphi = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

este expresia arcului de elipsă circularizat, notat \widehat{AB}° și reprezentat în **figura 12.11** împreună cu diversele relații de calcul ale acestor arce.

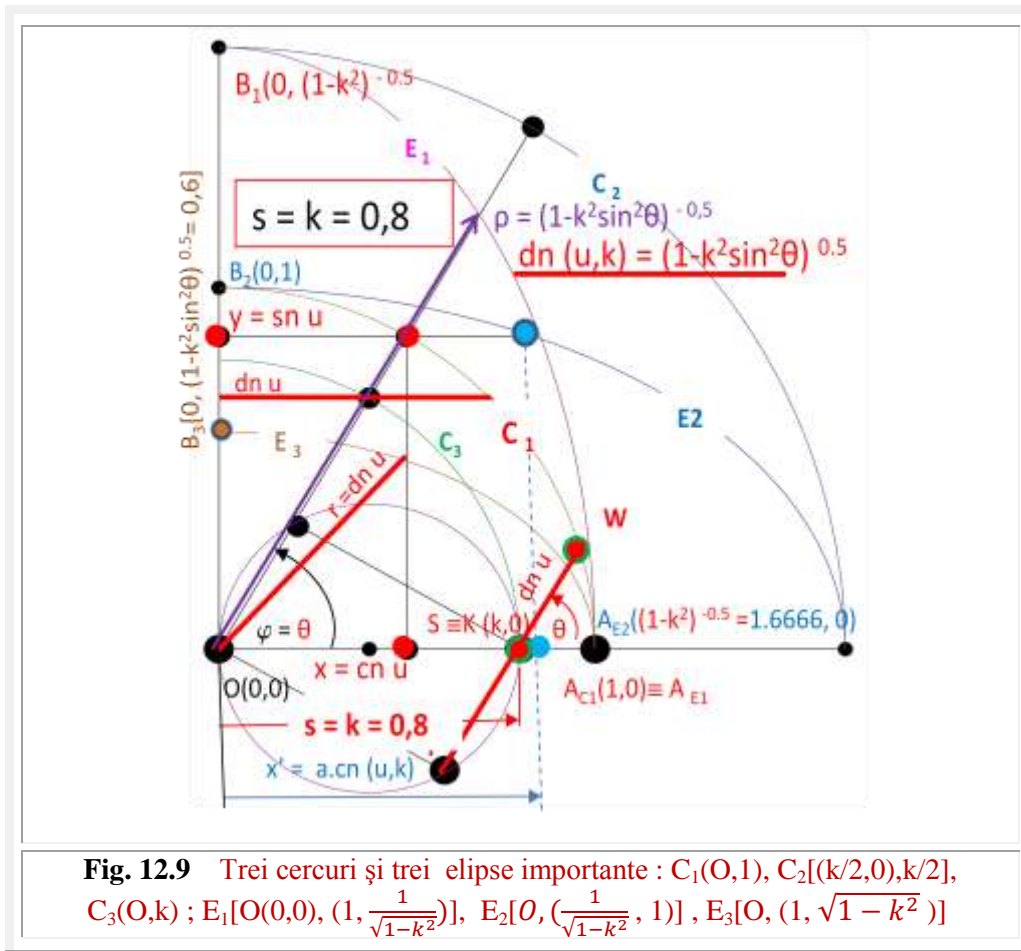
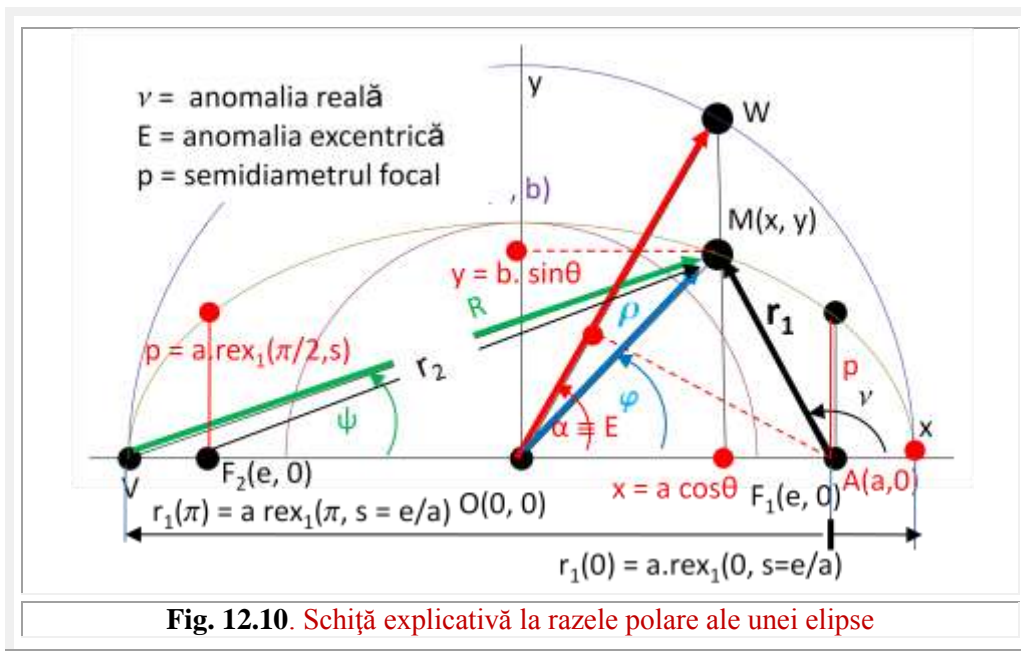


Fig. 12.9 Trei cercuri și trei elipse importante : $C_1(O,1)$, $C_2[(k/2,0),k/2]$, $C_3(O,k)$; $E_1[O(0,0), (1, \frac{1}{\sqrt{1-k^2}})]$, $E_2[O, (\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}, 1)]$, $E_3[O, (1, \sqrt{1-k^2})]$

Ca urmare, integrala eliptică de prima speță/tip exprimă lungimea arcului u de pe elipsă E_1 , arc corespunzător arcului φ de pe cercul unitate C_1 . Deoarece, $\rho \geq R = a$,



adică, raza polară a elipsei E_1 , pe care se măsoară arcul u , este mai mare decât raza $R = a = 1$ a cercului, pe care se măsoară arcul φ , cu două excepții, $\varphi = 0$ și $\varphi = \pi$, rezultă că $u \geq \varphi$. În dinamica unui punct material greu supus la legături, $K(k)$ exprimă perioada de oscilație în vid a pendulului matematic simplu.

În geometria curbelor plane, lungimea unei elipse este dată de $E(k)$, ca și expresia coeficientului de portanță al unei aripi delta subțiri cu borduri de atac subsonice (**Richard Șelescu**, Formule analitice închise pentru aproximarea integralei eliptice complete de speța I-a și aII-a ale lui **Legendre**, V. Google).

Se remarcă faptul că atât p cât și r sunt raze polare din originea $O(0,0)$ ale elipselor: p a elipsei E_1 și r a elipsei E_3 , dar pentru unghiuri φ_1 și, respectiv pentru $\varphi_3 = \psi$, așa cum se observă mai bine în **figura 12.12**.

Raza polară a elipsei E_3 este $r(\theta) = \sqrt{\cos^2 \theta + (1 - k^2) \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} = \operatorname{dn} u$ și elementul de arc al acestei elipse este

$$(12.27) \quad ds_3 = r(\theta) \cdot d\theta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \cdot d\theta$$

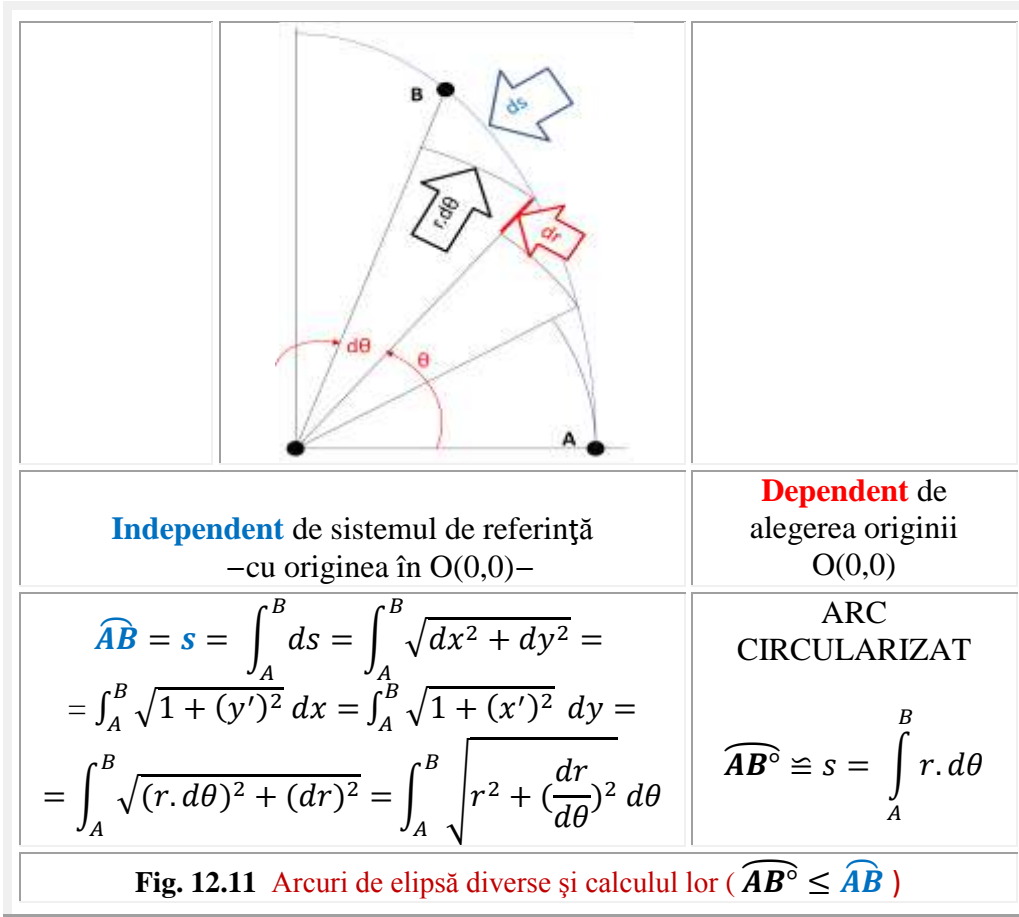
astfel că lungimea arcului s_3 va fi

$$(12.28) \quad s_3 = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \cdot d\theta$$

Adică, tot un arc de elipsă este dat și de integrala eliptică de speța /tipul a doua.

Familiile celor două elipse E_1 și E_3 sunt prezentate împreună în **figura 12.13**.

Deoarece, în 2D, programul de matematică nu reprezenta și elipsele (degenerate în drepte) pentru $k = 1$, s-a recurs și la reprezentarea lor în 3D, caz în care programul a acceptat și valoarea $k = 1$. Așa cum se poate observa în **figura 12.13**, în 3D – dreapta, E_1 degenează în două drepte paralele cu axa Oy , ce trec prin vârful



elipselor $V_{1,2} (\pm 1, 0) = \pm A$, iar E_3 degenerază în două segmente de dreaptă care unesc cele două vârfuri ale elipsei E_3 de pe axa Ox , între punctele $\pm A$ de abscise $x_{1,2} = \pm a = \pm 1$.

Așa după cum se știe, dintr-un capitol anterior și nu numai, excentrele eliptice, care au excentricitățile proporționale cu raportul semiaxelor, adică

$$(12.29) \quad \frac{a}{b} = \frac{e_a}{e_b} = \frac{e_x}{e_y} \rightarrow \frac{e_a}{a} = \frac{e_b}{b} \rightarrow s_a = s_b = s$$

degenerază în elipse, așa cum se poate observa în **figura 12.14**. Totuși, **diferențe** dintre o elipsă clasică, ordinară sau centrică și una excentrică **există**, sunt cu atât mai pregnante cu cât excentricitatea este mai mare și constă în distribuția punctelor pe arcul de elipsă comun.

Dacă $e_a, e_b, s > 0$, atunci punctele elipsei, din primul cadran, migrează spre punctul $A(a,0)$ al elipsei. Astfel, punctul $M_C (x = a \cdot \cos\theta, y = b \cdot \sin\theta)$ al elipsei E_3 centrice $E(s = 0, \varepsilon = 0)$ este la stânga punctului $M_{Ex} (X = a \cdot \text{cex}(\theta, E_x), Y = b \cdot \text{sex}(\theta, E_y))$ al elipsei de $S(s = 0,4; \varepsilon = 0)$ din **figura 12.14**.

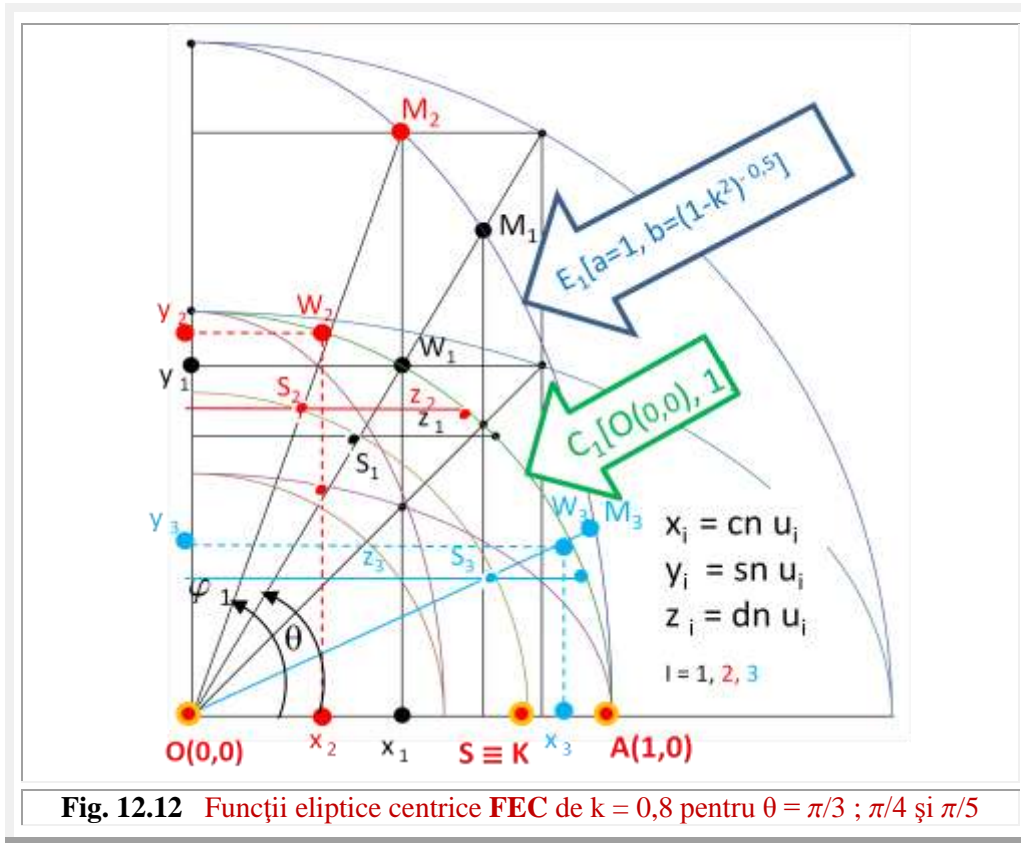


Fig. 12.12 Funcții eliptice centrice FEC de $k = 0,8$ pentru $\theta = \pi/3 ; \pi/4$ și $\pi/5$

Dacă unghiul polar φ_3 , din originea $O(0, 0)$ și centrul elipsei E_3 , marchează poziția pe elipsă a punctului curent M_C , atunci unghiul φ_{Ex} marchează poziția, pe aceeași elipsă, a punctului M_{Ex} .

Rezultă că

$$(12.30) \quad M_{Ex} \begin{cases} X = a \cdot cex(\theta, Ea) = a \cdot cex(\theta, s_a) = a \cdot \cos \alpha_{Ex} \\ Y = b \cdot sex(\theta, Eb) = b \cdot sex(\theta, s_b) = b \cdot \sin \alpha_{Ex} \end{cases}$$

Construcția elipsei s-a făcut prin prima metodă, a centrelor comune $O_a \equiv O_b \equiv O(0,0)$ –ale celor două cercuri de raze a și b – și ale excentrelor distincte – E_a și E_b , din care, semidreptele de direcție θ intersectează cele două cercuri C_a și C_b . Sau $E_x \equiv E_a$ și $E_y \equiv E_b$ excentre care determină coordonata X și respectiv Y a excentricei eliptice.

Elementul “excentric $\rightarrow u_{Ex} = v = AM_{CEx}$ ” de arc exprimat prin **FSM-CE** este, pentru elipsa E_3 cu $a = 1$ și $b = \sqrt{1 - k^2}$

$$(12.31) \quad dS_{Ex} = \sqrt{dX^2 + dY^2} = dex(\theta, s) \cdot \sqrt{cex^2\theta + (1 - k^2) \cdot sex^2\theta} d\theta = dex\theta \cdot \sqrt{1 - k^2 sex^2\theta} d\theta$$

în care diferențialele sunt

$$(12.32) \quad \begin{cases} dX = X' d\theta = -dex\theta \cdot sex\theta \cdot d\theta \\ dY = Y' d\theta = \sqrt{1 - k^2} dex\theta \cdot cex\theta \cdot d\theta \end{cases}$$

și se știe că **FSM-CE** derivată excentrică de variabila excentrică θ **dex θ** este, printre altele, și raportul

$$(12.33) \quad \text{dex}\theta = \frac{d\alpha}{d\theta} = 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} = \frac{\text{rex}\theta}{\text{del}\theta} = \frac{\text{rex}\theta}{\Delta\theta}$$

Întroducând în (12.31) expresia lui **dex θ** rezultă

$$(12.34) \quad dS_{\text{Ex}} = \sqrt{1 - k^2 s \text{ex}^2 \theta} \cdot d\alpha = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \cdot d\alpha$$

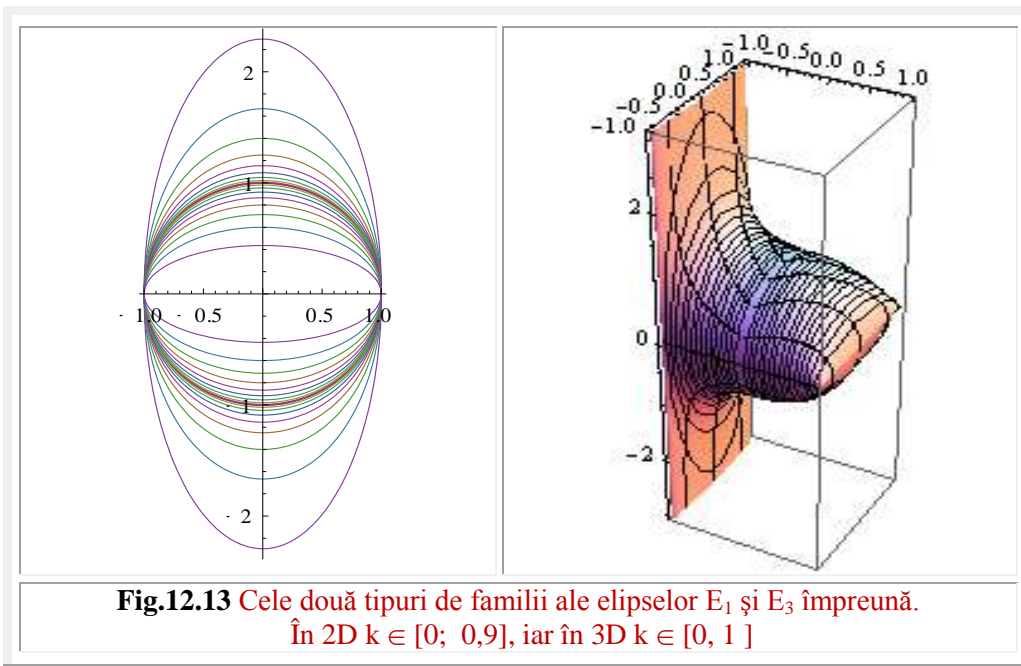
astfel că expresia **EEI** de speța/tip a doua devine

$$(12.35) \quad \varepsilon E = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 s \text{ex}^2 \theta} \cdot d\theta = \int_0^\alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \cdot d\alpha, \alpha \equiv \alpha_{\text{Ex}}$$

și pe baza dependenței dintre unghiul la excentru θ și unghiul la centru α

$$(12.36) \quad \begin{cases} \alpha(\theta) = \theta - \beta(\theta) = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \\ \theta(\alpha) = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\text{Rex}\alpha} = \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} = \\ = \alpha + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \sin n \alpha \end{cases}$$

IEE devine

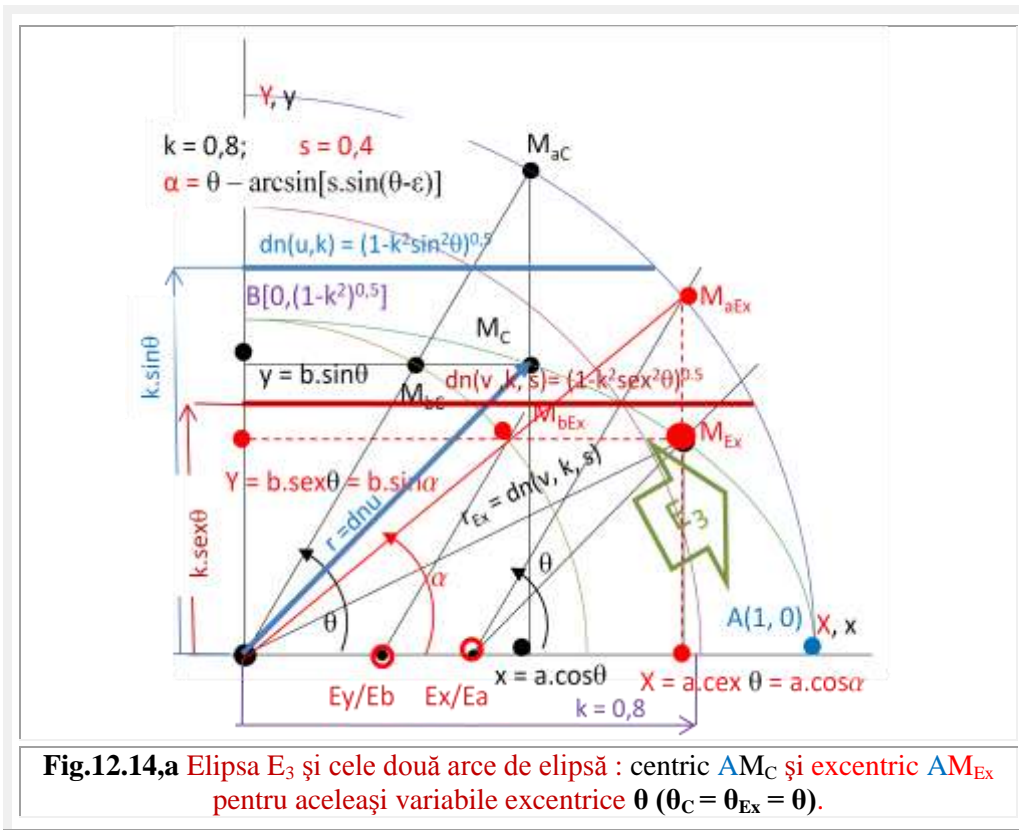


$$(12.37) \quad \varepsilon E = \int_0^{\alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\text{Rex}\alpha}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \cdot d\alpha.$$

Soluția se poate găsi și mai simplu și mai direct. Raza polară centrică a punctului M_C al elipsei E_3 , din **figura 12.14,a**, este $r = OM_C$ și direcția ei φ_3 este defazată în urmă față de direcția θ a semidreptei care generează punctele Ma și Mb și care, în final, determină punctul M_C al elipsei.

Raza polară excentrică r_{Ex} a punctului M_{Ex} al elipsei E_3 , din originea $O(0, 0)$, transformatul excentric al punctului M_C al aceiași elipse din **figura 12.14,a** este

(12.38) $r_{Ex} = \sqrt{X^2 + y^2} = \sqrt{\cos^2 \alpha + (1 - k^2)\sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}$
 și este și ea defazată în urmă față de direcția semidreptei α care generează punctele Ma_{Ex} și Mb_{Ex} și, apoi, pe M_{Ex} .



Elementul de arc circularizat al elipsei E_3 , notând cu v , arcul AM_{Ex} , va fi

(12.39) $dv = r_{Ex} \cdot d\alpha = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$, astfel ca arcul v al elipsei este

(12.40) $v = v(\alpha, k, s) = \int_0^{\theta(\alpha)} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \alpha} d\alpha =$
 $= \int_0^{\alpha(\theta)} \sqrt{1 - k^2 \text{sex}^2[\theta, S(s, 0)]} d\theta$

În concluzie, o **IEE** de speța a doua se poate rezolva printr-o **IEC** de același tip prin schimbarea limitei superioare excentrice θ a **IEC** cu limita centrică $\alpha(\theta) = \theta - \arcsin(s \cdot \sin \theta)$.

Altfel spus, dacă **IEC** dă arcul de elipsă $\widehat{AM_C}$, **IEE** dă arcul aceleași elipse $\widehat{AM_{Ex}}$, dar de lungime mai redusă, pentru $a > b$, $s > 0$ și $\epsilon = 0$, așa cum indică și relația (12.37). Dacă $a < b$, $s > 0$, cazul elipsei E_1 din **figura 12.12**, situația se păstrează, în sensul că punctul curent pe elipsă, din cadranul I, M_{Ex} se deplasează spre punctul A, îndepărtându-se de M_C , în sens dextrorum / dextrogin.

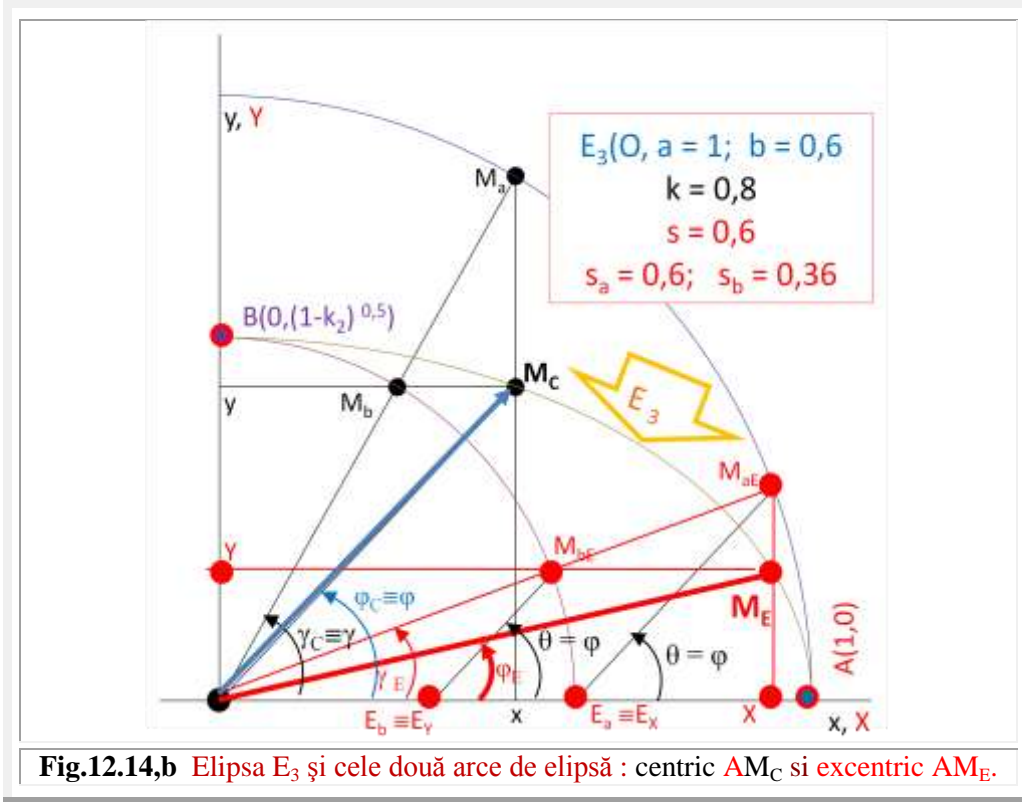


Fig.12.14,b Elipsa E_3 și cele două arce de elipsă : centric AM_C și excentric AM_E .

Se cunoaște că ecuația conicelor, în coordonate polare, având drept pol centrul conice, în cazul elipsei punctul $O(0, 0)$, este, cu notațiile din **figura 12.10**, pentru o elipsă oarecare $E(O, a, b)$

$$(12.41) \quad \rho(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi}}$$

Pentru elipsa $E_1(O, a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}})$ excentricitatea numerică a acestei elipse este

$$(12.42) \quad \epsilon = \frac{e}{a} \rightarrow \epsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \frac{1}{1-k^2} = \frac{-k^2}{1-k^2}$$

care, înlocuită în relația anterioară, rezultă

$$(12.43) \quad \rho(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

expresia integrandului din **IEC incompletă** de speța întâia $F(\theta, k)$.

Integrala eliptică incompletă de prima speță $F(\theta, k)$ exprimă lungimea arcului de elipsă E_1 de la A la M_C , arc notat cu $u = \text{am}(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$.

Deoarece

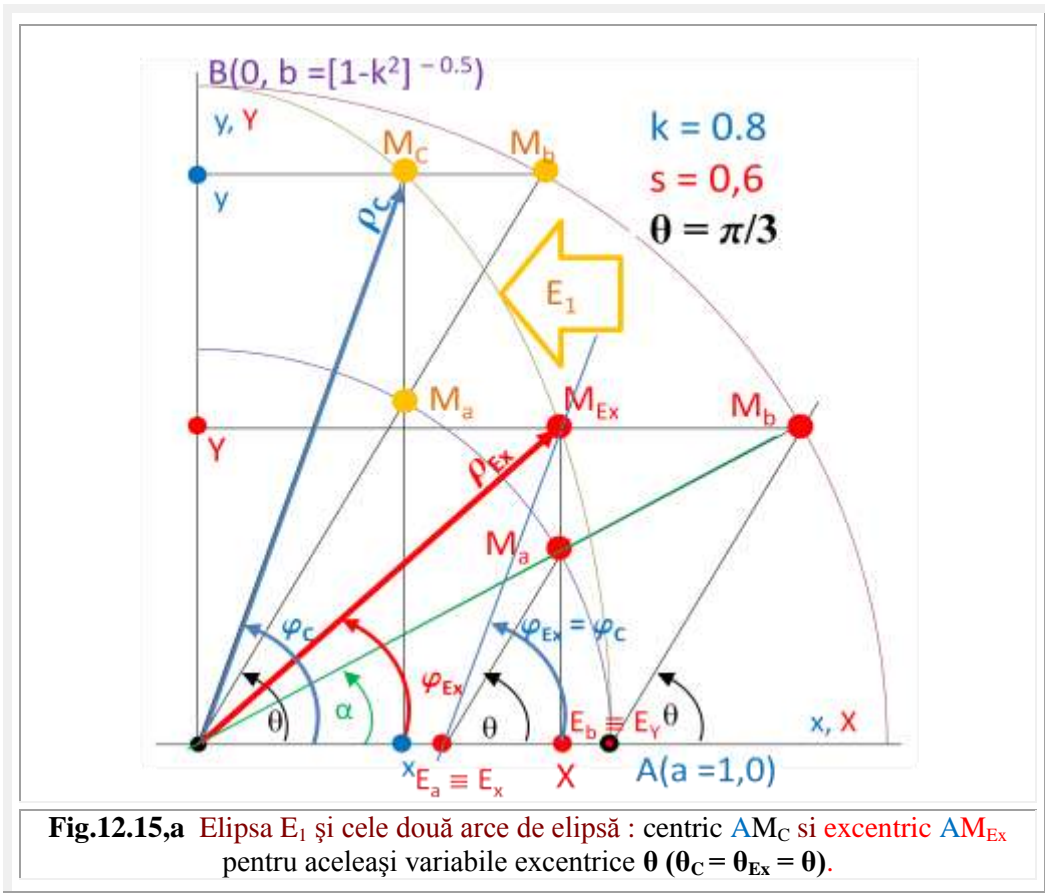
$$(12.44) \quad y = \rho(\varphi) \cdot \sin \varphi = b \cdot \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - k^2}},$$

din această egalitate, rezultă dependența dintre cele două unghiuri θ și φ

$$(12.45) \quad \varphi(\theta) = \arcsin \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}} = \arcsin(s_v(\theta) \cdot \sin \theta)$$

în care, excentricitatea variabilă $s_v(\theta)$ are expresia $\rho(\varphi)/b = \sqrt{1-k^2} \cdot \rho(\varphi)$, sau

$$(12.46) \quad s_v(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \theta}}$$



Se observă (**Fig.12.15,a**) că unghiul dreptei $E_a M_{Ex}$ cu axa x , să-l notăm cu φ_{CEx} , este chiar unghiul φ_C . Dacă în integrantul (12.40), unghiul $\varphi = \varphi_C$ este o variabilă centrică, φ_{CEx} este o variabilă excentrică; din excentrul $E_a \equiv S_a$, deoarece $R = a = 1$, astfel ca $s_a = e_a$.

E necesar să se demonstreze că cele două unghiuri φ_C și φ_{CEx} sunt egale. În acest scop, vom arăta că tangentele celor două unghiuri sunt aceleași. Astfel

$$(12.47) \quad \tan \varphi_C = \frac{y}{x} = b \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = b \cdot \tan \theta$$

În triunghiul dreptunghic $E_a M_a X$, ipotenuza $E_a M_a$ este tocmai prima determinare, de indice 1, a **FSM-CE** radial excentric de variabilă excentrică θ , adică

$$(12.48) \quad E_a M_a = a \cdot \text{rex}(\theta, S(s = e_a, \varepsilon = 0)) = \text{rex}(\theta, S(s = e_a, \varepsilon = 0)), a = 1$$

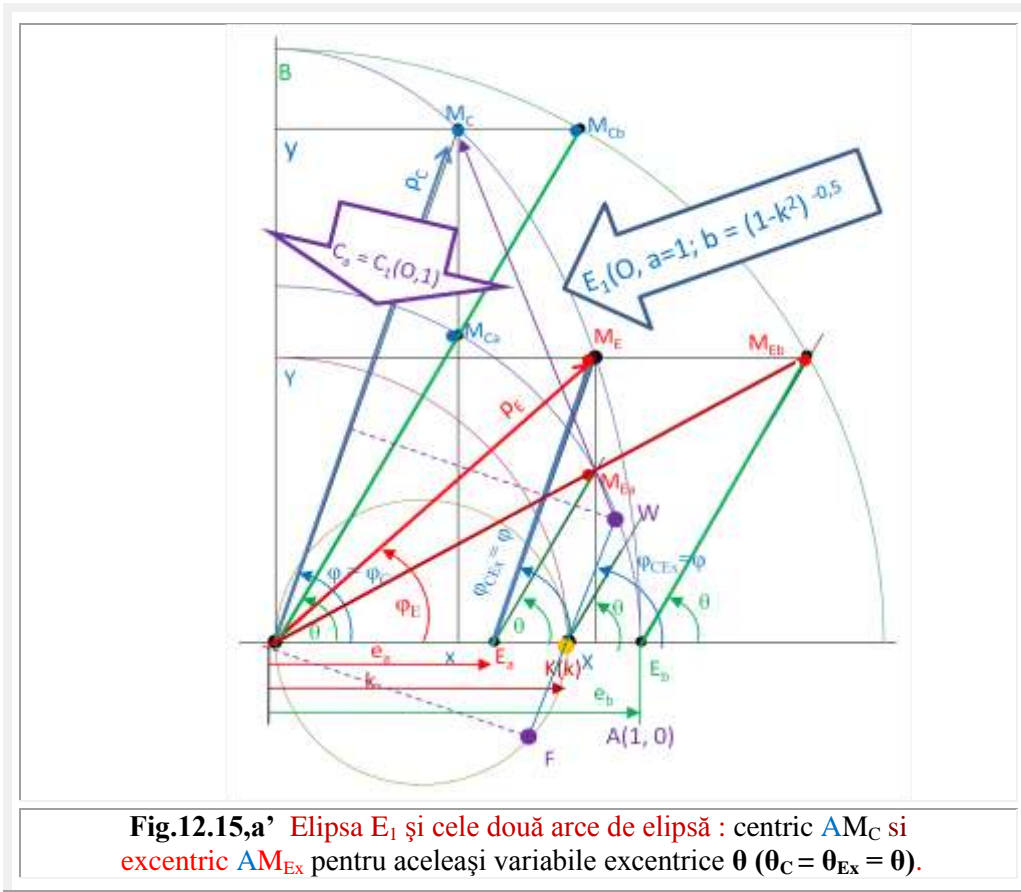


Fig.12.15,a' Elipsa E_1 și cele două arce de elipsă : centric AM_C și excentric AM_{Ex} pentru aceleași variabile excentrice θ ($\theta_C = \theta_{Ex} = \theta$).

Tangenta unghiului φ_{CEx} , din raportul catetelor, este

$$(12.49) \quad \tan \varphi_{CEx} = \frac{Y}{X-e_a} = \frac{XMa}{EaX} = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha - e_a} = b \frac{rex\theta \cdot \sin \theta}{rex\theta \cdot \cos \theta} = b \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = b \cdot \tan \theta$$

Comparând (12.47) cu (12.49) rezultă că, dacă tangentele sunt egale și unghiurile corespunzătoare sunt egale, adică $\varphi = \varphi_C = \varphi_{CEx}$.

Ceea ce trebuia / (era de) demonstrat (QED).

Dacă segmentul E_aM_E are direcția de unghi $\varphi = \varphi_C = \varphi_{CEx}$, segmentul E_bM_b are direcția de unghi θ , așa cum s-a subliniat în **figura 12.15,a'**. Aceeași, în principiu, cu **figura 12.15,a**, dar mai completă. S-a completat cu cercurile de rază k și de rază $k/2$, precum și din excentrul $K(k,0)$ din care s-a dus direcția de variabilă excentrică φ .

Așa cum s-a mai arătat, și cum se poate observa și în figură, segmentul $FW = \frac{1}{OM_C} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \text{dn}(u,k)$ este inversul razei vectoriale $\rho_C = OM_C$. De aici, rezultă că expresia razei polare ρ , din originea $O(0,0)$, a oricărui punct curent M_C , de pe elipsa E_1 , este data de relația cunoscută

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Ordonata Y a punctului M_{ex} din **figura 12.15,a** este, în același timp, așa cum este definit sinusul excentric ca **FSM-CE**

$$(12.50) \quad Y = \rho_{Ex} \cdot \sin \varphi_e = \rho_{Ex} \cdot \text{sex}[\theta_a = \varphi_{Ex}, S(s = s_a/\rho_{Ex}, \varepsilon = 0)]$$

și, astfel, utilizând relația generală, rezultă

$$(12.51) \quad \rho_{Ex} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2 \varphi_{Ex}}} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cdot \text{sex}^2 \varphi}}$$

care este integrandul **IEE** de prima speță/ tip.

În concluzie, semnificația geometrică a **IEE** de speța întâia este lungimea arcului de elipsă, pe elipsa $E_1(O, a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}})$, de la $A(1,0)$ la $M_{Ex}(X, Y) \equiv M_{Ex}(\rho_{Ex}, \varphi_{Ex})$.

Ca urmare, semnificațiile geometrice ale **IEC** cât și ale **IEE** sunt aceleași, atât pentru integralele de prima speță cât și pentru cele de speța a doua. Cele două puncte M_C și M_{Ex} , de pe elipsele E_1 și, respectiv, E_3 , se suprapun doar în cazurile $\theta, \varphi = 0$, pentru $\theta, \varphi \in [0, \pi/2]$, în care $\varphi_C = \varphi_{Ex} = \theta = \theta_a = 0$.

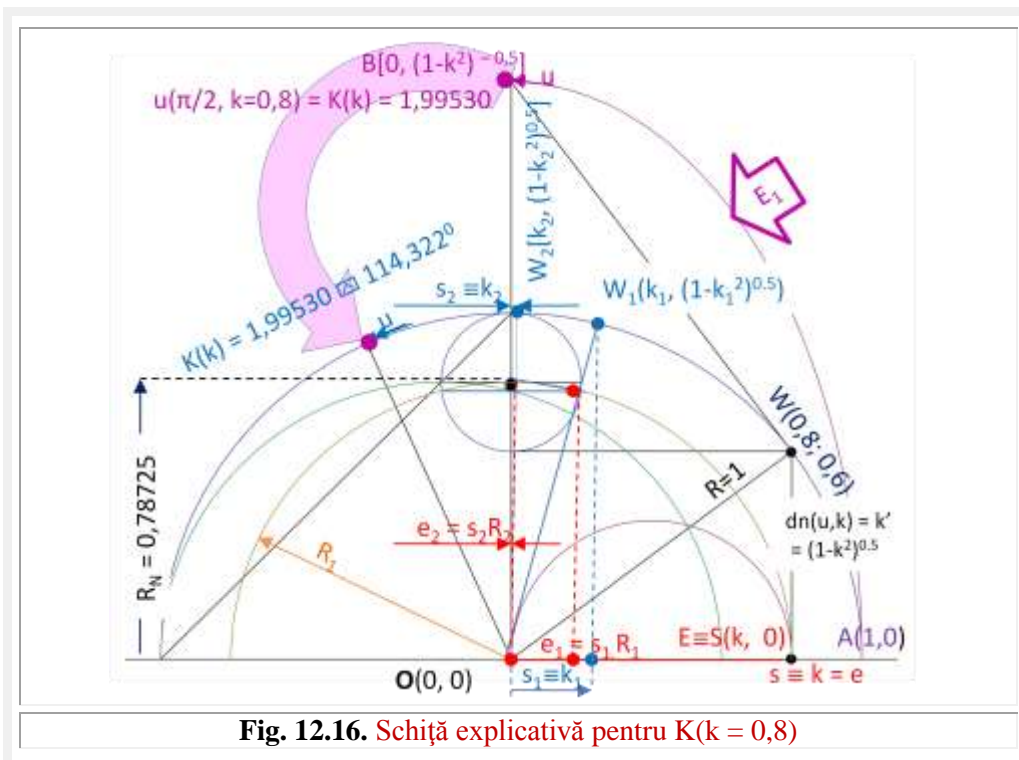


Fig. 12.16. Schiță explicativă pentru $K(k = 0,8)$

Diferențele maxime, dintre arcele AM_C și AM_{Ex} , apar pentru $M_C \equiv B$ sau $\theta, \varphi = \pi/2$. Pentru $\varphi = \pi/2$ rezultă $u = K(k)$ și pentru $k = 0,8$ situația este prezentată în **figura 12.16**. În aceeași figură sunt prezentate și primele transformări excentrice (de centrare), considerate în metoda hibridă de determinare a unei relații de calcul a integralei eliptice complete de prima speță (v. relația (5.55)) care, după numai 5 pași ai

transformării, asigură o precizie de **15** zecimale exacte, așa cum s-a prezentat în **SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE**. Ed. **Politehnica din Timișoara**, Vol I, Cap. 5, pag.152 ... 171.

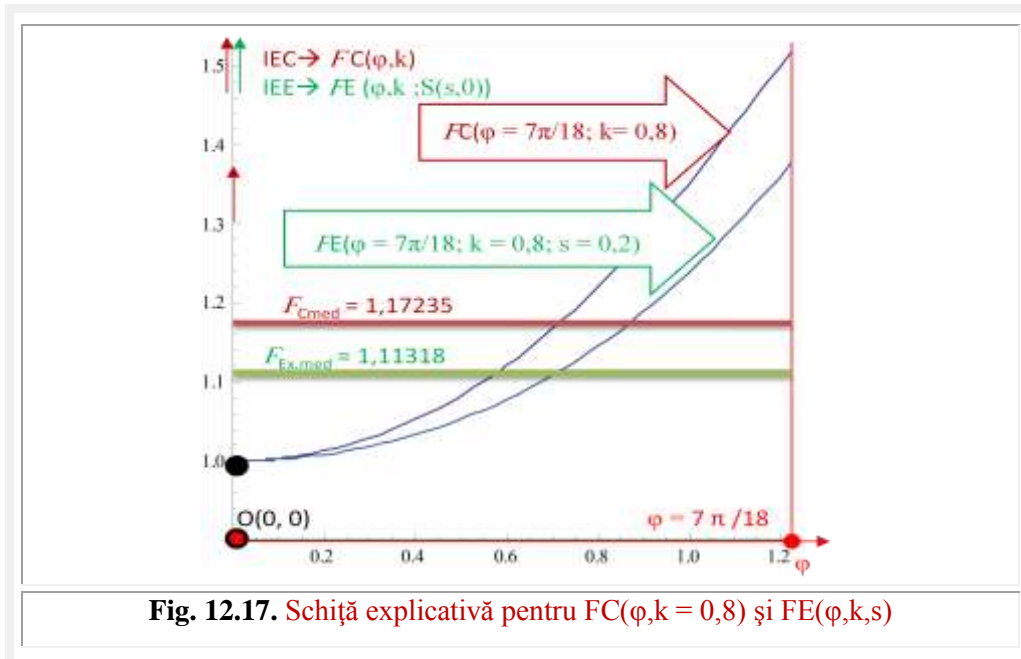


Fig. 12.17. Schiță explicativă pentru $FC(\varphi, k = 0,8)$ și $FE(\varphi, k, s)$

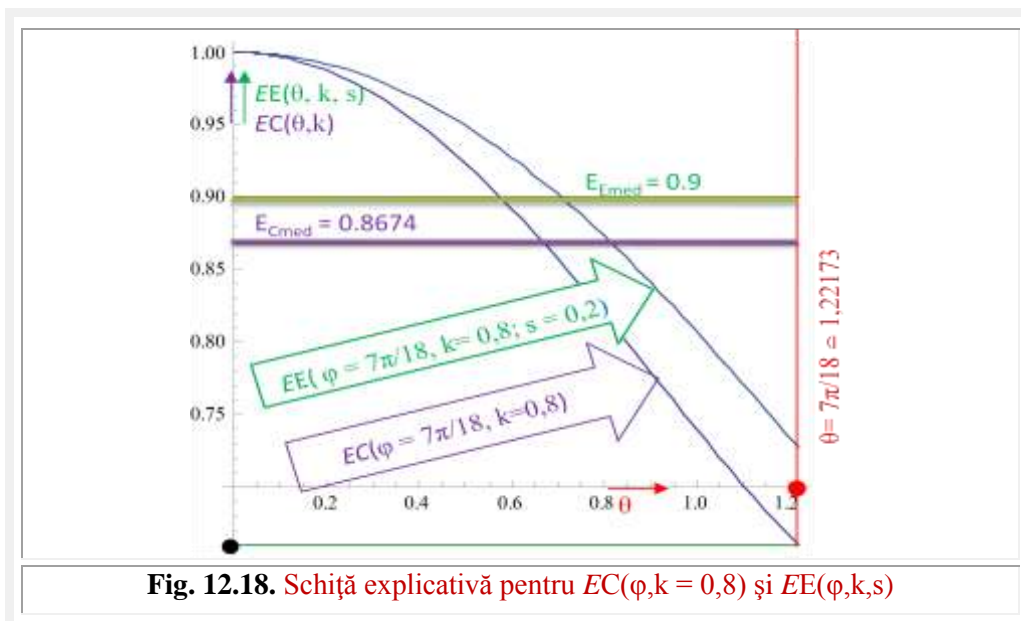
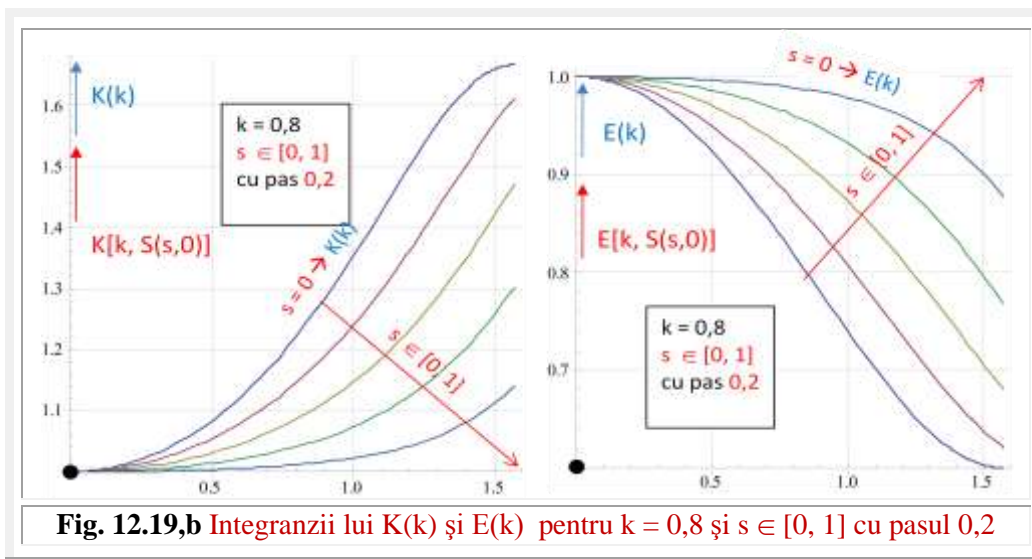
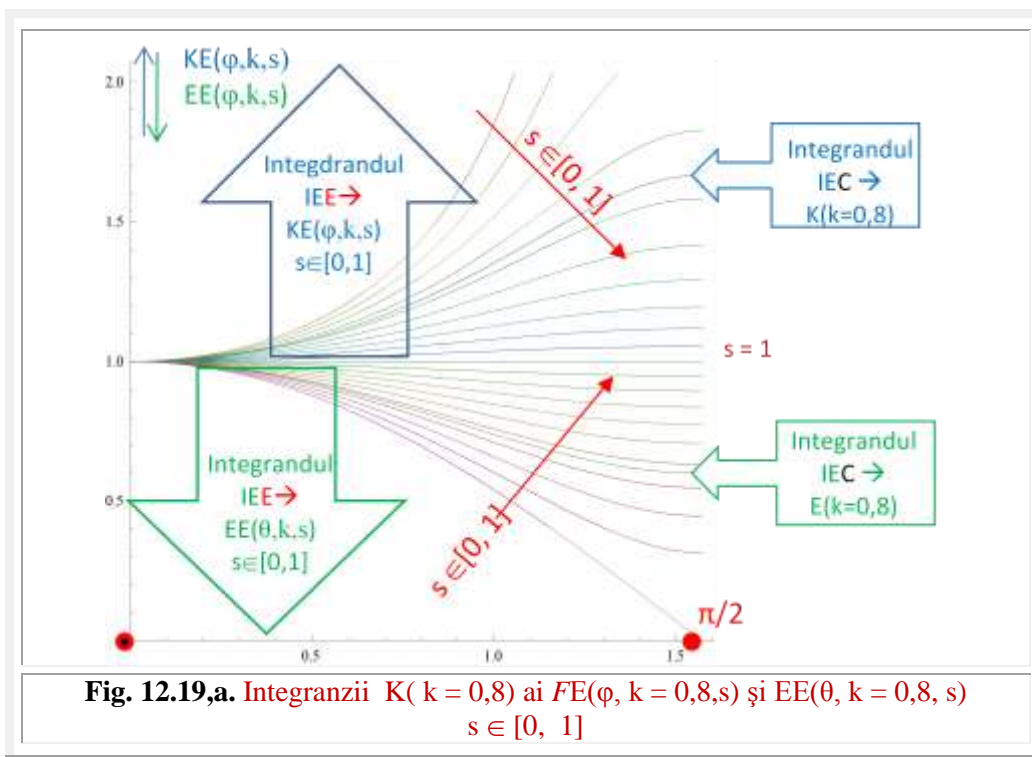


Fig. 12.18. Schiță explicativă pentru $EC(\varphi, k = 0,8)$ și $EE(\varphi, k, s)$



Pornind din punctul $W(x = k = \sin \alpha = 0,8; y = \cos \alpha = 0,6)$ punctele transformării de pe cercul unitate sunt W_1 și W_2 , restul nemaiputand fi reprezentate grafic.

Astfel, pentru $k = 0$, punctul $W \equiv W_N$ fiind, deci, deja în punctul superior al cercului unitate $B(0,1)$. Ca urmare $e_N = k_N = k = 0$ și $R_N = 1$, astfel că valoarea lui $K(k = 0)$ este $K(0) = \frac{\pi}{2R_N} = \frac{\pi}{2}$.

Pentru $k = 1$, punctul $W \equiv W_N \equiv A(1,0)$, astfel rezultă $k_N = s_N = k = 1$ și $R_N = 0$, iar $K(k = 1) = \frac{\pi}{2R_N} = \frac{\pi}{0} = \infty$. Ambele valori extreme de 0 și ∞ ale lui $K(k)$ fiind cele cunoscute.

Toate acestea sunt compatibile cu **IEC** sau cu cele excentrice (**IEE**) dar de excentricitate numerică $s = 0$. (A nu se confunda cu excentricitățile numerice s și s_i anterioare), fiindcă dacă $s = 0$, $IEE(k, s = 0) \rightarrow IEC(k)$.

Dacă excentricitatea numerică are valoarea maximă de $s = 1$, atunci punctului $E_C(\varphi = \pi/2, k)$ de pe elipsa E_1 din $B_1(0, \frac{1}{\sqrt{1-k^2}})$, adică $E_C \equiv B_1$, îi va corespunde punctul $M_{Ex}(1,0)$, adică $M_{Ex} \equiv A_1(1, 0)$ și unghiul anterior, nu este variabila centrică din teoria **FSM-CE**, ci corespunde unghiul β_1 din punctul W a cărui sinus este modulul k al integralelor eliptice.

Abscisele acestor puncte W_i , sunt situate toate pe raza de $R = 1$, dau excentricitățile numerice $s = k$, apoi $s_i = k_i, i = 1, 2, \dots, N$.

Ultima excentricitate numerică e_N , ca și cea reală k_N , sunt nule ($e_N = k_N = 0$).

Ultimul punctul $W_N, N \rightarrow \infty$ va fi pe cercul $C(O,1)$ în $W_N(0,1)$, în consecință, lungimea arcului A_1A_1 este nulă !

Punctele M_i , care în timpul transformării de centrare, sar de pe o orbită/cerc de rază mai mare pe altele de raze din ce în ce mai mici; raza minimă posibilă, pentru o anumită valoare k , fiind $R_N(k)$, sunt succesiv $M \equiv W, M_1, M_2, \dots, M_N(x_N = 0; y_N = R_N)$; $M_i \neq W_i, i = 1, 2, N$.

Primul salt, de pe $R = 1$ pe R_1 , este indicat și în **figura 12.16**, punctul roșu, de tangență a dreptei OW_1 cu cercul $c_1[Oc_1(x_{O1} = 0, y_{O1} = k + \frac{1-k}{2}), r_1 = \frac{1-k}{2}]$ fiind M_1 . M_1 este totodată și punctul de intersecție dintre cercul centrat în originea $O(0, 0)$ și de rază $R_1 - C1(O, R_1)$ - cu cercul excentric / superior anterior c_1 . Așa rezultă, prin una dintre metode, raza primei orbitei R_1 și, în mod asemănător, ale următoarelor orbite R_i .

Dacă familia de cercuri $C_i, i = 1, 2, \dots, N$ trec prin punctul comun $A_1^-(-1, 0)$ al cercului unitate, atunci ele au punctele lor superioare $B_i(x_i = 0, y_i = R_i)$ înșirate pe dreapta determinată de punctele $A_1^-(-1, 0)$ și punctul $B^+(0, 1)$, segment de dreaptă înclinat cu 45° , deci paralel cu prima bisectoare, reprezentat și în **figura 12.16**.

Câteva valori particulare ale integralei $K(k)$ rezultă imediat.

12.5 FUNCȚII ELIPTICE CENTRICE (FEC) ȘI FSM – CE

Se zice, pe bună dreptate, că o figură geometrică, sugestiv realizată, face mai mult decât câteva pagini de explicații.

În **figura 12.16** este prezentată elipsa $E_1[O(0,0), a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}]$ pentru valoarea parametrului/modulului $k = 0,8$. Așa cum s-a mai arătat, arcul de elipsă

$$(12.52) \quad AM = u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\rho(\varphi)} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \varphi)$$

12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

în care punctul M, de coordonatele polare $M(\varphi, \rho(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}})$, aparține elipsei E_1 , adică $M \subset E_1$.

Raza polară a elipsei E_1 poate fi exprimată odată ca funcție de φ prin expresia

$$(12.53) \quad \rho(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{dn(u, k)} = \frac{1}{\cos[\beta(\theta = \varphi)]} = \frac{1}{\cos(b \operatorname{ex} \varphi)}$$

și, ca funcție de unghiul γ , prin coordonatele unui punct $M(x = a \cos \gamma, y = b \sin \gamma)$ al unei elipse, în general, și prin $M(\cos \gamma, \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1-k^2}})$ al elipsei E_1 rezultând relația

$$(12.54) \quad \rho(\gamma) = \sqrt{x^2(\gamma) + \gamma^2(\gamma)} = \frac{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \gamma}}{\sqrt{1-k^2}}$$

Se cunoaște expresia funcției eliptice centrice (FEC) $dn(u, k)$ ca fiind

$$(12.55) \quad dn(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u, k)}$$

precum și egalitățile

$$(12.56) \quad \begin{cases} cn(u, k) = \cos \varphi \\ sn(u, k) = \sin \varphi \end{cases}$$

O dependență dintre cele două expresii ale razei polare ρ este dată, exprimând abscisa x prin cele două variabile

$$(12.57) \quad x = \cos \gamma = \rho \cos \varphi \rightarrow \rho = \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi} = \frac{\cos \gamma}{cn(u, k)}$$

Interesant este faptul că, prin înlocuirea variabilei centrice u cu cea excentrică θ , egală cu φ în cazul de față, așa cum se cunoaște din teoria FSM, se trece de la FCC la FSM-CE, iar prin revenirea în centric sau considerând ca centrică variabila excentrică $\theta = \varphi$ se obțin FEC, așa cum rezultă și din relațiile (12.56).

Din **figura 12.20** rezultă – pe cale pur geometrică clar – că, inversul razei polare $\rho(\varphi = \theta)$ este segmentul $FW = dn(u, k)$ și, evident, că inversul segmentului FW , proiectat pe raza polară ρ este raza polară $\rho(\varphi)$, ținând cont de construcția grafică a inversului unui număr prin tangenta la cercul $C(O, R=1)$ în punctul $W(\operatorname{cex} \theta, \operatorname{sex} \theta)$ pentru $\theta = \varphi$.

Pe cercul C_a sunt marcate, în **figura 12.20**, unghiurile $\varphi = \theta$ și γ . Dacă am rostogoli pur, fără alunecare relativă, arcul de elipsă $AM(x, y)$ peste cercul C_a ($O, R = a = 1$), în locul în care M se suprapune și aparține atât elipsei E_1 cât și cercului C_a , pe cercul C_a se va putea măsura și arcul u și se va putea determina, pe cale geometrică/grafică valoarea integralei incomplete de prima speță $F(\varphi, k)$. Valoarea integralei complete de speță/tip întâia $K(k)$ va corespunde suprapunerii punctului $B(0, \frac{1}{\sqrt{1-k^2}})$ peste cercul C_a , prin același procedeu, adică, aceeași rostogolire pură a elipsei E_1 peste cercul unitate C_a .

Se deduce imediat că, pentru $k = 0$, elipsa unitate E_1 degenerază în cercul unitate C_a , astfel că, suprapunerea se realizează fără rostogolire, B este deja în punctul $B(0, 1)$ de pe cerc și rezultă valoarea minimă posibilă a integralei complete de speță întâia $K(k = 0) = \pi/2$. Dacă $k = 1$, atunci elipsa E_1 degenerază în două drepte paralele, astfel că $B(0, b)$ este aruncat la infinit, adică $B(0, \infty)$ și oricât de mult am rostogoli, fără

12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

alunecare, această “elipsă” degenerată, peste cercul unitate C_a , punctul $B(0,\infty)$ nu va ajunge să se suprapună nicidecum peste cercul C_a , ceea ce arată că $K(k = 1) = \infty$.

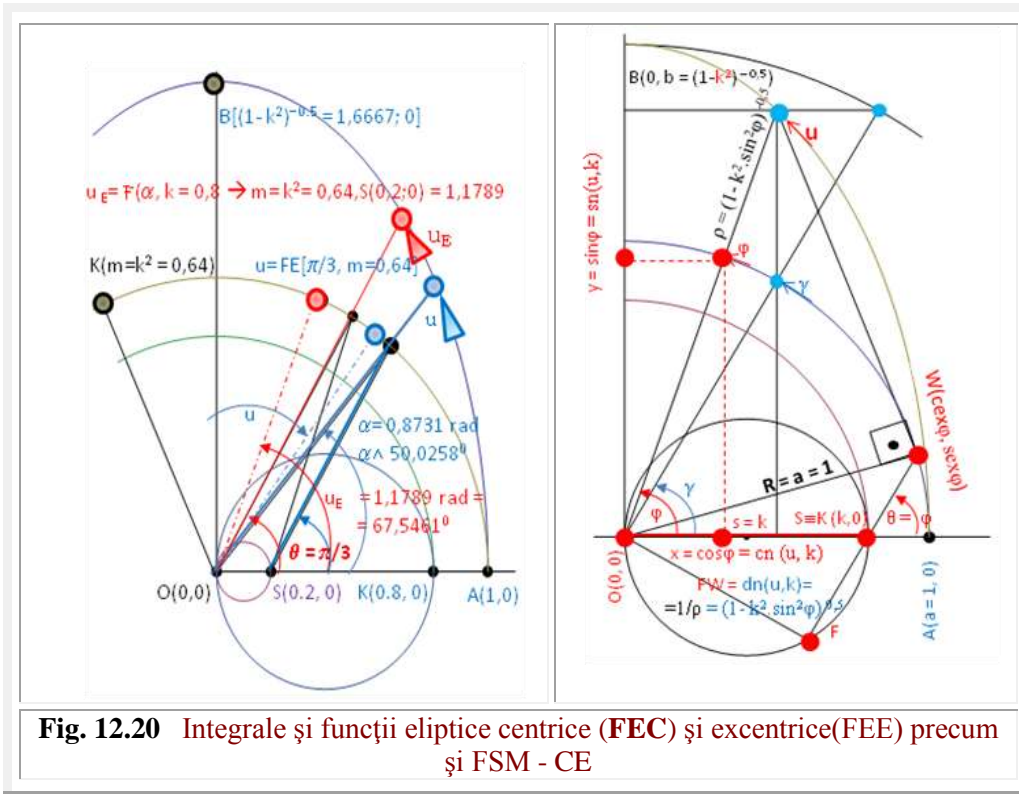


Fig. 12.20 Integrale și funcții eliptice centrice (FEC) și excentrice(FEE) precum și FSM - CE

12.6 FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE (FEE)

Anterior, s-a văzut modul de definire al **IEE**, prin înlocuirea **FCC** cu **FSM-CE** în expresiile integralelor eliptice, denumite, acum, și centrice (**IEC**).

Dacă s-ar dispune de expresii ale funcțiilor eliptice, cu excepția funcției $dn(u,k)$, care să fie exprimate prin **FCC** $\sin \alpha$ și/sau $\cos \alpha$, atunci metoda s-ar putea repeta, aidoma ca la **IEE**.

Alte tipuri de funcții eliptice, ca cele exprimate în funcție de arcul cercului înscris elipselor unitate, ca și a cercului și a elipsei cu “vârf” comun sau tangente într-un punct, vor fi prezentate într-un capitol separat, în continuare.

12.6.1 FSM ELIPTICE AMPLITUDINE EXCENTRICĂ

12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

Funcțiile eliptice clasice sau ordinare $\text{am}(u,k)$, $\text{cn}(u,k)$, $\text{sn}(u,k)$, $\text{dn}(u,k)$, pe care le vom denumi în continuare și funcții eliptice **centrice** (**FEC**) se exprimă, însă, prin dezvoltări în serie, în funcție de variabila u . Astfel, {v. →Rîjic, I.M. și Gradștein, I.S. “TABELE DE INTEGRALE, SUME, SERII ȘI PRODUSE”, Ed. Tehnica, Buc., 1955, pag.308] expresia **FEC** $\text{am}(u,k)$ este

$$(12.58) \quad \text{am}(u,k) = u - \frac{k^2}{3!} u^3 + \frac{k^2(4+k^2)}{5!} u^5 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{7!} u^7 + \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{9!} u^9 - \dots, |u| < |K'|$$

Variabila u , similară lui α – variabila centrică din **MC** a **SM**, îi corespunde în **ME** variabila excentrică θ și trecerea din centric în excentric se face prin relația cunoscută (v. Vol.I, rel (1.10), pag. 28) $\alpha = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]$, astfel că trecerea de la **FEC** la **FEE** se poate realiza prin înlocuirea variabilei centrice u cu variabila excentrică, s-o notăm cu t

$$(12.59) \quad u = t - \arcsin[s \cdot \sin(t - \varepsilon)]$$

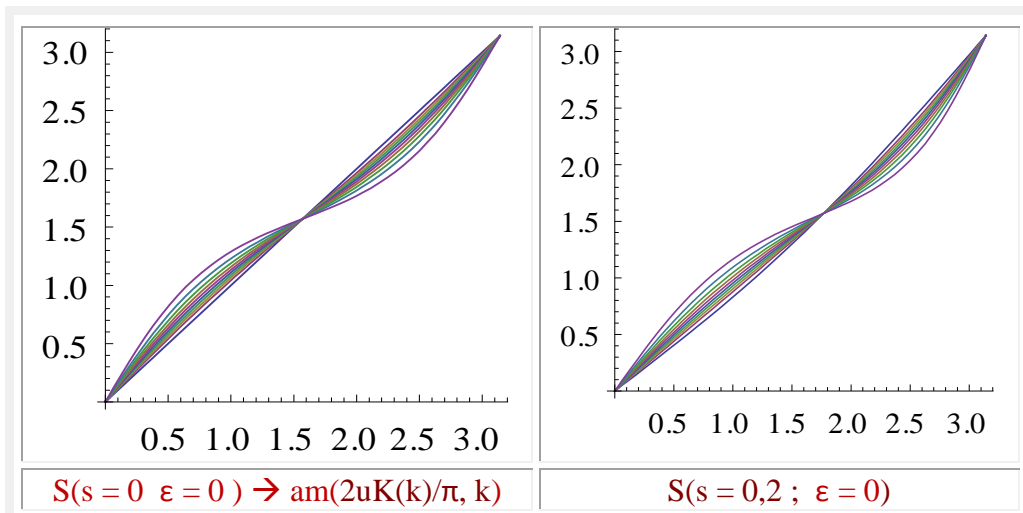
deoarece $S(0, 0)$, figura nu mai reprezintă **FEE**, ci reprezintă variațiile în 3D, ca funcție de k , a **FEC** $\text{am}(u,k)$.

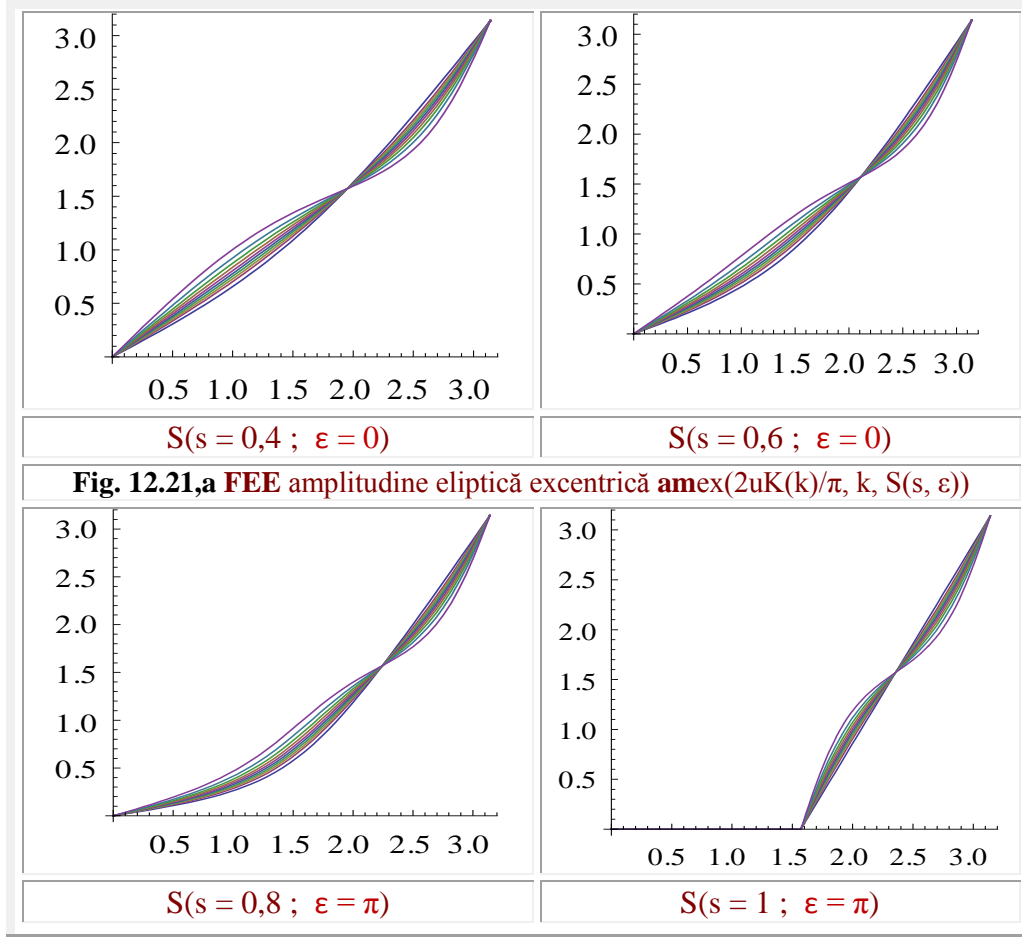
În acest mod, se poate profita de programele existente de matematică, care operează cu seria (12.58). Astfel, dacă **FEC** se pot reprezenta grafic prin expresia

$$(12.60) \quad \text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[\{\text{JacobiAmplitude}[2t \text{ EllipticK}[(0.1 u)^{0.5}/ \text{Pi}, (0.1u)^{0.5}]\}, \{u,0,10\}], \{t,0,\text{Pi}\}], \text{AspectRatio} \rightarrow 1]]$$

o **FEE** de $S(0,6; 0)$ se reprezintă grafic prin expresia

$$(12.61) \quad \text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[\{\text{JacobiAmplitude}[2(t - \text{ArcSin}[0.6 \text{ Sin}[t]]) \text{ EllipticK}[(0.1u)^{0.5}/\text{Pi}, (0.1 u)^{0.5}]\}, \{u,0,10\}], \{t,0,\text{Pi}\}]]]$$

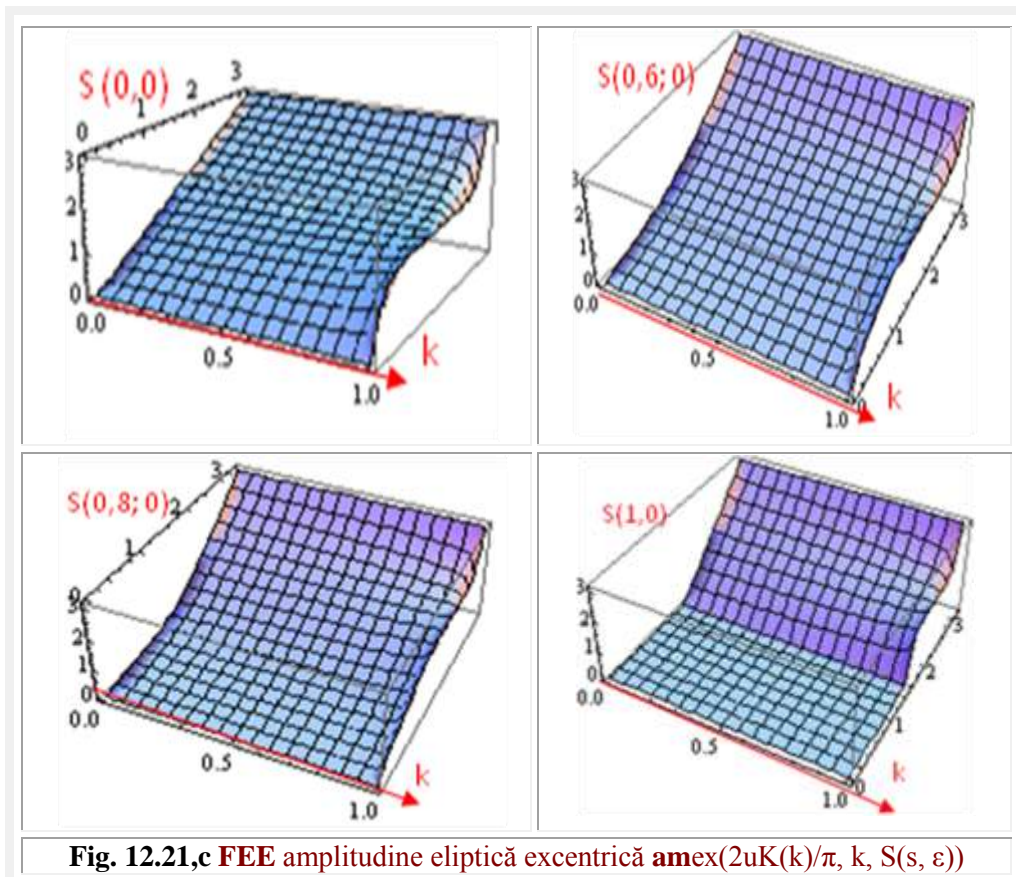
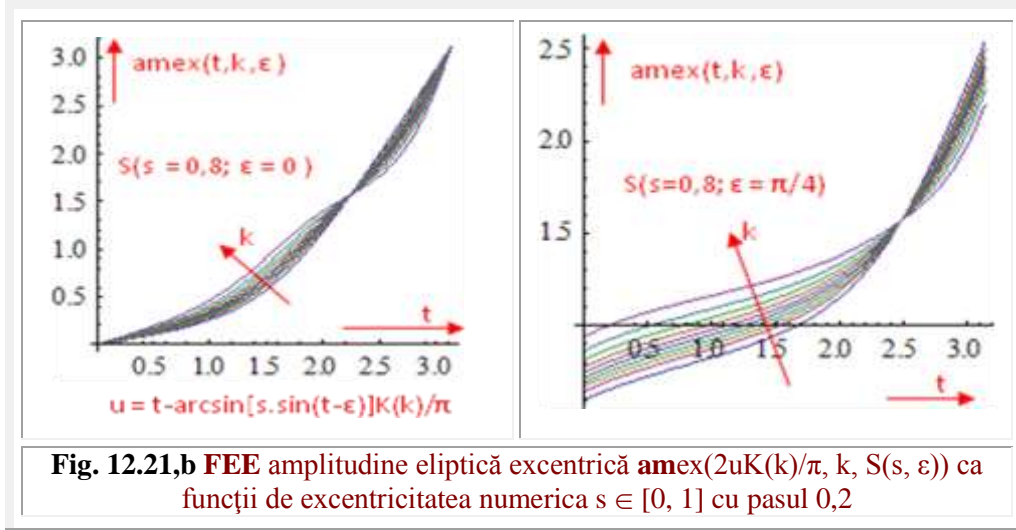


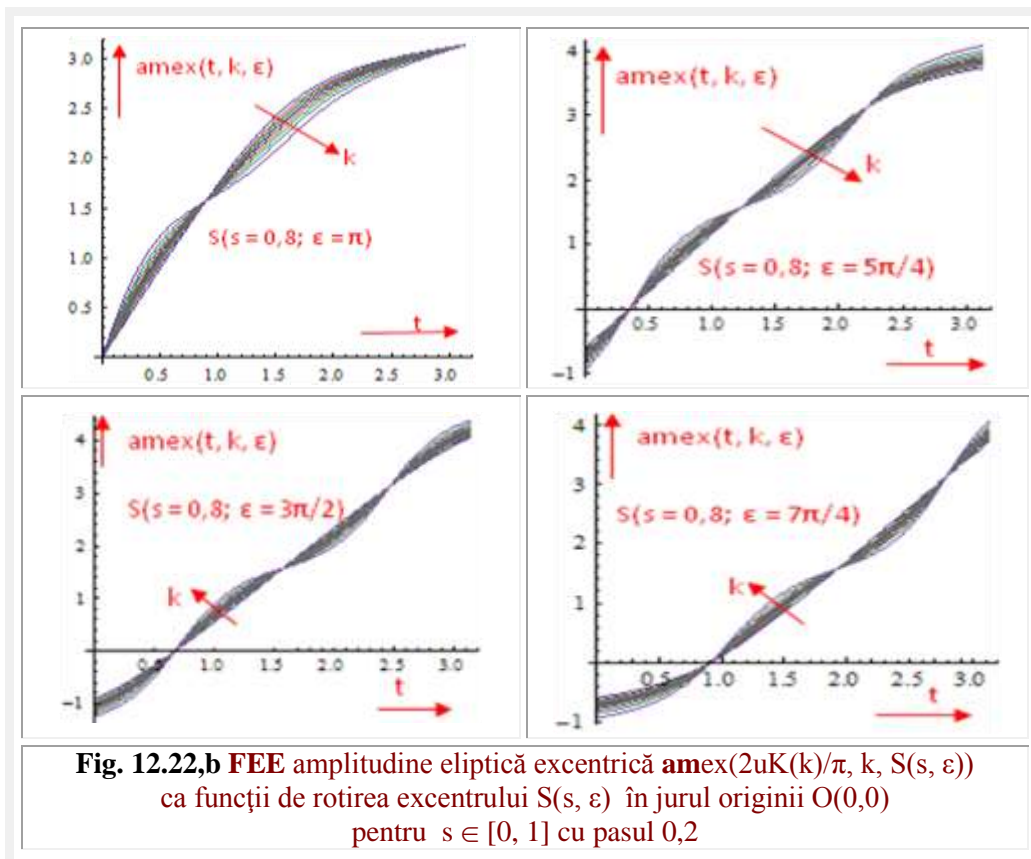
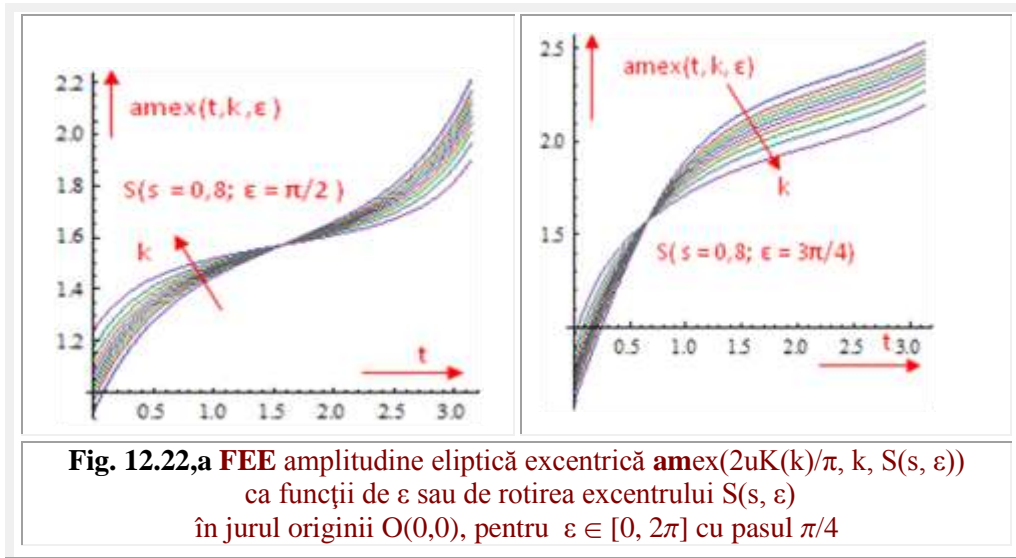


Se observă, comparând cele două expresii, că variabila $t \rightarrow t - \arcsin[0.6 \sin[t]]$, în conformitate cu relația (12.47).

În acest mod, au fost realizate graficele **FEE**(s) ca funcții de excentricitatea s, pentru $\epsilon = 0$, adică $S(0,6; 0)$ din **figura 12.21** și ca funcții de ϵ pentru $s = 0.8 = \text{constant}$, când excentrul $S(0,8; \epsilon)$ se rotește pe cercul $C(R = 0,8; O(0,0))$ de raza $R = 0,8$, centrat în originea $O(0,0)$, din **figura 12.21**.

O imagine mai bună se obține prin reprezentarea graficelor în 3D, ca în **figura 12.21,c**. Fiind reprezentate în funcție de k, modulul variază doar între limitele $k \in [0, 1]$. Deoarece variabila $t \in [0, \pi]$, pentru $s = 1$, punctul W_1 rămâne confundat în excentrul $S(1,0)$, atâta timp cât $t \in [-\pi, \pi]$. De aceea, în acest caz, în ultima **figură 12.21,c**, $S(1, 0)$ apare o suprafață plană de cotă zero, în intervalul $t \in [0, \pi/2]$.



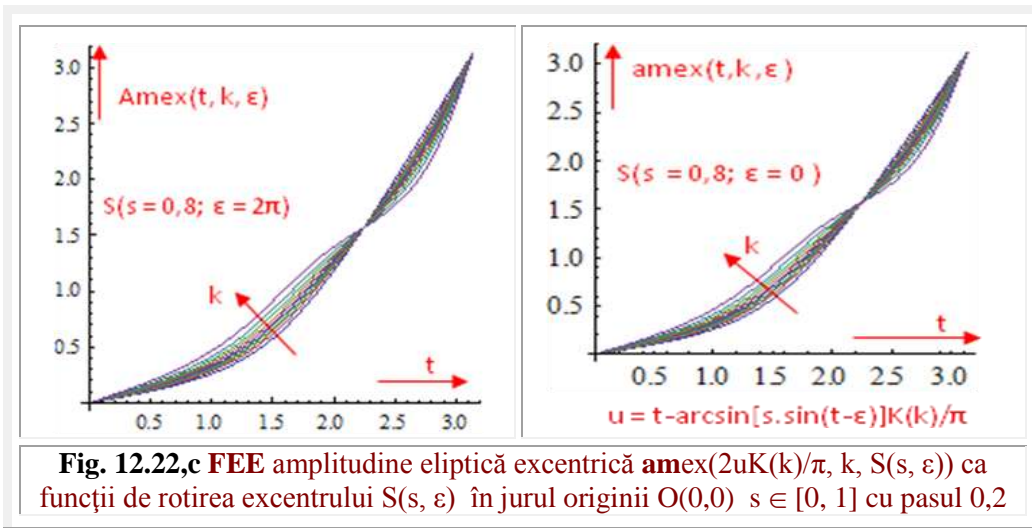


12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

Dacă **FEC** $aex(u,k)$ variază liniar cu $t = u$, **pentru $k = 0$** , adică graficul ei este reprezentat de o linie dreaptă – prima bisectoare – în cazul **FEE** ($s \neq 0$) această dependență nu mai apare. În prima **figură 12.21,c** apare, însă, la $k = 0$ - stânga- dependența liniară.

Ca funcție de excentricitatea unghiulară ϵ , **FEE** amplitudine excentrice sunt reprezentate în **figura 12.22**, în care, excentricitatea numerică liniară s a fost aleasă, arbitrar, de valoare $s = 0,8$.

Se observă că nu mai apar dependențe liniare și, ca și în cazul altor **FSM-CE**, pentru diverse valori ale lui ϵ , apar puncte comune, de intersecție ale tuturor curbelor, puncte atractor și/sau puncte repulsive.



12.6.2 FSM ELIPTICE Jacobi CENTRICE (FEJC) $dn(u,m), dn(u,k)$ ȘI DE ARGUMENT MODIFICAT $dn [2uK(m)/\pi, m], dn [2uK(k)/\pi, k]$

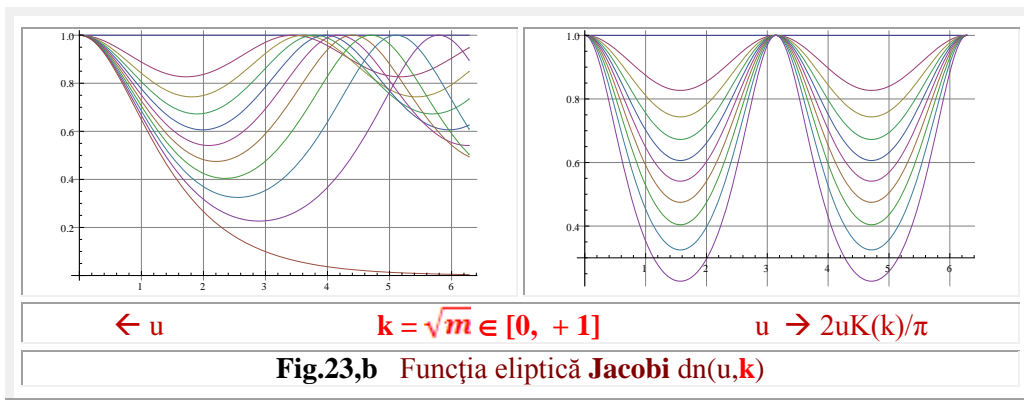
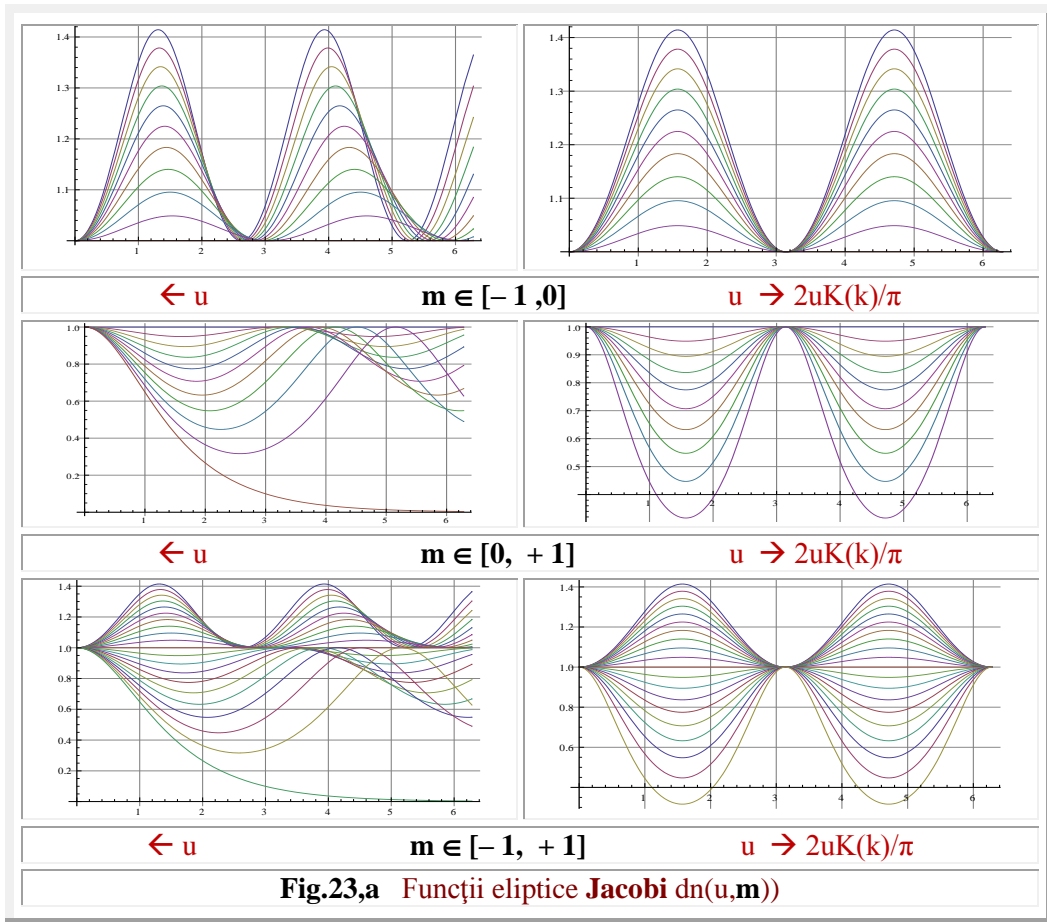
Deoarece literatura românească nu abundă în a exprima graficele funcțiilor speciale eliptice centrice, ne luăm permisiunea de-a le prezenta aici ca un preambul la cele excentrice și pentru a oferi posibilitatea comparării lor. Astfel, în stânga **figura 12.23,a** sunt prezentate graficele funcțiilor $dn(u, m)$, a căror expresii sunt

$$(12.62) \quad dn(u,k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - m \cdot \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u,k)}$$

în care $m = k^2$.

12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

Rezultă că sunt distincte funcțiile $dn(u, m)$ pentru $m > 0$ (pozitiv) și $m < 0$ (negativ) și funcțiile $dn(u, k)$ există numai pentru valori pozitive ale lui k .



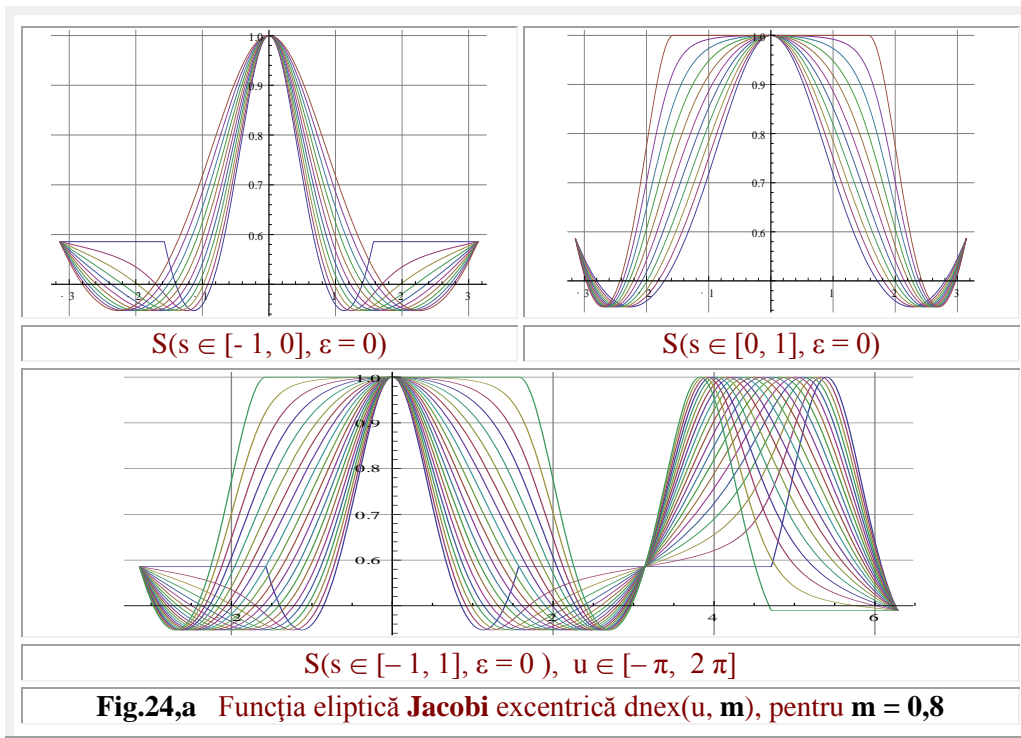
12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

Funcțiile de argument u și modul $m = k^2$ sunt periodice de perioadă $4K(k)$, fiecare funcție a familiei, de un anumit m sau k , având altă perioadă $4K(k)$. În dreapta **figurii 12.23,a** sunt prezentate aceleași funcții eliptice **Jacobi (FEJC)** dar de argument modificat, în sensul că variabila $u \rightarrow \frac{2uK(k)}{\pi}$ și, așa cum se poate observa, întreaga familie de **FEJC** devin funcții periodice de aceeași perioadă π .

12.6.3 FSM ELIPTICE Jacobi EXCENTRICE (FEJE)

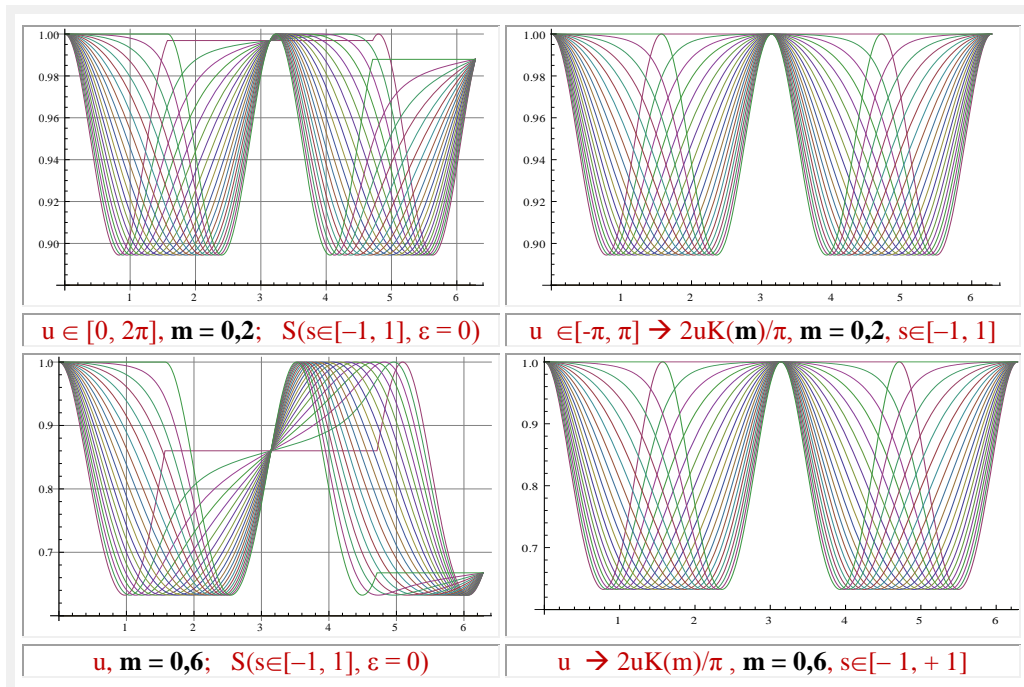
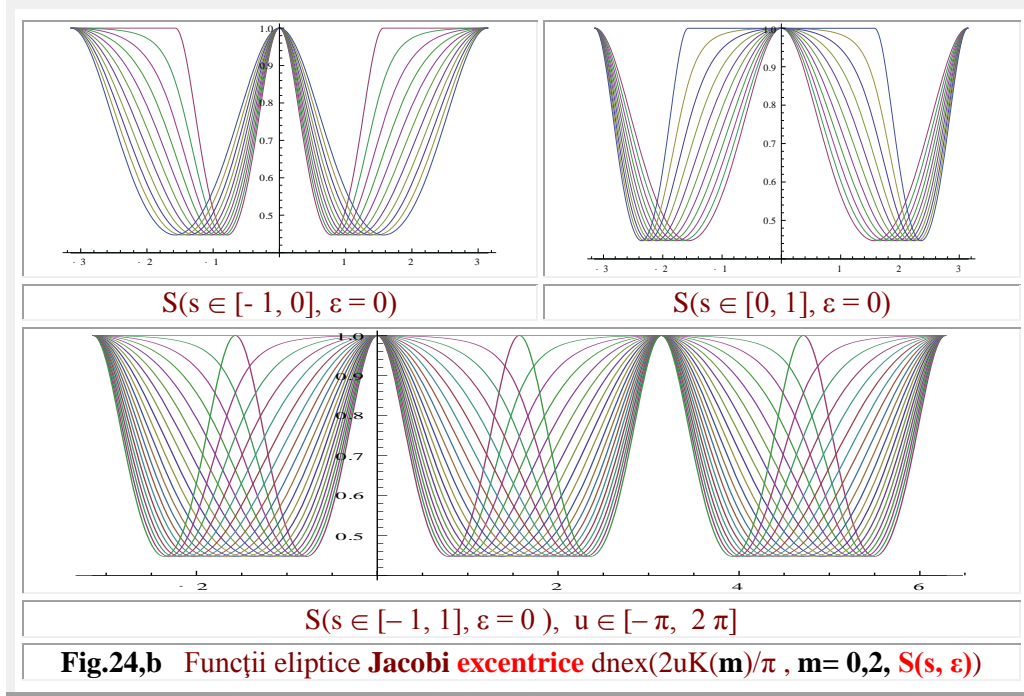
$dnex(u,m)$, $dnex(u,k)$
ȘI DE ARGUMENT MODIFICAT
 $dnex [2uK(m)/\pi, m]$, $dnex [2uK(k)/\pi, k]$

Dacă în dezvoltarea (12.58) argumentul u se înlocuiește cu funcția amplitudine excentrică de variabilă excentrică $\theta \rightarrow u$, notată cu u , adică (12.63) $u \rightarrow u - \arcsin[s \cdot \sin(u - \varepsilon)]$, atunci **FEJC** trec în **FEJE** ca urmare a transformării lor în funcții induse.

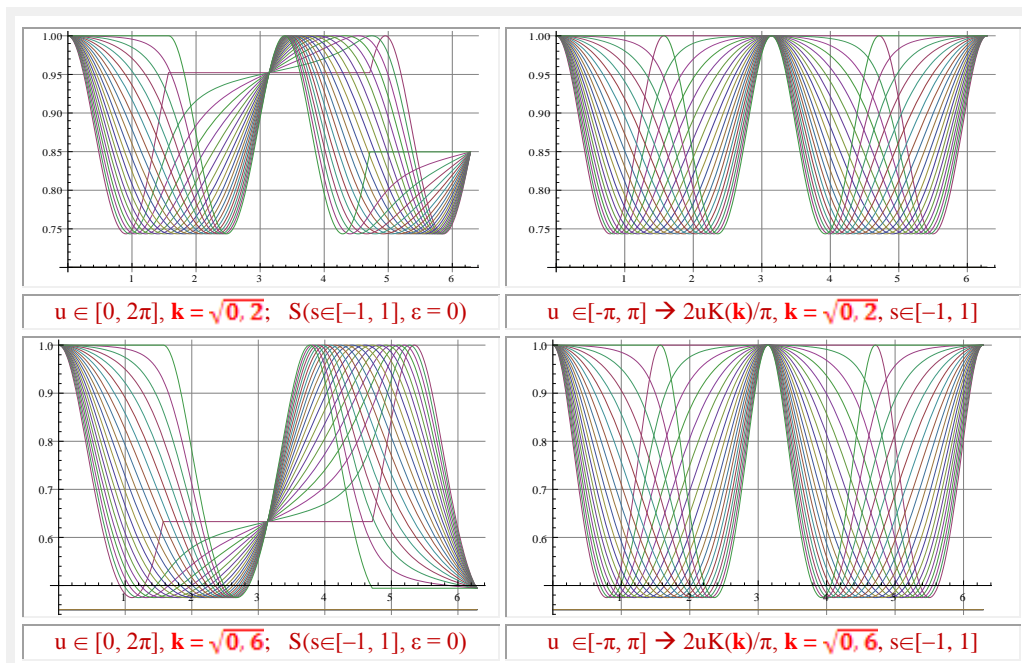
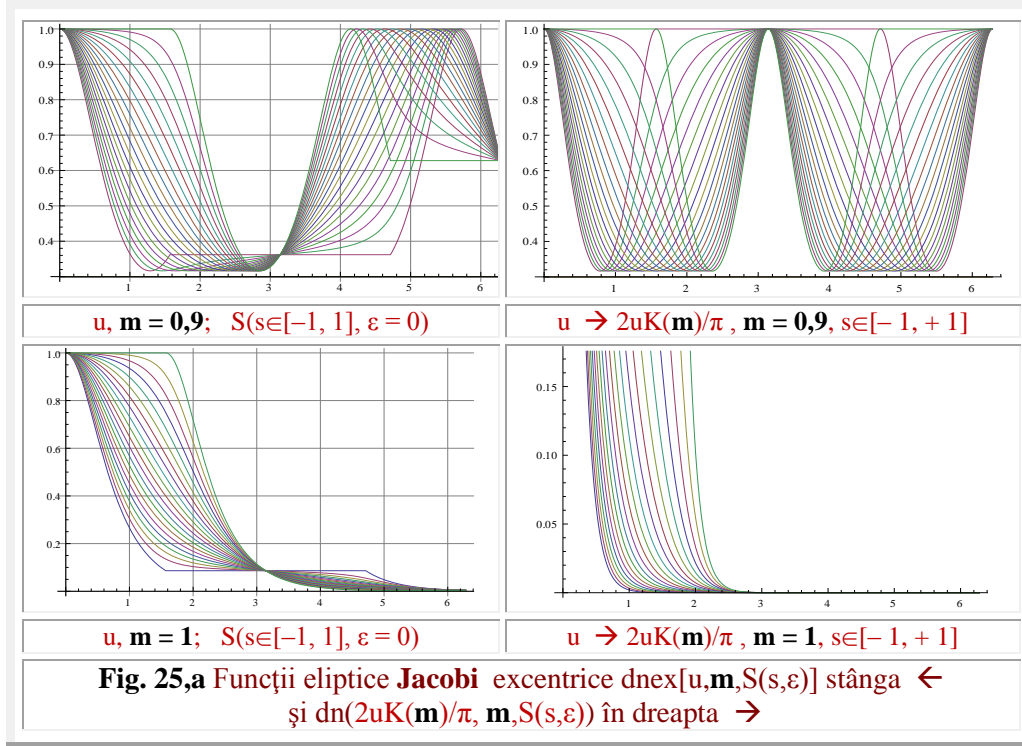


Expresia plotată pentru **FEJE** de u este

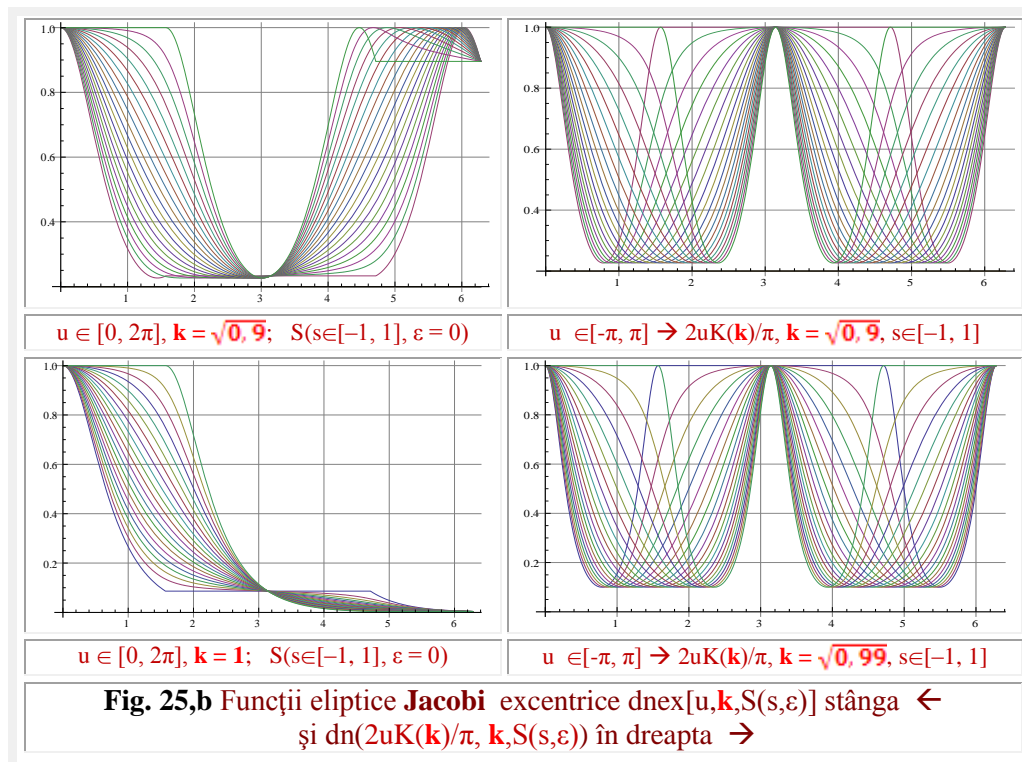
12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE



12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE



12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE



(12.64) `Plot[Evaluate[Table[JacobiDN[u-ArcSin[s.Sin[u]], m],
{s,-1,1}],{u,-π,π}],`

în care modulului m i se dau diverse valori: 0,2; 0,6; 0,9 și 1.

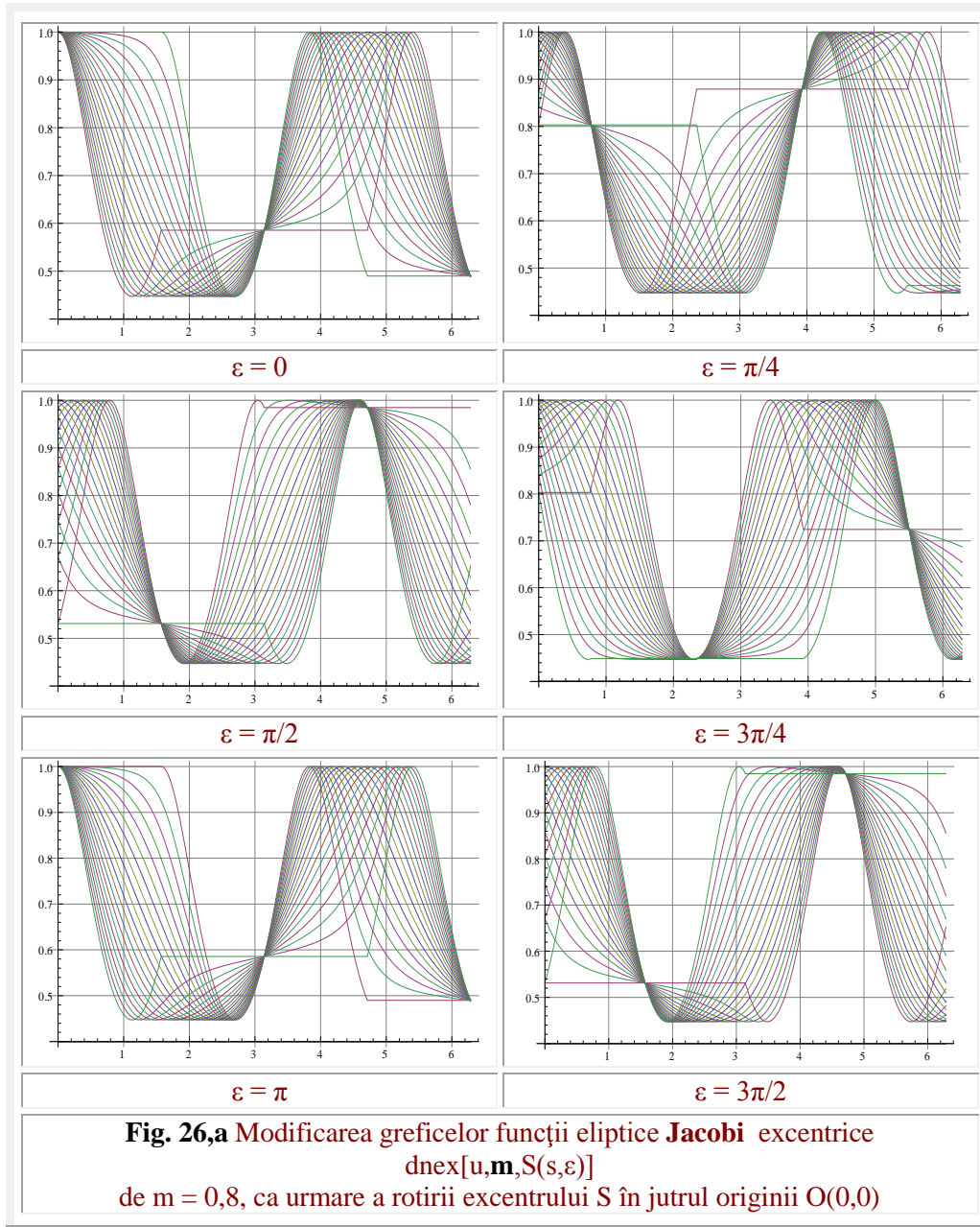
În **figura 12.24,a** s-a ales $m = 0,8$ și $S(s \in [-1,1], \varepsilon = 0)$.

În **figura 12.24,b** s-au ales aceleași valori, dar pentru argumentul u modificat la $2uK(m)/\pi$ a cărei expresie plotată este

(12.65) `Plot[Evaluate[Table[JacobiDN[2(u-ArcSin[sSin[u]])
EllipticK[m]/Pi,0.2], {s, 0, 1}],{x,-π,π}],`

Pentru a urmări, în paralel, evoluțiile graficelor **FEJE** în funcție de excentricitatea numerică s , pentru un excentru $S(s, \varepsilon)$ care evoluează pe axa x , adică $\varepsilon = 0$, s-au prezentat garficele din **figura 12.25,a**: în stânga de argument u , iar în dreapta de argument modificat $u \rightarrow 2uK(m)/\pi$, începând cu $m = : 0,2; 0,6; 0,9$ și 1, iar $s \in [-1, 1]$, pentru $u \in [0, 2\pi]$.

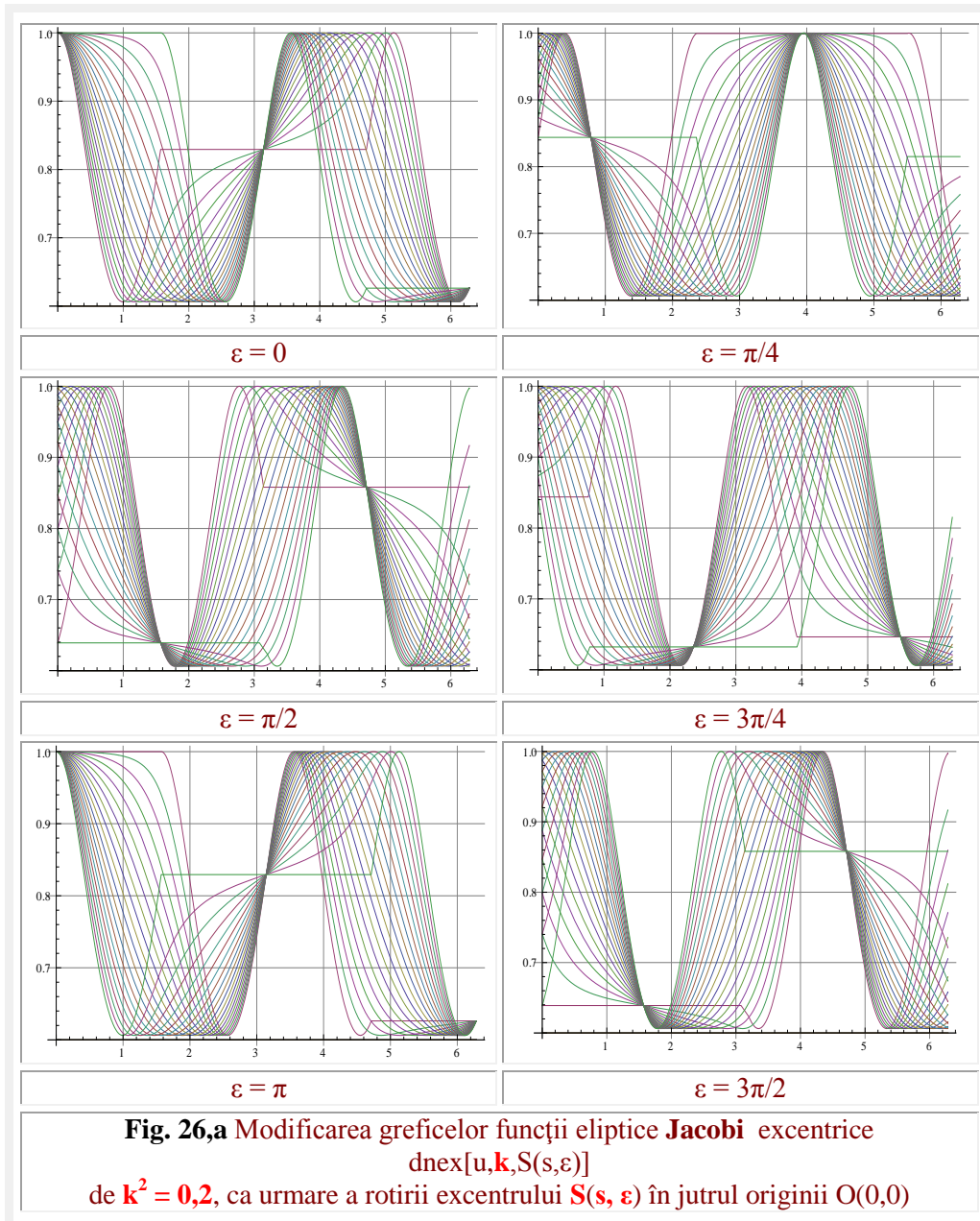
12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE



Aceleași grafice, dar în funcție de $k = \sqrt{m}$, sunt prezentate, în paralel, în funcție de u și de u modificat $u \rightarrow 2uK(k)/\pi$ în figura 12.25,b.

12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

Modificarea graficelor ca funcție de rotirea excentrului $S(s, \varepsilon)$, adică $\varepsilon \in [0, 2\varepsilon]$ cu pasul $\pi/4$, pe un cerc de raza $s = 0,8$, sunt prezentate în **figura 12.26,a** ca funcție de m și în **figura 12.26,b** ca funcție de k .



12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

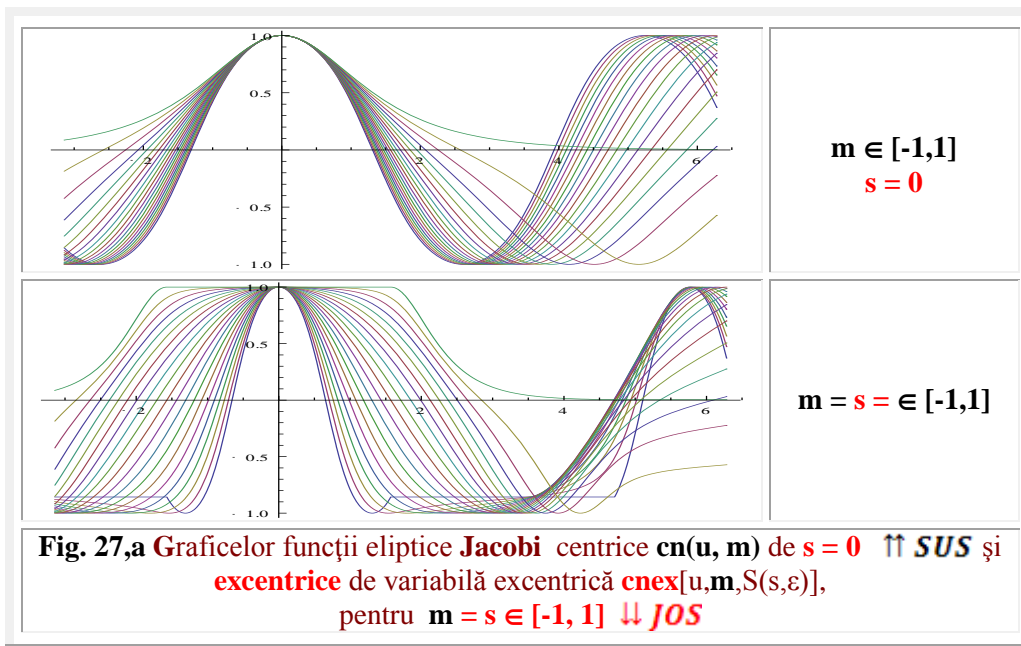
Se observă că, la fel ca și în cazul **FSM-CE**, punctele atrătoare și repulsive își modifică pozițiile de la $u_a = 0$ și $u_r = \pi$, pentru $\varepsilon = 0$, la $u_a' = 0 + \varepsilon$ și, respectiv, la $u_r' = \pi + \varepsilon$, așa cum se poate observa în **figura 12.26,a** cu $m = 0,8$ și **12.26,b** cu $k = 0,2$ în care $s \in [-1; 1]$.

12.6.4 FSM ELIPTICE Jacobi EXCENTRICE (FEJE)

cnex(u,m), cnex(u,k)
ȘI DE ARGUMENT MODIFICAT
cnex [2uK(m)/π, m], cnex [2uK(k)/π, k]

Programele de matematică calculează valorile funcției cosinus eliptic **Jacobi**, notată **JacobiCN[u, m]** cu ajutorul dezvoltării în serie.

Seria cu 5 termeni este



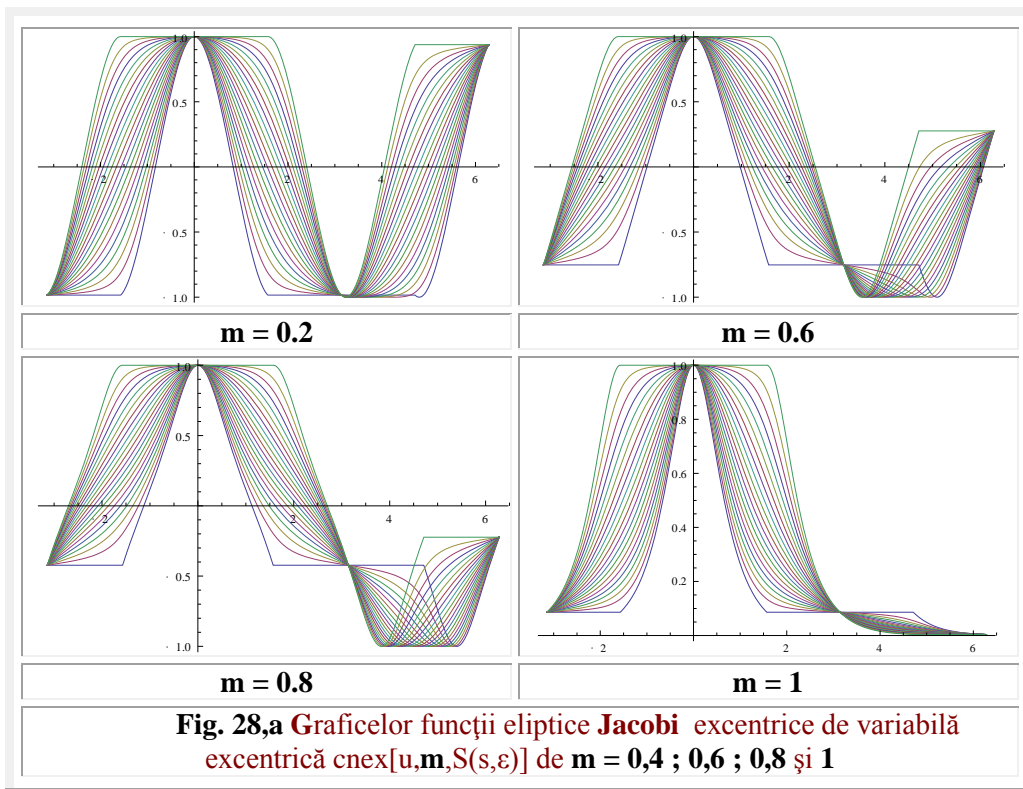
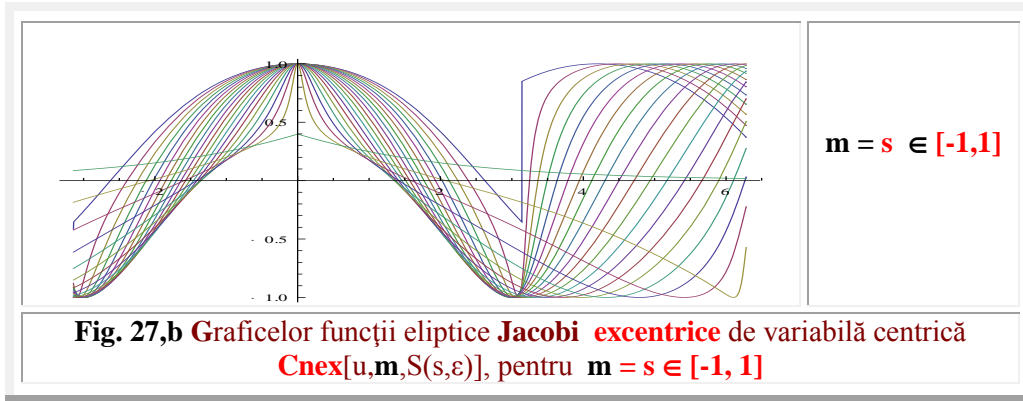
$$(12.66) \quad \text{JacobiCN}[u, m] \cong 1 - u^2/2 + (1/24 + m/6) u^4 + 1/720 (-1 - 44m - 16m^2) u^6 + ((1 + 408m + 912m^2 + 64m^3) u^8)/40320 + O[u]^{10}$$

Dacă în (12.66) se înlocuiește argumentul **u** cu funcția amplitudine excentrică de variabilă excentrică din relația (12.59) se vor obține funcții eliptice **Jacobi** excentrice (**FEJE**) de variabilă excentrică (**Fig.12.28,a**), iar dacă se va înlocui cu funcția similară de variabilă centrică

$$(12.67) \quad \text{Aex}[u, S(s, \varepsilon)] = u + \arcsin \frac{s \cdot \sin(u - \varepsilon)}{\text{Rex}[u, S]} = u + \arcsin \frac{s \cdot \sin(u - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(u - \varepsilon)}},$$

12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

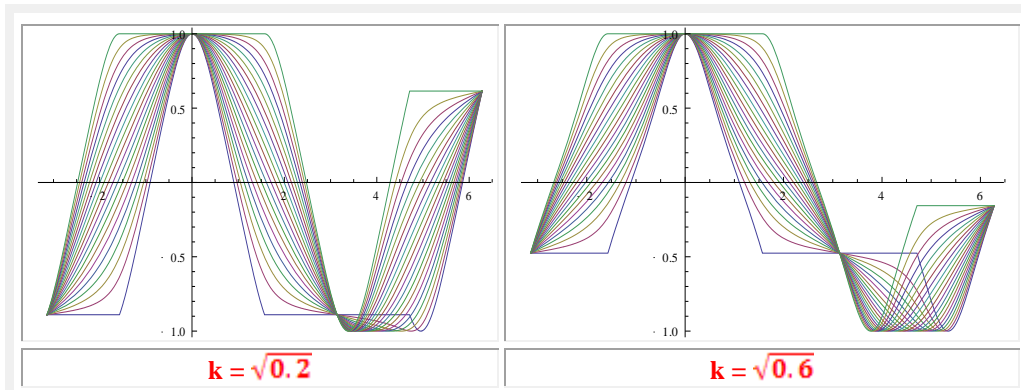
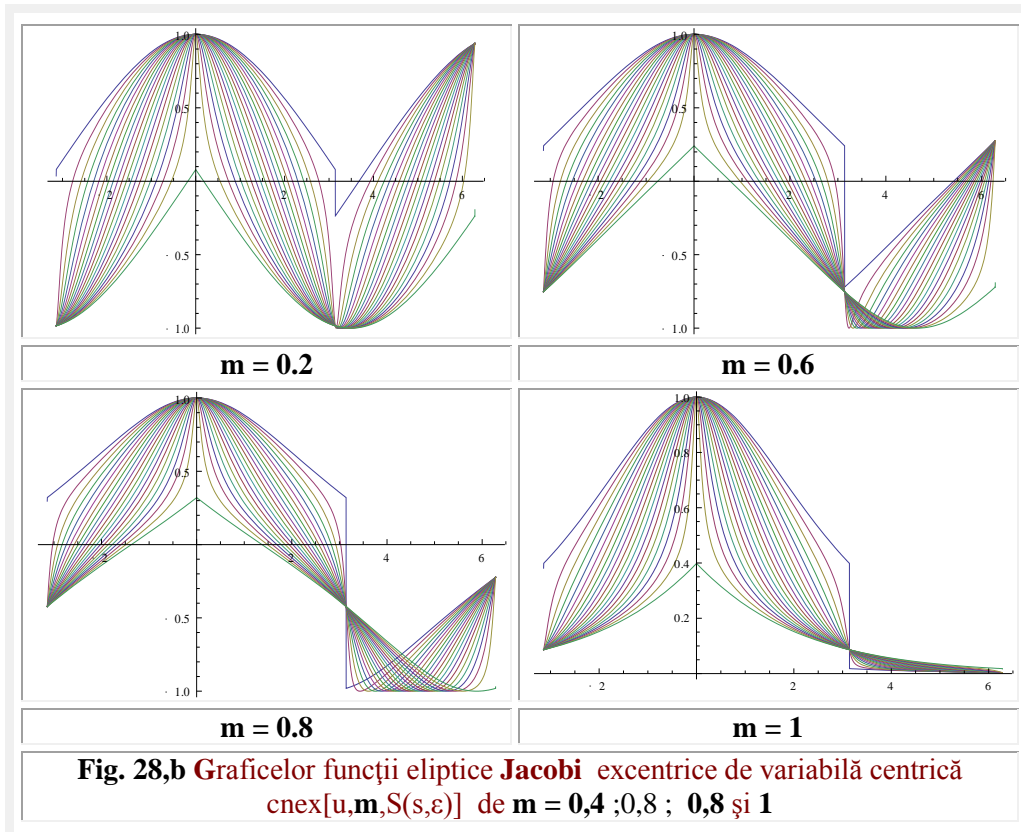
atunci se vor obține **FEJE** de variabilă centrică (**Fig.12.28,b**)



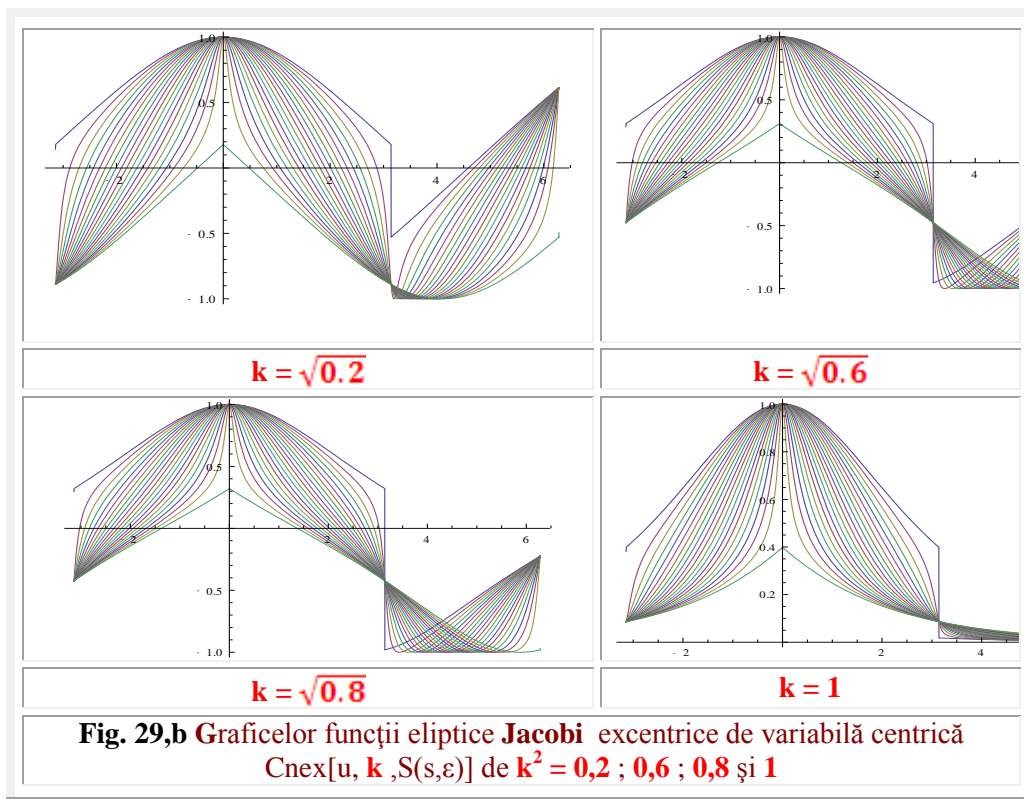
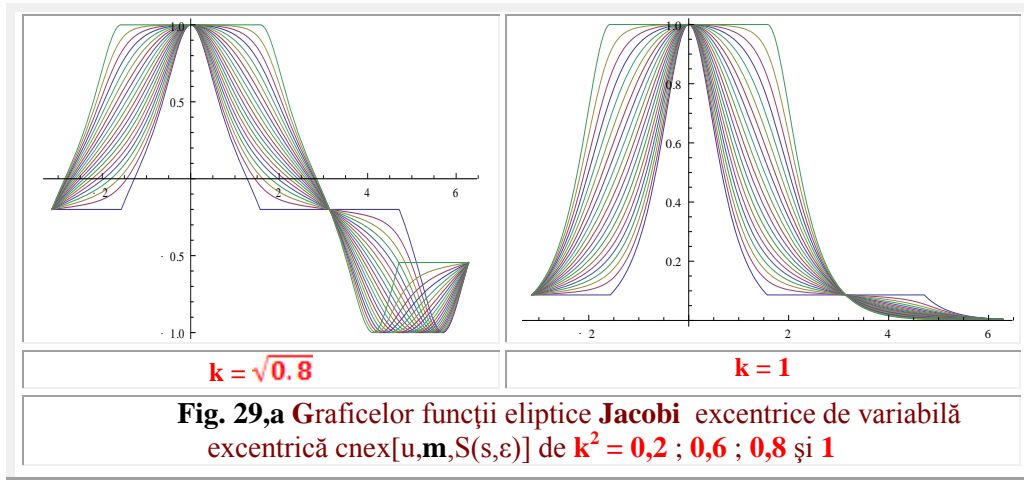
Graficele **FEJE** de argument **k** (**Fig. 12.29,a** și **12.29,b**) nu diferă prea mult de cele de argument **m** (**Fig.12.28,a** și **12.28,b**); graficele funcțiilor de **$m = 0,04$** fiind aceleași cu cele ale funcțiilor de **$k = 0,2$** , deoarece **$m = k^2$** și **$k = \sqrt{m}$** .

12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

FEJE de argument modificat, ca funcții de **m** sunt prezentate în figura **12.30,a** ca funcții de variabilă excentrică și în figura **12.30,b** ca funcții de variabilă centrică.



12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

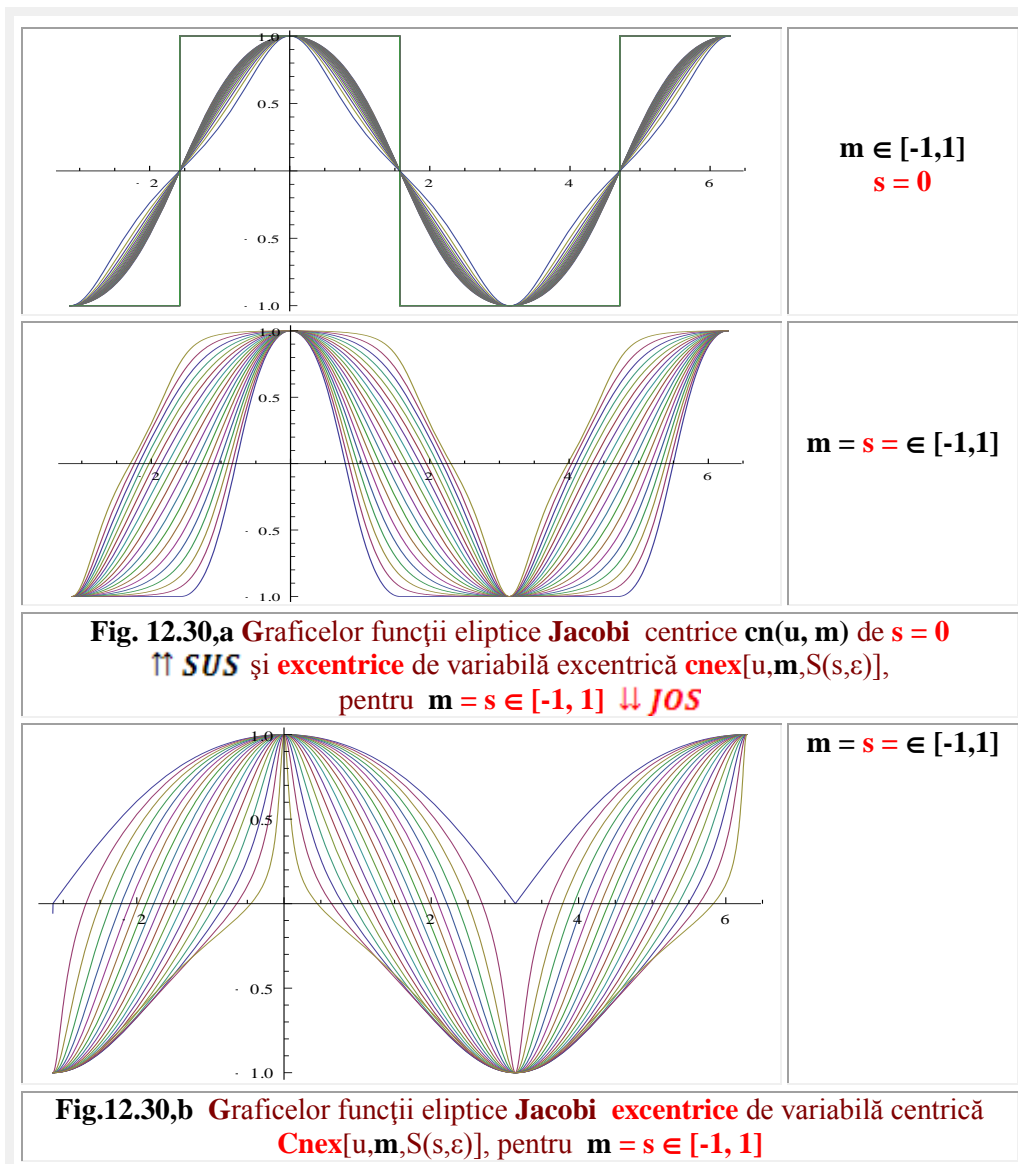


Aceleași funcții dar de modul k sunt prezentate în **figurile 12.31,a** și **12.31,b**.

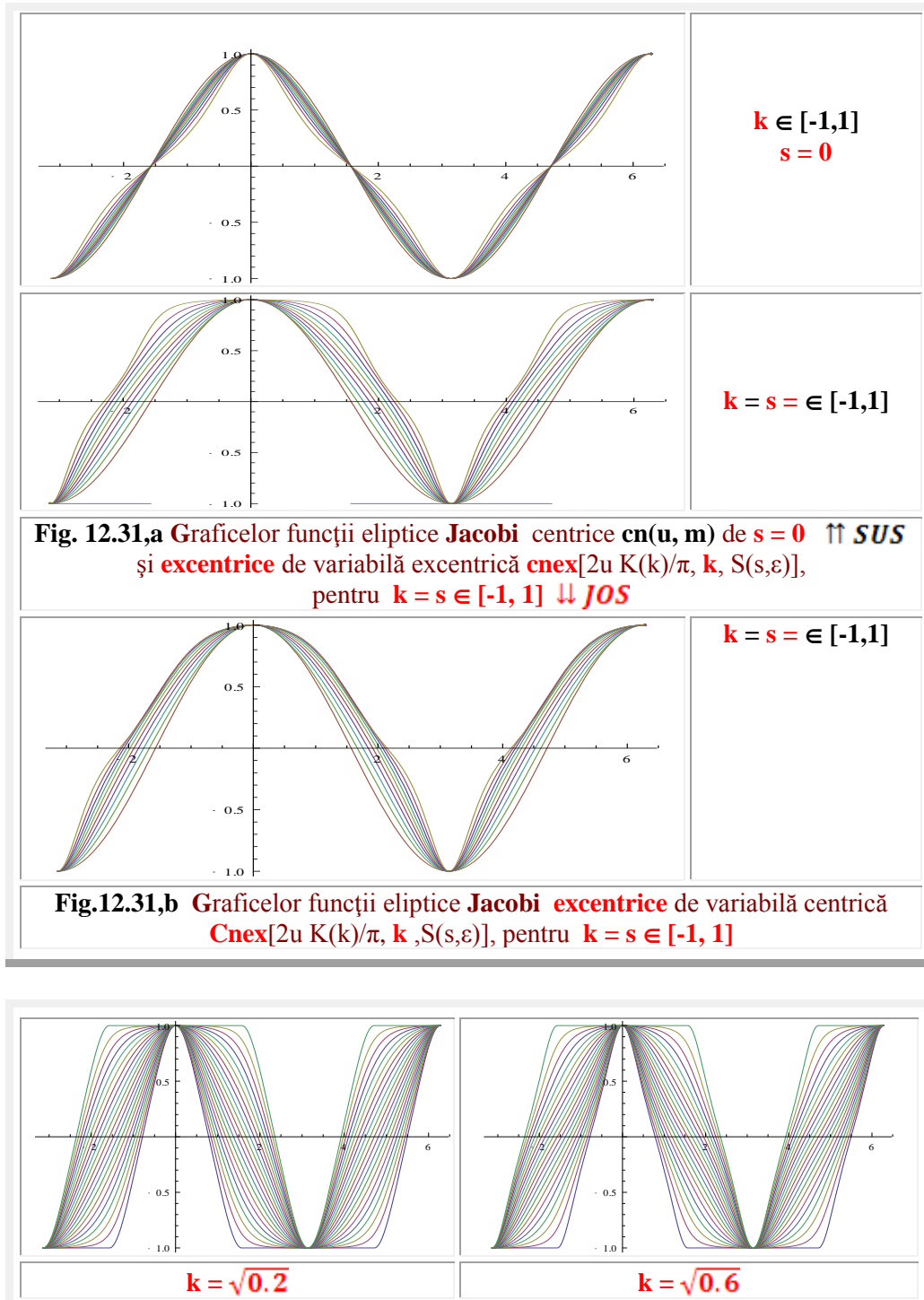
12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

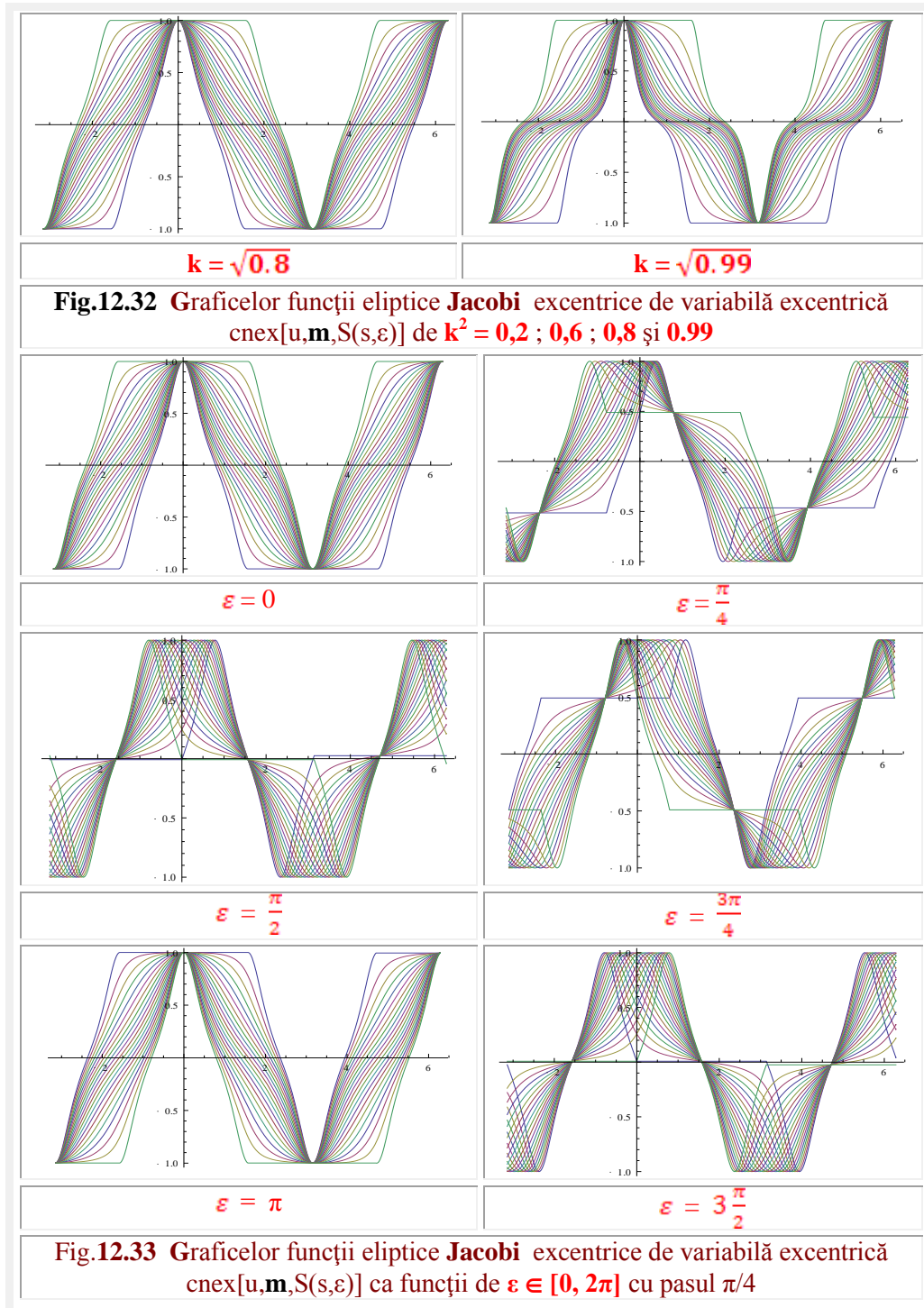
Deoarece diferențele dintre **FEJE** de modul m și de parametru k sunt neglijabile, se vor prezenta doar **FEJE** de k în **figura 12.32**. **FEJE** de modul m sunt aproape identice pentru modulul cuprins în domeniul $m = 0, 2..0,8$.

Variația formelor graficelor ca funcții de ε și de modul $k = 0.9$ sunt prezentate în **figura 12.33**. Se observă ca din acest punct de vedere **FEJE** sunt funcții de perioadă π .



12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE





12.6.5 FSM ELIPTICE Jacobi EXCENTRICE (FEJE)

$snex(u,m), snex(u,k)$

ȘI DE ARGUMENT MODIFICAT

$snex [2uK(m)/\pi, m], snex [2uK(k)/\pi, k]$

Funcția eliptică **Jacobi** centrică (**FEJC**) este exprimată de dezvoltarea în serie de puteri

$$(12.68) \quad sn(u,m) = u + (-1/6 - m/6) u^3 + 1/120 (1 + 14m + m^2) u^5 + ((-1 - 135m - 135m^2 - m^3) u^7) / 5040 + ((1 + 1228m + 5478m^2 + 1228m^3 + m^4) u^9) / 362880 + O[u]^{11}$$

Cele două tipuri de familii de funcții eliptice **Jacobi** (**FEJC**) centrice sunt prezentate în paralel în **figura 12.34** ca funcții de modulul m și de parametrul k . Se observă că diferențele sunt destul de mici ca formă a graficelor dar suficient de mari valoric.

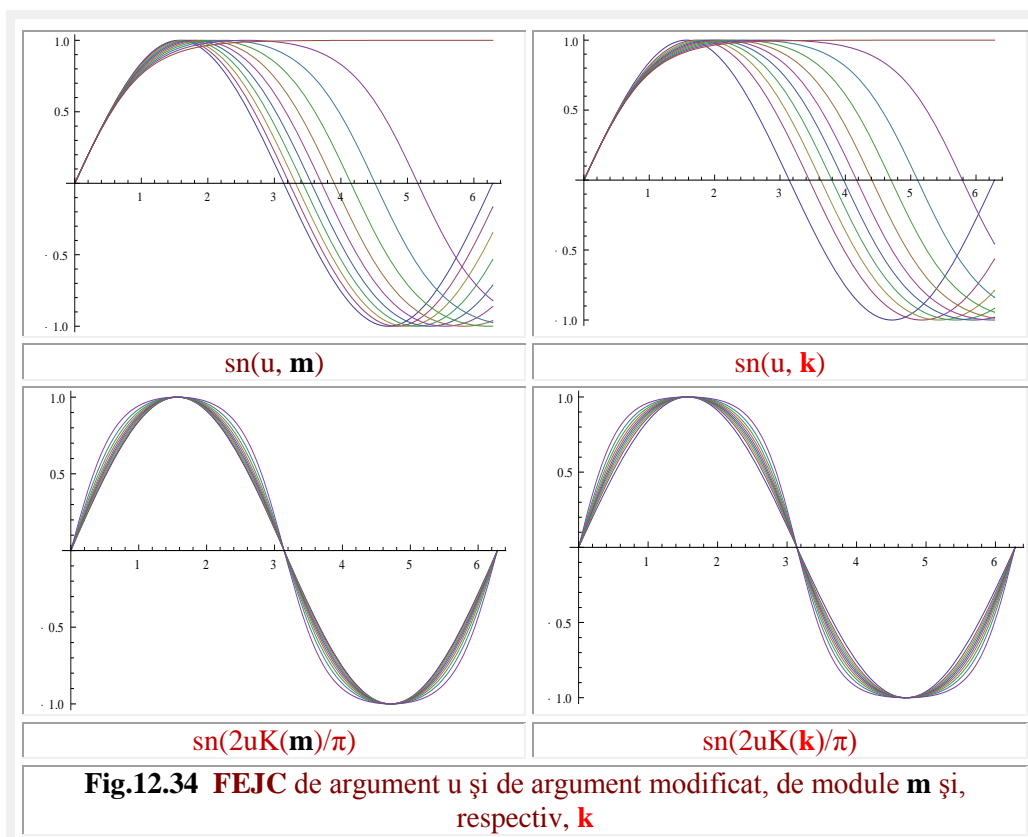
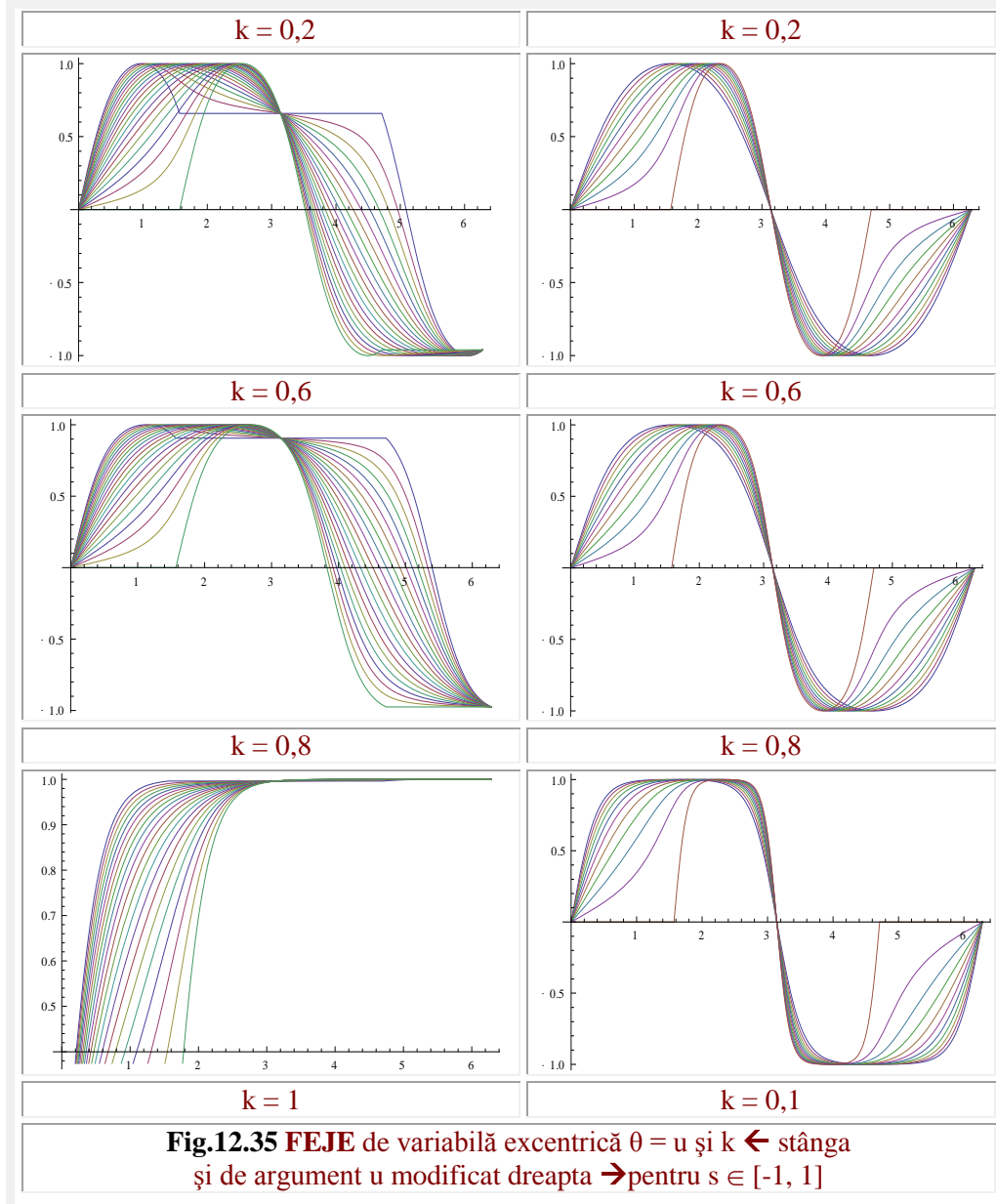


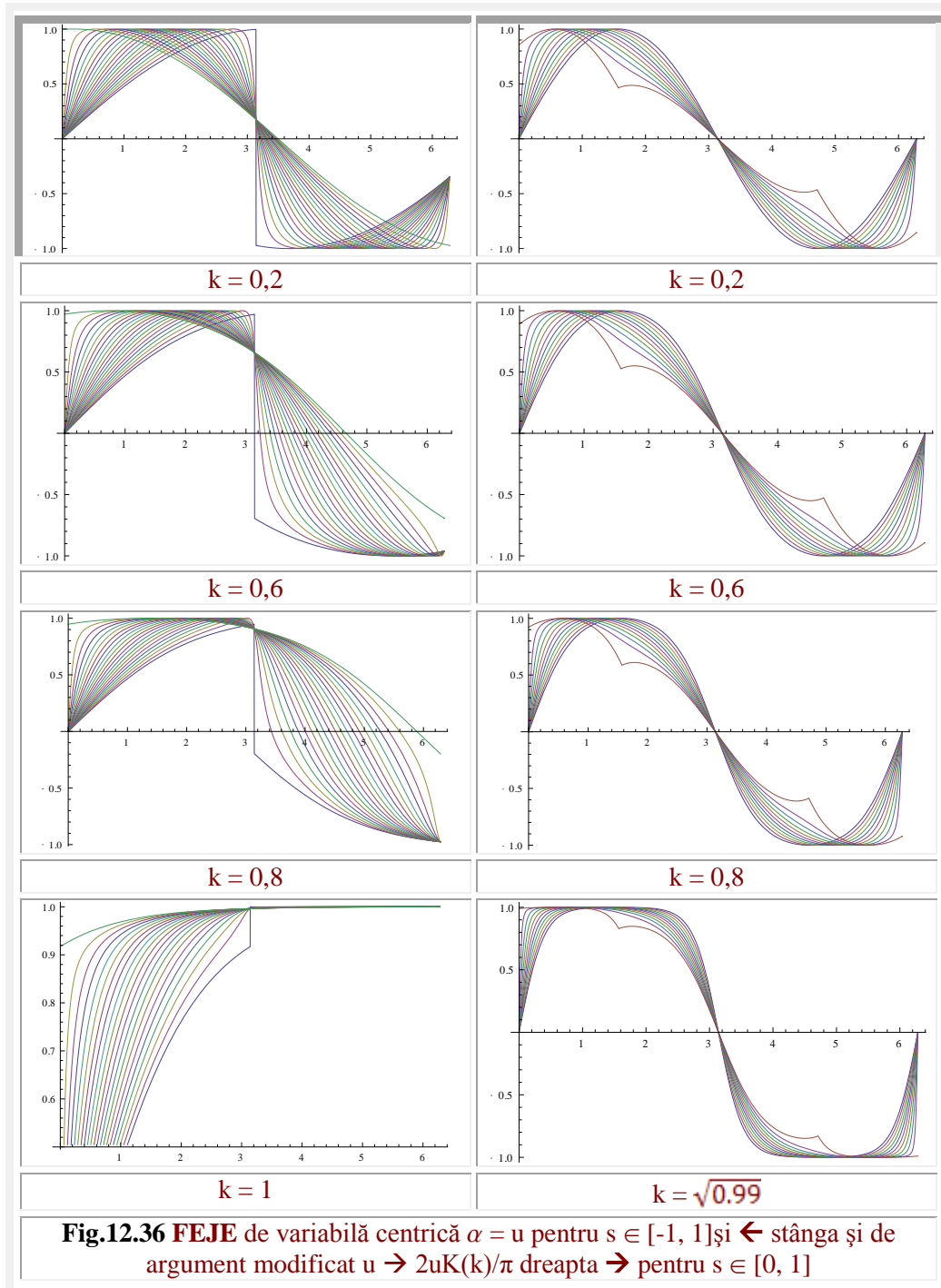
Fig.12.34 FEJC de argument u și de argument modificat, de module m și, respectiv, k

12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

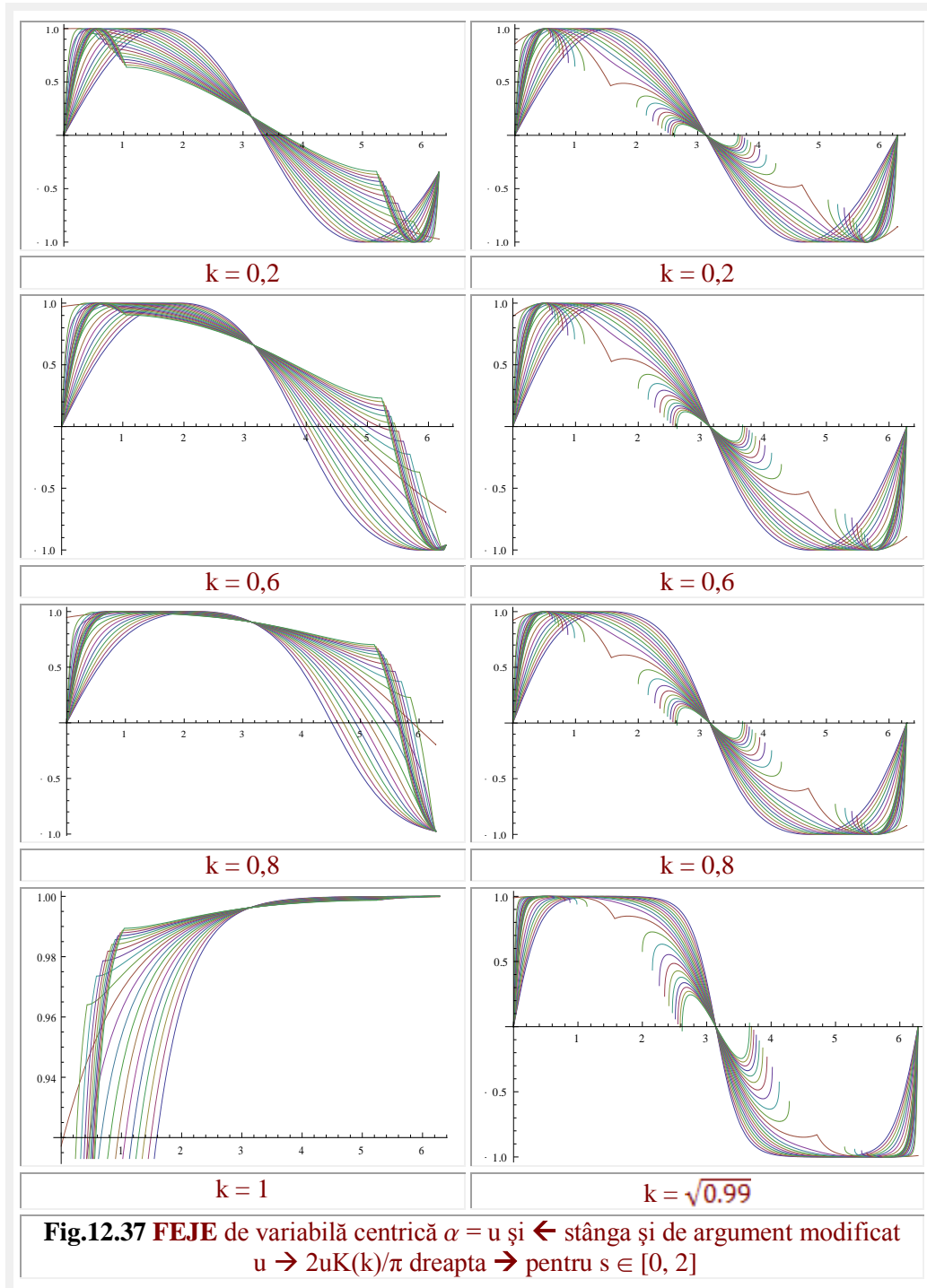


Procedând ca și în cazurile anterioare și înlocuind argumentul u cu funcția $aex[\theta = u, S(s, \varepsilon)]$ se va trece din centric în excentric și se vor obține funcții eliptice **Jacobi** excentrice de variabilă excentrică (**FEJE**) – Fig.12.35 - , iar prin înlocuirea cu **FSM-CE** $Aex(\alpha \equiv u, S(s, \varepsilon)]$ se vor obține **FSM** eliptice **Jacobi** excentrice (**FEJE**) de variabilă centrică $\alpha \equiv u$ (Fig. 12.36 stânga \leftarrow).

12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE



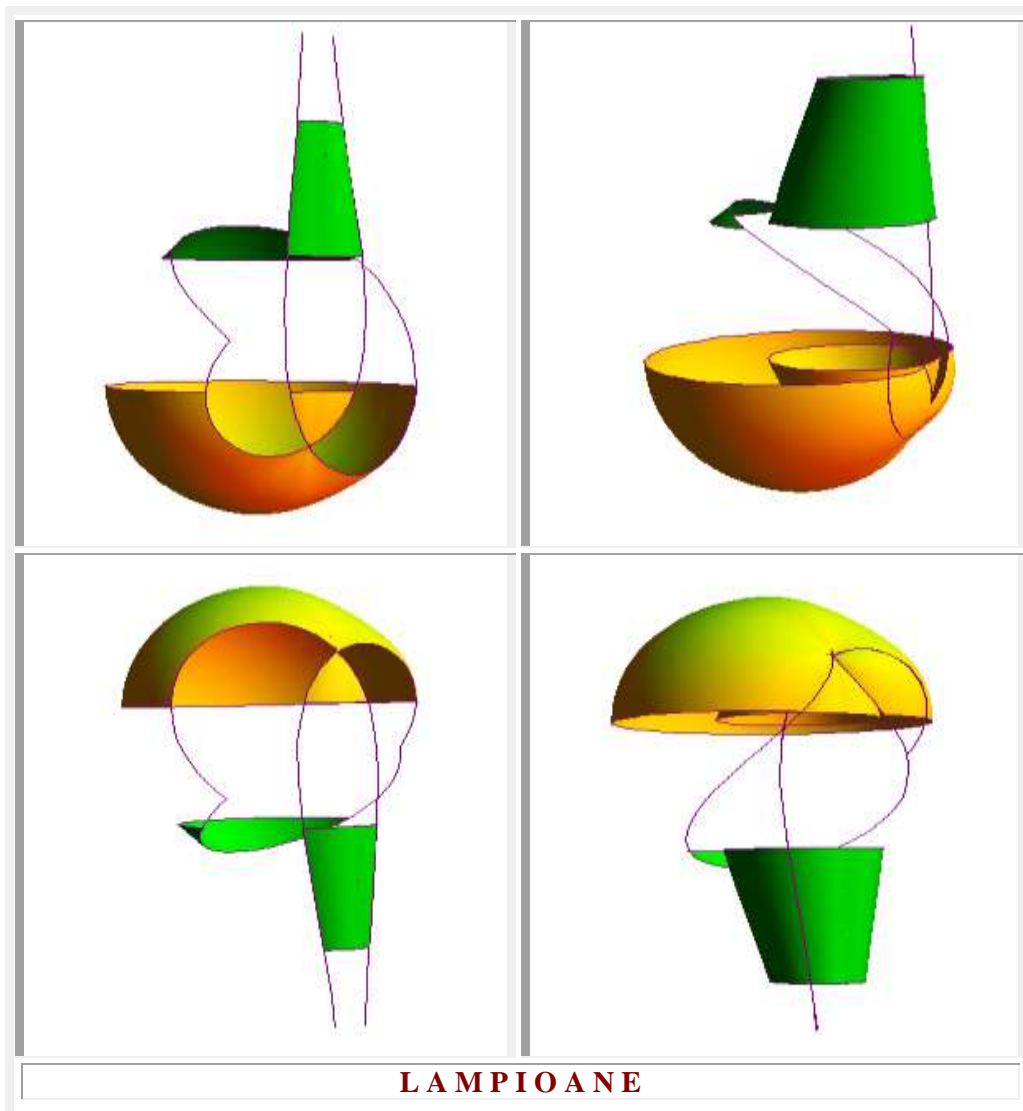
12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE



12 INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE

Prin modificarea argumentului u la $2uK(k)/\pi$ se obțin **FEJ** de argument modificat (**Fig. 12.36** dreapta \rightarrow).

Se știe că **FSM-CE** de variabila centrică sunt continue și pentru $s^2 > 1$ ceea ce nu se mai întâmplă și pentru toate tipurile de **FEJE**, așa cum se poate observa în **figura 12.37**. **FEJE** de variabilă u (stânga figurii) sunt continue, iar cele de variabila modificată (dreapta) sunt discontinue pentru $s^2 > 1$.



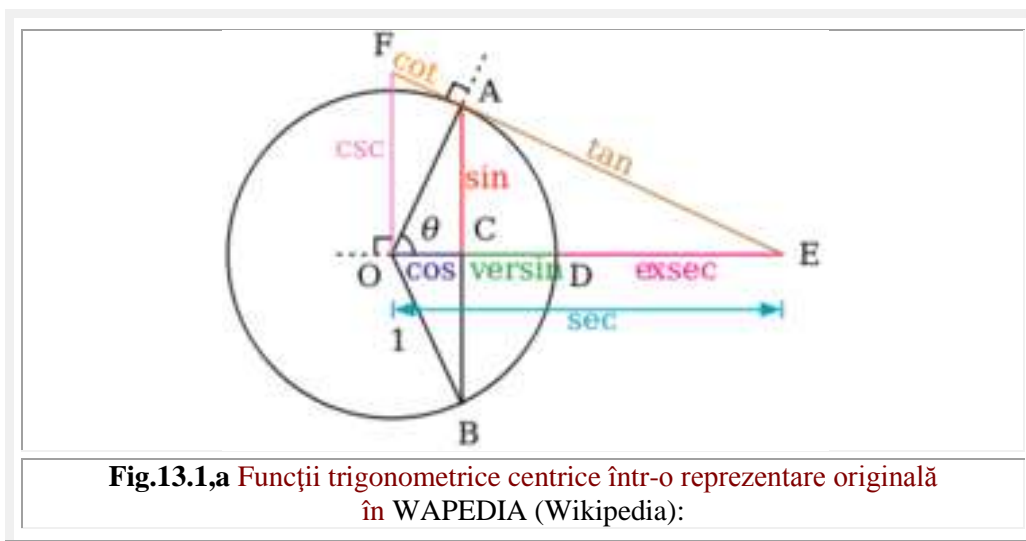
Motto “**Intuiția este o știință exactă**”
Autor necunoscut exact

Capitolul 13

FUNCTII COMPUSE AUTOINDUSE (FAI) ȘI FUNCTII INDUSE (FI)

13.1 DESPRE DIVERSE FUNCTII MATEMATICE VECHI ȘI NOI

Unele dintre aceste funcții, în special cele induse și cele autoinduse, sunt rodul aplicării principiului lui **Fred Menger** “**Dacă torturezi datele suficiente, acestea îți vor mărturisi aproape totul**”.



Căutând posibilitatea deformării, într-un anumit fel, a unor curbe, date de funcții trigonometrice centrice și excentrice, diversele lor expresii au fost torturate sau “întoarse pe toate fețele/părțile” până ce au fost descoperite noile funcții compuse sau funcții de funcții, sau numai de funcție, denumite, provizoriu, **funcții matematice autoinduse (FMAI)**, pe scurt, **FAI** dacă expresiile lor conțin una și aceeași funcție din aceeași clasă, repetată de n ori, de exemplu ; $\sin[\sin[\sin[\sin[\dots[\sin[x]\dots]]]]]$ (**Fig. 13.2,a; 13.2,b; 13.3, 13.4, 13.5; 13.6** ș.a.) și **funcții matematice induse (FMI)** pe scurt, **(FI)**, dacă expresiile lor conțin funcții de diverse clase și din aceeași clasa de diverse tipuri, ca de exemplu $\cos[\sin[\cos[\sin[0,5\cos[0,5\sin[\dots\sin[x]\dots]]]]]$.

Pentru a le defini, e necesar să se reamintească definițiile funcției, în general și, în special, a celor trigonometrice. Pentru a fi mai credibili, cităm din WAPEDIA (Wikipedia):

“În matematică, o **funcție** este o *relație* care asociază fiecărui element dintr-o mulțime (**domeniul**) un singur element dintr-o altă (**posibil din aceeași**) mulțime (**codomeniul**). Noțiunea de funcție este fundamentală în aproape toate ramurile matematicii și în toate științele exacte.

În matematică, prin **funcții trigonometrice** se înțeleg niște funcții ale unui unghi oarecare. Ele se folosesc la studierea triunghiurilor și reprezentarea unor fenomene periodice, printre multe altele. Ele sunt definite ca raporturi între anumite laturi ale triunghiului dreptunghic în funcție de un unghi al acestuia, și pot fi, echivalent, definite ca lungimi ale diferitelor segmente de dreaptă construite în jurul unui cerc unitate. Unele definiții mai moderne le exprimă sub formă de serii infinite sau ca soluții ale unor ecuații diferențiale, permițând extinderea lor la valori pozitive și negative și chiar la numere complexe.

Studiul funcțiilor trigonometrice datează din vremurile babiloniene, și o muncă considerabilă a fost depusă în domeniul lor de către matematicienii greci și persani, în antichitate.

În utilizarea modernă, există șase funcții trigonometrice de bază, tabelate mai jos împreună cu ecuațiile care le leagă una de alta, la care s-au mai adăugat noile funcții ale lui **Octavian Voinoiu** publicate în a sa “**MATEMATICĂ SIGNADFORASICĂ**”. Mai ales în cazul ultimelor patru, aceste relații sunt adesea considerate *definiții* ale acestor funcții, dar pot fi definite la fel de bine și geometric sau prin alte mijloace, definiții din care se pot deduce aceste relații (**Fig.1**).

Câteva alte funcții au fost utilizate de-a lungul istoriei (și au apărut în unele tabele vechi), dar în zilele noastre sunt rar folosite, astfel de exemple fiind funcția versinus $= 1 - \cos \theta$ și funcția exsecantă $= \sec \theta - 1$.”

O definiție mai generală dată funcției afirmă că “Prin funcție (aplicație) f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B se înțelege orice procedeu (lege sau convenție) prin care oricărui element x din A i se asociază un unic element y notat cu $f(x)$ din B . “ A este domeniul și B este codomeniul.

Pe website-ul amintit, în **figura 13.1,a**, unele funcții trigonometrice centrice sunt prezentate grafic într-un mod original, dar corect. Astfel, tangenta nu este prezentată clasic, ca o tangentă în D la cercul unitate, ci în punctul A . Astfel prezentată, ea se poate exprima ca o **FSM-CE** radial excentric de variabila centrică **$Rex\theta$** , notată cu θ în **figura 13.1,a**, sau **$rex\alpha$** de variabila excentrică α din excentrul E , constituind o abordare nouă, din care rezultă o serie de observații.

Aici, variabilele excentrice și centrice sunt notate exact invers decât notațiile practicate în această lucrare. Dar, în definitiv, unghiurile pot fi notate oricum, notațiile nu influențează rezultatele.

Să încercăm să reprezentăm tangenta prin funcțiile $rex\alpha = Rex\theta = EA$, în acest caz, având ambele determinări, de indice 1 și 2, egale și, pentru $s > 1$, de același semn + când dreapta d este tangentă cu semidreapta pozitivă d^+ și de semn – când tangenta este semidreapta negativă d^- , așa cum rezulta și din **mecanismul T** din **figura 13.1,b**.

Se observă că excentricitatea numerică s este supraunitară ($s > 1$) și este

$$(13.1) \quad s = |OE| = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} > 1,$$

iar expresia **FSM-CE** $\text{rex}\alpha$ de **variabilă excentrică** este

$$(13.2) \quad \text{rex}\alpha = -s \cdot \cos\alpha \pm \sqrt{1 - s^2 \cdot \sin^2 \alpha}, \text{ în care}$$

$$(13.3) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \theta,$$

Expresia cunoscută a lui $\text{Rex}\theta$, de **variabilă centrică**, este

$$(13.4) \quad \text{Rex}\theta = \pm \sqrt{1 + s^2 - 2s \cdot \cos\theta}$$

Înlocuind excentricitatea (13.1) în (13.2) cu valoarea lui (13.3) rezultă

$$(13.5) \quad \text{rex}\alpha = -\frac{1}{\cos\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2\theta} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \pm \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \tan\theta, \text{ ceea ce era de demonstrat (QED).}$$

Tabelul 13.1 Tabelul funcțiilor trigonometrice centrice curente, completate cu câteva funcțiile trigonometrice ale lui O. Voinoiu

Funcția	Abrevierea	Relații
Cosinus	cos	$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$
Sinus	sin	$\pm \sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$
Tangentă	tg / tan	$\pm \tan \alpha = \pm \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\pm 1}{\cot \alpha} = \cot\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$
Tangenta Voinoiu	tgV/tanV	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\text{Abs}[\cos \alpha]} = \cot \nu\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$
Cotangentă	ctg / cot	$\pm \cot \alpha = \pm \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\pm 1}{\tan \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$
Cotangenta Voinoiu	ctg / cotV	$\pm \cot \nu \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{Abs}[\sin \alpha]} = \tan \nu \alpha\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$
Secantă	sec	$\pm \sec \alpha = \frac{\pm 1}{\cos \alpha} = \csc\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$
Cosecantă	cosec / csc	$\csc \alpha = \frac{\pm 1}{\sin \alpha} = \sec\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$

Înlocuind excentricitatea (13.1) în (13.4) rezultă la fel

$$(13.6) \quad \text{Rex}\theta = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 - 2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \pm \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \pm \tan\theta.$$

Concluzia, care se desprinde de aici, este că valorile și expresiile **FSM-CE** în punctele $W_{i,f}$, de început și de sfârșit al domeniului de existență a **FSM-CE**, în cazul $s > 1$, revenind la notațiile consacrate: α variabila **centrică** și θ cea **excentrică**, sunt

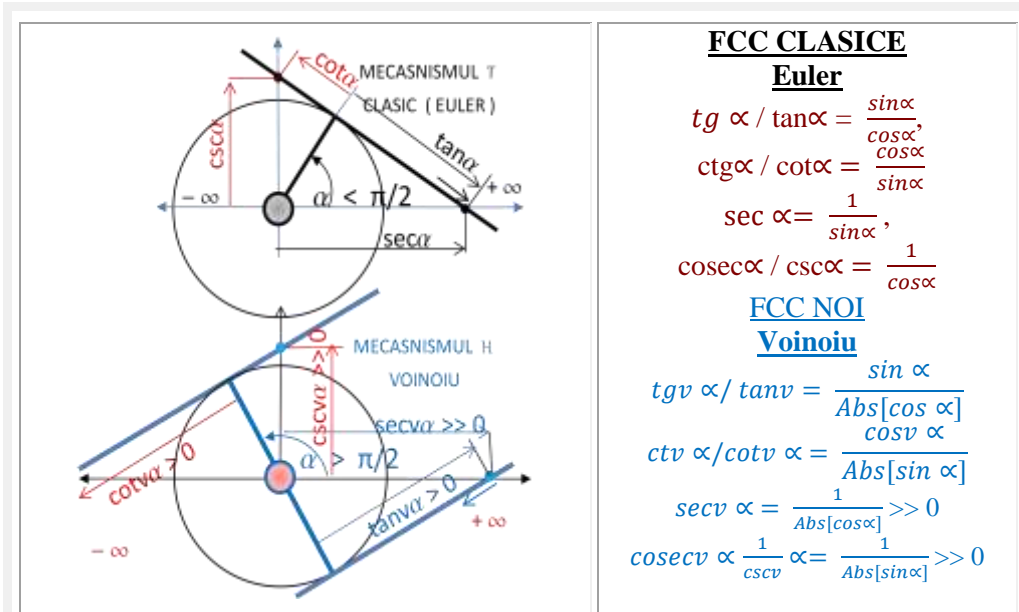


Fig. 13.1,a Mecanismele T și H de vizualizare a unor FCC clasice Euler și noi → Voinoiu

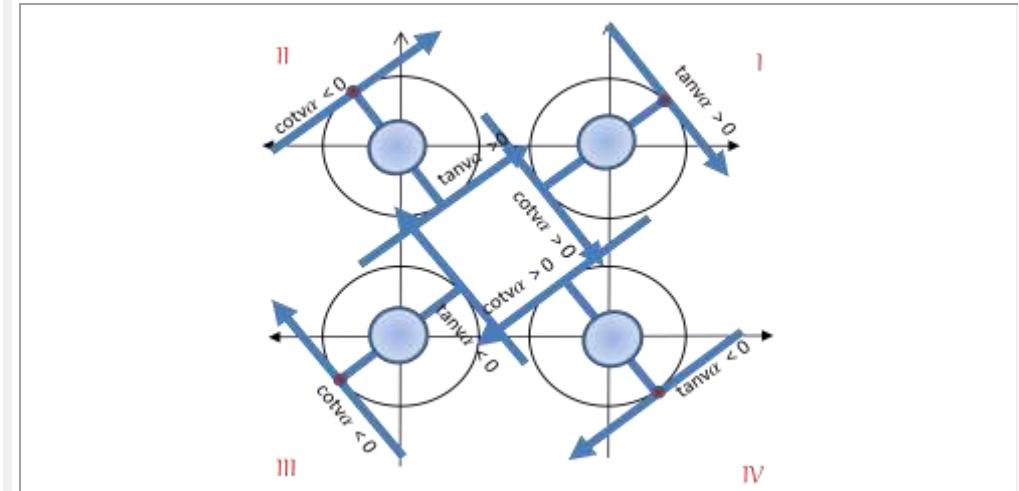


Fig. 13.1,b Reprezentarea tangentei și a cotangentei Voinoiu cu ajutorul mecanismului H în cadranele centrice I . . IV

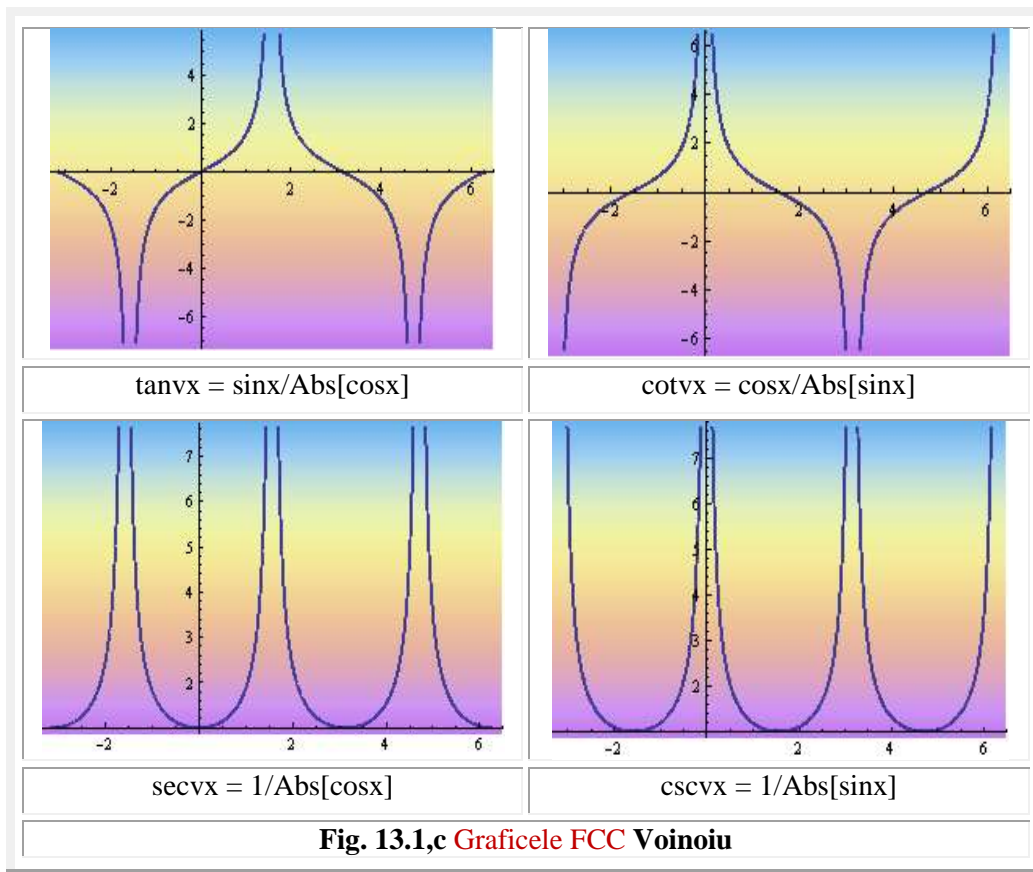
$$(13.7) \begin{cases} rex_1\theta = rex_2\theta = Rex_1\alpha = Rex_2\alpha = \tan\alpha \\ cex_1\theta = cex_2\theta = Cex\alpha_1 = Cex\alpha_2 = \cos\alpha \\ sex_1\theta = sex_2\theta = Sex\alpha_1 = Sex\alpha_2 = \pm \sin\alpha \\ dex_1\theta = dex_2\theta = Dex\alpha_1 = Dex\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Semnul plus la sinus fiind pentru W_i și minus pentru W_f , dacă excentrul $S(s > 1$ (și pozitiv), $\varepsilon = 0$).

Vom denumi schema de exprimare vizuală a FCC clasice $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ ca mecanismul în T sau, pe scurt, mecanismu **T Euler**, prezentat în **figura 13.1,a** și **13.1,b** – sus.

Mecanismul de vizualizare a FCC **Voinoiu**, prezentat în partea de jos a **figurii 13.1,a** este denumit ca mecanism în **H Voinoiu**.

În conformitate cu **matematica signadforasică** a lui **O. Voinoiu**, semnul unei fracții este dat **exclusiv** de semnul numărătorului.



De aceea, FCC compuse au expresiile (13.8) din care rezultă că secanta **Voinoiu** $\rightarrow \sec\alpha$ și cosecanta **Voinoiu** $\rightarrow \csc\alpha$ sunt strict pozitive (notate cu $\gg 0$)

în **figura 13.1,b**) și se obțin prin intersectarea mecanismului **H numai** cu semiaxele x și, respectiv, $y > 0$. Expresiile de definiție ale **FCC Voioiu** sunt

$$(13.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \alpha}{\text{Abs}[\cos \alpha]} = \text{tgv } \alpha / \text{tanv } \alpha \rightarrow \text{numită tangenta Voioiu} \\ \frac{\cos \alpha}{\text{Abs}[\sin \alpha]} = \text{ctgv } \alpha / \text{cotv } \alpha \rightarrow \text{numită cotangenta Voioiu} \\ \frac{1}{\text{Abs}[\cos \alpha]} = \text{secv } \alpha / \text{secv } \alpha \gg 0 \rightarrow \text{numită secantă Voioiu} \\ \frac{1}{\text{Abs}[\sin \alpha]} = \text{cosecv } \alpha / \text{cscv } \alpha \gg 0 \rightarrow \text{numită cosecantă Voioiu} \end{array} \right.$$

Funcțiile tangenta **Voioiu** $\text{tanv } \alpha$ și cotangenta **Voioiu** $\text{cotv } \alpha$ rezultă prin intersectarea succesivă, cu cele două brațe paralele ale lui **H**, a semiaxe $x > 0$ cu una dintre semidreptele pozitive a lui **H**, pentru $\text{tanv } \alpha$ și cu semidreapta negativă a lui **H** a axei $x < 0$ pentru $\text{cotv } \alpha$, așa cum este ilustrat în **figura 13.1,a**, pentru cazul $\pi < \alpha < \pi/2$.

Tangenta și cotangenta **Voioiu** utilizează ambele semiaxe x și y cât și ambele semidrepte – pozitive și negative - ale celor două drepte ale lui **H** tangente la $C(O,1)$, pentru care originile dreptelor sunt punctele de tangență $T(1, \alpha)$ și $T'(1, \alpha + \pi)$.

De asemenea, intersecția tangențelor se face atât cu semiaxele pozitive $x, y > 0$ cât și cu cele negative $x, y < 0$ (**Fig.13.1,b**).

Rezultă că $\text{tanv } \alpha > 0$ unde și $\sin \alpha > 0$, adică în domeniul / intervalul $\alpha \in [0, \pi]$ în care crește de la zero la $+\infty$ și apoi scade din nou la zero și negativă în intervalul în care și $\sin \alpha < 0$, adică pentru $\alpha \in [\pi, 2\pi]$.

Ca urmare, tangenta **Voioiu**, de exemplu, este $+\infty$ la $\alpha = \pi/2$ și $-\infty$ la $\alpha = 3\pi/2$ și nu este, în același timp, pentru $\alpha = \pi/2$ și $\alpha = 3\pi/2$, atât la $+\infty$ cât și la $-\infty$ ca în cazul tangentei, ca și de altfel, a tuturor funcțiilor clasice **Euler**.

La mecanismul **T**, punctul curent $M(1, \alpha)$, de pe cercul unitate împarte tangenta la **C** a mecanismului **T** în două semidrepte, una pozitivă și cealaltă negativă, dar, așa cum se poate observa în **figura 13.1,b**, $\text{cotv } \alpha > 0$, pentru un $\alpha < \pi/2$, deși pozitivă apare ca negativă pe semidreapta tangență negativă!, apoi, în intervalul $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, în care este negativă, ea este orientată în sensul + al semidreptei pozitive, deci pare că ar fi pozitivă!. Ceea ce nu se întâmplă și cu **FCC tanv** care este corect reprezentată pe cele două semidrepte ale tangentei: $+\infty$ la $\pi/2 - \Delta\epsilon$ și $-\infty$ la $\pi/2 + \Delta\epsilon$.

Așcum se poate observa în **figura 13.1,a**, în timp ce o tangenta generează **FCC** nouă $\text{tanv } \alpha$, cealaltă tangență generează funcția $\text{cotv } \alpha$, generările fiind efectuate simultan cu același tip de semidreaptă, în **figurile 13.1,a** și **13.1,b**, pentru $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, $\text{tanv } \alpha > 0$ și $\text{cotv } \alpha < 0$.

Prin creșterea lui α și rotirea lui **H**, în sens trigonometric pozitiv (sinistror, levogin), din figură se vede că $\text{tanv } \alpha > 0$ scade de la $+\infty$ la 0 și $\text{cotv } \alpha < 0$ scade de la 0 la $-\infty$.

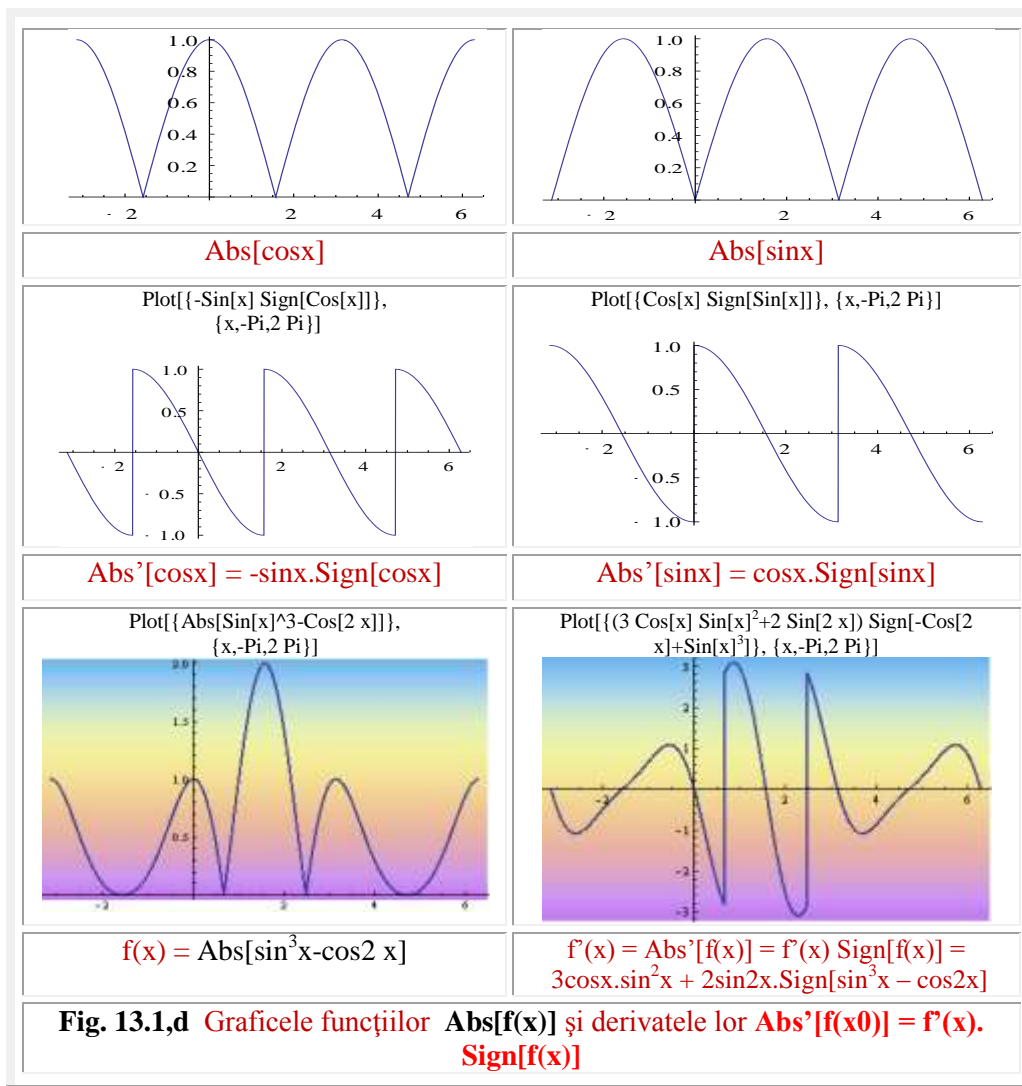
Pentru generarea **FCC noi**, secanta **Voioiu** $\text{secv } \alpha$ și cosecanta **Voioiu** $\text{cscv } \alpha$, se utilizează ambele semidrepte pozitive ale celor două tangente ale lui **H**, dar intersecția lor se face

doar cu semiaxele pozitive $x, y > 0$, deoarece aceste funcții circulare / trigonometrice centrice **Voioiu** sunt **strict pozitive** ($\text{secv } \alpha \gg 0$, $\text{cscv } \alpha \gg 0$).

Graficele **FCC Voioiu** sunt prezentate în **figura 13.1,c**.

13.2 DERIVATELE FUNCȚIILOR CIRCULARE CENTRICE VOINOIU

Pentru a putea deriva aceste FCC, este necesar, în prealabil, să se determine derivata funcției compuse $Abs[f(x)]$.



Programul de matematica al lui **Stephan Wolfram** dă, pentru o astfel de derivată, expresia

$$(13.9) \quad D[Abs[f(x),x] = \frac{d}{dx}(Abs[f(x)]) = \frac{df(x)}{dx} Abs'[f(x)] = f'(x). Abs'[f(x)]$$

dar nu spune cine este $\text{Abs}'[f(x)]$ și nici nu prindează o astfel de expresie.

De aceea, vom încerca să aflăm care este derivata **Abs'** a lui **Abs**, prin metoda **Menger** a "torturării" expresiilor de acest gen, urmând ca, în final, să se tragă concluziile de rigoare.

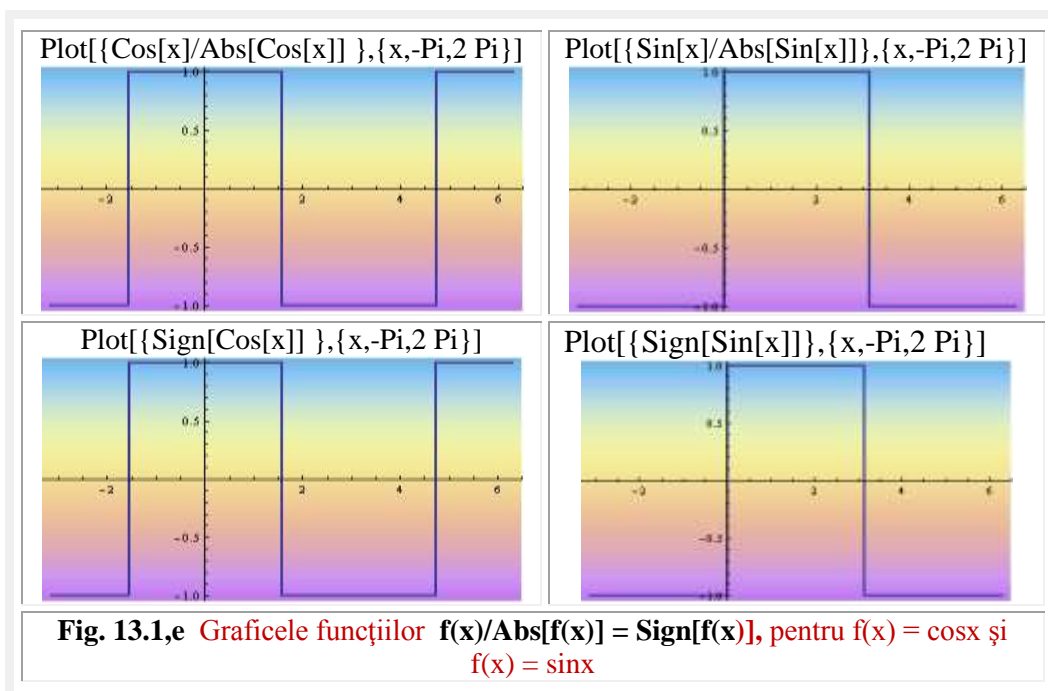
În acest scop, se prezintă, în **figura 13.1,d** graficele câtorva funcții, și anume: $\text{Abs}[\cos x]$, $\text{Abs}[\sin x]$ și $\text{Abs}[\sin^3 x - \cos 2x]$, $x \in [-\pi, 2\pi]$, precum și derivatele lor.

Urmărind derivatele acestor funcții, adică tangentele la graficele acestor funcții, ca semn și ca valoare s-a putut trage concluzia cu privire la derivata acestei funcții bizare **Abs** $[f(x)]$, derivată pe care autorul nu a găsit-o dată în literatura de specialitate / matematică, nefigurând în niciun memorator de derivate matematice, deși derivata n-a fost greu / complicat de găsit.

Din aceste exemple se poate trage concluzia că derivata lui **Abs** $[f(x)]$ are expresia:

(13.10)

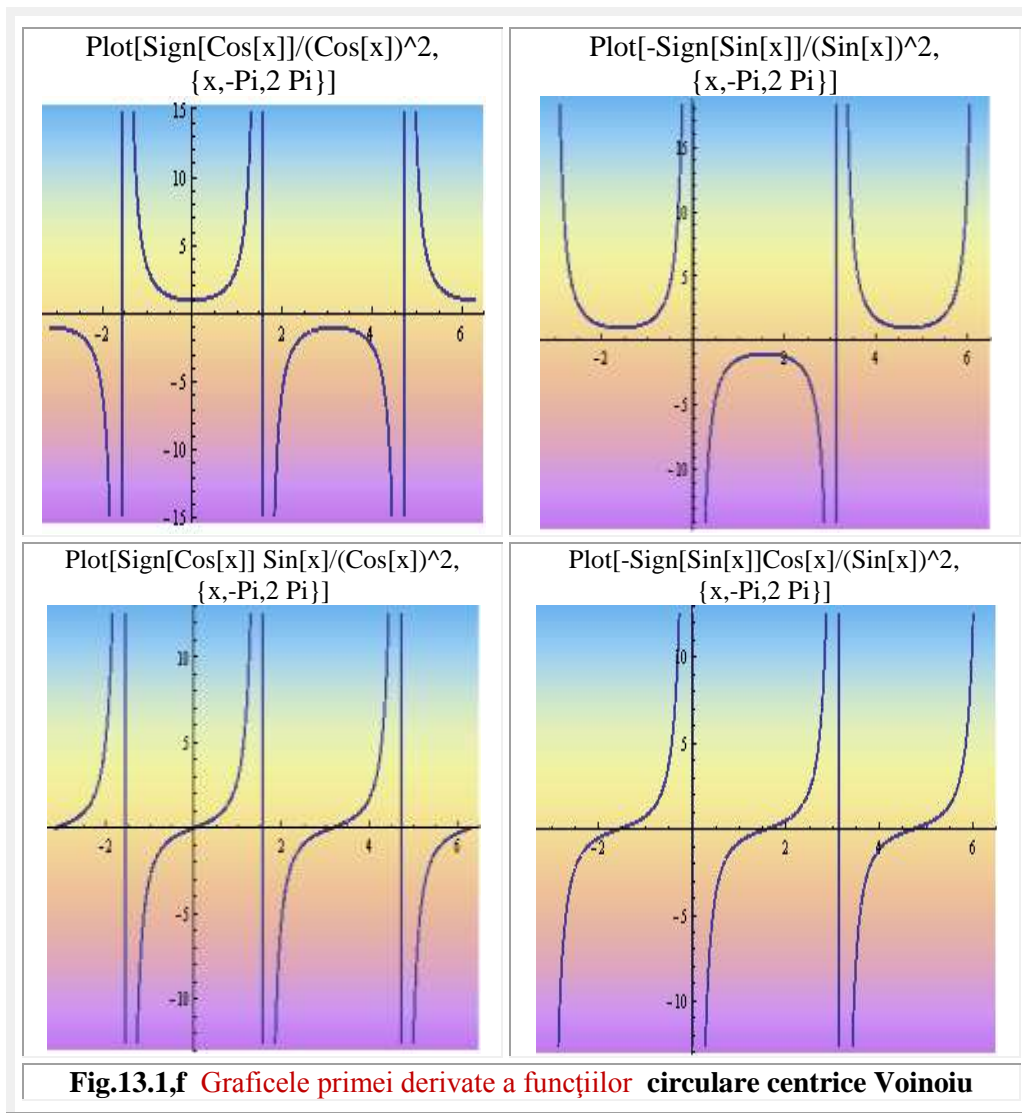
$$\frac{d}{dx} \text{Abs}[f(x)] = \frac{df(x)}{dx} \text{Sign}[f(x)]$$



Acum, derivatele FCC **Voinoiu** nu mai ridică niciun fel de probleme. Ele sunt

$$(13.11) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}(\tan vx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\text{Abs}[\cos x]}\right) = \frac{\cos x \cdot \text{Abs}[\cos x] + \sin^2 x \cdot \text{Sign}[\cos x]}{(\text{Abs}[\cos x])^2} \\ \frac{d}{dx}(\cot vx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\text{Abs}[\sin x]}\right) = \frac{-\sin x \cdot \text{Abs}[\sin x] - \cos^2 x \cdot \text{Sign}[\sin x]}{(\text{Abs}[\sin x])^2} \\ \frac{d}{dx}(\sec vx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\text{Abs}[\cos x]}\right) = \frac{\sin x \cdot \text{Sign}[\cos x]}{(\text{Abs}[\cos x])^2} \\ \frac{d}{dx}(\csc vx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\text{Abs}[\sin x]}\right) = -\frac{\cos x \cdot \text{Sign}[\sin x]}{(\text{Abs}[\sin x])^2} \end{cases}$$

și pot fi scrise și sub formele (13.12).



În aceste expresii se recunosc funcțiile dreptunghiulare (13.13) cu graficele din figura 13.1,e

$$(13.12) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}(\tan vx) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\text{Abs}[\cos x]} \right) = \frac{\cos x}{\text{Abs}[\cos x]} + \frac{\sin^2 x \cdot \text{Sign}[\cos x]}{(\text{Abs}[\cos x])^2} \\ \frac{d}{dx}(\cot vx) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{\text{Abs}[\sin x]} \right) = \frac{-\sin x}{\text{Abs}[\sin x]} - \frac{\cos^2 x \cdot \text{Sign}[\sin x]}{(\text{Abs}[\sin x])^2} \\ \frac{d}{dx}(\sec vx) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\text{Abs}[\cos x]} \right) = \text{Sign}[\cos x] \frac{\sin x}{(\text{Abs}[\cos x])^2} \\ \frac{d}{dx}(\csc vx) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\text{Abs}[\sin x]} \right) = -\text{Sign}[\sin x] \frac{\cos x}{(\text{Abs}[\sin x])^2} \end{cases}$$

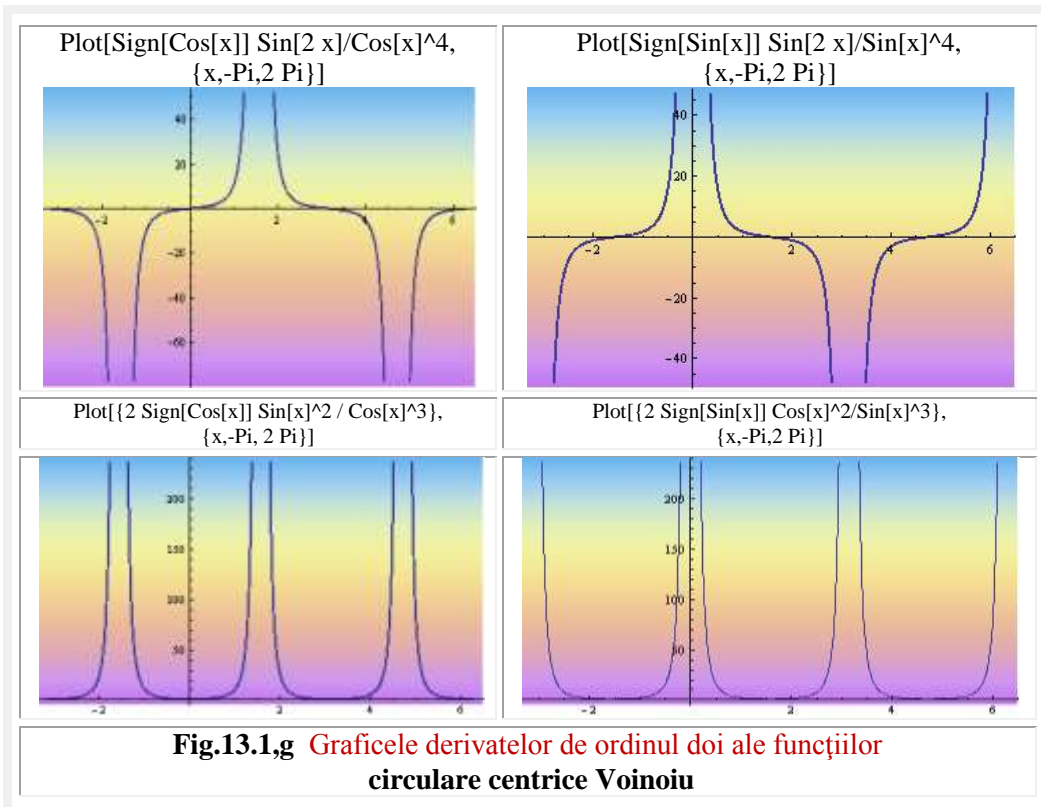
în care s-au folosit egalitățile

$$(13.13) \quad \begin{cases} \frac{\cos x}{\text{Abs}[\cos x]} = \text{Sign}[\cos x] \\ \frac{\sin x}{\text{Abs}[\sin x]} = \text{Sign}[\sin x] \end{cases}$$

care reprezintă una și aceeași funcție, funcții dreptunghiulare cu graficele din **figura 13.1,e**.

Înlocuind egalitățile (13.13) în relațiile / derivatele (13.12) rezultă

$$(13.14) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}(\tan vx) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\text{Abs}[\cos x]} \right) = \text{Sign}[\cos x] \left(1 + \frac{\sin^2 x}{(\text{Abs}[\cos x])^2} \right) \\ \frac{d}{dx}(\cot vx) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{\text{Abs}[\sin x]} \right) = -\text{Sign}[\sin x] \left(1 + \frac{\cos^2 x}{(\text{Abs}[\sin x])^2} \right) \\ \frac{d}{dx}(\sec vx) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\text{Abs}[\cos x]} \right) = \text{Sign}[\cos x] \frac{\sin x}{(\text{Abs}[\cos x])^2} \\ \frac{d}{dx}(\csc vx) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\text{Abs}[\sin x]} \right) = -\text{Sign}[\sin x] \frac{\cos x}{(\text{Abs}[\sin x])^2} \end{cases}$$



Deoarece

$$(13.15) \quad \begin{cases} (Abs[\cos x])^2 = \cos^2 x \\ (Abs[\sin x])^2 = \sin^2 x \end{cases}$$

utilizând egalitățile (13.15) în relațiile (13.14) se obțin forme asemănătoare cu ale derivatelor funcțiilor clasice de același tip, așa cum se observă în relațiile (13.16)

$$(13.16) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}(\tan vx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{Abs[\cos x]}\right) = Sign[\cos x] \frac{1}{\cos^2 x} = Sign[\cos x].\sec^2 x \\ \frac{d}{dx}(\cot vx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{Abs[\sin x]}\right) = -Sign[\sin x] \frac{1}{\sin^2 x} = -Sign[\sin x].\csc^2 x \\ \frac{d}{dx}(\sec vx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Abs[\cos x]}\right) = Sign[\cos x] \frac{\tan x}{\cos x} = Sign[\cos x] \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ \frac{d}{dx}(\csc vx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Abs[\sin x]}\right) = -Sign[\sin x] \frac{\cot x}{\sin x} = -Sign[\sin x] \frac{\cos x}{\sin^2 x} \end{cases}$$

Graficele derivatelor de ordinul întâi al **FCC Voinoiu** sunt prezentate în **figura 13.1.f**.

Pentru determinarea celei de a doua derivate a FCC **Voinoiu** este necesar să observăm că funcția $Sign[f(x)]$, fiind o constantă, derivata ei este nulă, așa că, prin derivarea primelor derivate (13.16) se obțin derivatele de ordinul doi (13.17) cu graficele din **figura 13.1g**

$$(13.17) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}(\tan vx) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{Abs[\cos x]}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{Sign[\cos x]}{\cos^2 x}\right) = \frac{2Sign[\cos x].\cos x.\sin x}{\cos^4 x} = \frac{Sign[\cos x].\sin 2x}{\cos^4 x} \\ \frac{d^2}{dx^2}(\cot vx) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\cos x}{Abs[\sin x]}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{Sign[\sin x]}{\sin^2 x}\right) = \frac{2Sign[\sin x].\sin x.\cos x}{\sin^4 x} = \frac{Sign[\sin x].\sin 2x}{\sin^4 x} \\ \frac{d^2}{dx^2}(\sec vx) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{Abs[\cos x]}\right) = \frac{d}{dx}\left(Sign[\cos x] \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) = 2Sign[\cos x] \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \\ \frac{d^2}{dx^2}(\csc vx) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{Abs[\sin x]}\right) = -\frac{d}{dx}\left(Sign[\sin x] \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) = 2Sign[\sin x] \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \end{cases}$$

13.3 FUNCȚII MATEMATICE CENTRICE **AUTOINDUSE (FAI)**

Se vor face referi la funcțiile supermatematice **excentrice autoinduse**, după ce se vor prezenta cele **centrice autoinduse**, care sunt mai simple, mai ușor de înțeles, dar la fel de utile și de surprinzătoare, din multe puncte de vedere.

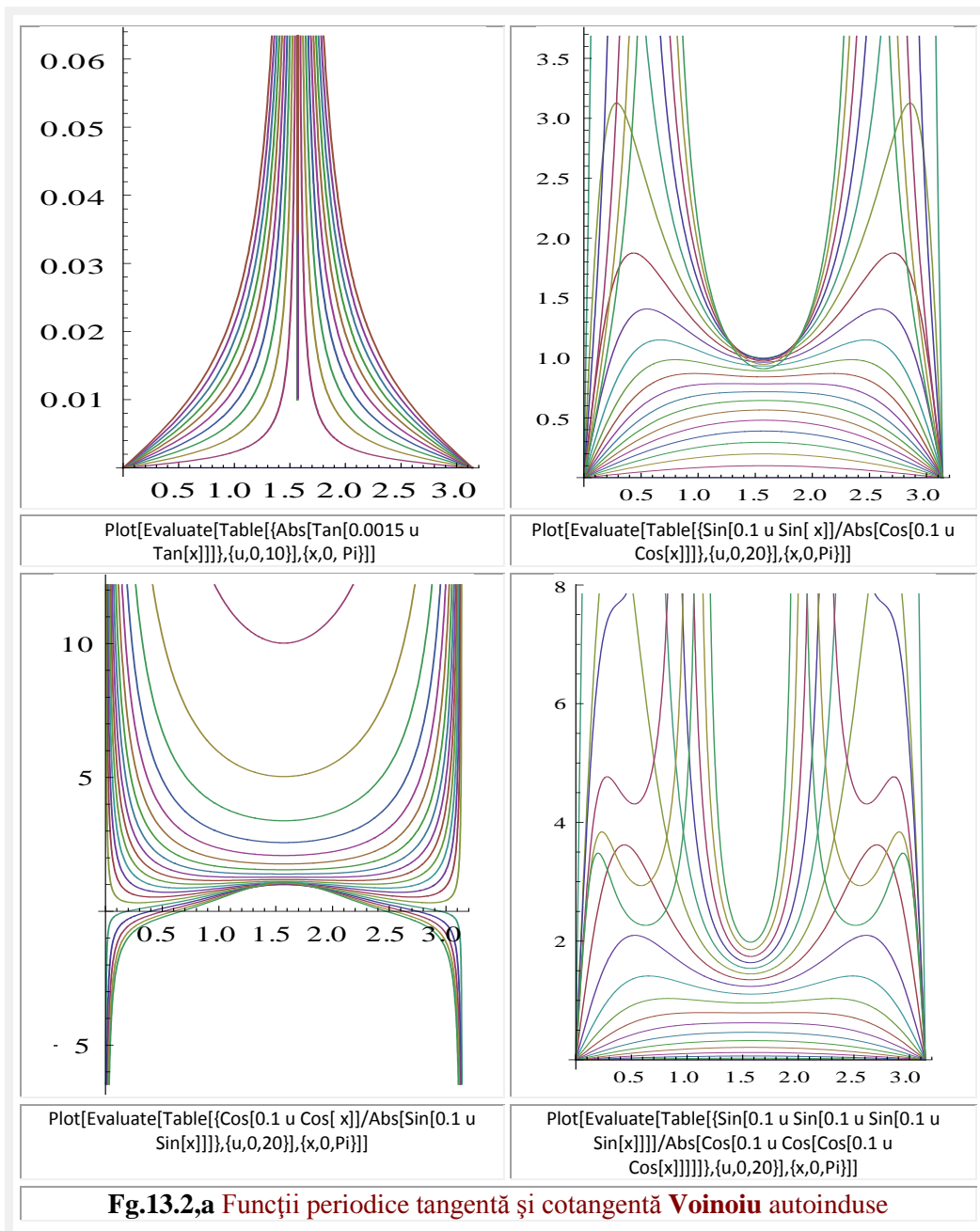
Se debutează cu câteva familii de **FAI** plăcute ochiului. Ochiului autorului: “de gustibus non est disputandum”.

Se vor exemplifica graficele unor **FAI**, centrice **Voinoiu**, surprinzătoare ca formă și ca imagine artistică. Se remarcă funcția sub formă de **turn**, sub formă de **pantolon** cu talie joasă, în **figura 13.2,a**, și a unor funcții periodice în **figura 13.2,b**.

Funcția autoindusă (FAI) stabilește o *relație* care asociază fiecărui element dintr-o mulțime (domeniul), care este valoarea **aceleiași funcții**, trigonometrică sau nu, de aceeași amplitudine sau de alta, de la caz la caz, adică este **codomeniul** tot al unei funcții – ulterioare/următoare), un singur element dintr-o aceeași mulțime (codomeniul).

Funcția autoindusă (FAI) este, așa dar, o funcție compusă, o funcție de funcție, sau, mai general/precis, o funcție de funcție compusă DIN ACELEAȘI FUNCȚII.

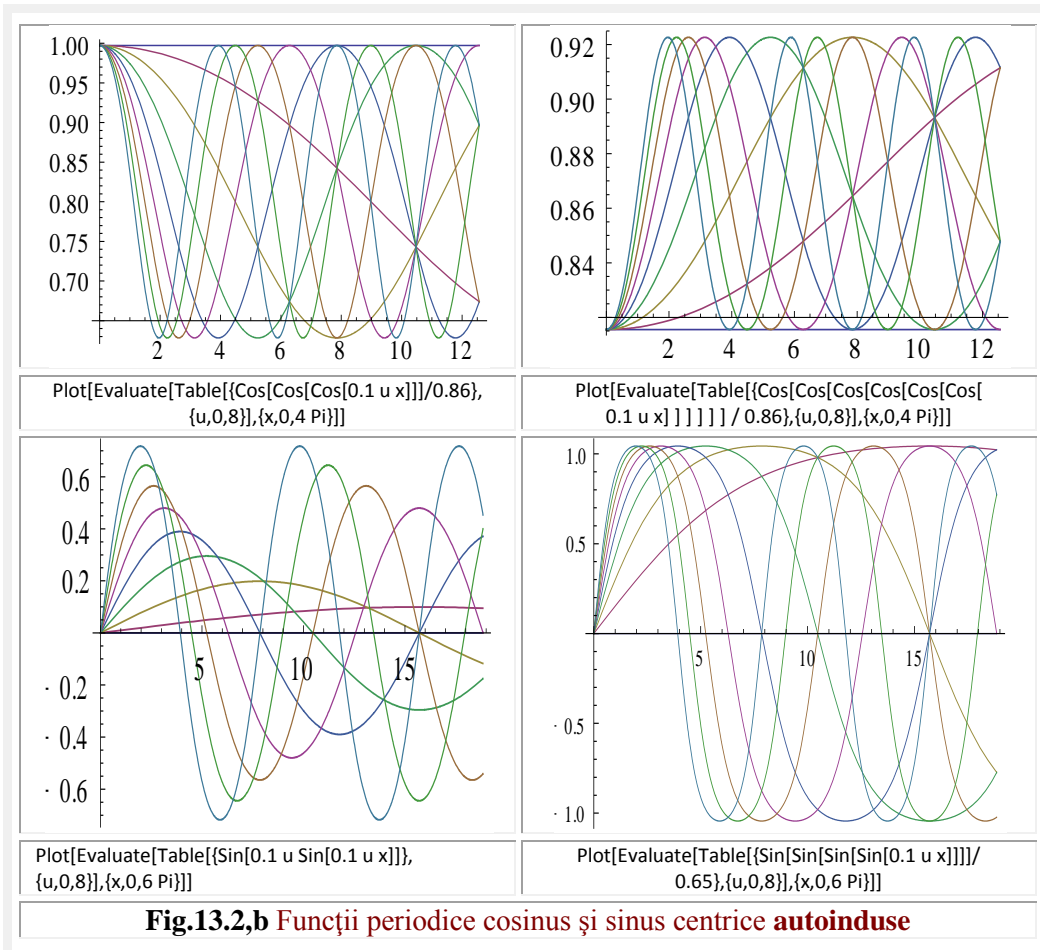
Exemplele sunt mai elocvente și cu mult mai simple, în acest caz, decât definițiile:



Funcția **sinus autoindus**, notată $\text{sinai}[A, n, \text{sinx}]$, sau $\text{sinai}[A_1, A_2, \dots, A_n; n, \text{sinx}]$ în care A_i sunt amplitudinile succesive și n – **numărul autoinducțiilor** sau **gradul de autoinducție**, care arată de câte ori se repetă funcția de funcție și are, de exemplu, expresia / ecuația

(13.18) $\text{sinai}[A_i=1, n=4, \text{sin}x] = \text{sinai}[1, n, \text{sin}x] = \text{sin}[\text{sin}[\text{sin}[\text{sin}[\text{sin}x]]]] \equiv \text{sinai}[x]$

Graficele unor funcții **sinus autoinduse** cu $A_i = 1$ și $n = 0 \dots 13$ sunt prezentate în **figura 13.2,c**, iar graficele familiilor de **FAI** centrice cosinus $\text{cosai}[1, n, \text{cos}x] \equiv \text{cosai}[x]$ în **figura 13.2,d**.

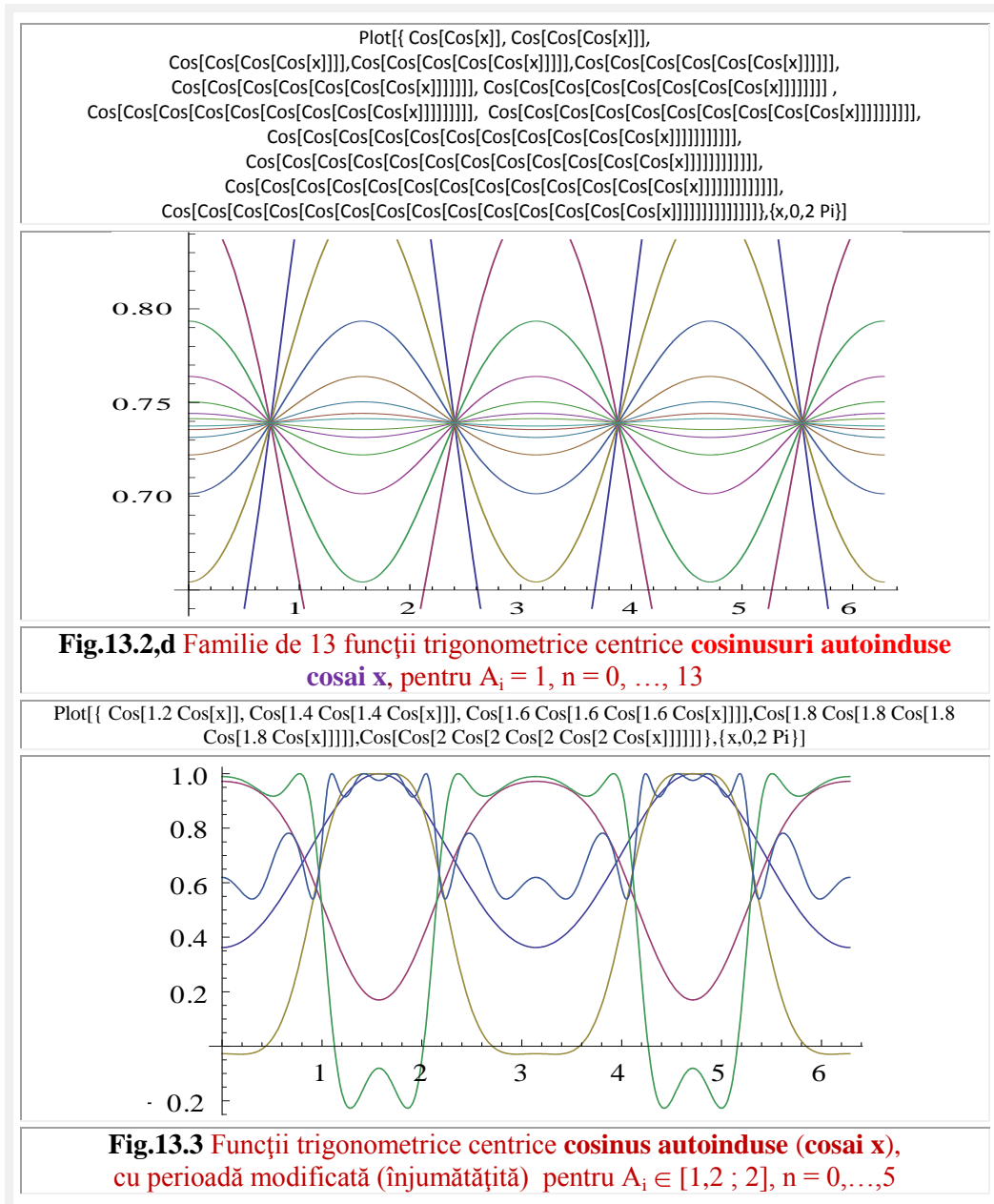


În **figura 13.3** sunt prezentate graficele **FAI** centrice cosinus, de amplitudini autoinduse diverse, date de ecuația $\text{cosai}[A_i \in [1,2; 2], n = 1, \dots, 4, \text{cos}x] = \text{cosai}[A_i \text{cos}x]$.

Se remarcă faptul că, dacă sinusul autoindus păstrează perioada de 2π a variabilei / argumentului și rămân funcții impare, deoarece originea $O(0,0)$ rămâne centru de simetrie, pe când **FAI** cosinus își modifică această perioadă înjumătățind-o, dar rămân funcții pare; axa Oy ($y = 0$) rămânând axă de simetrie.

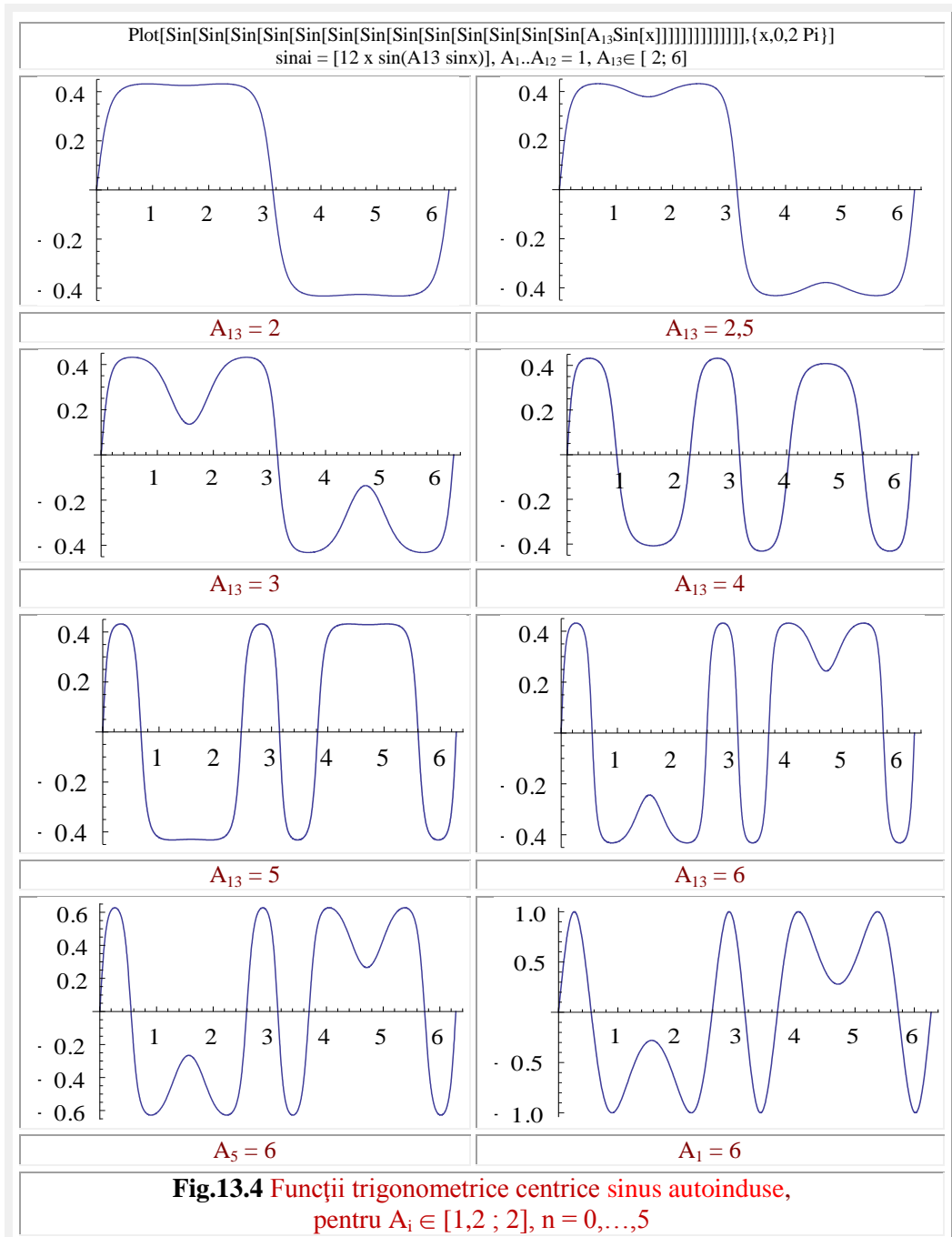
O altă observație, este aceea că, dacă $\text{sinai}[x]$ este o funcție care oscilează simetric față de axa Ox ($y = 0$), **FAI** $\text{cosai}[x]$ oscilează simetric față de o altă dreaptă,

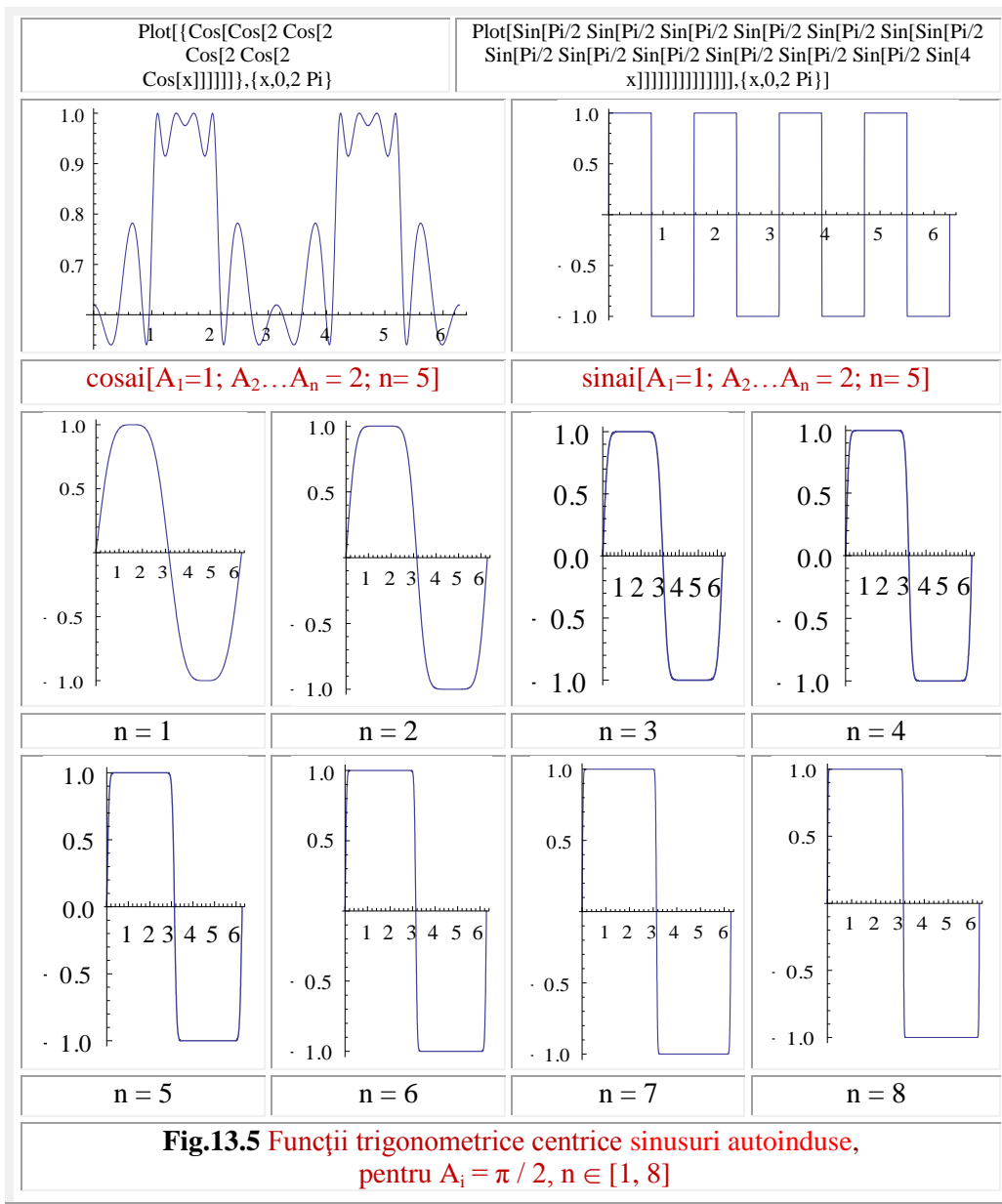
și în **figura 13.5** pentru modificarea perioadei/frecvenței, care s-a înjumătățit utilizand amplitudinea autoindusa de 2 și s-a împătrit prin schimbarea $x \rightarrow 4x$.



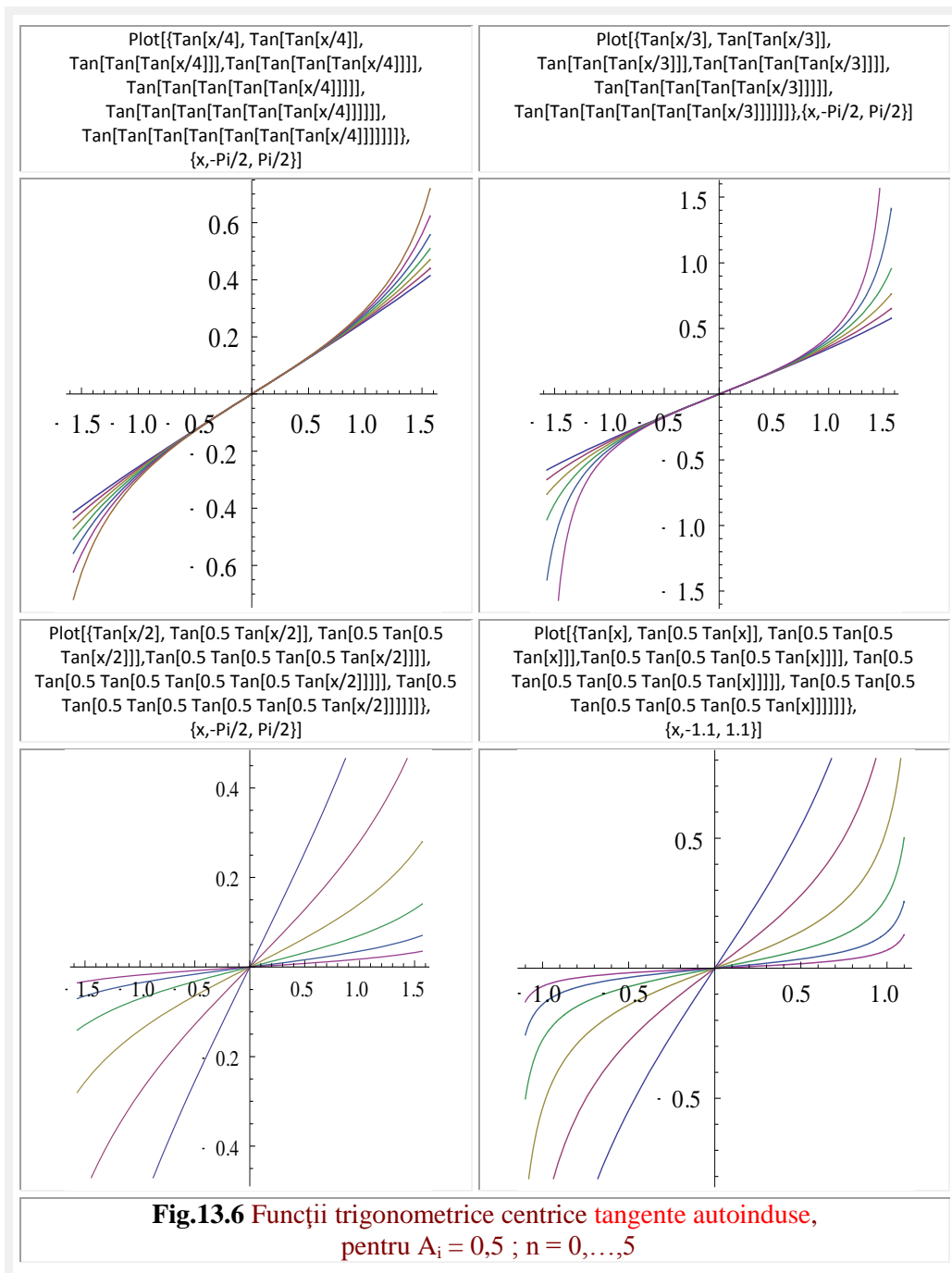
Și, în plus, prin alternarea amplitudinilor de $\pi/2$ cu cea de $3\pi/2$ s-au obținut funcții dreptunghiulare printr-o nouă metodă, mult mai simplă decât cele utilizate până în prezent, dar nu mai simplă decât cu funcțiile **SM-CE** derivată excentrica ($dex\theta$),

cosinus ($\cos\theta$) și/sau sinus ($\sin\theta$) cuadrilobe (quadrilobe) de excentricitate numerică $s = \pm 1$.





Sinusul centric autoindus, din **figura 13.2**, arată că arcul de cerc este mai mare decât valoarea funcție sinus ($\alpha_i > \sin\alpha_i$). De exemplu, dacă ne referim doar la valorile maxime ale funcțiilor sinus autoinduse, care apar la aceleași argumente cu ale funcție $\sin x$, atunci, la arcul de cerc de $x_1 = \frac{\pi}{2} = 1.5708 \dots$ radiani se corespunde un unghi $\alpha_1 = 90^\circ$ și funcția sinus are valoarea $y_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.



Arcului de cerc de $x_2 = 1$ radian îi corespunde un unghi, sau arc de cerc, de $\alpha_2 = 57,295779..^{\circ}$ pentru care $y_2 = \sin(x_2 = 1) = 0.841471..$ care corespunde amplitudinii maxime a primei funcții autoinduse; a doua funcție din graficele **figurii 13.2,c**.

Arcului de $x_3 = 0.841471$ radiani îi corespunde un unghi de $\alpha_3 = 48,212731..^{\circ}$ și $y_3 = \sin(x_3 = 0.841471) = 0,7456241.. = x_4$ care este amplitudinea maximă a celei de a treia curbe autoinduse, ș.a.m.d.

Pe măsură ce valorile funcțiilor scad, scad și valorile argumentelor; pentru valori mici sinusul se apropie de valorile arcelor/argumentelor. Astfel că, rata de scădere a amplitudinilor devine din ce în ce mai mică. Acesta este și motivul pentru care, în jurul argumentelor de $0, \pi, 2\pi$ și în general $\pm k\pi$, în care sinusurile au valori reduse și apropiate de valorile argumentelor, graficele funcțiilor autoinduse se suprapun; diferențele lor fiind foarte/extrem de mici; chiar în punctele amintite, în zerourile de pe axa x, fiind nule.

În concluzie, dacă numărul n de autoinducții ale funcțiilor din **figura 13.2,c** ar tinde către infinit, atunci valorile ultimei funcții autoinduse ar tinde spre axa absciselor, cu rate de scădere din ce în ce mai mici, adică ar fi peste tot nulă; convergența fiind extrem-extrem de redusă.

În **figura 13.4** sunt redate individual/separat câteva **FAI** centrice sinus de amplitudini diverse.

Primele 4 funcții au expresiile

$$(13.23) \quad \sin_{i=1} [A_i=1, n \in [1, 12], A_{13} \in [2; 6], \sin[x]],$$

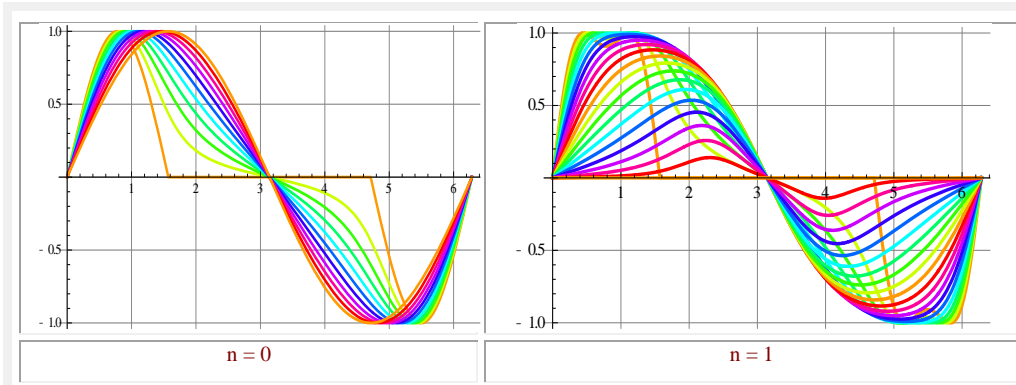
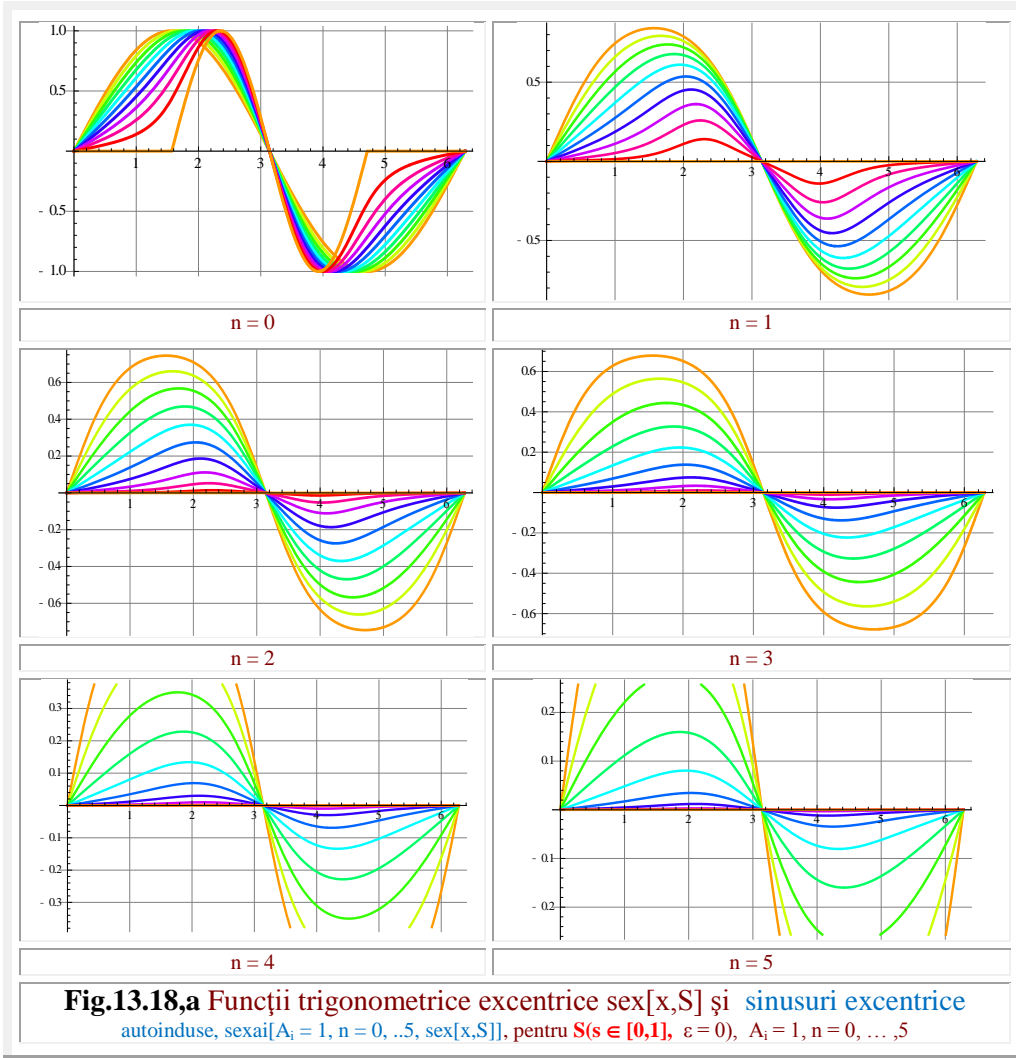
cu valorile A_{13} indicate în figură, iar următoarele două curbe au amplitudinile unitare, cu excepția celor indicate în figură, care sunt diferite de 1, cum sunt amplitudinile $A_5 = 6$ și, respectiv, $A_1 = 6$

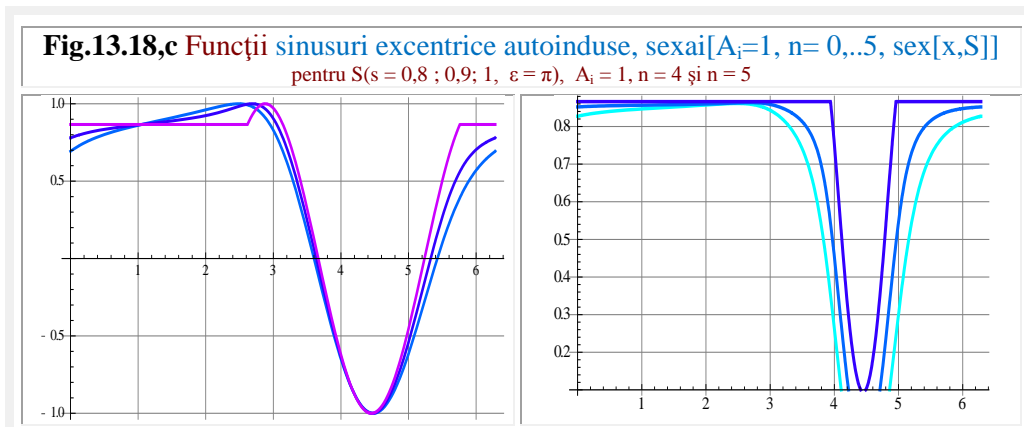
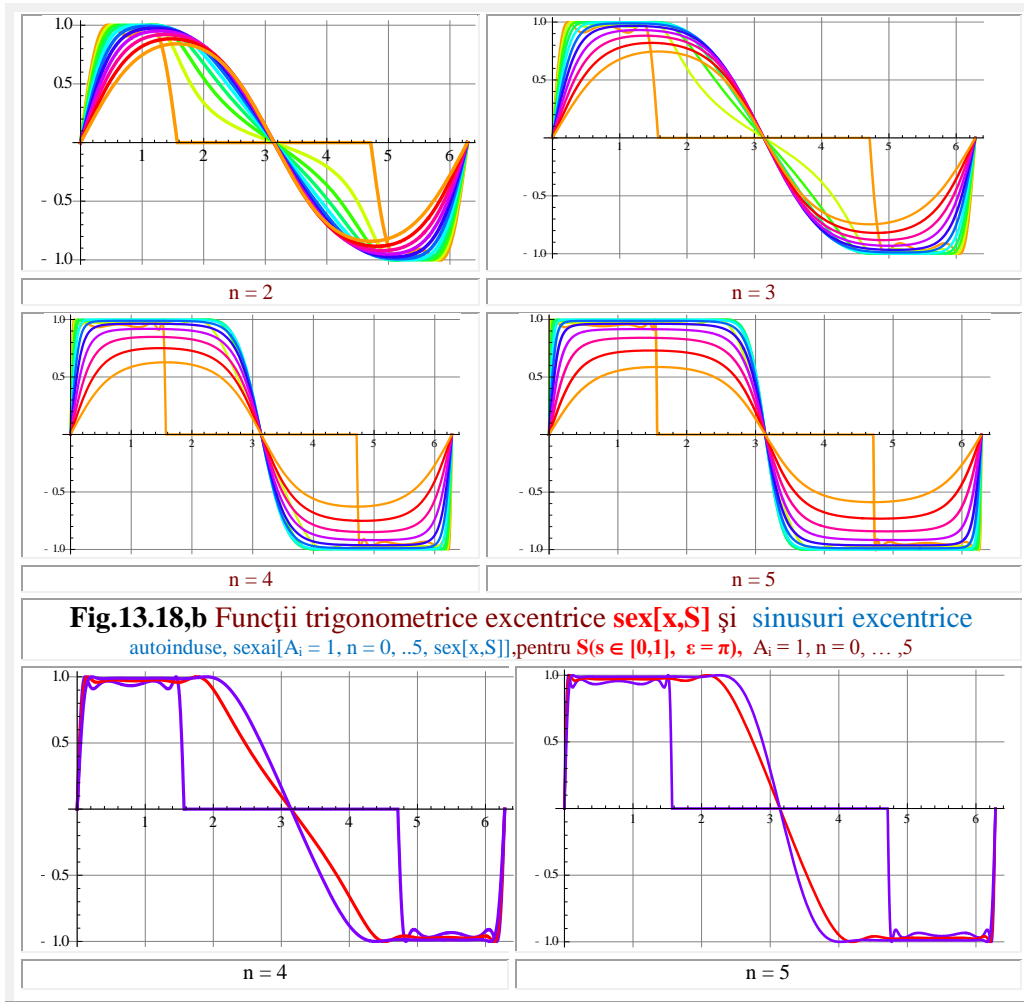
Figura 13.5 reprezintă o funcție $\cos_{i=1} [A_1=1, A_2..A_5 = 2, n = 5, \cos[x]]$, în stânga și, în dreapta, o **FAI** $\sin_{i=1} [A_i = \pi/2, n = 12, \sin[4x]]$, care s-a transformat, surprinzător, într-o funcție dreptunghiulară.

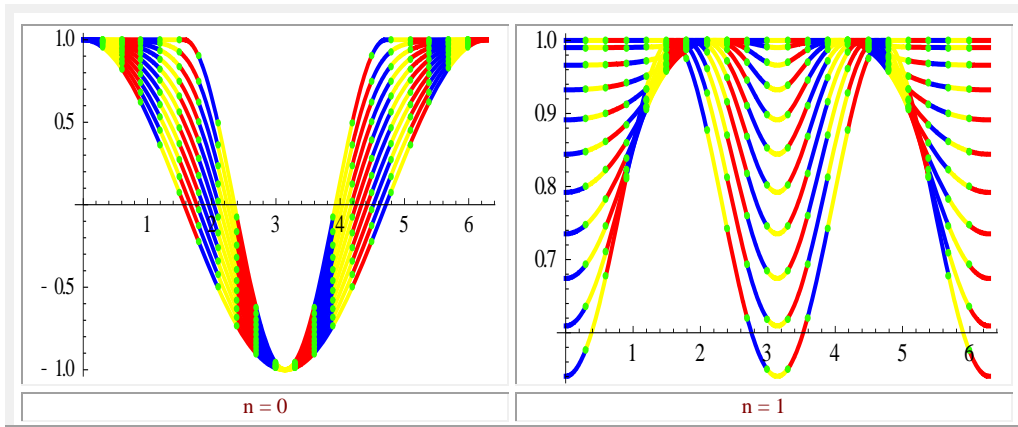
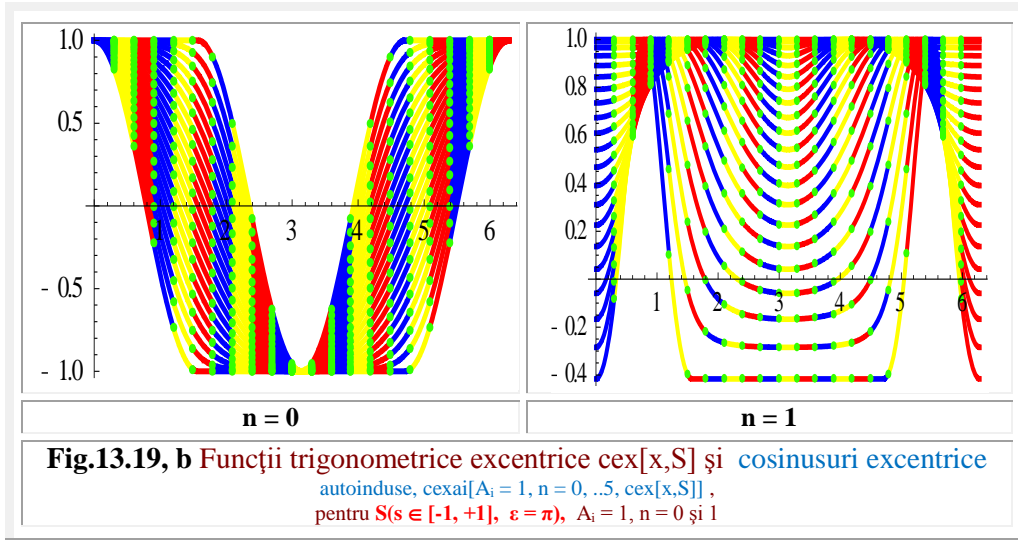
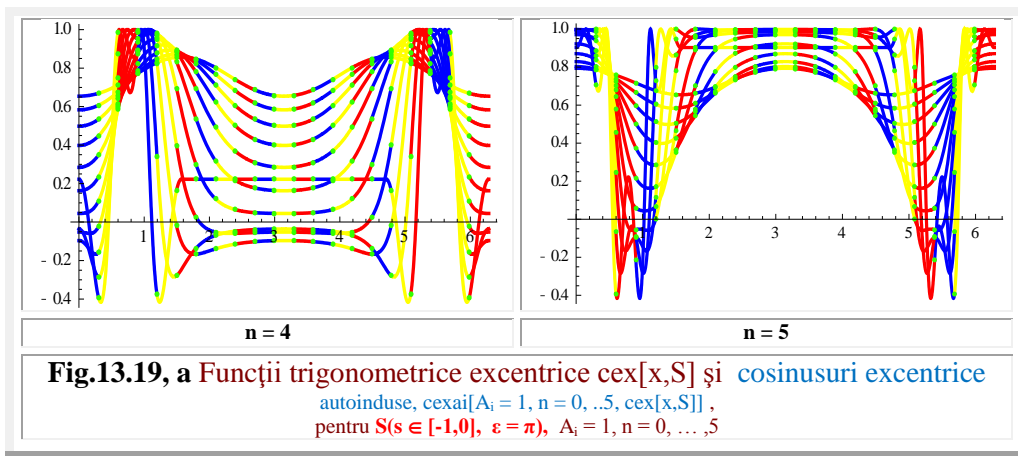
Ar putea fi denumită funcție trigonometrică centrică autoindusă sinus dreptunghiular sau, pe scurt, **sinus dreptunghiular**. Evoluțiile ei, pentru $n = 1 \dots 8$, sunt redate în aceeași figură.

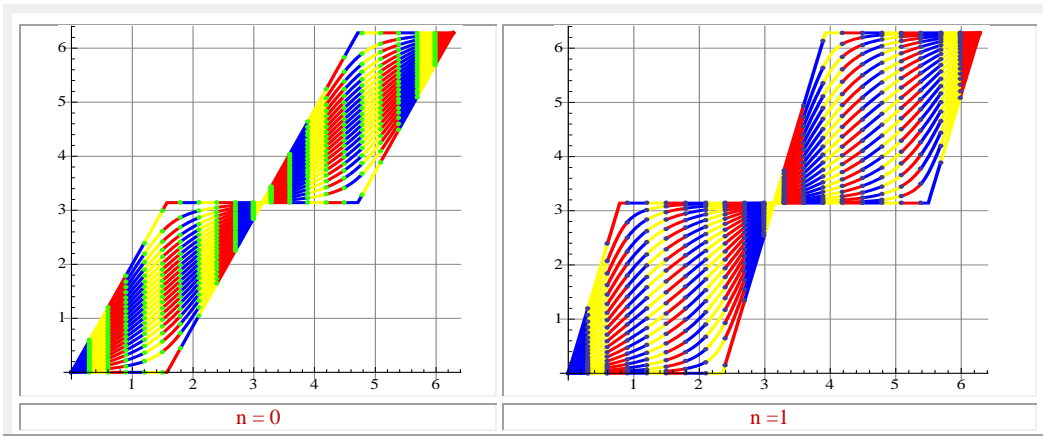
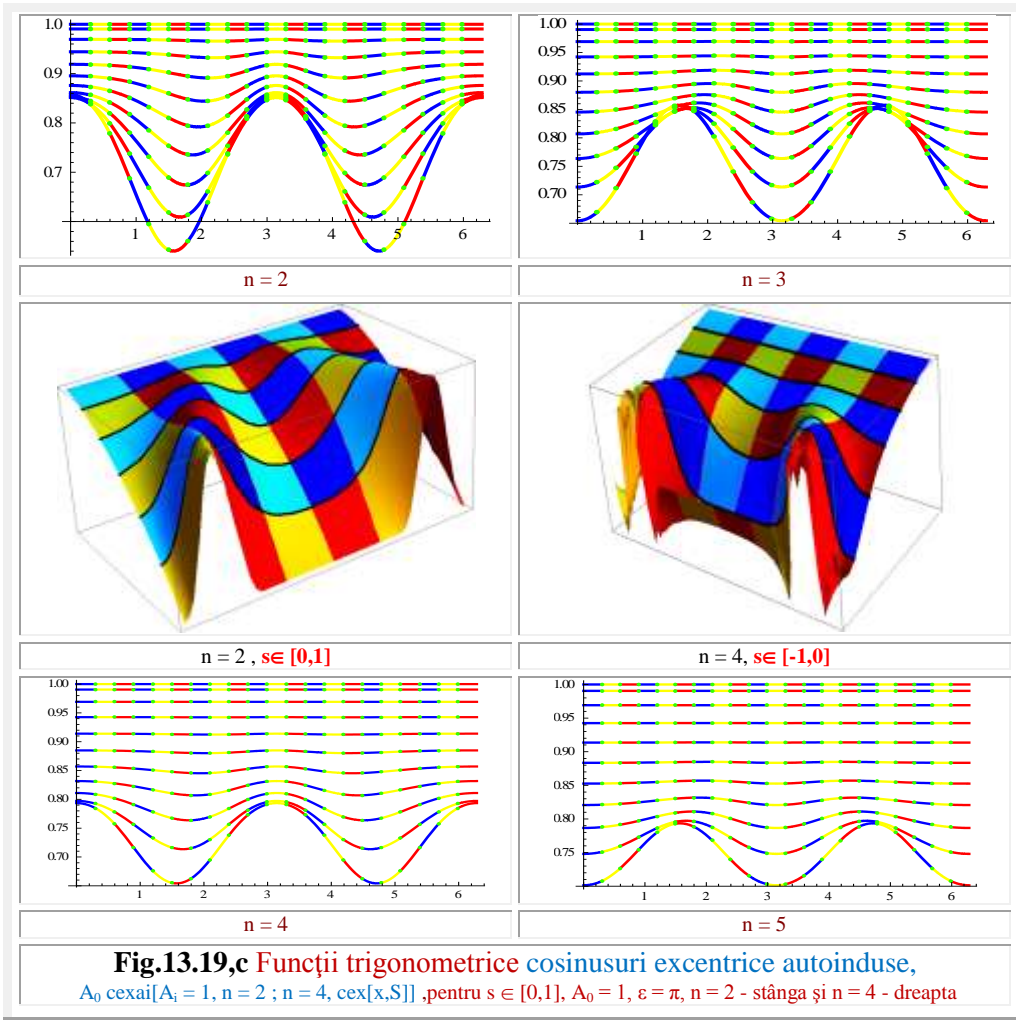
Pentru un excentru $S(s \in [0,1]; \varepsilon = 0)$ familiile de curbe pentru $n = 0 \dots 5$ sunt prezentate în **figura 13.18,a**, pentru prima determinare, **principală**, de indice **1**, care, conform convenției din Vol.I, nu este necesar să fie indicată/marcată, când nu pot apărea unele confuzii.

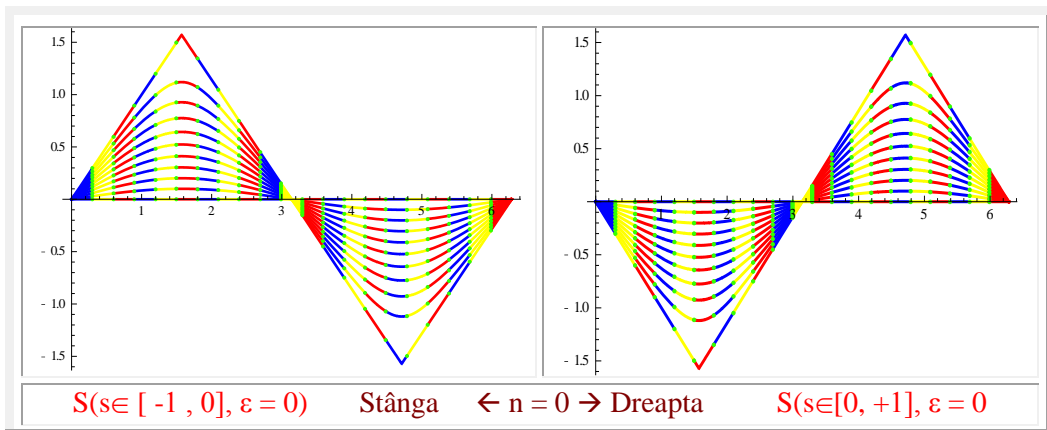
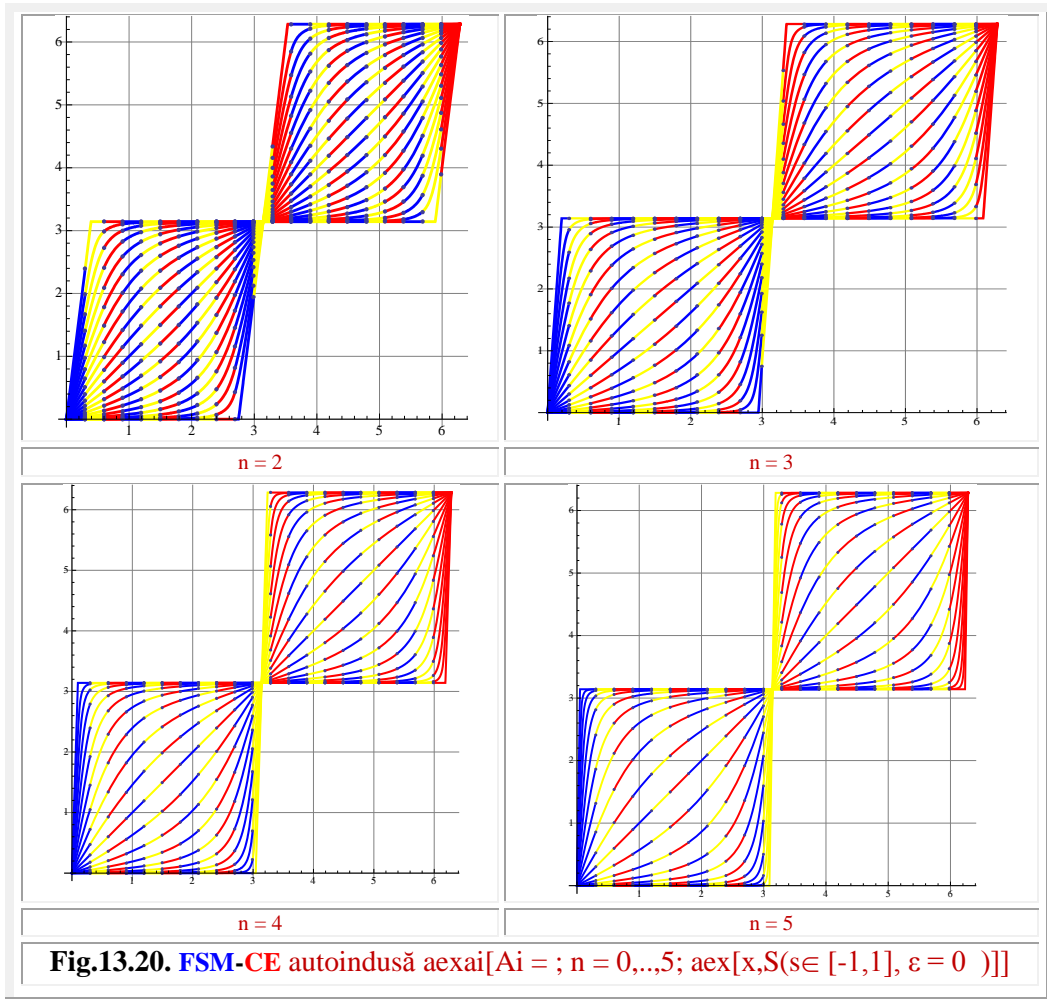
Ca și în cazul **FAI** centrice $\sin x$, amplitudinile consecutive scad cu creșterea gradului de autoinducție **n**, la fel ca și în cazul funcțiilor supermatematice circulare elevate (**FSM-CEI**) și, cu siguranță, pentru $n \rightarrow \infty$ amplitudinea maximă, ca și valoarea elongației **FAI** $y = a \rightarrow 0$, în tot domeniul $x \in [-\infty; +\infty]$. Așa cum se poate urmări, din succesiunea graficelor din **figura 13.18,a**, aplatizarea curbelor începe de la excentricitatea numerică maximă $s = 1$ ($V. n = 1$) și se continua, apoi, cu valori ale lui s mai reduse, pentru $n=2, n=3$ și $n=4$.

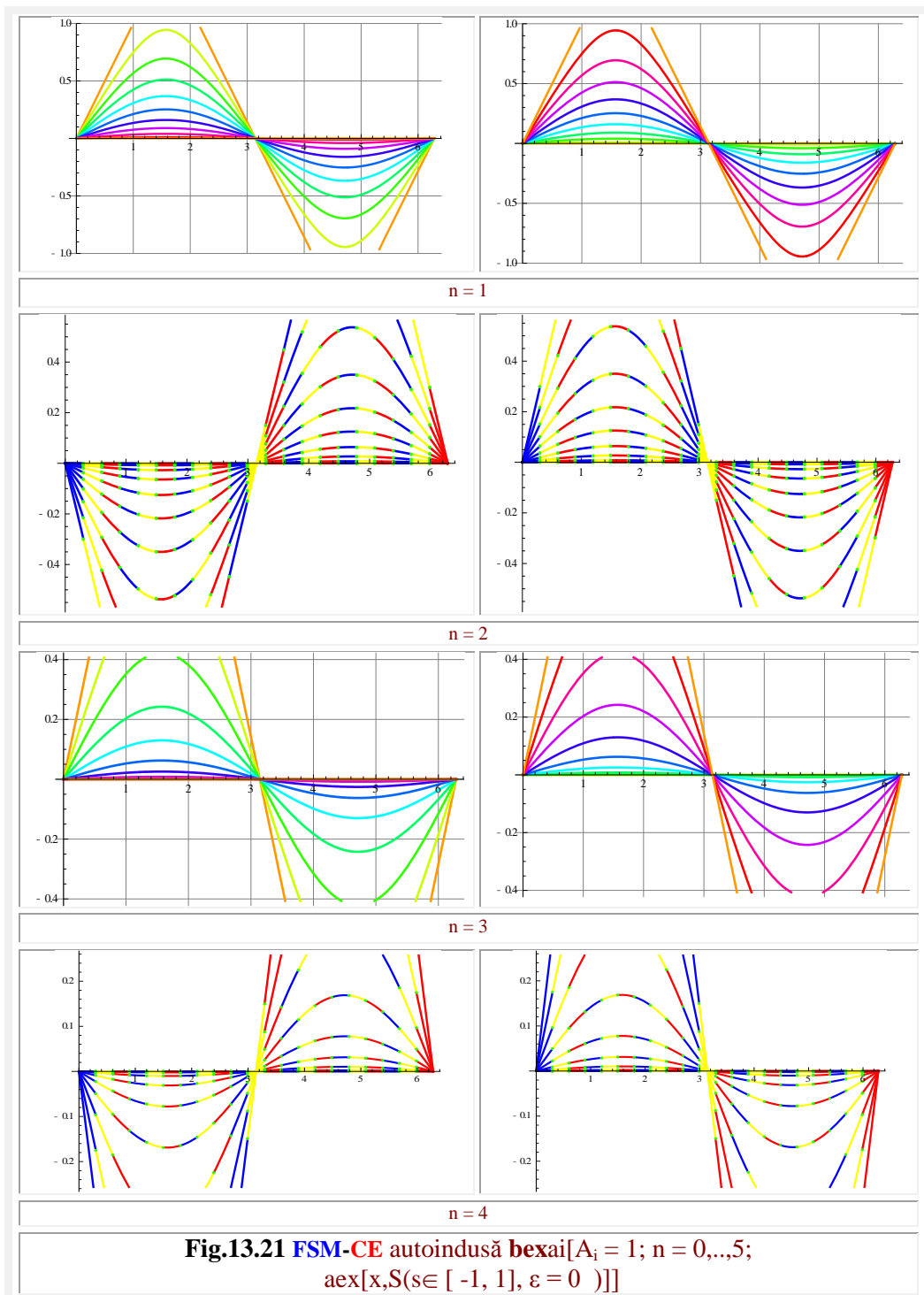


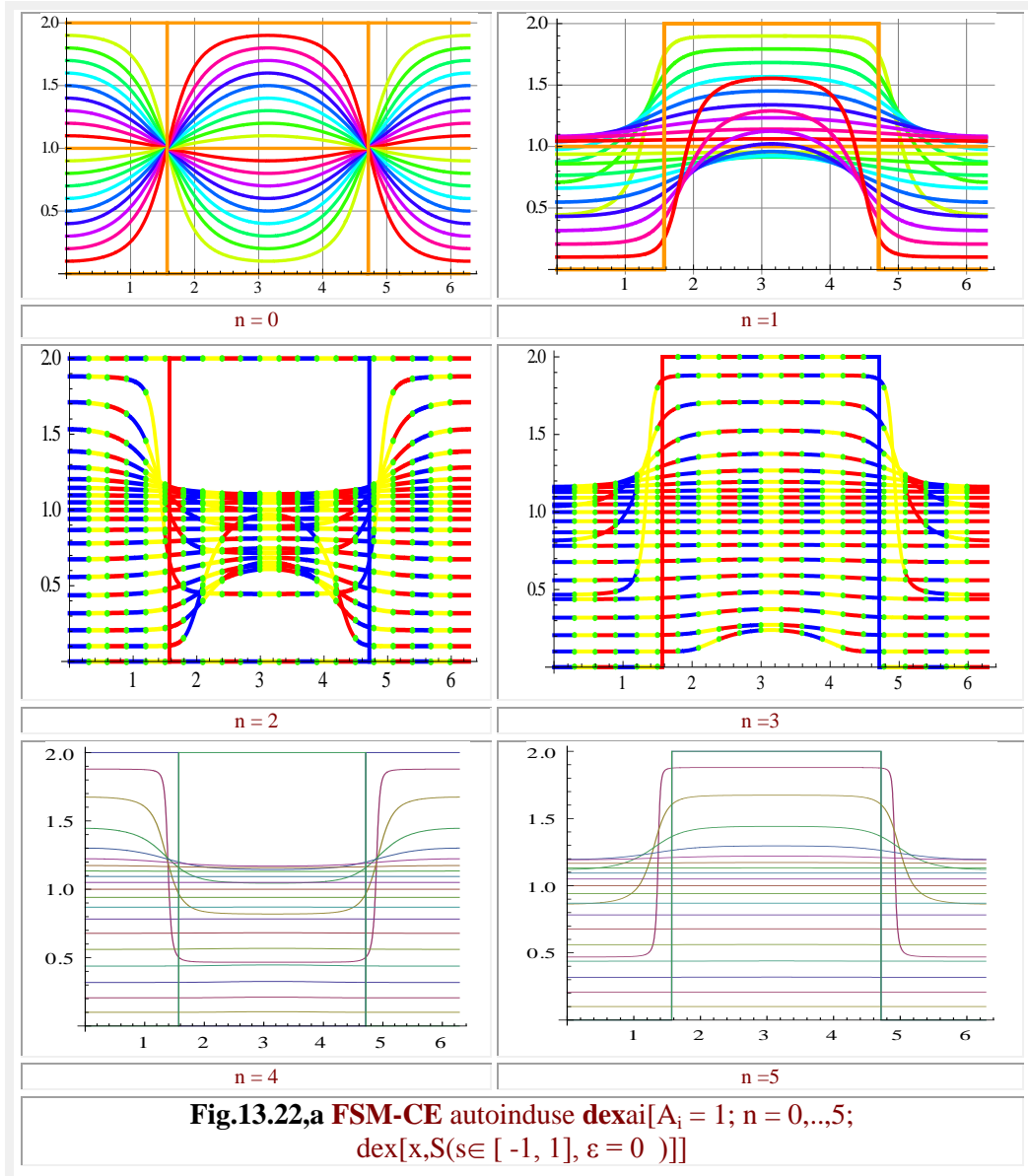










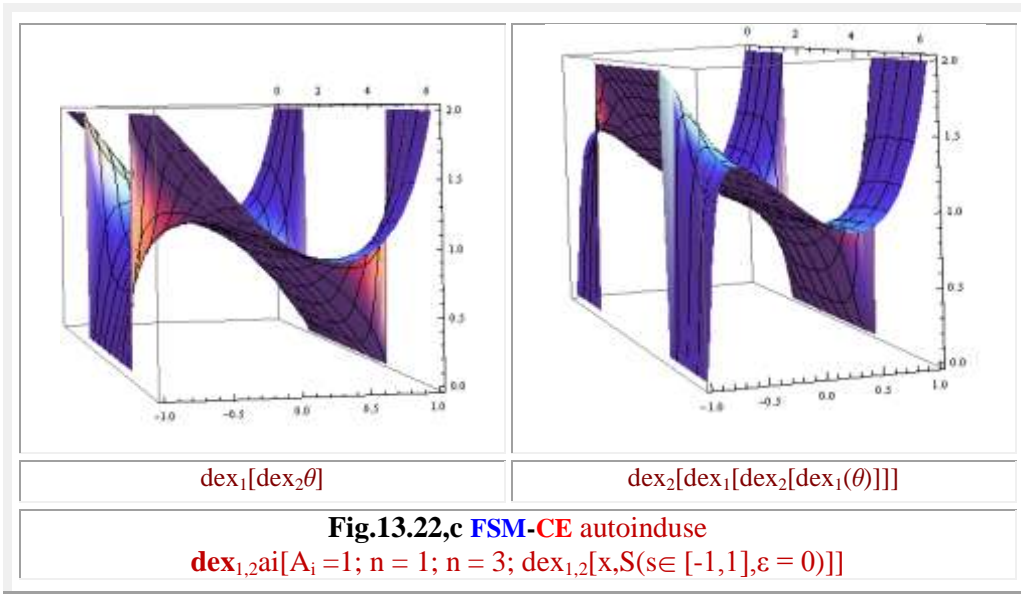
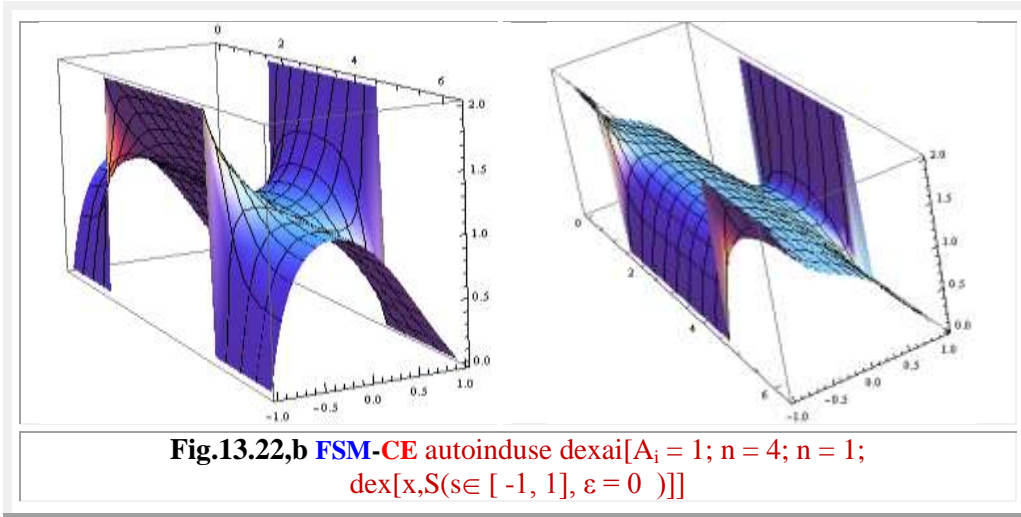


Una dintre cele mai importante **FSM-CE**, amplitudine excentrică de variabilă excentrică, are graficele **FAI** prezentate în **figura 13.20** pentru $s \in [-1, 1]$.

FAI amplitudine excentrică de variabila excentrică $aex\theta$ sunt identice cu aceleași **FSM-CE** de excentricitate dublă $\rightarrow a2ex\theta$, triplă $\rightarrow a3ex\theta$ și, în general, multiplă $a(n+1)ex\theta$, adică

Pentru excentricitatea numerică $s = 1$ și pentru un grad de autoinducție n mai mare decât cel din **figura 13.18,c** ($n = 5$), se obțin funcții mai apropiate de cele

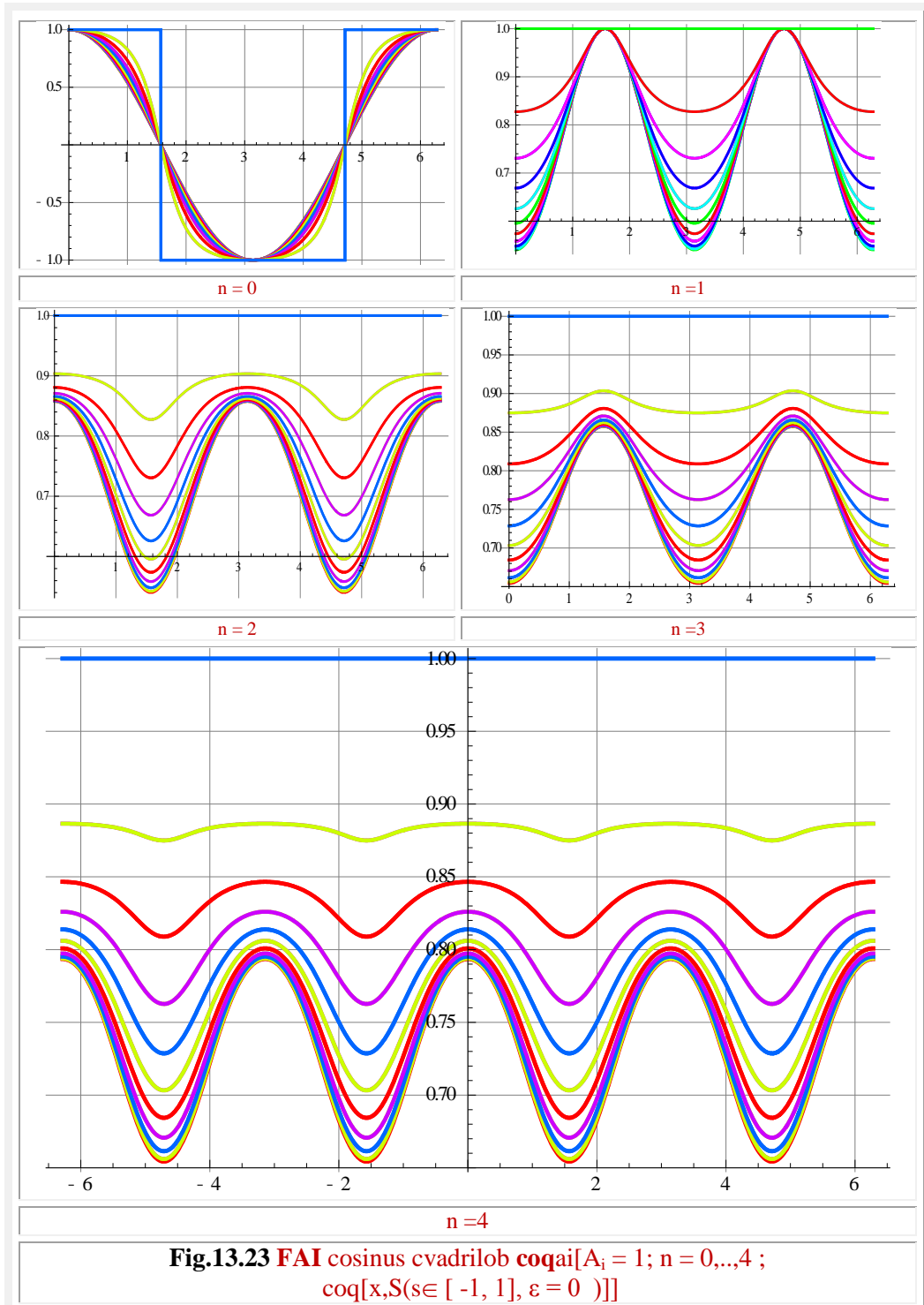
dreptunghiulare de perioadă 2π . **Figura 13.18,d** exprimă modificările graficelor funcțiilor anterioare ($s = 0,8; 0,9; 1$) dacă se modifică $\varepsilon: \varepsilon = \pi \rightarrow \varepsilon = 3\pi/2$.

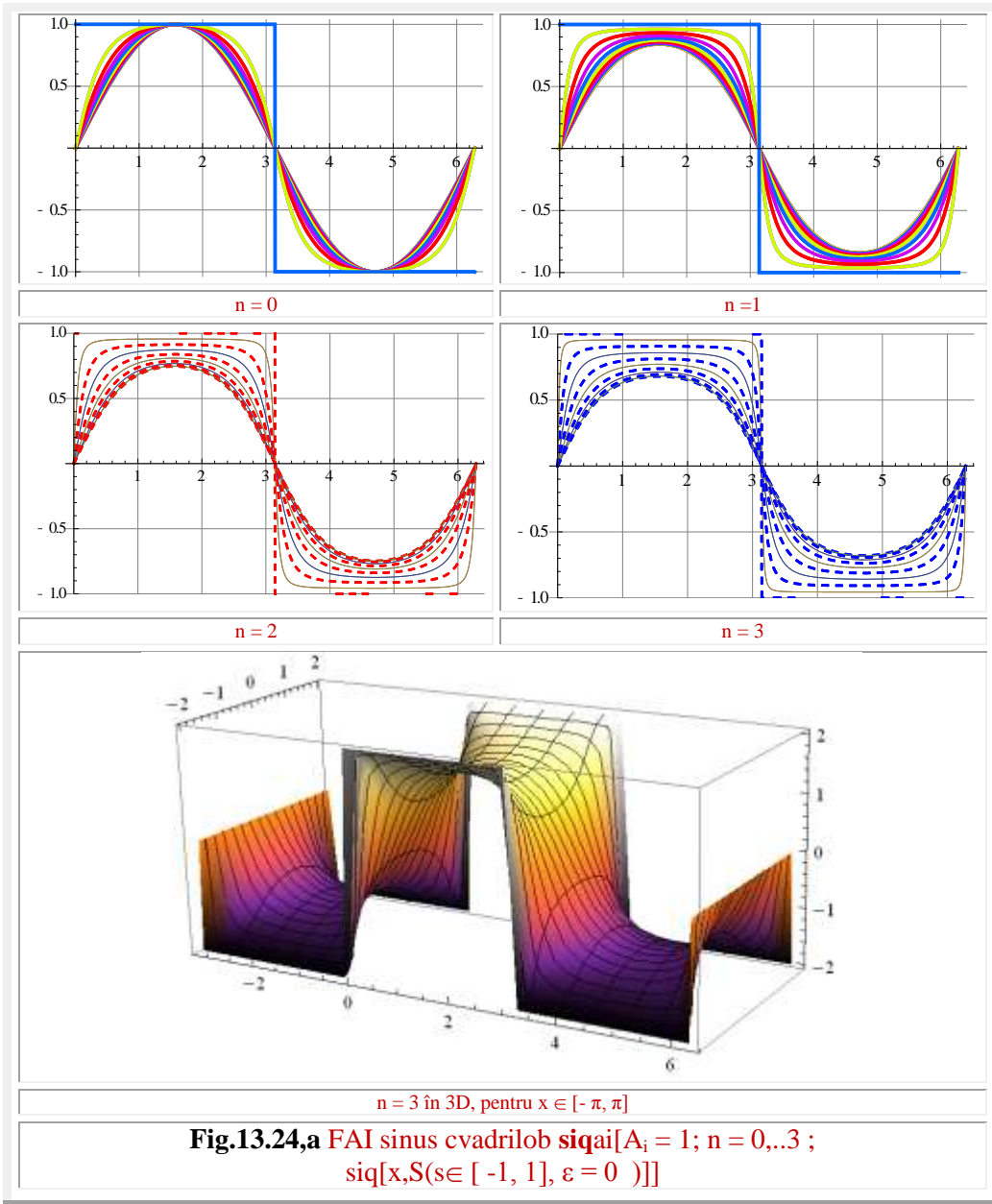


Se evidențiază modificările pronunțate ale formelor graficelor, odată cu creșterea gradului n de autoinducție de la $n = 1$ la $n = 4$.

Funcția supermatematică circulară excentrică autoindusă (**FSM-CE-AD**) $\text{cexai}\theta$ pentru un excentru punct fix $S(s \in [0, 1], \varepsilon = 0)$, are graficele primei determinări – principale - prezentate în **figura 13.19,a** și expresia (13.60).

$$(13.60) \quad \text{sexai}_{1,2}[x] = \text{sexai}_{1,2}[A_i, n, \text{sex}[x,S(s, \varepsilon)]]$$





Pentru a evidența / ilustra complexitatea scrierii acestor ecuații, se prezintă explicit ecuația “în clar” în continuare, pentru un grad de autoinducție de $n = 4$ și graficele din **figura 13.19,a**.

Graficele seamănă cu distribuția liniilor de curent ale curgerilor turbulente (pentru valori mici ale excentricității) și laminare (pentru valori mari: 1; 0,9; 0,8 ș.a.m.d), între straturile unui fluid, în conducte / canale deschise.

Se observă o trecere succesivă, continuă, de la o “curgere turbulentă la una laminară” începând de la excentricitățile numerice $s = 1$ spre cele de $s = 0$, odată cu creșterea lui n .

Graficele **FSM-CE-AI** $cexai[A_i = 1; n = 0, \dots, 5; cex[\theta, S(s \in [-1, 0], \varepsilon = 0)]$ sunt prezentate în **figura 13.19,b** în 2D și în **figura 13.19,c** pentru $n = 2$ și $n = 4$ în 3D. Se prezintă, uneori, și suprafețele în 3D în ideea că acestea pot fi utilizate la realizarea programelor de generare a suprafețelor complexe dintr-un nou sistem de generare a acestora cu ajutorul **FSM-CE** denumit **SM-CAD-CAM**, dar și o posibilitate/modele de inspirație pentru arhitecți.

$$(13.61) \quad \begin{cases} aexai[1,1,aex\theta]=a2ex\theta \\ aexai[1,2,aex\theta]=a3ex\theta \\ aexai[1,3,aex\theta]=a4ex\theta \\ aexai[1,n,aex\theta]=a(n+1)ex\theta \end{cases}$$

Notațiile **FSM-CE** de excentricitate multiplă, din relațiile (13.61), sunt în concordanță cu notațiile propuse pentru astfel de funcții, prezentate în volumul I al lucrării.

FSM-CE $dex\theta$, cea care exprimă raportul de transmitere a tuturor mecanismelor plane (V. Vol. I, pag. 189 ... 196), are **FAI** $dexai\theta$ cu graficele din **figura 13.22,a** are expresia

$$(13.62) \quad dexai\theta = dexai[A_i; n = 0, \dots, 5; dex[\theta, S(s \in [-1, 1], \varepsilon = 0)]]$$

Reprezentarea ei în 3D, pentru $n = 1 \rightarrow$ stânga și $n = 5 \rightarrow$ dreapta, este prezentată în **figura 13.22,b**

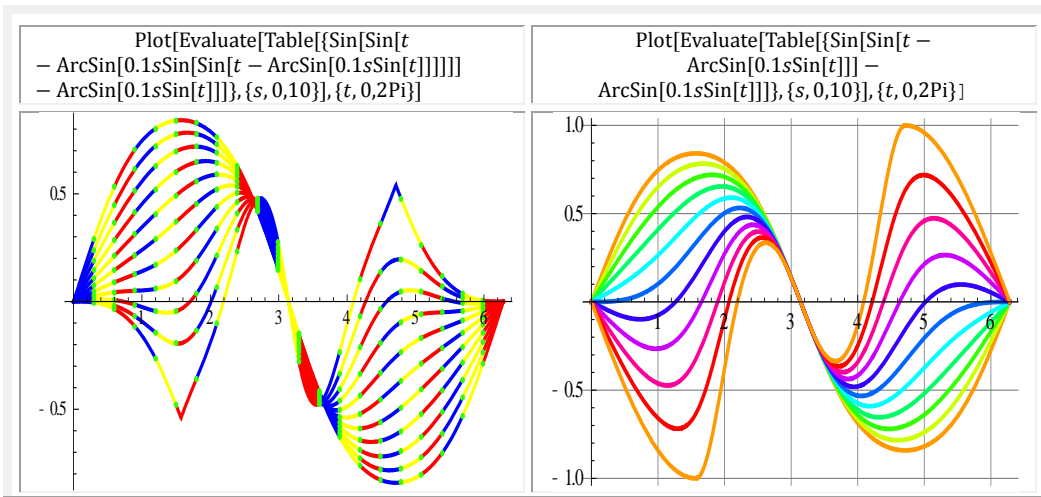
Deoarece **FSM-CE** au câte două determinări, o funcție de genul

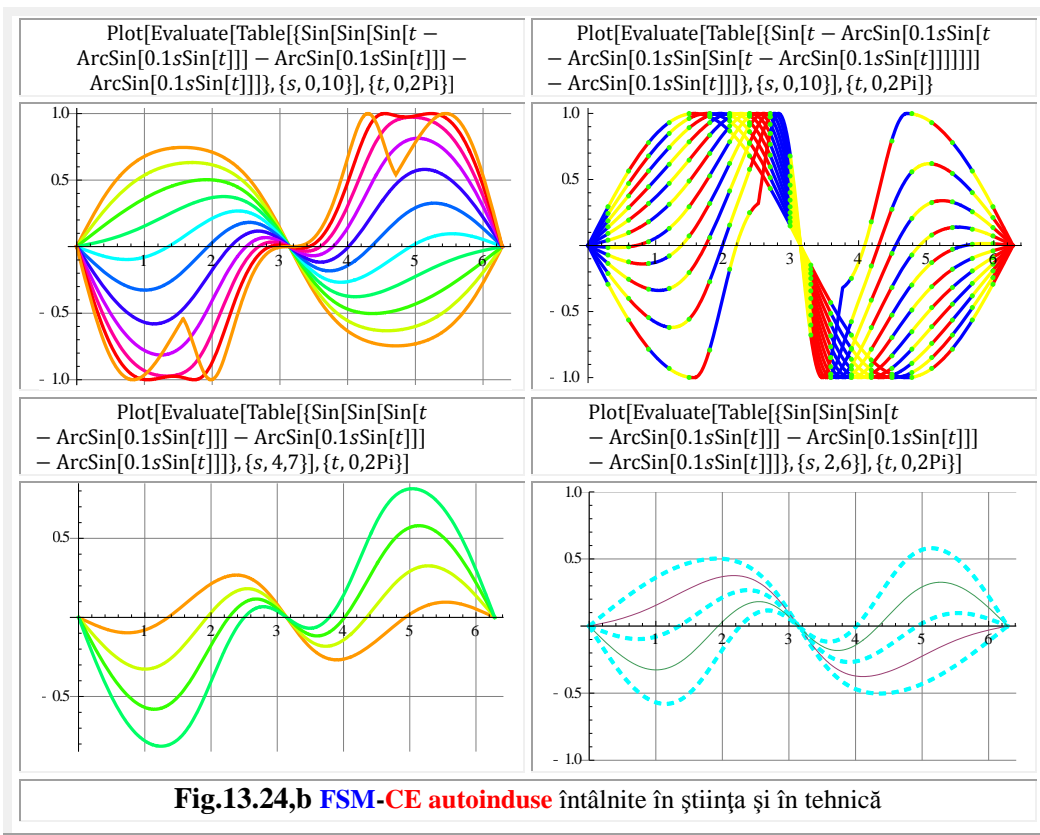
$$(13.62) \quad dexai_{1,2}[A_i, n, dex_{1,2}(\theta, S)] = dex_1[dex_2[dex_1[dex_2 \dots dex_1[dex_2(\theta, S)]]] \dots]$$

va fi **considerată** tot o funcție autoindusă.

FSM sinus cvadrilob/quadrilob are graficele funcțiilor sale autoinduse prezentate în **figura 13.23**, iar sinusul cvadrilob/quadrilob în **figura 13.24**. Pentru sinusul cvadrilob s-a realizat și o omagine în 3D, care ilustrează suprafețe în șa dublă.

Câteva **FSM-CE autoinduse** de interes sunt prezentate în figurile următoare:





13.4.5 FUNCȚII CIRCULARE CENTRICE (FIC) ȘI EXCENTRICE (FIE) INDUSE ȘI COMBINAȚIILE LOR: FUNCȚII INDUSE HIBRIDE (FIH)

Așa cum s-a afirmat deja, funcțiile **induse** sunt compuse din una sau mai multe funcții diferite. Astfel, ele pot fi toate funcții centrice, denumite funcții induse centrice (**FIC**) ca, de exemplu (**Fig. 13.25**, cu $n = 1, \dots, 10$ și cu $n = 48$)

$$(13.63) \quad fc(x) = \sin[\cos[\sin[\cos[\dots \sin[x]]]]],$$

sau toate funcții excentrice, denumite funcții induse excentrice (**FIE**)

$$(13.64) \quad fe(x) = \text{sex}[\text{cex}[\text{sex}[\text{cex}[\text{sex}[x, S(s, \varepsilon)]]]]].$$

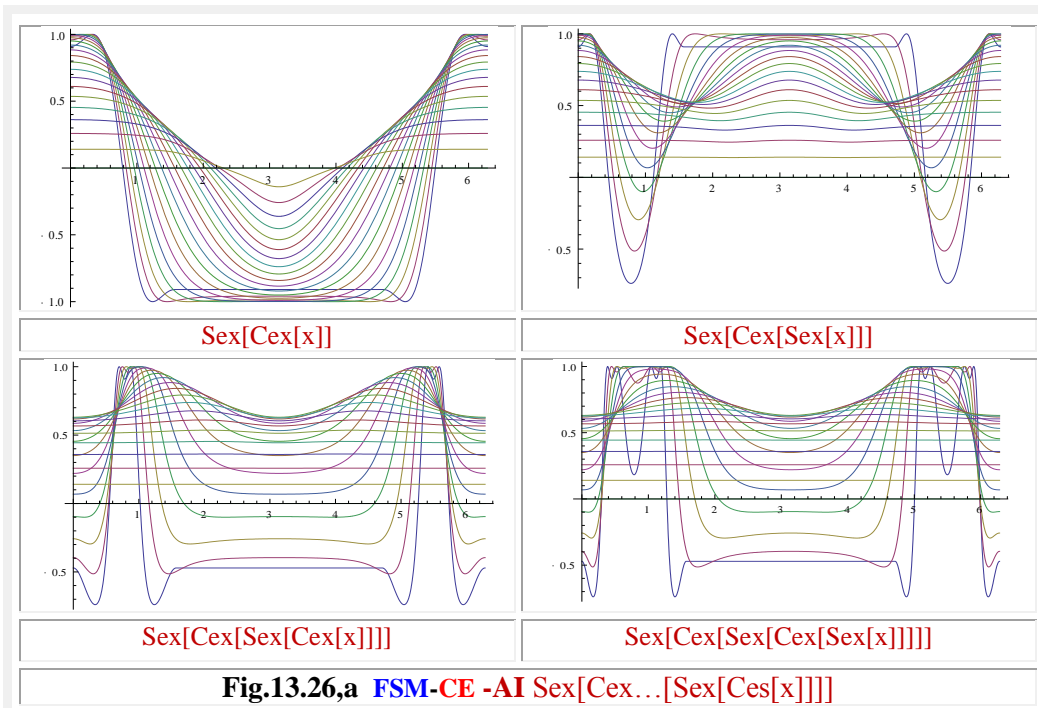
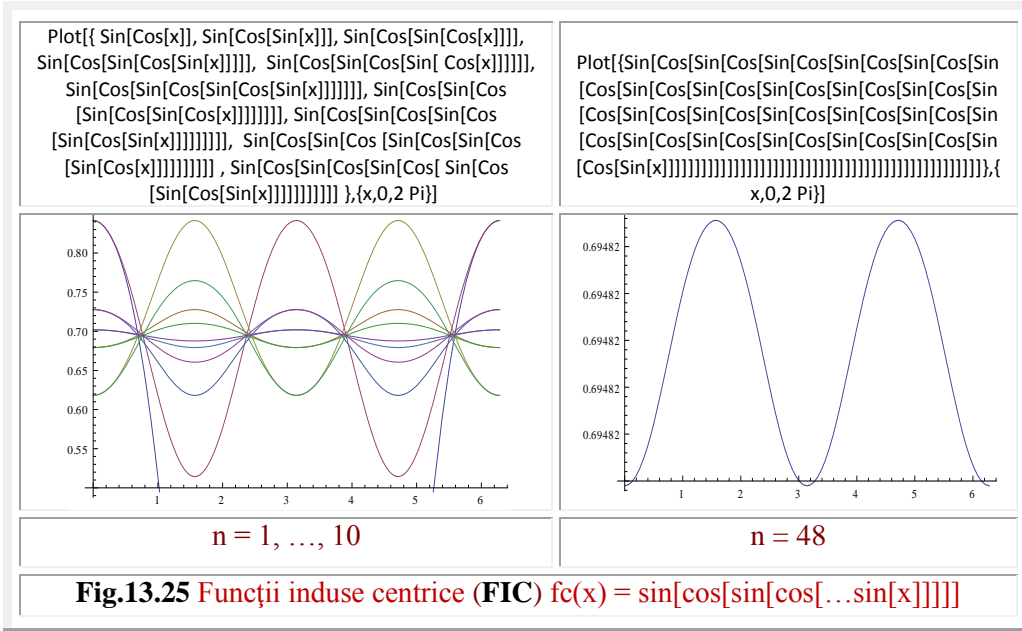
Dacă funcția compusă este alcătuită atât din funcții centrice cât și din funcții excentrice, ea va fi denumită **funcție indusă hibridă (FIH)**. Un astfel de exemplu este funcția

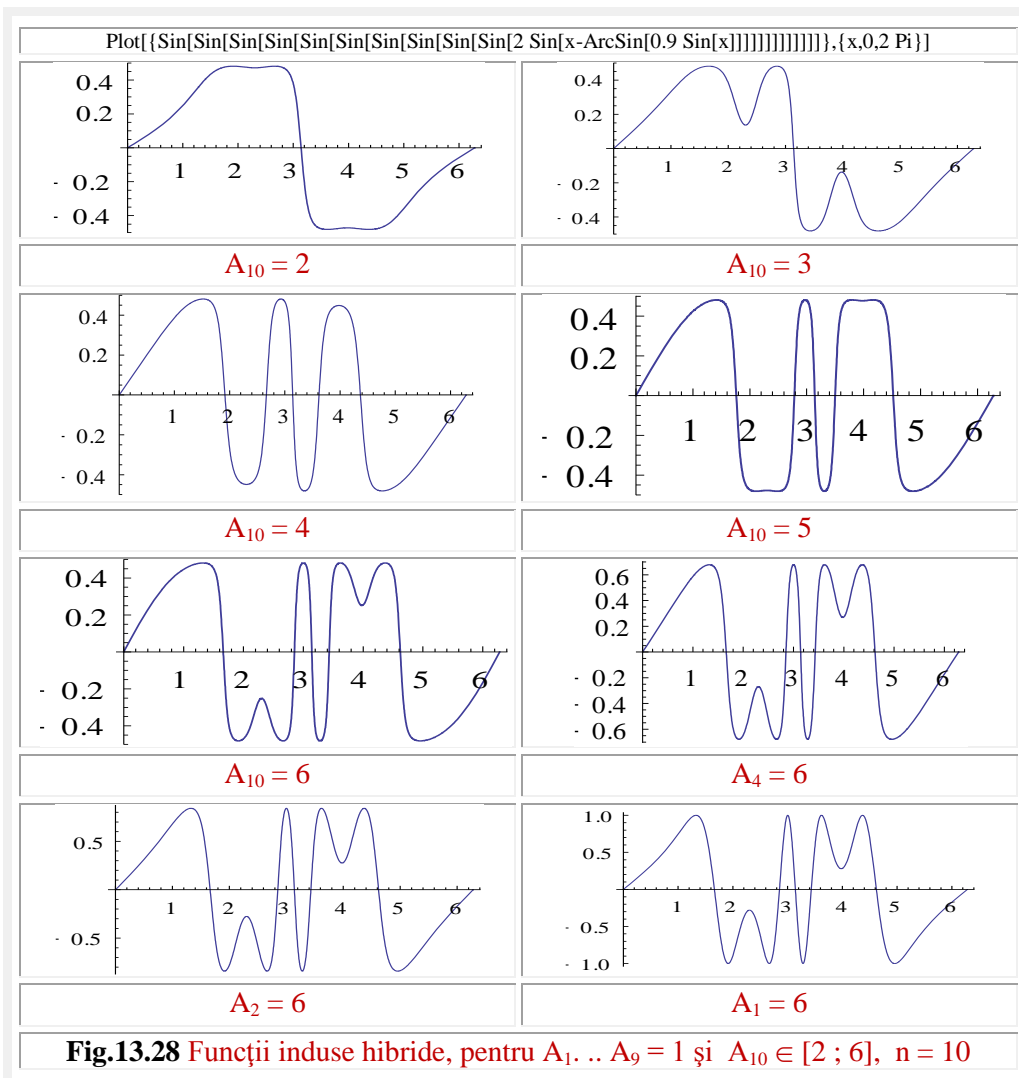
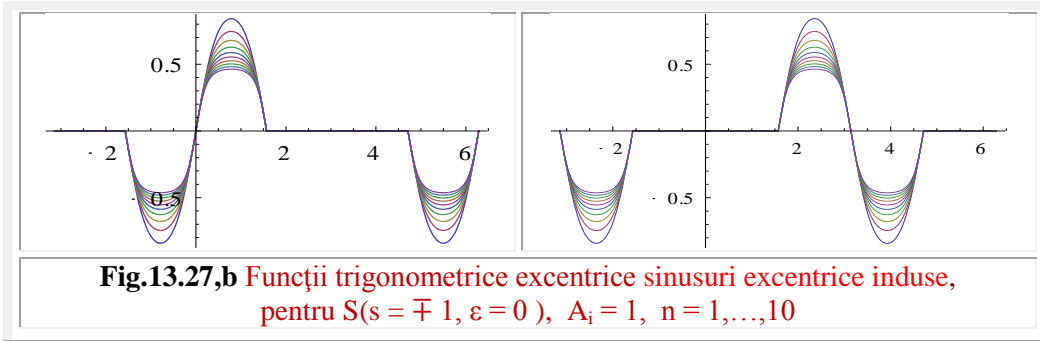
$$(13.65) \quad fh(x) = \text{sex}[\sin[\text{cex}[\cos[\text{sex}[\dots \cos[x]]]]]]$$

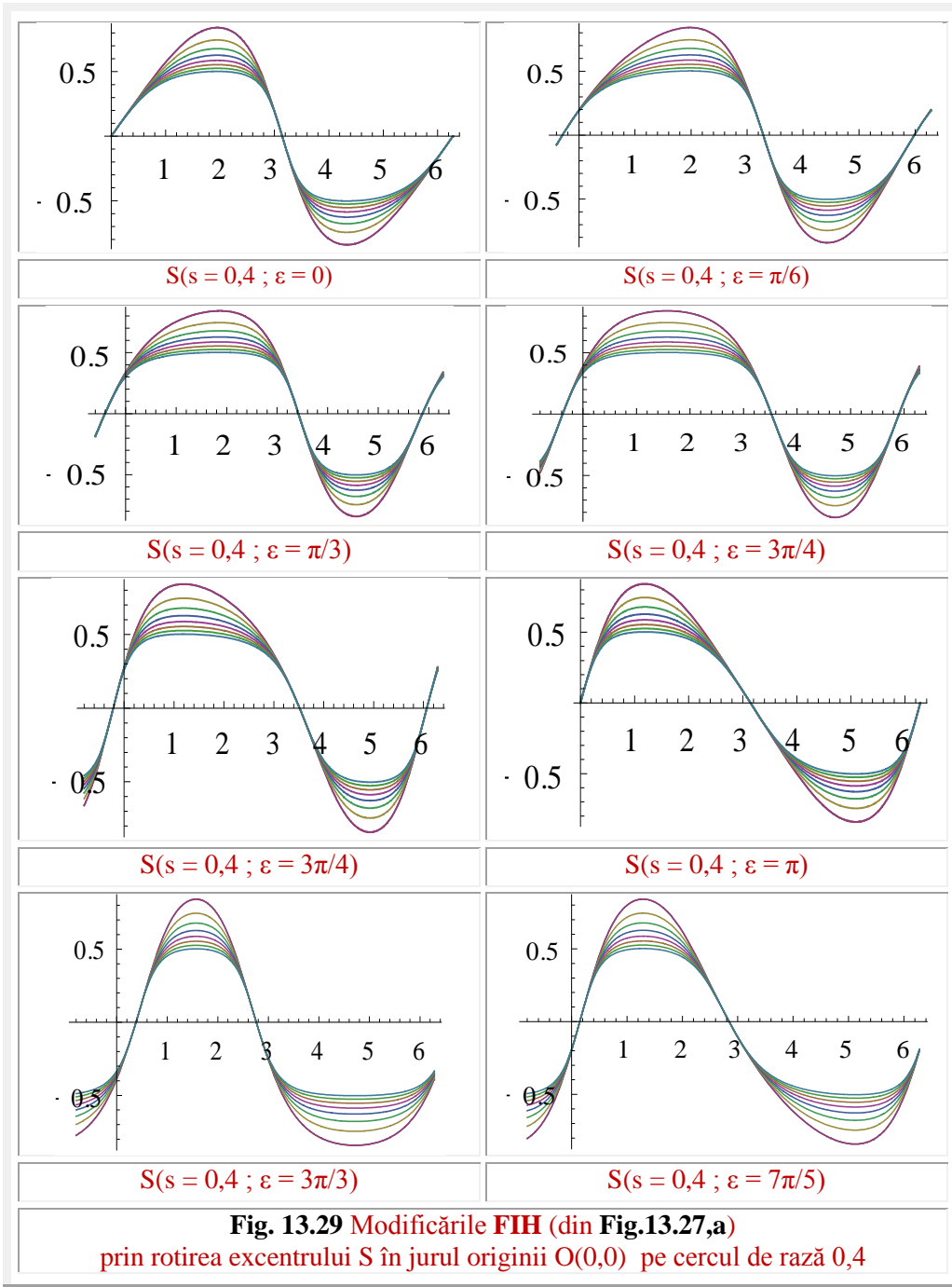
Ca și în cazul **FAI** $\cos x$ (**Fig. 13.2,d** și **13.3**), **FIC** (13.63) din **figura 13.25** își dublează perioada și pentru $n \rightarrow \infty$, $fc(x) \rightarrow \text{constanta}$ ($C = 0,69482\dots$), așa cum rezultă pentru un grad n de inducție foarte ridicat, de $n = 48$. Constanta rezultă și din rezolvarea ecuațiilor succesive, folosind programul **MATHEMATICA 8** a lui **Stephan**

Wolfram, ca de exemplu

$$(13.66) \quad \text{FindRoot}[\text{Sin}[\text{Cos}[x]] = x, \{x, 0, 2 \text{ Pi}\}] \rightarrow \{x \rightarrow 0.694\}$$







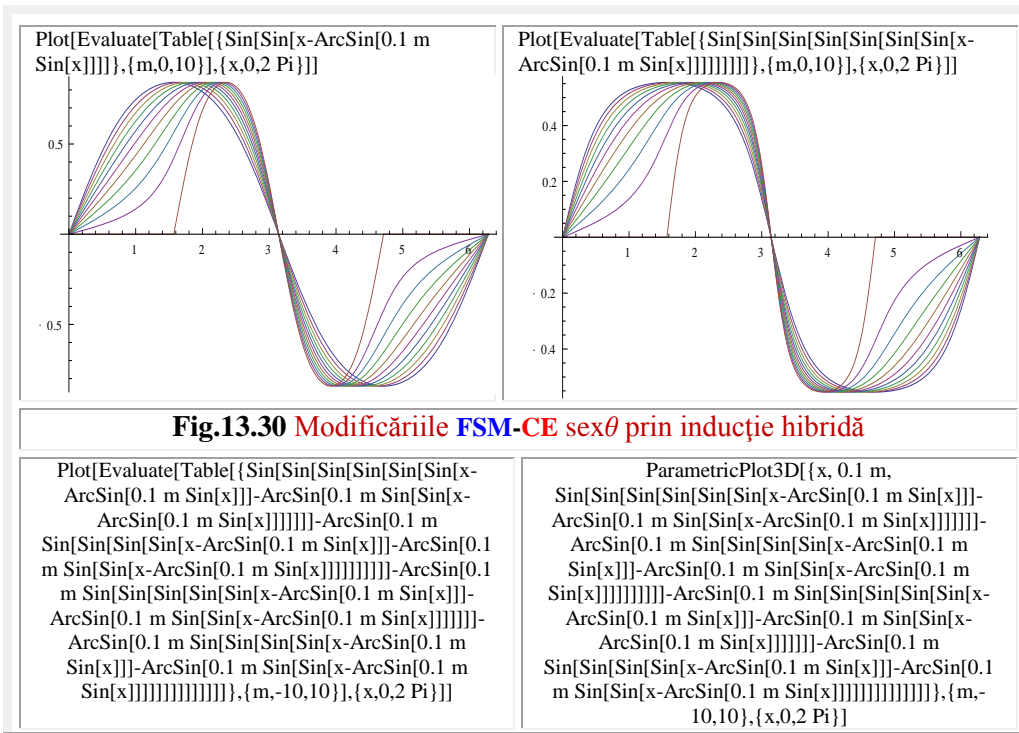
Funcții induse excentrice (**FIE**) sunt prezentate în **figura 13.26, a** în 2D și **b** în 3D.

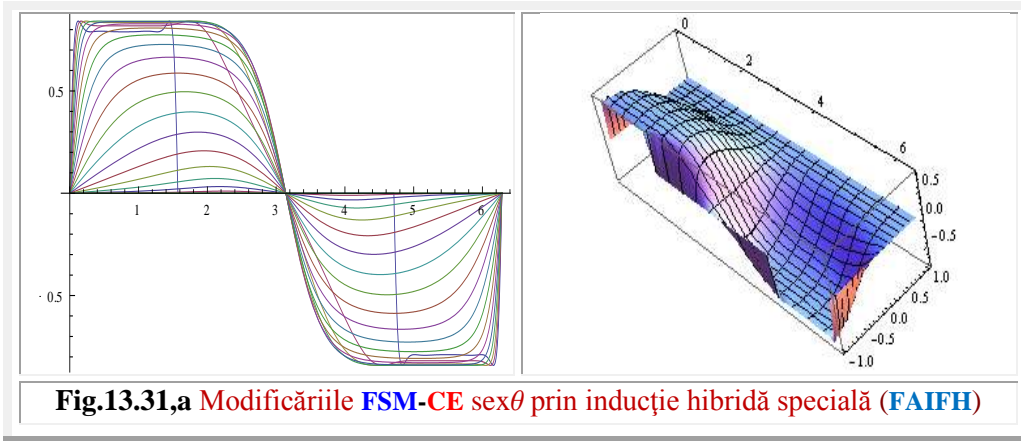
O serie de funcții induse hibride (**FIH**) sunt prezentate în continuare. Astfel, în **figura 13.27,a** este prezentată funcția indusă hibridă
 (13.67)
$$fh(x) = \sin[\sin[\sin[\dots \sin[\text{sex}[x, S(s, \varepsilon)]]]]]]$$
 pentru $S(s = -0,9, \varepsilon = 0)$ sus și $s = -0,4$ jos.

În **figura 13.27,b** sunt prezentate graficele pentru $s = \pm 1$, cu $n = 0, \dots, 10$

Pentru a urmări influența amplitudinilor asupra formelor graficelor **FIH** s-au prezentat graficele din **figura 13.28**, care arată că, prin modificarea amplitudinilor, formele graficelor **FIH** se modifică foarte mult.

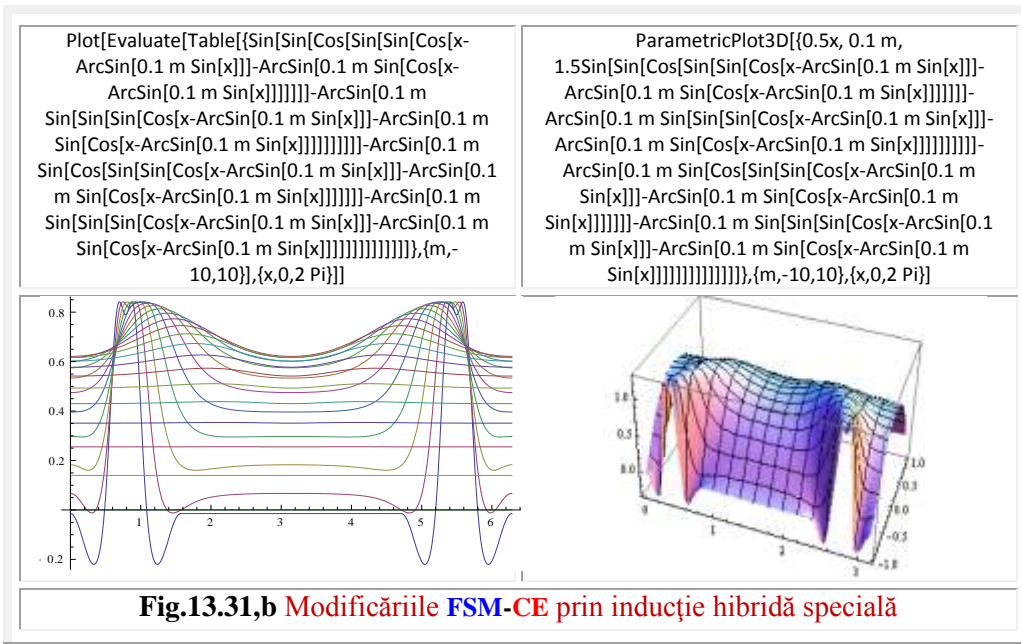
Modificările formelor graficelor **FIH** sunt urmărite în **figura 13.29**, în care excentrul **S** se rotește în jurul originii **O**(0,0) pe un cerc de rază egală cu excentricitatea numerică $s = 0,4 = \text{constant}$. Se observă că pentru $\varepsilon \in [0, \pi]$ domeniul expansiv crește și cel contractiv scade, apoi, pentru $\varepsilon \in [\pi, 0]$ fenomenul se inversează. Amplitudinile scad cu creșterea gradului de inducție **n** și sunt aceleași pentru un anumit **n**. Rezultă că pe lângă contracție și expansiune are loc și o translație pe direcția x, a cărei deplasare scade cu creșterea lui **O** translație a punctelor curbelor **FIH** are loc și numai datorită creșterii gradului de inducție n, simultan cu expansiunea punctelor curbelor, care duc la "rotunjirea" acestora, așa cum se observă în **figura 13.30**, la trecerea de la $\sin[\text{sex}[x]]$ la $\sin[\sin[\sin[\dots \text{sex}[x]]]]]$.





Inducții hibride speciale sunt prezentate în figurile 13.31,a și 13.31,b. Ele sunt formate astfel: o FIH, la un moment dat, este selecționată și copiată, apoi variabila x este înlocuită peste tot cu funcția indusă hibridă selecționată. Apoi, se repetă această operație de mai multe ori.

Un exemplu este prezentat în continuare.



Fie FIH

$$(13.68) \quad \sin[\text{sex}[x]] = \sin[\sin[x - \arcsin[s \cdot \sin(x - \epsilon)]]]$$

Se copiază această FIH, în culori distincte pentru o înțelegere mai facilă

$$(13.68') \quad \sin[\sin[x - \arcsin[s \cdot \sin(x - \epsilon)]]] \sin[\sin[x - \arcsin[s \cdot \sin(x - \epsilon)]]]$$

apoi, în locul variabilei x din (13.68) se introduce funcția hibridă copiată și rezultă (13.69) $\sin[\sin[\sin[\sin[x-\arcsin[s.\sin(x-\varepsilon)]]]-\arcsin[s.\sin(\sin[\sin[x-\arcsin[s.\sin(x-\varepsilon)]]-\varepsilon)]]]]$

Operația se poate repeta, copiindu-se **FAIFH** (13.69) și înlocuindu-se variabilele x cu funcția nou copiată. Deoarece, variabila este succesiv înlocuită cu funcția anterioară, arată că avem de-a face cu un proces de autoinducție a unor funcții hibride (**FAIFH**).

Pentru că acest proces este greu de urmărit, în figurile anterioare au fost prezentate, deasupra graficelor (2D) ca și a reprezentărilor 3D și expresiile funcțiilor autoinduse hibride (**FAIFH**).

Acest tip de autoinducție este net diferit de cel prezentat în §13.3 și §13.4.

În acele paragrafe se autoinduceau continuu aceleași funcții

$$(\sin[\sin[\sin[\sin[\dots[\sin[x]]]]]]] \text{ sau } \cos[\cos[\cos[\dots[\cos[x]]]]])$$

pe când, în cazul de față, la fiecare inducție se induc, simultan, **toate** funcțiile **anterior induse**. Ca de exemplu, în cazul unor **FCC**

$$n = 2 \rightarrow \sin[\cos[\cos[x]]]$$

→ **FHC**

$$n = 3 \rightarrow \sin[\cos[\cos[\sin[\cos[\cos[x]]]]]]$$

→ **FAIFHC**

$$n = 4 \rightarrow \sin[\cos[\cos[\sin[\cos[\cos[\sin[\cos[\cos[x]]]]]]]]]]$$

→ **FAIFHC**

$$n=5 \rightarrow \sin[\cos[\cos[\sin[\cos[\cos[\sin[\cos[\cos[\sin[\cos[\cos[x]]]]]]]]]]]]$$

$$\sin[\cos[\cos[\sin[\cos[\cos[\sin[\cos[\cos[\sin[\cos[\cos[x]]]]]]]]]]]] \rightarrow \mathbf{FAIFHC}$$

Exemplele ar putea continua mult, dar ne limita la a sublinia, în loc de concluzii, că **autoinducția și inducția**, ca forme particulare ale funcțiilor compuse, constituie un nou mod de multiplicare a funcțiilor matematice, spre satisfacția programatorilor de mașini-unelte **CNC**, în cazul programării cu directoare și / sau generatoare programată a suprafețelor complexe, și, în special, prin utilizarea programelor **SM-CAD-CAM** ca și spre satisfacția arhitecților.

Și, cu siguranță, cu trecerea timpului, numărul beneficiarilor va crește foarte mult: **Dumnezeu** ajută, dar nu bagă și-n traistă / straiță !

13.5 DERIVATELE FUNCȚIILOR AUTOINDUSE ȘI ALE FUNCȚIILOR INDUSE

Fiind funcții compuse, sau, mai precis, **funcții de funcții**, derivatele lor, în principiu, nu ridică probleme.

Trebuie menționat că în “**FORMULARUL MATEMATIC ȘI TEHNIC**” Ed. Tehnică, 1953, pag.201, se face distincție între **funcția de funcție**, care este $y = f(u)$, $u = g(x)$ cu derivata $y' = f' \cdot g'$ și diferențiala $dy = f'(u) \cdot du$ și **funcția compusă**, care este $y = f(u,v)$, $u = f_1(x)$; $v = f_2(x)$; cu derivata $y' = f'_u \cdot u' + f'_v \cdot v'$ și diferențiala $dy = f'_u \cdot du + f'_v \cdot dv$, diferențiere care nu mai apare în manualele recente.

Însă, realizarea concretă a derivatelor **FAI** și a **FI**, mai ales pentru grade înalte de inducție sau de autoinducție **n**, ridică problemele și complicațiile încep să apară, cu precădere la derivatele de ordin superior, așa cum se va vedea în continuare.

13.5.1 DERIVATELE FUNCȚIILOR CENTRICE AUTOINDUSE (FC-AI)

Fie funcția autoindusă (FAI)

(13.70) $f(x) = \text{sinai}[A_i = 1, n = 1, \text{sin}x] = \text{sin}[\text{sin}x]$

Fiind o funcție de funcții / compusă, de tipul $y = f(u)$, $u = g(x)$ sau $y = f(g(x))$ cu derivata $y' = f' \cdot g'$, prima ei derivată este

(13.71) $f'(x) = \text{cos}[\text{sin}x] \cdot \text{cos}x$, iar derivata a doua va fi

(13.72) $f''(x) = -\text{sin}[\text{sin}x] \cdot \text{cos}^2x - \text{cos}[\text{sin}x] \cdot \text{sin}x$

Dacă gradul de inducție **n** al FAI este mai ridicat, ca de exemplu $n = 4$,

(13.73) $f(x) = \text{sin}[\text{sin}[\text{sin}[\text{sin}[\text{sin}x]]]]$

atunci derivarea ridică ceva probleme/grutăți, nu în principiu, care-i clar, ci în fapt, la efectuarea concretă / practică a derivatelor, așa cum rezultă în continuare.

Prima derivată al FAI (13.73), realizată computerizat (**MATHEMATICA 8**), este

(13.74) $f'(x) = \text{Cos}[x] \text{Cos}[\text{Sin}[x]] \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]] \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]] * \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]]$

iar derivata a doua, obținută la fel, va fi

(13.75) $- \text{Cos}[\text{Sin}[x]] \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]] \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]] * \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]] \text{Sin}[x] - \text{Cos}[x]^2 \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]] \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]] * \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]] \text{Sin}[\text{Sin}[x]] - \text{Cos}[x]^2 \text{Cos}[\text{Sin}[x]]^2 \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]] * \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]] \text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]] - \text{Cos}[x]^2 \text{Cos}[\text{Sin}[x]]^2 \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]^2 * \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]] \text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]] - \text{Cos}[x]^2 \text{Cos}[\text{Sin}[x]]^2 * \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]^2 \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]^2 \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]^2 \text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]]$

cu graficele din **figura 13.32**.

Dacă numai amplitudinea ultimei autoinducții A_4 se modifică, de la 1 la $A_4 = \pi/2$, deci pentru FAI

(13.76) $f(x) = \text{sinai}[A_1=A_2=A_3=1, A_4 = \pi/2; \text{sin}x] = \text{sin}[\text{sin}[\text{sin}[\text{sin}[\pi \cdot \text{sin}x / 2]]]]$, atunci prima derivată va fi

(13.77) $f'(x) = 1/2 \pi \text{Cos}[x] \text{Cos}[1/2 \pi \text{Sin}[x]] \text{Cos}[\text{Sin}[1/2 \pi \text{Sin}[x]]] \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[1/2 \pi \text{Sin}[x]]]] \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[1/2 \pi \text{Sin}[x]]]]]$, iar a doua derivată este

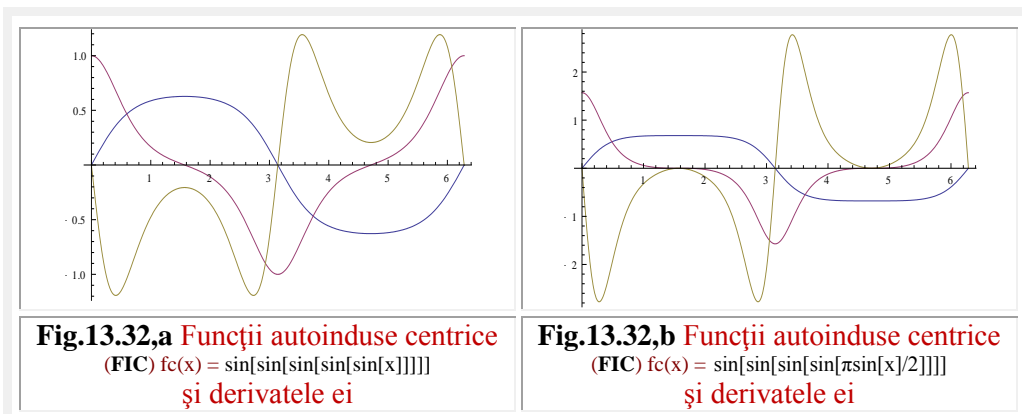
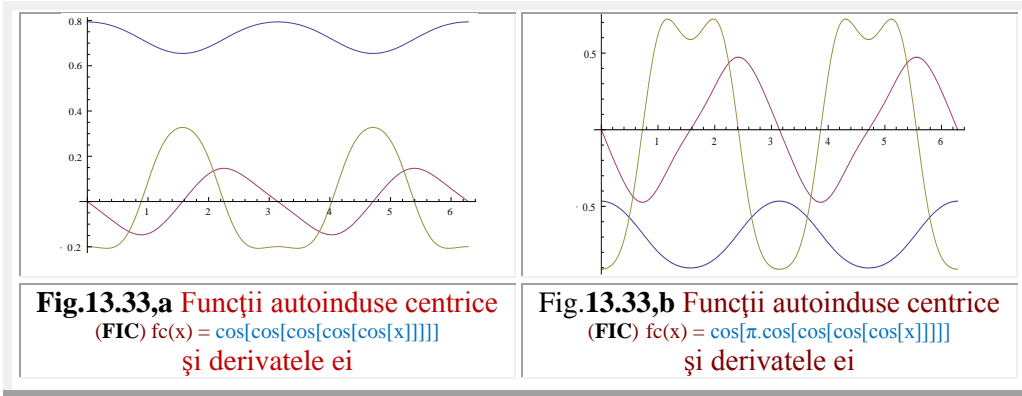


Fig.13.32,a Funcții autoinduse centrice (FIC) $f_c(x) = \text{sin}[\text{sin}[\text{sin}[\text{sin}[\text{sin}x]]]]$ și derivatele ei

Fig.13.32,b Funcții autoinduse centrice (FIC) $f_c(x) = \text{sin}[\text{sin}[\text{sin}[\text{sin}[\pi \text{sin}x / 2]]]]$ și derivatele ei



$$(13.78) \quad f''(x) = -\frac{1}{2} \pi \cos\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right] \cos\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right] \cos\left[\sin\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right]\right] \cos\left[\sin\left[\sin\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right]\right]\right] \sin[x] - \frac{1}{4} \pi^2 \cos[x]^2 \cos\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right] \cos\left[\sin\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right]\right] \cos\left[\sin\left[\sin\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right]\right]\right] \sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right] - \frac{1}{4} \pi^2 \cos[x]^2 \cos\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]^2 \cos\left[\sin\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right]\right] \cos\left[\sin\left[\sin\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right]\right]\right] \sin\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right] - \frac{1}{4} \pi^2 \cos[x]^2 \cos\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]^2 \cos\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right]^2 \cos\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right]^2 \cos\left[\sin\left[\sin\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right]\right]\right] \sin\left[\sin\left[\sin\left[\frac{1}{2} \pi \sin[x]\right]\right]\right]$$

Funcția și derivatele ei au graficele din **figura 13.32,b**
Funcția autoindusă (FAI)

$$(13.79) \quad f(x) = \cos_{[A_i=1, n=4, \cos x]} = \cos[\cos[\cos[\cos[\cos[x]]]]]$$

are prima derivată

$$(13.80) \quad f'(x) = -\sin[x] \sin[\cos[x]] \sin[\cos[\cos[x]]] \sin[\cos[\cos[\cos[x]]]] \sin[\cos[\cos[\cos[\cos[x]]]]]$$

și a doua derivată

$$(13.81) \quad f''(x) = -\cos[\cos[\cos[\cos[\cos[x]]]]] \sin[x]^2 \sin[\cos[x]]^2 \sin[\cos[\cos[x]]]^2 \sin[\cos[\cos[\cos[x]]]]^2 + \cos[\cos[\cos[\cos[x]]]] \sin[x]^2 \sin[\cos[x]]^2 \sin[\cos[\cos[x]]]^2 \sin[\cos[\cos[\cos[x]]]] - \cos[\cos[\cos[x]]] \sin[x]^2 \sin[\cos[x]]^2 \sin[\cos[\cos[\cos[x]]]] \sin[\cos[\cos[\cos[\cos[x]]]]] + \cos[\cos[x]] \sin[x]^2 \sin[\cos[\cos[x]]] \sin[\cos[\cos[\cos[x]]]] \sin[\cos[\cos[\cos[\cos[x]]]]] - \cos[x] \sin[\cos[x]] \sin[\cos[\cos[x]]] \sin[\cos[\cos[\cos[x]]]] \sin[\cos[\cos[\cos[\cos[x]]]]]$$

cu graficele din **figura 13.33,a**.

Efectuând o modificare și în această funcție, la amplitudinea primei autoinducții, adică, considerând FAI

$$(13.82) \quad f(x) = \cos[\pi.\cos[\cos[\cos[\pi\cos(x)/2]]]]$$

cu prime ei derivată

$$(13.83) \quad f'(x) = -\pi \sin[x] \sin[\cos[x]] \sin[\cos[\cos[x]]] \sin[\cos[\cos[\cos[x]]]] \sin[\pi \cos[\cos[\cos[\cos[x]]]]]$$

și cu a doua derivată

$$(13.84) \quad f''(x) = -\pi^2 \cos[\pi \cos[\cos[\cos[\cos[x]]]]] \sin[x]^2 \sin[\cos[x]]^2 \sin[\cos[\cos[x]]]^2 \sin[\cos[\cos[\cos[x]]]]^2 + \pi \cos[\cos[\cos[\cos[x]]]] \sin[x]^2$$

$\sin[\cos[x]]^2 \sin[\cos[\cos[x]]]^2 \sin[\pi \cos[\cos[\cos[\cos[x]]]]] - \pi \cos[\cos[\cos[x]]] \sin[x]^2 \sin[\cos[x]]^2 \sin[\cos[\cos[\cos[x]]]] \sin[\pi \cos[\cos[\cos[\cos[x]]]]] + \pi \cos[\cos[x]] \sin[x]^2 \sin[\cos[\cos[x]]] \sin[\cos[\cos[\cos[x]]]] \sin[\pi \cos[\cos[\cos[\cos[x]]]]] - \pi \cos[x] \sin[\cos[x]] \sin[\cos[\cos[x]]] \sin[\cos[\cos[\cos[x]]]] \sin[\pi \cos[\cos[\cos[\cos[x]]]]]$ au graficele din **figura 13.33,b**.

Atât graficele din **figura 13.32** cât și cele din **figura 13.33** sunt des întâlnite în tehnică, din care cauză, dintre multitudinea / imensitatea de grafice posibile ale **FAI** ne-am limitat la acestea.

13.5.2 DERIVATELE FUNCȚIILOR CENTRICE INDUSE (FC-I)

Fie funcția indusă (**FI**) cu $A_i = 1$, $n = 4$

(13.85) $f(x) = \sin[\cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]]$

Ea are prima derivată dată de expresia

(13.86) $f'(x) = \cos[x] \cos[\cos[\sin[x]]] \cos[\cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]] \sin[\sin[x]] \sin[\sin[\cos[\sin[x]]]]$

și a doua derivată, dată de expresia

(13.87) $f''(x) = -\cos[x]^2 \cos[\cos[\sin[x]]]^2 \cos[\cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]] \cos[\sin[\cos[\sin[x]]]] \sin[\sin[x]]^2 + \cos[x]^2 \cos[\cos[\sin[x]]] \cos[\cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]] \cos[\sin[x]] \sin[\sin[\cos[\sin[x]]]] - \cos[\cos[\sin[x]]] \cos[\cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]] \sin[x] \sin[\sin[x]] \sin[\sin[\cos[\sin[x]]]] + \cos[x]^2 \cos[\cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]] \sin[\cos[\sin[x]]] \sin[\sin[x]]^2 \sin[\sin[\cos[\sin[x]]]] - \cos[x]^2 \cos[\cos[\sin[x]]]^2 \sin[\cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]] \sin[\sin[x]]^2 \sin[\sin[\cos[\sin[x]]]]^2$.

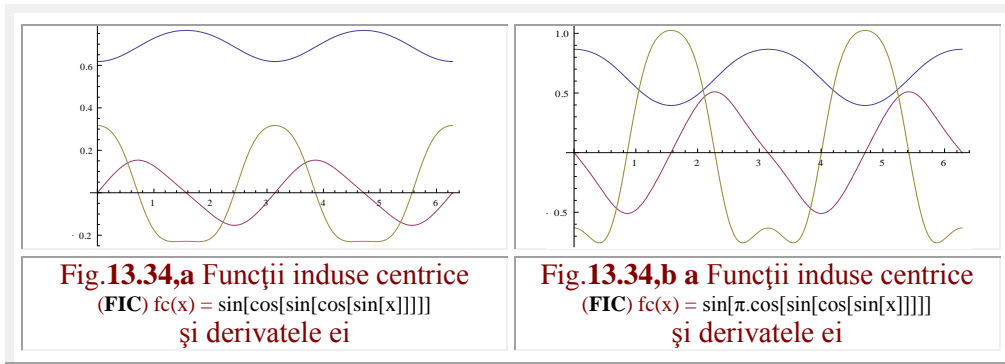


Fig.13.34,a Funcții induse centrice (**FI**) $f(x) = \sin[\cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]]$ și derivatele ei

Fig.13.34,b a Funcții induse centrice (**FI**) $f(x) = \sin[\pi \cdot \cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]]$ și derivatele ei

Graficele funcție cu derivatele ei sunt redată în **figura 13.34,a**

Pentru **FI**

(13.88) $f(x) = \sin[\pi \cdot \cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]]$ și derivatele ei,

(13.89) $f'(x) = \pi \cos[x] \cos[\cos[\sin[x]]] \cos[\pi \cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]] \sin[\sin[x]] \sin[\sin[\cos[\sin[x]]]]$ și

(13.90) $f''(x) = -\pi \cos[x]^2 \cos[\cos[\sin[x]]]^2 \cos[\pi \cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]] \cos[\sin[\cos[\sin[x]]]] \sin[\sin[x]]^2 + \pi \cos[x]^2 \cos[\cos[\sin[x]]] \cos[\pi \cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]] \cos[\sin[x]] \sin[\sin[\cos[\sin[x]]]] - \pi \cos[x] \cos[\cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]] \sin[x] \sin[\sin[x]] \sin[\sin[\cos[\sin[x]]]] + \pi \cos[x]^2 \cos[\cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]] \sin[\cos[\sin[x]]] \sin[\sin[x]]^2 \sin[\sin[\cos[\sin[x]]]] - \pi \cos[x]^2 \cos[\cos[\sin[x]]]^2 \sin[\cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]] \sin[\sin[x]]^2 \sin[\sin[\cos[\sin[x]]]]^2$

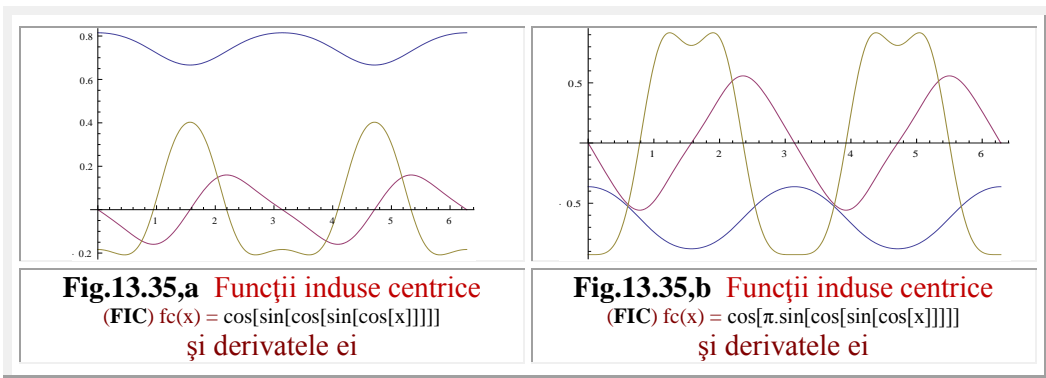
$\text{Cos}[\text{Sin}[\text{Cos}[\text{Sin}[x]]]] \text{Cos}[\text{Sin}[x]] \text{Sin}[\text{Sin}[\text{Cos}[\text{Sin}[x]]]] - \pi \text{Cos}[\text{Cos}[\text{Sin}[x]]] \text{Cos}[\pi$
 $\text{Cos}[\text{Sin}[\text{Cos}[\text{Sin}[x]]]] \text{Sin}[x] \text{Sin}[\text{Sin}[x]] \text{Sin}[\text{Sin}[\text{Cos}[\text{Sin}[x]]]] + \pi \text{Cos}[x]^2 \text{Cos}[\pi$
 $\text{Cos}[\text{Sin}[\text{Cos}[\text{Sin}[x]]]] \text{Sin}[\text{Cos}[\text{Sin}[x]]] \text{Sin}[\text{Sin}[x]]^2 \text{Sin}[\text{Sin}[\text{Cos}[\text{Sin}[x]]]] - \pi^2$
 $\text{Cos}[x]^2 \text{Cos}[\text{Cos}[\text{Sin}[x]]]^2 \text{Sin}[\pi \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Cos}[\text{Sin}[x]]]] \text{Sin}[\text{Sin}[x]]^2$
 $\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Cos}[\text{Sin}[x]]]]^2$, cu graficele sunt date în **figura 13.34,b**

Se observă, prin comparație, că o mică modificare a uneia dintre amplitudini, în cazul de față a lui A_1 de la 1 la π , duce la o modificare pronunțată a formei relative a graficelor.

Alte **FI** ca

(13.91) $f(x) = \sin[\cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]]$ și

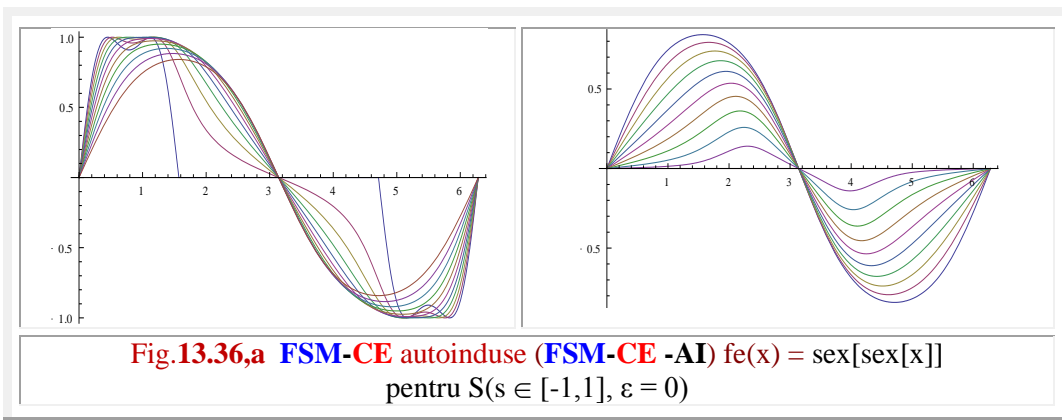
(13.92) $f(x) = \sin[\pi \cdot \cos[\sin[\cos[\sin[x]]]]]$ au graficele lor și a derivatelor lor, prezentate, fără exprsiile derivatelor, în **figurile 13.35,a** și, respectiv, **13.45,b**.



13.5.3 DERIVATELE FUNCȚIILOR CIRCULARE EXCENTRICE AUTOINDUSE (FCE-AI)

Fie **FSM-CE -AI**

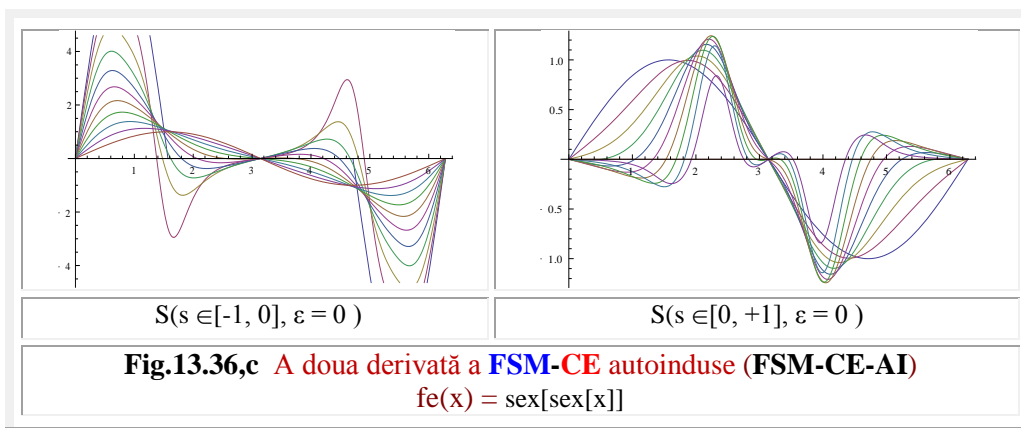
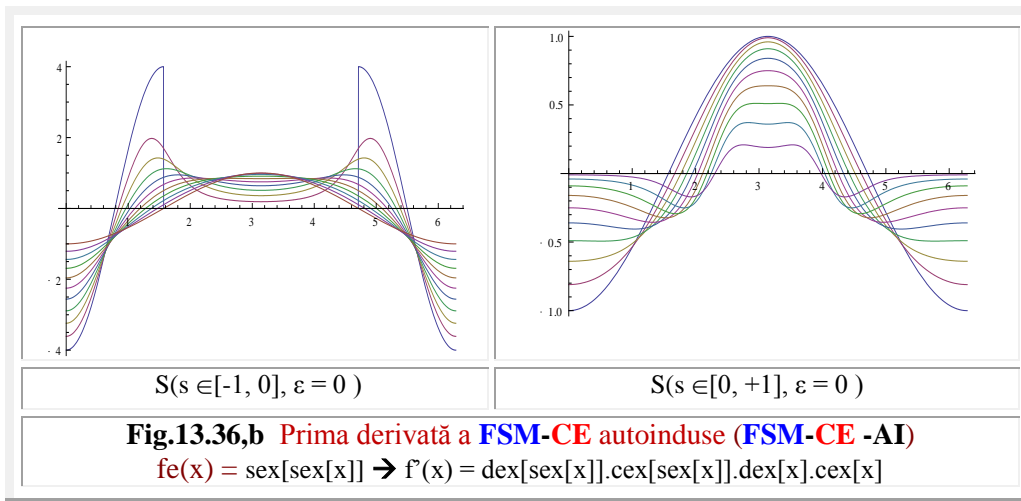
(13.93) $y(x) = \text{sex}[\text{sex}[x]]$ cu graficele din **figura 13.36,a**



Ea are prima derivata dată de expresia

$$(13.94) \quad y'(x) = \text{dex}[\text{sex}[x]].\text{cex}[\text{sex}[x]].\text{dex}[x].\text{cex}[x] = -\text{Cos}[x - \text{ArcSin}[0.1 \text{ u Sin}[x]]] (1 - (0.1 \text{ u Cos}[x]) / \sqrt{1 - 0.01 \text{ u}^2 \text{ Sin}^2[x]}) + (0.1 \text{ u Cos}[x - \text{ArcSin}[0.1 \text{ u Sin}[x]]] \text{Cos}[\text{Sin}[x - \text{ArcSin}[0.1 \text{ u Sin}[x]]]] (1 - (0.1 \text{ u Cos}[x]) / \sqrt{1 - 0.01 \text{ u}^2 \text{ sin}[x]^2})) / \sqrt{1 - 0.01 \text{ u}^2 \text{ Sin}^2[\text{Sin}[x - \text{ArcSin}[0.1 \text{ u Sin}[x]]]]$$

cu graficele din **figura 13.36,b**.



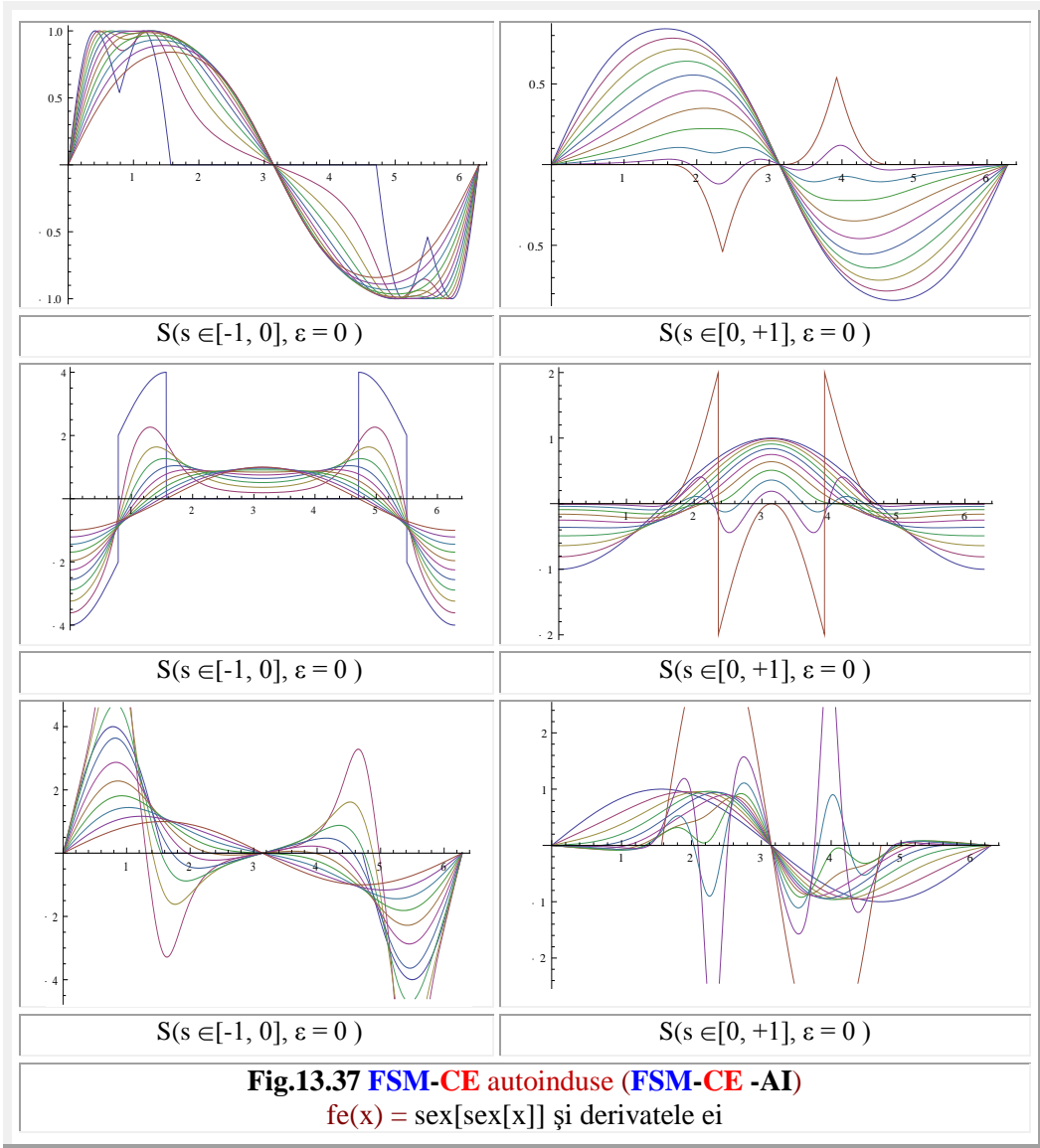
A doua derivată este atât de complexă, încât nu are sens / rost să fie prezentată expresia ei, rezumându-ne să prezentăm doar graficele ei din **figura 13.36,c**.

Dacă în **FSM-CE** înlocuirea variabilei x cu funcția sex[x] se face în sens invers, de la stânga spre dreapta, adică

$$(13.95) \quad f(x) = \text{sex}[\text{sex}[x]] = \sin[\text{sex}[x] - \arcsin[0.1 \text{ u sex}[x]]] = \sin[\sin[x] - \arcsin[0.1 \text{ u sin}[x]] - \arcsin[0.1 \text{ u sin}[x - \arcsin[0.1 \text{ u sin}[x]]]]], \text{ atunci prima derivata, realizata computationally / mecanic, este}$$

(13.96) $f'(x) = -\text{Cos}[\text{ArcSin}[0.1 \text{ u Sin}[x-\text{ArcSin}[0.1 \text{ u Sin}[x]]]]]-\text{Sin}[x-\text{ArcSin}[0.1 \text{ u Sin}[x]]]$

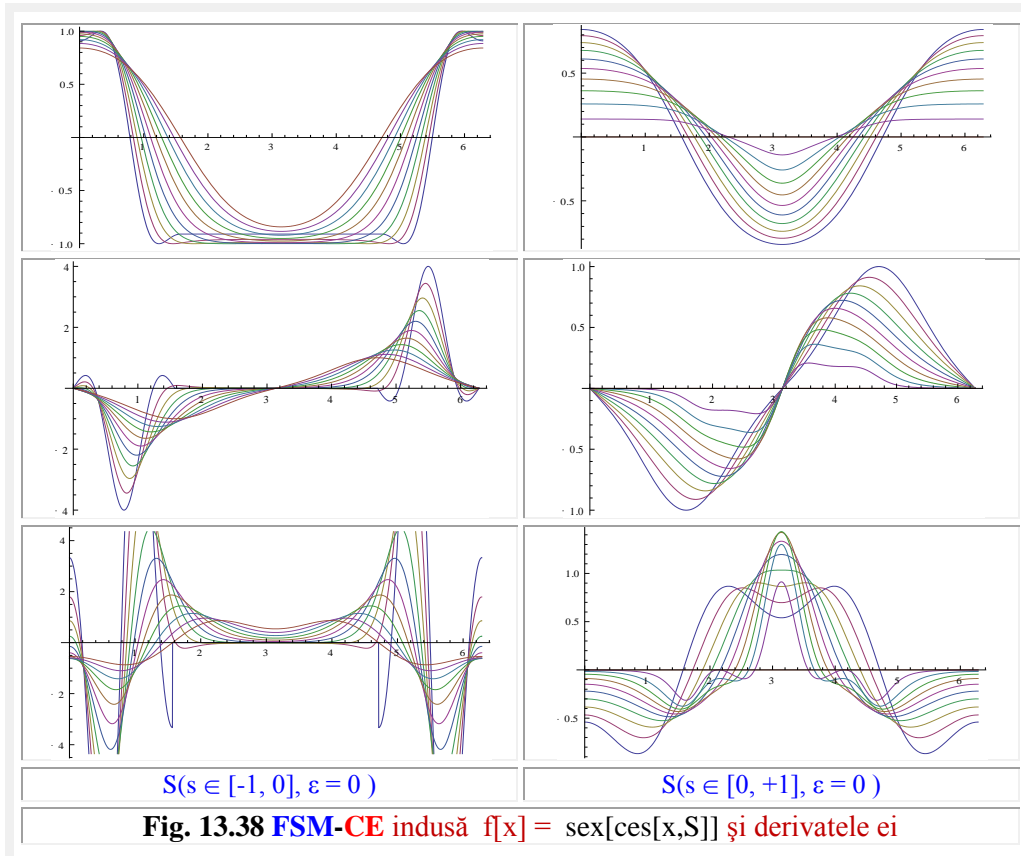
iar a doua derivată va fi prea complexă pentru a fi prezentată expresia ei, rezumându-ne la prezentarea graficelor derivatelor în **figura 13.37**.



13.5.4 DERIVATELE FUNCȚIILOR CIRCULARE EXCENTRICE INDUSE (FC-I)

Se consideră **FSM-CE -I**

(13.97) $f(x) = \text{sex}[\text{ces}[x,S]]$, ambele **FSM-CE** fiind de primă determinare.



Prima derivată a acestei **FSM-CE -I** este

(13.98) $f'[x] = \text{dex}[\text{ces}[x,S]] \cdot \text{ces}[\text{ces}[x,S]] \cdot (-\text{dex}[x,S] \cdot \text{sex}[x,S])$

care, explicitată, are o expresie prea stufoasă pentru a fi prezentată, ca să nu mai vorbim de derivata a doua, care ocupă o pagină întreagă.

Se observă cât de diferite sunt graficele, în special ale accelerațiilor (din derivata a doua), numai prin schimbarea semnului excentricității numerice s , adică trecând de la $\varepsilon = 0$ la $\varepsilon = \pi$.

Dacă se schimbă ordinea **FSM-CE**, adică

(13.99) $f[x] = \text{cex}[\text{sex}[x,S]]$,

atunci derivata va fi

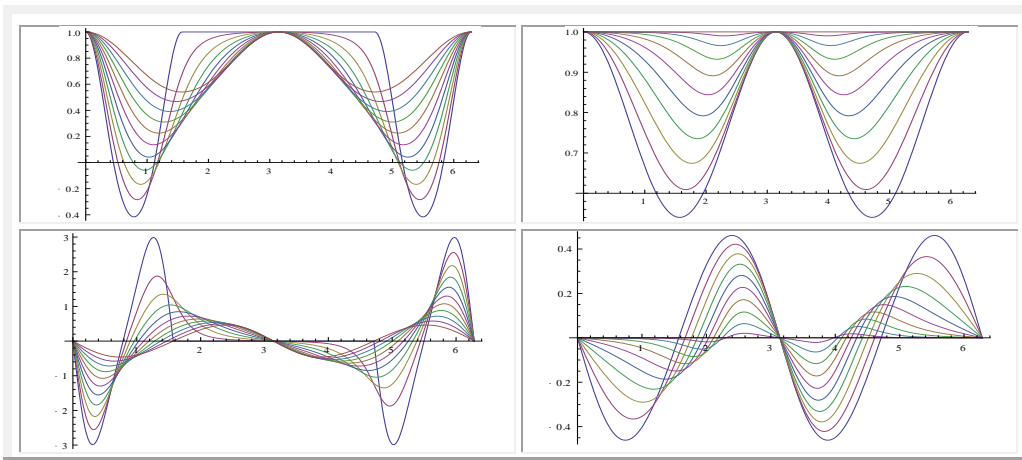
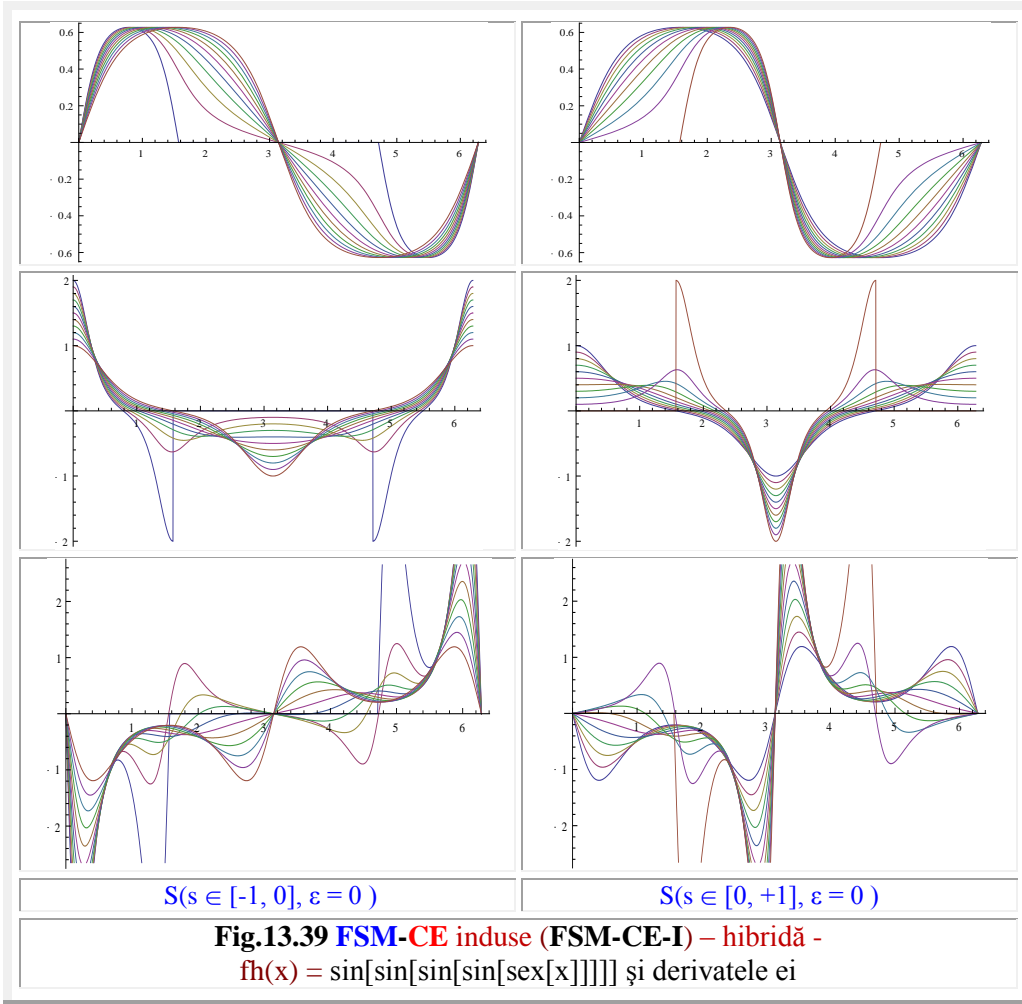
(13.100) $f'[x] = -\text{dex}[\text{sex}[x,S]] \cdot \text{sex}[\text{sex}[x,S]] \cdot (\text{dex}[x,S] \cdot \text{cex}[x,S])$

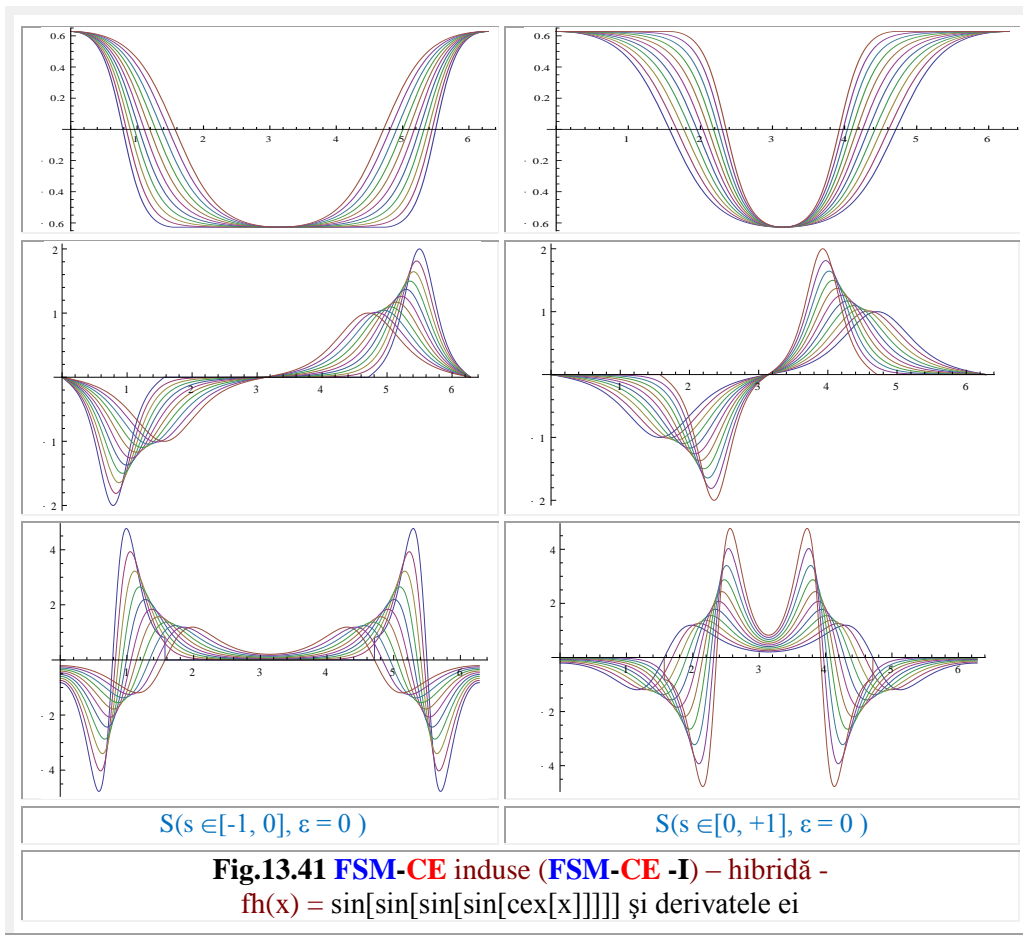
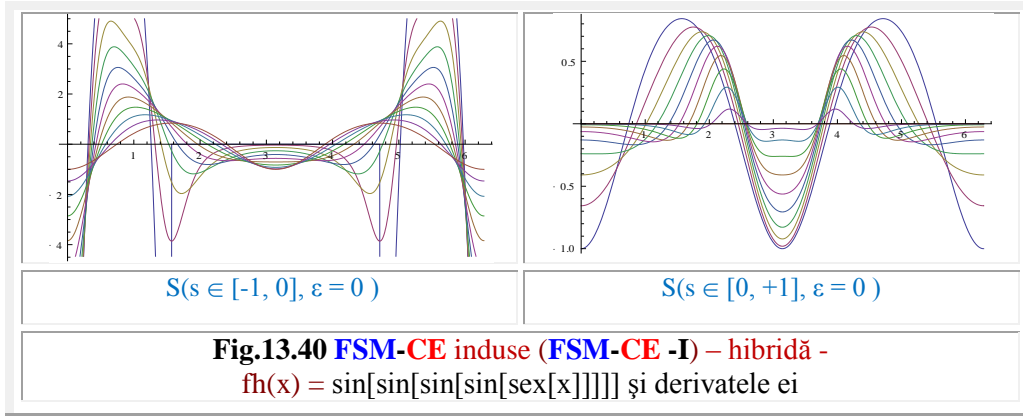
cu graficele funcției și a derivatelor sale din **figura 13.39**.

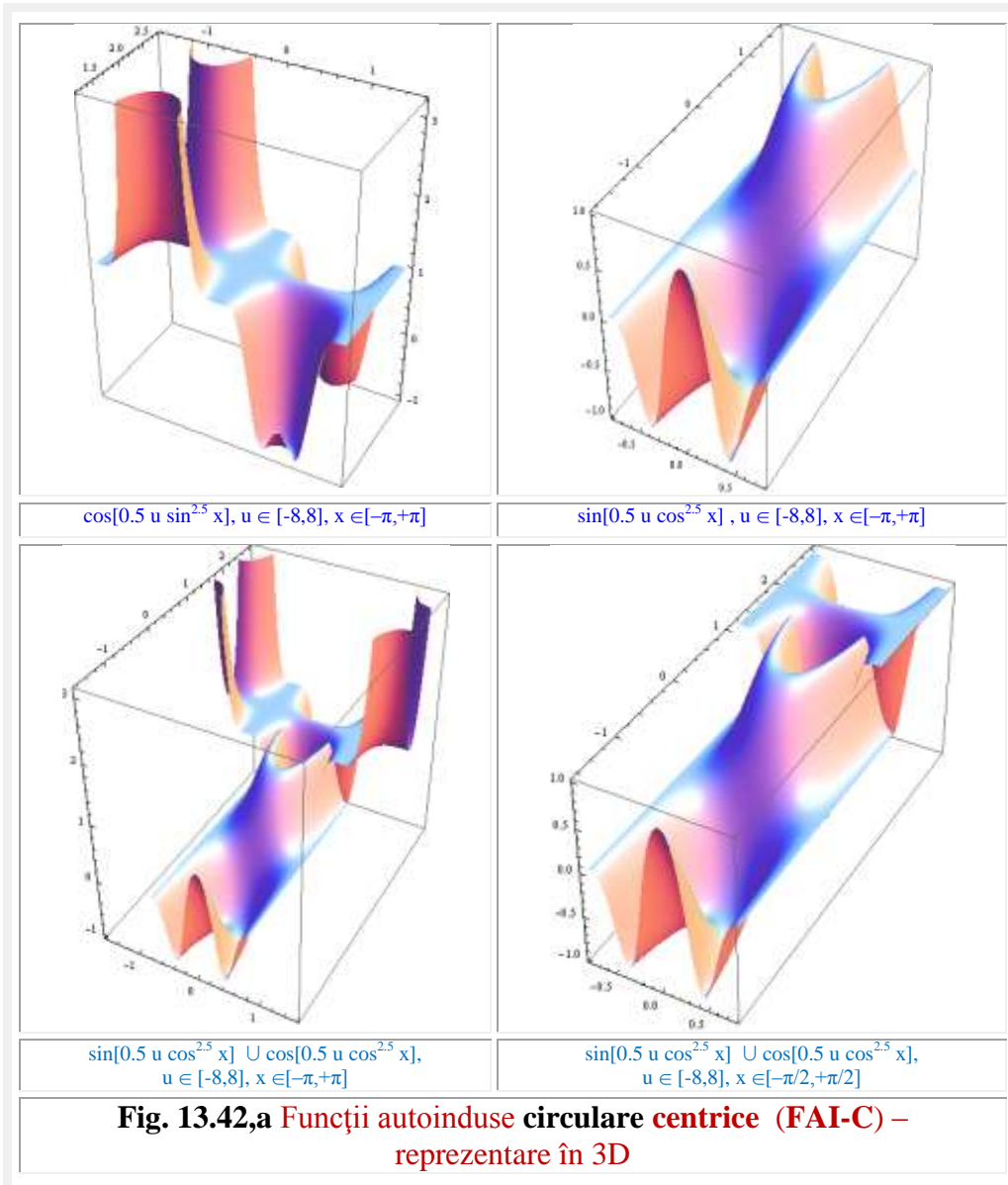
Considerând **FSM-CE** și **FCC**

(13.101) $\text{fh}(x) = \sin[\sin[\sin[\sin[\text{sex}[x,S]]]]]$

cu graficele ei și a derivatelor sale din **figura 13.40**. Fiind o combinație dintre **FCC** și **FSM-C** ea este, totodată, și o funcție supermatematică hibridă.



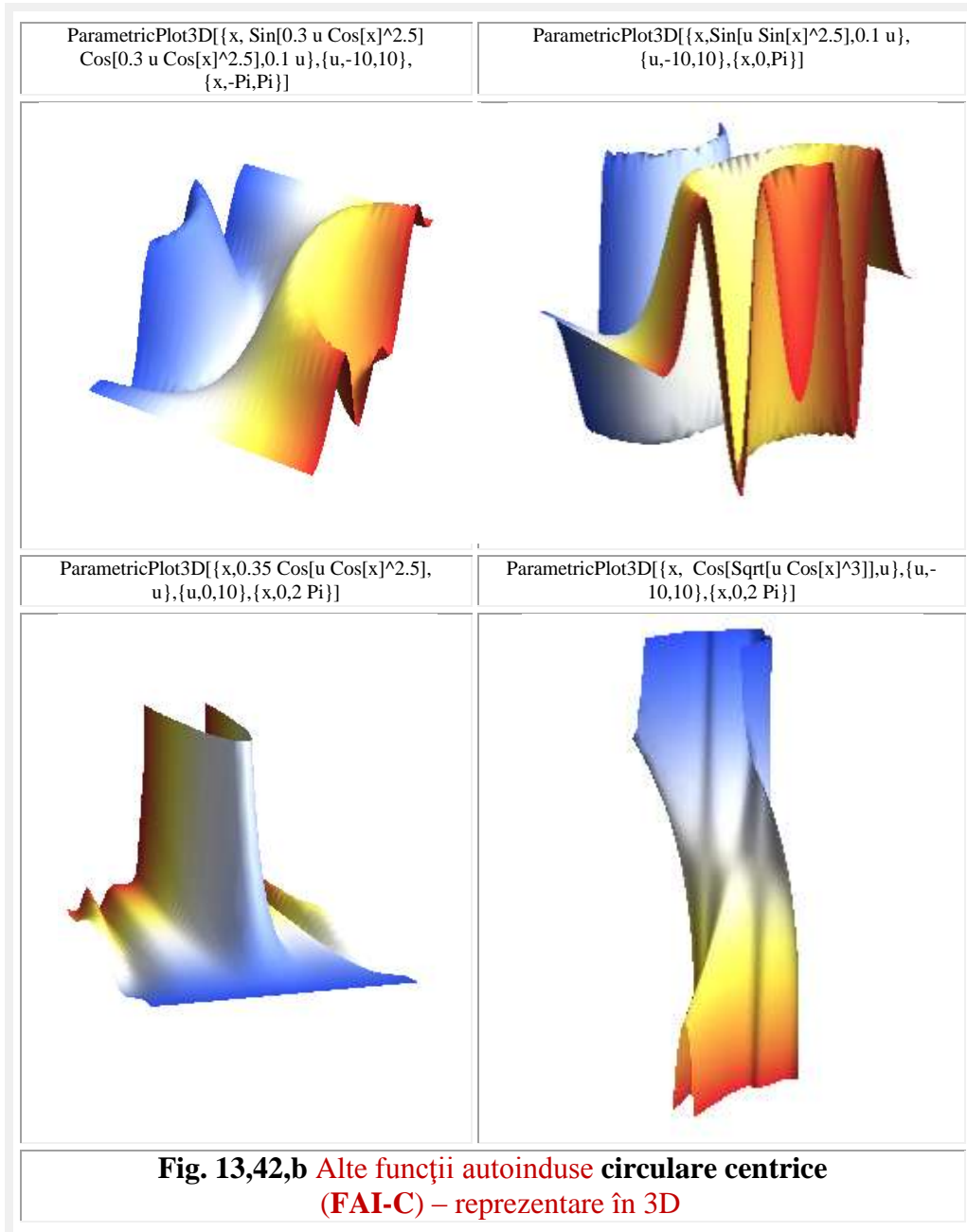




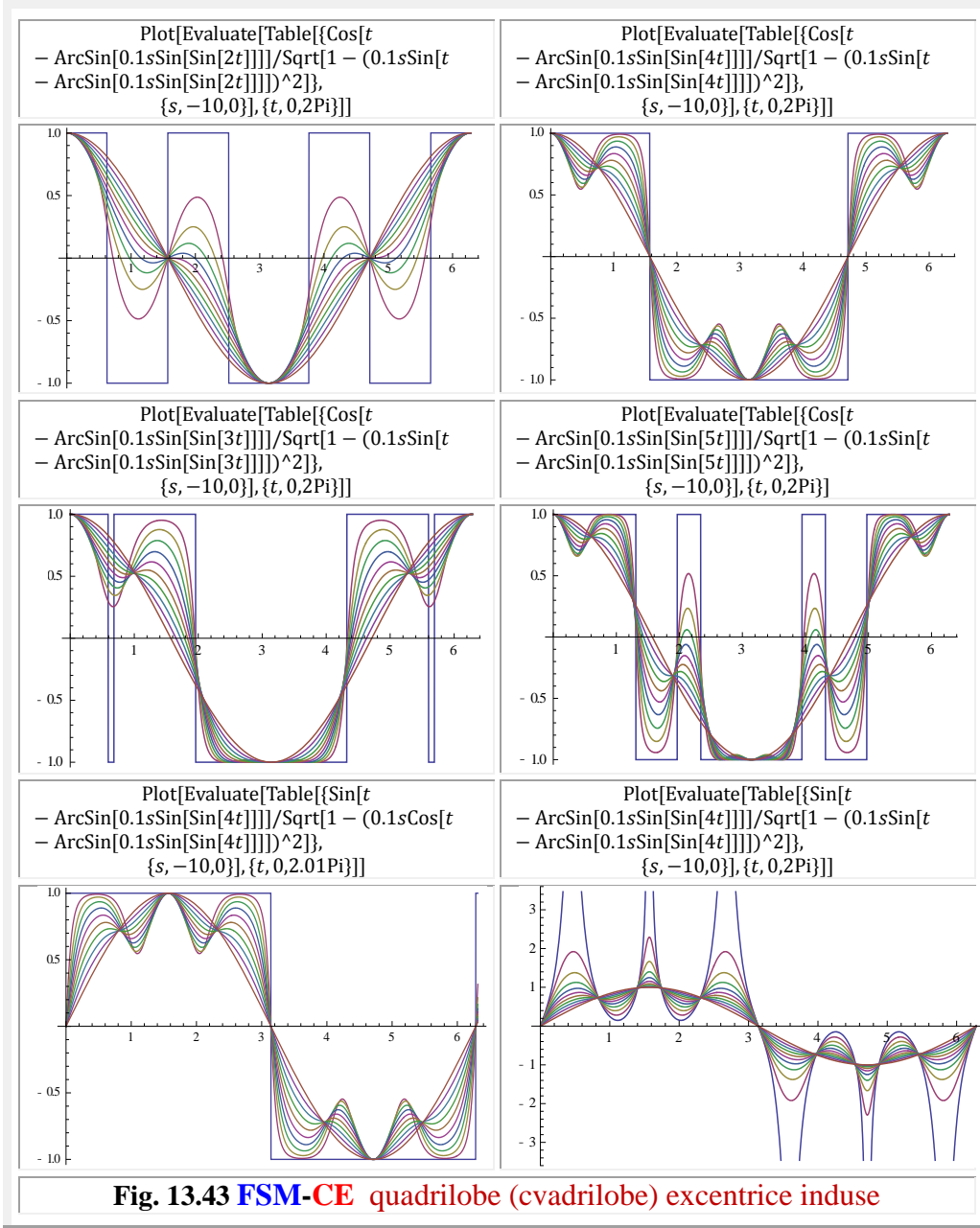
Prin înlocuirea **FSM-CE** $\text{sex}\theta$ cu $\text{cex}\theta$, $\theta = x$, rezultă **FSM-CE** indusă hibridă (13.102) $\text{fh}(x) = \sin[\sin[\sin[\sin[\text{cex}[x,S]]]]]$ cu graficele ei și a derivatelor sale din **figura 13.41**.

Din multitudinea de exemple posibile, au fost prezentate, doar câteva, care arată că **FSM-CE** constituie un **rezervor nesecat de funcții** cu aplicații în știință și tehnică, iar scrierea lor (cex , $\text{sex}[x]$, $\text{aex}[x]$, $\text{bex}[x]$, $\text{tex}[x]$, ș.a.m.d.) oferă posibilitatea exprimării unor derivate ale lor, care explicitate n-ar avea niciun înțeles.

În final, fără a epuiza subiectul, ci, dimpotrivă, îl considerăm de abea antamat, prezentăm, în 3D, câteva funcții circulare centrice autoinduse care pot încânta ochiul și pot constitui, totodata, un izvor de inspirație pentru cei ce trudesc la realizarea unor forme spațiale moderne, plăcute ochiului.



O altă serie de **FSM-CE** de forme deosebite sunt prezentate în încheiere în **figura 13.43**, împreună cu ecuațiile lor de definiție



Moto “ Lumea este construită ca o structura matematică și nu ca una materială ”

Werner Karl Heisenberg

Mai precis, o **structura supermatematică**,
sau structura **matematică a mileniului III**

Autorul

Capitolul 14

FUNȚII SUPERMATEMATICE HIPERBOLICE

14.1 INTRODUCERE

Ca și în domeniul funcțiilor circulare, și în cel al funcțiilor hiperbolice, s-a simțit nevoia diversificării acestora. În domeniul funcțiilor circulare, așa cum s-a descris în Vol.I Cap.2, s-a căutat, din păcate, să se înlocuiască **cercul**, pe care s-au definit aceste funcții, cu alte curbe închise, sau cu obiecte matematice noi. Astfel, s-a căutat înlocuirea cercului cu **pătratul** sau **rombul** (**V.Alaci**, 1939), funcții generalizate apoi de **M. O. Enulescu** (1940), pe **poligoane** cu n laturi în **funcții poligonale** [14]. Dar, încă în 1877, **Dr. Biehringer** [15] definește funcțiile trigonometrice **înclinate**, iar **A.I. Marcușevici** (1965), în [16], publică funcții trigonometrice definite pe **lemniscată** și funcții trigonometrice **generalizate**, evidențind și legăturile ce există între aceste funcții și funcțiile **eliptice**.

Este aproape inexplicabil faptul că **nimeni** n-a încercat să schimbe (mute), din centru și din originea sistemului de referință (reperului), măcar poziția unui singur punct, dintre cele trei - originea **O**(0,0), centrul cercului unitate **C**(0,0) și polul **P**(0,0)- toate confundate în origine.

Și în domeniul funcțiilor hiperbolice s-a procedat la înlocuirea hiperbolei echilateră, pe care sunt definite funcțiile hiperbolice centrice (**FHC**) cu.. cercul trigonometric, de **M. Moscovici** (1956) în [**Moscovici, M**, O INTERPRETARE GEOMETRICĂ NATURALĂ A SOLUȚIILOR COMPLEXE REZULTATE DIN UNELE PROBLEME DE GEOMETRIE ANALITICĂ, Ed. Tehnică, București, 1956], reușind o folositoare reunificare a celor două domenii, care va fi utilizată și de noi. În plus, autorul a reușit o interpretare intuitivă și coerentă a intersecției unei drepte cu un cerc, intersecție folosită apoi în tot restul lucrării. Prin similitudine, devine posibilă și unificarea celor două domenii ale **SM**: **circular** și **hiperbolic** !

Analog funcțiilor pătratice **V. Alaci**, prof. **E. Vișa** (1940) a definit **funcțiile pseudohiperbolice** [**Vișa, Eugen**, **FUNȚII PSEUDO-HIPERBOLICE, STUDIU ELEMENTAR**, Rev. Matematică din Timișoara, anul XX, Nr. 1, 2, 4, 5, Timișoara, 1940]: definind o **pseudohiperbolă**, formată din semidrepte paralele cu asimptotele hiperbolei echilateră, cu vârful în vârful hiperbolei (v. Vol.I, Cap. 2, §2.5, pag. 62 ...65).

Ca și în multe alte cazuri, după definirea funcțiilor directe, au fost definite și cele inverse pseudohiperbolice.

În cele ce urmează, definirea funcțiilor supermatematice hiperbolice excentrice (**FSM-HE**) se va face în mai multe moduri, începând cu cel geometric, mai intuitiv, pentru că beneficiază și de primul simț al sistemului sensorial, prin care se percep peste 80% din informațiile noastre: **văzul**.

În acest scop, este necesar, în prealabil, să se definească funcțiile **Gudermann excentrice**, care fac legătura dintre argumentul **t** – **dublul ariei** unui triunghi curbiliniu-și **unghiul la centru cercului unitate** α ; trecerea de la **centric** (α) la **excentric** (θ) fiind deja cunoscută.

Apoi, se va utiliza metoda cunoscută din **MC** și se va proceda aidoma acestei metode de trecere de la funcțiile matematice centrice **circulare** la cele **hiperbolice**, prin înlocuirea variabilei reale **t** a **FCC** cu cele complexe **i.t.**

14.2 CLASIFICAREA FUNCȚIILOR HIPERBOLICE CENTRICE ȘI EXCENTRICE

Funcțiile supermatematice hiperbolice (**FSM-H**), ca și funcțiile supermatematice circulare (**FSM-C**), centrice și / sau excentrice, pot fi clasificate, în funcție de poziția reciprocă a celor trei puncte: **origine** **O(0,0)**, a unui sistem rectangular drept xOy și / sau polar, **centrul** cercului unitate **C(c,φ)** și **polul** sau **excentrul** **S(s,ε)** în

- **FH centrice** → **FHC** dacă → **S ≡ C ≡ O**
- **FSM -H excentrice** → **FSM -HE** dacă → **S ≠ C ≡ O**
- **FSM -H elevate** → **FSM -HEI** dacă → **C ≠ O ≡ S**
- **FSM -H exotice** → **FSM -HEx** dacă → **C ≠ O ≠ S**

FHC sunt cunoscute de la introducerea lor în matematică, de către **Vincent Riccati** în 1757, cu notațiile date, “**ceva**” mai târziu, în 1878, de **Guillaume Jules Jouël**.

14.3 HIPERBOLE CENTRICE ȘI HIPERBOLE EXCENTRICE

Hiperbola a fost descoperita de **Menechmus** (sec 4 î.e.n), denumirea i-a fost dată de **Apollonius** din Perga, iar construcția ei mecanică a fost realizată, inițial, de **Gurdubaldo del Monte** (1579).

Hiperbola este locul geometric al punctelor a căror **diferență** a distanțelor la două puncte fixe, **F₁** și **F₂**, denumit **focare**, este constantă.

Hiperbola centrică are ecuația raportată la axele ei de simetrie x, y → centrul de simetrie O(0,0)

$$(14.1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ sau } \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

și reprezentările parametrice

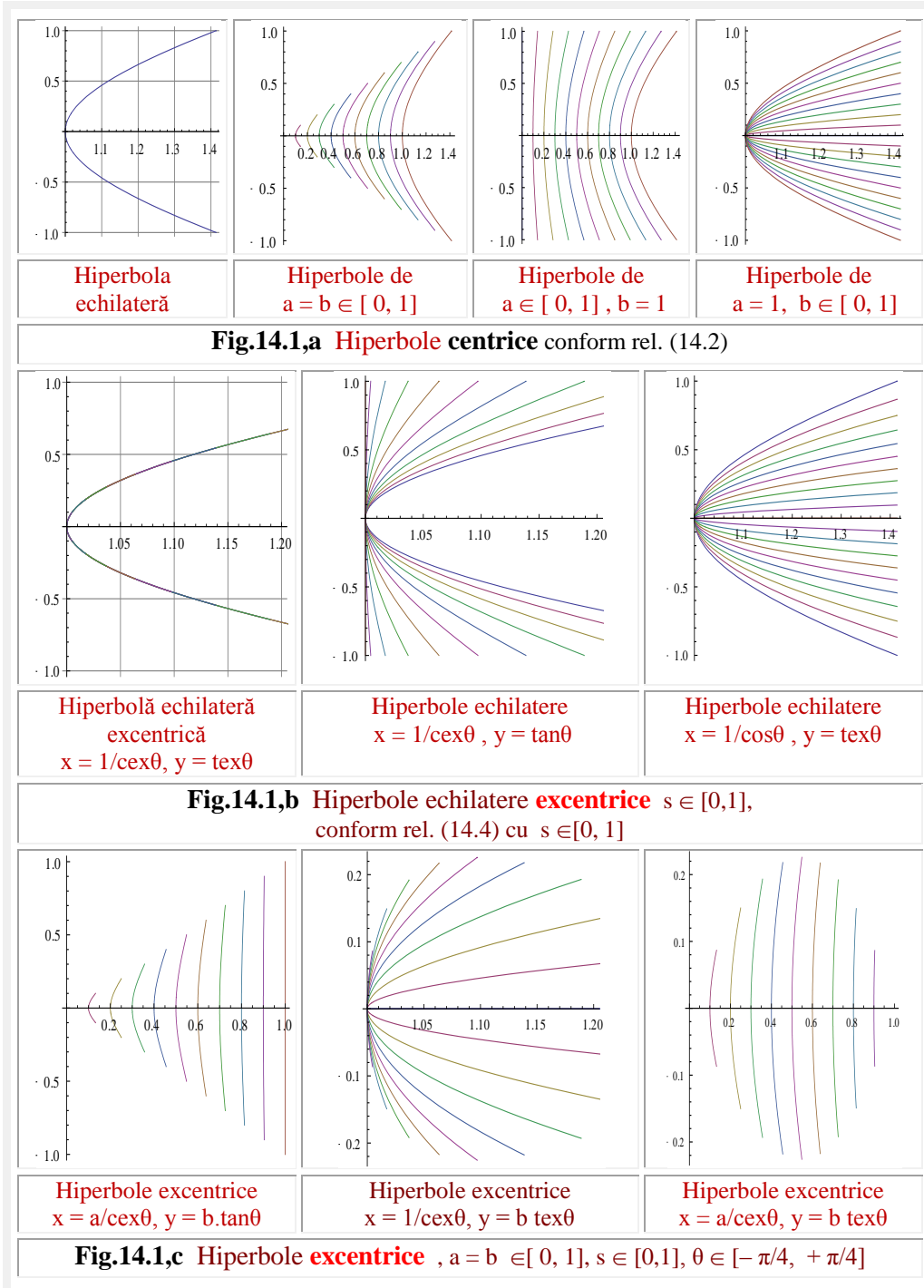
$$(14.2) \quad \begin{cases} X = \frac{a}{\cos \alpha} \\ Y = b \cdot \tan \alpha \end{cases}, \quad \text{cu graficele din figura 14.1,a}$$

Pe baza acestora din urmă, prin înlocuirea **FCC** cu **FSM - CE**

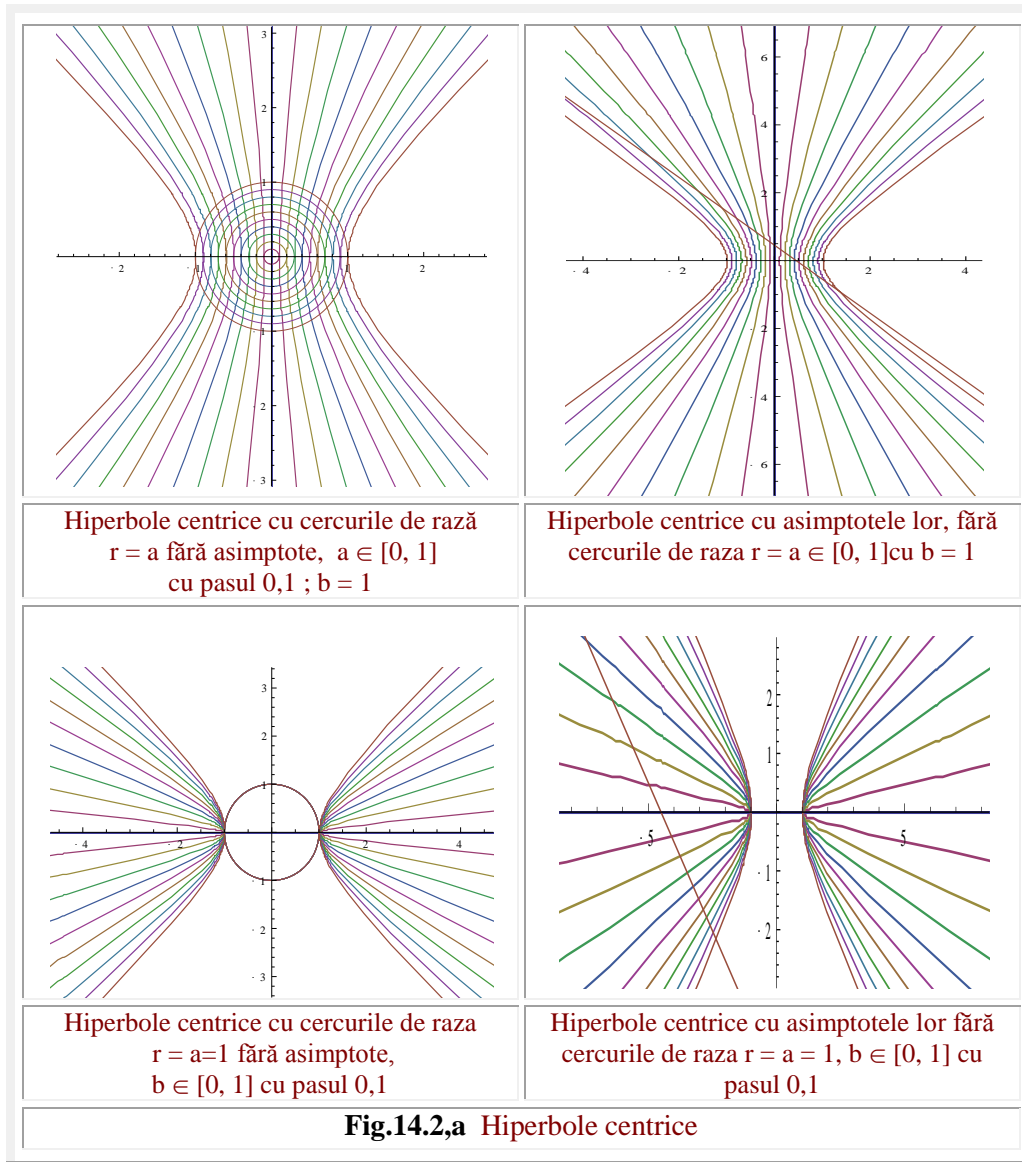
$$(14.3) \quad \begin{cases} \cos \alpha \Rightarrow cex(\theta, S) \\ \tan \alpha \Rightarrow tex(\theta, S) \end{cases}, \quad S(s, \epsilon)$$

se pot defini **hiperbolele supermatematice excentrice**, prin ecuațiile parametrice

$$(14.4) \quad \begin{cases} X = \frac{a}{cex(\theta, S)} \\ Y = b \cdot tex(\theta, S) \end{cases}, \quad \text{cu graficele din figura 14.1,b}$$



În acest fel, fiecărei hiperbole centrice, de anumiți parametri a și b fixați (**Fig. 14.1** și **Fig. 14.2**), îi corespund o infinitate de hiperbole supermatematice excentrice (**Fig.14.3**) corespunzător infinității de puncte din planul hiperbolei în care poate fi plasat excentrul $S(s, \epsilon)$.



Pentru $a = 1$ și $b = 1$ se obține în MC, așa cum se cunoaște, hiperbola echilaterală centrică (**Fig. 14.2,a**), căreia îi corespund hiperbolele supermatematice echilatere excentrice din **figura 14.3**.

Ecuatiile (14.4) dau graficele hiperbolelor împreună cu asimptotele lor (**Fig. 14.2,a** → dreapta).

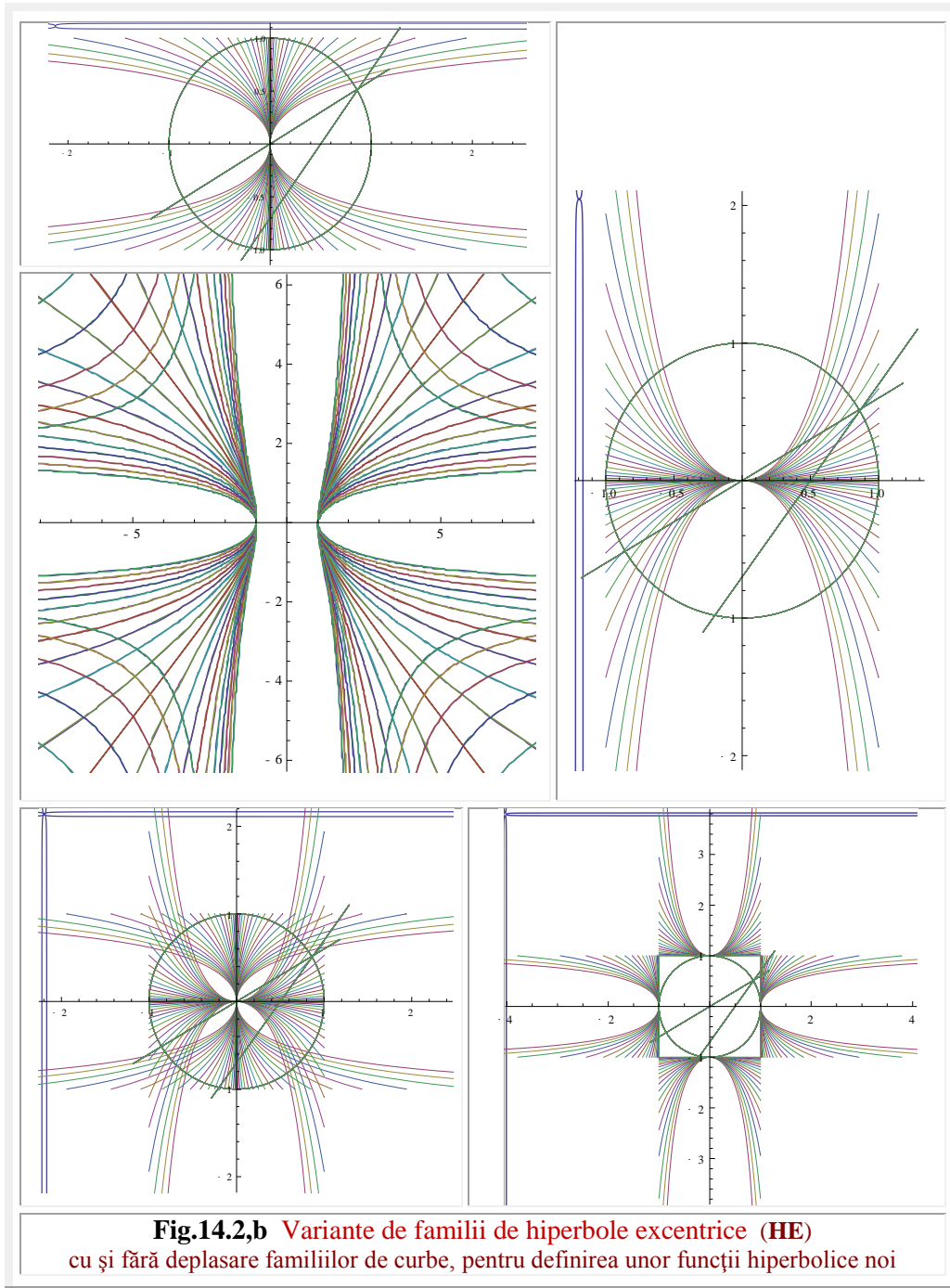
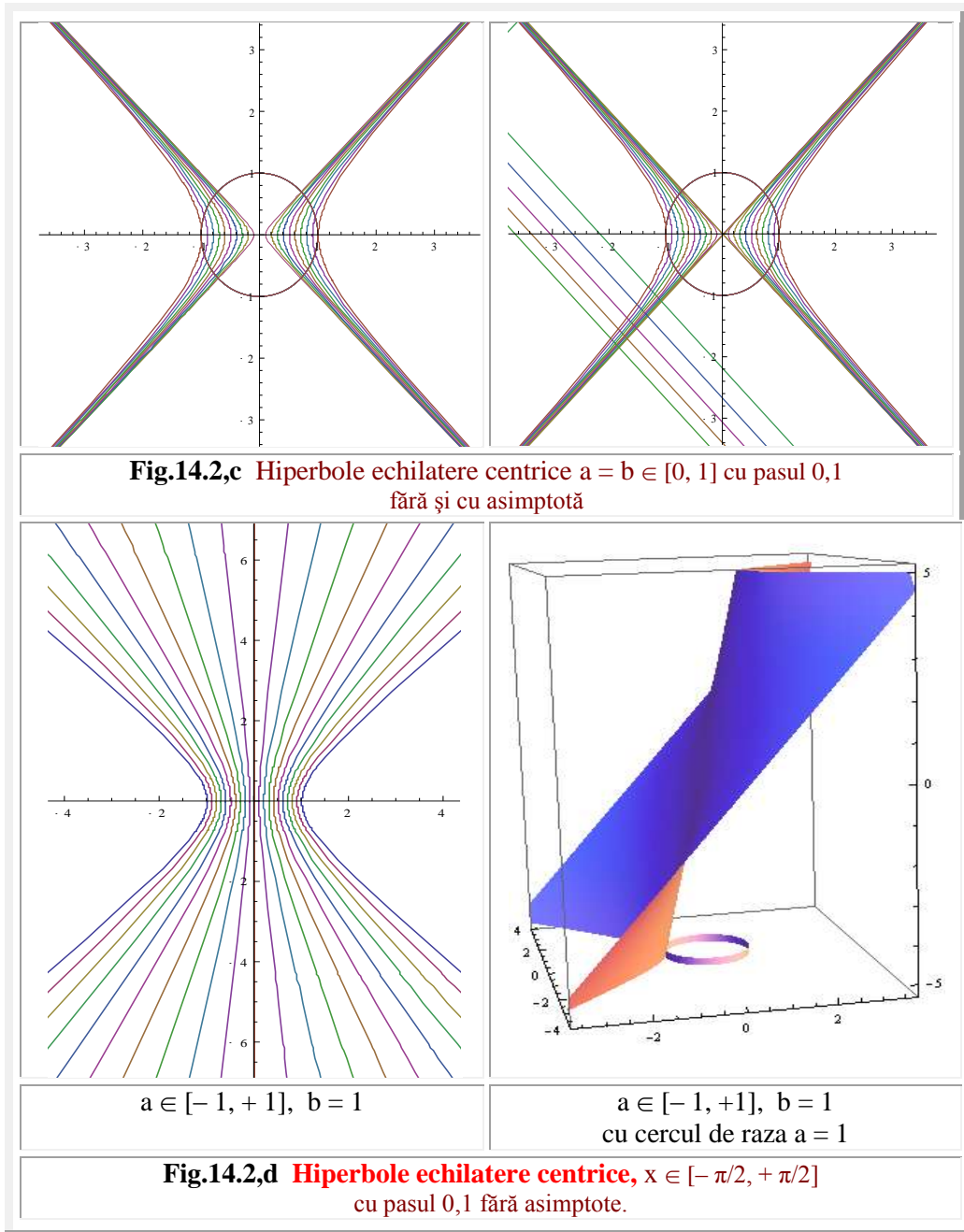
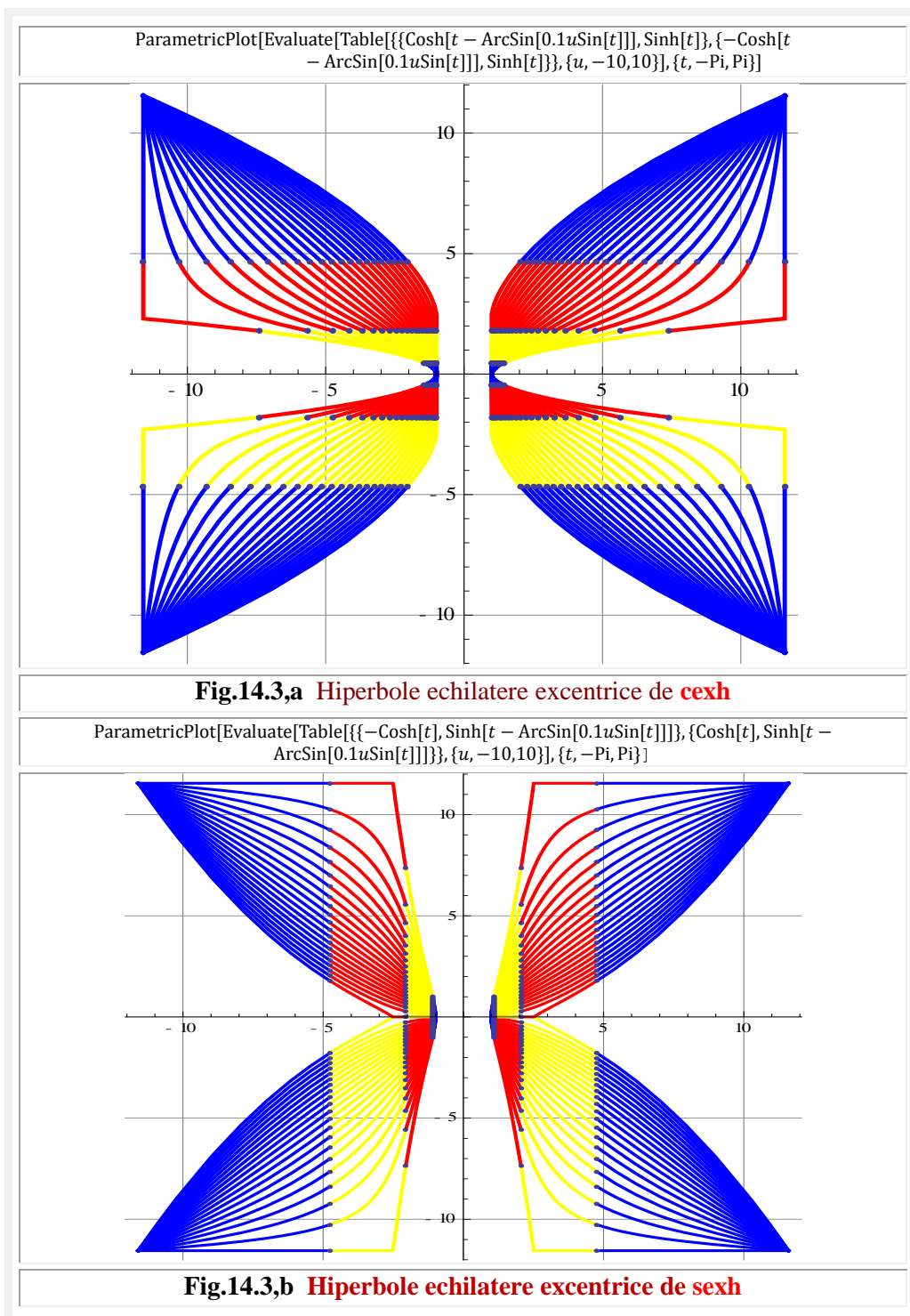
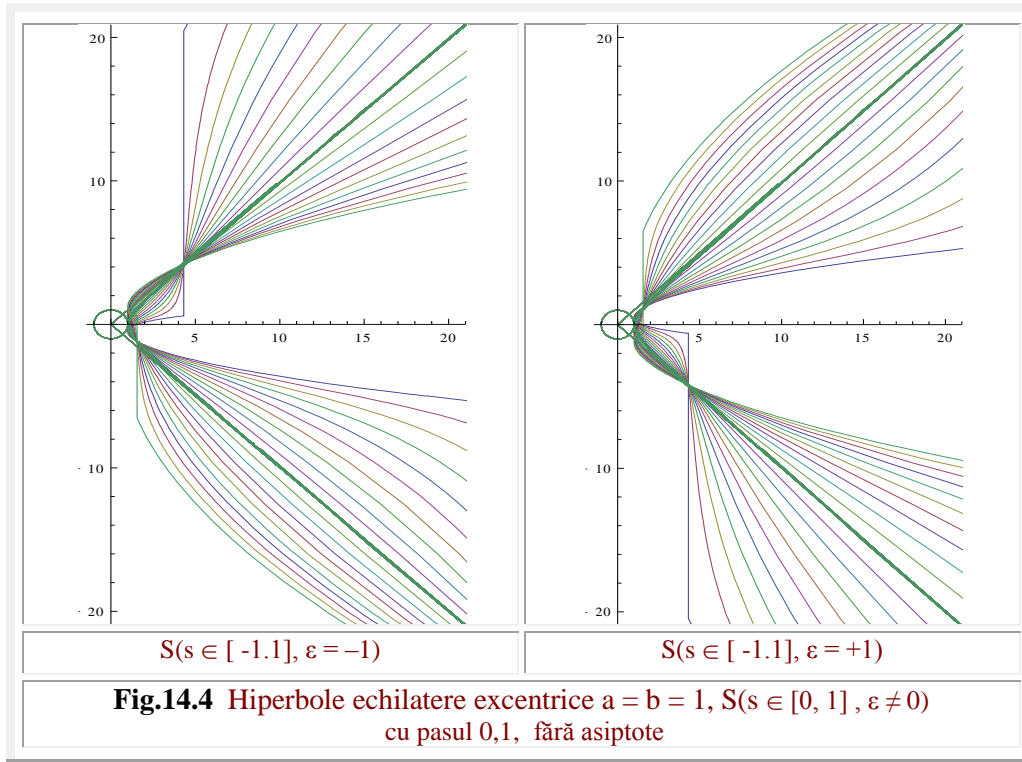


Fig.14.2,b Variante de familii de hiperbole excentrice (HE) cu și fără deplasare familiilor de curbe, pentru definirea unor funcții hiperbolice noi



Dacă, în ecuațiile (14.4), tangenta clasică **Euler** ($\text{tant} \equiv \text{tgt}$) se înlocuiește cu tangenta **Voinoiu** ($\text{tavn} = \text{sint}/\text{Abs}[\text{cost}]$), atunci se obțin numai graficele hiperbolelor și nu și a asimptotelor lor (14.2, ← stânga).





Pentru definirea funcțiilor hiperbolice centrice și excentrice se utilizează hiperbolele echilatre, de aceea, lor li se va acorda o atenție mai deosebită.

Hiperbola centrică și hiperbolele excentrice din **figura 14.3** ← stânga au graficele de deasupra hiperbolei centrice (cele cu deschiderea mai largă, care tind spre dreapta $x = 1$ pentru $s = 1$) pentru un excentru $S(s \in [0, 1], \varepsilon = 0)$ și cele de dedesubtul / interiorul hiperbolei centrice – culoarea verde a asimptotelor ei- pentru excentre $S(s \in [-1, 0], \varepsilon = 0)$ sau, ceea ce este același lucru, $S(s \in [0, 1], \varepsilon = \pi)$.

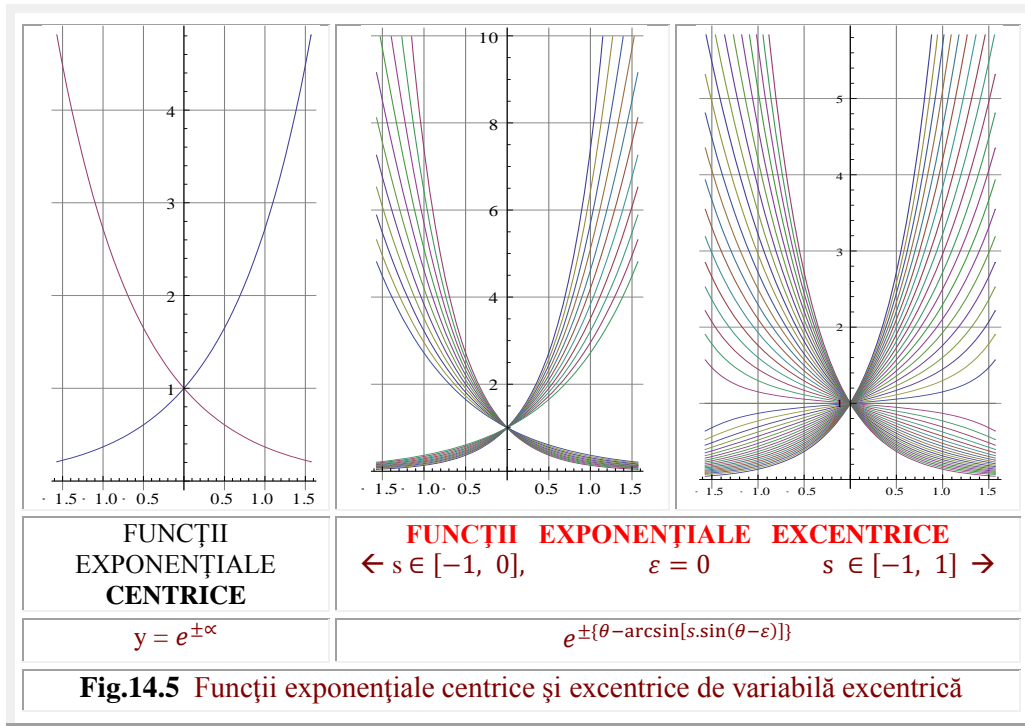
Dacă excentrul **S** variază pe direcția de $\varepsilon = -1$ radian, atunci hiperbolele **supermatematiche** echilatre excentrice au graficele din **figura 14.4** ← stânga, iar pentru $\varepsilon = +1$ în → dreapta.

14.4 FUNCȚII EXPONENȚIALE CENTRICE ȘI EXCENTRICE

Funcția exponențială centrică $f(\alpha)$ este funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, definită prin $f(\alpha) = a^\alpha$, unde $a > 0$, $a \neq 1$ cu următoarele proprietăți

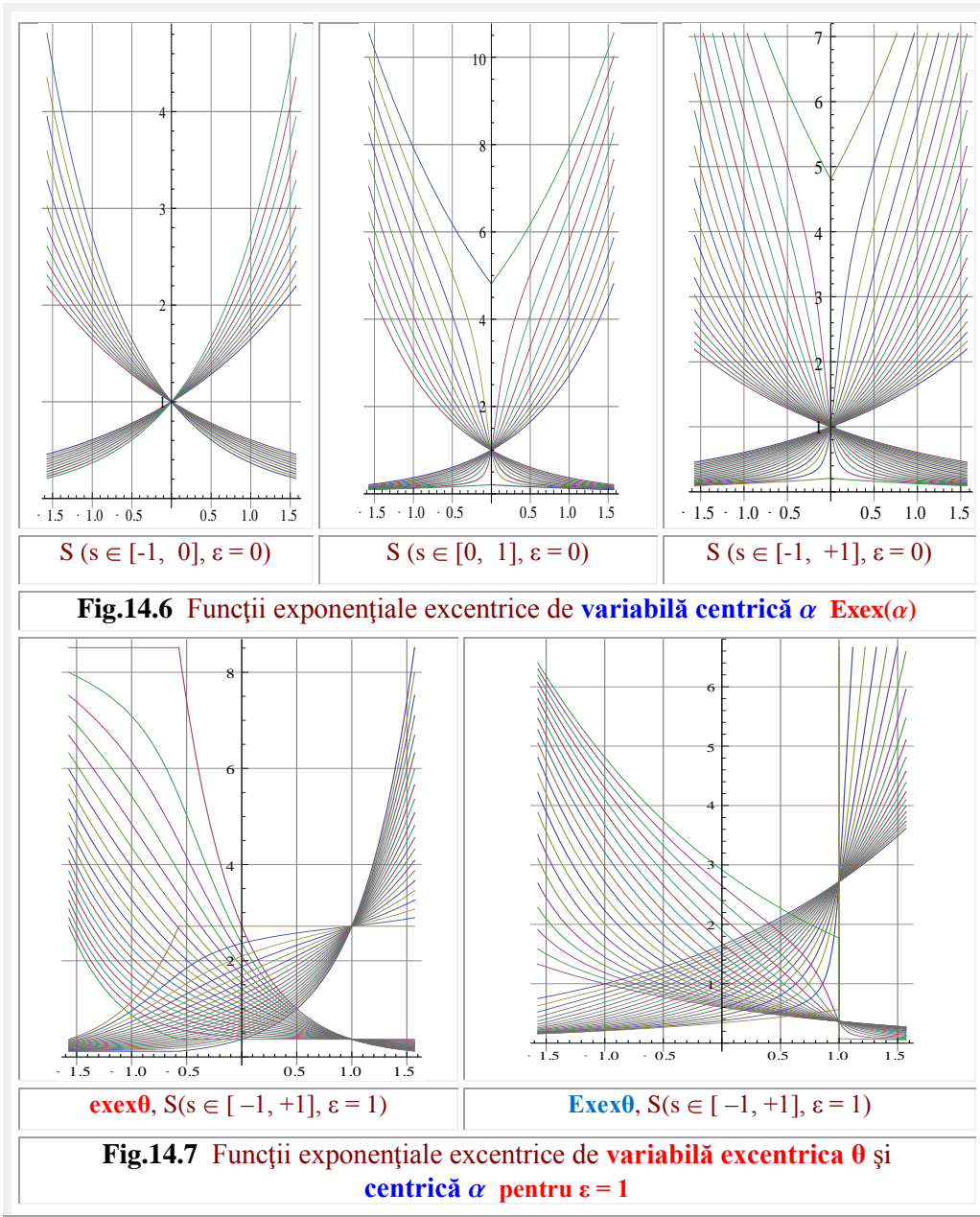
- $a > 1 \rightarrow \begin{cases} a^\alpha > 1, \text{pentru } \alpha > 0 \\ 0 < a^\alpha < 1, \text{pentru } \alpha < 0 \end{cases}$
- $0 < a < 1 \rightarrow \begin{cases} 0 < a^\alpha < 1, \text{pentru } \alpha > 0 \\ a^\alpha > 1, \text{pentru } \alpha < 0 \end{cases}$
- $\forall a > 0 \rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow a^\alpha = 1$

- $\alpha > 1, f(\alpha) = a^\alpha$ este strict crescătoare, iar pentru $0 < a < 1$ este strict descrescătoare
- Funcția exponențială $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(\alpha) = a^\alpha, a > 1, a \neq 1$ este bijectivă.
- Funcția exponențială $f(\alpha) = a^\alpha = N$ este inversabilă și inversa ei este funcția logaritmică $A = \lg_a N$, denumită logaritm în baza a din N. Pentru $a = 10$ se obține logaritmul zecimal, sau logaritmul în baza 10 din N, notat $A = \lg N$ sau $A = \log N$, iar pentru baza $a = e = 2.718283..$ se obține logaritmul natural notat $A = LN = \ln N$
 O istorie interesanta și palpitantă a numărului e, ca și a altor numere remarcabile se găsește pe website-ul <http://gshenricoanda.licee.edu.ro/nraur/ro/istoric3.html>
- Orice număr pozitiv are un logaritm, în toate matematicile
- Numărul negativ nu are logaritm în matematica clasică, dar are logaritm în **matematica signadforasică** a lui **Octavian Voinoiu (v. Octavian Voinoiu, BAZELE MATEMATICII SIGNADFORASICE, Ed. Nemira, 1996).**



Dacă exponentul α , care este variabila sau argumentul funcției exponențiale centrice, trece într-o funcție amplitudine excentrică, adică $\alpha \rightarrow \alpha(\theta) = aex[\theta, S(s, \varepsilon)]$, atunci se obțin funcții induse exponențiale de variabilă excentrică θ (**Fig. 14.5**), notate cu $exex(\theta, S)$ sau numai **exex θ** date de expresia

(14.5) **exex θ** = $e^{\pm\alpha(\theta, S)} = e^{\pm aex\theta} = e^{\pm\{\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]\}}$



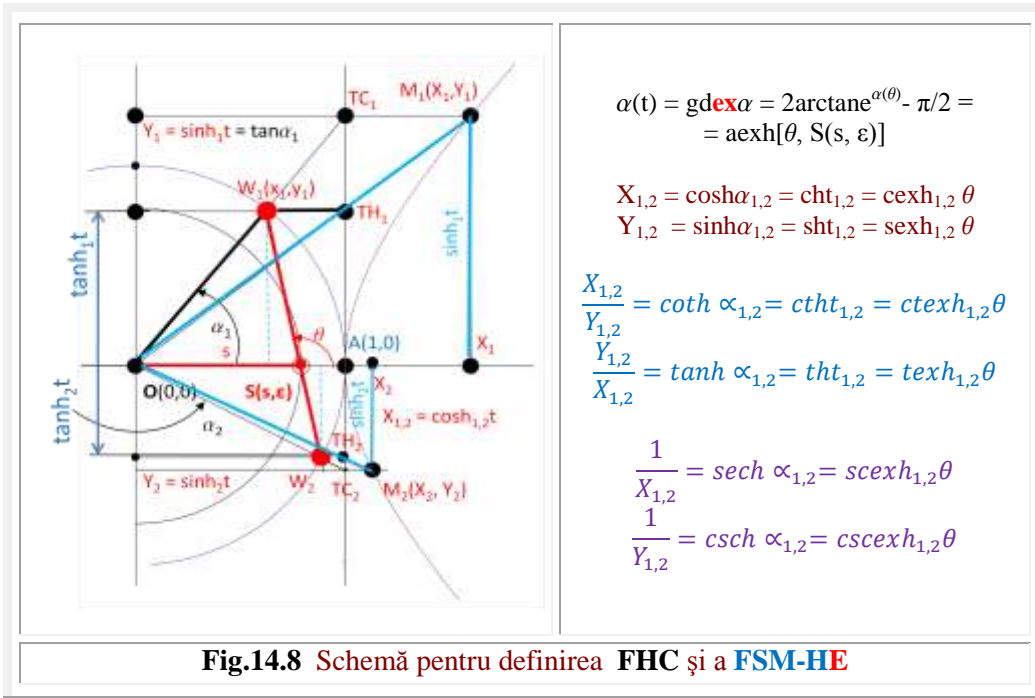
Iar dacă se înlocuiește cu funcția amplitudine excentrică de variabilă centrică $\alpha \rightarrow Aex[\alpha, S(s, \varepsilon)]$ se obțin funcții exponențiale excentrice de variabilă centrică α (Fig. 14.6), notate cu $Exex(\alpha, S)$ sau numai **Exex α** , date de expresia

(14.6)
$$Exex\alpha = e^{\pm Aex(\alpha, S)} = e^{\pm(\alpha + \arcsin \frac{s \sin(\alpha - \varepsilon)}{Rex\alpha})}$$
. Din figurile 14.5 și 14.6 rezultă că punctul $N = N(\varepsilon = 0, 1)$ este un nod prin care trece întreaga familie de funcții

excentrice, inclusiv cele centrice, de/pentru $s = 0$, dacă și numai dacă excentricitatea unghiulară $\varepsilon = 0$. Pentru $\varepsilon \neq 0$, de exemplu pentru $\varepsilon = \pm 1$, funcțiile exponențiale excentrice de θ și de α își mută nodul $N(0, 1)$ în punctul $N(\theta = \pm \varepsilon = \pm 1, \text{exex}(\theta = 1))$ și, respectiv în $N[\alpha = \pm \varepsilon = \pm 1, \text{Exex}(\alpha = 1)]$, așa cum se poate observa în **figura 14.7**. Fenomenul fiind similar cu cel descris în cazul **FSM-CE** cu privire la punctele atractor și repulsiv.

14.5 DEFINIRE AGEOMETRICĂ A FUNCȚIILOR HPERBOLICE CENTRICE ȘI EXCENTRICE

Atât **FHC** cât și **FSM-HE** admit semnificații geometrice asociate hiperbolei echilatere ($a = 1, b = 1$). De aceea, se va trece direct la prezentarea în paralel atât a **FHC** cât și a **FSM-HE**.



În acest scop, prezentăm definiția geometrică a lor pe baza **figurii 14.8**, care are la bază utilizarea cercului unitate/trigonometric, ceea ce va simplifica mult înțelegerea, datorită similitudinii existente între definiția **FSM circulare** și a **FSM hiperbolice**. Ecuația hiperbolei echilatere este

$$(14.7) \quad X^2 - Y^2 - 1 = 0 \rightarrow X^2 - Y^2 = 1$$

a cărei ramură, situată în semiplanul $X > 0$, admite reprezentarea parametrică

$$(14.8) \quad \begin{cases} X = \text{cht} \equiv \cosh t \\ Y = \text{sht} \equiv \sinh t \end{cases} \quad \text{sau}$$

$$(14.9) \quad \begin{cases} X = \frac{a}{\cos \alpha}, & X = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha, \\ Y = b \cdot \tan \alpha, & Y = \tan \alpha, \end{cases} \text{ pentru } a = b = 1, \quad \text{sau}$$

$$(14.10) \quad \begin{cases} X = a \frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ Y = b \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

Dacă M_1 (Fig. 14.8) este un punct al acestei ramuri, argumentul t reprezintă dublul ariei triunghiului curbiliniu OAM_1 , o latură fiind arcul de hiperbolă AM_1 , iar valorile FHC sunt date de relațiile

$$(14.11) \quad \begin{cases} X_1 = cht \equiv \cosh_1 t \\ Y_1 = sht \equiv \sinh_1 t \\ y = tht \equiv \tan ht = \sin \alpha = ATH_1 \end{cases}$$

Pentru definirea **FSM-HE** mai este necesară o dependență între argumentul t și variabila centrică $\alpha_{1,2}$ sau unghiul cu vârful în centrul cercului unitate $O(0,0)$. – Fig. 14.8-. Dependență prezentată în paragraful următor. Apoi, pe baza dependențelor, cunoscute deja, dintre variabila centrică α și cea excentrică θ - unghiul cu vârful în excentrul $S(s, \varepsilon)$ – date de relațiile, deja cunoscute, (14.12)

$$(14.12) \quad \begin{cases} \alpha_{1,2} = \begin{cases} \alpha_1 = \theta - \beta_1(\theta) = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \\ \alpha_2 = \theta - \beta_2(\theta) = \theta + \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] + \pi \end{cases} \\ \theta = \alpha_{1,2} + \beta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{\text{Rex} \alpha_{1,2}} = \alpha_{1,2} + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)} \end{cases}$$

să poată fi definite și **FSM-HE**.

14.6 FUNCȚIILE AMPLITUDINE HIPERBOLICĂ CENTRICĂ ȘI AMPLITUDINE HIPERBOLICĂ EXCENTRICĂ. FUNCȚII GUDERMANN EXCENTRICE

Unghiul $\alpha = \alpha_1 = (Ox, OTC_1)$ este numit **amplitudine hiperbolică** sau **gudermanianul gd t = α** și este definit de integrala

$$(14.13) \quad \text{gd } t = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\cosh \alpha} = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\text{ch} \alpha} = 2 \cdot \arctane^\alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \text{astfel că}$$

$$(14.14) \quad t = \int_0^{\text{gd} t} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \ln \left[\tan \left(\frac{\text{gd} t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right], \text{ cu graficele din figura 14.9, a.}$$

Înlocuind în (14,13) argumentul α cu funcția $\alpha(\theta) = aex\theta$ se obțin funcțiile **Gudermann directe excentrice** de variabilă **excentrică θ , notate $gdex(\theta, S)$** date de relația

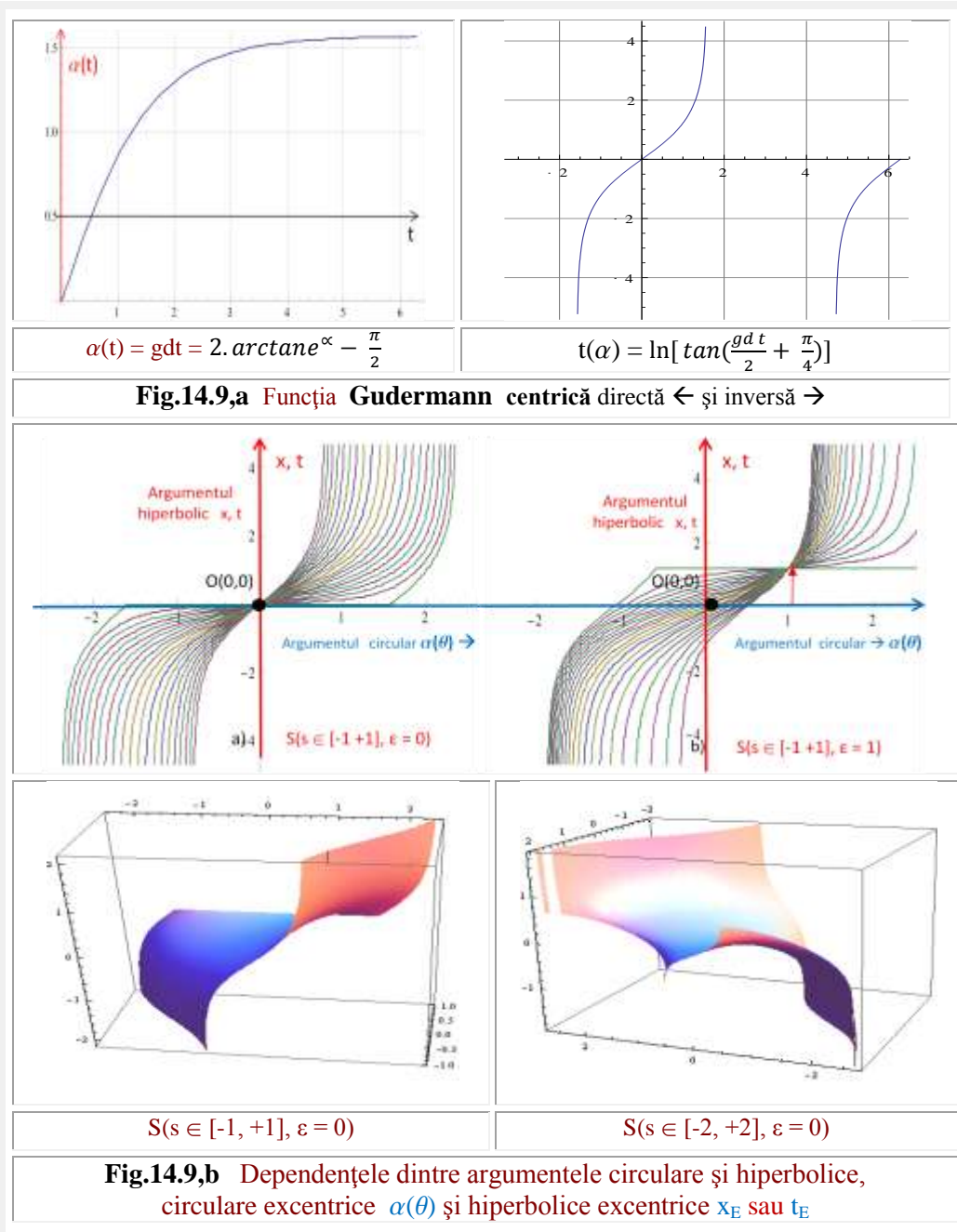
$$(14.15) \quad \text{gdex}(\theta, S) = 2 \arctan[e^\alpha] - \frac{\pi}{2} = 2 \arctane^{\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]} - \frac{\pi}{2}$$

cu graficele din figura 14.9, b1.

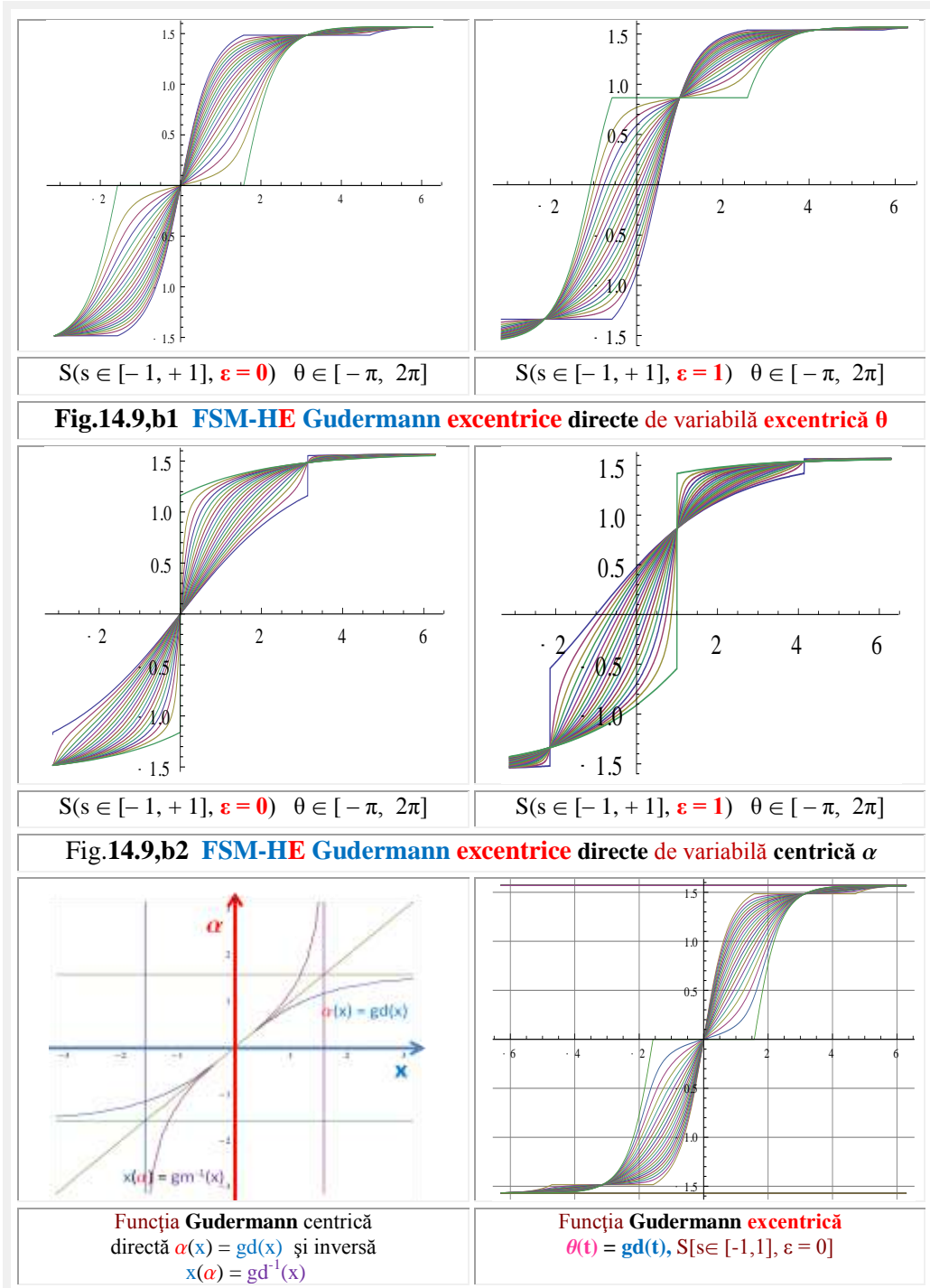
Iar dacă se înlocuește argumentul α cu funcția $\theta(\alpha) = Aex(\alpha, S)$ se obțin funcțiile **Gudermann directe excentrice** de variabilă **centrică α , notate $Gdex(\alpha, S)$** date de relația

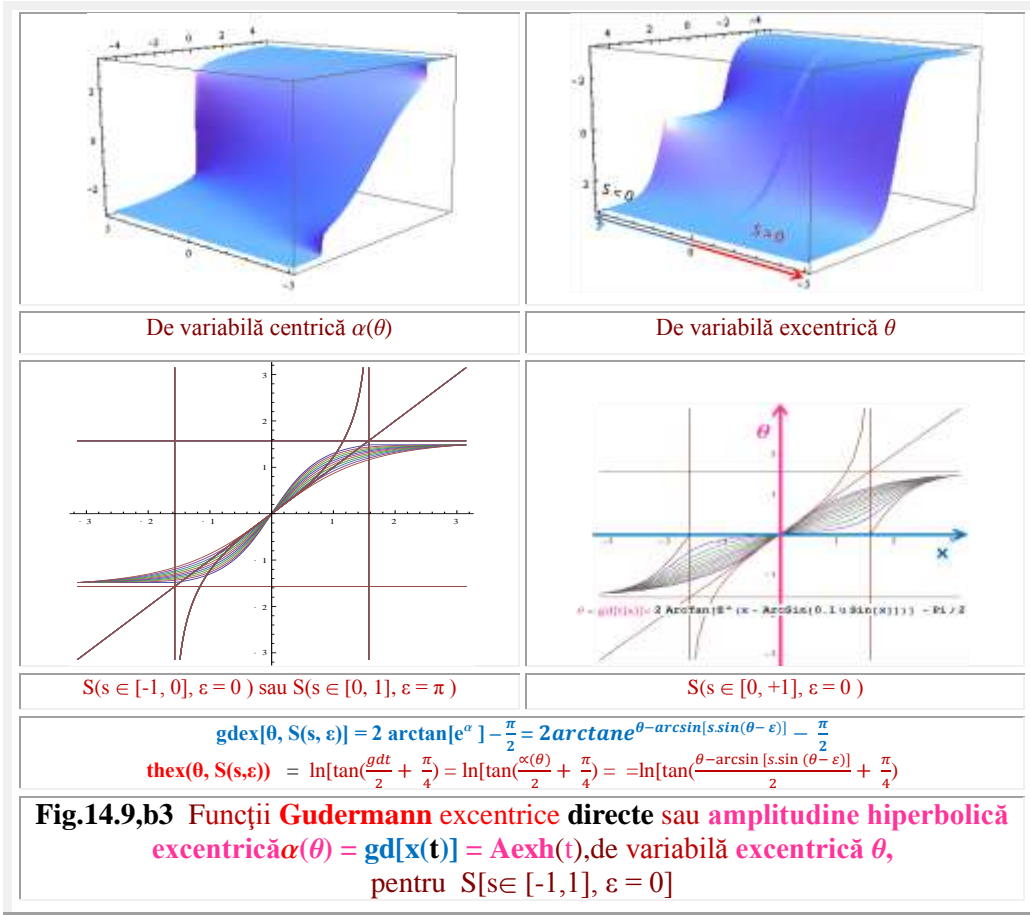
$$(14.16) \quad \text{Gdex}(\alpha, S) = 2 \arctan[e^{\theta(\alpha)}] - \frac{\pi}{2} = 2 \arctane^{(\alpha + \arcsin[\frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\text{Rex} \alpha})]} - \frac{\pi}{2}$$

cu graficele din figura 14.9, b2.

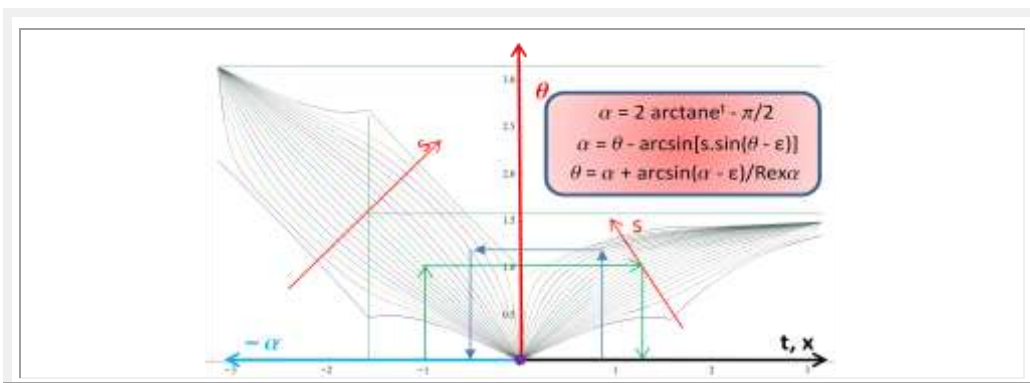


Din relația (14.14), înlocuind variabila centrică α cu funcția $\alpha(\theta)$ se va obține **variabila hiperbolică t excentrică**, notată **thex(θ) = t[$\alpha(\theta)$] = t(θ)**, cu ajutorul careia se obțin FSM-HE **neperiodice** prezentate în **figura 14.8**. Variabila hiperbolică excentrică va avea expresia





(14.17) $thex(\theta) = t[\alpha(\theta)] = \ln[\tan(\frac{\alpha(\theta)}{2} + \frac{\pi}{4})] = \ln[\tan(\frac{\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]}{2} + \frac{\pi}{4})]$
 care reprezintă funcțiile **Gudermann inverse excentrice** de variabilă excentrică θ , cu graficele din **figura 14.9,d1**.



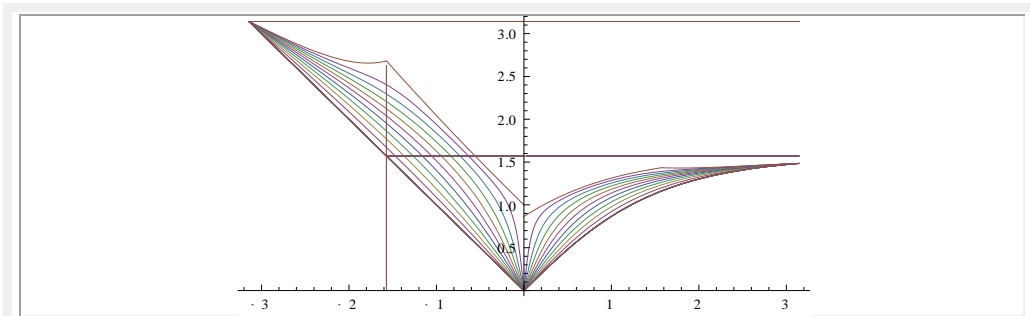


Fig.14.9,b4 Dependentele dintre t sau x , θ și α pentru $s \in [-1,1]$

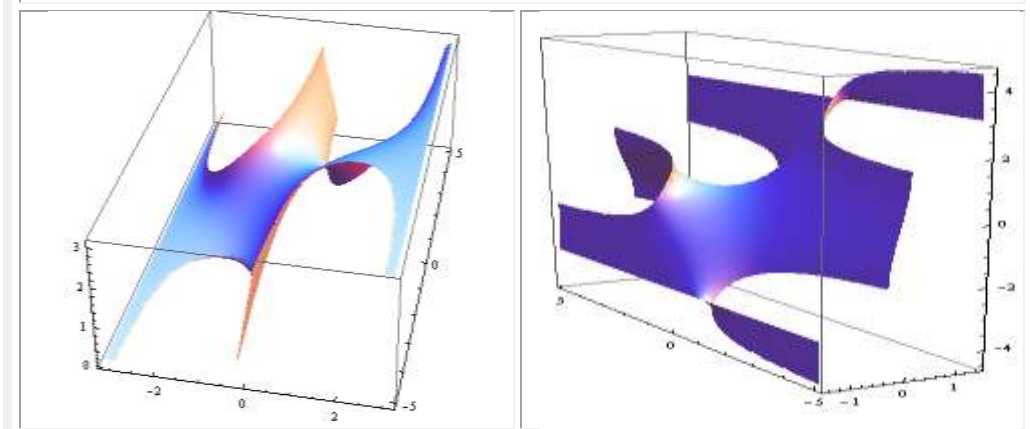
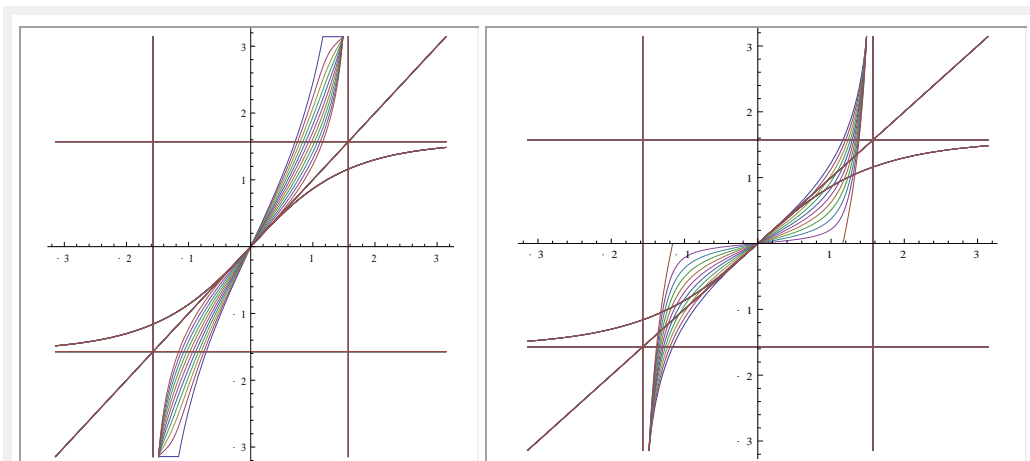
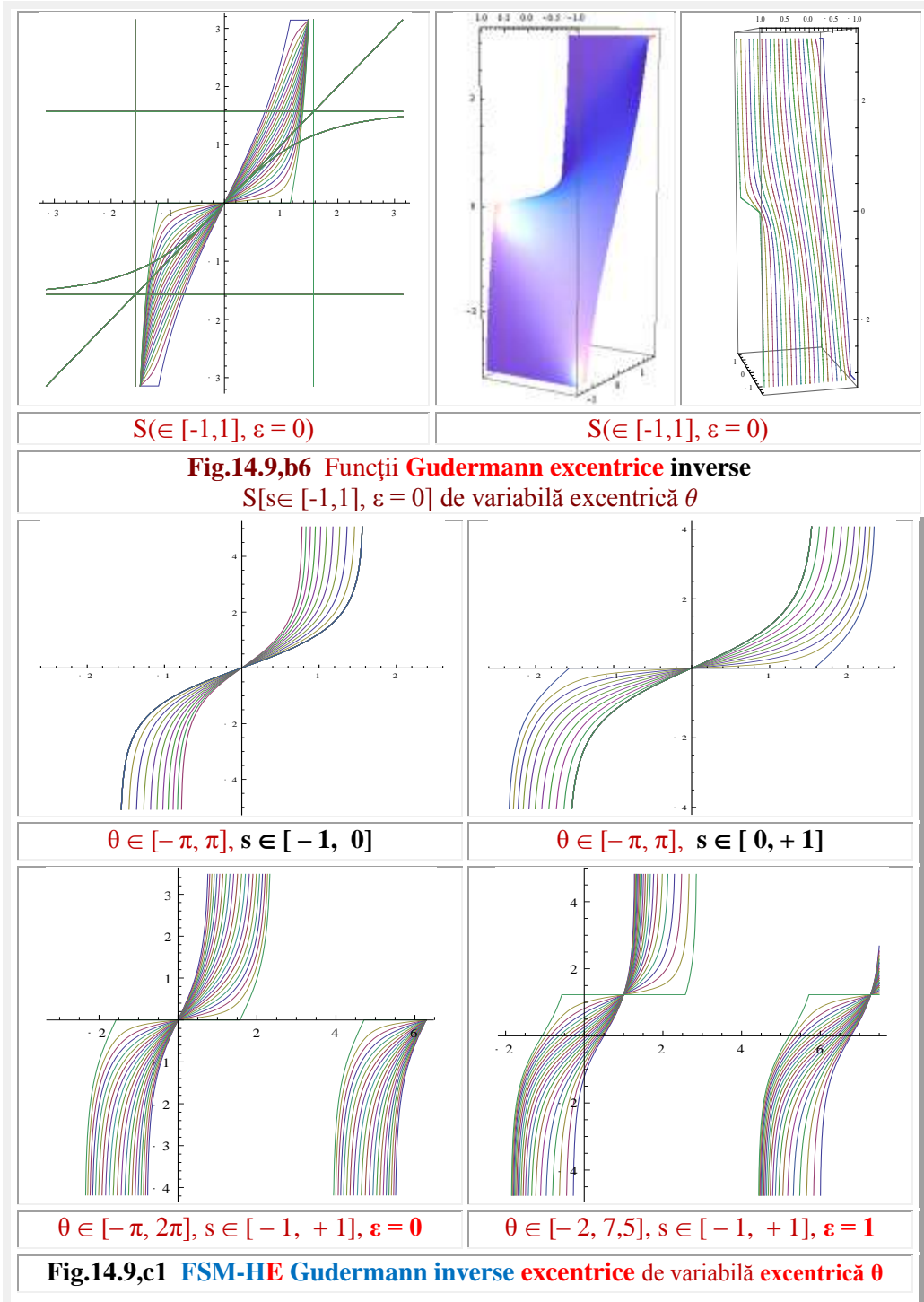


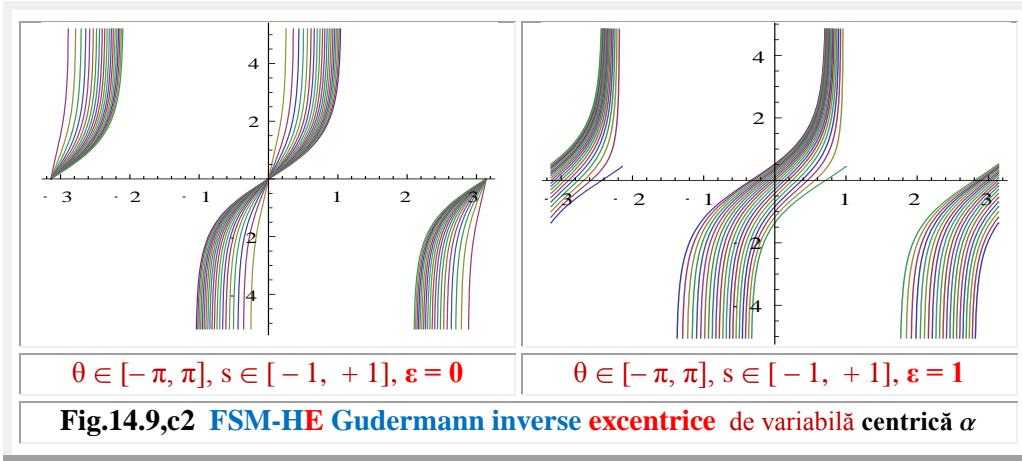
Fig.14.9,b5 Funcții **Gudermann** excentrice directe (stânga) și inverse (dreapta) de variabilă **excentrică** θ pentru $S(s \in [-5, +5], \varepsilon = 0)$



$S(s \in [-1, 0], \varepsilon = 0)$ sau
 $S(s \in [0, 1], \varepsilon = \pi)$

$S(s \in [0, +1], \varepsilon = 0)$





Amplitudinea hiperbolică este în strânsă legătură cu “unghiul de paralelism” $\Pi(t)$ a lui Lobacevski conform expresiei

$$(14.18) \quad \text{gd}(-\infty) = \Pi(t) - \frac{\pi}{2}$$

Introducând unghiul α , au loc relațiile din matematica centrică (MC)

$$(14.19) \quad \begin{cases} cht = \text{cosht} = \sec(gdt) = \text{seca} \\ sht = \text{sinht} = \tan(gdt) = \text{tana} , \\ tht = \text{tanht} = \sin(gdt) = \text{sina} \end{cases}$$

care rezultă și comparând (14.2) cu (14.3).

14.7 FSM-HE COSINUS, SINUS ȘI TANGENTĂ PERIODICE (cexh θ , sexh θ , texh θ) ȘI NEPERIODICE (cext, sexht, texht)

Relațiile anterioare (14.16) dau FSM-HE periodice, așa cum se poate observa din graficele lor din figura 14.7, spre deosebire de relațiile (14.18) care dau FSM-HE neperiodice, ca și cele centrice, clasice.

Acestea sunt prezentate în figura 14.8. pe baza relațiilor amintite (14.18) sau pe baza relațiilor (14.16).

Fiind relații diferite, ca și graficele lor, evident, se pune, firesc, întrebarea care dintre ele sun de fapt FSM-HE? Raspunsul este ca ambele tipuri de FSM sunt funcții hiperbolice excentrice (HE); unele de variabilă excentrică hiperbolică t , iar celelalte de variabilă excentrică circulară $\alpha(\theta)$. Așa se explică și de ce unele nu sunt periodice (cele de $t \rightarrow \text{the}(\theta)$) și altele sunt (cele de $\alpha \rightarrow \alpha(\theta) = aex\theta$).

Grupul de relații (14.12) permite trecerea de la centric (α) la excentric (θ), prin relațiile (14.11), ca și, prin aceasta, la trecerea de la FHC la FSM-HE.

Astfel, cum $x = cex\theta = \text{cosa}$ și $y = sex\theta = \text{sina}$, tot așa

$$(14.20) \quad \begin{cases} cexht = \text{seca} = \text{secex}\theta \\ sexht = \text{tana} = \text{tex}\theta , \\ texht = \text{sina} = \text{sex}\theta \end{cases}$$

cu graficele din figura 14.7, din care, în figura 14.7,c se recunoaște FSM-CE sex θ din ultima relație (14.20).

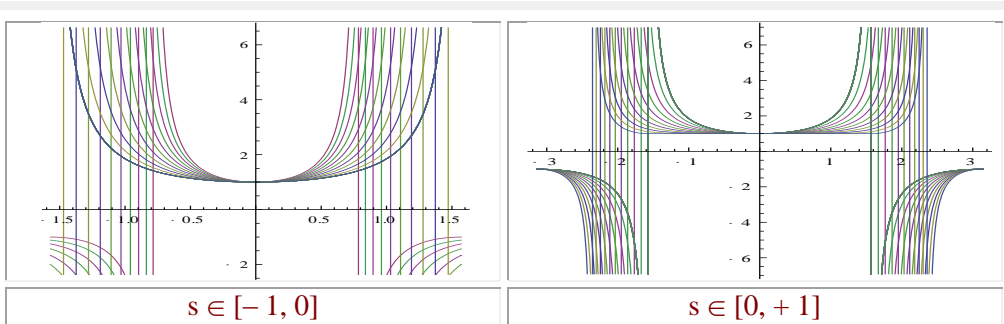


Fig.14.10,a Funcții supermatematice hiperbolice excentrice periodice (FSM-HEP) de variabilă excentrică circulară θ
 Cosinus hiperbolic excentric periodic $\text{cexh}\theta$, pentru $\theta \in [0, +2\pi]$

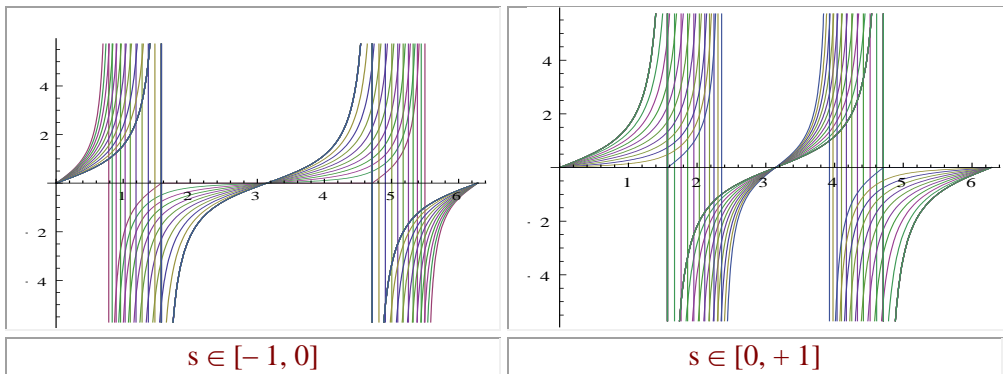


Fig.14.10,b Funcții supermatematice hiperbolice excentrice periodice (FSM-HEP) de variabilă excentrică circulară θ
 Sinus hiperbolic excentric periodic $\text{sexh}\theta$, pentru $\theta \in [0, +2\pi]$

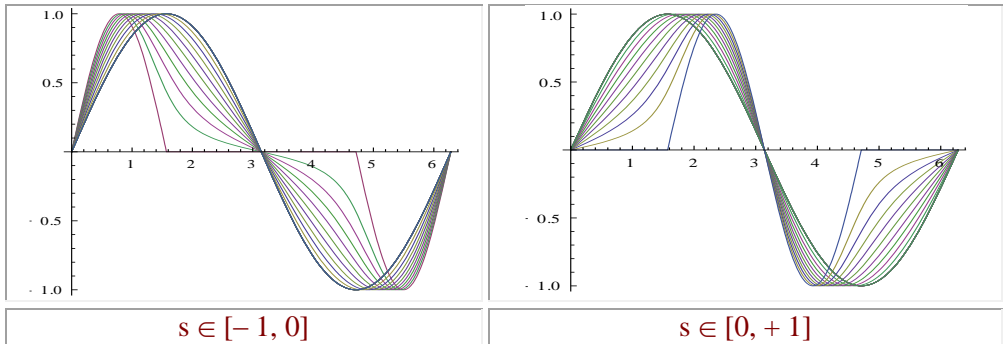
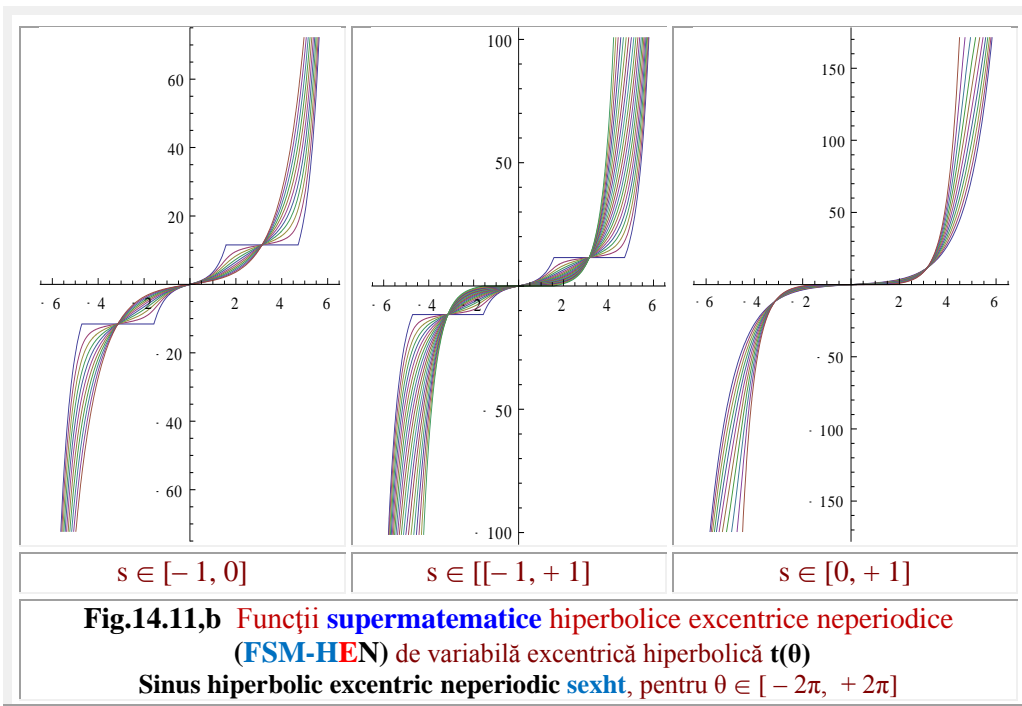
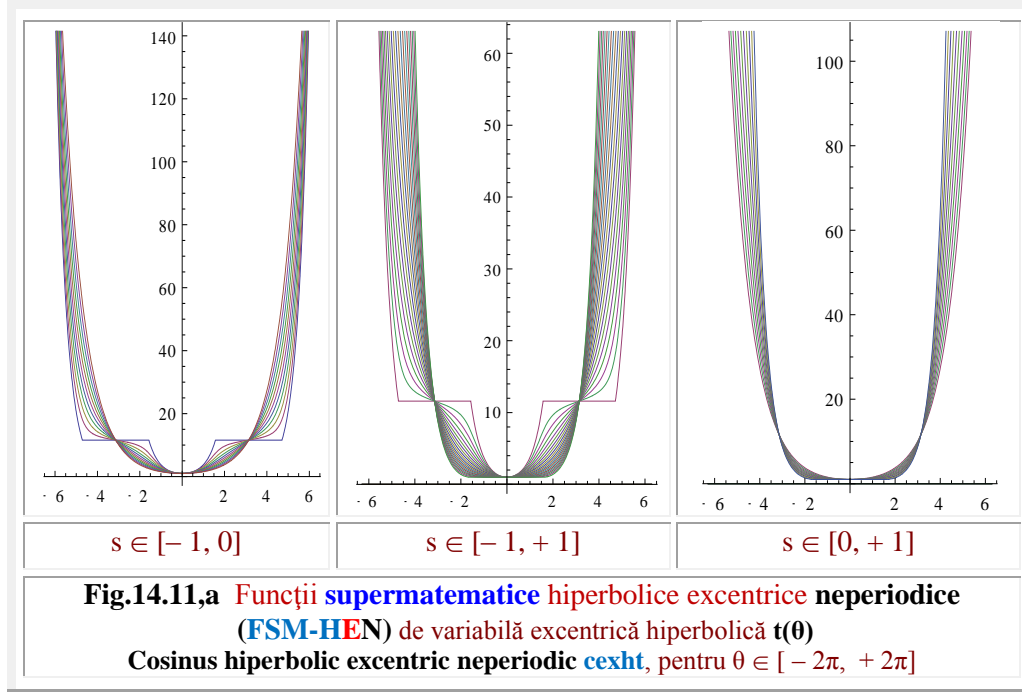
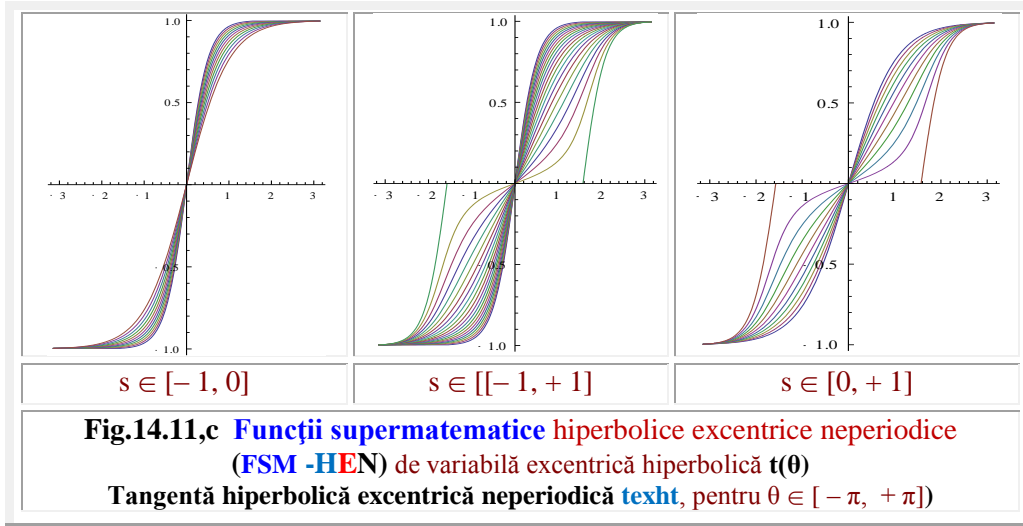


Fig.14.10,c Funcții supermatematice hiperbolice excentrice periodice (FSM-HEP) de variabilă excentrică circulară θ
 Tangentă hiperbolică excentrică periodică $\text{texh}\theta$, pentru $\theta \in [0, 2\pi]$





Sau, în general, pentru **FSM - HE** directe de variabilă excentrică $x = cexh\theta = ch \alpha$ și $y = sexh \theta = sha$

$$(14.21) \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} X = cexh\theta = cha = cosha = cexh[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] \\ Y = sexh\theta = sha = sinha = sinh[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{Y}{X} = texh\theta = tha = tanha = sinh[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] \\ \frac{X}{Y} = ctexh\theta = ctha = cotha = coth[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{X} = scexh\theta = secha = secha = sech[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] \\ \frac{1}{Y} = cscehx\theta = cosecha = cscha = csch[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] \end{array} \right. \end{array} \right. ,$$

cu graficele din **figura 14.8**, doar pentru prima determinare, principală 1, pentru $\varepsilon = 0$, excentricitatea liniară variind pe axa x .

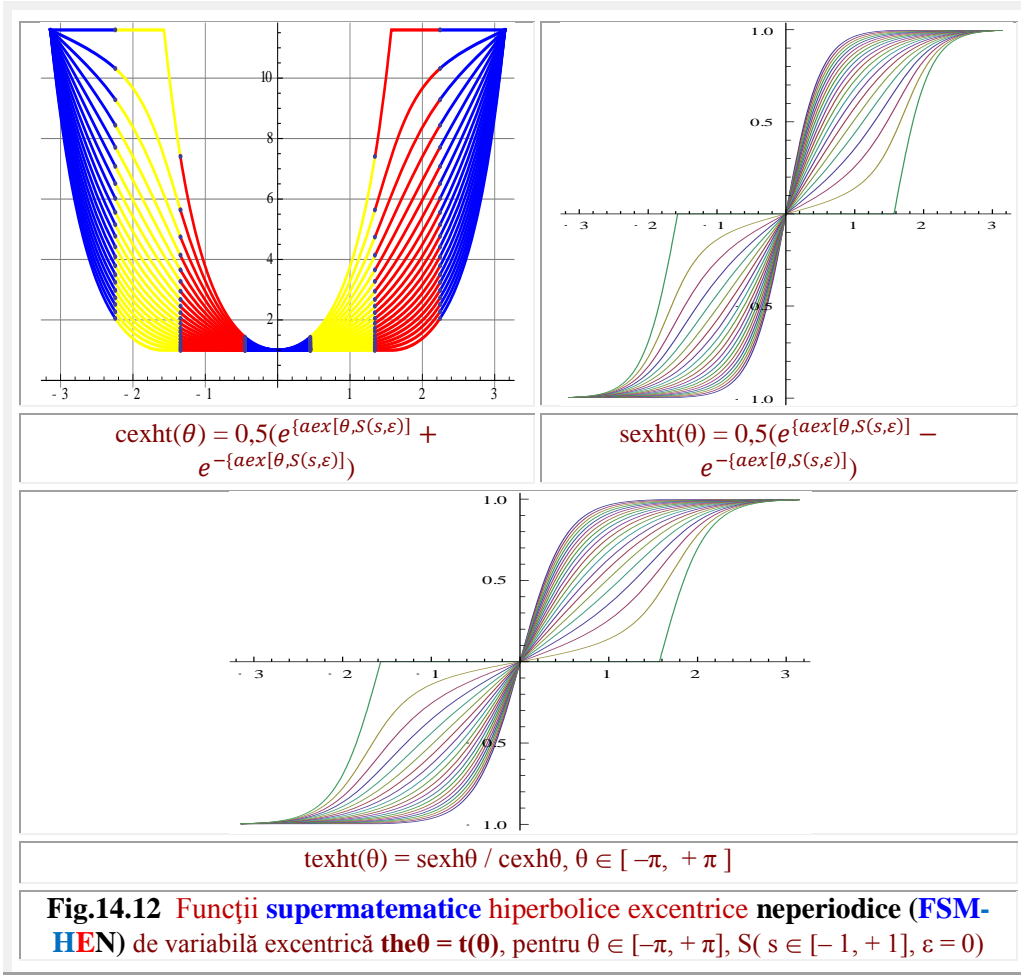
14.8 DEFINIRE CU EXPONENȚIALE A FUNCȚIILOR HIPERBOLICE CENTRICE ȘI EXCENTRICE

Se cunoaște că funcțiile hiperbolice centrice de variabilă hiperbolică t pot fi determinate cu ajutorul funcțiilor exponențiale centrice e^t și e^{-t} astfel

$$(14.22) \left\{ \begin{array}{l} cosht = cht = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ sinht = sht = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{array} \right. , \text{ iar tangenta, cotangenta și celelalte funcții}$$

hiperbolice centrice rezultă prin combinarea celor două **FHC** de baza date de relațiile (14.22)

$$(14.23) \left\{ \begin{array}{l} tanht = tht = \frac{sinht}{cosht} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \\ coht = cht = \frac{cosht}{sinht} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \end{array} \right.$$



Utilizând funcțiile exponențiale excentrice, din § 14.4, în expresiile de definire a funcțiilor hiperbolice centrice (14.22) se vor obține funcții hiperbolice excentrice neperiodice (14.24)

$$(14.24) \quad \begin{cases} \cosh(exext) = \text{csh}(exext) = \text{cexh}(the\theta) = \text{cexht} \\ \sinh(exext) = \text{ch}(exext) = \text{sexh}(the\theta) = \text{sexht} \end{cases}$$

cu graficele din **figura 14.9**.

Graficele **FSM -HEN** din **figura 14.9** ($\theta \in [-2\pi, +2\pi]$) sunt identice cu cele din **figura 14.8**, ($\theta \in [-\pi, +\pi]$) diferind doar intervalul lui θ pe care ele au fost reprezentate.

Funcțiilor **hiperbolice excentrice neperiodice (FSM -HEN)** au mai fost definite, în lucrarea autorului [10], asemănător celor circulare centrice, adică, prin înlocuirea argumentului real centric t cu funcția excentrică $t(\theta) = \text{thex}\theta$, sau $y_{1,2}(x) = aex_{1,2}[x, S(s, \varepsilon)]$ sau $\alpha_{1,2}(\theta) = aex_{1,2}[\theta, S(s, \varepsilon)]$.

Prin utilizarea **transformatei excentrice (TE_{1,2})**, cum a mai fost denumită **FSM -CE aex_{1,2}θ**, pentru că realizează trecerea din **MC** în **ME**, s-a trecut din centric în

excentric, **în domeniul circular**. Apoi, prin înlocuirea variabilei reale (notate t, y sau α) cu una pur imaginară ($it(\theta), i.y(x)$ sau $i.\alpha(\theta)$), în expresiile de definiere a **FSM -CE** (**cex**, **sex**, **tex** ș.a.), s-a trecut din domeniul circular în cel **hiperbolic**.

Reamintim schema de trecere din centric în excentric prin transformările menționate pentru funcțiile trigonometrice excentrice **cex** θ și **sex** θ :

$$(14.25) \quad \begin{cases} R \xrightarrow{PA} C(O,1) \xrightarrow{TE_{1,2}} C(O,1) \xrightarrow{\cos} [-1,1] \\ R \xrightarrow{PA} C(O,1) \xrightarrow{TE_{1,2}} C(O,1) \xrightarrow{\sin} [-1,1] \end{cases}$$

se obțin din următoarele compuneri:

$$(14.26) \quad \mathbf{cex}_{1,2} \theta = \mathbf{cos} \circ \mathbf{TE}_{1,2} \circ \mathbf{PA}$$

$$(14.27) \quad \mathbf{sex}_{1,2} \theta = \mathbf{sin} \circ \mathbf{TE}_{1,2} \circ \mathbf{PA}$$

în care **PA** este **proiecția de acoperire a cercului unitate C(O,1)** sau a **cercului trigonometric CT**

$$(14.28) \quad \mathbf{PA} : \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{C(O,1)} \equiv \mathbf{CT}$$

Rezultă, astfel, cosinusul hiperbolic excentric neperiodic **cexh**[$t(\theta), S$] :

$$(14.29) \quad \mathbf{cexh}_{1,2} t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{ch}[t_{1,2}(\theta)] = \mathbf{cosh}[t_{1,2}(\theta)] = \mathbf{cos}[i.t_{1,2}(\theta)]$$

și sinusul hiperbolic excentric neperiodic

$$(14.30) \quad \mathbf{i.sexh}_{1,2} t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{i.sh}[t_{1,2}(\theta)] = \mathbf{i.sinh}[t_{1,2}(\theta)] = \mathbf{sin}[i.t_{1,2}(\theta)]$$

Dependențele dintre t și θ , sau dintre α și θ sau dintre y și x fiind **TE**_{1,2}, a fost anterior considerată în relațiile (14.12).

Proprietățile **FCC** se mențin și la **FHE**, coordonatele punctelor de intersecție ale dreptei d cu cercul și cu hiperbola echilaterală sunt simultan cosinusul și, respective, sinusul unghiului la centru α și cosinusul excentric și sinusul excentric al unghiului la excentru θ . Rezultă explicit expresiile, în funcție de $t(\theta)$, $\alpha(\theta)$ sau de $y = y(x)$, în care $x = \theta$, $y = \alpha$ și $z = \varepsilon$:

$$(14.31) \quad \mathbf{cexh}_{1,2}(x, E) = \mathbf{chx.ch}(\arcsin(s.\sin(x-z))) \mp \mathbf{shx.sh}(\arcsin(s.\sin(x-z)))$$

$$(14.32) \quad \mathbf{sexh}_{1,2}(x, E) = \mathbf{shx.ch}(\arcsin(s.\sin(x-z))) \mp \mathbf{chx.sh}(\arcsin(s.\sin(x-z)))$$

14.9 FUNCȚII RADIAL EXCENTRICE HIPERBOLICE **rexh**($t, S(s, \varepsilon)$)

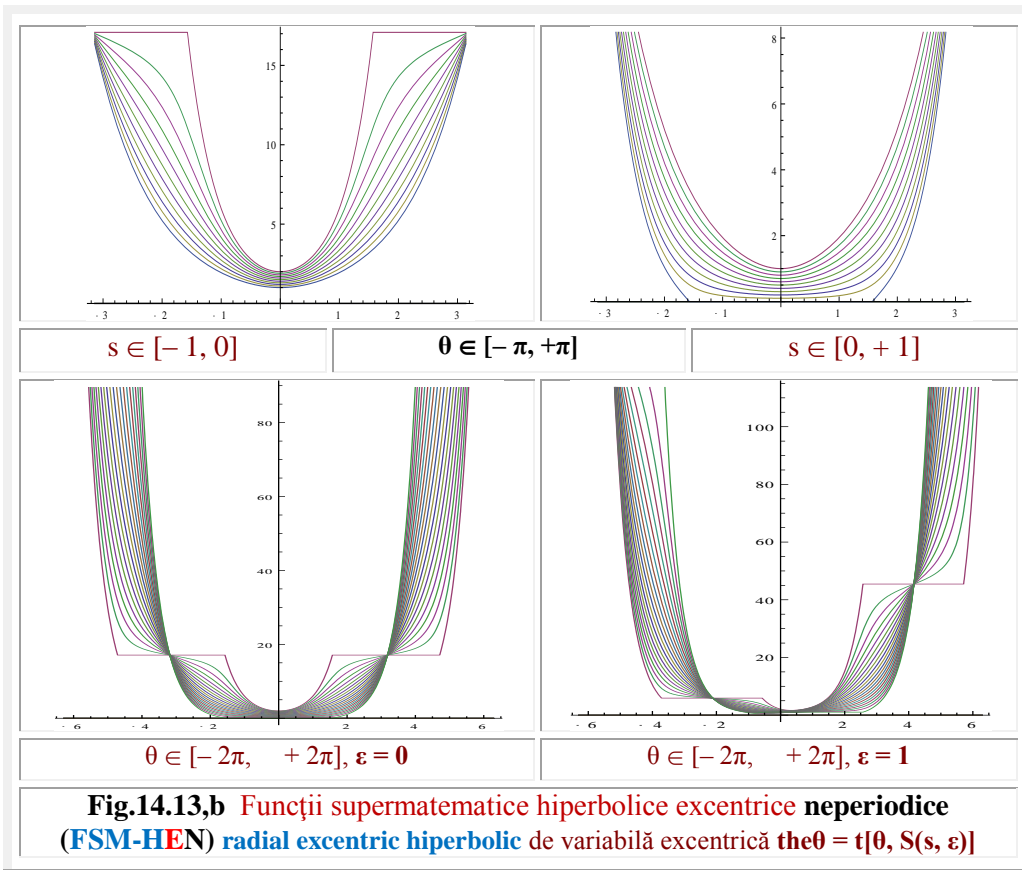
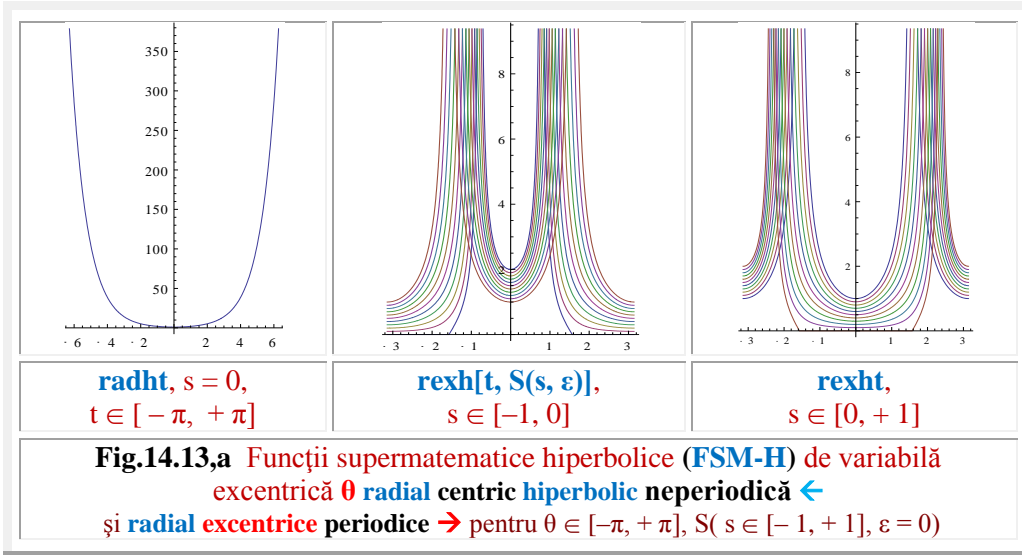
Funcția **radial excentric hyperbolic rexh** (x, S) se introduce, ca și în cazul **FSM - CE**, ca distanță normată, de la excentrul **S(s, ε)** la punctele **M**_{1,2} de pe hiperbola echilaterală din semiplanul $x > 0$. Rezultă expresia de definiere în cazul funcției **hiperbolic radial excentric** enotată, pentru a păstra regulile de notare anterioare **cex** \rightarrow **cexh**, **sex** \rightarrow **sexh** cu **rexh** [$t(\theta), S(s, \varepsilon)$] sau numai **rexh** θ

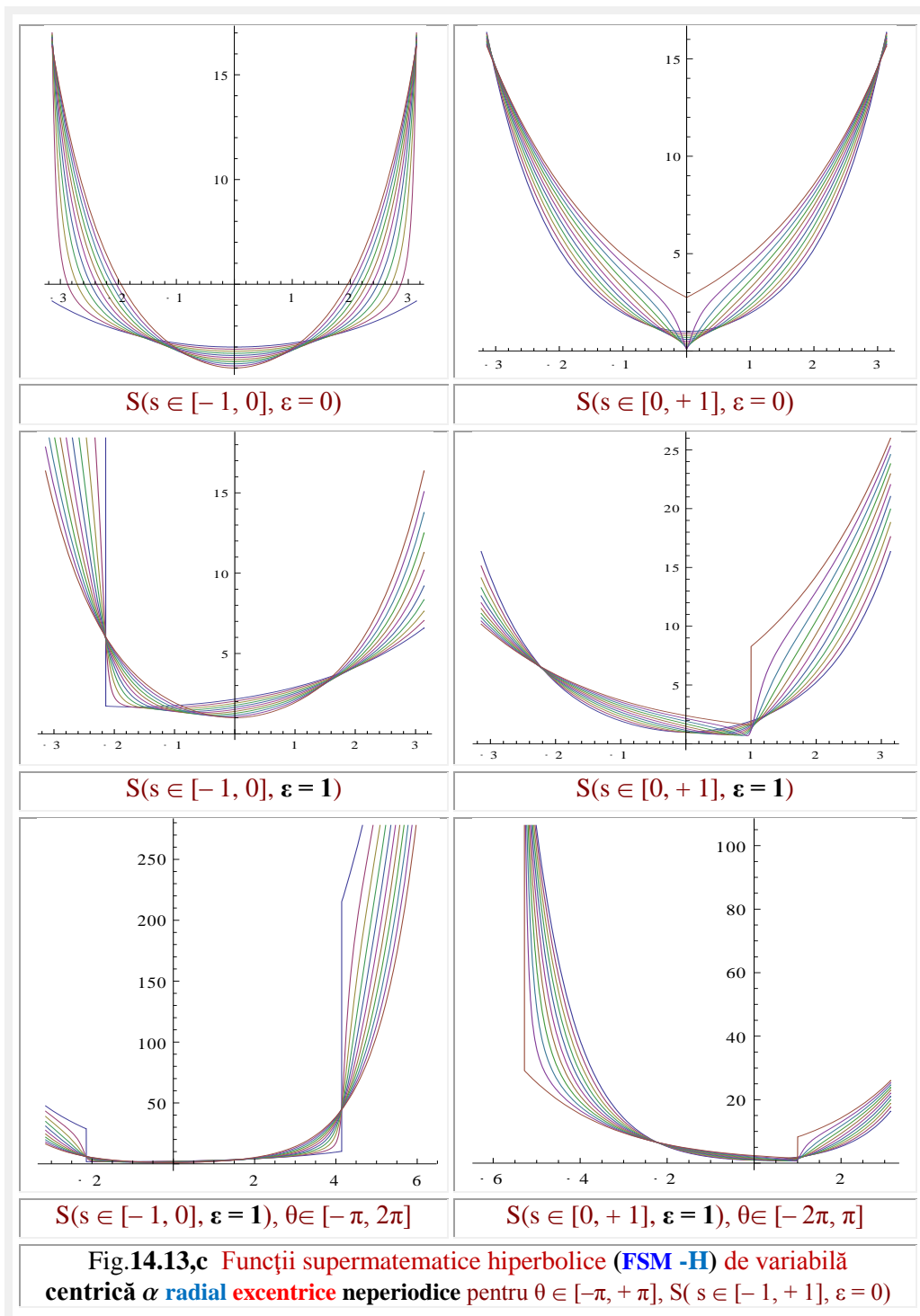
$$(14.33) \quad \mathbf{rexh}[t(\theta), S(s, \varepsilon)] = \sqrt{(\mathbf{cexht} - s.\mathbf{cos}\varepsilon)^2 + (\mathbf{sexht} - s.\mathbf{sin}\varepsilon)^2},$$

cu graficele din **figura 14.10** dreapta (\rightarrow)

Iar, pentru $s = 0$, rezultă **FHC** radial centric, notată cu **radht**

$$(14.34) \quad \mathbf{radht} = \sqrt{\mathbf{cosh}^2 t + \mathbf{sinh}^2 t}, \quad \text{cu graficul din } \mathbf{figura 14.10} \text{ stânga } (\leftarrow).$$



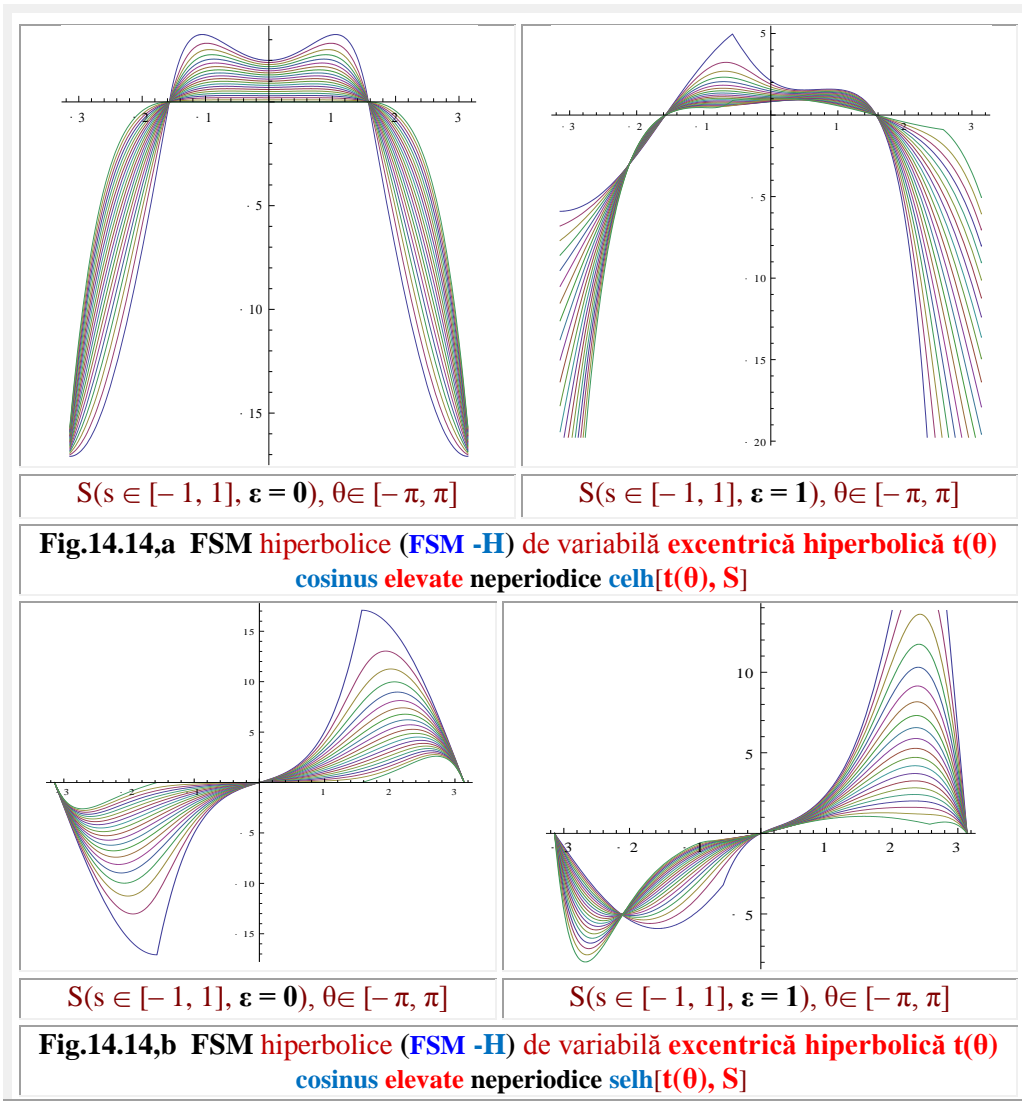


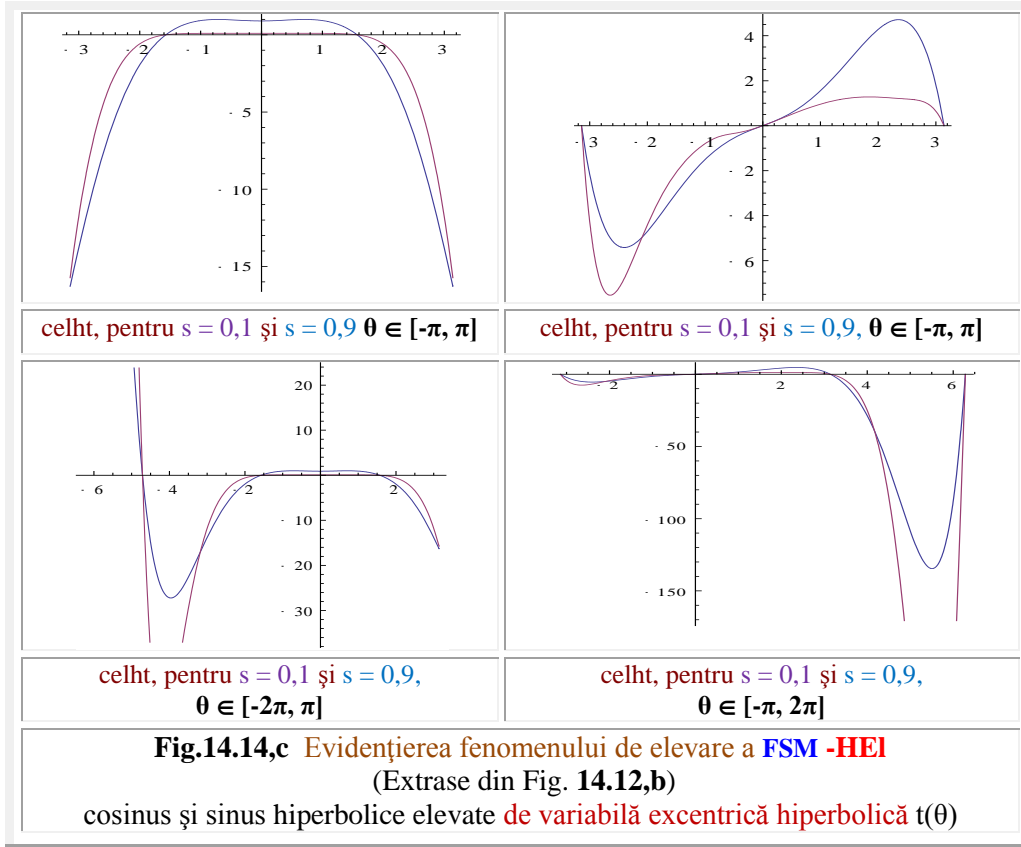
Graficele acestei funcții, pentru un excentru **S** situat pe axa x, $\varepsilon = 0$, sunt prezentate în **figura 14.10**.

14.10 FUNCȚII HIPERBOLICE ELEVATE celht și selh

Proiectând aceste segmente normate, pe axele sistemului rectangular drept cu **originea $O(s,\varepsilon)$ în $S(s,\varepsilon)$** se obțin, ca și în cazul **FCEI**, funcțiile **SMH elevate** (**Fig.14.12**) notate cu **celh** (θ, E) și, respective, **selh**(θ,E) de expresii

$$(14.35) \quad \begin{cases} celh = rexh \cos\theta \\ selh = rexh \sin\theta \end{cases}, \text{ cu graficele din figura 14.12}$$





14.11 FUNCȚIA DERIVATĂ EXCENTRICĂ HIPERBOLICĂ dexh([t, S(s, ε)]

Funcția **derivata excentrica hiperbolica dexH** (x,E) se introduce aidoma celor circulare, ca derivată a amplitudinii excentrice hiperbolice $aexh\theta = gdex[t(\theta), s(s, \epsilon)]$.

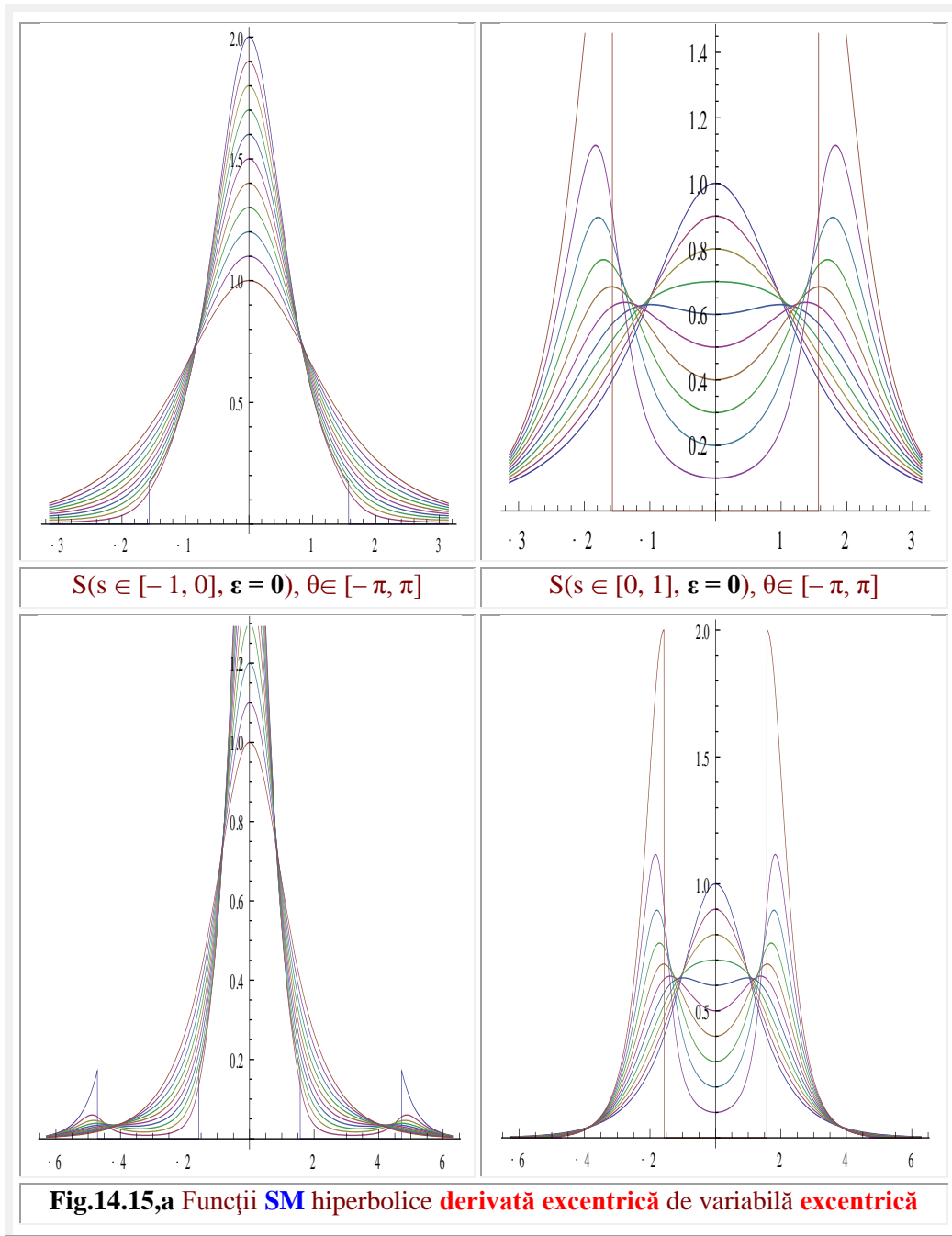
Se obține

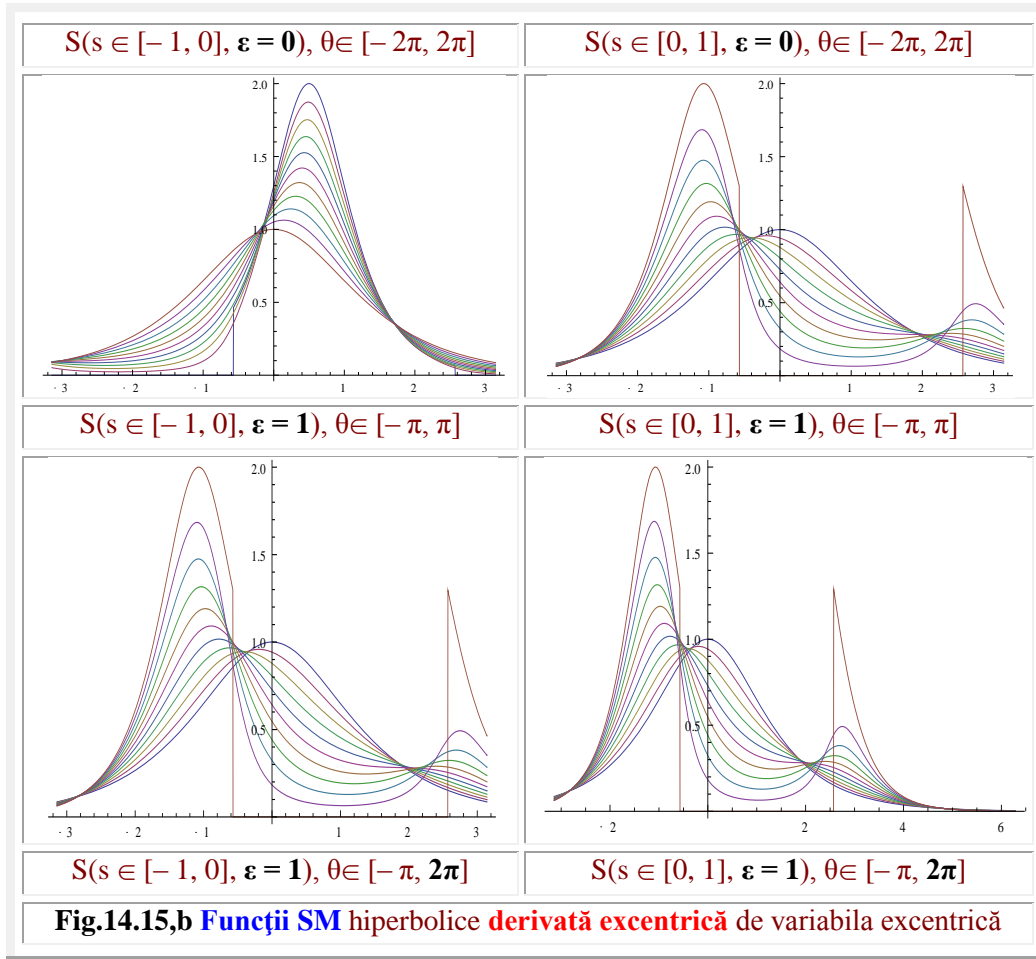
$$\begin{aligned}
 (14.36) \quad dexh(\theta, E) &= \frac{d(aexh\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[2\arctan(e^{\alpha(\theta)}) - \frac{\pi}{2} \right] = \\
 &= \frac{d\alpha}{d\theta} \frac{d}{d\alpha} \left[2\arctan(e^{\alpha(\theta)}) - \frac{\pi}{2} \right] \\
 dexh(\theta, E) &= 2 \cdot dex\theta \frac{e^{\alpha(\theta)}}{1 + e^{\alpha(\theta)}} = 2 \left(1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \epsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \epsilon)}} \right) \frac{e^{(\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \epsilon)])}}{1 + e^{(\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \epsilon)])}}
 \end{aligned}$$

cu graficele din **figura 14.14**.

Pentru un excentru care evolueaza pe axa $x < 0$, adică, $S(s \in [-1, 0], \epsilon = 0)$, graficele seamănă cu curbele de distribuție **Gauss** simetrice (Clopotul lui **Gauss**), iar pentru $S(s \in [0, 1], \epsilon = 0)$, cu curbele de distribuție a trei grupe diferite de entități ca, de exemplu, mulțimea pieselor prelucrate pe trei mașini-unelte diferite și ulterior amestecate.

Cele de $\varepsilon \neq 0$, în **figura 14.15** cu $\varepsilon = 1$, sunt asemănătoare curbelor de distribuție asimetrice, a căror abateri limită, față de maximumul câmpului de distribuție sunt de valori diferite.





14.12 CONCLUZII

Toate **FSM excentrice, circulare și hiperbolice**, se pot obține prin înlocuirea argumentului sau a variabile independente notate cu y, t sau α ($y, t, \alpha \rightarrow$ argumente centrice) cu funcția sau variabila $y(x), t(\theta)$ sau $\alpha(\theta)$, ($x, \theta \rightarrow$ argumente excentrice), adică prin trecerea de la funcție la o funcție indusă.

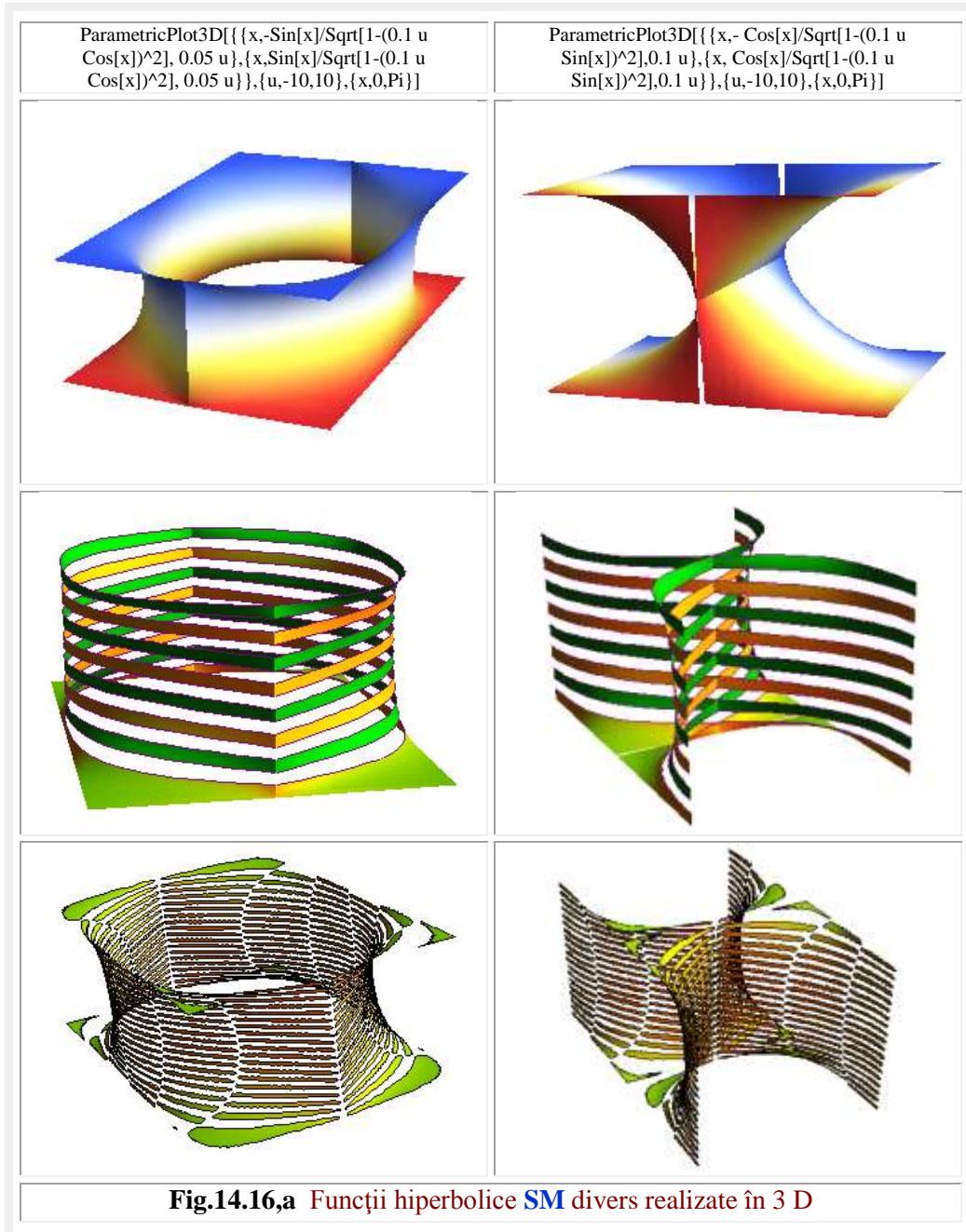
Dependența dintre cele două variabile, centrice și excentrice, se realizează prin funcțiile amplitudine excentrică circulară **$y = aex(x)$, sau $\alpha(\theta) = aex\theta$** și, respectiv, prin amplitudinea excentrică hiperbolică **$t(\theta) = gdex\theta = aexh\theta$ sau $t(\alpha) = Aexh(y) = Gdex(\alpha, S)$** .

Aceasta constituie **trecerea de la centric la excentric**.

Trecerile la funcțiile **elevate și exotice** se efectuează prin schimbarea originii O a sistemului de axe de referință ($O \equiv S$), respectiv, și a poziției centrului C al cercului trigonometric ($O \neq C \neq S$). Fiecare dintre aceste transformări, realizează un salt de la o

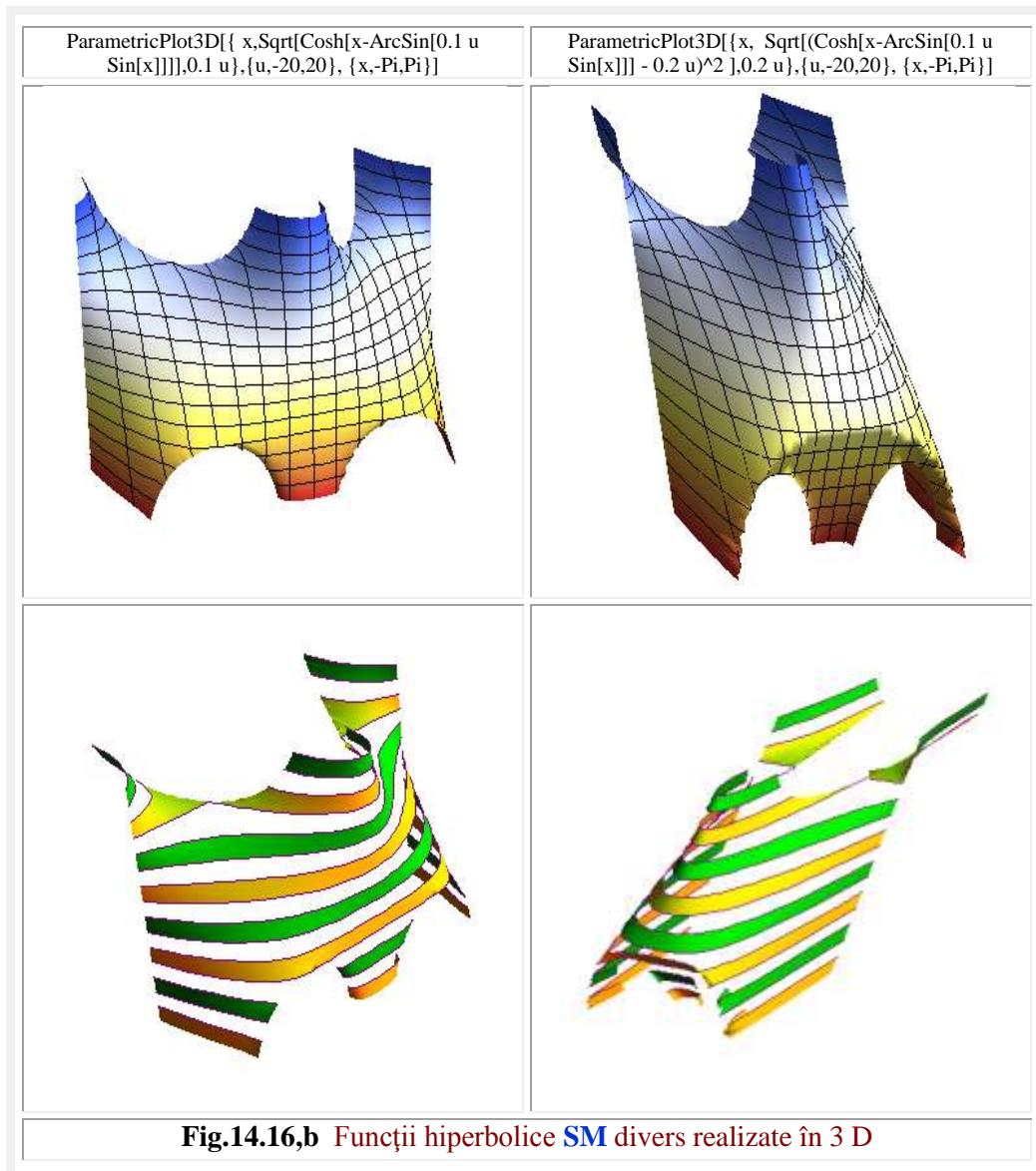
singură funcție **din centric**, la o familie cu o infinitate de funcții **in domeniul excentric**, un salt de la 1 la infinit !

Trecerea inversă, de la excentric la centric, este dată de excentricitatea nulă ($s = e = 0$), când $S \equiv O \equiv C$.



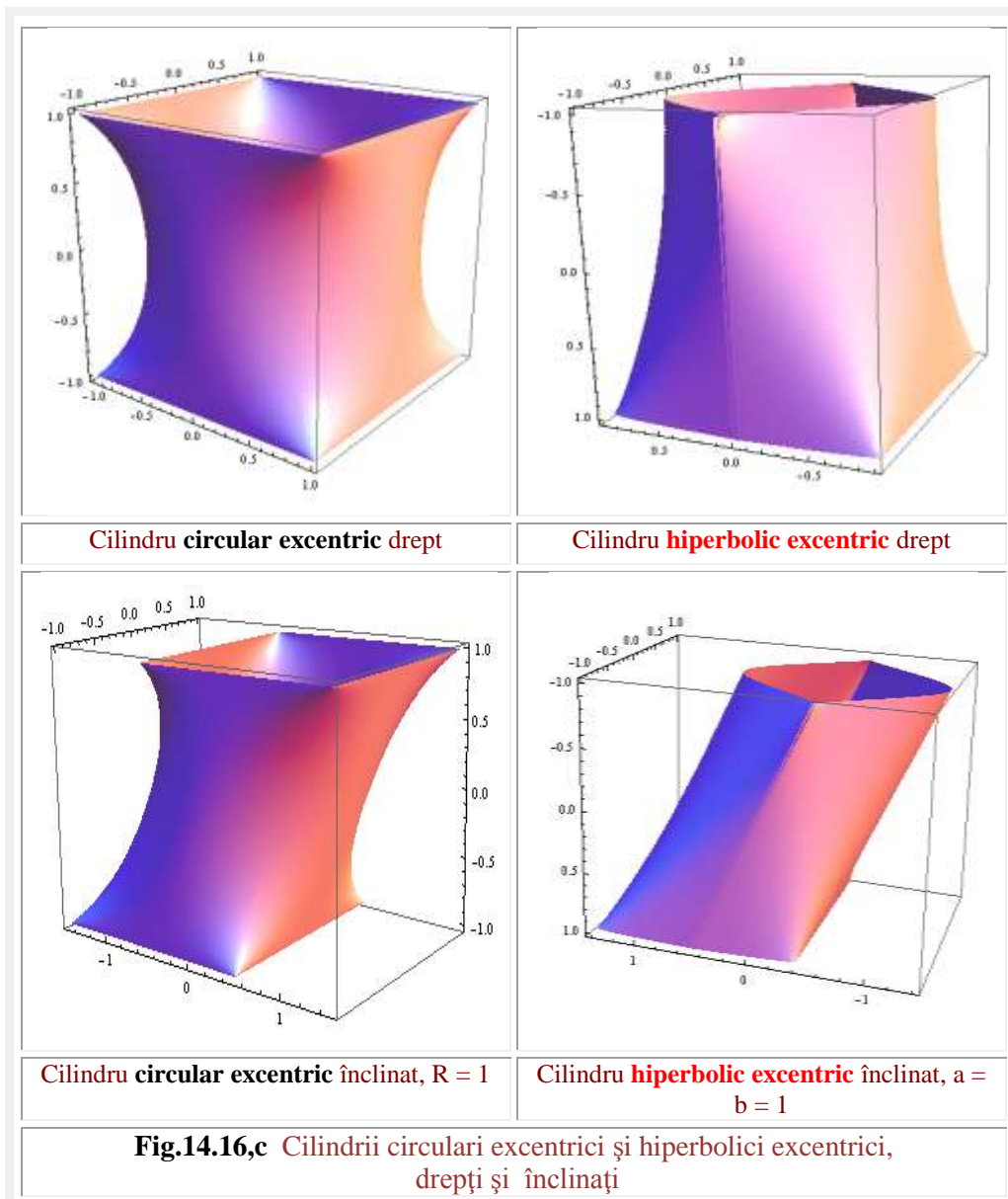
Procesul de trecere **de la centric la excentric** poate continua nedefinit, deoarece, înlocuindu-se în **aex** variabila x cu y se obține o funcție **aex** de y sau o funcție **aex** de **aex**, o funcție excentrică de o altă funcție excentrică, care se definesc ca **funcții dublu (sau triplu și MULTIPLU) excentrice- circulare și hiperbolice**.

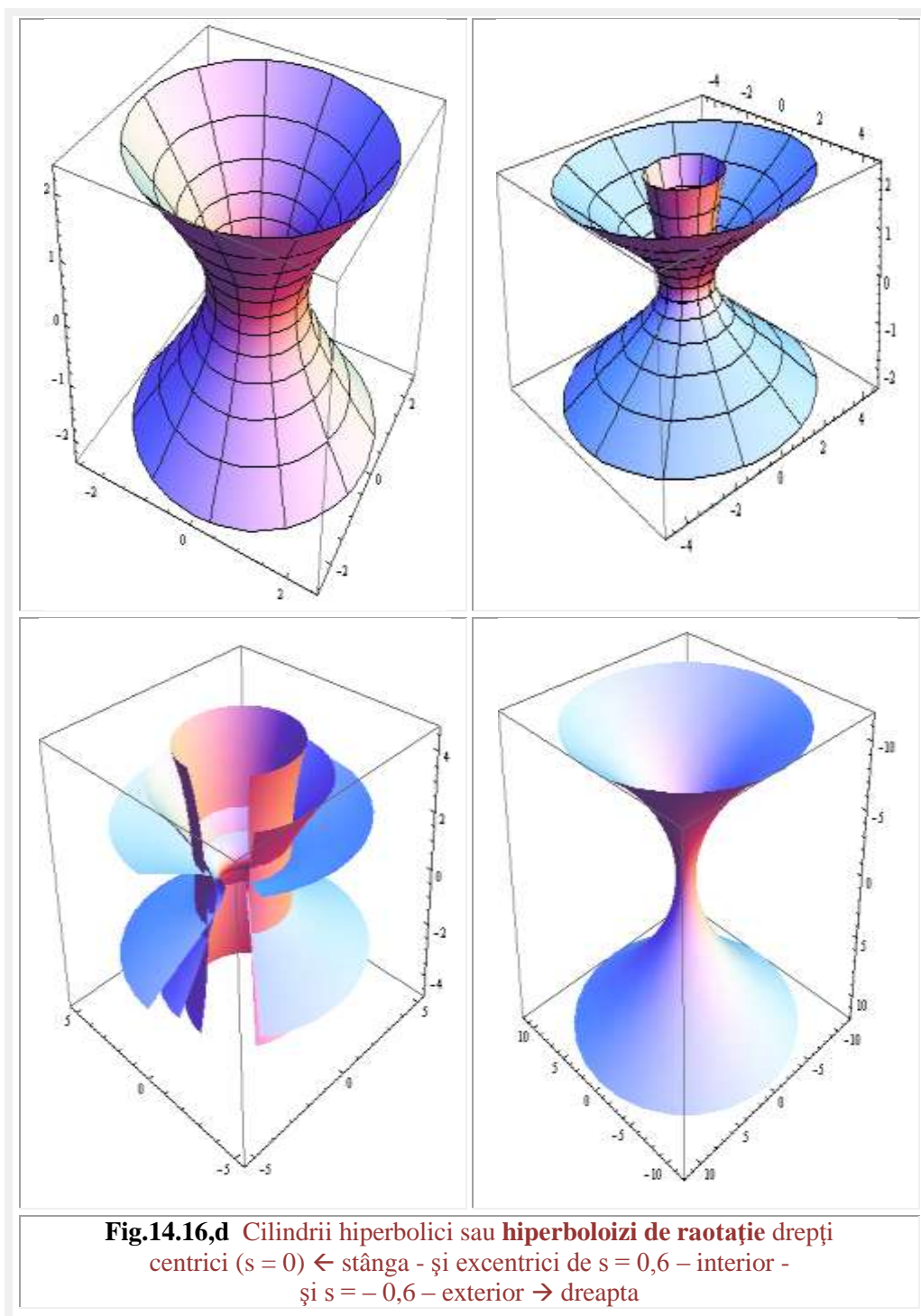
S-a propus notarea lor cu o cifră, de la 2 la n , intercalată înaintea terminației “ex” astfel: **aex**, **a2ex**, **a3ex**... **rex**, **r2ex**, **r3ex**, ... **dex**, **d2ex**, **d3ex**,... **cex**, **c2ex**, **c3ex**..., **sex** **s2ex**, **s3ex**,... ș.a.m.d pentru **FSM-CE** și **aexh**, **a2exh**, **a3exh**.. și **s2exh**, **s3exh**,... pentru **FSM-HE**;

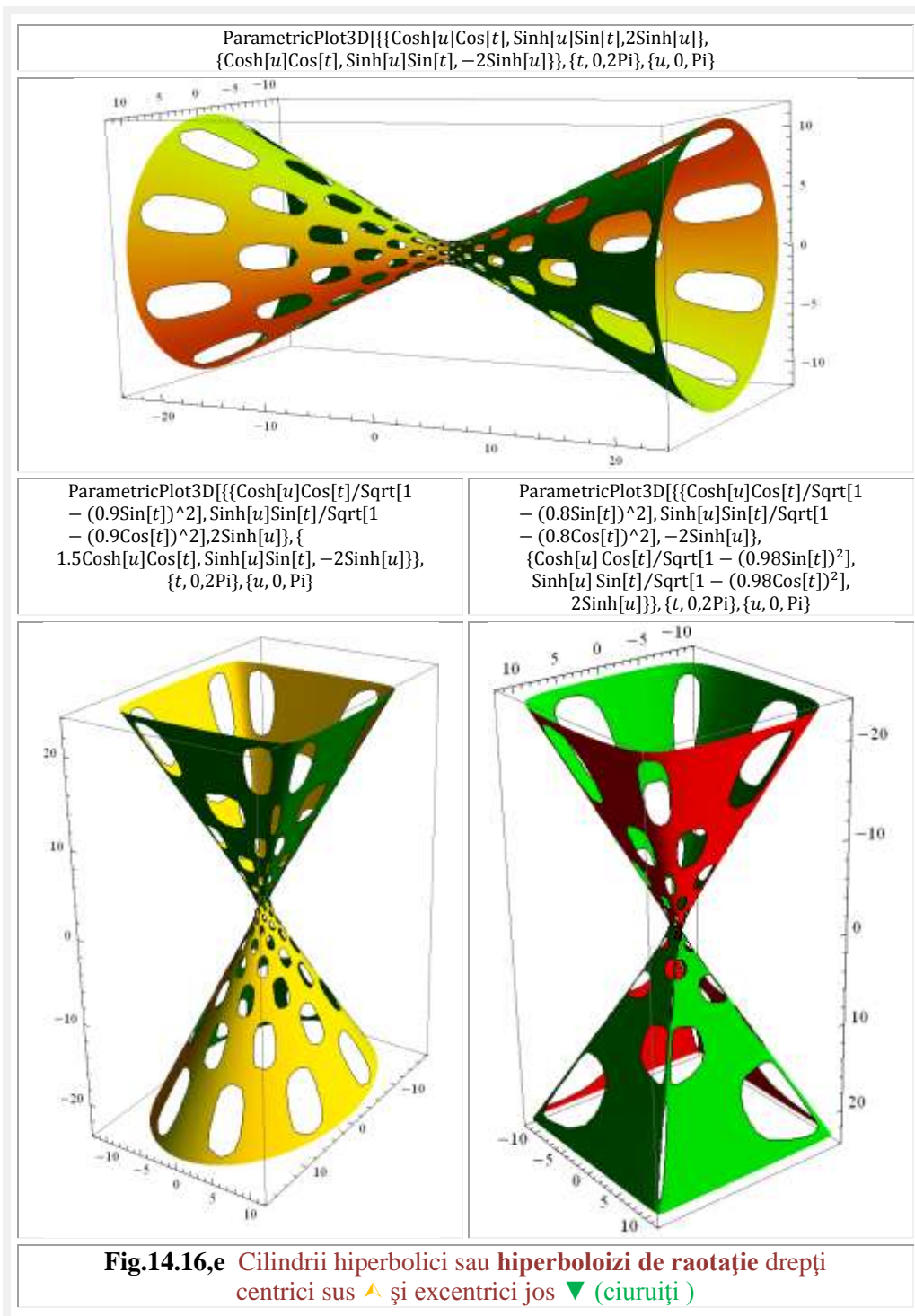


Toate aceste funcții s-au utilizat, cu succes, la soluționarea unor sisteme mecanice neliniare [20]. Căutându-se noi aplicații, s-a simțit nevoia extinderii lor, iar extinderea lor oferă posibilitatea soluționării altor aplicații, astfel că este greu de prezis **unde, dacă și când** se va opri acest proces.

Un singur lucru poate fi afirmat cu certitudine, și anume, că ele se extind cu repeziciune în știința și în tehnica, în mod deosebit la soluționarea unor probleme actuale de mare complexitate.







Motto: Matematica **EXCENTRICĂ** este **limbajul naturii**.
În sistemul solar se vorbește în limbajul matematicii **excentrice** de variabilă **centrică**.
În galaxie se vorbește în limbajul matematicii **excentrice** de variabilă **excentrică**.
 Autorul matematicii excentrice

Capitolul 15

FUNCTII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (FSM-CE) DE VARIABILĂ CENTRICĂ α SAU x

15.1 INTRODUCERE

Din cele expuse, până la prezentul capitol, s-a putut constata că toate **FSM -CE** se bazează pe existența punctelor, de coordonate carteziene, $W_{1,2}(x_{1,2}, y_{1,2})$, aparținând cercului unitate, sau unui cerc oarecare de raza R , puncte rezultate în urma intersecției cu o dreaptă excentrică turnantă **d**.

Punctele au coordonatele polare $W_{1,2}(1, \alpha_{1,2})$, față de centrul $O(0,0)$, sau $W_{1,2}(r_{1,2}, \theta_{1,2})$ față de polul / excentrul $S(e,\varepsilon)$ dacă intersecția s-a făcut cu cercul unitate $CU(O,1)$.

Intersecția cu un cerc oarecare $C(O,R)$, al dreptei **d**, care trece prin punctul **E** și este turnantă în jurul excentrului $E(e,\varepsilon)$, sunt punctele $W_{1,2}(R_{1,2}, \alpha_{1,2})$ față de polul $O(0,0)$ și $W_{1,2}(r_{1,2}, \theta_{1,2})$ față de excentrul **E** (Fig.15.1), în care $r_{1,2} = rex_{1,2}\theta$, **FSM -CE** radial excentric (15.2) de variabilă excentrică θ , sau de variabilă centrică $r_{1,2} = Rex\alpha_{1,2}$.

Ultima specificație este importantă, deoarece, o dreaptă poate fi turnantă în jurul unui punct și dacă nu trece prin acel punct, dar se rotește în jurul lui, rămânând, de exemplu, în permanență tangentă la un cerc, sau la o altă curbă închisă, care înconjoară acel punct.

S-a constatat că, prin definiție, coordonatele carteziene ale punctelor $W_{1,2}$ sunt **FSM -CE**

$$(15.1) \quad \begin{cases} x_{1,2} = cex_{1,2}\theta = Cex\alpha_{1,2} \rightarrow \text{cosinus excentric} \\ y_{1,2} = sex_{1,2}\theta = Sex\alpha_{1,2} \rightarrow \text{sinus excentric} \end{cases}$$

de variabilă **excentrică** θ și, respectiv, de variabile **centrice** $\alpha_{1,2}$, iar coordonatele polare $r_{1,2}$ sunt funcțiile noi, introduse în matematică sub denumirea de **FSM -CE radial excentric**

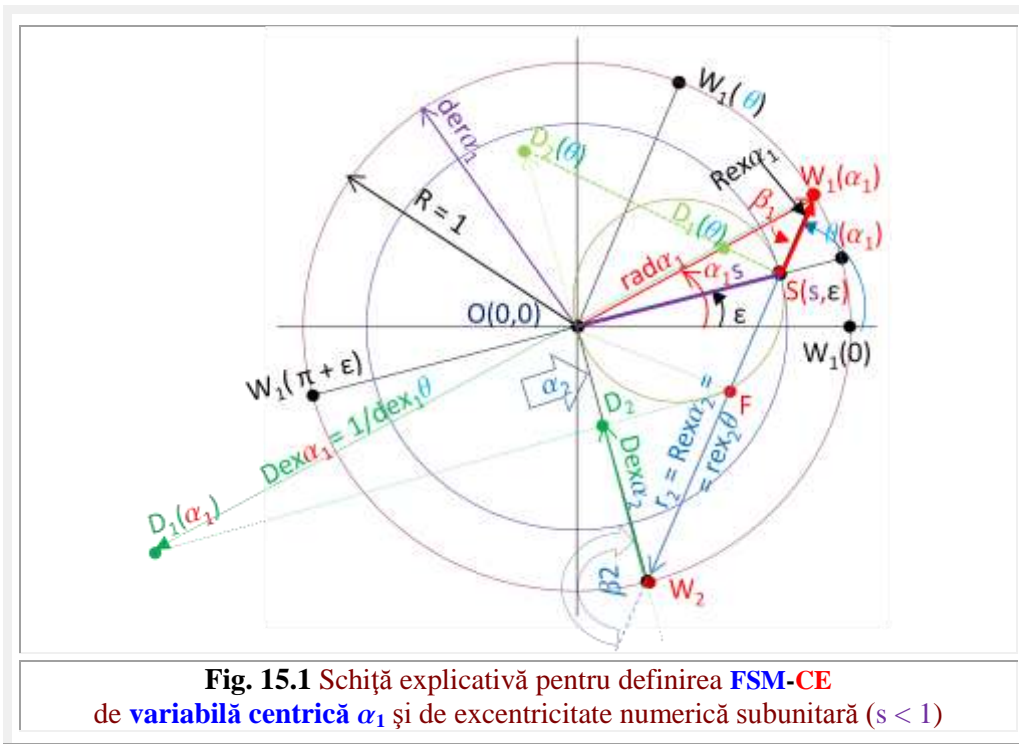
$$(15.2) \quad r_{1,2} = \begin{cases} rex_{1,2}\theta = -scos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2 \sin^2 \theta} \\ Rex\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{1 + s^2 - 2scos(\theta - \varepsilon)} \end{cases}$$

de variabilă motoare excentrică θ și, respectiv, de variabile motoare centrice $\alpha_{1,2}$.

15.2 VARIABILE UNGHIULARE

Variabila **motoare** este variabila **excentrică** θ , dacă ea antrenează / cauzează **direct** rotația drepte excentrice **d** din excentrul **S** în jurul excentrul **S** și, prin intersecția ei cu cercul unitate determină punctele $W_{1,2}$ și, astfel, generează **FSM-CE** de variabilă **excentrică**.

Variabilă **motoare** este cea **centrică** α_1 , dacă, din centrul $O(0,0)$, raza vectoroasă $R = 1$ se rotește cu unghiul α_1 în jurul lui $O(0,0)$ și determină punctul $W_1(1, \alpha_1)$ de pe cercul unitate și, prin unirea acestuia cu **S**, rotește **indirect** dreapta **d** cu unghiul θ în jurul excentrului **S** și determină al doilea punct de intersecție W_2 de pe cercul unitate și, totodată, a doua variabilă centrică, nemotoare, α_2 , ca și **FSM-CE** corespunzătoare, de variabilă centrică (Fig.15.2).

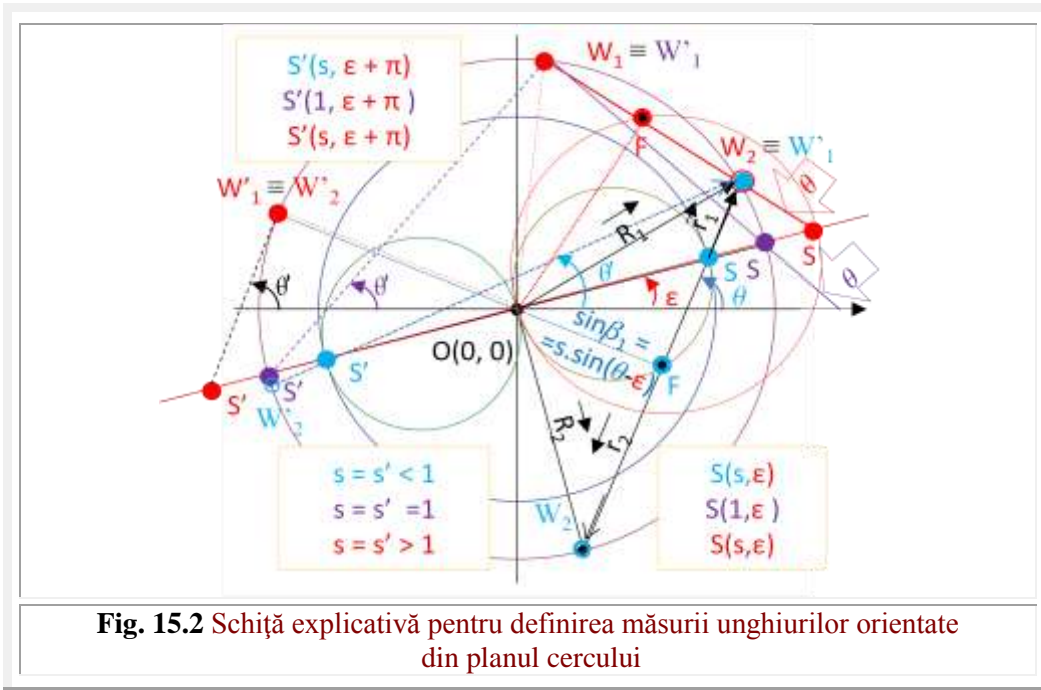


Rezultă ca evidentă observația că, indiferent care variabilă unghiulară este motoare, atâta timp cât excentrul **S** este interior cercului unitate, dreapta **d** din **S** și / sau raza polară $R = 1$ din $O(0,0)$ intersectează cercul unitate și, în consecință, punctele $W_{1,2}$ există și, pe cale de consecință, există și familiile de **FSM-CE** de aceste variabile.

Adică, pentru $s \in [-1,+1]$, **FSM-CE** există și **sunt funcții continue** pentru ambele variabile.

Dacă, excentrul S este **exterior** discului circular unitar (de rază $R = 1$), situația se schimbă radical, în sensul că punctu $W_1(1, \alpha_1 \equiv \alpha)$ există independent de poziția excentrului $S, \forall \alpha_1 \equiv \alpha \in [-\infty, +\infty] \cup s \in [-\infty, +\infty]$, dar punctele $W_{1,2}$, de intersecție a dreptei d din S , există **numai** pentru un anumit domeniu $\theta \in [\theta_i, \theta_f]$; valorile inițială θ_i și finală θ_f fiind ale dreptelor d de tangentă la cercul unitate, dintr-un punct (S) exterior cercului unitate / trigonometric.

În concluzie, avantajul **FSM-CE** de **variabila centrică** constă în faptul că ele există, sau **sunt continue**, pentru o excentricitate variind pe toată axa reală, adică pentru o excentricitate reală e și numerică $s \rightarrow e, s \in [-\infty, +\infty]$, față de cele de **variabilă excentrică** care există, sau sunt **continue**, doar în intervalul $s \in [-1, +1]$, respectiv $e \in [-R, +R]$.



15.3 MĂSURA UNGHIURILOR ORIENTATE DIN PLANUL CERCULUI UNITATE

Se știe că un unghi orientat, notat în multiple moduri, ca de exemplu, variabilele unghiulare centrice, sau argumentele $\alpha_{1,2}$

$$(14.3) \quad \sphericalangle \alpha_{1,2} = \widehat{AOW_{1,2}} = \sphericalangle(AO, OW_{1,2}) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OW_{1,2}} \right) = \left(\vec{x}^+, \vec{R}_{1,2} \right)$$

are doua laturi: una **inițială**, în cazul de față versorul $\overrightarrow{OA} = \text{rad}0^\circ$, care este versorul axei x pozitive, adică, are sensul axei $x^+ > 0$ și una **finală** $OW_{1,2}$, sau vectorii de poziție ai punctelor $W_{1,2}$ de pe **cercul unitate**, față de centrul $O(0,0)$, notați $\vec{R}_{1,2}$, care sunt și

ei versorii sau, mai precis, deoarece sunt turnanți, sunt favorii direcțiilor $\alpha_{1,2}$ notați cu $\text{rad}\alpha_{1,2}$, precum și un centru de rotație $O(0,0)$.

Măsura unghiului $\alpha_{1,2}$ este pozitivă dacă pentru a-l suprapune pe \vec{x} peste $\vec{R}_{1,2}$ este necesară o rotație în sens trigonometric pozitiv (sinistrorum sau levogin) și negativă în caz contrar (dextrorum sau dextrogin care este sensul de rotație al arătătoarelor ceasornicelor).

În acest caz, unghiul θ este unghiul dintre versorul axei x , notat $\text{rad}\theta^0$ și fazorul semidreptei \mathbf{d}^+ care este notat cu $\text{rad}\theta$.

În figura 15.2 sunt considerate 6 situații distincte: $|\pm s| < 1$, $|\pm s| = 1$ și $|\pm s| > 1$.

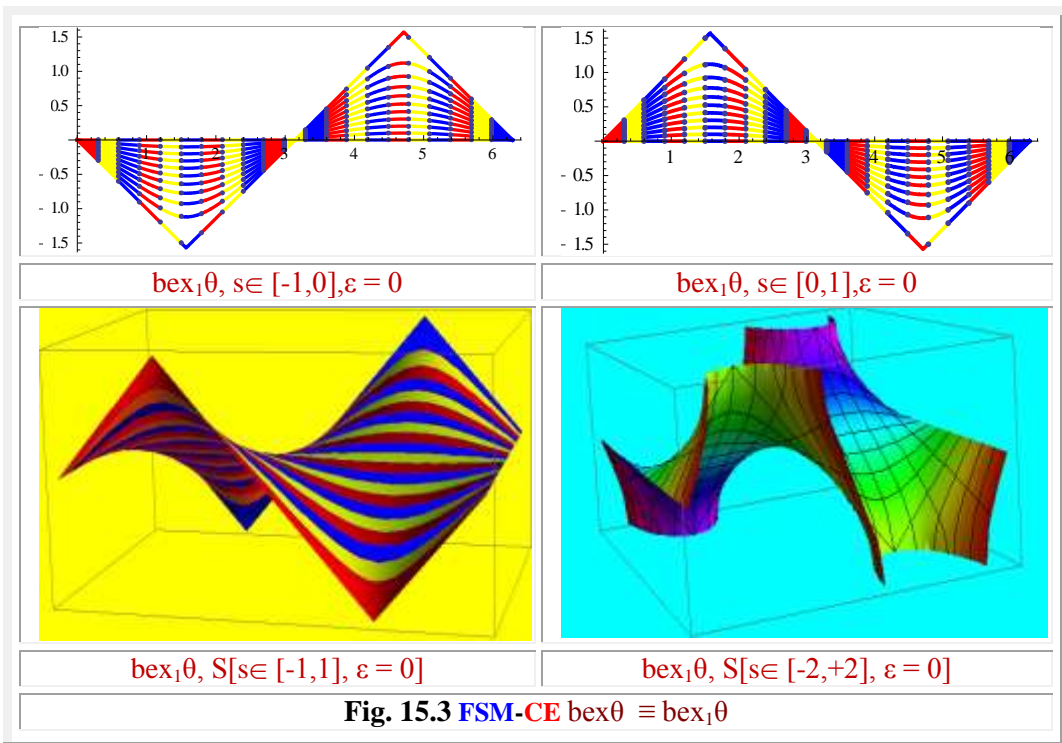
15.4 FSM-CE BETA EXCENTRICE și FUNCȚII OCTAV GHEORGHIU

O a treia variabilă unghiulară este unghiul $\beta_{1,2}$, cu dependențele cunoscute din volumul I

$$(15.4) \quad \alpha_{1,2} + \beta_{1,2} = \theta \rightarrow \beta_{1,2} = \theta - \alpha_{1,2},$$

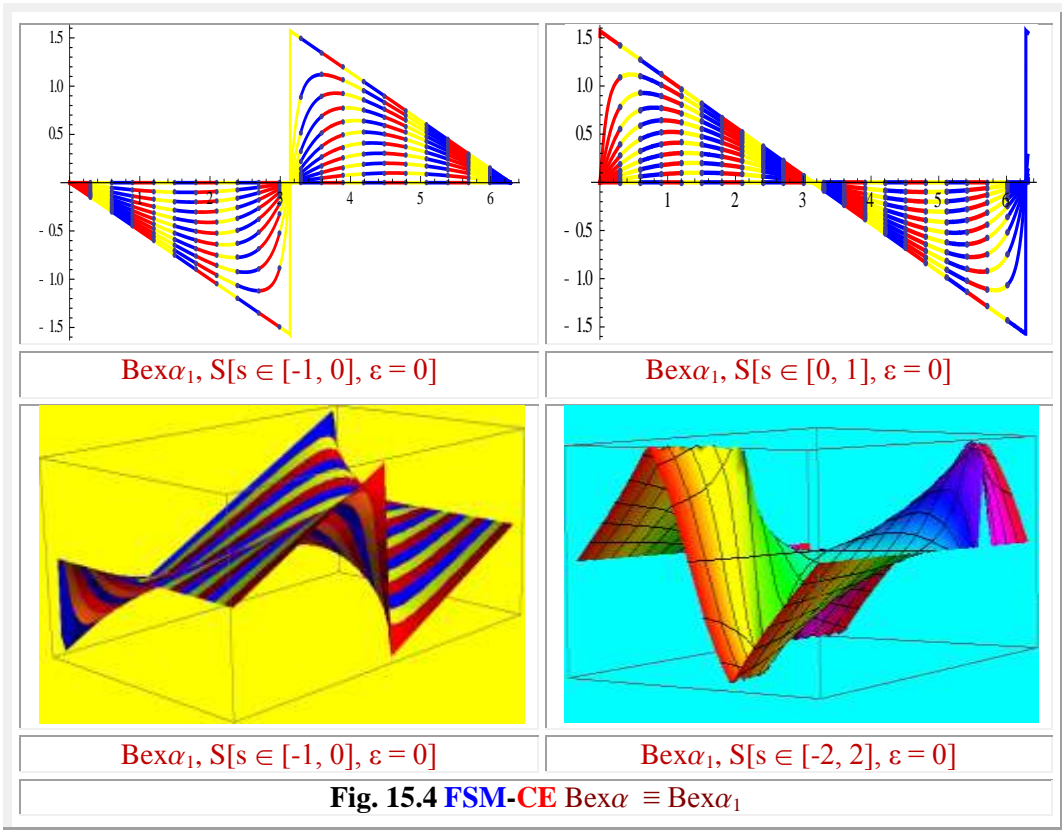
și, unele dependențe mai complete / precise decât în volumul anterior

$$(15.5) \quad \sum \beta_i = \beta_1 + \beta_2 = \begin{cases} +\pi, \text{dacă } s_x = s \cdot \cos \varepsilon > 0, \rightarrow \varepsilon \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -\pi, \text{dacă } s_x = s \cdot \cos \varepsilon < 0, \rightarrow \varepsilon \in [\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$



Altfel spus, dacă $S(s, \epsilon)$ este în semiplanul pozitiv/drept suma $\sum \beta_i$ este pozitivă, iar dacă $S(s, \epsilon)$ este plasat în semiplanul negativ/stâng, suma $\sum \beta_i$ este negativă.

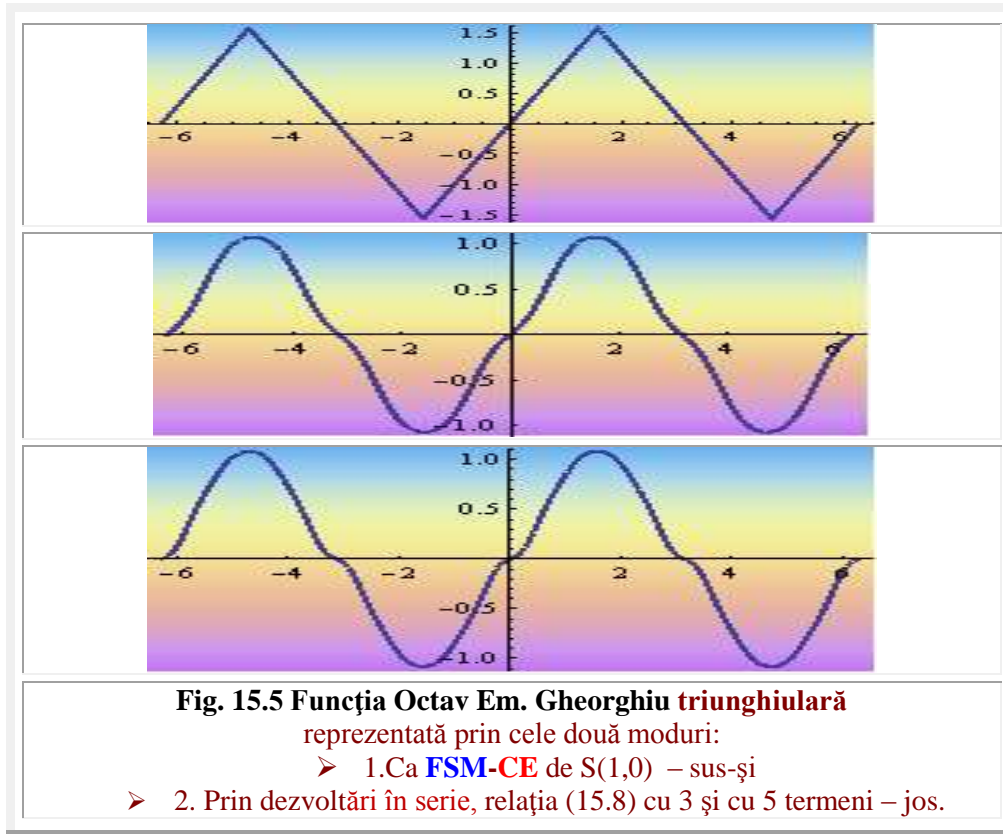
Unghiurile $\beta_{1,2}$ sunt unghiurile dintre versorii $rad\alpha_{1,2}$ și $rad\theta$, adică dintre vectorii $\vec{R}_{1,2} = 1 \cdot rad \alpha_{1,2}$ și $\vec{r}_1 = rex_1\theta \cdot rad\theta$.



Unghiul β_1 este unghiul sub care se văd, succesiv, centrul O și excentrul S din punctul W_1 de pe cercul unitate, rotindu-ne în W_1 dinspre O înspre S , oricare ar fi poziția excentrului S , interior sau exterior cercului unitate. Se poate observa că $\beta_1 > 0$ pentru S în semiplanul pozitiv, adică $s_x = s \cdot \cos\epsilon > 0$ și $\beta_1 < 0$ pentru S în semiplanul negativ $s_x < 0$.

În W_2 rotația dinspre O spre S schimbă de sens / semn. Ca urmare, pentru $s < 1$ și $s_x = s \cdot \cos\epsilon > 0$, β_1 este pozitiv în W_1 și negativ în W_2 , iar pentru $s_x < 0$ semnele / sensurile se inversează.

Expresiile lui $\beta_{1,2}$ în funcție de cele două variabile sunt denumite, așa cum s-a mai expus în Vol. I, **FSM-CE beta excentrice** și sunt, în funcție de variabila excentrică



$$(15.6) \quad \beta_{1,2}(\theta) = bex_{1,2}\theta \begin{cases} \beta_1(\theta) = bex_1\theta = \arcsin [s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \\ \beta_2(\theta) = bex_2(\theta) = \pm\pi - \beta_1(\theta) = \\ = \pm\pi + \arcsin [s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \end{cases}$$

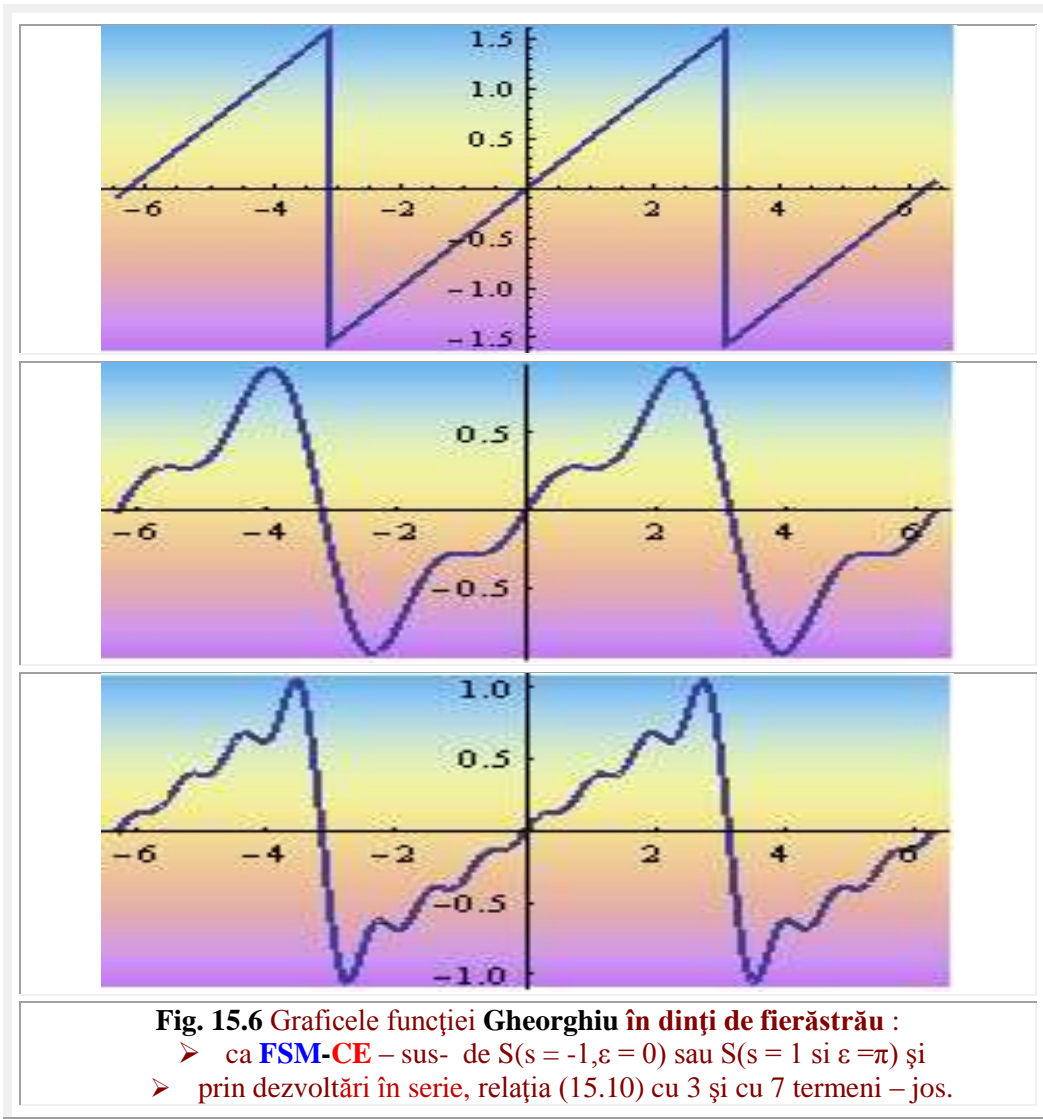
În funcție de **variabila centrică** α ele au expresiile

$$(15.7) \quad \beta(\alpha_{1,2}) = Bex\alpha_{1,2} \rightarrow \begin{cases} \beta_{1,2} = Bex\alpha_{1,2} = \beta(\alpha_{1,2}) \\ = \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cdot \cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}} = \\ = \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \cdot \text{sinn } \alpha_{1,2} \end{cases}$$

O altă expresie a unghiurilor $\beta_{1,2}$ se poate obține și cu ajutorul funcției trigonometrice inverse arccos, dar numai pentru intervalul $\alpha_{1,2} \in [-\pi, +\pi]$. Această expresie este

$$(15.8) \quad \beta(\alpha_{1,2}) = Bex\alpha_{1,2} = \arccos \frac{1 - s \cdot \cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{Rex\alpha_{1,2}}$$

Din motive inexplicabile, graficele **FSM-CE** $\text{bex}_{1,2}\theta$ și $\text{Bex}\alpha_{1,2}$ au fost omise din volumul precedent, de aceea, profitând de această ocazie, le includem aici, în **figurile 15.3** și **15.4**, datorită importanței lor, ieșită din comun, așa cum se va putea observa.



În **figura 15.3** sunt reprezentate graficele **FSM-CE** de variabilă excentrică $\text{bex}_1\theta$.

Se observă că ele oscilează în jurul drepte $y = 0$, adică a **axei θ** . Din relațiile **15.6**, rezultă că $\text{bex}_2\theta$ va oscila în jurul drepte $y = \pm \pi$, de aceea graficele lor n-au mai

fost reprezentate. În schimb, au fost reprezentate în 3D aceleași **FSM-CE** pentru excentricitate numerică subunitară $s \in [-1, 1]$ și supraunitară $s \in [-2, 2]$.

Se observă din figură, că pentru $s^2 > 1$, funcțiile nu mai sunt continue, ci există doar pe intervalele $I \in [\theta_i(s), \theta_f(s)] \pm 2\pi$, iar cele de variabilă centrică există și sunt continue pe toată axa rala a lui s (**Fig. 15.4**). Dacă se face abstracție de semn, adică se consideră funcția $\text{Abs}[\text{bex}\theta]$, sau dacă se face abstracție de prima sau de a doua determinare a funcției, considerându-se intersecțiile cu dreapta și nu cu semidreptele drepte turnante **d**, în jurul excentrului **E** sau **S**, atunci ele devin / sunt de perioadă π .

Un interes deosebit îl reprezintă **FSM-CE bex θ** și **Bex α** de excentricitate unitară $s = \pm 1$, deoarece ele reprezintă funcții speciale **triunghiulare**, care se exprimă clasic, adică în matematica centrică (**MC**) prin seria [v. §. Siemens, FORMEL und TABELLEN BUCH für Starkstrom-Ingenieure, SSA, 1960]

$$(15.8) \quad f(t) = \frac{4}{\pi} H \sum_{v=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{v} \sin v\omega(t - t_0),$$

în care, H este amplitudinea maximă, $f_a = 0,5000H$ cu factorul de vârf sau de creastă $\sigma_s = \frac{H}{f_e} = 1,7321$, f_a este media absolută a funcției $f(t)$ și f_e este media patrică

$$(15.9) \quad f_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \text{ (valoare efectivă)} = 0,5774 H,$$

cu factorul de formă $\sigma_f = \frac{f_e}{f_a} = 1,1547$.

Cu ajutorul **FSM-CE bex θ** ea se exprimă cu mult **mai simplu** și **infin mai exact**, printr-un singur termen [v relația(15.7)].

Nu numai din pură curiozitate, s-au prezentat, comparativ, aceste funcții, prin cele două metode, în **figura 15. 5**.

Funcția **Bex α** exprimă exact funcția **Octav Gheorghiu în dinți de ferăstrău**, funcție care poate fi reprezentată clasic (in **MC**) prin relația:

$$(15.10) \quad f(t) = \frac{2}{\pi} H \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\vartheta+1}}{\vartheta} \sin \vartheta \omega(t - t_0)$$

cu aceleași valori, ca și în cazul anterior, pentru f_a , f_e , σ_s și σ_f .

Se va prezenta, în paralel aceeași funcție prin cele două metode în **figura 15.6**.

Cu ajutorul **FSM-CE bex θ** pot fi reprezentate soluțiile vibrațiilor neamortizate la rezonanță, exprimate de ecuația diferențială

$$(15.11) \quad \Delta \ddot{\varphi} + v_0^2 \cdot \sin \varphi = \varphi_0 \cdot v_0^2 \cdot \sin v_0 t, \text{ pentru}$$

$$v_0^2 = 16; \quad \varphi_0 \cdot v_0^2 = 1,6; \quad \omega = 4; D = 0; M = 0, \psi(0) = 0; \dot{\psi}(0) = 0$$

cu graficul din [V. §. Siemens, FORMEL und TABELLEN BUCH für Starkstrom-Ingenieure, SSA, 1960, pag. 68], identic cu cel reprezentat de următoarele produse ale **FSM-CE** de excentricitate numerică unitară

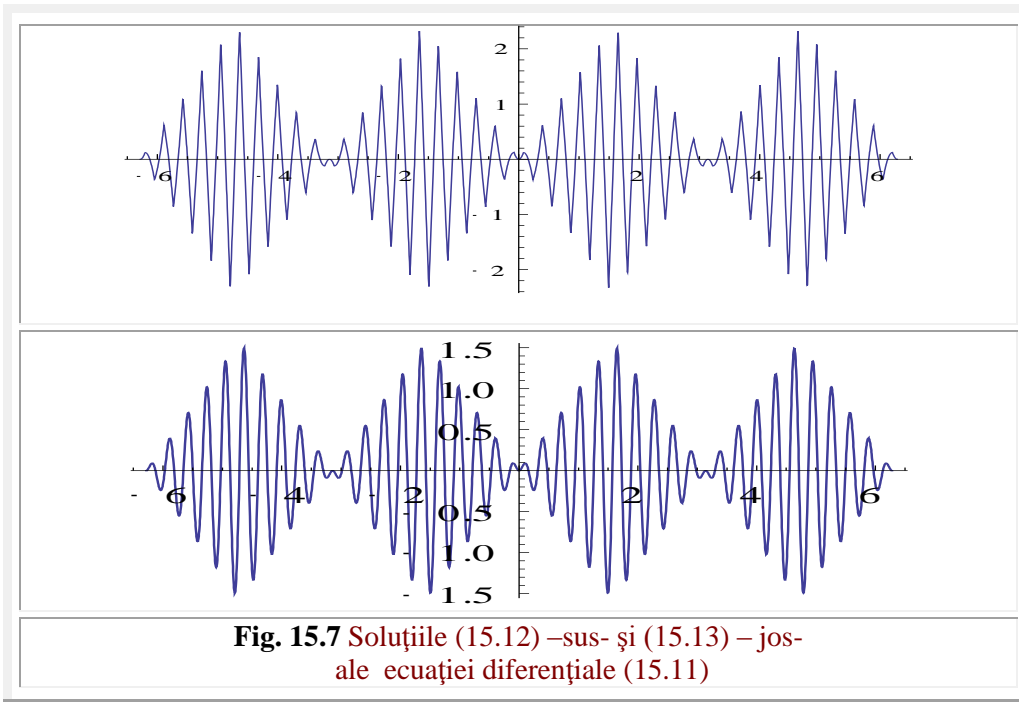
$$(15.12) \quad y(\theta) = \text{bex}[\theta, S(s = 1, \varepsilon = 0)]. \text{ bex}[20.\theta, S(s = 1, \varepsilon = 0)] \text{ sau}$$

$$(15.13) \quad y(\theta) = \text{bex}[\theta, S(s = 1, \varepsilon = 0)]. \text{ Sin}(20.\theta)$$

cu graficele din **figura 15.7**.

O altă aplicație a **FSM-CE bex θ** consistă în reprezentarea funcțiilor speciale **Octav Gheorghiu trapezoidale** (**Fig. 15.8**). Prin dezvoltare în serie trigonometrică, ele pot fi aproximate prin expresia [§. Siemens, FORMEL und TABELLEN BUCH für Starkstrom-Ingenieure, SSA, 1960, pag. 33]

(15.14) $f(t) = \frac{2HT}{\pi^2 S} \sum_{\vartheta=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \vartheta \omega S \cdot \sin \vartheta \omega (t-t_0)}{\vartheta^2}$, pentru $f_a = H \left[1 - \frac{2S}{T} \right]$, $f_e = H \sqrt{\frac{3T-8S}{3T}}$,
 în care $S = \frac{T}{12}$, $f_a = 0,8333H$; $f_e = 0,8819 H$; $\sigma_s = 1,1339$; $\sigma_f = 1,0583$.



Prin utilizarea **FSM-CE** expresia lor este

(15.15) $f(t) = \text{bex}[\theta, S(1, 0)] - \text{bex}[\theta - \frac{\pi}{2}, S(1, 0)] = \arcsin[\sin \theta] - \arcsin[\sin(\theta - \frac{\pi}{2})]$

Alte funcții triunghiulare periodice, exprimate cu **FSM-CE** sunt prezentate în **figura 15.9**. împreună cu ecuațiile lor explicite, adică, prin care **FSM-CE** sunt “traduse” prin **FCC**. Se recunosc **FSM-CE** beta excentrice

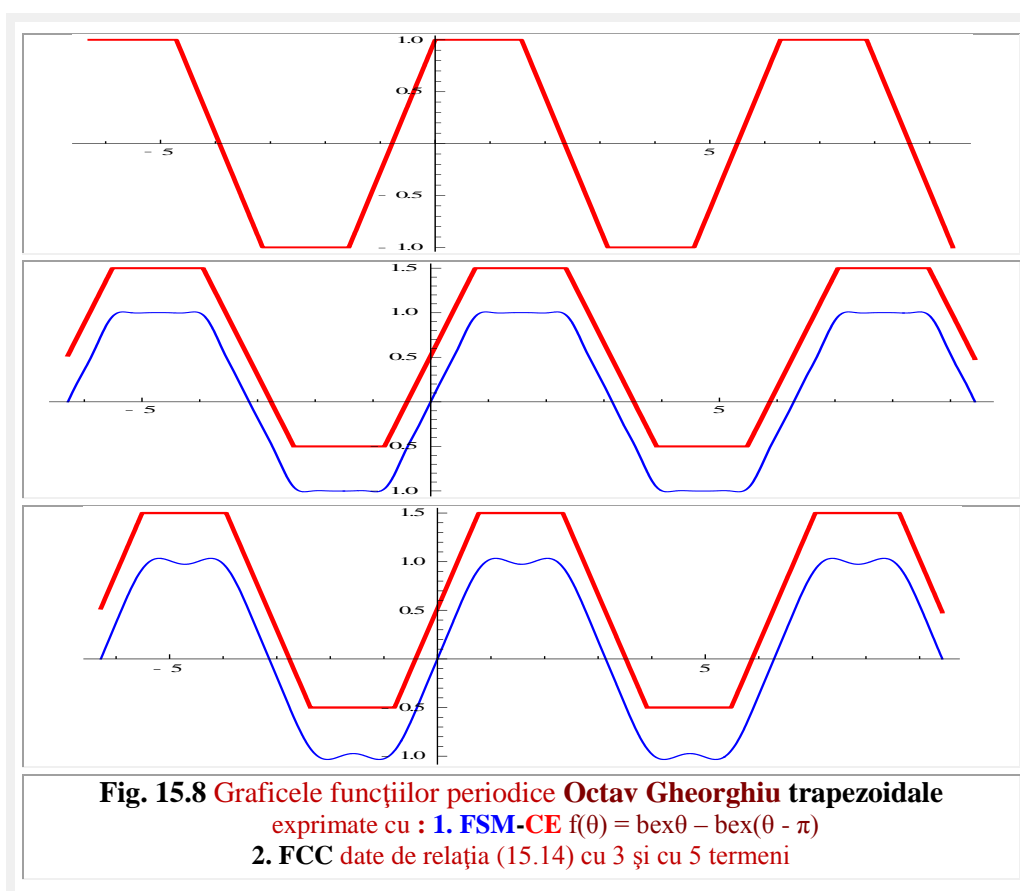
$\text{bex}[\frac{\theta}{4}, S(1, 0)]$, $\text{bex}[\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{2}, S(1, 0)]$, precum și cosinusul cvadrilob

$\text{coql}[\frac{\theta}{4}, S(1, 0)] = \frac{\cos \frac{\theta}{4}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{4}}}$ (v. vol. I, pag. 50 .. 56).

Alte posibilități de realizare a unor grafice, formate din segmente de dreaptă, care ar putea fi denumite “drepte segmentate” sau “drepte frânte”, sunt prezentate în **figura 15. 10** și sunt obținute prin combinarea funcțiilor $\text{bex}\theta$ și a derivatelor ei, care sunt

(15.16) $\frac{d(\text{bex}_{1,2}\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \{ \arcsin[s(\sin(\theta - \varepsilon))] \} =$
 $= \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} = 1 - \text{dex}_{1,2}\theta = 1 - \frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta}$

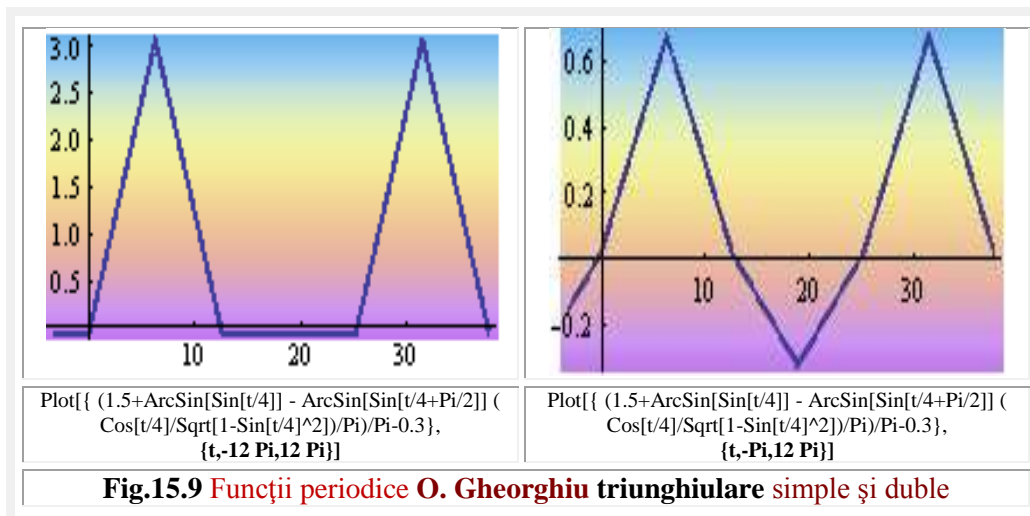
pentru variabila excentrică , iar pentru variabila centrică, derivata este



$$\begin{aligned}
 (15.17) \quad \frac{d(\text{Bex}\alpha_{1,2})}{d\alpha_{1,2}} &= \frac{d}{d\alpha_{1,2}} \left\{ \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{\text{Rex}\alpha_{1,2}} \right\} = \\
 &= \frac{d}{d\alpha_{1,2}} \left\{ \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cdot \cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}} \right\} = \\
 &= \frac{1 - s \cdot \cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{1 + s^2 - 2s \cdot \cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)} = \text{Dex}\alpha_{1,2} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \cos n \alpha_{1,2}
 \end{aligned}$$

Se observă din relațiile (15.7) și (15.17) că, atât funcția $\text{bex}\alpha_{1,2}$ cât și derivata ei reprezintă suma sumei unei infinități de termeni și, de aceea, ea poate reprezenta mult mai exact anumite funcții speciale, așa cum s-a putut observa anterior, decât dezvoltările cu un număr limitat de termeni.

Pentru alte aplicații se poate apela la lucrarea **Mircea Șelariu** “SMARANDACHE STEPPED FUNCTIONS” → “Funcții în trepte **Smarandache**”, SCENTIA MAGNA, An International Journal, Vol.3, No.1, 2007, ISSN 1556-6706, pag. 81 ... 92, din care se vor prezenta câteva idei în continuare. Vom denumi funcțiile ale căror grafice sunt linii drepte frânte sau sunt formate din segmente de linii drepte **funcții Octav Gheorghiu** sau pe scurt, **funcții Gheorghiu (FG)**.



Aceasta, pentru a cinsti memoria excelentului profesor de matematică al Universității “**Politehnica**” din Timișoara, **Octavian Emilian Gheorghiu**, asistent al renumitului profesor bucureștean **Grigore C. Moisil**, apoi șeful Catedrei de Matematică I de la Facultatea de Mecanică din Timișoara, urmaș, la șefia Catedrei de Matematică, al profesorului **Valeriu Alaci**.

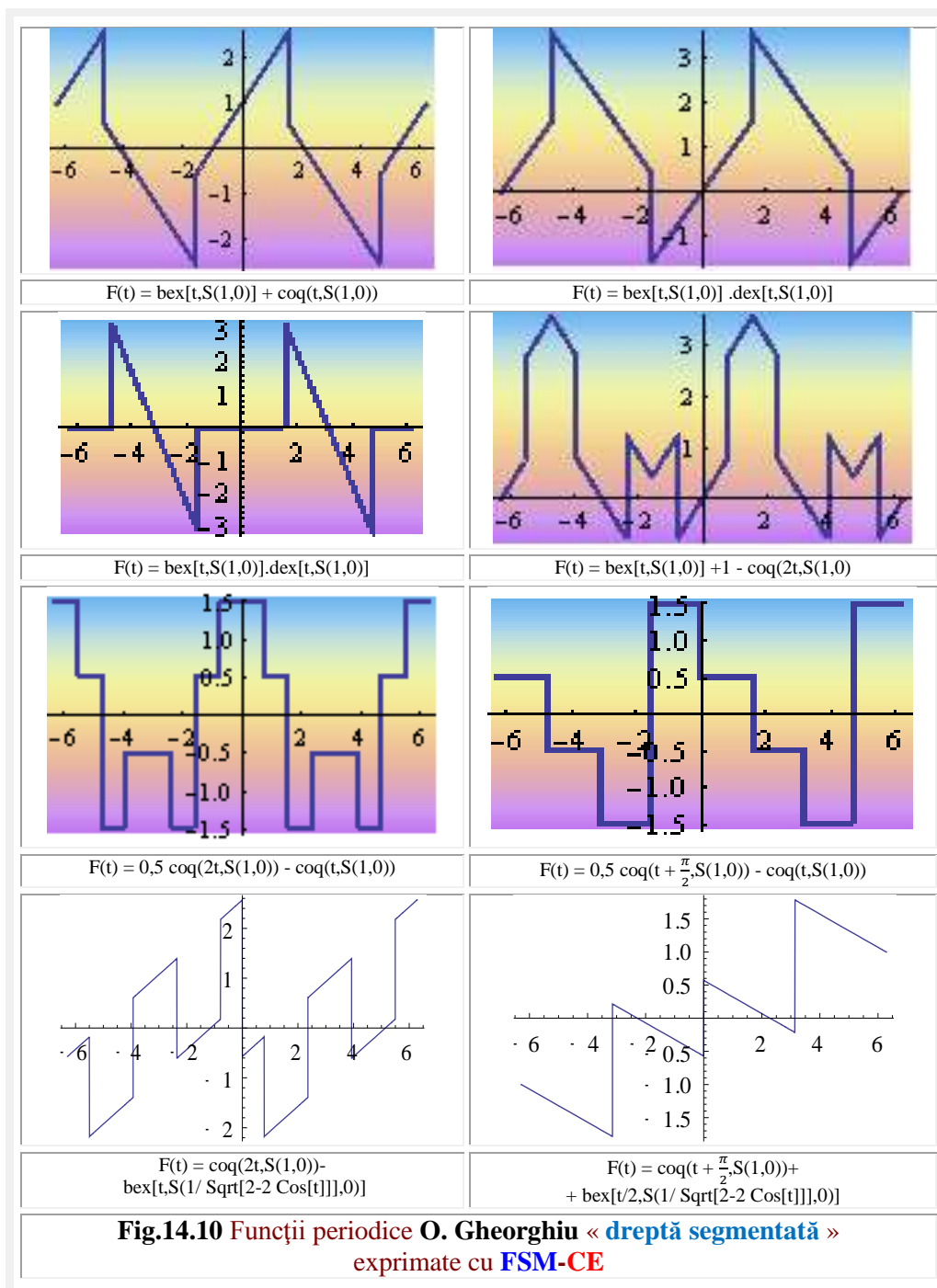
Am chibzuit mult, foarte mult, până să decid dacă adevărul trebuie spus în orice condiții și în oricare împrejurare. Chiar și într-o carte de matematică. Cred că trebuie spus, mai ales pentru că matematica, prin excelență, cumulează numai adevărurile existente între diversele entități, adevăruri despre numere și despre relațiile adevărate dintre ele. De aceea, adevărul trebuie spus, oricât de crud ar fi el, și despre cei ce produc matematică, adică, produc adevăruri.

S-a pensionat cu puțin înainte de 1989, scârbit de relațiile dintre “oamenii noi”, relații de clan, de partid, prin care cei capabili și merituoși erau marginalizați, produs al socialismului multiateral “dezvoltat”. Păstrate cu “sfințenie” și după, de eșalonul doi.

Iar după această dată, când leul s-a depreciat exponențial, cu exponent puternic negativ, puterea de cumpărare a pensiei tinzând asimptotic spre axa x ($y = 0$) văzând cu ochii, având și o soție nepensionară, a fost obligat să trăiască în condiții de mizerie greu de descris. A murit flămând !. Profesor universitar, pensionar, în România post decembristă, în acea Românie după care tânjea atât de mult înainte de '89, a murit, de fapt, de foame ! Incredibil, dar adevărat ! Ce ironie a sorții !

Aflând de situația lui jalnică, mă pregăteam să-i duc ceaiuri și zahăr, fără să-l jignesc, de care au întotdeauna nevoie bătrânii, când am aflat că el a decedat deja.

A fost un puternic susținător al **supermatematicii** și **Președinte de onoare** al **Excentric Clubului Român**, club înființat de cei ce, liberi și nesiliți de nimeni, acceptă și promovează noua **matematică excentrică (ME)** și, totodată, **supermatematica SM**.



S-a stins un mare matematician. Era atâta de scârbit de ce se întâmplă în jurul lui, scârbă pe care nu se ferea să și-o exprime voalat, dar nu suficient de voalat, astfel

că atitudinea lui sfidătoare față de regim și exponenții lui, îi aducea mari prejudicii în epocă de tristă amintire, încât nici nu dorea să facă paradă de cunoștințe sale vaste și temeinice de matematică și pentru că... nu avea pentru cine.

Cred că este extrem de puțin ceea ce încercăm să facem acum, **postmortem**. Să-i cinstim memori cu niște funcții denumite **Octav Em. Gheorghiu**, cum se semna el, și să evocăm adevărul pentru ca el să fie cunoscut nu numai de cei apropiați lui, ci și de alții, ca astfel de situații penibile, într-o țară pretins civilizată, să nu se mai repete.

Mă îngrozește gândul că în această țară, pretins civilizată, partidele, fără ideologii, sunt niște adunături de avari, care nu precupețesc niciun mijloc pentru câștigarea puterii, ca apoi, sub umbrela neagră a protecției “guvernamentale”, cu organisme înființate în acest scop, să jefuiască în liniște ceea ce a mai ramas de jefuit.

Și, în timp ce haitele se năpustesc și se luptă asupra prăzii, pentru a mușca o halcă cât mai mare, neatenți la ce se întâmplă în jurul lor, sau neputincioși să afle, hienele, alți excroci, internaționali, mai stilați, mai experimentați, mai avizi, dar cu mult mai discreti, trag sforile și își freacă mâinile de bucurie, și-și devorează prada cu fulgi cu tot: **România**.

Divide et impera ! Divide și stăpânește ! Mă îngrozește gândul că mâine, poimâine, guvernul, profitând de psihoza de criză, va declara : “Nu mai avem bani de pensii !” Concluzia ? Numai într-o țară normală, adevărul rostit, face ca o situație neplăcută să nu se mai repete....Ceea ce nu e cazul.. Așa că revenim la “oile” noastre. Dar, cu sentimentul datoriei împlinite !

15.5. FUNCȚII SUPERMATEMATICE ÎN TREPTE

15.5.1 INTRODUCERE

Matematicianul român **Octavian Stănășilă** susține că fizica a devenit o știință odată cu descoperirea lumii analizei matematice. La rândul ei, dezvoltarea fizicii a impus dezvoltarea analizei matematice.

Fizica teoretică și, cu precadere, în mecanica cuantică, optică, propagarea undelor, diverse fenomene de electromagnetism și rezolvarea unor probleme de limită au impus introducerea unor noțiuni noi, care ies din cadrul analizei matematice clasice și a căror justificare nu se mai putea face în acest cadru [Kecs, W., Teodorescu, P.P. “**APLICAȚII ALE TEORIEI DISTRIBUȚIILOR ÎN MECANICĂ**” Editura Academiei Romane, Bucuresti, 1970].

Ceea ce nu înseamnă că, nu va veni un moment, în matematică, în care acest lucru se va putea face. El, momentul, consistă în descoperirea unor componente de matematică, înglobate în **matematica excentrică (ME)**, care fac obiectul lucrării de față, funcții care multiplică la infinit toate formele și obiectele matematice, asigurând o vastă extensie a matematicii clasice / ordinare, care se va numi, în continuare, **matematică centrică (MC)**.

împreună, adică, reuniunea celor două matematici, formând, ceea ce a fost denumită, așa cum s-a mai afirmat în volumul I al acestei lucrări, **supermatematică (SM)**.

15.5.2 REDAREA DERIVATELOR UNOR FUNCȚII

Verbul a reda are trei înțelesuri în limba română. Primul înțeles “a da din nou”, în sensul de “a restitui” este cel la care ne referim și nu “a descrie, a exprima” sau “a reproduce”.

Ce restituim ? Restituim unei funcții (de $s = \pm 1$), dintr-o familie de funcții, de $s \in [-\infty, +\infty]$, de exemplu, **FSM-CE**

$$(15.18) \quad \beta_{1,2}(\theta) = \text{bex}_{1,2}\theta, s \in [-\infty, +\infty],$$

derivata ei, care este, așa cum s-a mai afirmat, **FSM-CE**

$$(15.19) \quad d\beta_{1,2}(\theta) / d\theta = d[\theta - \alpha_{1,2}(\theta)] / d\theta = 1 - \text{dex}_{1,2}\theta.$$

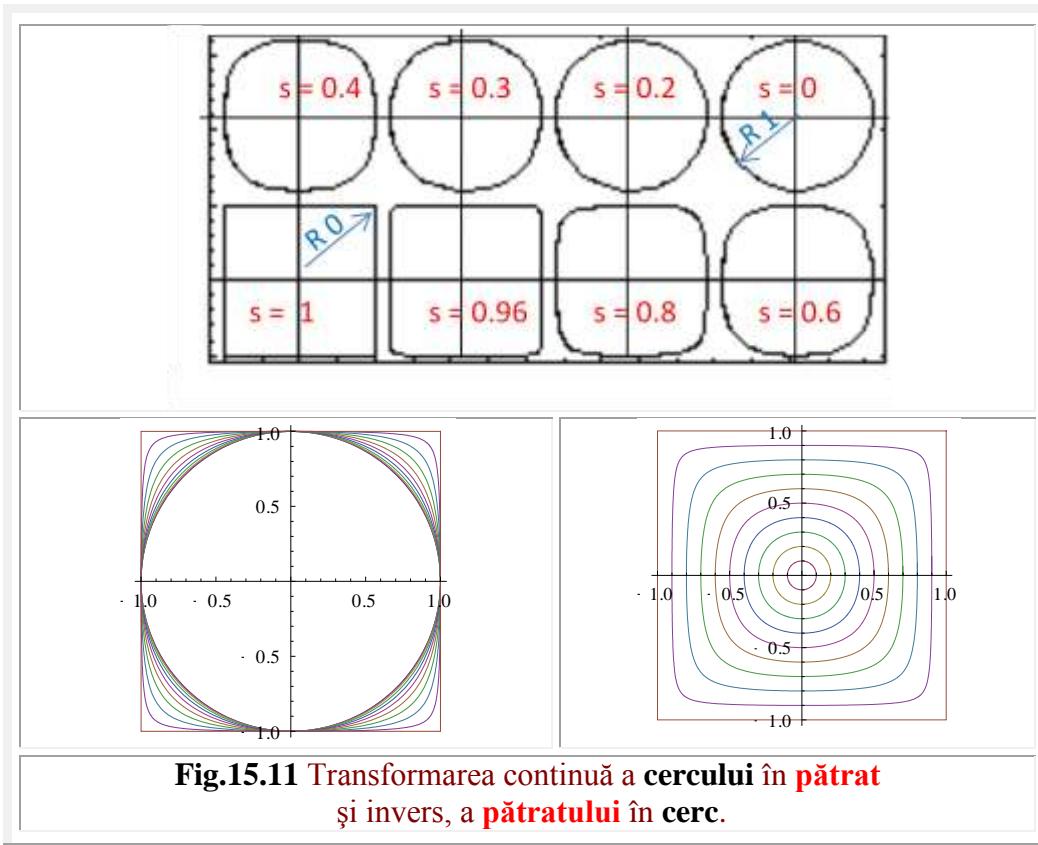
Derivată care există și pentru $s = \pm 1$, dar pe care **Weierstrass** i-a negat-o, pentru că el **întâi a dat valoarea $s = \pm 1$ familiei de funcții** (15.18) și **apoi a derivat**, pe când succesiunea acestor operații este inversă: întâi se derivează familia de funcții și, apoi, derivata se particularizează pentru valoarea $s = \pm 1$. Eroare scuzabilă, pentru că, la acea dată, nu se știa că cercul și pătratul au aceleași ecuații parametrice; pentru $s = 0$ obținându-se un **cerc perfect**, iar pentru $s = \pm 1$ un **pătrat perfect** (Fig.15.11).

Această relație **SM** simplă, în care, prin modificarea excentricității numerice s de la 0 la 1 se obține o transformare / mișcare continuă a cercului în pătrat, este o mișcare internă a **SM**.

Henri Bergson, un mare gânditor, admitea că (“GÂNDIRE ȘI MIȘCARE. Eseuri și conferințe”, Polirom, Iași, 1995, pag. 209) “*Matematica modernă este tocmai un efort de a înlocui ceea ce este gata făcut cu ceea ce se face, pentru a urmări generarea mărimilor, pentru a surprinde mișcarea nu din exterior și prin prisma urmărilor ei evidente, ci din interior și prin tendința ei de a schimba, pentru a adopta continuitatea mobilă a desenului lucrurilor*”.

Dar, cu toate acestea, *i se pare absurdă ideea că cercul și pătratul pot să facă parte din aceeași familie*. Cităm din **H. Bergson** “EVOLUȚIA CREATOARE. Eseuri de ieri și de azi”, Institutul European, 1998, pag. 258 “*Când am definit cercul mi-am reprezentat fără probleme un cerc negru sau alb, de carton, fier sau cupru, un cerc transparent sau opac – dar nu un cerc pătrat, pentru că legea generării cercului exclude (?) posibilitatea ca să delimitezi această figură prin linii drepte.*”

Să delimitezi, da, dar să curbezi o dreaptă și s-o transformi într-un cerc o știe toată lumea tehnologică ! Acum o află și tagma matematicienilor, deoarece, pornind de la pătrat, care este cercul de $s = \pm 1$ și micșorând progresiv, continuu, valoarea excentricității numerice de la $s = +1$ spre $s \rightarrow 0$, colțurile pătratului încep să se rotunjească cu raze de racordare R din ce în ce mai mari, iar când raza **de racordare R** ajunge la valoarea $+1$, pentru $s = 0$, cele patru raze de racordare ale colțurilor pătratului vor forma cercul perfect de rază $R = 1$, care este cercul unitate sau cercul trigonometric. Este “exact” ce se întâmplă la transformarea, prin strunjire din mai multe treceri, a unei bare pătrate în una circulară, cu diferența că la strunjire raza R nu este constantă, ci din ce în ce mai mică pe când în matematică ea rămâne constantă.



Modul în care porțiunile / segmentele de dreaptă alternează cu arce de cerc sunt mult mai evidente în **transformarea excentrică**, prezentată în Vol I, §5.1, **Fig. 5.6**, pag. 166, ca inversă a transformării de centrare. Astfel de transformări sunt prezentate în **figura 15.11** și sunt realizate cu ajutorul **FSM cvadrilobe**, cosinus cvadrilob **coq θ** și sinus cvadrilob **siq θ** prin ecuațiile parametrice

$$(15.20) \quad \begin{cases} x = R \cdot siq\theta = R \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-s^2\sin^2\theta}} \\ y = R \cdot coq\theta = R \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-s^2\cos^2\theta}} \end{cases}$$

Aceleași curbe închise se pot obține și cu **FSM-CE** derivată excentrică și cu ecuațiile parametrice

$$(15.21) \quad \begin{cases} x = R \cdot dex\theta \\ y = R \cdot dex(\theta \pm \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

De fapt, așa cum s-a arătat într-o lucrare [Mircea Șelariu, "INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ", Lucr. Simp. Naț. al Univ. Gh. Anghel, Drobeta Tr. Severin, 2003, pag. 171...178] **dreapta** nu este altceva decât o **strâmbă** de excentricitate numerică **s = 0**, iar o **linie frântă** este o strâmbă de **s = ± 1**. Ca urmare, se poate afirma că transformarea pătratului în cerc este o strâmbare / încovoiere a patru

segmente de dreaptă, reciproc perpendiculare, în patru arce de cerc. Și invers, patratul se obține prin îndreptarea, continuă și progresivă, a patru arce de cerc, fiecare arc de cerc de $\frac{\pi}{2}$ fiind rotit cu $\frac{\pi}{2}$ față de cel precedent, în patru segmente de dreaptă.

Faptul că nu oricare funcție continuă este derivabilă, având drept consecință neexistența vitezei unui punct material, în fiecare moment al mișcării sale, ceea ce, **evident, nu corespunde realității**, constituie un neajuns sever al **MC**, care afectează unitatea și generalizarea rezultatelor, ceea ce nu este cazul în **ME**.

În 1872 a apărut o funcție al cărei grafic este considerat azi **fractal**, când **Karl Weierstrass** a dat un exemplu de funcție cu proprietatea că este continuă, dar **nediferențabilă**, constatare care i-a oripilat pe matematicieni. **Hermite** declara “*Je me détourne avec horreur de ces fonctions continues sans dérivées*”.

Pentru exemplificare, se va alege prima funcție **nicăieri derivabilă**, prezentată de **Weierstrass** [**Schoenberg, J. Isaac**, “**PRIVELIȘTI MATEMATICE**”, Editura Tehnică, București, 1989, pag.105...115, Cap.11 «Despre curbe **Peano** și nediferențabilitatea lor », **Fig. 11.2**] :

$$(15.22) \quad W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi t), \quad 0 < a < 1 \text{ și } b = 1,3,5 \dots, (2n-1),$$

un întreg impar, astfel ca $a \cdot b > 1 + 3\pi/2 = 5,712$.

În aceeași lucrare, este demonstrată ca fiind nediferențabilă și funcția trapezoidală, (**Fig. 15.8**) dată de expresia (15.15) care reprezintă o diferență a funcțiilor beta excentrice de θ și de $\theta + \frac{\pi}{2}$, ambele de **excentricitate numerică $s = 1$** .

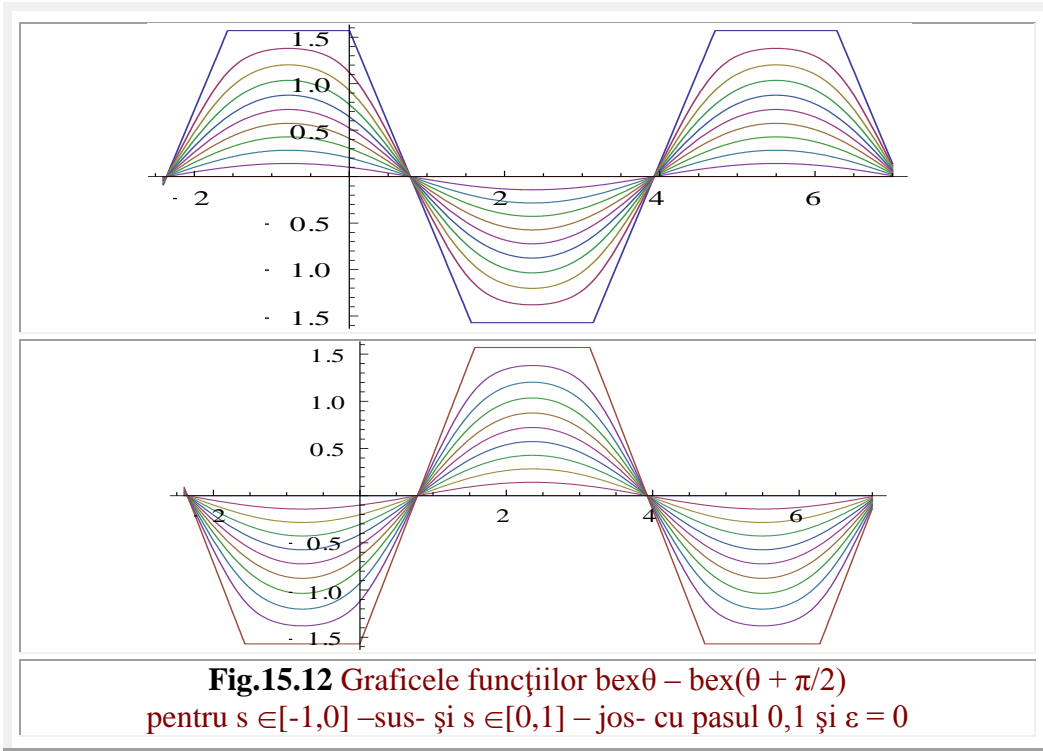
Familia acestor funcții, pentru $s \in [-1, 0]$ și $s \in [0, 1]$ au graficele din **figura 15.12**.

Va deveni evident faptul că funcția (15.15) este derivabilă, dacă întâi se derivează familia de funcții, deci pentru $s \in [-1, 1]$ și în derivată, sau **după derivare**, se dă valoarea particulară de $s = \pm 1$!! Graficele derivatelor acestor funcții sunt prezentate în **figura 15.13**, iar în **figura 15.14** sunt prezentate aceleași grafice pentru $s = \pm 1$.

O modificare a exemplului lui **Weierstrass** se obține prin înlocuirea în (15.22) a lui $\cos \pi t$ prin splineul **Euler** liniar $E(t)$, care interpolează pe $\cos \pi t$ în toate valorile întregi ale lui t și se obține graficul din **figura 15.15,a**. Alăturat, s-a prezentat familia de **funcții supermatematice excentrice**, de variabilă excentrică $\theta \equiv t$, denumită **bext** și care este o componentă / termen al funcției amplitudine excentrica (**aex θ**), funcție definită prin relația

$$(12.23) \quad \alpha(\theta) = aex \theta = \theta - \beta(\theta) = \theta - bex \theta = \theta - \arcsin [s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)],$$

în care **θ este variabila excentrică** sau unghiul pe care o semidreaptă pozitivă, turnantă în jurul excentrului **E(e, ε)** – sau în jurul punct solar **S(s, ε)**, îl face cu axa Ox. (**V.I. Arnold**: «*Kepler a afirmat că planetele se rotesc în jurul soarelui, pe orbite circulare, însă soarele nu se află în centrul cercurilor*»). De aici a rezultat denumirea **excentrului S** de **punct solar**. Iar α este variabila centrică sau arcul de cerc, al cercului unitate ($R = 1$) de la originea arcului $A(1,0)$ la un punct curent pe cerc **W(1, α)** \equiv **W** ($r = rex\theta, \theta$). **Excentricitatea unitară este $s = e/R$** , sau distanța dintre S și O, iar excentrul **S** și **E** sunt expulzate din centrul O pe direcția ε .



Pentru $\theta \rightarrow \pi.t$ și un defazaj $\varepsilon = -\pi/2$ se obține funcția sau, mai precis, familia de funcții beta excentrice

$$(15.24) \quad \text{bex } t = \arcsin[s \sin(\pi.t + \pi/2)],$$

a căror grafice, de excentricitatea numerică $s \in [0, 1]$, cu pasul 0.1, sunt prezentate în **figura 15.15,b**.

Se observă, fără dificultate, că pentru $s = 0 \rightarrow \text{aex } t = 0$ și pentru $s = \pm 1$, limitele extreme (în grafice) a lui s , se obține graficul unei funcții în « **dinți triunghiulari simetrici** » (**Fig.15.15,a**).

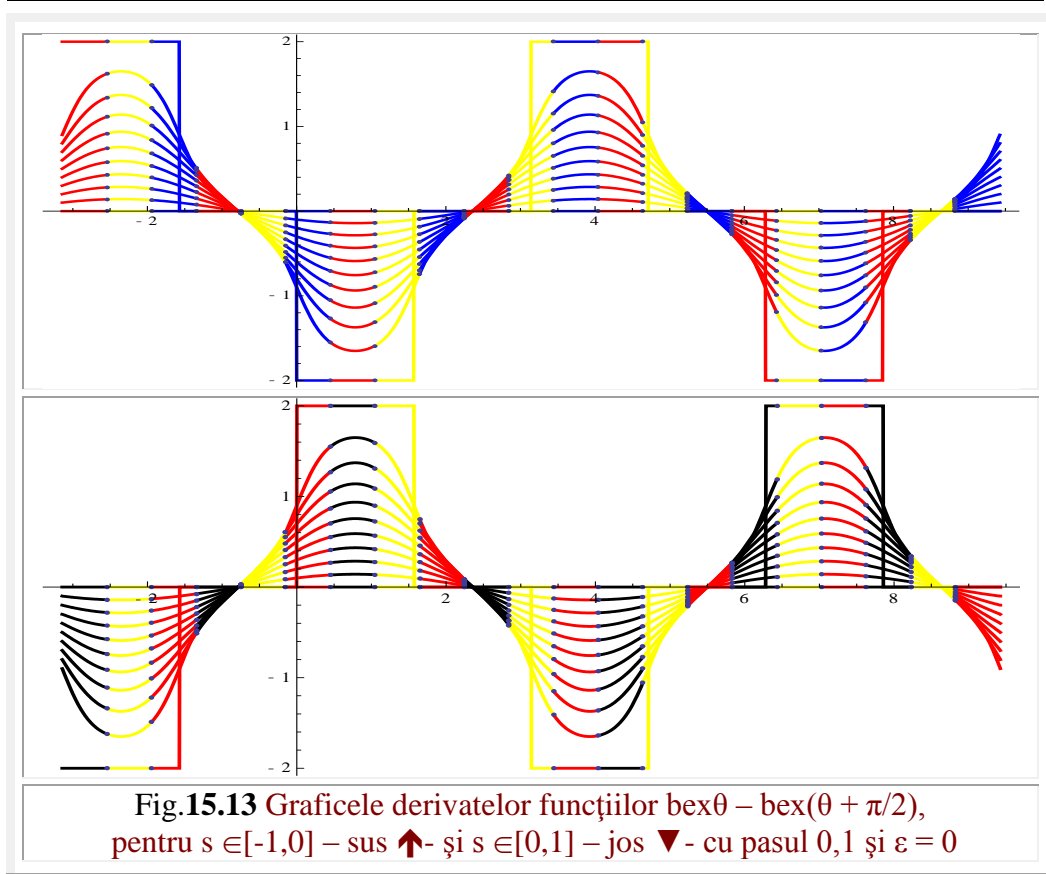
Deoarece, derivata funcției $\text{aex } t$ este funcția derivată excentrică **dex** θ :

$$(15.25) \quad d(\text{aex } t)/dt = d\alpha/d\theta = \text{dex } \theta = 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}},$$

rezultă că, cel de al doilea termen din relația (15.25), este tocmai derivata funcție **bex** θ , adică:

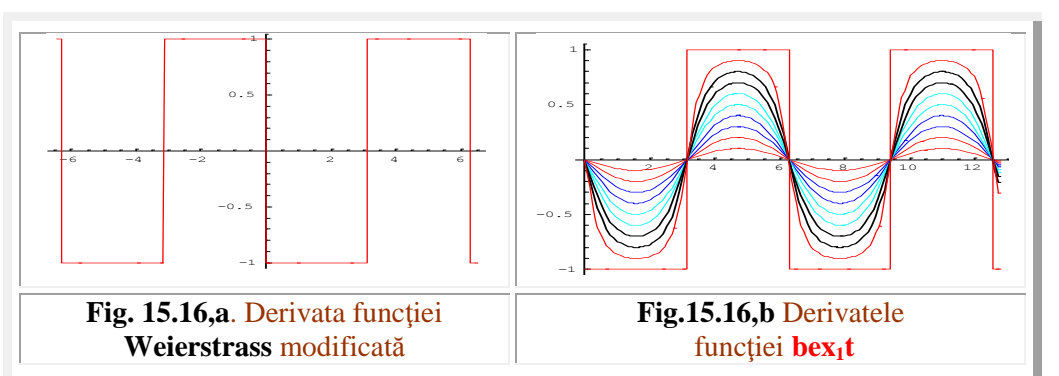
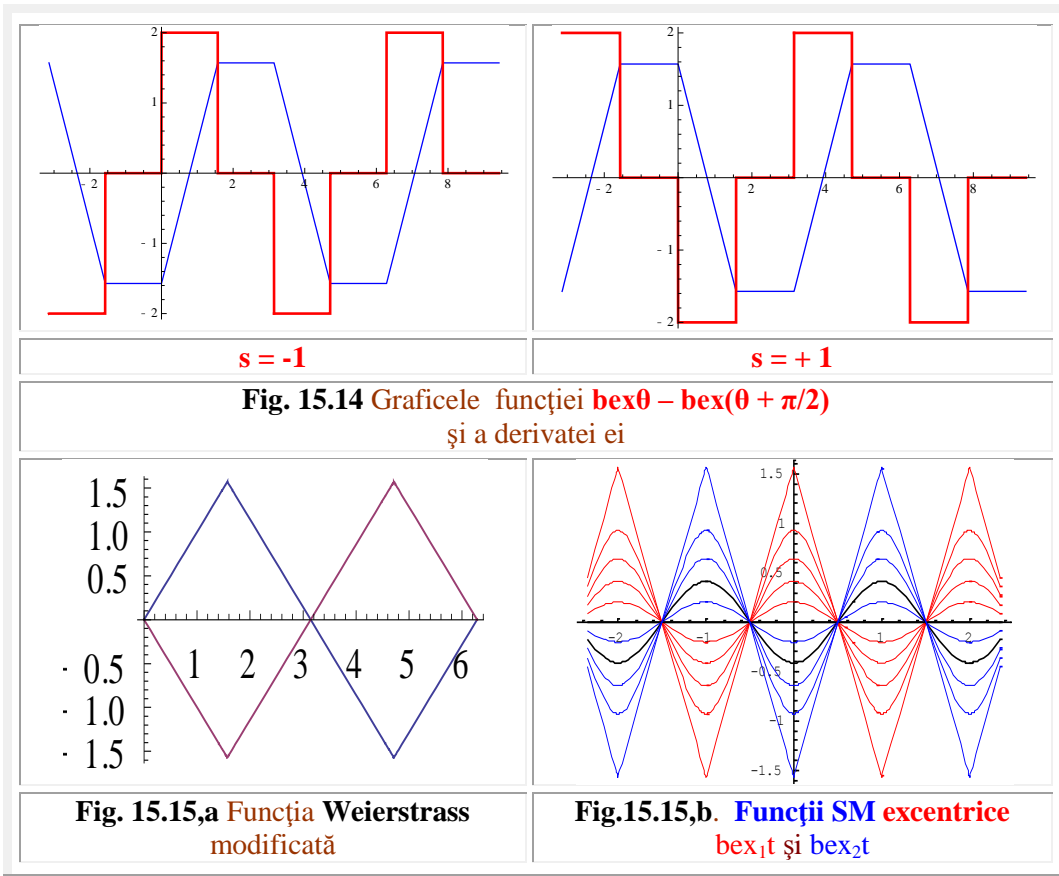
$$(15.26) \quad d(\text{bex } \theta)/d\theta = \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} = s \cdot \text{coq}(\pi.t + \pi/2) = -s \cdot (\text{siq}\pi.t),$$

care este produsul **excentricității numerice** s cu funcția **cosinus cuadrilob** **coq** θ [Vol. I, Cap.2, §2.3, pag. 50 .. 56] defazată cu $\varepsilon = -\pi/2$, astfel că rezultă $-s \cdot \text{siq}\theta$, a cărei familii de grafice sunt prezentate în **figura 15.16,b**, pentru $s \in [0, 1]$, cu pasul 0.1 și, în **figura 15.16,a**, o singur funcție, pentru $s = 1$.



Funcția **sinus cuadrilob** ($siq\theta$), pentru excentricitatea numerică $s = 1$, reprezintă, în teoria semnalelor, raspunsul unui releu la un semnal sinusoidal, funcție denumită și **sinus pătrat** [Săvescu, M., Constantin, I., Petrescu, T., METODE DE APROXIMARE ÎN ANALIZA CIRCUITELOR ELECTRONICE, Editura Tehnică, București, 1982, pag. 31], fiind chiar funcția trigonometrică excentrică **sinus excentric**, de excentricitate numerică $s = 1$, definită pe un pătrat, ne rotit cu $\pi/4$ ca în cazul funcțiilor pătratice **Alaci**, funcție introdusă de autor în matematică sub denumirea de sinus cvadrilob / quadrilob – $siq\theta$ sau $sinq\theta$ -, alături de funcția cosinus cvadrilob / cosinus quadrilob – $coq\theta$ sau $cosq\theta$ - .

Coroborând funcțiile și derivatele lor, se observă că ele se corespund. Astfel, funcția **Weierstrass** modificată, din **figura 15.15,a**, privită ca o funcție **bext** de excentricitate numerică $s = 1$, devine complet derivabilă !.



15.5.3 ASUPRA DISTRIBUȚIILOR

În 1926 **P.A.M. Dirac** a introdus, în mecanica cuantică, “funcția” delta (δ) care este nulă peste tot, cu excepția unui punct (în origine luând valoarea ∞), definită prin:

$$(15.27) \quad \delta(x) =: \begin{cases} 0, t \neq 0 \\ +\infty, t = 0 \end{cases}$$

și a cărei integrală este

$$(15.28) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Aceeași valoare a integralei o are și funcția **impuls unitar** $\Delta(x, \lambda)$ definită de:

$$(15.29) \quad \Delta(x, \lambda) = \begin{cases} 0, x < -\frac{\lambda}{2} \\ \frac{1}{\lambda}, -\frac{\lambda}{2} \leq x \leq \frac{\lambda}{2} \\ 0, x > \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

Se observă că, pentru $\lambda \rightarrow 0$, se obține funcția **Dirac** $\delta(x)$.

Trebuie menționat că o definiție riguroasă a impulsului **Dirac** poate fi dată în cadrul **teoriei distribuțiilor** [Kecs, W., Teodorescu, P.P. **APLICAȚII ALE TEORIEI DISTRIBUȚIILOR ÎN MECANICĂ**, Editura Academiei Române, București, 1970] sau a **funcțiilor generalizate**, un capitol al analizei funcționale.

Impulsul unitar poate fi privit și ca derivată a funcției **treaptă unitară** (ideală), sau a funcției **Heaviside** $\Gamma(x)$, definită prin

$$(15.30) \quad \Gamma(x) =: \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

admitând, în acest fel, derivabilitatea oricărei funcții continue pe porțiuni.

Funcția **rampă unitară** este definită prin :

$$(15.31) \quad \mathbf{R}(x) =: \begin{cases} 0, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$

și derivata ei este funcția **treaptă unitară ideală** (**Heaviside**).

15.5.4 FUNCȚII TREAPTĂ, IMPULS ȘI RAMPĂ UNITARE PERIODICE, EXPRIMATE CA FSM-CE ȘI CA FSM CUADRILOBE EXCENTRICE (FSM-QL)

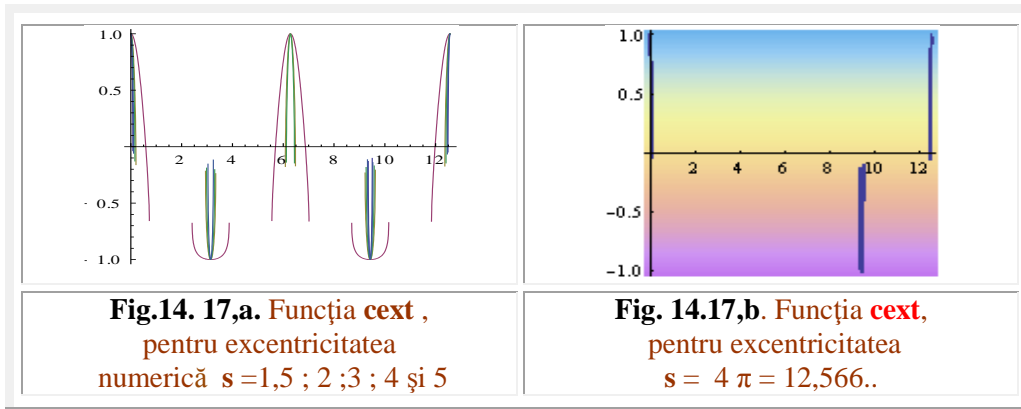
În **figurile 15.17** și **15.18** sunt prezentate graficele funcțiilor **cosinus excentric** (**cext**) și, respectiv, **cosinus cuadrilob** excentric (**coqt**) pentru **excentricități numerice** s supraunitare.

Se observă că, odată cu creșterea valorii excentricității numerice s , domeniul de existență a funcțiilor se restrânge la intervalul în care, o dreaptă turnantă, din excentrul $\mathbf{S}(s, \varepsilon)$, exterior cercului unitate, inersează cercul unitate. Acest interval I este periodic, cu perioada 2π (π , dacă nu se face distincție între cel două semidrepte) și este dat de relația

$$(15.32) \quad I = t_{\text{final}} - t_{\text{initial}} = 2\gamma = 2\arcsin(1/s),$$

pentru care funcția

$$(15.33) \quad \mathbf{del0} = \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)} = 0,$$



în care

$$(15.34) \quad t_{\text{initial}} = \pi + \varepsilon - \gamma = \pi \text{ și } t_{\text{final}} = \pi + \varepsilon + \gamma = \pi,$$

variabila excentrică: $t \equiv \theta \pmod{2\pi}$ astfel că, pentru excentrul S tinzând, pe axa x ($\varepsilon = 0$) spre infinit ($s \rightarrow \infty$), domeniul I tinde spre zero ($I \rightarrow 0$). Rezultă că, la $t = \pi$ și $s \rightarrow \infty$, funcția $\mathbf{cex}_1 t$ este un semnal **impuls**, de amplitudine -1, care se repetă periodic cu perioada 2π , iar, a doua determinare - secundară, de indice 2- a funcției $\mathbf{cex}_2 t = 1$ pentru $t = 0 + 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), deci și la $t = 2\pi$, pentru $s \rightarrow \infty$, așa cum rezultă și din **figura 15.16,a și 15.16,b**.

Se vor numi, în continuare, aceste funcții « **funcții impuls periodic cex_t de amplitudine unitate** cu $s \rightarrow \infty$ ». Pentru $\varepsilon = \pi/2$ se vor obține, asemănător, pentru $s \rightarrow \infty$, « **funcții impuls periodic sext de amplitudine unitate** ».

Deoarece

$$(15.35) \quad \mathbf{cex}_{1,2}^2 t + \mathbf{sex}_{1,2}^2 t = 1,$$

unde $\mathbf{cex}_{1,2} t = \pm 1 \rightarrow \mathbf{sex}_{1,2} t = 0$ și invers.

De aceea, la $t = \pi$, funcția $\mathbf{sex}_1 t = 0$ cu perioada 2π și funcția

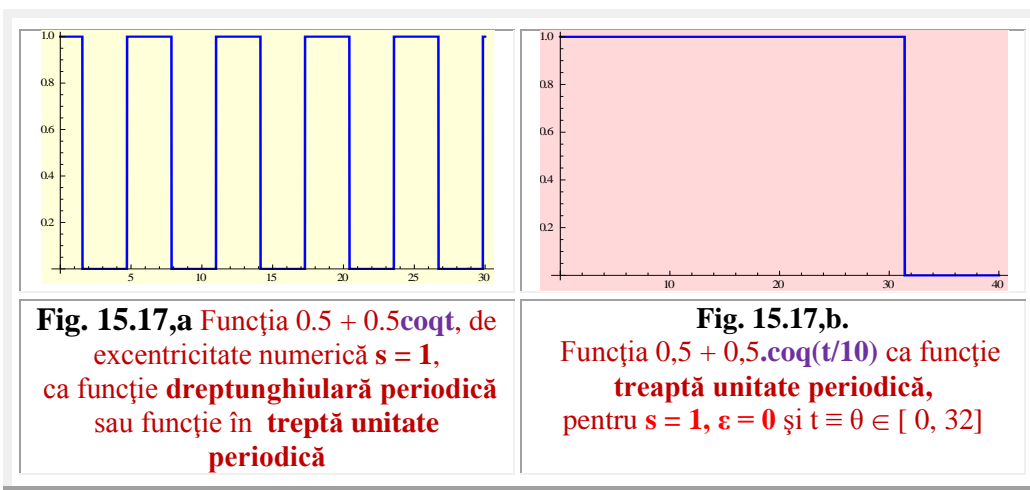
$$I(t,s) = \frac{1}{\mathbf{sex}_1 t} \Rightarrow \infty, \text{ obținându-se funcții } \mathbf{impuls\ unitar\ periodic}, \text{ de amplitudine}$$

infinită, asemănătoare funcției **Dirac**, doar că este periodică, cu perioada 2π .

Și funcția **cosinus cuadrilob** [Șelariu, Mircea Eugen, **QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**, The 11th International Conference on Vibration Engineering, Timișoara, România, Sept. 27-30, 2005]

$$(15.36) \quad \mathbf{coq}_1 t = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}}$$

cu $\theta \equiv t$, pentru $s \rightarrow \infty$ are la $t = \pi \pm 2k\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), a cărui numitor este funcția $\mathbf{delt} = 0$ și $\cos 0 = 1$, astfel că amplitudinea tinde la infinit și se obține, din nou, o funcție impuls unitar periodică (**Fig.15.17,b**).



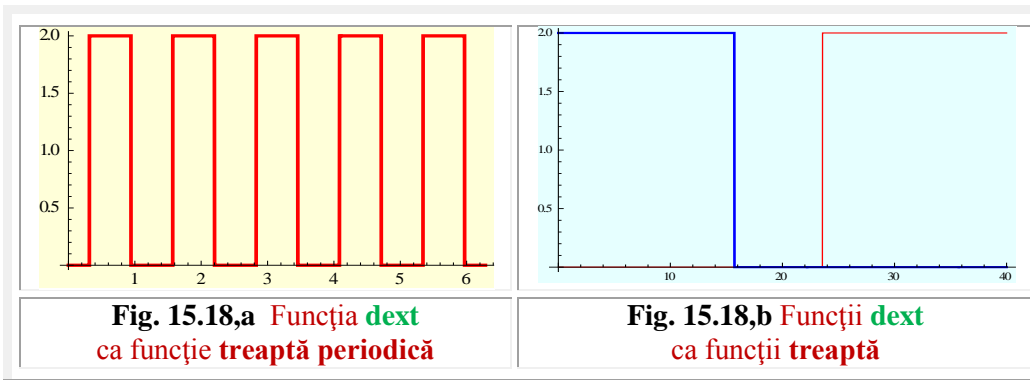
O funcție **dreptunghiulară** periodică de amplitudine unitate (**Fig.15.17,a**) este dată de funcția supermatematică **cuadrilobă excentrică** $0,5(1-\text{siq } t)$, defazată cu $-\pi$.

$$(15.37) \quad D(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sin(t + \pi)}{\sqrt{1 - s^2 \cos^2(t + \pi)}} \right], & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

care poate fi denumită **funcție treaptă unitară periodică**, dacă excentricitatea numerică $s = 1$.

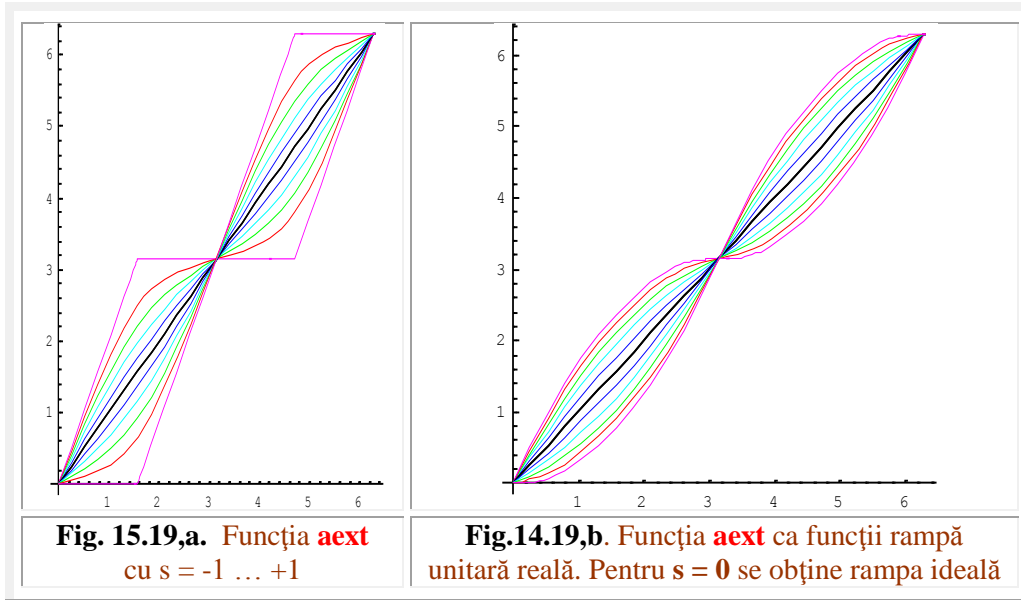
Dacă $t \rightarrow t / 20$, (**Fig.14.17,b**) prima treaptă se prelungește de la π la 10π . Rezultă că pentru $t \rightarrow t / \infty \rightarrow 0$ se obține o funcție treaptă unitară pe toată axa $t > 0$.

O funcție asemănătoare se poate obține și cu funcția derivată excentrică **dext** de $s = 1$ (**Fig. 15.18,a**) cu $t \rightarrow t / 10$ și $\varepsilon = -\pi$ (**Fig. 15.18,b**).



O funcție **rampă unitară ideală** se poate obține ca o dreaptă trecând prin origine, de coeficient unghiular **m** egal cu unitatea ($m = 1$).

$$(15.38) \quad y = \begin{cases} mx, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



O funcție **rampă unitară reală**, care să admită anumite abateri față de liniaritate, se mai poate obține ca o **strâmbă** [Șelariu, Mircea Eugen, “**ÎNTRUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ**”, Lucr. Simp. Naț. Univ. “Gh. Anghel”, Drobeta Tr. Severin, mai, 2003, pag. 171 ... 178] ce trece prin originea $O(0,0)$.

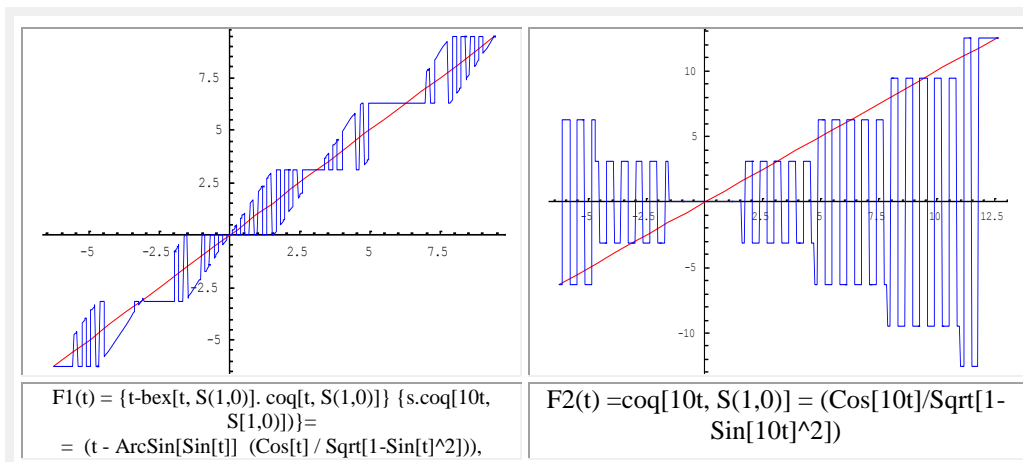
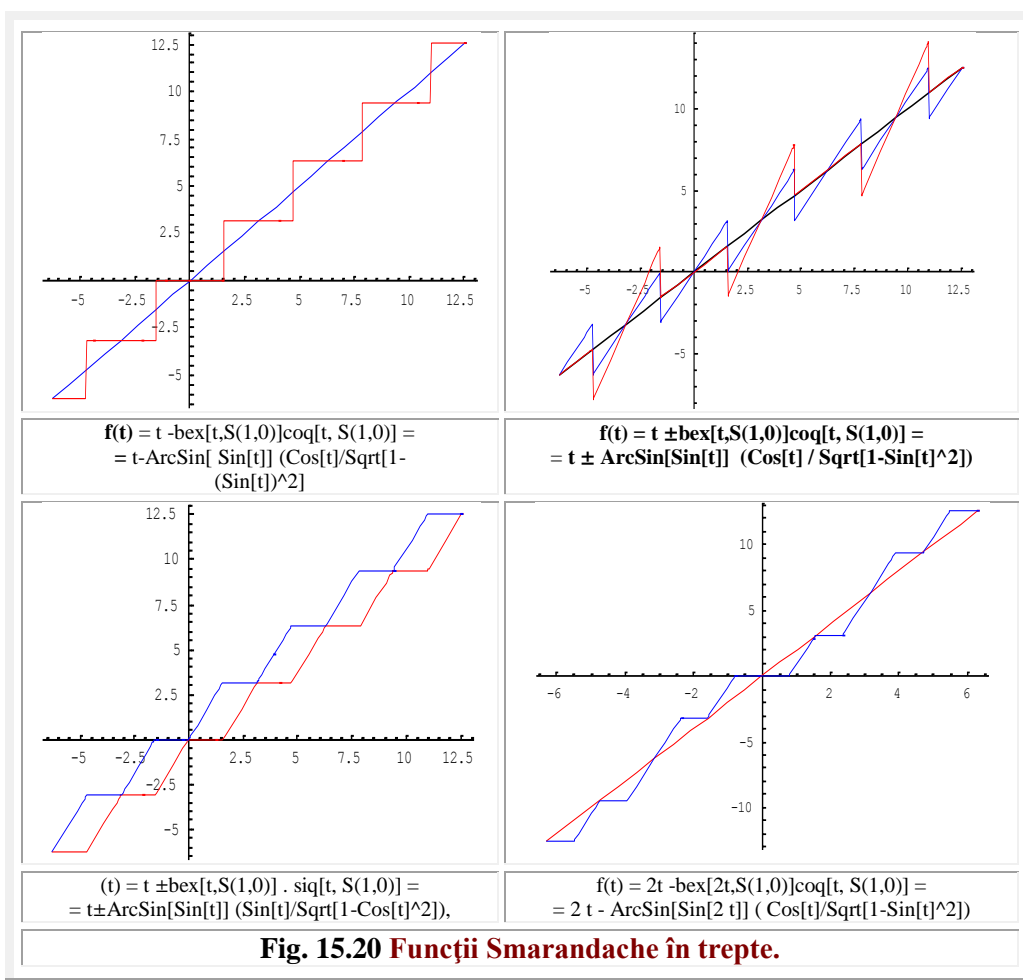
O **familie de strambe**, obținute pentru $s \neq 0$ în intervalul $s \in [-1, 1]$, sunt prezentate în **figura 15.19,a**, în care, pentru $s = 0$ se obține o rampă pentru $t \in [0, \infty]$.

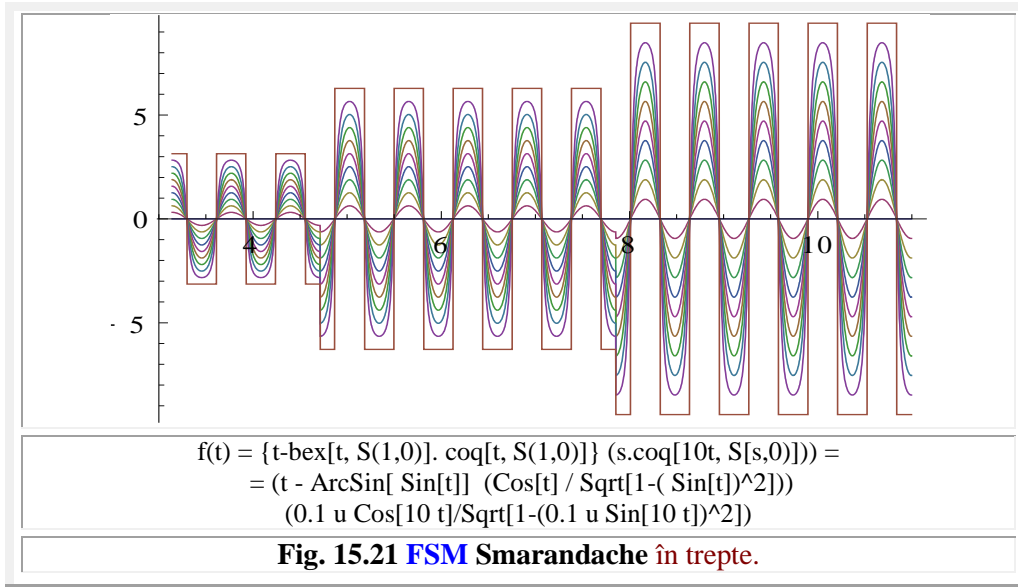
Funcții **rampă unitate** se pot obține prin înlocuirea constantei $m = \tan \alpha$ cu variabila $m = \text{tex } \theta$ pentru excentricitate unitară $s \in [-1, 1]$.

15.5.5 FUNCȚII SUPERMATEMATICE (FSM) **SMARANDACHE ÎN TREPTE**

Prin combinarea funcțiilor **rampă excentrice**, de excentricitate numerică $s = 1$, cu funcții **dreptunghiulare excentrice**, rezultă **funcții în trepte**, denumite **funcții în trepte Smarandache**, în onoarea matematicianului român Dr. Math. **Florentin Smarandache** șeful Departamentului de Matematică de la Universitatea New Mexico, USA.

Câteva funcții de acest gen, împreună cu relațiile lor de definiție sunt prezentate în **figurile 15.20 și 15.21**.

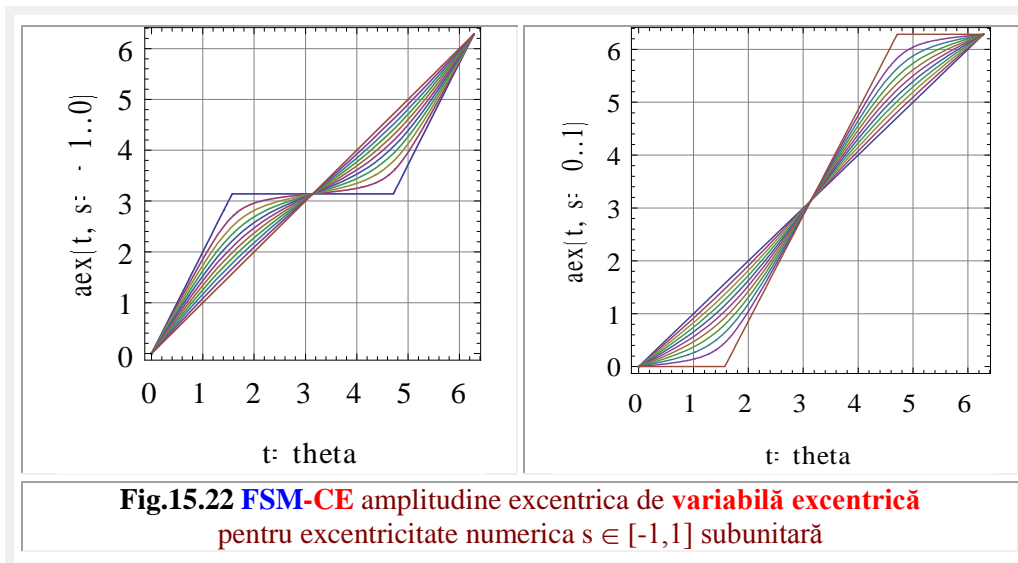




15.5.6 FUNCȚII SUPERMATEMATICE ÎN TREPTE

În capitolele anterioare au fost prezentate, cu precădere, **FSM-CE** de variabilă excentrică, variabilă notată cu θ sau cu y .

Așa cum s-a putut constata, aceste funcții sunt continue doar în domeniul în care excentrul $S(s, \epsilon)$ nu este exterior discului cercului unitate, adică, pentru excentricitatea numerică $s \leq 1$, sau, dacă, excentrul $E(e, \epsilon)$ nu este exterior discului circular de rază R , adică, pentru o excentricitate rală $e \leq R$.



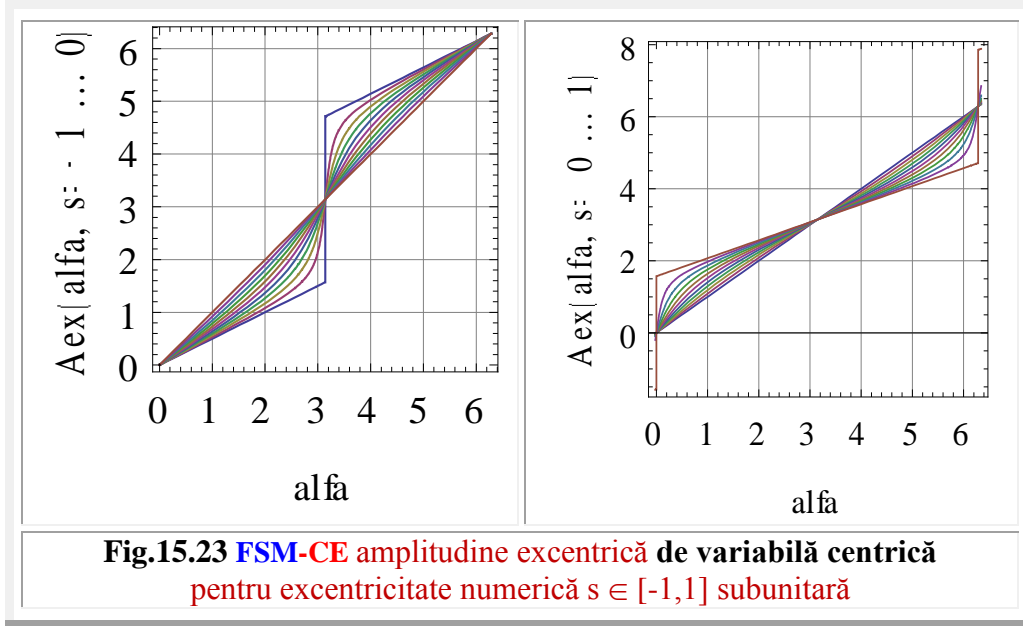


Fig.15.23 FSM-CE amplitudine excentrică de variabilă centrică pentru excentricitate numerică $s \in [-1,1]$ subunitară

Dependențele dintre cele două tipuri de variabile motoare au fost numite **FSM-CE amplitudine excentrică**, și sunt **FSM-CE amplitudine excentrică** de variabilă **excentrică** θ , notată $aex_{1,2}\theta$, ca și cele de variabilă centrică α_1 , notată, conform convenției cu majusculă $Aex\alpha_{1,2}$.

Expresiile **FSM-CE amplitudine excentrică** de variabilă **excentrică** sunt

$$(15.39) \quad \begin{cases} \alpha_{1,2}(\theta) = aex_{1,2}\theta = \theta - \beta_{1,2}(\theta) \\ \phantom{\alpha_{1,2}(\theta)} = \theta - bex_{1,2}\theta \end{cases}$$

iar a celor de variabilă **centrică** sunt

$$(15.40) \quad \theta(\alpha_{1,2}) = Aex\alpha_{1,2} = \begin{cases} \alpha_{1,2} + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{Rex\alpha_{1,2}} \\ \alpha_{1,2} + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha_{1,2})} \end{cases}$$

Graficele lor sunt prezentate în **figura 15.22** și, respectiv, **15. 23**, pentru excentricitate numerică subunitară $s \in [-1, 1]$.

Pentru excentricitate numerică supraunitară, $s \in [-2, 2]$, graficele lui $aex\theta$ sunt prezentate în **figurile 15.24** și ale lui $Aex\alpha$ în **figura 15.25**.

Comparând graficele celor doua familii de **FSM-CE**, se poate observa că cele de variabilă excentrică sunt discontinue, pentru $s \in [1, 2]$ și pentru $s \in [-2, -1]$, în timp ce, cele de variabilă centrică sunt continue și pentru excentricitatea numerică supraunitară, $s > 1, s < -1 \rightarrow s^2 > 1$.

Pentru excentricități numerice supraunitare, **FSM-CE** există doar în domeniile în care o dreaptă $d = d^+ \cup d^-$, turnantă în jurul excentrului **S** sau **E**, intersectează cercul unitate, respectiv, pe cel de rază R .

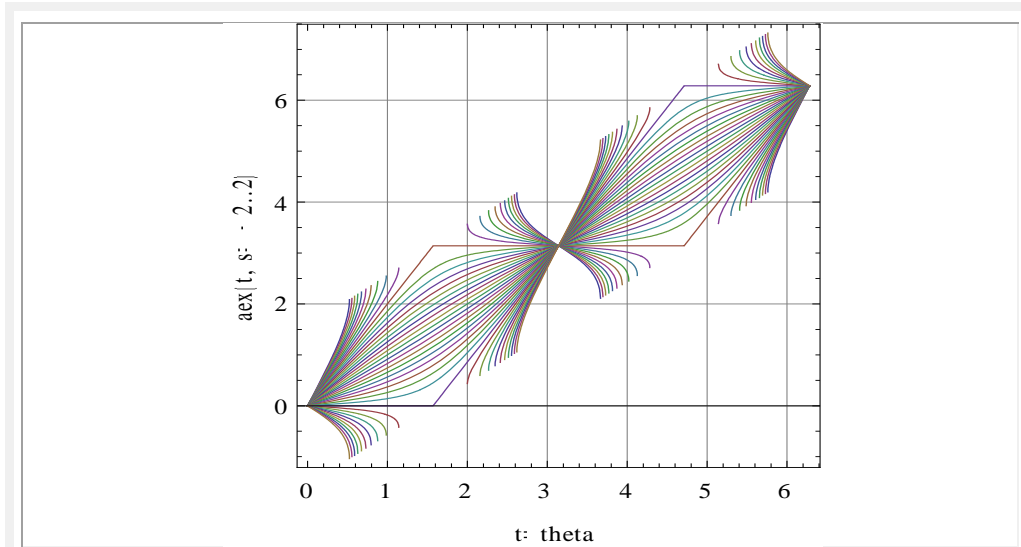


Fig.15.24 FSM-CE amplitudine excentrica **de variabilă excentrică** pentru excentricitate numerica $s \in [-2, 2]$ supraunitară

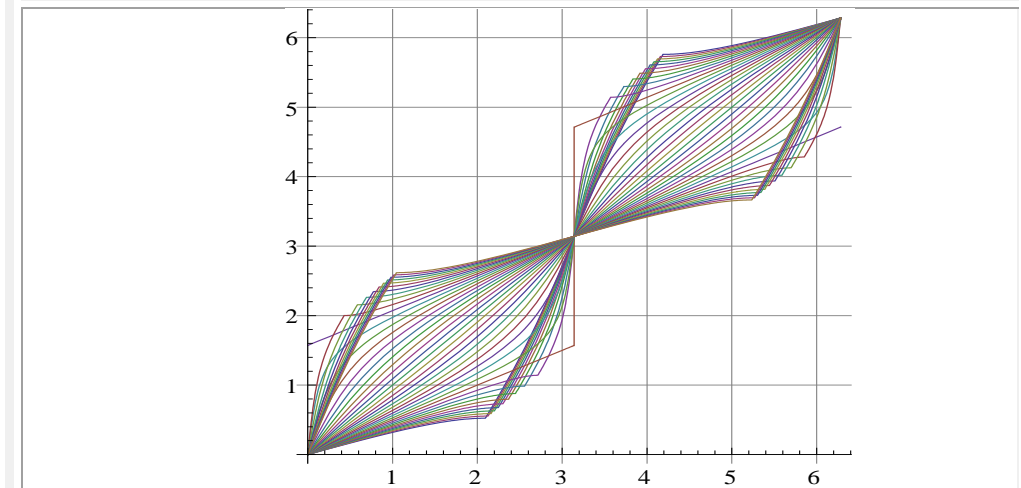


Fig.15.25 FSM-CE amplitudine excentrica **de variabilă centrică** pentru excentricitate numerica $s \in [-2, 2]$ supraunitară

Notând cu W_i și cu W_f cele două puncte de tangență ale cercului unitate / trigonometric $CU(O,1)$ cu dreapta d , coordonatele polare ale acestor puncte de tangență, denumite punct inițial (W_i) și punct final (W_f), față de centrul $O(0,0)$ sunt

$W_i(1, \alpha_i)$, $W_f(1, \alpha_f)$ iar față de excentrul $S(s, \varepsilon)$ vor fi $W_i(r_i, \theta_i)$, $W_f(r_f, \theta_f)$ în care, razele polare, din excentrul S , $r_{i,f}$ sunt date de **FSM-CE** radial excentric de θ și, respectiv, de $\alpha_{1,2}$

$$(15.41) \quad r_{i,f 1,2} = rex_{1,2}\theta_{i,f} = Rex\alpha_{1,2} = \pm(\sqrt{s^2 - 1})$$

cu plus pentru prima determinare principală ($1 \rightarrow +$) și cu minus pentru a doua determinare secundară ($2 \rightarrow -$).

Din (15.43) rezultă valorile sinusurilor unghiurilor limită excentrice $\theta_{i,f}$, care sunt

$$(15.42) \quad \sin(\pi - \theta_{i,f} + \varepsilon) = \frac{1}{r_{i,f}} \rightarrow$$

din care se deduc valorile unghiulare limită excentrice

$$(15.43) \quad \theta_{i,f} = \pi + \varepsilon - \arcsin \frac{1}{r_{i,f}} = \pi + \varepsilon - \arcsin \frac{1}{\pm(\sqrt{s^2 - 1})} \text{ și ale celor centrice}$$

$$(15.44) \quad \alpha_{i,f} = \arcsin \frac{r_{i,f 1,2}}{s} + \varepsilon = \arcsin \left[\frac{\pm(\sqrt{s^2 - 1})}{s} \right] + \varepsilon = \arcsin \left[\pm \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} \right] + \varepsilon.$$

15.6 VARIANTE DE DEFINIRE A **FSM-CE** DE VARIABILĂ CENTRICĂ

Există mai multe posibilități de definire a **FSM-CE** de variabilă centrică, dintre care, prima variantă este prezentată schematic în **figura 15.26**.

În partea superioară este prezentat cazul excentrului **S(s,ε)** interior discului cercului unitate, adică $s < 1$ și, în partea de jos, cazul excentrului exterior acestuia, adică de $s > 1$. Excentrul **S** corespunde cu centrul cercului unitate $C[O(0,0), 1]$.

Aceasta este o primă varianta posibilă de definire a acestor **funcții supermatematice circulare** de **variabilă centrică (FSM-CE)**, care corespunde cu definirea **FSM-CE** de variabilă excentrică, deoarece și aici cele două determinări ale funcțiilor sunt defazate între ele cu π , atât pentru $s < 1$ cât și pentru cazul $s > 1$ (**Fig. 15.26**), deoarece W_1 și W_2 sunt situate pe aceeași dreaptă d , dar, unul pe d^+ și celălalt pe d^- .

Diferența este că, dacă argumentul excentric $\theta = \Omega t$ variază uniform, pentru $\Omega = \text{constant}$, argumentul centric $\theta(\alpha)$ variază neuniform, deși $\alpha = \Omega t$ este o variație uniformă a argumentului centric α . Dependența este dată de relația

$$(15.45) \quad \theta(\alpha) = Aex\alpha = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{Rex\alpha} = \\ = \Omega \cdot t + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\Omega t - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cdot \cos(\Omega t - \varepsilon)}}$$

Este evident faptul că coordonatele punctului $P_1(x_1, y_1)$ sunt **FCC** $x_1 = \cos\alpha$ și $y_1 = \sin\alpha$.

Se observă că pentru cazul $s < 1$, (**Fig. 15.26,a**) variabila motoare $\alpha = \alpha_1$ determină pe cercul **C'** punctul P_1 . Acesta, împreună cu excentru **S(s,ε)**, determină dreapta d , dreaptă împărțită de **S** în cele două semidrepte: pozitivă d^+ și negativă d^- .

Intersecția dreptei d cu cercul unitate **C(O,1)** determină punctele $W_{1,2}$ și, prin acestea, **FSM-CE** de variabilă **centrică**.

Mai rezultă din figură că

$$(15.46) \quad \begin{cases} \theta_1(\alpha_1) = \theta(\alpha) = \alpha_1 + \beta_1(\alpha_1) = \alpha + \beta(\alpha) \\ \theta_2(\alpha) = \theta_2(\alpha) + \pi \end{cases}$$

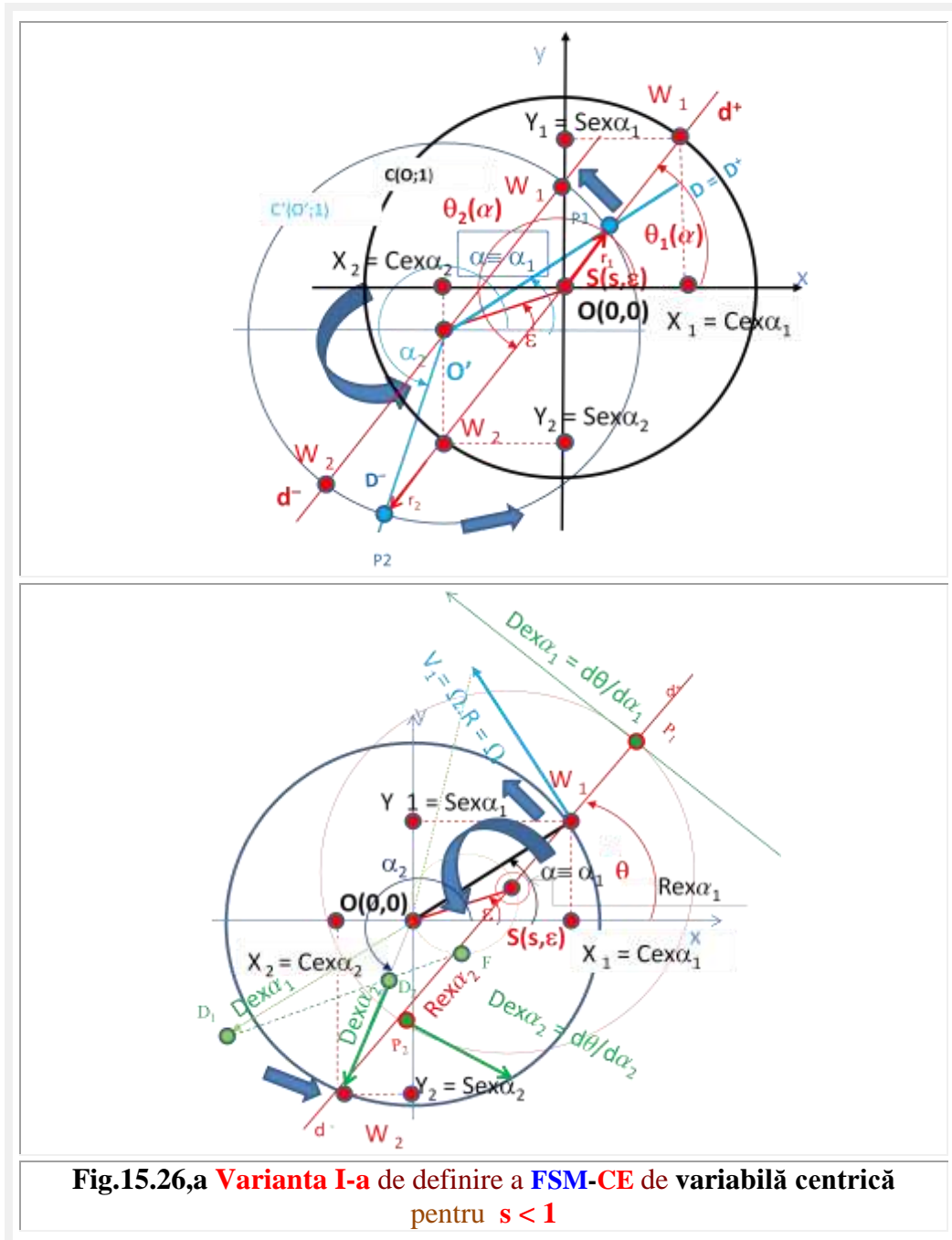
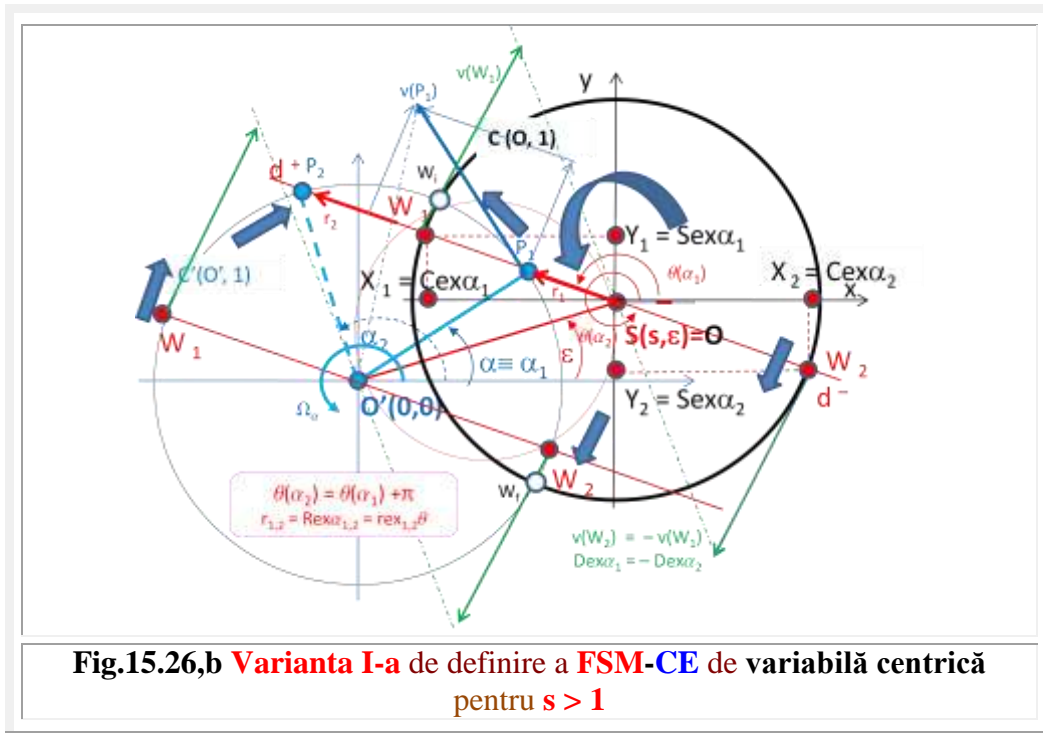


Fig.15.26,a Varianta I-a de definire a FSM-CE de variabilă centrică pentru $s < 1$

Ca urmare, atât în cazul **FSM-CE** de variabilă excentrică cât și la cele centrice, determinarea secundară de indice 2 este defazată cu π , față de determinarea principală de indice 1, sau fără indice, așa cum s-a convenit încă în Vol I a acestei lucrări.



În această primă variantă, se poate renunța la cel de-al doilea cerc unitate $C(S,1)=C(o,1)$, **FSM-CE** $Cex\alpha$ și $Sex\alpha$ pot fi la fel de bine reprezentate pe cercul $C'(O',1)$, dicând din O , paralele cu W_1W_2 , adică de direcție $\theta(\alpha)$ cu axa $O'x$ sau Ox , așa cum s-a marcat suprapus în **figura 15.26. FSM-CE** $Rex\alpha$ și $Dex\alpha$ se reprezintă cel mai simplu direct pe cercul C' cum se arată în dreapta \rightarrow **figurii 15.26,a**.

Pentru a nu altera concluziile, rezultate pe baza schițelor, excentrul S trebuie plasat întotdeauna în primul cadran centric.

În **ambele variante**, variabila motoare este $\alpha = \alpha_1$.

În **varianta I-a** ea va genera punctul P_1 , prin intersecția cercului unitate C' cu direcția α_1 a vectorului \vec{R}_1 din O' , de modul unitate, vector situat pe dreapta $D = D^+ \cup D^-$ în sensul pozitiv al semidreptei pozitive D^+ .

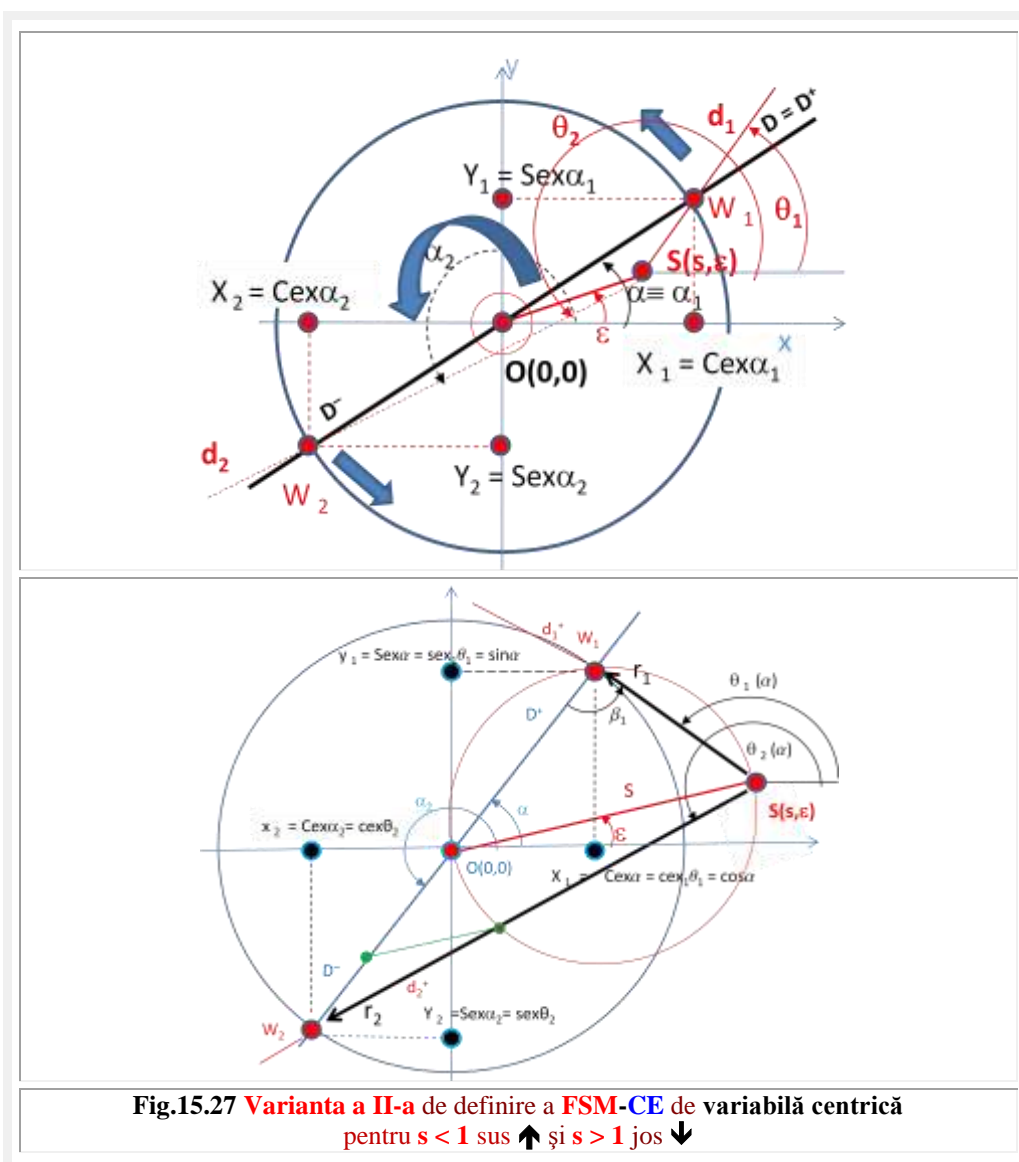
Dreapta centrică D este turnantă în jurul centrului $O'(0,0)$ și trece prin acesta, astfel că semidreapta D^+ va determina punctul P_1 de intersecție cu cercul

15.7 - Funcții cosinus și sinus excentrice de variabilă centrică

unitate $C(O,1)$ și, prin acesta acesta, prima determinare a funcțiilor excentrice de variabilă centrică, de indice 1. Punctul W_1 cu excentrul $S(s,\epsilon)$ va determina dreapta $d = d^+ \cup d^-$ turnantă în jurul lui S .

Intersecția lui $C(O,1)$ cu d^- va determina punctul W_2 și, prin acesta, a doua determinare, secundară, de indice 2, a **FSM-CE** de variabilă centrică.

Prima variantă are avantajul că punctele $W_{1,2}$ sunt aceleași atât pentru **FSM-CE** de variabilă centrică α cât și pentru cele de variabilă excentrică θ , deoarece ele se situează pe aceeași dreaptă d ; unul pe semidreapta pozitivă d^+ și celălalt pe semidreapta negativă d^- .



Pe cale de consecință, valorile FSM-CE de variabilă excentrică sunt aceleași cu a celor de variabilă centrică. De aceea, având expresiile, ca funcții de θ , a primei determinări ale **FSM-CE**, de indice 1, cele secundare, de indice 2, se vor obține prin înlocuirea lui θ cu $\theta + \pi$ în expresiile / ecuațiile primei determinări. Ceea ce se poate aplica numai la **FSM-CE** de variabilă **excentrică θ** !

În această variantă,

$$(15.47) \quad \text{rex}_{1,2}\theta = \text{Rex}\alpha_{1,2}, \quad \text{așa cum s-a mai arătat}$$

$$(15.48) \quad \text{dex}_{1,2}\theta = \frac{1}{\text{Dex}\alpha_{1,2}} \quad \text{sau}$$

$$(15.49) \quad \text{Dex}\alpha_{1,2} = \frac{1}{\text{dex}_{1,2}\theta}, \quad \text{așa cum se va arăta în continuare și}$$

$$(15.50) \quad \begin{cases} \text{Cex } \alpha_{1,2} = \text{cex}_{1,2}\theta \\ \text{Sex } \alpha_{1,2} = \text{sex}_{1,2}\theta \end{cases} \quad \text{pentru același excentru } \mathbf{S(s,\varepsilon)} \text{ și pentru dependențele}$$

$$(15.51) \quad \begin{cases} \alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}(\theta) = \theta - \beta_{1,2} = \theta - \text{bex}_{1,2}\theta = \text{aex}_{1,2}\theta \\ \theta = \theta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2} = \alpha_{1,2} + \text{Bex}\alpha_{1,2} = \text{Aex } \alpha_{1,2} \end{cases}$$

În această primă variantă avem un singur θ și două valori α (α_1 și α_2), dintre care prima este cea motoare. Punctele $\mathbf{W}_{1,2}$, care aparțin dreptei excentrice \mathbf{d} , au, totuși, coordonate polare unghiulare diferite

$$(15.52) \quad \begin{cases} \theta' = \theta, & \text{pentru } \mathbf{W}_1 \\ \theta'' = \theta + \pi, & \text{pentru } \mathbf{W}_2 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = -\pi, & \text{pentru } s < 1 \\ \beta_1 + \beta_2 = \pi, & \text{pentru } s > 1 \end{cases}$$

Simbolic, se poate scrie dependența dintre cele două determinări, de variabilă excentrică θ , în aceasta variantă I

$$(15.53) \quad (\mathbf{FSM-CE})_2\theta = (\mathbf{FSM-CE})_1(\theta + \pi), \text{ care se poate verifica și grafic.}$$

Se observă în figura că, în acest caz, numai pentru $s \geq 1$, indicii punctelor $\mathbf{W}_{1,2}$ sunt inverși cu cei ai punctelor $\mathbf{W}_{1,2}$, din cazul variabilei excentrice și se inversează și sensul de rotație al punctelor $\mathbf{W}_{1,2}$ pe cercurile unitate.

La rotația continuă a dreptei \mathbf{D}^+ în sens trigonometric pozitiv, dreapta \mathbf{d} oscilează, rotindu-se în sens pozitiv pentru \mathbf{P}_1 de la \mathbf{M}_i la \mathbf{W}_f , apoi de la \mathbf{W}_f la \mathbf{W}_i își schimbă sensul de rotație. În \mathbf{W}_i și în \mathbf{W}_f punctele \mathbf{P}_1 și \mathbf{W}_1 se suprapun. Plecând din acest punct în intervalul $\mathbf{W}_i\mathbf{W}_f$, \mathbf{W}_1 se va roti pe \mathbf{C} și pe \mathbf{C}' în sens trigonometric pozitiv, ca și \mathbf{W}_1 în cazul **FSM-CE** de variabilă excentrică, în care \mathbf{W}_1 este punctul care se rotește pe cerc permanent în sens trigonometric pozitiv, în timp ce \mathbf{W}_2 este cel care se rotește permanent în sens negativ, la o rotație pozitivă cu unghiul θ a dreptei \mathbf{d} .

În varianta I-a, α crește continuu, astfel că \mathbf{P}_1 se rotește mereu în același sens pozitiv, în timp ce unghiul θ al dreptei \mathbf{d} își schimbă semnul în punctele $\mathbf{W}_{i,f}$ (inițial \mathbf{i} și final \mathbf{f}) de tangența ale dreptei \mathbf{d} din \mathbf{S} cu cercul unitate. Sensul de rotație al lui \mathbf{W}_2 este invers sensului de rotație al lui \mathbf{W}_1 .

Cazul $s > 1$ corespunde unui mecanism manivelă - culisă oscilantă, care este un subansamblu al mecanismului centric cu parghii cu 6 elemente (v. **Demian T., Tudor D., Grecu E.**, "MECANISME DE MECANICĂ FINĂ", EDP, Buc., 1982, Cap.2.2.3. CINEMATICA ANALITICĂ A UNOR MECANISME UZUALE SIMPLE, pag. 19...20) în care manivela motoare se rotește în jurul centrului $O(0,0)$, cu mișcare uniformă și continuă cu unghiul $\alpha = \Omega.t$, iar o bară, materializează semidreapta \mathbf{d}^+ ,

15.7 - Funcții cosinus și sinus excentrice de variabilă centrică

articulată în punctul $S(s, \epsilon)$, care oscilează cu unghiul θ , între punctele W_1 și W_f , puncte în care își schimbă sensul de oscilație. Punctul W_1 este materializat de culisa care culisează pe bara d^+ , articulată în S , împreună cu care oscilează în jurul excentrului S .

În teoria mecanismelor, între oricare mărime de ieșire și oricare mărime de intrare se pot stabili dependențe denumite funcții de transfer sau de transmitere [15], [16]. Astfel, între θ și α , ca raport

(15.54) $i_R = \frac{\theta}{\alpha}$ se poate stabili **funcția de transmitere a mărimilor unghiulare** sau a **rotațiilor** I_R , între r și R se poate stabili funcția sau **raportul de transmitere al translațiilor** i_T deplasărilor / lungimilor, care se cunoaște deja că este **FSM-CE** radial excentric

$$(15.55) \quad i_T = \frac{r}{R} = \frac{R \cdot r \cdot \cos \theta}{R} = r \cos \theta = \frac{R \cdot R \cdot \cos \alpha}{R} = R \cos \alpha$$

De asemenea, se cunoaște că raportul diferențialelor variabilelor este **FSM-CE** derivată excentrică, care, așa cum s-a mai demonstrat în Vol.I § 6.5 pag.205, reprezintă **expresia generală** a funcției de transmitere a **vitezelor unghiulare** ale tuturor mecanismelor plane

$$(15.56) \quad i_\omega = \begin{cases} \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\alpha/dt}{d\theta/dt} = \frac{d\alpha}{d\theta} = dex_{1,2}\theta, \text{ pentru } \theta \text{ variabilă motoare} \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\theta/dt}{d\alpha/dt} = \frac{d\theta}{d\alpha} = Dex\alpha_{1,2}, \text{ pentru } \alpha \text{ variabilă motoare} \end{cases}$$

cu dependența evidentă

$$(15.57) \quad Dex\alpha_{1,2} = \frac{1}{dex_{1,2}\theta}$$

Reprezentarea tuturor funcțiilor de transfer ale mecanismelor plane printr-o singură funcție **SM** simplă (derivată excentrică $dex\theta$ și $Dex\alpha$) este o altă realizare de semă a **matematicii excentrice (ME)**.

Supermatematica pe lângă contribuțiile teoretice la patrimoniul științei are și o pleiadă de aplicații practice, drept contribuții la patrimoniul tehnic, în acord cu sloganul Prof. dr. **Rothenstein**, profesorul de Fizică de la Politehnica timișoreană, care susține că "**Teoria sine praxa e cum rota sine axa**".

15.6.1 DETERMINAREA PE BAZA TEORIEI MECANISMELOR A EXPRESIILOR UNOR FSM-CE DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ ȘI CENTRICĂ

Din punct de vedere istoric, Teoria Mecanismelor ca și Mecanica și alte multe științe, care acum sunt **independente**, s-au desprins din **Matematică**. Acum se va putea constata ca ele pot fi înglobate din nou în știința mamă din care s-au desprins.

Se consideră mecanismele manivelă motoare - culisă oscilantă, în dreapta, care corespunde cazului **FSM-CE** de variabilă **centrică** α , pentru $e > R$ sau $s > 1$ și culisă motoare-manivelă, în partea stângă, ce corespunde cazului **FSM-CE** de variabilă **excentrică** θ , pentru $e < R$ sau $s < 1$, prezentate în **figura 15.28**.

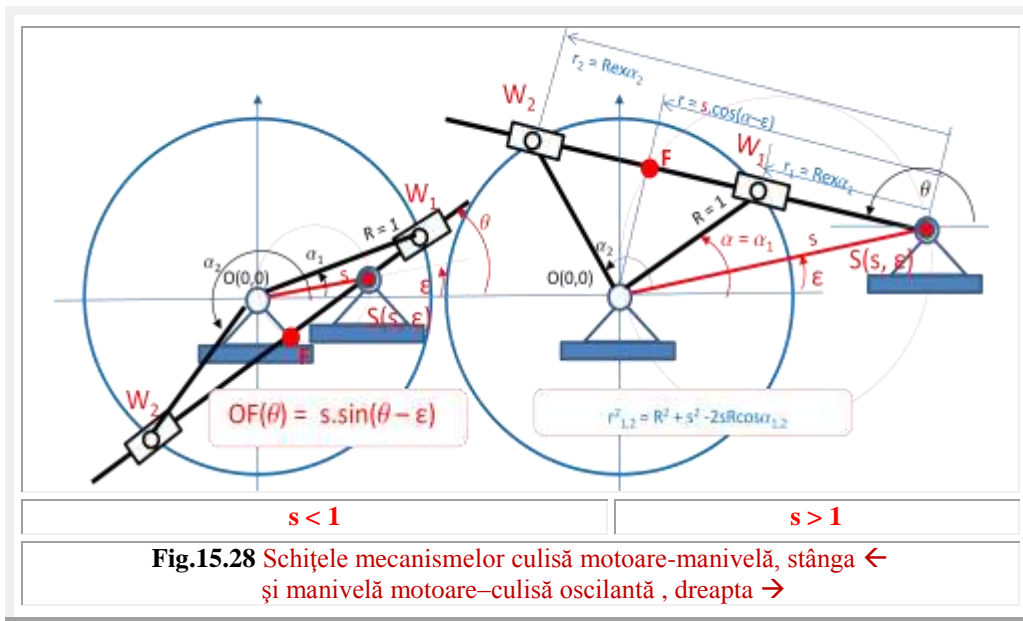
În ambele cazuri, punctul **F** ce aparține cercului de rază $s/2$ și trece prin punctele $O(0,0)$ și $S(s, \epsilon)$ împarte segmentul W_1W_2 în părți egale, de lungime r , care în funcție de θ sunt

$$(15.58) \quad r(\theta) = |\vec{SF}| \rightarrow \begin{cases} r(\theta, s < 1) = s \cdot \cos(\theta - \varepsilon) \\ r(\theta, s > 1) = s \cdot \cos(\pi - \theta + \varepsilon) = -s \cdot \cos(\theta - \varepsilon) \end{cases}$$

astfel că **FSM-CE** radial excentric de variabilă excentrică sunt

$$(15.59) \quad r_{1,2}(\theta) = \text{rex}_{1,2}\theta = r \mp SF = \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)} \mp s \cdot \cos(\theta - \varepsilon) = \\ = \pm[-s \cdot \cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}]$$

Reamintim că, pentru $s \leq 1$, $\text{rex}_1\theta > 0$ și $\text{rex}_2\theta < 0$, iar pentru $s > 1$ ambele determinări 1 și 2 sunt pozitive, când semidreapta pozitivă \mathbf{d}^+ intersectează cercul unitate și negative când semidreapta negativă \mathbf{d}^- intersectează cercul unitate, ceea ce rezultă și din relația (15.58).



Pentru **FSM-CE** de variabilă centrică $\alpha_{1,2}$, $r_{1,2}$ se determină imediat, cu teorema lui **Pitagora** generalizată, sau teorema cosinusului unghiului $\alpha_{1,2}$ din centrul $O(0,0)$, din triunghiurile oarecare **OSW**_{1,2}. Rezultă

$$(15.60) \quad r_{1,2}(\alpha_{1,2}) = |\vec{SW}_{1,2}| = \pm \sqrt{1 + s^2 - 2 \cdot s \cdot \cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}$$

Se observă că, la determinarea relațiilor **FSM-CE** radial excentric, nu s-a uzat de un sistem de coordonate; unghiurile θ și $\alpha_{1,2}$ putând fi marcate de la oricare reper comun. De aceea s-a mai spus că aceste funcții sunt independente de originea sistemul de referință, $r_{1,2} = |\vec{SW}_{1,2}|$.

Din teorema sinusurilor în triunghiurile oarecare **OSW**_{1,2}, pentru $s < 1$, rezultă

$$(15.61) \quad \frac{r_{1,2}}{\sin \alpha_{1,2}} = \frac{1}{\sin[\pi - (\theta - \varepsilon)]} = \frac{s}{\sin \beta_{1,2}} = 2R \text{circ} \quad \text{sau}$$

15.7 - Funcții cosinus și sinus excentrice de variabilă centrică

$$(15.61') \quad \begin{cases} \frac{r_1}{\sin \alpha_1} = \frac{1}{\sin(\theta - \varepsilon)} = \frac{s}{\sin \beta_1} \\ \frac{r_2}{\sin(2\pi - \alpha_2)} = \frac{1}{\sin(\theta - \varepsilon)} = \frac{s}{\sin(\pi - \beta_2)} \end{cases} = 2R_{circ},$$

în care **R_{circ}** este raza cercului circumscris triunghiului oarecare, considerat la scrierea teoremei lui **Pitagora** generalizate, în cazul de față triunghiul **OSW_{1,2}**.

Din egalitățile anterioare, pentru **s < 1**, rezultă **FSM-CE** beta excentrice de variabilă excentrică

$$(15.62) \quad \begin{cases} \beta_1(\theta) = bex_1\theta = \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] > 0 \\ \beta_2(\theta) = bex_2\theta = -\pi - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] < 0 \end{cases}$$

Pentru **s > 1** se poate scrie

$$(15.63) \quad \begin{cases} \frac{r_1}{\sin(\alpha - \varepsilon)} = \frac{1}{\sin[\pi - \theta + \varepsilon]} = \frac{s}{\sin \beta_1} \\ \frac{r_2}{\sin(\alpha_2 - \varepsilon)} = \frac{1}{\sin[\pi - \theta + \varepsilon]} = \frac{s}{\sin \beta_2} \end{cases} = 2R_{circ}$$

din care rezultă **FSM-CE** beta excentrice de variabilă centrică

$$(15.64) \quad \begin{cases} \beta_1(\alpha) = Bex \alpha_1 = \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{r_1} = \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{Rex \alpha_1} \\ \beta_2 = Bex \alpha_2 = \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha_2 - \varepsilon)}{r_2} = \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha_2 - \varepsilon)}{Rex \alpha_2} \end{cases}$$

Se observă, fără dificultate din **figura 15.27**, că între unghiuri există dependența cunoscută care reprezintă, totodată, **FSM-CE** amplitudine excentrică de variabilă excentrică **aex_{1,2}θ**

$$(15.65) \quad \alpha_{1,2}(\theta) = \theta - \beta_{1,2}(\theta) = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] = aex_{1,2}\theta$$

care poate exprima, totodată, și funcția sau raportul de transmitere a rotațiilor ca funcție de variabila excentrică θ

$$(15.66) \quad \frac{\alpha_{1,2}}{\theta} = 1 - \frac{\arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]}{\theta} = i_R(\theta)$$

Prin derivarea expresiei (15.65) se obține funcția sau raportul de transmitere al vitezelor unghiulare, știind că $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega_1$, considerată viteza unghiulară de intrare și $\dot{\alpha}_{1,2} = \frac{d\alpha_{1,2}}{dt} = \omega_{2,1,2}$ drept viteză unghiulară de la ieșirea mecanismului și, totodată,

FSM-CE derivată excentrică de variabilă excentrică

$$(15.67) \quad dex_{1,2}\theta = \frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta} = \frac{d\alpha_{1,2}/dt}{d\theta/dt} = \frac{\omega_{2,1,2}}{\omega_1}$$

Rezultă

$$(15.657') \quad dex_{1,2}\theta = 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \cdot \sin^2(\theta - \varepsilon)}}$$

Din (15.65) rezultă **FSM-CE** amplitudine excentrică de variabilă centrică

Aexα_{1,2}

$$(15.68) \quad \theta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2}(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{Rex \alpha_{1,2}} = Aex \alpha_{1,2}$$

și utilizând expresia lui $\beta_{1,2}(\alpha_{1,2})$ din (15.64) rezultă raportul sau funcția de transmitere a rotațiilor ca funcție de variabilele centrice **α_{1,2}**

$$(15.69) \quad \frac{\theta(\alpha_{1,2})}{\alpha_{1,2}} = 1 + \frac{1}{\alpha_{1,2}} \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{Rex \alpha_{1,2}} = i_R(\alpha_{1,2})$$

Este necesară observația că, în timp ce funcțiile amplitudine excentrică de variabilă **excentrică** sunt distincte valoric, sau la un anumit moment $t = t_1 \rightarrow aex_1\theta = \alpha_1(\theta) \neq \alpha_2(\theta) = aex_2\theta$, deoarece $\alpha_1(\theta) \neq \alpha_2(\theta)$, cele de variabilă **centrică** au valori egale $Aex\alpha_1 = Aex\alpha_2 = \theta(\alpha)$, deoarece $\theta(\alpha_1) = \theta(\alpha_2) = \theta(\alpha) = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2}$, dar, la valori de timp diferite; în același moment $t = t_1$ ele fiind defazate între ele cu $\pi - \beta_2$.

Pe baza acestei observații se poate concluziona că toate **FSM-CE** de variabilă centrică au cele două determinări, principală 1 și secundara 2, egale valoric, adică au graficele identice. De aceea se vor prezenta împreună graficele celor două determinări.

Prin derivarea expresiei (15.68) se obține **FSM-CE** derivată excentrică de variabile centrice

$$(15.70) \quad Dex\alpha_{1,2} = \frac{1-s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{Rex^2\alpha_{1,2}} = \frac{1-s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}$$

Și, astfel, printr-o simplă aplicație, s-au determinat cele mai importante **FSM-CE** atât de variabilă excentrică cât și de variabile centrice. Exemplul ar putea continua cu determinarea funcțiilor cosinus **cex_{1,2}θ** și **Cexα_{1,2}**, sinus **sex_{1,2}θ** și **Sexα_{1,2}** excentrice și a celor compuse **tex, ctex** ș.a. Dar, aceste funcții se pot determina imediat, pe baza funcțiilor lor induse, știind că

$$(15.71) \quad \begin{cases} \begin{cases} cex_{1,2}\theta = \cos[aex_{1,2}\theta] \\ sex_{1,2}\theta = \sin[aex_{1,2}\theta] \end{cases} \\ \begin{cases} tex_{1,2}\theta = \tan[aex_{1,2}\theta] = sex_{1,2}\theta / cex_{1,2}\theta \\ texv_{1,2}\theta = \tanv[aex_{1,2}\theta] = sex_{1,2}\theta / Abs[cex_{1,2}\theta] \end{cases} \\ \text{ș. a. m. d} \end{cases}$$

$$(15.72) \quad \begin{cases} \begin{cases} Cex\alpha_{1,2} = \cos[Aex\alpha_{1,2}] \\ Sex\alpha_{1,2} = \sin[Aex\alpha_{1,2}] \end{cases} \\ \begin{cases} Tex\alpha_{1,2} = \tan[Aex\alpha_{1,2}] = Sex\alpha_{1,2} / Cex\alpha_{1,2} \\ Texv\alpha_{1,2} = \tanv[Aex\alpha_{1,2}] = Sex\alpha_{1,2} / Abs[Cex\alpha_{1,2}] \end{cases} \\ \text{ș. a. m. d} \end{cases}$$

Symbolic, se poate scrie că

$$(15.73) \quad \begin{cases} (\mathbf{FSM - CE})_{1,2}(\theta) = \mathbf{FCC}[aex_{1,2}\theta] \\ (\mathbf{FSM - CE})(\alpha_{1,2}) = \mathbf{FCC}[Aex\alpha_{1,2}] \end{cases}$$

Varianta a II-a, prezentată în **figurii 15.27**, este în favoarea **FSM-CE** de variabilă **centrică**, deoarece punctele **W_{1,2}** se afla situate pe aceeași dreapta **D**, de direcție $\alpha = \alpha_1$, trecând prin originea și centrul **O(0,0)** și turnantă în jurul acestui punct. În acest caz, cunoscându-se expresiile primei determinări, principale de indice **1**, a **FSM-CE** ca funcții de $\alpha = \alpha_1$, a doua determinare, de indice **2**, se va obține din expresiile primei determinări, în care se face schimbarea de argument $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1 + \pi = \alpha + \pi$. Deoarece **W₁** \subset **D⁺**, iar **W₂** \subset **D⁻**.

Dezavantajul variantei a II-a consistă în faptul că a doua determinare a **FSM-CE**, de indice **2**, de variabilă centrică nu mai au aceleași valori cu cele de variabilă excentrică. Prima determinare, însă, cea principală de indice **1**, va păstra egalitatea valorilor funcțiilor de cele două variabile, deoarece **W₁** se află situat pe ambele semidrepte **D⁺** și **d₁⁺**, care se intersectează chiar în **W₁**.

15.7 - Funcții cosinus și sinus excentrice de variabilă centrică

În această variantă, apar două drepte \mathbf{d}_1 și \mathbf{d}_2 , ce trec prin excentrul $\mathbf{S}(s, \varepsilon)$ și prin \mathbf{W}_1 și, respectiv, \mathbf{W}_2 și, ca urmare, două valori distincte ale variabilei excentrice θ_1 și, respectiv, θ_2 pentru un o singură variabilă motoare α , care este direcția singurei drepte \mathbf{D} . Dacă ne referim, însă, la punctele $\mathbf{W}_{1,2}$, atunci avem, ca și în cazul anterior

$$(15.74) \quad \begin{cases} \alpha' = \alpha, & \text{pentru } W_1 \\ \alpha'' = \alpha + \pi, & \text{pentru } W_2 \end{cases}$$

Și în acest caz, simbolic se poate scrie, ținând cont de poziția celor două puncte $\mathbf{W}_{1,2}$ pe dreapta \mathbf{D} , față de originea $\mathbf{O}(0,0)$ a dreptei, origine care o împarte în cele două semidrepte.

$$(15.75) \quad \text{FSM-CE}(\alpha_2) = \text{FSM-CE}(\alpha_1 + \pi).$$

Oricare ar fi poziția **excentrului S**, interioară discului cercului unitate ($s < 1$), în ambele variante, pentru un α sau θ care cresc, adică \mathbf{W}_1 se rotește pe cercul unitate în sens trigonometric (sinistrorum sau levogin) și \mathbf{W}_2 se rotește în același sens, pozitiv.

Dacă **S** este exterior cercului unitate ($s > 1$), atunci, punctele $\mathbf{W}_{1,2}$ se rotesc în același sens, pozitiv, pe cercul unitate.

Notând cu $\mathbf{W}_{i,f}$ punctele de tangența ale dreptei \mathbf{d} din **S** cu cercul unitate, în care cele două puncte \mathbf{W} nu se mai suprapun, adică, în permanență $\mathbf{W}_1 \neq \mathbf{W}_2$, dar unghiurile $\theta_{1,2}$ au creșterea și scăderi sincrone. Astfel, din \mathbf{W}_i și până în \mathbf{W}_f , $\theta_{1,2}$ crește, apoi, din \mathbf{W}_f la \mathbf{W}_i , $\theta_{1,2}$ scade.

15.7 FUNCȚII COSINUS ȘI SINUS EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ

Se definesc ca funcții induse în care argumentul / variabila funcțiilor circulare centrice $\cos\alpha$ și $\sin\alpha$ se înlocuiește cu funcția amplitudine excentrică de variabilă centrică

$$(15.76) \quad Aex\alpha_{1,2} = \theta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \beta(\alpha_{1,2})$$

care, pentru $s \leq 1$, în **varianta I-a** are expresiile

$$(15.77) \quad \begin{cases} Aex\alpha_1 = \theta(\alpha_1) = \alpha_1 + \beta_1(\alpha_1) = \alpha_1 + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha_1 - \varepsilon)}{Rex\alpha_1} = \\ = \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}} \\ Aex\alpha_2 = \theta(\alpha_2) = \alpha_2 + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha_2 - \varepsilon)}{Rex\alpha_2} = \alpha + \pi + 2\arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}} \\ = Aex\alpha_1 + \pi + \beta_1 \end{cases}$$

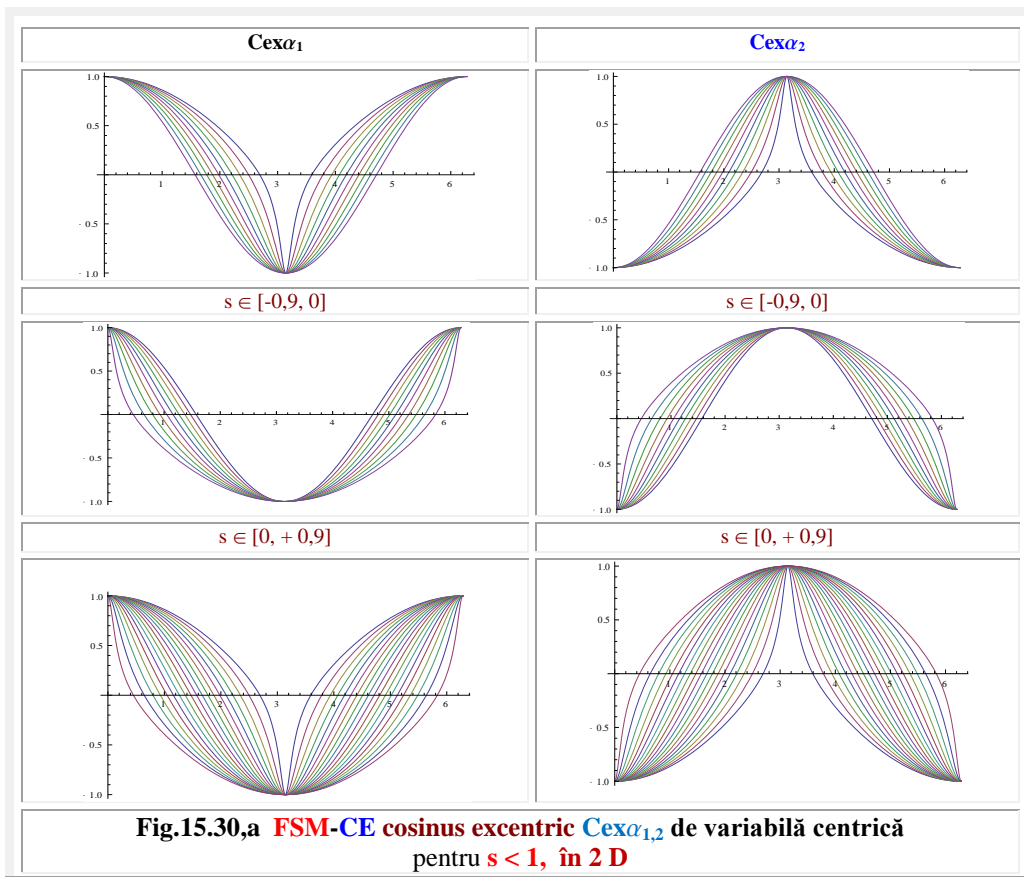
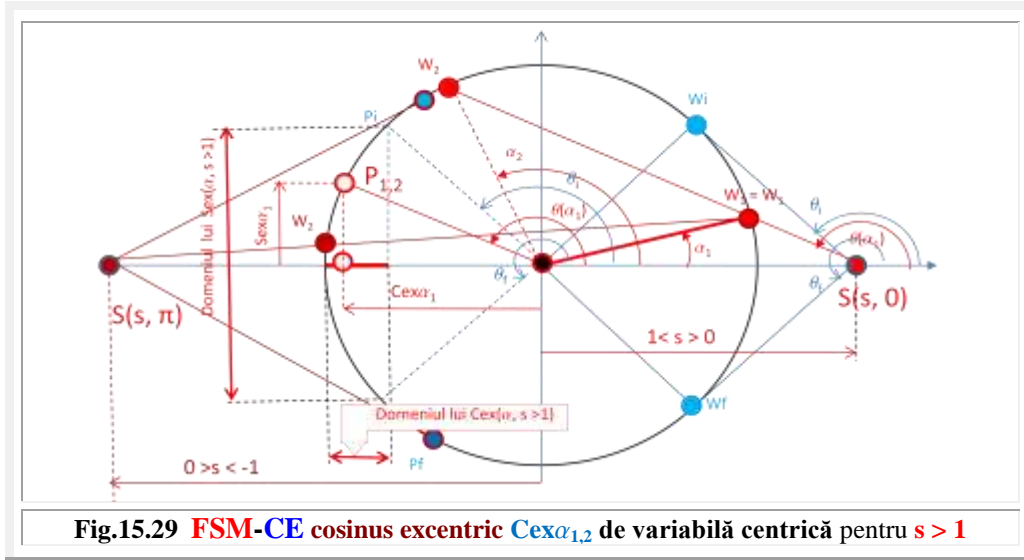
în care s-a ținut cont de egalitatea

$$(15.78) \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \beta_1 + \pi + \beta_1 = \theta + \pi + \beta_1 = \theta(\alpha_1) + \beta_1 + \pi$$

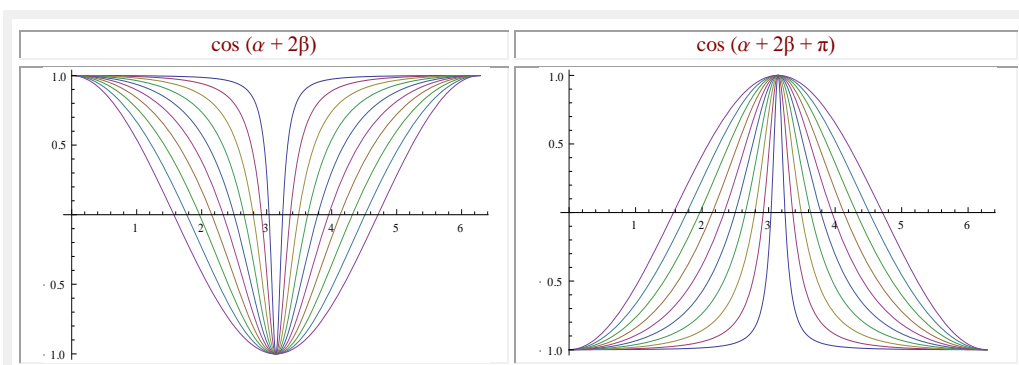
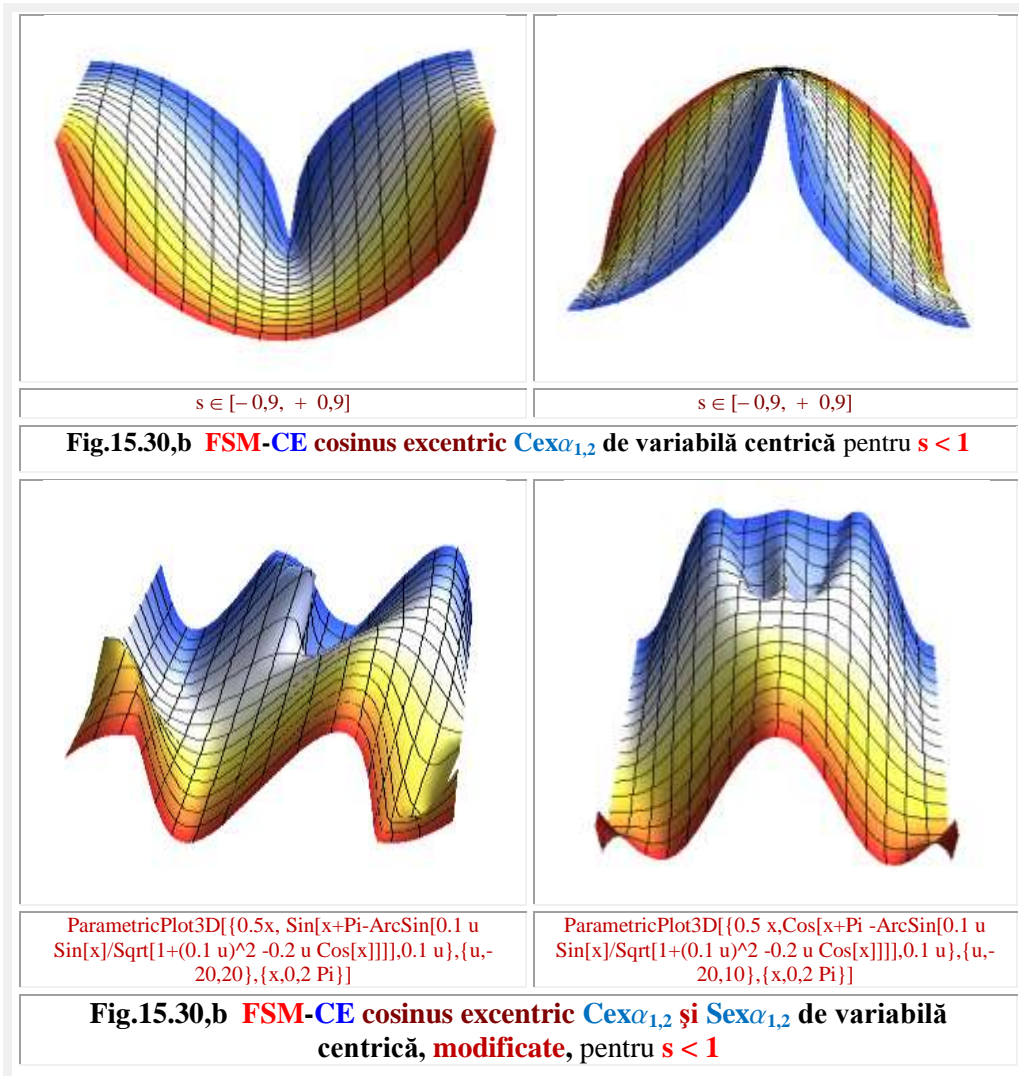
Graficele acestor **FSM-CE** de variabilă centrică se vor prezenta defalcat pentru $s > 0$ și pentru $s < 0$, atât pentru excentricități numerice subunitare cât și pentru cele supraunitare.

În relația anterioară, s-a folosit egalitatea

$$(15.79) \quad \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = -\pi, & \text{pentru } s \leq 1 \\ \beta_1 + \beta_2 = +\pi, & \text{pentru } s > 1 \end{cases}$$



15.7 - Funcții cosinus și sinus excentrice de variabilă centrică



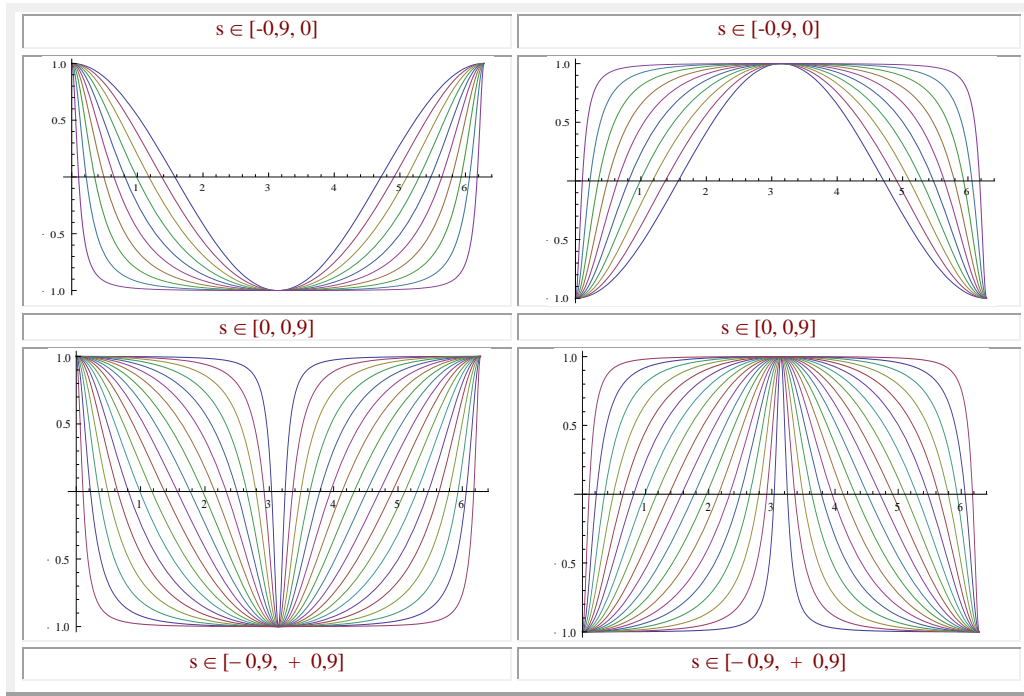
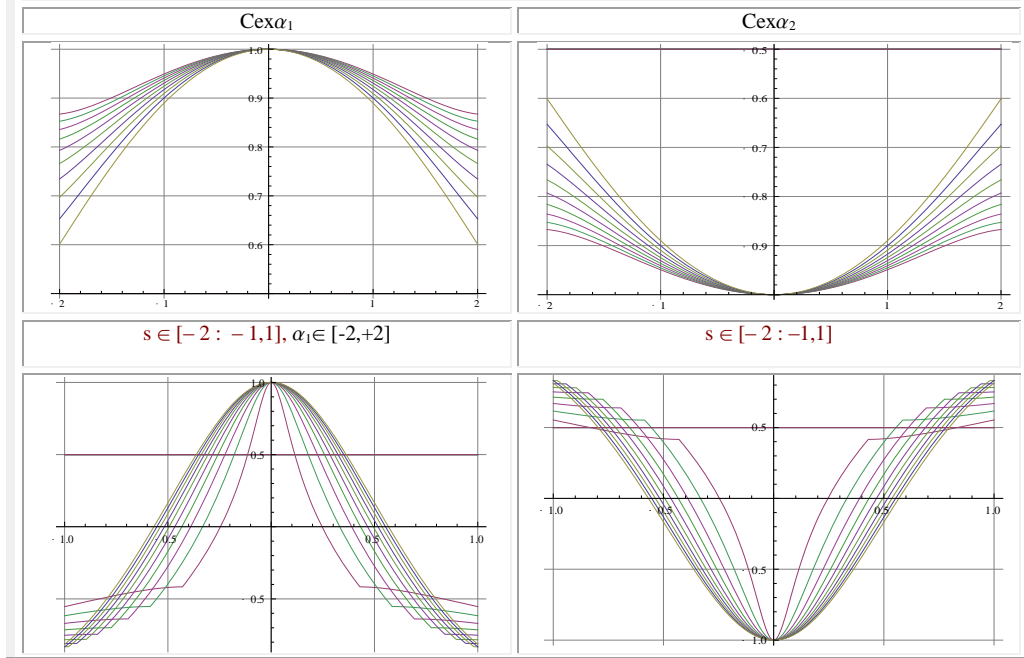


Fig.15.31 FSM-CE cosinus excentric modificat $MCex_{\alpha_{1,2}}$ de variabilă centrică pentru $s < 1$



15.7 - Funcții cosinus și sinus excentrice de variabilă centrică

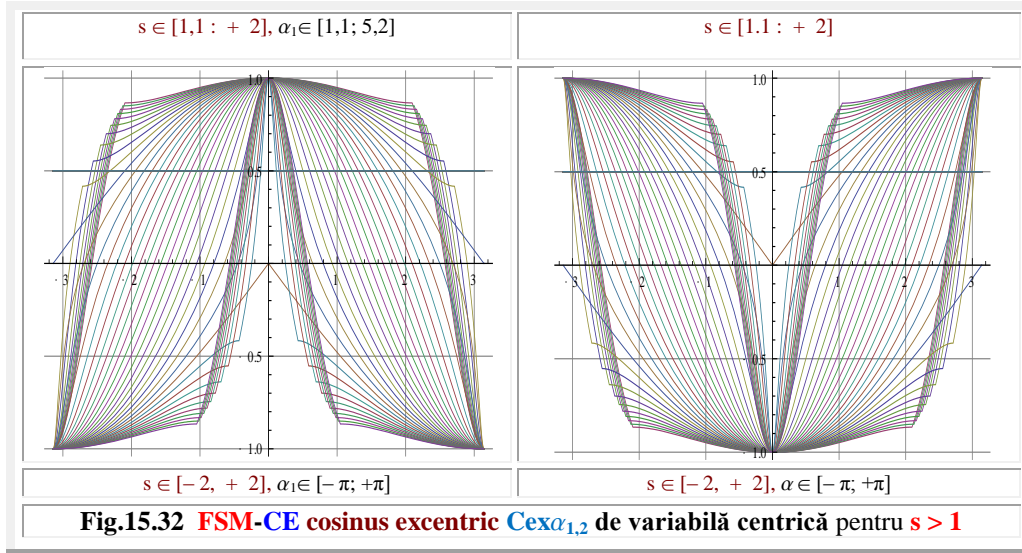


Fig.15.32 FSM-CE cosinus excentric $Cex\alpha_{1,2}$ de variabilă centrică pentru $s > 1$

Deoarece, oricare ar fi excentricul $S(s, \varepsilon)$, așa cum au fost definite aceste funcții de punctele $W_{1,2}$ situate pe aceeași dreaptă $d = d^+ \cup d^-$, de unghi θ cu axa Ox , dreaptă ce trece prin excentrul $S(s, \varepsilon)$ și este turnantă în jurul excentrului, există în permanență egalitatea

$$(15.80) \quad \begin{cases} \theta_1(\alpha_1) = \alpha_1 + \beta(\alpha_1) \\ \theta_2(\alpha_2) = \alpha_2 + \beta(\alpha_2) = \theta_1(\alpha_1) = \beta(\alpha_1) + \pi \end{cases}$$

astfel că cele două determinări ale **FSM-CE** $Cex\alpha_{1,2}$ și $Sex\alpha_{1,2}$ de **variabilă centrică** sunt defazate, de aceea, în **figura 15.26**, pentru $Cex\alpha$ și în **figura 15.27**, pentru $Sex\alpha$, graficele lor, ale celor două determinări, principală **1** și secundară **2**, au fost reprezentate în paralel. Rezultă

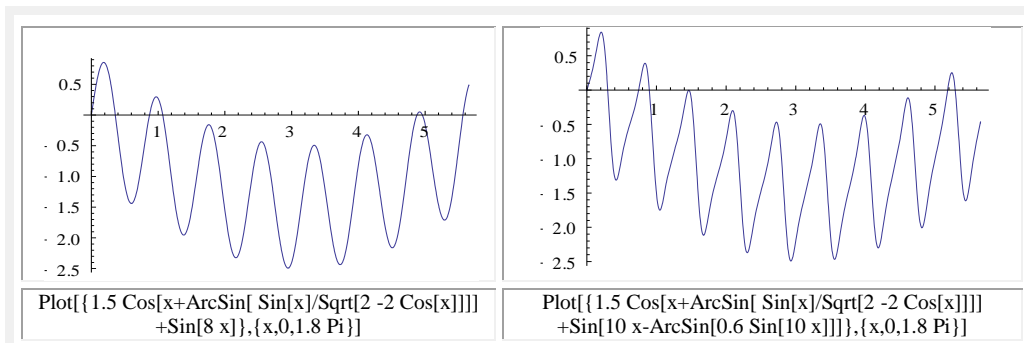
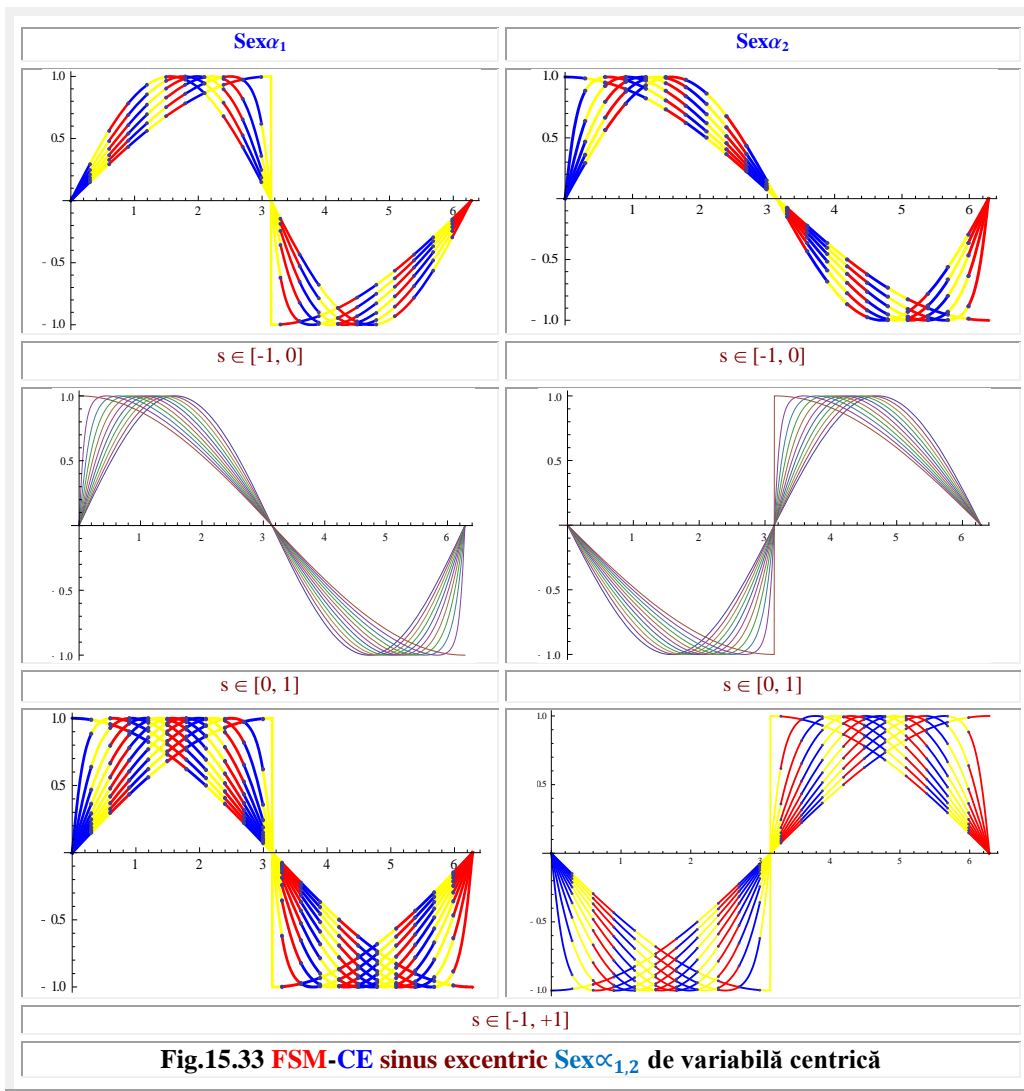
$$(15.81) \quad \begin{cases} Cex \alpha_{1,2} = \cos [Aex[\alpha_{1,2}, S(s, \varepsilon)]] = \begin{cases} Cex \alpha_1 = \cos \theta(\alpha_1) = \cos(\alpha_1 + \beta_1) \\ Cex \alpha_2 = \cos \theta(\alpha_2) = \cos(\alpha_2 + \beta_2) = -Cex \alpha_1 \end{cases} \\ Sex \alpha_{1,2} = \sin [Aex[\alpha_{1,2}, S(s, \varepsilon)]] = \begin{cases} Sex \alpha_1 = \sin \theta(\alpha_1) = \sin(\alpha_1 + \beta_1) \\ Sex \alpha_2 = \sin \theta(\alpha_2) = \sin(\alpha_2 + \beta_2) = -Sex \alpha_1 \end{cases} \end{cases}$$

În **figura 15.31** și **15.34** sunt prezentate **FSM-CE** modificate în sensul că β a fost înlocuit cu 2β în ecuațiile de definiție ale **FSM-CE** $Cex\alpha_{1,2}$ și $Sex\alpha_{1,2}$.

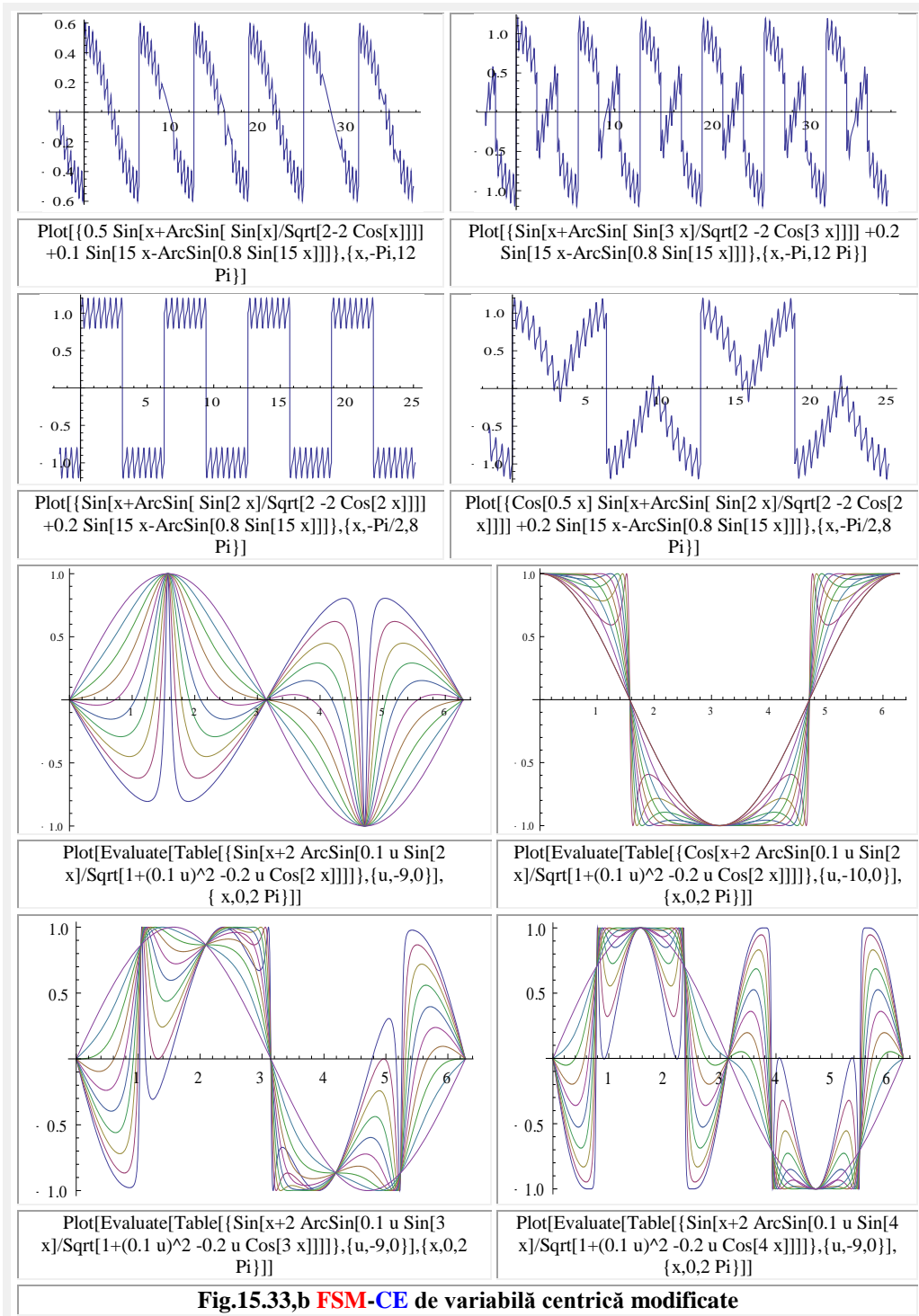
Au fost notate cu $MCex\alpha_{1,2}$ și $MSex\alpha_{1,2}$ și au expresiile

$$(15.82) \quad \begin{cases} MCex\alpha_{1,2} = \begin{cases} MCex\alpha_1 = \cos(\alpha + 2\beta) \\ MCex\alpha_2 = \cos(\alpha + 2\beta\pi) \end{cases} \\ MSex\alpha_{1,2} = \begin{cases} MSex\alpha_1 = \sin(\alpha + 2\beta) \\ MSex\alpha_2 = \sin(\alpha + 2\beta\pi) \end{cases} \end{cases}$$

Alte modificări, prezentate împreună cu ecuațiile lor explicite, sunt prezentate în **figura 15.34**, iar unele aplicații practice posibile sunt descrise în **figura 15.35**.



15.7 - Funcții cosinus și sinus excentrice de variabilă centrică



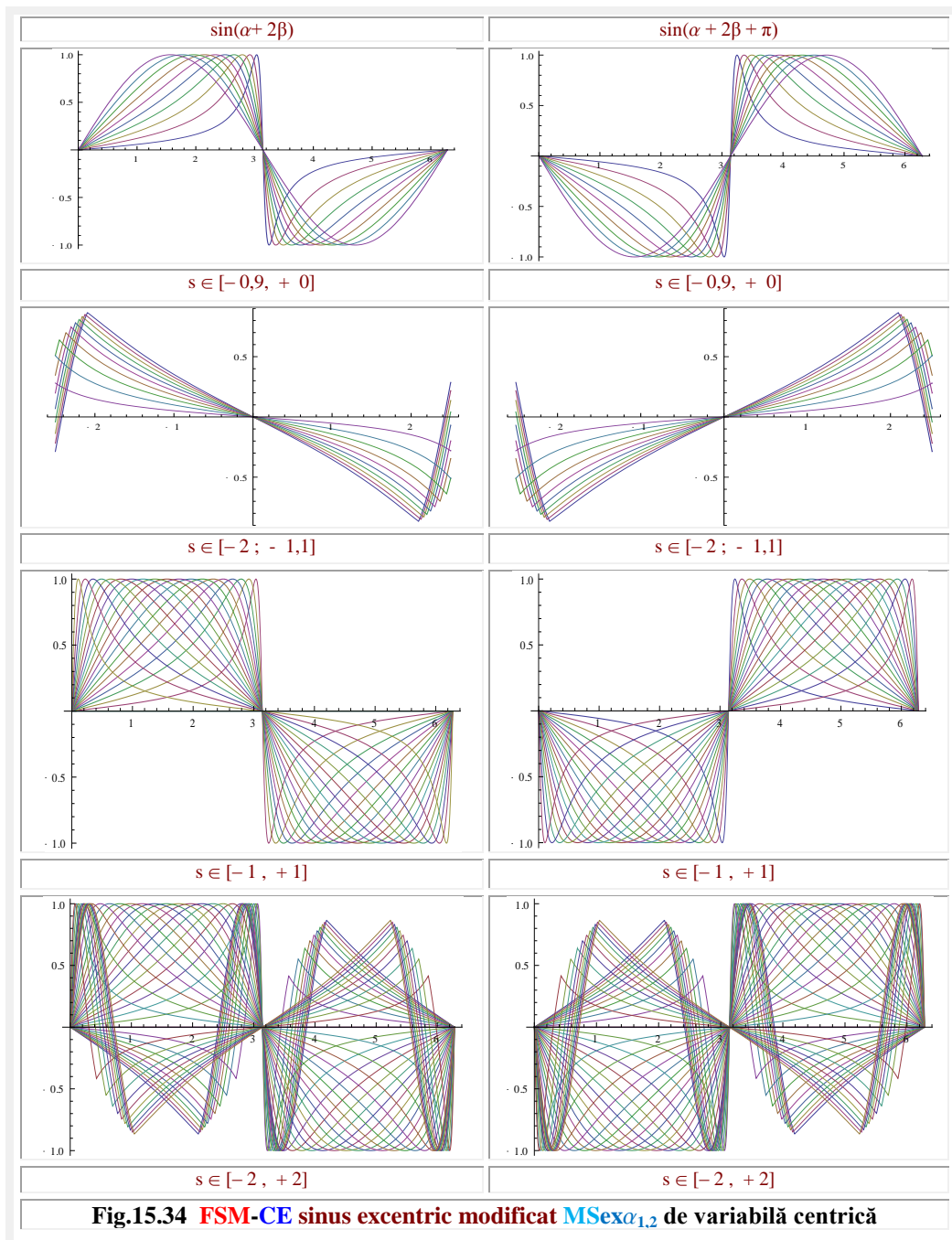


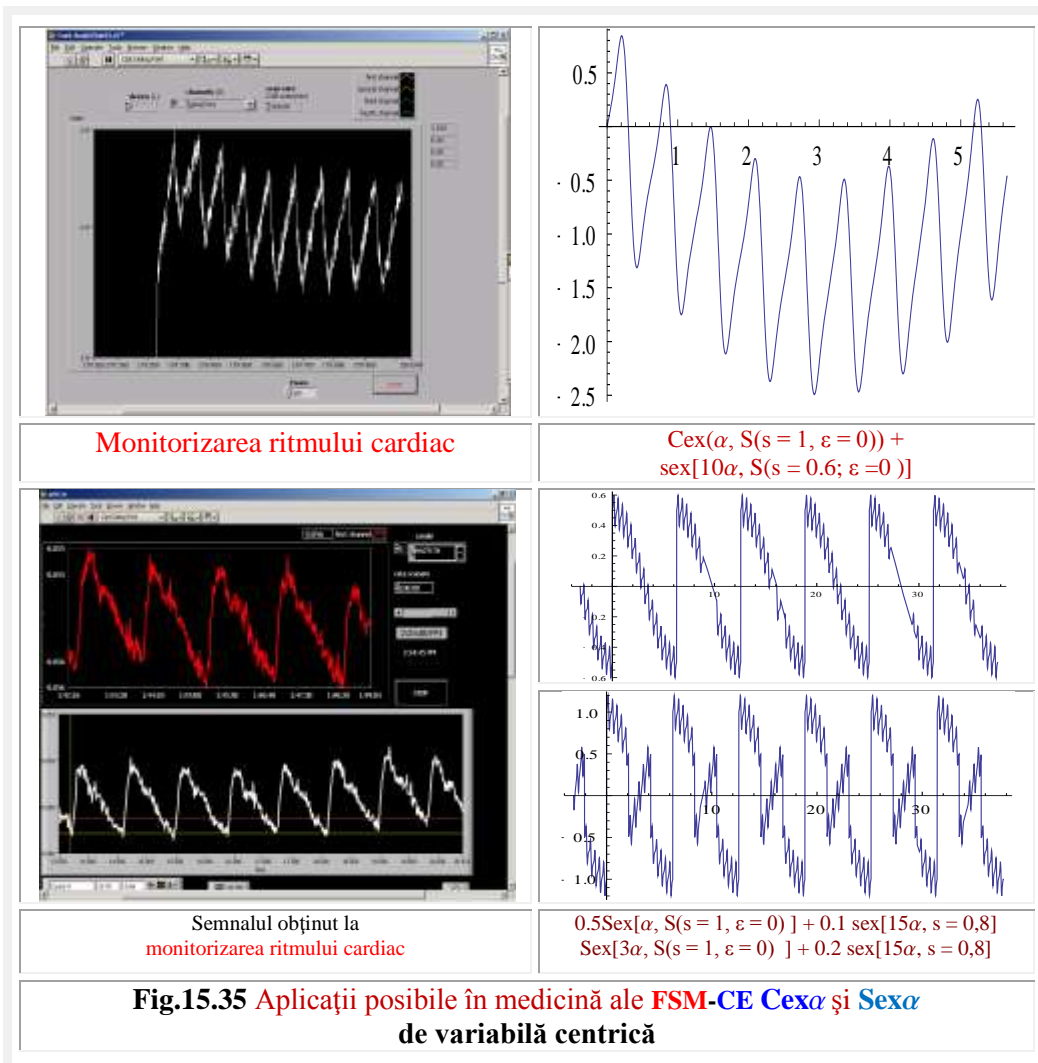
Fig.15.34 FSM-CE sinus excentric modificat $MSex\alpha_{1,2}$ de variabilă centrică

Posibile aplicații ale acestor funcții sunt extrem de multiple, așa că au fost prezentate, în **figura 15.35**, unele aplicații mai deosebite, din domeniul medicinei, cu exemplele concrete preluate de pe website-ul:

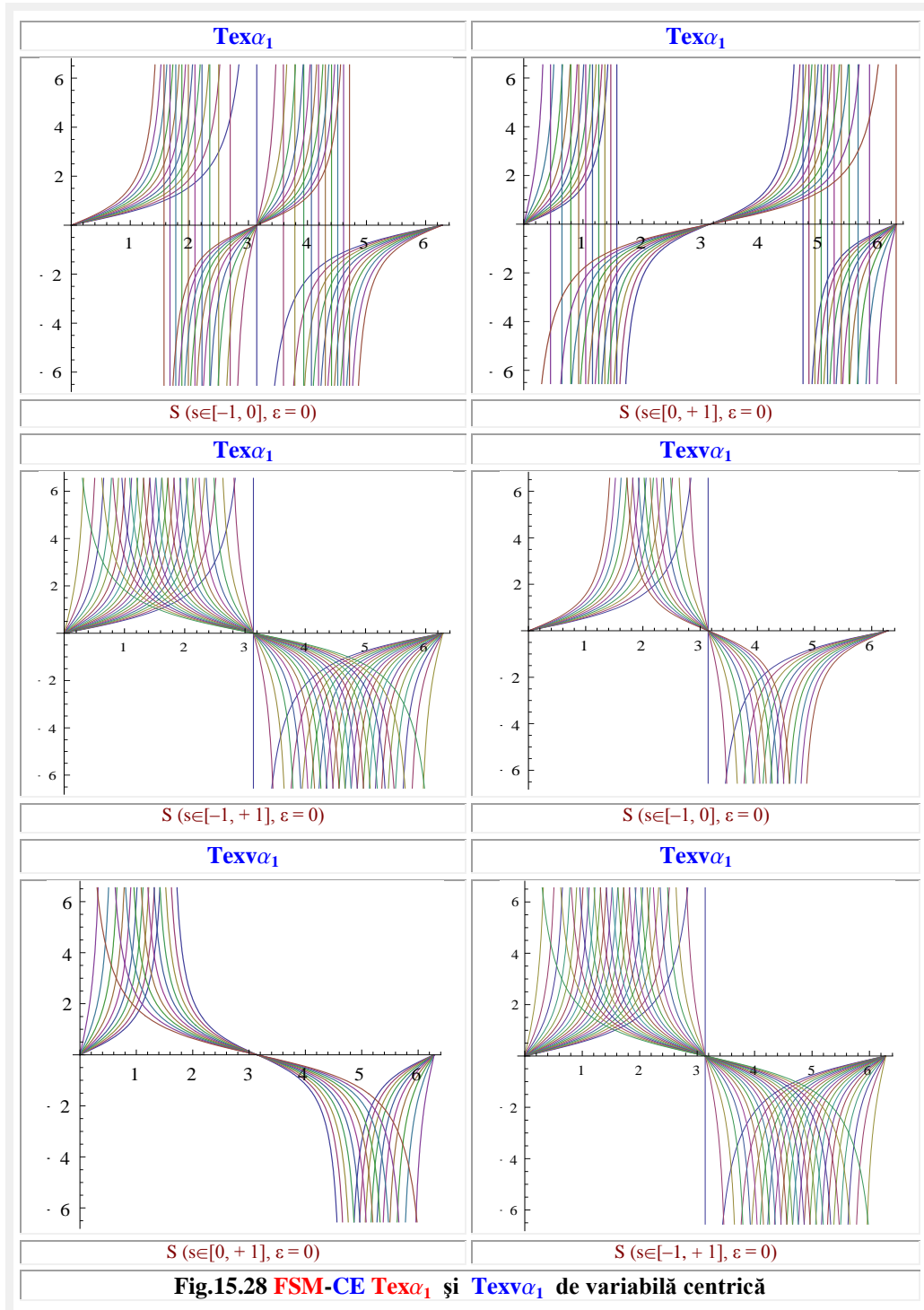
15.7 - Funcții cosinus și sinus excentrice de variabilă centrică

<http://education.inflpr.ro/res/CarteGarabet/Investigarea%20Sistemului%20cardiovascular.pdf>.

Prima aplicație, a **FSM-CE Cex α** , reprezintă o oscilație de frecvență mai înaltă, dată de **FSM-CE** de variabilă excentrică **sex10.0** cu excentricitatea numerică **s = 0,6**, însoțită de “bătăi” de frecvență mai joasă, dată de **FSM-CE** de variabilă centrică **Cex α** , cu excentricitatea de **s = 1**.



A doua aplicație, a **FSM-CE Sex α** , reprezintă o oscilație de frecvență mai înaltă, dată de **FSM-CE** de variabilă excentrică **sex15.0** cu excentricitatea umerică **s = 0,8**, suprapusă peste o oscilație de frecvență mai joasă, dată de **FSM-CE** de variabilă centrică **Sex α** , cu excentricitatea de **s = 1**.



15.7 - Funcții cosinus și sinus excentrice de variabilă centrică

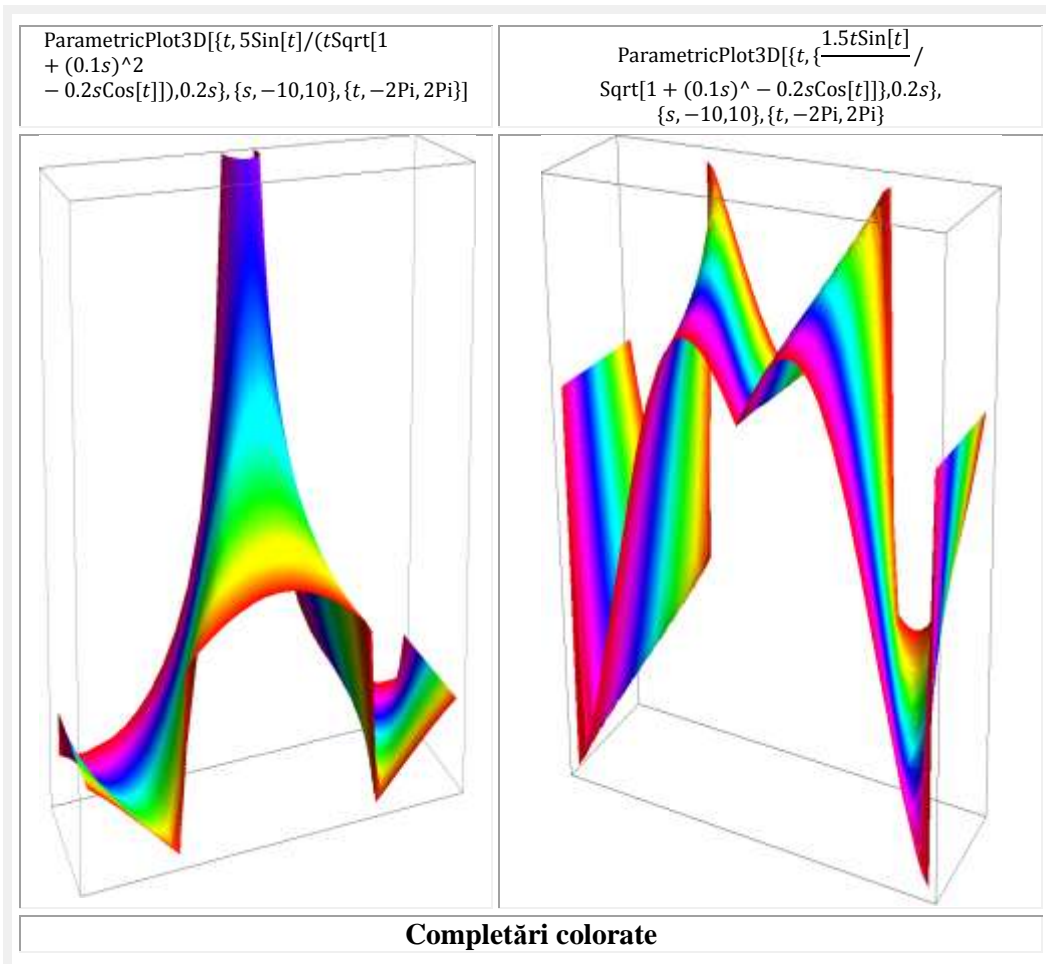
Funcțiile tangentă excentrică de variabilă centrică $\text{Tex}\alpha_{1,2}$ se vor obține prin raportul **FSM-CE** $\text{Sex}\alpha_{1,2}/\text{Cex}\alpha_{1,2}$, iar tangenta excentrică **Voinoiu**, de variabila centrică prin raportul

$$(15.82) \quad \text{Texv}\alpha_{1,2} = \frac{\text{Sex}\alpha_{1,2}}{\text{Abs}[\text{Cex}\alpha_{1,2}]}$$

Reamintim că, în matematica signadforasică a lui **O. Voinoiu**, semnul unei fracții este dat **exclusiv de semnul numărătorului** !

Cotangenta, secanta și cosecanta, se definesc la fel ca și la definirea acestor funcții în matematica centrică (**MC**). Graficele lor sunt prezentate, în paralel, pentru a fi mai ușor comparate, în **figura 15.29**: $\text{Tex}\alpha_{1,2}$ sus și $\text{Texv}\alpha_{1,2}$ în josul figurii.

Liniile verticale din graficele **FSM-CE** $\text{Tex}\alpha_{1,2}$ sunt de prisos, utilizatorul programului, adică autorul, neștiind cum se dă comanda “pen up” în **Mathematica 8** a lui **Stephen Wolfram**. Mea culpa !



Motto: ” Acela-i matematician pentru care egalitatea $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ este evidentă ca "2 × 2 = 4". **W. Thompson (lord Kelvin)** “

Capitolul 16.

METODĂ DE INTEGRARE PRIN DIVIZAREA DIFERENȚIALEI

16.1 INTRODUCERE

Integralele au fost introduse în matematică la sfârșitul secolului al XVII-lea, când **Isaac Newton** și **Gottfried Wilhelm Leibniz** au definit *teorema fundamentală a calculului integral* care stipulează că **derivarea** și **integrarea** sunt operații inverse. Adică, dacă o **funcție continuă** este întâi integrată și apoi derivată, se obține funcția originală. O consecință importantă, uneori numită *a doua teoremă fundamentală a calculului integral*, permite calculul integralelor folosind o **primitivă** a funcției de integrat, denumită și integrand.

Integralele și derivatele au devenit uneltele de bază ale **analizei matematice**, cu numeroase aplicații în știință și tehnologie.

Cele mai cunoscute metode de integrare, cunoscute până în prezent, sau, mai precis, până nu demult, sunt

- Metoda substituției sau prin schimbarea variabilei, cu două variante [v. Vasile Dunca, COMPENDIU de algebra și analiză matematică, Ediția a II-a, Ed. Multimedia International, 2007, pag 534 ș.u.]
- Metoda integrării prin părți
- Metoda de integrare a fracțiilor raționale
- Metoda de integrare a funcțiilor raționale, algebrice și trigonometrice (circulare și hiperbolice **centrice**)
- Metode de integrare a integralelor binome.

16.2 INTEGRAREA PRIN DIVIZAREA FUNCȚIEI INTEGRAND

O funcție **f** poate fi **divizată** în alte două funcții ca, de exemplu, în cazul transformărilor produselor **funcțiilor matematice centrice (FMC)** trigonometrice directe în sume

$$(16.1) \quad \begin{cases} \cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)] \\ \cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(b - a)] \\ \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] \end{cases}$$

Dar, de multe ori, descompunerea / divizarea se realizează în mai multe funcții, cum este cazul transformării următoarelor produse ale **FMC** în sume

$$(166.2) \quad \begin{cases} \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{ab}{2} \cdot \cos \frac{c}{2} = \frac{1}{4}(\sin a + \sin b + \sin c) \\ \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = \frac{1}{4}(\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c) \\ \begin{cases} \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c = \tan a + \tan b + \tan c \\ \cot \frac{a}{2} \cdot \cot \frac{b}{2} \cdot \cot \frac{c}{2} = \cot \frac{a}{2} + \cot \frac{b}{2} + \cot \frac{c}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Dar și în cazurile dezvoltării / divizării funcție în serii de funcții, a descompunerii / divizării în fracții simple, ș.m.a.

În cazul divizării în două, adică, $f(x) = g(x) \pm h(x)$ și dacă ele sunt derivabile pe I_x , atunci, pe baza unei proprietăți ale primitivelor, conform careia integrale sumei și / sau a diferenței este egală cu suma, și / sau respectiv, diferența integralelor, se poate afirma că

$$(16.3) \quad \int [g(x) \pm h(x)] dx = \int g(x) dx \pm \int h(x) dx.$$

Simbolic se poate scrie

$$(16.4) \quad \int (g \pm h) dx = \int g \cdot dx \pm \int h \cdot dx$$

și nu reprezintă altceva decât o metodă de integrare care, pe drept cuvânt, poate fi denumită și ca o **metodă de integrare prin divizarea funcției** (integrandului), deoarece $f = (g \pm h)$ s-a divizat prin simbolul \pm în cele două funcții g și h .

Divizarea unei funcții în alte două funcții se poate realiza **prin sumă** lor (semnul +) sau **prin diferență** lor (semnul -).

În cazul divizării funcției într-o infinitate de alte funcții, așa cum se cunoaște de la serile cu termeni alternativi, semnele + și - sunt cele care pot alterna.

16.3 INTEGRAREA PRIN **DIVIZAREA DIFERENȚIALEI**

Așa cum se divizează o funcție, se poate **diviza** și o **variabilă**, adică, se poate exprima uneori variabila x prin alte două variabile, de exemplu, $x = y \pm z$, sau, se poate spune că variabila x a fost divizată în variabilele y și z , rezultând că și **diferențiala variabilei dx** s-a **divizat** în $dx = dy \pm dz$, adică

$$(16.5) \quad x = y \pm z \quad \rightarrow \quad dx = dy \pm dz$$

Metoda de integrare prin **divizarea diferențialei** este o **metoda nouă** de integrare a funcțiilor trigonometrice, în special, dar nu numai a lor.

Ea a devenit posibilă odată cu descoperirea **funcțiilor supermatematice circulare excentrice (FSM – CE)**, funcții ce pot fi, fie de variabilă **excentrică θ** sau **x** , fie de variabilă **centrică $\alpha_{1,2}$** sau **$y_{1,2}$** , în care z este unghiul **$\beta_{1,2}$** din punctele **$W_{1,2}$** de pe cercul unitate, sub care se văd **centrul $O(0,0)$** și **excentrul $S(s,\varepsilon)$** .

Trecerea / saltul de la o variabilă la alta se realizează foarte simplu, așa cum s-a putut constata în unele capitole anterioare [Vol I, pag. 7, 24, 25, 26, 128, 129], prin funcțiile **amplitudine excentrică $aex_{1,2}\theta$** , de variabilă excentrică sau prin cea de variabilă centrică **$Aex\alpha_{1,2}$** .

Fiind date funcțiile, care pot fi exprimate simultan prin mai multe variabile, $f_x(x), g_x(x) = g_y(y), h_x(x) = h_z(z) : I_x, I_y, I_z \rightarrow \mathbb{R}$ și funcțiile $F_x(x), G_x(x) = G_y(y), H_x(x) = H_z(z) : I_x, I_y, I_z \rightarrow \mathbb{R}$, astfel ca derivatele lor în funcție de variabilele x, y și / sau z ,

de la caz la caz, F' , G' , H' să fie chiar f , g , h , adică, $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, $G'(y) = g(y)$, $H'(x) = h(x)$, $H'(z) = h(z)$ atunci F , G , H sunt **primitivele** funcțiilor f , g , h , de aceleași variabile x , y și / sau z , după caz, în condițiile în care F , G , H , sunt derivabile pe intervalele lor I în funcție de variabilele lor de integrare.

După caz, I_x , I_y și I_z sunt intervalele în care aceste funcții sunt derivabile în funcție de variabilele lor de exprimare.

Se știe că, între variabile unghiulare **excentrică** θ sau **x**, **centrică** α sau **y** și unghiul $\beta_{1,2}$ sau $z_{1,2}$, cu vârful pe cercul unitate în punctul $W_{1,2}(\theta, \text{rex}_{1,2}(\theta, E(s, \varepsilon))) \equiv W_{1,2}(\alpha_{1,2}, 1)$, exista dependențele

$$(16.06) \quad \theta = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2} \quad \text{sau} \quad x = y_{1,2} + z_{1,2}$$

și, prin diferențiere, se obține

$$(16.07) \quad d\theta = d\alpha_{1,2} + d\beta_{1,2} \quad \text{sau} \quad dx = dy_{1,2} + dz_{1,2}.$$

Fie integrala nedefinită

$$(16.08) \quad I_N(x) = \int f(x)dx = F_N(x) + C \quad \text{și, în paralel, integrala definită}$$

$$(16.08') \quad I_D(x) = \int_A^B f(x)dx = F(B(x)) - F(A(x))$$

Prin divizarea diferențialei $d\theta$ sau dx ele devin, considerând prima determinare a **FSM**, de indice 1, care, conform uzanțelor, nu se mai scrie / trece

$$(16.09) \quad I_N(x) = \int f(x)d(y+z) = \int f(x)dy + \int f(x)dz = I_{N1} + I_{N2}$$

$$(16.09') \quad I_D(x) = \int_{A(x)}^{B(x)} f(x).d(y+z) = \int_{A(x)}^{B(x)} f(x)dy + \int_{A(x)}^{B(x)} f(x)dz = I_{D1} + I_{D2}$$

Exprimând funcția integrand $f(x)$ odată în funcție de variabila centrică y , în prima integrală și ca funcție de z în cea de a doua integrală, rezultă

$$(16.10) \quad I_N(y,z) = \int f(x(y))dy + \int f(x(z))dz = I_1(y) + I_2(z)$$

și, modificând corespunzător limitele de integrare, în integrala definită, rezultă

$$(16.10') \quad I_D(y,z) = \int_{A(x(y))}^{B(x(y))} f(y(x))dy + \int_{A(x(z))}^{B(x(z))} f(z(x))dz = \\ = F_D(B(y)) - F_D(A(y)) + F_D(B(z)) - F_D(A(z)) = I_{D1}(y) + I_{D2}(z).$$

Integrala $I(x)$ s-a divizat, astfel, și ea, în două integrale $I_{N1}(y) + I_{N2}(z)$, respectiv în $I_{D1}(y) + I_{D2}(z)$, primele de variabilă **centrică** y și ultimele de variabilă z .

Presupunând că acestea pot fi integrate, rezultă

$$(16.11) \quad I_N(y,z) = F_N(y,z) + C = F_{N1}(y) + F_{N2}(z) + C \quad \text{și}$$

$$(16.11') \quad I_D(y,z) = F_D(y,z) = F_{D1}(y) + F_{D2}(z)$$

în care, se revine automat la variabila excentrică x , deoarece

$$(16.12) \quad y = y(x) \quad \text{și} \quad z = z(x).$$

Rezultă, în final, soluția care, pentru primitivă sau antiderivată [Sirețchi, Gh. "CALCUL DIFERENTIAL SI INTEGRAL", Ed. Științifică și Enciclopedică, Buc. 1985, pag. 260] este o funcție iar pentru integrala definită este un număr.

$$(16.13) \quad I_N(x) = F(x) + C, \quad \text{în care} \quad F(x) = F_1(y(x)) + F_2(z(x))$$

$$(16.13') \quad I_D(x) = F(B(x)) - F(A(x)), \quad \text{iar}$$

$$(16.13'') \quad F(B(x)) = F(B(y(x))) + F(B(z(x))) \quad \text{și} \quad F(A(x)) = F(A(y(x))) + F(A(z(x)))$$

Metoda se pretează la integrale definite și, în special, la cele care au limitele de integrale 0, $-\pi$, $+\pi$, pentru integranzii a căror expresii pot fi exprimate, total sau

parțial, prin **FSM-CE** și al căror excentru **E(e, ε)** sau **S(s,ε)** se află situat pe axa **x**, adică pentru care **ε = 0** sau **ε = ± π** deoarece, în aceste cazuri, $\beta(0) = \beta(\pi) = \beta(-\pi) = 0$ și integrala **definită** exprimată în funcție de variabila β sau z și de diferențiala $d\beta$ sau dz devine nulă.

16.4 APLICAȚII LA METODA DIVIZĂRII DIFERENȚIALEI

Cel mai simplu și mai rapid exemplu este al următoarei integrale definite

Aplicația 16.5.1: Fie integrala definită

$$(16.14) \quad I_D(x) = \int_0^\pi \frac{\cos x \cdot dx}{\sqrt{1+k^2-2 \cdot k \cdot \cos x}}, \quad \text{sau} \quad I_D(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\cos \alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{1+s^2-2 \cdot s \cdot \cos \alpha}}$$

în care **S(s = k, ε = 0)**, **θ ≡ x**, și numitorul integrandului este **Rexα**, astfel că

$$(16.14') \quad I_D = \int_0^\pi \frac{\cos \alpha \cdot d\alpha}{Rex\alpha}$$

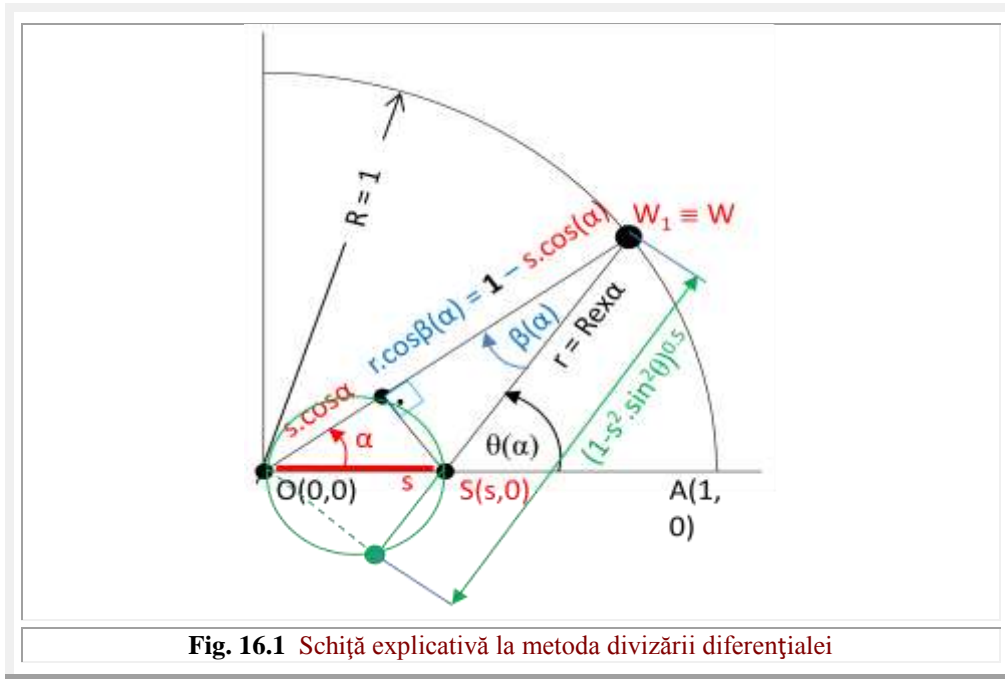


Fig. 16.1 Schiță explicativă la metoda divizării diferențialei

Din teoria **FSM-CE** se pot deduce relațiile, verificabile pe schița din **figura**

16.1

$$(16.15) \quad \begin{cases} \cos \beta(\alpha) = \frac{1-s \cdot \cos(\alpha-\epsilon)}{Rex\alpha} = \frac{1-s \cdot \cos(\alpha-\epsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \cdot \cos(\alpha-\epsilon)}} \\ \sin \beta(\alpha) = \frac{s \cdot \sin(\alpha-\epsilon)}{Rex\alpha} = \frac{s \cdot \sin(\alpha-\epsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \cdot \cos(\alpha-\epsilon)}} \end{cases} \text{și, din prima relație,}$$

rezultă expresia integrandului din (16.09')

$$(16.16) \quad f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{Rex\alpha} = \frac{1}{s} \left[\frac{1}{Rex\alpha} - \cos \beta(\alpha) \right], \quad \text{astfel că integrala devine}$$

$$(16.14'') \quad I_D = \frac{1}{s} \int_0^\pi \left[\frac{1}{\text{Rex}\alpha} - \cos \beta(\alpha) \right] d\alpha.$$

Prin divizarea diferențialei $d\alpha$, știind că $\alpha = \theta - \beta$ în

$$(16.17) \quad d(\theta - \beta) = d\theta - d\beta \quad \text{și că, limitele de integrare devin}$$

$$(16.18) \quad \begin{cases} \alpha = 0 \rightarrow \theta = 0, \beta = 0 \\ \alpha = \pi \rightarrow \theta = \pi, \beta = 0 \end{cases} \text{ dacă } \varepsilon = 0, \quad (\text{v. și schița), astfel că,}$$

oricare ar fi expresia integrandului cu diferențiala $d\beta$, valoarea integralei definite

$$(16.18') \quad [F_\beta(B) - F_\beta(A) = F_\beta(0) - F_\beta(0) = 0] \text{ este nulă.}$$

Integrala I_D devine

$$(16.19.1) \quad I_D = \frac{1}{s} \left[\int_0^\pi \left[\frac{1}{\text{Rex}\alpha} - \cos \beta(\alpha) \right] d\theta - \int_0^\pi \left[\frac{1}{\text{Rex}\alpha} - \cos \beta(\alpha) \right] d\beta \right] I_{1D} + I_{2D},$$

și ținând cont de cele anterior enunțate, $I_{2D} = 0$, astfel că

$$(16.19.2) \quad I_D = I_{1D} = \frac{1}{s} \left[\int_0^\pi \frac{d\alpha}{\text{Rex}\alpha} + \int_0^\pi \frac{d\beta}{\text{Rex}\alpha} - \int_0^\pi \cos \beta(\alpha) \cdot d\theta \right]$$

Dar, conform (15.18)

$$(16.20) \quad \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} \frac{d\beta}{\text{Rex}\alpha} = \int_{\beta=0}^{\beta=0} \frac{d\beta}{\text{Rex}\alpha(\beta)} = 0, \text{ oricare ar fi expresia lui } \text{Rex}\alpha(\beta).$$

În acest fel I_D s-a redus la integrala

$$(16.19-3) \quad I_D = \frac{1}{s} \left[\int_0^\pi \frac{d\alpha}{\text{Rex}\alpha} - \int_0^\pi \cos \beta(\theta) \cdot d\theta \right] = \frac{1}{s} [2K(k=s) - 2E(k=s)].$$

Știind că

$$(16.20) \quad \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\text{Rex}\alpha} = 2K(k=s), \quad \text{Râjik, Tabele de integrale, pag 174, integrala 3.413,1.} \rightarrow \text{BH[67] (5), în care s-a notat } k = s = p \rightarrow p^2 < 1, \text{ rezultă}$$

$$(16.19-4) \quad I_D = \frac{2}{s} [K(s=k) - E(s=k)], \quad \text{ceea ce se poate verifica în Râjik la pag 174, integrala 3.413, 3.} \rightarrow \text{BH[67] (7), în care s-a notat } k = s = p \rightarrow p^2 < 1.$$

Anterior, s-a ținut cont și de relația,

$$(16.21) \quad \cos \beta(\alpha) = \cos \beta(\theta) = \sqrt{1 - s^2 \sin^2 \theta}, \quad s = k,$$

(completată cu verde în figura 16.1), care este integrandul integralei eliptice de speța a doua $E(k)$, evident, pentru limitele de integrare 0 și $\pi/2$; $E(k)$ fiind un sfert din lungimea circumferinței elipsei E_3 , adică arcul elipsei E_3 de la $A(\theta = 0)$ la $B(\theta = \pi/2)$. Dar arcul de la A la B este egal cu arcul de la B la $A'(\theta = \pi)$. Astfel că, pentru limitele 0 și π , rezultă $2E(k)$; elipsa E_3 ($a = 1, b = \sqrt{1 - k^2}$) fiind simetrică față de axa Oy, așa cum s-a afirmat în capitolul 12.

Aplicația 16.5.2

Fie integralele, cea nedefinită

$$(16.22) \quad I_N = \int \frac{dx}{1+k^2-2k\cos x}$$

și cea definită, denumita integrala lui Poisson [Radu Bădescu, C-tin Maican, "INTEGRALE utilizate în mecanică, fizică, tehnică și calculul lor", Ed. Tehnică, Buc. 1968, pag. 368]

$$(16.22') \quad I_D = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+k^2-2k\cos x},$$

în care excentricitatea numerică $s^2 = k^2 \in [0, 1]$ și $x \in \{\mathbf{R} - \{n\pi\} \mid n \in \mathbf{Z}\}, \forall x$.

Din teoria **FSM-CE**, funcția de la numitorul integrandului este pătratul funcție radial excentric de variabila centrică $\alpha \equiv y$, **FSM-CE** notată cu $\text{Rex}^2\alpha$, în care, excentricitatea numerică $s = k$ și $\varepsilon = 0$. Ca urmare, integralele devin, așa cum s-a văzut și în exemplul anterior

$$(16.22-1) \quad I_N = \int \frac{d\alpha}{\text{Rex}^2\alpha} \quad \text{și}$$

$$(16.22-1') \quad I_D = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{\text{Rex}^2\alpha}$$

Se cunoaște că $\theta = \alpha + \beta \rightarrow \alpha = \theta - \beta$ și că **FSM-CE** derivată excentrică de variabilă centrică **Dexa** este, prin definiție, raportul diferențialelor variabilelor excentrice și centrice ($\frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha}$ sau $\frac{dx(y)}{dy}$) și are expresia (Vol.I, pag. 10 și Cap.6.4, pag. 199)

$$(16.23) \quad \begin{aligned} \text{Dex}\alpha &= \frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} = 1 + \frac{d\beta(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1-s\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} = \\ &= \frac{1-s\cos(\alpha-\varepsilon)}{\text{Rex}^2\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \cdot \cos n \alpha \end{aligned}$$

Funcția supermatematică circulară excentrică (FSM-CE) de variabilă centrică **Bexa** are expresiile

$$(16.24) \quad \beta(\alpha) \equiv \text{Bex}\alpha = \arcsin \frac{s\sin(\alpha-\varepsilon)}{\text{Rex}\alpha} = \arctan \frac{s\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s\cos(\alpha-\varepsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n} \sin n \alpha$$

a cărei derivată, a celei de a doua expresii, mai simplu de derivat, fiind exprimată prin arctan, este

$$(16.25) \quad \frac{d\beta(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d(\text{Bex}\alpha)}{d\alpha} = \frac{s\cos(\alpha-\varepsilon) - s^2}{\text{Rex}^2\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \cdot \cos n \alpha$$

Suma derivatelor lui $\theta(\alpha)$ cu $\beta(\alpha)$ în funcție de variabila centrică α , adică

$$(16.26) \quad \begin{aligned} \frac{d(\theta+\beta)}{d\alpha} &= \frac{d(\alpha+2\beta)}{d\alpha} = 1 + 2 \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1-s^2}{\text{Rex}^2\alpha} = \frac{d(x+z)}{dy} = 1 + 2 \frac{dz}{dy} \\ &= \frac{1-s^2}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} s^n \cdot \cos n \alpha = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cos n y \end{aligned}$$

și reprezintă expresia **nucleului integralei lui Poisson**.

Împărțind și înmulțind simultan integranzii integralelor (16.22) și (16.22') cu constanta $(1-s^2) = (1-k^2)$ și uzând de notațiile **supermatematice** ($\theta \equiv x, \alpha \equiv y, \beta \equiv z$) integralele devin

$$(16.22-2) \quad I_N = \frac{1}{1-s^2} \int \frac{1-s^2}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} d\alpha = \frac{1}{1-s^2} \int \frac{1-s^2}{\text{Rex}^2\alpha} d\alpha \quad \text{și, respectiv}$$

$$(16.22-2') \quad I_D = \frac{1}{1-s^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-s^2}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} d\alpha = \frac{1}{1-s^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-s^2}{\text{Rex}^2\alpha} d\alpha$$

Utilizând în integralele anterioare relația (15.26) rezultă

$$(16.22-3) \quad I_N = \frac{1}{1-s^2} \int (1 + 2 \frac{dz}{dy}) dy = \frac{1}{1-s^2} (\int dy + 2 \int dz) = \frac{1}{1-s^2} (y + 2z)$$

$$(16.22-3') \quad \begin{aligned} I_D &= \frac{1}{1-k^2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2 \frac{d\beta}{d\alpha}) d\alpha = \frac{1}{1-s^2} (\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha + 2 \int_0^0 d\beta) = \\ &= \frac{1}{1-k^2} (y|_{-\pi}^{\pi}) = \frac{2\pi}{1-k^2}. \end{aligned}$$

În integrala definită I_D s-a ținut cont de următoarele modificări ale limitelor de integrare:

$$(16.27) \quad \begin{cases} \alpha(\theta = \pi) = \pi, \text{ sau } y(x = \pi) = \pi \text{ și} \\ \beta(\theta = \pi) = 0, \text{ sau } z(x = \pi) = 0, \text{ pentru } \varepsilon = 0 \\ \alpha(\theta = -\pi) = -\pi, \text{ sau } y(x = -\pi) = -\pi \text{ și} \\ \beta(x = \pi) = 0 \text{ sau } z(x = \pi) = 0, \text{ pentru } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

așa cum se poate observa, fără dificultate, pe schițele explicative din **figura 4.2,a** și **4.2,b** (Vol. I, ediția 1-a, pag. 107) și cum se poate deduce și pe schița din **figura 16.1**.

Rezultatul coincide cu cel prezentate în lucrarea citată anterior (R., Bădescu, C-tin., Maican - INTEGRAL, pag. 369), pentru cazul $|s| = |k| < 1$, la rezolvarea căreia s-a transferat problema în spațiul / planul complex în care s-a utilizat teorema reziduurilor.

Aplicația 16.5.3

Fie integralele

$$(16.28) \quad I_N = \int \frac{\sin \alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\alpha}} = \int \frac{\sin \alpha \cdot d\alpha}{\text{Rex}\alpha}$$

$$(16.28') \quad I_D = \int_0^\pi \frac{\sin \alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\alpha}} = \int_0^\pi \frac{\sin \alpha \cdot d\alpha}{\text{Rex}\alpha}$$

Derivata **FSM-CE** radial excentric **Rex α** de variabilă **centrică α** este

$$(16.29) \quad \frac{d(\text{Rex}\alpha)}{d\alpha} = \frac{d\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}}{d\alpha} = \frac{s \cdot \sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} \cdot \frac{\sin(\alpha-\varepsilon)}{\text{Rex}\alpha} = \sin(\beta(\alpha)),$$

așa cum rezultă și din a doua relație (16.29).

Utilizând (16.29), cu / pentru $\varepsilon = 0$, în (15.28) rezultă

$$(16.28-1) \quad I_N = \frac{1}{s} \int \frac{d(\text{Rex}\alpha)}{d\alpha} d\alpha = \frac{1}{s} \int d(\text{Rex}\alpha) = \frac{\text{Rex}\alpha}{s} + C,$$

care este expresia integralei nedefinite.

Se cunoaște modul de determinare a valorii integralei definite I_D când se cunoaște expresia primitivei integralei nedefinite.

Știind că, pentru un excentru plasat pe axa x, în interiorul cercului unitate, adică $S(s, 0)$ cu $s^2 \leq 1 \rightarrow \text{Rex}0 = 1 - s$ și $\text{Rex}\pi = 1 + s$, rezultă imediat valoarea integralei definite

$$(16.28-1') \quad I_D = \frac{1}{s} \int_0^\pi d(\text{Rex}\alpha) = \frac{1}{s} |\text{Rex}\alpha|_0^\pi = \frac{\text{Rex}\pi - \text{Rex}0}{s} = \frac{1+s - (1-s)}{s} = \frac{2s}{s} = 2,$$

valoare ce corespunde cu cea prezentată în Râjnik, pag. 174, 3.413/3.BH[67](6) pentru $s^2 = p^2 \leq 1$.

Dacă **excentrul S** este plasat pe axa x negativă $S(s, \pi) = S(-s, 0)$, atunci **Rex0** = $1 + |s|$ și **Rex π** = $1 - |s|$, astfel că I_D va avea valoarea de $I_D(s < 0) = -2$ și corespunde semnelui + de sub semnul radical, adică pentru un integrand de expresie

$$(16.30) \quad I_D \rightarrow f'(\alpha) = \frac{d(\text{Rex}\alpha)}{d\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1+s^2+2s\cos(\alpha-\varepsilon)}}$$

Pentru un excentru **S(s, ε)** plasat în exteriorul cercului unitate, adică pentru $s^2 = p^2 \geq 1$, prin scoaterea forțată a excentricității **s** de sub semnul radical, expresia integrandului devine

$$(16.31) \quad I_D \rightarrow f'(\alpha) = \frac{d(\text{Rex}\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{s} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1+s'^2-2s'\cos(\alpha-\varepsilon)}},$$

în care noua excentricitate numerică este

$$(16.32) \quad s'^2 = \frac{1}{s^2} \leq 1, \quad \text{iar integrala definită ia forma}$$

$$(16.28'-2') \quad I_D = \frac{1}{s} \int_0^\pi \frac{\sin \alpha \cdot d\alpha}{\operatorname{Re}x(\alpha, s'(s', \varepsilon))}$$

În acest caz, valoarea integralei va fi

$$(16.28'-3') \quad I_D = \begin{cases} \frac{2}{s}, & \text{dacă } \varepsilon = 0, \text{ sau dacă } s' > 0 \\ -\frac{2}{s}, & \text{dacă } \varepsilon = \pi, \text{ sau dacă } s' < 0 \end{cases}$$

valoare care, deasemenea coincide cu cele din literatura de specialitate (Râjic, pag. 174, 3.413, 3 ; BH[67] (6)) pentru $s = p$, $p^2 \geq 1$.

Aplicația 16.5.4-1

Ținând cont de relația (16.29), rezultă că oricare integrală, definită sau nedefinită, a cărui integrand este de forma (16.28) se poate scrie sub forma

$$(16.33) \quad I_D = \int_0^\pi f\left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1+s^2-2s\cos \alpha}}\right) d\alpha = \int_0^\pi f\left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{Re}x \alpha}\right) d\alpha = \int_0^\pi f(\sin \beta(\alpha)) d\alpha = \int_0^\pi f(\sin \beta(\alpha)) \cdot d(\theta - \beta)$$

Dacă limitele de integrare sunt 0 și $\pm \pi$ și $\varepsilon = 0$ sau $\varepsilon = \pm \pi$, atunci $\beta(0) = \beta(\pm \pi) = 0$ și rezultă

$$(15.33-2) \quad I_{D2} = \int_0^0 f(\sin \beta(\alpha)) d\beta = 0 \quad \text{și ținând cont de egalitatea}$$

$$(16.34) \quad \cos \beta(\alpha) = \cos \beta(\theta) = s \cdot \sin \theta \quad \text{rezultă că}$$

$$(15.33-1) \quad I_D = I_{D1} = \int_0^{\alpha=\pi} f(\sin \beta(\alpha)) d\theta = \int_0^{\theta(\alpha)=\pi+\beta} f(\sin \beta(\theta)) \cdot d\theta = \int_0^{\pi+\beta} f(\sin \beta(\theta)) \cdot d\theta = \int_0^{\pi+\beta} f(s \cdot \sin \theta) \cdot d\theta, \quad \text{în care}$$

$$(16.35) \quad \beta \rightarrow \begin{cases} \beta(\theta) = \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \\ \beta(\alpha) = \begin{cases} \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\operatorname{Re}x \alpha} \text{ sau} \\ \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)} \end{cases} \end{cases}$$

Aplicația 16.5.4-2

Dacă integrala definită este de forma

$$(16.36) \quad I_D = \int_0^\pi f\left(\frac{\sin^2 \alpha}{1+s^2-2s\cos \alpha}\right) d\alpha = \int_0^\pi f\left(\frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{Re}x^2 \alpha}\right) d\alpha = \int_0^\pi f(\sin^2 \beta(\alpha)) d(\theta - \beta) \\ \int_0^\pi f(\sin^2 \beta(\alpha)) d\alpha =$$

și va rezulta

$$(16.36-1) \quad I_D = \begin{cases} \int_0^\pi f(\sin^2 \alpha) d\alpha, & [s^2 = p^2 \leq 1] \\ \int_0^\pi f\left(\frac{\sin^2 \alpha}{s^2}\right) d\alpha, & [s^2 = p^2 \geq 1] \end{cases}, \quad \text{rezultat consemnat}$$

și în Râjic pag. 147, 3.036.1 La 228 (6), cu mici greșeli / inversiuni (Ed. Tehnica, Buc. 1955) privind inversarea valorilor excentricităților numerice.

Acum, pe baza rezultatelor de la aplicația **16.4-1**, se poate merge mai departe și se poate scrie

$$(16.36-2) \quad I_D = \begin{cases} \int_0^{\pi+\beta} f(s^2 \cdot \sin^2 \theta) \cdot d\theta, & [s^2 = p^2 \leq 1] \\ \int_0^{\pi+\beta} f(\sin^2 \theta) \cdot d\theta, & [s^2 = p^2 \geq 1] \end{cases}$$

Aplicația 16.5.4-3

Se știe [Râjnik, pag. 54, 1.447, F II 559] că relațiile (16.23) sunt sumele

$$(16.23') \quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \cos n \alpha = \frac{1-s \cdot \cos \alpha}{\text{Rex}^2 \alpha} = \text{Dex} \alpha \\ \sum_{n=1}^{\infty} s^n \sin n \alpha = \frac{s \cdot \sin \alpha}{\text{Rex}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{Rex} \alpha} \frac{d(\text{Rex} \alpha)}{d\alpha} = \frac{d(\ln \text{Rex} \alpha)}{d\alpha} \end{cases}$$

și, deasemenea, că

$$(16.37) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \sin n \alpha &= \arctan \frac{s \cdot \sin \alpha}{1-s \cdot \cos \alpha} = \beta(\alpha) = \text{Bex} \alpha = \arcsin \frac{s \cdot \sin \alpha}{\text{Rex} \alpha} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \cos n \alpha &= \ln \frac{1}{\text{Rex} \alpha} = -\ln \text{Rex} \alpha, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{2n-1}}{2n-1} \cos(2n-1) \alpha &= \frac{1}{4} \ln \frac{\text{Rex}^2[\alpha, S(s, \varepsilon = \pi)]}{\text{Rex}^2[\alpha, S(s, \varepsilon = 0)]} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{2n-1}}{2n-1} \sin(2n-1) \alpha &= \frac{1}{2} \arctan \frac{2s \cdot \sin \alpha}{1-s^2} \\ &\text{pentru } \alpha \in [0, 2\pi], s^2 \leq 1 \rightarrow \varepsilon = 0 \text{ sau } \pi \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{2n-1}}{2n-1} \sin(2n-1) \alpha &= \frac{1}{2} \arctan \frac{2s \cdot \sin \alpha}{1-s} \text{ și pentru } \alpha \in [0, \pi]: \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{s^{2n-1}}{2n-1} \sin(2n-1) \alpha &= \frac{1}{4} \ln \frac{\text{Rex}^2[\alpha, S(s, \varepsilon = \pi)]}{\text{Rex}^2[\alpha, S(s, \varepsilon = 0)]} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{s^{2n-1}}{2n-1} \cos(2n-1) \alpha &= \frac{1}{2} \arctan \frac{2s \cdot \cos \alpha}{1-s^2} \end{aligned} \right.$$

Ca urmare

Aplicația 16.6-1

$$(16.38) \quad I_N = \int \frac{1-s \cdot \cos \alpha}{\text{Rex}^2 \alpha} d\alpha = \int \sum_{n=0}^{\infty} s^n \cos n \alpha \cdot d\alpha = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \sin n \alpha = \alpha + \text{Bex} \alpha$$

Sau, mai simplu, direct, fără divizarea / dezvoltarea funcției, știind că expresia **FSM-CE** derivată excentrică, de variabilă centrică, este **Dex** $\alpha = \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{1-s \cdot \cos \alpha}{\text{Rex}^2 \alpha}$ [v. Vol.I, Ed.1-a, pag. 10, pag.26, pag.176 relația (5.89)]

$$(16.38') \quad I_N = \int \frac{1-s \cdot \cos \alpha}{\text{Rex}^2 \alpha} d\alpha = \int \text{Dex} \alpha \cdot d\alpha = \int \frac{d\theta}{d\alpha} d\alpha = \int d\theta = \theta(\alpha) = \alpha + \beta(\alpha)$$

Cunoscându-se expresia primitivei integralei nedefinite, integralele definite de același integrand se calculează extrem de simplu.

Astfel dacă limitele de integrare sunt

$$(16.39) \quad I_{D1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-s \cdot \cos \alpha}{\text{Rex}^2 \alpha} d\alpha = (\theta(\alpha)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\alpha + \beta(\alpha)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \begin{cases} \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin \alpha}{\operatorname{Rex} \alpha} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, & \text{cele două valori fiind} \\ (\alpha + \arctan \frac{s \cdot \sin \alpha}{1-s \cdot \cos \alpha} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \arctan s \end{cases}$$

egale, deoarece, se cunoaște relația dintre sinus și tangentă $\sin s = \pm \frac{\tan s}{\sqrt{1+\tan^2 s}}$.

Pentru alte limite de integrare, valoarea integralei definite I_{D1} se va afla la fel de simplu.

Aplicația 16.6-2

$$(16.40) \quad I_N = \int \frac{s \cdot \sin \alpha}{\operatorname{Rex}^2 \alpha} = \int \sum_{n=1}^{\infty} s^n \sin n \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int \sin n \alpha \cdot d \alpha = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \frac{1}{n} (-\cos n \alpha) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \cos n \alpha = \ln(\operatorname{Rex} \alpha).$$

Și în acest caz, integrala nedefinită se poate soluționa și fără divizarea / descompunerea integrandului, pe baza ultimei relații (16. 10'), adică

$$(16.40') \quad I_N = \int \frac{s \cdot \sin \alpha}{\operatorname{Rex}^2 \alpha} d \alpha = \int \frac{d(\ln \operatorname{Rex} \alpha)}{d \alpha} d \alpha = \int d[(\ln(\operatorname{Rex} \alpha))] = \ln(\operatorname{Rex} \alpha) = \\ = \ln(\sqrt{1+s^2-2s \cdot \cos \alpha})$$

Integrala definită va fi

$$(16.41) \quad I_{D2} = \int_0^{\pi} \frac{s \cdot \sin \alpha}{\operatorname{Rex}^2 \alpha} d \alpha = \ln(\sqrt{1+s^2-2s \cdot \cos \alpha}) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \ln(\operatorname{Rex} \pi) - \ln(\operatorname{Rex} 0) = \\ = \ln(\sqrt{1+s^2+2s}) - \ln(\sqrt{1+s^2-2s}) = \ln \left(\frac{\operatorname{Rex} \pi}{\operatorname{Rex} 0} \right) = \ln \frac{1+s}{1-s} = \ln \frac{-\operatorname{Rex}_2 0}{\operatorname{Rex}_1 0} = \ln \frac{\operatorname{Rex}_1 \pi}{-\operatorname{Rex}_2 \pi}$$

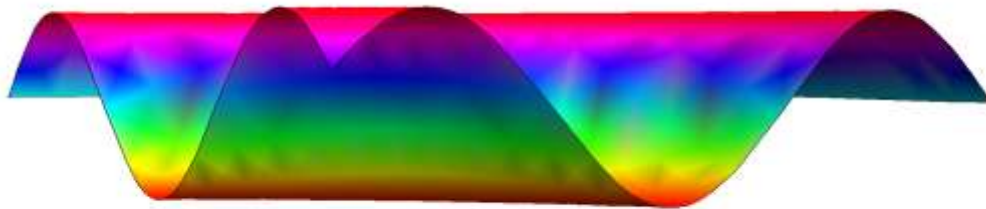
în care s-au utilizat și cele două determinări ale funcției radial excentric de variabilă centrică.

Deoarece, pentru $\alpha = 0 \rightarrow \theta = 0$ și pentru $\alpha = \pi \rightarrow \theta = \pi$, în ambele limite $\beta(0) = \beta(\pi) = 0$, ca urmare $\operatorname{Rex}_{1,2} \alpha = \operatorname{rex}_{1,2} \theta$ și se poate scrie

$$(15.41') \quad I_{D2} = \ln \frac{-\operatorname{Rex}_2 0}{\operatorname{Rex}_1 0} = \ln \frac{\operatorname{Rex}_1 \pi}{-\operatorname{Rex}_2 \pi} = \ln \frac{-\operatorname{rex}_2 0}{\operatorname{rex}_1 0} = \ln \frac{\operatorname{rex}_1 \pi}{-\operatorname{rex}_2 \pi}.$$

Lăsăm cititorului plăcerea de-a descoperii noi aplicații ale metodei divizării diferențialei, întrucât, în analiza matematică, **integrala** unei funcții este o generalizare a noțiunilor de arie, masă, volum și sumă.

În lucrarea [39], autorul a avut privilegiul de-a publica, alături de reputatul matematician dr. math. **Florentin Smmarandache**, seful Departamentului de Matematică al Universității New Mexico (USA) unele integrale din cele anterior expuse, rezolvate direct.



Motto “Atât timp cât legile matematicii se referă la realitate;
acestea nu sunt sigure; atâta timp cât acestea sunt sigure,
nu se referă la realitate “
Albert Einstein (1871-1955)

Capitolul 17

FUNȚIILE SUPERMATEMATICE BETA EXCENTRICE $\text{bex } \theta$ SOLUȚII ALE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE (SO β)

17.1 INTRODUCERE

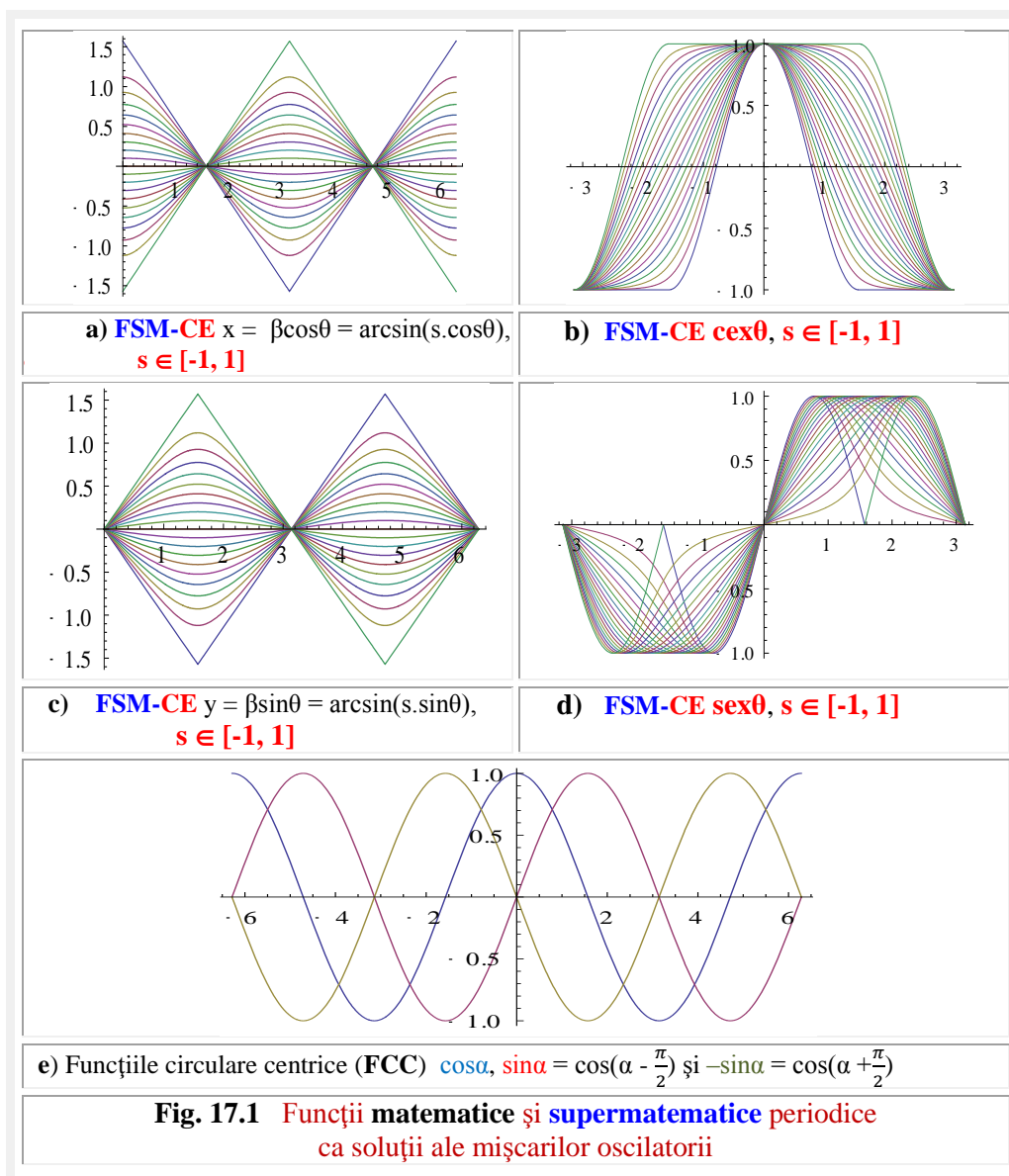
Funcțiile supermatematice beta excentrice au făcut obiectul lucrării dlui Dr. ing. **Dumitru Bălă** “SUPERMATHEMATICAL – ȘELARIU FUNCTIONS BETA ECCENTRIC $\text{bex}\theta$ SOLUTIONS OF SOME OSCILLATORY NON-LINEAR SYSTEMS (SO β), susținută la “Proceedings of the 2nd World Congress on Science, Economics, and Culture”, 25-29 August 2008, New York.

Oricare funcție periodică poate, în principiu, descrie, evident, o mișcare oscilantă. Funcțiile circulare centrice (**FCC**) cosinus ($\cos\alpha$) și sinus ($\sin\alpha$) centrice descriu, fără dificultate, mișcările oscilatorii ale sistemelor liniare; **matematica centrică (MC)** fiind **matematica sistemelor ideale, perfecte, liniare**, în timp ce, **matematica excentrică (ME)** este **matematica sistemelor reale, imperfecte, neliniare**. Reuniunea lor reprezintă, după cum se știe, **supermatematica (SM)**.

Unele **funcții supermatematice circulare excentrice (FSM-CE)**, de variabilă centrică **$\text{cex}\theta$** și **$\text{sex}\theta$** [5] cât și cele de variabilă centrică **$\text{Cex}\alpha$** și **$\text{Sex}\alpha$** [8], sunt demonstrate, deja, ca soluții ale unor sisteme vibrante de caracteristici elastice statice neliniare (CESNL). Și funcțiile cuadrilobe [10] s-au dovedit a fi soluții ale unor sisteme oscilante neliniare, asemănătoare cu caracteristicile elastice statice ale sistemelor lui **Duffing** ($ax \pm bx^3$), care reprezintă o dezvoltare în serii de puteri, dar vibrațiile cuadrilobe asigură un termen ($\pm cx^5$) al dezvoltării în plus.

Funcțiile supermatematice realizează o extindere vastă (infinită) a funcțiilor periodice, fără să înlocuiască cercul unitate / trigonometric cu alte curbe închise, așa cum se cunosc foarte multe încercări în matematica centrică (**MC**) descrise succint în [Vol.I, Cap 2: Funcții patratiche și rombice **Alaci Valeriu**; funcții poligonale **Enulescu**, funcții transtrigonometrice **Malvina Baica** și **Mircea Cârdu** ș.a.].

Noile funcții periodice, componente ale complementelor de matematică și ale **matematicii excentrice (ME)**, care reunite cu **MC** alcătuiesc ceea ce s-a denumit **supermatematică (SM = MC U ME)**, s-au dovedit deja ca soluții ale descrierii unor mișcări periodice ale unor sisteme vibrante neliniare, mai greu de descris cu funcțiile existente în **MC**.



În **figurile 1,a** și **b** sunt prezentate **funcțiile supermatematice circulare excentrice (FSM-CE)**

$$(17.1) \quad Y = \beta_{\text{sex}}(\theta) \equiv \text{bex}\theta = \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)],$$

denumită **beta-sinus** și notată **$\beta_{\text{sex}}(\theta, S(s, \varepsilon))$** , în care **$S(s, \varepsilon)$** este excentrul, corespunzător cercului unitate, **$s = e/R$** este excentricitatea numerică, **e** excentricitatea reală, corespunzătoare unui cerc de raza oarecare R și **ε** este direcția pe care a fost expulzat polul **$S(s, \varepsilon)$** din $O(0,0)$ și denumit **excentru $S(s, \varepsilon)$** , precum și funcția **complementară**

$$(17.2) \quad X = \beta_{\text{cex}}(\theta) \equiv \text{bex}(\theta + \pi/2) = \arcsin[s \cdot \sin[\theta + \pi/2 - \varepsilon]] = \arcsin[s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)] = \\ = \arcsin[s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)].$$

Așa cum $\cos\theta$ și $\cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$ (**Fig.1,e**) sunt soluții ale unor sisteme vibrante liniare, tot așa, cele două funcții prezentate anterior, cu graficele din **figura 1,a** și **1,b** pot fi soluții ale unor sisteme vibrante a căror proprietăți vor fi deduse în continuare.

17.2 SEMNIFICAȚIILE GEOMETRICE ALE **FSM-CE** $\beta_{\text{cex}}\theta$ și $\beta_{\text{sex}}\theta$

Prin intersectarea cercului unitate $C(O,1)$ cu o dreaptă turnantă în jurul excentrului unitate $S(s, \varepsilon)$ apar punctele de intersecție **W_1** și **W_2** , notate concentrat **$W_{1,2}$** .

Coordonatele carteziene ale acestor puncte, ca funcții de variabila excentrică **θ** , sunt funcțiile **supermatematice** circulare excentrice(**FSM-CE**)

$$(17.3) \quad x_{1,2} = \text{cex}_{1,2}\theta = \cos\alpha_{1,2} \text{ și}$$

$$(17.4) \quad y_{1,2} = \text{sex}_{1,2}\theta = \sin\alpha_{1,2}$$

echivalentele funcțiilor cosinus și sinus, de variabile centrice, în care **$\alpha_{1,2}$** sunt unghiurile din $O(0,0)$, corespondente din **MC**.

FSM-CE cosinus și sinus excentrice, atât cele de variabilă excentrică **$\text{cex}\theta$** și **$\text{sex}\theta$** , [5] cât și cele de variabilă centrică **$\text{Cex}\alpha$** și **$\text{Sex}\alpha$** [8], sunt soluții ale unor sisteme oscilante de caracteristici elastice statice neliniare. Există, însă, multe alte **FSM-CE** care sunt soluții ale unor astfel de sisteme oscilante, toate fiind incluse în sistemul oscilațiilor excentrice (**SOE**), denumire dată acestor sisteme de Prof. dr. math. **Emilia Petrișor**, autoarea **extinderii haosului** de la **haosul centric** la **haosul excentric**, [23], [24], [25] prin simpla înlocuire a **FCC** **$\cos\alpha$** și **$\sin\alpha$** cu **FSM-CE** corespondente **$\text{cex}\theta$** și **$\text{sex}\theta$** . Lucrarea ei [23] s-a bucurat de foarte mare interes la o conferință dedicată haosului de la Budapesta.

Ca fapt divers, prezentăm o comparație între cele două tipuri de haos: în **figura 17.2,a1**, haosul **centric**, iar în **figurile 17.2,a2** și **Fig. 17.2,a3** (extrase din lucrarea **Techno-Art of Șelariu Supermathematics Functions**, Ed. ARP -American Research Press) cele **excentrice**. Lasăm cititorului plăcerea de a sesiza diferențele care au fost sesizate în cadrul conferinței de la Budapesta :”Numai haosul excentric este cu adevărat haos (caus)”.

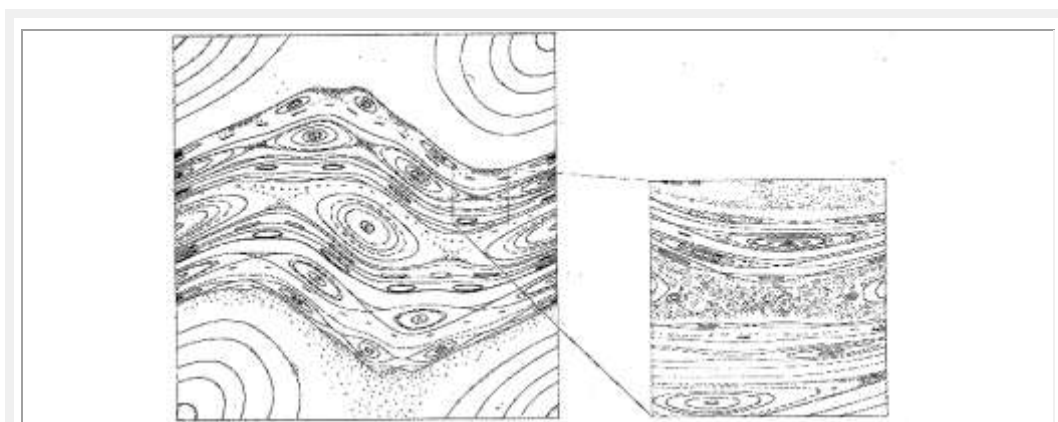


Fig. 17.2,a1 Haos (chaos) centric *Orbite stabile (regulate și haotice.)*
 V. I. Arnold, „Huygens și Burrow, Newton și Hooke”, „ Primul pas de la Analiza matematica la Teoria catastrofelor, de la evolventa la cuasicristale” Editura (Nauka) de Științe Fizico-Matematice , Moscova,

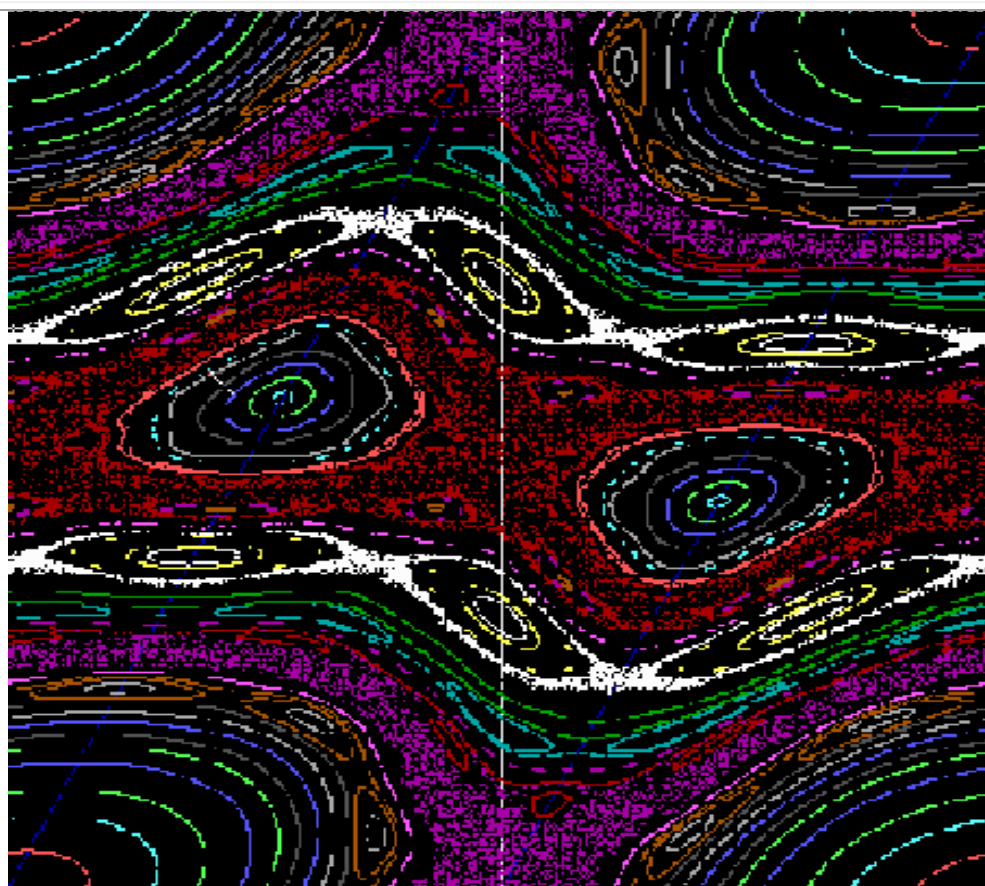


Fig. 17.2,a2 Haosul excentric 1 al Emiliei Petrișor

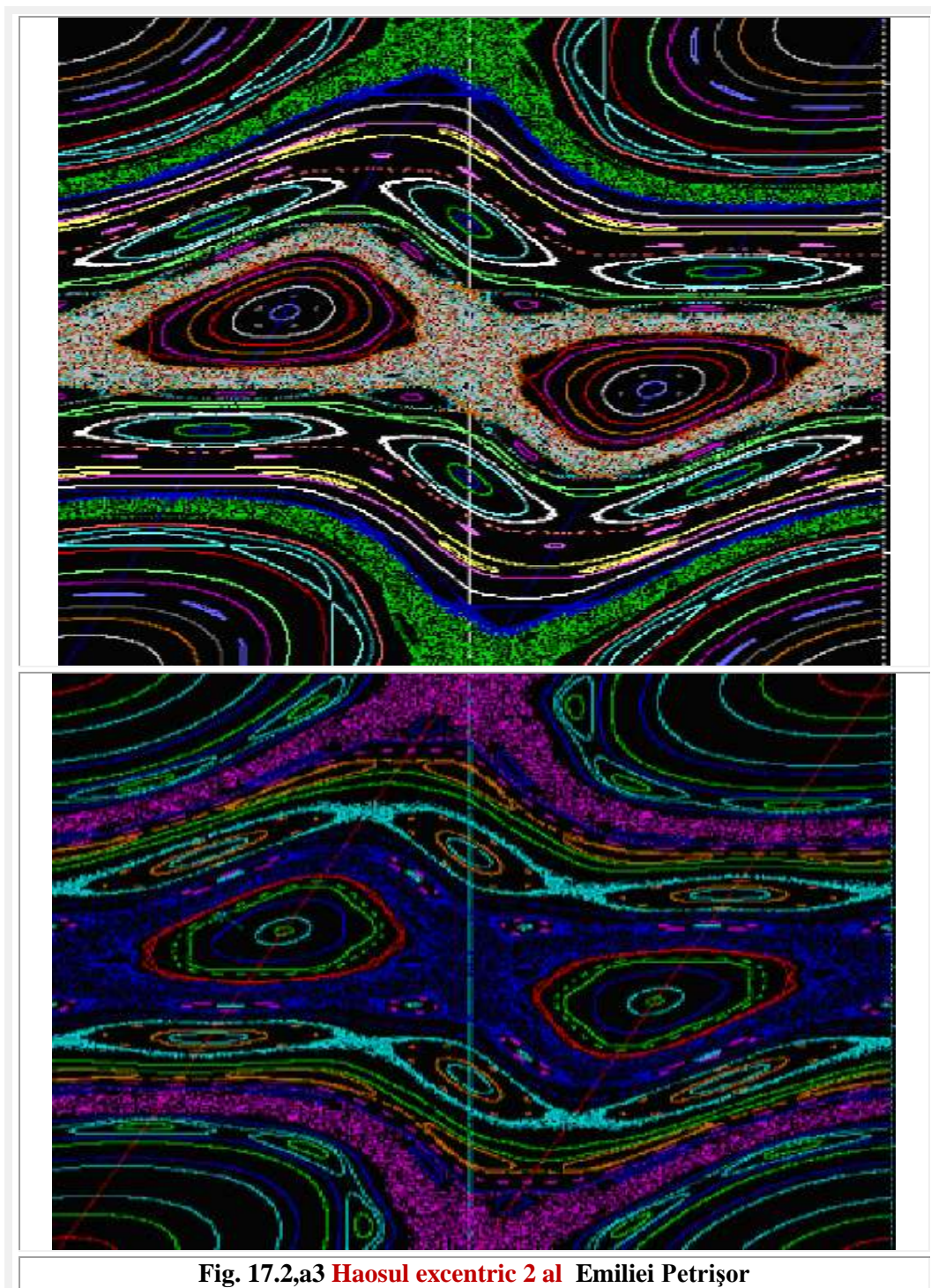


Fig. 17.2,a3 **Haosul excentric 2** al Emiliei Petrișor

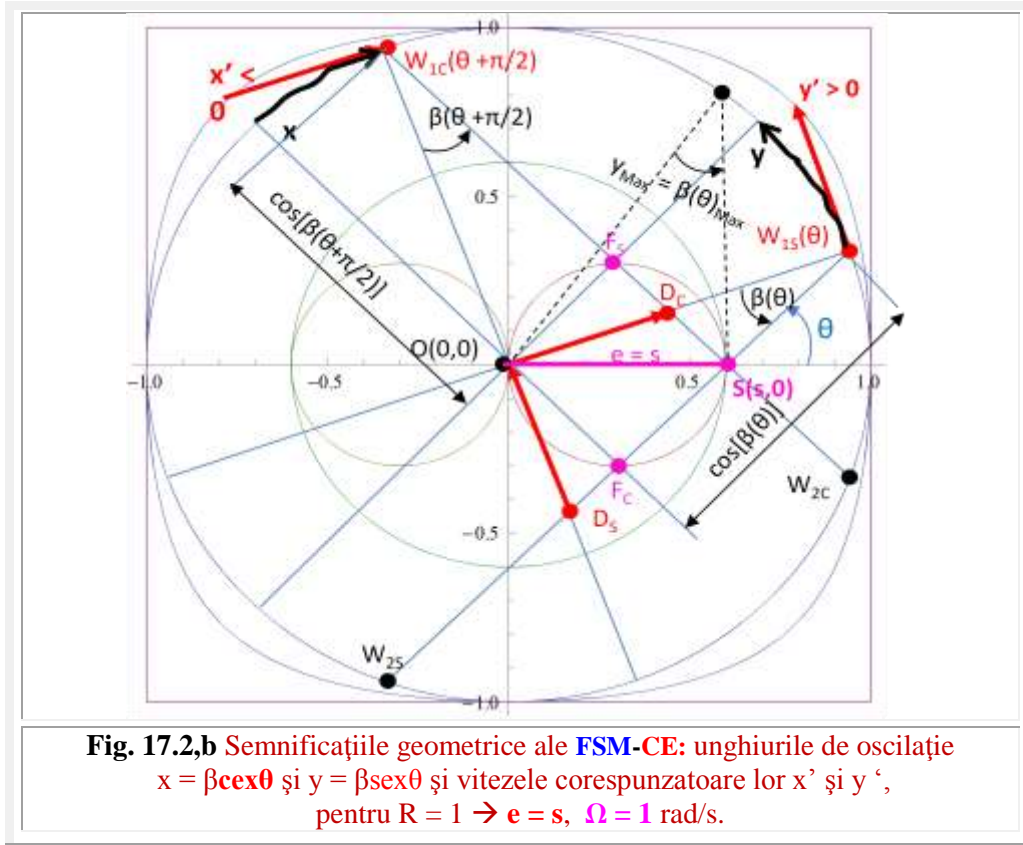


Fig. 17.2,b Semnificațiile geometrice ale FSM-CE: unghiurile de oscilație $x = \beta e x \theta$ și $y = \beta s x \theta$ și vitezele corespunzatoare lor x' și y' , pentru $R = 1 \rightarrow e = s, \Omega = 1 \text{ rad/s}$.

În cadrul SOE se înscriu oscilațiile în **modul** ale funcțiilor radial excentric de variabilă excentrică $rex_{1,2}\theta$, cât și cele de variabilă centrică $Rex\alpha_{1,2}$, care sunt reprezentate de razele vectoriale excentrice $\vec{r}_{1,2} = \vec{EW}_{1,2}$ și care nu au echivalent în MC, deoarece, în MC în condițiile $e = s = 0$, modulul vectorului $|\vec{R}_{1,2}(\alpha_{1,2})| = |\vec{OW}_{1,2}| = \text{const.} = 1$.

17.3 ELONGAȚIA, VITEZA ȘI ACCELERAȚIA MIȘCĂRILOR OSCILATORII ALE SISTEMELOR OSCILANTE β (SO β)

În ME se operează cu trei unghiuri, sau variabile: la **centru** α , la **excentru** θ și **unghiul** β cu vârful pe cercul unitate, în punctul W , dacă direcția ϵ de expulzare a excentrului $S(s,\epsilon)$ din centrul $O(0,0)$ este pe direcția axei abscisei $\epsilon = 0$, cum se va considera în continuare.

Unghiul β poate fi exprimat în funcție de **variabila centrică** $\beta(\alpha)$ sau de **variabila excentrică** $\beta(\theta)$. În prezenta lucrare se consideră funcțiile de variabilă **excentrică** θ și sistemul oscilant va fi denumit sistem oscilant $\beta(\theta)$ și va fi notat cu (SO β).

Fie oscilațiile unghiulare ale unghiului $\beta(\theta) = \text{bex}\theta$ date de **FSM-CE**

$$(17.5) \quad \begin{cases} x = \beta \text{cex}\theta = \arcsin(s \cdot \cos\theta) \\ y = \beta \text{sex}\theta = \arcsin(s \cdot \sin\theta) \end{cases}, s \in [-1, +1] \Rightarrow x, y : \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

de același excentru fix $S(s, \varepsilon)$, astfel că $s = \varepsilon = \text{constante}$, în care semidreapta \mathbf{d}^+ se rotește în jurul excentrului $S(s, 0)$ cu viteza unghiulară constantă $\Omega = 1$ rad/s, adică $\dot{\theta} = \Omega \cdot t$ și $\ddot{\theta} = 0$ (**Fig.17.2**)

Vitezele de oscilație ale unghiurilor $x, y = f[\beta(\Omega \cdot t)]$ sunt

$$(17.6) \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{d(\beta \text{cex}\theta)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d(\text{bex}(\theta - \frac{\pi}{2}))}{d\theta} = \Omega \frac{d(\arcsin(s \cdot \cos\theta))}{d\theta} = \\ = -\Omega \cdot \frac{s \cdot \sin\theta}{\sqrt{1-s^2 \cdot \cos^2\theta}} = -\Omega s \cdot \text{siq}\theta \\ \dot{y} = \frac{d(\beta \text{sex}\theta)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d(\text{bex}\theta)}{d\theta} = \Omega \cdot \frac{d[\arcsin(s \cdot \sin\theta)]}{d\theta} = \Omega \cdot \frac{s \cdot \cos\theta}{\sqrt{1-s^2 \sin^2\theta}} \\ = \Omega \cdot s \cdot \text{coq}\theta \end{cases}$$

În expresiile derivatelor / vitezelor se evidențiază **FSM-CE** **cosinus (coq θ)** și **sinus (siq θ) cvadrilobe**, introduse în matematică și prezentate pe larg în lucrarea[10] și în Vol.I, Ed.1-a, Cap.2, împreună cu curbele închise denumite **trilobe**, **cuadrilobe** și **n-lobe** sau **polilobe**.

Accelerațiile mișcărilor de oscilație se obțin ca a doua derivată a unghiurilor de oscilație sau prima derivată a vitezelor de oscilație, astfel

$$(17.7) \quad \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\Omega^2 \cdot s(1-s^2)\cos\theta}{(1-s^2 \cdot \cos^2\theta)^{1.5}} \\ \ddot{y} = -\frac{\Omega^2 \cdot s(1-s^2)\sin\theta}{(1-s^2 \cdot \sin^2\theta)^{1.5}} \end{cases}$$

17.4 ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A OSCILAȚIILOR

Matricea Wronskiană este

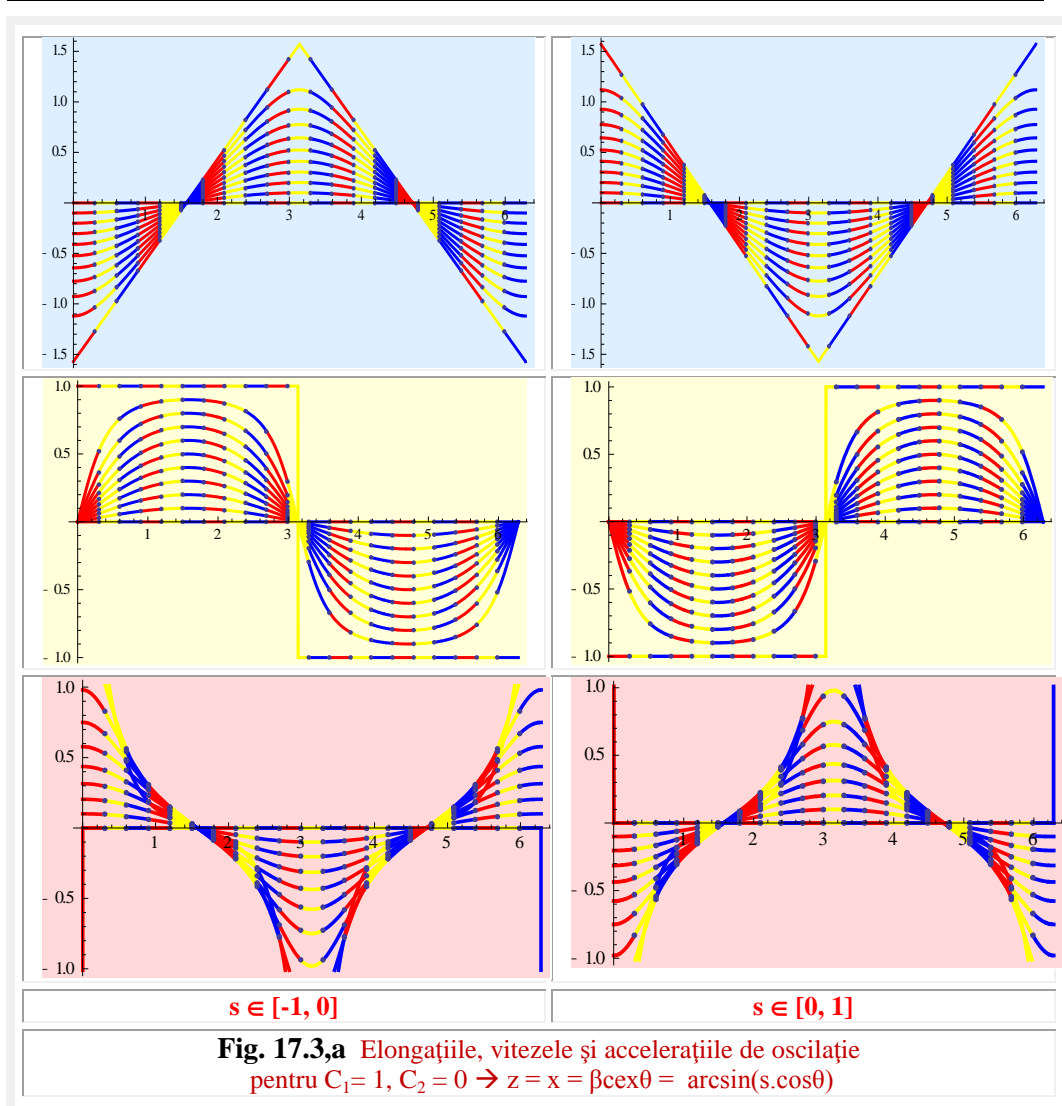
$$(17.8) \quad W = \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta \text{cex}\theta & \beta \text{sex}\theta \\ -\Omega \cdot s \cdot \text{siq}\theta & \Omega \cdot s \cdot \text{coq}\theta \end{vmatrix} = \Omega \cdot s \cdot \begin{vmatrix} \beta \text{cex}\theta & \beta \text{sex}\theta \\ -\text{siq}\theta & \text{coq}\theta \end{vmatrix} = \\ = \Omega \cdot s(\beta \text{cex}\theta \cdot \text{coq}\theta + \beta \text{sex}\theta \cdot \text{siq}\theta) = \\ = \Omega \cdot s \cdot (\arcsin(s \cdot \cos\theta) \cdot \cos\theta + \arcsin(s \cdot \sin\theta) \cdot \sin\theta)$$

și pentru $s \neq 0 \rightarrow W \neq 0$

Expresia (17.8) este reprezentată prin familia de curbe din figura 17.4 și se poate deduce și verifica grafic că, pentru $\varepsilon = 0, s \in [-1, +1] \rightarrow \beta(\theta) \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ și $W \neq 0$ pentru $s \neq 0$. Pentru $s = \varepsilon = 0 \rightarrow S \equiv O(0,0) \rightarrow \beta(\theta) = \text{constant} = 0, \forall(\theta), \theta \in [-\infty, +\infty], \theta(t) = \alpha(t) \rightarrow \beta(t) = \text{constant} = 0$ și oscilația unghiului β încetează.

Ca urmare, cu excepția $s = 0$, când $W \equiv 0, W \neq 0$ și ecuația diferențială a sistemului oscilant este dată de determinantul

$$(17.9) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{cu soluția generală}$$



$$(17.10) \quad z(\theta(t)) = C_1 \beta cex\theta + C_2 \beta sex\theta = C_1 \beta cex\Omega \cdot t + C_2 \beta sex\Omega \cdot t$$

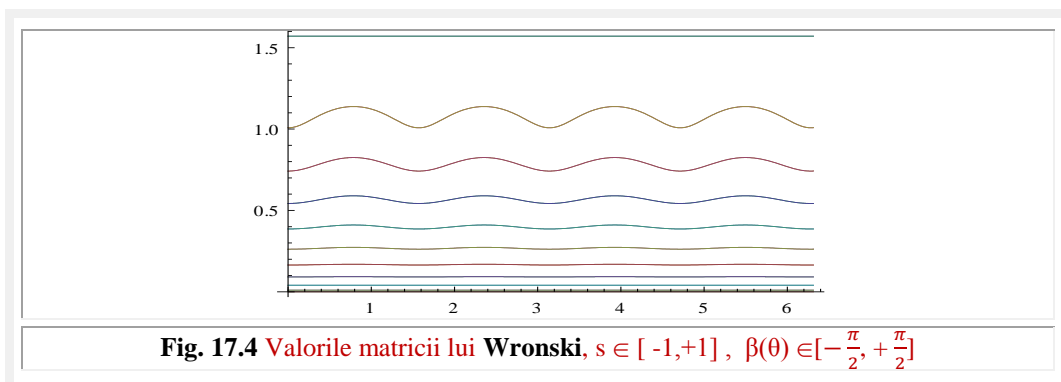
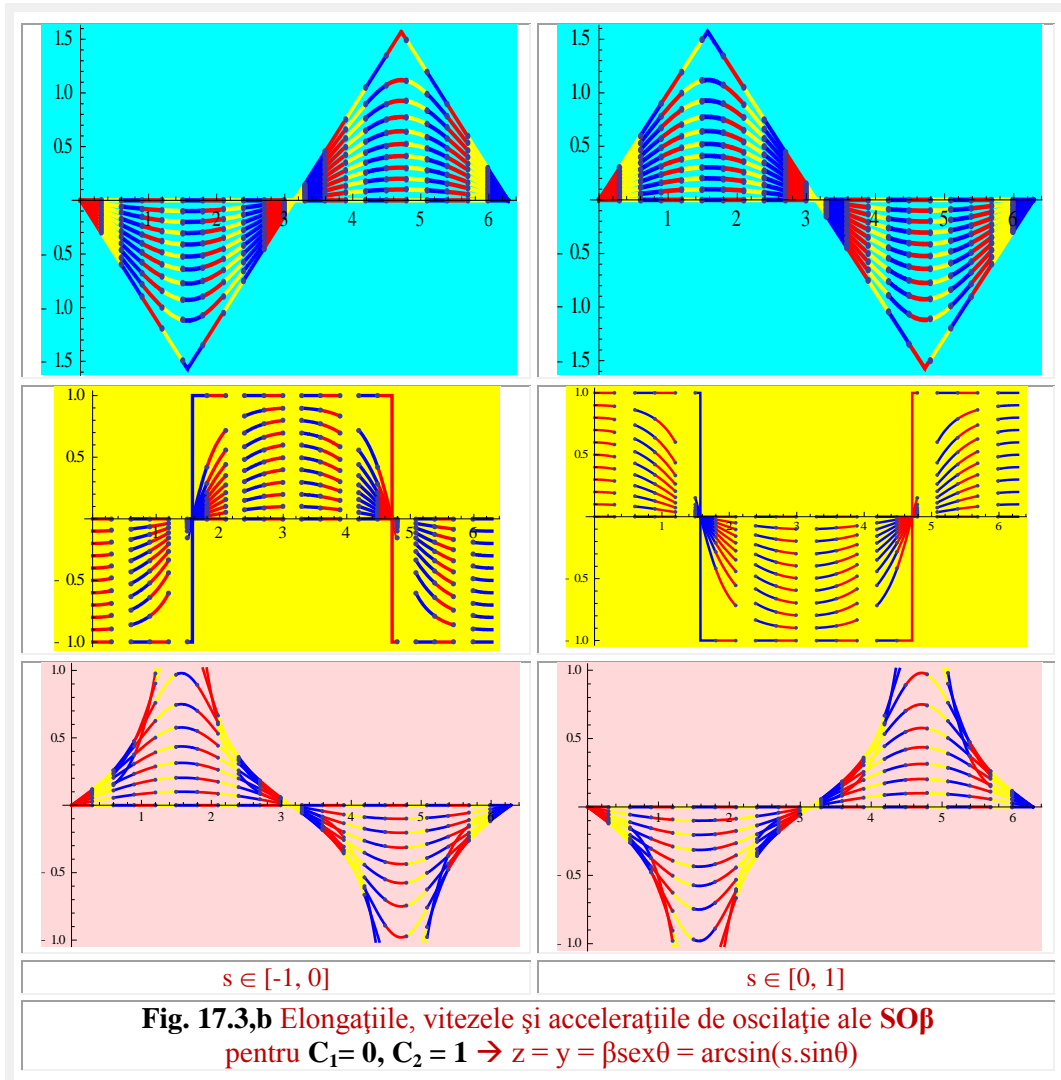
Pentru $C_1 = C_2 = 1$

$$(17.11) \quad z = \beta cex\Omega \cdot t + \beta sex\Omega \cdot t \text{ cu graficele din } \mathbf{figurile 17.3.}$$

Pentru $C_2 = 0$ și $C_1 = 1$, graficele sunt redată în **figura 17.1,a**, iar pentru $C_1 = 0$ și $C_2 = 1$ graficele sunt redată în **figura 17.1,b**.

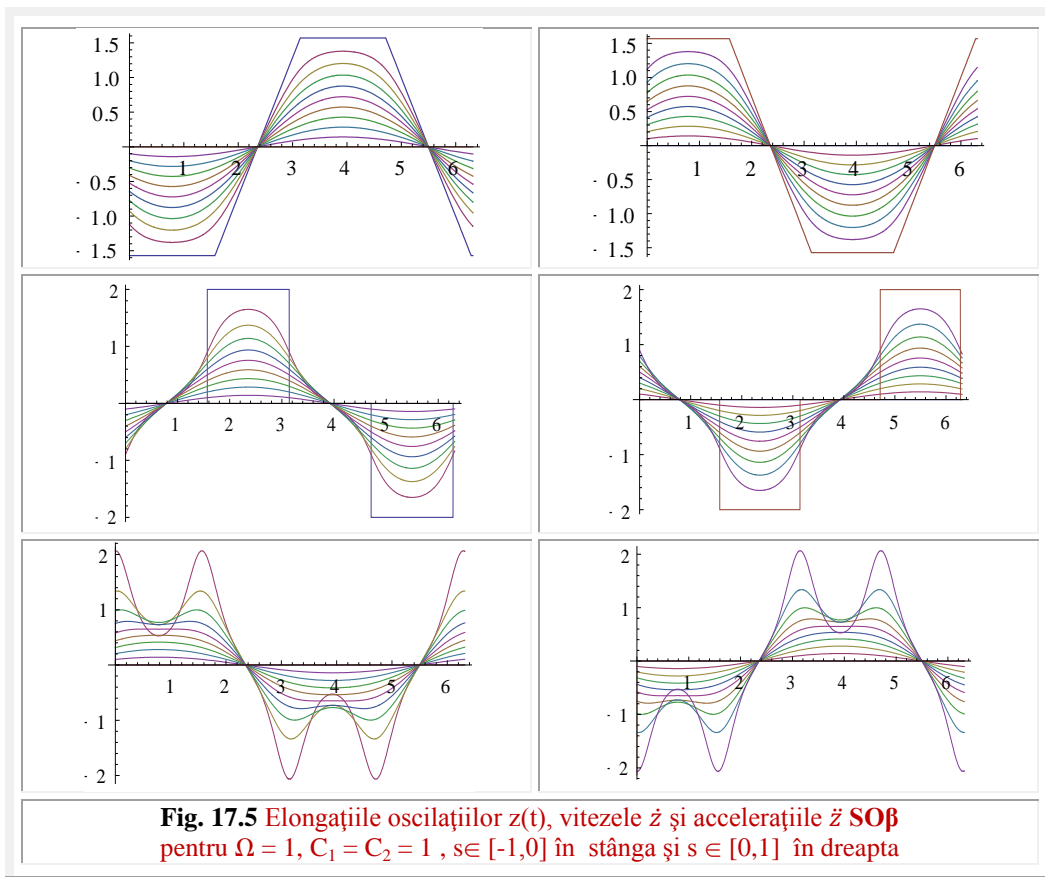
Vitezele pentru $C_1 = C_2 = 1, \Omega = 1$ rad/s sunt reprezentate în figura 17.3,c de relația

$$(17.12) \quad \dot{z}(t) = \Omega \cdot s \cdot \left(-\frac{C_2 \sin\theta}{\sqrt{1-s^2 \cos^2\theta}} + \frac{C_1 \cos\theta}{\sqrt{1-s^2 \sin^2\theta}} \right) = \Omega s \cdot (-C_1 \sin\theta + C_2 \cos\theta)$$



17.5 TRAJECTORII ÎN PLANUL FAZELOR

Amplitudinea sau elongația maximă de oscilație se obține în punctele $\theta = \pm \pi$ pentru x și $\theta = \pm \pi/2$ pentru y , așa cum rezultă din relațiile (17.1) și (17.2) ca și din figura 17.2,b.

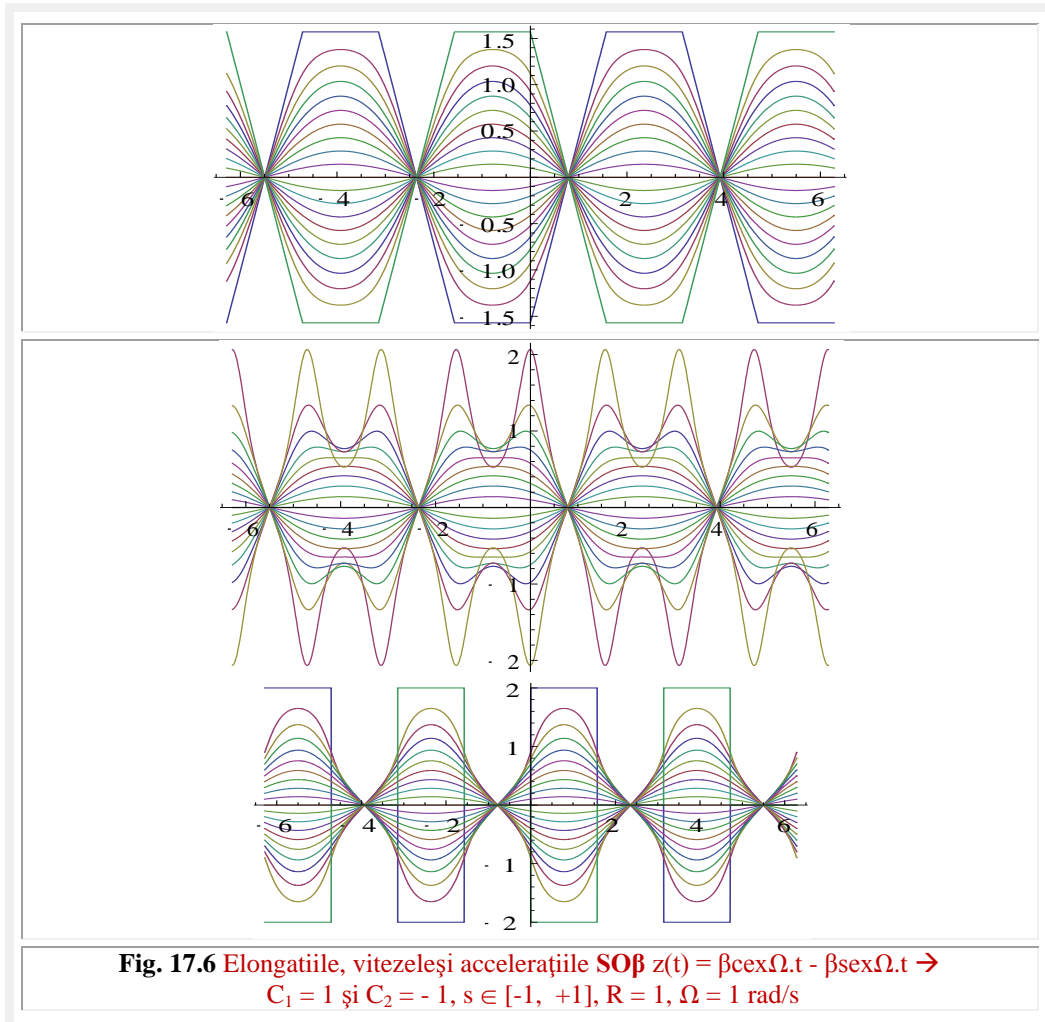


Unghiul $y = \beta(\theta)$, pentru $\varepsilon = 0$, crește de la 0, în $\theta = 0$, la β_{Max} , în $\theta = \pi/2$, apoi începe să scadă din nou la 0 în $\theta = \pi$. De aceea, în $\theta = \pi/2$ și $\theta = 3\pi/2$ vitezele schimbă de semn. Același lucru se întâmplă cu $x = \beta(\theta + \pi/2)$ în punctele $\theta = 0$ și $\theta = \pi$.

Vitezele variabile $V_C = R \cdot \Omega \cdot \text{dex}(\theta + \pi/2)$ și $V_S = R \cdot \Omega \cdot \text{dex}\theta$, de rotație a punctelor W_C și W_S pe cercul $C(O,R)$, sunt date de FSM-CE dex $(\theta + \pi/2)$ și respectiv, dex θ ale caror expresii sunt

$$(17.13) \quad \text{dex}\theta = 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}}$$

și, geometric, reprezintă distanța de la punctul W_S la D_S din figura 17.2,b.

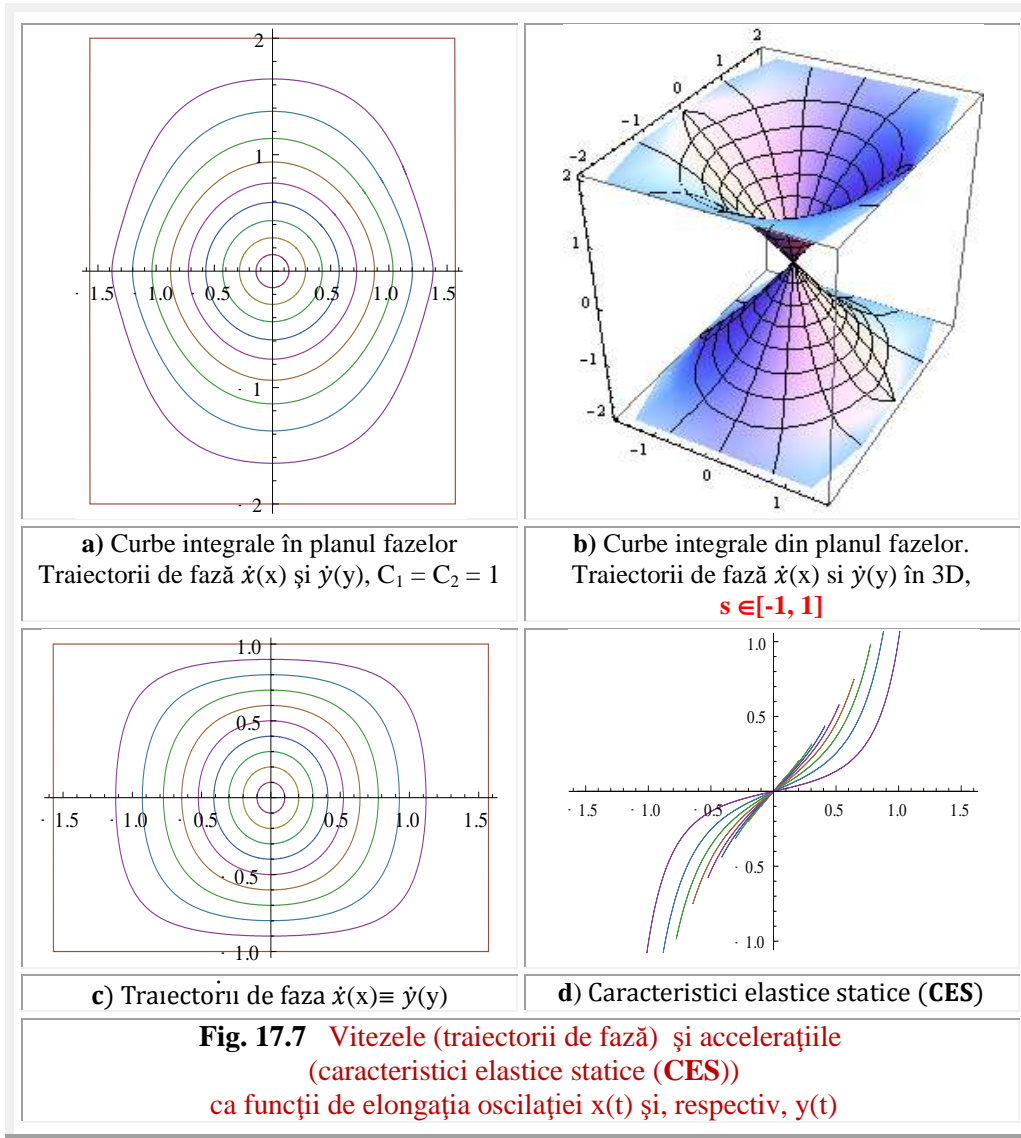


Din relația (17.13) se observă că, al doilea termen al relației reprezintă tocmai viteza \dot{y} , așa cum se poate observa și din a doua relație (17.6). Ca urmare, modulul vitezei \dot{y} este dat de diistanța $\overline{OD_S}$ și vitezele **SOβ** mai pot fi exprimate de relațiile

$$(17.14) \quad \begin{cases} \dot{x} = \Omega [1 - dex(\theta + \frac{\pi}{2})] \\ \dot{y} = \Omega [1 - dex\theta] \end{cases}$$

relații care stabilesc o legătură dintre vitezele de rotație ale punctelor **W**, în mișcarea circulară excentrică și vitezele de oscilație ale acelorași puncte, sau ale direcției **radiale excentrice**, față de direcția **radială centrică** - de-o parte și de alta a dreptei ce trece prin $O(0,0)$ -. În consecință, prin derivarea relațiilor (17.14), accelerațiile

oscilațiilor **So β** sunt aceleași cu accelerațiile **mişcării circulare excentrice (MCE)**, introdusă în mecanică prin lucrarea [14].



(17.15)

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{d[\Omega dx(\theta + \frac{\pi}{2})]}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d[\Omega dx(\theta + \frac{\pi}{2})]}{d\theta} = -\Omega^2 \frac{s(1-s^2)\sin(\theta + \frac{\pi}{2})}{[1-s^2 \cdot \sin^2(\theta + \frac{\pi}{2})]^{1.5}} = -\Omega^2 \frac{s(1-s^2)\cos\theta}{(1-s^2 \cdot \cos\theta)^{1.5}} \\ \ddot{y} = \frac{d[\Omega dx\theta]}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d[\Omega dx\theta]}{d\theta} = -\Omega^2 \frac{s(1-s^2)\sin\theta}{(1-s^2 \cdot \sin^2\theta)^{1.5}} \end{cases}$$

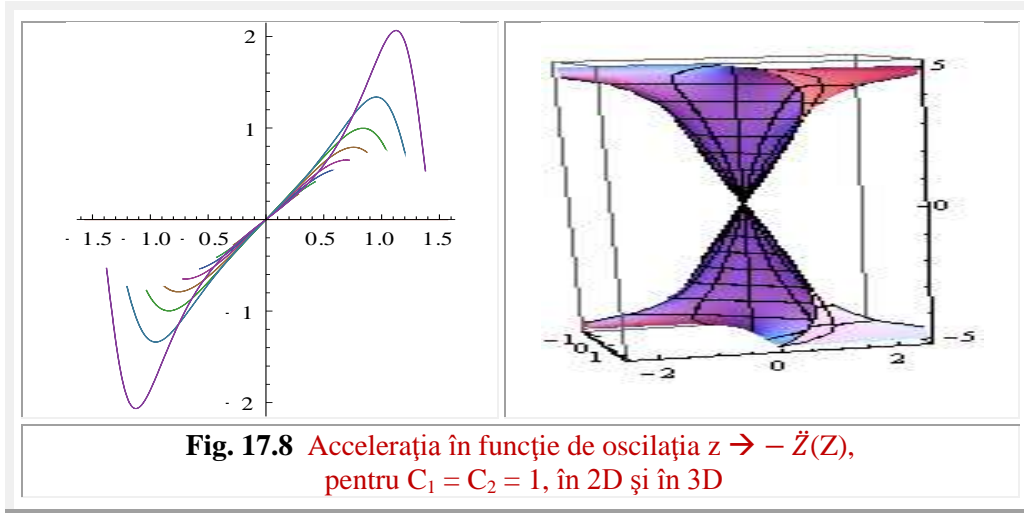


Fig. 17.8 Accelația în funcție de oscilația $z \rightarrow -\ddot{Z}(Z)$, pentru $C_1 = C_2 = 1$, în 2D și în 3D

Derivatele **FSM-CE dex θ** sunt date în lucrările [1], [2], [3], [4],[14] ș.a. și au expresiile (17.15).

Accelațiile mișcării oscilatorii a **SO β** sunt

$$(17.16) \quad \ddot{z}(t) = -\Omega^2 \cdot s(1 - s^2) \left[C_1 \frac{\cos\theta}{(1-s^2 \cdot \cos^2\theta)^{1.5}} + C_2 \frac{\sin\theta}{(1-s^2 \cdot \sin^2\theta)^{1.5}} \right]$$

cu graficele din **figura 17.5**, pentru $C_1 = C_2 = 1$, împreună cu elongațiile și vitezele de oscilație.

Deoarece elongațiile diferă semnificativ de deplasările din **mișcarea circulară excentrică (MCE)**, curbele integrale din planul fazelor, care se exprimă în funcție de elongații, diferă și ele semnificativ de cele din mișcarea circulară excentrică (**MCE**).

În **figura 17.5** sunt redată curbele integrale din planul fazelor, pentru fiecare oscilație x și y separat, curbele lor fiind identice.

Din **figura 17.5,a** se observă că pentru excentricitate $s = e = 0$ oscilația încetează, iar pentru valori mici ale excentricității s sau e curbele integrale din planul fazelor se apropie de cerc, adică de oscilații liniare, în timp ce, pentru valori ridicate ale excentricității numerice s sau a celei reale e oscilațiile sunt puternic neliniare. Ceea ce se observa și mai bine în **figura 17.5b** direct pe **CES** care sunt, pentru **SO β** , **CES** tari sau progresive.

17.6 CARACTERISTICI ELASTICE STATICE ALE **SO β**

În **figura 17.4** sunt prezentate aceleași curbe din planul fazelor, dar pentru soluția $z = C_1x + C_2y$, cu $C_1 = C_2 = 1$, iar în **figura 17.8** sunt prezentate **CES** care, așa cum se observă, sunt puternic neliniare, pentru amplitudini ale elongațiilor mari, trecând în domenii cu rigiditate negativă.

Din **figura 17.7,b**, în care curbele integrale din planul fazelor sunt reprezentate în 3D, se observă că ele sunt aceleași, atât pentru $s \in [-1, 0]$ cât și pentru $s \in [0, +1]$.

17.7 CONCLUZII

Importanța studiului oscilațiilor **SO β** consistă în asemănarea lor cu vibrațiile libere ale sistemelor cu **CES Dúffing** ($Fel = kx - \beta x^3$), pentru $\beta < 0$.

Intrădeavă, dezvoltând în serii de puteri una dintre funcțiile care exprimă elongația **SO β** , de exemplu pe $y = \arcsinu = \arcsin[s \cdot \sin\theta]$ se obține

$$(17.14) \quad y = \arcsinu = u + \frac{1}{2.3}u^3 + \frac{1.3}{2.4.5}u^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}u^7 + \dots = \\ = u + 0.166666 u^3 + 0,00297619 u^7 + \dots$$

și se observă că primii doi termeni sunt identici cu cei din **CES Dúffing** pentru $k = 1$: $(x + \beta x^3)$.

Înlocuind pe u cu expresia $u = s \cdot \sin\theta = \sin\beta(\theta)$ se observă că, dacă $s \in [-1, +1]$, $\theta \in [0, 2\pi] \rightarrow \beta(\theta) \in [-\pi/2, +\pi/2] \rightarrow u \in [-1, +1]$ și se deduce că vibrația are loc pentru amplitudini u subunitare.

Motto : ” Un om creativ este motivat de dorința de a realiza ceva,
și nu de dorința de a-i învinge pe ceilalți.” Ayn Rand”

Capitolul 18

FUNȚII SUPERMATEMATICE PE CONICE (CENTRICE, **EXCENTRICE**, **ELEVATE** ȘI **EXOTICE**)

18.1 DESPRE CON CIRCULAR DREPT ȘI CONICE, CENTRICE ȘI **EXCENTRICE**

Conul circular drept este corpul geometric obținut prin rotația completă (2π) a unui triunghi dreptunghic în jurul unei catete ale sale.

Mantaua conului circular drept, este **suprafața generată** a conului, rezultată oprin rotirea uneia din cele două drepte, oricare, concurente într-un punct, punct ce va fi numit **vârful** conului.

Conicele matematice sunt **curbele** care rezultă din intersectarea unor **plane** cu suprafața exterioară sau **mantaua** unui con circular drept. Forma acestor curbe poate să difere destul de mult, în funcție de poziția planului față de axa conului **Fig.18.1,a**.

Rezultă că, prin conice sunt denumite, de fapt, o familie (**gen** sau **tipuri**) de familii de curbe foarte diferite, numite în mod obișnuit „**conice**”. Ele au fost studiate din antichitate, de exemplu de **Apollonius** din Perga, cel care a distrus / spart imaginea grecilor despre perfecțiunea **cercului**, introducând în matematică **elipsa**, **parabola** și **hiperbola**, în sec. III î.e.n.

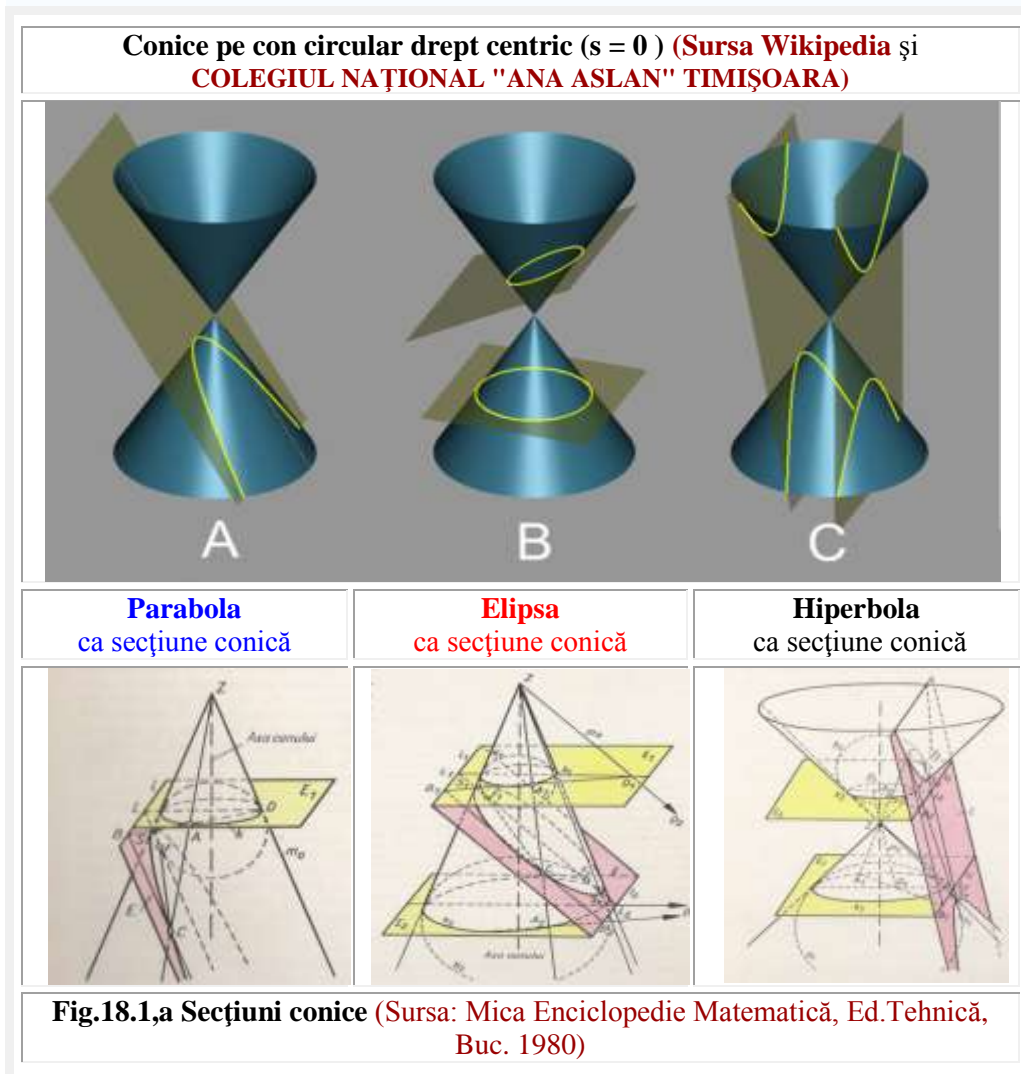
18.2 GENURI sau TIPURI DE CONICE

Din intersecția unui plan cu un con circular drept apar două tipuri de curbe: **închise**, ca **cercul și elipsa** și **deschise**, ca **parabola și hiperbola**.

În cazul în care se generează o **curbă închisă**, aceasta va fi un **cerc**, dacă planul este perpendicular pe axa de simetrie a conului. Și o **elipsă**, dacă planul nu este perpendicular pe axa de simetrie și intersectează două generatoare diametral opuse ale conului (cazul particular, în care planul este perpendicular pe axa conului, fiind **cercul**) cazul **B** din **figura 18.1,a**. În celelalte cazuri posibile, va apărea o **parabolă**, dacă planul este paralel cu generatoarea conului și situat la o distanță de axa conului mai mică decât raza cercului de bază (**Fig.18.1,a**, cazul **A**), sau o **hiperbolă** (**Fig.18.1,a** cazul **C**), dacă planul are o înclinare mai mare decât unghiul de înclinare al generatoarelor față de axa conului. În cazul hiperbolei apar de fapt două curbe deschise (uneori una dintre ele este ignorată). În general sunt ignorate de asemenea cazurile în care planul trece prin vârful conului, ori unghiul la vârf al conului este de 90 de grade.

Odată cu apariția **supermatematicii** (1978 → [1]) fiecare obiect matematic s-a multiplicat de la unu la infinit, astfel că și **conul circular drept** a suferit aceleași transformări, unele dintre ele fiind reprezentate în **figura 18.1,b**.

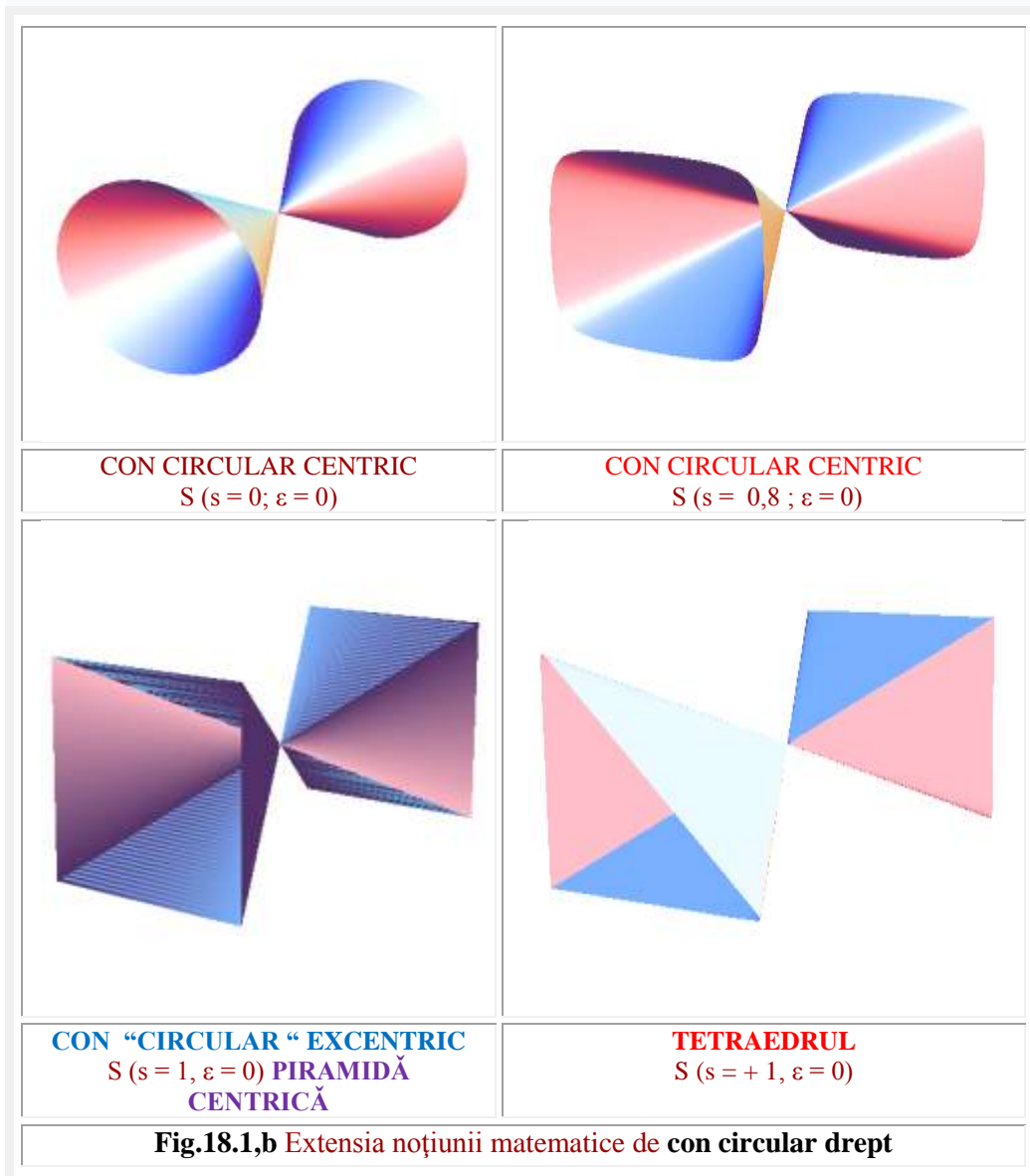
Așa cum s-a arătat în Vol I, **supermatematica** nu face distincție între cerc și pătrat sau între elipsă și dreptunghi, ambele curbe fiind obținute cu aceleași ecuații parametrice; diferind doar valoarea **excentricității numerice s**, care, pentru formele centrice (**cerc, elipsă**) are valoarea **zero**, iar pentru formele excentrice (**pătrat, dreptunghi**) are valoarea ± 1 .



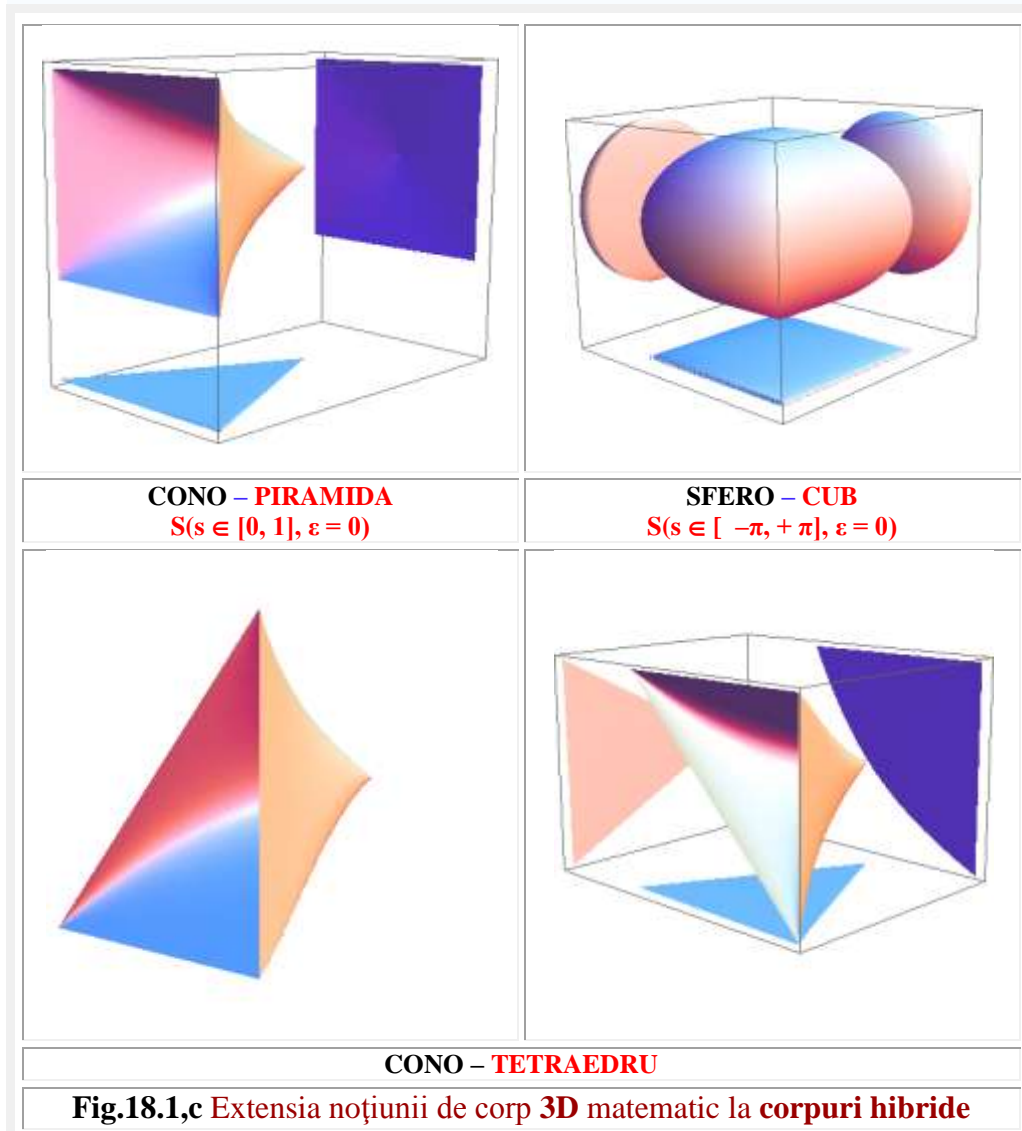
În **figura 18.1,b**, pentru $s = 0$ s-a obținut un **con clasic**, pentru $s = 0,8$ un con cu baza o excentrică circulară de excentricitate numerică $s = 0,8$, sau un pătrat cu

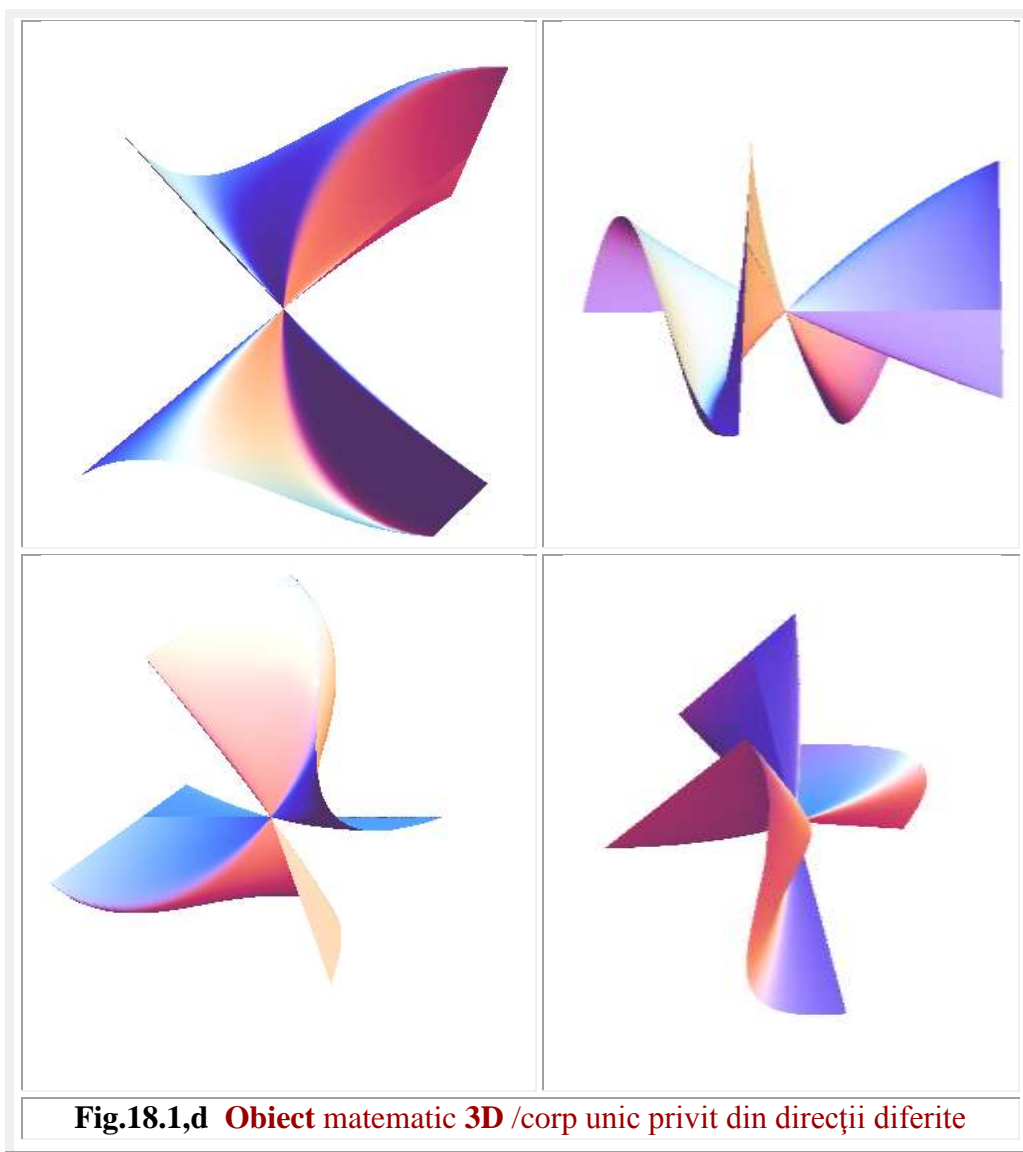
colțurile rotunjite și cu laturile ușor curbate, iar pentru $s = \pm 1$, conul a degenerat într-o **piramidă** cu baza un pătrat perfect !. Dacă, în **2D**, s-au șters granițele dintre **cerc** și **pătrat**, **cerc** și **triunghi** ș.a., în **3D** s-au șters granițele dintre **sferă** ($s = 0$) și **cub** ($s = \pm 1$), dintre **con** și **piramidă** ș.a., dacă excentricitatea numerică este constantă, sau dacă excentrul $S(s, \epsilon)$ este un **punct fix** în plan.

Dacă excentrul $S(s, \epsilon)$ este un **punct mobil**, adică, excentricitatea numerică s este variabilă, atunci se obțin forme **3D** (corpuri / obiecte geometrice) **hibride**, inexistente anterior în matematica ordinară centrică.



Astfel de obiecte **3D hibride** sunt prezentate în **figura 18.1,c**, și ele sunt: **cono - piramida**, **sfero - cubul**, **cono - tetraedru** ș.a. prezentate împreună cu proiecțiile lor pe 3 plane reciproc perpendiculare.

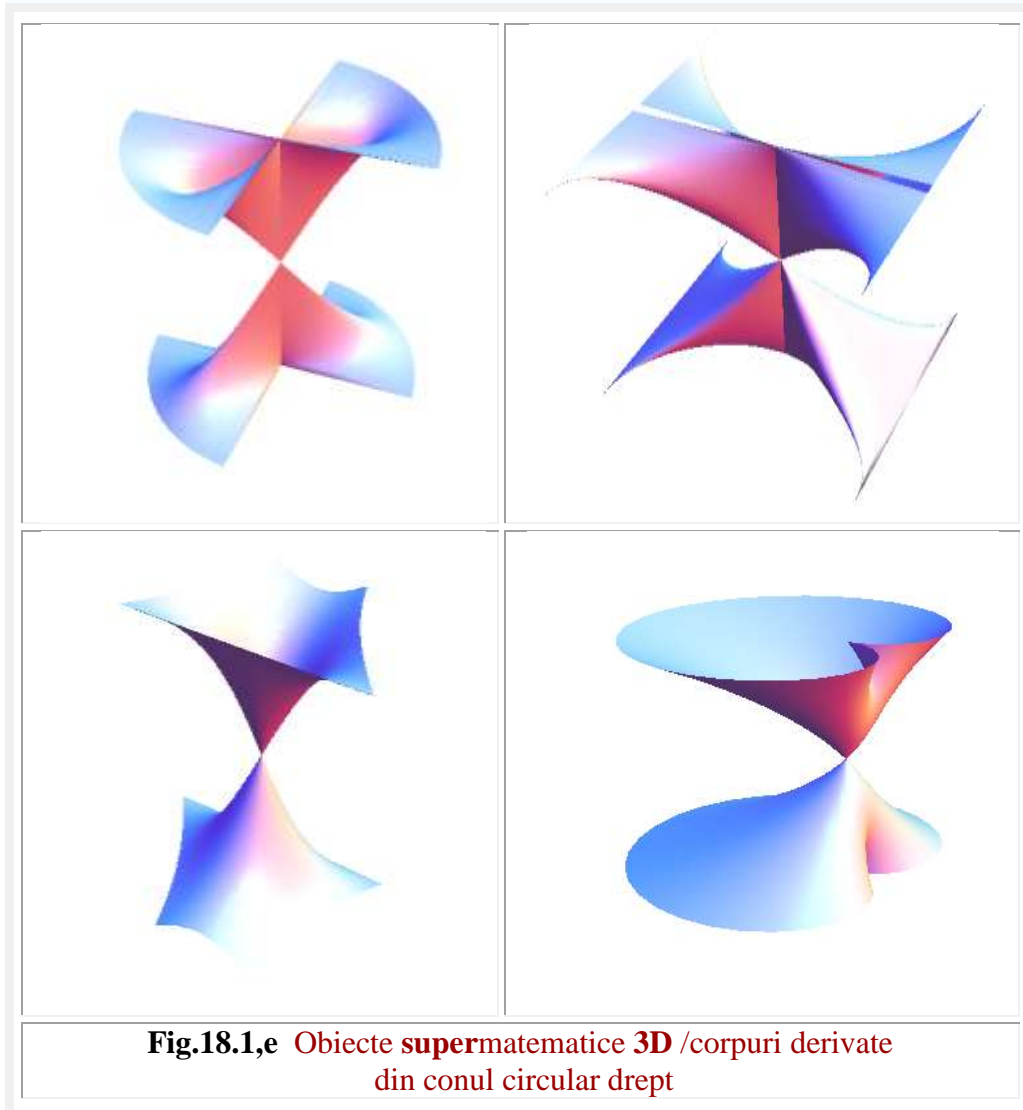




Modul simplu de reprezentare a unor obiecte complexe, inclusiv a unor obiecte tehnice, cu ajutorul **noilor funcții supermatematice**, a facilitat și încurajat apariția matematicii concretului util, vizual, al unor noi posibilități **CAD - CAM** denumite **SM - CAD - CAM**, care pot realiza o economie considerabilă de memorie și de putere de calcul.

Urmărind și să insuflăm proiectanților de structuri și creatorilor de forme constructive o sensibilitate pentru **formele geometrice supermatematice** mai atractive și să le îmbogățim repertoriul acestor forme, ca o sursă de inspirație pentru căutarile lor viitoare / ulterioare, prezentăm în continuare și alte transformări excentrice de

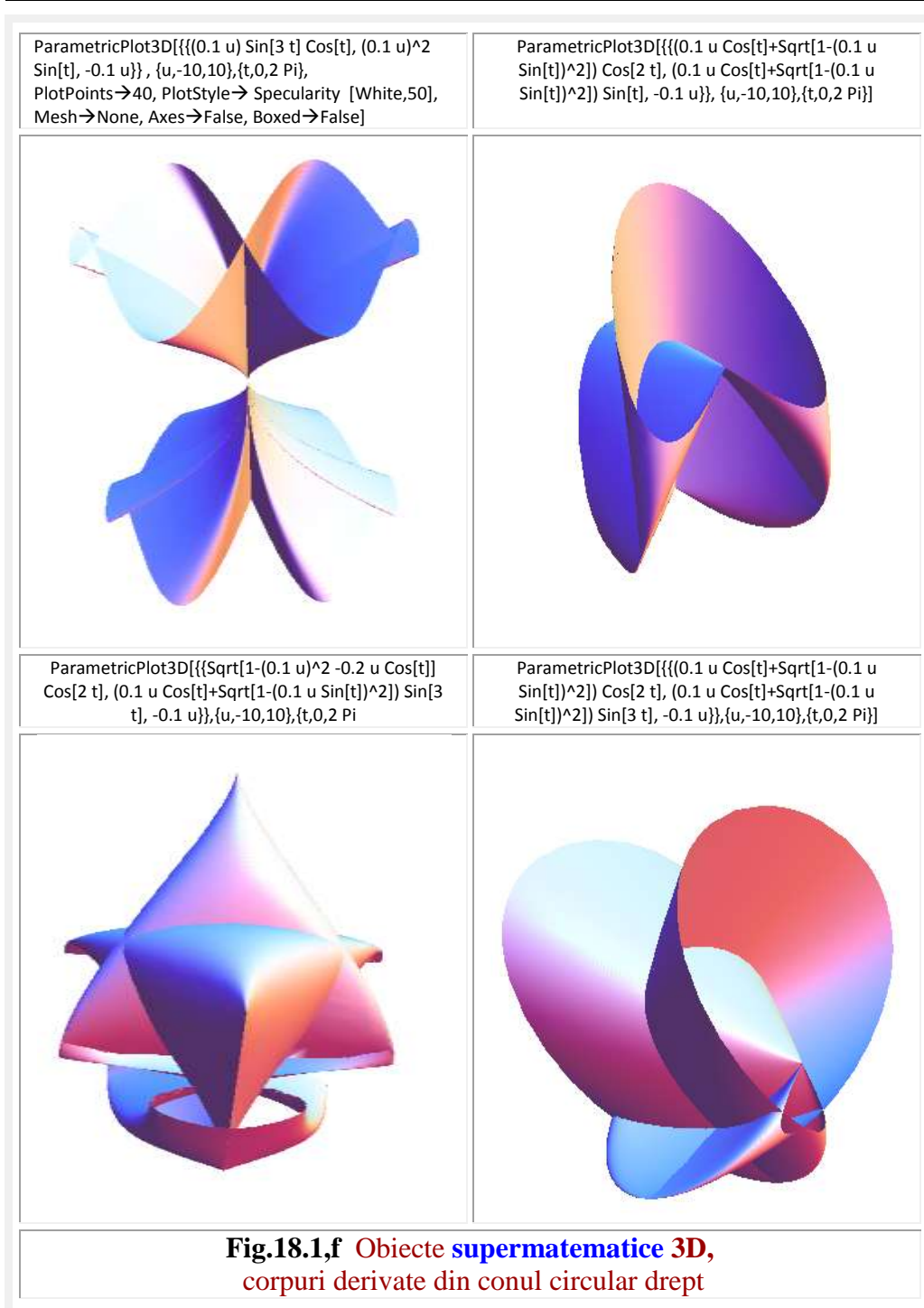
suprafețe și de corpuri, realizate cu ajutorul **FSM-CE** ca cel din **figura 18.1,d**.



Și acest obiect matematic are la bază **FSM-CE** radial excentric de variabilă excentrică, ecuațiile parametrice ale obiectului **3D** fiind

$$(18.1) \begin{cases} x = rex(\theta, S) \\ y = s \cdot \sin\theta \cdot \sin 3\theta, \text{ pentru excentrul } \mathbf{S}(s \in [-1, +1], \varepsilon = 0), \theta \in [0, 2\pi] \\ z = -s \end{cases}$$

Nici aceste **conuri supermatematice** (**Fig.18.1,e** și **Fig.18.1,f**) nu sunt lipsite de unele atribute artistice, din care cauză, considerăm noi, și-au câștigat dreptul de etalare în această lucrare.



18.3 REPREZENTAREA CONICELOR CIRCULARE CENTRICE

În **coordonate carteziane**, conicele sunt reprezentate de mulțimea punctelor care satisfac următoarea ecuație:

$$(18.2) \quad F(X, Y) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Genul și natura conicei se determină prin axaminarea determinanților

$$(18.3) \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

$$(18.4) \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

numiți invarianți.

Clasificarea conicelor în funcție de valorile invarianților este prezentată în **tabelul 18.1**.

CLASIFICAREA CONICELOR			
Genul conicei	INVARIANTII	NATURA CONICEI	FORMA ECUAȚIEI
$\delta > 0$ ELIPSĂ	$A \cdot \Delta < 0$ sau $C \cdot \Delta < 0$	ELIPSĂ reală	$P^2 + Q^2 - 1 = 0$
	$A \cdot \Delta > 0$ sau $C \cdot \Delta > 0$	ELIPSĂ imaginară	$P^2 + Q^2 + 1 = 0$
	$\Delta = 0$	Drepte imaginare	$P^2 + Q^2 = 0$
$\delta < 0$ HIPER- BOLĂ	$\Delta \neq 0$	HIPERBOLĂ	$P^2 + Q^2 - 1 = 0$
	$\Delta = 0$	Două drepte concurente reale	$P^2 - Q^2 = 0$
$\delta = 0$ PARA- BOLĂ	$\Delta \neq 0$	PARABOLĂ	$P^2 + Q^2 = 0$
	$\Delta = 0$	Două drepte paralele	$P^2 - 1 = 0$

Atunci:

- dacă $B^2 - 4AC < 0$, ecuația reprezintă o elipsă reală, dacă are soluții, iar dacă, de exemplu $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nu are nicio soluție, reprezintă o elipsă imaginară;
- dacă $A = C$ și $B = 0$, ecuația reprezintă un cerc;
- dacă $B^2 - 4AC = 0$, se obține o parabolă;
- dacă $B^2 - 4AC > 0$, ecuația reprezintă o hiperbolă;
- dacă și $A + B = 0$, avem o hiperbolă dreaptă (v. Cap. 2.5 Funcțiile pseudo - hiperbolice ale lui **Eugn Vișa**, Vol I, pag.62 ... 65) sau două drepte concurente reale.

A și B sunt coeficienți polinomiali, nu lungimile axelor geometrice ale curbelor a și b.

Schimbând coordonatele, se poate ajunge la ecuațiile binecunoscute ale acestor curbe (restricționate însă la a fi simetrice față de una sau ambele axe ale sistemului de coordonate):

Tabelul 18.2					
PARAMETRII CONICELOR					
CONICA	Semi - axa mare a	Semi-ax a mică b	Param etrul $p = \frac{b^2}{a}$	Excentricitatea	
				Reală	Nume- rică
				$e \equiv c$	$k \equiv \epsilon = \frac{e}{a}$
CERC	R	R	R	0	0
CERC UNITATE	1	1	1	0	0
ELIPSA	a	b	$\frac{b^2}{a}$	$\sqrt{a^2 - b^2}$	$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
ELIPSA UNITATE	1	$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}$	$\frac{1}{1 - k^2}$	$\frac{i \cdot k}{\sqrt{1 - k^2}}$	$k \in (0, 1)$
PARABOLA	-	-	p	-	1
PARABOLA UNITATE	-	-	1	-	1
HIPERBOLA	a	b	p	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$k > 1$
HIPERBOLA UNITATE	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
ECHILATERĂ					

(18.5)

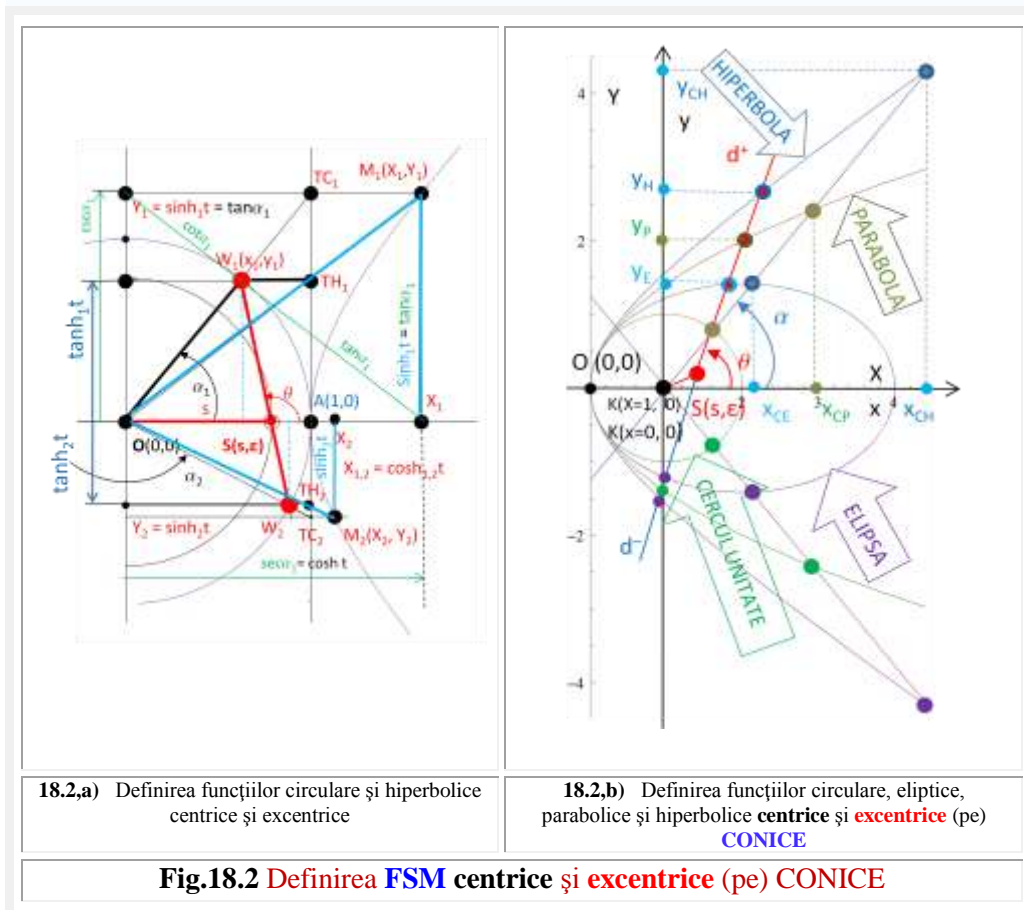
- Cerc: $x^2 + y^2 = a^2$
- Elipsă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Parabolă $y^2 = 4ax$:
- Hiperbolă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Scrise parametrizat, ecuațiile sunt:

(18.6)

- Cerc: $\begin{cases} X = a \cdot \cos\theta \\ Y = a \cdot \sin\theta \end{cases}$
- Elipsă: $\begin{cases} X = a \cdot \cos\theta \\ y = b \cdot \sin\theta \end{cases}$
- Parabolă: $\begin{cases} X = a \cdot t^2 \\ Y = 2at \end{cases}$
- Hiperbolă: $\begin{cases} X = a \cdot \sec\theta \\ Y = b \cdot \tan\theta \end{cases}$, sau $\begin{cases} X = \pm a \cdot \cosh u \\ y = b \cdot \sinh u \end{cases}$

18.4 FUNCȚII (PE) CONICE CENTRICE

O parte dintre funcțiile reprezentate pe conice sunt funcții periodice, precum, de exemplu, cele pe cerc și pe elipsă, iar altele, ca de exemplu funcțiile hiperbolice, nu sunt periodice, iar funcții „trigonometrice” pe parabolă încă n-au fost definite, nici măcar neperiodice, exceptând funcția „polinom de gradul doi” denumită și „funcție parabolică”.



Ecuția polară a tuturor conicelor, cu polul în vârful conicelor $\mathbf{V} \equiv \mathbf{O}$ este

$$(18.6) \quad R = \frac{2.b^2 \cos \psi}{a(1-k^2 \cos^2 \psi)} \quad \text{sau} \quad R = 2p \frac{\cos \psi}{1-k^2 \cos^2 \psi}$$

în care \mathbf{R} este raza polară din vârful și originea $\mathbf{V}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \equiv \mathbf{O}(\mathbf{0},\mathbf{0})$ (**Fig.2,b**) și ψ este unghiul polar din \mathbf{V} , iar \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{p} și \mathbf{k} sunt parametrii conicelor, dați în **tabelul 18.2**.

Prin proiecția razei polare R pe cele două axe X și Y cu originea în $V(0,0)$ se obțin ecuațiile parametrice ale conicelor cu originea axelor în vârful lor $V(0,0)$

$$(18.7) \quad \begin{cases} X = R \cos \psi = \frac{2.b^2 \cos^2 \psi}{a(1-k^2 \cos^2 \psi)} = 2p \frac{\cos^2 \psi}{1-k^2 \cos^2 \psi} \\ Y = R \sin \psi = \frac{2.b^2 \cos \psi \sin \psi}{a(1-k^2 \cos^2 \psi)} = 2p \frac{\cos \psi \sin \psi}{1-k^2 \cos^2 \psi} = \frac{b^2 \sin 2\psi}{a(1-k^2 \cos^2 \psi)} = p \frac{\sin 2\psi}{1-k^2 \cos^2 \psi} \end{cases}$$

Ele ar putea fi denumite **cosinusul** și, respectiv, **sinusul** conicelor și ar putea fi notate cu

$$(18.8) \quad \begin{cases} X = \mathit{c} \mathit{c} \mathit{v}[\psi, p, k] \\ Y = \mathit{s} \mathit{i} \mathit{c} \mathit{v}[\psi, p, k] \end{cases}$$

în care **co** și **si** provin de la **cosinus** și, respectiv de la **sinus**, iar **c** de la **conice** și **v** de la polul din vârful $V(0,0)$. Numai că, în acest fel, pentru cerc, de exemplu, funcțiile nu se corespund cu cele clasice centrice **cosa** și **sina** care au polul în centrul cercului $O(0,0)$ la o distanță egală cu unitatea de vârful $V(-1,0)$ în sistemul de coordonate xOy cu originea în $O(0,0)$, paralel cu sistemul de coordonate considerat anterior **XVY**.

Dacă, în (18.7), se introduc valorile din **tabelul 2** pentru cercul unitate / trigonometric ($k = 0, p = 1$), se obțin funcțiile **trigonometrice centrice** cu polul în vârful $V(-1,0)$

$$(18.9) \quad \begin{cases} X = 2\cos^2 \psi \\ Y = \sin 2\psi \end{cases}$$

Se știe că **unghiul α** , cu vârful în centrul cercului unitate $O(0,0)$, este dublul unghiului ψ , din vârful $V(-1,0)$, care aparține / (este situat) cercului unitate, adică

$$(18.10) \quad \alpha = 2\psi.$$

Legătura dintre cele două sisteme este

$$(18.11) \quad \begin{cases} X = 1 + x = 1 + \mathit{c} \mathit{e} \mathit{x}[\theta = \psi, S(1, \pi)] \\ Y = y = \mathit{s} \mathit{e} \mathit{x}[\theta = \psi, S(1, \pi)] \end{cases}, \quad \text{sau} \\ \begin{cases} x = X - 1 = 2\cos^2 \psi - 1 = \cos^2 \psi - \sin^2 \psi = \cos 2\psi = \mathit{c} \mathit{o} \mathit{s} \mathit{\alpha} \\ y = Y = \sin 2\psi = \mathit{s} \mathit{i} \mathit{n} \mathit{\alpha} \end{cases}$$

Și, așa cum era de așteptat, s-au obținut funcțiile circulare centrice (**FCC**) **cosa** și **sina**, ca o verificare a veridicității ecuațiilor (18.7).

Ca urmare, ecuațiile generale parametrice ale **conicelor centrice circulare drepte** cu originea $O(0,0)$ în **centrul cercului unitate** vor fi date de expresiile

$$(18.12) \quad \begin{cases} x(\alpha) = X(\psi) - 1 \\ y(\alpha) = Y(\psi) \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x(\alpha) = \mathit{c} \mathit{o} \mathit{c} \mathit{\alpha} = \frac{(2p+k^2)\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{1-k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \\ y(\alpha) = \mathit{s} \mathit{i} \mathit{c} \mathit{\alpha} = \frac{b^2 \sin \alpha}{a(1-k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2})} = p \frac{\sin \alpha}{1-k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Rezultă ca **sinusul** (**sica**) și **cosinusul** (**coca**) pe conice centrice unitare depinde de argumentul α , care este un arc de cerc, pentru **toate** conicele și de doi parametri \mathbf{p} și \mathbf{k} (**Tab.2**).

Se știe că o conică este definită de parametrul $2p$ și de **excentricitatea numerică** $\epsilon \equiv k$, astfel că acești doi parametri fac distincția dintre conicele pe care s-au definit aceste funcții, personificându-le.

Ecuțiile noilor funcții (pe) conice, generalizate și particularizate pe diversele conice, pe baza cărora sunt exprimate graficele lor, sunt prezentate concentrat în **tabelul 3**.

RELAȚIILE DE CALCUL ALE FUNCȚIILOR (PE) CONICE UNITATE							
Tabelul 18.3							
GENERALIZATE							
Tip ELIPTIC				Tip HIPERBOLIC			
Notația	Ecuția	p	k	Notația	Ecuția	p	k
coce α	$\frac{2 + k^2 - k^4}{1 - k^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$ $1 - k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$	$\frac{1}{1 - k^2}$	0...2	coch α	$\frac{(2 + k^2) \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{1 - k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$	1	0...2
sice α	$\frac{\sin \alpha}{1 - k^2}$ $1 - k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$	$\frac{1}{1 - k^2}$	0...2	sich α	$\frac{\sin \alpha}{1 - k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$	1	0...2
SPECIFICE / PERSONALIZATE							
COSINUS				SINUS			
Notația	Ecuția	p	k	Notația	Ecuția	p	k
cos α	cos α	1	0	sin α	sin α	1	0
coe α	$\frac{2 + k^2 - k^4}{1 - k^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$ $1 - k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$	$\frac{1}{1 - k^2}$	0,1... 0,9	sie α	$\frac{\sin \alpha}{1 - k^2}$ $1 - k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$	$\frac{1}{1 - k^2}$	0,1...0,9
coh α	$\frac{(2 + k^2) \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{1 - k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$	1	1,1... 2	sih α	$\frac{\sin \alpha}{1 - k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$	1	1,1...2
cop α	$\frac{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$	1	1	sip α	$\frac{2 \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$	1	1

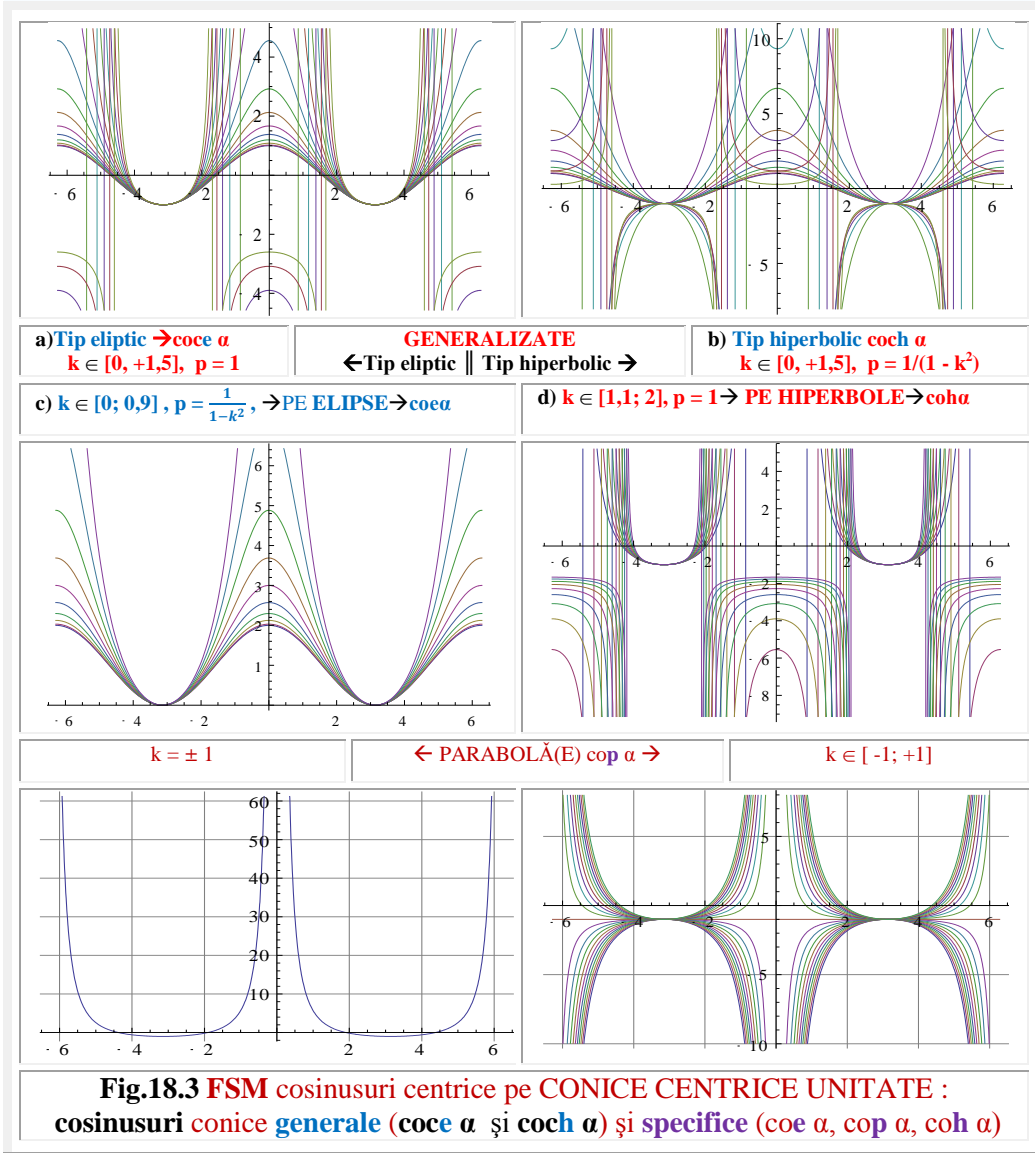
Funcțiile **cosinus** (pe) conice unitate sunt prezentate în **figura 18.3**.

Cele **generale**, prezentate în partea superioară a figurii, adică pentru **excentricități numerice** k , care acoperă toate conicele $k \in [-1,5; +1,5]$, nu și toate hiperbolele centrice, fără să țină seama că excentricitatea numerică, separă între ele diversele conice (v. **Tab. 2**).

Ele au fost separate în două categorii: de tip **eliptic** și de tip **hiperbolic**.

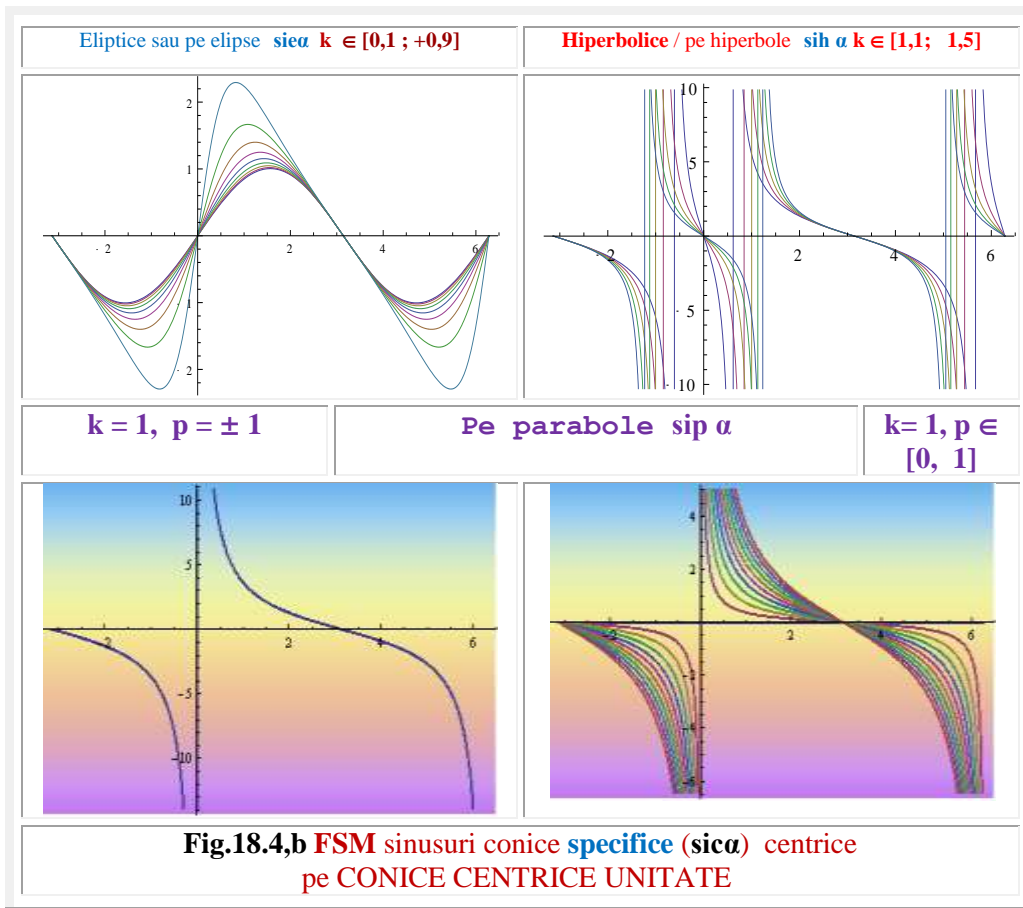
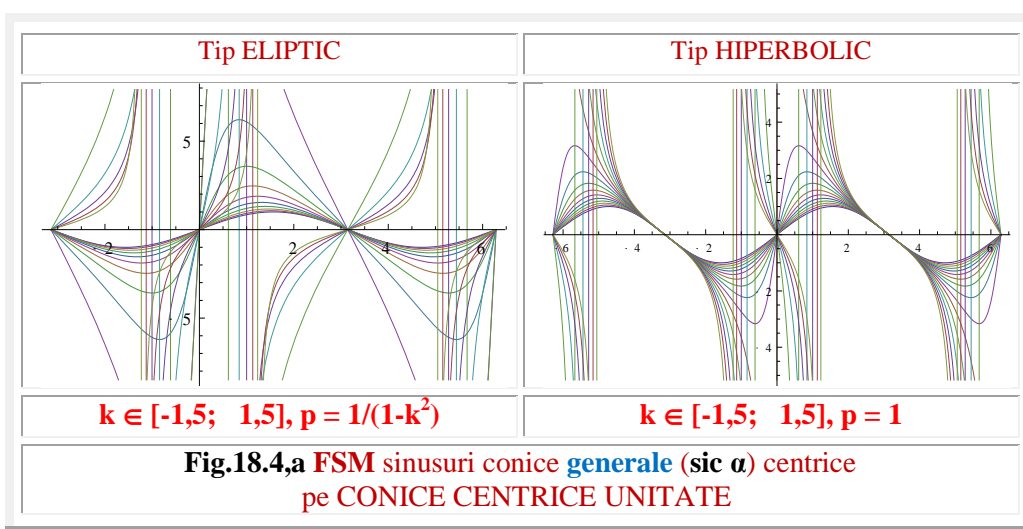
Pentru $p = 1$ ele au fost denumite de **tip hiperbolic**, deoarece hiperbola unitate are $p = 1$.

Cele de **tip eliptic** au parametrul **p** egal cu acela al elipsei unitate ($a = 1, b = 1/\sqrt{1 - k^2}$), adică

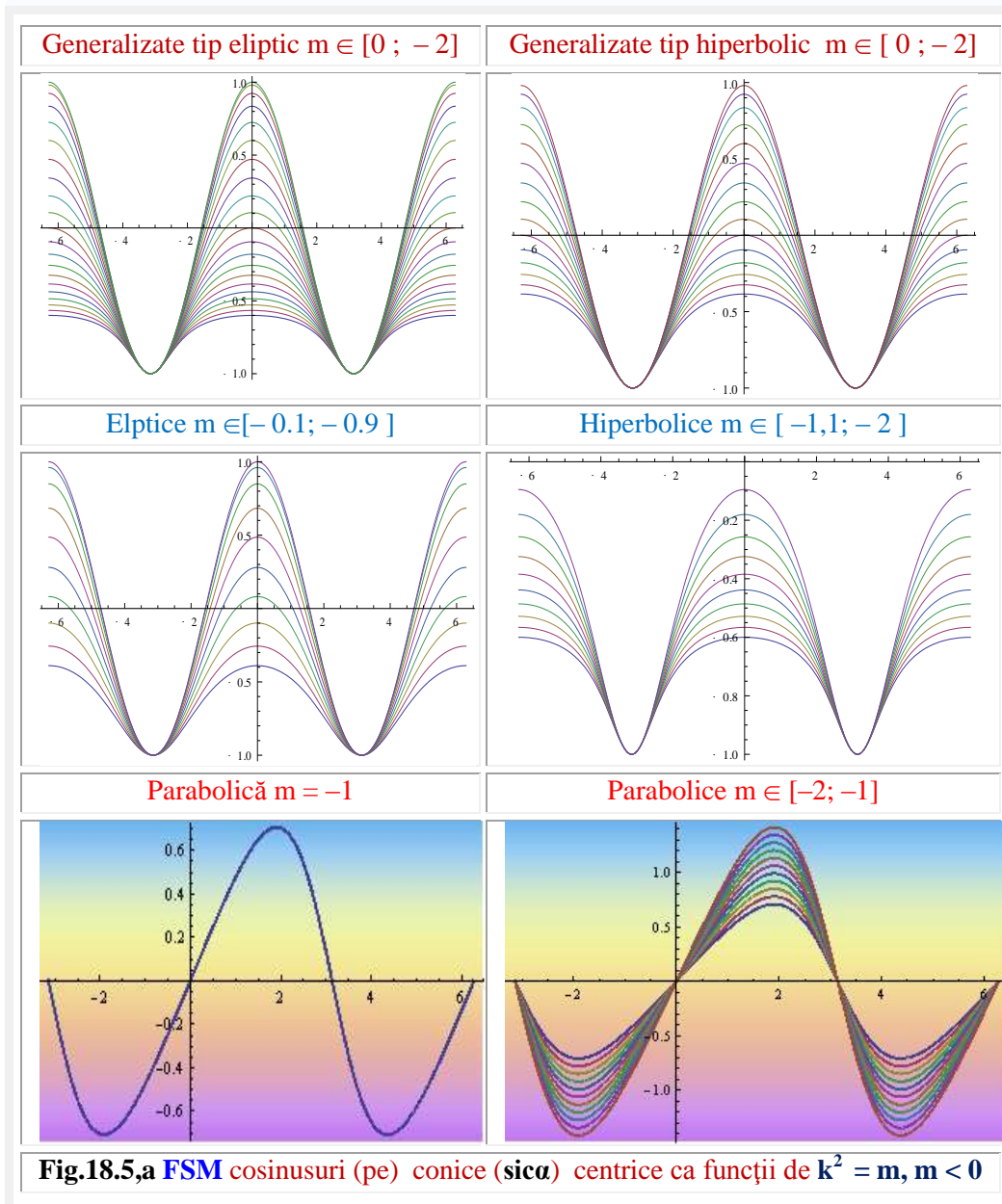


$$(18.13) \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}$$

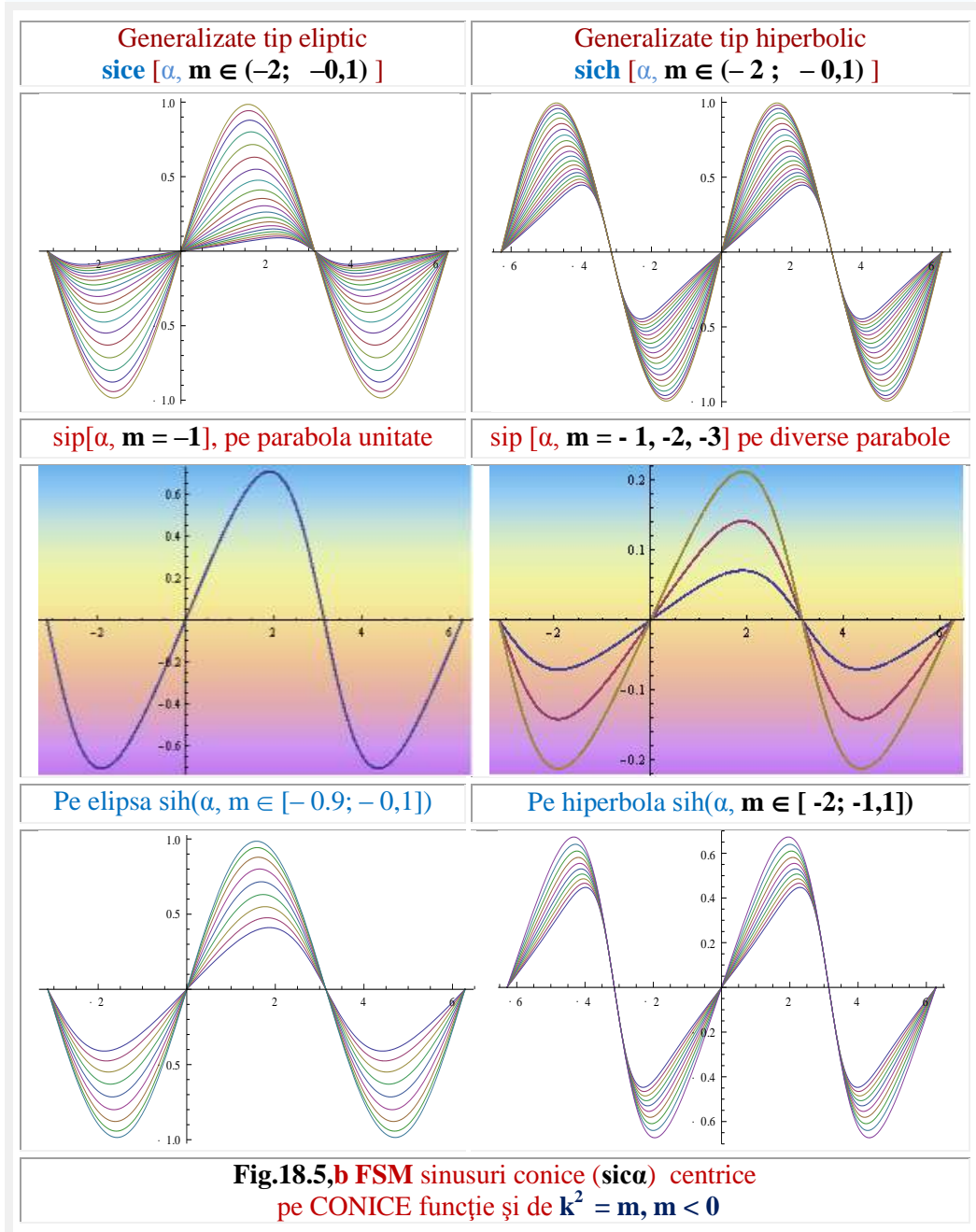
În cadrul **figurii 18.3** sunt prezentate și funcțiile cosinus specifice diverselor conice cum sunt cosinusurile conice **specifice**, obținute prin personalizarea valorilor parametrului **p** și a excentricității numerice **k** în prima relație (18.12), cu valorile din **tabelul 3**: Pe elipse sau **eliptice** în stânga și pe hiperbole sau **hiperbolice** în dreapta.



Așa cum rezultă din ecuațiile (18.12), atât cosinusul cât și sinusul pe conice depind de pătratul lui k , astfel că se obțin aceleași grafice și pentru valorile negative ale excentricității numerice k .



Dacă se vrea să se obțină și alte valori / grafice se poate proceda ca și în cazul **funcțiilor eliptice Jacobi** înlocuind $k^2 = m$, astfel că, în acest caz, $m < 0 \rightarrow -k^2$, așa cum sunt prezentate graficele din **figura 18.5,a** și **18.5,b**.



Se poate observa că funcțiile cosinus conic (**FCoCo**) reprezintă câte o familie, în cazul celor eliptice și hiperbolice, corespunzătoare familiilor de elipse și de hiperbole rezultate pentru valorile excentricității **k**, iar cele circulare și parabolice sunt unice, reprezentate de câte o singură funcție.

Dacă funcțiile pe cercul unitate pot fi multiplicare, prin înlocuirea razei $R = 1$ cu raza unor cercuri oarecare $R \subset \mathbb{R}^+$, la fel, și cele parabolice pot fi multiplicare prin trecerea de la $p = 1$ la $p \subset \mathbb{R}^+$, așa cum s-a prezentat în partea dreaptă a figurii, păstrând excentricitatea numerică la valoarea unei parabole de $k = 1$.

S-a procedat la fel și în cazul funcțiilor sinus parabolic **si α** din partea inferioară a **figurii 18.4,b** în care sunt prezentate funcțiile (pe) conice personalizate

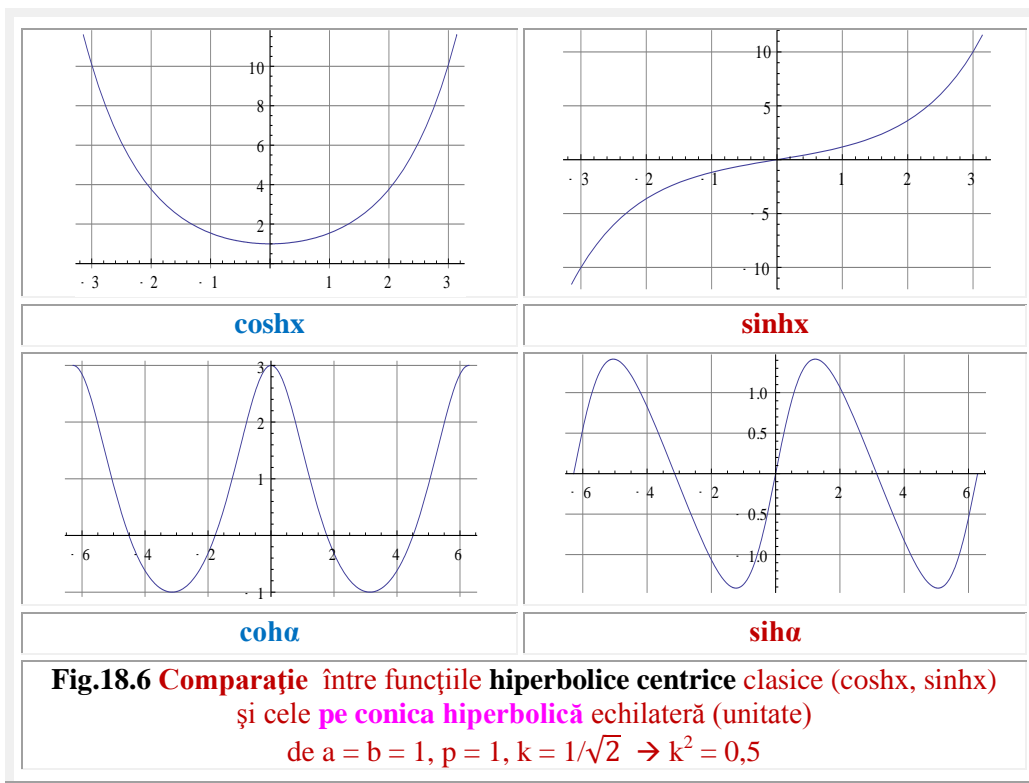


Figura 18.4,a redă graficele FSM sinus (pe) conice generale sau generalizate, în sensul că excentricitatea **k** nu este personalizată pe diversele conice, ci poate fi cuprinsă, teoretic, în intervalul $k \in [-\infty, +\infty]$.

Deoarece graficele sunt aceleași pentru $k > 0$ și $k < 0$, intervalul / domeniul se poate reduce la $k \in [0, +\infty]$, nu și domeniul lui $m = k^2$ dar, practic, el este ales $k \in [0, 2]$ sau, în majoritatea cazurilor, chiar mai redus $k \in [0; 1,5]$, pentru a putea discerne diversele curbe din domeniul hiperbolic ($k > 1$).

Se observă din **figura 18.4,a** că apar, în ambele tipuri, curbe asemănătoare ca formă, dar de valori diferite, cât și curbe identice personalizate, prezentate în **figura**

18.4,b: **sie α** la cele de tip eliptic și **siha** la cele de tip hiperbolic, așa cum este și normal, deoarece unele funcții personalizate, ca cele relevate, sunt conținute în funcțiile generalizate.

În partea superioară a **figurii 18.4,b** sunt prezentate funcțiile sinus (pe) conice pe elipse **sie α** , asemănătoare unor funcții cunoscute în literatura sub denumirea de sinus înclinat, în stânga și cele hiperbolice, în dreapta. În partea inferioară sunt prezentate funcțiile sinus (pe parabolă) parabolic – **sip α** - pentru parabola unitate, în stânga și, în dreapta, pentru alte parabole de $p \in [0, 1]$ și $k = 1$.

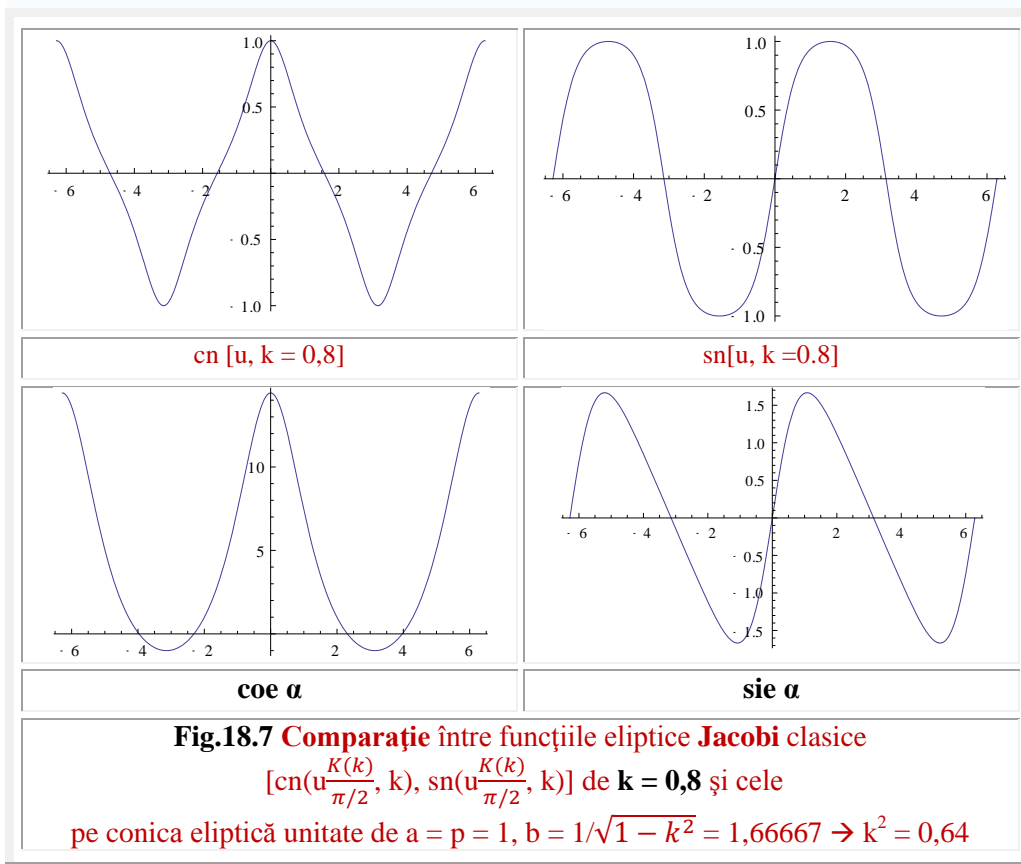
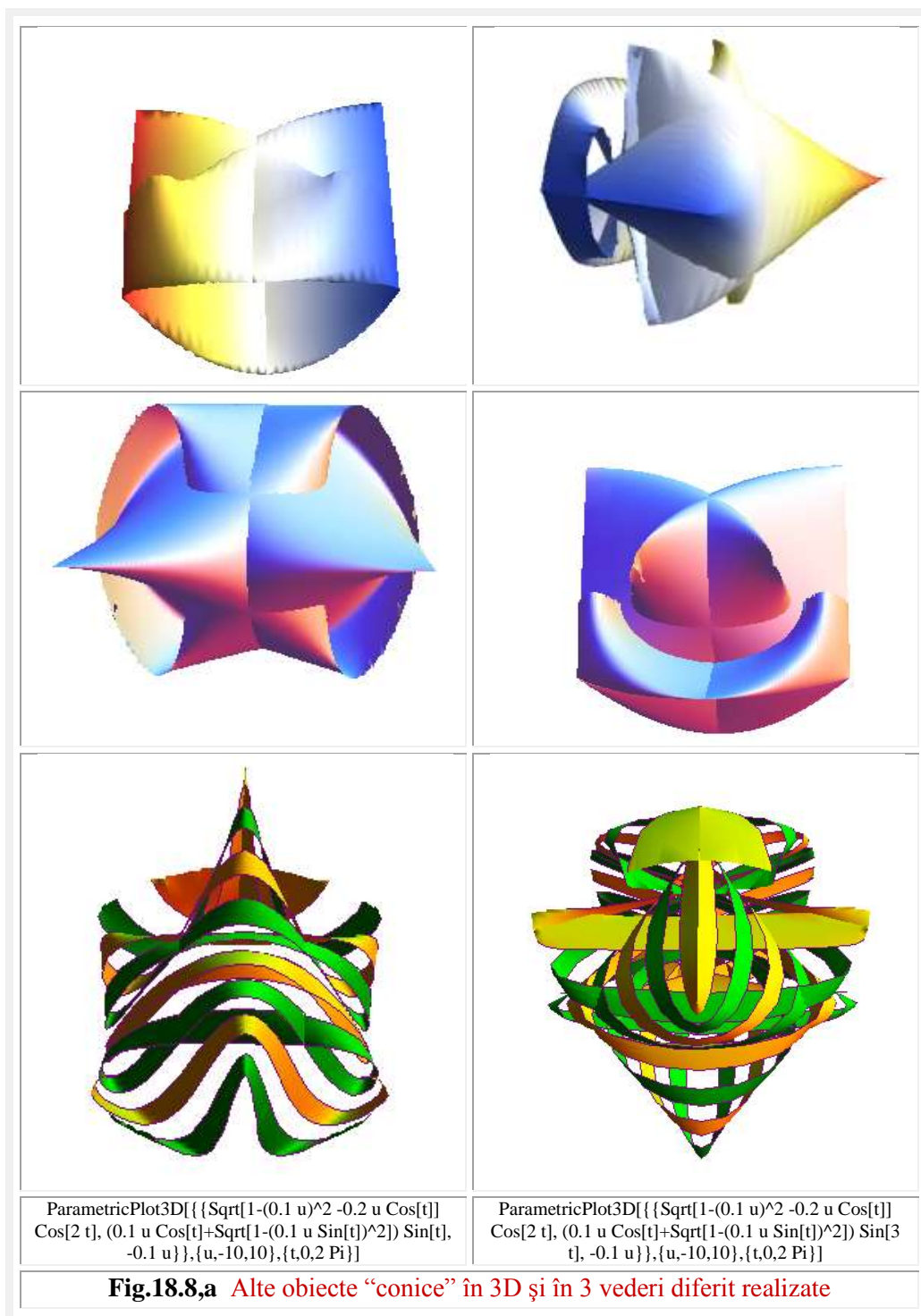


Figura 18.4,a prezintă graficele funcțiilor sinus generalizate (pe) conice de tip eliptic, în stânga, și de tip hiperbolic, în dreapta.

Figura 18.6 prezintă comparația, grafică, între funcțiile hiperbolice clasice **coshx**, **sinhx** și cele noi pe conica hiperbolă ecghilateră ($a = 1, b = 1$) **coh α** , **sih α** și pentru $k^2 = 0,5$.

Marele avantaj al **FSM** conice hiperbolice consistă în faptul ca ele sunt periodice, de perioadă 2π , deoarece argumentul lor este un **arc de cerc** spre deosebire de cele clasice care au ca argument **o suprafață**, ceea ce va facilita introducerea noilor funcții conice **excentrice** (§ 18.5).

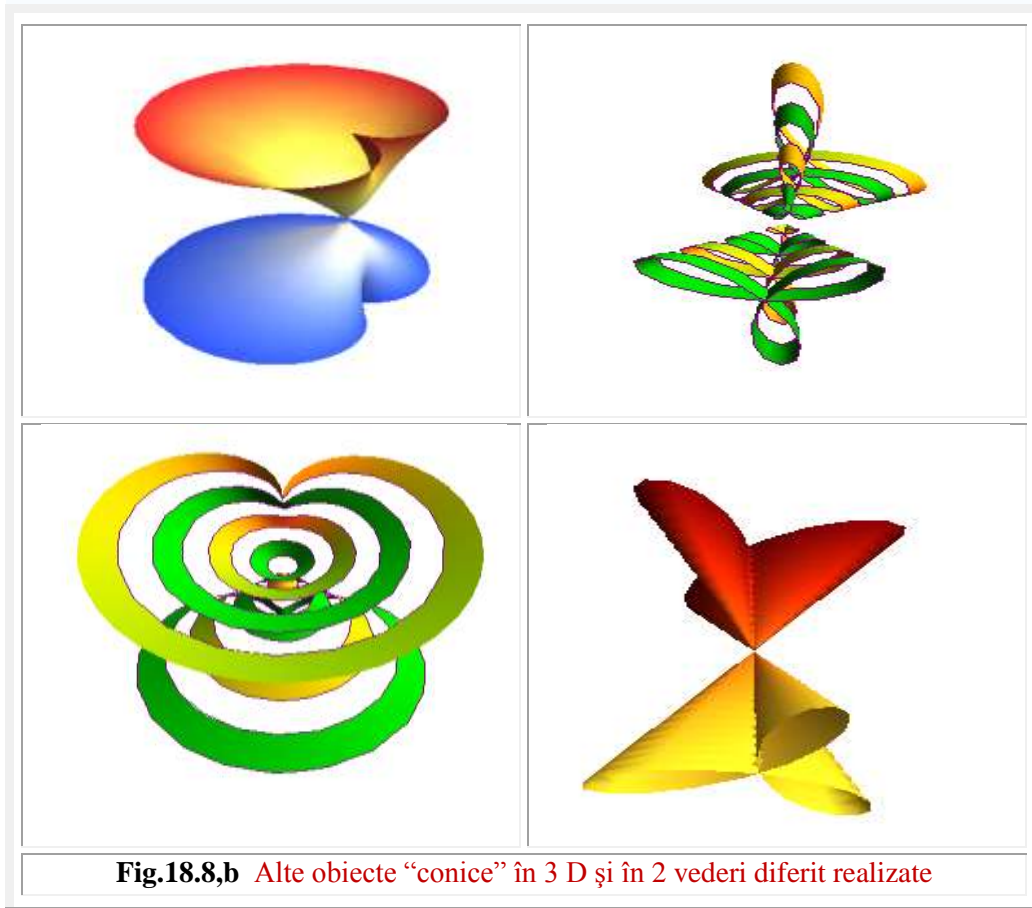


Comparația între **funcțiile eliptice Jacobi** $\text{cn}(u,k)$, $\text{sn}(u,k)$ și cele **SM** pe conica eliptică unitate ($a=1$, $b = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$) **coea**, **siea** pentru o excentricitate și, în același timp un modul, $k = 0,8$, sunt prezentate în **figura 18.7**.

Reamintim că **funcțiile eliptice Jacobi** de argument u au perioada $4K(k)$ și, prin modificarea variabilei $u \rightarrow u \frac{K(k)}{\pi/2}$ ele devin funcții de perioada 2π , ca cele din **figura 18.7**.

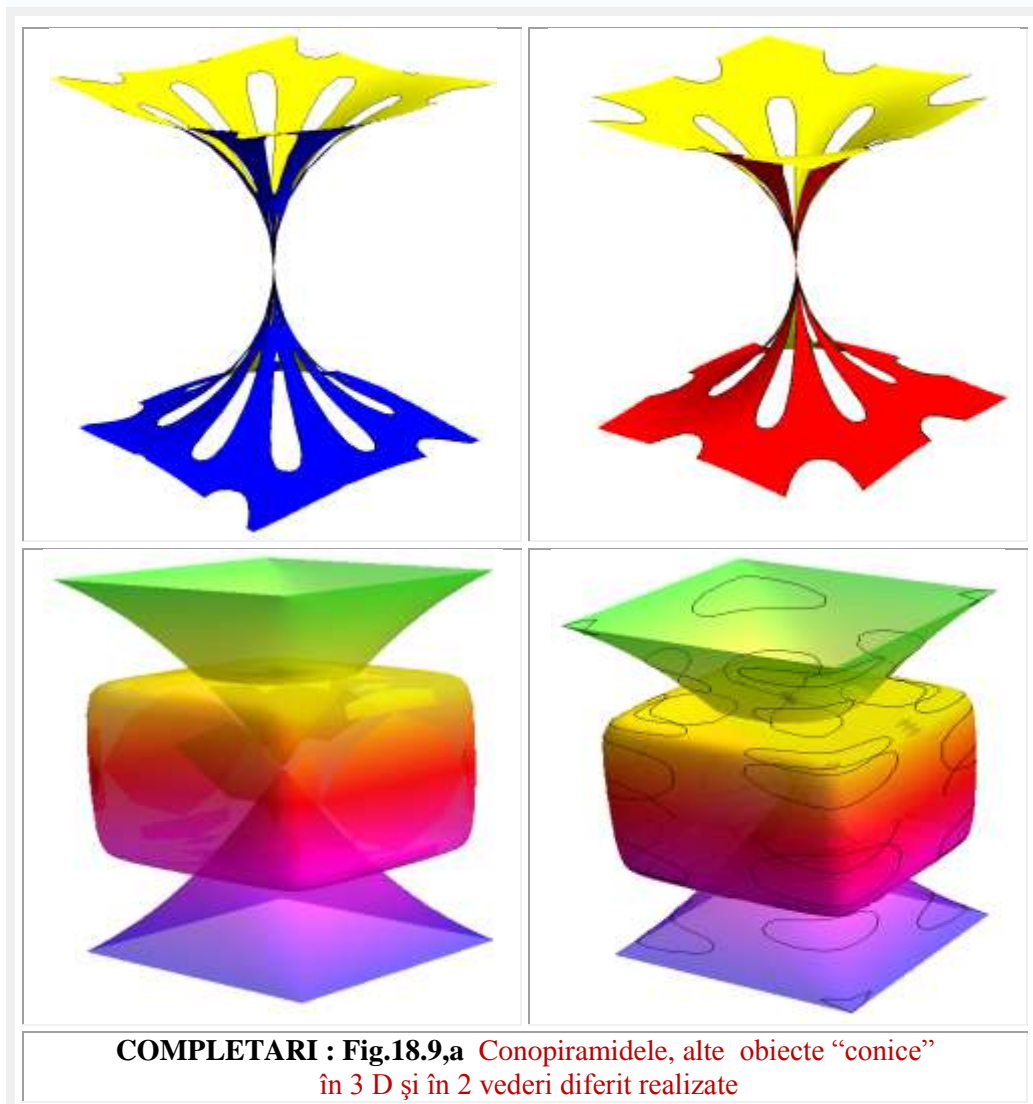
18.5 C O N C L U Z I I

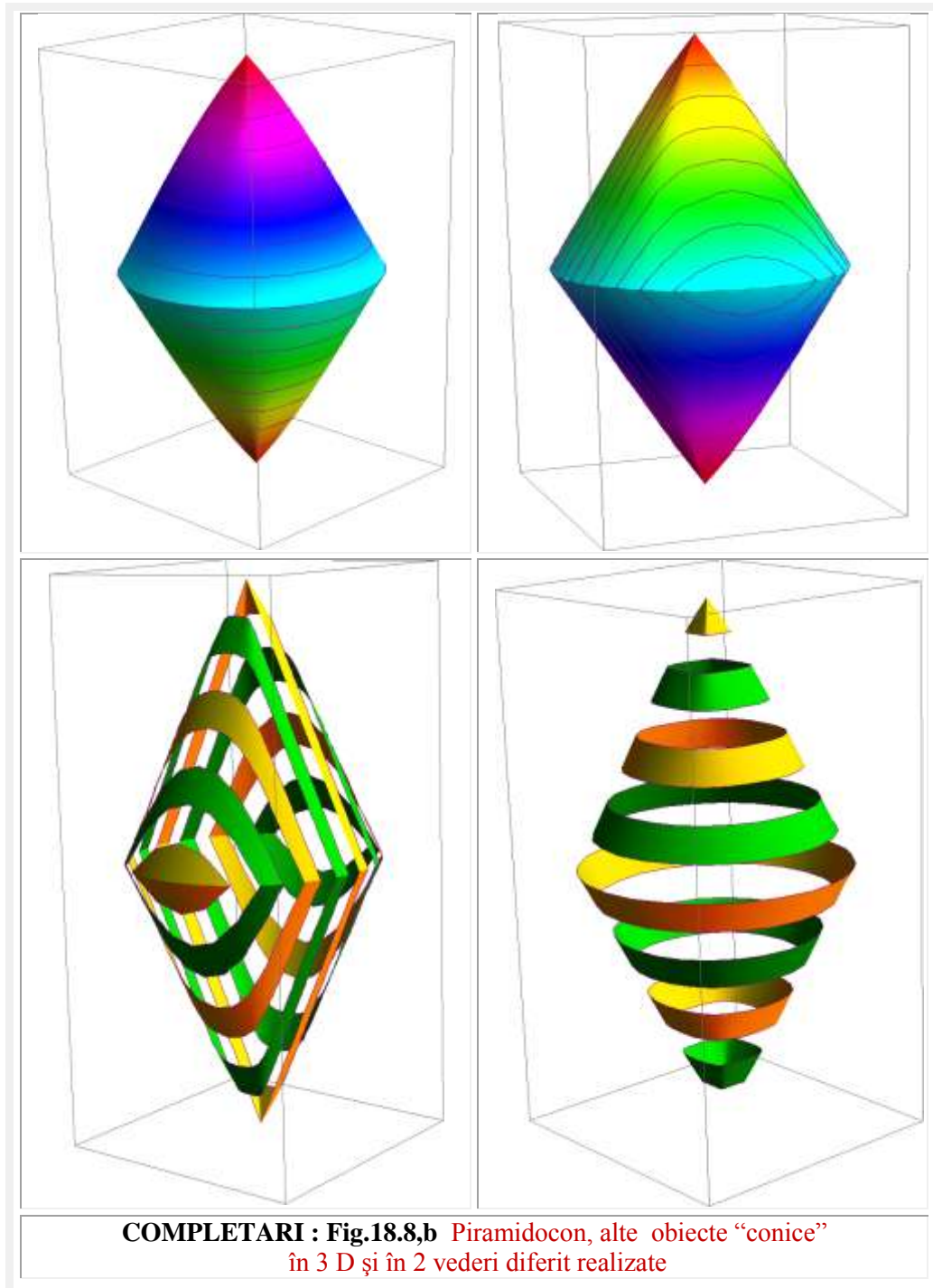
Deoarece **funcțiile (matematice)** sunt uneltele / sculele matematicii și ale matematicianului cu ajutorul cărora se pot releva diversele suprafețe necunoscute și noi forme de cunoaștere din natură, îmbogațirea domeniului cu noi unelte / funcții matematice este o activitatea a căror roade / rezultate se vor putea observa doar în viitor, după utilizarea lor practică. Despre importanța lor, îl lăsăm pe un specialist să se pronunțe.



Marele matematician român **Simion Stoilov** spunea ”*Analiza matematică, această ramură fundamentală a științei, s-a născut și s-a dezvoltat, în mare parte, din nevoile directe ale studiului diverselor forme ale naturii. Noțiunea de funcție, care ocupă în analiza matematică locul central, constituie substratul general, abstract, al oricărei legi a naturii, iar varietatea claselor de funcții pe care le studiază corespund diverselor tipuri de asemenea legi*”

Subscriind la aceste idei, considerând că prelucrarea formelor din natură va necesita și în viitor alte multe unelte matematice, vom continua cu etinderea și în domeniul excentric a funcțiilor (pe) conice centrice prezentate.





Motto: "Este adevărat că domnul **Fourier** este de părere că obiectul principal al matematicii este utilitatea publică și explicația fenomenelor naturii, dar ... singurul scop final al științei este onoarea spiritului omenesc și, în această privință, o chestiune privind numerele are tot atâta preț ca și o chestiune privind alcătuirea lumii".

Karl Gustav Jacob Jacobi

Capitolul 19

FUNȚII ELIPTICE SUPERMATEMATICE DE ARC DE CERC

19.1 INTRODUCERE

Sunt cunoscute **funcțiile eliptice Jacobi** $\text{cn}(u,k)$, $\text{sn}(u,k)$, $\text{dn}(u,k)$ și altele, obținute prin combinarea acestora, de modul k și a căror argument, notat cu u , reprezintă arcul de elipsă de semiaxa mare $a = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ și semiaxă mică $b = 1$, elipsă **rotită** cu $\pm \pi/2$ și de excentricitate liniară c egală cu excentricitatea numerică $\epsilon = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ și, extrem de important, egală cu modulul k sau parametrul integralelor și a funcțiilor eliptice.

În acest capitol se vor prezenta **noi funcții eliptice**, foarte asemănătoare cu cele clasice, **exprimate în funcție de arcul cercului unitate α și nu de arcul de elipsă u** .

Cosinusul eliptic nou, denumit și **supermatematic (SM)**, pentru a se distinge de funcțiile clasice **Jacobi**, este notat cu **$\text{ce}(\alpha, k)$** iar **sinusul eliptic SM** cu **$\text{se}(\alpha, k)$** . Ele se disting, totodată, și de funcțiile eliptice pe conice (**coea** și **siea**) prezentate într-un capitolul anterior (Cap.18).

Ca și funcțiile eliptice **Jacobi**, ele pot fi de mare ajutor în exprimarea anumitor mărimi de vibrație ale unor sisteme oscilante neliniare de caracteristici elastice (**CES**) progresive (tari) și / sau regresive (moi).

19.2 DEFINIREA ELIPSELOR UNITATE

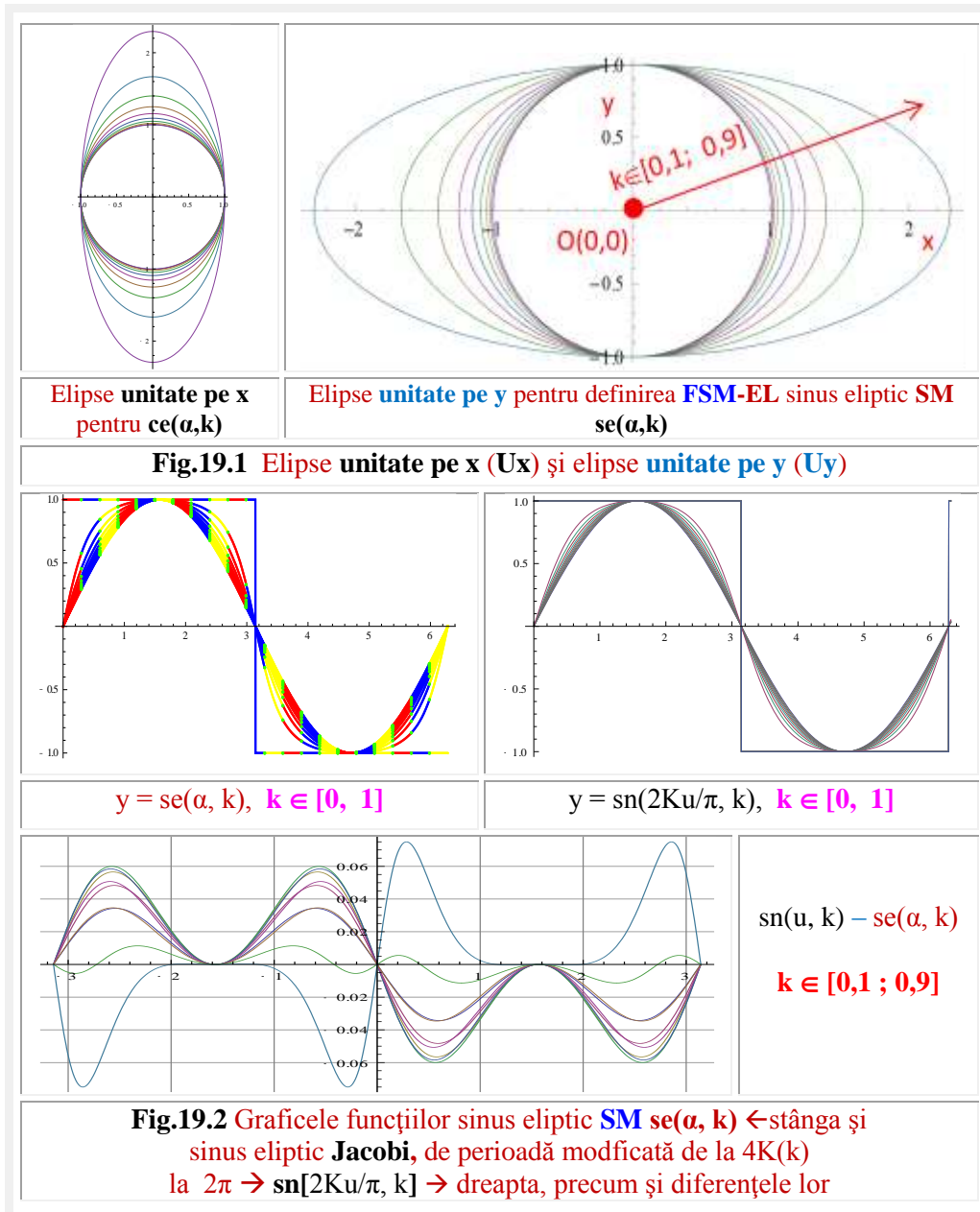
Elipsele unitate au fie semiaxa mare a egală cu unitatea ($a = 1$), pentru ca proiecțiile punctelor de pe elipse, pe axa x , să se înscrie în ecartul/domeniul $x \in [-1, +1]$, denumite **elipse unitate pe** (direcția) x , notate **Ux** , fie semiaxa mică b egală cu unitatea ($b = 1$) pentru ca proiecțiile pe axa y să se înscrie în ecartul / domeniul $y \in [-1, +1]$, notate cu **Uy** . Al doilea tip de elipse se pot obține prin rotirea primei elipse, de $a = 1$, cu unghiul $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Fie elipsele de $a = 1/\sqrt{1-k^2}$, $b = 1$ și excentricitate liniară c și numerică ϵ

$$(19.1) \quad \epsilon = \frac{c}{a} = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}} = k \in [0,1; 0,9], \text{ în care excentricitatea reală } c \text{ este}$$

$$(19.2) \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{1-k^2}\right) - 1} = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$

Elipsele unitate se bucură de proprietatea foarte importantă că au excentricitatea numerică ϵ egală cu modulul k al integralelor și al **funcțiilor eliptice Jacobi**.



Ecuția, în coordonate polare, ale elipselor, cu polul în centrul elipselor $O(0,0)$, care este și originea unui sistem de coordonate rectangular drept xOy , este, pentru $\epsilon = k$

(v. **Mica Enciclopedie Matematică (MEM)**, Ed. Tehnică, Buc. 1980, pag. 391)

$$(19.3) \quad r = \frac{b}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \alpha}}$$

Elipsele unitate **pe y**, notate **U_y**, vor avea ecuațiile polare

$$(19.4) \quad r_{Uy} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \alpha}},$$

iar elipsele unitate **pe x**, rotite cu $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$, notate **U_x** vor avea $\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \sin \alpha$, astfel că ecuațiile lor polare sunt

$$(19.5) \quad r_{Ux} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}$$
 și sunt prezentate în **figura 19.1**, pe baza acestor ecuații, pentru valorile $k \in [0; 1]$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ sau $\alpha \in [-\pi, +\pi]$.

Pentru $k = 0$, se obține cercul unitate, iar pentru $k = 1$ elipsele degenerază în două drepte paralele: paralele cu axa **y** pentru ecuațiile (19.5) și tangente la cercul unitate și paralele cu axa **x**, în cazul ecuație (19.4) și tangente la același cerc unitate **Euler**.

Pentru $k > 1$ se obțin hiperbole.

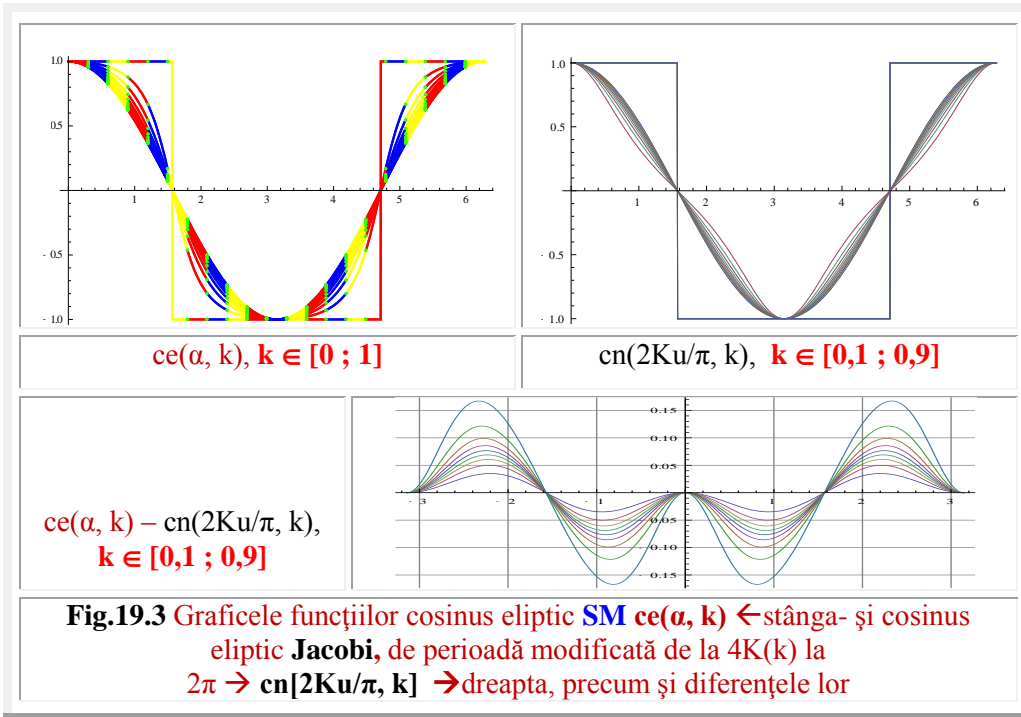


Fig.19.3 Graficele funcțiilor cosinus eliptic **SM** $ce(\alpha, k)$ ← stânga- și cosinus eliptic **Jacobi**, de perioadă modificată de la $4K(k)$ la 2π → $cn[2Ku/\pi, k]$ → dreapta, precum și diferențele lor

19.3 DEFINIREA FUNCȚIILOR ELIPTICE SM

Prin definiție, proiecția pe axa **y** a razei polare r_{Uy} va fi numită funcție **sinus eliptic SM**, de argument **arcul circular** α al cercului unitate **Euler** și de modulul sau parametru **k**, care este, totodată (19.1), și excentricitatea numerică liniară a elipselor, funcție notată **se(α, k)** având expresia simplă

(19.6) $se(\alpha, k) \stackrel{d}{=} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \alpha}}$ și graficele din **figura 19.2**, în care, pentru comparație s-a prezentat, în paralel, și funcția eliptică clasică **Jacobi** $\operatorname{sn}(2K\alpha/\pi, k)$, de perioadă modificată de la $4K(k)$ la 2π .

Cosinusurile eliptice SM ale elipselor (19.3), proiectate pe axa x, vor fi

(19.7) $ce(\alpha, k) \stackrel{d}{=} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}$ cu graficele din **figura 19.3**, în care, de asemenea, a fost prezentată și funcția eliptică **Jacobi** $\operatorname{cn}(2K\alpha/\pi, k)$.

19.4 UNELE PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR ELIPTICE SM

Diferențele, prezentate în **figurile 19.2 și 19.3**, au doar relevanță informativă, deoarece noile funcții eliptice **SM (FESM)** nu au fost introduse în matematică pentru aproximarea celor clasice, deși ele o pot face, practic, cu suficientă precizie, așa cum ilustrează diferențele.

Acceptarea lor în matematică o considerăm necesară pentru diversificarea funcțiilor de acest gen, nu pentru a fi mai multe, ci pentru îmbogățirea matematicii cu noi unelte matematice, capabile să rezolve exact, noi probleme, noi sisteme oscilante / vibrante neliniare.

Se observă, fără dificultate, că

$$(19.8) \quad ce\left(\alpha + \frac{\pi}{2}, k\right) = se(\alpha, k), \quad \text{sau}$$

(19.9) $ce\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, k\right) = se(\alpha, k)$ cele două funcții, $ce(\alpha, k)$ și $se(\alpha, k)$, fiind funcții de unghiuri complementare (**cofuncții**), ca și $\sin \alpha - \cos \alpha$, $\tan \alpha - \cot \alpha$, $\sec \alpha - \csc \alpha$ și funcțiile cvadrilobe **siq θ** și **coq θ** [19], cu care se și identifică, ceea ce face ca să existe și egalitatea dintre **excentricitatea numerică liniară circulară s** și celelalte excentricități numerice, adică, **s = ϵ = k**.

Ca urmare, fiecare **funcție eliptică SM** ia, pentru valori crescătoare ale argumentului α de la 0 la $\frac{\pi}{2}$, aceleași valori ca și **cofuncția** pentru valori descrescătoare ale argumentului de la $-\frac{\pi}{2}$ la 0, așa cum se poate vedea, comparând graficele celor două funcții, din partea superioară a **figurilor 19.2 și 19.3**.

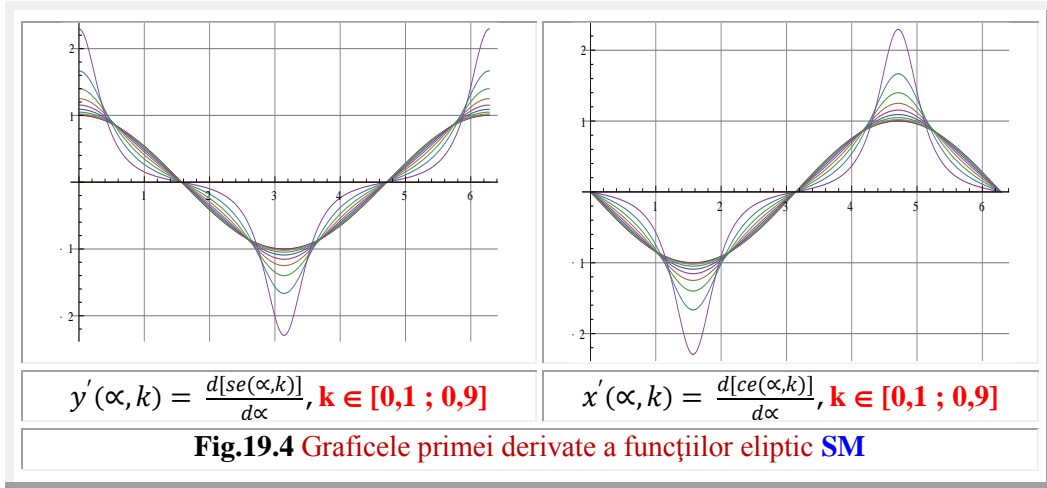
19.5 DERIVATELE FUNCȚIILOR ELIPTICE SM

Dacă funcțiile eliptice **SM** sunt în aceste relații și derivatele lor vor fi cofuncții, așa cum rezultă și urmărind graficele derivatelor lor din **figura 19.4**.

Derivatele de ordinul întâi ale **FESM** sunt

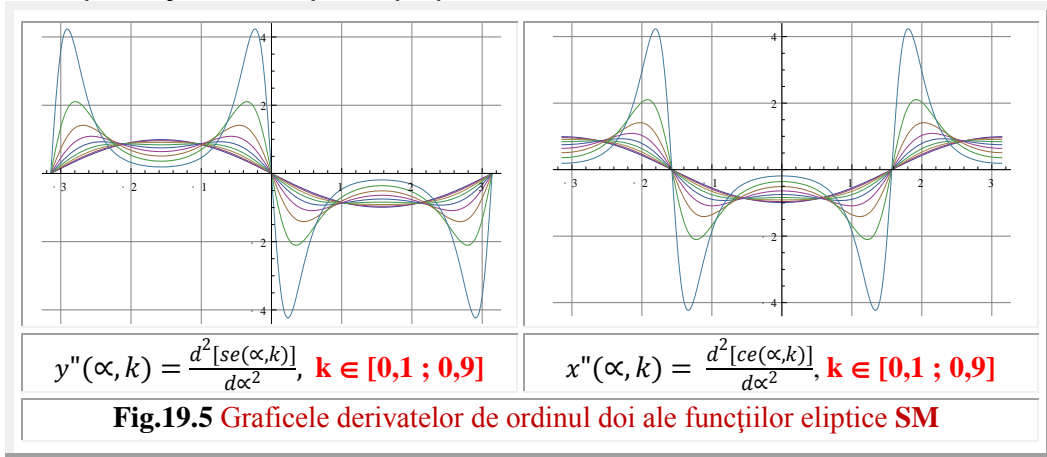
$$(19.10) \quad \begin{cases} \frac{d[se(\alpha, k)]}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \alpha}} \right] = \cos \alpha \frac{1-k^2}{(1-k^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \alpha}} \frac{1-k^2}{1-k^2 \cos^2 \alpha} \\ \frac{d[ce(\alpha, k)]}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} \right] = -\sin \alpha \frac{1-k^2}{(1-k^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} \frac{1-k^2}{1-k^2 \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

Derivatele de ordinul doi au expresiile (19.11) calculate automat / programat în programul **MATEMATICA 6** a lui **Stephan Wolfram**.



$$(19.11) \begin{cases} \frac{d^2[se(\alpha, k)]}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha} \left[\cos \alpha \frac{1-k^2}{(1-k^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}} \right] = \frac{(-1+k^2)(1+k^2+k^2 \cos 2\alpha) \sin \alpha}{(1-k^2 \cos^2 \alpha)^{5/2}} \\ \frac{d^2[ce(\alpha, k)]}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha} \left[-\sin \alpha \frac{1-k^2}{(1-k^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right] = \frac{2\sqrt{2} \cos \alpha (-1+k^4+(k^2-k^4) \cos 2\alpha)}{(1-k^2 \sin^2 \alpha)^{5/2}} \end{cases}$$

sau expresiile (19.11') realizate clasic, denumite manual deși la determinarea lor se folosește din plin creierul și cunoștințele acumulate în el



$$(19.11') \begin{cases} \frac{d^2[se(\alpha, k)]}{d\alpha^2} = \frac{(1-k^2)(1+2k^2 \cos^2 \alpha)}{(1-k^2 \cos^2 \alpha)^{5/2}} \sin \alpha \\ \frac{d^2[ce(\alpha, k)]}{d\alpha^2} = -\frac{(1-k^2)(1+2k^2 \sin^2 \alpha)}{(1-k^2 \sin^2 \alpha)^{5/2}} \cos \alpha \end{cases}$$

Relațiile (19.11) au fost obținute automat, după “FullSimplify” iar cele (19.11') manual / clasic; ambele ilustrând, în principiu, graficele derivatelor de ordinul doi

prezentate în **figura 19.5**, cu observația că numai relațiile (19.11') sunt riguros corecte / exacte.

Forma graficelor derivatelor sunt asemănătoare cu multe grafice din domeniul tehnic, ca de exemplu, al mașinilor electrice și reprezintă, așa cum se va arăta în continuare, viteza și accelerația din mișcarea de rotație, pentru $\Omega = 1$, a unui punct $P[ce(\alpha, k), se(\alpha, k)]$ pe o curba închisă cu patru lobi, de excentricitate numerică $s = k$, denumită **cvadrilobă**.

19.6 VITEZELE DE ROTAȚIE PE ELIPSELE UNITATE

Fie $\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \text{constant}$ viteza unghiulară de rotație a semidreptei cu polul în originea $O(0,0)$ și centrul de simetrie al elipselor unitate, ale cărei intersecții cu elipsele unitate sunt punctele $P(x, y)$ ale căror coordonate x și y sunt **FSM-EL** $x = ce(\alpha, k)$ și $y = se(\alpha, k)$.

Vectorii de poziție \vec{r} ai punctelor P , turnanți în jurul originii $O(0,0)$, sunt

- pentru elipsa unitate E_{Uy} , sau unitară pe direcția y

$$(19.12) \quad \vec{r}_{Uy} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \alpha}} \cdot \text{rada}$$

- pentru elipsele unitate E_{Ux} , sau unitară pe direcția x

$$(19.13) \quad \vec{r}_{Ux} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} \cdot \text{rada}$$

în care, **rada** este fazorul / versorul direcției vectorului $\vec{r} = \overline{OP}$, denumit și funcție (vectorială) **radială centrică**, iar derivata acestuia este funcția **derivată centrică** de α , **dera** = $\frac{d}{d\alpha}(\text{rada})$, fazor rotit cu $\frac{\pi}{2}$ în avans/față față de direcția radială centrică, dată de fazorul / versorul **rada** [23].

Derivatele vectoriale, ale vectorilor de poziție ai punctelor P , vor reprezenta vitezele de rotație ale acestor puncte $P(x, y)$ pe elipsele lor unitate.

Ele sunt:

$$(19.14) \quad \dot{\vec{r}}_{Uy} = \frac{d(\vec{r}_{Uy})}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{d(\vec{r}_{Uy})}{d\alpha} = \Omega \cdot \frac{d(\vec{r}_{Uy})}{d\alpha} = \Omega \frac{\text{dera}(1-k^2 \cos^2 \alpha) - k^2 \cos \alpha \cdot \text{rada}}{(1-k^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(19.15) \quad \dot{\vec{r}}_{Ux} = \frac{d(\vec{r}_{Ux})}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{d(\vec{r}_{Ux})}{d\alpha} = \Omega \cdot \frac{d(\vec{r}_{Ux})}{d\alpha} = \Omega \frac{\text{dera}(1-k^2 \sin^2 \alpha) + k^2 \cos \alpha \cdot \text{rada}}{(1-k^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

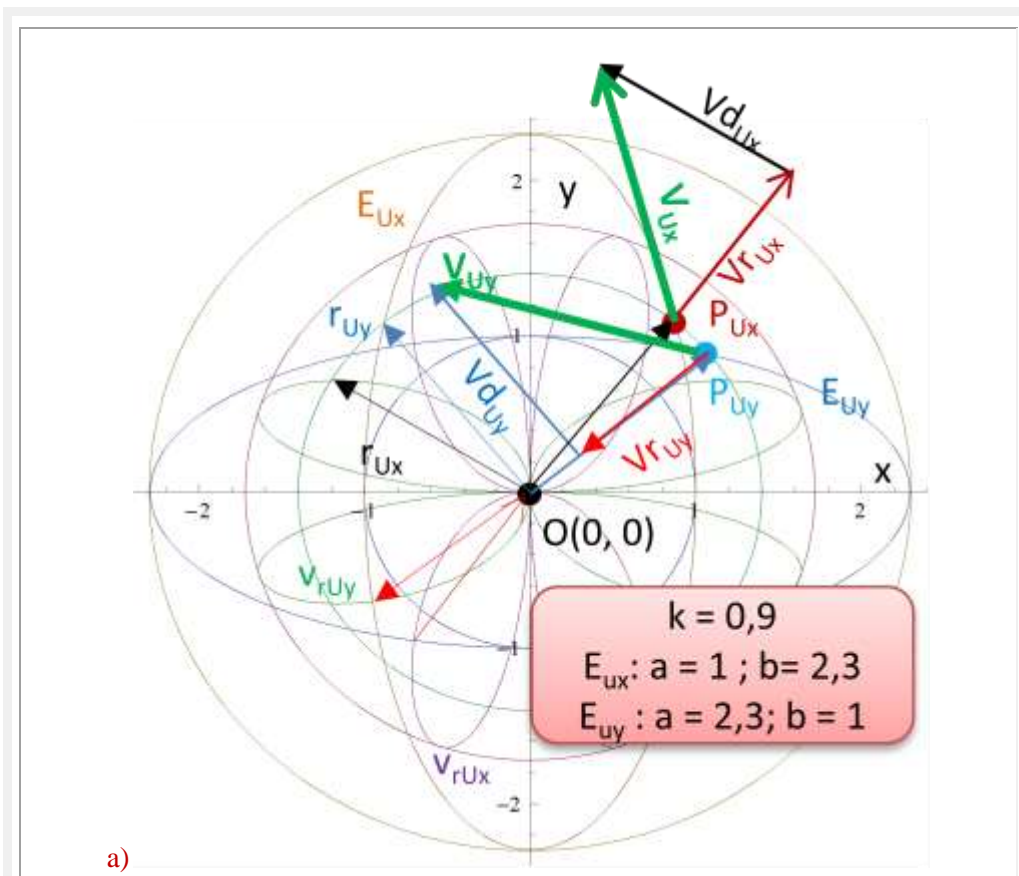
sau, pentru evidențierea mai clară a celor două componente ale vitezei \vec{Vr} și \vec{Vd} (**Fig.19.6**)

$$(20.14') \quad \vec{V}_{Uy} = \dot{\vec{r}}_{Uy} = \frac{d(\vec{r}_{Uy})}{dt} = \Omega \left(-\frac{k^2 \cos \alpha \cdot \text{rada}}{(1-k^2 \cos^2 \alpha)^{1.5}} + \frac{\text{dera}}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \alpha}} \right) = \Omega (\vec{Vr}_{Uy} + \vec{Vd}_{Uy})$$

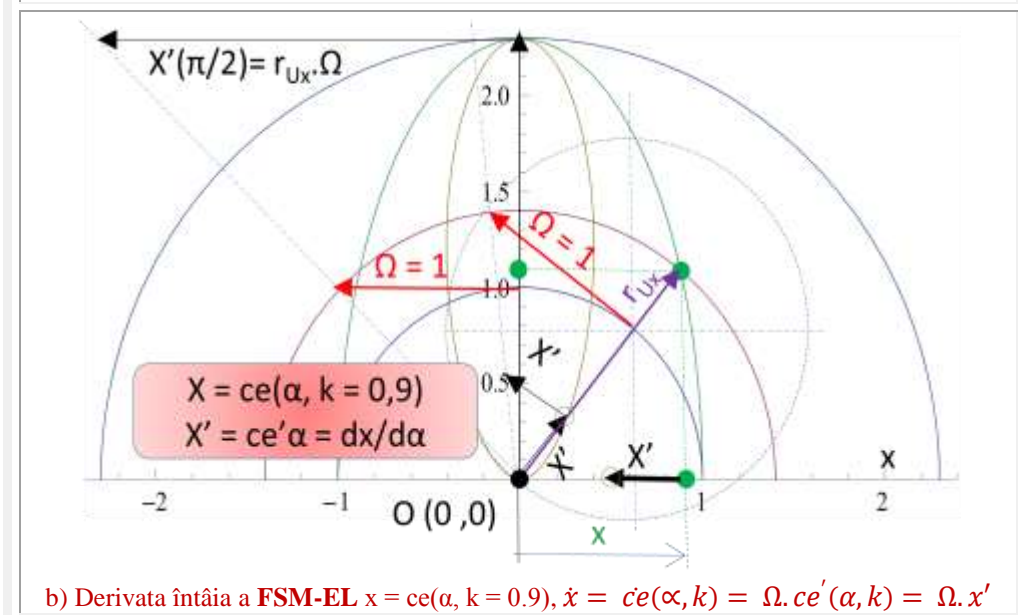
$$(20.15') \quad \vec{V}_{Ux} = \dot{\vec{r}}_{Ux} = \frac{d(\vec{r}_{Ux})}{dt} = \Omega \left(+\frac{k^2 \cos \alpha \cdot \text{rada}}{(1-k^2 \sin^2 \alpha)^{1.5}} + \frac{\text{dera}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} \right) = \Omega (\vec{Vr}_{Ux} + \vec{Vd}_{Ux})$$

Se observă că, modulul componentei (\vec{Vd}), normală pe direcția radială centrică **OP**, este tocmai modulul razei vectoriale \vec{r} ($\alpha + \frac{\pi}{2}$) a celeilalte elipse unitate și, ca urmare, componenta \vec{Vd} va fi (**Fig.19.6,a**)

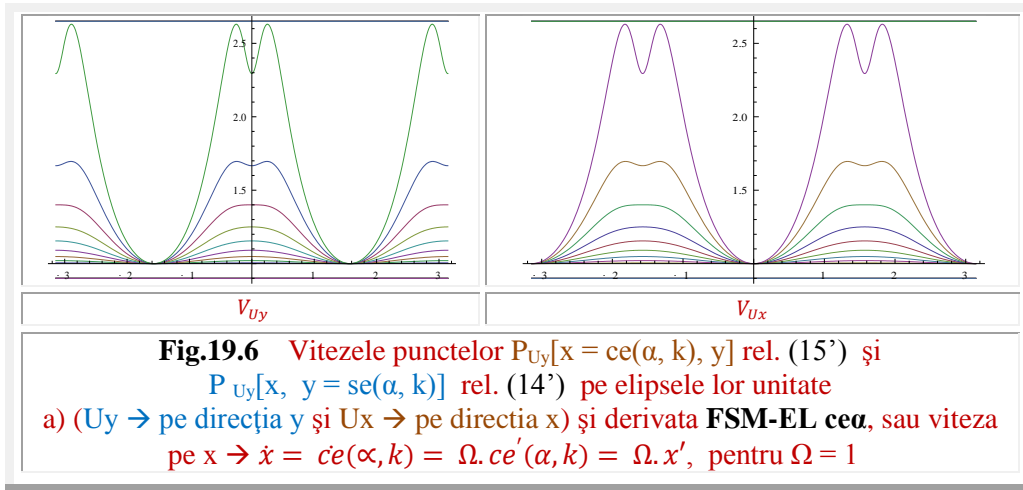
$$(20.16) \quad \vec{Vd} = \vec{r} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right),$$



a)



b) Derivata întâia a FSM-EL $x = ce(\alpha, k = 0,9)$, $\dot{x} = ce'(\alpha, k) = \Omega \cdot ce'(\alpha, k) = \Omega \cdot x'$



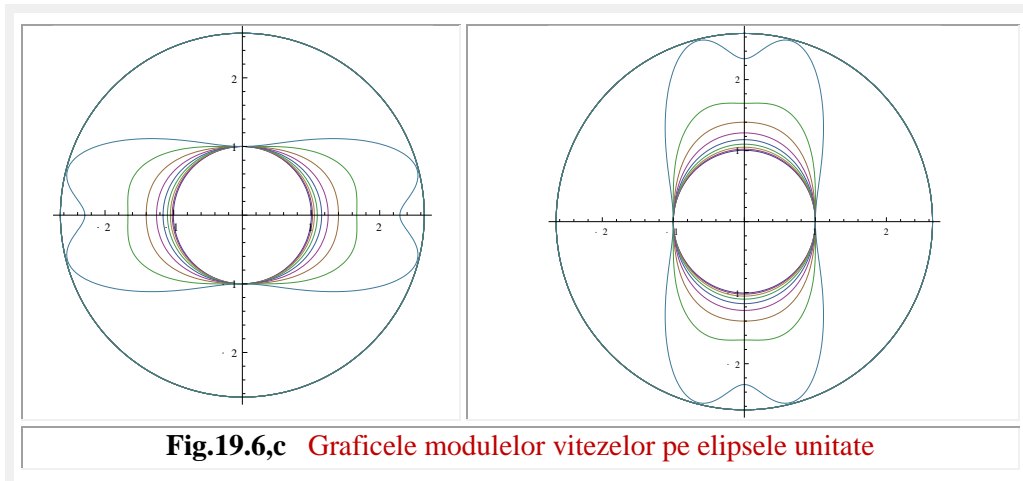
Componenta radială centrică a vitezei (\vec{V}_r) este reprezentată în stânga **figurii 19.6,a**, în coordonate polare, fiind negativă pentru Uy (20.14') și pozitivă pentru Ux

Suma vectorială a celor două componente este vectorul viteză $\vec{V} (\vec{V}_{Uy}, \vec{V}_{Ux})$, tangent la elipsele unitate în punctul $P(x, y)$, așa cum este și cazul **Uy** prezentat în **figura 19.6,a**.

Modulele vectorilor viteză, de pe elipsele lor unitate vor fi:

$$(19.17) \quad \begin{cases} V_{Uy} = \Omega \frac{\sqrt{1+k^2(k^2-2)\cos^2\alpha}}{(1-k^2\cos^2\alpha)^{3/2}} \\ V_{Ux} = \Omega \frac{\sqrt{1+k^2(k^2-2)\sin^2\alpha}}{(1-k^2\sin^2\alpha)^{3/2}} \end{cases} \quad \text{cu graficele din figura 19.6,c.}$$

Valorile maxime apar în apropierea punctelor în care componentele radiale V_r sunt maxime (V. **Fig. 19.6,a**).



Relațiile (19.17) se pot verifica în punctele $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ în care

$$(19.18) \quad \begin{cases} V_{Uy}(0) = V_{Uy}(\pi) = \Omega(1 - k^2); & V_{Uy}\left(\frac{\pi}{2}\right) = V_{Uy}\left(3\frac{\pi}{2}\right) = \Omega \\ V_{Ux}(0) = V_{Ux}(\pi) = \Omega; & V_{Ux}\left(\frac{\pi}{2}\right) = V_{Ux}\left(3\frac{\pi}{2}\right) = \Omega(1 - k^2) \end{cases}$$

19.7 FUNCȚIILE AMPLITUDINE ELIPTICĂ CENTRICE SUPERMATEMATICE (SM) $aece(\alpha, k)$ și $aese(\alpha, k)$

Funcțiile eliptice **SM** $se(\alpha, k)$ (19.6) și $ce(\alpha, k)$ (19.7), reprezentând proiecțiile pe x și, respectiv, y ale unor raze polare variabile, inversele lor vor fi funcțiile eliptice **SM** pe care le vom denumi **amplitudine eliptică SM**, câte una pentru fiecare **FSM-EL**, cu expresiile din relațiile

$$(19.19) \quad \begin{cases} aece(\alpha, k) = \arccos[x] = \arccos[ce(\alpha, k)] = \arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \\ aese(\alpha, k) = \arcsin[y] = \arcsin[se(\alpha, k)] = \arcsin \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \alpha}} \end{cases}$$

și cu graficele din **figura 19.7, a și 19.7, b**.

Se știe că **FEJ** pot fi exprimate prin **FCC** și **FEJ $am(u, k)$** , ca o funcție indusă, astfel:

$$(19.20) \quad \begin{cases} cn(u, k) = \cos[am(u, k)] \\ sn(u, k) = \sin[am(u, k)] \end{cases} \text{ și, tot astfel, pot fi exprimate și } \mathbf{FESM},$$

ținând cont de relația anterioară (19.19)

$$(19.21) \quad \begin{cases} ce(\alpha, k) = \cos[aece(\alpha, k)] \\ se(\alpha, k) = \sin[aese(\alpha, k)] \end{cases}$$

justificând, astfel, alegerea făcută pentru definirea **FESMC** amplitudine **SM** din relațiile (19.19).

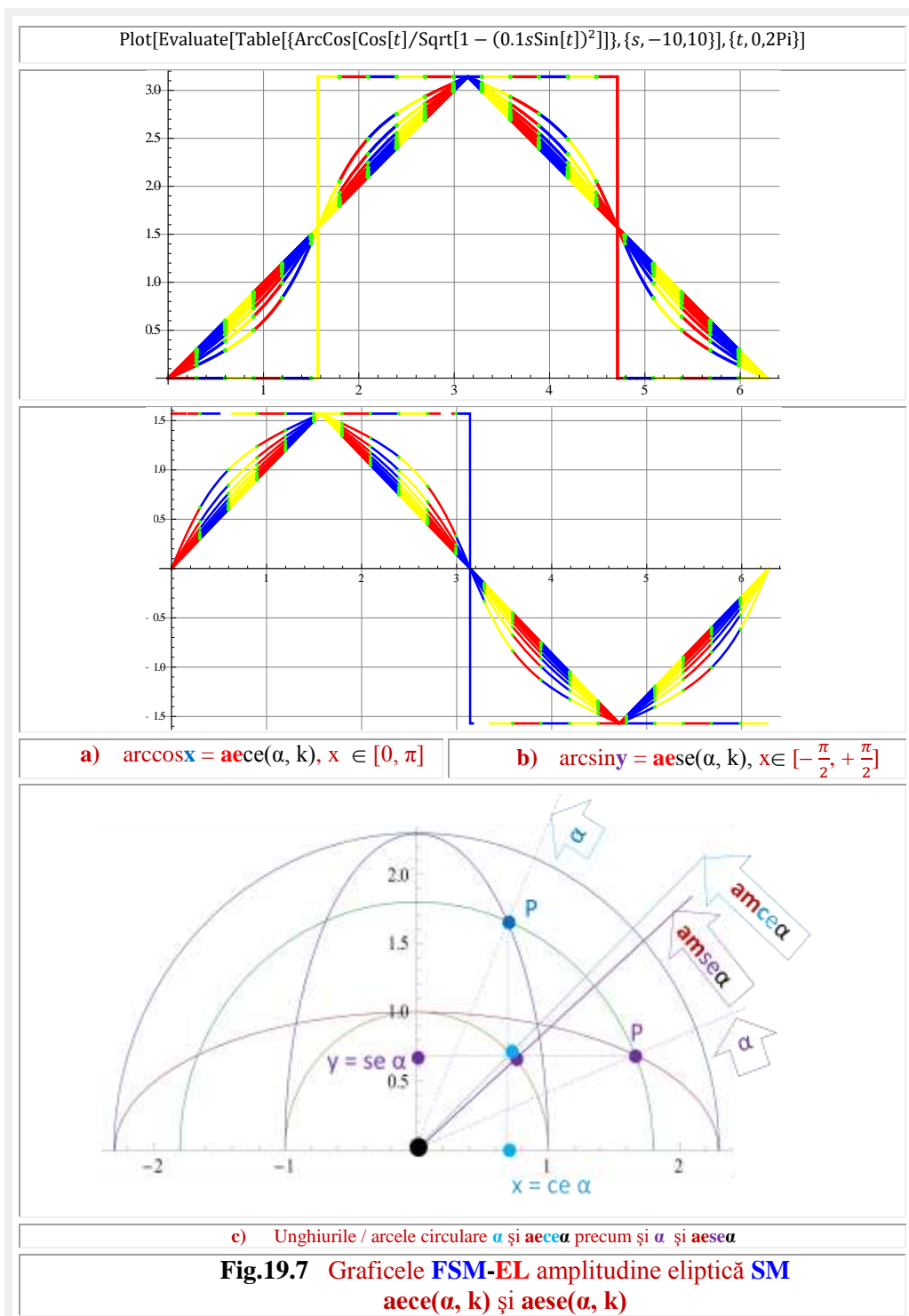
Unghiul de pantă al tangentelor la aceste curbe, adică derivata într-un punct oarecare pe curba de parametru k , reprezintă viteza unghiulară de rotație în jurul centrului $O(0,0)$ a punctelor **P** de pe elipsele unitate, atunci când, sau **dacă**, ele s-ar deplasa pe cercul unitate, pe care o notăm cu ω și care este variabilă.

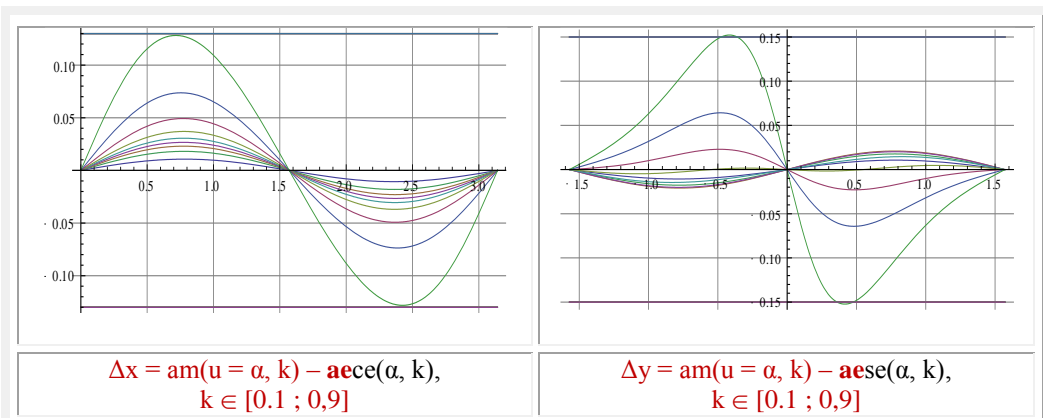
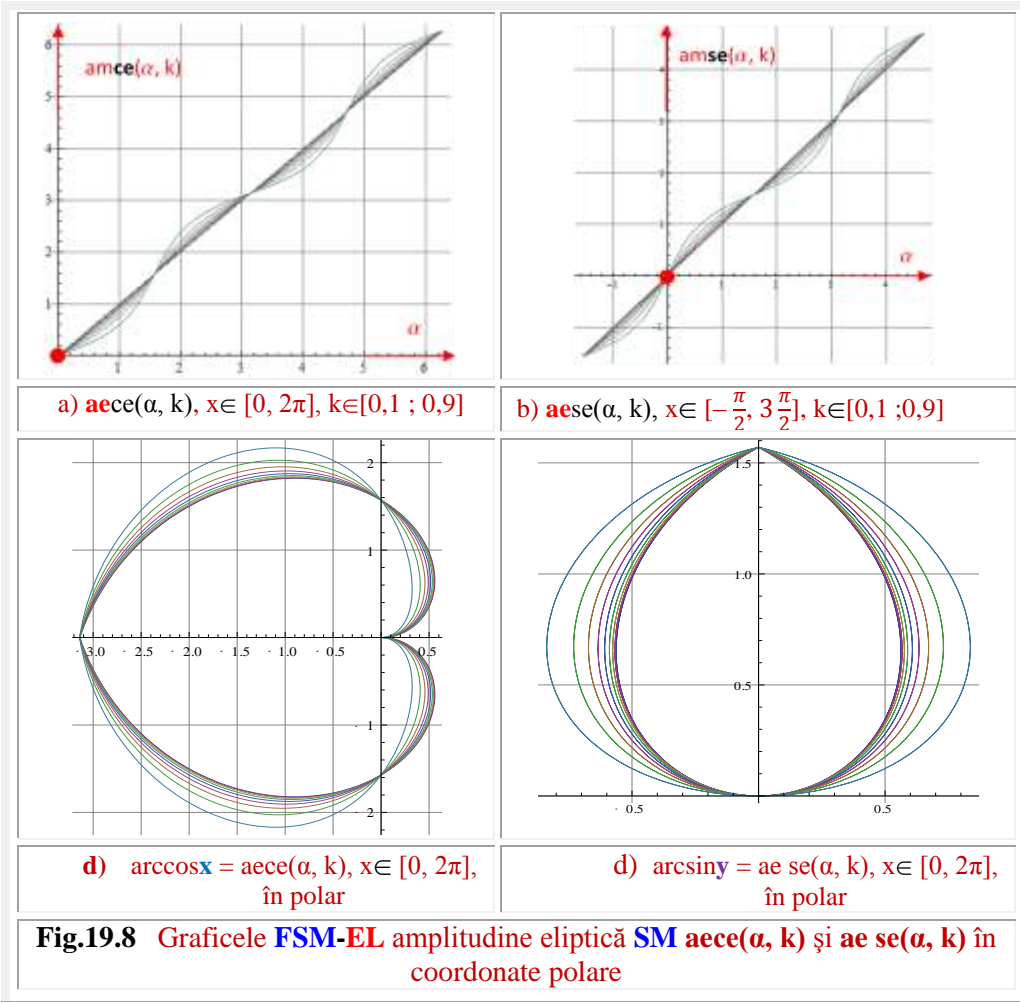
Această variabilă mai este denumită **pulsația proprie instantanee** a unor sisteme vibrante de caracteristici elastice statice (**CES**) neliniare.

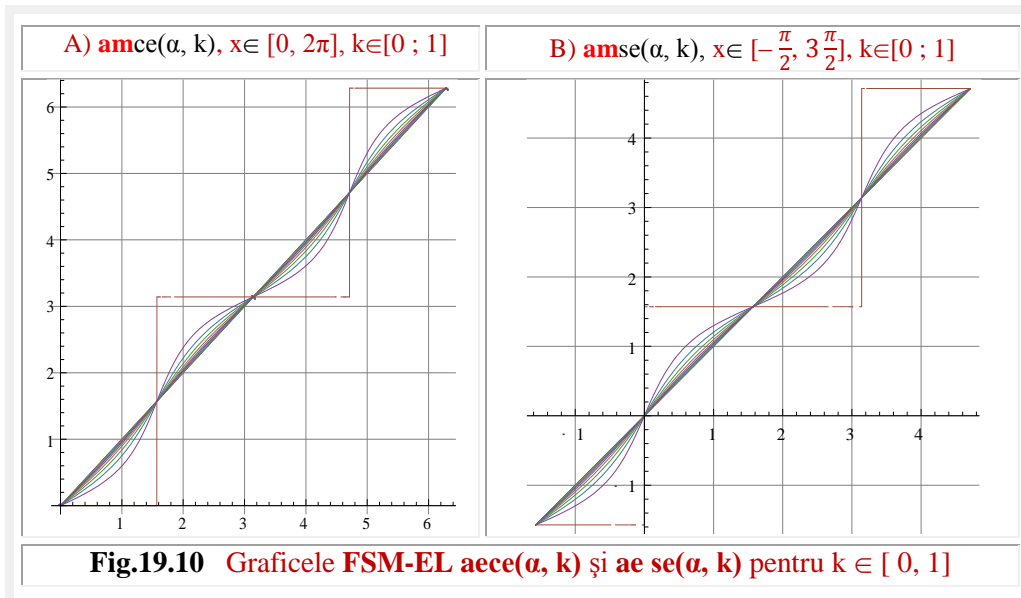
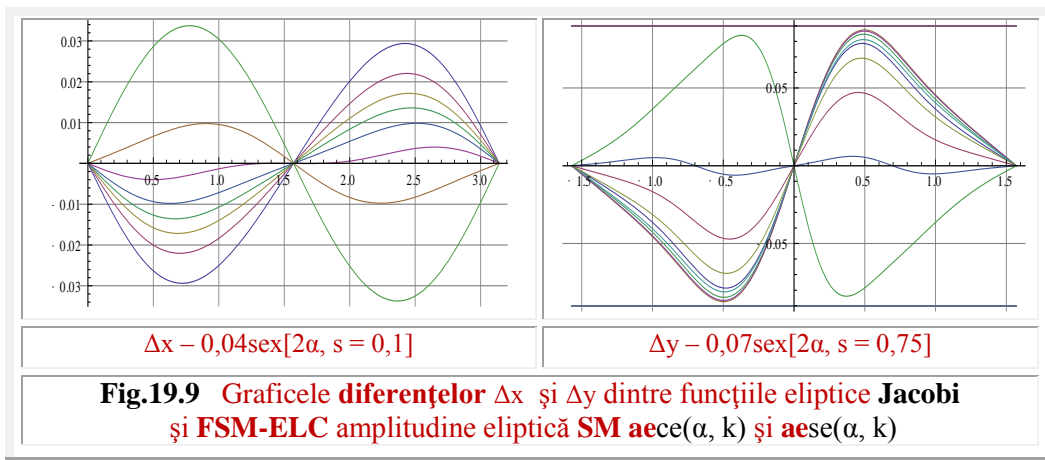
Dacă $W(1, \alpha)$ este punctul de pe cercul unitate, când $\alpha = \Omega \cdot t$, atunci $Wc[1, amce(\alpha, k)]$ și $Ws[1, amse(\alpha, k)]$ sunt punctele de pe cercul unitate, corespunzătoare punctelor **P** de pe elipsele unitate (v. **Fig.19.7, C**), puncte care se suprapun periodic peste punctul **W** pentru valorile $\alpha = \pm \frac{\pi}{2} \pm n \cdot \frac{\pi}{2}$, așa cum rezultă și din graficele din **figura 19.7, a și b și 19.8, a, b, c și d**.

Așa cum rezultă din **figura 19.7, C**, în cadranul întâi, $amce(\alpha, k = 0,9) < \alpha$ și $amse(\alpha, k = 0,9) > \alpha$, iar în cadranul doi situația se va inversa, ceea ce rezultă și din graficele din **figurile 19.8, a și 19.8, b**, ca și din **figurile 19.8, c și 19.8, d** și, chiar mai mult, că la trecerea dintr-un cadran în altul situațiile se inversează.

Funcțiile $\arccos x$ și $\arcsin y$ au ca dimensiune, sau exprimă, așa cum se cunoaște, dimensiunea sau mărimea unui unghi (**Fig.19.7 C**), unghiuri sau arce de pe cercul unitate care au fost notate cu $aece(\alpha, k)$ și, respectiv, cu $aese(\alpha, k)$.







Din aceste grafice, rezultă că ambele funcții **amplitudine eliptică SM** oscilează, cu amplitudini egale față de prima bisectoare, în contrasens, astfel că integrarea, pe o perioadă, este egală, evident, cu viteza unghiulară a semidreptei care generează mișcarea punctului $P(x,y)$ pe elipsele unitate și care este aleasă $\Omega = 1$. Ea este, totodată, și **pulsăția proprie** Ω , constantă a sistemelor vibrante / oscilante pe care le vom denumi **sisteme vibrante eliptice SM (SVEL-SM)**, a căror soluții exacte sunt **FSM-ELC-SM** $ce(\alpha, k)$ și $se(\alpha, k)$, precum și combinațiile lor liniare, așa cum se va prezenta, în continuare, în § 19.10.

Asemănarea izbitoare a funcțiilor amplitudine eliptice **SM** cu cele clasice **Jacobi**, de perioadă modificată de la $4K$ la 2π , dacă nu obligă, cel puțin, sugerează

compararea lor. Diferențele dintre **funcțiile eliptice clasice Jacobi** și **funcțiile eliptice SM** sunt redate informativ în **figura 19.9**.

Aceste diferențe pot fi mult diminuate, prin introducerea unor funcții periodice Suplimentare, care să anuleze o parte din diferențe rezultate.

Astfel, prin utilizarea **FSM-CE** sinus excentric $sex[\theta, S(s, \varepsilon)]$, diferențele s-au diminuat de peste 3 ori, așa cum se prezintă situația în **figura 20.9**→ jos, în care sunt specificate și funcțiile și parametrii utilizați.

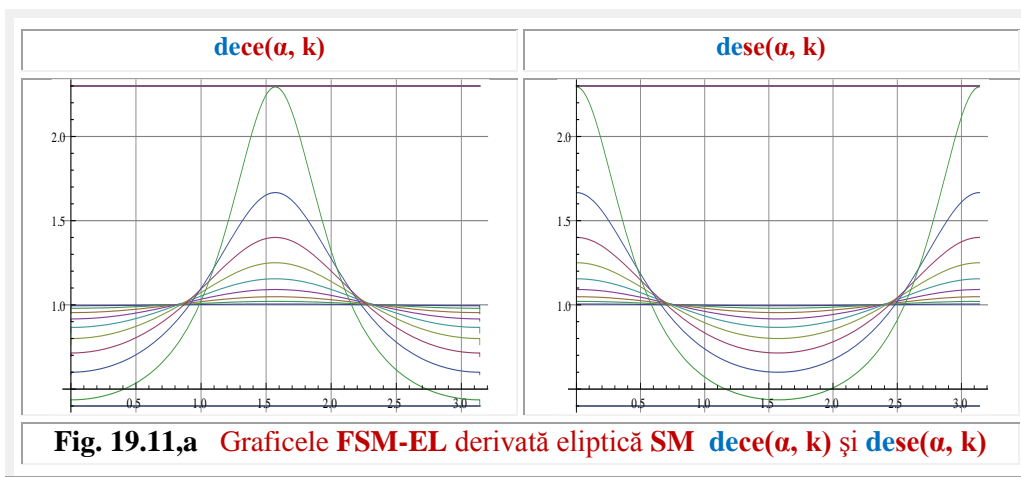
Atunci când amplitudinile diferențelor curbilor, din familia de funcții, sunt cvazi egale și de semne opuse, aproximarea pe ansamblu a **familiei** de funcții nu mai poate continua. În schimb se poate continua cu îmbunătățirea aproximării uneia sau a mai multor funcții din familie/grup, care au amplitudinile diferențelor de același semn.

Se cunoaște că funcția amplitudine eliptică **Jacobi**, pentru modulul extrem $k = 1$, este o funcție în trepte, pe care programele de matematică nu prea le plotează. Situație care se extinde și la celelalte **FEJ**. În schimb ele pot fi plotate cu relațiile (19.19) prin extinderea domeniului $k \in [0,1; 0,9]$ la $k \in [0; 1]$ așa cum se exemplifică în **figura 19.10**, în care s-au folosit și extensiile funcțiilor arcsinx și arccosx.

19.8 FUNCȚIILE DERIVATĂ ELIPTICĂ CENTRICĂ SM $dce(\alpha, k)$, $dese(\alpha, k)$

Așa cum, în cadrul funcțiilor eliptice clasice **Jacobi** ca și în cadrul **FSM-CE**, derivata funcție amplitudine $am(u, k)$, respectiv, amplitudine excentrica $aex(\theta, S)$ este funcția derivată, $dn(u, k)$, respectiv, $dex(\theta, S)$, tot așa se va considera derivata funcțiilor amplitudine eliptică supermatematică centrică (**FE-SMC**) ca funcții derivată eliptică **SM** cu notațiile și ecuațiile / expresiile simple din relațiile (19.23)

$$(19.22) \begin{cases} dce(\alpha, k) = \frac{d}{d\alpha} [aece(\alpha, k)] = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1-k^2 \sin^2 \alpha} \\ dese(\alpha, k) = \frac{d}{d\alpha} [aese(\alpha, k)] = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1-k^2 \cos^2 \alpha} \end{cases} \text{ și cu graficele din figura 19.11.}$$



Graficele lor scot în evidență faptul că funcțiile derivată eliptică **SM** sunt cofuncții periodice, de perioadă π , iar integrala definită de sub oricare dintre curbele **dece**(α, k) și / sau **dese**(α, k) pe intervalul unei perioade are valoarea $1 \cdot \pi$.

Din diagramele lor polare, mai rezultă că ele sunt curbe închise cu doi lobi.

Comparând relațiile (20.23) cu relațiile primei derivate (19.11') rezultă o oarecare similitudine cu derivatele **FSM-CE** $cex\theta$ și $sex\theta$ și ale **funcțiilor eliptice Jacobi** cnu și snu , în sensul că, derivatele sunt egale cu produsul funcțiilor **dece**(α, k) și **dese**(α, k), respectiv, $dex\theta$ și $dn(u, k)$ cu funcțiile, numai că produsul se face cu aceeași funcție și, în plus, mai apar și termeni suplimentari ($k' \cdot \tan \alpha$ și, respectiv, $k' \cdot \cot \alpha$), așa cum se exprimă ele, comparativ, în următoarele relații

$$(19.23) \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} cex'(\theta, S) = -dex(\theta, S) \cdot sex(\theta, S) \\ sex'(\theta, S) = dex(\theta, S) \cdot cex(\theta, S) \end{array} \right. , \quad dex[\theta, S(s, \varepsilon)] = 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \cdot \sin^2(\theta - \varepsilon)}} \\ \left\{ \begin{array}{l} cn'(u, k) = -dn(u, k) \cdot sn(u, k) \\ sn'(u, k) = dn(u, k) \cdot cn(u, k) \end{array} \right. , \quad dn(u, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u, k)} \\ \left\{ \begin{array}{l} ce'(\alpha, k) = -dece(\alpha, k) \cdot ce(\alpha, k) \cdot k' \cdot \tan \alpha \\ se'(\alpha, k) = dese(\alpha, k) \cdot se(\alpha, k) \cdot k' \cdot \cot \alpha \end{array} \right. , \quad \text{relațiile (19.20)} \end{array} \right.$$

In care $k' = \sqrt{1 - k^2}$ este modulul complementar

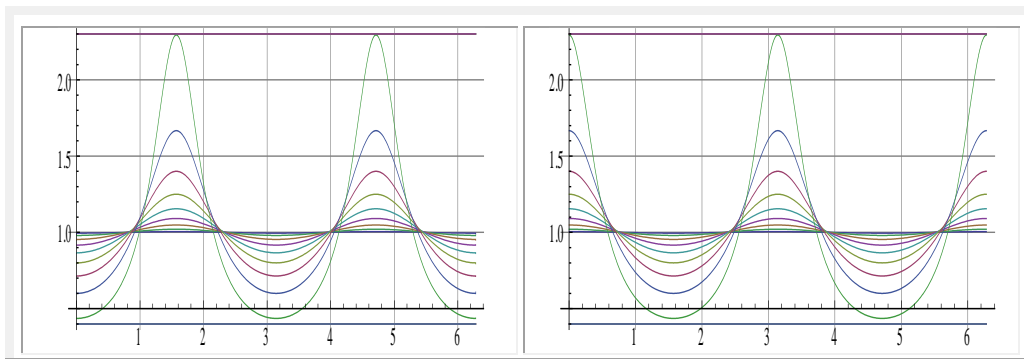
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos' x = -1 \cdot \sin x \\ \sin' x = 1 \cdot \cos x \\ \text{rad}' \alpha = \text{der } \alpha \\ \text{der}' \alpha = -\text{rad } \alpha \end{array} \right.$$

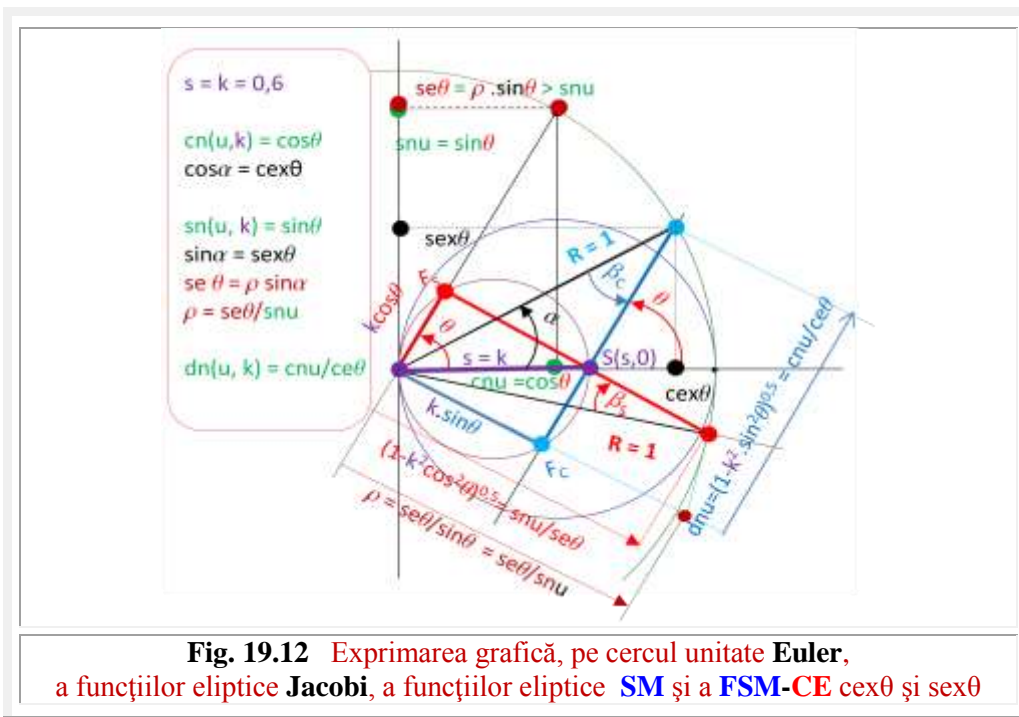
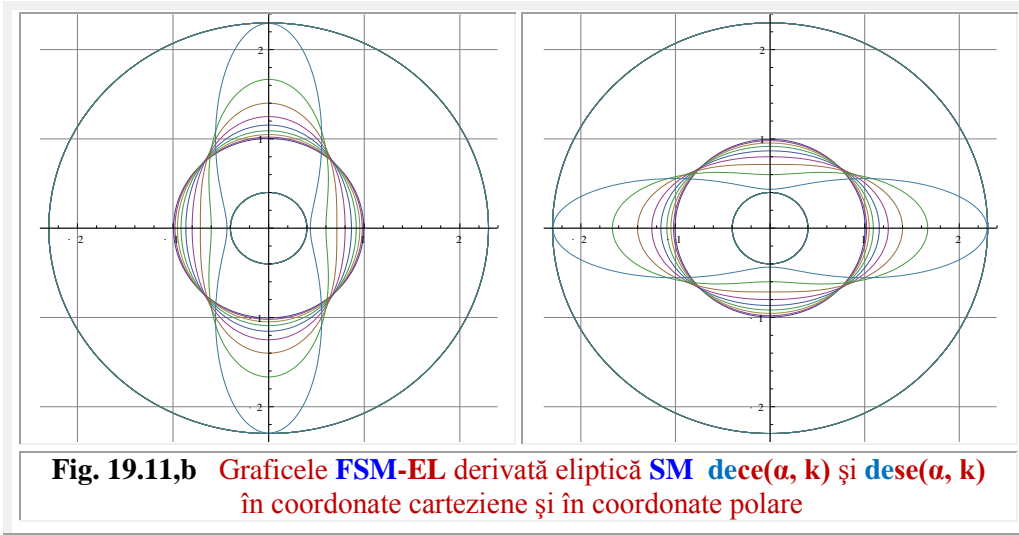
În relațiile (19.23) s-au introdus și derivatele **FCC** $\cos x$ și $\sin x$, precum și ale funcțiilor **SM** fazoriale radial centric $rada$ și derivat centric **dera**.

Pentru compararea lor grafică, funcții eliptice **SM** (**FESM**: $ce\theta$, $se\theta$), cele circulare centrice (**FCC**: $\cos\theta$ și $\sin\theta$), funcțiile circulare excentrice (**FSM-CE**: $cex\theta$ și $sex\theta$) **SM** a fost reprezentate împreună în **figura 19.12** pe cercul unitate **Euler**.

Se poate remarca, încă odată, diferențele înfime existente între **FESM** $se(\theta, k)$ și **FEJ** $sn(u, k)$. Și, așa cum se poate deduce și grafic, ele sunt mai mici în jurul valorilor de $\theta = 0$ și $\theta = \pi$, la traversarea axei x, și ceva mai mari în jurul valorii de $\theta = \frac{\pi}{2}$ și $\theta = \frac{3\pi}{2}$, la traversarea axei y. Ceea ce rezultă și din diferențele din **figura 19.9**.

Derivatele de ordinul doi ale **FE-SMC** din relația (19.23') scrise dezvoltat sunt

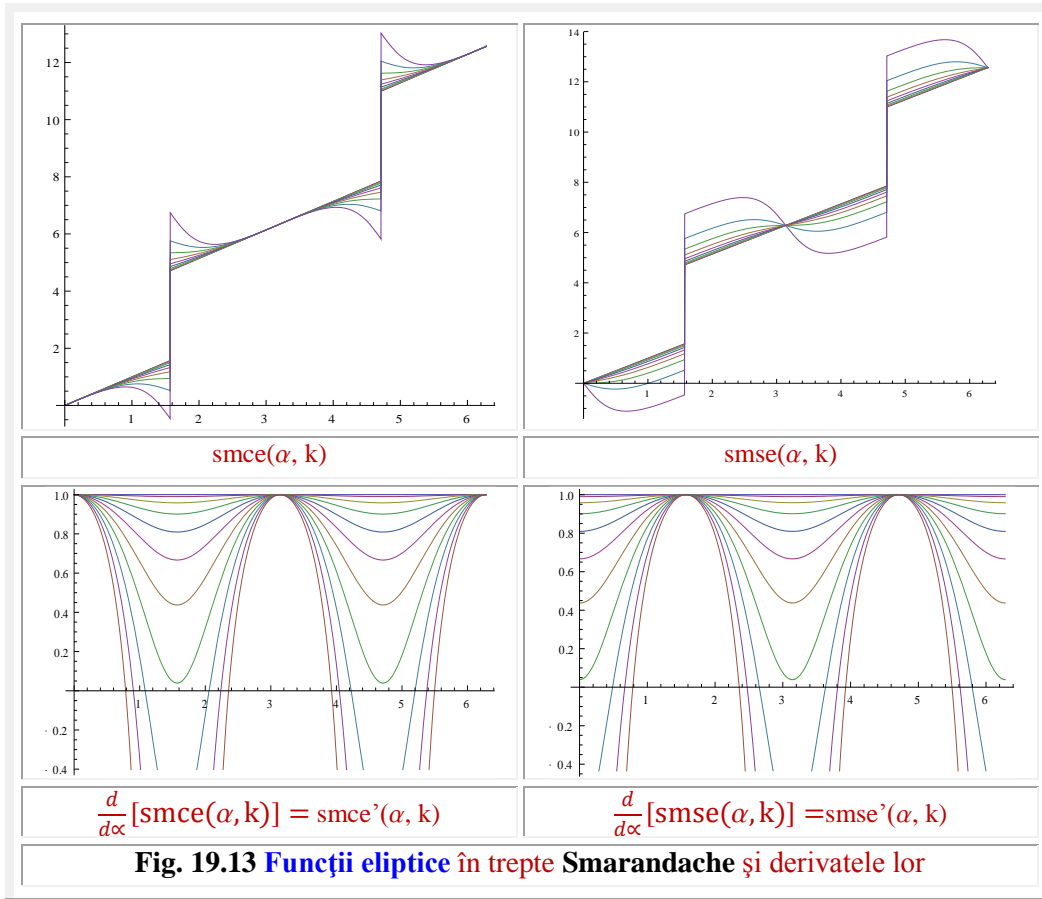




$$(19.23'') \quad \begin{cases} \frac{d^2[se(\alpha, k)]}{d\alpha^2} = \frac{(1-k^2)(1+2k^2 \cos^2 \alpha)}{(1-k^2 \cos^2 \alpha)^{5/2}} \sin \alpha = \frac{-\sin \alpha}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \alpha}} \frac{1-k^2}{1-k^2 \cos^2 \alpha} \frac{1+2k^2 \cos^2 \alpha}{1-k^2 \cos^2 \alpha} \\ \frac{d^2[ce(\alpha, k)]}{d\alpha^2} = -\frac{(1-k^2)(1+2k^2 \sin^2 \alpha)}{(1-k^2 \sin^2 \alpha)^{5/2}} \cos \alpha = \frac{-\cos \alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} \frac{1-k^2}{1-k^2 \sin^2 \alpha} \frac{1+2k^2 \sin^2 \alpha}{1-k^2 \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

în care, se observa că, funcțiile original $se(\alpha, k)$ și $ce(\alpha, k)$ se reproduc direct (nu în

cruciș ca la **FEJ**) atât în prima derivată cât și în cea de a doua.



Se notează ultimele fracții din (19.23') ca derivatele de ordinul întâi ale funcțiilor **smse(α, k)** și, respectiv **smce(α, k)** și se vor denumi derivatele **funcțiile eliptice în trepte Smaradache (FETSm)** [20], din considerente care rezultă din graficele acestor funcții, prezentate în **figura 19.13**.

Astfel, relațiile anterioare pot fi scrise ca produsul funcțiilor original cu funcțiile derivate eliptice **SM** și cu **derivatele funcțiilor eliptice în trepte Smaradache** [20]

$$(19.24) \quad \begin{cases} \frac{d^2[se(\alpha, k)]}{d\alpha^2} = -se(\alpha, k) \cdot dese(\alpha, k) \cdot smse'(\alpha, k) \\ \frac{d^2[ce(\alpha, k)]}{d\alpha^2} = -ce(\alpha, k) \cdot dece(\alpha, k) \cdot smce'(\alpha, k) \end{cases}$$

în care derivatele **FETSm** au fost notate cu apostrof.

Expresiile derivatelor **FETSm** sunt

$$(19.25) \quad \begin{cases} \frac{d}{d\alpha} [smse(\alpha, k)] = smse'(\alpha, k) = \frac{1+2k^2 \cos^2 \alpha}{1-k^2 \cos^2 \alpha} \\ \frac{d}{d\alpha} [smce(\alpha, k)] = smce'(\alpha, k) = \frac{1+2k^2 \sin^2 \alpha}{1-k^2 \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

iar din derivatele lor, prin integrare, se obțin următoarele expresii ale **FETSm**

$$(19.26) \quad \begin{cases} smse(\alpha, k) = 2\alpha + \frac{\operatorname{argth} \frac{tg\alpha}{\sqrt{k^2-1}}}{\sqrt{k^2-1}} = 2\alpha + \frac{\operatorname{arctanh} \frac{\tan\alpha}{\sqrt{k^2-1}}}{\sqrt{k^2-1}} \\ smce(\alpha, k) = 2\alpha - \frac{\operatorname{argth}(\sqrt{k^2-1} \operatorname{tg}\alpha)}{\sqrt{k^2-1}} = 2\alpha - \frac{\operatorname{arctanh}(\sqrt{k^2-1} \tan\alpha)}{\sqrt{k^2-1}} \end{cases}$$

Graficele acestor funcții în trepte **Smarandache** și derivatele lor sunt prezentate în **figura 19.13**.

19.9 FUNCȚII INTRATRIGONOMETRICE (IT)

Au fost numite astfel, datorit faptului că fac joncțiune, sau, mai precis, sunt o interfață între funcțiile trigonometrice / **circulare** centrice **Euler** și funcțiile trigonometrice **pătratic** **Alaci Valeriu**, ca și funcțiilor **transtrigonometrice**, cu care se aseamănă.

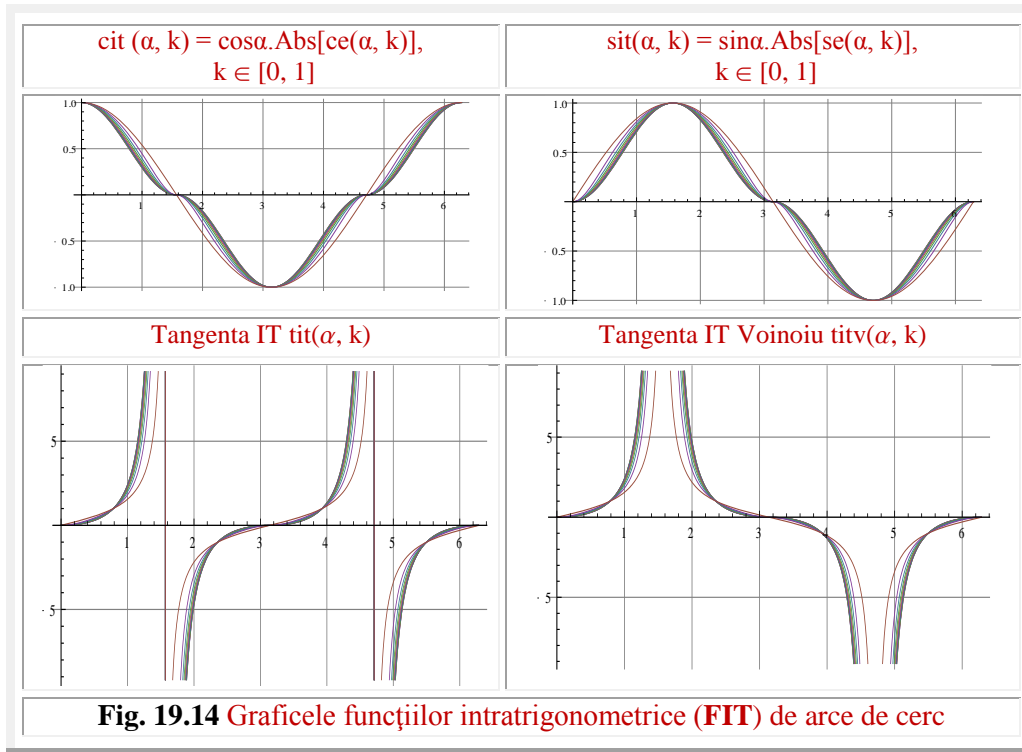


Fig. 19.14 Graficele funcțiilor intratrigonometrice (FIT) de arce de cerc

Funcțiile transtrigonometrice (**TT**), prezentate în continuare în §19.10, sunt funcții de exponentul $K \in [1, 2]$, în timp ce, cele **intratrigonometrice (IT)** sunt funcții de excentricitatea numerică $s = k \in [0, 1]$. Ambele tipuri de funcții completează continuu spațiul dintre cercul unitate **Euler** și pătratul **Alaci Valeriu**, însă, curbele ca și funcțiile cosinus și sinus **TT** au discontinuități (V. **Fig.19.17**) în punctele din vârful pătratului **Alaci** $(0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2})$, cu excepția cercului unitate ($K = 2$), în timp ce, curbele

IT sunt continue în aceste puncte, care sunt puncte de inflexiune, cu excepția, evidentă, a pătratului ($k = \pm 1$), așa cum se poate observa în **figurile 19.14 și 19.15**.

Funcțiile **IT** cosinus **cit**(α, k) și sinus **sit**(α, k) sunt definite de ecuațiile

$$(19.27) \quad \begin{cases} \text{cit}(\alpha, k) \stackrel{d}{=} \cos \alpha \cdot \text{Abs}[ce(\alpha, k)] = \cos \alpha \cdot \text{Abs} \left[\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} \right] = \frac{\text{Abs}[\cos \alpha] \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = \text{Abs}[\cos \alpha] \cdot ce(\alpha, k) \\ \text{sit}(\alpha, k) \stackrel{d}{=} \sin \alpha \cdot \text{Abs}[se(\alpha, k)] = \sin \alpha \cdot \text{Abs} \left[\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \alpha}} \right] = \frac{\text{Abs}[\sin \alpha] \cdot \sin \alpha}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \alpha}} = \text{Abs}[\sin \alpha] \cdot se(\alpha, k) \end{cases}$$

cu graficele din **figura 19.14**, în care s-au inclus și funcțiile tangentă ordinară și tangentă **IT** **Voinoiu**.

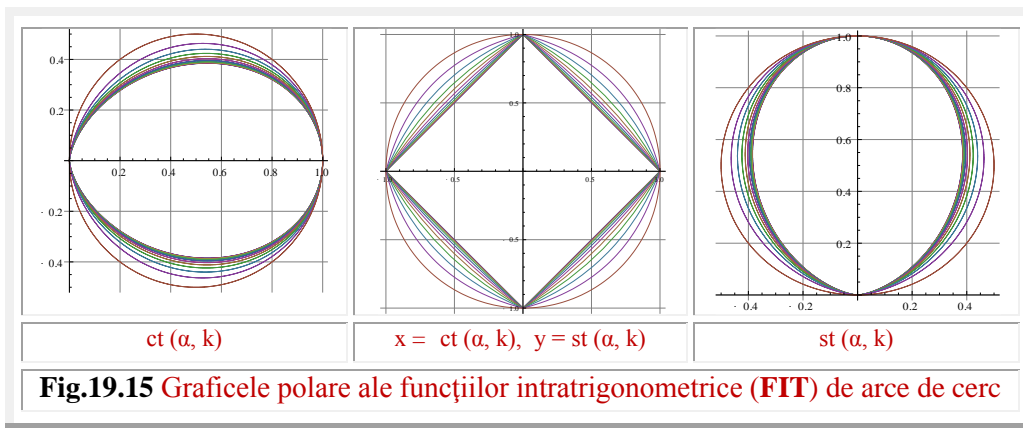


Fig.19.15 Graficele polare ale funcțiilor intratrigonometrice (**FIT**) de arce de cerc

$$(19.28) \quad \text{tit}(\alpha, k) = \frac{si(\alpha, k)}{ci(\alpha, k)} \quad \text{și tangentă Voinoiu IT}$$

$$(19.29) \quad \text{titv}(\alpha, k) = \frac{si(\alpha, k)}{\text{Abs}[ci(\alpha, k)]}$$

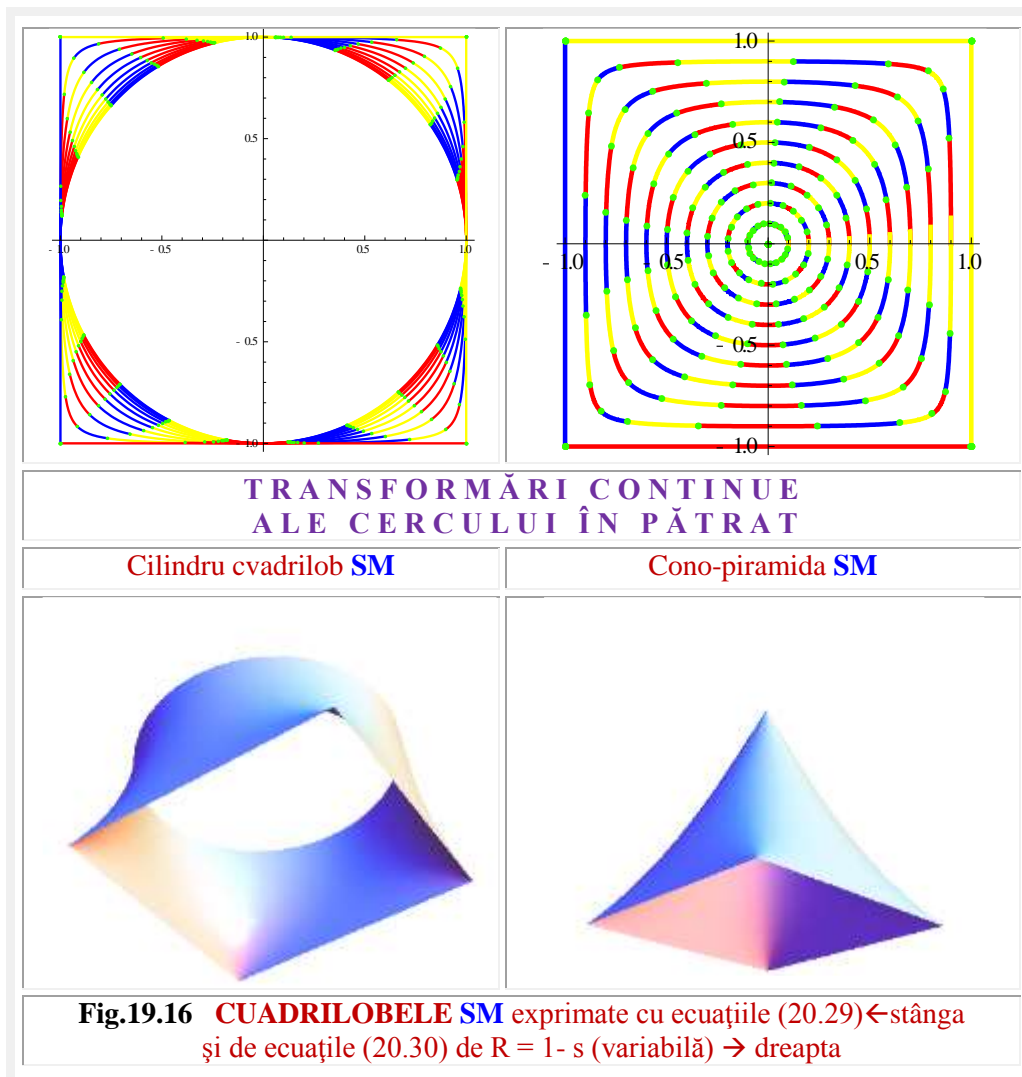
Graficele, în coordonate polare ale **FIT** **ci**(α, k) și **sit**(α, k), sunt redată în **figura 19.15**, împreună cu ecuațiile parametrice ale curbelor **IT**, care, așa cum se poate observa, umplu continuu și complet spațiul cuprins între cercul unitate și pătratul **Alaci Valeriu**.

19.10 CVADRILOBELE – “ELIPSE” UNITATE SIMULTAN PE x ȘI PE y

Așa cum s-a prezentat în §19.2, proiectând punctele P ale elipselor unitate U_x pe x s-au obținut **FSM-EL** cosinus eliptic cu $x = ce(\alpha, k)$. Proiectând punctele P ale elipselor unitate U_y pe y s-au obținut **FSM-EL** sinus eliptic cu $y = se(\alpha, k)$. Astfel că, numai **una** dintre coordonatele carteziene ale elipselor unitate este și **FSM-EL**.

Rezultă întrebarea firească: Care este curba matematică a căror puncte au, **simultan**, drept coordonate carteziene **FSM-EL** **cea** și **sea** ? De aceeași excentricitate **s** sau modul **k**, adică

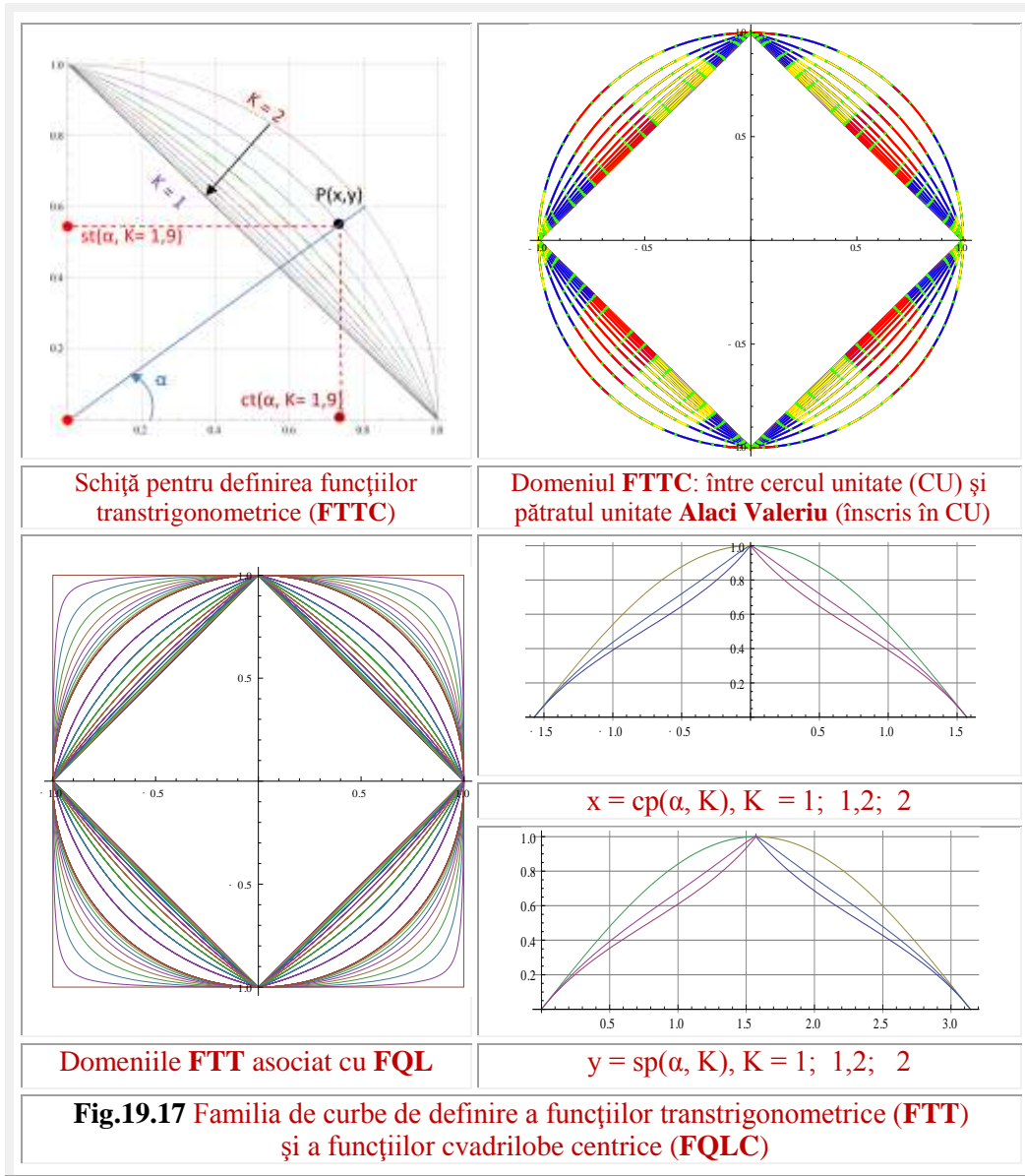
$$(19.30) \quad P(x, y) \equiv P[x = ce(\alpha, k), y = se(\alpha, k)],$$



Se cunoaște că această curbă matematică va avea ecuațiile parametrice (19.31)

$$P \begin{cases} x = ce(\alpha, k) = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \\ y = se(\alpha, k) = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \alpha}} \end{cases}$$

Consultând lucrarea [19, Șelariu, Mircea-Eugen, **QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**] se poate constata că aceste funcții supermatematice au fost introduse, încă din anul 2005, sub denumirea de funcții cvadrilobe, deoarece prezintă **patru lobi**. Ele au fost tratate succint și în volumul I, Ed 1-a, § 2, pag. 50...55 și sunt notate: cosinusul cu **coqθ** și, sinusul cu **siqθ**, de expresii



$$(19.32) \quad P \begin{cases} x = coq[\theta, S(s, \varepsilon)] = \frac{\cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} \\ y = siq[\theta, S(s, \varepsilon)] = \frac{\sin(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \cos^2(\theta - \varepsilon)}} \end{cases}$$

Funcțiile cvadrilobe (FQL) sunt, totodată, și soluții ale unor ecuații diferențiale liniare de ordinul doi cu coeficienți variabili [19].

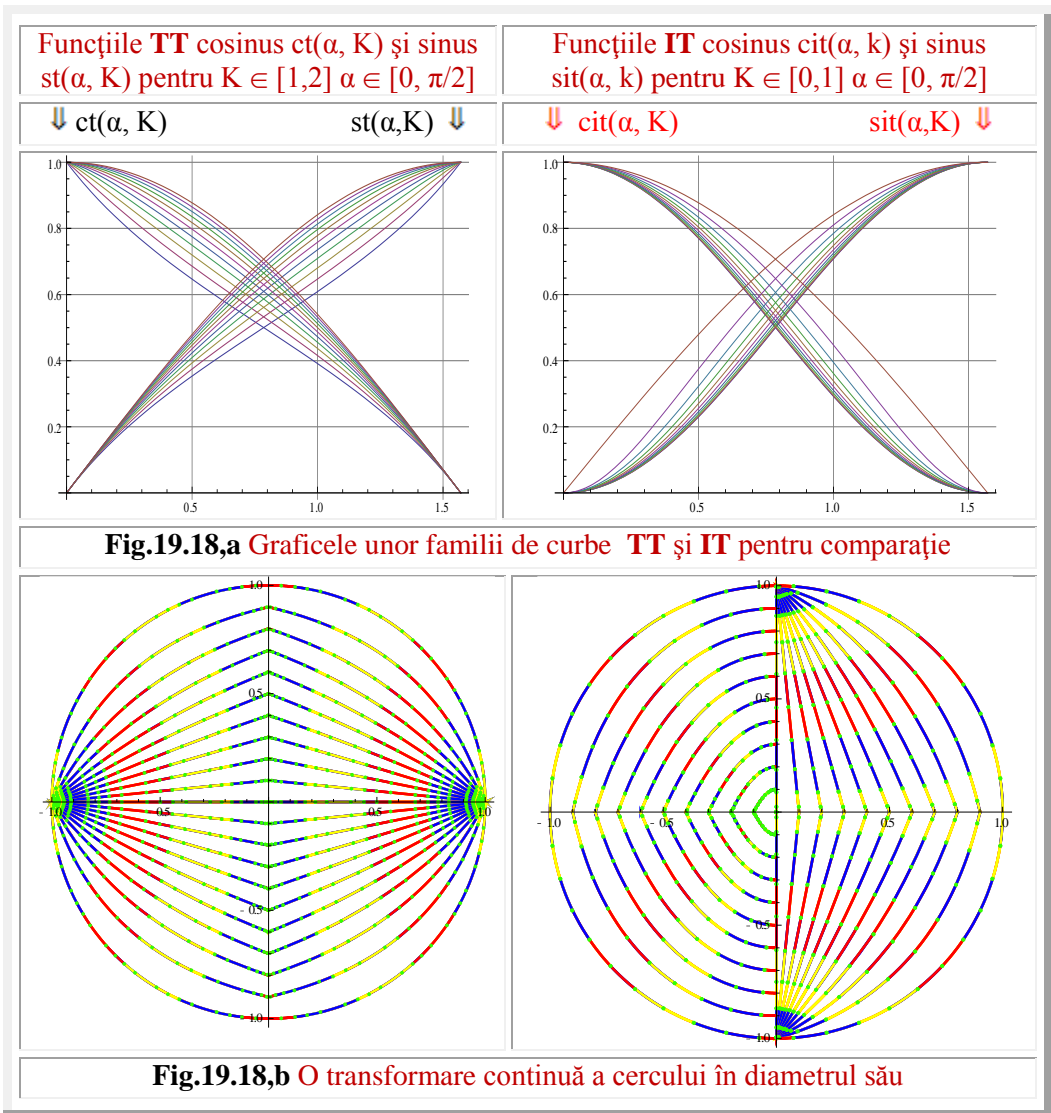
Quadrilobele (cvadrilobele) sunt curbe închise, cu 4 lobi, rezultate în procesul transformării continue a cercului în pătrat perfect, transformare exprimată și de

funcția **SM-CE** dexθ (derivată excentrică de θ) prin ecuațiile parametrice, care dau curbele centrate în C(1, 1):

$$(19.33) \quad \begin{cases} x = dex[\theta, s] = 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} = 1 - s \cdot coq(\theta, S) \\ y = dex\left[\theta \pm \frac{\pi}{2}, s\right] = 1 - \frac{\mp s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \cos^2(\theta - \varepsilon)}} = 1 - s \cdot siq(\theta, S) \end{cases}$$

în care cele două determinări ale **FSM-CE dexθ** (1 → principală, care nu se marchează când nu este necesar și 2 → secundară) au expresia [1, 2, ...23, ș.a.]

$$(19.31) \quad dex_{1,2}[\theta, S(s, \varepsilon)] = 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}}$$



Sau, mai simplu, prin ecuațiile (19.28) care dau curbele centrate în originea $O(0, 0)$, așa cum se prezintă, comparativ, cele două cazuri în **figura 19.16**.

În ecuațiile (19.29 și 19.30) $s = k$ este excentricitate numerică liniară, circulară și, respectiv, eliptică care, pentru $s = 0$ dă cercul iar pentru $s = \pm 1$ dă pătratul perfect.

Valorile intermediare $s \in (0, 1)$ sunt proprii **cvadrilobelor**, de forma unor pătrate cu laturi curbe și colțuri rotunjite, prezentate în **figura 19.16**.

Au mai fost introduse în matematica trilobe și lobele cu n lobi, denumite polilobe, multilobe sau n -lobe [19].

Dacă în ecuațiile (20.31) numărătorul se ridică la pătrat și excentricitatea numerică $s \rightarrow k$ se înlocuiește cu excentricitatea k , se obțin ecuațiile parametrice

$$(20.34) \quad \begin{cases} x = \cos\alpha \cdot \text{coq}[\theta = \alpha, s = k] = \frac{\cos^2\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = \cos\alpha \cdot \text{ce}(\alpha, k) \\ y = \sin\alpha \cdot \text{siq}[\theta = \alpha, s = k] = \frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{1-k^2\cos^2\alpha}} = \sin\alpha \cdot \text{se}(\alpha, k) \end{cases}$$

Familia de curbe (19.34) reprezintă o transformare continuă a cercului unitate în pătratul **Valeriu Alaci**, un pătrat rotit cu $\pm \pi/4$ față de pătratul **SM** (**Fig.19.17** ↗ sus-dreapta), rezultat din relațiile (19.31) și / sau (19.33).

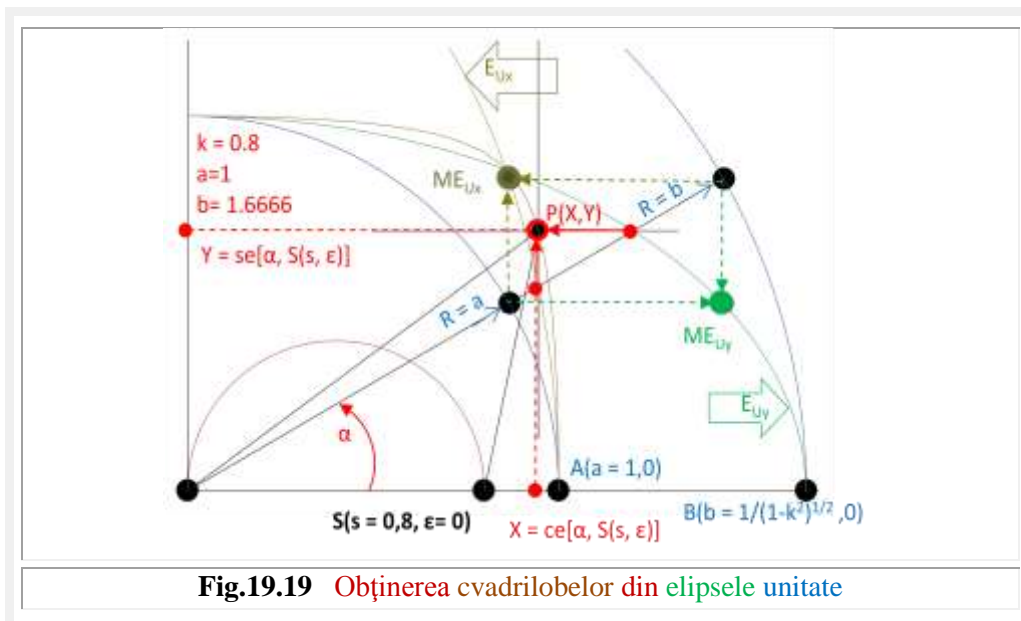


Fig.19.19 Obținerea cvadrilobelor din elipsele unitate

Curbe **asemănătoare**, numite **transtrigonometrice (TT)**, au stat la baza definirii, de către Prof. dr. **Malvina Baica** și ing. **Mircea Cârdu**, a **funcțiilor transtrigonometrice** (**Malvina Baica, Mircea Cârdu, PERIODIC TRANSTRIGONOMETRIC FUNCTIONS**, The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timișoara, Sept. 27-30, 2005, pag. 33-37) cosinus **-ct(α, K)** și sinus **st(α, K)** transtrigonometrice (**Fig.19.17** ↘ jos-dreapta), în care **$K \in [1, 2]$** este exponentul din ecuațiile (19.35).

Se știe că funcțiile trigonometrice / circulare, pe care le vom denumi și **Leonhard Euler**, verifică ecuația cercului din (19.35) în care $K = 2$, iar cele trigonometrice **Alaci Valeriu**, verifică ecuația pătratului **Alaci** din **figura 19.17** ↗ sus-stânga, în care $K = 1$, iar **FTT** verifică ecuația pentru $K \in (1, 2)$, adică

$$(19.35) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^K + y^K = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \\ ct^K \alpha + st^K \alpha = 1 \\ cp^1 \alpha + sp^1 \alpha = 1 \end{cases}, \quad K \in [1, 2]$$

În acest fel, **FTT** conține, pentru valorile extreme ale lui K , atât funcțiile circulare centrice **Euler** ($K = 2$) cât și funcțiile trigonometrice pătrate **Alaci Valeriu** ($K = 1$). Funcțiile **SM-QL**, extinzând acest domeniu de la cercul **Euler** la pătratul unitate **SM** (**Fig.19.17** ↙ jos-stânga), circumscris cercului unitate, completează / umplu continuu domeniul dintre cele două pătrate: **Alaci** – înscris și pătratul **SM** - circumscris cercului unitate.

Funcțiile cvadrilobe (**FQL**) sunt coordonatele x și y ale unui punct $M(x, y)$ de pe una din cvadrilobele de excentricitate numerică s , exprimate în funcție de variabila excentrică θ sau de variabila centrică α .

Funcțiile cosinus cvadrilob și sinus cvadrilob, atât de variabilă excentrică ($x = \text{coq}\theta$ și $y = \text{siq}\theta$) cât și cele de variabilă centrică ($x = \text{Coq}\alpha$ și $y = \text{Siq}\alpha$), ca și combinațiile liniare ale acestora, sunt soluții ale unor sisteme vibrante neliniare, de caracteristici elastice neliniare cu neliniarități mai pronunțate decât cele ale sistemelor vibrante **Duffing**, datorita unui al treilea termen suplimentar în x^5 [19].

O comparație între funcțiile cosinus și sinus **TT** și **IT** este redată în **figura 19.18**, pentru a evidenția faptul ca ele sunt funcții distincte, care acoperă același domeniu, dintre cercul unitate și pătratul **Alaci**, înscris în acest cerc.

19.11 FUNCȚIILE ELIPTICE SM – SOLUȚII ALE UNOR SISTEME VIBRANTE NELINIARE ELIPTICE SM (SVEL-SM)

Lucrarile [9], [17], [19] ș.a. prezintă o serie de funcții noi, **SM**, ca funcțiile circulare excentrice de variabilă excentrică **cex** θ și **sex** θ și cele de variabilă centrică **Cex** α și **Sex** α , precum și funcțiile cvadrilobe (**FSM-QL**) **coq** θ și **siq** θ care sunt soluții ale unor sisteme oscilante neliniare.

Pentru primele două cazuri, cu **FSM-CE** de **variabile excentrice** θ și, respectiv, **centrice** α , ecuațiile diferențiale, ale căror soluții exacte sunt aceste **FSM-CE**, sunt

$$(19.36) \quad \begin{cases} \frac{d^2 z}{d\theta^2} - \frac{\epsilon}{\omega} \frac{dz}{d\theta} + \omega^2 z = 0 \\ \frac{d^2 Z}{d\alpha^2} - \frac{\epsilon}{\omega} \frac{dZ}{d\alpha} + \omega^2 Z = 0 \end{cases}, \text{ în care } \begin{cases} \omega = \Omega \frac{d\theta}{dt}, \epsilon = \frac{d\omega}{dt} \\ \omega = \Omega \frac{d\alpha}{dt}, \epsilon = \frac{d\omega}{dt} \end{cases}, S(s = k \in [-1, 1], \epsilon)$$

În aceste relații, $\Omega = \text{constant}$ este viteza unghiulară de rotație a semidreptei cu polul în $O(0,0)$, ale cărei intersecții, cu elipsele unitate, sunt punctele $P(x, y)$, ale căror coordonate x și y sunt **FSM-EL**.

Așa cum se va prezenta în continuare, $\Omega = constant$ este, totodată și **pulsafția proprie** a SVEL - SM.

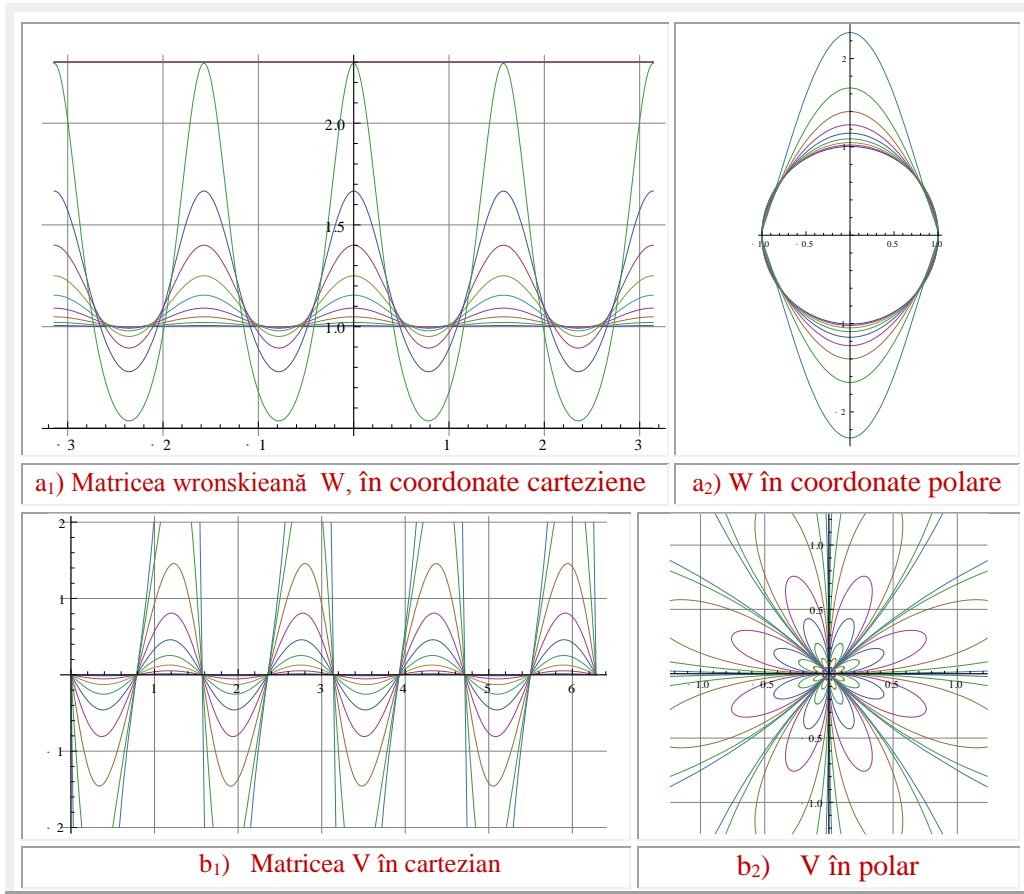
Fie funcțiile SM-ELC $x = ce(\alpha, k)$, $y = se(\alpha, k)$, $x, y : \mathbb{R} \rightarrow [-1, +1]$, de același modul k și derivatele lor, ca funcții de timp, date de relațiile (19.10) și (19.11') înmulțite cu $\Omega = \frac{d\alpha}{dt}$ și, respectiv, cu $\Omega^2 = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$.

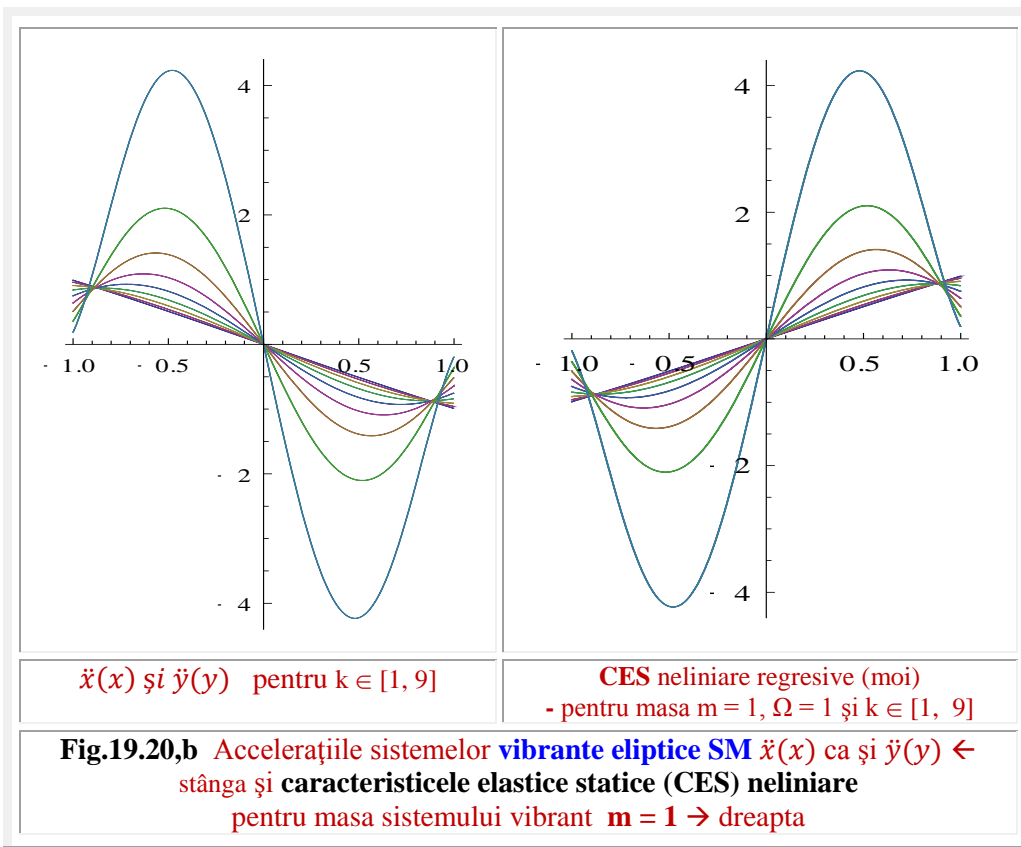
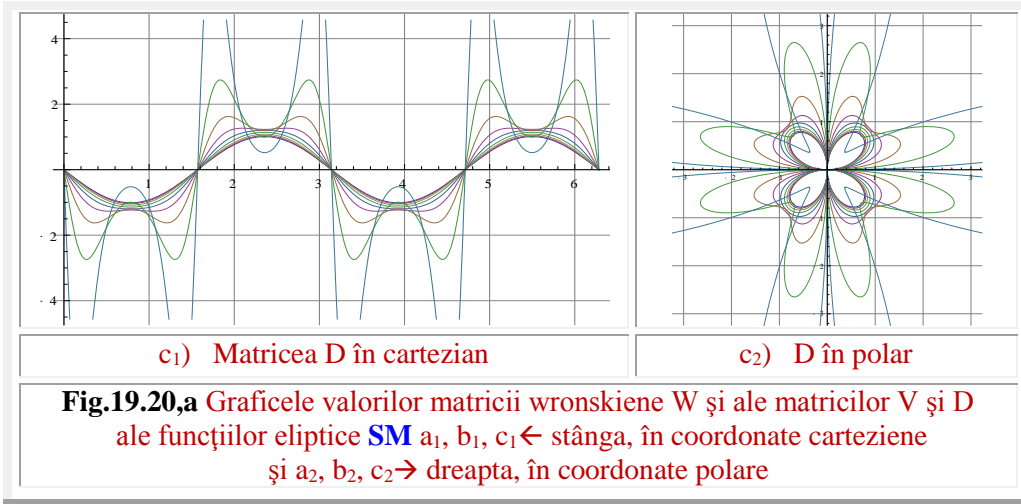
Matricea lor wronskiană, notând derivatele în funcție de argumentul α cu accent, este

$$(19.37) W = \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = \Omega \begin{vmatrix} ce\alpha & se\alpha \\ ce'\alpha & se'\alpha \end{vmatrix} = \Omega \begin{vmatrix} \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} & \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-k^2\cos^2\alpha}} \\ -\sin\alpha \frac{1-k^2}{(1-k^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} & \cos\alpha \frac{1-k^2}{(1-k^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(1-k^2)(1-\frac{k^2}{2}\sin^2 2\alpha)}{[1-k^2(1-\frac{k}{4}\sin^2 2\alpha)]^{1,5}} \in [0,5; 2,3] \neq 0,$$

așa cum arată și graficele din **figura 19.20,a**.





Ecuția diferențială a acestor sisteme vibrante este

$$(19.38) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0, \quad W \cdot \ddot{z} - V \cdot \dot{z} + D \cdot z = 0,$$

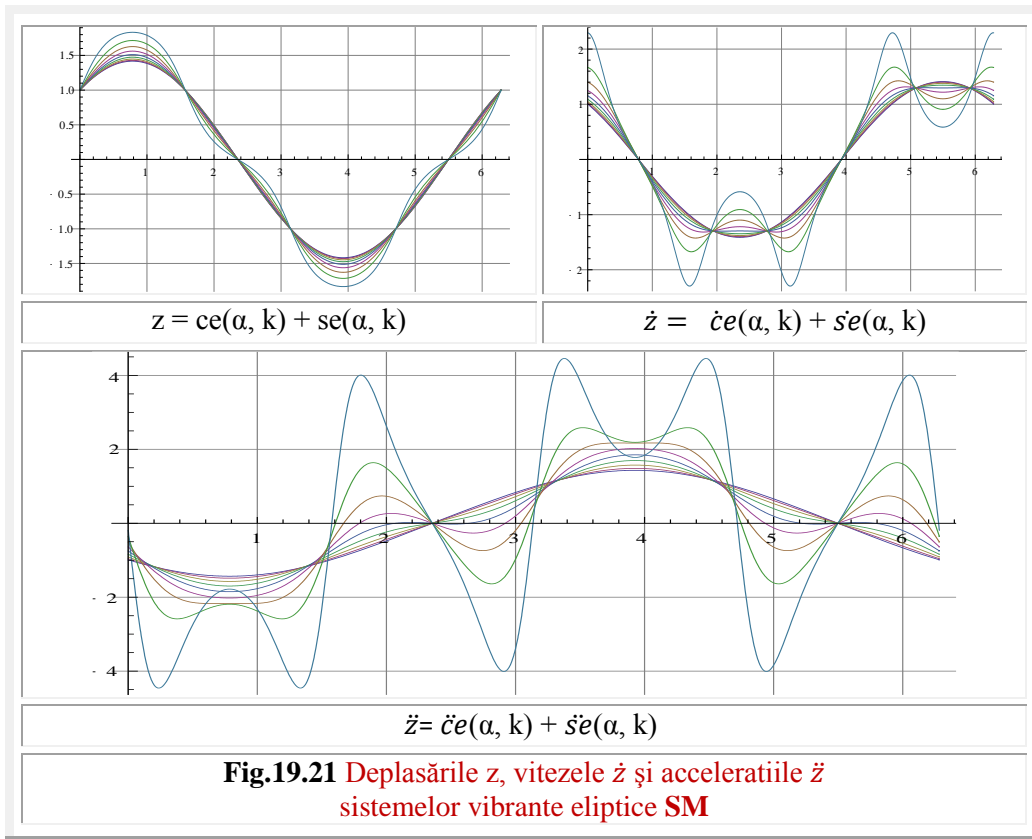
în care, **W** este **matricea wronskiană** (20.37), **V** este **matricea vitezelor** (20.39) și **D** **matricea deplasărilor** (19.40).

$$(19.39) \quad V = \begin{vmatrix} x & y \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$$

$$(19.40) \quad D = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$$

Soluția generală a sistemului vibrant, care admite ca soluții **funcțiile eliptice SM**, denumit **sistem vibrant / oscilant eliptic SM** → (SVEL-SM), este

$$(19.41) \quad z[\alpha(t), k] = C_x \cdot ce[\alpha(t), k] + C_y \cdot se[\alpha(t), k]$$

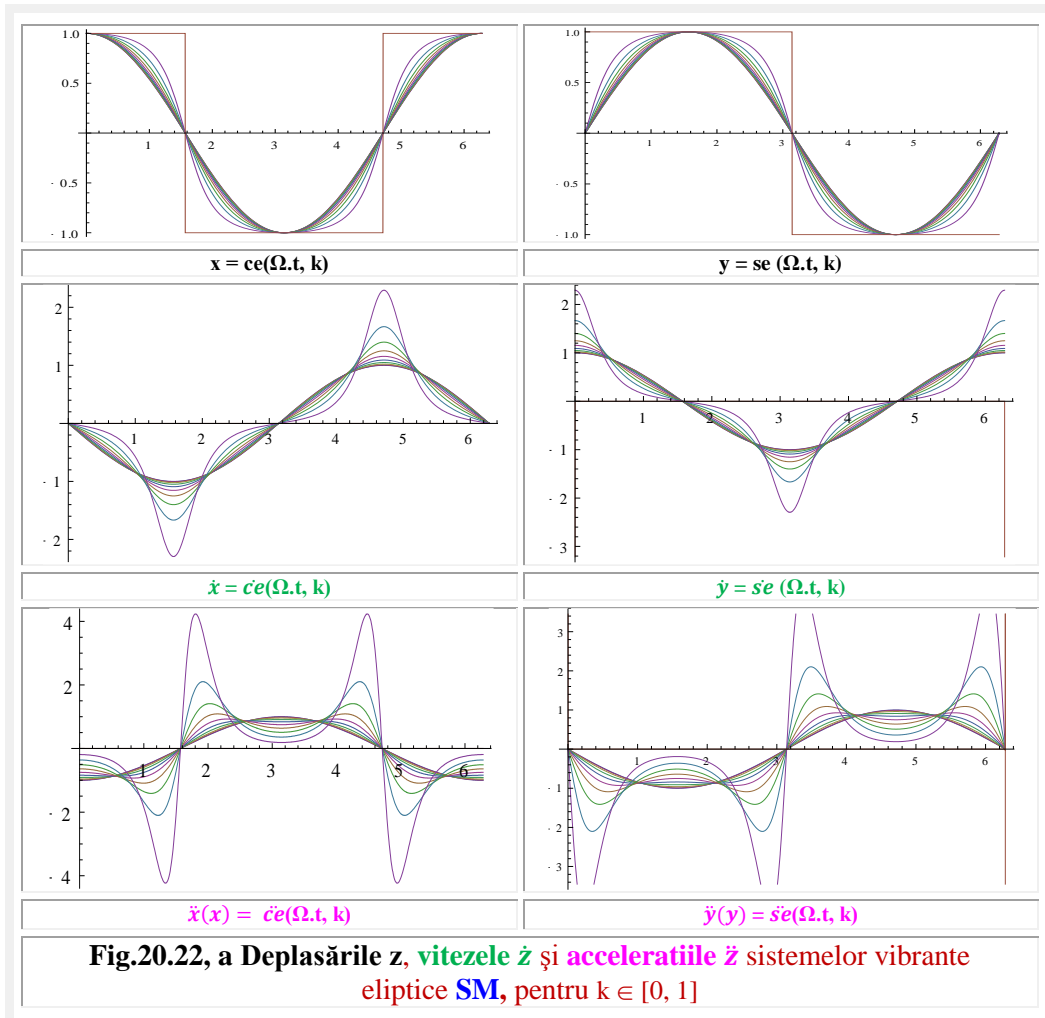


Graficele accelerațiilor, în funcție de deplasarea x , respectiv, y , sunt prezentate în **figura 19.21**, împreună cu **caracteristicile elastice statice (CES)** ale acestor sisteme neliniare, care sunt regresive sau moi, pentru o masă a sistemului vibrant considerată unitate, $m = 1$ și pentru o viteză unghiulară la fel $\Omega = 1$.

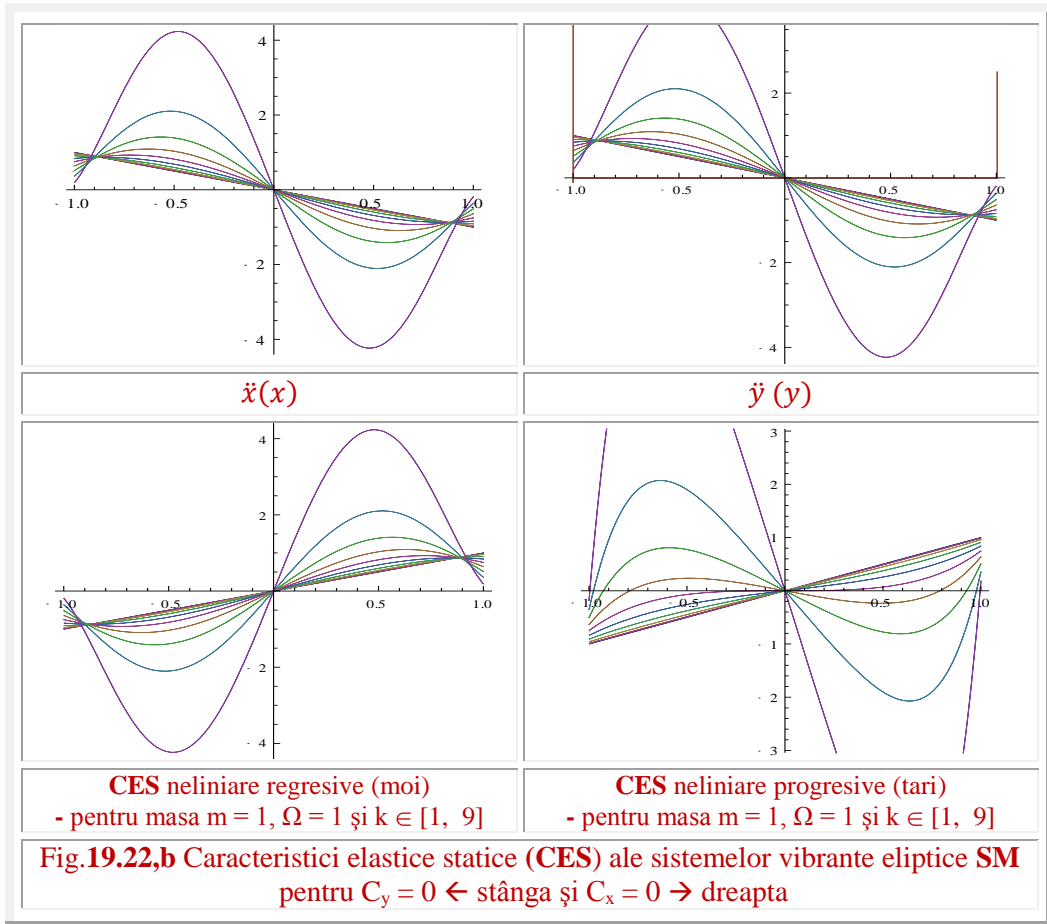
Pentru $m = 1$, $\Omega = 1$, $x, y < 0.5$, caracteristicile elastice statice (CES) sunt regresive sau moi, iar peste aceste valori rigiditatea locală (tangentă) devine negativă, dar rigiditatea globală (secantă) rămâne pozitivă.

Pentru constantele $C_x = C_y = 1$, soluțiile generale ale sistemelor vibrante sunt prezentate prin deplasarea $z = ce(\alpha, k) + se(\alpha, k)$, viteza $\dot{z} = \dot{c}e(\alpha, k) + \dot{s}e(\alpha, k)$ și accelerațiile $\ddot{z} = \ddot{c}e(\alpha, k) + \ddot{s}e(\alpha, k)$, în figura 19.22.

Admițând $C_x=1$ și $C_y = 0$, soluția este dată numai de funcția cosinus elliptic SM. Rrezută expresiile deplasării / deformației $z = x(\Omega t)$, vitezei $\dot{x}(\Omega t)$ și a accelerațiilor $\ddot{x}(\Omega t)$ sistemelor vibrant/oscilant eliptic SM \rightarrow (SVEL-SM), de caracteristica elastică statica (CES) moale sau regresivă reprezentată în stânga figurii 19.22,b.



$$(19.42) \begin{cases} z = x = ce(\Omega, t, k) = \frac{\cos \Omega t}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \Omega t}} \\ \dot{z} = \dot{x} = \dot{ce}(\Omega, t, k) = -\Omega \cdot \sin \Omega t \frac{1-k^2}{(1-k^2 \sin^2 \Omega t)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{z} = \ddot{x} = \ddot{ce}(\Omega, t, k) = -\Omega^2 \frac{(1-k^2)(1+2k^2 \sin^2 \Omega t)}{(1-k^2 \sin^2 \Omega t)^{5/2}} \cos \Omega t \end{cases} \quad (\text{Fig. 19.22,a})$$



Dacă se admite $C_x = 0$ și $C_y = 1$, deplasările sau deformările elementului elastic $z = y$ sunt date doar de funcția sinus eliptic SM, care se apropie foarte mult de funcția eliptică **Jacobi** $\text{sn}(2Ku/\pi, k)$ și rezultă soluțiile

$$(19.43) \quad z[\alpha(t)=\Omega t, k] = y = C_y \cdot se[\Omega t, k] = C_y \frac{\sin \Omega t}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \Omega t}} \quad \text{cu viteza}$$

$$(19.44) \quad \dot{z}[\alpha(t)=\Omega t, k] = \dot{y} = C_y \cdot \dot{se}[\Omega t, k] = C_y \cdot \Omega \cdot \cos \Omega t \frac{1-k^2}{(1-k^2 \cos^2 \Omega t)^{\frac{3}{2}}}$$

și cu accelerația

$$(19.45) \quad \ddot{z}[\alpha(t)=\Omega t, k]=\ddot{y}=C_y \cdot \Omega^2 \cdot \operatorname{se}[\Omega t, t] = -C_y \cdot \Omega^2 \frac{(1-k^2)(1+2k^2 \cos^2 \Omega t)}{(1-k^2 \cos^2 \Omega t)^{5/2}} \sin \Omega t$$

Accelerațiile, în funcție de deplasare, pentru ambele cazuri, sunt prezentate în **Figura 19.22,b**, împreună cu caracteristicile elastice statice (CES) neliniare, **regresive** sau **moi** în cazul **cosinusului eliptic SM** și **progresive** sau **tari** în cazul soluție cu **sinus eliptic SM**, pentru o masă a sistemului $m = 1$ și o pulsație proprie a sistemelor neliniare $\Omega = 1$. Modulul k în acest caz a variat în domeniul $k \in [0; 0,9]$.

Comparația grafică dintre funcțiile eliptice **Jacobi (FEJ)** și funcțiile eliptice **SM (FESM)** este dată în **figura 20.23**. Argumentul u al **FEJ** este arcul de elipsa $A_1 E_{Ux}$, iar argumentul **FESM** este arcul de cerc α al cercului unitate $C_u(O,1)$.

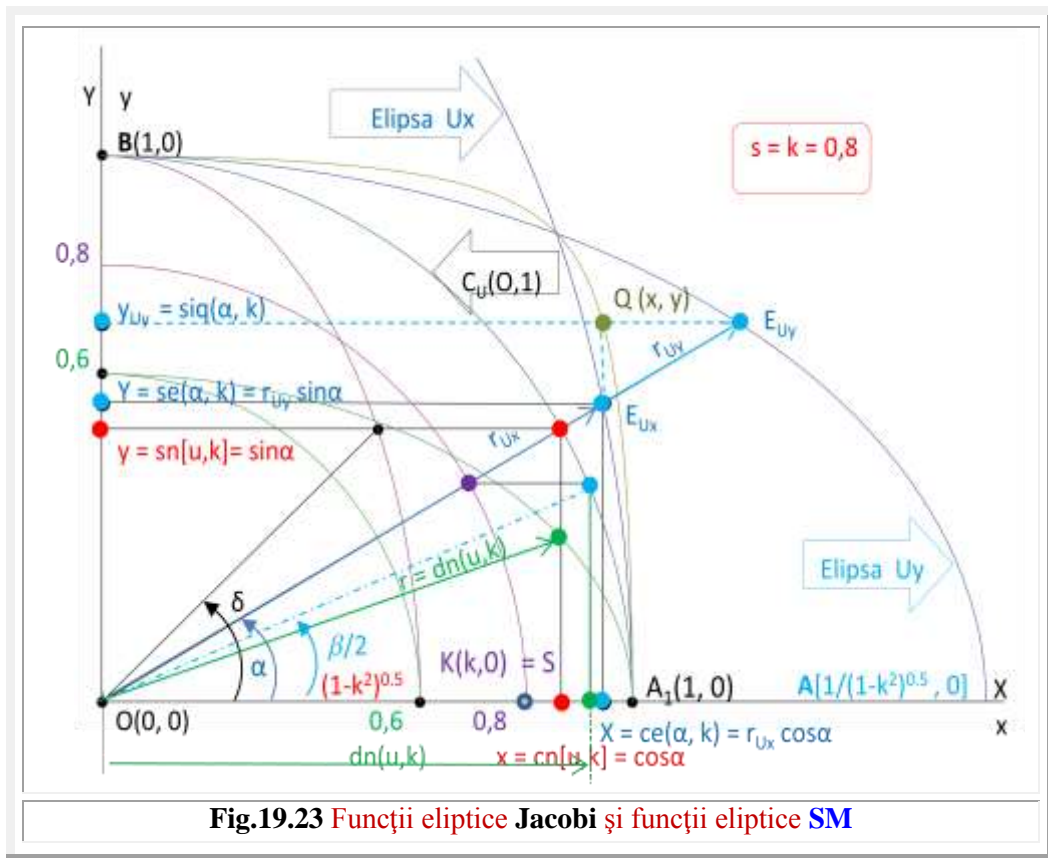


Fig.19.23 Funcții eliptice Jacobi și funcții eliptice SM

Arcul de elipsă se determină, prin integrarea pe elipsa unitate E_{Ux} a expresiei razei r_{Ux} polare din $O(0,0)$, din punctul de origine $A_1(1,0)$ și până în punctul curent E_{Ux} , adică cu integrala

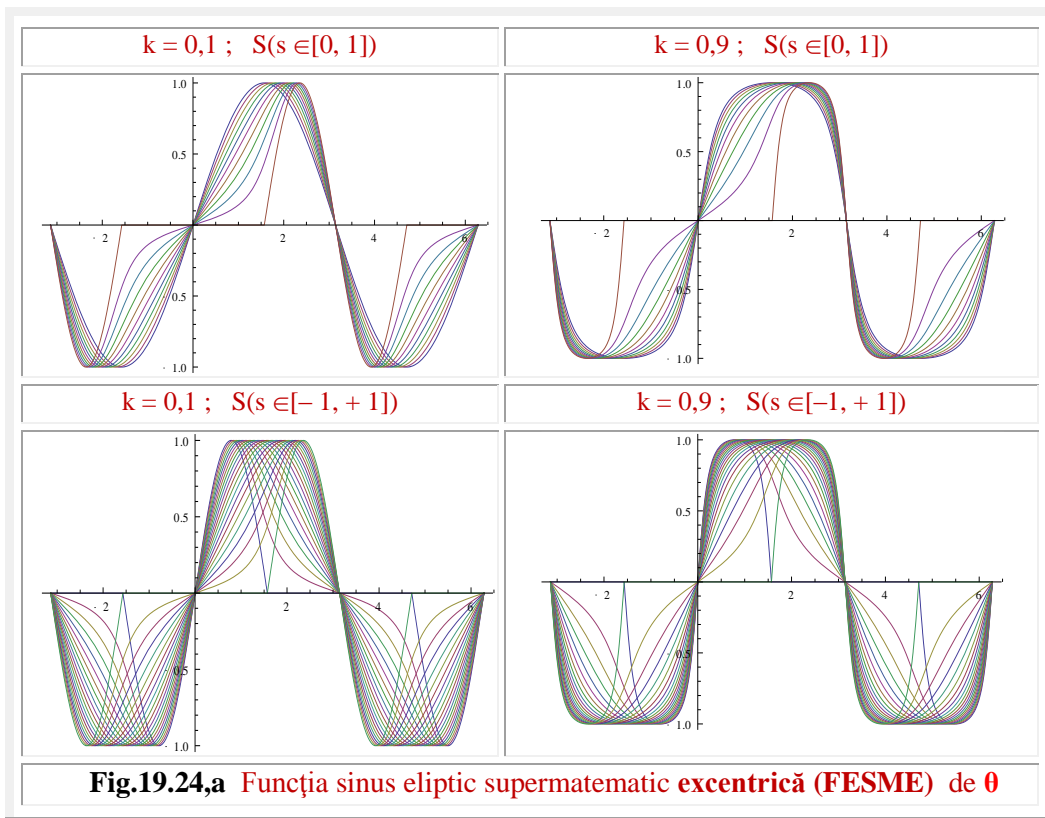
$$(19.46) \quad u(\alpha, k) = F(\alpha, k) = \int_{A_1}^{E_{Ux}} ds = \int_{A_1}^{E_{Ux}} r_{Ux} \cdot d\alpha = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}$$

în care se recunoaște raza polară din originea $O(0,0)$ dată de relația (20.5) pentru elipsa unitate pe x rotită cu $\pm \frac{\pi}{2}$, față de elipsa unitate pe y E_{Uy} de $a = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ și $b = 1$.

19.12 FUNCȚII ELIPTICE DE ARCE DE CERC (SM) EXCENTRICE

Prin introducerea în matematică a **funcțiilor eliptice** și a celor **intratrigonometrice SM** centrice, matematica s-a îmbogățit cu noi funcții periodice, mult mai simple decât cele **eliptice clasice Jacobi**, de exemplu. Ele au aplicații la exprimarea mărimilor de vibrație ale unor sisteme elastice, puternic neliniare, așa cum s-a văzut anterior.

Dacă elipsele și hiperbolele se obțin pentru o plajă / domeniu de valori ale **excentricității numerice k** , parabola și cercul se obțin pentru o singură valoare: $k = 1$ și, respectiv, $k = 0$. De aceea, pe parabolă și pe cerc sunt definite doar câte o singură funcție circulară centrică și câte o singură funcție parabolică centrică. Însă, trecerea din centric în excentric oferă, așa cum s-a arătat în lucrările [1], [2],...[23], multiplicarea oricărei entități din domeniul **matematicii centrice** – clasice (MC), ordinare – într-o infinitate de entități în **matematica excentrică (ME)**.



Funcțiile eliptice SM ca și cele **intratrigonometrice**, tratate anterior, se referă la **funcțiile centrice** și, ca urmare, fiecare funcție din domeniul centric poate fi multiplicată la infinit în domeniul excentric. Astfel, de exemplu, pentru un modul și,

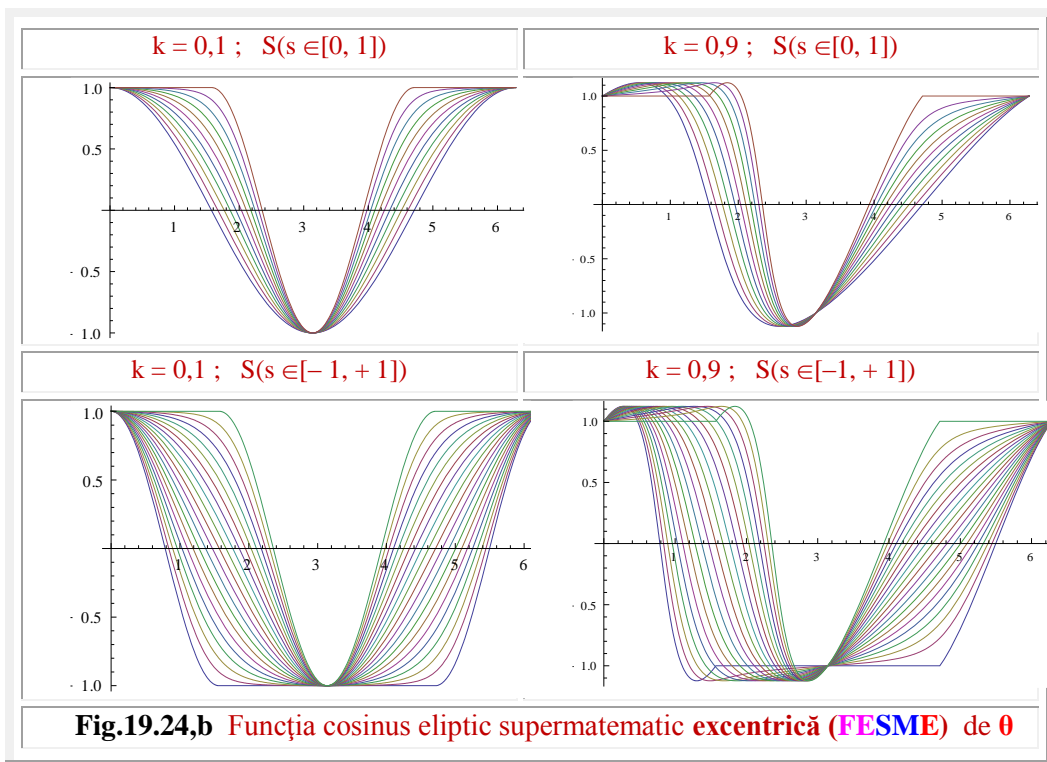
totodată, o excentricitate a unei elipsei de $k = 0,1$ și a alteia de $k = 0,9$ au fost redată graficele **funcțiilor supermatematic eliptice excentrice (FSM-ELE)** din **figura 19.24** pentru **excentre $S(s, \varepsilon)$** cu excentricități numerice $s \in [0,1]$ –sus \uparrow și cu excentricități numerice de $s \in [-1, +1]$ și $\varepsilon = 0$, în partea de jos ∇ a **figurii 19.21**sau, ceea ce este echivalent, cu $s \in [0, 1]$ și $\varepsilon = 0$ și, respectiv, $\varepsilon = \pi$.

Ecuțiile funcțiilor eliptice **SM excentrice (FESME)** se pot obține din ecuațiile **FESMC** date de relațiile de definiție (19.6 și 19.7) în care **variabila α** se înlocuiește cu funcția **SM-CE amplitudine excentrică (circulară)**. Dacă ea este de variabilă **excentrică θ** aex $[\theta, S(s, \varepsilon)]$, atunci se vor obține **FESME** de variabilă **excentrică θ** .

Cosinusul și sinusul eliptice **SM centrice** se vor nota cu **ceex** $[\theta, S(s, \varepsilon)]$ sau, mai simplu, **ceex** θ și, respectiv, **seex** $(\theta, S(s, \varepsilon))$ sau **seex** θ cu expresiile

$$(19.47) \quad \begin{cases} ceex\theta = ce\{\alpha = aex[\theta, S(s, \varepsilon)], k\} = \frac{cex\theta}{\sqrt{1-k^2sex^2\theta}} \\ seex\theta = se\{\alpha = aex[\theta, S(s, \varepsilon)], k\} = \frac{sex\theta}{\sqrt{1-k^2cex^2\theta}} \end{cases}$$

în care, **FSM-CE** de variabila excentrică **ceex** θ și **seex** θ , reamintim, au expresiile [Vol. I, Ed. 1-a, pag.29 rel.(1.6)...(1.9),]



$$(19.48) \quad \begin{cases} cex\theta = \cos[aex\theta] = \cos[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] \\ sex\theta = \sin[aex\theta] = \sin[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] \end{cases}$$

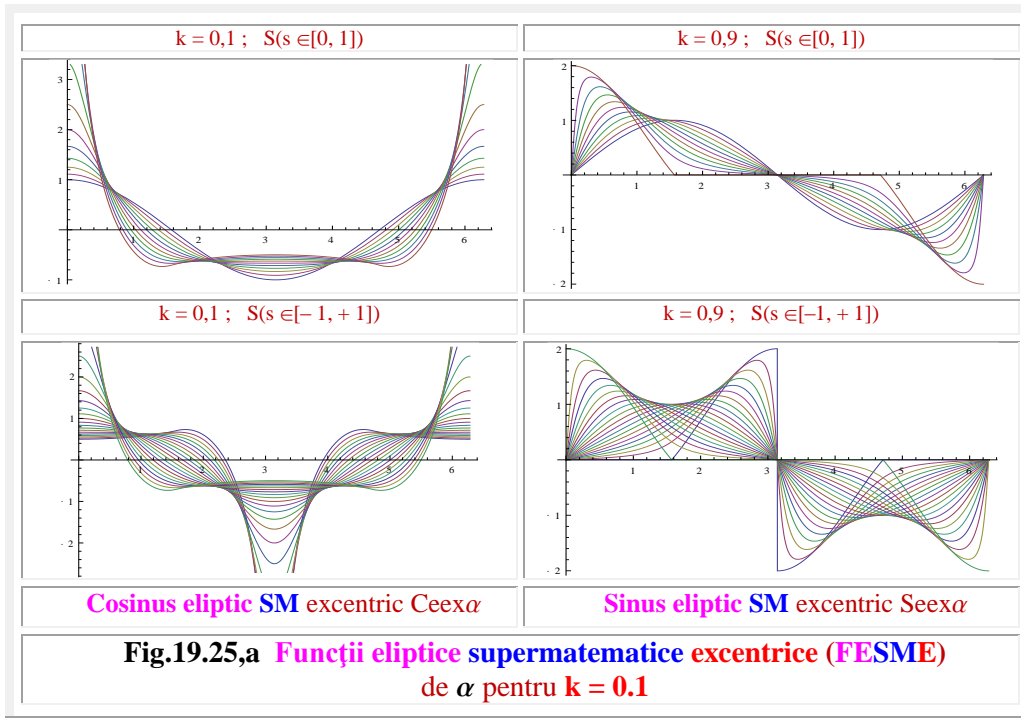
sau, explicit cu FCC

$$(19.48') \quad \begin{cases} cex\theta = \cos\theta\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)} + s.\sin\theta.\sin(\theta-\varepsilon) \\ sex\theta = \sin\theta\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)} - s.\cos\theta.\sin(\theta-\varepsilon) \end{cases}$$

FESME de variabilă centrică α , cosinusul notat $Ceex[\alpha, S(s,\varepsilon)]$ sau numai $Ceex\alpha$ și sinusul eliptic excentric cu $Seex[\alpha, S(s, \varepsilon)]$ sau $Seex\alpha$ au expresiile

$$(19.49) \quad \begin{cases} Ceex\alpha = ce\{\alpha = Aex[\alpha, S(s, \varepsilon)], k\} = \frac{Cex\alpha}{\sqrt{1-k^2Sex^2\alpha}} \\ Seex\alpha = se\{\alpha = Aex[\alpha, S(s, \varepsilon)], k\} = \frac{Sex\alpha}{\sqrt{1-k^2Cex^2\alpha}} \end{cases}$$

sau, explicit cu FCC

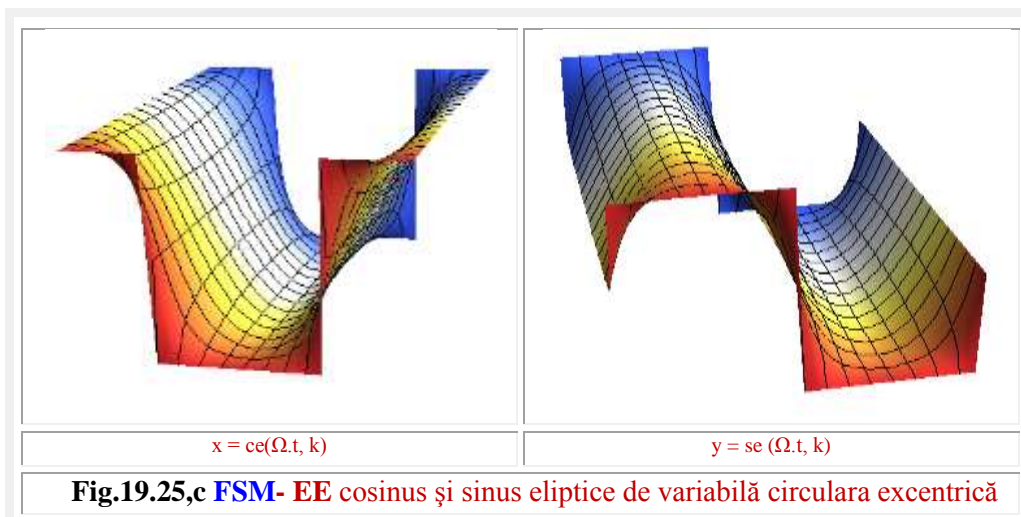
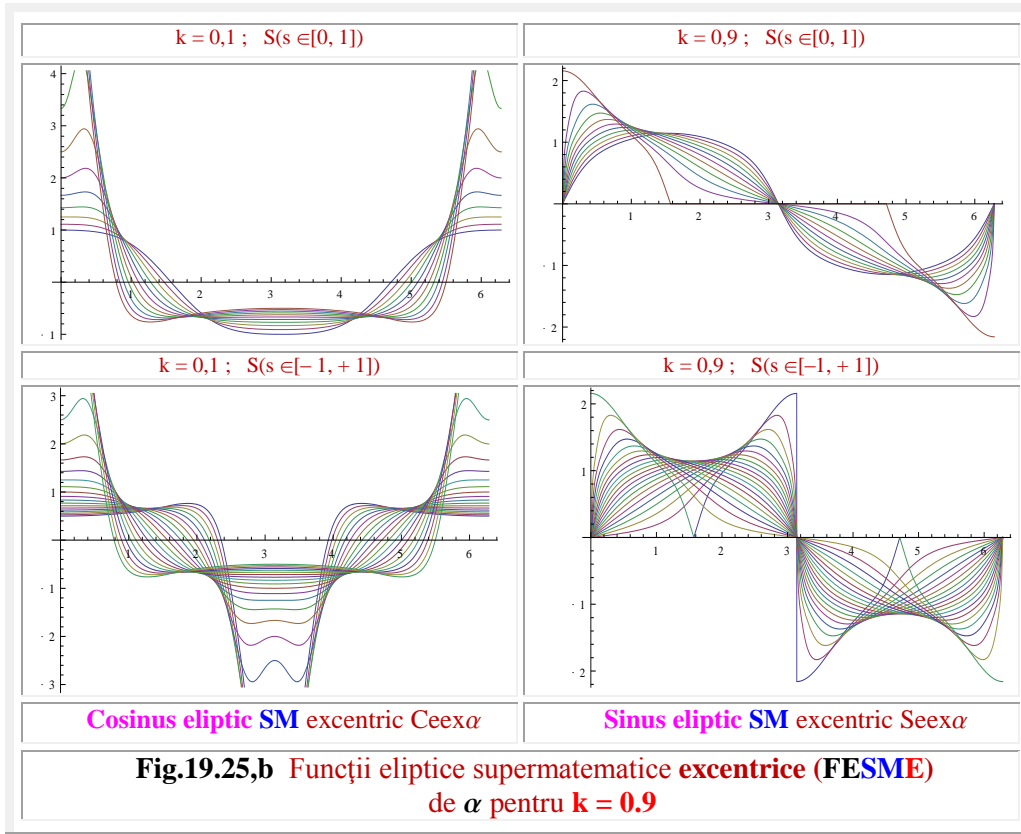


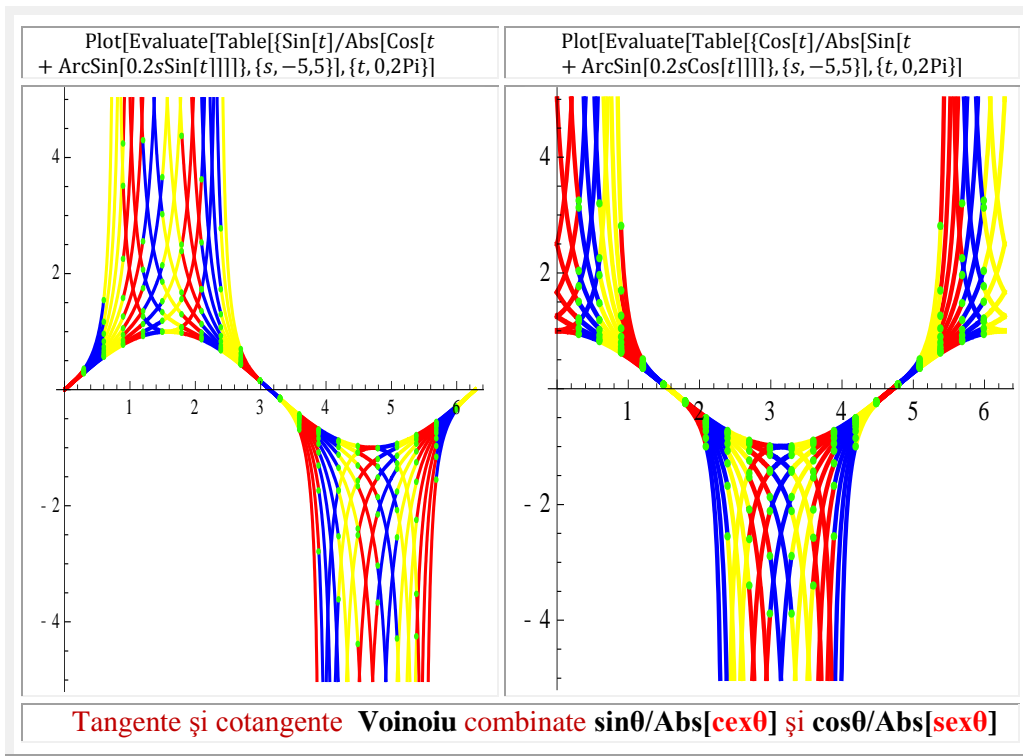
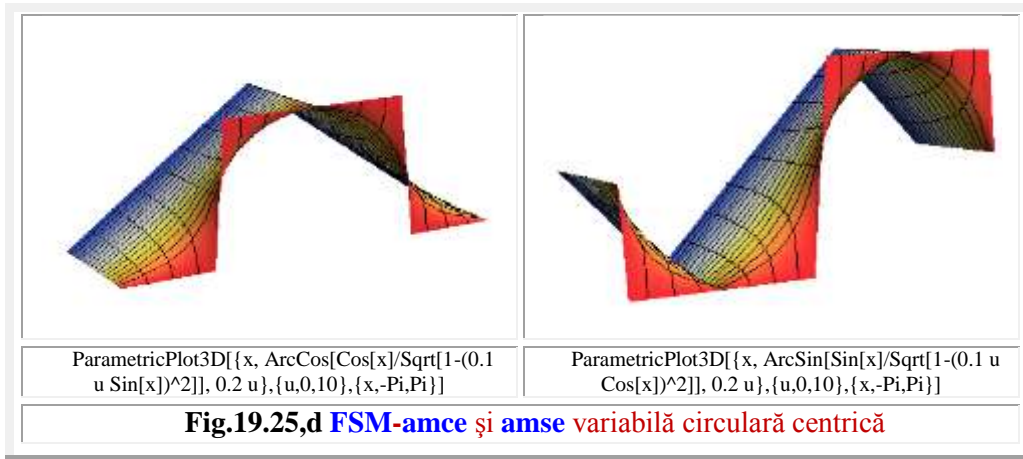
$$(19.49') \quad \begin{cases} Ceex\alpha = \cos\left[\alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}}\right] = \cos\left[\alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha}\right] \\ Seex\alpha = \sin\left[\alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}}\right] = \sin\left[\alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha}\right] \end{cases}$$

În aceste relații (19.46...19.49'), au fost exprimate doar determinările principale ale acestor funcții de indice **1**, indice care nu se mai notează, dacă nu se utilizează și determinările secundare de indice **2**.

Graficele **FESME** de variabilă centrică α , pentru $k = 0,1$ și $k = 0,9$ sunt prezentate în **figura 19.25**. Comparând graficele din **figurile 19.24,a** și **19.25,a** de $k = 0,1$ cu cele din **figurile 19.24,b** și **19.25,b** de $k = 0,9$ se observă ca diferențele sunt

nesemnificative în funcție de k , dar pronunțate în funcție de **excentricitatea numerică liniară circulară s** .





Motto: ” Nu mai căutați găuri de vierme. Printr-o gaură neagră veți ajunge cu siguranță pe lumea cealaltă ”

Autorul

Capitolul 20

GĂURI DE VIERME ÎN MATEMATICĂ REALIZATE CU FSM-CE HIBRIDE

20.1 ÎN INTRODUCERE: DIVERSE GĂURI DE VIERME

Descrise pentru prima dată, în 1935, de către **Albert Einstein** și **Nathan Rosen** și denumite inițial **poduri**, (punți, punțițe, tuneluri) găurile de vierme sunt soluții (teoretice, neconfirmate încă, dar căutate intens) ale unor ecuații ale teoriei generale a relativității care descriu spațiul și timpul. Ele sunt entități topologice care oferă o scurtătură între două puncte de pe o suprafață întinsă, o structura ipotetică a spațiu-timpului.

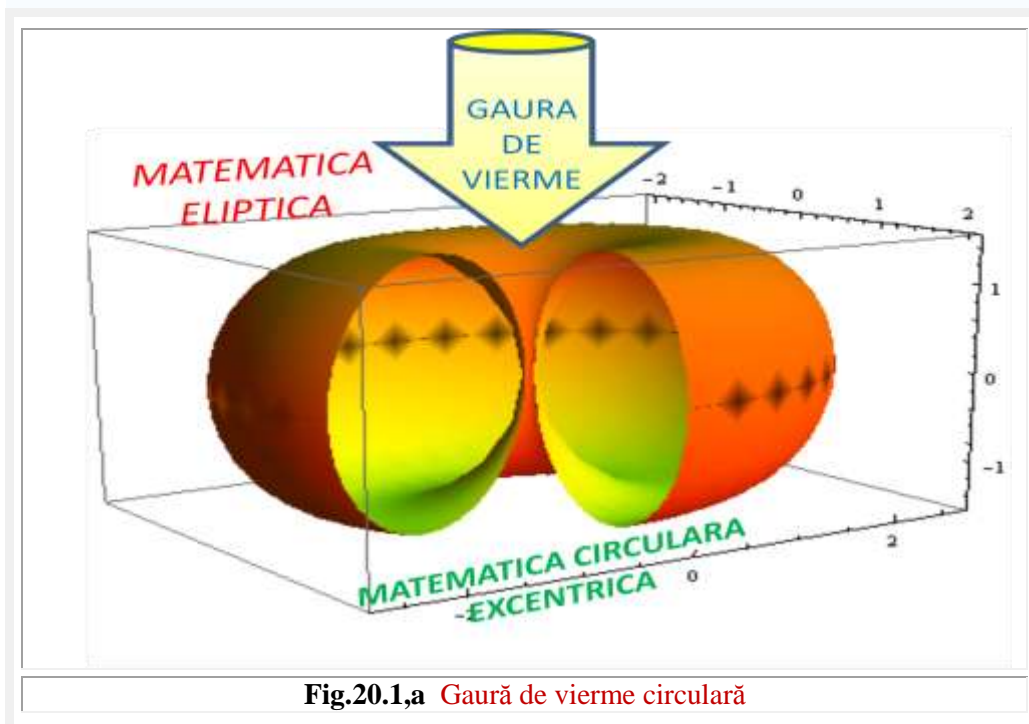


Fig.20.1,a Gaură de vierme circulară

Cu referire la univers, ele ar putea face o legătură cu mult mai scurtă între două zone sau două lumi îndepărtate din univers. Același lucru îl face și o gaură neagră, dar se zice ca ea duce NICĂIERI ! A încercat cineva ?

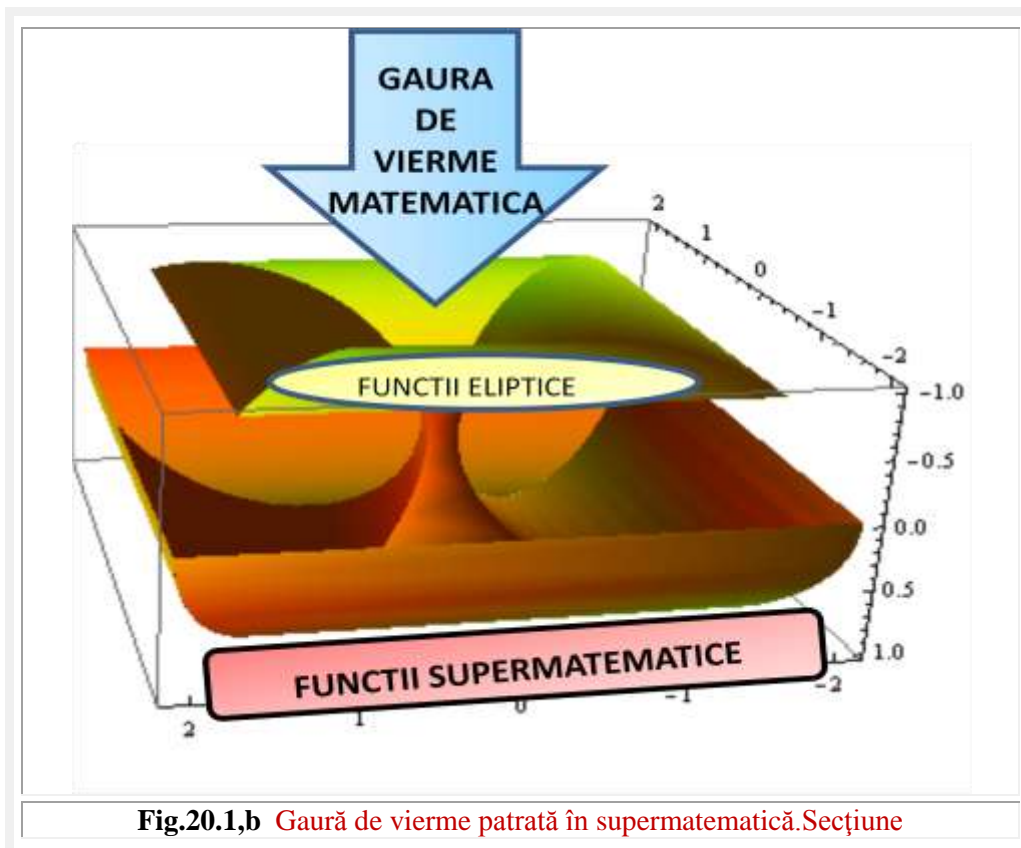
Cu referire la matematică, o butadă afirmă că topolog este acela care nu face distincție între o cană de cafea și un covrig (tor). Ambele pot avea câte o cavitate străpunsă / gaură.

La fel cum **supermatematica** nu face distincție dintre **cerc** și **pătrat**. Ambele au aceleași ecuații parametrice. Nici dintre **liniar** și **nelinier**: liniarul este apanajul matematicii centrice (**MC**), care se obține din supermatematică pentru o excentricitate nulă ($e = s = 0$), iar neliniarul este apanajul matematicii excentrice (**ME**), în care excentricitățile pot lua orice valoare, mai puțin zero $e, s \in ([-\infty, +\infty] \setminus 0)$.

Am făcut conjectura: fiecare gaură neagră este și o gaură de vierme.

Dacă în univers, alte găuri de vierme n-au fost încă descoperite, în matematică ele au început să apară; câteva dintre ele făcând obiectul capitolului de față.

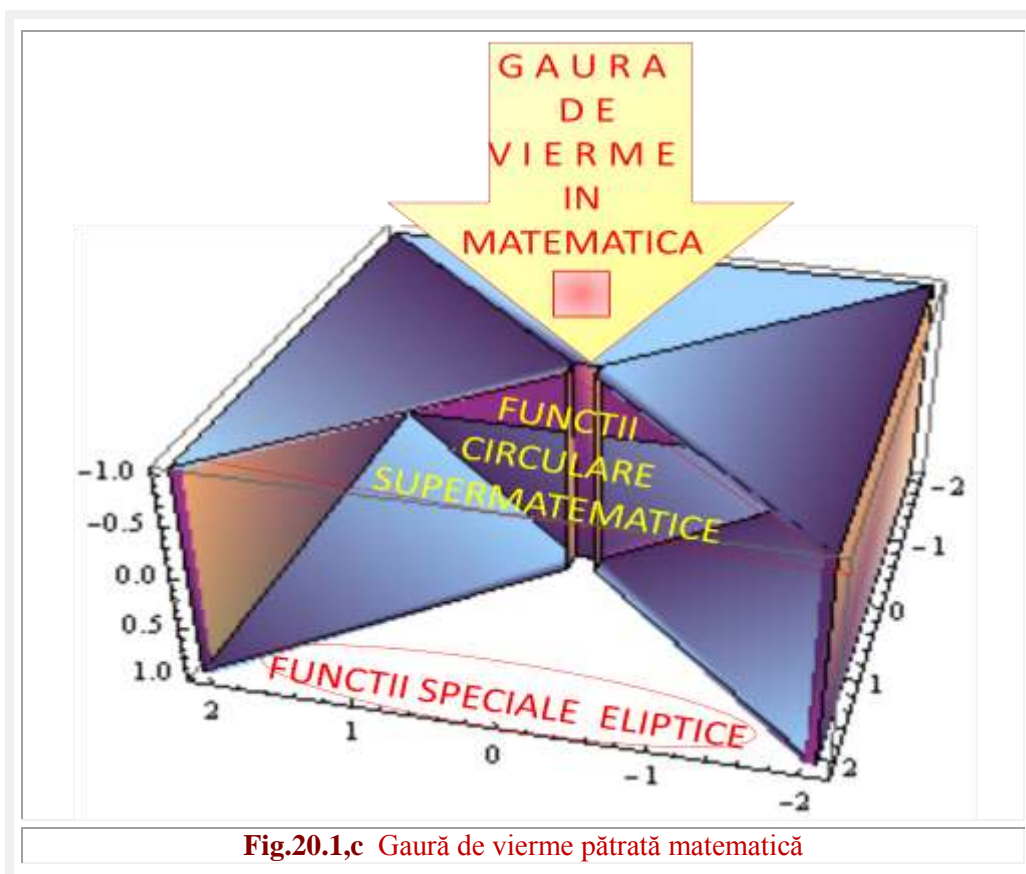
S-au exemplificat trei găuri de vierme din matematică, o gaură circulară, care face legătura **directă** între suprafețele superioară și inferioară, polul **N** și polul **S**, ale unei sfere- exemplificată prin suprafața unui tor circular în plan orizontal și în plan vertical – secțiune – (**Fig. 1,a**) care leagă între ele, sau stabilește o punte de legătură între “lumea” **matematicii speciale eliptice** și “lumea” **matematicii circulare excentrice**.



Și cu câte un orificiu central pătrat al unui tor pătrat, simbolizând gaura de vierme, tor pătrat în plan orizontal – desenat incomplet, și circular în cel vertical / secțiune (**Fig.1,b**), iar în **figura 1,c** un orificiu într-un tor patrat atat pe contur cât și în secțiune, care leagă funcțiile speciale eliptice cu cele **supermatematice circulare excentrice**, așa cum se va prezenta în continuare.

Se afirmă că “Acceleratorul Large Hadron Collider, de la laboratorul CERN de lângă Geneva, poate deja amesteca protoni și antiprotoni cu o energie nemai-întâlnită. Se presupune că, în câțiva ani, aceste coliziuni, cu viteze foarte mari, vor putea să creeze găuri negre microscopice și, în cele din urmă, găuri de vierme.

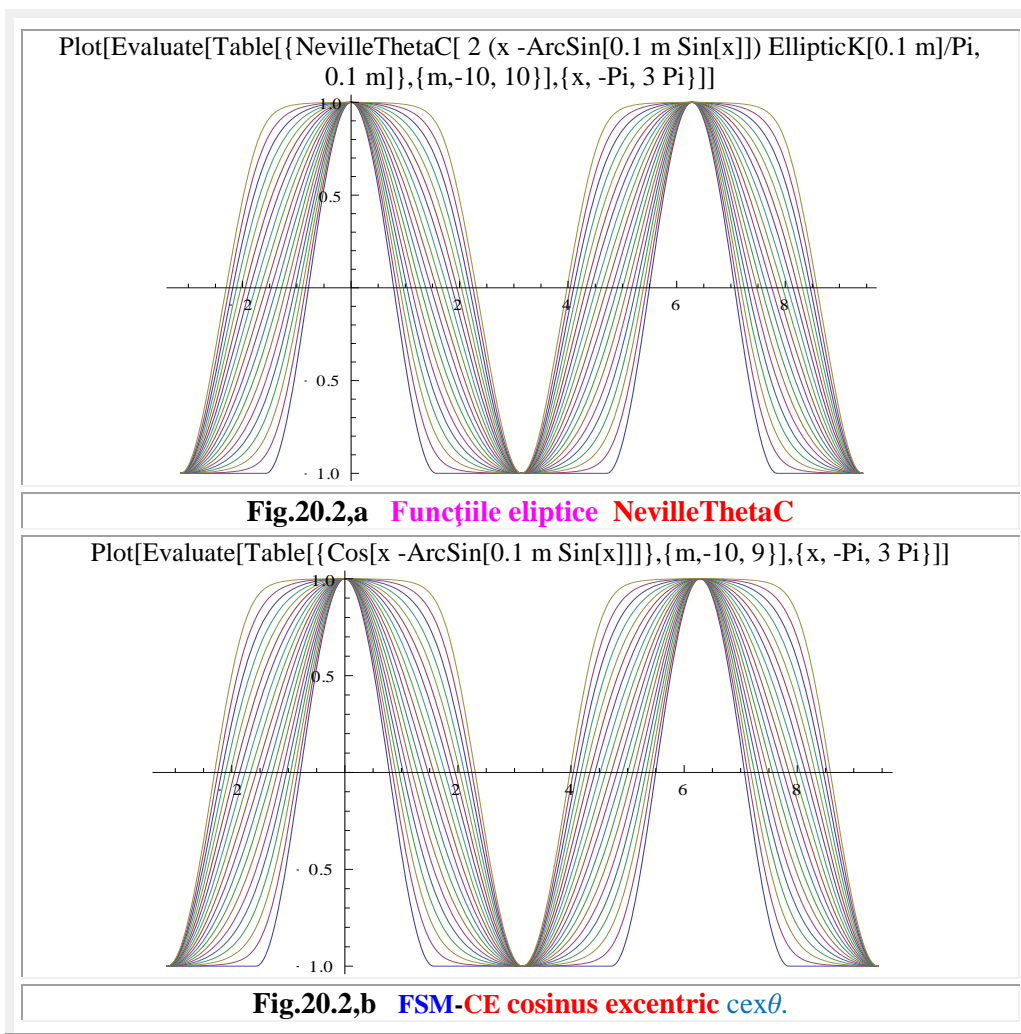
Chiar dacă mărirea acestor găuri de vierme nu va fi încă posibilă, se va încerca trimiterea prin ele a unor particule în viitor sau în trecut. În funcție de rezultatul experimentului, călătoria în timp va fi confirmată sau infirmată.”



Ceea ce în fizică este încă o ipoteză, în matematică este o certitudine, grație noilor complemente de matematică, reunite sub denumirea de **supermatematică (SM)**.

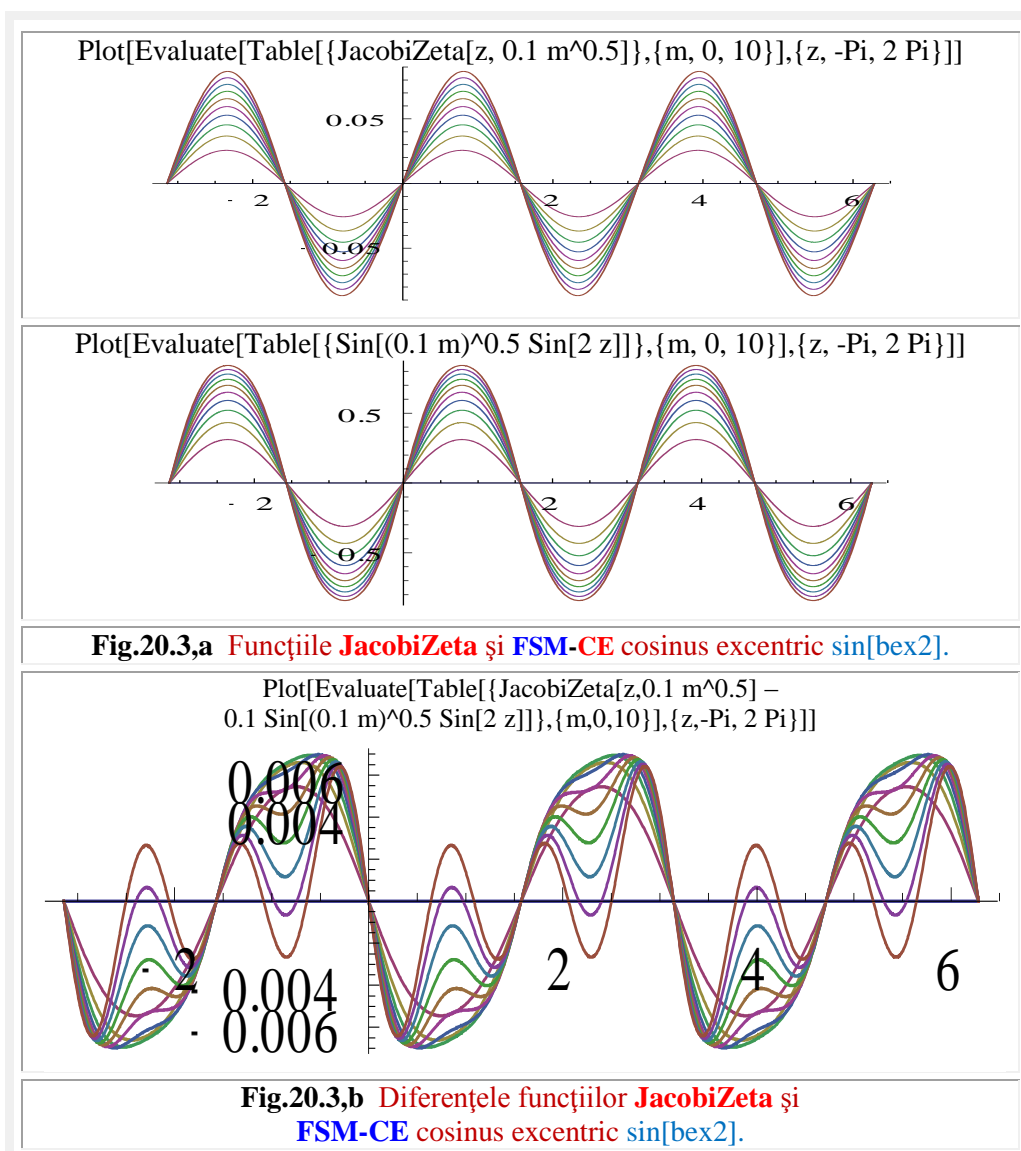
Noile funcții matematice, denumite **supermatematice**, s-au născut tocmai din dorința, mărturisită în introducerea volumul I, de a rezolva fără funcții și integrale speciale eliptice sisteme vibrante de caracteristică elastică (**CES**) neliniară.

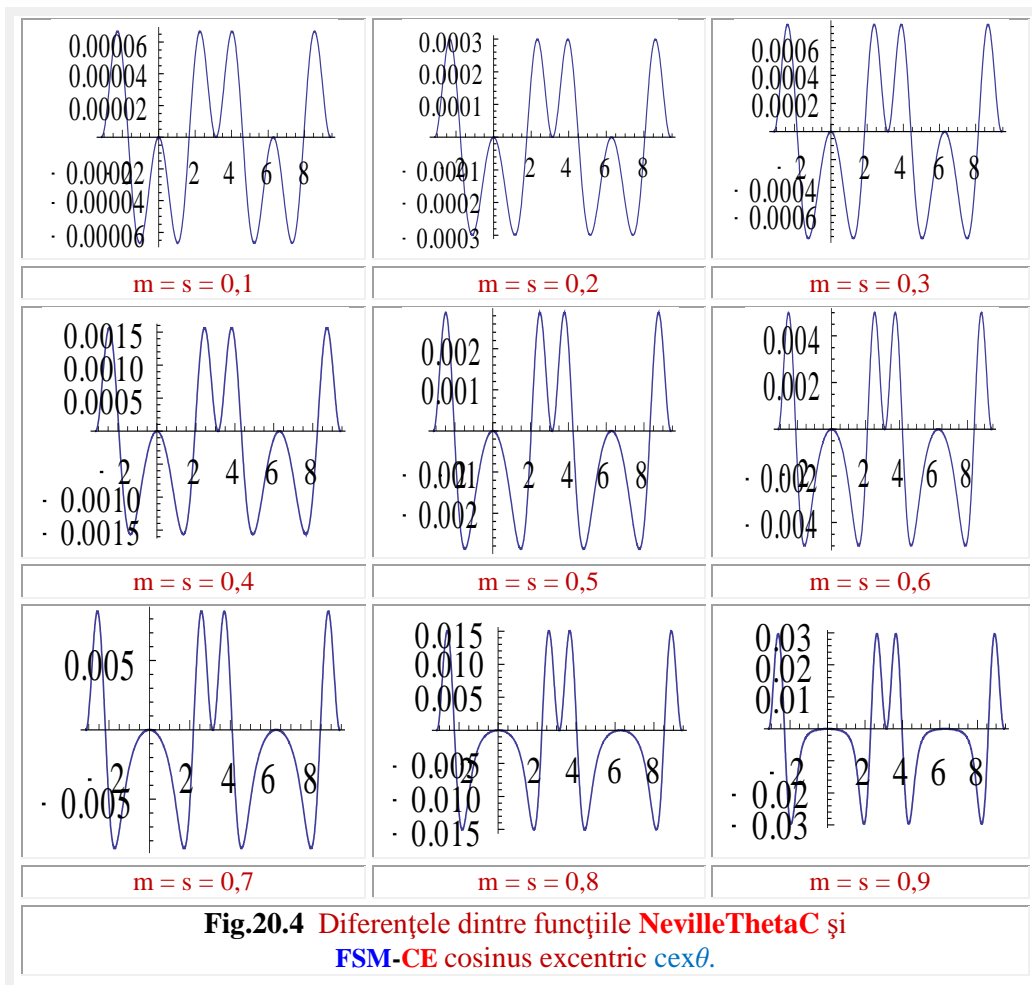
Ele s-au dovedit deosebit de utile în diverse aplicații, multe dintre ele evidențiind aptitudini de soluții ale unor sisteme vibrante neliniare, altele au oferit relații, de exprimare cu numai doi termeni, cu 15 zecimale exacte a valorii integralei eliptice de prima speță **K(k)**, dar, timp de peste 30 de ani de căutări, n-a condus la stabilirea vreunei legături, gaură de vierme, între cele două tipuri de funcții **eliptice** și **circulare**, excluzându-se din discuție dezvoltările în serie (trigonometrice, de puteri ș.a.).



20.2 STRĂPUNGAREA SPAȚIULUI PRIN FUNCȚIA NevilleThetaC

Până în ziua de 17 03 2009 când, lucrând la capitolul “INTEGRALE ȘI FUNCȚII ELIPTICE EXCENTRICE”, ale acestui volum II, s-a dorit să se vizualizeze graficele funcției speciale eliptice excentrice NevilleThetaC (Fig 20.2,a), de variabilă excentrică modificată, astfel încât, din perioada de $4K(k)$, diferită pentru fiecare valoare k , deci pentru fiecare curbă din familie, să se obțină aceeași perioadă de 2π pentru toate curbele din familie





S-a obținut, cu stupefacție, graficele funcției **supermatematice circulare excentrice (FSM-CE)**, familiare nouă, **cosinus excentric** de variabilă **excentrică θ** (Fig. 20.2,b).

Lucrând după principiul lui **Fred Menger** *“Dacă torturezi datele suficient, acestea îți vor mărturisi aproape totul”* am constatat că programul de matematică refuză să înregistreze datele / graficele funcțiilor eliptrice pentru $k = m = 1$. De aceea, în **figura 20.2,b** domeniul de variație al modulului funcțiilor eliptice este $k^2 = m \in [-1; 0,9]$, ceea ce, pentru k , ar fi $k \in [0; 0,9]$.

Deși cele două familii de curbe par identice, și aproape că sunt dacă desenăm graficele lor suprapuse, datorită seriilor de reprezentare diferite ale celor două tipuri de familii de curbe în programele de matematică, apar extrem de mici diferențe.

Diferențele maxime sunt cuprinse între 0,00006 .. 0,03, și toate de același gen / alură, așa cum s-a prezentat situația în **figura 20.4**. O suprapunere mai exactă se va prezenta în continuare, mai tâziu.

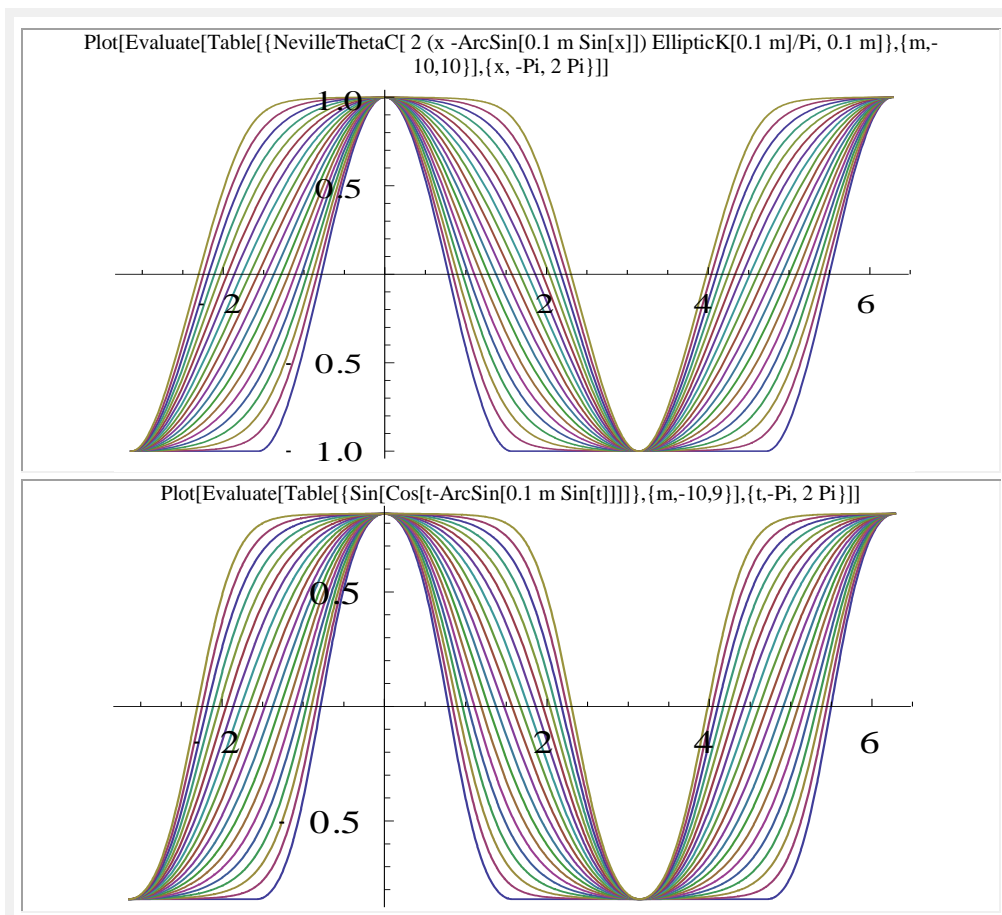
În schimb, exprimarea cu ajutorul **FSM-CE** a funcției speciale eliptice **JacobiZeta**[z, k] din **figura 20.3**, funcție mult mai importantă, este aproape precisă, diferențele **maxime** fiind sub 0,006 pentru toate curbele familiilor din domeniul $k \in [0; 0,9]$, așa cum se poate observa și în partea inferioară a figurii. O diferență maximă de 6 miimi fiind practic o expresie cvasi exactă

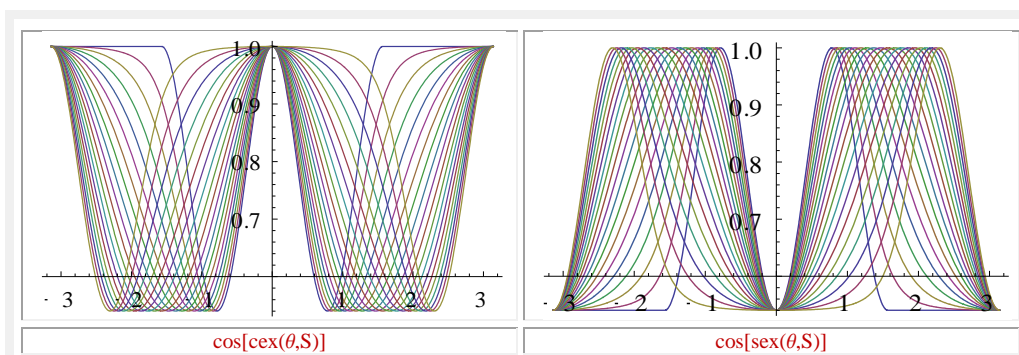
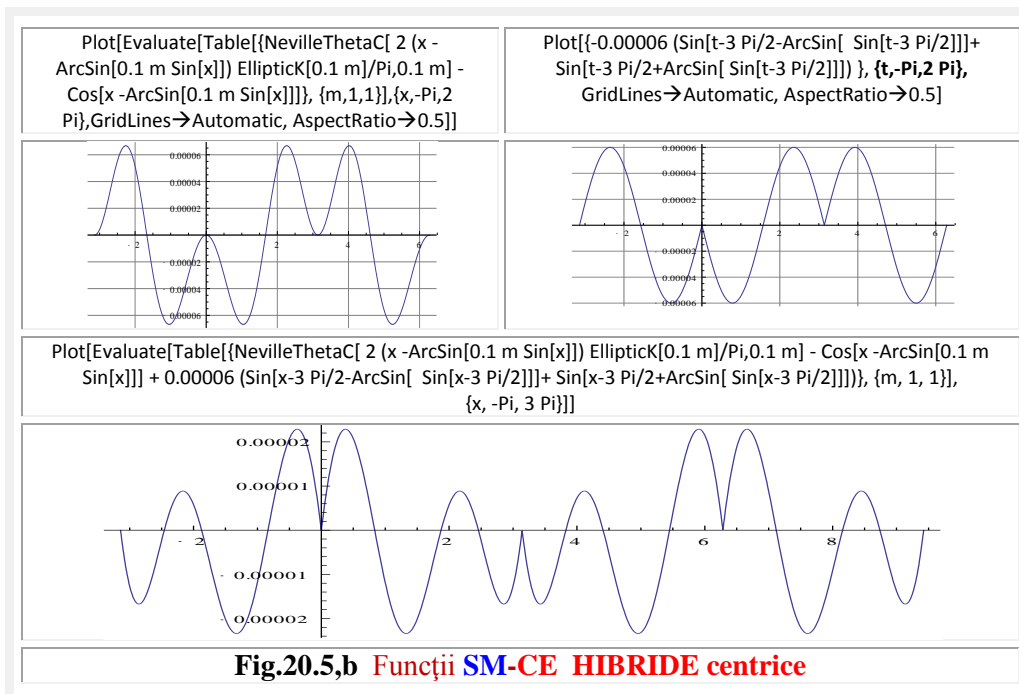
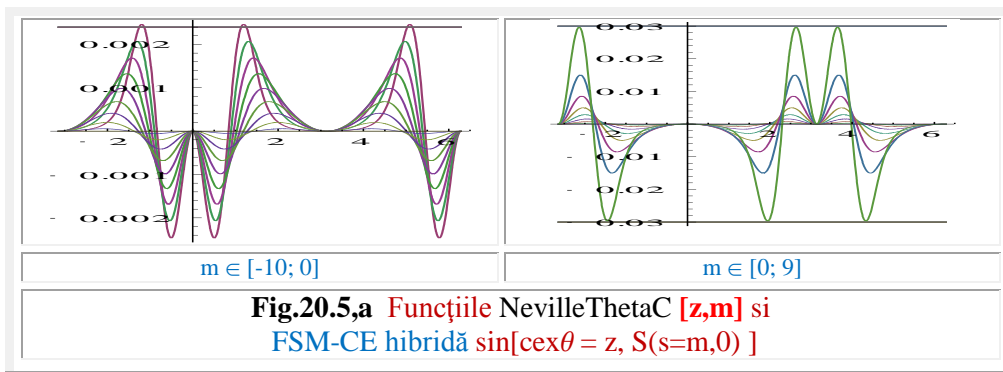
$$(20.1) \quad \text{JacobiZeta}[z,m] = \frac{m}{4} \sin 2z + m^2 \left[\frac{\sin 2z}{16} + \frac{8 \sin 2z - \sin 4z}{64} \right] + \\ + m^3 \left[\frac{5 \sin 2z}{384} + \frac{8 \sin 2z - \sin 4z}{64} + \frac{3(-8 \sin 2z + \sin 4z)}{512} + \frac{45 \sin 2z - 9 \sin 4z + \sin 6z}{512} \right] + \\ O[m]^4$$

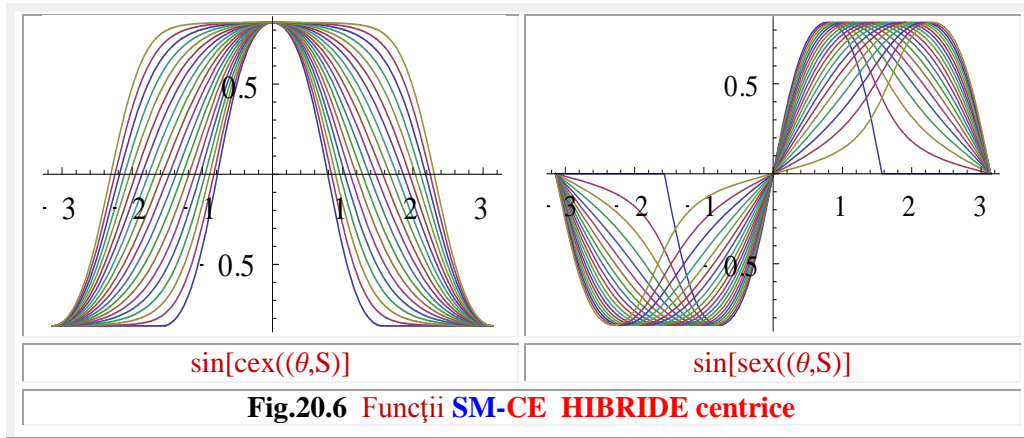
$$(20.2) \quad \text{NevilleThetaC} = \vartheta_c[z|m] = 1 - z^2/2 + z^4/24 - z^6/720 + z^8/40320 + \\ z^{10}/3628800 + z^{12}/479001600 + O[z]^{13}$$

20.3 FUNCȚII MATEMATICE HIBRIDE SPECIALE

Principiul lui **Fred Menger** și-a dovedit eficacitatea și în cazul funcției speciale eliptice **NevilleThetaC** sau a **funcția theta** $\vartheta_c(z|m)$ de variabilă **excentrică**.







Căutându-se o funcție cu alura diferențelor din **figura 20.4**, s-a ajuns la concluzia că o nouă funcție, combinație între **funcțiile matematice centrice (MC)**, reprezentată prin sinus și cele **supermatematice excentrice (FSM-CE)** prin $\text{cex}[\theta = z; S(s = m, \varepsilon = 0)]$ exprimă cvazi exact funcția **NevilleThetaC**[z \ m], așa cum se poate observa și în **figura 20.5,a**.

Deși diferențele pentru $m = s = 0,1$ sunt de numai 0,00006 ele pot fi micșorate individual și nu pentru întreaga familie de funcții, prin studierea formei funcției diferență și acționarea în consecință cu o funcție de aceeași alură și amplitudine, dar de semn opus. Astfel, pentru cazul anterior analizat și pentru $m = s = 0,1$ diferențele dintre funcția specială **Jacobi** modificată **NevilleThetaC** (2 aexu. $K(m)/\pi$ și **FSM-CE** $\text{cex}[\theta, S(s, \varepsilon)]$ deși extrem de mici, de numai 0,00006 pot fi micșorate de 3 ori, ajungând la diferența maximă de 0,00002 (!) (**Fig.20.5,b**).

Așa se face că, jocul întâmplării a hotărât introducerea unor noi familii de **funcții supermatematice**, o combinație între **funcțiile matematice centrice** și cele **supermatematice excentrice**. Mai precis, **funcții matematice induse**, fie centrice de variabilă **funcții supermatematice excentrice**, fie invers, funcții supermatematice excentrice de variabilă funcții matematice centrice.

Primele au fost prezentate deja în **figura 20.5**, iar cele din cea de a doua categorie sunt prezentate în **figura 20.6**.

Funcțiile induse centrice de variabilă funcții excentrice se vor denumi **funcții supermatematice circulare excentrice hibride centrice (FSM-CEHC)**.

Funcțiile excentrice induse de variabilă funcții centrice se vor denumi funcții **supermatematice circulare excentrice hibride excentrice (FSM-CEHE)**.

În **figura 20.6** sunt prezentate **FSM-CE** induse și autoinduse **hibride** centrice ca $\sin(\cos\theta)$, $\cos(\cos\theta)$, $\sin(\sin\theta)$, $\cos(\sin\theta)$, iar în **figura 20.7** cele excentrice $\text{sex}(\cos\theta)$, $\text{cex}(\cos\theta)$, $\text{sex}(\sin\theta)$, $\text{cex}(\sin\theta)$. Multe dintre acestea pot servi la corijarea diferențelor care apar la aproximarea unor funcții speciale, așa cum s-a prezentat anterior situația din **figura 20.5,b**.

Diferențele care apar între diverse funcții sunt și ele folositoare, uneori, la corijarea aproximării unor funcții speciale, a căror grafice sunt cunoscute dar ecuația

fie că este necunoscută, fie că este prea complexă, cazuri în care se apelează, uneori, la aproximări. De aceea, în **figura 20.8** sunt prezentate, informativ, diferențele dintre **FSM-CE HIBRIDE excentrice** și **FSM-CE**.

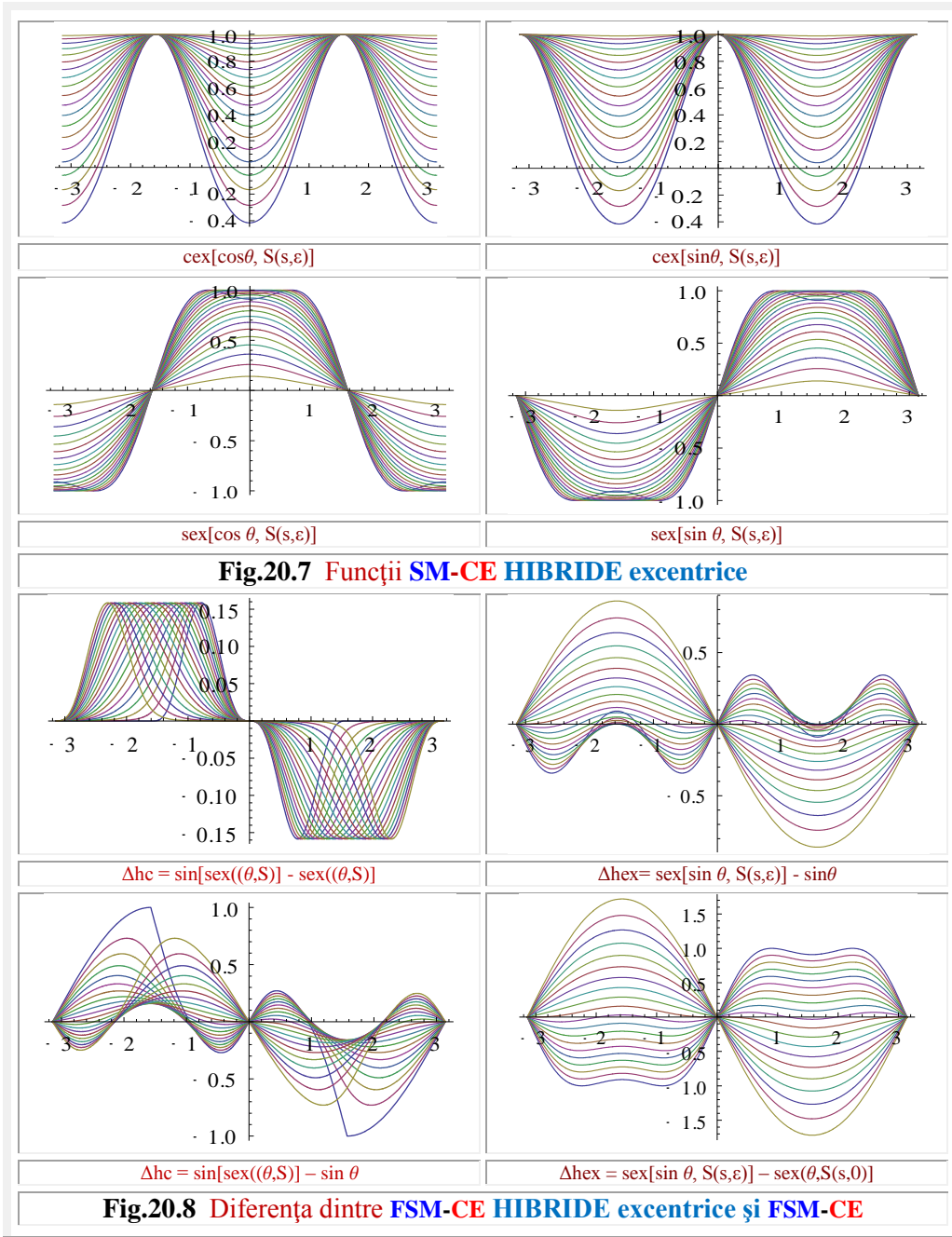
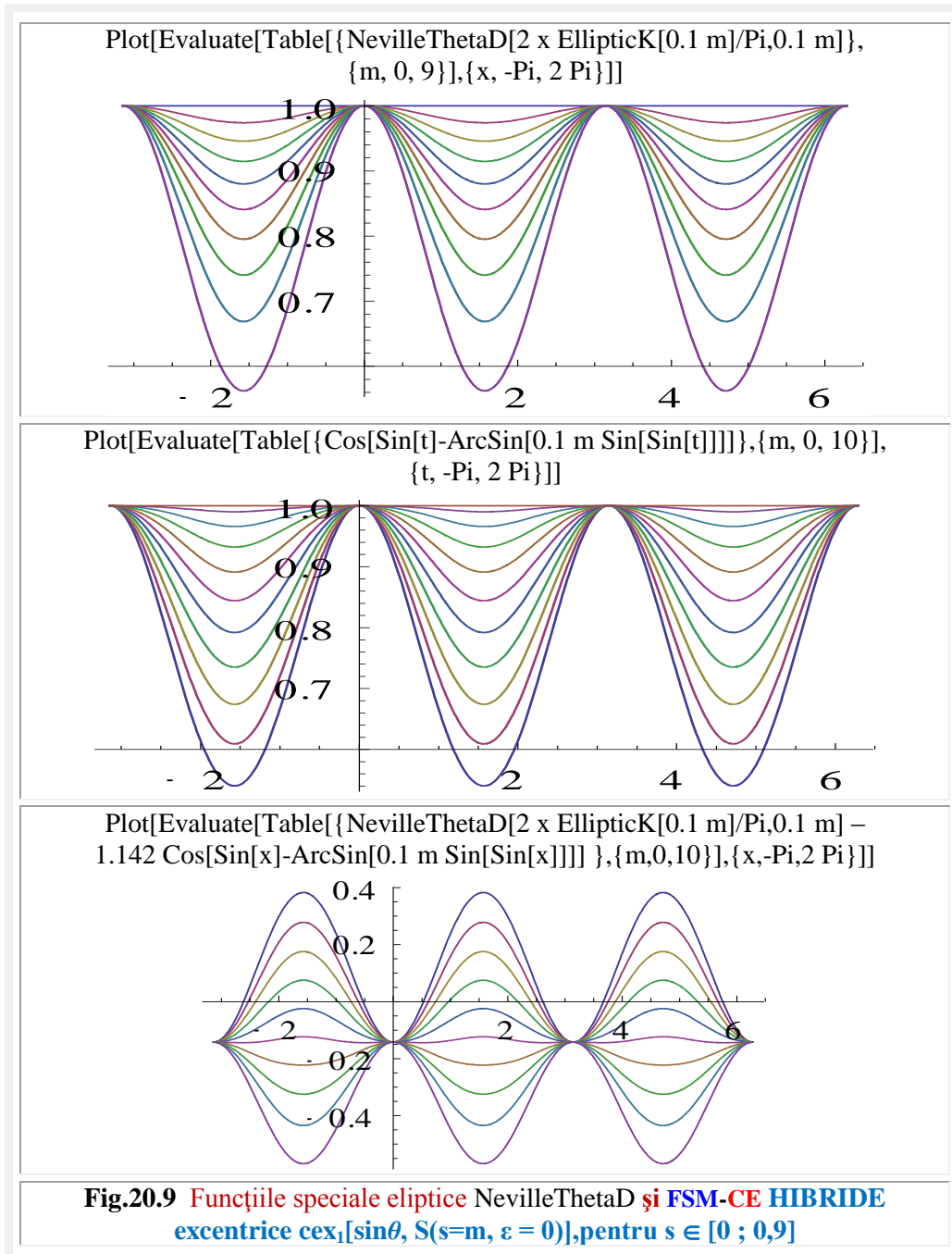
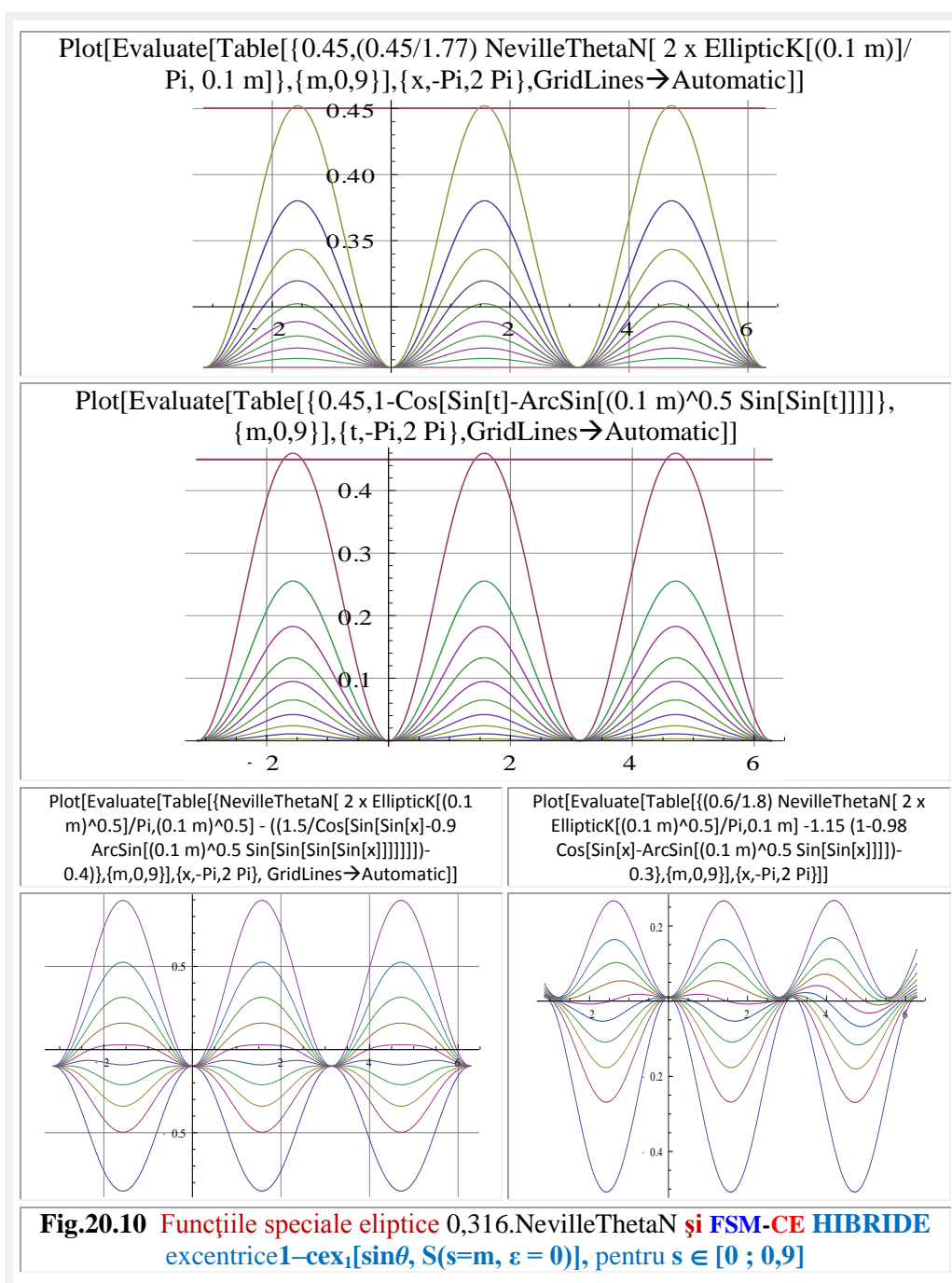


Fig.20.8 Diferența dintre **FSM-CE HIBRIDE excentrice** și **FSM-CE**

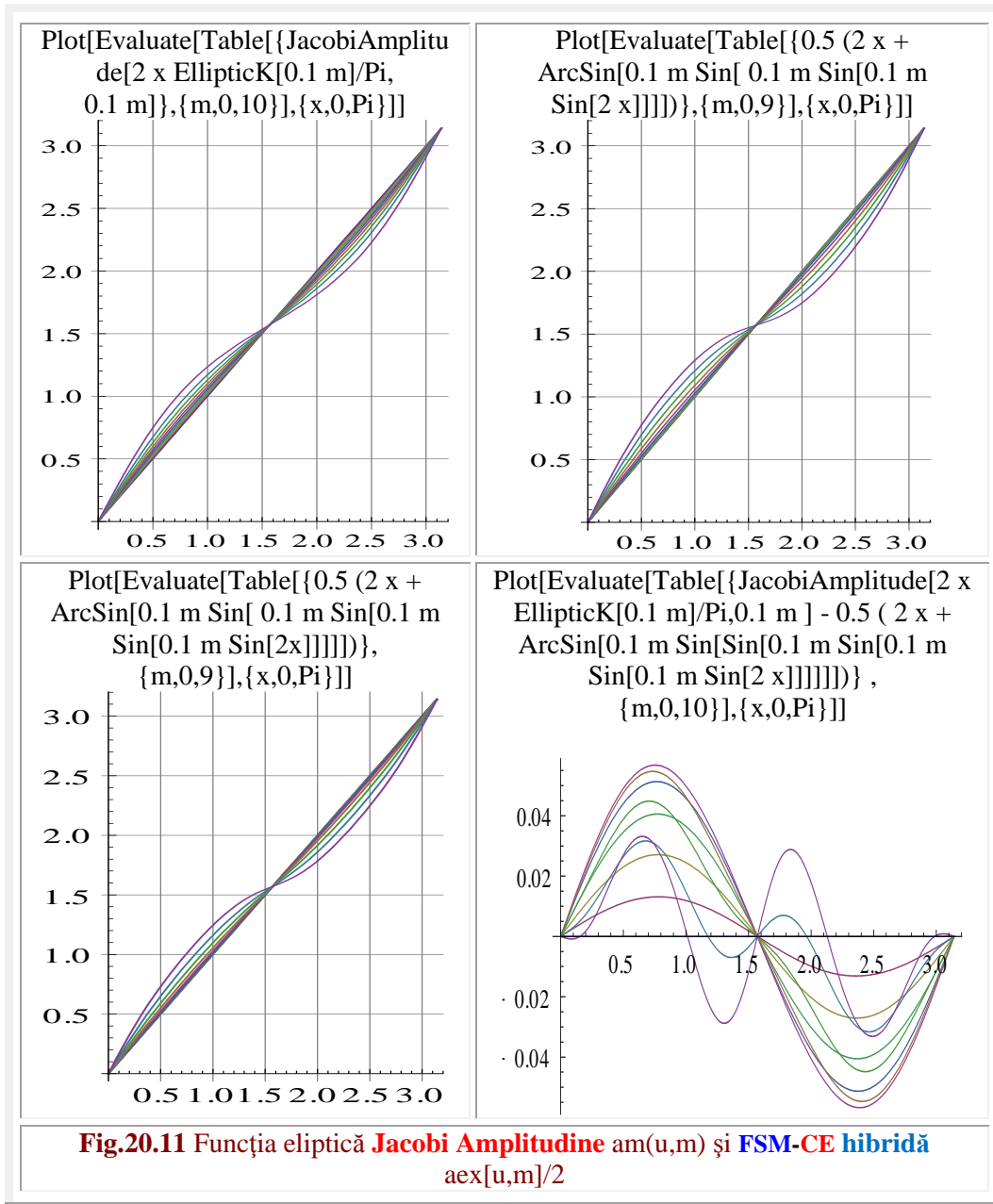
Încercări de aproximare a familiei de funcții speciale **Jacobi Neville Theta D** de variabilă centrică u modificată $\rightarrow 2uK(m)/\pi$ sunt prezentate în **figura 20.9**.

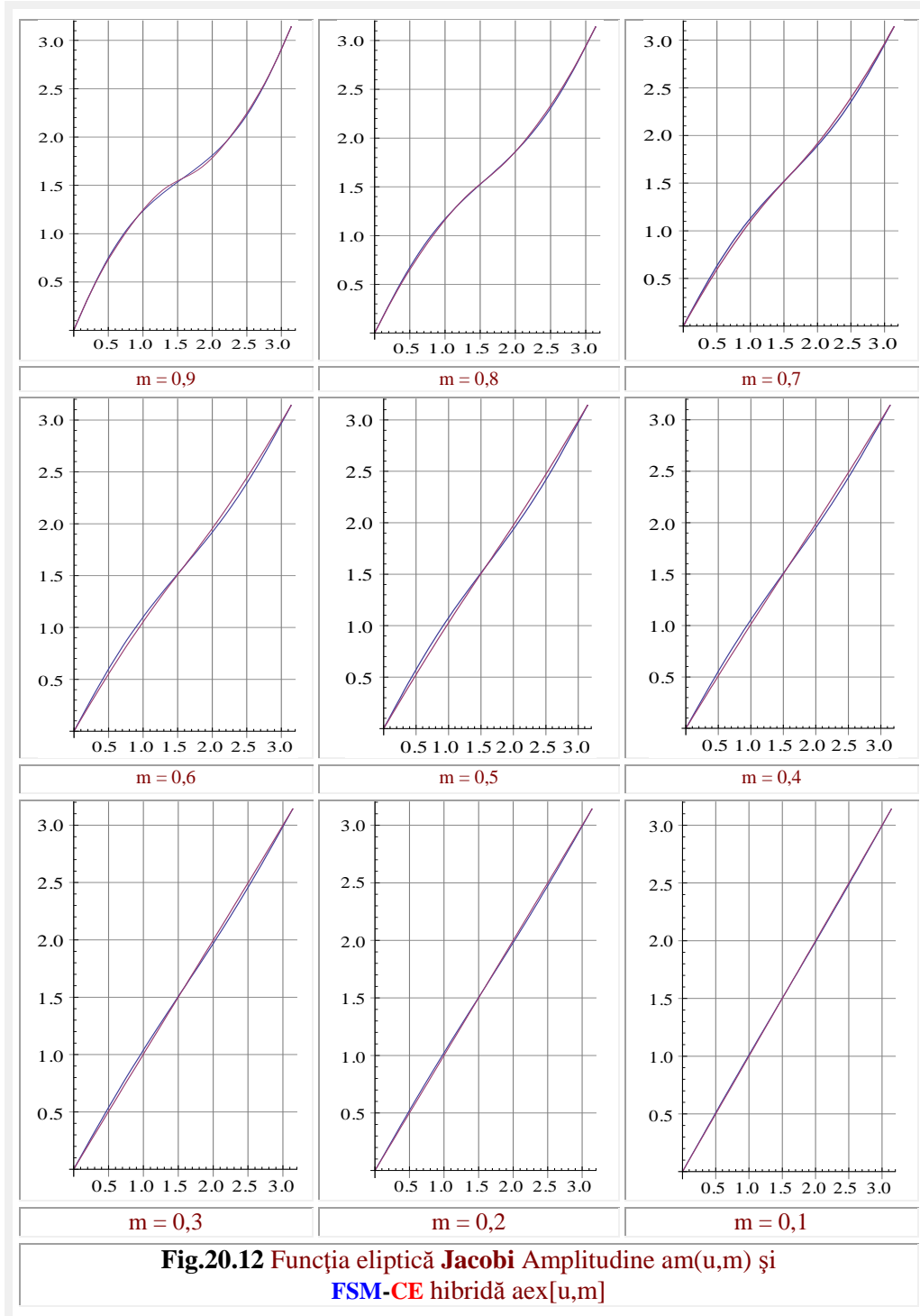




Deoarece forma graficelor diferențelor este o funcție periodică, aproape simetrică față de axa absciselor, îmbunătățirea în continuare a preciziei prin corijarea

întregii familii de funcții este greoaie, însă pentru anumite valori m sau k acțiunea devine posibilă, așa cum s-a mai arătat anterior.





În **figura 20.10** s-a încercat aproximarea funcției speciale **Jacobi Neville Theta N**, de argument modificat, cu o funcție hibridă autoindusă, precizată în figură, împreună cu diferențele ce apar între valorile funcțiilor astfel approximate.

În final, în **figura 20.11**, s-a revenit la funcția specială **Jacobi amplitudinus**, **am(u, k)** de argument modificat și s-a prezentat o altă posibilitate de aproximare a ei prin funcția **SM** amplitudine excentrică de variabilă excentrică $amex_2[\theta, S(s, \epsilon)]$, hibridă, autoindusă, de ecuație specificată în figură. Această funcție este foarte importantă, deoarece, prin aproximarea ei cu precizie, pot fi apoi approximate, la fel de precis, toate celelalte funcții speciale **Jacobi**: $cnu = \cos(amu)$ și $snu = \sin(amu)$ și, prin combinarea acestora, multe alte funcții speciale.

În **figura 20.12** sunt suprapuse cele două grafice ale funcției și a aproximății ei pentru valorile modului $m \in [0,1; 0,9]$ cu pasul 0,1. Ele scot în evidență gradul ridicat de precizie al aproximării.

Dorința autorului, de-a exprima exact funcțiile speciale cu ajutorul noii **matematici excentrice**, a rămas un vis frumos, **deocamdată neîmplinit**, decât în foarte mică măsură.



Motto:” Inginerul ideal este un amestec... nu este om de știință, nu este matematician, nu este sociolog sau scriitor, dar poate folosi cunoștințele și tehnicile specifice oricăreia dintre sau tuturor acestor discipline în rezolvarea problemelor de inginerie. ”
citat din [N.W. Dougherty](#)

Capitolul 21

FUNCȚII TRIGONOMETRICE ANALITICE EXCENTRICE

21.1 INTRODUCERE

Funcția **analitică** (**ana** → prin, **litos** → descompunere) a fost introdusă în matematica centrică de **Leonhard Euler** (1769) și dezvoltată simultan de **K. Weierstrass** (1840) și **Ch. Meray**, iar denumirea funcției a fost dată de **J. Lagrange** (1806).

Ea poate fi o funcție reală (R-analitică) sau complexă, de variabilă reală sau de variabilă complexă. Este denumită și funcție monogenă (derivabilă).

Definită univoc, în fiecare punct dintr-un domeniu D , ea poate fi reprezentată printr-o serie întregă (definită și olomorfă pe tot planul complex C) de puteri și de prelungirile ei. Pentru orice $z_0 \in D$ se poate obtine

$$(21.1) \quad f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}, \text{ într-un cerc cu centrul în } z_0.$$

Cazul $k \geq 0$ se referă la o funcție olomorfă (uniformă, continuă, cu derivată unică în fiecare punct). Altfel, seria (21.1) reprezintă o funcție meromorfă, (olomorfă cu excepția unor puncte izolate, numite poli) în D .

Funcțiile meromorfe, dublu periodice, sunt funcții eliptice. De aceea, funcțiile circulare / trigonometrice analitice excentrice au o importanță deosebită în studiul funcțiilor **supermatematice**.

Considerăm că, înaintea de a etala contribuțiile pe care **supermatematica** le aduce și în domeniul funcțiilor analitice, e necesar să aducem un omagiu și să evidențiem contribuțiile predecesorilor și în special a unuia dintre cei mai mari matematicieni romani.

De aceea, apelăm la scrierile Prof. dr. **Petru Mocanu** care, într-un eseu, afirmă că „*un matematician se consideră realizat dacă a îndeplinit cel puțin una din următoarele condiții:*

- 1) *A introdus o noțiune nouă într-un domeniu al matematicii, fără de care acest domeniu suferă;*
- 2) *A elaborat o nouă metodă recunoscută și aplicată de specialiști;*
- 3) *A rezolvat o problemă importantă, care a fost abordată de mulți alți specialiști;*
- 4) *A enunțat o problemă nouă, de larg interes, în lumea matematică.*

Marele matematicianul român **Dimitrie Pompeiu** a îndeplinit cu prisosință toate aceste condiții, remarcându-se ca cel mai strălucit reprezentant al școlii matematice românești de la începutul secolului XX.

Celebritatea internațională și-a câștigat-o chiar cu teza sa de doctorat, dedicată studiului singularităților funcțiilor analitice. În această teză, el demonstrează existența unor funcții analitice având mulțimea singulară de măsură pozitivă și fiind continue pe această mulțime.

Acest fapt matematic era cu totul surprinzător, mai ales că, tot în acel an, un alt matematician cunoscut, **Ludovic Zoretti**, într-o teză de doctorat a pretins că a demonstrat că mulțimea singularităților unei funcții analitice este discontinuă pe această mulțime, rezultat care era în acord cu o impresie larg răspândită, dar care s-a dovedit a fi greșit.

Fară îndoială că domeniul preferat de cercetare, în care **D. Pompeiu** s-a evidențiat pe plan internațional, este **analiza matematică**, în special **analiza complexă**, dar el are rezultate remarcabile și în alte domenii, ca de exemplu în mecanică.

Pompeiu este inițiatorul teoriei **funcțiilor poligene**, care constituie o extindere naturală a **funcțiilor analitice**. În acest domeniu a introdus noțiunea de derivată areolară și a extins celebra formulă a lui **Cauchy**, prin formula cunoscută ca formula lui **Cauchy-Pompeiu**.

Într-o scurtă lucrare publicată în anul 1929, **Pompeiu** demonstrează că dacă integrala dublă a unei funcții continue în plan are aceeași valoare pe orice pătrat de latură dată, atunci funcția se reduce la o constantă. Aceasta simplă observație a generat una dintre cele mai interesante probleme ale analizei matematice, cunoscută ca "**problema lui Pompeiu**".

O altă simplă observație, care a condus la numeroase cercetări, este cea privind teorema creșterilor finite.

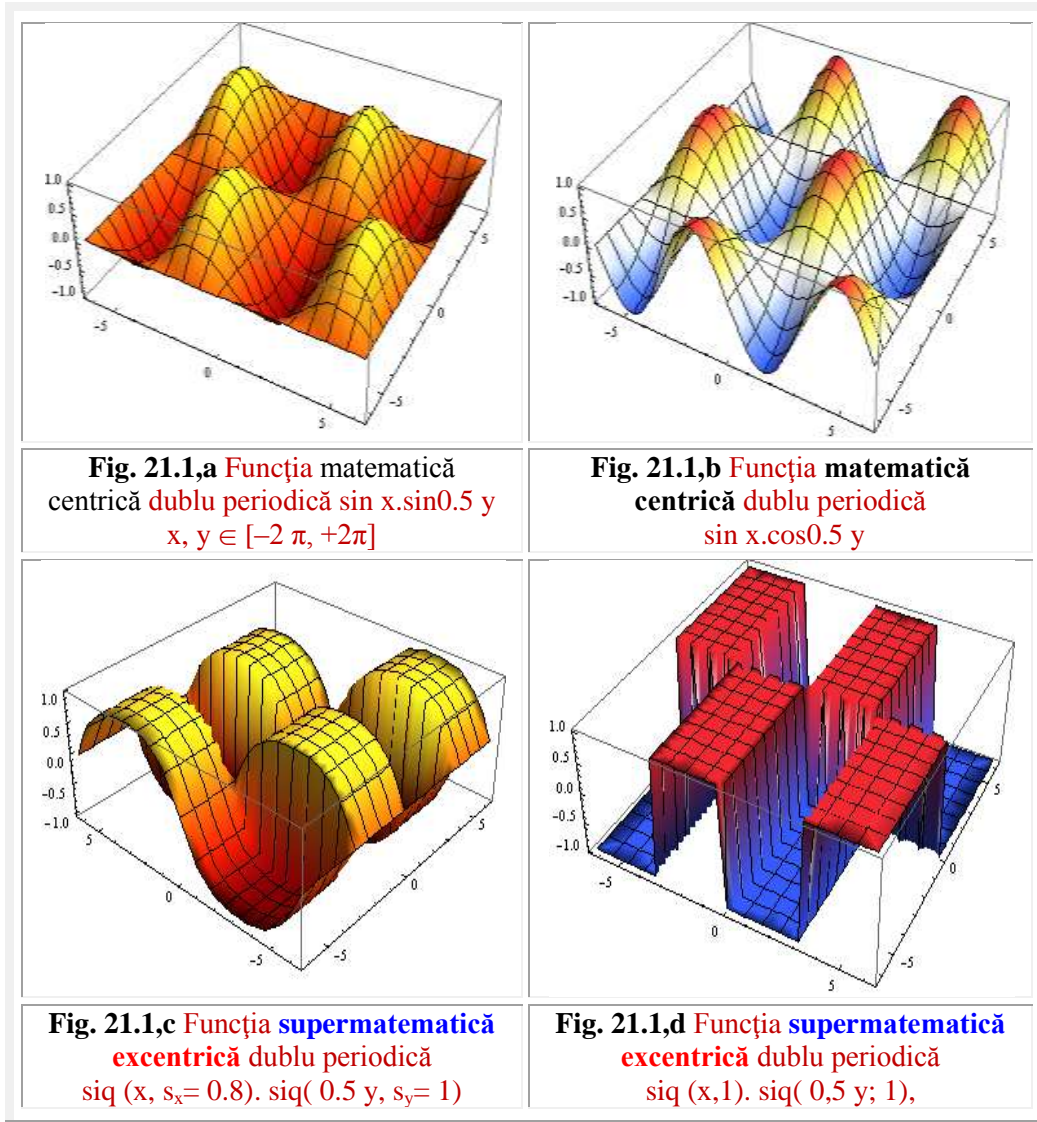
Opera matematică a lui **Pompeiu** este conținută în cele aproximativ 150 de lucrări publicate".

21.2 FUNCȚII ANALITICE REALE DE VARIABILĂ REALĂ (R-analitice)

Fie $F(x)$ și $F(y)$ două funcții periodice de perioade T_x și, respectiv, T_y . Produsul acestor două funcții periodice conduce la obținerea unei funcții reale dublu periodice. Câteva exemple sunt prezentate în **figura 21.1**.

Funcțiile trigonometrice analitice reale au frecvența constantă pe o direcție (x), pe care sunt, deci, periodice și o frecvență variabilă pe o direcție perpendiculară (λ).

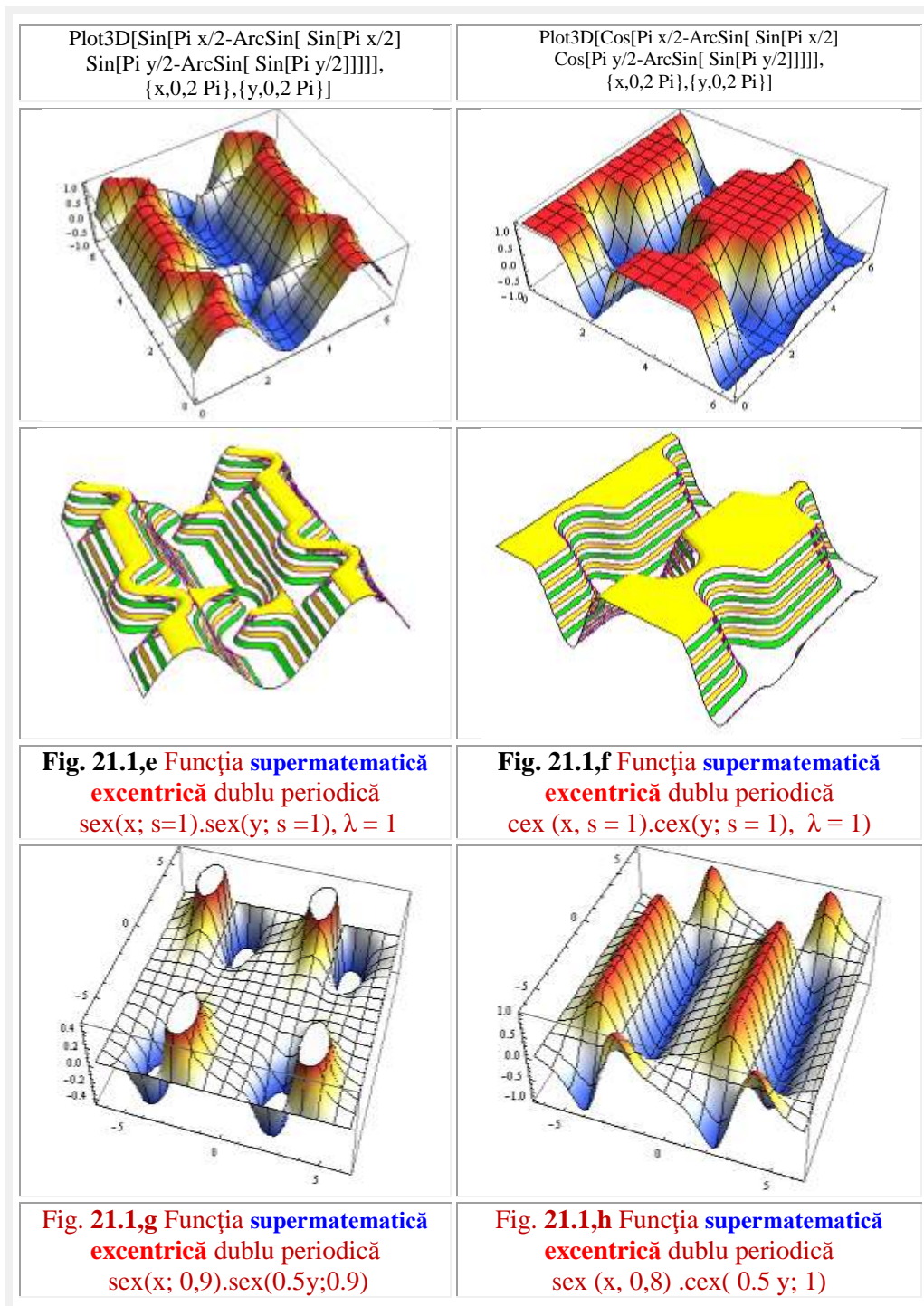
Funcțiile trigonometrice pot fi definite geometric (într-un triunghi dreptunghic sau pe cercul unitate / trigonometric, așa cum a procedat **Leonhard Euler**) sau **axiomatic** [A. Pirvu, 3.2. **Trigonometria**, MANUALUL INGINERULUI MECANIC, Vol. I- MATEMATICĂ-FIZICĂ, Ed.Tehnică, București, 1965, pag. 246].



Funcțiile cosinus analitic $C(x)$ și sinus analitic $S(x)$ se definesc **axiomatic** ca funcții cu următoarele proprietăți :

- (21.2) $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ Sunt definite pentru toate valorile reale ale lui } x; \\ 2) \text{ Satisfac ecuația funcțională } C(x-y) = C(x) C(y) + S(x) S(y) ; \\ 3) \text{ Sunt pozitive în intervalul } 0 < x < \lambda, \text{ unde } \lambda \text{ este un număr} \\ \text{pozitiv oarecare;} \end{array} \right.$

(21.2') $C(x-y) = C(x) C(y) + S(x) S(y)$, ca de exemplu, FCC $\cos[x-y] = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

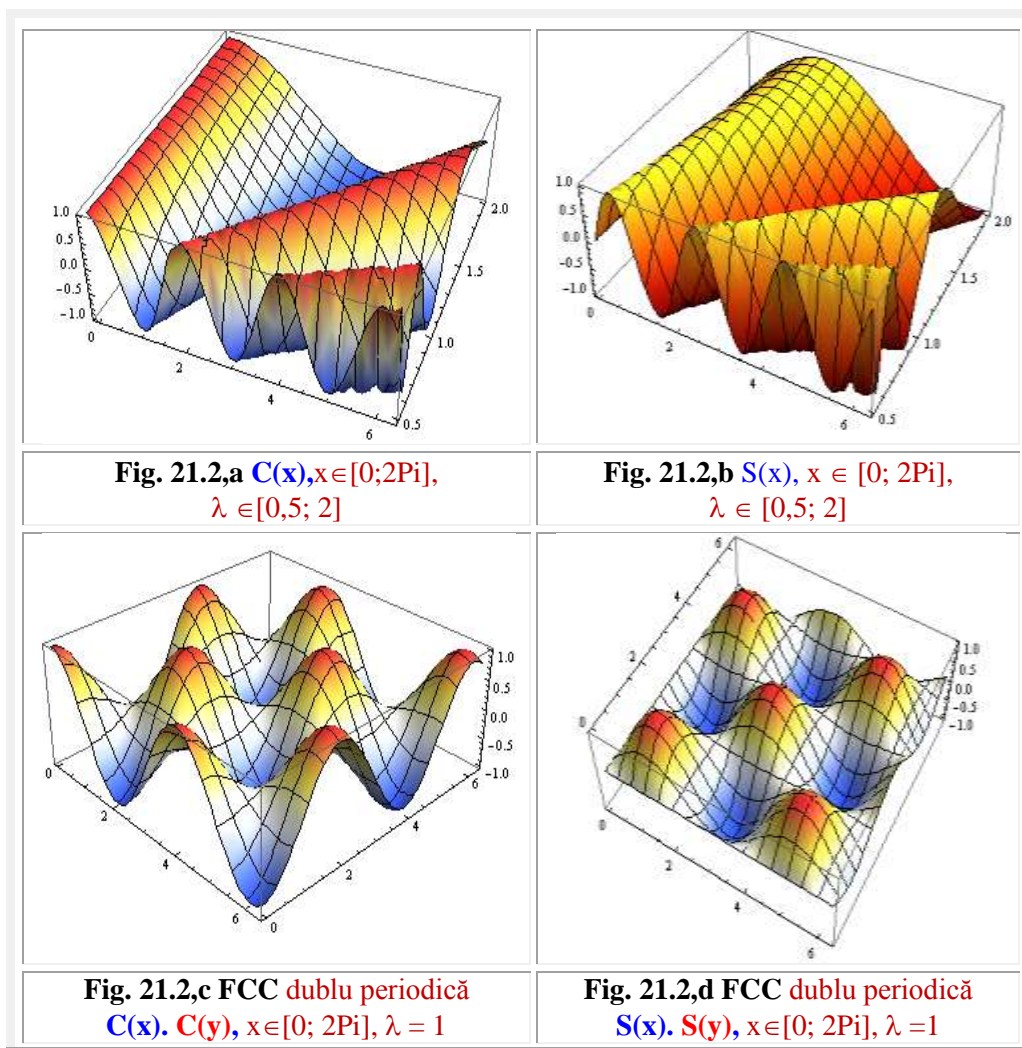


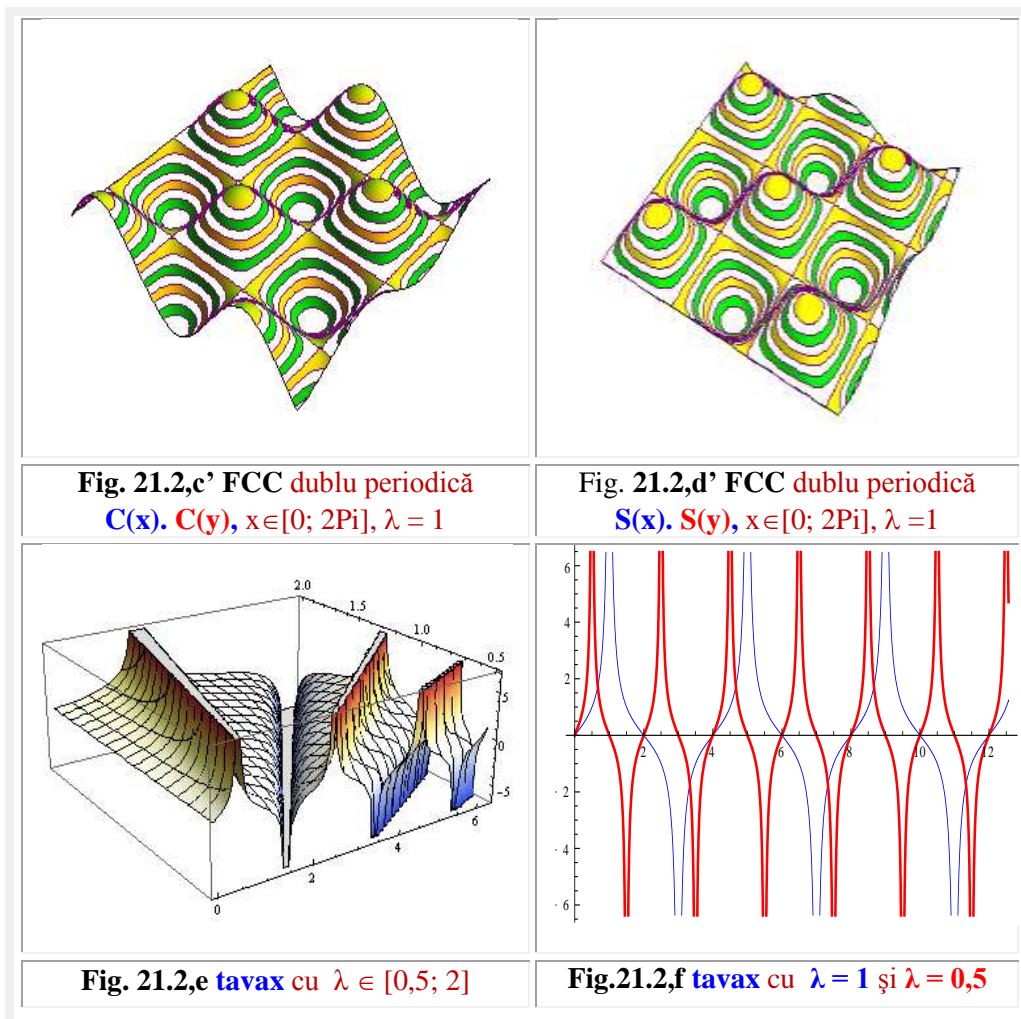
21.3 FUNCȚII TRIGONOMETRICE ANALITICE CENTRICE

Pentru $\lambda = \frac{\pi}{2}$ funcțiile trigonometrice / circulare centrice analitice degenerază în **funcții circulare centrice (FCC)** :

(21.3) $C(x) = \cos x$ și $S(x) = \sin x$, iar pentru $\lambda > 0$ condițiile (21.2) 1 ... 4 sunt satisfăcute de funcțiile circulare / trigonometrice analitice care, după introducerea în matematică a **matematicii excentrice (ME)** și a **supermatematicii (SM)**, sunt denumite și centrice. Ele sunt

(21.4) $C(x) = \cos \frac{\pi x}{2\lambda}$ și $S(x) = \sin \frac{\pi x}{2\lambda}$, a căror grafice sunt prezentate în **figurile 21.2**.





$C(x)$ și $S(x)$ sunt, evident, funcții periodice, a căror periodicitate se modifică odată cu modificarea valorii lui λ . Pe direcția lui x , funcția este periodică, de perioadă $T = 4\lambda$, iar pe direcția lui λ funcția este aperiodică, modulată în frecvență, frecvența scăzând cu creșterea lui λ .

Dintre tangente, se prezintă doar tangenta **Voinoiu** analitică (v. Vol.I., Cap.2.1), definită ca raport dintre $C(x)$ și modulul lui $S(x)$, cu graficele din **figura 21.2,e,f**.

Pentru $\lambda = 1$, se obține o funcție periodică, de perioadă 4 cu poli în mulțimea numerelor impare și cu zerourile în mulțimea numerelor pare, inclusiv zero.

În cazul **funcțiilor circulare centrice** ordinare, există câte o singură funcție în 2D iar, în cazul funcțiilor trigonometrice analitice centrice, câte o singură funcție în 3D, spre deosebire de **domeniul excentric** în care există o infinitate de funcții în 3D, corespunzătoare infinității de valori ale **excentricității numerice s**.

21.4 FUNCȚII CIRCULARE ANALITICE EXCENTRICE DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ

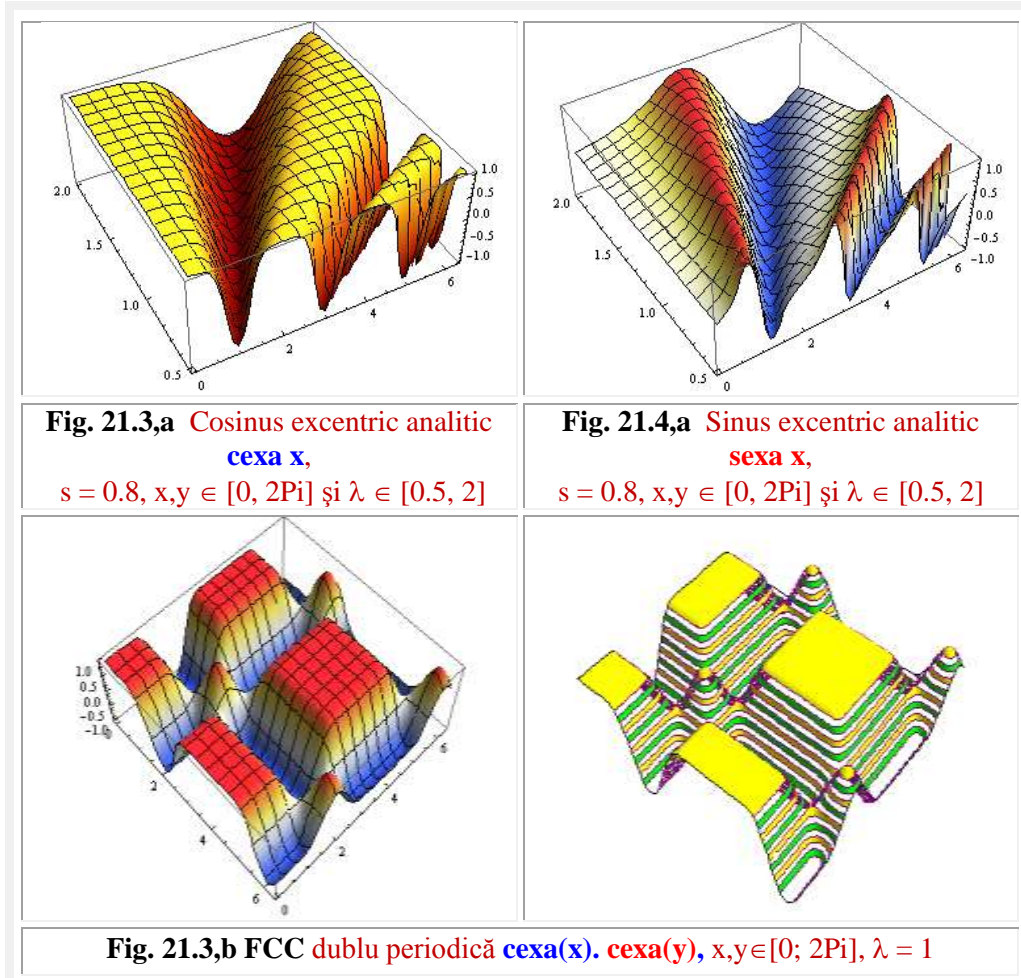
În principiu, și în general, trecerea de la domeniul centric la cel excentric al **supermatematicii** se realizează, așa cum s-a prezentat în repetate rânduri, prin înlocuirea variabilei independente y , sau α , din **centric**, cu funcția $y(x)$ sau $\alpha(\theta)$ [4], [11], denumită **amplitudine excentrică**, datorită **similitudinii cu funcția eliptică Jacobi $am(u, k)$** , de expresie :

$$(21.5) \quad y(x) = aex [x, E(s, z)] = x - \arcsin [s \cdot \sin(x-z)] ,$$

de variabilă excentrică x sau θ și

$$(21.6) \quad x(y) = Aex [y, E(s, z)] = y + \arcsin \frac{s \cdot \sin(y-z)}{\sqrt{1+s^2-2s \cdot \cos(y-z)}} ,$$

de variabilă centrică y sau α .



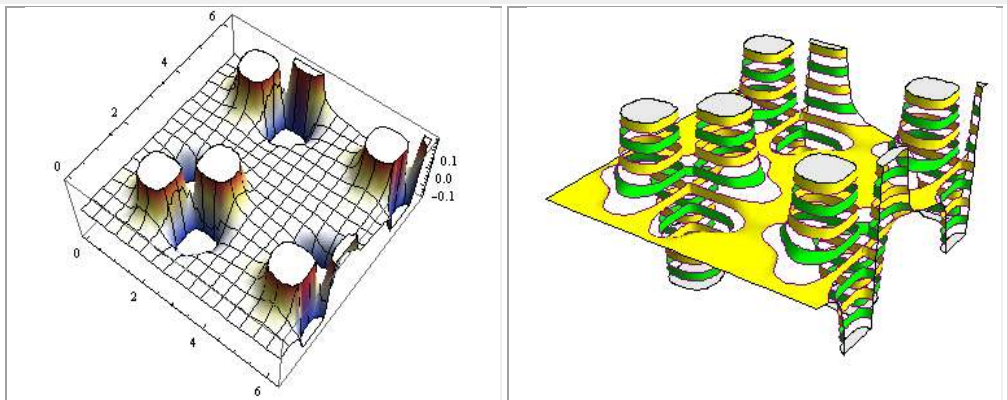


Fig. 21.4,a' FCC dublu periodică $\text{sexa}(x) \cdot \text{sexa}(y)$, $x, y \in [0; 2\pi]$, $\lambda = 1$

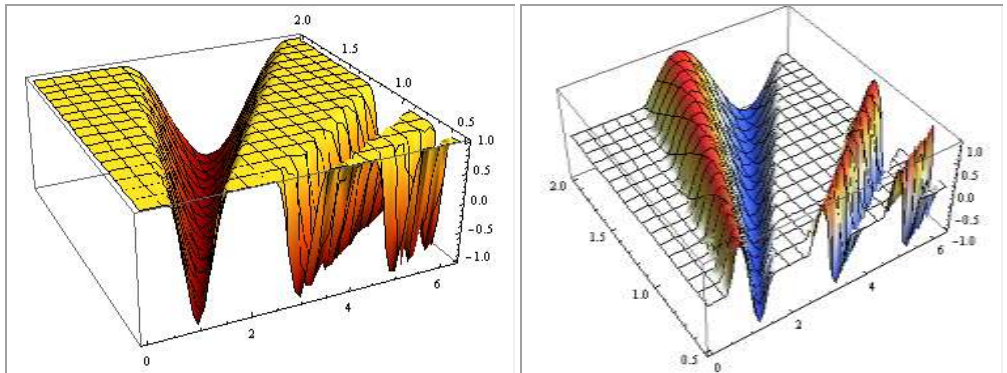


Fig. 21.3,b Cosinus excentric analitic $\text{cexa } x$,
 $s = 1$, $x \in [0, 2\pi]$ și $\lambda \in [0.5, 2]$

Fig. 21.4,b Sinus excentric analitic $\text{sexa } x$,
 $s = 1$, $x \in [0, 2\pi]$ și $\lambda \in [0.5, 2]$

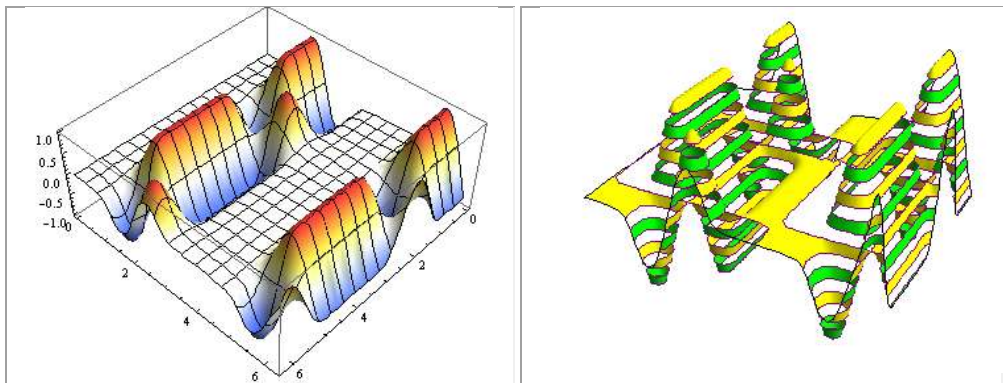


Fig. 21.4,a' FCC dublu periodică $\text{cexa}(x) \cdot \text{sexa}(y)$, $x, y \in [0; 2\pi]$, $\lambda = 1$

Numim, în continuare, trecerea de la centric la excentric prin (21.5) și (21.6) „**transformare excentrică**” de **variabilă excentrică** (21.5) și, respectiv, de **variabilă centrică** (21.6).

Așa cum s-a mai arătat, trecerea de la funcțiile trigonometrice ordinare centrice la cele analitice centrice se face prin înlocuirea variabilei x cu funcția $\frac{\pi}{2\lambda}x$ și respectiv, a variabilei $y \rightarrow \frac{\pi}{2\lambda}y$. Numim, în continuare, această transformare „**transformare trigonometrică analitică**” dată de relațiile

$$(21.7) \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2\lambda}x \quad \text{și} \quad y \rightarrow \frac{\pi}{2\lambda}y$$

Prin inducție completă, rezultă că, trecerea de la **FSM-CE** la cele **analitice** se va face prin compunerea celor două transformări : **analitică** și **excentrică**.

Astfel, funcția **SM** cosinus excentric analitic de variabilă excentrică x este, prin definiție, referindu-ne doar la prima determinare, principală, de indice unu, sau fără indice, în conformitate cu cele stabilite în primul volum

$$(21.8) \quad \text{cexa } x = \text{cexa}(x, E) = : \cos\left\{\frac{\pi}{2\lambda}x - \arcsin\left\{s \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2\lambda}x - z\right)\right\}\right\},$$

iar sinusul excentric analitic este dat, prin definiție, de relația

$$(21.9) \quad \text{sexa } x = \text{sexa}(x, E) = : \sin\left\{\frac{\pi}{2\lambda}x - \arcsin\left\{s \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2\lambda}x - z\right)\right\}\right\}.$$

Este lesne de observat că, pentru $s = 0$, funcțiile $\text{cexa } x$ și $\text{sexa } x$ degenerază în $C(x)$ și, respectiv, în $S(x)$. Ele sunt periodice, de perioadă constantă $T = 4\lambda$ pe direcția lui x și aperiodice, modulate în frecvență pe direcția lui λ .

Pentru excentricitățile numerice $s = 0,8$, respectiv, $0,75$ precum și pentru $s = 1$ graficele în 3 D sunt prezentate în **figura 21.3** și, respectiv, **21.4**.

Pentru $\lambda = \pi / 2$, funcțiile circulare excentrice analitice degenerază în funcții circulare excentrice ordinare.

Celelalte funcții analitice, **centrice** și / sau **excentrice**, se deduc pe baza funcțiilor cosinus și sinus. Astfel, tangenta excentrică analitică va fi dată de relația

$$(21.10) \quad \text{texa } x = \frac{\text{sexa}.x}{\text{cexa}.x} \quad \text{iar } \text{tangenta excentrică Voinoiu}, \text{ texav } x, \text{ are expresia}$$

$$(21.11) \quad \text{texav } x = \frac{\text{sexa}.x}{\text{Abs}[\text{cexa}.x]}.$$

La fel, pot fi definite cotangenta, secanta și cosecanta excentrice analitice.

21.5 FUNCȚII CIRCULARE ANALITICE EXCENTRICE DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ INDEPENDENTE DE ORIGINEA SISTEMELE DE REFERINȚĂ.

Ca și în cazul **funcțiilor circulare excentrice** ordinare, principalele funcții de acest gen sunt amplitudine excentrică analitică **aexax**, beta excentrică analitică **bexax**, radial excentrică analitică **rexax** și derivata excentrică analitică **dexax**.

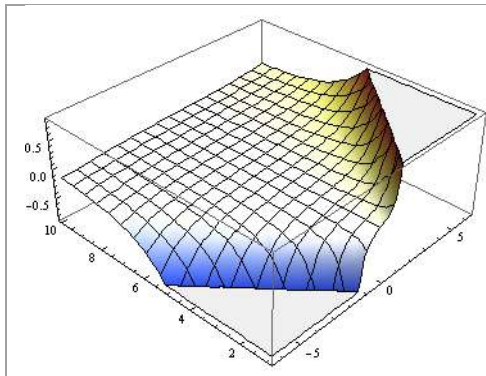


Fig. 21.5,a Funcția **aexax**, pentru $s = 0,9$; $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $\lambda \in [1, 10]$

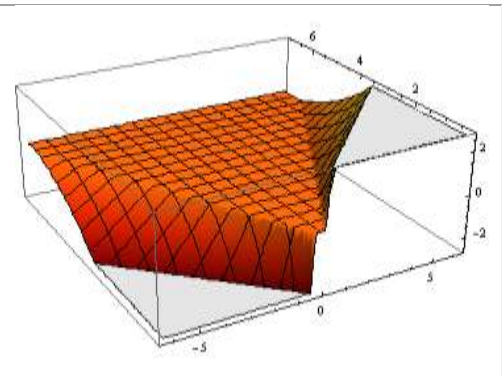


Fig. 21.5,b Funcția **aexax**, pentru $s = 1$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $\lambda \in [0,5, 7]$

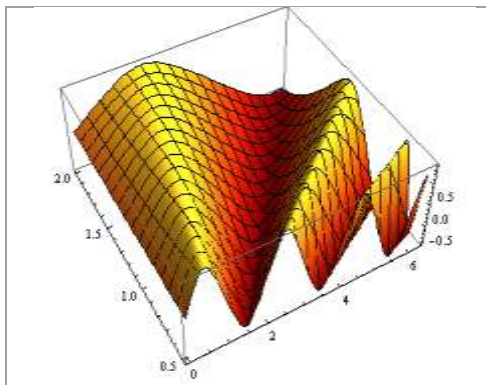


Fig. 21.6,a Funcția **bexax**, pentru $s = 0,8$; $z = 0$; $x \in [0, 2\pi]$ și $\lambda \in [0,5, 2]$

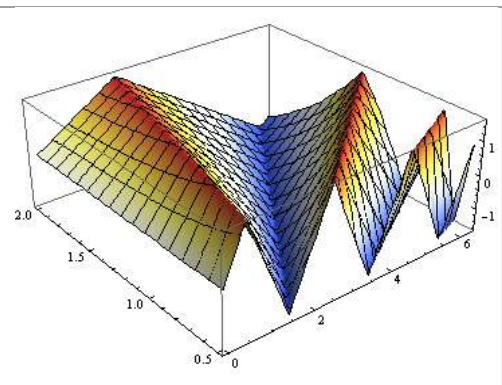


Fig. 21.6,b Funcția **bexax**, pentru $s = 1$ și $z = 0$; $x \in [0, 2\pi]$ și $\lambda \in [0,5, 2]$

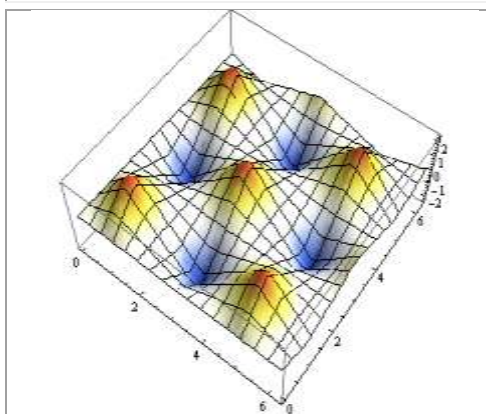


Fig. 21.6,c FCC dublu periodică **bexa(x)**. **bexa(y)**, $x,y \in [0; 2\pi]$, $\lambda = 1$

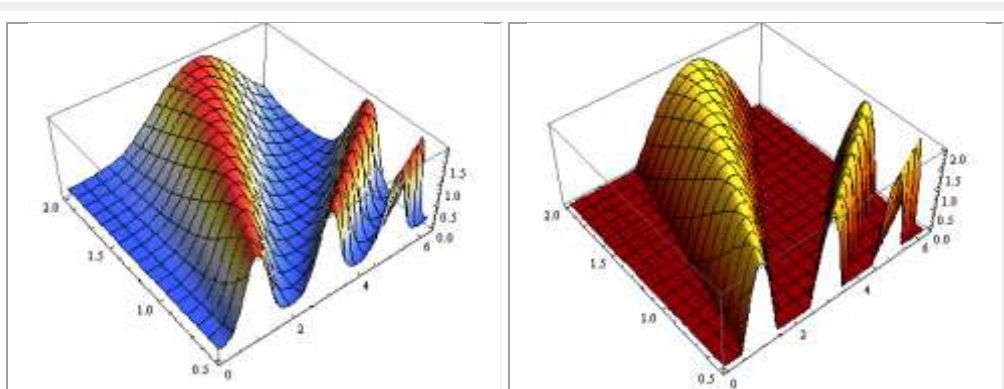


Fig. 21.7,a *rexax*, pentru $s = 0.8$ și $z = 0$ iar $x \in [0, 2\pi]$ și $\lambda \in [0.5, 2]$

Fig. 21.7,b *rexax*, pentru $s = 1$ și $z = 0$ iar $x \in [0, 2\pi]$ și $\lambda \in [0.5, 2]$

Plot3D[(- Cos[Pi x/2]+Sqrt[1-(Sin[Pi x/2])^2]) (- Cos[Pi y/2]+Sqrt[1-(Sin[Pi y/2])^2]), {x,0,2 Pi},{y,0,2 Pi}]

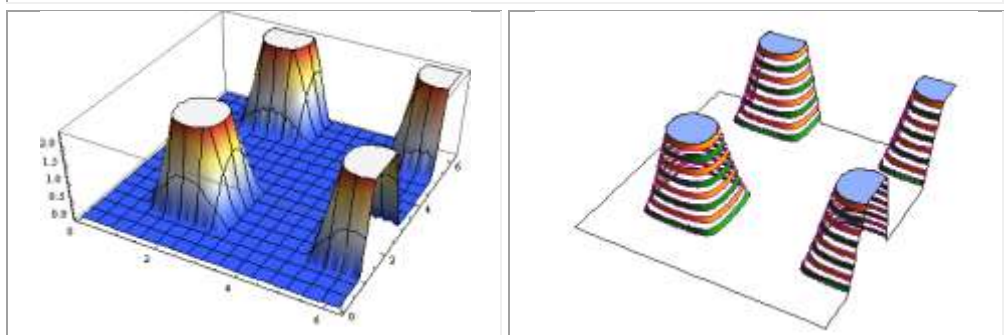


Fig. 21.7,c Funcția dublu periodică *rexa x . rexa y*, pentru $s \in [0,1; 1]$; $\lambda \in [1;10]$

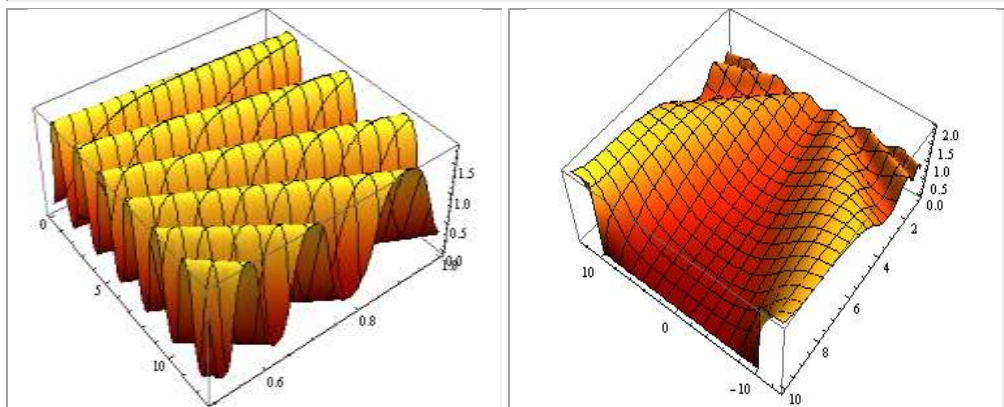


Fig. 21.8,a Funcția *dexa x*, pentru $s = 0.8$

Fig. 21.8,b Funcția *dexa x*, pentru $s \in [0,1; 1]$; $\lambda \in [1;10]$

Prin combinarea acestora, se pot obține și alte funcții de acest gen.

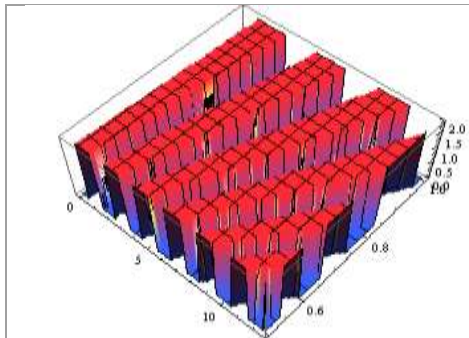


Fig. 21.8,c Funcția **dexax** ,
pentru $s = 1$ și $z = 0$,
iar $x \in [0, 2\pi]$ și $\lambda \in [0.5; 2]$

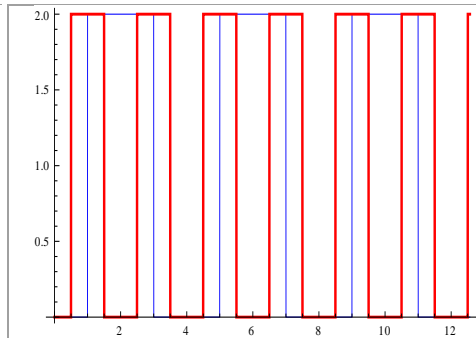


Fig. 21.9 Funcția **dexax**,
pentru $s = 1$, $z = 0$, $\lambda = 0,5$
și $\lambda = 1$ cu $x \in [0, 2\pi]$

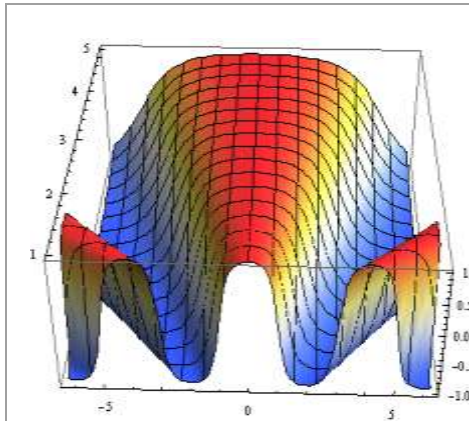


Fig. 21.10,a **cosqax** ,
pentru $s = 0,9$, $\lambda \in [1; 5]$

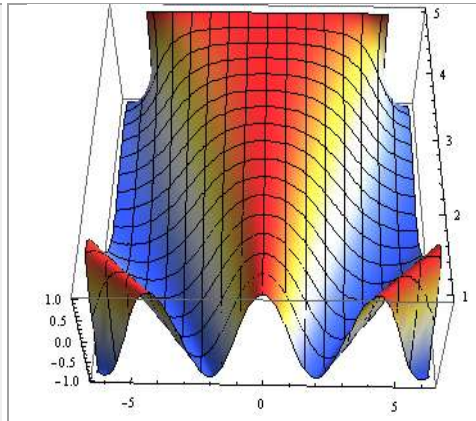


Fig. 21.10,b **cosqax** ,
pentru $s \in [0,1; 1]$, $\lambda \in [1; 5]$

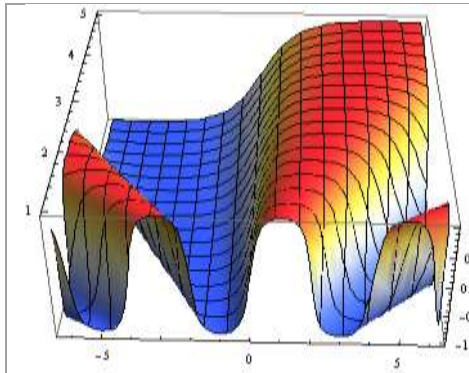


Fig. 21.10,a **sinqax** ,
pentru $s = 0,9$; $\lambda \in [1; 5]$

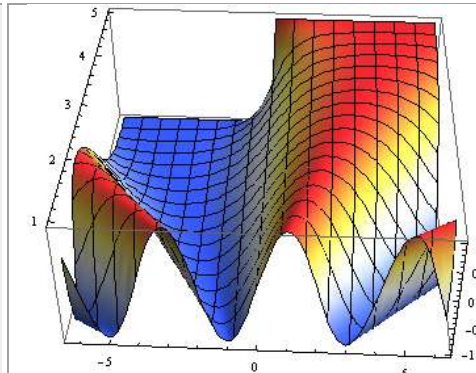


Fig. 21.10,b **sinqax** ,
pentru $s \in [0,1; 1]$, $\lambda \in [1; 5]$

Aceste funcții, neavând antecedente în centric, vor fi supuse doar transformării analitice, prin înmulțirea variabilei x cu raportul $\frac{\pi}{2\lambda}$.

Astfel, funcția **aexa x** are expresia :

$$(21.12) \quad \text{aexa } x = \frac{\pi}{2\lambda} x - \arcsin[s \cdot \sin(x - \frac{\pi}{2\lambda} x - z)] \text{ și graficele din figura 21.5,a și 21.5,b, pentru excentricitatea numerică } s = 0.8 \text{ și, respectiv, } s = 1.$$

Nu s-au folosit excentricități s mai mici, întrucât, undulațiile suprafeței înclinate devin greu observabile.

Numai pentru $s = 1$ (**Fig.21.5,b**) suprafața este compusă numai din suprafețe plane: orizontale (platouri), alternând cu suprafețele plane înclinate la 45° .

Funcția beta excentrică analitică are expresia invariantă :

$$(21.13) \quad \text{bexa } x = \arcsin[s \cdot \sin(x \frac{\pi}{2\lambda} - z)] \text{ și graficele 3D din figura 21.6, a și b.}$$

Funcția radial excentrică analitică are expresia :

$$(21.14) \quad \text{rexa } x = : -s \cdot \cos(x \frac{\pi}{2\lambda} - z) + \sqrt{1 - s^2 \sin^2(x \frac{\pi}{2\lambda} - z)}$$

și graficele 3D din figurile 21.7.

Funcția derivată excentrică analitică are expresia :

$$(21.15) \quad \text{dexa } x = 1 - \frac{s \cdot \cos \frac{\pi x}{2\lambda}}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\frac{\pi x}{2\lambda} - z)}} \text{ și graficele 3D din figura 21.8, a , b și c.}$$

Se observă din **figura 21.8,c** că, pentru $s = 1$, funcția are forma unui semnal dreptunghiular periodic, de perioadă egală cu $T(\lambda) = 4 \lambda$ pe direcția x și este aperiodică pe direcția λ , modulată în frecvență, frecvența scăzând cu creșterea lui λ .

Pentru $\lambda = 0.5$, funcția dexa x este un semnal dreptunghiular de amplitudine 2 și de perioadă 2, așa cum se observa în **figura 21.9**, pentru $\lambda = 1$.

Dacă, din funcția dex, se scade 1 și se schimbă semnul, atunci se obține funcția cosinus cvadrilob **coqx** \equiv **cosqx** din care, aplicând transformarea analitică, se va obține funcția cosinus cvadrilob analitic **cosqa x** a cărei expresie este :

$$(21.16) \quad \text{coqx} \equiv \text{cosqa } x = : \frac{\cos \frac{\pi x}{2\lambda}}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2[\frac{\pi x}{2\lambda} - z]}}$$

cvadrilob analitic, **siqx** \equiv **sinqa x**, se obține analog și este :

$$(21.17) \quad \text{siqx} \equiv \text{sinqa } x = : \frac{\sin \frac{\pi x}{2\lambda}}{\sqrt{1 - s^2 \cos^2[\frac{\pi x}{2\lambda} - z]}}$$

($s = 0.9$).

Din **figura 21.9** rezultă că aceste funcții pot înlocui cu succes funcțiile **Rademacher**

$$(21.18) \quad \text{rad}(n, \theta) = \text{sgn}[\sin(2n\pi\theta)] \text{ cu } \theta = t / T, \text{ în intervalul } [-1/2, +1/2] \text{ ca și funcțiile Walsh și Haar (prin FSM-CE cvadrilobe de } s = \pm 1) \text{ utilizate la prelucrarea numerică a semnalelor.}$$

21.6 FUNCȚII CIRCULARE EXCENTRICE CA FUNCȚII TRIGONOMETRICE CENTRICE ANALITICE.

Pentru ca o funcție circulară excentrică, de variabilă excentrică x , să reprezinte o funcție trigonometrică analitică centrică este necesar ca argumentele celor două funcții să fie egale, adică:

$$(21.19) \quad \begin{cases} y = \cos\left(\frac{\pi}{2\lambda} u\right) \\ y = cex(u, E) = \cos\{u - \arcsin[s \cdot \sin(u - z)]\} \end{cases}, \quad \text{adică}$$

$$(21.20) \quad \frac{\pi}{2\lambda} u = u - \arcsin[s \cdot \sin(u - z)], \text{ din care rezultă că excentricitatea}$$

numerică s a **FSM-CE** trebuie să fie variabilă, dată de relația :

$$(21.21) \quad s = \frac{\sin\left[u\left(1 - \frac{\pi}{2\lambda}\right)\right]}{\sin(u - z)} = s_v$$

Relația scoate în evidență mai multe posibilități în care poate să evolueze excentrul variabil $S_v(s_v, z)$, pe discul cercului unitate.

Dacă direcția este constantă ($z = C$), ca de exemplu $C = 0$, atunci S_v evoluează pe axa x ($z = 0$), iar dacă $s_v = C = \text{constant}$, ca de exemplu $s_v = 1$, atunci S_v evoluează pe cercul unitate, cu viteză constantă, unghiul de rotație z_v , în jurul originii $O(0,0)$, fiind dat de relația

$$(21.22) \quad z = \varepsilon = \frac{\pi}{2\lambda} x = \frac{\pi}{2\lambda} \theta = \varepsilon_v.$$

21.7 FUNCȚII CIRCULARE EXCENTRICE ANALITICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ

Aplicând transformarea analitică (21.7) funcțiilor circulare centrice de variabilă centrică y (v. Vol.I, Cap.7) se obțin următoarele funcții analitice:

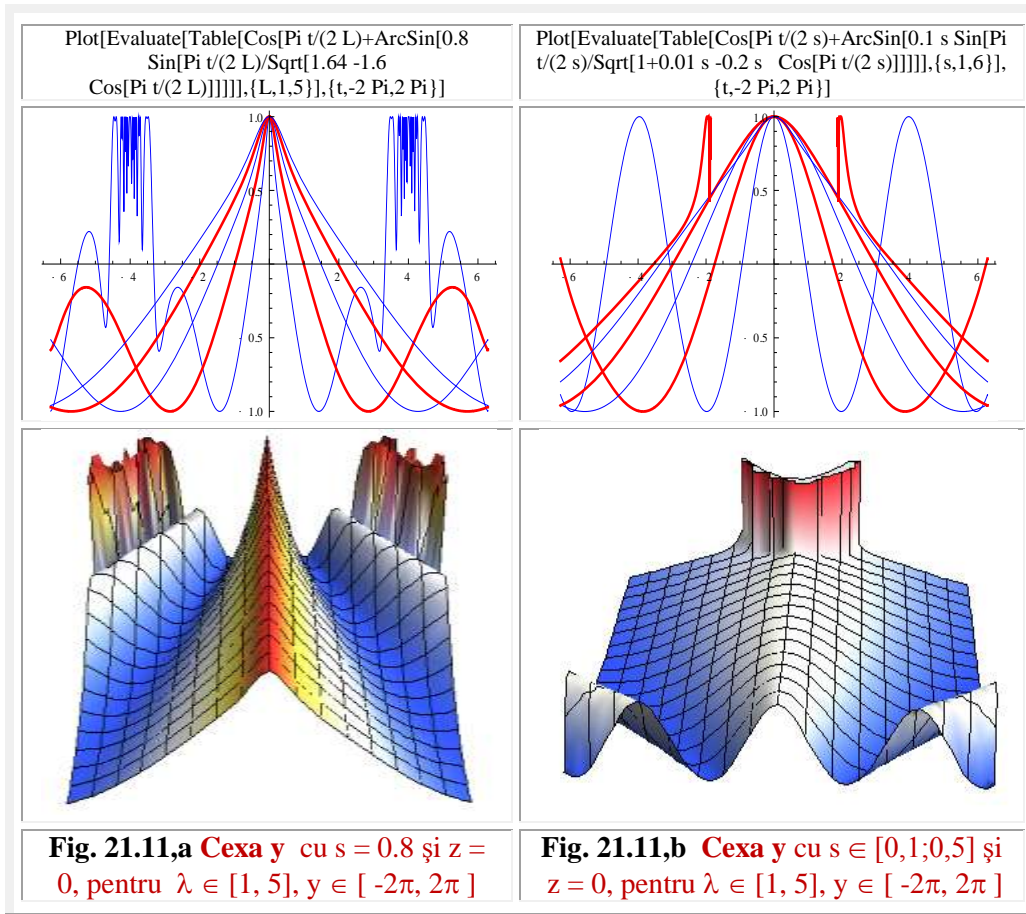
Cosinusul excentric analitic, dat de relația invariantă :

$$(21.23) \quad Cexa y = : \cos \left[y \cdot \frac{\pi}{2\lambda} + \arcsin \frac{s \cdot \sin\left(y \cdot \frac{\pi}{2\lambda} - z\right)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cdot \cos\left(y \cdot \frac{\pi}{2\lambda} - z\right)}} \right]$$

Sinus excentric analitic, dat de relația invariantă :

$$(21.24) \quad Sexa y = : \sin \left[y \cdot \frac{\pi}{2\lambda} + \arcsin \frac{s \cdot \sin\left(y \cdot \frac{\pi}{2\lambda} - z\right)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cdot \cos\left(y \cdot \frac{\pi}{2\lambda} - z\right)}} \right]$$

Graficele acestor funcții sunt prezentate în **figurile 21.11**.



Dintre funcțiile circulare excentrice analitice, independente de sistemul de referință, amplitudinea excentrică $A_{exa} y$ are expresia

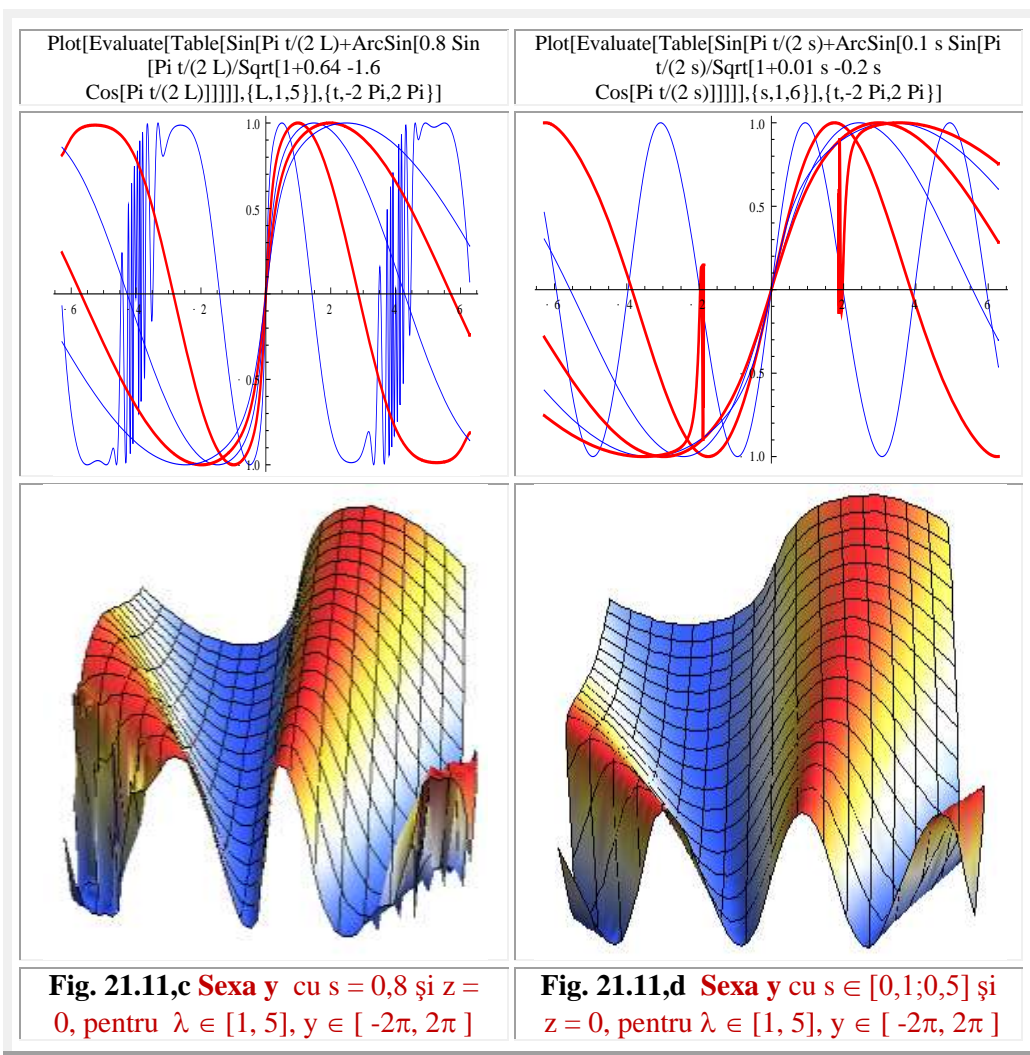
$$(21.25) \quad A_{exa} y = \frac{\pi}{2\lambda} y + \arcsin\left[\frac{s \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2\lambda} y - z\right)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2\lambda} y - z\right)}}\right],$$

cu două grafice și câte o secțiune prin ele, sunt prezentate în figurile 21.12.

Funcția beta excentric analitică $B_{exa} y$ are expresia

$$(21.26) \quad B_{exa} y = \arcsin\left[\frac{s \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2\lambda} y - z\right)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2\lambda} y - z\right)}}\right] \text{ și graficele cu o}$$

secțiune sunt prezentate în figurile 21.13.



Deoarece funcția $\text{bex } y$ reprezintă unghiul w , respectiv $\beta = w \pmod{2\pi}$, ca diferență dintre cele două variabile independente, adică :

(20.27) $\beta = \theta - \alpha$ sau $w = (x - y)$, transformarea analitică se poate aplica nu variabilei independente, cum s-a procedat anterior, ci unghiului β , respectiv w , caz în care, expresia lui beta analitic w_a , de variabilă excentrică x , va fi data de relația :

$$(21.28) \quad W_a(x) = \frac{\pi}{2\lambda} \arcsin[s \cdot \sin(x-z)], \text{ iar de variabilă } y \text{ de relația :}$$

$$(21.29) \quad W_a(y) = \frac{\pi}{2\lambda} \arcsin \frac{s \cdot \sin(y-z)}{\sqrt{1+s^2-2s \cdot \cos(y-z)}} \text{ cu graficele în } \mathbf{figurile 21.14}.$$

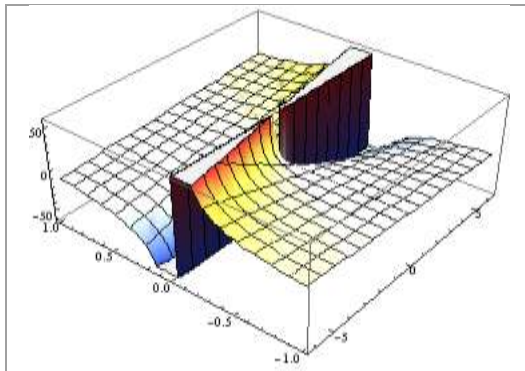


Fig. 21.12,a Aexa y cu $s = 0,8$ și $z = 0$, pentru $y \in [-2\pi, 2\pi]$, $\lambda \in [0,5; 2]$

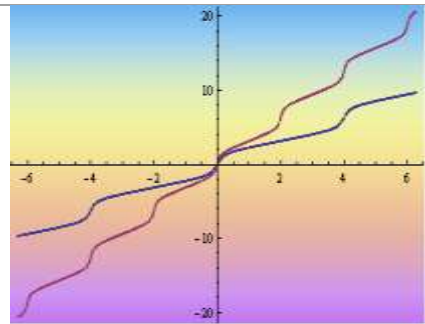


Fig. 21.12,b Secțiune prin Aexa y la $\lambda = 0,5$ și $\lambda = 1$

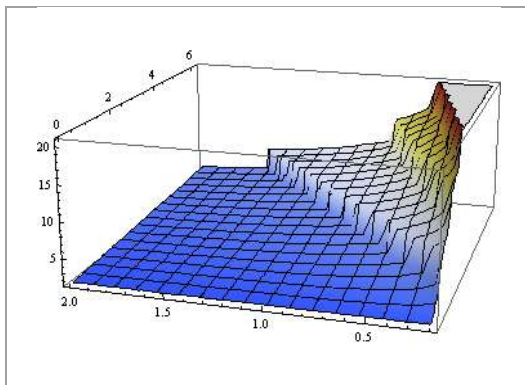


Fig.21.12,c Aexa y cu $s = 1$ și $z = 0$, pentru $y \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in [0,2, 2]$

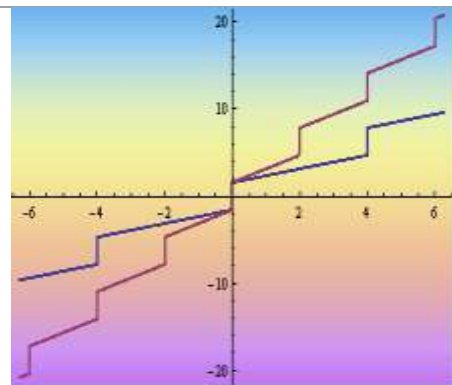


Fig. 21.12,d Secțiune prin Aexa y cu $s = 1$ și $z = 0$, la $\lambda = 0.5$ și $\lambda = 1$

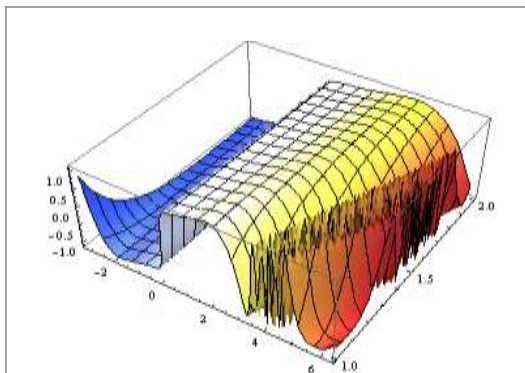


Fig. 21.13,a Bexa y cu $s = 0.8$ și $z = 0$, Pentru $y \in [-\pi, 2\pi]$ și $\lambda \in [1, 2]$

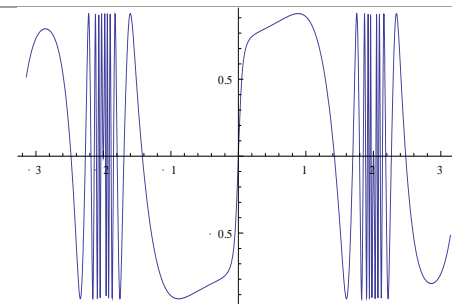


Fig. 21.13,b Secțiune prin Bexa y la $\lambda = 0.5$ cu $s = 0.8$ și $z = 0$, pentru $y \in [-\pi, \pi]$.

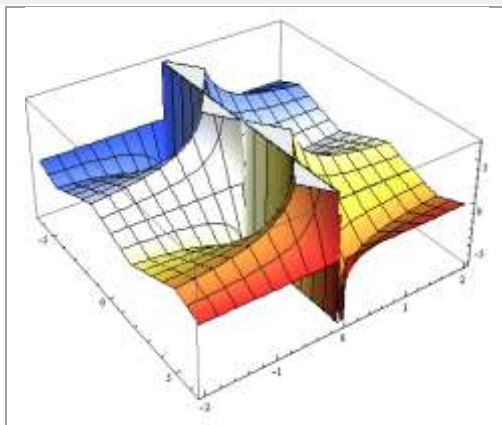


Fig. 21.14,a Funcția beta analitic $w_a(x)$ cu $k = 1$ și $z = 0$, $x \in [-2\pi; +2\pi]$.

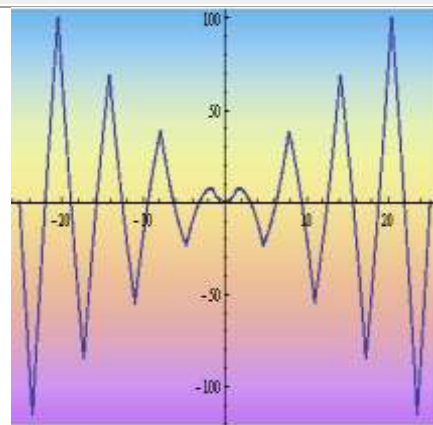


Fig. 21.14,b Secțiune la $\lambda = 0.5$ prin $w_a(x)$ cu $k = 1$ și $z = 0$

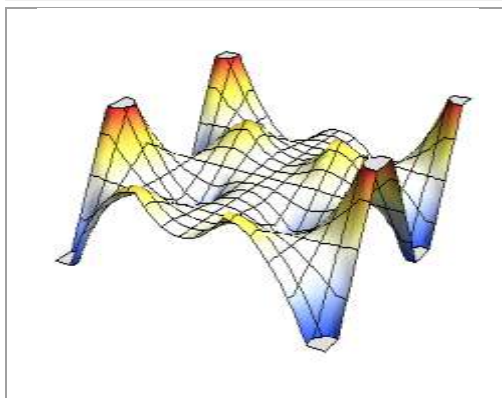


Fig. 21.7,c Funcția dublu periodică $w_a(x) \cdot w_a(y)$, pentru $s \in [0,1; 1]$; $\lambda \in [1;10]$

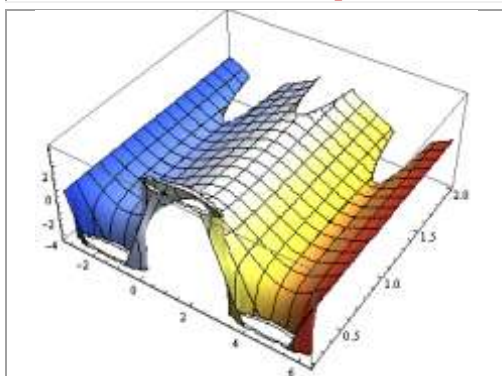
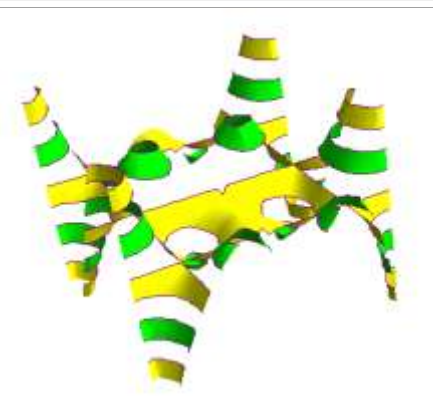


Fig. 21.14,c Funcția beta analitic $w_a(y)$ cu $k = 1$ și $z = 0$.

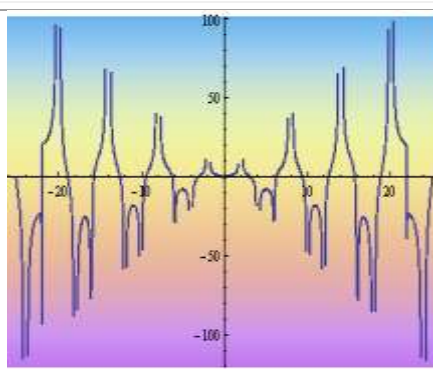


Fig. 21.14,d Secțiune la $\lambda = 0.5$ prin $w_a(y)$ cu $k = 1$ și $z = 0$

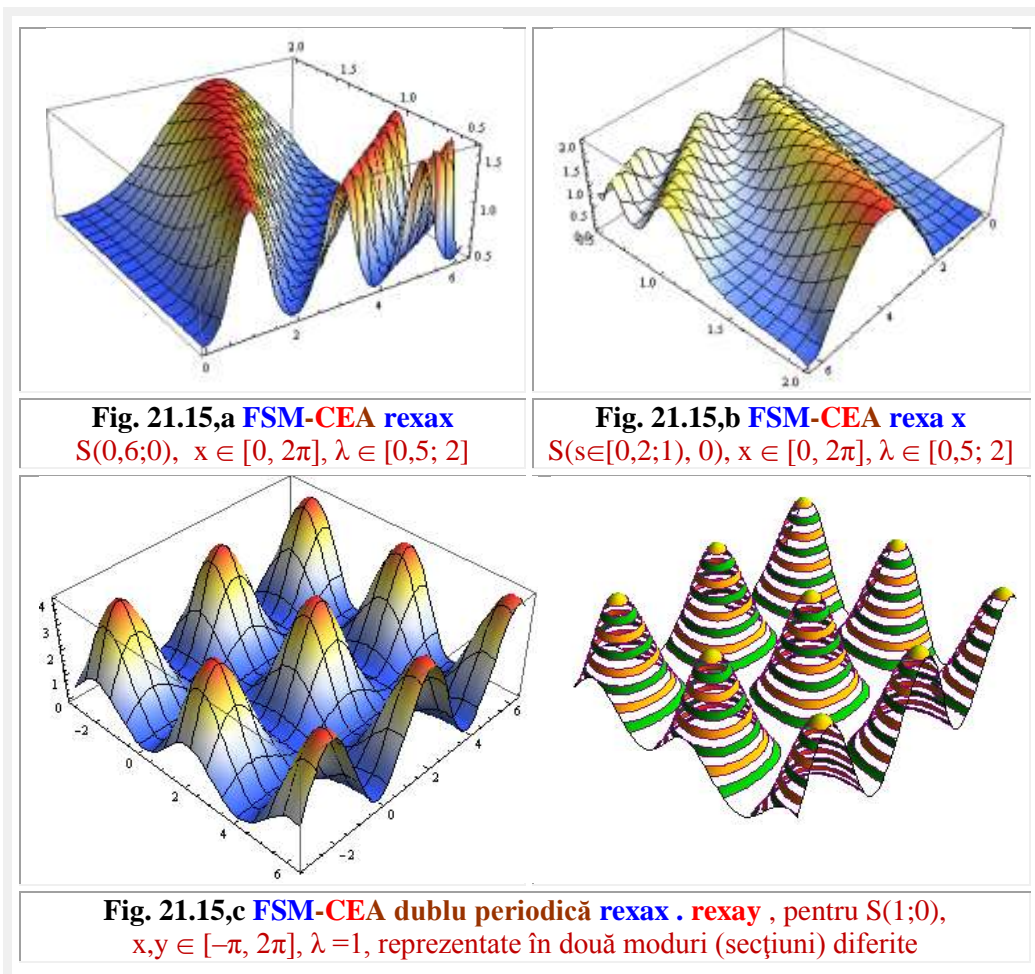
21.8. FSM-CEA RADIAL EXCENTRIC rexa x și Rexa y

Expresia analitică invariantă a acestei funcții este [4], [9], [10], [11] :

$$(21.30) \quad \text{rex} (x,E) = -s \cdot \cos(x-z) + \sqrt{1 - s^2 \sin^2(x-z)},$$

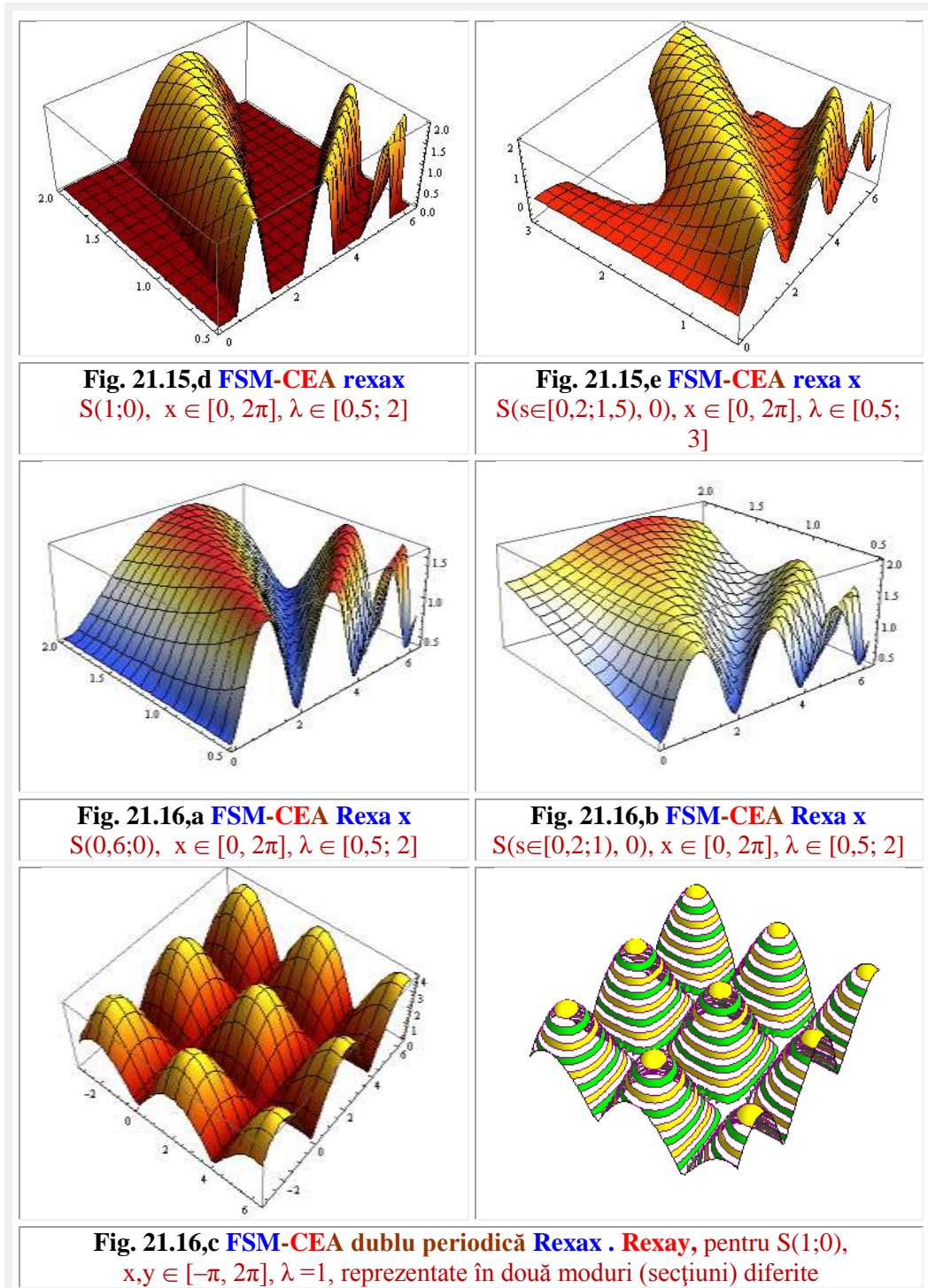
de variabila excentrica x sau θ și

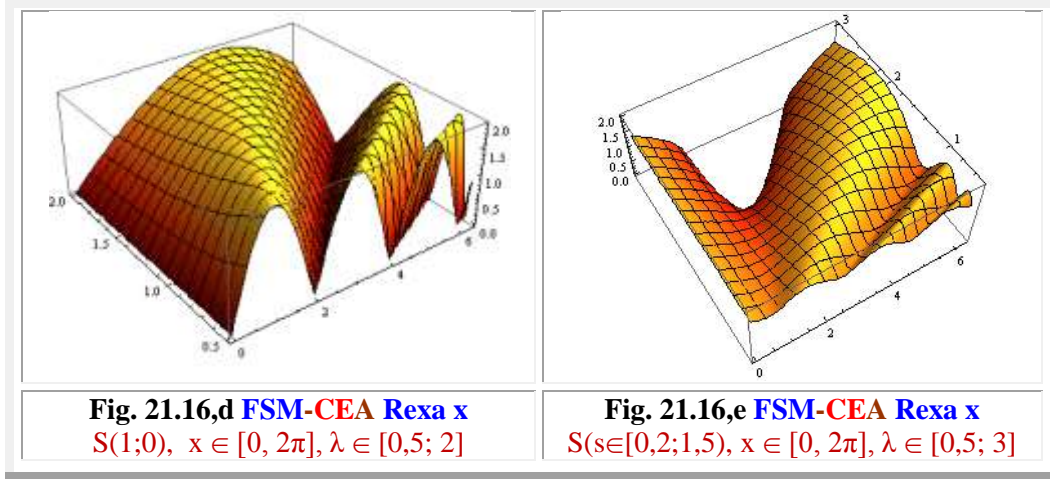
$$(21.31) \quad \text{Rex} (y, E) = \sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(y-z)}, \text{ de variabilă centrică } y \text{ sau } \alpha.$$



Dacă în (21.30) se aplică transformarea analitică (21.7) se obține **FSM-CEA** radial excentrică analitică de variabilă excentrică:

$$(21.32) \quad \text{rexa} (x,E, \lambda) = -s \cos\left(\frac{\pi}{2\lambda} x - z\right) + \sqrt{1 - s^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2\lambda} x - z\right)}, \text{ (Fig. 21.15)}$$





iar dacă se aplică în (21.27) se obțin cele de variabilă centrică (**Fig. 21.16**):

$$(21.33) \quad \text{RexA}(y,E, \lambda) = \sqrt{1 + s^2 - 2s \cos\left(\frac{\pi}{2\lambda} y - z\right)}.$$

21.9. FSM-CEA DERIVATĂ EXCENTRICĂ dexa x și Dexa y

Expresia analitică invariantă a funcției **dex x** și **Dex y** este

$$(21.34) \quad \text{dex } x = 1 - \frac{s \cos(x - z)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(x - z)}}, \text{ ca funcție de variabila excentrică } x \text{ sau } \theta \text{ și}$$

$$(21.35) \quad \text{Dex } y = \frac{1 - s \cos(y - z)}{1 + s^2 - 2s \cos(y - z)}, \text{ ca funcție de variabila centrică } y \text{ sau } \alpha.$$

Astfel că, utilizând / aplicând transformarea analitică (21.7), rezultă **FSM-CEA**:

$$(21.36) \quad \text{dexa}(x,E, \lambda) = 1 - \frac{s \cos\left(\frac{\pi}{2\lambda} x - z\right)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2\lambda} x - z\right)}} \quad \text{și}$$

$$(21.37) \quad \text{Dexa}(y,E, \lambda) = \frac{1 - s \cos\left(\frac{\pi}{2\lambda} y - z\right)}{1 + s^2 - 2s \cos\left(\frac{\pi}{2\lambda} y - z\right)}.$$

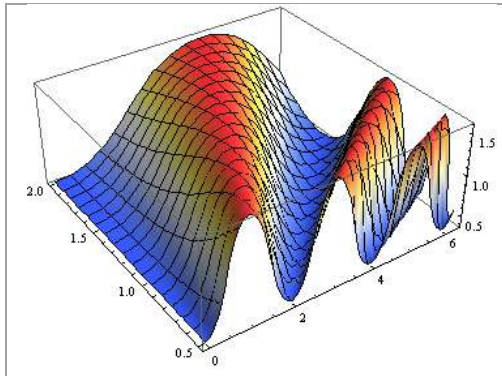


Fig. 21.17,a FSM-CEA dexax
 $S(0,6;0)$, $x \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in [0,5; 2]$

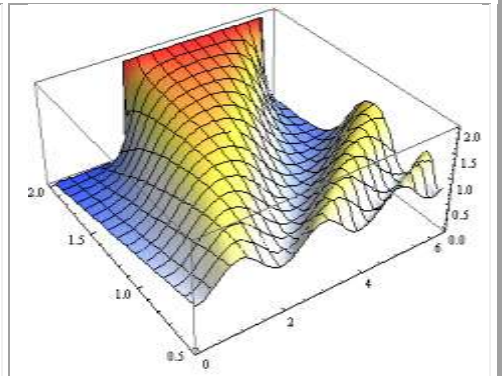


Fig. 21.17,b FSM-CEA dexa x
 $s(0,2;1)$, $x \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in [0,5; 2]$

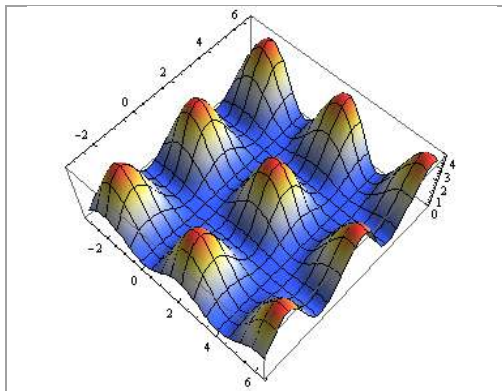


Fig. 21.17,c FSM-CEA dublu periodică dexax . dexay, pentru
 $S(1;0)$, $x,y \in [-\pi, 2\pi]$, $\lambda = 1$, reprezentate în două moduri (secțiuni) diferite

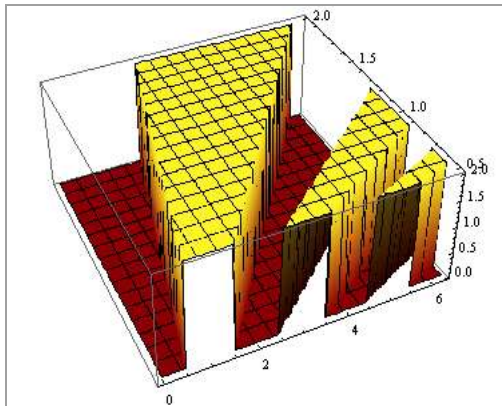


Fig. 21.17,d FSM-CEA dexax
 $S(1;0)$, $x \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in [0,5; 2]$

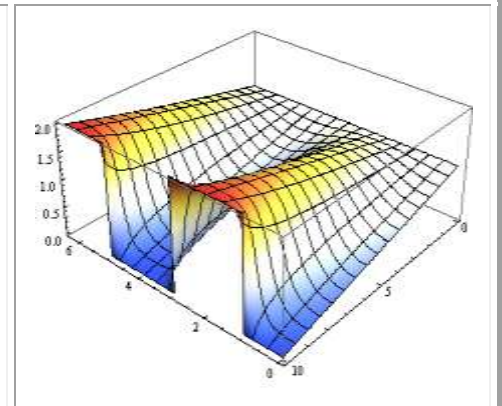
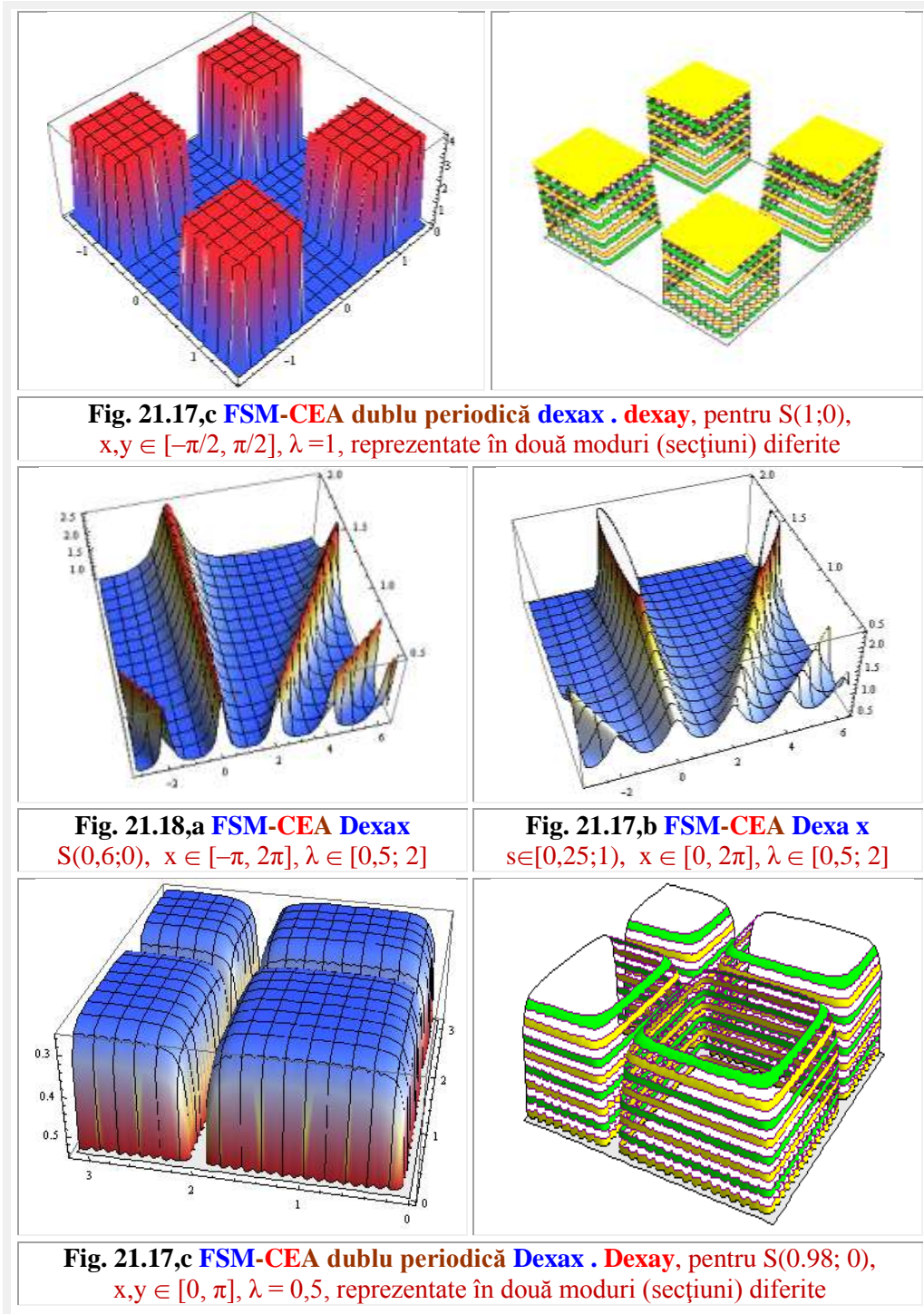


Fig. 21.17,e FSM-CEA dexa x
 $S(s(1;0))$, $x \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in [0; 1]$



21.10 FSM-CE DUBLU ANALITICE

Așa cum s-a afirmat, dacă ambelor variabile (centrică și excentrică) li se aplică simultan **transformările analitice** (21.7), rezultă **FSM-CE** dublu analitice (**2A**).

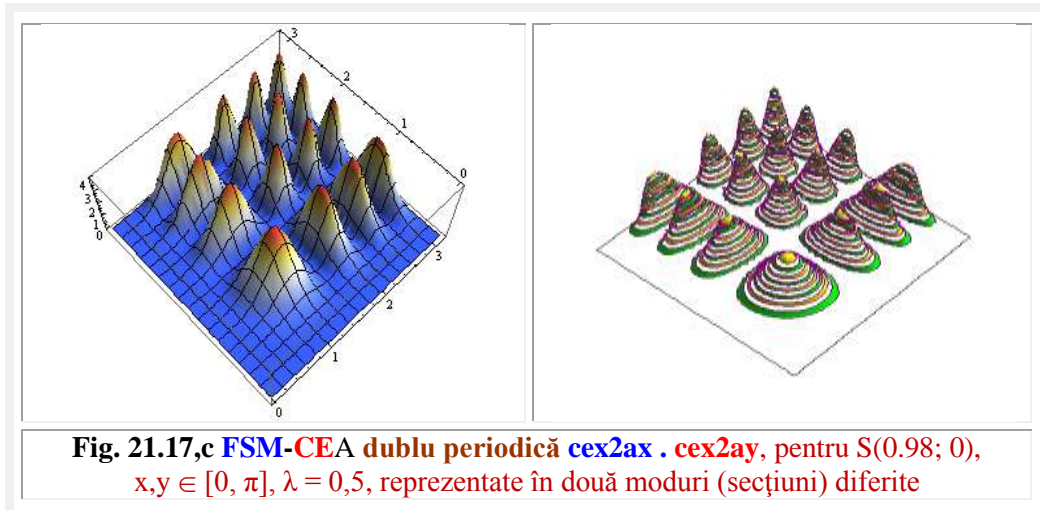
Prin definiție $d\theta = d\alpha/d\theta$ și $Dex\alpha = d\theta/d\alpha$, astfel ca **FSM-CE** dublu analitice (**2A**) sunt identice cu cele ordinare (21.30) și (21.31), deoarece se înmulțește simultan x și y , sau θ și α , cu aceeași expresie (21.7).

Celelalte **FSM - CE2A** sunt $cex2a$, $Cex2a$, $sex2a$, $Sex2a$ ș.a. de exemplu, expresia analitică a lor este :

$$(21.38) \quad \begin{cases} cex2a(x, E, \lambda) = \frac{\pi}{2\lambda} x \left[\left(\frac{\pi}{2\lambda} x - \arcsin \left[s \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2\lambda} x - z \right) \right] \right) \right] \\ sex2a(x, E, \lambda) = \frac{\pi}{2\lambda} x \left[\left(\frac{\pi}{2\lambda} x - \arcsin \left[s \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2\lambda} x - z \right) \right] \right) \right] \end{cases}$$

(21.39)

$$\begin{cases} Cex2a(y, E, \lambda) = \left\{ \frac{\pi}{2\lambda} y \left[\frac{\pi}{2\lambda} y + \arcsin \frac{s \sin \left(y \frac{\pi}{2\lambda} y - z \right)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos \left(\frac{\pi}{2\lambda} y - z \right)}} \right] \right\} \\ Sex2a(y, E, \lambda) = \sin \left\{ \frac{\pi}{2\lambda} y \left[\frac{\pi}{2\lambda} y + \arcsin \frac{s \sin \left(y \frac{\pi}{2\lambda} y - z \right)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos \left(\frac{\pi}{2\lambda} y - z \right)}} \right] \right\} \end{cases}$$



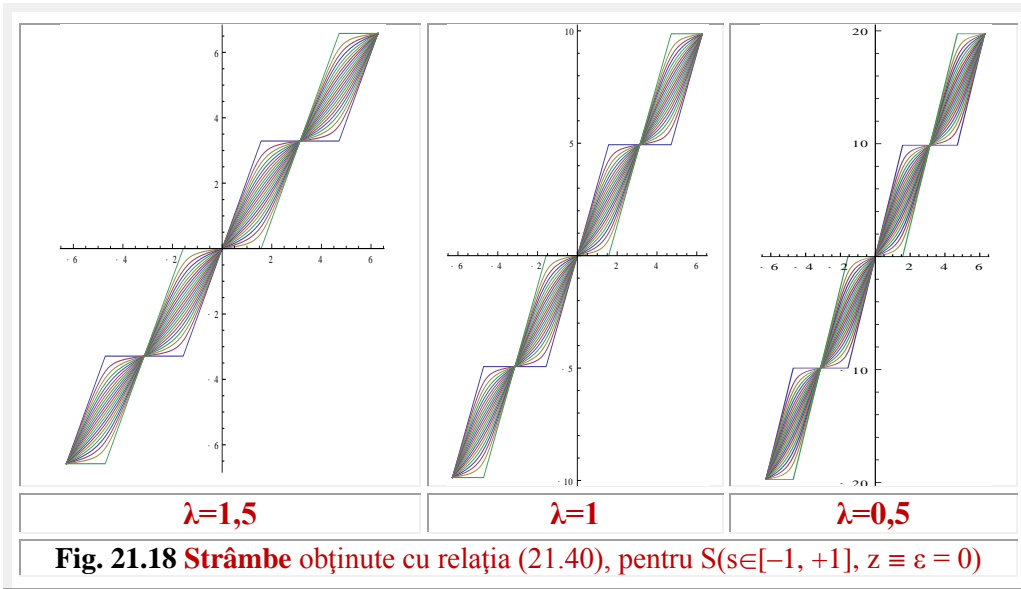
21.11. CONCLUZII

FSM-CEA sunt funcții dublu periodice de **variabilă excentrică** sau **centrică**, fiecare dintre acestea putând fi centric-analitice sau excentric-analitice.

FSM-CEA centric și excentric-analitice sunt denumite de dubla analicitate sau dublu analitice.

În funcție de tipul **excentrului E**, ele pot fi de **excentru punct fix**, când e și z sunt constante sau de **punct mobil**, dacă e și / sau z sunt variabile.

Sunt cazuri particulare, prezentate în lucrare, pentru care **FCE** de E_V dat de (21.11) reprezintă **FTA** sau **FCCA**.



Pentru **E fix** și $\lambda = \frac{\pi}{2}$ ele degenerază în **FSM-CE** ordinare, iar pentru $e = 0$ degenerază în **FCC** ordinare (sin, cos, tan sau tav ș.a.m.d.).

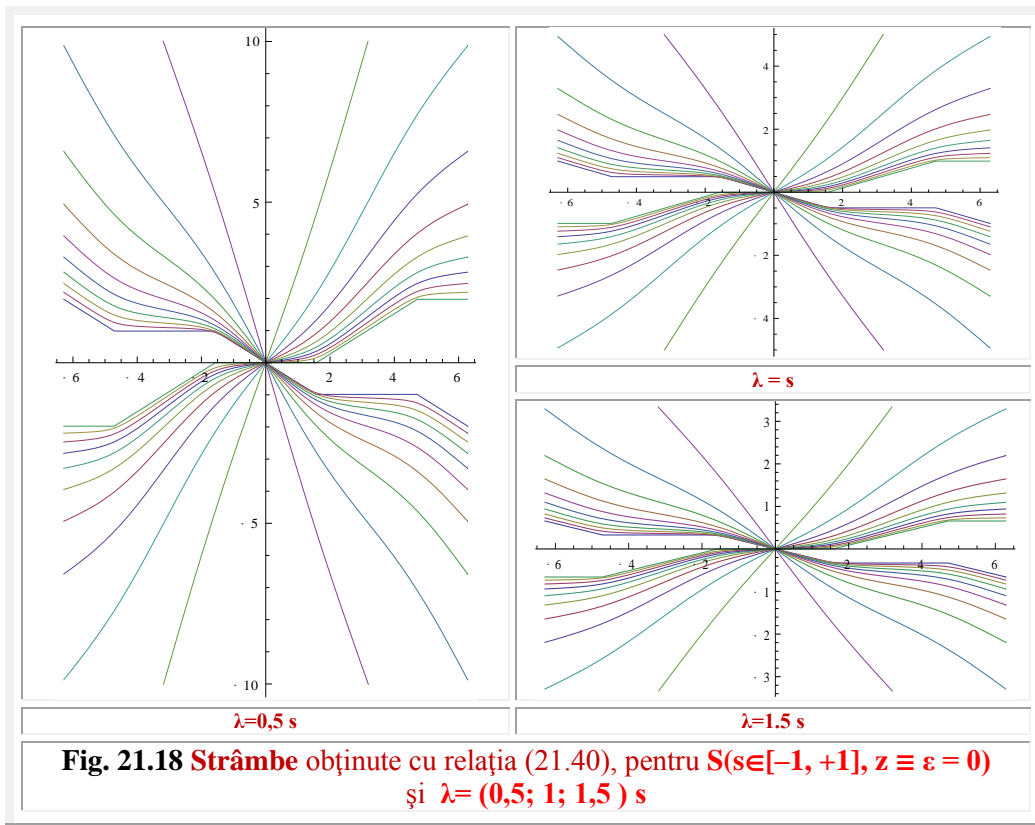
Așa cum, pentru $e = 0$, **aex x** degenerază într-o dreaptă (în prima bisectoare) și pentru $e \neq 0$ reprezintă o **familie de strâmbe** [3], corespunzătoare primei bisectoare, tot așa, pentru $\lambda \neq \pi/2$, dar constant, funcția amplitudine excentrică se va transforma într-o familie de strambe:

$$(21.40) \quad s: y = \frac{\pi}{2\lambda} \{x - \arcsin[s \sin(x - z)]\}$$

care oscilează / șerpuiesc (mi s-a făcut observația că acest cuvânt nu este propriu matematicii) de-o parte și de alta a direcției drepte (sau strâmbei (21.40) de $e = 0$):

$$(21.41) \quad d: y = \frac{\pi}{2\lambda} x \text{ de direcție } m = \frac{\pi}{2\lambda}.$$

Dacă λ nu este o constantă pozitivă, ci una negativă, sau chiar o funcție variabilă, atunci se obțin funcții analitice de parametru variabil. Pentru λ variabil se obțin funcții periodice modulate în frecvență.



Motto: ” Pentru cei mai mulți dintre noi, marele pericol nu este că țintim prea sus și nu reușim, ci că țintim prea jos și reușim ”

Michelangelo Buonarroti

Capitolul 22

FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ COMPLEXĂ (FSM-CEA) (C-analitice)

22.1 INTRODUCERE

Sunt numite funcții *monogene*, *olomorfe* sau *analitice*, după **A.L. Cauchy**, cel care a dezvoltat primul acest punct de vedere, funcțiile derivabile de variabilă complexă z :

(22.1) $z = x + i.y$, variabilă care poate fi scrisă și sub forma exponențială, dată de **Euler** pe baza notației lui **Roger Cotes** (1714)

(22.2) $z = r \cdot e^{i.\alpha}$, în care

(22.3) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $\alpha = \arcsin \frac{y}{r} = \arctan \frac{y}{x}$,

sau, sub o nouă formă, de vector unitate (versor / fazor) și, totodată, sub forma trigonometrică a funcțiilor circulare centrice noi, radial centric ($\text{rad}\alpha$), echivalenta funcției circulare excentrice radial excentric ($\text{rex}\theta$ și $\text{Rex}\alpha$) și derivata centrică ($\text{der}\alpha$), corespondenta în centric a funcției derivată excentrică ($\text{dex}\theta$ și $\text{Dex}\alpha$), prezentate în volumul I al acestei lucrări

(22.4) $z = r \cdot \text{rad } \alpha = r \cdot e^{i.\alpha}$ și

(22.5) $z' = dz/d\alpha = r \cdot \text{der } \alpha = r \cdot i \cdot e^{i.\alpha}$, astfel că versorii axelor x și y sunt
 $i = \text{rad}0^0$ și $j = \text{rad} \frac{\pi}{2} = \text{der}0^0$

(22.6) $x = \text{Re}(r \cdot \text{rad}\alpha) = r \cdot \cos\alpha$ și $y = \text{Im}(r \cdot \text{rad}\alpha) = r \cdot \sin\alpha$.

În lucrarea [**Hamburg P.** ș.a. **ANALIZĂ MATEMATICĂ. FUNȚII COMPLEXE**, Ed Didactică și Pedagogică, Buc., 1982], funcția este notată cu $e(\alpha)$.

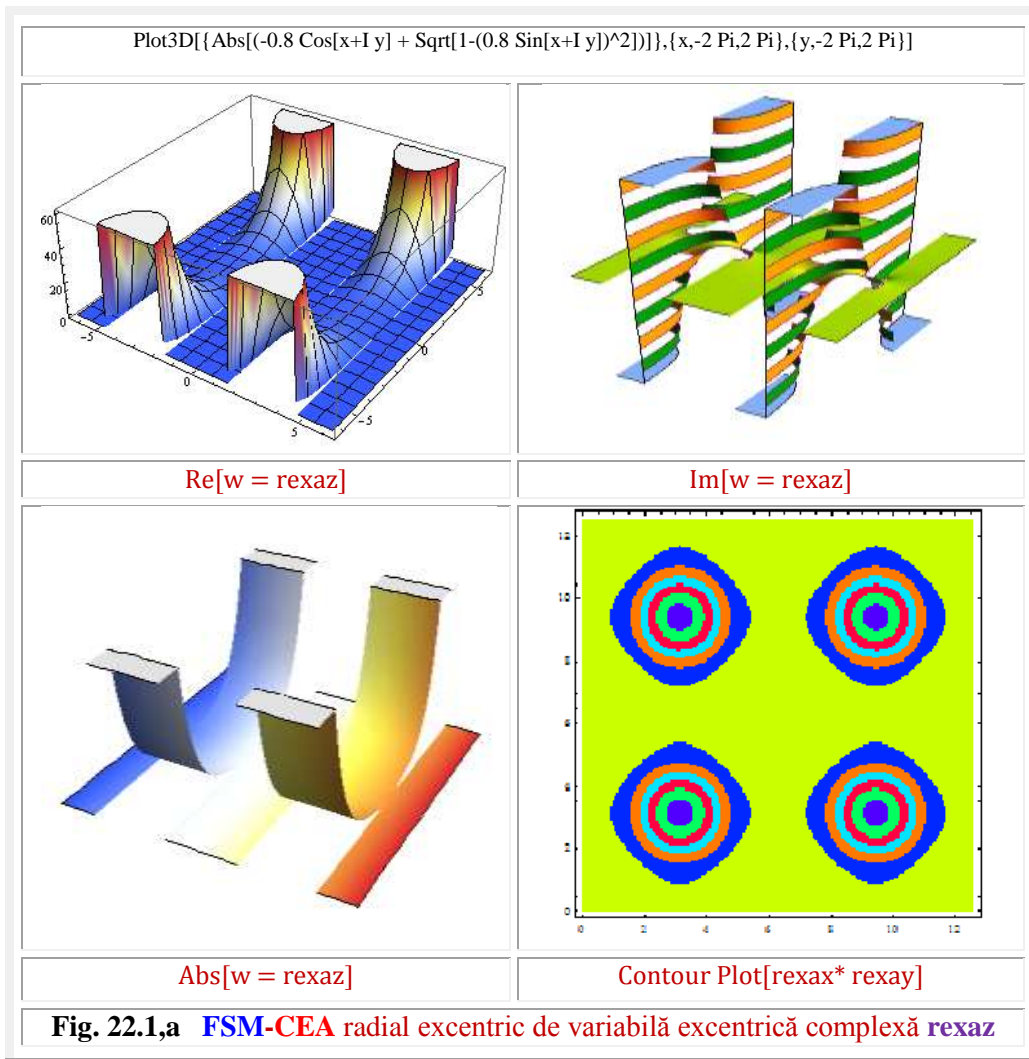
Condiția necesară și suficientă ca o funcție $f(z) = X + i.Y$ să fie monognă într-un punct z este ca în acest punct să îndeplinească condițiile **Cauchy – Riemann** :

$$(22.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \end{cases}$$

în coordonate carteziene sau, în coordonate polare (r, α) [**Angheluță Theodor**, CURS de TEORIA FUNCȚIILOR de VARIABILĂ COMPLEXĂ, Ediția a doua, Editura Tehnică, București, 1957] :

$$(22.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial u}{\partial \alpha} = -r \frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Se vor prezenta, în continuare, câteva exemple de funcții supermatematice circulare excentrice analitice de variabilă complexă, începând cu **FSM-CE « rege »**, de **variabilă centrică α , Rex α** .



În planul complex, notând cu $z = x + i.y$ un punct curent (**W**) al cercului unitate, de argument $\alpha = \arctan(y/x)$ și **excentrul E(k,ε)**, punct fix în planul complex, atunci funcția **Rex**, care exprima distanța de la **E** la **W**, va fi diferența vectorilor

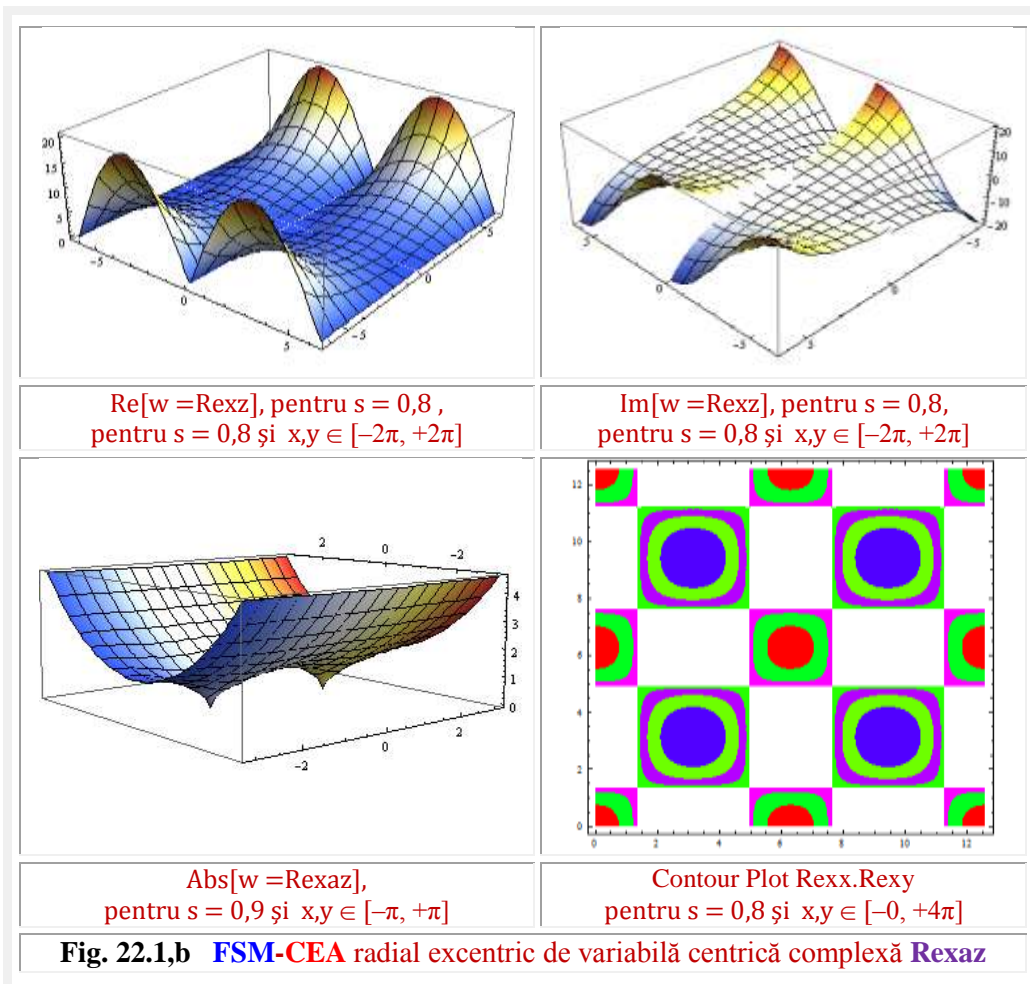
$$\mathbf{OW} - \mathbf{OE} = z - e$$

Funcția Rex α este atunci

$$(22.9) \quad \mathbf{W} = z - e = (x + i.y) - k \cdot \text{rad}\epsilon = (x + i.y) - k (\cos\epsilon - i \cdot \sin\epsilon) = (x - k \cdot \cos\epsilon) + i(y + \sin\epsilon) \text{ astfel c\aa}$$

$$(22.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ceea ce arat\aa ca funcția **Rex α** este analitic\aa cu excepția originii O(00).



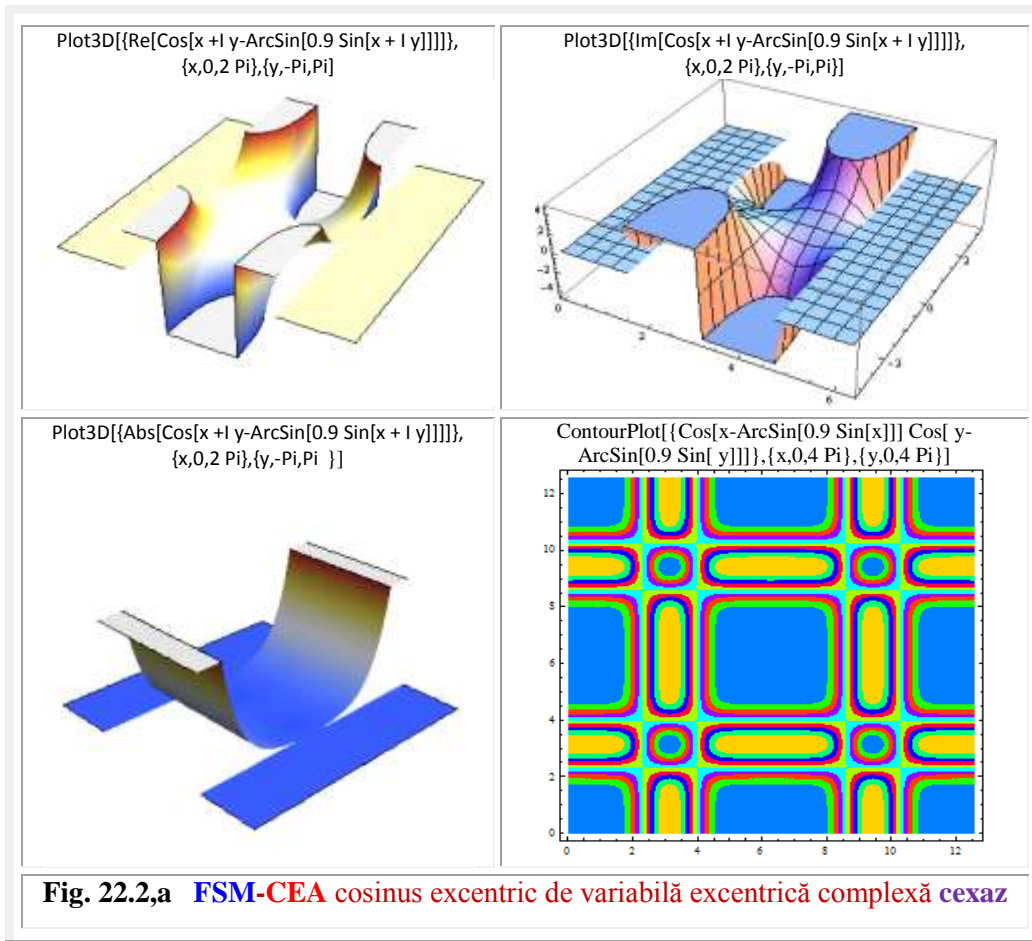
Consider\aa excentrul **E** ca un punct \u00een planul complex $z = k \cdot \text{rad}\epsilon = x + iy$, \u00een care $x = k \cdot \cos\epsilon$ și $y = k \cdot \sin\epsilon$ și **W** un punct fix pe cercul unitate, atunci p\aatratul funcției $\text{Rex}^2 \alpha = (1 + k^2 - 2k \cos \alpha)$ este funcția

$$(22.11) \quad W = 1 + z^2 - 2z \cos \alpha = (1 + x^2 - y^2 - 2x \cos \alpha) + 2i(xy - y \cos \alpha)$$

astfel că sunt îndeplinite condițiile de monogeneitate **Couchy-Riemann** (22.7

$$(22.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2(x - \cos \alpha) \\ -2y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \end{cases}$$

ceea ce arată că funcția $\text{Re} z^2 \alpha$ este o funcție analitică de excentru $\mathbf{E(E, \epsilon)}$ sau $\mathbf{E(x, y)}$ un punct în planul complex.



22.2 FSM-CE DE VARIABILĂ COMPLEXĂ (FSM-CEA)

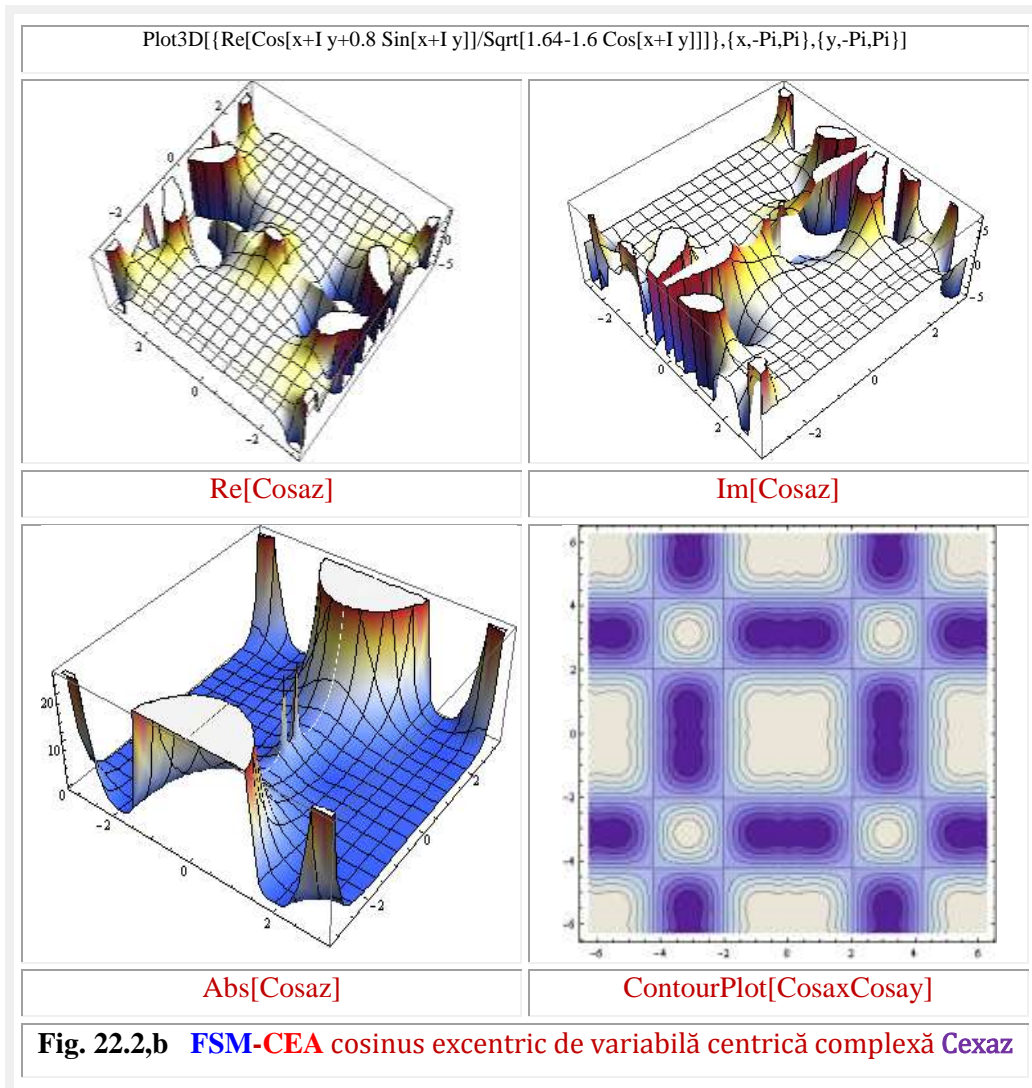
În lucrarea **Mircea Eugen Șelariu** “**SUPERMATEMATICA. Fundamente**”, volumul I, Editura POLITEHNICA, Timișoara, 2007 au fost tratate **funcțiile**

supermatematice circulare excentrice (FSM-CE) de variabile reale **excentrice** θ și **centrice** α .

Prin simpla înlocuire a acestor variabile reale cu unele complexe, pe care o denumim **transformare complexă**, adică

$$(22.12) \quad \begin{cases} \theta \Rightarrow z = x + i.y \\ \alpha \Rightarrow z = x + i.y \end{cases}$$

se va trece de la **FSM-CE** de variabilă reală la cele de variabilă complexă **FSM-CEA**.



Astfel, funcția **cex** $\theta \rightarrow \text{cexz} = \text{cex}(x + i.y)$, **sex** $\theta \rightarrow \text{sexz} = \text{sex}(x+i.y)$ ș.a.m.d. iar **Cex** $\alpha \rightarrow \text{Cexz} = \text{Cex}(x + i.y)$ și **Sex** $\alpha \rightarrow \text{Sexz} = \text{Sex}(x + i.y)$ și la fel pentru celelalte funcții circulare.

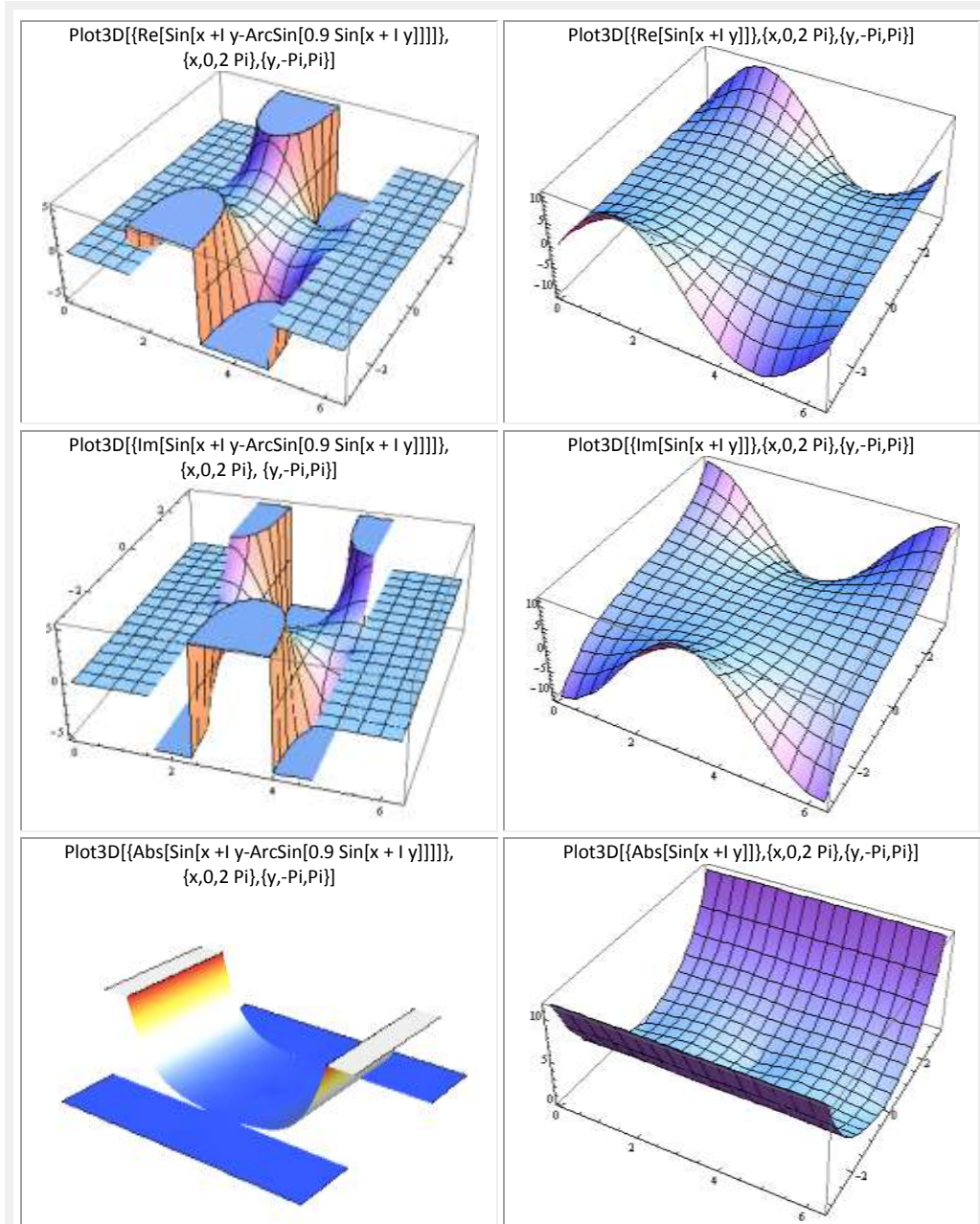
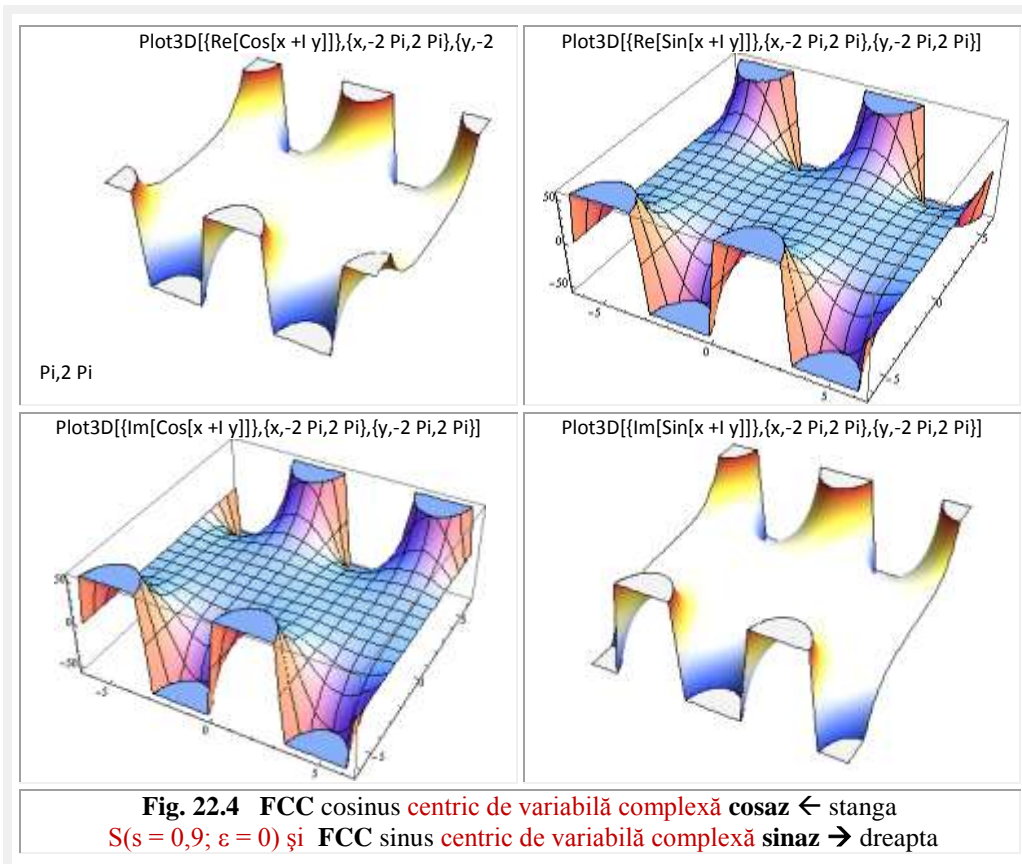
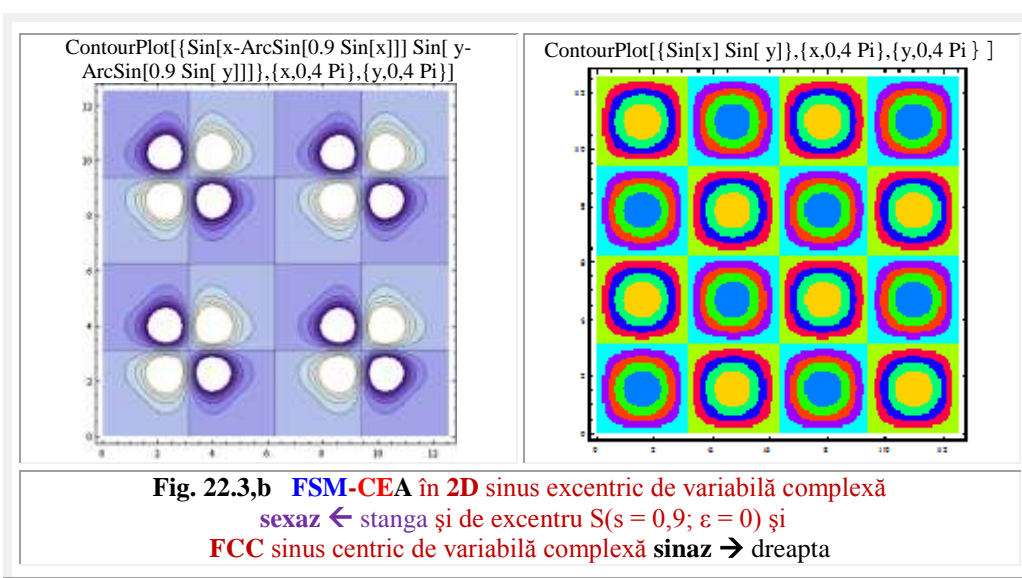


Fig. 22.3,a FSM-CEA sinus excentric de variabilă complexă $sexaz \leftarrow$ stanga și de excentru $S(s = 0,9; \epsilon = 0)$ și FCC sinus centric de variabilă complexă $sinaz = sexa(z, s = 0) \rightarrow$ dreapta

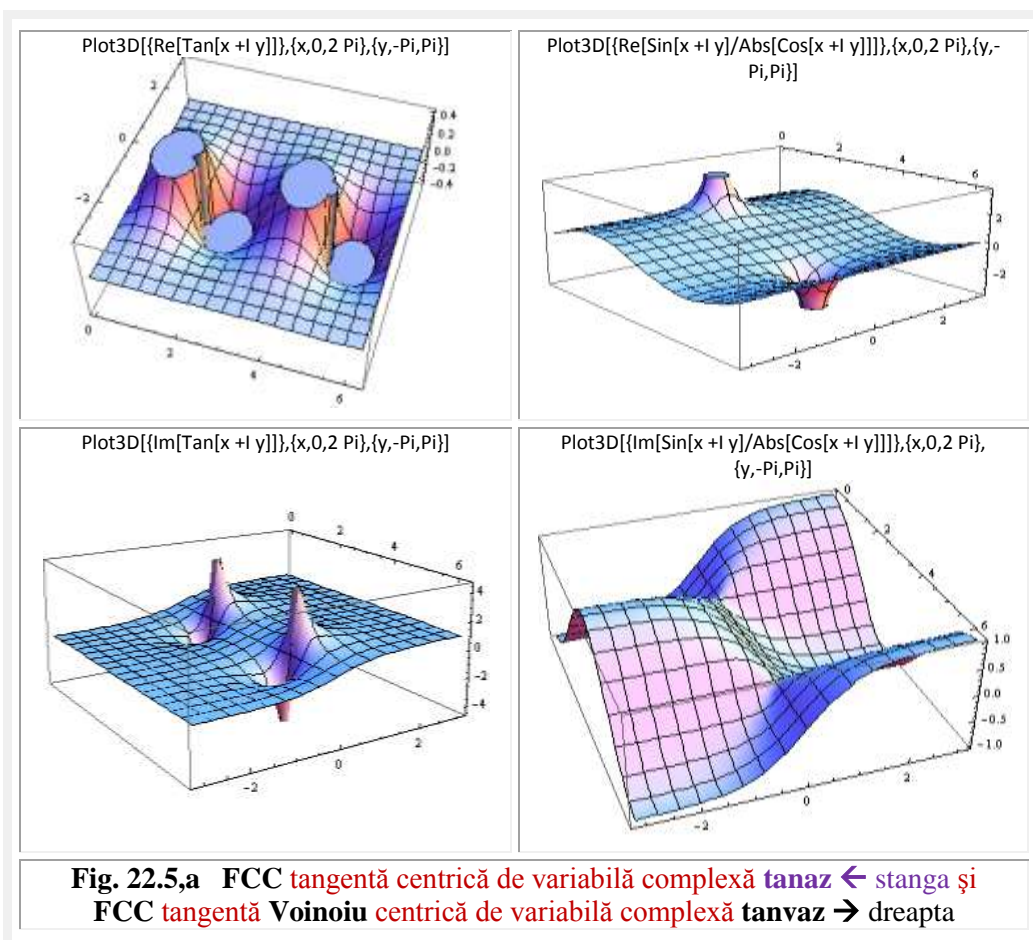
Explicit, expresiile unor FSM-CE de variabile excentrice complexe sunt
 (22.13) $cexz = cex(x + i \cdot y) = \cos[(x + i \cdot y) - \arcsin[s \cdot \sin(x + i \cdot y)]],$



$$(22.14) \quad \text{sexz} = \sin(x + i \cdot y) = \sin[(x + i \cdot y) - \arcsin[s \cdot \sin(x + i \cdot y)]]$$

cu graficele din **figura 22.2,a** în care s-a evidențiat partea reală $\text{Re}[\text{cexz}]$ și partea imaginară $\text{Im}[\text{cexz}]$ a funcției de variabilă complexă, precum și valoarea ei absolută $\text{Abs}[\text{cexz}]$, care reprezintă suma pe direcția verticală (axa z) a celor două părți: reală și imaginară. În unele figuri s-au prezentat graficele 3D împreună cu boxa, axele și meșa, iar în altele au fost omise, pentru a obține forme considerate mai artistice.

Funcțiile cu aspect artistic în 2D au fost reprezentate și prin ContouPlot, așa cum este cazul în **figurile 22.1, 22.2; 21.3, 22.5; ș.a.**, iar pentru reproducerea figurilor au fost prezentate, în majoritatea cazurilor și comenzile date în **Matematica 6 și 8**.



Pentru a scoate în evidență asemănările, dar și deosebirile dintre diversele funcții (sinz– cosz; rexaz - Rexaz; dexaz - Dexaz; cexaz – Cexaz ; ș.a) ele au fost redat grafic în paralel.

Cexaz și Sexaz au expresiile

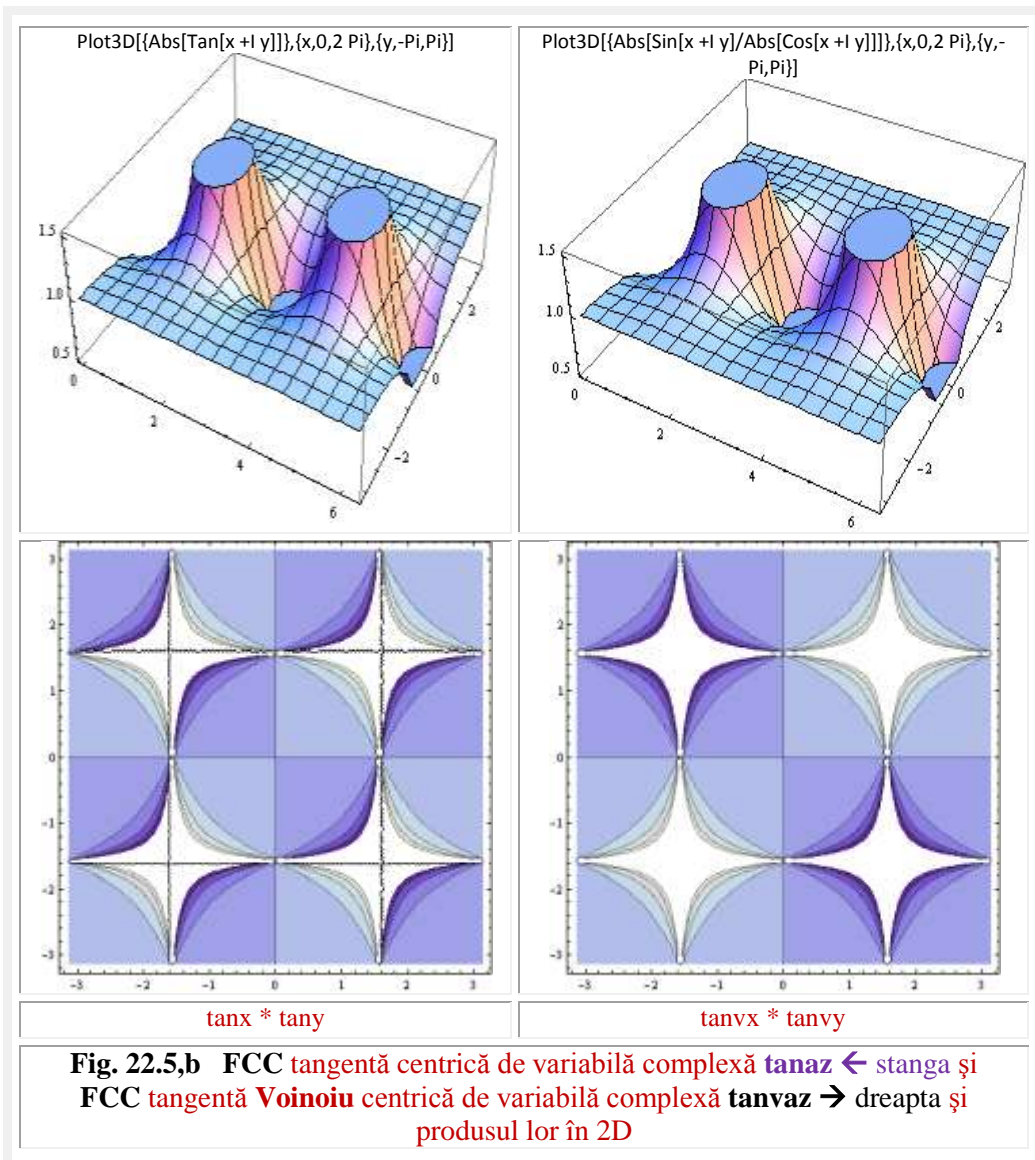
(22.15) $Cexaz = Cex(x + i.y) = \cos\{(x + i.y) + \arcsin[s.\sin(x + i.y)/Reza^2 z]\} =$
 $= \cos[x + iy + \arcsin\frac{s.\sin(x+iy)}{1+s^2-2s.\cos(x+iy)}],$

(22.16) $Sexaz = Sex(x + i.y) = \sin\{(x + i.y) + \arcsin[s.\sin(x + i.y)/Reza^2 z]\} =$
 $= \sin[x + iy + \arcsin\frac{s.\sin(x+iy)}{1+s^2-2s.\cos(x+iy)}]$

Tangenta centrică de variabilă complexă are ecuația

(22.17) $\tan z = \tan(x + i.y) = \cos(x + i.y) / \sin(x + i.y),$ iar tangenta **Voinoiu**

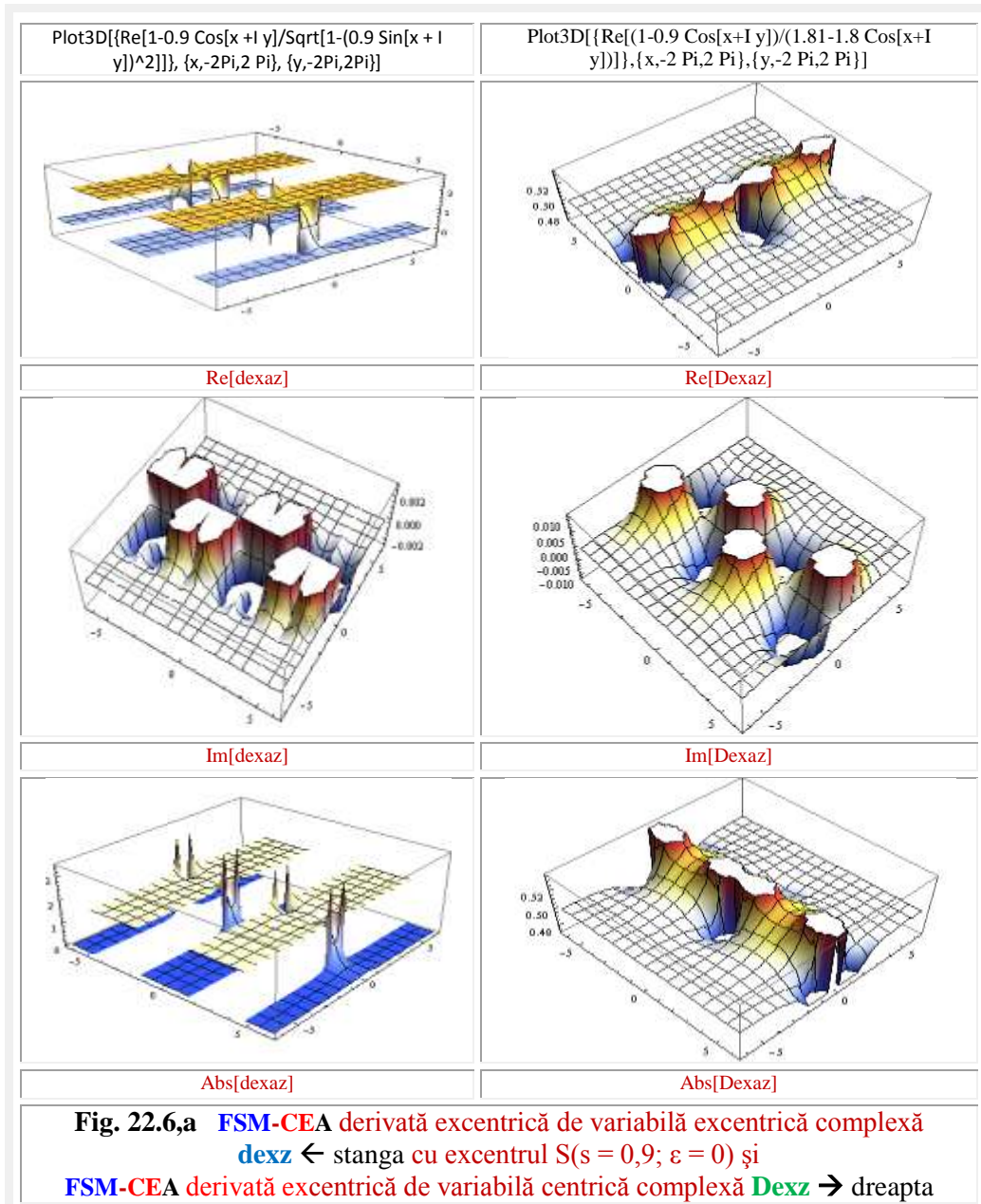
(22.18) $\tan v z = \tan v(x + i.y) = \cos(x + i.y) / \text{Abs}[\sin(x + i.y)],$ (**Fig. 22.5**)

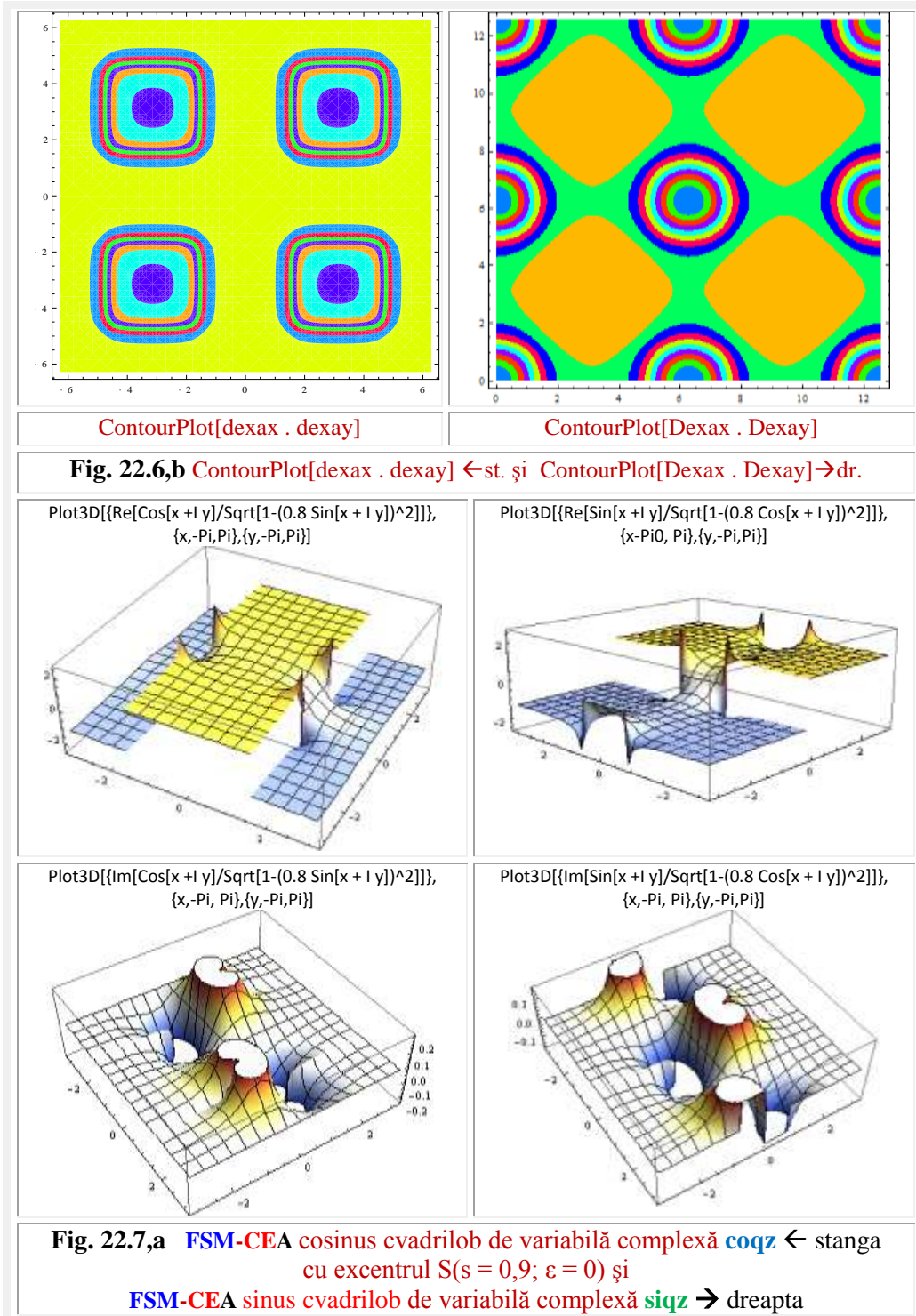


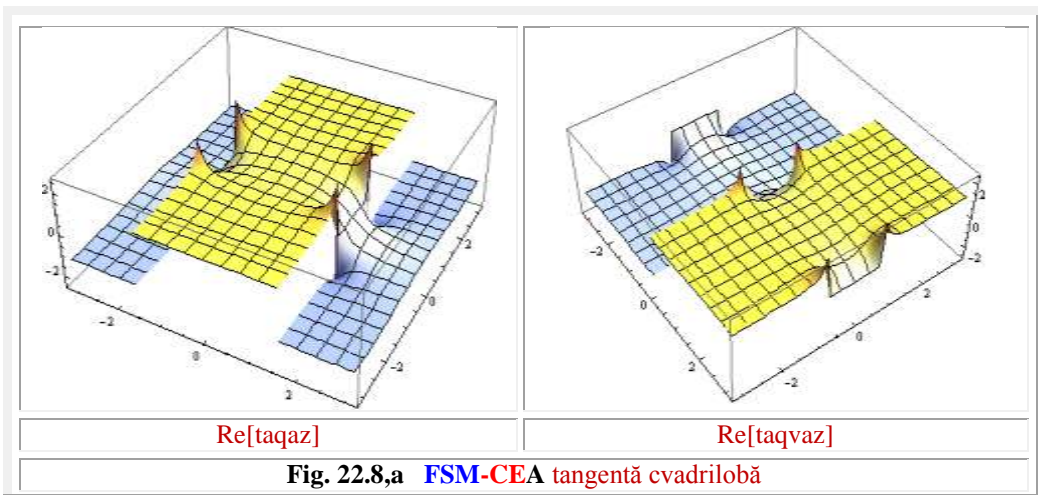
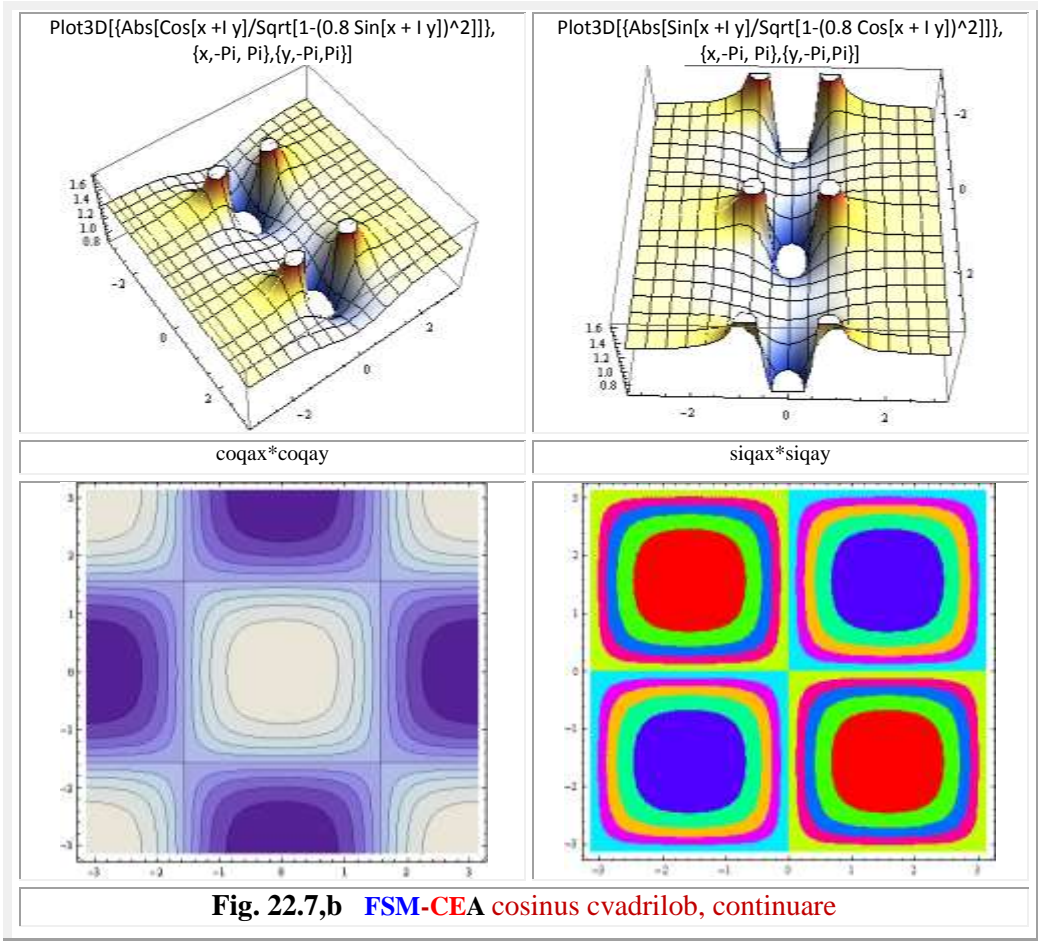
Prin transformarea complexă (22.12) se obțin funcțiile **FSM-CEA** de variabilă excentrică

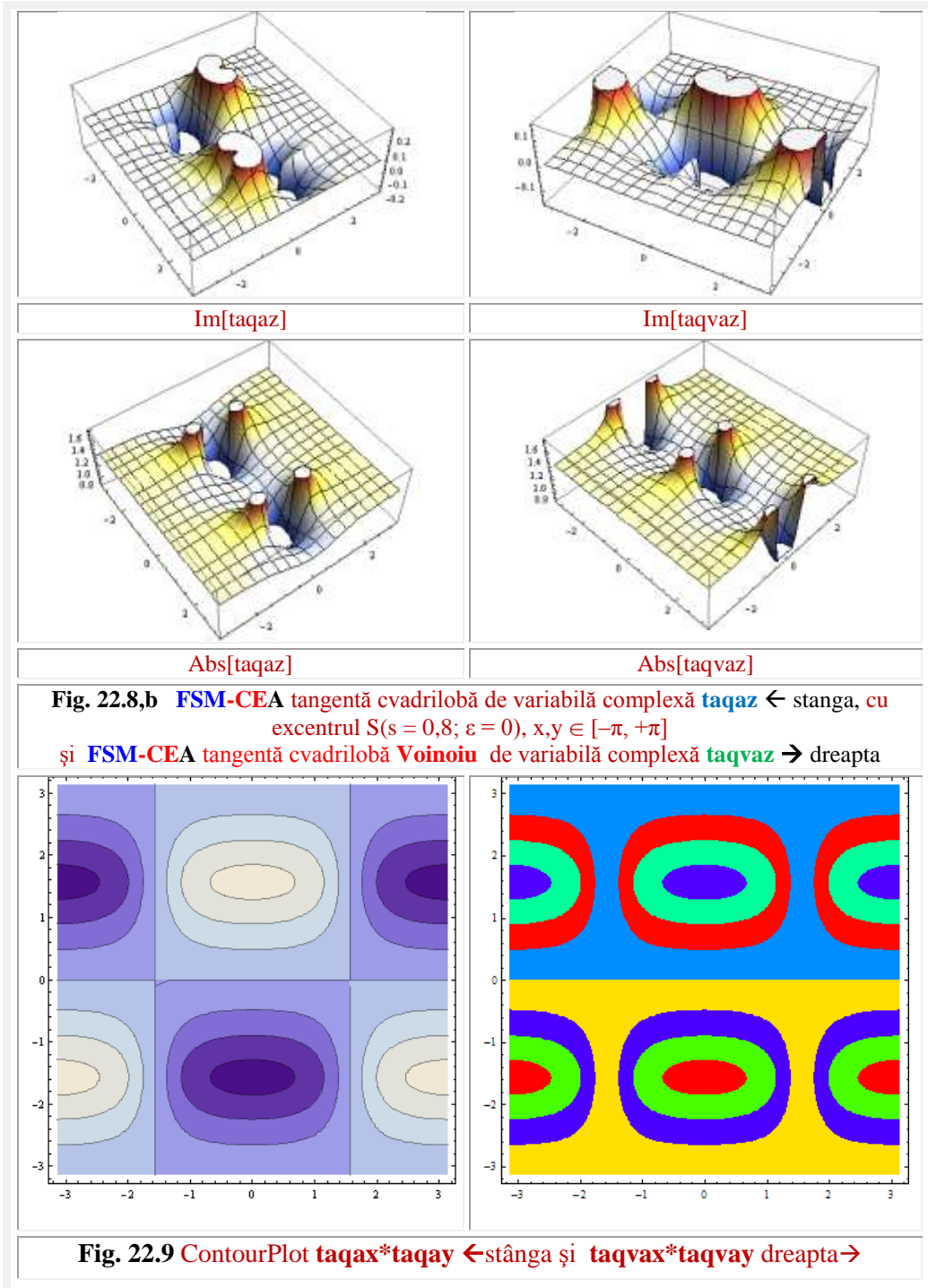
$$(22.19) \quad \text{dexaz} = 1 - \frac{s \cdot \cos(x+iy-z)}{\sqrt{1-s^2 \sin^2(x+iy-z)}} \quad \text{și cele de variabilă centrică}$$

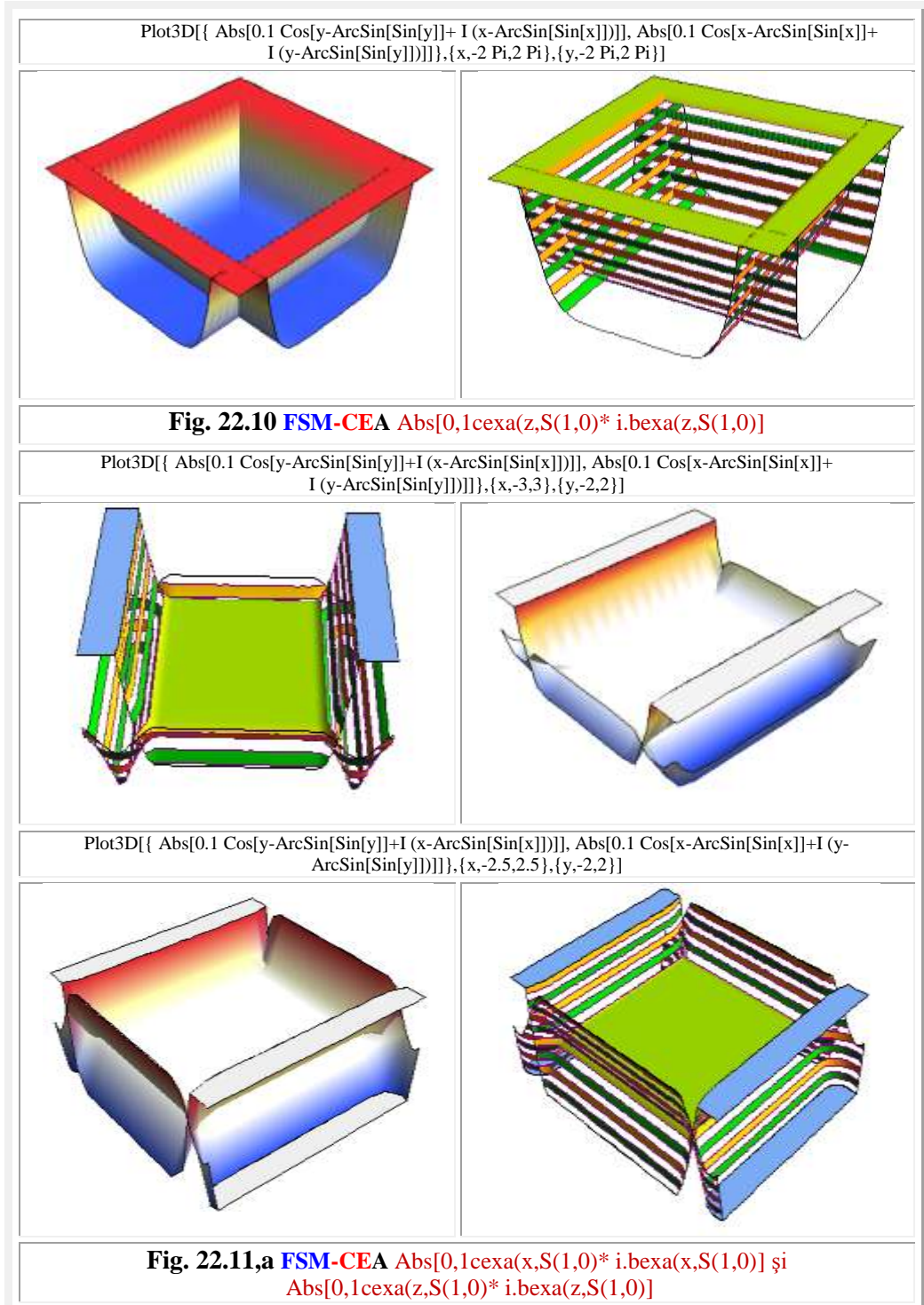
$$(22.20) \quad \text{Dexaz} = \frac{1-s\cos(x+iy-z)}{\text{Re}x^2(x+iy-z)} = \frac{1-s\cos(x+iy-z)}{1+s^2-2s\cos(x+iy-z)}, \quad (\text{Fig. 22.6}).$$



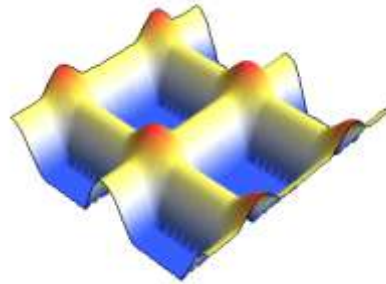








Plot3D[Abs[- 0.99 Cos[x]+Sqrt[1-(0.99 Sin[x])^2] + I (-0.99 Cos[y] + Sqrt[1-(0.99 Sin[y])^2])],
 {x,-2 Pi,2 Pi},{y,-2 Pi,2 Pi}] ← $\rightarrow \text{Abs}[\text{rex}(x, s = 0,99) + i \text{rex}(x, s=0,99)]$



Plot3D[{ Abs[Sin[x-ArcSin[0.99 Sin[x]]+I (y-ArcSin[0.99 Sin[y]])], -Abs[Cos[y-ArcSin[0.99 Sin[y]]+I (x-ArcSin[0.99 Sin[x]])]+1,Abs[Cos[x-ArcSin[Sin[x]]+I (y-ArcSin[Sin[y]])]}],{x,-3,3},{y,-0.5,1}

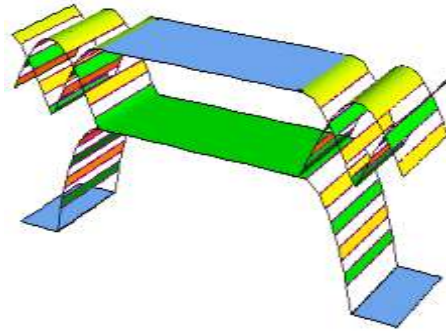
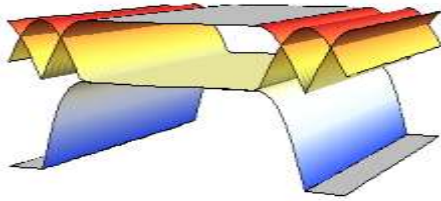


Fig. 22.11,b FSM-CEA $\text{Abs}[0,1\text{cexa}(x,S(1,0)* i.\text{bexa}(x,S(1,0))]$ și $\text{Abs}[0,1\text{cexa}(z,S(1,0)* i.\text{bexa}(z,S(1,0))]$

RegionPlot3D[Sin[x-ArcSin[0.98 Sin[x]] Sin[y-ArcSin[0.98 Sin[y]] Sin[z-ArcSin[0.98 Sin[z]]]<1,
 {x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi},{z,-Pi,Pi}]

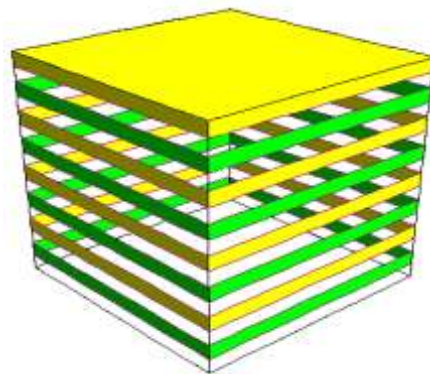
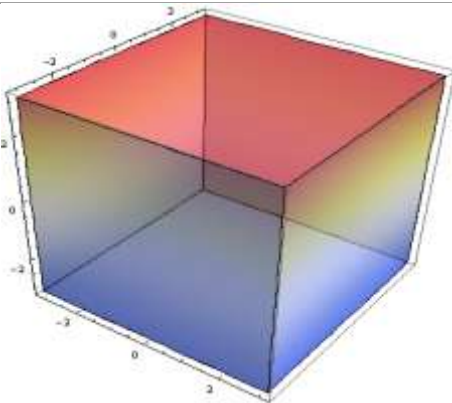
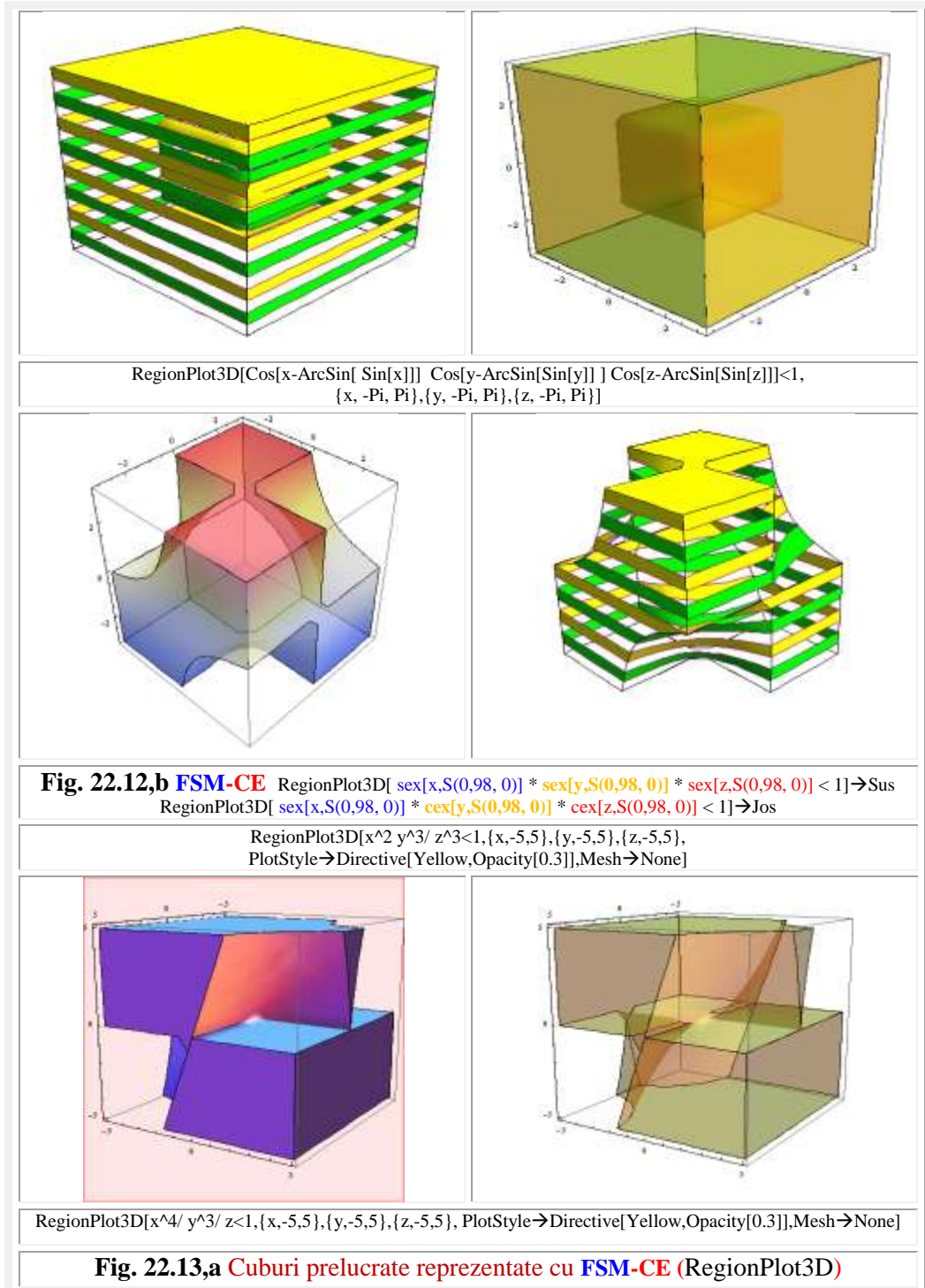
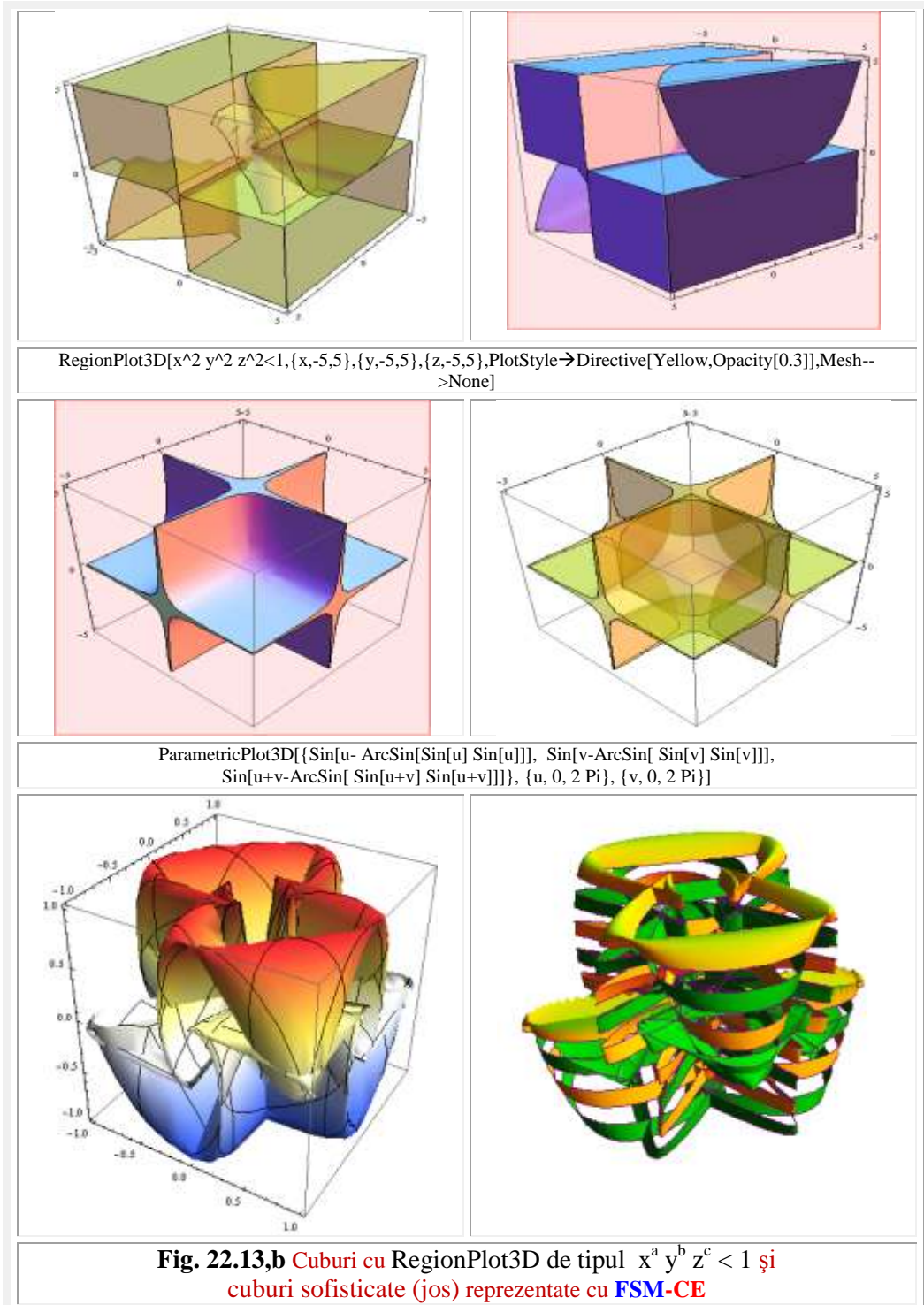
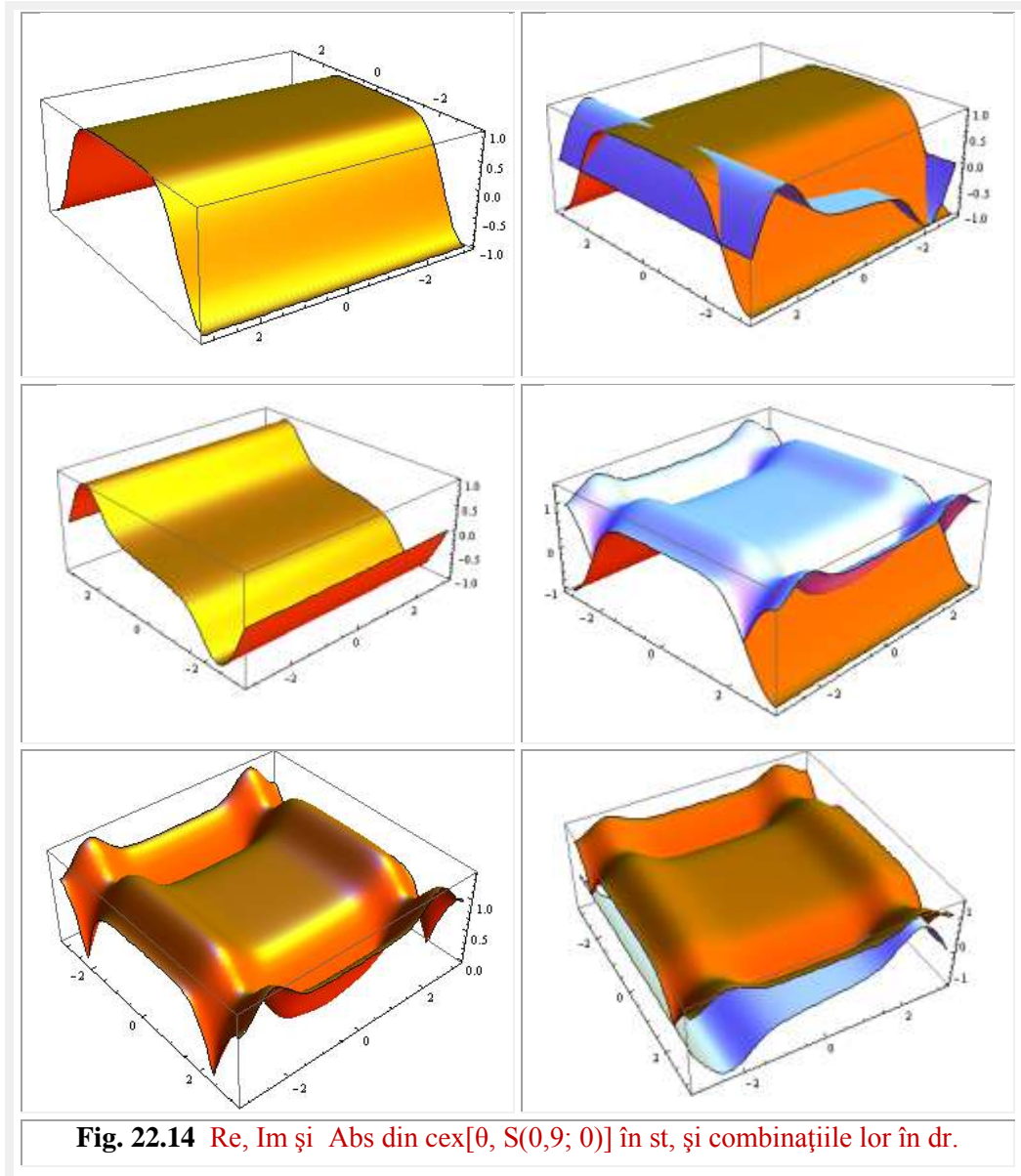


Fig. 22.12, a Cuburi diverse reprezentate cu FSM-CE







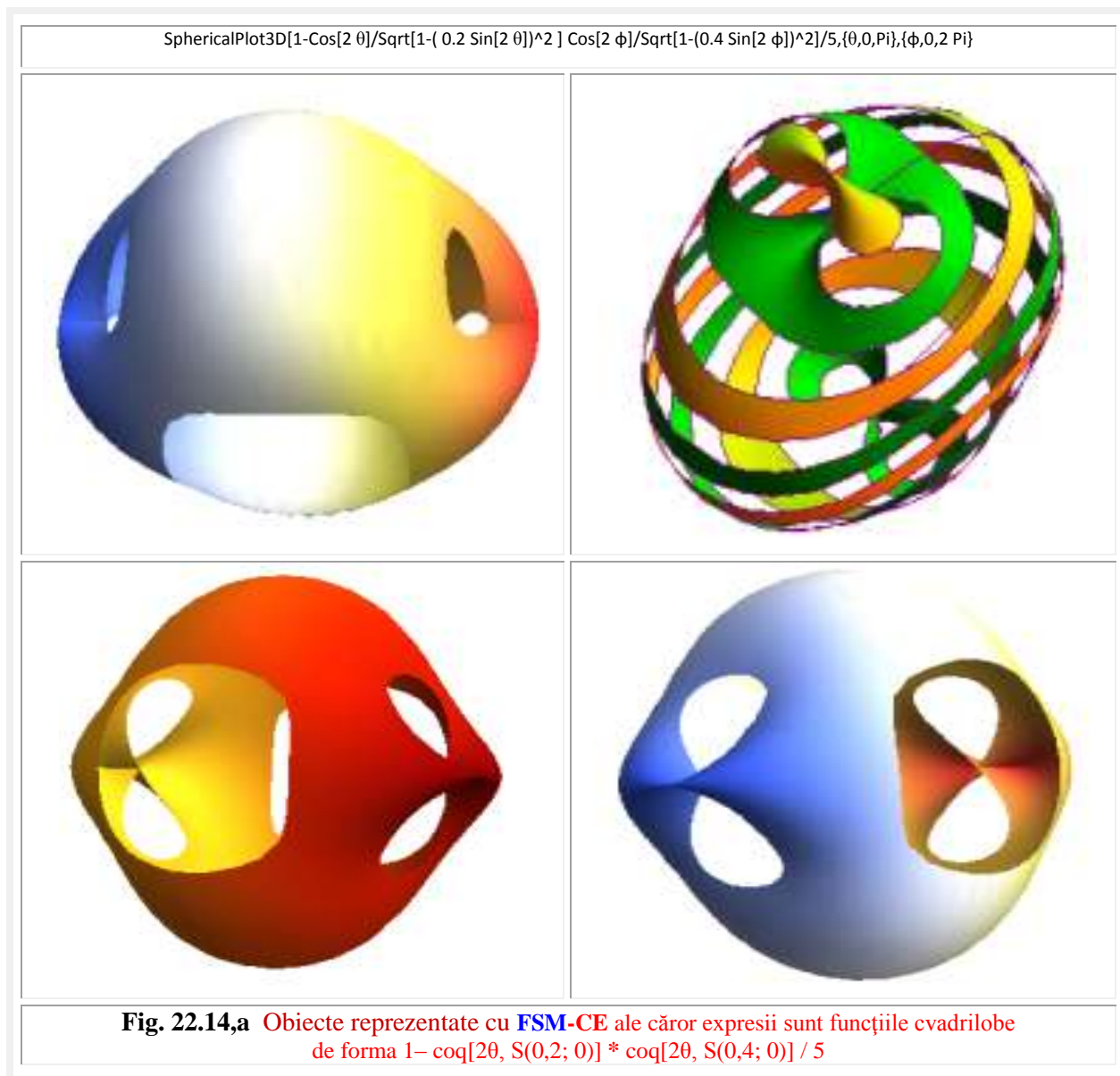
În stânga **figurii 22.14** sunt prezentate partea reală, cea imaginară și partea absolută a **FSM-CEA** $cex[0, S(0,9; 0)]$, iar în partea dreaptă sunt prezentate graficele 3D ale combinațiilor $Re + Im$, $Re + Abs$ și $Im + Abs$, realizate artistic, grație programului de matematica a lui **Stephan Wolfram** MATHEMATICA 6.

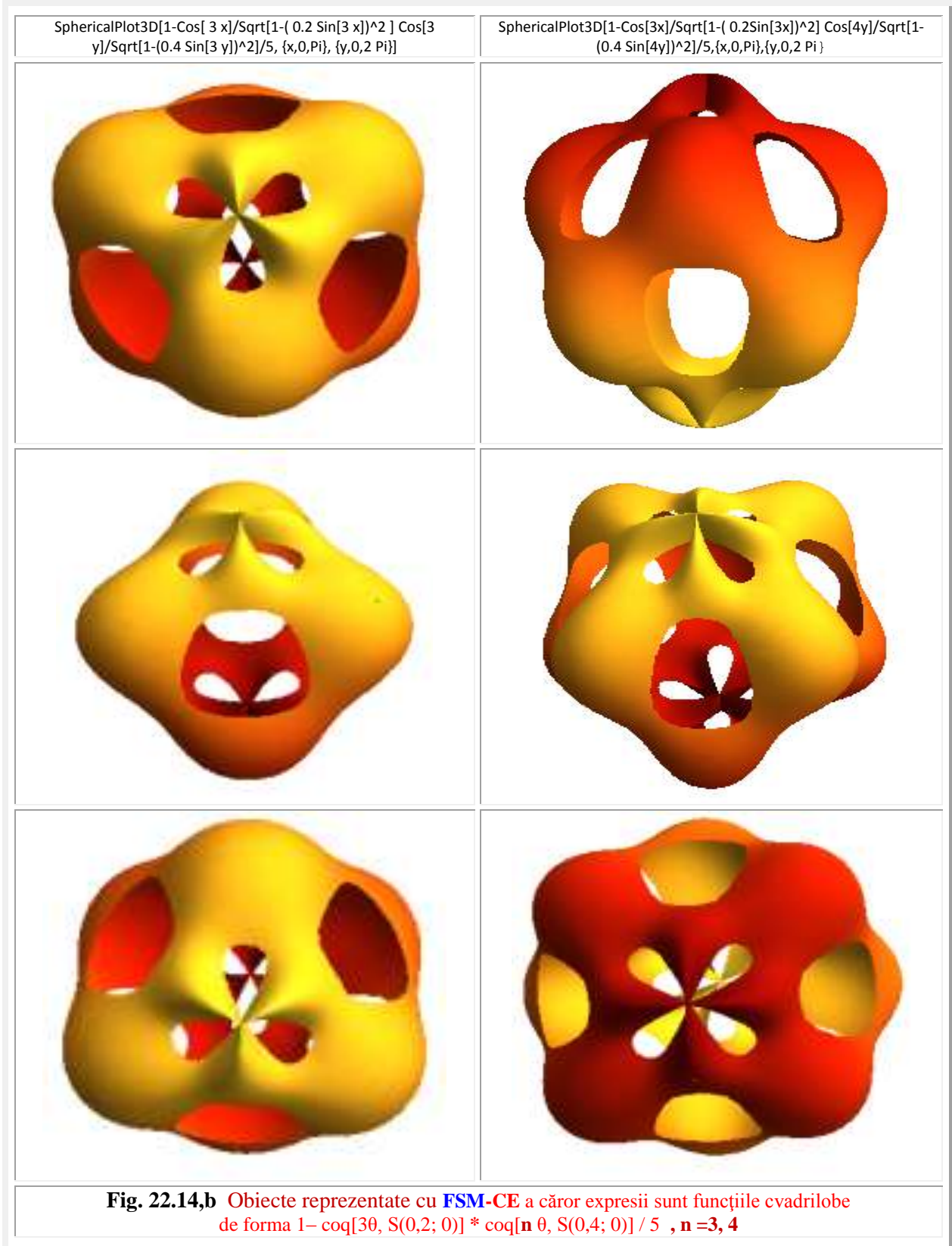
Cu MATHEMATICA 8, apărută de foarte curând, posibilitățile grafice sunt cu mult mai mari, mai variate.

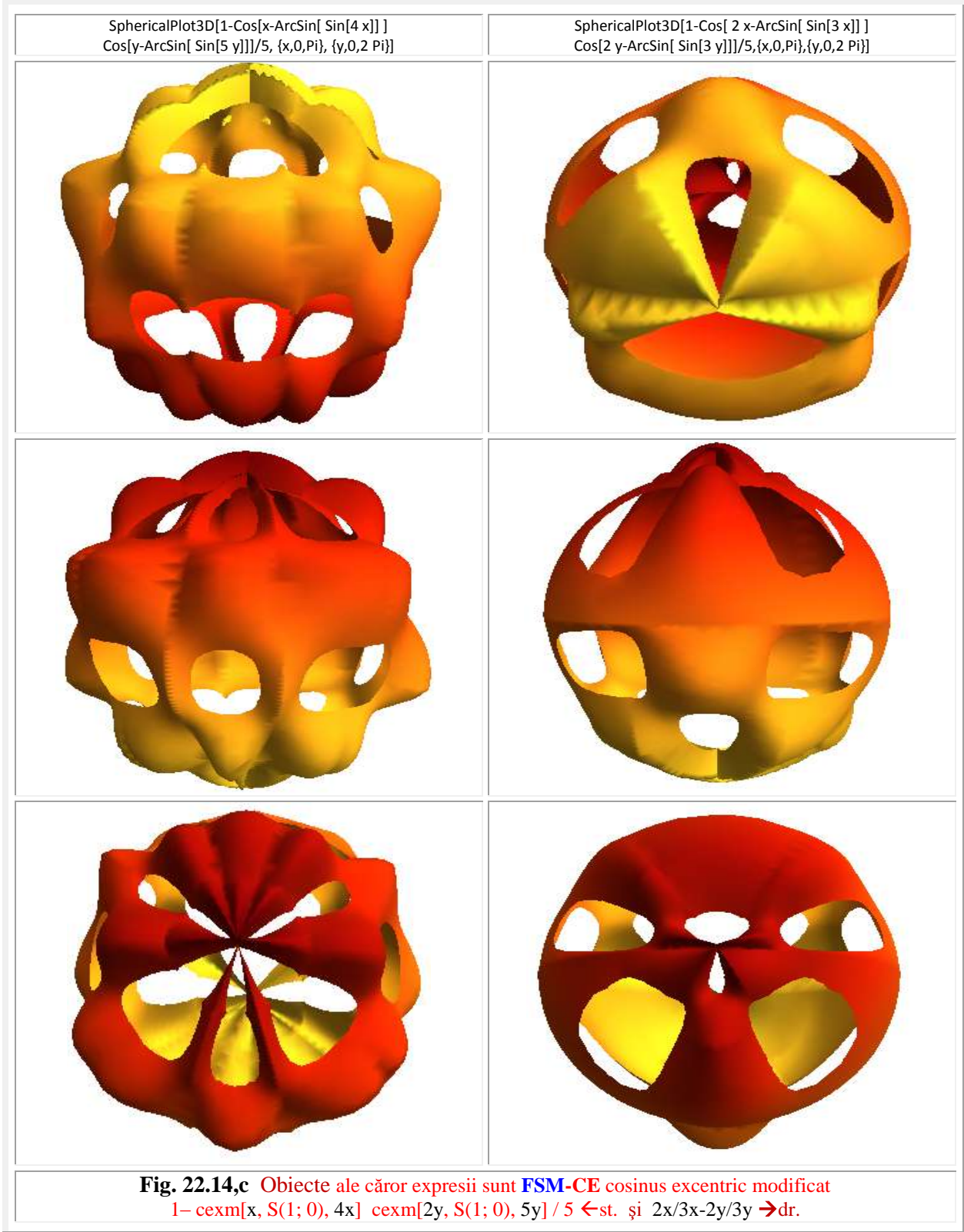
22.3 APLICAȚII: OBIECTE MATEMATICE REPREZENTATE CU FSM-CE ȘI CU FSM-CEA

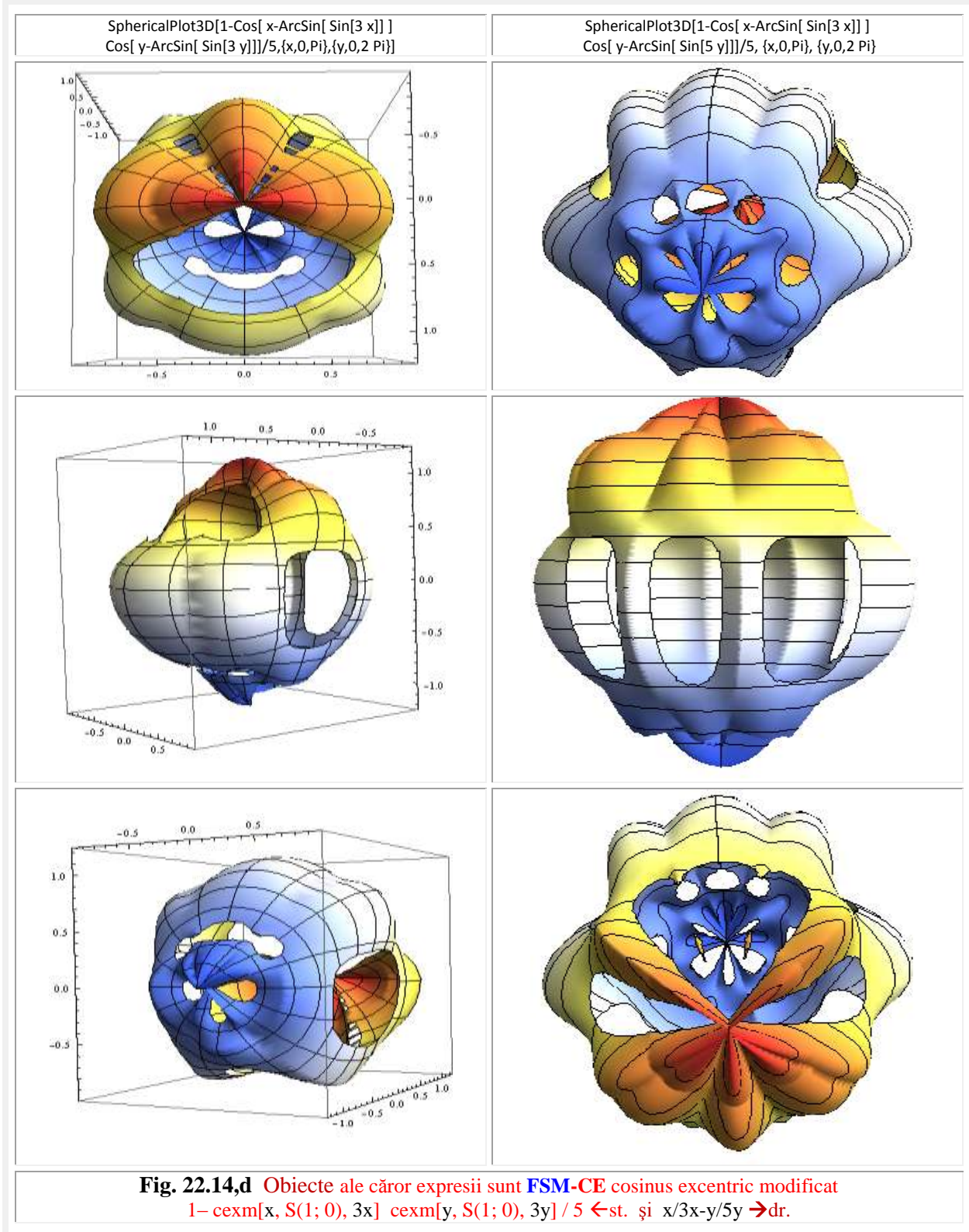
Aplicațiile prezentate, în continuare, au avut drept criteriu de selecționare fie posibilitatea reprezentării unor piese tehnice, a unor obiecte artistice, fie ambele.

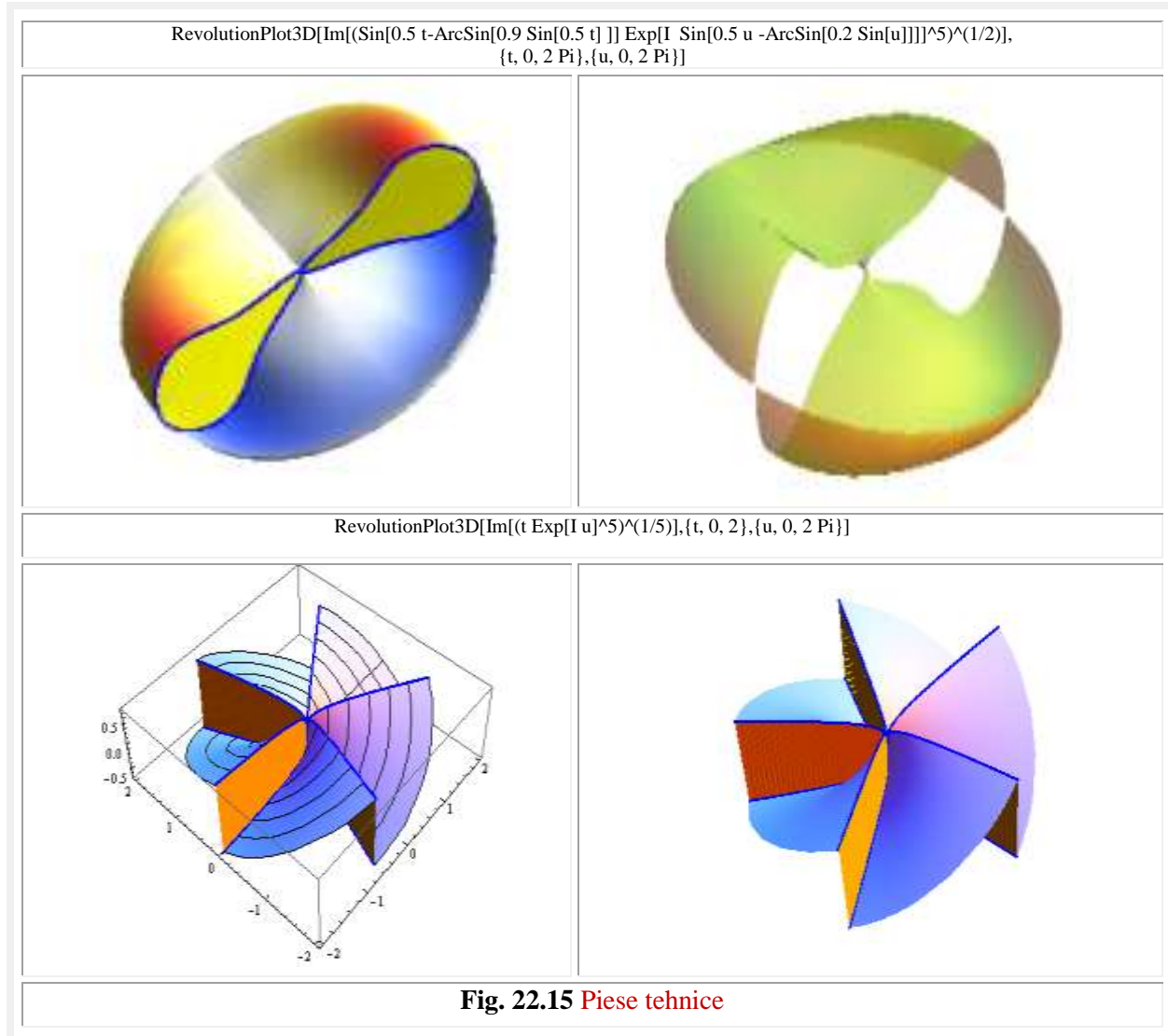
În **figura 22.14,a** și **22.14,b** sunt prezentate artistic posibile piese tehnice reprezentate prin **funcțiile cvadrilobe** cunoscute, cosinus cvadrilob **coq θ** și sinus cvadrilob **siq θ** ale căror ecuații, puțin cunoscute, le prezentăm din nou.











Ele sunt

$$(22.21) \quad \text{coq}\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-(s.\sin\theta)^2}} \text{ și } \text{siq}\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-(s.\cos\theta)^2}}$$

Obiectele matematice 3D prezentate în **figurile 22.14,c și 22.14,d** au fost realizate cu **FSM-CE** cosinus excentric modificate, în sensul că **FSM-CE** beta excentrică are un alt argument decât argumentul θ al funcției cosinus, de obicei un multiplu de **variabila excentrică θ** . Se prezintă în continuare alte aplicații fără prea multe explicații.

22.4 PIESE TEHNICE

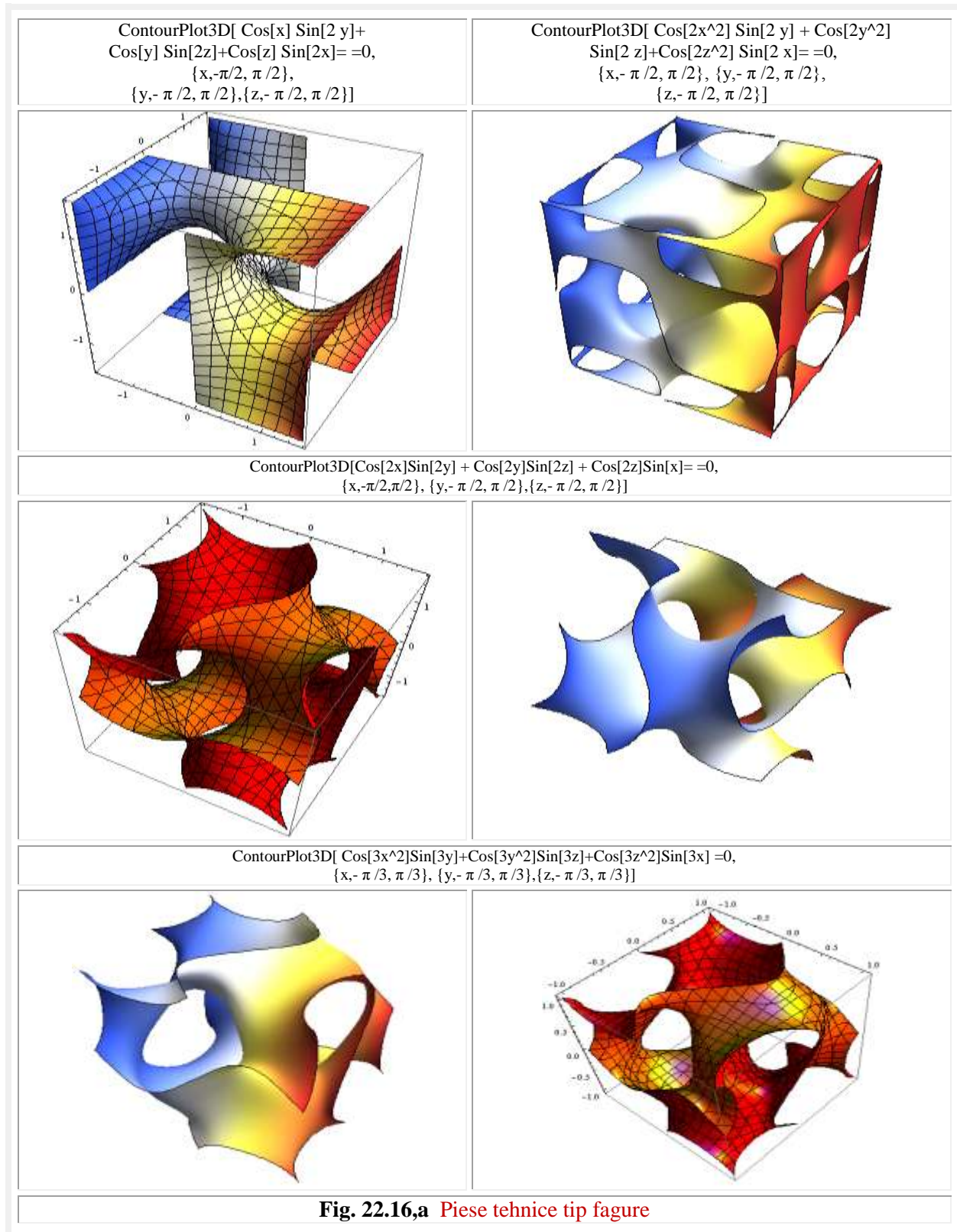
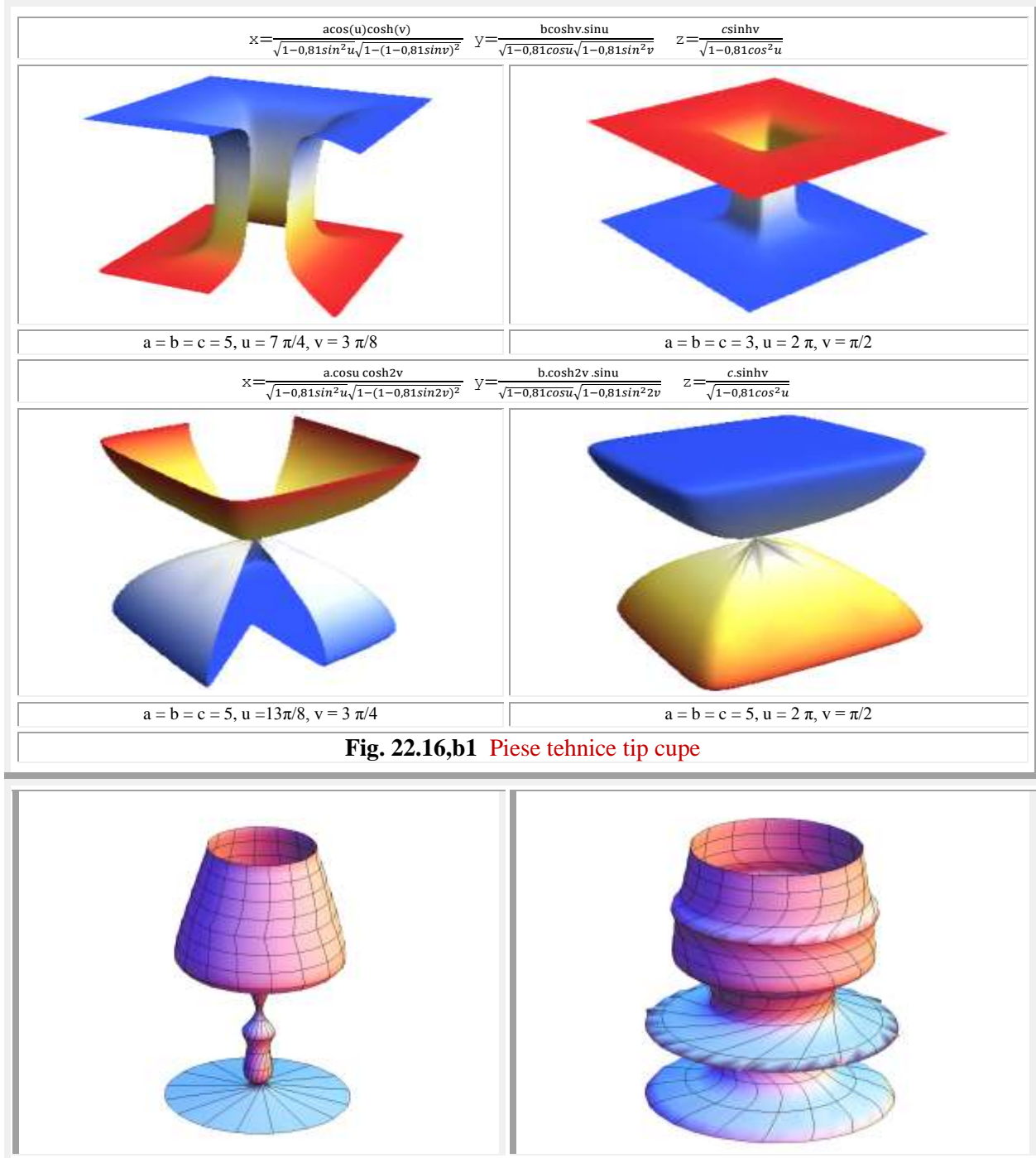


Fig. 22.16,a Piese tehnice tip figure



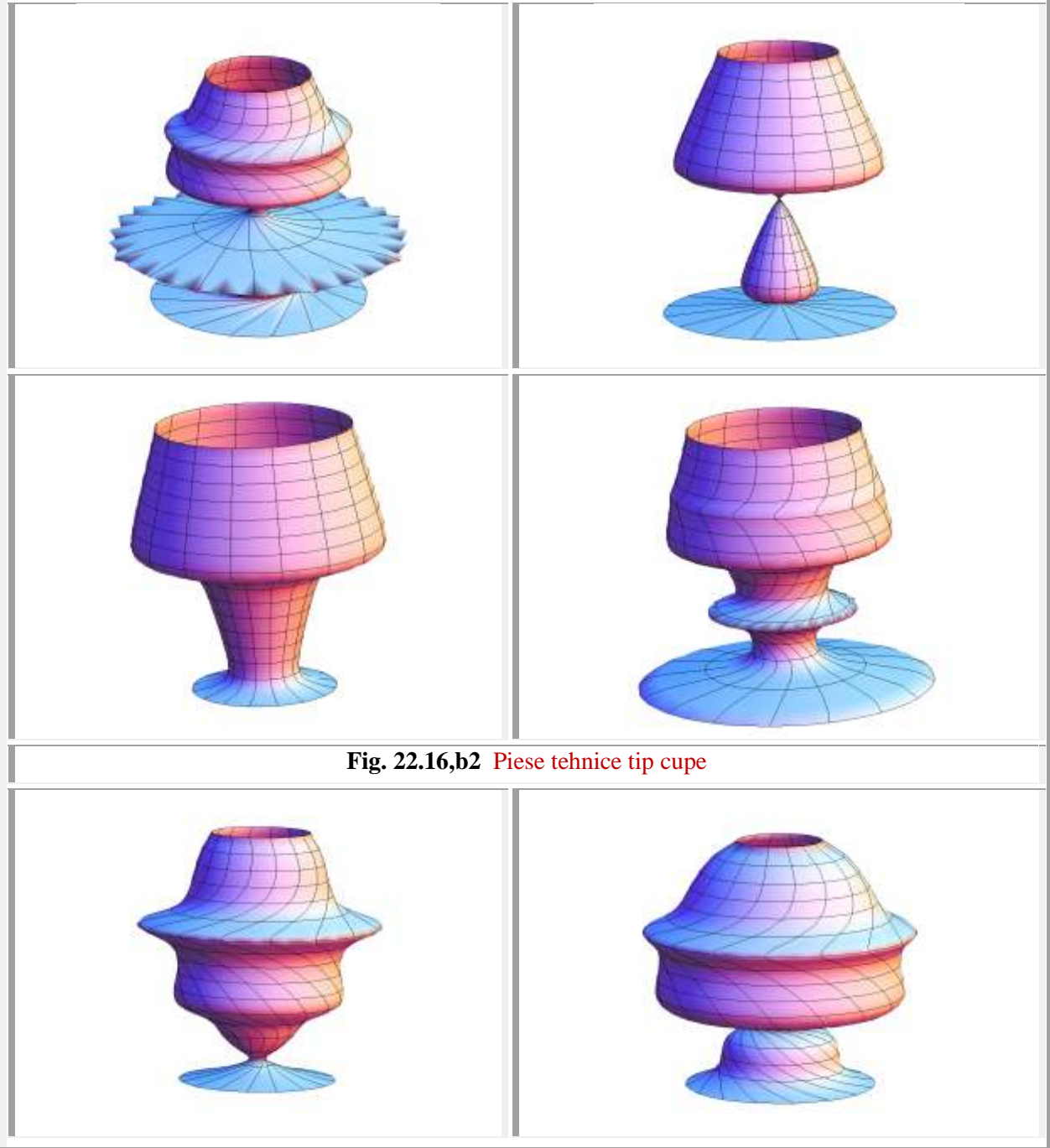
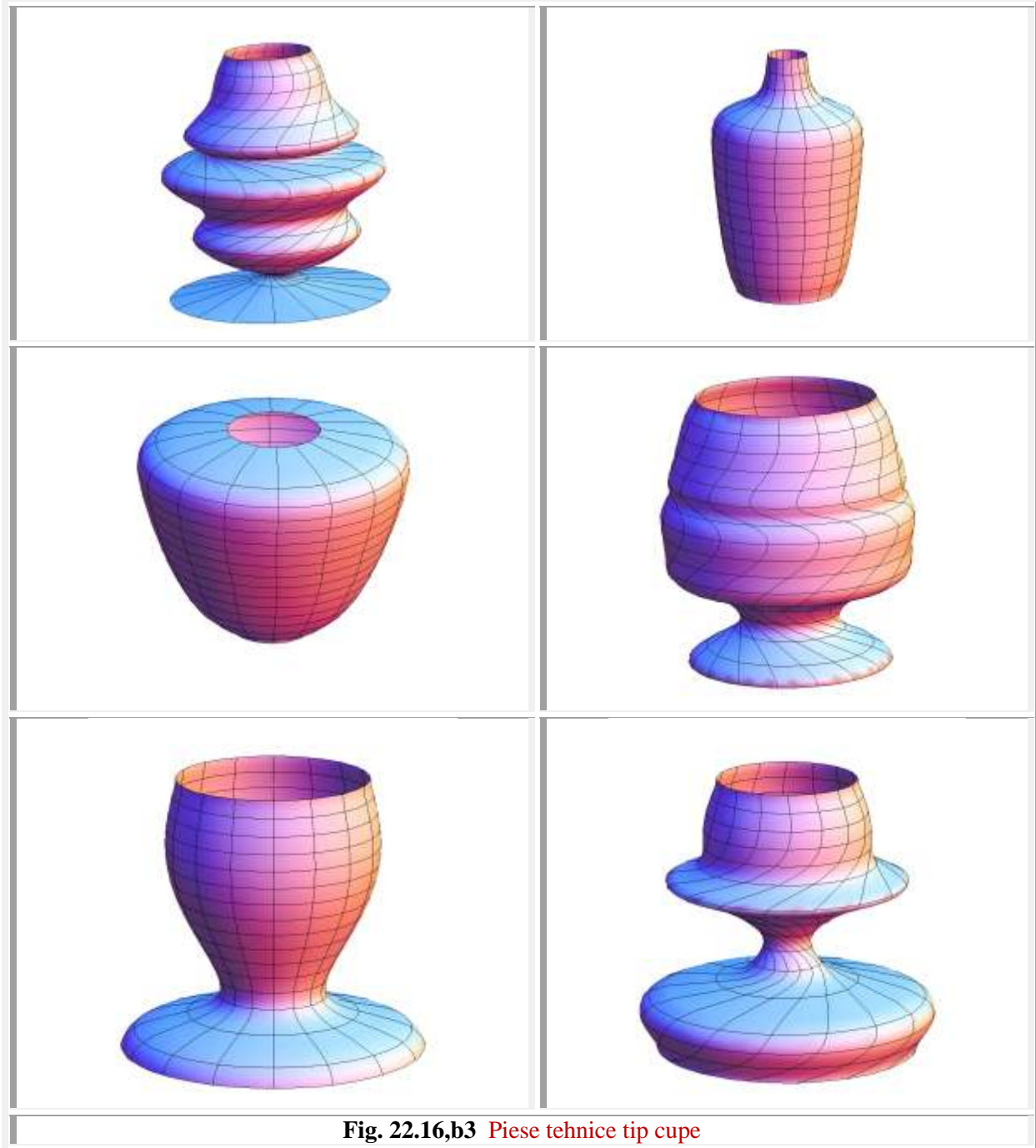


Fig. 22.16,b2 *Piese tehnice tip cupe*



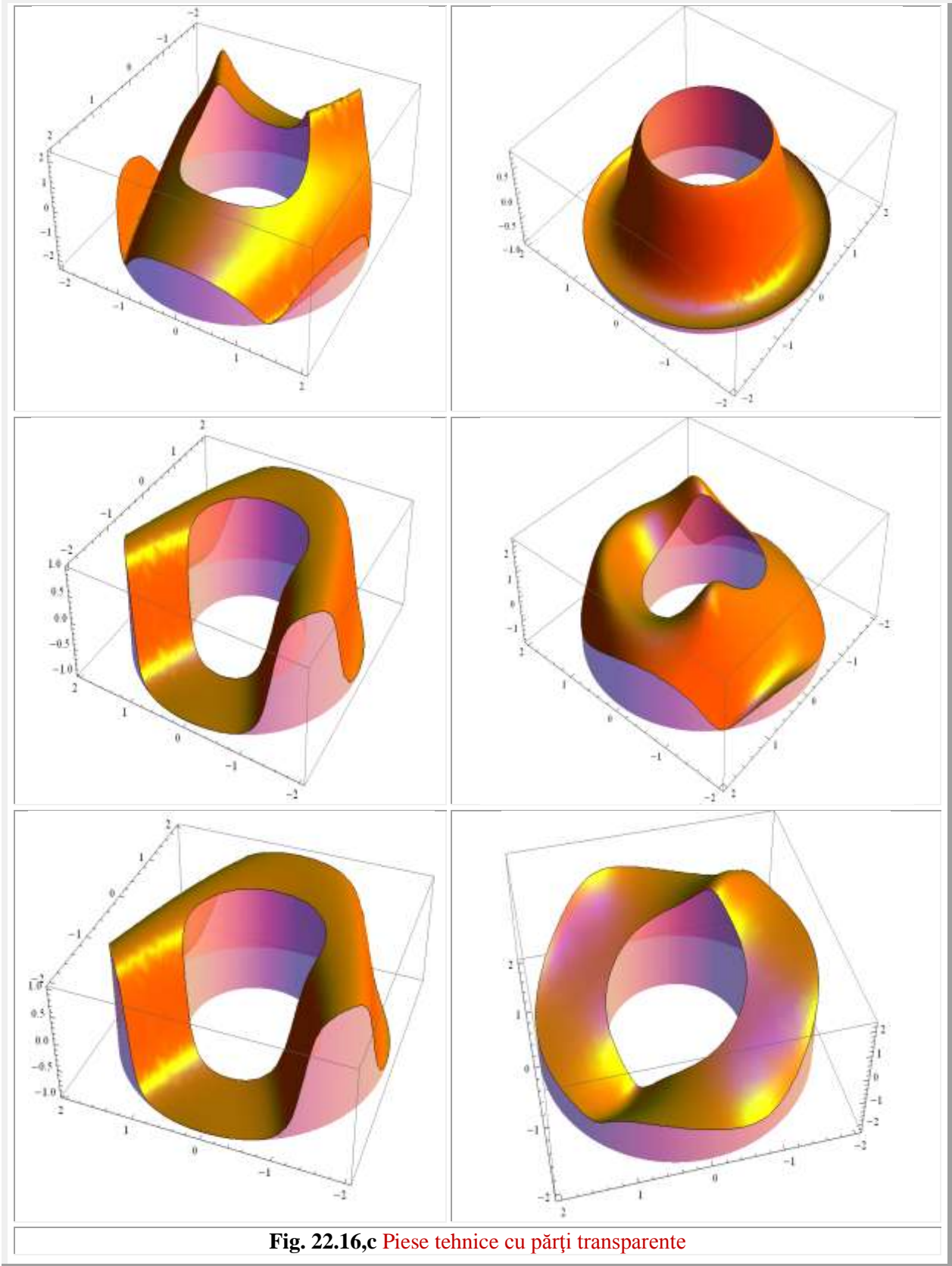
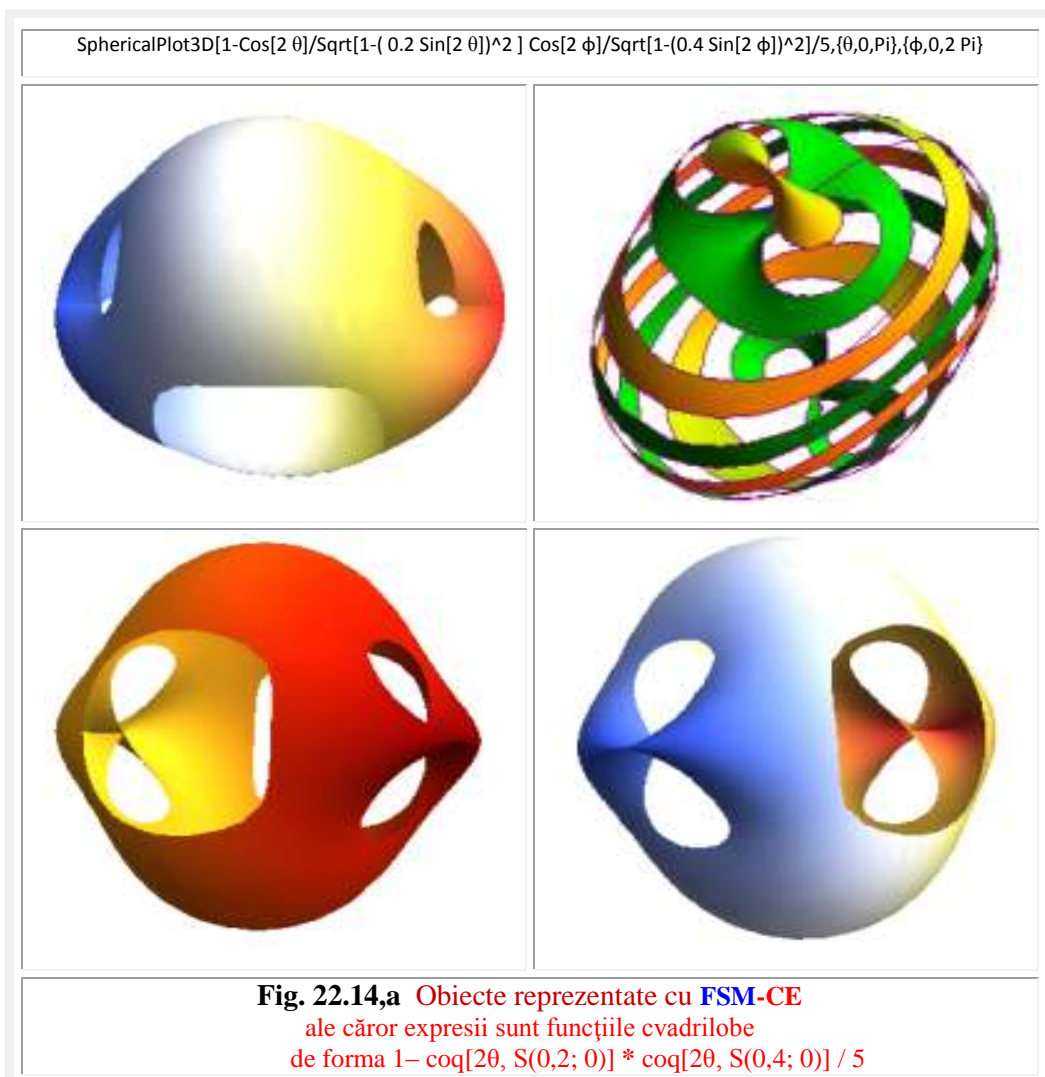


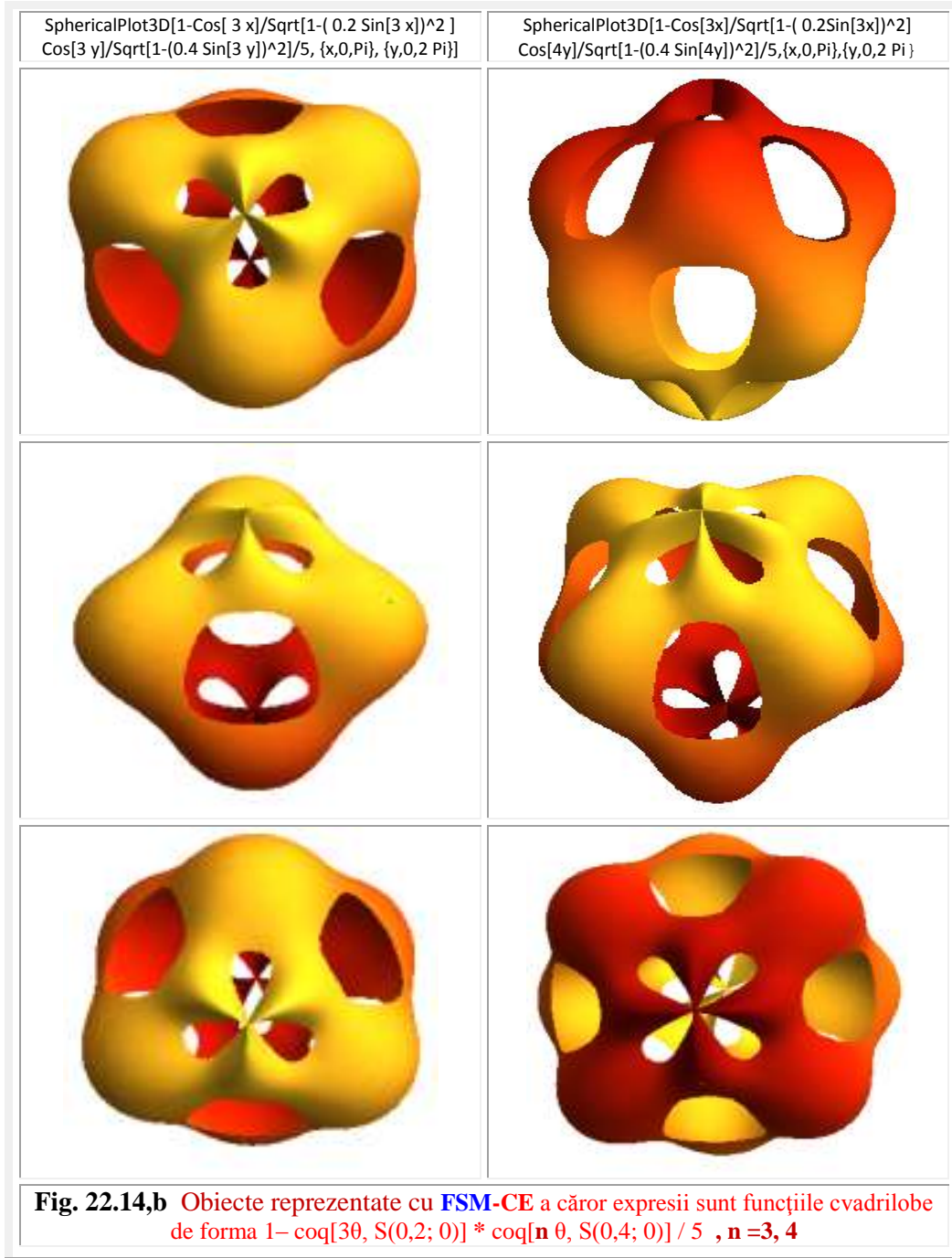
Fig. 22.16,c Piese tehnice cu părți transparente

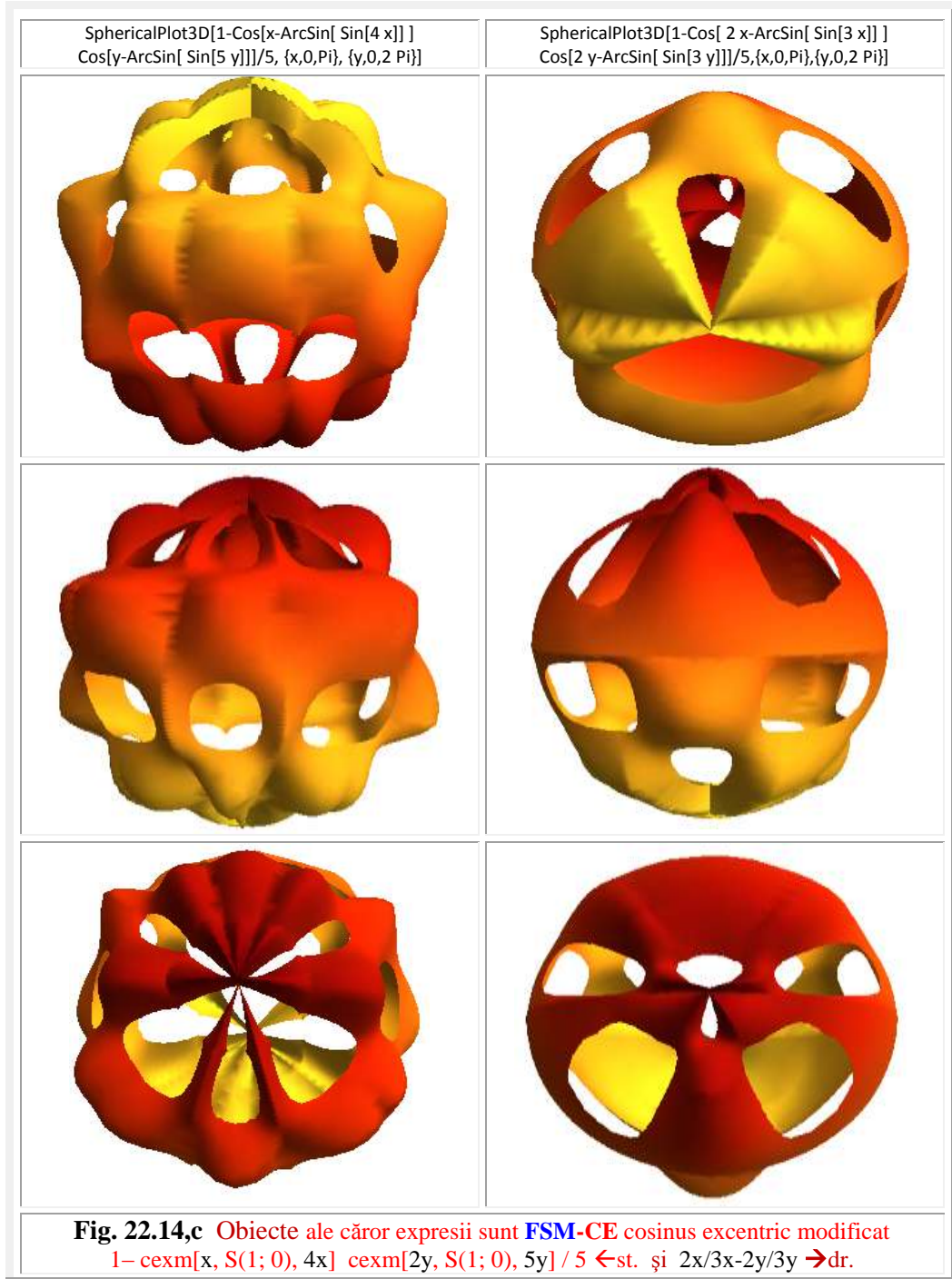
22.3 APLICAȚII: OBIECTE MATEMATICE REPREZENTATE CU FSM-CE ȘI CU FSM-CEA

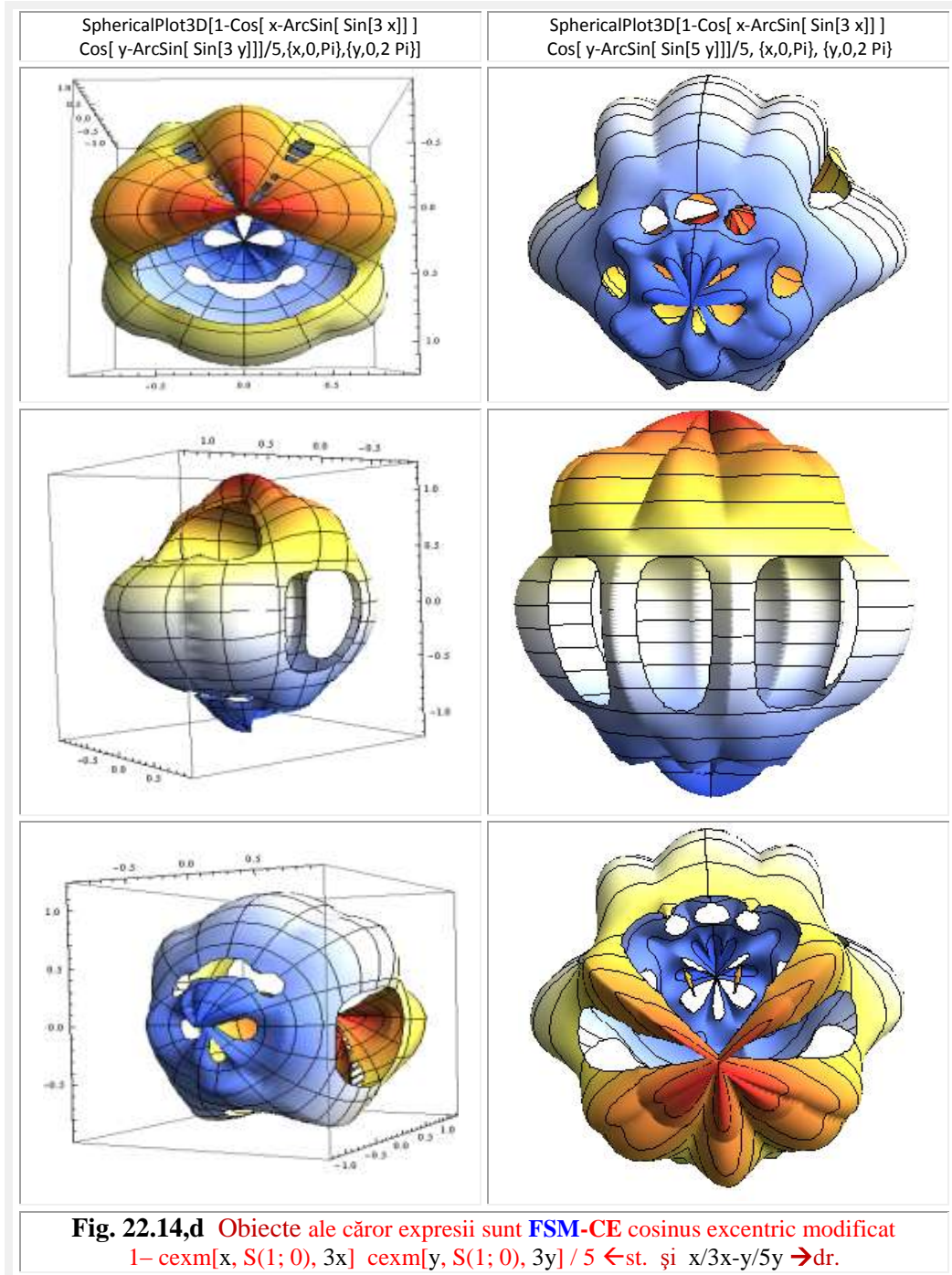
Aplicațiile prezentate, în continuare, au avut drept criteriu de selecționare fie posibilitatea reprezentării unor piese tehnice, a unor obiecte artistice, fie ambele.

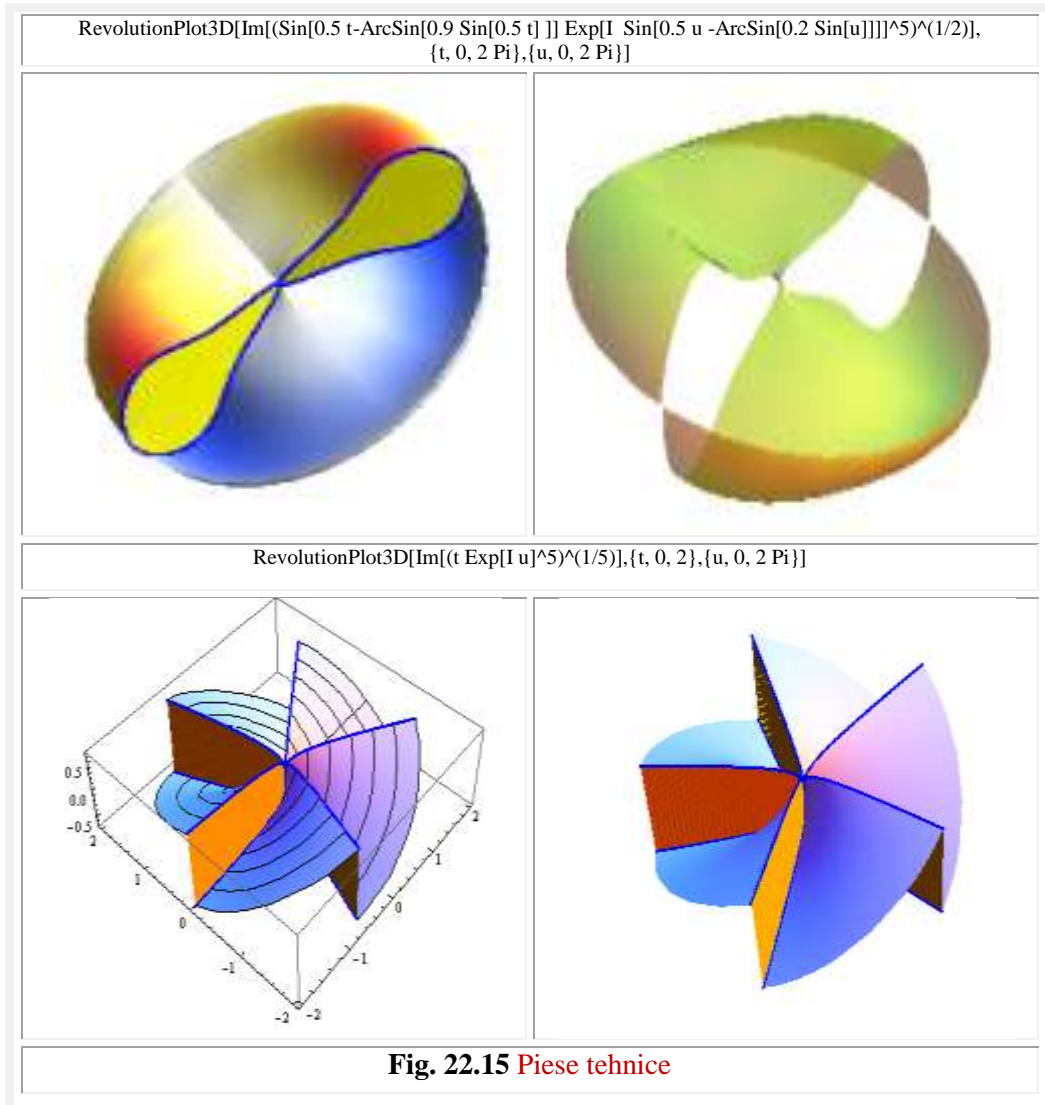
În figura 22.14,a și 22.14,b sunt prezentate artistic posibile piese tehnice reprezentate prin funcțiile cvadrilobe cunoscute, cosinus cvadrilob $\text{coq}\theta$ și sinus cvadrilob $\text{siq}\theta$ ale căror ecuații, puțin cunoscute, le prezentăm din nou.









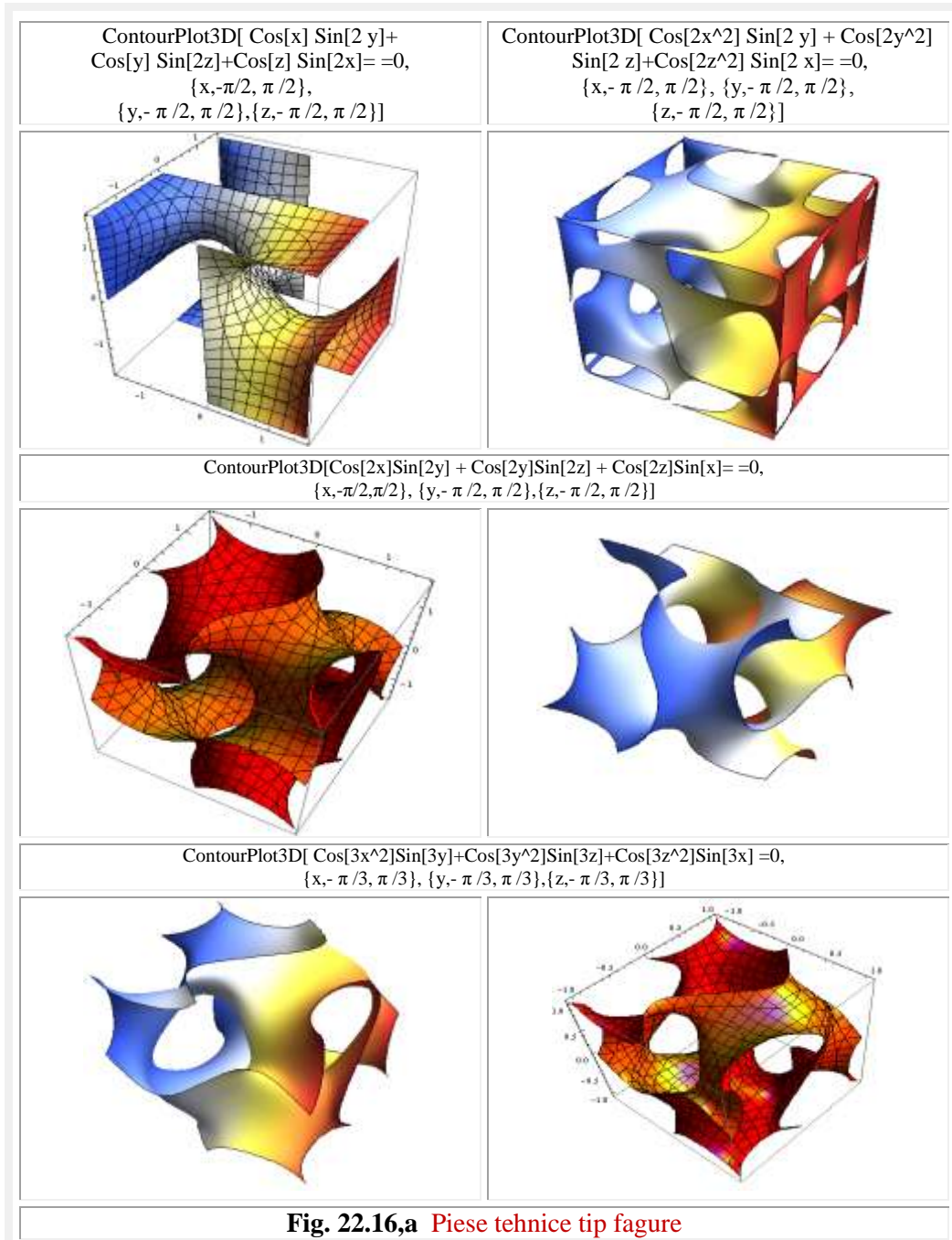


Ele sunt

$$(22.21) \quad \text{coq}\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-(s.\sin\theta)^2}} \text{ și } \text{siq}\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-(s.\cos\theta)^2}}$$

Obiectele matematice 3D prezentate în **figurile 22.14,c și 22.14,d** au fost realizate cu **FSM-CE** cosinus excentric modificate, în sensul că **FSM-CE** beta excentrică are un alt argument decât argumentul θ al funcției cosinus, de obicei un multiplu de **variabila excentrică θ** . Se prezintă în continuare alte aplicații fără prea multe explicații.

22.4 PIESE TEHNICE



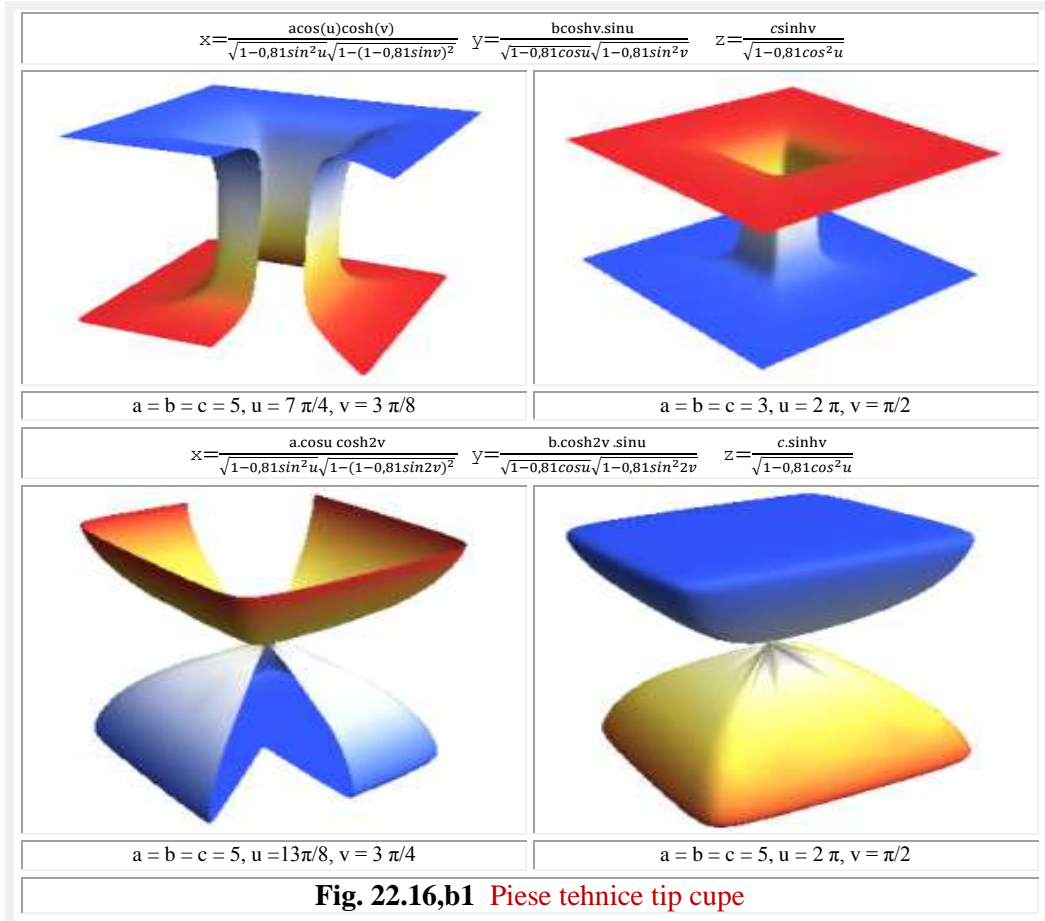
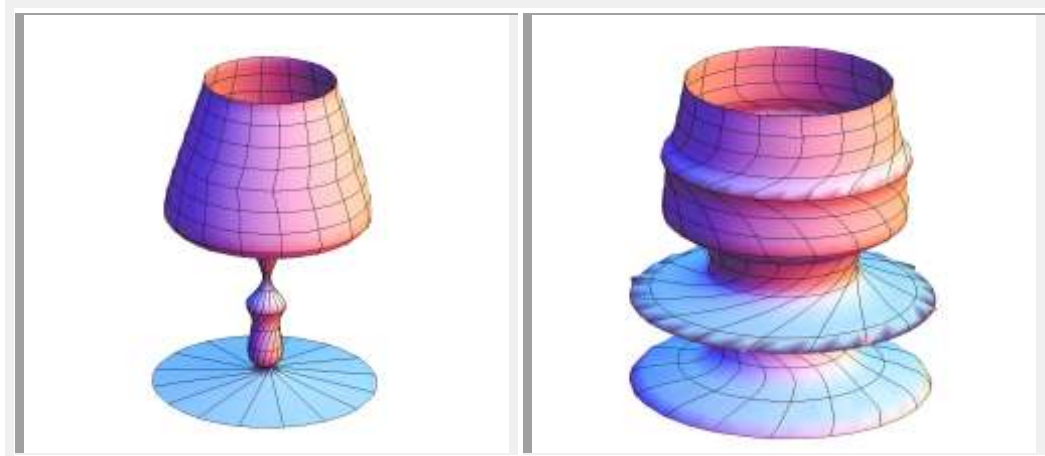
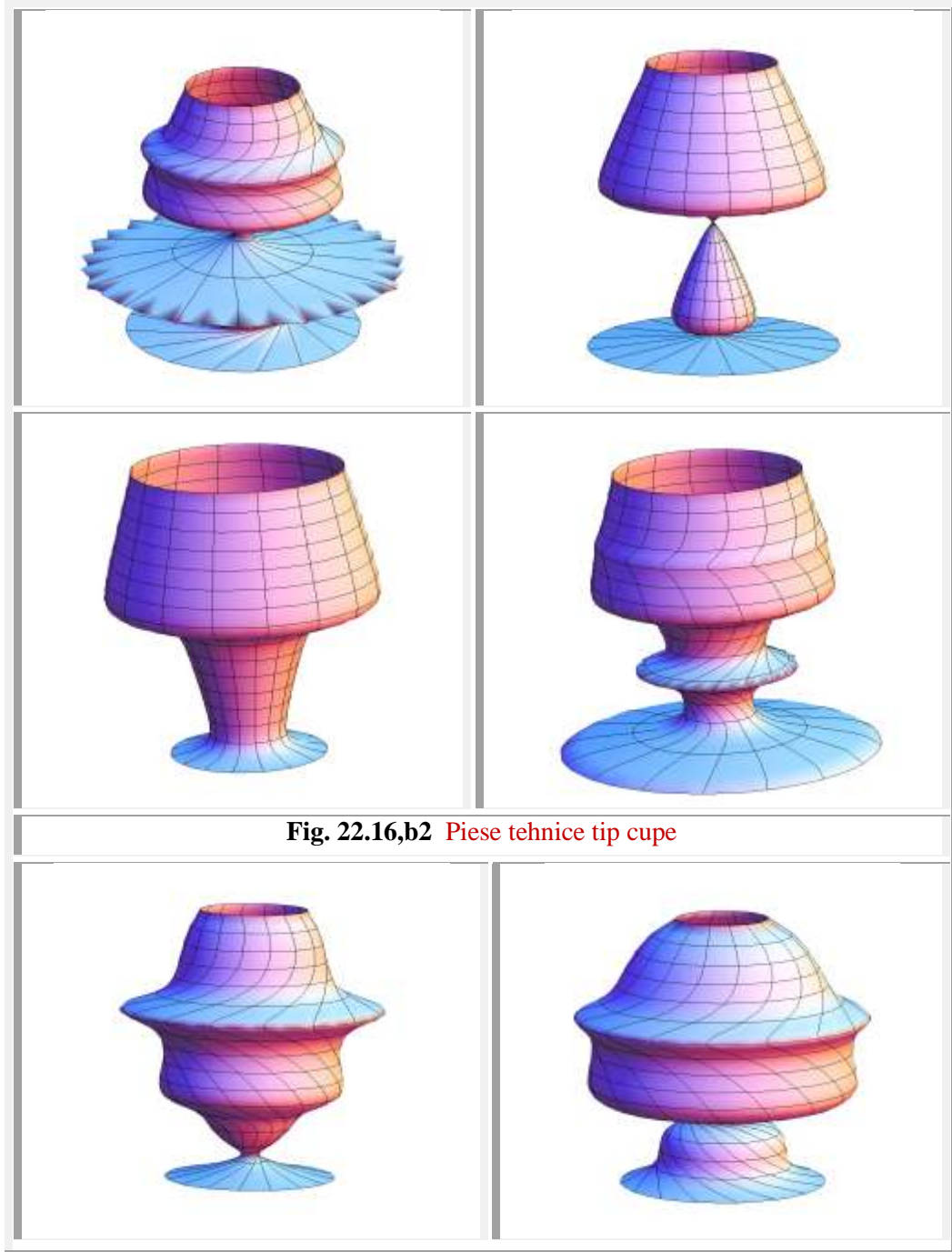


Fig. 22.16,b1 Piese tehnice tip cupe





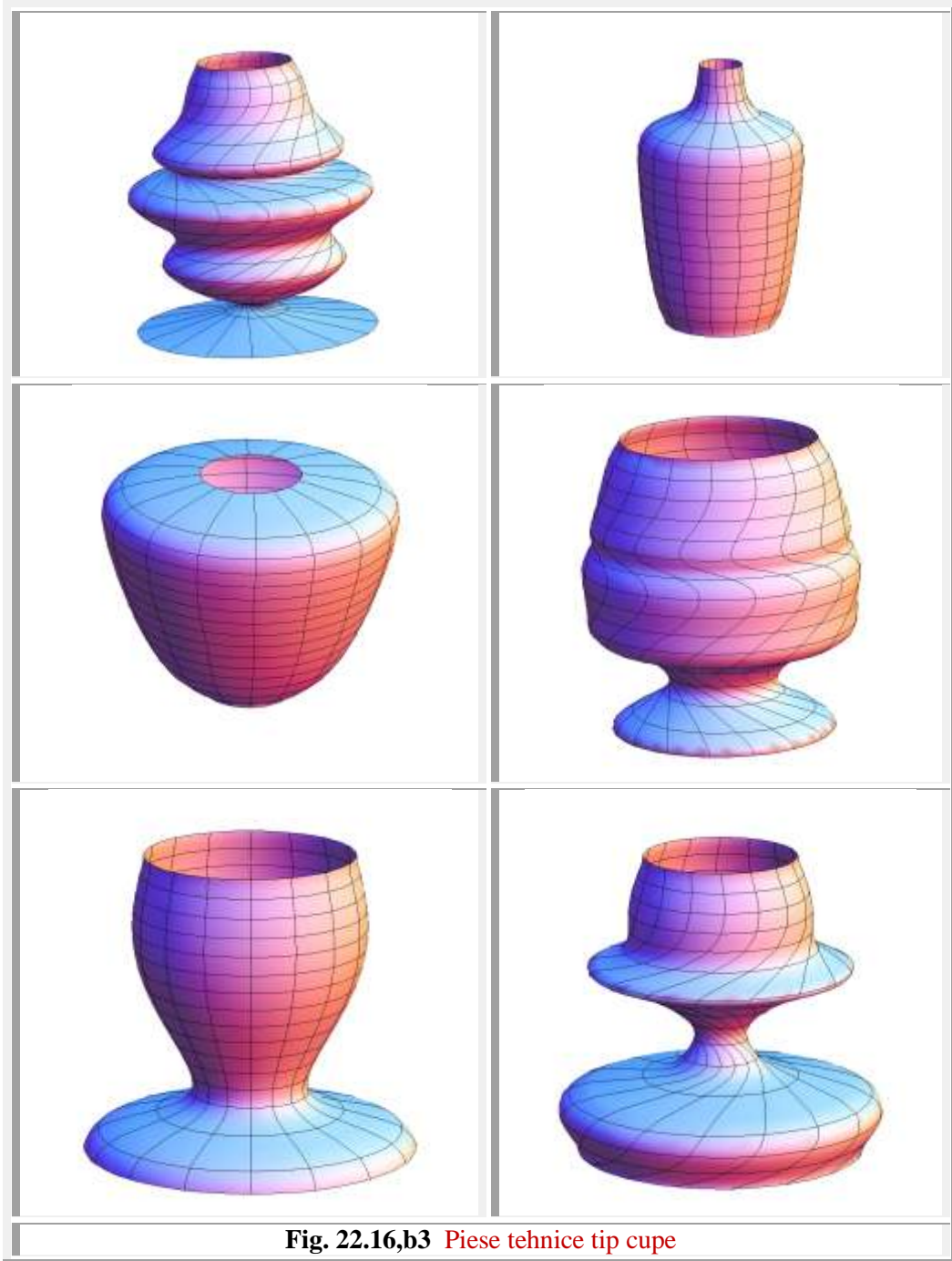


Fig. 22.16,b3 Piese tehnice tip cupe

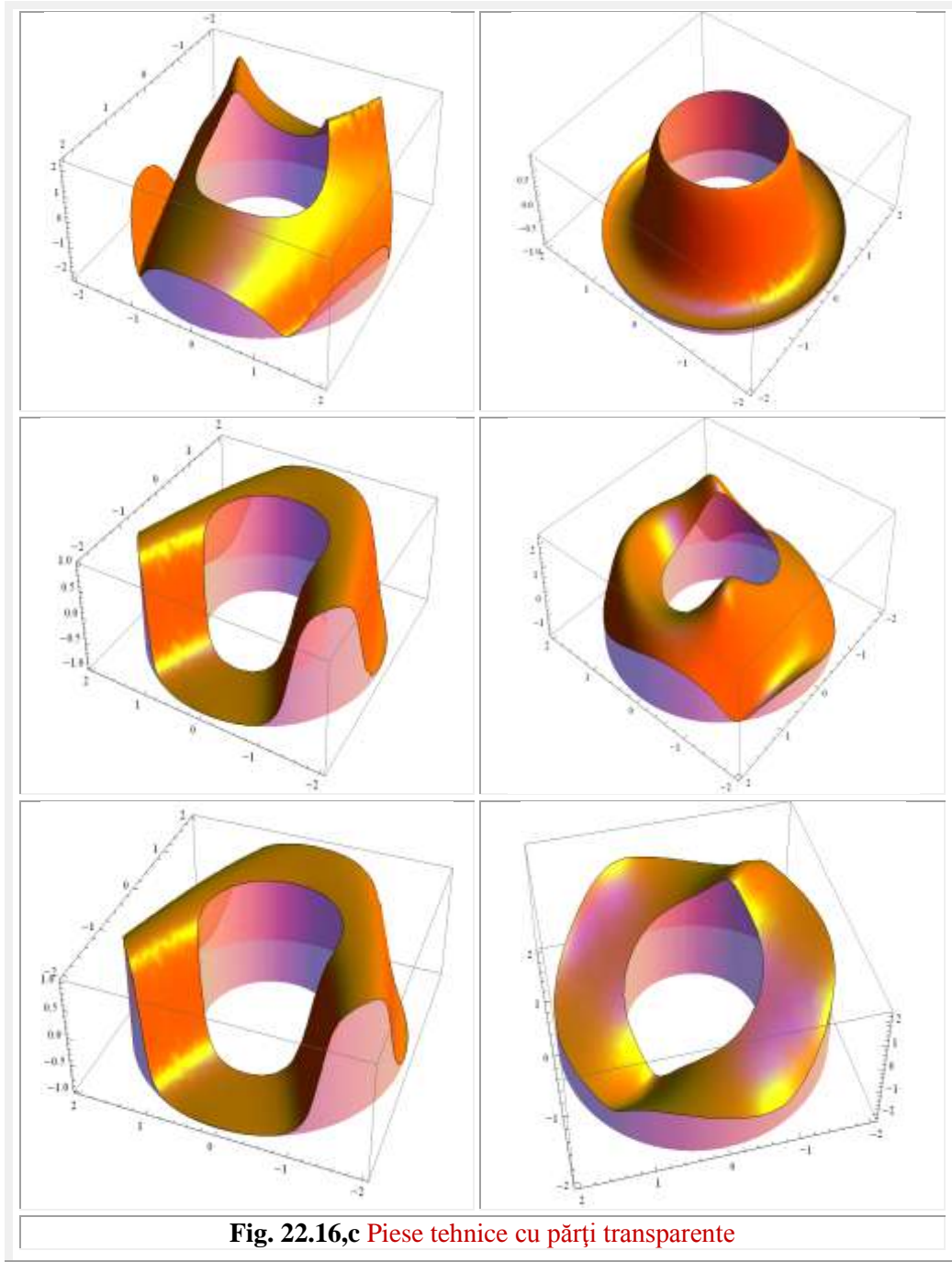
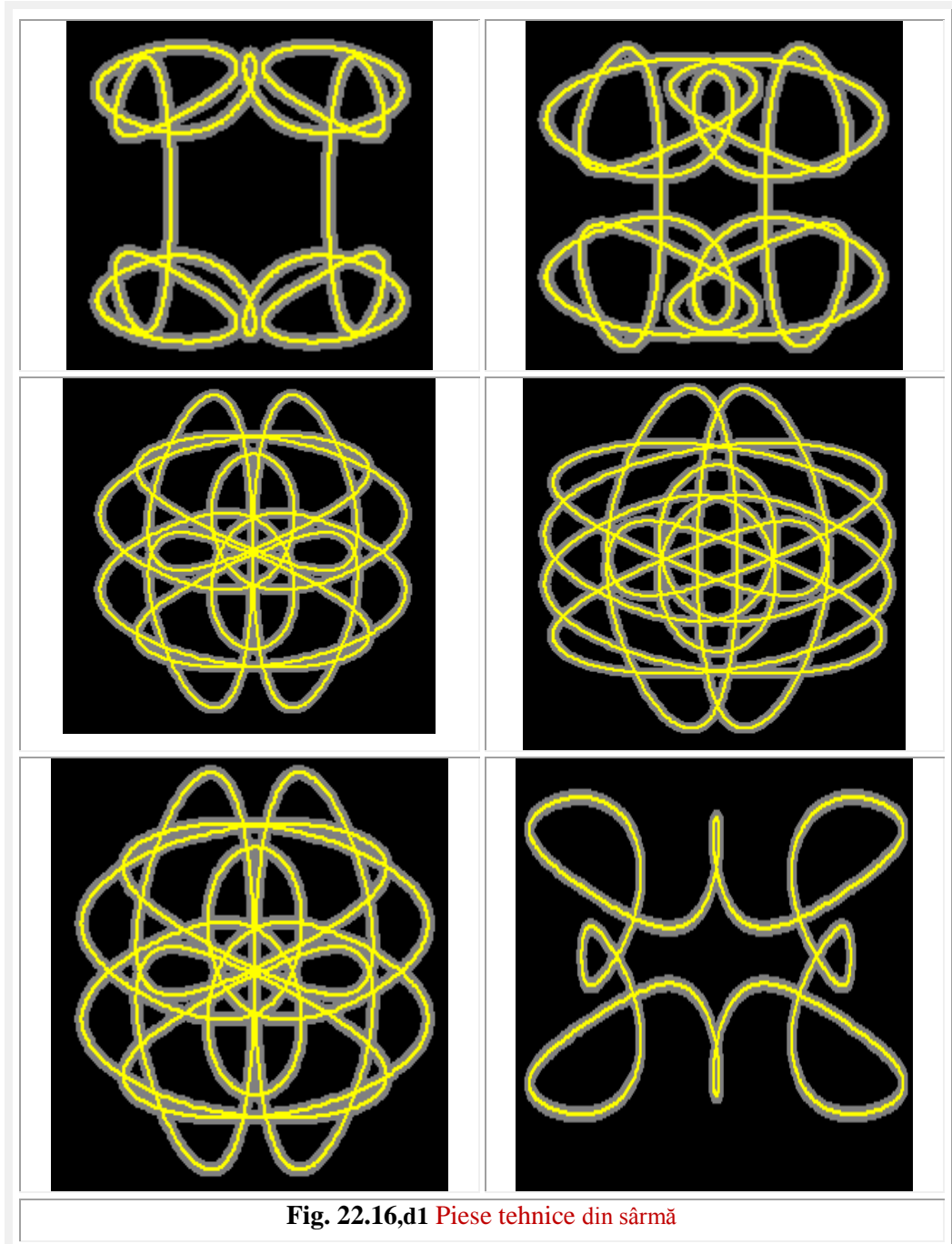


Fig. 22.16,c Piese tehnice cu părți transparente



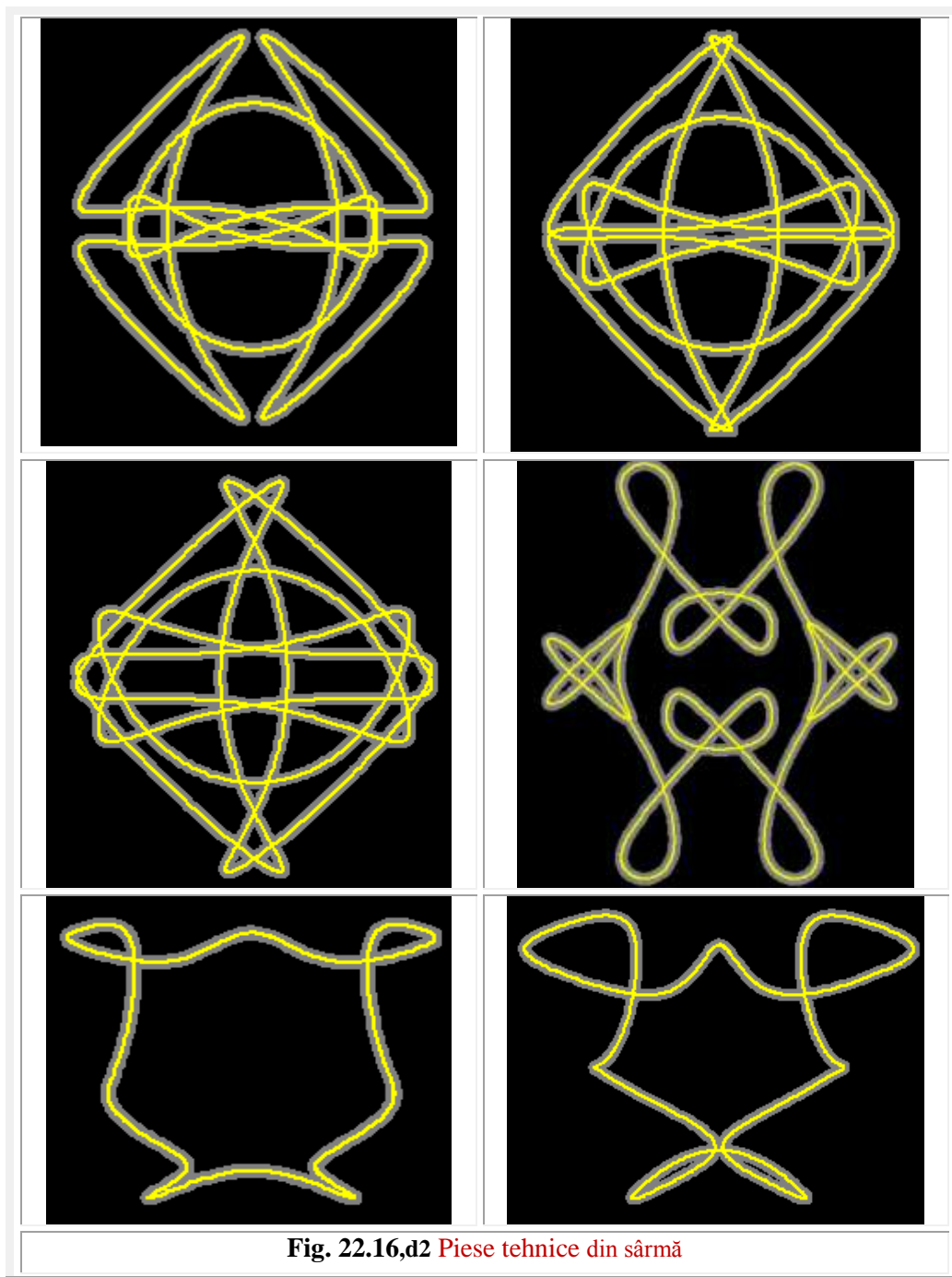


Fig. 22.16,d2 Piese tehnice din sârmă

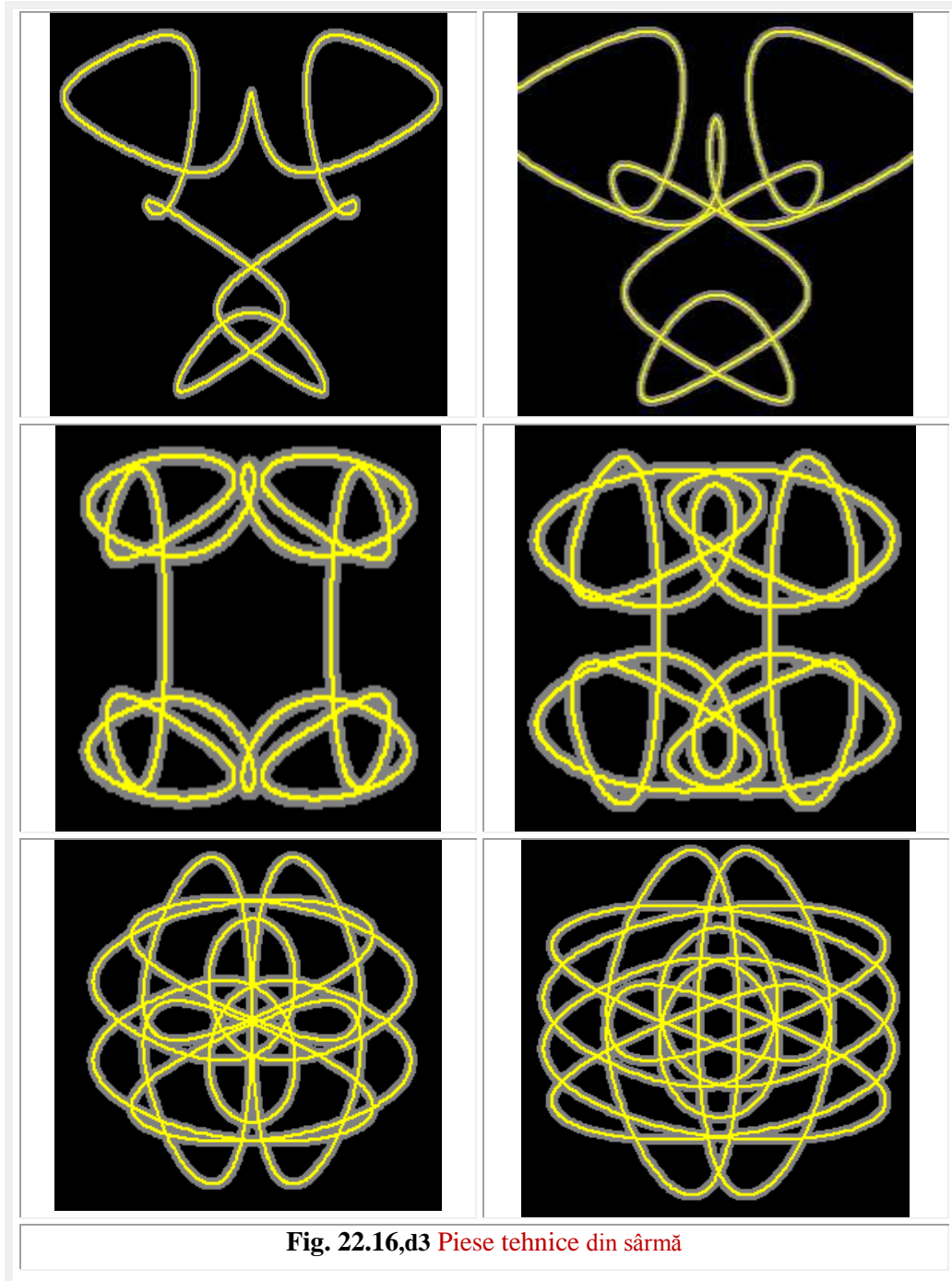
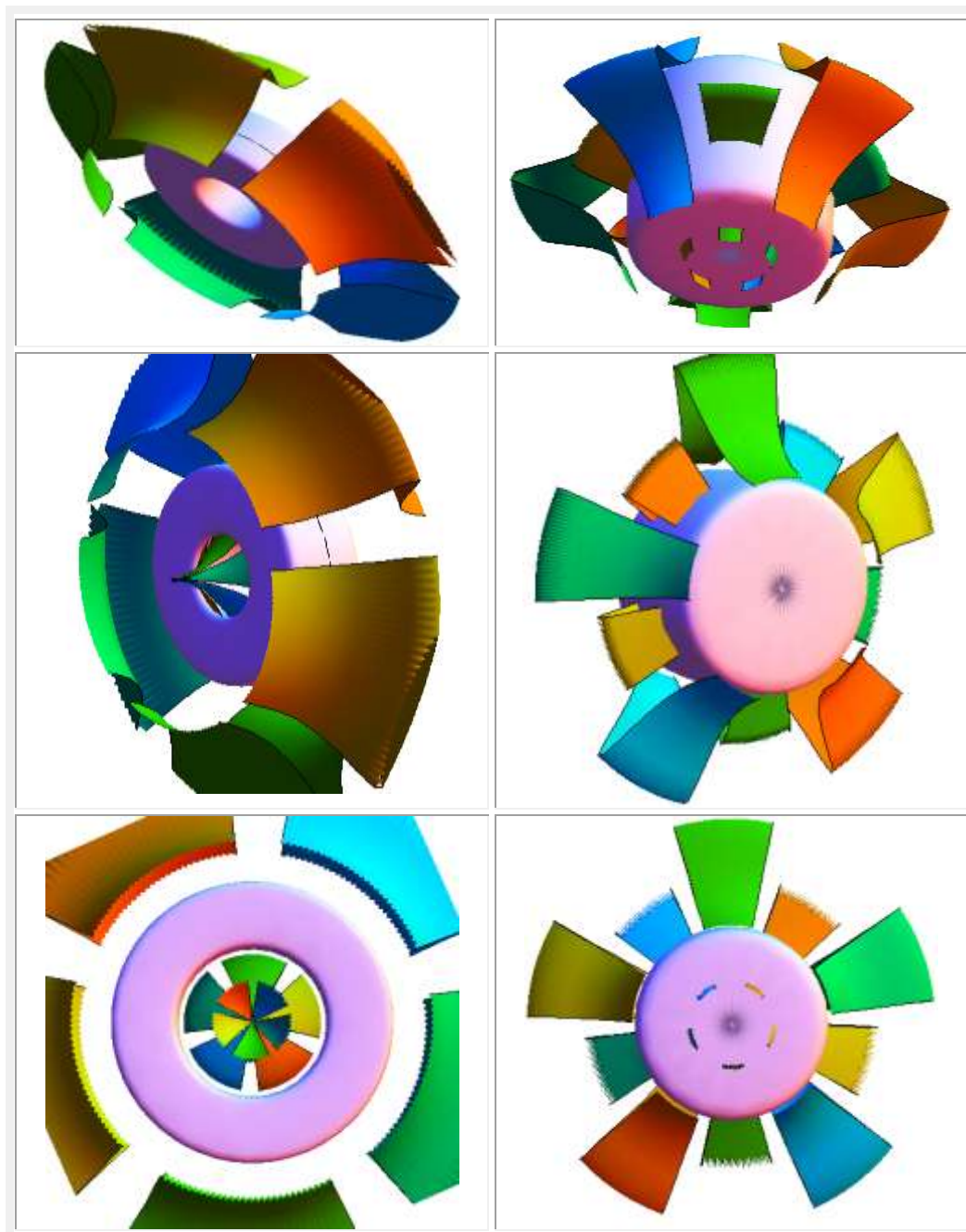
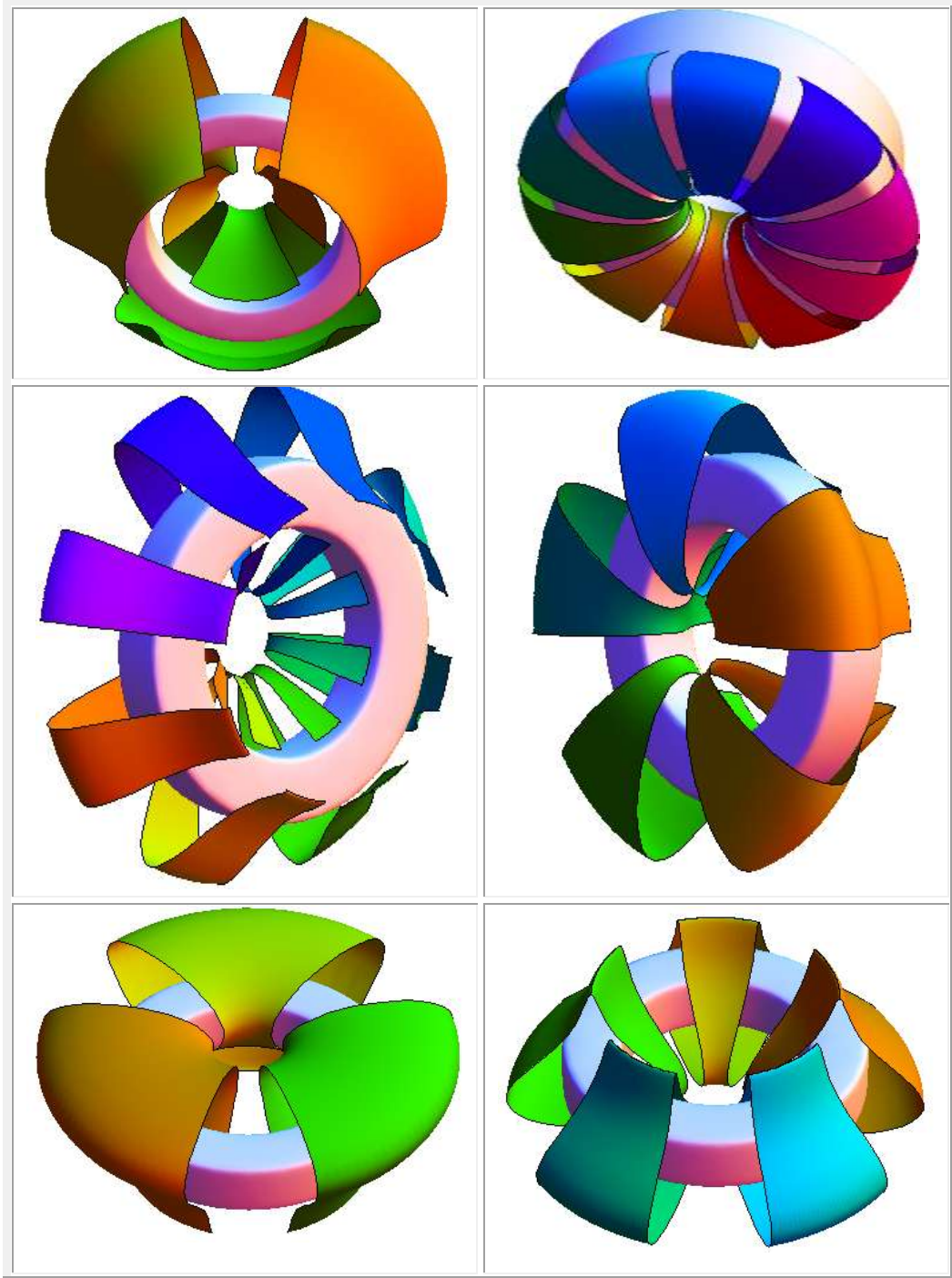
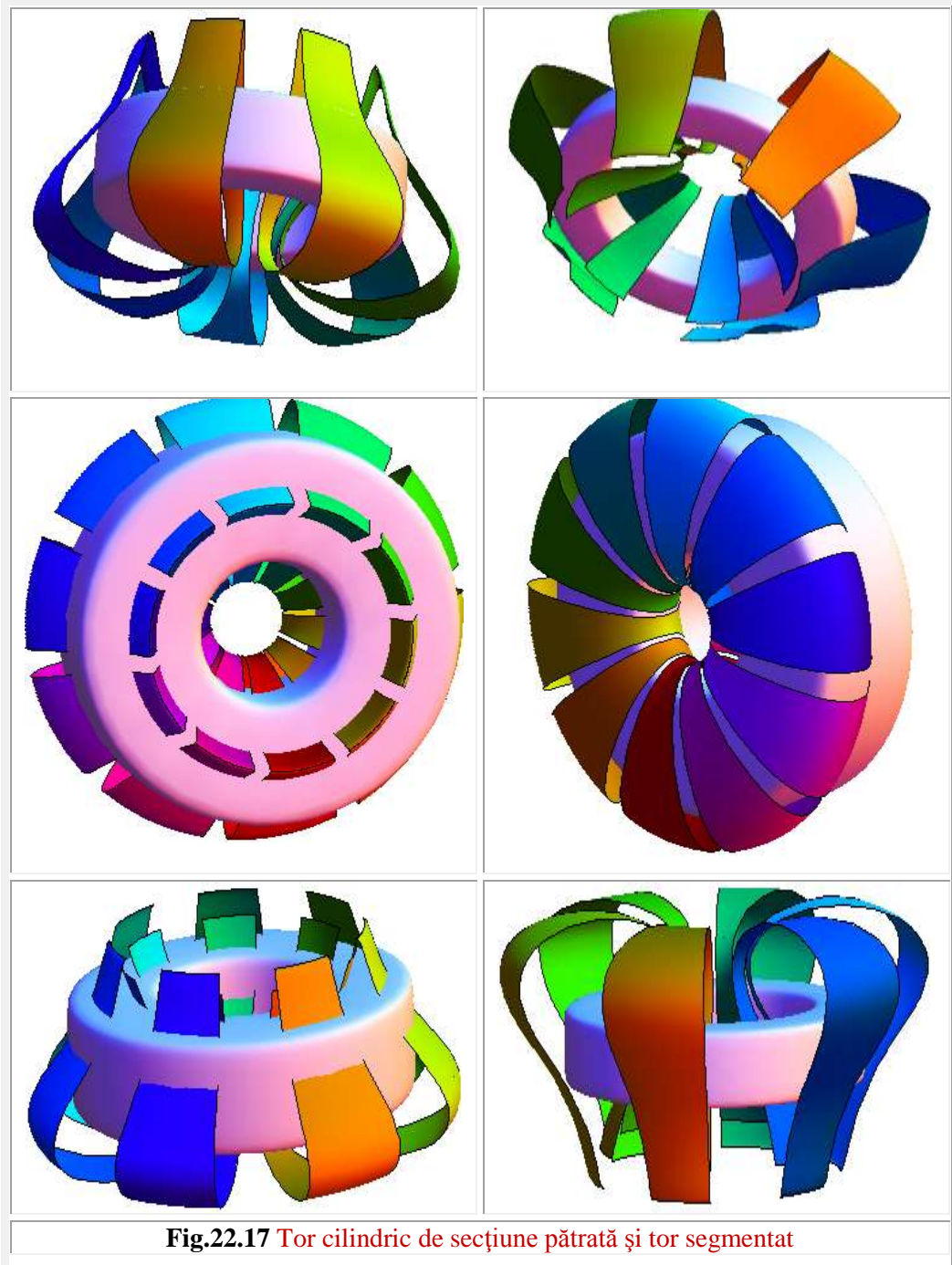


Fig. 22.16,d3 Piese tehnice din sârmă

22.5 TOR SEGMENTAT SM DE SECȚIUNE PĂTRATĂ

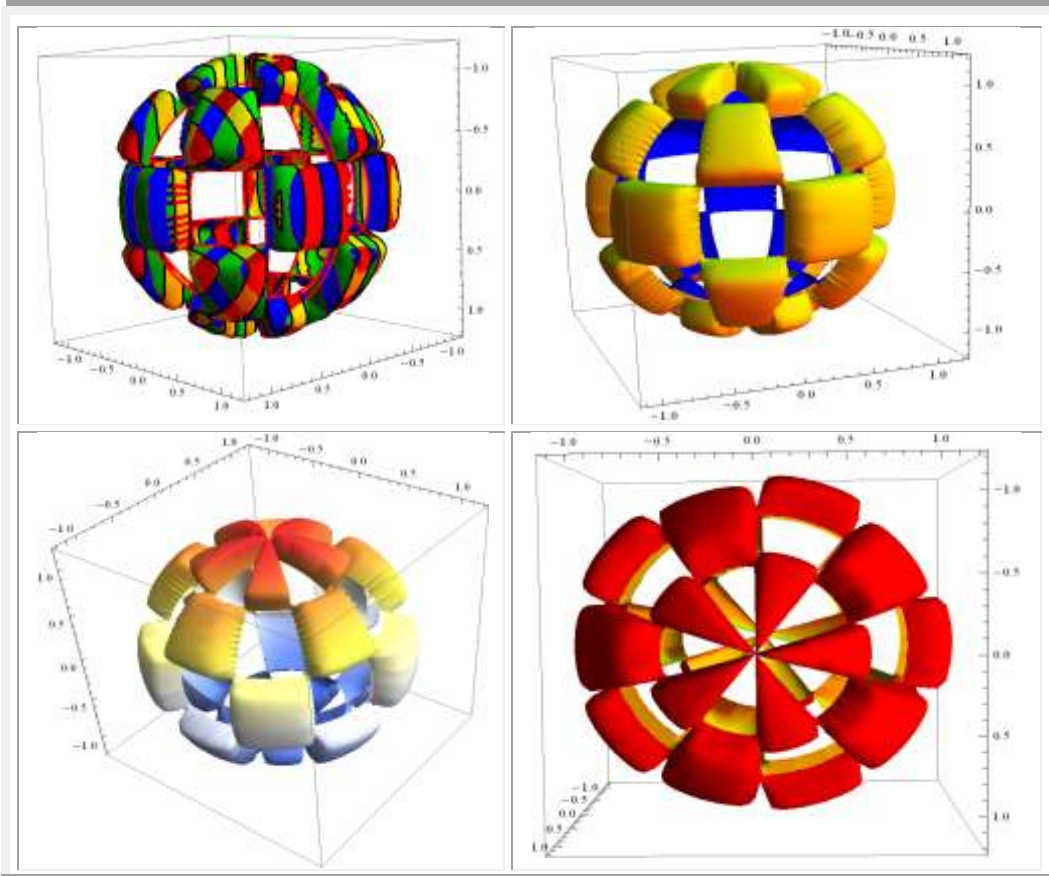
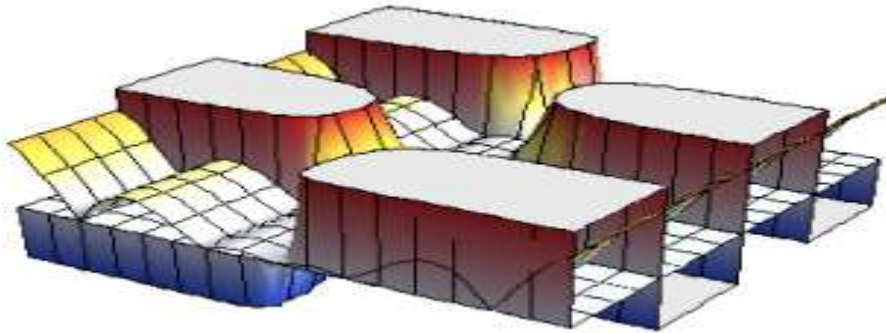


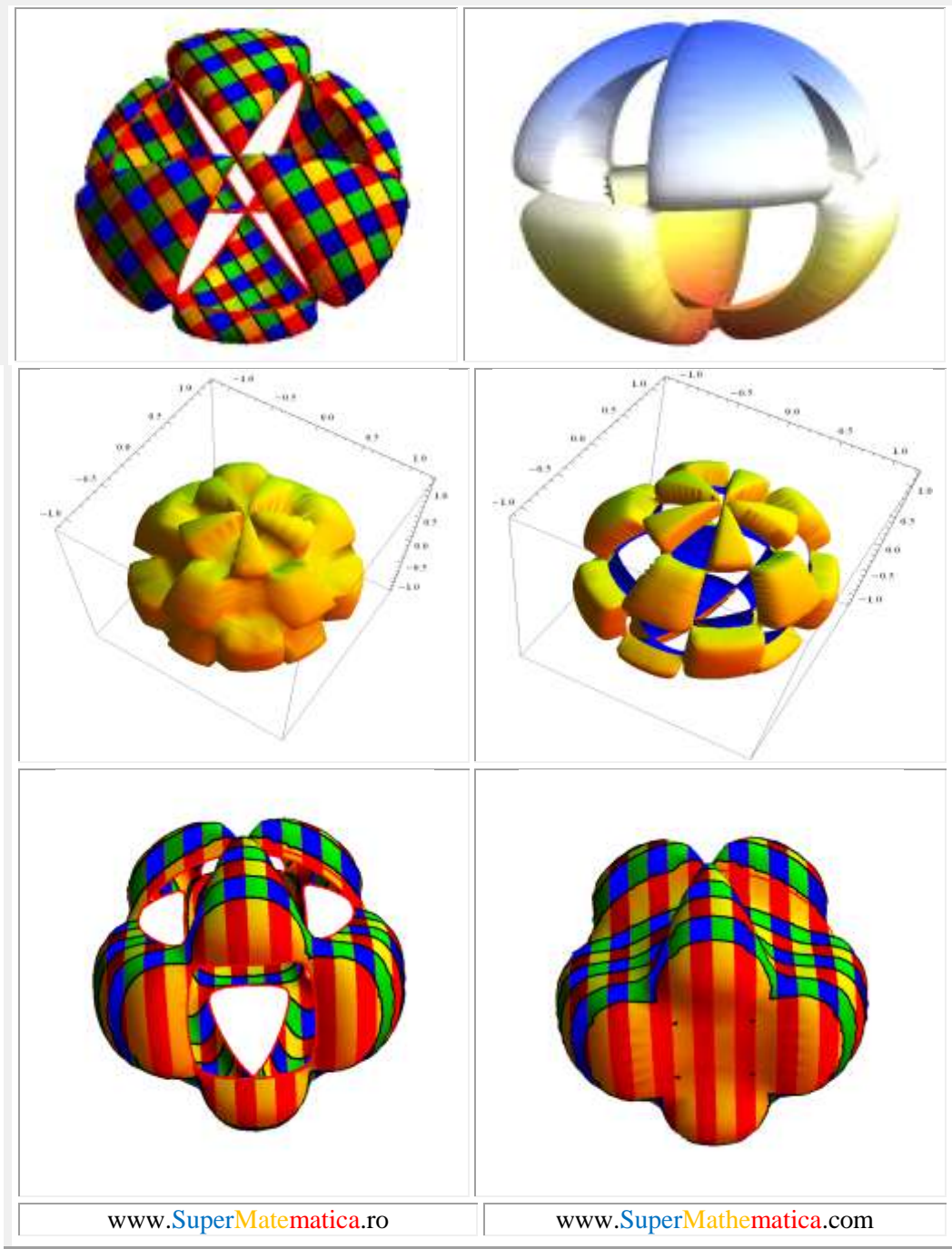


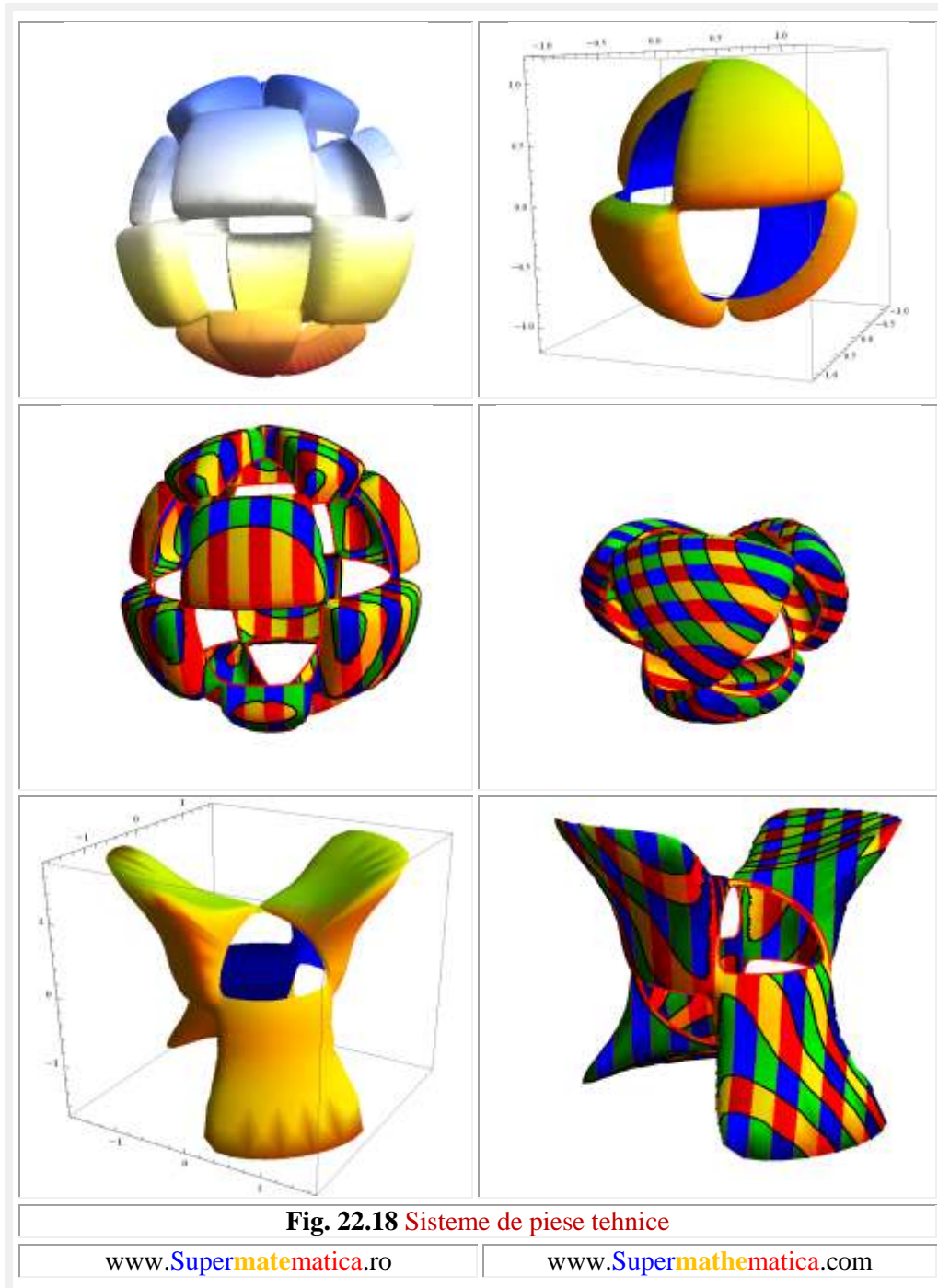


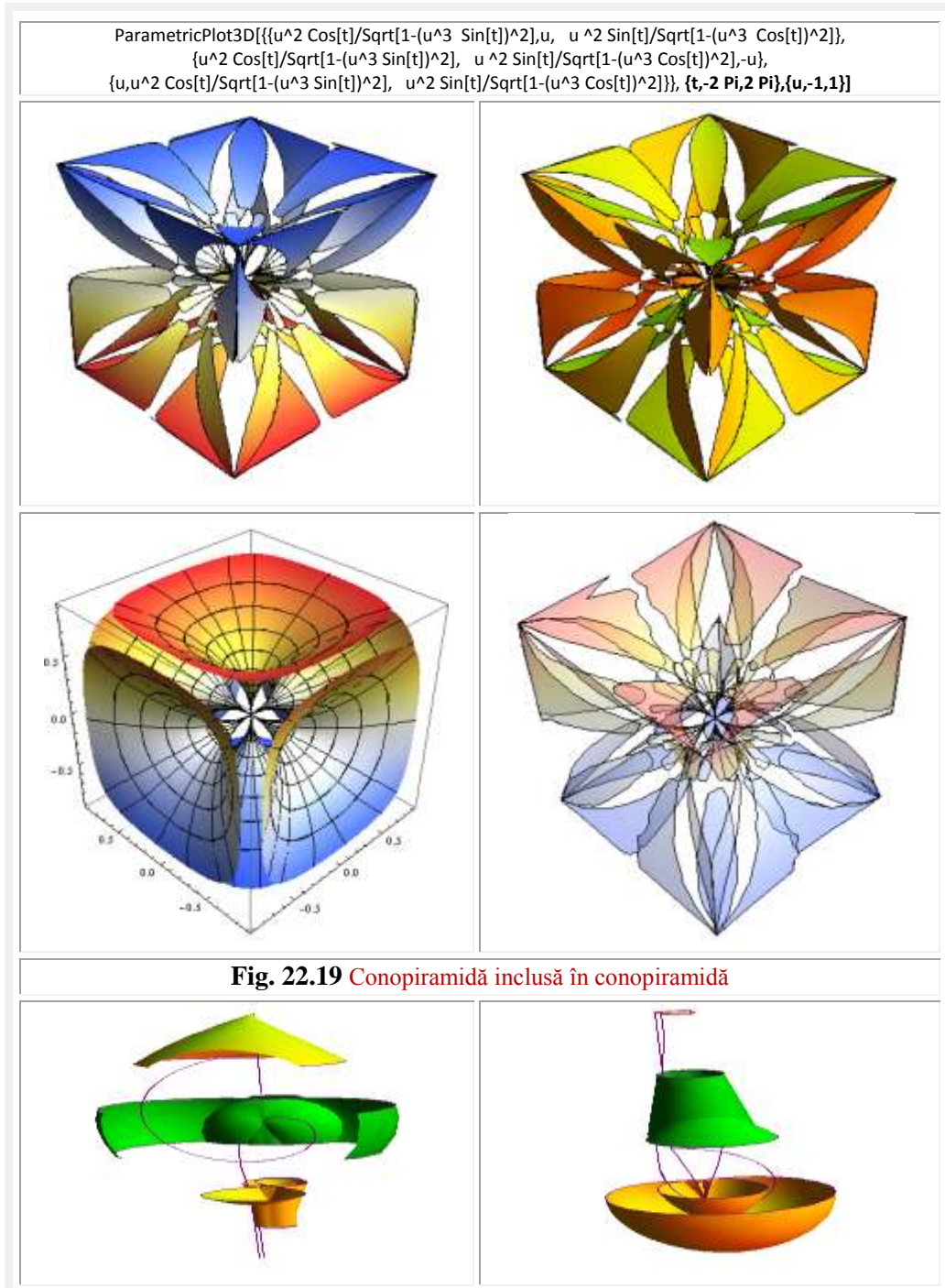
22.6 SISTEME DE PIESE TEHNICE

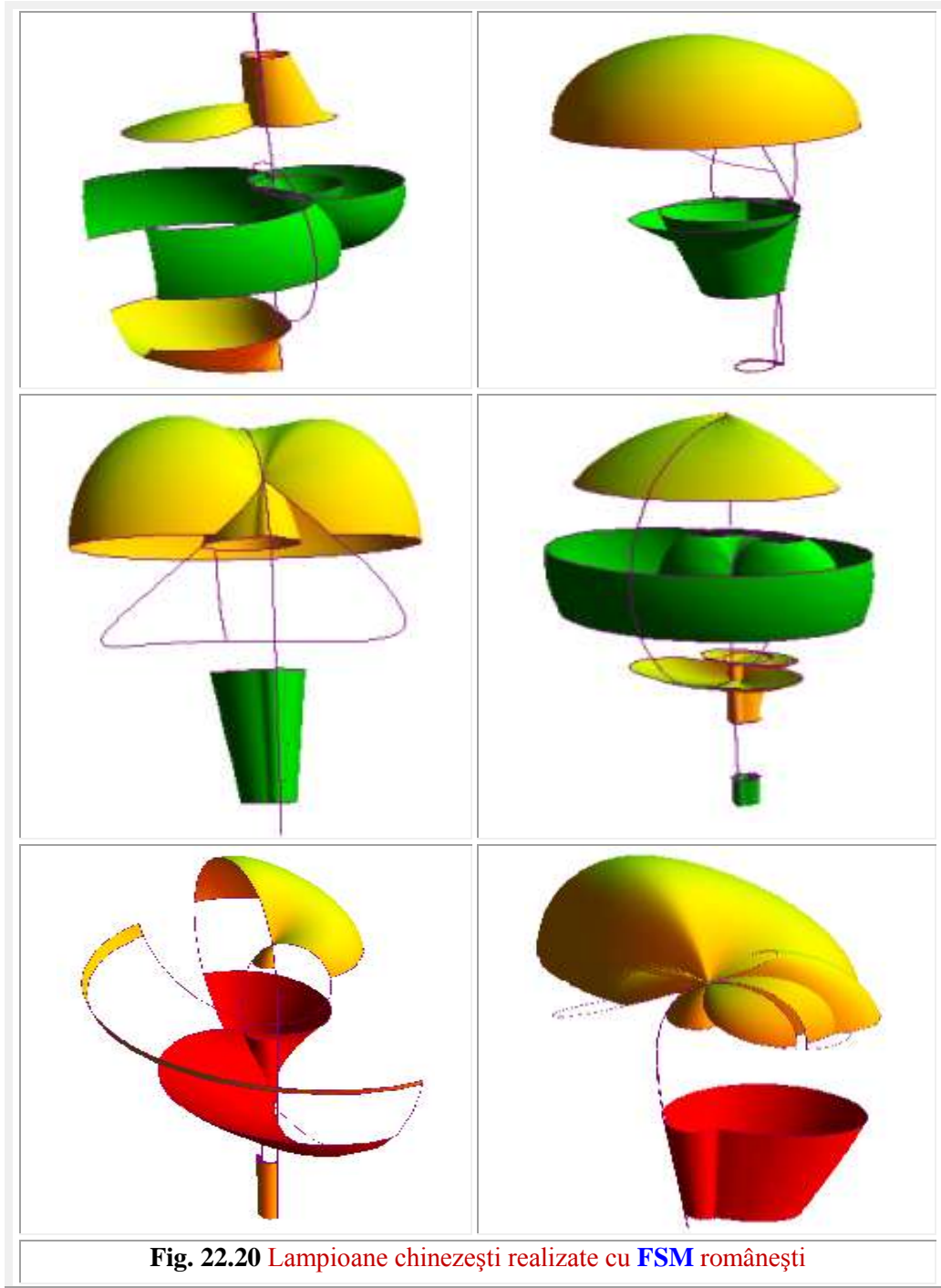
```
Plot3D[{{Re[Cos[t]Sin[u]],Im[Sin[u]Sin[t-ArcSin[0.1uSin[t]]]Sqrt[1-(0.1 u)^2]], Abs[0.2 u Cos[u]]},
{u, -2 Pi, 2 Pi}, {t, -2 Pi, 2 Pi}]
```











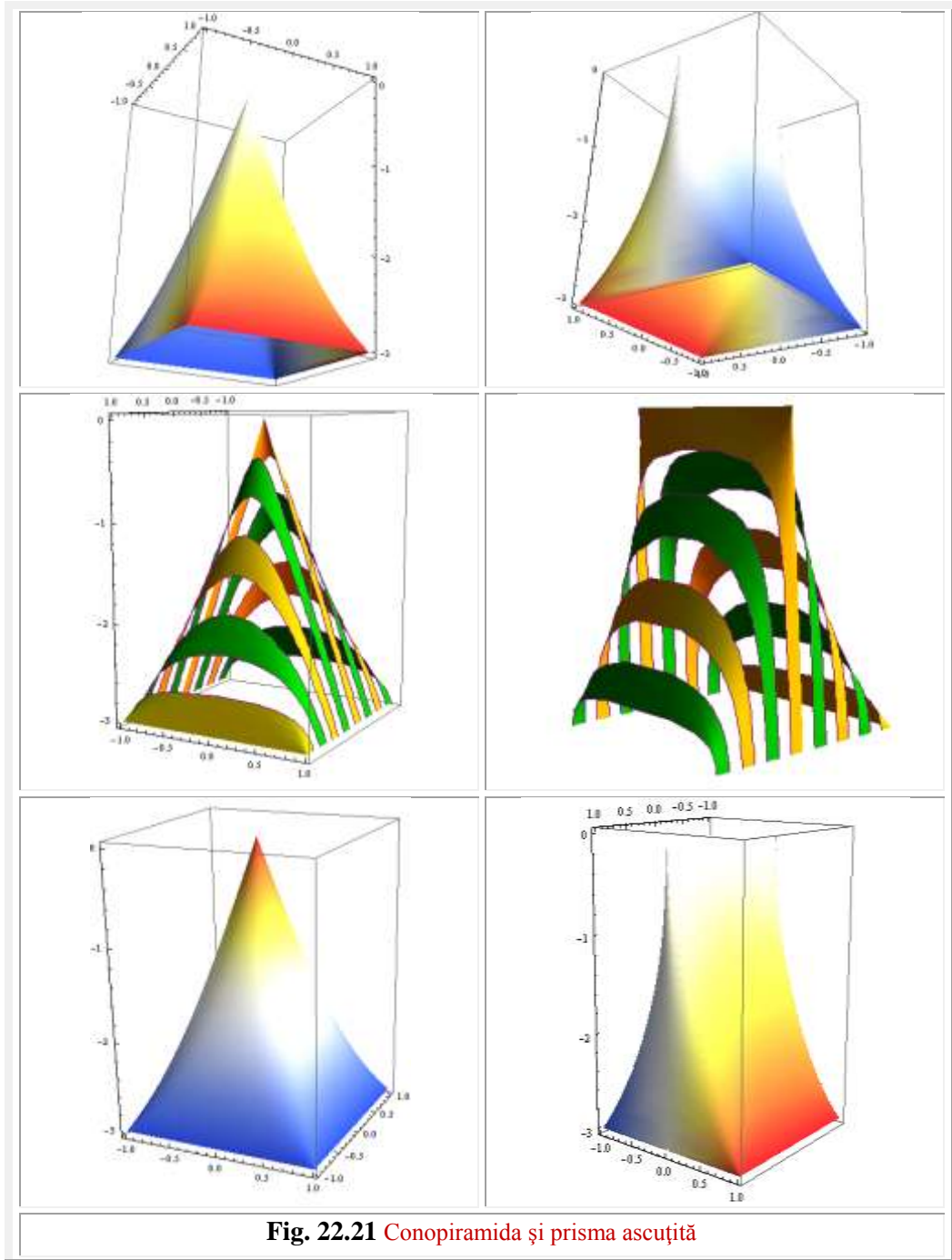
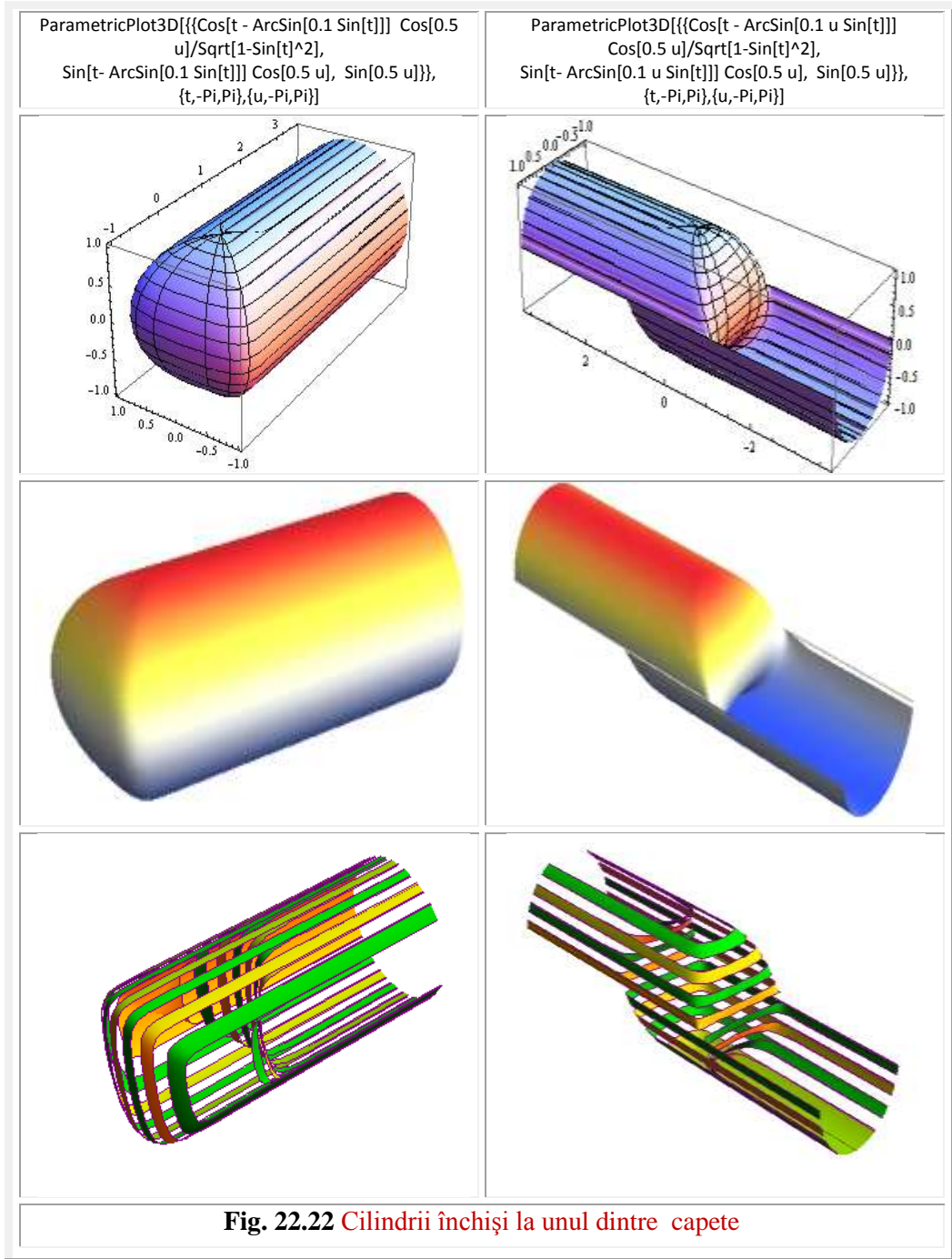
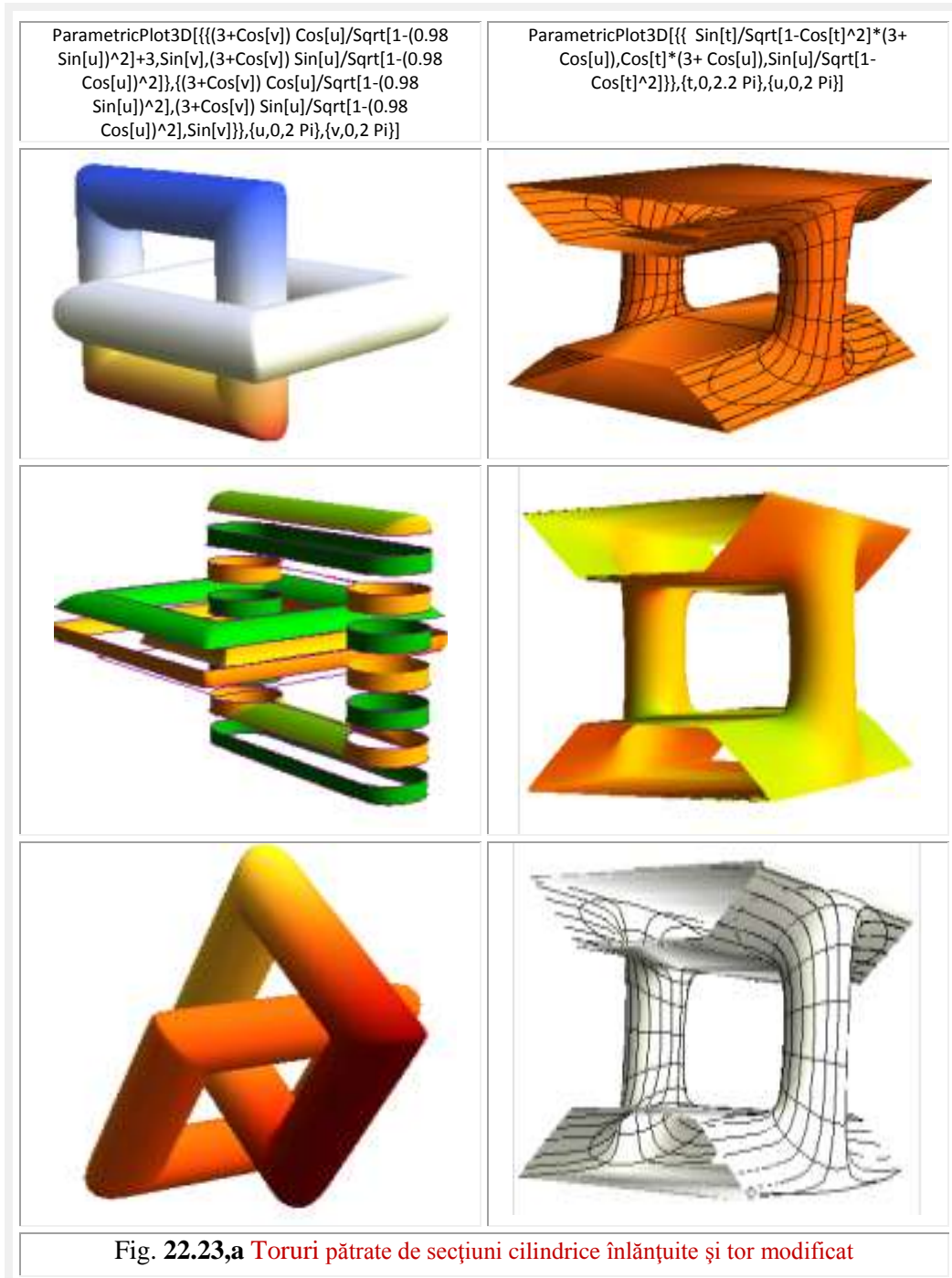
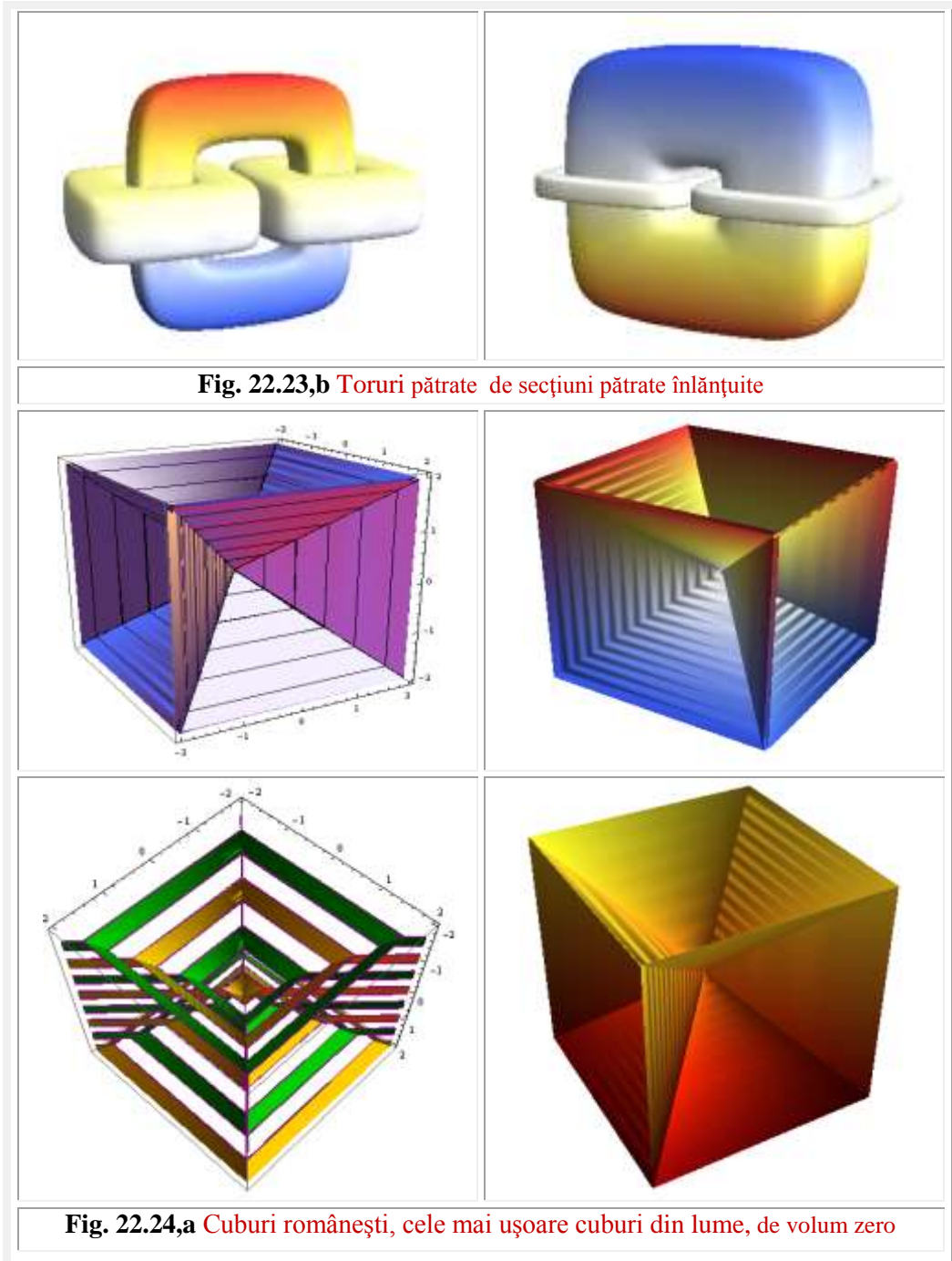


Fig. 22.21 Conopiramida și prisma ascuțită







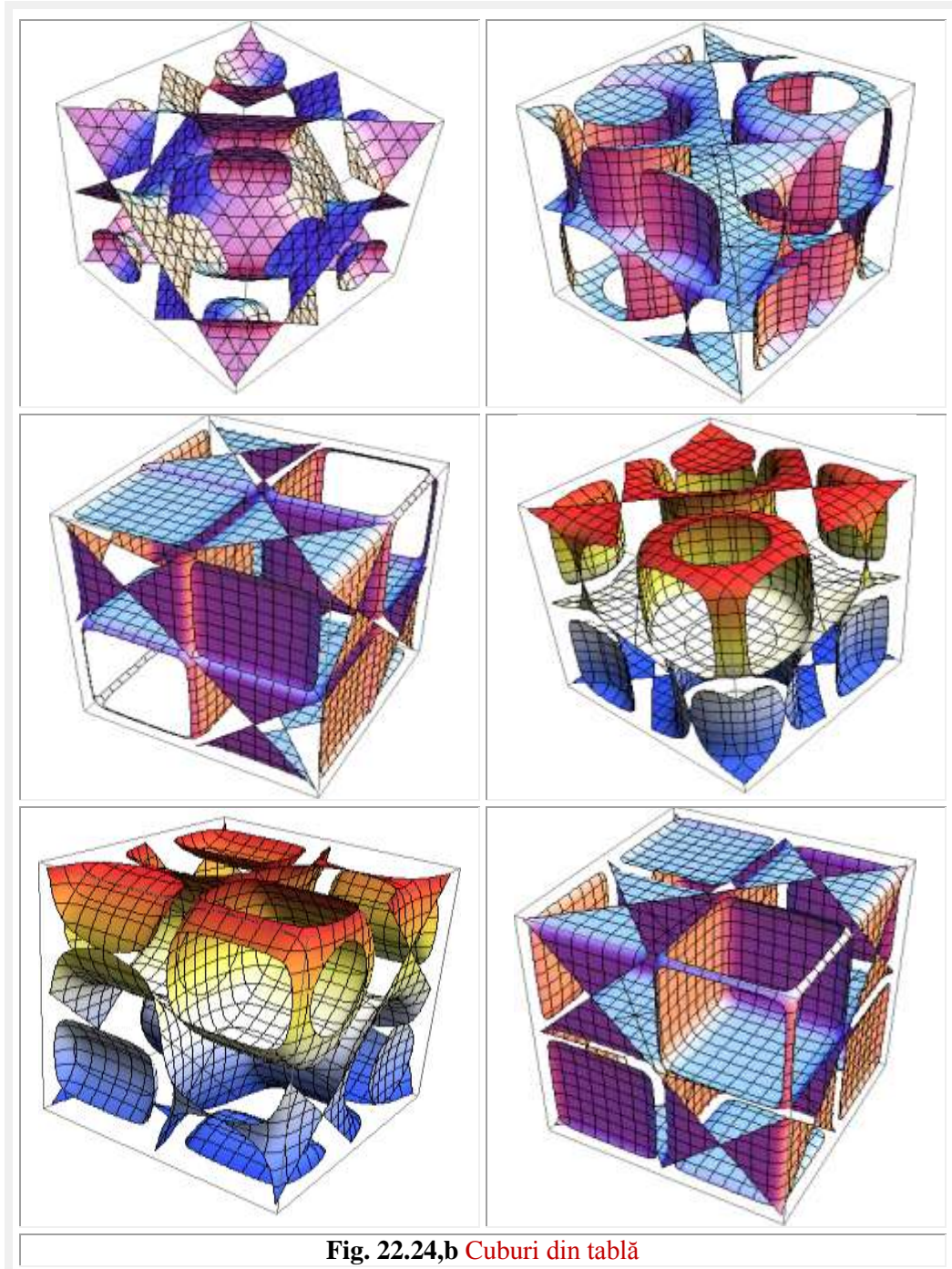


Fig. 22.24,b Cuburi din tablă

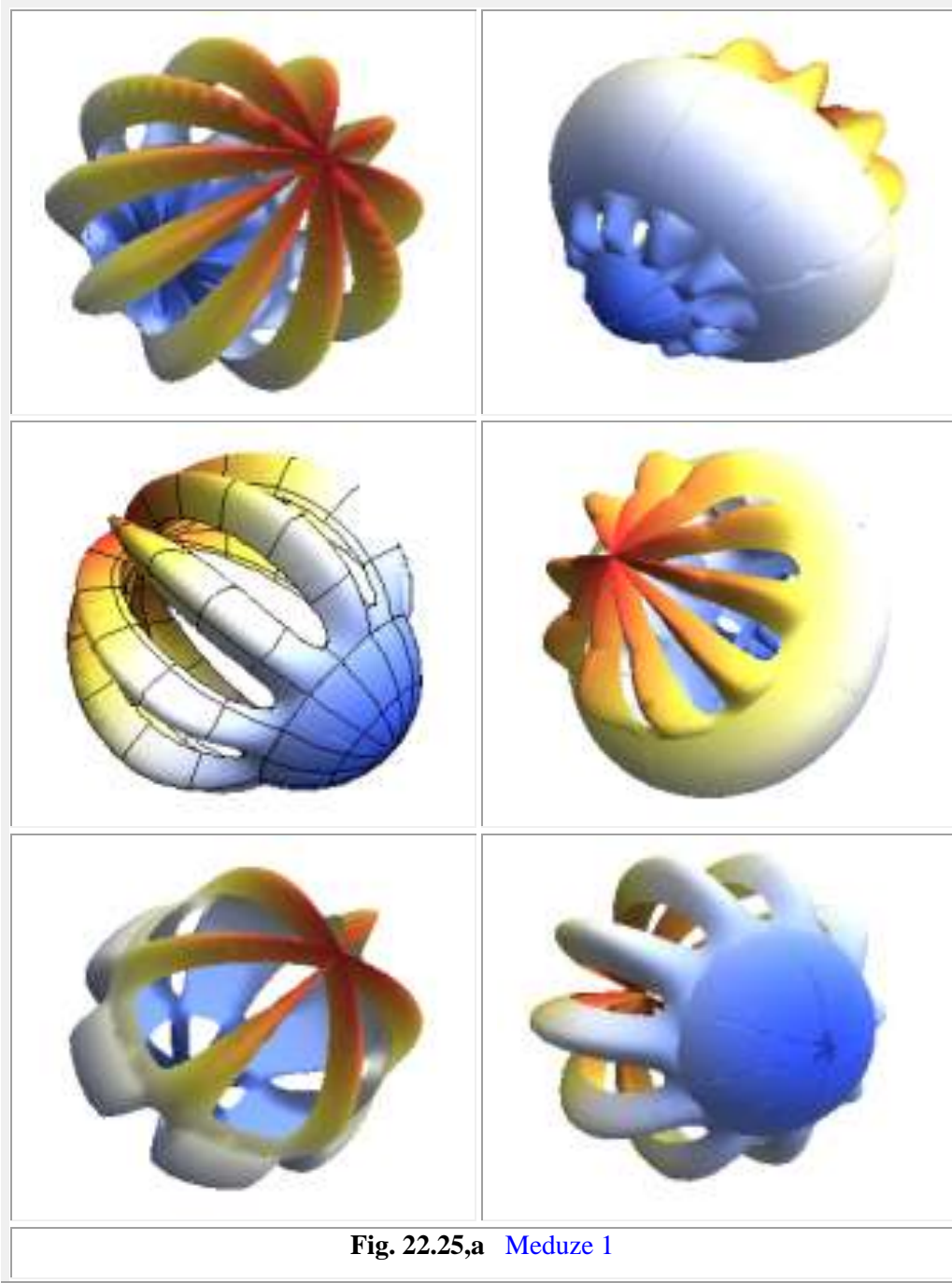
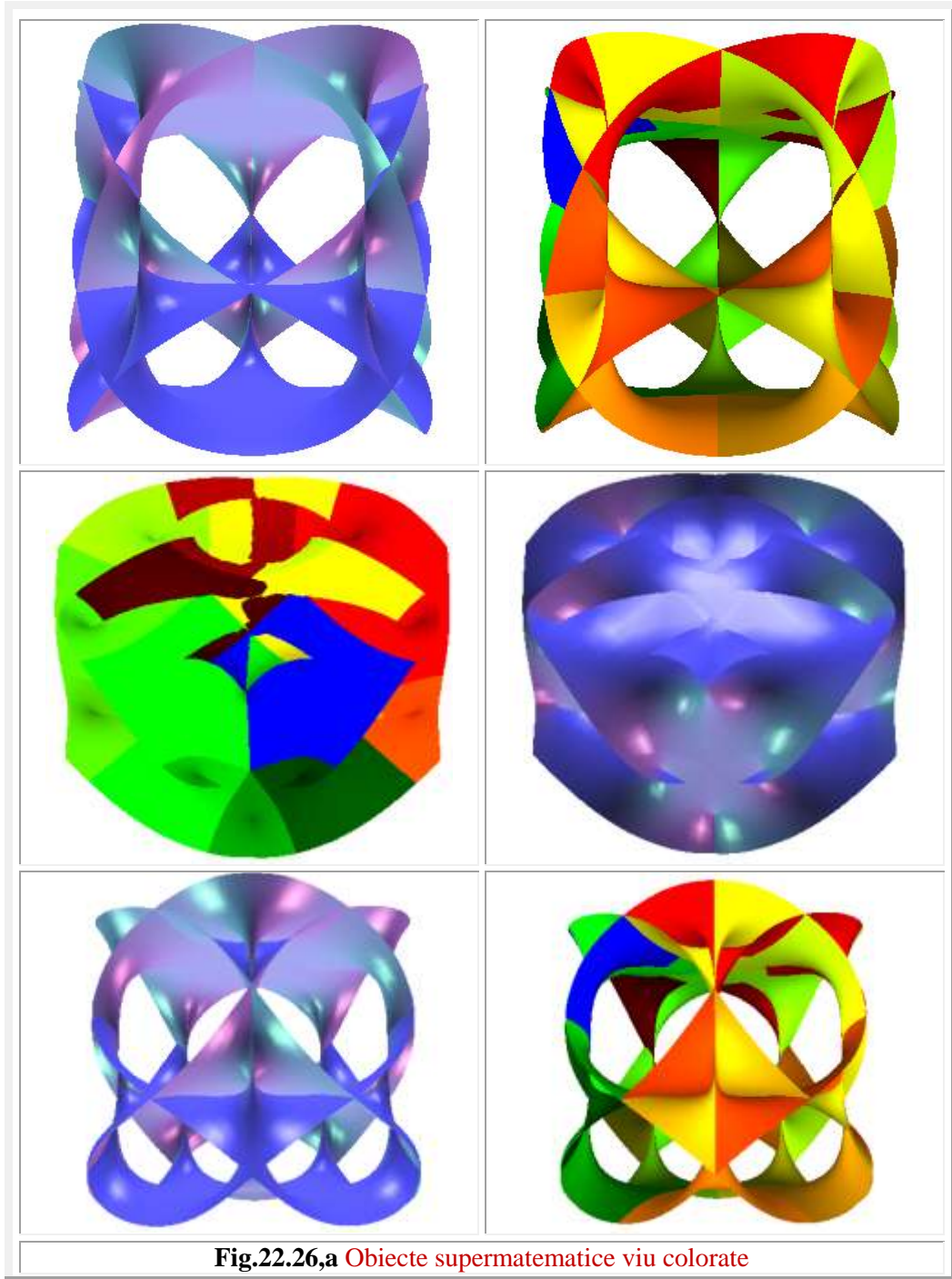
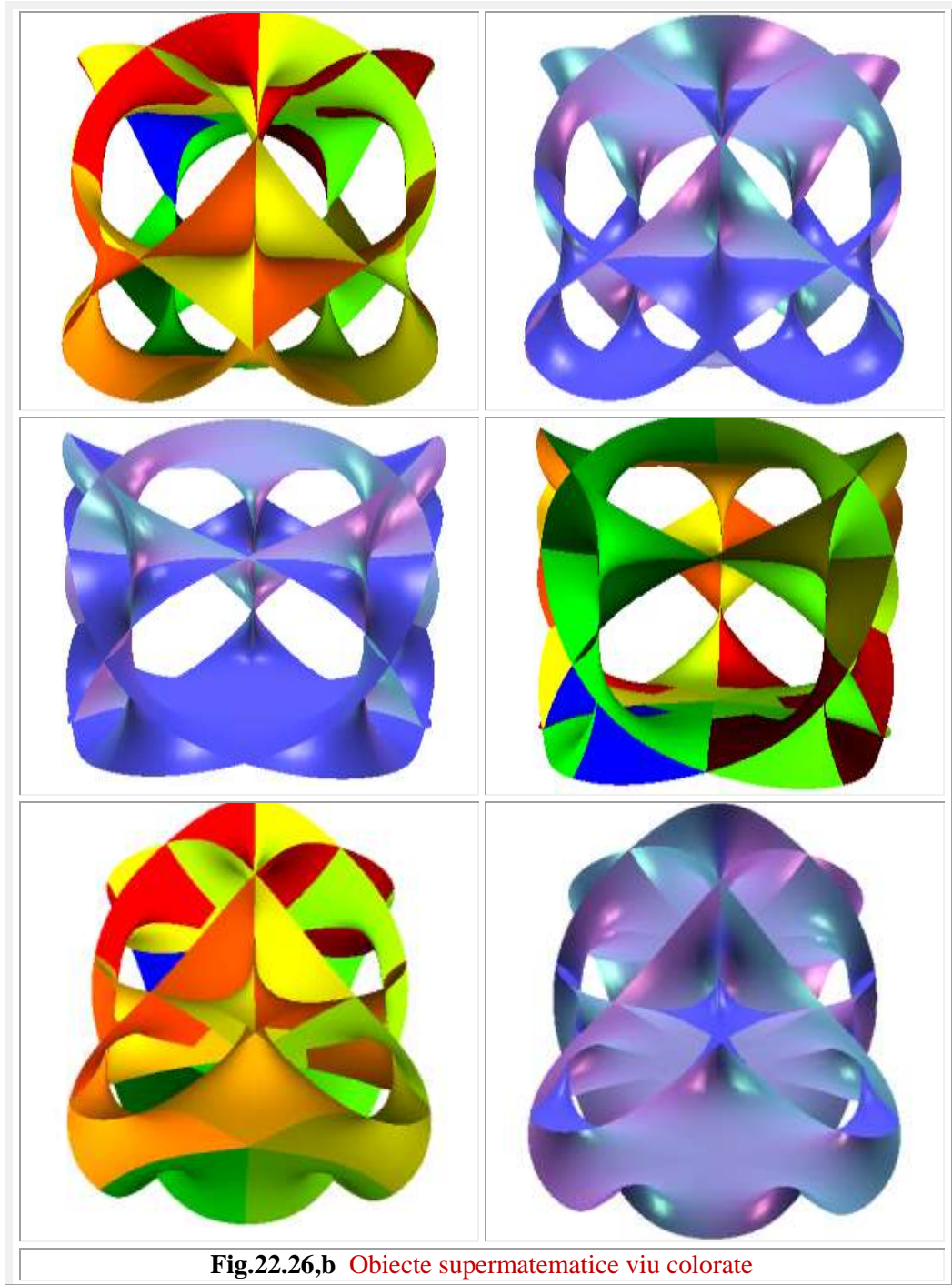
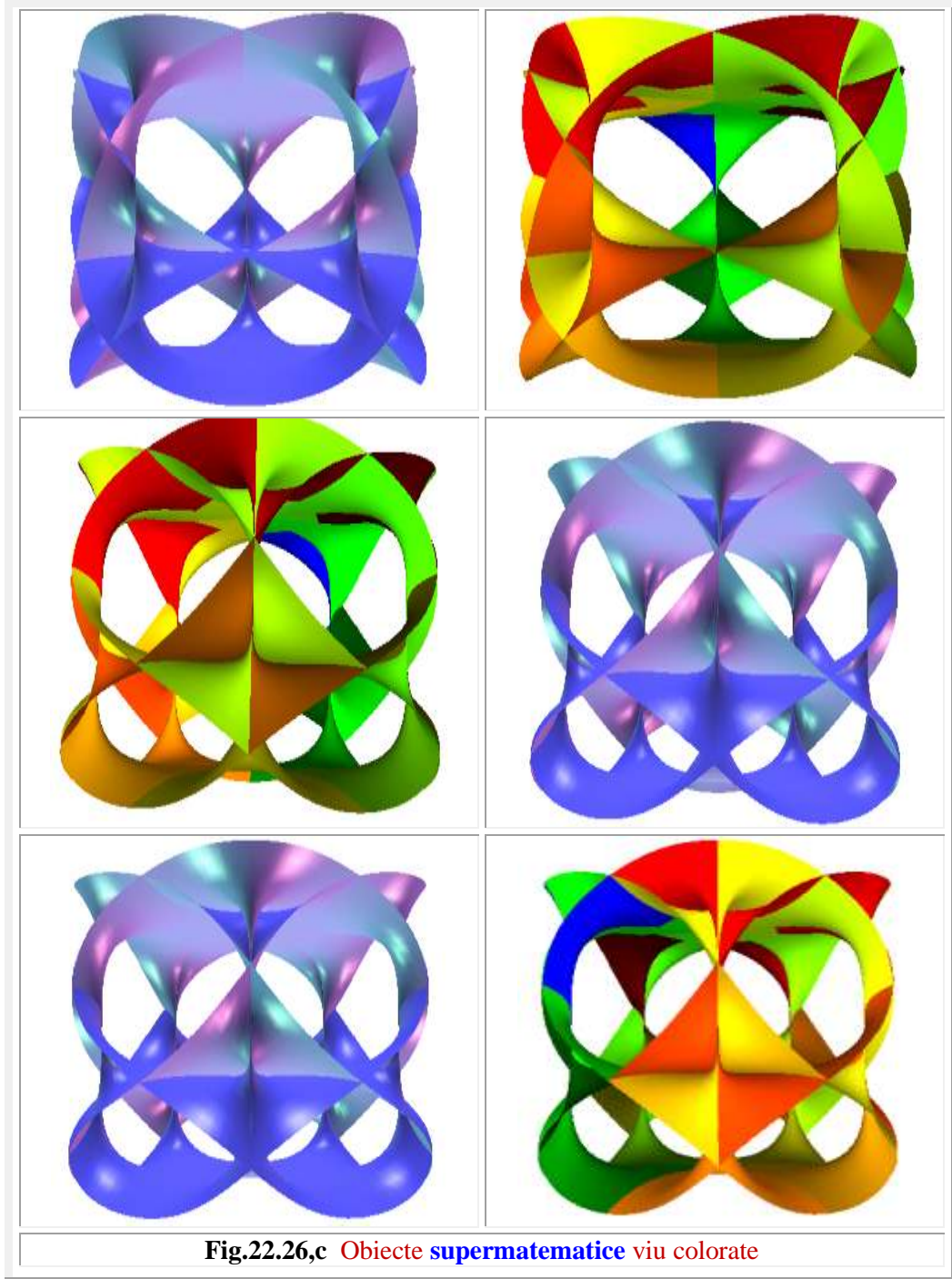




Fig.22.25,b Meduze 2







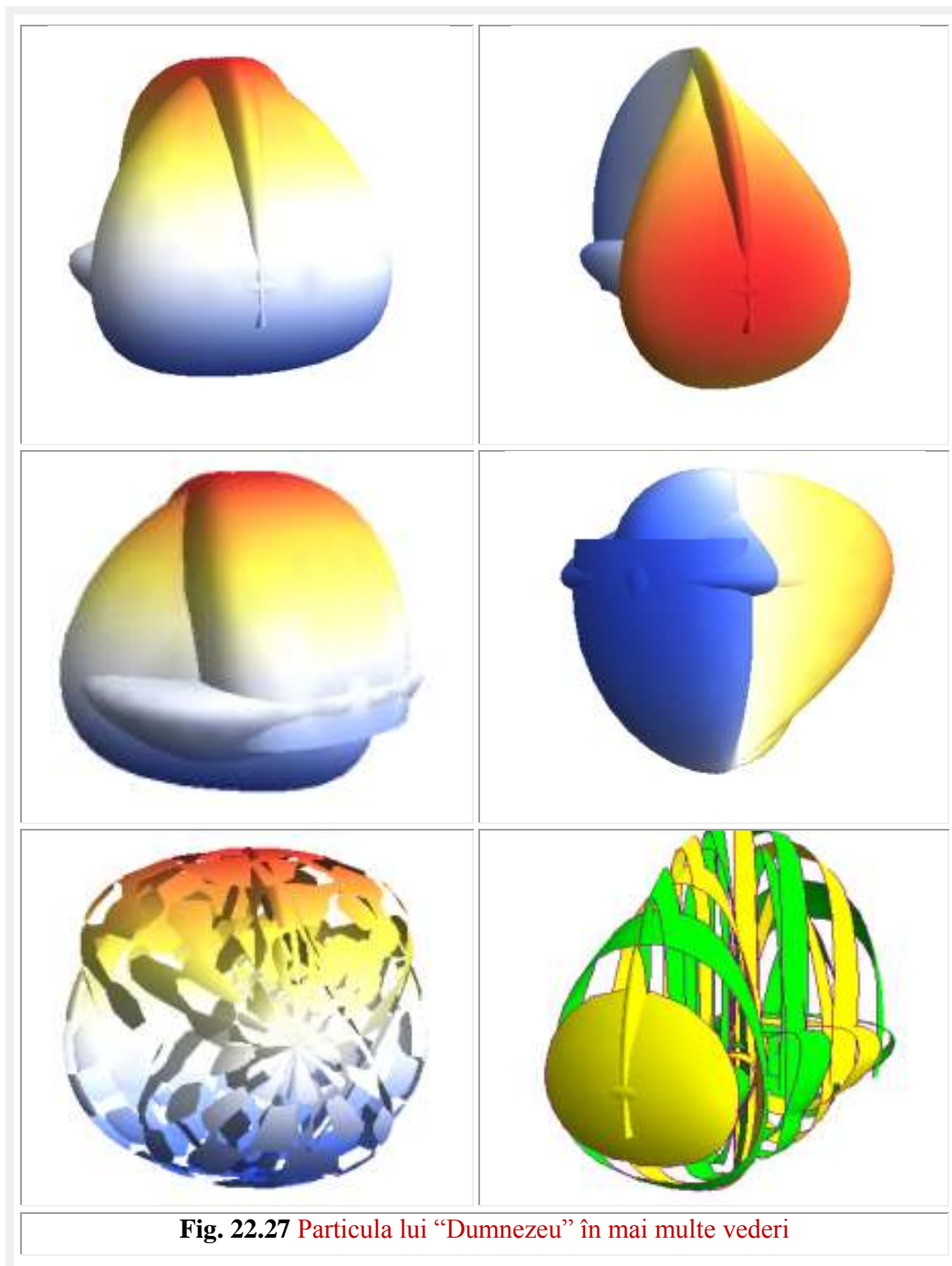
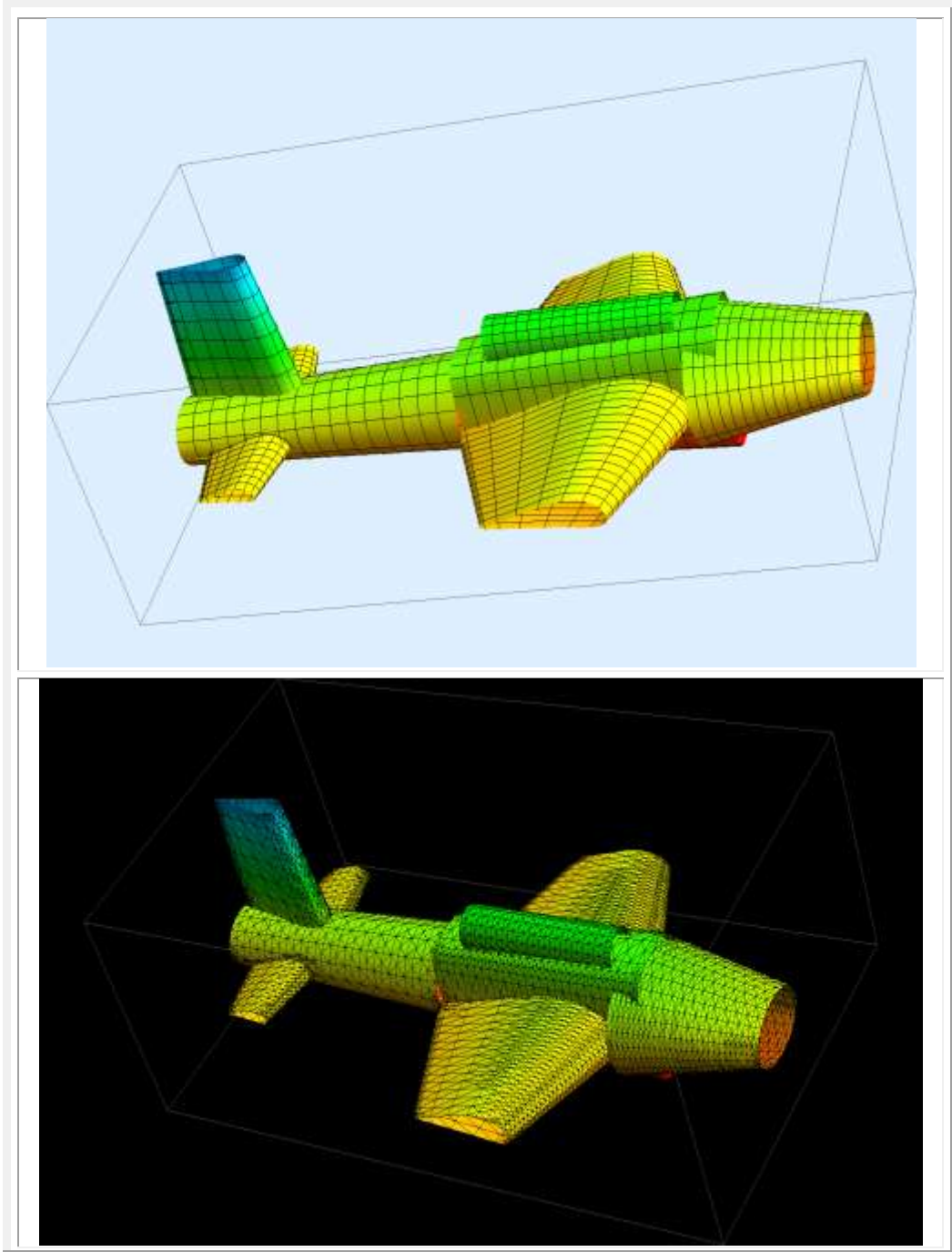
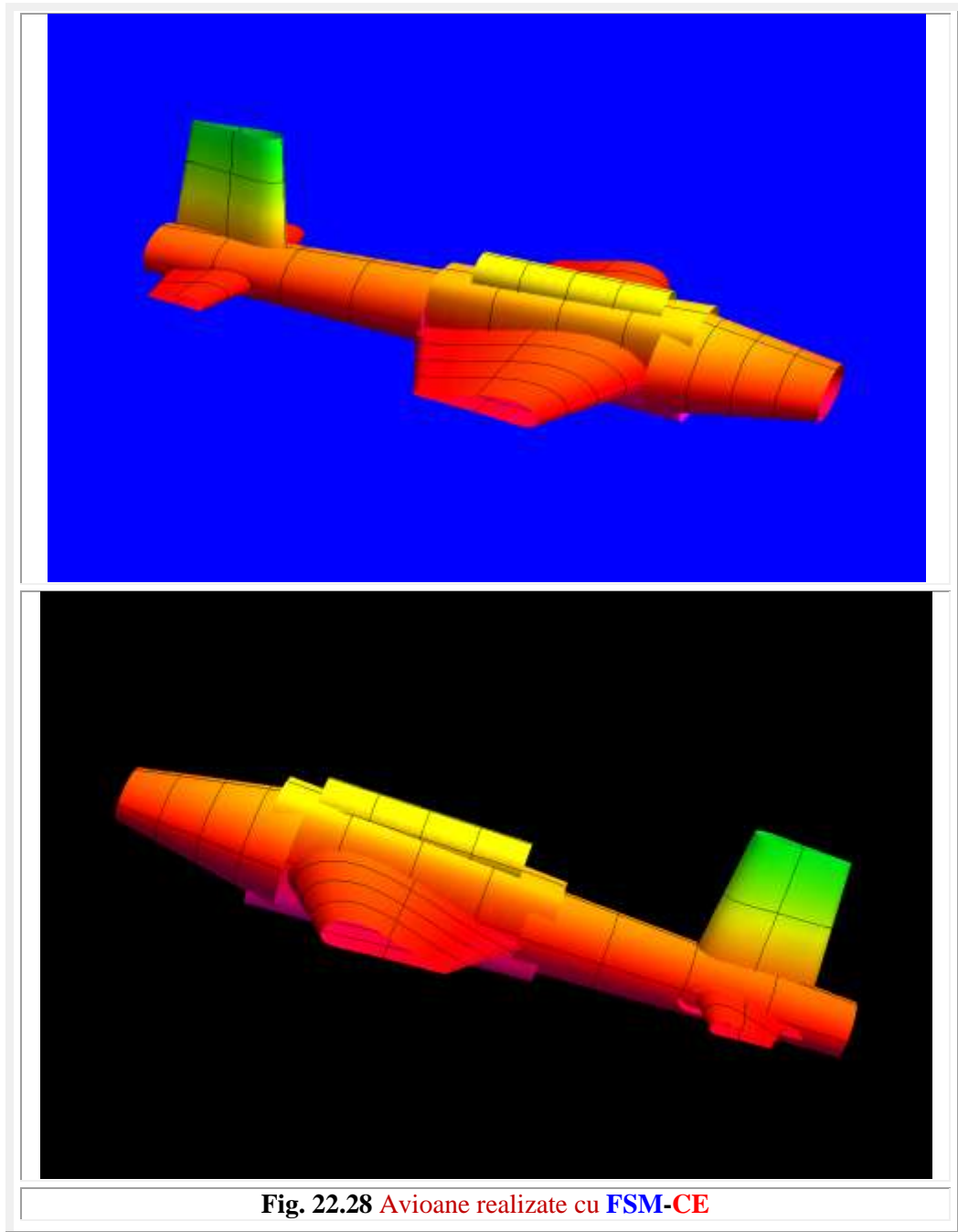
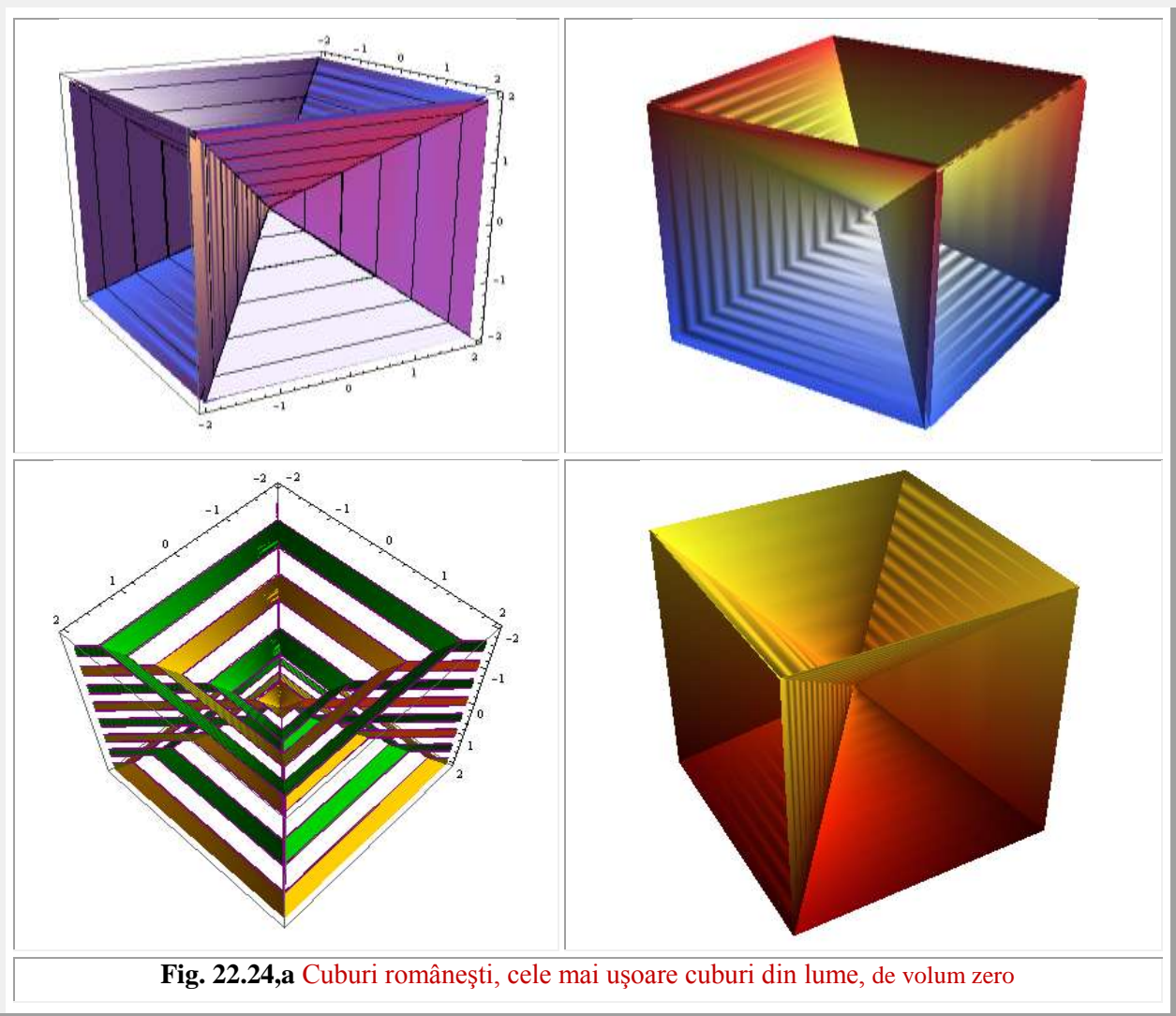
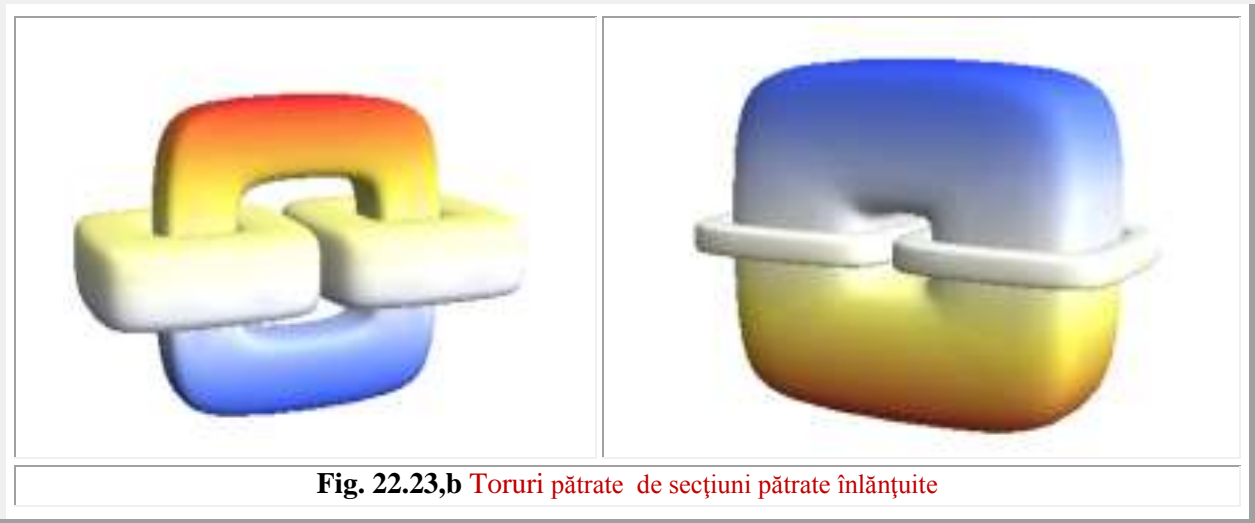


Fig. 22.27 Particula lui “Dumnezeu” în mai multe vederi







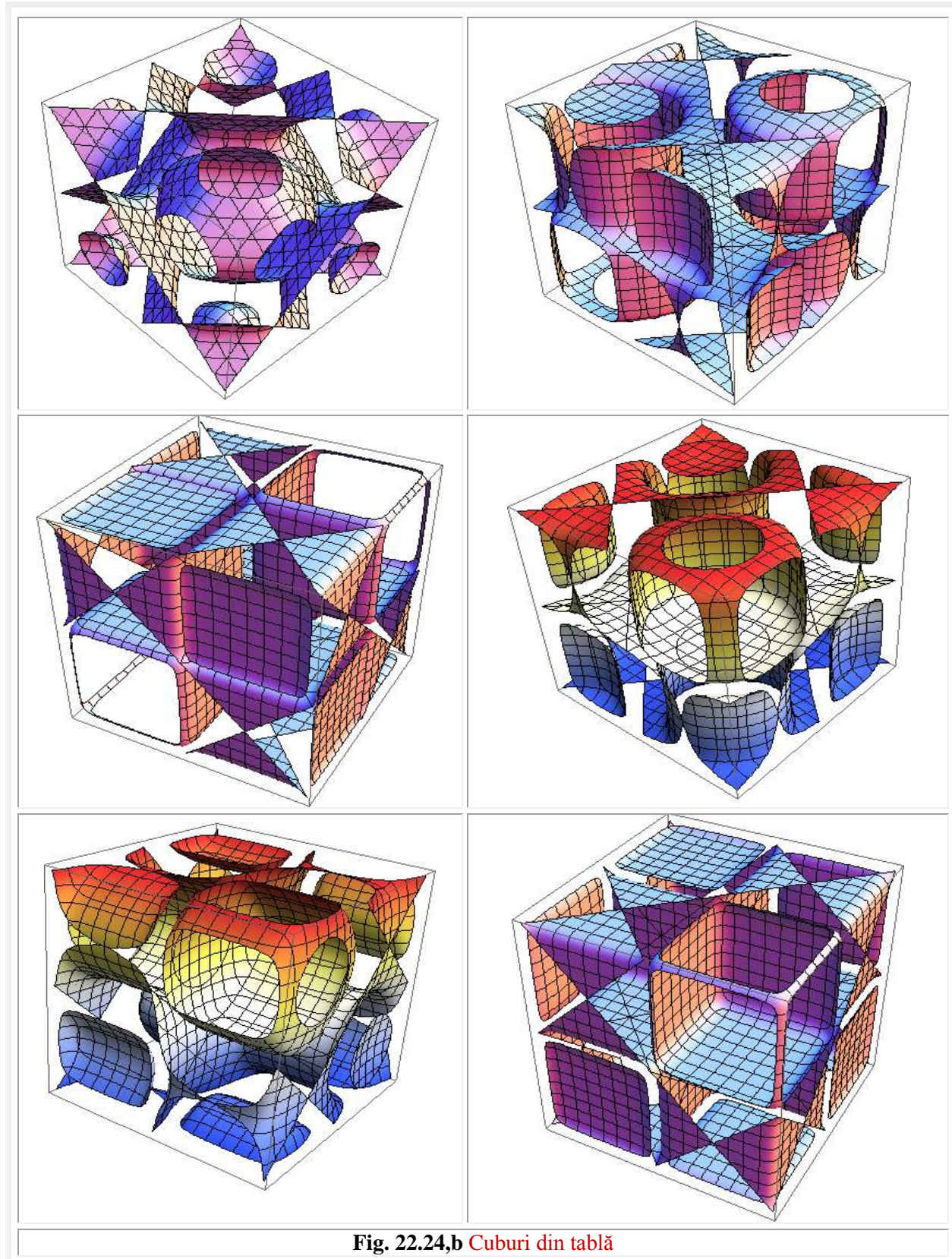


Fig. 22.24,b Cuburi din tablă

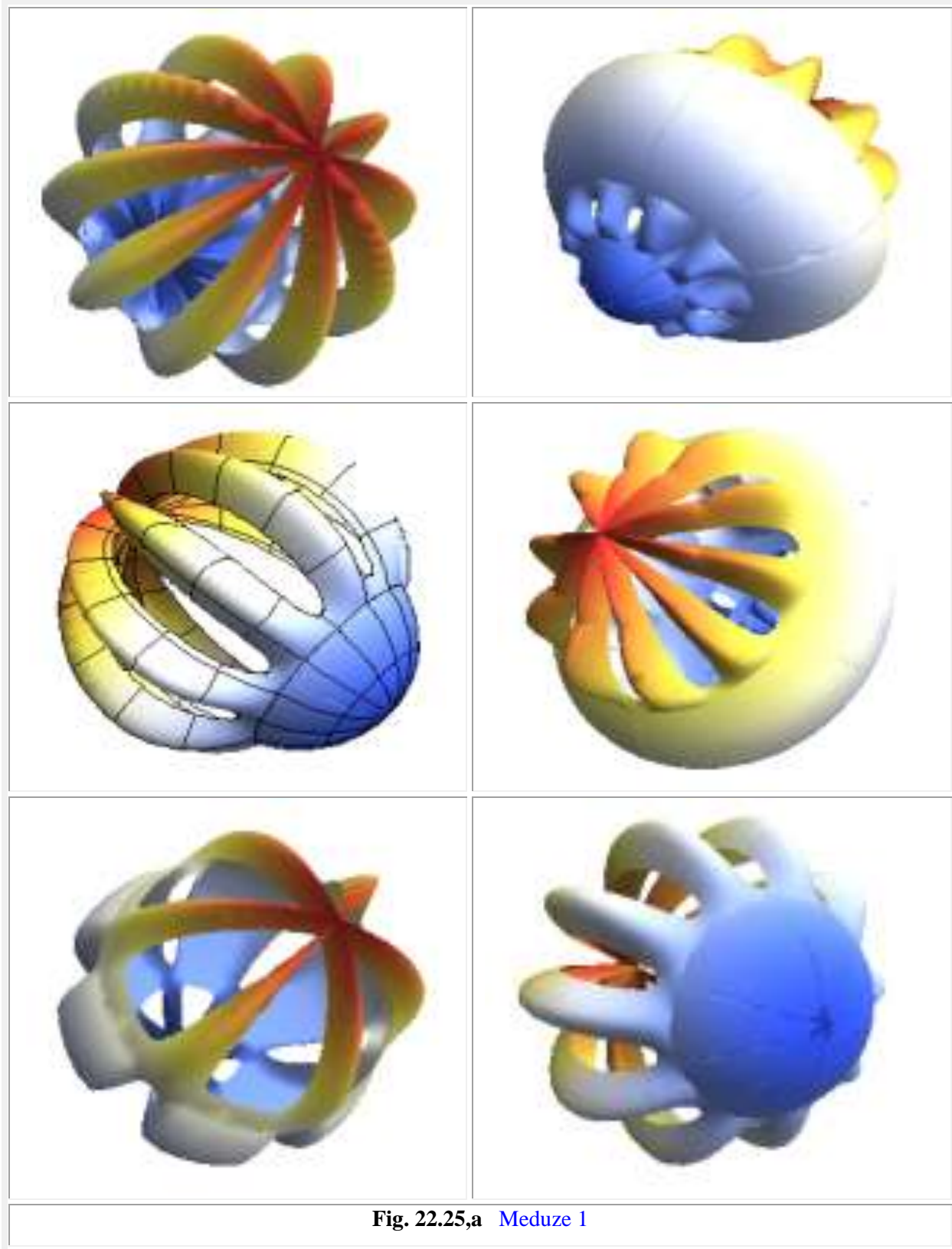


Fig. 22.25,a Meduze 1



Fig.22.25,b Meduze 2

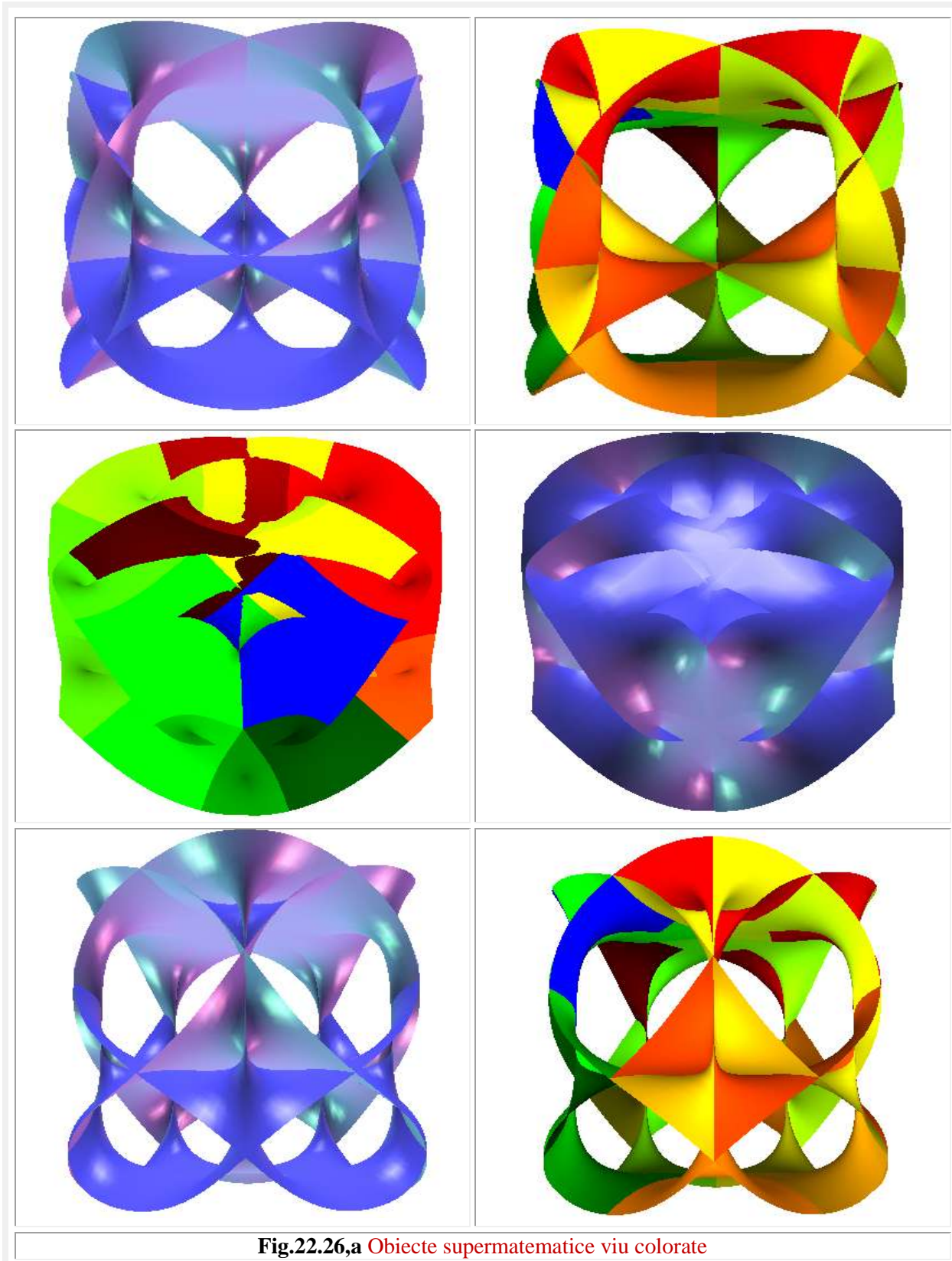


Fig.22.26,a Obiecte supermatematice viu colorate

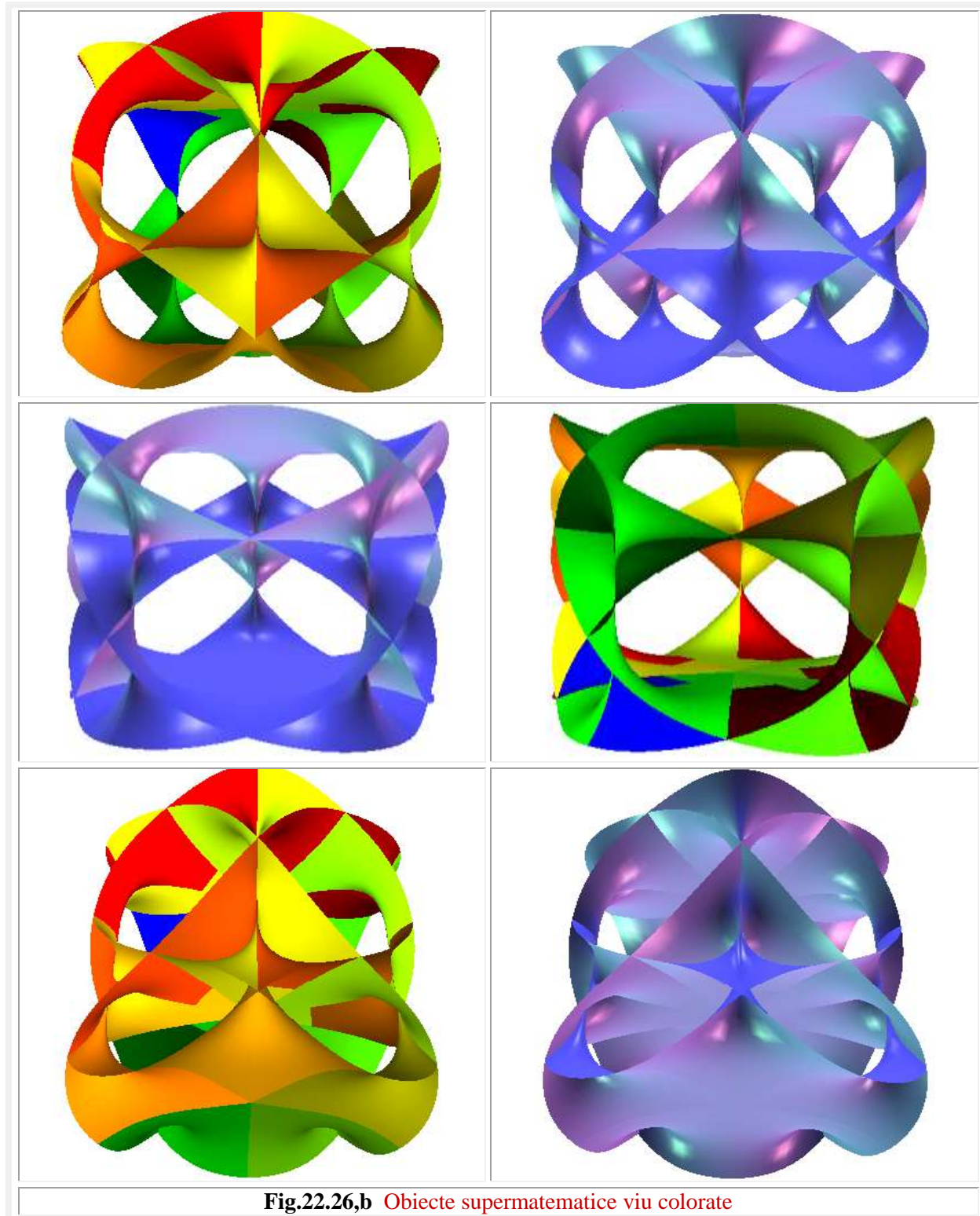
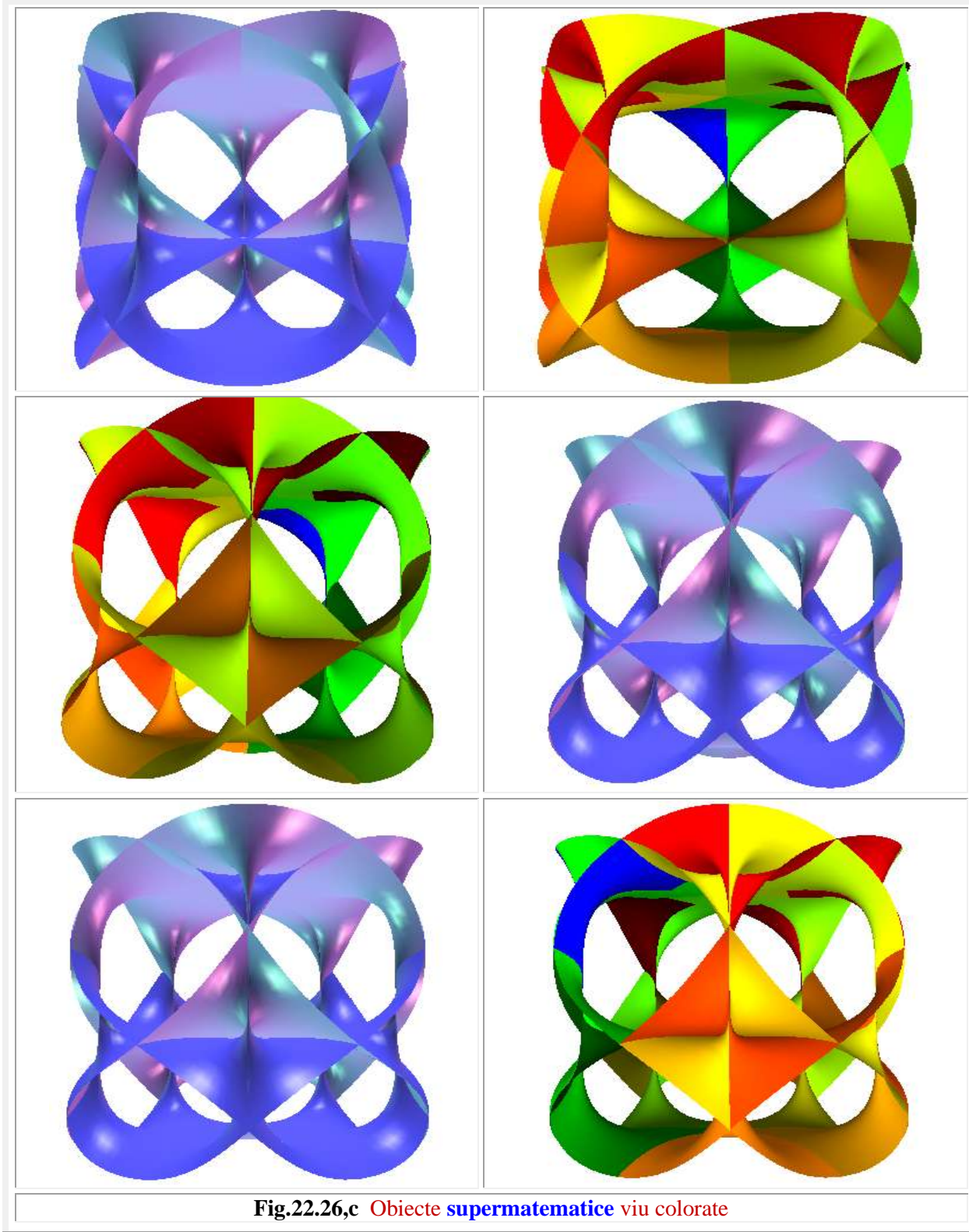


Fig.22.26,b Obiecte supermatematice viu colorate



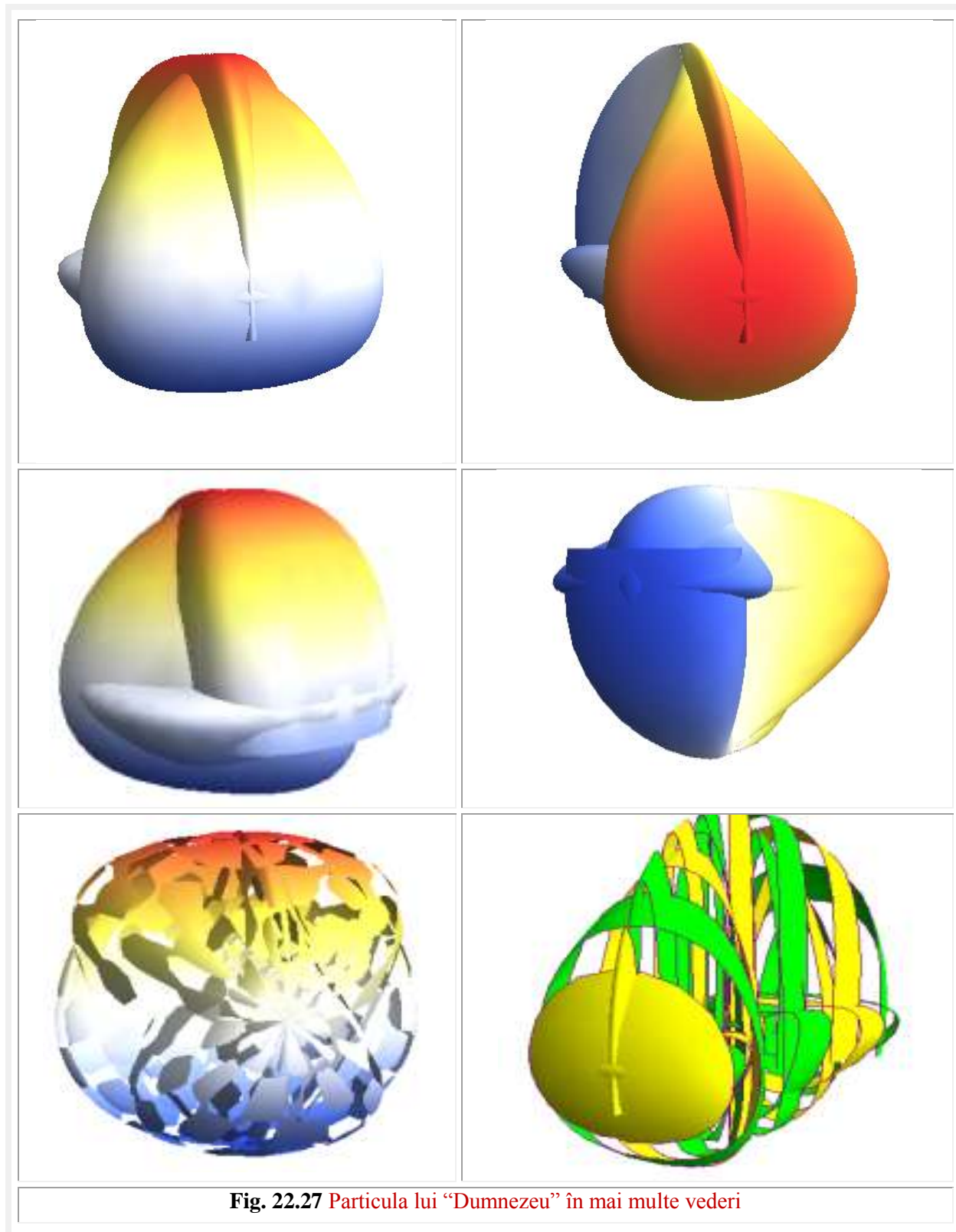
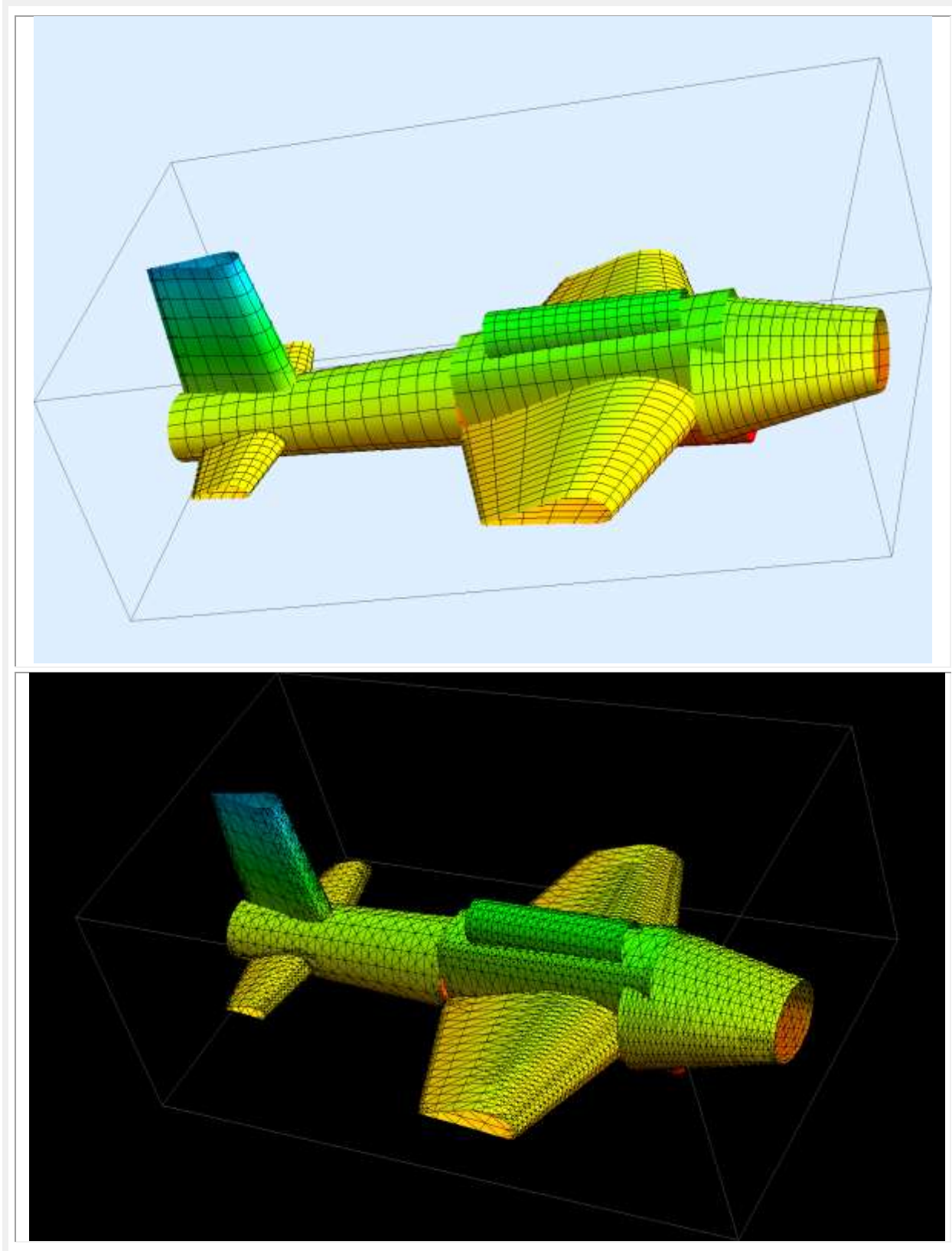


Fig. 22.27 Particula lui "Dumnezeu" în mai multe vederi



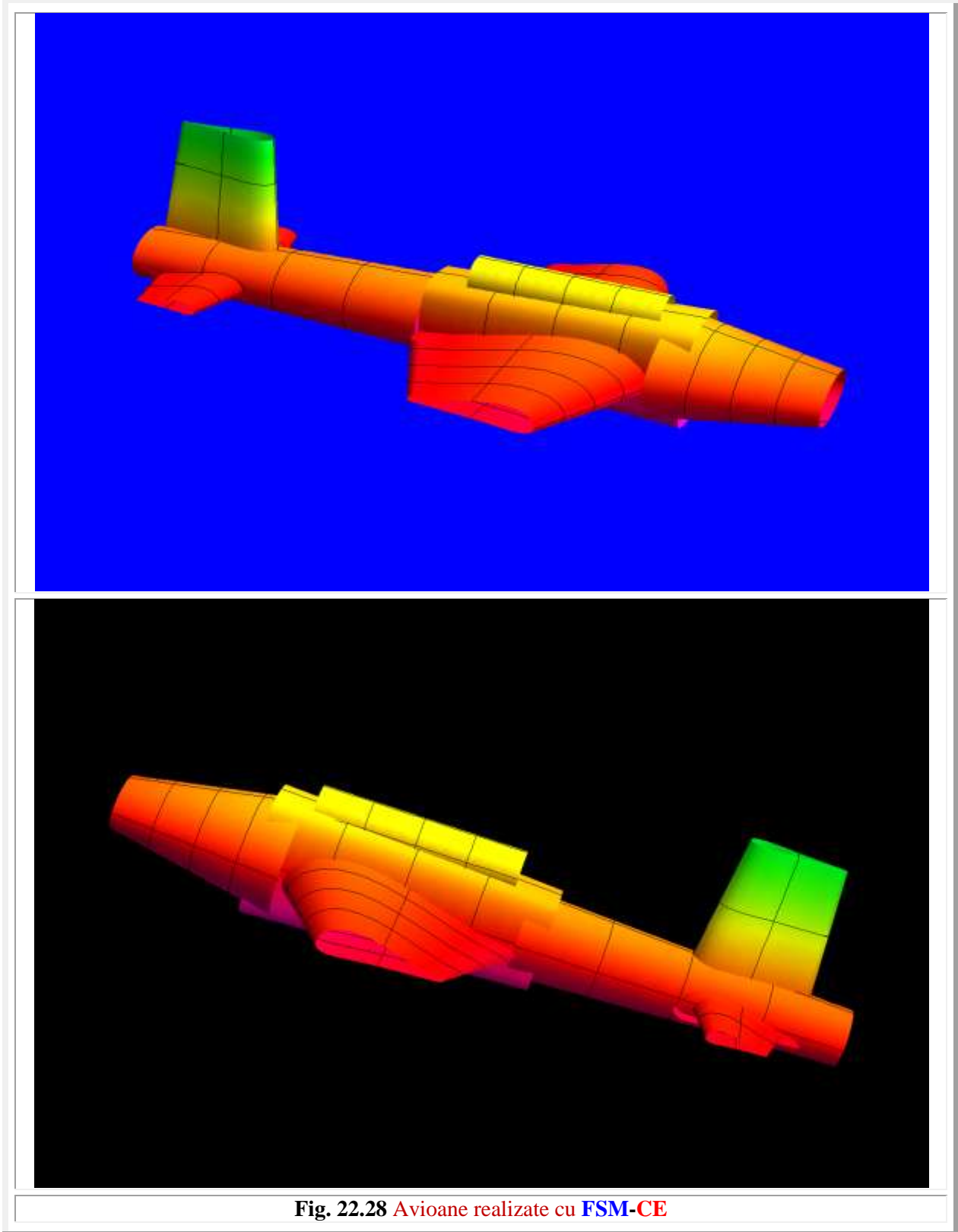


Fig. 22.28 Avioane realizate cu **FSM-CE**

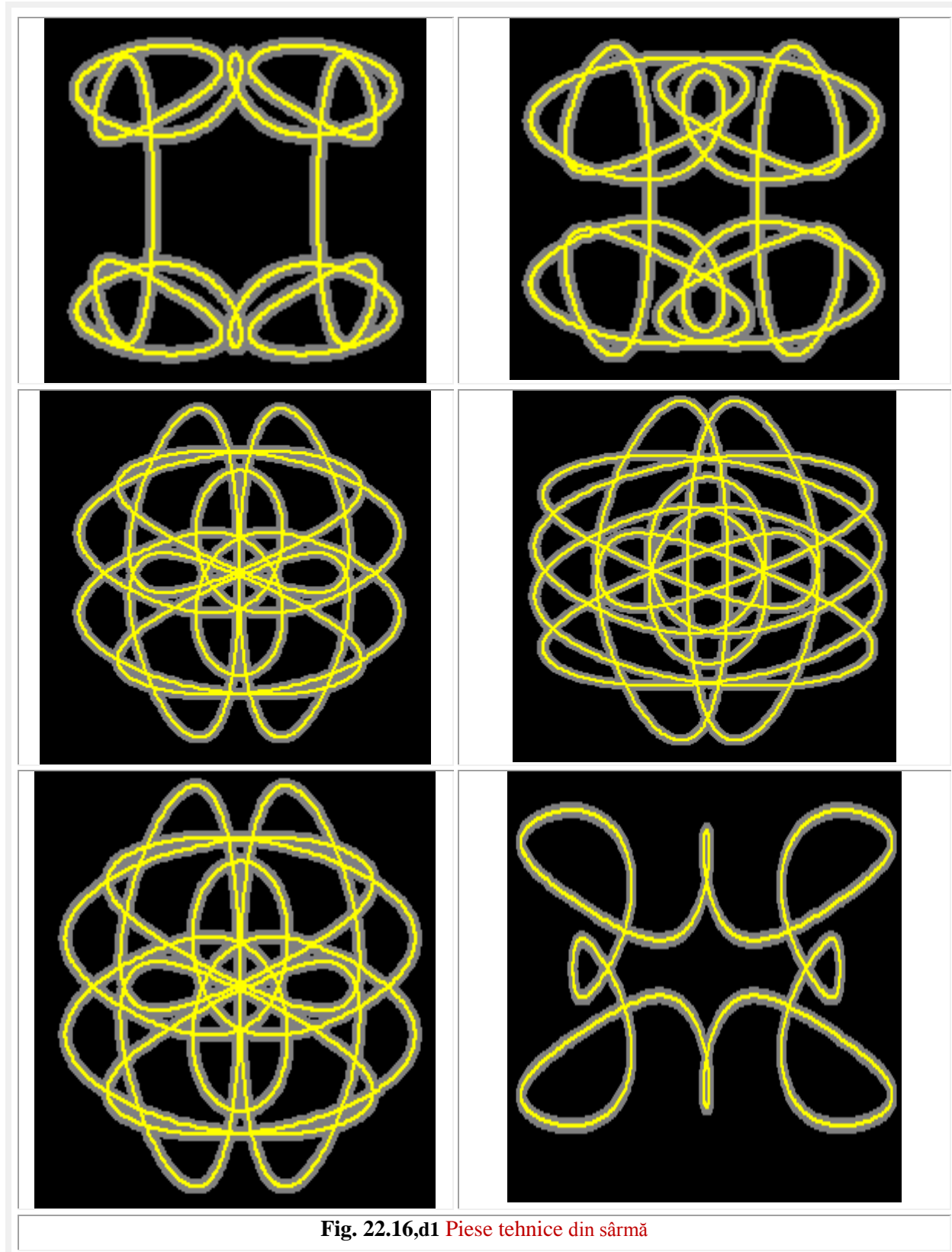
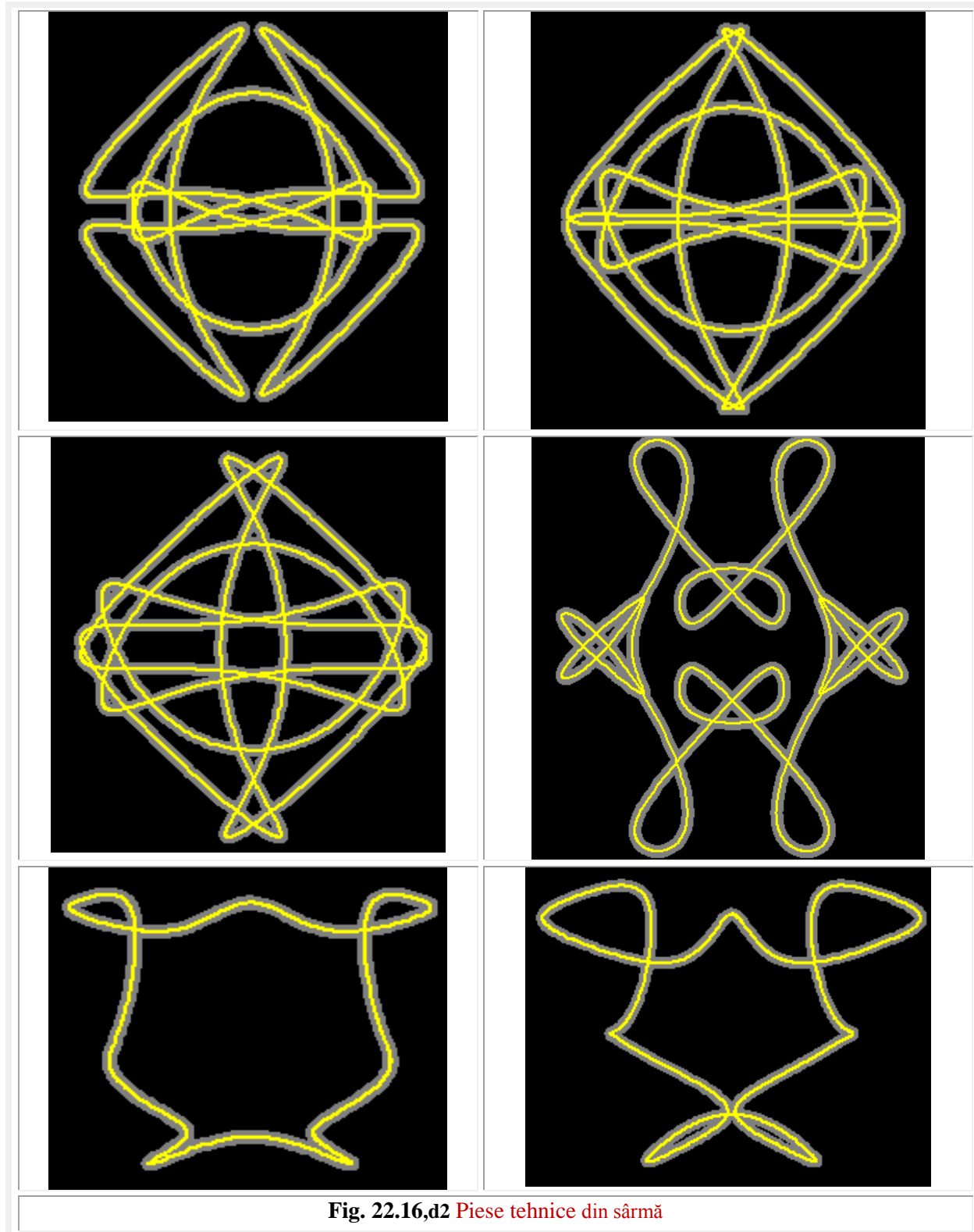


Fig. 22.16,d1 Piese tehnice din sârmă



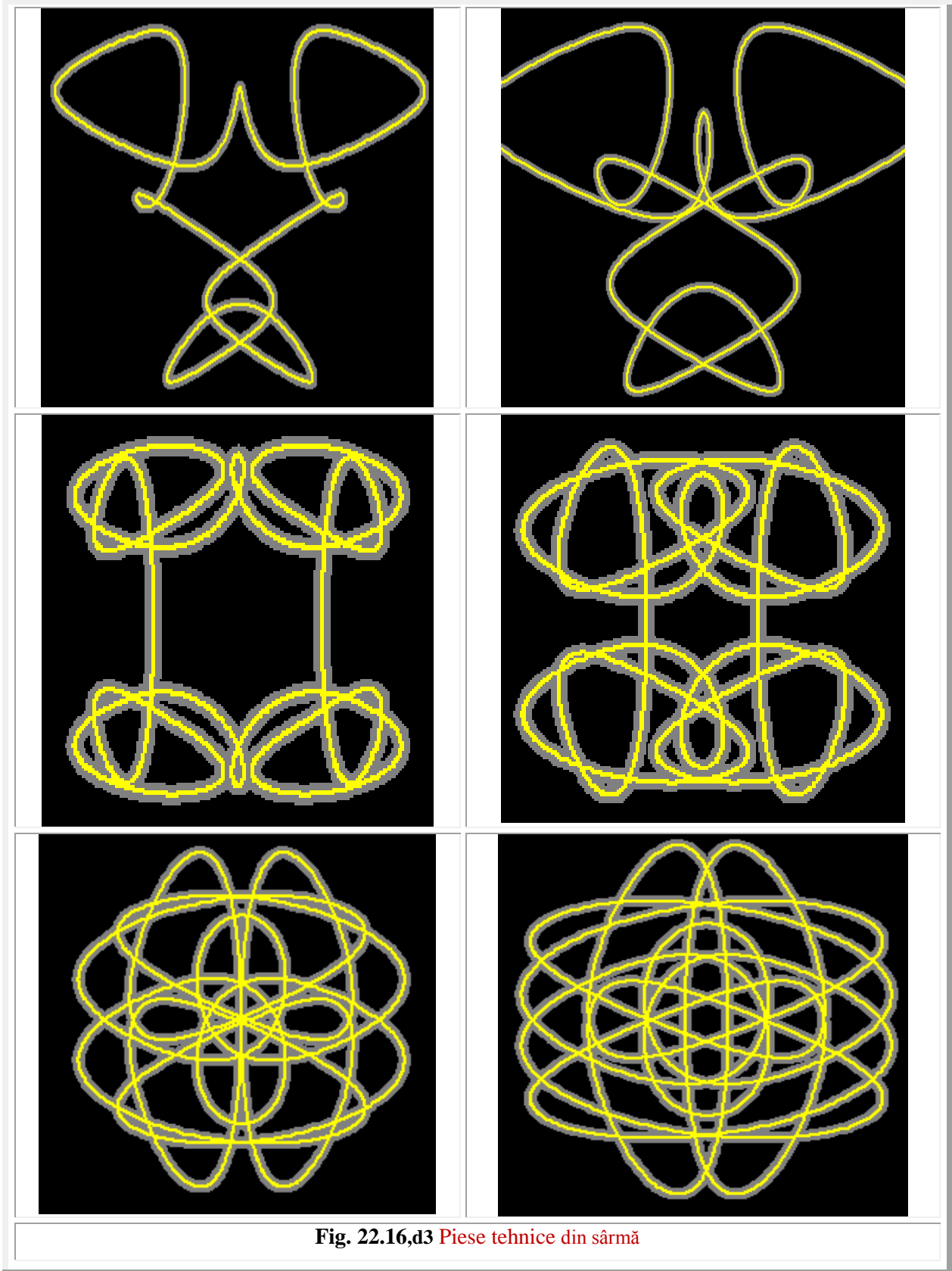
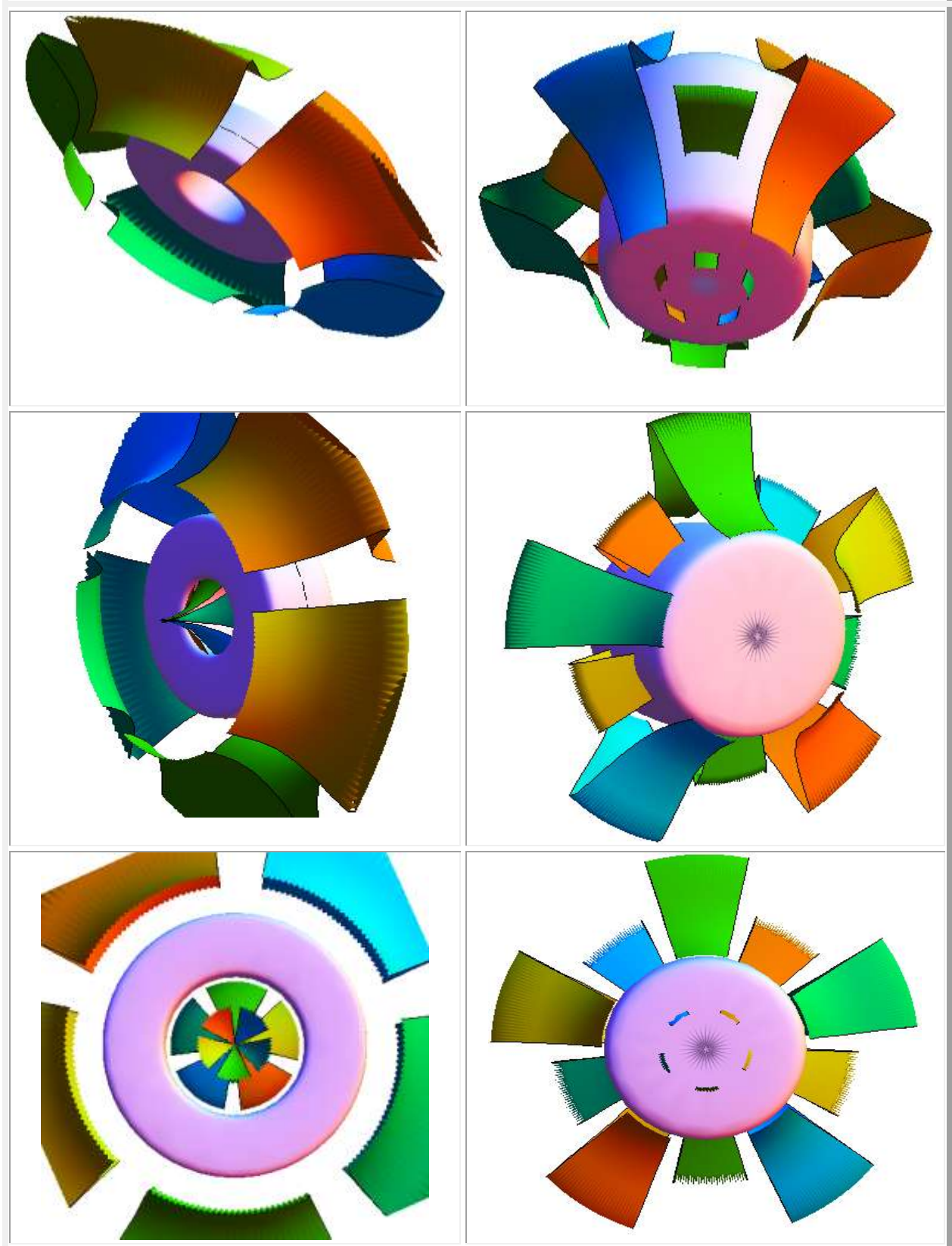
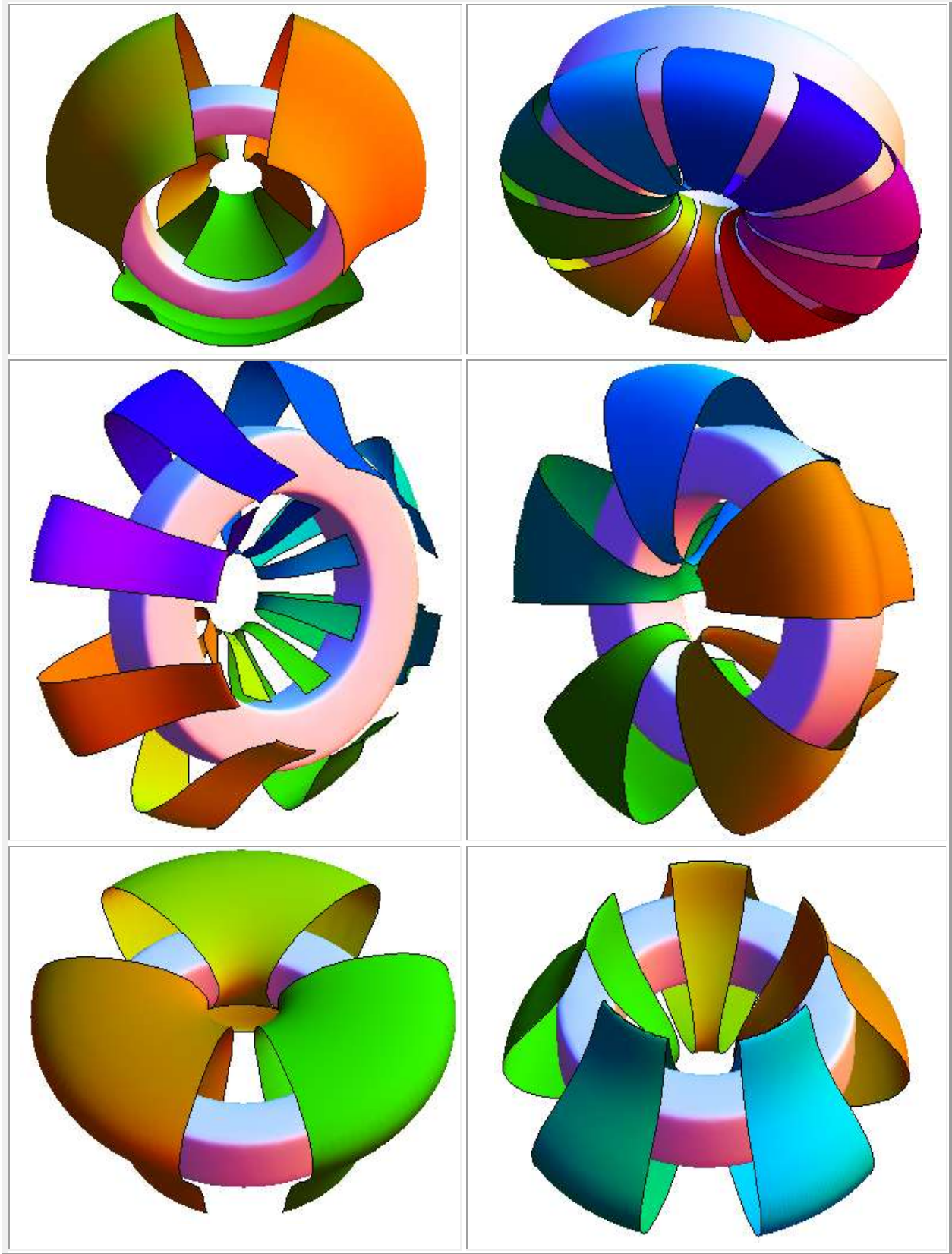
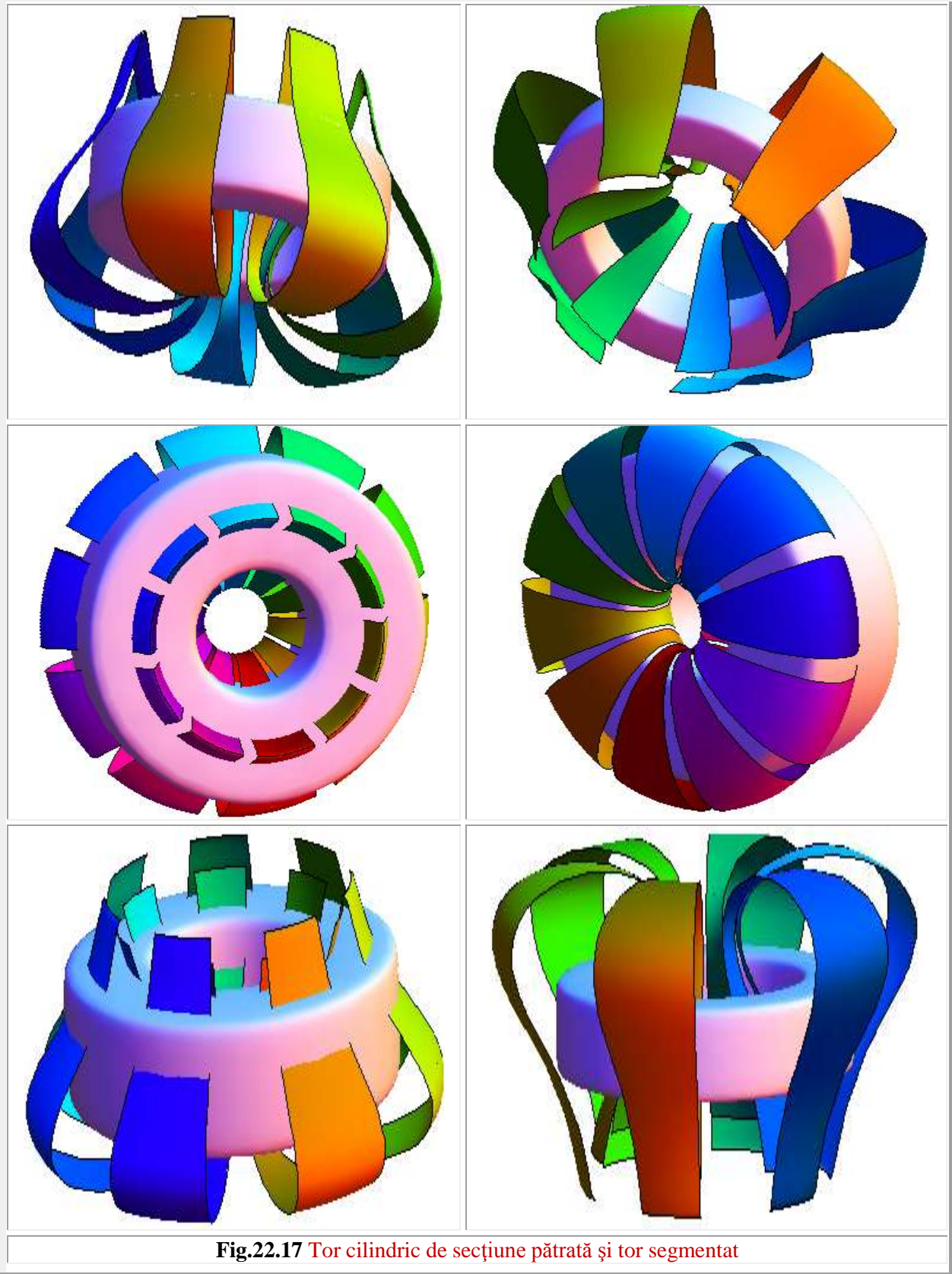


Fig. 22.16,d3 Piese tehnice din sârmă

22.5 TOR SEGMENTAT SM DE SECȚIUNE PĂTRATĂ

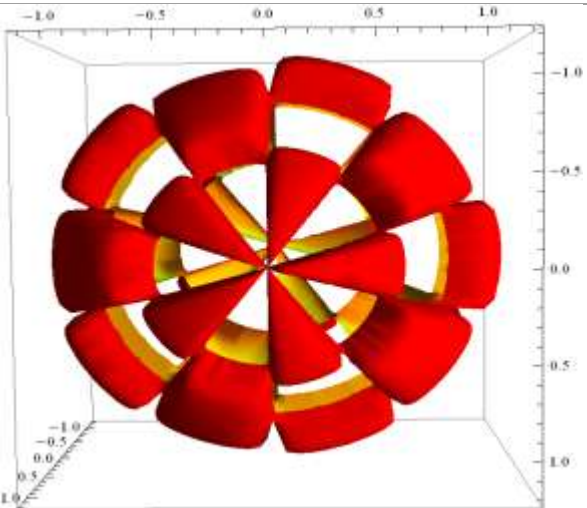
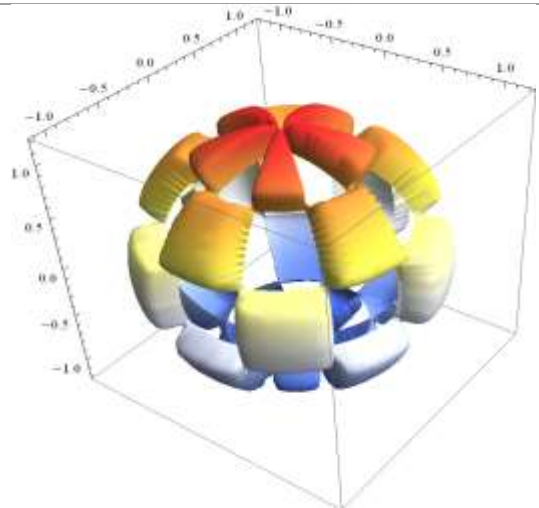
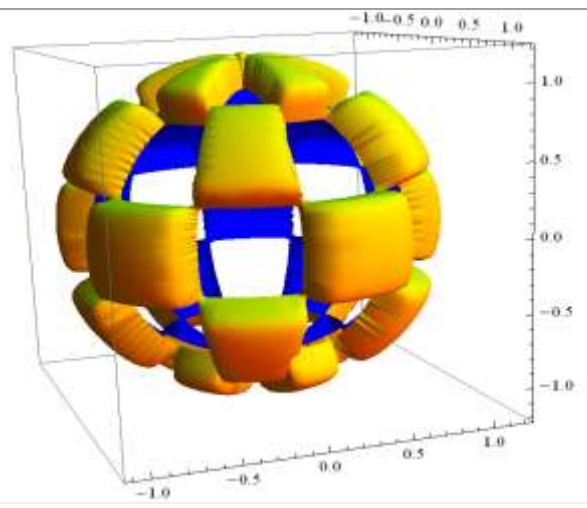
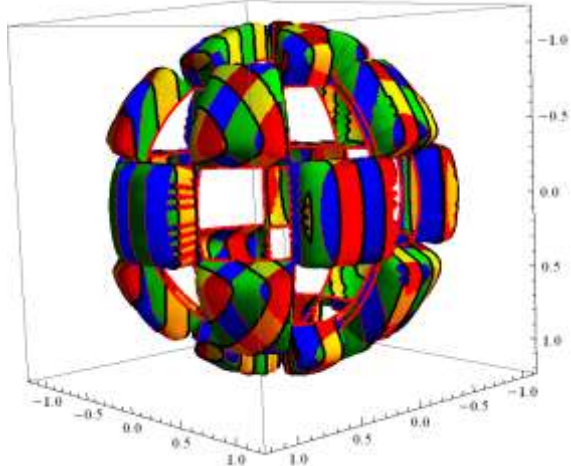
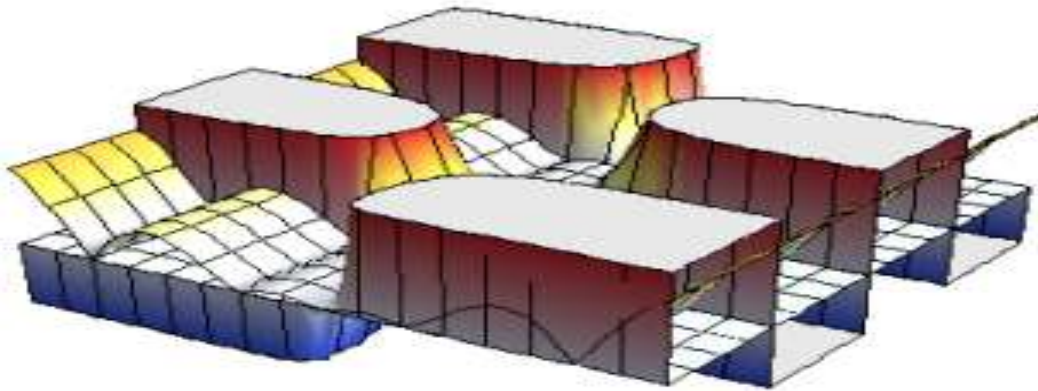


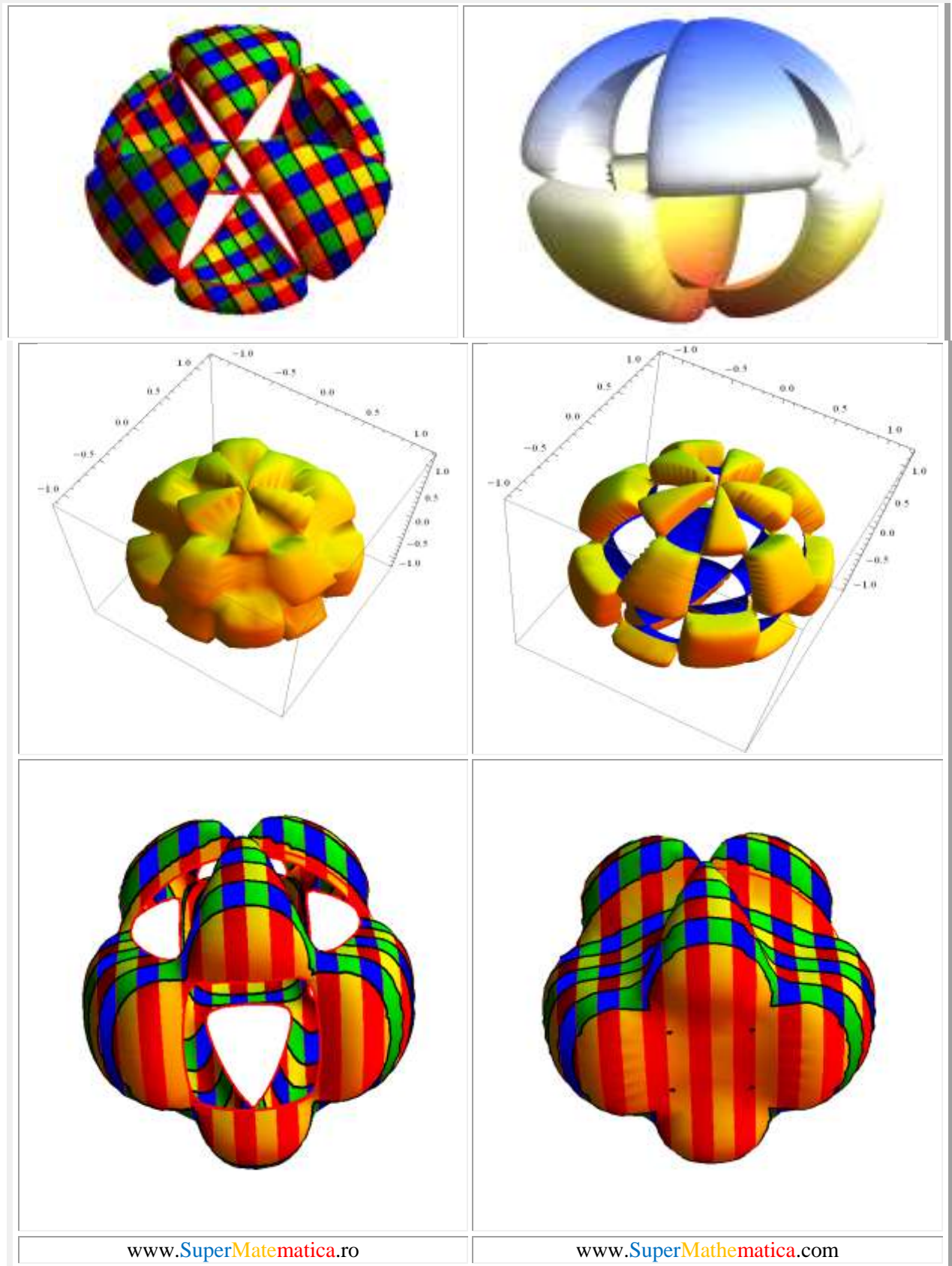




22.6 SISTEME DE PIESE TEHNICE

```
Plot3D[{{Re[Cos[t]Sin[u]],Im[Sin[u]Sin[t-ArcSin[0.1uSin[t]]]Sqrt[1-(0.1 u)^2]}, Abs[0.2 u Cos[u]] },
{u, -2 Pi, 2 Pi}, {t, -2 Pi, 2 Pi}]
```





www.SuperMatematica.ro

www.SuperMathematica.com

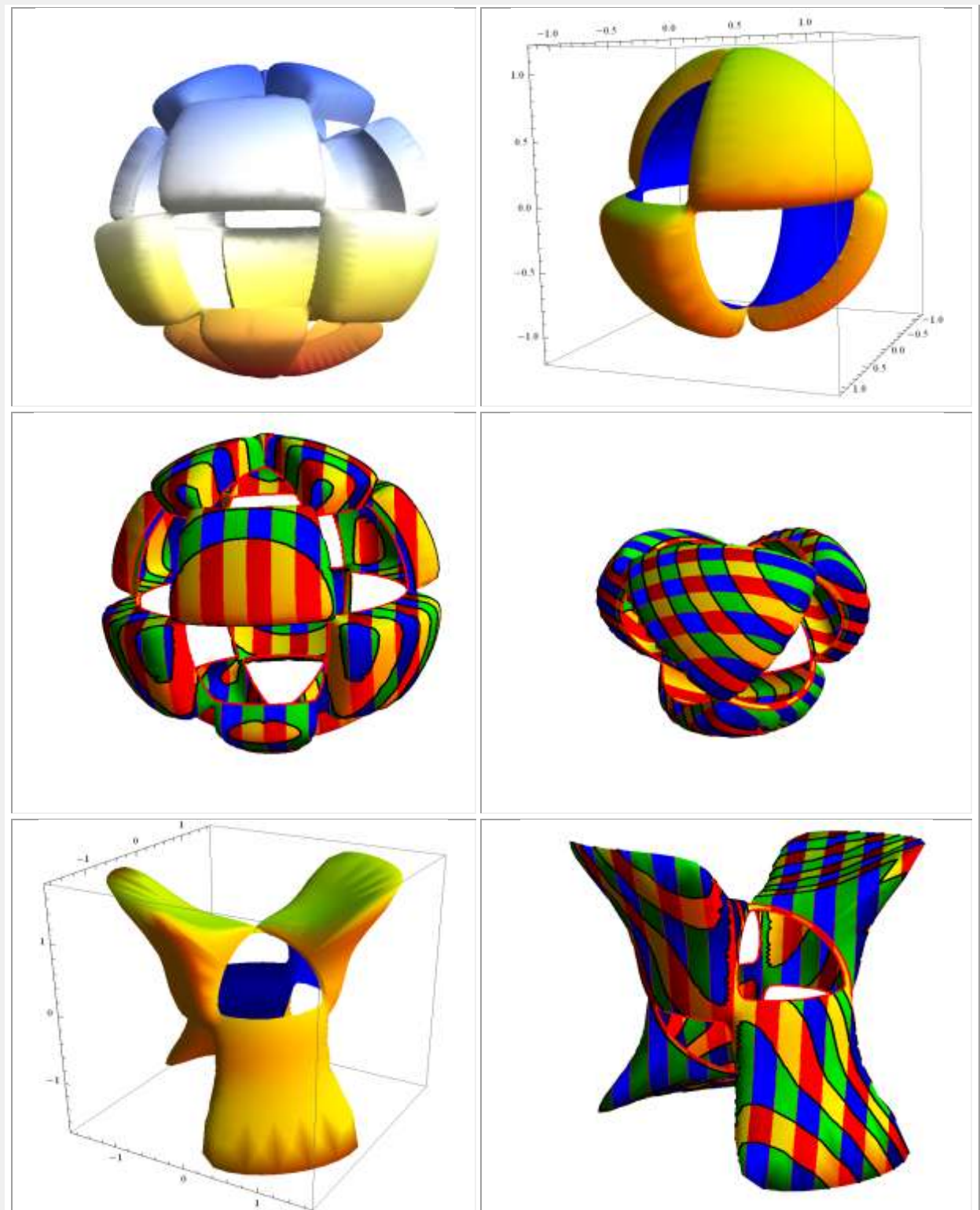


Fig. 22.18 Sisteme de piese tehnice

www.Supermatematica.ro

www.Supermathematica.com

```
ParametricPlot3D[{{u^2 Cos[t]/Sqrt[1-(u^3 Sin[t])^2], u^2 Sin[t]/Sqrt[1-(u^3 Cos[t])^2]},
 {u^2 Cos[t]/Sqrt[1-(u^3 Sin[t])^2], u^2 Sin[t]/Sqrt[1-(u^3 Cos[t])^2], -u},
 {u, u^2 Cos[t]/Sqrt[1-(u^3 Sin[t])^2], u^2 Sin[t]/Sqrt[1-(u^3 Cos[t])^2]}}, {t, -2 Pi, 2 Pi}, {u, -1, 1}]
```

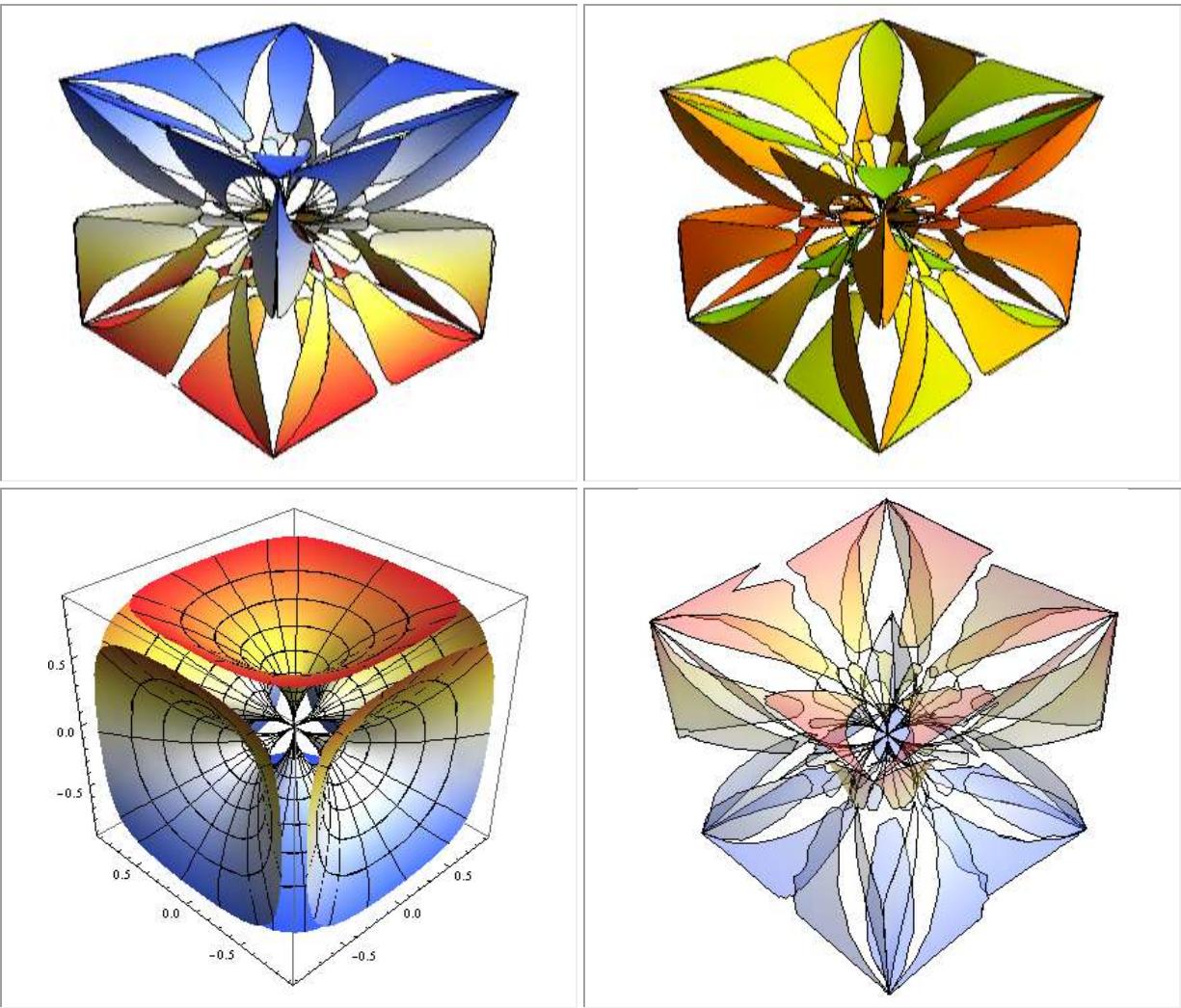


Fig. 22.19 Conopiramidă inclusă în conopiramidă

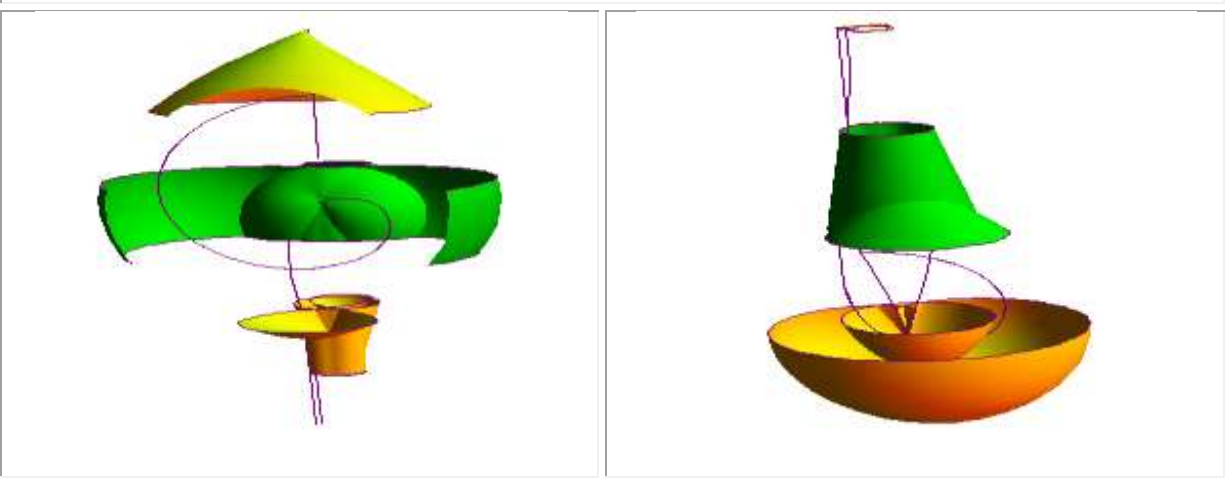




Fig. 22.20 Lampioane chinezești realizate cu FSM românești

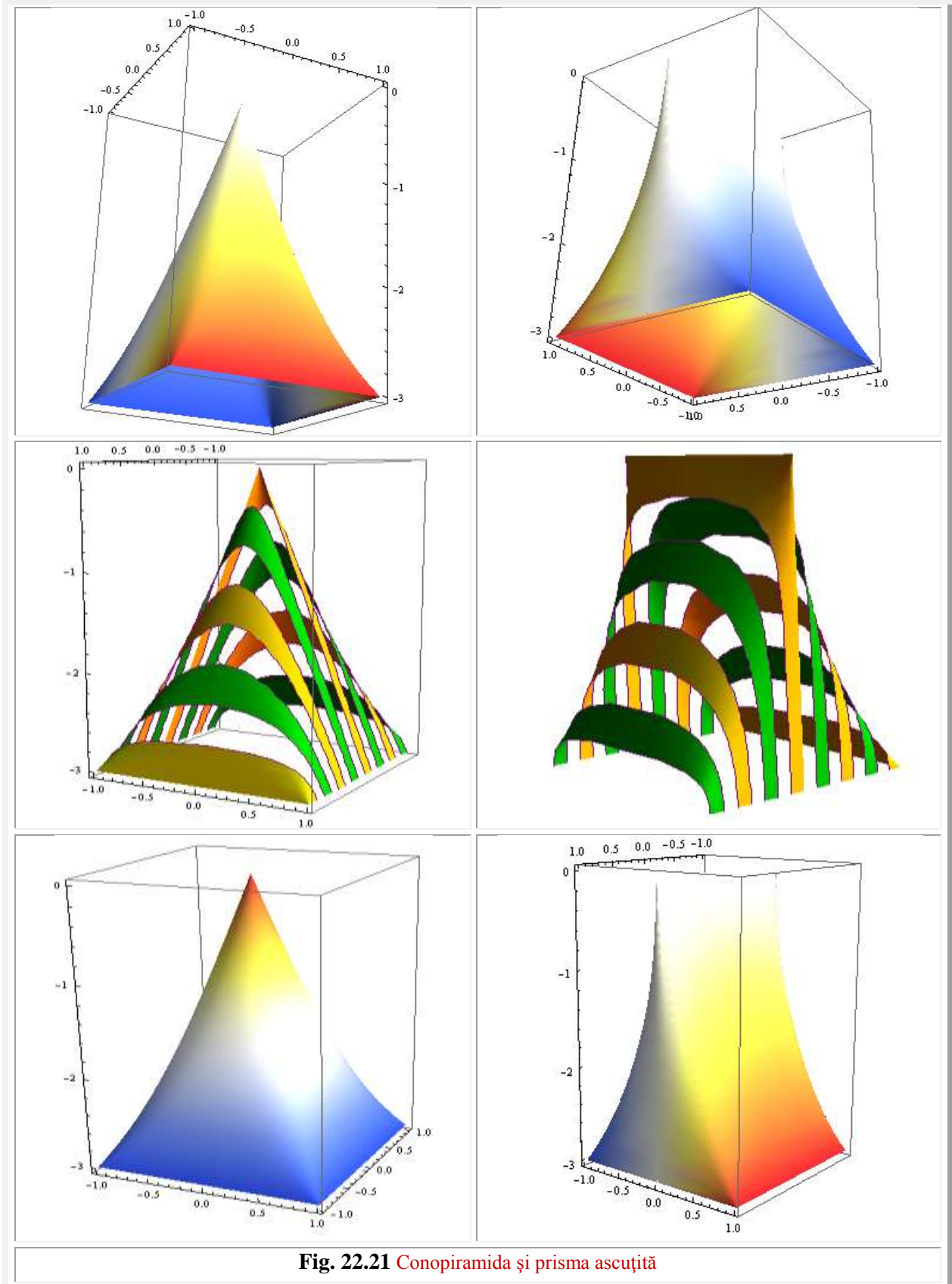
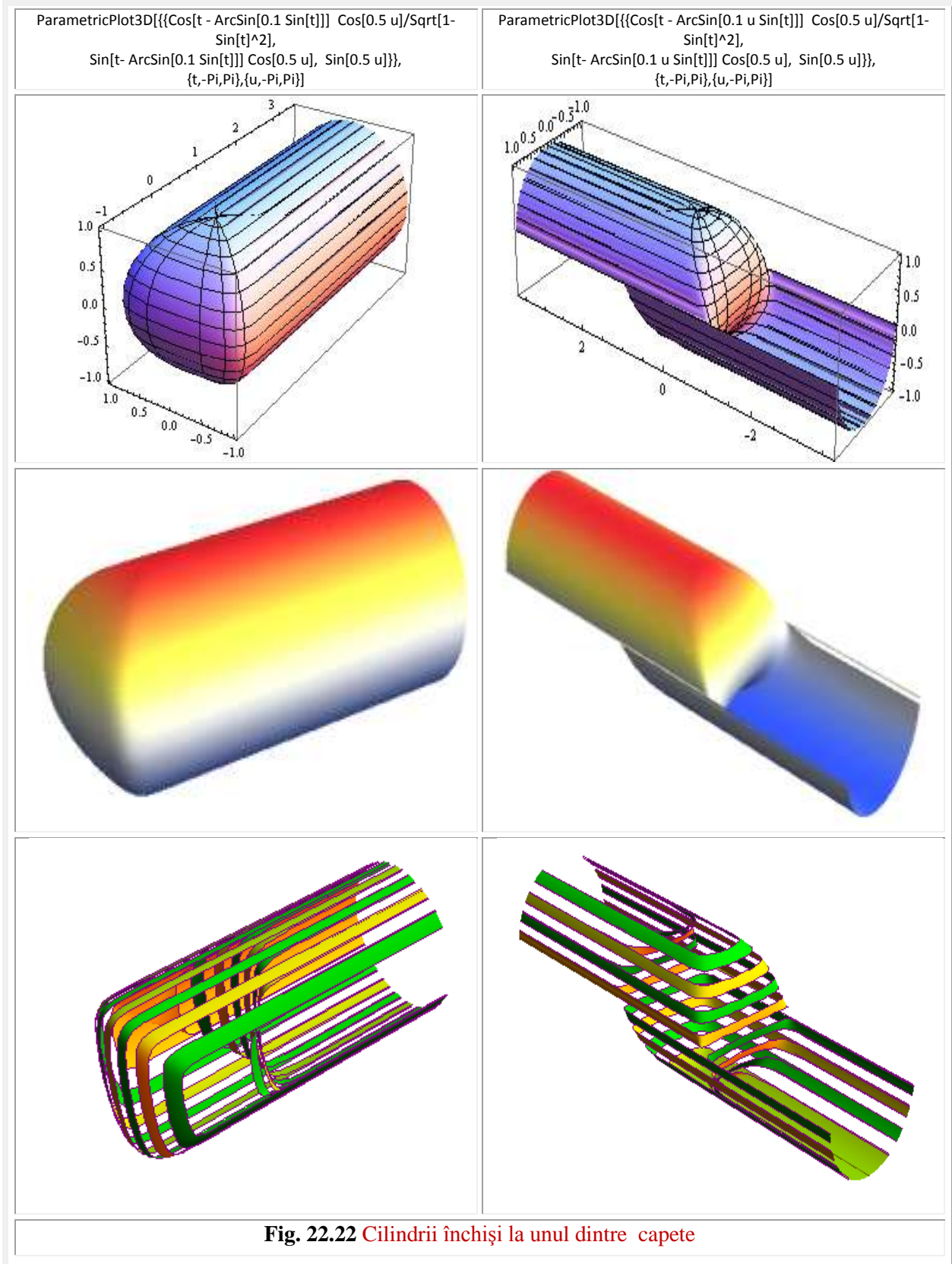
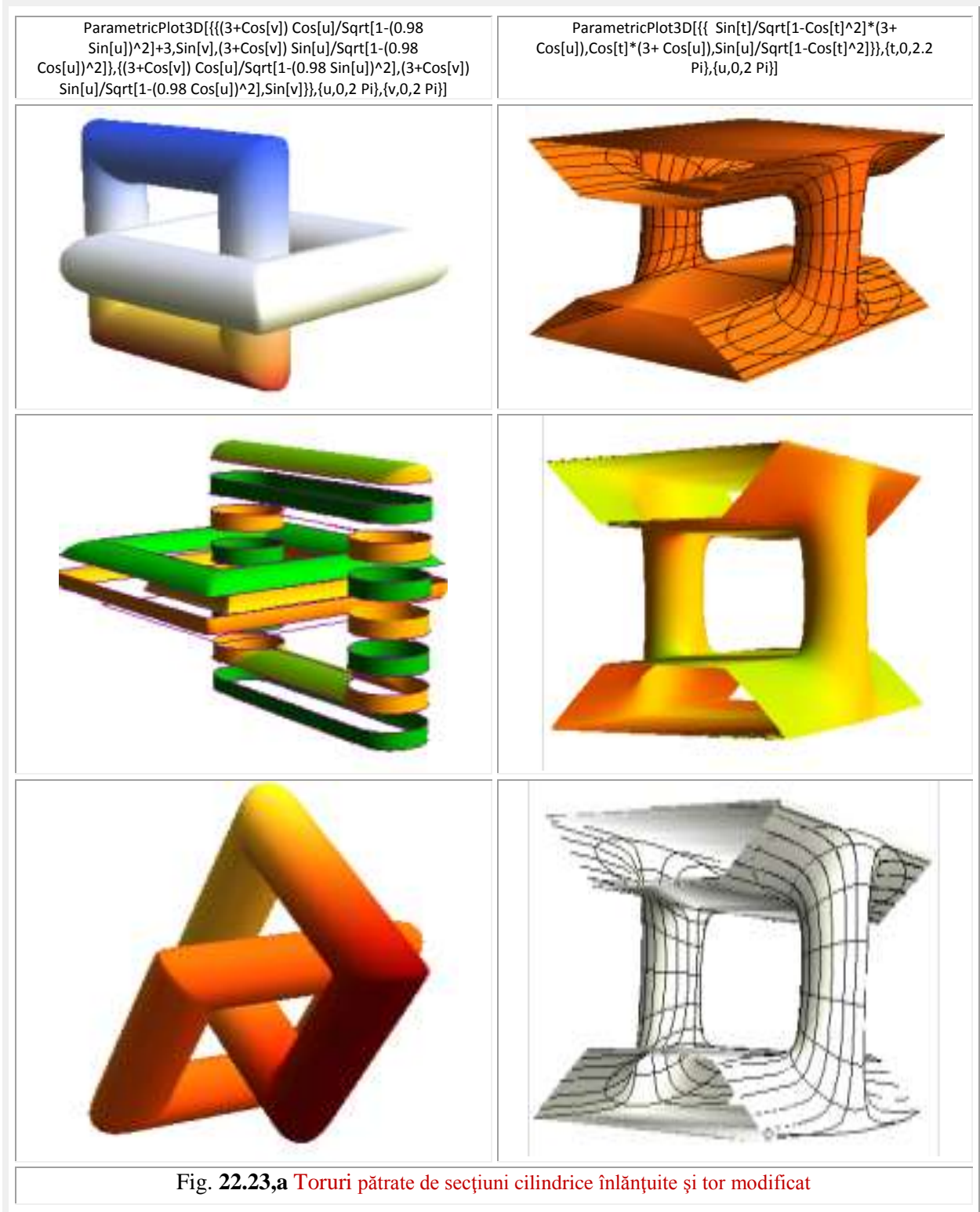


Fig. 22.21 Conopirama și prisma ascuțită





Motto: ”Lasă gândurile să zboare până în nori ...”
Johann Christoph Friedrich von Schiller

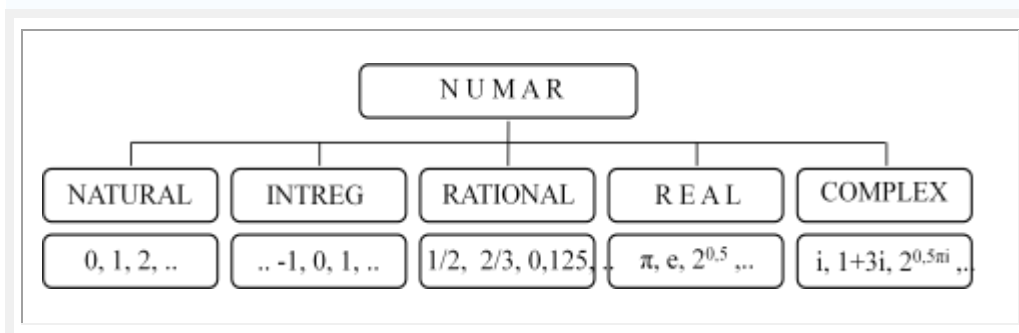
Capitolul 23

ÎN LOC DE POSTFAȚĂ : MATERIA NEAGRĂ A UNIVERSULUI MATEMATIC

Așa cum haosul absolut și ordinea perfectă sunt unul și același obiect matematic: o sferă invizibilă și, ca urmare, de dimensiuni nemarginite, tot așa materia neagră și petele albe ale universului matematic exprimă, la un moment dat, una și aceeași entitate matematică: sfera invizibilă a cunoștințelor matematice (încă) neconoscute la un anumit moment istoric, nefiind cunoscute sau vizibile la acea dată.

Un exemplu, relativ simplu, este din domeniul numerelor.

Inițial, universul matematic al numerelor, universul numerelor vizibile, era format numai din **numere naturale** sau **întregi, pozitive \mathbb{N}^+** . Tote celelalte mulțimi de numere, și nu sunt puține (vezi mai jos și **Fig.23.1**), formând, la o anumită dată, materia neagră sau invizibilă / necunoscută a universului numerelor matematice.



Omenirea a avut nevoie de mii de ani pentru a sesiza și constata că **între** două numere întregi **$n - 1$** și **n** sau **între n** și **$n + 1$** există o infinitate de alte numere.

Acesta pe o singură direcție, s-o numim X.

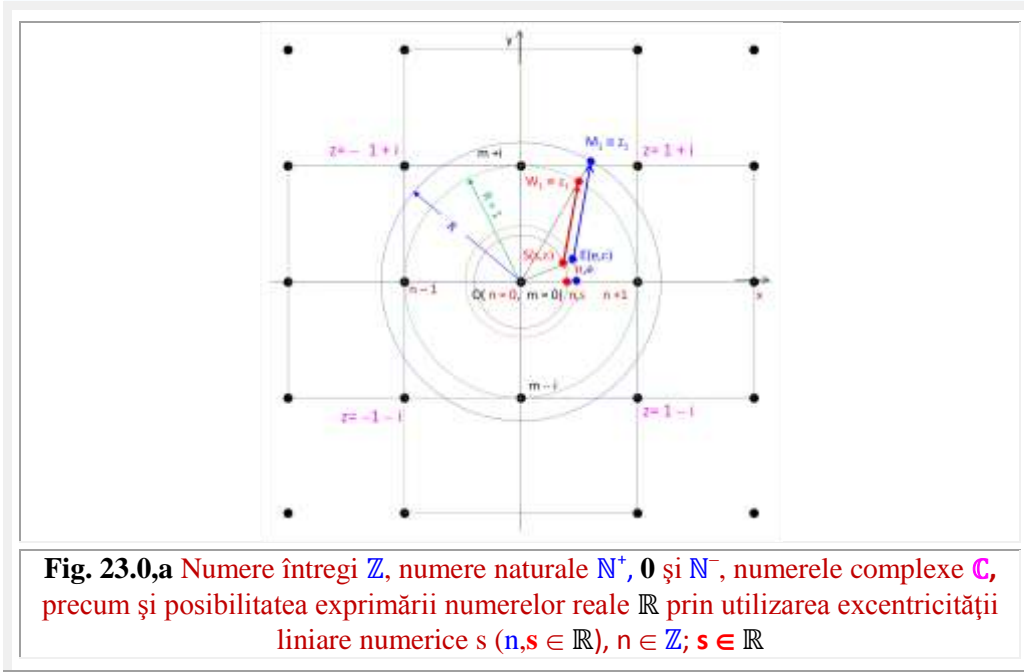
Apoi, numerele s-au extins pe două direcții, sau în planul cartezian **XOY**, sau planul complex, denumit și plan vectorial, prin **numerele complexe \mathbb{C}** . Ele sunt o sumă (vectorială) a două numere: unul **real (x)** și unul pur **imaginar (iy)**.

Există și sume vectoriale în spațiul 3D: $V = ai + bj + ck$, $a, b, c, \in \mathbb{R}$, în care i, j, k sunt versorii axelor / direcțiilor X, Y, Z, dar se cunosc și numere hipoercomplexe, ca de exemplu

$$\mathbb{H} = \{a1 + bi + cj + dk, \text{în care } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

În domeniul teorie numerelor, insulele albe de necunoaștere sau **materia neagră** a universului matematic sau a „cunoștințelor matematice (încă) necunoscute” a

scăzut dramatic. Dar, totuși, mai e suficient loc pentru unele completări. Nu același lucru s-a întâmplat și în celelalte domenii ale universului matematic.



Pentru a scoate în evidență raportul dintre materia vizibilă și cea invizibilă / neagră din domeniul numerelor vom face o scurtă incursiune în acest univers matematic.

23.1. PE SCURT, DESPRE NUMERE

... \mathbb{N} ... \mathbb{Z} ... \mathbb{Q} ... \mathbb{I} ... \mathbb{T} ... \mathbb{R} ... \mathbb{C} ...

Lanțul de incluziuni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \dots$ (Fig. 23.1) exprimă **extensia noțiunii de număr**.

23.1.1 Numerele întregi \mathbb{Z} sunt mulțimea compusă din numerele naturale $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}^+$, împreună cu cele negative ale acestora $\mathbb{N}^- = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ și cu numărul zero. Mulțimea tuturor întregilor se notează de obicei cu \mathbb{Z} (sau \mathbb{Z} îngroșat).

Numele provine de la cuvântul german "**Zahl(en)**" care înseamnă (\rightarrow) "**număr, numărare**".

Introducerea **numerelor negative** și a celor **întregi \mathbb{Z}** a fost necesară pentru exprimarea soluțiilor ecuațiilor de forma

$$(23.1) \quad a + x = b, \rightarrow x = b - a \quad a, b \in \mathbb{N}, (\mathbb{N} - \text{Mulțimea numerelor naturale } 1, 2, 3, \dots, n)$$

iar, în cel mai general caz,

$$x \in \mathbb{Z} = \mathbb{N}^+(b > a) \cup 0(b = a) \cup \mathbb{N}^-(b < a).$$

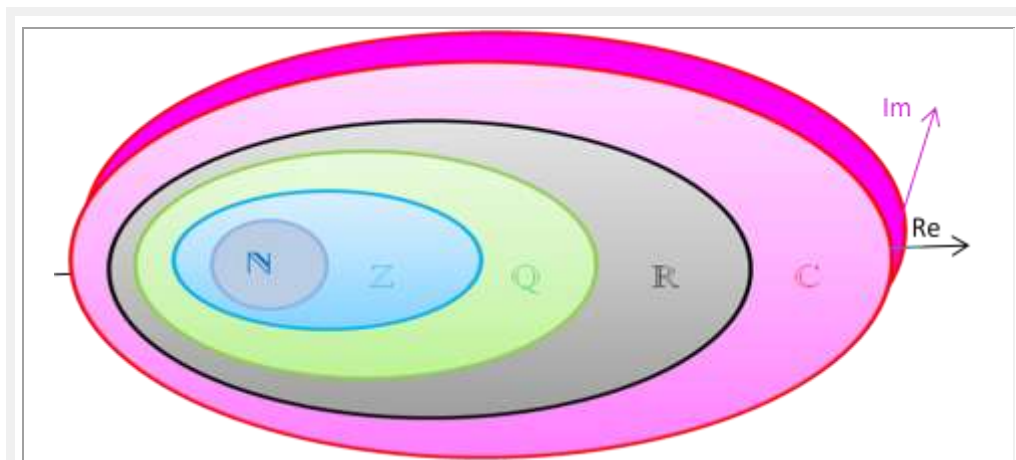


Fig. 23.1 Incluziunile mulțimilor de numere

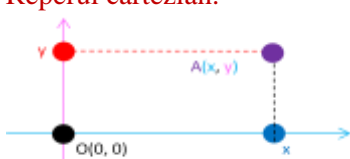
MULȚIMI DE NUMERE			Tabelul 23.1
Numere naturale	Numere raționale	Numere reale	Numere complexe
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$	$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$ $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ Orice număr rațional se reprezintă printr-o fracție zecimală infinită și periodică .	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ unde \mathbb{I} este mulțimea numerelor iraționale; aceasta se mai notează $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ Orice număr irațional se reprezintă printr-o fracție zecimală infinită și neperiodică, ca de exemplu: $\sqrt{2} = 1,4142213562$ Aproximarile / trunchierile sunt numere raționale : • prin lipsa , ex. $\sqrt{2} = 1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots$ • prin adaos , ex. $\sqrt{2} = 2; 1,5; 1,42; 1,415; \dots$ s.a.m.d.	$\mathbb{C} = \{a + i \cdot b\} / \{a, b \in \mathbb{R}\}$ $i^2 = -1$, i - unitate imaginară $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
Numere întregi $\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$			

23.1.2 Numerele raționale \mathbb{Q} au fost introduse pentru a exprima soluțiile ecuațiilor algebrice de gradul **I**:

(23.2) $ax + b = 0, \rightarrow x = - b/a, \quad x \in \mathbb{Q} \quad a, b \in \mathbb{N} \quad (\text{sau } a, b, \in \mathbb{Z})$

Mulțimea tuturor numerelor raționale se notează \mathbb{Q} , sau, în varianta îngroșată, \mathbb{Q} .

Numele "**rațional**" nu provine de la "**rațiune**" = "**gândire**", ci de la "**rație**" = "**raport**". De aceea, ele mai sunt numite și **fracții** sau **numere fracționare**.

MULTIȚIMEA NUMERELOR REALE \mathbb{R}		Tabelul 23.2
Structura algebrică	$(\mathbb{R}, +, -)$ este corp comutativ (corpul numerelor reale)	
Structura de ordine	$\forall x, y \in \mathbb{R}, \rightarrow x \leq y$ sau $y \leq x$	
Reprezentarea geometrică a lui \mathbb{R}	<p>Axa numerelor: $-\infty$ $\xrightarrow{\quad \text{O}(0,0) \quad}$ ∞</p> <p>Oricărui număr real x îi corespunde pe axă un punct și reciproc. Mulțimea \mathbb{R} se mai numește dreaptă reală și numerele reale se mai numesc puncte.</p>	
Reprezentarea geometrică a lui \mathbb{R}^2	<p>$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ Reperul cartezian:</p>  <p>Oricărui perechi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ îi corespunde un punctul A din plan și reciproc; x și y sunt coordonatele carteziene ale lui A</p>	
Modulul	<p>Definiții</p> $ x = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$	<p>Proprietăți</p> $\begin{cases} x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ -x = x \\ x + y \leq x + y \\ x \cdot y = x y \\ x^n = x ^n, n \in \mathbb{N} \\ \left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y } \end{cases}$
<p>Observații: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $\varepsilon > 0$</p> $\begin{cases} x = \varepsilon \Leftrightarrow x = \pm \varepsilon \\ x < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ x > \varepsilon \Leftrightarrow x < -\varepsilon \text{ sau } x > \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \end{cases}$		

Orice număr rațional se poate scrie într-o infinitate de forme, de exemplu .. $2/6 = 1/3 = \dots$ dar forma cea mai simplă este cea în care $a \neq 0$ și b nu au divizori comuni, formă în care toate numerele raționale pot fi scrise.

În notația **analitică** a mulțimilor, \mathbb{Q} se definește astfel:

$$(23.3) \quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

23.1.3 Numerele reale (centrice \mathbb{R}) sunt obiecte ale gândirii umane rezultate printr-un îndelungat proces de abstractizare.

Mulțimea **numerelor reale** \mathbb{R} se justifică în analiza matematică și în geometrie. **Numerele reale** pot fi **raționale** sau **iraționale**, **algebrice** sau **transcendente**, **pozitive** sau **negative**. (Tab. 23.2).

Din punct de vedere geometric, mulțimea numerelor reale reprezintă o dreaptă, căreia i se asociază un punct **O(0)**, numit origine, corespunzător valorii **0** și un sens de parcurgere (Tab.23.2): plus ($\rightarrow +$) corespunzător **numerelor pozitive**, iar sensul opus, minus ($\leftarrow -$) corespunzător **numerelor negative**. Se știe că, orice dreaptă coține două axe, corespunzătoare celor **două sensuri** ale unei direcții / drepte.

Ca urmare, pe o dreaptă, **coexistă** două axe: **axa numerelor pozitive** (\rightarrow) și **axa numerelor negative** (\leftarrow).

Ca oricare axă, și mulțimea numerelor reale este infinită în ambele sensuri sau pe ambele axe: **pozitivă și negativă**.

Mulțimea numerelor reale este o reuniunea a mulțimii numerelor raționale cu cele iraționale: \mathbb{N} inclus în \mathbb{Z} , \mathbb{Z} inclus în \mathbb{Q} , \mathbb{Q} inclus în \mathbb{R} , iar mulțimea **numerelor iraționale** se obține prin: $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

În matematică, un **număr irațional** este un **număr real** care **nu** se poate exprima prin raportul (sau **rația**) a două **numere întregi** \mathbb{Z} .

Prin contrast, numerele reale care se pot exprima ca / drept raportul dintre două numere întregi se numesc **numere raționale**.

Cel mai **simplic** număr irațional este $\sqrt{2} = 1,4142135624\dots$ iar exemplul **clasic** al **numărului irațional** este numărul π care, geometric, reprezintă raportul dintre circumferința oricărui cerc și diametrul acestuia, cu valoarea aproximativă 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944... de 60 de zecimale exacte, câte a reușit să memoreze autorul în decursul timpului.

Se știe că fiecărui număr real x îi corespunde pe axă un punct și reciproc.

Mulțimea \mathbb{R} se mai numește **dreaptă reală** și **numerele reale** se mai numesc **puncte**.

Originea O(0) reprezintă una din granițele submulțimii numerelor naturale \mathbb{N} inclusă în mulțimea numerelor întregi \mathbb{Z} .

Cum se poate trece de la numerele naturale \mathbb{N} întregi, de exemplu, la numărele întregi \mathbb{Z} , la cele raționale \mathbb{Q} , la cele reale \mathbb{R} va fi exemplificat în continuare.

23.2. NUMERE IRAȚIONALE EXCENTRICE (II)

Prin apariția **matematicii excentrice** (extraordinare) care, împreună cu **matematica centrică** (clasică, ordinară), adică prin reunirea lor, formează ceea ce s-a numit **supermatematică**, toate obiectele matematice au fost multiplicare de la unu la infinit. Astfel, unui anumit cerc, din **domeniul centric**, de o rază R dată, îi corespund, în **domeniul excentric**, o infinitate de "**cercuri excentrice**" denumite "**excentrice circulare**", infinitate corespunzătoare infinității punctelor din plan în care poate fi

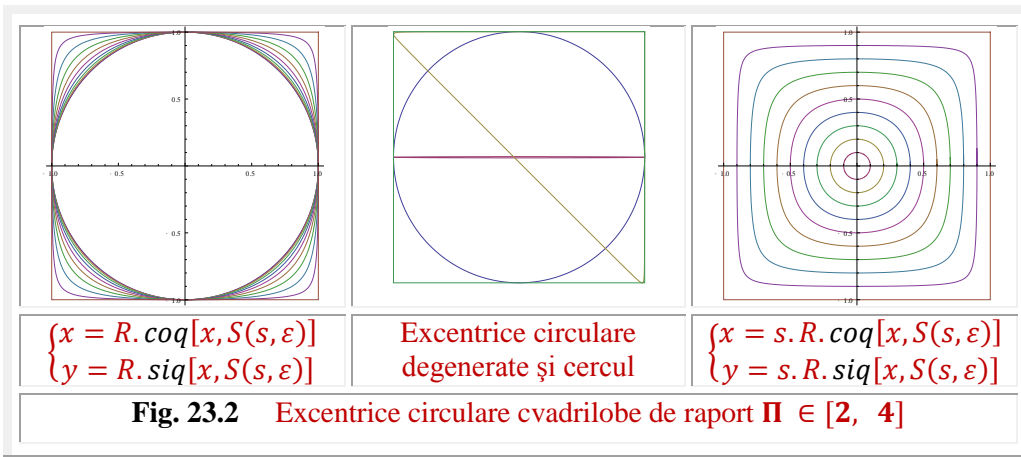
plasat punctul $E(e, \varepsilon)$, denumit **excentru** sau **ex-centru**, pentru că a fost expulzat din centrul $O(0,0)$ al cercului $C(O,R)$ și originea $O(0,0)$ a unui reper cartezian drept și / sau polar.

Odată cu multiplicarea la infinit a cercului, prin descoperirea **excentricelor circulare**, numărul $\pi \subset \Pi \in [2, 8 \vee \infty]$ s-a dovedit a fi **doar o valoare** a acestui raport, pentru una dintre excentricele circulare, și anume, cea de excentricitate numerică $s = 0$, adică $\pi = \Pi(s = 0)$, care aparține, deci, **domeniului centric**.

Mulțimea de valori, ca raport dintre circumferința **excentricelor circulare**, care diferă ca formă și lungime în funcție de poziția excentrului $E(e, \varepsilon)$, adică, de **excentricitatea numerică liniară s** și de **excentricitatea unghiulară ε** și de diametrul cercului, care este o constantă, este Π .

Valoarea **minimă**, când excentrica circulară se “prăbușește” peste diametrul cercului unitate este $\Pi_m = 2$ (Fig.23.2 \Leftrightarrow centru).

Valoarea **maximă**, pentru $e \in [-1, 1]$ și $\varepsilon = 0$, este $\Pi_M = 4 = 4 \cdot 2/2$ și aparține excentricei circulare degenerată într-un **pătrat perfect** (Fig. 23.2 \Leftrightarrow), pătrat obținut pentru excentricitatea numerică $s = \pm 1$.



Excentricele circulare, din părțile laterale ale **figurii 23.2**, în stânga, de același diametru $\phi D = 2R = 2$ și în dreapta de raze variabile $R = s$, sunt descrise de funcțiile cosinus $R \cdot \text{coq}x$ și sinus $R \cdot \text{siq}x$ **cvadrilobe**, prin ecuațiile parametrice cunoscute

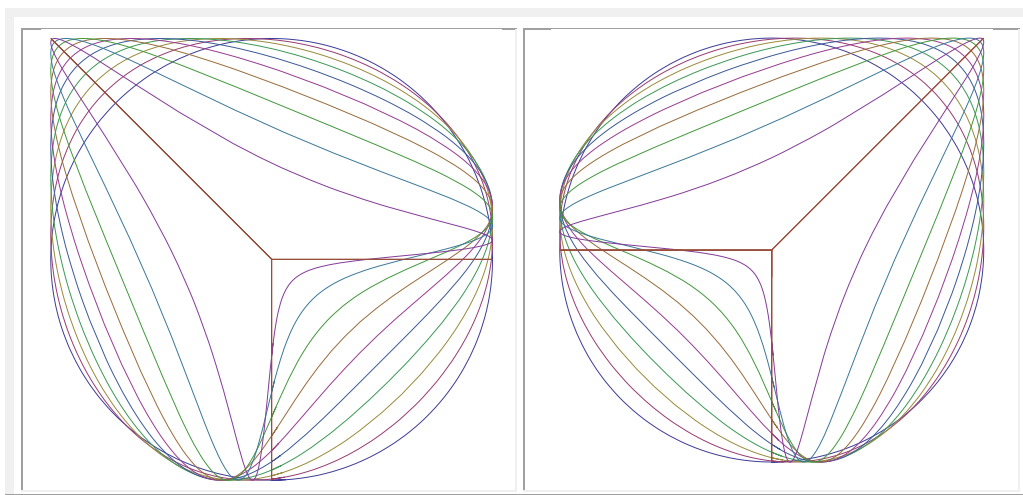
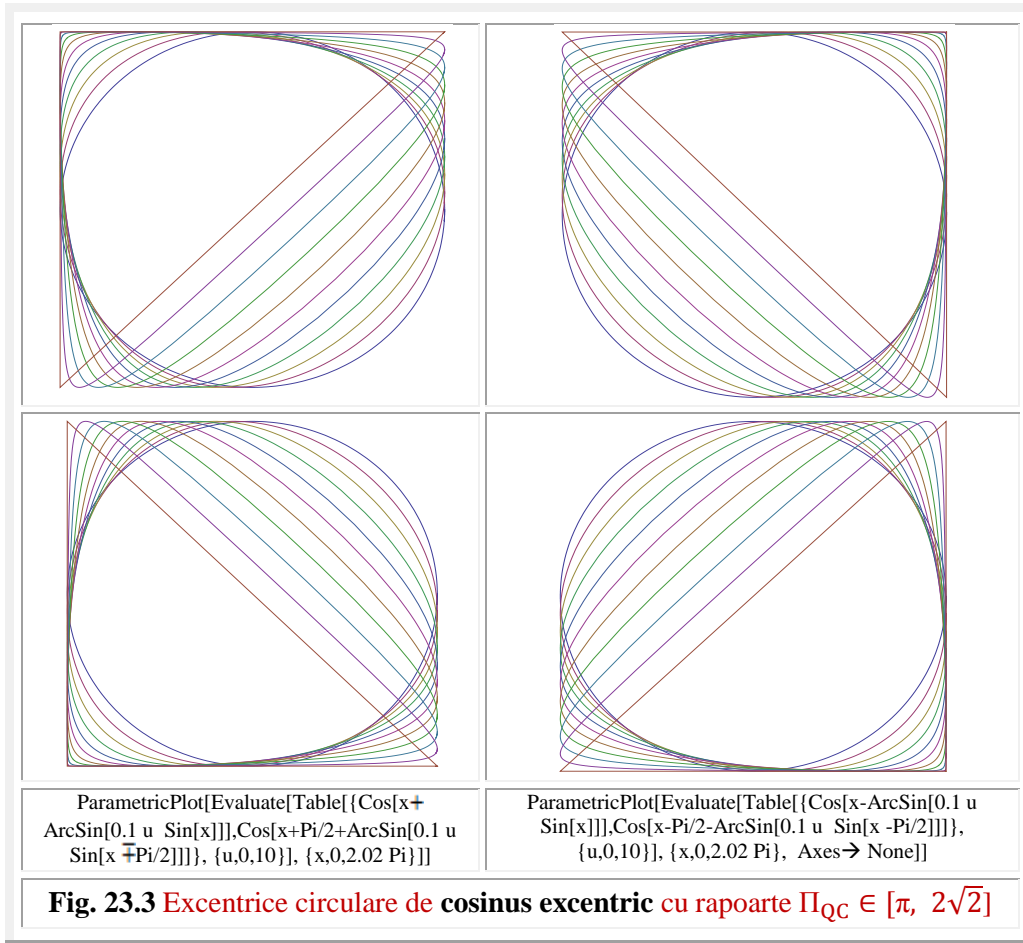
$$(23.4) \quad \begin{cases} x = R \cdot \text{coq}[x, S(s, \varepsilon)] \\ y = R \cdot \text{siq}[x, S(s, \varepsilon)] \end{cases} ,$$

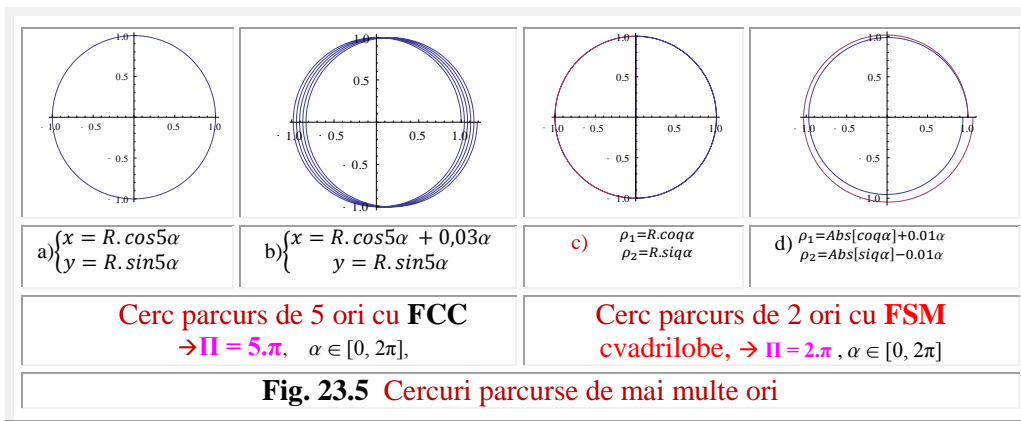
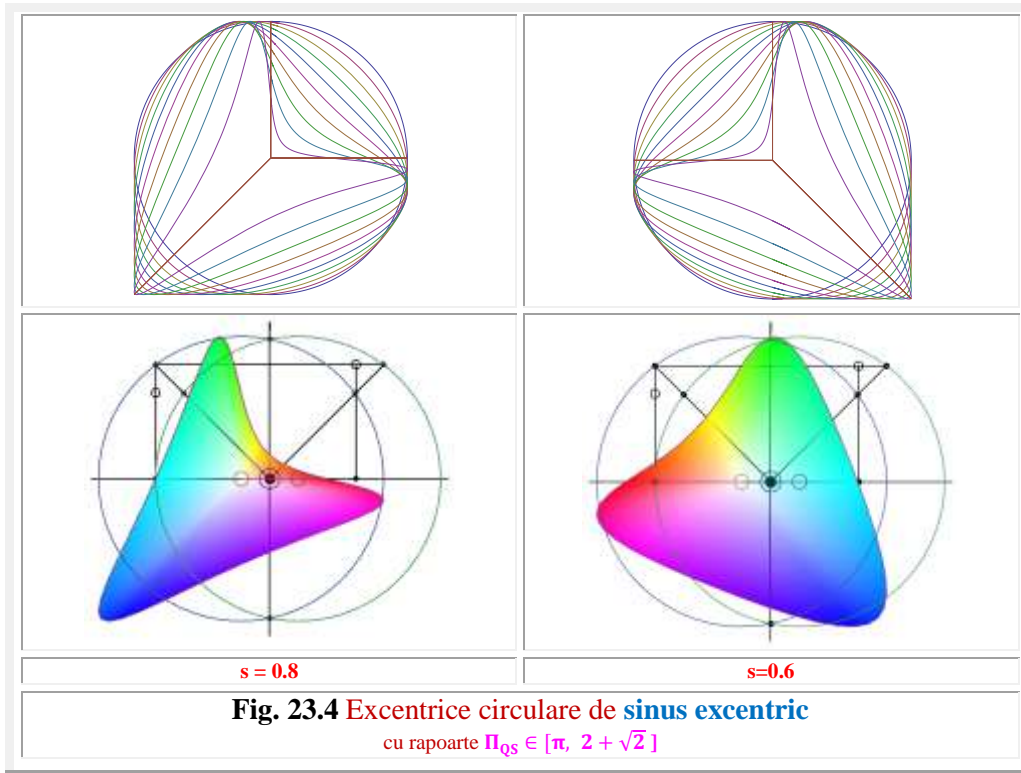
dar și prin **FSM-CE derivată excentrică dex0**:

$$(23.4') \quad \begin{cases} x = R \cdot \text{dex}\theta = R(-s \cdot \cos(\theta - \varepsilon) + \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}) \\ y = R \cdot \text{dex}\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = R(\mp s \cdot \sin[(\theta - \varepsilon)] + \sqrt{1 - s^2 \cos^2(\theta - \varepsilon)}) \end{cases}$$

în care $R = 1$ și au aceleași rapoarte Π_Q cuprinse în domeniul

$$(23.5) \quad \Pi_Q = [2; (\pi = 3,1415\dots); 4]$$

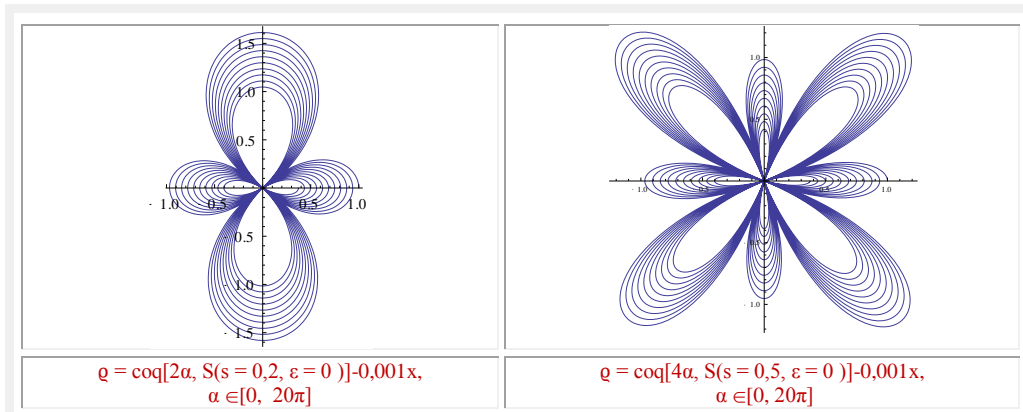
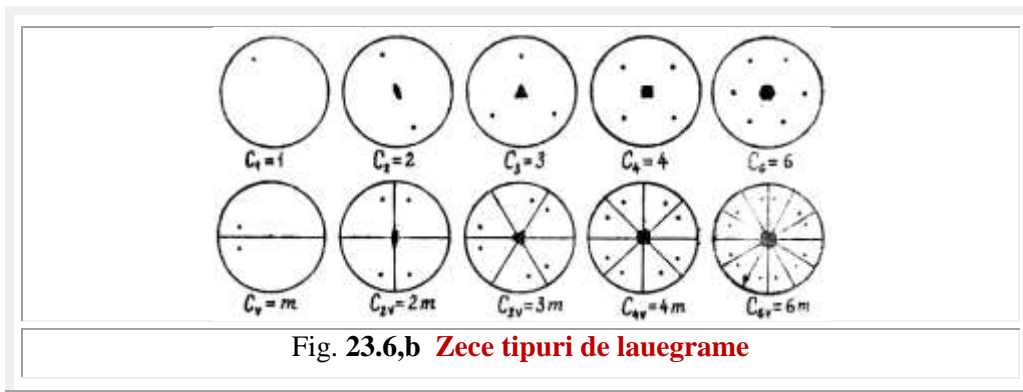
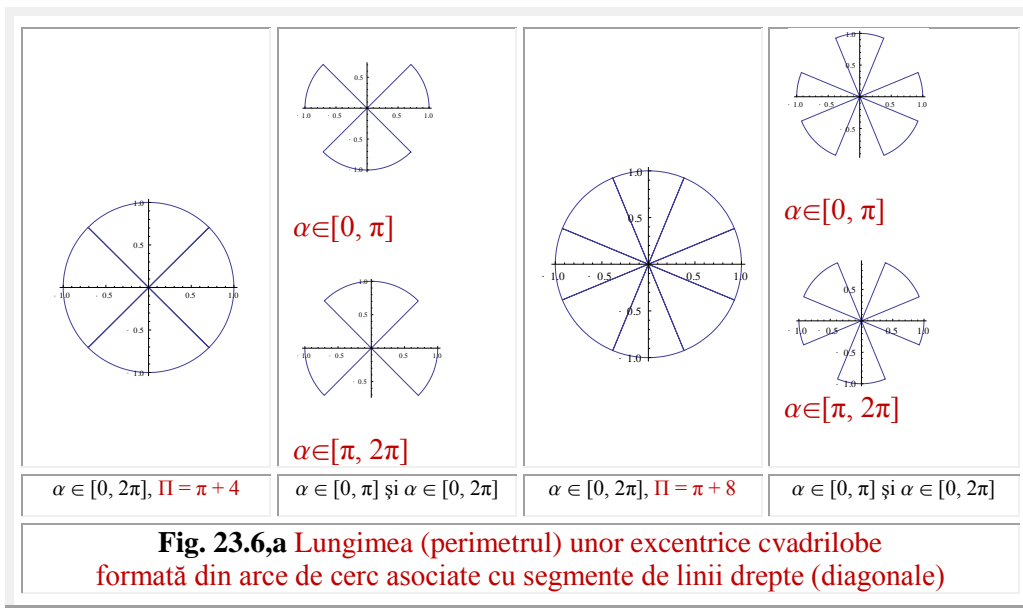


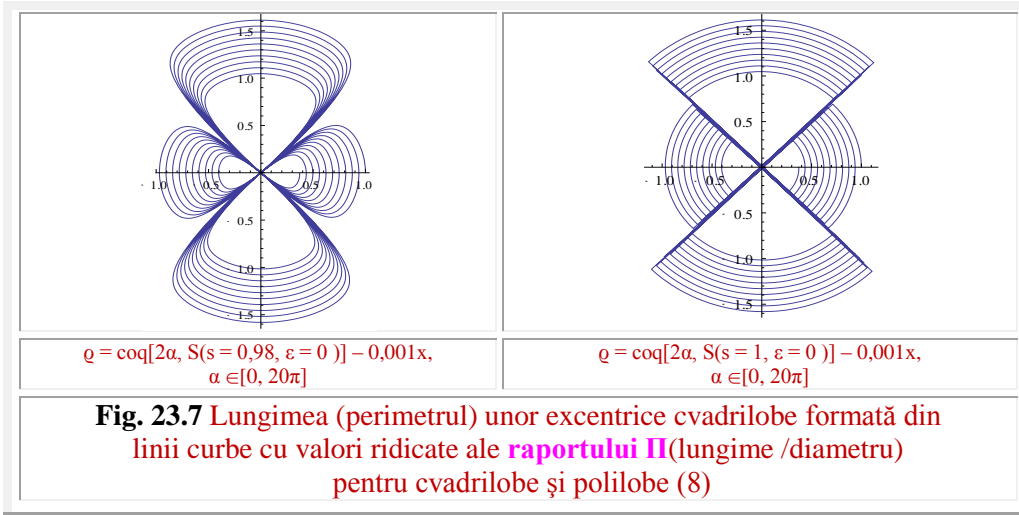


Cu ecuațiile (23.4) se obțin excentricele circulare cu centrul de simetrie plasat peste originea $O(0,0)$, iar cu **FSM-CE** derivat excentrice

$$(23.4') \quad \begin{cases} x = R \cdot \text{dex}[\theta, S(s \in [-1,1], \varepsilon = 0)] \\ y = R \cdot \text{dex}[\theta \pm \frac{\pi}{2}, S(s \in [-1,1], \varepsilon = 0)] \end{cases}$$

se obțin aceleași **excentrice circulare**, dar de raze variabile $R = e$, plasate cu centrul de simetrie H în punctul $H(1,1)$.





Excentricele circulare din figura 23.3 sunt descrise prin ecuații parametrice de **funcțiile supermatematice circulare excentrice (FSM-CE) cosinus excentrice**

$$(23.6) \quad \begin{cases} x_{1,2,3,4} = cex_{1,2}[x + \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, S(s, \varepsilon = 0) \right\}] \\ y_{1,2,3,4} = cex_{1,2}[x \pm \frac{\pi}{2} \pm \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, S(s, \varepsilon = 0) \right\}] \end{cases}$$

și cele din figura 23.4 de funcții **sinus excentrice** din ecuațiile parametrice

$$(23.7) \quad \begin{cases} x_{1,2,3,4} = sex_{1,2}[x + \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, S(s, \varepsilon = 0) \right\}] \\ y_{1,2,3,4} = sex_{1,2}[x \pm \frac{\pi}{2} \pm \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, S(s, \varepsilon = 0) \right\}] \end{cases}$$

Acestea au drept limite extreme ale lui $\Pi_{QC} \in [2\sqrt{2}, \pi]$ și, respectiv, $\Pi_{QS} \in [\pi, 2(1 + \sqrt{2})]$, două **numere iraționale** dintre cele mai cunoscute.

Dacă, în toate cazurile, valoarea minimă $\Pi_m = 2$ este un minim absolut, adică un **minim-minimorum**, nu același lucru se întâmplă cu valoarea maximă $\Pi_M = 4$, care nu este un **maxim – maximorum**. De fapt, nici circumferința cercului nu este întotdeauna π , ci poate fi un multiplu de π .

De exemplu, ecuațiile parametrice

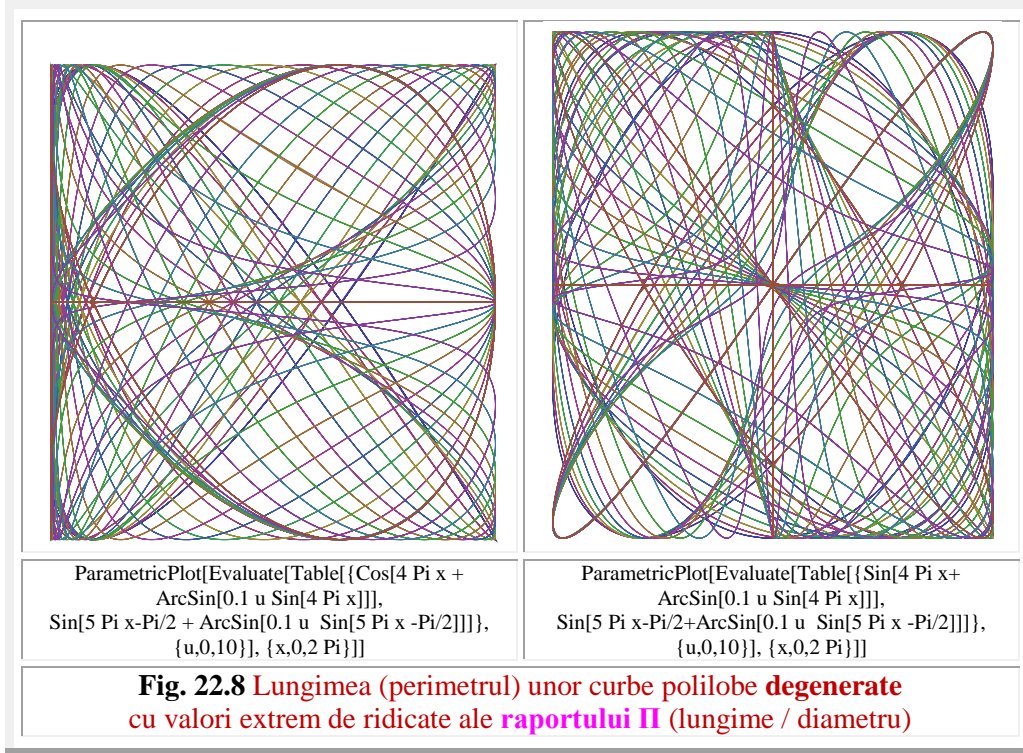
$$(23.8) \quad \begin{cases} x = R \cdot \cos 5\alpha \\ y = R \cdot \sin 5\alpha \end{cases}$$

reprezintă tot un cerc (**Fig. 22.5,a**) care este parcurs de 5 ori și, ca să devină evident acest fapt, s-a dat o deplasare a centrului cercurilor pe axa x (**Fig.23.5,b**).

În acest caz, rezultă că $\Pi = 5\pi$.

Este interesant faptul că, dacă **FSM** cvadrilobe, în ecuații parametrice, pentru $s = \pm 1$, reprezintă un **pătrat perfect** (**Fig. 23.2**), în ecuații polare, pentru aceeași valoare a excentricității numerice $s = \pm 1$, ele reprezintă un **cerc** (**Fig. 23.5, c și d**), dat de ecuația polară

(23.9) $\varrho = R.\text{coq}[\alpha, \mathbf{S}(s=1, \varepsilon=0)]$ și/ sau $\varrho = R.\text{siq}[\alpha, \mathbf{S}(s=1, \varepsilon=0)]$
 pentru $R=1$ și $\alpha \in [0, 2\pi]$.



Dacă în ecuațiile (23.11) se introduce un argument multiplu, sau / și acesta realizează mai mult de o singură rotație, atunci se obțin cvadrilobele din **figura 23.6** a căror raport Π , dintre lungimea cvadrilobei și diametrul cercului unitate, este cu mult mai mare decât 4.

Pentru 2α - cazul din stânga- este $\Pi = \pi + 4$; cele două diagonale sunt parcurse de două ori în sensuri diferite, iar în cazul din dreapta **figurii 23.6**, a pentru 4α , $\Pi = \pi + 8$, cele 8 diagonale sunt parcurse de două ori în sensuri diferite.

Se pare că acest raport poate fi făcut oricât de mare se dorește, sau, altfel spus, valoarea **maximă maximorum** este $\Pi_{MM} \rightarrow \infty$.

În **figura 23.6,b** sunt prezentate, pentru comparație, lauegramele din lucrarea [„METODE DIFRACTOMETRICE DE ANALIZĂ STRUCTURALĂ”: library. utm. Md / lucrari / Tipografia / Samusi].

În **figura 23.7** s-a dat o deplasare a **cvadrilobelor** pe direcția x pentru a se evita suprapunerea curbelor și în **figura 23.8** sunt redat cvadrilobe de 4α și 5α , $\alpha \in [0, 2\pi]$ cu un raport Π_M și mai înalt și care putea fi făcut și mai mare dar, în acest caz, curbele devin neclare.

23.3 O NOUĂ DIMENSIUNE A SPAȚIULUI. HIBRIDAREA MATEMATICĂ

Câteva idei despre spațiu, culese de pe diverse website-uri, sunt următoarele:

Spațiul este o entitate abstractă care reflectă o formă obiectivă de existență a materiei. Apare ca o generalizare și abstractizare a ansamblului de parametri prin care se realizează deosebirea între diferite sisteme ce constituie o stare a universului.

SPAȚIUL, este o formă obiectivă și universală a existenței materiei, inseparabilă de materie, care are aspectul unui întreg neîntrerupt cu trei dimensiuni și exprimă ordinea coexistenței obiectelor lumii reale, poziția, distanța, mărimea, forma, întinderea lor.

În concluzie, se poate afirma că spațiul apare ca o sinteză, ca o generalizare și abstractizare a constatărilor cu privire la o stare, la un moment dat, a universului.

În cadrul mecanicii clasice, noțiunea de spațiu este aceea a modelului spațiului euclidian tridimensional (E3) omogen, izotrop, infinit.

*Când discutăm despre spațiu, primul gând este îndreptat spre **poziție**, adică noțiunea de poziție este direct asociată noțiunii de spațiu. **Poziția** este exprimată în raport cu un sistem de referință (reper) sau mai scurt printr-un sistem de coordonate.*

Să fie oare complete aceste definiții ?

Un obiect tridimensional are în spațiu E^3 **6 grade de libertate**, constituite din cele **3 translații**, pe direcțiile **X**, **Y** și **Z** și din **3 rotații**, notate, respectiv, cu **A**, **B** și **C**, în tehnologie și în robotică, în jurul axelor **X**, **Y** și **Z**.

Un obiect poate fi "realizat" sau, mai precis, reprodusă imaginea lui în spațiul virtual, când apare în 3D pe ecranul monitorului unui computer, prin folosirea unor programe tehnice (CAD) sau matematice comerciale (MATHEMATICA, MATLAB, MATHCAD, MAPLE, DERIVE, ș.a.) sau speciale, care folosesc **FSM-Excentrice**, **Elevate** sau / și **Exotice** - la descrierea obiectelor, cum este **SM-CAD-CAM**.

Prin modificarea **excentricității**, obiectele cunoscute și formate în domeniul centric al supermatematicii (**SM**), adică, în matematica centrică (**MC**), pot fi deformat în **domeniul excentric** al **SM**, adică, în **matematica excentrică (ME)** și transformate inițial în **obiecte hibride**, proprii **ME**, ca, apoi, să fie re-transformate în obiecte de alt gen, cunoscute în **MC**. Ca de exemplu, deformarea unui **con** perfect ($e = 0$) în **cono-piramide** $e \in (0, 1)$, cu baza un **pătrat perfect** și **vârful conic**, care constituiesc **obiectele hibride**, situate între con și piramidă, până la transformarea lor într-o **piramidă** perfectă ($e = \pm 1$) cu baza un pătrat perfect.

Obiectul poate fi realizat în fapt, prin diversele metode de prelucrare mecanice [v. Mircea Șelariu, Cap.17 **Dispozitive de prelucrare, PROIECTAREA DISPOZITIVELOR**, EDP, București, 1982, coordonator Sanda-Vasii Roșculeț] de formare (turnare, sinterizare), **deformare** (la cald și la rece), **dislocare** (decupare, aşchiere, eroziune, netezire) și **agregare** (sudare și lipire).

În ambele cazuri, sunt necesare **mişcări** ale sculei și / sau ale piesei, respectiv, ale spotului luminos care delimitează pe ecran un pixel și trece de la un pixel la altul.

Mișcarea este strâns legată de spațiu și de timp.

Mișcarea mecanică poate fi de

- **formare** în timp a corpurilor și, implicit, a obiectelor ;
- **schimbarea** în timp a **poziției** obiectelor, sau a părților sale, denumite corpuri, în raport cu alte corpuri, alese drept sisteme de referință;
- **schimbarea** în timp a **forme** corpurilor și, implicit, a formei obiectelor, prin **deformarea** lor .

Spațiul reflectă raportul de coexistență dintre obiecte și fenomene, sau părți ale acestora, indicând:

- **întinderea** / mărimea lor, denumită **dimensiune de gabarit**;
- **locul obiectelor**, prin **coordonatele liniare X, Y, Z**, în spațiul 3D, denumite **dimensiuni de localizare**;
- **orientarea** obiectelor, în spațiul 3D, prin coordonatele **unghiulare ψ, φ, θ** , denumite **dimensiuni de orientare**;
- **pozițiile** relative sau distanțele dintre obiecte, denumite **dimensiuni de poziționare**, dacă se refera la localizarea și orientarea absolută și/sau relativa a obiectelor, iar dacă se referă la părți ale acestora, numite corpuri, atunci sunt denumite **dimensiuni de coordonare**;
- forma obiectelor și, respectiv, evoluția fenomenelor, denumite **dimensiuni de formare**, care definesc, totodata, și ecuațiile de definire a obiectelor;
- deformarea obiectelor și modificarea evoluției fenomenelor, denumite **dimensiuni de deformare** sau **excentricități**;

Ultima dimensiune, a spațiului, **excentricitatea**, făcând posibilă apariția **matematicii excentrice (ME)** și realizând trecerea din domeniul **matematicii centrice** în cel al **matematicii excentrice**, precum și **saltul** de la **o singură** entitate matematică, existentă în matematica și domeniul **centric**, la **o infinitate** de entități, de același gen, dar deformate din ce în ce mai pronunțat, odată cu creșterea valorii **excentricității numerice s**, până la transformarea lor în alte genuri de obiecte, existente în domeniul centric.

Un exemplu, devenit deja clasic, este deformarea continuă a unei **sferă** până la transformarea ei într-un **cub**, prin utilizarea acelorași **dimensiuni de formare** (ecuații parametriche), atât pentru sferă cât și pentru cub, doar excentricitatea modificându-se: fiind **$e = 0$** pentru **sferă** și **$e = \pm 1$** pentru **cub**; pentru **$e \in [(-1, +1) \setminus 0]$** obținându-se **obiecte hibride**, proprii **matematicii excentrice (ME)**, anterior inexistente în matematică, sau, mai precis, în **matematica centrică (MC)**.

Așa cum s-a mai prezentat, **dreapta** este un **spațiu unidimensional** și, totodată, în **supermatematică (SM)**, o **strâmbă** de excentricitate zero.

Creșterea excentricității de la zero la unu transformă **linia dreaptă** într-o **linie frântă**, ambele existând și sunt cunoscute în matematica centrică, nu și restul strâmbelor, care sunt proprii **matematicii excentrice**, fiind generate de **FSM-CE** amplitudine excentrică

$$y [x, S(s, \epsilon)] = k.aex [\theta, S(s, \epsilon)] + C.$$

Linia frântă este cunoscută în **matematica centrică (MC)**, dar fără să i se cunoască ecuațiile ei ! Ceea ce nu mai este cazul în **SM** și, evident, și în **ME**.

Un fenomen asemănător este considerat că ar avea loc și în fizică: din vid apar continuu particule de un anumit tip și se reîntorc în vidul cosmic. Aceleași sau altele ?

Cosmologia are o teorie ce se aplică întregului Univers, formulată de **Einstein** în 1916: **relativitatea generală**. Ea afirmă că forța de gravitație, ce se exercită asupra obiectelor, acționează și asupra structurii spațiului, care își pierde cadrul rigid și imuabil, devenind maleabil și curb, în funcție de materia sau energia pe care le conține. Adică, **spațiul se deformează**.

Continuum-ul spațiu-timp, al relativității generale, nu este conceput fără conținut, deci nu admite vidul! Cum spunea și **Einstein** ziariștilor, care îl rugau să le rezume teoria sa: "*Înainte, se credea că, dacă toate lucrurile ar dispărea din Univers, timpul și spațiul ar rămâne totuși. În teoria relativității, timpul și spațiul dispar, odată cu dispariția celorlalte lucruri din univers.*"

Ceea ce susține teoria autorului din **SUPERMATEMATICA. Fundamente**. Vol. I Editura **POLITEHNICA**, Timișoara, 2007, Cap. 1 **Introducere**, prin care expansiunea universului este un proces de desvoltare a ordinii în haosul absolut, o trecere progresivă spațiului haotic în ordine din ce în ce mai pronunțată. Sau invers ?

În concluzie, spațiul, ca și timpul, se **formează** și se **deformează**, adică, **excentricitatea spațiului**, de o anumită valoare, duce la **formarea** spațiului, apoi, prin modificare valorii ei, spațiul se **deformează** / modifică.

Forma modificată a spațiului este dependentă de **valoarea excentricității**, care devine **o nouă dimensiune a spațiului: dimensiunea de deformare**.

Energia și masa materiei să crească odată cu creșterea **excentricității** ?

Sau invers ? **Excentricitatea** să determine valoarea masei și a energiei prezente / localizate într-un anumit loc în spațiu ?

Instalarea unei piese de prelucrat (obiect de prelucrat) în spațiul de lucru a unei mașini-unelte moderne, cu **comenzi numerice de conturare (CNC)**, este foarte asemănătoare cu "**instalarea**" unui obiect matematic în spațiul euclidian tridimensional R^3 . De aceea, vom folosi unele noțiuni din domeniul tehnologic.

În tehnologie, **instalarea** este operația premergătoare prelucrării; numai un obiect / piesă instalat /ă poate fi prelucrat/ă.

Ea presupune următoarele faze sau operații tehnologice, în această succesiune / ordine strictă ; numai înfăptuirea unei faze, făcând posibilă trecerea la realizarea fazei următoare:

1. ORIENTAREA, este acțiunea sau operația prin care elementele geometrice ale obiectului, care sunt **baze de referință tehnologică de orientare**, prescurtat baze de orientare (**BO**), primesc o **direcție** bine determinată, față de direcțiile unui sistem de referință. În tehnologie, față de direcțiile unor mișcări principale și / sau secundare de lucru, sau / și față de direcțiile mișcărilor de reglare diemnsională a sistemului tehnologic.

Drept **baze de orientare (BO)** pot servi :

3) **Un plan** al obiectului, respectiv o suprafață plană a piesei, dacă ea există, caz în care, această suprafață, determinată de trei puncte de contact dintre obiect și dispozitiv, este denumită **bază de referință tehnologică de orientare de așezare (BOA)**, sau, pe scurt, **bază de așezare (BA)**, fiind determinată, teoretic, de cele trei

puncte comune de contact ale piesei cu dispozitivul, care are sarcina de a realiza instalarea piese în cadrul mașinii de lucru. Drept **BA**, în principiu, se alege suprafața cea mai întinsă a piesei, dacă nu există altfel de condiții de poziție, sau de la care suprafața rezultată în urma prelucrării are impusă precizia cea mai înaltă, sau condiții de paralelism cu **BA**.

Punând condiția păstrării contactului piesă / dispozitiv pe **BA**, obiectul / piesa pierde 3 grade de libertate, dintre care, o **translație** pe direcția, s-o numim **Z**, perpendiculară pe **BA** (plan) și două rotații: în jurul axelor **X**, notată în tehnologie cu **A** și în jurul axei **Y**, notată în tehnologie cu **B**.

Obiectul / piesa se mai poate roti în jurul axei **Z**, rotație notată cu **C** și se poate transla pe **BA** pe direcțiile **X** și **Y** păstrând în permanență contactu cu **BA**.

De la această suprafață se stabilește, în tehnologie, coordonata **z**, de exemplu, ca distanță dintre **BOA** și **baza tehnologică de prelucrare (BTP)**, sau, pe scurt, **bază de prelucrare (BP)**, adică planul pe care îl va genera pe piesă scula de prelucrat.

Dacă o suprafață se prelucrează integral/complet (prin frezare, de exemplu, cu freze de mari dimensiuni, pentru o singura trecere), atunci celelalte coordonate/dimensiuni **y** și **x** pot fi stabilite cu foarte mare aproximație, întrucât ele nu influențează precizia realizării suprafeței plane, la distanța **z** de **BA**, rezultate în urma prelucrării piesei și denumită **bază tehnologică de prelucrare (BTP)**, sau, pe scurt, **bază de prelucrare (BP)**. A cărei cerință tehnologică este să fie paralelă cu **BOA** și să fie situată la distanța **z** de aceasta. Dimensiunea **z** fiind, în acest caz, o **dimensiune de formare** a piesei, pe de o parte și **dimensiune de coordonare**, în același timp, pentru poziția relativă scula-piesă, iar, d.p.d.v. **tehnologic**, una dintre **dimensiunile de reglare dimensională** a sistemului tehnologic **MDPS (Mașină-Dispozitiv-Piesă-Sculă)**.

Matematic exprimat, două suprafețe plane situate la distanța **z**, ca urmare, paralele între ele.

2) **O dreaptă** aparținând obiectului, dacă aceasta există, ca axe și / sau muchii, ca intersecție de -suprafețe- plane în matematică.

În tehnologie, muchiile se evită, datorită neregularității lor, adică, a abaterilor de la forma geometrică liniară, a semifabricatelor, ca și a pieselor, în urma prelucrării semifabricatelor lor.

În tehnologie, această dreaptă este determinată de cele două puncte de pe o suprafață a piesei, alta decât **BA**, comună piesei și dispozitivului, care realizează baza de orientare a piesei și a dispozitivului, ca elemente dedublate, dreaptă denumită **bază de orientare de dirijare (BOD)**, sau pe scurt **baza de dirijare (BD)**, denumire care derivă din faptul că aceste două elemente de dirijare dirijează / ghidează mișcarea obiectului / piesei în vederea localizării lui, dacă în tot timpul mișcării se menține contactul piesă-dispozitiv. În acest fel **BD** preia 2 grade de libertate ale obiectului: translația pe o direcție perpendiculară pe dreapta determinată de cele două puncte de contact piesa /dispozitiv, ce materializează **BD**, translație pe direcția **Y**, de exemplu, dacă **BD** este paralelă, întotdeauna, cu **BA** din planul **XOY** și rotația în jurul axei **Z**, notată în tehnologie cu **C**.

Drept **BOD** se alege, în principiu, din motive lesen de înțeles, suprafața cea mai lungă a piesei, dacă nu există alte rațiuni impuse, prin desenul de execuție al piesei.

De la **BOD** poate fi stabilită / măsurată cota / dimensiunea **y**, paralelă cu **BOA** și perpendiculară pe **BOD**, ca de exemplu, perpendiculară pe **z**, fiindcă **BOD** este paralelă cu **BOA**.

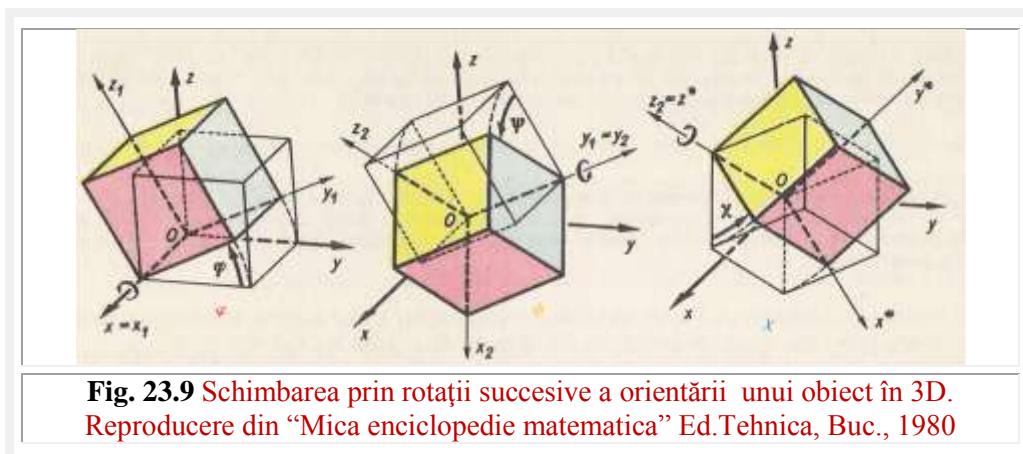
Astfel, dacă cele două puncte aparțin unei obiect paralelipipedic, mărginit, deci, de suprafețe plane, și **BOD** este paralelă cu **BOA**, păstrând contactul piesă / dispozitiv pe cele două baze, printr-o mișcare de translație, piesa mai poate fi doar translata, în dispozitiv, pe direcția **X**, până când tamponază un **element de localizare**.

1) De la acesta, denumit element de localizare, respectiv **baza tehnologică de localizare (BTL)**, sau, pe scurt, **baza de localizare (BL)** poate fi stabilită coordonată / dimensiunea **x** perpendiculară simultan pe **y** și **z**. Dar fără să fie coordonate / dimensiuni / segmente concurente într-un punct comun **O(x,y,z)** ca în matematică, decât, dacă **BOD** și **BTL** coboară la nivelul **BOA** și, în plus, **BTL** se deplasează spre **BOD** și va fi conținută și în ea, ambele urmând să fie conținute în **BOA**, astfel că, punctul **O(x,y,z)** ca și **BTL** va fi un vârf al piesei paralelipipedice, conținut simultan în planul **BOA**, dreapta **BD** în punctul **BL**, rezultând, în acest caz că **O(x,y,z) ≡ BL**.

Dacă, localizarea se realizează printr-o mișcare de translație, așa cum s-a presupus anterior, ea mai poartă denumirea de **localizare prin translație (LT)**.

Dacă, localizarea se realizează printr-o mișcare de rotație a obiectului, atunci este denumită **localizare prin rotație (LR)**. În acest caz **BD** poate fi, sau este, de obicei, o axă a unei suprafețe de rotație (cilindrice sau sferice) a obiectului, denumită **baza de orientare de centrare (BOC)** în jurul căreia, obiectul se rotește, până când, un alt corp al piesei, tamponază elementul de localizare prin rotație. Sau, până când un fixator pătrunde într-un orificiu perpendicular pe **BOC** sau într-un canal paralel cu **BOC**.

Obiectele care nu prezintă **elemente / baze de orientare**, cum ar fi sfera în matematică și bilele de rulant în tehnologie, de exemplu, sunt **obiecte neorientabile**.



2 LOCALIZAREA, este operația sau acțiunea de stabilire a **locul**, în spațiul euclidian tridimensional E^3 , a unui punct $O(x,y,z)$ caracteristic al obiectului, ce aparține unui element de referință de orientare al acestuia, de la care se stabilesc coordonatelor / dimensiunilor liniare x, y, z față de un sistem de referință dat, sau, în tehnologie, față de scula de prelucrare.

Punctul $O(x,y,z)$ al obiectelor **neorientabile** este centrul de simetrie al acestora, iar al pieselor orientabile, ca cele paralelipipedice, în tehnologie, de exemplu, punctul $O(x,y,z)$ este **diseminat** în trei puncte distincte, pentru fiecare coordonată în parte $Ox \subset BL$ pentru x , $Oy \subset BD$ pentru y și $Oz \subset BA$, pentru z , așa cum s-a explicat anterior.

În tehnologie, succesiunea orientare \rightarrow localizare este obligatorie; numai un obiect orientat poate fi apoi localizat. Ca și în matematică, de altfel. Întâi se alege un sistem de referință solidar cu obiectul (O, x, y, z) apoi, unul invariant (O, X, Y, Z) ce coincide, inițial, cu celălalt, în spațiul 3D sau euclidian tridimensional E^3 și apoi se operează diverse transformări de translații și/sau de rotații așa cum se poate observa cu rotațiile unui cub, prezentate în **figura 23.9**.

Reuniunea dintre **orientare** și **localizare** reprezintă cea mai importantă acțiune/operație tehnologică, denumită **poziționare**, adică:

orientarea \cup localizarea = poziționare

Dacă **poziționarea** obiectului este realizată/desăvârșită/implinită, atunci, poate fi menținută poziția relativă piesă / dispozitiv prin operația de **fixare** a piesei în dispozitiv. În continuare pot fi stabilite cotele / dimensiunile dintre scula și piesă, astfel, încât să se obțină piesa la dimensiunile și preciziile impuse prin desenul de execuție a piesei.

Această operație tehnologică este denumită **reglare dimensională**. Cu aceasta, operația de instalare este încheiată și prelucrarea piesei poate să înceapă.

Ca urmare, **instalarea** unui obiect este o reuniune a **poziționării** cu **fixarea** și cu **reglarea dimensională**, adică:

instalare = poziționare \cup fixare \cup reglare (dimensională)

În tehnologie, **fixarea** se poate realiza prin **forță (de fixare)** sau prin **formă** (care împiedică deplasarea piesei în timpul preucrării).

În matematică, fixarea se “realizează” mult mai simplu: prin **convenție**:

Zicând că sistemul (O, x, y, z) este legat de piesă el nu se mai poate deplasa relativ față de ea (dezlega), ci numai împreună cu obiectul, deci sunt “fixate” unele de altele.

Astfel, în matematică, fixarea obiectelor, față de sistemele de referință, se subînțelege, sau se realizează de la sine, ea nu mai există, pentru că în matematică nu există “**forțe matematice**”; ele fiind proprii mecanicii, în speță dinamicii ei și nici scule de prelucrare, nici diverse dimensiuni de coordonare, de reglare dimensională, de prelucrare ș.a.

De aceea, în **matematica centrică (MC)**, există doar 3 dimensiuni liniare x, y , și z care sunt, totodată, și dimensiuni de formare a obiectelor 3D, prin ecuațiile lor parametrice, de exemplu. Ca urmare, în această matematică centrică (**MC**) entități ca dreapta, pătratul, cercul, sfera, cubul ș.a. sunt unice, pe când, în matematica excentrică (**ME**) și, implicit în supermatematică (**SM**), ele sunt multiplicare la infinit prin

hibridare, hibridare posibilă prin introducerea noii dimensiuni a spațiului **excentricitatea liniara e și cea unghiulară ε** .

Hibridarea matematică poate fi definită ca procesul matematic de **încrucșare** a două entități matematice din **MC**. Adică, de trecere continuă de la o entitate oarecare, existentă în **MC**, la o altă entitate, existentă în **MC**, printr-o infinitate de entități hibride, proprii doar **ME**. Altfel spus, o transformare a unei entități **matematice centrice** în altă **entitate matematică centrică**, acțiune devenită posibilă în cadrul **matematicii excentrice** prin utilizarea funcțiilor **supermatematice**.

23.4. NUMERE COMPLEXE CENTRICE

Pentru exprimarea tuturor soluțiilor posibile ale ecuațiilor algebrice de gradul II
(23.10) $a x^2 + b x + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$
s-au introdus, în matematică, **numerele complexe**.

MULTIMEA NUMERELOR COMPLEXE \mathbb{C}		Tabelul 22.3
Definiții, Notății, Relații	$z = a + i \cdot b, \rightarrow$ $a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ <i>Nr. complex</i> $i^2 = -1,$ $i \Rightarrow$ <i>unitate imaginară</i> $\mathbb{C} = \left\{ a + i \cdot \frac{b}{a}, b \in \mathbb{R} \right\}$ \rightarrow <i>mulțimea numerelor</i> <i>Complexes, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$</i>	$a = \text{Re}(z) \rightarrow$ parte <i>reală</i> $b = \text{Im}(z) \rightarrow$ parte <i>imaginară</i> $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \rightarrow z$ <i>pur real</i> $\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$ $\text{Re}(z) = 0, \text{Im}(z) \neq 0 \rightarrow$ pur <i>imaginar</i> $\text{Re}(z) = 0, \text{Im}(z) = 0 \rightarrow$ $z = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
Egalitatea	$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \\ \text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) \end{cases}$	
Operații	<u>Adunarea:</u> $z_1 + z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) + (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$ <u>Inmulțirea:</u> $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$ <u>Structura algebrică:</u> $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este corp comutativ \rightarrow (corpul numerelor complexe)	<u>Proprietăți:</u> comutativitate; asociativitate; element neutru (nr. complex 0); opus: $-z = -(a + i \cdot b) = -a - i \cdot b, \forall z \in \mathbb{C}$ <u>Proprietati:</u> comutativitate; asociativitate; element neutru (nr. complex 1); invers: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + i \cdot b} = \frac{a - i \cdot b}{(a - i \cdot b)(a + i \cdot b)} = \frac{a - i \cdot b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}, \forall z \in \mathbb{C}$ distributivitate față de adunare

Puterile lui i	$i^0 = 1; i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1$; ș.a.m.d. <u>generalizare:</u> $i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i; i^{4k+2} = i^2; i^{4k+3} = i^3 = -i, \forall k \in \mathbb{N}$		
Conjugatul	<u>Definiții:</u> $z = a + i.b \rightarrow$ număr complex oarecare $\bar{z} = a - i.b \rightarrow$ conjugatul lui z $\bar{\bar{z}} \in \mathbb{C}$	<u>Proprietăți:</u> $\begin{cases} z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}, \\ \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ z + \bar{z} = 2a \Rightarrow z + \bar{z} \in \mathbb{R}, \\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}^2 \\ \overline{z^n} = z^{-n}, n \in \mathbb{N}, \bar{\bar{z}} = z \end{cases}$	
Modulul	<u>Definiții:</u> $z = a + i.b \rightarrow$ număr complex oarecare modulul lui $z \rightarrow$ $ z = \sqrt{a^2 + b^2}$ în care $ z > 0 \rightarrow$ este un nr. real, pozitiv	<u>Proprietăți:</u> $\begin{cases} z = 0 \Leftrightarrow z = 0, z \cdot \bar{z} = z ^2 \\ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 , z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 \\ z^n = z ^n, n \in \mathbb{N}, \left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 } \end{cases}$	
Numere complexe particulare	$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ și $\bar{\varepsilon} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ sunt soluțiile ecuației : $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,$ (analog pentru $\bar{\varepsilon}$) $\varepsilon^3 = 1$ (analog pentru $\bar{\varepsilon}$) $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$, numerele $1, \varepsilon, \bar{\varepsilon}$ sunt rădăcinile cubice ale unității	$\alpha = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ și $\bar{\alpha} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ sunt soluțiile ecuației : $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ $\alpha^3 = -1$ (analog pentru $\bar{\alpha}$)	$(1 + i)^2 = 2i$ $(1 - i)^2 = -2i$

Ele au fost descoperite de **Niccolo Tartaglia** (1499–1557) și **Gerolamo Cardan** (1501–1575) din dorința lor de a rezolva, prin radicali, ecuațiile algebrice de gradul III și / sau IV cu coeficienți reali.

Se cunosc forme **algebrice** (aritmetică și exponențială), **trigonometrică**, **geometrică** – în planul numerelor lui **Gauss** – și **vectorială** ale numerelor **complexe \mathbb{C}** .

Ultimele două forme, **vectorială** și **complexă**, fiind, de fapt, aproape identice, iar mulțimea numerelor complexe sau planul complex \mathbb{C} se mai notează $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, fiind un spațiu vectorial euclidian bidimensional E^2 .

Numerele complexe au apărut ca soluții ale ecuațiilor de forma

(22.10') $x^2 + p = 0$, cu **p** număr real strict pozitiv, așa cum numerele irrationale au apărut din necesitatea de a descrie soluții ale ecuațiilor de forma

(22.10'') $x^2 - q = 0$, unde **q** nu este un pătrat perfect.

Mulțimea **numerelor complexe** se notează cu \mathbb{C} sau cu \mathbb{C} și este

(22.10) $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{z \mid z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$

Numerele complexe se reprezintă geometric prin punctele unui plan (numit planul complex sau planul lui **Gauss**) în care s-a ales un sistem de axe ortogonale xOy .

Număr complex se notează cu $z = a + bi$ și i se asociază punctul $M(a, b)$ de coordonate (a, b) . Aceste puncte se numesc **imaginile geometrice** ale numerelor **complexe z**, iar numărul $z = a + bi$ se numește **afixul punctului M**.

Forma **trigonometrică** a operațiilor cu **numere complexe** este cunoscută numai pentru înmulțirea și împărțirea lor, precum și pentru ridicarea la o putere, ca o operație repetată de înmulțire a numărului complex cu el însuși (formula lui **Moivre**), sau extragerea radicalului de un ordin oarecare.

Până în prezent, nu a existat o formă trigonometrică a sumei și a diferenței numerelor complexe, deoarece nu au existat nici funcțiile trigonometrice **rada și dera** (**rex θ** , **Rex α** și **dex θ** , **Dex α**), cu ajutorul cărora acest lucru să devină posibil. Și nici **ME** care realizează **și mai bine** acest lucru, ceea ce s-a putut vedea într-un capitol cu privire la funcția **radial excentric rex θ** (v. Vol I).

23.5 FORMA TRIGONOMETRICA A SUMEI ȘI A DIFERENȚEI NUMERELOR COMPLEXE CENTRICE

Se cunoaște [**Homentcovshi, D.** „FUNCTII COMPLEXE CU APLICAȚII ÎN ȘTIINȚĂ ȘI TEHNICĂ”, Ed. Tehnică, Buc., 1986] că sumă și diferență a două numere complexe z_1 și z_2 este numărul complex Z , definit de cele două diagonale ale paralelogramului construit pe cei doi vectori \vec{r}_1 și \vec{r}_2 .

Diagonala cea mai lungă reprezentând **suma** ($Z_\Sigma = z_1 + z_2$) și diagonala mai scurtă **diferența** ($Z_\Delta = z_2 - z_1$), așa cum se arată în **figura 23.8**.

Lungimile diagonalelor $R_{\Sigma, \Delta}$, care sunt și modulele numerelor complexe $Z_{\Sigma, \Delta}$, formează cu vectorii \vec{r}_1 și \vec{r}_2 câte un triunghi (**Fig. 23.8**) în care se poate aplica teorema cosinului sau **teorema lui Pitagora generalizată**.

Unghiul $\gamma_{\Sigma, \gamma}$ dintre cele două laturi opuse rezultatelor $R_{\Sigma, \Delta}$, care interesează, în acest caz, este

$$(23.11) \quad \gamma_\Sigma = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1) \quad \text{și} \quad \gamma_\Delta = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \text{astfel}$$

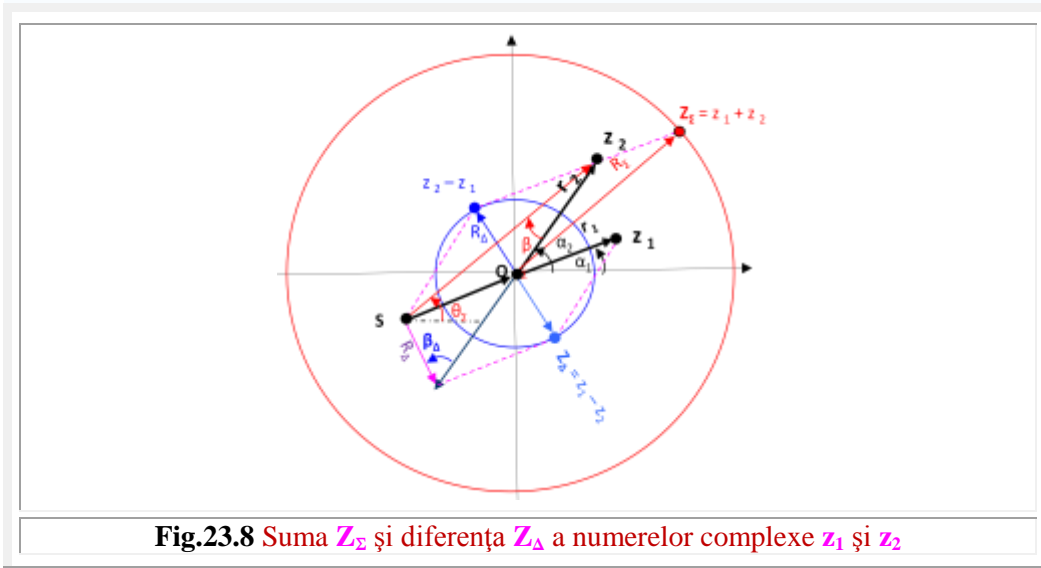
$$(23.12) \quad \cos \gamma_{\Sigma, \gamma} = \pm \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

și, în consecință, rezultă, scris concentrat, **modulele rezultatelor**

$$(23.13) \quad R_{\Sigma, \Delta} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 \pm 2r_1r_2 \cos \gamma_{\Sigma, \Delta}},$$

sau, dacă $r_2 > r_1$, scoțând forțat pe r_2 în fața radicalului, și pe r_1 , în caz contrar, rezultă

(23.14) $R_{\Sigma,\Delta} = r_2 \sqrt{1 + s^2 - 2s \cos \gamma_{\Sigma,\Delta}} = r_2 \sqrt{1 + s^2 \pm 2s \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$,
 în care, semnul **plus** este pentru **suma** și semnul **minus** este pentru **diferență**, iar **s** este
 raportul $s = r_1/r_2 < 1$ (sau **excentricitatea numerică**, sau $r_2/r_1 < 1$) și, se poate anticipa
 că, modulul sumei și a diferenței numerelor complexe, este dat de **FSM-CE** radial
 excentric de **a (Rex α)** exprimată pe cercul de raza **R = r₂**, respectiv ($r_2/r_1 < 1$), **R = r₁**.



În final, expresia **trigonometrică** a sumei și a diferenței celor două numere
 complexe, exprimate cu ajutorul **FCC rada** este

(23.15) $Z_{\Sigma,\Delta} = z_1 \pm z_2 = r_1 \cdot \text{rada}_1 \pm r_2 \cdot \text{rada}_2 =$
 $r_2 \sqrt{1 + s^2 \pm 2s \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot \text{rad}\theta_{\Sigma,\Delta}$

în care

(23.16) $\theta = \alpha - \beta = \alpha - \arcsin [s \cdot \sin(\alpha - \epsilon)], \beta$ fiind unghiul dintre $R_{\Sigma,\Delta}$ și r_2
 astfel că $\theta_{\Sigma,\Delta} = \alpha_2 - [\pm \arcsin(r_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) / R_{\Sigma,\Delta})] =$
 $= \alpha_2 + \text{bex}_2[\alpha_2, S(\frac{r_1}{R_{\Sigma,\Delta}}, \alpha_1)] = \text{aex}[\alpha_2, S(\frac{r_1}{R_{\Sigma,\Delta}}, \alpha_1)]$.

În rezumat, modulul sumei și a diferenței a două numere complexe este dat de
FSM-CE de **variabilă centrică α (Rex α)** sau poate fi exprimată prin **teorema cosinus**
(Pitagora generalizată), iar direcția este dată de **unghiul la excentru θ** respectiv de
 funcția **rad θ** și, astfel, numărul complex sumă și, respectiv, diferență $Z_{\Sigma,\Delta}$ este **complet**
 determinat / definit sub **formă trigonometrică** sau, mai precis, sub forma unei
trigonometrii excentrice aparținând domeniului **matematicii excentrice (ME)** care, la
 rândul ei, aparține **supermatematicii (SM)**.

De ce n-a putut fi realizată, mult mai devreme, forma trigonometrică a sumei și
 a diferenței numerelor complexe ?

Pentru că nu se cunoșteau noile funcții trigonometrice excentrice, sau **FSM-
 CE**, radial excentric de variabilă excentrică **rex θ** și de **variabilă centrică Rex α** .

Pentru că nu se știa, că cele două forme ale teoremei lui **Pitagora** generalizată, sunt aceleași cu **funcțiile radial excentrice**.

Dintre cele două forme, prima formă, ca funcție de variabila excentrică, s-a pierdut în decursul vremurilor, ea fiind menționată doar în ediția din anul 1900 a **MANUALULUI INGINERULUI** vol I (**Hütte**), 1900 în limba germană, iar a doua formă împânzește foarte multe manuale de fizică, mecanică și de matematică.

23.6 NUMERE REALE EXCENTRICE

Mulțimea este unul dintre cele mai importante concepte ale matematicii moderne. Cuvinte frumoase despre **mulțimi**, pe care le-a numit **grămezi**, a rostit marele nostru filozof **Constantin Noica**.

Există “mulțimi” sau “gramezi” cu un singur obiect sau chiar fără niciunul, cum este, de exemplu, “mulțimea” vidă ϕ ! Se va păstra, oare, această denumire, de **mulțime**, în limba ramână, în tot mileniul III ?

Deși **teoria mulțimilor** a apărut abia la sfârșitul secolului XIX, aceasta este acum omniprezentă încă din școala elementară, în educația matematică.

În teoria mulțimilor, **FUNCȚIILE** sunt **definite SINTETIC**, adică corespund acelor funcții

$$(23.17) \quad f : A \bullet B$$

pentru care se indică fiecărui element x din A elementul $y = f(x)$ din B , ca în următoarele exemple .

Unele mulțimi pot fi descrise în cuvinte, cum ar fi: **A** este mulțimea primelor zece numere naturale. **B** este mulțimea stelelor de pe steagul USA sau mulțimea culorilor de pe steagul României.

Prin convenție, o mulțime poate fi definită listând explicit elementele sale între acolade, de exemplu: $C = \{1, 2, 3, 4\}$, $D = \{\text{albastru, galben, roșu}\}$ și mai sunt și alte moduri de definire a unei mulțimi.

Funcțiile $F : A \bullet B$ definite cu ajutorul unei (unor) **formule** sau a unor **proprietăți** sunt funcții **definite analitic**. Corespondența F leagă între ele elementul arbitrar x din A de imaginea sa $F(x)$ din B . Cea mai frecventă reprezentare a unei funcții în matematică este printr-o **formulă**. În acest caz, elementele domeniului de definiție și ale domeniului valorilor nu pot fi decât numere sau “obiecte matematice” pentru care s-au introdus reguli de calcul corespunzătoare.

EXEMPLE:

$$(23.18) \quad \text{Fie funcția } f : \mathbb{R} \bullet \mathbb{R}, f(x) = x^2.$$

Această funcție asociază fiecărui număr real x din domeniul de definiție al funcției \mathbb{R} pătratul lui, x^2 din codomeniul funcției $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

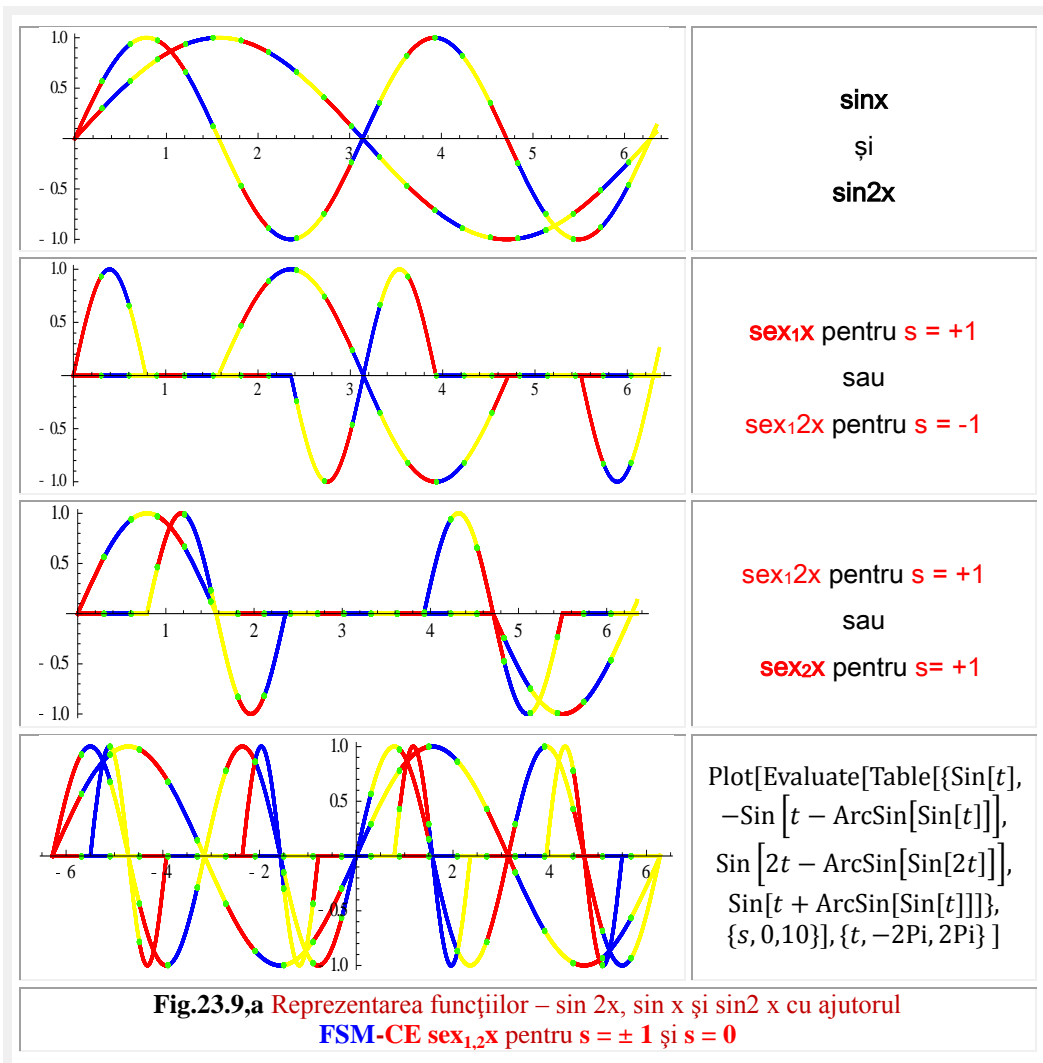
$$(23.19) \quad \text{Funcția } f : \mathbb{Z} \bullet \mathbb{Z}, f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{pentru } x \text{ par} \\ x + 1, & \text{dacă } x \text{ este impar} \end{cases}$$

este exemplu de funcție definită prin două formule. Funcțiile definite prin mai multe formule se numesc funcții multiforme.

Numerele reale excentrice \mathbb{RE} au apărut din necesitatea unei interfețe între numerele reale centrice \mathbb{RC} și cele naturale și / sau raționale \mathbb{Z} , care să facă legătura dintre cele două mulțimi de numere și trecerea dintr-o mulțime în alta.

Pentru a facilita înțelegerea, se va compara baza de numerație cu baza de date **trigonometrice centrice** și **excentrice** utilizate la aproximarea funcțiilor / curbelor, baze de date prezentate în lucrarea **Mircea Eugen Șelariu, Dumitru Bălă, "WEIS OF PRESENTING THE DELTA FUNCTION AND AMPLITUDE FUNCTION JACOBI"** Proceedings of the 2nd World Congress on Science, Economics and Culture, 25-29 August 2008, New York, ARS Academia București, 2008, pag. 42... 55.

a) **SISTEMUL TRIGONOMETRIC CENTRIC**



Există o multitudine de metode de aproximare a funcțiilor / curbelor. Dintre acestea, unele folosesc drept bază sistemul trigonometric, pe care suntem obligați să-l denumim și **centric (STC)**, pentru a-l distinge de noul **sistem trigonometric excentric (STE)**, apărut odată cu descoperirea **funcțiilor supermatematice circulare / trigonometrice excentrice (FSM-CE)**.

STC este format din asocierea funcțiilor cosinus și sinus centrice, de multiplii de arce, care formează un **sistem discret**

$$(23.20) \quad \begin{cases} 1, \cos \alpha, \cos 2\alpha, \dots, \cos n\alpha, \dots, n \in \mathbb{N} \\ 0, \sin \alpha, \sin 2\alpha, \dots, \sin n\alpha, \dots, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

În realitate, doar mulțimea infinită (23.20) $\{1, \sin\alpha, \cos\alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \dots, \sin n\alpha, \cos n\alpha, \dots\}$, $n \rightarrow \infty$ formează o bază a spațiului de funcții, care s-a dovedit deosebit de eficientă în aproximarea funcțiilor periodice, adică pentru $N \rightarrow \infty$.

Este simplu de observat că, între **$\cos(n-1)\alpha$** și **$\cos n\alpha$** ca și între **$\cos n\alpha$** și **$\cos(n+1)\alpha$** precum și între **$\sin(n-1)\alpha$** și **$\sin n\alpha$** ca și între **$\sin n\alpha$** și **$\sin(n+1)\alpha$** exista, până de curând, până la apariția **FSM-CE**, un imens gol, care aparținea materiei negre, sau materiei invizibile, a universului matematic al funcțiilor periodice.

b) **SISTEMUL TRIGONOMETRIC EXCENTRIC (STE)**

Este format prin asocierea funcțiilor cosinus și sinus **excentrice** de variabilă excentrică și alcătuiesc un **sistem continuu**

$$(23.21) \quad \text{STE} \begin{cases} 1, \text{cex}\theta, \text{cex}2\theta, \dots, \text{cex}n\theta, \dots \\ 0, \text{sex}\theta, \text{sex}2\theta, \dots, \text{sex}n\theta, \dots \end{cases}$$

Așa cum s-a mai afirmat, într-un anumit interval, o **singura FCE** din baza **supermatematică STE** poate reprezenta trei **FCC** din baza centrică: una pentru $s = e = 0$ și două pentru valorile **marginale** ale **excentricității numerice s**, din domeniul ± 1 , și o infinitate de alte funcții, pentru valorile intermediare ale lui.

De exemplu, **$\text{sex}\theta$** exprima pe **$\sin\theta$** , pentru $s = 0$ și pe **$\sin 2\theta$** , pentru $s = -1$ și **$-\sin(2\theta)$** pentru $s = +1$, așa cum se poate observa în **figura 23.9,a**.

În mod similar, un număr **intreg natural N**, excentric poate reprezenta trei numere naturale centrice: pe **N** pentru $s = 0$ și pe **$N \pm 1$** pentru $s = \pm 1$ și o infinitate de numere reale cuprinse între **$N-1$** și **$N+1$** pentru **$s \in \{(-1, +1) \setminus 0\}$** .

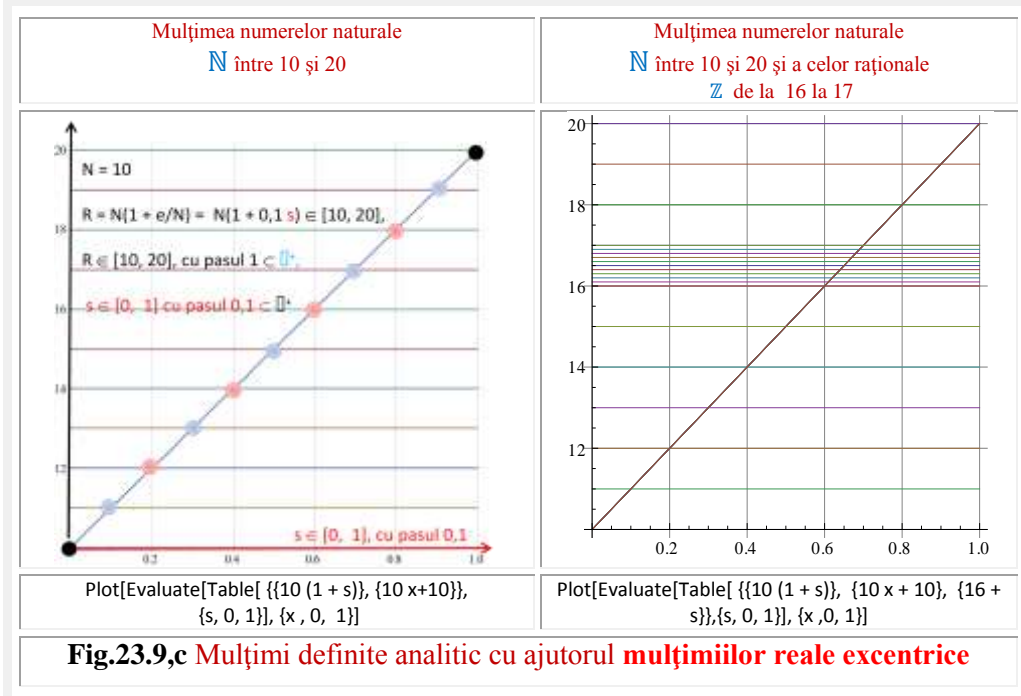
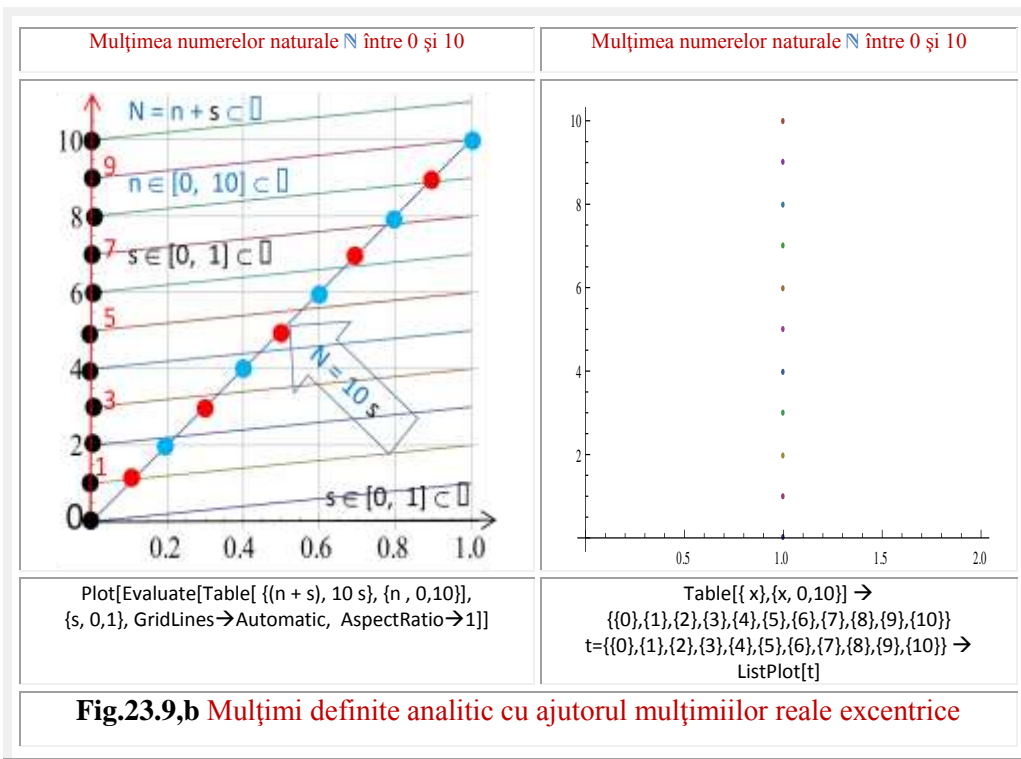
Pentru $s = \{-1, 0, 1\} \rightarrow R \in \mathbb{N}$, iar pentru $s \neq \{-1, 0, 1\} \in (-1, +1) \setminus 0 \rightarrow R \in \mathbb{R}$

Introducerea **mulțimii reale excentrice** (23.1) permite o definiție a mulțimilor mult mai apropiată de definiția ordinară, comună, a unei funcții matematice, prin funcțiile **definite analitic**.

Mulțimiile reale excentrice pot face trecerea și, totodată, legătura numerelor **reale \mathbb{R}** cu cele **intregi naturale \mathbb{N}** , dar și invers, prin relațiile

$$(23.22) \quad \begin{cases} R = N(1+s), & \begin{cases} N \subset \mathbb{N} \\ s \in (-1, +1) \setminus 0 \subset \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow R \subset \mathbb{R} \\ R = N(1+s), & \begin{cases} N \subset \mathbb{N} \\ s = \{-1, 0, +1\} \subset \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow R \subset \mathbb{Z} \end{cases}$$

în care **s** este **excentricitatea numerică** care aparține **mulțimii numerelor reale**, subunitare dacă $s \in (-1, +1) \setminus 0 \in \mathbb{R}$ și mulțimii numerelor raționale **\mathbb{Z}** dacă **$s \in \{-1, 0, +1\}$** .



Pentru $s = 0 \rightarrow R = N \in \mathbb{N}$, iar pentru $s = \pm 1 \rightarrow R = N \pm 1 \in \mathbb{N}$.

Rezultă, încă odată, că introducerea în matematică a unei noi dimensiuni, a **excentricității liniare e** ca și a celei unghiulare ϵ , a dimensiunilor de deformare a spațiului, este deosebit de benefică pentru matematică.

Acest aspect este mult mai ușor vizibil în domeniul funcțiilor periodice, în care, apariția excentricității în domeniul matematicii excentrice (**ME**), face posibilă multiplicarea la infinit a tuturor funcțiilor cunoscute din matematica centrica (**MC**) și apariția unor funcții noi, deosebit de importante.

Ca urmare, ceea ce s-a întâmplat, cu mii de ani în urmă, în domeniul numerelor se întâmplă, acum, în domeniul funcțiilor periodice: mari insule albe de pe harta cunoașterii matematice, populate de materia neagră sau nevăzută sunt relevate și apar clar vizibile pe suprafața lucie a oceanului cunoașterii.

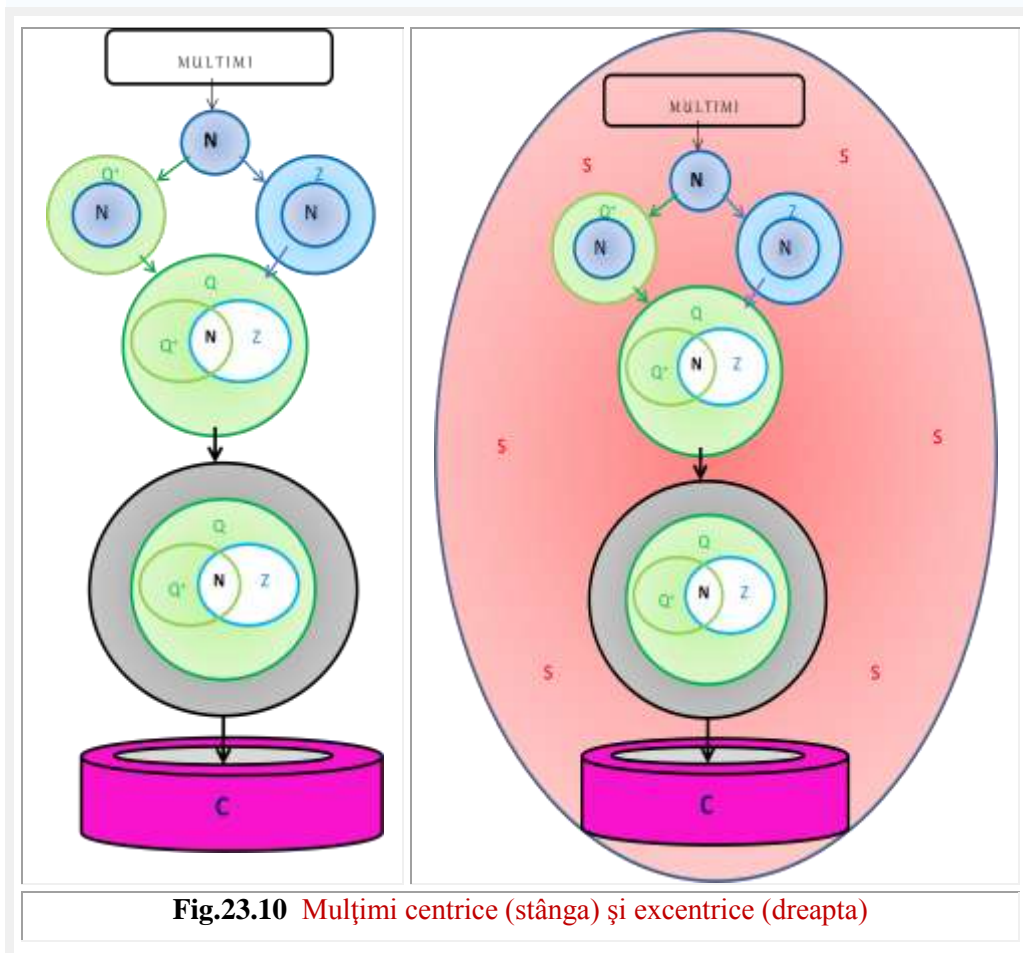


Fig.23.10 Mulțimi centrice (stânga) și excentrice (dreapta)

Și, așa cum s-a prezentat anterior, există și posibilitatea trecerii de la unele numere la altele și la înglobarea lor într-un tot unitar prin utilizarea excentricității, așa cum se sugerează în schema din **figura 23.10**.

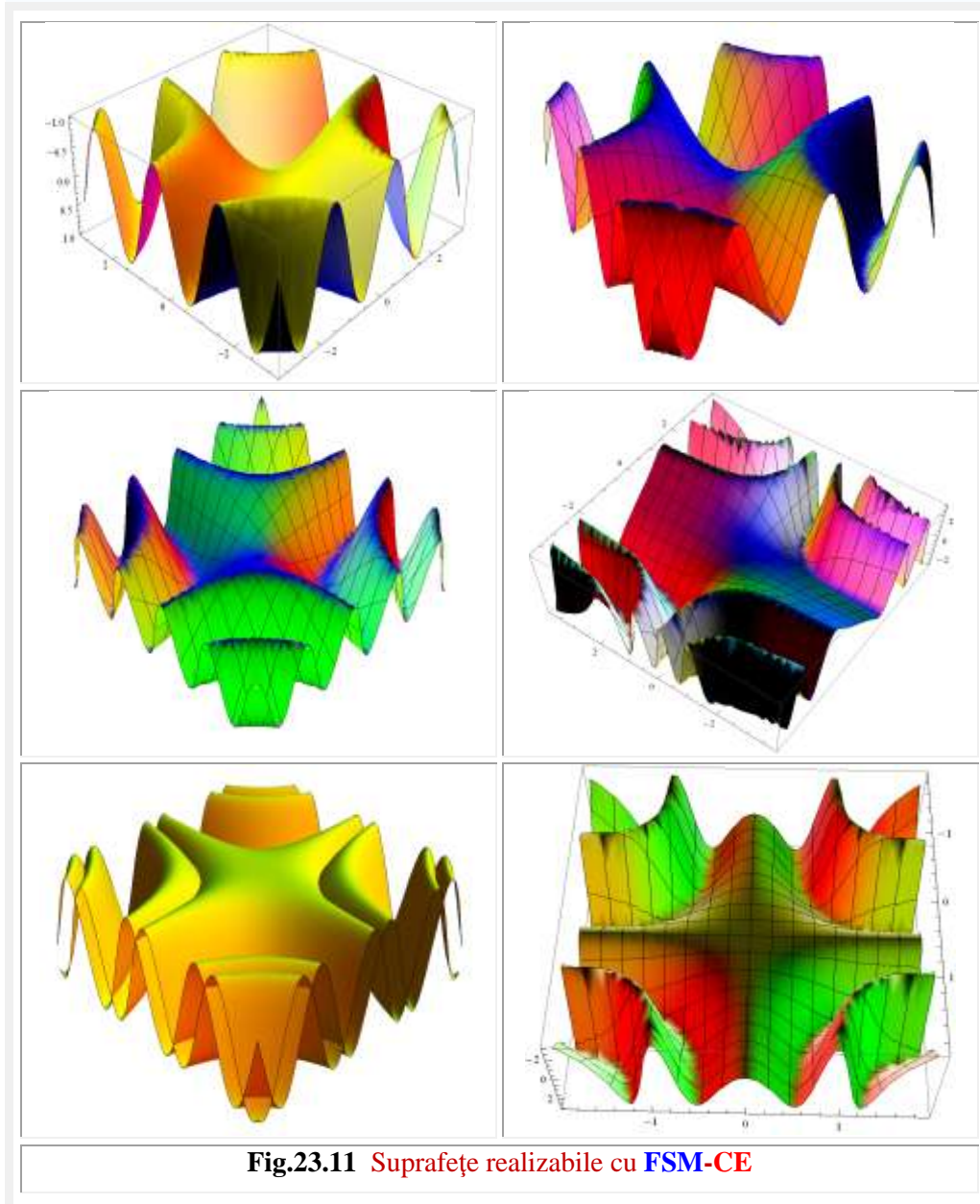


Fig.23.11 Suprafețe realizabile cu FSM-CE

Motto:””**DIVIDE ET IMPERA**” se traduce în științele matematice prin
 “DIVIDE ET DISSOLVENDAM INTEGRUM”, pe românește
 “Descompune în serie și integrează termen cu termen”

Autorul

Capitolul 24.

UNELE DERIVATE ȘI INTEGRALE ALE FSM

Principalele funcții supermatematice circulară excentrică (FSM-CE) sunt **aex**, **bex**, **cex**, **dex**, **rex**, **tex**, **texv**, adică **amplitudine**, **beta**, **cosinus**, **derivată**, **radial**, **tangenta**, **tangenta Voinoiu**, toate **circulare excentrice**, de **variabilă excentrică θ** și, respectiv, **centrică α** sunt **Aex**, **Bex**, **Cex**, **Dex**, **Rex**, **Tex**, **Texv**

Tabelul 24.1,a PRINCIPALELE FUNCȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (FSM-CE) - în prima lor determinare, de indice 1 -	
DENUMIREA FUNCȚIEI NOTAȚII	DE EXCENTRU S(s, ε) ȘI DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ
Amplitudine excentrică aexθ , Aexα	$aex\theta = \alpha(\theta) = \theta - \beta(\theta) = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] = \theta - \arctan \frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$
Beta excentrică bexθ , Bexα	$bex\theta = \beta(\theta) = bex[\theta, S(s, \varepsilon)] = \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] = \arctan \frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$
Beta excentrică de cosinus bex_cθ , Bex_cα	$bex_c\theta \equiv \beta_c(\theta) = bex_c[\theta, S(s, \varepsilon)] = \arcsin[s.\cos(\theta-\varepsilon)] = \arctan \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\cos^2(\theta-\varepsilon)}}$
Cosinus excentric cexθ , Cexα	$cex\theta = \cos[\alpha(\theta)] = \cos[aex\theta] = \cos\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\} =$ $= \cos\{\theta - \arctan \frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}\} = \cos\theta\sqrt{1-s^2.\sin^2(\theta-\varepsilon)} + s.\sin\theta.\sin(\theta-\varepsilon)$
Derivată excentrică dexθ , Dexα	$dex\theta = \frac{d\alpha(\theta)}{d\theta} = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} = \frac{-s.\cos(\theta-\varepsilon) + \sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} = \frac{rex\theta}{del\theta}$
Radial excentric rexθ , Rexα	$rex\theta = \frac{d\alpha}{du} = -s.\cos(\theta-\varepsilon) + \sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}$ $= \frac{sex\theta - s.\sin\varepsilon}{\sin\theta} = \frac{sex\theta}{\sin\theta} - s \frac{\sin\varepsilon}{\sin\theta}, u = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-s^2\sin^2\theta}}$
Sinus excentric sexθ , Sexα	$sex\theta = \sin[\alpha(\theta)] = \sin[aex\theta] = \sin\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\} =$ $= \sin\{\theta - \arctan \frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}\} = \sin\theta\sqrt{1-s^2.\sin^2(\theta-\varepsilon)} - s.\cos\theta.\sin(\theta-\varepsilon)$
Tangentă excentrică texθ , Texα	$tex\theta = \frac{sex\theta}{cex\theta} = \tan\alpha(\theta) = \tan(aex\theta) = \tan\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\} =$ $= \tan\{\theta - \arctan \frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}\}$
Tangentă excentrică Voinoiu texvθ , Texvα	$texv\theta = \frac{sex\theta}{Abs[cex\theta]}$

Unele dintre ele și combinațiile lor pot fi derivate și integrate fără dificultate, altele...

Principalele FSM-CE sunt prezentate concentrat în **tabelele 24.1,a și 24.1,b** împreună cu ecuațiile lor de definiție, scrise cu **funcții circulare centrice (FCC)**.

Pe baza acestor ecuații pot fi determinate imediat, fără dificultate, derivatele și integralele lor nedefinite, ca operație opusă derivatei. Termenul "integrală" – nedefinită- se poate referi și la noțiunea de primitivă a unei funcții, adică o funcție integrand sau de integrat **F**, a cărei derivată este funcția dată **f**.

Tabelul 24.1,b PRINCIPALELE FUNCȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (FSM-CE) - în prima lor determinare, de indice 1 -	
DENUMIREA FUNCȚIEI NOTAȚII	VARIABILĂ CENTRICĂ α
Amplitudine excentrică $aex\theta, Aex\alpha$	$Aex\alpha = \theta(\alpha) = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \cos(\alpha - \varepsilon)}}$ $= \alpha + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1-s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}$
Beta excentrică $bex\theta, Bex\alpha$	$Bex\alpha = \beta(\alpha) = \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} = \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1-s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}$
Beta excentrică de cosinus $bex_c\theta, Bex_c\alpha$	$Bex_c\alpha \equiv \beta_c(\alpha) = \arcsin \frac{s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \sin(\alpha - \varepsilon)}} = \arctan \frac{s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{1-s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}$
Cosinus excentric $cex\theta, Cex\alpha$	$Cex\alpha = \cos[\alpha(\theta)] = \cos[Aex\alpha] =$ $= \cos[\alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \cos(\alpha - \varepsilon)}}] = \cos[\alpha + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1-s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}]$
Derivată excentrică $dex\theta, Dex\alpha$	$Dex\alpha = \frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1-s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{1+s^2-2s \cos(\alpha - \varepsilon)} = \frac{1-s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{Rex^2\alpha} = \sum_0^\infty s^n \cos n\alpha$
Radial excentric $rex\theta, Rex\alpha$	$Rex\alpha = \frac{d\alpha}{du} = \sqrt{1+s^2-2s \cos(\alpha - \varepsilon)} = \frac{1}{e^{\sum_1^\infty \frac{s^n}{n} \cos n\alpha}}, u = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{Rex\alpha}$
Sinus excentric $sex\theta, Sex\alpha$	$Sex\alpha = \sin[\alpha(\theta)] = \sin[Aex\alpha] =$ $= \sin[\alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \cos(\alpha - \varepsilon)}}] = \sin[\alpha + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1-s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}]$
Tangentă excentrică $tex\theta, Tex\alpha$	$Tex\alpha = \frac{Sex\alpha}{Cex\alpha} = \tan\{Aex\alpha\} = \tan[\alpha + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1-s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}] =$ $= \tan[\alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \cos(\alpha - \varepsilon)}}]$
Tangentă excentrică Voinoiu $texv\theta, Texv\alpha$	$Texv\alpha = \frac{Sex\alpha}{Abs[cex\alpha]}$

Tabelul 24.2,a Derivatele FUNCȚIILOR SUPERMATEMATICE (FSM-CE) DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ	
FSM-CE(θ)	DERIVATELE $\frac{d[FSM-CE(\theta)]}{d\theta}$
$\alpha(\theta) = aex\theta \equiv aex[\theta, S(s, \varepsilon)] =$ $\alpha = \theta - \beta(\theta) = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)].$	$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{d(aex\theta)}{d\theta} = dex\theta \equiv dex[\theta, S(s, \varepsilon)]$ $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}}$
$\beta(\theta) = bex\theta \equiv bex[\theta, S(s, \varepsilon)] =$ $= \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] = \arctan \frac{s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}}$	$\frac{d\beta_s(\theta)}{d\theta} = coq\theta \equiv coq[\theta, S(s, \varepsilon)]$ $\frac{dbex(\theta)}{d\theta} = \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}}$
$\beta_c(\theta) = bex_c\theta \equiv bex_c[\theta, S(s, \varepsilon)] =$ $= \arcsin[s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)] =$	$\frac{d\beta_c(\theta)}{d\theta} = coqc\theta \frac{d(bex_c\theta)}{d\theta} \equiv$

$= \arctan \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \cos^2(\theta - \varepsilon)}}$	$\frac{d}{d\theta} \operatorname{coq}_c[\theta, S(s, \varepsilon)] = \frac{-s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \cos^2(\theta - \varepsilon)}}$		
$r(\theta) = \mathbf{rex}\theta = -s \cos(\theta - \varepsilon) + \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}$ $= \frac{d\alpha}{du}, u = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\operatorname{Rex}\alpha} = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\operatorname{del}\theta} = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}}$	$\frac{dr(\theta)}{d\theta} = \frac{d(\mathbf{rex}\theta)}{d\theta} = s \cdot \sin(\theta - \varepsilon) -$ $- \frac{s^2 \sin(\theta - \varepsilon) \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} = s \cdot \sin(\theta - \varepsilon) \left[1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} \right] =$ $= s \cdot \sin(\theta - \varepsilon) \cdot \mathbf{dex}\theta = \frac{d\theta}{du}$		
$d(\theta) = \mathbf{dex}\theta = 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} = \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{1}{\mathbf{Dex}\alpha} = \frac{d\alpha}{d\theta}$	$\frac{d(\theta)}{d\theta} = \frac{d(\mathbf{dex}\theta)}{d\theta} = \frac{d^2\alpha}{d\theta^2} = \frac{s(1 - s^2) \cdot \sin(\theta - \varepsilon)}{[1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)]^{\frac{3}{2}}}$		
$x(\theta) = \mathbf{cex}\theta = \cos[\mathbf{aex}\theta] =$ $\cos\{\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]\} =$ $= \cos\theta \sqrt{1 - s^2 \cos^2(\theta - \varepsilon)} + s \cdot \sin\theta \cdot \sin(\theta - \varepsilon).$	$\frac{d[x(\theta)]}{d\theta} = \frac{d(\mathbf{cex}\theta)}{d\theta} = -\mathbf{sex}\theta \cdot \mathbf{dex}\theta.$		
$y(\theta) = \mathbf{sex}\theta = \sin[\mathbf{aex}\theta] =$ $\sin\{\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]\} =$ $= \sin\theta \sqrt{1 - s^2 \cos^2(\theta - \varepsilon)} - s \cdot \cos\theta \cdot \sin(\theta - \varepsilon).$	$\frac{d[y(\theta)]}{d\theta} = \frac{d(\mathbf{sex}\theta)}{d\theta} = \mathbf{cex}\theta \cdot \mathbf{dex}\theta.$		
$X(\theta) = \mathbf{coq}\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2\theta}}$	$\frac{dX(\theta)}{d\theta} = \frac{(s^2 - 1)\sin\theta}{(1 - s^2 \sin^2\theta)^{3/2}} = \frac{d(\mathbf{coq}\theta)}{d\theta} = \frac{(s^2 - 1)}{1 - s^2 \sin^2\theta} \tan\theta \cdot \mathbf{coq}\theta$		
$Y(\theta) = \mathbf{siq}\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 - s^2 \cos^2\theta}}$	$\frac{dY(\theta)}{d\theta} = -\frac{(s^2 - 1)\cos\theta}{(1 - s^2 \cos^2\theta)^{3/2}} = \frac{d(\mathbf{siq}\theta)}{d\theta} = \frac{-(s^2 - 1)}{1 - s^2 \cos^2\theta} \cot\theta \cdot \mathbf{siq}\theta$		
DERIVATA	FUNCȚIA	EXPRESIA	ALTE EXPRESII
$\frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta} = \frac{d(\mathbf{aex}_{1,2}\theta)}{d\theta} = \mathbf{dex}_{1,2}\theta =$ $= \frac{d(\theta_{1,2} - \beta_{1,2})}{d\theta} = 1 - \frac{d\beta_{1,2}}{d\theta}$	$d_{1,2}(\theta) = \mathbf{dex}_{1,2}\theta =$ $\frac{1}{\mathbf{Dex}\alpha_{1,2}} = \frac{\mathbf{rex}_{1,2}\theta}{\cos\beta_{1,2}}$	$= 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\pm \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} =$ $= \sqrt{\mathbf{rex}_{1,2}^2\theta + \left(\frac{d(\mathbf{rex}_{1,2}\theta)}{d\theta}\right)^2}$	$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} s^n \cdot \cos n\alpha_{1,2}}$
$\frac{d\alpha_{1,2}}{du} = \frac{d(\mathbf{aex}_{1,2}\theta)}{du} = \mathbf{rex}_{1,2}\theta =$ $= \frac{d(\theta_{1,2} - \beta_{1,2})}{du} = \cos\beta_{1,2} - \frac{d\beta_{1,2}}{du} =$ $= (1 - s)\cos\beta_{1,2}$	$r_{1,2}(\theta) = \mathbf{rex}_{1,2}\theta =$ $\frac{1}{\mathbf{Dex}\alpha_{1,2}} = \frac{\mathbf{rex}_{1,2}\theta}{\cos\beta_{1,2}}$	$= -s \cdot w \cdot \cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)} =$ $\sqrt{\left(\frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta}\right)^2} - \left(\frac{dr_{1,2}}{d\theta}\right) = \sqrt{\mathbf{dex}_{1,2}^2\theta - \frac{d(\mathbf{rex}_{1,2}\theta)}{d\theta}}$	$= e^{-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n} \cos n\theta} = \frac{1}{\mathbf{Rex}\alpha_{1,2}} =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n \cdot \cos\alpha_{1,2}$

Tabelul 24.2,b Integralele FUNCȚIILOR SUPERMATEMATICE (FSM-CE) DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ

$\int \mathbf{FSM} - \mathbf{CE}(\theta) \cdot d\theta$	INTEGRALE
$\int \mathbf{dex}\theta \cdot d\theta = \int d\alpha \rightarrow \int \frac{d\alpha}{d\theta} d\theta = \alpha(\theta) = \mathbf{aex}\theta.$	$\int \left(1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} \right) d\theta = \alpha(\theta) = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] = \mathbf{aex}\theta$
$\int \mathbf{coq}\theta \cdot d\theta = \int d[\beta_s(\theta)] = \mathbf{bex}\theta.$	$\int \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} d\theta = \int \mathbf{coq}\theta d\theta = \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]$ $= \arctan \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} = \mathbf{bex}[\theta, S(s, \varepsilon)]$
$\int \mathbf{coq}_c\theta \cdot d\theta = \int d\beta_c(\theta) = \mathbf{bex}C\theta.$	$\int \frac{-s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \cos^2(\theta - \varepsilon)}} d\theta = \arcsin[s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)] = \mathbf{bex}_c[\theta, S(s, \varepsilon)]$
$\int s \cdot \sin(\theta - \varepsilon) \cdot \mathbf{dex}\theta \cdot d\theta = \int \frac{dr(\theta)}{d\theta} d\theta = r(\theta)$ $= \mathbf{rex}\theta.$	$\int [s \cdot \sin(\theta - \varepsilon) - \frac{s^2 \sin(\theta - \varepsilon) \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}}] d\theta =$ $= -s \cos(\theta - \varepsilon) + \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)} = \mathbf{rex}[\theta, S(s, \varepsilon)]$
$\int \mathbf{dex}\theta \cdot d\theta = \int \frac{d^2\alpha}{d\theta^2} \cdot d\theta = \int \frac{d(\theta)}{d\theta} d\theta = d(\theta) = \mathbf{dex}\theta.$	$\int \frac{s(1 - s^2) \cdot \sin(\theta - \varepsilon)}{[1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)]^{\frac{3}{2}}} d\theta = 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} = \mathbf{dex}[\theta, S(s, \varepsilon)]$

$\int -\text{sex}\theta \cdot \text{dex}\theta \cdot d\theta = \int \frac{d[x(\theta)]}{d\theta} d\theta = \int \frac{d(\text{cex}\theta)}{d\theta} d\theta = \text{cex}\theta.$	$\int -\{\sin\theta\sqrt{1-s^2\cos(\theta-\varepsilon)} + s \cdot \cos\theta \cdot \sin(\theta-\varepsilon)\} * \left\{1 - \frac{s \cdot \cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}\right\} d\theta = \text{cex}\theta$
$\int \text{cex}\theta \cdot \text{dex}\theta \cdot d\theta = \int \frac{d[y(\theta)]}{d\theta} d\theta = \int \frac{d(\text{sex}\theta)}{d\theta} d\theta = \text{sex}\theta.$	$\int \{\cos\theta\sqrt{1-s^2\cos(\theta-\varepsilon)} + s \cdot \sin\theta \cdot \sin(\theta-\varepsilon)\} * \left\{1 - \frac{s \cdot \cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}\right\} d\theta = \text{sex}\theta$
$s \int \text{coq}\theta \cdot d\theta = \text{bex}\theta$	$s \int \frac{(s^2-1)\sin\theta}{(1-s^2\sin^2\theta)^{3/2}} d\theta = \text{coq}\theta$
$s \int \text{siq}\theta \cdot d\theta = \text{bex}_c\theta$	$s \int -\frac{(s^2-1)\cos\theta}{(1-s^2\cos^2\theta)^{3/2}} d\theta = \text{siq}\theta$
$\int \text{FSM} - \text{CE}(\theta) \cdot d\theta$	INTEGRALE
$\int \text{dex}\theta \cdot d\theta = \int d\alpha \rightarrow \int \frac{d\alpha}{d\theta} d\theta = \alpha(\theta) = \text{aex}\theta.$	$\int \left(1 - \frac{s \cdot \cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}\right) d\theta = \alpha(\theta) = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta-\varepsilon)] = \text{aex}\theta$

Tabelul 24.3,a Derivatele **FUNȚIILOR SUPERMATEMATICE (FSM-CE)** de variabilă centrică α

DERIVATELE $\frac{d\theta}{d\alpha}$	
$\theta(\alpha) = \text{Aex}\alpha \equiv \text{Aex}[\alpha, S(s, \varepsilon)] =$ $\theta(\alpha) = \alpha + \beta(\alpha) =$ $\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} \\ \alpha + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)} \end{array} \right.$	$\frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d(\text{Aex}\alpha)}{d\alpha} = \text{Dex}\alpha \equiv \text{Dex}[\alpha, S(s, \varepsilon)]$ $\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)} = \frac{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{\text{Rex}^2\alpha}$ $= \frac{1}{\text{dex}\theta} = \sum_0^\infty s^n \cdot \cos(n\alpha)$
$\beta(\alpha) = \text{Bex}\alpha \equiv \text{Bex}[\alpha, S(s, \varepsilon)] = \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)} =$ $= \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} = \sum_1^\infty \frac{s^n}{n} \sin(n\alpha)$	$\frac{d[\beta s(\alpha)]}{d\alpha} = \text{Coq}\alpha \equiv \text{Coq}[\alpha, S(s, \varepsilon)] = s \frac{\cos(\alpha - \varepsilon) - s}{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)} =$ $= s \frac{\cos(\alpha - \varepsilon) - s}{\text{Rex}^2\alpha} = \sum_1^\infty s^n \cos n\alpha = \frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} - 1 = \text{Dex}\alpha - 1$
$\beta_c(\alpha) = \text{Bex}_c\alpha \equiv \text{Bex}_c[\alpha, S(s, \varepsilon)] =$ $= \arctan \frac{s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)} = \arcsin \frac{s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} =$ $= \sum_1^\infty \frac{s^n}{n} \sin(n\alpha)$	$\frac{d[\beta c(\alpha)]}{d\alpha} = \text{Coq}_c\alpha \equiv \text{Coq}_c[\alpha, S(s, \varepsilon)] = \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\theta - \varepsilon)}} =$ $= s \frac{\cos(\alpha - \varepsilon) - s}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} = s \frac{\cos(\alpha - \varepsilon) - s}{\text{Rex}^2\alpha}$
$D(\alpha) = \text{Dex}\alpha = \frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)} =$ $= \frac{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{\text{Rex}^2\alpha} = \sum_0^\infty s^n \cos n\alpha$	$\frac{dD(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d^2\theta(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{-s[\cos(\alpha - \varepsilon) - s]}{\text{Rex}^4\alpha} =$ $= -\sum_1^\infty n \cdot s^n \cdot \sin n\alpha = \frac{\varepsilon}{\Omega^2}$
$D(\alpha) = \frac{d\theta}{d\alpha} = \text{Dex}\alpha = \frac{1}{\text{dex}\theta} = \frac{d\alpha}{d\theta}$	$\frac{dD(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d^2\theta}{d\alpha^2} = \frac{d^2B(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{-s(1 - s^2)\sin\alpha}{\text{Rex}^4\alpha} =$
$R(\alpha) = \text{Rex}\alpha = \frac{d\alpha}{du}$	$\frac{dR(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d^2R(\alpha)}{d\alpha du} = \text{Sin}[\text{Bex}\alpha] = \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}}$
$X(\alpha) = \cos[\text{Aex}\alpha] = \text{Cex}\alpha = \cos\left[\alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}}\right] =$ $= \frac{\cos\alpha - s}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha - s}{\text{Rex}\alpha}$	$\frac{dX(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d(\text{Cex}\alpha)}{d\alpha} = -\text{Dex}\alpha \cdot \text{Sex}\alpha = \frac{\sin\theta[1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)]}{\text{Rex}^3\alpha}$
$Y(\alpha) = \sin[\text{Aex}\alpha] = \text{Sex}\alpha = \sin\left[\alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}}\right]$ $= \frac{\text{Sin}\alpha}{\text{Rex}\alpha}$	$\frac{dY(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d(\text{Sex}\alpha)}{d\alpha} = \text{Dex}\alpha \cdot \text{Cex}\alpha = \frac{(\cos\alpha - s)[1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)]}{\text{Rex}^3\alpha}$
$T(\alpha) = \text{Tex}\alpha = \frac{\text{Sex}\alpha}{\text{Cex}\alpha} = \frac{\text{Sin}\alpha}{\cos\alpha - s}$	$\frac{dT(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d(\text{Tex}\alpha)}{d\alpha} = \frac{1 - s \cdot \cos\alpha}{(\cos\alpha - s)^2}$
$T_V(\alpha) = \text{Tex}_V\alpha = \frac{\text{Sex}\alpha}{\text{Abs}[\text{Cex}\alpha]} = \frac{\text{Sin}\alpha}{\text{Abs}[\cos\alpha - s]}$	$\frac{dT_V(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d(\text{Tex}_V\alpha)}{d\alpha} = \frac{(\cos\theta + \sin^2\theta)}{\text{Abs}[\cos\theta - s]}$

Tabelul 24.3,b Integralele FUNȚIILOR SUPERMATEMATICE (FSM-CE) de variabilă centrică α	
INTEGRALE	
$\int \mathbf{Dex}\alpha. d\alpha = \int \frac{d\theta}{d\alpha} d\alpha \rightarrow \int d\theta. = \theta(\alpha) = \mathbf{Aex}\alpha$	$\int \frac{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)} d\alpha = \theta(\alpha) = \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}}$ $= \alpha + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)} = \mathbf{Aex}\alpha$
$\int \mathbf{Coq}\alpha. d\alpha = \int \frac{d[\beta(\alpha)]}{d\alpha} d\alpha. \rightarrow \int d[\beta(\alpha)] =$ $\beta(\alpha) = \mathbf{Bex}\alpha$	$\int \frac{s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon) - s^2}{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)} d\alpha = \int \frac{s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{1 - s^2 \sin^2(\alpha - \varepsilon)} d\alpha =$ $\beta(\alpha) = \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} = \alpha + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)} = \mathbf{Bex}\alpha$
$\int \mathbf{Coq}_c\alpha. d = \int \frac{d[\beta_c(\alpha)]}{d\alpha} d\alpha. \rightarrow \int d[\beta_c(\alpha)] = \beta_c(\alpha) =$ $= \mathbf{Bex}_c\alpha$	$\int \frac{s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon) - s^2}{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)} d\alpha = \int \frac{s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{1 - s^2 \sin^2(\alpha - \varepsilon)} d\alpha =$ $\theta_c(\alpha) = \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} = \alpha + \arctan \frac{s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)} = \mathbf{Bex}_c\alpha$
$\int \mathbf{Dex}\alpha. d\alpha = \int \frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} d\alpha = \theta(\alpha) = \mathbf{Aex}\alpha$	$\int \frac{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)} d\alpha = \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}}$ $= \alpha + \arctan \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)} = \mathbf{Aex}\alpha.$
$\int \mathbf{Dex}\alpha d\alpha = n \int \frac{d\theta}{d\alpha} d\alpha = \theta(\alpha) = \mathbf{Aex}\alpha$	$-\int \frac{s(1 - s^2) \sin \alpha}{\text{Rex}^4 \alpha} d\alpha = \frac{1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)} = \mathbf{Dex}\alpha$
$\int \text{Sin}[\mathbf{Bex}\alpha] d\alpha = \mathbf{Rex}\alpha$	$\int \frac{d\alpha}{du} d\alpha = \int \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} d\alpha = \sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)} = \mathbf{Rex}\alpha$
$\int -\mathbf{Dex}\alpha. \mathbf{Sex}\alpha = \mathbf{Cex}\alpha$	$-\int \frac{\sin \theta [1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)]}{[1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)]^{\frac{3}{2}}} d\alpha = \mathbf{Cex}\alpha$
$\int \mathbf{Dex}\alpha. \mathbf{Cex}\alpha = \mathbf{Sex}\alpha$	$\int \frac{(\cos \alpha - s)[1 - s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)]}{\text{Rex}^3 \alpha} d\alpha = \mathbf{Sex}\alpha$
$\int \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - s} d\alpha = \int \mathbf{Tex}\alpha d\alpha = -\text{Log}[\cos \alpha - s]$	$\int \frac{1 - s \cdot \cos \alpha}{(\cos \alpha - s)^2} d\alpha = \frac{d(\mathbf{Tex}\alpha)}{d\alpha} = \mathbf{Tex}\alpha$
$\int \frac{\sin \alpha}{\text{Abs}[\cos \alpha - s]} d\alpha = ?$ (Deocamdată)	$\int \frac{(\cos \theta + \sin^2 \theta)}{\text{Abs}[\cos \theta - s]} d\alpha = \int \frac{d(\mathbf{Tex}\alpha)}{d\alpha} d\alpha = \mathbf{Tex}\alpha$

Dacă derivatele oricărei **FSM-CE** nu ridică probleme insurmontabile, nu același lucru se poate spune despre integrarea lor. În tabelele anterioare, așa cum se poate observa, au fost prezentate doar integralele derivatelor unor **FSM-CE** și nu integralele lor. Chiar și integrarea celei mai simple **FSM-CE** ridică probleme.

Astfel, dacă **FSM-CE beta excentrică** de variabilă excentrică θ , componenta și a **FSM-CE aex** θ ,

(1) $\text{bex}\theta \equiv \beta(\theta) = \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]$; $\text{aex}\theta \equiv \alpha(\theta) = \theta - \beta(\theta) = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]$
cu graficele din **figura 24.1,a** și **figura 24.3** se poate deriva fără probleme (**Fig.24.4**), ca oricare altă **FSM-CE**, integrarea ei directă, nedefinită, sub forma (1) nu poate fi, deocamdată, realizată, păstrându-se încă necunoscută.

De aceea, este necesar să se apeleze la “divide și stăpânește”, adică la dezvoltarea expresiei lui **bex** θ în serie de puteri și, apoi, integrarea termen cu termen.

Funcția supermatematică circulară excentrică (FSM-CE) beta excentrică, de variabilă excentrică θ , poate fi integrată doar prin dezvoltarea ei în următoarea serie de puteri

$$(2) \quad \arcsin z = z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{z^7}{7} + \dots = \sum_0^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n (2n+1)} z^{2n+1} = \sum_0^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} z^{(2n+1)}$$

și are graficele din **figura 24.1,a** cu 4 termeni și în **figura 24.1,b** cu 5 și cu 6 termeni.

Prin înlocuirea lui z din **arcsinz** cu

$$(3) \quad z = s \cdot \sin(\theta - \varepsilon), \quad s \leq 1$$

expresia (1) devine

$$(4) \quad \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)] = \sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!}{2n!!} [s.\sin(\theta - \varepsilon)]^{(2n+1)} =$$

$$= s.\sin(\theta - \varepsilon) + \frac{1}{2} \frac{[s.\sin(\theta - \varepsilon)]^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{[s.\sin(\theta - \varepsilon)]^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{[s.\sin(\theta - \varepsilon)]^7}{7} + \dots =$$

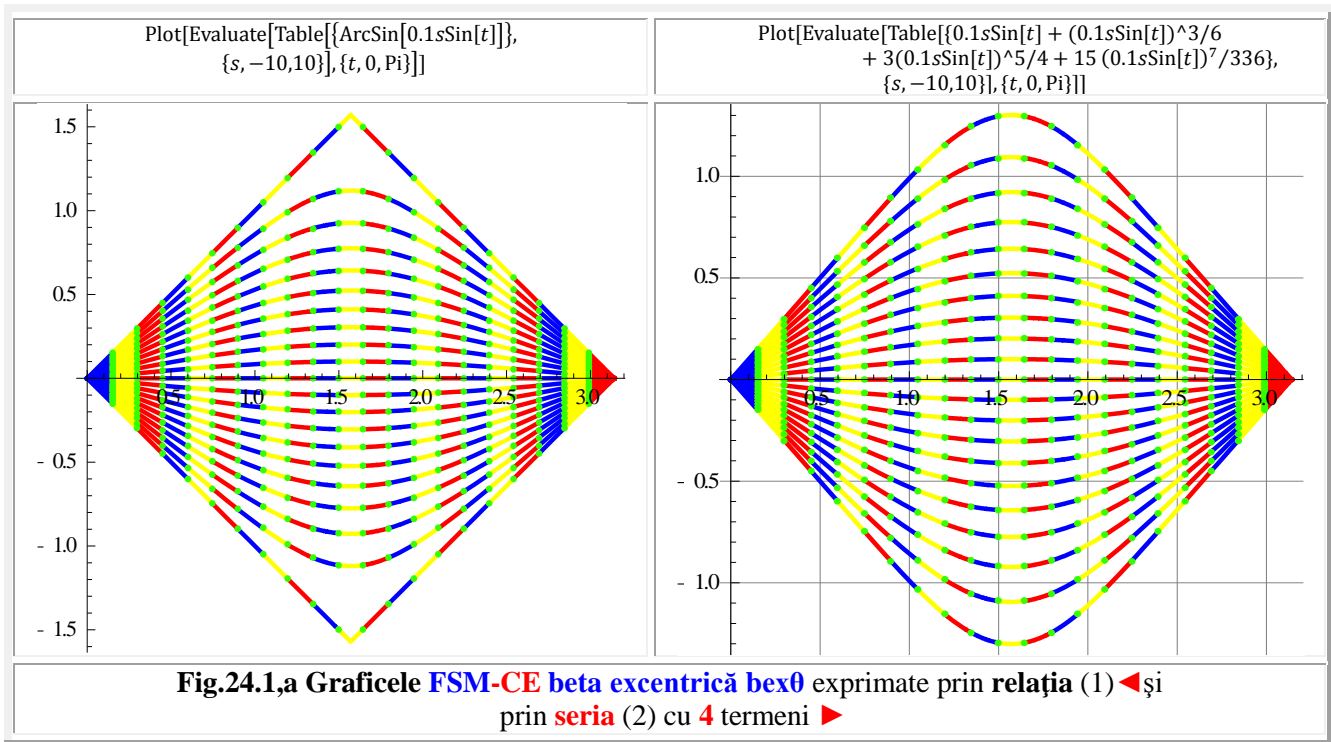
$$= \sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!}{2n!!} [s.\sin(\theta - \varepsilon)]^{(2n+1)}$$

Ca urmare, integrala nedefinită a **FSM-CE θ** este

$$(5) \quad \int b \exp \theta . d \theta = \int \sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!}{2n!!} [s.\sin(\theta - \varepsilon)]^{(2n+1)} d \theta =$$

$$= - \sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!}{2n!!} s \frac{\cos(\theta - \varepsilon)}{2n+1} \left\{ \sin^{2n} \theta + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1} n(n-1)(n-2) \dots (n-k) \cos^{2n-2k} \theta}{(2n-1)(2n-3) \dots (2n-2k-1)} \right\} =$$

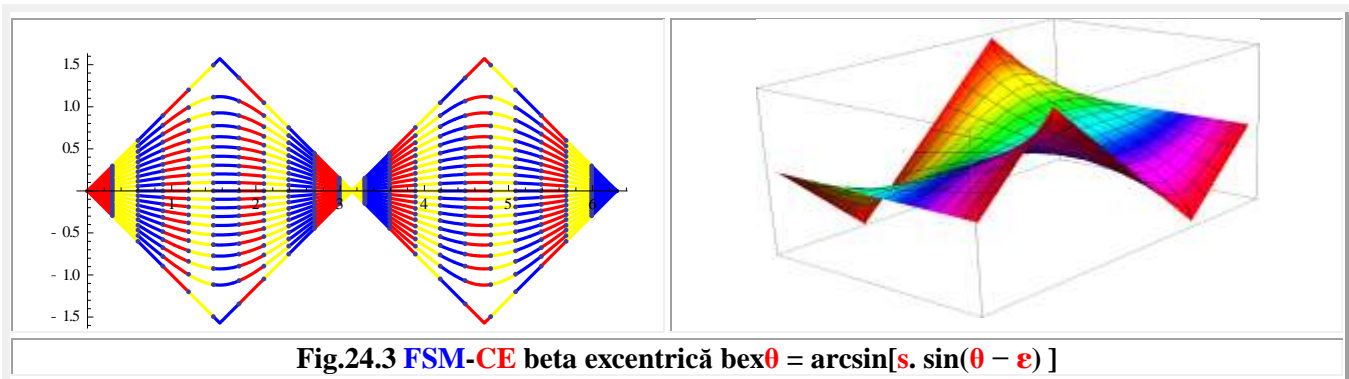
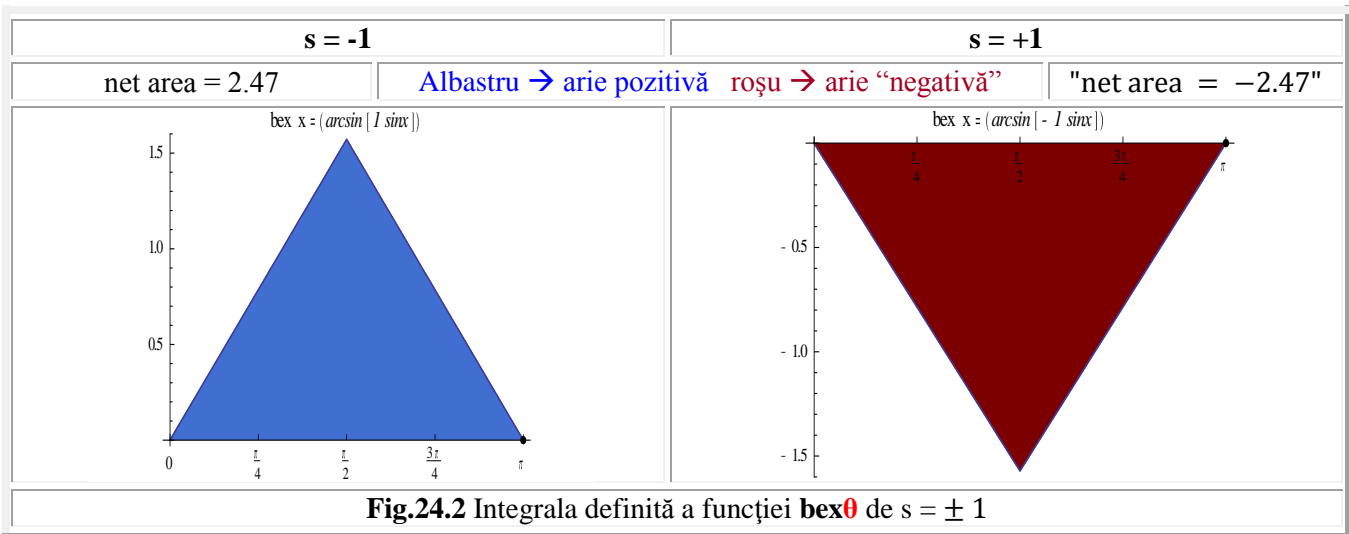
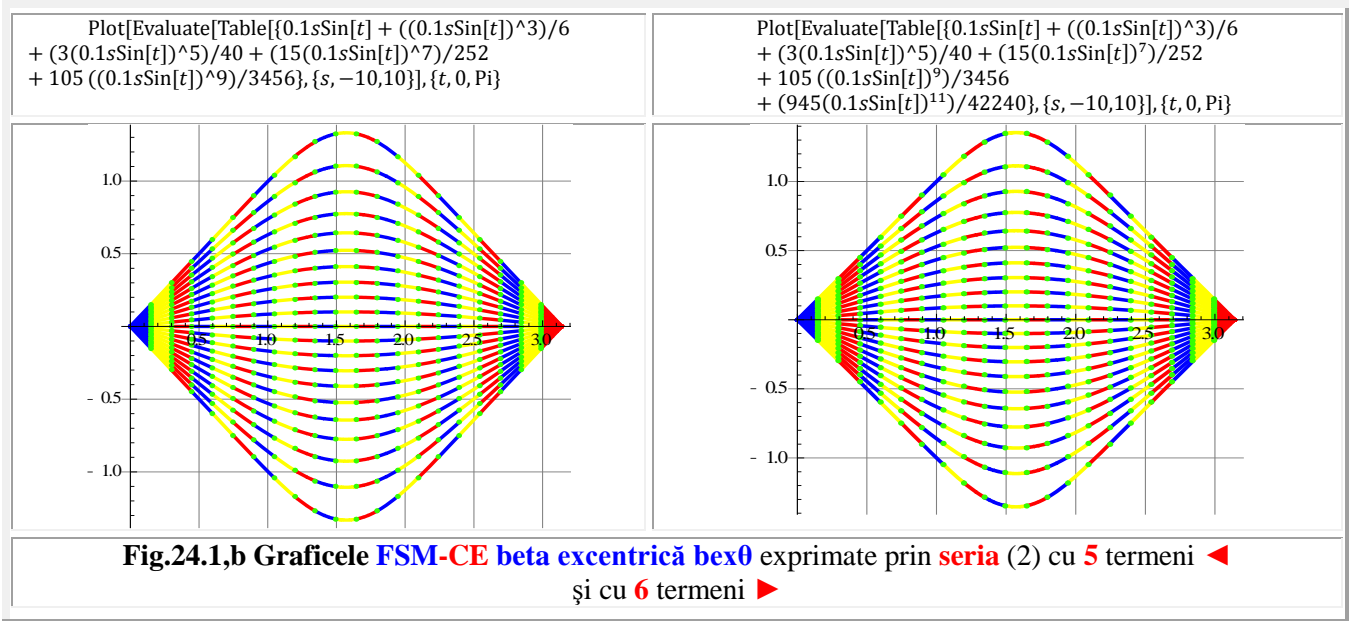
$$= \sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left\{ -s . \text{Cos}[t] . \text{Hypergeometric2F1} \left[\frac{1}{2}, -n, \frac{3}{2}, \cos^2 \theta \right] \sin^{2n} \theta (\sin^2 \theta)^{-n} \right\}.$$

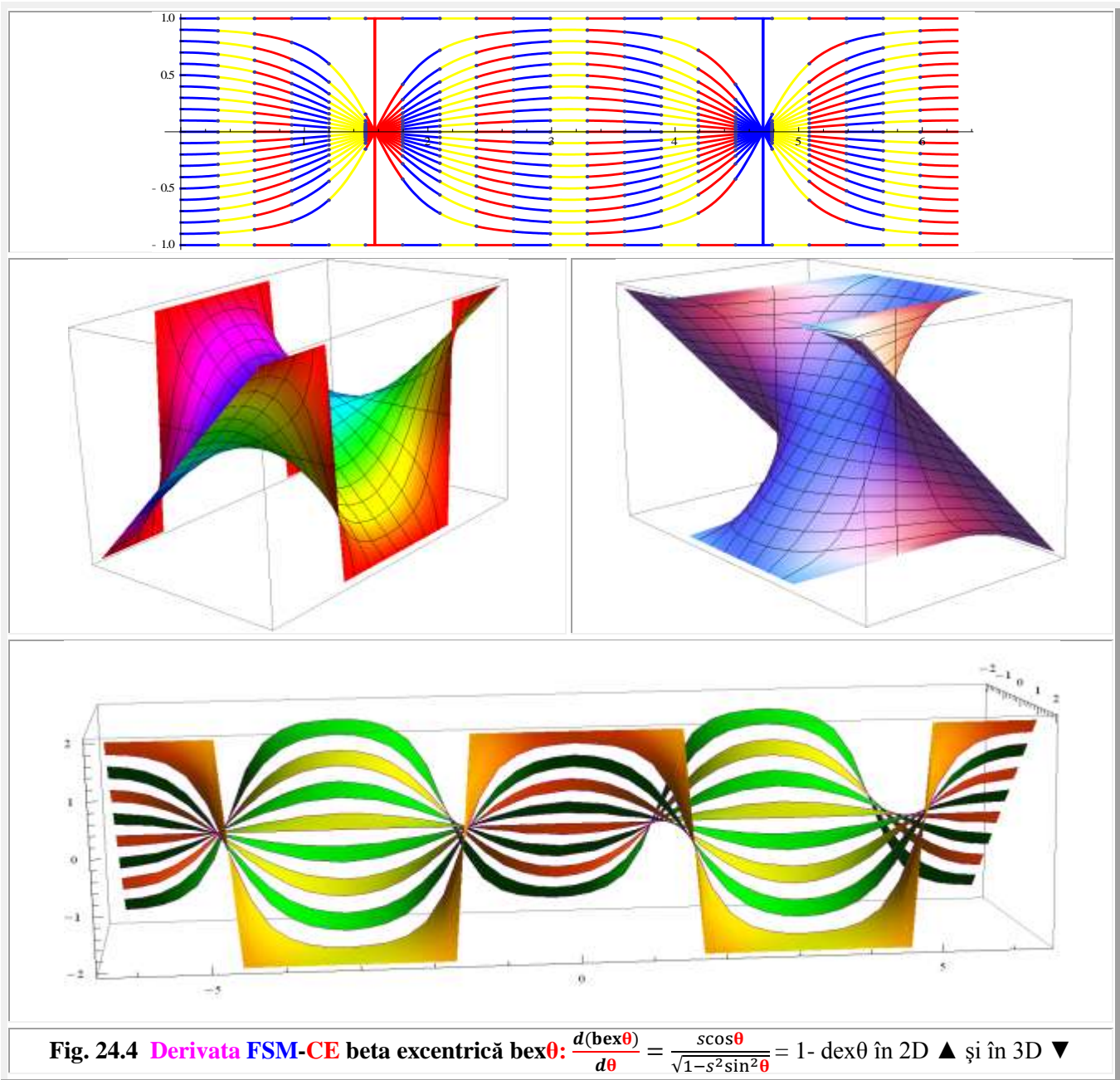


Și, așa cum se poate observa, expresia integralei nu este deloc simplă, decât pentru cei ce operează frecvent cu **funcții hipergeometrice**. Pentru noi, ceilalți, am extras câteva informații din lucrarea **Rîjik I. M. și Gradștein I. S.** “Tabele de INTEGRALE, SUME, SERII ȘI PRODUSE” Ed. Tehnică 1955, pag 415, sau din lucrarea lui **Milton Abramowitz și Irene A. Stegun** “HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS WITH FORMULAS, GRAPHS AND MATHEMATICAL TEBELES” Ed. NATIONAL BUREAU OF STANDARDS APPLIED MATHEMATICS SERIES -55, 1964, pag.370. În prima lucrare, seria este notată cu $F(a, b; c; z)$, în lucrarea următoare este notată cu $F(\alpha, \beta; \gamma, z)$ și are expresia

$$(6) \quad F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z) = F(b, a; c; z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}.$$

Din **figurile 24.1,a și 24.1b** rezultă că numărul termenilor dezvoltărilor în serie, în acest caz, au o influență apropiată nulă asupra graficelor funcțiilor **beta excentrice bex0**.





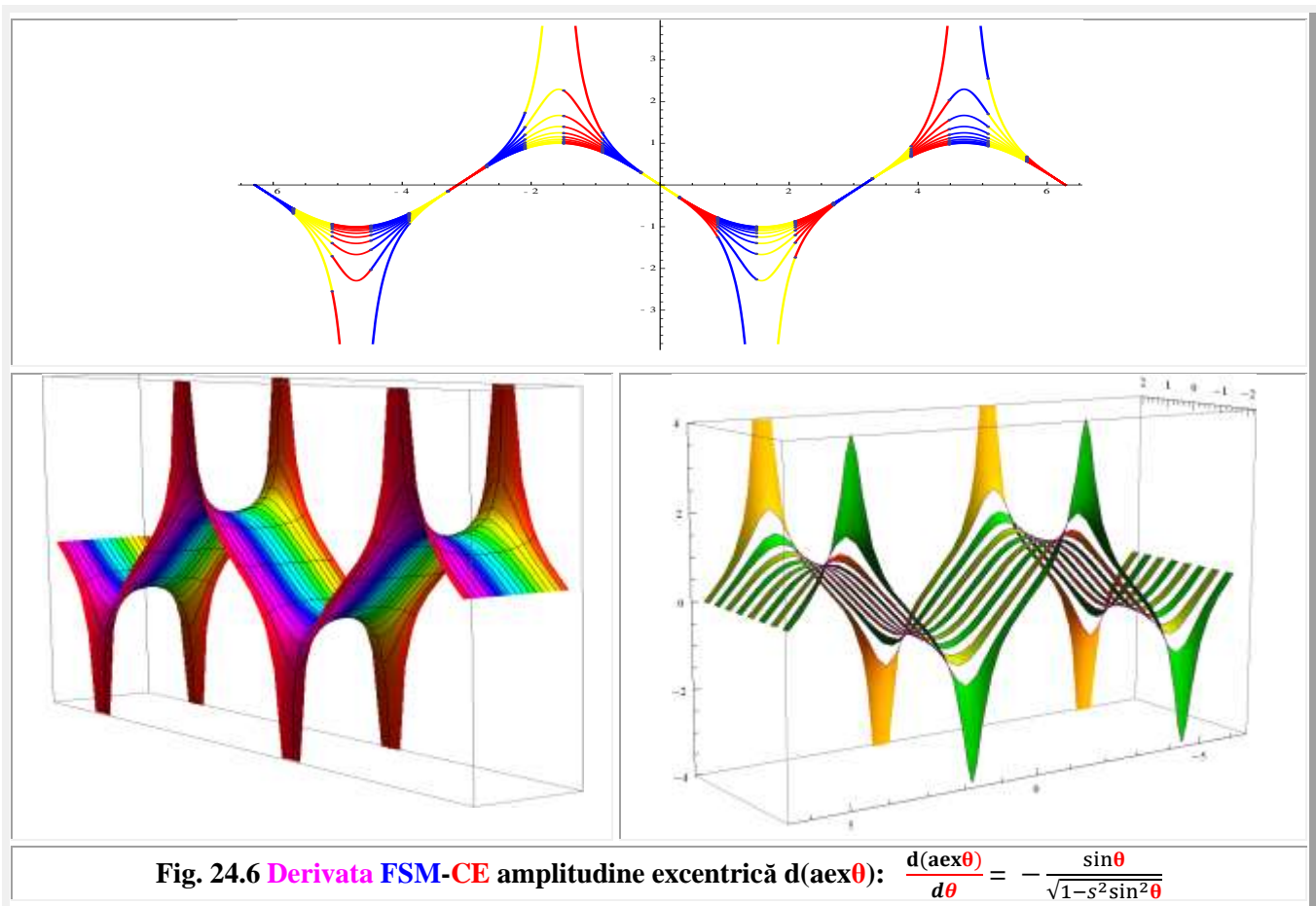
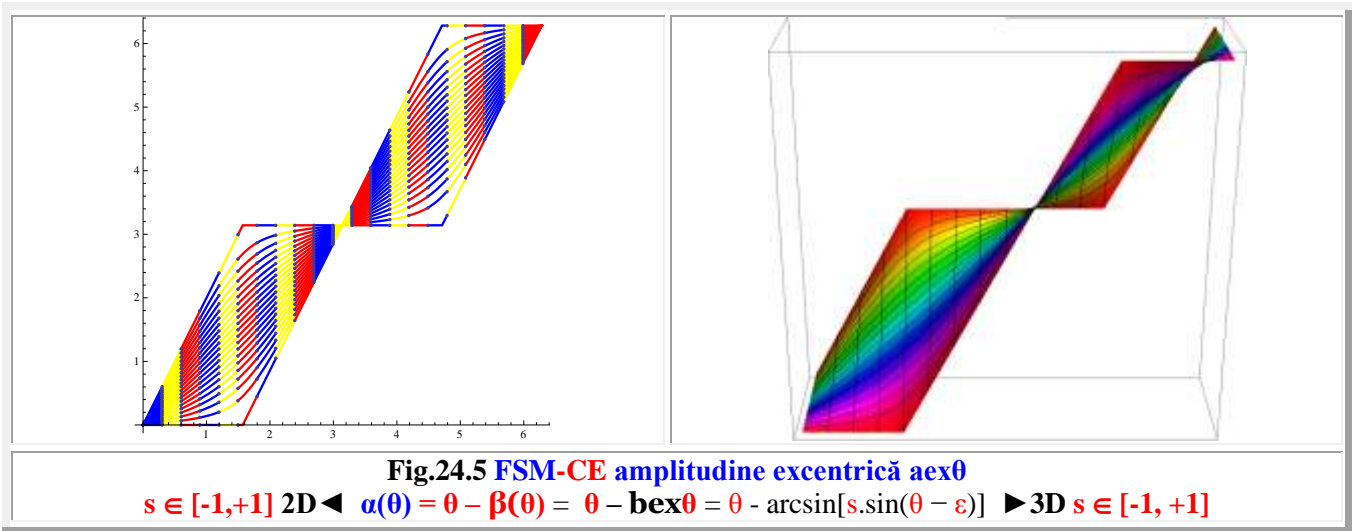
Deși funcția **bexθ** este inclusă în expresiile funcțiilor aex, cex, sex ș.m.a, care pot fi integrate fără dificultate, cu ajutorul unor programe performante de matematică, cum este **Mathematica 9** a lui **Stephan Wolfram**, **bexθ** nu poate fi integrată nedefinit direct. În schimb poate fi integrată definit

La comanda de integrare nedefinită și, respectiv, definită

`Integrate[ArcSin[0.8Sin[x]], x]`, `Integrate[ArcSin[0.8Sin[x]], {x, 0, Pi}]`

răspunsul este

$$\int \text{ArcSin}[0.8\text{Sin}[x]] dx, \text{ respectiv } \int_0^{\pi} \text{ArcSin}[0.8\text{Sin}[x]] dx.$$



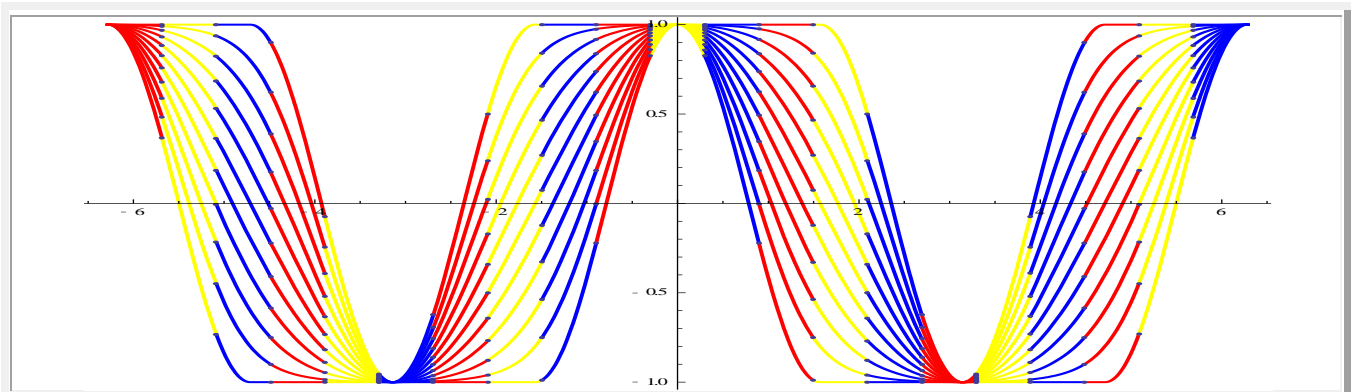


Fig.24.7,a Funcția supermatematică cosinus excentric de cex θ

$$cex_{1,2}\theta = \cos[\text{aex}\theta] = \cos[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] = s \cdot \sin \theta \cdot \sin(\theta - \varepsilon) \pm \cos \theta \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}$$

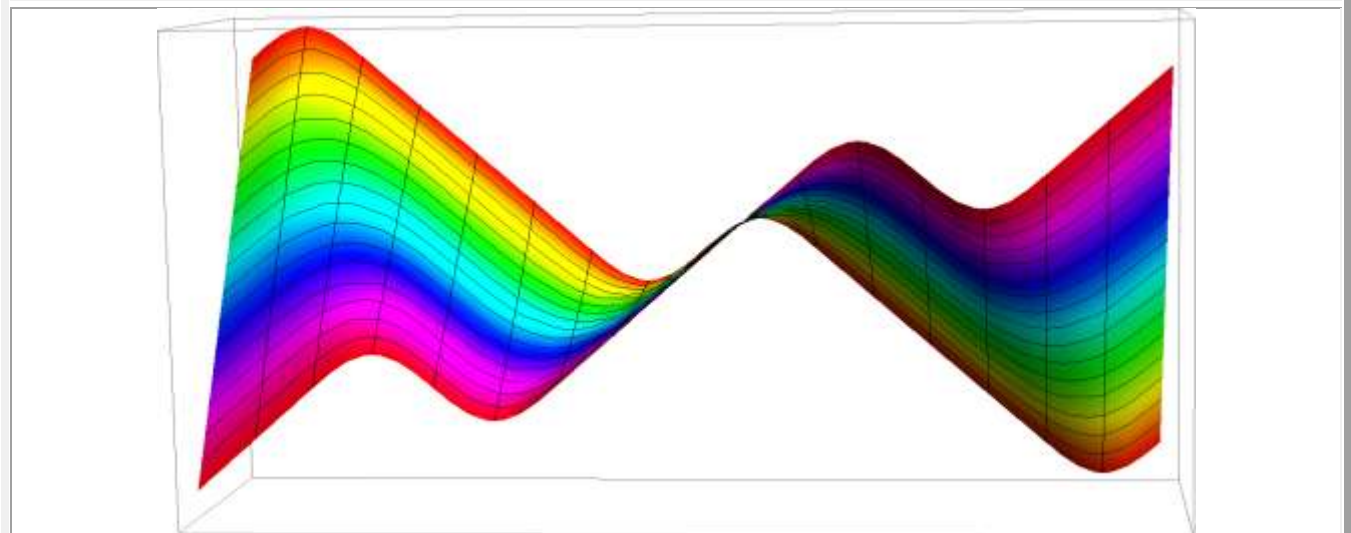
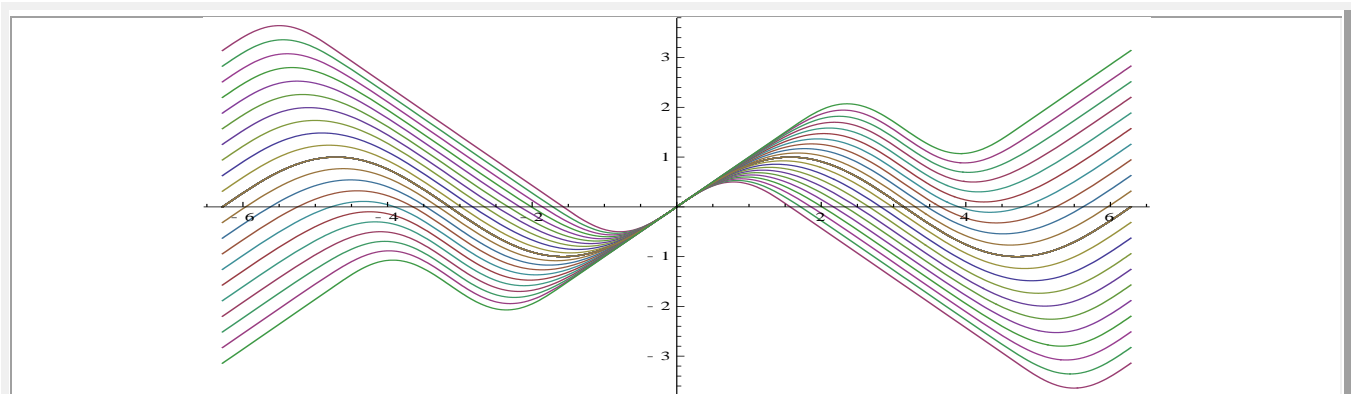


Fig.24.7,b INTEGRALELE funcțiilor supermatematică cosinus excentric de cex θ

$$I = \int cex\theta \cdot d\theta = \int \cos[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] d\theta, \theta \in [-2\pi, +2\pi]; \mathbf{S}(s \in [-1,1], \varepsilon = 0)$$

$$I = \frac{1}{4} [s \cdot \cos(2x) - 2\cos x \sqrt{1 - s^2 \sin^2 x} + \frac{2(s^2 - 1) \log[\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2 - s^2 \sin^2 x}]}{\sqrt{s^2}}]$$

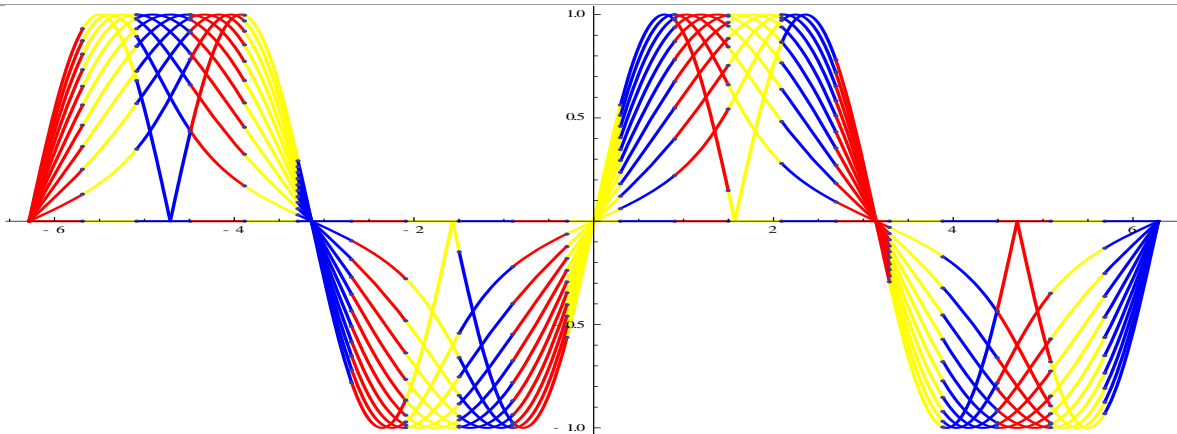


Fig.24.8,a Funcția supermatematică sinus excentric de θ

$$sex_{1,2}\theta = \sin[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] = -s \cdot \cos \theta \cdot \sin(\theta - \varepsilon) \pm \sin \theta \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}$$

Datorită simetriei curbelor / graficelor lui $\mathbf{bex}\theta$, față de $\theta = \pi$, este de netăgăduit că integrarea definită în domeniul $0 \dots 2\pi$, pentru toate valorile lui $s \in [-1, +1]$, este nulă. Singura valoare a excentricității numerice s , pentru care programele de matematică pot integra funcția $\mathbf{bex}\theta$ este $s = \mp 1$ (Fig.24.2) și, evident, $s = 0$, când funcția este nulă peste tot și aria este și ea, evident, nulă.

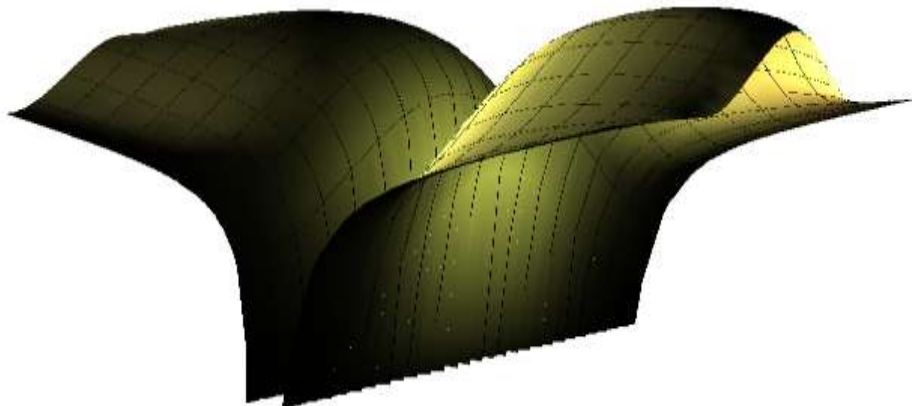
Tot ceea ce s-a scris / spus despre FSM-CE $\mathbf{bex}\theta$ este valabil și pentru FSM-CE $\mathbf{aex}\theta$, cu graficele din figura 24.5 și derivatele sale din figura 24.6. Adică, programele existente (comerciale) de matematică nu pot integra aceste funcții, în schimb pot integra funcțiile care sunt funcții de aceste funcții, precum $\cos[\mathbf{aex}\theta] = \cos[\theta - \mathbf{bex}\theta] = \mathbf{cex}\theta$, $\sin[\mathbf{aex}\theta] = \sin[\theta - \mathbf{bex}\theta] = \mathbf{sex}\theta$ ș.m.a.

Funcția SM – CE cosinus excentrică, de variabilă excentrică θ și integralele ei sunt prezentate în figura 7,a și, respectiv, figura 24.7,b, în 2D și în 3D.

Familia FSM-CE $\mathbf{sex}\theta = \sin[\mathbf{aex}\theta] = \sin[\theta - \arcsin[s \sin[\theta - \varepsilon]]]$ sunt prezentate în figura 24.8,a, iar integralele lor sunt prezentate în figura 24.8 b în 2D și în 3D cu ecuațiile și graficele lor.

$$s \in [-1, 0],$$

$$s \in [0, +1],$$



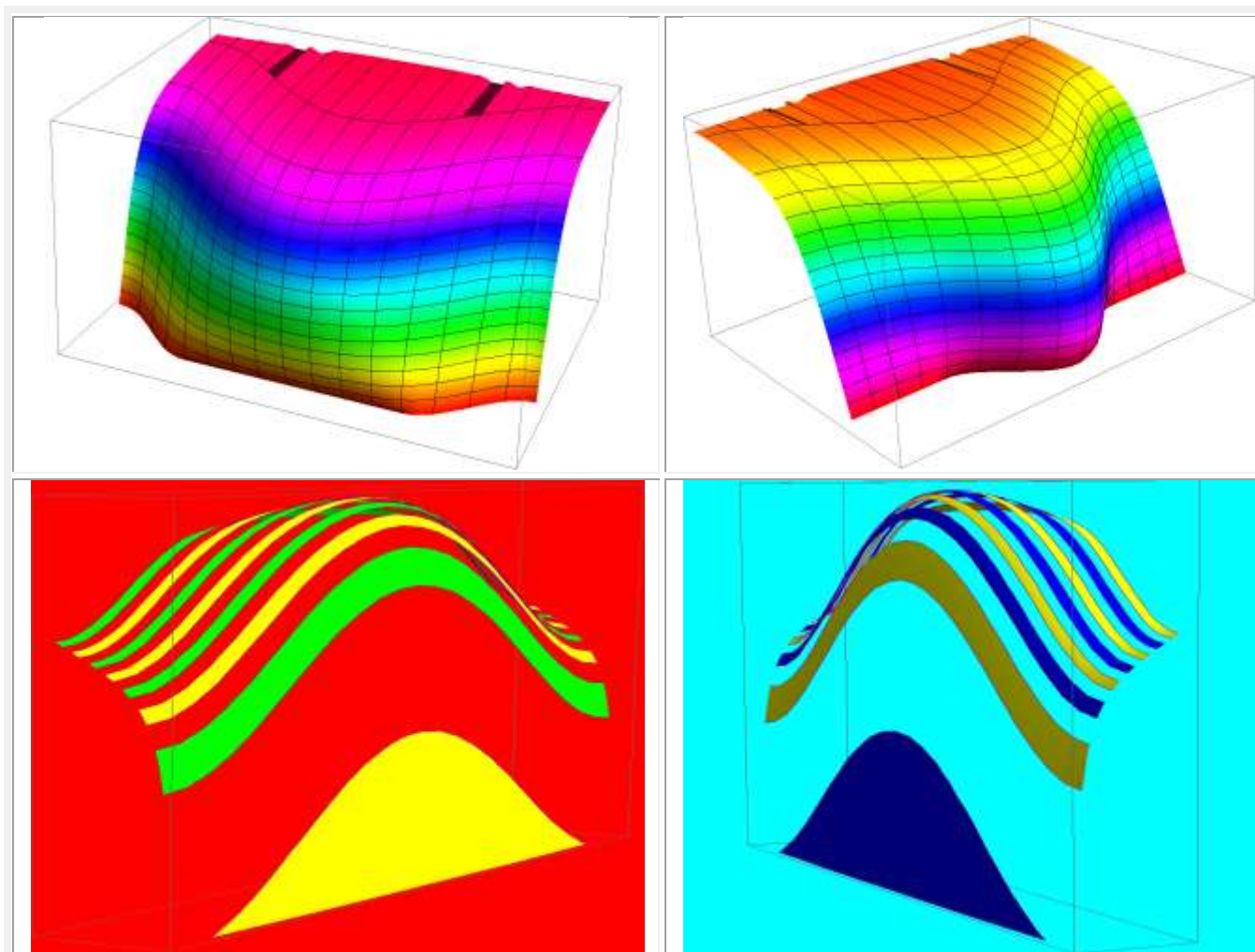


Fig.24.8,b INTEGRALELE funcțiilor supermatematică sinus excentric $\text{sex } \theta$

$$I = \int \text{sex } \theta . d\theta = \int \sin [\theta - \arcsin [s . \sin(\theta - \varepsilon)]] . d\theta, \theta \in [-2\pi, +2\pi ; \mathbf{S}(s \in [-1,1], \varepsilon = 0)$$

$$= \frac{1}{4} (\text{s} \cos[2x] - 2 \cos x \sqrt{1 - s^2 \sin^2 x} + \frac{2(-1+s)(1+s) \text{Log}[\sqrt{2} \sqrt{s^2} \cos[x] + \sqrt{2-s^2 \sin^2 x}]}{\sqrt{s^2}})$$

Motto: „Oamenii se tem de gândurile originale mai mult decât de orice altceva, mai mult decât de ruină, mai mult decât de moarte.”

Bertrand Russel

Capitolul 25

FUNCTII SUPERMATEMATICE **bex**, **Bex** ȘI **aex**, **Aex** CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE (FSM-CEI)

25.1 REMEMBAR : FUNCTII CIRCULARE CENTRICE INVERSE

O funcție $f: X \rightarrow Y$ este **inversabilă** sau **biunivocă** dacă există o funcție $g: Y \rightarrow X$, astfel încât $f \circ g = 1Y$ și $g \circ f = 1X$, în care $1M: M \rightarrow M$, $1M(x) = x$, oricare ar fi x din M , se numește **aplicația identică** a mulțimii M . În cazul în care $X = Y$, are loc egalitatea $f \circ g = g \circ f = 1X$.

Mulțimea funcțiilor monotone, crescătoare și descrescătoare, este conținută în mulțimea funcțiilor inversabile. O funcție monotonă este inversabilă, pe când o funcție inversabilă nu este neapărat monotonă.

Dacă există g , ca inversă a funcției directe f , atunci are loc echivalența

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y),$$

în care x parcurge domeniul de definiție X al funcției f , iar y , imaginea lui x prin funcția f , parcurge domeniul de definiție Y al funcției g sau codomeniul funcției f .

Fie funcția $f: X \rightarrow Y$, bijectivă. Inversa unei aplicații bijective este din nou bijectivă.

Funcția $g: Y \rightarrow X$, care asociază fiecărui element din y din Y elementul unic x din X , astfel încât $f(y) = x$, se numește funcție inversă a funcției f și se poate nota cu $g = f^{-1}$.

Funcția **directă** f care are ca inversă funcția $f^{-1} = g$, (funcția **inversă** a lui f) se zice că este inversabilă.

Funcția directă $y = x$, care reprezintă ecuația primei bisectoare, are drept funcție inversă funcția $x = y$. Ca urmare, prima bisectoare este, în același timp, și funcție directă și funcție inversă.

Toate funcțiile inverse au graficele ca simetrice ale funcțiilor directe față de prima bisectoare.

Se notează cu **Arcsinx** mulțimea **tuturor arcelor** a căror sinus este egal cu x și cu **arcsinx**, **arccosx**, **arctanx** etc. **determinările principale ale inverselelor** funcțiilor **sinx**, **cosx**, **tanx**, etc.

OBSERVAȚIE :

Notățiile determinărilor principale ale funcțiilor inverse, cele monogene sau univoce, sunt uneori invers notate în alte culturi decât în cea matematică românească.

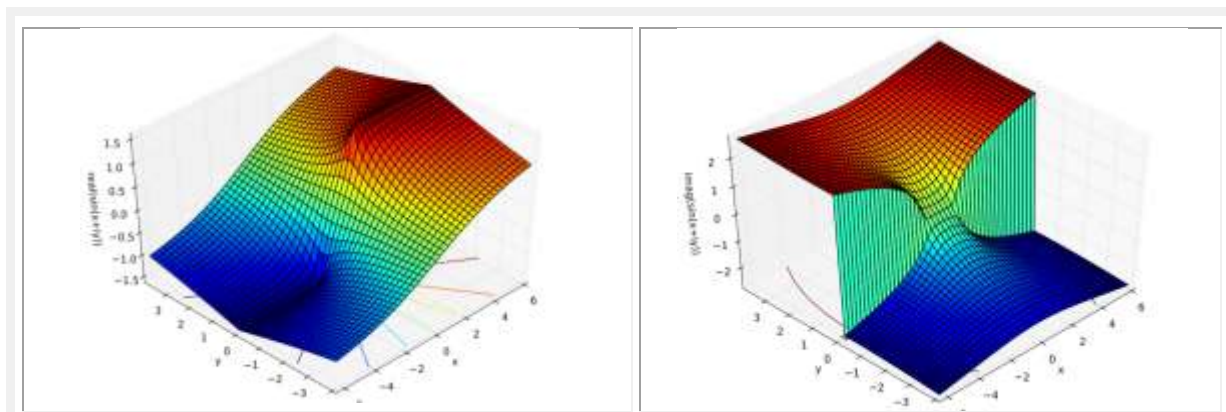
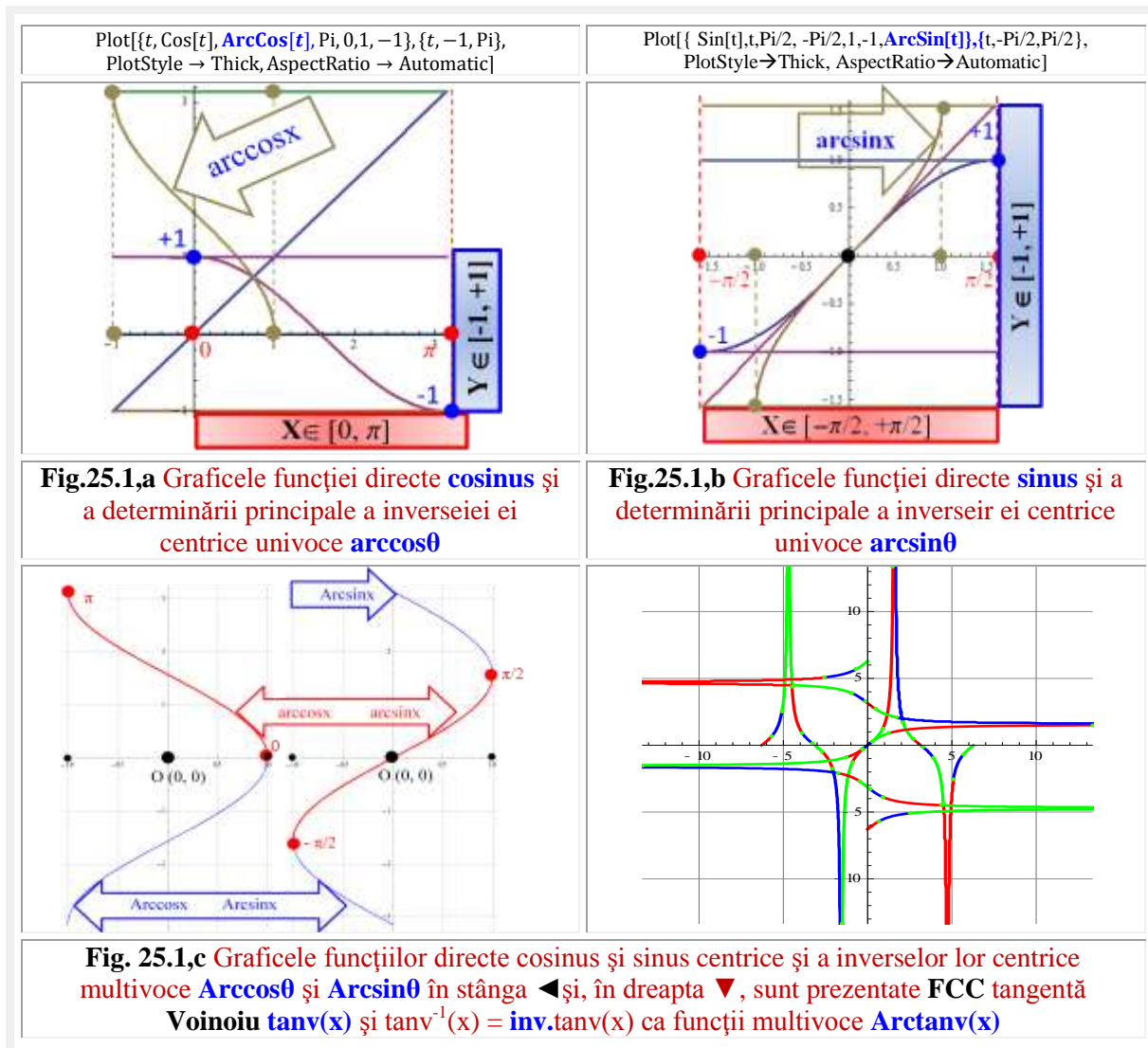
Astfel, în continuare, se vor nota numai cu **arc** **determinările principale** ale funcțiilor inverse, cele uniforme sau univoce și cu **Arc** funcții inverse multiforme sau multivoce din domeniul matematicii centrice (MC), atât cele de arc simplu cât și cele de arc multiplu sau multivoce.

$$\text{Astfel, } \text{Arccosz} = 2k\pi \pm \text{arccosz} \quad \text{și} \quad \text{Arcsinz} = \begin{cases} 2k\pi + \text{arcsinz} \\ (2k+1)\pi - \text{arcsinz} \end{cases},$$

cu notațiile recomandate în **Nicolescu, L.J.** și **Stoka M.I.** “**MATEMATICI PENTRU INGINERI**”, Ed. Tehnică, 1969, pag. 130-131.

Aceste notații **convenționale** sunt **inverse** celor din unele scrieri de specialitate din literatura germană, cum este **KLEINE ENZYKLOPÄDIE MATHEMATIK**, VEB Verlag Enzyklopädie, Leipzig, 1968, pag. 279, ca și a celei din literatura engleză, “**MATHEMATICS AT A GLANCE**” după cari a fost tradusă lucrarea “**MICĂ ENCICLOPEDIIE MATEMATICĂ**”, Ed. Tehnică, Buc. 1980, pag. 279. Dacă nu cumva în **figura 10.1.20** explicativă, din această lucrare, s-a strecurat o greșală, deoarece acolo notațiile sunt inverse decât cele din **figura noastră 25.1,c** stânga ◀.

Funcția circulară / trigonometrică directă **centrică cosinus**, restricționată la intervalul $X \in [0, \pi]$, adică $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$, $f(x) = y = \cos x$ este inversabilă și admite ca **inversă**, notată **arccos** (arccosinus), pe $g = f^{-1} : [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$, $g = f^{-1}(y) = x = \text{arccos } y$, cu graficul din figura 25.1,a și inversele **arccosx** și **arcsinx** în figura 25.2, iar în dreapta ► **coq θ** și **arccoq θ** , precum și funcțiile cvadrilobe **siq θ** și **arcsi $q\theta$** . Inversabilă și admite ca **inversă**, notată **Arcsinus**, pe $g = f^{-1} : [-1, +1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, $g = f^{-1}(y) = x = \text{Arcsin } y$, cu graficul din figura 25.1,c dreapta ►.



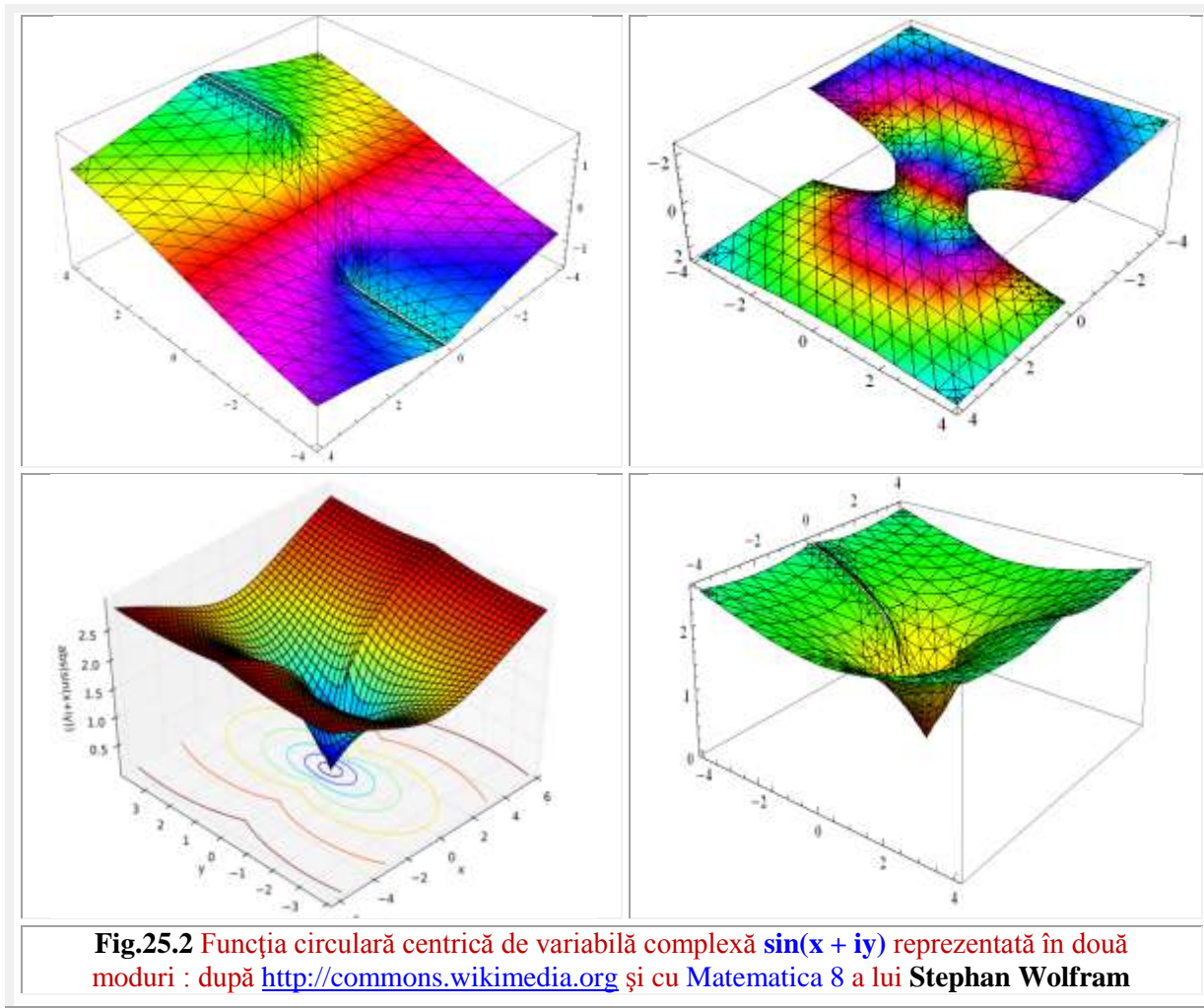


Fig.25.2 Funcția circulară centrică de variabilă complexă $\sin(x + iy)$ reprezentată în două moduri : după <http://commons.wikimedia.org> și cu Matematica 8 a lui Stephan Wolfram

Oricare funcție poate fi de variabilă reală sau de variabilă complexă $z = x + i.y$, care au și ele inversele lor, evident, tot de variabilă complexă.

25.2 INTRODUCERE.

Denumirea de **arcfuncție** ($\arccos x$, $\arcsin x$, $\text{Arctan} x$, $\text{Arccot} x$ etc.) provine din limba latină. *Arcus cuius sinus x est* înseamnă **arcul al cărui sinus este egal cu x**.

Deoarece funcțiile trigonometrice / circulare directe sunt funcții de arc, din însăși denumirea funcției **Arc / arc** rezultă că ea este inversa funcției directe.

Ca urmare, ecuațiile parametrice ale funcției directe **sinx** sunt

$$(1) \quad \begin{cases} x = x \\ y = \sin x \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{sinx}, \quad \mathbf{sin t = z}$$

iar a inversei ei, **arcsin x**, pentru $x \in [0, \pi]$ și $\text{Arcsin} x$ pe toată axa reala x este

$$(2) \quad \begin{cases} x = \sin x \\ y = x \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{arcsinx = \sin^{-1}x}, \quad \mathbf{t = \text{Arcsin} z = (-1)^k \arcsin z + k\pi.}$$

$$(2') \quad \mathbf{\text{Arcsin} z = -i \cdot \text{Arcsh} iz}$$

Pe cât de simplu se pot obține graficele funcțiilor inverse, în coordonate parametrice, pe atât de complicat se pot obține expresiile lor analitice, deoarece este necesar să se rezolve unele ecuații algebrice neliniare. Pentru a căror soluționare printr-o metodă exactă, numerică (!), extrem de simplă și rapidă vă recomandăm **“Metoda determinării succesive a cifrelor consecutive ale unui număr”** soluție din **“MATEMATICA ATOMICA”** www.cartiaz.ro, dar numai pentru soluții numerice.

Astfel, dacă expresia funcției directe $\sin x$ este

(3) $y(x) = \sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + \dots$ și nu este chiar simplă !
 Pentru determinarea expresiei funcției inverse, este necesar să se rezolve ecuația neliniară

(4) $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + \dots - y = 0 \quad \rightarrow \quad x(y) = ?$

Soluția ei este, după cum se știe

(5) $x(y) = \arcsin y = y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 + \dots \quad |y| < \frac{\pi}{2}$

Dar soluția poate fi dată și în serii hipergeometrice astfel

(6) $\arcsin z = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz = \int_0^x {}_1F_0\left(\frac{1}{2};; z^2\right) dz = z {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) \Big|_0^x = x {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)$

în care seria ${}_1F_0 = {}_1F_0(a;; z) = (1-z)^{-a} = \frac{1}{(1-z)^a}$ a cărei ecuație diferențială este $\frac{d}{dz}w = (z \frac{d}{dz})w$ sau

$(1-z) \frac{dw}{dz} = aw$ și a cărei soluție este $w = k(1-z)^{-a}$ este un caz particular al seriilor hipergeometrice.

Se mai știe că o legătura între funcția inversă **Arcsin** și logaritmul natural **ln** este

(6') $\text{Arcsin } x = -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2})$.

În privința determinării analitice a inversei unei funcții există și excepții, adică funcții a căror inverse se determină imediat.

O astfel de funcție este **FSM-CE beta excentrică** sau $\beta(\theta) = \text{bex}\theta$, de variabilă excentrică θ , una din cele mai importante **funcții supermatematice**, a cărei expresie este

(7) $y(\theta) = \beta(\theta) = \theta - \alpha(\theta) = \text{bex}\theta = \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]$

astfel că rezolvarea ecuației

(8) $y(\theta) - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] = 0$, sau $y(\theta) = \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]$

este simplă. Scriind

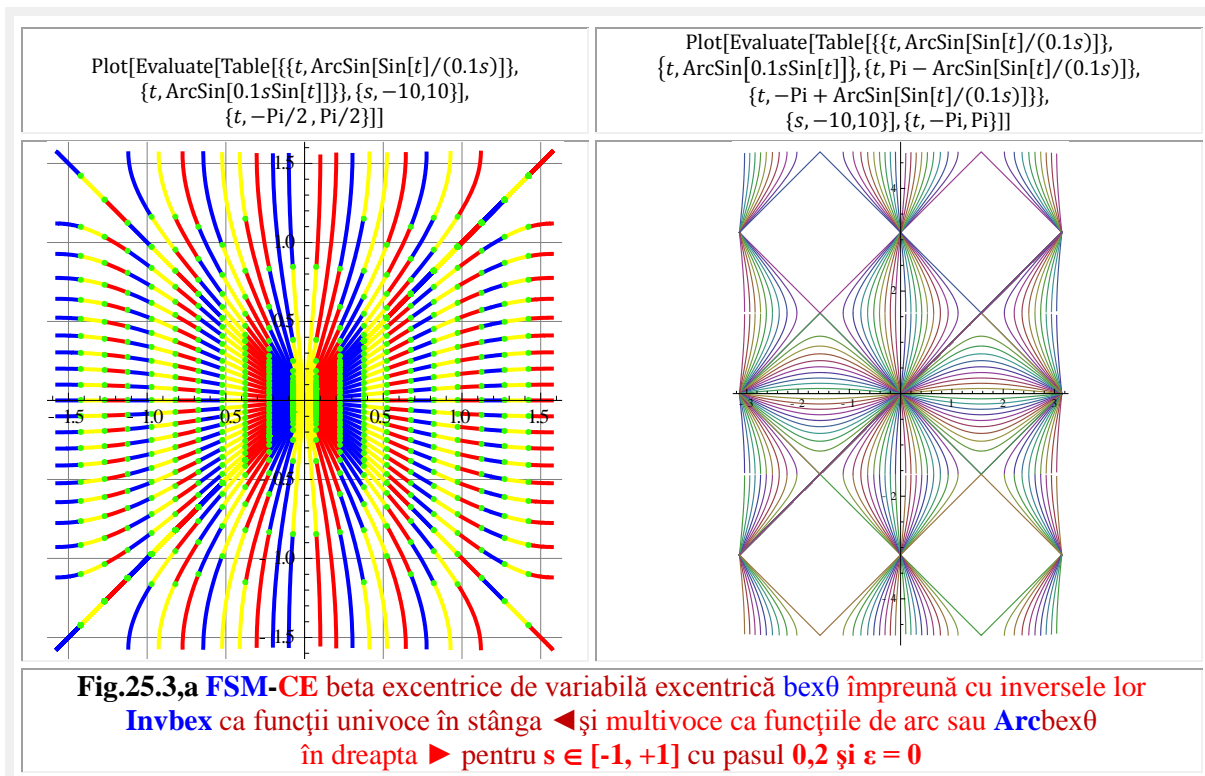
(9) $\sin y(\theta) = \sin\{\arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]\} \rightarrow \sin y(\theta) = s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)$

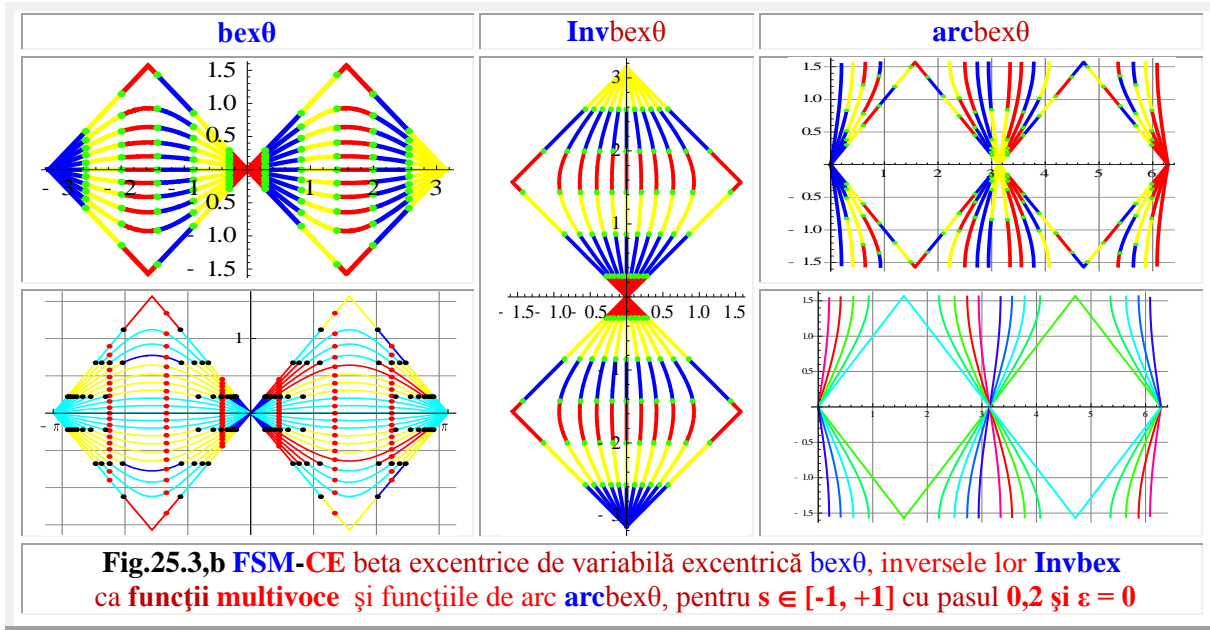
(10) $(\theta - \varepsilon) = \arcsin \frac{\sin y}{s} \rightarrow \theta(y) = \arcsin \frac{\sin y}{s} + \varepsilon$,

care este inversa lui $\text{bex}\theta$, adică

(11) $\text{invbex}\theta = \text{bex}^{(-1)}\theta = \arcsin \frac{\sin y}{s} + \varepsilon = \text{Arcbex}\theta = \text{arcbex} \neq \text{arc}(\text{bex}\theta) =$

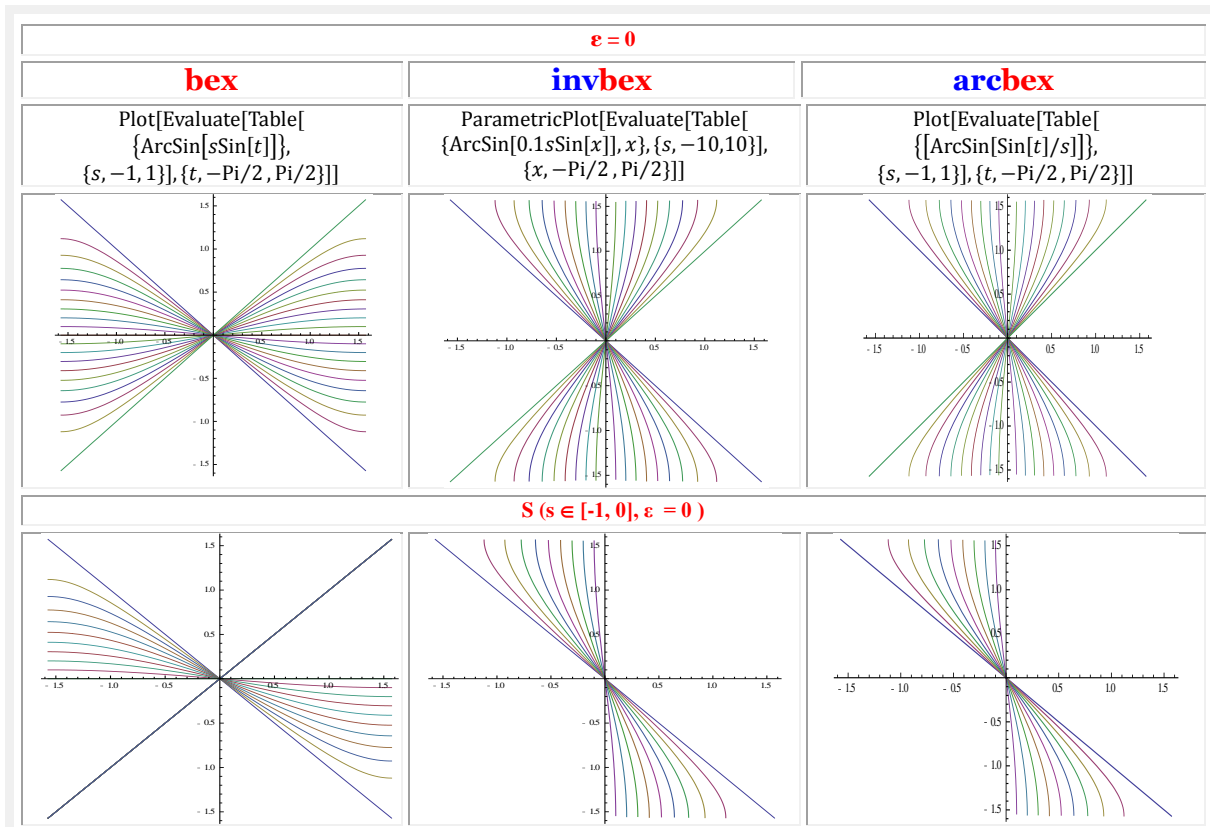
$= \text{arc}[\arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]]$, (dacă **funcțiile clasice de arc** $\text{Arcbex}\theta$ și arcbex ar fi cunoscute, altele decât (10), dar nu sunt), ceea ce poate fi verificat în **figura 25.3,a** și **25.3,b**.

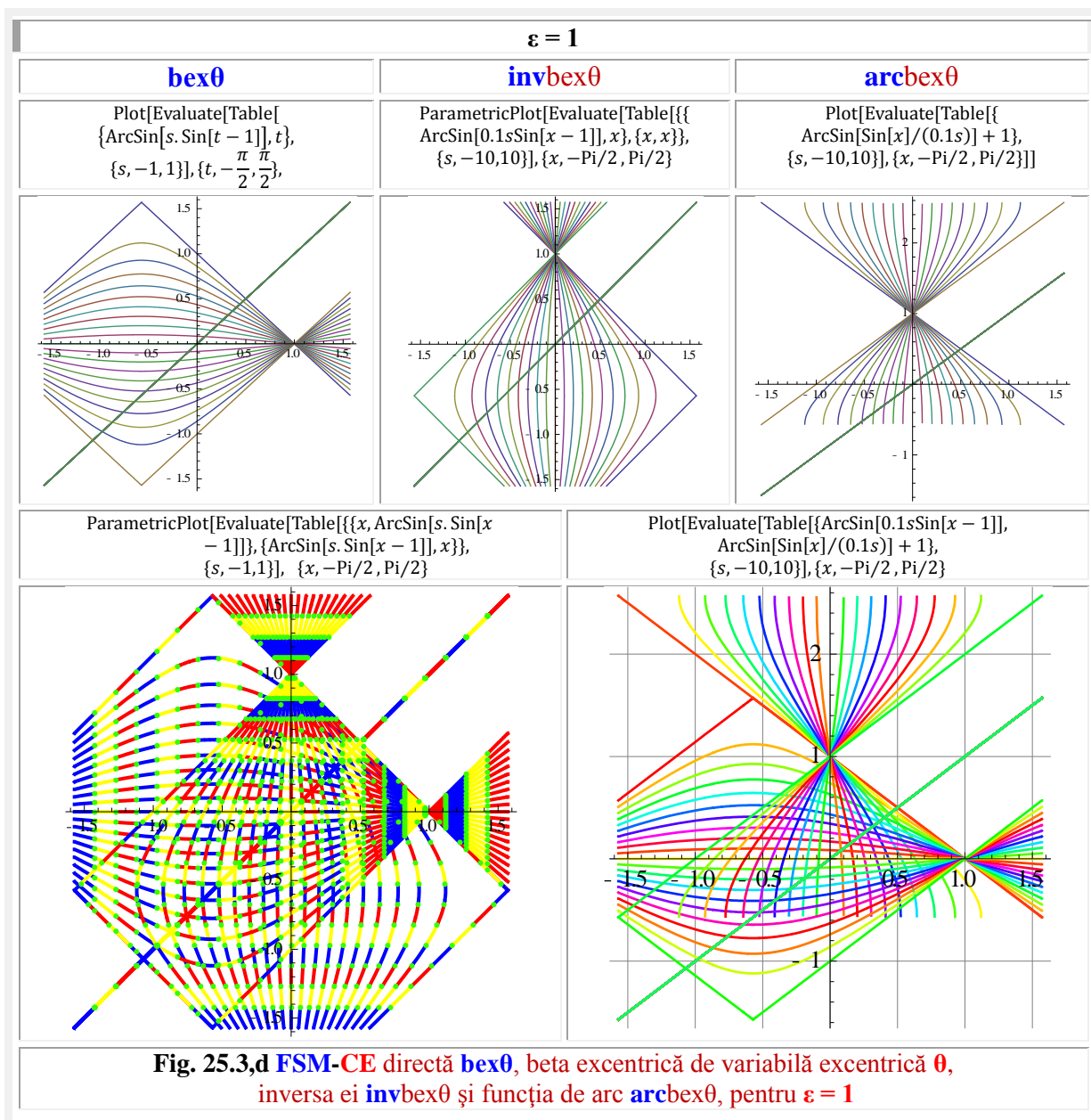
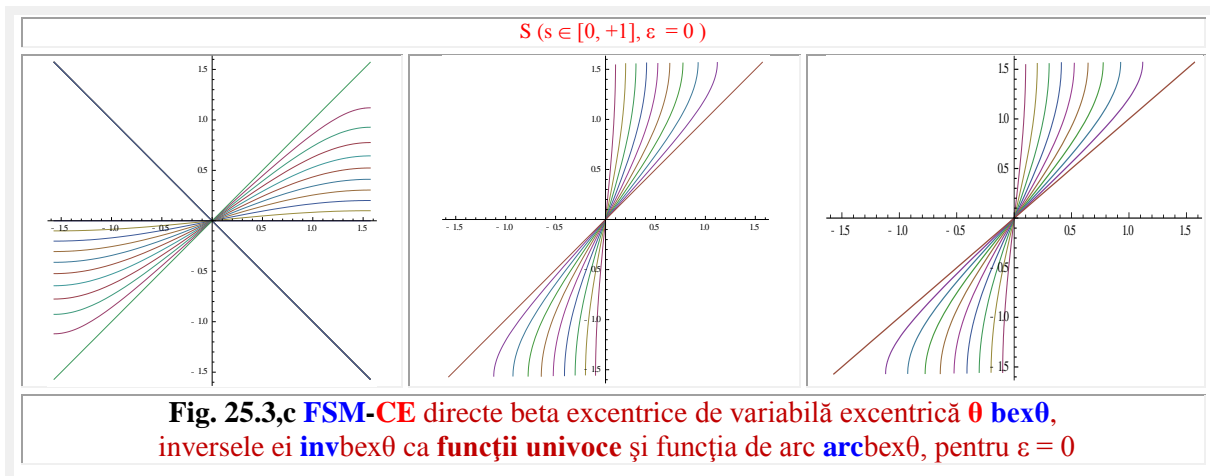




De ce trebuie notată inversa lui $bex\theta$ cu **inv** sau **Inv** și nu cu **arc** sau **Arc** ?

Pentru că $arc bex\theta \neq inv bex\theta$ ca și $Arc bex\theta \neq Inv bex\theta$ așa cum se poate observa din graficele din figura 25.3,a. Notațiile cu majuscule (**Inv** și **Arc**) corespund funcțiilor inverse multivoce, ca cele reprezentate în figura 25.3,a► și 25.3,b, iar cele univoce, notate **inv** și **arc**, în figurile 25.3,c și 25.3,d, din figurile 1,c. Se observă facil că, inversele sunt simetrice funcțiilor, ceea ce corespunde definiției de inversă, iar arcul nu mai respectă această cerință, deoarece funcția **arc** se calculează cu o serie în care, pentru cazul lui $bex\theta$ se înlocuiește variabila $x \equiv \theta$ cu funcția $\beta(\theta) = \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]$ în care $\rightarrow S(s, \varepsilon)$ este un excentru în planul cercului unitate.





În figura 25.3,c au fost reprezentate FSM-CE beta excentrice **bex** ◀ în stânga, precum și inversele ei **invbex** ▶ în centru, iar funcțiile **arcbex** în extrema dreaptă ▶ numai ca **funcții univoce**, în domeniul $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

În această figură au fost reprezentate funcțiile pentru un excentru **S** plasat pe axa Ox, adică de excentricitate unghiulară nulă ($\varepsilon = 0$) și de excentricitate liniară numerică **s** în domeniul $s \in [-1, 1]$ sus ▲, $s \in [-1, 0]$ la mijloc — și $s \in [0, 1]$ jos ▼.

FSM-CE beta excentrice **bex** a fost reprezentată pentru a se putea verifica / compara cu inversa ei și cu cea de arc.

Situația este asemănătoare și în domeniul complex: FSM-CE beta excentrice de variabilă complexă

(12) **bex** ($x + i.y$) = arcsin[s.sin($x + i.y$)]

care are funcția inversă

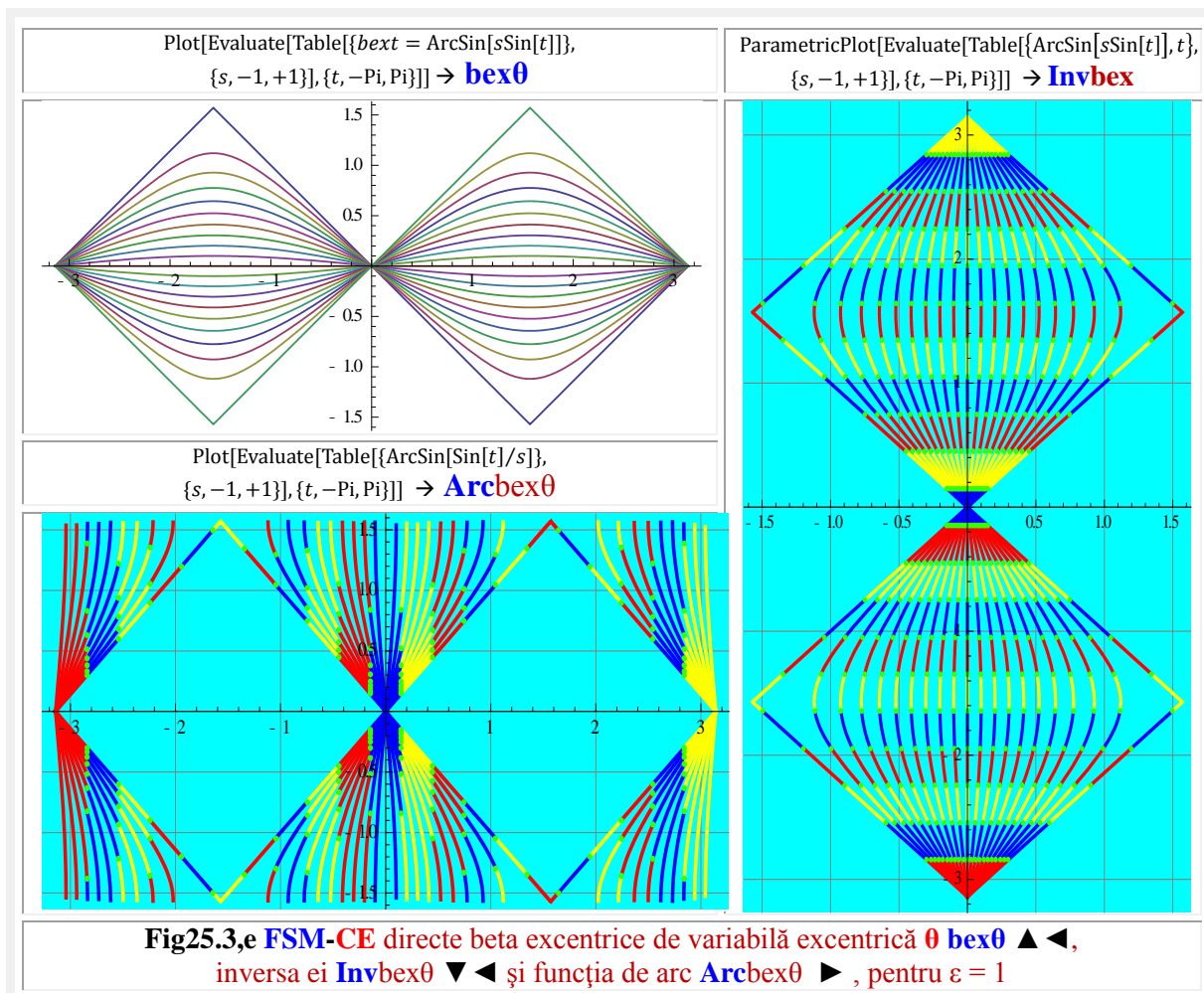
(13) $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{bex}(x + i.y) \\ (x + i.y) \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{invbex}(x + i.y) = \mathbf{bex}^{-1}(x + i.y) = \mathbf{arcbex}(x + i.y) = \arcsin\left(\frac{\sin(x + i.y)}{s} + \varepsilon\right)$

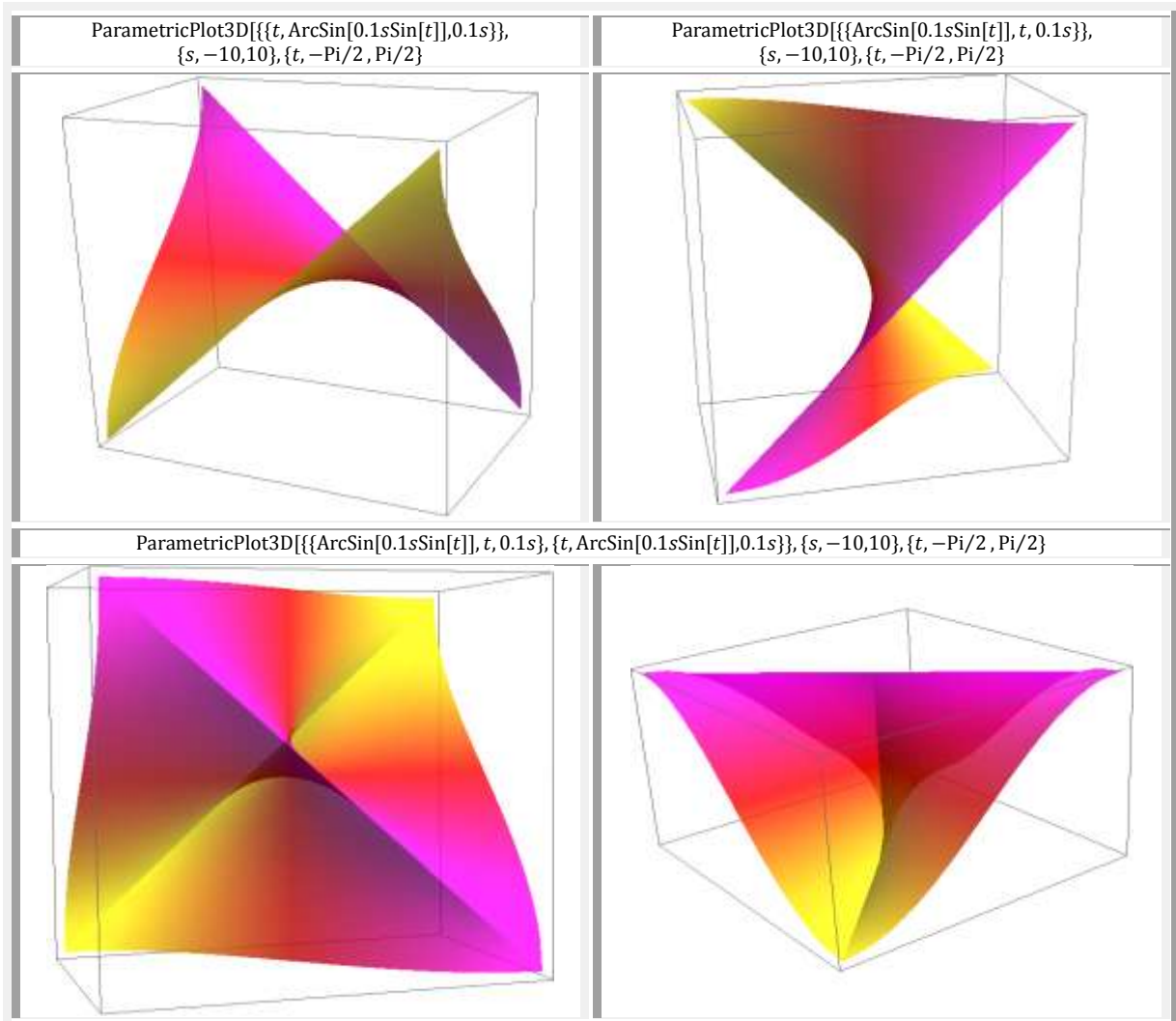
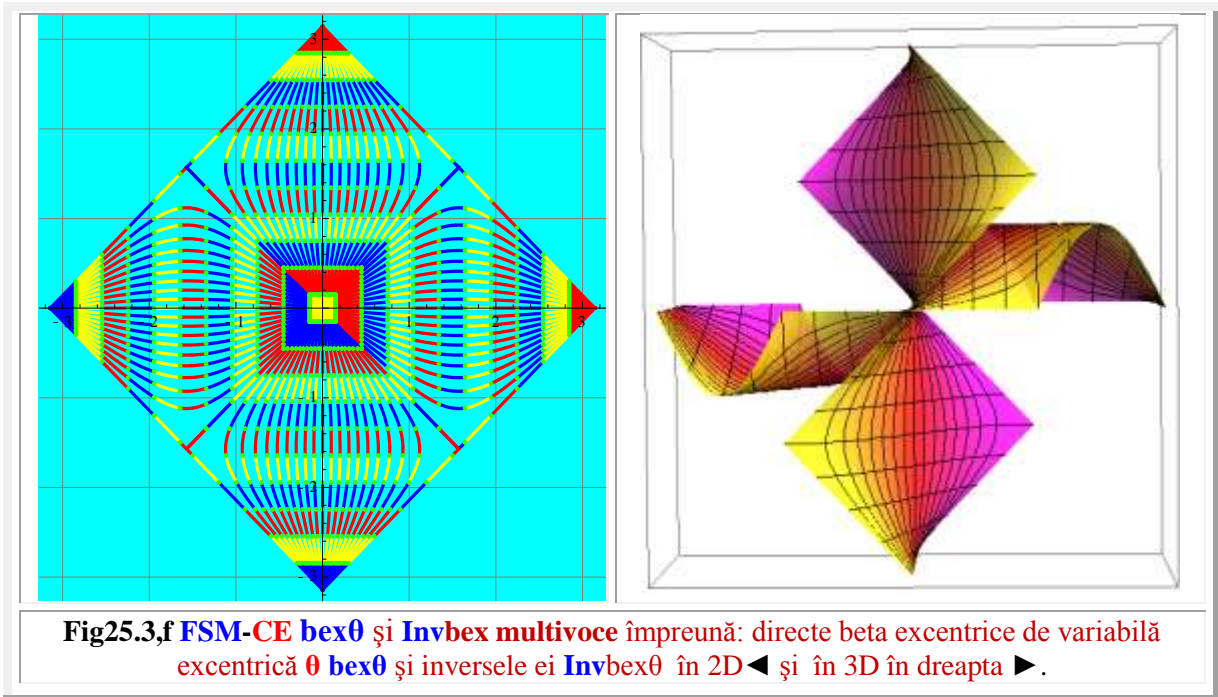
reprezentate în figura 25.3,b și a căror inverse clasice (funcții de arc clasice) sunt necunoscute

(14) **invbex**($x + i.y$) = arcsin $\frac{\sin(x+i.y)}{s}$

Pentru $\sin x$, de exemplu, din domeniul / intervalul $x \in [-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}]$, rezultă codomeniul lui $y = \sin x \in [-1 + 1]$, iar pentru $y = \arcsin x$, inversa lui $\sin x$, rezultă domeniul de definiție $x \in [-1, +1]$ și codomeniul funcției inverse $y = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}]$ (Fig.25.4,b).

Mai rezultă, totodată, că funcțiile directă și inversă sunt simetrice față de prima bisectoare și, în consecință, sunt inverse una alteia (Fig.25.3,f).





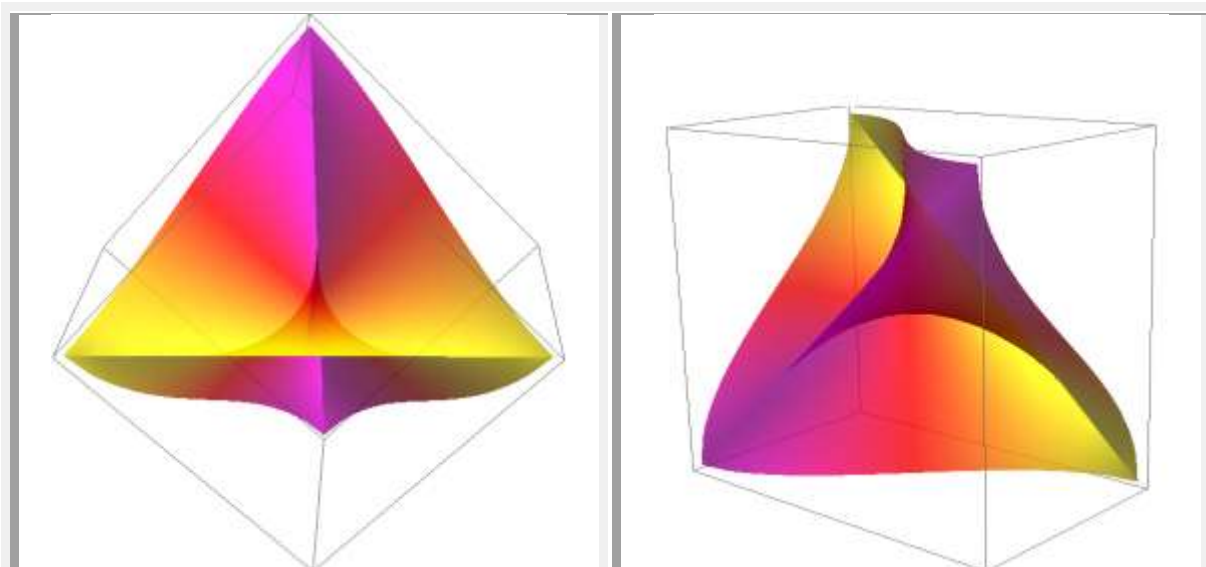
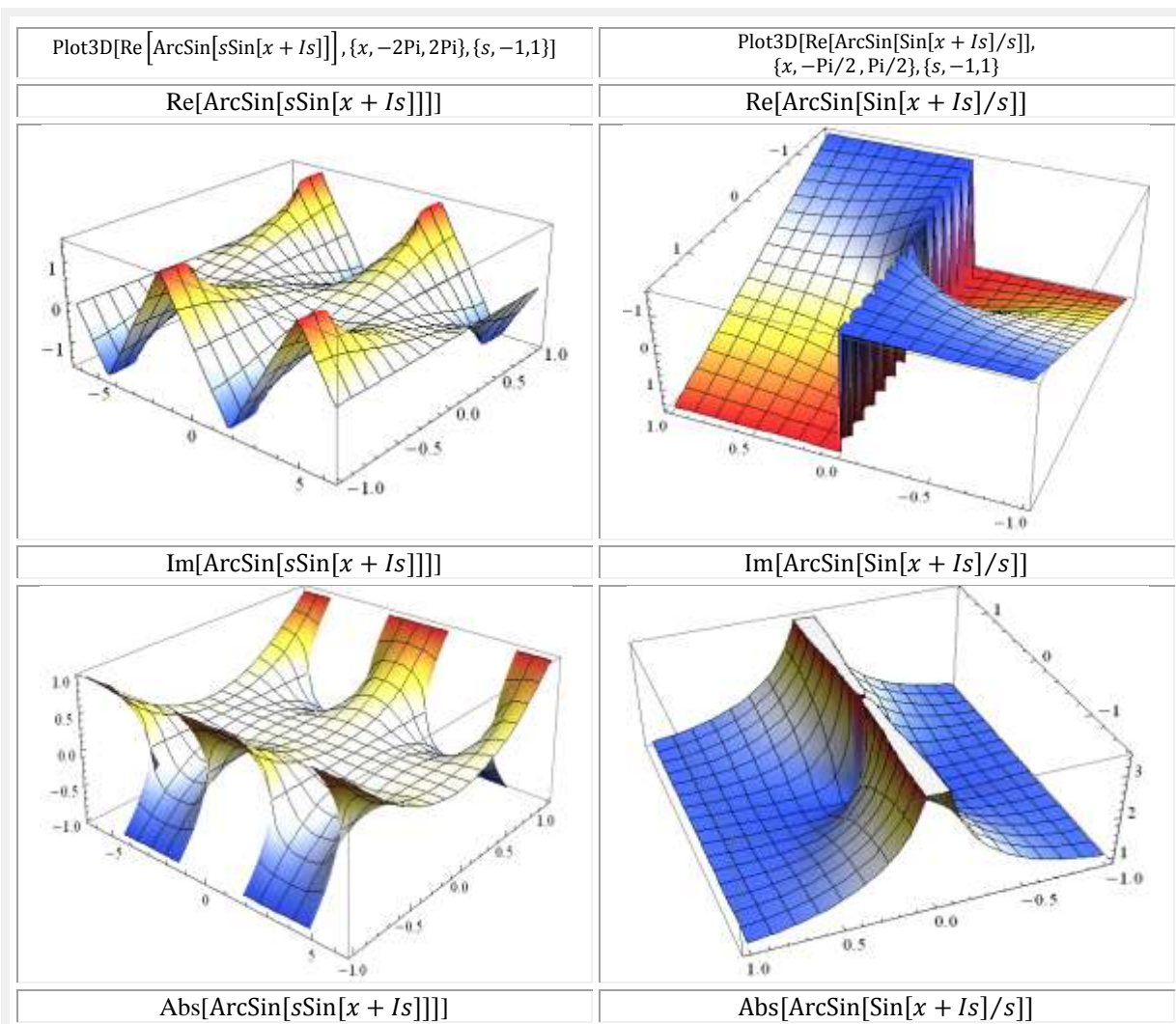
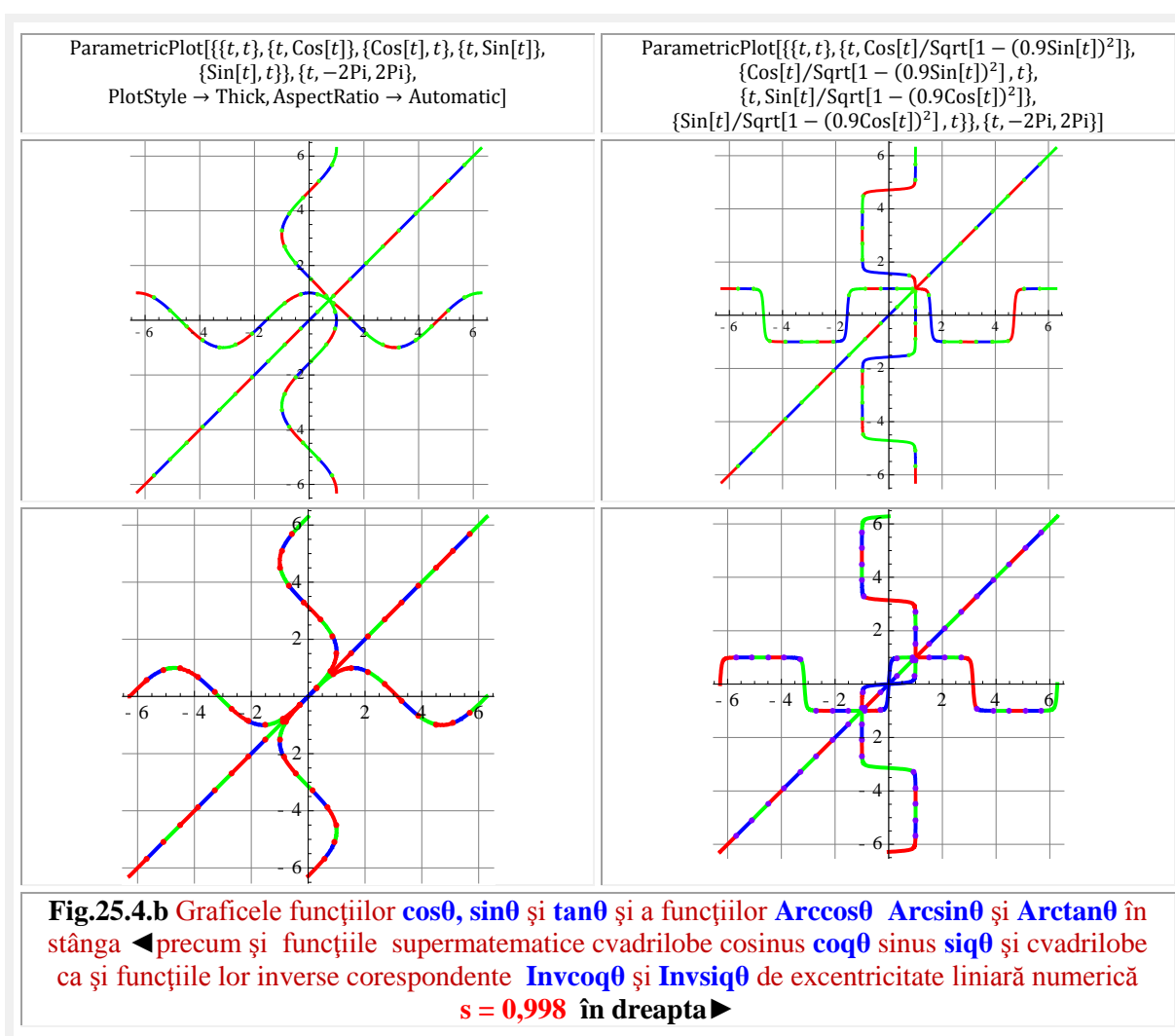
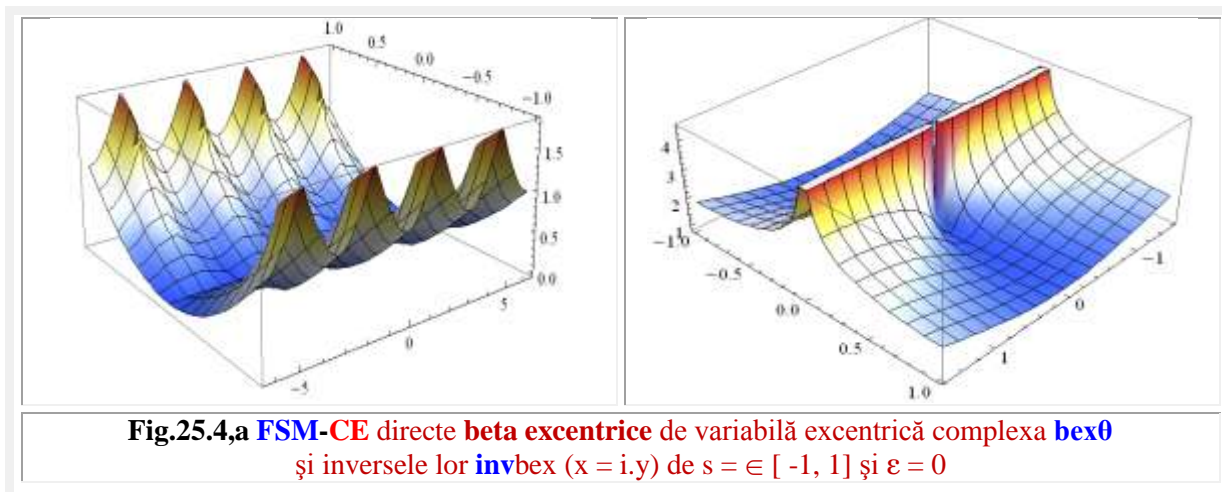


Fig25.3.g FSM-CE $\text{bex}\theta$ și Invbex univoce împreună: directe beta excentrice de variabilă excentrică $\theta \text{ bex}\theta$ \blacktriangleleft și inversele ei $\text{Invbex}\theta$ \blacktriangleright în 3D (în 4 vederi)





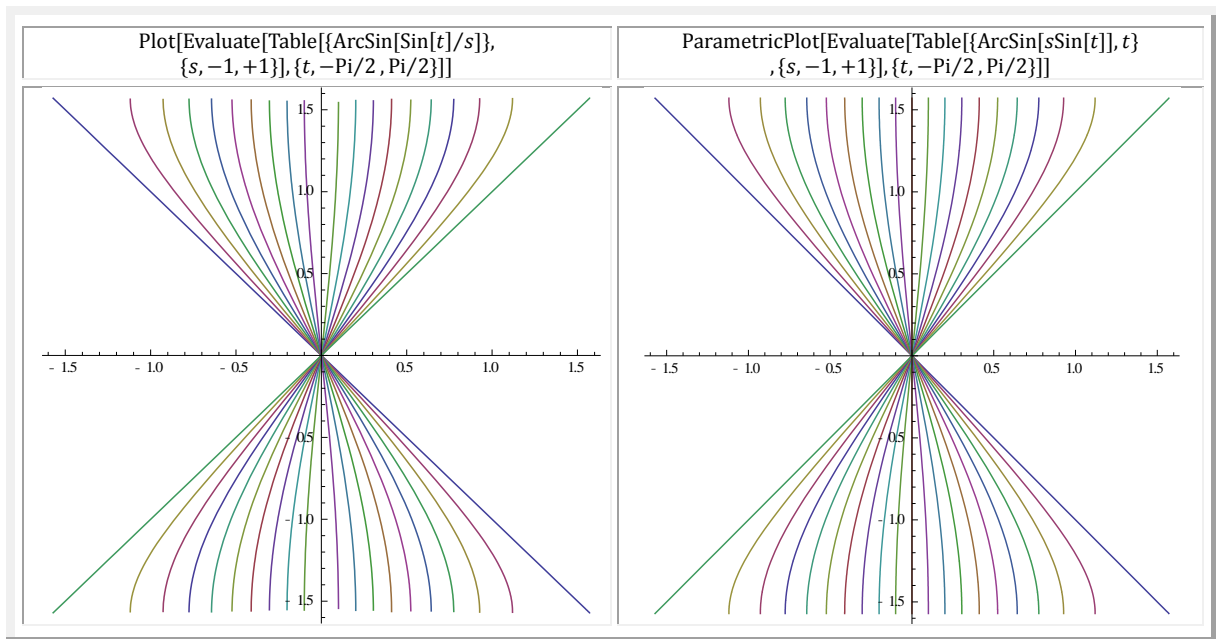
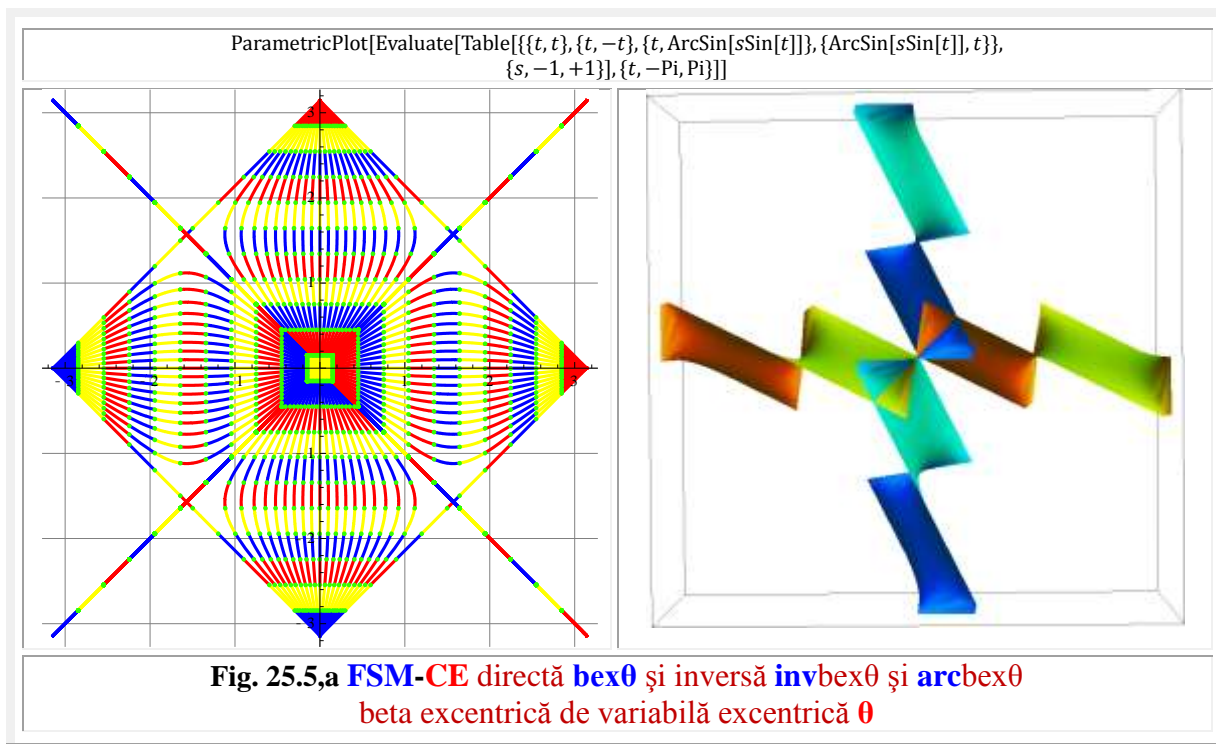
FSM-CE directe beta excentrice de variabilă reală și inversele lor au fost reprezentate împreună în 3D în 4 vederi în figura 25.3,g doar pentru a sublinia frumusețea obiectelor astfel obținute.

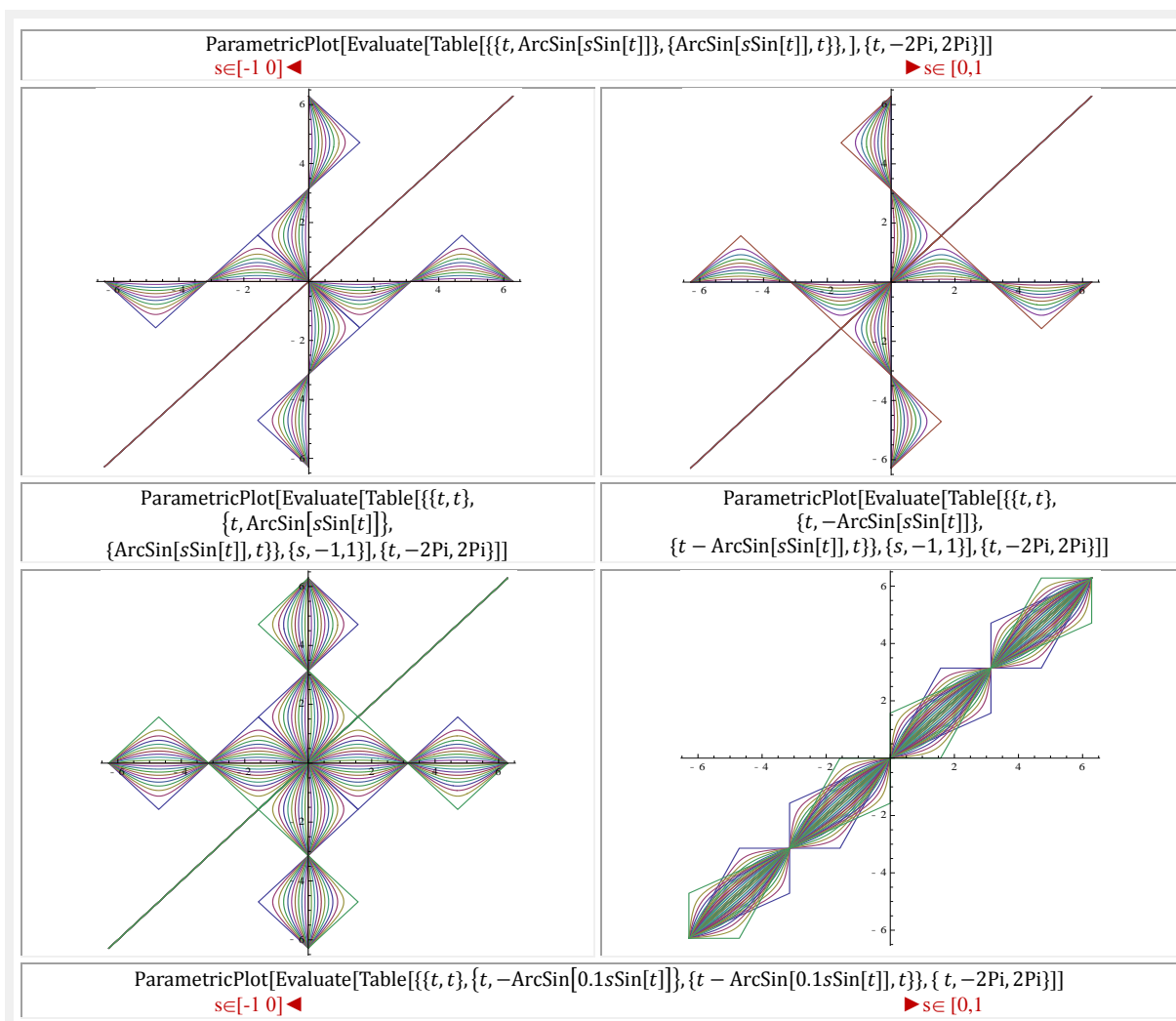
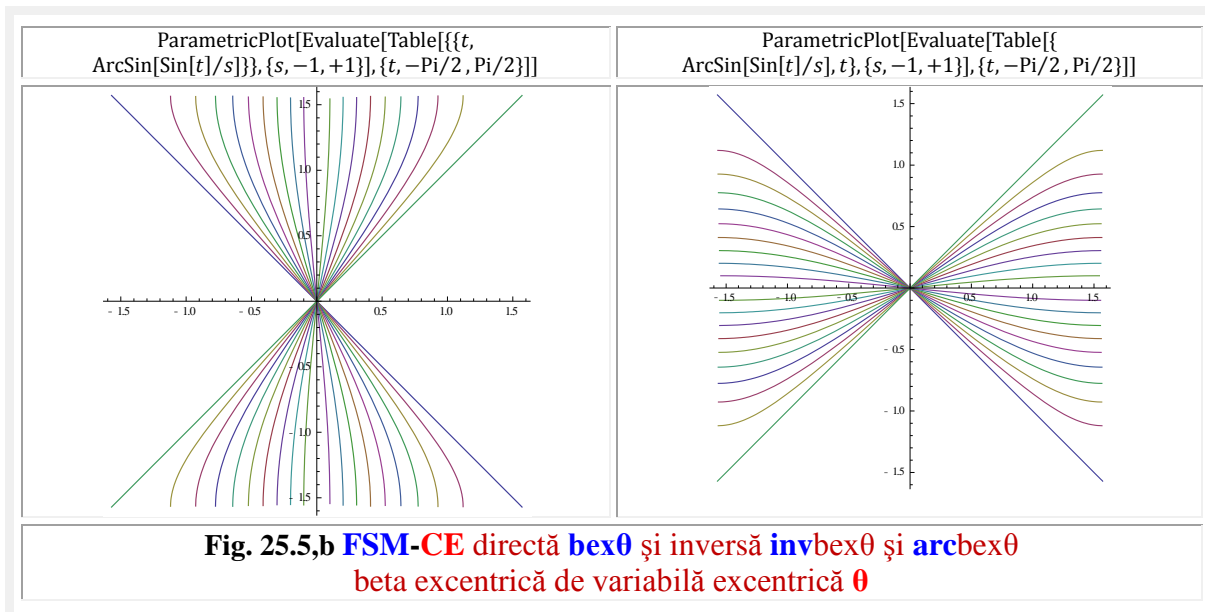
S-a insistat mult asupra FSM-CE directe beta excentrice de variabilă reală și a inverselor lor deoarece ele stau la baza edificiului supermatematicii (SM).

Aceleși funcții, dar de variabilă complexă, sunt prezentate în **figura 25.4,a**, iar în **figura 25.4,b** sunt prezentate funcțiilor matematice centrice directe **sin(x + i.y)** de variabilă complexă

În figura **4,a** sunt prezentate sus ▲ funcțiile directe și inverse **arccosx** și **arcsinx** și în stânga jos ◀ ▼ funcțiile **arccos** și **Arccos**, precum și **arcsin** și **Arcvsin**, iar în dreapta jos ▶ ▼ sunt prezentate FCC tangenta **Voinoiu** directe și inverse.

Pentru comparație, în **figura 25.4,b** sunt prezentate inversele **FSM** cvadrilobe cosinus **coqx** și sinus **siqx** de excentru **S(0,98; 0)**, în care excentricitatea liniară numerică este **s = 0,98**, iar cea unghiulară **ε = 0**.





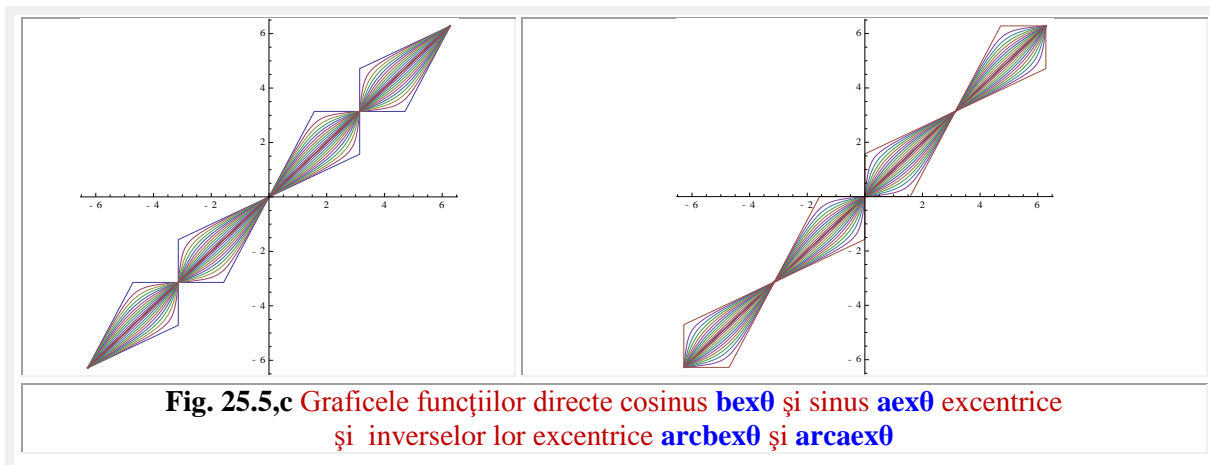


Fig. 25.5,c Graficele funcțiilor directe cosinus bex_0 și sinus ax_0 excentrice și inverselor lor excentrice $arcbx_0$ și $arcaex_0$

25.3 FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE (FSM-CEI) DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ

Funcțiile circulare centrice directe (FCC) au fost introduse în matematică de elvețianul **Leonhard Euler** (1707-1783), care a constatat că funcțiile trigonometrice pot fi reprezentate ca intersecție a unui cerc de rază $R = 1$ - trigonometric sau unitate $CU(O,1)$ – cu o semidreaptă turnantă în jurul originii $O(0, 0)$ a unui reper cartezian drept.

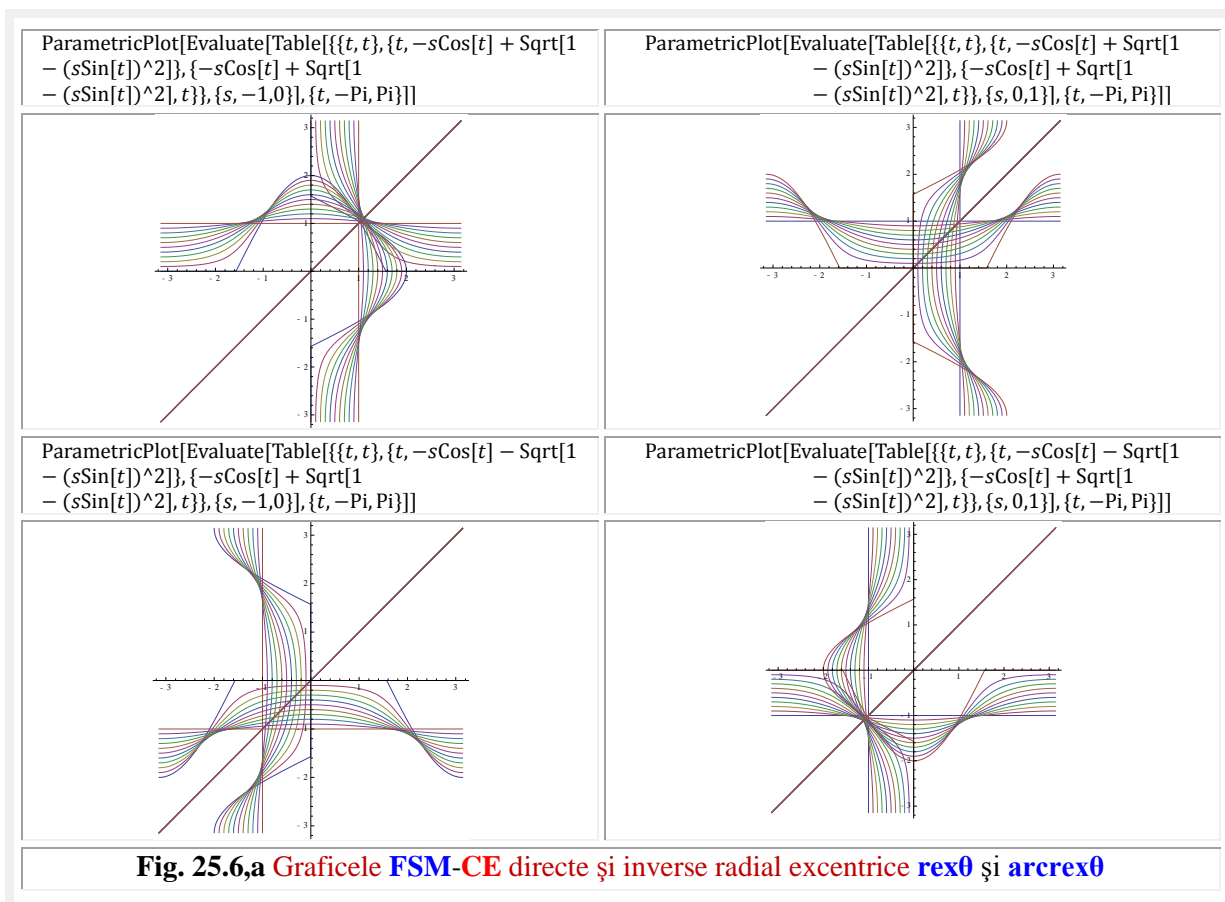


Fig. 25.6,a Graficele FSM-CE directe și inverse radial excentrice rex_0 și $arcrx_0$

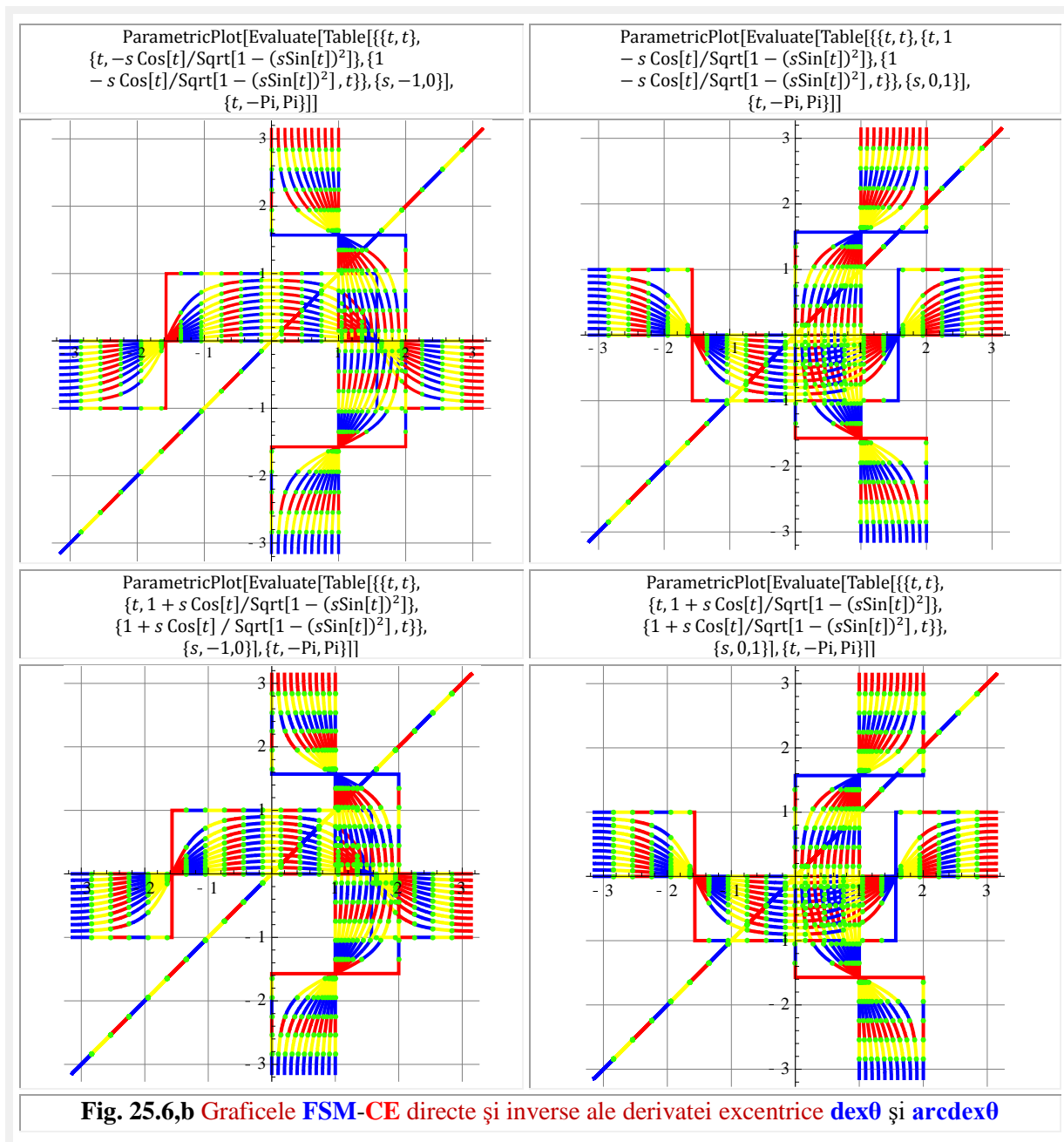
Tot **Euler** este acela care a definit funcția exponențială pentru numere complexe și a făcut legătura dintre aceasta și funcțiile trigonometrice prin celebra formulă

$$(24.1) \quad e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$$

funcție exponențială care, acum, este funcția **radial centrică rada**, un fazor de la $O(0, 0)$ la punctul curent $M(x = \cos\alpha, y = \sin\alpha)$ de pe $CU(O, 1)$ [23], fazor turnant în jurul centrului și al originii $O(0,0)$

$$(24.2) \quad \begin{cases} e^{i\alpha} = rada \\ \frac{d}{d\alpha}(rada) = i \cdot e^{i\alpha} = dera \end{cases}$$

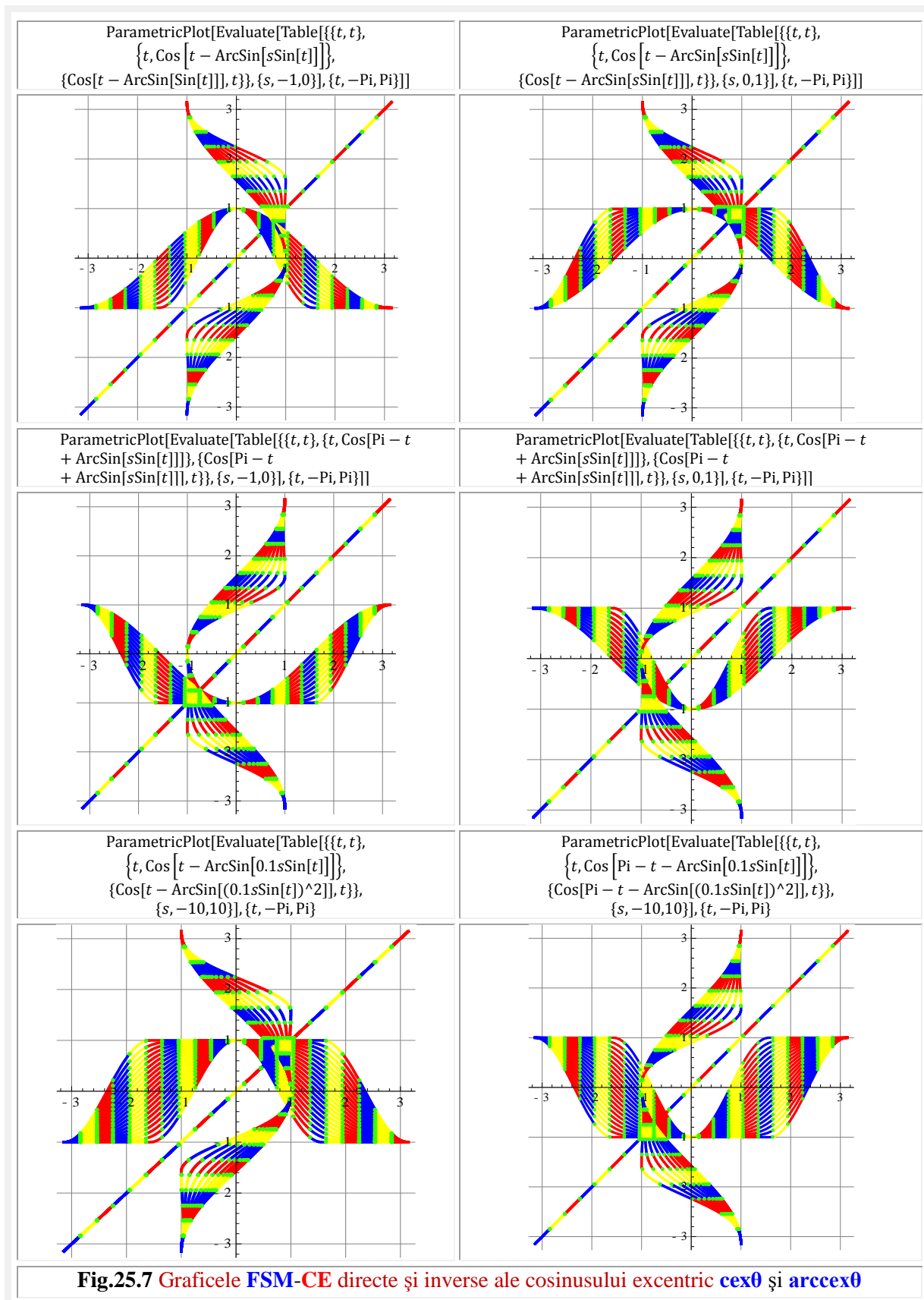
și a cărei derivată este fazorul **derivată centrică dera**, fazor tangent în punctul curent M la CU .



Funcțiile sau fazorii **rada** și **dera** sunt echivalenții vectorilor **centrici** $\vec{R}(\alpha) = \overline{OP}(\alpha)$ - $|\vec{R}(\alpha)| = |rada| = 1$ - și a derivatei acestuia $\vec{V}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\vec{R}(\alpha)$, tangent la CU în M , $|\vec{V}(\alpha)| = |dera| = 1$ și au, evident, modulele lor egale cu unitatea.

Din cele expuse anterior, se poate deduce facil că, la definirea funcțiilor trigonometrice ca funcții circulare, **Euler** a ales **trei puncte confundate**: centrul cercului $C(0,0)$, originea reperului $O(0,0)$ și

polul $P(0,0)$ al semidreptei centrice D^+ ale cărei intersecție cu CU , punctul $M(x, y)$, dau funcțiile circulare considerate elementare dar și unice $x = \cos\alpha$ și $y = \sin\alpha$.



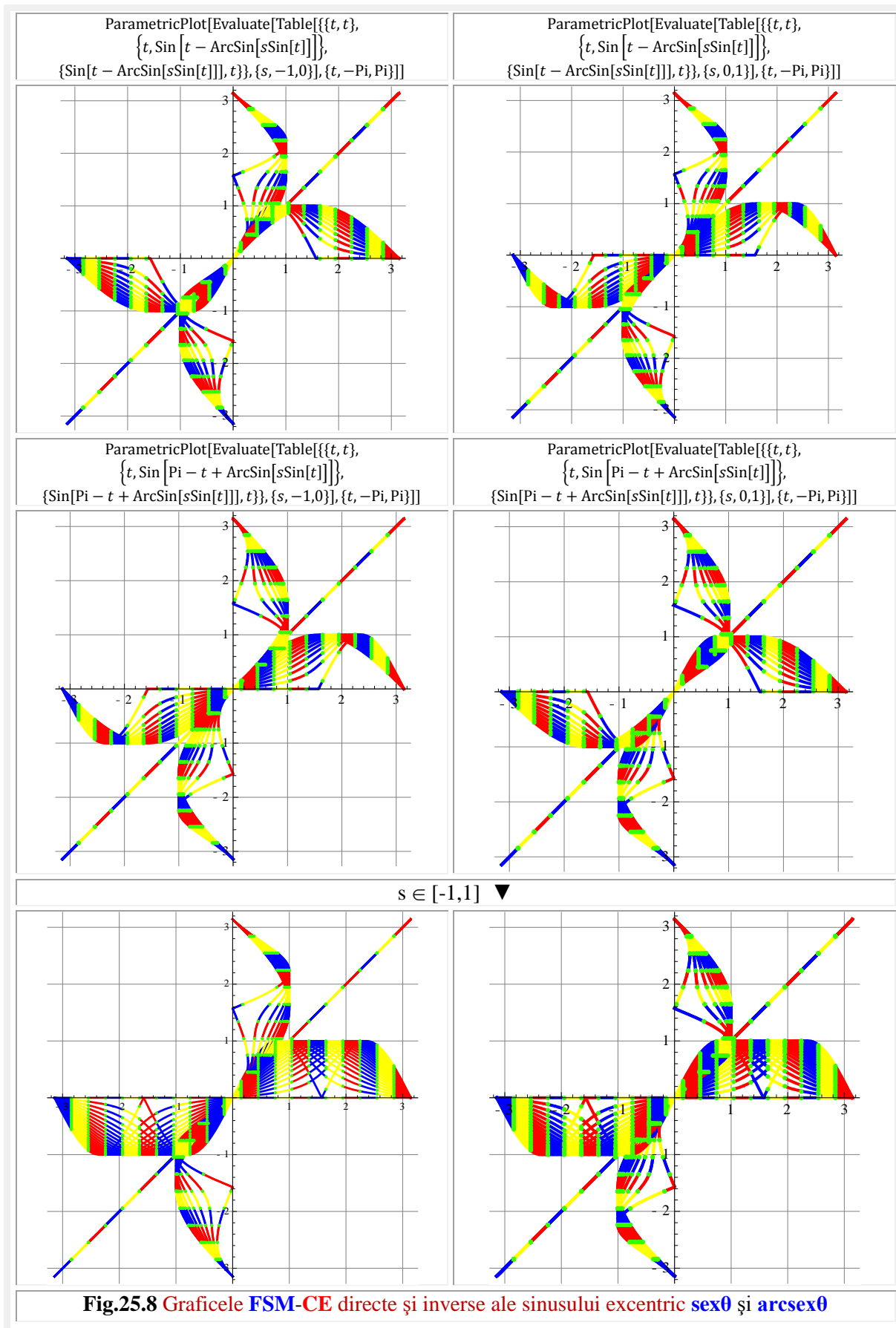


Fig.25.8 Graficele FSM-CE directe și inverse ale sinusului excentric $\text{sex}\theta$ și $\text{arcsex}\theta$

Din această cauză, apariția unei infinități de funcții circulare / trigonometrice cosinus și sinus, precum și a multor altora, a fost amânată din anul 1778 până în anul 1978 cu exact 200 de ani ! 200 de ani în care nimeni n-a observat că această suprapunere de puncte a sărăcit enorm matematica și nimeni, dar nimeni, n-a mișcat din centru nici măcar un punct suprapus.

Matematica excentrică (ME) este cea care s-a născut prin expulzarea polul **P** din $O(0, 0)$ și la denumit excentru **E(e, ε)** pentru un cerc oarecare de rază **R** și **S(s, ε)** pentru CU, denumind excentricitate liniară reală pe **e** și excentricitate liniară numerică pe **s**, iar pe **ε** excentricitate unghiulară. Câte puncte există în planul cercului unitate, atâtea perechi de funcții excentrice cosinus **cexθ** și sinus **sexθ** au apărut și există acum, adică o infinitate !

De abea acum s-a putut observa că nu sinusul și cosinusul sunt funcțiile elementare, ci unele noi apărute: funcția radial excentrică **rexθ** și derivată excentrică **dexθ**, care sunt modulele vectorilor de poziție $\vec{r}_{1,2} = \overline{SW}_{1,2} = rex_{1,2}\theta \cdot rad\theta$, fața de **S** și, respectiv derivata acestuia

$$\vec{v}_{1,2} = \vec{r}_{1,2}' = dex_{1,2}\theta \cdot der\theta \text{ și au echivalentele lor din domeniul centric fazorii } \mathbf{rada} \text{ și } \mathbf{dera}.$$

Unghiul **α** la centrul **O(0,0)** a fost denumit **variabilă centrică**, iar unghiul **θ** la excentrul **S(s, ε)** a fost denumit **variabilă excentrică**.

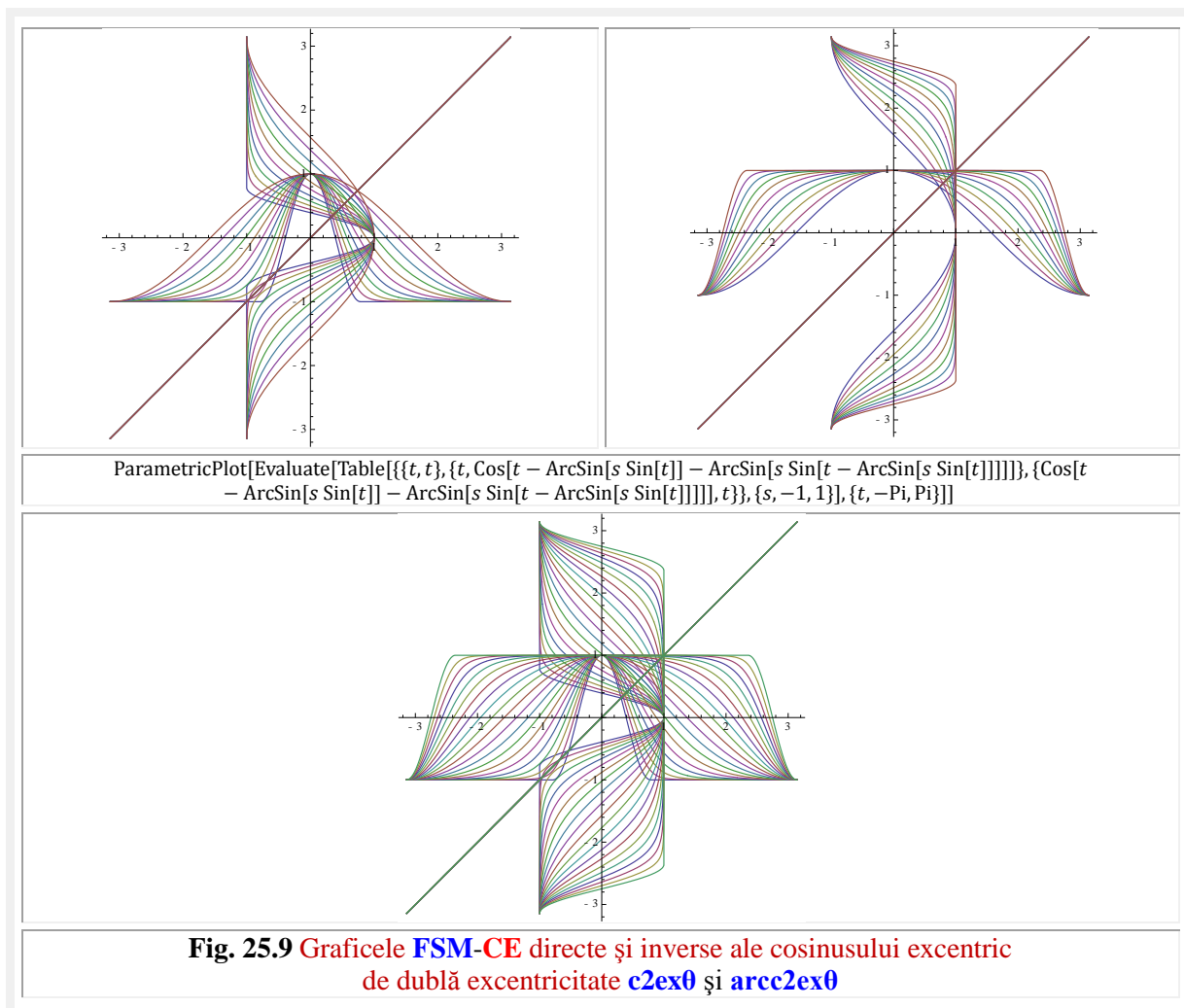


Fig. 25.9 Graficele FSM-CE directe și inverse ale cosinusului excentric de dublă excentricitate **c2exθ și **arcc2exθ****

Deoarece, funcțiile excentrice de variabilă excentrică (**cexθ**, **sexθ**, **texθ** etc.) sunt continue numai pentru $s^2 < 1$, adică $s \in [-1, 1]$ ce corespunde unui excentru **S** plasat în interiorul discul cercului unitate, au fost introduse și funcțiile excentrice de **variabilă centrică α**, care sunt continue pentru toate valorile lui **s**, adică pentru $s \in [-\infty, +\infty]$ sau pentru un excentru **S** plasat în oricare punct din

planului cercului unitate. Ele sunt notate, prin convenție, cu majuscule ($Cex\alpha$, $Sex\alpha$, $Tex\alpha$, $Rex\alpha$, $Dex\alpha$, etc) pentru a se distinge de cele de variabilă excentrică θ .

La îndemnul și sugestia unui mare matematician, l-am numit pe Prof.dr. math. **Horst Klepp**, de a pune de acord trigonometria, care opera cu **semidrepte**, cu geometria analitică care operează cu **drepte**, au fost redefinite funcțiile excentrice ca intersecție a **dreptei excentrice**, pentru că este turnantă în jurul excentrului S , $d = d^+ \cup d^-$, cu cercul unitate $CU(O, 1)$, rezultând, astfel, două determinări: una principală, de indice 1, sau fără indice când confuziile sunt excluse, din intersecția cu semidreapta d^+ și una secundară, de indice 2, ca intersecție cu semidreapta d^- .

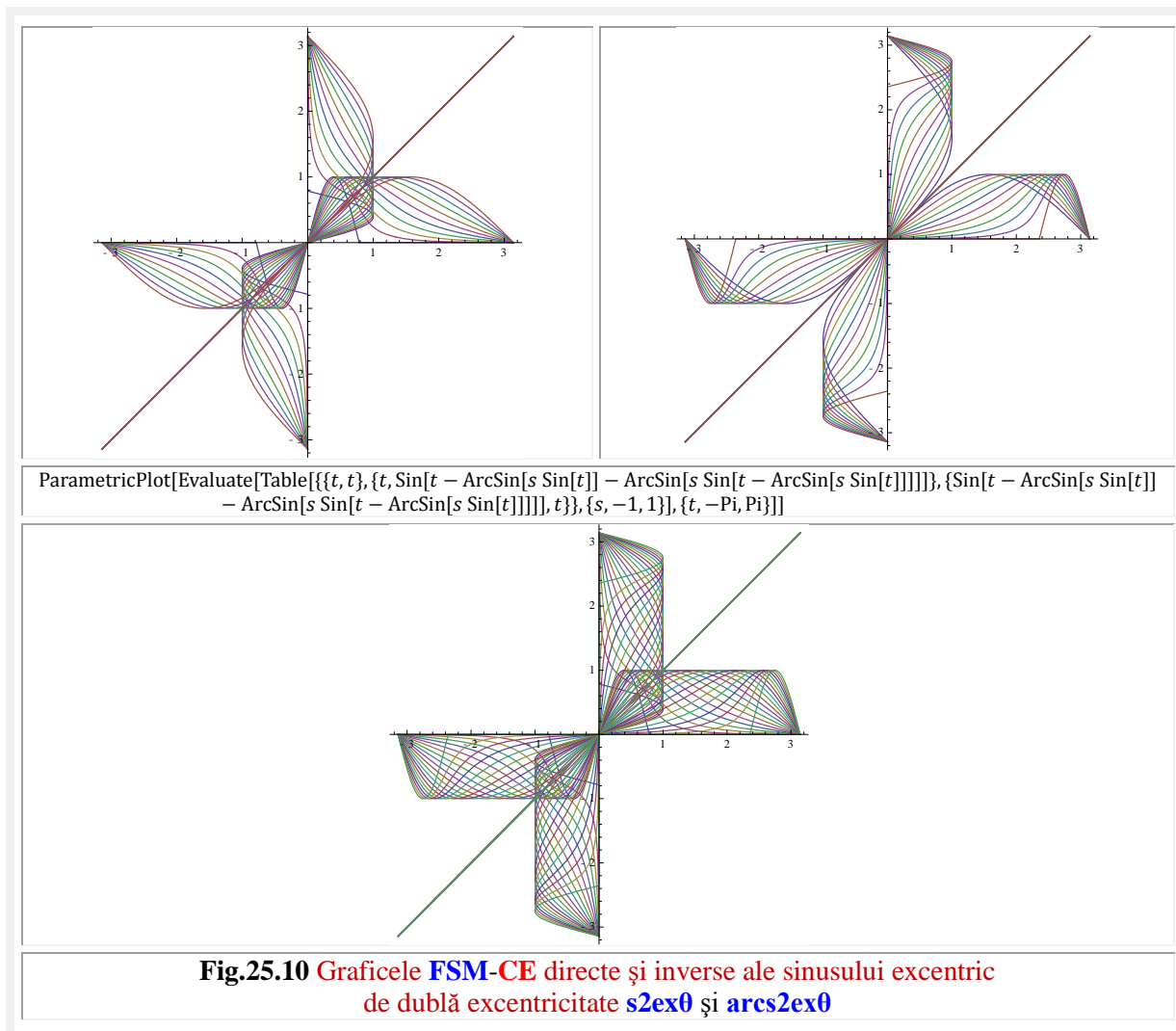
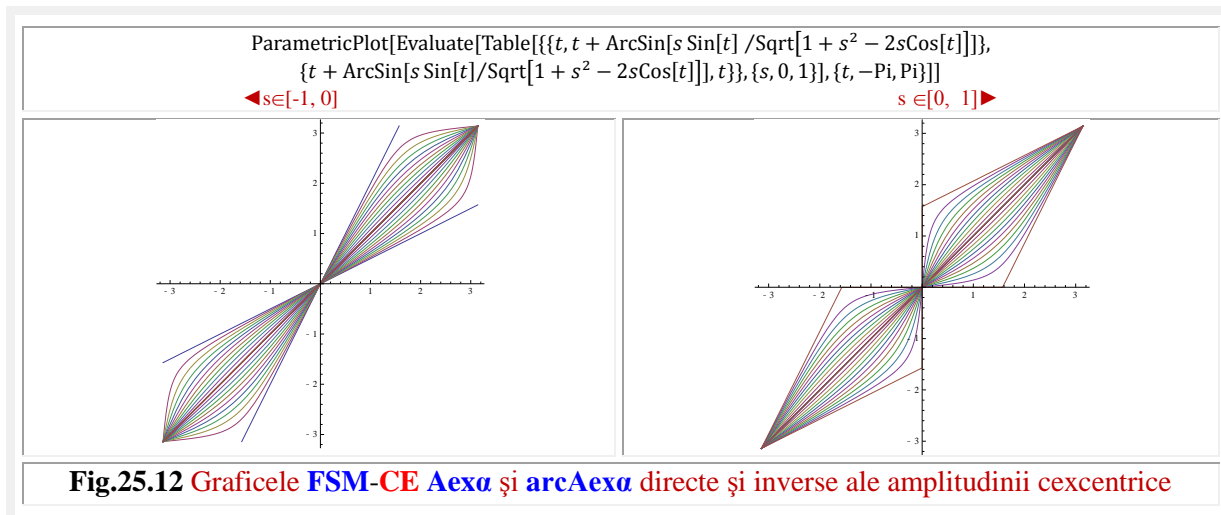
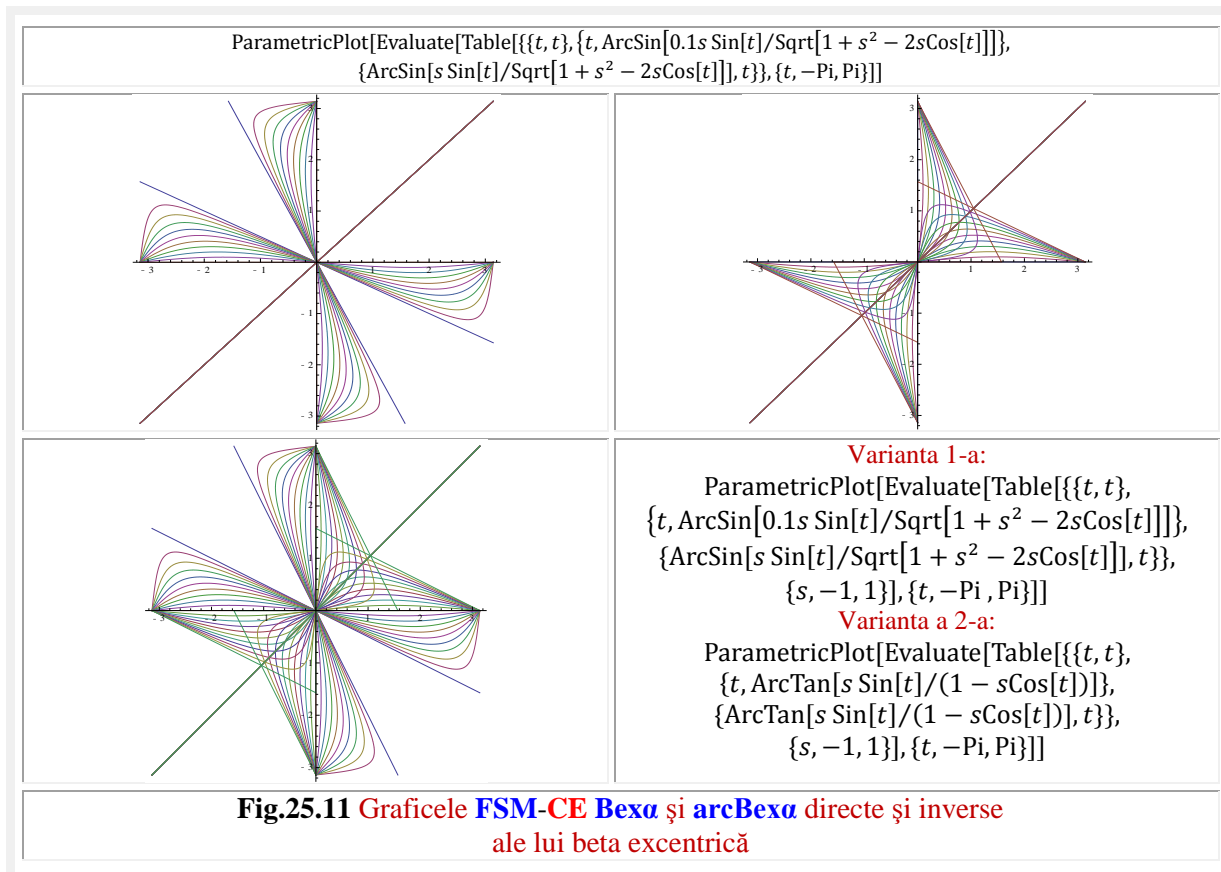


Fig.25.10 Graficele FSM-CE directe și inverse ale sinusului excentric de dublă excentricitate $s2ex\theta$ și $arcs2ex\theta$

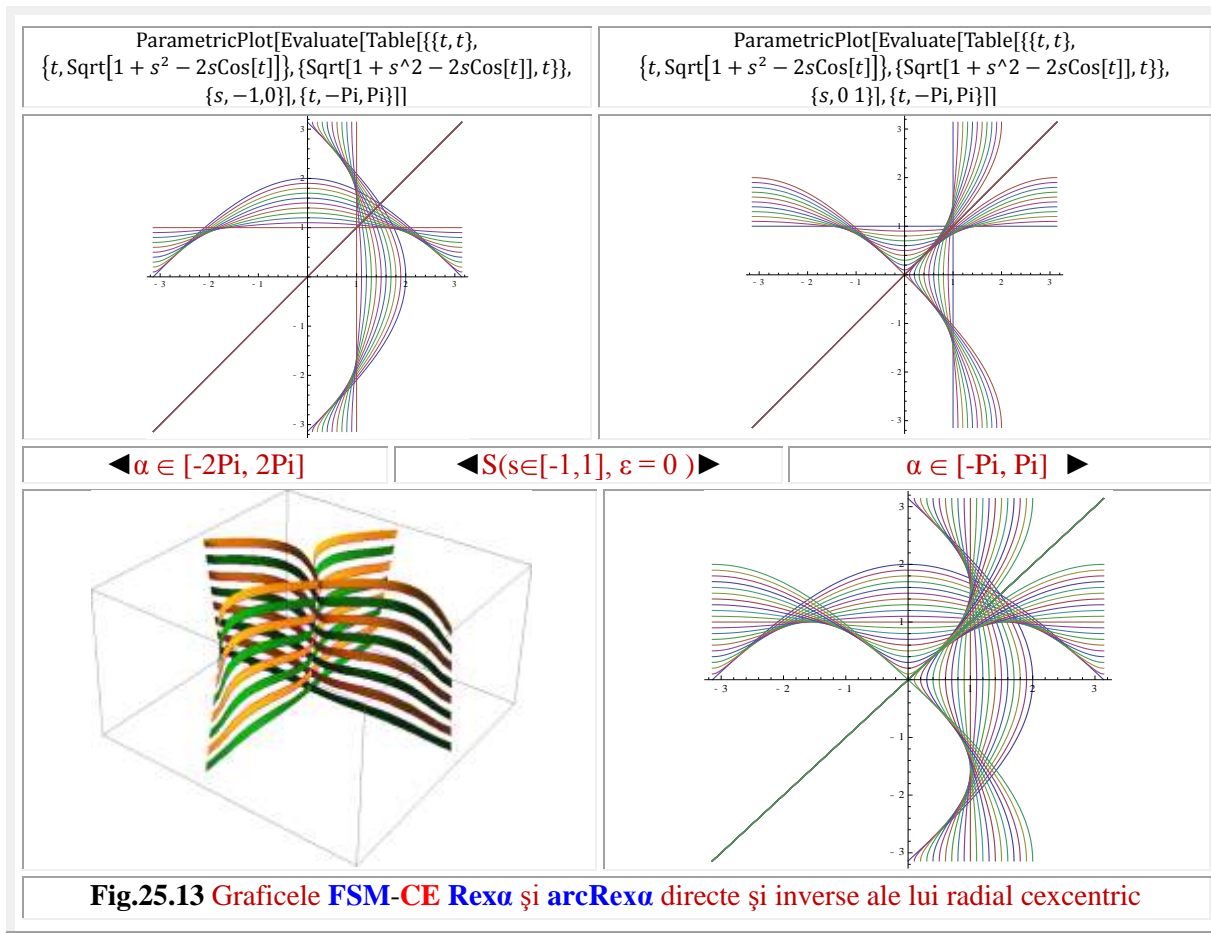
Matematica elevată (MEL) este cea în care s-a mai considerat deplasat un punct, și anume, originea O din $C(0, 0)$ în excentrul $S(s, \epsilon) \equiv O(s, \epsilon)$ și astfel au apărut funcțiile super-matematiche circulare **elevate (FSM-CEL)**, precum cosinus elevat $cel\theta$ și $Cela$, sinus elevat $sel\theta$ și $Sela$, tangentă elevată $tel\theta$ și $Tela$ etc.

Au fost denumite **elevate**, pentru că $cel\theta$ și $sel\theta$, de exemplu, își elevează poziția codomeniului în funcție de poziția excentrului S , în timp ce, codomeniul funcțiilor excentrice $cex\theta$ și $sex\theta$ rămâne același $I \in [-1, 1]$, indiferent de poziția lui S în plan.

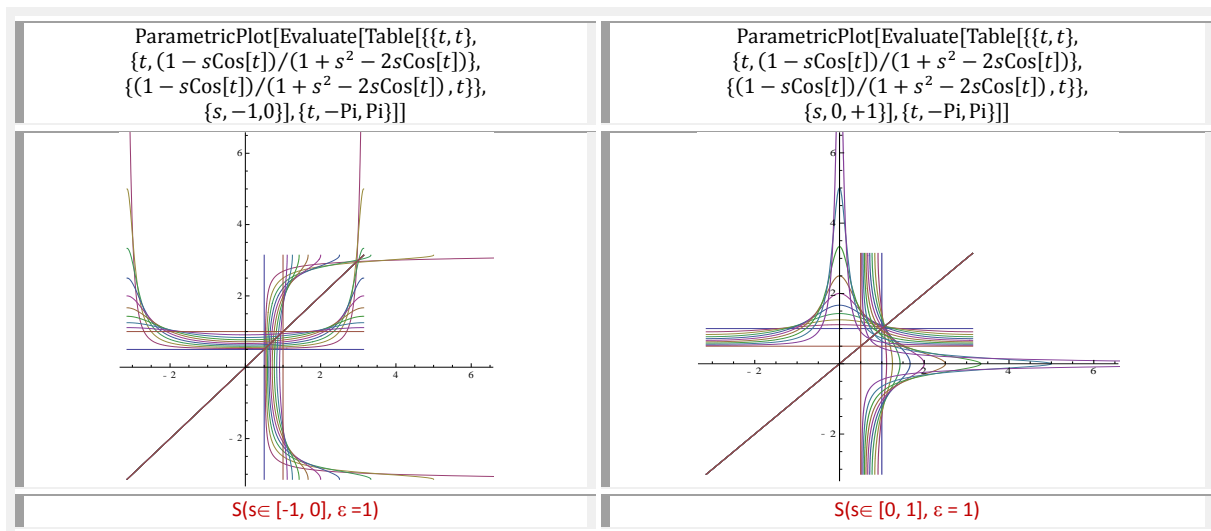
După 240 de ani s-a renunțat la coincidența vreunui punct, astfel că cele 3 puncte au devenit toate distincte în cadrul **matematicii exotice (MEX)**, care a dat naștere funcțiilor supermatematiche **circulare exotice (FSM-CEX)** cosinus exotic $cexo\theta$ și $Cexo\alpha$, sinus exotic $sexo\theta$ și $Sexo\alpha$, tangentă exotică $texo\theta$ și $Texo\alpha$ etc.



Deoarece, în toate cele trei tipuri de matematici excentricitatea este prezentă și diferită de zero, ele aparțin toate domeniului **matematicii excentrice (ME)**. Pentru $s = e = 0$, **ME** \rightarrow **MC**. În toate aceste matematici, excentricitățile liniară s și unghiulară ϵ sunt prezente ca a 3-a și a 4-a dimensiune a spațiul 2 D dacă s și ϵ sunt **constante** și diferite de zero, astfel că $S(s, \epsilon)$ este un punct fix în plan, a 5-a și a 6-a dimensiune a spațiului bi-dimensional, dacă S este un punct mobil în plan, care se deplasează după anumite legi, guvernate de o funcție centrică sau tot excentrică de același excentru S (denumite funcții de dublă excentricitate) sau o altă excentricitate $s_1 - s(\theta, s_1) - \text{ș.a.m.d.}$ până la a n-a dimensiune a spațiului 2D.



Totodată, excentricitatea poate fi a 4-a și a 5-a dimensiune a spațiului 3D, dacă **s** și **ε** sunt constante și **S** un punct fix în spațiul 3D, a 6-a sau/și a 7-a dimensiune dacă **s** sau/și **ε** sunt variabile, a 8-a și a 9-a dimensiune a spațiului 3D dacă **s** sau/și **ε** sunt variabile ș.a.m.d., aidoma cazului 2D, până la a n-a dimensiune a spațiului 3D.



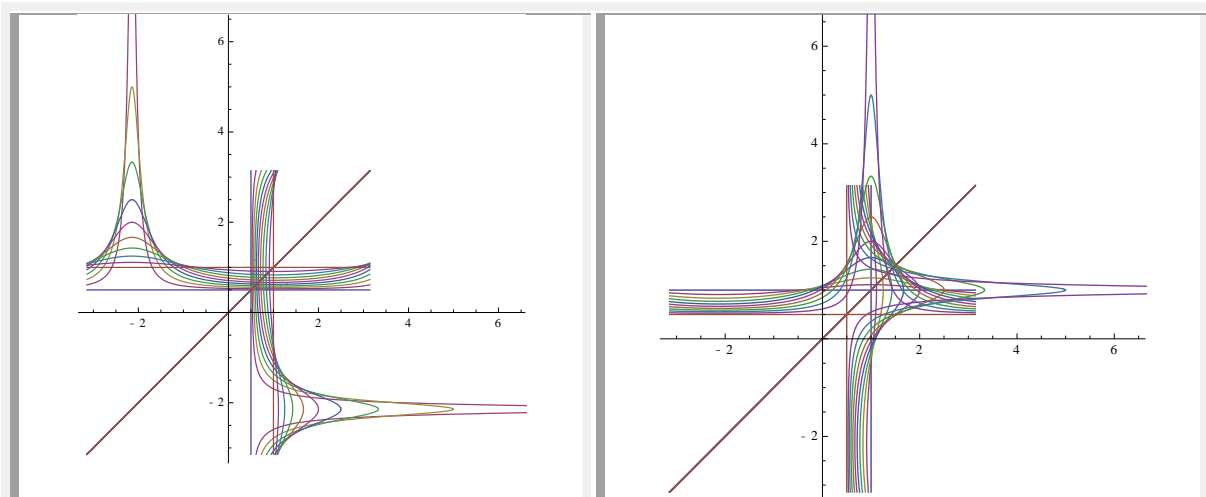


Fig.25.14 Graficele **FSM-CE Dexa** și **arcDexa** directe și inverse ale lui radial cexcentric de variabilă centrică

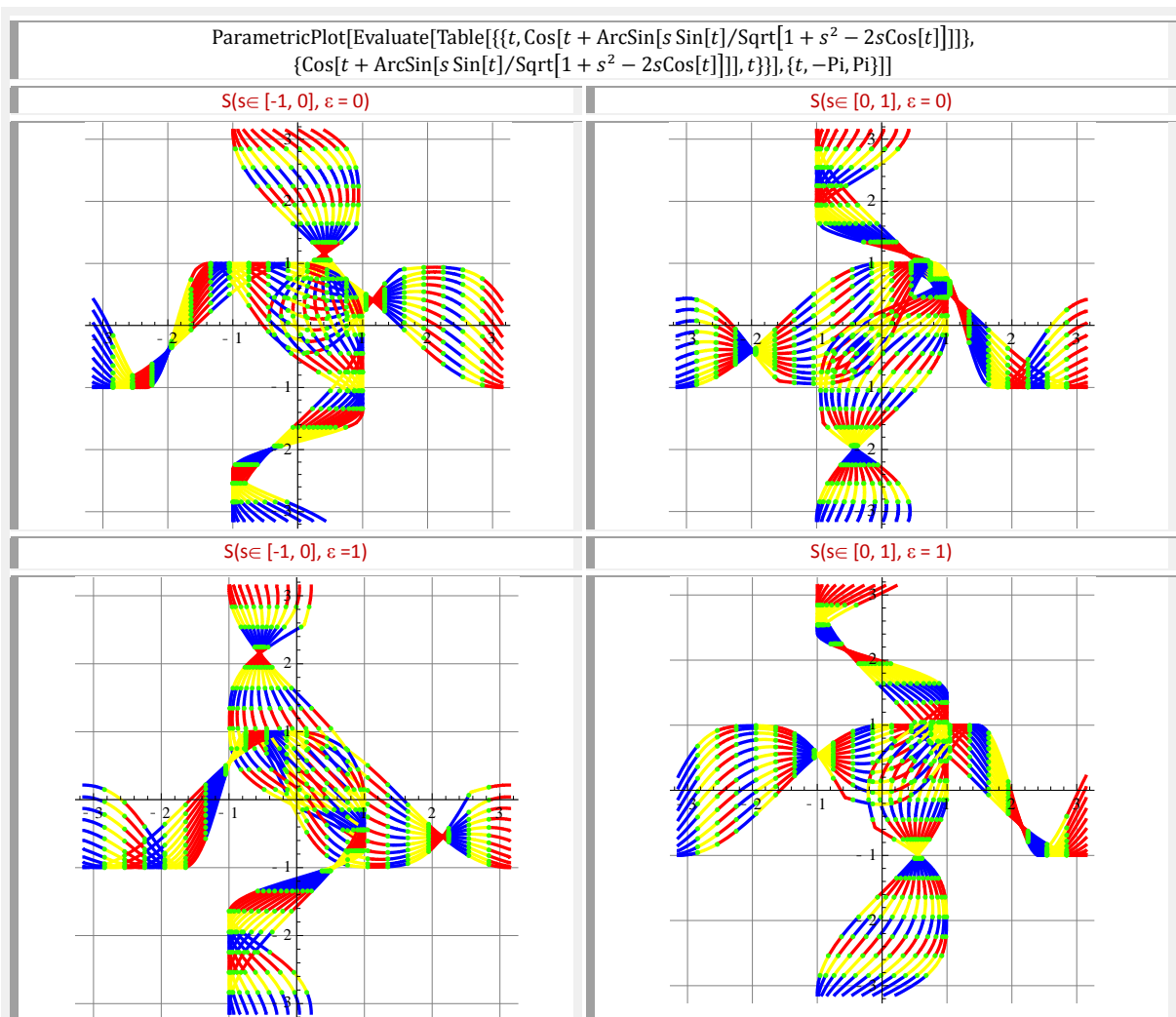


Fig.25.15 Graficele **FSM-CE Cexa** și **arcCexa** directe și inverse ale lui cosinus cexcentric de variabilă centrică

Toate **FSM-CE** directe și inverse se impart în două clase de funcții:

- 1) Cele care depind de poziția originii $O(0, 0)$ – pentru funcțiile excentrice sau $O(s, \varepsilon)$ – pentru cele elevate – a reperului de la care se definesc / măsoară și care au corespondente în matematica centrică (**MC**), cum sunt cex și $Cex \rightarrow \cos$, sex și $Sex \rightarrow \sin$, tex și $Tex \rightarrow \tan$ etc. și
- 2) Cele care **nu** depind de poziția originii O , ci de poziția excentrului $S(s, \varepsilon)$ de la care sunt definite și se măsoară mărimea lor și care nu aveau și, unele, nu au nici acum funcții corespondente în **MC**, deși expresiile lor matematice sunt frecvent întâlnite în matematica și în tehnică rex și $Rex \rightarrow \text{rad}$, dex și $Dex \rightarrow \text{der}$, bex și $Bex \rightarrow ?$, aex și $Aex \rightarrow ?$.

FSM-CE directe, care au corespondente în domeniul matematicii centrice (**MC**), se obțin din acestea, adică din funcțiile centrice **cos**, **sin**, **tan**, etc., ca funcții induse o singură dată sau monoinduse sau compuse și mai corect ca funcții de funcție, adică prin înlocuirea variabilelor excentrică θ și centrică α cu funcțiile $\alpha(\theta)$ și $\theta(\alpha)$ denumite **FSM-CE amplitudine excentrică** corespunzătoare, a căror expresii, a primei determinări principale, de indice 1 sau fără indice, sunt [23], [1], [2], [10]

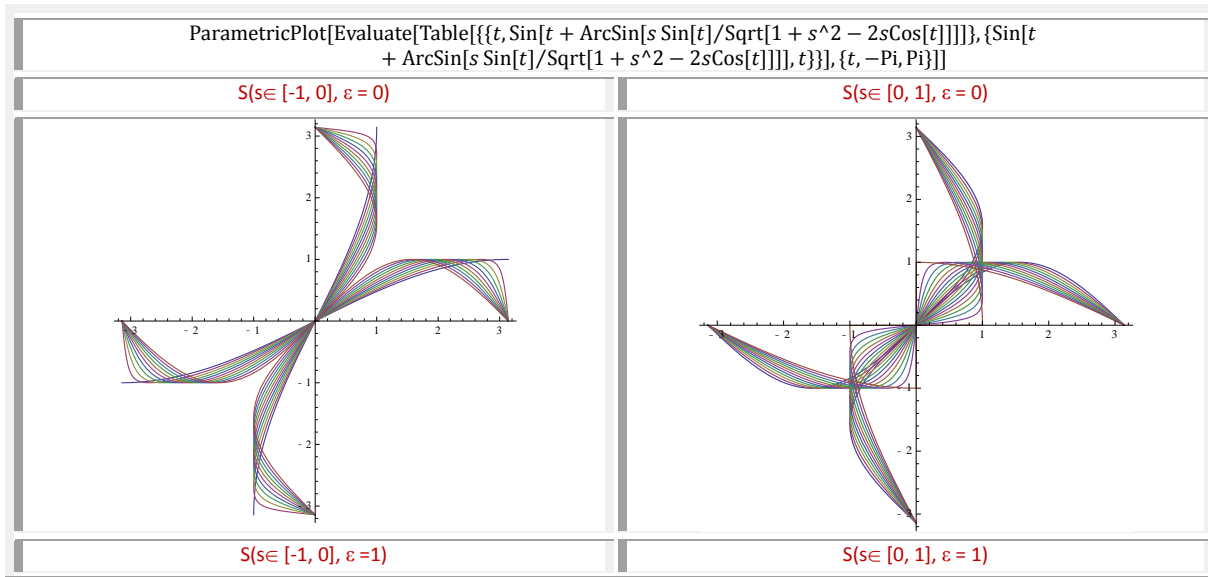
$$(4) \quad \begin{cases} \alpha \Rightarrow \alpha(\theta) = aex_1\theta = \theta - \beta_1(\theta) = \theta - bex_1\theta = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \\ \theta \Rightarrow \theta(\alpha) = Aex\alpha_1 = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \arcsin\frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} = \alpha + \arcsin\frac{s \sin(\alpha - \varepsilon)}{Rex\alpha} \end{cases}$$

Cea de a doua determinare, secundară, de indice 2, se obține din prima știind că

$$(5) \quad \beta_2 = \pi - \beta_1 = \pi - \beta.$$

25.4 FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE (**FSM-CEI**) DE VARIABILĂ CENTRICĂ α

FSM-CE directe și inverse de variabilă centrică α , independente de $O(0,0)$ dar dependente de excentrul $S(s, \varepsilon)$ sunt **Bex α** și **arcBex α** din **figura 25.8**, **Aex α** și **arcAex α** din **figura 25.9**, precum și **Rex α** și **arcRex α** prezentate în **figura 10** ca și **Dex α** și **arcDex α** din **figura 25.11**.



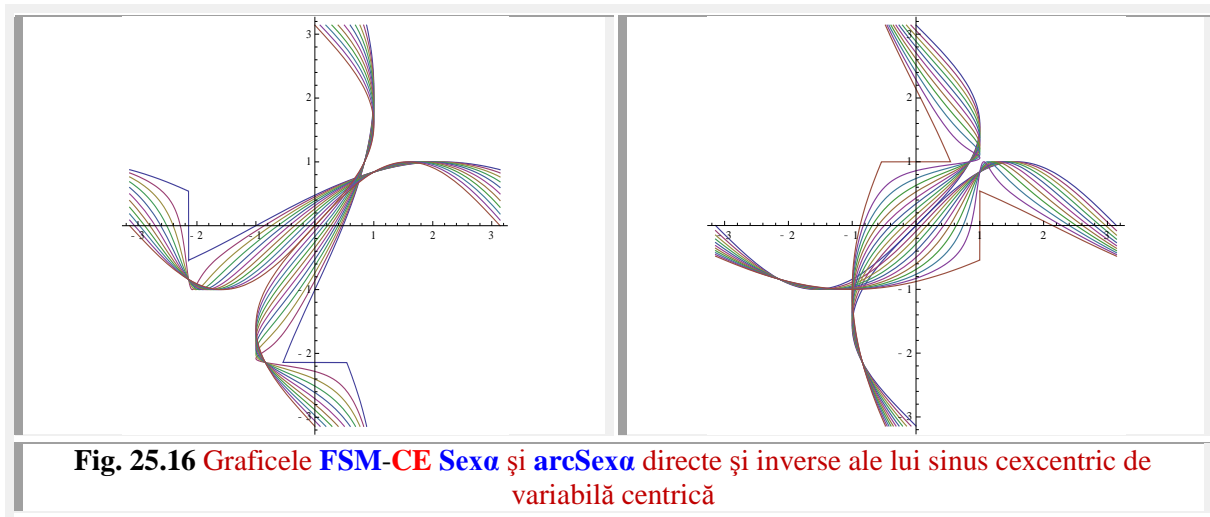


Fig. 25.16 Graficele FSM-CE $Sex\alpha$ și $arcSex\alpha$ directe și inverse ale lui sinus cexcentric de variabilă centrică

Ca urmare

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha \Rightarrow \alpha_2(\theta) = aex_2\alpha = \theta - \beta_2(\theta) = \theta - bex_2\theta = \pi - \theta + \arcsin [s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)] \\ \theta \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2(\alpha) = \pi - \alpha_2 - \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} = \pi - \alpha_2 - \arcsin \frac{s \sin(\alpha - \varepsilon)}{Rex\alpha} \end{cases}$$

Dacă ecuațiile parametrice ale unei funcții directe și graficele lor se obțin prin expresiile

$$(7) \quad \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

atunci funcția ei inversă va avea ecuațiile parametrice și, ca urmare, și graficele, date de ecuațiile parametrice obținute prin inversarea coordonatelor x cu y și a lui y cu x, adică

$$(8) \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = t \end{cases}$$

ceea ce se poate observa și din ecuațiile și textele prezentate în desenele anterioare, în **figurile 25.1,a** și **1,b** pentru funcțiile directe și inverse beta excentrice și amplitudine excentrică.

Funcțiile monoinduse (induse o singură dată) sunt cex, sex, tex etc. și Cex, Sex, Tex etc. iar funcțiile inductoare sunt $aex_{1,2}\theta$ și, respectiv, $Aex\alpha_{1,2}$.

Prin repetarea procedurii de inducție, se vor obține FSM-CE directe și inverse de dublă excentricitate (**Fig. 25.6** și **25.24.7**). Procedurul putând fi repetat la nesfârșit, se pot obține FSM-CE de triplă, cvadruplă ș.a.m.d. de a n-a sau multiplă excentricitate.

FSM-CE directe și inverse cosinus ($cex\theta$ și $arccex\theta$) sunt prezentate în **figura 25.24.4**, iar sinusul ($sex\theta$ și $arcsex\theta$) în **figura 25.5**, în partea din stânga ◀ figurilor pentru $S(s \in [-1,0], \varepsilon = 0)$ sau $S(s \in [1,0], \varepsilon = \pi)$ și în partea dreaptă ▶ pentru $S(s \in [0,1], \varepsilon = 0)$. În **figurile 25.6** și **25.7** sunt prezentate aceleași funcții dar de dublă excentricitate cosinus ($c2ex\theta$ și $arcc2ex\theta$, precum și cosinus $s2ex\theta$ și $arcs2ex\theta$).

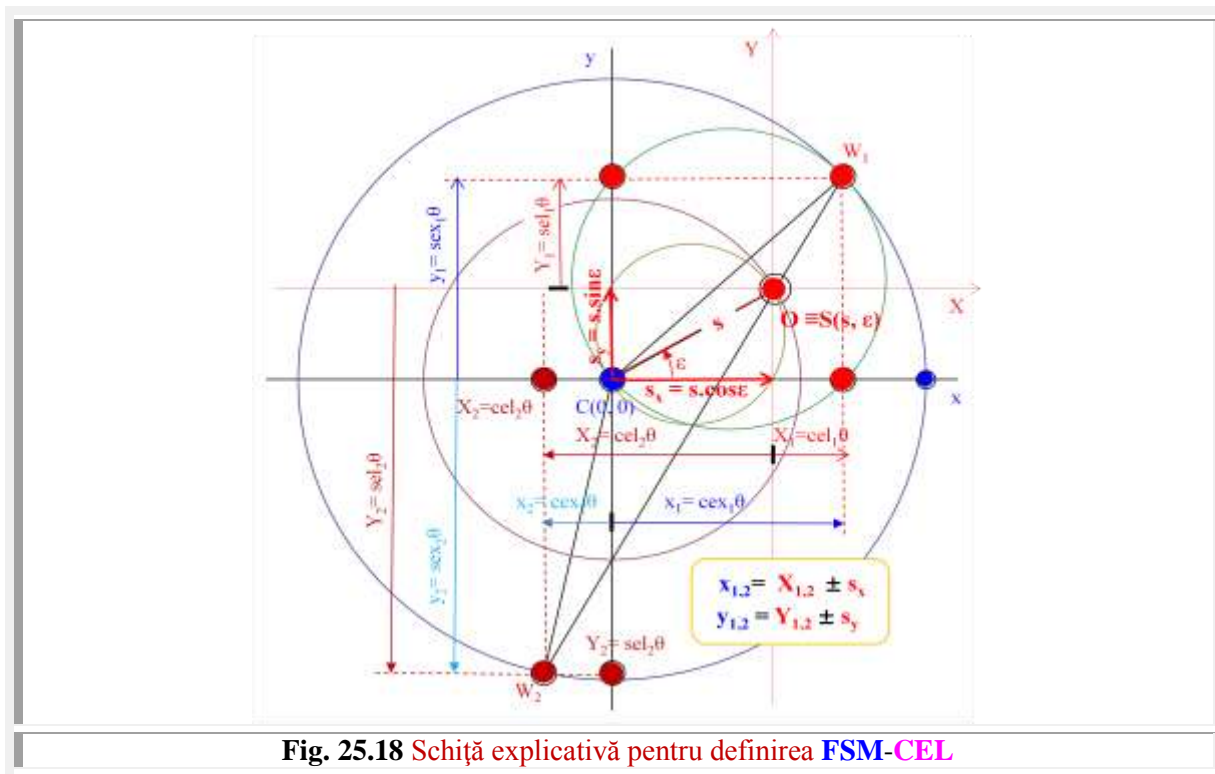
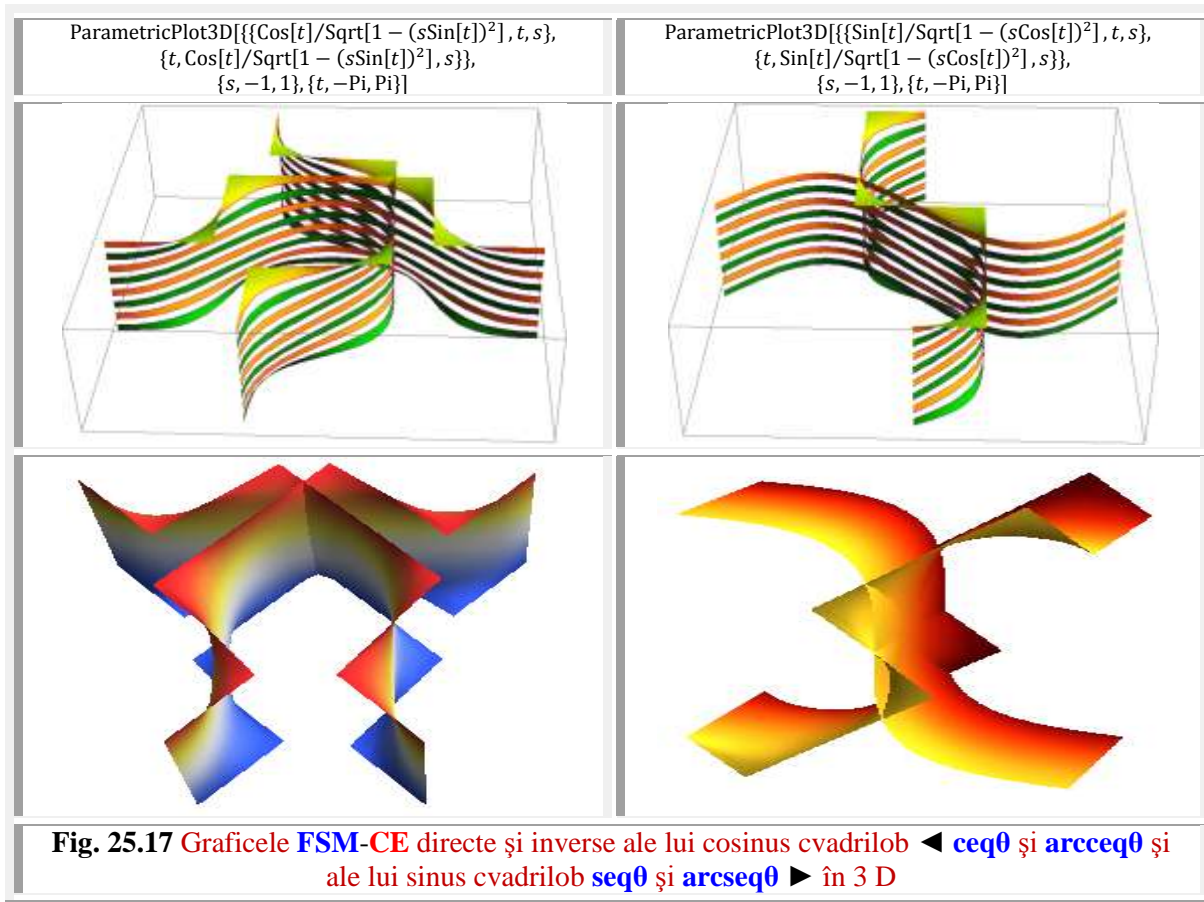
Pe lângă FSM-CE prezentate, mai sunt și $arctex\alpha$ și $arcTex\alpha$, $arctcex\alpha$ și $arcCtex\alpha$, ș.m.a.

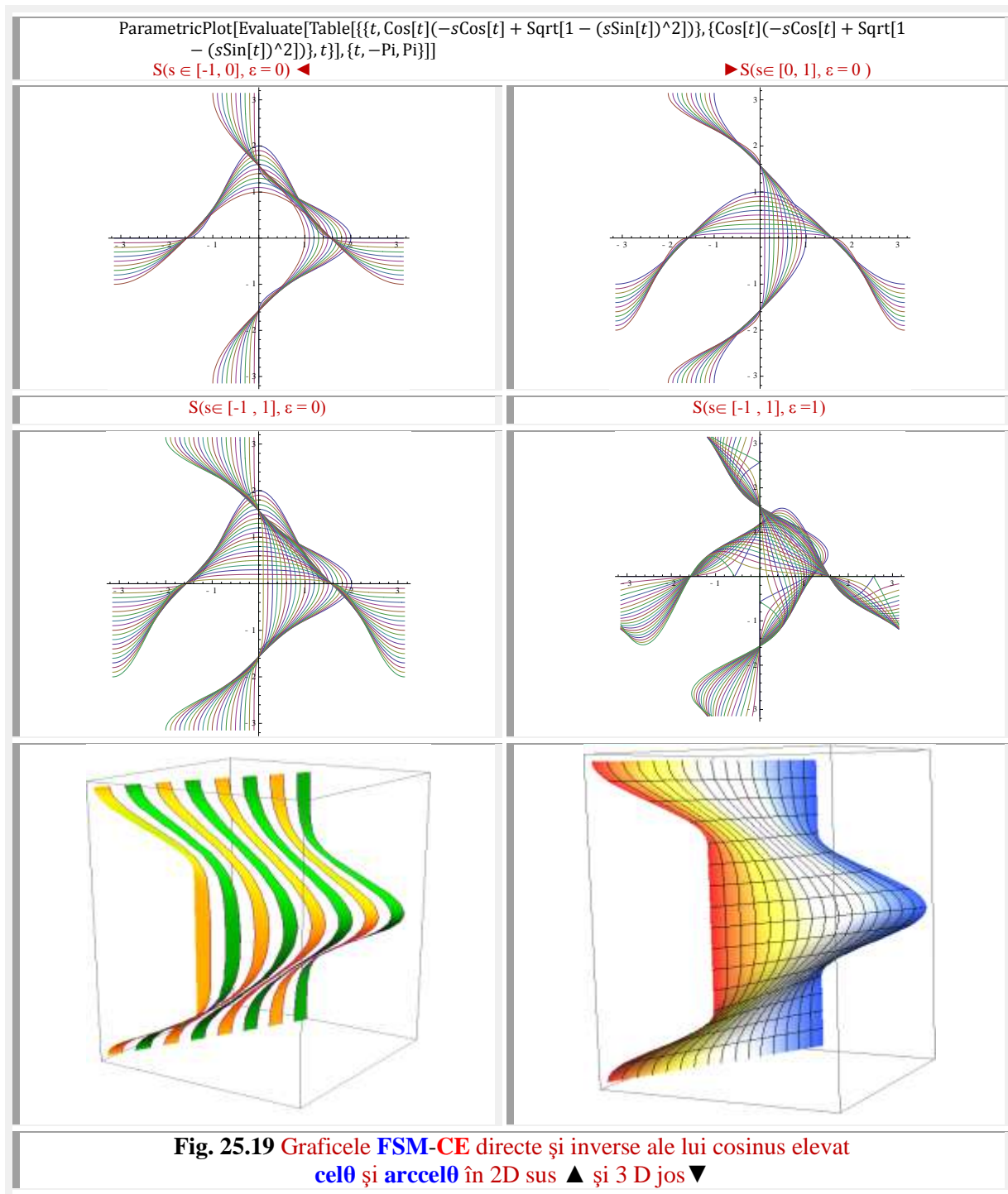
25.5 FUNCȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE ELEVATE INVERSE (FSM-CELI) DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ

Așa cum s-a mai menționat, funcțiile supermatematice circulare elevate (FSM-CEL) sunt coordonatele punctelor $W_{1,2}$ de intersecție a dreptei excentrice **d** cu cercul unitate $CU[C(0,1); 1]$, când dreapta turnantă se rotește față de excentrul **S**(s, ε) în care este plasată, în acest caz, și originea **O**(s, ε), origine de la care se definesc $X_{1,2} \rightarrow$ cosinusul elevat $cel_{1,2}\theta$ și $Cel\alpha_{1,2}$ și $Y_{1,2} \rightarrow$ sinusul elevat $sel_{1,2}\theta$ și $Sel\alpha_{1,2}$.

Este ușor de observat că, pentru $\varepsilon = 0$ și $\varepsilon = \pi$, funcțiile elevate $sel_{1,2}\theta$ și $Sel\alpha_{1,2}$ se confundă cu cele excentrice $y_{1,2} \rightarrow sex_{1,2}\theta$ și $Sex\alpha_{1,2}$, deoarece, în acest caz, originea **O**, confundată cu excentrul **S**, se află dispuse pe aceeași axă a absciselor ca și centrul cercului unitate **C**, astfel că $Y_{1,2} = y_{1,2}$, iar $X_{1,2} = x_{1,2} + s_x = x_{1,2} + s \cdot \cos\varepsilon$.

Rezultă că între FSM-CEL și FSM-CE există următoarele dependențe (**Fig. 25.13**)

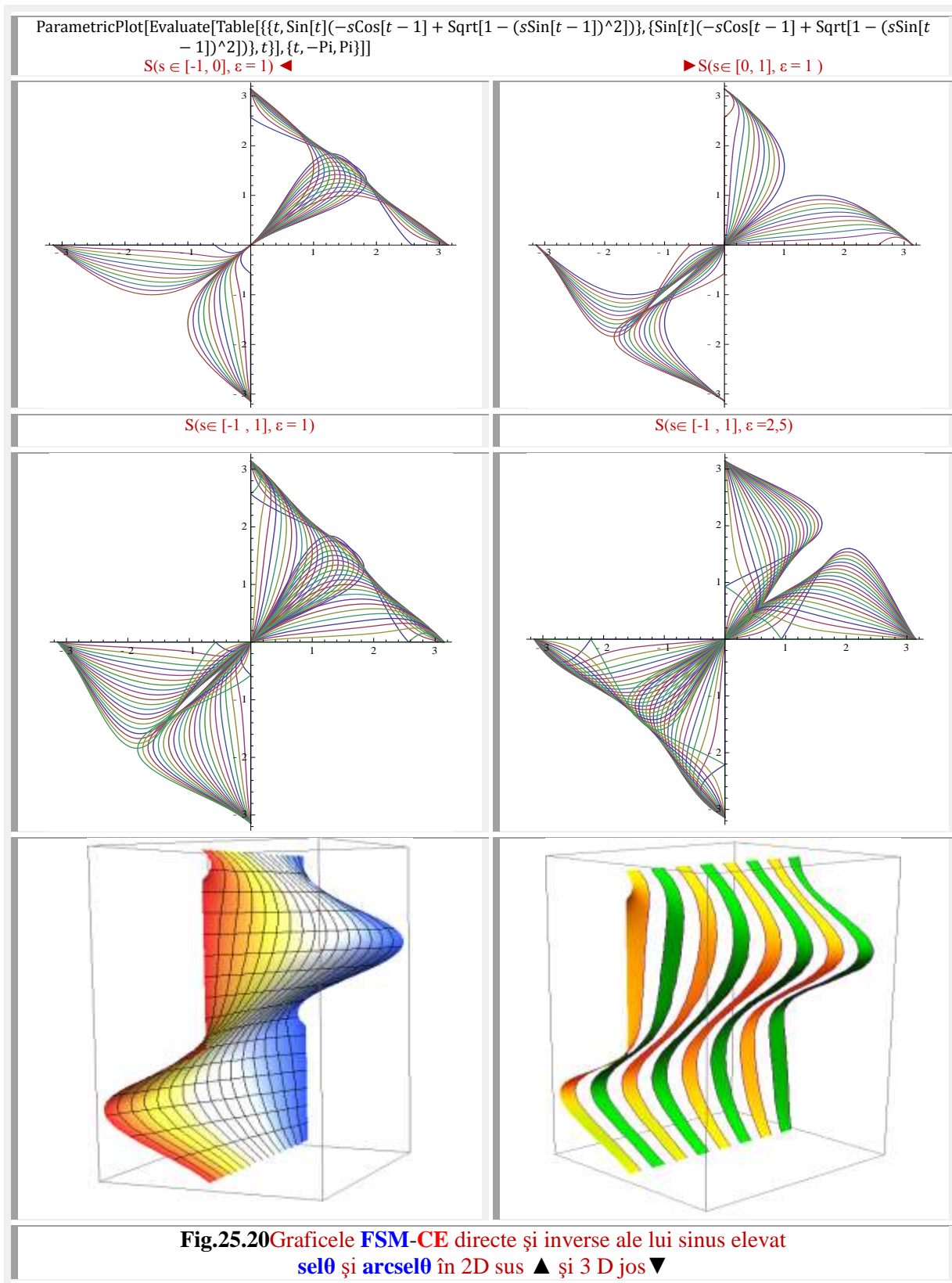




$$(9) \quad \begin{cases} X_{1,2}(\theta) = cel_{1,2}\theta = x_{1,2}(\theta) \mp s \cdot cose \rightarrow cel_{1,2}(\theta) = cex_{1,2}\theta \mp s \cdot cose \\ Y_{1,2}(\theta) = sel_{1,2}\theta = y_{1,2}(\theta) \mp s \cdot sine \rightarrow sel_{1,2}(\theta) = sex_{1,2}\theta \mp s \cdot sine \end{cases}$$

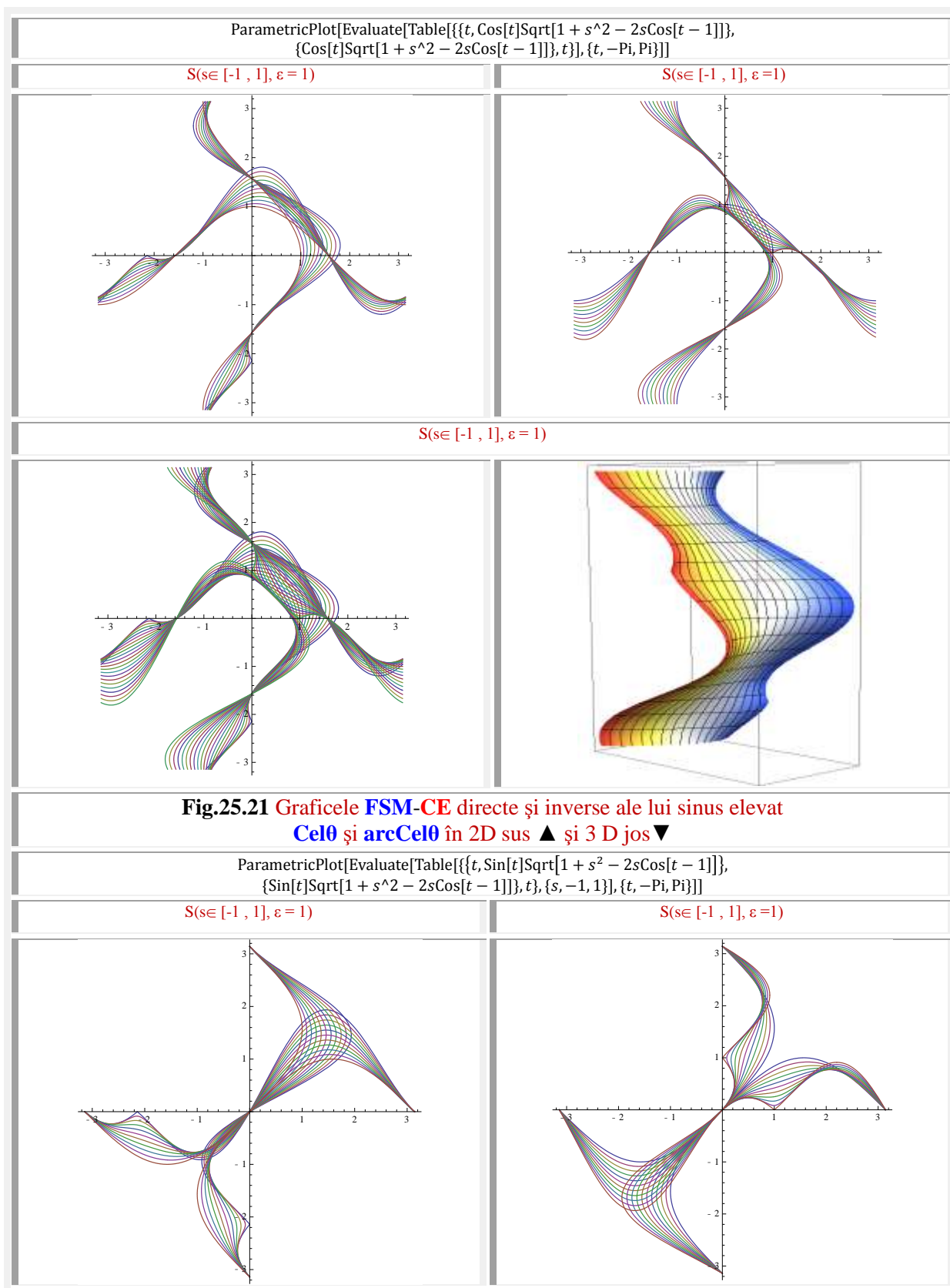
Totodată, așa cum rezultă din schița explicativă (Fig. 25.13), funcțiile ale căror expresii nu depind de poziția centrului $C(0,0)$, ci de poziția excentrului $S(s, \epsilon)$, ca $aex\theta$ și $Aex\alpha$, $bex\theta$ și $Bex\alpha$, $rex\theta$ și $Rex\alpha$, $dex\theta$ și $Dex\alpha$ sunt aceleași atât ca funcții **excentrice** cât și ca funcții **elevate** și **exotice**.

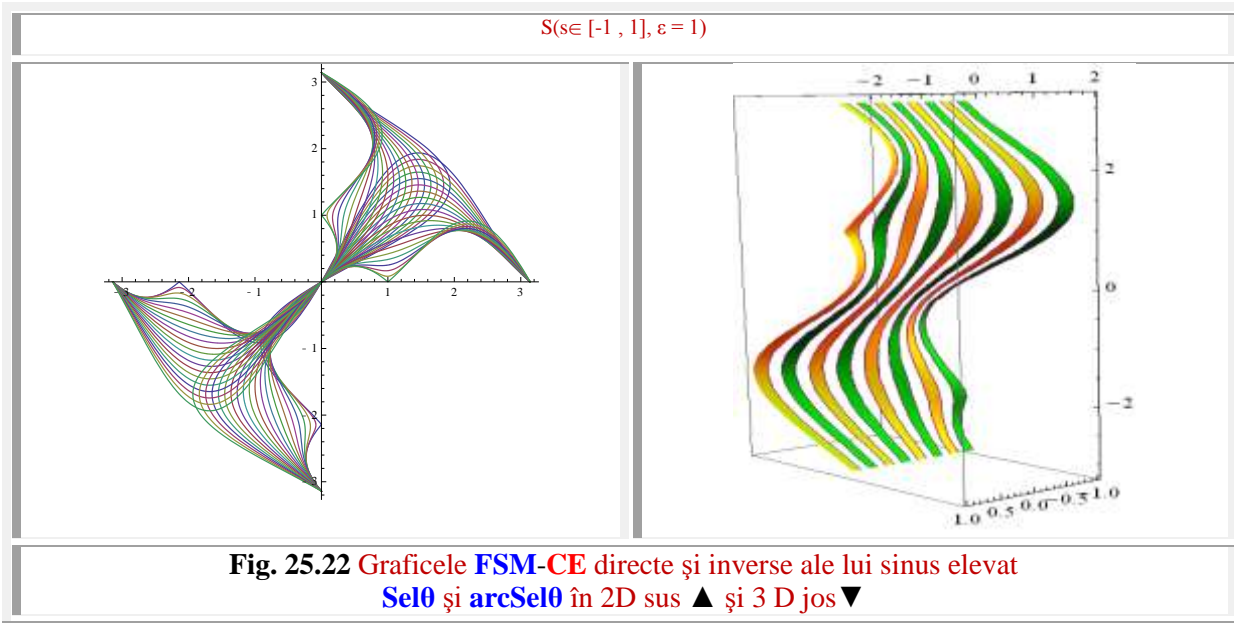
De aceea, funcțiile elevate inverse se rezumă la funcțiile cos, sin, tan, cot ș.a., adică cel0 și Cel α , sex θ și Sel, tex θ și Tel, ctex θ și Ctel, ș.a. a căror inverse sunt arccel θ , arccel α , arctel θ , arctel α , ș.a. ca funcții de variabila excentrică și arcCel α , arcSel α , arcTel α , arcCtel α , ș.a. ca funcții de variabilă centrică α .



Graficele funcțiilor elvate directe și inverse cel_0 și arcel_0 sunt prezentate în **figura 25.14** în 2D și, pentru o înțelegere mai profundă, și în 3D, iar în **figura 25.15** sunt prezentate, în 2D și în 3D, graficele funcțiilor sel_0 și arcel_0 .

25.6 FUNCȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE ELEVATE INVERSE DE VARIABILĂ CENTRICĂ α





Motto: „Oamenii se tem de gândurile originale mai mult decât de orice altceva, mai mult decât de ruină, mai mult decât de moarte.”

Bertrand Russel

Capitolul 25

FUNȚII SUPERMATEMATICE **bex**, **Bex** ȘI **aex**, **Aex** CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE (FSM-CEI)

25.1 REMEMBAR : FUNȚII CIRCULARE CENTRICE INVERSE

O funcție $f: X \rightarrow Y$ este **inversabilă** sau **biunivocă** dacă există o funcție $g: Y \rightarrow X$, astfel încât $f \circ g = 1Y$ și $g \circ f = 1X$, în care $1M: M \rightarrow M$, $1M(x) = x$, oricare ar fi x din M , se numește **aplicația identică** a mulțimii M . În cazul în care $X = Y$, are loc egalitatea $f \circ g = g \circ f = 1X$.

Mulțimea funcțiilor monotone, crescătoare și descrescătoare, este conținută în mulțimea funcțiilor inversabile. O funcție monotonă este inversabilă, pe când o funcție inversabilă nu este neapărat monotonă.

Dacă există g , ca inversă a funcției directe f , atunci are loc echivalența

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y),$$

în care x parcurge domeniul de definiție X al funcției f , iar y , imaginea lui x prin funcția f , parcurge domeniul de definiție Y al funcției g sau codomeniul funcției f .

Fie funcția $f: X \rightarrow Y$, bijectivă. Inversa unei aplicații bijective este din nou bijectivă.

Funcția $g: Y \rightarrow X$, care asociază fiecărui element din y din Y elementul unic x din X , astfel încât $f(y) = x$, se numește funcție inversă a funcției f și se poate nota cu $g = f^{-1}$.

Funcția **directă** f care are ca inversă funcția $f^{-1} = g$, (funcția **inversă** a lui f) se zice că este inversabilă.

Funcția directă $y = x$, care reprezintă ecuația primei bisectoare, are drept funcție inversă funcția $x = y$. Ca urmare, prima bisectoare este, în același timp, și funcție directă și funcție inversă.

Toate funcțiile inverse au graficele ca simetrice ale funcțiilor directe față de prima bisectoare.

Se notează cu **Arcsinx** mulțimea tuturor arcelor a căror sinus este egal cu x și cu **arcsinx**, **arccosx**, **arctanx** etc. determinările principale ale inverselelor funcțiilor **sinx**, **cosx**, **tanx**, etc.

OBSERVAȚIE :

Notățiile determinărilor principale ale funcțiilor inverse, cele monogene sau univoce, sunt uneori invers notate în alte culturi decât în cea matematică românească.

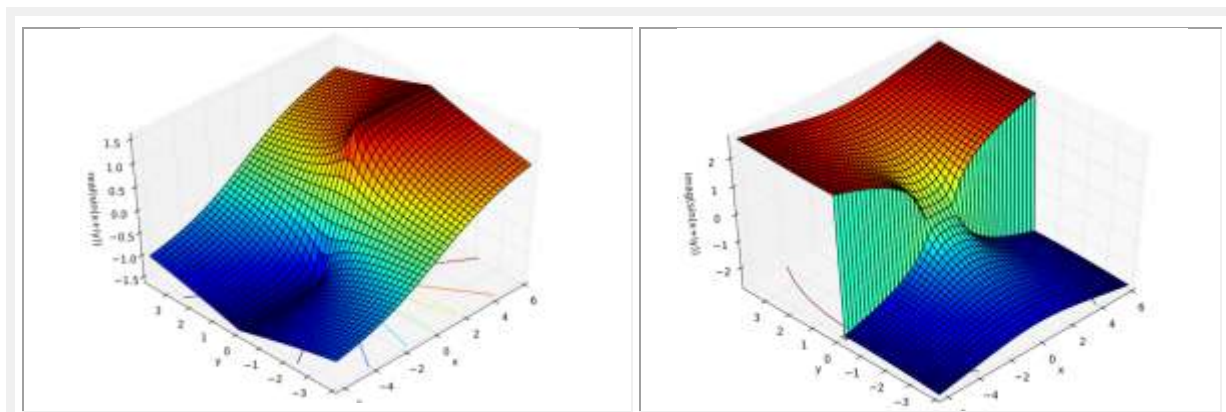
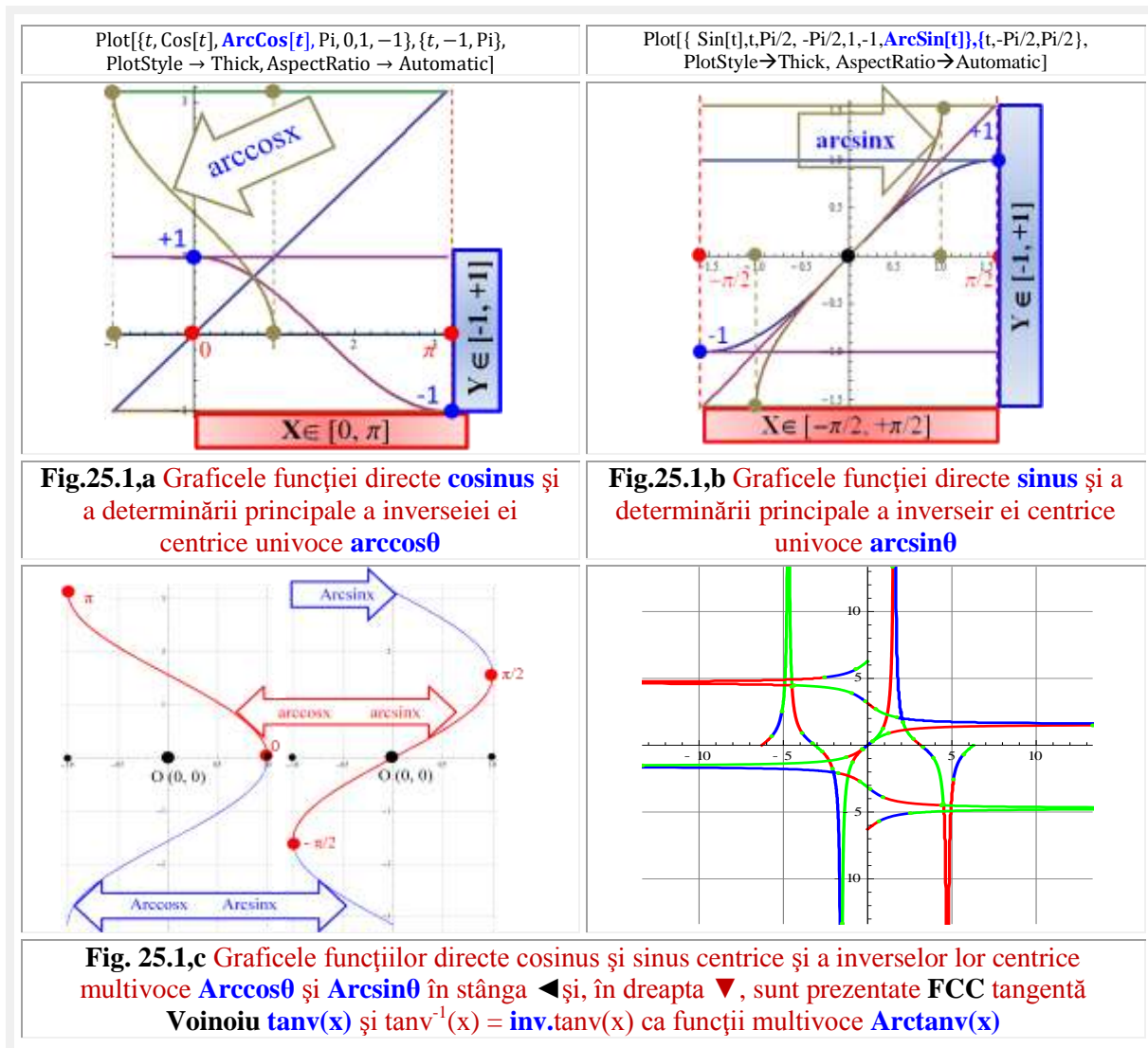
Astfel, în continuare, se vor nota numai cu **arc** determinările principale ale funcțiilor inverse, cele uniforme sau univoce și cu **Arc** funcții inverse multiforme sau multivoce din domeniul matematicii centrice (MC), atât cele de arc simplu cât și cele de arc multiplu sau multivoce.

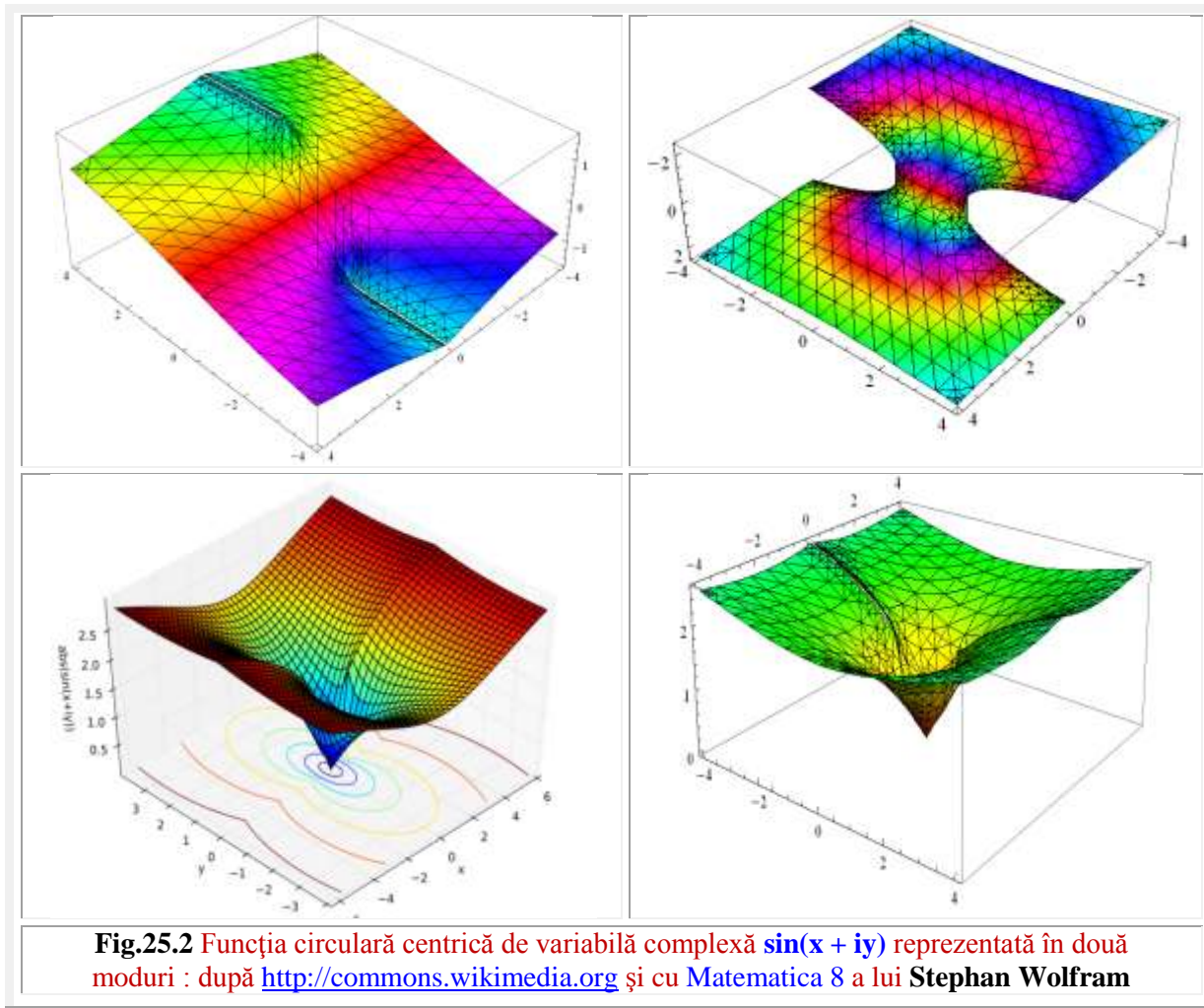
$$\text{Astfel, } \text{Arccosz} = 2k\pi \pm \text{arccosz} \quad \text{și} \quad \text{Arcsinz} = \begin{cases} 2k\pi + \text{arcsinz} \\ (2k+1)\pi - \text{arcsinz} \end{cases},$$

cu notațiile recomandate în **Nicolescu, L.J.** și **Stoka M.I.** “MATEMATICI PENTRU INGINERI”, Ed. Tehnică, 1969, pag. 130-131.

Aceste notații **convenționale** sunt **inverse** celor din unele scrieri de specialitate din literatura germană, cum este **KLEINE ENZYKLOPÄDIE MATHEMATIK**, VEB Verlag Enzyklopädie, Leipzig, 1968, pag. 279, ca și a celei din literatura engleză, “**MATHEMATICS AT A GLANCE**” după cari a fost tradusă lucrarea “**MICĂ ENCICLOPEDIÉ MATEMATICĂ**”, Ed. Tehnică, Buc. 1980, pag. 279. Dacă nu cumva în **figura 10.1.20** explicativă, din această lucrare, s-a strecurat o greșală, deoarece acolo notațiile sunt inverse decât cele din **figura noastră 25.1,c** stânga ◀.

Funcția circulară / trigonometrică directă **centrică cosinus**, restricționată la intervalul $X \in [0, \pi]$, adică $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$, $f(x) = y = \cos x$ este inversabilă și admite ca **inversă**, notată **arccos** (arccosinus), pe $g = f^{-1} : [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$, $g = f^{-1}(y) = x = \text{arccos } y$, cu graficul din figura 25.1,a și inversele **arccosx** și **arcsinx** în figura 25.2, iar în dreapta ► **coq θ** și **arccoq θ** , precum și funcțiile cvadrilobe **siq θ** și **arcsi $q\theta$** . Inversabilă și admite ca **inversă**, notată **Arcsinus**, pe $g = f^{-1} : [-1, +1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, $g = f^{-1}(y) = x = \text{Arcsin } y$, cu graficul din figura 25.1,c dreapta ►.





Oricare funcție poate fi de variabilă reală sau de variabilă complexă $z = x + i.y$, care au și ele inversele lor, evident, tot de variabilă complexă.

25.2 INTRODUCERE.

Denumirea de *arcfuncție* ($\arccos x$, $\arcsin x$, $\text{Arctan} x$, $\text{Arccot} x$ etc.) provine din limba latină. *Arcus cuius sinus x est* înseamnă *arcul al cărui sinus este egal cu x*.

Deoarece funcțiile trigonometrice / circulare directe sunt funcții de arc, din însăși denumirea funcției **Arc / arc** rezultă că ea este inversa funcției directe.

Ca urmare, ecuațiile parametrice ale funcției directe **sinx** sunt

$$(1) \quad \begin{cases} x = x \\ y = \sin x \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{\sin x}, \quad \mathbf{\sin t = z}$$

iar a inversei ei, **arcsin x**, pentru $x \in [0, \pi]$ și $\text{Arcsin} x$ pe toată axa reala x este

$$(2) \quad \begin{cases} x = \sin x \\ y = x \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{\arcsin x = \sin^{-1}x}, \quad \mathbf{t = \text{Arcsin} z = (-1)^k \arcsin z + k\pi.}$$

$$(2') \quad \mathbf{\text{Arcsin} z = -i \cdot \text{Arcsh} iz}$$

Pe cât de simplu se pot obține graficele funcțiilor inverse, în coordonate parametrice, pe atât de complicat se pot obține expresiile lor analitice, deoarece este necesar să se rezolve unele ecuații algebrice neliniare. Pentru a căror soluționare printr-o metodă exactă, numerică (!), extrem de simplă și rapidă vă recomandăm *“Metoda determinării succesive a cifrelor consecutive ale unui număr”* soluție din *“MATEMATICA ATOMICA”* www.cartiaz.ro, dar numai pentru soluții numerice.

Astfel, dacă expresia funcției directe $\sin x$ este

(3) $y(x) = \sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + \dots$ și nu este chiar simplă !
 Pentru determinarea expresiei funcției inverse, este necesar să se rezolve ecuația neliniară

(4) $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + \dots - y = 0 \quad \rightarrow \quad x(y) = ?$

Soluția ei este, după cum se știe

(5) $x(y) = \arcsin y = y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 + \dots \quad |y| < \frac{\pi}{2}$

Dar soluția poate fi dată și în serii hipergeometrice astfel

(6) $\arcsin z = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz = \int_0^x {}_1F_0\left(\frac{1}{2};; z^2\right) dz = z {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) \Big|_0^x = x {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)$

în care seria ${}_1F_0 = {}_1F_0(a; ; z) = (1-z)^{-a} = \frac{1}{(1-z)^a}$ a cărei ecuație diferențială este $\frac{d}{dz}w = (z \frac{d}{dz})w$ sau

$(1-z) \frac{dw}{dz} = aw$ și a cărei soluție este $w = k(1-z)^{-a}$ este un caz particular al seriilor hipergeometrice.

Se mai știe că o legătura între funcția inversă **Arcsin** și logaritmul natural **ln** este

(6') $\text{Arcsin } x = -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2})$.

În privința determinării analitice a inversei unei funcții există și excepții, adică funcții a căror inverse se determină imediat.

O astfel de funcție este **FSM-CE beta excentrică** sau $\beta(\theta) = \text{bex}\theta$, de variabilă excentrică θ , una din cele mai importante **funcții supermatematice**, a cărei expresie este

(7) $y(\theta) = \beta(\theta) = \theta - \alpha(\theta) = \text{bex}\theta = \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]$

astfel că rezolvarea ecuației

(8) $y(\theta) - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] = 0$, sau $y(\theta) = \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]$

este simplă. Scriind

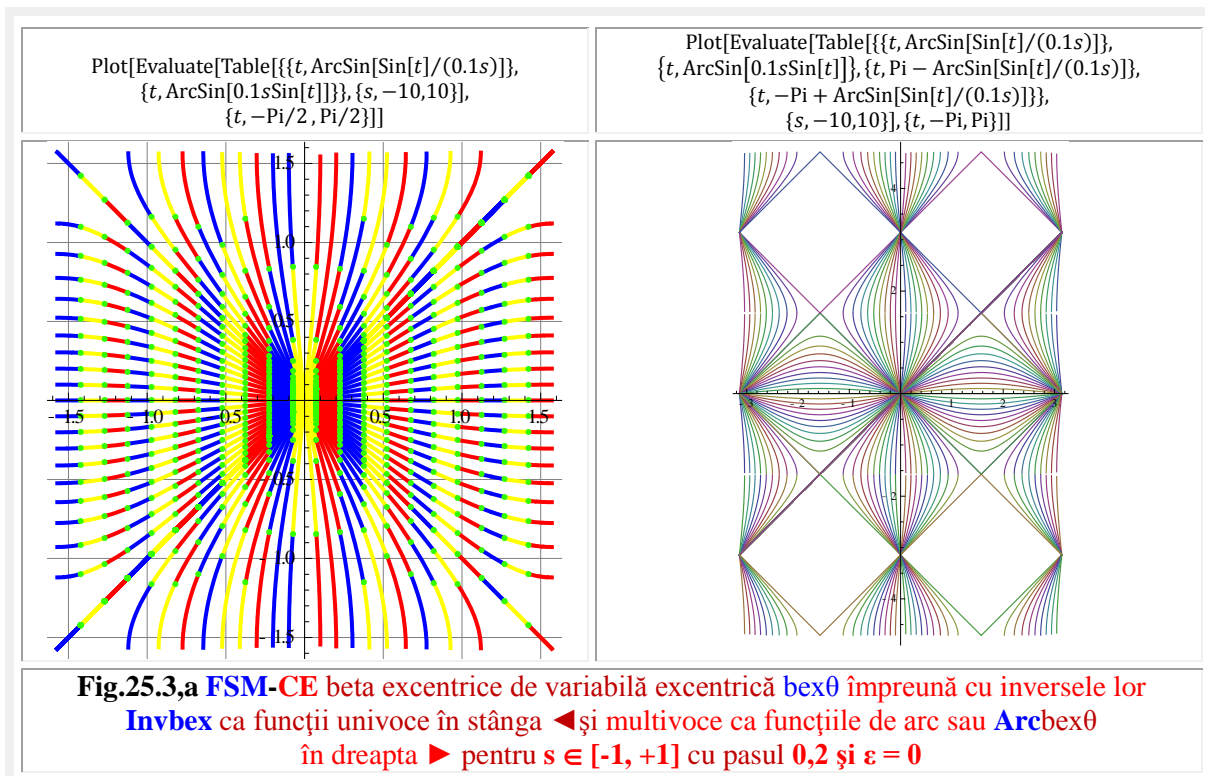
(9) $\sin y(\theta) = \sin\{\arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]\} \rightarrow \sin y(\theta) = s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)$

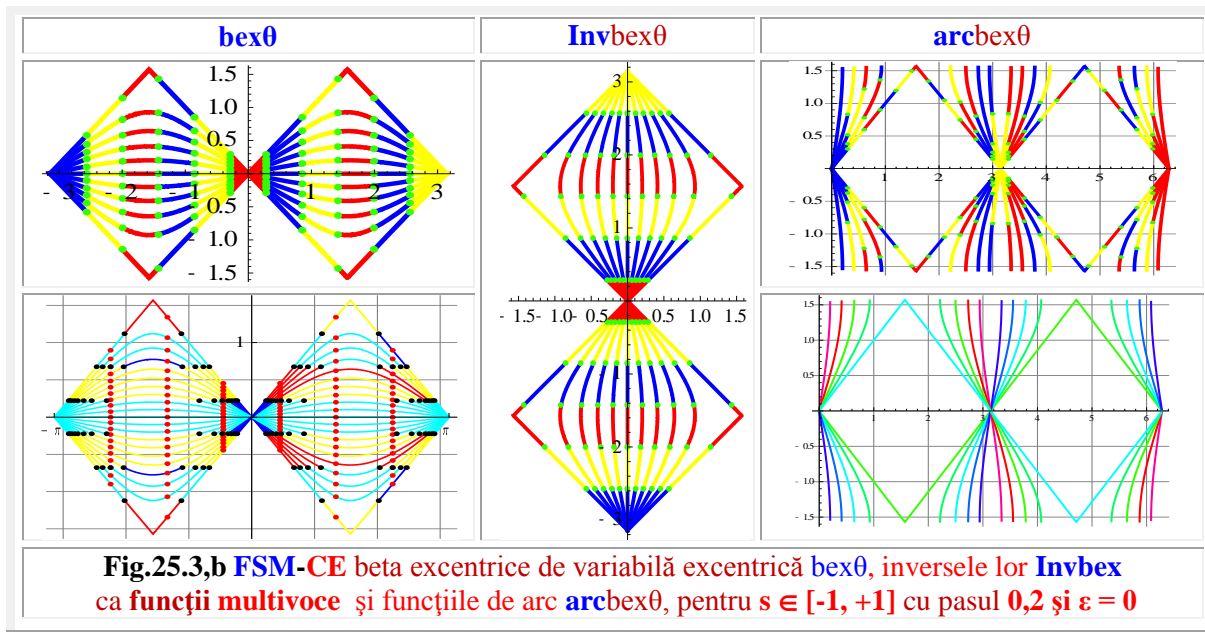
(10) $(\theta - \varepsilon) = \arcsin \frac{\sin y}{s} \rightarrow \theta(y) = \arcsin \frac{\sin y}{s} + \varepsilon$,

care este inversa lui $\text{bex}\theta$, adică

(11) $\text{invbex}\theta = \text{bex}^{(-1)}\theta = \arcsin \frac{\sin y}{s} + \varepsilon = \text{Arcbex}\theta = \text{arcbex} \neq \text{arc}(\text{bex}\theta) =$

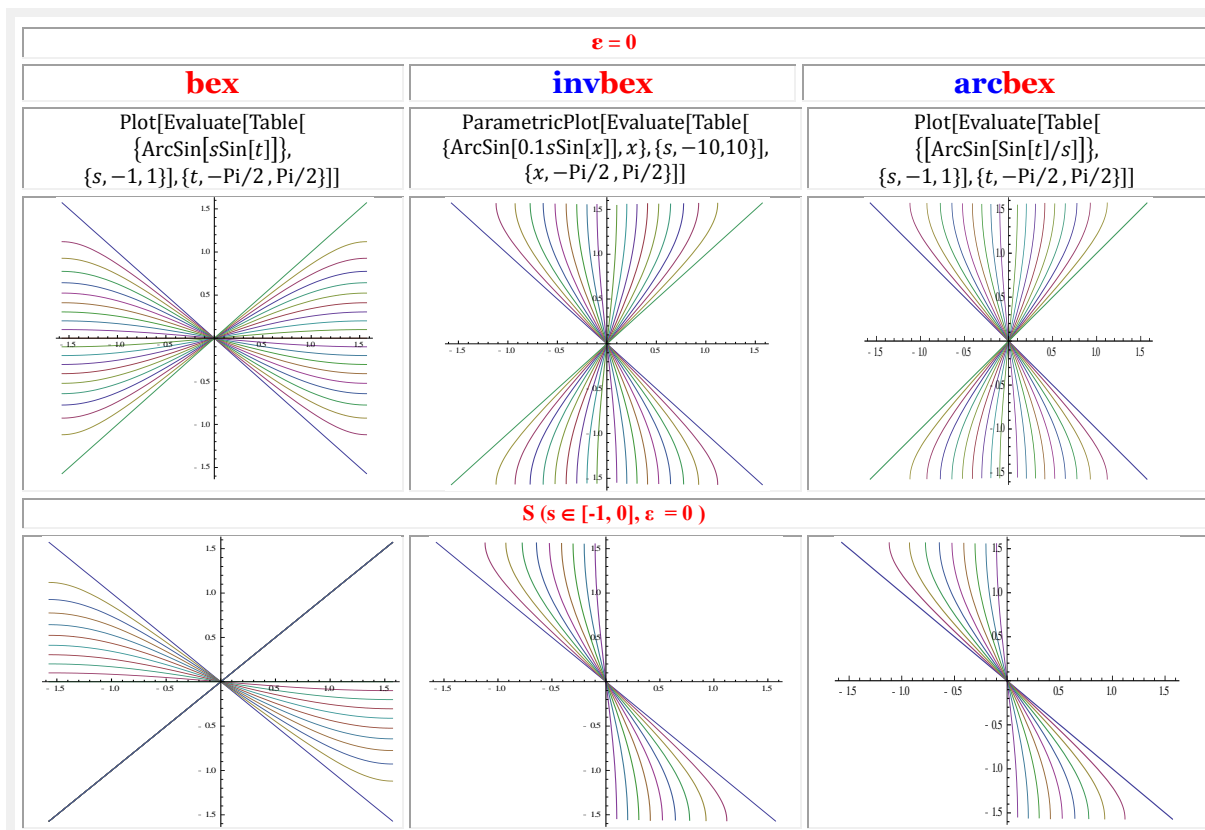
$= \text{arc}[\arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]]$, (dacă **funcțiile clasice de arc** $\text{Arcbex}\theta$ și arcbex ar fi cunoscute, altele decât (10), dar nu sunt), ceea ce poate fi verificat în **figura 25.3,a** și **25.3,b**.

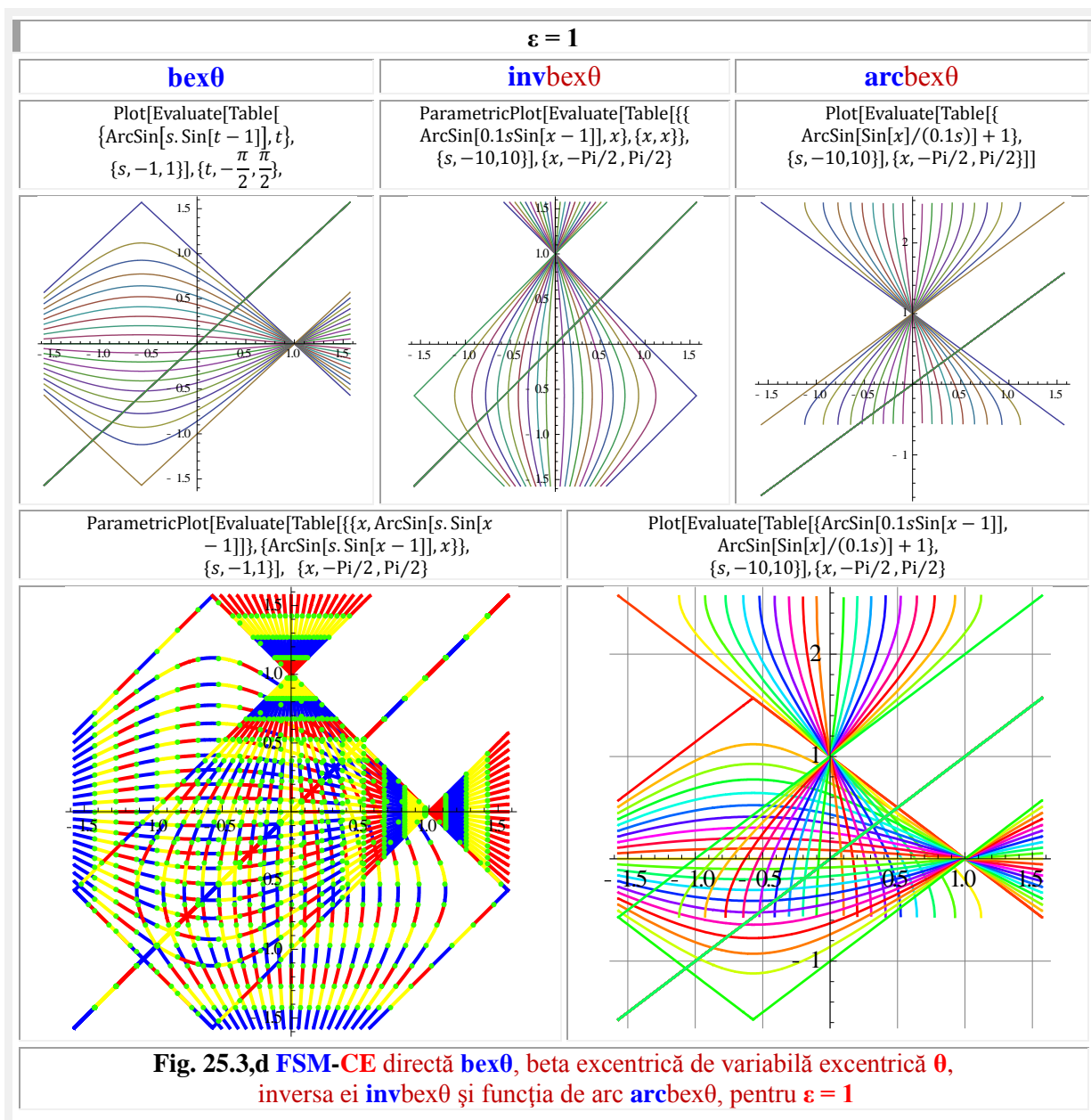
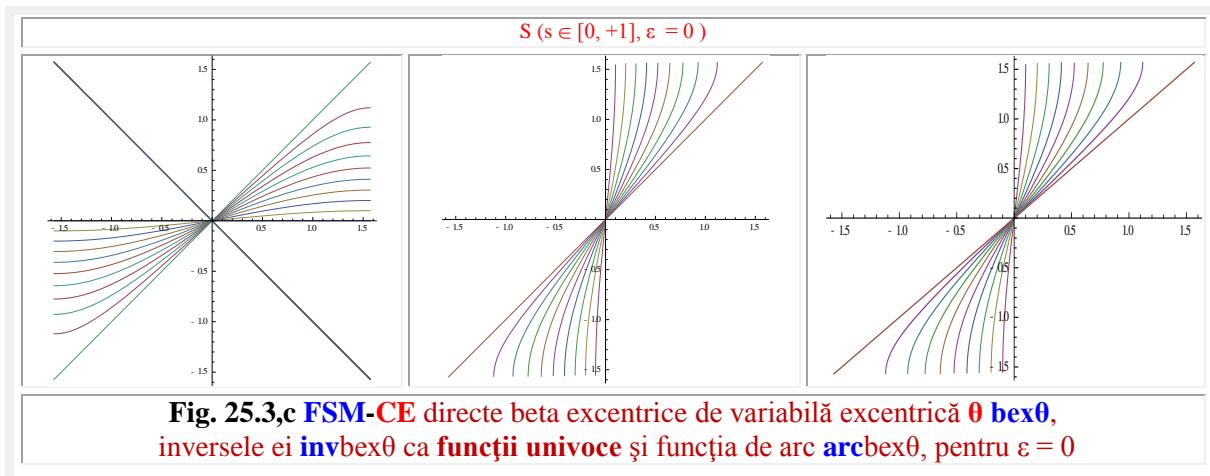




De ce trebuie notată inversa lui $bex\theta$ cu **inv** sau **Inv** și nu cu **arc** sau **Arc** ?

Pentru că $arcbex\theta \neq invbex\theta$ ca și $Arcbex\theta \neq Invbex\theta$ așa cum se poate observa din graficele din figura 25.3,a. Notațiile cu majuscule (**Inv** și **Arc**) corespund funcțiilor inverse multivoce, ca cele reprezentate în figura 25.3,a► și 25.3,b, iar cele univoce, notate **inv** și **arc**, în figurile 25.3,c și 25.3,d, din figurile 1,c. Se observă facil că, inversele sunt simetrice funcțiilor, ceea ce corespunde definiției de inversă, iar arcul nu mai respectă această cerință, deoarece funcția **arc** se calculează cu o serie în care, pentru cazul lui $bex\theta$ se înlocuiește variabila $x \equiv \theta$ cu funcția $\beta(\theta) = \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]$ în care $\rightarrow S(s, \varepsilon)$ este un excentru în planul cercului unitate.





În figura 25.3,c au fost reprezentate FSM-CE beta excentrice **bex** ◀ în stânga, precum și inversele ei **invbex** ▶ în centru, iar funcțiile **arcbex** în extrema dreaptă ▶ numai ca **funcții univoce**, în domeniul $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

În această figură au fost reprezentate funcțiile pentru un excentru **S** plasat pe axa Ox, adică de excentricitate unghiulară nulă ($\varepsilon = 0$) și de excentricitate liniară numerică **s** în domeniul $s \in [-1, 1]$ sus ▲, $s \in [-1, 0]$ la mijloc — și $s \in [0, 1]$ jos ▼.

FSM-CE beta excentrice **bex** a fost reprezentată pentru a se putea verifica / compara cu inversa ei și cu cea de arc.

Situația este asemănătoare și în domeniul complex: FSM-CE beta excentrice de variabilă complexă

(12) **bex** ($x + i.y$) = arcsin[s.sin(x + i.y)]

care are funcția inversă

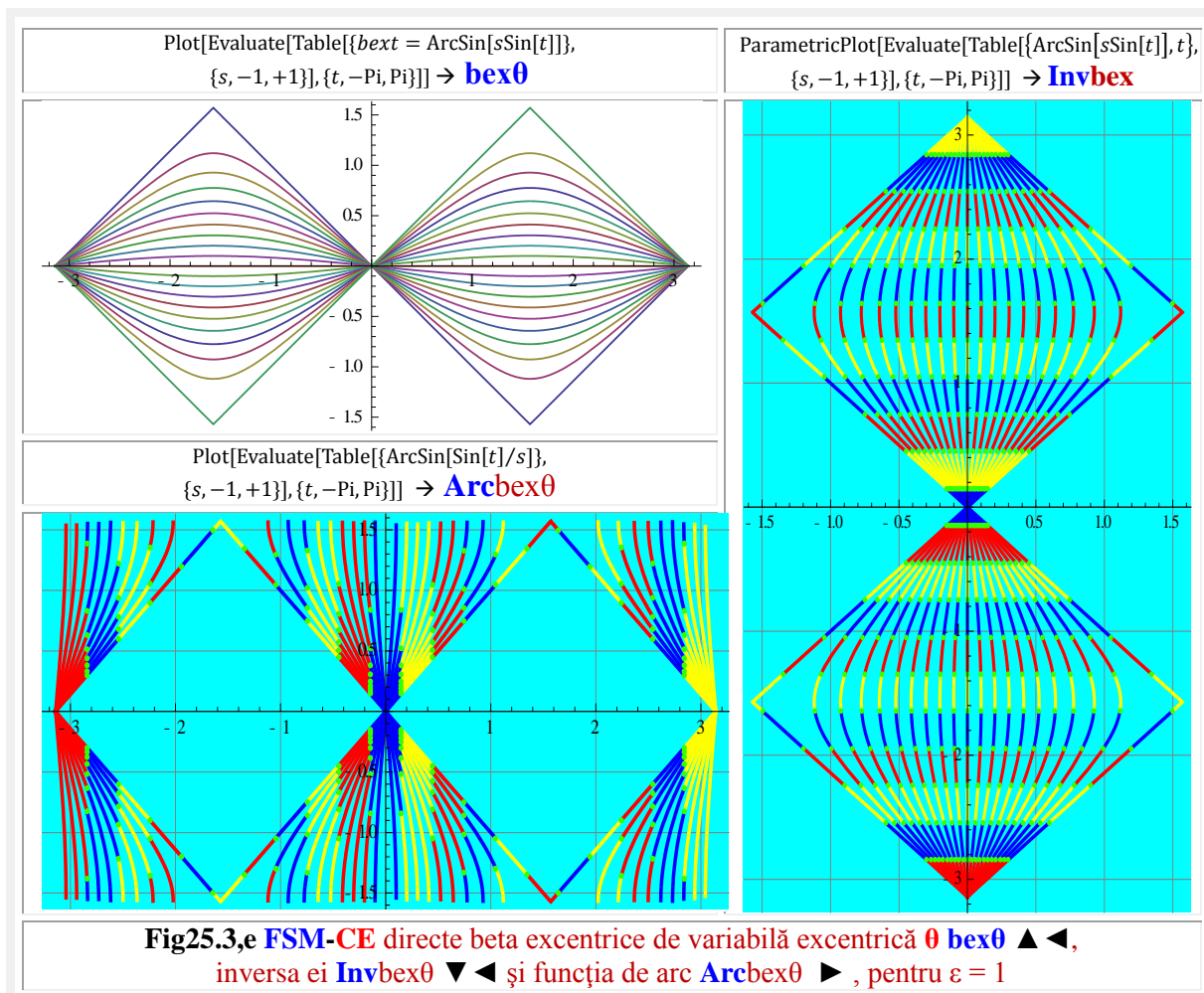
(13) $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{bex}(x + i.y) \\ (x + i.y) \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{invbex}(x + i.y) = \mathbf{bex}^{-1}(x + i.y) = \mathbf{arcbex}(x + i.y) = \arcsin\left(\frac{\sin(x + i.y)}{s} + \varepsilon\right)$

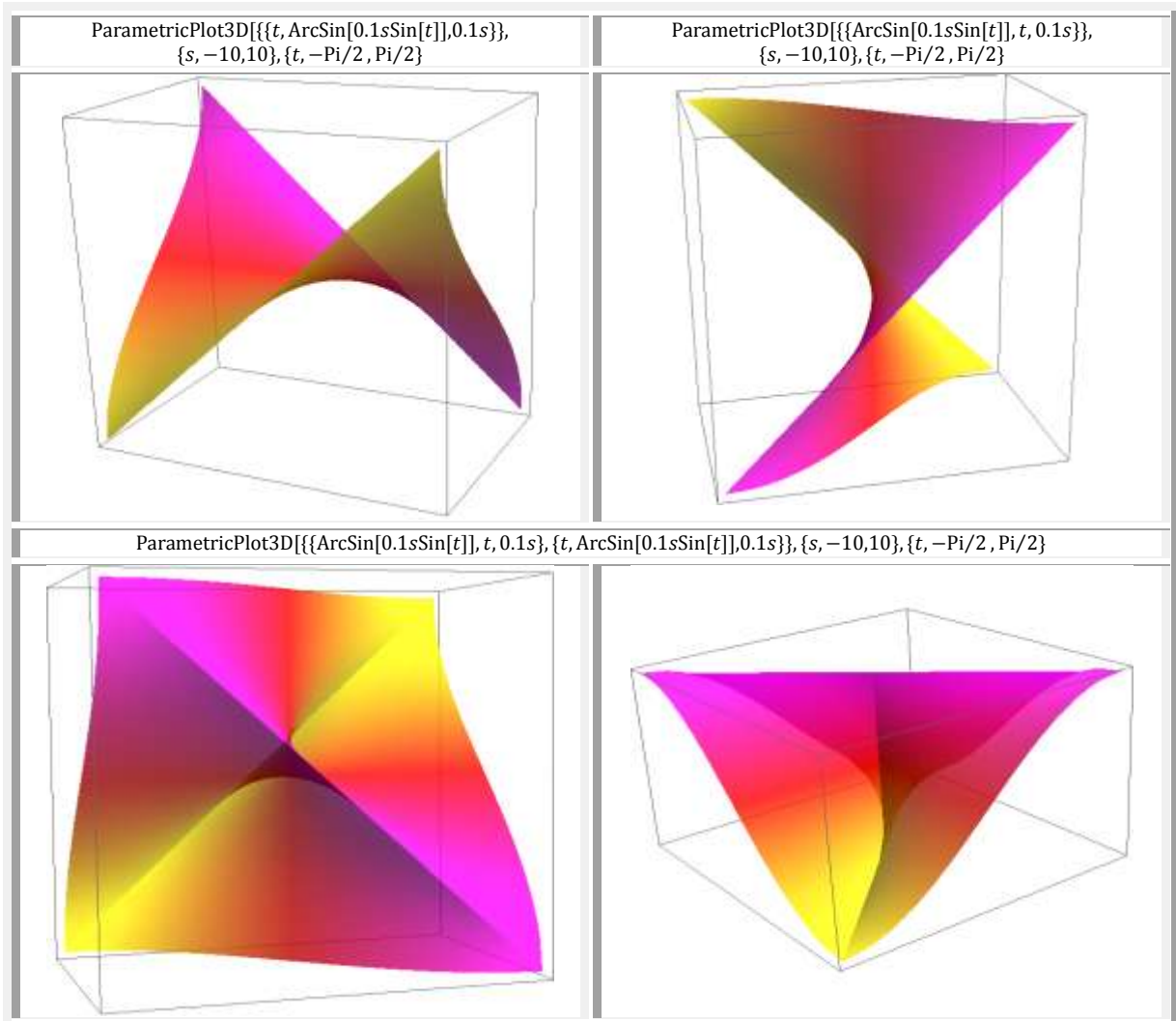
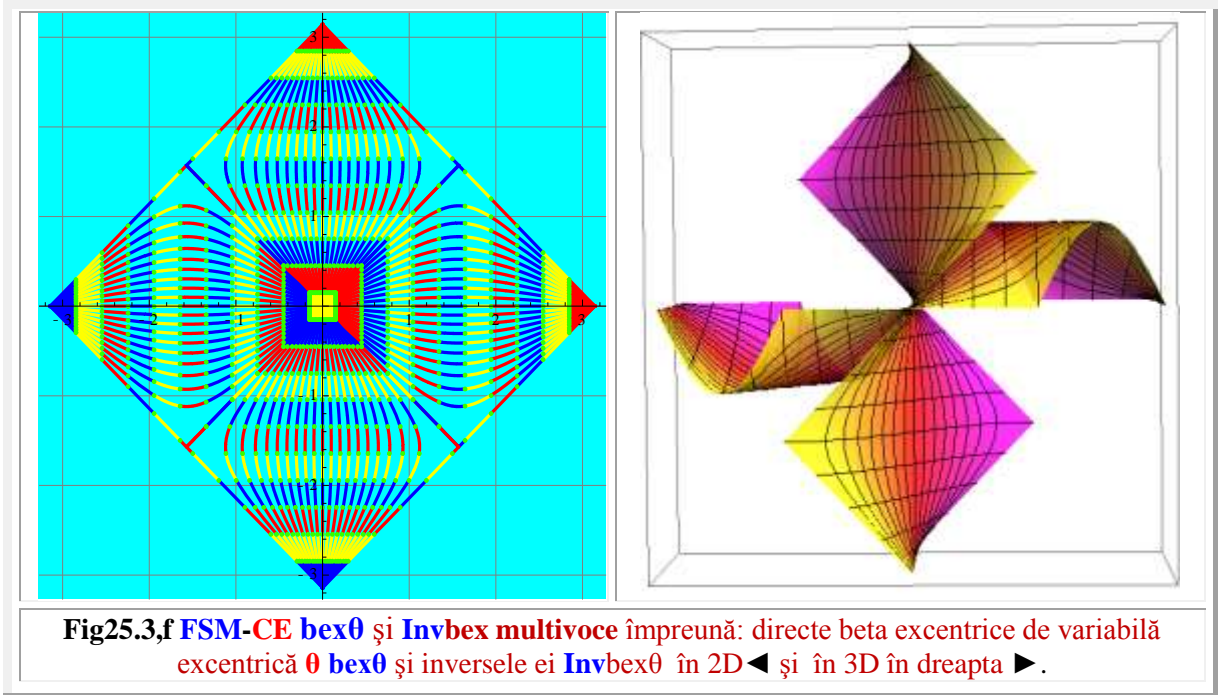
reprezentate în figura 25.3,b și a căror inverse clasice (funcții de arc clasice) sunt necunoscute

(14) **invbex**($x + i.y$) = arcsin $\frac{\sin(x+i.y)}{s}$

Pentru $\sin x$, de exemplu, din domeniul / intervalul $x \in [-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}]$, rezultă codomeniul lui $y = \sin x \in [-1 + 1]$, iar pentru $y = \arcsin x$, inversa lui $\sin x$, rezultă domeniul de definiție $x \in [-1, +1]$ și codomeniul funcției inverse $y = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}]$ (Fig.25.4,b).

Mai rezultă, totodată, că funcțiile directă și inversă sunt simetrice față de prima bisectoare și, în consecință, sunt inverse una alteia (Fig.25.3,f).





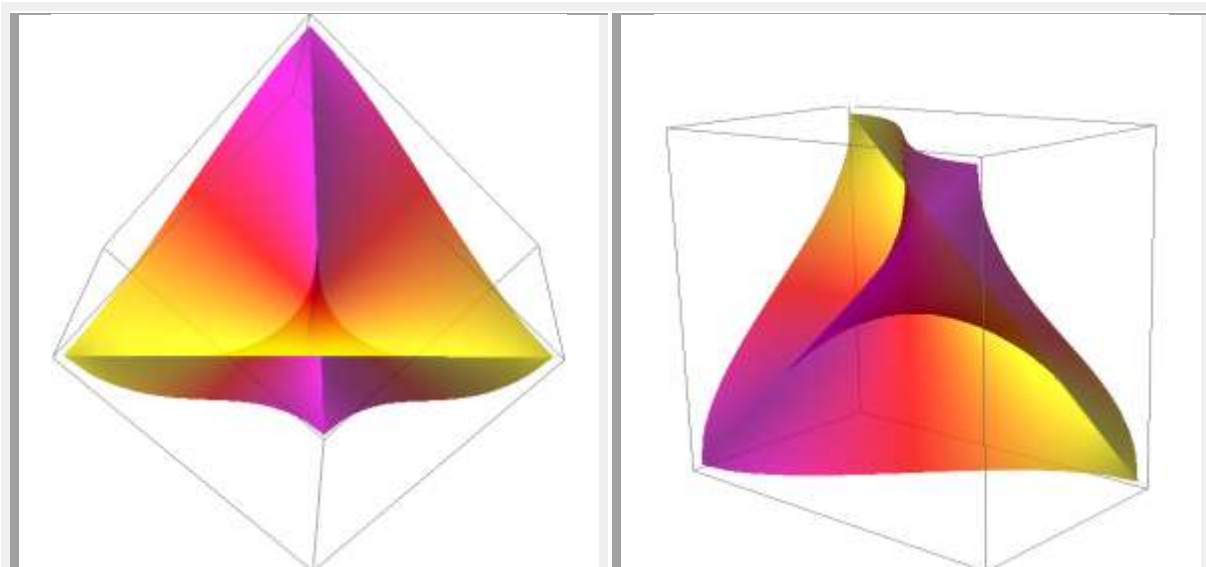
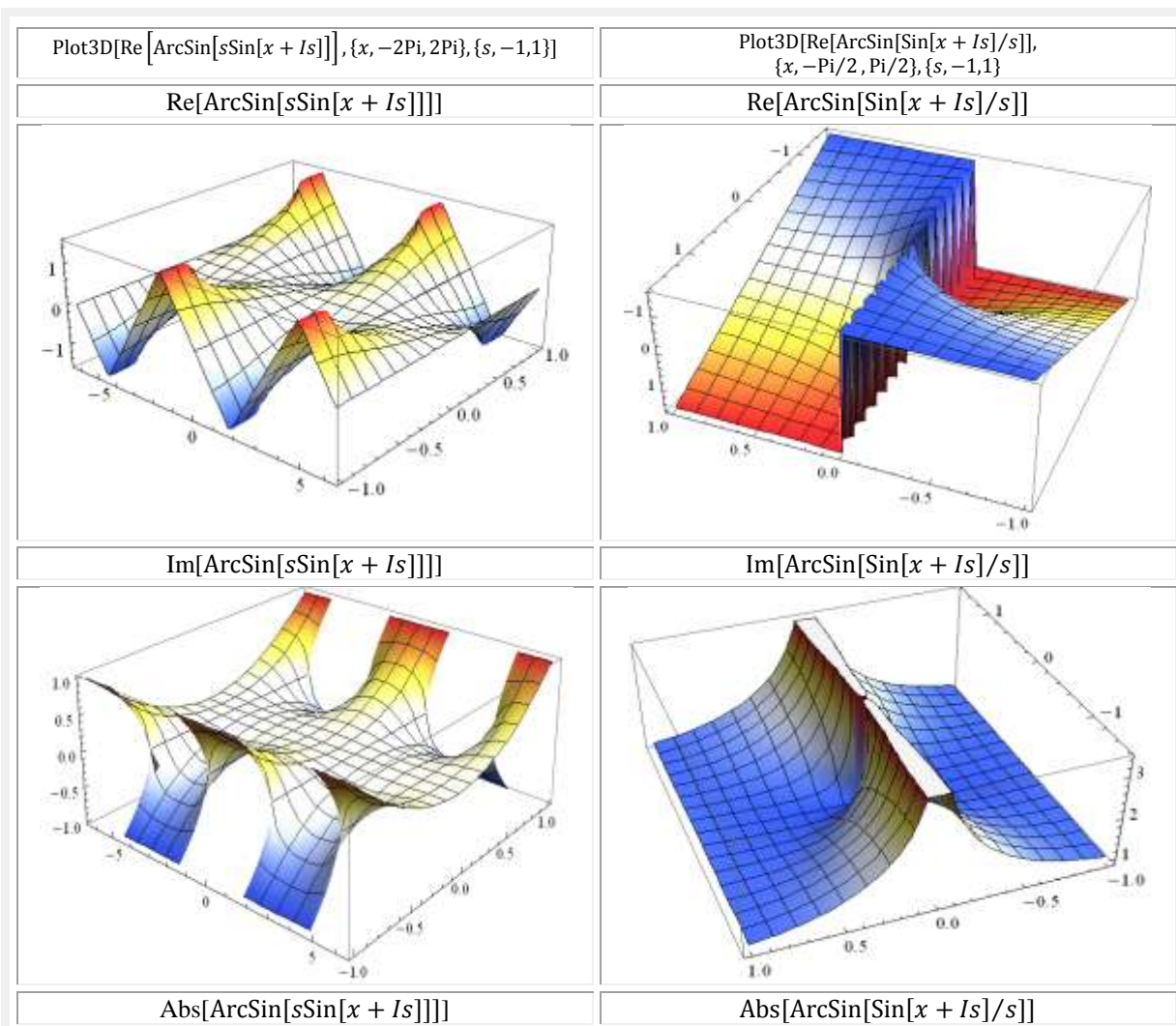
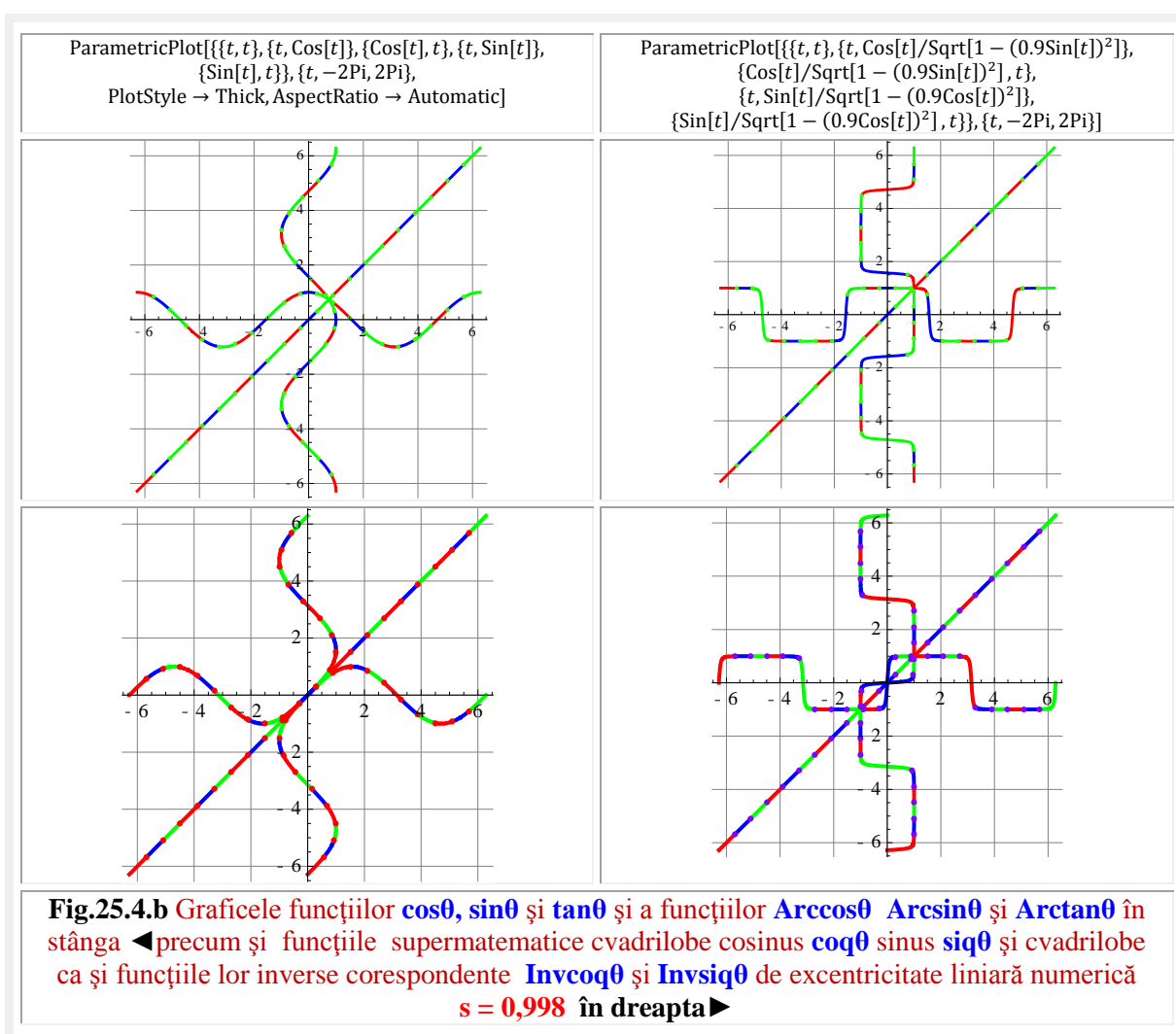
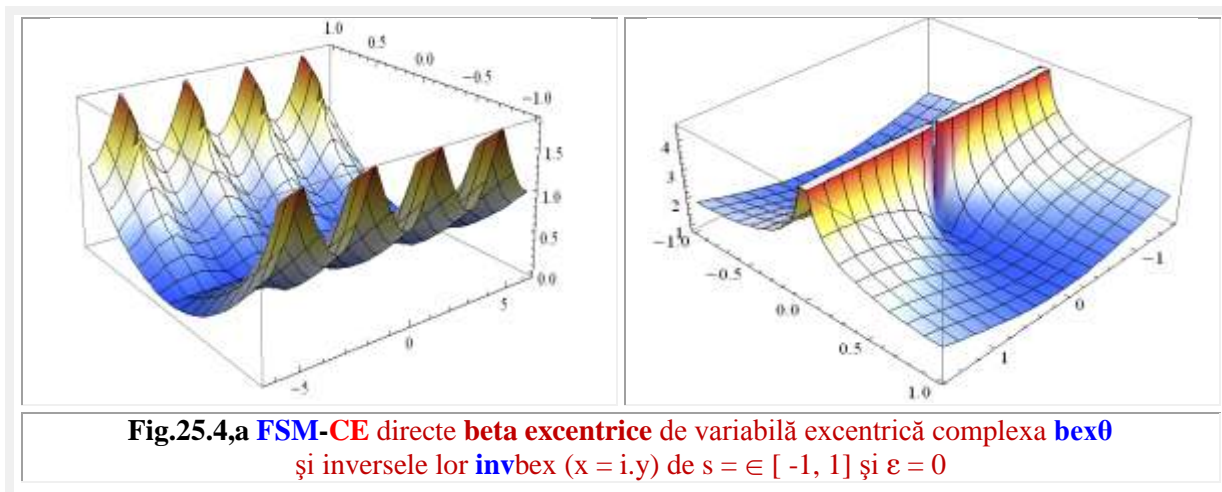


Fig25.3.g FSM-CE $\text{bex}\theta$ și Invbex univoce împreună: directe beta excentrice de variabilă excentrică $\theta \text{ bex}\theta \blacktriangleleft$ și inversele ei $\text{Invbex}\theta \blacktriangleright$ în 3D (în 4 vederi)





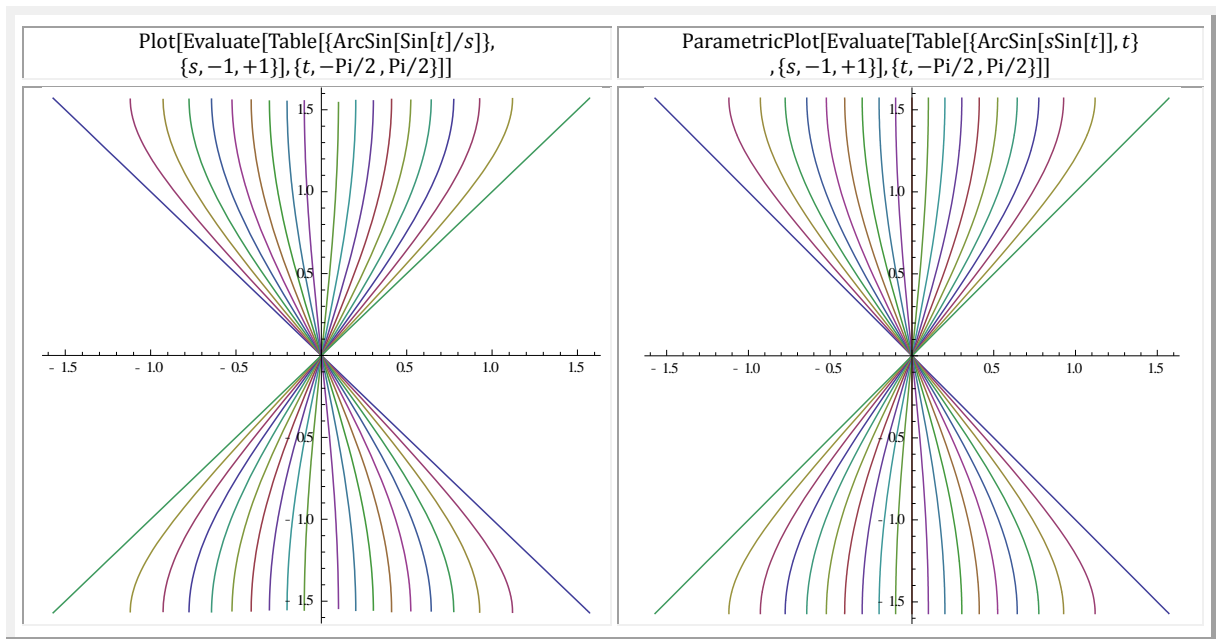
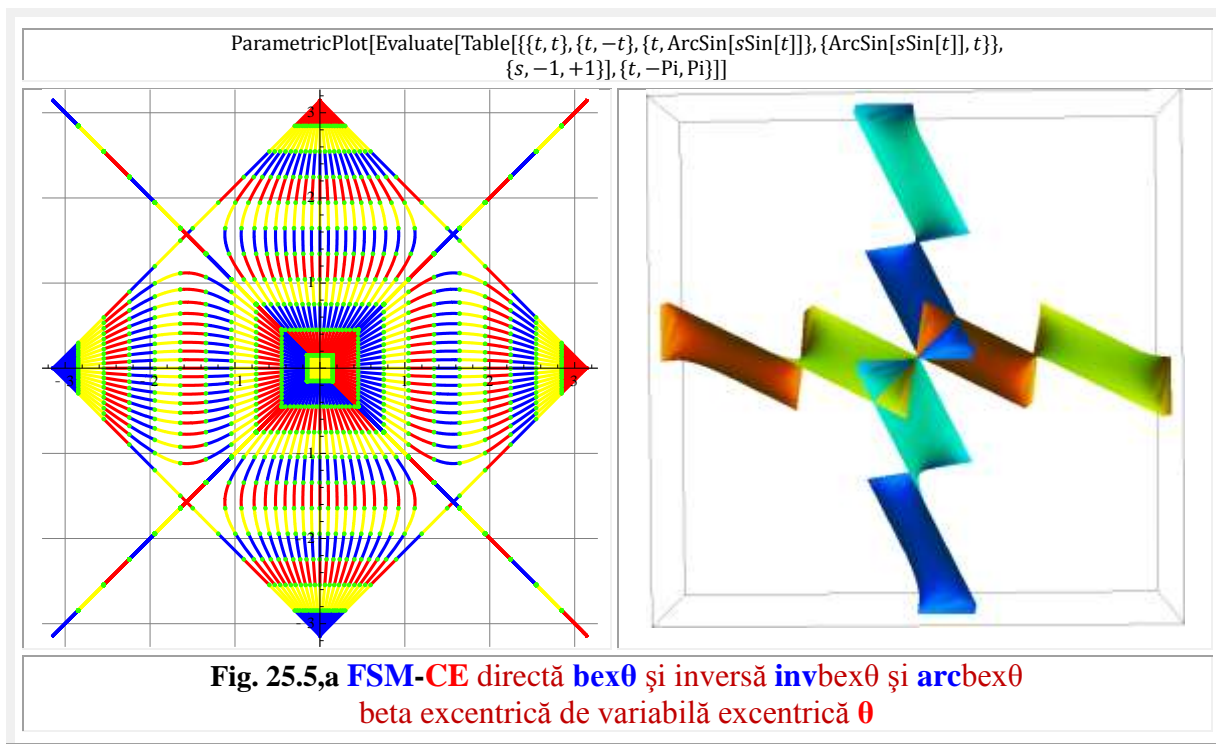
FSM-CE directe beta excentrice de variabilă reală și inversele lor au fost reprezentate împreună în 3D în 4 vederi în figura 25.3,g doar pentru a sublinia frumusețea obiectelor astfel obținute.

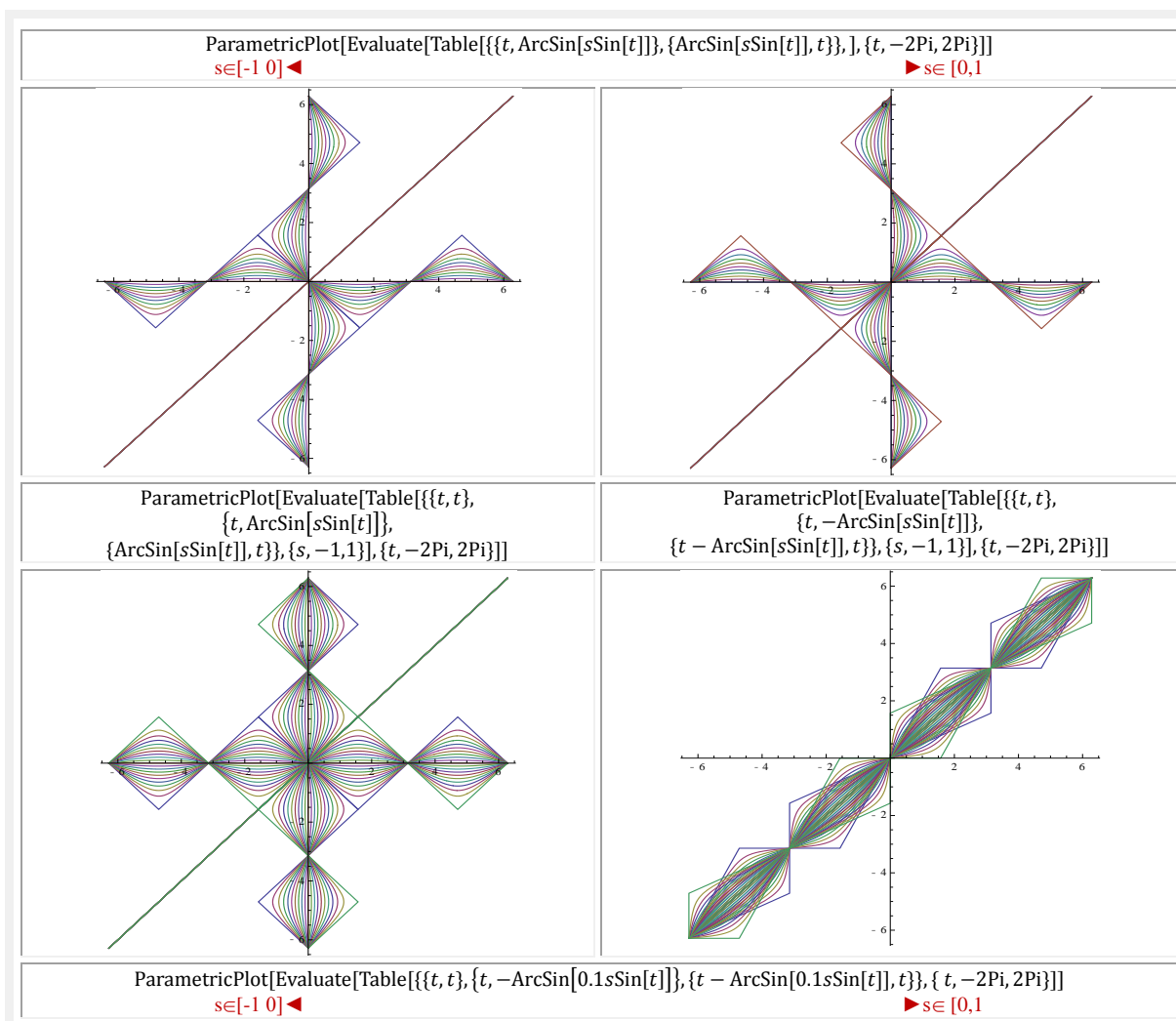
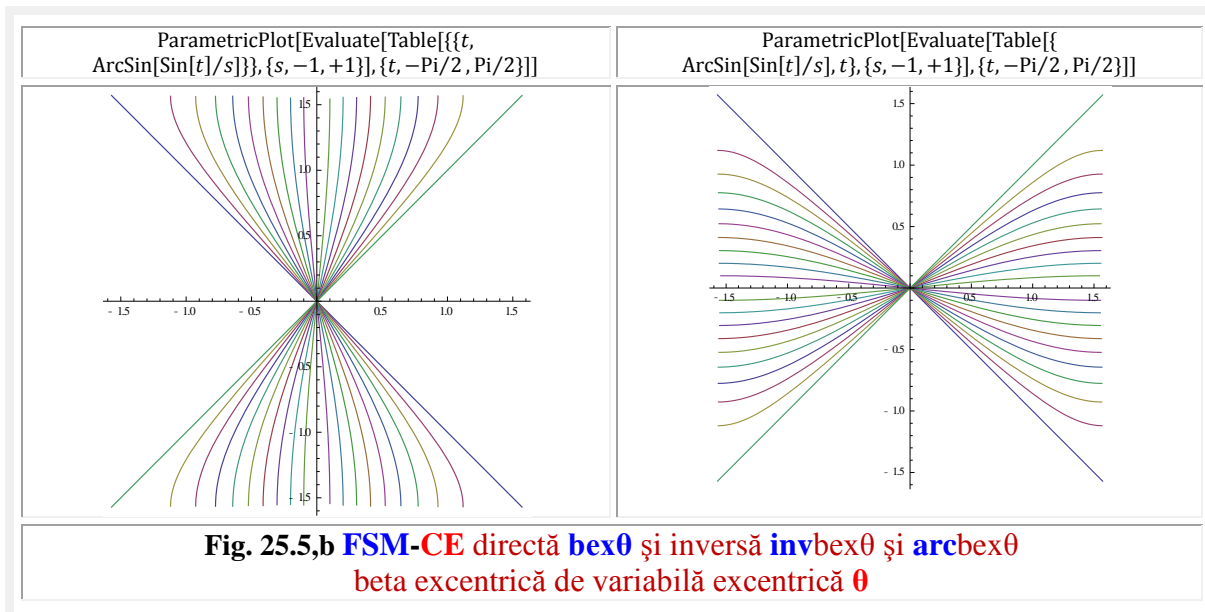
S-a insistat mult asupra FSM-CE directe beta excentrice de variabilă reală și a inverselor lor deoarece ele stau la baza edificiului supermatematicii (SM).

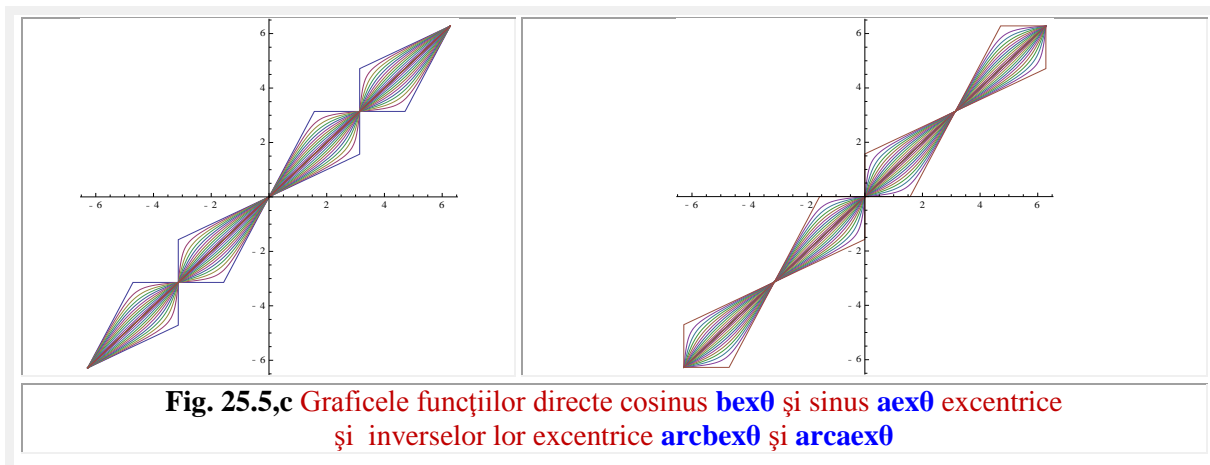
Aceleși funcții, dar de variabilă complexă, sunt prezentate în **figura 25.4,a**, iar în **figura 25.4,b** sunt prezentate funcțiilor matematice centrice directe **sin(x + i.y)** de variabilă complexă

În **figura 4,a** sunt prezentate sus ▲ funcțiile directe și inverse **arccosx** și **arcsinx** și în stânga jos ◀ ▼ funcțiile **arccos** și **Arccos**, precum și **arcsin** și **Arcvsin**, iar în dreapta jos ▶ ▼ sunt prezentate FCC tangenta **Voinoiu** directe și inverse.

Pentru comparație, în **figura 25.4,b** sunt prezentate inversele **FSM** cvadrilobe cosinus **coqx** și sinus **siqx** de excentru **S(0,98; 0)**, în care excentricitatea liniară numerică este **s = 0,98**, iar cea unghiulară **ε = 0**.

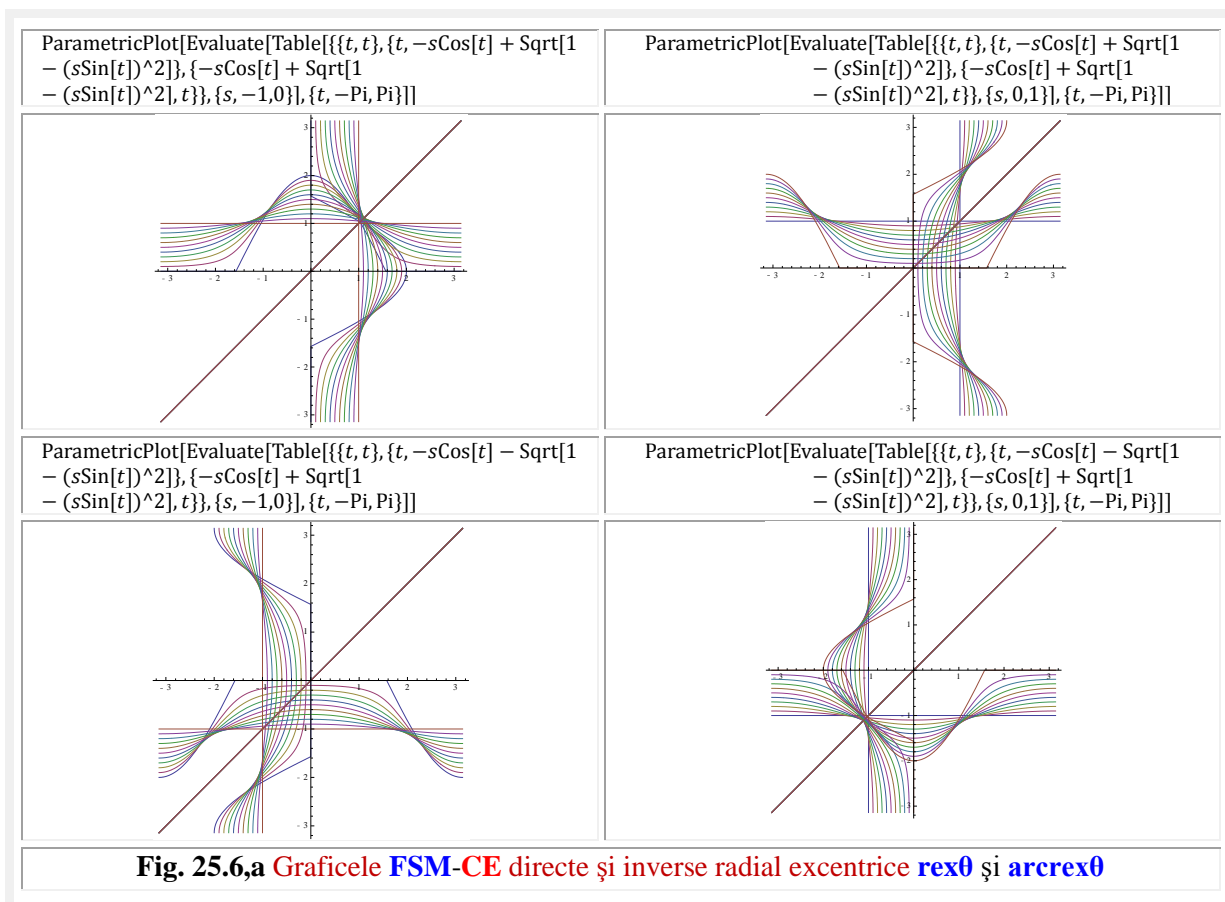






25.3 FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE (FSM-CEI) DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ

Funcțiile circulare centrice directe (**FCC**) au fost introduse în matematică de elvețianul **Leonhard Euler** (1707-1783), care a constatat că funcțiile trigonometrice pot fi reprezentate ca intersecție a unui cerc de rază $R = 1$ - trigonometric sau unitate **CU(O,1)** – cu o semidreaptă turnantă în jurul originii $O(0, 0)$ a unui reper cartezian drept.



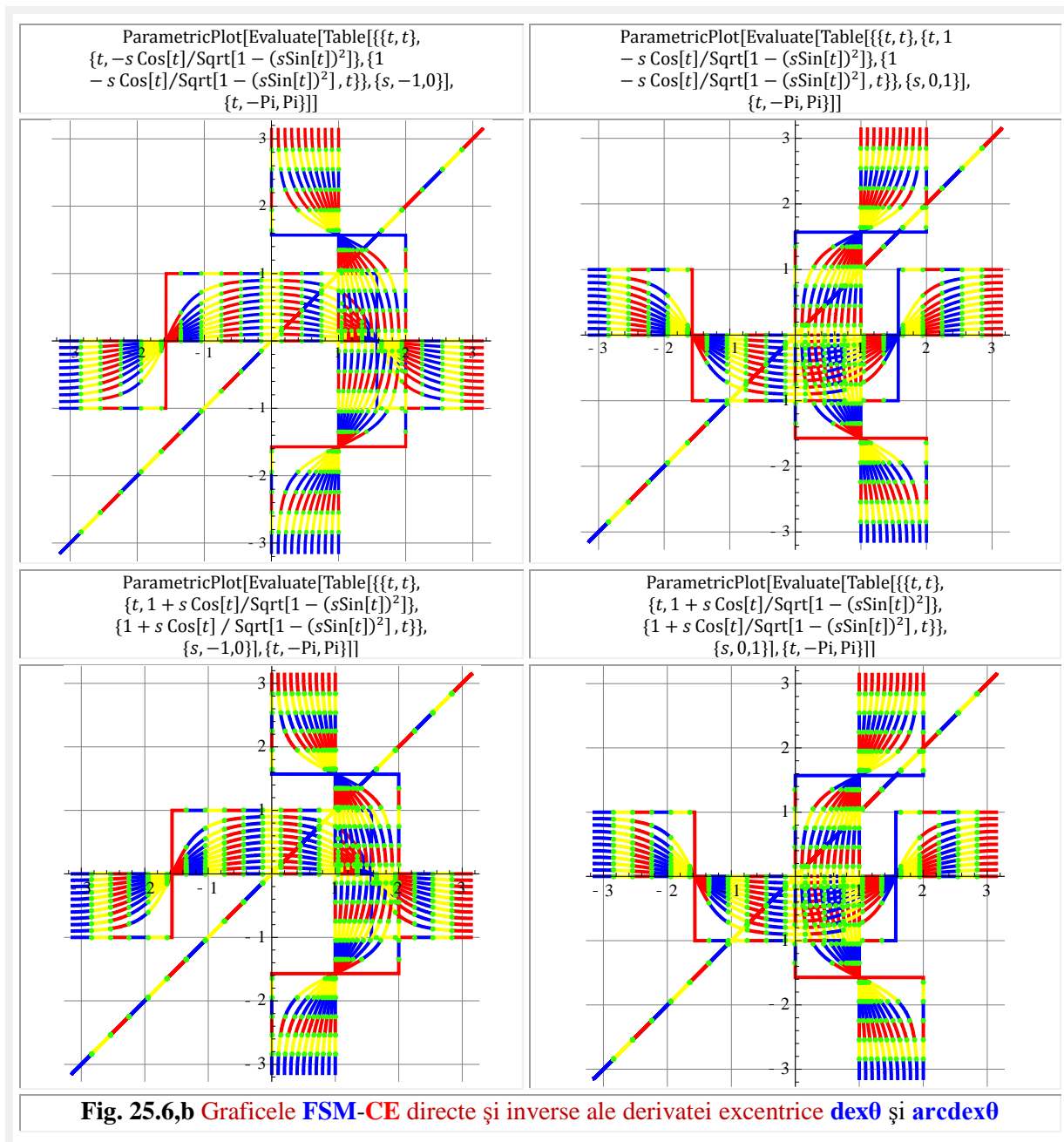
Tot **Euler** este acela care a definit funcția exponențială pentru numere complexe și a făcut legătura dintre aceasta și funcțiile trigonometrice prin celebra formulă

$$(24.1) \quad e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$$

funcție exponențială care, acum, este funcția **radial centrică rada**, un fazor de la $O(0, 0)$ la punctul curent $M(x = \cos\alpha, y = \sin\alpha)$ de pe $CU(O, 1)$ [23], fazor turnant în jurul centrului și al originii $O(0,0)$

$$(24.2) \quad \begin{cases} e^{i\alpha} = rada \\ \frac{d}{d\alpha}(rada) = i \cdot e^{i\alpha} = dera \end{cases}$$

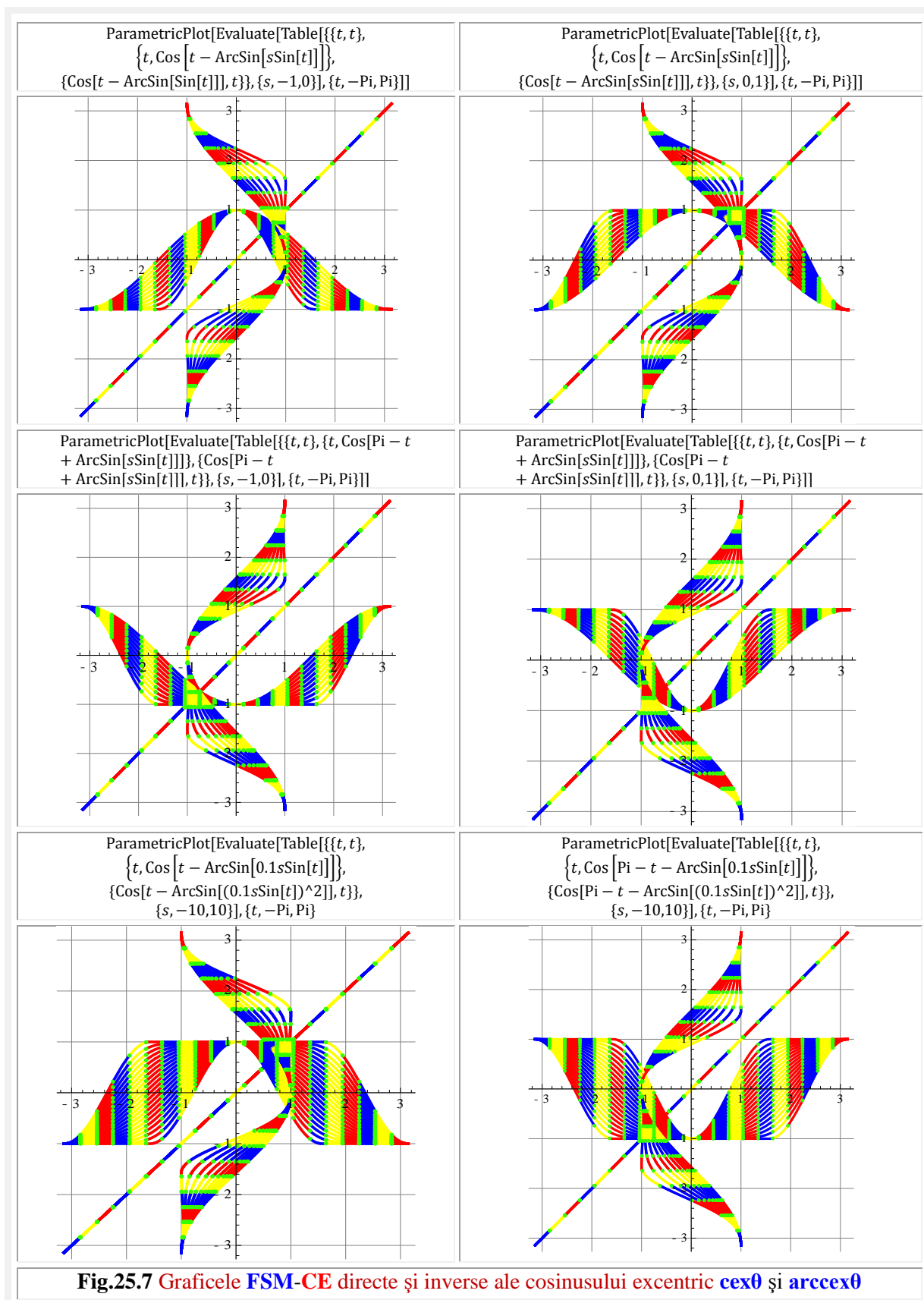
și a cărei derivată este fazorul **derivată centrică dera**, fazor tangent în punctul curent M la CU .



Funcțiile sau fazorii **rada** și **dera** sunt echivalenții vectorilor **centrici** $\vec{R}(\alpha) = \overline{OP}(\alpha)$ - $|\vec{R}(\alpha)| = |rada| = 1$ - și a derivatei acestuia $\vec{V}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\vec{R}(\alpha)$, tangent la CU în M , $|\vec{V}(\alpha)| = |dera| = 1$ și au, evident, modulele lor egale cu unitatea.

Din cele expuse anterior, se poate deduce facil că, la definirea funcțiilor trigonometrice ca funcții circulare, **Euler** a ales **trei puncte confundate**: centrul cercului $C(0,0)$, originea reperului $O(0,0)$ și

polul $P(0,0)$ al semidreptei centrice D^+ ale cărei intersecție cu CU , punctul $M(x, y)$, dau funcțiile circulare considerate elementare dar și unice $x = \cos\alpha$ și $y = \sin\alpha$.



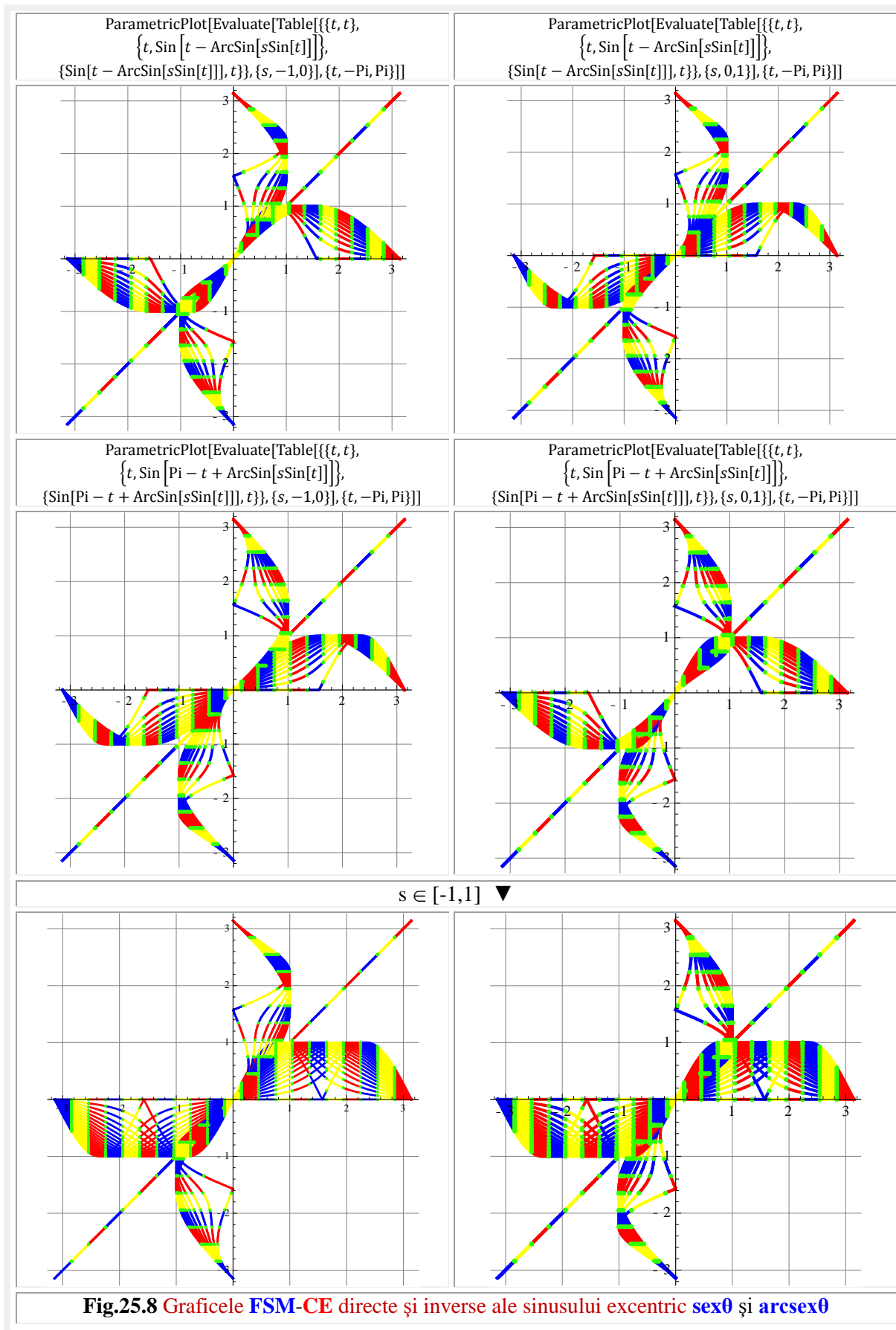


Fig.25.8 Graficele FSM-CE directe și inverse ale sinusului excentric $\text{sex}\theta$ și $\text{arcsex}\theta$

Din această cauză, apariția unei infinități de funcții circulare / trigonometrice cosinus și sinus, precum și a multor altora, a fost amânată din anul 1778 până în anul 1978 cu exact 200 de ani ! 200 de ani în care nimeni n-a observat că această suprapunere de puncte a sărăcit enorm matematica și nimeni, dar nimeni, n-a mișcat din centru nici măcar un punct suprapus.

Matematica excentrică (ME) este cea care s-a născut prin expulzarea polul **P** din $O(0, 0)$ și la denumit excentru **E(e, ε)** pentru un cerc oarecare de rază **R** și **S(s, ε)** pentru CU, denumind excentricitate liniară reală pe **e** și excentricitate liniară numerică pe **s**, iar pe **ε** excentricitate unghiulară. Câte puncte există în planul cercului unitate, atâtea perechi de funcții excentrice cosinus **cexθ** și sinus **sexθ** au apărut și există acum, adică o infinitate !

De abea acum s-a putut observa că nu sinusul și cosinusul sunt funcțiile elementare, ci unele noi apărute: funcția radial excentrică **rexθ** și derivată excentrică **dexθ**, care sunt modulele vectorilor de poziție $\vec{r}_{1,2} = \overrightarrow{SW}_{1,2} = rex_{1,2}\theta \cdot rad\theta$, fața de **S** și, respectiv derivata acestuia

$$\vec{v}_{1,2} = \vec{r}_{1,2}' = dex_{1,2}\theta \cdot der\theta \text{ și au echivalentele lor din domeniul centric fazorii } \mathbf{rada} \text{ și } \mathbf{dera}.$$

Unghiul **α** la centrul **O(0,0)** a fost denumit **variabilă centrică**, iar unghiul **θ** la excentrul **S(s, ε)** a fost denumit **variabilă excentrică**.

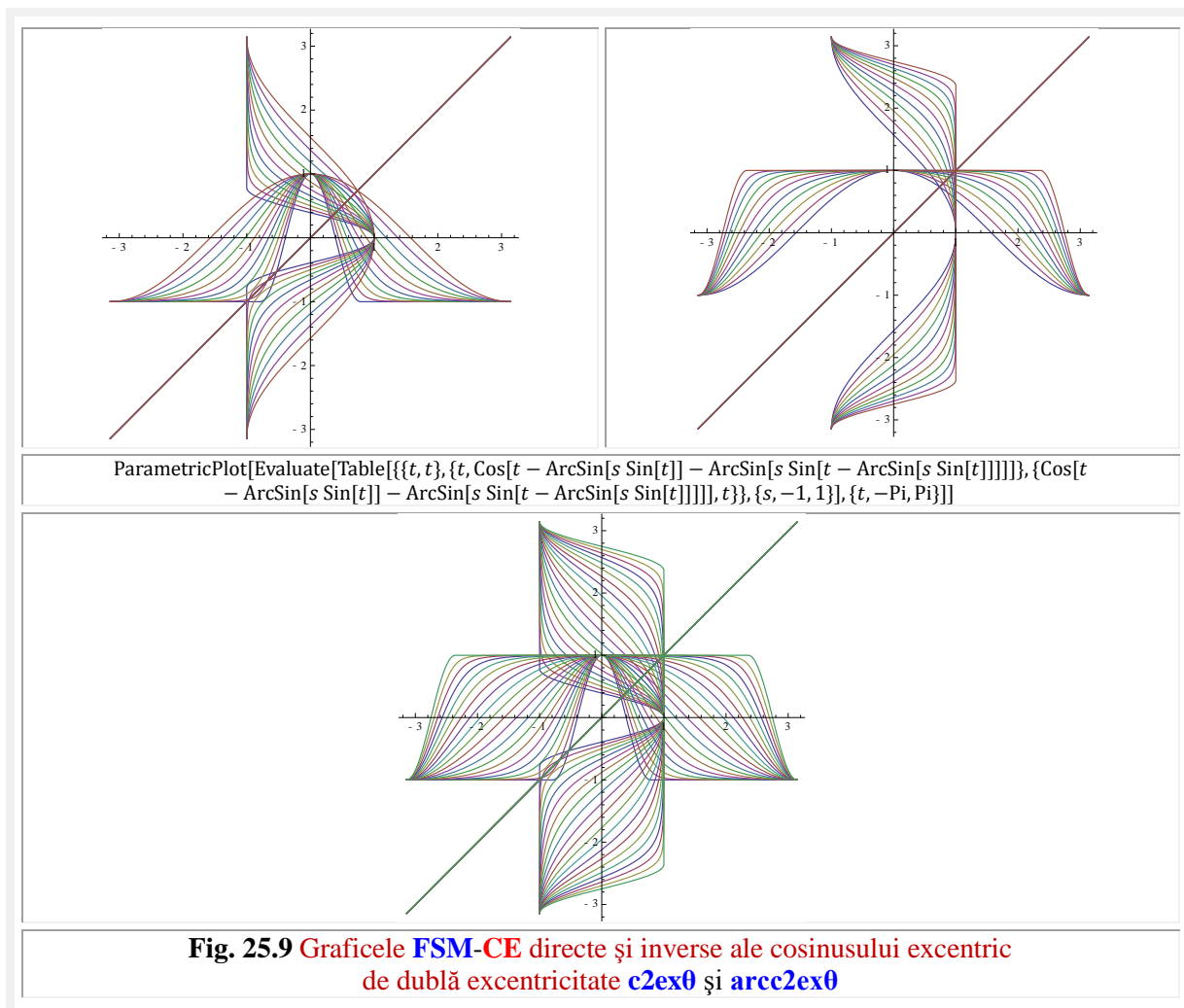


Fig. 25.9 Graficele FSM-CE directe și inverse ale cosinusului excentric de dublă excentricitate **c2exθ și **arcc2exθ****

Deoarece, funcțiile excentrice de variabilă excentrică (**cexθ**, **sexθ**, **texθ** etc.) sunt continue numai pentru $s^2 < 1$, adică $s \in [-1, 1]$ ce corespunde unui excentru **S** plasat în interiorul discul cercului unitate, au fost introduse și funcțiile excentrice de **variabilă centrică α**, care sunt continue pentru toate valorile lui **s**, adică pentru $s \in [-\infty, +\infty]$ sau pentru un excentru **S** plasat în oricare punct din

planului cercului unitate. Ele sunt notate, prin convenție, cu majuscule ($Cex\alpha$, $Sex\alpha$, $Tex\alpha$, $Rex\alpha$, $Dex\alpha$, etc) pentru a se distinge de cele de variabilă excentrică θ .

La îndemnul și sugestia unui mare matematician, l-am numit pe Prof.dr. math. **Horst Klepp**, de a pune de acord trigonometria, care opera cu **semidrepte**, cu geometria analitică care operează cu **drepte**, au fost redefinite funcțiile excentrice ca intersecție a **dreptei excentrice**, pentru că este turnantă în jurul excentrului S , $d = d^+ \cup d^-$, cu cercul unitate $CU(O, 1)$, rezultând, astfel, două determinări: una principală, de indice 1, sau fără indice când confuziile sunt excluse, din intersecția cu semidreapta d^+ și una secundară, de indice 2, ca intersecție cu semidreapta d^- .

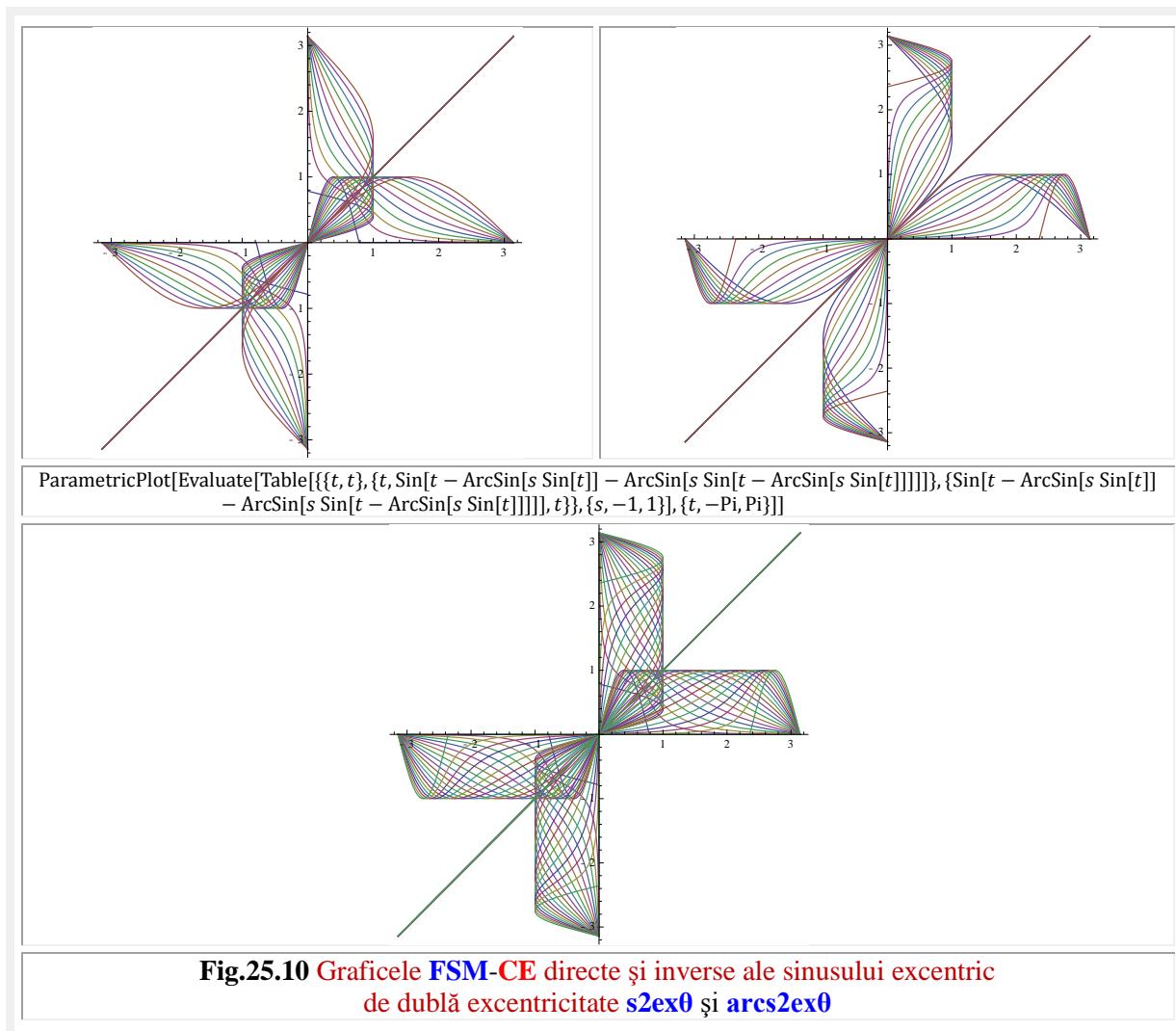
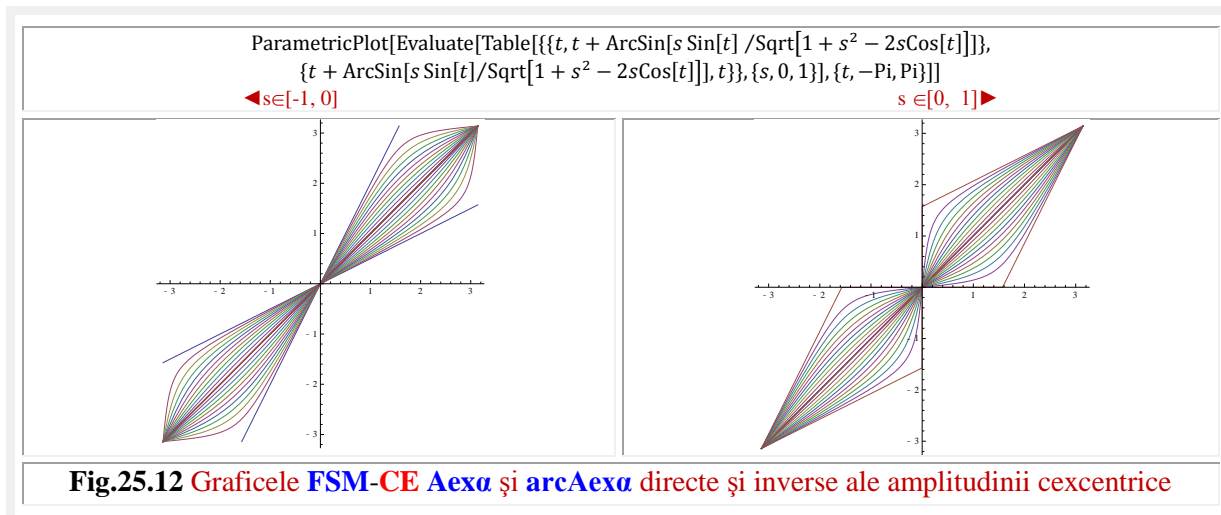
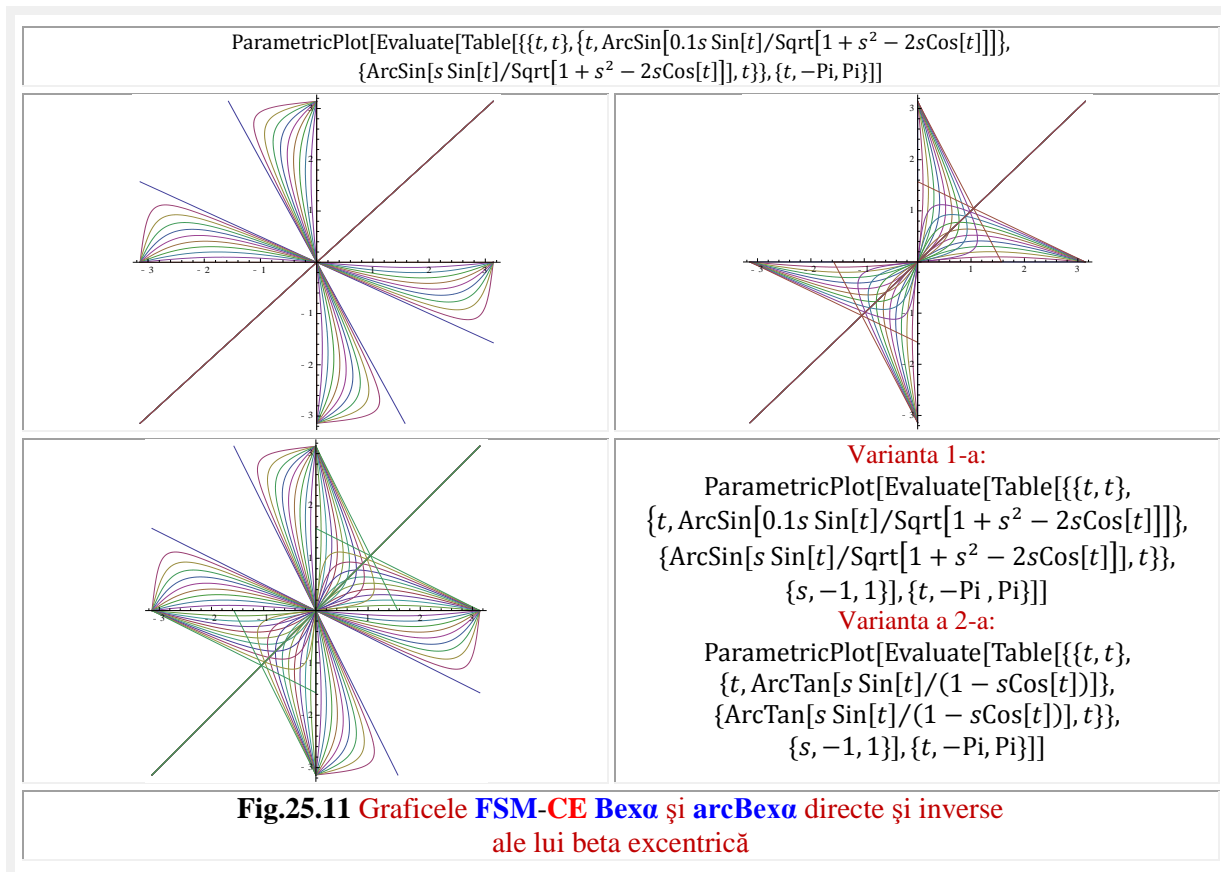


Fig.25.10 Graficele FSM-CE directe și inverse ale sinusului excentric de dublă excentricitate $s2ex\theta$ și $arcs2ex\theta$

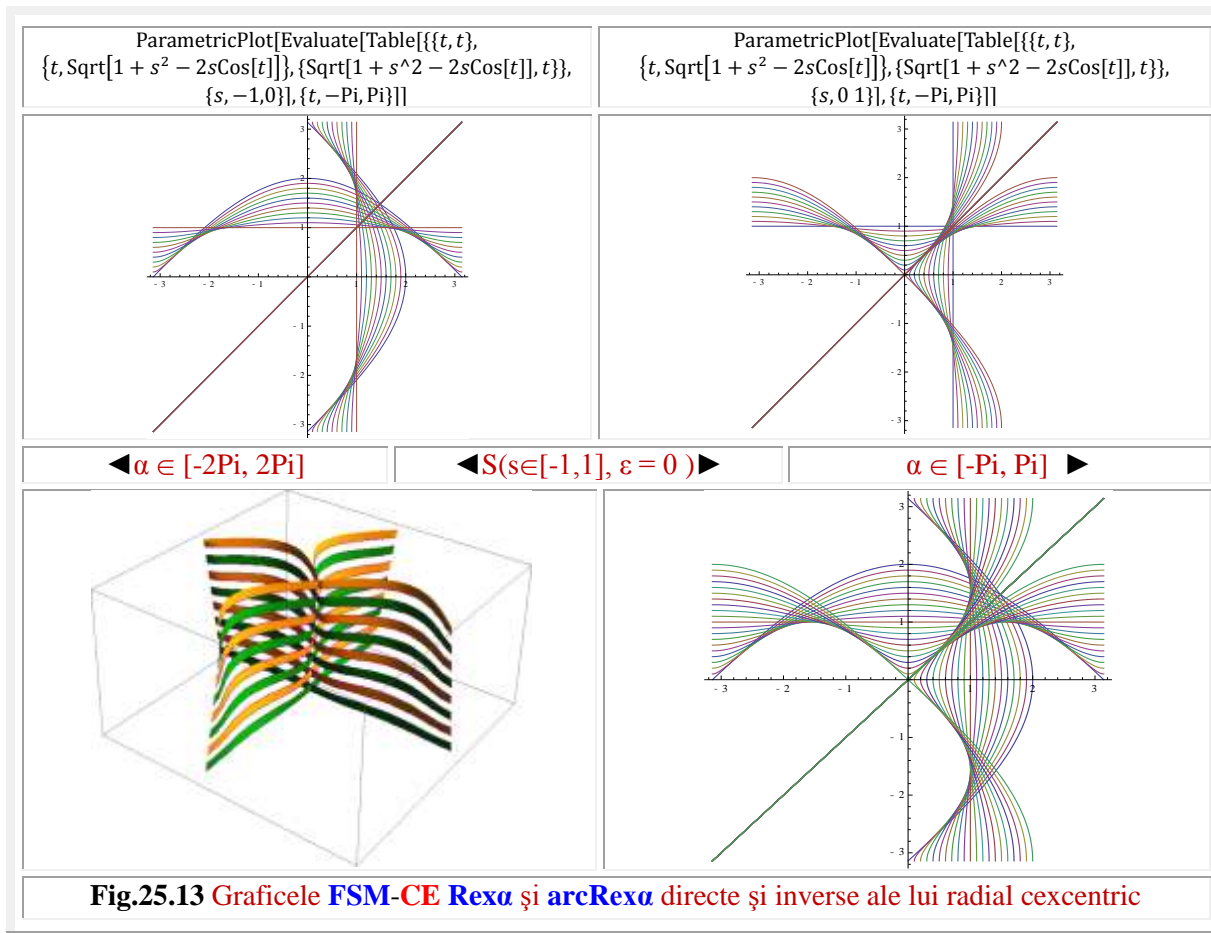
Matematica elevată (MEL) este cea în care s-a mai considerat deplasat un punct, și anume, originea O din $C(0, 0)$ în excentrul $S(s, \epsilon) \equiv O(s, \epsilon)$ și astfel au apărut funcțiile super-matematiche circulare **elevate (FSM-CEL)**, precum cosinus elevat $cel\theta$ și $Cela$, sinus elevat $sel\theta$ și $Sela$, tangentă elevată $tel\theta$ și $Tela$ etc.

Au fost denumite **elevate**, pentru că $cel\theta$ și $sel\theta$, de exemplu, își elevează poziția codomeniului în funcție de poziția excentrului S , în timp ce, codomeniul funcțiilor excentrice $cex\theta$ și $sex\theta$ rămâne același $I \in [-1, 1]$, indiferent de poziția lui S în plan.

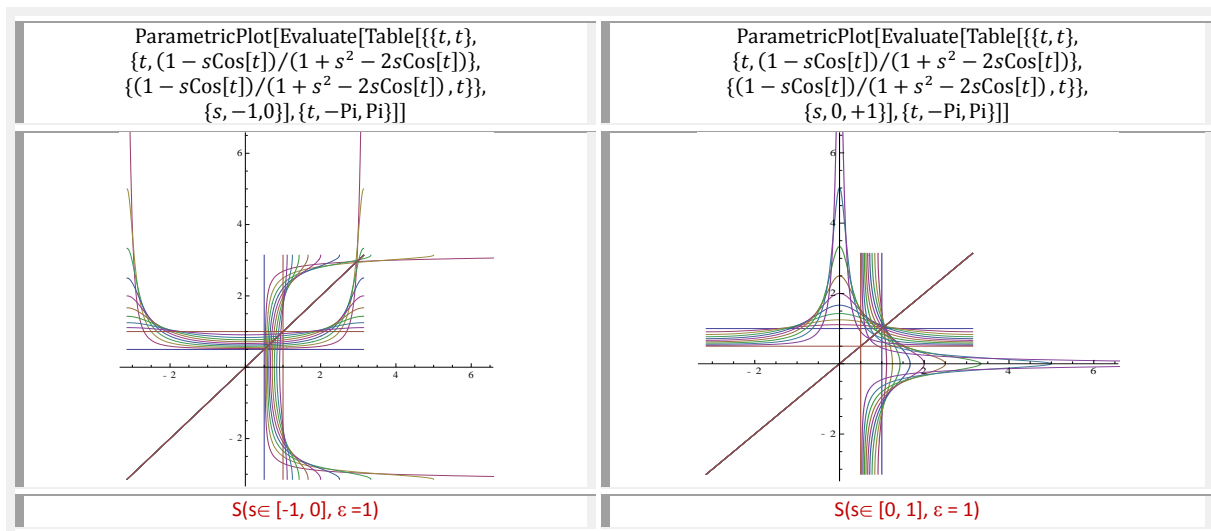
După 240 de ani s-a renunțat la coincidența vreunui punct, astfel că cele 3 puncte au devenit toate distincte în cadrul **matematicii exotice (MEX)**, care a dat naștere funcțiilor supermatematiche **circulare exotice (FSM-CEX)** cosinus exotic $cexo\theta$ și $Cexo\alpha$, sinus exotic $sexo\theta$ și $Sexo\alpha$, tangentă exotică $texo\theta$ și $Texo\alpha$ etc.



Deoarece, în toate cele trei tipuri de matematici excentricitatea este prezentă și diferită de zero, ele aparțin toate domeniului **matematicii excentrice (ME)**. Pentru $s = e = 0$, **ME** \rightarrow **MC**. În toate aceste matematici, excentricitățile liniară s și unghiulară ϵ sunt prezente ca a 3-a și a 4-a dimensiune a spațiul 2 D dacă s și ϵ sunt **constante** și diferite de zero, astfel că $S(s, \epsilon)$ este un punct fix în plan, a 5-a și a 6-a dimensiune a spațiului bi-dimensional, dacă S este un punct mobil în plan, care se deplasează după anumite legi, guvernate de o funcție centrică sau tot excentrică de același excentru S (denumite funcții de dublă excentricitate) sau o altă excentricitate $s_1 - s(\theta, s_1) - \dots$ până la a n-a dimensiune a spațiului 2D.



Totodată, excentricitatea poate fi a 4-a și a 5-a dimensiune a spațiului 3D, dacă **s** și **ε** sunt constante și **S** un punct fix în spațiul 3D, a 6-a sau/și a 7-a dimensiune dacă **s** sau/și **ε** sunt variabile, a 8-a și a 9-a dimensiune a spațiului 3D dacă **s** sau/și **ε** sunt variabile ș.a.m.d., aidoma cazului 2D, până la a n-a dimensiune a spațiului 3D.



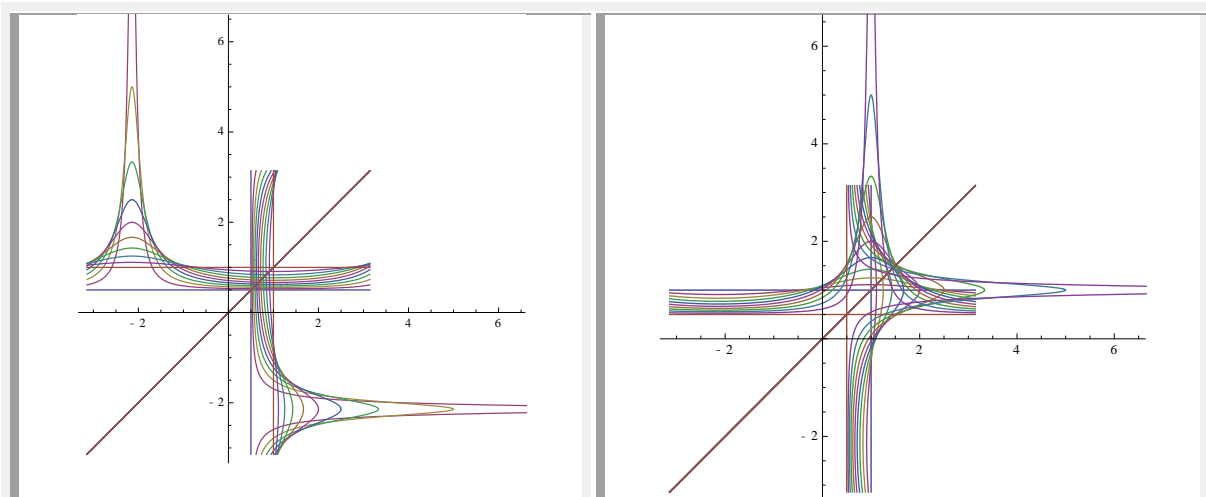


Fig.25.14 Graficele **FSM-CE Dexa** și **arcDexa** directe și inverse ale lui radial cexcentric de variabilă centrică

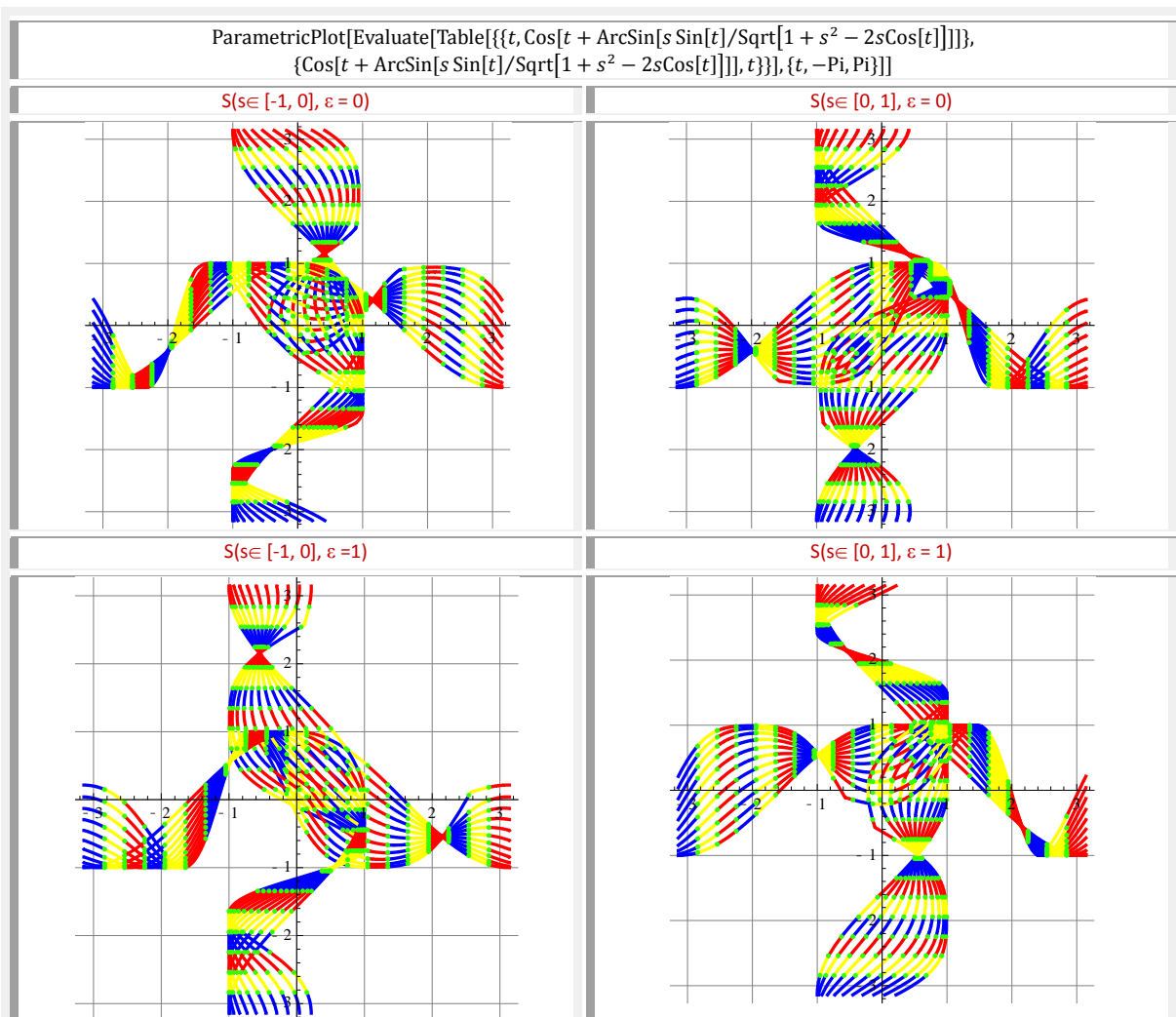


Fig.25.15 Graficele **FSM-CE Cexa** și **arcCexa** directe și inverse ale lui cosinus cexcentric de variabilă centrică

Toate **FSM-CE** directe și inverse se impart în două clase de funcții:

- 1) Cele care depind de poziția originii $O(0, 0)$ – pentru funcțiile excentrice sau $O(s, \varepsilon)$ – pentru cele elevate – a reperului de la care se definesc / măsoară și care au corespondente în matematica centrică (**MC**), cum sunt cex și $Cex \rightarrow \cos$, sex și $Sex \rightarrow \sin$, tex și $Tex \rightarrow \tan$ etc. și
- 2) Cele care **nu** depind de poziția originii O , ci de poziția excentrului $S(s, \varepsilon)$ de la care sunt definite și se măsoară mărimea lor și care nu aveau și, unele, nu au nici acum funcții corespondente în **MC**, deși expresiile lor matematice sunt frecvent întâlnite în matematica și în tehnică rex și $Rex \rightarrow \text{rad}$, dex și $Dex \rightarrow \text{der}$, bex și $Bex \rightarrow ?$, aex și $Aex \rightarrow ?$.

FSM-CE directe, care au corespondente în domeniul matematicii centrice (**MC**), se obțin din acestea, adică din funcțiile centrice **cos**, **sin**, **tan**, etc., ca funcții induse o singură dată sau monoinduse sau compuse și mai corect ca funcții de funcție, adică prin înlocuirea variabilelor excentrică θ și centrică α cu funcțiile $\alpha(\theta)$ și $\theta(\alpha)$ denumite **FSM-CE amplitudine excentrică** corespunzătoare, a căror expresii, a primei determinări principale, de indice 1 sau fără indice, sunt [23], [1], [2], [10]

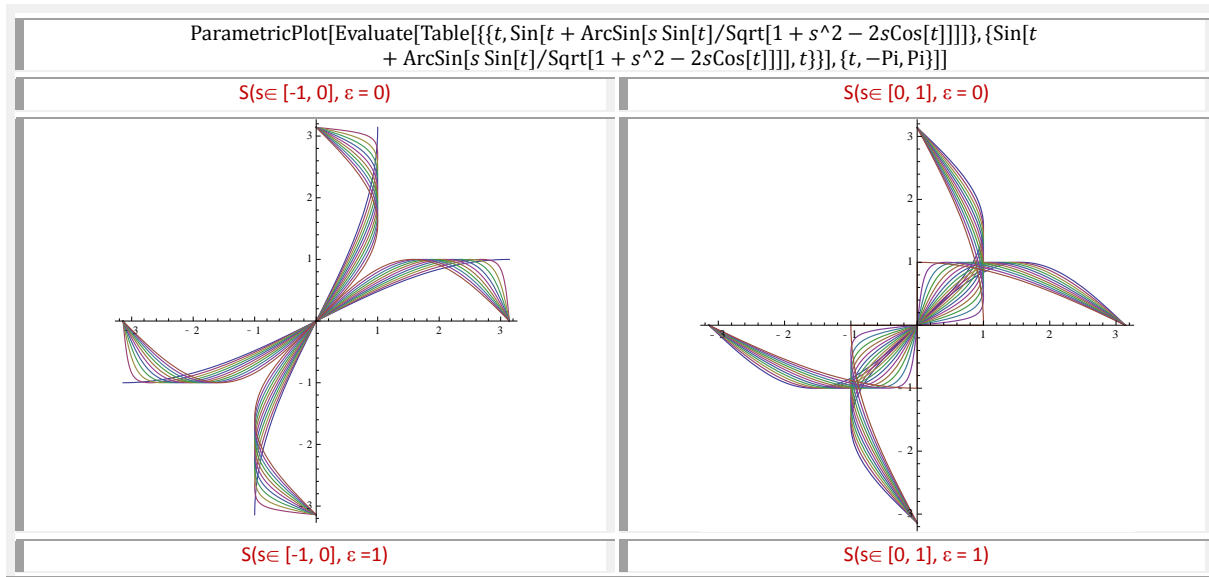
$$(4) \quad \begin{cases} \alpha \Rightarrow \alpha(\theta) = aex_1\theta = \theta - \beta_1(\theta) = \theta - bex_1\theta = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \\ \theta \Rightarrow \theta(\alpha) = Aex\alpha_1 = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \arcsin\frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} = \alpha + \arcsin\frac{s \sin(\alpha - \varepsilon)}{Rex\alpha} \end{cases}$$

Cea de a doua determinare, secundară, de indice 2, se obține din prima știind că

$$(5) \quad \beta_2 = \pi - \beta_1 = \pi - \beta.$$

25.4 FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE (**FSM-CEI**) DE VARIABILĂ CENTRICĂ α

FSM-CE directe și inverse de variabilă centrică α , independente de $O(0,0)$ dar dependente de excentrul $S(s, \varepsilon)$ sunt **Bex α** și **arcBex α** din **figura 25.8**, **Aex α** și **arcAex α** din **figura 25.9**, precum și **Rex α** și **arcRex α** prezentate în **figura 10** ca și **Dex α** și **arcDex α** din **figura 25.11**.



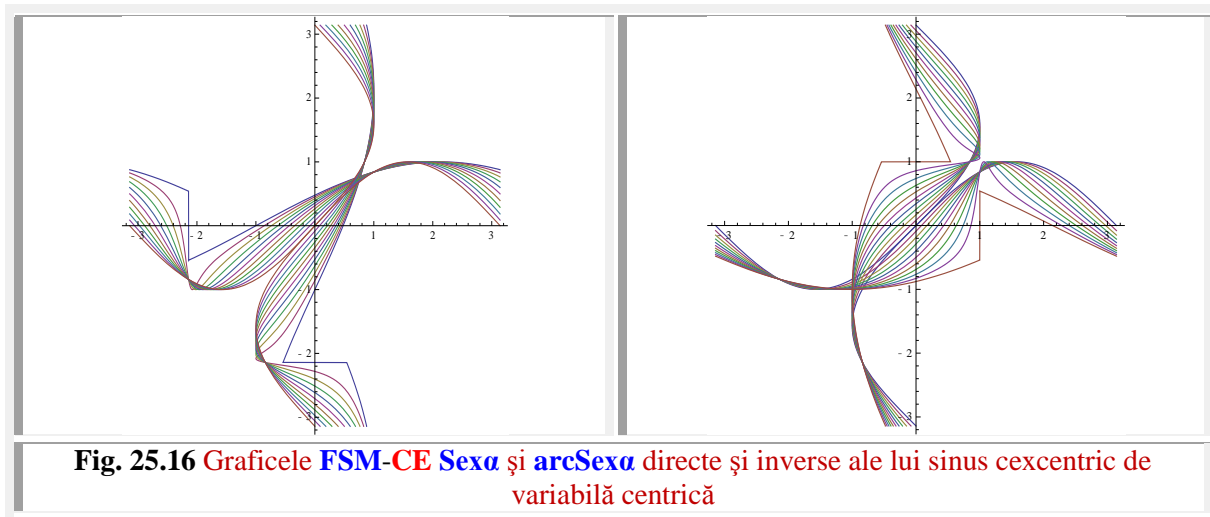


Fig. 25.16 Graficele FSM-CE $Sex\alpha$ și $arcSex\alpha$ directe și inverse ale lui sinus cexcentric de variabilă centrică

Ca urmare

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha \Rightarrow \alpha_2(\theta) = aex_2\alpha = \theta - \beta_2(\theta) = \theta - bex_2\theta = \pi - \theta + \arcsin [s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)] \\ \theta \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2(\alpha) = \pi - \alpha_2 - \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \cos(\alpha - \varepsilon)}} = \pi - \alpha_2 - \arcsin \frac{s \sin(\alpha - \varepsilon)}{Rex\alpha} \end{cases}$$

Dacă ecuațiile parametrice ale unei funcții directe și graficele lor se obțin prin expresiile

$$(7) \quad \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

atunci funcția ei inversă va avea ecuațiile parametrice și, ca urmare, și graficele, date de ecuațiile parametrice obținute prin inversarea coordonatelor x cu y și a lui y cu x, adică

$$(8) \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = t \end{cases}$$

ceea ce se poate observa și din ecuațiile și textele prezentate în desenele anterioare, în figurile 25.1,a și 1,b pentru funcțiile directe și inverse beta excentrice și amplitudine excentrică.

Funcțiile monoinduse (induse o singură dată) sunt cex, sex, tex etc. și Cex, Sex, Tex etc. iar funcțiile inductoare sunt $aex_{1,2}\theta$ și, respectiv, $Aex\alpha_{1,2}$.

Prin repetarea procedurii de inducție, se vor obține FSM-CE directe și inverse de dublă excentricitate (Fig. 25.6 și 25.24.7). Procedura putând fi repetată la nesfârșit, se pot obține FSM-CE de triplă, cvadruplă ș.a.m.d. de a n-a sau multiplă excentricitate.

FSM-CE directe și inverse cosinus ($cex\theta$ și $arccex\theta$) sunt prezentate în figura 25.24.4, iar sinusul ($sex\theta$ și $arcsex\theta$) în figura 25.5, în partea din stânga ◀ figurilor pentru $S(s \in [-1,0], \varepsilon = 0)$ sau $S(s \in [1,0], \varepsilon = \pi)$ și în partea dreaptă ▶ pentru $S(s \in [0,1], \varepsilon = 0)$. În figurile 25.6 și 25.7 sunt prezentate aceleași funcții dar de dublă excentricitate cosinus ($c2ex\theta$ și $arcc2ex\theta$, precum și cosinus $s2ex\theta$ și $arcs2ex\theta$).

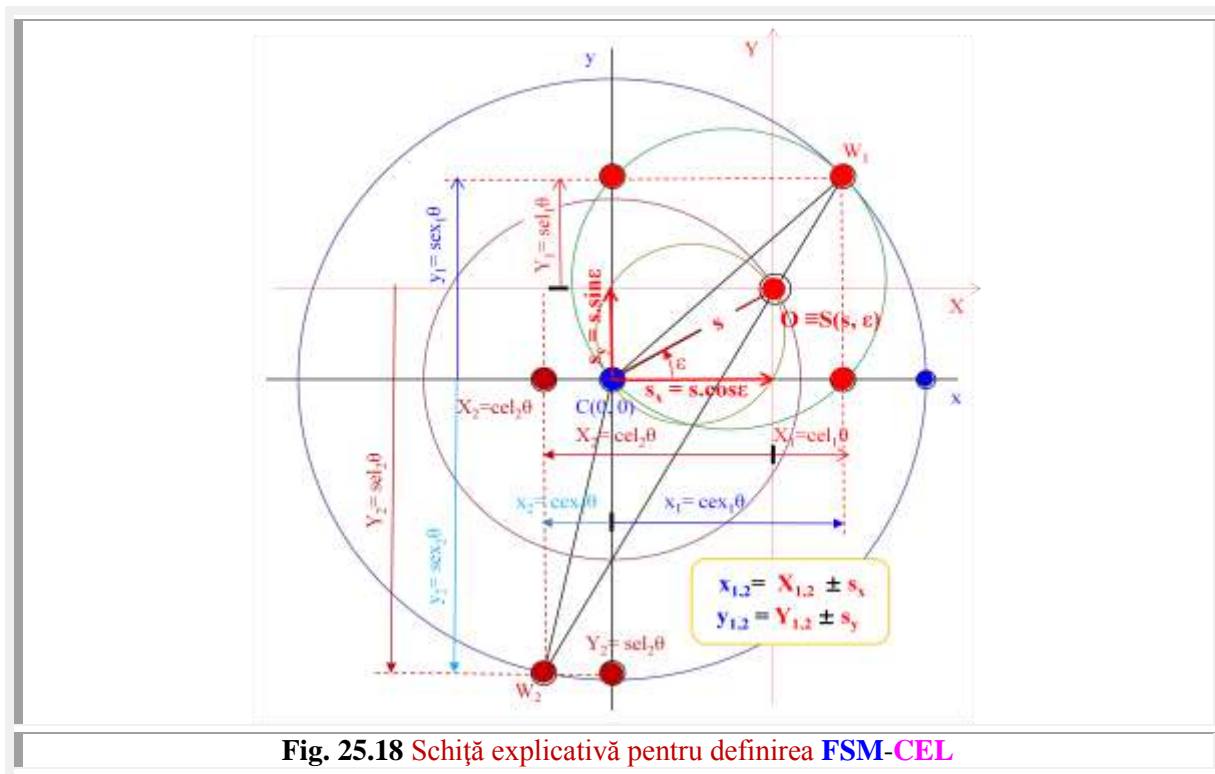
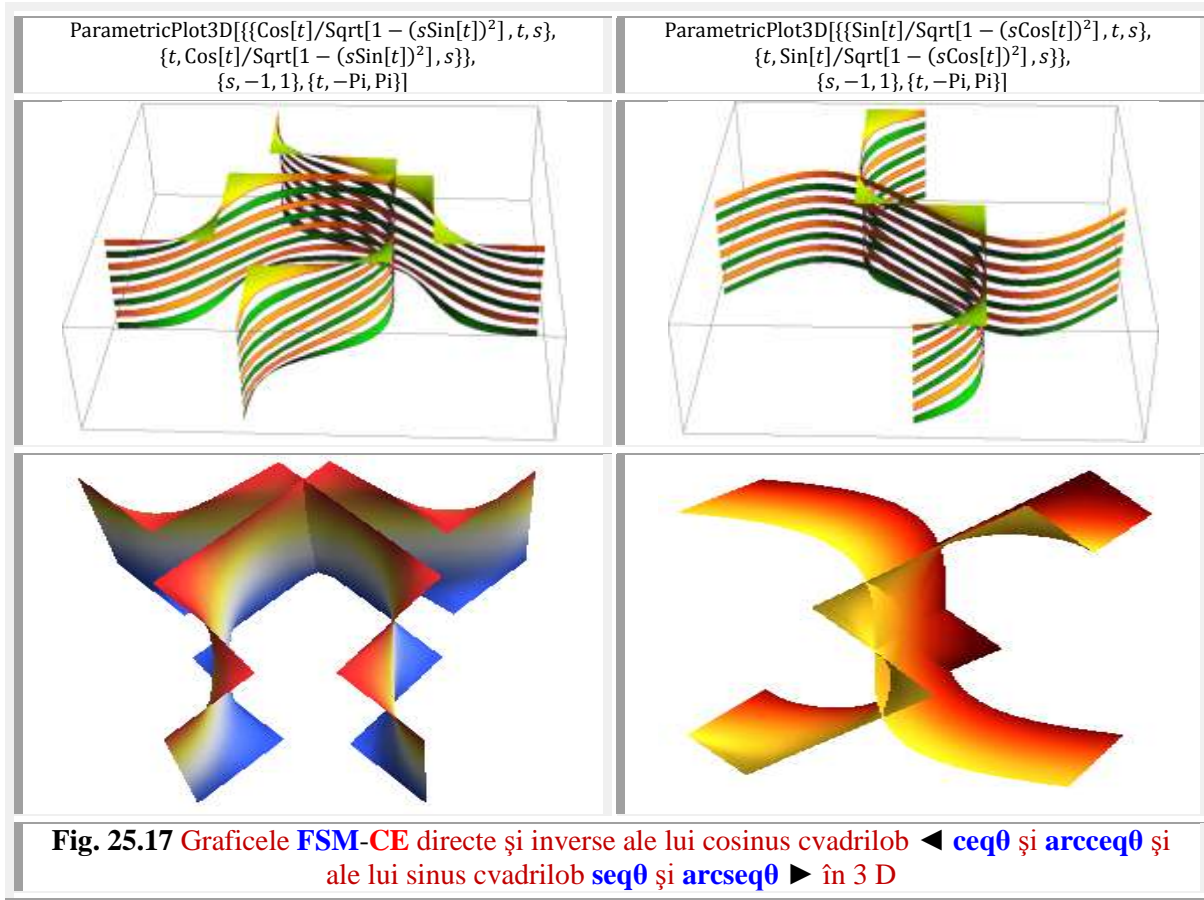
Pe lângă FSM-CE prezentate, mai sunt și $arctex\alpha$ și $arcTex\alpha$, $arcc2ex\alpha$ și $arcC2ex\alpha$, ș.m.a.

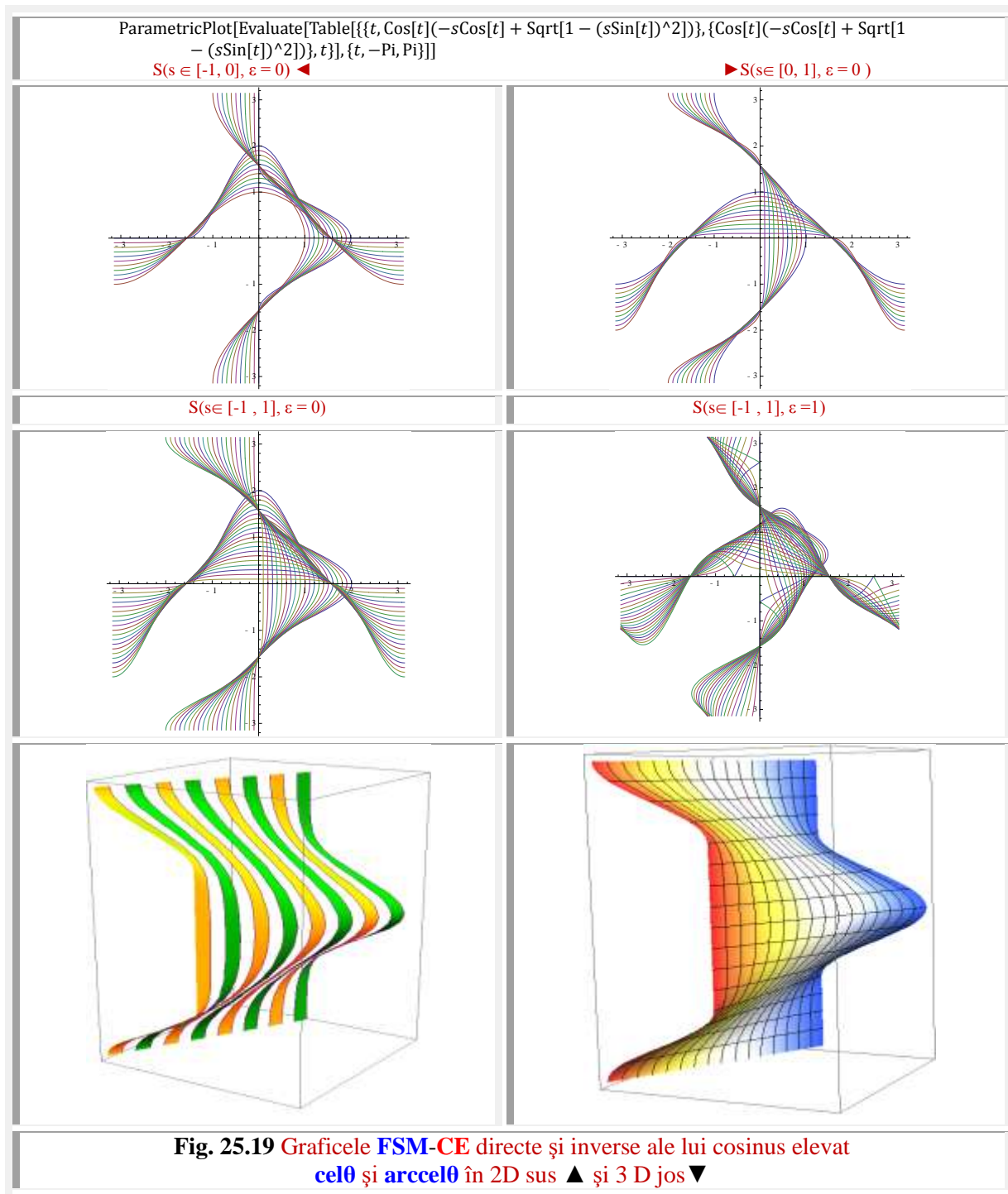
25.5 FUNCȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE ELEVATE INVERSE (FSM-CELI) DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ

Așa cum s-a mai menționat, funcțiile supermatematice circulare elevate (FSM-CEL) sunt coordonatele punctelor $W_{1,2}$ de intersecție a dreptei excentrice d cu cercul unitate $CU[C(0,1); 1]$, când dreapta turnantă se rotește față de excentrul $S(s, \varepsilon)$ în care este plasată, în acest caz, și originea $O(s, \varepsilon)$, origine de la care se definesc $X_{1,2} \rightarrow$ cosinusul elevat $cel_{1,2}\theta$ și $Cel\alpha_{1,2}$ și $Y_{1,2} \rightarrow$ sinusul elevat $sel_{1,2}\theta$ și $Sel\alpha_{1,2}$.

Este ușor de observat că, pentru $\varepsilon = 0$ și $\varepsilon = \pi$, funcțiile elevate $sel_{1,2}\theta$ și $Sel\alpha_{1,2}$ se confundă cu cele excentrice $y_{1,2} \rightarrow sex_{1,2}\theta$ și $Sex\alpha_{1,2}$, deoarece, în acest caz, originea O , confundată cu excentrul S , se află dispuse pe aceeași axă a absciselor ca și centrul cercului unitate C , astfel că $Y_{1,2} = y_{1,2}$, iar $X_{1,2} = x_{1,2} + s_x = x_{1,2} + s \cdot \cos\varepsilon$.

Rezultă că între FSM-CEL și FSM-CE există următoarele dependențe (Fig. 25.13)

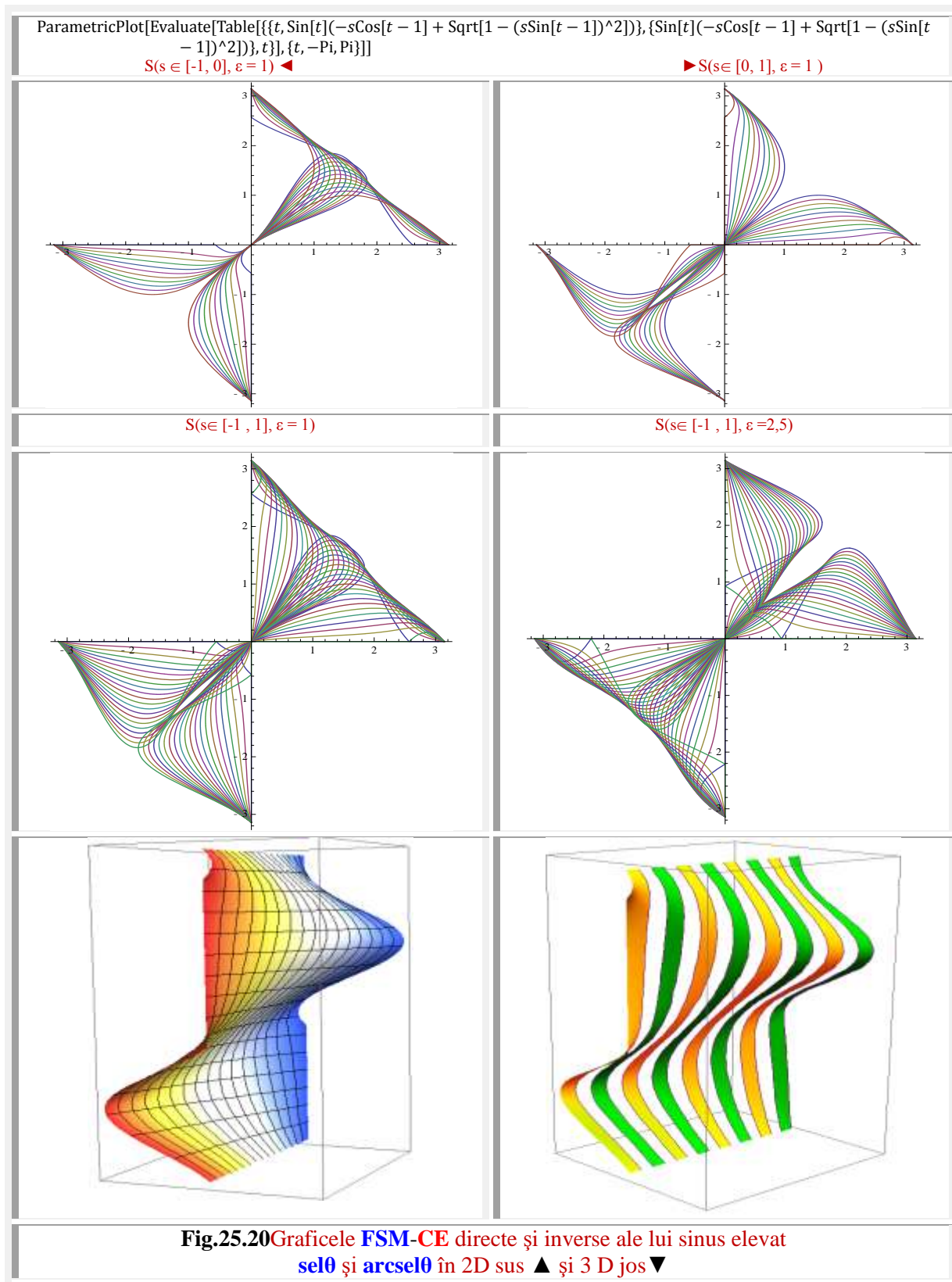




$$(9) \quad \begin{cases} X_{1,2}(\theta) = cel_{1,2}\theta = x_{1,2}(\theta) \mp s \cdot cose \rightarrow cel_{1,2}(\theta) = cex_{1,2}\theta \mp s \cdot cose \\ Y_{1,2}(\theta) = sel_{1,2}\theta = y_{1,2}(\theta) \mp s \cdot sine \rightarrow sel_{1,2}(\theta) = sex_{1,2}\theta \mp s \cdot sine \end{cases}$$

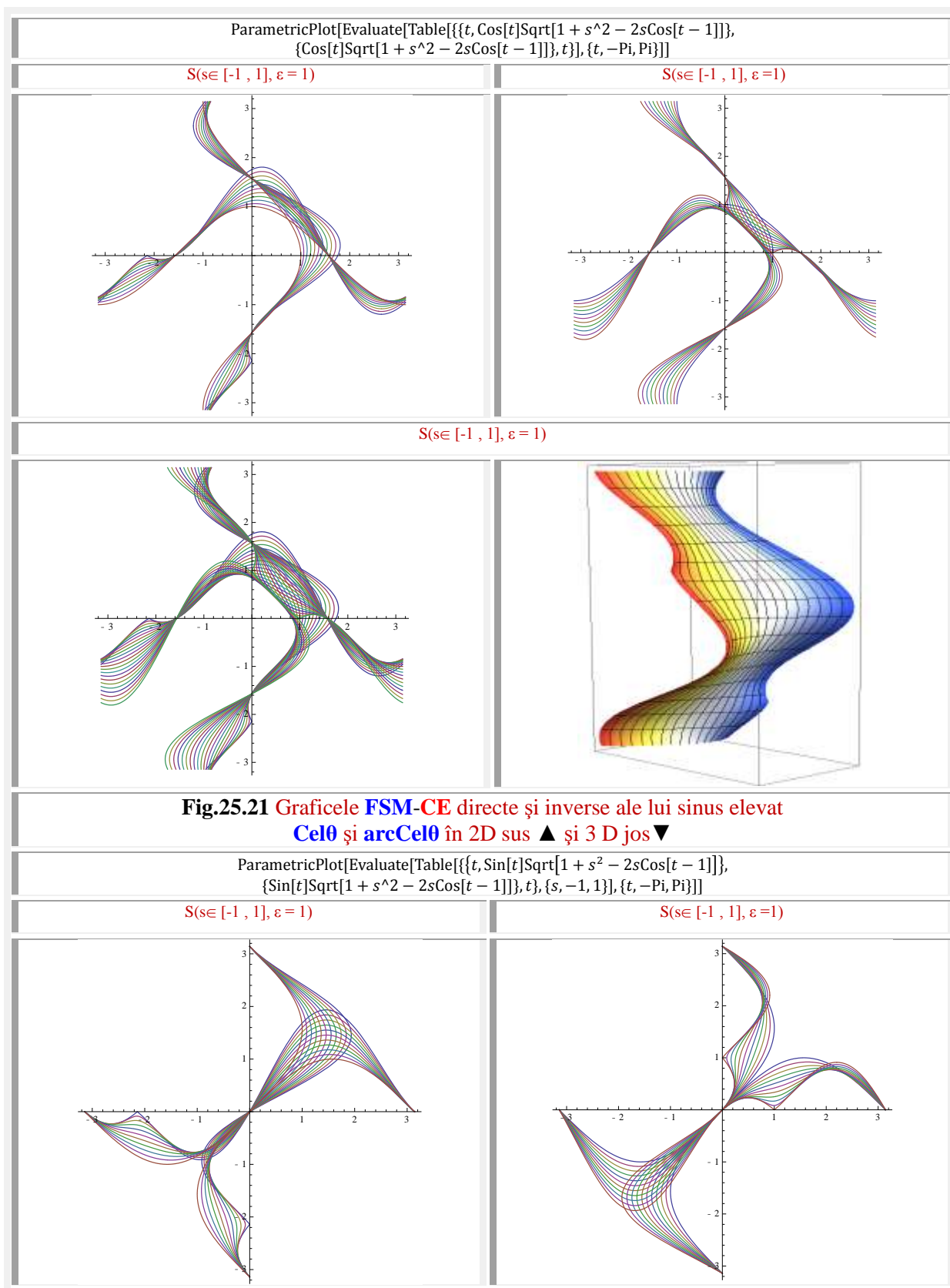
Totodată, așa cum rezultă din schița explicativă (Fig. 25.13), funcțiile ale căror expresii nu depind de poziția centrului $C(0,0)$, ci de poziția excentrului $S(s, \epsilon)$, ca $aex\theta$ și $Aex\alpha$, $bex\theta$ și $Bex\alpha$, $rex\theta$ și $Rex\alpha$, $dex\theta$ și $Dex\alpha$ sunt aceleași atât ca funcții **excentrice** cât și ca funcții **elevate** și **exotice**.

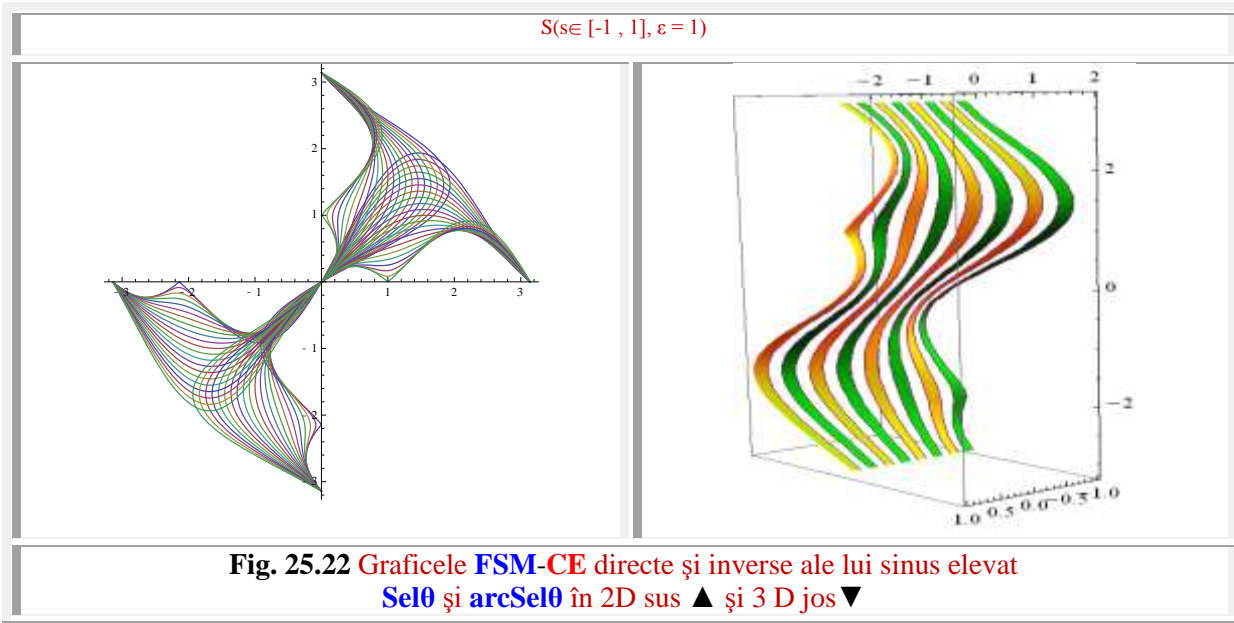
De aceea, funcțiile elevate inverse se rezumă la funcțiile cos, sin, tan, cot ș.a., adică $cel0$ și $Cel\alpha$, $sex\theta$ și Sel , $tex\theta$ și Tel , $ctex\theta$ și $Ctel$, ș.a. a căror inverse sunt $arccel\theta$, $arccel\alpha$, $arctel\theta$, $arctel\alpha$, ș.a. ca funcții de variabila excentrică și $arcCel\alpha$, $arcSel\alpha$, $arcTel\alpha$, $arcCtel\alpha$, ș.a. ca funcții de variabilă centrică α .



Graficele funcțiilor elvate directe și inverse cel_0 și $arcel_0$ sunt prezentate în **figura 25.14** în 2D și, pentru o înțelegere mai profundă, și în 3D, iar în **figura 25.15** sunt prezentate, în 2D și în 3D, graficele funcțiilor sel_0 și $arcel_0$.

25.6 FUNCȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE ELEVATE INVERSE DE VARIABILĂ CENTRICĂ α





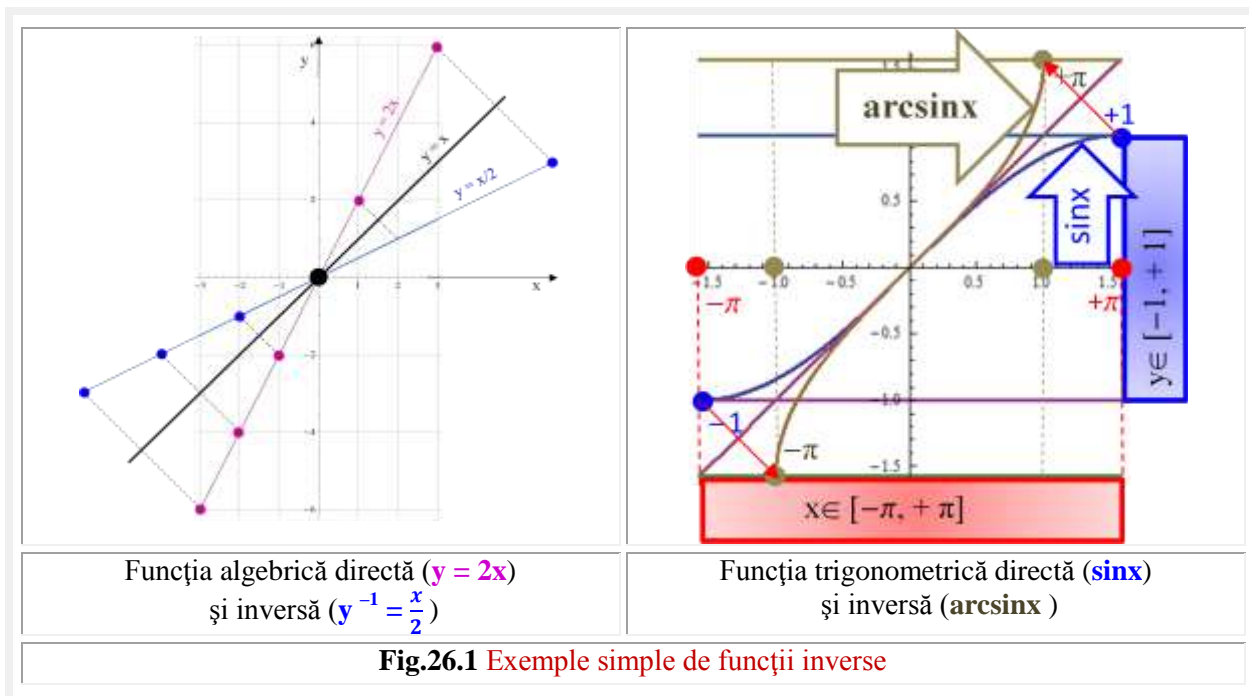
Motto: "Inversarea polilor magnetici ai **Terrei** este la fel de importantă ca și descoperirea noilor funcții **supermatematice** excentrice **inverse** "
 Și aici este vorba de o inversiune. De valori.
 Autorul

Capitolul 26

FUNȚII SUPERMATEMATICE (FSM)
 CIRCULARE EXCENTRICE (CE) INVERSE (FSM-CEI)
 cex, Cex și sex, Sex

26.1 INTRODUCERE

În **partea I-a**, a capitolului cu același titlu, au fost prezentate **FSM-CEI** inverse ale funcțiilor supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**), ca **simetricile**, față de prima bisectoare, a celor **directe**, ceea ce este corect, deoarece graficele funcțiilor inverse univoce sau multivoce se obțin ca simetricile funcțiilor directe față de prima bisectoare [**Mica Enciclopedie Matematică**, pag. 131, fig.5.1.10], așa cum este ilustrat în **figura 26.1**, pentru o funcție algebrică ($y = 2x \rightarrow y^{-1} = \frac{x}{2}$) și pentru una trigonometrică / circulară centrică ($y = \sin x \rightarrow y^{-1} = \arcsin x$).

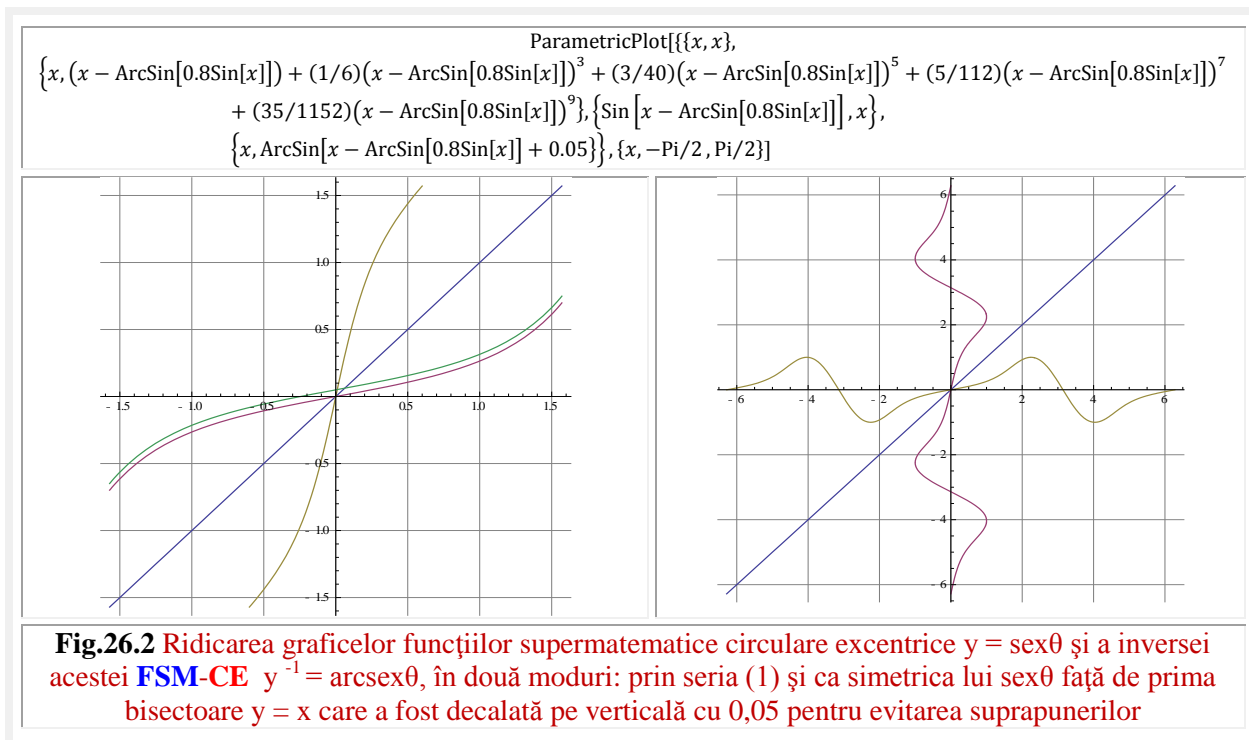


FUNCȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE

Pe de altă parte, calcularea valorilor și reprezentarea graficelor funcțiilor trigonometrice inverse cu ajutorul calculatoarelor electronice numerice se face prin dezvoltarea în serie a acestor funcții.

Astfel, funcția $\arcsin x$ are dezvoltarea în serie

$$(1) \quad \arcsin x = x + x^3/6 + (3x^5)/40 + (5x^7)/112 + (35x^9)/1152 + O[x]^{11}$$



Introducând expresia unei **FSM-CE**, ca de exemplu sinus excentric, de variabilă excentrică θ , $\text{sex}\theta$, a cărei expresie **invariantă** este

$$(2) \quad y = \text{sex}\theta = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)], \quad x \rightarrow \theta,$$

pentru un excentru $S(s = 0,8 ; \varepsilon = 0)$ și $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ se obțin graficele din **figura 2** stânga ◀, iar pentru $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$ **FSM-CE** $\text{sex}\theta$ și simetrica ei față de prima bisectoare, care este și inversa ei **multiformă** se obțin graficele din **figura 26.2** dreapta ▶.

Aici, inversa funcției $y = \text{sex}\theta$ este considerată, și chiar este, funcția

$$(3) \quad y^{-1} = \arcsin(\text{sex}\theta) = \arcsin\{\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]\}$$

În acest caz, adică pentru $\varepsilon = 0$, se observă din grafice, că cele două posibilități de-a obține inversele acestei funcții sunt identice, ceea ce nu se mai întâmplă și pentru o excentricitate unghiulară diferită de zero ($\varepsilon \neq 0$), adică pentru un excentru $S(s = 0,8 ; \varepsilon = 1)$, a cărei excentricitate unghiulară $\varepsilon = 1$ este diferită de zero (**Fig.26.3**).

În **figura 26.4** sunt reprezentate **FSM-CE** $\text{sex}\theta$ de aceeași excentricitate liniară ($s \in [-1; 1]$) și de excentricități unghiulare diferite; $\varepsilon = 0$ ◀ în stânga și $\varepsilon = 1$ în dreapta ▶ figurii.

Dacă, pentru $\varepsilon = 0$ în $\theta_R = 0 \pm 2k\pi$ sunt situate **punctele repulsive** și în $\theta_A = \pi \pm 2k\pi$ sunt situate **punctele atractor / atractive**, pentru $\varepsilon = 1$ ele nu mai apar pe axa absciselor, ci **punctele repulsive** apar în punctele de coordonate $P_R\{\theta_R = \varepsilon \pm 2k\pi; \text{sex}(\theta = \varepsilon \pm 2k\pi)\}$, iar cele **atractor / atractive** în punctele $P_A\{\theta_R = \varepsilon + \pi \pm 2k\pi, \text{sex}(\theta_R = \varepsilon + \pi \pm 2k\pi)\}$, așa cum se poate observa facil în **figura 26.4**.

FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE

ParametricPlot[{{x, x}, {x, (x - ArcSin[0.8Sin[x - 1]]) + (1/6)(x - ArcSin[0.8Sin[x - 1]])^3 + (3/40)(x - ArcSin[0.8Sin[x - 1]])^5 + (5/112)(x - ArcSin[0.8Sin[x - 1]])^7 + (35/1152)(x - ArcSin[0.8Sin[x - 1]])^9}, {Sin[x - ArcSin[0.8Sin[x - 1]]], x}, {x, ArcSin[x - ArcSin[0.8Sin[x - 1]] + 0.05]}, {x, -Pi/2, Pi/2}]

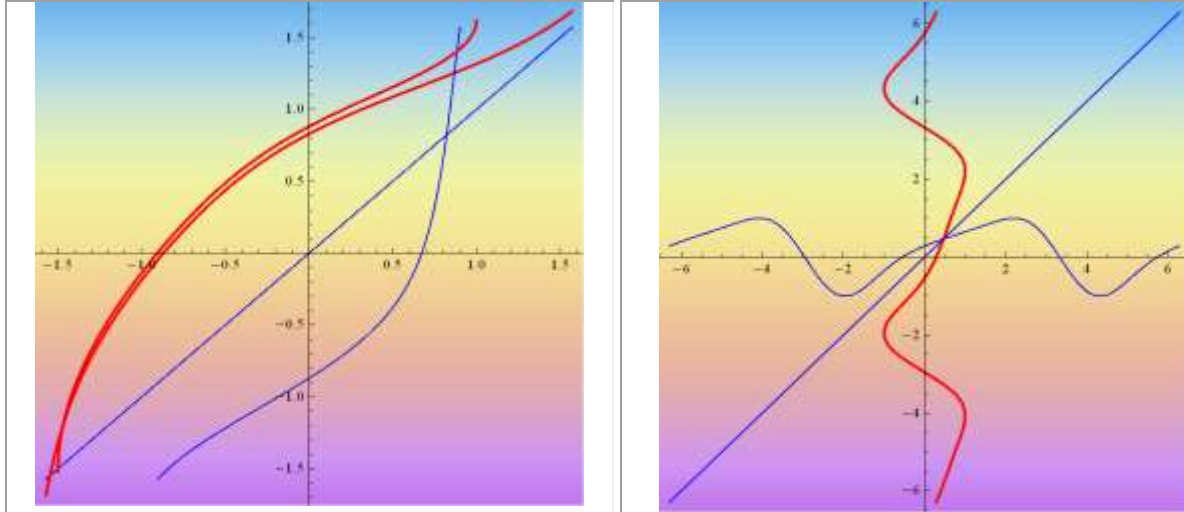
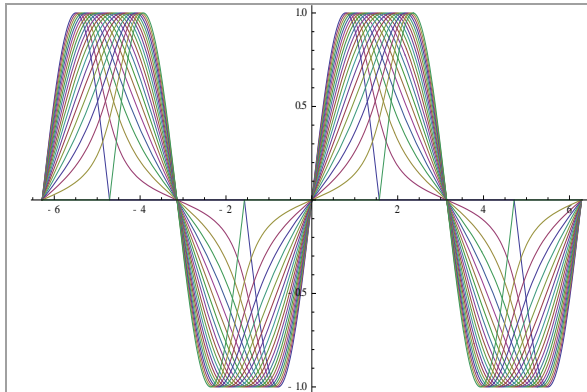


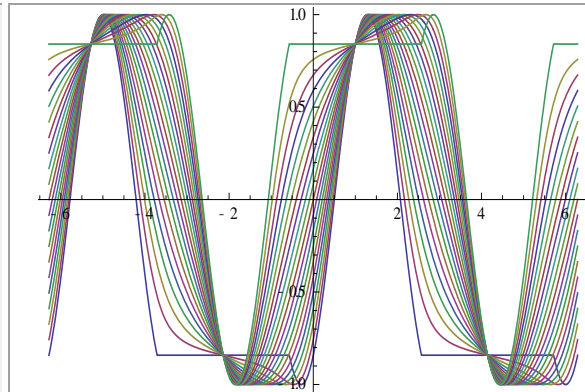
Fig.26.3 FSM-CE inversă ◀ $y = \text{arc}(\text{sex}\theta)$ și simetrica ei față de prima bisectoare ▶

Plot[Evaluate[Table[{Sin[x - ArcSin[0.1sSin[x]]], {s, -10,10}], {x, -2Pi, 2Pi}]]



$s \in [-10, 0]$

Plot[Evaluate[Table[{Sin[x - ArcSin[0.1sSin[x - 1]]], {s, -10,10}], {x, -2Pi, 2Pi}]]



$s \in [0, +10]$

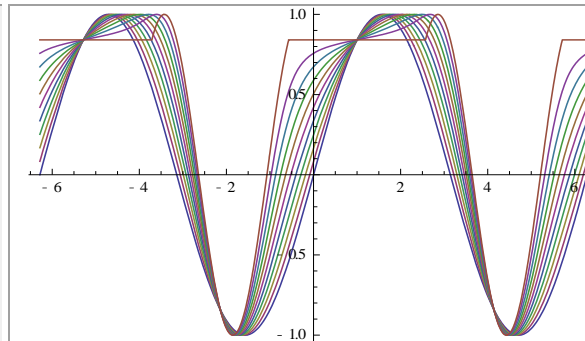
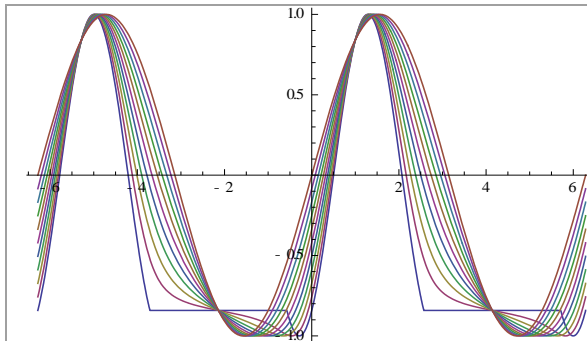


Fig.26.4 FSM-CE $\text{sex}\theta$ de excentricitate unghiulară nulă ($\epsilon = 0$) ▲ ◀ și diferite de zero ($\epsilon = 1$) ▲▶ și ▼◀▶.

FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE

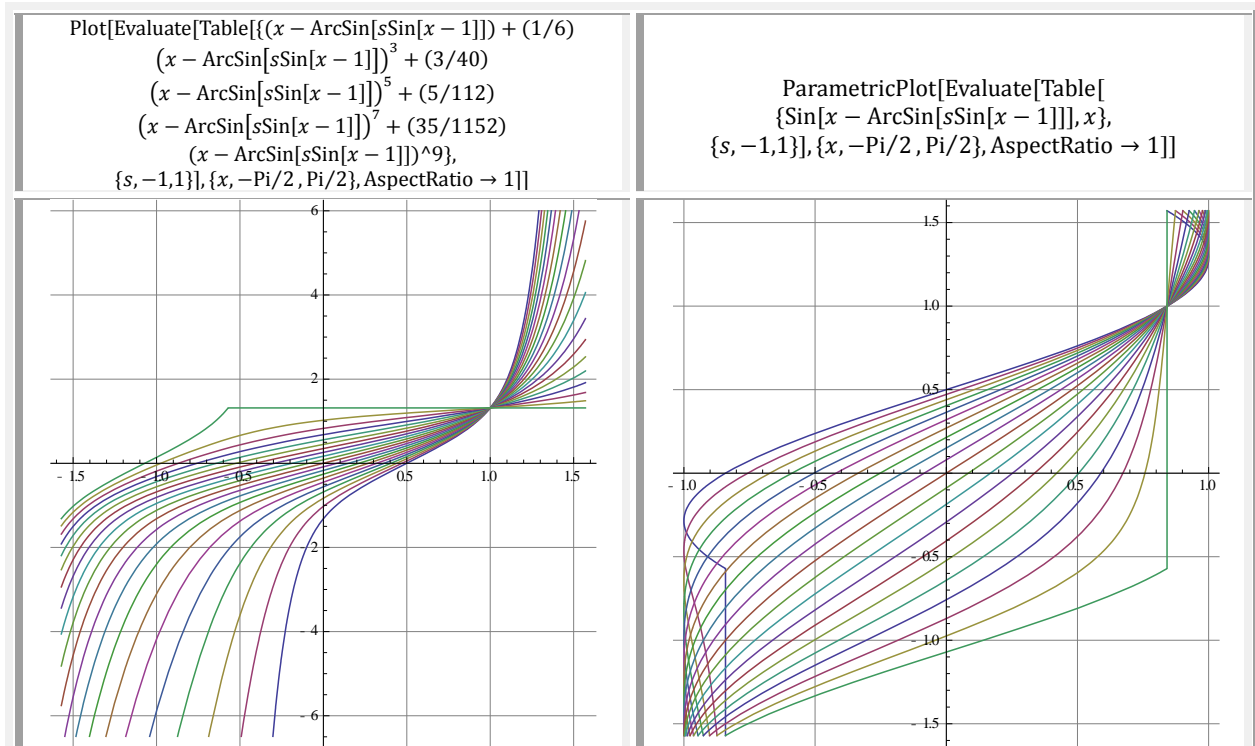


Fig.26.5 Două “inverse” posibile pentru cazul $\varepsilon \neq 0$

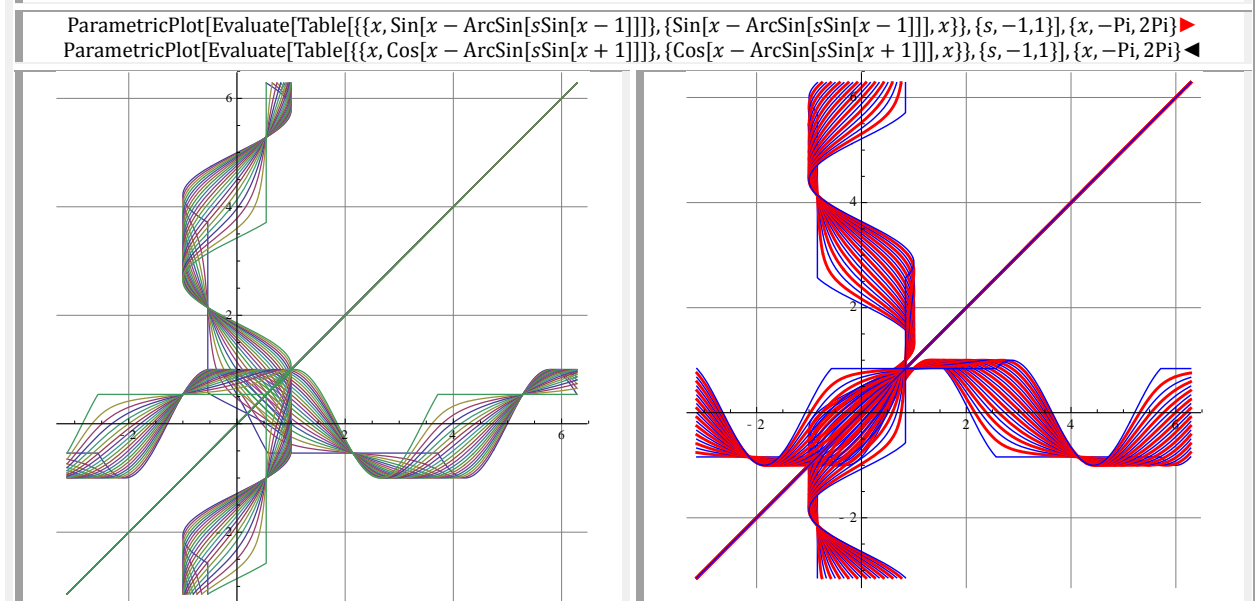


Fig.26.6 Inverse multivoce posibile pentru cazul $\varepsilon \neq 0$ ale **FSM-CE** $\text{sex}\theta$ și $\text{cex}\theta$ care sunt și simetricele funcțiilor directe față de prima bisectoare

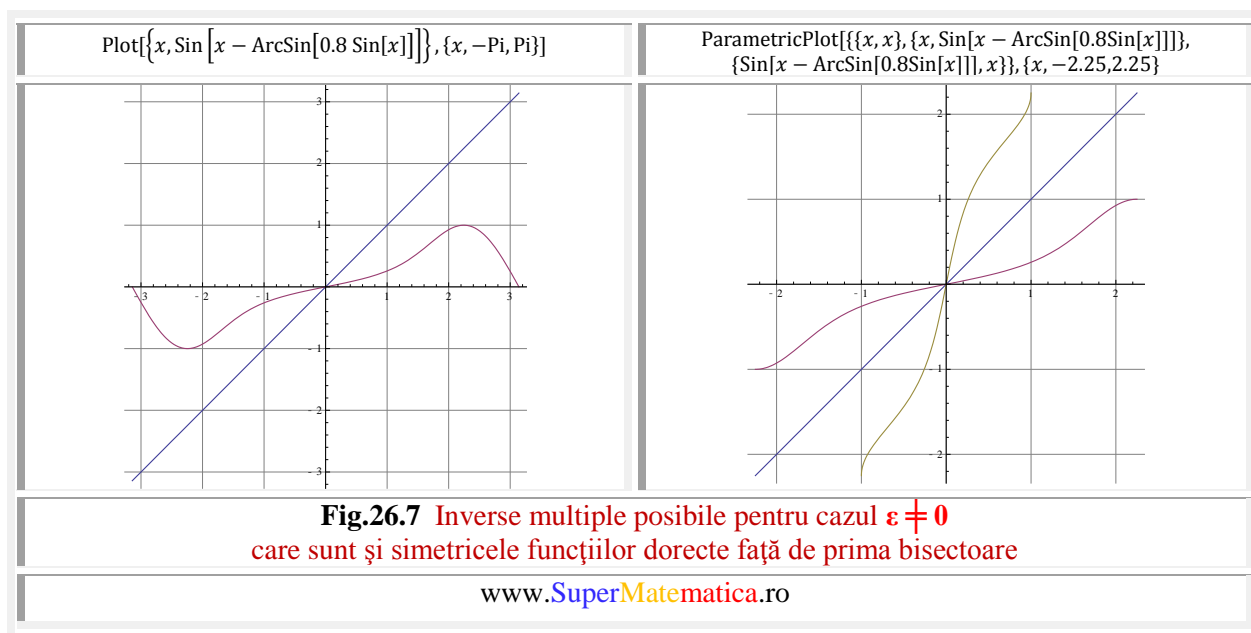
FUNCTII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE

Se mai poate observa și rezultă că singura **FSM-CE** $\text{sex}\theta$ din familie de $\varepsilon = 1$ este cea de $S(s = 0, \varepsilon)$, pentru care $\theta \rightarrow \alpha$ și $\text{sex}\theta \rightarrow \sin\alpha$, care, fiind o funcție centrică, evident, are inversa simetrică față de prima bisectoare.

Cele două tipuri de “inverse” posibile, pentru cazul $\varepsilon \neq 0$, realizate prin utilizarea dezvoltării în serie (1) ◀ și prin simetrizarea funcției $\text{sex}\theta$ ▶ față de prima bisectoare, sunt prezentate în **figura 26.5**.

În primul caz, punctele repulsive \mathbf{P}_R păstrează abscisele în $\theta_R = \varepsilon \pm 2k\pi$ (vezi $\theta = \varepsilon = 1$) (**Fig.26.5** ◀), aceleași ca și pentru funcția directă, iar, în al doilea caz, nu se mai păstrează abscisele acestor puncte, în schimb, punctele repulsive \mathbf{P}_R apar la ordonatele de valoare $y = \varepsilon \pm 2k\pi \rightarrow y = \varepsilon = 1$ (**Fig.26.5** ▶).

Se pune firesc întrebarea: “Care este de fapt inversa funcției $\text{sex}\theta$ și, în general, a **FSM-CE** ? ”



26.2. DETERMINAREA DOMENIULUI DE EXISTENȚĂ A FUNCȚIEI INVERSE UNIVOCE

Definiție : Fie funcția $f : A \rightarrow B$, bijectivă (injectivă și surjectivă).

Funcția $g : B \rightarrow A$, care asociază fiecărui element y din B elementul unic x din A , astfel încât, $f(x) = y$, se numește **funcția inversă** a funcției f .

Notații : Se utilizează notația f^{-1} (și se citește f la minus unu) pentru funcția g ($g = f^{-1}$).

O funcție f , numită **funcție directă**, dacă are inversă, aceasta poartă denumirea de **funcție inversabilă** sau **biunivocă** și ea este aceea care se notează cu f^{-1} .

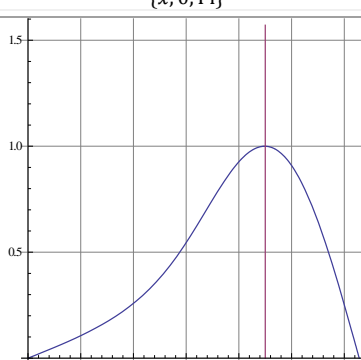
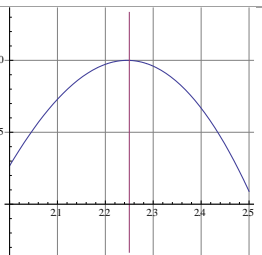
În cazul în care aceasta există, funcția g (inversa funcției f) este unică sau univocă. În aceste condiții are loc echivalența $y = f(x) \leftrightarrow x = g(y)$ în care x parcurge domeniul de definiție A al funcției f , iar y , imaginea lui x prin funcția f parcurge domeniul de definiție B al funcției g sau codomeniul funcției f .

Toate acestea sunt ilustrate, pentru funcția directă $y = \sin x$ și inversă $y^{-1} = \arcsin x$ a acestei funcții în dreapta ▶ **figurii 1**. Astfel, pentru funcția directă $y = \sin x$, domeniul de definiție este toată axa reală, adică $x \in \mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$, iar codomeniul este $y \in [-1, 1]$. Ca urmare, domeniul funcției inverse $y^{-1} = \arcsin x$ este $x \in [-1, 1]$ și codomeniul este $y^{-1} \in [-\pi, +\pi]$.

FUNCTII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE

Domeniul de definiție al funcției $y = \text{sex}\theta$, este tot axa reală, adică $\theta \in \mathbb{R}$ iar codomeniu ei este tot $y \in [-1, +1]$. Pentru determinarea domeniului funcției inverse e necesar sa se stabileasca valorile argumentului / abscisei θ pentru care $y = \text{sex}\theta$ ia valorile limită $y = \pm 1$.

În acest scop e necesar să se rezolve ecuația neliniară
 (4) $\text{sex}\theta = \pm 1$

Tabelul 26.1 Determinare abscisei punctului de tangență cu axa Ox.			
Plot[{x, Sin[x - ArcSin[0.8Sin[x]]}, {x, 0, Pi}]	Ecuația	Eroarea / diferența Θ	
	Sin[2.0-ArcSin[0.8 Sin[2.0]]]-1 Sin[2.1-ArcSin[0.8 Sin[2.1]]]-1 Sin[2.2-ArcSin[0.8 Sin[2.2]]]-1 Sin[2.3-ArcSin[0.8 Sin[2.3]]]-1 Sin[2.4-ArcSin[0.8 Sin[2.4]]]-1 Sin[2.5-ArcSin[0.8 Sin[2.5]]]-1 Sin[2.6-ArcSin[0.8 Sin[2.6]]]-1 Sin[2.7-ArcSin[0.8 Sin[2.7]]]-1 Sin[2.8-ArcSin[0.8 Sin[2.8]]]-1 Sin[2.9-ArcSin[0.8 Sin[2.9]]]-1 CONCLUZIA: Soluția pentru prima cifră electronică este $e_1 = 2$	-0.0733432 -0.027038 -0.0027496 → Θ minimă -0.00404641 -0.0331811 -0.09101 -0.176995 -0.28927 -0.424759 -0.579333	
Graficele funcțiilor Observații:			
Din graficul funcției $\text{sex}\theta$ se observă că primul maxim al funcției este cuprins între valorile $\theta = 2$ și $\theta = 2,5$. De aceea, singura cifră protonică este $p_1 = 2$			
Sin[2.20-ArcSin[0.8 Sin[2.20]]]-1 Sin[2.21-ArcSin[0.8 Sin[2.21]]]-1 Sin[2.22-ArcSin[0.8 Sin[2.22]]]-1 Sin[2.23-ArcSin[0.8 Sin[2.23]]]-1 Sin[2.24-ArcSin[0.8 Sin[2.24]]]-1 Sin[2.25-ArcSin[0.8 Sin[2.25]]]-1 Sin[2.26-ArcSin[0.8 Sin[2.26]]]-1 Sin[2.27-ArcSin[0.8 Sin[2.27]]]-1 Sin[2.28-ArcSin[0.8 Sin[2.28]]]-1 Sin[2.29-ArcSin[0.8 Sin[2.29]]]-1	-0.0027496 -0.00168005 -0.00087032 -0.000323158 -0.0000411671 -0.0000268172 -0.000282439 -0.000810225 -0.00161223 -0.00269037	Sin[2.250-ArcSin[0.8 Sin[2.250]]]-1 Sin[2.251-ArcSin[0.8 Sin[2.251]]]-1 Sin[2.252-ArcSin[0.8 Sin[2.252]]]-1 Sin[2.253-ArcSin[0.8 Sin[2.253]]]-1 Sin[2.254-ArcSin[0.8 Sin[2.254]]]-1 Sin[2.255-ArcSin[0.8 Sin[2.255]]]-1 Sin[2.256-ArcSin[0.8 Sin[2.256]]]-1 Sin[2.257-ArcSin[0.8 Sin[2.257]]]-1 Sin[2.258-ArcSin[0.8 Sin[2.258]]]-1 Sin[2.259-ArcSin[0.8 Sin[2.259]]]-1	-0.0000268172 -0.0000401934 -0.0000562717 -0.0000750543 -0.0000965434 -0.000120741 -0.00014765 -0.000177272 -0.00020961 -0.000244665
CONCLUZIA: Soluția pentru a doua cifră electronică este $e_2 = 5$		CONCLUZIA: Soluția pentru a treia cifră electronică este $e_3 = 0$	
	Sin[2.2500-ArcSin[0.8 Sin[2.2500]]]-1 Sin[2.2501-ArcSin[0.8 Sin[2.2501]]]-1 Sin[2.2502-ArcSin[0.8 Sin[2.2502]]]-1 Sin[2.2503-ArcSin[0.8 Sin[2.2503]]]-1 Sin[2.2504-ArcSin[0.8 Sin[2.2504]]]-1 Sin[2.2505-ArcSin[0.8 Sin[2.2505]]]-1 Sin[2.2506-ArcSin[0.8 Sin[2.2506]]]-1 Sin[2.2507-ArcSin[0.8 Sin[2.2507]]]-1 Sin[2.2508-ArcSin[0.8 Sin[2.2508]]]-1 Sin[2.2509-ArcSin[0.8 Sin[2.2509]]]-1	-0.0000268172 → Θ minimă -0.0000280333 -0.0000292764 -0.0000305465 -0.0000318436 -0.0000331677 -0.0000345188 -0.0000358969 -0.000037302 -0.0000387342	
Grafic ne valorificat în actuala aplicare a metodei atomice MŞ		CONCLUZIA: Soluția pentru a 4-a cifră electronică este $e_4 = 0$	

sau

$$(4') \text{sex } \theta \mp 1 = 0,$$

adică

$$(5) \sin\{\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]\} \mp 1 = 0.$$

Deoarece, programul evoluat **MATHEMATICA 8** a lui **Stephan Wolfram**, nu a putut soluționa această problemă neliniară, s-a apelat la metoda descrisă în lucrările lui **Mircea Eugen Șelariu**

1) **“MATEMATICA ATOMICĂ, METODA DETERMINĂRII SUCCESIVE A CIFRELOR CONSECUTIVE ALE UNUI NUMĂR → SOLUȚIE”**;

2) **“CIFRELE, PARTICULELE ELEMENTERE ALE MATEMATICII”** și

3) **“INTERSECȚII ÎN PLAN”** lucrări publicate pe / în web site-ul www.cartiaz.ro.

În aceste lucrări, funcțiile neliniare intersectau axa absciselor, astfel că se căuta la început grob, sau cifrele protonice (întregi), urmate de cifrele electronice (zecimale), apoi din ce în ce mai fin, pe măsură ce cifrele consecutive ale numărului soluție erau depistate, abscisa în care funcția intersecta axa absciselor.

În cazul de față, **FSM-CE** $\text{sex}\theta$, fiind tangentă la dreptele orizontale $y = \pm 1$, în punctele de abscisă extreme căutate / soluție, funcția din ecuația neliniară (5), nu traversează axa absciselor, ci va fi tangentă ei, în punctele căutate ca soluție ale ecuației (5). De aceea nu se va căuta valoarea cifrei, dintre cele 10 cifre posibile (**0,1, 2, ... 8, 9**) pentru care funcția schimbă de semn (traversează axa x, sau θ în cazul de față), ca în cazurile descrise în lucrările anterior enunțate, ci cifra pentru care se obține **o diferență negativă de valoare minimă**, care indică apropierea funcție / curbei, în zona respectivă de maxim / extrem, de punctul de tangența cu axa absciselor θ .

Procedeeul este ilustrat în **tabelul 1** în următoarele faze:

1) **Antamarea procedeeului.**

În această fază, din graficul funcției, se deduc vizual numărul maxim posibil de cifre lizibile și sigure ale soluției căutate.

Din graficul funcției în intervalul $\theta \in [0, \pi]$, prezentat în **tabelul 1**, se observă că unul dintre maximele funcției $\text{sex}\theta$ (primul) apare în intervalul $\theta \in [2; 2,5]$. De aceea, prima și singura cifră protonică (întregă) va fi **$p_1 = 2$** . Procedeeul putea fi îmbunătățit prin ridicarea graficului funcției $\text{sex}\theta$ doar în intervalul $\theta \in [2; 2,5]$, grafic prezentat în **tabelul 1**, dar ne utilizat în continuare. Din el rezultă mai precis, că punctul de tangență căutat se află în mijlocul intervalului $\theta \in [2,2; 2,3]$. Apoi se ia în considerare doar acest interval pentru un grafic următor, ș.a.m.d, cât programul de calculator permite determinarea lizibilă a intervalului ;

2) **Determinarea cifrelor electronice.**

Pentru determinarea succesiva a cifrelor electronice (zecimale), care sunt soluții ale acestei probleme, în 10 ecuații (5) se introduce de 10 ori cifra **2**, urmată, în ordine, de cele zece cifre existente posibile, de la **0** la **9**, **candidate** la a fi o posibilă cifră succesiva soluție a problemei. Deoarece eroarea minimă de $\vartheta = -0.0027496 \rightarrow$ **minimă**, apare pentru cifra **2**, rezultă că prima cifră electronică exactă este **$e_1 = 2$** . Ea se adaugă acum cifrei protonice **2** și se obțin primele 2 cifre exacte ale soluției **2, 2.....**

În continuare, se interpune între cifra protonică, aflata în prima fază, și cele 10 cifre existente, cifra **2** în cele 10 ecuații și se cere din nou calcularea / rezultatul erorilor.

În acest pas, eroarea minimă este de $\vartheta = -0.0000268172$ și apare în dreptul cifrei **5**, astfel că a doua cifră electronică exactă este **$e_2 = 5$** . Ea se adaugă la cifrele deja obținute și rezultă primele 3 cifre exacte ale soluției : **2, 25.....**

Procedând la fel, în continuare, rezultă a 3-a cifră electronică **$e_3 = 0$** , apoi a 4-a cifră electronică **$e_4 = 0$** ș.a.m.d. pentru câte cifre exacte sunt necesare sau până când eroarea devine nulă.

Științele Matematice stipulează că **graficele funcției directe și a celei inverse, când ea există, sunt simetrice față de prima bisectoare**, ceea ce ne facilitează raspunsul la întrebarea anterioară.

Ca urmare, sau în concluzie, inversa corectă a funcției sex θ este atât simetrica ei față de prima bisectoare, cât și exprimarea ei prin utilizarea dezvoltării în serie a funcției sin α sau sinx din relația (1), în care se înlocuiește abscisa α , sau x, cu funcția

$$(6) \begin{cases} \alpha = \theta - \arcsin [s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \\ x = y - \arcsin [s \cdot \sin(y - \varepsilon)] \end{cases}$$

asa cum se procedează la obținerea și a altor **FSM-CE**, numai dacă excentricitatea unghiulară ε este nulă, adică $\varepsilon = 0$, așa cum s-a mai specificat / arătat anterior.

În caz contrar, pentru $\varepsilon \neq 0$, pot fi definite două tipuri de “inverse”:

- Inversa clasică sau adevărată** care este **simetrica** funcției directe față de prima bisectoare și care permite exprimarea ecuațiilor și a graficelor lor, atât pentru funcțiile inverse **univoce** cât și pentru cele **multivoce**;
- Inversa pseudoexcentrică** care se obține prin utilizarea **dezvoltărilor în serii** de puteri și care permite numai obținerea funcțiilor “inverse” **univoce**.

26.3 FUNCȚII SUPERMATEMATICE (FSM) CIRCULARE EXCENTRICE (CE) INVERSE UNIVOCE ȘI MULTIVOCE.

NOI FUNCȚII INVERSE ÎN (SUPER)MATEMATICĂ

În ideea că obținerea unor funcții matematice noi a fost, este și va fi o preocupare permanentă a Matematicii, așa cum se poate constata / rezultă din istoria acestei științe, se vor prezenta, în continuare, o pleiadă de noi funcții supermatematice circulare excentrice inverse, multivoce din care pot fi deduse fără dificultate și cele univoce.

Mai mult chiar, rezultă în continuare, fără dificultate, că **FSM-CE** de variabilă **excentrică α** sau **y** sunt inversele **FSM-CE** de variabilă excentrică **θ** sau **x**, concluzie deosebit de importantă, deoarece oferă soluțiile unor ecuații trigonometrice neliniare, posibil de rezolvat “exact” numeric și mai greu, uneori deloc, de rezolvat simplu și exact simbolic !!..

De aceea, sunt prezentate, în paralel, și graficele funcțiilor directe.

Astfel, în **figura 26.8** sunt prezentate, în partea superioară \blacktriangle , **FSM-CE amplitudine excentrică** directe și inverse, de **variabilă excentrică aex θ** , iar în partea inferioară \blacktriangledown , cele de **variabilă centrică Aex α** .

Prin compararea graficelor, dar nu numai în acest mod, ci și din teoria generală a funcțiilor **supermatematice circulare excentrice (FSM-CE)** și nu numai, rezultă că

$$(t) \quad \mathbf{aex\theta}^{-1} = \mathbf{Aex\alpha} = \mathbf{\theta(\alpha)} .$$

și, în consecință, deoarece inversa inversei este însăși funcția directă, rezultă că

$$(8) \quad \mathbf{Aex\alpha}^{-1} = \mathbf{aex\theta} = \mathbf{\alpha(\theta)} ,$$

asa cum se poate verifica în **figura 26.8**.

Se știe că, dacă funcția directă este

$$(9) \quad y(x) = \mathbf{aexx} = x - \arcsin[s \cdot \sin(x - z)],$$

sau

$$(9') \quad \mathbf{\alpha(\theta)} = \mathbf{aex\theta} = \mathbf{\theta - \arcsin(s \cdot \sin(\theta - \varepsilon))} ,$$

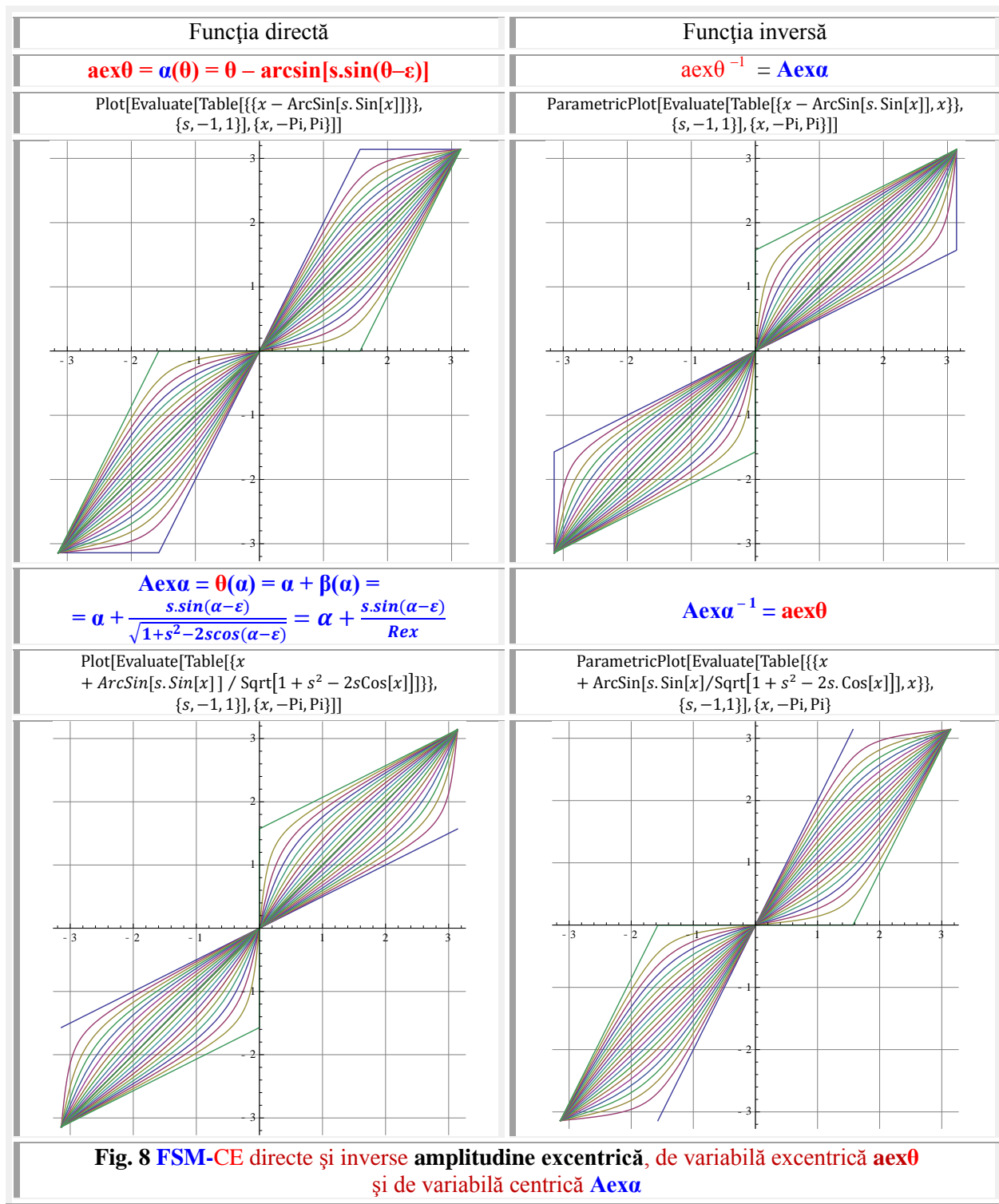
atunci inversa ei va fi

$$(10) \quad x(y) = \mathbf{Aexy} = y + \arcsin \frac{s \cdot \sin(y-z)}{\sqrt{1+s^2-2s \cdot \cos(y-z)}} = y + \arcsin \frac{s \cdot \sin(y-z)}{Rexy} ,$$

sau

$$(10') \quad \mathbf{\theta(\alpha)} = \mathbf{Aex\alpha} = \mathbf{\alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \cdot \cos(\alpha-\varepsilon)}}} = \mathbf{\alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha}} .$$

FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE



Ceea ce arată, un lucru **extrem de important**, că soluția ecuației trigonometrice neliniare, derivată din (11), pentru determinarea inversei funcției \mathbf{aexx} , adică

FUNCTII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE

(13) $x - \arcsin[s \cdot \sin x] - y = 0$

în funcție de x este funcția

(11) $x = y + \arcsin \frac{s \cdot \sin(y-z)}{\sqrt{1+s^2-2s \cdot \cos(y-z)}}$

Pentru verificare, este necesar să se rezolve ecuația

(12) $x - \arcsin[s \cdot \sin x] - y = 0,$

în funcție de x, respectiv, α în funcție de θ , adică $\alpha(\theta)$.

Tabelul 26.2 Verificarea soluțiilor cu programul de calcul Matematica 8		
x = 3, s = 0,8	$\frac{N[3 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[3]] + \text{ArcSin}[(0.8 \text{ Sin}[3 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[3]]])] / \sqrt{1.64 \cdot 1.6 \text{ Cos}[3 \cdot \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[3]]]}}{= 3.}$	y = x = 3
x = 1, s = 0,8	$\frac{N[1 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1]] + \text{ArcSin}[(0.8 \text{ Sin}[1 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1]]])] / \sqrt{1.64 \cdot 1.6 \text{ Cos}[1 \cdot \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1]]]}}{= 1.}$	y = x = 1
x = $\frac{\pi}{2}$, s = 0,8	$\frac{N[\frac{\pi}{2} - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[\frac{\pi}{2}]] + \text{ArcSin}[(0.8 \text{ Sin}[\frac{\pi}{2} - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[\frac{\pi}{2}]]])] / \sqrt{1.64 \cdot 1.6 \text{ Cos}[\frac{\pi}{2} \cdot \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[\frac{\pi}{2}]]]}}{= 1.570796326794897 \dots = \frac{\pi}{2}}$	y = x = $\frac{\pi}{2}$
x = 3, s = 0,6	$\frac{N[3 - \text{ArcSin}[0.6 \text{ Sin}[3]] + \text{ArcSin}[(0.6 \text{ Sin}[3 - \text{ArcSin}[0.6 \text{ Sin}[3]]])] / \sqrt{1.36 \cdot 1.2 \text{ Cos}[3 \cdot \text{ArcSin}[0.6 \text{ Sin}[3]]]}}{= 3.}$	y = x = 3

Încercarea de-a oferi programului evoluat **Matematica 8** posibilitatea de-a se evidenția prin rezolvarea simbolică a acestei ecuații a fost un insucces.

La comanda

(13) $\text{Solve}[x - \text{ArcSin}[s \text{ Sin}[x]] - y == 0, x],$

răspunsul programului a fost

(14) “**This system cannot be solved with the methods available to Solve**”,

adică “**Acest sistem nu poate fi rezolvata cu metodele disponibile de rezolvare**”.

Pentru a verifica valabilitatea soluției, s-a încercat calcularea valorii funcției x(y) din relația (12) în care s-a înlocuit x cu expresia din relația (11), rezultatul trebuind să fie nul, dacă x, dat de relația (11), verifică ecuația

(15) $y(x) = 0 \rightarrow y(x(y)) = 0$

Deoarece programele n-au reușit să calculeze simbolic acest lucru, s-a trecut la calculul numeric, în care scop, s-a ales $s = 0,8$ și $\theta \equiv x = 3$ care a dat rezultate. Astfel, la comanda de calcul numeric

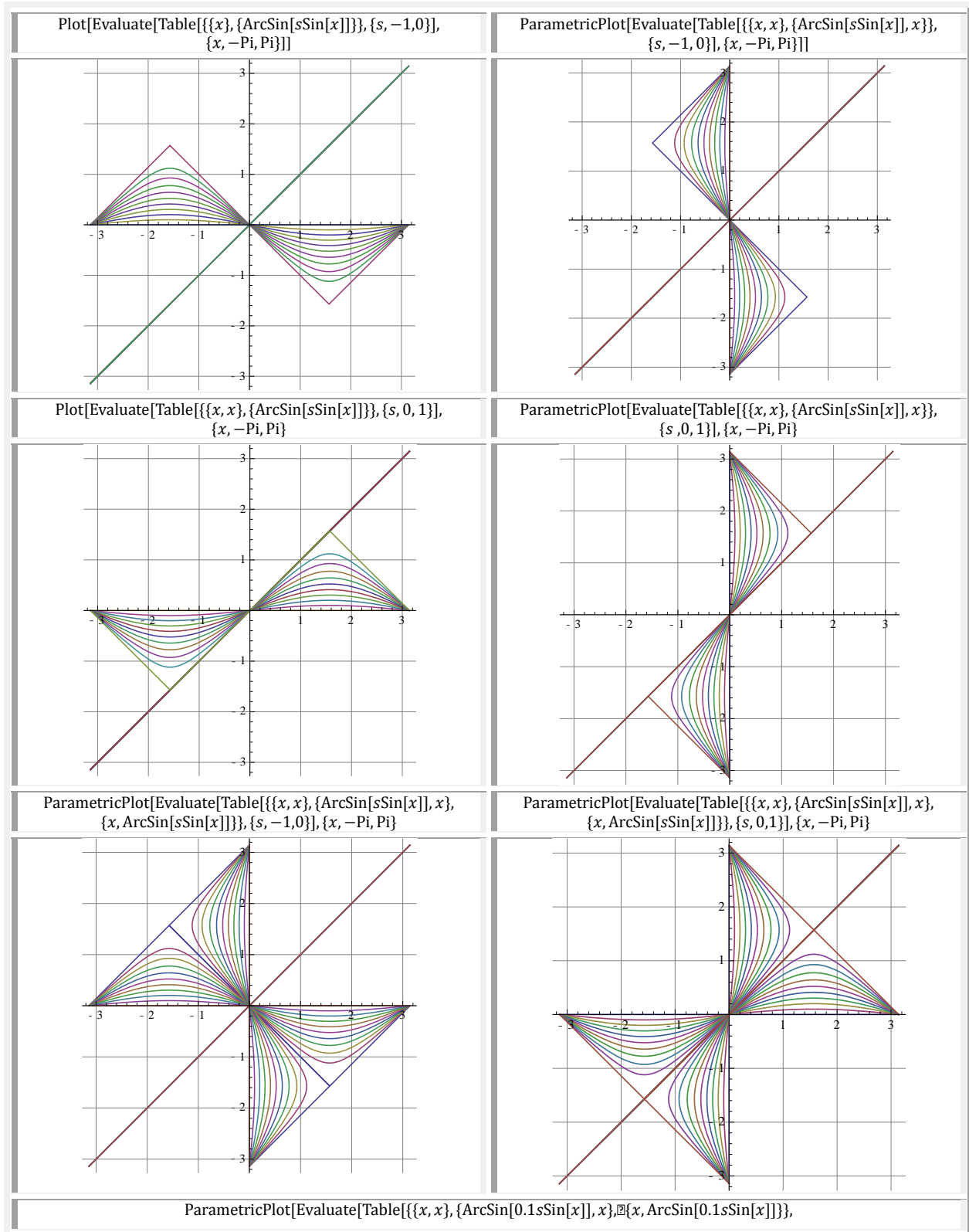
(16)
$$\left\{ \begin{array}{l} N \left[y + \arcsin \frac{s \cdot \sin(y-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s \cdot \cos(y-\varepsilon)}} \right], \text{ pt. } y = x - \text{ArcSin}[s \cdot \text{Sin}[x]] \\ \text{cu } s = 0,8 \text{ și } x = 3 \\ N[3 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[3]] + \frac{\text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[3 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[3]]]}{\sqrt{1+0.8^2-2 \cdot 0.8 \text{ Cos}[3 - \text{ArcSin}[3]]}}] = 3 \end{array} \right.$$

s-a obținut și $y = 3 = x$, astfel că ecuația este verificată numeric identic.

Au fost efectuate verificări și pentru alte valori, ca cele din **tabloul 26.2**, prezentat anterior.

Este evident ca pentru $x = y \rightarrow y - x = 0$ și $y = x$ arată că toate aceste puncte sunt simetrice față de prima bisectoare.

FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE



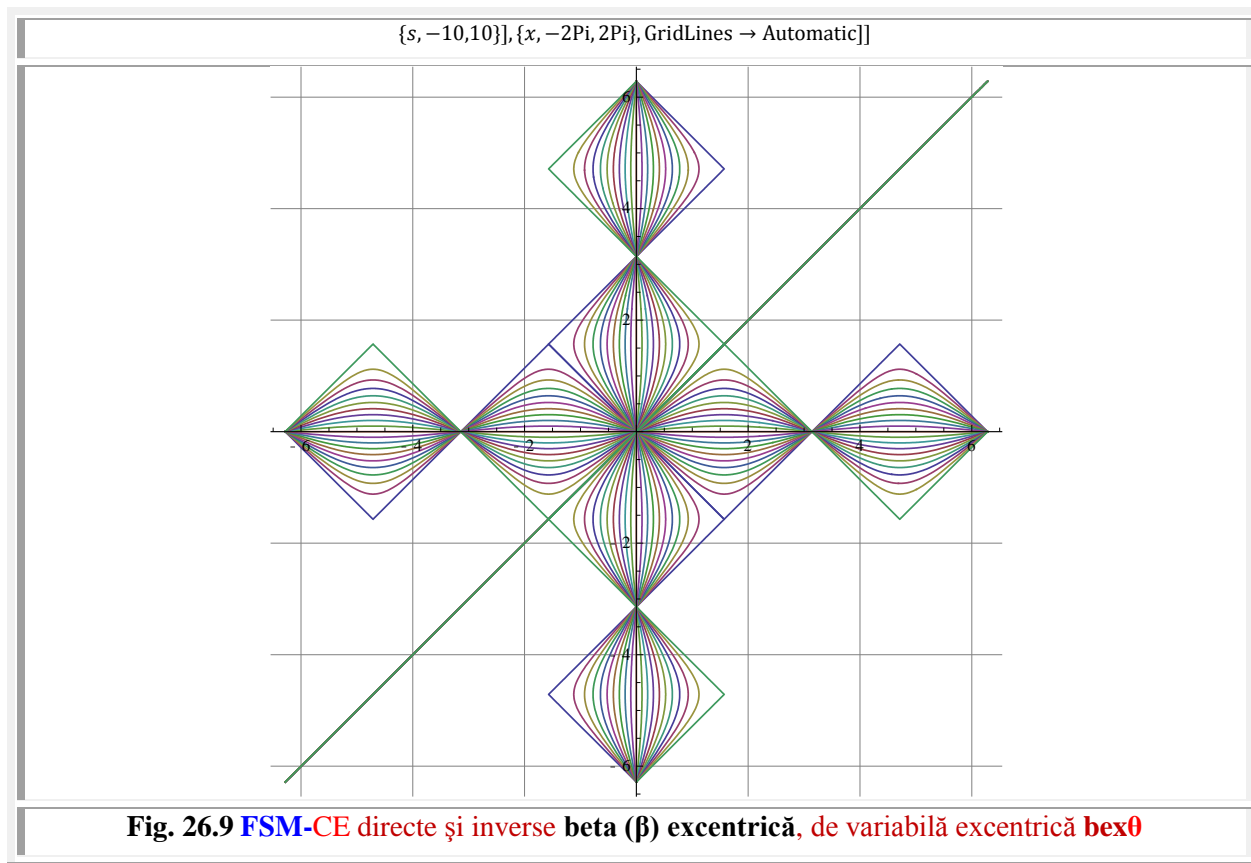


Fig. 26.9 FSM-CE directe și inverse beta (β) excentrică, de variabilă excentrică bexθ

Nu toate FSM-CE de variabilă excentrică și centrică sunt inverse una alteia. Este suficient să comparăm graficele funcțiilor din figura 26.9 cu cele din figura 26.10, pentru a constata acest fapt.

Așa de exemplu, funcțiile beta excentrice de variabilă excentrică θ, sau x, bexθ, directe și inverse, reprezentate în figura 26.9 și cele de variabilă centrică α, sau y, reprezentate în figura 26.10, nu sunt inverse una alteia, ca în cazul funcțiilor amplitudine excentrică, anterior prezentate.

În partea superioară ▲ a figurii sunt prezentate, separat, funcțiile directe în stânga figurii ◀ și inversele lor în dreapta ▶, iar în partea inferioară ▼ sunt prezentate suprapuse.

FSM-CE aexθ și bexθ, cât și cele de variabilă centrică Aexα și Bexα nu au corespondente în matematica centrică (MC), în schimb, se poate observa că pentru excentricitate numerică liniară unitară (s = 1) ele pot modela funcțiile speciale în dinți de f(i)erestrău simetrici, cu ajutorul relațiilor lor simple, invariante, alcătuite din numai doi termeni, fără dezvoltări în serii și fără să aproximeze segmentele de linii drepte ale dinților, cum este cazul în exemplul comparat.

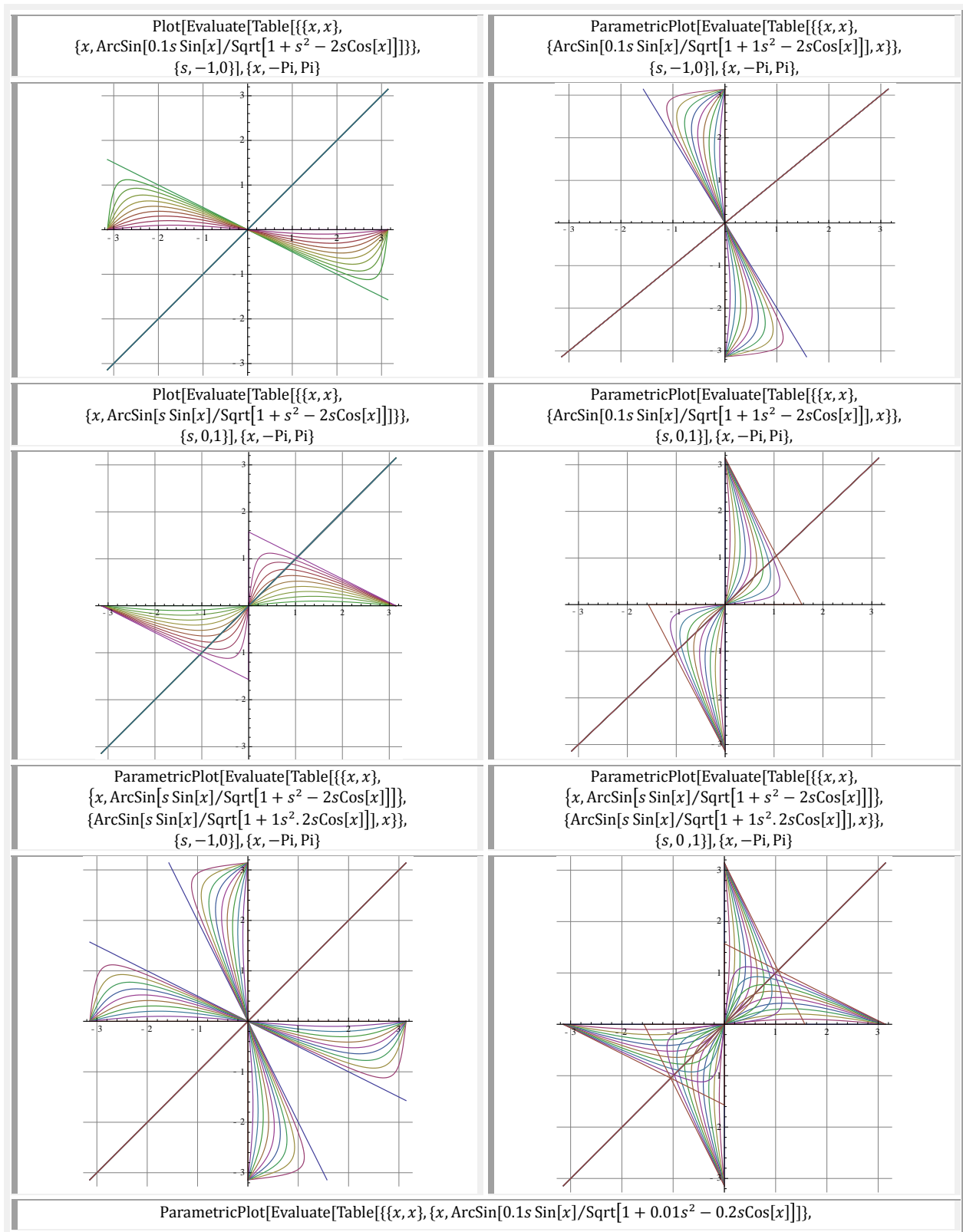
Existența unei excentricități unghiulare ε nu face alt ceva decât să deplaseze graficele FSM-CE bexθ directe cu -ε, paralel cu axa absciselor, iar a funcției aexθ directă cu +ε, atât pe direcția absciselor, cât și pe cea a ordonatelor, deci, să deplaseze punctul nodal N(0,0), al familiei de curbe, din originea O(0,0), pentru ε = 0, în punctul N(ε, ε), pentru ε ≠ 0.

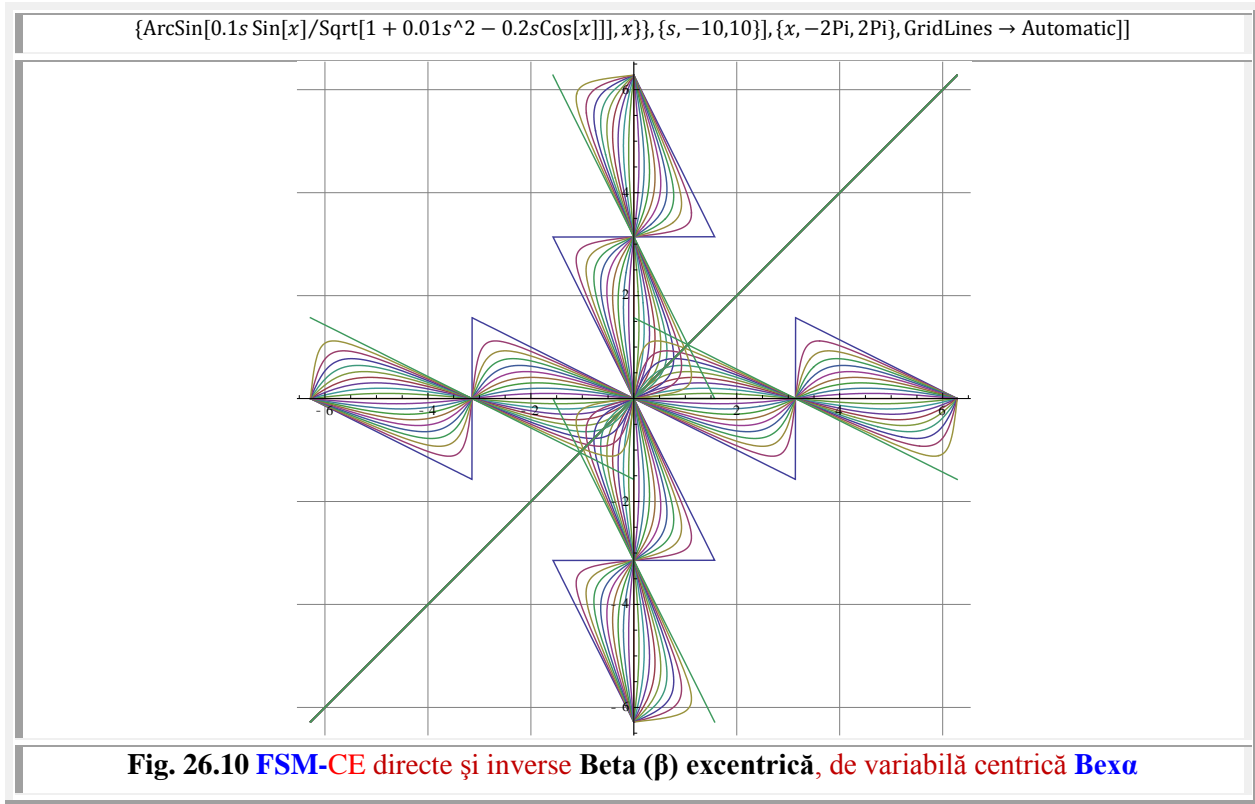
Pentru a determina ecuația inversei FSM-CE bexθ este necesar să se rezolve, ca / în funcție de y, ecuația

$$(17) \quad y = bex\theta \quad \text{sau, explicit,}$$

$$(17') \quad y - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] = 0$$

FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE





A cărei soluție, facil de determinat, scriind

$$(18) \quad y = \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] , \text{ astfel că}$$

$$(19) \quad \sin y = s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)$$

din care rezultă

$$(20) \quad \theta - \varepsilon = \arcsin \frac{\sin y}{s}$$

astfel că, în final, soluția ecuației este

$$(21) \quad x \equiv \theta = \varepsilon + \arcsin \frac{\sin y}{s}$$

cu graficele din **figura 26.11**.

Aceeași soluție o oferă și programul Mathematica 8, cu observația / indicația următoare

**“Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not **

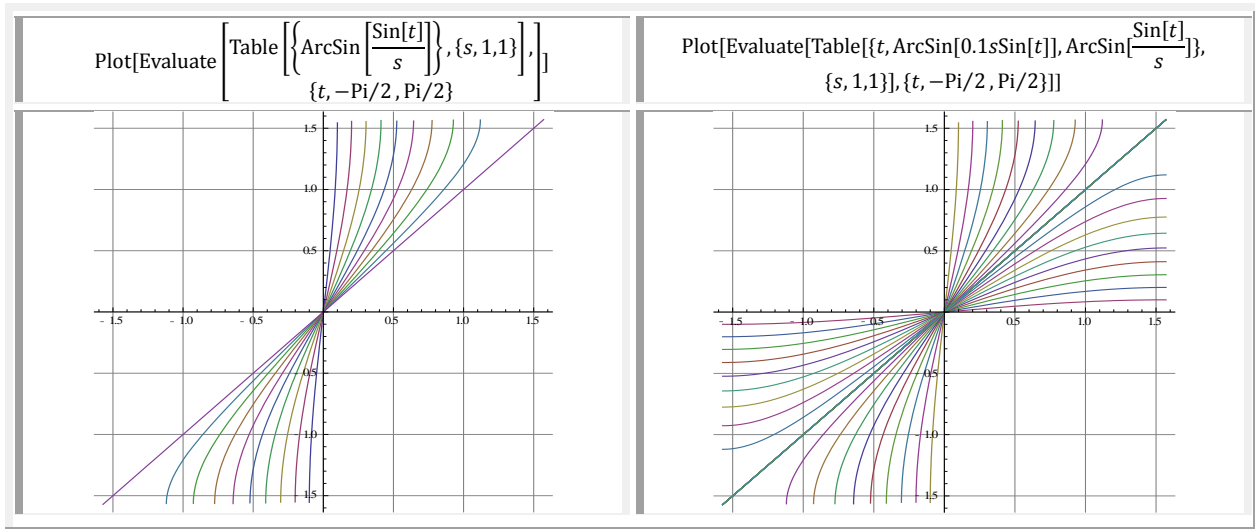
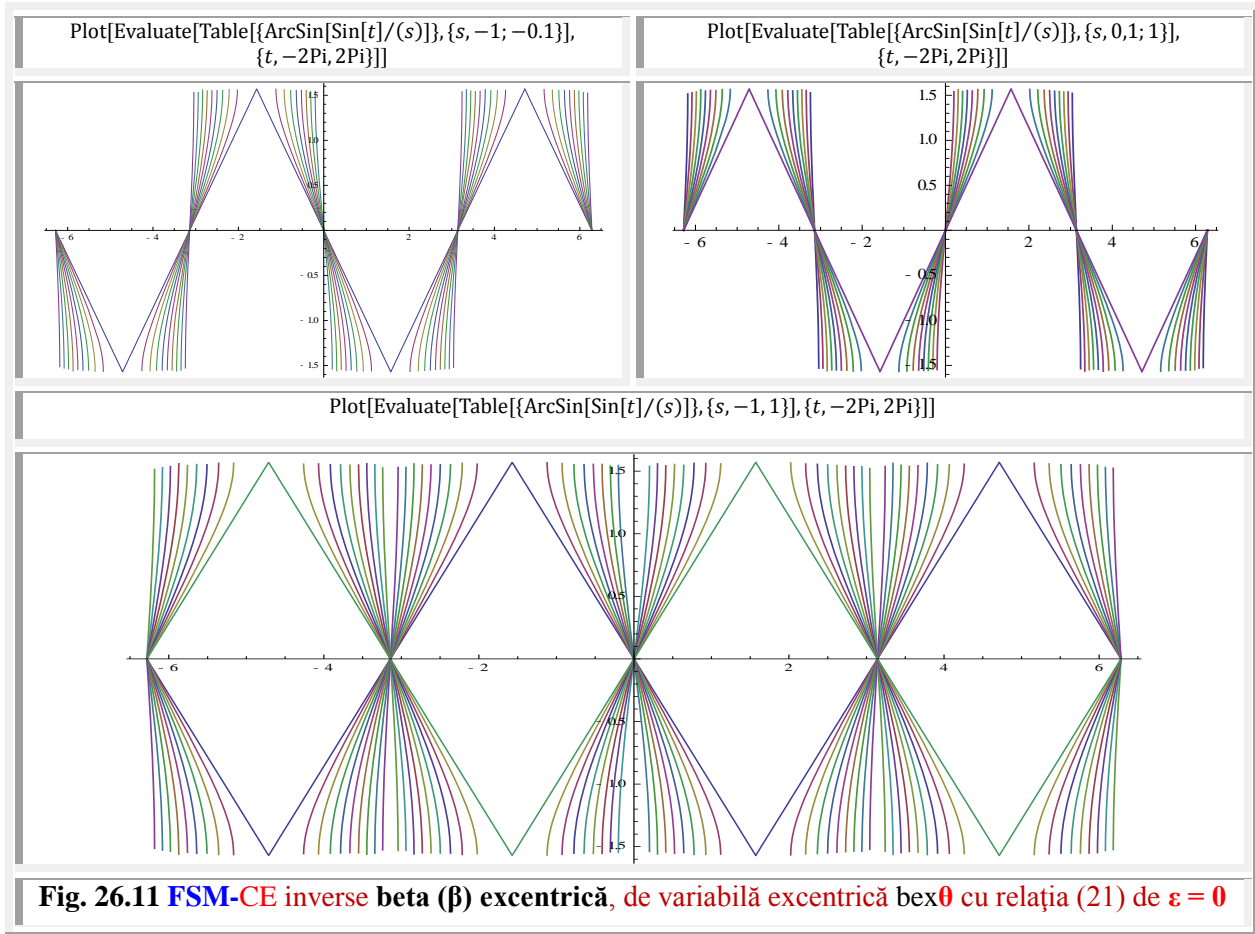
be found; use Reduce for complete solution information” adică, conform unei traduceri automate ” Funcțiile inverse sunt utilizate de către Rezolva, astfel încât unele soluții nu pot fi găsite, utilizați Reducerea pentru informații cu privire la soluția completă”

Utilizând “Reducerea”

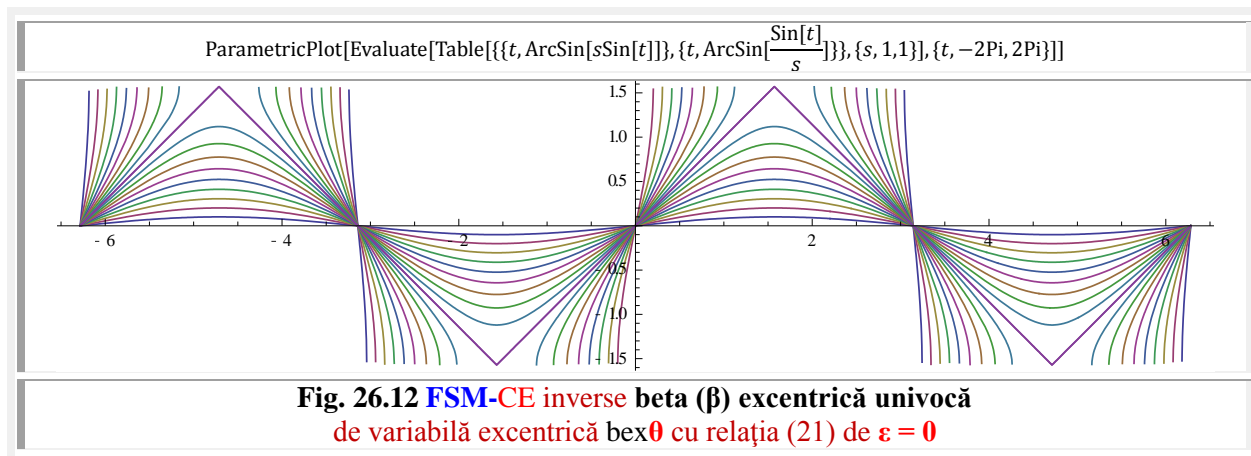
$$(22) \quad \text{Reduce}[\text{ArcSin}[a \text{ Sin}[x]]-y=0, \{x\}]$$

Rezultă : $(C[1] \in \text{Integers} \&\& a \neq 0 \&\& ((\text{Re}[y] = -(\pi/2) \&\& \text{Im}[y] \geq 0 \&\& (x = \pi - \text{ArcSin}[\text{Sin}[y]/a] + 2 \pi C[1] \parallel x = \text{ArcSin}[\text{Sin}[y]/a] + 2 \pi C[1])) \parallel (-(\pi/2) < \text{Re}[y] < \pi/2 \&\& (x = \pi - \text{ArcSin}[\text{Sin}[y]/a] + 2 \pi C[1] \parallel x = \text{ArcSin}[\text{Sin}[y]/a] + 2 \pi C[1])) \parallel (\text{Re}[y] = \pi/2 \&\& \text{Im}[y] \leq 0 \&\& (x = \pi - \text{ArcSin}[\text{Sin}[y]/a] + 2 \pi C[1] \parallel x = \text{ArcSin}[\text{Sin}[y]/a] + 2 \pi C[1])))) \parallel (a = 0 \&\& y = 0)$. Se poate observa în / pe **figura 26.11** că în intervalul $t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ **inversa**, ca funcție **univocă**, este simetrică față de prima bisectoare a familiei de curbe directe **bexθ**, așa cum se prezintă situația și în **figura 26.12** ▲ ◀.

FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE



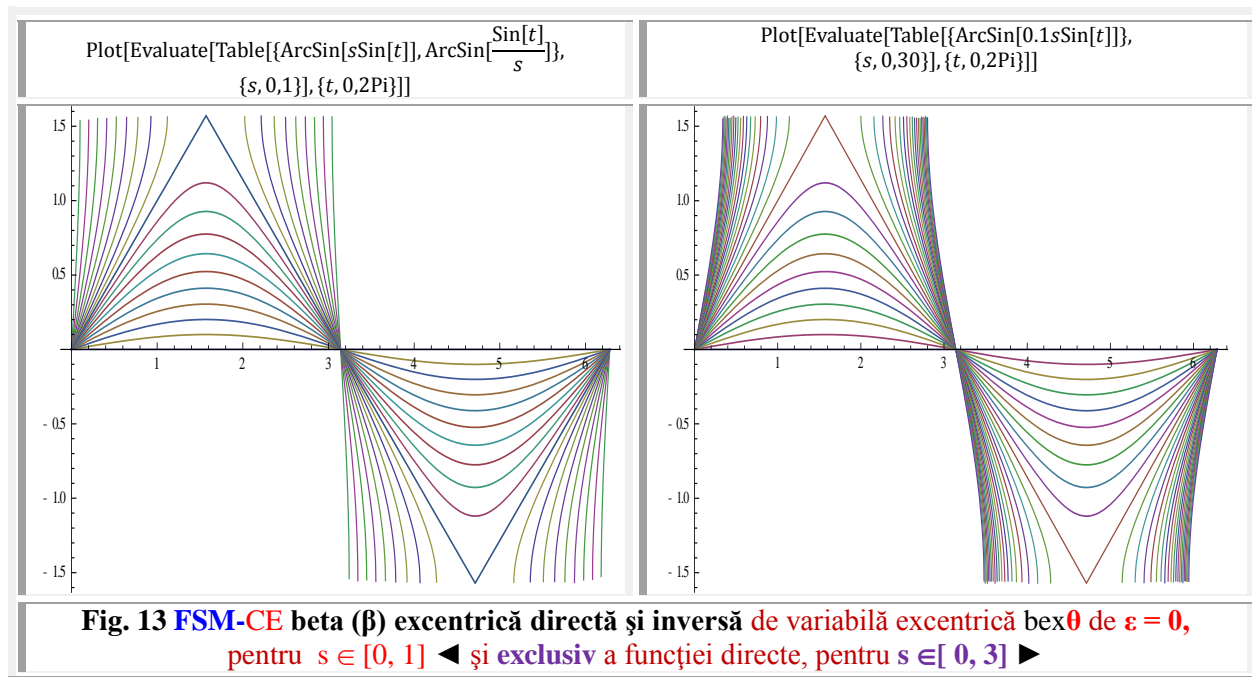
FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE

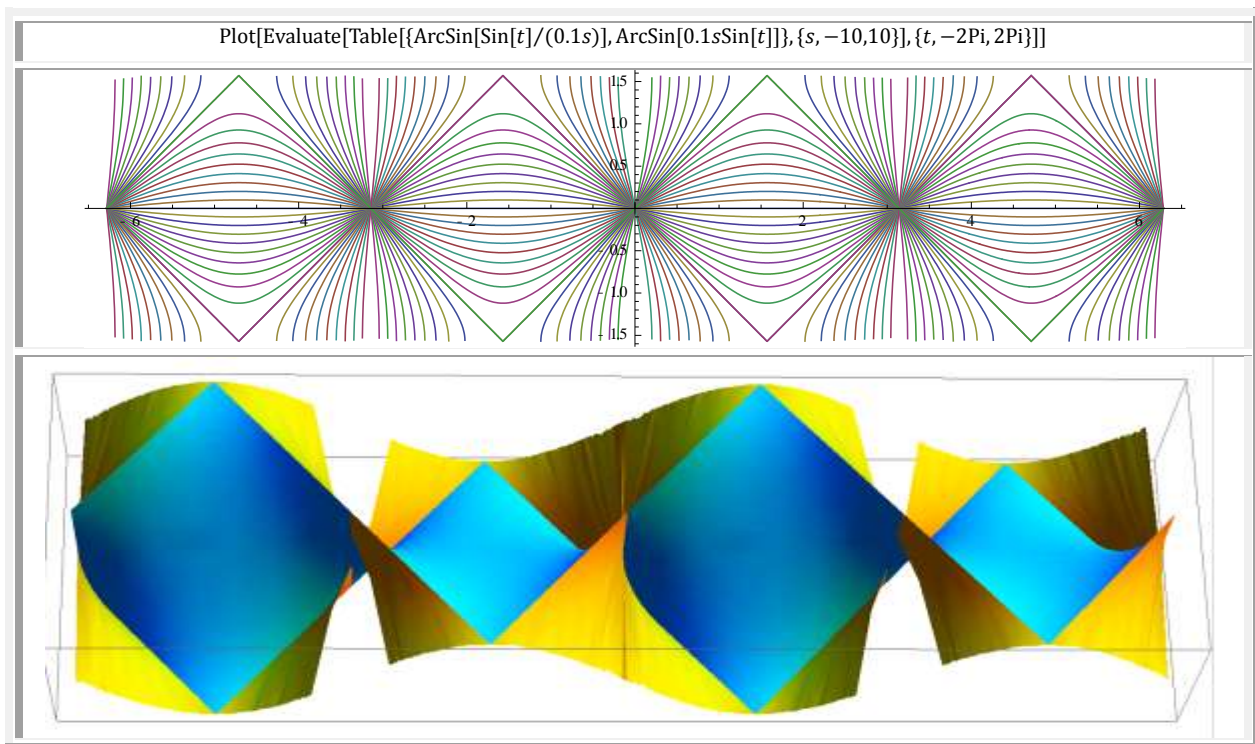
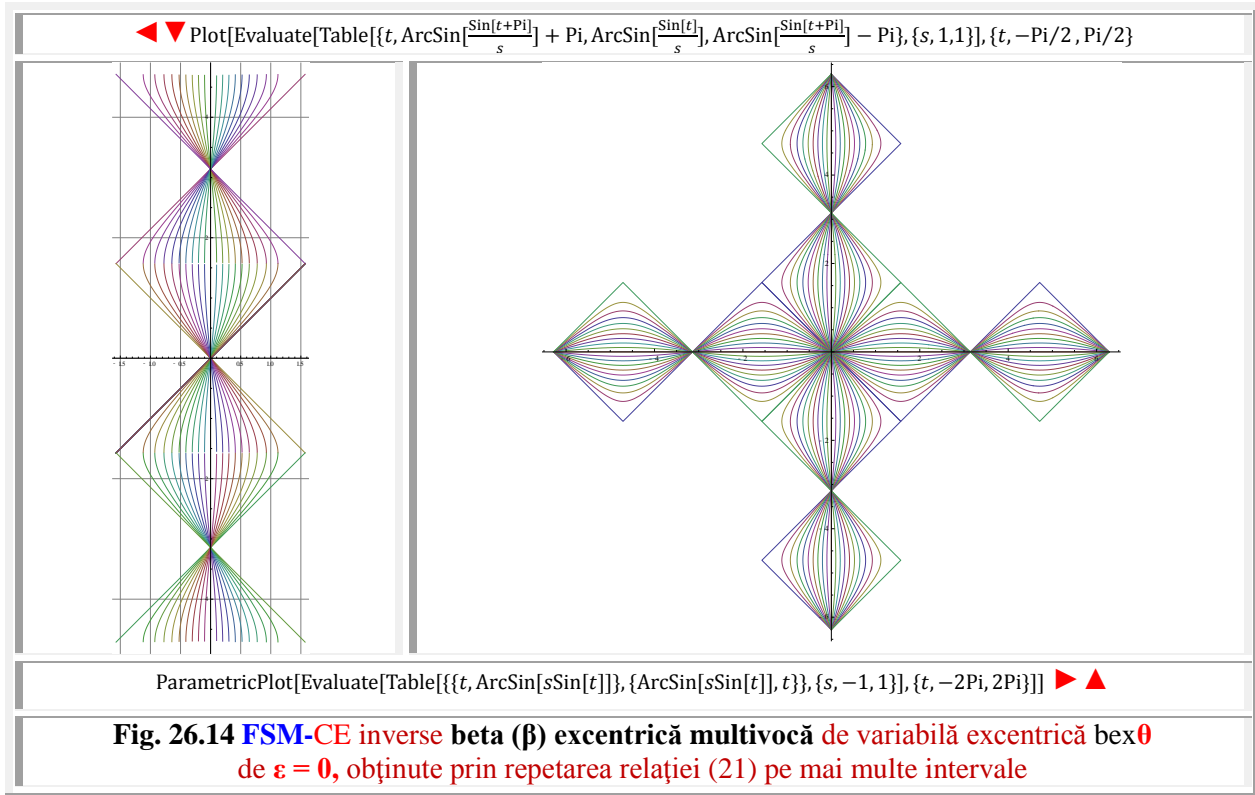


În **figura 26.12** \blacktriangle \blacktriangleright sunt prezentate atât familia de funcții directe cât și cea de funcții inverse univoce, în aceleași grafic, pentru comparație și pentru constatarea simetriei lor față de prima bisectoare, iar jos \blacktriangledown sunt prezentate familia de funcții directe și “inversele” în domeniul $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$, care, așa cum se poate observa, inversa din domeniul $s \in [-1, 1]$.

În **figura 26.13** se poate observa că inversele **FSM-CE $\text{bex}\theta$** \blacktriangleleft din afara intervalului $t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, adică din intervalele / domeniile $t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ și $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, sunt **asemănătoare** (nu identice!) cu funcția directă pentru excentricități liniare supraunitare ($s > 1$) \blacktriangleright . Dacă funcția directă și cea inversă multivocă, ca simetrica funcției directe față de prima bisectoare, se reprezintă împreună, se obțin graficele din **figura 26.14** \blacktriangleright , iar funcția inversă multivocă poate fi obținută așa cum se indică în **figura 26.14** \blacktriangleleft .

Funcții interesante se obțin atât în 2D cât și, mai ales, în 3D reprezentând împreună funcția directă și cea inversă într-un interval impropriu celei inverse, așa cum sunt reprezentate în **figura 26.15**.





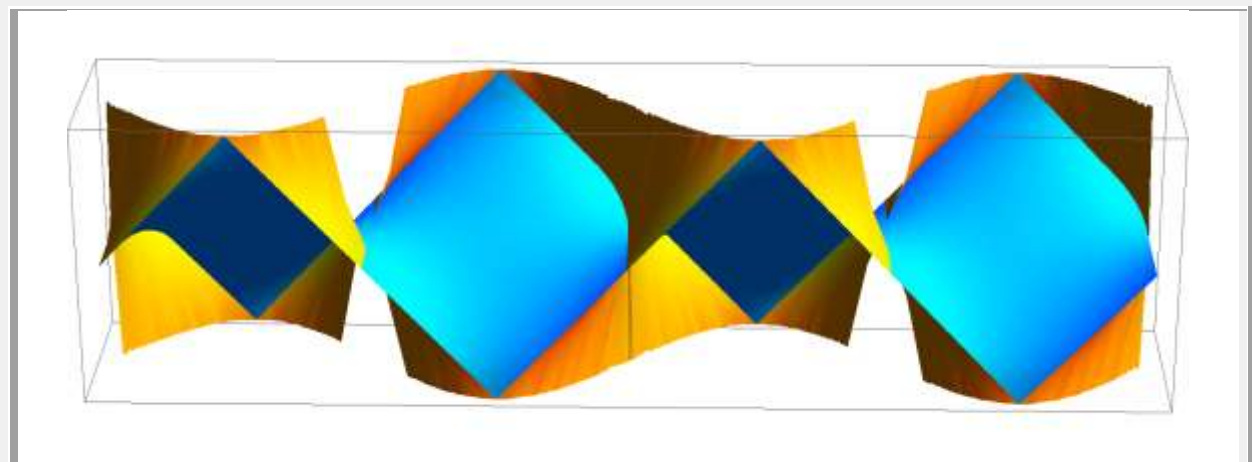


Fig. 26.15 FSM-CE beta (β) excentrică multivocă directă și inversă de variabilă excentrică bex_0 de $\epsilon = 0$, obținute prin relației (21) extinsă pe mai multe intervale în 2D și în 3D

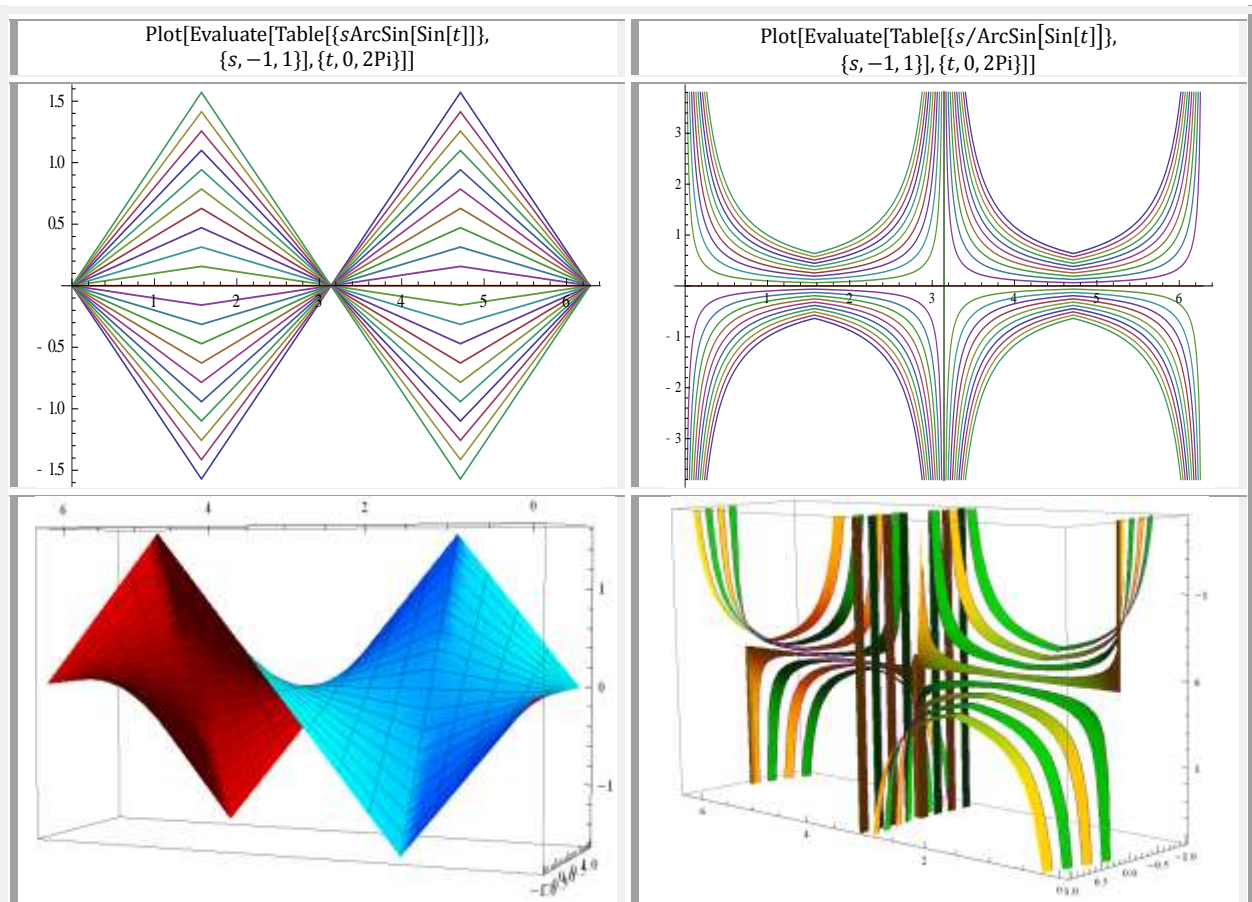
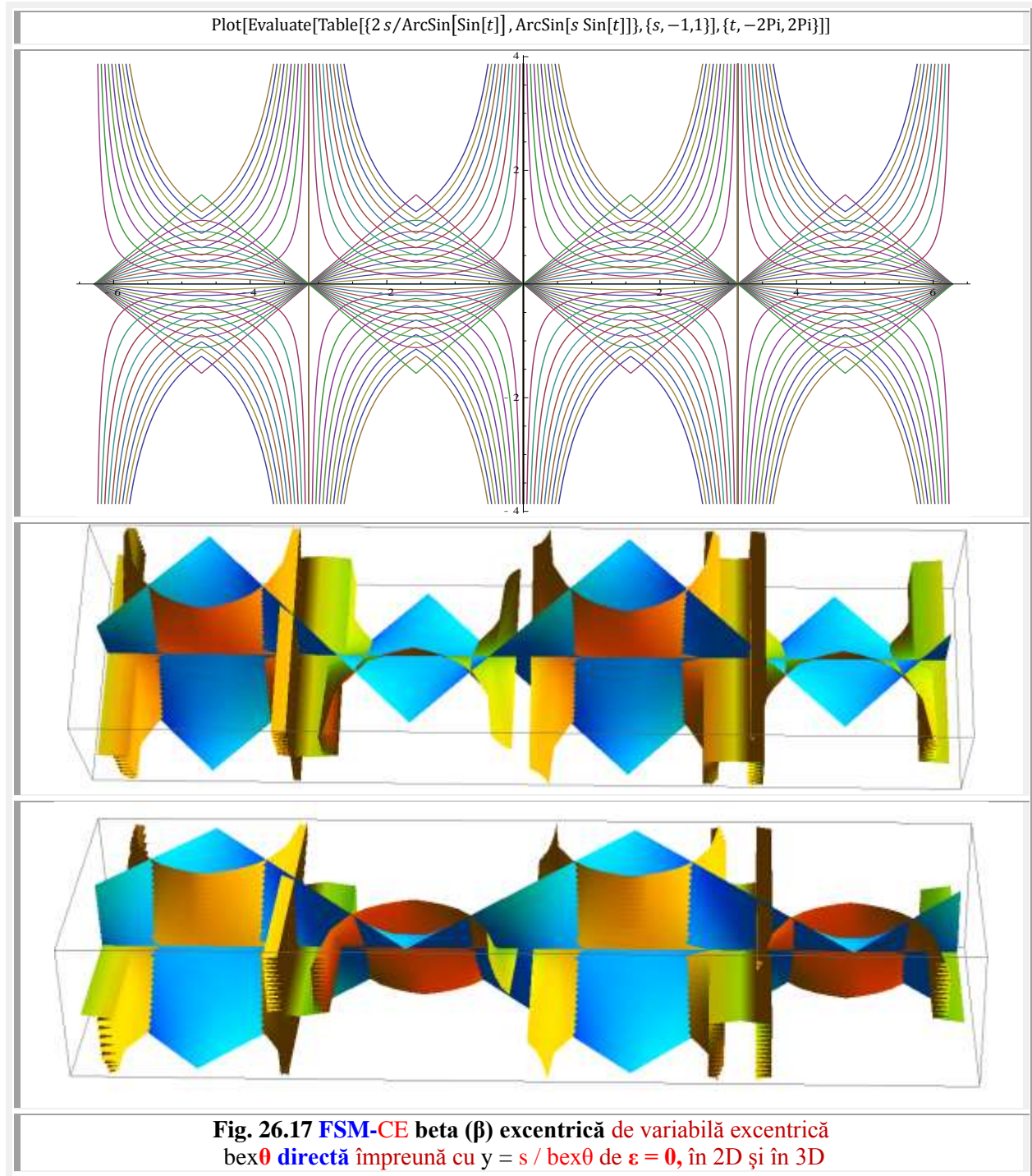


Fig. 26.16 FSM-CE beta (β) excentrică multivocă directă și inversă de variabilă excentrică bex_0 de $\epsilon = 0$, obținute prin relației (21) extinsă pe mai multe intervale în 2D și în 3D

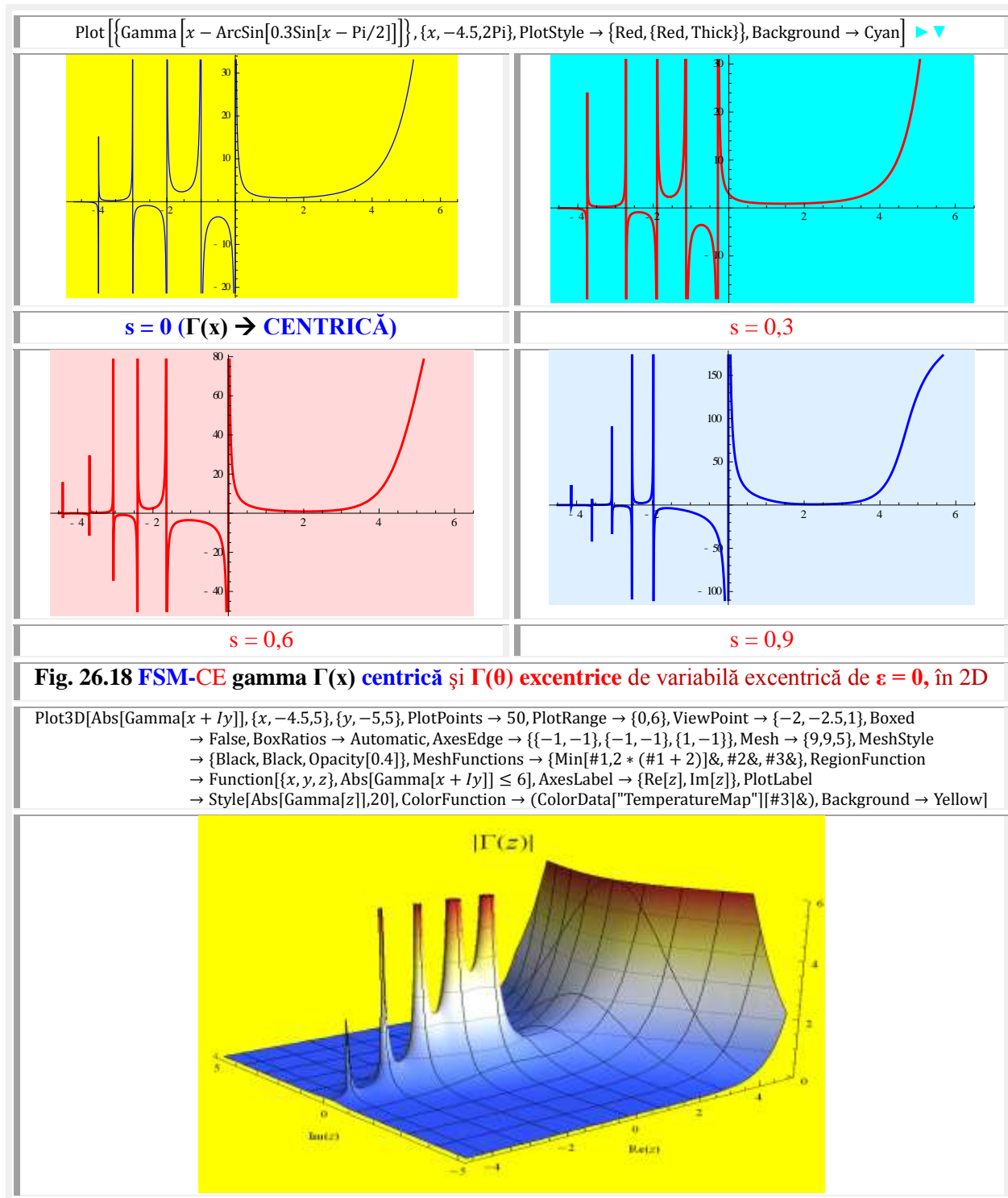


Produsul funcție **bexθ** de excentricitate $s = 1$ cu excentricitatea liniară s din domeniul $s \in [-1, 1]$, are graficele din **figura 26.16** ◀ stânga, iar **FSM-CE** $y = s / bex\theta$ în dreapta ▶, în 2D și în 3D.

Deoarece **FSM-CE** $y = s / bex\theta$ seamănă cu funcția **gamma** (Fig 26.18 ▲ ◀), cu deosebirea că y este periodică și simetrică (Fig. 25.16 ▶ și Fig.26.17), a fost reprezentată în 2D și în 3D în **figura 26.17**,

FUNȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE

împreună cu funcția directă **bex0**. Funcții **gamma excentrice** sunt prezentate în 2D în **figura 26.18**, iar cele complexe în **figura 26.19**.



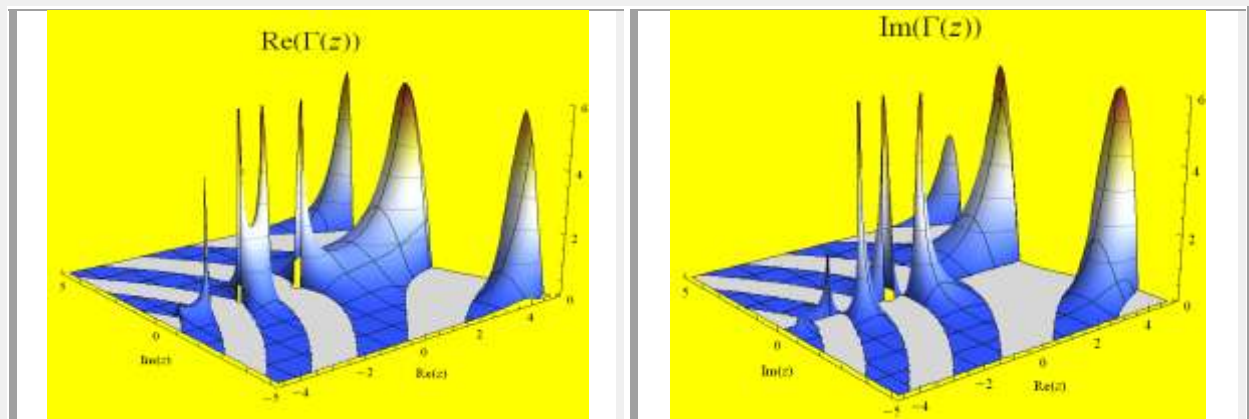
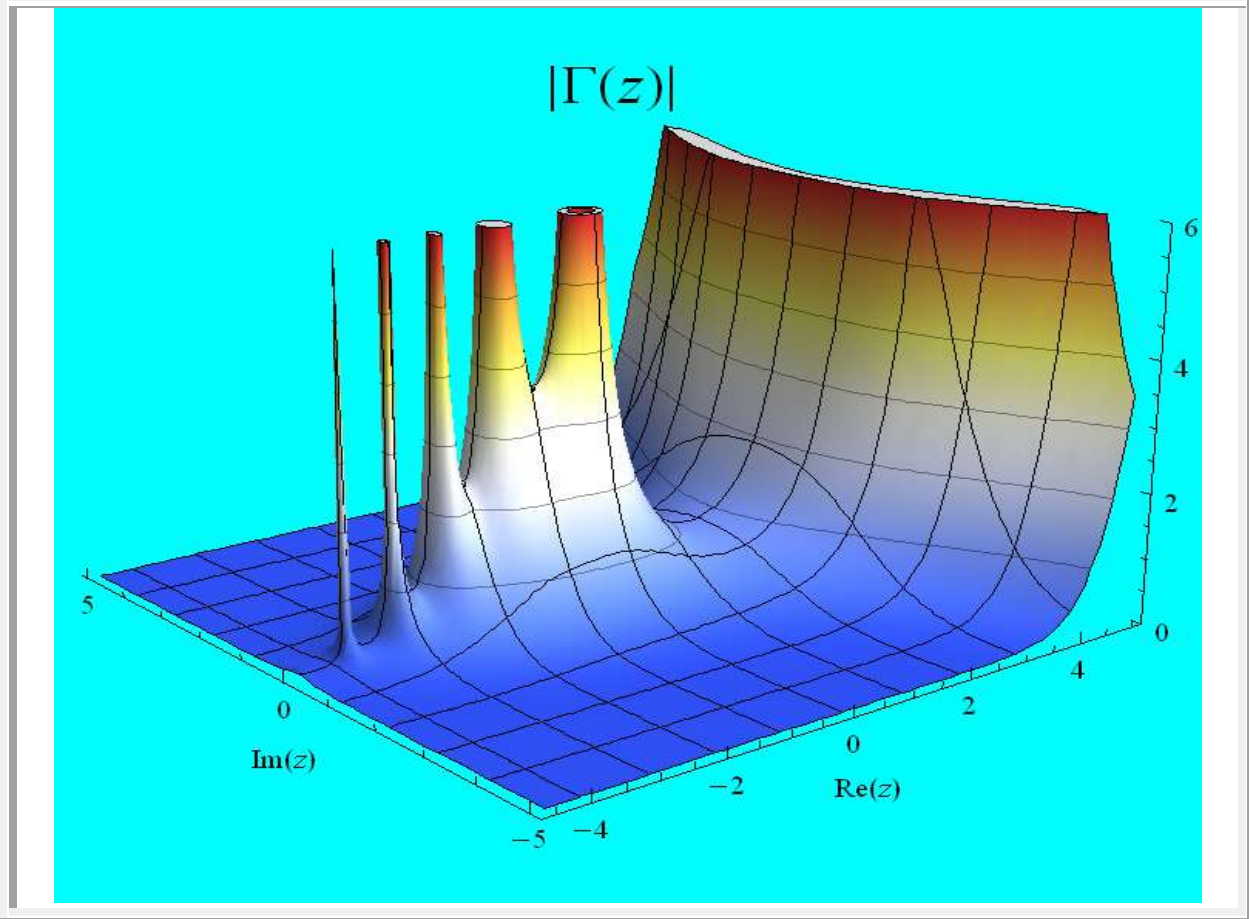
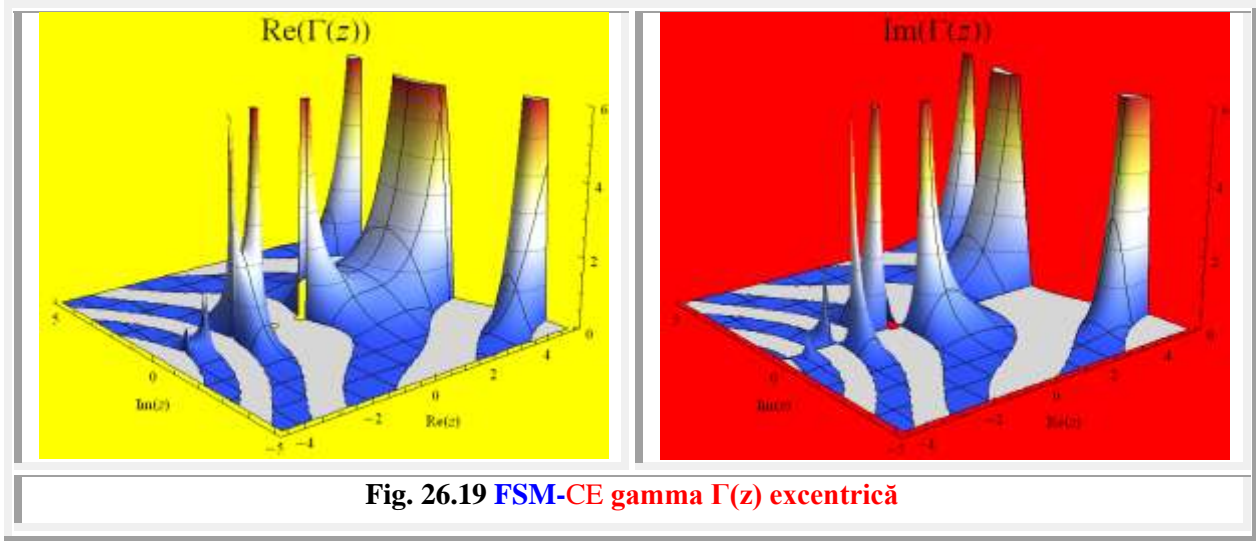


Fig. 26.19 FCC gamma $\Gamma(z)$ centrică

```
Plot3D[Abs[Gamma[x - ArcSin[0.4Sin[x]] + I(y - ArcSin[0.4Sin[y]])]], {x, -4.5, 5}, {y, -5, 5}, PlotPoints -> 40, PlotRange
-> {0, 6}, ViewPoint -> {-2, -2.5, 1}, Boxed -> False, BoxRatios -> Automatic, AxesEdge
-> {{-1, -1}, {-1, -1}, {1, -1}}, Mesh -> {9, 9, 5}, MeshStyle -> {Black, Black, Opacity[0.4]}, MeshFunctions
-> {Min[#1, 2 * (#1 + 2)] &, #2 &, #3 &}, RegionFunction -> Function[{x, y, z}, Abs[Gamma[x + Iy]]
≤ 6], AxesLabel -> {Re[z], Im[z]}, PlotLabel -> Style[Abs[Gamma[z]], 20], ColorFunction
-> (ColorData["TemperatureMap"])[#3] &}, Background -> Cyan]
```





În concluzie, a rezultat, pe de o parte, că inversele unor **FSM-CE** prezintă interes în sine, iar, în al doilea rând, și mult mai important, că a permis obținerea unor **noi familii de funcții inverse** ale căror ecuații de definiție sunt, totodată, **soluțiile exacte simbolice** ale unor ecuații trigonometrice neliniare, altfel nerezolvabile, decât numeric. Alte **FSM-CE** vor fi prezentate în viitor în **Vol. III**.

Motto: "M-au urmărit multe gânduri profunde, dar numai în tinerețe am fost mai iute decât ele."

Capitolul 27

FUNȚII SUPERMATEMATICE BESSEL CENTRICE

27.1 INTRODUCERE

După <http://ro.wikipedia.org/wiki/Func> "Prin funcții Bessel se înțeleg soluțiile canonice $Z(z)$ ale ecuației diferențiale a lui Bessel (cu z real sau complex):

$$(27.1) \quad \frac{z^2 \cdot d^2 Z}{dz^2} + \frac{z \cdot dZ}{dz} + (z^2 - \alpha^2) Z = 0$$

pentru o valoare arbitrară α , reală sau complexă, numită *ordinul* funcției Bessel. Cele mai comune și mai importante cazuri fiind acelea în care α are o valoare întreagă n .

De altfel, α și $-\alpha$ produc aceeași ecuație diferențială, convențional definindu-se funcții Bessel diferite pentru cele două ordine, dar, cel mai adesea, sunt alese ca funcții netede de α . De asemenea funcțiile Bessel sunt cunoscute ca **funcții cilindrice** sau **cilindrice armonice** deoarece ele se regăsesc în soluția ecuației Laplace în coordonate cilindrice.

Ele au fost definite prima dată de Daniel Bernoulli și generalizate de Friderich Bessel, de unde și denumirea lor. Prin aplicarea metodei separării variabilelor, pentru soluționarea ecuației Laplace și a ecuației Helmholtz, în coordonate cilindrice sau coordonate sferice, se obține ecuația lui Bessel, din care se obțin funcțiile Bessel.

Rezolvând ecuația în sistemul de **coordonate cilindrice**, se obțin **funcții Bessel de ordin întreg** ($\alpha = n$); rezolvând ecuația în sistemul de **coordonate sferice**, se obțin **funcții Bessel de ordin fracționar** ($\alpha = n + 1/2$).

Importanța funcțiilor Bessel rezultă din faptul că soluționează multe probleme de potențial static și de propagare a undelor, de exemplu:

- unde electromagnetice în ghiduri de undă cilindrice,
- transferul de căldură în obiecte cilindrice,
- modurile de vibrații ale unei membrane circulare subțiri,
- probleme de difuzie,
- soluția ecuației Schrödinger radială pentru o particulă liberă, în coordonate sferice,
- soluționarea unor probleme de divergentă aeroelastică și flutter în Aeroelasticitate,
- semnale de proces în electronică precum sinteza FM sau filtre Bessel.

Deoarece ecuația lui Bessel este o ecuație diferențială ordinară, de ordinul doi, aceasta va avea două soluții liniar independente, iar datorită diverselor formulări ale funcției Bessel, în serie sau integrală, se alege forma cea mai convenabilă pentru problema care se soluționează."

În lucrarea Mireca Eugen Șelariu "FUNȚIILE $cex\theta$ ȘI $sex\theta$ CA SOLUȚII ALE UNOR ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL DOI CU COEFICIENȚI VARIABILI" Cap 11 din [12] și [13] soluțiile sunt ale următoarei ecuații diferențiale

$$\ddot{z}_{1,2} - \frac{\epsilon_{1,2}}{\omega_{1,2}} \dot{z}_{1,2} + \omega_{1,2}^2 z_{1,2} = 0$$

(27.2)

care poate fi scrisă și sub o formă asemănătoare ecuației (1), dar având cu totul alte semnificații

$$(27.2') \quad \frac{\omega \cdot d^2 Z}{dt^2} - \frac{\epsilon \cdot dZ}{dt} + \omega Z = 0 \quad \text{sau} \quad \dot{\theta} \cdot \ddot{Z} - \ddot{\theta} \cdot \dot{Z} + \dot{\theta} \cdot Z = 0$$

în care: $Z_{1,2} = C_1 cex_{1,2}\theta + C_2 sex_{1,2}\theta$; $\omega_{1,2} = A \Omega dex_{1,2}\theta$; $\epsilon_{1,2} = \frac{d\omega_{1,2}}{dt}$; $cex_{1,2}\theta$ și $sex_{1,2}\theta$ fiind cele două determinări (principală 1 și secundară 2) ale **funcțiile supermatematice circulare excentrice (FSM-CE)**, de variabilă **excentrică θ , cosinus și sinus excentrice**, iar $\omega_{1,2}$ și $\epsilon_{1,2}$ sunt exprimabile prin **FSM-CE derivată excentrică**

$dex_{1,2}\theta$, care reprezintă viteza unghiulară variabilă $\omega_{1,2}$ pe cercul unitate ($R = 1$), cu $\theta = \Omega \cdot t$, când un punct se rotește pe cerc cu viteza unghiulară constantă $\Omega = 1$, față de un punct excentric $S(s, \varepsilon)$ din planul cercului unitate – denumit **excentru** – și, respectiv, derivata acesteia ca funcție de **timpul t**, deci accelerația unghiulară variabilă pe cercul unitate.

Și alte **funcții supermatematice (FSM)** precum cele **circulare elevate (FSM-CEL)**, ca și **FSM circulare exotice**, sunt soluții ale unor sisteme de **caracteristici elastice statice neliniare (CES -NL)**.

Prin apariția **funcțiilor supermatematice Bessel excentrice (FSM-CE)**, **Bessel elevate (FSM-BEL)**, ca și a celor **Bessel exotice (FSM-BEx)**, funcțiile **Bessel ordinare** suntem nevoiți să le denumim și “**centrice**” (**FBC**), justificând, astfel, denumirile în cele ce urmează.

27.2 FUNCȚII Bessel CENTRICE (FBC) DE SPEȚA I-a : $J_\alpha(z)$

Funcțiile Bessel centrice de speța I-a, notate $J_\alpha(z)$, sunt soluții ale ecuației diferențiale a lui **Bessel**, care au valoare finită în origine $z = 0$ pentru valori α întregi nenegative și valoare infinită în origine pentru valori α negative diferite de întregi.

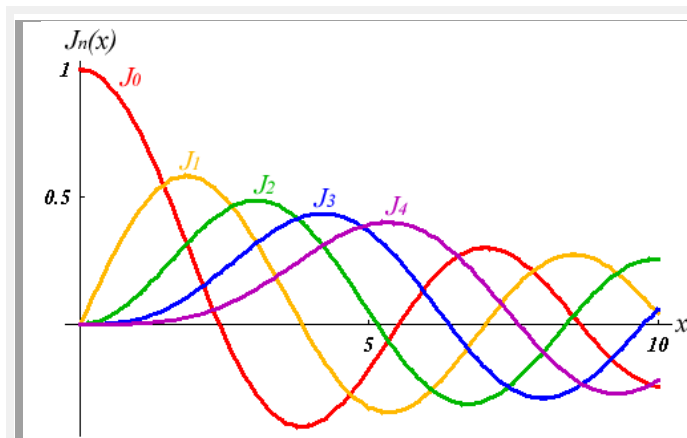


Fig.27.1,a Graficele funcțiilor Bessel de speța I-a, $J_\alpha(z)$ și ordin întreg $\alpha = 0, 1, 2, 3$ și 4

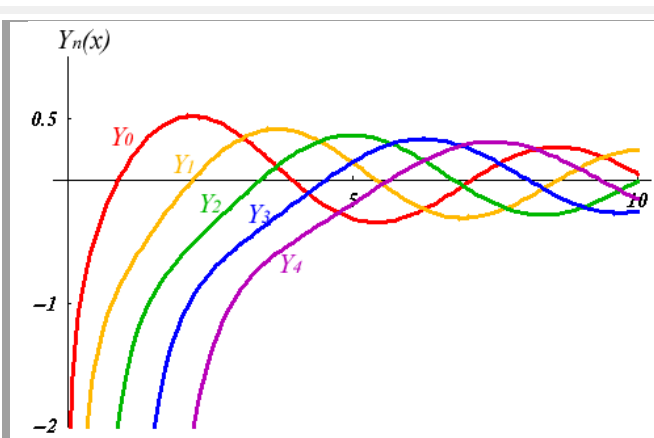


Fig.27.2,a Graficele funcțiilor Bessel de speța II-a, $Y_\alpha(z)$ și ordin întreg $\alpha = 0, 1, 2, 3$ și 4

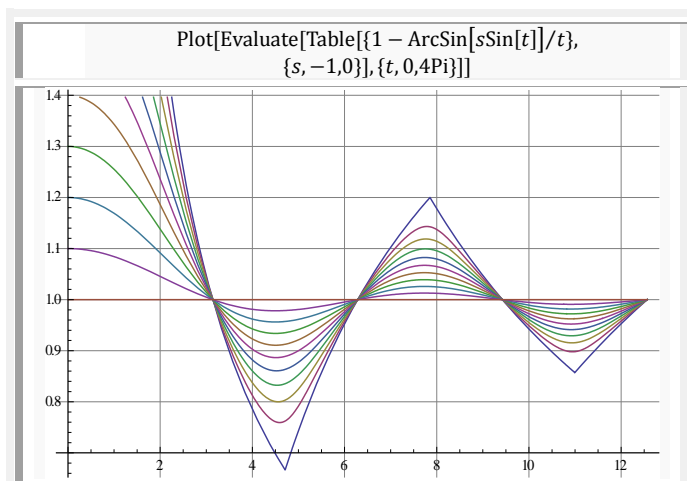


Fig.27.3,a **FSM-CE** $\frac{aex\theta}{\theta} = uex\theta$, de $s \in [-1, 0]$

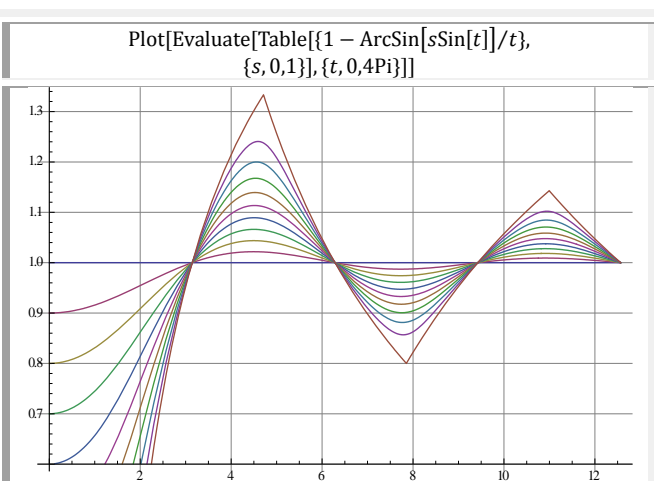
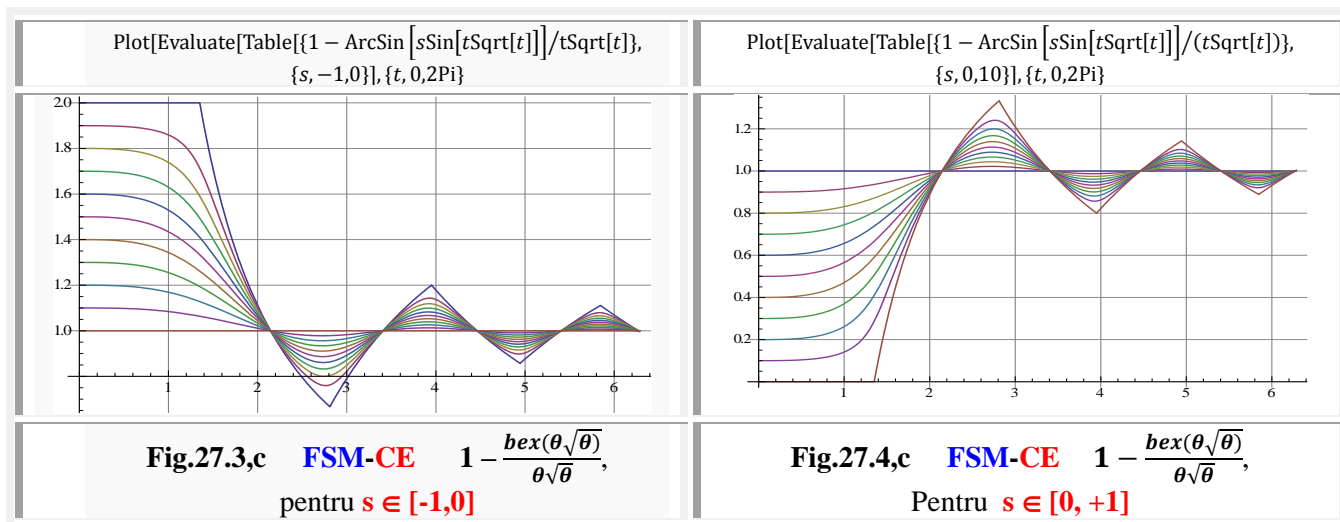
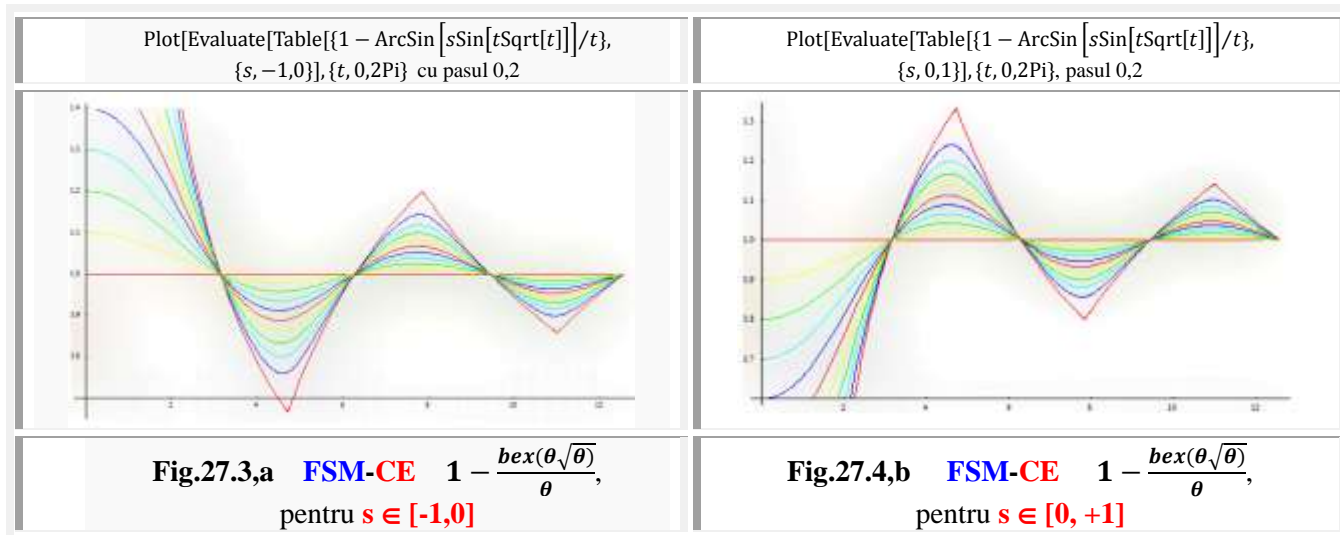


Fig.27.4,a **FSM-CE** $\frac{aex\theta}{\theta} = uex\theta$, de $s \in [0, +1]$



Funcția Bessel de speța I-a este definită de următoarea [serie Taylor](#) în jurul originii $z = 0$:

$$(27.3) \quad J_{\alpha}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

în care $\Gamma(z)$ este [funcția Gamma](#) a lui [Euler](#), care reprezintă generalizarea funcției [factorial](#) pentru valori z diferite de întregi.

Graficul funcției Bessel ([Fig.27.1,a](#) și [Fig.27.2,a](#)) oscilează precum cel al funcției sinus sau cosinus, diferența fiind aceea că funcția Bessel descrește proporțional cu $\frac{1}{\sqrt{z}}$ spre infinit, precum și faptul că rădăcinile nu sunt în general periodice, cu excepția celor [asimptotice](#) pentru valori mari ale lui z .

Funcții asemănătoare, dar strict periodice, de perioadă 2π , sunt [funcțiile supermatematice circulare excentrice \(FSM-CE\)](#) amplitudine excentrică $aex\theta$ raportate la variabila lor excentrică θ , notate cu $uex\theta$, cu graficele prezentate în [figurile 27.3,a și 27.4,a](#), de ecuații

$$(27.4) \quad F[\theta, S(s,\varepsilon)] = \frac{aex\theta}{\theta} = \frac{\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]}{\theta} = 1 - \frac{\arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]}{\theta} = 1 - \frac{bex\theta}{\theta} = uex\theta$$

sau de variabilă centrică $Aex\alpha$, raportate la variabila lor centrică α , notate cu $Uex\alpha$, cu graficele prezentate în [figurile 27.5,a și 27.6,a](#), de ecuații

$$(27.5) \quad F[\alpha, S(s,\varepsilon)] = \frac{Aex\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha + \arcsin[s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)]}{\alpha \sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = 1 + \frac{\arcsin[s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)]}{\alpha \cdot Rex\alpha} = 1 + \frac{Bex\alpha}{\alpha} = Uex\alpha$$

Plot[Evaluate[Table[{1 + ArcSin[1sSin[t]]/(tSqrt[1 + (s)^2 - 2sCos[t]]}], {s, -1, 0}], {t, 0, 4Pi}]

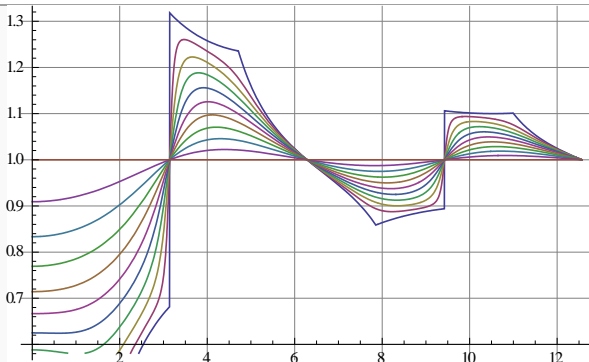


Fig.27.5,a FSM-CE $\frac{Aex\alpha}{\alpha} = Uex\alpha$, de $s \in [-1,0]$

Plot[Evaluate[Table[{1 + ArcSin[1sSin[t]]/(tSqrt[1 + (s)^2 - 2sCos[t]]}], {s, 0, +1}], {t, 0, 4Pi}]

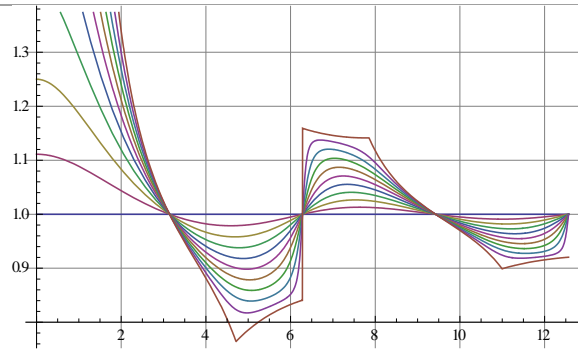


Fig.27.6,a FSM-CE $\frac{Aex\alpha}{\alpha} = Uex\alpha$, de $s \in [0, +1]$

Plot[Evaluate[Table[{1 + ArcSin[sSin[tSqrt[t]]/(t.Sqrt[1 + (s)^2 - 2sCos[tSqrt[t]]])}], {s, -1, 0}], {t, 0, 2Pi}]

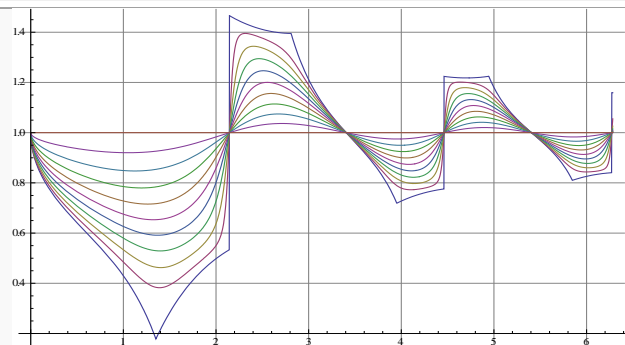


Fig.27.5,b FSM-CE $1 - \frac{Bex(\alpha\sqrt{\alpha})}{\alpha}$, pentru $s \in [-1,0]$

Plot[Evaluate[Table[{1 + ArcSin[sSin[tSqrt[t]]/(t.Sqrt[1 + (s)^2 - 2sCos[tSqrt[t]]])}], {s, 0, +1}], {t, 0, 2Pi}]

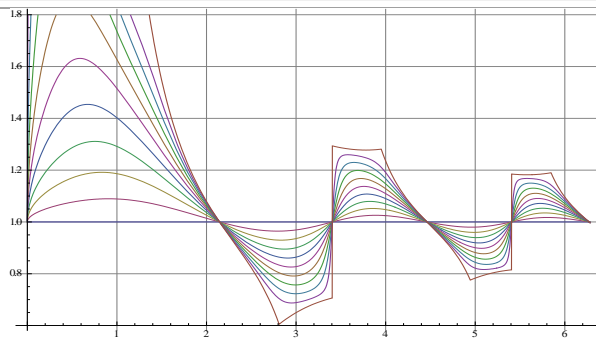


Fig.27.6,b FSM-CE $1 - \frac{Bex(\alpha\sqrt{\alpha})}{\alpha}$, pentru $s \in [0, +1]$

Plot[Evaluate[Table[{+ArcSin[sSin[tSqrt[t]]/(tSqrt[Sqrt[1 + (s)^2 - 2sCos[tSqrt[t]]])}], {s, -1, 0}], {t, 0, 2Pi}]

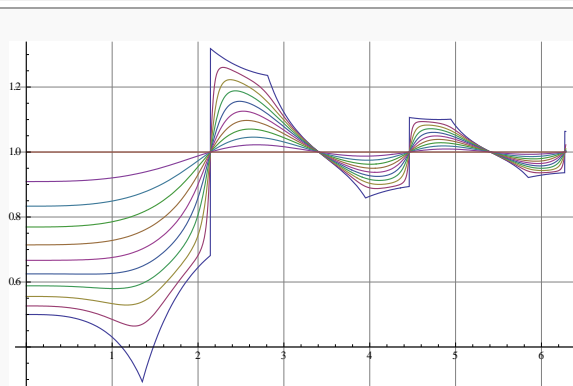


Fig.27.5,c FSM-CE $1 - \frac{Bex(\alpha\sqrt{\alpha})}{\alpha\sqrt{\alpha}}$, pentru $s \in [-1,0]$

Plot[Evaluate[Table[{+ArcSin[sSin[tSqrt[t]]/(tSqrt[Sqrt[1 + (s)^2 - 2sCos[tSqrt[t]]])}], {s, 0, +1}], {t, 0, 2Pi}]

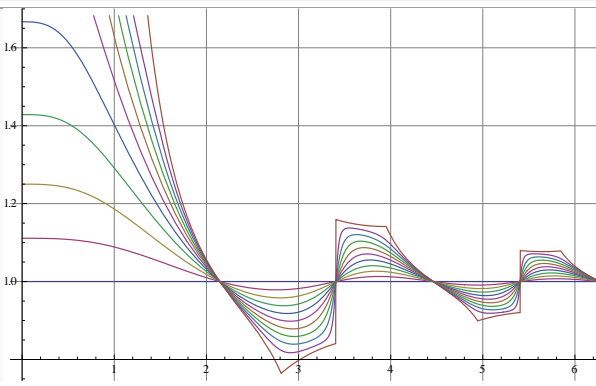
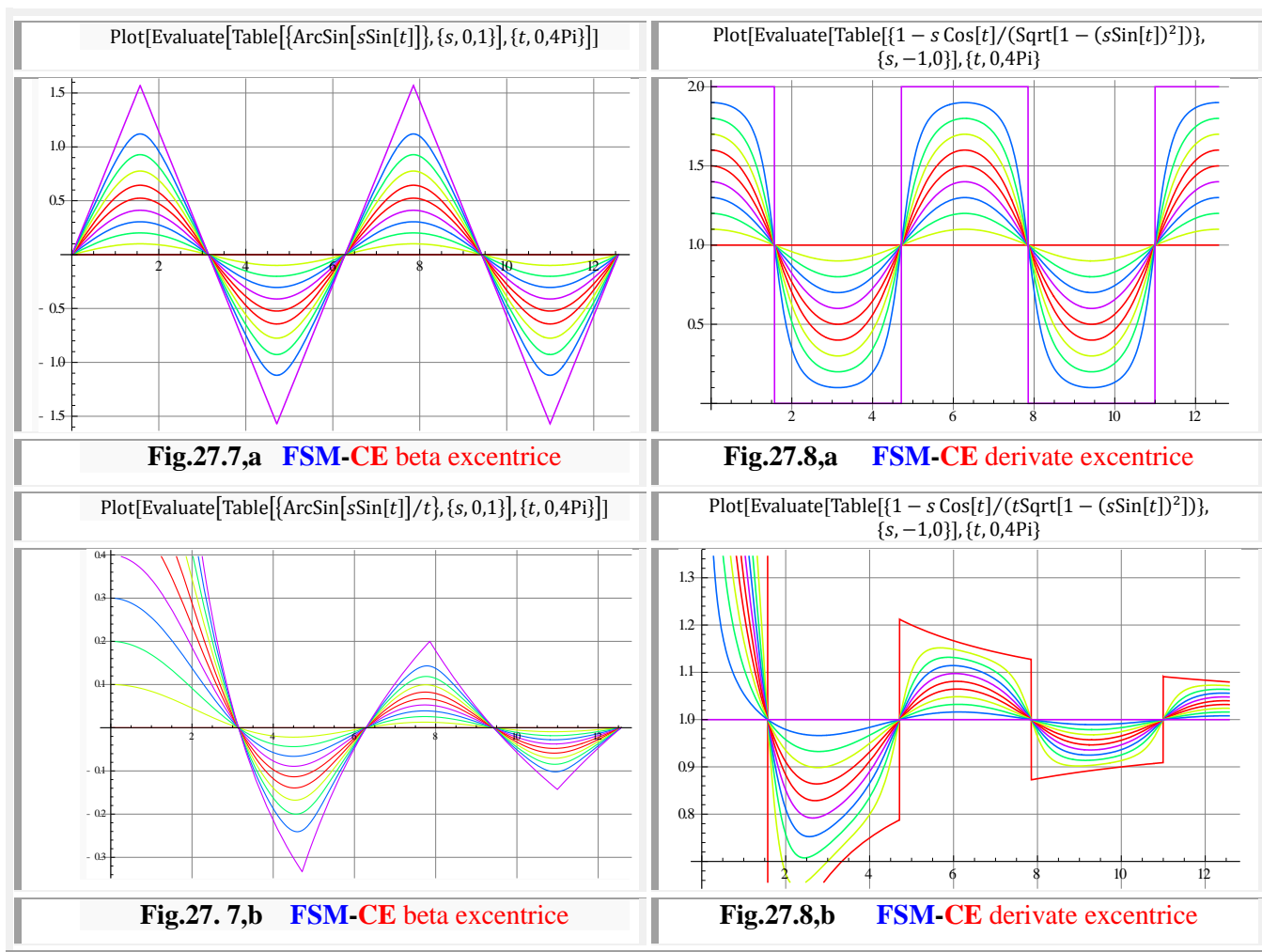


Fig.27.6,c FSM-CE $1 - \frac{bex(\alpha\sqrt{\alpha})}{\alpha\sqrt{\alpha}}$, pentru $s \in [0, +1]$

Dacă, în ecuațiile (4) și (5), variabilele θ și α se înmulțesc cu $\sqrt{\theta}$ și, respectiv, cu $\sqrt{\alpha}$, **numai** cele din funcțiile supermatematice **circulare excentrice (FSM-CE)** beta excentrice **bex θ** și **Bex α** , se obțin funcții de perioadă variabilă, așa cum se prezintă graficele din figura 27.3,b și 27.4,b și, respectiv, figura 27.5,b și 27.6,b.

Dacă, aceste înlocuiri se fac în funcțiile **bex θ** și **Bex α** cât și în împărțitor, din ecuațiile (4) și (5), atunci se obțin funcțiile de perioadă variabilă, prezentate în figurile 27.3,c și 27.4,c și, respectiv, 27.5c și 27.6,c.

S-au prezentat aceste **FSM-CE** denumite **“funcții unitate excentrică (FUE)”**, deoarece conțin cifra 1 și sunt notate cu **uex θ** și, respectiv, **Uex α** în eventualitatea că cineva, cândva, va avea nevoie de ele. Dacă de acestea nu, atunci, cu siguranță, de cele prezentate în figura 27.7,a și 27.8,a care sunt **FSM-CE beta excentrică bex θ** și **derivata excentrică dex θ** , de variabile excentrice θ , vor avea nevoie de ele la reprezentarea vibrațiilor libere neamortizate și amortizate de caracteristică elastică statică (CES) liniară și/sau neliniară (Fig. 27.7,b și Fig.27.8,b).



Pentru $s = 1$, funcția **bex θ** exprimă, în cel mai simplu mod, o funcție **triunghiulară** (Fig.27.7,a), iar funcția **dex θ** o funcție **dreptunghiulară** (Fig.27.8,a). Pentru alte valori ale excentricității numerice s , se pot obține funcții care să exprime vibrații libere amortizate, de **caracteristică elastică statică (CES)** liniară sau neliniară (Fig.27.7,b și Fig. 27.8,b), **semnale de bază**, deosebit de importante în mecanică cât și în electrotehnică, ele putând fi reproduse și fizic, așa cum rezultă în continuare.

Spicuim din <http://www.scritub.com/tehnica-mecanica/SEMNALE-ELECTRICE93336.php> :

„În general, un generator de funcții este un aparat ce poate să furnizeze cel puțin trei forme de undă de bază: **sinusoidală**, **dreptunghiulară** și **triunghiulară**.

Plecând de la aceste funcții de bază, generatoarele mai perfecționate sunt capabile să furnizeze și alte funcții (semnale): **rampe liniare**, **rampe în trepte**, **trapez**, **semnale dreptunghiulare** cu factor de umplere variabil sau chiar și semnale de zgomot (Fig.27.9,a).”

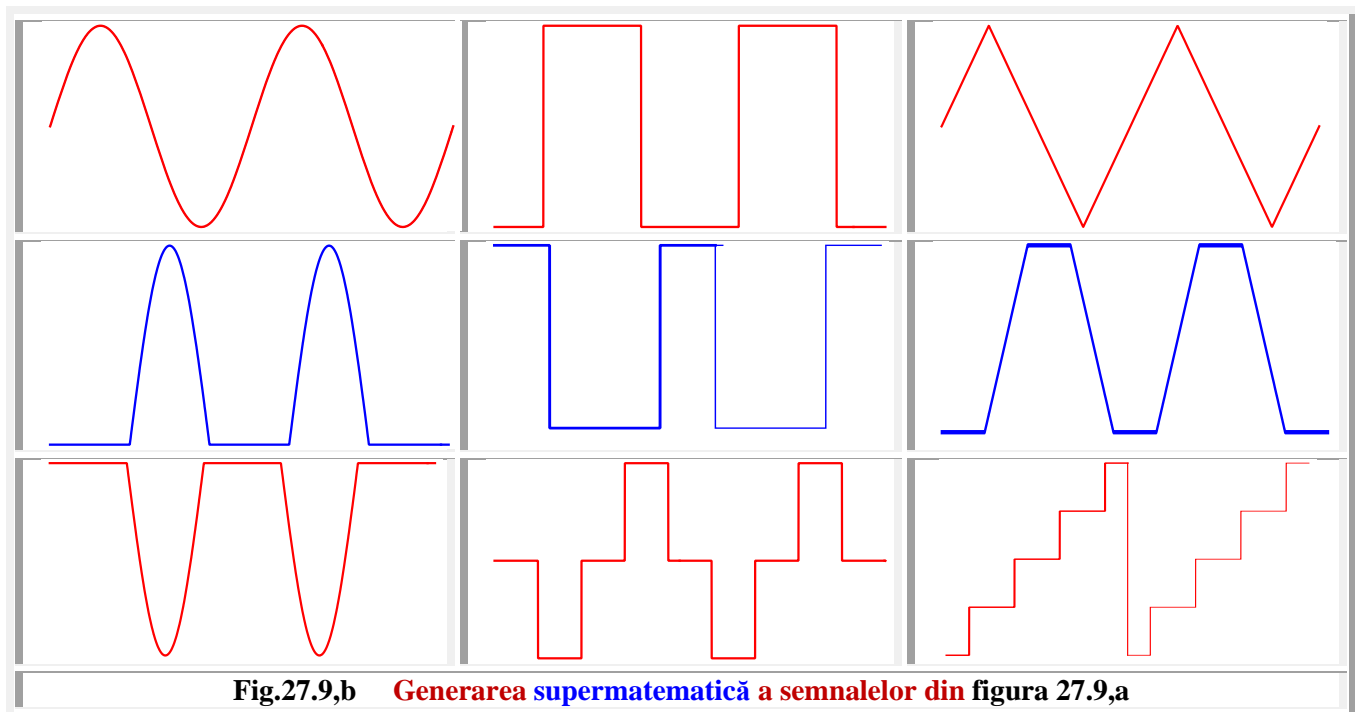
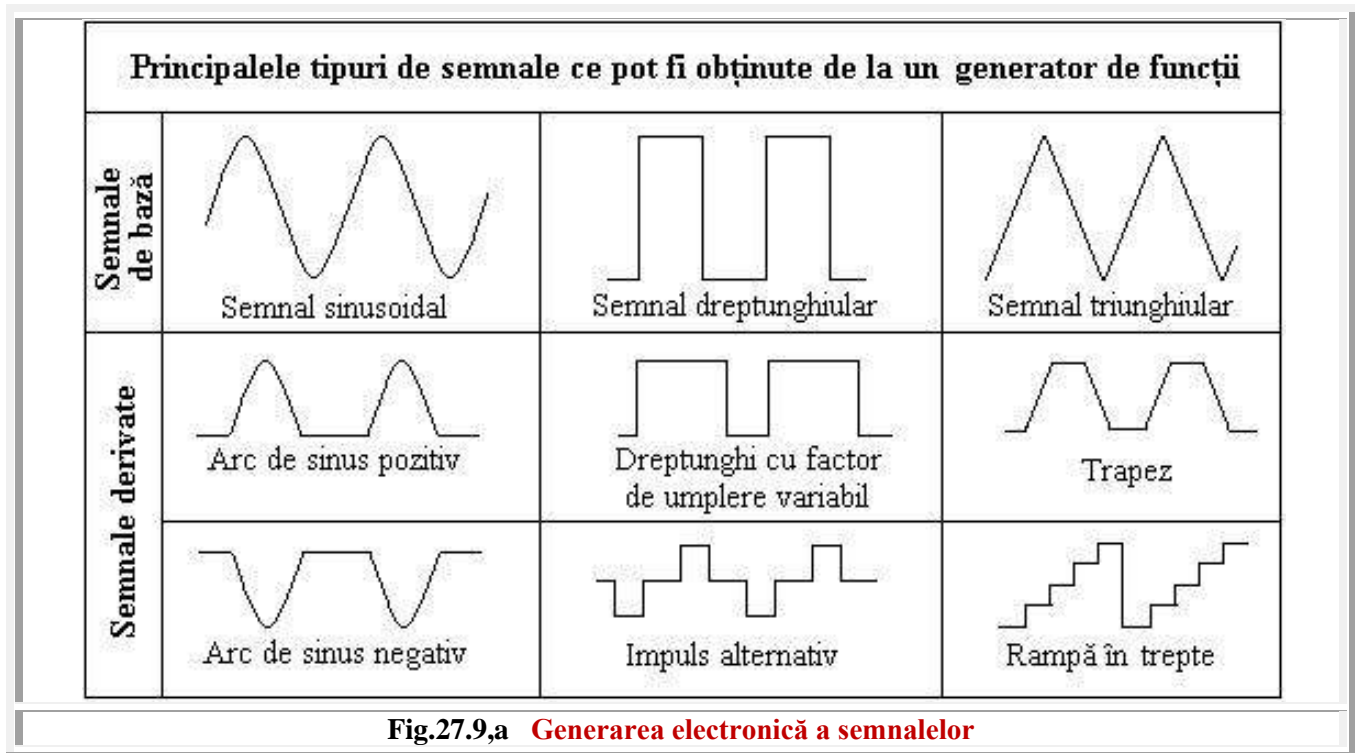
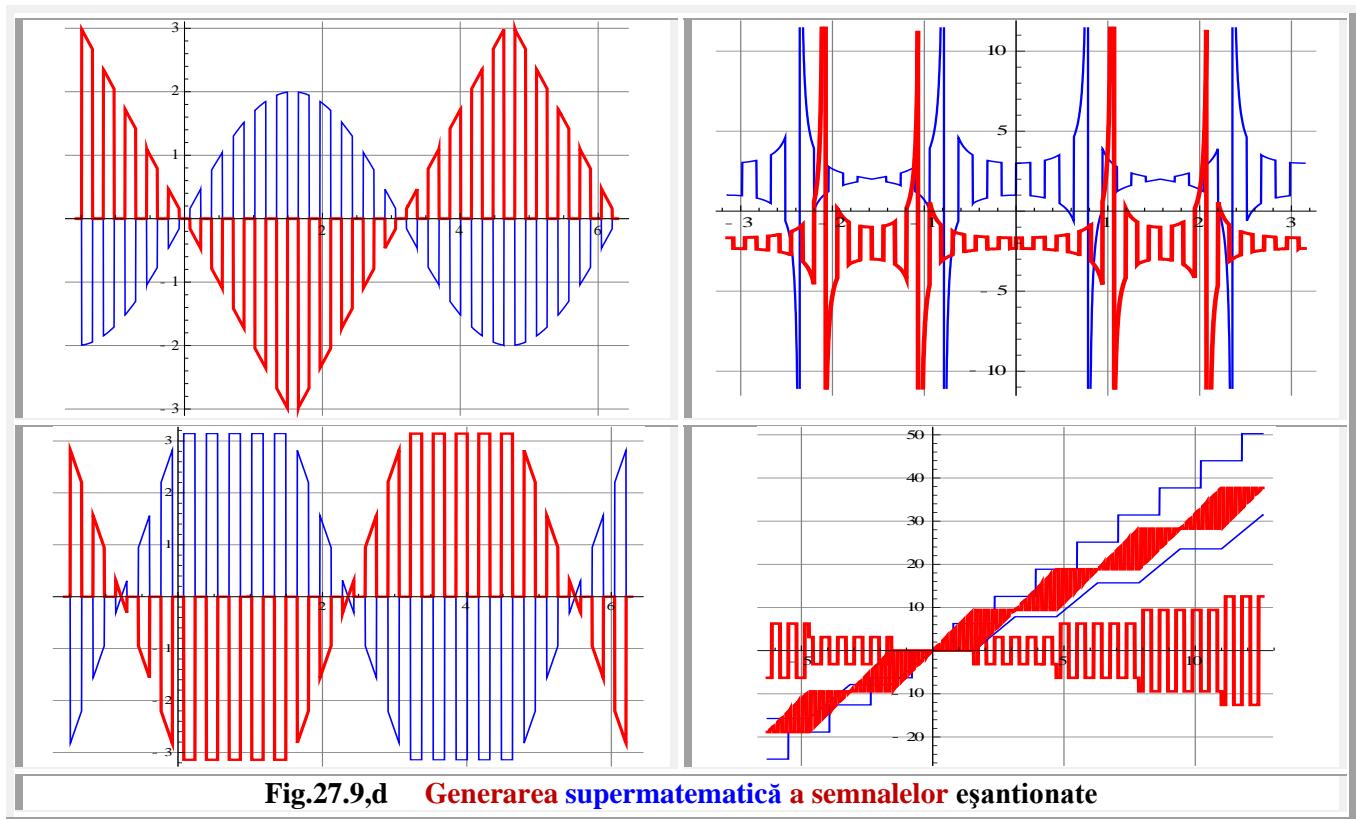
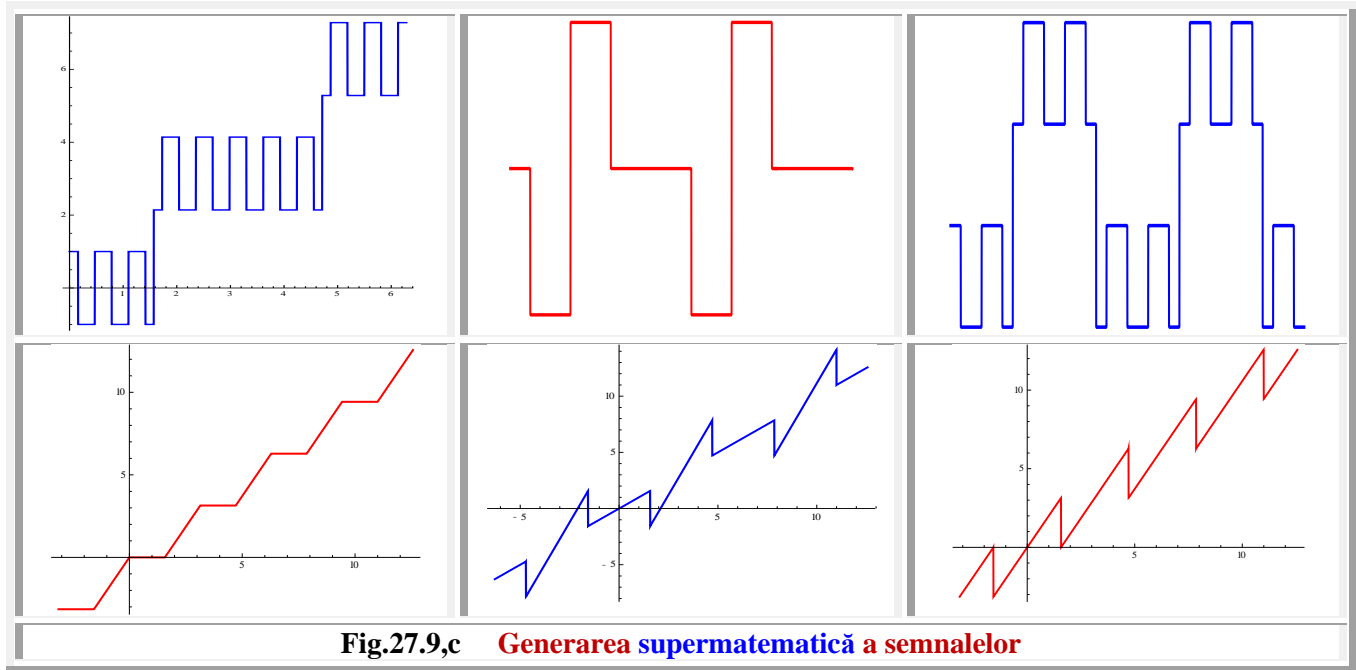


Figura 27.9,b demonstrează, dacă mai era necesar, că FSM-CE pot, cel mai bine și mai simplu, să genereze diverse semnale utile, precum cele generate electronic, din figura 27.9,a și cu mult mai multe și mult mai complexe, precum cele prezentate în figura 27.9,c.



În figura 27.9,d se prezintă modul de eșantionare, sau procesarea de semnal, a semnalelor sinusoidale, dreptunghiulare, triunghiulare ș.a. prin utilizarea FSM-CE dex(10.0) de excentricitate numerică $s = 1$.

Graficele funcțiilor Bessel de prima speță și de ordin întreg $\alpha = 0, 1, 2, 3$ și 4 sunt prezentate în figura 27.1. Pentru valori α diferite de întregi, funcțiile $J_\alpha(z)$ și $J_{-\alpha}(z)$ sunt liniar independente, reprezentând cele două soluții ale ecuației diferențiale. Pe de altă parte, pentru α de ordin întreg, este valabilă următoarea relație (de notat că funcția Gamma devine infinită pentru argumente întregi negative):

$$(27.6) \quad J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

acest lucru arătând că cele două soluții nu sunt liniar independente. În acest caz, a doua soluție liniar independentă este dată de funcția Bessel de speța a II-a.

Graficele funcțiilor Bessel în planul complex sunt redată în figura 27.10, prin programul realizat de Jeff Bryant și Michael Trott prezentat mai jos

<http://demonstrations.wolfram.com/BesselFunctionsInTheComplexPlane/>

```
Manipulate[Plot3D[Re[fn[n, x + Iy]], {x, -3, 2}, {y, -3, 2}, ImageSize -> {500, 400}, ColorFunction -> (ColorData["TemperatureMap"]), MaxRecursion -> 2], {{n, 0, "n"}, -5.5, 1}, {{fn, Bessel, "function"}, {BesselI -> TraditionalForm[I_n], BesselJ -> TraditionalForm[J_n], BesselK -> TraditionalForm[K_n], BesselY -> TraditionalForm[Y_n]}}
```

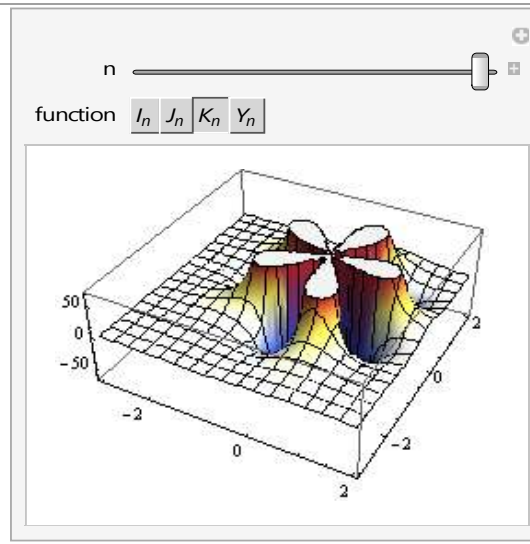
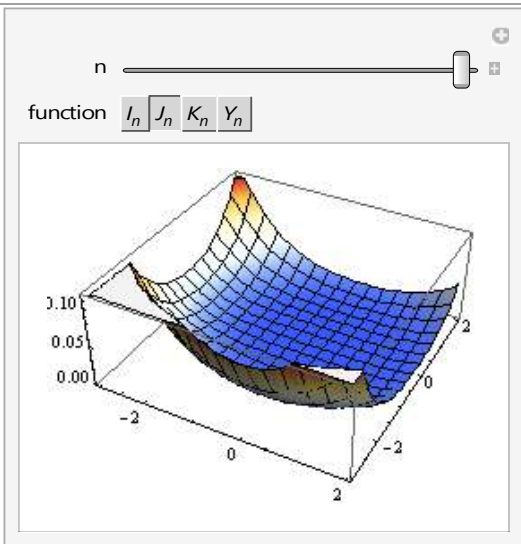
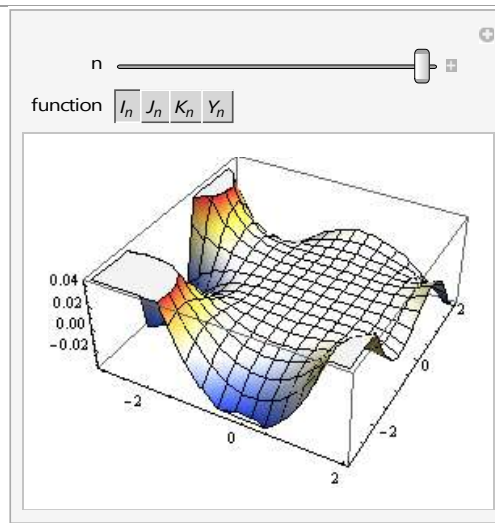
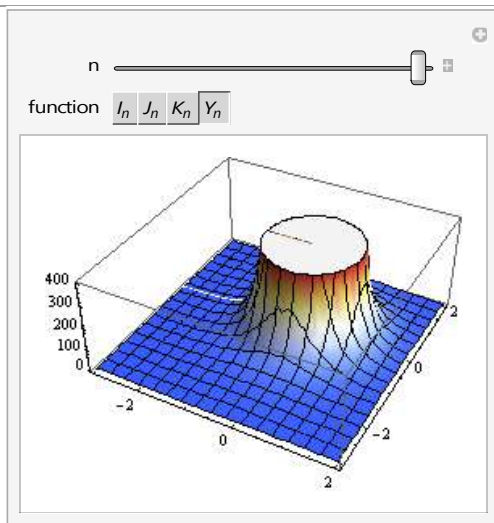


Fig.27.10,a Prezentarea programului: partea reală Y_n și K_n , imaginară I_n și absolută J_n a funcțiilor Bessel centrice în planul complex ($n \equiv \alpha$)

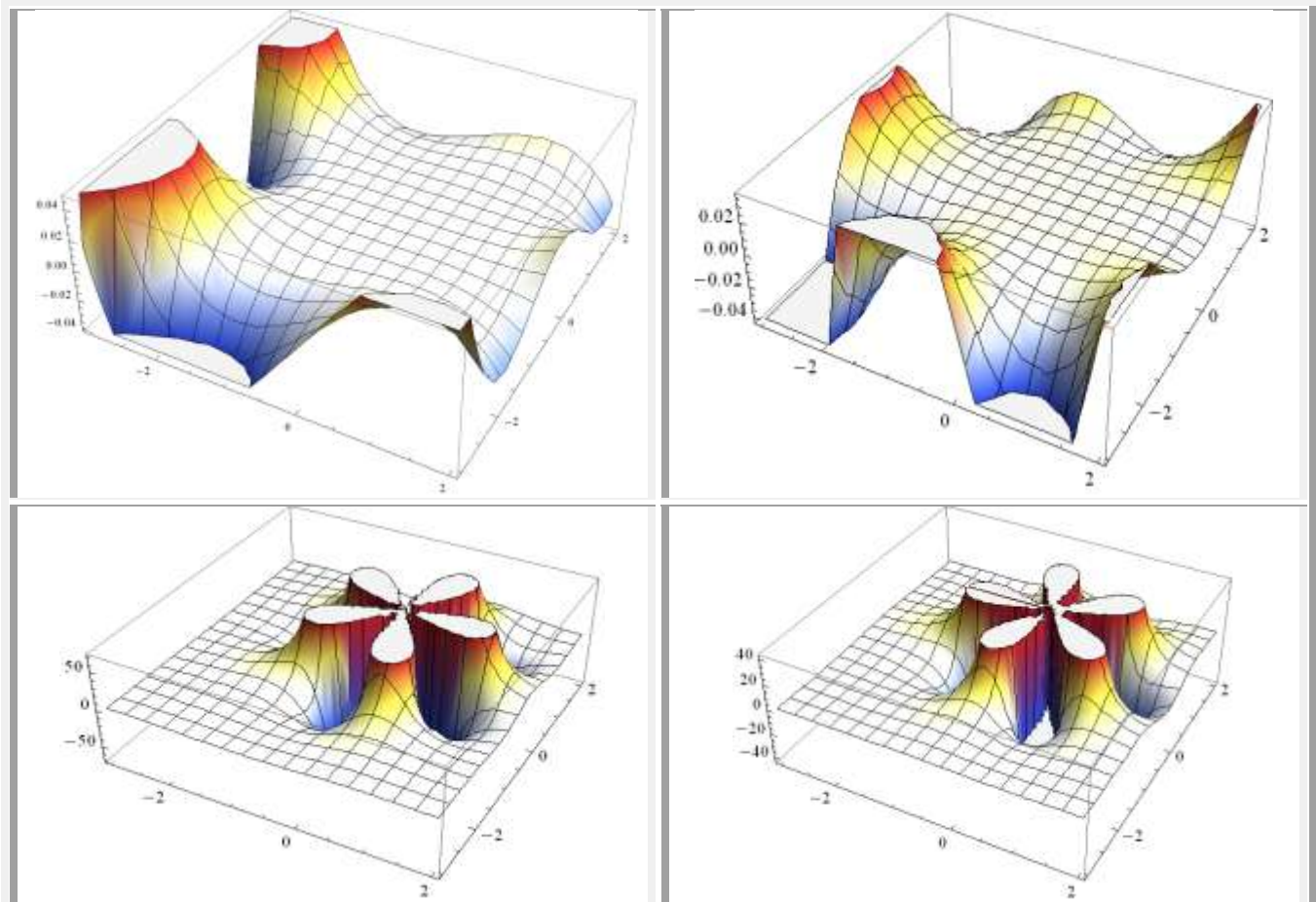
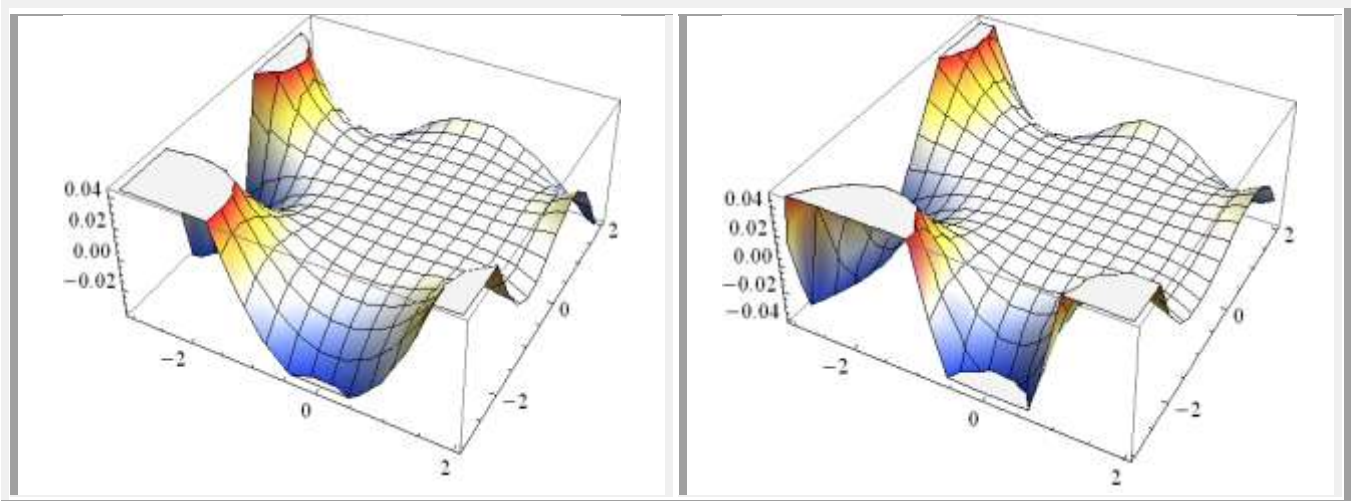


Fig.27.10,b Partea reală a funcțiilor Bessel centrice în planul complex. În ordine: I_n , J_n , K_n , Y_n ($n \equiv \alpha$)



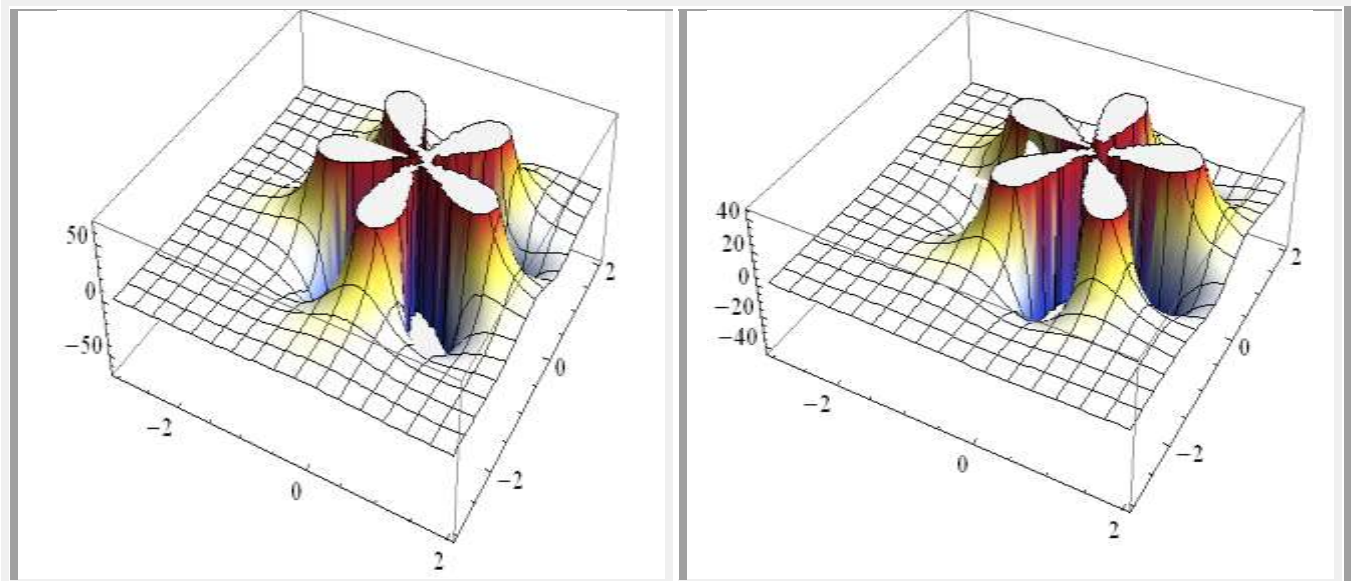


Fig.27.10,c Partea imaginară a funcțiilor Bessel centrice în planul complex. În ordine: I_n , J_n , K_n , Y_n ($n \equiv \alpha$)

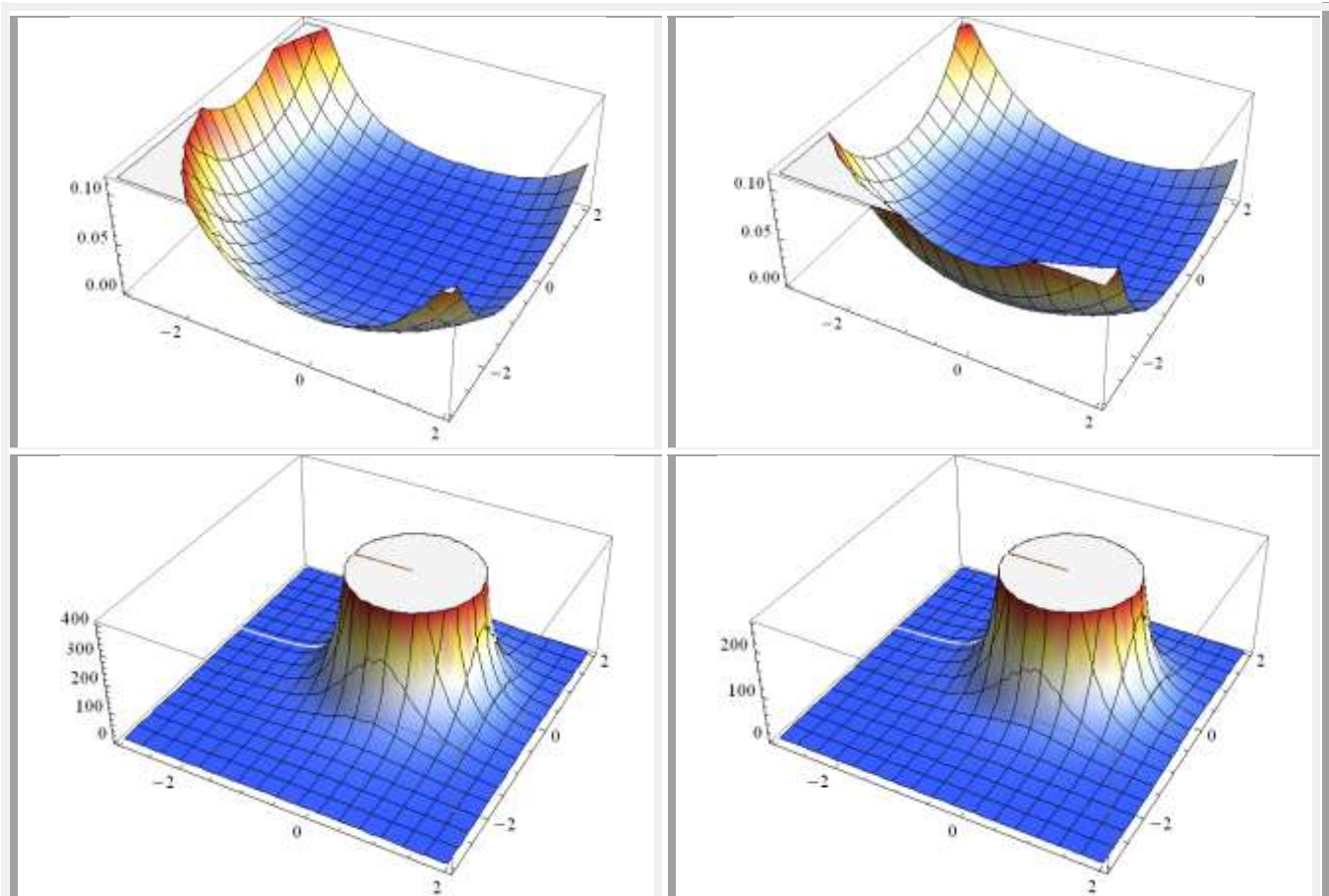
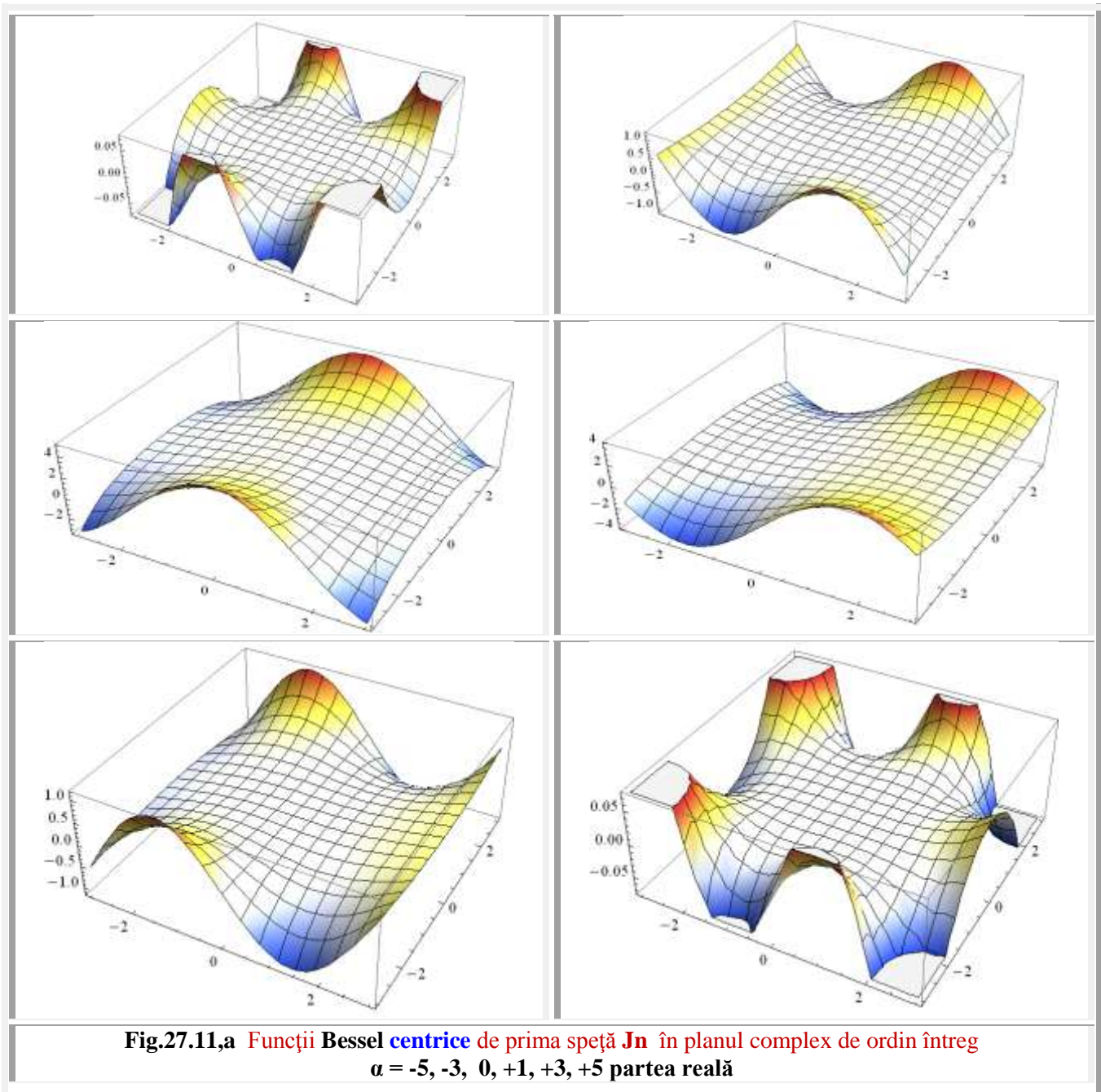


Fig.27.10,d Partea absolută a funcțiilor Bessel centrice în planul complex. În ordine: I_n , J_n , K_n , Y_n ($n \equiv \alpha$)



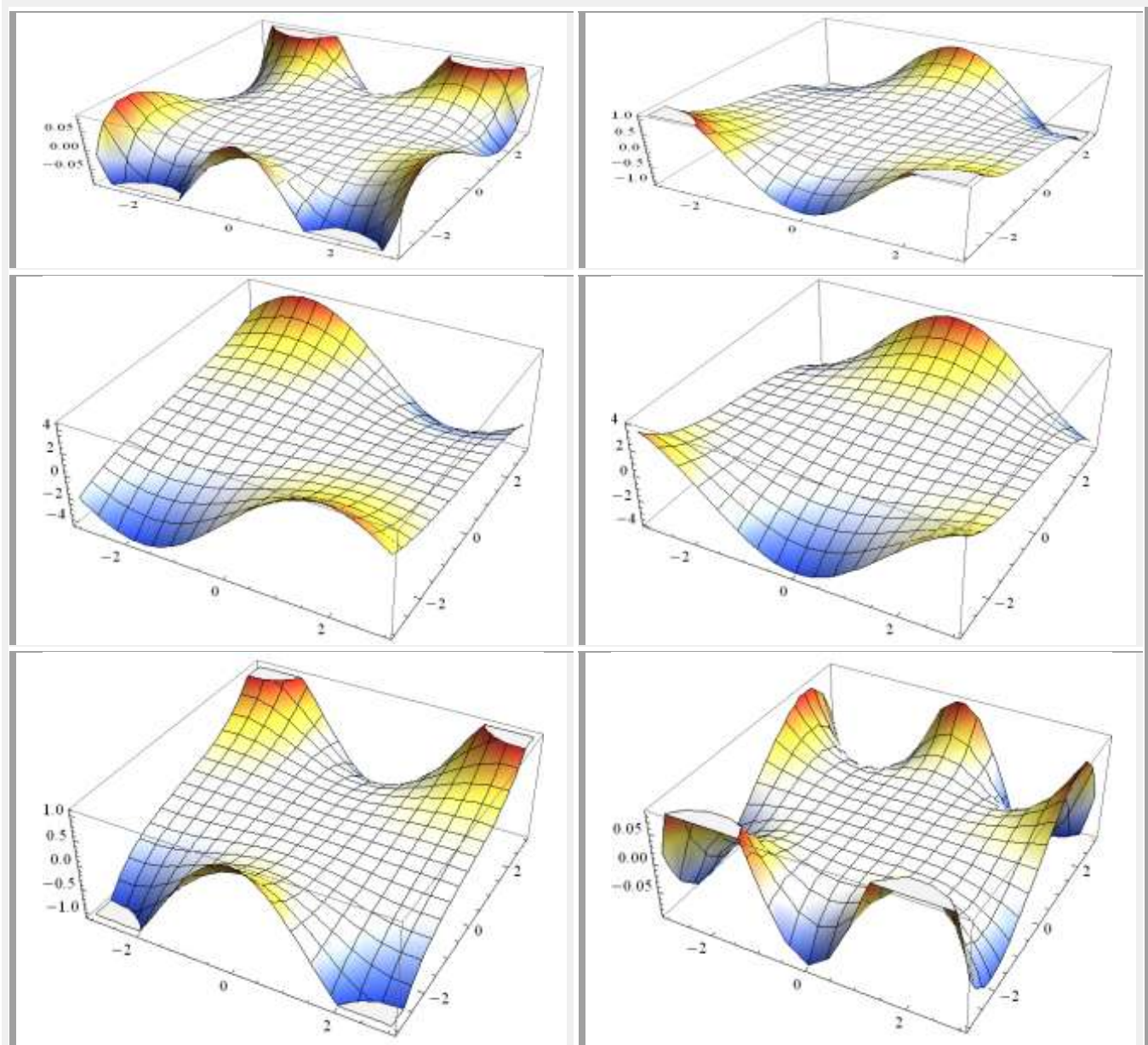


Fig.27.11,b Funcții Bessel centrice de prima speță J_n în planul complex de ordin întreg $\alpha = -5, -3, 0, +1, +3, +5$, partea imaginară

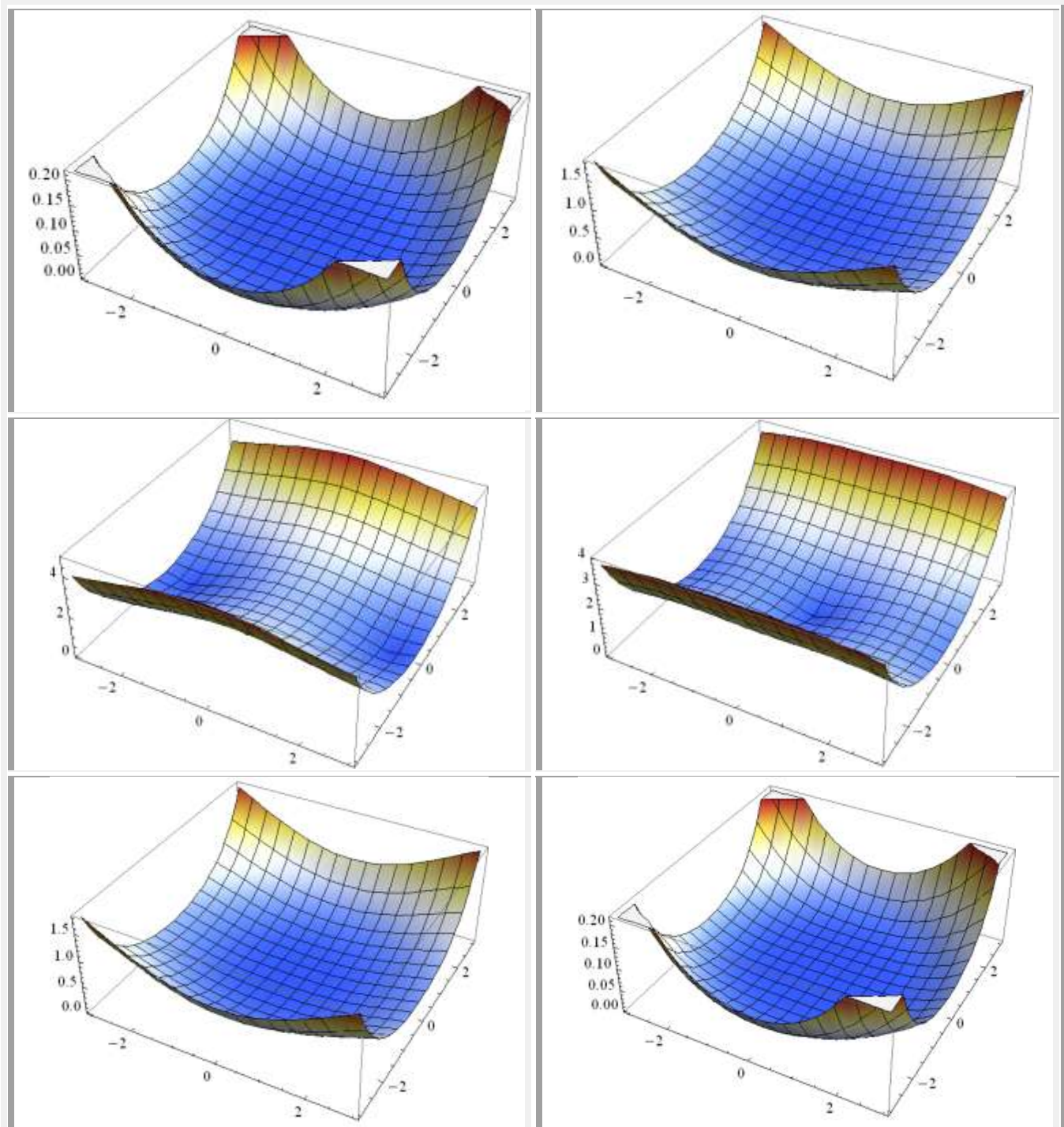


Fig.27.11,c Funcții Bessel **centrice** de prima speță J_n în planul complex de ordin întreg $\alpha = -5, -3, 0, +1, +3, +5$, partea absolută

27.2 FUNCȚII Bessel **CENTRICE** (FBC) DE SPEȚA A II-a: Y_α

Funcțiile Bessel **centrice** de speță a II-a, notate prin $Y_\alpha(z)$ sau $Y_n(z)$, sunt de asemenea soluții ale ecuației diferențiale a lui Bessel **centrice**. Ele au o singularitate infinită în origine ($z = 0$).

Graficul funcțiilor Bessel **centrice** de speța a II-a, $Y_\alpha(z)$ și ordin întreg sunt prezentate în **figura 27.2**, iar în **figura 27.12** sunt prezentate și pentru ordine întregi negative, adică pentru $\alpha = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ și **5**. Funcția $Y_\alpha(z)$ **centrică** este denumită și **funcția Neumann**, ocazional fiind notată și cu $N_\alpha(z)$.

Pentru valori α diferite de întregi, funcția Bessel **centrică** de speța a II-a se scrie în funcție de $J_\alpha(z)$ sub forma:

$$(27.6) \quad Y_\alpha(z) = \frac{J_\alpha(z) \cdot \cos(\alpha \cdot \pi) - J_{-\alpha}(z)}{\sin(\alpha \cdot \pi)}$$

În cazul în care α are o valoare întregă n , funcția se definește ca limită de $\alpha \rightarrow n$:

$$(27.7) \quad Y_n(z) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(z)$$

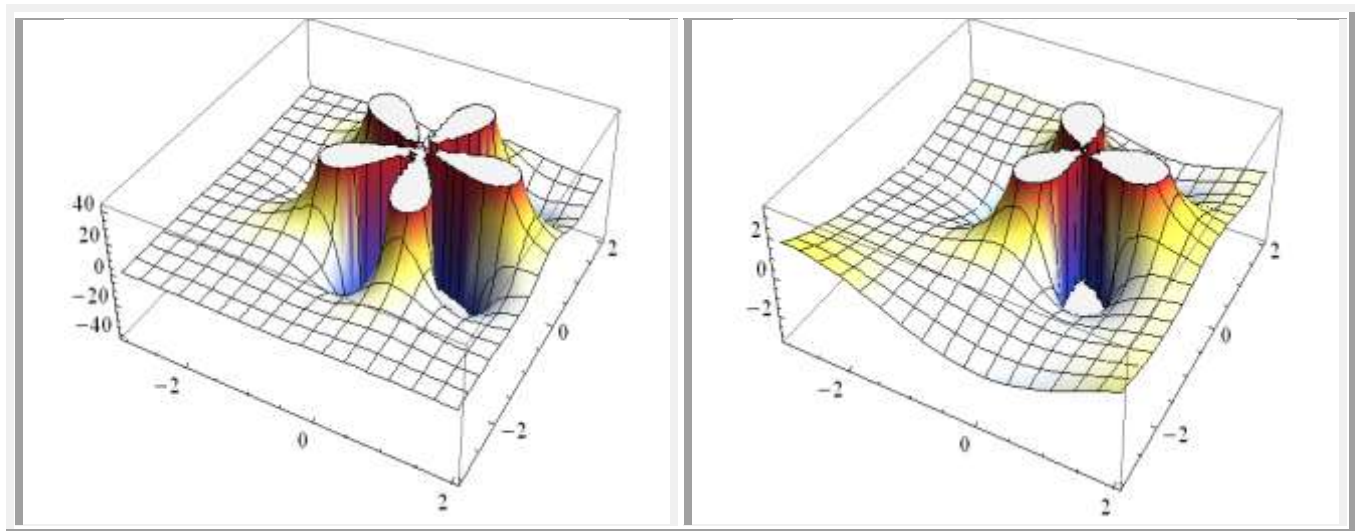
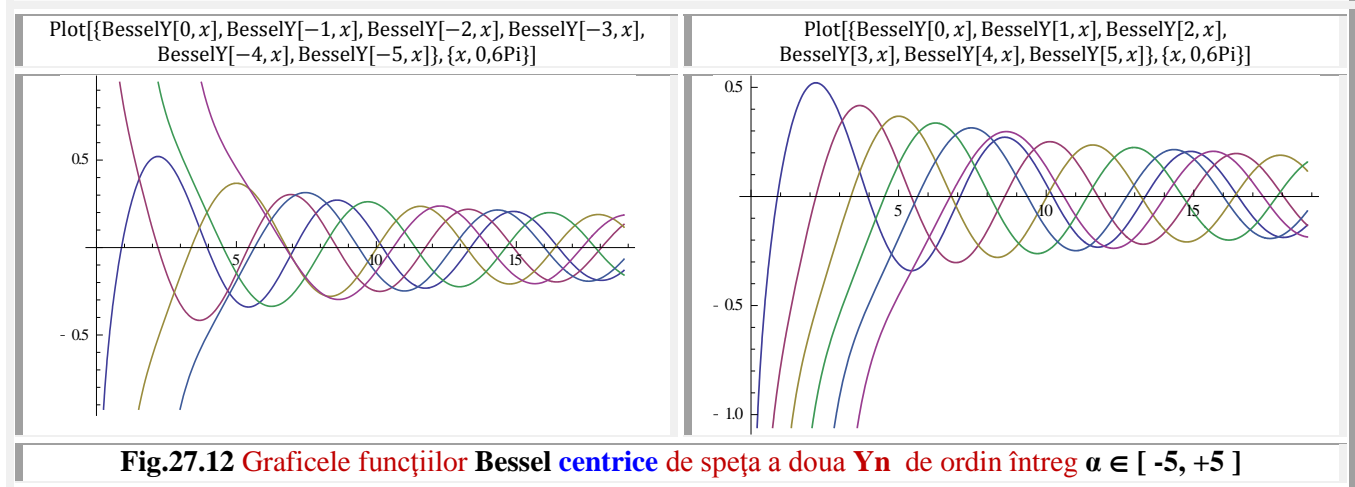
scriindu-se sub formă integrală:

$$(27.8) \quad Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\pi \sin(z \cdot \sin\theta - n\theta) d\theta - \int_0^\infty [e^{nt} + (-1)e^{-nt}] e^{-z \sinh t} dt \right\}$$

iar sub formă de serie este:

$$(27.9) \quad Y_n(z) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2} J_n(z) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \psi(n+k+1) \right\} \frac{\left(\frac{-z}{2}\right)^{2k}}{k!(n+k)!}$$

în care ψ este **funcția digamma**.



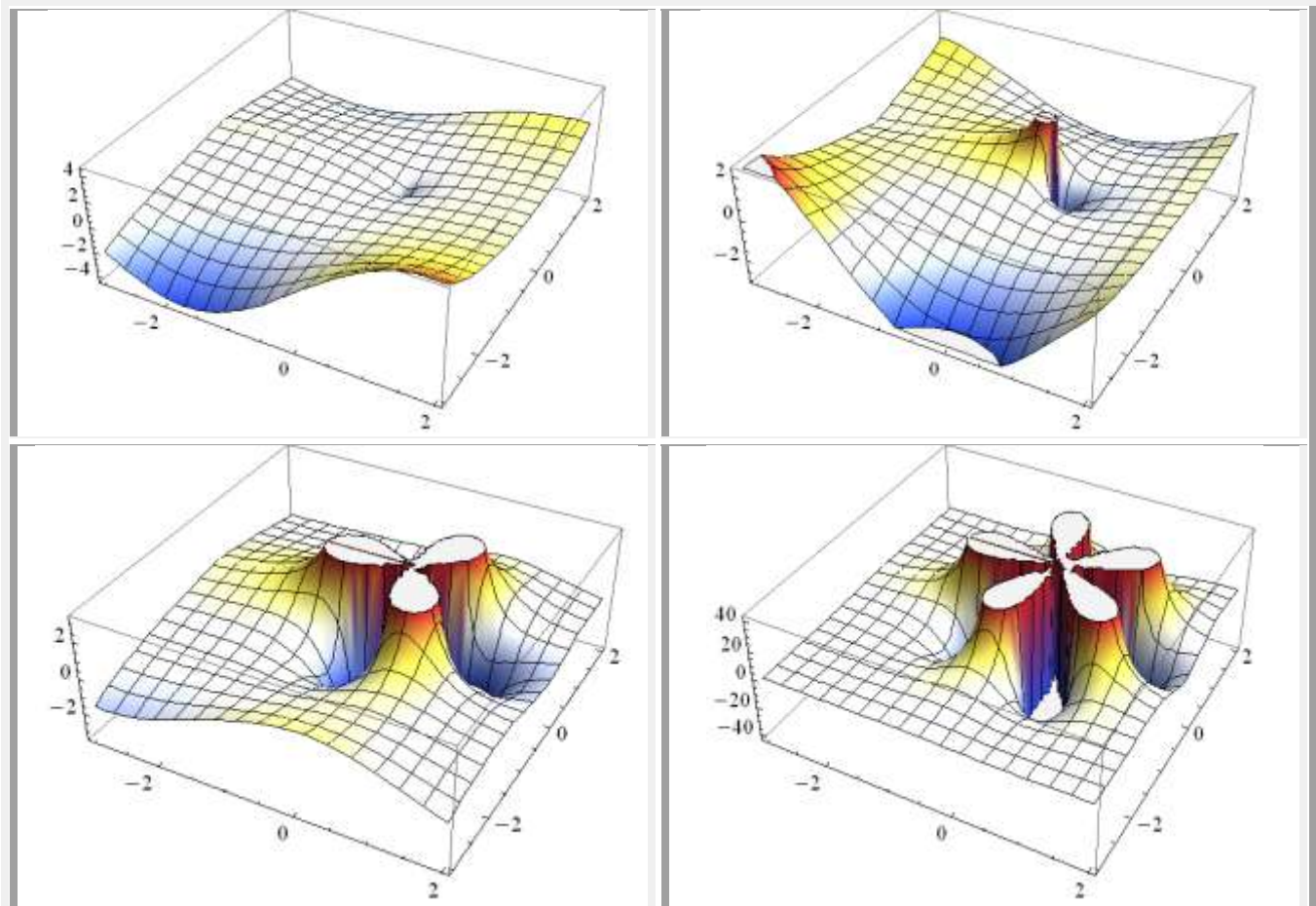
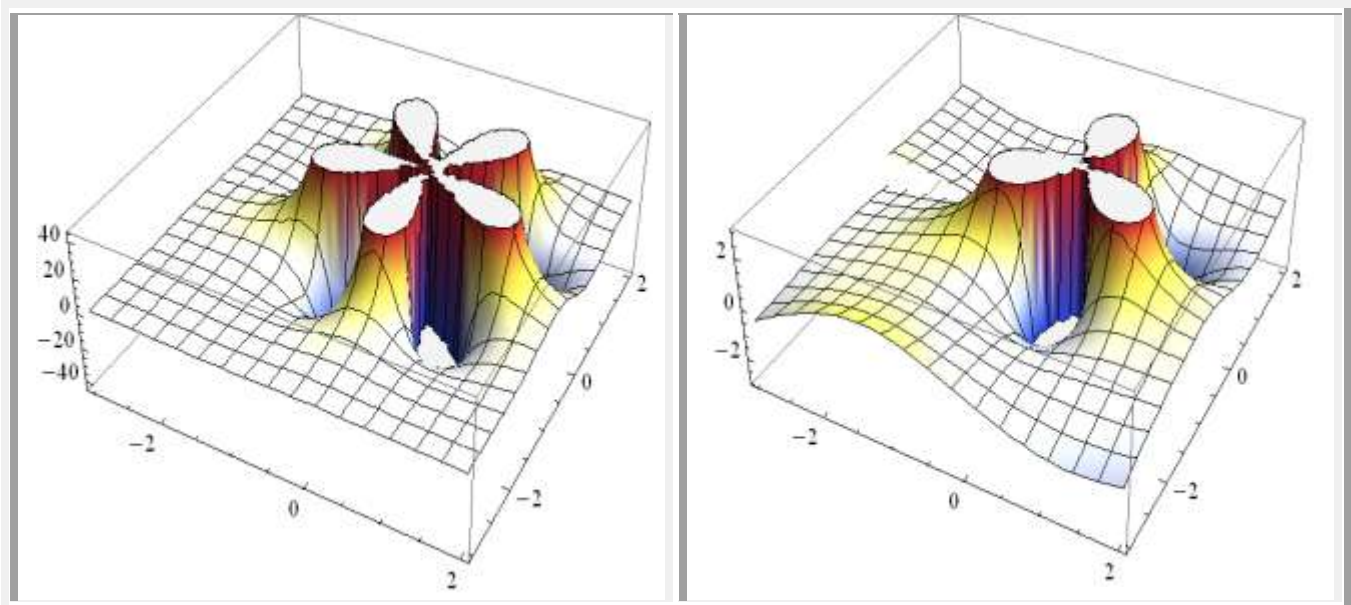


Fig.27.12,a Funcții Bessel **centrice** de speța a doua Y_n în planul complex de ordin întreg $\alpha = -5, -3, 0, +1, +3, +5$ partea reală



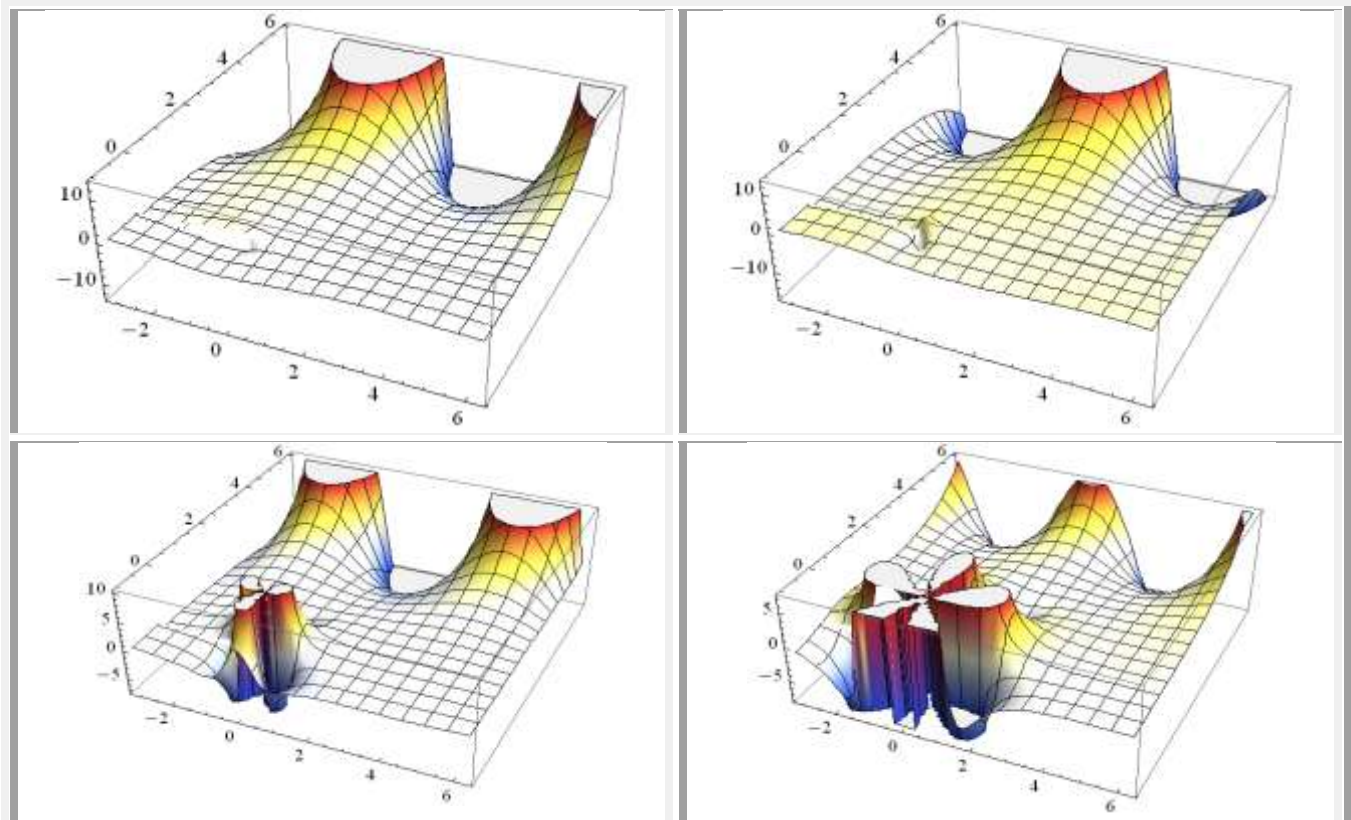
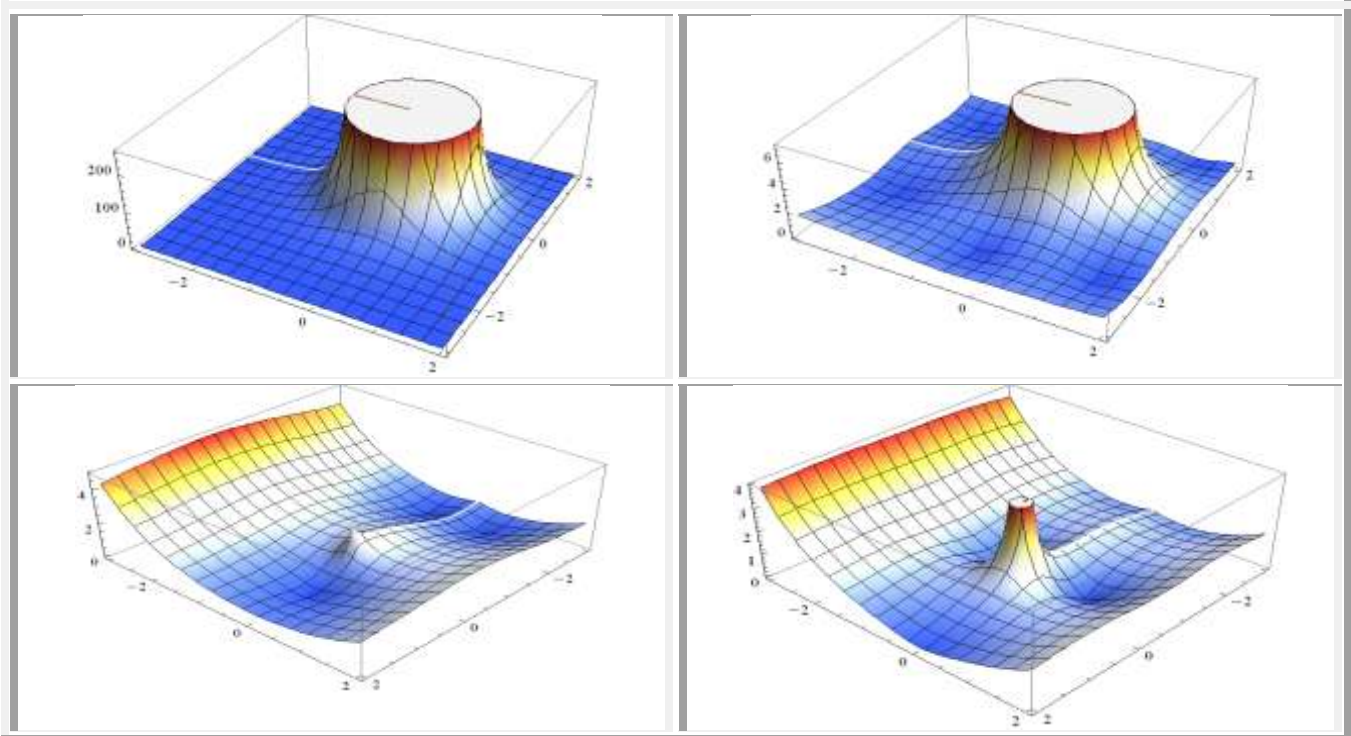


Fig.27.12,b Funcții Bessel centrice de speța a doua Y_n în planul complex de ordin întreg $\alpha = -5, -3, 0, +1, +3, +5$ partea imaginară



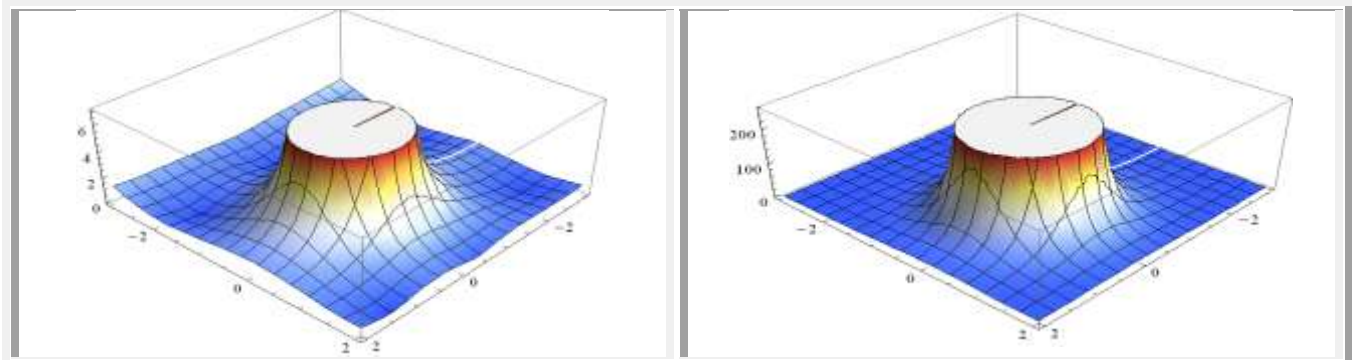


Fig.12,c Funcții Bessel centrice de speța a doua Y_n în planul complex de ordin întreg $\alpha = -5, -3, 0, +1, +3, +5$ partea absolută

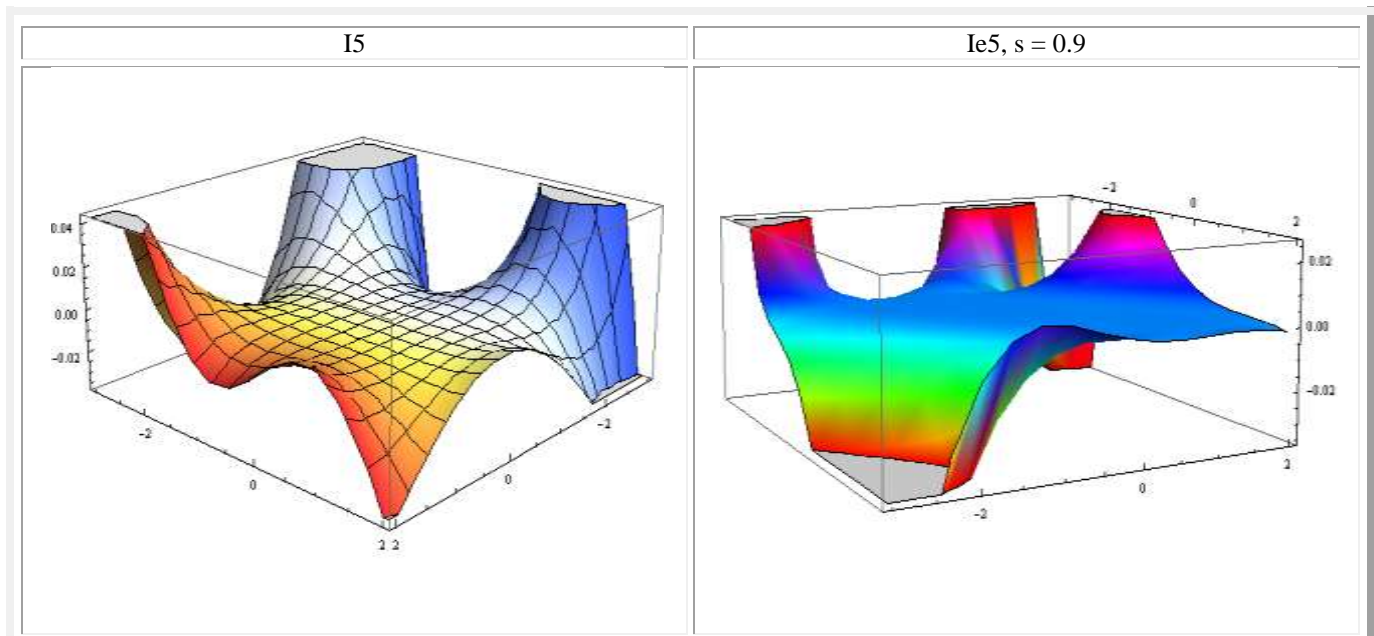
În cazul în care α are o valoare diferită de întreg, funcția $Y_\alpha(z)$ este inutilă (putând fi înlocuită oricând cu $J_\alpha(z)$). Pe de altă parte, când α este un întreg n , $Y_n(z)$ este a doua soluție linear independentă a ecuației lui Bessel. Mai mult, este valabilă o relație similară cu cea pentru funcția de speța I-a, adică:

$$(27.10) \quad Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z)$$

Ambele funcții, $J_\alpha(z)$ și $Y_\alpha(z)$, sunt **funcții olomorfe** de z în **planul complex** cu tăietură de-a lungul axei reale negative. Când α este un întreg, funcțiile Bessel J sunt **funcții întregi** de z . Dacă z este fixat, atunci funcțiile Bessel sunt funcții întregi de α .

27.3 FUNCȚII BESSEL CENTRICE (I, J, K, Y) ȘI EXCENTRICE (IE, JE, KE, YE) (COMPARAȚIE)

În figurile următoare sunt prezentate partea reală în **figura 27.13**, partea imaginara în **figura 27.14** și partea absoluta în **figura 27.15**. În partea stângă pentru **funcțiile centrice** și în partea din dreapta pentru **cele excentrice**.



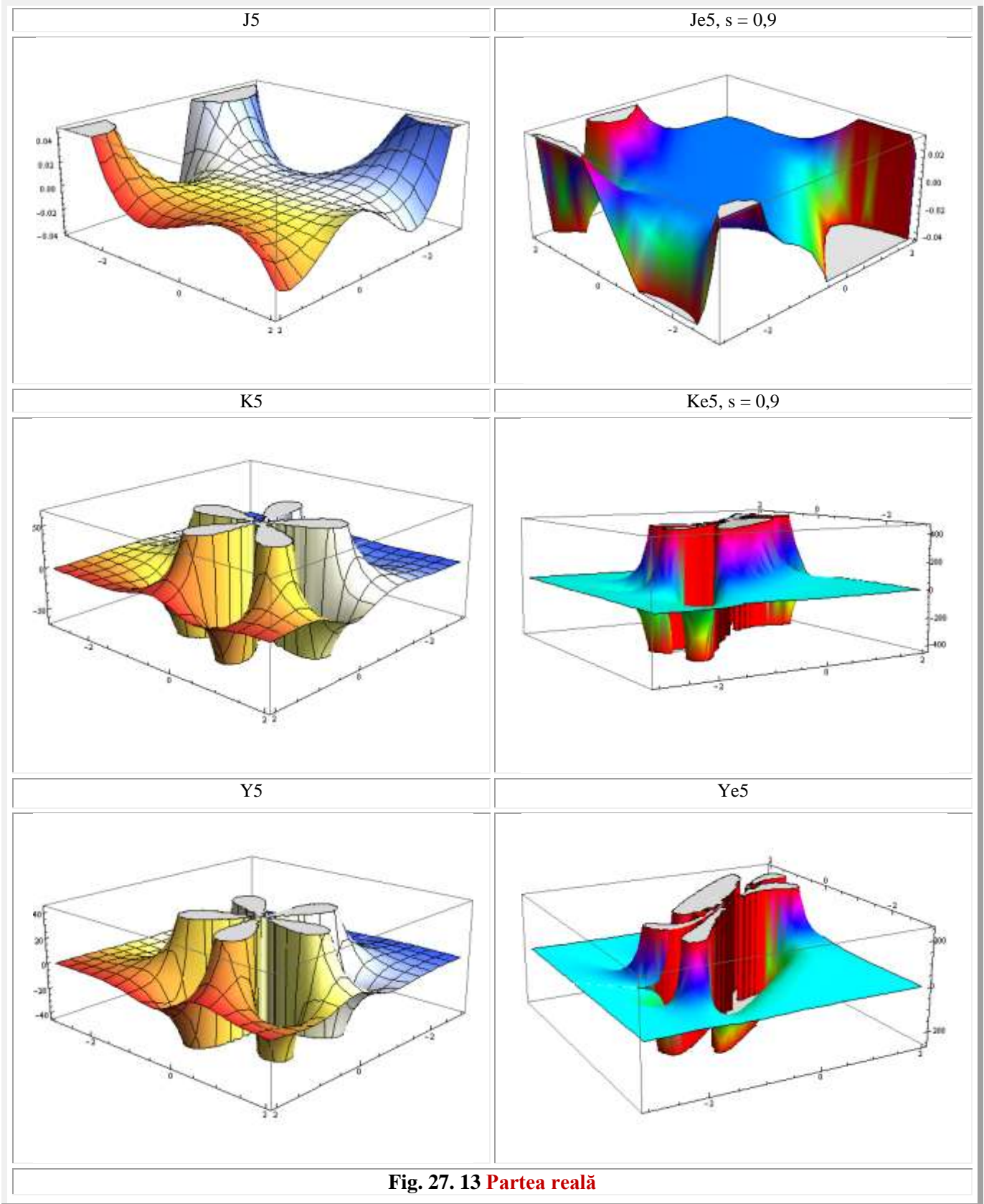
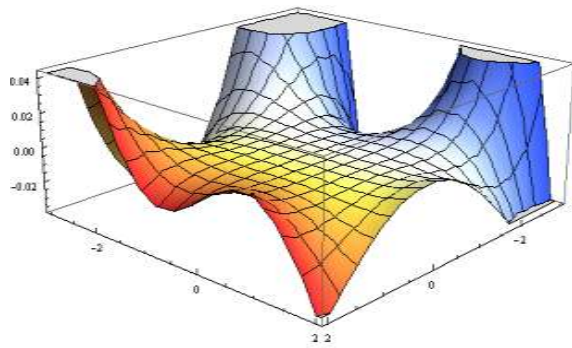
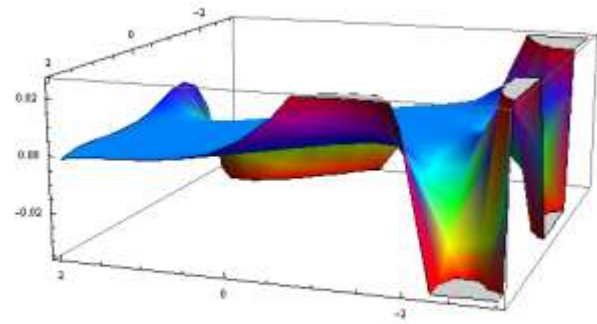


Fig. 27. 13 Partea reală

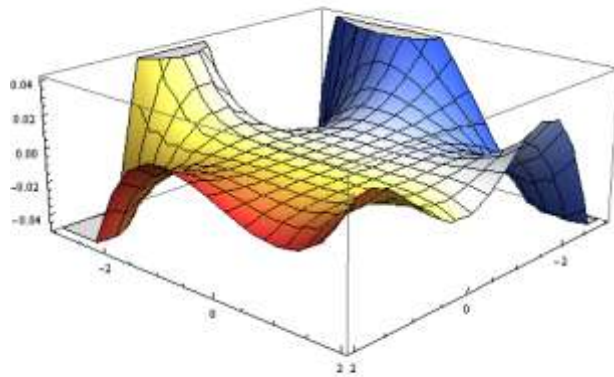
I-5



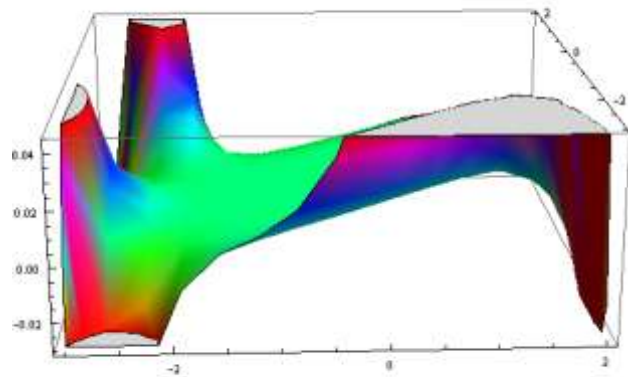
Ie-5



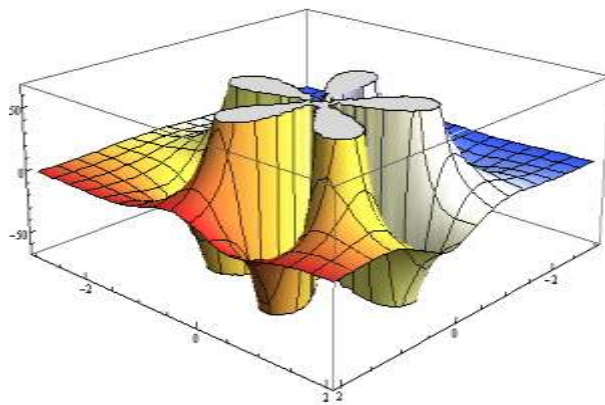
J-5



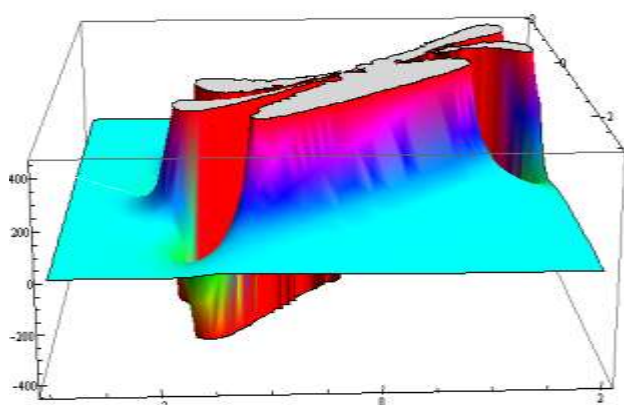
Je-5

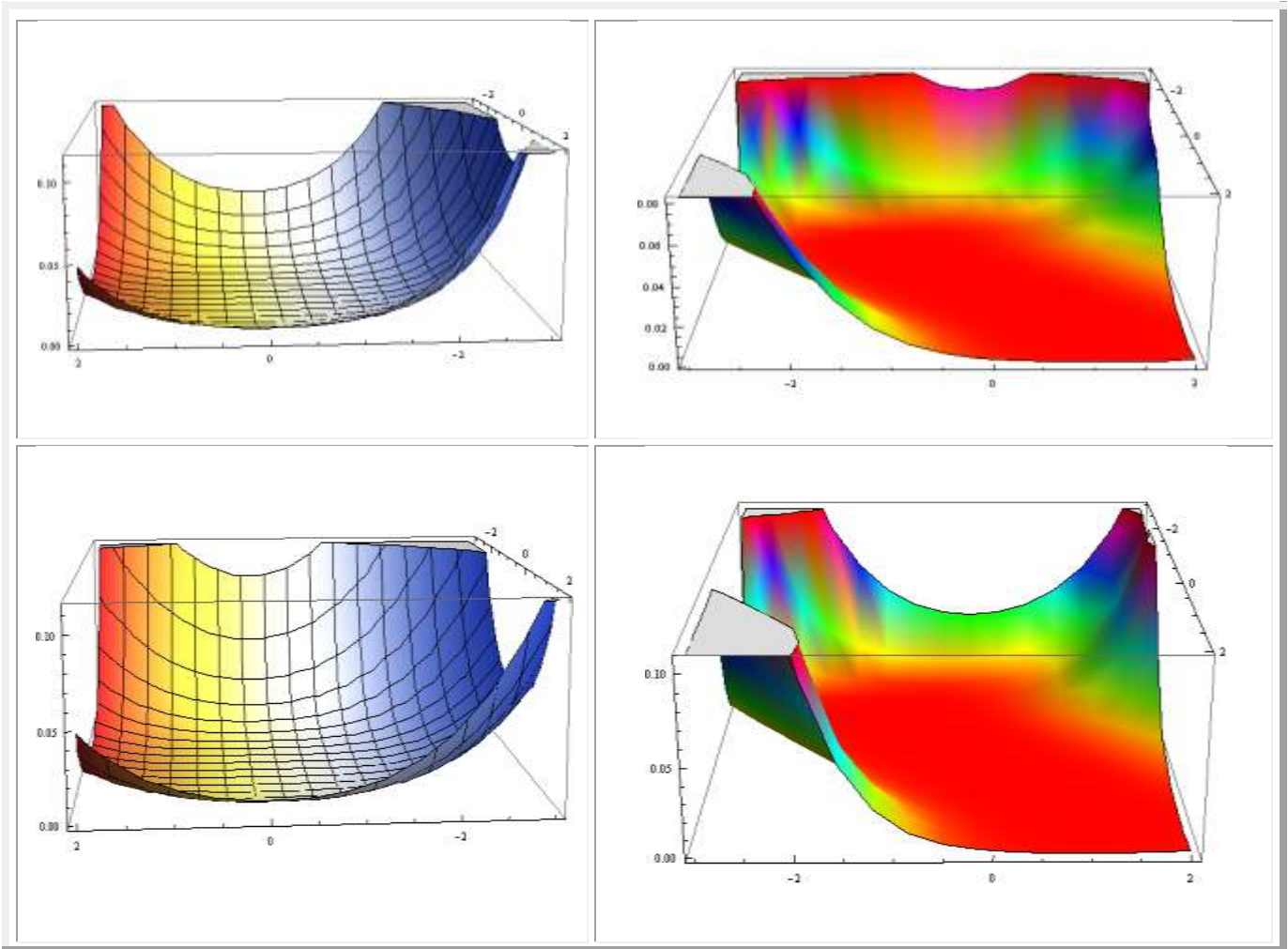
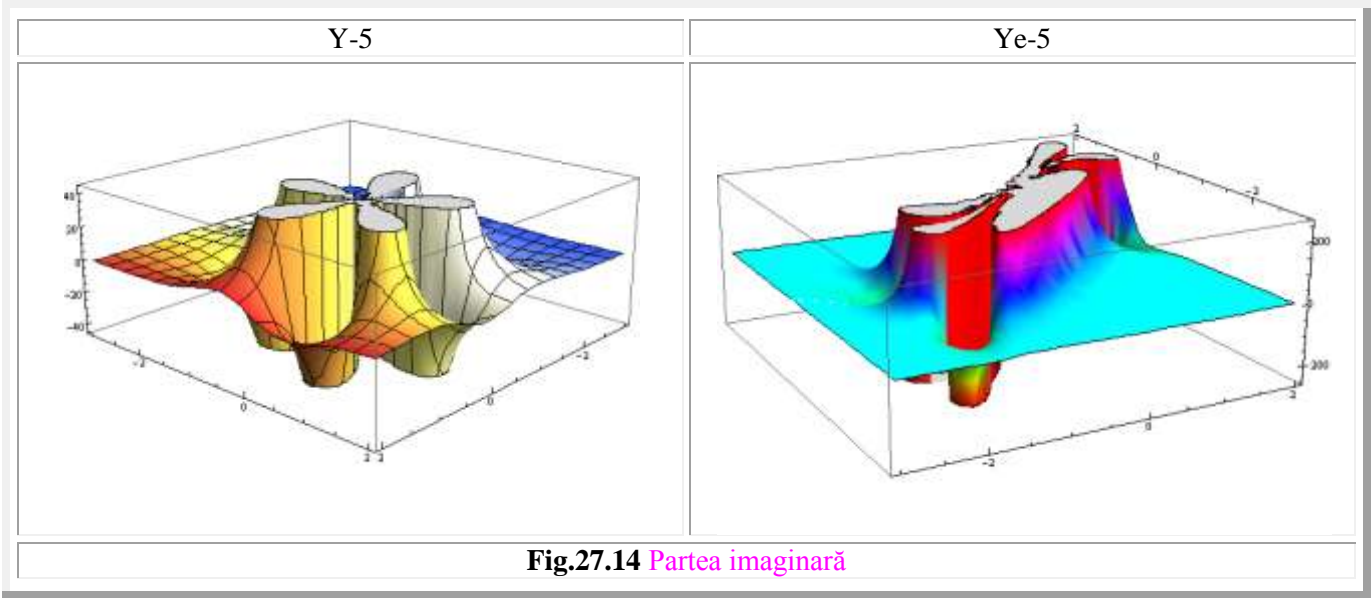


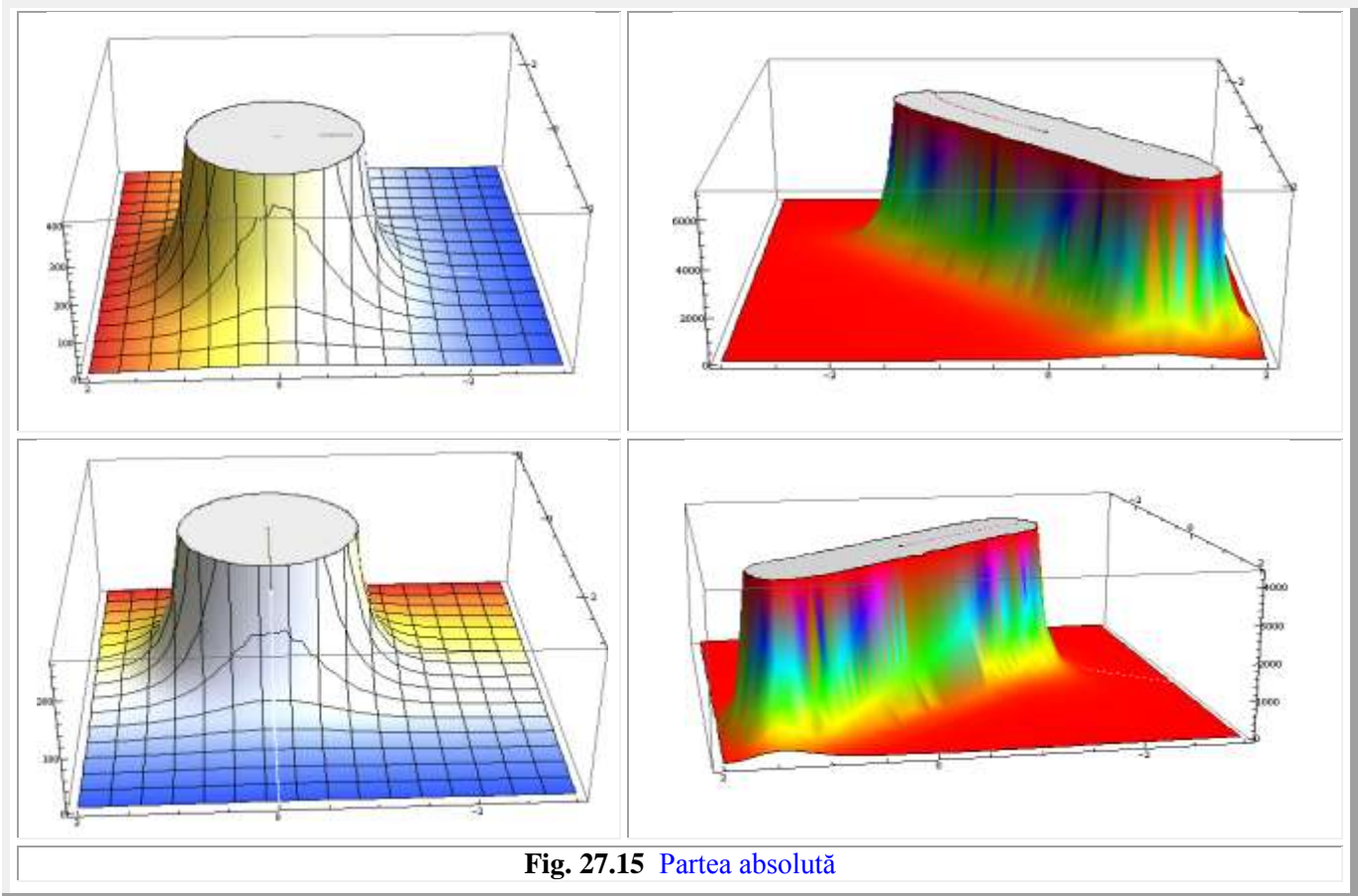
K-5



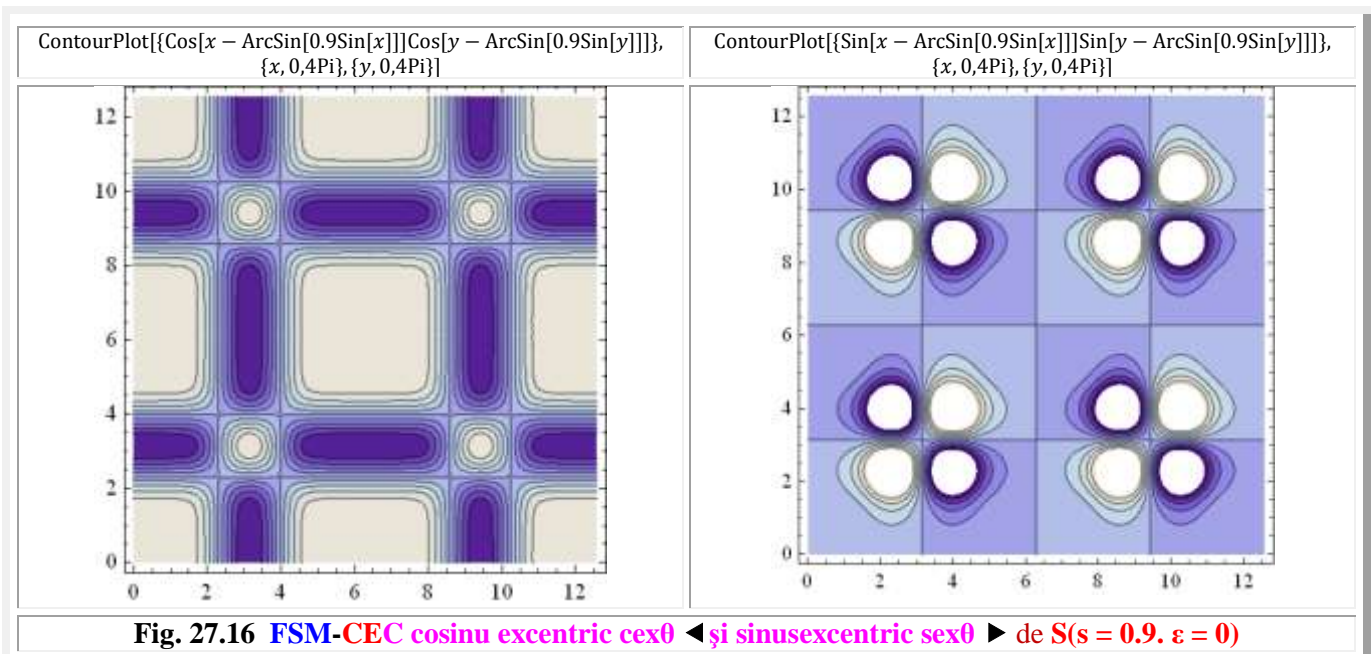
Ke-5

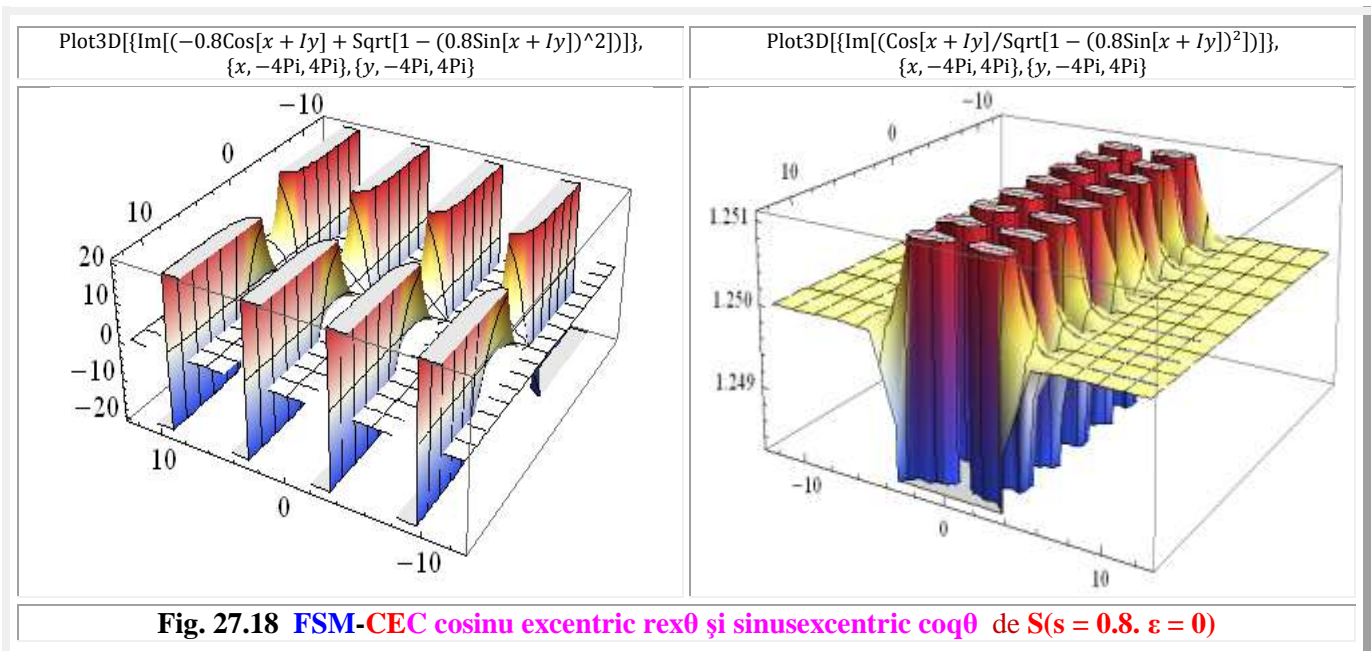
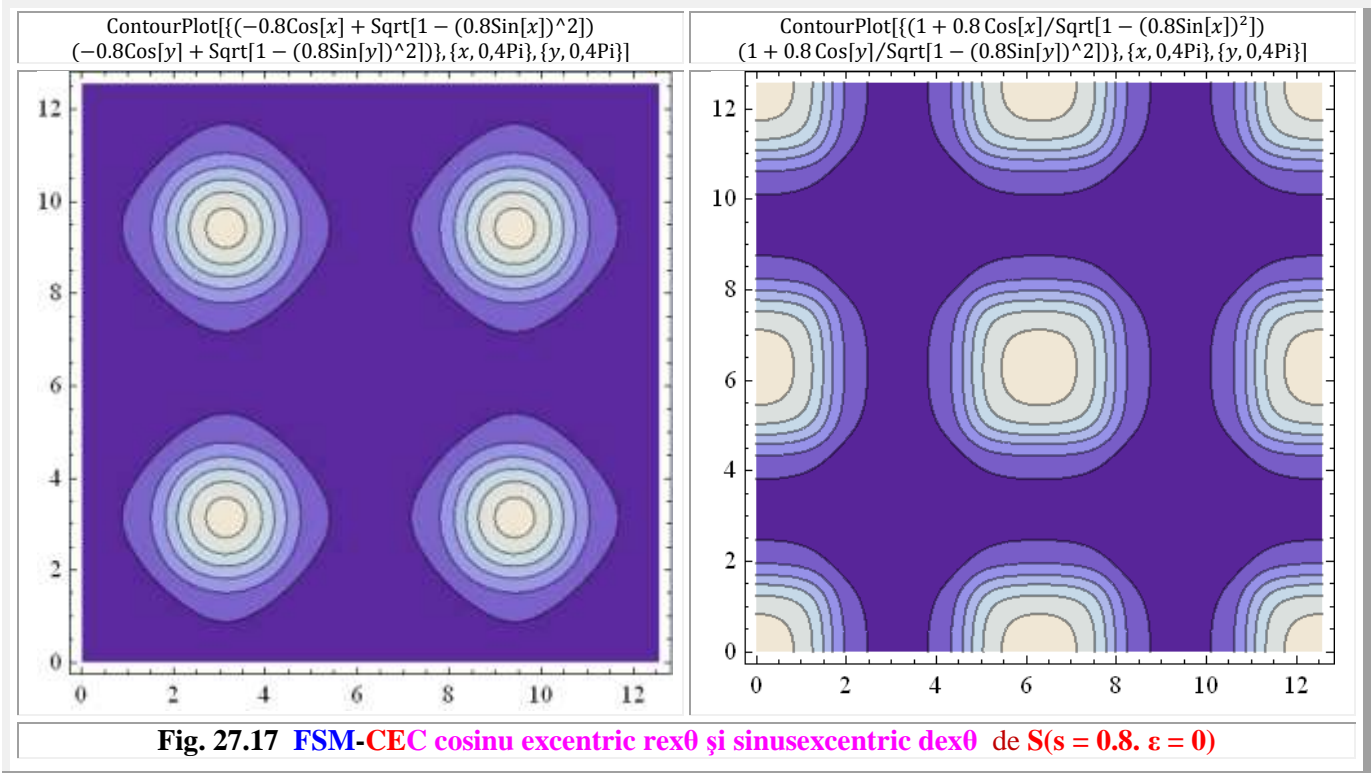






Alte funcții supermatematice circulare excentrice în planul complex (FSM-CEC) sunt prezentate în 2D și în 3D cu ecuațiile lor de definiție, în continuare.





Motto:” După ce a descoperit celebra sa teoremă, **Pythagoras** a sacrificat o sută de boi.
De atunci, de fiecare dată, când se descoperă vreun **adevăr nou**,
vitele cornute mari au puternice palpații.”

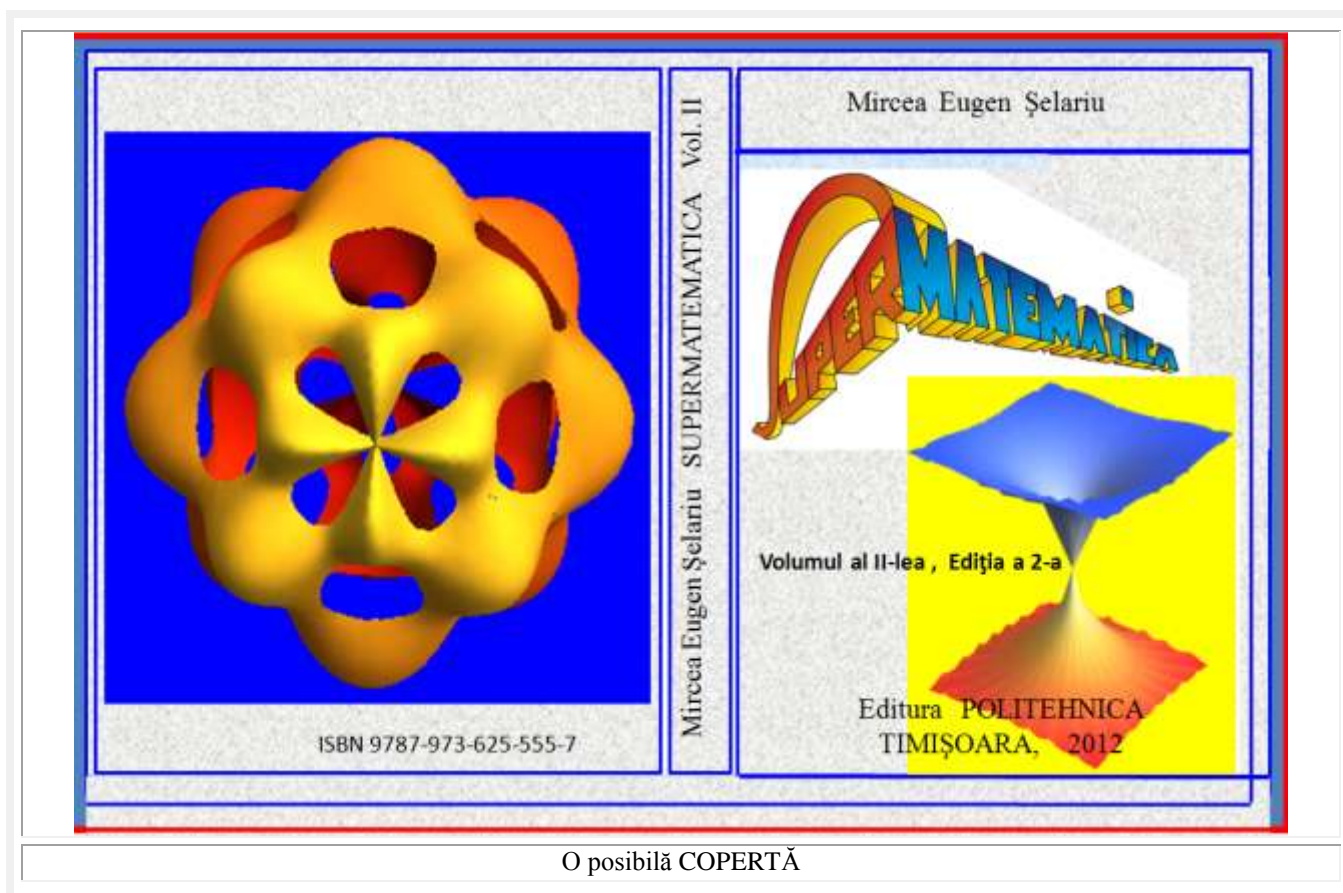
Ludwig Björne

Capitolul 28

NOI FUNCȚII SUPERMATEMATICE (FSMN)

28.1 LAUDATIO în loc de ÎNTRODUCERE

Cu ocazia decernării **DIPLOMEI AGIR** din domeniul “**TEHNOLOGIEI INFORMAȚIEI**”, pe anul 2012, lucrării “**SUPERMATEMATICA FUNDAMENTE**”. Vol.I și Vol. II, Editura “**POLITEHNICA**” din Timișoara, 2012, **Asociația Generlă a Inginerilor din Romania (AGIR)** a prezentat și următorul laudatio, cu mici corectări și completări ale autorului și cu prezentarea copertei.



O posibilă COPERTĂ

Supermatematica (SM) este considerată, fără exagerare, de susținătorii și admiratorii ei, și nu sunt puțini, unii fiind matematicieni și profesori universitari americani, ca **noua matematică a meleniului III**, așa cum se poate ușor constata.

Cele **914** pagini ale lucrării (nn. Ediția a 2-a) - 486 pagini în vol.I și 428 pagini în vol.II – exprimă vastitatea lucrării, dar atributele ei esențiale cosistă în simplitatea și surprinzătoarea ei apariție, ca urmare a deplasării din centrul $O(0,0)$ a unui singur punct, denumit, din aceasta cauză **excentru $E(e,\epsilon)$** , în originalitatea și în unicitatea ei în literatura mondială.

Supermatematica (SM) este o reuniune a matematicii cunoscute, ordinare, care în lucrare a fost denumită **matematică centrică (MC)** – obținută din **SM** pentru unicul caz particular $e = 0$ - pentru a se deosebi de noua matematică, denumită **matematică excentrică (ME)**.

Adică $SM = MC \cup ME$.

Pentru fiecare punct din plan, în care poate fi plasat un excentru $E(e, \epsilon)$, se poate spune că există o nouă **ME**. Astfel, la o singură **MC** îi corespund o infinitate de **ME**. Pe de altă parte, $MC = SM(e = 0)$.

În consecință, **SM** multiplică la infinit **toate entitățile** și funcțiile circulare / trigonometrice cunoscute și introduce o pleiadă de funcții circulare noi (**aex, bex, dex, rex**, ș.a), mult mai importante și mai elementare decât cele vechi și, prin acestea, în final, multiplică la infinit toate entitățile matematice cunoscute ($\cos \rightarrow \text{cex}$, $\sin \rightarrow \text{sex}$, $\tan/\text{tg} \rightarrow \text{tex}$, ș.m.a.) și introduce multe alte entități noi.

S-a constatat că **MC** este proprie sistemelor **liniare, perfecte, ideale**, iar **ME** este proprie sistemelor **neliniare, reale, imperfecte**. Ca urmare, odată cu apariția **SM** a dispărut granița dintre liniar și neliniar, dintre ideal și real, dintre perfecțiune și imperfecțiune, ceea ce constituie visul de veacuri al inginerilor și o unică performanță matematică de seamă.

SM evidențiază excentricitatea liniară e și pe cea unghiulară ϵ , coordonatele polare ale excentrului $E(e, \epsilon)$, ca noi dimensiuni ale spațiului: dimensiuni de **formare** și de **deformare** ale acestuia; numite și **dimensiunile ascunse ale spațiului**.

SM putea să apară cu peste 300 de ani în urmă, dacă **Euler**, la definirea funcțiilor trigonometrice ca funcții circulare directe, n-ar fi ales **trei puncte confundate, suprapunere care a sărăcit matematica**:

- **Originea O(0, 0)** a unui reper / sistem de coordonate
- **Polul P \equiv E sau S** al unei semidrepte,
- **Centrul C** al cercului trigonometric (unitate) .

SM a apărut atunci când polul **E** și **S** au fost expulzate din centrul cercului și din originea reperului și au fost denumite **excentre**.

Din combinarea celor trei puncte(O, M, E sau S) apar următoarele familii/ domenii de funcții **SM**:

- 1) **FCC - circulare centrice- (FSM-CC)** \rightarrow dacă $C \equiv O \equiv E$;
- 2) **FSM circulare excentrice (FSM-CE)** \rightarrow dacă $C \equiv O \neq E$;
- 3) **FSM circulare elevate (FSM-CEL)** \rightarrow dacă $C \neq O \equiv E$ și
- 4) **FSM circulare exotice (FSM-CEX)** \rightarrow dacă $C \neq O \neq E$.

Pentru a aduce de acord trigonometria cu geometria, intersecția cercului unitate nu s-a mai făcut cu o semidreaptă (**Euler** \rightarrow **MC**) ci cu o dreaptă, astfel că există două determinări: una principală, de indice **1** și una secundară de indice 2. De asemenea, existând două unghiuri, la centrul **O(0,0)** α și la excentru **S(s, ϵ)** θ , vor exista două tipuri de funcții **SM** : de variabilă excentrică θ , notate **cex, sex, rex, dex**, și de variabilă centrică α , notate cu majuscule **Cex, Sex, Rex, Dex**, ș.a.m.d. dintre care $\text{dex} = \frac{d\alpha}{d\theta}$, iar $\text{Dex} = \frac{d\theta}{d\alpha}$, astfel că $\text{dex}\theta = \frac{1}{\text{Dex}\alpha}$.

Dintre **entitățile noi apărute** sunt și o pleiadă de noi curbe închise, care apar la **transformarea continuă** a cercului în pătrat (denumite **quadrilobe / cvadrilobe**), a cercului în triunghi (**trilobe**) ș.a.

În **3D**, aceste transformări continue sunt a **sferii în cub**, a **sferii în prismă**, a **conului în piramidă** ș.m.a.

Aceste transformări continue au făcut posibilă apariția unor noi corpuri **3D hibride** ca: sfera-cub; cono-piramida, piramida-con ș.m.a, precum și a unor noi transformări matematice, cum este **hibridarea matematică**, care, dintr-un cerc și un pătrat rezultă o quadrilobă (cvadrilobă), din cerc și triunghi o trilobă, ș.a.m.d.

Prin înlocuirea cercului cu o quadrilobă au fost definite funcțiile quadrilobe, iar prin înlocuirea cu o trilobă au fost definite în lucrare și **funcțiile trilobe**.

În domeniul **hiperbolic** au apărut funcțiile hiperbolice excentrice.

În **eliptic**, integralele și funcțiile eliptice **Jacobi** centrice sau multiplicat la infinit prin funcțiile eliptice excentrice și prin alte funcții pe conice.

În lucrare sunt evidențiate și noi metode matematice, dintre care se amintesc

1) **Determinarea unui relației de calcul**, oricât de exacte, a integralei eliptice complete de prima speță **K(k)** și transformarea, totodată, a metodei **numerice**, a mediei aritmetico-geometrice **Landen**, într-o metodă **analitică**, care a permis determinarea, cu minimum 15 zecimale exacte (!), a **relației** de calcul **K(k)** după numai 5 pași.

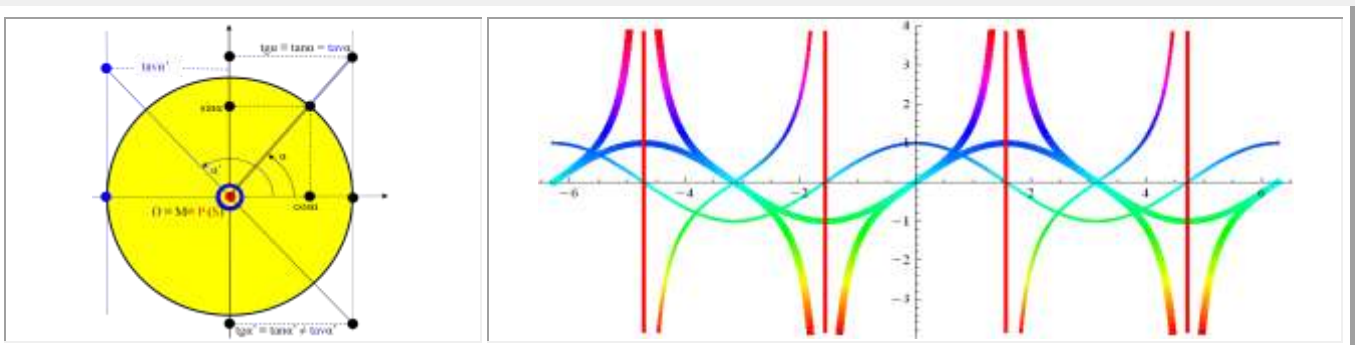


Fig. 28.1,a Schiță explicativă ◀ și graficele funcțiilor circulare centrice (FSM-CC) **cos**, **sin**, **tan** și **tav** ▶

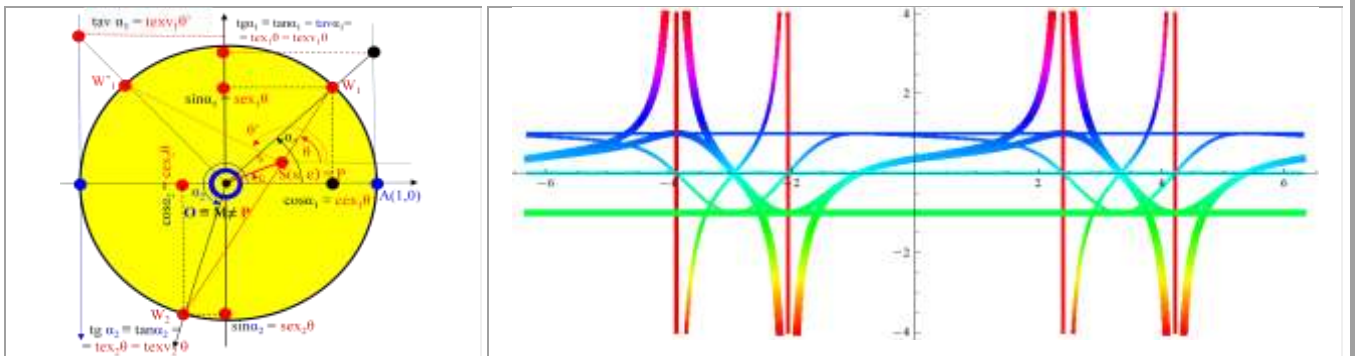


Fig. 28.1,b Schiță explicativă ◀ și graficele funcțiilor circulare excentrice (FSM-CE) **cex**, **sex**, **tex** și **texv** ▶ de $S(s = 0,8; \epsilon = \pi/7)$ interior discului unitate ($R = 1$)

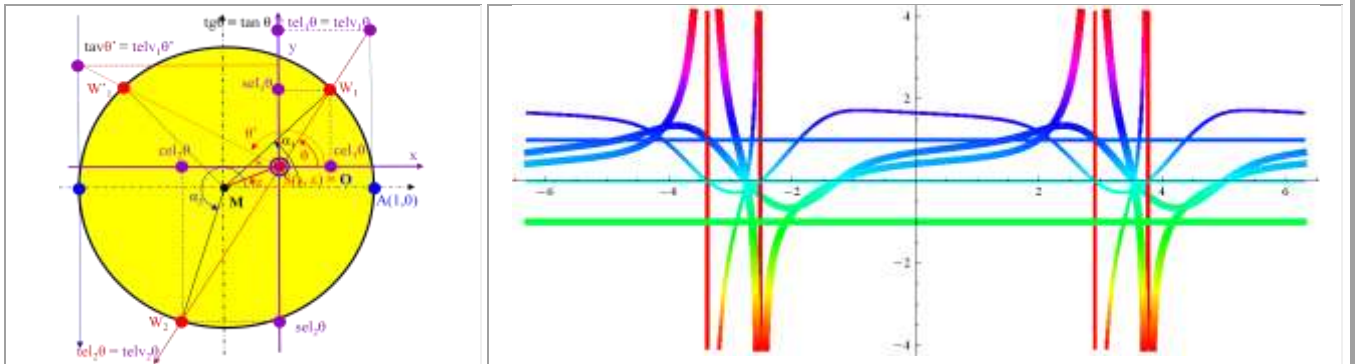


Fig. 28.1,c Schiță explicativă ◀ și graficele funcțiilor circulare elevate (FSM-CEL) **cel**, **sel**, **tel** și **telv** ▶ de $S(s = 0,8; \epsilon = \pi/7)$ interior discului unitate ($R = 1$)

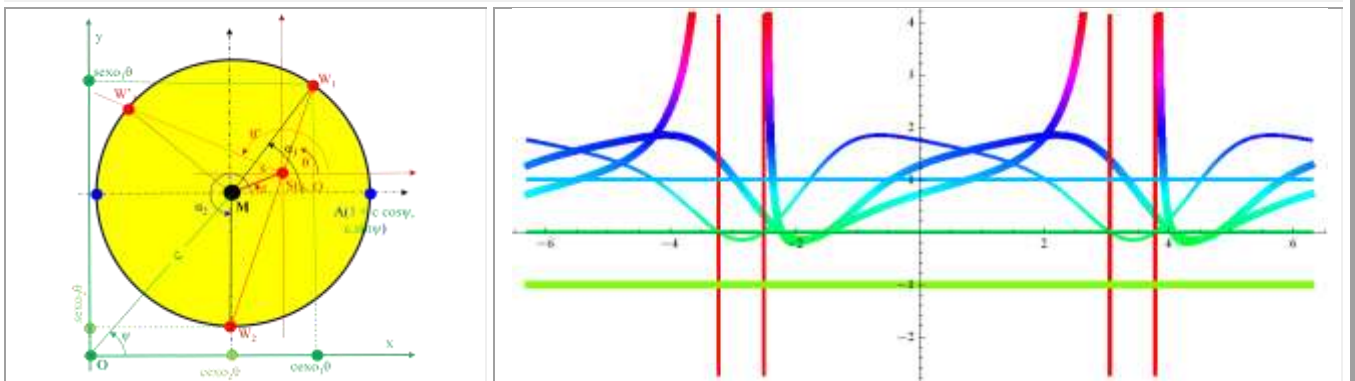


Fig. 28.1,d Schiță explicativă ◀ și graficele funcțiilor circulare exotice (FSM-CEX) **cexo**, **sexo**, **texo** și **texov** ▶ de $S(s = 0,6; \epsilon = \pi/7)$, interior discului unitate ($R = 1$), $OM = 1,2$ și $\psi = \pi/4$

- 2) **Metoda divizării diferențiale**- o nouă metodă de integrare, care evită integrarea în spațiul complex.
- 3) **SM-CAD-CAM** pentru descrierea obiectelor tehnice ș.m.a.

Nu putem încheia fără să subliniem bogăția de desene explicative și de grafice, care întregesc înțelegerea lucrării și calitatea acestora, asigurată de Editura "POLITEHNICA" din Timișoara, chiar dacă sunt tipărite doar în alb-negru, pentru reducerea cheltuielilor și nu color, cum s-a intenționat inițial și cum a fost elaborat manuscrisul.

Principalele **FSM** directe, de bază și derivate, centrice și excentrice, primele arhicunoscute și celelalte studiate mai în detaliu până în prezent, sunt trecute în revistă în **tabelul 1** și prezentate / exprimate grafic în **figura 1**. În **tabelul 1** au fost marcate și noile funcții tangenta și cotangenta, secanta și cosecanta **Voinoiu**, pentru ca subiectul să fie complet / intergit, iar în **figura 2** este reprezentată grafic și funcția tangenta **Voinoiu**.

24.2 TIPURI / FAMILII DE FUNCȚII SUPERMATEMATICE.

Cele 4 tipurile sau familiile **FSM** prezentate anterior (**centrice**, **excentrice**, **elevate** și **exotice**) și în **figura 1,a ... 1,d** sunt incomplete, deoarece, cele trei puncte pot fi combinate astfel:

- 1) Combinări de 3 obiecte (puncte) luate câte 3 $\rightarrow C_3^3 = 1 \rightarrow$ **FSM-CC** ;
- 2) Combinări de 3 obiecte (puncte) luate câte 2 $\rightarrow C_3^2 = 3 \rightarrow$ **FSM-CE**, **FSM-CEI**; (**FSM-CE_x**);
- 3) Combinări de 3 obiecte (puncte) luate câte 1 $\rightarrow C_3^1 = 3 \rightarrow$ **FSM-CCT**; (**FSM-CE_x**);

Familia lipsă este cea a **FSM circulare centrice translatare (FSM-CCT)**.

Dintre aceste familii, **funcțiile circulare centrice (FCC)** sunt pe larg dezbătute și arhicunoscute, iar cele excentrice sunt doar puțin cunoscute, în raport cu **FCC**, dar mult mai cunoscute decât celelalte funcții supermatematice elevate și exotice.

Pentru compararea noilor **FSM-CE** cu cele circulare centrice (**FCC**) s-a alcătuit **tabelul 1**, iar pentru definirea **FSM-CE**, de variabilă excentrică θ și centrice α_1 , s-a alcătuit schița din **figura 2**.

Tabel 28.1 Funcții circulare centrice și excentrice , directe, de bază și derivate				
FUNCȚII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (FSM-CE)				
DIRECTE DE BAZĂ				
FUNCȚII MATEMATICE CENTRICE (FMC)		FUNCȚII SUPERMATEMATICE EXCENTRICE (FME)		
Cosinus	$\cos\alpha$	Cosinus excentric	$\text{cex}_{1,2}\theta$	$\text{Cex}\alpha_{1,2}$
Sinus	$\sin\alpha$	Sinus excentric	$\text{sex}_{1,2}\theta$	$\text{Sex}\alpha_{1,2}$
Tangenta	$\tan\alpha$	Tangenta excentrică	$\text{tex}_{1,2}\theta$	$\text{Tex}\alpha_{1,2}$
Tangenta Voinoiu	tava	Tangenta Voinoiu excentrică	$\text{texv}_{1,2}\theta$	$\text{Texv}\alpha_{1,2}$
Cotangenta	cota	Cotangenta excentrică	$\text{ctex}_{1,2}\theta$	$\text{Ctex}\alpha_{1,2}$
Cotangenta Voinoiu	cova	Cotangenta Voinoiu excentrică	$\text{ctgv}_{1,2}\theta$	$\text{Ctex}\alpha_{1,2}$
Secanta	seca	Secanta excentrică	$\text{scex}_{1,2}\alpha$	$\text{Scex}\alpha_{1,2}$
Secanta Voinoiu	seva	Secanta excentrică Voinoiu	$\text{scexv}_{1,2}\alpha$	$\text{Stexv}\alpha_{1,2}$
ȘI FCC precum și FSM-CE DIRECTE DERIVATE				
Versinus	$\text{versin}\alpha$	Versinus excentrică	$\text{versex}\alpha$	$\text{versex}\alpha$
Coversinus	$\text{coversin}\alpha$	Coversinus excentrică	$\text{coversex}\alpha$	$\text{coversex}\alpha$
Exsecantă	exseca	Exsecantă excentrică	$\text{exscex}\alpha$	$\text{exscex}\alpha$
Excosecanta	excseca	Excosecanta excentrică	$\text{excsex}\alpha$	$\text{excsex}\alpha$

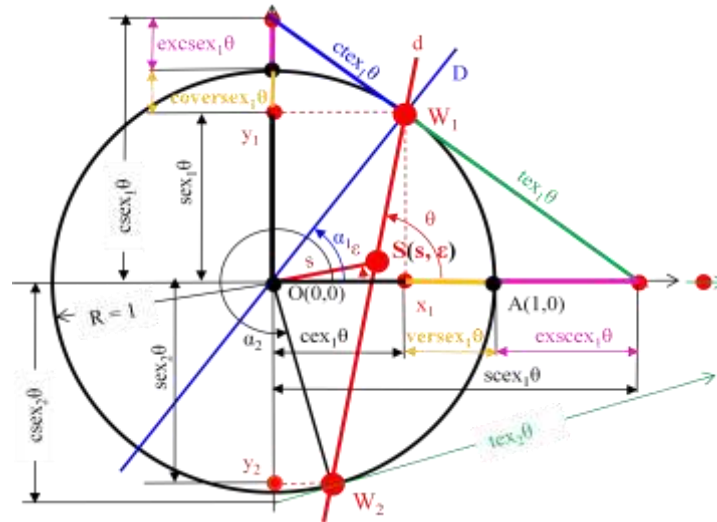


Fig.28.2 Schemă explicativă pentru FSM-CE directe, de bază și derivate

Pentru ca subiectul **SM** să fie epuizat și funcțiile **FSM** să fie în formație completă, s-au considerat și **FSM circulare centrice translatare (FSM –CCT)** a căror definiție este prezentată schematic în **figura 28.3**. Au fost denumite și **FSM NOI (FSMN)**, deoarece sunt descoperite doar de câteva zile, în timp ce, celelalte 4 familii sunt descoperite de peste 30 de ani !

Așa cum le spune și numele, ele sunt **FCC** care suferă o translație de $t_x = m \cdot \cos \psi$ pe direcția x, cum este de exemplu cosinusul și de $t_y = m \cdot \sin \psi$ pe direcția y, ca de exemplu sinusul **Fig.24.4,a** și au două determinări atât cele centrice cât și cele excentrice, de indice 1 și, respectiv, de indice 2 (**Fig. 28.3**).

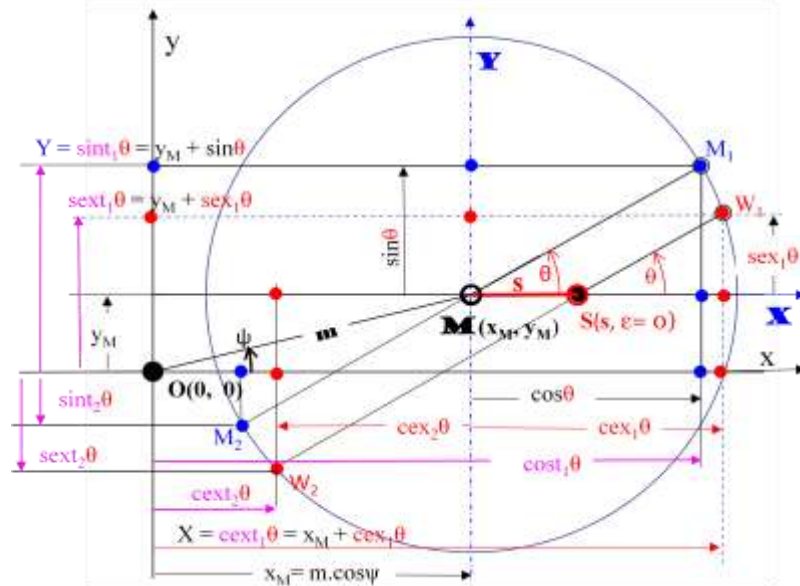
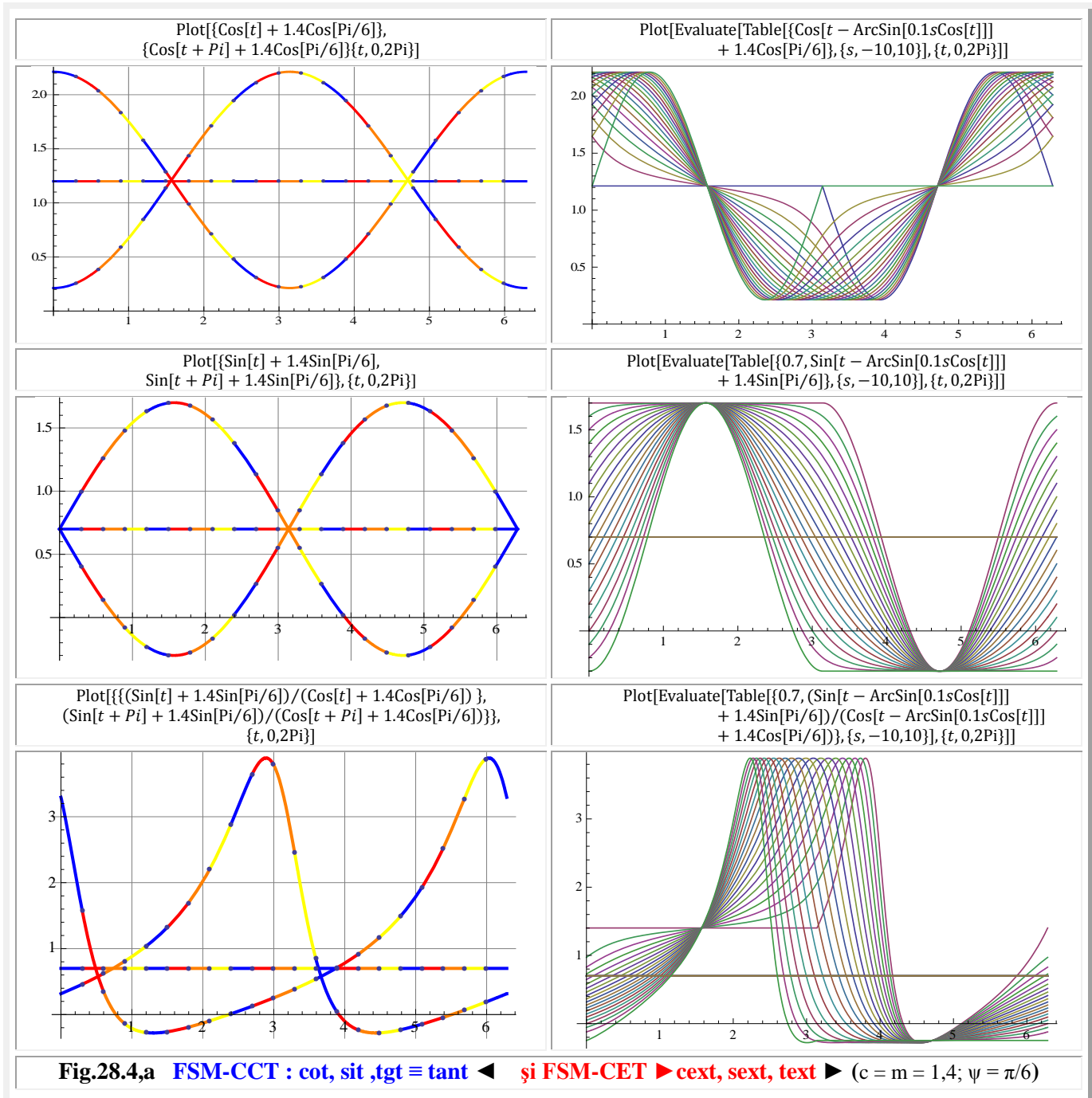


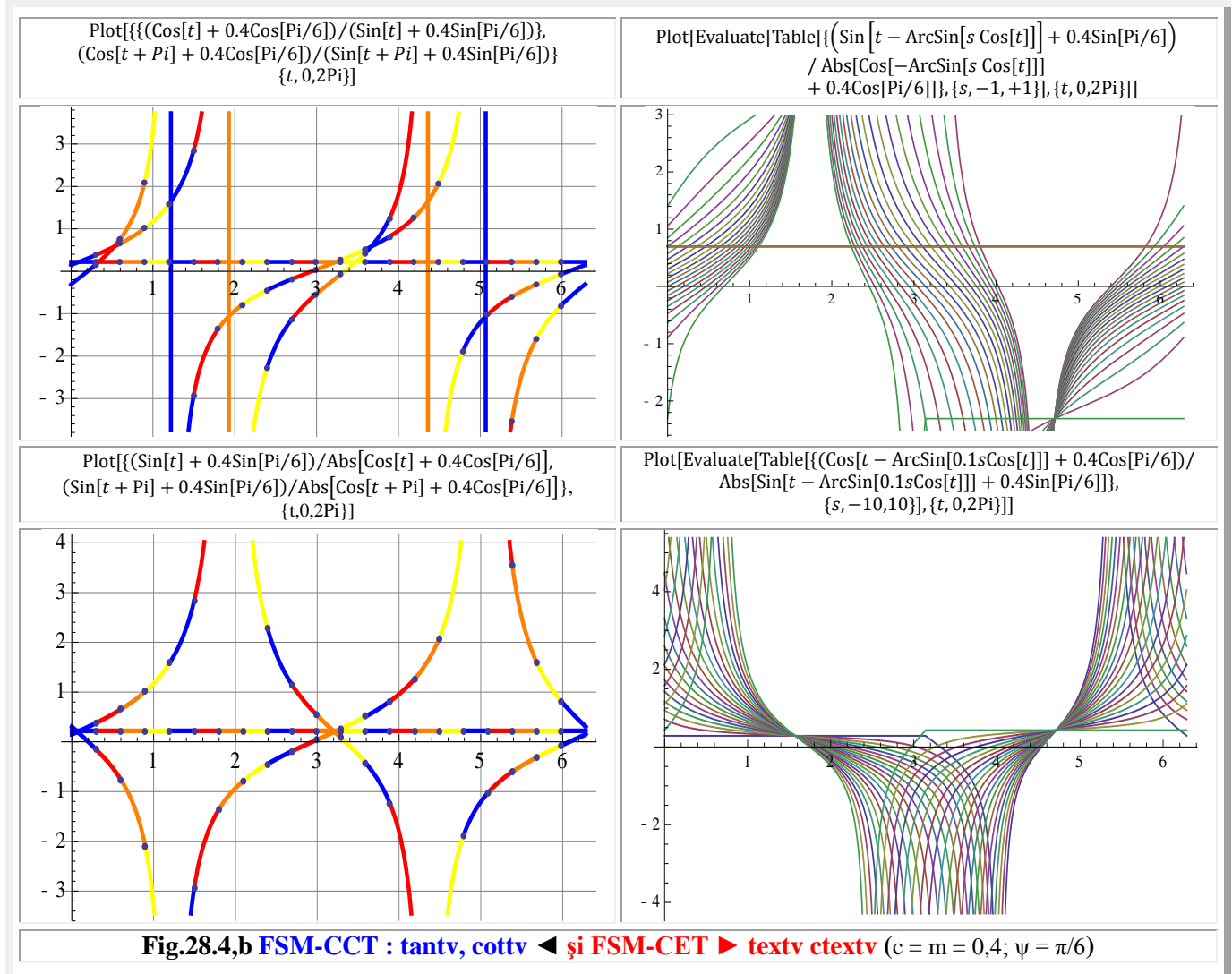
Fig.24.3 Funcții supermatematice circulare centrice translatare. (FSM-CCT)

Și **funcțiile supermatematice circulare exotice (FSM-CEX)** pot fi considerate ca **funcții supermatematice excentrice translatare (FSM-CET)** pentru că și ele suferă aceleași valori de translație $t_x =$

$c \cdot \cos \psi$ și $t_y = c \cdot \sin \psi$, față de **FSM-CE**. De aceea, ele vor fi prezentate în paralel pentru $c = m = 1,4$ și $\psi = \frac{\pi}{6}$: cele centrice în partea stângă, ușor de recunoscut pentru că sunt unice și cele excentrice, în familie de curbe, pentru $s \in [-1, +1]$ cu pasul 0,1 și $\epsilon = 0$, în partea dreaptă a **figurii 28.4**.



Pentru $c = m = 1,4$ se observă din **figura 4,a** că tangentele sunt strict pozitive în tot domeniul de 2π și, ca urmare, tangenta **Euler** și tangenta **Voinoiu** sunt identice. Pentru o valoare mai redusă, de $c = m = 0,4$, tangenta **Euler** și tangentele **Voinoiu** sunt diferite și sunt prezentate în **figura 4,b**.



În figurile 28.4,a și 28.4,b au fost reprezentate suprapuse ambele determinări ale FSM-CCT, iar în figurile următoare, în care FSM-CCT sunt multiple, sunt reprezentate în partea stângă doar graficele primei determinări, principale, iar în partea dreaptă sunt prezentate, datorita dantelării lor, suprapuse, ambele determinari.

Prin considerarea lui $c = m \in [-1, +1]$ drept parametru, se obțin și pentru FSM-CCT familii de funcții paralele între ele (Fig. 28.4,c), dacă c și m sunt niște constante, iar FSM-CET își schimbă complet alura.

Oricare din acești parametri constanți poate fi considerat variabil ca direcție dacă unghiul ψ nu este constant, ci este o funcție de α pentru FSM-CCT și, respectiv de θ pentru FSM-CET, așa cum este cazul din figura 28.4,d. Astfel, în figura 28.4,e, s-a ales $\psi = \frac{\pi}{6} \rightarrow \text{cost}$, iar în figura 28.4,f s-a ales $\psi = \frac{\pi}{6} \rightarrow \text{sint}$.

O serie de alte funcții **excentrice** translate, printre care și radial excentric de variabilă excentrică θ

- (1) $\text{rex}\theta = -s \text{cost} + \sqrt{1 - s^2 \sin^2\theta}$ și de variabila centrică $\alpha = \alpha_1$
- (2) $\text{Rex}\alpha = \sqrt{1 + s^2 - 2s \cos\alpha}$, precum și funcția derivată excentrică de θ
- (3) $\text{dex}\theta = 1 - \frac{s \cdot \cos\theta}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2\theta}}$

sunt prezentate în figura 28.6 cu ecuațiile lor de definiție, din considerente estetice, în două moduri de colorare individuală și în grup, pe zone.

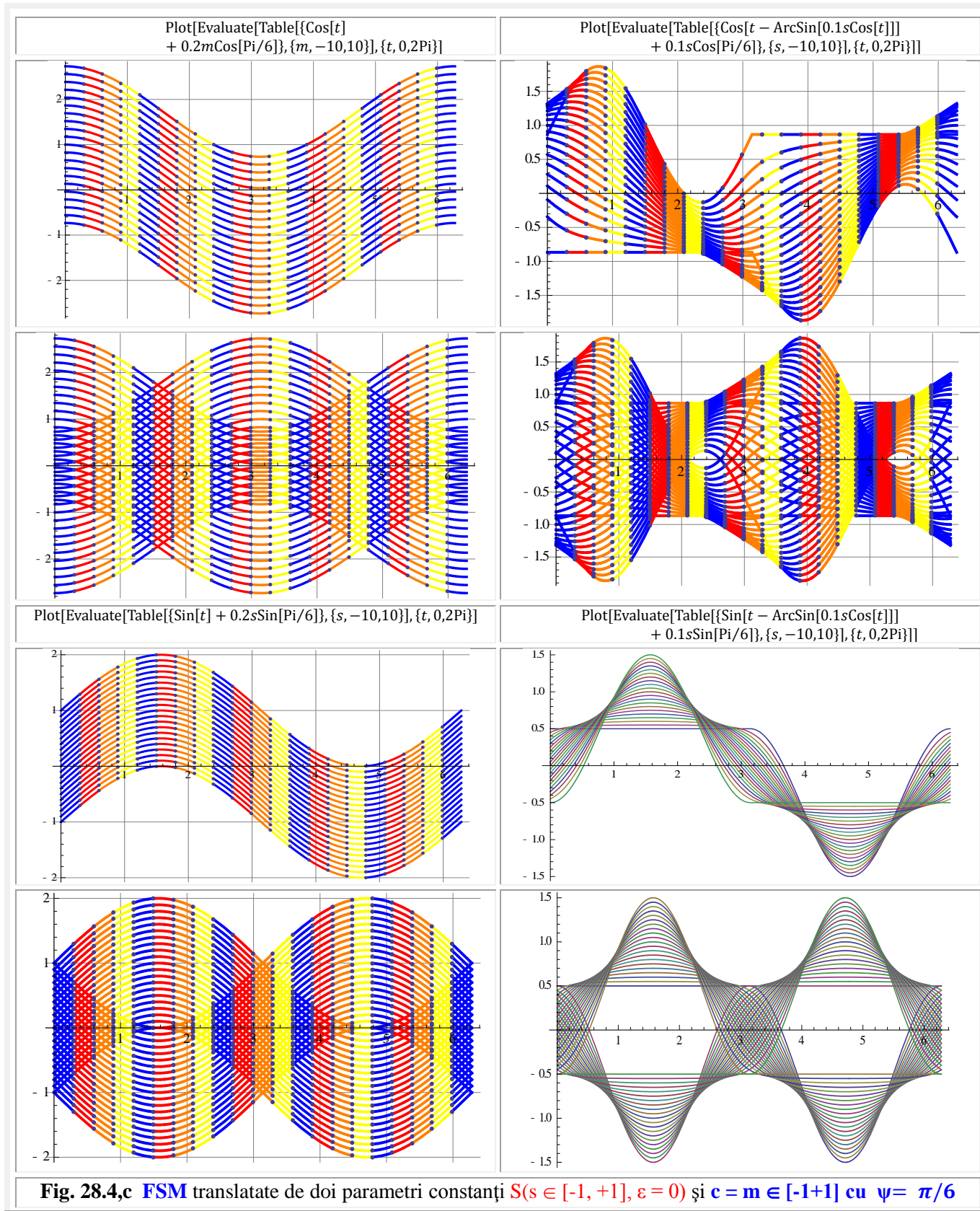
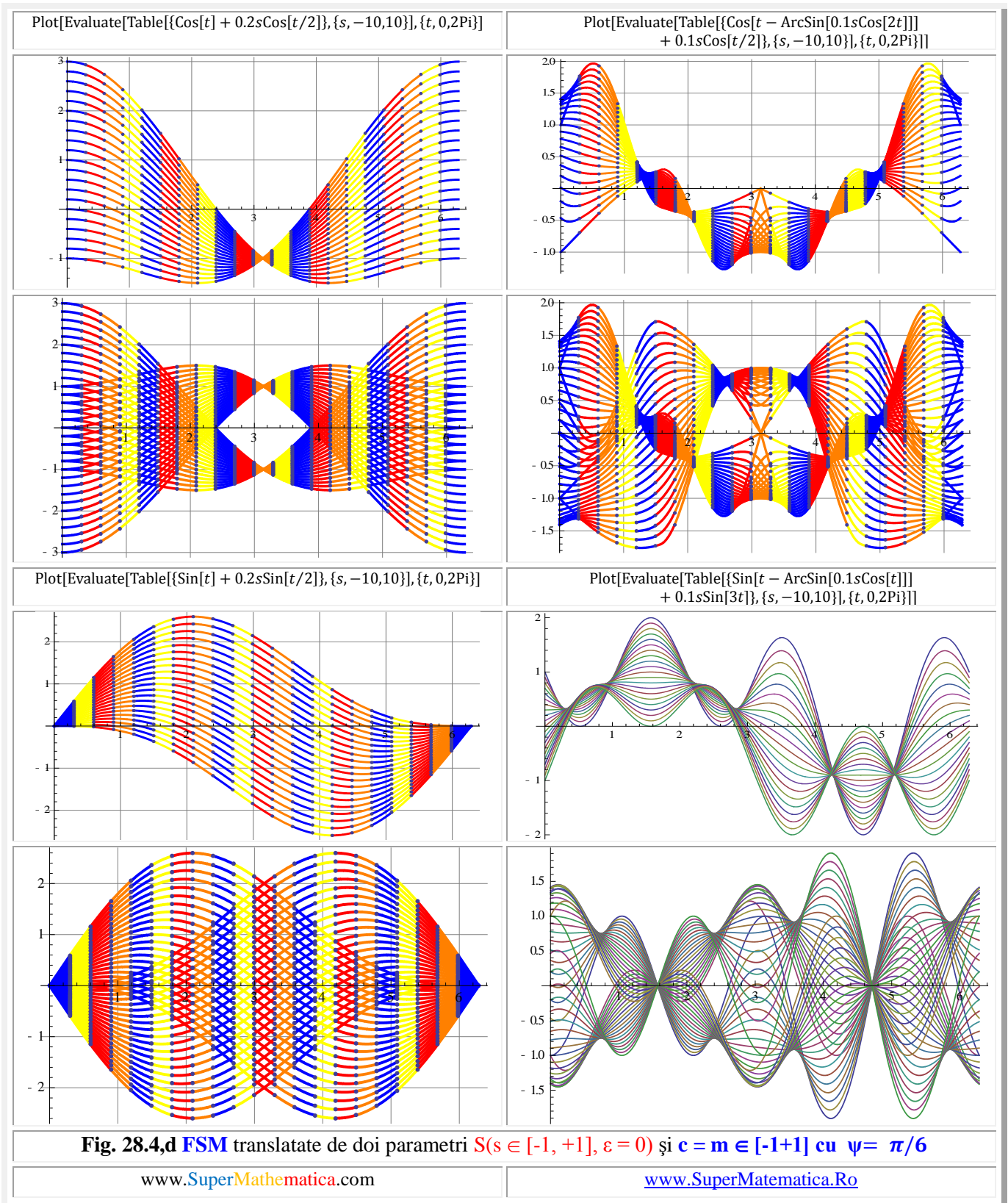


Fig. 28.4,c FSM translatare de doi parametri constanți $S(s \in [-1, +1], \varepsilon = 0)$ și $c = m \in [-1+1]$ cu $\psi = \pi/6$



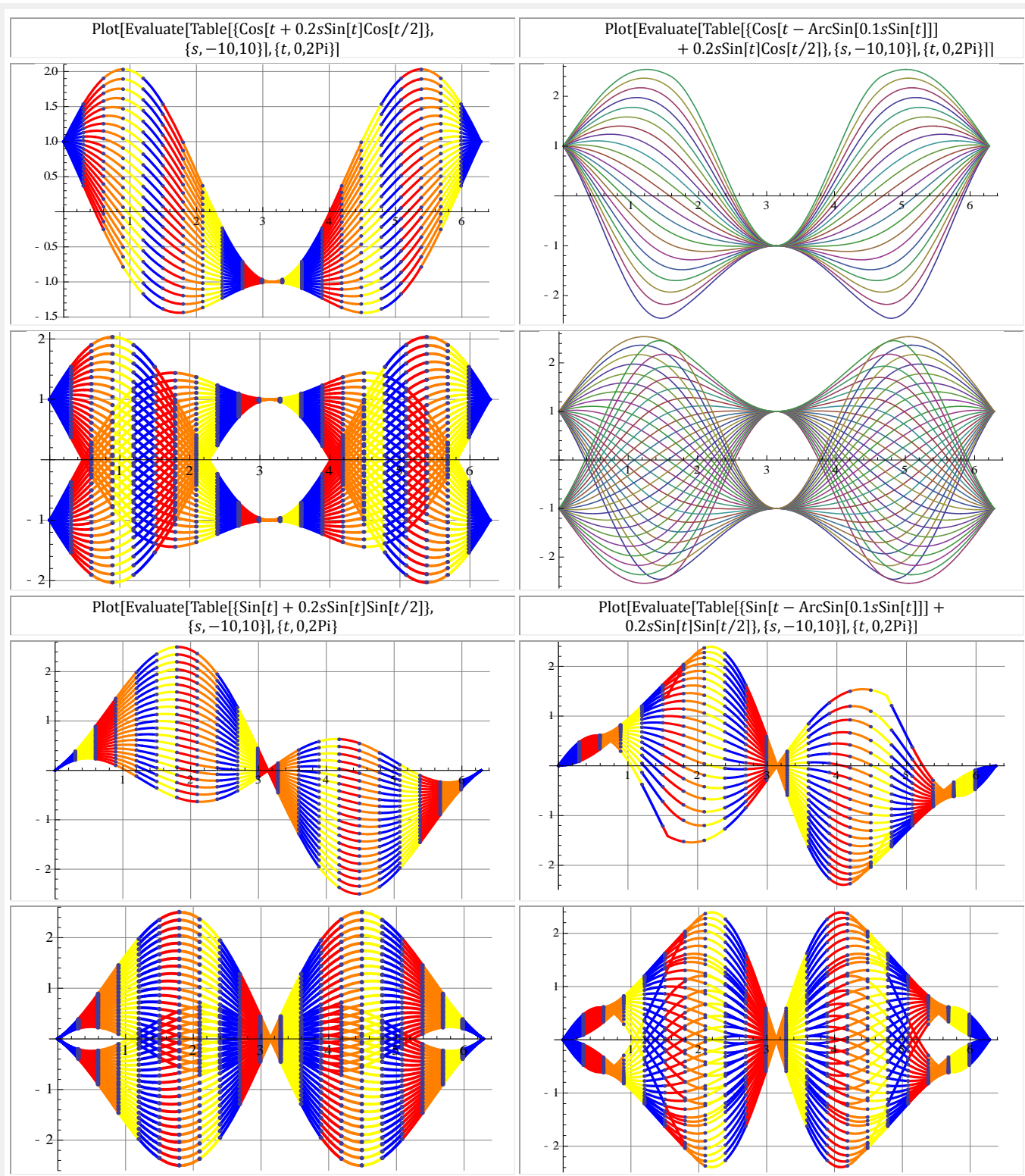


Fig. 28.4,e FSM translate de doi parametri dintre care s = constant și c = m = vasriabili: $c \cdot \sin[t/2]$ și $c \cdot \sin[t/2]$
 $S(s \in [-1, +1], \varepsilon = 0)$ și $c = m \in [-1+1]$ cu $\psi = \pi/6$

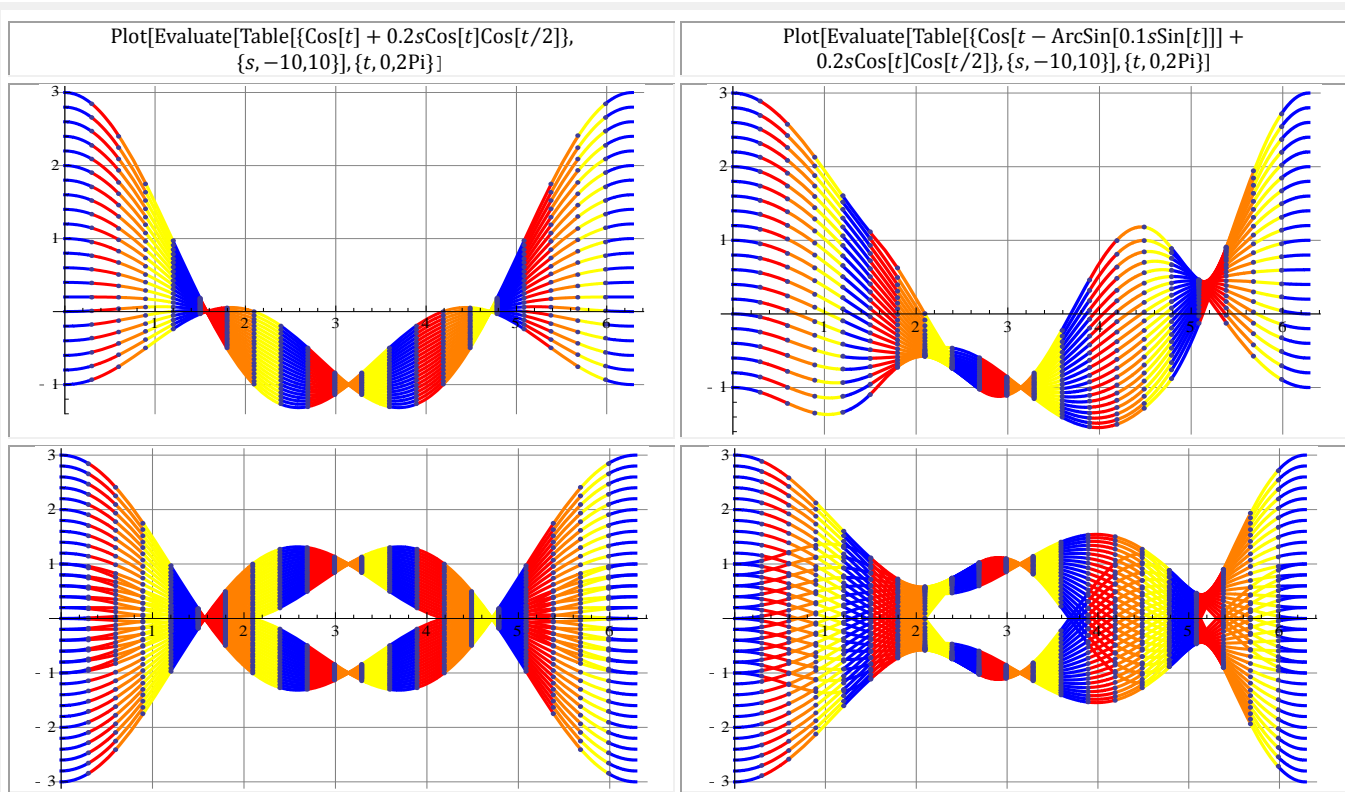


Fig. 28.4,e FSM translate de doi parametri $S(s \in [-1, +1], \varepsilon = 0)$ și $c = m \in [-1+1]$ cu $\psi = \pi/6$

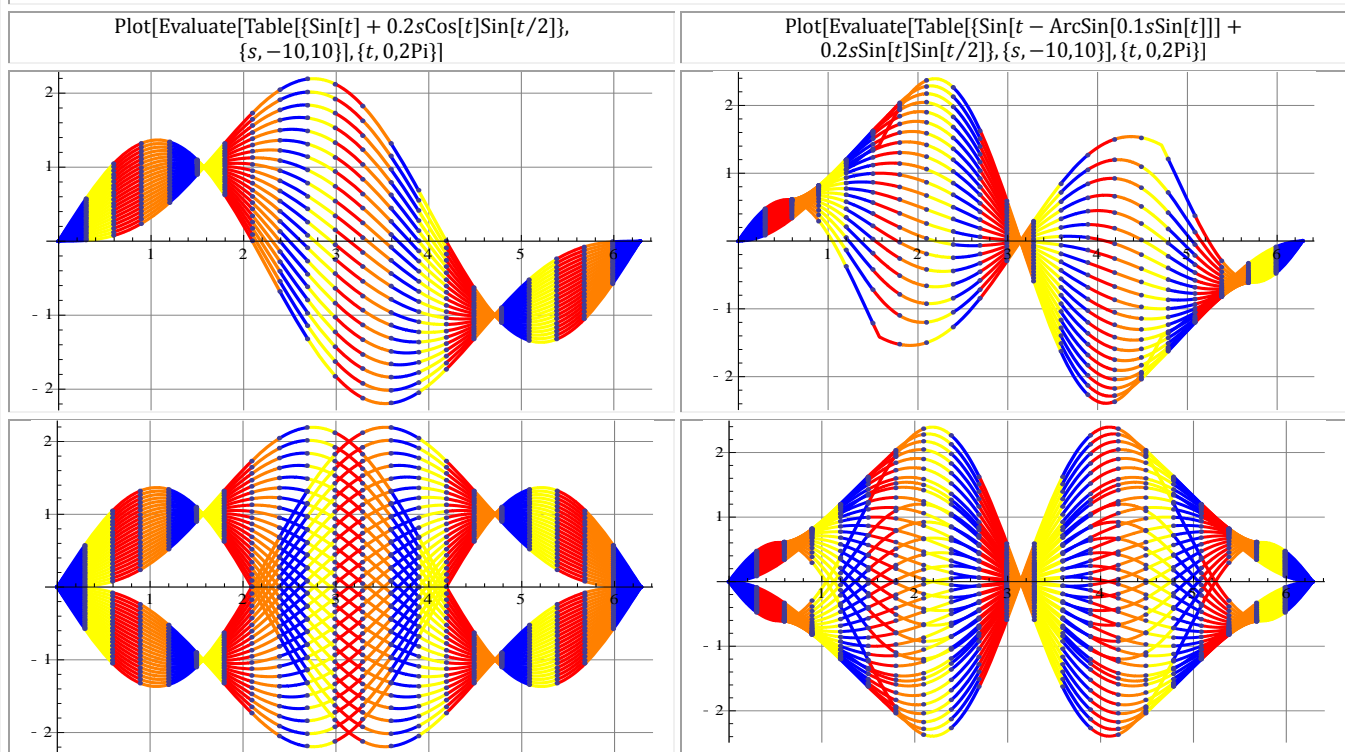


Fig. 28.4,f FSM translate de doi parametri $S(s \in [-1, +1], \varepsilon = 0)$ și $c = m \in [-1+1]$ cu $\psi = \pi/6$

Tangenta Voinoiu centrică traslată ◀ și tangenta Voinoiu excentrică traslată ▶

```
Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t] + 0.2sSin[t]Sin[t/2])/
Abs[Cos[t] + 0.2sSin[t]Cos[t/2]}], {s, -10,10}], {t, 0,2Pi}]
```

```
Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t - ArcSin[0.1sSin[t]]]
+ 0.2sSin[t]Sin[t/2])/
Abs[Cos[t - ArcSin[0.1sSin[t]]] + 0.2sSin[t]Cos[t/2]}],
{s, -10,10}], {t, 0,2Pi}]
```

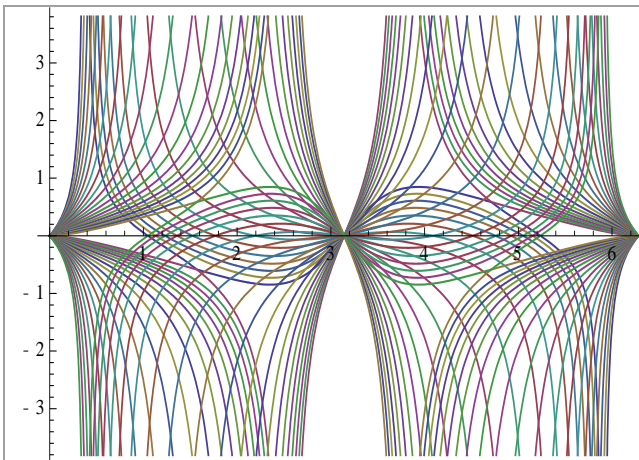
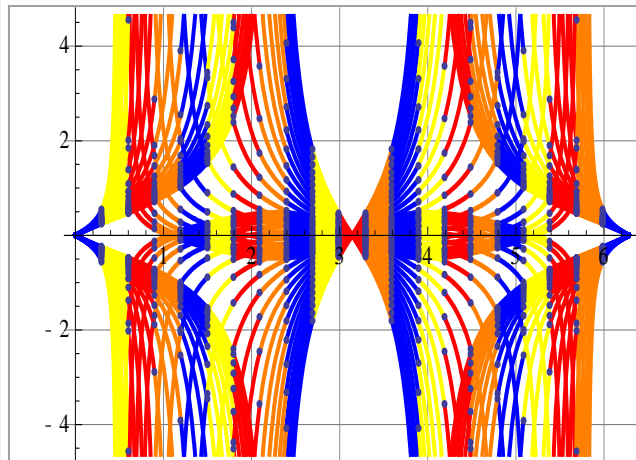
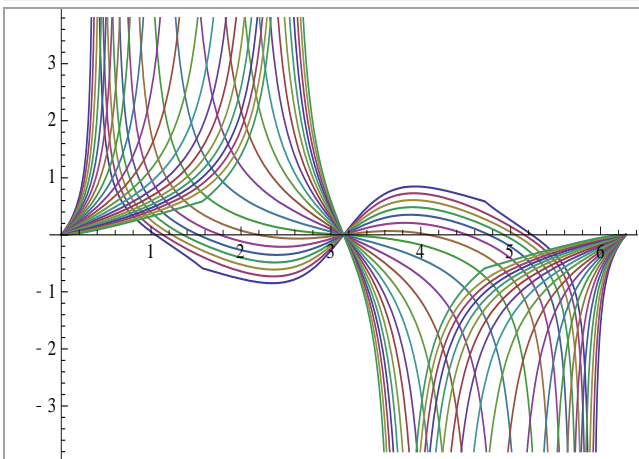
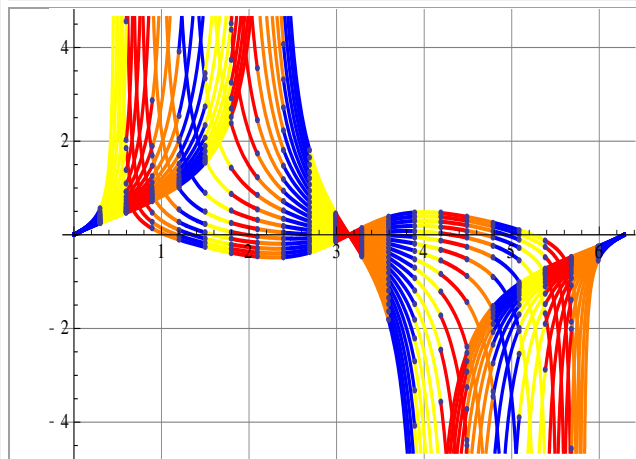
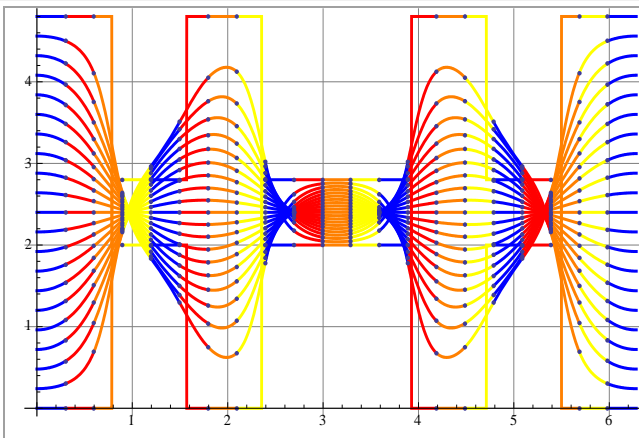
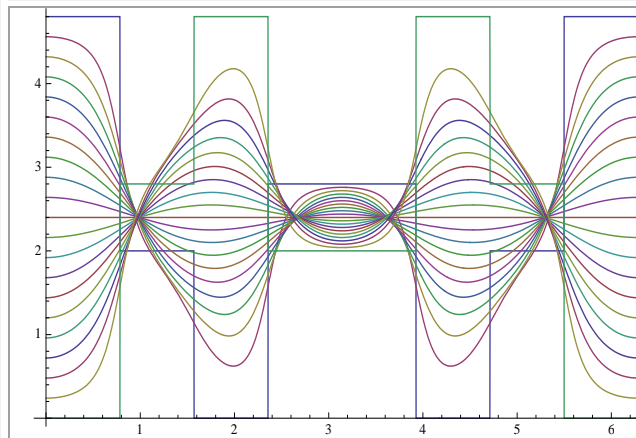
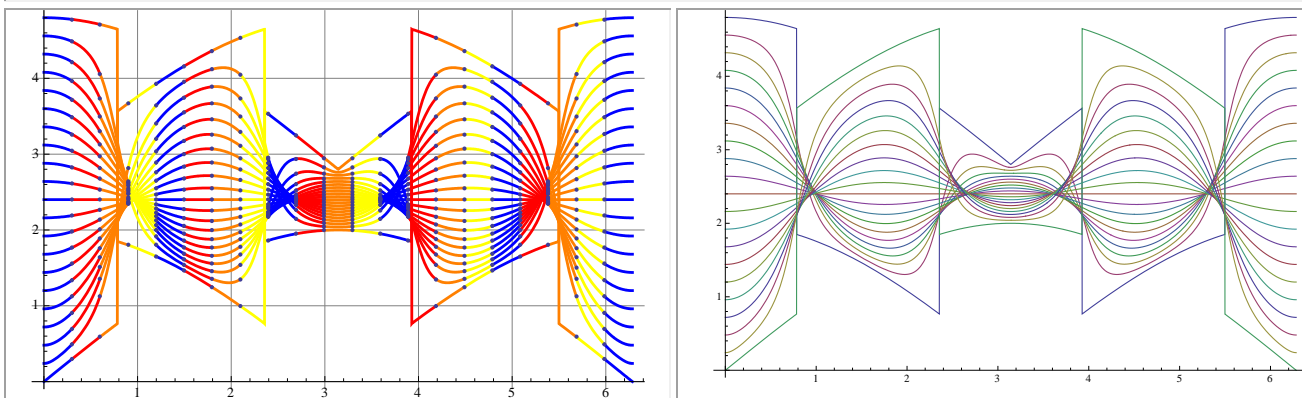


Fig. 28.5. Tangenta Voinoiu centrică traslată ◀ și tangenta Voinoiu excentrică traslată ▶

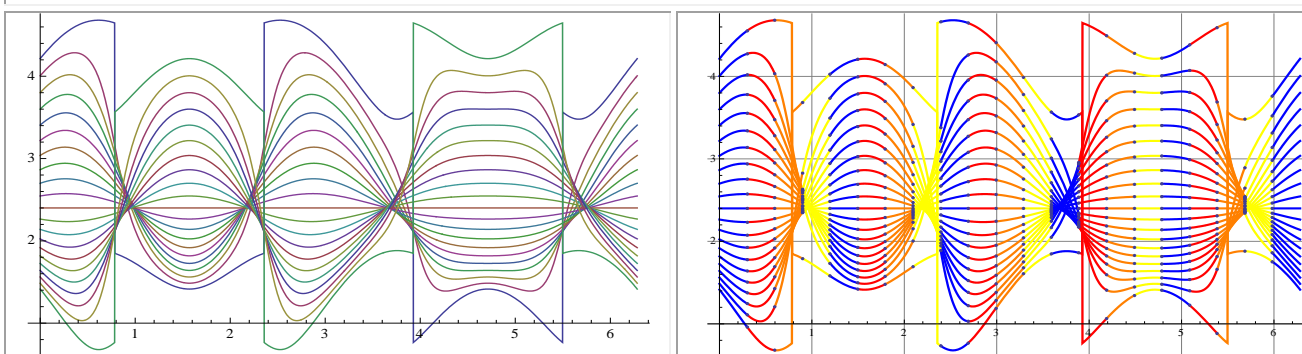
```
Plot[Evaluate[Table[{1 - 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 - (0.1sSin[t])^2] + 1.4(1 - 0.1s Cos[2t]/Sqrt[1 - (0.1sSin[2t])^2]}], {s, -10,10}], {t, 0,2Pi}]
```



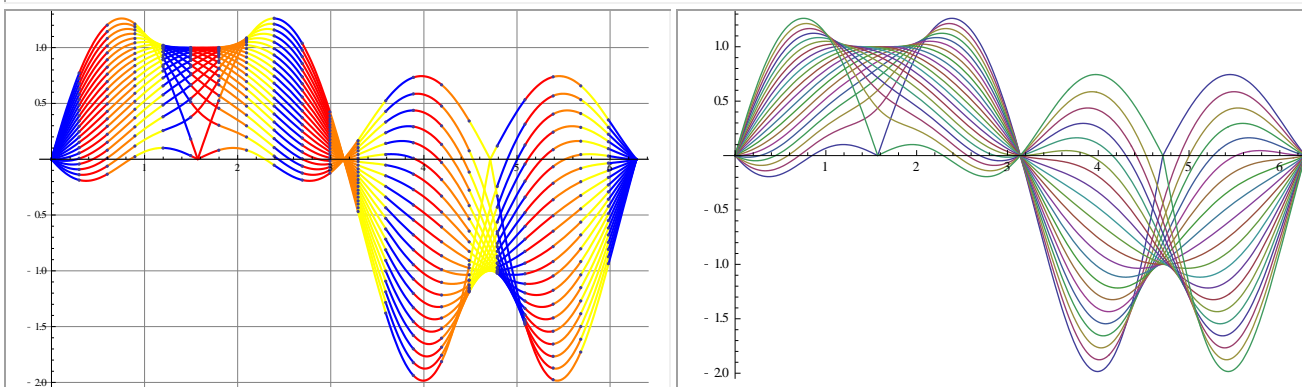
Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 - 0.2sCos[t]] + 1.4(1 - 0.1s Cos[2t]/Sqrt[1 - (0.1sSin[2t])^2]}], {s, -10,10}], {t, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 - 0.2sSin[2t]Cos[t]] + 1.4(1 - 0.1s Cos[2t]/Sqrt[1 - (0.1sSin[2t])^2]}], {s, -10,10}], {t, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[t - ArcSin[0.1sSin[t]Sin[t]]] + 0.2sCos[t]Sin[t]}], {s, -10,10}], {t, 0,2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 - 0.2sCos[2t]Cos[t]] + 1.4(1 - 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 - (0.1sSin[t])^2]}], {s, -10,10}], {t, 0,2Pi}]]

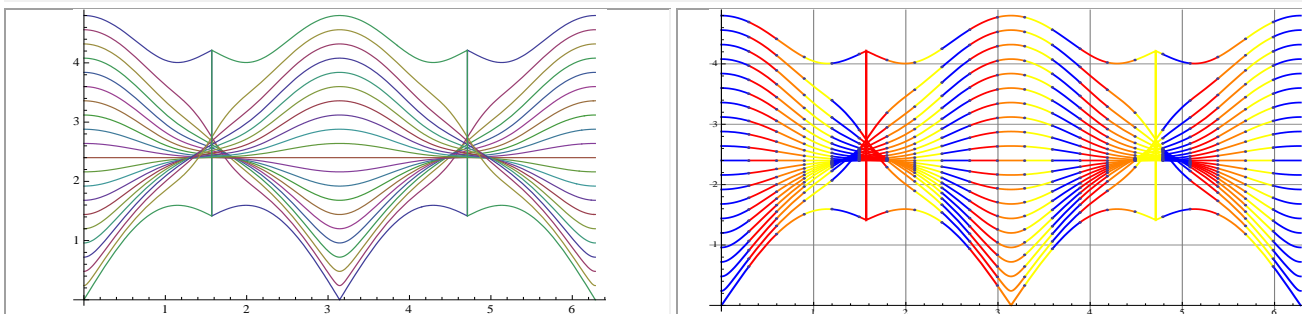


Fig. 28.6,a.FSM-CETranslatate având la bază FSM-CE rex0 și dex0

ParametricPlot3D[{t, Sqrt[1 + (0.1s)² - 0.2sCos[2t]Cos[t]] + 1.4(1 - 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 - (0.1sSin[t])²]), 0.2s}, {s, -10,10}, {t, -2Pi, 2Pi}]

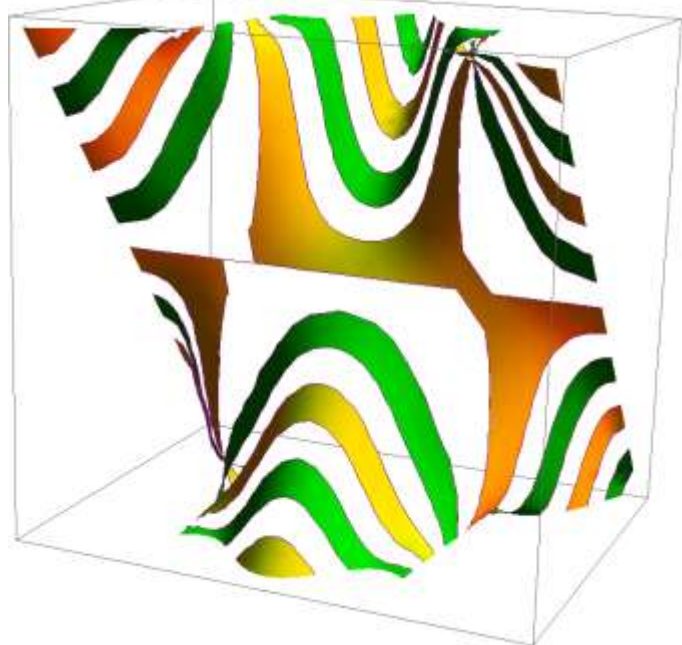
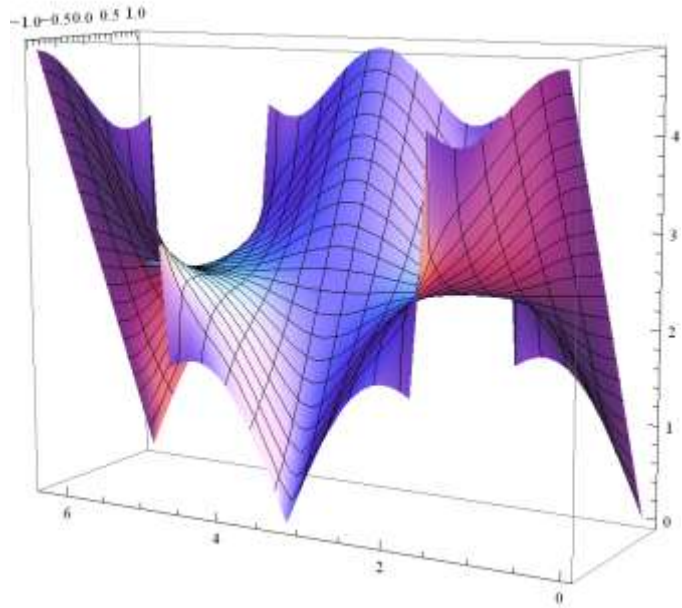
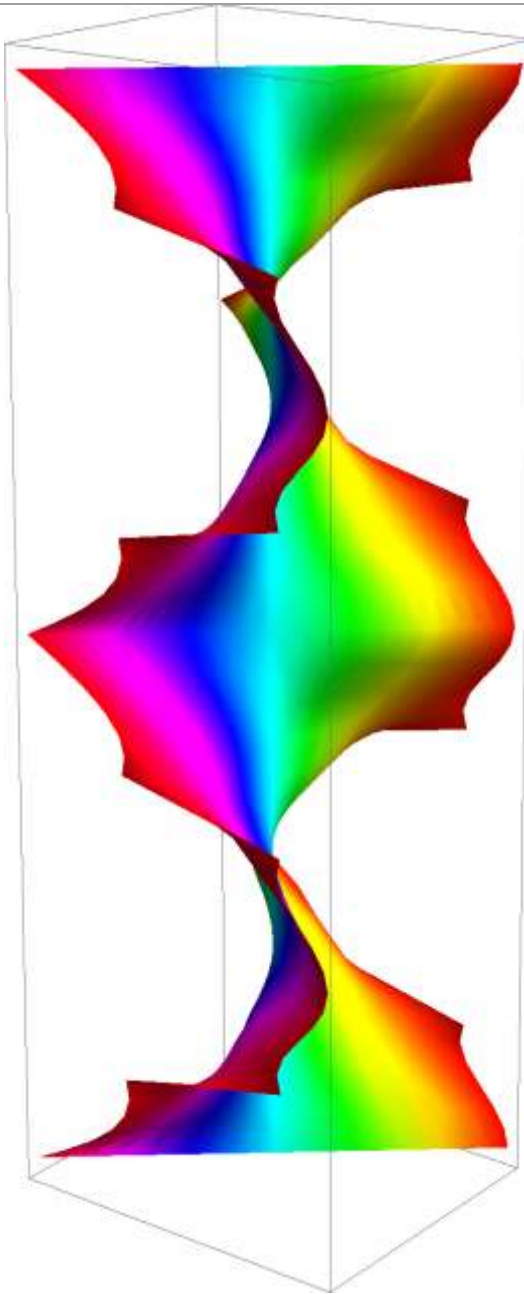


Fig. 28.6,b.FSM-CE Translatate având la bază FSM-CE Rex0 reprezentată în 3 D

Motto:” **Trilobiți** sunt cele mai cunoscute **artropode** marine fosile, care au avut cea mai mare răspândire cu circa 526 – 250 milioane de an în urmă, în timp ce **trilobele** au o vechime de-abe de câțiva ani”

Capitolul 29

FUNȚII SUPERMATEMATICE TRILOBICE (FSM-T)

$\cot\theta, \text{sit}\theta, \text{tat}\theta, \text{tatv}\theta, \text{ctat}\theta, \text{ctatv}\theta$

29.1 TRILOBELE

LOBELE sunt curbe plane, închise, cu un număr oarecare de lobi, obținute cu ajutorul **funcțiilor supermatematice circulare excentrice (FSM-CE)** care, pentru excentricitate nulă, degenerază într-un cerc perfect, iar, pentru excentricitatea liniară numeică $s = \pm 1$, generează un poligon perfect, nu neapărat regulat. Cercul, neavând nici-o lobă, este o **zero lobă**. Există **monolobe**, **bilobe**, **trilobe**, **quadrilobe**, ș.a.m.d, pâna la **n-lobe** sau **polilobe** (Fig.29.1).

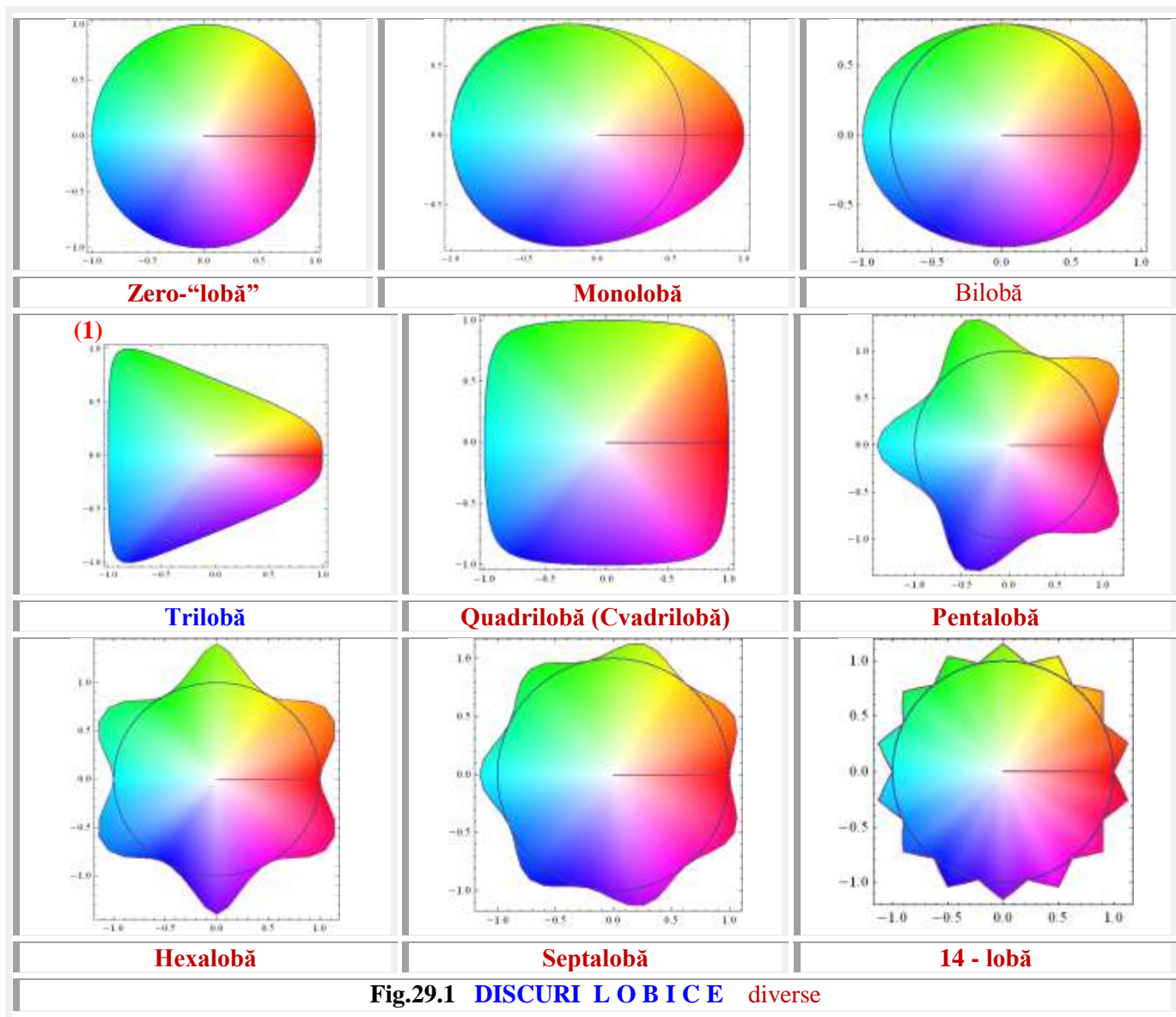


Fig.29.1 DISCURI LOBICE diverse

TRILOBELE sunt, evident, lobe cu trei lobi, a căror triunghiuri dreptunghice isoscele, obținute pentru $s = \pm 1$, pot avea unghiul drept în oricare dintre cele patru vârfuri ale unui pătrat, așa cum se observa în **figura 2,a**.

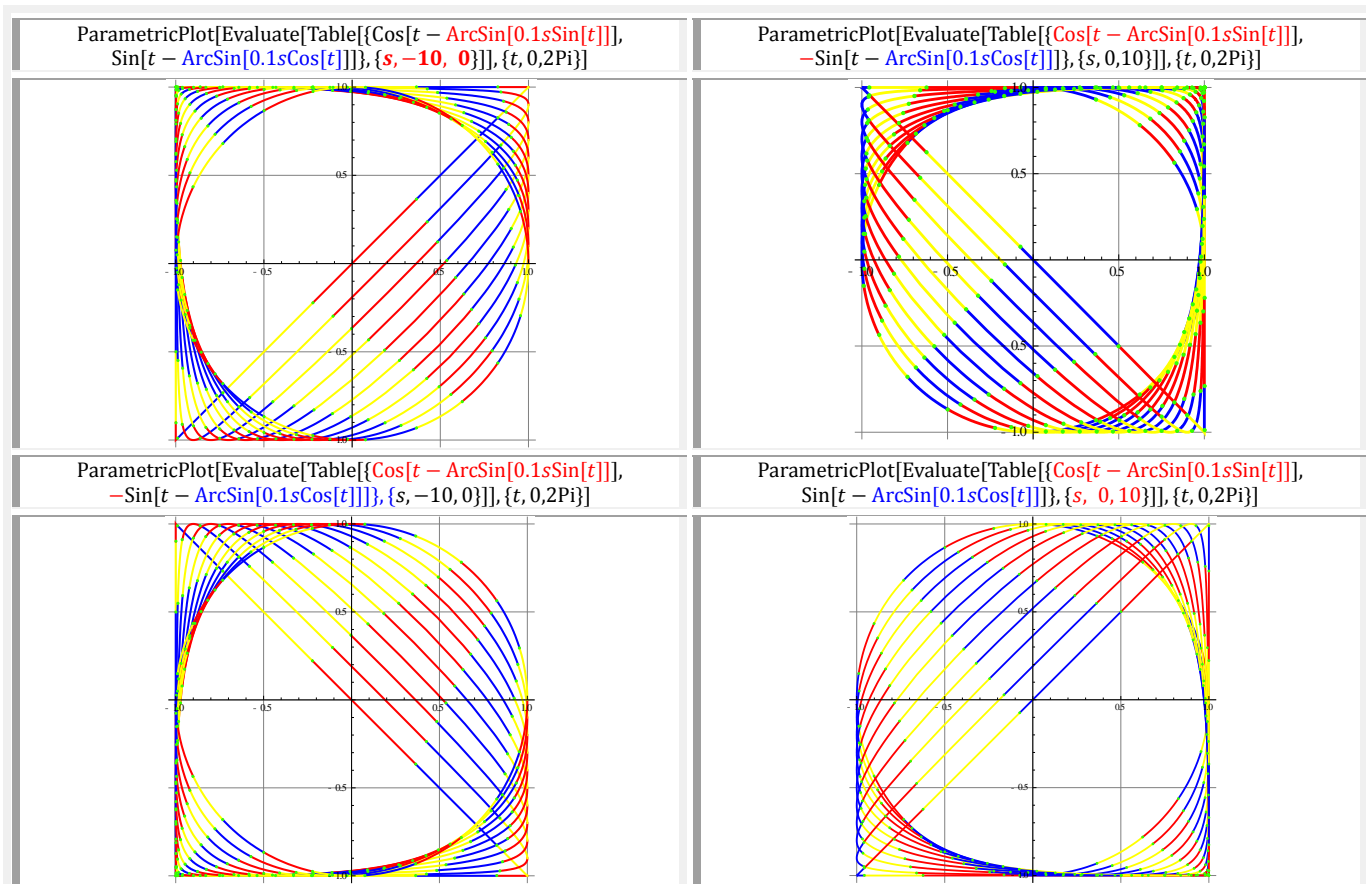


Fig.29.2,a TRILOBE S (sinus)

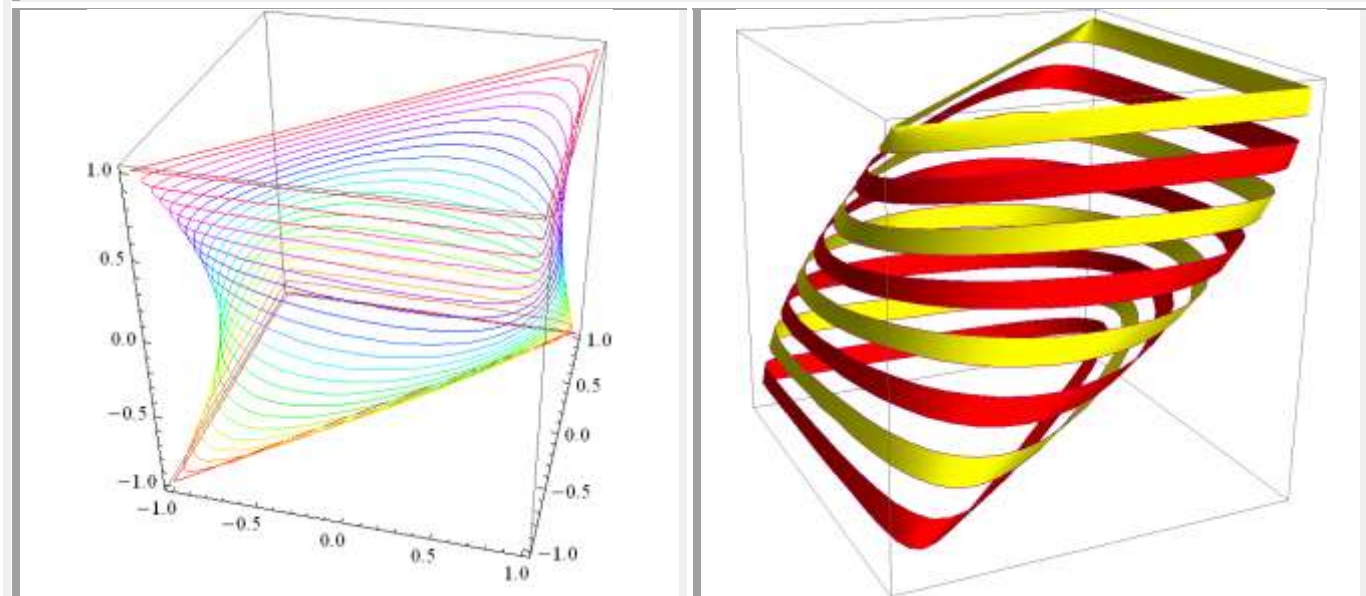
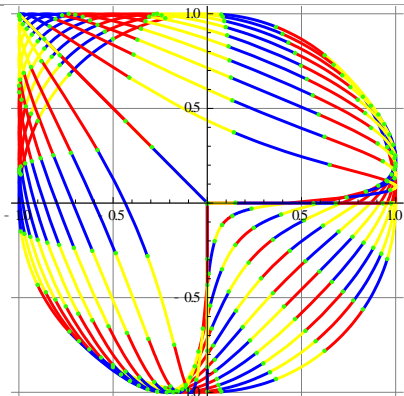
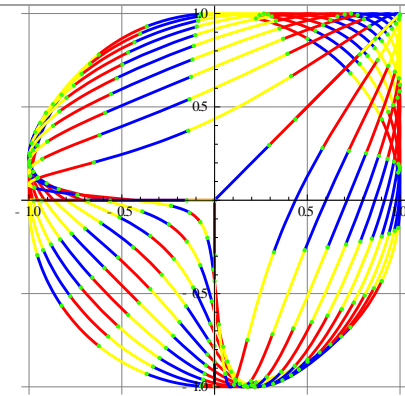


Fig.29.2,b TRILOBE în 3D

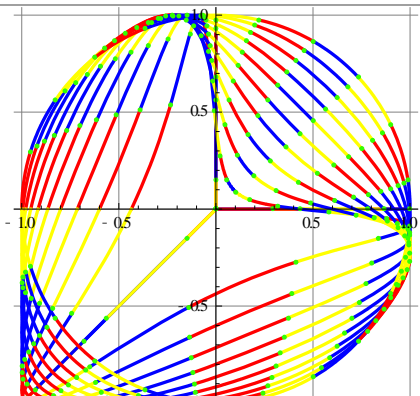
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t - ArcSin[0.1sCos[t]], Sin[t - ArcSin[0.1sSin[t]]], {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]



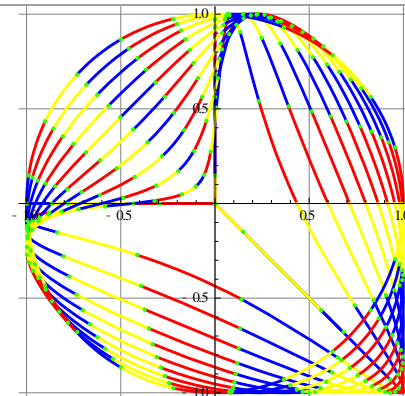
ParametricPlot[Evaluate[Table[{-Cos[t - ArcSin[0.1sCos[t]], Sin[t - ArcSin[0.1sSin[t]]], {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]



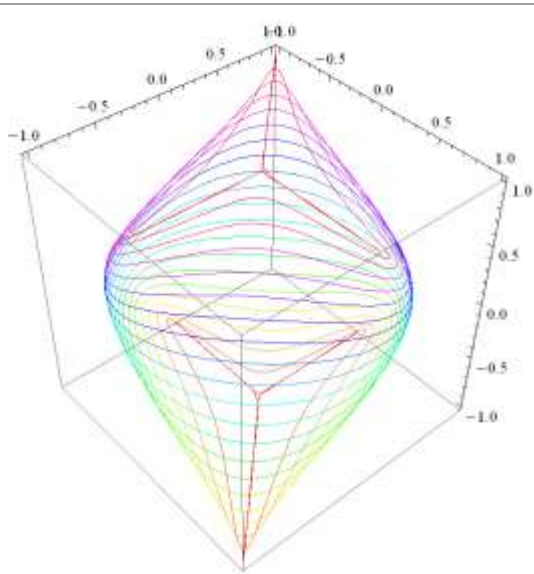
ParametricPlot[Evaluate[Table[{-Cos[t - ArcSin[0.1sCos[t]], Sin[t - ArcSin[0.1sSin[t]]], {s, -10,0}], {t, 0,2Pi}]



ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t - ArcSin[0.1sCos[t]], Sin[t - ArcSin[0.1sSin[t]]], {s, -10,0}], {t, 0,2Pi}]



ParametricPlot3D[Evaluate[Table[{Cos[t - ArcSin[0.1sCos[t]], Sin[t - ArcSin[0.1sSin[t]], 0.1s], {s, -10,10}], {t, 0,2Pi}]



ParametricPlot3D[Evaluate[Table[{Cos[t - ArcSin[0.1sCos[t]], 0.1s, Sin[t - ArcSin[0.1sSin[t]]], {s, -10,10}], {t, 0,2Pi}]

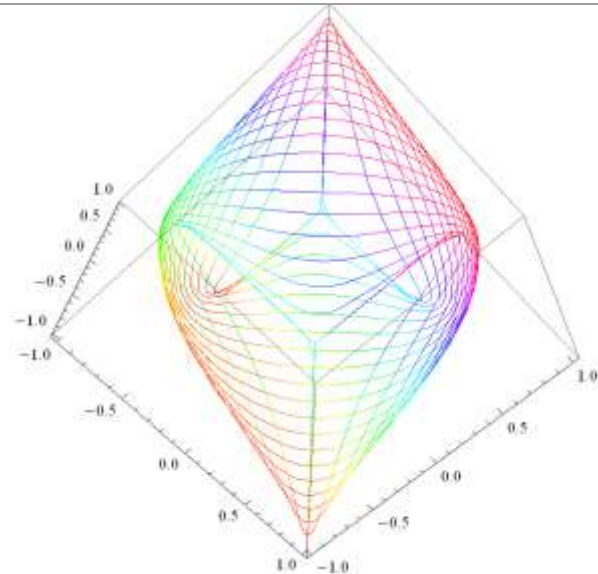
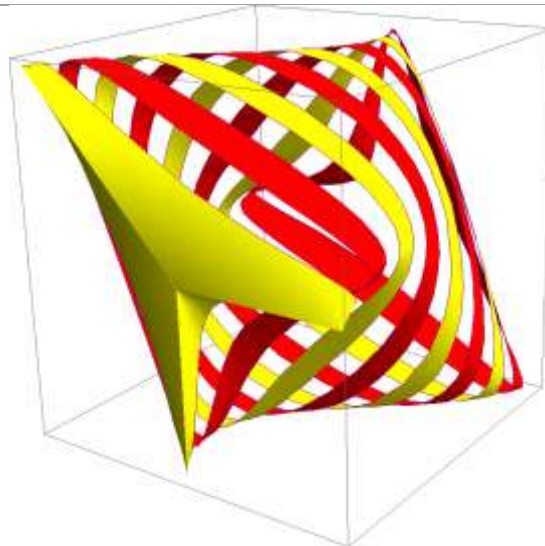
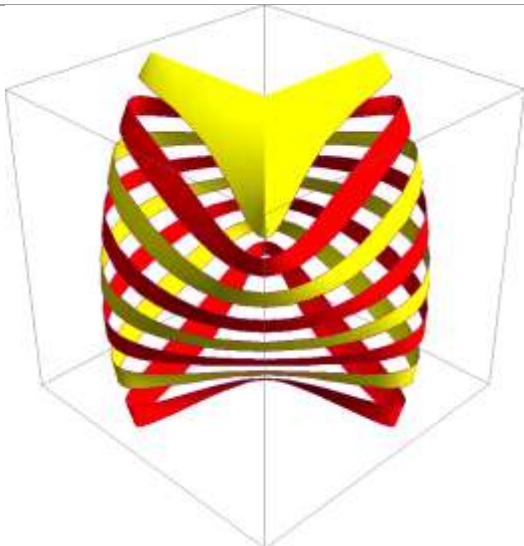


Fig.29.4,a TRILOBE C (cosinus)

ParametricPlot3D[$\{\text{Cos}[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Cos}[t]]], \text{Sin}[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]], 0.1s\}, \{s, -10, 10\}, \{t, 0, 2\text{Pi}\}$]



ParametricPlot3D[$\{\text{Cos}[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Cos}[t]]], 0.1s, \text{Sin}[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]]\}, \{s, -10, 10\}, \{t, 0, 2\text{Pi}\}$]

ParametricPlot3D[$\{\text{Sin}[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]], 0.1s, \text{Cos}[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Cos}[t]]]\}, \{s, -10, 10\}, \{t, 0, 2\text{Pi}\}$]

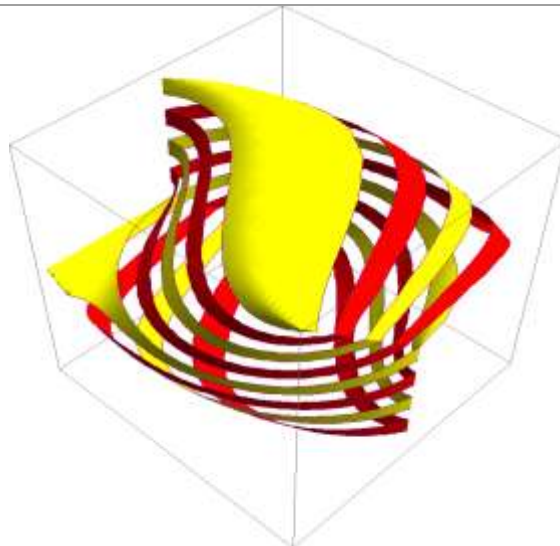
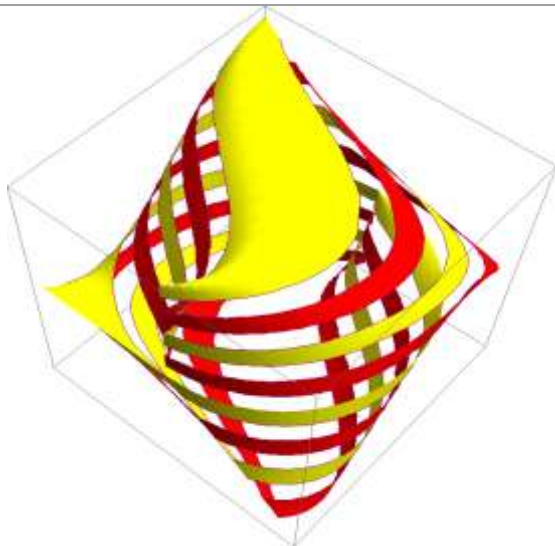


Fig.29.4,b TRILOBE C (cosinus) în 3D

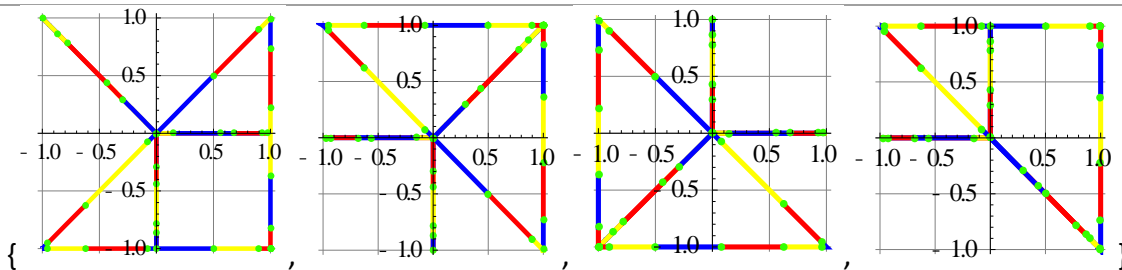


Fig.29.4,c TRILOBE și TRILOBE C (cosinus) de $s = \pm 1$

ParametricPlot[Evaluate[Table[$\{0.1s\text{Cos}[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]], 0.1s\text{Sin}[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]]\}, \{s, -10, 0\}], \{t, 0, 2\text{Pi}\}$]

ParametricPlot[Evaluate[Table[$\{0.1s\text{Cos}[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]], 0.1s\text{Sin}[t - \text{ArcSin}[0.1s\text{Sin}[t]]]\}, \{s, 0, 10\}$]

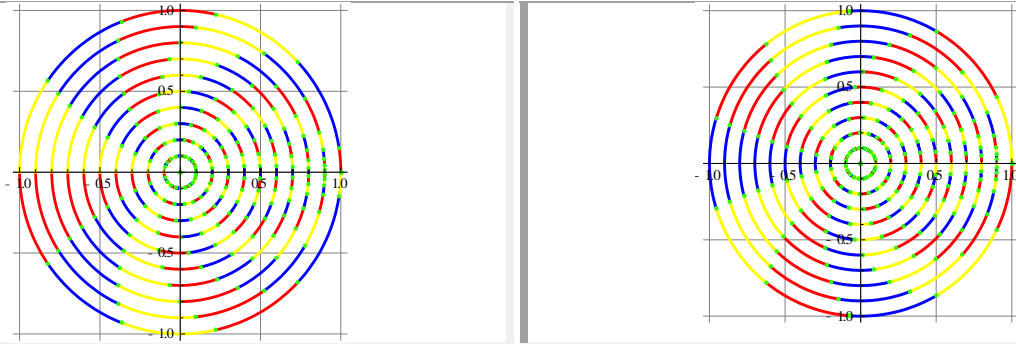


Fig.29.5,a1 Cercuri de sinus

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1sCos[t],0.1sSin[t]},
{s, -10,0}], {t, 0,2Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1sCos[t],
0.1sSin[t]}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]



Fig.29.5,a2 Cercuri

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1sCos[t - ArcSin[0.1sCos[t]]],
0.1sSin[t - ArcSin[0.1sCos[t]]}], {s, -10,0}], {t, 0,2Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1sCos[t - ArcSin[0.1sCos[t]]],
]0.1sSin[t - ArcSin[0.1sCos[t]]}], {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}]]

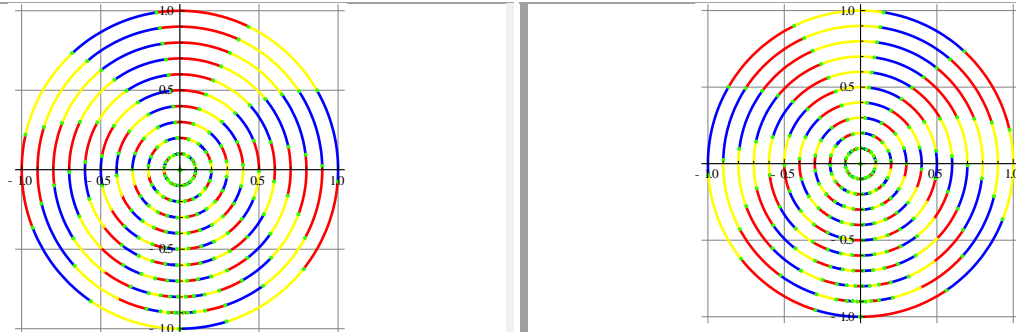


Fig.29.5,b Cercuri de C (cosinus)

Dacă, în ecuațiile parametrice (4) și /sau (5), se utilizează numai funcții **beta** excentrice de sinus (**bex_θ**) (**Fig. 29.5,a1**) sau numai **beta** excentrice de cosinus (**bex_{cθ}**) (**Fig. 29.5,b**), atunci se obțin cercuri (**Fig.29.5**).

Tot cercuri se obțin și în cazul **FSM-CE** (**Fig. 29.5,a1**) ca și în cazul **funcțiilor supermatematice circulare centrice (FSM-CC)** :**x = cosα**, **y = sinα** (**Fig.29.5,a2**). Pentru evitarea suprapunerii cercurilor, raza cercurilor s-a ales variabilă (**R = 0,1s**).

Deși, în toate aceste cazuri, se obțin cercuri **ele nu sunt identice** (**Fig.29.5,a2**), decât în cazul **funcțiilor circulare centrice (FCC: cosα, sinα ș.a.m.d.)**, deoarece, un punct curent, parcurge aceste cercuri cu viteze diferite, în funcție de valoarea excentricității **s ∈ [-1, +1]**. Numai în cazul din **figura 29.5,a2**, toate cercurile familiei sunt parcurse cu aceeași viteză unghiulară, ceea ce se poate observa urmărind o anumită distribuție a unei culori pe diverse intervale unghiulare.

Motto: "Natura este perfecțiunea perfecțiunilor.
Este, deci, supermatematică"

Capitolul 30

METODE DE SOLUȚIONARE COMPUTAȚIONALĂ A UNOR ECUAȚII ALGEBRICE NELINIARE CU O SINGURĂ NECUNOSCUTĂ

30.1 INTRODUCERE

Noile metode, prezentate în prezenta lucrare, se referă la metode numerice de rezolvare a ecuațiilor algebrice, cele vechi fiind prezentate excelent și pe larg în lucrarea [1].

Pleiada de metode vechi, mai cunoscute și mai frecvent utilizate, sunt următoarele [1]:

- 1) Metoda înjumătățirii intervalului sau metoda bisecției (Fig.30.1,c▶);
- 2) Metoda coardei sau metoda secantei (Fig.30.1,c▶);
- 3) Metoda tangentelor de ordinul I a lui **Newton** sau metoda **Newton-Raphson** (Fig. 30.1,c▶);
- 4) Metoda tangentelor de ordinul II a lui **Newton**;
- 5) Metoda iterativă $x = g(x)$ (Fig. 30.1,c ◀).
- 6) **Metoda iterației dinamice** [2] este o combinație a unor metode anterior prezentate (vezi § 3).

30.2 METODA DIVIZĂRII ECUAȚIEI ȘI A CELOR DOUĂ TANGENTE

Rugat să contribuie la rezolvarea unei ecuații din domeniul TEHNOLOGIILOR DE DEFORMARE LA RECE (ȘTANȚARE-MATRIȚARE), la găsirea soluției am aplicat mai multe din metodele cunoscute și prezentate anterior, ca să testez rapiditatea fiecărei metode (v § 3) și am constatat că sunt posibile și alte metode mult mai rapide.

Lucrarea "**METODA ITERAȚIEI DINAMICE**" care s-ar putea denumi și "**METODA DIVIZĂRII ECUAȚIEI ȘI A CELOR DOUĂ TANGENTE**", a fost prezentată la o conferință de specialitate.

Fiind vorba de operații de ambutisare la rece, se cerea, în final, rezolvarea ecuației

$$(1) \quad f(x) \equiv \mathbf{S}irx + \mathbf{A}.cosx - 1 = 0$$

în care, cu $A \in [1, 3]$ s-a notat o anumită expresie, cu graficele din stânga **figurii 30.1** ◀, valoarea concretă, considerată în continuare, fiind aleasă de $A = 1,2$ și $x \in [0, \pi/2]$, iar

$$(2) \quad \mathbf{S}irx = \mathbf{s}inx - \mathbf{x}.cosx$$

este funcția **sinus românesc** a lui **Gogu (George) Constantinescu**, definită pe o evolventă, cu graficul din **figura 30.2** ▲ iar, pentru întregirea cunoștințelor despre **funcții românești** și spre cinstea marelui savant român, dar nu și a urmașilor urmașilor lui români care nu nu prea au auzit de el și, cu atât mai puțin, de ele, iar **Corx** este funcția **cosinus românesc**, definită de ecuația

$$(3) \quad \mathbf{C}orx = \mathbf{c}osx + \mathbf{x}.sinx$$

cu graficele din **figura 30.2** ▼.

Rezolvarea ecuației (1) $f(x) = 0$, cu soluția x_0 , este echivalentă cu determinarea punctului de intersecție $I(x_1, y_1)$ a două curbe/funcții în care s-a divizat funcția $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0$, în care

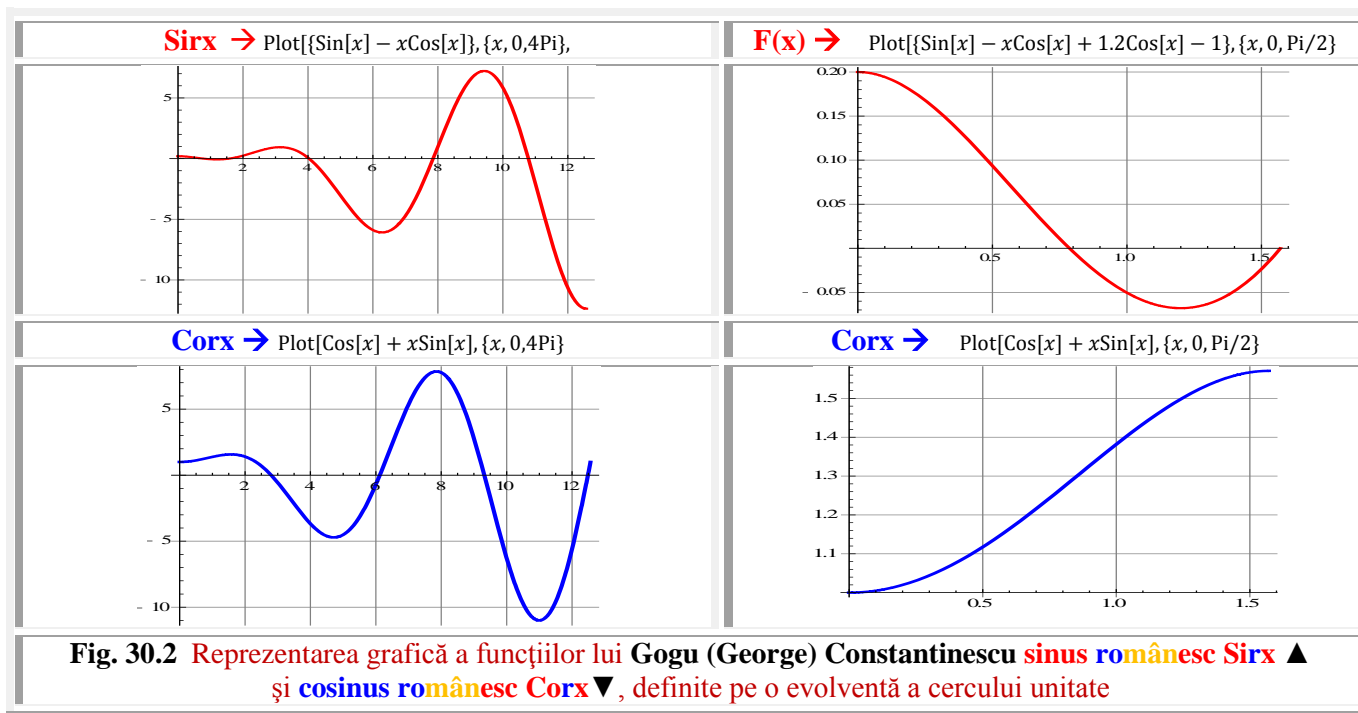
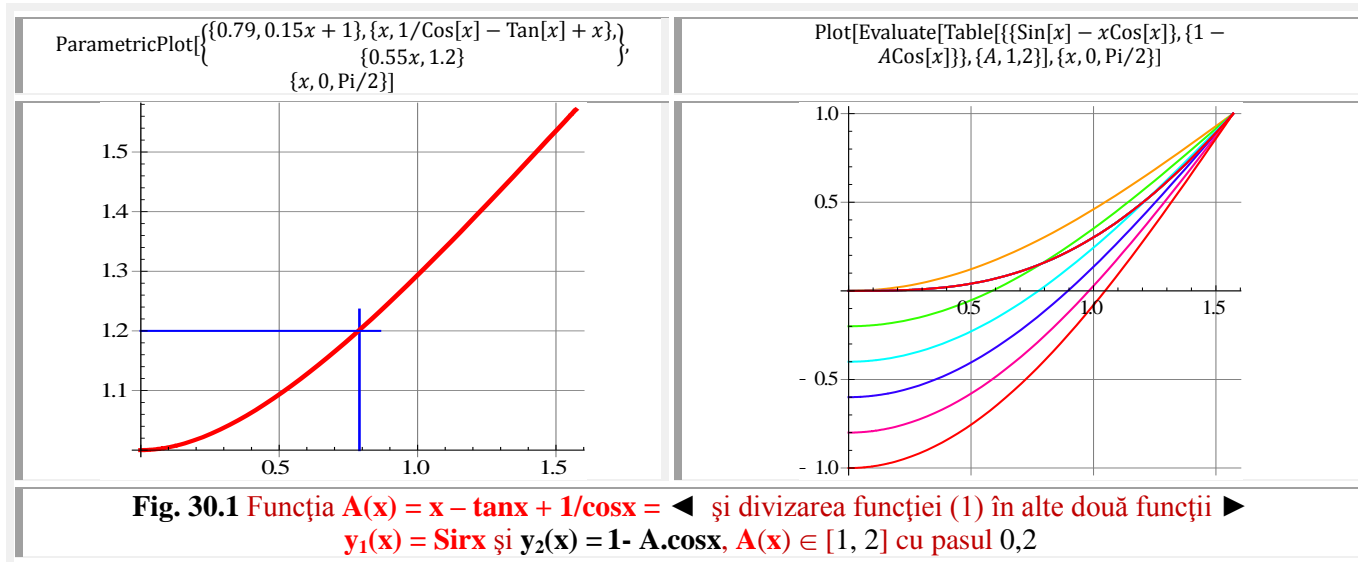
$$(4) \quad \begin{cases} f_1(x) = \mathbf{S}irx \\ f_2(x) = \mathbf{A}.cosx - 1 \end{cases}$$

adică la rezolvarea sistemului de ecuații

$$(5) \quad \begin{cases} f_1(x) = 0 \Leftrightarrow y - \mathbf{S}irx = 0 \\ f_2(x) = 0 \Leftrightarrow y - \mathbf{A}.cosx + 1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad I(x_1, y_1)$$

în care, punctul de intersecție al celor două curbe, $I(x_I, y_I) = f_1(x) \cap f_2(x)$, apare pe aceeași verticală cu punctul $(x_0, y_0 = 0)$ de intersecție al curbei $f(x)$ cu axa Ox , adică $x_I = x_0$, așa cum se ilustrează în **figura 30.3,a**.

Cele două funcții, în care s-a divizat $f(x)$, sunt reprezentate suprapuse în dreapta **figura 30.1**►; $f_1(x)$ fiind o curbă unică ce intersectează familia de curbe $f_2(x)$, rezultate pentru $A \in [1, 2]$ cu pasul $0,2$.



Metoda clasică iterativă (**Fig. 30.4** ◀) de determinare a punctului de intersecție a două curbe este prezentată în **figura 3,b**, prin linii întrerupte, de culoare **bleau-ciel**, iar o nouă metodă, mult mai rapidă, denumită **metoda celor două tangente simultane**, este prezentată suprapus în **figura 30.3,b** prin **linii negre**.

Pornind din $x = x_0$ cu o verticală, care intersectează cele două curbe $f_1(x)$ și $f_2(x)$ în punctele T_1 și, respectiv, T_2 , în care, noua metodă, presupune reprezentarea celor două tangente la cele două curbe și intersecția lor în punctul $I_1(x_1, y_1)$.

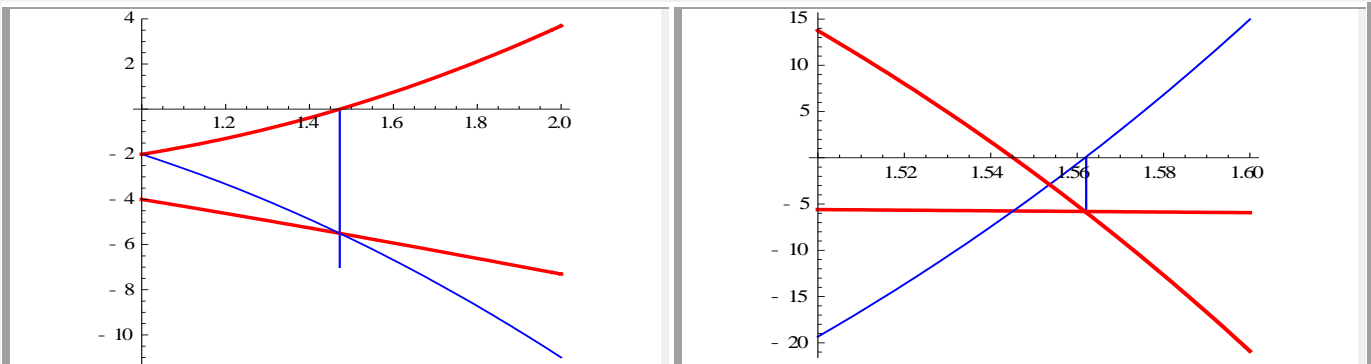
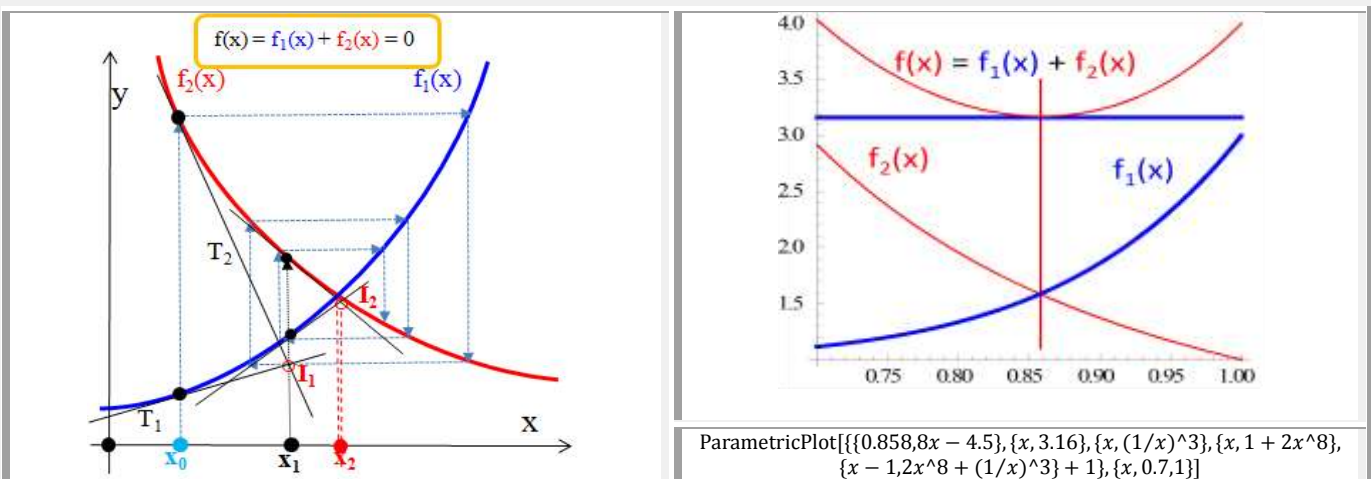


Fig. 30.3,a Echivalența intersecției unei funcții cu axa x cu intersecția celor două funcții în care s-a divizat funcția; abscisele fiind egale, adică $x_1 = x_0, y_1 \neq y_0 = 0$



```
ParametricPlot[{{0.858, 8x - 4.5}, {x, 3.16}, {x, (1/x)^3}, {x, 1 + 2x^8}, {x - 1, 2x^8 + (1/x)^3 + 1}, {x, 0.7, 1}]
```

Fig. 30.3,b Reprezentarea grafică a funcției $f(x)$ și a divizării ei în alte două funcții $f_1(x)$ și $f_2(x)$ ► precum și determinarea punctului de minim al funcției $f(x)$, respectiv punctul de intersecție a celor două funcții $f_1(x)$ și $f_2(x)$ ◀ prin metoda bitangentelor simultane (MBTS)

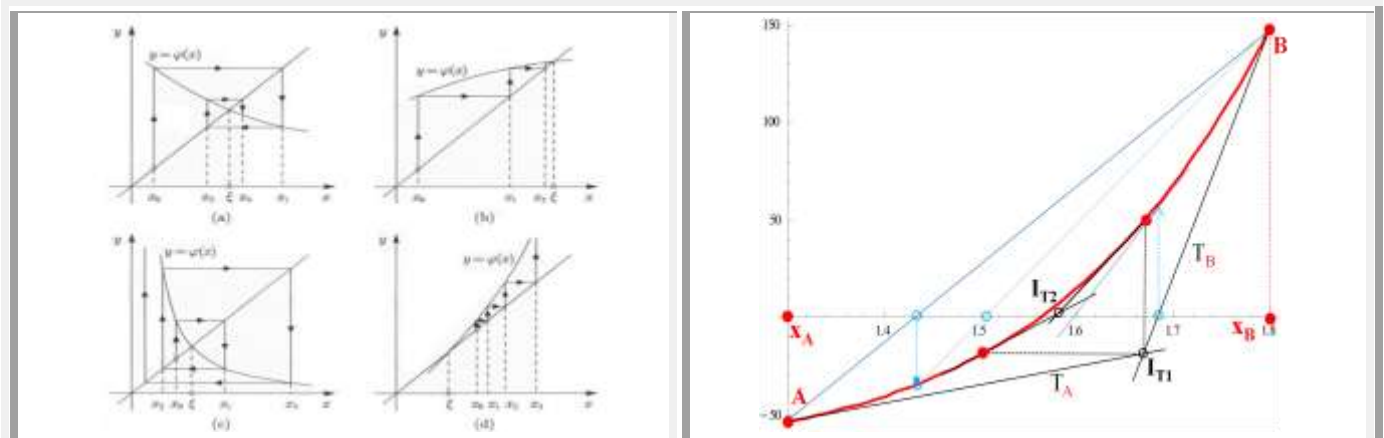


Fig. 30.4 Diverse metode numerice de soluționare a unor ecuații: metoda aproximațiilor succesive (<http://ro.math.wikia.com/wiki/>) ◀, metoda coardei, metoda tangentei și metoda bitangentei (T_A, T_B) ▶

30.2 METODA ITERAȚIEI DINAMICE

Este prezentată tabelar (**Fig. 30.6** și **Tab. 30.2**), în continuare, prin comparație cu metoda divizării ecuației $f(x)$ (1) în două părți și a exprimării celor două tangente (**Fig. 30.5** și **Tab. 30.1**), la cele două funcții ale divizării $f_1(x)$ și $f_2(x)$, în punctele T_1 și T_2 de intersecție cu o dreaptă verticală, dusă din punctul $x_0 = 0,5856856 \wedge 33,5573313^0$ de amorsare / antamare a procesului.

Prin această metodă, intersecția lui $f(x)$ cu axa Ox este înlocuită cu intersecția celor două funcții între ele, adică prin rezolvarea sistemului de ecuații

$$(6) \quad \begin{cases} f_1(x) \equiv \text{Sin}x = 0 \\ f_2(x) \equiv 1 - A \cos x = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{sin}x - x \cdot \text{cos}x - y = 0 \\ 1 - 0,2 \text{cos}x - y = 0 \end{cases}$$

```
ParametricPlot[{{x, Sin[x] - xCos[x]}, {x, 0.06469953048401555 + 0.5856856Sin[0.5856856](x - 0.5856856)}, {0.7863354, 0.6x - 0.35}, {0.7762164, 0.6x - 0.35}, {0.5856856, 0.4x - 0.25}, {x, 1.2(x - 0.5856856)Sin[0.5856856]}, {x, -1.2Cos[x] + 1}, {Sin[x] - xCos[x] + 1.2Cos[x] - 1}, {x, 0.55, 0.85}], AspectRatio -> 1, PlotStyle -> {Blue, {Red, Thick}}]
```

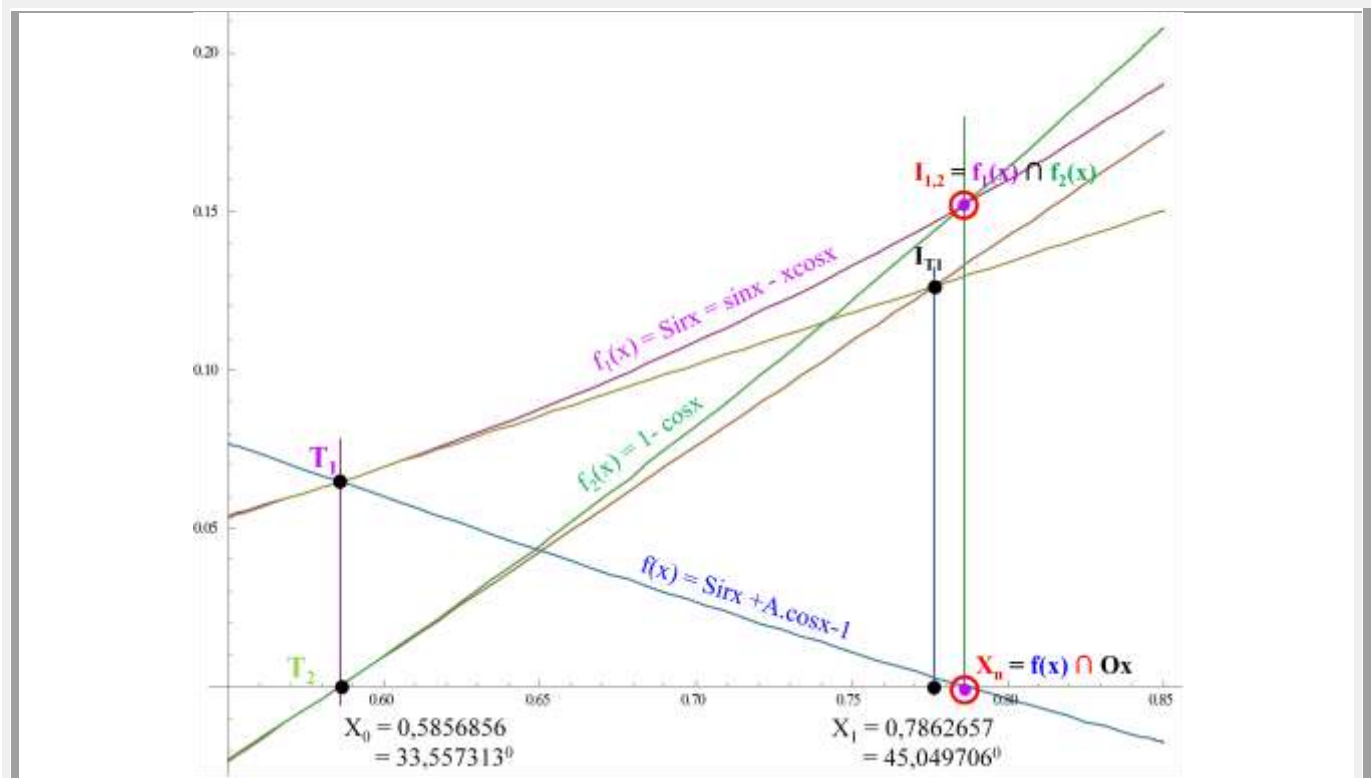


Fig. 30.5 Divizarea lui $f(x)$ în $f_1(x)$ și $f_2(x)$, intersectarea lor cu dreapta verticală $X = X_0$, determinarea punctelor de intersecție T_1 și T_2 , în care se duc tangentele la cele două curbe și se determină punctul lor de intersecție $I_{T1}(X_1, Y_1)$

$X_n = 0,7863354$ este soluția căutăată a ecuației $\text{Sir}x + A \cos x - 1 = 0$, pentru $A = 1,2$

Întersecția celor două tangente este punctul I_{T1} și se poate observa, în **figura 5**, cât de apropiat este, după numai o singură iterație, de punctul soluție $I_{1,2}$, a cărei abscisă X_n este soluția ecuației date. Același lucru rezultă și pentru o ecuație, nespecificată, a cărei funcție a fost descompusă în alte două funcții și prezentată în **figura 3,b**. În **figura 4** ► sunt prezentate, suprapuse, mai multe metode pentru a evidenția avantajele metodei cu două **tangente simultane**, care are o convergență mult mai rapidă decât toate celelalte metode.

Ceea ce este prezentat grafic în **figura 5**, este rezolvat analitic în **tabelul 1**. Soluția cu 6 zecimale exacte este obținută după numai 5 pași.

Tabelul 30.1 Determinarea soluției ecuației $f(x) = \text{Sir}x + A \cdot \cos x - 1 = 0$ prin metoda **TANGENTELOR** pentru $A = 1,2$

Ite-ra-ția	X <i>Radiani</i> Grade	$f_S(x) = \text{Sir}x$	$f'_S(x) = x \cdot \sin x$	X_{n+1}	Obs
		$f_D(x) = 1 - A \cdot \cos x$	$f'_D(x) = A \cdot \sin x$		
		$f(x) = f_S - f_D$	$f'(x) = f'_S(x) - f'_D(x)$		
0	0,5856856 33,5573313 ^o	0,0646990 0 0,064695	0,3237499 0,6633250 0,3395751	0,7762164	
0	0,6981317 40 ^o	0,1079876 0,0807466 0,0272410	0,4487504 0,7713451 0,3225947	0,7825751 44,838251 ^o	
1	0,7762164 44,473923 ^o	0,146700 0,1437167	0,5438053 0,0407015	0,7862657	

		0,0029836	0,296962		
2	0,7862657 45,049706 ⁰	0,1522287 0,1522083 0,0000204	0,5564560 0,8492640 0,2928080	0,7862657	
3	0,7863354 45,053699 ⁰	0,1522675 0,1522674 0,0000001	0,5565940 0,8493230 0,2927790	0,7863357	$X_m =$ 0,7863355
4	0,7863357 45,053716 ⁰	0,15222676 0,1522678 -0,0000002	0,5565444 0,8493233 0,2927789	0,7863355	
5	0,7863351 45,053682 ⁰	0,15222673 0,1522672 0,0000001	0,5565436 0,8493228 0,2927792	0,7863354	SOLUŢIA: X = 0,7863354...

În figura 6 este prezentată o schiță explicativă cu privire la metoda iterației dinamice prezentate analitic în tabelul 2 pentru aceeași ecuație (1).

Pentru exemplul considerat, punctele extreme ale segmentului $\overline{x_A x_B}$, abscisele corespunzătoare ale punctelor A și B de pe curba $f(x)$ din relația (1), pe axa Ox, evident, pe care se află, totodată, soluția X sunt punctele extreme ale coardei AB. Ele sunt :

$$(7) \quad \begin{cases} A: x_A = 40^0 = 0,6981317 \text{ rad}; & y_A = f(x_A) = 0,0272410 \\ B: x_B = 50^0 = 0,8726646 \text{ rad}; & y_B = f(x_B) = -0,0235485 \end{cases}$$

Mijlocul segmentului $\overline{x_A x_B}$ ca, de altfel, și a segmentului AB, este punctul $M_M(x_M, y_M)$ de coordonate

$$(8) \quad M \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 45^0 = 0,7853982 \\ y_M = f(x_M) = -0,0002746 \end{cases}$$

Derivata funcției $f(x)$ este

$$(9) \quad f'(x) = -A \cdot \sin[x] + x \sin[x] = -1,2 \cdot \sin[x] + x \cdot \sin[x]$$

Intersecția tangentei din A cu axa Ox este punctul X_{TA}

$$(10) \quad X_{TA} = x_A + \frac{-f'(x)}{f(x)} = 0,6981317007977318 - \frac{0,02724103146800938}{-0,32259472442167486} =$$

$$X_{TA} = 0,7825752127517639$$

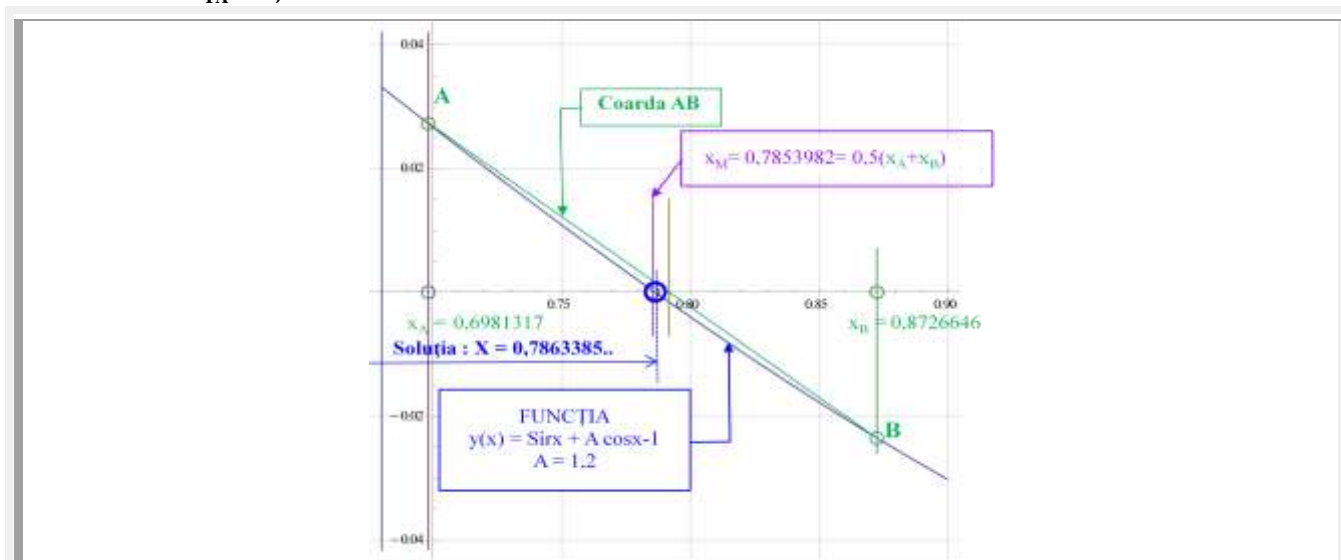


Fig. 30.6 Schiță explicativă la metoda iterației dinamice din tabelul 2

Tabelul 30.2 Determinarea soluției ecuației $f(x) = \text{Sir}x + A \cdot \cos x - 1 = 0$ prin metoda **ITERAȚIEI DINAMICE**

	X^0, X_{rad}, f Grade Radiani f	$X^0, X_{\text{rad}}, f_M, f_{\text{mp}}$ Grade Radiani f	X^0, X_{rad}, f Grade Radiani f	X^0, X_{rad}, f Grade Radiani f
1), 2)	Metoda înjumătățirii intervalului sau metoda bisecției		Mtd. tangentei din A: $T_A \cap O_x$	
	$X_A = 40^0$ $\frac{2\pi}{9} = 0,6981317007977318$ 0,6981317 0,02724103146800938 $f_A = 0,0272410$	$X_M = 45^0$ $\frac{\pi}{4} = 0,7853981633974483$ 0,7853982 0,00027455134060871966 $f_M = 0,0002746$	$X_B = 50^0$ $\frac{5\pi}{18} = 0,8726646259971648$ 0,8726646 -0,023548434259890172 $f_B = -0,0235485$	$X_{T_A} = 44,838251^0$ 44,83825684222856^0 = 0,7825751 0,7825752127517639 0,001103792430627304 $f_{T_A} = 0,00110379$
3)	Metoda coardei $AB \cap O_x = X_C$			
	Coarda AB $y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$	$X_C = X_A - y_A \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = 0,7917427$ 0,7917427841084541 \rightarrow 44,83825684222856^0 $f_C = -0,0015770830181829343 = -0,0015779$	Axa O_x $y = 0$	Precizia $\epsilon = -0,0015$
3)	Metoda coardei $T_A B \cap O_x = X_D$			
	$X_{T_A} = 44,838251^0$ 44,83825684222856^0 = 0,7825751 0,7825752127517639 0,001103792430627304 $f_{T_A} = 0,00110379$	$X_D = X_B - y_B (X_B - X_T) / (y_B - y_T)$ $X_D = 0,7866089259602417 = 0,7866092$ $f_D = -0,00008010130908442381$ $f_D = -0,0000801$	$X_B = 50^0$ $\frac{5\pi}{18} = 0,8726646259971648$ 0,8726646 -0,023548434259890172 $f_B = -0,0235485$	Precizia $\epsilon = -0,00008$
4)	Metoda mediei ponderate a celor mai mici valori ale funcției $f(x)$ de semne contrare			
4)	$X_{\text{mp}} = X_{T_A} + f_{T_A} \frac{X_B - X_{T_A}}{f_{T_A} - f_B} \rightarrow X_{\text{mp}} = 45,05203875^0$ $0,7825752127517639 + 0,001103792430627304 \frac{(0,8726646259971648 - 0,7825752127517639)}{0,001103792430627304 + 0,023548434259890172} =$ $= 0,7866089259602417 \rightarrow X_{\text{mp}} = 0,7866089$ $f_{\text{mp}} = -0,00008010130908442381 = -0,0000801$			Precizia $\epsilon = -0,00008$

Aplicând metoda coardei, intersecția acesteia AB cu axa O_x este

$$(11) \quad \overline{AB} \cap O_x = X_C \rightarrow \begin{cases} y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(12) \quad X_C = X_A - y_A \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = 0,6981317007977318 - 0,02724103146800938 * \frac{0,8726646259971648 - 0,6981317007977318}{-0,023548434259890172 - 0,02724103146800938} = 0,7917427$$

Aplicând din nou metoda coardei, pentru punctele T_A și B , cu valorile cele mai apropiate între ele, dar cu ordonate de semne contrare, se obține intersecția cu axa O_x în punctul de abscisă

$$(13) \quad X_D = X_B - y_B (X_B - X_T) / (y_B - y_T) = 0,7866089259602417 = 0,7866092$$

pentru care valoarea funcției este $f(x_D) = -0,0000801$ ceea ce indică o precizie de 4 zecimale exacte

Prin metoda mediei ponderate, prezentată în ultima linie a **tabelului 30.2**, se obțin aceleași valori, ceea ce indică o posibilă saturare a acestor metode. De aceea se trece la o metodă absolut nouă, originală, dezvoltată de autor și în lucrările [7] și [8].

2. METODA DETERMINĂRII SUCCESIVE A CIFRELOR (MDSC) NUMĂRULUI SOLUȚIE AL UNEI ECUAȚII OARECARE

În lucrarea [1] s-au prezentat comparativ diversele metode de rezolvare a ecuației

$$(14) \quad y(x) \equiv \text{Log}x + 3x^2 - 4x - 1 = 0,$$

funcție reprezentată în **figura 6**, a cărei rezolvare, printr-o metodă inedită, anterior amintită, se încadrează în domeniul "**Matematicii atomice (MA)**" [8] deoarece nu se caută un număr (atomul matematicii clasice), așa

cum se procedează în **matematica** clasică sau **centrică (MC)**, ci **cifrele succesive** care-l compun [7] !. Cifrele întregi constituind “**protonii**” **MA** iar cifrele zecimale “**electronii**” **MA** de pe diversele “orbite”.

Rezolvarea ecuației, prin programe matematice specializate, dă următorul rezultat:

Solve[Log[x] + 3x² - 4x - 1 - y == 0, x]

Solve::nsmet: This system cannot be solved with the methods available to Solve. ➤ Adică : Acest sistem nu poate fi rezolvat cu metodele disponibile pentru rezolvare

Tabelul 30.3. Determinarea soluției prin metoda determinării cifrelor consecutive ale numărului soluție	
Ecuția	Y(x)
Sin[0]-0 Cos[0]+1.2Cos[0]-1 Sin[1]-1 Cos[1]+1.2Cos[1]-1 Sin[2]-2 Cos[2]+1.2Cos[2]-1	0.2 -0.0504686 0.242215
Sin[0.77]-0.77Cos[0.77]+1.2Cos[0.77]-1 Sin[0.78]-0.78 Cos[0.78]+1.2Cos[0.78]-1 Sin[0.79]-0.79 Cos[0.79]+1.2Cos[0.79]-1	0.00483683 0.00186311 -0.00107015
Sin[0.7863]-0.7863 Cos[0.7863]+1.2Cos[0.7863]-1 Sin[0.7864]-0.7864 Cos[0.7864]+1.2Cos[0.7864]-1 Sin[0.7865]-0.7865 Cos[0.7865]+1.2Cos[0.7865]-1	0.0000103305 -0.0000189468 -0.00004822
Sin[0.786335]-0.786335Cos[0.786335]+1.2Cos[0.786335]-1 Sin[0.786336]-0.786336Cos[0.786336]+1.2Cos[0.786336]-1 Sin[0.786337]-0.786337Cos[0.786337]+1.2Cos[0.786337]-1	8.29262×10-8 -2.09853×10-7 -5.02631×10-7
Sin[0.78633527]-0.78633527Cos[0.78633527]+1.2Cos[0.78633527]-1 Sin[0.78633528]-0.78633528Cos[0.78633528]+1.2Cos[0.78633528]-1 Sin[0.78633529]-0.78633529Cos[0.78633529]+1.2Cos[0.78633529]-1	3.87582×10-9 9.48029×10-10 -1.97976×10-9
Sin[0.7863352832]-0.7863352832 Cos[0.7863352832]+1.2Cos[0.7863352832]-1 Sin[0.7863352833]-0.7863352833 Cos[0.7863352833]+1.2Cos[0.7863352833]-1 Sin[0.7863352834]-0.7863352834 Cos[0.7863352834]+1.2Cos[0.7863352834]-1	1.11361×10-11 -1.81418×10-11 -4.74196×10-11
Sin[0.7]-0.7Cos[0.7]+1.2Cos[0.7]-1 Sin[0.8]-0.8 Cos[0.8]+1.2Cos[0.8]-1 Sin[0.9]-0.9 Cos[0.9]+1.2Cos[0.9]-1	0.0266388 -0.00396123 -0.0301901
Sin[0.786]-0.786 Cos[0.786]+1.2Cos[0.786]-1 Sin[0.787]-0.787Cos[0.787]+1.2Cos[0.787]-1 Sin[0.788]-0.788 Cos[0.788]+1.2Cos[0.788]-1	0.0000981873 -0.000194523 -0.000486817
Sin[0.78633]-0.78633 Cos[0.78633]+1.2Cos[0.78633]-1 Sin[0.78634]-0.78634 Cos[0.78634]+1.2Cos[0.78634]-1 Sin[0.78635]-0.78635 Cos[0.78635]+1.2Cos[0.78635]-1	1.54683×10 ⁻⁶ -1.38096×10 ⁻⁶ -4.30872×10 ⁻⁶
Sin[0.7863352]-0.7863352Cos[0.7863352]+1.2Cos[0.7863352]-1 Sin[0.7863353]-0.7863353Cos[0.7863353]+1.2Cos[0.7863353]-1 Sin[0.7863354]-0.7863354Cos[0.7863354]+1.2Cos[0.7863354]-1	2.43704×10-8 -4.90755×10-9 -3.41855×10-8
Sin[0.786335283]-0.786335283 Cos[0.786335283]+1.2Cos[0.786335283]-1 Sin[0.786335284]-0.786335284 Cos[0.786335284]+1.2Cos[0.786335284]-1 Sin[0.786335285]-0.786335285 Cos[0.786335285]+1.2Cos[0.786335285]-1	6.96919×10-11 -2.23087×10-10 -5.15866×10-10
Sin[0.78633528323]-0.78633528323 Cos[0.78633528323]+1.2Cos[0.78633528323]-1 Sin[0.78633528324]-0.78633528324 Cos[0.78633528324]+1.2Cos[0.78633528324]-1 Sin[0.78633528325]-0.78633528325 Cos[0.78633528325]+1.2Cos[0.78633528325]-1	2.35278×10-12 -5.75096×10-13 -3.50286×10-12

Soluția ecuației $\text{Sin}[x]-x \text{Cos}[x]+1.2\text{Cos}[x]-1=0$, cu **12 cifre exacte**, după 12 pași, și cu **11 zecimale exacte** este **0,78633528323** cu eroarea de $\epsilon = y_{12} = 2,35278 \times 10^{-12}$

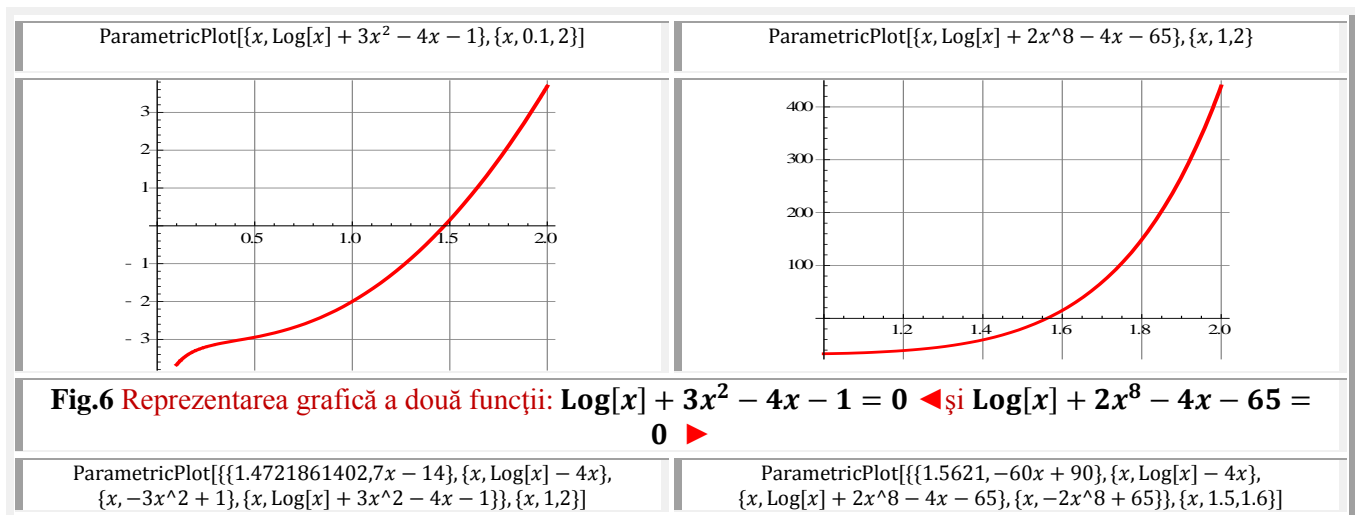
În principiu, **METODA DETERMINĂRII SUCESIVE A CIFRELOR (MDSC)** este extrem de simplă, dar poate fi aplicată, rațional, doar în prezența unui program de matematică. Deci, este o metodă computațională. Este singura / prima metodă matematică care nu caută soluția sub forma directă a **numărului-soluție**, ci determină, pe rând, **consecutiv, cifrele** care compun acest număr.

Problema devine banală, deoarece, pentru fiecare cifră componentă a numărului, nu există decât **10 cifre** posibile: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**. Ca urmare, se scrie de 10 ori ecuația de rezolvat și în prima ecuație, peste tot în locul variabilei x , de exemplu, se înlocuiește / consideră : în prima ecuație $x = 0$, în a 2-a ecuație $x = 1$, în a 3-a $x = 2$ ș.a.m.d., iar în ultima ecuație $x = 9$.

Se dă **enter** și apare o coloană de 10 numere cu valorile / rezultatele funcției pentru cele 10 cifre. Dacă, din întâmplare, apare un zero, înseamnă că cifra corespunzătoare aceluia $x = c_k$, din acea ecuație, este o primă cifră exactă a numărului-soluție al ecuației: în acel punct funcția / curba **2D** intersectează axa **Ox**. Dacă apar mai multe zerouri, înseamnă că funcția $f(x)$ taie axa Ox în mai multe puncte, în intervalul $x \in [0, 9]$ fiecare punct fiind o soluție exactă întreagă și pozitivă a acestei ecuații. Dacă nu, caz mult mai frecvent, apar valori diferite de zero, de semne diferite, cu erori / diferențe negative și pozitive.

La trecerea de la un semn la altul, de la o cifră la cea următoare, de la cifra c_i la c_j , curba intersectează axa Ox , ceea ce înseamnă că între aceste două cifre se află soluția, adică $x \in [c_i, \dots, c_j, \dots]$, punctele (\dots) sugerând următoarele cifre, care urmează să fie determinate în continuare, ale **numărului-soluție**.

Dacă ordinea pe verticală a semnelor rezultate, de la cifra superioară ($x = 0$) spre cea inferioară ($x = 9$) ale funcției $f(x)$ este, de exemplu, pentru $c_i = 0 \rightarrow f(c_i) < 0$ minus ($-$) iar pentru cifra următoare $c_j = 1 \rightarrow f(c_j) > 0$, (vezi **Tab.3**), este plus ($+$), înseamnă că funcția $f(x)$ intersectează axa **Ox** venind din cadranul **IV** în cadranul **I**, de exemplu, așa cum se arată și în **figura 30.6** ◀și, ca urmare, prima cifră exactă a numărului soluție este $c_i = 0$, care dă valoarea funcției $f(c_i)$ mai mică, prin lipsă, decât soluția exactă a ecuației $f(x) = 0$; valoarea ei fiind suplimentată, în continuare, prin cifrele următoare.



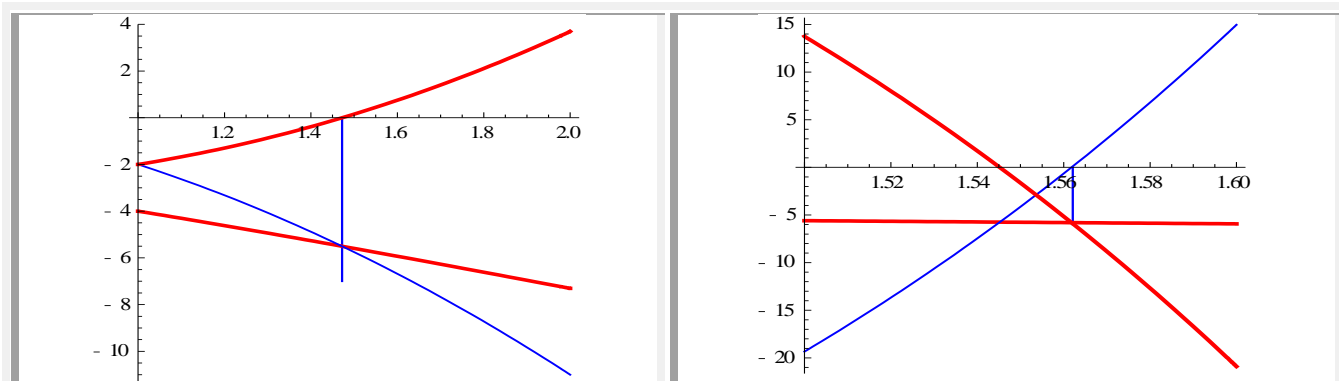


Fig. 30.7 Echivalența intersectării graficului funcției cu axa x și intersecția celor două divizări ale ecuației

În figura 30.7, sunt reprezentate grafic două funcții $f(x)$, ușor diferite între ele, și cele două funcții $f_1(x)$ și $f_2(x)$ în care s-au descompus acestea, în vederea aplicării metodei celor două tangente simultane, metodă tratată anterior, cu exemple de iterații comparate pentru două situații arbitrare, exemplificate în figura 30.8.

În tabelul 30.4, au fost trecute doar ecuațiile cu cifrele din zona schimbării de semn a valorii funcției $f(c)$, din motive lesne de înțeles.

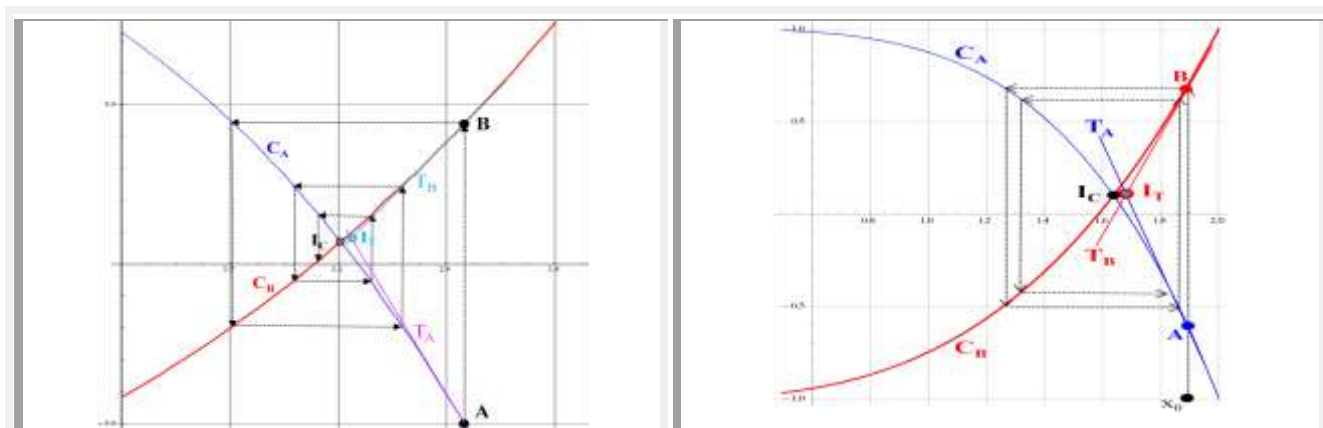


Fig. 30.8 Comparație între metoda iterației clasice și metoda celor două tangente simultane la soluționarea determinării intersecției a două curbe sau la soluționarea unei ecuații prin descompunerea ei în alte două funcții.

În tabelul 30.4 este prezentată aplicarea MDSC la ecuația tratată pe larg în lucrarea [1], prin multitudinea de metode clasice cunoscute. Aici se va trata MDSC în varianta determinării primelor cifre exacte consecutive ale numărului-soluție prin metode grafice, atâta timp cât acestea mai sunt lizibile și urmate de MDSC pur tabelară, prezentată în cazul anterior.

Tabelul 30.4,a Determinarea cifrelor consecutive ale numărului soluție al ecuației $\text{Log}[x] + 3x^2 - 4x - 1 = 0$

0	$\text{Log}[0] + 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 1$	$-\infty$
1	$\text{Log}[1] + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1$	-2
2	$\text{Log}[2] + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 1$	$3 + \text{Log}[2]$
3	$\text{Log}[3] + 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 - 1$	$14 + \text{Log}[3]$
4	$\text{Log}[4] + 3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 1$	$31 + \text{Log}[4]$
5	$\text{Log}[5] + 3 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 - 1$	$54 + \text{Log}[5]$

6	$\text{Log}[6] + 3 \cdot 6^2 - 4 \cdot 6 - 1$	83+Log[6]
7	$\text{Log}[7] + 3 \cdot 7^2 - 4 \cdot 7 - 1$	118+Log[7]
8	$\text{Log}[8] + 3 \cdot 8^2 - 4 \cdot 8 - 1$	159+Log[8]
9	$\text{Log}[9] + 3 \cdot 9^2 - 4 \cdot 9 - 1$	206+Log[9]
0	$\text{Log}[10] + 3 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 - 1$	259+Log[10]
1	$\text{Log}[11] + 3 \cdot 11^2 - 4 \cdot 11 - 1$	318+Log[11]
2	$\text{Log}[12] + 3 \cdot 12^2 - 4 \cdot 12 - 1$	383+Log[12]
3	$\text{Log}[13] + 3 \cdot 13^2 - 4 \cdot 13 - 1$	454+Log[13]
4	$\text{Log}[14] + 3 \cdot 14^2 - 4 \cdot 14 - 1$	531+Log[14]
5	$\text{Log}[15] + 3 \cdot 15^2 - 4 \cdot 15 - 1$	614+Log[15]
6	$\text{Log}[16] + 3 \cdot 16^2 - 4 \cdot 16 - 1$	703+Log[16]
7	$\text{Log}[17] + 3 \cdot 17^2 - 4 \cdot 17 - 1$	798+Log[17]
8	$\text{Log}[18] + 3 \cdot 18^2 - 4 \cdot 18 - 1$	899+Log[18]
9	$\text{Log}[19] + 3 \cdot 19^2 - 4 \cdot 19 - 1$	1006+Log[19]
0	$\text{Log}[1.0] + 3 \cdot 1.0^2 - 4 \cdot 1.0 - 1$	-2.
1	$\text{Log}[1.1] + 3 \cdot 1.1^2 - 4 \cdot 1.1 - 1$	-1.67469
2	$\text{Log}[1.2] + 3 \cdot 1.2^2 - 4 \cdot 1.2 - 1$	-1.29768
3	$\text{Log}[1.3] + 3 \cdot 1.3^2 - 4 \cdot 1.3 - 1$	-0.867636
4	$\text{Log}[1.4] + 3 \cdot 1.4^2 - 4 \cdot 1.4 - 1$	-0.383528
5	$\text{Log}[1.5] + 3 \cdot 1.5^2 - 4 \cdot 1.5 - 1$	0.155465
6	$\text{Log}[1.6] + 3 \cdot 1.6^2 - 4 \cdot 1.6 - 1$	0.750004
7	$\text{Log}[1.7] + 3 \cdot 1.7^2 - 4 \cdot 1.7 - 1$	1.40063
8	$\text{Log}[1.8] + 3 \cdot 1.8^2 - 4 \cdot 1.8 - 1$	2.10779
9	$\text{Log}[1.9] + 3 \cdot 1.9^2 - 4 \cdot 1.9 - 1$	2.87185

În **tabelul 30.4,a** sunt executați trei pași. În primul pas se determină prima cifră a numărului soluție $c_1 = 1$. În al doilea pas, se introduce, în fața cifrelor existente $0 \dots 9$, care se pastrează tot timpul, **prima cifra exactă 1** și se dă enter la calculul valorilor celor 10 funcții cu cele 10 cifre. Se observă că ele nu schimbă de semn și au, **toate**, valori pozitive mari, ceea ce denotă că valorile lui x , considerate temporar cu două **cifre protonice (întregi)**, introduse în ecuație sunt mult prea mari și că între ele trebuie introdusă virgula, care separă cifrele protonice (întregi) de cele **electronice (zecimale)**. În pasul 3, după introducerea virgulei între prima și a doua cifră, rezultă o a doua cifră electronică exactă care este **4**, așa cum se poate observa pe ultima coloană a **tabelului 30.4,a**.

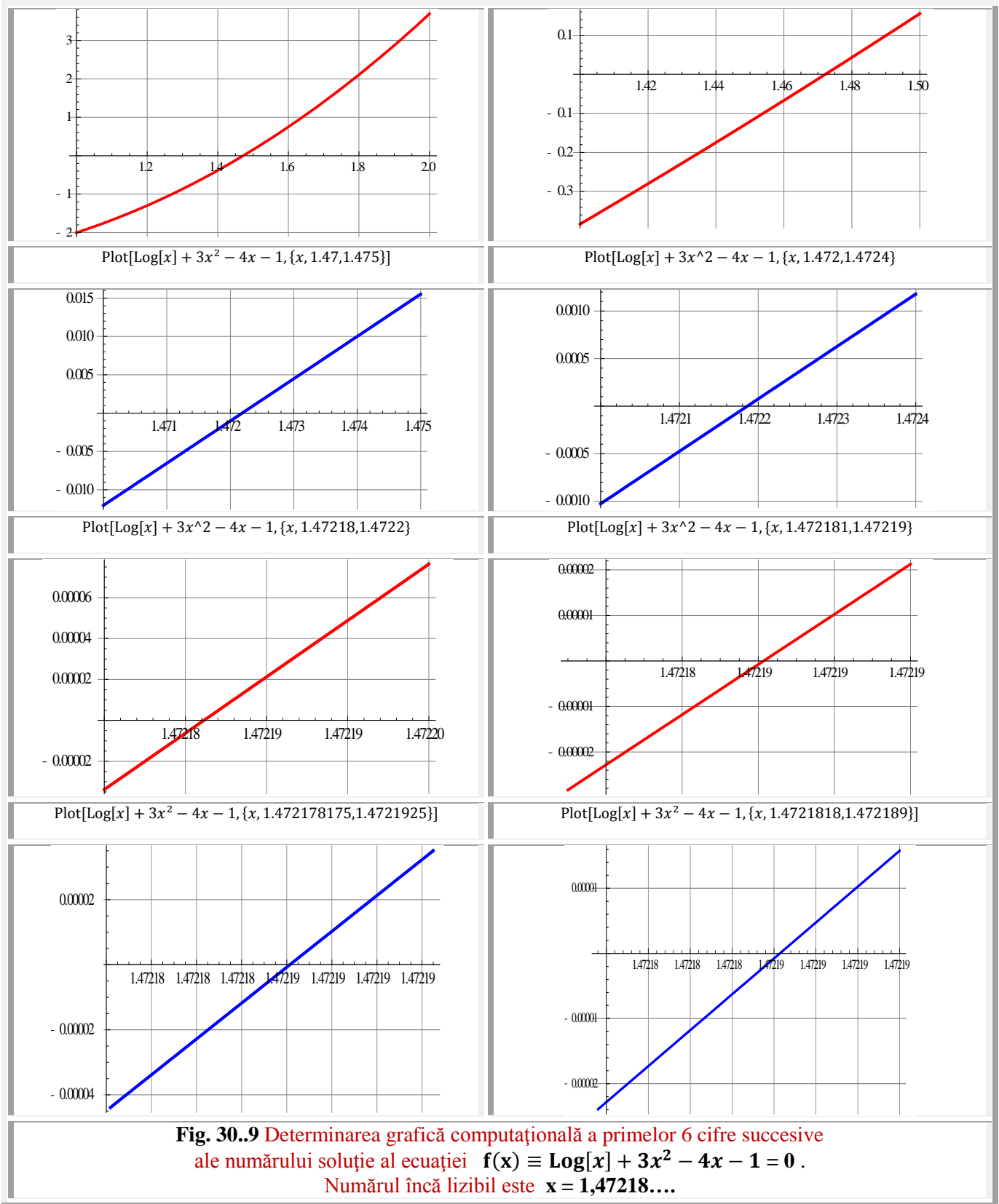
Pentru reducerea dimensiunilor **tabelului 4**, un număr de pași (cifre consecutive) se realizează pe cale grafică, așa cum se prezintă situația din graficele consecutive din **figura 30.9**.

Astfel, au putut fi determinate încă 4 cifre consecutive, ajungându-se la **6 cifre exacte consecutive** ale numărului - soluție al ecuației, care este $x = 1,47218\dots$

Următoarele **cifre electronice consecutive exacte** $c_7 = 6 \dots c_{11} = 2$ se determină din nou analitic computațional, așa cum este prezentată situația în **tabelul 30.4,b**.

Plot[Log[x] + 3x² - 4x - 1, {x, 1,2}, GridLines -> Automatic]

Plot[Log[x] + 3x² - 4x - 1, {x, 1.4,1.5}]



Tabelul 30.4,b. Aflarea în continuare, a soluției prin metoda determinării
cifrelor consecutive ale numărului soluție

0	$\text{Log}[1.472180] + 3 \cdot 1.472180^2 - 4 \cdot 1.472180 - 1$	-0.0000338474
1	$\text{Log}[1.472181] + 3 \cdot 1.472181^2 - 4 \cdot 1.472181 - 1$	-0.000028335
2	$\text{Log}[1.472182] + 3 \cdot 1.472182^2 - 4 \cdot 1.472182 - 1$	-0.0000228227
3	$\text{Log}[1.472183] + 3 \cdot 1.472183^2 - 4 \cdot 1.472183 - 1$	-0.0000173103
4	$\text{Log}[1.472184] + 3 \cdot 1.472184^2 - 4 \cdot 1.472184 - 1$	-0.0000117979
5	$\text{Log}[1.472185] + 3 \cdot 1.472185^2 - 4 \cdot 1.472185 - 1$	-6.28557×10^{-6}
6	$\text{Log}[1.472186] + 3 \cdot 1.472186^2 - 4 \cdot 1.472186 - 1$	-7.73192×10^{-7}
7	$\text{Log}[1.472187] + 3 \cdot 1.472187^2 - 4 \cdot 1.472187 - 1$	4.73919×10^{-6}
8	$\text{Log}[1.472188] + 3 \cdot 1.472188^2 - 4 \cdot 1.472188 - 1$	0.0000102516
9	$\text{Log}[1.472189] + 3 \cdot 1.472189^2 - 4 \cdot 1.472189 - 1$	0.000015764
0	$\text{Log}[1.4721860] + 3 \cdot 1.4721860^2 - 4 \cdot 1.4721860 - 1$	-7.73192×10^{-7}
1	$\text{Log}[1.4721861] + 3 \cdot 1.4721861^2 - 4 \cdot 1.4721861 - 1$	-2.21954×10^{-7}
2	$\text{Log}[1.4721862] + 3 \cdot 1.4721862^2 - 4 \cdot 1.4721862 - 1$	3.29283×10^{-7}
3	$\text{Log}[1.4721863] + 3 \cdot 1.4721863^2 - 4 \cdot 1.4721863 - 1$	8.80521×10^{-7}
4	$\text{Log}[1.4721864] + 3 \cdot 1.4721864^2 - 4 \cdot 1.4721864 - 1$	1.43176×10^{-6}
5	$\text{Log}[1.4721865] + 3 \cdot 1.4721865^2 - 4 \cdot 1.4721865 - 1$	1.983×10^{-6}
6	$\text{Log}[1.4721866] + 3 \cdot 1.4721866^2 - 4 \cdot 1.4721866 - 1$	2.53424×10^{-6}
7	$\text{Log}[1.4721867] + 3 \cdot 1.4721867^2 - 4 \cdot 1.4721867 - 1$	3.08547×10^{-6}
8	$\text{Log}[1.4721868] + 3 \cdot 1.4721868^2 - 4 \cdot 1.4721868 - 1$	3.63671×10^{-6}
9	$\text{Log}[1.4721869] + 3 \cdot 1.4721869^2 - 4 \cdot 1.4721869 - 1$	4.18795×10^{-6}
0	$\text{Log}[1.47218610] + 3 \cdot 1.47218610^2 - 4 \cdot 1.47218610 - 1$	-2.21954×10^{-7}
1	$\text{Log}[1.47218611] + 3 \cdot 1.47218611^2 - 4 \cdot 1.47218611 - 1$	-1.66831×10^{-7}
2	$\text{Log}[1.47218612] + 3 \cdot 1.47218612^2 - 4 \cdot 1.47218612 - 1$	-1.11707×10^{-7}
3	$\text{Log}[1.47218613] + 3 \cdot 1.47218613^2 - 4 \cdot 1.47218613 - 1$	-5.65831×10^{-8}
4	$\text{Log}[1.47218614] + 3 \cdot 1.47218614^2 - 4 \cdot 1.47218614 - 1$	-1.45928×10^{-9}
5	$\text{Log}[1.47218615] + 3 \cdot 1.47218615^2 - 4 \cdot 1.47218615 - 1$	5.36645×10^{-8}
6	$\text{Log}[1.47218616] + 3 \cdot 1.47218616^2 - 4 \cdot 1.47218616 - 1$	1.08788×10^{-7}
7	$\text{Log}[1.47218617] + 3 \cdot 1.47218617^2 - 4 \cdot 1.47218617 - 1$	1.63912×10^{-7}
8	$\text{Log}[1.47218618] + 3 \cdot 1.47218618^2 - 4 \cdot 1.47218618 - 1$	2.19036×10^{-7}
9	$\text{Log}[1.47218619] + 3 \cdot 1.47218619^2 - 4 \cdot 1.47218619 - 1$	2.7416×10^{-7}
0	$\text{Log}[1.472186140] + 3 \cdot 1.472186140^2 - 4 \cdot 1.472186140 - 1$	-1.45928×10^{-9}
1	$\text{Log}[1.472186141] + 3 \cdot 1.472186141^2 - 4 \cdot 1.472186141 - 1$	4.0531×10^{-9}
2	$\text{Log}[1.472186142] + 3 \cdot 1.472186142^2 - 4 \cdot 1.472186142 - 1$	9.56548×10^{-9}
3	$\text{Log}[1.472186143] + 3 \cdot 1.472186143^2 - 4 \cdot 1.472186143 - 1$	1.50779×10^{-8}
4	$\text{Log}[1.472186144] + 3 \cdot 1.472186144^2 - 4 \cdot 1.472186144 - 1$	2.05902×10^{-8}
5	$\text{Log}[1.472186145] + 3 \cdot 1.472186145^2 - 4 \cdot 1.472186145 - 1$	2.61026×10^{-8}
6	$\text{Log}[1.472186146] + 3 \cdot 1.472186146^2 - 4 \cdot 1.472186146 - 1$	3.1615×10^{-8}
7	$\text{Log}[1.472186147] + 3 \cdot 1.472186147^2 - 4 \cdot 1.472186147 - 1$	3.71274×10^{-8}
8	$\text{Log}[1.472186148] + 3 \cdot 1.472186148^2 - 4 \cdot 1.472186148 - 1$	4.26398×10^{-8}
9	$\text{Log}[1.472186149] + 3 \cdot 1.472186149^2 - 4 \cdot 1.472186149 - 1$	4.81521×10^{-8}
0	$\text{Log}[1.4721861400] + 3 \cdot 1.4721861400^2 - 4 \cdot 1.4721861400 - 1$	-1.45928×10^{-9}
1	$\text{Log}[1.4721861401] + 3 \cdot 1.4721861401^2 - 4 \cdot 1.4721861401 - 1$	-9.08039×10^{-10}
2	$\text{Log}[1.4721861402] + 3 \cdot 1.4721861402^2 - 4 \cdot 1.4721861402 - 1$	-3.568×10^{-10}
3	$\text{Log}[1.4721861403] + 3 \cdot 1.4721861403^2 - 4 \cdot 1.4721861403 - 1$	1.94436×10^{-10}
4	$\text{Log}[1.4721861404] + 3 \cdot 1.4721861404^2 - 4 \cdot 1.4721861404 - 1$	7.45675×10^{-10}
5	$\text{Log}[1.4721861405] + 3 \cdot 1.4721861405^2 - 4 \cdot 1.4721861405 - 1$	1.29691×10^{-9}

6	$\text{Log}[1.4721861406] + 3 \cdot 1.4721861406^2 - 4 \cdot 1.4721861406 - 1$	1.84815×10^{-9}
7	$\text{Log}[1.4721861407] + 3 \cdot 1.4721861407^2 - 4 \cdot 1.4721861407 - 1$	2.39939×10^{-9}
8	$\text{Log}[1.4721861408] + 3 \cdot 1.4721861408^2 - 4 \cdot 1.4721861408 - 1$	2.95063×10^{-9}
9	$\text{Log}[1.4721861409] + 3 \cdot 1.4721861409^2 - 4 \cdot 1.4721861409 - 1$	3.50186×10^{-9}
Soluția, până în acest moment, cu 11 cifre exacte, este $x = 1,4721861402$		

Capitolul 31

INTERSECȚII ÎN PLAN

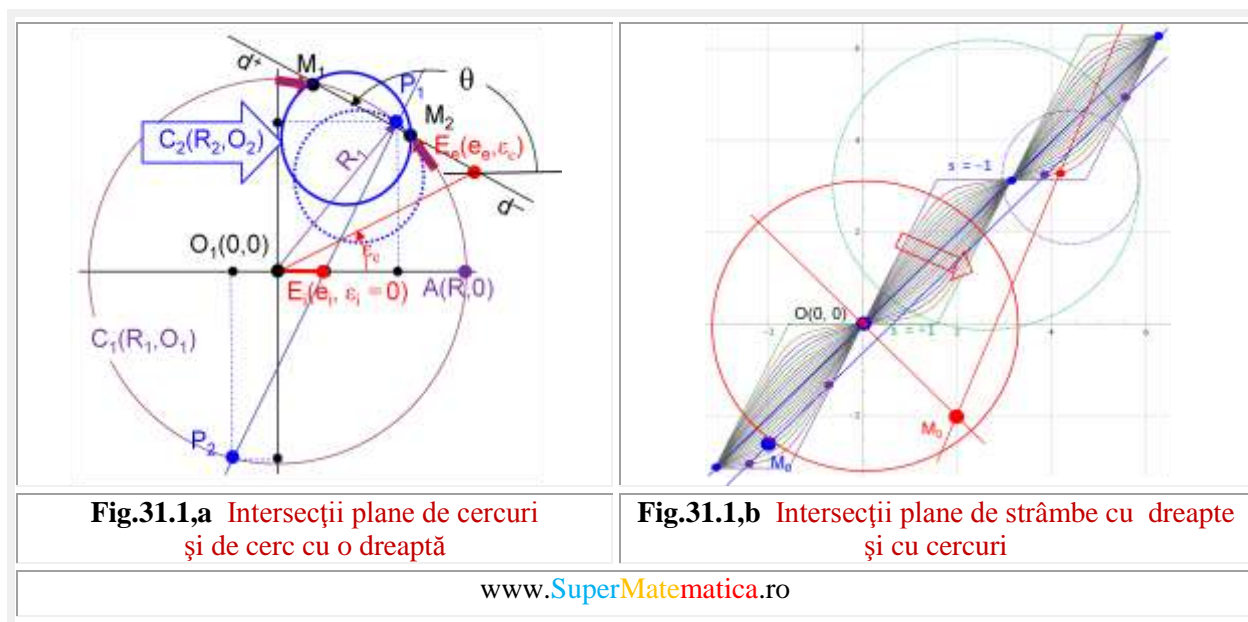
0. ÎN LOC DE ÎNTRODUCERE

(http://ro.wikipedia.org/wiki/Teorema_lui_Bézout)

Teorema lui Bézout se referă la o formulare demonstrabilă din [geometria algebrică](#) privind un număr de [puncte](#) comune, sau puncte de intersecție a două [curbe algebrice](#).

Teorema afirmă că două [curbe](#) plane algebrice, X de [grad m](#) și Y de [grad n](#), au un număr [maxim](#) de [puncte de intersecție](#) egal cu produsul gradelor polinoamelor, [mn](#).

Această afirmație este adevărată dacă se consideră curbele ca neavând nici o componentă comună înaintea [intersecțării](#) propriu-zise și se consideră [multiplicitatea](#) acestora, respectiv apartenența punctelor la același [câmp finit algebric](#).



Exemple

- Două drepte ne-confundate se întâlnesc în exact un [punct](#). Dacă sunt paralele punctul este aruncat la [infini](#)t. Pentru a ilustra algebric, în spații proiective, fie curbele $x+2y=3$ și $x+2y=5$, care sunt reprezentate de [ecuațiile omogene](#) $x+2y-3z=0$ and $x+2y-5z=0$. După rezolvare, se găsește că $x= -2y$ și $z = 0$, ceea ce corespunde punctului $(-2 : 1 : 0)$ în coordonate omogene. dar cum coordonate z este [0](#), acest punct se găsește la infinit.
- Cazul deosebit a două curbe de [grade diferite](#) care se intersectează este o variantă a [teoremei fundamentale a algebrei](#). De exemplu, parabola definită de $y - x^2 = 0$ are gradul 2, în timp ce dreapta $y - 2x = 0$ are gradul 1; ca atare, cele două curbe se întâlnesc în exact două puncte.

- Două **cercuri** nu se intersectează decât în exact două puncte în plan, deși teorema lui Bézout afirmă că ar fi patru. Discrepanța este aparentă și provine din faptul că fiecare din cele două cercuri trece prin aceleași puncte din **planul complex** de două ori. Dacă se alege cercul de **coordonate**:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

în **coordonate omogene**, se obține

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 - r^2z^2 = 0,$$

de unde reiese că punctele $(1:i:0)$ și $(1:-i:0)$ se află pe fiecare cerc. Când două cercuri nu se intersectează în planul real (de exemplu, fiindcă sunt concentrice), se întâlnesc în aceste puncte la infinit.

31.1 VERIFICAREA TEOREMEI LUI BÉZOUT ÎN CAZUL STRÂMBELOR

O explicație mult mai simplă și mult mai sugestivă, cu privire la intersecția unei drepte cu un cerc ca și a două cercuri între ele, este sugerată de **funcțiile supermatematice (FSM) circulare excentrice (CE)** de excentru $\mathbf{E}(e, \varepsilon)$ exterior discului cercului unitate, sau exterior unui cerc oarecare $C_1(O_1, R_1)$ și de variabilă excentrică θ , cazuri reprezentat în **figura 31.1,a**.

Se știe că, pentru definirea și reprezentarea pe cerc a funcțiilor trigonometrice / circulare cosinus și sinus **centrice Euler (cosa, sinα)**, cercul unitate $\mathbf{CU}(O,1)$, (fostul cercul trigonometric pe vremea lui **Euler**) a fost intersectat cu o **semidreaptă centrică D**, pentru că este turnantă în jurul **polului P(0,0) ≡ O(0, 0) ≡ M(0,0)**, pol ales, în mod cu totul nefericit, pentru că a sărăcit matematica, în **centrul M(0,0)**, al cercului unitate și în **originea O(0, 0)** a sistemului / reperului rectangular cartezian drept sau polar.

Supermatematica a plasat polul într-un punct oarecare din planul cercului și la denumit **excentru**, pentru că a fost expulzat din centrul **M**, l-a notat cu $\mathbf{S}(s, \varepsilon)$ – **punct solar** – în cercul unitate $\mathbf{CU}(O,1)$ și cu $\mathbf{E}(e, \varepsilon)$ într-un cerc oarecare $C(O,R)$, în care $s = e/R$ și e sunt excentricitățile liniare numerică și, respectiv, reală, iar ε este excentricitatea unghiulară. Și, astfel, toate entitățile matematice au fost multiplicare la infinit, iar matematica centrică (**MC**) a devenit un caz particular, de excentricitate liniară nulă ($e = 0$) a **supermatematicii (SM)** și o complementară a **matematicii excentrice (ME)** ! De aceea, se poate afirma că $\mathbf{SM} = \mathbf{MC} \cup \mathbf{ME}$ și că $\mathbf{MC} = \mathbf{SM} (e = 0)$.

Funcțiile supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) de variabilă excentrică θ , intersectează cercul unitate cu o **dreaptă excentrică d = d⁺ ∪ d⁻**, denumită astfel pentru că este turnantă în jurul excentrului **S** și au: două determinări, câte una pentru fiecare semidreaptă, dacă $s < 1$ sau $e < R$. Și patru determinări, dar numai două în același timp, sau pentru aceeași valoare a variabilei excentrice θ , câte două pentru fiecare semidreaptă, în caz contrar, adică, pentru **S** exterior discului cercului unitate sau **e** exterior unui cerc oarecare (**Fig.31.1,a**). Intersecția cercului cu o dreapta și nu cu o semidreaptă, s-a făcut la sugestia Prof. univ. Dr. Math. **Horst Klepp**, pentru a aduce de acord **Trigonometria** cu **Geomatria Analitică**, care operează cu drepte și nu cu semidrepte.

Pentru $e < R$ sau $s < 1$ (**Fig.31.1**), adică pentru un excentru \mathbf{E}_i interior discului cercului \mathbf{C}_1 , aceste puncte de intersecție sunt \mathbf{P}_1 și \mathbf{P}_2 pe cercul oarecare \mathbf{C}_1 , puncte care pot fi notate împreună $\mathbf{P}_{1,2}$.

Pentru $s > 1$, **FSM-CE** există doar în intervalele în care dreapta excentrică **d** intersectează cercul unitate **CU**, începând cu punctul de tangența inițial \mathbf{W}_i și terminând cu punctul de tangența final \mathbf{W}_f .

Dacă se rotește dreapta excentrică în sens trigonometric, în momentul tangentei cu **CU** în punctul \mathbf{W}_i sunt două puncte confundate \mathbf{W}_{1i} și \mathbf{W}_{2i} , care, în momentele următoare, la rotirea în continuare a dreptei excentrice **d**, se deplasează în sensuri contrare atât pe semidreapta \mathbf{d}^+ cât și pe cercul \mathbf{C}_1 : \mathbf{M}_1 spre stânga (**Fig.1,a**) și \mathbf{M}_2 spre dreapta. Aceeași dreaptă **d**, cu semidreapta \mathbf{d}^+ , intersectează simultan și cercul \mathbf{C}_2 , tot în punctele $\mathbf{M}_{1,2}$, care aparțin, de această dată, cercului \mathbf{C}_2 . Ca urmare, fiecare punct \mathbf{M}_1 și \mathbf{M}_2 este dedublat, aparținând pe de o parte cercului \mathbf{C}_1 și, pe de altă parte, cercului \mathbf{C}_2 . Dacă dreapta **d** dispăre, rămân cele două cercuri și $\mathbf{M}_{1,2}$ sunt punctele de intersecție ale celor două cercuri \mathbf{C}_1 cu \mathbf{C}_2 : cu două puncte în \mathbf{M}_1 și cu două puncte în \mathbf{M}_2 . În momentul în care, cele două cercuri sunt tangente, interioare sau

exterioare, în punctul lor de tangență sunt de fapt **4 puncte confundate**; câte două pentru fiecare cerc. **QED.**

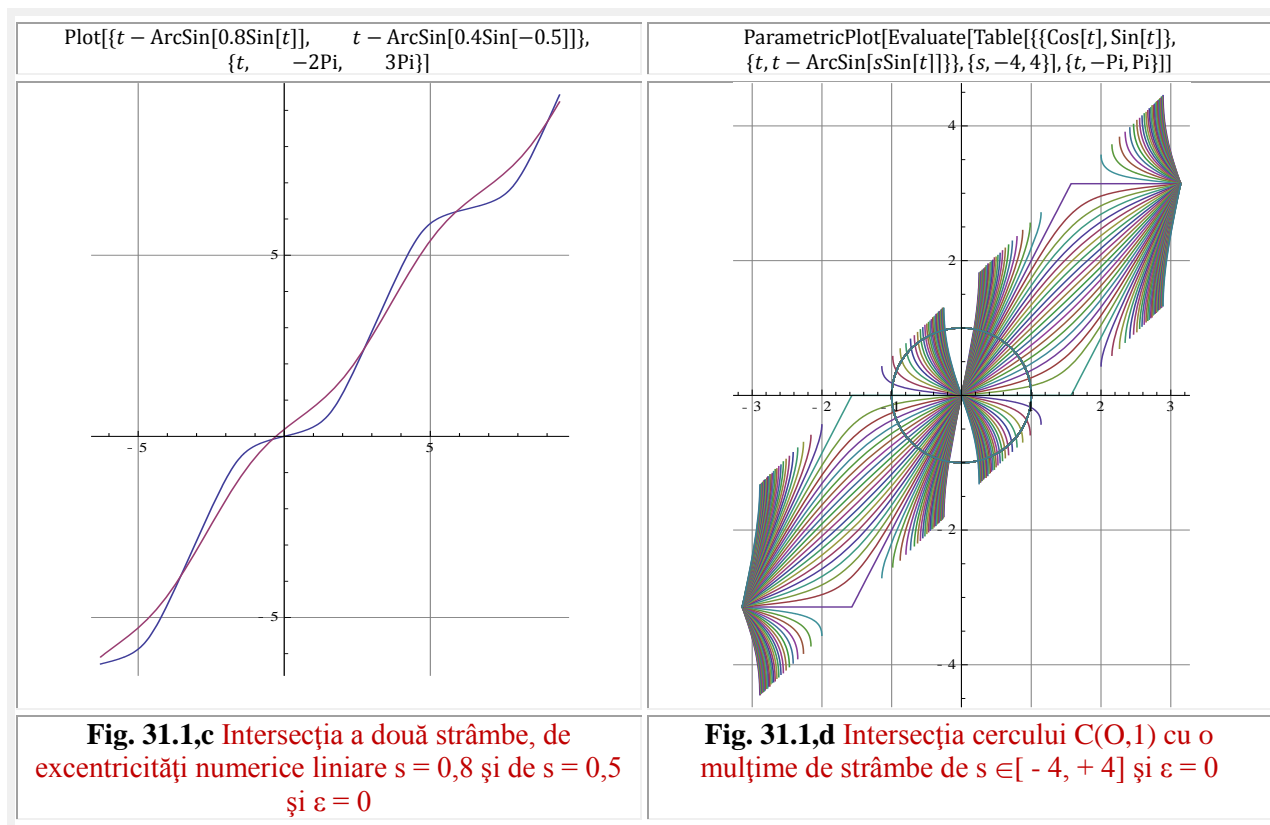
În **figura 31.1,b** sunt prezentate o **familie de strâmbe**, de variabilă excentrică θ , descrise de **FSM-CE** amplitudine excentrică $\mathbf{aex}\theta$, a căror ecuații sunt

$$(31.1) \quad \mathbf{y} = \mathbf{aex}\theta = \alpha(\theta) = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)],$$

pentru un **excentru** $\mathbf{S}(s \in [-1, 1], \varepsilon = 0)$, în care α este variabila centrică, sau unghiul la centrul $\mathbf{O}(0,0)$, a direcției / semidreptei centrice D^+ sau a razei / segmentului OW_1 , iar θ este unghiul de poziție (sau mai precis de **orientare**, deoarece **poziția** = **orientare** (θ, φ, ψ) \cup **localizare** (x, y, z)) a semidreptei excentrice \mathbf{d}^+ , sau a razei excentrice $r_1 = rex_1\theta = \mathbf{E}W_1$, $rex_1\theta$ fiind **FSM-CE radial excentric** de variabilă excentrică θ și de ecuație

$$(31.2) \quad rex_{1,2} \theta = -s \cdot \cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}$$

Strâmba este o generalizare vastă a dreptei: dreapta fiind un caz particular al strâmbei, de excentricitate numerică liniară $s = 0$. Strâmbele din **figura 31.1,b** sunt cuprinse între strâmbele de excentricitate $s = \pm 1$, sau $e = \pm R$ care sunt linii frânte, cu segmente orizontale și altele paralele cu prima bisectoare. Graficele curbele funcțiilor amplitudine excentrică din **figura 31.1,b** “**șerpuiesc**”/oscilează în jurul strâmbei centrale, de $s = 0$, care este dreapta centrală $y = x$, sau prima bisectoare.



Cuvântul “**șerpuiesc**”, folosit pentru descrierea formei graficelor curbelor funcțiilor amplitudine excentrică, a fost invocat / imaginat de un căpcăun drept pretext principal de respingere a unui Grant de Supermatematică. Îi amintim acestui inrog că, numai valoare unei mărimi poate oscila în jurul unei valori medii, sau un punct poate oscila de-o parte și de alta a altui punct sau dreaptă și că orice oscilație **pretinde / presupune o mișcare**, liniară sau circulară **alternativă**; pe când o curbă, sau mai precis

graficul ei, ca cea a **FSM-CE** amplitudine excentrică **ax θ** are o infinitate de mulțimi de puncte (segmente de curbă) care sunt **stabile / imuabile** (nu oscilează !) de o parte a primei bisectoare și alte grupe de mulțimi de puncte care sunt de cealaltă parte a dreptei și ele **tot stabile / imuabile**, care, deci, nu oscilează, cum crede acel referent imbecil cu numele ținut secret. (v. "Nimic despre **supermatematică**. Totul despre prostie" **Revista Agero Stuttgart**".

În **figura 31.1,c** se poate deduce că intersecția a două strâmbe, care șerpuesc încolăcindu-se reciproc, de la $-\infty$ la $+\infty$, pe direcția primei bisectoare, are o infinitate de puncte de intersecție, în acord cu teorema lui **Bézout**, deoarece strâmbele sunt reprezentate de polinoamele (1') de grad infinit.

Din figură, se poate constata că, nu pot exista mai mult de 2 puncte de intersecție dintre o **strâmbă** și un **cerc oarecare**; tot atâtea câte există la intersecția unui cerc cu o dreaptă, în **dezacord** cu teorema lui **Bézout**, deoarece **funcția amplitudine excentrică** nu este o cubă algebrică, pe de o parte. Pe de altă parte, strâmba este un polinom de grad infinit, așa cum se va putea constata în continuare.

Teorema lui **Bézout** ar putea fi respectată numai de un cerc de raza infinit, cerc care degenerază în dreaptă, sau dacă se consideră intersecția cercului cu toate strâmbele de $s \in [-\infty, +\infty]$, așa cum se poate deduce din **figura 31.1,d**, sau dacă se consideră **caracterul amfoter al strâmbelor**: de gradul unu, pentru că este o generalizare a dreptei și de grad infinit dacă se descompune în serii de puteri.

Intersecția unei strâmbe cu o dreaptă, poate avea o infinitate de puncte de intersecție, dacă dreapta are un punct al dreptei **M₀** pe una dintre curbele funcțiilor amplitudine excentrică, (oricare) și are coeficientul unghiular al dreptei **m = tan α = 1**, adică, dreapta este paralelă cu prima bisectoare.

Acest fenomen / lucru se explică prin faptul că exprimând dezvoltarea în serie de puteri a funcției **arcsin θ** din relația (1), în care $s \cdot \sin(\theta - \varepsilon) \rightarrow x$ se va obține polinomul de grad infinit

$$(31.1') \quad \begin{aligned} aex(x, s) &= \theta - \left(x + \frac{1 \cdot x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \dots + \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2.4.6.8 \dots (2n) \cdot (2n+1)} \right) = \\ &= \arcsin \frac{x}{s} + \varepsilon - \left(x + \frac{1 \cdot x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \dots + \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2.4.6.8 \dots (2n) \cdot (2n+1)} \right). \end{aligned}$$

În concluzie, intersecția strâmbelor între ele sau cu o dreaptă respectă teorema lui **Bézout**, în timp ce, intersecția cu un cerc nu o respectă. Ca urmare, se poate afirma că, teorema lui **Bézout** este respectată în domeniul **matematicii centrice (MC)** și nu în totalitate și în cel al **matematicii excentrice (ME)**.

De fapt, aceeași problemă apare și în **matematica centrică (MC)**, la intersecția unui cerc cu o funcție sinus centric **sinx**, a cărei dezvoltare în serie de puteri este

$$(31.1'') \quad y = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

O dreaptă, ca și o strâmbă, intersecțiază o sinusoidă sau o sexoidă (**sexx**) într-o infinitate de puncte și un cerc în maximum două puncte.

31.2 EXPRESIA GENERALĂ A COORDONATELOR PUNCTELOR DE INTERSECȚIE DINTRE UN CERC ȘI O DREAPTĂ

De la bun început, se poate declara și demonstra că funcțiile **supermatematice circulare excentrice (FSM-CE)** de variabilă excentrică **θ** cosinus excentric $x = R \cdot cex\theta$ și sinus excentric $y = R \cdot sex\theta$ sunt coordonatele punctelor de intersecție ale unei drepte, a **dreptei excentrice d**, turnantă în jurul excentrului **E**, în acest caz (**Fig.31.2,c**), cu cercul **C(M, R)**, de rază **R** oarecare, cu centrul în punctul **M(a,b)**.

În acest scop, trebuie determinate coordonatele carteziene ale excentrului **E(e_x, e_y)** sau cele polare **E(e, ε)**, față de centrul **M**, considerat ca o nouă origine a unui reper cartezian drept sau /și polar.

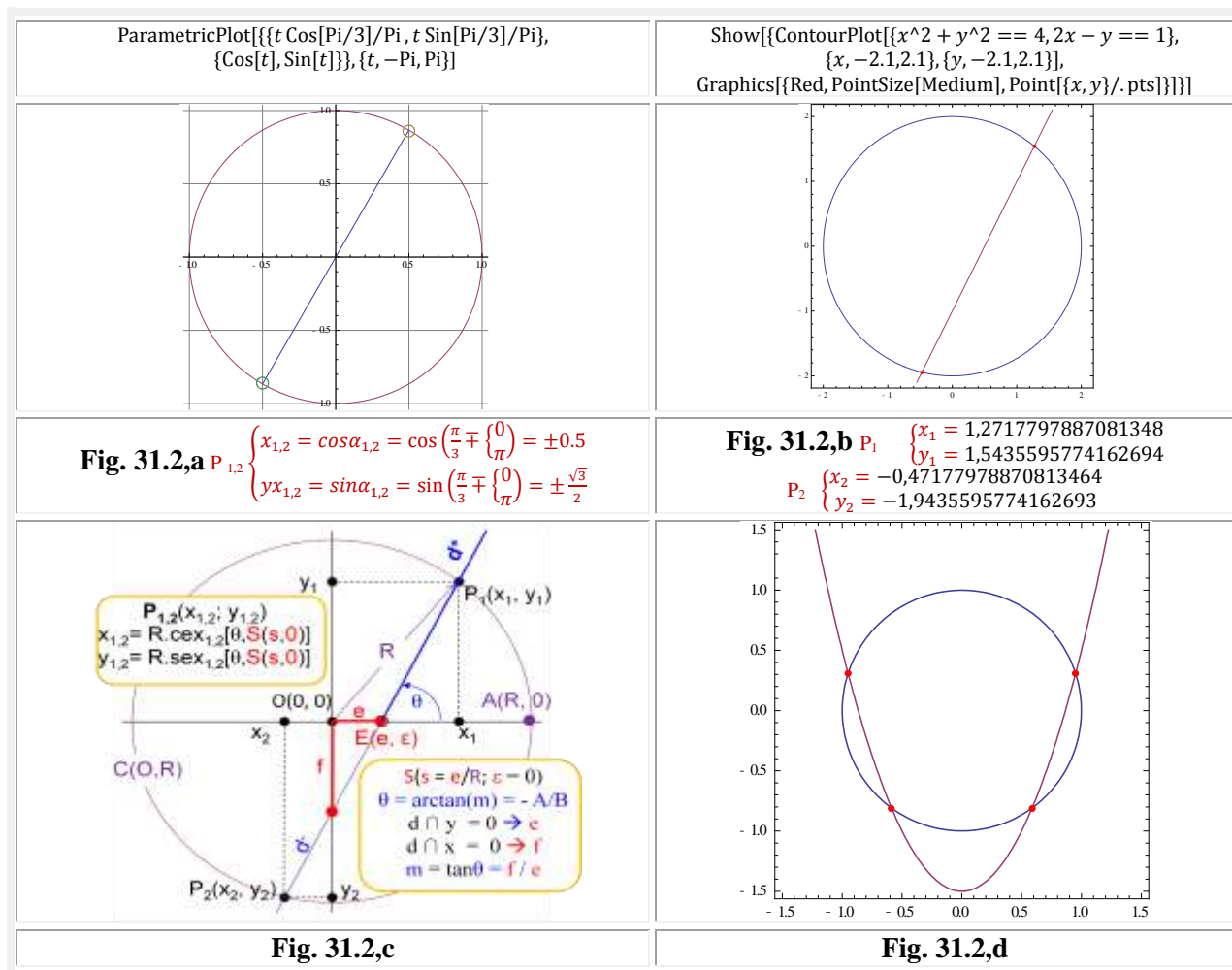
O dreaptă poate fi exprimată de ecuațiile (31.3). Din aceste ecuații pot fi obținute coordonatele carteziene ale unui punct **E(e_x, e_y)** sau pe cele polare **E(e, ε)**, punct conținut / aparținând dreptei și panta **m = tan α** , a dreptei, dacă ele nu sunt explicite.

INTERSECȚII ÎN PLAN

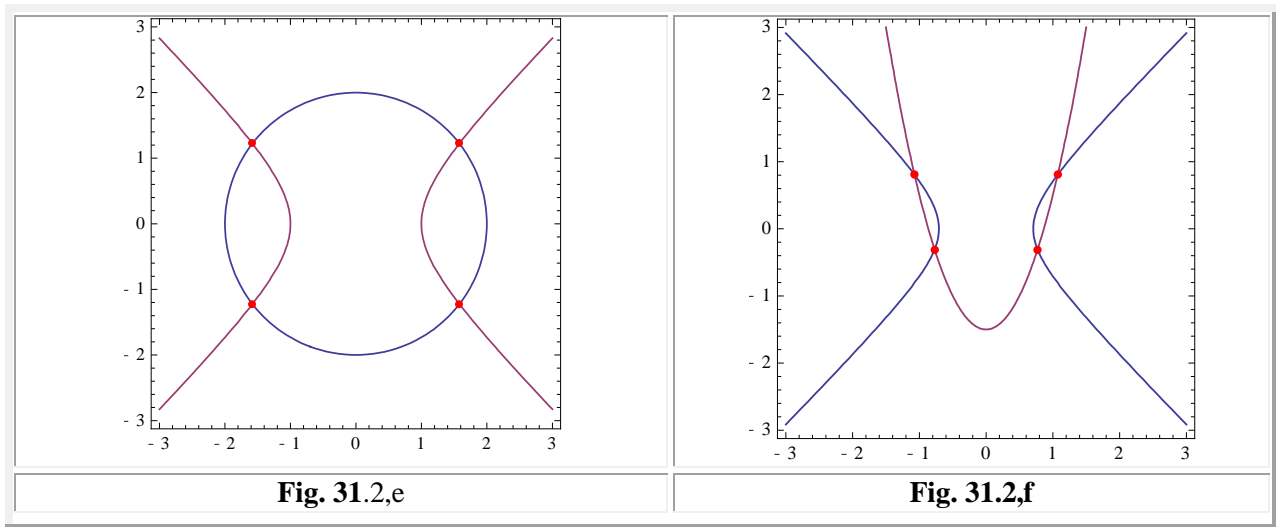
Astfel, pot fi determinate coordonatele de intersecție ale dreptei cu axele $Ox - A(a_d, 0)$ și/sau $Oy - B(0, b_d)$, intersectând dreapta d cu axele respective $y = 0$ și, respectiv $x = 0$.

Dacă coordonatele centrului cercului C sunt $M(a, b)$, atunci coordonatele excentrului $E_x(e, 0)$ considerat pe axa Ox sunt $e = e_x = a_d - a$ și $\epsilon = 0$, iar al excentrului $E_y(e, \frac{\pi}{2})$, considerat plasat pe axa Oy vor fi $e = e_y = b_d - b$.

$$(31.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \\ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ y = mx + n \\ \frac{x}{a_d} + \frac{y}{b_d} = 1 \\ x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0, \text{ (Hesse)} \\ \begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos\alpha \\ y = y_0 + r \cdot \sin\alpha \end{cases} \end{array} \right.$$



INTERSECȚII ÎN PLAN



Din prima ecuație generală (31.3) a drepte, panta ei se determină cu relația $m = \tan\theta = -\frac{A}{B}$.

Din ecuațiile cercului, pot fi deduse raza cercurilor R , din ecuațiile în care ea nu este evidentă și coordonatele centrului $M(a, b)$.

Un cerc poate fi exprimat prin ecuațiile (31.5) din care se pot deduce razele acestora R , recum și coordonatele centrului $M(a,b)$, exprimate, de exemplu, de relațiile (31.6).

În acest fel, sunt cunoscute toate mărimile necesare pentru exprimarea coordonatelor de intersecție ale cercului C cu dreapta d prin **FSM-CE** $x_{1,2} = cex_{1,2}\theta$ și $y_{1,2} = sex_{1,2}\theta$.

$$(31.4) \quad \begin{cases} x_{1,2} = R \cdot cex_{1,2}\theta = R \cdot \cos \{ \theta \mp \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \} \mp \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \\ y_{1,2} = R \cdot sex_{1,2}\theta = R \cdot \sin \{ \theta \mp \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \} \mp \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \end{cases}'$$

în care $\theta = \arctan(m)$, iar excentrul este $S(s = e/R, \varepsilon)$, caz prezentat în **figura 31.2,c**.

$$(31.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \text{ axe rectangulare} \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ Ec. normală} \\ \begin{cases} x = a + R \cdot \cos\alpha = a + R \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b + R \cdot \sin\alpha = b + R \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \\ \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) = R^2, \text{ Coord polare} \end{array} \right.$$

$$(31.6) \quad \begin{cases} R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \\ M(a, b) \end{cases}$$

Dacă dreapta d trece prin centrul cercului $C(O,R)$, ca în **figura 31.2,a**, atunci rezolvarea este banală, deoarece excentricitatea liniară $e = s = 0$ și **FSM-CE** degenerază în funcțiile centrice $\cos\alpha$ și $\sin\alpha$ și punctele de intersecție sunt

$$(31.7) \quad P_{1,2} \begin{cases} x_{1,2} = R \cdot \cos \alpha_{1,2} = R \cdot \cos [\arctan(m) \mp \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix} \right\}] \\ y_{1,2} = R \cdot \sin \alpha_{1,2} = R \cdot \sin [\arctan(m) \mp \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix} \right\}] \end{cases}$$

Programul **Mathematica 8** a lui **Stephan Wolfram** oferă posibilitatea determinării coordonatelor punctelor de intersecție a două curbe plane precum și poziționarea acestor puncte pe curbe, așa cum se poate constata în **figura 31.2,b** pentru un cerc, centrat în origine, cu o dreaptă excentrică; același caz ca și cel din **figura 31.2,c**. Și poate rezolva numeric și unele sisteme de ecuații pentru determinarea punctelor lor de intersecție, așa cum se poate deduce din **figura 31.2,b**.

Intersecția cercului cu o parabolă este reprezentată în **figura 31.2,d**, cu o hiperbolă în **figura 31.2,e**, cu o hiperbolă echilaterală, în **figura 31.2,e** și dintre o hiperbolă și o parabolă în **figura 31.2,f**.

31.3 INTERSECȚIA A DOUĂ STRĂMBE

Programul de matematică, anterior amintit, nu poate să rezolve, însă, problema intersecției a două strâmbe. În acest scop, e necesar să se rezolve sistemul de ecuații

$$(31.8) \quad \begin{cases} y = \theta - \arcsin [s_1 \cdot \sin (\theta - \varepsilon_1)] \\ y = \theta - \arcsin [s_2 \cdot \sin (\theta - \varepsilon_2)] \end{cases}$$

la care, răspunsul programului pentru **S₁**($s_1=0,4; \varepsilon_1=0$) și **S₂**($s_2=0,8; \varepsilon_2=\frac{\pi}{4}$) este:

`NSolve[ArcSin[0.4Sin[x]]-ArcSin[0.8Sin[x+Pi/4]]==0, x, Reals]`

`NSolve::ivar: -1_ is not a valid variable. >>`

`NSolve[False,-1,Reals]`

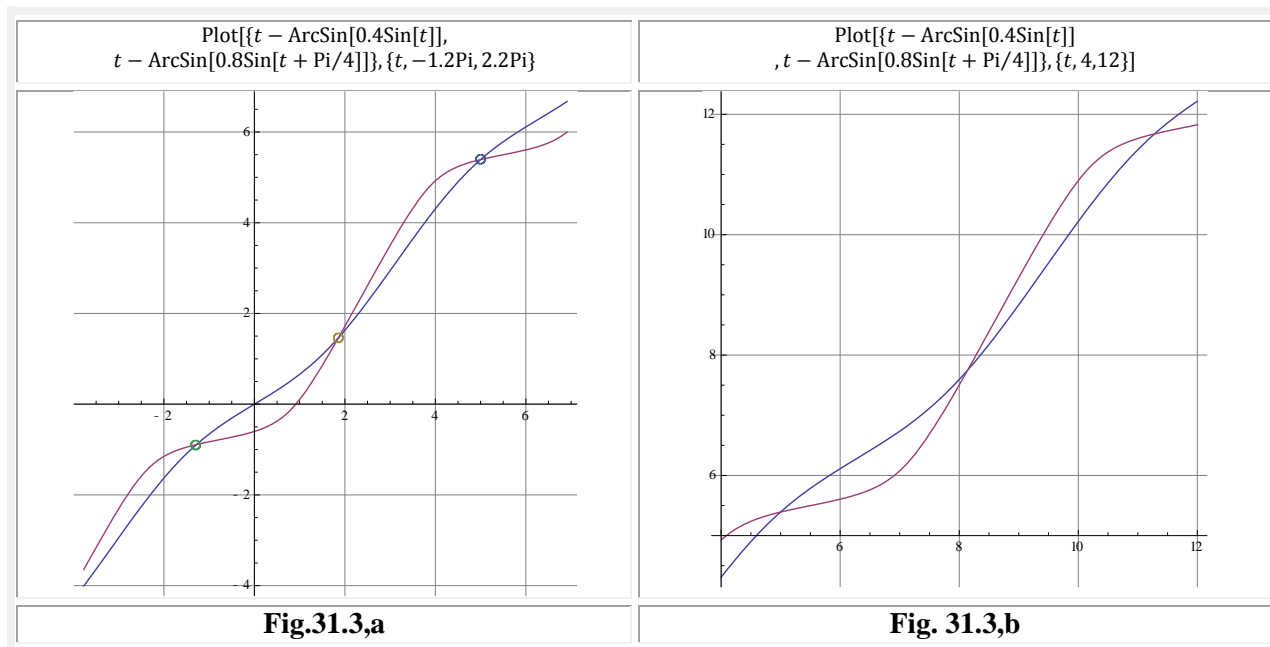
Nici programul de intersecții n-a putut da un rezultat. Raspunsul lui a fost

`NSolve[{x-ArcSin[0.4Sin[x]]==0,x-ArcSin[0.8Sin[x+Pi/4]]==0},{x}]`

`NSolve::ivar: -1_ is not a valid variable. >>`

`NSolve[{False,False},{-1}]`

De aceea s-a apelat la **metoda succesivă (MS)** din **Matematica Atomică** (V.www.cartiaz.ro)



INTERSECȚII ÎN PLAN

Tabelul 31.1

Ecuția	Eroarea	Ecuția	Eroarea
ArcSin[0.4Sin[0]]-ArcSin[0.8Sin[0+Pi/4]]	-0.60126	ArcSin[0.4Sin[1.0]]-ArcSin[0.8Sin[1.0+Pi/4]]	-0.554014
ArcSin[0.4Sin[1]]-ArcSin[0.8Sin[1+Pi/4]]	-0.55401	ArcSin[0.4Sin[1.1]]-ArcSin[0.8Sin[1.1+Pi/4]]	-0.499945
ArcSin[0.4Sin[2]]-ArcSin[0.8Sin[2+Pi/4]]	0.08953	ArcSin[0.4Sin[1.2]]-ArcSin[0.8Sin[1.2+Pi/4]]	-0.439536
ArcSin[0.4Sin[3]]-ArcSin[0.8Sin[3+Pi/4]]	0.55735	ArcSin[0.4Sin[1.3]]-ArcSin[0.8Sin[1.3+Pi/4]]	-0.37469
ArcSin[0.4Sin[4]]-ArcSin[0.8Sin[4+Pi/4]]	0.61620	ArcSin[0.4Sin[1.4]]-ArcSin[0.8Sin[1.4+Pi/4]]	-0.307159
ArcSin[0.4Sin[5]]-ArcSin[0.8Sin[5+Pi/4]]	-0.00171	ArcSin[0.4Sin[1.5]]-ArcSin[0.8Sin[1.5+Pi/4]]	-0.238442
ArcSin[0.4Sin[6]]-ArcSin[0.8Sin[6+Pi/4]]	-0.50730	ArcSin[0.4Sin[1.6]]-ArcSin[0.8Sin[1.6+Pi/4]]	-0.169749
ArcSin[0.4Sin[7]]-ArcSin[0.8Sin[7+Pi/4]]	-0.65825	ArcSin[0.4Sin[1.7]]-ArcSin[0.8Sin[1.7+Pi/4]]	-0.102012
ArcSin[0.4Sin[8]]-ArcSin[0.8Sin[8+Pi/4]]	-0.09076	ArcSin[0.4Sin[1.8]]-ArcSin[0.8Sin[1.8+Pi/4]]	-0.0359235
ArcSin[0.4Sin[9]]-ArcSin[0.8Sin[9+Pi/4]]	0.45177	ArcSin[0.4Sin[1.9]]-ArcSin[0.8Sin[1.9+Pi/4]]	0.0280326
Concluzia: cifrele protonice din domeniul (0; 9) sunt: 1, 5 și 8		Concluzia: Pentru cifra protonică 1 , prima cifră electronică este 8	
ArcSin[0.4Sin[1.84]]-ArcSin[0.8Sin[1.84+Pi/4]]	-	ArcSin[0.4Sin[1.854]]-ArcSin[0.8Sin[1.854+Pi/4]]	-0.001098
ArcSin[0.4Sin[1.85]]-ArcSin[0.8Sin[1.85+Pi/4]]	0.01006	ArcSin[0.4Sin[1.855]]-ArcSin[0.8Sin[1.855+Pi/4]]	-0.000459
ArcSin[0.4Sin[1.86]]-ArcSin[0.8Sin[1.86+Pi/4]]	-	ArcSin[0.4Sin[1.856]]-ArcSin[0.8Sin[1.856+Pi/4]]	0.000172
	0.00365		
	0.00272		
Concluzia: A 2-a cifră electronică este 5		Concluzia: A 3-a cifră electronică este 5	

ArcSin[0.4Sin[1.8557]]-ArcSin[0.8Sin[1.8557+Pi/4]]	0.000076894	ArcSin[0.4Sin[1.85571]]-ArcSin[0.8Sin[1.85571+Pi/4]]	-6.67303×10 ⁻⁶
ArcSin[0.4Sin[1.8558]]-ArcSin[0.8Sin[1.8558+Pi/4]]	0.000013056	ArcSin[0.4Sin[1.85572]]-ArcSin[0.8Sin[1.85572+Pi/4]]	-2.89442×10⁻⁷
ArcSin[0.4Sin[1.8559]]-ArcSin[0.8Sin[1.8559+Pi/4]]	0.000050778	ArcSin[0.4Sin[1.85573]]-ArcSin[0.8Sin[1.85573+Pi/4]]	6.09412×10 ⁻⁶
Concluzia: A 4-a cifră electronică este 7		Concluzia: A 5-a cifră electronică este 2	

Graficele celor două strâmbe, luate în considerație, sunt prezentate în **figura 31.3,a**, în care sunt marcate trei din infinitatea punctelor lor de intersecție și continuarea acestor grafice ale strâmbelor sunt prezentate în **figura 31.3,b**, fără marcarea punctelor lor de intersecție.

Metoda determinării succesive (**MS**) a cifrelor concomitente ale numărului soluție a coordonatei **x** a primului punct de intersecție $P_1(x_1, y_1)$ este prezentată în **tabelul 31.1**, până la determinarea celei de a 5-a cifre zecimale / **electronice**. Procesul, însă, poate fi continuat, oricât de mult, sau până la determinarea numărului exact, dacă acesta există, când eroare arezultă devine zero.

Metoda succesivă (MS) are la bază observația că metodele numerice caută să afle **numărul (atomul matematicii)** ca soluție a unei probleme și nu **cifrele concomitente** care-l compun și care sunt **particulele elementare** ale **atomului număr**. Ele (**cifrele concomitente**) trebuie depistate, în primul rând, ca să se compună **atomul – număr** căutat ca soluție.

Întroducând valoarea lui x_1 în expresia / ecuația celor două strâmbe, ordonatele lor y_1 trebuie să fie aceleași, ceea ce și sunt până la a 6-a zecimală.

A rezultat

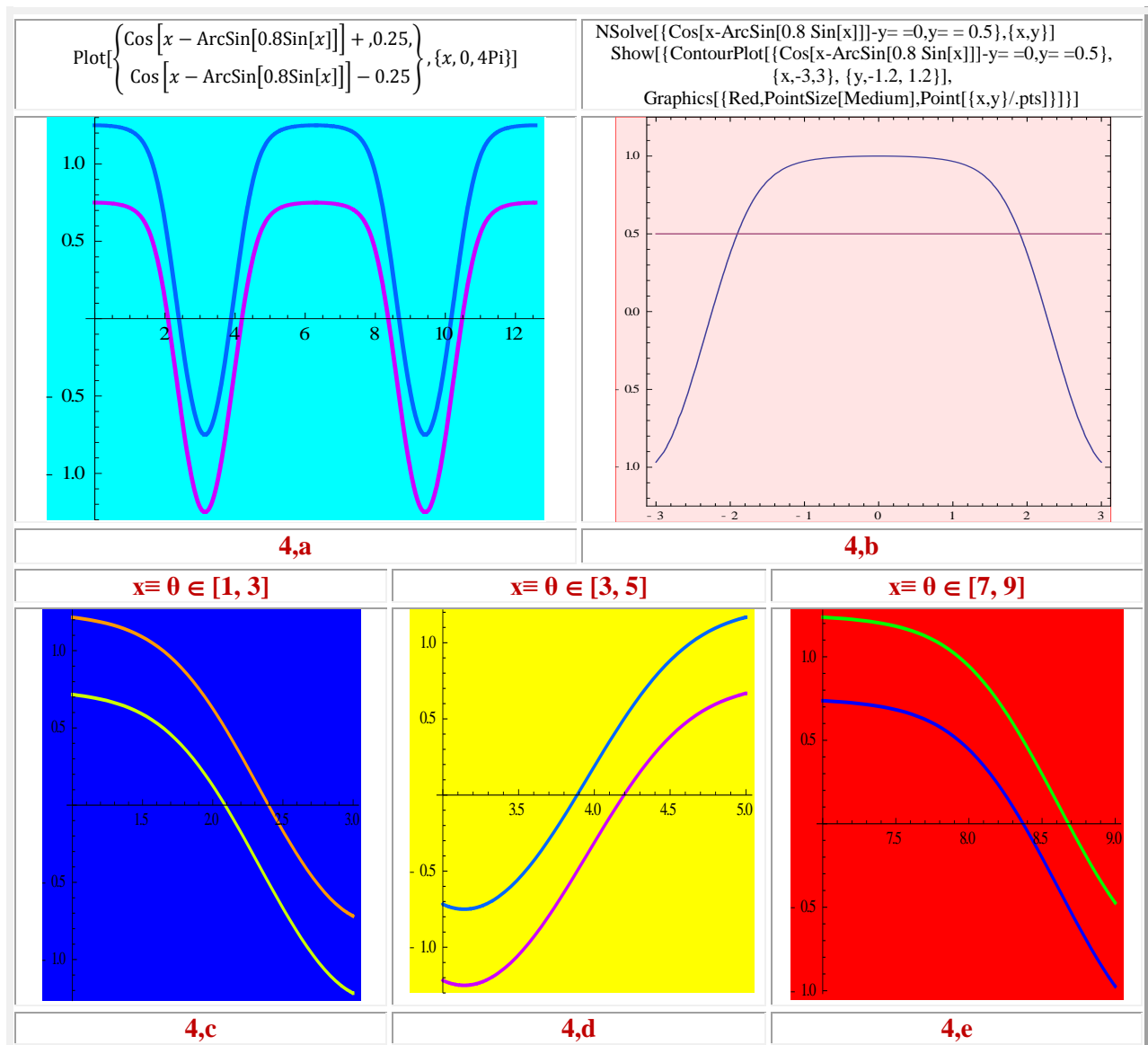
$$(31.9) \quad \begin{cases} x = \mathbf{1,85572} \\ y = \begin{cases} 1,85572 - \text{ArcSin}[0,4\text{Sin}[1.85572]] = 1,461732 \\ 1,85572 - \text{ArcSin}[0,8\text{Sin}[1,85572 + \text{Pi}/4]] = 1,461732 \end{cases} \end{cases}$$

În mod asemănător pot fi determinate și coordonatele celorlalte puncte de intersecție ale celor două strâmbe, ca și a oricăror alte strâmbe, de alte excentricități, ca și a acestora cu drepte, ș.m.a..

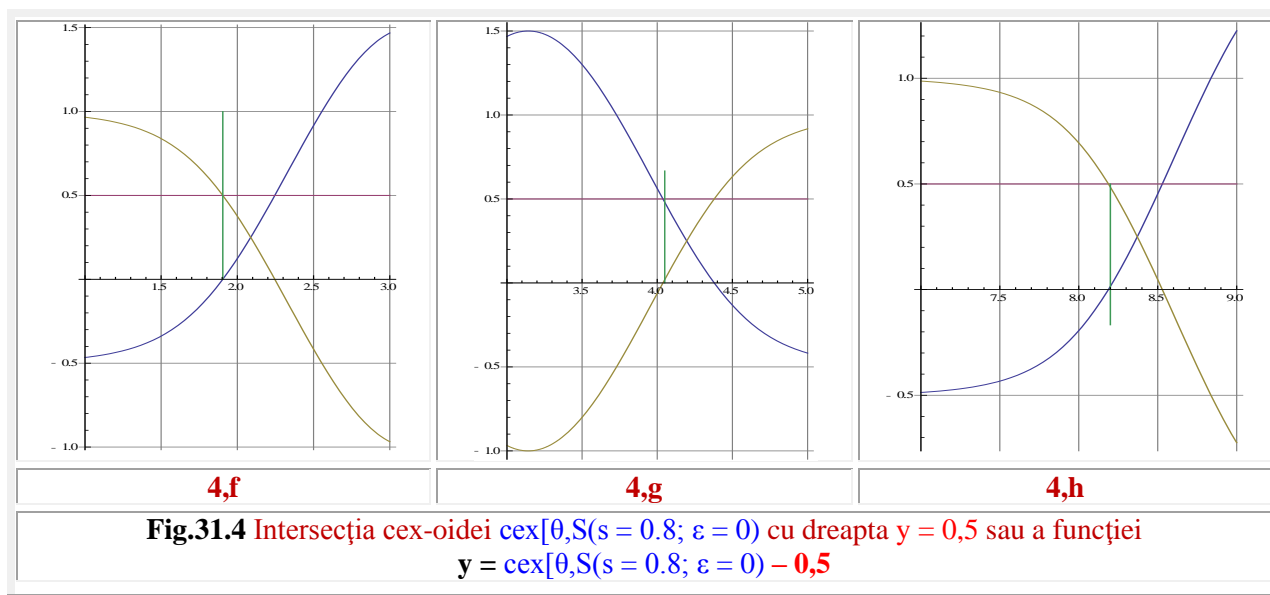
31.4 INTERSECȚIA UNEI cex-OIDE DE EXCENTRU $S(0,5; 0)$ CU DREAPTA $y = 0,5$

Această aplicație, oferă posibilitatea aprofundării metodei succesive (MS), de determinare succesivă a cifrelor **protonice** și, apoi, a celor **electronice** consecutive ale unui **număr**, comparat / considerat cu un **atom**, ce constituie o soluție a coordonatelor punctelor de intersecție a două curbe plane.

Cex-oida și dreapta, care se intersectează, sunt prezentate în **figura 314,a** ca și funcția $y(x \equiv \theta)$ care intersectează axa Ox într-o infinitate de puncte, dintre care, în domeniul **cifrelor neutronice 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9** intersecția are loc înaintea cifrelor denumite **protonice 1, 4, 8**, cu detalii în **figura 31.4, c, d și e**.



INTERSECȚII ÎN PLAN



Intersecția celor două curbe pretinde rezolvarea sistemului de ecuații

$$(31.10) \quad \begin{cases} y = cex[\theta, S(s, \varepsilon)] \\ y = C, C \in [-1, 1] \end{cases} \quad \text{sau, explicit} \quad \begin{cases} y = \cos[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] \\ y = C \end{cases}$$

sau a ecuațiilor cu o singură necunoscută

(31.11) $Y = C - cex[\theta, S(s, \varepsilon)]$ (Tabelul 31.2,a) sau

(31.12) $Y = cex[\theta, S(s, \varepsilon)] - C$ (Tabelul 31.2,b), pentru $C = 0,5$, $s = 0,8$ și $\varepsilon = 0$.

În tabel este prezentată coordonata x de intersecție, în conformitate cu cele două ecuații (31.12) și (31.13); coordonata y fiind evident $y = C$.

Au fost prezentate în paralel, coordonatele $x \equiv \theta$ ale punctului de intersecție dintre $Y(x)$ cu axa Ox în două ipostaze. În toate cazurile, “adevărul se află la mijloc”, adică între cele două cifre neutronice, din cele 9 considerate ca soluție, care schimbă de semn, deoarece una este prea mare și dă eroare pozitivă, iar cealaltă este prea mică și dă eroare negativă. Dacă, totuși, eroarea este nulă ($\Theta = \Delta y = 0$), înseamnă că s-a depistat soluția exactă și procesul determinării numărului soluție încetează.

Tabelul 2,a		Tabelul 2,b	
Ecuația	Eroarea	Ecuația	Eroarea
0.5-Cos[0-ArcSin[0.8 Sin[0]]]	-0.5	Cos[0-ArcSin[0.8 Sin[0]]]- 0.5	0.5
0.5-Cos[1-ArcSin[0.8 Sin[1]]]	-0.466002	Cos[1-ArcSin[0.8 Sin[1]]]- 0.5	0.466002
0.5-Cos[2-ArcSin[0.8 Sin[2]]]	0.124091	Cos[2-ArcSin[0.8 Sin[2]]]- 0.5	-0.124091
0.5-Cos[3-ArcSin[0.8 Sin[3]]]	1.46773	Cos[3-ArcSin[0.8 Sin[3]]]- 0.5	-1.46773
0.5-Cos[4-ArcSin[0.8 Sin[4]]]	0.562028	Cos[4-ArcSin[0.8 Sin[4]]]- 0.5	-0.562028
0.5-Cos[5-ArcSin[0.8 Sin[5]]]	-0.417592	Cos[5-ArcSin[0.8 Sin[5]]]- 0.5	0.417592
0.5-Cos[6-ArcSin[0.8 Sin[6]]]	-0.498333	Cos[6-ArcSin[0.8 Sin[6]]]- 0.5	0.498333
0.5-Cos[7-ArcSin[0.8 Sin[7]]]	-0.486679	Cos[7-ArcSin[0.8 Sin[7]]]- 0.5	0.486679
0.5-Cos[8-ArcSin[0.8 Sin[8]]]	-0.194136	Cos[8-ArcSin[0.8 Sin[8]]]- 0.5	0.194136
0.5-Cos[9-ArcSin[0.8 Sin[9]]]	1.22431	Cos[9-ArcSin[0.8 Sin[9]]]- 0.5	-1.22431
Concluzii: Cifrele protonice din domeniul 0 ... 9 sunt 1, 4, 8		Concluzii: Cifrele protonice din domeniul 0 ... 9 sunt 1, 4, 8	
0.5-Cos[1.9 - ArcSin[0.8 Sin[1.9]]]	-0.00515988 0.124091	Cos[1.9-ArcSin[0.8 Sin[1.9]]]- 0.5 Cos[2.0-ArcSin[0.8 Sin[2.0]]]- 0.5	0.00515988 -0.124091

INTERSECȚII ÎN PLAN

$0.5 \cdot \text{Cos}[2.0 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[2.0]]]$			
Concluzia: Prima cifră electronică este 9		Concluzia: Prima cifră electronică este 9	
$0.5 \cdot \text{Cos}[1.90 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.90]]]$	-0.00515988	$\text{Cos}[1.90 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.90]]] - 0.5$	0.00515988
$0.5 \cdot \text{Cos}[1.91 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.91]]]$	0.00697769	$\text{Cos}[1.91 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.91]]] - 0.5$	-0.124091
Concluzia: A 2-a cifră electronică este 0		Concluzia: A 2-a cifră electronică este 0	
$0.5 \cdot \text{Cos}[1.904 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.904]]]$	-0.000326684	$\text{Cos}[1.904 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.904]]] - 0.5$	0.000326684
$0.5 \cdot \text{Cos}[1.905 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.905]]]$	0.000886171	$\text{Cos}[1.905 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.905]]] - 0.5$	-0.000886171
Concluzia: A 3-a cifră electronică este 4		Concluzia: A 3-a cifră electronică este 4	
$0.5 \cdot \text{Cos}[1.9042 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.9042]]]$	-0.000326684	$\text{Cos}[1.9042 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.9042]]] - 0.5$	0.0000842587
$0.5 \cdot \text{Cos}[1.9043 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.9043]]]$	0.000886171	$\text{Cos}[1.9043 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.9043]]] - 0.5$	-0.0000369813
Concluzia: A 4-a cifră electronică este 2		Concluzia: A 4-a cifră electronică este 2	
$0.5 \cdot \text{Cos}[1.90426 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.90426]]]$	-0.0000842587	$\text{Cos}[1.90426 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.90426]]] - 0.5$	0.0000115169
$0.5 \cdot \text{Cos}[1.90427 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.90427]]]$	0.0000369813	$\text{Cos}[1.90427 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.90427]]] - 0.5$	-6.07374×10^{-7}
Concluzia: A 5-a cifră electronică este 6		Concluzia: A 5-a cifră electronică este 6	
$0.5 \cdot \text{Cos}[1.904269 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.904269]]]$		$\text{Cos}[1.904269 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.904269]]] - 0.5$	6.05062×10^{-7}
$0.5 \cdot \text{Cos}[2.004270 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[2.004270]]]$		$\text{Cos}[1.904270 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.904270]]] - 0.5$	-6.07374×10^{-7}
Concluzia: A 6-a cifră electronică este 9		Concluzia: A 6-a cifră electronică este 9	
A 7-a este 4, a 8-a este 0 Ș. A. M. D.			
Verificare: $0.5 \cdot \text{Cos}[1.90426940 - \text{ArcSin}[0.8 \text{ Sin}[1.90426940]]] = 1.096857571436515 \times 10^{-8}$			

Dacă se caută o soluție pe axa Ox, cum este cazul considerat ca exemplu, trebuie să ne apropiem de numărul exact, spre care tindem, și nu știm dacă-l vom atinge / afla, din stânga spre dreapta, adică în sensul pozitiv al axei Ox, deoarece **MS** determină succesiv cifrele care ne apropie de acest număr, începând cu cifrele nucleului (**întregi**), denumite **cifre protonice** și **adăugând succesiv cifrele electronice (zecimale)** la atomul / numărul căutat ca soluție.

Prima ipostază este când curba $Y(x)$ intersectează axa Ox, trecând din cadranul I în cadranul IV, caz în care, diferența (eroarea) $\Theta = \Delta y < 0$ la schimbarea semnelor erorilor și **cifra neutronică** (considerată drept **particulă elementară a atomului soluție**) se alege cea care are semnul negativ (**Fig.4,c** și **tabelele 2,a**) și care, deci este în stânga **punctului – soluție**.

A doua ipostază este cazul în care, curba traversează axa Ox din cadranul IV în cadranul I, când $\Theta = \Delta y > 0$, (**Fig.31.4,f** și **tabelele 31.2,b**) și se alege cifra care corespunde semnelui pozitiv al celor două erori limitrofe, de semne diferite, deoarece numai așa ne situăm tot la stânga valorii / numărului (**atomic**) căutat ca soluție a unei probleme; în cazul de față, a abscisei punctului de intersecție x.

Se observă că, pe măsura determinării succesive a cifrelor numărului-soluție, erorile prezentate în tabele, arată și gradul de precizie cu care ne apropiem de numărul soluție exactă.

Așa cum s-a arătat în lucrarea “Matematica atomică” → (www.cartiaz.ro), procesul determinării soluției poate fi mult scurtat, dacă, o parte din cifrele care alcătuiesc numărul-soluție / **atomul** matematic sunt determinate prin reprezentarea graficele curbelor în domenii din ce în ce mai reduse în jurul soluției.

Așa cum rezultă din **figura 31.4,b**, programul **Mathematica 8** a lui **Stephan Wolfram**, considerat unul dintre cele mai evolute programe comerciale de matematică computațională, n-a putut soluționa această problemă, nici ca intersecție de curbe și nici ca rezolvare numerică a ecuației neliniare cu o singură necunoscută.

Ceea ce nu însemna că nu există și alte programe de matematică computațională, capabile să rezolve cu succes această problemă, cum sunt cele utilizate de ilustrul programator american de origine ramână

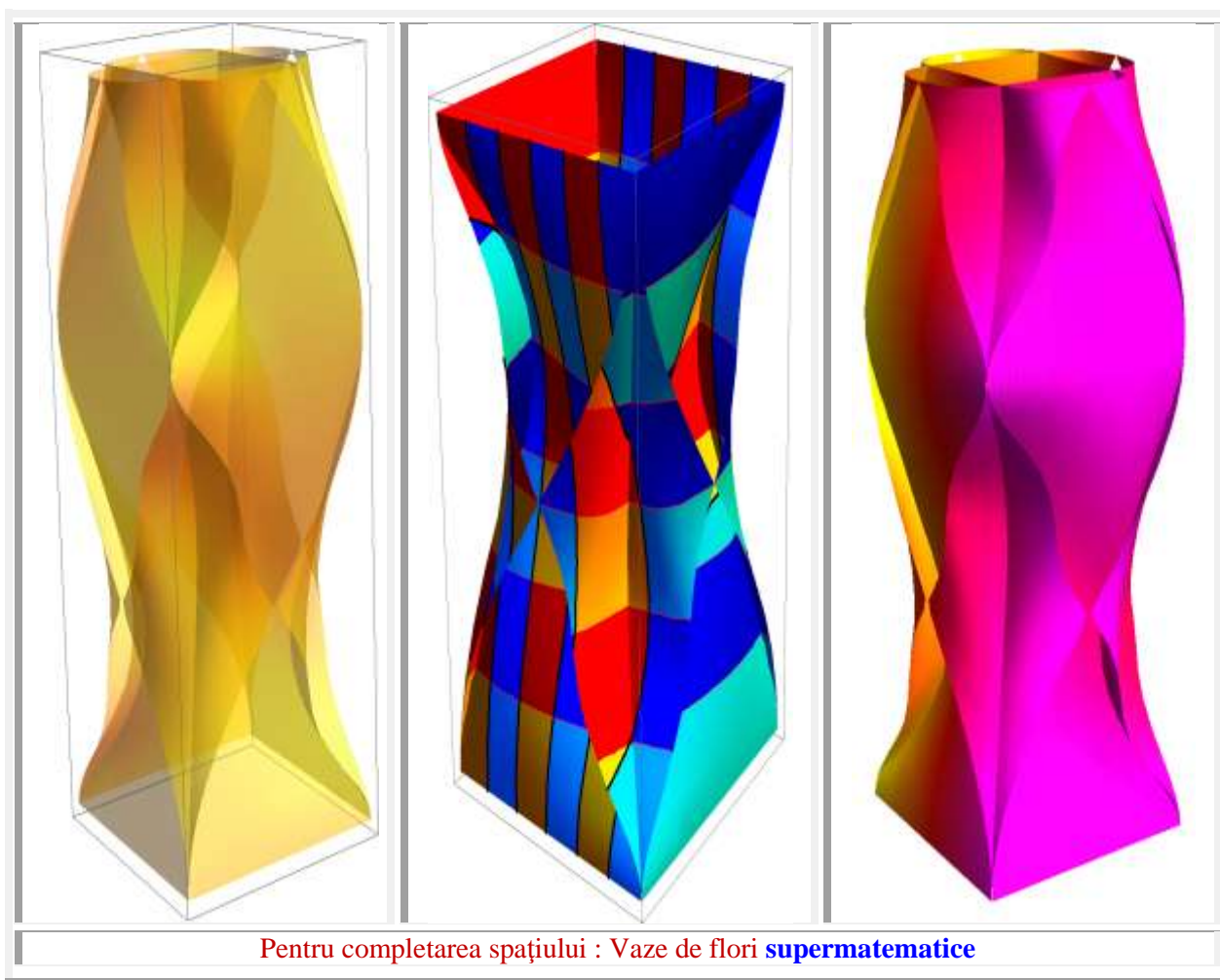
INTERSECȚII ÎN PLAN

Dr. Ing **Dan Micșa** (www.dmicșa.com, dan@dmicșa.com), absolvent al **Universității “POLITEHNICA”** din Timișoara. El a fost acela care a realizat **primele programe Realan 1** de vizualizare a **funțiilor supermatematice circulare excentrice (FSM-CE)** fără scrierea funcției circulare centrice **cos**, **sin**, ci direct **cex**, **sex** ș.a.m.d., în cadrul proiectului său de diploma la absolvirea secției de TCM.

Dar, existența acestor programe de matematică computațională superperformante, nu știrbește cu nimic din importanța apariției unor **metode matematice eminamente noi**, ținând cont de faptul că matematica actuală operează cu **numere** și nu cu **cifrele** care-l compun.

Tocmai pentru a sublinia și a scoate în evidență importanța **cifrelor**, ca **particule elementare ale numerelor**, care, de la caz la caz, devin **cifre protonice** sau **cifre electronice**, s-a recurs la o comparație / alăturare a **matematicii** cu / de **fizica** particulelor elementare, de **Fizica Atomică**, denumind această prim pas, un pas mic pentru matematică, dar realizat într-un nou domeniu, domeniul **Matematicii Atomice**.

Este bine de reținut, în concluzie, că **numerele** sunt “**atomii matematicii**” și cifrele “**particulele sale elementare**”



Motto:” Nu râdeţi de **zero**. El e **împăratul** numerelor negative” Valeriu Butulescu din *Steapa memoriei*
Şi separă protonii, cifrele supraunitare, de electroni, cifrele subunitare, ale atomului –număr.
 Autorul

Capitolul 32

REZOLVAREA ECUAŢIILOR DE GRAD SUPERIOR CU COEFICEINŢI OARECARE

32.1.INTRODUCERE

Este incredibil că o metodă extrem de simplă şi facil de aplicat, de soluţionare a ecuaţiilor de grad superior, oricât de ridicat, cu coeficienţi oarecare, care permite *determinarea succesivă a cifrelor care compun numerele soluţii ale oricărei ecuaţiei*, a rămas fără ecou în rândul matematicienilor, ca şi al celorlalţi utilizatori de matematică, unii chiar consumatori care, zic ei, “mâncă matematică pe paine”. E vorba de unii programatori. Unul prezentat în continuare.

Dacă peste 300 (**trei sute !**) de ani, nimeni n-a observat că marele **EULER** (Leonhard), la definirea funcţiilor trigonometrice, ca funcţii circulare, pe cercul unitate, fost cerc trigonometric, a considerat un caz cu totul particular în care originea **O(0, 0)**, centrul cercului **C(0, 0)** şi polul **P(0, 0)** erau de-a valma suprapuse în acelaşi loc în planul cercului, din care cauză matematica a rămas, atâta timp, *enorm de sărăcită*, cu *un singur rând de entităţi*.

În privinţa *numerelor* situaţia este cu mult mai veche şi cu mult mai tristă. **Matematica centrică (MC)** caută **numere** şi nu **cifrele** care-l compun !. Şi după ce-l găsesc pe celebrul π (Pi), de exemplu, constată cu stupeoare că π nu-i un număr, ci valoarea minimă a unei funcţii **II(s)** (Pi mare) în punctul de abscisă sau pentru **s = 0** (V. Mircea Eugen Şelariu “**DEZLEGAREA MISTERULUI NUMĂRULUI π** ” www.cartiaz.ro).

A trebuit să vină un român să observe că prin simpla deplasare a polului **P** din centrul **O(0, 0)** şi devenit excentrul **S(s, ϵ)** se pot obţine o infinitate de alte funcţii cos, sin, tan, ş.a precum şi o imensitate de alte funcţii noi (aex, bex, cex, dex, ... – deocamdată lipsesc -...rex, sex, tex, texv, ş.m.a.) ca şi multe alte entităţi matematice noi.

Noua matematică, cu o infinitate de entităţi, a fost denumită **matematica excentrică (ME)**, datorită deplasării din centru a polului şi denumit **excentru S(s, ϵ)**, iar cealaltă, ordinară, cu câte o singură entitate, a fost denumită **matematică centrică (MC)**; împreună, adică prin reuniunea lor, dând naştere **supermatematicii (SM)**. Cuvânt devenit “rău famat” în rândul multor cărcotaşi, sau fiind un produs 100 % românesc să fie posibile şi alte raţiuni pentru care **supermatematica** este ferită de ochii lumii ?

După peste 40 de ani ([1] anul 1972 → prima *publicare* în 1978) de la descoperirea sa sau, mai precis, **inventarea** supermatematicii, comparând discrepanţa dintre importanţa pentru ştiinţă a noii matematici, numită de specialiştii de vază “*matematica mileniului III*” şi ecoul ei în rândul matematicienilor, autorul este îndreptăţit să creadă în teoria conspiraţiei. **CUI (QUID) PRODEST ?**

Iată un exemplu de subliniere a importanţei **SM** pentru dezvoltarea altor stiinţe de vârf:

”.....

Spre exemplu teoria relativitatii restrinse se poate obţine aplicand transformările lui **Lorentz** între două sisteme de referinţă inerţiale şi considerand viteza luminii constanta, se obţine astfel ecuaţia energiei.

Mai mult decât atât, teoria relativităţii se poate formaliza matematic în mod simplu şi direct folosind « **supermatematica** ». Denumirea şi conceptul de **supermatematică** este familiar specialiştilor, ea este în fapt o familie mult lărgită de funcţii trigonometrice, obţinute prin acordarea gradelor de libertate posibile în sistemul trigonometric.

Supermatematica a fost fondată și dezvoltată de Domnul Profesor Şelariu din centrul Universitar Timișoara. Dumnealui a activat în cadrul Facultății de Mecanică, eu am avut contact direct cu dansul la Institutul de Electrochimie și Materie Condensată din Timișoara unde lucra cu o jumătate de normă, fiind la pensie. În cadrul întrevederii mi-a descris funcțiile **supermatematice** pe subfamilii și pe fiecare în particular.

Un bun matematician poate ajunge la modele simple și directe numai după un îndelug și atent studiu folosind mai mult în mod extensiv decât intensiv resursele pe care le oferă matematica.

.....” **Nebăl Ionuț** din articolul “Cateva impresii despre lumea în care trăim” de pe <http://desprelumea.blogspot.ro/>

Să fie aceeași situație și cu “**Matematica atomică**”? Dacă matematica actuală (**CENTRICĂ**) operează doar cu **numere**, pe care le caută cu asiduitate și care sunt atomii **MC**, matematicienii n-au înțeles, încă, faptul că *orice număr este alcătuit din cifre* și că **acestea**, ca și succesiunea lor în număr, **trebuie determinate** și nu direct numărul. Altfel spus, spre deosebire de Fizica, Matematica n-a intrat încă, în era atomică!

Cifrele sunt *particulele elementare ale numărului*, adică, ale numărului ridicat la rangul de atom pentru a șoca și, totodată, pentru a atrage atenția asupra Fizicii Atomice care a depășit stadiul în care se complace matematica, oprită / limitată la număr !!. Poate așa...

Dar, reacția a fost chiar inversă, de respingere... **CUI (QUID) PRODEST ?**

Această metodă poate fi deslușită în articolele **Mircea Eugen Şelariu**: 1) “**CIFRELE, PARTICULELE ELEMENTARE ALE MATEMATICII**”, pag.1-a, 2) “**INTERSECȚII ÎN PLAN**” pag.4-a și 3) “**MATEMATICA ATOMICA. METODA DETERMINĂRII SUCCESIVE A CIFRELOR (CONSTITUTIVE) CONSECUTIVE ALE UNUI NUMAR**”, pag. a 4-a, toate de pe www.cartiaz.ro.

De ce scriu acest lucru ? Pentru că am căutat pe internet rezolvarea ecuațiilor de grad superior, ca și a celor polinomiale și am dat peste un frumos curs de “**Ecuații polinomiale**” la adresa

http://www.youtube.com/watch?v=AIYKHBXfk_w și unul interesant, clasic, curs ținut de un ilustru pedagog, iar, la adresa următoare, am dat peste o metodă computațională nouă, **dar greșită**, așa cum se va demonstra în continuare, de rezolvare a unei ecuații de gradul 9:

<http://forum.computergames.ro/93-stiinta/639915-rezolvarea-ecuațiilor-de-grad-superior.html>



REDĂM :

“Am bagat și eu niste coeficienți, așa din burta, și folosind metoda lui **Newton** am rulat un program făcut de mine în limbaj **QBASIC 2.2** pe un calculator de tip palmtop - **HP 200LX** (nu se (m)ai fabrica din 1996) și care după vreo câteva zeci de iterații mi-a dat rezultatul 🍌.

Surprinzător este că pentru o alternanță a semnelor coeficienților (+, -, +, -,-), există doar o singură rădăcină reală adică ecuația are o singură soluție. La fel am “rezolvat-o” și cu o aplicație de tip “solver” a calculatorului de tip CPB - **HP 50g** 🍌.

Uite ecuația polinomială de gradul 9 cu coeficienții aleatorii (ar fi interesant de știut coeficienții ecuației tatălui lui **SM** ca să vedem rezultatul):

$$0,25 * X^9 - 1,98 * X^8 + 3,17 * X^7 - 17 * X^6 + 97 * X^5 - 127 * X^4 + 357 * X^3 - 789 * X^2 + 1027 * X - 3577 = 0$$

Soluția este aflată cu HP 50g este **X=6,28913206734**”

32.2. METODA SUCCESIVĂ (MS-MEŞ) DE DETERMINARE A CIFRELOR CONSECUTIVE ALE UNUI NUMĂR

32.2.1 DETERMINAREA NUMĂRULUI DE SOLUŢII ŞI A DOMENIULUI LOR

Şi acum, să aplicăm “Metoda succesivă” (MS) de determinare a cifrelor consecutive ale unui numărului, soluție a ecuație precedente $F(x) = 0$.

Aşa cum orice drum începe cu un prim pas, tot așa, orice număr începe / are o prima cifră.

Determinarea ei este facilă, deoarece există doar **10 cifre (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)**, pe care le vom considera, succesiv, ca soluții ale ecuației, prin înlocuirea lui **X**, în ecuație, cu cifrele pe care le considerăm **neutrone**, deoarece nu le cunoaștem, încă, semnul / sarcina, așa cum se poate constata în **tabelul 32.1**.

Rădăcinile ecuației $F(X) = 0$ apar acolo unde funcția $F(X)$ intersectează axa OX , adică unde $F(X)$ trece de la valori / erori negative la cele pozitive, adică din **cadranul IV** în **cadranul I**, cum este cazul rădăcinilor / soluțiilor **X₁** și **X₃** sau invers, din **I** în **IV**, de la eroare în plus (+) la eroare în minus (-) cum este cazul rădăcinii **X₂** (**Tab.32,1**).

În prealabil se vizionează, prin tatonări, graficul grob al funcției $F(x)$, prezentat în **figura 32.1,a**. Antamarea are loc pentru domeniul $X \in [-10, 10]$ și are drept scop să verifice dacă, nu cumva, aceleași valor $X_{1,2,3}$ pot fi și negative. Se observă (**Fig.32.1,a**) că nu, astfel că ele sunt strict pozitive și, în consecință, vor fi denumite **cifre protonice** sau cifrele părții întregi ale **numărului pozitiv**.

Apoi, domeniul se restrânge (**Fig.32.1,b**) la $X \in [0, 7]$, constatându-se, anterior, că pentru $X < 0$ nu există soluții. Restrângerea domeniului continuă până când intersecția cu axa OX , locul în care $F(X)$ intersectează axa OX , mai poate fi lizibil, pentru determinarea mai precisă a domeniilor soluțiilor, (**Fig.32.1,c... Fig.32.1,d**).

Tabelul 32.1 Determinarea zonelor cu soluții / rădăcini ale ecuației și, implicit, a numărului lor		
CIFRA	E C U A Ţ I A	VALOAREA /EROAREA
0	$0.25 \cdot 0^9 - 1.98 \cdot 0^8 + 3.17 \cdot 0^7 - 17 \cdot 0^6 + 97 \cdot 0^5 - 127 \cdot 0^4 + 357 \cdot 0^3 - 789 \cdot 0^2 + 1027 \cdot 0 - 3577$	-3577.
1	$0.25 \cdot 1^9 - 1.98 \cdot 1^8 + 3.17 \cdot 1^7 - 17 \cdot 1^6 + 97 \cdot 1^5 - 127 \cdot 1^4 + 357 \cdot 1^3 - 789 \cdot 1^2 + 1027 \cdot 1 - 3577$	-3027.56
2	$0.25 \cdot 2^9 - 1.98 \cdot 2^8 + 3.17 \cdot 2^7 - 17 \cdot 2^6 + 97 \cdot 2^5 - 127 \cdot 2^4 + 357 \cdot 2^3 - 789 \cdot 2^2 + 1027 \cdot 2 - 3577$	-1812.12
PRIMA RĂDĂCINĂ X₁ ∈ (2, 3) ↗		
3	$0.25 \cdot 3^9 - 1.98 \cdot 3^8 + 3.17 \cdot 3^7 - 17 \cdot 3^6 + 97 \cdot 3^5 - 127 \cdot 3^4 + 357 \cdot 3^3 - 789 \cdot 3^2 + 1027 \cdot 3 - 3577$	1795.76
A DOUA RĂDĂCINĂ X₂ ∈ (3, 4) ↘		
4	$0.25 \cdot 4^9 - 1.98 \cdot 4^8 + 3.17 \cdot 4^7 - 17 \cdot 4^6 + 97 \cdot 4^5 - 127 \cdot 4^4 + 357 \cdot 4^3 - 789 \cdot 4^2 + 1027 \cdot 4 - 3577$	-4349.
5	$0.25 \cdot 5^9 - 1.98 \cdot 5^8 + 3.17 \cdot 5^7 - 17 \cdot 5^6 + 97 \cdot 5^5 - 127 \cdot 5^4 + 357 \cdot 5^3 - 789 \cdot 5^2 + 1027 \cdot 5 - 3577$	-52917.
6	$0.25 \cdot 6^9 - 1.98 \cdot 6^8 + 3.17 \cdot 6^7 - 17 \cdot 6^6 + 97 \cdot 6^5 - 127 \cdot 6^4 + 357 \cdot 6^3 - 789 \cdot 6^2 + 1027 \cdot 6 - 3577$	-70997.6
A TREIA RĂDĂCINĂ X₃ ∈ (6, 7) ↗		
7	$0.25 \cdot 7^9 - 1.98 \cdot 7^8 + 3.17 \cdot 7^7 - 17 \cdot 7^6 + 97 \cdot 7^5 - 127 \cdot 7^4 + 357 \cdot 7^3 - 789 \cdot 7^2 + 1027 \cdot 7 - 3577$	697448.
8	$0.25 \cdot 8^9 - 1.98 \cdot 8^8 + 3.17 \cdot 8^7 - 17 \cdot 8^6 + 97 \cdot 8^5 - 127 \cdot 8^4 + 357 \cdot 8^3 - 789 \cdot 8^2 + 1027 \cdot 8 - 3577$	5.3223×10^6
9	$0.25 \cdot 9^9 - 1.98 \cdot 9^8 + 3.17 \cdot 9^7 - 17 \cdot 9^6 + 97 \cdot 9^5 - 127 \cdot 9^4 + 357 \cdot 9^3 - 789 \cdot 9^2 + 1027 \cdot 9 - 3577$	2.28466×10^7
CONCLUZIA: Există trei radacini / soluții ale ecuației		

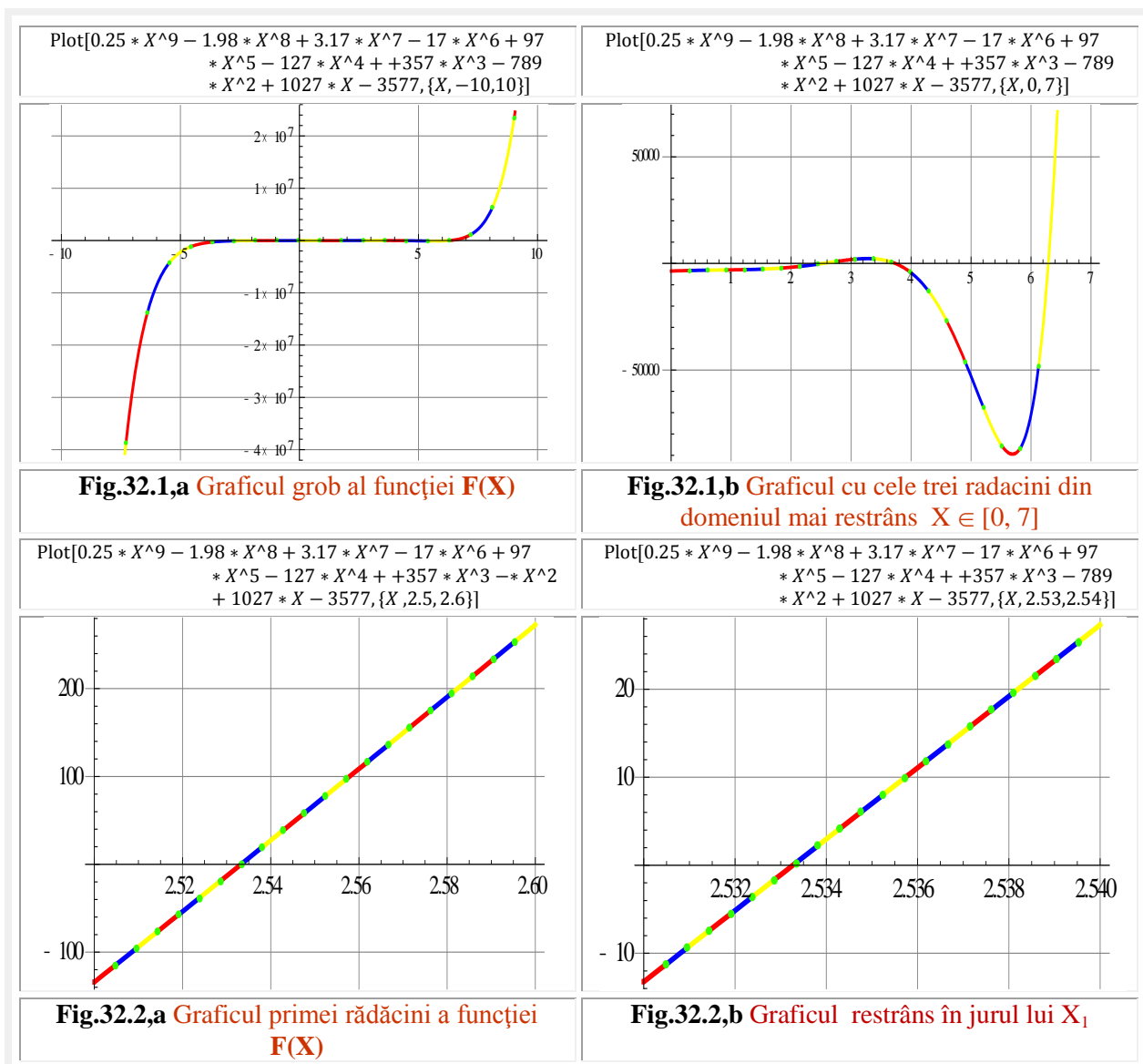
Acum se poate observa că ecuația, în domeniul $X \in [0, 7]$, are mai multe soluții decât a prevăzut / găsit sau, mai precis, n-a găsit / prevăzut programatorul-rezolvator.

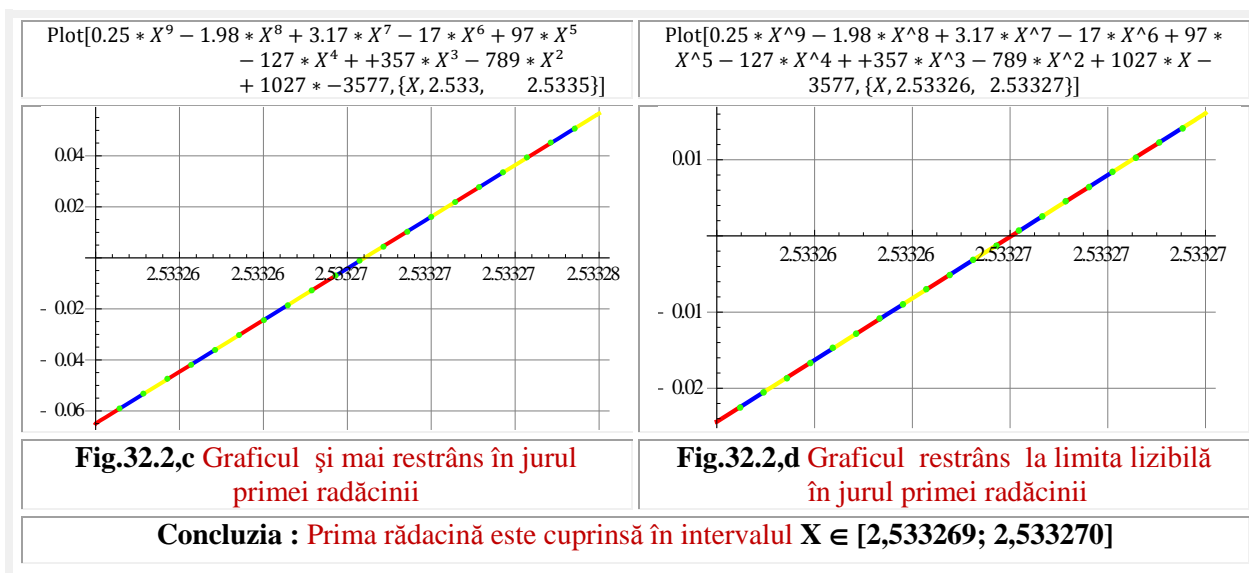
Rolul determinării grafice a domeniului soluțiilor, a locurilor / punctelor în care graficul $F(X)$ intersectează axa X este acela de-a ne apropia mai rapid și mai facil de soluțiile exacte, prin reducerea pașilor, altfel necesari, aplicării **MS - MEŞ analitice**.

Ca urmare se observă că există și alte două soluții, în afara aceleia indicate de / pe web site-ul amintit și că $X = 6,28913206734$ poate fi a treia rădăcină / soluție $X_3 \in (6, 7)$.

32.2.2. DETERMINAREA PRIMEI SOLUȚII / RĂDĂCINI X_1 A ECUAȚIEI

Prin restrângerea domeniului, de la $X \in [0, 7]$, s-a determinat, printr-o observație atentă, că prima soluție / rădăcină este în domeniul $X \in (2,533269; 2,533270)$.





Pentru derminarea în continuare a cifrelor zecimale (0, 1, 2, ..., 9) – numite electronice, se trece la aplicarea metodei succesive analitice: Se scrie de 10 ori ecuația, așa cum s-a făcut în tabelul 32.1 și, în prima, se înlocuiește X cu valoarea $X = 2,5332690$, în a adoua cu $X = 2,5332701$, în a treia cu a treia cifră posibilă din cele 10 existente, adică $X = 2,5332702$ ș.a.m.d. și în ultima ecuație cu $X = 2,5332799$, așa cum rezultă din tabelul 32.2, în care s-au trecut doar zonele de interes.

Tabelul 32.2 Determinarea primei soluții / rădăcini X_1 a ecuației		
	Ecuația	Valoarea / Erorarea
	$0.25 * X^9 - 1.98 * X^8 + 3.17 * X^7 - 17 * X^6 + 97 * X^5 - 127 * X^4 + 357 * X^3 - 789 * X^2 + 1027 * X - 3577$	
8	$0.25 * 2.5332698^9 - 1.98 * 2.5332698^8 + 3.17 * 2.5332698^7 - 17 * 2.5332698^6 + 97 * 2.5332698^5 - 127 * 2.5332698^4 + 357 * 2.5332698^3 - 789 * 2.5332698^2 + 1027 * 2.5332698 - 3577$	-0.061107842571800575
9	$0.25 * 2.5332699^9 - 1.98 * 2.5332699^8 + 3.17 * 2.5332699^7 - 17 * 2.5332699^6 + 97 * 2.5332699^5 - 127 * 2.5332699^4 + 357 * 2.5332699^3 - 789 * 2.5332699^2 + 1027 * 2.5332699 - 3577$	-0.059744895095718675
Aici este domeniul soluției X_1 → următoarea cifră exactă, a 8 - a, este 9		
0	$0.25 * 2.5332700^9 - 1.98 * 2.5332700^8 + 3.17 * 2.5332700^7 - 17 * 2.5332700^6 + 97 * 2.5332700^5 - 127 * 2.5332700^4 + 357 * 2.5332700^3 - 789 * 2.5332700^2 + 1027 * 2.5332700 - 3577$	+ 0.016109877235976455
1	$0.25 * 2.5332701^9 - 1.98 * 2.5332701^8 + 3.17 * 2.5332701^7 - 17 * 2.5332701^6 + 97 * 2.5332701^5 - 127 * 2.5332701^4 + 357 * 2.5332701^3 - 789 * 2.5332701^2 + 1027 * 2.5332701 - 3577$	+ 0.016515081099896634
<p>Cifrele consecutive determinate grafic au fost 2.533269 A 8-a cifră a numărului X_1 și a 7-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este 9 → $X_1 = 2.5332699 \dots$</p>		

Din tabelul 32.2 rezultă că prima cifră determinată analitic și a 8-a cifra exactă a soluției X_1 , pe lângă celelalte 7 (**2.533269**), dintre care una **protonică (2)** și **6 electronice (.533269)** fiind subunitare, determinate grafic, dar care puteau la fel de bine să fie determinate tot analitic, este **9**.

În continuare se trece la determinarea celei de a **9** cifre a numărului X_1 și a celei de a **8**-a cifre **electronice (zecimale)**, care se face conform aceluiași tipic: în fața ultimei coloane de cifre **0 ...9**, din valorile lui X_1 , din toate cele 10 ecuații, se trece pe toate coloanele X cifra anterior determinată ca soluție, adică, cifra **9** (Tab.32.3). Rezultă că între **2** și **3** se schimbă semnul valorii / erorii, deci următoarea cifră electronică, ca o componentă a soluției exacte a lui X_1 este **2**.

Tabelul 3 Determinarea celei de a 8-a cifre zecimale (electronică) a lui X_1		
CI-FRA	ECUAȚIA	Valoarea / Eroarea
0	$0.25 * 2.5332690^9 - 1.98 * 2.53326990^8 + 3.17 * 0^7 - 17 * 2.53326990^6 + 97 * 0^5 - 127 * 2.53326990^4 + 357 * 2.53326990^3 - 789 * 2.53326990^2 + 1027 * 0 - 3577$	-14844.029449164675
1	$0.25 * 2.5332691^9 - 1.98 * 2.53326991^8 + 3.17 * 1^7 - 17 * 2.53326991^6 + 97 * 1^5 - 127 * 2.53326991^4 + 357 * 2.53326991^3 - 789 * 2.53326991^2 + 1027 * 1 - 3577$	-13716.859677302495
2	$0.25 * 2.5332692^9 - 1.98 * 2.53326992^8 + 3.17 * 2^7 - 17 * 2.53326992^6 + 97 * 2^5 - 127 * 2.53326992^4 + 357 * 2.53326992^3 - 789 * 2.53326992^2 + 1027 * 2 - 3577$	- 9280.269905440326
AICI ESTE SOLUȚIA → următoarea cifră exactă, a 9-a, este 2		
3	$0.25 * 2.5332693^9 - 1.98 * 2.53326993^8 + 3.17 * 3^7 - 17 * 2.53326993^6 + 97 * 3^5 - 127 * 2.53326993^4 + 357 * 2.53326993^3 - 789 * 2.53326993^2 + 1027 * 3 - 3577$	+ 18740.75986642184
4	$0.25 * 2.5332694^9 - 1.98 * 2.53326994^8 + 3.17 * 4^7 - 17 * 2.53326994^6 + 97 * 4^5 - 127 * 2.53326994^4 + 357 * 2.53326994^3 - 789 * 2.53326994^2 + 1027 * 4 - 3577$	140529.249638284
5	$0.25 * 2.5332695^9 - 1.98 * 2.53326995^8 + 3.17 * 5^7 - 17 * 2.53326995^6 + 97 * 5^5 - 127 * 2.53326995^4 + 357 * 2.53326995^3 - 789 * 2.53326995^2 + 1027 * 5 - 3577$	541072.2194101461
6	$0.25 * 2.5332696^9 - 1.98 * 2.53326996^8 + 3.17 * 6^7 - 17 * 2.53326996^6 + 97 * 6^5 - 127 * 2.53326996^4 + 357 * 2.53326996^3 - 789 * 2.53326996^2 + 1027 * 6 - 3577$	1632987.089182008
7	$0.25 * 2.5332697^9 - 1.98 * 2.53326997^8 + 3.17 * 7^7 - 17 * 2.53326997^6 + 97 * 7^5 - 127 * 2.53326997^4 + 357 * 2.53326997^3 - 789 * 2.53326997^2 + 1027 * 7 - 3577$	4233255.278953871
8	$0.25 * 2.5332698^9 - 1.98 * 2.53326998^8 + 3.17 * 8^7 - 17 * 2.53326998^6 + 97 * 8^5 - 127 * 2.53326998^4 + 357 * 2.53326998^3 - 789 * 2.53326998^2 + 1027 * 8 - 3577$	9819839.808725732
9	$0.25 * 2.5332699^9 - 1.98 * 2.53326999^8 + 3.17 * 9^7 - 17 * 2.53326999^6 + 97 * 9^5 - 127 * 2.53326999^4 + 357 * 2.53326999^3 - 789 * 2.53326999^2 + 1027 * 9 - 3577$	2.088416369849759 × 10 ⁷
A 8-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este 2 → $X_1 = 2.5332692$		

La fel se va proceda pentru obținerea exactă, în continuare, a celei de a **9**-a cifre electronice, a celei de a **10** - a ș.a.m.d.

Dacă una din cele **10** erori sau valori calculate ale lui $F(X)$ cu X_1 , corespunzătoare celor **10** cifre, adăugate la valoarea anterioară a lui X_1 , dă valoare / eroare nulă, (ecuația este satisfăcută) atunci cifra respectivă, care dă această valoare, este ultima cifră exactă posibilă și care dă valoarea exactă a rădăcinii / soluției și procedeul, evident, nu mai continuă din lipsă de sens.

Dacă, din prima iterație, avem norocul ca pentru una din cifrele 0 ... 9 să se obțină acest lucru (eroare / valoare nulă), atunci, cifra respectivă singură este soluție exactă întregă a ecuației. Ceea ce nu corespunde cazului de față.

Pentru a **9-a** cifră exactă a soluției dăm tabelul în jurul cifrelor electronice **2** și **3** soluție (**Tab.32.4**), parțial redus și întrerupt în domeniul de schimbare a semnului funcției **F(x)**, în care se găsește următoarea cifră exactă a soluției. Și intrerupem căutarea celorlalte cifre exacte ale primei rădăcini și trecem la a 2-a rădăcină / soluție a ecuației, deoarece restul este o repetare și o rutină.

CI-FRA	Tabelul 32.4 Determinarea celei de a 9-a cifre zecimale (electronice)	VALOAREA / EROAREA
ECUAȚIA cu X_1		
0	$0.25 \cdot 2.533269920^9 - 1.98 \cdot 2.533269920^8 + 3.17 \cdot 0^7 - 17 \cdot 2.533269920^6 + 97 \cdot 0^5 - 127 \cdot 2.533269920^4 + 357 \cdot 2.533269920^3 - 789 \cdot 2.533269920^2 + 1027 \cdot 0 - 3577$	-14844.
1	$0.25 \cdot 2.533269921^9 - 1.98 \cdot 2.533269921^8 + 3.17 \cdot 1^7 - 17 \cdot 2.533269921^6 + 97 \cdot 1^5 - 127 \cdot 2.533269921^4 + 357 \cdot 2.533269921^3 - 789 \cdot 2.533269921^2 + 1027 \cdot 1 - 3577$	-13716.9
2	$0.25 \cdot 2.533269922^9 - 1.98 \cdot 2.533269922^8 + 3.17 \cdot 2^7 - 17 \cdot 2.533269922^6 + 97 \cdot 2^5 - 127 \cdot 2.533269922^4 + 357 \cdot 2.533269922^3 - 789 \cdot 2.533269922^2 + 1027 \cdot 2 - 3577$	-9280.27 < 0
AICI ESTE SOLUȚIA → următoarea cifră exactă, a 9-a, este tot 2		
3	$0.25 \cdot 2.533269923^9 - 1.98 \cdot 2.533269923^8 + 3.17 \cdot 3^7 - 17 \cdot 2.533269923^6 + 97 \cdot 3^5 - 127 \cdot 2.533269923^4 + 357 \cdot 2.533269923^3 - 789 \cdot 2.533269923^2 + 1027 \cdot 3 - 3577$	+18740.8 > 0
4	$0.25 \cdot 2.533269924^9 - 1.98 \cdot 2.533269924^8 + 3.17 \cdot 4^7 - 17 \cdot 2.533269924^6 + 97 \cdot 4^5 - 127 \cdot 2.533269924^4 + 357 \cdot 2.533269924^3 - 789 \cdot 2.533269924^2 + 1027 \cdot 4 - 3577$	140529.
5	$0.25 \cdot 2.533269925^9 - 1.98 \cdot 2.533269925^8 + 3.17 \cdot 5^7 - 17 \cdot 2.533269925^6 + 97 \cdot 5^5 - 127 \cdot 2.533269925^4 + 357 \cdot 2.533269925^3 - 789 \cdot 2.533269925^2 + 1027 \cdot 5 - 3577$	541072.
A 9-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este tot 2 → $X_1 = 2.533269922$		

32.4. DETERMINAREA CELEI DE A 2-A SOLUȚII / RADĂCINI X_2 A ECUAȚIEI

Pentru reducerea numărului de iterații se prezintă funcția $F(X)$ în domeniul celei de-a doua rădăcini / soluții, inițial în domeniul $X_2 \in [3, 4]$, apoi, pe baza constatărilor se trece la îngustarea acestui domeniu, ceea ce scurtează durata determinărilor și evită unele iterații de prisos / inutile (**Fig 3**).

În domeniul încă lizibil, se observă că valoarea ei, deocamdată cu numai **6** cifre zecimale (electronice) exacte, determinate grafic, este $X_2 \in (3,735960; 3,735961)$.

Cele 10 valori date ecuației de gradul 9 vor fi, în coloană, **3,7359600, 3,7359601, 3,7359602, 3,7359603, 3,7359604, 3,7359605, 3,7359606, 3,7359607, 3,7359608, 3,7359609**.

Următoarele cifre exacte se vor determina prin metoda succesivă (**MS-MEȘ**) și este prezentată în **tabelul 5**. Schimbarea semnului valorii funcției are loc, așa cum se poate observa, între cifrele **3** și **4**, între care tabelul a fost separat în două, cel cu valori / erori negative, sus ▲, și cel cu valori / erori pozitive, jos ▼. Aceste valori ale $F(X)$, pentru diversele cifre date soluției / rădăcinii presupuse / virtuale au fost denumite erori, deoarece reprezintă abaterile față de valoarea exactă pentru care aceste erori ar fi nule.

Spre deosebire de cazul anterior, al determinării rădăcinii X_1 , în care $F(X)$ traversa axa X într-un sens, de jos în sus sau din cadranul IV în cadranul I, în cazul de față pentru X_2 $F(X)$ traversează axa X în sens invers, din cadranul I în cadranul IV, sau de sus în jos, dar variabila X evoluează tot în sensul pozitiv al axei OX , de aceea cifra exactă este cea cu valoarea erorii negative minimă. Adică **3**.

CI FRA	Tabelul 32.5 Determinarea celei de a 7-a cifre zecimale (electronice)	VALOAREA / EROAREA
	ECUAŢIA cu X_2	
0	$0.25 \cdot 3.7359600^9 - 1.98 \cdot 3.7359600^8 + 3.17 \cdot 0^7 - 17 \cdot 3.7359600^6 + 97 \cdot 0^5 - 127 \cdot 3.7359600^4 + 357 \cdot 3.7359600^3 - 789 \cdot 3.7359600^2 + 1027 \cdot 0 - 3577$	-106635.
1	$0.25 \cdot 3.7359601^9 - 1.98 \cdot 3.7359601^8 + 3.17 \cdot 1^7 - 17 \cdot 3.7359601^6 + 97 \cdot 1^5 - 127 \cdot 3.7359601^4 + 357 \cdot 3.7359601^3 - 789 \cdot 3.7359601^2 + 1027 \cdot 1 - 3577$	-105508.
2	$0.25 \cdot 3.7359602^9 - 1.98 \cdot 3.7359602^8 + 3.17 \cdot 2^7 - 17 \cdot 3.7359602^6 + 97 \cdot 2^5 - 127 \cdot 3.7359602^4 + 357 \cdot 3.7359602^3 - 789 \cdot 3.7359602^2 + 1027 \cdot 2 - 3577$	-101071.
3	$0.25 \cdot 3.7359603^9 - 1.98 \cdot 3.7359603^8 + 3.17 \cdot 3^7 - 17 \cdot 3.7359603^6 + 97 \cdot 3^5 - 127 \cdot 3.7359603^4 + 357 \cdot 3.7359603^3 - 789 \cdot 3.7359603^2 + 1027 \cdot 3 - 3577$	-73049.9
DOMENIUL SOLUŢIEI $X_2 = 3,7359603$ ↘		
4	$0.25 \cdot 3.7359604^9 - 1.98 \cdot 3.7359604^8 + 3.17 \cdot 4^7 - 17 \cdot 3.7359604^6 + 97 \cdot 4^5 - 127 \cdot 3.7359604^4 + 357 \cdot 3.7359604^3 - 789 \cdot 3.7359604^2 + 1027 \cdot 4 - 3577$	48738.5
5	$0.25 \cdot 3.7359605^9 - 1.98 \cdot 3.7359605^8 + 3.17 \cdot 5^7 - 17 \cdot 3.7359605^6 + 97 \cdot 5^5 - 127 \cdot 3.7359605^4 + 357 \cdot 3.7359605^3 - 789 \cdot 3.7359605^2 + 1027 \cdot 5 - 3577$	449281.
6	$0.25 \cdot 3.7359606^9 - 1.98 \cdot 3.7359606^8 + 3.17 \cdot 6^7 - 17 \cdot 3.7359606^6 + 97 \cdot 6^5 - 127 \cdot 3.7359606^4 + 357 \cdot 3.7359606^3 - 789 \cdot 3.7359606^2 + 1027 \cdot 6 - 3577$	1.5412×10^6
7	$0.25 \cdot 3.7359607^9 - 1.98 \cdot 3.7359607^8 + 3.17 \cdot 7^7 - 17 \cdot 3.7359607^6 + 97 \cdot 7^5 - 127 \cdot 3.7359607^4 + 357 \cdot 3.7359607^3 - 789 \cdot 3.7359607^2 + 1027 \cdot 7 - 3577$	4.14146×10^6
8	$0.25 \cdot 3.7359608^9 - 1.98 \cdot 3.7359608^8 + 3.17 \cdot 8^7 - 17 \cdot 3.7359608^6 + 97 \cdot 8^5 - 127 \cdot 3.7359608^4 + 357 \cdot 3.7359608^3 - 789 \cdot 3.7359608^2 + 1027 \cdot 8 - 3577$	9.72805×10^6
9	$0.25 \cdot 3.7359609^9 - 1.98 \cdot 3.7359609^8 + 3.17 \cdot 9^7 - 17 \cdot 3.7359609^6 + 97 \cdot 9^5 - 127 \cdot 3.7359609^4 + 357 \cdot 3.7359609^3 - 789 \cdot 3.7359609^2 + 1027 \cdot 9 - 3577$	2.07924×10^7
CONCLUZII : A 7-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este 3 → $X_2 = 3.7359603$.		

CI-FRA	Tabelul 32.6 Determinarea celei de a 8-a cifre zecimale (electronice)	VALOAREA / EROAREA
	ECUAŢIA cu X_2	
2	$0.25 \cdot 3.73596032^9 - 1.98 \cdot 3.73596032^8 + 3.17 \cdot 2^7 - 17 \cdot 3.73596032^6 + 97 \cdot 2^5 - 127 \cdot 3.73596032^4 + 357 \cdot 3.73596032^3 - 789 \cdot 3.73596032^2 + 1027 \cdot 2 - 3577$	-101071.
3	$0.25 \cdot 3.73596033^9 - 1.98 \cdot 3.73596033^8 + 3.17 \cdot 3^7 - 17 \cdot 3.73596033^6 + 97 \cdot 3^5 - 127 \cdot 3.73596033^4 + 357 \cdot 3.73596033^3 - 789 \cdot 3.73596033^2 + 1027 \cdot 3 - 3577$	-73049.9
DOMENIUL SOLUŢIEI $X_2 = 3,73596033$ ↘		
4	$0.25 \cdot 3.73596034^9 - 1.98 \cdot 3.73596034^8 + 3.17 \cdot 4^7 - 17 \cdot 3.73596034^6 + 97 \cdot 4^5 - 127 \cdot 3.73596034^4 + 357 \cdot 3.73596034^3 - 789 \cdot 3.73596034^2 + 1027 \cdot 4 - 3577$	48738.5
5	$0.25 \cdot 3.73596035^9 - 1.98 \cdot 3.73596035^8 + 3.17 \cdot 5^7 - 17 \cdot 3.73596035^6 + 97 \cdot 5^5 - 127 \cdot 3.73596035^4 + 357 \cdot 3.73596035^3 - 789 \cdot 3.73596035^2 + 1027 \cdot 5 - 3577$	449282.
CONCLUZII : A 8-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este 3 → $X_2 = 3.73596033$.		

CI-FRA	Tabelul 32.7 Determinarea celei de a 9-a cifre zecimale (electronice)	VALOAREA / EROAREA
	ECUAŢIA cu X_2	
2	$0.25 \cdot 3.735960332^9 - 1.98 \cdot 3.735960332^8 + 3.17 \cdot 2^7 - 17 \cdot 3.735960332^6 + 97 \cdot 2^5 - 127 \cdot 3.735960332^4 + 357 \cdot 3.735960332^3 - 789 \cdot 3.735960332^2 + 1027 \cdot 2 - 3577$	-101071
3	$0.25 \cdot 3.735960333^9 - 1.98 \cdot 3.735960333^8 + 3.17 \cdot 3^7 - 17 \cdot 3.735960333^6 + 97 \cdot 3^5 - 127 \cdot 3.735960333^4 + 357 \cdot 3.735960333^3 - 789 \cdot 3.735960333^2 + 1027 \cdot 3 - 3577$	-73049.9
DOMENIUL SOLUŢIEI $X_2 = 3,735960333$ ↘		
4	$0.25 \cdot 3.735960334^9 - 1.98 \cdot 3.735960334^8 + 3.17 \cdot 4^7 - 17 \cdot 3.735960334^6 + 97 \cdot 4^5 - 127 \cdot 3.735960334^4 + 357 \cdot 3.735960334^3 - 789 \cdot 3.735960334^2 + 1027 \cdot 4 - 3577$	1.5412×10^6
5	$0.25 \cdot 3.735960335^9 - 1.98 \cdot 3.735960335^8 + 3.17 \cdot 5^7 - 17 \cdot 3.735960335^6 + 97 \cdot 5^5 - 127 \cdot 3.735960335^4 + 357 \cdot 3.735960335^3 - 789 \cdot 3.735960335^2 + 1027 \cdot 5 - 3577$	4.14146×10^6
CONCLUZII: A 8-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este tot 3 → $X_2 = 3.735960333$.		

În mod similar, pot fi determinate și următoarele cifre exacte a numărului X_2 : a **10 - a** cifră exactă, a **11 - a** ș.a.m.d. până la atingerea preciziei cerute soluției sau până când eroarea apare zero, caz în care soluția este un număr exact.

32.5. DETERMINAREA CELEI DE A 3-A SOLUȚII / RADĂCINI X_3 A ECUAȚIEI

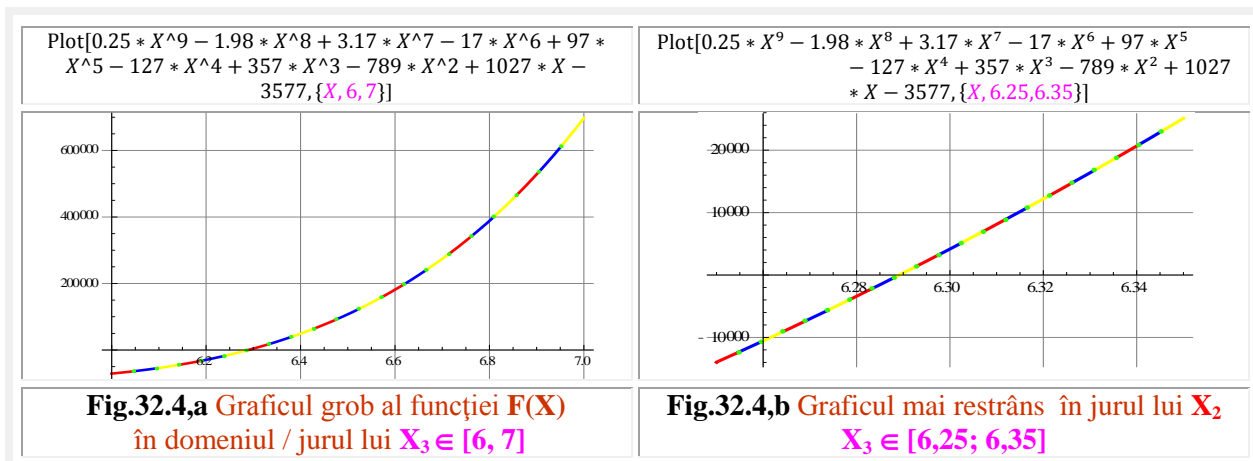
Aceasta este soluția găsită și de programatorul amintit anterior, care a dat valoarea de $X_3 \equiv X = 6,28913206734$ și, deocamdată, nu avem motive să nu-l credem.

Determinările computaționale grafice sunt redată în **figura 4** până la a **5-a** cifră zecimală care este $X_3 = 6.28913.....$

Până aici, rezultatele se coincid, să vedem mai departe...

În continuare, pentru determinarea următoarelor cifre exacte ale numărului X_3 , se aplică metoda determinării succesive (**MS-MEȘ**) a cifrelor care sunt soluții ale ecuațiilor de oricare grad cu oricare tip de coeficienți, așa cum s-a putut constata și până în prezent, pentru X_1 și X_2 .

Rezultatele primului pas de determinarea celei de a **7-a** cifre exacte și a 6-a cifră zecimală (electronică) sunt prezentate în **tabelul 8**. Cifra succesivă exactă a numărului soluție rezultă clar ca este **este 6 și nu 2** !! Deci, până în prezent a **3-a** soluția este $X_3 = 6.289136și nu X = 6,289132$.



Plot[$0.25 * X^9 - 1.98 * X^8 + 3.17 * X^7 - 17 * X^6 + 97 * X^5 - 127 * X^4 + 357 * X^3 - 789 * X^2 + 1027 * X - 3577, \{X, 6.285, 6.295\}$]

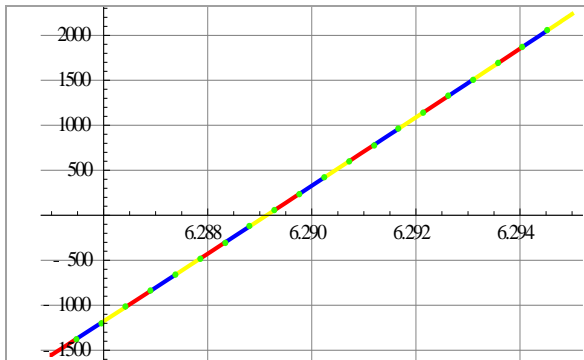


Fig.32.4,c Graficul rădăcinii a funcției $F(X)$ în domeniul / jurul lui $X_3 \in [6,285; 6,295]$

Plot[$0.25 * X^9 - 1.98 * X^8 + 3.17 * X^7 - 17 * X^6 + 97 * X^5 - 127 * X^4 + 357 * X^3 - 789 * X^2 + 1027 * X - 3577, \{X, 6.2891, 6.2892\}$]

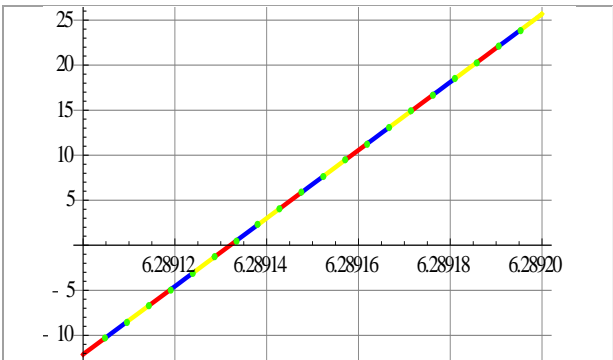


Fig.32.3,d Graficul restrâns în jurul lui X_2 în domeniul / jurul lui $X_3 \in [3,7355, 3.7365]$

Plot[$0.25 * X^9 - 1.98 * X^8 + 3.17 * X^7 - 17 * X^6 + 97 * X^5 - 127 * X^4 + 357 * X^3 - 789 * X^2 + 1027 * X - 3577, \{X, 6.28913, 6.28914\}$]

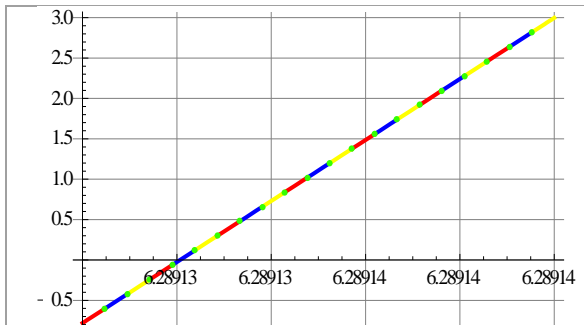


Fig.32.4,e Graficul primei rădăcini a funcției $F(X)$ în domeniul / jurul lui $X_3 \in [6,28913; 6,28914]$

Plot[$0.25 * X^9 - 1.98 * X^8 + 3.17 * X^7 - 17 * X^6 + 97 * X^5 - 127 * X^4 + 357 * X^3 - 789 * X^2 + 1027 * X - 3577, \{X, 6.28913199, 6.2891321\}$]

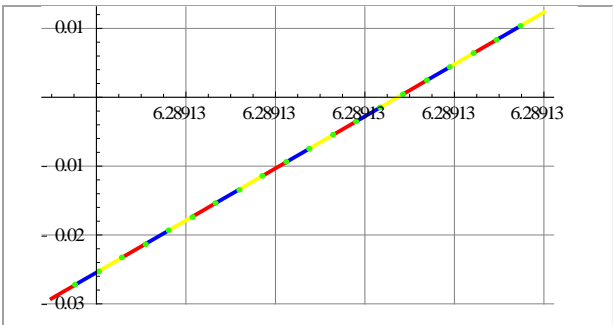


Fig.32.3,f Graficul primei rădăcini a funcției $F(X)$ în domeniul lui $X_3 \in [6.28913199, 6.2891321]$

Plot[$0.25 * X^9 - 1.98 * X^8 + 3.17 * X^7 - 17 * X^6 + 97 * X^5 - 127 * X^4 + 357 * X^3 - 789 * X^2 + 1027 * X - 3577, \{X, 6.2891315, 6.2891325\}$]

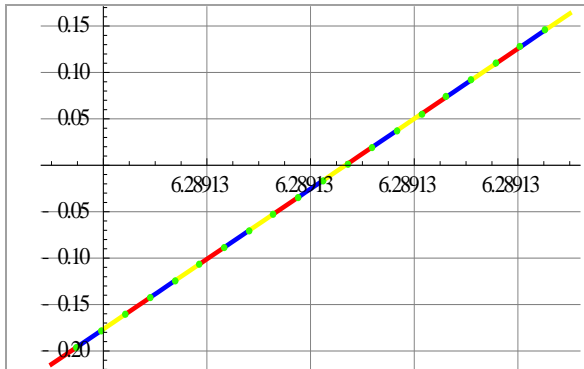


Fig.32.4,g Graficul primei rădăcini a funcției $F(X)$ în domeniul / jurul lui

Plot[$0.25 * X^9 - 1.98 * X^8 + 3.17 * X^7 - 17 * X^6 + 97 * X^5 - 127 * X^4 + 357 * X^3 - 789 * X^2 + 1027 * X - 3577, \{X, 6.289132, 6.289133\}$]

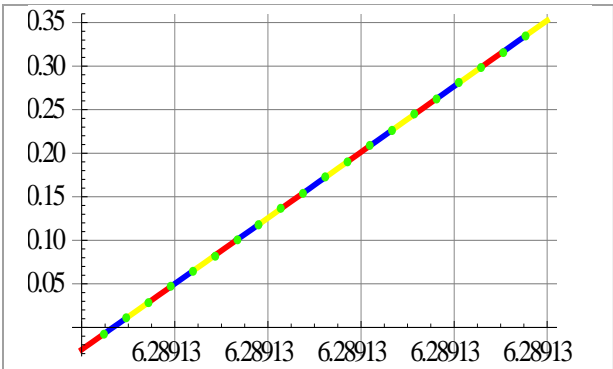


Fig.32.4,h Graficul primei rădăcini a funcției $F(X)$ în domeniul / jurul lui

$X_3 \in [6.2891315, 6.2891325]$		$X_3 \in [6.289132, 6.289133]$
CI-FRA	Tabelul 32.8 Determinarea celei de a 6-a cifre zecimale (electronice)	
	ECUAŢIA cu X_3	
0	$0.25 \cdot 6.289130^9 - 1.98 \cdot 6.289130^8 + 3.17 \cdot 0^7 - 17 \cdot 6.289130^6 + 97 \cdot 0^5 - 127 \cdot 6.289130^4 + 357 \cdot 6.289130^3 - 789 \cdot 6.289130^2 + 1027 \cdot 0 - 3577$	-2.1945×10^6
1	$0.25 \cdot 6.289131^9 - 1.98 \cdot 6.289131^8 + 3.17 \cdot 1^7 - 17 \cdot 6.289131^6 + 97 \cdot 1^5 - 127 \cdot 6.289131^4 + 357 \cdot 6.289131^3 - 789 \cdot 6.289131^2 + 1027 \cdot 1 - 3577$	-2.19338×10^6
2	$0.25 \cdot 6.289132^9 - 1.98 \cdot 6.289132^8 + 3.17 \cdot 2^7 - 17 \cdot 6.289132^6 + 97 \cdot 2^5 - 127 \cdot 6.289132^4 + 357 \cdot 6.289132^3 - 789 \cdot 6.289132^2 + 1027 \cdot 2 - 3577$	-2.18894×10^6
3	$0.25 \cdot 6.289133^9 - 1.98 \cdot 6.289133^8 + 3.17 \cdot 3^7 - 17 \cdot 6.289133^6 + 97 \cdot 3^5 - 127 \cdot 6.289133^4 + 357 \cdot 6.289133^3 - 789 \cdot 6.289133^2 + 1027 \cdot 3 - 3577$	-2.16092×10^6
4	$0.25 \cdot 6.289134^9 - 1.98 \cdot 6.289134^8 + 3.17 \cdot 4^7 - 17 \cdot 6.289134^6 + 97 \cdot 4^5 - 127 \cdot 6.289134^4 + 357 \cdot 6.289134^3 - 789 \cdot 6.289134^2 + 1027 \cdot 4 - 3577$	-2.03913×10^6
5	$0.25 \cdot 6.289135^9 - 1.98 \cdot 6.289135^8 + 3.17 \cdot 5^7 - 17 \cdot 6.289135^6 + 97 \cdot 5^5 - 127 \cdot 6.289135^4 + 357 \cdot 6.289135^3 - 789 \cdot 6.289135^2 + 1027 \cdot 5 - 3577$	-1.63859×10^6
6	$0.25 \cdot 6.289136^9 - 1.98 \cdot 6.289136^8 + 3.17 \cdot 6^7 - 17 \cdot 6.289136^6 + 97 \cdot 6^5 - 127 \cdot 6.289136^4 + 357 \cdot 6.289136^3 - 789 \cdot 6.289136^2 + 1027 \cdot 6 - 3577$	$-546680.$
DOMENIUL SOLUŢIEI $X_3 = 6.289136$ ↘		
7	$0.25 \cdot 6.289137^9 - 1.98 \cdot 6.289137^8 + 3.17 \cdot 7^7 - 17 \cdot 6.289137^6 + 97 \cdot 7^5 - 127 \cdot 6.289137^4 + 357 \cdot 6.289137^3 - 789 \cdot 6.289137^2 + 1027 \cdot 7 - 3577$	2.05359×10^6
8	$0.25 \cdot 6.289138^9 - 1.98 \cdot 6.289138^8 + 3.17 \cdot 8^7 - 17 \cdot 6.289138^6 + 97 \cdot 8^5 - 127 \cdot 6.289138^4 + 357 \cdot 6.289138^3 - 789 \cdot 6.289138^2 + 1027 \cdot 8 - 3577$	7.64017×10^6
9	$0.25 \cdot 6.289139^9 - 1.98 \cdot 6.289139^8 + 3.17 \cdot 9^7 - 17 \cdot 6.289139^6 + 97 \cdot 9^5 - 127 \cdot 6.289139^4 + 357 \cdot 6.289139^3 - 789 \cdot 6.289139^2 + 1027 \cdot 9 - 3577$	1.87045×10^7
CONCLUZII: A 7-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este 6 → $X_3 = 6.289136$		

Mergem mai departe cu determinarea cifrelor exacte ale numărului-soluție X_3 și rezultatele sunt prezentate parțial în tabelul 9, doar în preajma zonei de schimbare a semnelor erorii, adică în zona cifrei soluție exacte

CI-FRA	Tabelul 32.9 Determinarea celei de a 7-a cifre zecimale (electronice)	
	ECUAŢIA cu X_3	
5	$0.25 \cdot 6.2891365^9 - 1.98 \cdot 6.2891365^8 + 3.17 \cdot 5^7 - 17 \cdot 6.2891365^6 + 97 \cdot 5^5 - 127 \cdot 6.2891365^4 + 357 \cdot 6.2891365^3 - 789 \cdot 6.2891365^2 + 1027 \cdot 5 - 3577$	-1.6386×10^6
6	$0.25 \cdot 6.2891366^9 - 1.98 \cdot 6.2891366^8 + 3.17 \cdot 6^7 - 17 \cdot 6.2891366^6 + 97 \cdot 6^5 - 127 \cdot 6.2891366^4 + 357 \cdot 6.2891366^3 - 789 \cdot 6.2891366^2 + 1027 \cdot 6 - 3577$	$-546681.$
DOMENIUL SOLUŢIEI $X_3 = 6.2891366$ ↗		
7	$0.25 \cdot 6.2891367^9 - 1.98 \cdot 6.2891367^8 + 3.17 \cdot 7^7 - 17 \cdot 6.2891367^6 + 97 \cdot 7^5 - 127 \cdot 6.2891367^4 + 357 \cdot 6.2891367^3 - 789 \cdot 6.2891367^2 + 1027 \cdot 7 - 3577$	2.05359×10^6
8	$0.25 \cdot 6.2891368^9 - 1.98 \cdot 6.2891368^8 + 3.17 \cdot 8^7 - 17 \cdot 6.2891368^6 + 97 \cdot 8^5 - 127 \cdot 6.2891368^4 + 357 \cdot 6.2891368^3 - 789 \cdot 6.2891368^2 + 1027 \cdot 8 - 3577$	7.64017×10^6
CONCLUZII: A 7-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este tot 6 → $X_3 = 6.2891366$		

CI-FRA	Tabelul 32.10 Determinarea celei de a 8-a cifre zecimale (electronice)	VALOAREA / EROAREA
	ECUAŢIA cu X_3	
5	$0.25 \cdot 6.28913665^9 - 1.98 \cdot 6.2891365^8 + 3.17 \cdot 5^7 - 17 \cdot 6.28913665^6 + 97 \cdot 5^5 - 127 \cdot 6.28913665^4 + 357 \cdot 6.2891365^3 - 789 \cdot 6.28913665^2 + 1027 \cdot 5 - 3577$	-1.6386×10^6
6	$0.25 \cdot 6.28913666^9 - 1.98 \cdot 6.2891366^8 + 3.17 \cdot 6^7 - 17 \cdot 6.28913666^6 + 97 \cdot 6^5 - 127 \cdot 6.28913666^4 + 357 \cdot 6.2891366^3 - 789 \cdot 6.28913666^2 + 1027 \cdot 6 - 3577$	-546681.
DOMENIUL SOLUŢIEI $X_3 = 6.28913666$ ↗		
7	$0.25 \cdot 6.28913667^9 - 1.98 \cdot 6.28913667^8 + 3.17 \cdot 7^7 - 17 \cdot 6.28913667^6 + 97 \cdot 7^5 - 127 \cdot 6.28913667^4 + 357 \cdot 6.28913667^3 - 789 \cdot 6.2891367^2 + 1027 \cdot 7 - 3577$	2.05359×10^6
8	$0.25 \cdot 6.28913668^9 - 1.98 \cdot 6.28913668^8 + 3.17 \cdot 8^7 - 17 \cdot 6.28913668^6 + 97 \cdot 8^5 - 127 \cdot 6.28913668^4 + 357 \cdot 6.28913668^3 - 789 \cdot 6.28913668^2 + 1027 \cdot 8 - 3577$	7.64017×10^6
CONCLUZII: A 8-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este din nou tot 6 → $X_3 = 6.28913666$		

CI-FRA	Tabelul 32.11 Determinarea celei de a 9-a cifre zecimale (electronice)	VALOAREA / EROAREA
	ECUAŢIA cu X_3	
5	$0.25 \cdot 6.289136665^9 - 1.98 \cdot 6.289136665^8 + 3.17 \cdot 5^7 - 17 \cdot 6.289136665^6 + 97 \cdot 5^5 - 127 \cdot 6.289136665^4 + 357 \cdot 6.289136665^3 - 789 \cdot 6.289136665^2 + 1027 \cdot 5 - 3577$	-1.6386×10^6
6	$0.25 \cdot 6.289136666^9 - 1.98 \cdot 6.289136666^8 + 3.17 \cdot 6^7 - 17 \cdot 6.289136666^6 + 97 \cdot 6^5 - 127 \cdot 6.289136666^4 + 357 \cdot 6.289136666^3 - 789 \cdot 6.289136666^2 + 1027 \cdot 6 - 3577$	-546681.
DOMENIUL SOLUŢIEI $X_3 = 6.289136666$ ↗		
7	$0.25 \cdot 6.289136667^9 - 1.98 \cdot 6.289136667^8 + 3.17 \cdot 7^7 - 17 \cdot 6.289136667^6 + 97 \cdot 7^5 - 127 \cdot 6.289136667^4 + 357 \cdot 6.289136667^3 - 789 \cdot 6.289136667^2 + 1027 \cdot 7 - 3577$	2.05359×10^6
8	$0.25 \cdot 6.289136668^9 - 1.98 \cdot 6.289136668^8 + 3.17 \cdot 8^7 - 17 \cdot 6.289136668^6 + 97 \cdot 8^5 - 127 \cdot 6.289136668^4 + 357 \cdot 6.289136668^3 - 789 \cdot 6.289136668^2 + 1027 \cdot 8 - 3577$	7.64017×10^6
CONCLUZII: A 9-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este din nou tot 6 → $X_3 = 6.289136666$		

CI-FRA	Tabelul 32.12 Determinarea celei de a 10-a cifre zecimale (electronice)	VALOAREA / EROAREA
	ECUAŢIA cu X_3	
5	$0.25 \cdot 6.289136665^9 - 1.98 \cdot 6.289136665^8 + 3.17 \cdot 5^7 - 17 \cdot 6.289136665^6 + 97 \cdot 5^5 - 127 \cdot 6.289136665^4 + 357 \cdot 6.289136665^3 - 789 \cdot 6.289136665^2 + 1027 \cdot 5 - 3577$	-1.6386×10^6
6	$0.25 \cdot 6.289136666^9 - 1.98 \cdot 6.289136666^8 + 3.17 \cdot 6^7 - 17 \cdot 6.289136666^6 + 97 \cdot 6^5 - 127 \cdot 6.289136666^4 + 357 \cdot 6.289136666^3 - 789 \cdot 6.289136666^2 + 1027 \cdot 6 - 3577$	-546681.
DOMENIUL SOLUŢIEI $X_3 = 6.2891366666$ ↗		
7	$0.25 \cdot 6.289136667^9 - 1.98 \cdot 6.289136667^8 + 3.17 \cdot 7^7 - 17 \cdot 6.289136667^6 + 97 \cdot 7^5 - 127 \cdot 6.289136667^4 + 357 \cdot 6.289136667^3 - 789 \cdot 6.289136667^2 + 1027 \cdot 7 - 3577$	2.05359×10^6
8	$0.25 \cdot 6.289136668^9 - 1.98 \cdot 6.289136668^8 + 3.17 \cdot 8^7 - 17 \cdot 6.289136668^6 + 97 \cdot 8^5 - 127 \cdot 6.289136668^4 + 357 \cdot 6.289136668^3 - 789 \cdot 6.289136668^2 + 1027 \cdot 8 - 3577$	7.64017×10^6
CONCLUZII : A 9-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este din nou tot 6 → $X_3 = 6.2891366666$		
CI-FRA	Tabelul 13 Determinarea celei de a 11-a cifre zecimale (electronice)	VALOAREA / EROAREA

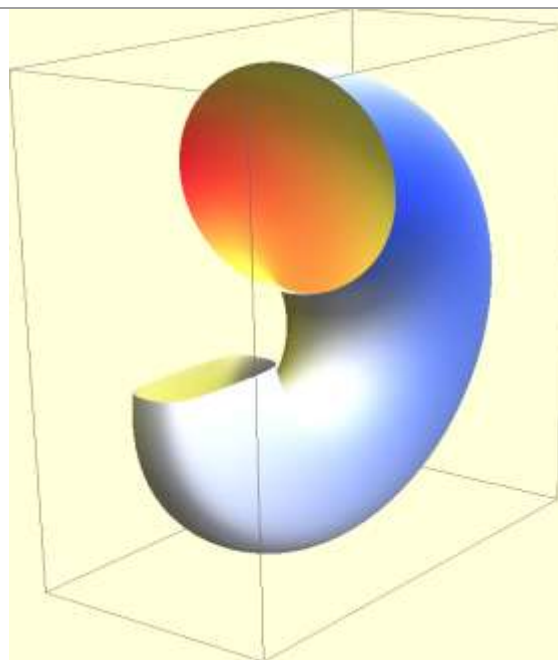
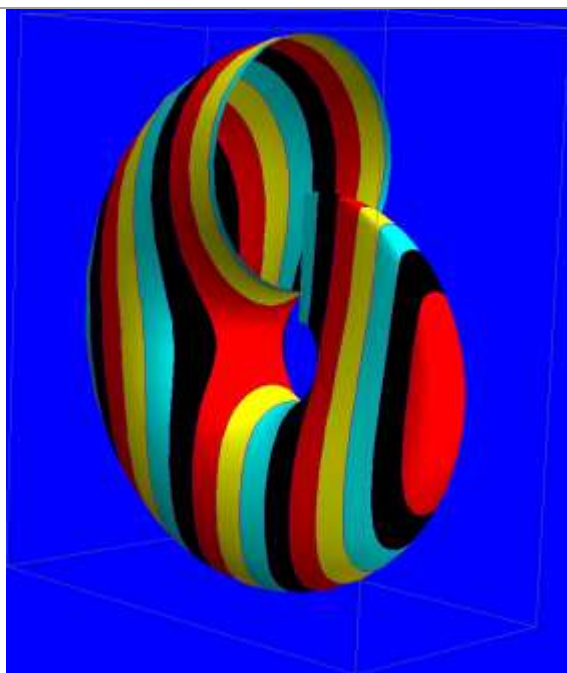
ECUAŢIA cu X_3		
5	$0.25 \cdot 6.2891366665^9 - 1.98 \cdot 6.2891366665^8 + 3.17 \cdot 5^7 - 17 \cdot 6.2891366665^6 + 97 \cdot 5^5 - 127 \cdot 6.2891366665^4 + 357 \cdot 6.2891366665^3 - 789 \cdot 6.2891366665^2 + 1027 \cdot 5 - 3577$	-1.6386×10^6
6	$0.25 \cdot 6.2891366666^9 - 1.98 \cdot 6.2891366666^8 + 3.17 \cdot 6^7 - 17 \cdot 6.2891366666^6 + 97 \cdot 6^5 - 127 \cdot 6.2891366666^4 + 357 \cdot 6.2891366666^3 - 789 \cdot 6.2891366666^2 + 1027 \cdot 6 - 3577$	-546681.
DOMENIUL SOLUŢIEI $X_3 = 6.28913\ 666\ 666$ ↗		
7	$0.25 \cdot 6.2891366667^9 - 1.98 \cdot 6.2891366667^8 + 3.17 \cdot 7^7 - 17 \cdot 6.2891366667^6 + 97 \cdot 7^5 - 127 \cdot 6.2891366667^4 + 357 \cdot 6.2891366667^3 - 789 \cdot 6.2891366667^2 + 1027 \cdot 7 - 3577$	2.05359×10^6
8	$0.25 \cdot 6.2891366668^9 - 1.98 \cdot 6.2891366668^8 + 3.17 \cdot 8^7 - 17 \cdot 6.2891366668^6 + 97 \cdot 8^5 - 127 \cdot 6.2891366668^4 + 357 \cdot 6.2891366668^3 - 789 \cdot 6.2891366668^2 + 1027 \cdot 8 - 3577$	7.64017×10^6
CONCLUZII : A 9-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este din nou tot 6 → $X_3 = 6.28913\ 6\ 6\ 6\ 666$		

La fel se repetă situația în **tabelele 32.10, 32.11, 32,12 și 32.13**, în care, cifra exactă este de fiecare dată **cifra electronică 6**.

Ca urmare, numărul X_3 cu 11 zecimale și 12 cifre exacte este

$X_3 = 6,28913\ 666666 \dots$ și nu $X = 6,28913\ 206734$

Concluziile sunt de prisos.



În completarea capitolului : Torurile lui Şerban Şelariu

Moto:” **Imaginația** e mai importantă decât cunoașterea, dar singurul lucru cu adevărat valoros e **intuiția**.”
Albert Einstein

Capitolul 33

ELEMENTE NELINIARE LEGATE ÎN SERIE

Scopul acestui capitol este de a prezenta relațiile unice din literatura mondială, ca posibilități analitice de determinare a **elementului echivalent / sumă**, în cazul **legării în serie** a două elemente cu **caracteristici elastice statice neliniare (CESN)**, pentru care, până la publicarea lucrării [1] în anul 1978 și susținerea referatului [2], acestea erau, evident, relații necunoscute. Se fac referiri și exemplificări la compunerea **elementelor elastice mecanice**, dar, datorită similitudinii existente, relațiile pot fi utilizate cu succes și în **domeniul electrotehnic**.

31.1 INTRODUCERE

Există o similitudine perfectă între mecanică și electrotehnică, așa cum a subliniat și a demonstrat reputatul savant englez de origine română **George (Gogu) Constantinescu***, în cadrul noului și importantului domeniu al științei, **TEORIA SONICITĂȚII**, domeniu descoperit și dezvoltat de el.

Ca dovadă, legarea în serie, în paralel și mixt a două elemente elastice (arcuri), care aparține domeniului mecanic și **reologic****, este similară cu aceleași legări ale rezistorilor / rezistențelor și a altor componente ale circuitelor electrice.

Ansamblul elementelor componente ale unui sistem tehnologic închis, **mașină-dispozitiv-piesă-sculă**, prin care se propagă diverse tipuri de forțe, cele de așchiere fiind cele mai frecvente, forțe ce provoacă diverse deformații, vinovate de o parte a erorilor / impreciziilor de prelucrare mecanică, poartă denumirea de **sistem tehnologic elastic (STE)** [2].

33.2 CARACTERISTICI ELASTICE STATICE LINIARE ȘI NELINIARE

Dacă se înregistrează deformațiile elementelor la **încărcare**, în funcție de forțele care le soliciță și care cresc continuu, cu o viteză de creștere extrem de mică, viteză considerată nulă, până la o **valoare maximă (F_M)**, care să nu provoace deformații remanente ale elementelor, se vor obține graficele care poartă denumirea de **caracteristici elastice statice (CES)**.

O astfel de caracteristică poate avea o expresie generală de forma

$$(33.1) \quad F_{ij} = C_{i1}x + C_{i2}x^2 + C_{i3} \cdot x^3 + C_{i4}x^4 + \dots$$

sau de forma, mai des utilizată, de tip **Duffing (Fig. 33.1,b, cazul 1)**

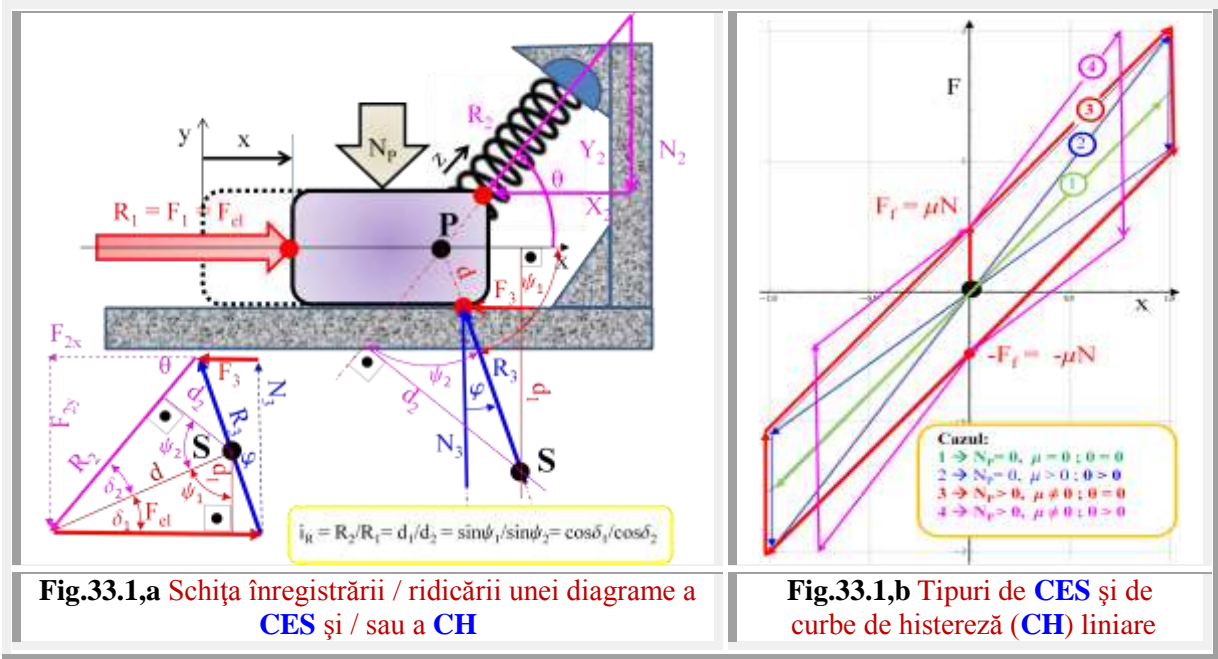
$$(33.2) \quad F_i = k_i x + \mu_i x^3.$$

Notațiile din relația anterioară sunt consacrate și nu sunt întâmplătoare: **k_i** este constanta elastică a părții liniare, iar **μ_i** amintește de notația consacrată a coeficienților de frecare, exprimați de relația **μ_i = tanφ_i**, în care, **φ_i** este unghiul de frecare; partea **neliniară** a expresiei (2) datorându-se fie frecărilor interne, din materialul elementului elastic, fie celor externe, la contactul acestuia cu alte elemente. Sunt posibile următoarele situații

$$(33.3) \quad \begin{cases} \mu_i = \tan\varphi_i < 0 \Rightarrow \text{CES este neliniară și moale sau regresivă} \\ \mu_i = \tan\varphi_i = 0 \Rightarrow \text{CES este liniară (Fig. 33.1, b)} \\ \mu_i = \tan\varphi_i > 0 \Rightarrow \text{CES este neliniară și tare sau progresivă} \end{cases}$$

* **George Constantinescu** a lăsat în urma lui 133 de brevete (317 după alți autori) și multe alte invenții nepublicate. A fost poate prea rapid și surprinzător pentru timpul său. **Inginerul Constantinescu** a fost numit de către revista engleză **The Graphic** unul din cei 17 **titani ai lumii** care au revoluționat știința, așezându-l alături de **Einstein, Marconi, Edison** sau **Lister**.

** **Reologia** este știința care studiază interdependența dintre solicitările mecanice, răspunsul corpurilor și proprietățile acestora. Această știință stabilește modelele matematice care descriu comportamentul corpurilor supuse la solicitări. Acest comportament este determinat de dependența dintre forțe (solicitări) și deformare (răspuns), de exemplu.



Pentru sisteme elastice **liniare**, există patru cazuri posibile de **CES** și de curbe de histereză **CH**, cu graficele reprezentate în **figura 33.1,b** și care pot fi ridicate / înregistrate pe baza schemei din **figura 33.1,a**, în care arcul este considerat ca fiind un element liniar de constantă k .

Acestea sunt :

Cazul 1 (Fig. 33.1,b)

Un element sau sistem are **CES** liniară, caracteristică dată de arcul de constantă k și de direcție orizontală $\alpha = 0$, iar forța de prestrângere $N_P = 0$. Rezultă dependența forța deplasare / deformare dată de relația arhicunoscută

$$(33.4) \quad \mathbf{F} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x},$$

în care \mathbf{k} este caracteristica liniară a arcului și, totodată, coeficientul unghiular al dreptei ce trece prin originea $O(0, 0)$ și, ca urmare, $\mathbf{k} = \tan\alpha$, astfel că **CES liniară**, în acest caz, este dreapta ce trece prin originea sistemului $O(0, 0)$ și de pantă α

$$(33.5) \quad \mathbf{F} = \tan\alpha \cdot \mathbf{x}$$

Cazul 2 (Fig.33.1,b).

Pentru $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$ forța de prestrângere $N_P = 0$, iar $Y_2 \equiv N_2 = R_2 \cdot \sin\alpha = -N_3$ astfel că apare o forță de frecare $\mathbf{F}_3 = -\mu \cdot N_2 = -\tan\phi \cdot N_2 = \tan\phi \cdot N_3$ proporțională cu deplasarea x .

Ca urmare, pentru o aceeași deplasare x , forța exterioară activă, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}$, trebuie să fie mai mare / (să crească) cu forța de frecare \mathbf{F}_3 variabilă cu deplasarea x , decât în cazul în care nu mai există o altă forță oponentă în sistem.

Forța normală N_2 variază cu deplasarea x , conform relației

$$(33.6) \quad N_2 = R_2 \sin\theta = k \cdot z \cdot \sin\theta = k \cdot \frac{x}{\cos\theta} \sin\theta = k \cdot x \cdot \tan\theta,$$

în care \mathbf{k} este constanta arcului și \mathbf{z} este deformația lui (**Fig.33.1,a**) pe direcția θ a forței rezultante \mathbf{R}_2 , astfel că dependența ei de deplasare, pe direcția x a elementului, este

$$(33.7) \quad z = \frac{x}{\cos\theta}$$

și rezultă

$$(33.8) \quad N_2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \cdot \tan\theta = \tan\alpha \cdot \mathbf{x}$$

și, ca urmare, forța de frecare variabilă cu deplasarea x va fi

$$(33.9) \quad \mathbf{F}_3 = \mu \cdot N_3 = -\mu \cdot N_2 = -\mu \cdot \tan\alpha \cdot \mathbf{x} = -\tan\phi \cdot \tan\alpha \cdot \mathbf{x},$$

în care, k este constanta sau **rigiditatea arcului** înclinat cu unghiul θ , față de deplasarea x , deplasare considerată **deformare** a elementului sau a sistemului cercetat.

Din echilibrul forțelor pe direcția x rezultă

$$(33.10) \quad \mathbf{R}_1 \equiv \mathbf{F}_1 = R_2 \cos \theta \pm \mathbf{F}_3 \text{ sau } \mathbf{F} = k \frac{x}{\cos \theta} \cos \theta \pm \mathbf{F}_3 \rightarrow \mathbf{F} = k \cdot x \pm \mathbf{F}_3$$

$$(33.11) \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{F} = k \cdot x \pm \tan \varphi \cdot \tan \alpha \cdot \tan \theta \cdot x \rightarrow$$

$$(33.12) \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{F} = \tan \alpha (1 \pm \tan \varphi \cdot \tan \theta) \cdot x = k' \cdot x = \tan \alpha' \cdot x,$$

în care, semnul **+**, **plus**, corespunde deplasării elementului sau a sistemului pe direcția x în sensul axei $x > 0$, **pozitive**, iar semnul **-**, **minus**, deplasării în sens invers, adică, în sensul axei $x < 0$, **negative**.

Din relația (12) rezultă că:

- **CES₂** este liniară, deoarece $k' = \text{constant}$;
- Dreapta care reprezintă **CES₂** diferă ca înclinație de **CES₁** din **cazul 1** cu $\pm \tan \varphi \cdot \tan \theta$;
- După atingerea forței maxime, pentru antamarea inversării deplasării, elementului sau a sistemului, forța activă exterioară \mathbf{F}_1 trebuie să scadă cu $2\mathbf{F}_{3\text{Max}}$ ca mișcarea în sens invers ($x < 0$) să se producă la capetele de cursă.

Cazul 3 (Fig.33.1,b)

În acest caz se consideră $\theta = 0$ și existența unei forțe constante de prestrângere $N_p > 0$.

Pentru a respecta mărimile din **figura 33.1,b**, se consideră arbitrar $N_p = N_3$, din cazul anterior, pentru ca singura forță de frecare din sistem \mathbf{F}_3 să rămână neschimbată / aceeași, astfel încât, graficele din **figura 33.1,b**, în cele 3 cazuri, să se corespundă.

Efectul este același cu considerarea altui arc vertical la $\alpha = \pi/2$ și prestrâns la o valoare egală cu forța de prestrângere, adică $\mathbf{R}'_2 = \mathbf{Y}'_2 \equiv \mathbf{N}'_2 = N_p$, deoarece, deplasarea pe direcția orizontală x (**Fig.33.1,a**) nu va tensiona arcul de pe direcția verticală y , astfel că $\mathbf{R}'_2 = \mathbf{N}'_2$ va rămâne constantă și va îndeplini / juca rolul unei forțe de prestrângere.

Se observă din schița din **figura 33.1,a** că, mișcarea (deplasarea / deformarea) elementului sau a sistemului nu are loc decât atunci când forța exterioară activă $\mathbf{F} \equiv \mathbf{R}_2$ depășește valoarea forței de frecare \mathbf{F}_3 , preexistentă în sistem. Ca urmare, graficul **CES₃**, în **cazul 3**, începe din originea sistemului $O(0,0)$ și continuă pe verticală, pe axa \mathbf{F} , până la $\mathbf{F} = \mathbf{F}_3$, punct din care începe deplasarea și deformarea arcului aflat acum în poziție orizontală ($\theta = 0$) după o dreaptă înclinată cu coeficientul unghiular al dreptei $k = \tan \alpha$ până la atingerea valorii maxime a forței \mathbf{F}_M .

Pentru ca mișcarea să se producă și în sens invers, în care acționează forța $\mathbf{R}_2 = kx$ din arc, e necesar ca forța exterioară activă $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}$ să scadă cu $2\mathbf{F}_{3\text{Max}}$.

Destinderea arcului **liniar** se face, așa cum se știe, după aceeași pantă $k = \tan \alpha$, până când **CES₃** atinge axa Ox sau la $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F} = 0$, moment în care $-\mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_3$.

Pentru a continua mișcarea și a obține o cubă de histereză (**CH₃**) completă, e necesar ca forța externă $\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}$ să-și schimbe sensul din împingerea elementului în tragerea lui.

Pentru $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_3$ și $x = 0$ arcul este complet destins, adică $\mathbf{R}_2 = 0$, urmând ca prin tragerea în continuare a elementului / piesei, cu forțe exterioare în sens invers ($-\mathbf{F}$), forța \mathbf{R}_2 care soliciți arcul la compresiune, să-l solicite acum la întindere, adică să schimbe de semn / sens ($-\mathbf{R}_2$).

Cazul 4 (Fig. 33.1,b).

În acest caz, atât forța inițială de prestrângere a elementului $N_p > 0$ cât și unghiul de înclinare al arcului $\theta > 0$, deci forța elastică \mathbf{R}_2 sunt prezente simultan în sistem.

Ca urmare, în domeniul forței exterioare $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F} \in [-\mathbf{F}_3, +\mathbf{F}_3]$ nu apar deformații / deplasări. Când apar deplasările, apar și forțele de frecare suplimentare, proporționale cu deformația arcului pe direcția z , astfel că dreapta **CES₄** are panta k' dată de relația (12).

În consecință, la fine de cursă, când $x = x_M$ și la atingerea forței exterioare $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}$ maxime, în sistem sunt două forțe de frecare: una constantă μN_p și una variabilă maximă, deoarece variază cu deplasarea x_M care este maximă. De aceea segmentul de **CES₄** de direcție verticală la $\pm x_{\text{Max}}$ este mai mare decât în cazul anterior, în care exista numai o singură forță de frecare constantă

În cazul **CES neliniare**, acestea pot avea o infinitate de forme grafice sau aluri, dintre care sunt prezentate cele mai frecvent considerate în literatura de specialitate și în practică.

Evident că **CES** de tip **Duffing**, exprimate de relația (2) și prezentate în **figura 33.2,a**, sunt acelea care deschid “gala” curbelor **CES neliniare**.

Caracteristic acestora este faptul că, pentru deformații / deplăsări reduse, caracteristicile elastice statice **CES** sunt, așa cum se poate observa, foarte apropiate de cele **liniare**, atât pentru cele tari sau progresive ◀ cât și pentru cele moi sau regresive ▶.

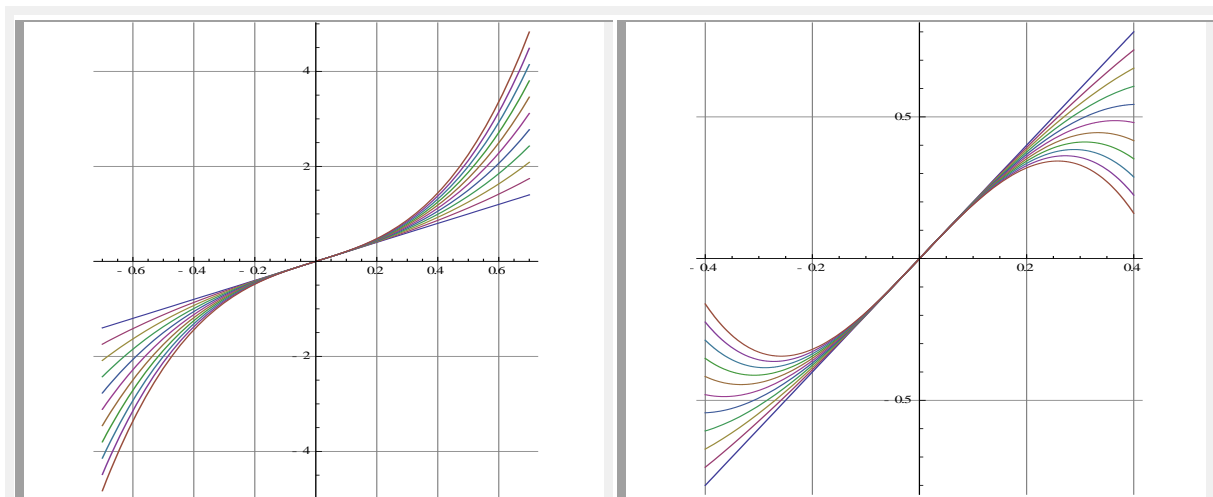


Fig.33.2,a Elemente elastice liniare și neliniare moi și tari tip **Duffing**, relația (2), pentru $\mu \in [0, 1]$

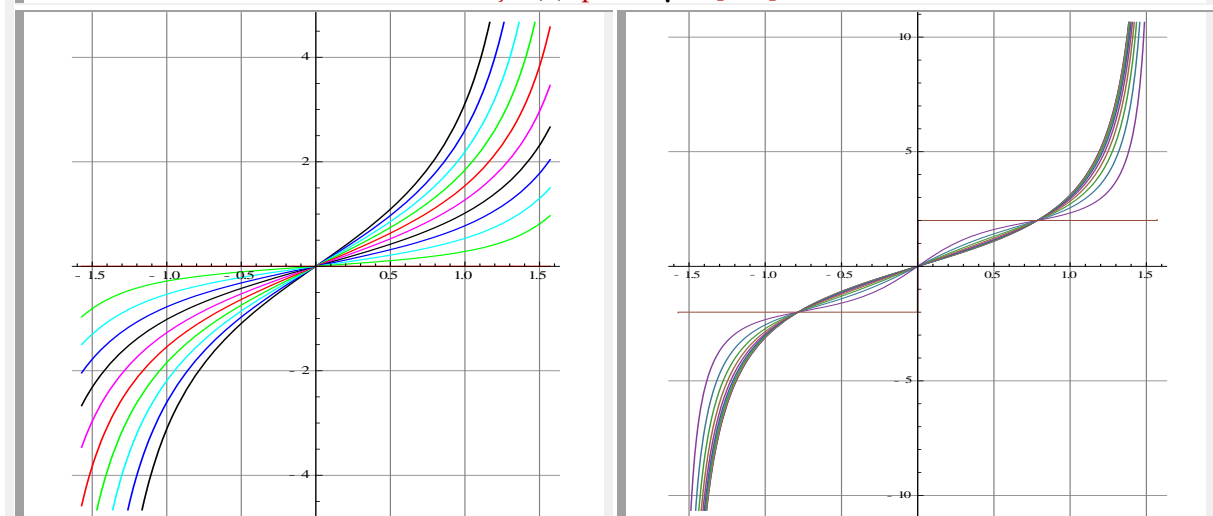


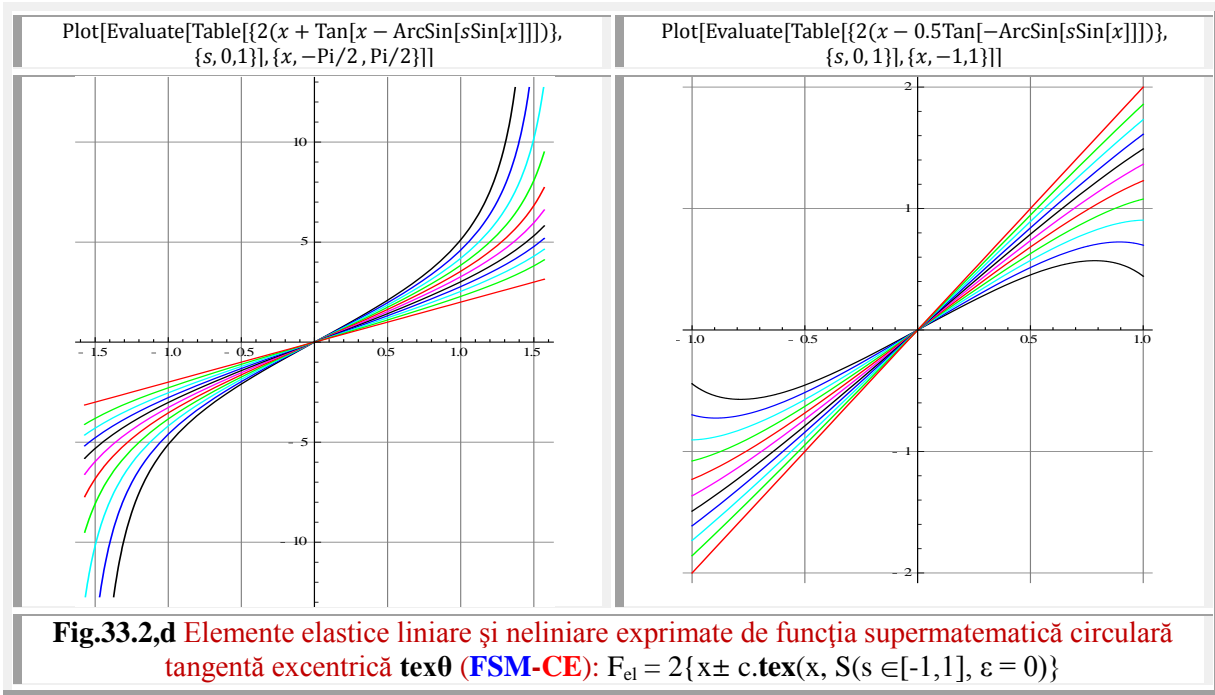
Fig.33.2,b Elemente elastice neliniare tari sau progresive ◀ exprimate de funcția supermatematică circulară excentrică (**FSM-CE**)

$$F = 2 \cdot \text{tex}(x, S(s \in [-1, 1], \varepsilon = 0))$$

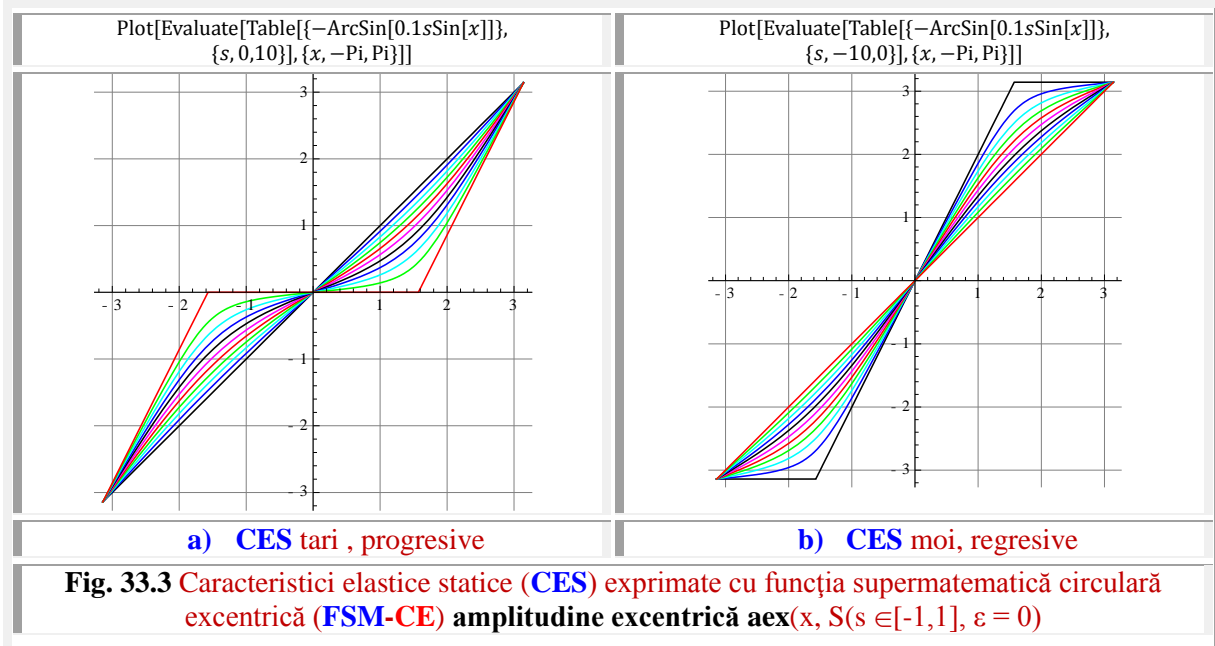
Fig.33.2,c Elemente elastice neliniare: • moi până la $x \leq \pm 0,8$ și •tari, pentru $x \geq 0,8$ ▶ exprimate de funcția supermatematică cvadrilobă excentrică (**FSM-QE**)

$$F = 2 \cdot \text{teq}(x, S(s \in [-1, 1], \varepsilon = 0))$$

Se cunoaște faptul că, prin trecerea din domeniul matematicii **centrice** (**MC**) în cel al matematicii **excentrice** (**ME**) se trece, totodată, din domeniul **liniar** sau **ideal** în domeniul **nelinier** sau **real**. Și, mai precis, în domeniul supermatematicii (**SM**), care este o reuniune a celor două matematici (**SM = MC ∪ ME**), liniarul și nelinierul se contopesc; între aceste două domenii, granițele sunt de domeniul trecutului: liniarul este un caz particular de **excentricitate** zero ($e = s = 0$) al nelinierului. Tot așa cum, matematica centrică (**MC**) este un caz particular, de excentricitate zero, a supermatematicii (**SM**), adică **MC = SM(e = 0)**.



Prin urmare, dacă o **CES liniară** se exprimă prin funcția circulară centrică (FCC) **tanα** – relația (5)- atunci e de așteptat ca funcția circulară excentrică (FCE) tangentă excentrică **texα** să exprime o **CES neliniară**, ceea ce se și întâmplă, așa cum se poate observa din **figurile 33.2,b și 33.2,d**.



Ceea ce s-a afirmat, se poate și dovedi, că matematica **centrică (MC)** este proprie sistemelor (și deci și elementelor lor componente) **ideale, liniare**, iar matematica **excentrică (ME)** este proprie sistemelor **reale, neliniare**.

De exemplu, dacă relația (5), prin funcția matematică centrică **tanx**, descrie o **CES liniară**, echivalenta ei, din domeniul excentric, adică funcția supermatematică circulară excentrică (FSM-CE), de variabila excentrică **θ**, **tangentă excentrică** de **θ**, **tex θ**,

$$(33.13) \quad \mathbf{tex}[\theta = x; S(s, \varepsilon)] = \frac{sex\theta}{cex\theta} = \tan\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]\}$$

va exprima, pentru excentricitatea numerică $s = 0$, o **CES liniară** iar pentru restul valorilor, din domeniul $s \in [-1, 1]$, va exprima **CES neliniare**, așa cum se poate observa în **figurile 33.2,b și 33.2,d**.

Prin relația

$$(33.14) \quad F_{el} = k \cdot \text{tex}[x, S(s, \varepsilon)],$$

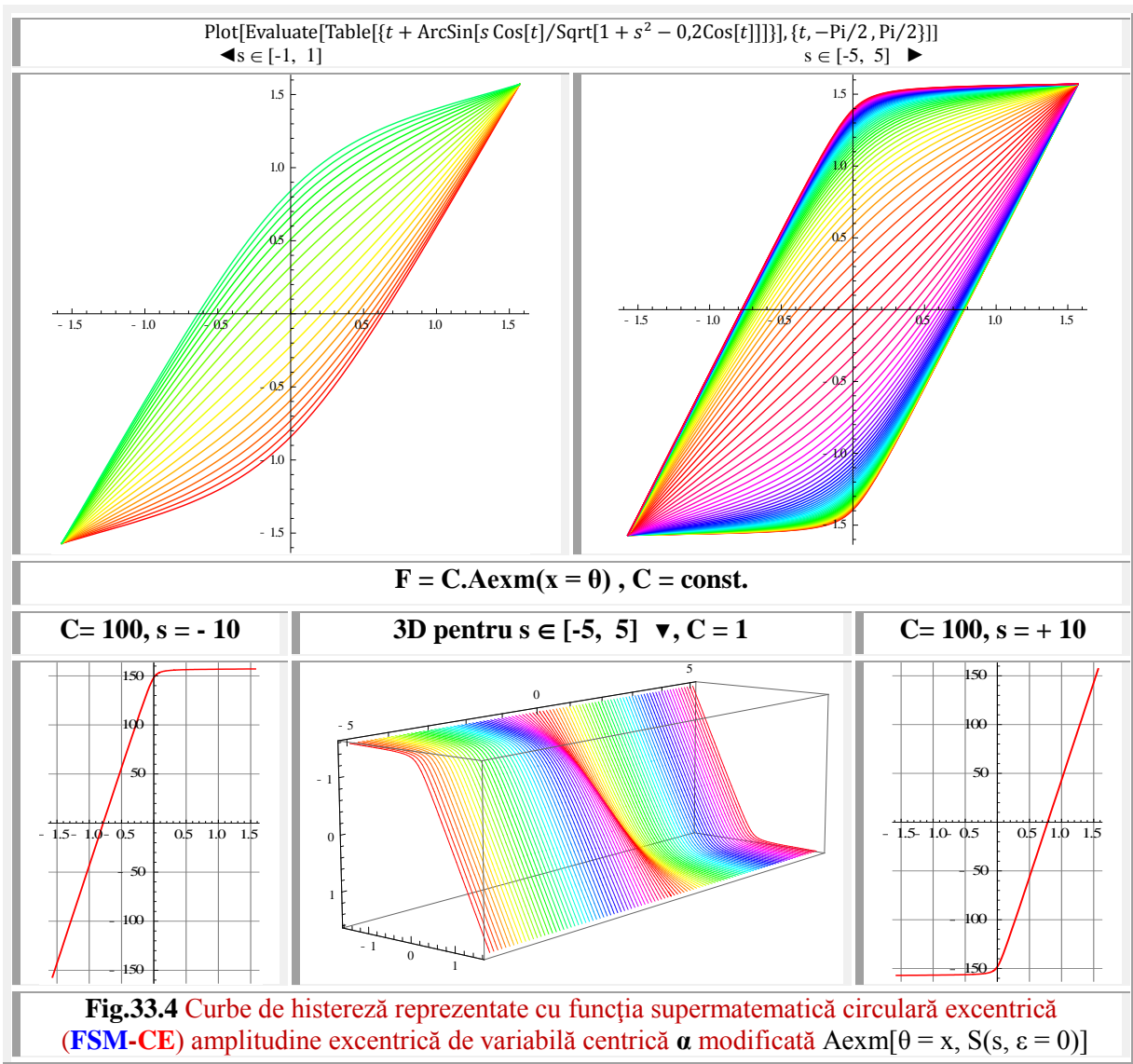
rezultă **CES neliniare** și o **CES liniară**, de $s = 0$, ce se suprapune peste axa Ox (**Fig. 33.2,b**).

Pentru a obține, la $s = 0$, **CES liniare** cu pantă k diferită de zero, se utilizează relația

$$(33.15) \quad F_{el} = k\{x + c \cdot \text{tex}(x, S(s \in [-1, 1], \varepsilon = 0))\}. \text{ Pentru } c > 0 \text{ se obțin } \textbf{CES neliniare tari} \text{ și pentru } c < 0 \text{ se obțin } \textbf{CES neliniare moi} \text{ (Fig. 33.2,d)}.$$

Cu ajutorul **FSM cvadrilobe excentrice – QE - teq** $[x = \theta, S(s, \varepsilon)]$ pot fi reprezentate **CES neliniare** moi într-un domeniu $\theta \equiv x \in [-0,8; +0,8]$ și tari în exteriorul acestuia (**Fig.33.2,c**).

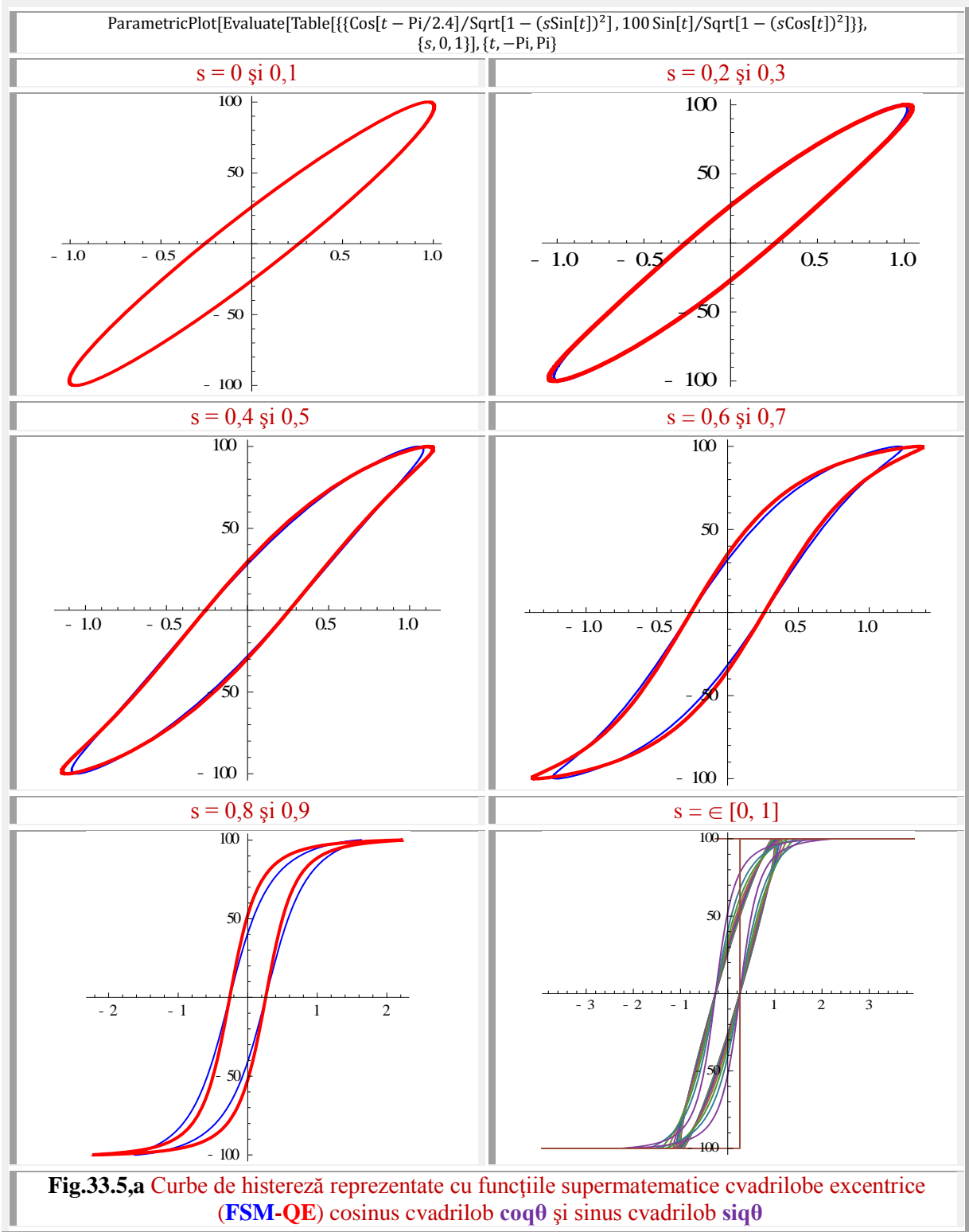
Așa cum rezultă din graficele din **figura 33.3,a și 33.3,b** reprezentările **CES liniare și neliniare** se asociază / concordă cel mai bine cu realitatea prin **FSM-CE amplitudine excentrică** de variabilă excentrică $\theta \equiv x$, deoarece, atât pentru $s = 0$ cât și pentru $s = \pm 1$ se obțin sisteme liniare. În primul caz, cu **CES liniară continuă** și, în al doilea caz, cu **CES liniară pe porțiuni**, așa cum s-a mai constatat și s-a afirmat în lucrarea [8].



Dacă se continuă înregistrarea **curbei forță-deformație** și la scaderea forțelor de la F_M la zero ($F = 0$), adică la **descărcare**, sau chiar la valori negative, se obține o altă curbă care, împreună cu curba de încărcare, determină **curba de histereză (CH)** a elementului sau a sistemului respectiv.

Pentru sisteme neliniare, sunt posibile o infinitate de tipuri de caracteristici elastice statice (CES) și de curbe de histerază (CH), din care, sunt prezentate câteva în continuare.

Cele mai apropiate de realitate sunt tot cele reprezentate de **FSM-CE amplitudine excentrică** de variabilă centrică **Aexa** modificată, în sensul că, în ultimul termen al ecuației (16), la numitor, în loc de $2s$ și $s \in [-1, +1]$ sau $s \in [-5, +5]$ s-a introdus o excentricitate numerică liniară constantă de $s = 0.1$, adică termenul $0,2$ în loc de $2.s$, așa cum se poate vedea din relația de deasupra ▲ graficelor **CH neliniare** din **figura 33.4**.



Așa cum se vede, mai clar în graficele din **3D (Fig. 33.4▼)**, o curbă de histereză din **2D (Fig. 33.4▲)**, are două ramuri: cea din stânga, care rezultă pentru excentricități liniare negative $s < 0$ sau de $s > 0$ și $\varepsilon = \pi$ și cea din dreapta pentru cele pozitive $s > 0$ și $\varepsilon = 0$.

Pentru a putea compara expresiile, se dă expresia **FSM-CE amplitudine excentrică $A_{\varepsilon\alpha}$** , care este

$$(33.16) \quad A_{\varepsilon\alpha} = \alpha(\theta) = \theta + \beta = \theta + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)}{R_{\varepsilon\alpha} \cos \theta} = \theta + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cos(\theta - \varepsilon)}}$$

CH neliniare, frecvent întâlnite în electromagnetism (**Fig. 5**), pot fi obținute, în ecuații parametriche, prin utilizarea funcțiilor cvadrilobe excentrice **coqx** și **C.siqx**, pentru $\theta \equiv x$, cu expresiile

$$(33.17) \quad \begin{cases} x = coq\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-s \cdot \sin\theta}} \\ F = y = C \cdot siq\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-s \cdot \cos\theta}} \end{cases}, \text{ pentru } C = 100,$$

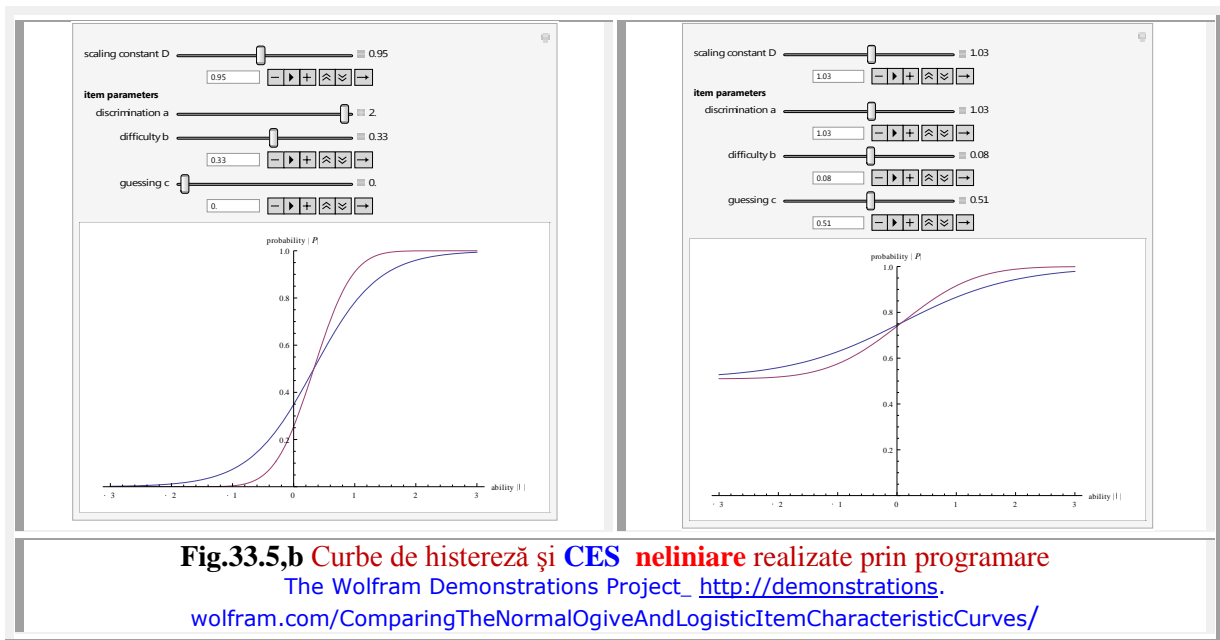
în care constanta **C** s-a ales **C = 100**, pentru a putea reprezenta și **CH** din domeniul mecanic, ca forță **F** în funcție de deformația $x: F(x)$, forțe considerabil mai mari decât deformațiile.

Se observă ca energia disipată, proporțională cu suprafața închisă de **CH**, crește cu scăderea excentricității unghiulare ε , fiind minimă pentru $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.

Pentru $s = 0.9$ și pentru diverse valori ale **excentricității unghiulare ε** , se obțin curbele de histereză (**CH**) din figura **5,c**, dintre care, curba de $\varepsilon = \pi/2, 4 \dots \varepsilon = \pi/2, 8$ seamănă leit cu o curbă de magnetizare reală, prezentată în [13, pag196].

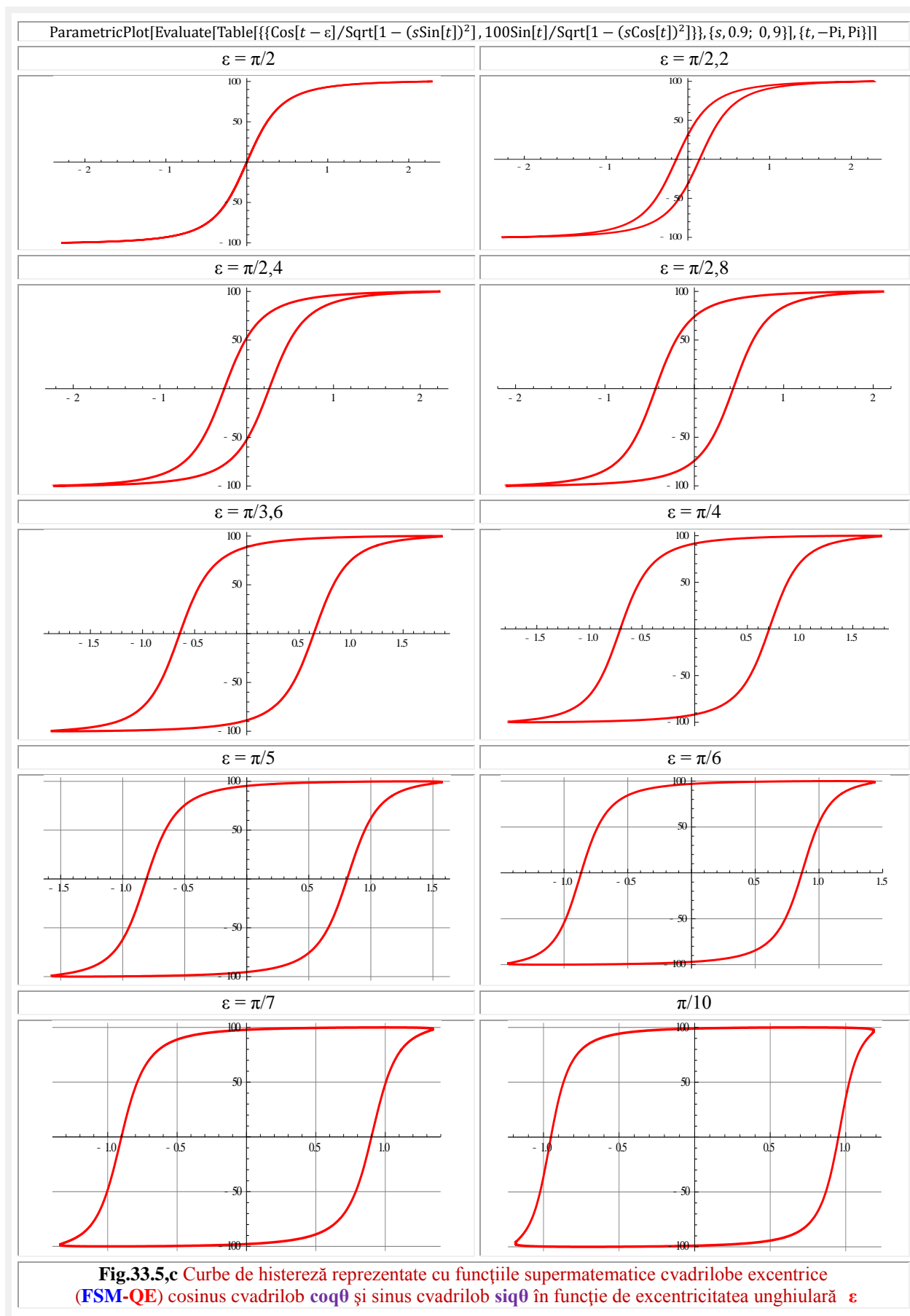
Caracteristici elastice statice (**CES neliniare**) pot fi obținute și cu ajutorul familiei de funcții sinus excentric de variabilă excentrică **sex θ** (**Fig. 6**) ca și prin programe speciale (**Fig.33.5,b**).

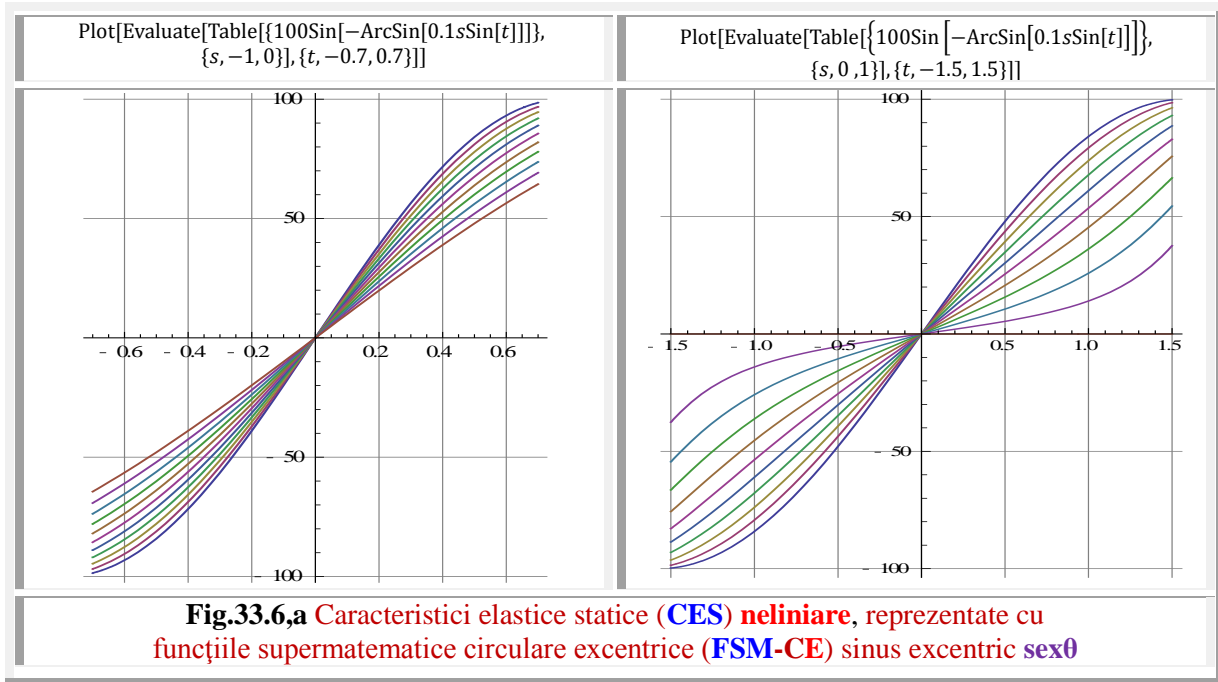
Pentru excentricitate liniară numerică negativă ($s < 0$), **CES** sunt moi sau regresive, iar pentru $s > 0$ o parte sunt sunt moi, cele din domeniul $s \in [0; 0,5]$, și o altă parte sunt tari, cele din domeniul $s \in [0,5; 1]$. Pentru $s = 0.5$ **CES** sunt aparent liniare.



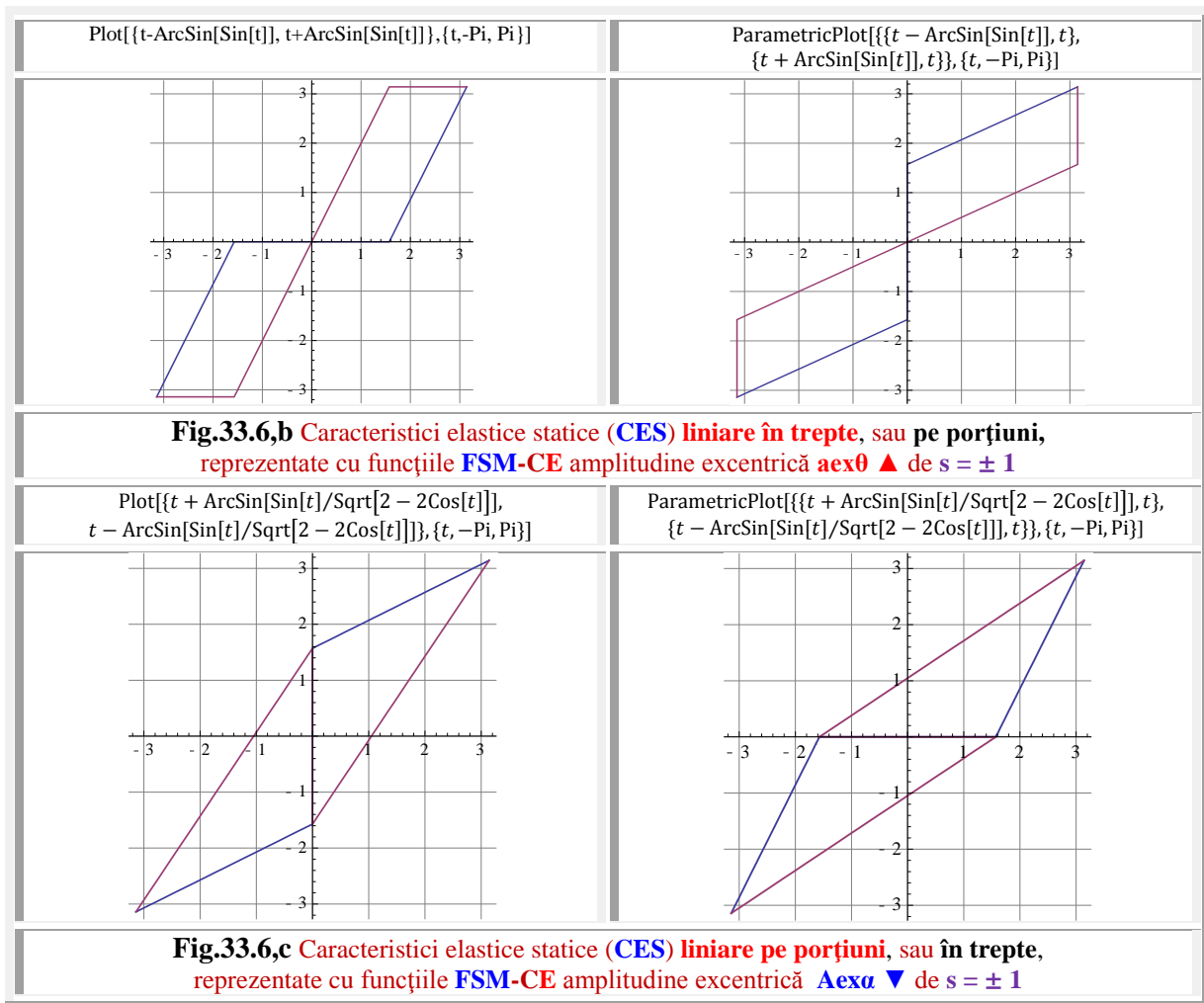
Dacă elementele sunt **neliniare**, dar **legate în paralel**, (**Fig.33.7,a◀**) deformațiile / deplasările tuturor elementelor sunt egale între ele / aceleași, inclusiv ale elementului echivalent, iar suma forțelor elementelor componente este egală cu forța care solicită elementul echivalent.

FSM-CE amplitudine excentrică **ax θ** și **A $\varepsilon\alpha$** pot exprima nu numai **CES** liniare și neliniare extrem de reale, dar chiar și **CES liniare în trepte** sau **pe porțiuni / tronsoane (Fig. 33.6,b)**. Astfel, curbele din **figura 33.6,c** reprezintă caracteristicile forță-deplasare ale sistemului cu amortizare columbiană, conectat elastic, pentru o deplasare ciclică a izolatorului complet (◀ în stânga) și pentru ansamblul amortizorului, adică împreună cu arcul liniar, prezentată în dreapta ▶ figurii [14, Vol.II, pag, 346, Fig. 30.12].



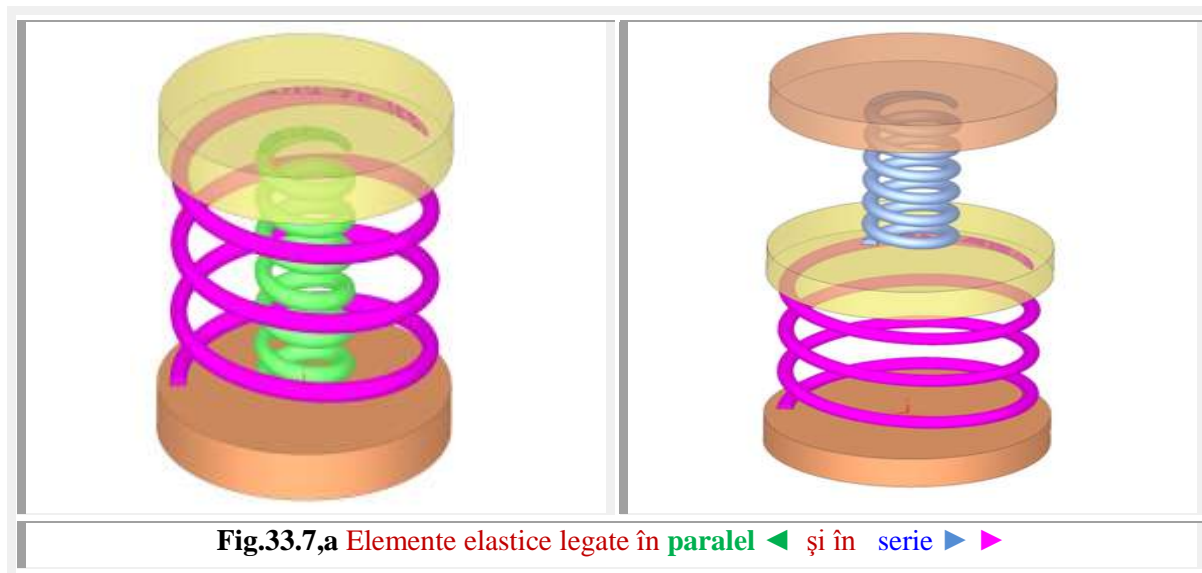


Multe alte ecuații sunt existente în literatura de specialitate, din care cauză nu au mai fost prezentate aici. Ele sunt prezentate, ca exprimare analitică a CES neliniare, în referatul [2].

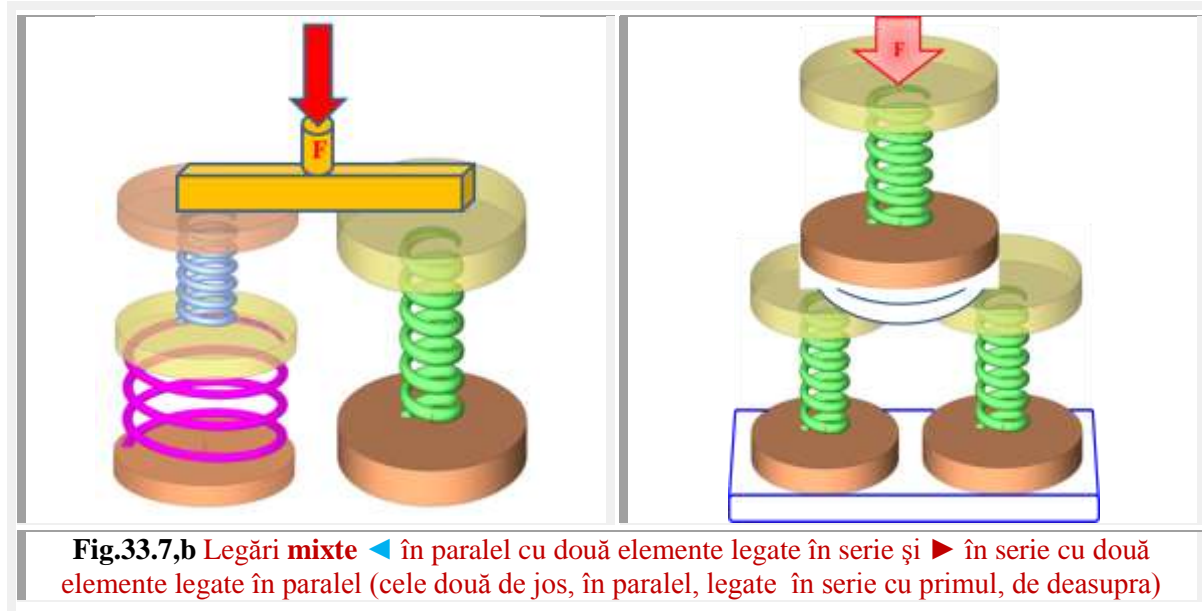


2. LEGAREA ÎN SERIE, ÎN PARALEL ȘI MIXT A ELEMENTELOR ELASTICE

Dacă elementele sunt **liniare**, determinarea analitică a elementului echivalent, mecanic sau electric, pentru diverse elemente legate în diverse moduri, **serie**, **paralel** și **mixt** (Fig.7), nu ridică niciun fel de probleme.



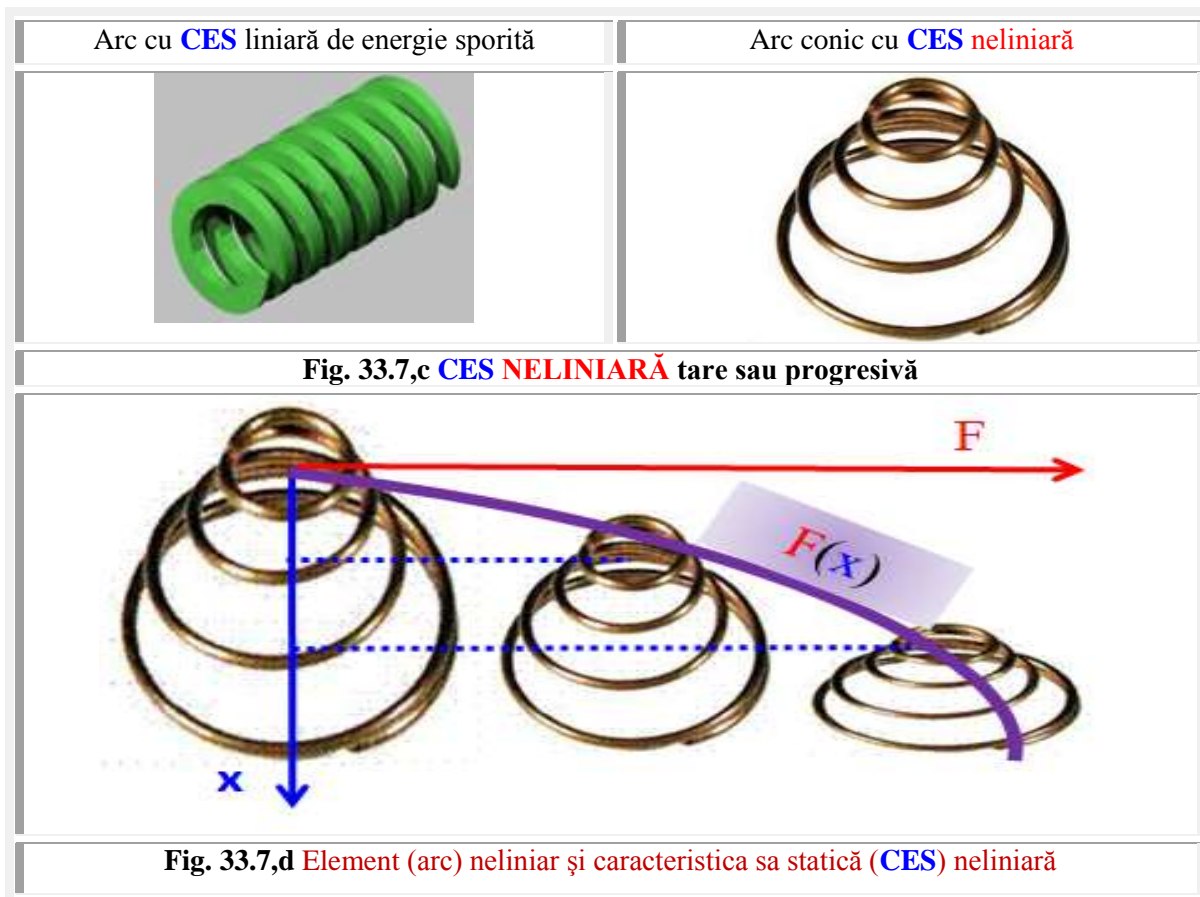
Sistemul, determinat de n elemente componente, ce au forțele elastice exprimate de ecuațiile (1) sau (2) și **CES neliniare**, dacă sunt legate în **paralel**, determinarea expresiei **CES** a sistemului, a elementului sumă sau echivalent, de asemenea nu ridică niciun fel de probleme.



În acest caz, al legării în **paralel**, forța F , care soliciță elementul sumă sau echivalent, reprezintă suma forțelor F_i ale elementelor componente, iar deformația elementului sumă x , ca și deformațiile x_i ale celor n componente sunt aceleași (Fig.33.7,a ◀), adică

$$(33.18) \quad \begin{cases} x = x_i \Rightarrow x = x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n \\ F = \sum_{i=1}^n F_i \Rightarrow F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n \end{cases}$$

Pentru ca niciun arc să nu aibă deformații suplimentare și să respecte relațiile (18), este necesar ca ele să fie de aceeași lungime inițială maximă L_M , în stare netensionată, la $F = x = 0$.



Pentru toate tipurile de elemente și pentru toate tipurile de legări / conexiuni între ele, există **metode grafice**, consacrate, de determinare a elementului sumă, a două sau mai multe elemente componente.

În literatura mondială de specialitate, se cunosc **metode grafice** de determinare a caracteristicii elastice **neliniare**, în cazul legării elementelor în serie, dar **nu se cunoaște expresia analitică** a elementului chivalent, de compunere a două sau mai multe elemente elastice **neliniare**, în cazul **legării în serie** (Fig. 33.7,a ► ►).

În cazul legării în **paralel**, graficele elementelor componente neliniare, defalcate / descompuse în părțile lor liniare și în cele neliniare, zise **neliniare pure**, pentru că nu au și unul sau mai mulți termeni liniari, sunt prezentate în **figura 33.8,a**.

Având atât termen liniar, de forma $F_{Li} = k_i x_i$, cât și termen neliniar, de forma $F_{Ni} = \mu_i x_i^p$, elementele neliniare, de forma $F_i = F_{Li} + F_{Ni}$, au fost denumite **neliniare impure**.

Se constată că însumarea se poate face direct sau pe componente.

Astfel, componenta liniară sumă F_L va fi suma componentelor liniare F_{Li} ale elementelor componente, iar componenta neliniară sumă, adică F_N , va fi suma componentelor neliniare F_{Ni} , adică

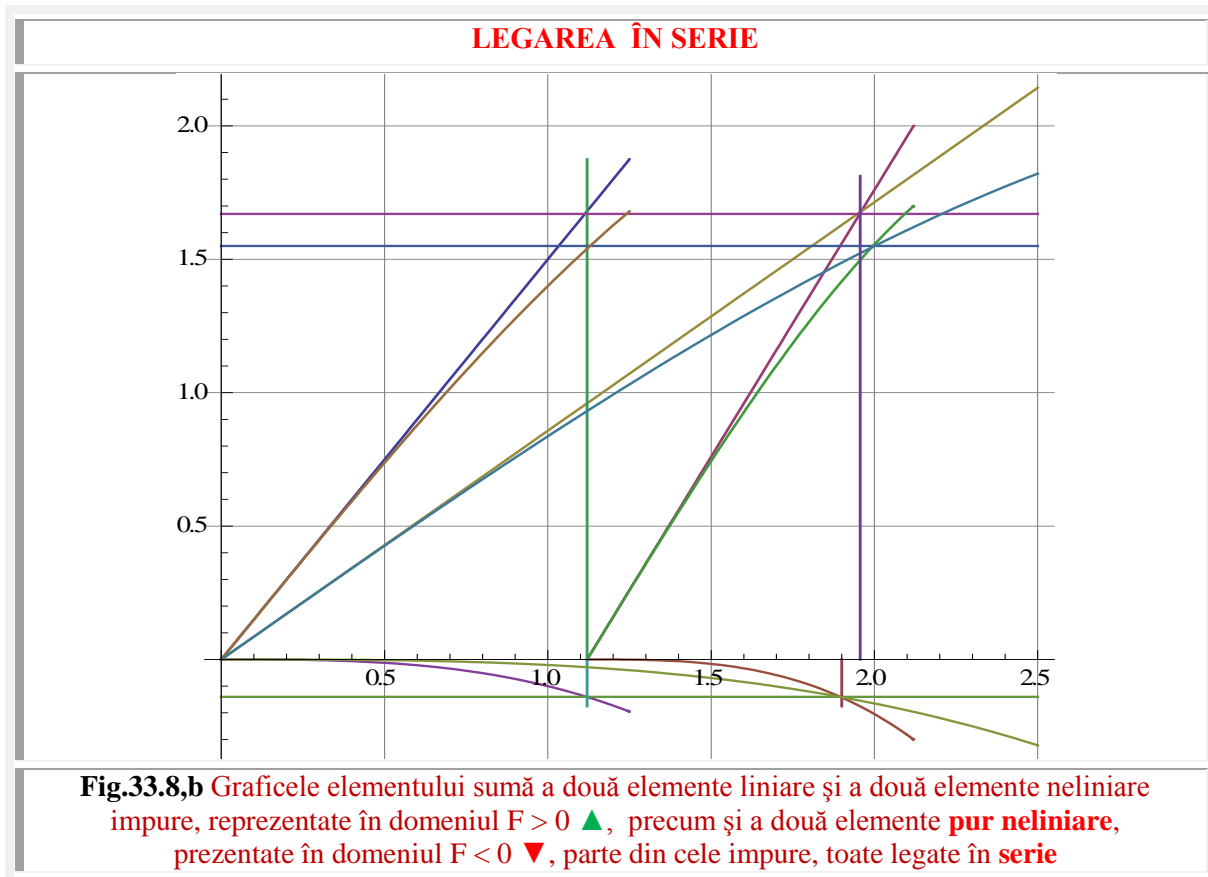
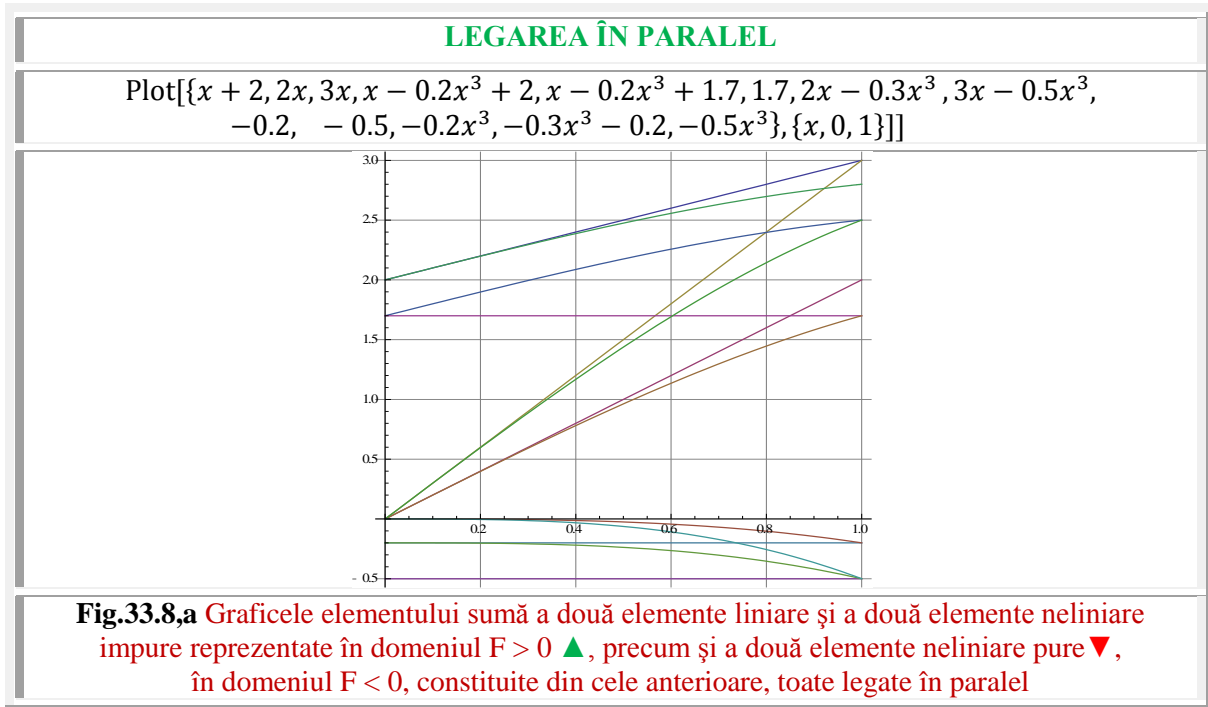
$$(33.19) \quad \begin{cases} F_L = \sum_1^n F_{Li} \\ F_N = \sum_1^n F_{Ni} \end{cases} \Rightarrow F = F_L + F_N \rightarrow F = \sum_1^n F_{Li} + \sum_1^n F_{Ni},$$

ceea ce rezultă și se poate verifica în **figura 33.8,a**.

Acest neajuns, al inexistenței unei relații de calcul a elementului sumă, în cazul legării în serie a elementelor **neliniare**, a fost eliminat în anul 1978, an în care, prin comunicarea [1], autorul a prezentat, în premieră mondială, relația de calcul și metoda analitică de calcul a **CES** neliniare legate în serie, metodă pe care a dezvoltat-o apoi în referatul de doctorat [2] cu privire la “Rigiditatea sistemelor tehnologice elastice”

Legarea în serie a două elemente elastice (arcuri) este prezentată în dreapta **figurii 33.7,a** ► ►, iar **metoda grafică** de determinarea a **CES** echivalente, în cazul legării în **serie**, este prezentată în **figura 33.8,b**.

Această descompunere, în părți **liniare** și în părți **neliniare pure**, stă la baza obținerii, după mulți ani de trudă, a relației exacte de însumare a elementelor neliniare și în cazul nesoluționat al **legării în serie**.



Acest succes este și rodul aplicării principiului lui **Fred Menger** “*Dacă torturezi datele suficient, acestea îți vor mărturisi aproape totul*”. Astfel s-a dovedit, încă odată, că acest principiu este adevărat și, totodată, că “*intuiția este o știință exactă*”.

Mai “torturat” decât datele, a fost autorul. În anii ’60 ... ’70, nedispunând de calculatoare numerice, nici măcar de buzunar, graficele **CES** neliniare, pentru verificarea ipotezelor (în cadrul acțiunii de “*torturarea datelor*”), se realizau / ridicau pe hartie milimetrică, după calcule efectuate manual. Ce vremuri.. N-aveam peste 77 de ani, eram ambițios și plin de energie. Ca și acum.

Și a fost găsită / dedusă relația generală pentru însumarea elementelor cu **CES pur neliniare** (33.20)

$$\mu_{\Sigma} = \frac{\mu_1 * \mu_2}{(\sqrt[p]{\mu_1} + \sqrt[p]{\mu_2})^p}$$

Relația (20) se mai poate scrie sub forma

$$\frac{1}{\sqrt[p]{\mu_{\Sigma}}} = \frac{1}{\sqrt[p]{\mu_1}} + \frac{1}{\sqrt[p]{\mu_2}}$$

În acest fel, expresia **CES** a elementului rezultat sau sumă a două elemente componente neliniare impure va fi

$$F_{\Sigma} = k_{\Sigma} x + \mu_{\Sigma} x^p = \frac{k_1 * k_2}{k_1 + k_2} x + \frac{\mu_1 * \mu_2}{(\sqrt[p]{\mu_1} + \sqrt[p]{\mu_2})^p} x^p$$

Odată găsită relația, care verifică ipotezele, demonstrarea adevărului ei nu mai ridică probleme insurmontabile. Iar însumarea elementelor **neliniare impure**, legate în **serie**, nici atât, deoarece însumarea părții liniare era deja cunoscută ca fiind

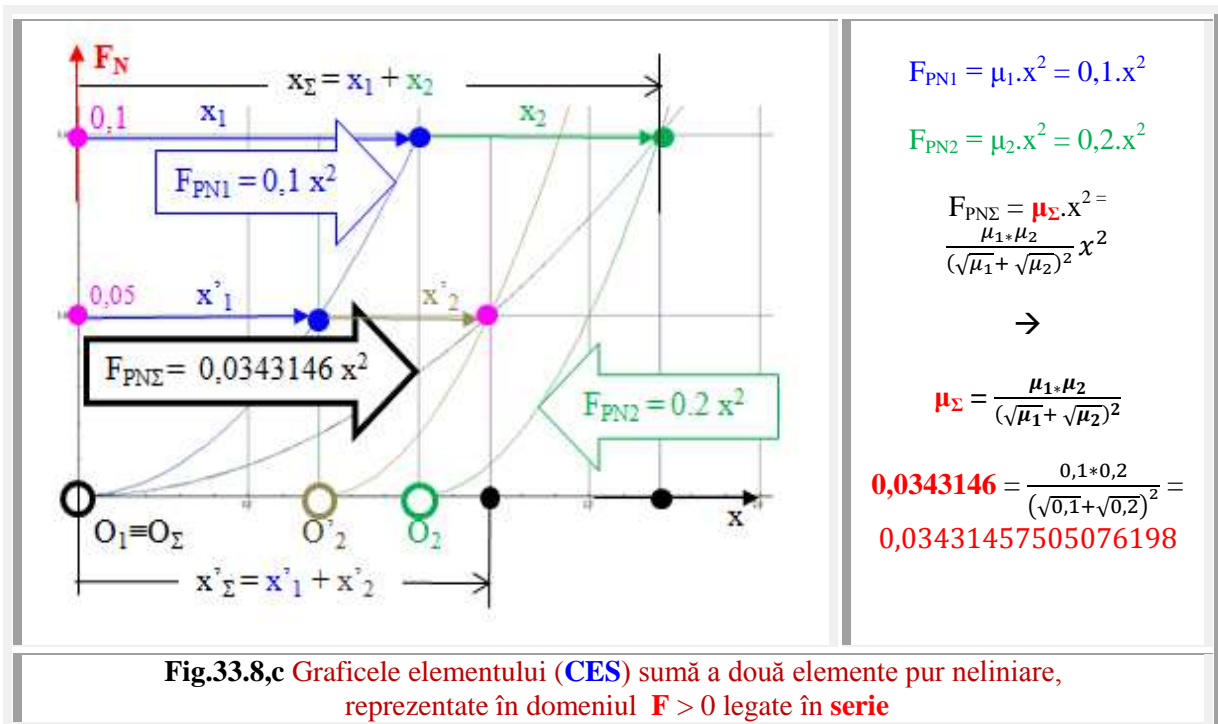
$$\frac{1}{k_{\Sigma}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

și, pentru numai două elemente, rezultă

$$\frac{1}{k_{\Sigma}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \rightarrow k_{\Sigma} = \frac{k_1 * k_2}{k_1 + k_2}$$

Astfel că elementul sumă a două elemente **neliniare impure** legate în **serie** va fi

$$F_{\Sigma} = F_L + F_{PN} = k_{\Sigma} * x + \mu_{\Sigma} x^p = \frac{k_1 * k_2}{k_1 + k_2} x + \frac{\mu_1 * \mu_2}{(\sqrt[p]{\mu_1} + \sqrt[p]{\mu_2})^p} x^p$$



Relația (23) este valabilă numai pentru elemente elastice omogene, respectiv care au partea **pur neliniară** de aceeași putere / exponent **p**.

Relațiile (20) și apoi (23) au putut fi găsite pornind de la următoarele ipoteze:

- Elementele **liniare** au ca sumă tot un element **liniar**, ipoteză valabilă și cunoscută;
- Elementele **pur neliniare** au ca sumă tot un element **pur neliniar** (Fig.33.8,c), toate de același **tip** (exponent / putere - **p** -);
- Elementul **neliniar impur** sumă este de aceeași formă (exponent / putere) ca și elementele **impure neliniare** componente.
- Coeficienții μ_i ai elementelor componente ale unui sistem elastic, ca și al elementului sumă μ_Σ reprezintă **rigiditatea globală** a elementelor pur neliniare pentru o deformație unitară, adică pentru valoarea de $x = 1$ (Fig. 33.8,d);
- Elementul sumă are aceeași formă / expresie ca și elementele componente, adică, mai explicit, dacă elementele componente, legate în serie, sunt **toate** de forma $F_i = k_i + \mu_i \cdot x^p$, atunci și elementul sumă are aceeași forma $F_\Sigma = k_\Sigma + \mu_\Sigma \cdot x^p$;

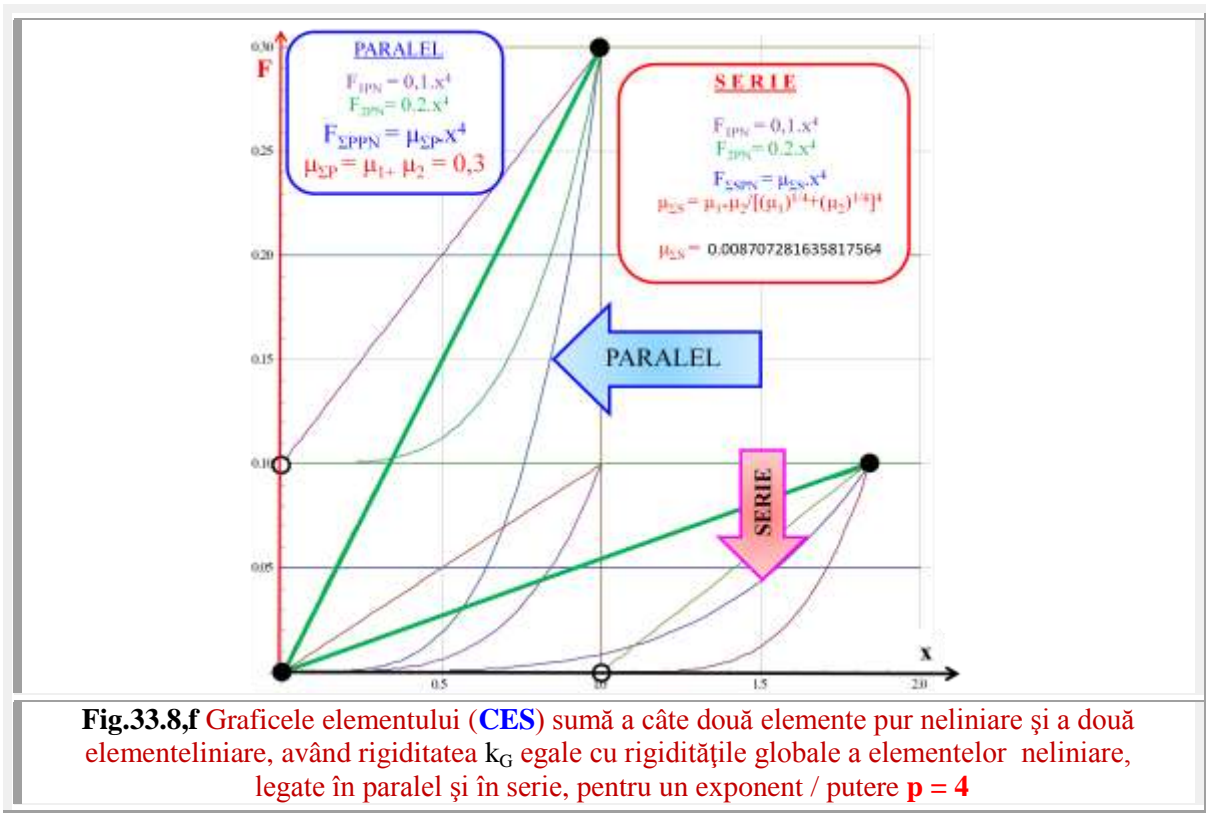


Fig.33.8,f Graficele elementului (CES) sumă a câte două elemente pur neliniare și a două elementeliniare, având rigiditatea k_G egale cu rigiditățile globale a elementelor neliniare, legate în paralel și în serie, pentru un exponent / putere **p = 4**

3 DEMONSTRAREA RELAȚIEI (33.20) PENTRU **p = 3** RIGIDITATE LOCALĂ și RIGIDITATE GLOBALĂ

Se știe că, tangenta într-un punct $P(F, x)$ la o curbă (**CES** = $F(x)$) este dată de **derivata** $\frac{dF}{dx}$ a ecuației $F(x)$ care descrie această curbă. Pentru deplasări sau, mai precis, pentru deformații mici, ținând cont că x reprezintă o deformație elastică neliniară, în jurul punctului P , curba poate fi aproximată cu tangenta în acest punct, adică cu **rigiditatea locală** [1],[2],[11],[12] sau **rigiditatea tangentă** [15], [16] din punctul $P(F, x)$, notată cu R_L sau cu k_L și care va fi

$$(33.26) \quad R_L \equiv k_L = \left. \frac{dF}{dx} \right|_P$$

Pentru **CES Duiffing** date de relațiile (33.2) **rigiditățile locale** sau **tangente** sunt

$$(33.27) \quad \begin{cases} k_{L1} = k_1 \pm 3 \cdot x^2 \\ k_{L2} = k_2 \pm 3 \cdot x^2 \\ k_{L\Sigma} = k_\Sigma \pm 3 \cdot x^2 \end{cases} \quad \text{și, în general, pentru un exponent } p \quad \begin{cases} k_{L1} = k_1 \pm p \cdot x^{p-1} \\ k_{L2} = k_2 \pm p \cdot x^{p-1} \\ k_{L\Sigma} = k_\Sigma \pm p \cdot x^{p-1} \end{cases}$$

Din relația (27) rezultă că, în origine, adică în punctul $P \equiv O(0,0)$, în care $x = F = 0$, rigiditatea locală \mathbf{R}_L este chiar rigiditatea sau constanta elastică k a elementelor cu **CES neliniare impure** în origine, care este și rigiditatea sau constanta elastică k a componentelor sau a părții lor **liniare** (k_1, k_2, k_Σ), adică, pentru $x = 0$, indiferent de valoarea exponentului p rezultă

$$(33.28) \quad \begin{cases} k_{L1}(0) = k_1 \\ k_{L2}(0) = k_2 \\ k_{L\Sigma}(0) = k_\Sigma \end{cases}$$

Rigiditățile locale în originea $O(0,0)$, adică pentru $x = 0$, sunt în relațiile cunoscute de la elemente liniare legate în serie, adică

$$(33.29) \quad \frac{1}{k_{L\Sigma}} = \frac{1}{k_{L1}} + \frac{1}{k_{L2}} \quad \text{sau} \quad k_{L\Sigma} = \frac{k_{L1} \cdot k_{L2}}{k_{L1} + k_{L2}}$$

Din O în P se poate ajunge prin deplasarea pe **CES** sau pe dreapta care unește cele două puncte și care este secanta OP .

Coeficientul unghiular al acestei drepte secante este dat de **diferențiala** funcției sau a **CES** în punctul P , adică, de **rigiditatea în ansamblu** sau pe tot domeniul de deformare a elementului elastic

$$(33.30) \quad R_G = \left. \frac{\Delta F}{\Delta x} \right|_P$$

și poartă denumirea de **rigiditate globală** [16],[11], [12] sau de **rigiditate secantă** [15],[17],[12].

Pentru **CES Duiffing** date de relațiile (2) **rigiditățile globale** sau **secante** sunt

$$(33.31) \quad \begin{cases} R_{G1} = \frac{F_1}{x} = k_1 \pm \mu_1 \cdot x^2 \\ R_{G2} = \frac{F_2}{x} = k_2 \pm \mu_2 \cdot x^2 \\ R_{G\Sigma} = \frac{F_\Sigma}{x} = k_\Sigma \pm \mu_\Sigma \cdot x^2 \end{cases}$$

De asemenea, se observă că **CES** pot fi mai sintetic exprimate cu ajutorul **rigidității globale**, prin relațiile $F(x) = k_G(x) \cdot x$ astfel

$$(33.32) \quad \begin{cases} F_1 = (k_1 \pm \mu_1 \cdot x^2) \cdot x \\ F_2 = (k_2 \pm \mu_2 \cdot x^2) \cdot x \\ F_\Sigma = (k_\Sigma \pm \mu_\Sigma \cdot x^2) \cdot x \end{cases}$$

ceea ce revine la a da pe x factor comun din expresiile **CES neliniare impure** (2).

Între cele două tipuri de rigidități exista următoarele dependențe / relații

$$(33.33) \quad k_G = \frac{1}{x} \int_0^x k_L(x) \cdot dx \quad \text{și}$$

$$(33.34) \quad k_L = x \frac{d(k_G)}{dx} + k_G \quad ,$$

iar **CES** se poate exprima și prin relația

$$(33.35) \quad F(x) = \int_0^x k_L(x) \cdot dx.$$

Cedarea w este inversa rigidității, adică

$$(33.36) \quad w = \frac{1}{R} = \frac{1}{k}, \text{ astfel că, pentru } \mathbf{CES \text{ neliniare impure}} \text{ (2) } \mathbf{Duiffing, cedarea locală} \text{ este}$$

$$(33.37) \quad \begin{cases} w_{L1} = \frac{1}{k_1 \pm 3 \cdot x^2} \\ w_{L2} = \frac{1}{k_2 \pm 3 \cdot x^2} \\ w_{L\Sigma} = \frac{1}{k_\Sigma \pm 3 \cdot x^2} \end{cases}, \text{ pentru } p = 3 \text{ și, în general, } \begin{cases} w_{L1} = \frac{1}{k_1 \pm p \cdot x^{p-1}} \\ w_{L2} = \frac{1}{k_2 \pm p \cdot x^{p-1}} \\ w_{L\Sigma} = \frac{1}{k_\Sigma \pm p \cdot x^{p-1}} \end{cases}$$

iar **cedarea globală** va fi

$$(33.38) \quad \begin{cases} w_{G1} = \frac{1}{k_1 \pm x^2} \\ w_{G2} = \frac{1}{k_2 \pm x^2} \\ w_{G\Sigma} = \frac{1}{k_\Sigma \pm x^2} \end{cases} \quad \text{și pentru un } p \text{ oarecare} \quad \begin{cases} w_{G1} = \frac{1}{k_1 \pm x^{p-1}} \\ w_{G2} = \frac{1}{k_2 \pm x^{p-1}} \\ w_{G\Sigma} = \frac{1}{k_\Sigma \pm x^{p-1}} \end{cases}$$

La legarea în **serie**, pentru aceleași forțe, adică

$$(33.39) \quad F_1 = F_2 = F_\Sigma, \quad \rightarrow k_1 x_1 \pm \mu_1 x_1^3 = k_2 x_2 \pm \mu_2 x_2^3 = k_\Sigma x \pm \mu_\Sigma x_\Sigma^3$$

iar cedarea elementului sumă este egală cu suma cedărilor elementelor componente, adică

$$(33.40) \quad w_\Sigma = w_1 + w_2 \quad \text{și} \quad x_\Sigma = x_1 + x_2,$$

Deoarece relațiile (39) sunt universal valabile, atât pentru sisteme liniare, cât și pentru cele neliniare, ele sunt valabile și pentru rigiditățile locale în origine [liniare k_1, k_2, k_Σ -rel (28)-] cât și pentru cele globale, în oricare punct de pe **CES**, în care se consideră egalitățile (39), deoarece **P** este comun **CES** și dreptei OP, în punctul extrem al dreptei, dreaptă de pantă k_G .

Pentru **CES neliniare impure** (2) **Duiffing**, rezultă că egalitățile (39) sunt valabile atât pentru partea liniară, adică

$$(33.41) \quad k_1 x_1 = k_2 x_2 = k_\Sigma x,$$

cât și pentru componentele pur neliniare simultan, adică

$$(33.42) \quad \pm \mu_1 x_1^3 = \pm \mu_2 x_2^3 = \pm \mu_\Sigma x^3, \text{ în punctele în care } F_1 = F_2 = F_\Sigma, \text{ adică în toate secțiunile paralele cu axa } Ox, \text{ așa cum se poate verifica în } \mathbf{figurile\ 8}.$$

Din relațiile (42) rezultă

$$(33.43) \quad \begin{cases} \mu_\Sigma = \mu_1 \left(\frac{x_1}{x}\right)^3 \\ \mu_\Sigma = \mu_2 \left(\frac{x_2}{x}\right)^3 \end{cases}, \text{ din care rezultă } \rightarrow \mu_\Sigma = \mu_1 \left(\frac{x_1}{x}\right)^3 = \mu_2 \left(\frac{x_2}{x}\right)^3$$

iar din (29), ca și din (41)

$$(33.44) \quad \begin{cases} \frac{x_1}{x} = \frac{k_\Sigma}{k_1} \\ \frac{x_2}{x} = \frac{k_\Sigma}{k_2} \end{cases} \rightarrow x k_\Sigma = x_1 k_1 = x_2 k_2 \rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

Din relațiile (42) se obține

$$(33.45) \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{\sqrt[3]{\mu_2}}{\sqrt[3]{\mu_1}} \quad \text{și, ținând cont de relația (44)}$$

$$(33.46) \quad \frac{k_2}{k_1} = \frac{\sqrt[3]{\mu_2}}{\sqrt[3]{\mu_1}} \quad \text{și} \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{\sqrt[3]{\mu_1}}{\sqrt[3]{\mu_2}}$$

Înlocuind expresiile (44) în (43) și ținând cont de relația (29), rezultă

$$(33.46) \quad \begin{cases} \mu_\Sigma = \mu_1 \left(\frac{k_\Sigma}{k_1}\right)^3 = \mu_1 \left(\frac{k_2}{k_1+k_2}\right)^3 = \mu_1 \left(\frac{1}{\frac{k_1}{k_2}+1}\right)^3 \\ \mu_\Sigma = \mu_2 \left(\frac{k_\Sigma}{k_2}\right)^3 = \mu_2 \left(\frac{k_1}{k_1+k_2}\right)^3 = \mu_2 \left(\frac{1}{1+\frac{k_2}{k_1}}\right)^3 \end{cases}$$

$$(33.47) \quad \mu_\Sigma = \mu_1 \left(\frac{1}{\frac{k_1}{k_2}+1}\right)^3 = \mu_2 \left(\frac{1}{1+\frac{k_2}{k_1}}\right)^3 \rightarrow \mu_\Sigma = \mu_1 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\mu_1}{\mu_2}+1}}\right)^3 = \mu_2 \left(\frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{\mu_2}{\mu_1}}}\right)^3$$

din care rezultă imediat, relația mult căutată

$$(33.48) \quad \mu_\Sigma = \mu_1 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\mu_1}{\mu_2}+1}}\right)^3 = \mu_1 \left(\frac{\sqrt[3]{\mu_2}}{\sqrt[3]{\mu_1} + \sqrt[3]{\mu_2}}\right)^3 = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{(\sqrt[3]{\mu_1} + \sqrt[3]{\mu_2})^3}$$

QED.

În [2] sunt tratate și legările în serie ale elementelor elastice neliniare cu elemente elastice liniare ca și legarea / compunerea în serie a elementelor elastice neliniare impure de exponenți **p** diferiți.

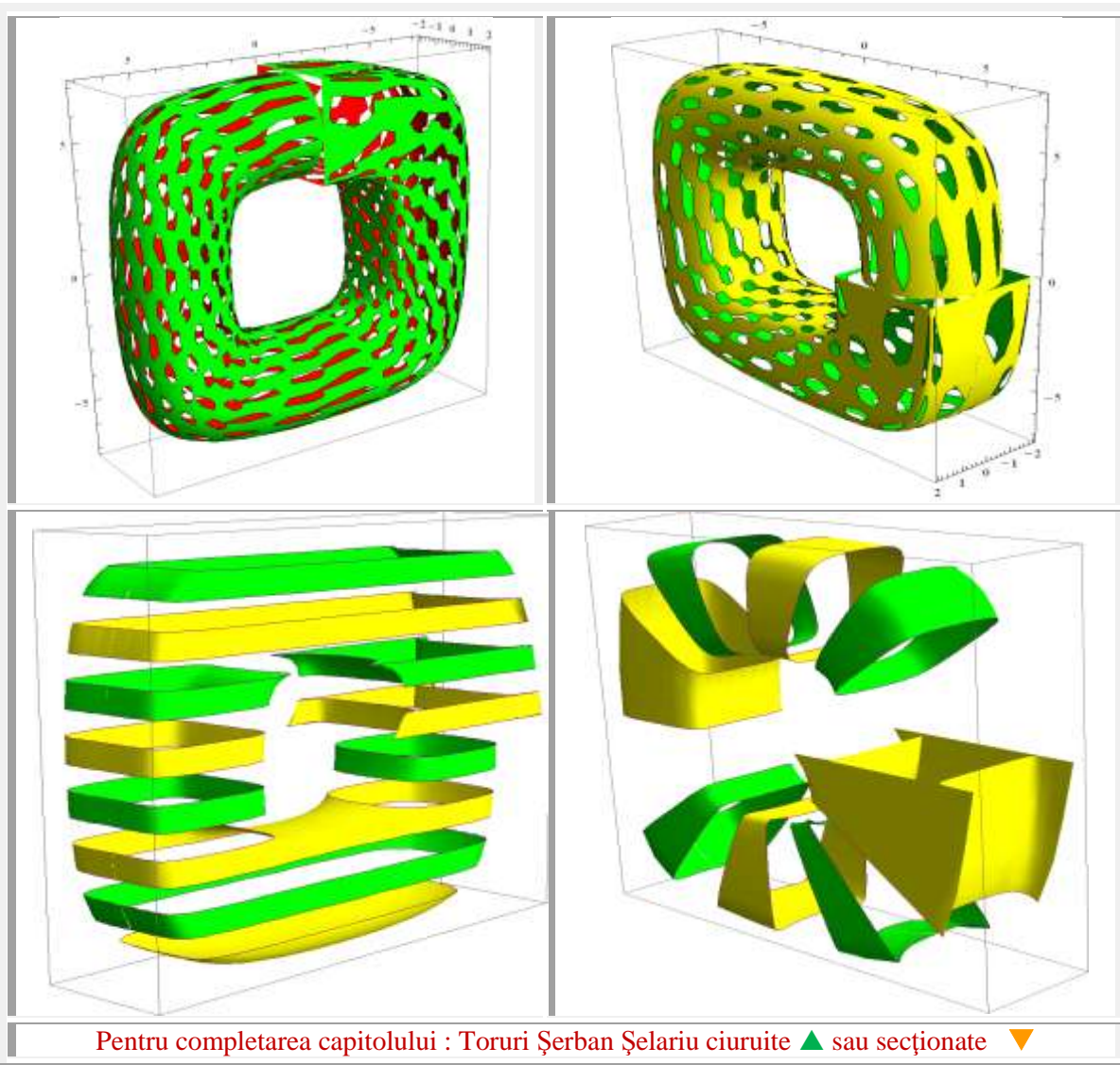
BIBLIOGRAFIE PENTRU CAPITOLUL 33

1	Șelariu Mircea Eugen	DETERMINAREA ANALITICĂ a CARACTERISTICII ELASTICE STATICE ECHIVALENTE a SISTEMELOR cu ELEMENTE NELINIARE LEGATE în SERIE	Comunicările celei de a II-a Conf. P.U.P.R. , Timișoara, 1978,pag. 161 ... 168
2	Șelariu Mircea Eugen	RIGIDITATEA SISTEMELOR TEHNOLOGICE ELASTICE	Referat Doctorat 1976, 82 pagini

ELEMENTE NELINIARE LEGATE ÎN SERIE

3	Șelariu MirceaEugen	FUNCȚII CIRCULARE EXCENTRICE	Com. I Conferință Națională de Vibrații în Construcția de Mașini, Timișoara , 1978, pag.101...108.
4	Șelariu MirceaEugen	FUNCȚII CIRCULARE EXCENTRICE și EXTENSIA LOR.	Bul .St.și Tehn. al I.P. ”TV” Timișoara, Seria Mecanică, Tomul 25(39), Fasc. 1-1980, pag. 189...196
5	Șelariu MirceaEugen	STUDIUL VIBRAȚIILOR LIBERE ale UNUI SISTEM NELINIAR, CONSERVATIV cu AJUTORUL FUNCȚIILOR CIRCULARE EXCENTRICE	Com. I Conf. Naț. Vibr.în C.M. Timișoara,1978, pag. 95...100
6	Șelariu Mircea Eugen	DETERMINAREA ANALITICĂ a CARACTERISTICII ELASTICE STATICE ECHIVALENTE a SISTEMELOR cu ELEMENTE NELINIARE LEGATE în SERIE	Comunicările celei de a II-a Conf. P.U.P.R. , Timișoara, 1978,pag. 161 ... 168
7	Șelariu Mircea Eugen	QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS	The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timișoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 ... 82
8	Șelariu MirceaEugen	DETERMINAREA ORICÂT DE EXACTĂ A RELAȚIEI DE CALCUL A INTEGRALEI ELIPTICE COMPLETE DE SPETA ÎNTÂIA K(k)	Bul. VIII-a Conf. de Vibr. Mec., Timișoara, 1996, Vol III, pag.15 ... 24.
9	Șelariu MirceaEugen	FUNCȚIILE SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ CA SOLUȚII ALE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE	TEHNO ’ 98. A VIII-a Conferința de Inginerie Managerială și Tehnologică, Timișoara 1998, pag 557...572
10	Șelariu MirceaEugen	INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ	Lucr. Simp. Național “Zilele Universității Gh. Anghel” Ed. II-a, Drobeta Turnu Severin, 16-17 mai 2003, pag. 171 ... 178
11	Șelariu MirceaEugen	SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE Vol. I	Editura « POLITEHNICA», Timișoara, 2007
12	Șelariu MirceaEugen	SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE Vol. II	Editura « POLITEHNICA», Timișoara, 2011
13	Dietmar Mende Gunter Simon	PHYSIK, GLEIHUNGEN UND TABELLEN	VEB Fachbuchverlag Leipzig pag.196
14	Cyril M.Harris <small>Columbia University</small> Charles E. Crede <small>California Institute of Technology</small>	SHOCK and VIBRATION HANDBOOK IHN TRREE VOLUMES	McGraw – Hill Book Company și Ed. Tehnica, Buc.,1968
15	Gheorghiu Al.	CONCEPȚII MODERNE ÎN CALCULUL STRUCTURILOR	Ed. Tehnica, Buc.,1975

16	Şelariu MirceaEugen	STUDIUL VIBRAȚIILOR LIBERE ALE SISTEMELOR CU CARACTERISTICĂ ELASTICĂ NELINIARĂ CU AJUTORUL SISTEMELOR ELASTICE LINIARE ECHIVALENTE	Com. Celei de a II-a Conferințe din Domeniul Proceselor și Utilajelor de Prelucrare la Rece, 26-27 oct 1973, Institutul Politehnic « Traian Vuia » din Timișoara
17	Bănuț, V., Popescu, H.	STABILITATEA STRUCTURILOR ELASTICE	Ed. Academiei, Buc. 1975



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

Motto:” **Geometria** este știința care restaurează situația dinaintea creației lumii și încearcă să umple “golul” renunțând la oficiile materiei ”

Lucian Blaga, *Discobolul*

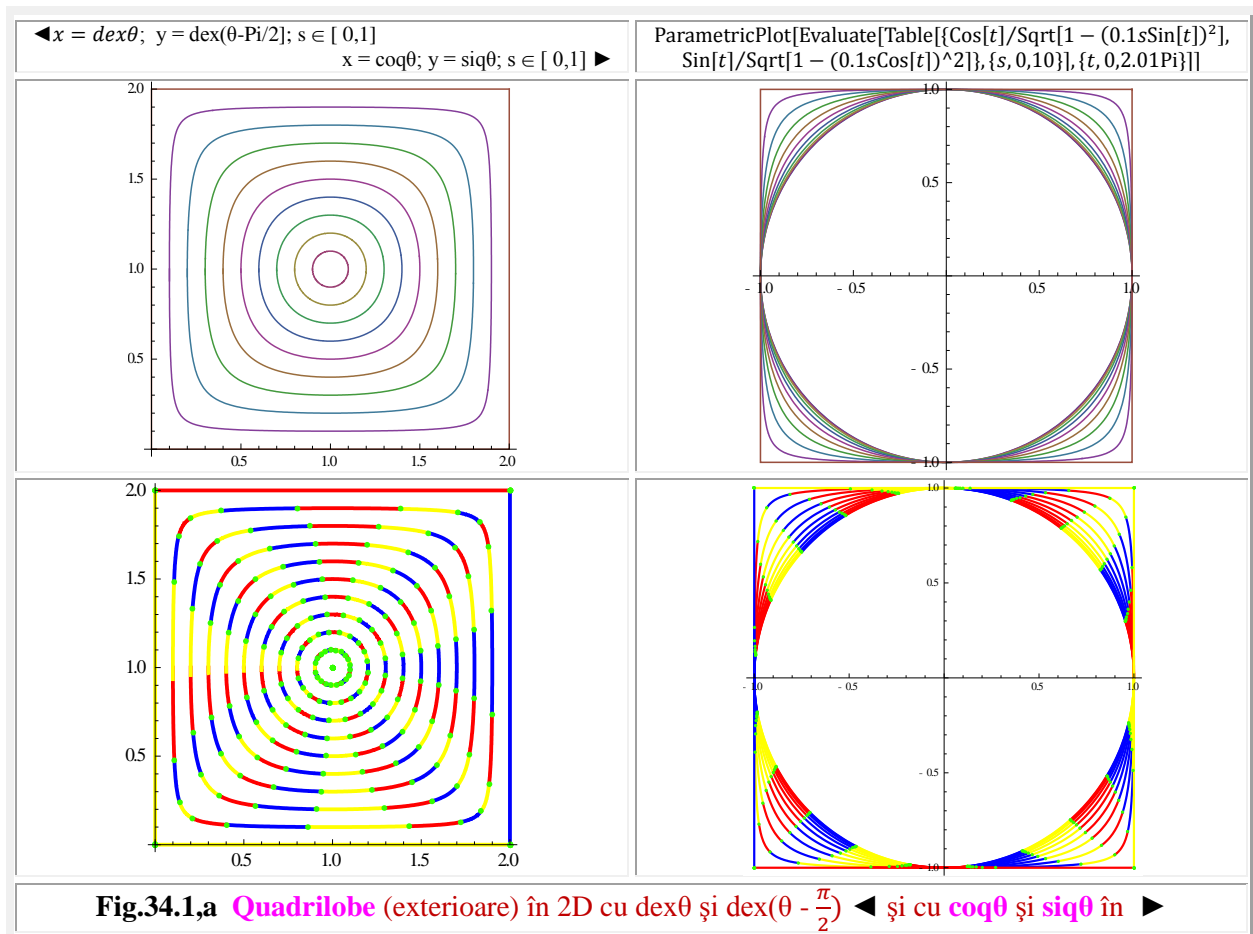
Capitolul 34

FUNȚII SUPERMATEMATICE (FSM) RADIAL EXCENTRICE CVADRILOBE

34.1 QUADRILOBE (CVADRILOBE)

Quadrilobele sunt curbe plane închise, introduse în matematică în anul 2005 prin lucrarea [19, Șelariu Mircea Eugen “QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS”, The 11 – th International Conference on **Vibration Engineering**, Timișoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 ... 82].

34.1.1 QUADRILOBE (QLE) CVADRILOBE EXTERIOARE CERCULUI UNITATE



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

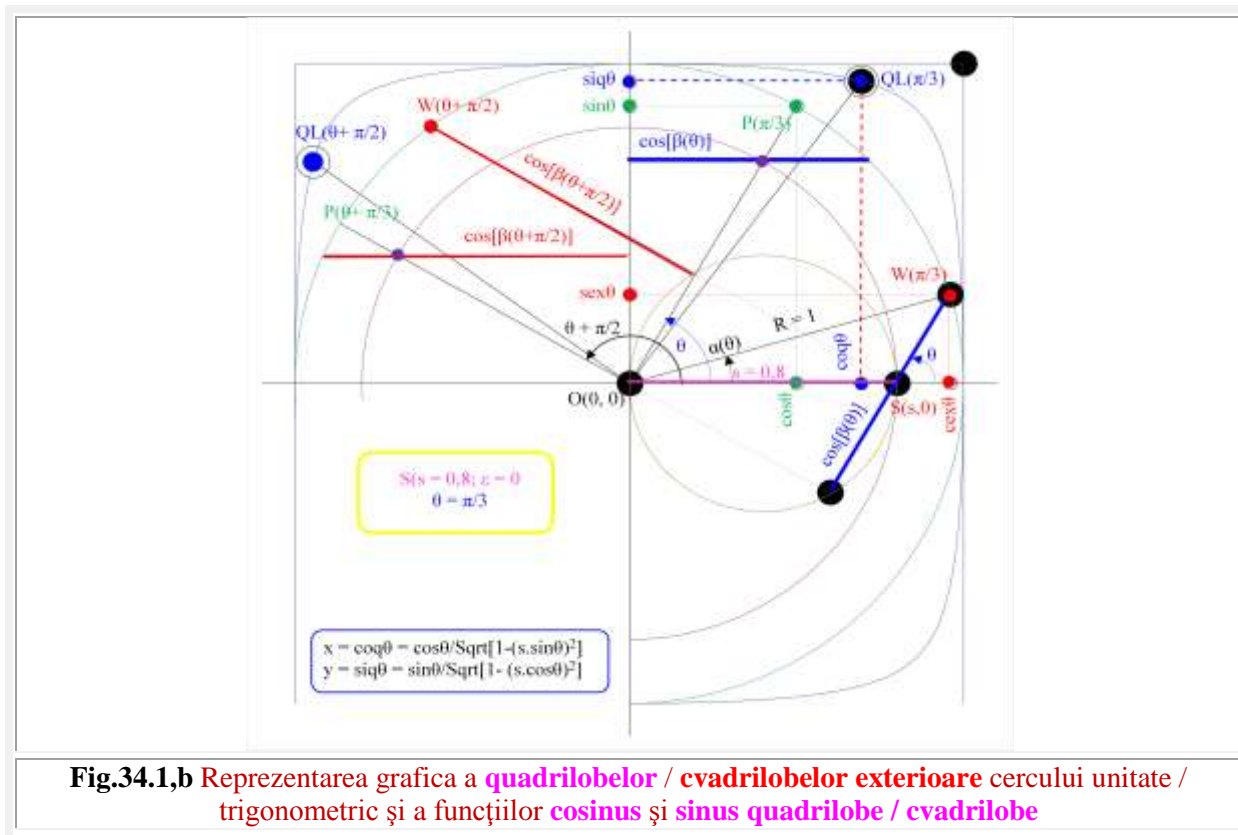


Fig.34.1,b Reprezentarea grafica a **quadrilobelor / cvadrilobelor exterioare** cercului unitate / trigonometric și a funcțiilor **cosinus** și **sinus** **quadrilobe / cvadrilobe**

Funcțiile quadrilobe, **cosinus** $coq\theta$ și **sinus** $siq\theta$ quadrilobe, sunt acelea care, ca și **funcția supermatematică circulară excentrică (FSM-CE) derivată excentrică**, de **variabilă excentrică** $dex\theta$, pot realiza transformarea continuă a cercului în pătrat (**Fig.34.1,a**) sau a conului în piramidă (**Fig.34.1,d**), respectiv al cilindrului circular în cilindru pătrat, așa cum se poate constata în **figura 34.1,d**.

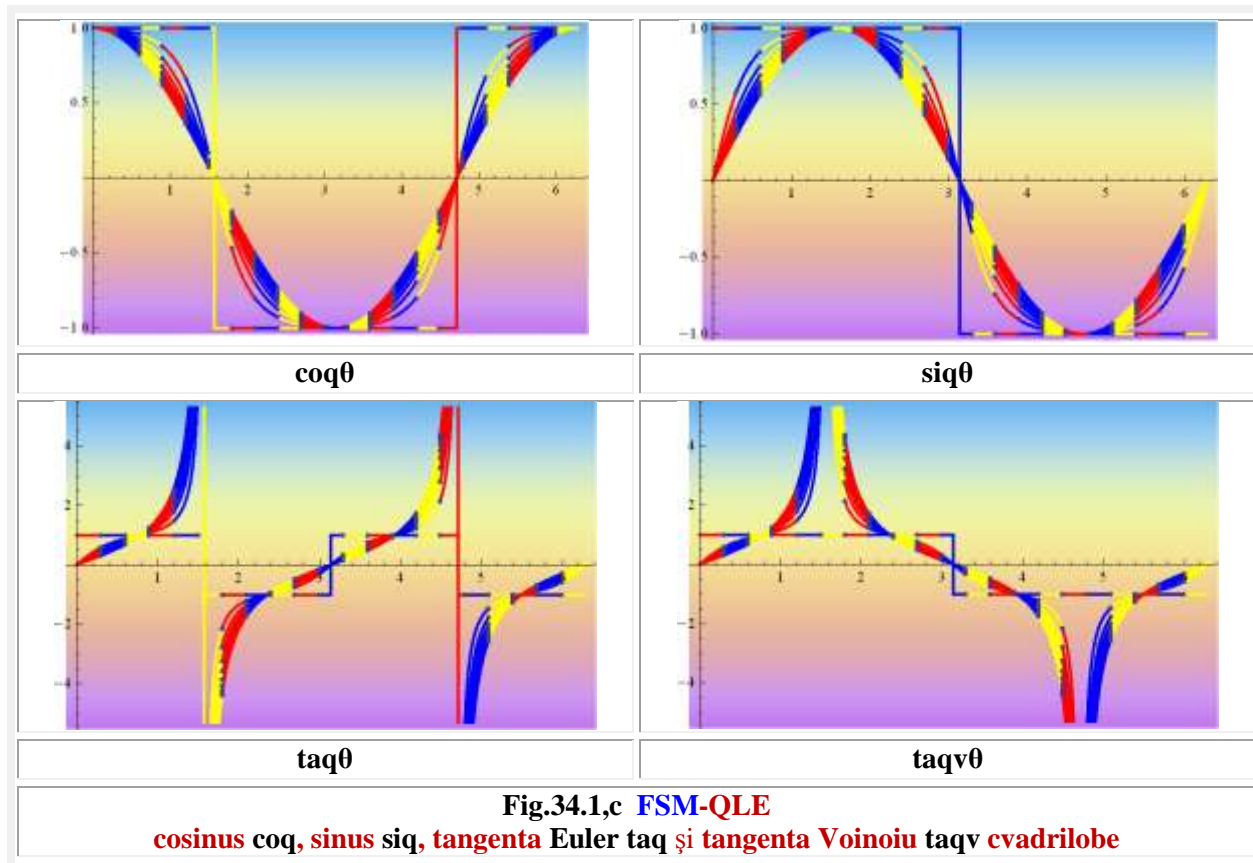
Dacă cercul și pătratul sunt entități matematice proprii **matematicii centrice (MC)**, **quadrilobele** sunt proprii **matematicii excentrice (ME)**. Altfel spus, quadrilobele sunt curbele **supermatematice (SM) excentrice închise (excentrice pătratice)** obținute prin **hibridarea matematică** a 2 curbe **matematice centrice închise: cercului** cu **pătratul**.

Cvadrilobele (în limba engleză **quadrilobes**) **exterioare** cercului unitate sau trigonometric (**Fig.34.1,a**), de raza $R = 1$, au fost introduse în matematică simultan cu funcțiile periodice cvadrilobe **cosinus** cvadrilob $coq\theta$ și **sinus** cvadrilob $siq\theta$ (**Fig.34.1,a**) a căror expresii de definiție sunt

$$(34.1) \quad \begin{cases} coq\theta = coq[\theta, S(s, \varepsilon)] = \frac{\cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}} \\ siq\theta = siq[\theta, S(s, \varepsilon)] = \frac{\sin(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \cos^2(\theta - \varepsilon)}} \end{cases}$$

cu graficele din **figura 34.1,c**, în care s și ε sunt coordonatele polare radiale centrice și, respectiv, unghiulare ale **excentrului** sau polului $S(s, \varepsilon)$: raza polară s , sau **excentricitatea liniară numerică** și unghiul polar, azimutul ε , sau **excentricitatea unghiulară**.

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)



Pentru $s = \pm 1$ cvadriloba degenează într-un pătrat perfect, circumscris cercului unitate (Fig.34.1,a ► și Fig. 34.1,d ►), denumit și **pătrat supermatematic (SM)** pentru a se distinge de pătratul **Alaci**, înscris în cercul unitate și rotit cu $\pm \pi/4$, pe care sunt definite **funcțiile trigonometrice pătratic Alaci**.

Pentru ca o curbă să fie din **familia lobelor (bi-, tri-, cvadri-, ș.a.m.d)**, ea trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

1. Să fie o curbă închisă, pentru toate valorile date excentricității numerice liniare s , în domeniul $s \in [0, 1] \rightarrow S(s \in [0, 1]; \varepsilon = 0)$;
2. Curba să nu conțină puncte unghiulare în vârfurile ei, cu excepția poligonului, adică pentru $s = \pm 1$
3. Pentru $s = 0$ să degeneze într-un cerc perfect;
4. Pentru $s = 1$ să degeneze într-un poligon perfect, regulat sau neregulat.

Se spune că “**degenerează**” pentru că, plecând de la $s = 0$, care este domeniul **matematicii centrice (MC)**, la $s = 1$, trecând prin **domeniul matematicii excentrice (ME $\rightarrow s \in (-\infty, +\infty) \setminus 0$)**, se ajunge la un poligon, adică, din nou la o figură comună matematicii ordinare, **centrice**.

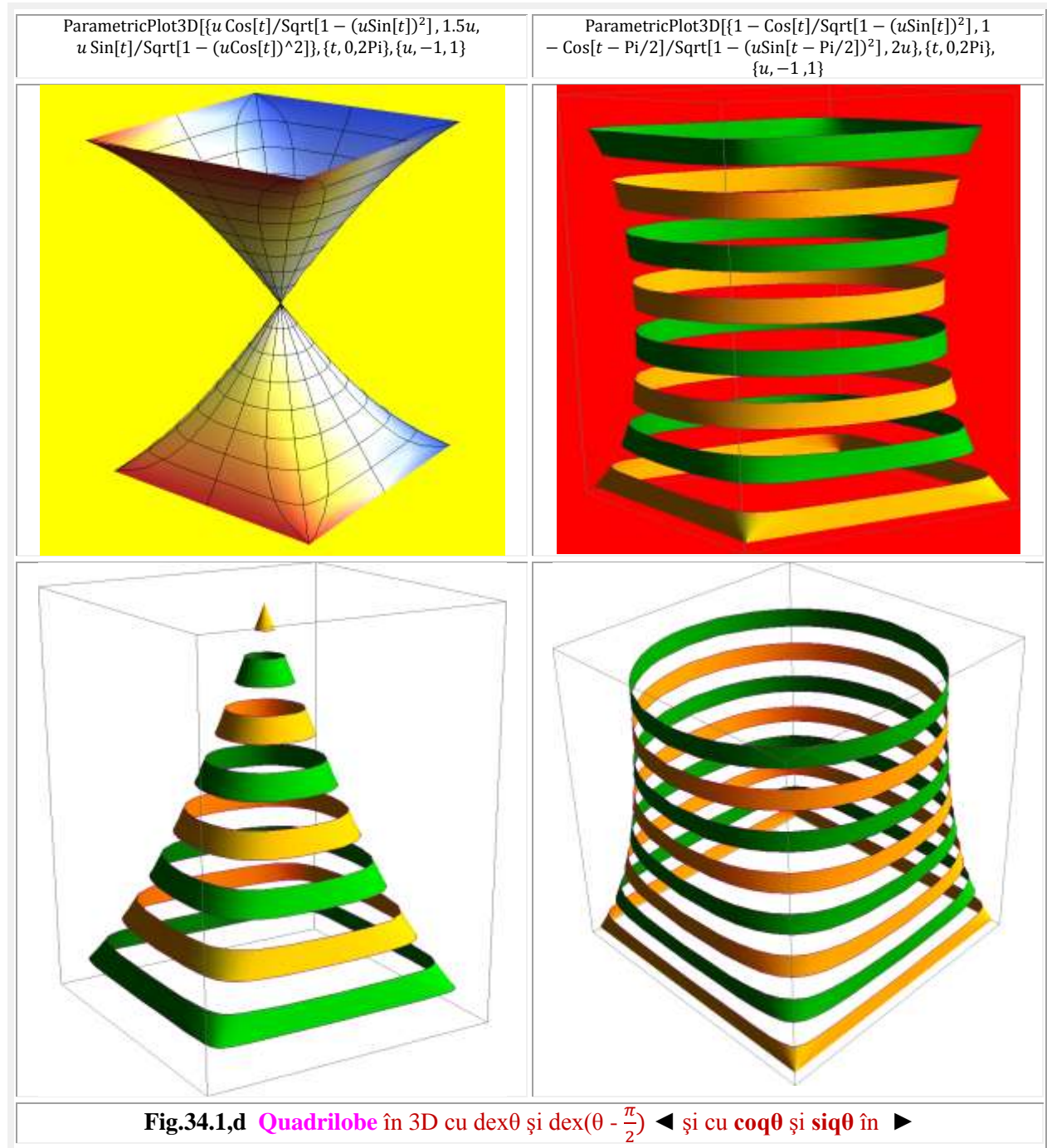
Ambele poligoane, sau pătrate, de exemplu, sunt identice **ca formă**, și totuși, diferențele dintre poligoanele sau pătratul **MC** și poligoanele sau pătratul matematicii excentrice (**ME**) sunt **colosale**.

Pătratul **MC** nu are ecuații sau, mai precis, **nu avea** ca cercul, de exemplu, el compunându-se din patru segmente de dreaptă congruente și paralele, două câte două, pe când pătratul **ME** are ecuațiile

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

parametrice (34.1), obținute pentru $s = \pm 1$ în ecuațiile (34.1), sau cu ajutorul funcției supermatematice circulare excentrice (FSM-CE) derivată excentrică de variabilă excentrică $\text{dex}\theta$

$$(34.2) \quad \begin{cases} x = R \text{dex}[\theta, S(s, \varepsilon)] \\ y = R \text{dex}[\theta \pm \frac{\pi}{2}, S(s, \varepsilon)] \end{cases} \quad \text{dex}\theta = 1 - \frac{s \cdot \cos(\theta - \varepsilon)}{\sqrt{1 - s^2 \cos^2(\theta - \varepsilon)}}$$



34.1.2 **QUADRILOBE (CVADRILOBE) INTERIOARE**
CERCULUI UNITATE (QLI)

Quadrilobele (cvadrilobele) **interioare** cercului unitate, prezentate în **figura 34.2,a**, respectă doar două din cele trei condiții; ele degenerând, pentru $s = 1$, într-un pătrat cu colțuri rotunjite, rotit cu $\frac{\pi}{4}$ față de quadrilobele exterioare de $s = 1$, ca și pătratul **Valeriu Alaci**. Dar pătratul quadrilobelor interioare este cu colțuri rotunjite și nu este, deci, un pătrat perfect, iar pentru $s > 1$ ia forma astroidelor din **figura 34.2,b**, de aceea denumirea de quadrilobe este improprie / forțată.

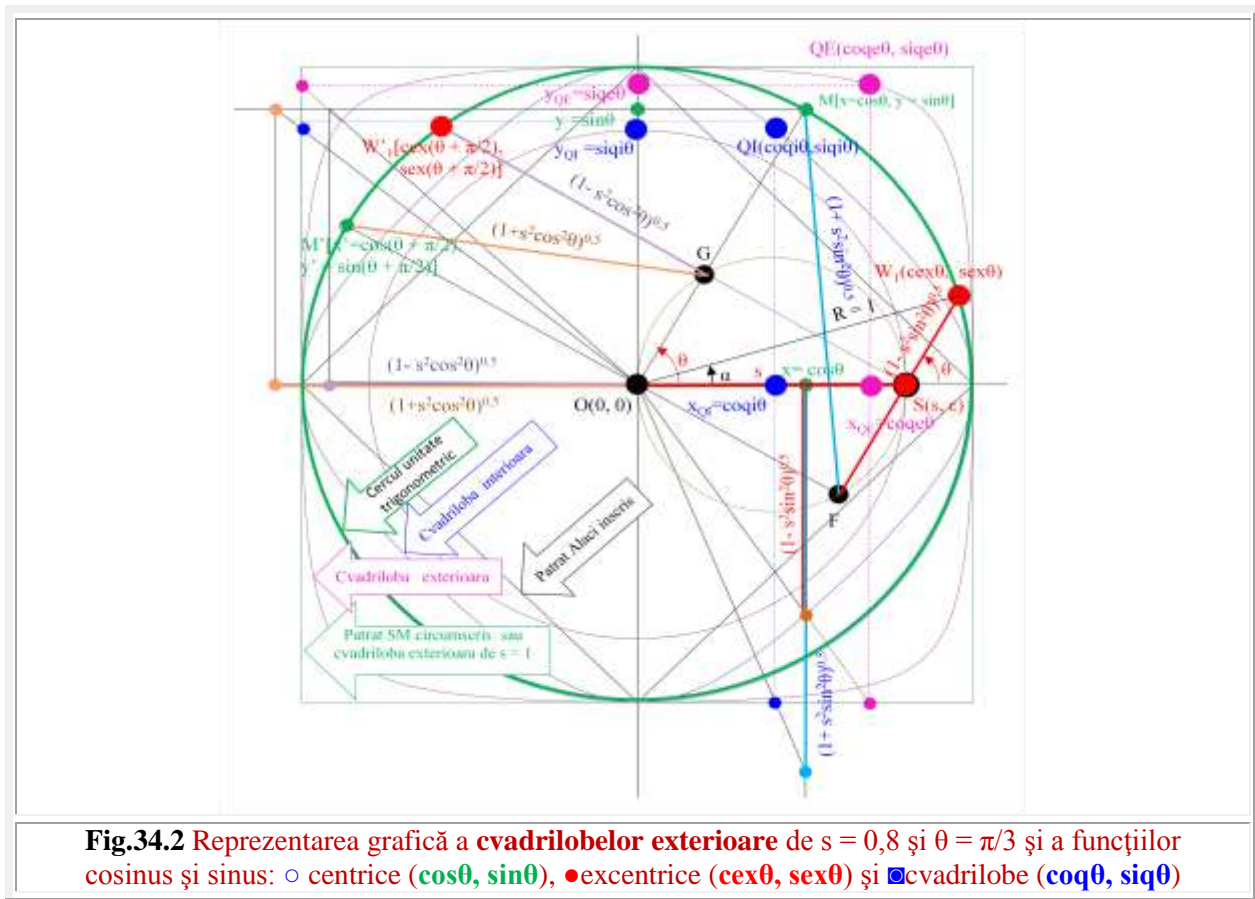


Fig.34.2 Reprezentarea grafică a **cvadrilobelor exterioare** de $s = 0,8$ și $\theta = \pi/3$ și a funcțiilor cosinus și sinus: ○ centrice ($\cos\theta, \sin\theta$), ● excentrice ($cex\theta, sex\theta$) și ■ cvadrilobe ($coq\theta, siq\theta$)

Relațiile parametrice de definiție ale **quadrilobelor interioare** cercului unitate au următoarele relații de definiție cu funcțiile cosinus quadrilob interior $coqi\theta$ și sinus quadrilob interior $siqi\theta$

$$(34.3) \quad \begin{cases} coqi\theta = \frac{\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} \\ siqi\theta = \frac{\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2\cos^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases}$$

Se știe că radicalul, din expresia lui $siq\theta$ și a lui $coq\theta$ din relația (34.1), este, totodată, funcția specială $del\theta$ sau δ ca și funcția eliptică **Jacobi** $dn(u,k)$, pentru $k = s$, adică

$$(34.4) \quad del\theta = \sqrt{1-s^2\sin^2\theta} \quad \rightarrow \quad deli\theta = \sqrt{1+s^2\sin^2\theta}$$

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

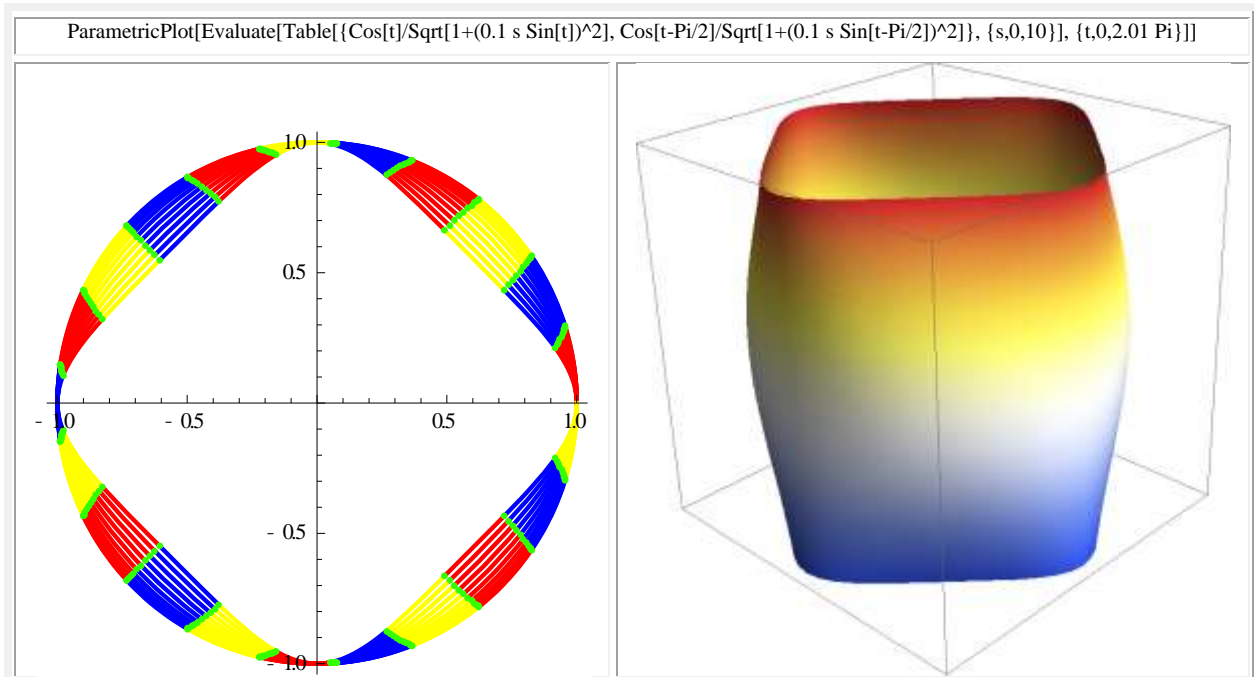


Fig.34.3,a **Quadrilobe (Cvadrilobe) interioare** cercului unitate, pentru $s \in [0, 1]$

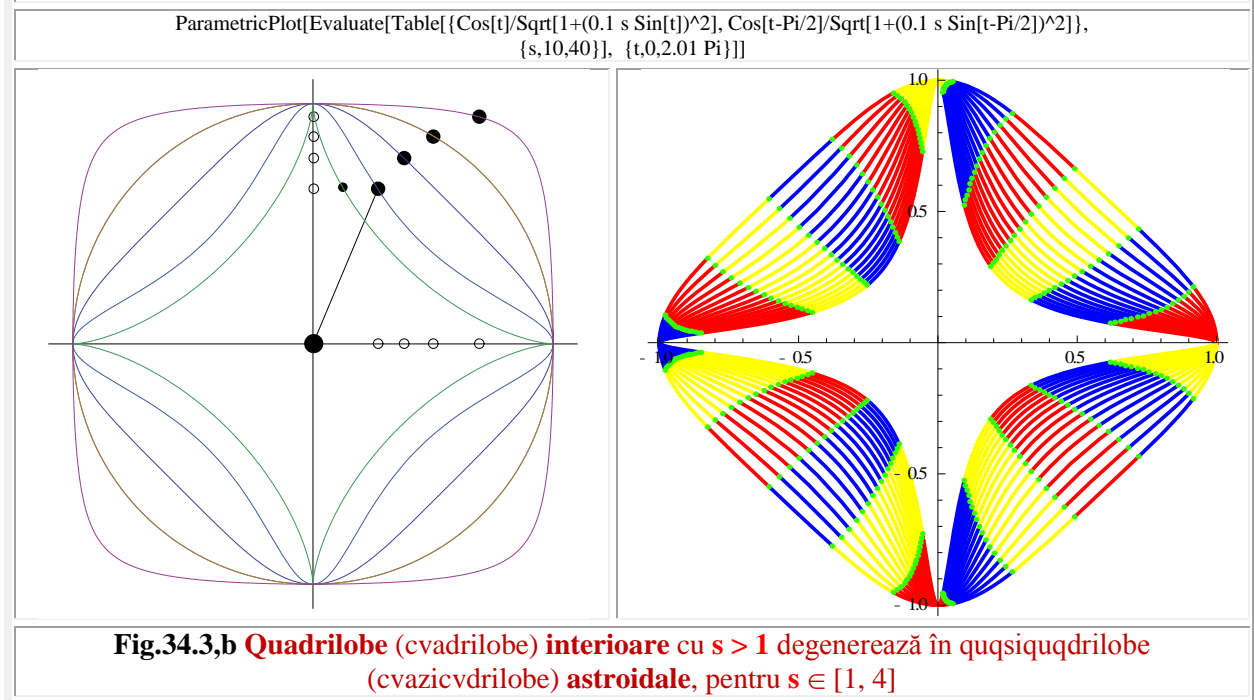


Fig.34.3,b **Quadrilobe (cvadrilobe) interioare** cu $s > 1$ degenerază în **qușiquadrilobe (cvazicvdrilobe) astroidale**, pentru $s \in [1, 4]$

Punctul generator P a FCC $\sin\theta$ și $\cos\theta$ pe cercul unitate $CU(1, O)$ este de coordonate polare centrice $P(R = 1, \theta)$ și, în figura 34.2, este la $\theta = \frac{\pi}{3}$, în timp ce, punctul generator W_1 al FSM-CE $cex_1\theta$ și $sex_1\theta$ apare pe $CU(1, O)$ la un unghi α la centrul O dat de relația sau FSM-CE **amplitudine excentrică** $aex \theta$

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

(34.5) $\alpha = \mathbf{aex}\theta = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]$, care, pentru $\theta = \frac{\pi}{3}$ și $s = 0,8$ (Fig. 34.2), are valoarea de $\alpha = 0,28180472497614373$ radiani, cea ce corespunde la $\alpha = 16,146221387977935^{\circ}$, adică $16^{\circ} 8' 46,397''$.

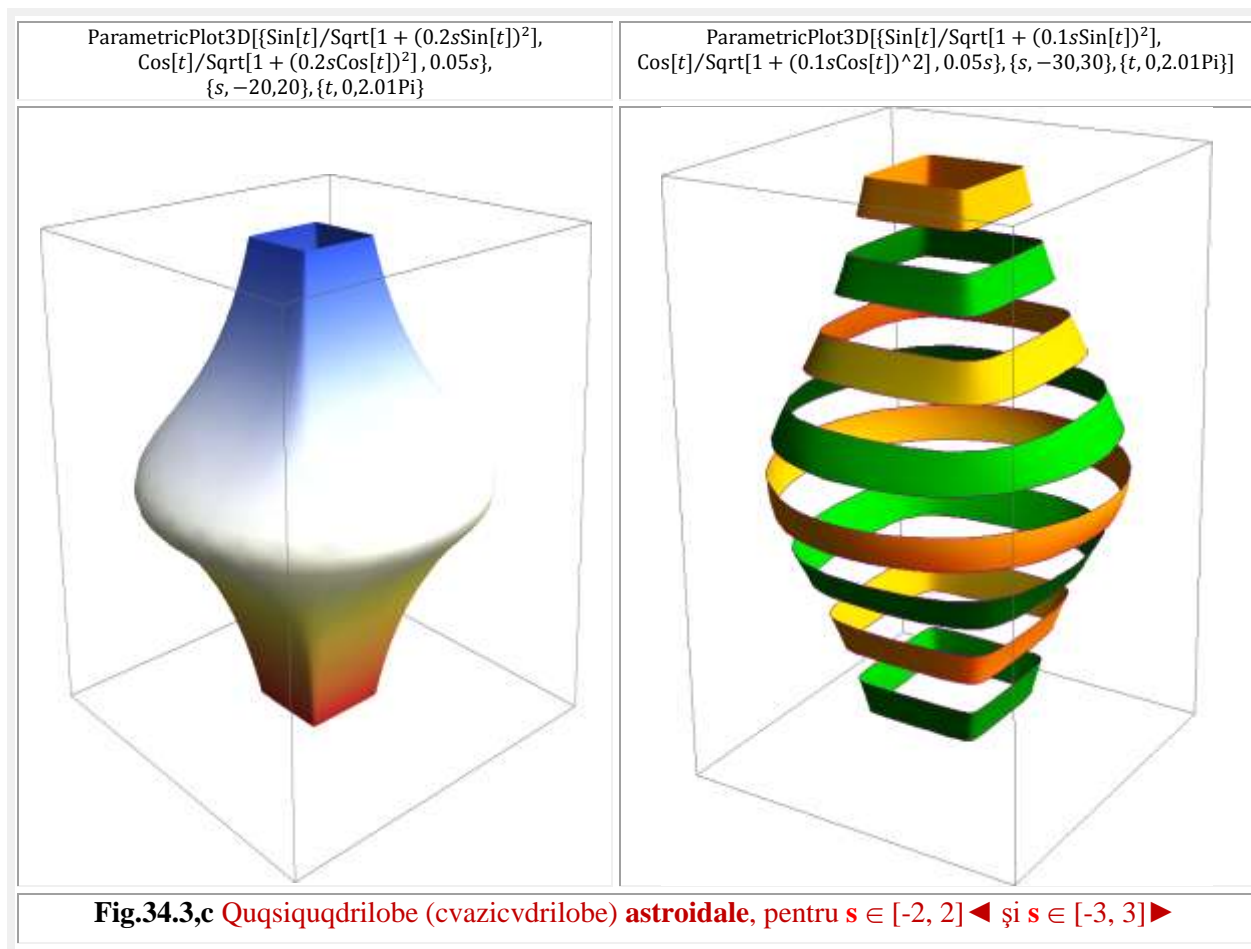
Graficele de variație ale unghiului la centru $\alpha(\theta)$ sunt date în lucrările [47], [48] și [49].

Unghiul α mai poate fi exprimat / obținut și prin relațiile din MC

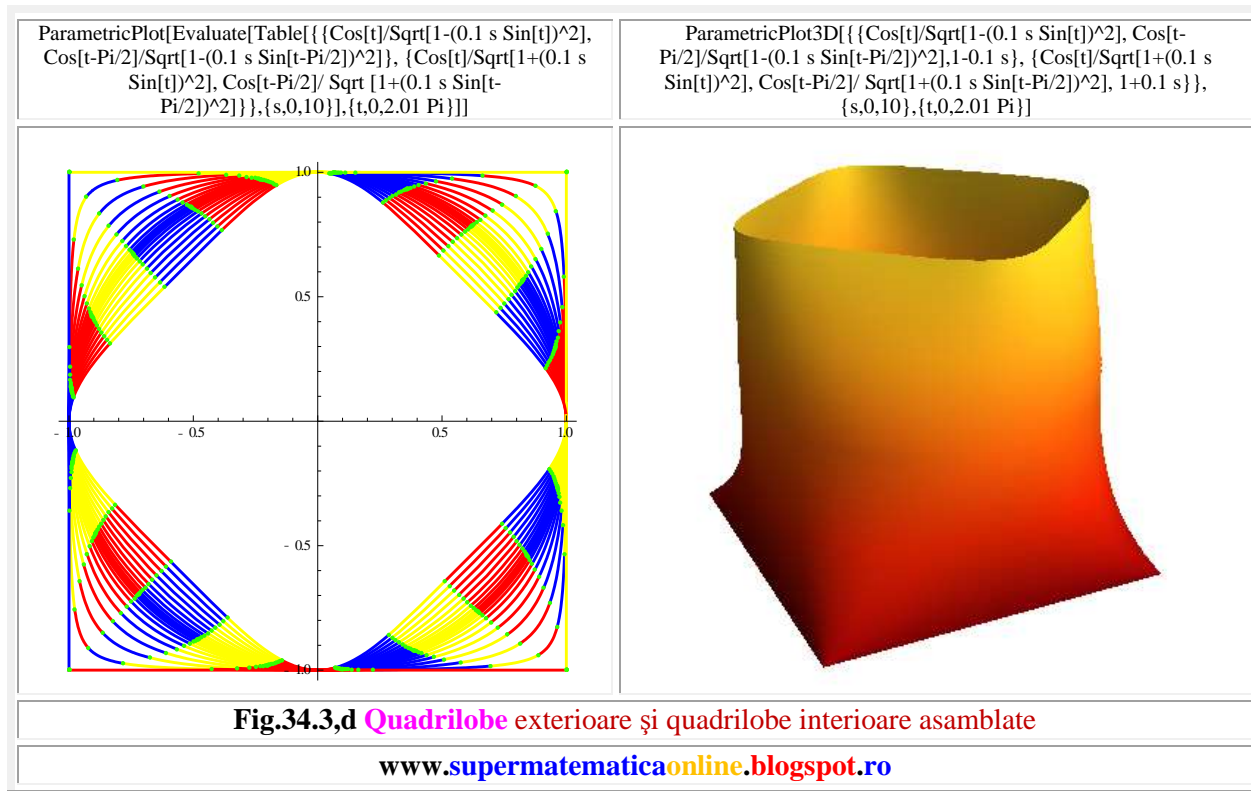
$$(34.6) \quad \begin{cases} \alpha = \arcsin[s \cdot \sin\theta] = \arcsin\{\sin[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]]\} = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \\ \alpha = \arccos[c \cdot \cos\theta] = \arccos\{\cos[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]]\} = \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \\ \alpha = \arctan[t \cdot \tan\theta] = \arctan\frac{s \cdot \sin\theta}{c \cdot \cos\theta} \end{cases}$$

Cele patru variante de exprimare a unghiului $\alpha(\theta)$, din relațiile (34.5) și (34.6), sunt toate corecte, dar se evidențiază superioritatea utilizării **FSM-CE** în acest scop, deoarece numai prin relația (34.5), a **FSM-CE** amplitudine excentrică $\mathbf{aex}\theta$, de variabilă excentrică, unghiul poate fi exprimat corect, în întreg domeniul, de la zero la 2π . Celelalte expresii, care utilizează **FCC**, pot exprima corect variația acestui unghi doar în domeniile de definiție al acestor funcții, care sunt $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$ pentru $\arctan\alpha$ și $\arcsin\alpha$ și $\theta \in [0, \pi]$ pentru $\arccos\alpha$.

Față de punctul $P(1, \theta)$, punctele generatoare ale **FQL** interne sunt defazate în minus și cele exterioare **FQQL** sunt defazate în plus / avans (Fig.34.1,b, Fig.34.2 și Fig.34.13).



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)



34.1.3 QUADRILOBE (CVADRILOBE) VALERIU ALACI

Lucrările reputatului matematician timișorean Prof. math. **Valeriu Alaci**, profesor al Școlii **POLITEHNICE** din Timișoara, astăzi **Universitatea “POLITEHNICA”**, șeful Catedrei de Matematici, sunt unanim necunoscute peste ocean. Sperăm că, măcar în **România**, ele să fie cunoscute, măcar sau în special **funcțiile trigonometrice pătratice** și **funcțiile trigonometrice rombice**.

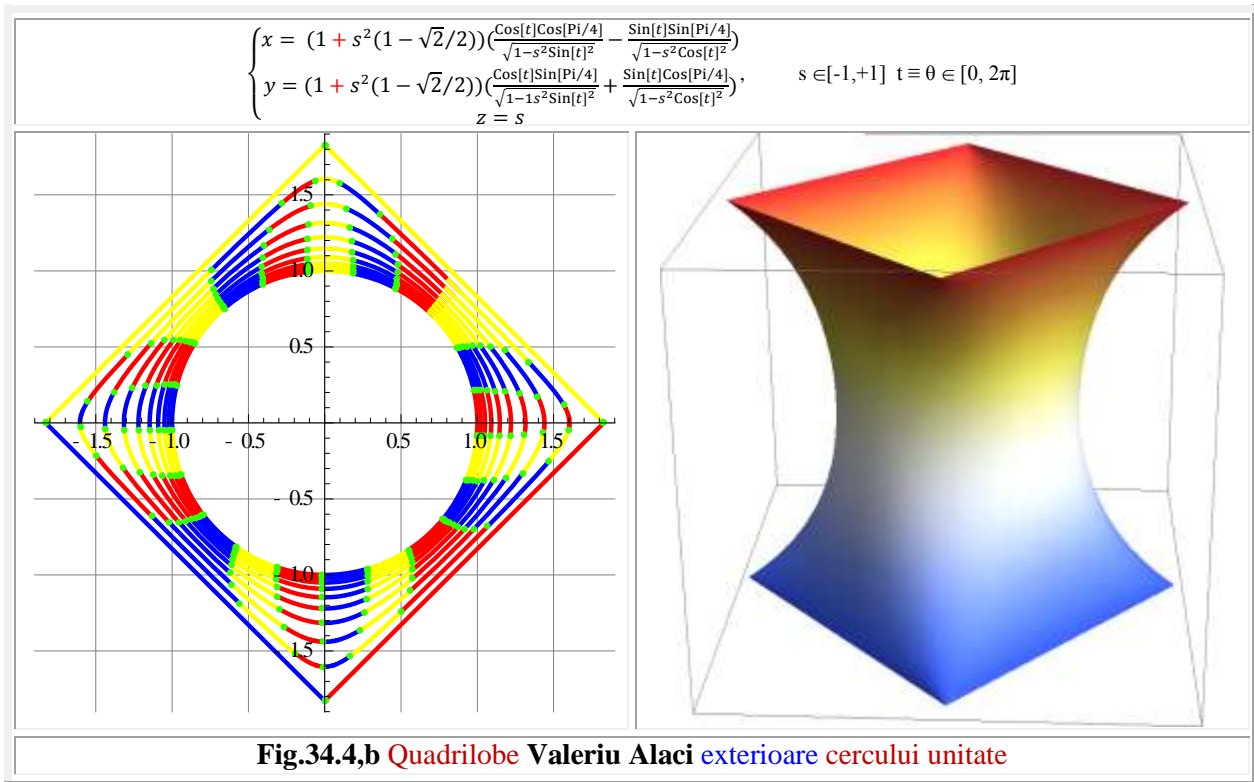
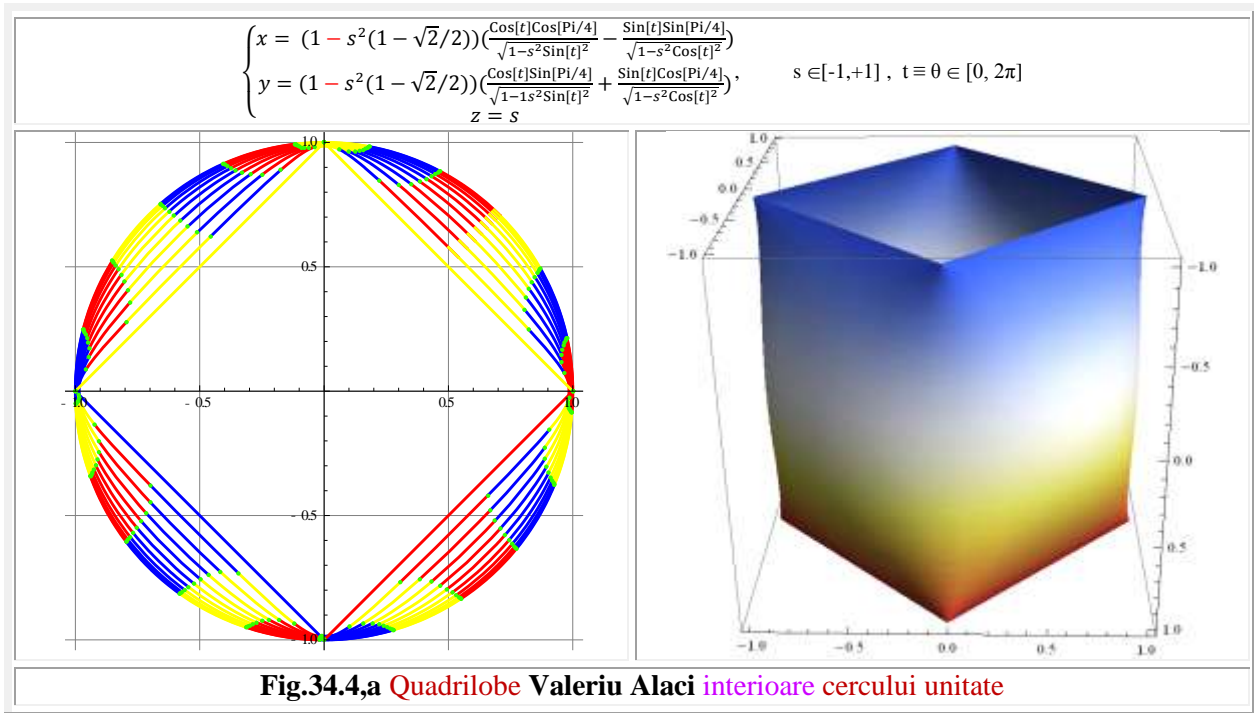
Bazați pe această presupunere, amintim că **funcțiile trigonometrice pătratice** sunt definite pe un pătrat, cu laturile rotite cu un unghi de $\pi/4$ (45°) față de axele unui reper / sistem cartezian drept, așa cum se poate observa în **figura 34.2** și **34.4,a**. A fost denumit pătrat **Alaci Valeriu**. Dar, între cerc și pătrat mai pot fi o infinitate de curbe plane închise denumite **quadrilobe Alaci Valeriu** interioare cercului.

Ecuțiile acestor **quadrilobe Valeriu Alaci interioare cerului unitate** sunt

$$(34.7) \quad \begin{cases} x = (1 - s^2(1 - \sqrt{2}/2)) \left(\frac{\cos[t]\cos[\pi/4]}{\sqrt{1-s^2\sin[t]^2}} - \frac{\sin[t]\sin[\pi/4]}{\sqrt{1-s^2\cos[t]^2}} \right) \\ y = (1 - s^2(1 - \sqrt{2}/2)) \left(\frac{\cos[t]\sin[\pi/4]}{\sqrt{1-s^2\sin[t]^2}} + \frac{\sin[t]\cos[\pi/4]}{\sqrt{1-s^2\cos[t]^2}} \right) \\ z = s \end{cases}$$

Între cerc și pătrat este o mare ablomerație/ (“inflație”) de diverse funcții matematice noi. Astfel, pe lângă **quadrilobele interioare** și **quadrilobele Valeriu Alaci**, Prof.dr. **Malvina Baica**, membră a **Academiei de Științe din New York** și ing. **Mircea Cârdu** au introdus în matematica **funcțiile transtrigonometrice** (v. “**THE PARATRIGONOMETRY**” AGIR Publishing House, Bucharest, Romania, 2010) **cosinus ct_kα** și **sinus st_kα transtrigonometrice**, pe care eu le-aș fi denumit **intratrigonometrice**; fiind *între* cerc și pătrat. Ecuțiile acestora sunt

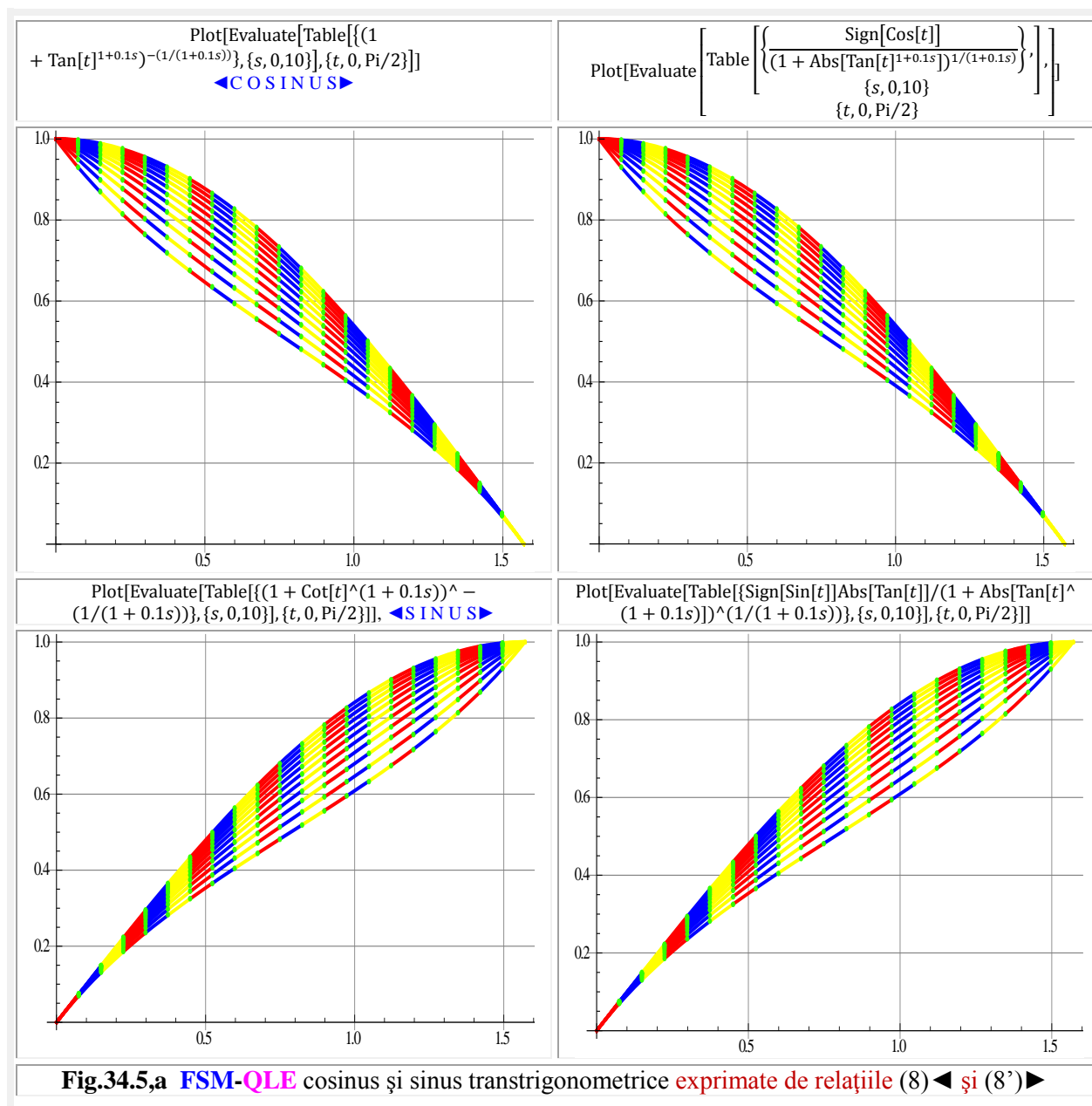
FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

$$(34.8) \quad \begin{cases} ct_k \alpha = \pm(1 + \cot^k \alpha)^{\frac{-1}{k}} \\ st_k \alpha = \pm(1 + \tan^k \alpha)^{\frac{-1}{k}} \end{cases}$$

cu care pot fi corect plotate funcțiile doar în domeniul $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, așa cum rezultă din **figura 34.5,a** ◀.



Ele pot fi plotate în întregul domeniu $\alpha \in [0, 2\pi]$ utilizând formulele plotabile ale autorului (34.8'), adică

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

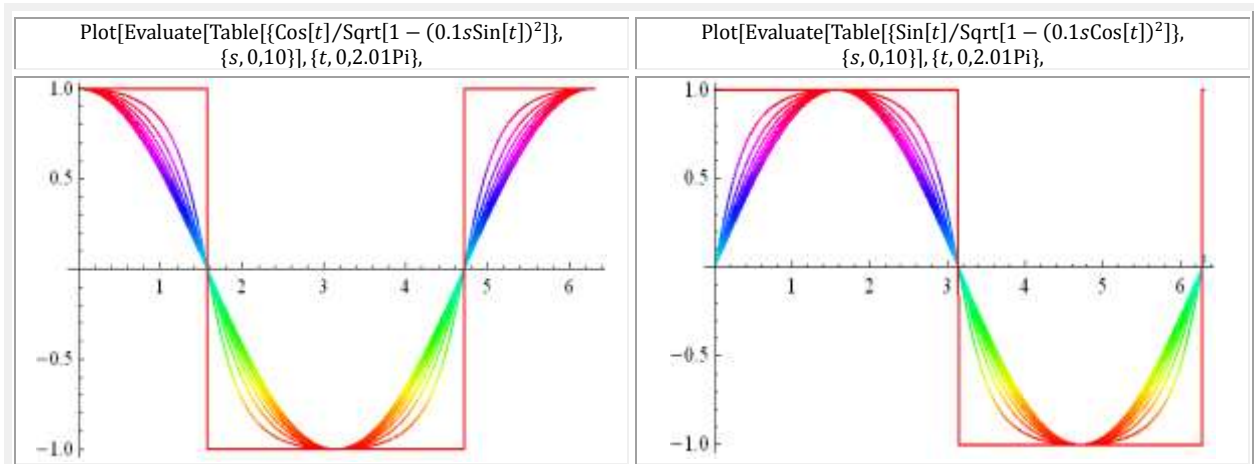


Fig.34.5,b FSM-QLE cosinus $\text{coq}\theta$ și sinus $\text{siq}\theta$ cvadrilobice excentrice **exterioare** cercului unitate

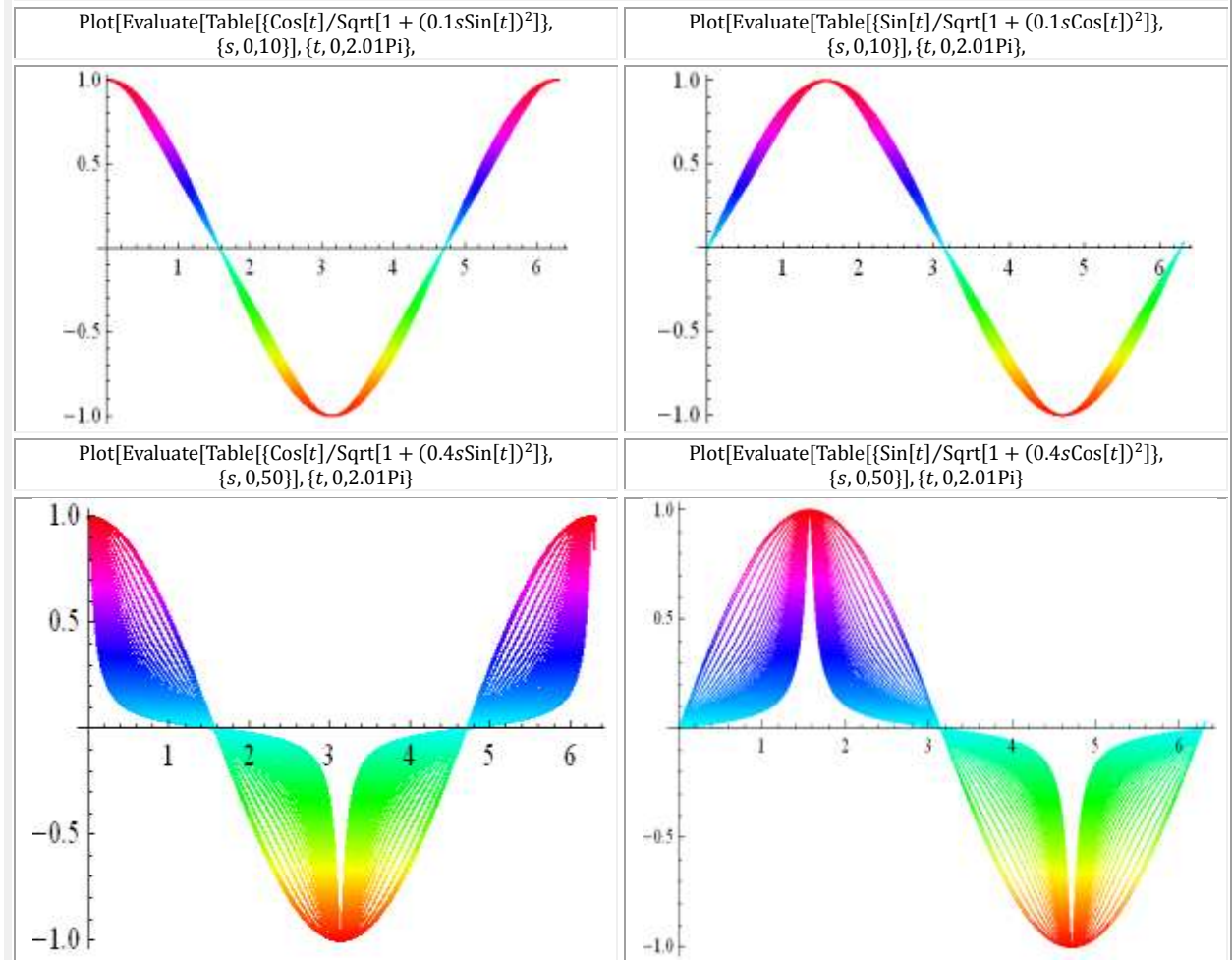


Fig.34.5,c FSM-QLE cosinus $\text{coq}\theta$ și sinus $\text{siq}\theta$ cvadrilobice excentrice **interioare** cercului unitate

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

$$(34.8') \quad \begin{cases} ct_k x = \frac{\text{Sign}[\cos x]}{(1+\text{Abs}[\tan^k x])^{1/k}} \\ st_k x = \frac{\text{Sign}[\sin x]\text{Abs}[\tan x]}{(1+\text{Abs}[\tan^k x])^{1/k}} \end{cases}$$

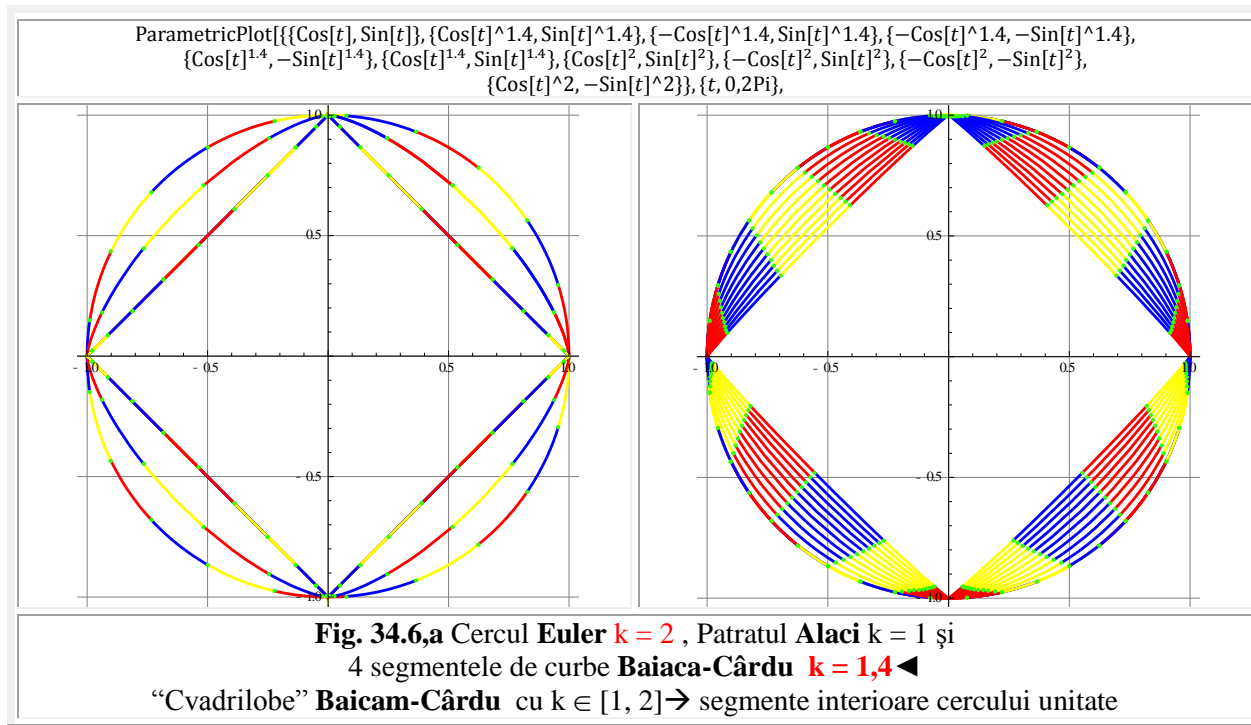
utilizate comparativ cu (34.8) în **figura 34.5,a**►.

Curbele închise, reprezentate de aceste ecuații parametrice, nu sunt quadrilobe, deoarece numai pentru $s = k = 0$ curba este continuă (cerc), pentru restul valorilor, în vârfurile de $\alpha = 0 + K \frac{\pi}{2}$, ele prezintă puncte unghiulare, cu derivate diferite la stânga și la dreapta punctului, deci nu respectă condiția a 2) – a.

Pentru $k = 1$ se obțin funcțiile pătratice **Valeriu Alaci** și pentru $k = 2$ se obțin funcțiile trigonometrice centrice sau **Euler** (**Fig.34.5,c**).

Funcțiile (34.8) și (34.8') sunt echivalente, dovadă că ele generează aceleași curbe (identice) în 2D, în domeniul $\alpha \equiv x \in [0, \pi/2]$, așa cum este ilustrat în **figura 34.5,a**. Diferența constă în aceea că (34.8') permite reprezentarea funcțiilor nu numai în domeniul anterior amintit, ci pe toată axa reală, așa cum rezultă din **figurile 34.6**.

În **figurile 34.5,b** și **34.5,c** sunt prezentate funcțiile cosinus și sinus quadrilobe, exterioare (**Fig.34.5,b**) și interioare (**Fig.34.5,c**) și curbele limită, în care degenerază, pentru valorile limită ale excentricității liniare numerice $s = 0 \rightarrow$ cerc și $s = 1 \rightarrow$ pătrat b (**Fig.34.6,a**◀ și **Fig.34.6,b**◀) și corespondentele lor în 2D (**Fig.34.6,a**► și **Fig.34.6,b**►)). Funcțiile quadrilobe interioare sunt prezentate pentru $s \in [0, 1]$ în **figura 34,5,c** ▲ sus și pentru $s \in [0, 1]$ în **figura 34,5,c** jos ▼ .



Quadrilobele Valeriu Alaci din **figura 34.4,a**, se observă fără dificultate, că sunt interioare cercului unitate. Prin schimbarea semnului plus cu semnul minus în expresiile lui $x(t)$ și $y(t)$, se obțin quadrilobele **Alaci Valeriu exterioare** cu ecuațiile

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

$$(34.9) \quad \begin{cases} x = (1 + s^2(1 - \sqrt{2}/2)) \left(\frac{\cos[t]\cos[\pi/4]}{\sqrt{1-s^2\sin[t]^2}} - \frac{\sin[t]\sin[\pi/4]}{\sqrt{1-s^2\cos[t]^2}} \right) \\ y = (1 + s^2(1 - \sqrt{2}/2)) \left(\frac{\cos[t]\sin[\pi/4]}{\sqrt{1-s^2\sin[t]^2}} + \frac{\sin[t]\cos[\pi/4]}{\sqrt{1-s^2\cos[t]^2}} \right) \\ z = s \end{cases}$$

și cu graficele din **figura 34.4,b**.

Quadrirobele definite de ecuațiile parametrice (34.8) pot fi denumite **quasiquadrirobe Malvina Baica - Mircea Cârdu** și au graficele din **figura 34.6,c**.

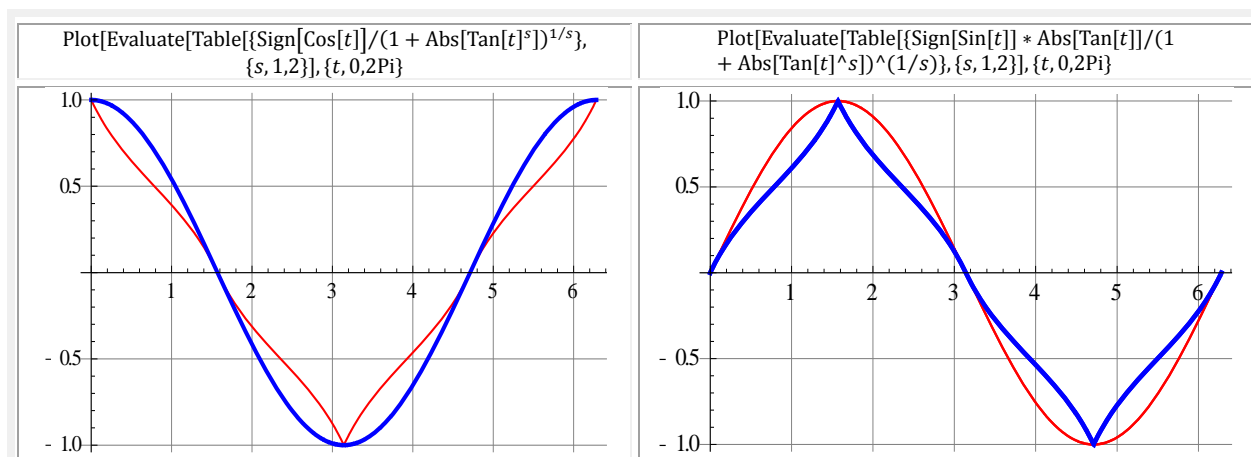


Fig.34.6,b Extremele funcții transtrigonometrice Malvina Baica – Mircea Cârdu, pentru $s \equiv k = 1$ → pătratice Valeriu Alaci, pentru $s \equiv k = 2$ → trigonometrice / circulare centrice Euler

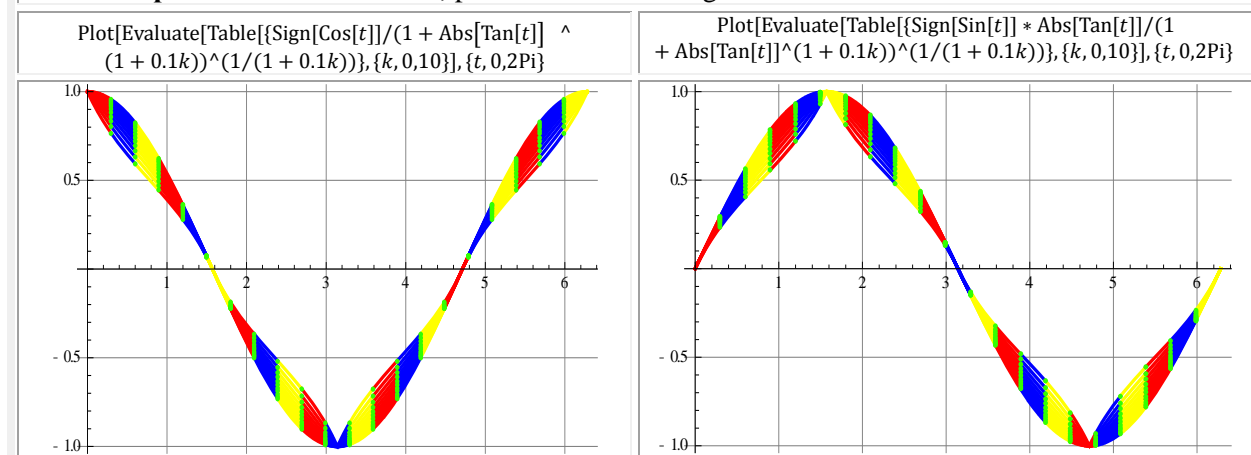


Fig.34.6,c Funcțiile transtrigonometrice Malvina Baica – Mircea Cârdu

34.1.4 QUAZIQUADRILOBE (CVAZICVADRILOBE)

Prin depășirea valorii de $s = 1$, a excentricității liniare numerice (**Fig.34.7,a**), ca și prin combinarea / schimbarea semnelor de sub radical ale funcției speciale **del0** și a termenilor din expresiile parametrice ale **FSM-QL**, pot fi obținute multe alte ecuații parametrice ale unor curbe plane închise, reunite sub denumirea de **quasiquadrirobe (cvazicvadrilobe)**.

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

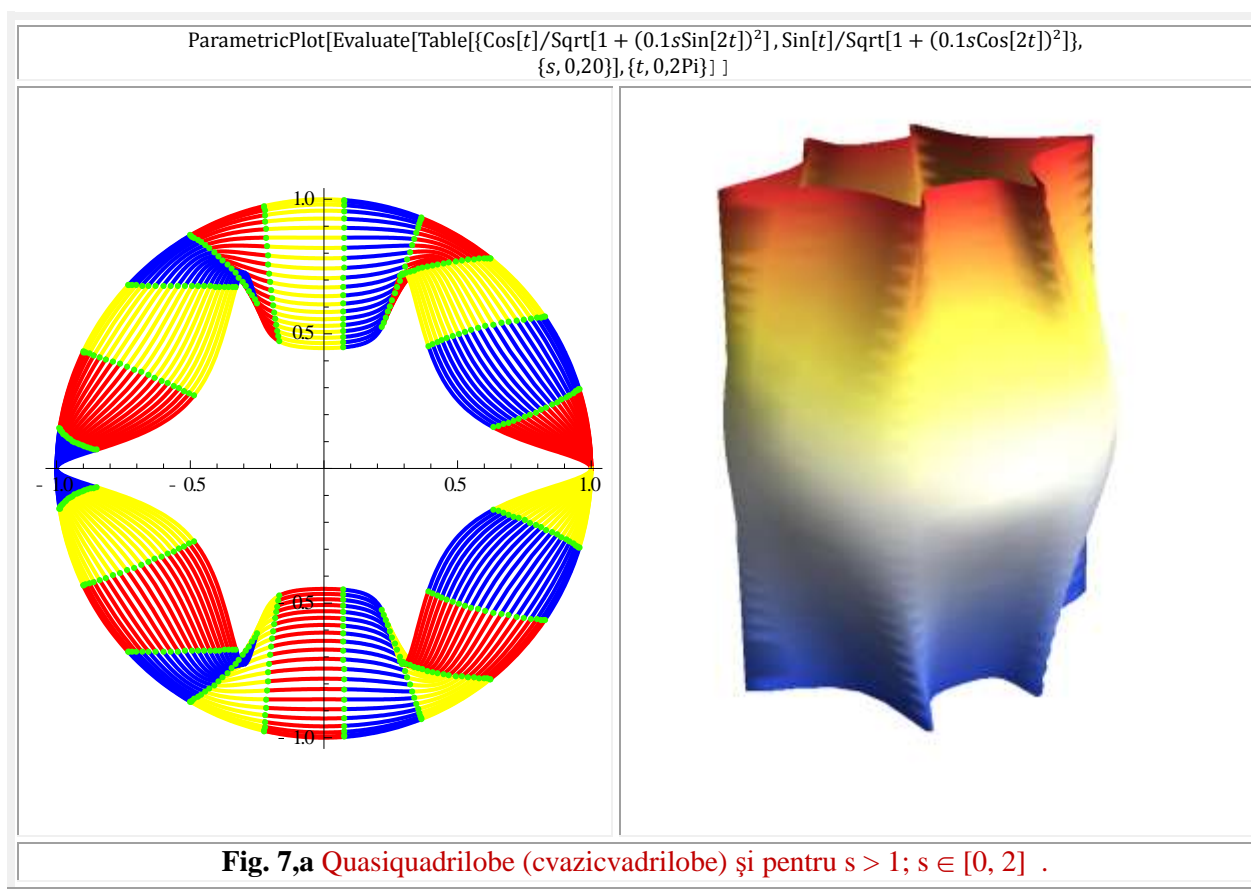
Figurile 34.7,a, 34.7,b, 34.7,c și 34.7,d prezintă unele dintre aceste quasiquadrilobe, interesante prin formele corpurilor obținute în 3 D. Altele, prin forma unor curbe din 2D (**Fig. 34.7,a** ◀).

Obiectul / corpul **supermatematic** din **figura 7,c**, asemănător cu un con, cu baza un hexagon, poate fi denumit “**con quasiquadrilobic (cvazicvadrilobic)**”, iar cilindrul din **figura 34.7,b**, poate fi denumit **cilindru quasiquadrilobic**.

Curbe interesante asemănătoare unor curbe de histereză sunt prezentate în **figura 34.8** stânga ◀, iar unele artistice moderne în dreapta **figurii 34.8**.

Curbele din **figura 34.7,b** sunt reprezentate de ecuațiile parametrice ca sume ale cosinusurilor și, respectiv, sinusurilor cvadrilobe exterioare și interioare, adică

$$\begin{cases} x = coq\theta + coqi\theta \\ y = siq\theta + siqi\theta \end{cases}$$



În **figura 34.9,b** ▶ ◀ sunt prezentate funcțiile **sinus autoinduse**

(34.10) $\text{sin}_a(x, m = 8) = \sin(\sin(\sin(\sin(\sin(\sin(\sin(\sin x))))))))$.

Întâmplare face ca o variantă a funcției sinus cvadrilobic, denumit sinus quadrilobic modificat și notat **siqmθ** și anume

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

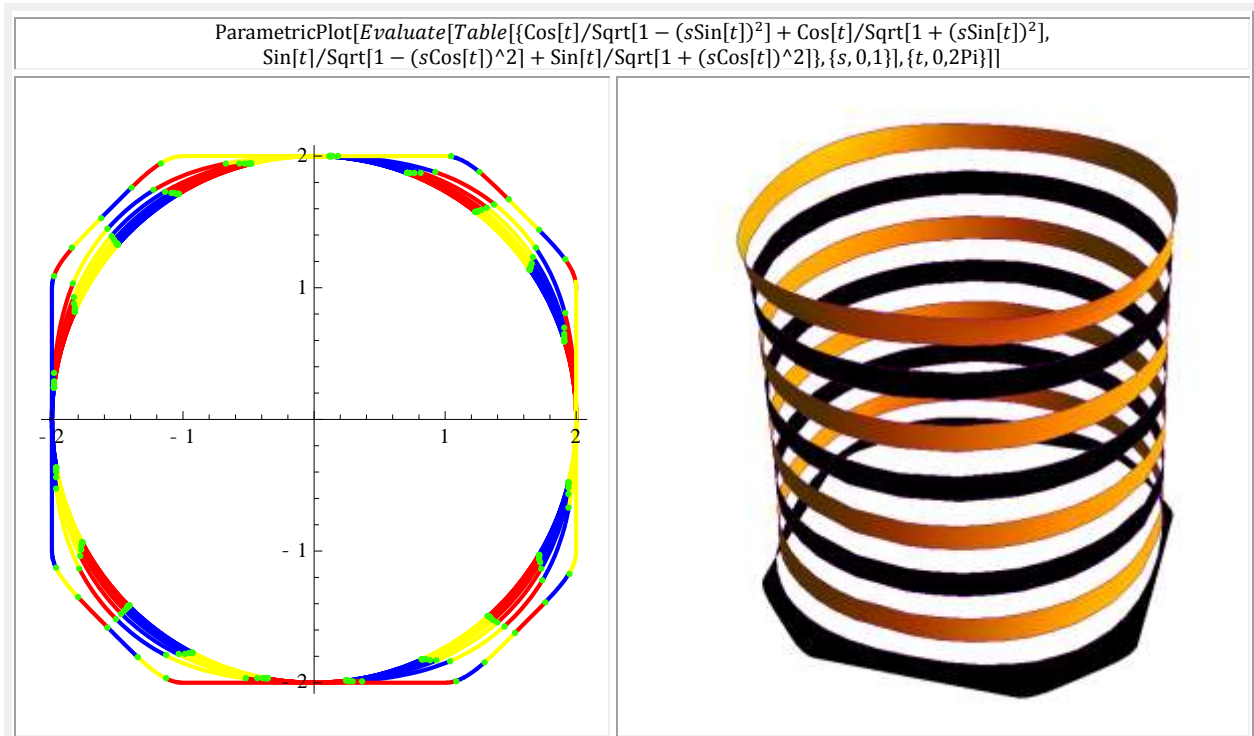


Fig. 34.7,b Quasiquadrilobe (cvaziqvadrilobe) cu termeni modifiçați

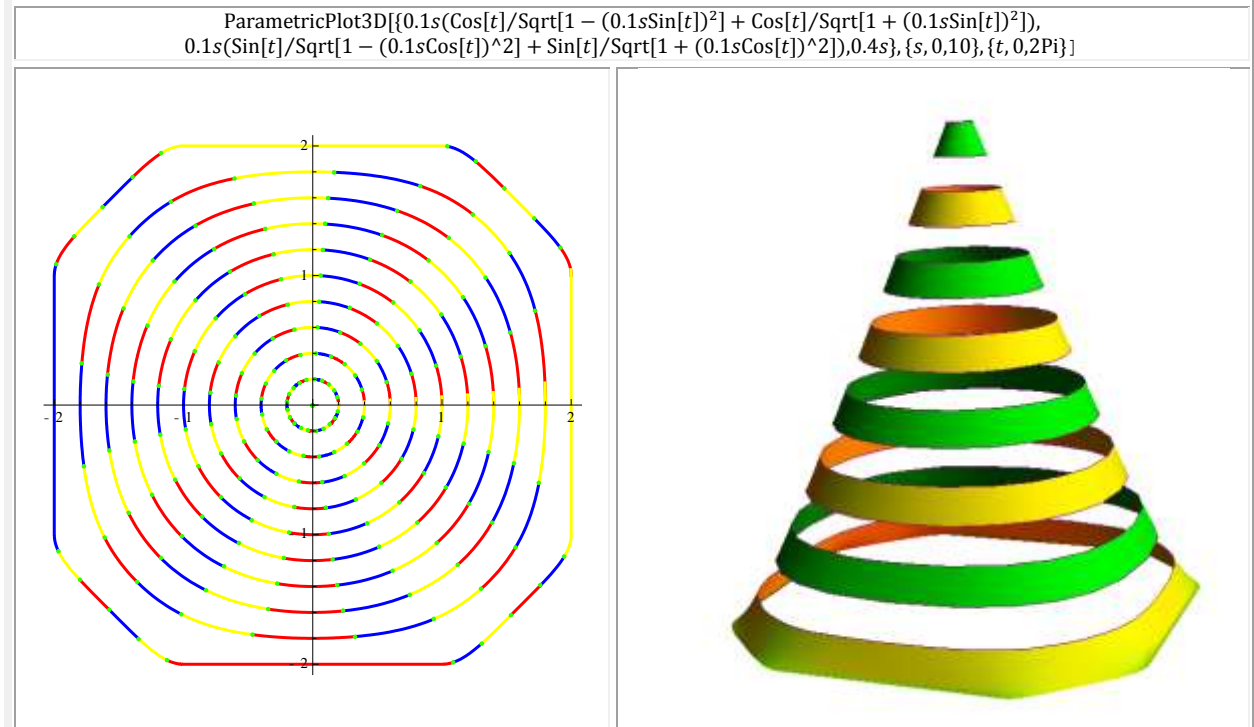


Fig. 34.7,c Quadrilobe și quasiquadrilobe interioare și exterioare reprezentate împreună

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

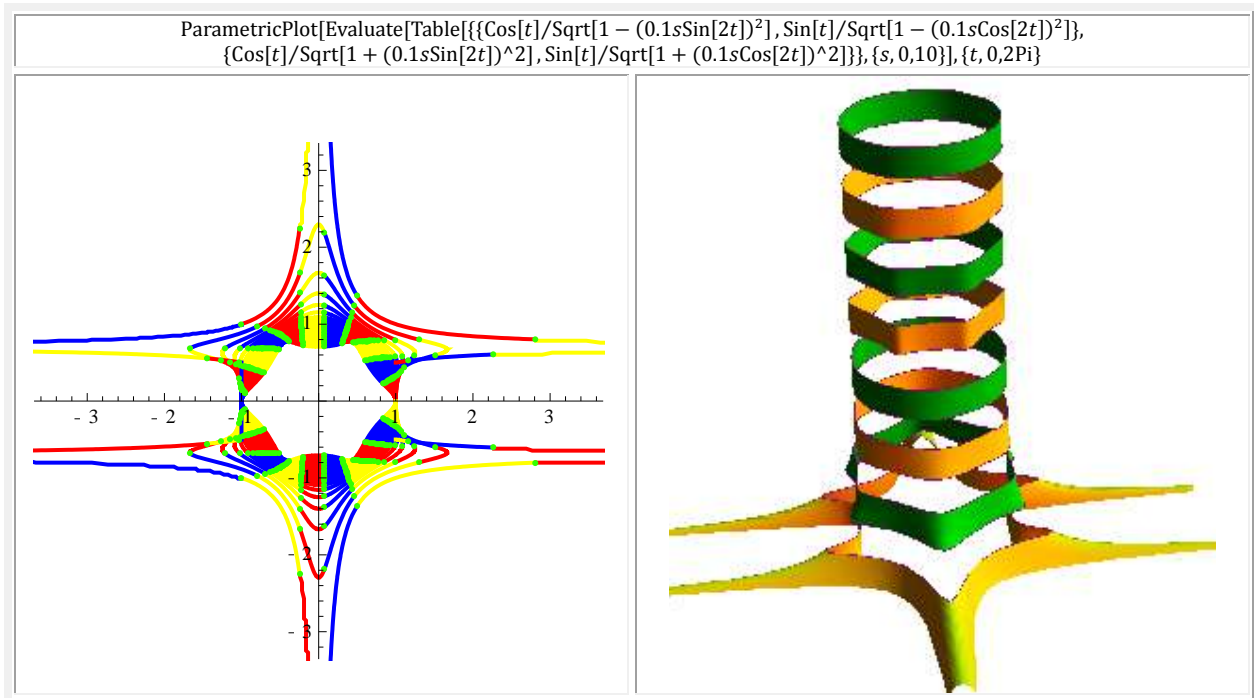


Fig. 34.8 Quasiquadrilobe (Cvazievadrilobe) diverse

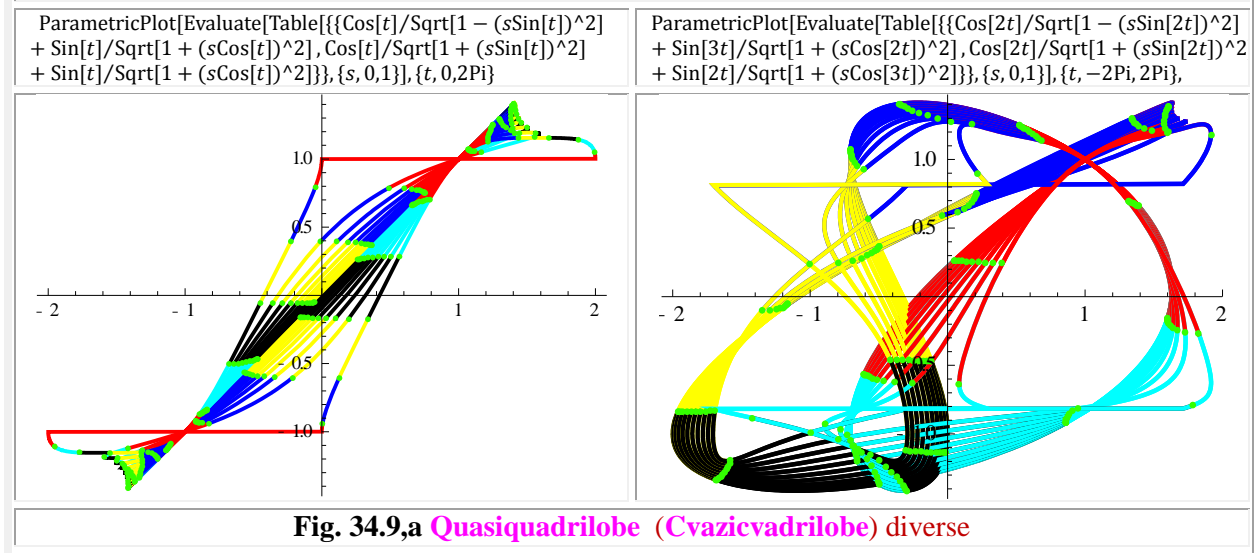


Fig. 34.9,a Quasiquadrilobe (Cvazicvadrilobe) diverse

$$(34.10^*) \quad \text{siqm}\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+(s.\sin[t])^2}}$$

să poată imita, destul de bine, dar pentru valori diferite $m \neq s$, funcțiile autoinduse (34.10), prin mărirea lui s , și să poată, fără dificultate, să exprime funcții sinus autoinduse de un grad de multiplicitate $m = s$ cu mult mai mare. În figura 34.9,b $\blacktriangle \blacktriangleright m = 20$.

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

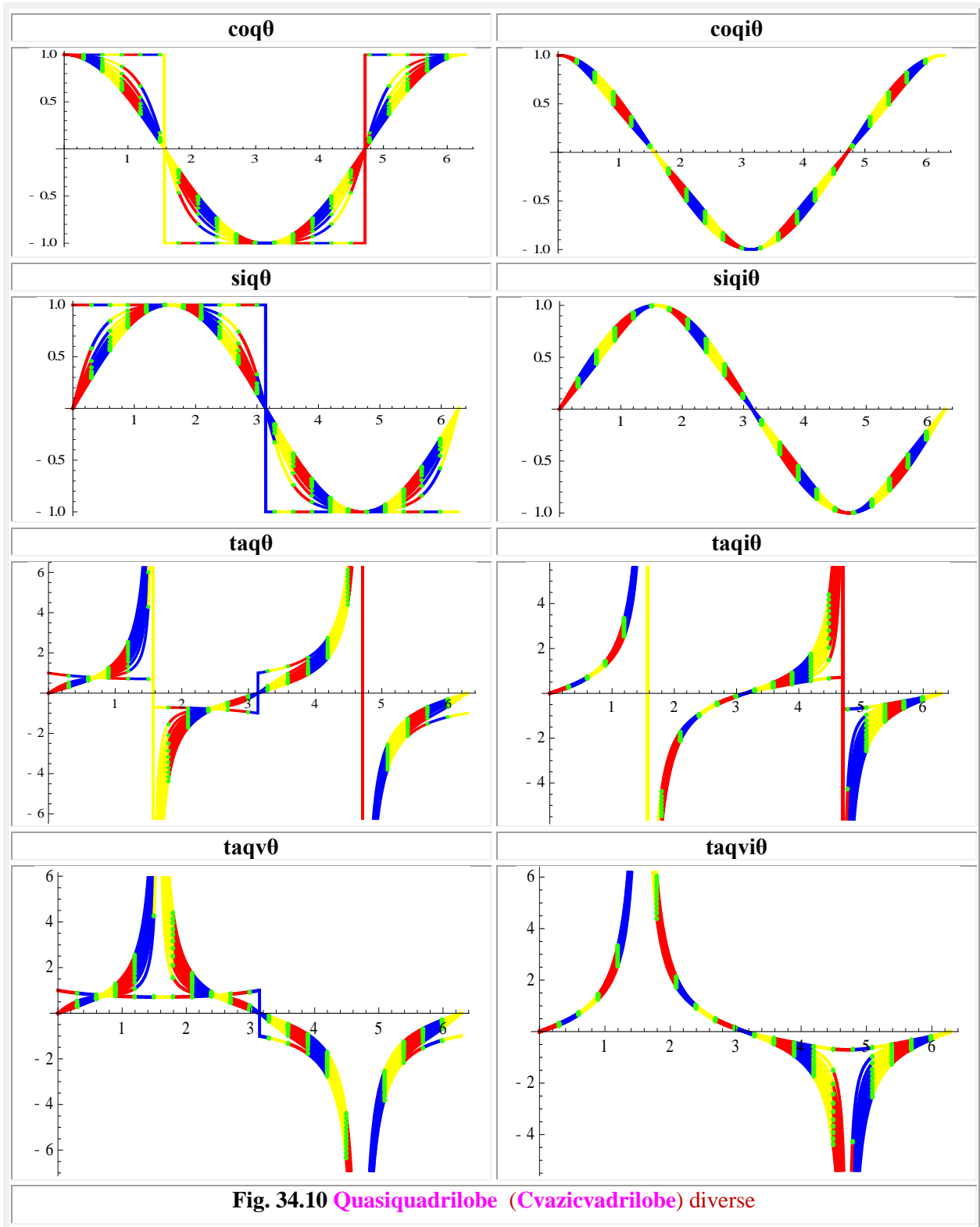
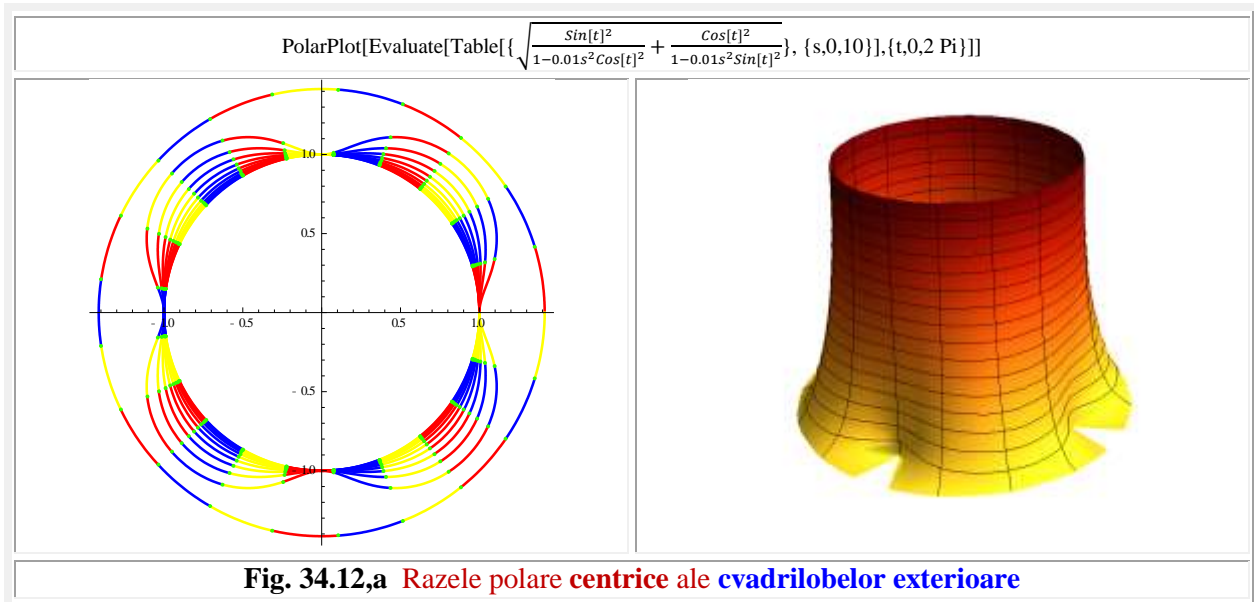
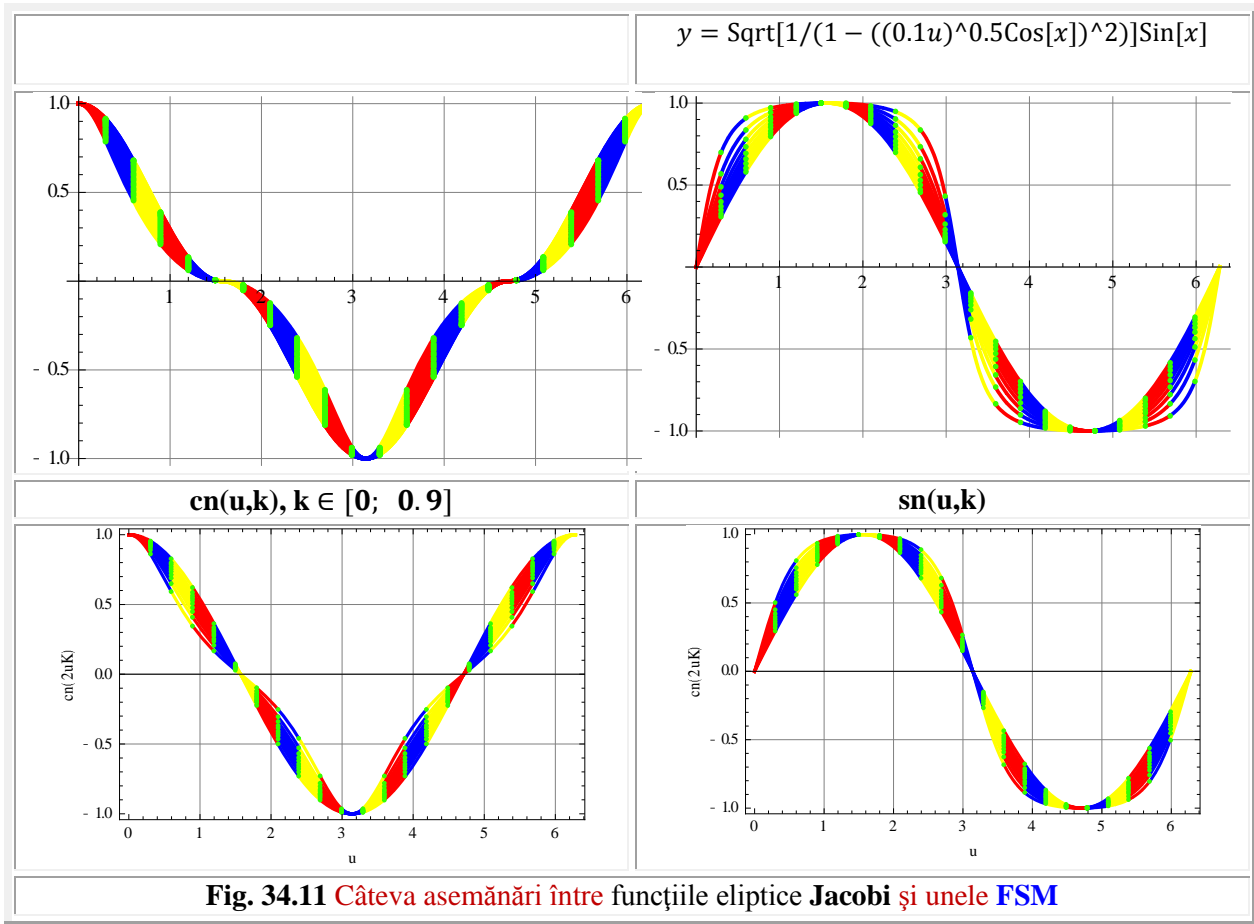
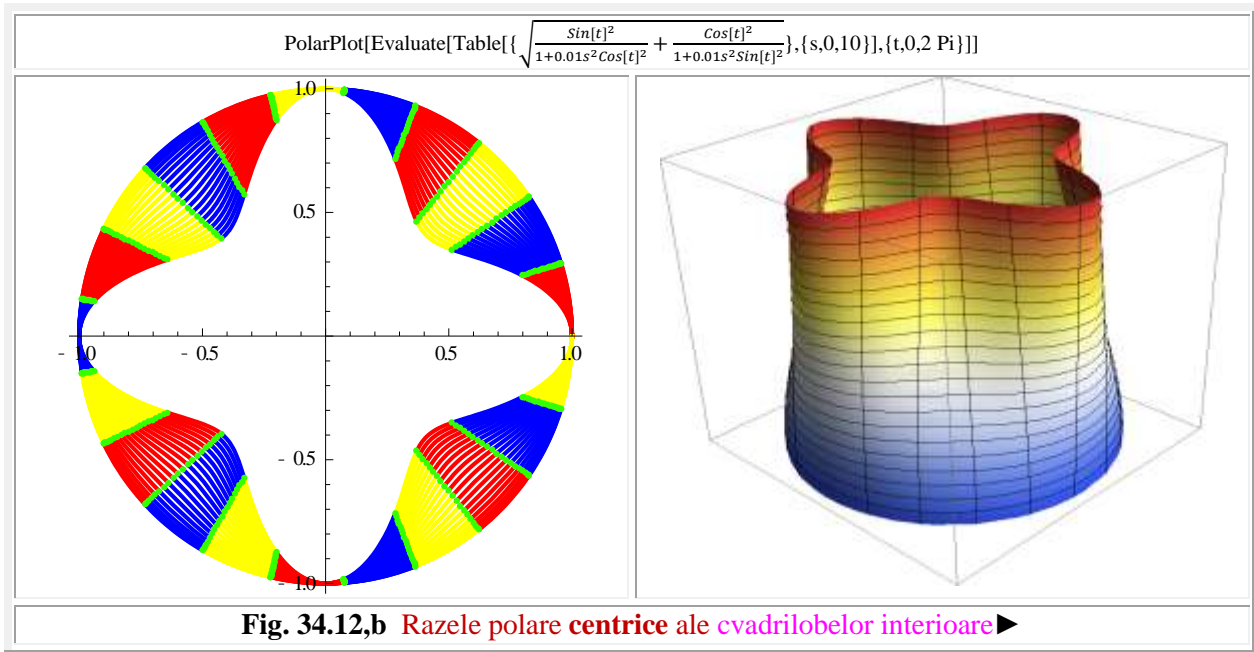


Fig. 34.10 Quasiquadrilobe (Cvazicvadrilobe) diverse

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

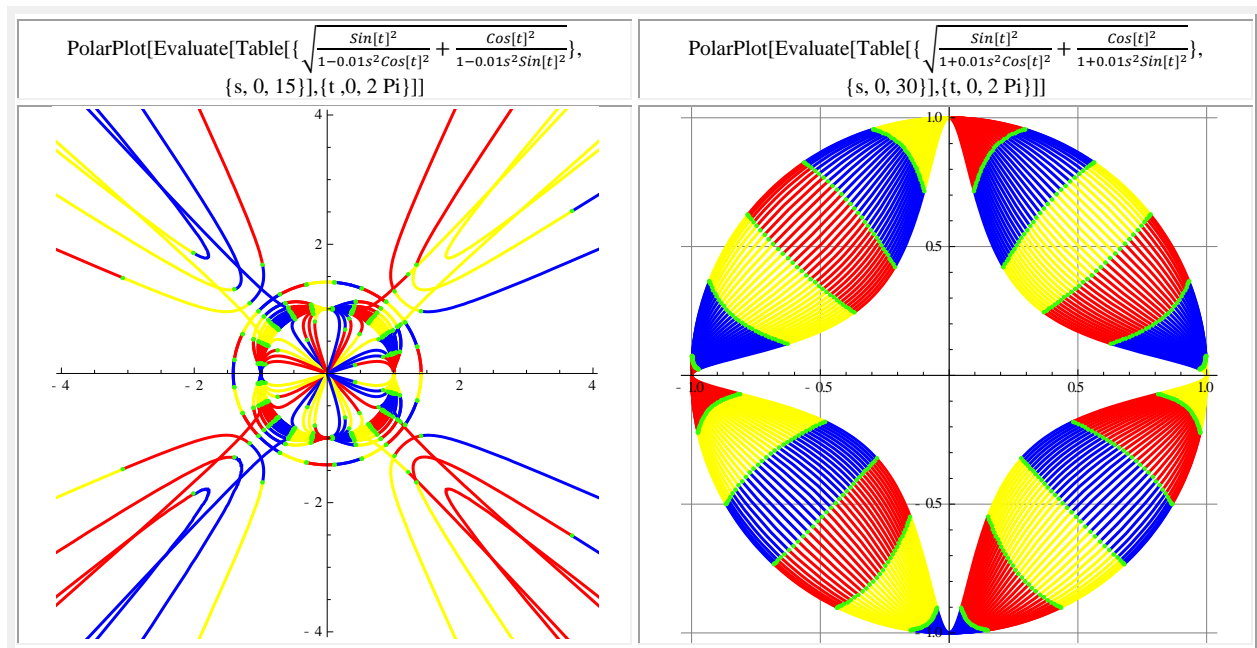


FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

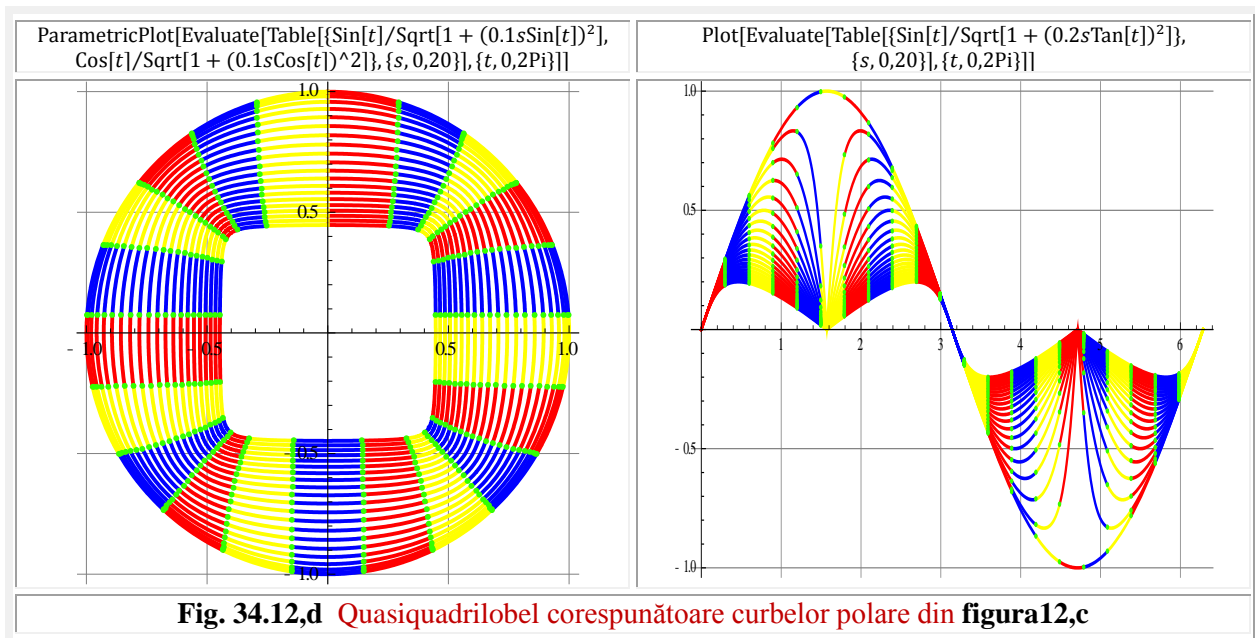
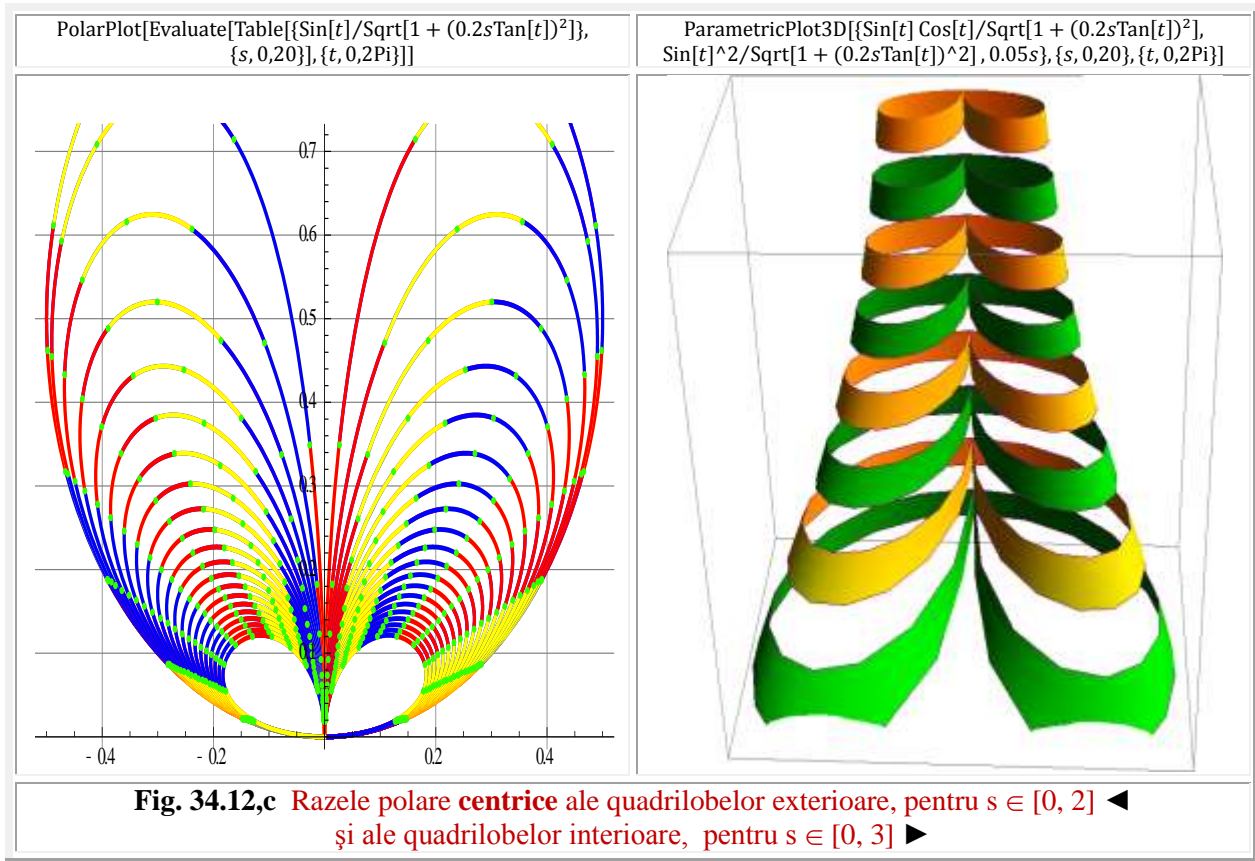


$$(34.12) \quad \begin{cases} taq = \frac{coq\theta}{siq\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \sqrt{\frac{1-s^2\sin^2\theta}{1-s^2\cos^2\theta}} \\ taqi = \frac{coqi\theta}{siqi\theta} \sqrt{\frac{1+s^2\sin^2\theta}{1+s^2\cos^2\theta}} \end{cases}$$

cu graficele din **figura 34.6**



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

Unghiurile la centrul $O(0, 0)$, la care apar aceste raze polare, sunt

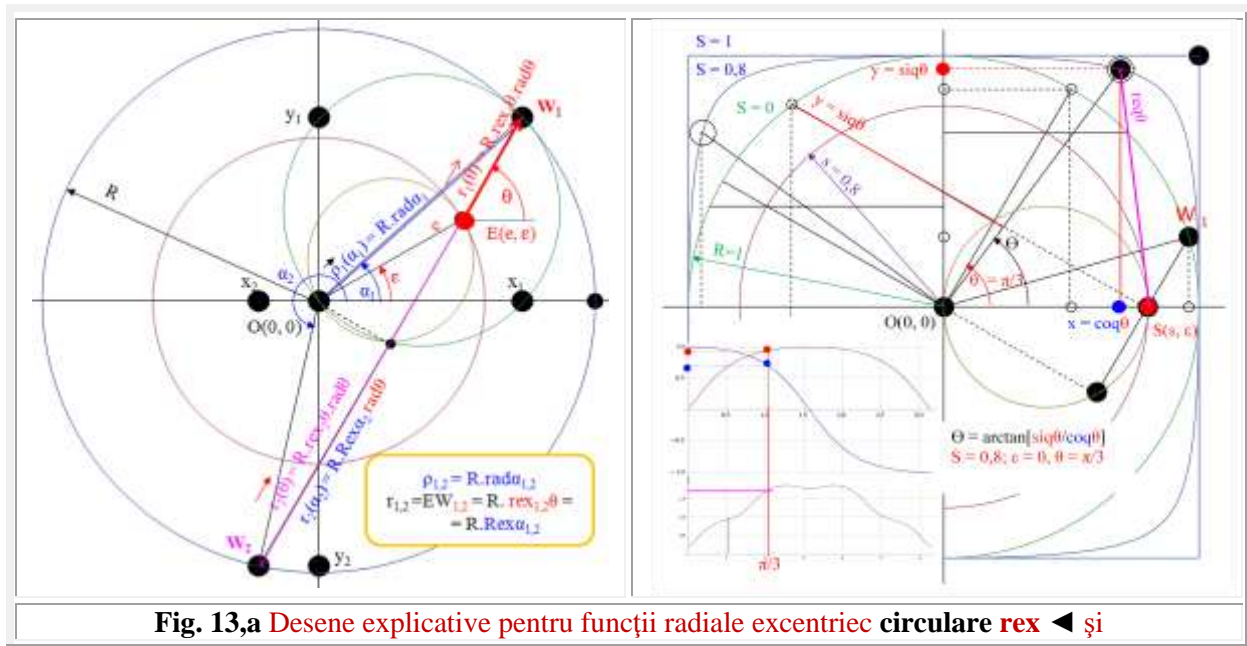
$$(34.13) \quad \begin{cases} \alpha_{qe} = \arctan \left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \sqrt{\frac{1-s^2\sin^2\theta}{1-s^2\cos^2\theta}} \right] \\ \alpha_{qi} = \arctan \left[\frac{\text{coqi}\theta}{\text{siqi}\theta} \sqrt{\frac{1+s^2\sin^2\theta}{1+s^2\cos^2\theta}} \right] \end{cases}$$

Graficele funcțiilor cosinus și sinus cvadrilobe, exterioare (stânga ◀) și interioare (dreapta ▶) cercului unitate, sunt prezentate în **figura 34.6** pentru $s \in [0, 1]$, iar în **figura 34.11** sunt prezentate graficele unor **FSM** și a unor **funcții eliptice Jacobi**, pentru evidențierea unor asemănări grafice.

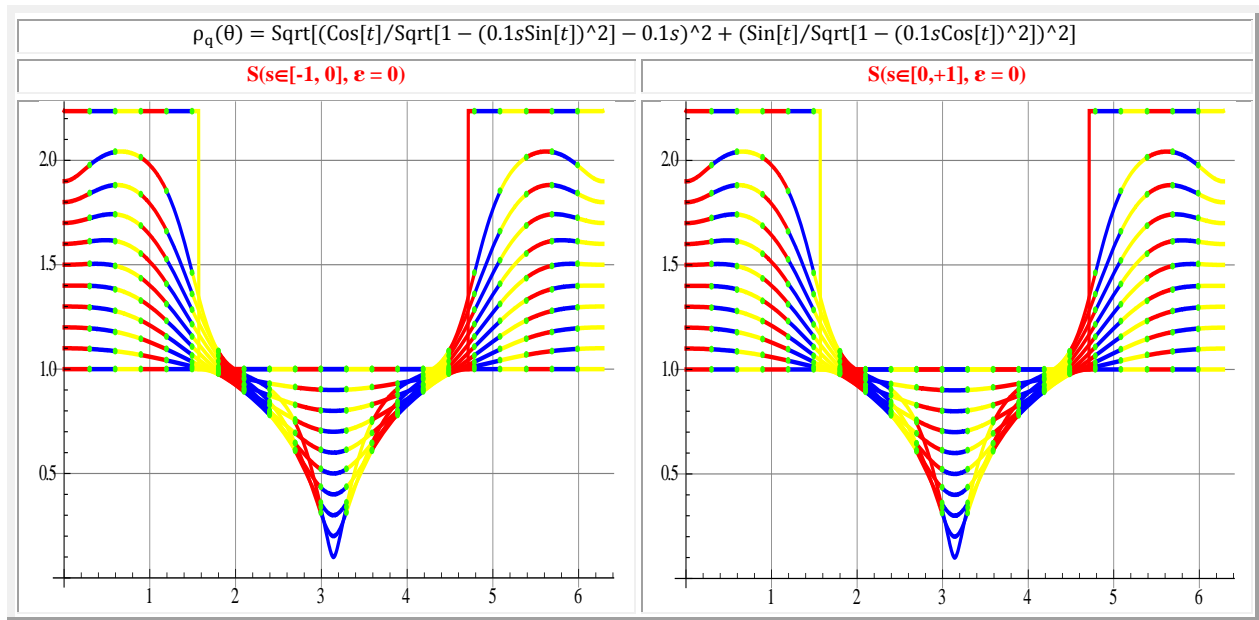
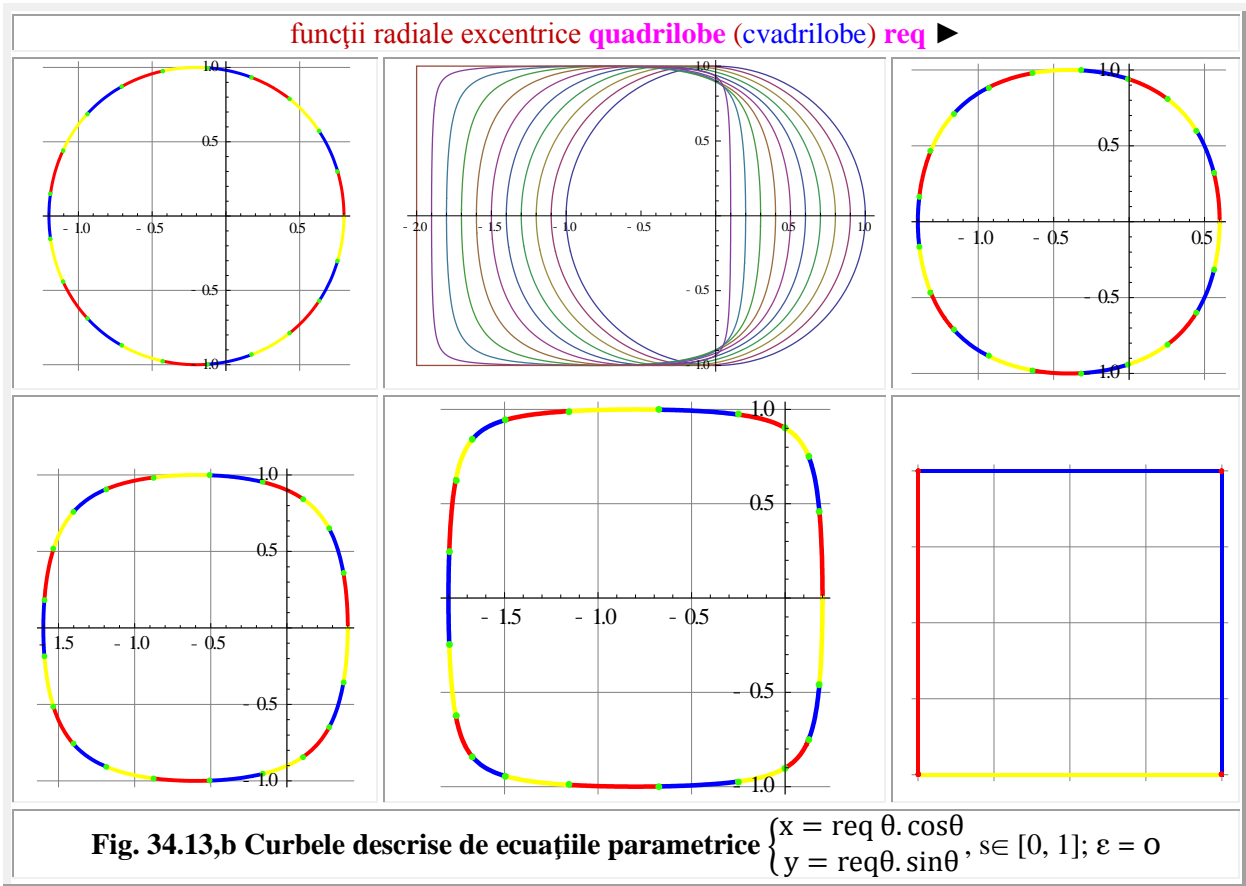
În **figura 34.12,a** sunt prezentate curbele închise generate de razelor polare centrice, date de relațiile (34.7) ale cvadrilobelor exterioare. Se observă că ele diferă semnificativ de forma cvadrilobelor exterioare cercului unitate (**Fig. 34.3,a**), atât în 2D cât și, evident, în 3D. Acest fapt se datorește faptului că razele polare sunt la un unghi la centru θ , egal cu unghiul la excentrul $E(e, \varepsilon)$, în timp ce punctele care generează cvadrilobele exterioare sunt defazate în avans față de unghiul polar θ al razelor polare (34.7), așa cum s-a mai afirmat și cum se poate observa din **figura 34.1,b** și **figura 34.2**.

34.3.FSM-QL RADIAL EXCENTRICE $\text{req}_{1,2}\theta$ și $\text{Reqa}_{1,2}$ EXTERIOARE CERCULUI UNITATE

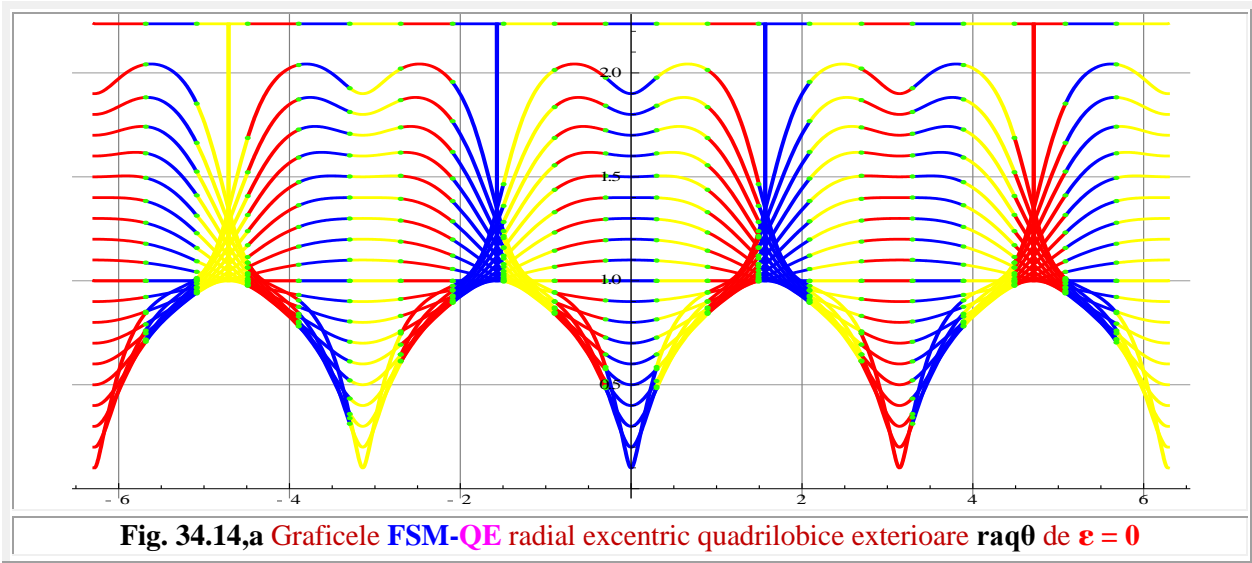
Printre **FSM-CE**, funcțiile **radial excentrice** de variabilă excentrică $\text{rex}_{1,2}\theta$ și de variabilă centrică $\text{Rex}\alpha$ reprezintă distanțele $r_{1,2} = |SW_{1,2}|$ în planul cercului unitate de la excentrul $S(s, \varepsilon)$ la punctele $W_{1,2}$ de intersecție a cercului cu dreapta excentrică $d = d^+ \cup d^-$, (**Fig. 34.13,a** ◀) turnantă în jurul lui S , exprimate prin unghiul la excentru θ și, respectiv, unghiul α la centrul $O(0, 0)$. Indicele **1** este pentru determinarea principală, prin intersecția cu d^+ și indicele **2** pentru determinarea secundară de intersecție cu d^- .



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)



În **matematica centrică (MC)**, în coordonate **polare**, cercul de rază R , centrat în originea unui reper polar $O(0,0)$, putea fi descris, față de centrul lui $M(0,0) \equiv O(0,0)$ de ecuația vectorială (**Fig. 34.13,a** ◀)

$$(34.14) \quad \vec{\rho}(\alpha) = \vec{R} = R \text{ rad}\alpha,$$

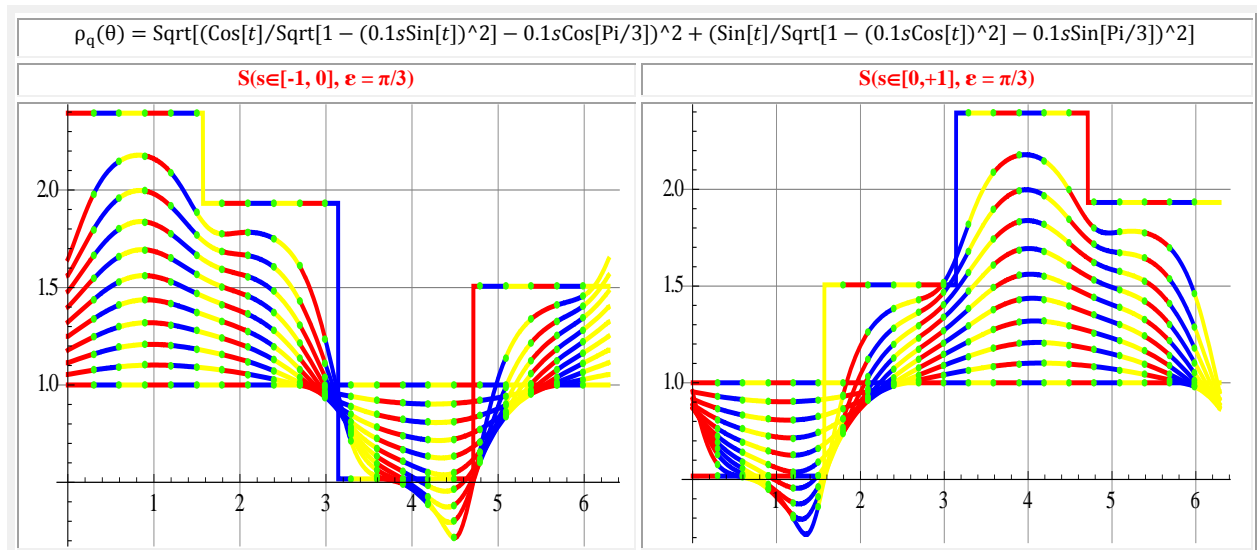
iar, acum, în **matematica excentrică (ME)** și în **supermatematică (SM)**, față de un punct oarecare $E(e,\epsilon)$ din planul cercului, denumit, după cum ați dedus deja, **excentru real**, de ecuația vectorială

$$(34.15) \quad \vec{\rho}(\theta) = R \cdot \mathbf{rex}\theta \cdot \text{rad}\theta = R[-s \cos(\theta - \epsilon) + \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \epsilon)}] \cdot \text{rad}\theta, \quad s = e/R,$$

prin unghiul / **variabila excentrică θ** , față de $E(e,\epsilon)$ și cu ecuația vectorială

$$(34.16) \quad \vec{\rho}(\theta) = R \cdot \mathbf{Rex}\alpha \cdot \text{rad}\theta$$

prin **variabila centrică α** sau unghiul α la centrul $O(0,0)$.



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

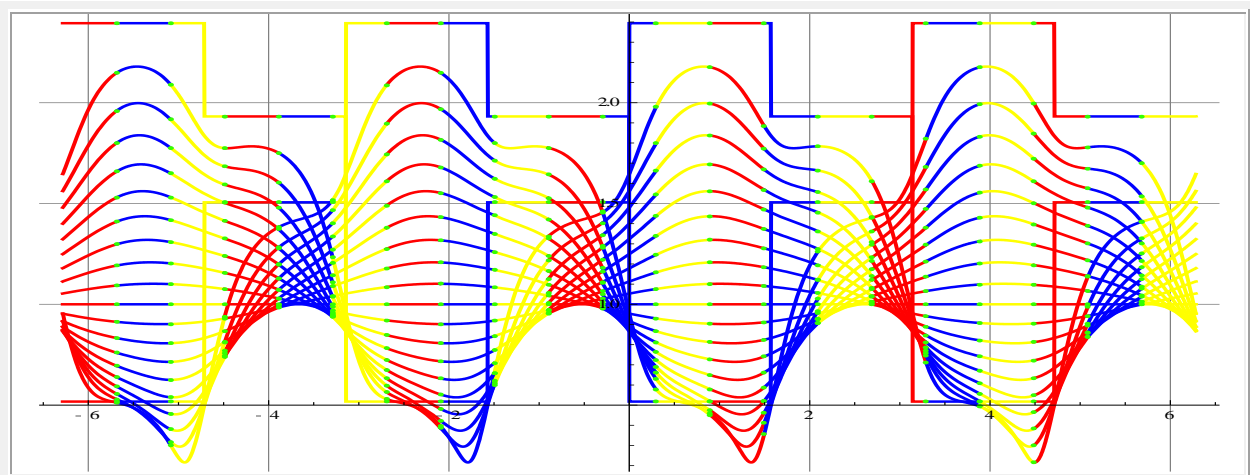


Fig. 34.14,b Graficele FSM-QE radial excentric quadrilobice $raq\theta$ de $\epsilon = \frac{\pi}{3}$

În mod asemănător, prin definirea **funcțiilor supermatematice quadrilobe excentrice FSM-QLE** și a quadrilobelor, ecuațiile lor în coordonate polare se pot defini fie față de centrul $O(0,0)$, fie de excentrul $E(e, \epsilon)$ sau $S(s, \epsilon)$ (Fig. 34.13,a ▶).

Definite prin variabila excentrică θ ele au ecuațiile

$$(34.17) \quad req\theta = \pm \sqrt{(coq\theta + s \cos\epsilon)^2 + (siq\theta + s \sin\epsilon)^2}$$

și pentru $\epsilon = 0$ au graficele din figura 34.14,a iar, pentru $\epsilon = \frac{\pi}{3}$, în figura 34.14,b.

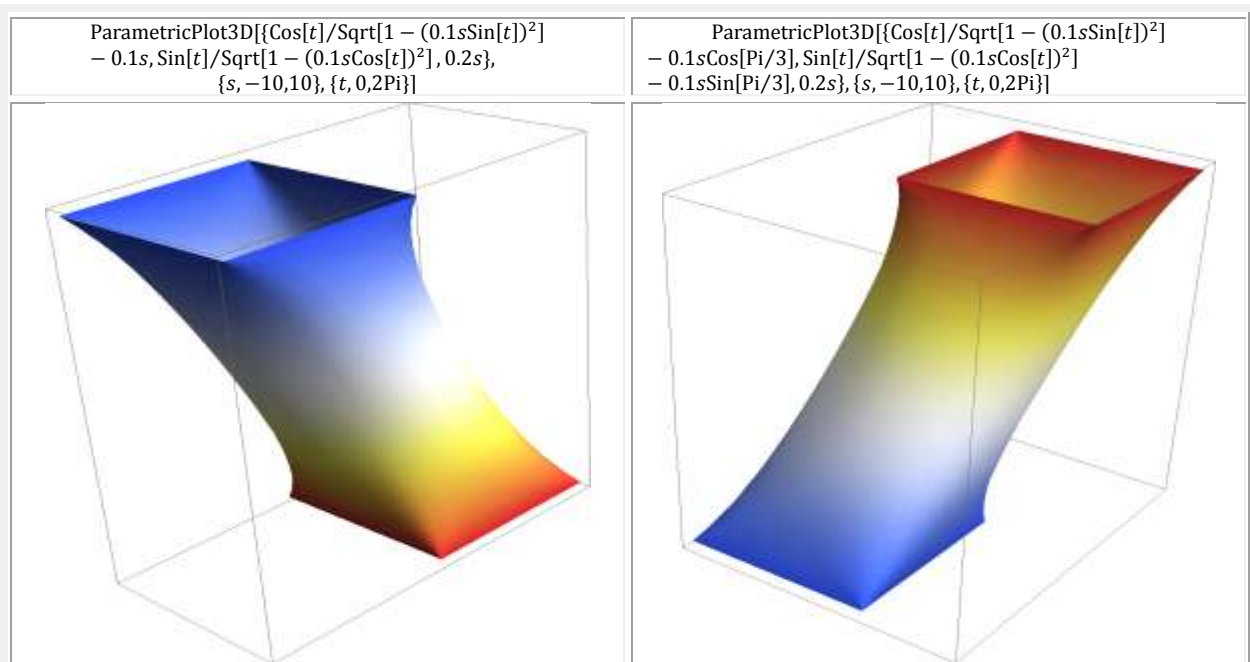
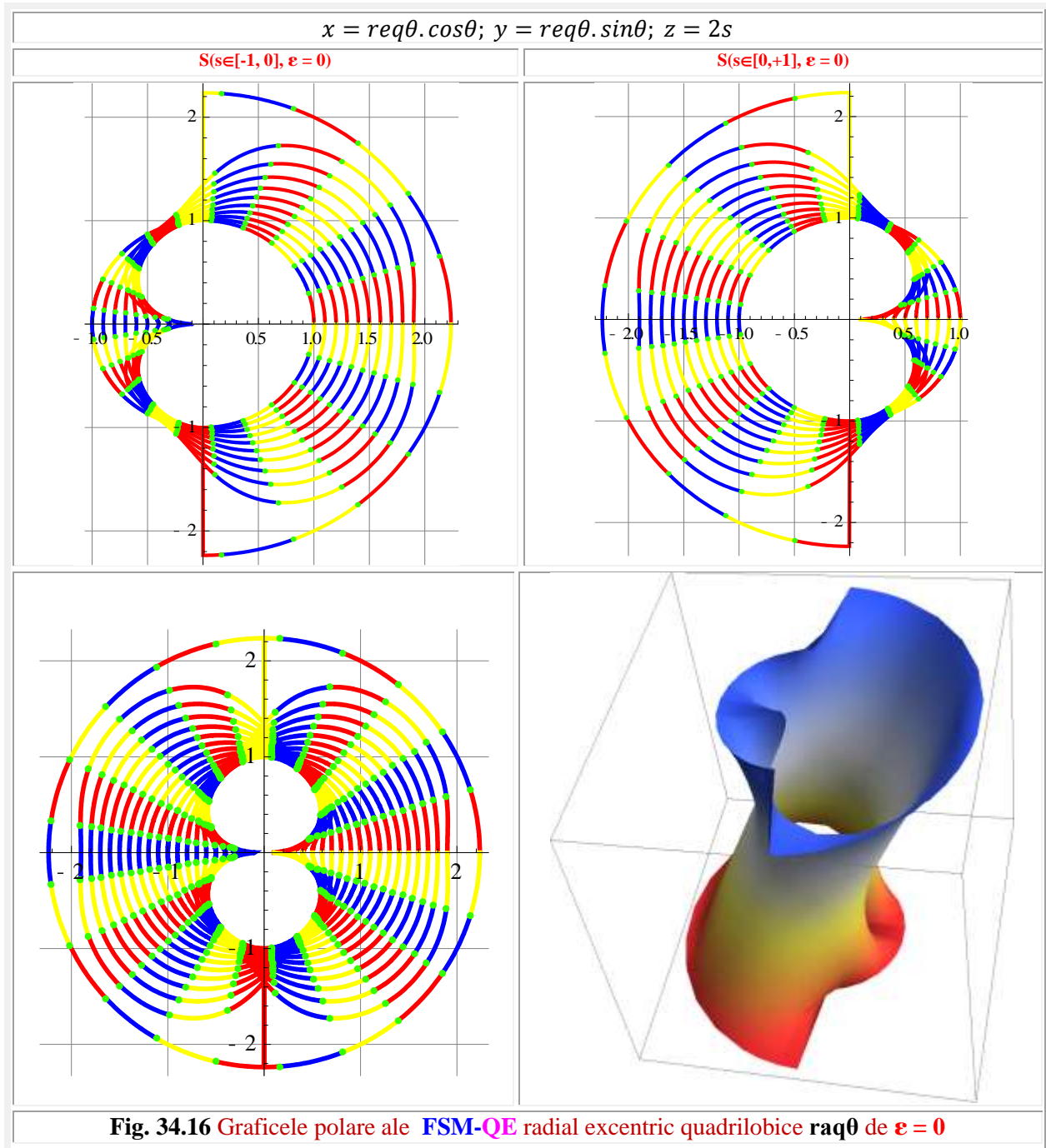


Fig. 34.15 Graficele FSM-QE radial excentric quadrilobice $raq\theta$ în 3D, de $\epsilon = 0$ ◀ și $\epsilon = \frac{\pi}{3}$ ▶

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)



Reprezentarea polară cu ecuația (34.13) ca și prin ecuațiile parametrice bazate pe ea, dau evident curbele plane închise quadrilobe (cvadrilobe) care sunt însă deplasate pe direcția excentricității s : a axei x pentru $\epsilon = 0$ și în diagonală pentru $\epsilon = \pi/3$, așa cum se prezintă situația în **figura 13,b** în 2D și în **figura 34.15** în 3D.

FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

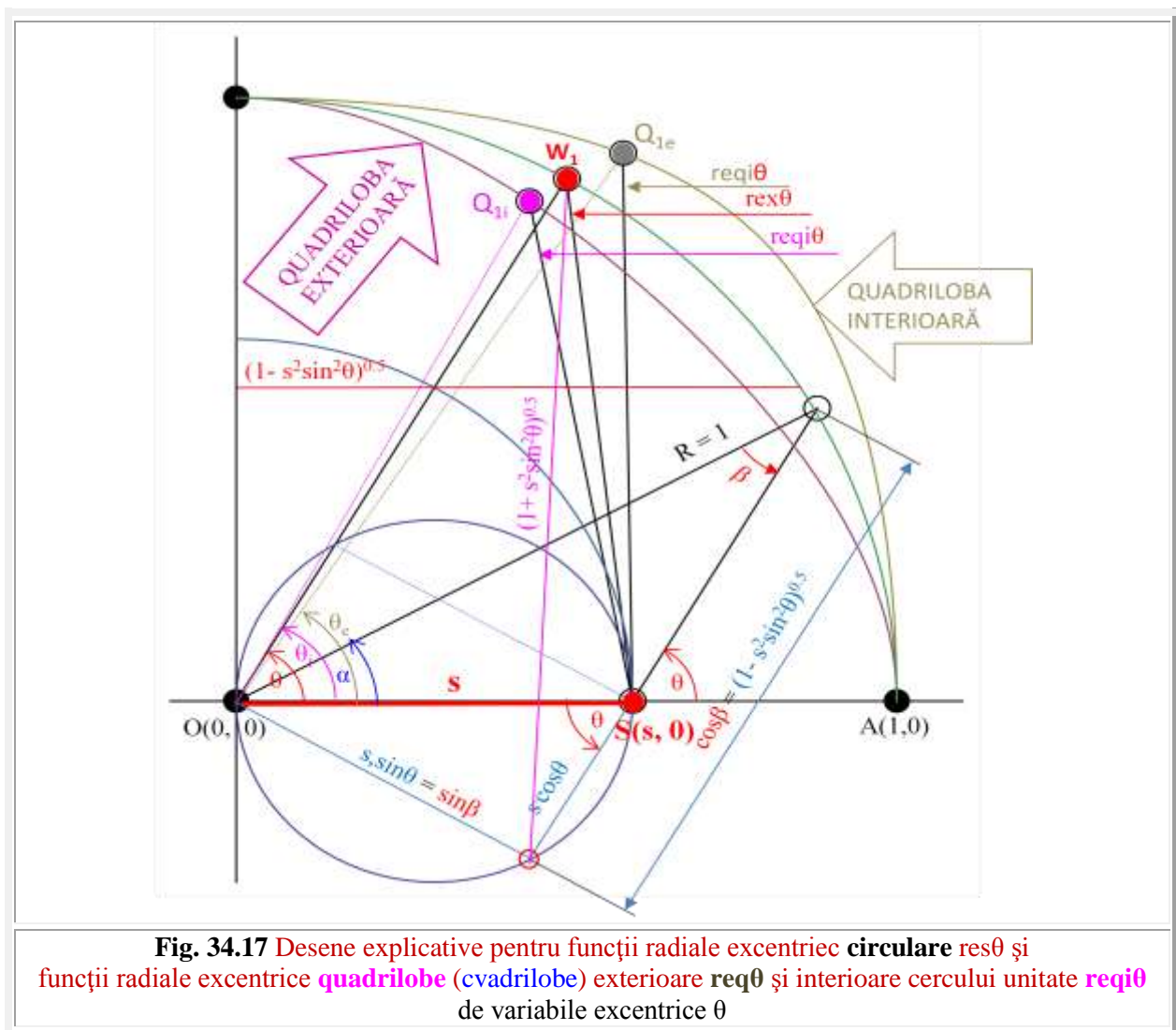
În figura 34.16 sunt prezentate graficele polare ale FSM-QLE

34.4 FSM-QL RADIAL EXCENTRICE $req_{1,2}\theta$ și $Req_{\alpha,2}$ INTERIOARE CERCULUI UNITATE

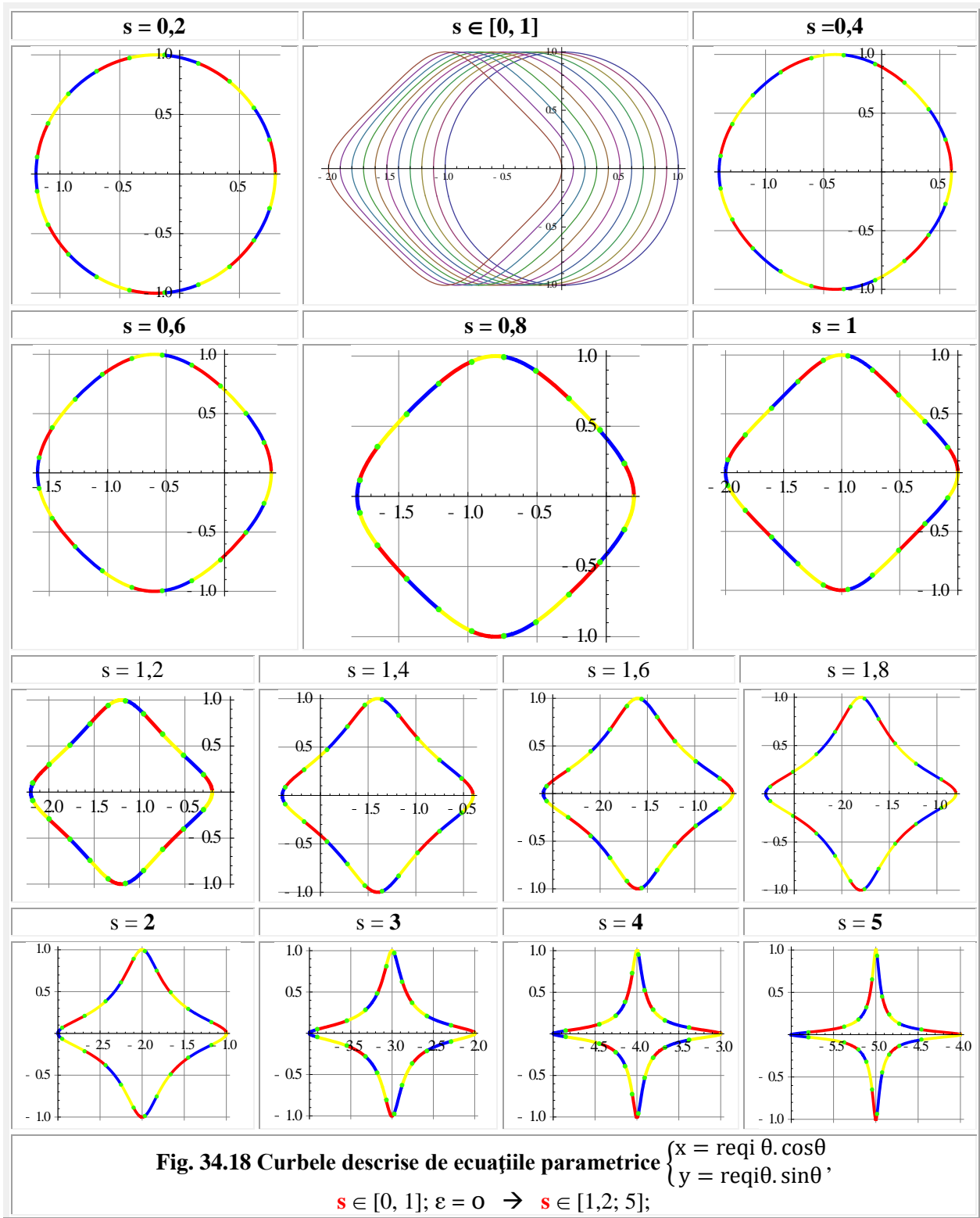
Funcțiile supermatematice radiale excentrice quadrilobe (cvadrilobe) interioare cercului unitate (FSM-QEI) $req_{i\theta}$ sunt reprezentate / schițate geometric în figura 34.17, împreună cu cele exterioare cercului unitate $req\theta$ și cu cele circulare excentrice $rex\theta$.

Pe de altă parte, ele nu sunt, strict vorbind, quadrilobe (cvadrilobe), deoarece așa cum se poate observa în figura 34.18, în care, pentru $s = 1$, curba plană închisă nu mai este un pătrat perfect, ci cu colțurile rotunjite, iar pentru $s > 1$ degenerază în astroide.

$$(34.18) \quad deli\theta = \sqrt{1 + s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)}$$



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

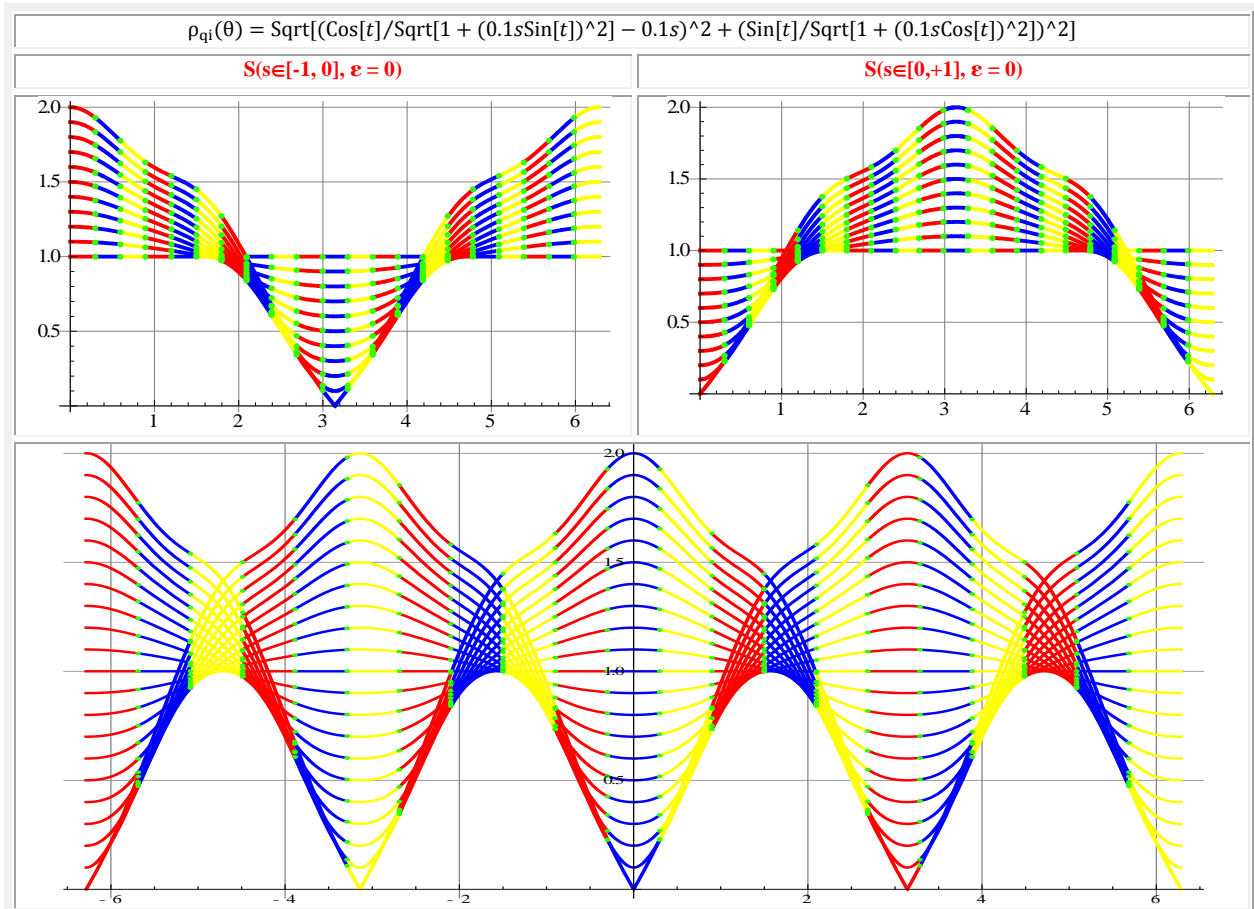
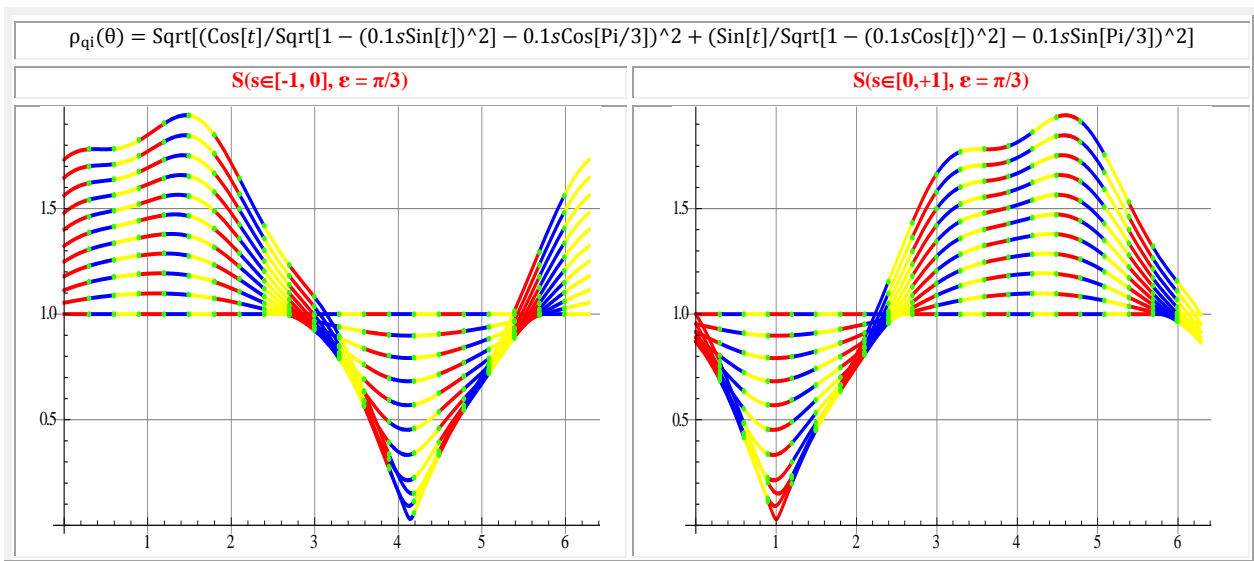


Fig. 34.19,a Graficele FSM-QE radial excetric quadrilobice interioare raqiθ de ε = 0



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

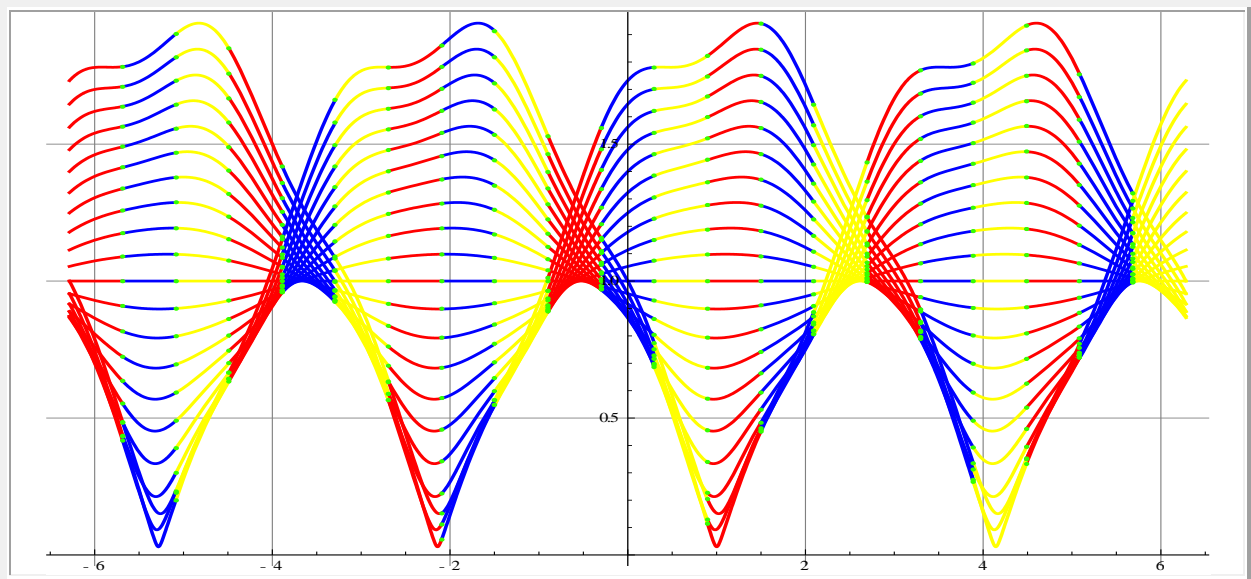
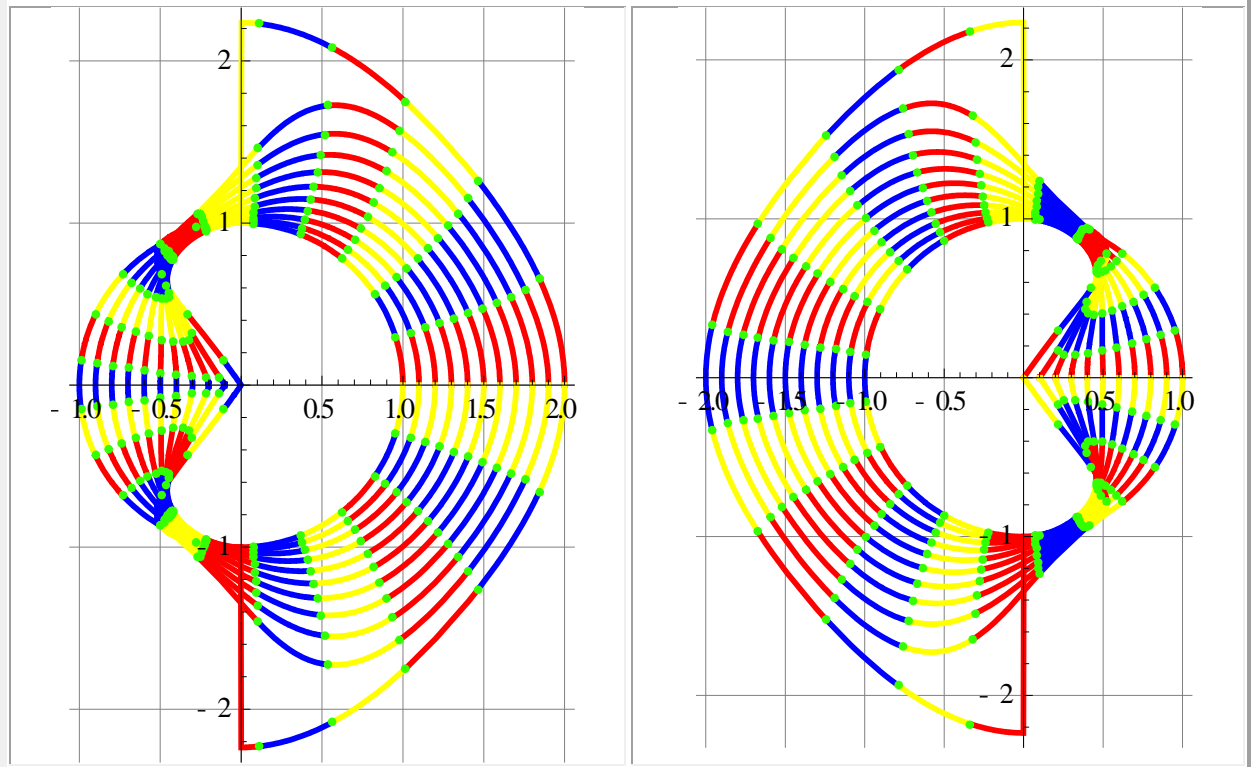


Fig. 34.19,b Graficele FSM-QE radial excentric quadrilobice $raqi\theta$ de $\varepsilon = \frac{\pi}{3}$

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sqrt[(Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[t])^2] - 0.1s)^2 + (Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[t])^2])^2]Cos[t], Sqrt[(Cos[t]/Sqrt[1 - (0.1sSin[t])^2] - 0.1s)^2 + (Sin[t]/Sqrt[1 - (0.1sCos[t])^2])^2]Sin[t]}, {s, -10,10}], {t, 0,2Pi}
```



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)

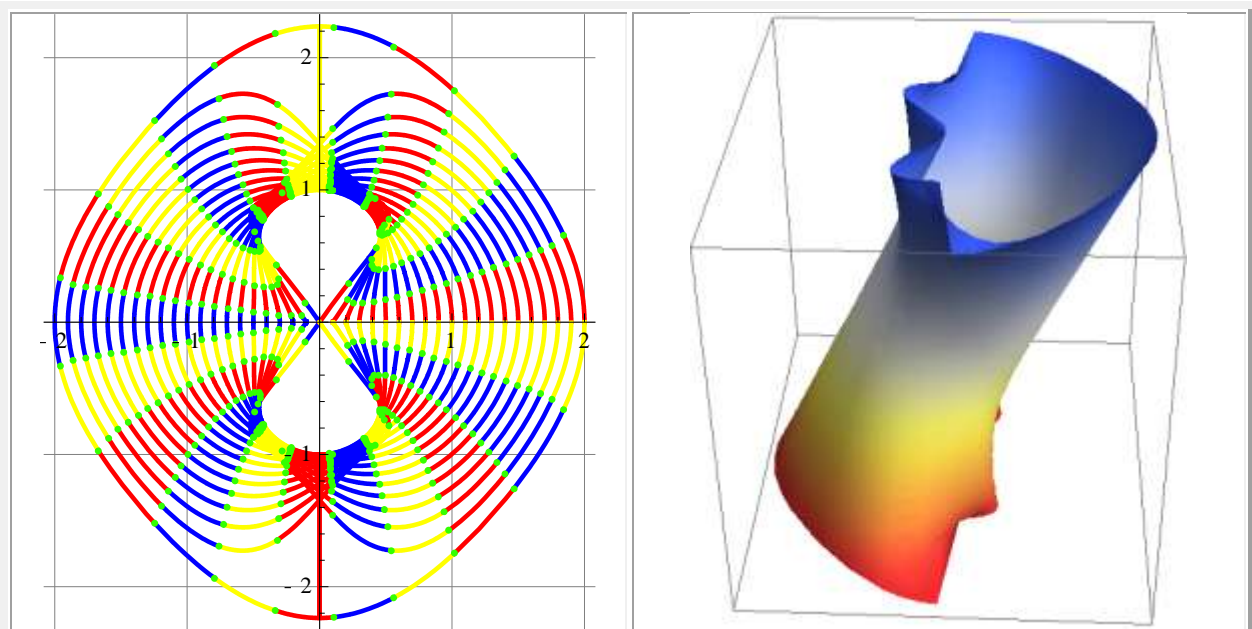
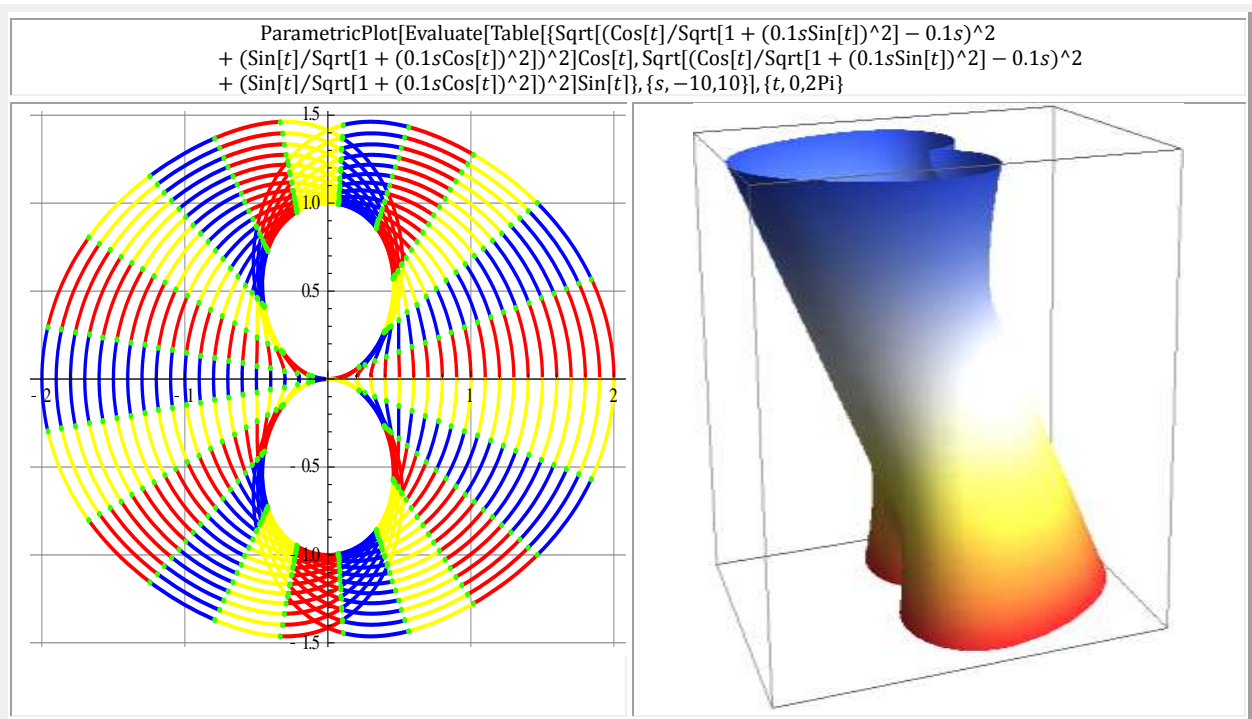
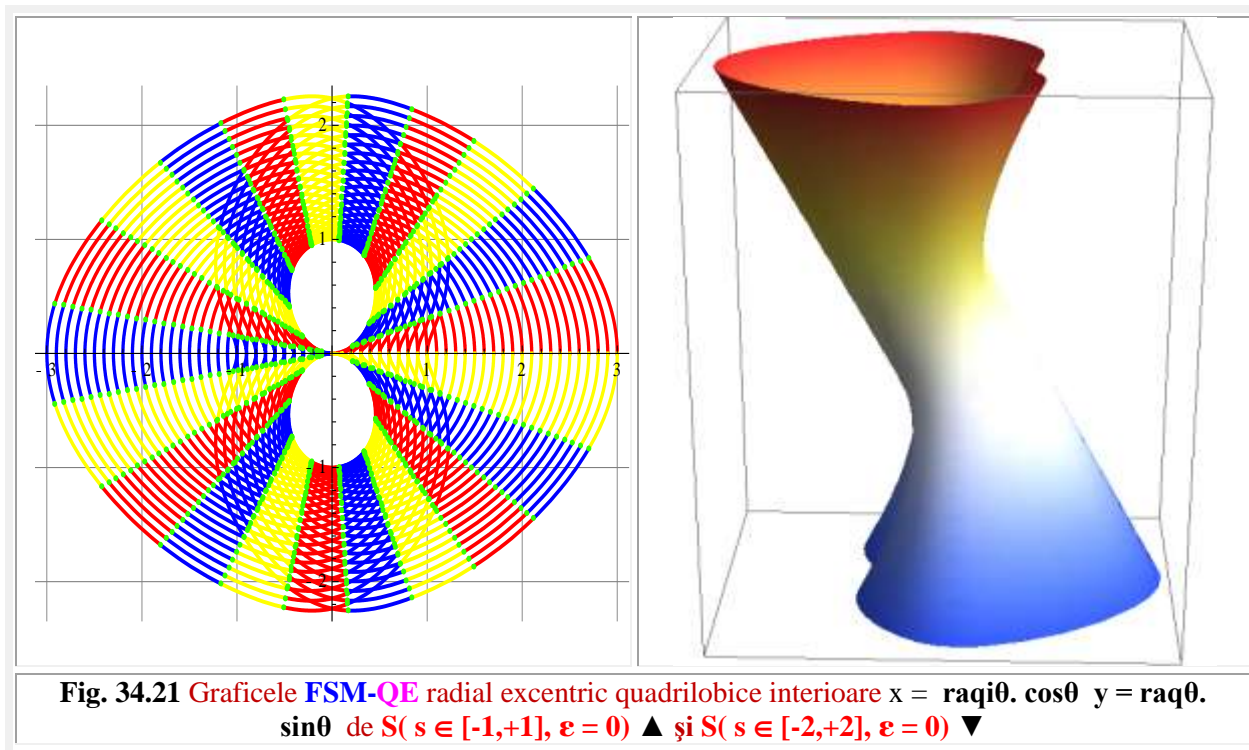


Fig. 34.20 Graficele FSM-QE radial excentric quadrilobice interioare $x = \text{raqi}\theta \cdot \cos\theta$ combinate cu cele exterioare $y = \text{raq}\theta \cdot \sin\theta$ de $\epsilon = 0$



FSM RADIAL EXCENTRICE QUADRILOBE (CVADRILOBE)



Ecuțiile funcțiilor radiale excentrice quadrilobe interioare sunt deduse ca sumă vectorială a funcțiilor

$$(34.19) \quad \begin{cases} \text{coqi}\theta - s \cdot \text{cose}\epsilon \\ \text{siqi}\theta - s \cdot \text{sine}\epsilon \end{cases}$$

și reprezintă distanță de la excentrul $S(s, \epsilon)$ la punctul Q , de pe cvadriloba interioară cercului, adică

$$(34.20) \quad \begin{aligned} \rho_{qi} = \text{raqi}\theta &= \sqrt{(\text{coqi}\theta - s \cdot \text{cose}\epsilon)^2 + (\text{siqi}\theta - s \cdot \text{sine}\epsilon)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+(s^2 \cdot \sin(\theta-\epsilon))^2}} - s \cdot \text{cose}\epsilon\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+(s^2 \cdot \cos(\theta-\epsilon))^2}} - s \cdot \text{cose}\epsilon\right)^2} \end{aligned}$$

cu graficele funcțiilor din **figura 34.19,a** pentru un excentru $S(s \in [0,1]; \epsilon = 0)$ și din **figura 34.19,b** pentru $S(s \in [0,1]; \epsilon = \frac{\pi}{3})$

În **figura 34.20** sunt prezentate graficele polare ale **FSM-QE** radial excentric quadrilobice **combinat**; interioare cu $x = \text{raqi}\theta \cos\theta$ și exterioare cercului unitate cu $y = \text{req}\theta \cdot \sin\theta$, de $S(s \in [-1, +1]; \epsilon = 0)$.

În **figura 34.21** sunt prezentate aceleași curbe închise, dar numai pentru funcții cvadrilobe interioare.

Deoarece imaginile curbelor în 2 D pot să inducă în eroare, au fost prezentate și în 3D.

Motto: “Mecanica este paradisul științelor matematice, deoarece prin ea se ajunge la fructele matematicii”

Leonardo da Vinci

“Ori de câte ori aud de “cvadridimensional” matematicienii sunt scuturați de un frison mistic..”

Albert Einstein

Motto “Excentricitatea este originalitate fără sens”.

Citat de John S. Blackie

“Nu și cea geometrică, care-i izvorul creației și dimensiunea de formare a **supermatematicii**”

Autorul

Capitolul 35

EXCENTRICITATEA MINIMUM A PATRA DIMENSIUNE A SPAȚIULUI 3D

35.1 INTRODUCERE

“Matematica pură este știința în care noi nu știm despre ce vorbim și nici dacă este adevărat ceea ce spunem.” spunea **Bertrand Russell**. Că avea dreptate, se va vedea imediat din următoarele definiții date dimensiunii în diverse dicționare și alte lucrări științifice și, în special, din declarațiile fantasmagorice date celei de a patra dimensiuni: **excentricitatea**. În realitate nu e “**imposibilă**”, ci este o dimensiune ca oricare alta, așa cum se va putea constata / vedea în continuare !.

DIMENSIUNE, *dimensiuni*, s. f. **1.** Mărime (**lungime, lățime sau înălțime**) necesară la determinarea întinderii figurilor și a corpurilor (geometrice). ◇ Expr. (Fam.) *A patra dimensiune = ceva imposibil*, ceva neconceput încă de mintea omenească. ♦ Spec. Mărime fizică considerată din punctul de vedere al legăturii dintre unitatea sa de măsură și unitățile mărimilor fundamentale ale unui sistem de unități de măsură. **2.** Mărime, măsură, proporție. [Pr.: -si-u-] – Din fr. **dimension**, lat. **dimensio**, -onis. Sursa: [DEX '98 \(1998\)](#) ;

DIMENSIUNE s. **1.** mărime, măsură, proporție, (înv.) mărie, mărire, (fam.) calibru. (*Are o ~ mare.*) **2.** v. *format*. **3.** volum, (fam.) gabarit. (*X are o ~ apreciabilă.*) Sursa: [Sinonime \(2002\)](#)

DIMENSIUNE ~i f. 1) Orice mărime care poate fi măsurată. 2) *fig.* Număr care exprimă legătura dintre o unitate derivată și unitățile fundamentale din care derivă. ◇ **A patra** ~ fapt inexistent, **imposibil**. [Art. **dimensiunea**; G.-D. **dimensiunii**; Sil. -si-u-] /<fr. *dimension*, lat. *dimensio*, ~onis Sursa: [NODEX \(2002\)](#) | ;

DIMENSIUNE s.f. **1.** Întindere care poate fi măsurată. ♦ (*Fiz.*) Număr care exprimă legătura dintre o unitate derivată și unitățile fundamentale din care derivă. **2.** Mărime, întindere, proporție. [Pron. -si-u-. / cf. lat. *dimensio*, fr. *dimension*]. Sursa: [DN \(1986\)](#) | ;

DIMENSIUNE s. f. 1. întindere care poate fi măsurată. 2. număr care exprimă legătura dintre o unitate derivată și unitățile fundamentale din care derivă. 3. mărime, întindere, proporție. ♦ a patra ~ = **ceva imposibil**. (< fr. *dimension*, lat. *dimensio*). Sursa: [MDN \(2000\)](#) ;

DIMENSIUNE f. întinderea unui corp în toate sensurile: **lungime, lărgime și înălțime sau adâncime**. Sursa: [Șăineanu, ed. a VI-a \(1929\)](#) | Adăugată de [Laura Gellner](#) |

În **fizică** și **matematică**, **spațiul Minkowski** (sau **spațiul - timp Minkowski**) este contextul matematic în care se formulează cel mai convenabil **teoria relativității restrânse** a lui **Einstein**. În acest context, cele **trei dimensiuni obișnuite** ale spațiului sunt combinate cu o **a patra dimensiune, a timpului**, pentru a forma o **varietate** tetradimensională menită a reprezenta **spațiul - timp**. Spațiul **Minkowski** își trage numele de la **matematicianul german Hermann Minkowski**.

În **fizica teoretică**, spațiul **Minkowski** este adesea comparat cu un **spațiu euclidian**. În timp ce spațiul euclidian are doar dimensiuni spațiale, un spațiu Minkowski are și o dimensiune temporală. Astfel, **grupul simetric** al unui **spațiu euclidian** este **grupul euclidian**, iar pentru un spațiu Minkowski este **grupul Poincaré**.

35.2 SPAȚIUL MATEMATICII EXCENTRICE

Spațiul **matematicii excentrice (ME)** și, totodată, al **supermatematicii (SM)** nu necesită o a patra dimensiune temporală, ci una obișnuită, liniară **e**, denumită **excentricitate liniară reală** ca una din coordonatele polare ale unui punct real **E(e, ε)** sau, **S(s, ε)** într-un cerc unitate ($s = e / R$), extrem de important din plan, la fel de important ca și originea **O(0, 0)**, punct denumit **excentru**.

A fost denumit **excentru** deoarece a fost expulzat din centrul **O** și centrul cercului trigonometric în care l-a plasat **Euler** ca pol, la definirea funcțiilor trigonometrice ca funcții circulare pe cercul unitate **CU(O,1)**.

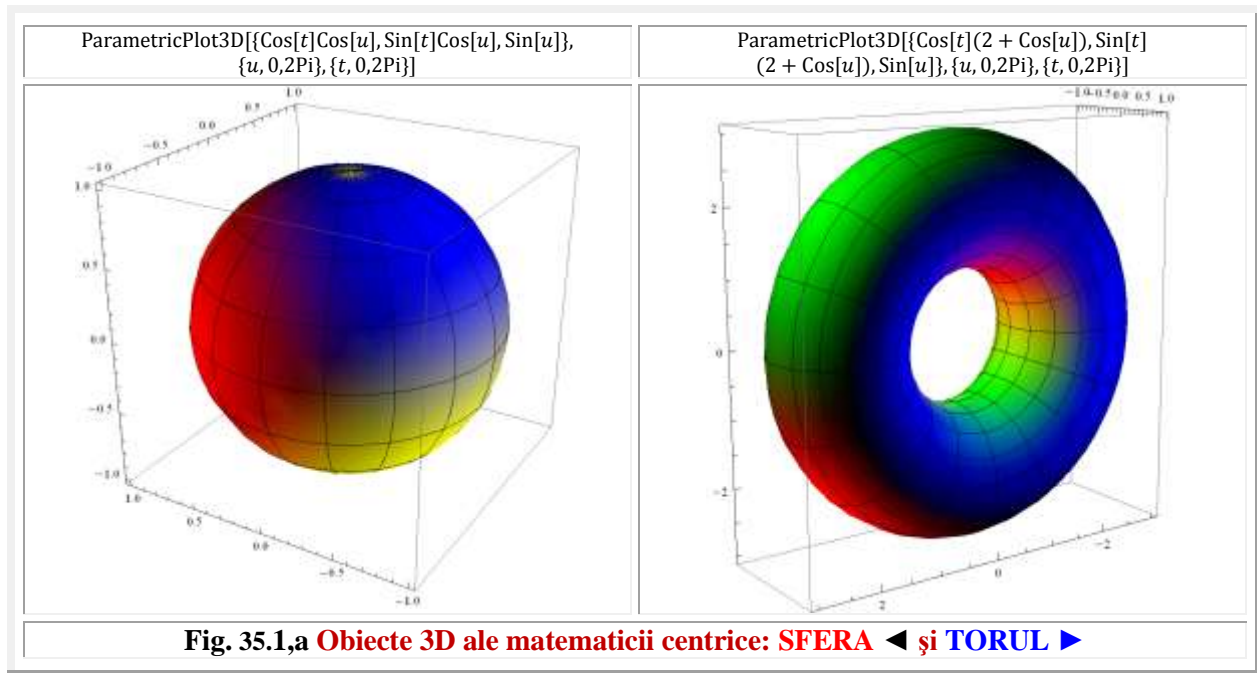
Dacă **E(e, ε)** sau, **S(s, ε)** sunt puncte fixe, adică **e, s** și **ε** sunt constante, ca și **x, y, z, θ, φ, ψ**, atunci ele sunt doar **coordonate** ale unor puncte fixe. În schimb, dacă ele sunt variabile, de abia atunci ele devin **dimensiuni** ale spațiului. Așa cum sunt **x, y** și **z** în ecuațiile parametrice ale unor obiecte geometrice 3D ca, de exemplu, **sfera**

$$(1) \quad (35.1) \quad \begin{cases} x = \cos u \cdot \cos v \\ y = \sin u \cdot \cos v, u \in [0, 2\pi]; v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ z = \sin v \end{cases}$$

și **torul**

$$(2) \quad (35.2) \quad \begin{cases} x = (3 + \cos u) \cos v \\ y = (3 + \cos u) \sin v, u \in [0, 2\pi]; v \in [0, 2\pi] \\ z = \sin u \end{cases}$$

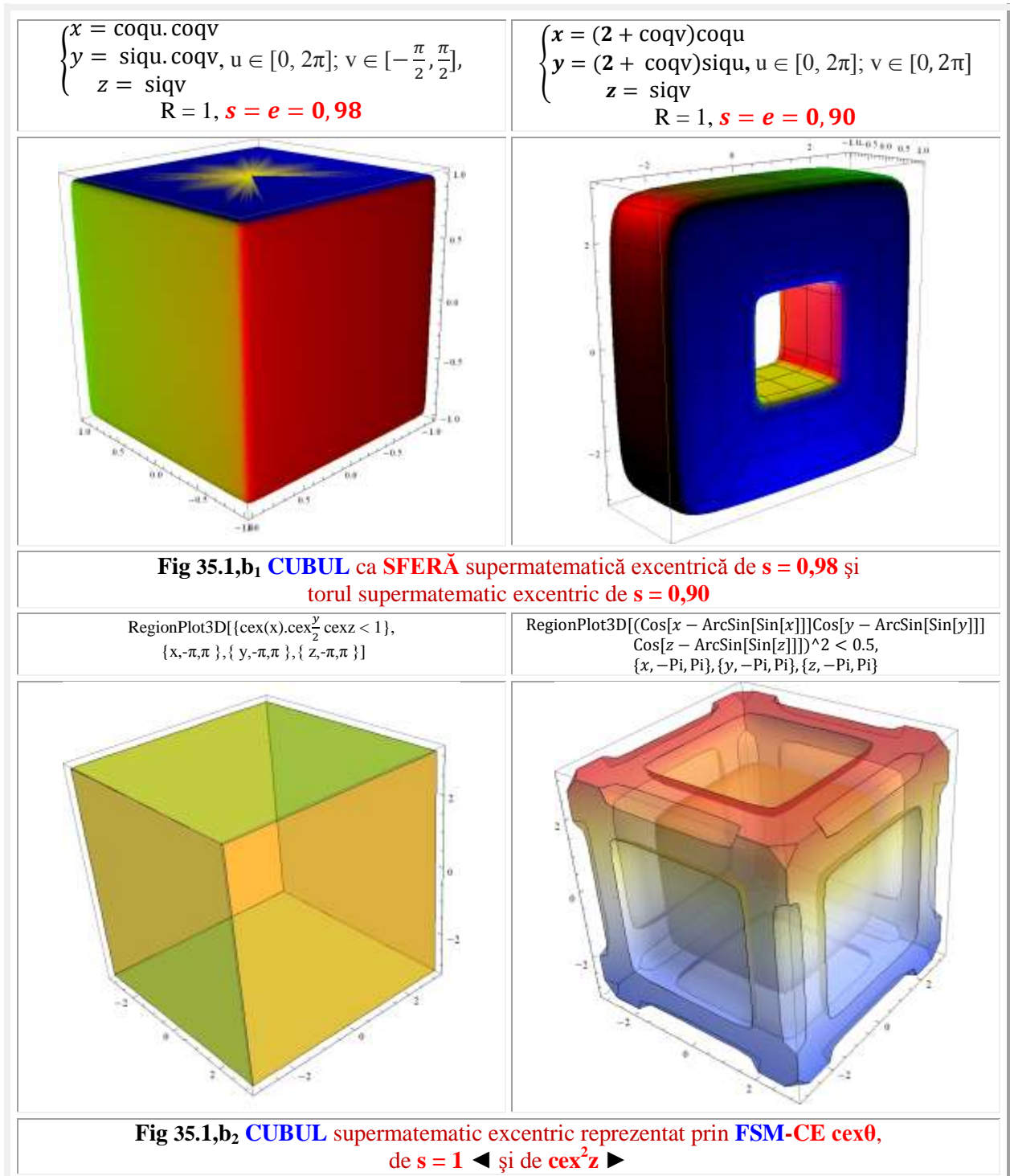
reprezentate în **figura 35.1,a**.

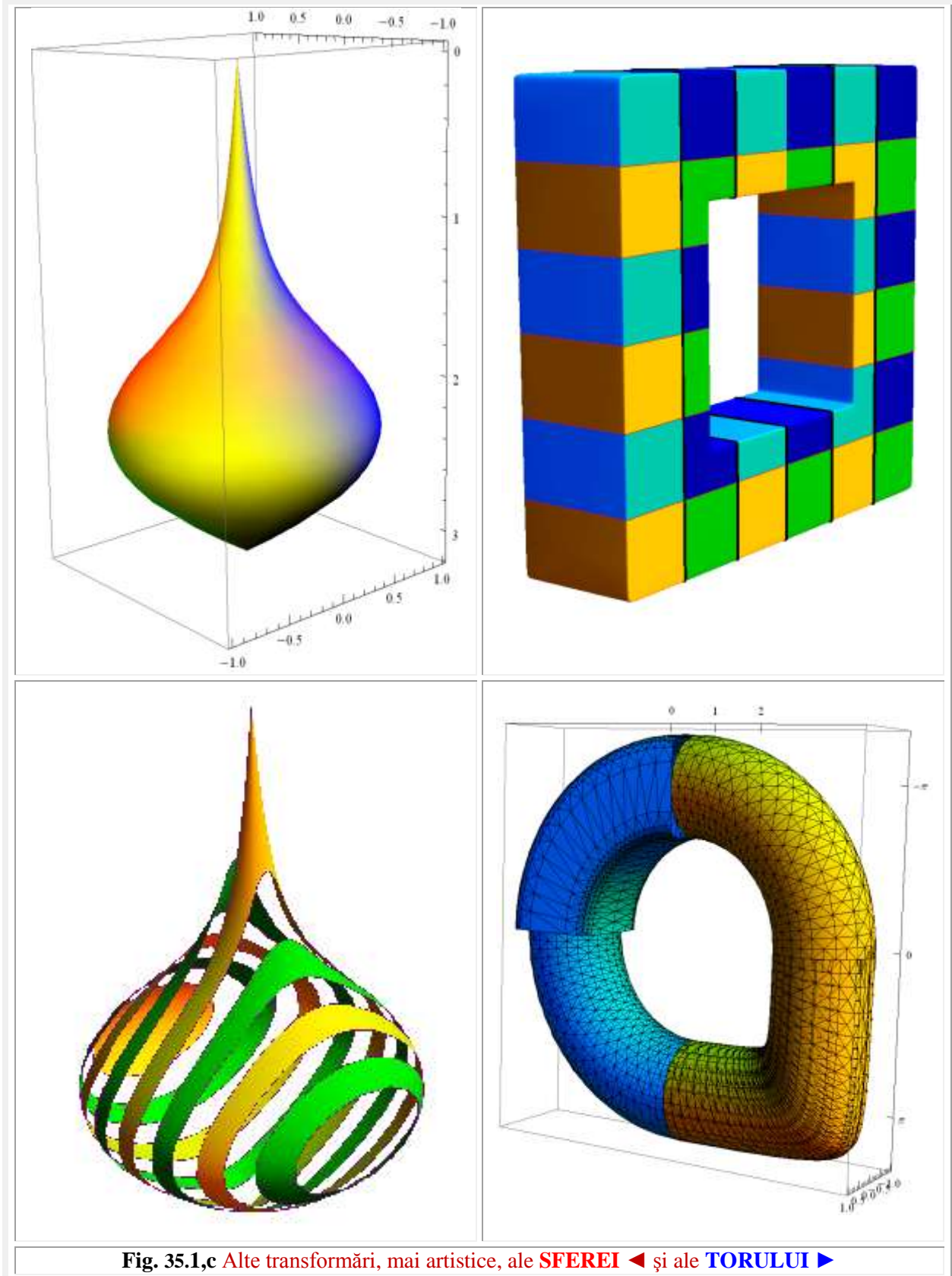


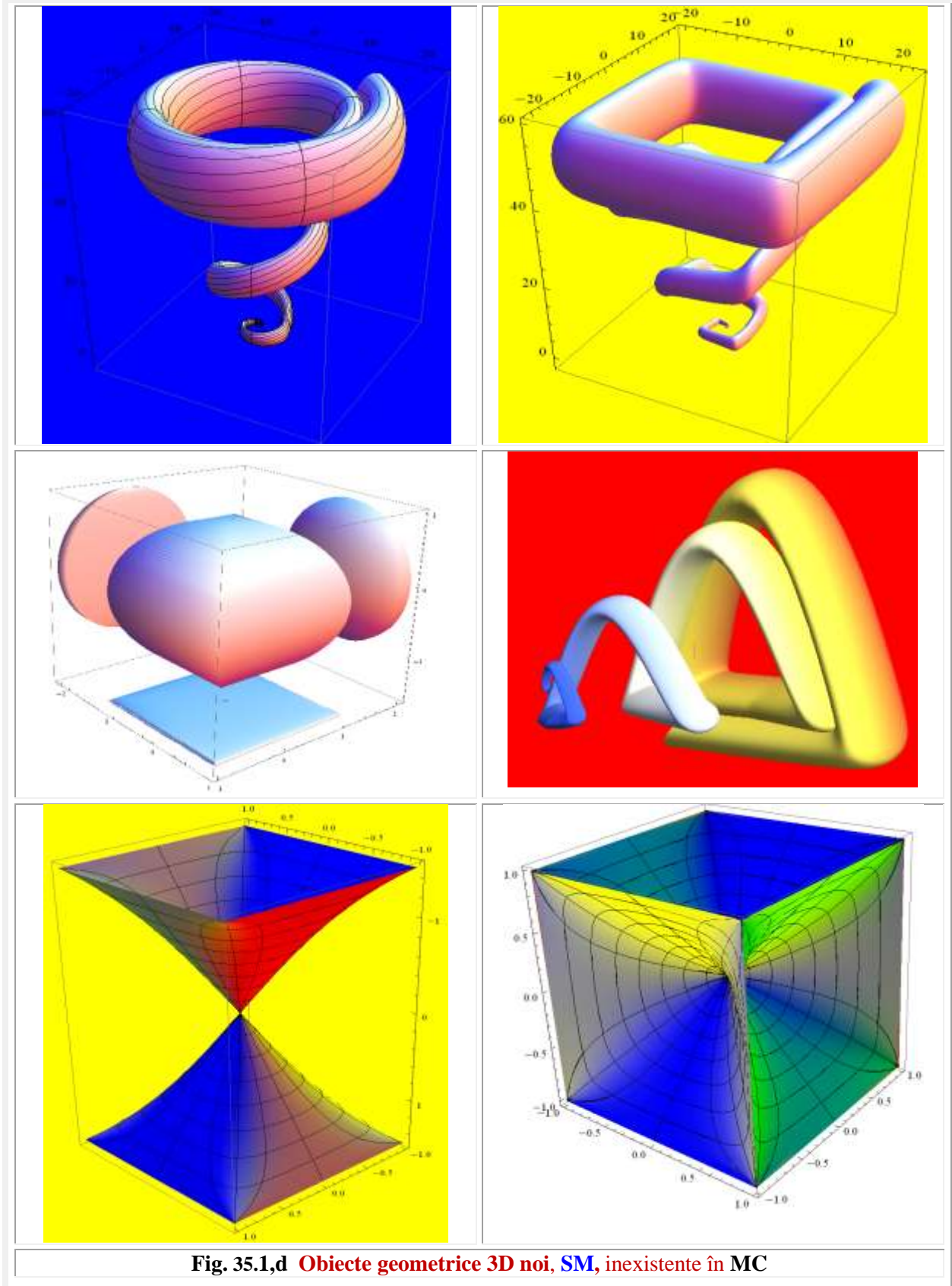
Este suficient să apară o a 4-a dimensiune, **excentricitatea reala e** sau cea **numerică s = e / R** pentru ca aceste obiecte să poată fi transformate sau **metamorfozate**, așa cum se prezintă situația în **figura 35.1,b**:

- Sfera în cub;
 - Torul circular din matematica centrică (**MC**) în tor de formă pătrat și de secțiune pătrată din **SM**
- Transformarea** se face în etape / trepte:
- 1) **Întâi**, funcțiile cosinus și sinus centrice (**cosa, sina**) se transformă în **funcții supermatematice circulare excentrice (FSM-CE) cexθ și sexθ**;
 - 2) Cu ajutorul acestora și al noilor **FSM-CE** se obțin noi curbe închise în **2D**, ca de exemplu **quadrilobele** (cvadrilobele) care constituie și o transformare continua a cercului în patrat;

- 3) Pe aceste noi curbe se definesc noi **FSM-CE** ca de exemplu **funcțiile quadrilobe** (cvadrilobe) **coqθ** și **siqθ** precum și **taqθ**, **tacvθ**, **ctqθ** și **ctqvθ**;
- 4) Pe baza acestora, în 3D, se definesc transformările continue ale sferei într-un cub (**Fig.1,b1 ◀**) perfect ca și a torului circular în tor pătrat (**Fig.1,b1 ▶**);







Dacă x, y, z sunt variabilele, ca și E și S din ecuațiile parametrice prezentate în **figura 35.1,b₂**, de exemplu, atunci ele devin **dimensiunile de formare** (ale unui obiect, a cărui poziție în spațiul 3D este determinată de coordonatele X, Y, Z , constante). În acest caz apar, **în plus**, următoarele dimensiuni de formare și de deformare ale obiectelor geometrice:

- **Dimensiuni de formare liniare centrice** $x(t), y(t), z(t)$;
- **Dimensiuni liniare de formare și de deformare excentrice**, $e(t) / s(t)$;
- **Dimensiuni unghiulare de formare centrice** $\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$;
- **Dimensiuni unghiulare de formare și de deformare excentrice** $\varepsilon(t)$.

Așa a fost posibilă apariția unor obiecte geometrice noi, precuma cele prezentate în **figurile 35.1,c și 35.1,d**.

Acestă revoluție în matematică s-a născut **din nimic**, cum s-a exprimat **Iános Bolyai** la descoperirea / crearea **geometriei neeuclidiene**, mai precis, prin deplasarea / expulzarea unui singur punct din plan și, prin aceasta, a introducerii unor noi dimensiuni în plan: **excentricitatea liniară reală e** sau numerică **s** și a **excentricității unghiulare e**. Deci, ca și x, y, z **excentricitatea liniară reală e**, ca și cea **numerică s**, sunt posibile și ușor de conceput !

Consecințele ? Sunt greu de estimat, doar după **40 ... și ceva de ani** de la apariția **SM**.

Multiplicarea la infinit a tuturor entităților din **MC** este una dintre cele mai importante.

Și mai importante sunt noile entități **SM** ce apar. O pleiadă de funcții matematice noi: de variabilă **excentrică θ** ($aex\theta, bex\theta, cex\theta, dex\theta, \dots, rex\theta, tex\theta, texv\theta$ ș.m.a) precum și cele de variabilă **centrică α** ($Aex\alpha, Bex\alpha, Cex\alpha, Dex\alpha, \dots, Rex\alpha, Tex\alpha, Texv\alpha$ ș.m.a). O pleiada de curbe noi, o pleiada de corpuri **3D** noi, unele chiar cu veleități artistice, cum sunt cele prezentate în **figura 1,c**; cele din stânga ◀ fiind derivate din SFERĂ iar cele din dreapta figurii ▶ fiind derivate din tor.

Alte obiecte 3D (**Fig. 35.1,d**) ca **elice conice circulare** ▲◀, **pătratic** ▲▶ sau **triunghiulare** (mijloc, dreapta →▶) ca și **sfero-cubul** ←◀ sunt inexistente în **MC**, în sensul că nu aveau sau nu se cunoșteau ecuațiile lor de definire și nici transformarea continuă a cercului în pătrat, cu obiectele intermediare ($s \in [-1,1] \setminus 0$) denumite **quadrilobe**, **trilobe** sau **multilobe**, a sferei în cub, a conului în piramidă, cu obiectele intermediare denumite **conopiramide**, sau în prismă, a cilindrului circular în cilindru patrat sau în prismă triunghiulară.

Obiectele geometrice hibride noi apărute sunt conopiramida (**Fig. 35.1,d** ▼◀), sferocubul ←◀, cilindrul pătratocilindric, cilindrul cilindro triunghiular, cubul românesc (**Fig. 35.1,d** ▼▶) format din șase piramide cu vârful comun, astfel că are volum zero, ca urmare, fiind **cel mai ușor cub din lume** ș.m.a..

35.3 MULTIPLICAREA DIMENSIONALĂ A SPAȚIILOR

În filozofie și fizică categoria **spațiului** exprimă poziția (localizarea $\rightarrow[X, Y, Z]$) și orientarea $\rightarrow[\Theta, \Phi, \Psi]$, distanța, mărimea, forma, întinderea și ordinea **obiectelor** coexistente în lumea reală.

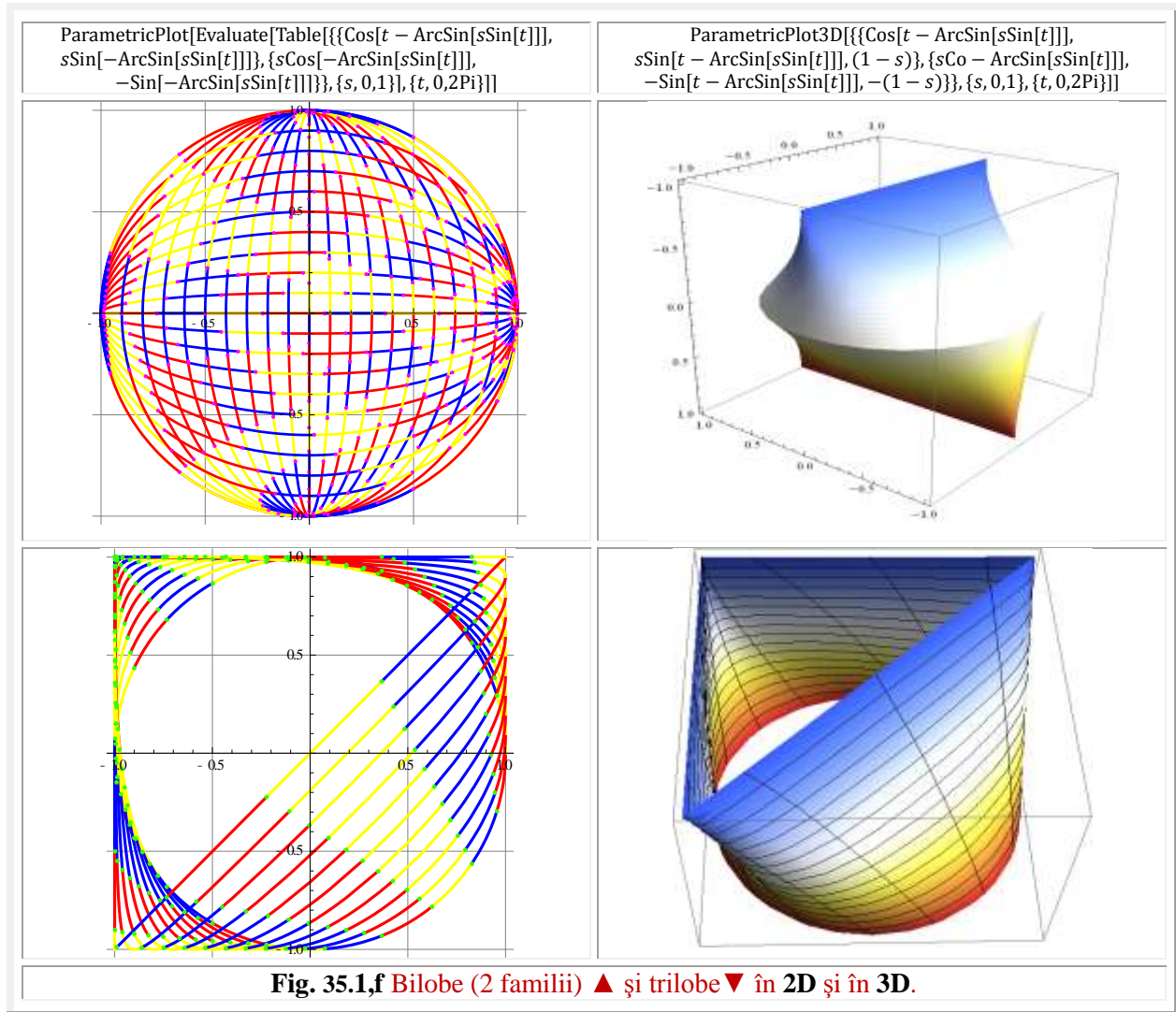
Concepția atomistă despre spațiu și timp (care stă și la baza **geometriei** lui **Euclid**) a fost dezvoltată în filozofia modernă de către **Newton**. Pentru **Newton** spațiul și timpul sunt absolute, obiective și universale, deci independente de materia în mișcare. Dacă se înlocuiește cuvântul **obiect** cu **obiect virtual** sau **entitate**, atunci definiția devine valabilă și în matematică. În **matematica centrică (MC)**.

Teoria relativității lui **Einstein** (numită și **teoria** fizică a spațiului și timpului) a demonstrat că proprietățile spațio-temporale (lungimea corpurilor și durata evenimentelor) depind de viteza de deplasare a sistemelor materiale și că structura sau proprietățile continuului spațio-temporal variază în funcție de concentrarea **maselor substanței** și de intensitatea **câmpului gravitațional** generat de către acestea.

Adică, obiectele virtuale își modifică forma și dimensiunile, în funcție de un nou parametru sau dimensiune a spațiului. Această dimensiune nouă, sau, mai precis, nou introdusă în știință, este **excentricitatea**.

Filozofi ca **Berkeley**, **Hume**, **Mach**, **Bergson** neagă obiectivitatea spațiului și timpului, punându-le în dependență de conștiința omului sau ca forme subiective ale trăirilor sale subiective.

Hegel consideră spațiul și timpul ca fiind două categorii ale ideii absolute. Adică, noțiuni matematice. Mai precis, ale matematicii excentrice (**ME**), deoarece, numai în acest domeniu, obiectele își modifică forma și dimensiunile în funcție de noua dimensiune a spațiului, **excentricitatea**.



Și, mai precis, un obiect, ca de exemplu, sfera, care, prin adăugarea unui parametru în plus (**excentricitatea variabilă**) la ecuațiile sale parametrice

$$(3) \quad (35.3) \begin{cases} x = R \cdot \cos u \cdot \cos v + X \\ y = R \cdot \sin u \cdot \cos v + Y, \text{ pentru } u \in [0, 2\pi] \text{ și } v \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \\ z = R \cdot \sin v + Z \end{cases}$$

ele devin ecuațiile parametrice ale **excentricelor sferice**, care transformă continuu sfera perfectă în cubul perfect, dacă **excentricitatea liniară reală** $e \in [0, R]$ sau $s \in [0, 1]$. Și devine cub perfect când e este egală cu raza R a sferei sau când **excentricitatea liniară numerică** s , definită de raportul $s = \frac{e}{R}$ ia valoarea 1. X, Y, și Z indică poziția sferei în spațiul 3D. Dacă sunt toate nule, sfera este centrată în originea sistemului de coordonate O(0,0,0), așa cum se prezintă situația în **figura 35.2,b**.

Între aceste două valori extreme, adică pentru $s \in (0, 1)$ sau $e \in (0, R)$ se obțin obiecte de alte forme, intermediare între sferă și cub (**Fig. 35.2,a**), obiecte specifice **matematicii excentrice**, denumite și

obiecte hibride, printre care se numără și **sfero-cubul**, **cono-piramida**, **tubul cilindro-pătratic**, **cilindrii de secțiuni variabile**, ș.m.a.

Ecuțiile **excentricelor sferice** sunt

$$(4) \quad (35.4) \quad \begin{cases} x = R \cdot \text{coq}(\alpha, e) \cdot \text{coq}(\beta, e) \\ y = R \cdot \text{siq}(\alpha, e) \cdot \text{coq}(\beta, e) \\ z = R \cdot \text{siq}(\beta, e) \end{cases}, \text{ pentru } \alpha \in [0, 2\pi] \text{ și } \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \text{ iar } e \in [0, R],$$

în care, funcțiile **circulare centrice** $\text{cos}(\alpha, e)$ și $\text{sin}(\alpha, e)$ de variabile centrice α și β trec în **funcții circulare excentrice** corespunzătoare **cex θ** și **sex θ** , sau în funcții quadrilobe **coq θ** și **siq θ** , așa cum s-a mai afirmat anterior, denumite cosinus și sinus excentrice și, respectiv cosinus și sinus quadrilobe.

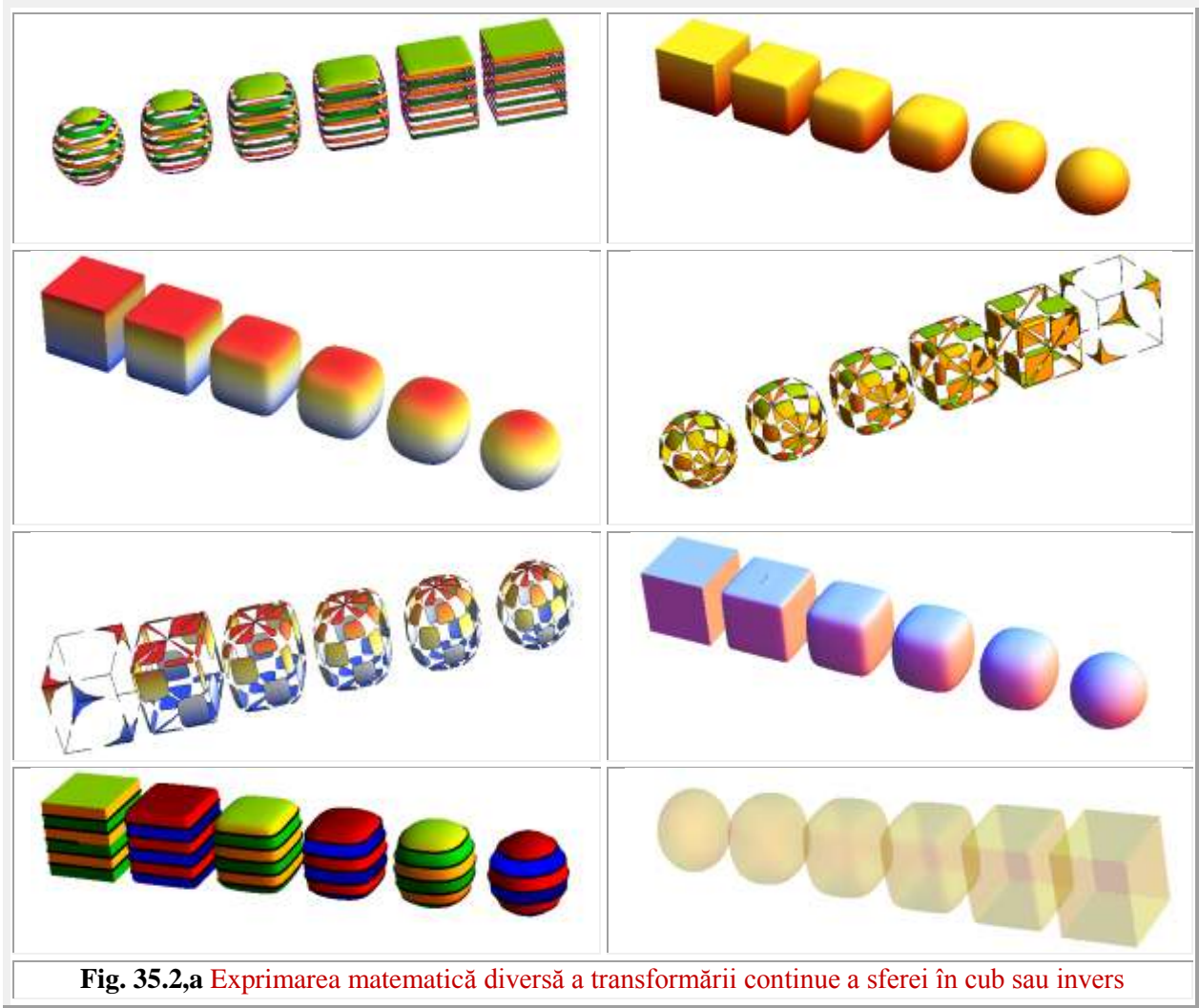


Fig. 35.2,a Exprimarea matematică diversă a transformării continue a sferei în cub sau invers

Adică

$$(5) \quad (35.3) \quad \begin{cases} \text{cos}(\alpha, e) = \text{cex}[\theta(\alpha), e] = \cos[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] \\ \text{sin}(\alpha, e) = \text{sex}[\theta(\alpha), e] = \sin[\theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)]] \end{cases}$$

$$(5') \quad (35.5') \quad \begin{cases} \text{coq}(\alpha, e) = \frac{\cos[\theta]}{\text{del}(\theta, E)} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-s^2 \cdot \sin^2(\theta-\varepsilon)}} \\ \text{siq}(\alpha, e) = \frac{\sin[\theta]}{\text{del}(\theta+\frac{\pi}{2}, E)} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-s^2 \cdot \cos^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases}$$

Evident că, în acelaşi mod, în **2D**, cercul se transformă continuu în pătratul perfect, de latură $L = 2R$. Dacă **unicile** curbe închise, cercul şi pătratul, rezultate pentru $s = 0$ şi, respectiv, $s = \pm 1$ sunt arhicunoscute în domeniul matematicii centrice (**MC**), nu acelaşi lucru se întâmplă pentru **infinitatea** de curbe închise, din domeniul **matematicii excentrice (ME)**, obţinute pentru $s \in (0, 1)$, denumite **excentrice circulare** sau, în acest caz, **quadrilobe** (cvadrilobe). În alte cazuri: bilobe \blacktriangle , trilobe \blacktriangledown (**Fig. 35.1f**),... şi multilobe provenite din cerc în **2D**.

Acum, se poate observa că, pentru a trece de la cerc şi sferă, la pătrat şi cub, sau invers (**Fig.2,a**), obiecte matematice virtuale, proprii **MC**, este neapărat necesar să se treacă, fără probleme, pe neobservate, prin domeniul **ME** al **supermatematicii (SM)**, de aceea se afirmă că, **SM** este o reuniune a celor două matematici, adică **SM = MC \cup ME** şi că graniţele dintre liniar şi neliniar au fost şterse !!.

Deoarece, **MC** este proprie sistemelor **liniare, perfecte, ideale**, iar **ME** celor **neliniare, imperfecte, reale** se observă facil că, prin reuniunea lor, într-un singur tot (**SM**), graniţele dintre liniar şi neliniar, dintre perfect şi imperfect, dintre ideal şi real se şterg şi dispar. Spre bucuria inginerilor care, s-au confruntat în permanenţă cu necesitatea soluţionării unor ecuaţii şi / sau sisteme neliniare, nevoiţi să apeleze la fel de fel de metode de aproximare.

Totodată, în **MC** nu există decât câte **o singură entitate** din fiecare entitate matematică centrică, pe când, în **ME** numărul lor este **infini**. Pentru fiecare punct dintr-un plan, în care poate fi plasat un punct, denumit **ex-centru**, sau **excentru**, există câte o matematică excentrică (**ME**). A fost numit astfel, pentru că a fost expulzat din centrul cercului **C(0,0)** şi originea **O(0,0)** a unui reper, unde l-a plasat **Euler**, împreună cu un pol **P(0, 0)**, a unei semidrepte, deci **3 puncte suprapuse**, sau coincidente, care au **sărăcit** enorm matematica, așa cum s-a mai afirmat, dar "**repetiția este mama învățături**" !.

Excentrul **E(e, ϵ)** este corespunzător unui cerc de rază oarecare **R** și **S(s, ϵ)** este corespunzător unui cerc de rază $R = 1$, adică cercul unitate sau trigonometric. Coordonatele polare unghiulare ϵ , ale excentrelor **E** și **S**, reprezintă **excentricitatea unghiulară**, fiind aceeași în ambele situații / cazuri.

Există o transformare (h)omotetică, transformare care suprapune cercul de rază R oarecare, concentric cu cercul unitate de rază $R = 1$, peste cel unitate. Aceasta este o transformare ce scalează obiectele în funcție de un centru de (h)omotetie **H** și un raport **k**.

35.4 HIBRIDAREA (SUPER)MATEMATICĂ

Câteva idei despre spațiu, culese de pe diverse website-uri, sunt următoarele:

"Spațiul este o entitate abstractă care reflectă o formă obiectivă de existență a materiei. Apare ca o generalizare și abstractizare a ansamblului de parametri prin care se realizează deosebirea între diferite sisteme ce constituie o stare a universului.

SPAȚIUL, este o formă obiectivă și universală a existenței materiei, inseparabilă de materie, care are aspectul unui întreg neîntrerupt cu trei dimensiuni și exprimă ordinea coexistenței obiectelor lumii reale, poziția, distanța, mărimea, forma și întinderea.

În concluzie, se poate afirma că spațiul apare ca o sinteză, ca o generalizare și abstractizare a constatărilor cu privire la o stare, la un moment dat, a universului.

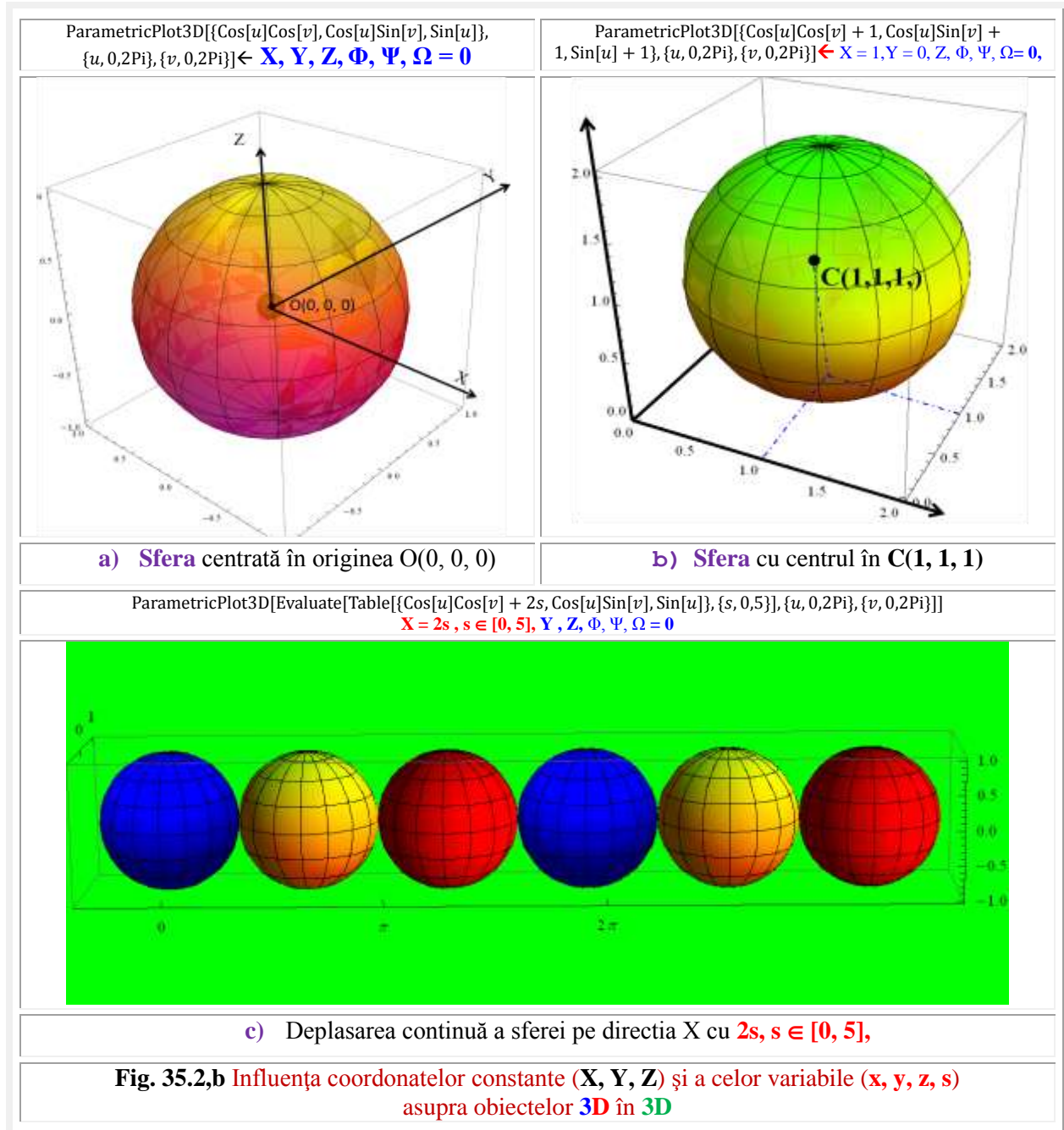
În cadrul mecanicii clasice, noțiunea de spațiu este aceea a modelului spațiului euclidian tridimensional ($E^3 / 3D$) omogen, izotrop, infinit.

Când discutăm despre spațiu, primul gând este îndreptat spre **poziție**, adică noțiunea de poziție este direct asociată noțiunii de spațiu. **Poziția** este exprimată în raport cu un sistem de referință (reper) sau mai scurt printr-un sistem de coordonate constante (**X, Y, Z** și **Θ, Φ, Ψ**), pentru o poziție fixă în spațiu și mobilă dacă sunt funcții de t ."

Să fie oare complete aceste definiții ?

Un obiect tridimensional are în spațiu E^3 **6 grade de libertate**, constituite din cele **3 translații**, pe direcțiile **X, Y** și **Z** și din **3 rotații**, notate cu **θ, ϕ, ψ** , respectiv, cu **A, B** și **C**, în tehnologie și în robotică, în jurul axelor **X, Y** și **Z**.

Un obiect poate fi “realizat” sau, mai precis, reprodusă imaginea lui în spațiul virtual, când apare în 3D, pe ecranul monitorului unui computer, prin folosirea unor programe tehnice (CAD) sau matematice comerciale (MATHEMATICA, MATLAB, MATHCAD, MAPLE, DERIVE, ș.a.) sau speciale, care folosesc **FSM-Excentrice, Elevate** sau/și **Exotice** - la descrierea obiectelor, cum sunt **Realan10, Realan11** (concepute de Dr. Ing. **Dan Micșa**) și **SM-CAD-CAM**.



Prin **modificarea excentricității**, deci **variabile**, obiectele cunoscute și formate în domeniul centric al supermatematicii (**SM**), adică, în matematica centrică (**MC**), pot fi **deformate** în domeniul excentric al **SM**, adică, în matematica excentrică (**ME**) și transformate inițial în obiecte hibride, proprii **ME**, ca, apoi, să fie retransformate în obiecte de alt gen, cunoscute în **MC**. Operație care poate fi

denumită **transmutanță (super)matematică**. Ca de exemplu, deformarea unui **con** perfect ($e = 0$) în **cono-piramide** [$e \in (0, 1)$] cu baza un pătrat perfect și vârful conic, care constituie obiectele hibride, situate între con și piramidă, pâna la **transmutația** / transformarea ei într-o **piramidă** perfectă ($e = \pm 1$) cu baza un pătrat perfect.

Pentru înțelegerea mai profundă a fenomenelor să ne închipuim dimensiunile liniare X, Y, Z și cele unghiulare Φ, Ψ, Ω ca mărimi / dimensiuni **constante** care exprimă, de exemplu poziția unei sfere într-un anumit loc al spațiului 3D. Astfel, X, Y și Z exprimă **localizarea** sferei în spațiul 3D, mai precis a centrului ei de simetrie, iar Φ, Ψ și Ω exprimă orientarea ei, adică, rotațiile ei față de cele 3 axe (**Fig.2,b ▲**), mai greu vizibile pentru sfera și mult mai ușor pentru cub. Dimensiunile x, y, z sunt mărimi variabile ce descriu prin ecuațiile parametrice (3) și parametrii u și v obiectul matematic denumit SFERĂ.

Dacă pe direcția x apare o noua dimensiune variabilă, cum este **excentricitatea numerică** $s \in [0, 10]$, atunci sfera primește o deplasare / **mişcare** continuă pe direcția X (**Fig.35.2,b ▼**).

Obiectul poate fi realizat, în fapt, prin diversele metode de prelucrare mecanice [v. **Mircea Şelariu, Cap.17 Dispozitive de prelucrare, PROIECTAREA DISPOZITIVELOR, EDP, București, 1982, coordonator Sanda-Vasii Roşculeţ**] de **formare** (turnare, sinterizare), **deformare** (la cald și la rece), **dizlocare** (decupare, aşchiere, eroziune, netezire) și **agregare** (sudare și lipire).

În toate cazurile, sunt necesare **mişcări** ale sculei și/sau ale piesei, respectiv, ale spotului luminos care delimitează pe ecran un pixel și trece de la un pixel la altul.

Mișcarea este strâns legată de spațiu și de timp.

Mișcarea mecanică poate fi **de**

- **Poziționare/amplasare** a unui obiect în spațiu;
- **Simetrizarea** unor elemente și figuri geometrice;
- **Formare** în timp a corpurilor și, implicit, a obiectelor ;
- **Schimbarea** în timp a **poziției** obiectelor, sau a părților sale, denumite corpuri, în raport cu alte corpuri, alese drept sisteme de referință;
- **Schimbarea** în timp a **forme** entităților matematice din **MC** și **deformarea** lor prin **hibridare** supermatematică cu $s \in (-1, +1) \setminus 0$ și transferarea lor în domeniul **ME**.
- **Transmutanța** sau transformarea unei entități din **MC** în altă entitate cunoscută în **MC** (**cerc** \rightarrow **pătrat**, **cerc** \rightarrow **triunghi**, **sferă** \rightarrow **cub**, **con** \rightarrow **piramidă** ș.m.a. **pentru** $s = \pm 1$)

Spațiul reflectă raportul de coexistență dintre obiecte și fenomene, sau părți ale acestora, indicând:

- **întinderea** / mărimea lor, denumită **dimensiune de gabarit**;
- **locul** obiectelor, prin coordonatele **liniare X, Y, Z**, în spațiul 3D, denumite **dimensiuni de localizare**
- **orientarea** obiectelor, în spațiul 3D, prin coordonatele **unghiulare Φ, Θ, ψ** denumite **dimensiuni de orientare** (spre deosebire de cele de formare și de deformare **rotație $\psi(t)$** , **precesie $\varphi(t)$** și **nutație $\theta(t)$**)
- **pozițiile** relative sau distanțele dintre obiecte, denumite **dimensiuni de poziționare**, dacă se referă la localizarea și orientarea absolută și/sau relativă a obiectelor, iar dacă se referă la părți ale acestora, numite corpuri, atunci sunt denumite **dimensiuni de coordonare**;
- **forma** obiectelor și, respectiv, evoluția fenomenelor, denumite **dimensiuni de formare $x(t), y(t), z(t), e(t)$** , care definesc, totodată, și ecuațiile de definire a obiectelor;
- **deformarea** obiectelor și modificarea evoluției fenomenelor, denumite **dimensiuni de deformare** sau **excentricități $e(t)$ sau $s(t)$** , ca urmare a **hibridării matematice** și a **transmutației (super)matematice**.

Ultima dimensiune a spațiului, **excentricitatea**, făcând posibilă apariția **matematicii excentrice (ME)** și realizând trecerea simplă din domeniul **matematicii centrice (MC)** în cel al **matematicii excentrice**, din domeniul perfect în cel real, precum și saltul de la o singură entitate matematică, existentă în matematica și domeniul **centric**, la o **infinitate** de entități, de același gen, dar **deformate din ce în ce mai pronunțată**, odată cu creșterea valorii excentricității numerice, până la **transformarea** lor în alte

genuri de obiecte, existente în domeniul centric (**transmutație (super)matematică**) sau inexistente în MC (**hibridare**).

Un exemplu, care merită repetat (pentru că “*repetiția este mama învățării*” și poate că așa **excentricitatea**, ca cel puțin a 4-a dimensiune a spațiului, ajunge la urechile sau ochii celor care cred ei că decid în știință în țara tuturor posibilităților ratate), devenit deja clasic, este deformarea continuă a unei sfere până la transformarea ei într-un cub (**Fig.2,a**).

Prin utilizarea aceluiași **dimensiuni de formare** (ecuații parametrice), atât pentru sferă cât și pentru cub, doar excentricitatea modificându-se, pentru $e = s = 0$ se obține o **sferă** și pentru $e = \pm R$ sau $s = \frac{e}{R} = \pm 1$ se va obține un **cub perfect**, adică pentru $s \in (-1 \vee 1)$ se obțin **entități / obiecte transmutate**.

Pentru $e \in (-R, +R) \setminus 0$ se obțin entități **inproprii matematicii centrice (MC)**, anterior inexistente în matematică, sau, mai precis, în **matematica centrică (MC)**, **proprii** noii matematici, **matematicii excentrice (ME)**.

Așa cum s-a mai prezentat, **dreapta** este un **spațiu unidimensional**, iar în supermatematică (**SM**), o **strâmbă** de excentricitate zero.

Creșterea excentricității, de la zero la unu, transformă **linia dreaptă** într-o **linie frântă**, ambele existând și sunt cunoscute în matematica centrică, nu și restul strâmbelor (**transmutate**), care sunt proprii **matematicii excentrice**, putând fi generate de **FSM-CE** amplitudine excentrică

$$y = k.x, \rightarrow y[x, S(s, \varepsilon)] = k.aex[\theta, S(s, \varepsilon)] + C, \text{ pentru } M_0(0, 0).$$

Linia frântă este cunoscută în matematica centrică (**MC**), dar **fără să i se cunoască ecuațiile ei!** Ceea ce nu mai este cazul în **SM** și, evident, și în **ME**.

Un fenomen asemănător este considerat că ar avea loc și în fizică: din vid apar continuu particule de un anumit tip și se reîntorc din nou în vidul cosmic. Aceleași sau altele? Adică **hibridate** sau **transmutate**?

Cosmologia are o teorie ce se aplică întregului Univers, formulată de **Einstein** în 1916: **relativitatea generală**. Ea afirmă că **forța de gravitație**, ce se exercită asupra obiectelor, **acționează și asupra structurii spațiului**, care își pierde cadrul rigid și imuabil, devenind maleabil și curb, în funcție de materia sau energia pe care le conține. Adică, **spațiul se deformează!** (*Acest lucru vă spune / sugerează ceva în legătura cu “curbarea spațiului”?*).

Continuum-ul spațiu-timp, al relativității generale, nu este conceput fără conținut, deci nu admite vidul! Cum spunea și **Einstein** ziariștilor, care îl rugau să le rezume teoria sa: “*Înainte, se credea că, dacă toate lucrurile ar dispărea din Univers, timpul și spațiul ar rămâne totuși. În teoria relativității, timpul și spațiul dispar, odată cu dispariția celorlalte lucruri din univers.*”

Să considerăm din nou ecuațiile (5') care transformă continuumul cercul în pătrat

$$(35.5') \begin{cases} \text{coq}(\alpha, e) = x(t) = \frac{\text{cost}}{\text{del}(t, E)} = \frac{\text{cost}}{\sqrt{1-s^2 \cdot \sin^2(t-\varepsilon)}} \\ \text{siq}(\alpha, e) = y(t) = \frac{\text{sint}}{\text{del}(t+\frac{\pi}{2}, E)} = \frac{\text{sin } t}{\sqrt{1-s^2 \cdot \cos^2(t-\varepsilon)}} \end{cases}$$

Pentru $t = s \rightarrow 0$ (**CERC**) ele devin

$$(5'')(35.5'') \begin{cases} x(0) = \pm 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

iar pentru $t \rightarrow 0$ și $S(s=1, \varepsilon=0)$ (**PĂTRT**) ele sunt

$$(5''')(35.5''') \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = \frac{0}{0} = \lim_{t,s \rightarrow 0} \left[\frac{\text{sin } t}{\sqrt{1-s^2 \cdot \cos^2(t-\varepsilon)}} \right] = 1 \end{cases}$$

Prin urmare, cercul **degenerează** în punctul $P_C(\pm 1, 0)$, iar pătratul în punctul $M_P(1, 1)$.

Ceea ce susține teoria autorului din **SUPERMATEMATICA**. Vol. I, **Editura Matrix Rom**, București, 2015, **Cap. 1 Introducere**, prin care expansiunea universului este un proces de dezvoltare a ordinii în haosul absolut, o trecere progresivă a spațiului haotic în ordine din ce în ce mai pronunțată și / sau invers, transformarea progresivă a ordinii în haos; **ordinea perfectă** și **haosul perfect** fiind una și aceeași entitate; o sferă absolut transparentă, deci invizibilă și, ca urmare, de rază nedeterminată / nedefinită.

În măsura în care, pornind dintr-un centru, sau mai precis dintr-un **excentru**, dintr-un punct oarecare, haosul absolut (absolut **transparent**, **invizibil** și de dimensiuni nedeterminate, care-i **universul invizibil**), începe să se transforme progresiv în ordine, din ce în ce mai pronunțată, într-un **univers vizibil**, din ce în ce mai ordonat, mai vast și mai complex, moment care poate fi denumit oricum, **moment inițial**, **moment de amorsare**, etc., dar pe care savanții l-au denumit **Big Bang**.

Altfel spus, universul vizibil se propagă în cel invizibil, sau și mai precis, universul invizibil se transformă în cel vizibil, pierde din invizibilitate, pe seama ordonării lui progresive.

Tot așa cum, un cristal invizibil, care nu-i altceva decât **nisip** într-o anumită formă de organizare / ordonare, același nisip precum cel din oala de lut, devine parțial vizibil, în zonele în care este puternic agresat / lovit.

Este evident că în universul invizibil, oricât de mare / întins ar fi el, nu există nici timp și nici **spațiu**. Deoarece sfera **universului invizibil** are un caracter anfoter, fiind și haos și ordine absolute în același timp, în el spațiul nu există din cauza haosului și timpul nu poate exista din cauza ordinii perfecte; timpul fiind perceput numai dacă spațiul este ocupat (**vizibil** ocupat) și scurgerea lui este sesizabilă numai prin schimbarea a ceea ce îl ocupă. Această sferă nevăzută, absolut transparentă pare a fi un “**nimic**”. Dar, din acest “**nimic**” s-a născut întregul univers vizibil. Acest “**nimic**” este, de fapt, “**totul**”.

În concluzie, spațiul, cu timpul, se **formează** și se **deformează**, adică, **excentricitatea** spațiului, de o anumită valoare, duce la **formarea** spațiului, apoi, prin modificarea valorii ei, spațiul se **deformează** / modifică. Forma modificată a spațiului este dependentă de valoarea excentricității, care devine o nouă dimensiune a spațiului: **dimensiunea de deformare**.

Energia și masa materiei să crească odată cu creșterea excentricității ? Sau invers ? Excentricitatea să determine valoarea masei și a energiei prezente / localizate într-un anumit loc în spațiu ?

Instalarea unei piese de prelucrat (obiect de prelucrat) în spațiul de lucru al unei mașini-unelte moderne, cu comenzi numerice de conturare (CNC), este foarte asemănătoare cu “**instalarea**” unui obiect matematic în spațiul euclidian tridimensional R^3 . De aceea, vom folosi unele noțiuni din domeniul tehnologic.

În **tehnologie**, **instalarea** este operația premergătoare prelucrării; numai un obiect / piesă instalat/ă poate fi prelucrat/ă. Ea presupune următoarele faze sau operații tehnologice, în această succesiune / ordine; numai îndeplinirea unei faze, făcând posibilă trecerea la realizarea fazei următoare:

1. **ORIENTAREA**, este acțiunea, sau operația, prin care elementele geometrice ale obiectului de lucru (semifabricat sau piesă), care sunt baze de referință tehnologice de orientare, prescurtat, **baze de orientare (BO)**, primesc o **direcție** bine determinată, față de direcțiile unui sistem de referință.

În tehnologie, față de direcțiile unor mișcări principale și/sau secundare de lucru, și/sau față de direcțiile mișcărilor de reglare dimensională a sistemului tehnologic.

Drept **baze de orientare (BO)** pot servi :

3) **Un plan** al obiectului, respectiv o suprafață plană a piesei, dacă ea există, caz în care, această suprafață, determinată de trei puncte de contact dintre obiect și dispozitiv, este denumită **bază de referință tehnologică de orientare de așezare (BOA)**, sau, pe scurt, **bază de așezare (BA)**, fiind determinată, teoretic, de cele trei puncte comune de contact ale piesei cu dispozitivul, care are sarcina de a realiza instalarea piese în cadrul mașinii de lucru. Drept **BA**, în principiu, se alege suprafața plană cea mai întinsă a piesei, dacă nu există altfel de rațiuni / condiții de poziție, sau de la care suprafața rezultată în urma prelucrării are impusă precizia cea mai înaltă, sau condiții de paralelism a **BA** cu **baza de cotare sau de proiectare** (elementul geometric al piesei de la care se dă cota / dimensiunea, pe desenul de execuție al piesei, pentru suprafața de prelucrat).

Punând condiția păstrării contactului piesă / dispozitiv pe **BA**, obiectul / piesa pierde 3 grade de libertate din cele 6, dintre care, **o translație** pe direcția, s-o numim **Z**, perpendiculară pe **BA** (plană) și două rotații: în jurul axelor **X**, notată în tehnologie cu **A** și în jurul axei **Y**, notată în tehnologie cu **B**.

Obiectul / piesa se mai poate roti în jurul axei **Z**, rotație notată cu **C** și se poate transla pe **BA** pe direcțiile **X** și **Y**, păstrând în permanență contactu cu **BA**.

De la această suprafață se stabilește, în tehnologie, coordonata **Z**, de exemplu, ca distanță dintre **BOA** și **baza tehnologică de prelucrare (BTP)**, sau, pe scurt, **bază de prelucrare (BP)**, adică planul pe care îl va genera scula de prelucrat pe piesă.

Dacă o suprafață se prelucrează integral / complet (prin frezare, de exemplu, cu freze de mari dimensiuni, printr-o singură trecere), atunci celelalte coordonate / dimensiuni **y** și **x** pot fi stabilite cu foarte mare aproximație, întrucât ele nu influențează precizia realizării suprafeței plane, la distanța **Z** de **BA**, rezultate în urma prelucrării piesei și denumită **bază tehnologică de prelucrare (BTP)**, sau, pe scurt, **bază de prelucrare (BP)**. A cărei cerință tehnologică este să fie paralelă cu **BOA** și să fie situată la distanța **Z** de aceasta. Dimensiunea **Z** fiind, în acest caz, o **dimensiune de formare** a piesei, pe de o parte și **dimensiune de coordonare**, în același timp, pentru poziția relativă sculă-piesă, iar, d.p.d.v. **tehnologic**, una dintre **dimensiunile de reglare dimensională** a sistemului tehnologic **MDPS** (Mașină-Dispozitiv-Piesă-Sculă). Matematic exprimat, două suprafețe plane situate la distanța **z**, ca urmare, paralele între ele.

2) **O dreaptă** aparținând obiectului, dacă aceasta există, ca axe și / sau muchii, ca intersecție de suprafețe plane în matematică.

În tehnologie, muchiile se evită, datorită neregularității lor, adică, a abaterilor de la forma geometrică liniară, a semifabricatelor, ca și a pieselor, în urma prelucrării semifabricatelor lor.

În tehnologie, această dreaptă este determinată de cele două puncte de pe o suprafață a piesei, alta decât **BA**, comună piesei și dispozitivului, care realizează baza de orientare de dirijare a piesei și a dispozitivului, ca elemente dedublate, dreaptă denumită **bază de orientare de dirijare (BOD)**, sau pe scurt **baza de dirijare (BD)**. Denumire care derivă din faptul că, aceste două elemente de dirijare, dirijează / ghidează mișcarea obiectului / piesei în vederea localizării lui, dacă în tot timpul mișcării, se menține contactul piesă-dispozitiv pe **BOA** și pe **BD**.

În acest fel **BD** preia 2 grade de libertate ale obiectului: translația pe o direcție perpendiculară pe dreapta determinată de cele două puncte de contact piesa / dispozitiv, ce materializează **BD**, translație pe direcția **Y**, de exemplu, dacă **BD** este paralelă, întotdeauna, cu **BA** din planul **XOY** și rotația în jurul axei **Z**, notată în tehnologie cu **C**.

Drept **BOD** se alege, în principiu, din motive lesne de înțeles, suprafața cea mai lungă a piesei, dacă nu există alte rațiuni impuse, prin desenul de execuție al piesei.

De la **BOD** poate fi stabilită / măsurată cota / dimensiunea **y**, paralelă cu **BOA** și perpendiculară pe **BOD**, ca de exemplu, perpendiculară pe **z**, fiindcă **BOD** este paralelă cu **BOA**.

Astfel, dacă cele două puncte aparțin unei obiect paralelipipedic, mărginit, deci, de suprafețe plane, și **BOD** este paralelă cu **BOA**, păstrând contactul piesă-dispozitiv pe cele două baze, printr-o mișcare de translație, piesa mai poate fi doar translatată, în dispozitiv, pe direcția **X**, până când tamponează un **element de localizare**.

1) De la acesta, denumit element de localizare, respectiv **baza tehnologică de localizare (BTL)**, sau, pe scurt, **baza de localizare (BL)** poate fi stabilită coordonata / dimensiunea **X** perpendiculară simultan pe **Y** și **Z**. Dar fără să fie coordonate / dimensiuni / segmente concurente într-un punct comun **O(X,Y,Z)** ca în matematică, decât, dacă **BOD** și **BTL** coboară la nivelul **BOA** și, în plus, **BTL** se deplasează spre **BOD** și va fi conținută și în ea, ambele urmând să fie conținute în **BOA**, astfel că, punctul **O(X,Y,Z)** ca și **BTL** va fi un vârf al piesei paralelipipedice, conținut simultan în planul **BOA**, dreapta **BD** în punctul **BL**, rezultând, în acest caz că **O(X,Y,Z) ≡ BL**.

Dacă, localizarea (tamponarea) se realizează printr-o mișcare de translație, așa cum s-a presupus anterior, ea mai poartă denumirea de **localizare prin translație (LT)**.

Dacă, localizarea (tamponarea) se realizează printr-o mișcare de rotație a obiectului, atunci este denumită **localizare prin rotație (LR)**. În acest caz **BD** poate fi, sau este, de obicei, o axă a unei suprafețe de rotație (cilindrice sau sferice) a obiectului, denumită **baza de orientare de centrare (BOC)** în jurul căreia, obiectul se rotește, până când, un alt corp al piesei, tamponează elementul de localizare prin rotație. Sau, până când un fixator pătrunde într-un orificiu perpendicular pe **BOC** sau într-un canal paralel cu **BOC**.

Obiectele care nu prezintă **elemente / baze de orientare**, cum ar fi sfera în matematică și bilele de rulment în tehnologie, de exemplu, sunt **obiecte neorientabile**.

4 LOCALIZAREA, este operația sau acțiunea de stabilire a **locului**, în spațiul euclidian tridimensional E^3 , al unui punct $O(X,Y,Z)$ caracteristic al obiectului, ce aparține unui element de referință de orientare al acestuia, de la care se stabilesc coordonatele / dimensiunile liniare X, Y, Z față de un sistem de referință dat, sau, în tehnologie, față de scula de prelucrare.

Punctul $O(x,y,z)$ al obiectelor **neorientabile** este centrul de simetrie al acestora, iar al pieselor orientabile, precum cele paralelipipedice, în tehnologie, de exemplu, punctul $O(X,Y,Z)$ este **diseminat** în trei puncte distincte, pentru fiecare coordonată în parte $O_x \subset BL$ pentru X , $O_y \subset BD$ pentru Y și $O_z \subset BA$ pentru Z , așa cum s-a explicat anterior.

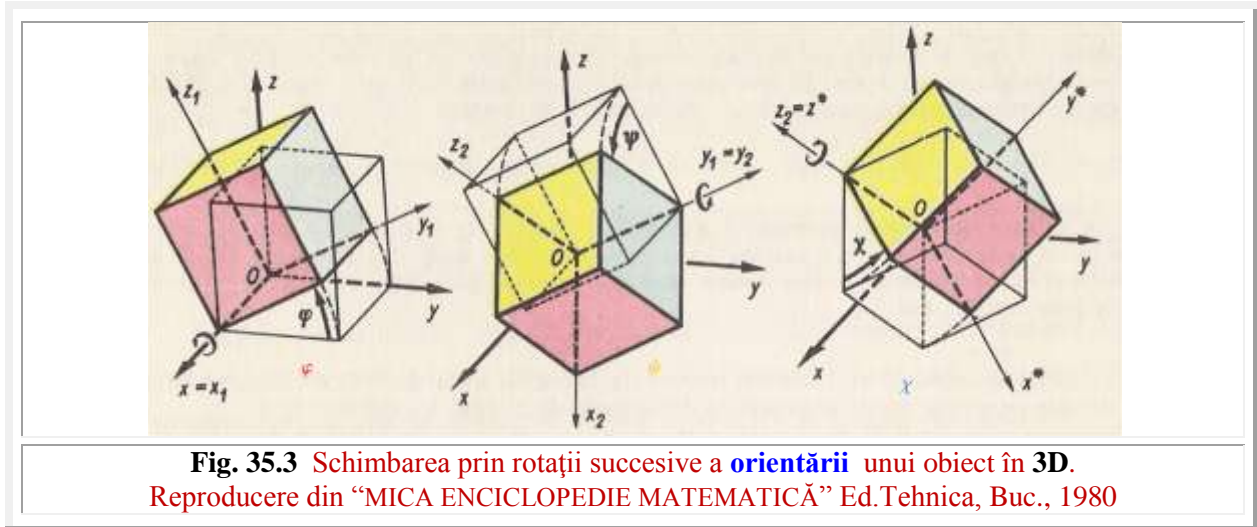


Fig. 35.3 Schimbarea prin rotații succesive a orientării unui obiect în 3D.
Reproducere din “MICA ENCICLOPEDIIE MATEMATICĂ” Ed.Tehnica, Buc., 1980

În tehnologie, succesiunea orientare \rightarrow localizare este obligatorie; numai un obiect orientat poate fi apoi localizat. Ca și în matematică, de altfel. Întâi se alege un sistem de referință solidar cu obiectul (O, X, Y, Z) apoi, unul invariant (O, x, y, z) ce coincide, inițial, cu celălalt, în spațiul 3D sau euclidian tridimensional E^3 și apoi se operează diverse transformări de translații și/sau de rotații așa cum se poate observa cu rotațiile unui cub, prezentate în **figura 35.3**.

Reuniunea dintre **orientare** și **localizare** reprezintă cea mai importantă acțiune / operație tehnologică, denumită **poziționare**, adică:

$$\text{ORIENTAREA} \cup \text{LOCALIZAREA} = \text{POZIȚIONARE}$$

Dacă **poziționarea** obiectului este realizată / desăvârșită / implinită, atunci, poate fi menținută poziția relativă piesă / dispozitiv prin operația de **fixare** a piesei în dispozitiv.

În continuare pot fi stabilite cotele / dimensiunile dintre sculă și piesă, astfel, încât să se obțină piesa la dimensiunile și preciziile impuse prin desenul de execuție al piesei.

Această operație tehnologică este denumită **reglare dimensională**. Cu aceasta, operația de instalare este încheiată și prelucrarea piesei poate să înceapă.

Ca urmare, **instalarea** unui obiect este o reuniune a **poziționării** cu **fixarea** și cu **reglarea dimensională**, adică:

$$\text{INSTALARE} = \text{POZIȚIONARE} \cup \text{FIXARE} \cup \text{REGLARE (dimensională)}$$

În tehnologie, **fixarea** se poate realiza prin **forță** (de fixare) sau prin **formă** (care împiedică deplasarea piesei în timpul preucrării).

În matematică, fixarea se “realizează” prin **convenție**. Zicând că sistemul (O, x, y, z) este legat de piesă el nu se mai poate deplasa relativ față de ea (dezlega), ci numai împreună cu obiectul, deci sunt “fixate” unele de altele (*Ușor le e lor, matematicienilor!*).

Astfel, în matematică, fixarea obiectelor, față de sistemele de referință, se subînțelege, sau se realizează de la sine, ea nu mai există, pentru că în matematică nu există “**forțe matematice**”; ele fiind

propriii mecanicii, în speță dinamicii ei și nici scule de prelucrare, nici diverse dimensiuni de coordonare, de reglare dimensională, de prelucrare ș.a.

De aceea, în matematica centrică (**MC**), există doar 3 dimensiuni liniare **X**, **Y**, și **Z** care sunt, totodată, și dimensiuni de formare (**x**, **y**, **z** și **e**) a obiectelor 3D, prin ecuațiile lor parametrice, de exemplu.

Ca urmare, în această matematica centrică (**MC**), entități ca dreapta, pătratul, cercul, sfera, cubul ș.a. sunt unice, pe când, în matematica excentrică (**ME**) și, implicit în supermatematică (**SM**), ele sunt multiplicat la infinit prin **transmutație** și prin **hibridare**, posibile prin introducerea noii dimensiuni a spațiului **excentricitatea liniară e** și cea **unghiulară ε**.

Transmutația (super)matematică poate fi definită ca procesul matematic de **transformare / încrucșare** a două entități matematice din **MC**. Adică, de trecere continuă de la o entitate oarecare, existentă în **MC**, la o altă entitate, existentă în **MC**, printr-o infinitate de entități **hibride**, proprii doar **ME**. Altfel spus, transformarea unei entități matematice **centrice** în altă entitate matematică **centrică** este o **transmutanță**, acțiune devenită posibilă prin trecerea printr-o infinitate de entități în cadrul **matematicii excentrice**, entități denumite **hibride**, ca urmare a utilizării funcțiilor **supermatematice**.

35.5 CURBAREA SPAȚIULUI MULTIDIMENSIONAL

Mișcarea relativă a două sisteme este ilustrată în **figura 35.4,a**. Dacă e_z , ϵ_z și ϵ_x sunt nule, atunci vectorul deplasare relativă $\vec{e} = \vec{v} \cdot t$ a sistemului cu originea în **E**, față de cel cu originea în **O** (0, 0) este pe direcția axei $x > 0$ și acest caz este denumit **aranjament standard**[60] (**Fig. 35.4,b**). Viteza \vec{v} este considerată constantă și toate rotațiile sunt nule, ca sistemele să fie inerțiale.

Coordonatele spațio-temporale considerate a fi (x, y, z și t), acum se observă clar (**Fig. 35.4,b**) că ele sunt, de fapt, (x, y, z și e), adică, excentricitatea variabilă este a 4-a dimensiune a spațiului tridimensional (3D) și nu mai este necesar să se afirme că timpul este spațiu.

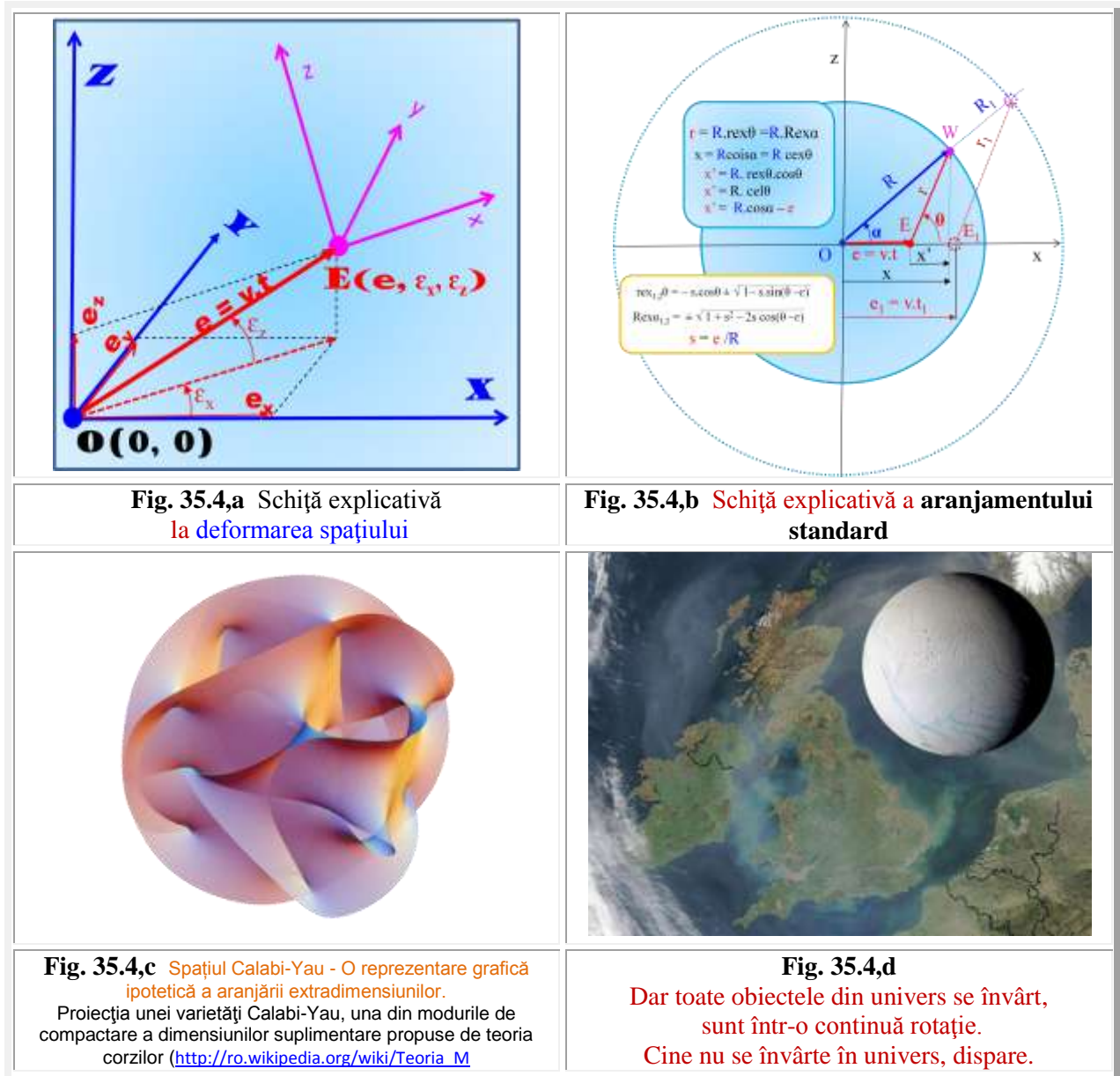
Din **figura 35.4,b** se deduce clar că toate mărimile din sistemul **O**(0, 0) și din sistemul **E**($e = v \cdot t$, $\epsilon = 0$) se pot exprima facil cu **FSM-CE**, ca și toate mărimile din **figura 35.4,a**, cu condiția ca toate excentricitățile unghiulare (ϵ_x și ϵ_z) să fie constante și $e = v \cdot t$, în care, $v = \text{constant}$.

Constituirea **geometriilor neeuclidiene** de către **Lobacevski**, **Bolyai**, **Gauss**, **Riemann**, ș.a. a contribuit la formarea concepției, conform căreia, proprietățile geometrice spațiale nu sunt pretutindeni aceleași, fiind determinate de proprietățile lui fizice. Spațiul este deci **neomogen și anizotrop**. **Teoria relativității** lui **Einstein**, a demonstrat că proprietățile spațio-temporale (lungimea corpurilor și durata fenomenelor $\rightarrow v$.**Fig. 35.1.12**), depind de viteza de deplasare a sistemelor materiale și că structura sau proprietățile continuului spațio-temporal variază în funcție de concentrarea **maselor substanței** și de **intensitatea câmpului** gravitațional generat de către acestea. De aceea, ea a fost numită și **teoria fizică** a spațiului și timpului. Dacă acesta ar fi spațiul **matematicii excentrice (ME)**, atunci, se poate **adăuga** că, în acest spațiu, toate entitățile sau figurile geometrice se pot **metamorfoza**, **transmuta** și **hibrida** prin existența **excentricității ca o nouă dimensiune a acestui spațiu**, sau, mai precis, ca **noi dimensiuni** ale lui.

Excentricitate poate fi considerată un amănunt, dar nu este ! Și, chiar dacă ar fi, “Nu neglijați amănuntele. Amănuntele crează perfecțiunea și perfecțiunea nu-i un amănunt !” ne-a îndemnat, cu aproape **500** de ani înainte, **Michelangelo Buonarroti**.

Excentricitate reală poate fi distanța de la punctul **E**(e, ϵ) până la un punct **O**(0,0), considerat centru, ca în matematica excentrică (**ME**). O diferență de potențial în electricitate, o diferență de presiune, în hidraulică, datorită căreia fluidul se deplasează într-un sens sau altul într-o conductă. Fără această **excentricitate**-- diferență de presiune, mișcarea nefiind posibilă; fluidul staționând. Diferența dintre originile a două sisteme inerțiale, sau spațiul deplasării relative a acestora ($e = s \cdot t$), așa cum se consideră în continuare, caz în care excentricitatea este o mărime variabilă care crește continuu, în care raportul $s = \frac{v}{c}$ a fost denumit **excentricitate numerică**.

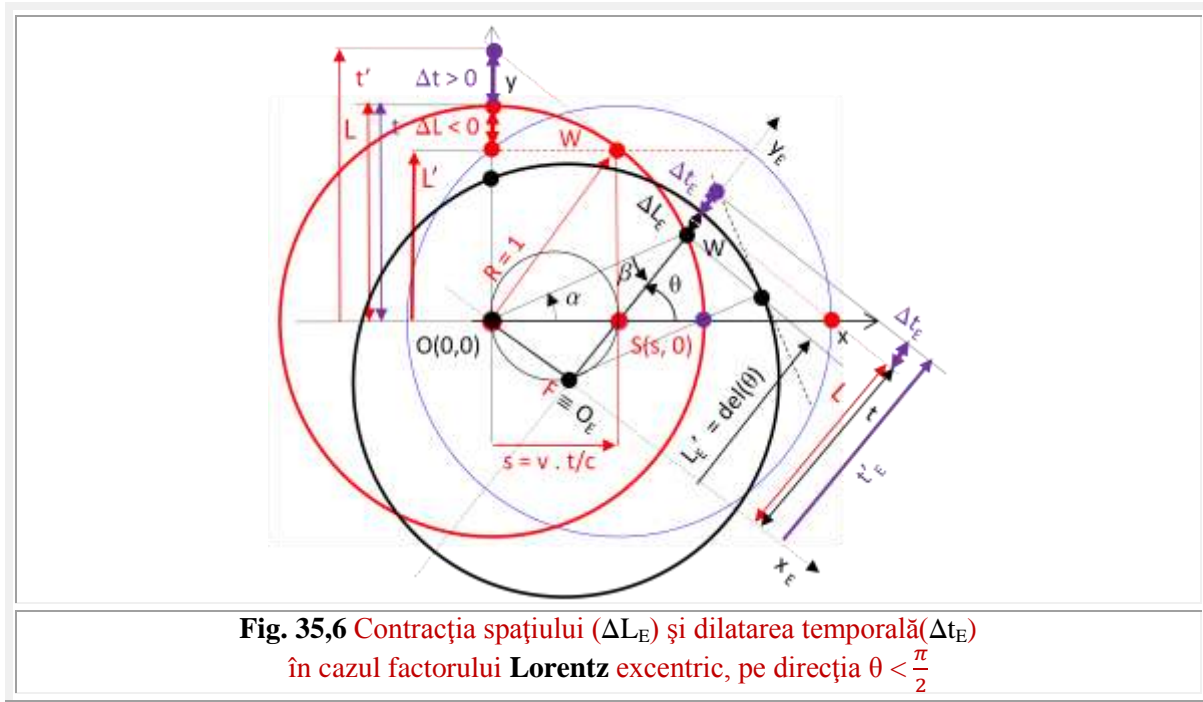
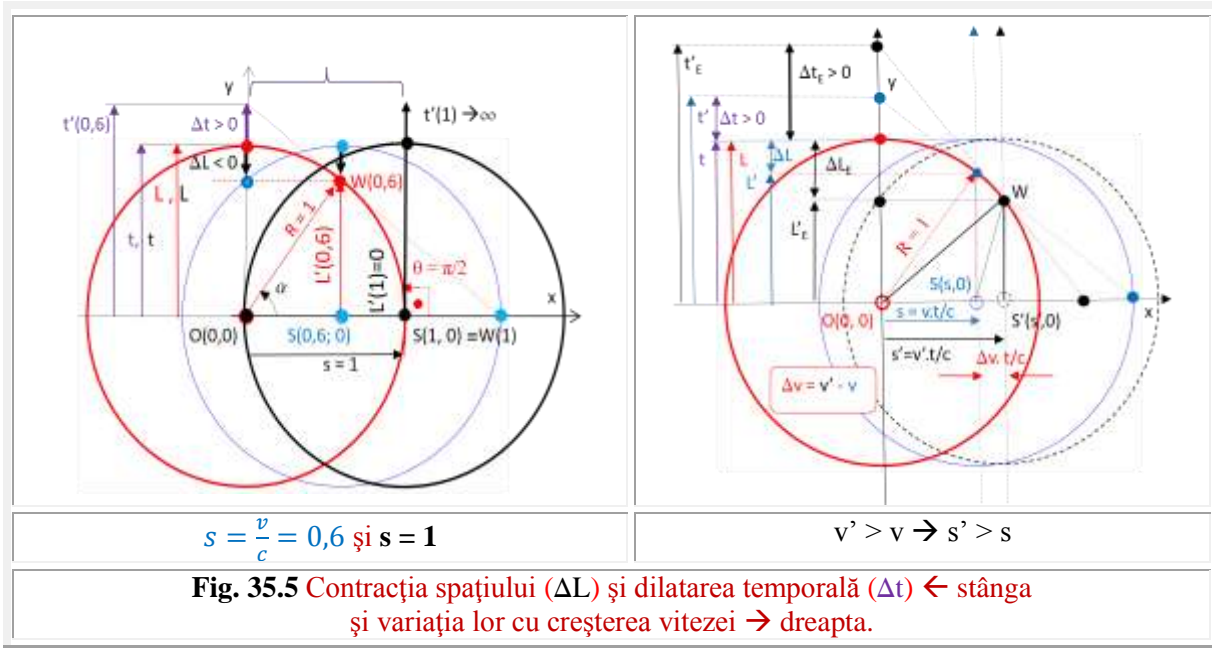
Fără existența unei excentricități originare oarecare, apariția și mișcarea în univers n-ar fi fost posibilă. “Amănutele crează perfecțiunea și perfecțiunea nu-i un amănunt !” Cât de mult adevăr în spusele lui **Michelangelo Buonarroti** !.



În figura 35.5 este schițată situația a două sisteme inerțiale, inițial suprapuse în $O(0, 0)$, sau a unui sistem considerat fix în originea $O(0, 0)$ și al doilea, care se deplasează, pe direcția axei x ($\epsilon = 0$), cu viteza v , o fracțiune din viteza c a luminii în vid, astfel că, deplasarea relativă a celor doua sisteme $s = ||OS||$, este dată de o nouă dimensiune a spațiului e , adică $e = s \cdot t = \frac{v}{c} t$, care este excentricitatea liniară reală variabilă e iar s este excentricitatea liniară numerică, ambele, aici, considerate constante.

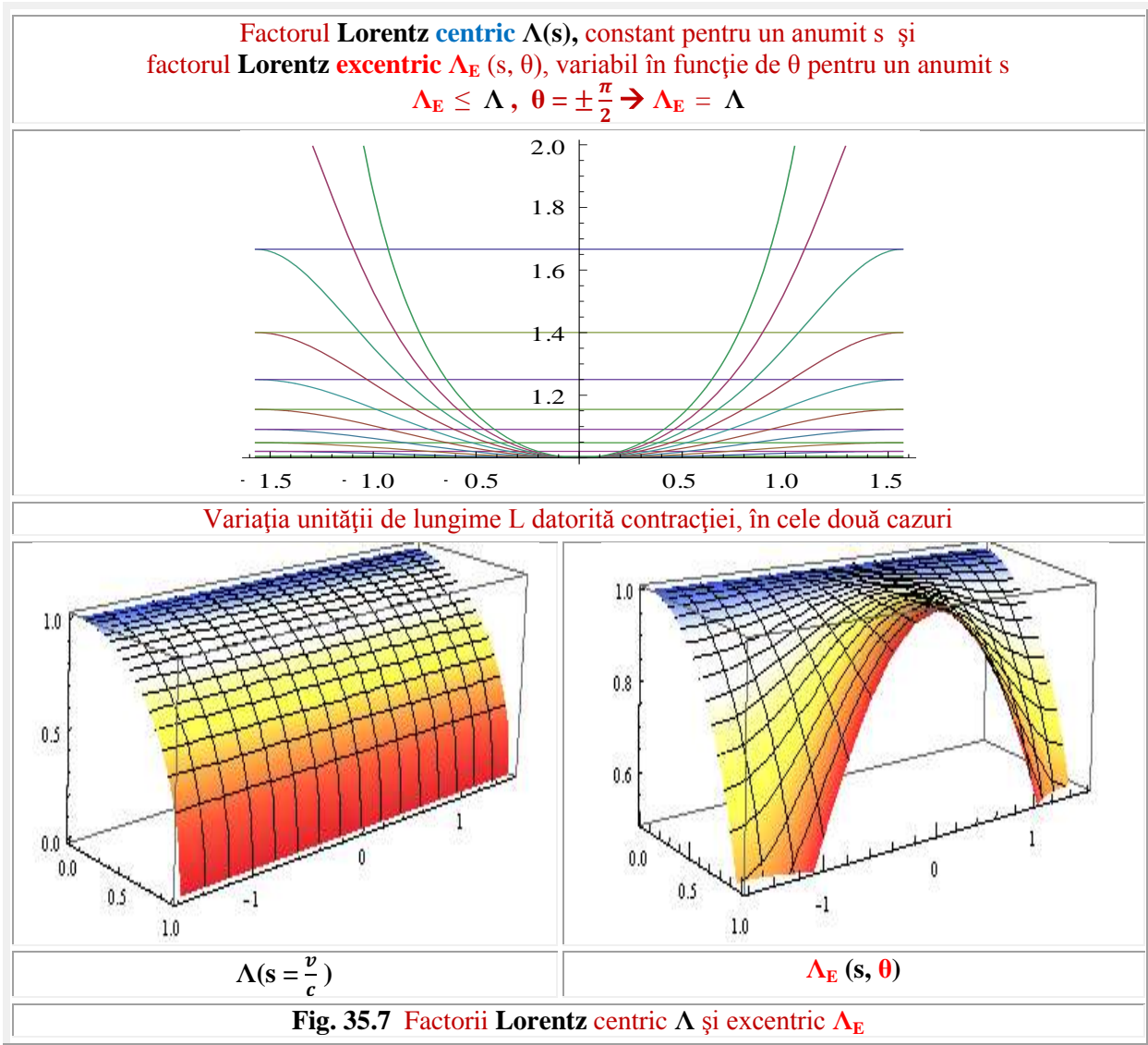
Acesta este spațiul 2D **excentric**, notat **2DE** cu 3 dimensiuni: x, y și $e = \frac{v}{c} t$, în care e variază uniform, în raport cu timpul t . Dacă E se deplasează pe o direcție de orientare ϵ față de axa x , $\epsilon = ct$, situația nu se schimbă, decât dacă deplasarea se realizează și pe direcția z , caz în care ne situăm în spațiu

3D excentric, spaţiu **3D** cu **patru** dimensiuni: x, y, z şi \mathbf{e} , notat **3DE**, dacă $\mathbf{\epsilon} = ct$ şi cu 5 dimensiuni dacă $\mathbf{\epsilon}$ este şi ea variabilă $\mathbf{\epsilon} = \mathbf{\epsilon}(t)$. Excentricitatea unghiulară fiind $\mathbf{\epsilon}$.



In **figura 35.5**, sunt reprezentate contrația spațiului ($\Delta L < 0$) și dilatarea temporală ($\Delta t > 0$) pentru un unghi la excentrul S de $\theta = \pi/2$ și pentru unitatea de lungime $L = R = 1$ și respectiv, unitatea de timp $t = R = 1 \rightarrow \mathbf{e} = \mathbf{s}$. Acestea sunt

$$(6) \begin{cases} \Delta L = L' - L = L \left(\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \frac{\pi}{2}} - 1 \right) = L \left(\text{del} \frac{\pi}{2} - 1 \right) = L(\sqrt{1 - s^2} - 1) < 0 \\ \Delta t = t' - t = t \left(\frac{1}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \frac{\pi}{2}}} - 1 \right) = t \left(\frac{1}{\text{del} \frac{\pi}{2}} - 1 \right) = t \left(\frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} - 1 \right) > 0 \end{cases}$$

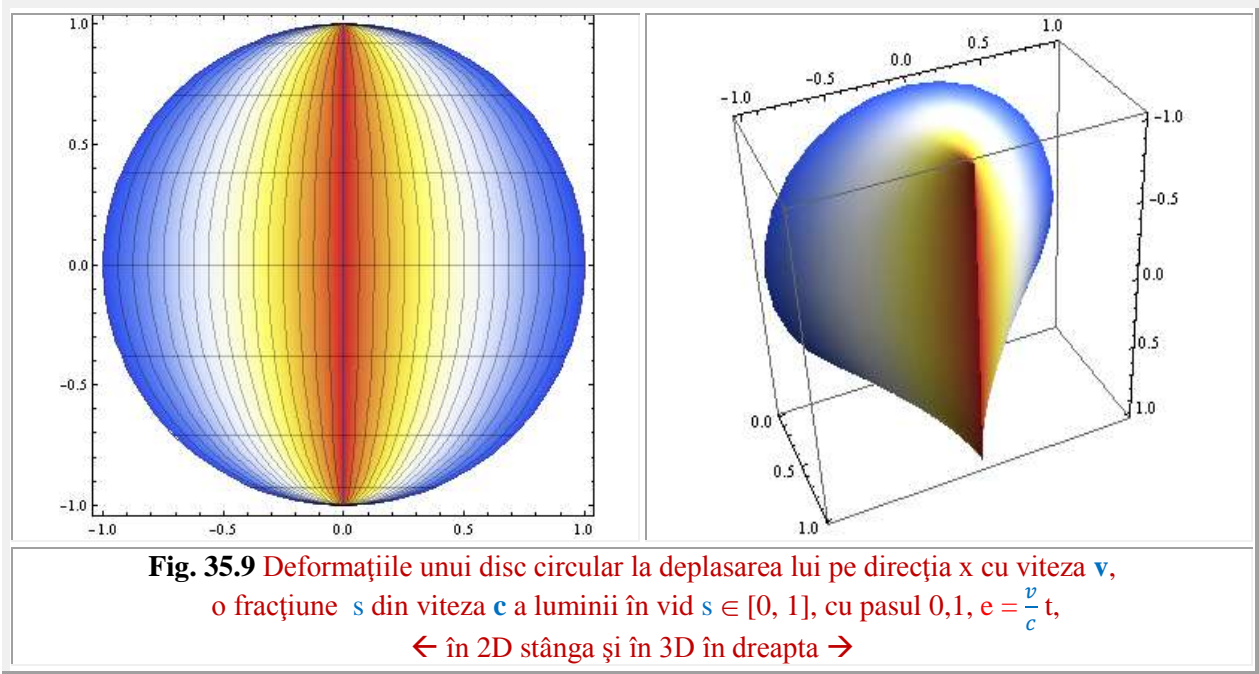
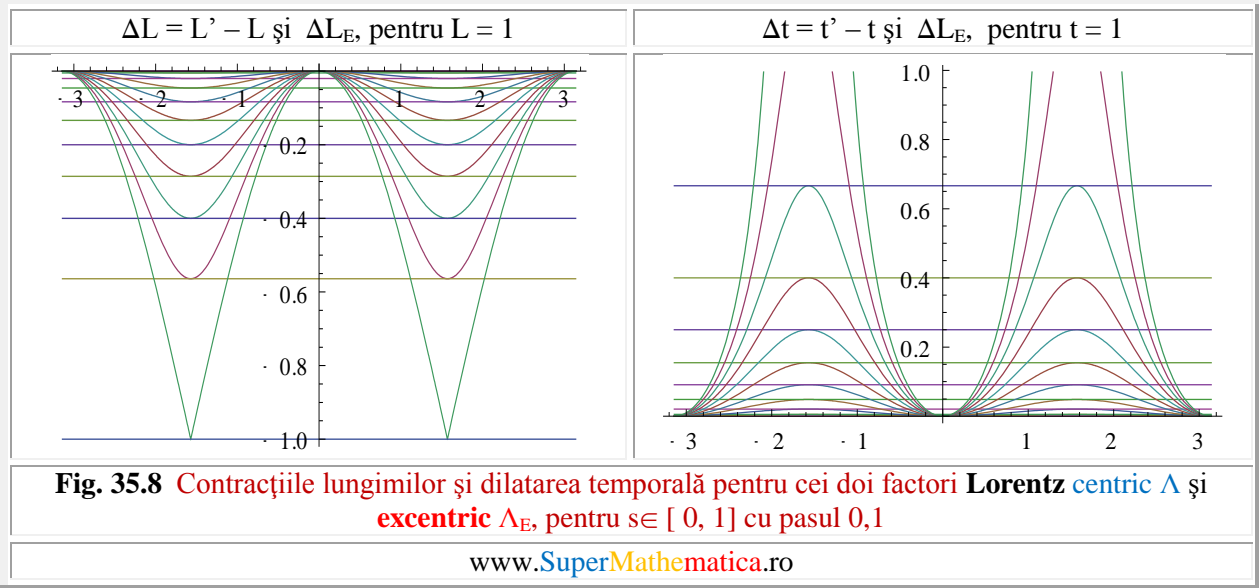


În aceeași figură, în partea dreaptă, este prezentată accentuarea dilatării timpului și a contracției temporale la o creștere a viteze de la v la v' .

Se observă și din figură că, pentru $v = c \rightarrow s = 1$ și $\Delta L \rightarrow -L$, adică lungimea se reduce la zero ($L' \rightarrow 0, \Delta L = L' - L = 1$) și timpul se dilată nemărginit $t' = \Delta t \rightarrow \infty$.

În relațiile anterioare, factorul Lorentz, notat în mod obișnuit cu γ , aici a fost notat cu Λ (litera grecească Λ fiind mai apropiată de inițiala numelui lui Lorentz decât gama - γ) și are expresia

$$(7)(35.7) \quad \Lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} > 1$$



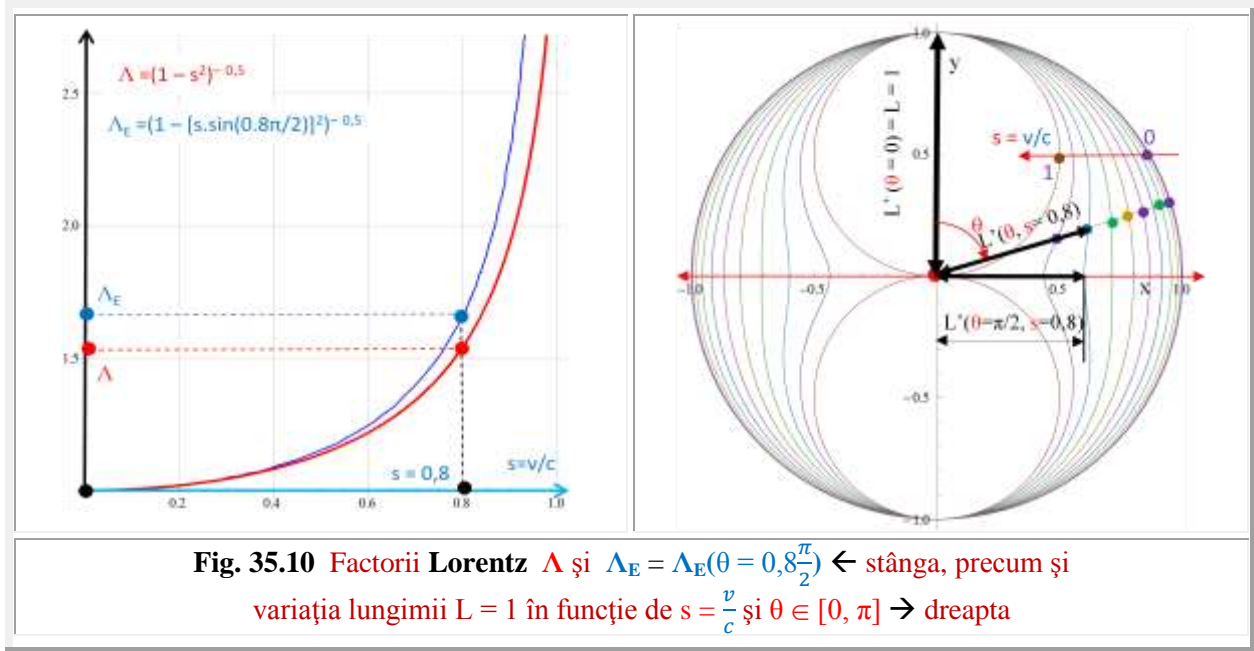
Pentru o anumită valoare a vitezei $v = ct.$, rezultă o excentricitate numerică $s = ct.$ și, ca urmare, și un factor Lorentz constant, pentru care constrația spațiului și, mai precis, a unității de lungime L pe direcția y (Fig. 6) este $L' = L / \Lambda$ și dilatarea temporală a unității de timp t va fi $t' = \Lambda.t$.

Se poate deduce că aceste valori sunt invariante la sensul de deplasare (pozitiv pe semiaxa x^+ sau negativ pe direcția semiaxei negative x^- , și, evident, nici la unități de lungime și timp orientate pe x , dar **marcate** pe sensurile pozitive sau negative ale direcției y , așa cum se observă și în figura 8. Pentru $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, $\Lambda = \Lambda_E$ astfel că $\Delta L = L' - L \rightarrow$ minim și $\Delta t = t' - t \rightarrow$ maxim posibil, pentru o anumită valoare a lui $s \in [0, 1]$.

Deşi mărimile L, L', t, t' sunt reprezentate pe direcția y , ele corespund deplasării relative ale sistemelor inerțiale pe direcția axei x . Ca urmare, contracția ΔL și dilatarea Δt au loc pentru lungimi L și lungimi de undă sau frecvențe, care măsoară timpul, orientate tot pe direcția de mișcare x .

Dacă, în relațiile anterioare, unghiul θ este diferit de un unghi drept, atunci fenomenul de dilatare a timpului se accentuează, iar cel de contracție a spațiului se atenuază, odată cu scăderea lui θ (**Fig. 35.6** și **Fig. 35.7**). Pentru direcția de $\theta = 0$, lungime L , care este orientată pe direcția de deplasare x , nu-și modifică lungimea, oricăr e ar fi raportul s al vitezelor (**Fig. 35.7**), astfel că $L' = L$ și atenuarea contracției lungimii este completă $\rightarrow \Delta l = 0$, iar dilatarea temporală este maximă posibilă, deoarece $t' \rightarrow \infty$.

Dacă unghiul $\theta = \frac{\pi}{2}$ înseamnă mărimi **reprezentate** pe axa y dar **orientate** pe direcția x , atunci $\theta = 0$ poate însemna aceleași marimi reprezentate pe direcția x dar orientate pe direcția transversală y .



Se poate obține, astfel, un factor **Lorentz** variabil Λ_E , denumit **factor Lorentz excentric**, variabil cu direcția θ de orientare a mărimii, pentru a se deosebi de cel constant centric Λ . Expresia lui Λ_E este

$$(8)(35.8) \quad \Lambda_E = \frac{1}{\sqrt{1-s^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c} \sin \theta\right)^2}} \in [\Lambda, 1], \text{ pentru } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, 0\right], \forall s = \frac{v}{c} [-1, 1]$$

În consecință, fenomenul de contracție a lungimilor depinde de direcția θ , de orientare în spațiu a lungimii etalon, fiind **maximă** pe direcția de mișcare relativă x de deplasare a sistemului inerțial mobil, adică $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \Lambda_E(\theta) = \Lambda$ și **minimă** (zero) pe direcția transversală y ($\theta = 0$). Ca urmare, un disc circular, care se deplasează pe direcția x cu viteza v , fracțiune $s = \frac{v}{c}$ din viteza c a luminii în vid (**Fig. 35.8**), se va turti pe direcția x , astfel că, la atingerea vitezei absolute a luminii în vid, viteză $v = c \rightarrow s = 1$, va deveni o bară de lungime $L_y = 2R$, pe direcția transversală de mișcare y și de dimensiune $L_x = 0$ pe direcția de mișcare x . Pierzându-și una dintre cele două dimensiuni, de fapt discul circular va dispărea.

Ecuția polară a obiectului de lungime $L=1$, care se deformează, contractându-se la L' , odată cu creșterea vitezei relative s , de deplasare a sistemului inerțiale pe direcția x ($v \nearrow \rightarrow s \nearrow$), în aceste situații, este

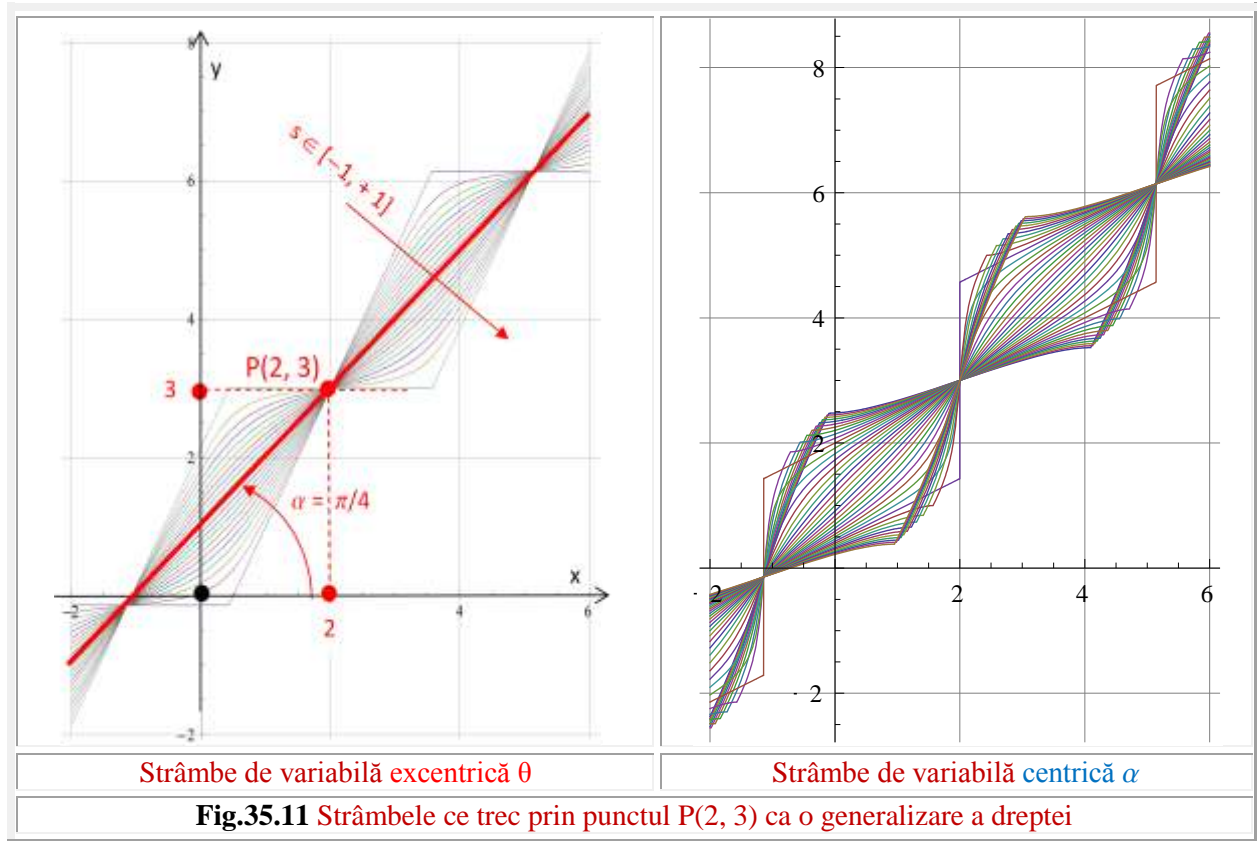
$$(9)(35.9) \quad \rho = \sqrt{1 - s^2 \sin^2 \theta},$$

iar, în coordonate parametrice, este

$$(10)(35.10) \quad \begin{cases} x = \cos\theta\sqrt{1-s^2\sin^2\theta} \\ y = \sin\theta\sqrt{1-s^2\sin^2\theta} \end{cases}, \quad s \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi],$$

cu graficele din **figurile 35.8, 35.9** și **35.10**.

Aşa cum s-a mai prezentat, **dreapta** este un **spațiu unidimensional** și, totodată, în supermatematică (SM), o **strâmbă** de excentricitate zero (**Fig. 35.1.20**).



Creșterea excentricității de la zero la unu transformă **linia dreaptă** într-o **linie frântă**, ambele existând și sunt cunoscute în matematica **centrică**, nu și restul strâmbelor, care sunt proprii matematicii **excentrice**, fiind generate de **FSM-CE** amplitudine excentrică. Astfel, dreapta de coeficient unghiular $m = \tan\alpha = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ care trece prin punctul P(2, 3) are ecuația

$$(11) \quad y - 3 = x - 2,$$

iar familia de strâmbes, din aceeași familie cu dreapta, au ecuația

$$(12) \quad y[x, S(s, \varepsilon)] - y_0 = m \{ aex[\theta, S(s, \varepsilon)] - x_0 \},$$

$$(13) \quad y - y_0 = m \{ \theta - \arcsin[s \cdot \sin(\theta - \varepsilon)] \} - x_0, \quad m = \tan\alpha = 1, \quad P(2, 3), \quad s \in [-1, +1],$$

în coordonate excentrice θ (Fig. 20 ← stânga) și, în coordonate centrice α , ecuația este

$$(14) \quad y[x, S(s, \varepsilon)] - y_0 = m \{ Aex[\theta, S(s, \varepsilon)] - x_0 \},$$

$$(15) \quad y - y_0 = m \left\{ \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{Rex\alpha} - x_0 \right\}, \quad m = \tan\alpha = 1, \quad P(2, 3), \quad s \in [-1, +1],$$

$$(16) \quad y - y_0 = m \left\{ \alpha + \arcsin \frac{s \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s \cdot \cos(\alpha - \varepsilon)}} - x_0 \right\}.$$

Diferența, dintre cele două tipuri de strâmbes, de θ și de α , este aceea, că cele de θ sunt continue numai pentru excentricitatea numerică din domeniul $s \in [-1, 1]$, pe când cele de α sunt continue pentru toate valorile posibile a lui s , adică $s \in [-\infty, +\infty]$.

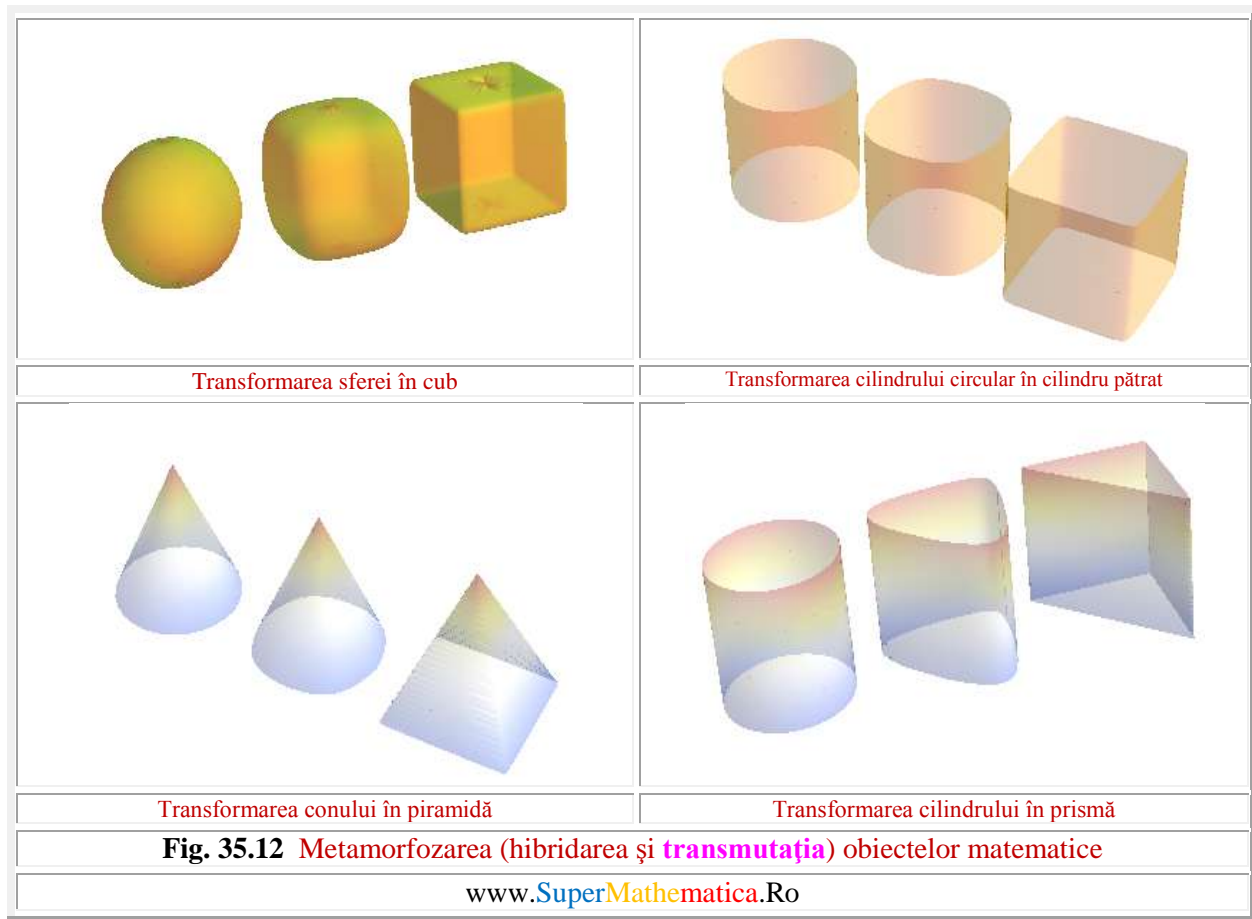
Linia frântă este cunoscută în matematica centrică (MC) dar fără să i se cunoască ecuațiile ei ! Ceea ce nu mai este cazul în SM și, evident, și în ME ea se obține pentru valoarea $s = 1$ a excentricității numerice (Fig. 35.1.20).

Un fenomen asemănător metamorfozării matematice, prin care din MC un obiect cunoscut trece prin matematica excentrică (ME) luând forme hibride și se reîntoarce în matematica centrică (MC) ca un alt tip de obiect (Fig.1.18), este considerat că ar avea loc și în fizică: din vid apar continuu particule de un anumit tip și se reîntorc în vidul cosmic. Aceleași sau altele ?

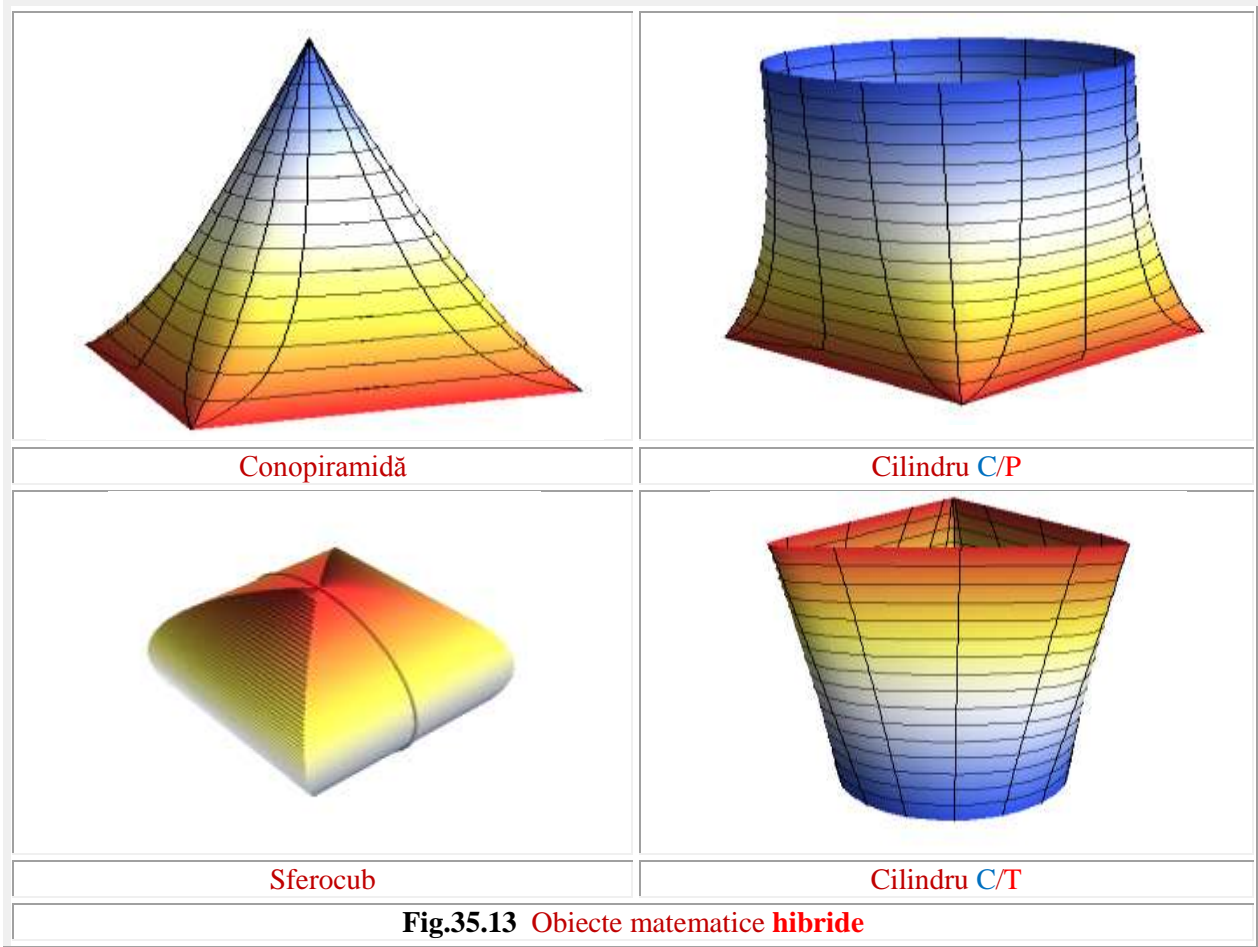
Așa cum s-a mai afirmat, $s = e = 0$ este lumea MC a liniarului, a entităților perfecte, ideale, în timp ce infinitatea de valori posibile atribuite excentricităților s și e , nasc ME și, totodată, lumi ce aparțin realului, lumii imperfecte, tot mai îndepărtată de lumea ideală cu cât s și e sunt mai îndepărtate de zero.

Ce se întâmplă dacă $e = s \rightarrow 0$? Lumea reală, ca și ME dispar și cum lumea ideală nu exista, dispare totul !

ÎN LOC DE CONCLUZII: METAMORFOZAREA PRIN HIBRIDARE ȘI TRANSMUTAȚIE (SUPER)MATEMATICE



În fiecare dintre cele patru desene, prezentate în figura 35.12, cele două obiecte extreme, proprii matematicii centrice (MC): **sferă-cub**, **cilindru-cub**, **con-piramidă** și **cilindru-prismă** sunt transformate unele în altele, adică metamorfozate prin **transmutație (super)matematică**, în timp ce al 3-lea obiect, intermediar, existent doar în **matematica excentrică (ME)** a fost obținut printr-o metamorfozare care este considerată o **hibridare (super)matematică**.



Alte obiecte **hibride supermatematice** proprii doar **matematicii excentrice (ME)** sunt prezentate în **figura 13** și sunt denumite :

- Conopiramidă ▲◄;
- Cilindru circularopătrat ▲►;
- Sferocub ▼◄;
- Cilindru circularotriunghiular.

În completarea spațiului liber:



INSIGNA SUPERMATEMATICII
CU
FUNCTII CIRCULARE EXCENTRICE

