MINISTERUL EDUCATIEI SI INVATAMINTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN VUIA" TIMISOARA
FACULTATEA DE ELECTROTEHNICA

ING.GHERMAN GHEORGHE

CONTRIBUTII LA CALCULUL NUMERIC AL CIMPULUI MAGNETIC CVASISTATIONAR

TEZA DE DOCTORAT

Conducător ştiinţific
Prof.dr.ing.De Sabata Ioan

TIMISOARA - 1982

CUPRINS

INTRODUCERE

Dezvoltarea producţiei şi a consumului de energie electrică este însoţită, pe de o parte, de creşterea puterii maşinilor şi aparatelor electrice, precum şi a altor instalaţii electrotehnice şi, pe de altă parte, de mărirea siguranţei în funcţionare şi a economicităţii lor.

Calculul şi dimensionarea maşinilor şi a aparatelor electrice, a altor instalaţii electrotehnice ale căror performanţe tehnice şi economice depind de repartiţia spaţială a cîmpului electromagnetic din ele, au impus perfecţionarea metodelor de calcul al cîmpului magnetic. Greutăţile care apar la calculul cîmpului magnetic sînt legate de complexitatea configuraţiilor geometrice ale sistemelor magnetice, de complicata repartiţie spaţială a curenţilor de conducţie şi de prezenţa mediilor feromagnetice cu caracteristici de magnetizare neliniare, aproximabile precis cu dificultate în gama posibilă de variaţie a intensităţii cîmpului magnetic şi inducţiei magnetice prin relaţii analitice simple.

Dintre metodele de calcul al cîmpului magnetic, tot mai des sînt folosite astăzi metodele numerice. Metodele numerice de calcul al cîmpului magnetic permit determinarea valorilor numerice ale componentelor vectorilor intensităţii cîmpului magnetic $\bar{H}$ şi inducţiei magnetice $\bar{B}$ într-un număr suficient de mare, dar finit, de puncte ale unui domeniu D de existenţă a cîmpului magnetic.

Primele încercări de rezolvare numerică a ecuaţiilor lui Maxwell care descriu ansamblul fenomenelor electromagnetice au fost făcute de o echipă de cercetători de la universitatea din Colorado şi publicate în 1963 [82], care, plecînd de la o schemă cu diferenţe finite, au calculat repartiţia inducţiei magnetice în unele maşini electrice.

Metodele numerice de calcul al cîmpului magnetic au fost dezvoltate în continuare în principal în două direcţii : pe baza unor scheme cu diferenţe finite şi prin adaptarea metodei elementelor finite, preluată din mecanică. In cadrul fiecărei direcţii au apărut diverse variante, diferite prin gradul de generalitate, modul de formulare al problemei de cîmp, natura aparatului matematic folosit, modul de rezolvare, etc.

In şedinţa secţiei "Problemele teoriei cîmpului în aparatele electrofizice şi electroenergetice" din cadrul Consiliului ştiinţific consacrat problemei "Bazele ştiinţifice ale electrofizicii şi electroenergeticii", Filiala problemelor fizico-tehnice ale energeticii a Academiei de Stiinţe a U.R.S.S., desfăşurată în 27-28.o6.1979 la Kiev şi consacrată examinării rezultatelor obţinute şi perspectivelor în domeniul cercetării şi folosirii metodelor iterative de calcul şi modelare a cîmpurilor electromagnetice în construcţiile electrotehnice s-a apreciat că la baza majorităţii metodelor de rezolvare a problemelor de teoria cîmpului stau procesele iterative [48] . Actualitatea metodelor numerice iterative de calcul al cîmpului magnetic este legată de larga pătrundere a tehnicii de calcul moderne în domeniul calculelor electrotehnice.

Soluţionarea unei probleme de cîmp pretinde rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale, neliniare [33, 45-48, 5o, 84] . Particularitatea tratării uzuale pe baza metodei diferenţelor finite şi metodei elementelor finite, care se reduce la algebrizarea nemijlocită a problemei, constă în aceea că, chiar o rezolvare exactă a sistemului de ecuatii algebrice obţinut nu permite să se obţină o soluţie exactă a problemei de cîmp, întrucît sistemul de ecuaţii algebrice nu conţine aceeaşi informaţie ca şi sistemul iniţial de ecuaţii diferenţiale neliniare [48] .

Pierderile de informaţie pot fi evitate în cazul rezolvării prin procedee iterative speciale a problemei de cîmp [1o, 11, 21, 52, 53] . Principalele eforturi ale cercetătorilor în domeniul metodelor numerice iterative de calcul al cîmpului magnetic sînt îndreptate spre generalizarea şi perfectionarea metodelor şi a algoritmilor de rezolvare a problemelor de cîmp, spre creşterea vitezelor de convergenţă şi spre crearea de programe economice pentru calculatoarele electronice [48] .

Teza de doctorat elaborată se înscrie în domeniul de cercetare de mai sus, în ea urmărindu-se generalizarea şi perfecţionarea unor metode numerice de calcul al cîmpului magnetic cvasistaţionar, creşterea vitezei lor de convergenţă, elaborarea unor algoritmi de calcul simpli, crearea de programe economice pe baza lor şi aplicarea metodelor numerice în scopul determinării distribuţiei de cîmp magnetic în contorul de inducţie monofazat.

Teza de doctorat conține o introducere, 6 capitole și o parte finală. In cadrul introducerii sînt localizate obiectivele urmărite în teză din punctul de vedere al actualității lor. In capitolul 1 se tratează condițiile de unicitate în determinarea cîmpului magnetic cvasistaționar în medii neliniare, neomogene, izotrope, fără magnetizație permanentă și cu magnetizare reversibilă. In capitolul 2 se prezintă metoda diferențelor finite și metoda elementelor finite în variante uzuale. Se face o comparație între ele și se trag concluzii cu privire la utilizarea lor. Capitolul 3 tratează calculul cîmpului magnetic cvasistationar cu o metodă cu diferențe finite iterativă, extinsă pe rețea rectangulară periodică cu pas neegal, problema de cîmp rezolvîndu-se în raport cu valorile componentelor vectorilor $\bar{H}$ și $\bar{B}$ în nodurile rețelei de discretizare a domeniului D de existență a cîmpului magnetic. In capitolul 4 sînt analizați unii factori de influență a vitezei de convergență a metodei cu diferențe finite iterativă, extinsă pe rețea rectangulară periodică cu pas neegal. In capitolul 5 este prezentată o metodă cu diferențe finite recurentă ce permite calculul rapid al distribuției cîmpului magnetic cvasistaționar într-un domeniu D dreptunghiular, la care se cunosc valorile componentelor lui $\bar{H}$ și/sau $\bar{B}$ pe două laturi vecine. In cadrul capitolului 6 este calculată cu metoda cu diferențe finite iterativă, extinsă pe rețea rectangulară cu pas neegal, distribuția inducției magnetice într-o secțiune mediană a contorului de inducție monofazat CAM-7. Această distribuție este verificată în planul discului prin măsurători experimentale. In sfîrșit, partea finală este rezervată concluziilor, contribuțiilor și încheierii.

CAPITOLUL 1

CONDITII DE UNICITATE IN DETERMINAREA CIMPULUI MAGNETIC CVASISTATIONAR

1.1. Introducere

In rezolvarea unei probleme de cîmp magnetic, cunoaşterea condiţiilor de unicitate este necesară pentru enunţarea corectă a problemei de cîmp. Valorile mărimilor care asigură unicitatea soluţiei unei probleme de cîmp trebuiesc precizate în prealabil. Dacă prin rezolvarea unei probleme de cîmp se obţine o singură soluţie, atunci respectiva soluţie corespunde realităţii fizice [43]. In acest prim capitol sînt analizate condiţiile de unicitate în determinarea cîmpului magnetic cvasistaţionar în medii neliniare, izotrope, neomogene, fără magnetizaţie permanentă şi cu magnetizare reversibilă. In cadrul acestor medii pot fi incluse şi materialele feromagnetice moi cu ciclu de histereză îngust, în situaţia în care ele sînt caracterizate prin curba de magnetizare fundamentală.

Pe baza a două teoreme de unicitate se arată că determinarea cîmpului magnetic cvasistaţionar este univocă în astfel de medii dacă se dau distribuţia densităţii curentului de conducţie în interiorul domeniului D de existenţă a cîmpului magnetic şi fie componenta tangenţială a potenţialului magnetic vector sau componenta tangenţială a intensităţii cîmpului magnetic, fie componenta normală a inducţiei magnetice pe suprafaţa frontieră Σ ce închide domeniul D.

1.2. Teoreme privind determinarea univocă a cîmpului magnetic cvasistaţionar în medii neliniare, izotrope, neomogene, fără magnetizaţie permanentă şi cu magnetizare reversibilă

Mediile neliniare fără magnetizaţie permenentă şi cu magnetizare reversibilă au curba de magnetizare de forma din fig.1.1. Curba de magnetizare este monotonă, iar la $\bar{H}=o$ corespunde $\bar{B}=o$. Mediile cu ciclu de histereză îngust pot fi studiate într-o primă

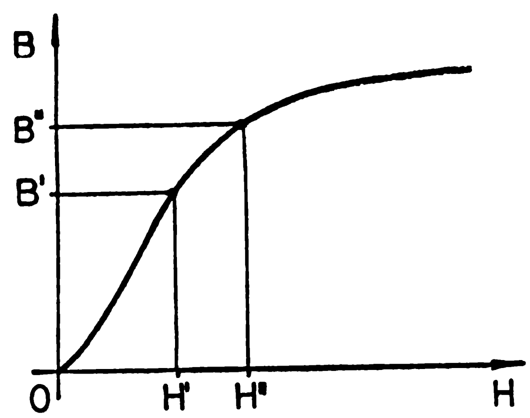


Fig.1.1

aproximaţie considerînd doar curba de magnetizare fundamentală (locul geometric al vîrfurilor ciclurilor de histereză reproductibile); pentru astfel de medii produsul $\bar{H}.\bar{B}$ este pozitiv [83].

Se consideră un domeniu D, mărginit de o suprafaţă închisă Σ. Mediul din interiorul domeniului D este neliniar, izotrop, neomogen, fără magnetizaţie permanentă şi cu magnetizare reversibilă. In fiecare punct al domeniului închis D sînt date:

- vectorul $\bar{J}_c$ care caracterizează repartiţia curenţilor de conducţie;

- funcţie

$$\bar{B} = \mu\bar{H} \tag{1.1}$$

ce caracterizează proprietăţile magnetice ale mediului domeniului D, în general diferită în diferite puncte ale domeniului D;

- forma diferenţială a teoremei lui Ampère

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J}_c \ ; \tag{1.2}$$

- forma diferenţială a legii fluxului magnetic

$$\text{div } \bar{B} = 0. \tag{1.3}$$

Mărimile $\bar{J}_c$, $\bar{H}$ şi $\bar{B}$ reprezintă vectorii densităţii de curent de conducţie, intensităţii cîmpului magnetic şi respectiv inducţiei magnetice iar μ este permeabilitatea magnetică a mediului.

Se introduce potenţialul magnetic vector $\bar{A}$ prin relaţiile [2, 58, 64, 68]:

$$\left.\begin{aligned} &\text{rot } \bar{A} = \bar{B}, \ \text{rot}_s\bar{A} = 0 \\ &\text{div } \bar{A} = 0, \ \text{div}_s\bar{A} = 0 \end{aligned}\right\} , \tag{1.4}$$

adevărate în orice punct al domeniului D.

<u>Teorema 1</u>: Cîmpul magnetic cvasistaţionar din interiorul unui domeniu D mărginit de o suprafaţă închisă Σ este univoc determinat într-un mediu neliniar, izotrop, neomogen, fără magnetizaţie permanentă şi cu magnetizare reversibilă dacă sînt date: a/ distribuţia densităţii curentului de conducţie $\bar{J}_c$ în interiorul domeniului D; b/ fie componenta tangenţială a intensităţii cîmpului magnetic, $\bar{H}_t$, fie componenta tangenţială a potenţialului magnetic vector, $\bar{A}_t$, pe suprafaţa frontieră Σ [83].

Pentru demonstrarea acestei teoreme, se calculează integrala de volum a produsului $\bar{H}.\bar{B}$ pe volumul V_D al domeniului D, avînd în vedere că

$$\mathrm{div}(\bar{H}x\bar{A})=-\bar{H}.\mathrm{rot}\ \bar{A}+\bar{A}.\mathrm{rot}\ \bar{H}=-\bar{H}.\bar{B}+\bar{A}.\bar{J}_c. \qquad (1.5)$$

Deci

$$\int_{VD}\bar{H}.\bar{B}\ dv=-\int_{VD}\mathrm{div}(\bar{H}x\bar{A})dv+\int_{VD}\bar{A}.\bar{J}_c dv. \qquad (1.6)$$

Aplicînd formula integrală a divergenţei [2, 3], rezultă

$$\int_{VD}\mathrm{div}(\bar{H}x\bar{A})dv=\int_{\Sigma}(\bar{H}x\bar{A}).\bar{ds}-\int_{Sd}\mathrm{div}_s(\bar{H}x\bar{A})ds, \qquad (1.7)$$

unde S_d este o eventuală suprafaţă de separaţie între medii cu proprietăţi magnetice diferite (fig.1.2). Se mai poate scrie

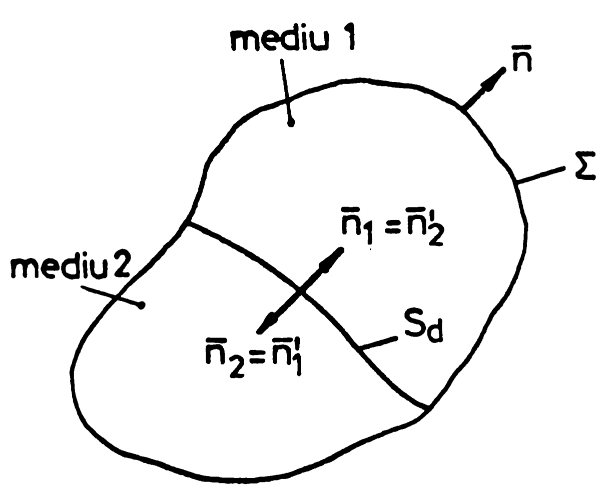


Fig.1.2

$$\int_{\Sigma}(\bar{H}x\bar{A}).\bar{ds}=\int_{\Sigma}(\bar{H}_t x\bar{A}_t).\bar{n}\ ds \qquad (1.8)$$

şi deci

$$\int_{VD}\bar{H}.\bar{B}\ dv=-\int_{\Sigma}(\bar{H}_t x\bar{A}_t).\bar{n}\ ds+$$

$$+\int_{Sd}\mathrm{div}_s(\bar{H}x\bar{A})ds+\int_{VD}\bar{A}.\bar{J}_c dv. \qquad (1.9)$$

Fie în continuare două soluţii $\bar{H}'$, $\bar{H}''$; $\bar{B}'$, $\bar{B}''$ şi $\bar{A}'$, $\bar{A}''$ care corespund aceleiaşi distribuţii de curent de conducţie şi satisfac aceleaşi condiţii de frontieră pe suprafaţa Σ :

$$\bar{J}_c'=\bar{J}_c''\ \text{şi}\ (\bar{H}_t'=\bar{H}_t'')_{\text{pe}\ \Sigma}\quad \text{sau}\ (\bar{A}_t'=\bar{A}_t'')_{\text{pe}\ \Sigma}\ . \qquad (1.10)$$

Diferenţele acestor soluţii

$$\bar{H}=\bar{H}'-\bar{H}'',\ \ \bar{B}=\bar{B}'-\bar{B}'' \qquad (1.11)$$

sînt cîmpuri de vectori care satisfac ecuaţiile

$$\mathrm{rot}\ \bar{H}=\mathrm{rot}(\bar{H}'-\bar{H}'')=\bar{J}_c'-\bar{J}_c''=\bar{J}_c=0, \qquad (1.12)$$

$$\bar{B}=\bar{B}'-\bar{B}''=\mathrm{rot}(\bar{A}'-\bar{A}'')=\mathrm{rot}\ \bar{A}, \qquad (1.13)$$

care au forma relaţiei (1.12), respectiv a primei relaţii (1.4). Aplicînd acestor cîmpuri relaţia (1.9), rezultă

$$\int_{VD}(\bar{H}'-\bar{H}'').(\bar{B}'-\bar{B}'')dv=-\int_{\Sigma}(\bar{H}_t x\bar{A}_t).\bar{n}\ ds+\int_{Sd}\mathrm{div}_s(\bar{H}x\bar{A})ds\ +$$

$$+\int_{VD}\bar{A}.\bar{J}_c dv. \qquad (1.14)$$

Prima integrală din membrul drept al relației (1.14) este nulă pe baza celei de-a doua condiții din (1.1o).

Pe suprafața S_d vectorul $\bar{A}$ este continuu pentru că sînt continui vectorii $\bar{A}'$ și $\bar{A}''$ și deci a doua integrală din membrul drept este

$$\int_{Sd} \mathrm{div}_s(\bar{H}x\bar{A})ds = \int_{Sd}\left[\bar{n}_1\cdot(\bar{H}_1x\bar{A})+\bar{n}_2'\cdot(\bar{H}_2x\bar{A})\right]ds=$$

$$= \int_{Sd}\bar{A}\cdot\left[\bar{n}_1'x(\bar{H}_1-\bar{H}_2)\right]ds = \int_{Sd}\bar{A}\cdot\mathrm{rot}_s\bar{H}\,ds. \qquad (1.15)$$

Si această integrală este nulă conform relației (1.12).

A treia integrală din membrul drept al relației (1.14) este de asemenea nulă pe baza relației (1.12) aplicată pe suprafața S_d. Deci

$$\int_{VD}(\bar{H}'-\bar{H}'')\cdot(\bar{B}'-\bar{B}'')dv=o. \qquad (1.16)$$

Se presupune acum că direcțiile locale ale vectorilor $\bar{H}'$ și H'' fac între ele unghiul α (și deci ale vectorilor $\bar{B}'$ și $\bar{B}''$, mediul fiind izotrop). Relația (1.16) devine

$$\int_{VD}\left[H'B'+H''B''-(H'B''+H''B')\cos\alpha\right]\,dv=o. \qquad (1.17)$$

Pentru orice $H'\neq H''$ și $B'\neq B''$ integratul relației (1.16) este pozitiv și relația nu poate fi deci satisfăcută. Intr-adevăr, dacă $\alpha=o$, atunci

$$H'B'+H''B''-(H'B''+H''B')=(H'-H'')(B'-B'')>o, \qquad (1.18)$$

deoarece dacă $H'\gtrless H''$ și $B'\gtrless B''$, în virtutea monotoniei caracteristicii de magnetizare a mediului (fig.1.1). Pentru orice unghi $\alpha\neq o$, $-1<\cos\alpha<1$ și

$$H'B'+H''B''-(H'B''+H''B')\cos\alpha \geqslant (H'-H'')(B'-B'')>o. \qquad (1.19)$$

Integrala (1.16) este deci integrala unei funcții pozitiv definită pentru $H'\neq H''$ (și deci $B'\neq B''$). Pentru ca această integrală să fie nulă, este deci necesar ca $\alpha=o$ și $H'=H''$ (și deci $B'=B''$), adică $\bar{H}'=\bar{H}''$ și deci $\bar{B}'=\bar{B}''$.

<u>Teorema 2</u>: Cîmpul magnetic cvasistaționar din interiorul unui domeniu D mărginit de o suprafață închisă Σ este univoc determinat într-un mediu neliniar, izotrop, neomogen, fără magnetizație permanentă și cu magnetizare reversibilă dacă sînt date: a/distribuția densității curentului de conducție $\bar{J}_c$ în interiorul domeniului D; b/ componenta normală a inducției magnetice, $\bar{B}_n$, pe

suprafaţa frontieră Σ [58].

Demonstrarea acestei teoreme se face plecînd tot de la integrala de volum a produsului $\bar{H}\cdot\bar{B}$ pe volumul v_D al domeniului D. Se admite existenţa a două soluţii $\bar{H}'$, $\bar{H}''$; $\bar{B}'$, $\bar{B}''$ şi $\bar{A}'$, $\bar{A}''$ care corespund aceleiaşi distribuţii de curent de conducţie şi care satisfac aceleaşi condiţii de frontieră pe suprafaţa Σ :

$$\bar{J}_c'=\bar{J}_c'' \text{ şi } (\bar{B}_n'=\bar{B}_n'')_{\text{pe } \Sigma} . \tag{1.2o}$$

Diferenţele acestor soluţii

$$\bar{H}=\bar{H}'-\bar{H}'',\ \bar{B}=\bar{B}'-\bar{B}'' \tag{1.21}$$

sînt cîmpuri de vectori care satisfac ecuaţiile (1.12, 1.13). Se poate deci considera că $\bar{H}$ provine dintr-un potenţial magnetic scalar, adică

$$\bar{H}=-\text{grad } v_H \tag{1.22}$$

şi deci

$$\int_{VD}\bar{H}\cdot\bar{B}\,dv=-\int_{VD}\text{grad } v_H\cdot\bar{B}\,dv. \tag{1.23}$$

Dar

$$\text{grad } v_H\cdot\bar{B}=\text{div}(v_H\bar{B})-v_H\text{div }\bar{B}. \tag{1.24}$$

Al doilea termen din membrul drept este nul pe baza relaţiei (1.3). Mai departe, aplicînd formula integrală a divergenţei, rezultă

$$\int_{VD}\bar{H}\cdot\bar{B}\,dv=-\int_{VD}\text{div}(v_H\bar{B})dv=-\int_{\Sigma}v_H\bar{B}\cdot\bar{ds}+$$

$$+\int_{Sd}\text{div}_s(v_H\bar{B})ds. \tag{1.25}$$

Dar

$$\int_{\Sigma}v_H\bar{B}\cdot\bar{ds}=\int_{\Sigma}v_H\bar{B}\cdot\bar{n}\,ds=\int_{\Sigma}v_H B_n ds. \tag{1.26}$$

Pe suprafaţa Σ , B_n=o conform celei de-a doua condiţii (1.2o) şi deci integrala (1.26) este nulă. Mai departe, avînd în vedere că pe suprafaţa S_d potenţialul magnetic scalar este continuu pentru că pe S_d , $\text{rot}_s\bar{H}$=o, se obţine

$$\int_{Sd}\text{div}_s(v_H\bar{B})ds=\int_{Sd}v_H(\bar{n}_1'\cdot\bar{B}_1+\bar{n}_2'\cdot\bar{B}_2)ds=\int_{Sd}v_H\text{div}_s\bar{B}\,ds. \tag{1.27}$$

Si integrala (1.27) este nulă conform relaţiei (1.3) aplicată pe suprafaţa S_d. In final se ajunge deci tot la relaţia (1.16), demonstraţia continuîndu-se ca la teorema 1.

CAPITOLUL 2

METODE NUMERICE DE CALCUL AL CIMPULUI MAGNETIC CVASISTATIONAR

2.1. Introducere

In cadrul acestui capitol, după cîteva considerații generale privind metodele de calcul al cîmpului magnetic cvasistaționar, clasificate în 5 mari grupe, se prezintă două metode numerice în variantele uzuale: metoda diferențelor finite și metoda elementelor finite. Se face apoi o comparație între ele, analizîndu-se erorile soluțiilor celor două metode, viteza lor de convergență, volumul resurselor utilizate ale calculatorului și facilitățile de implementare în rezolvarea problemelor de cîmp. Pe baza comparației celor două metode numerice se trag concluzii privitoare la utilizarea lor în aplicații inginerești ce vizează stabilirea unor distribuții de cîmp magnetic.

2.2. Considerații generale

Numeroasele metode de calcul ale cîmpului magnetic cvasistaționar pot fi împărțite în mod convențional în următoarele mari grupe [11, 48, 68, 78] :

1. Metode analitice, care permit exprimarea soluției problemei de cîmp sub forma unor relații de calcul finale, prin funcții precizate. Aceste metode se folosesc în general pentru calculul cîmpului magnetic în medii liniare, cu configurații simple, în general simetrice.

2. Metode care reduc calculul cîmpului magnetic la calculul unor circuite magnetice cu parametri concentrați. Astfel de metode, care se folosesc în calculele practice ale mașinilor și aparatelor electrice, pot lua în considerare caracteristicile de magnetizare neliniare ale unor medii. Ele se bazează însă pe ipoteza că direcțiile în spațiu ale liniilor de cîmp magnetic sînt cunoscute și cîmpul este uniform pe porțiuni, ceea ce limitează

utilizarea lor la mașinile și aparatele electrice clasice, bine studiate, cu forme geometrice simple.

3. Metode de modelare fizică. Sînt metode particulare, care dau rezultate, în primul rînd, în cazuri speciale.

4. Metode care folosesc modele matematice, calculatoare analogice, etc. Precizia acestor metode nu este mare, dar poate fi suficientă în condițiile unor pretenții rezonabile.

5. Metode numerice, care, după cum s-a arătat, permit determinarea valorilor numerice ale componentelor vectorilor $\bar{H}$ și $\bar{B}$ într-un număr suficient de mare, dar finit de puncte ale unui domeniu D de existență a cîmpului magnetic.

Față de primele 4 grupe de metode de calcul al cîmpului magnetic, metodele numerice prezintă o arie de aplicabilitate mai largă și restricții la care sînt supuse mai puține.

In multe metode numerice de calcul al cîmpului magnetic cvasistaționar se folosesc noțiunile de potențial magnetic vector pentru tratarea cîmpului magnetic solenoidal și de potențial magnetic scalar pentru determinarea distribuției de cîmp magnetic în domeniul în care cîmpul poate fi considerat potențial. La aceste metode, calculul cîmpului magnetic se reduce la rezolvarea problemei locale de tip Dirichlet

$$L\emptyset=f \tag{2.1}$$

în domeniul D de existență a cîmpului și

$$\emptyset(P)=g(P),\ P\in\Sigma \tag{2.2}$$

în punctele P ale frontierei Σ a domeniului D; L este un operator diferențial liniar, $\emptyset$ este potențialul magnetic vector sau scalar iar f și g sînt funcții date [22, 23 39, 47, 74] .

2.3. Metoda diferențelor finite

Principiul metodei diferențelor finite de calcul al cîmpului magnetic cvasistaționar este expus în multe lucrări de specialitate [4, 11, 19, 21, 39, 48, 52, 69, 78, 82, 84].

Cîmpul magnetic cvasistaționar din domeniul D produs de curenți de conducție de densitate $\bar{J}_c$, aflați în interiorul domeniului D este descris de ecuațiile diferențiale

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \bar{H}&=\bar{J}_c\\ \mathrm{div}\ \bar{B}&=0\end{aligned}\right\}, \tag{2.3}$$

la care se adaugă relația de legătură dintre intensitatea $\bar{H}$ a cîmpului magnetic şi inducţia magnetică $\bar{B}$

$$\bar{B}=\bar{B}(\bar{H}), \tag{2.4}$$

date în fiecare punct al domeniului D, precum şi condiţiile de frontieră pe suprafaţa Σ ce închide domeniul D[27, 75].

Considerînd că domeniul D este plan şi că mediul din interiorul lui este izotrop şi fără magnetizaţie permanentă, se poate scrie

$$\bar{B}=\mu\bar{H}, \tag{2.5}$$

unde μ este permeabilitatea magnetică a mediului. Notînd cu ν reluctivitatea magnetică a mediului dată de

$$\nu=\frac{1}{\mu} \tag{2.6}$$

şi considerînd cîmpul magnetic plan-paralel, din primele relaţii (2.3, 1.4) se obţine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=-J_c; \tag{2.7}$$

A_z este valoarea componentei potenţialului magnetic vector după direcţia perpendiculară pe planul domeniului D (singura nenulă) iar J_c este densitatea de curent de conducţie normală la planul domeniului D.

Ecuaţia (2.7) este o ecuaţie eliptică de tip Poisson, de forma (2.1). In cadrul metodei diferenţelor finite se discretizează domeniul D cu o reţea de discretizare, de regulă rectangulară, şi se înlocuieşte în nodurile reţelei operatorul diferenţial L printr-o diferenţă. In fig. 2.1 este redată o porţiune din reţeaua de discretizare rectangulară conţinînd 4 elemente. Elementele reţelei de discretizare, limitate de drepte paralele la axele Ox, Oy ale sistemului de axe xOy, ce înconjoară nodul O sînt caracterizate prin

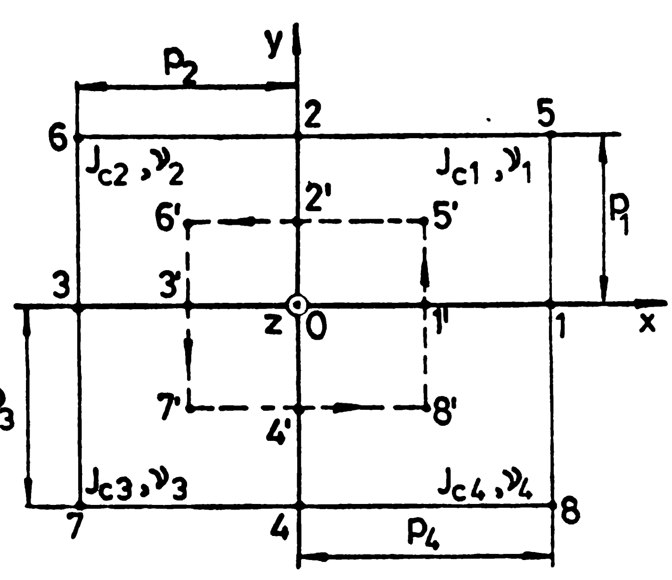


Fig.2.1

$$J_{c1}, J_{c2}, J_{c3}, J_{c4}=\text{constant}, \tag{2.8}$$

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4=\text{constant}. \tag{2.9}$$

In urma discretizării domeniului D cu o reţea de discretizare rectangulară, frontiera reală se înlocuieşte cu o frontieră care urmează direcţiile laturilor rețelei. Același procedeu se aplică și curbelor care delimitează zone ale domeniului D cu densități de curent de conducție și proprietăți magnetice diferite. Procedeul este necesar ca urmare a acceptării ipotezelor definite prin relațiile (2.8, 2.9).

Se consideră forma integrală a teoremei lui Ampere

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot \overline{d\ell} = \int_{A_{\Gamma}} \bar{J}_c \cdot \overline{ds} \tag{2.10}$$

și se acceptă un contur de integrare Γ format din mediatoarele segmentelor o1, o2, o3 și o4 ale rețelei de discretizare. Astfel,

$$\int_{1'}^{5'} H_y dy + \int_{5'}^{2'} H_x dx + \int_{2'}^{6'} H_x dx + \int_{6'}^{3'} H_y dy + \int_{3'}^{7'} H_y dy +$$
$$+ \int_{7'}^{4'} H_x dx + \int_{4'}^{8'} H_x dx + \int_{8'}^{1'} H_y dy = \frac{1}{4}(J_{c1} p_1 p_4 + J_{c2} p_2 p_1 +$$
$$+ J_{c3} p_3 p_2 + J_{c4} p_4 p_3) = I_{co}. \tag{2.11}$$

Cu I_{co} s-a notat curentul de conducție normal la planul xOy corespunzător ariei A_{Γ} limitată de conturul de integrare Γ.

Pe baza relațiilor (1.4, 2.5, 2.6) se poate scrie

$$\left.\begin{aligned} H_x &= \nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ H_y &= -\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{aligned}\right\}, \tag{2.12}$$

relația (2.11) devenind

$$- \nu_1 \int_{1'}^{5'} \frac{\partial A_z}{\partial x} dy + \nu_1 \int_{5'}^{2'} \frac{\partial A_z}{\partial y} dx + \nu_2 \int_{2'}^{6'} \frac{\partial A_z}{\partial y} dx -$$
$$- \nu_2 \int_{6'}^{3'} \frac{\partial A_z}{\partial x} dy - \nu_3 \int_{3'}^{7'} \frac{\partial A_z}{\partial x} dy + \nu_3 \int_{7'}^{4'} \frac{\partial A_z}{\partial y} dx +$$
$$+ \nu_4 \int_{4'}^{8'} \frac{\partial A_z}{\partial y} dx - \nu_4 \int_{8'}^{1'} \frac{\partial A_z}{\partial x} dy = I_{co}. \tag{2.13}$$

Fiecare integrală din (2.13) se evaluează după modelul următor

$$\int_{1'}^{5'} \frac{\partial A_z}{\partial x} dy \approx \frac{A_{z1} - A_{zo}}{p_4} \frac{p_1}{2}. \tag{2.14}$$

Relaţia (2.14) este aproximativă, dar aproximarea este cu atît mai bună cu cît reţeaua de discretizare este mai fină, adică dimensiunile p_1, p_2, p_3 şi p_4 ale reţelei mai mici.

Prin însumarea tuturor termenilor din relaţia (2.13), rezultă

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)A_{zo}-\alpha_1 A_{z1}- \\ -\alpha_2 A_{z2}-\alpha_3 A_{z3}-\alpha_4 A_{z4}=I_{co}, \tag{2.15}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{p_3}{p_4}\nu_4+\frac{p_1}{p_4}\nu_1\right) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{p_4}{p_1}\nu_1+\frac{p_2}{p_1}\nu_2\right) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{p_2}\nu_2+\frac{p_3}{p_2}\nu_3\right) \\ \alpha_4 &= \frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{p_3}\nu_3+\frac{p_4}{p_3}\nu_4\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

şi

$$I_{co}=\frac{1}{4}(J_{c1}p_1p_4+J_{c2}p_2p_1+J_{c3}p_3p_2+J_{c4}p_4p_3). \tag{2.17}$$

Relaţia de legătură dintre potenţialul magnetic vector A_{zo} al punctului O şi cele ale punctelor vecine 1, 2, 3, 4 este liniară, de forma

$$A_{zo}-C_1A_{z1}-C_2A_{z2}-C_3A_{z3}-C_4A_{z4}=C_o, \tag{2.18}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} C_i &= \frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ C_o &= \frac{I_{co}}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} \end{aligned}\right\}. \tag{2.19}$$

Coeficienţii C_i (i=1, 2, 3, 4, o) sînt determinaţi exclusiv de proprietăţile de material, dimensiunile reţelei şi curentul de conducţie I_{co}.

Aplicînd relaţia (2.18) fiecărui nod interior frontierei domeniului D se obţine un sistem liniar de ecuaţii algebrice. La acest sistem trebuiesc adăugate ecuaţiile de tipul (2.18) scrise pentru nodurile de pe frontiera domeniului D, noduri în care se impun condiţii pe frontieră.

. Condițiile pe frontieră referitoare la potențialul magnetic vector în nodurile P ale frontierei domeniului D sînt de forma

$$A_z=g_1(P), \quad P \in \Sigma , \tag{2.2o}$$

sau

$$\frac{\partial A_z}{\partial n}=g_2(P), \quad P \in \Sigma , \tag{2.21}$$

unde g_1 și g_2 sînt funcții cunoscute. Condiția (2.2o) implică cunoașterea componentei tangențiale A_{zt} a potențialului magnetic vector în nodurile de pe frontieră iar condiția (2.21) implică cunoașterea componentei tangențiale B_t a inducției magnetice (sau a componentei tangențiale H_t a intensității cîmpului magnetic) în nodurile de pe frontieră. Conform teoremei 1 de unicitate demonstrată în capitolul 1, în aceste condiții soluția problemei de cîmp magnetic este unică.

Dacă în nodul de pe frontieră analizat este satisfăcută o relație de forma (2.2o), atunci potențialul lui nu se recalculează, nescriindu-se deci pentru el o ecuație de forma (2.18).

Dacă în nodul de pe frontieră analizat este satisfăcută o relație de forma (2.21), atunci conturul de integrare Γ din relația (2.1o) se alege altfel.

Fie de exemplu satisfăcută condiția (2.21) pe segmentul de frontieră superior 13, în nodurile 0, 1 și 3 cunoscîndu-se

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_o=k_{oy};\ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_1=k_{1y};\ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_3=k_{3y}, \tag{2.22}$$

unde k_{oy}, k_{1y} și k_{3y} sînt constante. In acest caz se alege drept contur de integrare Γ conturul 1' 3' 7' 8'. Deci

$$\int_{1'}^{o} H_x dx+\int_{o}^{3'} H_x dx+\int_{3'}^{7'} H_y dy+\int_{7'}^{4'} H_x dx+\int_{4'}^{8'} H_x dx+\int_{8'}^{1'} H_y dy=$$

$$= \frac{1}{4}(J_{c3}p_3p_2+J_{c4}p_4p_3)=I'_{co}, \tag{2.23}$$

sau

$$\nu_4 \int_{1'}^{o} \frac{k_{1y}+k_{oy}}{2}\, dx+ \nu_3 \int_{o}^{3'} \frac{k_{oy}+k_{3y}}{2}\, dx- \nu_3 \int_{3'}^{7'} \frac{\partial A_z}{\partial x}\, dy+$$

$$+ \nu_3 \int_{7'}^{4'} \frac{\partial A_z}{\partial y}\, dx+ \nu_4\int_{4'}^{8'} \frac{\partial A_z}{\partial y}\, dx - \nu_4 \int_{8'}^{1'} \frac{\partial A_z}{\partial x}\, dy=I'_{co} . \tag{2.24}$$

Rezultă în final tot o relație de forma (2.18), dar

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{1}{2}\frac{p_3}{p_4}\nu_4\\ \alpha_2&=0\\ \alpha_3&=\frac{1}{2}\frac{p_3}{p_2}\nu_3\\ \alpha_4&=\frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{p_3}\nu_3+\frac{p_4}{p_3}\nu_4\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.25}$$

și

$$I_{co}=\frac{1}{4}(J_{c3}p_3p_2+J_{c4}p_4p_3)+\frac{1}{4}\Big[(k_{1y}+k_{oy})p_4\nu_4+ +(k_{oy}+k_{3y})p_2\nu_3\Big]. \tag{2.26}$$

Dacă relația (2.21) este satisfăcută pe segmentul de frontieră inferior 13, conturul de integrare este 1' 5' 6' 3'. Considerînd că relațiile (2.22) rămîn valabile, rezultă

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{1}{2}\frac{p_1}{p_4}\nu_1\\ \alpha_2&=\frac{1}{2}\left(\frac{p_4}{p_1}\nu_1+\frac{p_2}{p_1}\nu_2\right)\\ \alpha_3&=\frac{1}{2}\frac{p_1}{p_2}\nu_2\\ \alpha_4&=0\end{aligned}\right\}\tag{2.27}$$

și

$$I_{co}=\frac{1}{4}(J_{c1}p_1p_4+J_{c2}p_2p_1)-\frac{1}{4}\Big[(k_{oy}+k_{3y})p_2\nu_2+ +(k_{1y}+k_{oy})p_4\nu_1\Big]. \tag{2.28}$$

Dacă relația (2.22) este satisfăcută pe segmentul de frontieră în dreapta 24, conturul de integrare Γ este 2' 6' 7' 4'. In nodurile o, 2 și 4 se dau

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_o=k_{ox};\quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_2=k_{2x};\quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_4=k_{4x}, \tag{2.29}$$

k_{ox}, k_{2x} și k_{4x} fiind constante. Rezultă relațiile

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=0\\ \alpha_2&=\frac{1}{2}\frac{p_2}{p_1}\nu_2\\ \alpha_3&=\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{p_2}\nu_2+\frac{p_3}{p_2}\nu_3\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.30}$$

$$\alpha_4=\frac{1}{2}\frac{p_2}{p_3}\nu_3$$

şi

$$I_{co}=\frac{1}{4}(J_{c2}p_2p_1+J_{c3}p_3p_2)-\frac{1}{4}\Big[(k_{ox}+k_{4x})p_3\nu_3+$$
$$+(k_{2x}+k_{ox})p_1\nu_2\Big]. \qquad (2.31)$$

In sfîrşit, dacă relaţia (2.22) este satisfăcută pe segmentul de frontieră în stînga 24, conturul de integrare Γ este 2' 4' 8' 5'. Considerînd că relaţiile (2.29) rămîn valabile, rezultă

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1=\frac{1}{2}\left(\frac{p_3}{p_4}\nu_4+\frac{p_1}{p_4}\nu_1\right)\\
&\alpha_2=\frac{1}{2}\frac{p_4}{p_1}\nu_1\\
&\alpha_3=o\\
&\alpha_4=\frac{1}{2}\frac{p_4}{p_3}\nu_4
\end{aligned}\right\} \qquad (2.32)$$

şi

$$I_{co}=\frac{1}{4}(J_{c1}p_1p_4+J_{c4}p_4p_3)+\frac{1}{4}\Big[(k_{2x}+k_{ox})p_1\nu_1+$$
$$+(k_{ox}+k_{4x})p_3\nu_4\Big]. \qquad (2.33)$$

Este posibil ca nodul analizat să fie de colţ, comun unor segmente de frontieră perpendiculare, pe fiecare segment fiind satisfăcută o condiţie de forma (2.21).

Fie nodul de colţ în stînga sus; în nodurile 1 şi o de pe segmentul de frontieră paralel cu axa Ox

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_1=k_{1y};\quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_o=k_{oy}, \qquad (2.34)$$

iar în nodurile o şi 4 de pe segmentul de frontieră paralel cu axa Oy

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_o=k_{ox};\quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_4=k_{4x}. \qquad (2.35)$$

Conturul de integrare este 1' o 4' 8', rezultînd

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\frac{p_3}{p_4}\nu_4;\quad \alpha_2=o;\qquad \alpha_3=o;\quad \alpha_4=\frac{1}{2}\frac{p_4}{p_3}\nu_4 \qquad (2.36)$$

şi

$$I_{co}=\frac{1}{4}J_{c4}p_4p_3+\frac{1}{4}(k_{1y}+k_{oy})p_4\nu_4-\frac{1}{4}(k_{ox}+k_{4x})p_3\nu_4. \qquad (2.37)$$

Dacă nodul analizat este în dreapta jos iar

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_2=k_{2x};\quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_o=k_{ox} \tag{2.38}$$

şi

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_o=k_{oy};\quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_3=k_{3y}, \tag{2.39}$$

atunci conturul de integrare este o 2' 6' 3' şi rezultă

$$\alpha_1=o;\quad \alpha_2=\frac{1}{2}\frac{p_2}{p_1}\nu_2;\quad \alpha_3=\frac{1}{2}\frac{p_1}{p_2}\nu_2;\quad \alpha_4=o \tag{2.4o}$$

şi

$$I_{co}=\frac{1}{4}J_{c2}p_2p_1-\frac{1}{4}(k_{oy}+k_{3y})p_2\nu_2+\frac{1}{4}(k_{2x}+k_{ox})p_1\nu_2. \tag{2.41}$$

Dacă nodul analizat este în dreapta sus iar

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_o=k_{oy};\quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_3=k_{3y} \tag{2.42}$$

şi

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_o=k_{ox};\quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_4=k_{4x}, \tag{2.43}$$

atunci conturul de integrare este o 3' 7' 4' şi rezultă

$$\alpha_1=o;\quad \alpha_2=o;\quad \alpha_3=\frac{1}{2}\frac{p_3}{p_2}\nu_3;\quad \alpha_4=\frac{1}{2}\frac{p_2}{p_3}\nu_3 \tag{2.44}$$

şi

$$I_{co}=\frac{1}{4}J_{c3}p_3p_2+\frac{1}{4}(k_{oy}+k_{3y})p_2\nu_3+\frac{1}{4}(k_{ox}+k_{4x})p_3\nu_3. \tag{2.45}$$

In sfîrşit, în ultima situaţie posibilă, cînd nodul de colţ este în stînga jos iar

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_2=k_{2x};\quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_o=k_{ox} \tag{2.46}$$

şi

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_1=k_{1y};\quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_o=k_{oy}, \tag{2.47}$$

conturul de integrare este 1' 5' 2' o şi rezultă

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\frac{p_1}{p_4}\nu_1;\quad \alpha_2=\frac{1}{2}\frac{p_4}{p_1}\nu_1;\quad \alpha_3=o;\quad \alpha_4=o \tag{2.48}$$

şi

$$I_{co}=\frac{1}{4}J_{c1}p_1p_4-\frac{1}{4}(k_{2x}+k_{ox})p_1\nu_1-\frac{1}{4}(k_{1y}+k_{oy})p_4\nu_1. \tag{2.49}$$

Soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale (2.7) scrisă în fiecare punct al domeniului D poate fi inlocuită în mod aproximativ cu soluţia sistemului liniar de ecuaţii algebrice de forma (2.18), numărul ecuaţiilor fiind egal cu numărul nodurilor reţelei de discretizare, mai puţin nodurile de pe frontiera domeniului D în care este îndeplinită o condiţie de forma (2.2o).

Sistemul liniar de ecuaţii algebrice poate fi rezolvat prin una din metodele numerice directe sau iterative cunoscute [24, 55, 73, 77] pentru sisteme mari de ecuaţii algebrice liniare: de eliminare Gauss, Jordan, Choleski, Southwell, Gauss-Seidel, Stiefel - Hestens, etc.

Fiind calculate valorile potenţialului magnetic vector A_z în nodurile reţelei de discretizare, se pot calcula în continuare valorile locale ale componentelor inducţiei magnetice $\overline{B}$ [69] . Fie punctul 9 situat în cadrul elementului 1 (fig.2.2). Conform primei relaţii (1.4), pentru punctul 9 se poate scrie aproximativ

$$\left.\begin{aligned} B_{x9} &= \frac{A_{zm}-A_{zn}}{p_1} \\ B_{y9} &= \frac{A_{zp}-A_{zq}}{p_4} \end{aligned}\right\} . \qquad (2.5o)$$

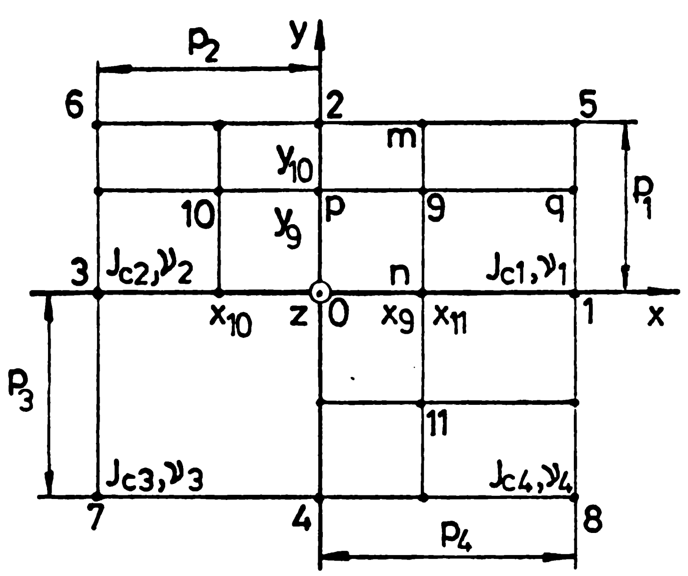


Fig.2.2

Dar

$$\left.\begin{aligned} A_{zm} &= A_{z2}+(A_{z5}-A_{z2})\,\frac{x_9}{p_4} \\ A_{zn} &= A_{zo}+(A_{z1}-A_{zo})\,\frac{x_9}{p_4} \\ A_{zp} &= A_{zo}+(A_{z2}-A_{zo})\,\frac{y_9}{p_1} \\ A_{zq} &= A_{z1}+(A_{z5}-A_{z1})\,\frac{y_9}{p_1} \end{aligned}\right\} .(2.51)$$

Rezultă

$$\left.\begin{aligned} B_{x9} &= (A_{z2}-A_{zo})\left(\frac{1}{p_1}-\frac{x_9}{p_1p_4}\right)+(A_{z5}-A_{z1})\,\frac{x_9}{p_1p_4} \\ B_{y9} &= (A_{zo}-A_{z1})\left(\frac{1}{p_4}-\frac{y_9}{p_1p_4}\right)+(A_{z2}-A_{z5})\,\frac{y_9}{p_1p_4} \end{aligned}\right\} . \qquad (2.52)$$

Dacă punctul 9 este centrul de greutate al elementului 1, atunci $x_9=p_4/2$ şi $y_9=p_1/2$ şi deci

$$\left.\begin{aligned} B_{x9} &= \frac{A_{z2}-A_{zo}+A_{z5}-A_{z1}}{2p_1} \\ B_{y9} &= \frac{A_{zo}-A_{z1}+A_{z2}-A_{z5}}{2p_4} \end{aligned}\right\} . \tag{2.53}$$

Relații similare cu relațiile (2.52) se pot stabili și pentru punctele 1o, respectiv 11, rezultînd

$$\left.\begin{aligned} B_{x1o} &= (A_{z2}-A_{zo})\left(\frac{1}{p_1}-\frac{x_{1o}}{p_1p_2}\right)+(A_{z6}-A_{z3})\,\frac{x_{1o}}{p_1p_2} \\ B_{y1o} &= (A_{z3}-A_{zo})\left(\frac{1}{p_2}-\frac{y_{1o}}{p_1p_2}\right)+(A_{z6}-A_{z2})\,\frac{y_{1o}}{p_1p_2} \end{aligned}\right\} , \tag{2.54}$$

$$\left.\begin{aligned} B_{x11} &= (A_{zo}-A_{z4})\left(\frac{1}{p_3}-\frac{x_{11}}{p_3p_4}\right)+(A_{z1}-A_{z8})\,\frac{x_{11}}{p_3p_4} \\ B_{y11} &= (A_{zo}-A_{z1})\left(\frac{1}{p_4}-\frac{y_{11}}{p_3p_4}\right)+(A_{z4}-A_{z8})\,\frac{y_{11}}{p_3p_4} \end{aligned}\right\} . \tag{2.55}$$

Segmentele O 2, respectiv O 1 sînt linii de separație între medii cu proprietăți magnetice diferite. Dacă $x_9=x_{1o}=o$, atunci punctele 9 și 1o se suprapun peste punctul p aflat pe segmentul O 2; din relațiile (2.52, 2.54) rezultă pentru componenta normală B_x a inducției magnetice la linia de separație O 2, în punctul p, aceeași valoare, atît din B_{x9}, cît și din B_{x1o}:

$$B_{xp}=\frac{A_{z2}-A_{zo}}{p_1} . \tag{2.56}$$

Intrucît punctele 9 și 1o au fost poziționate arbitrar în cadrul elementelor 1, respectiv 2, înseamnă că pe linia de separație O 2 este satisfăcută condiția de continuitate a componentei normale a inducției magnetice.

In mod similar, se observă că pentru $y_9=y_{11}=o$, punctele 9 și 11 se suprapun peste punctul n aflat pe segmentul O 1; din relațiile (2.52, 2.55) rezultă pentru componenta normală B_y a inducției magnetice la linia de separație O 1, în punctul n, aceeași valoare, atît din B_{y9} cît și din B_{y11}:

$$B_{yn}=\frac{A_{zo}-A_{z1}}{p_4} . \tag{2.57}$$

Deci și pe linia de separație O 1 este satisfăcută condiția de continuitate a componentei normale a inducției magnetice.

Pe baza celor arătate mai sus se poate afirma că la metoda diferențelor finite soluția problemei de cîmp satisface condiția de continuitate a componentei normale a inducției magnetice pe liniile de separație între medii cu proprietăți magnetice diferite.

Soluția problemei de cîmp trebuie să asigure și continuitatea componentei tangențiale a intensității cîmpului magnetic de-a lungul liniilor de separație lipsite de curenți de conducție între medii cu proprietăți magnetice diferite. Din a doua relație (2.52) rezultă

$$H_{y9}=\nu_1(A_{zo}-A_{z1})\frac{1}{p_4}-\nu_1(A_{zo}-A_{z1}-A_{z2}+A_{z5})\frac{y_9}{p_1p_4}, \qquad (2.58)$$

iar din a doua relație (2.54) se obține

$$H_{y1o}=\nu_2(A_{z3}-A_{zo})\frac{1}{p_2}-\nu_2(A_{z3}-A_{zo}-A_{z6}+A_{z2})\frac{y_{1o}}{p_1p_2}. \qquad (2.59)$$

H_{y9} și H_{y1o} trebuie să fie egale și pentru $y_9=y_{1o}=o$; înseamnă deci că este necesară satisfacerea egalității

$$\nu_1(A_{zo}-A_{z1})\frac{1}{p_4}=\nu_2(A_{z3}-A_{zo})\frac{1}{p_2}. \qquad (2.6o)$$

Pentru $y_9=y_{1o}\neq o$, H_{y9} și H_{y1o} sînt egale dacă mai este adevărată și egalitatea

$$\nu_1(A_{z2}-A_{z5})\frac{1}{p_4}=\nu_2(A_{z6}-A_{z2})\frac{1}{p_2}. \qquad (2.61)$$

Din relația (2.6o) rezultă

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{p_4}\nu_1+\frac{p_1}{p_2}\nu_2\right)A_{zo}=\frac{1}{2}\frac{p_1}{p_4}\nu_1A_{z1}+\frac{1}{2}\frac{p_1}{p_2}\nu_2A_{z3}. \qquad (2.62)$$

Se mai pot scrie 3 relații similare relației (2.62) și anume

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_3}{p_4}\nu_4+\frac{p_3}{p_2}\nu_3\right)A_{zo}=\frac{1}{2}\frac{p_3}{p_4}\nu_4A_{z1}+\frac{1}{2}\frac{p_3}{p_2}\nu_3A_{z3}, \qquad (2.63)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_4}{p_1}\nu_1+\frac{p_4}{p_3}\nu_4\right)A_{zo}=\frac{1}{2}\frac{p_4}{p_1}\nu_1A_{z2}+\frac{1}{2}\frac{p_4}{p_3}\nu_4A_{z4}, \qquad (2.64)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{p_1}\nu_2+\frac{p_2}{p_3}\nu_3\right)A_{zo}=\frac{1}{2}\frac{p_2}{p_1}\nu_2A_{z2}+\frac{1}{2}\frac{p_2}{p_3}\nu_3A_{z4}. \qquad (2.65)$$

Insumînd relațiile (2.62 - 2.65) se obține relația (2.18) cu $I_{co}=o$, adică una din ecuațiile sistemului, corespunzătoare punctului O care este nod comun pentru 4 elemente neintersectate de curenți de conducție.

In mod asemănător se poate arăta că plecîndu-se de la relația (2.61) se ajunge la ecuația din sistem corespunzătoare punctului 2.

In concluzie deci, valorile potențialului magnetic vector în nodurile rețelei de discretizare care asigură continuitatea componentei tangențiale a intensității cîmpului magnetic pe liniile de separație între elemente cu proprietăți magnetice diferite reprezintă soluția problemei de cîmp.

Dacă mediul domeniului D este parțial sau în totalitate neliniar, procesul de rezolvare a sistemului de ecuații algebrice liniare trebuie repetat, cu recalcularea parametrilor α_i ($i=1,2,3,4$) ce depind de proprietățile mediului, după fiecare rezolvare. In acest scop se calculează valorile componentelor inducției magnetice, considerate constante pe ariile elementelor aflate în mediu neliniar, cu relații de forma (2.53) corespunzătoare centrelor de greutate ale elementelor, și apoi valorile inducției magnetice cu relații de forma

$$B=\sqrt{B_x^2+B_y^2}\ . \tag{2.66}$$

După aproximarea dependenței dintre B și H cu o expresie analitică adecvată, se pot calcula reluctivitățile magnetice corespunzătoare elementelor rețelei de discretizare aflate în mediu neliniar.

Procesul de calcul se consideră încheiat cînd în toate nodurile rețelei de discretizare diferența dintre valorile potențialului magnetic vector, corespunzătoare unor rezolvări succesive, este mai mică decît o limită admisă drept condiție de abandon a procesului.

2.4. Metoda elementelor finite

Metoda elementelor finite, preluată din mecanică și adoptată în scopul rezolvării numerice a problemei calculului cîmpului magnetic cvasistaționar este expusă în multe lucrări apărute în ultimul timp [1, 5-7; 9, 13, 16-18, 20-22, 25, 28, 33, 34, 66, 69, 72, 74, 86]..

Rezolvarea ecuației eliptice de tip Poisson (2.8) se realizează în cadrul metodei elementelor finite prin rezolvarea unei probleme variaționale. Funcției necunoscute A_z din ecuația (2.7) i se atașează o funcțională $\mathcal{F}(A_z)$ definită pe același spațiu ca și A_z.

Domeniul plan D se divizează cu o rețea de discretizare într-un număr finit de elemente D_λ, de regulă triunghiulare (fig. 2.3). Pe ariile elementelor proprietățile de material și densitatea curentului de conducție normal J_c se consideră constante.

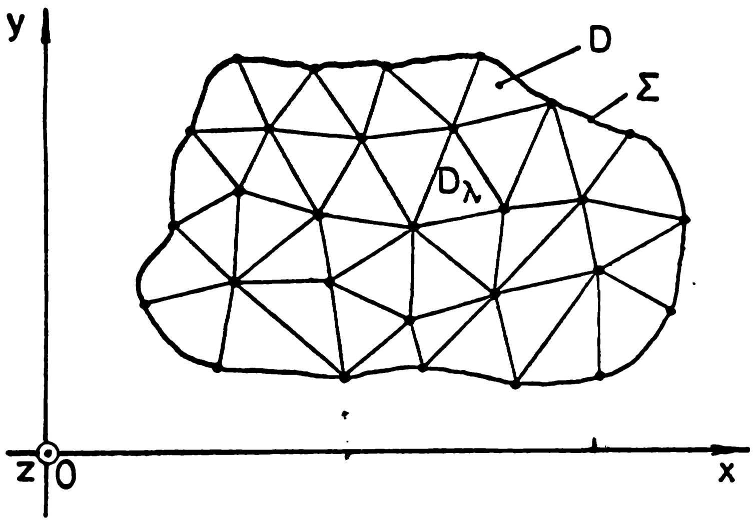


Fig.2.3

Funcționala asociată ecuației (2.8) este

$$\mathcal{F}(A_z)=\int_A \left\{\frac{1}{2}\left[\nu\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)^2 + \nu\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)^2\right] - J_c A_z\right\} dxdy = \int_A \left(\int_0^B HdB - J_c A_z\right)dxdy, \quad (2.67)$$

ea fiind de fapt energia totală a domeniului D; cu A s-a notat aria domeniului D căruia i s-a atașat sistemul de axe rectangulare xOy.

Pe frontiera domeniului D se presupun cunoscute valorile componentei A_z a potențialului magnetic vector.

Metodele directe ale calculului variațional construiesc funcția necunoscută $A_z(x,y)$ în procesul de minimizare a funcționalei $\mathcal{F}(A_z)$.

Intrucît energia totală a domeniului D este suma energiilor elementelor finite D_λ, se poate scrie

$$\mathcal{F}(A_z)=\sum_{\lambda=1}^{M} \mathcal{F}_\lambda(A_z), \quad (2.68)$$

M fiind numărul de elemente finite D_λ din domeniul D, iar

$$\mathcal{F}_\lambda(A_z)=\int_{A_\lambda}\left(\int_0^B H_\lambda\, dB_\lambda - J_{c\lambda} A_{z\lambda}\right)dxdy; \quad (2.69)$$

A_λ este aria elementului finit curent D_λ.

Potențialul magnetic vector $A_{z\lambda}$ corespunzător elementului finit D_λ se exprimă prin intermediul valorilor nodale A_{zm} (m=i,j,k) ale potențialului magnetic vector în nodurile i, j, k ale elementului triunghiular D_λ (fig.2.4).

$$A_{z\lambda}(x,y)=\sum_m f_m(x,y)A_{zm}, \quad (m=i,j,k). \quad (2.70)$$

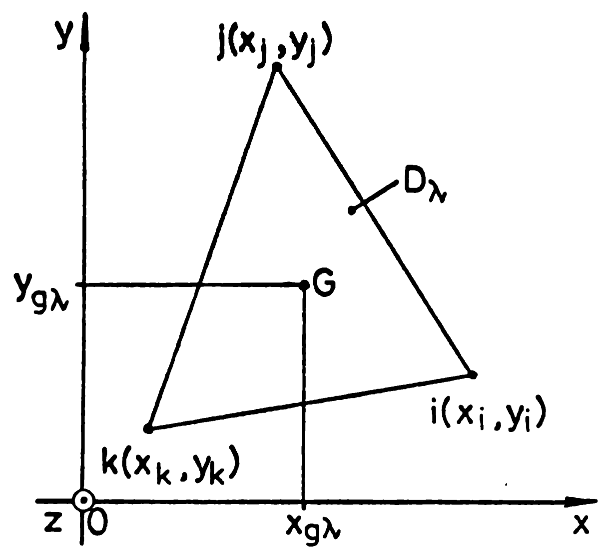


Fig.2.4

Funcțiile $f_m(x,y)$ se presupun liniare în x și y în interiorul elementului. In nodul i, funcția $f_i(x,y)$ trebuie să fie egală cu 1 iar în nodurile j și k egală cu zero.

Se aproximează potențialul magnetic vector $A_{z\lambda}(x,y)$ printr-un polinom de gradul 1 în x și y, de forma

$$A_{z\lambda}(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} . \tag{2.71}$$

Matricea unicoloană formată din α_1, α_2 și α_3 trebuie astfel determinată încît în expresia lui $A_{z\lambda}(x,y)$ să apară valorile nodale A_{zi}, A_{zj} și A_{zk} ale potențialului magnetic vector. Se poate scrie

$$\left.\begin{aligned} A_{zi} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ A_{zj} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ A_{zk} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{aligned}\right\} , \tag{2.72}$$

sau,

$$\begin{bmatrix} A_{zi} \\ A_{zj} \\ A_{zk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} . \tag{2.73}$$

Rezultă

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_{zi} \\ A_{zj} \\ A_{zk} \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

și deci

$$A_{z\lambda}(x,y)=[1 \quad x \quad y]\cdot\begin{bmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}A_{zi}\\ A_{zj}\\ A_{zk}\end{bmatrix}. \tag{2.75}$$

Dar

$$\begin{bmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det M}\begin{bmatrix}x_jy_k-x_ky_j & x_ky_i-x_iy_k & x_iy_j-x_jy_i\\ y_j-y_k & y_k-y_i & y_i-y_j\\ x_k-x_j & x_i-x_k & x_j-x_i\end{bmatrix} \tag{2.76}$$

cu

$$\det M=\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k\end{vmatrix}=2A_\lambda . \tag{2.77}$$

Avînd în vedere forma (2.7o) a lui $A_{z\lambda}(x,y)$, rezultă

$$\left.\begin{aligned}f_i(x,y)&=\frac{1}{2A_\lambda}\left[x_jy_k-x_ky_j+(y_j-y_k)x+(x_k-x_j)y\right]\\ f_j(x,y)&=\frac{1}{2A_\lambda}\left[x_ky_i-x_iy_k+(y_k-y_i)x+(x_i-x_k)y\right]\\ f_k(x,y)&=\frac{1}{2A_\lambda}\left[x_iy_j-x_jy_i+(y_i-y_j)x+(x_j-x_i)y\right]\end{aligned}\right\} . \tag{2.78}$$

In final deci,

$$\begin{aligned}A_{z\lambda}(x,y)=\frac{1}{2A_\lambda}\Big\{&\left[x_jy_k-x_ky_j+(y_j-y_k)x+(x_k-x_j)y\right]A_{zi}+\\ +&\left[x_ky_i-x_iy_k+(y_k-y_i)x+(x_i-x_k)y\right]A_{zj}+\\ +&\left[x_iy_j-x_jy_i+(y_i-y_j)x+(x_j-x_i)y\right]A_{zk}\Big\} .\end{aligned} \tag{2.79}$$

Intrucît inducţia magnetică pe aria elementului D_λ este

$$\bar{B}_\lambda=\bar{i}\,\frac{\partial A_z}{\partial y}-\bar{j}\,\frac{\partial A_z}{\partial x}, \tag{2.8o}$$

rezultă

$$\begin{aligned}\bar{B}_\lambda=\bar{i}\,&\frac{1}{2A_\lambda}\left[(x_k-x_j)A_{zi}+(x_i-x_k)A_{zj}+(x_j-x_i)A_{zk}\right]-\\ -\bar{j}\,&\frac{1}{2A_\lambda}\left[(y_j-y_k)A_{zi}+(y_k-y_i)A_{zj}+(y_i-y_j)A_{zk}\right]\end{aligned} \tag{2.81}$$

şi

$$\bar{H}_\lambda=\bar{i}\,\frac{\nu_\lambda}{2A_\lambda}\left[(x_k-x_j)A_{zi}+(x_i-x_k)A_{zj}+(x_j-x_i)A_{zk}\right]-$$

$$-\bar{J}\,\frac{\nu_\lambda}{2A_\lambda}\left[(y_j-y_k)A_{zi}+(y_k-y_i)A_{zj}+(y_i-y_j)A_{zk}\right]. \tag{2.82}$$

Expresia funcţionalei $\mathcal{F}_\lambda$ pentru elementul curent D_λ, în interiorul căruia mediul se consideră pe aria A_λ liniar, este

$$\mathcal{F}_\lambda(A_z)=\int_{A_\lambda}\left(\frac{1}{2}H_\lambda B_\lambda-J_{c\lambda}A_{z\lambda}\right)dxdy. \tag{2.83}$$

Dar

$$H_\lambda B_\lambda=\frac{\nu_\lambda}{4A_\lambda^2}\left\{\left[(x_k-x_j)A_{zi}+(x_i-x_k)A_{zj}+(x_j-x_i)A_{zk}\right]^2+\right.$$
$$\left.+\left[(y_j-y_k)A_{zi}+(y_k-y_i)A_{zj}+(y_i-y_j)A_{zk}\right]^2\right\}. \tag{2.84}$$

In expresia produsului $H_\lambda B_\lambda$ nu intervin coordonatele curente x şi y. Integrala din (2.83) se calculează simplu dacă nici produsul $J_{c\lambda}A_{z\lambda}$ nu depinde de x şi y; acest lucru este posibil dacă se înlocuieşte $A_{z\lambda}$ cu potenţialul magnetic vector $A_{zg\lambda}$ în centrul de greutate G al elementului D_λ (fig.2.4).

$$A_{zg\lambda}=\frac{1}{2A_\lambda}\left\{\left[x_jy_k-x_ky_j+(y_j-y_k)x_{g\lambda}+(x_k-x_j)y_{g\lambda}\right]A_{zi}+\right.$$
$$+\left[x_ky_i-x_iy_k+(y_k-y_i)x_{g\lambda}+(x_i-x_k)y_{g\lambda}\right]A_{zj}+$$
$$\left.+\left[x_iy_j-x_jy_i+(y_i-y_j)x_{g\lambda}+(x_j-x_i)y_{g\lambda}\right]A_{zk}\right\}. \tag{2.85}$$

Cu acestea, expresia funcţionalei pentru elementul D_λ devine

$$\mathcal{F}_\lambda(A_z)=\frac{\nu_\lambda}{8A_\lambda}\left\{\left[(x_k-x_j)A_{zi}+(x_i-x_k)A_{zj}+(x_j-x_i)A_{zk}\right]^2+\right.$$
$$\left.+\left[(y_j-y_k)A_{zi}+(y_k-y_i)A_{zj}+(y_i-y_j)A_{zk}\right]^2\right\}-$$
$$-\frac{J_{c\lambda}}{2}\left\{\left[x_jy_k-x_ky_j+(y_j-y_k)x_{g\lambda}+(x_k-x_j)y_{g\lambda}\right]A_{zi}+\right.$$
$$+\left[x_ky_i-x_iy_k+(y_k-y_i)x_{g\lambda}+(x_i-x_k)y_{g\lambda}\right]A_{zj}+$$
$$\left.+\left[x_iy_j-x_jy_i+(y_i-y_j)x_{g\lambda}+(x_j-x_i)y_{g\lambda}\right]A_{zk}\right\}. \tag{2.86}$$

Efectuînd suma din relaţia (2.68) asupra funcţionalelor de forma (2.86) corespunzătoare tuturor elementelor finite D_λ din domeniul D, rezultă funcţionala $\mathcal{F}(A_z)$ referitoare la întreg domeniul D. Condiţiile de minim ale funcţionalei $\mathcal{F}(A_z)$ sînt

$$\frac{\partial\mathcal{F}(A_z)}{\partial A_{zm}}=0,\quad(m=1,2,\dots,N). \tag{2.87}$$

N este numărul de noduri din domeniul D, exclusiv nodurile de pe frontieră în care s-a presupus cunoscut potențialul magnetic vector.

Relațiile (2.87) formează un sistem liniar de N ecuații algebrice, a cărui soluție o reprezintă mulțimea valorilor aproximative ale potențialului magnetic vector din nodurile rețelei de discretizare.

Rezolvarea sistemului (2.87) de N ecuații se poate realiza prin utilizarea uneia din metodele numerice amintite în subcapitolul 2.3.

Fiind determinate valorile potențialului magnetic vector în nodurile rețelei, se calculează apoi componentele B_x și B_y ale inducției magnetice corespunzătoare elementului curent D_λ cu relațiile

$$\left.\begin{aligned} B_{x\lambda} &= \frac{1}{2A_\lambda}\left[(x_k-x_j)A_{zi}+(x_i-x_k)A_{zj}+(x_j-x_i)A_{zk}\right] \\ B_{y\lambda} &= \frac{1}{2A_\lambda}\left[(y_k-y_j)A_{zi}+(y_i-y_k)A_{zj}+(y_j-y_i)A_{zk}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (2.88)$$

și valoarea inducției magnetice cu relația

$$B_\lambda = \sqrt{B_{x\lambda}^2 + B_{y\lambda}^2} \; . \qquad (2.89)$$

Minimizarea funcționalei $\mathcal{F}(A_z)$ de forma (2.67) conduce și la satisfacerea condiției de continuitate a componentei normale a inducției magnetice pe liniile de separație între medii cu proprietăți magnetice diferite [7, 69]. Intr-adevăr, conform relației (2.81) se poate scrie pentru elementul 1 din fig.2.5

$$\bar{B}_1=\bar{i}\,\frac{1}{2A_1}\left[(x_k-x_j)A_{zi}+(x_i-x_k)A_{zj}+(x_j-x_i)A_{zk}\right]-\bar{j}\,\frac{1}{2A_1}\left[(y_j-y_k)A_{zi}+(y_k-y_i)A_{zj}+(y_i-y_j)A_{zk}\right], \qquad (2.90)$$

iar pentru elementul adiacent 2,

$$\bar{B}_2=\bar{i}\,\frac{1}{2A_2}\left[(x_m-x_k)A_{zi}+(x_k-x_i)A_{zm}+(x_i-x_m)A_{zk}\right]-\bar{j}\,\frac{1}{2A_1}\left[(y_k-y_m)A_{zi}+(y_i-y_k)A_{zm}+(y_m-y_i)A_{zk}\right]. \qquad (2.91)$$

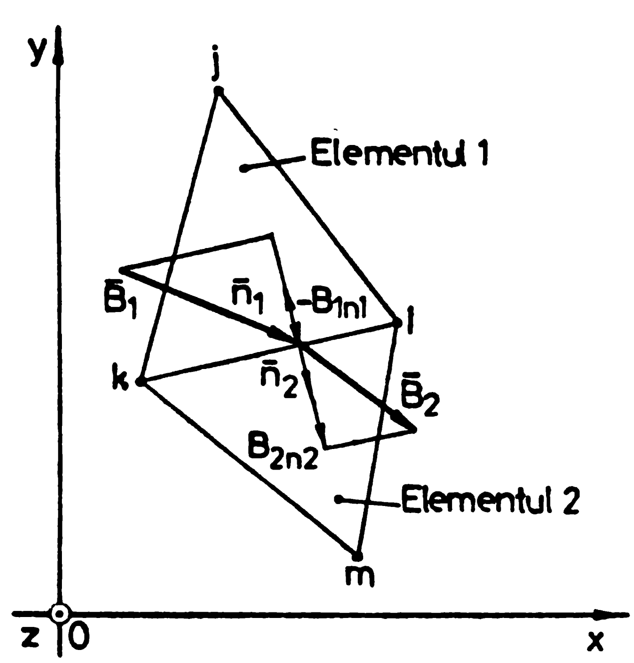


Fig.2.5

Dar

$$\bar{n}_1=-\bar{n}_2=-\bar{i}\ \frac{y_i-y_k}{\sqrt{(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2}}+$$

$$+\bar{j}\ \frac{x_i-x_k}{\sqrt{(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2}} \quad . \tag{2.92}$$

Rezultă

$$\bar{B}_1\cdot\bar{n}_1=B_{1n1}=-\ \frac{A_{zi}-A_{zk}}{\sqrt{(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2}} \tag{2.93}$$

şi

$$\bar{B}_2\cdot\bar{n}_2=B_{2n2}=\ \frac{A_{zi}-A_{zk}}{\sqrt{(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2}} \quad . \tag{2.94}$$

Deci $B_{1n1}=-B_{2n2}$, ceea ce înseamnă că la trecerea prin linia de separaţie ki între elementele adiacente 1 şi 2 aflate în medii cu reluctivităţi magnetice diferite, componenta normală a inducţiei magnetice este continuă.

Dacă în domeniul D există şi medii neliniare, se recalculează valorile reluctivităţii magnetice corespunzătoare elementelor aflate într-un astfel de mediu şi se rezolvă din nou sistemul de ecuaţii (2.79). Procesul de calcul se consideră încheiat şi din soluţia problemei de cîmp obţinută cînd în toate nodurile reţelei diferenţa dintre valorile potenţialului magnetic vector, corespunzătoare unor rezolvări succesive, este mai mică decît o limită admisă drept condiţie de abandon a calculului.

2.5. Comparaţie între metoda diferenţelor finite şi metoda elementelor finite

Intr-o comparaţie între metoda diferenţelor finite şi metoda elementelor finite trebuie avut în vedere că de fapt se compară două moduri diferite de rezolvare a unor ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale. Comparaţia poate ţine cont de mai multe criterii:

- erorile soluţiilor celor două metode faţă de soluţiile teoretice ale ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale;
- viteza de convergenţă a celor două metode;

- volumul resurselor calculatorului (memorie, periferice, timp) utilizate, la aceeaşi precizie impusă a rezultatelor, sau, precizia rezultatelor pentru acelaşi volum de resurse utilizate;

- facilităţile de implementare a celor două metode în rezolvarea problemelor inginereşti, în legătură cu experienţa în domeniu a specialistului sau colectivului de specialişti ce optează pentru una din cele două metode.

In legătură cu primele două criterii, pentru fiecare nod interior al reţelei de discretizare rectangulară a domeniului de existenţă a cîmpului magnetic se scrie în cadrul metodei diferenţelor finite o ecuaţie de tipul (2.15), care se mai poate pune sub forma

$$\left[\nu_1\left(\frac{p_1}{p_4}+\frac{p_4}{p_1}\right)+\nu_2\left(\frac{p_2}{p_1}+\frac{p_1}{p_2}\right)+\nu_3\left(\frac{p_3}{p_2}+\frac{p_2}{p_3}\right)+\nu_4\left(\frac{p_4}{p_3}+\frac{p_3}{p_4}\right)\right]A_{zo}-$$

$$-\left(\nu_4\frac{p_3}{p_4}+\nu_1\frac{p_1}{p_4}\right)A_{z1}-\left(\nu_1\frac{p_4}{p_1}+\nu_2\frac{p_2}{p_1}\right)A_{z2}-$$

$$-\left(\nu_2\frac{p_1}{p_2}+\nu_3\frac{p_3}{p_2}\right)A_{z3}-\left(\nu_3\frac{p_2}{p_3}+\nu_4\frac{p_4}{p_3}\right)A_{z4}=$$

$$=J_{c1}\frac{p_1p_4}{2}+J_{c2}\frac{p_2p_1}{2}+J_{c3}\frac{p_3p_2}{2}+J_{c4}\frac{p_4p_3}{2}\,. \qquad (2.95)$$

Pe de altă parte, în cadrul metodei elementelor finite, pentru fiecare element triunghiular D_λ funcţionala $\mathcal{F}_\lambda(A_z)$ are expresia (2.86). Derivînd pe $\mathcal{F}_\lambda(A_z)$ în raport cu A_{zi}, rezultă

$$\frac{\partial\mathcal{F}_\lambda(A_z)}{\partial A_{zi}}=\frac{\nu_\lambda}{4A_\lambda}\Big\{(x_k-x_j)\left[(x_k-x_j)A_{zi}+(x_i-x_k)A_{zj}+\right.$$

$$\left.+(x_j-x_i)A_{zk}\right]+(y_j-y_k)\left[(y_j-y_k)A_{zi}+(y_k-y_i)A_{zj}+(y_i-y_j)A_{zk}\right]\Big\}-$$

$$-\frac{J_{c\lambda}}{2}\left[x_jy_k-x_ky_j+(y_j-y_k)x_{g\lambda}+(x_k-x_j)y_{g\lambda}\right]\,. \qquad (2.96)$$

Se consideră întîi situaţia din fig.2.6, în care drept triunghi D_λ se alege triunghiul 0 1 2. Notaţiile din fig.2.6 sînt corelate cu cele din fig.2.1. Ca şi nod i se ia nodul 0. Scriind relaţia (2.96) pentru acest triunghi, rezultă

$$\frac{\partial\mathcal{F}_\lambda(A_z)}{\partial A_{zo}}=\nu_1\left[\left(\frac{p_1}{2p_4}+\frac{p_4}{2p_1}\right)A_{zo}-\frac{p_1}{2p_4}A_{z1}-\frac{p_4}{2p_1}A_{z2}\right]-$$

$$-J_{c1}\frac{p_1p_4}{6}\,. \qquad (2.97)$$

Aplicînd apoi relaţia (2.96) triunghiurilor 0 2 3, 0 3 4 şi 0 4 1, drept nod i fiind considerat în toate cazurile nodul 0 şi anulînd suma celor 4 derivate parţiale, se obţine una din ecuaţiile sistemului (2.87):

$$\left[\nu_1\left(\frac{p_1}{p_4}+\frac{p_4}{p_1}\right)+\nu_2\left(\frac{p_2}{p_1}+\frac{p_1}{p_2}\right)+\nu_3\left(\frac{p_3}{p_2}+\frac{p_2}{p_3}\right)+\nu_4\left(\frac{p_4}{p_3}+\frac{p_3}{p_4}\right)\right]A_{zo}-$$

$$-\left(\nu_4\frac{p_3}{p_4}+\nu_1\frac{p_1}{p_4}\right)A_{z1}-\left(\nu_1\frac{p_4}{p_1}+\nu_2\frac{p_2}{p_1}\right)A_{z2}-\left(\nu_2\frac{p_1}{p_2}+\nu_3\frac{p_3}{p_2}\right)A_{z3}-$$

$$-\left(\nu_3\frac{p_2}{p_3}+\nu_4\frac{p_4}{p_3}\right)A_{z4}=J_{c1}\frac{p_1p_4}{3}+J_{c2}\frac{p_2p_1}{3}+J_{c3}\frac{p_3p_2}{3}+$$

$$+J_{c4}\frac{p_4p_3}{3}. \qquad (2.98)$$

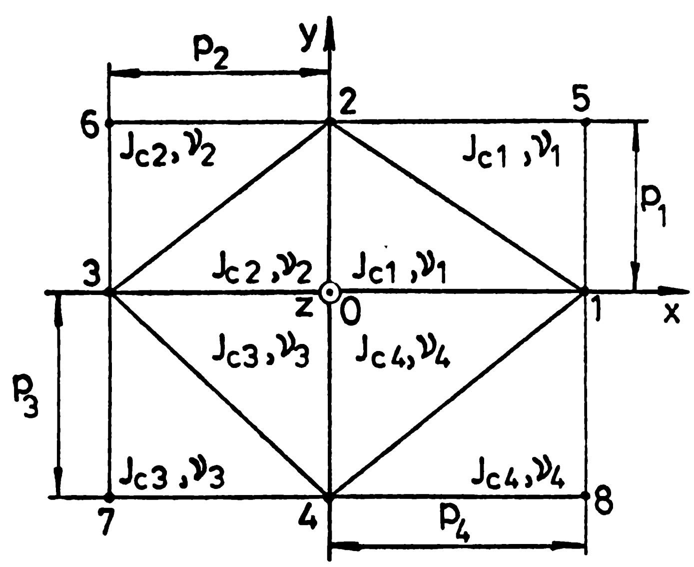


Fig.2.6

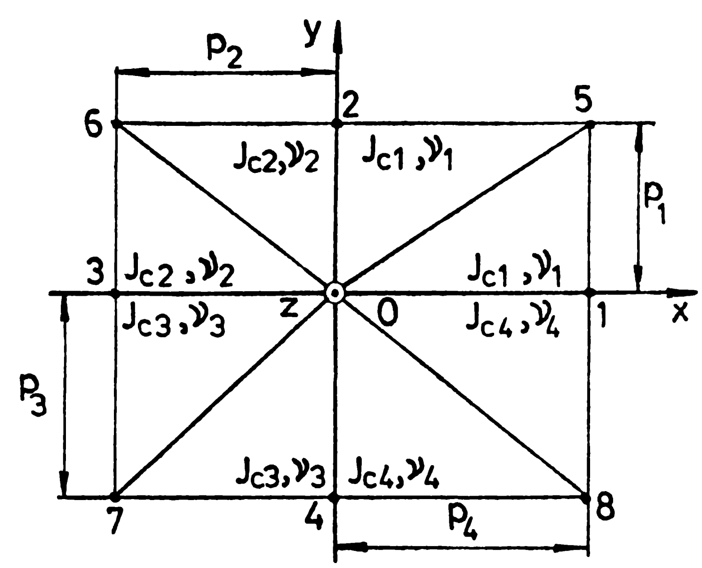


Fig.2.7

In fig.2.6, nodul 0 este nod comun pentru 4 triunghiuri. Dacă el ocupă însă poziţia nodului 1, el este comun pentru 8 triunghiuri, ca în fig.2.7. Aplicînd relaţia (2.96) în toate cele 8 triunghiuri, drept nod fiind considerat nodul 0 şi anulînd suma derivatelor parţiale, rezultă ecuaţia:

$$\left[\nu_1\left(\frac{p_1}{p_4}+\frac{p_4}{p_1}\right)+\nu_2\left(\frac{p_2}{p_1}+\frac{p_1}{p_2}\right)+\nu_3\left(\frac{p_3}{p_2}+\frac{p_2}{p_3}\right)+\nu_4\left(\frac{p_4}{p_3}+\frac{p_3}{p_4}\right)\right]A_{zo}-$$

$$-\left(\nu_4\frac{p_3}{p_4}+\nu_1\frac{p_1}{p_4}\right)A_{z1}-\left(\nu_1\frac{p_4}{p_1}+\nu_2\frac{p_2}{p_1}\right)A_{z2}-$$

$$-\left(\nu_2\frac{p_1}{p_2}+\nu_3\frac{p_3}{p_2}\right)A_{z3}-\left(\nu_3\frac{p_2}{p_3}+\nu_4\frac{p_4}{p_3}\right)A_{z4}=$$

$$=J_{c1}\,\frac{2p_1p_4}{3}+J_{c2}\,\frac{2p_2p_1}{3}+J_{c3}\,\frac{2p_3p_2}{3}+J_{c4}\,\frac{2p_4p_3}{3}\,. \qquad (2.99)$$

Comparînd ecuaţia (2.95) cu ecuaţiile (2.98, 2.99), se observă coincidenţa părţilor omogene. De asemenea, se mai observă că termenul liber al ecuaţiei (2.95) este egal cu media aritmetică a termenilor liberi ai ecuaţiilor (2.98, 2.99).

A doua situaţie care se analizează este cea din fig.2.8 şi 2.9, în care nodul 0 este comun pentru 6 triunghiuri. Aplicînd celor 6 triunghiuri din fig.2.8, respectiv 2.9 relaţia (2.96) şi egalînd de fiecare dată cu zero suma derivatelor parţiale ale func-

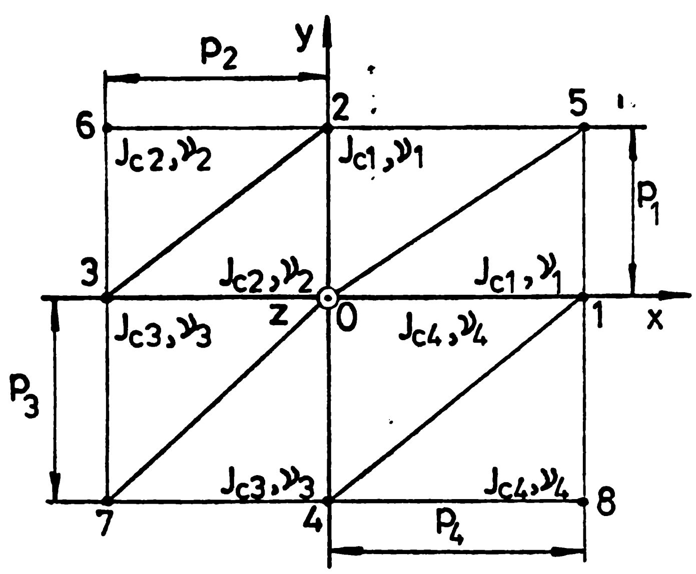


Fig.2.8

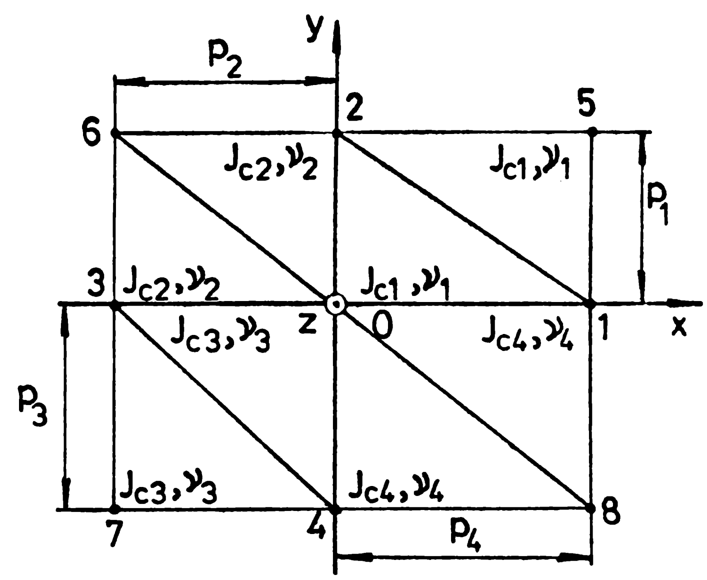


Fig.2.9

ţionalei $\mathcal{F}_{\nu}(A_z)$ în raport cu potenţialul magnetic vector din nodul 0, rezultă două ecuaţii la care părţile omogene coincid cu părţile omogene ale ecuaţiilor (2.98, 2.99) iar termenii liberi sînt

$$J_{c1}\,\frac{2p_1p_4}{3}+J_{c2}\,\frac{p_2p_1}{3}+J_{c3}\,\frac{2p_3p_2}{3}+J_{c4}\,\frac{p_4p_3}{3}$$

pentru fig.2.8, respectiv

$$J_{c1}\,\frac{p_1p_4}{3}+J_{c2}\,\frac{2p_2p_1}{3}+J_{c3}\,\frac{p_3p_2}{3}+J_{c4}\,\frac{2p_4p_3}{3}$$

pentru fig.2.9. Se observă şi aici că media celor doi termeni liberi este egală cu termenul liber al ecuaţiei (2.95).

Concluzia privind coincidenţa părţilor omogene ale unor ecuaţii arbitrare corespunzătoare celor două metode comparate putînd fi extinsă la nivelul sistemelor de ecuaţii algebrice asamblate pentru domeniul D, rezultă că viteza de convergenţă a celor două metode este aceeaşi.

Observaţia privind relaţia între termenul liber al ecuaţiei (2.95), corespunzătoare metodei diferenţelor finite, şi perechile de termeni liberi ai ecuaţiilor deduse în situaţiile din fig.2.6 şi 2.7, respectiv 2.8 şi 2.9, pentru metoda elementelor finite, permite să se afirme că cele două metode, în formele prezentate, se caracterizează prin erori generate de modurile de formulare a problemei de cîmp şi de discretizare a domeniului D egale.

Referitor la volumul resurselor calculatorului utilizate la aceeaşi precizie impusă a rezultatelor, se apreciază [23] că în cazul metodei diferenţelor finite este necesară o memorie mai mare de 1,3 - 2 ori decît în cazul metodei elementelor finite, la acelaşi număr de elemente. Din fig.2.6, 2.7, 2.8 şi 2.9 se observă însă că pe o anumită arie numărul de necunoscute este acelaşi în cadrul celor două metode şi că numărul dublu de elemente triunghiulare la metoda elementelor finite faţă de numărul de elemente dreptunghiulare la metoda diferenţelor finite nu permite decît discretizarea mai fină a proprietăţilor de material şi a distribuţiei curenţilor de conducţie, nu şi dublarea numărului necunoscutelor din soluţia problemei de cîmp. La acelaşi număr de necunoscute, metoda diferenţelor finite va pretinde un volum al memoriei calculatorului cel mult egal cu cel pretins de metoda elementelor finite.

Referitor la timpii necesari unui calculator pentru execuţia unor programe scrise pe baza celor două metode, la acelaşi număr de necunoscute ei ar trebui să fie comparabili. Nu se poate afirma că timpul de execuţie creşte proporţional cu numărul de noduri (necunoscute) sau de elemente ale reţelei de discretizare. Pe de altă parte, timpul consumat de calculator nu este proporţional cu numărul de operaţii aritmetice. Un rol important poate reveni timpului necesar calculatorului pentru transferul informaţiilor dintr-un bloc în altul al memoriei şi pentru efectuarea operaţiilor logice [39] .

In [23] se afirmă că timpul de calcul la aceeaşi toleranţă admisă şi număr de elemente N, este la metoda diferenţelor finite proporţional cu $N^{1,93}$ iar la metoda elementelor finite proporţional cu $N^{1,75}$. Dacă se are în vedere că la acelaşi număr de elemente numărul de necunoscute este la metoda elementelor finite practic înjumătăţit faţă de metoda diferenţelor finite, rezultă că la acelaşi număr de necunoscute metoda diferenţelor finite necesită un timp de calcul mai mic decît metoda elementelor finite, pînă la un număr de ordinul a 8oo necunoscute.

Trebuie avut în vedere în cadrul comparaţiei şi faptul că la metoda elementelor finite volumul de date iniţiale ce trebuie preparate şi furnizate calculatorului este mult mai mare decît la metoda diferenţelor finite.

Este sigur că la metoda elementelor finite aplicată în cazuri simple, cantitatea de muncă necesară pentru rezolvarea unei probleme de cîmp este mult mai mare şi mai dificilă decît la metoda diferenţelor finite.

2.6. Concluzii

Din cele rezultate prin compararea metodei diferenţelor finite cu metoda elementelor finite se poate trage concluzia că cele două metode pot fi utilizate fiecare, cu anumite avantaje şi dezavantaje, în probleme inginereşti ce vizează stabilirea unor distribuţii de cîmp.

Considerarea criteriilor de alegere a unei metode numerice pentru rezolvarea unei probleme de cîmp este o problemă delicată din cauza complexităţii aspectelor adiacente pe care le ridică. In alegerea unei metode numerice în scopul rezolvării unei probleme concrete de cîmp trebuie să se ţină cont de erorile introduse de metodă (de formulare, de discretizare, de trunchiere a produselor şi cîturilor, de abandon a procesului iterativ la atingerea unei erori limită admisă), de volumul resurselor pretinse calculatorului, de facilităţile de implementare şi de competenţa şi experienţa utilizatorului metodei. In unele cazuri un rol hotărîtor îl au mijloacele de calcul disponibile, prin facilitatea utilizării lor şi prin posibilităţile oferite de ele [23, 39, 54, 69, 74] .

CAPITOLUL 3

CALCULUL CIMPULUI MAGNETIC CVASISTATIONAR PLAN-PARALEL CU O METODA CU DIFERENTE FINITE ITERATIVA, EXTINSA PE RETEA RECTANGULARA PERIODICA CU PAS NEEGAL

3.1. Introducere

Atît în cazul metodei diferenţelor finite cît şi în cazul metodei elementelor finite, problema de cîmp se rezolvă, de obicei, în raport cu potenţialul magnetic vector sau scalar în nodurile reţelei de discretizare.

Funcţia neliniară ce defineşte proprietăţile magnetice ale mediului neliniar din domeniul D de existenţă a cîmpului magnetic şi condiţiile pe frontieră referitoare la domeniul D depind indirect de potenţialul magnetic vector sau scalar; dependenţa lor de intensitatea $\bar{H}$ a cîmpului magnetic şi de inducţia magnetică $\bar{B}$ este directă, ceea ce permite evitarea unor dificultăţi în conceperea concretă a algoritmului de calcul [4].

La cîmpul magnetic solenoidal, condiţiile pe frontieră referitoare la potenţialul magnetic vector se pot preciza numai dacă se cunosc valorile pe frontiera domeniului D ale componentelor lui $\bar{H}$ şi $\bar{B}$. De asemenea, asupra evoluţiei potenţialului magnetic vector în interiorul domeniului D se poate forma o imagine din punct de vedere calitativ numai dacă există practică în reprezentarea calitativă a cîmpului magnetic generat de o distribuţie de curenţi de conducţie dată [65].

Dezavantajele de mai sus au fost eliminate într-o serie de lucrări [4, 1o, 11, 53, 79, 8o] în care se operează nu cu potenţialul magnetic vector sau scalar ci cu vectorii $\bar{H}$ şi $\bar{B}$ şi cu componentele lor în cadrul unui sistem de coordonate.

In [4, 11] problema de cîmp se rezolvă în raport cu componentele vectorilor $\bar{H}$ şi $\bar{B}$ după două axe rectangulare în nodurile unei reţele de discretizare rectangulară periodică a unui domeniu plan D. In [4], reţeaua de discretizare are pas egal pe cele două direcţii, ecuaţiile cu diferenţe finite ce substituie ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale rezolvîndu-se recurent; nu se acceptă însă curenţi de conducţie în interiorul domeniului D, aspect care limitează zona de aplicabilitate a metodei numerice de calcul al cîmpului magnetic din [4]. In [11], reţeaua de discretizare are pas egal, algoritmul de calcul presupunînd iterarea repetată pe întreaga reţea a ecuaţiilor cu diferenţe finite ce substituie ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale.

Metoda numerică de calcul al cîmpului magnetic cvasistaţionar cu diferenţe finite iterativă, expusă principial în [11] a fost generalizată de autor [37] în cadrul acestui capitol, prin acceptarea unei reţele de discretizare rectangulară periodică cu pas neegal, cu următoarele avantaje ce decurg din aceasta:

- deformarea mai mică a frontierei domeniului D şi a frontierelor subdomeniilor din domeniul D cu distribuţii de curenţi de conducţie şi proprietăţi de material diferite, la acelaşi număr de noduri;
- posibilitatea alegerii unui pas al reţelei de discretizare mai mic pe direcţia cu gradient mai mare, respectiv a unuia mai mare pe direcţia cu gradient mai mic al intensităţii cîmpului magnetic sau inducţiei magnetice;
- posibilitatea scăderii numărului de noduri din domeniul D de existenţă al cîmpului magnetic, la aceeaşi precizie impusă a calculului.

Primele două avantaje conduc la creşterea preciziei de calcul a soluţiei problemei de cîmp [54] iar ultimul la scăderea volumului memoriei centrale utilizate şi a timpului de calcul consumat de calculator, aspect important la domeniile de dimensiuni mari.

In cadrul fundamentării matematice a metodei cu diferenţe finite iterativă, extinsă pe reţea rectangulară periodică cu pas neegal se demonstrează o procedură simplificată de substituire a ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale (3.3, 3.4) cu ecuaţiile cu diferenţe finite (3.9, 3.1o). Autorul concepe de asemenea un algoritm de calcul simplu, cu aplicabilitatea generală şi elaborează un program de calcul în limbajul FORTRAN IV pentru determinarea distribuţiei cîmpului magnetic cvasistaţionar plan-paralel în cadrul unui exemplu. Programul are un caracter general, el putînd fi utilizat pentru configuraţii geometrice ale sistemelor magnetice şi repartiţii de curenţi de conducţie diferite, cu adaptări ale datelor iniţiale.

3.2. Formularea problemei de cîmp

Se consideră în spațiul plan un domeniu D, mărginit de un contur închis Γ. Mediul din interiorul domeniului este parțial sau în totalitate neliniar, izotrop, neomogen, fără magnetizație permanentă și cu magnetizare reversibilă. In fiecare punct al domeniului D sînt date:

- vectorul $\bar{J}_c$ care caracterizează repartiția curenților de conducție, perpendicular pe suprafața domeniului D și satisfăcînd ecuația

$$\operatorname{div} \bar{J}_c = 0; \tag{3.1}$$

- funcția

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \tag{3.2}$$

ce caracterizează proprietățile magnetice ale mediului domeniului D, în general diferită pentru diferite puncte ale domeniului D;

- forma diferențială a teoremei lui Ampère

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J}_c; \tag{3.3}$$

- forma diferențială a legii fluxului magnetic

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0. \tag{3.4}$$

Mărimile $\bar{J}_c$, $\bar{H}$ și $\bar{B}$ reprezintă vectorii densității de curent de conducție, intensității cîmpului magnetic și respectiv inducției magnetice, iar μ este permeabilitatea magnetică a mediului.

Conform teoremei 2 de unicitate demonstrată în capitolul 1, cîmpul magnetic cvasistaționar din interiorul domeniului D este univoc determinat dacă pe lîngă distribuția densității curentului de conducție în interiorul domeniului D mai este dată pe conturul Γ ce închide domeniul D componenta normală B_n a inducției magnetice $\bar{B}$. Practic, la calculul cîmpului magnetic din mașinile și aparatele electrice se poate alege domeniul D atît de mare încît în exteriorul lui să se poată considera cu suficientă precizie că mărimile $\bar{H}$ și $\bar{B}$ sînt nule. In consecință pe frontiera Γ a domeniului D componenta normală a inducției magnetice satisface condiția

$$B_n = 0. \tag{3.5}$$

Conform teoremei 1 de unicitate demonstrată în capitolul 1, cîmpul magnetic cvasistaționar din interiorul domeniului D este de asemenea univoc determinat dacă este dată distribuția densității curentului de conducţie în interiorul domeniului D şi pe conturul Γ ce închide domeniul D componenta tangenţială H_t a intensităţii cîmpului magnetic $\bar{H}$. Se poate deci, atunci cînd configuraţia sistemului magnetic şi repartiţia curenţilor de conducţie prezintă simetrie în interiorul domeniului D, să se calculeze cîmpul magnetic pentru o parte a configuraţiei. De-a lungul frontierei care se alege astfel încît să coincidă cu o axă sau cu axele de simetrie, componentei tangenţiale a lui $\bar{H}$, se impune condiţia

$$H_t=0. \tag{3.6}$$

Rezolvarea problemei de cîmp înseamnă determinarea în fiecare punct al domeniului D a vectorilor $\bar{H}$ şi $\bar{B}$ care satisfac ecuaţiile (3.2 - 3.4), iar în punctele aflate pe frontiera domeniului D şi condiţia (3.5) sau (3.6).

3.3. Substituirea ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale cu ecuaţii cu diferenţe finite.

Se consideră în continuare că domeniul D se alege astfel încît toate sursele de tensiune magnetomotoare se află în interiorul domeniului D. Cîmpul magnetic din domeniul D produs de curenţii de conducţie aflaţi în interiorul domeniului D este în acest caz descris de sistemul de ecuaţii (3.2 - 3.4), la acestea adăugîndu-se pe frontiera domeniului condiţia (3.5) sau (3.6).

Ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale (3.3, 3.4) pot fi înlocuite cu ecuaţii cu diferenţe finite. Se construieşte în acest scop în domeniul D o reţea de discretizare rectangulară periodică cu pas neegal, din drepte paralele la axele de coordonate Ox, Oy (fig.3.1). S-a evidenţiat în cadrul reţelei un element arbitrar; cu (i, j), (i+1, j), (i+1, j+1) şi (i, j+1) s-au notat nodurile reţelei care reprezintă puncte de colţ ale elementului evidenţiat. Elementul evidenţiat va fi identificat în continuare prin nodul (i, j) care reprezintă punctul de colţ din stînga de sus. Mărimile care se referă la un element vor fi raportate la nodul de identificare al elementului, literele i şi j înlocuindu-se însă prin I şi J.

In cadrul metodei se presupune că valorile componentelor lui $\bar{H}$ şi $\bar{B}$ după cele două direcţii Ox, Oy variază liniar de-a lungul laturilor unui element. Forma integrală a teoremei lui Ampère scrisă pentru elementul din fig.3.2.a este [2, 27, 81] :

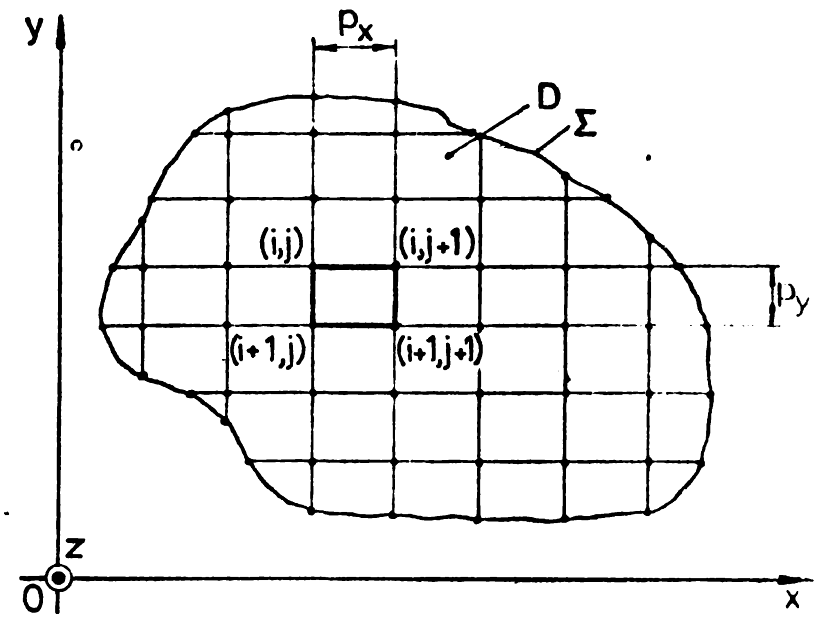


Fig.3.1

$$
p_x \frac{H_x(i+1,j)+H_x(i+1,j+1)}{2} + p_y \frac{H_y(i+1,j+1)+H_y(i,j+1)}{2}
$$

$$
-p_x \frac{H_x(i,j+1)+H_x(i,j)}{2} - p_y \frac{H_y(i,j)+H_y(i+1,j)}{2} =
$$

$$
= p_x p_y J_c(I,J). \qquad (3.7)
$$

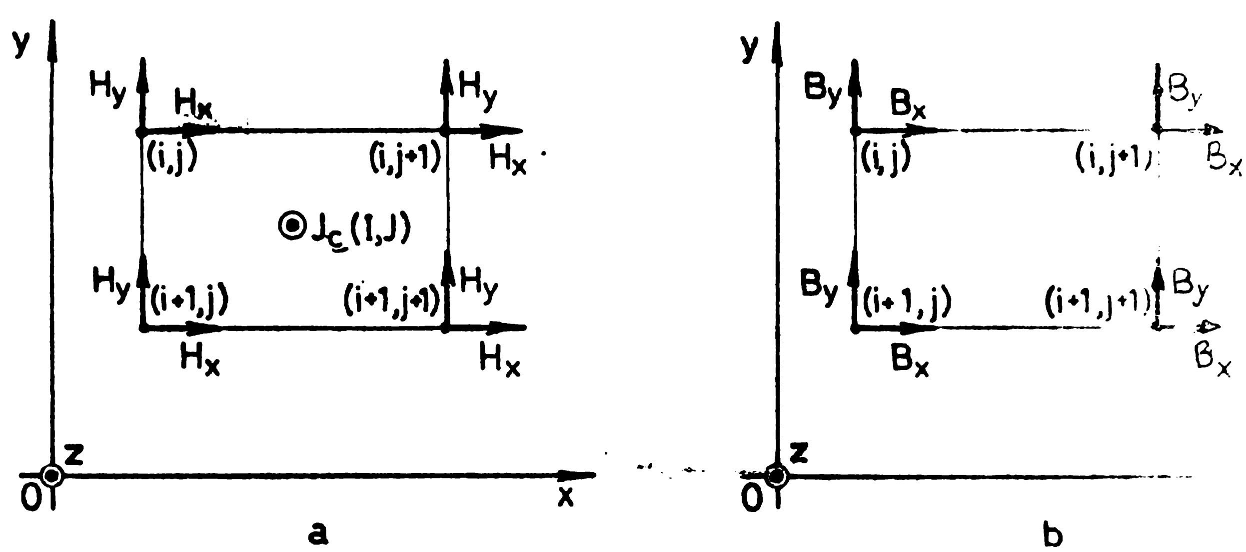


Fig.3.2

In relaţia (3.7), $J_c(I,J)$ este densitatea curentului de conducţie, normal la planul xOy, uniform distribuit pe aria elementului evidenţiat. Pentru acelaşi element (fig.3.2.b), forma integrală a legii fluxului magnetic este [2, 27, [illegible]] :

$$p_x \frac{B_y(i+1,j)+B_y(i+1,j+1)}{2} - p_y \frac{B_x(i+1,j+1)+B_x(i,j+1)}{2} -$$

$$-p_x \frac{B_y(i,j+1)+B_y(i,j)}{2} + p_y \frac{B_x(i,j)+B_x(i+1,j)}{2} = o. \qquad (3.8)$$

Pentru paşi p_x, p_y ai reţelei de discretizare suficient de mici, finiţi, relaţiile (3.7) şi (3.8) sînt aproximativ echivalente cu relaţiile (3.3) şi respectiv (3.4). Aproximarea este cu atît mai bună cu cît p_x şi p_y sînt mai mici.

Relaţiile (3.7) şi (3.8) pot fi scrise sub forma

$$p_x\left[H_x(i+1,j)+H_x(i+1,j+1)-H_x(i,j+1)-H_x(i,j)\right] +$$
$$+p_y\left[-H_y(i+1,j)+H_y(i+1,j+1)+H_y(i,j+1)-H_y(i,j)\right] =$$
$$= 2\ p_x p_y J_c(I,J), \qquad (3.9)$$

$$p_y\left[B_x(i+1,j)-B_x(i+1,j+1)-B_x(i,j+1)+B_x(i,j)\right] +$$
$$+p_x\left[B_y(i+1,j)+B_y(i+1,j+1)-B_y(i,j+1)-B_y(i,j)\right] = o. \qquad (3.1o)$$

Se introduc notaţiile

$$\varepsilon_H(I,J)=p_x\left[H_x(i+1,j)+H_x(i+1,j+1)-H_x(i,j+1)-H_x(i,j)\right] +$$
$$+p_y\left[-H_y(i+1,j)+H_y(i+1,j+1)+H_y(i,j+1)-H_y(i,j)\right] -$$
$$-2\ p_x p_y J_c(I,J), \qquad (3.11)$$

$$\varepsilon_B(I,J)=p_y\left[B_x(i+1,j)-B_x(i+1,j+1)-B_x(i,j+1)+B_x(i,j)\right] +$$
$$+p_x\left[B_y(i+1,j)+B_y(i+1,j+1)-B_y(i,j+1)-B_y(i,j)\right]. \qquad (3.12)$$

Ecuaţiile (3.7) şi (3.8) sînt deci satisfăcute dacă

$$\varepsilon_H(I,J)=o, \qquad (3.13)$$

$$\varepsilon_B(I,J)=o. \qquad (3.14)$$

Calculul cîmpului magnetic se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuaţii cu diferenţe finite care conţine:

- ecuaţiile liniare de forma (3.13, 3.14), pentru fiecare element al reţelei de discretizare;
- ecuaţiile neliniare în cazul general care provin din funcţia (3.2) scrisă scalar

$$\left.\begin{array}{l} B_x = \mu H_x \\ B_y = \mu H_y \end{array}\right\} \qquad (3.15)$$

pentru fiecare nod al reţelei;
- ecuaţiile liniare de forma (3.5) sau (3.6) pentru fiecare nod de frontieră al reţelei.

Necunoscutele în cadrul sistemului de ecuații sînt valorile H_x, H_y, B_x și B_y în fiecare nod al rețelei de discretizare.

3.4. Considerarea proprietăților magnetice.

S-a presupus că mediul domeniului D este izotrop. Proprietățile magnetice ale mediului intervin în funcțiile (3.15), în cazul general diferite în noduri diferite ale rețelei.

In nodurile plasate în mediu liniar,

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \mu_l H_x \\ B_y &= \mu_l H_y \end{aligned}\right\} , \tag{3.16}$$

unde μ_l este permeabilitatea magnetică a mediului liniar.

In nodurile aflate în mediu neliniar, dependența dintre B și H trebuie aproximată printr-o expresie analitică în toată gama posibilă de variație a intensității cîmpului magnetic și inducției magnetice. Expresiei analitice de aproximare a curbei de magnetizare neliniară B(H) i se impun anumite condiții, a căror îndeplinire poate contribui la reușita rezolvării problemei de cîmp, concretizată printr-o precizie suficientă a calculelor, un timp de calcul suficient de redus, etc.

In [11, 51, 63, 81] sînt prezentate diferite expresii analitice de aproximare a curbelor de magnetizare. In [11] se utilizează aproximarea curbei de magnetizare prin 4 segmente de dreaptă. Această aproximare, recomandată datorită simplității sale în cadrul unor calcule pe calculator, are avantajul că atît funcția directă B(H) cît și cea inversă H(B) au pe fiecare porțiune expresii deosebit de simple, liniare. O precizie suficientă a aproximării se obține prin alegerea unui număr corespunzător de segmente de dreaptă. Creșterea numărului de segmente în scopul măririi preciziei de aproximare nu este însă totdeauna indicată pentru că pentru diferite probe ale aceleiași mărci de material pot să existe diferențe sensibile între dependențele experimentale B(H) [14, 15, 49, 71].

In cadrul metodei numerice cu diferențe finite iterativă, extinsă pe rețea rectangulară cu pas neegal s-a utilizat aproximarea curbei de magnetizare B(H) caracterizată prin n puncte de coordonate $[H_c(i), B_c(i)]$ $(i=1,2,\dots,n)$ cu 4 segmente de dreaptă. Ecuația unui segment de dreaptă j (j=1,2,3,4) care aproximează curba de magnetizare într-un interval j al lui H delimitat de $H_c(k)$ şi $H_c(k+\ell)$ $(k<n,\ k+\ell\leq n)$ este

$$F_j(H)=a(j)H+b(j). \tag{3.17}$$

Funcţiei $F_j(H)$ i se impune condiţia de-a trece prin punctul de coordonate $[H_c(k),\ B_{cc}(k)]$, unde

$$B_{cc}(k)=a(j-1)H_c(k)+b(j-1),\ (j=2,3,4). \tag{3.18}$$

Intrucît primul punct al curbei de magnetizare este caracterizat prin $H_c(1)=B_c(1)=o$, se consideră $B_{cc}(1)=o$.

Pentru a realiza o precizie a aproximării în intervalul j (fig.3.3) cît mai bună, s-a impus condiţia de minim a sumei abaterilor relative patratice pe intervalul j, dată de relaţia [3, 76]

$$\sigma_B(j)=\sum_{m=k+1}^{\ell}\left\{\frac{F_j[H_c(m)]-B_c(m)}{B_c(m)}\right\}^2 . \tag{3.19}$$

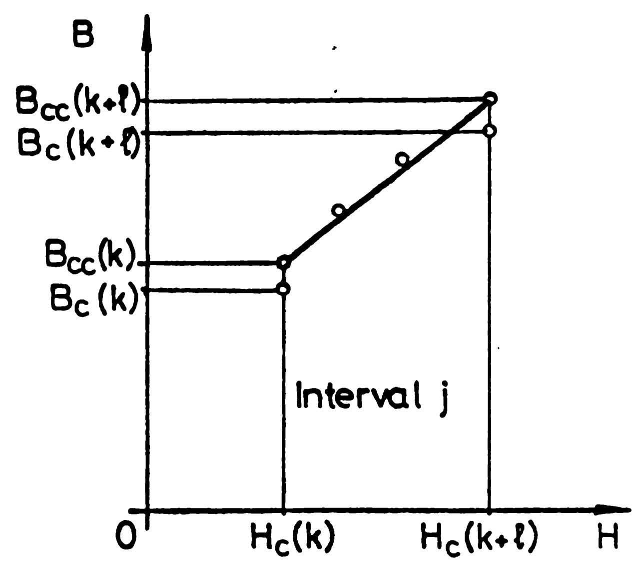


Fig.3.3

Pentru determinarea coeficienţilor a(j) şi b(j) din condiţia de minim a lui $\sigma_B(j)$, minim condiţionat de satisfacerea relaţiei

$$a(j)H_c(k)+b(j)-B_{cc}(k)=o, \tag{3.20}$$

se utilizează metoda multiplicatorilor lui Lagrange [65]. In acest scop se formează funcţia

$$G(j)=\sigma_B(j)+\lambda\left[a(j)H_c(k)+b(j)-B_{cc}(k)\right], \tag{3.21}$$

unde λ este multiplicatorul lui Lagrange. Din sistemul

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial G(j)}{\partial a(j)}&=o\\ \frac{\partial G(j)}{\partial b(j)}&=o\\ \frac{\partial G(j)}{\partial \lambda}&=o\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

rezultă

$$\left.a(j)=\frac{\displaystyle\sum_{m=k+1}^{\ell}\frac{[H_c(m)-H_c(k)]\,[B_c(m)-B_{cc}(k)]}{B_c^2(m)}}{\displaystyle\sum_{m=k+1}^{\ell}\frac{[H_c(m)-H_c(k)]^2}{B_c^2(m)}}\right\} . \tag{3.23}$$

$b(j)=B_{cc}(k)-a(j)H_c(k)$

Pentru valorile $H>H_c(n)$ sau $B>B_{cc}(n)$ s-a admis aproximarea dependenţei B(H) de către prelungirea ultimului segment de dreaptă.

In cadrul acestei metode numerice de calcul al cîmpului magnetic cvasistaţionar plan-paralel se vor utiliza funcţiile $\mu(H)$, $\frac{1}{\mu}(B)$, $\frac{\partial\mu}{\partial H}(H)$ şi $\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}(B)$. Expresiile ce rezultă pentru aceste funcţii din (3.17) pentru intervalul j (j=1,2,3,4) sînt

$$\mu(H)=a(j)+\frac{b(j)}{H}\ , \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{\mu}(B)=\frac{1}{a(j)}\left[1-\frac{b(j)}{B}\right]\ , \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial H}(H)=-\frac{b(j)}{H^2}\ , \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial(\frac{1}{\mu})}{\partial B}(B)=\frac{b(j)}{a(j)B^2}\ . \tag{3.27}$$

Mai rezultă

$$\mu(o)=a(1), \tag{3.28}$$

$$\frac{1}{\mu}(o)=\frac{1}{a(1)}\ , \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial H}(o)=o\ , \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial(\frac{1}{\mu})}{\partial B}(o)=o. \tag{3.31}$$

Relaţiile (3.24 - 3.27) sau (3.28 - 3.31) se vor aplica cu valori ale lui H şi B calculate în fiecare nod al reţelei de discretizare plasat în mediu neliniar, funcţie de valorile componentelor H_x şi H_y, respectiv B_x şi B_y:

$$H=\sqrt{H_x^2+H_y^2}\ , \tag{3.32}$$

$$B=\sqrt{B_x^2+B_y^2}\ . \tag{3.33}$$

3.5. Rezolvarea iterativă a sistemului de ecuaţii cu diferenţe finite

In cazul liniar pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii (3.13.- 3.15, 3.5, 3.6) se poate folosi oricare din metodele de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare. In cazul neliniar, cînd aceste metode nu se pot folosi, se poate utiliza metoda aproximaţiilor succesive descrisă în continuare.

In fiecare nod al reţelei de discretizare se dau valorile corespunzătoare aproximaţiei iniţiale ale necunoscutelor H_x, H_y, B_x, B_y. Acestea pot fi valori arbitrare care satisfac ecuaţiile (3.15, 3.5, 3.6). Se iterează apoi necunoscutele conform unor relaţii speciale, succesiv pentru fiecare element al reţelei. La sfîrşitul fiecărei iteraţii necunoscutele continuă să satisfacă ecuaţiile (3.15, 3.5, 3.6) dar, după parcurgerea unei etape tranzitorii de calcul, $|\varepsilon_H(I,J)|$ şi $|\varepsilon_B(I,J)|$, care au semnificaţia unor erori, scad pentru toate elementele reţelei. Soluţia sistemului este obţinută cînd valorile necunoscutelor satisfac cu suficientă precizie şi ecuaţiile (3.13, 3.14), adică atunci cînd pentru toate elementele reţelei sînt satisfăcute relaţii de forma

$$|\varepsilon_H(I,J)| < \varepsilon_{HMax}, \tag{3.34}$$

$$|\varepsilon_B(I,J)| < \varepsilon_{BMax}, \tag{3.35}$$

unde ε_{HMax} şi ε_{BMax} sînt valorile absolute ale erorilor maxime, impuse. Scăderea valorilor ε_{HMax} şi ε_{BMax} conduce la creşterea preciziei rezolvării, dar şi la creşterea timpului de calcul, ceea ce pretinde realizarea unui compromis acceptabil.

Sistemul de ecuaţii se rezolvă iterativ, în cadrul unei iteraţii parcurgîndu-se două etape. Se notează cu H'_x, H'_y, B'_x şi B'_y valorile necunoscutelor la începutul unei etape şi cu H''_x, H''_y, B''_x şi B''_y valorile necunoscutelor la sfîrşitul etapei respective. Paşii de calcul care se parcurg succesiv în cadrul fiecărei etape sînt următorii:

I. Etapa 1: iterarea după ε_H:

1. Se calculează:

$$\begin{aligned}\varepsilon_H(I,J)=&p_x\left[H'_x(i+1,j)+H'_x(i+1,j+1)-H'_x(i,j+1)-H'_x(i,j)\right]+\\&+p_y\left[-H'_y(i+1,j)+H'_y(i+1,j+1)+H'_y(i,j+1)-H'_y(i,j)\right]-\\&-2\,p_xp_yJ_c(I,J);\end{aligned} \tag{3.36}$$

2. Se determină:

$$\left.\begin{aligned}\Delta B(I,J)&=\frac{\varepsilon_H(I,J)}{Z_H(I,J)}\\ \Delta B_x(I,J)&=\frac{p_x}{\sqrt{p_xp_y}}\,\Delta B(I,J)\\ \Delta B_y(I,J)&=\frac{p_y}{\sqrt{p_xp_y}}\,\Delta B(I,J)\end{aligned}\right\}, \tag{3.37}$$

unde $\Delta B_x(I,J)$ şi $\Delta B_y(I,J)$ sînt corecţiile care se vor aplica în cadrul etapei 1 valorilor iniţiale B_x', respectiv B_y' ale necunoscutelor; alegerea mărimii $Z_H(I,J)$ va fi tratată ulterior.

3. Se calculează valorile necunoscutelor B_x'' şi B_y'' din nodurile reţelei ce constituie puncte de colţ ale elementului asupra căruia se face iterarea, cu relaţiile:

$$\left.\begin{aligned}
B_x''(i+1,j)&=B_x'(i+1,j)-\Delta B_x(I,J)\\
B_x''(i+1,j+1)&=B_x'(i+1,j+1)-\Delta B_x(I,J)\\
B_x''(i,j+1)&=B_x'(i,j+1)+\Delta B_x(I,J)\\
B_x''(i,j)&=B_x'(i,j)+\Delta B_x(I,J)\\
B_y''(i+1,j)&=B_y'(i+1,j)+\Delta B_y(I,J)\\
B_y''(i+1,j+1)&=B_y'(i+1,j+1)-\Delta B_y(I,J)\\
B_y''(i,j+1)&=B_y'(i,j+1)-\Delta B_y(I,J)\\
B_y''(i,j)&=B_y'(i,j)+\Delta B_y(I,J)
\end{aligned}\right\} . \qquad (3.38)$$

4. Se calculează valorile necunoscutelor H_x'' şi H_y'' din punctele de colţ ale elementului asupra căruia se efectuează iterarea. Pentru nodurile plasate în mediu liniar,

$$\left.\begin{aligned}
H_x''&=\frac{B_x''}{\mu_l}\\
H_y''&=\frac{B_y''}{\mu_l}
\end{aligned}\right\} . \qquad (3.39)$$

Pentru nodurile plasate în mediu neliniar izotrop,

$$\left.\begin{aligned}
H_x''&=B_x''\,\frac{1}{\mu}(B'')\\
H_y''&=B_y''\,\frac{1}{\mu}(B'')
\end{aligned}\right\} . \qquad (3.40)$$

II. Etapa 2: iterarea după ε_B:

1. Se calculează:

$$\varepsilon_B(I,J)=p_y\left[B_x'(i+1,j)-B_x'(i+1,j+1)-B_x'(i,j+1)+B_x'(i,j)\right]+$$
$$+p_x\left[B_y'(i+1,j)+B_y'(i+1,j+1)-B_y'(i,j+1)-B_y'(i,j)\right] ; \qquad (3.41)$$

2. Se determină:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta H(I,J)&=\frac{\varepsilon_B(I,J)}{Z_B(I,J)}\\
\Delta H_x(I,J)&=\frac{p_y}{\sqrt{p_x p_y}}\,\Delta H(I,J)
\end{aligned}\right\} . \qquad (3.42)$$

$$H_y(I,J)=\frac{p_y}{\sqrt{p_x p_y}}\,\Delta H(I,J)$$

$\Delta H_x(I,J)$ şi $\Delta H_x(I,J)$ sînt corecţiile care se vor aplica în cadrul etapei 2 valorilor iniţiale H_x', respectiv H_y' ale necunoscutelor; alegerea mărimii $Z_B(I,J)$ va fi de asemenea tratată ulterior.

3. Se calculează valorile necunoscutelor H_x'' şi H_y'' din nodurile reţelei ce constituie puncte de colţ ale elementului asupra căruia se efectuează iterarea, cu relaţiile

$$\left.\begin{aligned}
H_x''(i+1,j)&=H_x'(i+1,j)-\Delta H_x(I,J)\\
H_x''(i+1,j+1)&=H_x'(i+1,j+1)+\Delta H_x(I,J)\\
H_x''(i,j+1)&=H_x'(i,j+1)+\Delta H_x(I,J)\\
H_x''(i,j)&=H_x'(i,j)-\Delta H_x(I,J)\\
H_y''(i+1,j)&=H_y'(i+1,j)-\Delta H_y(I,J)\\
H_y''(i+1,j+1)&=H_y'(i+1,j+1)-\Delta H_y(I,J)\\
H_y''(i,j+1)&=H_y'(i,j+1)+\Delta H_y(I,J)\\
H_y''(i,j)&=H_y'(i,j)+\Delta H_y(I,J)
\end{aligned}\right\} . \tag{3.43}$$

4. Se calculează valorile necunoscutelor B_x'' şi B_y'' din punctele de colţ ale elementului asupra căruia se efectuează iterarea. Pentru nodurile plasate în mediu liniar,

$$\left.\begin{aligned}
B_x''&=\mu_l H_x''\\
B_y''&=\mu_l H_y''
\end{aligned}\right\} , \tag{3.44}$$

iar pentru nodurile plasate în mediu neliniar izotrop,

$$\left.\begin{aligned}
B_x''&=H_x''\,\mu(H'')\\
B_y''&=H_y''\,\mu(H'')
\end{aligned}\right\} . \tag{3.45}$$

Iterarea conform relaţiilor (3.36 - 3.45) se efectuează pentru toate elementele reţelei. Pentru elementele care au puncte de colţ pe frontiera domeniului D, după aplicarea relaţiilor (3.38), componentele lui $\bar{B}$ din nodurile de pe frontieră care conform condiţiei (3.5) trebuie să fie nule, se anulează. De asemenea, pentru elementele care au puncte de colţ pe frontiera domeniului D, după aplicarea relaţiilor (3.43), componentele lui $\bar{H}$ din nodurile de pe frontieră care conform condiţiei (3.6) trebuie să fie nule, se anulează.

Pe baza celor de mai sus se poate concepe procedeul de calcul în modul următor: iterarea conform relațiilor (3.36 - 3.45) se efectuează prin baleierea elementelor din care este compusă rețeaua de discretizare, cu impunerea în cazul elementelor ce au puncte de colț pe frontiera domeniului a condițiilor (3.5) sau (3.6). Se rețin cele mai mari valori $|\varepsilon_H(I,J)|$ și $|\varepsilon_B(I,J)|$, notate în continuare cu ε_{Hmax}, respectiv ε_{Bmax}, obținute la o baleiere completă a elementelor rețelei de discretizare, și se verifică dacă

$$\varepsilon_{Hmax} < \varepsilon_{HMax}, \tag{3.46}$$

$$\varepsilon_{Bmax} < \varepsilon_{BMax}. \tag{3.47}$$

Dacă relațiile (3.46, 3.47) sînt satisfăcute, se consideră procesul iterativ de calcul terminat; în caz contrar se repetă iterarea prin baleierea elementelor. Soluția problemei de cîmp este constituită din mulțimea valorilor componentelor lui $\bar{H}$ și $\bar{B}$ în toate nodurile rețelei, de la sfîrșitul ultimei iterații. Se pot calcula și valorile intensității cîmpului magnetic și inducției magnetice în nodurile rețelei cu relațiile (3.32, 3.33).

3.6. Alegerea mărimilor $Z_H(I,J)$ și $Z_B(I,J)$

Mărimile $Z_H(I,J)$ și $Z_B(I,J)$ trebuiesc astfel alese încît procesul iterativ de calcul să fie convergent iar viteza de convergență cît mai mare posibil.

Fie H_x, H_y, B_x și B_y valorile căutate ale necunoscutelor într-un nod oarecare al rețelei de discretizare. Aceste valori satisfac sistemul de ecuații (3.13 - 3.15, 3.5, 3.6). Se consideră că într-un moment oarecare al calculului necunoscutele în nodul arbitrar ales au valorile $H_x+\alpha_x$, $H_y+\alpha_y$, $B_x+\beta_x$ și respectiv $B_y+\beta_y$, unde α_x, α_y, β_x și β_y sînt erorile care afectează valorile necunoscutelor în momentul considerat al calculului. Aplicînd formula creșterilor finite [3, 65], se pot scrie relațiile:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\partial H_x}{\partial B_x}\beta_x + \frac{\partial H_x}{\partial B_y}\beta_y \\ \alpha_y &= \frac{\partial H_y}{\partial B_x}\beta_x + \frac{\partial H_y}{\partial B_y}\beta_y \end{aligned}\right\}, \tag{3.48}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_x &= \frac{\partial B_x}{\partial H_x}\alpha_x + \frac{\partial B_x}{\partial H_y}\alpha_y \\ \beta_y &= \frac{\partial B_y}{\partial H_x}\alpha_x + \frac{\partial B_y}{\partial H_y}\alpha_y \end{aligned}\right\} . \tag{3.49}$$

Derivatele parţiale din relaţiile (3.48, 3.49) se calculează pe baza relaţiilor (3.15) care ţin cont de proprietăţile magnetice ale mediului în nod.

Relaţiile (3.48, 3.49) sînt satisfăcute în cazul unui mediu liniar pentru orice valori ale erorilor α_x, α_y, β_x şi β_y; în cazul unui mediu neliniar relaţiile (3.48, 3.49) sînt satisfăcute pentru valori infinit mici ale erorilor α_x, α_y, β_x şi β_y şi aproximativ satisfăcute pentru valori suficient de mici ale erorilor α_x, α_y, β_x şi β_y.

Forma funcţiilor (3.15) corespunzătoare unui mediu neliniar izotrop permite scrierea relaţiilor

$$\frac{\partial H_x}{\partial B_y} = \frac{\partial H_y}{\partial B_x} , \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial H_y} = \frac{\partial B_y}{\partial H_x} \tag{3.51}$$

în nodurile reţelei aflate în mediu neliniar.

Se defineşte o eroare globală referitoare la etapa 1 de iterare după ε_H pentru elementul identificat prin punctul de colţ (i,j), prin relaţia

$$\sigma_H(I,J)=\sum_1^4 (\alpha_x\ \beta_x + \alpha_y\ \beta_y), \tag{3.52}$$

unde suma se efectuează asupra celor 4 puncte de colţ ale elementului. La începutul etapei 1 se poate deci scrie

$$\sigma_H'(I,J)=\sum_1^4 (\alpha_x'\ \beta_x' + \alpha_y'\ \beta_y'), \tag{3.53}$$

iar la sfîrşitul etapei 1,

$$\sigma_H''(I,J)=\sum_1^4 (\alpha_x''\ \beta_x'' + \alpha_y''\ \beta_y''). \tag{3.54}$$

Se vor stabili condiţiile în care diferenţa $\sigma_H'(I,J)-$ $-\sigma_H''(I,J)$ este pozitivă, ceea ce asigură convergenţa procesului iterativ corespunzător etapei 1.

Pe baza relaţiilor (3.38) se poate scrie

$$\left.\begin{aligned}
\beta_x''(i+1,j) &= \beta_x'(i+1,j) - \Delta B_x(I,J)\\
\beta_x''(i+1,j+1) &= \beta_x'(i+1,j+1) - \Delta B_x(I,J)\\
\beta_x''(i,j+1) &= \beta_x'(i,j+1) + \Delta B_x(I,J)\\
\beta_x''(i,j) &= \beta_x'(i,j) + \Delta B_x(I,J)\\
\beta_y''(i+1,j) &= \beta_y'(i+1,j) + \Delta B_y(I,J)\\
\beta_y''(i+1,j+1) &= \beta_y'(i+1,j+1) - \Delta B_y(I,J)\\
\beta_y''(i,j+1) &= \beta_y'(i,j+1) - \Delta B_y(I,J)\\
\beta_y''(i,j) &= \beta_y'(i,j) + \Delta B_y(I,J)
\end{aligned}\right\} . \qquad (3.55)$$

De asemenea, pe baza relaţiilor (3.48, 3.55) rezultă

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_x''(i+1,j) &= \alpha_x'(i+1,j) - \frac{\partial H_x}{\partial B_x}(i+1,j)\,\Delta B_x(I,J) +\\
&+ \frac{\partial H_x}{\partial B_y}(i+1,j)\,\Delta B_y(I,J)\\
\alpha_x''(i+1,j+1) &= \alpha_x'(i+1,j+1) - \frac{\partial H_x}{\partial B_x}(i+1,j+1)\,\Delta B_x(I,J) -\\
&- \frac{\partial H_x}{\partial B_y}(i+1,j+1)\,\Delta B_y(I,J)\\
\alpha_x''(i,j+1) &= \alpha_x'(i,j+1) + \frac{\partial H_x}{\partial B_x}(i,j+1)\,\Delta B_x(I,J) -\\
&- \frac{\partial H_x}{\partial B_y}(i,j+1)\,\Delta B_y(I,J)\\
\alpha_x''(i,j) &= \alpha_x'(i,j) + \frac{\partial H_x}{\partial B_x}(i,j)\,\Delta B_x(I,J) + \frac{\partial H_x}{\partial B_y}(i,j)\,\Delta B_y(I,J)\\
\alpha_y''(i+1,j) &= \alpha_y'(i+1,j) - \frac{\partial H_y}{\partial B_x}(i+1,j)\,\Delta B_x(I,J) +\\
&+ \frac{\partial H_y}{\partial B_y}(i+1,j)\,\Delta B_y(I,J)\\
\alpha_y''(i+1,j+1) &= \alpha_y'(i+1,j+1) - \frac{\partial H_y}{\partial B_x}(i+1,j+1)\,\Delta B_x(I,J) -\\
&- \frac{\partial H_y}{\partial B_y}(i+1,j+1)\,\Delta B_y(I,J)
\end{aligned}\right\} \qquad (3.56)$$

$$\alpha_y''(i,j+1)=\alpha_y'(i,j+1)+\frac{\partial H_y}{\partial B_x}(i,j+1)\,\Delta B_x(I,J)-$$
$$-\frac{\partial H_y}{\partial B_y}(i,j+1)\,\Delta B_y(I,J)$$
$$\alpha_y''(i,j)=\alpha_y'(i,j)+\frac{\partial H_y}{\partial B_x}(i,j)\,\Delta B_x(I,J)+\frac{\partial H_y}{\partial B_y}(i,j)\,\Delta B_y(I,J)$$

Tinînd cont de relațiile (3.37, 3.48, 3,55, 3.56) se poate pune diferența $\sigma_H'-\sigma_H''$ calculată pentru nodul (i+1,j) sub forma

$$\sigma_H'(i+1,j)-\sigma_H''(i+1,j)=\frac{2\Delta B(I,J)}{\sqrt{p_x p_y}}\Big[p_x\,\alpha_x'(i+1,j)-$$
$$-p_y\,\alpha_y'(i+1,j)\Big]-\Delta B^2(I,J)\Big[\frac{p_x}{p_y}\,\frac{\partial H_x}{\partial B_x}(i+1,j)-\frac{\partial H_x}{\partial B_y}(i+1,j)-$$
$$-\frac{\partial H_y}{\partial B_x}(i+1,j)+\frac{p_y}{p_x}\,\frac{\partial H_y}{\partial B_y}(i+1,j)\Big]\;. \qquad (3.57)$$

In mod similar se deduc pentru celelalte 3 noduri relațiile :

$$\sigma_H'(i+1,j+1)-\sigma_H''(i+1,j+1)=\frac{2\Delta B(I,J)}{\sqrt{p_x p_y}}\Big[p_x\,\alpha_x'(i+1,j+1)+$$
$$+p_y\,\alpha_y'(i+1,j+1)\Big]-\Delta B^2(I,J)\Big[\frac{p_x}{p_y}\,\frac{\partial H_x}{\partial B_x}(i+1,j+1)+$$
$$+\frac{\partial H_x}{\partial B_y}(i+1,j+1)+\frac{\partial H_y}{\partial B_x}(i+1,j+1)+\frac{p_y}{p_x}\,\frac{\partial H_y}{\partial B_y}(i+1,j+1)\Big]\;, \qquad (3.58)$$

$$\sigma_H'(i,j+1)-\sigma_H''(i,j+1)=\frac{2\Delta B(I,J)}{\sqrt{p_x p_y}}\Big[-p_x\,\alpha_x'(i,j+1)+$$
$$+p_y\,\alpha_y'(i,j+1)\Big]-\Delta B^2(I,J)\Big[\frac{p_x}{p_y}\,\frac{\partial H_x}{\partial B_x}(i,j+1)-\frac{\partial H_x}{\partial B_y}(i,j+1)-$$
$$-\frac{\partial H_y}{\partial B_x}(i,j+1)+\frac{p_y}{p_x}\,\frac{\partial H_y}{\partial B_y}(i,j+1)\Big]\;, \qquad (3.59)$$

$$\sigma_H'(i,j)-\sigma_H''(i,j)=\frac{2\Delta B(I,J)}{\sqrt{p_x p_y}}\Big[-p_x\,\alpha_x'(i,j)-p_y\,\alpha_y'(i,j)\Big]-$$
$$-\Delta B^2(I,J)\Big[\frac{p_x}{p_y}\,\frac{\partial H_x}{\partial B_x}(i,j)+\frac{\partial H_x}{\partial B_y}(i,j)+\frac{\partial H_y}{\partial B_x}(i,j)+$$
$$+\frac{p_y}{p_x}\,\frac{\partial H_y}{\partial B_y}(i,j)\Big]\;. \qquad (3.60)$$

Avînd în vedere că

$$\varepsilon_H(I,J)=p_x\left[\alpha'_x(i+1,j)+\alpha'_x(i+1,j+1)-\alpha'_x(i,j+1)-\alpha'_x(i,j)\right]+$$
$$+p_y\left[-\alpha'_y(i+1,j)+\alpha'_y(i+1,j+1)+\alpha'_y(i,j+1)-\alpha'_y(i,j)\right] \tag{3.61}$$

şi ţinînd cont de prima relaţie (3.37), prin însumarea relaţiilor (3.57 - 3.60) rezultă

$$\sigma'_H(I,J)-\sigma''_H(I,J)=\Delta B(I,J)\,\varepsilon_H(I,J)\left[\frac{2}{\sqrt{p_x p_y}}-\frac{\tau_H(I,J)}{Z_H(I,J)}\right], \tag{3.62}$$

unde

$$\tau_H(I,J)=\tau_H(i+1,j)+\tau_H(i+1,j+1)+\tau_H(i,j+1)+\tau_H(i,j) \tag{3.63}$$

şi

$$\left.\begin{aligned}
\tau_H(i+1,j)&=\frac{p_x}{p_y}\frac{\partial H_x}{\partial B_x}(i+1,j)-\frac{\partial H_x}{\partial B_y}(i+1,j)-\frac{\partial H_y}{\partial B_x}(i+1,j)+\\
&+\frac{p_y}{p_x}\frac{\partial H_y}{\partial B_y}(i+1,j)\\
\tau_H(i+1,j+1)&=\frac{p_x}{p_y}\frac{\partial H_x}{\partial B_x}(i+1,j+1)+\frac{\partial H_x}{\partial B_y}(i+1,j+1)+\\
&+\frac{\partial H_y}{\partial B_x}(i+1,j+1)+\frac{p_y}{p_x}\frac{\partial H_y}{\partial B_y}(i+1,j+1)\\
\tau_H(i,j+1)&=\frac{p_x}{p_y}\frac{\partial H_x}{\partial B_x}(i,j+1)-\frac{\partial H_x}{\partial B_y}(i,j+1)-\frac{\partial H_y}{\partial B_x}(i,j+1)+\\
&+\frac{p_y}{p_x}\frac{\partial H_y}{\partial B_y}(i,j+1)\\
\tau_H(i,j)&=\frac{p_x}{p_y}\frac{\partial H_x}{\partial B_x}(i,j)+\frac{\partial H_x}{\partial B_y}(i,j)+\frac{\partial H_y}{\partial B_x}(i,j)+\frac{p_y}{p_x}\frac{\partial H_y}{\partial B_y}(i,j)
\end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

Diferenţa $\sigma'_H(I,J)-\sigma''_H(I,J)$ este deci pozitivă pentru

$$Z_H(I,J)>\frac{\sqrt{p_x p_y}}{2}\,\tau_H(I,J)\,. \tag{3.65}$$

In continuare se analizează modul de alegere a mărimii $Z_B(I,J)$. Se defineşte de asemenea o eroare globală referitoare la etapa 2 de iterare după ε_B pentru un element identificat prin punctul de colţ (i,j), prin relaţia

$$\sigma_B(I,J)=\sum_{1}^{4}(\alpha_x\,\beta_x+\alpha_y\,\beta_y). \tag{3.66}$$

La începutul etapei 2,

$$\sigma_B'(I,J)=\sum_{1}^{4}(\alpha_x'\,\beta_x'+\alpha_y'\,\beta_y'), \tag{3.67}$$

iar la sfîrşitul etapei 2,

$$\sigma_B''(I,J)=\sum_{1}^{4}(\alpha_x''\,\beta_x''+\alpha_y''\,\beta_y''). \tag{3.68}$$

Se urmăreşte determinarea condiţiilor în care diferenţa $\sigma_B'(I,J)-\sigma_B''(I,J)$ este pozitivă. Pe baza relaţiilor (3.43) se poate scrie

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_x''(i+1,j)=\alpha_x'(i+1,j)-\Delta H_x(I,J)\\
&\alpha_x''(i+1,j+1)=\alpha_x'(i+1,j+1)+\Delta H_x(I,J)\\
&\alpha_x''(i,j+1)=\alpha_x'(i,j+1)+\Delta H_x(I,J)\\
&\alpha_x''(i,j)=\alpha_x'(i,j)-\Delta H_x(I,J)\\
&\alpha_y''(i+1,j)=\alpha_y'(i+1,j)-\Delta H_y(I,J)\\
&\alpha_y''(i+1,j+1)=\alpha_y'(i+1,j+1)-\Delta H_y(I,J)\\
&\alpha_y''(i,j+1)=\alpha_y'(i,j+1)+\Delta H_y(I,J)\\
&\alpha_y''(i,j)=\alpha_y'(i,j)+\Delta H_y(I,J)
\end{aligned}\right\}. \tag{3.69}$$

De asemenea, pe baza relaţiilor (3.49, 3.69) rezultă

$$\begin{aligned}
&\beta_x''(i+1,j)=\beta_x'(i+1,j)-\frac{\partial B_x}{\partial H_x}(i+1,j)\,\Delta H_x(I,J)-\\
&-\frac{\partial B_x}{\partial H_y}(i+1,j)\,\Delta H_y(I,J)\\
&\beta_x''(i+1,j+1)=\beta_x'(i+1,j+1)+\frac{\partial B_x}{\partial H_x}(i+1,j+1)\,\Delta H_x(I,J)-\\
&-\frac{\partial B_x}{\partial H_y}(i+1,j+1)\,\Delta H_y(I,J)\\
&\beta_x''(i,j+1)=\beta_x'(i,j+1)+\frac{\partial B_x}{\partial H_x}(i,j+1)\,\Delta H_x(I,J)+\\
&+\frac{\partial B_x}{\partial H_y}(i,j+1)\,\Delta H_y(I,J)\\
&\beta_x''(i,j)=\beta_x'(i,j)-\frac{\partial B_x}{\partial H_x}(i,j)\,\Delta H_x(I,J)+
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&+\frac{\partial B_x}{\partial H_y}(i,j)\,\Delta H_y(I,J)\\
&\beta_y''(i+1,j)=\beta_y'(i+1,j)-\frac{\partial B_y}{\partial H_x}(i+1,j)\,\Delta H_x(I,J)-\\
&-\frac{\partial B_y}{\partial H_y}(i+1,j)\,\Delta H_y(I,J)\\
&\beta_y''(i+1,j+1)=\beta_y'(i+1,j+1)+\frac{\partial B_y}{\partial H_x}(i+1,j+1)\,\Delta H_x(I,J)-\\
&-\frac{\partial B_y}{\partial H_y}(i+1,j+1)\,\Delta H_y(I,J)\\
&\beta_y''(i,j+1)=\beta_y'(i,j+1)+\frac{\partial B_y}{\partial H_x}(i,j+1)\,\Delta H_x(I,J)+\\
&+\frac{\partial B_y}{\partial H_y}(i,j+1)\,\Delta H_y(I,J)\\
&\beta_y''(i,j)=\beta_y'(i,j)-\frac{\partial B_y}{\partial H_x}(i,j)\,\Delta H_x(I,J)+\\
&+\frac{\partial B_y}{\partial H_y}(i,j)\,\Delta H_y(I,J)
\end{aligned}\right\}\quad(3.7o)$$

Scriind pe $\varepsilon_B(I,J)$ sub forma

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_B(I,J)=p_y\left[\beta_x'(i+1,j)-\beta_x'(i+1,j+1)-\beta_x'(i,j+1)+\right.\\
&\left.+\beta_x'(i,j)\right]+p_x\left[\beta_y'(i+1,j)+\beta_y'(i+1,j+1)-\beta_y'(i,j+1)-\right.\\
&\left.-\beta_y'(i,j)\right]
\end{aligned}\qquad(3.71)$$

şi ţinînd cont de relaţiile (3.42, 3.49, 3.7o, 3.71), se ajunge în final la

$$\sigma_B'(I,J)-\sigma_B''(I,J)=\Delta H(I,J)\,\varepsilon_B(I,J)\left[\frac{2}{\sqrt{p_x p_y}}-\frac{\tau_B(I,J)}{Z_B(I,J)}\right],\qquad(3.72)$$

unde

$$\tau_B(I,J)=\tau_B(i+1,j)+\tau_B(i+1,j+1)+\tau_B(i,j+1)+\tau_B(i,j)\qquad(3.73)$$

şi

$$\tau_B(i+1,j)=\frac{p_y}{p_x}\frac{\partial B_x}{\partial H_x}(i+1,j)+\frac{\partial B_x}{\partial H_y}(i+1,j)+$$

$$\left.\begin{aligned}
&+\frac{\partial B_y}{\partial H_x}(i+1,j)+\frac{p_x}{p_y}\frac{\partial B_y}{\partial H_y}(i+1,j)\\
&\tau_B(i+1,j+1)=\frac{p_y}{p_x}\frac{\partial B_x}{\partial H_x}(i+1,j+1)-\frac{\partial B_x}{\partial H_y}(i+1,j+1)-\\
&-\frac{\partial B_y}{\partial H_x}(i+1,j+1)+\frac{p_x}{p_y}\frac{\partial B_y}{\partial H_y}(i+1,j+1)\\
&\tau_B(i,j+1)=\frac{p_y}{p_x}\frac{\partial B_x}{\partial H_x}(i,j+1)+\frac{\partial B_x}{\partial H_y}(i,j+1)+\\
&+\frac{\partial B_y}{\partial H_x}(i,j+1)+\frac{p_x}{p_y}\frac{\partial B_y}{\partial H_y}(i,j+1)\\
&\tau_B(i,j)=\frac{p_y}{p_x}\frac{\partial B_x}{\partial H_x}(i,j)-\frac{\partial B_x}{\partial H_y}(i,j)-\frac{\partial B_y}{\partial H_x}(i,j)+\\
&+\frac{p_x}{p_y}\frac{\partial B_y}{\partial H_y}(i,j)
\end{aligned}\right\} \qquad (3.74)$$

Diferența $\sigma_B'(I,J)-\sigma_B''(I,J)$ este pozitivă dacă este satisfăcută condiția

$$z_B(I,J) > \frac{\sqrt{p_x p_y}}{2}\,\tau_B(I,J). \qquad (3.75)$$

In cazul unui mediu liniar iar pentru valori ale erorilor α_x, α_y, β_x și β_y suficient de mici și în cazul unui mediu neliniar, satisfacerea condițiilor (3.65, 3.75) este necesară și suficientă pentru ca erorile globale $\sigma_H(I,J)$ și $\sigma_B(I,J)$ să scadă la fiecare iterare după ε_H și ε_B, în condiții în care $\varepsilon_H(I,J)$ și $\varepsilon_B(I,J)$ sînt nenule, ceea ce echivalează cu asigurarea convergenței procesului iterativ de calcul.

Viteza de convergență a procesului iterativ este influențată de modul de alegere a mărimilor $z_H(I,J)$ și $z_B(I,J)$, în condițiile satisfacerii relațiilor (3.65, 3.75). Dacă se aleg

$$z_H(I,J)=k_r\sqrt{p_x p_y}\,\tau_H(I,J), \qquad (3.76)$$

$$z_B(I,J)=k_r\sqrt{p_x p_y}\,\tau_B(I,J), \qquad (3.77)$$

atunci pentru un coeficient de relaxare

$$k_r > 0{,}5 \qquad (3.78)$$

convergența este asigurată. In [11] se recomandă să se lucreze în cadrul unei rețele de discretizare cu pas uniform cu $k_r=(0{,}8-1)$ în faza inițială a procesului de calcul și cu $k_r=(0{,}55-0{,}6)$ în faza finală, fără alte precizări privind lungimea fazelor şi modul de scădere a lui k_r la trecerea de la o fază la alta. O alegere corespunzătoare a lui k_r ca şi variaţia potrivită a lui de-a lungul procesului iterativ poate creşte sensibil viteza de convergenţă. Dar, după [48], în cazul metodelor iterative, viteza de convergenţă depinde nu numai de coeficientul de relaxare ci şi de dimensiunile geometrice ale reţelei de discretizare şi de lungimile temporale ale fazelor de calcul. De asemenea, modul de alegere a valorilor iniţiale ale necunoscutelor influenţează durata procesului de calcul. In capitolul 4 se analizează şi alţi factori din punctul de vedere al influenţei lor asupra vitezei de convergenţă.

Deoarece în cadrul relaţiilor (3.63, 3.73) se efectuează sume de egală pondere asupra a 4 termeni ce se referă la cele 4 puncte de colţ ale unui element, sînt posibile pentru elementul evidenţiat în fig.3.4, care nu are nici o latură suprapusă peste

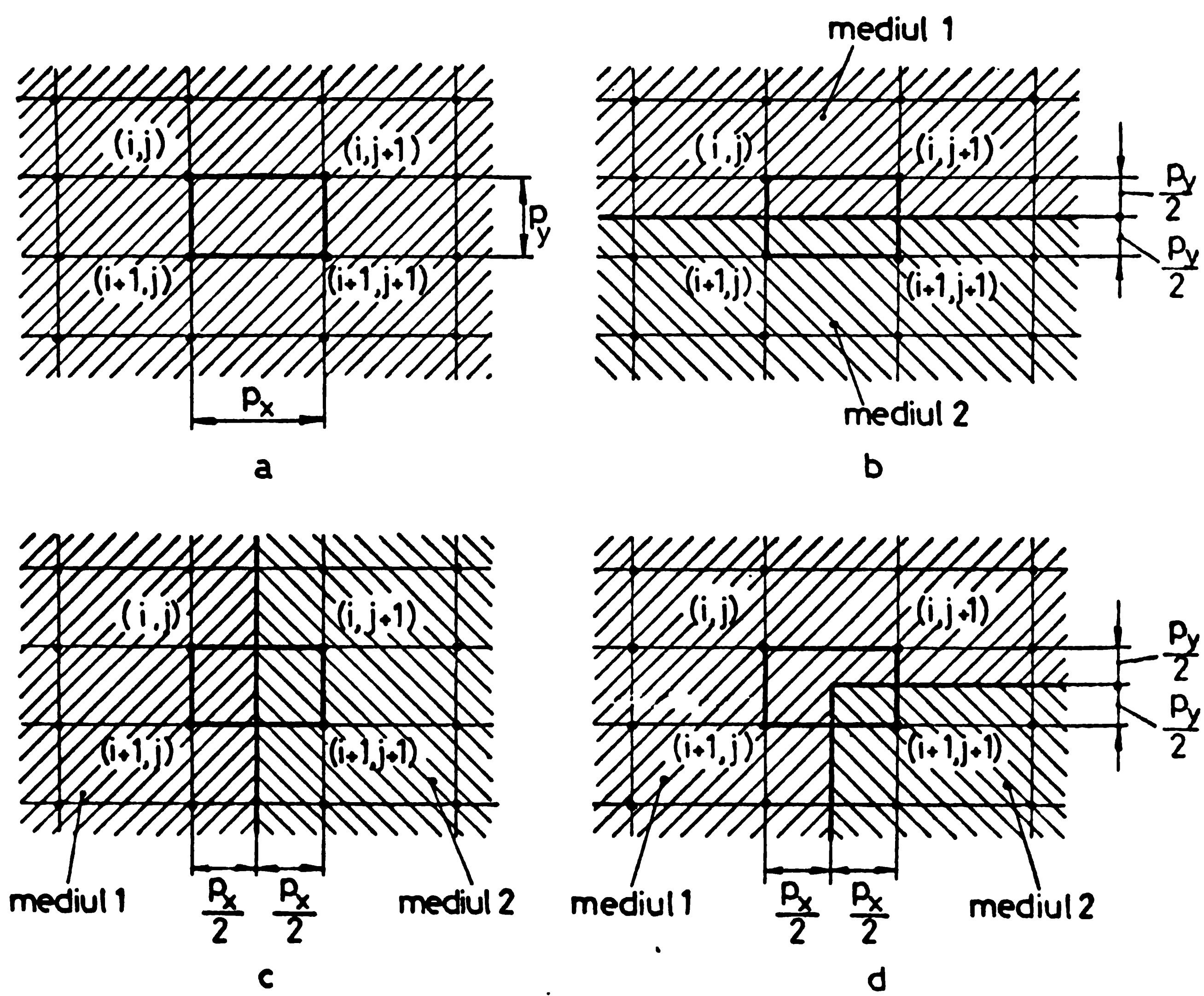


Fig.3.4

frontiera domeniului D, 4 situaţii de poziţie, în ipoteza existenţei a două medii omogene cu proprietăţi magnetice diferite în interiorul domeniului D. In fig.3.4.a, toate punctele de colţ ale elementului sînt situate în acelaşi mediu. In fig.3.4.b punctele de colţ (i,j+1) şi (i,j) sînt situate în mediul 1 iar punctele de colţ (i+1,j)şi (i+1,j+1) în mediul 2. In fig.3.4.c punctele de colţ (i+1,j) şi (i,j) sînt situate în mediul 1 iar punctele de colţ (i+1,j+1) şi (i,j+1) în mediul 2; în sfîrşit, în fig.3.4.d, punctele de colţ (i+1,j), (i,j+1) şi (i,j) sînt situate în mediul 1 iar punctul de colţ (i+1,j+1) în mediul 2. Proprietăţile magnetice vor trebui să fie aceleaşi în interiorul elementului analizat pe o arie egală cu un multiplu întreg al unui sfert din aria elementului. Concluzia este valabilă şi pentru existenţa în interiorul domeniului D a mai mult de două medii omogene cu proprietăţi magnetice diferite.

Pentru un element care are una sau două laturi suprapuse peste frontiera domeniului D (fig.3.5.a, respectiv 3.5.b), toate punctele de colţ se vor considera situate în mediul 1 întrucît

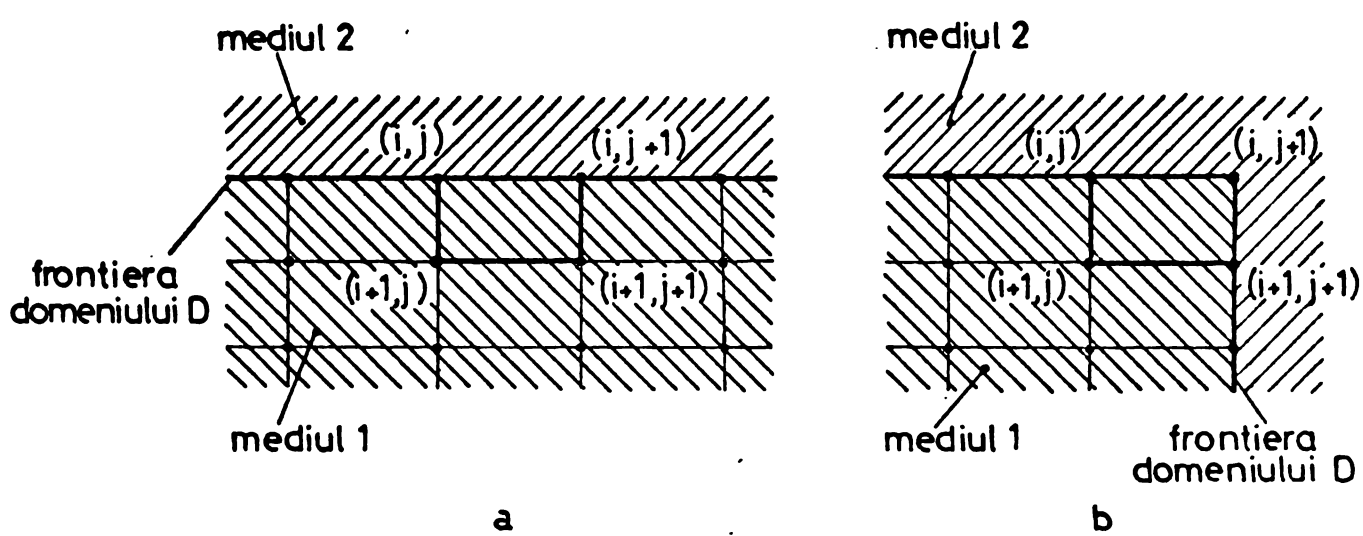


Fig.3.5

baleierea elementelor în cadrul reţelei se face numai în interiorul frontierei domeniului D.

Relaţiile (3.64, 3.74) obţin forme particulare pentru noduri ale reţelei de discretizare situate pe porţiuni ale frontierei domeniului D pe care sînt satisfăcute condiţiile (3.5) sau (3.6). Pentru un nod oarecare în care

$$H_x=o, \quad B_x=o, \tag{3.79}$$

$$\tau_H = \frac{p_y}{p_x}\,\frac{\partial H_y}{\partial B_y} \tag{3.8o}$$

şi

$$\tau_B = \frac{p_x}{p_y} \frac{B_y}{H_y} \,. \tag{3.81}$$

Dacă

$$H_y=o, \; B_y=o, \tag{3.82}$$

atunci

$$\tau_H = \frac{p_x}{p_y} \frac{\partial H_x}{\partial B_x} \tag{3.83}$$

şi

$$\tau_B = \frac{p_y}{p_x} \frac{\partial B_x}{\partial H_x} \,. \tag{3.84}$$

In sfîrşit, dacă pe baza condiţiilor (3.5, 3.6)

$$H_x=H_y=o, \; B_x=B_y=o, \tag{3.85}$$

atunci

$$\tau_H=o \tag{3.86}$$

şi

$$\tau_B=o. \tag{3.87}$$

In cazul general mărimile $\tau_H(I,J)$ şi $\tau_B(I,J)$ vor fi diferite de la un element la altul, motiv pentru care $Z_H(I,J)$ şi $Z_B(I,J)$ vor trebui calculate pentru fiecare element la fiecare iterare. Derivatele parţiale care intervin în $\tau_H(I,J)$ şi $\tau_B(I,J)$ se vor calcula funcţie de valorile cunoscute în momentul considerat al calculului pentru componentele H_x, H_y, B_x şi B_y în cele 4 puncte de colţ ale elementului. Sînt posibile mai multe situaţii, funcţie de mediul în care este plasat punctul de colţ şi de poziţia lui în cadrul domeniului D.

1. Mediu liniar

a/ Nod oarecare în care nu se impune o condiţie de forma (3.5, 3.6). Intrucît

$$\frac{\partial H_x}{\partial B_x} = \frac{\partial H_y}{\partial B_y} = \frac{1}{\mu_l} \,, \quad \frac{\partial B_x}{\partial H_x} = \frac{\partial B_y}{\partial H_y} = \mu_l \,, \tag{3.88}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial B_y} = \frac{\partial H_y}{\partial B_x} = o, \quad \frac{\partial B_x}{\partial H_y} = \frac{\partial B_y}{\partial H_x} = o, \tag{3.89}$$

rezultă

$$\tau_H = \left(\frac{p_x}{p_y} + \frac{p_y}{p_x}\right) \frac{1}{\mu_l} \tag{3.9o}$$

şi

$$\tau_B=\left(\frac{p_x}{p_y}+\frac{p_y}{p_x}\right)\mu_\ell\ . \tag{3.91}$$

b/ Nod oarecare în care se impune o condiţie de forma (3.5, 3.6), astfel încît

$$H_x=o,\ B_x=o. \tag{3.92}$$

Se obţine

$$\tau_H=\frac{p_y}{p_x}\frac{1}{\mu_\ell} \tag{3.93}$$

şi

$$\tau_B=\frac{p_x}{p_y}\mu_\ell\ . \tag{3.94}$$

c/ Nod oarecare în care se impune o condiţie de forma (3.5, 3.6), astfel încît

$$H_y=o,\ B_y=o. \tag{3.95}$$

Se obţine

$$\tau_H=\frac{p_x}{p_y}\frac{1}{\mu_\ell} \tag{3.96}$$

şi

$$\tau_B=\frac{p_y}{p_x}\mu_\ell\ . \tag{3.97}$$

2. Mediu neliniar izotrop

Cele 4 relaţii (3.64) diferă între ele sub aspectul semnelor din faţa termenilor, putînd fi grupate cîte două: cele care se referă la nodurile (i+1,j) şi (i,j+1) şi apoi cele care se referă la nodurile (i+1,j+1) şi (i,j). In acelaşi mod se pot grupa şi cele 4 relaţii (3.74).

In general se pot scrie relaţiile

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H_x}{\partial B_x}&=\frac{\partial(B_x/\mu)}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial B_x}=\frac{1}{\mu}+\frac{B_x^2}{B}\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}\\
\frac{\partial H_x}{\partial B_y}&=\frac{\partial(B_x/\mu)}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial B_y}=\frac{B_xB_y}{B}\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}\\
\frac{\partial H_y}{\partial B_x}&=\frac{\partial(B_y/\mu)}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial B_x}=\frac{B_xB_y}{B}\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}\\
\frac{\partial H_y}{\partial B_y}&=\frac{\partial(B_y/\mu)}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial B_y}=\frac{1}{\mu}+\frac{B_y^2}{B}\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}
\end{aligned}\right\} \tag{3.98}$$

şi

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial B_x}{\partial H_x} &= \frac{\partial(\mu H_x)}{\partial H}\,\frac{\partial H}{\partial H_x} = \mu + \frac{H_x^2}{H}\,\frac{\partial \mu}{\partial H}\\
\frac{\partial B_x}{\partial H_y} &= \frac{\partial(\mu H_x)}{\partial H}\,\frac{\partial H}{\partial H_y} = \frac{H_x H_y}{H}\,\frac{\partial \mu}{\partial H}\\
\frac{\partial B_y}{\partial H_x} &= \frac{\partial(\mu H_y)}{\partial H}\,\frac{\partial H}{\partial H_x} = \frac{H_x H_y}{H}\,\frac{\partial \mu}{\partial H}\\
\frac{\partial B_y}{\partial H_y} &= \frac{\partial(\mu H_y)}{\partial H}\,\frac{\partial H}{\partial H_y} = \mu + \frac{H_y^2}{H}\,\frac{\partial \mu}{\partial H}
\end{aligned}\right\} . \tag{3.99}$$

a/ Nu se impune o condiţie de forma (3.5) sau (3.6). Pentru un nod (i+1,j) sau (i,j+1) rezultă, cu considerarea relaţiilor (3.98),

$$\tau_H = \left(\frac{p_x}{p_y} + \frac{p_y}{p_x}\right)\frac{1}{\mu} + \frac{\frac{p_x}{p_y}B_x^2 + \frac{p_y}{p_x}B_y^2 - 2B_xB_y}{B}\,\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}\,, \tag{3.100}$$

iar pentru un nod (i+1,j+1) sau (i,j),

$$\tau_H = \left(\frac{p_x}{p_y} + \frac{p_y}{p_x}\right)\frac{1}{\mu} + \frac{\frac{p_x}{p_y}B_x^2 + \frac{p_y}{p_x}B_y^2 + 2B_xB_y}{B}\,\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}\,. \tag{3.101}$$

Mai departe, ţinînd cont de relaţiile (3.99), pentru un nod (i+1,j) sau (i,j+1) se obţine

$$\tau_B = \left(\frac{p_x}{p_y} + \frac{p_y}{p_x}\right)\mu + \frac{\frac{p_y}{p_x}H_x^2 + \frac{p_x}{p_y}H_y^2 + 2H_xH_y}{H}\,\frac{\partial \mu}{\partial H} \tag{3.102}$$

iar pentru un nod (i+1,j+1) sau (i,j),

$$\tau_B = \left(\frac{p_x}{p_y} + \frac{p_y}{p_x}\right)\mu + \frac{\frac{p_y}{p_x}H_x^2 + \frac{p_x}{p_y}H_y^2 - 2H_xH_y}{H}\,\frac{\partial \mu}{\partial H}\,. \tag{3.103}$$

b/ Se impune o condiţie de forma (3.5, 3.6), astfel încît într-un nod care ocupă una din cele 4 poziţii în cadrul elementului,

$$H_x = 0,\; B_x = 0. \tag{3.104}$$

In acest caz,

$$\tau_H = \frac{p_y}{p_x}\,\frac{1}{\mu} + \frac{p_y}{p_x}\,\frac{B_y^2}{B}\,\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B} \tag{3.105}$$

şi

$$\tau_B = \frac{p_x}{p_y}\mu + \frac{p_x}{p_y}\frac{H_y^2}{H}\frac{\partial\mu}{\partial H}. \qquad (3.106)$$

c/ Se impune o condiție de forma (3.5, 3.6), astfel încît într-un nod care ocupă una din cele 4 poziții în cadrul elementului,

$$H_y=0,\ B_y=0. \qquad (3.107)$$

In acest caz,

$$\tau_H = \frac{p_x}{p_y}\frac{1}{\mu} + \frac{p_x}{p_y}\frac{B_x^2}{B}\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B} \qquad (3.108)$$

și

$$\tau_B = \frac{p_y}{p_x}\mu + \frac{p_y}{p_x}\frac{H_x^2}{H}\frac{\partial\mu}{\partial H}. \qquad (3.109)$$

3.7. Calculul potențialului magnetic vector și trasarea liniilor de cîmp ale inducției magnetice

Analiza cantitativă a cîmpului magnetic din domeniul plan D de existență a lui se poate efectua pe baza valorilor cunoscute ale componentelor H_x și H_y ale intensității cîmpului magnetic și B_x și B_y ale inducției magnetice în nodurile rețelei de discretizare. O imagine calitativă asupra cîmpului magnetic se poate însă ușor forma pe baza liniilor de cîmp ale inducției magnetice, trasate în domeniul D.

Ecuația liniilor de cîmp ale inducției magnetice este

$$B_x dy - B_y dx = 0, \qquad (3.110)$$

sau,

$$A_z = \text{constant}, \qquad (3.111)$$

unde A_z este valoarea componentei după direcția axei Oz, perpendiculară pe planul xOy al domeniului D (singura nenulă), a potențialului magnetic vector $\bar{A}$.

Cum relațiile de definiție a potențialului magnetic vector $\bar{A}$ sînt (1.4), rezultă în punctele domeniului D

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ B_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.112)$$

In subcapitolul 3.3 s-a presupus că valorile componentelor lui $\bar{B}$ variază liniar de-a lungul laturilor unui element al rețelei de discretizare din fig.3.1. Avînd în vedere această ipoteză și trecînd la relații cu diferențe finite, se obține

$$\left.\begin{aligned} \frac{B_x(i,j)+B_x(i+1,j)}{2} &= -p_y\left[A_{zx}(i+1,j)-A_{zx}(i,j)\right] \\ \frac{B_y(i,j)+B_y(i,j+1)}{2} &= -p_x\left[A_{zy}(i,j+1)-A_{zy}(i,j)\right] \end{aligned}\right\} , \tag{3.113}$$

sau,

$$\left.\begin{aligned} A_{zx}(i+1,j) &= A_{zx}(i,j)-\frac{p_y}{2}\left[B_x(i,j)+B_x(i+1,j)\right] \\ A_{zy}(i,j+1) &= A_{zy}(i,j)-\frac{p_x}{2}\left[B_y(i,j)+B_y(i,j+1)\right] \end{aligned}\right\} . \tag{3.114}$$

Valorilor lui A_z li s-a atașat indicele x sau y, după cum în relații intervine componenta B_x sau B_y a inducției magnetice.

Relațiile (3.114) permit calculul recurent al valorilor A_{zx} și A_{zy} în toate nodurile rețelei de discretizare. Intrucît calculul cîmpului magnetic se consideră terminat cînd sînt satisfăcute condițiile (3.34, 3.35), este posibil ca valorile A_{zx} și A_{zy} să nu coincidă în același nod; în acest caz se face media valorilor A_{zx} și A_{zy} corespunzătoare aceluiași nod. Intr-un nod oarecare (i,j) se va considera deci

$$A_z(i,j)=\frac{1}{2}\left[A_{zx}(i,j)+A_{zy}(i,j)\right] . \tag{3.115}$$

Acceptarea ipotezei de variație liniară de-a lungul laturilor unui element al rețelei de discretizare a valorilor componentelor lui $\bar{B}$ implică și variația liniară a valorilor lui A_z de-a lungul laturilor unui element. Această observație este utilă în calculul coordonatelor punctelor de un anumit potențial magnetic vector.

Pe porțiunile din frontiera domeniului D în care este satisfăcută condiția (3.5), condiție care impune valori nule ale lui $\bar{B}$ în exteriorul frontierei, se consideră

$$A_z=0. \tag{3.116}$$

Odată calculate valorile potențialului magnetic vector în toate nodurile rețelei de discretizare, se trasează liniile de cîmp ale inducției magnetice ca linii de potențial magnetic vector constant.

3.8. Algoritmul de calcul

Enunțarea problemei calculului cîmpului magnetic cvasistaționar plan-paralel cu o metodă de diferențe finite iterativă, extinsă pe rețea rectangulară cu pas neegal și formularea sa matematică au fost rezolvate în cadrul subcapitolelor 3.2 - 3.7. Algoritmul de calcul al metodei, ca etapa următoare în calculul cîmpului magnetic, este prezentat mai jos prin intermediul organigramelor. Acestea pun în evidență prin reprezentări grafice succesiunea naturală a etapelor de calcul, operațiile matematice și logice de efectuat în vederea obținerii soluției. In conceperea algoritmului de calcul s-au avut în vedere condițiile pe care trebuie să le îndeplinească: generalitatea, finitudinea, unicitatea și realizabilitatea [29, 59, 6o].

Secvențele de calcul care se repetă de mai multe ori în cadrul iterării pe întreaga rețea de discretizare a ecuațiilor cu diferențe finite sau care în unele cazuri particulare pot fi înlocuite sau chiar pot lipsi au fost concepute sub formă de subrutine; relațiile de calcul care se utilizează de mai multe ori în cadrul unor subrutine au fost utilizate ca funcții externe [3o, 77].

In fig.3.6 este prezentată organigrama algoritmului de calcul corespunzător metodei cu diferențe finite iterativă, extinsă pe rețea rectangulară cu pas neegal. In cadrul ei se face apel la subrutinele: CMAG, THS, TEST, CALCH, TBS, CALCB și CALCP, ale căror organigrame sînt prezentate în fig.3.7, 3.8, 3.9, 3.1o, 3.11, 3.12 și respectiv 3.13. In sfîrșit, în fig.3.14, 3.15, 3.16 și 3.17 sînt desenate organigramele funcțiilor externe HMIU, DHMIU, UIMB și respectiv DUIMB apelate în cadrul subrutinelor.

Notațiile utilizate în organigrame sînt cele folosite anterior, în plus, cu NEX s-a notat numărul de elemente al rețelei de discretizare pe direcția Ox iar cu NEY numărul de elemente pe direcția Oy.

3.9. Exemplu de aplicare a metodei

Metoda numerică de calcul al cîmpului magnetic prezentată în acest capitol a fost utilizată pentru calculul cîmpului magnetic într-un domeniu plan D dreptunghiular care, prin configurația geometrică a sistemului magnetic și prin repartiția curenților de conducție acceptă două axe de simetrie rectangulare paralele la

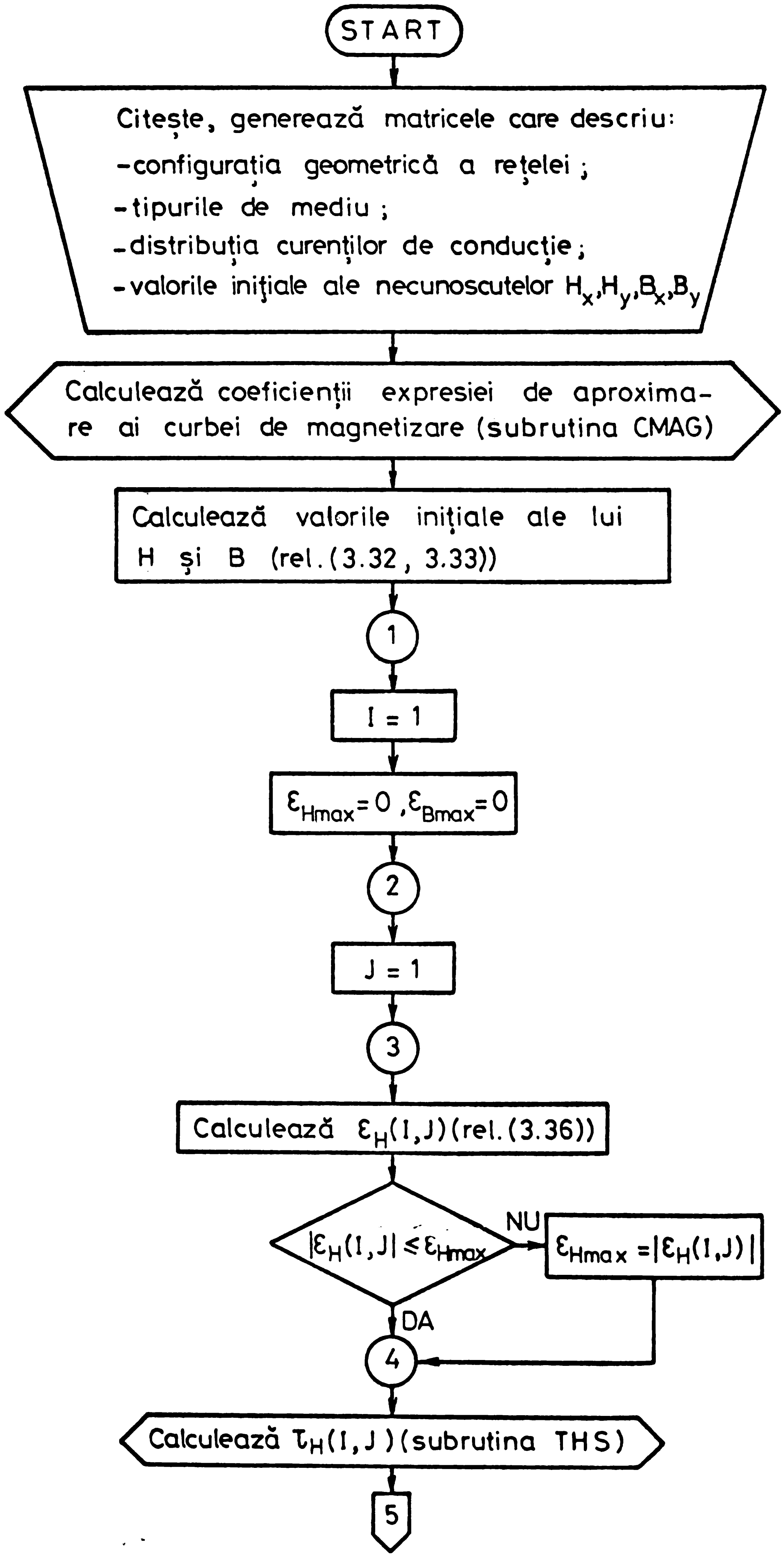

START
Citește, generează matricele care descriu:
-configurația geometrică a rețelei ;
-tipurile de mediu ;
-distribuția curenților de conducție ;
-valorile inițiale ale necunoscutelor H_x, H_y, B_x, B_y
Calculează coeficienții expresiei de aproximare ai curbei de magnetizare (subrutina CMAG)
Calculează valorile inițiale ale lui H și B (rel.(3.32, 3.33))
1
I = 1
$\varepsilon_{Hmax}=0$, $\varepsilon_{Bmax}=0$
2
J = 1
3
Calculează $\varepsilon_H(I,J)$ (rel.(3.36))
$|\varepsilon_H(I,J)| \leq \varepsilon_{Hmax}$
NU
$\varepsilon_{Hmax} = |\varepsilon_H(I,J)|$
DA
4
Calculează $\tau_H(I,J)$ (subrutina THS)
5

Fig. 3.6

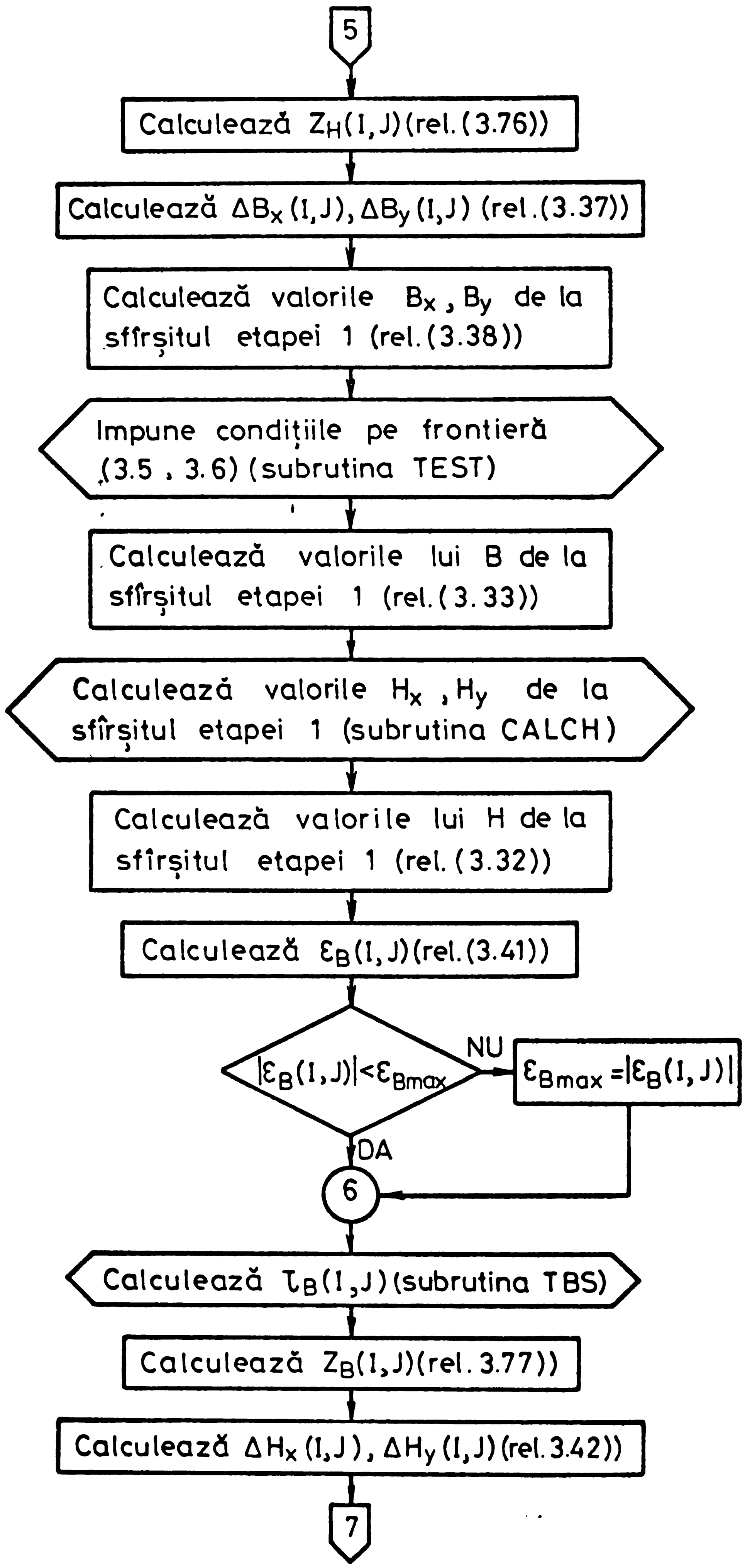


Fig. 3.6.(continuare)

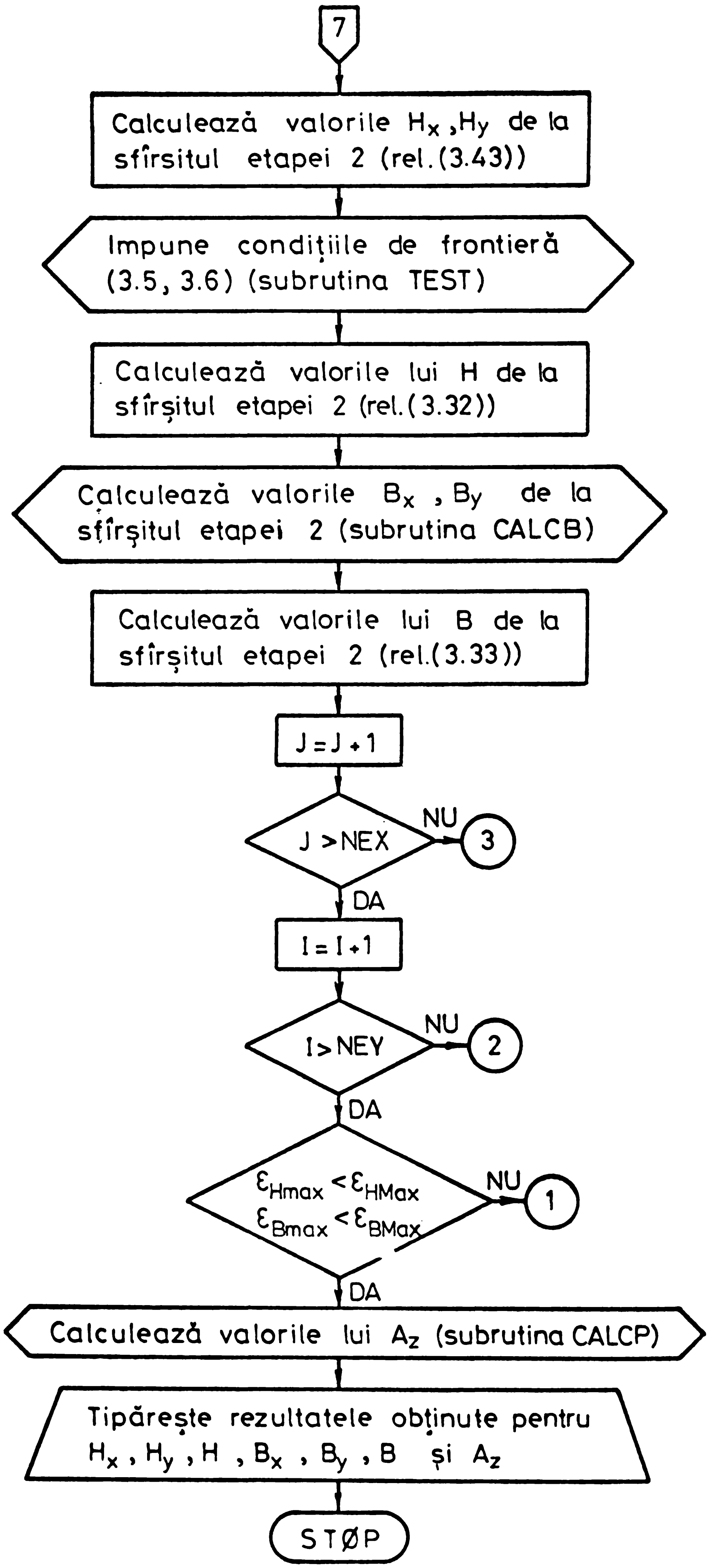


Fig. 3. 6. (continuare)

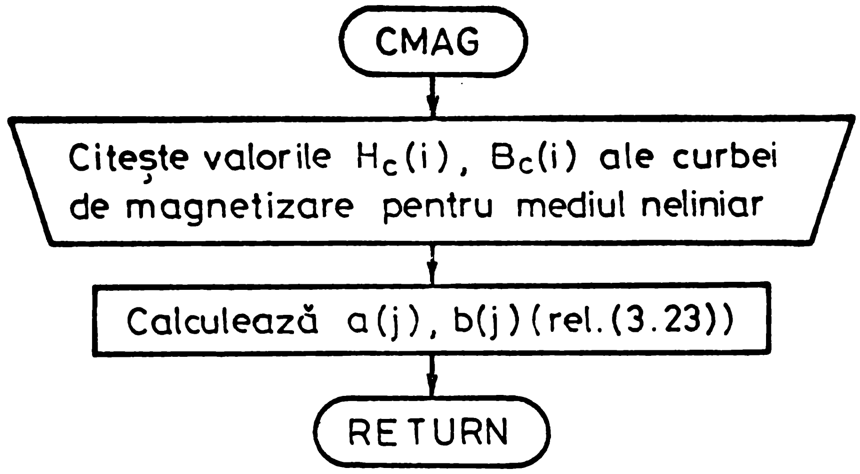


Fig. 3.7

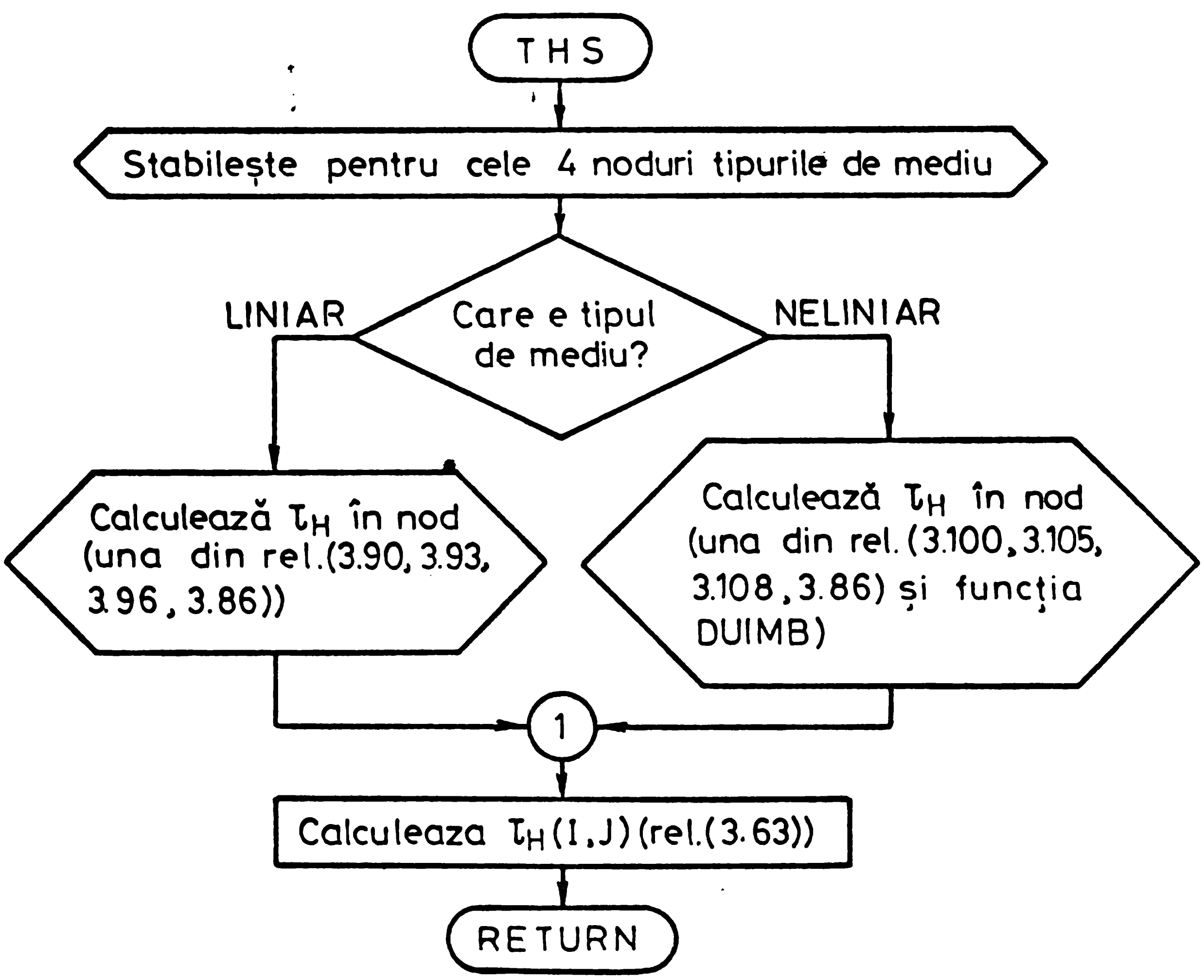


Fig. 3.8

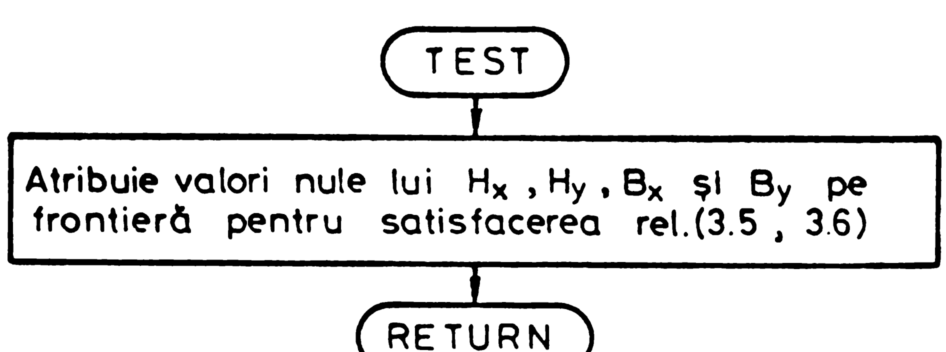


Fig. 3.9

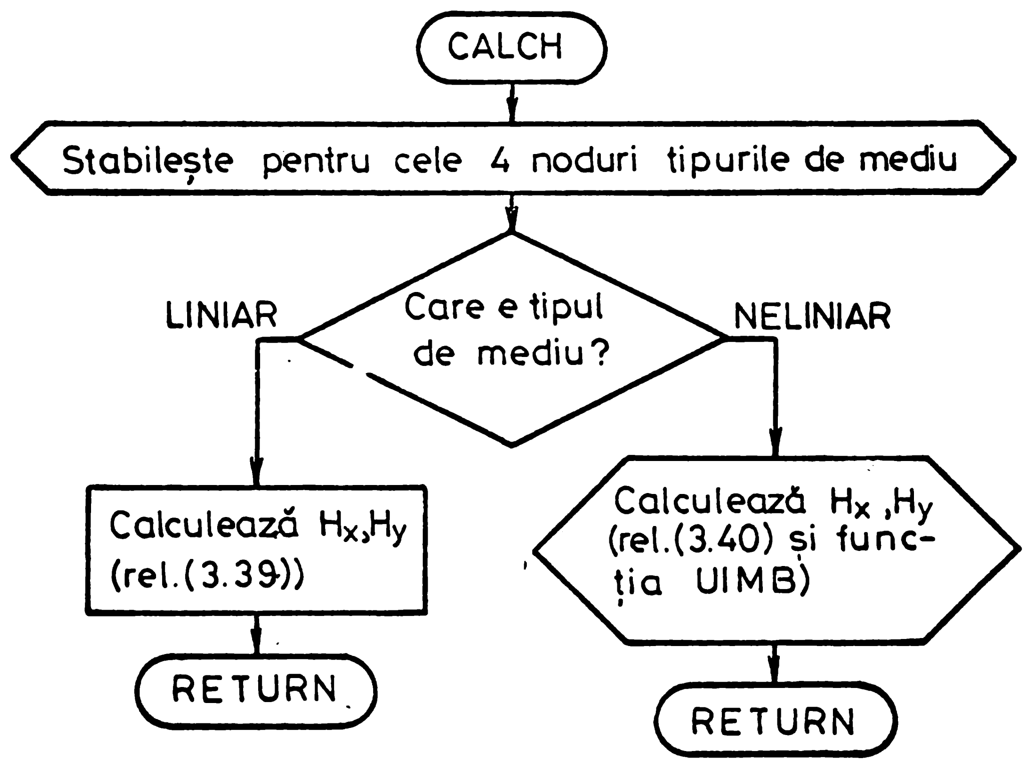


Fig. 3.10

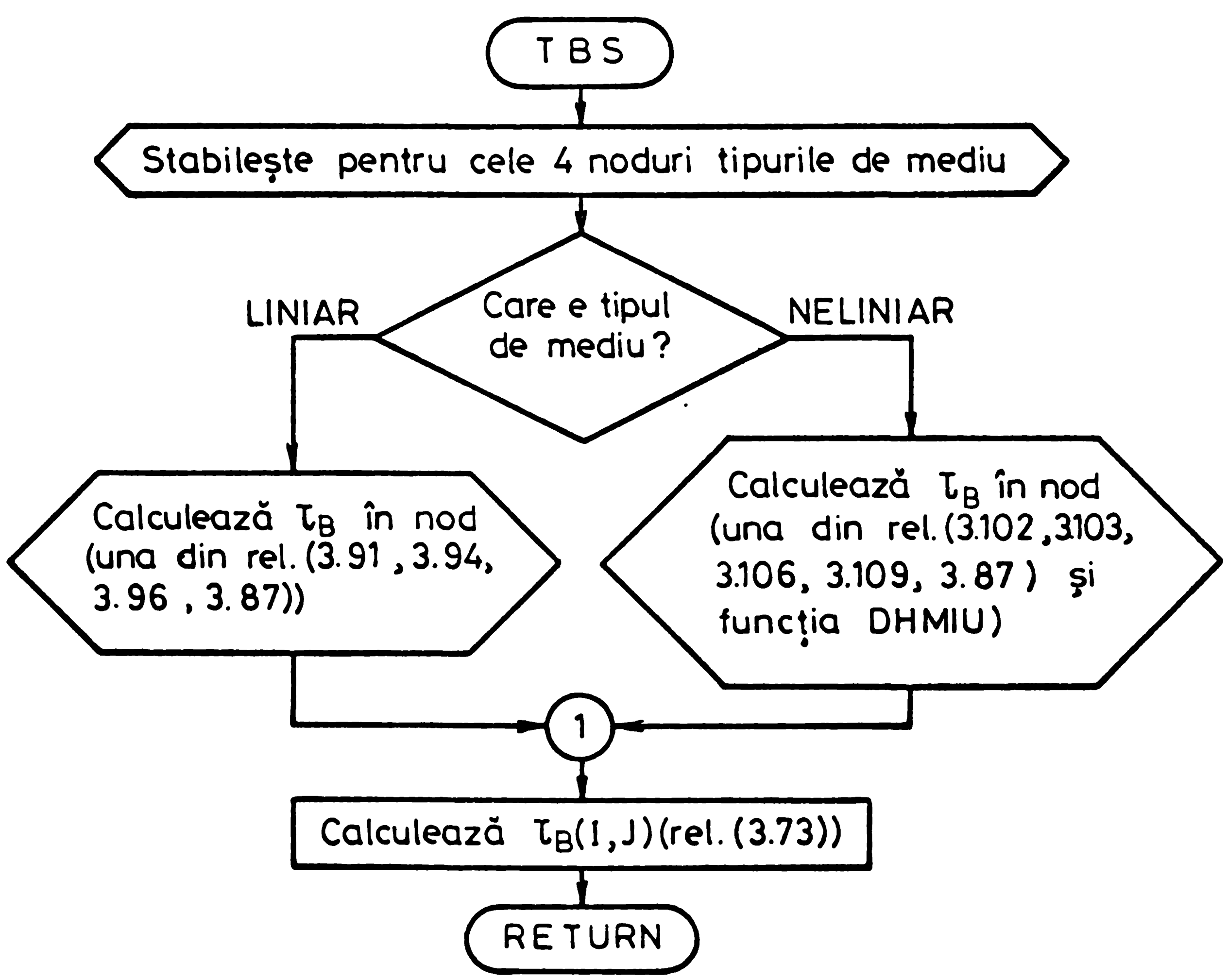


Fig. 3.11

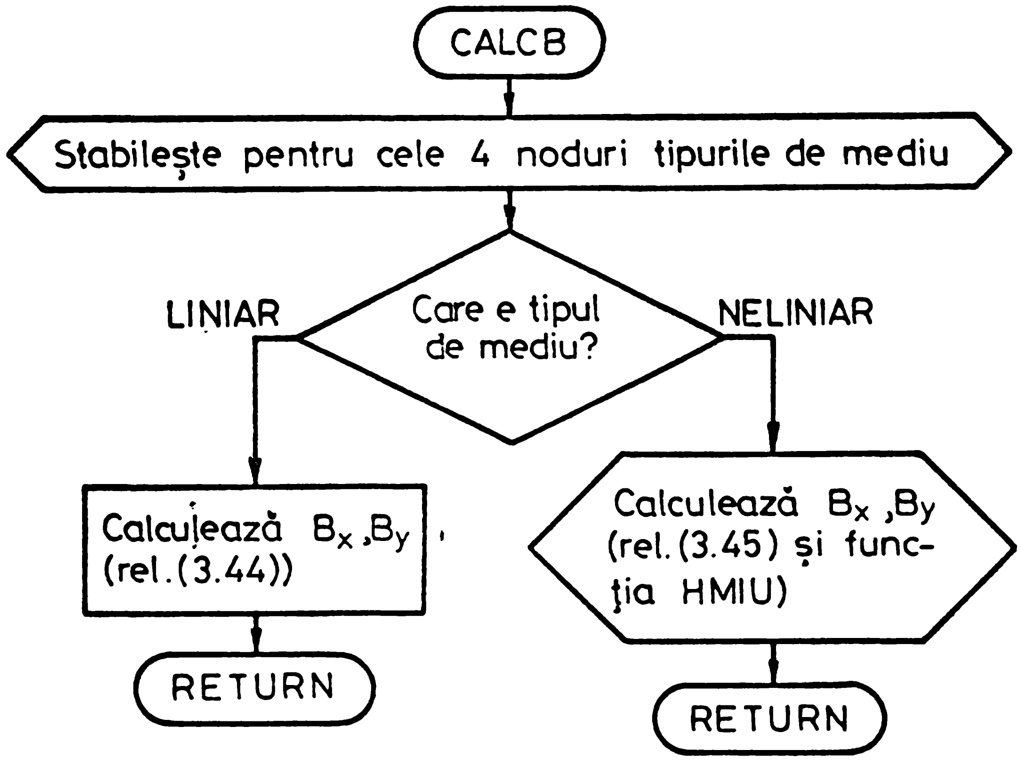


Fig.3.12

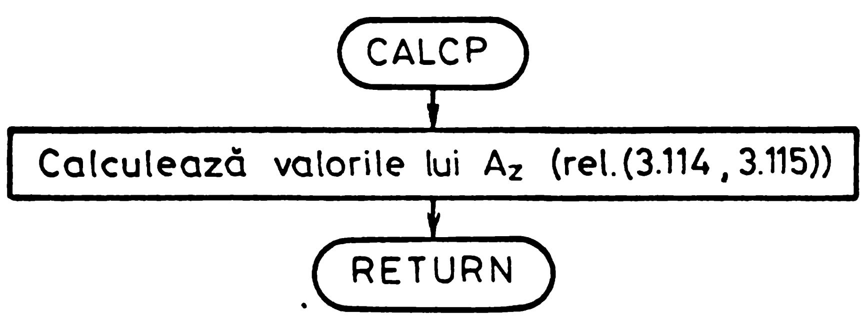


Fig.3.13

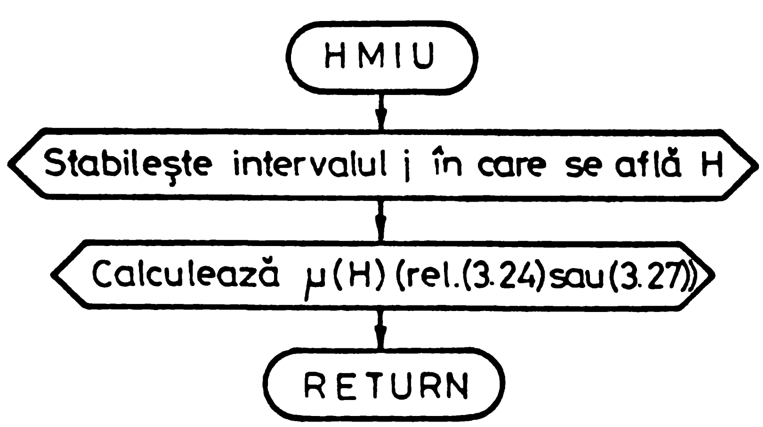


Fig. 3.14

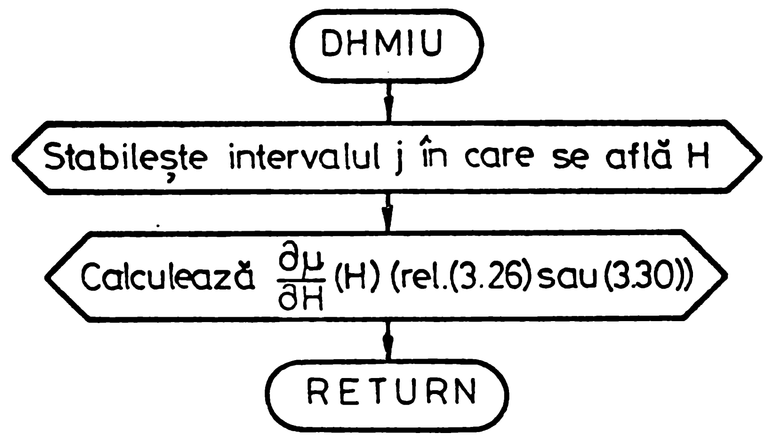


Fig. 3.15

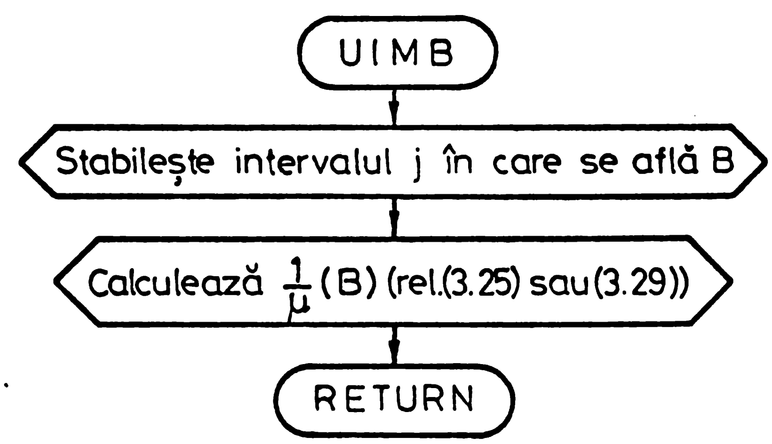


Fig. 3.16

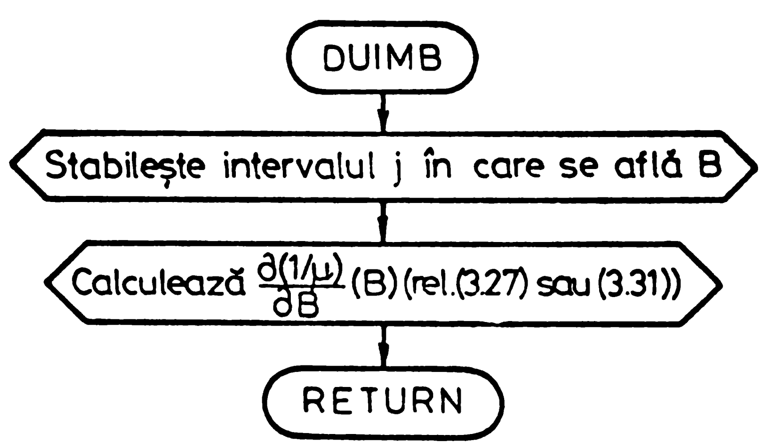


Fig. 3.17

laturile domeniului D. Axele Ox, Oy au fost alese astfel încît să coincidă cu axele de simetrie (fig.3.18). Domeniul plan D reprezintă o secţiune într-un sistem magnetic de lungime (dimensiunea

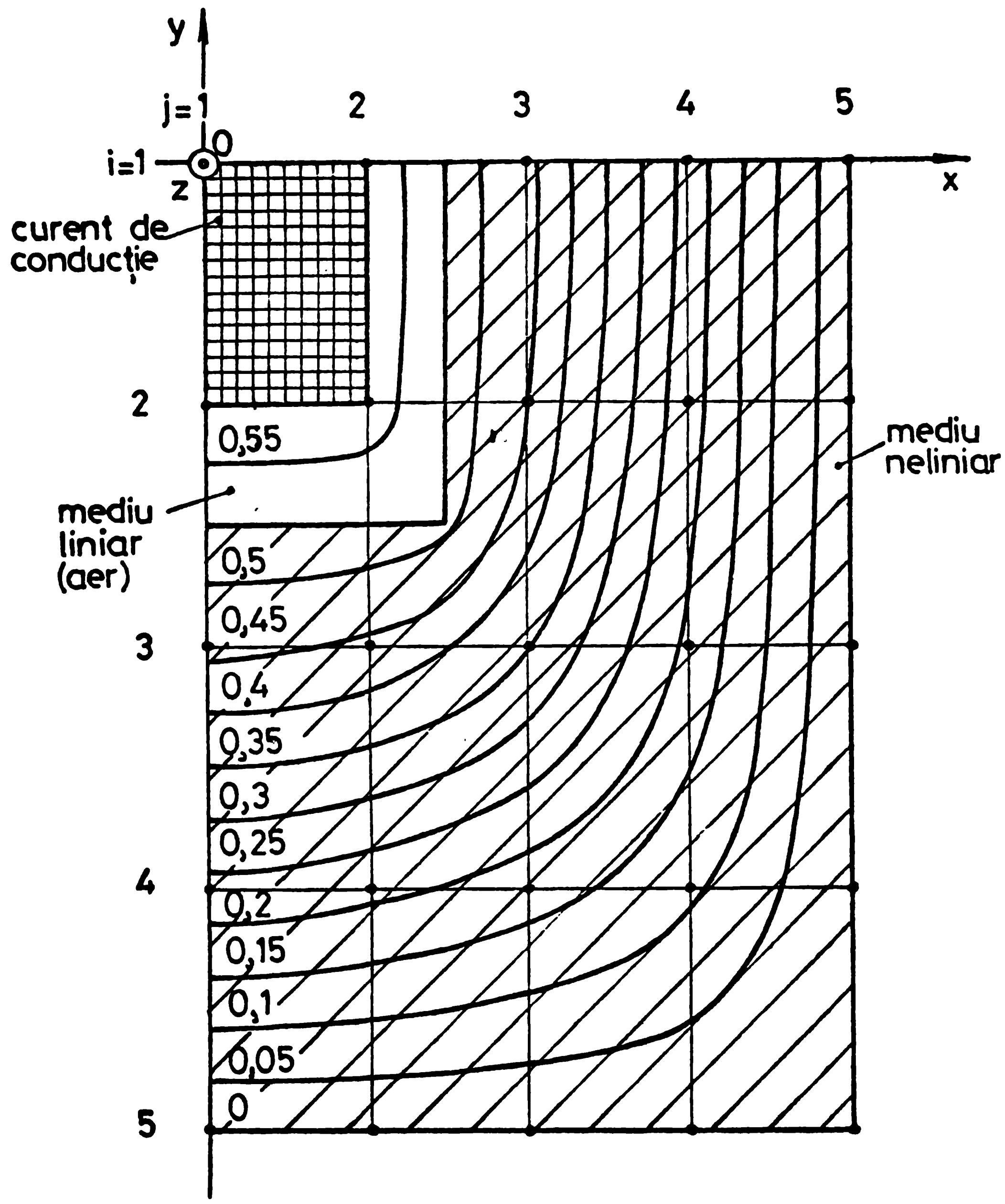


Fig.3.18

de-a lungul axei Oz perpendiculară pe planul xOy) infinită. Configurația a fost discretizată prin trasarea unei reţele rectangulare periodice din drepte paralele la axele Ox, Oy, cu pas neegal după cele două direcţii: p_x=o,1 m şi p_y=o,15 m. Elementul (1,1) este intersectat de un curent de conducţie normal pe suprafaţa sa cu densitatea $J_c(1,1)$=15oooo A/m^2, uniform distribuit pe aria elementului.

De-a lungul laturii superioare, care este o axă de simetrie, s-a considerat satisfăcută o condiţie de forma (3.6), care în sistemul de axe xOy ales conduce la

$H_x=0.$ (3.117)

De-a lungul laturii din stînga, de asemenea axa de simetrie, condiţia (3.6) devine în sistemul de axe xOy

$H_y=0.$ (3.118)

S-a mai considerat că, datorită configuraţiei mediului magnetic neliniar ce formează în domeniul D un circuit închis, cîmpul magnetic nu iese în afara domeniului D, de-a lungul laturilor inferioară şi dreapta ce fac parte din frontiera domeniului D fiind deci satisfăcută o condiţie de forma (3.5). Pentru latura inferioară înseamnă că

$B_y=0$ (3.119)

iar pentru latura din dreapta,

$B_x=0.$ (3.120)

Curba de magnetizare a mediului neliniar izotrop este caracterizată prin 12 puncte de coordonate $[H_c(i), B_c(i)]$, (i=1,2,...,12) (tabelul 3.1).

Tabelul 3.1

i	1	2	3	4	5	6	7
$H_c(i)$ [A/m]	0	50	115	200	385	660	1000
$B_c(i)$ [T]	0	0,48	0,89	1,18	1,39	1,55	1,64
$B_{cc}(i)$ [T]	0	0,402	0,924	1,084	1,432	1,515	1,618

Tabelul 3.1(continuare)

8	9	10	11	12
1425	2100	3000	4000	5000
1,72	1,82	1,89	1,96	2,01
1,746	1,806	1,887	1,977	2,066

In tabelul 3.2 sînt daţi coeficienţii a(j) şi b(j) (j= =1,2,3,4) ai aproximării prin 4 segmente de dreaptă pe intervalele $H_c(1) - H_c(3)$, $H_c(3) - H_c(5)$, $H_c(5) - H_c(8)$, $H_c(8)$ - , calculaţi cu relaţiile (3.23). Precizia aproximării a fost apreciată prin abaterea relativă medie procentuală

$$\alpha_B = \frac{100}{12} \sum_{i=2}^{12} \frac{|B_{cc}(i)-B_c(i)|}{B_c(i)} , \qquad (3.121)$$

egală cu 3,1%. Valorile $B_{cc}(i)$ ce aproximează valorile $B_c(i)$ sînt date şi ele în tabelul 3.1.

Tabelul 3.2

j	1	2	3	4
$a(j).10^3$ [H/m]	8,035	1,8813	0,319	0,0696
b(j) [T]	0	0,7077	1,3157	1,6182

Programul de calcul scris în limbajul FORTRAN IV conform algoritmului din subcapitolul 3.8 este prezentat în anexa A1.

Necunoscutelor în nodurile reţelei de discretizare H_x, H_y, nenule, li s-au atribuit drept valori iniţiale valoarea de 5 A/m, diferită de zero, în scopul evitării în faza iniţială a calculului a depăşirii superioare în virgulă mobilă. S-a mai impus ε_{HMax}=5A şi ε_{BMax}=0,005 Tm.

Programul de calcul a fost rulat pe un calculator FELIX C-256. Lungimea programului editat a fost de 37,4 kocteţi iar volumul memoriei ocupate, inclusiv tablourile declarate de 38 kocteţi.

Soluţia problemei de cîmp a fost obţinută după 175 de iteraţii. Coeficientul k_r din relaţiile (3.76, 3.77) a fost modificat pe parcursul calculelor ca în fig.3.19.

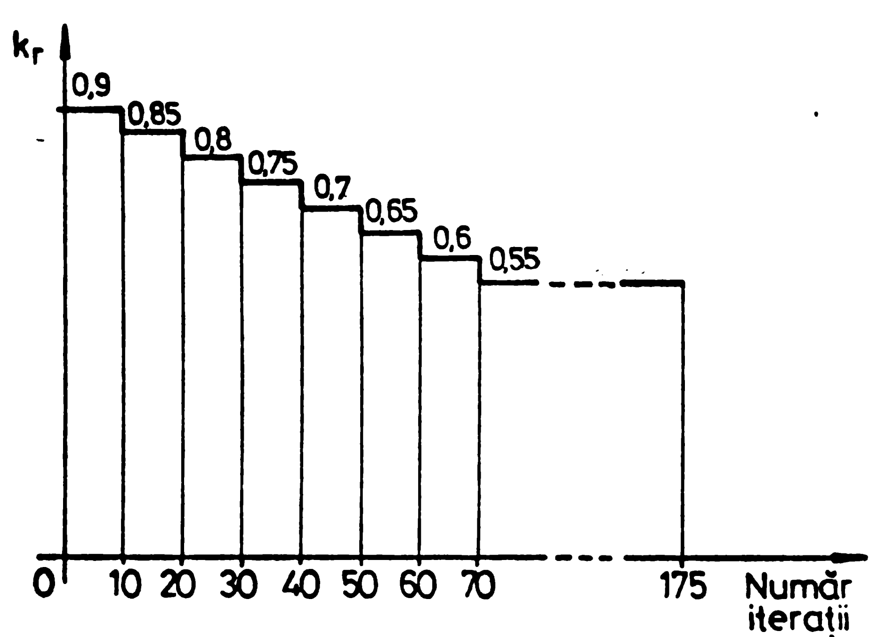


Fig.3.19

Valorile rezultate pentru mărimile H_x, H_y şi H în A/m, B_x, B_y şi B în T şi A_z în Tm în nodurile reţelei de discretizare sînt date în tabelul 3.3.

In fig.3.18 sînt trasate şi liniile de cîmp ale inducţiei magnetice. Parametrul curbelor este valoarea potenţialului magnetic vector, în Tm.

TABELUL 3.3

COMPONENTA LUI H DUPA AXA OX
IN NODURILE RETELEI

.0	.0	.0	.0	.0
8629.8	6252.5	434.5	474.9	.0
506.4	1503.4	1758.8	471.5	.0
948.9	388.7	289.7	181.6	.0
663.2	505.6	211.0	80.8	.0

COMPONENTA LUI H DUPA AXA OY
IN NODURILE RETELEI

.0	11802.0	6827.6	8155.4	7957.7
.0	8226.8	8783.7	6844.1	6716.4
.0	335.3	2086.2	3141.2	3267.1
.0	114.4	92.0	212.6	277.7
.0	.0	.0	.0	.0

INTENSITATEA H IN NODURILE RETELEI

.0	11802.0	6827.6	8155.4	7957.7
8629.8	10333.1	8794.5	6860.5	6716.4
506.4	1540.3	2728.7	3176.4	3267.1
948.9	405.2	304.0	279.8	277.7
663.2	505.6	211.0	80.8	.0

COMPONENTA LUI B DUPA AXA OX
IN NODURILE RETELEI

.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0108	.0079	.1189	.1546	.0000
1.4669	1.7142	1.2007	.2824	.0000
1.9907	1.3795	1.2196	.8029	.0000
1.5160	1.4684	1.1047	.6492	.0000

COMPONENTA LUI B DUPA AXA OY
IN NODURILE RETELEI

.0000	.0148	2.2302	2.3492	2.3315
.0000	.0103	2.4035	2.2270	2.2202
.0000	.3825	1.4242	1.8818	1.9111
.0000	.4061	.3872	.9378	1.2300
.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

INDUCTIA B IN NODURILE RETELEI

.0000	.0148	2.2302	2.3492	2.3315
.0108	.0130	2.4065	2.2331	2.2202
1.4669	1.7563	1.8628	1.9029	1.9111
1.9907	1.4381	1.2796	1.2340	1.2300
1.5160	1.4684	1.1047	.6492	.0000

POTENTIALUL AZ IN NODURILE RETELEI

.376	.575	.481	.234	.000
.373	.575	.454	.227	.000
.464	.465	.355	.190	.000
.234	.214	.175	.109	.000
.000	.000	.000	.000	.000

CAPITOLUL 4

ANALIZA UNOR FACTORI DE INFLUENTA A VITEZEI DE CONVERGENTA A METODEI CU DIFERENTE FINITE ITERATIVA, EXTINSA PE RETEA RECTANGULARA PERIODICA CU PAS NEEGAL

4.1. Introducere

După cum s-a arătat în capitolul 3, convergenţa metodei numerice cu diferenţe finite iterativă, extinsă pe reţea rectangulară periodică cu pas neegal este asigurată pentru o valoare a coeficientului de relaxare k_r care satisface relaţia (3.78). Viteza de convergenţă a metodei este influenţată de mai mulţi factori, după cum s-a arătat în subcapitolul 3.6. In cadrul acestui capitol se analizează influenţa asupra vitezei de convergenţă, adică asupra numărului de iteraţii ce trebuiesc efectuate pînă la satisfacerea relaţiilor (3.46, 3.47) a mai multor factori: funcţiile analitice de aproximare a dependentelor neliniare B(H) şi/sau H(B), modul de baleiere a elementelor reţelei de discretizare în procesul de explorare ordonată a lor, în vederea iterării necunoscutelor H_x, H_y, B_x şi B_y din sistemul de ecuaţii (3.13 - 3.15, 3.5, 3.6) conform relaţiilor (3.36 - 3.45), şi valoarea coeficientului de relaxare k_r.

Autorul elaborează trei noi expresii analitice de aproximare a curbei de magnetizare neliniare B(H): funcţia spline de ajustare [36] şi funcţia segmentar polinomială de gradul 2, caracterizate prin netezime şi precizie şi care asigură în punctele de joncţiune a segmentelor continuitatea unor dependenţe derivate din ele şi funcţia hiperbolică completată cu termen liniar.

Pe baza unor programe de calcul rulate pe calculator se deduce că funcţia hiperbolică completată cu termen liniar este cea mai avantajoasă, numărul de iteraţii necesar obţinerii soluţiei problemei de cîmp reducîndu-se cu 11% faţă de cazul aproximării dependenţei neliniare B(H) cu 4 segmente de dreaptă, că baleierea încrucişată a elementelor nu duce la micşorarea numărului de iteraţii în comparaţie cu baleierea pe o singură direcţie şi se stabileşte o valoare optimă a coeficientului de relaxare k_r.

4.2. Funcţiile analitice de aproximare a dependenţelor neliniare B(H) şi/sau H(B)

In cadrul metodei cu diferenţe finite iterativă, extinsă pe reţea rectangulară periodică cu pas neegal, prezentată în capitolul 3, se utilizează funcţiile $\mu(H)$ şi $\frac{\partial\mu}{\partial H}(H)$ derivate din dependenta B(H) şi funcţiile $\frac{1}{\mu}(B)$ şi $\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}(B)$ derivate din dependenta H(B). Dacă se acceptă aproximarea liniară pe porţiuni a curbei de magnetizare B(H) cu avantajele arătate în subcapitolul 3.4, atunci funcţiile $\frac{\partial\mu}{\partial H}(H)$ şi $\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}(B)$ sînt discontinue în punctele de joncţiune a segmentelor de dreaptă, ceea ce poate afecta negativ viteza de convergenţă şi deci timpul de calcul consumat de calculator. In cadrul acestui subcapitol se analizează influenţa unor funcţii analitice de aproximare a dependenţelor B(H) şi/sau H(B), care asigură continuitatea funcţiilor $\frac{\partial\mu}{\partial H}(H)$ şi $\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}(B)$, asupra vitezei de convergenţă.

4.2.1. Aproximarea cu funcţie spline de ajustare

In [8, 57] dependenţa dintre B şi H se aproximează cu o funcţie spline cubică. In [57] se prezintă o expresie de aproximare spline cubică F(B) a dependenţei H(B), segmentar polinomială, care satisface condiţiile

$$F\left[B_c(i)\right]=H_c(i),\ (i=1,2,\ldots,n), \tag{4.1}$$

continuă împreună cu primele două derivate în intervalul de aproximare $\left[B_c(1),\ B_c(n)\right]$; $H_c(i)$ şi $B_c(i)$ sînt valorile intensităţii cîmpului magnetic şi inducţiei magnetice determinate experimental. Pentru determinarea coeficienţilor din expresia F(B) se impun şi valorile $F''\left[B_c(1)\right]$ şi $F''\left[B_c(n)\right]$ ale derivatei a doua a lui F(B) la limitele intervalului de aproximare. Pe de altă parte, valorile $H_c(i)$ şi $B_c(i)$ se determină prin măsurători experimentale, fiind deci potenţial afectate de erori [12, 73 , 85].

Si în cadrul altor metode numerice de calcul al cîmpului magnetic se utilizează unele dependenţe derivate din curba de magnetizare, ca $\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B^2}(B^2)$ în [25, 42, 67]. In [42] se aproximează dependenţa $\frac{1}{\mu}(B^2)$ cu două segmente de dreaptă la valori mici şi mari ale inducţiei magnetice şi cu două exponenţiale şi un polinom de gradul 4 la valori medii ale inducţiei magnetice, asigurîndu-se continuitatea funcției $\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B^2}(B^2)$ în punctele de joncțiune. Utilizarea unor expresii analitice diferite pe diferitele porțiuni este însă incomodă în realizarea programului de calcul [25, 55, 59]. In [67] se aproximează dependența $\frac{1}{\mu}(B^2)$ cu o funcție spline cubică, segmentar polinomială, ce asigură și ea continuitatea funcției $\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B^2}(B^2)$ în punctele de joncțiune a segmentelor. Pentru determinarea coeficienților din funcția spline cubică de aproximare trebuiesc precizate valorile lui $1/\mu$ și a primei derivate a lui $1/\mu$ la limitele intervalului de aproximare; aceste valori nu se pot însă determina experimental în mod direct. In plus, apare și aici un aspect sesizat în legătură cu aproximarea utilizată în [57], și anume că punctele prin care se impune să treacă funcția de aproximare a dependenței $\frac{1}{\mu}(B^2)$ prezintă coordonate ce rezultă prin măsurători experimentale, fiind deci și ele potențial afectate de erori.

Avînd în vedere cele de mai sus, se apreciază că este mai rațional să se aproximeze curbele de magnetizare B(H) și/sau H(B) prin funcții spline de ajustare, care, fără a lua în punctele $H_c(i)$ valorile $B_c(i)$ sau în punctele $B_c(i)$ valorile $H_c(i)$, să se abată într-un anumit sens cel mai puțin de la aceste valori. Acestor funcții li se pot impune și condiții legate de netezimea lor. Pentru determinarea coeficienților din expresiile de aproximare spline de ajustare sînt necesare doar valorile $H_c(i)$ și $B_c(i)$ $(i=1,2,\dots,n)$, ce caracterizează dependența neliniară dintre B și H.

Expresia analitică propusă de autor în [36] pentru aproximarea curbei de magnetizare B(H) a unui mediu neliniar izotrop, bazată pe [56], este

$$F_1(H)=\sum_{j=0}^{1} a_j H^j + \sum_{i=1}^{n} b_i\left[H-H_c(i)\right]_+^3, \qquad (4.2)$$

$F_1(H)$ fiind o funcție spline de ajustare de grad 3 cu $n \geq 2$ și cu termenul general din a doua sumă nenul numai pentru $H > H_c(i)$; n este numărul de puncte de coordonate $[H_c(i),\ B_c(i)]$ al curbei de magnetizare ridicată experimental. Modul de determinare a coeficienților reali a_j și b_i din (4.2) va fi indicat în cele ce urmează.

Fie $S_3(\Delta)$ mulțimea funcțiilor spline naturale de grad 3 cu nodurile $H_c(1) < H_c(2) < \dots < H_c(n)$, cu Δ fiind notată multimea valorilor $H_c(i)$. Pentru o funcţie $G \in S_3(\Delta)$ care are derivata de ordinul 1 absolut continuă pe intervalul $[H_c(1), H_c(n)]$ şi derivata de ordinul 2 de patrat sumabil în acelaşi interval, se poate aprecia netezimea prin gradul de netezime

$$\eta(G)=\int_{H_c(1)}^{H_c(n)} [G''(H)]^2 dH, \tag{4.3}$$

iar ajustarea valorilor $B_c(i)$ prin gradul de ajustare

$$\sigma(G)=\sum_{i=1}^{n} \left\{G[H_c(i)]-B_c(i)\right\}^2 . \tag{4.4}$$

Funcţia spline de ajustare $F_1(H)$ este funcţia spline naturală din $S_3(\Delta)$ care minimizează funcţionala $\eta(G)+\varrho_1\sigma(G)$, realizînd deci un compromis între netezime şi ajustare; coeficientul $\varrho_1>0$ stabileşte importanţa relativă care se acordă netezimii şi ajustării. Funcţia spline de ajustare $F_1(H)$ este deci soluţia problemei de minim

$$\eta(F_1)+\varrho_1\sigma(F_1)=\inf\left\{\eta(G)+\varrho_1\sigma(G)\right\} . \tag{4.5}$$

Intrucît $F_1 \in S_3(\Delta)$, coeficienţii reali b_i satisfac condiţiile liniare

$$\sum_{i=1}^{n} b_i H_c^k(i)=0, \quad (k=0,1). \tag{4.6}$$

Relaţia (4.5) este satisfăcută dacă

$$F_1[H_c(i)]+\frac{b_i}{\varrho_1}=B_c(i), \quad (i=1,2,\dots,n). \tag{4.7}$$

Relaţiile (4.6, 4.7) formează un sistem liniar de n+2 ecuaţii din care se pot determina cei n+2 coeficienţi reali din (4.2).

Expresia analitică (4.2) propusă pentru aproximarea curbei de magnetizare B(H) este segmentar polinomială, segmentele de polinoame de gradul 3 racordîndu-se în punctele de abscise $H_c(i)$ împreună cu primele două derivate ale segmentelor de polinoame.

In mod cu totul asemănător se poate aproxima curba de magnetizare H(B) printr-o funcţie spline de ajustare $F_2(B)$, similară funcţiei $F_1(H)$,

$$F_2(B)=\sum_{j=o}^{1} c_j B^j+\sum_{i=1}^{n} d_i\left[B-B_c(i)\right]_+^3 , \qquad (4.8)$$

cu $n\geq 2$; termenul general din a doua sumă este nenul numai pentru $B>B_c(i)$. Cei $n+2$ coeficienţi reali din (4.8) se determină prin rezolvarea sistemului liniar format din ecuaţiile

$$\sum_{i=1}^{n} d_i B_c^k(i)=o, \ (k=o,1), \qquad (4.9)$$

$$F_2\left[B_c(i)\right]+\frac{d_i}{\varrho_2}=H_c(i), \ (i=1,2,\ldots,n). \qquad (4.10)$$

Coeficientul $\varrho_2>o$ stabileşte importanţa relativă care se acordă netezimii şi ajustării.

In continuare se prezintă relaţiile de calcul ale funcţiilor $\mu(H)$, $\frac{\partial\mu}{\partial H}(H)$, $\frac{1}{\mu}(B)$ şi $\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}(B)$. Din relaţia (4.2) rezultă

$$\mu(H)=\frac{F_1(H)}{H}=\sum_{j=o}^{1} a_j H^{j-1}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\left[H-H_c(i)\right]_+^3}{H}, \qquad (4.11)$$

şi apoi

$$\frac{\partial\mu}{\partial H}(H)=\sum_{j=o}^{1}(j-1)a_j H^{j-2}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\left[H-H_c(i)\right]_+^2}{H}\left\{3-\frac{\left[H-H_c(i)\right]_+}{H}\right\}. \qquad (4.12)$$

De asemenea, din (4.8) rezultă

$$\frac{1}{\mu}(B)=\frac{F_2(B)}{B}=\sum_{j=o}^{1} c_j B^{j-1}+\sum_{i=1}^{n} d_i\frac{\left[B-B_c(i)\right]_+^3}{B}, \qquad (4.13)$$

şi în continuare

$$\frac{\partial(\frac{1}{\mu})}{\partial B}(B)=\sum_{j=o}^{1}(j-1)c_j B^{j-2}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} d_i\frac{\left[B-B_c(i)\right]_+^2}{B}\left\{3-\frac{\left[B-B_c(i)\right]_+}{B}\right\}. \qquad (4.14)$$

Funcţiile descrise de relaţiile (4.11, 4.12) sînt continue în punctele de joncţiune de abscise $H_c(i)$, ca şi funcţiile descrise de relațiile (4.13, 4.14) în punctele de joncțiune de absc- se $B_c(i)$.

Datorită caracterului lor polinomial, funcțiile descrise de relațiile (4.11 - 4.14) prezintă din punct de vedere aplicativ avantajul de a permite finalizarea calculelor în condițiile programării simple a algoritmilor în cadrul unor subprograme de tip funcție externă.

Expresiile de aproximare (4.2, 4.8) propuse au fost utilizate pentru curba de magnetizare caracterizată prin valorile $H_c(i)$, $B_c(i)$, (i=1,2,...,12) din tabelul 3.1. In rezolvarea sistemului format din relațiile (4.6, 4.7) s-a considerat $\rho_1=5 \cdot 10^{-4}$ iar în rezolvarea sistemului format din relațiile (4.9, 4.10), $\rho_2=5 \cdot 10^4$, rezultînd coeficienții a_j și b_i din tabelul 4.1, respectiv c_j și d_i din tabelul 4.2.

Tabelul 4.1

$a_0=4,986 \cdot 10^{-4}$T $a_1=1,020 \cdot 10^{-3}$H/m	
i	b_i [Tm/A]
1	$-2,493 \cdot 10^{-7}$
2	$3,492 \cdot 10^{-7}$
3	$-6,496 \cdot 10^{-8}$
4	$-1,110 \cdot 10^{-8}$
5	$-2,106 \cdot 10^{-8}$
6	$2,690 \cdot 10^{-9}$
7	$-1,003 \cdot 10^{-9}$
8	$6,192 \cdot 10^{-11}$
9	$2,923 \cdot 10^{-11}$
10	$-3,807 \cdot 10^{-11}$
11	$2,888 \cdot 10^{-11}$
12	$-1,318 \cdot 10^{-11}$

Tabelul 4.2

$c_0=-1,507 \cdot 10^{-3}$A/m $c_1= 8,733 \cdot 10^{1}$m/H	
i	d_i [A/mT^3]
1	$7,535 \cdot 10^{1}$
2	$-2,277 \cdot 10^{2}$
3	$2,104 \cdot 10^{3}$
4	$-3,310 \cdot 10^{3}$
5	$2,099 \cdot 10^{4}$
6	$-1,727 \cdot 10^{4}$
7	$-6,036 \cdot 10^{4}$
8	$2,420 \cdot 10^{5}$
9	$-4,606 \cdot 10^{5}$
10	$6,029 \cdot 10^{5}$
11	$-7,433 \cdot 10^{5}$
12	$4,170 \cdot 10^{5}$

In tabelul 4.3 sînt prezentate valorile calculate $F_1[H_c(i)]$ și $F_2[B_c(i)]$. Precizia celor două aproximări a fost apreciată prin abaterea relativă medie procentuală, calculată pentru funcția $F_1(H)$ cu relația

$$\alpha_B = \frac{100}{12} \sum_{i=2}^{12} \frac{|F_1[H_c(i)] - B_c(i)|}{B_c(i)} \qquad (4.15)$$

iar pentru funcţia $F_2(B)$ cu relaţia

$$\alpha_H = \frac{100}{12} \sum_{i=2}^{12} \frac{|F_2[B_c(i)] - H_c(i)|}{H_c(i)}, \qquad (4.16)$$

egale ambele cu 0,22%.

Tabelul 4.3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F_1[H_c(i)]$ [T]	0,	0,479	0,89	1,182	1,39	1,55	1,641	1,72	1,822	1,904	1,971	1,995
$F_2[B_c(i)]$ [A/m]	0	50,2	115,1	200,1	384,5	660,3	1001,1	1420	2109,1	2987,9	4014,9	4991,7

Tabelul 4.3 (continuare)

Pentru verificarea influenţei aproximării dependenţelor B(H) şi H(B) cu funcţiile spline de ajustare $F_1(H)$ şi $F_2(B)$ de mai sus asupra vitezei de convergenţă s-a reluat exemplul de aplicare a metodei numerice cu diferenţe finite iterativă din subcapitolul 3.9, toate condiţiile, cu excepţia aproximării, fiind aceleaşi ca în subcapitolul 3.9. După parcurgerea procesului tranzitoriu datorat variaţiei coeficientului de relaxare k_r de-a lungul primelor 70 de iteraţii, s-a constatat că procesul de calcul nu este convergent deoarece mărimile ε_{Hmax} şi ε_{Bmax} s-au stabilizat la valori constante.

Din analiza funcţiilor $F_1(H)$ şi $F_2(B)$ corespunzătoare aceleiaşi curbe de magnetizare se observă că ele nu coincid. Observaţia poate rămîne valabilă şi dacă se măresc coeficienţii ρ_1 şi ρ_2 în detrimentul netezimii aproximărilor. Utilizarea a două expresii $F_1(H)$ şi $F_2(B)$, diferite, face să nu fie îndeplinite condiţiile de unicitate a rezolvării problemei de cîmp arătate în capitolul 1. Se poate aproxima, de exemplu, numai dependenţa B(H) printr-o funcţie spline de ajustare F(H), dar în această situaţie nu se poate determina printr-o simplă relaţie H atunci cînd se cunoaşte $F(H)$, adică valoarea B aproximată. Acest lucru este necesar în cadrul etapei 2 a fiecărei iterări pentru fiecare nod plasat în mediu neliniar, în scopul determinării mărimilor $\mu(H)$ şi $\frac{\partial\mu}{\partial H}(H)$ din relaţiile (3.45, 3.1o2, 3.1o3, 3.1o6, 3.1o9). Determinarea valorii lui H cînd se cunoaşte valoarea lui B este posibilă prin utilizarea sub formă de subprogram a unei metode numerice oarecare de rezolvare a unei ecuaţii de gradul 3 [29, 55, 77] . Numărul foarte mare de apelări al unui asemenea subprogram duce la creşterea exagerată a timpului de calcul consumat de calculator, ceea ce poate fi inacceptabil.

4.2.2. Aproximarea cu funcţie segmentar polinomială de gradul 2

Gradul cel mai mic al polinoamelor segmentare care constituie o funcţie spline de ajustare este 3. Gradul polinoamelor segmentare poate fi redus la 2, dacă se acceptă o funcţie pentru aproximarea curbei de magnetizare B(H) de forma

$$F(H)=a_0H+\sum_{i=1}^{n-1} a_i\left[H-H_c(i)\right]_+^2, \tag{4.17}$$

cu $n \geqslant 2$; n este numărul de perechi de valori $H_c(i)$, $B_c(i)$ determinate experimental ce caracterizează curba de magnetizare B(H), iar termenul general din sumă este nenul numai pentru $H > H_c(i)$. Cei n coeficienţi reali a_0, a_i $(i=1,2,\dots,n-1)$ din (4.17) se pot determina în modul descris în continuare.

Funcţia F(H) are derivata de ordinul 1 absolut continuă în intervalul $[H_c(1), H_c(n)]$ şi derivata de ordinul 2 de patrat sumabil în acelaşi interval. Precizia de aproximare a valorilor $B_c(i)$ de către $F[H_c(i)]$ poate fi apreciată prin gradul de ajustare $\sigma(F)$, definit ca sumă a abaterilor relative patratice, prin relaţia [3, 76]

$$\sigma(F)=\sum_{i=2}^{n}\left\{\frac{F[H_c(i)]-B_c(i)}{B_c(i)}\right\}^2, \tag{4.18}$$

iar netezimea funcţiei F(H) prin gradul de netezime

$$\eta(F)=\int_{H_c(1)}^{H_c(n)}\left[F''(H)\right]^2 dH. \tag{4.19}$$

Coeficienţii a_o şi a_i vor fi determinaţi din condiţia de minim a funcţionalei $\sigma(F)+\varrho\eta(F)$, unde $\varrho > o$ este un coeficient de pondere.

Prin anularea derivatei parţiale a funcţionalei $\sigma(F)+\varrho\eta(F)$ în raport cu coeficientul a_o rezultă relaţia

$$a_o \sum_{k=2}^{n} \frac{H_c^2(k)}{B_c^2(k)} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \sum_{k=j+1}^{n} \frac{H_c(k)\left[H_c(k)-H_c(j)\right]^2}{B_c^2(k)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{H_c(k)}{B_c(k)}, \qquad (4.2o)$$

iar prin anularea derivatelor parţiale ale funcţionalei $\sigma(F)+\varrho\eta(F)$ în raport cu coeficienţii a_i rezultă relaţiile

$$a_o \sum_{k=i+1}^{n} \frac{H_c(k)\left[H_c(k)-H_c(i)\right]^2}{B_c^2(k)} + \sum_{j=1}^{i} a_j \left\{ \sum_{k=i+1}^{n} \frac{\left[H_c(k)-H_c(i)\right]^2\left[H_c(k)-H_c(j)\right]^2}{B_c^2(k)} + 4\varrho\left[H_c(n)-H_c(i)\right] \right\} + \sum_{j=i+1}^{n-1} a_j \left\{ \sum_{k=j+1}^{n} \frac{\left[H_c(k)-H_c(i)\right]^2\left[H_c(k)-H_c(j)\right]^2}{B_c^2(k)} + 4\varrho\left[H_c(n)-H_c(j)\right] \right\} = \sum_{k=i+1}^{n} \frac{\left[H_c(k)-H_c(i)\right]^2}{B_c(k)}, \quad (i=1,2,\ldots,n-1). \qquad (4.21)$$

Relaţiile (4.2o, 4.21) formează un sistem de n ecuaţii liniare din care se pot determina cei n coeficienţi reali din (4.17).

Expresia analitică (4.17) de aproximare a curbei de magnetizare B(H) este segmentar polinomială, segmentele de polinoame de gradul 2 racordîndu-se în punctele de abscise $H_c(i)$ împreună cu primele derivate ale segmentelor de polinoame.

In continuare se prezintă relaţiile de calcul ale funcţiilor $\mu(H)$, $\frac{\partial\mu}{\partial H}(H)$, $\frac{1}{\mu}(B)$ şi $\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}(B)$. Din relaţia (4.17) rezultă

$$\mu(H) = \frac{F(H)}{H} = a_o + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i\left[H-H_c(i)\right]_+^2}{H} \qquad (4.22)$$

şi deci

$$\frac{\partial\mu}{\partial H}(H)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i\left[H-H_c(i)\right]_+\left\{2H-\left[H-H_c(i)\right]_+\right\}}{H^2}. \tag{4.23}$$

Pentru deducerea relațiilor de calcul ale funcțiilor $\frac{1}{\mu}(B)$ și $\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}(B)$, se stabilește întîi intervalul în care este conținut B. Fie

$$F\left[H_c(k)\right] < B \leq F\left[H_c(k+1)\right], \quad (k\in\left[1,\ n-1\right]). \tag{4.24}$$

Deci

$$B=a_oH+\sum_{i=1}^{k} a_i\left[H-H_c(i)\right]^2. \tag{4.25}$$

Relația (4.25) este o ecuație de gradul 2 în H, care se poate scrie sub forma

$$H^2\sum_{i=1}^{k} a_i+H\left[a_o-2\sum_{i=1}^{k} a_iH_c(i)\right]+\sum_{i=1}^{k} a_iH_c^2(i)-B=o, \tag{4.26}$$

de unde

$$H=\frac{-b+\sqrt{4ac}}{2a}, \tag{4.27}$$

cu

$$\left.\begin{aligned} a&=\sum_{i=1}^{k} a_i \\ b&=a_o-2\sum_{i=1}^{k} a_iH_c(i) \\ c&=\sum_{i=1}^{k} a_iH_c^2(i)-B \end{aligned}\right\}. \tag{4.28}$$

Fiind determinată valoarea lui H corespunzătoare lui B, se poate scrie

$$\frac{1}{\mu}(B)=\frac{1}{\mu(H)}. \tag{4.29}$$

Avînd în vedere că

$$\frac{\partial(\frac{1}{\mu})}{\partial B}(B)=\frac{\partial\left[\frac{H}{F(H)}\right]}{\partial\left[F(H)\right]}=\frac{1}{F(H)F'(H)}-\frac{H}{F^2(H)}, \tag{4.30}$$

rezultă

$$\frac{\partial(\frac{1}{\mu})}{\partial B}(B)=\frac{1}{B}\left\{\frac{1}{a_o+2\sum\limits_{i=1}^{k}\left[H-H_c(i)\right]}-\frac{H}{B}\right\}, \tag{4.31}$$

H fiind cel calculat cu relaţia (4.27).

Intrucît primul punct al curbei de magnetizare se caracterizează prin $H_c(1)=B_c(1)=o$, se mai deduce că

$$\mu(o)=a_o, \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial H}(o)=a_1, \tag{4.33}$$

$$\frac{1}{\mu}(o)=\frac{1}{a_o}, \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial(\frac{1}{\mu})}{\partial B}(o)=-\frac{a_1}{a_o^3}. \tag{4.35}$$

Funcţiile descrise de relaţiile (4.22, 4.23, 4.29, 4.31) au caracter polinomial, ele putînd fi utilizate în cadrul unui program ca funcţii externe cu structuri simple.

Expresia de aproximare (4.17) a fost utilizată pentru curba de magnetizare caracterizată prin valorile $H_c(i)$, $B_c(i)$ $(i=1,2,...,12)$ din tabelul 3.1. In scopul obţinerii unei netezimi ridicate a aproximării, s-a ales $\rho=3.1o^5$. Pentru coeficienţii a_o şi a_i au rezultat valorile din tabelul 4.4. In tabelul 4.5 sînt prezentate valorile calculate $F\left[H_c(i)\right]$. Precizia aproximării a fost apreciată prin abaterea relativă medie procentuală, calculată cu relaţia

Tabelul 4.4

$a_o = 9{,}139.1o^{-3}$ H/m	
i	a_i [H/A]
1	$-1{,}049.1o^{-5}$
2	$-1{,}087.1o^{-5}$
3	$1{,}416.1o^{-6}$
4	$1{,}744.1o^{-5}$
5	$7{,}932.1o^{-7}$
6	$1{,}887.1o^{-6}$
7	$-7{,}335.1o^{-8}$
8	$-2{,}234.1o^{-7}$
9	$1{,}02o.1o^{-7}$
1o	$4{,}991.1o^{-8}$
11	$-7{,}879.1o^{-8}$

$$\alpha_B=\frac{1oo}{12}\sum_{i=2}^{12}\frac{\left|F\left[H_c(i)\right]-B_c(i)\right|}{B_c(i)} \tag{4.36}$$

şi egală cu 1,8%. Este posibil să se obţină o valoare mai mică pentru α_B scăzîndu-l pe ρ, dar aceasta în detrimentul netezimii aproximării. Pot să apară chiar oscilaţii în curba F(H) care să-i anuleze caracterul de funcţie monotonă, nefiind îndeplinită o condiţie impusă curbei de magnetizare în cadrul teoremelor 1 şi 2 de unicitate din capitolul 1. De altfel, în acest caz nici nu mai este posibilă rezolvarea ecuaţiei de gradul 2 (4.26).

Tabelul 4.5

i	1	2	3	4	5	6	7
$F[H_c(i)]$ [T]	o	o,431	o,866	1,174	1,443	1,587	1,624

Tabelul 4.5 (continuare)

8	9	1o	11	12
1,714	1,828	1,887	1,96	2,o1

Exemplul de aplicare a metodei numerice cu diferenţe finite iterativă din subcapitolul 3.9 a fost reluat şi cu expresia (4.17) de aproximare a curbei de magnetizare B(H). Subprogramele de tip subrutină CMAG şi de tip funcţie externă HMIU, DHMIU, UIMB şi DUIMB sînt prezentate în anexa A2.

Programul de calcul a fost rulat pe un calculator FELIX C-256. Lungimea programului editat a fost de 38,8 kocteţi iar volumul memoriei ocupate, inclusiv tablourile declarate de 4o kocteţi. Soluţia problemei de cîmp a fost obţinută după 169 de iteraţii.

Valorile rezultate pentru mărimile H_x, H_y şi H în A/m, B_x, B_y şi B în T şi A_z în Tm în nodurile reţelei de discretizare sînt date în tabelul 4.6. In fig.4.1 sînt trasate şi liniile de cîmp ale inducţiei magnetice. Parametrul curbelor este valoarea potenţialului magnetic vector, în Tm.

In urma celor arătate mai sus se poate trage concluzia că utilizarea expresiei (4.17) de aproximare a curbei de magnetizare B(H) în locul aproximării prin segmente de dreaptă duce la creşterea vitezei de convergenţă, numărul de iteraţii necesar obţinerii soluţiei problemei de cîmp fiind mai mic cu 5%.

De asemenea, se poate aprecia că precizia soluţiei problemei de cîmp este mai mare, ca urmare a unei precizii mai mari în aproximarea curbei de magnetizare B(H).

TABELUL 4.36

COMPONENTA LUI H DUPA AXA OX
IN NODURILE RETELEI

0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8435.0	5515.0	-248.6	296.4	0.0
385.6	1040.1	1205.4	423.8	0.0
624.7	340.6	208.7	124.0	0.0
421.1	402.9	164.9	64.4	0.0

COMPONENTA LUI H DUPA AXA OY
IN NODURILE RETELEI

0.0	12544.1	7960.4	8764.8	8820.2
0.0	8126.7	9281.2	7709.1	7464.6
0.0	221.9	1393.3	2211.5	2380.5
0.0	90.6	79.3	145.8	184.7
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

INTENSITATEA H IN NODURILE RETELEI

0.0	12544.1	7960.4	8764.8	8820.2
8434.9	9821.4	9284.5	7714.8	7464.6
385.6	1063.6	1868.8	2251.8	2380.5
624.7	352.5	222.9	192.7	184.7
421.1	402.9	164.9	64.4	0.0

COMPONENTA LUI B DUPA AXA OX
IN NODURILE RETELEI

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0106	-0.0069	-0.0596	0.0824	0.0000
1.3904	1.6196	1.1901	0.3448	0.0000
1.5285	1.3076	1.1292	0.7555	0.0000
1.4110	1.4004	1.0603	0.5835	0.0000

COMPONENTA LUI B DUPA AXA OY
IN NODURILE RETELEI

0.0000	0.0158	2.1380	2.1983	2.2010
0.0000	0.0142	2.2234	2.1442	2.1332
0.0000	0.3447	1.3314	1.7991	1.8418
0.0000	0.3480	0.0235	0.8737	1.1279
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

INDUCTIA B IN NODURILE RETELEI

0.0000	0.0158	2.1380	2.1983	2.2010
-0.0106	0.0123	2.2242	2.1457	2.1332
1.3904	1.6520	1.7857	1.8318	1.8418
1.5285	1.3531	1.2060	1.1551	1.1279
1.4110	1.4004	1.0603	0.5835	0.0000

POTENTIALUL AZ IN NODURILE RETELEI

0.0565	0.0545	0.0437	0.0221	0.0000
0.0565	0.0544	0.0432	0.0214	0.0000
0.0480	0.0422	0.0338	0.0182	0.0000
0.0221	0.0203	0.0165	0.0100	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

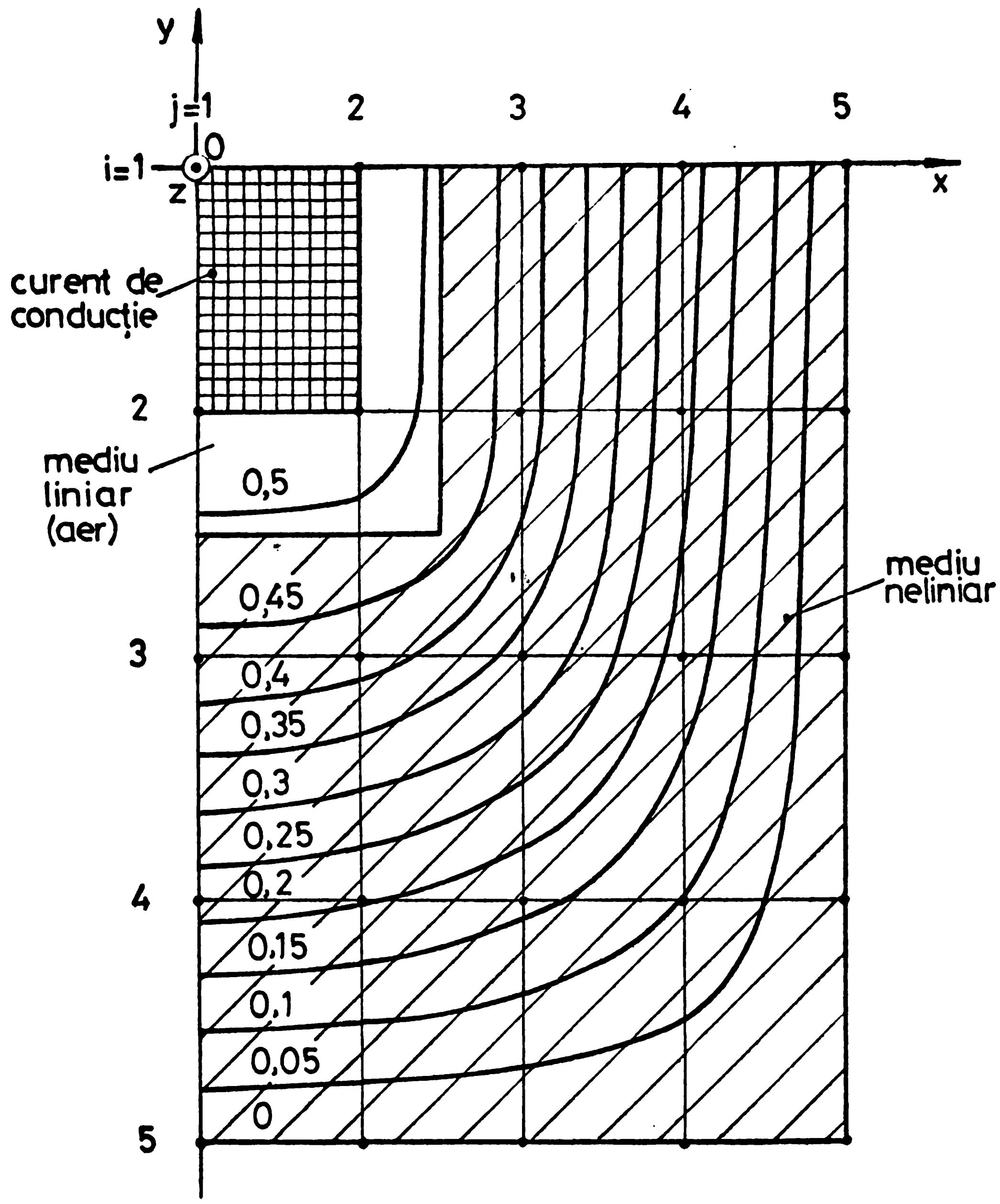


Fig.4.1

4.2.3. Aproximarea cu funcție hiperbolică completată cu termen liniar

Aproximarea curbei de magnetizare B(H) prin expresia hiperbolică [32]

$$F(H)=\frac{H}{a+bH} \qquad (4.37)$$

satisface condițiile de continuitate a funcțiilor $\frac{\partial\mu}{\partial H}(H)$ și $\frac{\partial(1/\mu)}{\partial B}(B)$. In același timp se poate ușor calcula H atunci cînd se cunoaște F(H), adică valoarea B aproximată. Expresia (4.37) prezintă însă dezavantajul că la creșterea lui H, F(H) tinde spre

1/b, adică spre o valoare constantă. Pentru eliminarea acestui dezavantaj, expresia (4.37) a fost completată cu un termen liniar, ea devenind

$$F(H)=\frac{H}{a+bH}+cH. \tag{4.38}$$

Coeficienţii reali a, b şi c se pot calcula dacă se impune condiţia

$$F\left[H_c(i)\right]=B_c(i) \tag{4.39}$$

în 3 puncte convenabil alese din cele n-1 puncte nebanale ce caracterizează curba de magnetizare. S-au analizat mai multe variante de alegere a celor 3 puncte nebanale pentru curba de magnetizare dată în tabelul 3.1. Cea mai bună precizie de aproximare, caracterizată printr-o abatere relativă medie procentuală ε_B = 1,56%, calculată cu relaţia (4.36) s-a obţinut pentru i=3,6,11 în relaţia (4.39). In acest caz coeficienţii a, b şi c au rezultat: a=65,548 m/H, b=0,562 1/T şi $c=5{,}776\cdot10^{-5}$ H/m. Valorile $F\left[H_c(i)\right]$ calculate sînt cele din tabelul 4.7.

Tabelul 4.7

i	1	2	3	4	5	6	7
$F\left[H_c(i)\right]$ [T]	0	0,537	0,89	1,136	1,388	1,55	1,651

Tabelul 4.7 (continuare)

8	9	10	11	12
1,727	1,807	1,886	1,96	2,028

Din relaţia (4.38) rezultă

$$\mu(H)=\frac{F(H)}{H}=\frac{1}{a+bH}+c \tag{4.40}$$

şi

$$\frac{\partial\mu}{\partial H}(H)=-\frac{b}{(a+bH)^2}. \tag{4.41}$$

Valoarea lui H se poate calcula cînd se cunoaşte valoarea lui B cu relaţia

$$H=\frac{-(1+ac-bB)+\sqrt{(1+ac-bB)^2+4abcB}}{2bc}, \tag{4.42}$$

din care rezultă

$$\frac{1}{\mu}(B)=\frac{-(1+ac-bB)+R}{2bcB}. \tag{4.43}$$

şi

$$\frac{\partial(\frac{1}{\mu})}{\partial B}(B)=\frac{1}{2cB}-\frac{1-ac-bB}{2cBR}+\frac{1+ac-bB-R}{2bcB^2}, \qquad (4.44)$$

unde

$$R=\sqrt{(1+ac-bB)^2+4abcB}. \qquad (4.45)$$

Pentru primul punct al curbei de magnetizare în care $H_c(1)=B_c(1)=o$, se deduce

$$\frac{1}{\mu}(o)=\frac{a}{1+ac} \qquad (4.46)$$

şi

$$\frac{\partial(\frac{1}{\mu})}{\partial B}(o)=\frac{ab}{(1+ac)^3}. \qquad (4.47)$$

Exemplul de aplicare a metodei numerice cu diferenţe finite iterativă din subcapitolul 3.9 a fost reluat şi cu expresia (4.38) de aproximare a curbei de magnetizare B(H). Subprogramele de tip subrutină CMAG şi funcţie externă HMIU, DHMIU, UIMB şi DUIMB sînt prezentate în anexa A3.

Programul de calcul, rulat pe un calculator FELIX C-256 a fost editat pe o lungime de 37,4 kocteţi iar volumul memoriei ocupate, inclusiv tablourile declarate, a fost de 38 kocteţi. Soluţia problemei de cîmp a fost obţinută după 155 de iteraţii.

Valorile rezultate pentru mărimile H_x, H_y şi H în A/M, B_x, B_y şi B în T şi A_z în Tm sînt cele din tabelul 4.8. In fig.4.2 sînt trasate liniile de cîmp ale inducţiei magnetice, parametrul curbelor fiind valoarea potenţialului magnetic vector, în Tm.

Utilizarea expresiei (4.35) pentru aproximarea curbei de magnetizare în locul aproximării prin segmente de dreaptă a redus numărul de iteraţii de la 175 la 155, adică cu 11%. Creşterea vitezei de convergenţă a metodei caracterizată prin scăderea numărului de iteraţii necesar pentru obţinerea soluţiei problemei de cîmp reprezintă un aspect important care scoate în evidenţă avantajul expresiei (4.35) de aproximare a curbei de magnetizare. De asemenea, şi precizia soluţiei problemei de cîmp este mai ridicată ca urmare a aproximării mai precise a curbei de magnetizare neliniare B(H).

TABELUL 4.8

COMPONENTA LUI H DUPA AXA OX
IN NODURILE RETELEI

.0	.0	.0	.0	.0
8489.4	5778.8	319.2	360.5	.0
414.2	1178.5	1447.1	461.6	.0
689.2	360.5	228.2	140.9	.0
458.6	438.8	181.2	61.2	.0

COMPONENTA LUI H DUPA AXA OY
IN NODURILE RETELEI

.0	12263.3	7255.3	8563.2	8551.0
.0	8194.8	9142.9	7382.2	7154.3
.0	2600.8	1639.4	2580.8	2742.2
.0	101.5	83.7	165.2	218.5
.0	.0	.0	.0	.0

INTENSITATEA H IN NODURILE RETELEI

.0	12263.3	7255.3	8563.2	8551.0
8489.4	1[illegible]27.4	9148.5	7391.[illegible]	7154.3
414.2	12[illegible]7.[illegible]	2186.7	2621.7	2742.2
689.2	374.5	242.1	217.2	218.5
458.6	438.8	181.2	61.2	.0

COMPONENTA LUI B DUPA AXA OX
IN NODURILE RETELEI

.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0157	.[illegible]73	.0798	.1063	.0000
1.4123	1.6523	1.2015	.3266	.0000
1.5616	1.3269	1.1453	.7593	.0000
1.4451	1.4311	1.0929	.6159	.0000

COMPONENTA LUI B DUPA AXA OY
IN NODURILE RETELEI

.0000	.0154	2.1703	2.2501	2.2494
.0000	.0113	2.2841	2.1761	2.1641
.0000	.3656	1.3812	1.8260	1.8652
.0000	.3735	.4[illegible]52	.89[illegible]4	1.1727
.0000	.0037	.0000	.0000	.0000

INDUCTIA B IN NODURILE RETELEI

.0000	.0154	2.1703	2.2501	2.2494
.0157	.0126	2.2855	2.1787	2.1641
1.4123	1.6923	1.8156	1.8559	1.8652
1.5616	1.3784	1.2148	1.1702	1.1726
1.4451	1.4311	1.0929	.6159	.0000

POTENTIALJL AZ IN NODURILE RETELEI

.556	.555	.446	.225	.000
.555	.554	.440	.217	.000
.448	.430	.344	.185	.000
.225	.237	.168	.103	.000
.000	.000	.000	.000	.000

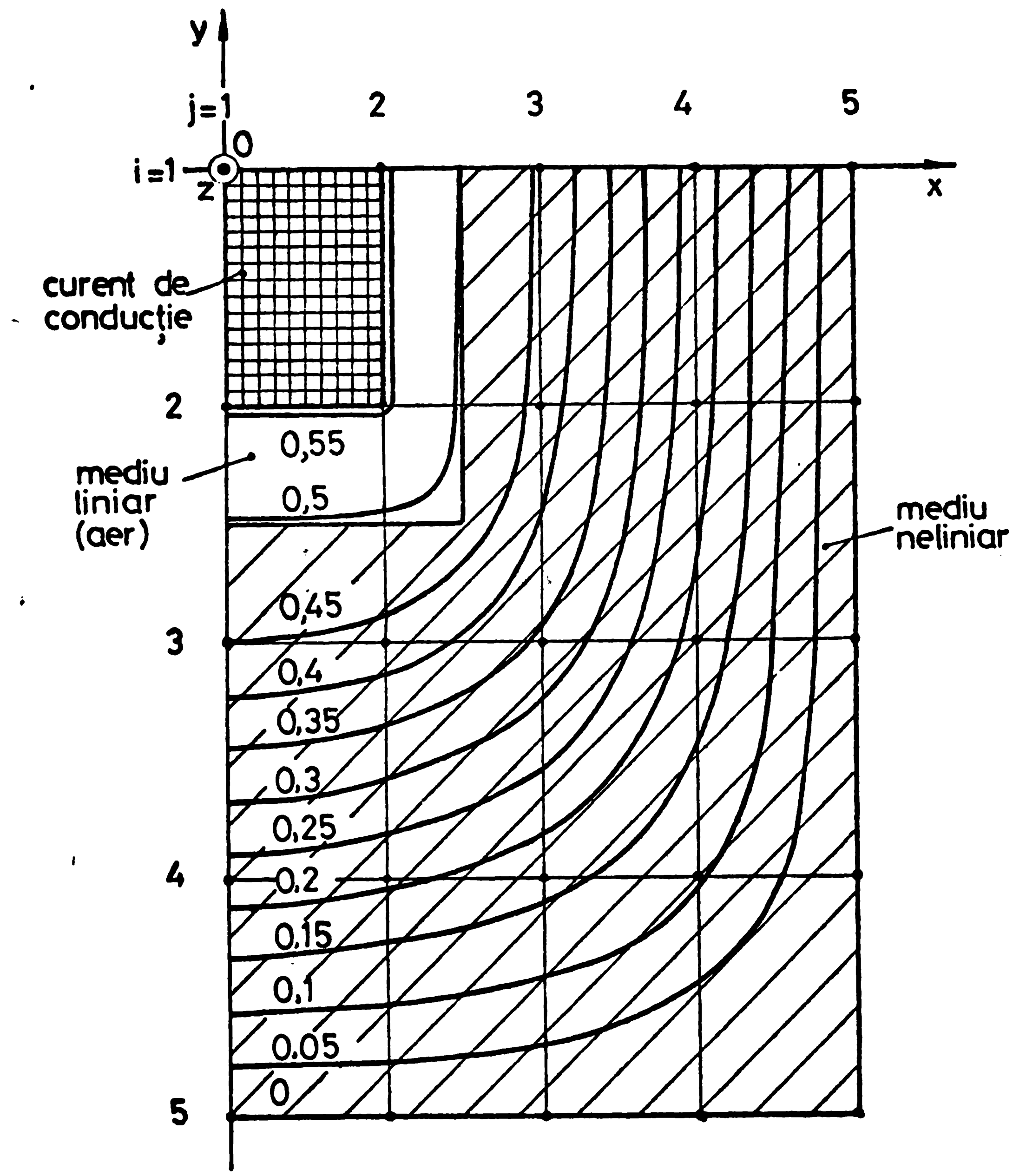


Fig.4.2

4.3. Baleierea încrucișată a elementelor

Iterarea necunoscutelor H_x, H_y, B_x și B_y din sistemul de ecuații (3.13 - 3.15, 3.5, 3.6) trebuie efectuată conform relațiilor (3.36 - 3.45), succesiv pentru fiecare element al rețelei de discretizare a domeniului de existență D a cîmpului magnetic, ceea ce pretinde explorarea ordonată a elementelor într-o anumită ordine. In exemplele de calcul prezentate s-a utilizat baleierea pe linii a elementelor; au fost deci parcurse elementele de pe linia 1 de la stînga la dreapta, apoi elementele de pe linia

2 în acelaşi sens, ş.a.m.d., pînă la ultimul element (fig.4.3). Dacă valorile iniţiale ale necunoscutelor H_x, H_y, B_x şi B_y sînt nule sau cvasinule, în procesul de baleiere a elementelor are loc o propagare a valorilor nenule ale necunoscutelor de la elementele pentru care densitatea de curent de conducţie $J_c(I,J)$ este nenulă (şi deci mărimea $\mathcal{E}_H(I,J)$ nenulă) spre elementele care nu sînt intersectate de curenţi de conducţie. Procesul de propagare al valorilor necunoscutelor, valori care tind spre valorile finale ce reprezintă soluţia problemei de cîmp este reluat la fiecare iterare a necunoscutelor pe mulţimea elementelor reţelei de discretizare. In ideea că procesul de propagare a valorilor nenule ale necunoscutelor în tendinţa lor de atingere a valorilor finale depinde potenţial de modul de baleiere a elementelor, s-a analizat influenţa baleierii încrucişate asupra numărului de iteraţii necesar obţinerii soluţiei problemei de cîmp, adică asupra vitezei de convergenţă a metodei numerice cu diferenţe finite iterativă de calcul al cîmpului magnetic cvasistaţionar. Pentru exemplul prezentat în subcapitolul 3.9, dar utilizînd aproximarea curbei de magnetizare B(H) cu expresia hiperbolică completată cu un termen liniar (4.35) pentru care s-a obţinut numărul minim de iteraţii egal cu 155, s-a alternat baleierea pe linii a elementelor cu baleierea lor pe coloane (fig.4.4). Pentru iteraţiile cu număr impar (1,3,...) s-a utilizat baleierea pe linii, iar pentru iteraţiile cu număr par (2,4,...) baleierea pe coloane. Soluţia problemei de cîmp a fost obţinută după 263 de iteraţii. Modul de baleiere a elementelor influenţează deci numărul de iteraţii necesar obţinerii soluţiei problemei de cîmp. Baleierea încrucişată a elementelor reţelei de discretizare nu duce însă la scăderea numărului de iteraţii în raport cu baleierea simplă pe o singură direcţie.

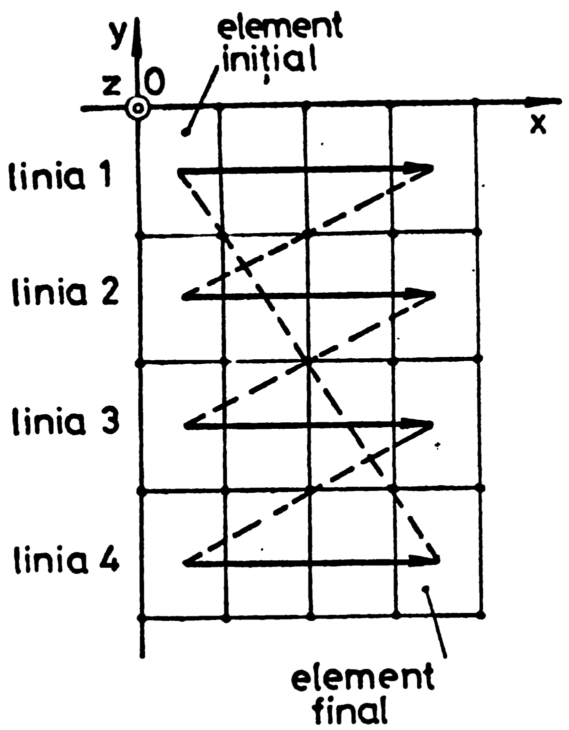


Fig.4.3

4.4. Valoarea coeficientului de relaxare k_r

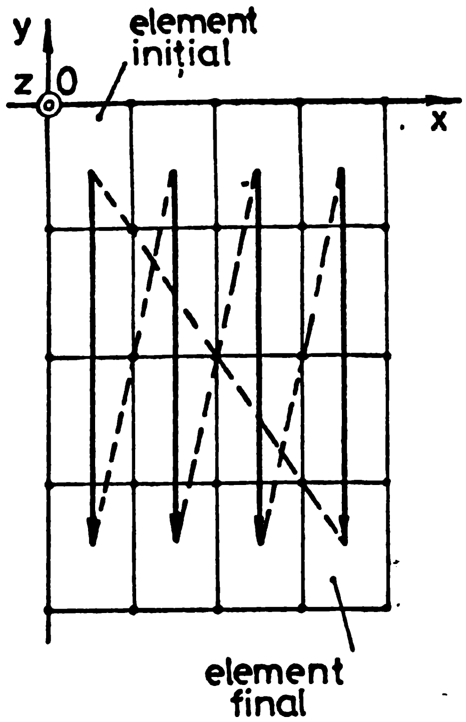


Fig.4.4

In subcapitolul 3.6 s-a arătat că pentru o valoare a coeficientului de relaxare k_r ce satisface relația (3.78) este asigurată convergența procesului iterativ de calcul. La aproximarea curbei de magnetizare cu expresia hiperbolică completată cu un termen liber (4.35) s-a obținut pentru exemplul de calcul din subcapitolul 3.9 numărul minim de iterații de 155, coeficientul de relaxare k_r fiind scăzut de-a lungul primelor 7o de iterații de la o,9 la o,55, ca în fig.3.19. Necesitatea modificării lui k_r ca și modul de modificare a lui de-a lungul procesului iterativ de calcul nu sînt tratate în [11].

Pentru a analiza influența valorii coeficientului de relaxare k_r asupra vitezei de convergență a procesului de calcul iterativ s-a reluat exemplul de calcul amintit mai sus pentru diverse valori ale lui k_r. Valorile luate în considerare au fost constante întrucît nu se poate evalua apriori numărul de iterații necesar obținerii soluției problemei de cîmp. Soluția problemei de cîmp a fost obținută după numere de iterații diferite la valori diferite ale coeficientului de relaxare k_r, rezultatele fiind prezentate în fig.4.5. Din fig.4.5 reiese că valoarea coeficientului k_r influențează puternic numărul de iterații necesar rezolvării problemei de cîmp, adică viteza de convergență a metodei. Numărul minim de iterații, egal cu 8o, s-a obținut pentru k_r=o,54, el fiind de 1,9 ori mai mic decît 155.

Pentru k_r=o,54, timpul de calcul al unității centrale a calculatorului FELIX C-256 a fost de 9o,5 s iar timpul total consumat de calculator de 268 s.

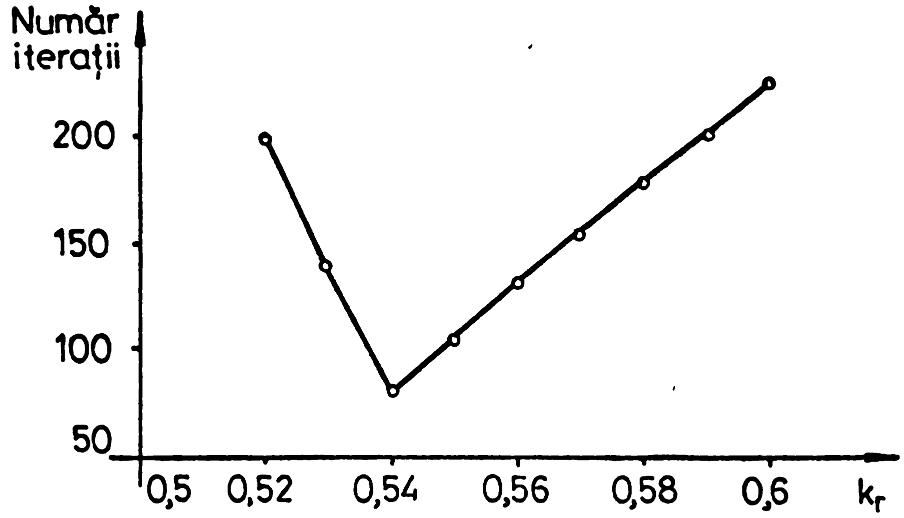


Fig.4.5

CAPITOLUL 5

CALCULUL CIMPULUI MAGNETIC CVASISTATIONAR PLAN-PARALEL CU O METODA CU DIFERENTE FINITE RECURENTA

5.1. Introducere

Metoda numerică cu diferenţe finite iterativă, extinsă pe reţea rectangulară periodică cu pas neegal, expusă în capitolul 3, permite calculul distribuţiei cîmpului magnetic cvasistaţionar plan-paralel într-un domeniu plan D de o formă oarecare. Metoda numerică cu diferenţe finite recurentă elaborată de autor în cadrul acestui capitol permite calculul rapid al valorilor componentelor vectorilor $\bar{H}$ şi $\bar{B}$ în nodurile unei reţele de discretizare rectangulară periodică cu pas neegal a unui domeniu plan dreptunghiular, la care se cunosc valorile componentelor lui $\bar{H}$ şi/sau $\bar{B}$ în nodurile de pe două laturi vecine ale domeniului. Este conceput algoritmul de calcul corespunzător metodei şi un program de calcul în limbajul FORTRAN IV pentru o configuraţie dreptunghiulară dată.

5.2. Formularea problemei de cîmp şi substituirea ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale cu ecuaţii cu diferenţe finite

In cadrul metodei cu diferenţe finite recurentă de calcul al cîmpului magnetic cvasistaţionar plan-paralel, problema de cîmp se formulează la fel ca şi în cadrul metodei cu diferenţe finite iterativă, extinsă pe reţea rectangulară periodică cu pas neegal (subcapitolul 3.2). Deasemenea, ecuaţiile cu derivate parţiale ce reprezintă formele diferenţiale a teoremei lui Ampère şi a legii fluxului magnetic se substituie prin ecuaţiile cu diferenţe finite (3.9, 3.1o) în modul arătat în subcapitolul 3.3.

5.3. Rezolvarea recurentă a sistemului de ecuaţii cu diferenţe finite

Admiţînd că mediul neliniar din domeniul D de existenţă a cîmpului magnetic este izotrop, în orice nod (i,j) al reţelei de discretizare din fig.3.1 se pot scrie relaţii de forma

$$\left.\begin{aligned} B_x(i,j)&=\mu(i,j)H_x(i,j) \\ B_y(i,j)&=\mu(i,j)H_y(i,j) \end{aligned}\right\} . \tag{5.1}$$

Relaţiile (3.9, 3.10) formează un sistem de două ecuaţii cu diferenţe finite în care mărimile $H_x(i+1,j+1)$ şi $H_y(i+1,j+1)$ pot fi considerate ca fiind necunoscute. Rezolvînd sistemul de ecuaţii cu diferenţe finite în raport cu $H_x(i+1,j+1)$ şi $H_y(i+1,j+1)$ şi ţinînd cont de relaţiile (5.1), se obţine

$$\left.\begin{aligned} H_x(i+1,j+1)=&\frac{2p_x^2p_y}{p_x^2+p_y^2}J_c(I,J)+A(I,J)H_x(i,j)+ \\ &+B(I,J)H_y(i,j)+C(I,J)H_x(i,j+1)-D(I,J)H_y(i,j+1)+ \\ &+E(I,J)H_x(i+1,j)+F(I,J)H_y(i+1,j) \\ H_y(i+1,j+1)=&\frac{2p_xp_y^2}{p_x^2+p_y^2}J_c(I,J)+B(I,J)H_x(i,j)+ \\ &+G(I,J)H_y(i,j)+D(I,J)H_x(i,j+1)+K(I,J)H_y(i,j+1)- \\ &-F(I,J)H_x(i+1,j)+L(I,J)H_y(i+1,j) \end{aligned}\right\} , \tag{5.2}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} A(I,J)&=\frac{1}{p_x^2+p_y^2}\left[p_x^2+p_y^2\,\frac{\mu(i,j)}{\mu(i+1,j+1)}\right] \\ B(I,J)&=\frac{p_xp_y}{p_x^2+p_y^2}\left[1-\frac{\mu(i,j)}{\mu(i+1,j+1)}\right] \\ C(I,J)&=\frac{1}{p_x^2+p_y^2}\left[p_x^2-p_y^2\,\frac{\mu(i,j+1)}{\mu(i+1,j+1)}\right] \\ D(I,J)&=\frac{p_xp_y}{p_x^2+p_y^2}\left[1+\frac{\mu(i,j+1)}{\mu(i+1,j+1}\right] \\ E(I,J)&=\frac{1}{p_x^2+p_y^2}\left[p_y^2\,\frac{\mu(i+1,j)}{\mu(i+1,j+1}-p_x^2\right] \\ F(I,J)&=\frac{p_xp_y}{p_x^2+p_y^2}\left[1+\frac{\mu(i+1,j)}{\mu(i+1,j+1)}\right] \\ G(I,J)&=\frac{1}{p_x^2+p_y^2}\left[p_x^2\,\frac{\mu(i,j)}{\mu(i+1,j+1)}+p_y^2\right] \end{aligned}\right\} . \tag{5.3}$$

$$\left.\begin{aligned} K(I,J)&=\frac{1}{p_x^2+p_y^2}\left[p_x^2\,\frac{\mu(i,j+1)}{\mu(i+1,j+1)}-p_y^2\right] \\ L(I,J)&=\frac{1}{p_x^2+p_y^2}\left[p_y^2-p_x^2\,\frac{\mu(i+1,j)}{\mu(i+1,j+1)}\right]\end{aligned}\right)$$

Relaţiile (5.2) nu se aplică în nodurile de pe frontiera domeniului D în care, conform condiţiei (3.5) sau (3.6), una din cele două componente este nulă. Dacă

$$H_x(i+1,j+1)=o, \tag{5.4}$$

atunci

$$H_y(i+1,j+1)=2p_xJ_c(I,J)+\frac{p_x}{p_y}H_x(i,j)+H_y(i,j)-\frac{p_x}{p_y}H_x(i+1,j)+$$

$$+H_y(i+1,j)+\frac{p_x}{p_y}H_x(i,j+1)-H_y(i,j+1). \tag{5.5}$$

Dacă

$$H_y(i+1,j+1)=o, \tag{5.6}$$

atunci

$$H_x(i+1,j+1)=2p_yJ_c(I,J)+H_x(i,j)+\frac{p_y}{p_x}H_y(i,j)-H_x(i+1,j)+$$

$$+\frac{p_y}{p_x}H_y(i+1,j)+H_x(i,j+1)-\frac{p_y}{p_x}H_y(i,j+1). \tag{5.7}$$

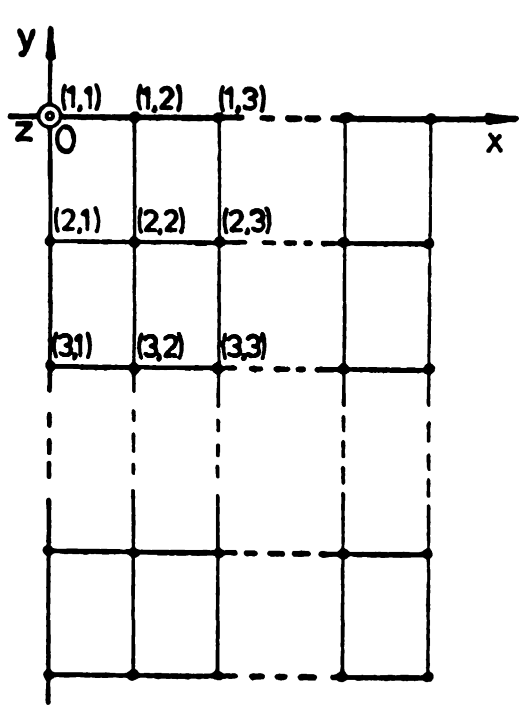


Fig.5.1

In cazul unui domeniu D dreptunghiular (fig.5.1), la care se cunosc valorile componentelor lui $\bar{H}$ şi/sau $\bar{B}$ de-a lungul a două laturi, de exemplu superioară şi stînga, relaţiile (5.2, 5.5, 5.7) permit calculul componentelor lui $\bar{H}$ în toate nodurile reţelei de discretizare, prin aplicarea lor, pe rînd, elementelor (1,1),(1,2),...,(2,1),(2,2),..., pînă la ultimul element. Se calculează întîi $H_x(2,2)$ şi $H_y(2,2)$, apoi $H_x(2,3)$ şi $H_y(2,3)$, ş.a.m.d., pînă la ultimul nod. Cu relaţiile (5.1) se pot apoi calcula valorile componentelor lui $\bar{B}$ iar cu relaţiile

$$H(i,j)=\sqrt{H_x^2(i,j)+H_y^2(i,j)} \quad , \tag{5.8}$$

$$B(i,j)=\sqrt{B_x^2(i,j)+B_y^2(i,j)} \tag{5.9}$$

valorile intensităţii cîmpului magnetic şi inducţiei magnetice în toate nodurile reţelei de discretizare.

5.4. Considerarea proprietăţilor magnetice

In relaţiile (5.3) intervin permeabilităţile magnetice din cele 4 noduri (i,j), $(i,j+1)$, $(i+1,j)$ şi $(i+1,j+1)$ ale elementului (I,J) identificat prin nodul (i,j). Pentru nodul $(i+1,j+1)$ în care se calculează cu relaţiile (5.2) valorile componentelor lui $\bar{H}$,

$$\mu(i+1,j+1)=\mu_0 \tag{5.1o}$$

dacă nodul este plasat în mediu liniar (aer). Pentru un nod $(i+1,j+1)$ plasat în mediu neliniar, valoarea lui $\mu(i+1,j+1)$ nu este însă cunoscută dinainte. Trebuie precizat faptul că şi în cadrul acestei metode sînt posibile situaţiile de poziţie din fig. 3.4 şi 3.5 pentru nodurile reţelei de discretizare. Proprietăţile magnetice vor trebui să fie constante în interiorul elementului analizat pe o arie egală cu un multiplu întreg al unui sfert din aria elementului.

Valoarea lui $\mu(i+1,j+1)$ pentru un nod plasat în mediu neliniar poate fi calculată prin metoda aproximaţiilor succesive, în modul indicat în continuare.

Se aproximează curba de magnetizare B(H) a mediului neliniar cu o expresie analitică adecvată. Fie această expresie funcţia hiperbolică completată cu un termen liniar.

$$F(H)=\frac{H}{a+bH}+cH \tag{5.11}$$

de unde

$$\mu(H)=\frac{1}{a+bH}+c. \tag{5.12}$$

Se atribuie valori iniţiale arbitrare necunoscutelor $H_x(i+1,j+1)$ şi $H_y(i+1,j+1)$ şi se calculează $H(i+1,j+1)$ cu o relaţie de forma (5.8). Cu relaţia (5.12) se calculează valoarea iniţială a lui $\mu(i+1,j+1)$. Se calculează apoi cu relaţiile (5.2) valorile lui $H_x(i+1,j+1)$ şi $H_y(i+1,j+1)$, cu relaţia (5.8) $H(i+1,j+1)$ şi cu relaţia (5.12) din nou $\mu(i+1,j+1)$. Se recalculează $H_x(i+1,j+1)$ şi $H_y(i+1,j+1)$, procedeul repetîndu-se pînă cînd diferenţele relative ε_{Hx}, respectiv ε_{Hy} dintre valorile succesive sînt pentru ambele necunoscute mai mici decît o limită impusă ε_{HMax}.

5.5. Algoritmul de calcul

Algoritmul de calcul corespunzător metodei numerice cu diferenţe finite recurentă este redat în fig.5.2. In cadrul ei se face apel la subrutinele CAMIU (fig.5.3) pentru calculul permeabilităţii μ în nod şi CALCP (fig.3.13) pentru calculul potenţialului magnetic vector în nodurile reţelei de discretizare.

Subrutina CAMIU apelează pentru nodurile aflate în mediul neliniar funcţia externă HMIU (fig.5.4).

5.6. Exemplu de aplicare a metodei

Metoda numerică cu diferenţe finite recurentă de calcul al cîmpului magnetic cvasistaţionar prezentată a fost aplicată pe configuraţia din fig.5.5, similară celeia din fig.4.2. De-a lungul laturilor superioară şi stînga care sînt axe de simetrie au fost acceptate valorile componentelor lui $\bar{H}$ obţinute în paragraful 4.2.3 şi date în tabelul 4.8.

Programul de calcul scris în limbajul FORTRAN IV conform algoritmului din subcapitolul 5.5 este prezentat în anexa A4.

Programul a fost rulat pe un calculator FELIX C-256. Lungimea programului editat a fost de 12,4 kocteţi iar volumul memoriei centrale ocupate, inclusiv tablourile declarate, de 30 kocteţi.

Timpul de calcul al unităţii centrale a fost de 2,5 s iar timpul total consumat de calculator de 117 s. Faţă de timpii menţionaţi în subcapitolul 4.4, aceşti timpi, şi mai ales primul, sînt mult mai mici, ceea ce reflectă rapiditatea acestei metode în condiţiile precizate, în comparaţie cu metoda cu diferenţe finite iterativă, extinsă pe reţea rectangulară periodică cu pas neegal.

Valorile rezultate pentru mărimile H_x, H_y, H în A/m, B_x, B_y şi B în T şi A_z în Tm în nodurile reţelei de discretizare sînt

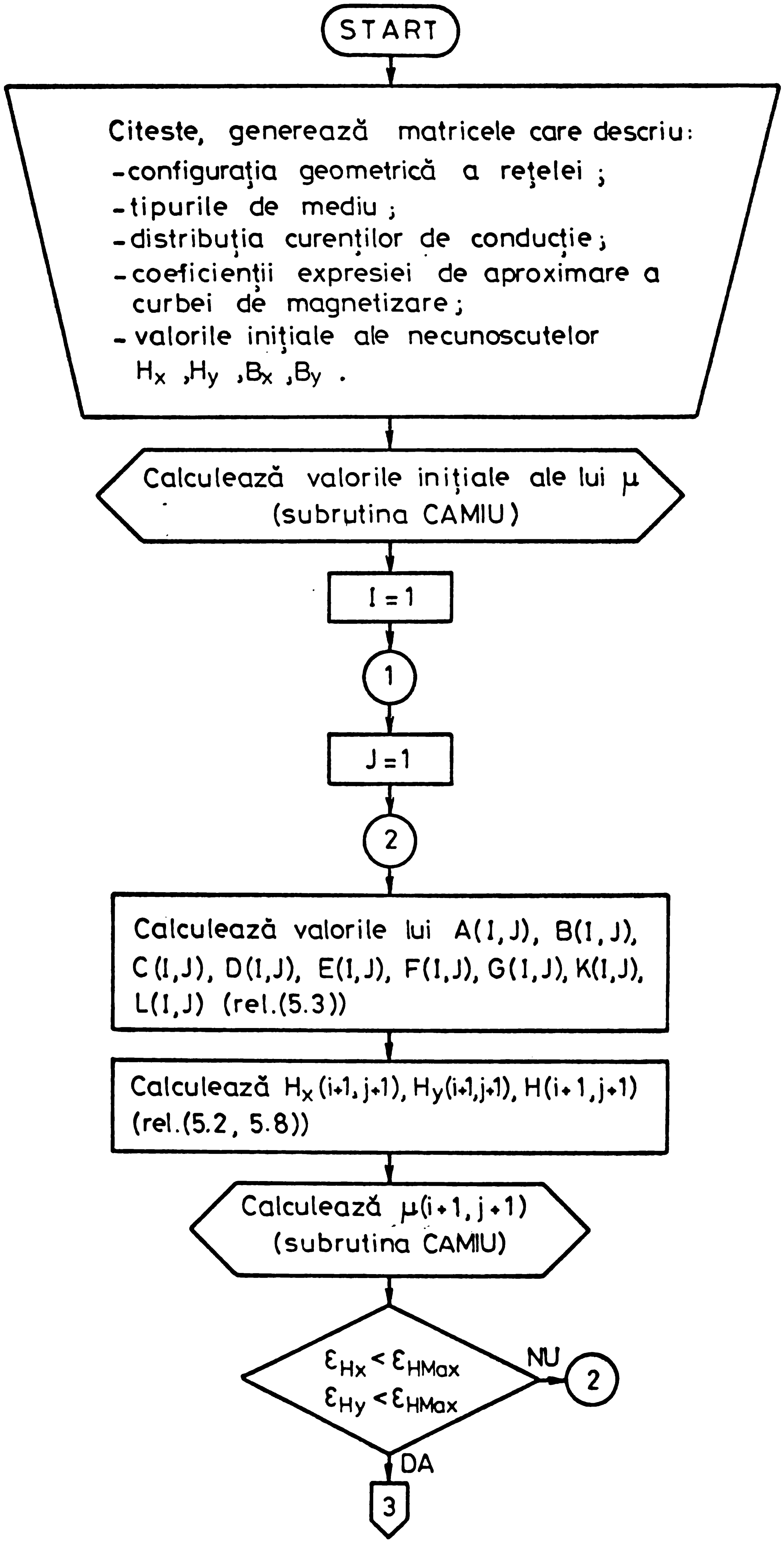

START
Citeste, generează matricele care descriu:
-configurația geometrică a rețelei ;
-tipurile de mediu ;
-distribuția curenților de conducție ;
-coeficienții expresiei de aproximare a curbei de magnetizare ;
-valorile inițiale ale necunoscutelor H_x, H_y, B_x, B_y .
Calculează valorile inițiale ale lui μ (subrutina CAMIU)
I = 1
1
J = 1
2
Calculează valorile lui A(I,J), B(I,J), C(I,J), D(I,J), E(I,J), F(I,J), G(I,J), K(I,J), L(I,J) (rel.(5.3))
Calculează $H_x(i+1,j+1)$, $H_y(i+1,j+1)$, $H(i+1,j+1)$ (rel.(5.2, 5.8))
Calculează $\mu(i+1,j+1)$ (subrutina CAMIU)
$\varepsilon_{Hx} < \varepsilon_{HMax}$
$\varepsilon_{Hy} < \varepsilon_{HMax}$
NU
2
DA
3

Fig. 5.2

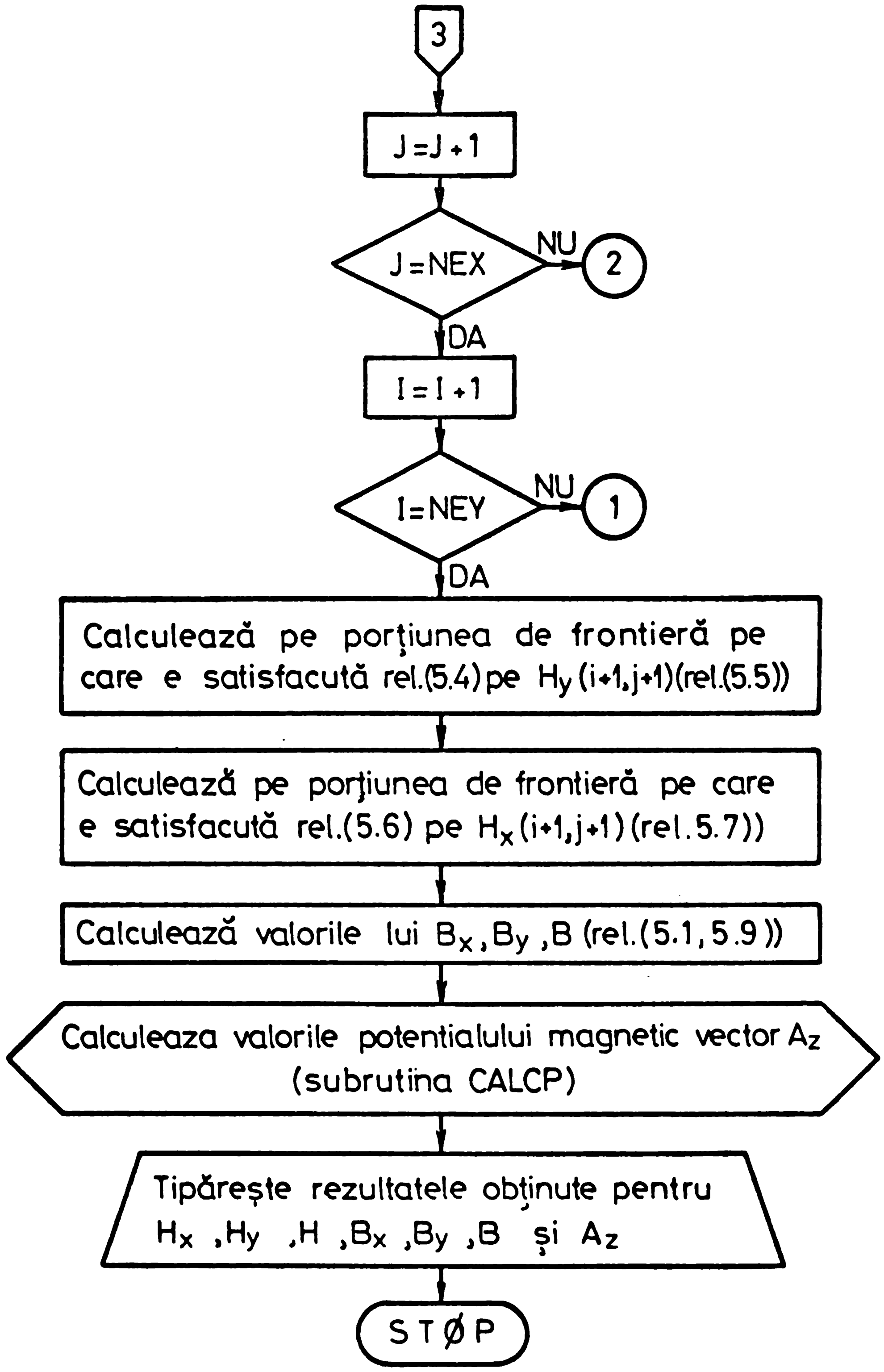


Fig. 5.2 (continuare)

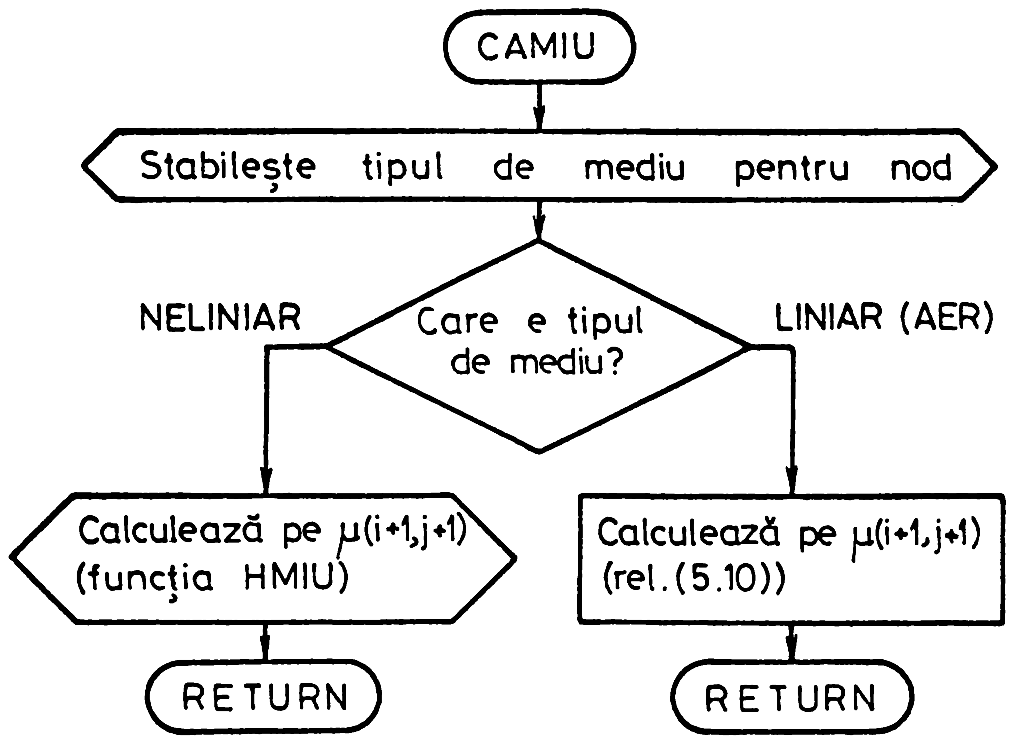

CAMIU
Stabilește tipul de mediu pentru nod
NELINIAR
Care e tipul de mediu?
LINIAR (AER)
Calculează pe $\mu(i+1,j+1)$ (funcția HMIU)
Calculează pe $\mu(i+1,j+1)$ (rel.(5.10))
RETURN
RETURN

Fig.5.3

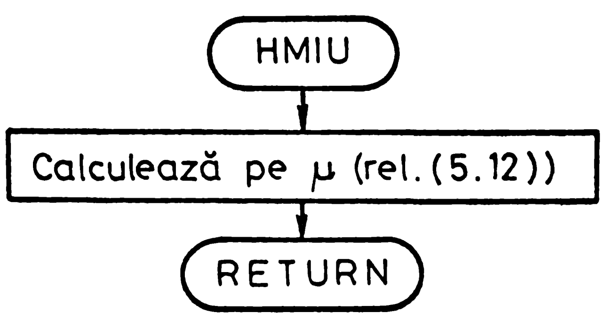

HMIU
Calculează pe μ (rel.(5.12))
RETURN

Fig.5.4

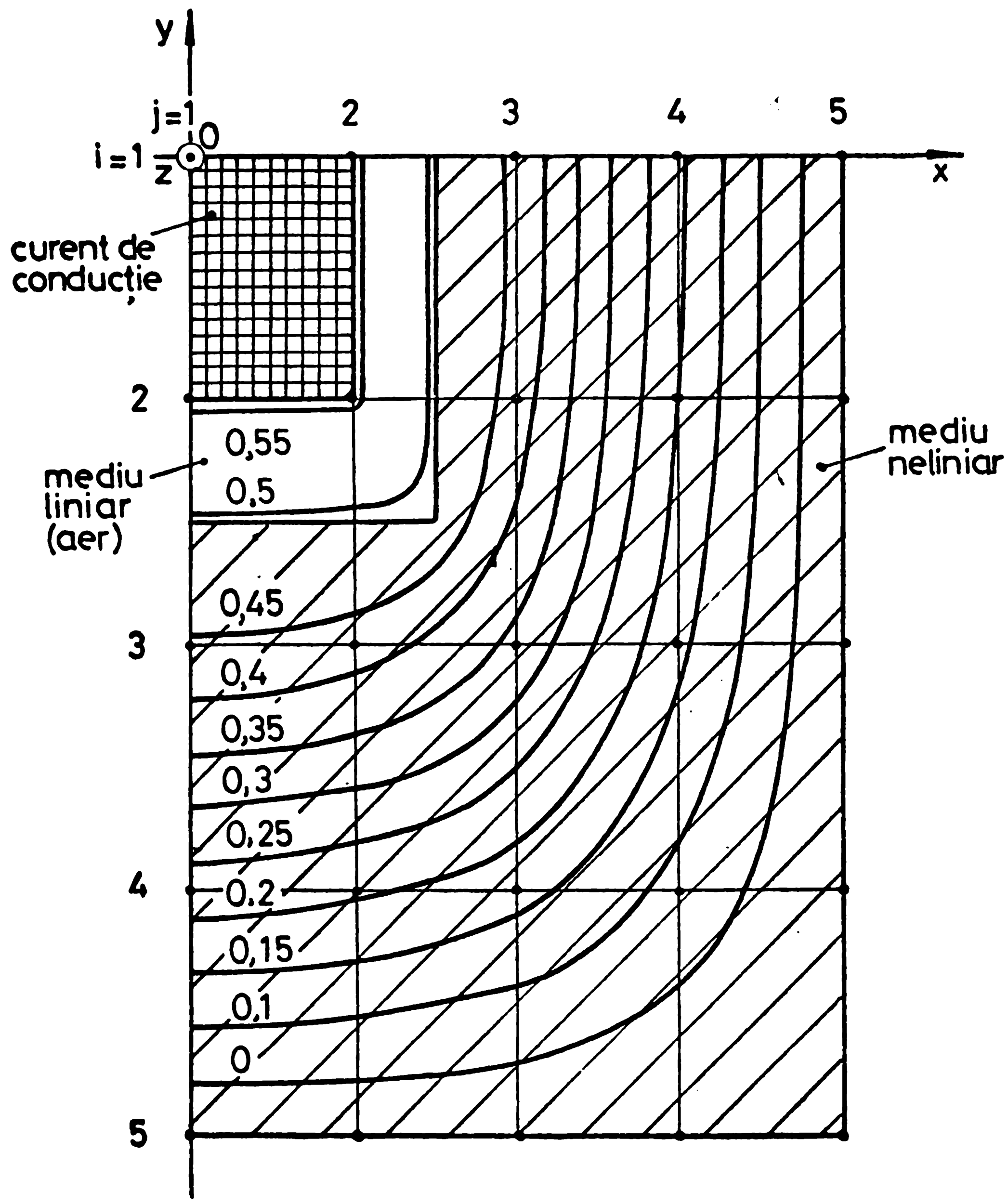


Fig.5.5

date în tabelul 5.1 şi ele coincid practic cu cele din tabelul 4.8. In fig.5.5 sînt trasate liniile de cîmp ale inducţiei magnetice pentru distribuţia de cîmp stabilită. Parametrul curbelor este valoarea potenţialului magnetic-vector, în Tm.

TABELUL 5.1

HX

.0	.0	.0	.0	.0
8489.4	5791.3	320.3	362.7	.0
414.2	1160.6	1451.7	463.7	.0
689.2	357.0	203.9	134.5	.0
458.6	440.7	167.8	6.0	.0

HY

.0	12263.3	7255.3	8563.2	8551.0
.0	8216.2	9149.8	7386.5	7156.8
.0	254.4	1653.8	2595.4	2757.7
.0	98.0	66.3	176.0	233.2
.0	.0	.0	.0	.0

H

.0	12263.3	7255.3	8563.2	8551.0
8489.4	10052.2	9155.4	7395.4	7156.8
414.2	1188.2	2200.6	2636.5	2757.7
689.2	370.2	214.4	221.5	233.2
458.6	440.7	167.8	6.0	.0

BX

.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0107	.0073	.0800	.1069	.0000
1.4123	1.6498	1.1986	.3265	.0000
1.5616	1.3255	1.1077	.7156	.0000
1.4451	1.4324	1.0593	.0875	.0000

BY

.0000	.0154	2.1703	2.2500	2.2493
.0000	.0103	2.2844	2.1763	2.1642
.0000	.3616	1.3654	1.8273	1.8664
.0000	.3637	.3601	.9363	1.1996
.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

B

.0000	.0154	2.1703	2.2500	2.2493
.0107	.0126	2.2858	2.1789	2.1642
1.4123	1.6889	1.8169	1.8563	1.8664
1.5616	1.3745	1.1647	1.1784	1.1996
1.4451	1.4324	1.0593	.0875	.0000

AZ

.556	.555	.442	.202	.000
.555	.555	.436	.194	.000
.449	.430	.340	.162	.000
.226	.207	.167	.084	.000
.000	.000	.000	.000	.000

CAPITOLUL 6

DETERMINAREA CÎMPULUI MAGNETIC DIN CONTORUL DE INDUCȚIE MONOFAZAT

6.1. Introducere

Creșterea consumului de energie electrică, în contextul actual al crizei energetice, caracterizat prin măsuri severe de economisire a energiei și prin creșterea rapidă a prețurilor diverselor forme de energie a impus mărirea producției de contoare electrice și ridicarea performanțelor lor tehnice și economice.

Fabricarea contoarelor de inducție pentru măsurarea energiei electrice a fost preluată în țara noastră în anul 1972 de către Întreprinderea de aparate electrice de măsurat (I.A.E.M.) din Timișoara. O preocupare esențială a acestei întreprinderi o reprezintă îmbunătățirea continuă a calității contoarelor de inducție fabricate. In acest sens, între întreprinderea menționată și Catedra de electronică și măsuri a Facultății de electrotehnică din cadrul Institutului politehnic "Traian Vuia" din Timișoara au fost încheiate și finalizate în ultimii ani mai multe contracte de cercetare științifică.

In cadrul contractului cu tema "Studierea unei tehnologii de montare a circuitelor magnetice la contorul monofazat în vederea eliminării influențelor dăunătoare cauzate de asimetrii" (nr. 144/1976 I.P.T.V.T., nr.16040/1976 I.A.E.M.T) [62] o fază, realizată de autor, a reprezentat-o determinarea experimentală a distribuțiilor valorilor de amplitudine ale inducțiilor magnetice aferente fluxurilor active produse de electromagneții de curent și de tensiune în planul discului [35] . Ulterior, în cadrul contractului cu tema "Cercetări privind proiectarea asistată de calculator a contorului de energie electrică monofazat" (nr.309/1979 I.P.T.V.T., nr.15770/1979 I.A.E.M.T) [38], autorul a calculat distribuțiile valorilor inducțiilor magnetice produse de electromagneții de curent și de tensiune în planul discului, pe o direcție ce trece prin centrele urmelor polilor.

In literatura de specialitate [40, 41, 44, 61, 70] privitoare la contorul de inducție monofazat se consideră în studiul fenomenelor care au loc în contor și în calculul mărimilor caracteristice principale că inducțiile magnetice corespunzătoare fluxurilor active produse de electromagneții de curent și de tensiune sînt unitare ca valori de amplitudine în planul discului, pe arii egale cu cele ale unor poli echivalenți. Ipoteza simplificatoare de mai sus este comodă, dar nu permite punerea în evidență a complexității fenomenelor din contorul de inducție monofazat.

Determinarea distribuțiilor reale ale inducțiilor magnetice în planul discului contorului de inducție monofazat reprezintă o primă condiție, absolut necesară, în rezolvarea unor probleme importante:

- calculul mai exact al mărimilor caracteristice principale ale contorului;
- explicarea apariției cuplurilor de asimetrie, prin analiza influenței asimetriilor geometrice asupra distribuțiilor;
- perfecționarea tehnologiei de montare, în vederea eliminării influențelor dăunătoare cauzate de asimetriile geometrice necontrolate [62];
- elaborarea de programe conversaționale care să furnizeze rapid soluții privind procedura de reglaj necesară pentru introducerea contoarelor în clasa de precizie, la modificări ale caracteristicilor electrice și/sau magnetice ale materialelor folosite;
- reproiectarea optimală a circuitului magnetic de curent realizat din tablă silicioasă de 0,5 mm de producție românească, eliminîndu-se astfel importul de tablă silicioasă de 0,35 mm.

6.2. Calculul distribuției valorilor inducției magnetice între o secțiune mediană a contorului de inducție monofazat

Pentru calculul distribuției valorilor inducției magnetice în contorul de inducție monofazat s-a utilizat metoda cu diferențe finite iterativă, extinsă pe rețea rectangulară cu pas neegal, prezentată în capitolul 3. Calculul a fost efectuat pentru un contor CAM-7 de fabricație românească, la alimentarea separată a bobinelor celor doi electromagneţi, de curent şi de tensiune, cu curenţi continui avînd valori de $\sqrt{2}$ ori mai mari decît valorile efective ale curenţilor alternativi ce parcurg cele două bobine în regimul nominal de funcţionare.

6.2.1. Cazul alimentării bobinei de curent

S-a considerat o secţiune mediană prin contor, care trece prin centrele urmelor polilor electromagnetului de curent. Intrucît secţiunea mediană admite o axă de simetrie, s-a redus domeniul de calcul la jumătate din aria secţiunii. Domeniul de calcul acceptat, de formă dreptunghiulară, este reprezentat în fig.6.1. De-a lungul laturii din dreapta a domeniului, care se suprapune peste axa de simetrie a secţiunii, s-a considerat satisfăcută o condiţie de forma (3.6). De-a lungul laturilor superioară, din stînga şi inferioară s-a considerat satisfăcută o condiţie de forma (3.5).

In discretizarea domeniului de calcul s-a avut în vedere configuraţia concretă a subdomeniilor cu proprietăţi de material diferite sau parcurse de curenţi de conducţie şi exploatarea avantajelor metodei folosite, expuse în subcapitolul 3.1. Pe direcţia Ox s-au utilizat 2 paşi de discretizare diferiţi, egali cu 1,6 şi 3,2 mm, iar pe direcţia Oy 3 paşi de discretizare diferiţi, egali cu 1,6; 3,2 şi 6,4 mm, rezultînd un număr de 240 elemente dreptunghiulare, de 6 tipuri, şi 273 noduri.

Proprietăţile magnetice ale materialelor feromagnetice din care sînt constituite circuitul magnetic de curent, circuitul magnetic de tensiune, şuntul magnetic şi contrapolul au fost avute în vedere prin curbele fundamentale de magnetizare ale respectivelor materiale, obţinute prin buletine de măsurători de la I.A.E.M.Timişoara şi aproximate cu funcţii hiperbolice completate cu termeni liniari de forma (4.38).

Curentul continuu ce parcurge bobina de curent a fost considerat egal cu $\sqrt{2}\, I_n$, unde I_n=10 A este curentul nominal al contorului, aceasta pentru a putea compara valorile calculate ale inducţiei magnetice cu valorile de amplitudine măsurate experimental ale inducţiei magnetice.

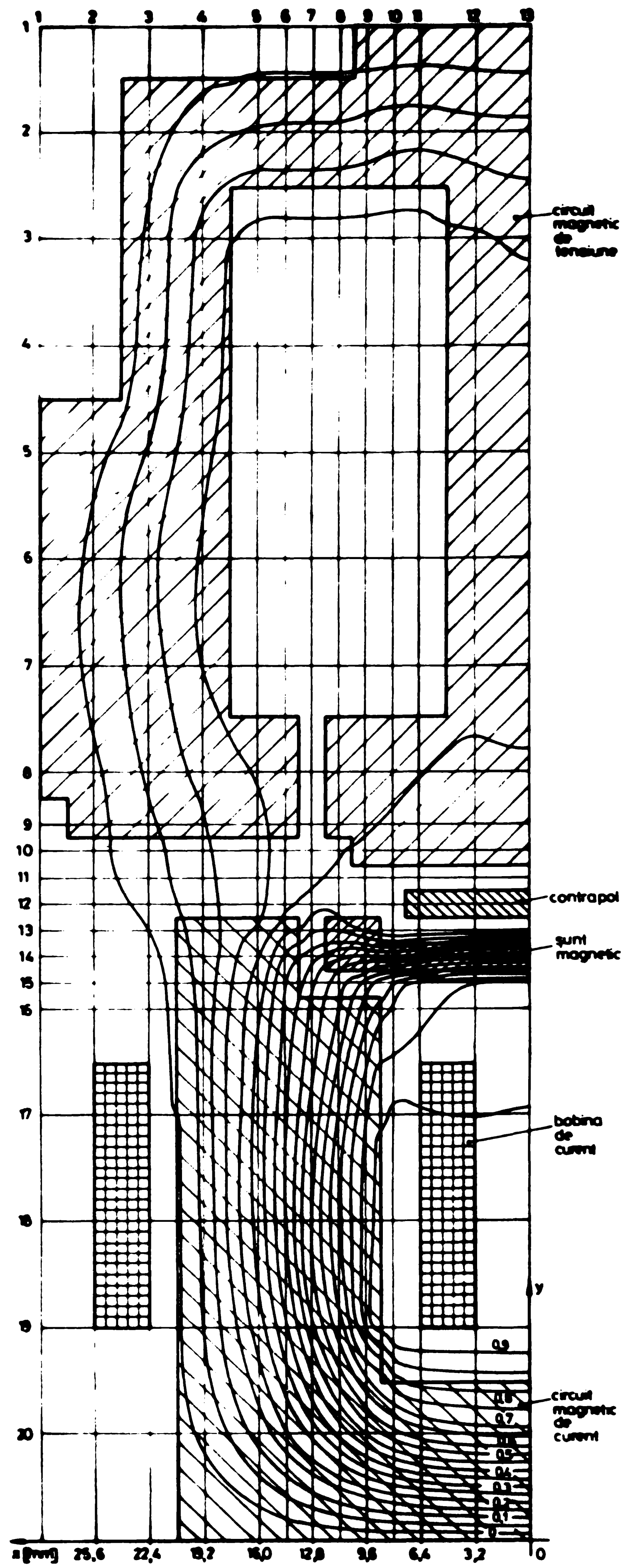

circuit magnetic de tensiune
contrapol
şunt magnetic
bobina de curent
circuit magnetic de curent
y
x [mm] 25,6 22,4 19,2 16,0 12,8 9,6 6,4 3,2 0

Fig.6.1

S-a impus ε_{HMax}=0,2 A şi ε_{BMax}=0,2.10^{-5} Tm, fiind necesare 3128 iteraţii pentru obţinerea rezultatelor. Pe baza rezultatelor, în fig.6.1 au fost trasate liniile de cîmp ale inducţiei magnetice, parametrul curbelor fiind valoarea potenţialului magnetic vector, înmulţită cu 10^3, în Tm.

Valorile rezultate din calcul pentru componenta B_y a inducţiei magnetice în planul discului contorului de inducţiei (de-a lungul liniei 11) sînt date în fig.6.2, prin curba trasată continuu.

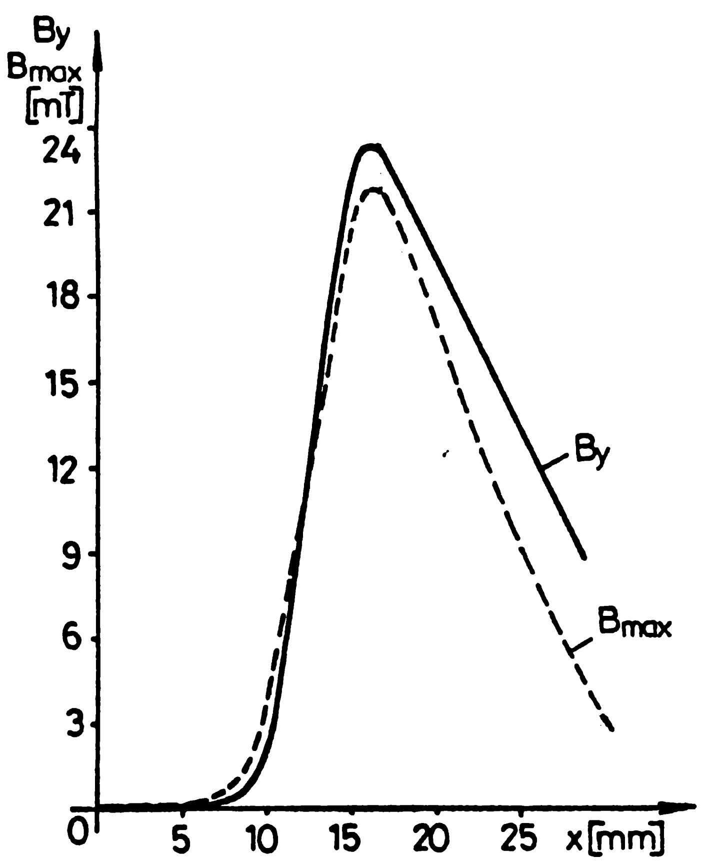
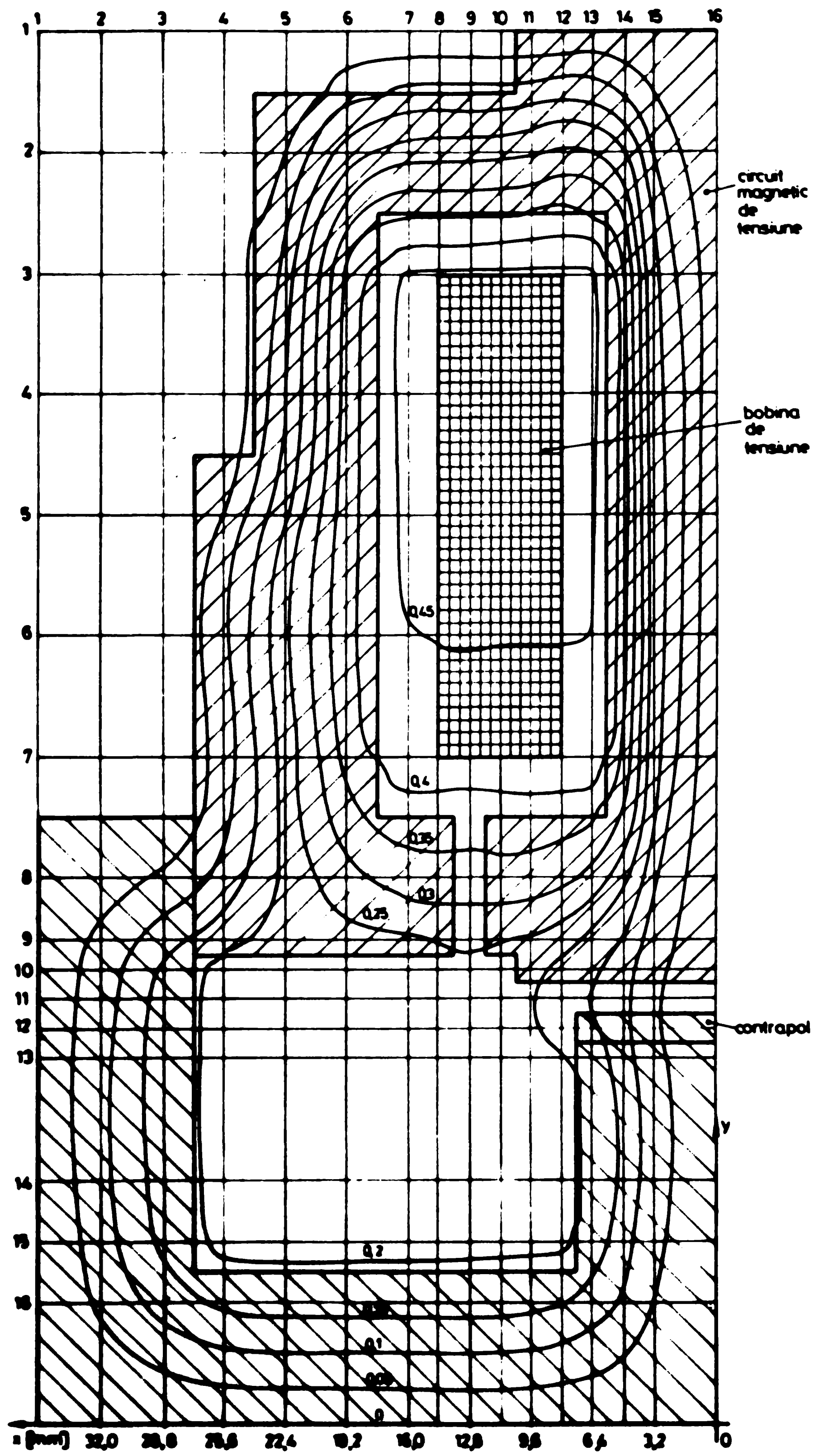


Fig.6.2

6.2.2. Cazul alimentării bobinei de tensiune

Calculul s-a efectuat în cadrul unei secţiuni mediane prin contor ce trece prin centrele urmelor polilor electromagnetului de tensiune. Domeniul de calcul acceptat, de formă dreptunghiulară, este prezentat în fig.6.3. Contrapolul real al contorului a fost înlocuit cu un contrapol echivalent ca mărimi geometrice şi aflat în planul secţiunii mediane. Latura din dreapta a domeniului este suprapusă peste axa de simetrie a sistemului magnetic; de-a lungul ei s-a considerat satisfăcută o condiţie de forma (3.5) ca urmare a faptului că latura din dreapta nu este axă de simetrie şi pentru repartiţia curenţilor de conducţie. Tot o condiţie de forma (3.5) s-a considerat satisfăcută de-a lungul laturilor superioară, din stînga şi inferioară ale domeniului.

Discretizarea domeniului s-a efectuat conform aceloraşi principii arătate în cazul alimentării bobinei de curent. Pe direcţia Ox s-au utilizat 2 paşi de discretizare diferiţi, de 1,6 şi 3,2 mm, iar pe direcţia Oy 3 paşi de discretizare diferiţi, de 1,6; 3,2 şi



circuit magnetic de tensiune
bobina de tensiune
contrapol
0,45
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,1
0,05
0
y
x [mm]
32,0
28,8
25,6
22,4
19,2
16,0
12,8
9,6
6,4
3,2
0

Fig.6.3

6.4 mm. Au rezultat 24o elemente dreptunghiulare, de 6 tipuri, şi 272 noduri.

Considerarea proprietăţilor magnetice ale materialelor feromagnetice din care sînt constituite circuitul magnetic de tensiune şi contrapolul s-a făcut ca şi în cazul alimentării bobinei de curent.

Curentul continuu ce parcurge bobina de tensiune a fost de $\sqrt{2}$ ori mai mare decît cel corespunzător alimentării bobinei cu tensiunea nominală U_n=22o V.

In calcul s-a impus ε_{HMax}=1,45 A şi ε_{BMax}=o,13.1o^{-4}Tm, rezultatele obţinîndu-se după 4398 iteraţii. In fig.6.3 s-au trasat liniile de cîmp ale inducţiei magnetice, parametrul curbelor fiind valoarea potenţialului magnetic vector, înmulţită cu 1o^2, în Tm.

Pentru componenta B_y a inducţiei magnetice în planul discului (de-a lungul liniei 11) au rezultat din calcul valorile corespunzătoare curbei trasate cu linie continuă în fig.6.4.

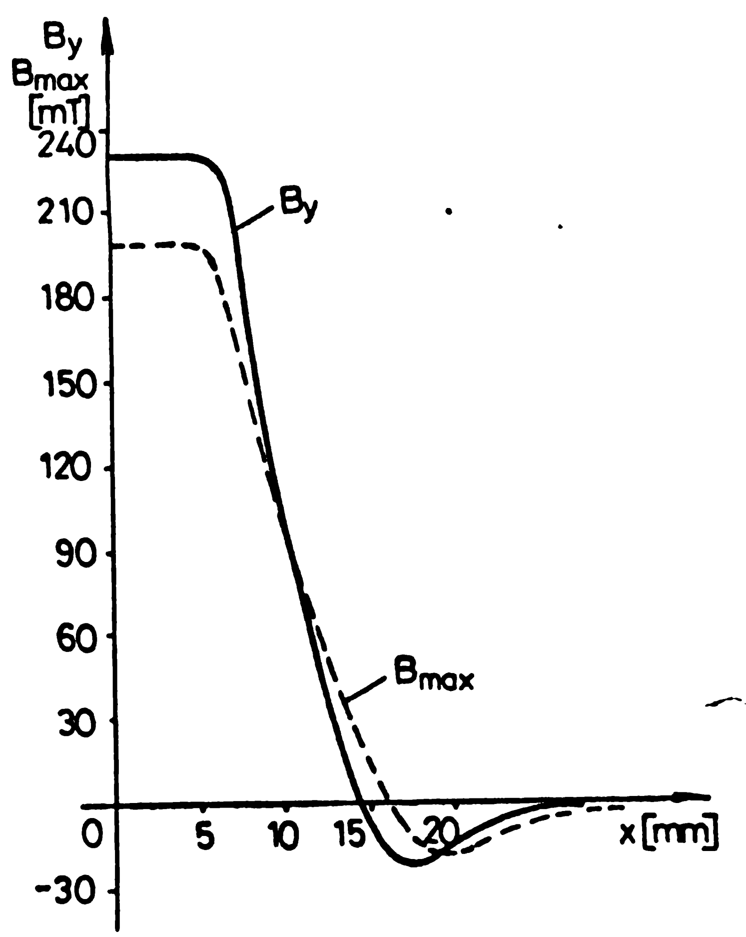


Fig.6.4

6.3. Determinarea experimentală a distribuţiilor valorilor de amplitudine ale inducţiei magnetice în planul discului

Distribuţiile reale în planul discului ale valorilor de amplitudine ale inducţiei magnetice aferente fluxurilor active s-au determinat pe baza legii inducţiei electromagnetice, cu o instalaţie de măsură a cărei schemă bloc este redată în fig.6.5.a. BM este o bobină de măsură, etalonată, de dimensiuni neglijabile în raport cu dimensiunile domeniului de măsură; C reprezintă un convertor tensiune alternativă-tensiune continuă realizat cu amplificatoare operaţionale iar VN un voltmetru numeric de tensiune continuă.

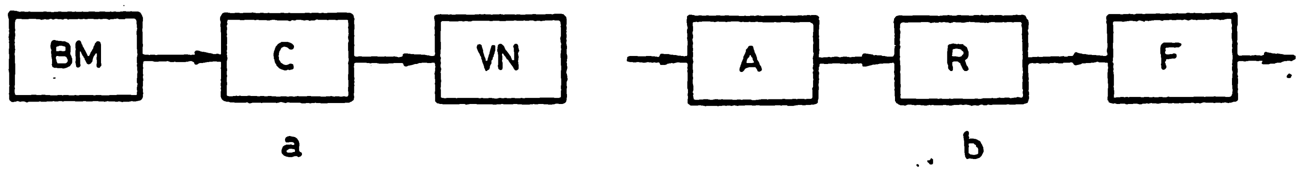


Fig.6.5

Schema bloc a convertorului este dată în fig.6.5.b. A este un amplificator cu cîştig unitar ce realizează pentru convertor o impedanţă de intrare foarte mare, de ordinul MΩ-lor, faţă de care impedanţa bobinei de măsură la 5o Hz este neglijabilă; R este un redresor monoalternanţă cu performanţe foarte apropiate de ale unui redresor ideal iar F este un filtru cu menţinerea valorii medii redresate.

Bobina de măsură a fost plasată pe un dispozitiv ce permitea deplasarea ei în planul discului D (fig.6.6.a,b) al unui contor de inducţie CAM-7 după două direcţii ortogonale Ox, Oy. Cu

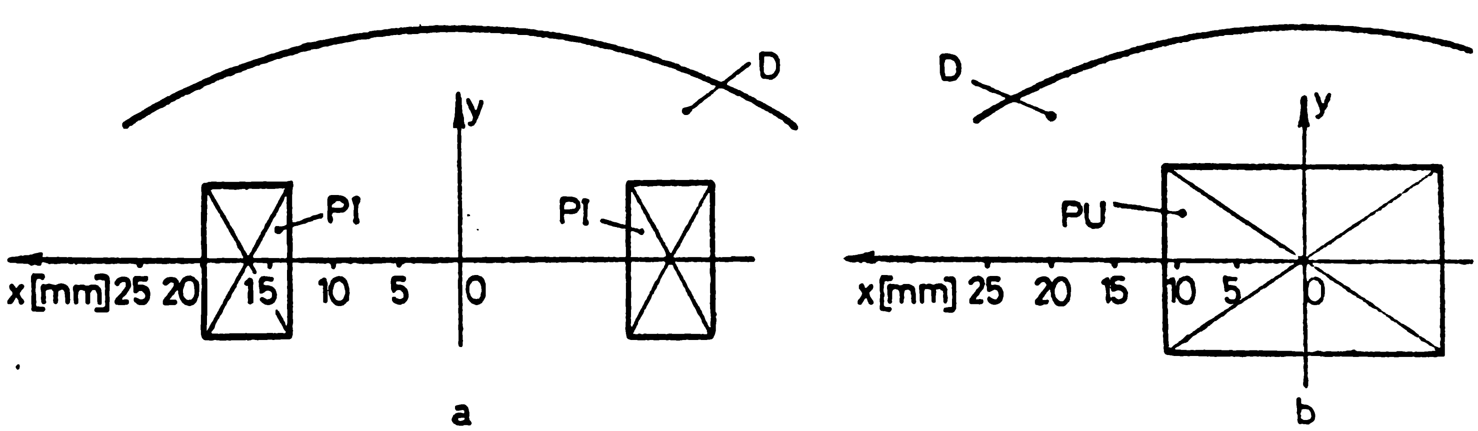


Fig.6.6

PI s-au notat urmele polilor electromagnetului de curent iar cu PU urma polului central al electromagnetului de tensiune. Axa Ox trece prin centrele urmelor polilor electromagneţilor de curent şi tensiune.

Datorită performanţelor ridicate ale convertorului, tensiunea U măsurată de voltmetrul numeric s-a considerat egală cu valoarea medie pe o perioadă a tensiunii indusă în bobină, redresată. In consecinţă, pentru calculul valorilor de amplitudine ale inducţiilor magnetice, medii pe aria A a bobinei de măsură s-a utilizat relaţia

$$B_{max} = \frac{U}{2f.NA} , \qquad (6.1)$$

unde f este frecvenţa tensiunii alternative cu care s-a alimentat contorul iar N numărul de spire al bobinei de măsură.

Contorul de inducţie a fost simetrizat, demontîndu-i-se apoi magnetul permanent şi discul. Bobinele celor 2 electromagneţi au fost alimentate pe rînd, cu mărimi corespunzătoare regimului nominal (I_n=1o A, U_n=22o V).

In situaţia în care bobina de curent a fost parcursă de curentul de sarcină nominal, pentru y=o s-au obţinut valorile B_{max} corespunzătoare curbei trasată întrerupt în fig.6.2. Rezultatele experimentale referitoare la B_{max} sînt apropiate de cele obţinute prin calcul pentru B_y; diferenţele care apar la x mare se pot explica prin limitarea domeniului de calcul pe direcţia Ox şi impunerea unei condiţii de forma (3.5) pe latura din stînga a domeniului de calcul (fig.6.1).

La alimentarea bobinei de tensiune cu tensiune nominală s-a obţinut pentru y=o distribuţia valorilor B_{max} corespunzătoare curbei trasată întrerupt în fig.6.4. Abateri mai mari între valorile B_y calculate şi valorile B_{max} măsurate experimental apar aici pentru y, ele fiind de ordinul a 15 -.2o%.

Din fig.6.2 şi 6.4 se observă variaţia puternică a valorilor inducţiei magnetice în planul discului contorului de inducţie monofazat. Evidenţierea acestui aspect, netratat în literatura de specialitate, şi luarea în considerare a distribuţiilor reale ale inducţiei magnetice permite explicarea mai corectă a fenomenelor din contor, reprezentînd totodată o etapă esenţială în rezolvarea problemelor importante arătate la sfîrşitul subcapitolului 6.1.

CONCLUZII SI CONTRIBUTII

Metodele numerice de calcul al cîmpului magnetic cunosc astăzi o tot mai largă utilizare în calculele electrotehnice, facilitată de accesul la tehnica de calcul modernă. Folosind metodele numerice de calcul al cîmpului magnetic se pot stabili repartițiile spațiale ale cîmpului magnetic în mașini și aparate electrice, în alte instalații electrotehnice, repartiții ce influențează performanțele lor tehnice și econonice. Metodele numerice de calcul al cîmpului magnetic se pot aplica pe configurații geometrice ale sistemelor magnetice complexe, în care distribuția curenților de conducție este complicată, luîndu-se în considerare caracteristicile de magnetizare neliniare ale unor medii.

Cercetările actuale pe plan mondial în domeniul metodelor numerice de calcul al cîmpului magnetic urmăresc generalizarea și perfecționarea acestor metode, creșterea vitezei de convergență a metodelor iterative, elaborarea unor algoritmi de calcul simpli și creearea de programe competitive pe baza lor.

Multe lucrări de specialitate expun principiile unor metode numerice de calcul al cîmpului magnetic și rezultatele concrete obținute în anumite aplicații, omițîndu-se de regulă prezentarea algoritmilor de calcul și a programelor corespunzătoare. Conceperea unor algoritmi de calcul simpli, cu aplicabilitate mai largă, este esențială în realizarea unor programe de calcul economice. Scrierea unui program, conform unui algoritm precizat, bazat pe o anumită metodă numerică și depanarea lui pînă la eliminarea tuturor erorilor, deși aparent este o problemă de rutină pentru un programator calificat, reclamă un buget de timp mult mai mare decît cel necesar pentru însușirea metodei și adaptarea ei la o anumită aplicație dată. Absența informațiilor concrete în acest domeniu este justificată de caracterul secret sau cel puțin confidențial al algoritmilor și programelor, de protecționismul desfacerii lor către utilizatori.

Prezenta teză de doctorat este rezultatul cercetărilor autorului în domeniul metodelor numerice de calcul al cîmpului magnetic cvasistaționar plan-paralel, ea înscriindu-se în problematica de cercetare de mai sus. Problemele rezolvate în teză pot fi grupate astfel:

1. Studiul comparativ al metodelor diferenţelor finite şi elementelor finite în variantele uzuale, din punctul de vedere al erorilor de formulare şi discretizare, al vitezei de convergenţă, al volumului de resurse solicitate calculatorului şi al facilităţii de implementare;

2. Generalizarea unei metode numerice cu diferenţe finite iterativă de calcul al cîmpului magnetic cvasistaţionar plan-paralel, prin extindere pe reţea rectangulară periodică cu pas neegal, cu avantajele arătate în subcapitolul 3.1. Problema de cîmp se rezolvă în raport cu valorile componentelor vectorilor $\bar{H}$ al intensităţii cîmpului magnetic şi $\bar{B}$ al inducţiei magnetice în nodurile reţelei de discretizare, aspect care, în comparaţie cu rezolvarea problemei de cîmp în raport cu valorile potenţialului magnetic vector sau scalar, reprezintă un avantaj în considerarea condiţiilor de frontieră referitoare la domeniul plan D de existenţă a cîmpului magnetic şi în exprimarea relaţiei neliniare dintre B şi H pentru mediile neliniare.

Ecuaţiile cu diferenţe finite (3.9, 3.1o) scrise pentru un element al domeniului D nu se asamblează pentru mulţimea elementelor de discretizare ale domeniului D într-un sistem, ele rezolvîndu-se prin iterare pe întreaga reţea de discretizare, conform unor relaţii speciale, ceea ce conferă metodei un caracter de sine stătător.

Prezentarea metodei numerice cu diferenţe finite iterativă, extinsă pe reţea rectangulară periodică cu pas neegal, este întregită prin includerea în prezentare a algoritmului de calcul conceput şi a programului scris în limbajul FORTRAN IV pentru un exemplu de calcul;

3. Analiza unor factori de influenţă a vitezei de convergenţă a metodei numerice cu diferenţe finite iterativă, extinsă pe reţea rectangulară periodică cu pas neegal.

Sînt analizate din punctul de vedere al influenţei asupra vitezei de convergenţă expresia analitică de aproximare a caracteristicii de magnetizare neliniară B(H) a mediului neliniar, modul de baleiere a elementelor în procesul de explorare ordonată a lor în vederea iterării ecuaţiilor cu diferenţe finite (3.9, 3.1o) şi valoarea coeficientului de relaxare k_r din relaţiile (3.76, 3.77);

4. Elaborarea unei metode numerice cu diferenţe finite recurentă de calcul rapid al valorilor componentelor vectorilor $\bar{H}$

şi $\bar{B}$ în nodurile unei reţele de discretizare rectangulară periodică cu pas neegal a unui domeniu plan dreptunghiular, la care se cunosc valorile componentelor lui $\bar{H}$ şi/sau $\bar{B}$ în nodurile de pe două laturi vecine ale domeniului. Si prezentarea acestei metode este întregită prin includerea în prezentare a algoritmului de calcul conceput şi a programului scris în limbajul FORTRAN IV pentru un exemplu de calcul;

5. Determinarea prin calcul cu metoda cu diferenţe finite iterativă, extinsă pe reţea rectangulară cu pas neegal, a distribuţiei valorilor inducţiei magnetice într-o secţiune mediană a contorului de inducţie monofazat CAM-7 şi verificarea experimentală a rezultatelor în planul discului.

Principalele contribuţii originale ale autorului în cadrul celor 5 grupe de probleme enunţate sînt următoarele:

1.1. Demonstrarea egalităţii erorilor de formulare şi de discretizare corespunzătoare metodelor diferenţelor finite şi elementelor finite în variantele uzuale;

1.2. Demonstrarea identităţii vitezelor de convergenţă la cele două metode comparate, ca urmare a identităţii părţilor omogene ale sistemelor de ecuaţii algebrice asamblate pentru întregul domeniu de existenţă a cîmpului magnetic;

2.1. Fundamentarea matematică a metodei numerice cu diferenţe finite iterativă, generalizată prin extindere pe reţea rectangulară periodică cu pas neegal. In cadrul fundamentării matematice se demonstrează o procedură simplificată de substituire a ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale (3.3, 3.4) cu ecuaţiile cu diferenţe finite (3.9, 3.1o);

2.2. Conceperea unui algoritm de calcul simplu, cu aplicabilitate generală;

2.3. Elaborarea unui program de calcul în limbajul FORTRAN IV pentru determinarea distribuţiei cîmpului magnetic cvasistaţionar plan-paralel în cadrul unui exemplu. Programul are un caracter general, el putînd fi utilizat pentru configuraţii geometrice ale sistemelor magnetice şi repartiţii de curenţi de conducţie diferite, cu modificări ce definesc datele iniţiale;

3.1. Elaborarea a trei noi expresii analitice de aproximare a curbei de magnetizare neliniară B(H): funcţia spline de ajustare şi funcţia segmentar polinomială de gradul 2, caracterizate prin netezime şi precizie şi care asigură în punctele de joncţiune a segmentelor continuitatea unor dependențe derivate din ele și funcția hiperbolică completată cu termen liniar;

3.2. Evidențierea influenței expresiei analitice de aproximare a curbei de magnetizare neliniară B(H) asupra vitezei de convergență;

3.3 Stabilirae unei valori optime a coeficientului de relaxare k_r, pentru care viteza de convergență este maximă;

4.1. Fundamentarea matematică a metodei numerice cu diferențe finite recurentă de calcul rapid al cîmpului magnetic cvasistaționar plan-paralel;

4.2. Conceperea algoritmului de calcul corespunzător;

4.3. Elaborarea unui program de calcul în limbajul FORTRAN IV pentru determinarea rapidă a distribuției cîmpului magnetic cvasistaționar plan-paralel pe o configurație dreptunghiulară, la care se cunosc valorile componentelor vectorilor $\bar{H}$ și/sau $\bar{B}$ în nodurile de pe două laturi vecine ale configurației;

5.1. Aplicarea metodei cu diferențe finite iterativă, extinsă pe rețea rectangulară cu pas neegal, la calculul distribuției valorilor inducției magnetice într-o secțiune mediană a contorului de inducție monofazat CAM-7, în condițiile exploatării avantajelor metodei rezultate prin generalizarea sa.

*

* *

Prezenta teză de doctorat a fost elaborată, în principal, în perioada 1979 - 1982.

Elaborarea tezei de doctorat a avut loc sub îndrumarea competentă și generoasă a conducătorului științific, prof.dr.ing. De Sabata Ioan, față de care autorul nutrește sentimente de stimă și respect; autorul îi mulțumește și pe această cale pentru sprijinul și sfaturile acordate la elaborarea tezei.

Autorul aduce mulțumiri prof.dr.ing.Pop Eugen, sub a cărui îndrumare s-a format profesional și ale cărui sugestii și încurajări au contribuit substanțial la finalizarea tezei de doctorat.

De asemenea, autorul mulţumeşte prof.dr.ing.Frănkel David pentru discuţiile utile purtate în timpul redactării finale a tezei.

In încheiere, autorul mulţumeşte conducerii Catedrei de electronică şi măsuri, colegilor de catedră şi tuturor celor care l-au ajutat în diverse ocazii şi sub diferite forme.

BIBLIOGRAFIE

1. Andersen, O.W. : Transformer leakage flux program based on the finite element method. IEEE PES Summer Meeting, San Francisco, iul. 1972, p.682.

2. Andronescu, P. : Bazele electrotehnicii, vol.1, 2. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1974.

3. Angot, A. : Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică şi telecomunicaţii. Editura tehnică, Bucureşti, 1966.

4. Apsit, V., V., Bondarenko, B.A. : Konecino-raznostnîi metod rasceta magnitnîh polei. Bezkontaktnîe elektriceskie maşinî, Riga, nr. 13, 1974, p.87.

5. Armor, A., Chari, M.V.K. : Heat flow in the stator core of large turbine-generators by the method of three-dimensional finite elements. IEEE Transaction on PAS, vol.PAS-95, nr.5, 1976, p. 1648.

6. Başkanskii, E.G., ş.a. : Aprobaţia variaţionnogo metoda rasceta magnitnogo polia. Voprosî avtomatizaţii tehnologhiceskih i proizvodstvennih proţesov, Iaroslav, nr.2, 1978, p.65.

7. Başkanskii, E.G., ş.a. : Variaţionnîi metod rasceta magnitnogo polia v nelineinîh neodnorodnîh sredah s pomoşciu obobscennogo funcţionala. Elektricestvo, nr.7, 1977, p.85.

8. Beckert, V., Rieck, H., : Darstellung von Magnetisierungskurven durch kubische Spline-Functionnen. Zeitschrift fur Elektrotechnik, Informatik ung Energietechnik, lo, nr.1, 198o, p.69.

9. Biro, O. : Variational method for numerical calculation of stationary magnetic field in ferromagnetic medium. 23. Int. Wiss. Kollog. TH Ilmenau, Vortrgsreihe "Teoretische Elektrotechnik", Heft 4, 1978, p.85.

1o. Biuler, G.A. : Novîi metod rasceta elektromagnitnîh polei. Defektoscopia, nr.4, 1979, p.71.

11. Bodiakşin, A.I., : Metod rasceta magnitnîh polei. Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1968.

12. Braşovan, I., Gherman, Gh. : Măsurarea mărimilor electrice şi magnetice. Probleme. Editura Facla, Timişoara, 1978.

13. Cârstea, I. : Calculul numeric al cîmpului magnetic de

dispersie în transformatoare prin metoda elementelor finite. EEA-Electrotehnica, nr.2, 198o, p.53.

14. Cecernikov, V.I. : Magnitnîe izmerenia. Izdatelstvó moskovskogo universiteta, Moskva, 1963.

15. Cedighian, S. : Materiale magnetice. Editura tehnică, Bucureşti, 1974.

16. Chari, M.V.K., Silvester, P. : Analysis of turboalternator magnetic fields by finite elements. IEEE Transaction on PAS, vol. PAS-9o, nr.2, 1971, p.451.

17. Chari, M.V.K., ş.a. : Load characteristics of synchronous generators by the finite element method. IEEE Transaction on PAS, vol.PAS-1oo, nr.1, 1981, p.1.

18. Costache, Gh., Della Giacomo, E. : Nonlinear magnetic problems treated by the finite elements method. Rev. Roum. Sci. techn., ser. Elth. et Energ., 21, nr.4, 1976, p.481.

19. Craiu, M., Roşculeţ, M.N. : Ecuaţii diferenţiale aplicative. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.

2o. Decréton, M. : Calcul des champs électromagnétiques par la méthode des éléments finis. Bulletin de l'Association Suisse des Electriciens, nr.19, 1973, p.1196.

21. De la Valee Poussain, F., Lion, A. : Calcul iteratif de l'induction magnetique dans les machines electriques. Revue generale d'electricite, tom 76, nr.4, 1967, p.731.

22. Della Giacomo, E., ş.a. : Cercetarea distribuţiei cîmpului magnetic în circuitele în circuitele cu magneţi permanenţi din aparatele de măsură. Protocol la contractul de cercetare ştiinţifică nr.443/1979 dintre ICPE Bucureşti şi IAEM Timişoara.

23. Demerdash, N.A., Nehl, T.W. : An evaluation of the methods of finite elements and finite differences in the solutions of nonlinear electromagnetic fields in electrical machines. IEEE transaction on PAS, vol.PAS-98, nr.1, 1979, p.74.

24. Demidovici, B.P., Maron , I.A. : Elements de calcul numerique. Editions MIR, Moscou, 1973.

25. Demircian, K.S., ş.a. : Realizaţia metoda konecinîh elementov na EVM dlia rascieta dvuhmernîh elektriceskih i magnitnîh polei. Izvestia AN SSSR, Energhetika i transport, nr.1, 1974, p.142.

26. De Sabata, I. : Bazele electrotehnicii. Curs, vol.1.

Institutul politehnic "T. Vuia" Timişoara, 198o.

27. De Sabata, I. : Bazele electrotehnicii. Curs, vol.2. Institutul politehnic "T. Vuia" Timişoara, 1974.

28. Di Monaco, A., ş.a. : Studio de campi electrici i magnetici stazionari con il metodo degli elementi finiti. L'Electrotehnica, LXII, nr.7, 1975, p.585.

29. Dorn, W.S., McCraken, D.D. : Metode numerice cu programare în FORTRAN IV. Editura tehnică, Bucureşti, 1976.

3o. Dumitrescu, S., ş.a. : Aplicaţii inginereşti ale calculatoarelor cu exemple din industria petrolieră şi petrochimică. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1974.

31. Durand, E. : Électrostatique, tome I. Masson et Cie, Paris, 1964.

32. Fisher, J., Moser, H. : Die Nachbildung von Magnetisierungkurven durch einfache algebraische oder transzendente Funktionen. Archive für Elektrotechnik, 42 Bd., Heft 5, 1956, p.286.

33. Foggia, A., Sabonnadiere, J.C. : Les equation de Maxwell en electrotehnique et leur resolution numerique par une methode d' elements finits. Revue de phisique appliquee, tome 14, febr.1979, p.439.

34. Foggia, A., ş.a. : Finite element solution of saturated travelling magnetic field problems. IEEE Transaction on PAS, vol. PAS-94, 1975, p.866.

35. Gherman, Gh., Chivu, M. : Studiul cîmpului magnetic din contorul de inducţie monofazat. Lucrările sesiunii ştiinţifice dedicată aniversării centenarului independenţei de stat a României, I.P. "T. Vuia" Timişoara, mai 1977, p.29.

36. Gherman, Gh., Cîrmu, I. : Aproximarea curbelor de magnetizare cu funcţii spline de ajustare şi determinarea unor dependente derivate utilizate în unele metode numerice de calcul al cîmpului magnetic. EEA-Electrotehnica, nr.1, 1981, p.13.

37. Gherman, Gh. : Extinderea unei metode numerice de calcul al cîmpului magnetic staţionar. Redactată.

38. Gherman, Gh., Nemeş, M. : Cercetări privind proiectarea asistată de calculator a contorului de energie electrică monofazat. Protocol la contractul de cercetare ştiinţifică nr.3o9/1979 dintre IPTV Timişoara şi IAEM Timişoara.

39. Godunov, S.K., Reabenki, V.S. : Scheme de calcul cu diferenţe finite. Editura tehnică, Bucureşti, 1977.

40. Golovanov, C. : Contribuţii la studiul influenţei armonicilor de tensiune şi de curent asupra funcţionării aparatelor electrice de măsurat. Teză de doctorat, Institutul politehnic "Gh. Gheorghiu-Dej", Bucureşti, 1974.

41. Goriunov, P.N., ş.a. : Elektriceskie scetciki. Gosudarstvennoe energeticeskoe izdatelstvo, Leningrad-Moskva, 1951.

42. Hannalla, A.Y., Macdonald, D.C. : The calculation of machine transient performance. IEEE Transaction on Magnetics, vol. MAG-13, nr.5, 1977, p.1134.

43. Hănţilă, F. : On the uniquennes theorems of the stationary and quasistationary electromagnetic fields in nonlinear media. Revue roumaine des sciences techniques, série électrotechnique et énergetique, tom 20, nr.1, 1975, p.211.

44. Iliukovici, A.M. : Elecktriceskie scetciki. Gosudarstvennoe energeticeskoe izdatelstvo, Moskva, 1963.

45. Ionescu, D.V. : Ecuaţii diferenţiale şi integrale. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.

46. Ixaru, G.I. : Metode numerice pentru ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii. Editura Academiei RSR, Bucureşti, 1979.

47. Kapteine, D.F., ş.a. : Konecino-raznostnîi metod rasceta magnitnîh polei na ETVM. Izvestia AN Latvinskoi SSR, seria fiziceskih i tehniceskih nauk, nr.4, 1973, p.91.

48. Kiatkin, R.P., Rojnova, I.P. : Shodimosti iteraţionnîh metodov reşenia stationarnîh zadacii teorii polia. Izvestia AN SSSR, Energhetika i transport, nr.4, 1980, p.173.

49. Kifer, I.I. : Ispitania ferromagnitnîh materialov. Izdatelstvo Energhia, Moskva, 1969.

50. Kopchenova, N.V., Maron, I.A. : Computational Mathematics. Worked examples and problems with elements of theory. Mir Publishers, Moscow, 1975.

51. Kuzovleva, V.I., Pekker, I.I. : Aproximaţia krivîh namagnicivania pri rasceta na TVM. Izvestia vişsih ucebnih zavedenii, Elektromeohanika, nr.6, 1965, p.611.

52. Maergoiz, I.D. : Iterationnîe metodî rasceta staticeskih polei v neodnorodnîh, anizotropnîh i nelineinîh sredah. Nauk dumka,

Kiev, 1979.

53. Maergoiz, I.D. : O rascete stationarnîh magnitnîh polei v nelineinoi ferromagnitnoi srede. Kibernetika i vîcislitelnaia tehnika, Kiev, nr.42, 1978, p.95.

54. Marciuk, G.I., Şaidurov, V.V. : Creşterea preciziei soluţiilor în scheme cu diferenţe. Editura Academiei RSR, Bucureşti, 1981.

55. Marinescu, Gh., ş.a. : Probleme de analiză numerică. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1978.

56. Micula, Gh. : Funcţii spline şi aplicaţii. Editura tehnică, Bucureşti, 1978.

57. Mişin, V.I., Sobar, I.V. : Aproximaţia krivîh namagnicivania kubiceskimi splainami. Izvestia vîsşih ucebnîh zavedenii, Energhetika, nr,7, 1978, p.123.

58. Mocanu, C.I. : Teoria cîmpului electromagnetic. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.

59. Niculescu, S.: FORTRAN. Iniţiere în programare structurată. Editura tehnică, Bucureşti, 1979.

60. Oancea, I. : Programarea calculatoarelor numerice pentru rezolvarea problemelor cu caracter tehnic şi de cercetare ştiinţifică. Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1973.

61. Pop, E., Chivu, M. : Măsuri electrice şi magnetice, vol. II. Institutul politehnic "T. Vuia" Timişoara, 1969.

62. Pop, E., Gherman, Gh., Stoicănescu, I. : Studierea unei tehnologii de montare a circuitelor magnetice la contorul monofazat în vederea eliminării influenţelor dăunătoare cauzate de asimetrii. Protocol la contractul de cercetare ştiinţifică nr.144/1976 dintre IPTV Timişoara şi IAEM Timişoara.

63. Phillipow, E. : Nichtlineare Elektrotechnik. Akademische Verlagsgesselschaft Geest u. Portig, K.-Leipzig, 1963.

64. Rădulet, R. : Bazele electrotehnicii. Probleme. Editura didactică şi pedagogică, Bucuresti, 1970.

65. Rosculeţ, M. : Analiză matematică. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.

66. Silvester, P., Chari, M.V.K. : Finite element solution of saturable magnetic field problems. IEEE Transaction on PAS, vol. PAS-89, 1970, p.1642.

67. Silvester, P., ş.a. : Efficient tehniques for finite elements analysis of electric machines. IEEE PES Winter Meeting, New York, ian.-febr., 1973, p.1274.

68. Simonyi, K. : Electrotehnica teoretică. Editura tehnică, Bucureşti, 1974.

69. Soran, I.F. : Studiul configuraţiei cîmpului magnetic în întrefierul maşinii de inducţie şi influenţa ei asupra parametrilor de pornire. Teză de doctorat. Institutul politehnic "T. Vuia" Timişoara, 1979.

70. STAS 4198/1, 2, 3 - 68. Contoare electrice de curent alternativ pentru energie electrică activă şi reactivă.

71. Sukazov, E.A., ş.a. : Magnitnie materialî. Izdatelstvo leningradskogo universiteta, Leningrad, 1974.

72. Suzuki, Y., ş.a. : Three dimensional analysis of alternating magnetic field by finite element method. Proc. 13 th. Intersoc. Energy Covers. Eng. Conf., San Diego, vol.2, 1978, p.1366.

73. Sora, C. : Bazele electrotehnicii. Curs, partea II, vol. 2. Institutul politehnic "T. Vuia" Timişoara, 1973.

74. Terzian, A.A., Sukiasian, G.S. : K opredeleniu magnitnîh polei cislennîmi metodami. Izvestia AN SSSR, Energhetika i transport, nr.5, 1977, p.115.

75. Timotin, A., ş.a. : Lecţii de bazele electrotehnicii. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1974.

76. Tiron, M. : Teoria erorilor de măsurare şi metoda celor mai mici patrate. Editura tehnică, Bucureşti, 1972.

77. Toma, M., Odăgescu, I. : Metode numerice şi subrutine. Editura tehnică, Bucureşti, 1980.

78. Tozoni, O.V. : Rascet elektromagnitnîh polei na vicislitelnîh maşinah. Izdatelstvo Tehnika, Kiev, 1967.

79. Trakai, V.G. : O rascete osesimetricinogo staticeskogo magnitnogo polia v nelineinoi ferromagnitnoi srede. Dokladî AN USSR, A, nr.7, 1979, p.574.

80. Trakai, V.G. : Rascet osesimetricinîh magnitnîh polei v ferromagnitnîh sredah. Izvestia AN SSSR, Energhetika i transport, nr.1, 1980, p.87.

81. Trutt, F.C. : Representation of the magnetization caracteristic of DC machines for computer use. IEEE Transaction on PAS,

vol.PAS-3, 1968, p.6o5.

82. Trutt, F.C., ş.a. : The nonlinear potential equation and its numerical solution for higly saturated electrical machines. IEEE Transaction Aerosp., nr.1, 1963, p.43o.

83. Ţugulea, A., Timotin, A. : Condiţiile de unicitate în determinarea cîmpurilor electrostatic şi magnetic cvasistaţionar în materiale neliniare cu polarizare reversibilă şi magnetizare reversibilă. Studii şi cercetări de energetică şi electrotehnică, tom 15, nr.3, 1965, p.531.

84. Wassow, W., Forsythe, G. : Finite difference methods for partial differential equations. Willey, New York, 196o.

85. Wiener, U. : Măsurări electrice industriale, vol.2. Măsurarea mărimilor magnetice. Editura tehnică, Bucureşti, 1969.

86. Zenkevici, O. : Metod konecinih elementov v tehnike. Izdatelstvo Tehnika, Moskva, 1974.

IMPILE FORTRAN
RPTED
16

ANEXA A1

```
      EXTERNAL HMIU,DHMIU,UIMB,DUIMB,APROX
      COMMON HX(5,5),HY(5,5),H(5,5),BX(5,5),
     *BY(5,5),B(5,5),JZ(16),MED(5,5),AMIU0
     *,PX,PY,PXPY,PYPX,PXPXY,PYPXY,NNX,NNY,NEX,NEY
     */TA/HC(12),BC(12),AY(4),BY(4)/TB/BCC(12)
      REAL JZ,MEH,MEB
      R1(X1,X2)=(X1*X1+X2*X2)**0.5
      PX=0.1
      PY=0.15
      PXPY=PX/PY
      PYPX=PY/PX
      PXPXY=PX/(PX+PY)**0.5
      PYPXY=PY/(PX+PY)**0.5
      NNX=5
      NNY=5
      NEX=NNX-1
      NEY=NNY-1
      NET=NEX*NEY
      DO 1 I=1,NNY
      DO 1 J=1,NNX
      MED(I,J)=1
    1 CONTINUE
      MED(1,1)=0
      MED(1,2)=0
      MED(2,1)=0
      MED(2,2)=0
      DO 88 I=1,NEY
   88 JZ(I)=0.
      JZ(1)=150000.
      AMIU0=16.*ATAN(1.)*10.**(-7)
      EHMAX=5.
      EBMAX=0.005
      DO 63 I=1,NNY
      DO 63 J=1,NNX
      HX(I,J)=EHMAX
      HY(I,J)=EHMAX
   63 CONTINUE
      CALL TEST(BX,HX,BY,HY)
      CALL CHAL
      DO 67 I=1,NNY
      DO 67 J=1,NNX
      H(I,J)=(HX(I,J)**2+HY(I,J)**2)**0.5
      AMIU=AMIU0
      IF(MED(I,J).EQ.0) GOTO 66
      AMIU=HMIU(H(I,J))
   66 BX(I,J)=HX(I,J)*AMIU
      BY(I,J)=HY(I,J)*AMIU
```

ANEXA A1 (continuare)

```
      B(I,J)=(BX(I,J)**2+BY(I,J)**2)**0.5
   67 CONTINUE
      IT=0
   59 MEH=0.
      MEB=0.
      NRH=1
      NRB=1
      IT=IT+1
      DO 11 I=1,NEY
      DO 11 J=1,NEX
      NR=(I-1)*NEX+J
      EH=PX*(HX(I+1,J)+HX(I+1,J+1)-HX(I,J+1)-HX(I,J))+
     *PY*(-HY(I+1,J)-HY(I+1,J+1)+HY(I,J+1)+HY(I,J))-
     *2.*PX*PY*JZ(NR)
      IF(EH.EQ.0.) GOTO 45
      IF(MEH.GE.ABS(EH)) GOTO 47
      MEH=ABS(EH)
      NRH=(I-1)*NEX+J
   47 CALL THS(I,J,TH,UIHB,DUIHB)
      CREL=0.55
      IF(IT.LE.70) CREL=0.9*IT/10+0.05
      ZH=TH*(PX*PY)**0.5*CREL
      DELTAB=EH/ZH
      DELTABX=PYPXY*DELTAB
      DELTABY=PYPXY*DELTAB
      BX(I+1,J)=BX(I+1,J)+DELTABX
      BX(I+1,J+1)=BX(I+1,J+1)-DELTABX
      BX(I,J+1)=BX(I,J+1)+DELTABX
      BX(I,J)=BX(I,J)+DELTABX
      BY(I+1,J)=BY(I+1,J)+DELTABY
      BY(I+1,J+1)=BY(I+1,J+1)-DELTABY
      BY(I,J+1)=BY(I,J+1)+DELTABY
      BY(I,J)=BY(I,J)+DELTABY
      CALL TEST(BX,HX,BY,HY)
      B(I+1,J)=R1(BX(I+1,J),BY(I+1,J))
      B(I+1,J+1)=R1(BX(I+1,J+1),BY(I+1,J+1))
      B(I,J+1)=R1(BX(I,J+1),BY(I,J+1))
      B(I,J)=R1(BX(I,J),BY(I,J))
   45 CALL CALCH(I,J,UIHB)
      H(I+1,J)=R1(HX(I+1,J),HY(I+1,J))
      H(I+1,J+1)=R1(HX(I+1,J+1),HY(I+1,J+1))
      H(I,J+1)=R1(HX(I,J+1),HY(I,J+1))
      H(I,J)=R1(HX(I,J),HY(I,J))
      EB=PY*(BX(I+1,J)-BX(I+1,J+1)-BX(I,J+1)+BX(I,J))+
     *PX*(BY(I+1,J)+BY(I+1,J+1)-BY(I,J+1)-BY(I,J))
      IF(EB.EQ.0.) GOTO 48
      IF(MEB.GE.ABS(EB)) GOTO 48
```

ANEXA A1 (continuare)

```
      B(I,J)=(BX(I,J)**2+BY(I,J)**2)**0.5
   67 CONTINUE
      IT=0
   50 MEH=0.
      MEB=0.
      NRH=1
      NRB=1
      IT=IT+1
      DO 11 I=1,NEY
      DO 11 J=1,NEX
      NR=(I-1)*NEX+J
      EH=PX*(HX(I+1,J)+HX(I+1,J+1)-HX(I,J+1)-HX(I,J))+
     *PY*(-HY(I+1,J)+HY(I+1,J+1)+HY(I,J+1)-HY(I,J))-
     *2.*PX*PY*JZ(NR)
      IF(EH.EQ.0.) GOTO 45
      IF(MEH.GE.ABS(EH)) GOTO 47
      MEH=ABS(EH)
      NRH=(I-1)*NEX+J
   47 CALL THS(I,J,TH,UIHR,DUIHR)
      CREL=0.55
      IF(IT.LE.70) CREL=0.9-IT/10*0.05
      ZH=TH*(PX+PY)**0.5*CREL
      DELTAB=EH/ZH
      DELTABX=FYPXY*DELTAB
      DELTABY=FYPXY*DELTAB
      BX(I+1,J)=BX(I+1,J)+DELTABX
      BX(I+1,J+1)=BX(I+1,J+1)-DELTABX
      BX(I,J+1)=BX(I,J+1)+DELTABX
      BX(I,J)=BX(I,J)+DELTABX
      BY(I+1,J)=BY(I+1,J)+DELTABY
      BY(I+1,J+1)=BY(I+1,J+1)-DELTABY
      BY(I,J+1)=BY(I,J+1)+DELTABY
      BY(I,J)=BY(I,J)+DELTABY
      CALL TEST(BX,HX,BY,HY)
      B(I+1,J)=R1(BX(I+1,J),BY(I+1,J))
      B(I+1,J+1)=R1(BX(I+1,J+1),BY(I+1,J+1))
      B(I,J+1)=R1(BX(I,J+1),BY(I,J+1))
      B(I,J)=R1(BX(I,J),BY(I,J))
   45 CALL CALCH(I,J,UTHR)
      H(I+1,J)=R1(HX(I+1,J),HY(I+1,J))
      H(I+1,J+1)=R1(HX(I+1,J+1),HY(I+1,J+1))
      H(I,J+1)=R1(HX(I,J+1),HY(I,J+1))
      H(I,J)=R1(HX(I,J),HY(I,J)).
      EB=PY*(BX(I+1,J)-BX(I+1,J+1)-BX(I,J+1)+BX(I,J))+
     *PX*(BY(I+1,J)+BY(I+1,J+1)-BY(I,J+1)-BY(I,J))
      IF(EB.EQ.0.) GOTO 48
      IF(MEB.GE.ABS(EB)) GOTO 48
```

ANEXA A1 (continuare)

```
      MEB=ABS(EB)
      NRB=(I-1)*NEX+J
   48 CALL TBS(I,J,TB,HMIU,DHMIU)
      ZB=TB-(PX+PY)*0.5*REL
      DELTAH=EB/ZB
      DELTAHX=FYPXY*DELTAH
      DELTAHY=FYPXY*DELTAH
      HX(I+1,J)=HX(I+1,J)-DELTAHX
      HX(I+1,J+1)=HX(I+1,J+1)-DELTAHX
      HX(I,J+1)=HX(I,J+1)+DELTAHX
      HX(I,J)=HX(I,J)+DELTAHX
      HY(I+1,J)=HY(I+1,J)-DELTAHY
      HY(I+1,J+1)=HY(I+1,J+1)-DELTAHY
      HY(I,J+1)=HY(I,J+1)+DELTAHY
      HY(I,J)=HY(I,J)+DELTAHY
      CALL TEST(BX,HX,BY,HY)
      H(I+1,J)=R1(HX(I+1,J),HY(I+1,J))
      H(I+1,J+1)=R1(HX(I+1,J+1),HY(I+1,J+1))
      H(I,J+1)=R1(HX(I,J+1),HY(I,J+1))
      H(I,J)=R1(HX(I,J),HY(I,J))
   46 CALL CALCB(I,J,HMIU)
      B(I+1,J)=R1(BX(I+1,J),BY(I+1,J))
      B(I+1,J+1)=R1(BX(I+1,J+1),BY(I+1,J+1))
      B(I,J+1)=R1(BX(I,J+1),BY(I,J+1))
      B(I,J)=R1(BX(I,J),BY(I,J))
   11 CONTINUE
      WRITE(108,49) IT,MEH,NRH,MEB,NRB
   49 FORMAT(T20,'IT=',I3,5X,'MEH=',G10.6,5X,'NRH=',I3,
     *5X,'MEB=',G10.6,5X,'NRB=',I3)
      IF(IT.EQ.500) GOTO 55
      IF(MEH.LE.EHMAX.AND.MEB.LE.EBMAX) GOTO 55
      GOTO 50
   55 WRITE(108,2)
      WRITE(108,3)((HX(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
      WRITE(108,4)
      WRITE(108,3)((HY(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
      WRITE(108,5)
      WRITE(108,3)((H(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
      WRITE(108,6)
      WRITE(108,9)((BX(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
      WRITE(108,7)
      WRITE(108,9)((BY(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
      WRITE(108,8)
      WRITE(108,9)((B(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
    2 FORMAT(//T20,'COMPONENTA LUI H DUPA AXA OX'/
     *T20,'IN NODURILE RETELEI')
    3 FORMAT(T10,5F10.1)
                                              CD126H04    15/10/82   14.59.1
06

    4 FORMAT(//T20,'COMPONENTA LUI H DUPA AXA OY'/
     *T20,'IN NODURILE RETELEI')
    5 FORMAT(//T20,'INTENSITATEA H IN NODURILE RETELEI')
    6 FORMAT(//T20,'COMPONENTA LUI B DUPA AXA OX'/
     *T20,'IN NODURILE RETELEI')
    7 FORMAT(//T20,'COMPONENTA LUI B DUPA AXA OY'/
     *T20,'IN NODURILE RETELEI')
    8 FORMAT(//T20,'INDUCTIA B IN NODURILE RETELEI')
    9 FORMAT(T10,5F10.4)
      CALL CALCP
      STOP
      END
                                              CD126H04    15/10/82   15.00.1
06
```

ANEXA A1 (continuare)

```
      SUBROUTINE CMAG
      COMMON /TA/HC(12),BC(12),AI(4),BI(4)/TB/BCC(12)
      READ(105,64)(HC(I),I=1,12)
   64 FORMAT(12F6.2)
      READ(105,65)(BC(I),I=1,12)
   65 FORMAT(12F5.3)
      DO 1 I=1,4
      AI(I)=0.
    1 BI(I)=0.
      AS=0.
      AJ=0.
      DO 2 J=2,3
      AS=AS+HC(J)*BC(J)
    2 AJ=AJ+HC(J)**2
      AI(1)=AS/AJ
      BI(1)=0.
      BCC(3)=AI(1)*HC(3)
      AS=0.
      AJ=0.
      DO 3 J=4,5
      AS=AS+(HC(J)-HC(3))*(BC(J)-BCC(3))/BC(J)**2
    3 AJ=AJ+(HC(J)-HC(3))**2/BC(J)**2
      AI(2)=AS/AJ
      BI(2)=BCC(3)-AI(2)*HC(3)
      BCC(5)=AI(2)*HC(5)+BI(2)
      AS=0.
      AJ=0.
      DO 4 J=6,8
      AS=AS+(HC(J)-HC(5))*(BC(J)-BCC(5))/BC(J)**2
    4 AJ=AJ+(HC(J)-HC(5))**2/BC(J)**2
      AI(3)=AS/AJ
      BI(3)=BCC(5)-AI(3)*HC(5)
      BCC(8)=AI(3)*HC(8)+BI(3)
      AS=0.
      AJ=0.
      DO 5 J=9,12
      AS=AS+(HC(J)-HC(8))*(BC(J)-BCC(8))/BC(J)**2
    5 AJ=AJ+(HC(J)-HC(8))**2/BC(J)**2
      AI(4)=AS/AJ
      BI(4)=BCC(8)-AI(4)*HC(8)
      DO 6 I=1,3
    6 BCC(I)=AI(1)*HC(I)
      DO 7 I=4,5
    7 BCC(I)=AI(2)*HC(I)+BI(2)
      DO 8 I=6,8
    8 BCC(I)=AI(3)*HC(I)+BI(3)
      DO 9 I=9,12
                                              CD126H04   15/10/82   15.00.1

    9 BCC(I)=AI(4)*HC(I)+BI(4)
      WRITE(108,10)(AI(I),BI(I),I=1,4)
   10 FORMAT(T20,2(E12.5,5X)/)
      WRITE(108,11)(BCC(I),I=1,12)
   11 FORMAT(12F8.4)
      DO 12 I=1,12
   12 BC(I)=BCC(I)
      RETURN
      END
                                              CD126H04   15/10/82   15.00.5
```

ANEXA A1 (continuare)

```
      SUBROUTINE CALCH(I,J,UIMB)
      COMMON HX(5,5),HY(5,5),H(5,5),BX(5,5),
     *BY(5,5),B(5,5),JZ(16),MED(5,5),AMIU0
     *,PX,PY,PXPY,PYPX,PXPXY,PYPXY,NNX,NNY,NEX,NEY
     */TA/HC(12),BC(12),AY(4),BI(4)/TB/ACC(12)
      IF(MED(I,J).EQ.1) GOTO 1
      HX(I,J)=BX(I,J)/AMIU0
      HY(I,J)=BY(I,J)/AMIU0
   10 IF(MED(I+1,J).EQ.1) GOTO 2
      HX(I+1,J)=BX(I+1,J)/AMIU0
      HY(I+1,J)=BY(I+1,J)/AMIU0
   11 IF(MED(I+1,J+1).EQ.1) GOTO 3
      HX(I+1,J+1)=BX(I+1,J+1)/AMIU0
      HY(I+1,J+1)=BY(I+1,J+1)/AMIU0
   12 IF(MED(I,J+1).EQ.1) GOTO 4
      HX(I,J+1)=BX(I,J+1)/AMIU0
      HY(I,J+1)=BY(I,J+1)/AMIU0
      RETURN
    1 AMIU=1./UIMB(B(I,J))
      HX(I,J)=BX(I,J)/AMIU
      HY(I,J)=BY(I,J)/AMIU
      GOTO 10
    2 AMIU=1./UIMB(B(I+1,J))
      HX(I+1,J)=BX(I+1,J)/AMIU
      HY(I+1,J)=BY(I+1,J)/AMIU
      GOTO 11
    3 AMIU=1./UIMB(B(I+1,J+1))
      HX(I+1,J+1)=BX(I+1,J+1)/AMIU
      HY(I+1,J+1)=BY(I+1,J+1)/AMIU
      GOTO 12
    4 AMIU=1./UIMB(B(I,J+1))
      HX(I,J+1)=BX(I,J+1)/AMIU
      HY(I,J+1)=BY(I,J+1)/AMIU
      RETURN
      END
```

CD12GH04 15/10/82 15-01-0?

```
      SUBROUTINE CALCB(I,J,HMIU)
      COMMON HX(5,5),HY(5,5),H(5,5),BX(5,5),
     *BY(5,5),B(5,5),JZ(16),MED(5,5),AMIU0
     *,PX,PY,PXPY,PYPX,PXPXY,PYPXY,NNX,NNY,NEX,NEY
     */TA/HC(12),BC(12),AY(4),BI(4)/TB/ACC(12)
      IF(MED(I,J).EQ.1) GOTO 1
      BX(I,J)=HX(I,J)*AMIU0
      BY(I,J)=HY(I,J)*AMIU0
   10 IF(MED(I+1,J).EQ.1) GOTO 2
      BX(I+1,J)=HX(I+1,J)*AMIU0
      BY(I+1,J)=HY(I+1,J)*AMIU0
   11 IF(MED(I+1,J+1).EQ.1) GOTO 3
      BX(I+1,J+1)=HX(I+1,J+1)*AMIU0
      BY(I+1,J+1)=HY(I+1,J+1)*AMIU0
   12 IF(MED(I,J+1).EQ.1) GOTO 4
      BX(I,J+1)=HX(I,J+1)*AMIU0
      BY(I,J+1)=HY(I,J+1)*AMIU0
      RETURN
    1 AMIU=HMIU(H(I,J))
      BX(I,J)=HX(I,J)*AMIU
      BY(I,J)=HY(I,J)*AMIU
      GOTO 10
    2 AMIU=HMIU(H(I+1,J))
      BX(I+1,J)=HX(I+1,J)*AMIU
      BY(I+1,J)=HY(I+1,J)*AMIU
      GOTO 11
    3 AMIU=HMIU(H(I+1,J+1))
      BX(I+1,J+1)=HX(I+1,J+1)*AMIU
      BY(I+1,J+1)=HY(I+1,J+1)*AMIU
      GOTO 12
    4 AMIU=HMIU(H(I,J+1))
      BX(I,J+1)=HX(I,J+1)*AMIU
      BY(I,J+1)=HY(I,J+1)*AMIU
      RETURN
      END
```

CD12GH04 15/10/82 15-01-1?

ANEXA A1 (continuare)

```
      SUBROUTINE TEST(A,B,C,D)
      DIMENSION A(5,5),B(5,5),C(5,5),D(5,5)
      NNX=5
      DO 1 J=1,NNX
      A(1,J)=0.
      B(1,J)=0.
      C(NNY,J)=0.
    1 D(NNY,J)=0.
      DO 2 I=1,NNY
      A(I,NNX)=0.
      B(I,NNX)=0.
      C(I,1)=0.
    2 D(I,1)=0.
      RETURN
      END
```



```
      SUBROUTINE THS(I,J,TH,UIMB,DUIMB)
      COMMON HX(5,5),HY(5,5),H(5,5),BX(5,5),
     *BY(5,5),B(5,5),JZ(16),MED(5,5),AMIU0
     *,PX,PY,PXPY,PYPX,PXPXY,PYPXY,NNX,NNY,NEX,NEY
     */TA/HC(12),BC(12),AI(4),BI(4)/TB/DCC(12)
      IF(MED(I+1,J).EQ.1) GOTO 12
      IF(J.EQ.1) GOTO 13
      A1=(PXPY+PYPX)/AMIU0
      GOTO 21
   13 A1=PXPY/AMIU0
      GOTO 21
   12 IF(I.EQ.NEY.OR.J.EQ.1) GOTO 14
      A1=(PXPY+PYPX)*UIMB(B(I+1,J))+(PXPY*BX(I+1,J)**2+
     *PYPX*BY(I+1,J)**2+2.*BX(I+1,J)*BY(I+1,J))
     */B(I+1,J)*DUIMB(B(I+1,J))
      GOTO 21
   14 A1=PXPY*UIMB(B(I+1,J))+PXPY*BY(I+1,J)**2
     */B(I+1,J)*DUIMB(B(I+1,J))
   21 IF(MED(I+1,J+1).EQ.1) GOTO 22
      A2=(PXPY+PYPX)/AMIU0
      GOTO 31
   22 IF(I.EQ.NEY.AND.J.NE.NEX) GOTO 23
      IF(I.NE.NEY.AND.J.EQ.NEX) GOTO 24
      IF(I.EQ.NEY.AND.J.EQ.NEX) GOTO 25
      A2=(PXPY+PYPX)*UIMB(B(I+1,J+1))+(PXPY*BX(I+1,J+1)**2+
     *PYPX*BY(I+1,J+1)**2+2.*BX(I+1,J+1)*BY(I+1,J+1))
     */B(I+1,J+1)*DUIMB(B(I+1,J+1))
      GOTO 31
   23 A2=PXPY*UIMB(B(I+1,J+1))+PXPY*BX(I+1,J+1)**2
     */B(I+1,J+1)*DUIMB(B(I+1,J+1))
      GOTO 31
   24 A2=PYPX*UIMB(B(I+1,J+1))+PYPX*BY(I+1,J+1)**2
     */B(I+1,J+1)*DUIMB(B(I+1,J+1))
      GOTO 31
   25 A2=0.
   31 IF(MED(I,J+1).EQ.1) GOTO 32
      IF(I.EQ.1) GOTO 33
      A3=(PXPY+PYPX)/AMIU0
      GOTO 41
   33 A3=PYPX/AMIU0
      GOTO 41
   32 IF(I.EQ.1.OR.J.EQ.NEX) GOTO 34
      A3=(PXPY+PYPX)*UIMB(B(I,J+1))+(PXPY*BX(I,J+1)**2+
     *PYPX*BY(I,J+1)**2+2.*BX(I,J+1)*BY(I,J+1))
     */B(I,J+1)*DUIMB(B(I,J+1))
      GOTO 41
   34 A3=PYPX*UIMB(B(I,J+1))+PYPX*BY(I,J+1)**2
```

ANEXA A1 (continuare)

```
     */B(I,J+1)*DUIMB(B(I,J+1))
 41  IF(MED(I,J).EQ.1) GOTO 42
     IF(I.EQ.1.AND.J.NE.1) GOTO 43
     IF(I.NE.1.AND.J.EQ.1) GOTO 44
     IF(I.EQ.1.AND.J.EQ.1) GOTO 45
     A4=(PXPY+PYPX)/AMIU0
     GOTO 51
 43  A4=PYPX/AMIU0
     GOTO 51
 44  A4=PXPY/AMIU0
     GOTO 51
 45  A4=0.0
     GOTO 51
 42  IF(I.EQ.1) GOTO 46
     IF(J.EQ.1) GOTO 47
     A4=(PXPY+PYPX)*UIMB(B(I,J))+(PXPY*BX(I,J)**2+
    *PYPX*BY(I,J)**2+2.*BX(I,J)*BY(I,J))
    */B(I,J)*DUIMB(B(I,J))
     GOTO 51
 46  A4=PYPX*UIMB(B(I,J))+PYPX*BY(I,J)**2
    */B(I,J)*DUIMB(B(I,J))
     GOTO 51
 47  A4=PXPY*UIMB(B(I,J))+PXPY*BX(I,J)**2
    */B(I,J)*DUIMB(B(I,J))
 51  TH=A1+A2+A3+A4
     RETURN
     END
```

CD126H04   15/10/82   15.01.3'

```
     SUBROUTINE TRS(I,J,TB,HMIU,DHMIU)
     COMMON HX(5,5),HY(5,5),H(5,5),BX(5,5),
    *BY(5,5),B(5,5),JZ(16),MED(5,5),AMIU0
    *,PX,PY,PXPY,PYPX,PXPXY,PYPXY,NNX,NNY,NEX,NEY
    */TA/HC(12),BC(12),AT(4),BT(4)/TB/BCC(12)
     IF(MED(I+1,J).EQ.1) GOTO 12
     IF(J.EQ.1) GOTO 13
     A1=(PXPY+PYPX)*AMIU0
     GOTO 21
 13  A1=PYPX*AMIU0
     GOTO 21
 12  IF(I.EQ.NEY.OR.J.EQ.1) GOTO 14
     A1=(PXPY+PYPX)*HMIU(H(I+1,J))+(PYPX*HX(I+1,J)**2+
    *PXPY*HY(I+1,J)**2+2.*HX(I+1,J)*HY(I+1,J))
    */H(I+1,J)*DHMIU(H(I+1,J))
     GOTO 21
 14  A1=PYPX*HMIU(H(I+1,J))+PYPX*HX(I+1,J)**2
    */H(I+1,J)*DHMIU(H(I+1,J))
 21  IF(MED(I+1,J+1).EQ.1) GOTO 22
     A2=(PXPY+PYPX)*AMIU0
     GOTO 31
 22  IF(I.EQ.NEY.AND.J.NE.NEX) GOTO 23
     IF(I.NE.NEY.AND.J.EQ.NEX) GOTO 24
     IF(I.EQ.NEY.AND.J.EQ.NEX) GOTO 25
     A2=(PXPY+PYPX)*HMIU(H(I+1,J+1))+(PYPX*HX(I+1,J+1)**2+
    *PXPY*HY(I+1,J+1)**2+2.*HX(I+1,J+1)*HY(I+2,J+1))
    */H(I+1,J+1)*DHMIU(H(I+1,J+1))
     GOTO 31
 23  A2=PYPX*HMIU(H(I+1,J+1))+PYPX*HX(I+1,J+1)**2
    */H(I+1,J+1)*DHMIU(H(I+1,J+1))
     GOTO 31
 24  A2=PXPY*HMIU(H(I+1,J+1))+PXPY*HY(I+1,J+1)**2
    */H(I+1,J+1)*DHMIU(H(I+1,J+1))
     GOTO 31
 25  A2=0.0
 31  IF(MED(I,J+1).EQ.1) GOTO 32
     IF(I.EQ.1) GOTO 33
     A3=(PXPY+PYPX)*AMIU0
     GOTO 41
 33  A3=PXPY*AMIU0
     GOTO 41
 32  IF(I.EQ.1.OR.J.EQ.NEX) GOTO 34
     A3=(PXPY+PYPX)*HMIU(H(I,J+1))+(PYPX*HX(I,J+1)**2+
    *PXPY*HY(I,J+1)**2+2.*HX(I,J+1)*HY(I,J+1))
    */H(I,J+1)*DHMIU(H(I,J+1))
     GOTO 41
 34  A3=PXPY*HMIU(H(I,J+1))+PXPY*HY(I,J+1)**2
```

CD126H04   15/10/82   15.01.3'

ANEXA A1 (continuare)

```
     */H(I,J+1)*DHMIU(H(I,J+1))
  41 IF(MED(I,J).EQ.1) GOTO 42
     IF(I.EQ.1.AND.J.NE.1) GOTO 43
     IF(I.NE.1.AND.J.EQ.1) GOTO 44
     IF(I.EQ.1.AND.J.EQ.1) GOTO 45
     A4=(PXPY+PYPX)*AMIU0
     GOTO 51
  43 A4=PXPY*AMIU0
     GOTO 51
  44 A4=PYPX*AMIU0
     GOTO 51
  45 A4=0.
     GOTO 51
  42 IF(I.EQ.1) GOTO 46
     IF(J.EQ.1) GOTO 47
     A4=(PXPY+PYPX)*DHMIU(H(I,J))+(PYPX*HX(I,J)**2+
     *PXPY*HY(I,J)**2+2.*HX(I,J)*HY(I,J))
     */H(I,J)*DHMIU(H(I,J))
     GOTO 51
  46 A4=PXPY*DHMIU(H(I,J))+PXPY*HY(I,J)**2
     */H(I,J)*DHMIU(H(I,J))
     GOTO 51
  47 A4=PYPX*DHMIU(H(I,J))+PYPX*HX(I,J)**2
     */H(I,J)*DHMIU(H(I,J))
  51 Y8=A1+A2+A3+A4
     RETURN
     END
```

D6 CD12GH04 15/10/82 15.01.4'

```
     SUBROUTINE CALCP
     DIMENSION X(8),Y(8),AZX(5,5),AZY(5,5),AZ(5,5)
     COMMON HX(5,5),HY(5,5),H(5,5),BX(5,5),
     *BY(5,5),B(5,5),JZ(16),MED(5,5),AMIU0
     *,PX,PY,PXPY,PYPX,PXPXY,PYPXY,NNX,NNY,NEX,NEY
     DO 30 I=1,NNY
     AZX(I,NNX)=0.
  30 AZY(I,NNX)=0.
     DO 31 J=1,NNX
     AZX(NNY,J)=0.
  31 AZY(NNY,J)=0.
     DO 32 NI=1,NEY
     I=NNY-NI
     DO 32 NJ=1,NEX
     J=NNX-NJ
     AZX(I,J)=AZX(I,J+1)+(BY(I,J+1)+BY(I,J))/2.*PX
  32 AZY(I,J)=AZY(I+1,J)+(BX(I+1,J)+BX(I,J))/2.*PY
     DO 33 I=1,NNY
     DO 33 J=1,NNX
  33 AZ(I,J)=(AZX(I,J)+AZY(I,J))/2.
     WRITE(106,44)
  44 FORMAT(//T20,'POTENTIALUL AZ IN NODURILE RETELEI')
     WRITE(106,34)((AZ(I,J),J=1,NNY),I=1,NNY)
  34 FORMAT(T10,5F10.3)
     POT=0.05
     AUX=0.
     DO 35 I=1,NEY
     DO 35 J=1,NEX
     IF(AUX.LT.AZ(I,J)) AUX=AZ(I,J)
  35 CONTINUE
  45 IX=0
     DO 36 NI=1,NEY
     I=NNY-NI
     DO 37 NJ=1,NEX
     J=NNX-NJ
     IF(POT.GE.AZ(I,J)) GO TO 37
     IX=IX+1
     X(IX)=(J-1)*PX+APROX(AZ(I,J),AZ(I,J+1),PX,POT)
     Y(IX)=-(I-1)*PY
     GO TO 36
  37 CONTINUE
  36 CONTINUE
     DO 39 NJ=1,NEX
     J=NNX-NJ
     DO 40 NI=1,NEY
     I=NNY-NI
     IF(POT.GE.AZ(I,J)) GO TO 40
```

D6 CD12GH04 15/10/82 15.01.4'

ANEXA A1 (continuare)

```
      FUNCTION DUIMB(B)
      COMMON/TA/HC(12),BC(12),AI(4),BI(4)
      IF(B.GE.BC(3)) GOTO 1
      DUIMB=0.
      GOTO 4
    1 IF(B.GE.BC(5)) GOTO 2
      DUIMB=BI(2)/AI(2)/B/B
      GOTO 4
    2 IF(B.GE.BC(8)) GOTO 3
      DUIMB=BI(3)/AI(3)/B/B
      GOTO 4
    3 DUIMB=BI(4)/AI(4)/B/B
    4 RETURN
      END
```

6 CD12GH04 15/10/82 15.02.23

```
      FUNCTION APROX(Y1,Y0,P,X)
      APROX=(Y1-X)/(Y1-Y0)*P
      RETURN
      END
```

6 CD12GH04 15/10/82 15.02.23

ANEXA A2

```
      SUBROUTINE CMAG
      DIMENSION X(12),Y(12),A(12,12),B(12),BIC(12)
      COMMON/T1/A0,AI(11),HI(12)/T2/BI(12)
      F1(XX,YY)=XX*(XX-YY)**2
      F2(XX,YY,ZZ)=(XX-YY)**2*(XX-ZZ)**2
      F3(XX,YY,ZZ)=(XX-YY)**2/ZZ
      READ(105,64)(HI(I),I=1,12)
   64 FORMAT(12F6.0)
      READ(105,65)(BI(I),I=1,12)
   65 FORMAT(12F6.3)
      READ(105,23) RO
   23 FORMAT(F11.4)
      N=12
      DO 15 I=1,N
      X(I)=HI(I)
   15 Y(I)=BI(I)
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      A(I,J)=0.
    1 B(J)=0.
      DO 2 I=2,N
    2 A(1,1)=A(1,1)+(X(I)/Y(I))**2
      DO 3 I=2,N
      DO 4 J=I,N
      A(1,I)=A(1,I)+F1(X(J),X(I-1))/Y(J)**2
    4 B(I)=B(I)+F3(X(J),X(I-1),Y(J))
    3 CONTINUE
      DO 5 K=2,N
      DO 6 I=K,N
      DO 7 J=I,N
    7 A(K,I)=A(K,I)+F2(X(J),X(K-1),X(I-1))/Y(J)**2
      A(K,I)=A(K,I)+RO*4.*(X(N)-X(I-1))
    6 CONTINUE
    5 CONTINUE
      DO 8 K=3,N
      K1=K-1
      DO 9 I=2,K1
      DO 10 J=K,N
   10 A(K,I)=A(K,I)+F2(X(J),X(K1),X(I-1))/Y(J)**2
      A(K,I)=A(K,I)+RO*4.*(X(N)-X(K1))
    9 CONTINUE
    8 CONTINUE
      DO 11 I=2,N
      DO 12 J=I,N
   12 A(I,1)=A(I,1)+F1(X(J),X(I-1))/Y(J)**2
   11 CONTINUE
      DO 13 I=2,N
```



```
   13 B(1)=B(1)+X(I)/Y(I)
      EPS=1.0E-40
      CALL RESUL(A,B,N,KOD,EPS)
      WRITE(108,16) KOD
   16 FORMAT(//T30,'KOD=',I2)
      IF(KOD.NE.0) STOP1
      A0=B(1)
      N1=N-1
      DO 17 I=1,N1
   17 AI(I)=B(I+1)
      WRITE(108,30) RO
   30 FORMAT(/T30,'RO=',F11.4)
      WRITE(108,18) A0,(I,AI(I),I=1,11)
   18 FORMAT(/T30,'A0=',E15.9/(T30,'AI(',I2,')=',E15.9))
      DO 21 I=2,N
      H0=HI(I)
      BIC(I)=BC(H0)
      WRITE(108,24) H0,BI(I),BIC(I)
   24 FORMAT(/T30,F6.0,2(5X,F6.4))
      BI(I)=BIC(I)
   21 CONTINUE
      RETURN
      END
```

ANEXA A2 (continuare)

```
      FUNCTION HMIU(H)
      COMMON/T1/A0,AI(11),HI(12)
      HMIU=A0
      DO 1 I=1,11
      AUX=H-HI(I)
      IF(AUX.LE.0.) RETURN
    1 HMIU=HMIU+AI(I)*AUX**2/H
      RETURN
      END
```

06 CD12GH02 27/03/82 11.26.5

```
      FUNCTION DHMIU(H)
      COMMON/T1/A0,AI(11),HI(12)
      DHMIU=AI(1)
      DO 1 I=2,11
      AUX=H-HI(I)
      IF(AUX.LE.0.) RETURN
    1 DHMIU=DHMIU+AI(I)*(2.*AUX*H-AUX**2)/H/H
      RETURN
      END
```

06 CD12GH02 27/03/82 11.27.0

```
      FUNCTION UIMB(B)
      COMMON/T1/A0,AI(11),HI(12)/T2/BI(12)/T3/HC
      K=1
      DO 1 I=1,11
      IF(B.GE.BI(I).AND.B.LT.BI(I+1)) K=I
    1 CONTINUE
      B0=-B
      B1=A0
      B2=0.
      DO 2 I=1,K
      B0=B0+HI(I)**2*AI(I)
      B1=B1-2.*HI(I)*AI(I)
      B2=B2+AI(I)
    2 CONTINUE
      RAD=B1*B1-4.*B0*B2
      IF(RAD.LE.0.) GOTO 3
      HC=(-B1+RAD**0.5)/2./B2
      GOTO 5
    3 HC=-B1/2./B2
    5 CONTINUE
      UIMB=1./HMIU(HC)
      RETURN
      END
```

06 CD12GH02 27/03/82 11.27.1

```
      FUNCTION DUIMB(B)
      COMMON/T1/A0,AI(11),HI(12)/T3/H
      IF(B.EQ.0.) GOTO 3
      DBDH=A0
      DO 1 I=1,11
      AUX=H-HI(I)
      IF(AUX.LE.0.) GOTO 2
      DBDH=DBDH+2.*AI(I)*AUX
    1 CONTINUE
    2 DUIMB=1./DBDH/B-H/B/B
      RETURN
    3 DUIMB=-AI(1)/A0**3
      RETURN
      END
```

06 CD12GH02 27/03/82 11.27.1

ANEXA A3

```
      SUBROUTINE [illegible]
      DIMENSION [illegible](12),F(12),[illegible](51)
      COMMON /[illegible]/ [illegible]
      READ(105,[illegible]) (F(I),I=1,12)
      FORMAT(12F5.3)
      READ(105,65)(SC(I),I=1,12)
65    FORMAT(12F6.3)
      [illegible]=0.[illegible]
      DAS=0.001
      Y1=F(3)
      Y2=F(6)
      Y3=F(11)
      X1=SC(3)
      X2=SC(6)
      X3=SC(11)
      F2=Y1/X1-Y2/X2
      DO 11 I=1,51
      [illegible]=[illegible]+I*[illegible]
      F1=[illegible]*(X2-X1)
      F3=(F1**2/4.+F1/F2)**0.5
      F4=F1/2.+F3
      F5=[illegible]+(X1+X2)/2.+[illegible]*X3+F3
      F6=Y3/X3-Y2/X2
      EF(I)=1./E5-1./E4-F6
      [illegible]=0.5[illegible]
      [illegible]=ABS(EF(1))
      DO 13 I=2,51
      IF(ABS(EF(I))-[illegible]) 3,[illegible],[illegible]
3     [illegible]=ABS(EF(I))
      [illegible]=0.5[illegible]+I*DAS
11    CONTINUE
13    CONTINUE
      A[illegible]=(-[illegible]*F2*(Y1+X2)+(([illegible]*F2*(Y1-X2))**2+
     *4.*[illegible]*F2*(Y2-X1))**0.5)/2./F2
      C[illegible]=F2+Y3/X3-1./([illegible]+[illegible]*X1)+1./(A[illegible]+[illegible]*X2)-1./([illegible]+[illegible]*X3)
      WRITE(108,[illegible]) A[illegible],[illegible],C[illegible]
      FORMAT(/[illegible],'A[illegible]=',F10.7/T20,'BM=',F5.3/
     *T20,'CM=',F10.7)
      RETURN
      END
```

CD123[illegible] 15/10/82 11.5[illegible]

```
      FUNCTION [illegible]
      COMMON /T[illegible]/ [illegible],CM
      [illegible]=1./(A[illegible]+[illegible]*[illegible])+C[illegible]
      RETURN
      END
```

CD12GH03 15/10/82 11.5[illegible]

```
      FUNCTION [illegible](H)
      COMMON /T[illegible]/ [illegible],BM,CM
      [illegible]=-[illegible]/(A[illegible]+B[illegible]*H)**2
      RETURN
      END
```

CD12GH03 15/10/82 12.[illegible]

```
      FUNCTION [illegible]13(R)
      COMMON /T[illegible]/ [illegible],BM,CM
      IF(E[illegible].EQ.0.) GOTO 2
      RAC=((1.+[illegible]*CM-BM*R)**2+4.*AM*BM*CM*R)**0.5
      [illegible]=(-(1.+[illegible]*CM-BM*R)+RAC)/2./BM/CM/[illegible]
      GOTO 1
2     [illegible]=A[illegible]/(1.+A[illegible]*CM)
1     CONTINUE
      RETURN
      END
```

CD12GH03 15/10/82 12.00.0

```
      FUNCTION [illegible](R)
      COMMON /T[illegible]/ [illegible],BM,CM
      IF(C[illegible].EQ.0.) GOTO 2
      RAC=((1.+A[illegible]*C[illegible]-B[illegible]*R)**2+4.*A[illegible]*BM*CM*R)**0.5
      [illegible]=((1.-(1.-A[illegible]*CM-[illegible]*R)/RAC)/2./CM/[illegible]
     *1.+A[illegible]*C[illegible]-[illegible]*R-RAC)/2./[illegible]/C[illegible]/R**2
      GOTO 1
2     [illegible]=A[illegible]*[illegible]/(1.+A[illegible]*C[illegible])**3
1     CONTINUE
      RETURN
      END
```

CD12GH03 15/10/82 12.00.0

ANEXA A4

```
      EXTERNAL HMIU,APROX
      COMMON HX(5,5),HY(5,5),HT(5,5),BX(5,5),
     *BY(5,5),BT(5,5),MED(5,5),JC(5,5),AMIU(5,5),
     *A(5,5),B(5,5),C(5,5),D(5,5),E(5,5),
     *F(5,5),G(5,5),K(5,5),L(5,5),
     *PX,PY,NNX,NNY,NEX,NEY
     */TM/AM,BM,CM
      REAL JC,K,L
      R1(X1,X2)=(X1*X1+X2*X2)**0.5
      PX=0.1
      PY=0.15
      NNX=5
      NNY=5
      AMIU0=16.*ATAN(1.)*10.**(-7)
      AM=0.655484*10.**2
      BM=0.562
      CM=0.577588*10.**(-4)
      PXPY=PX/PY
      PYPX=PY/PX
      NEX=NNX-1
      NEY=NNY-1
      NEMX=NEX-1
      NEMY=NEY-1
      DO 19 I=1,NNY
      DO 19 J=1,NNX
      MED(I,J)=1
      JC(I,J)=0.
      HX(I,J)=0.
      HY(I,J)=0.
      HT(I,J)=0.
      BX(I,J)=0.
      BY(I,J)=0.
   19 BT(I,J)=0.
      MED(1,1)=0
      MED(1,2)=0
      MED(2,1)=0
      MED(2,2)=0
      JC(1,1)=150000.
      READ(105,66) (HY(1,J),J=1,NNX)
      READ(105,66) (HX(I,1),I=1,NNY)
   66 FORMAT(5F10.1)
      DO 71 J=1,NNX
      HT(1,J)=R1(HX(1,J),HY(1,J))
      IF(MED(1,J).EQ.1) GOTO 72
      AMIU(1,J)=AMIU0
      GOTO 71
   72 AMIU(1,J)=HMIU(HT(1,J))
```

```
71 CONTINUE
   DO 73 I=1,NNY
   HT(I,1)=H1(HX(I,1),HY(I,1))
   IF(MED(I,1).EQ.1) GOTO 74
   AMIU(I,1)=AMIU0
   GOTO 73
74 AMIU(I,1)=HMIU(HT(I,1))
73 CONTINUE
   C1=1./(PX*PX+PY*PY)
   C2=PX*PY*C1
   DO 8 I=1,NEMY
   DO 8 J=1,NEMX
 9 CALL CAMIU(I+1,J+1,HMIU)
   A(I,J)=C1*(PX*PX+PY*PY*AMIU(I,J)/AMIU(I+1,J+1))
   B(I,J)=C2*(1.-AMIU(I,J)/AMIU(I+1,J+1))
   C(I,J)=C1*(PX*PX-PY*PY*AMIU(I,J+1)/AMIU(I+1,J+1))
   D(I,J)=C2*(1.+AMIU(I,J+1)/AMIU(I+1,J+1))
   E(I,J)=C1*(PY*PY*AMIU(I+1,J)/AMIU(I+1,J+1)-PX*PX)
   F(I,J)=C2*(1.+AMIU(I+1,J)/AMIU(I+1,J+1))
   G(I,J)=C1*(PX*PX*AMIU(I,J)/AMIU(I+1,J+1)+PY*PY)
   K(I,J)=C1*(PX*PX*AMIU(I,J+1)/AMIU(I+1,J+1)-PY*PY)
   L(I,J)=C1*(PY*PY-PX*PX*AMIU(I+1,J)/AMIU(I+1,J+1))
   HCX=2.*PX*C2*JC(I,J)+A(I,J)*HX(I,J)+
  *B(I,J)*HY(I,J)+C(I,J)*HX(I,J+1)-D(I,J)*HY(I,J+1)+
  *E(I,J)*HX(I+1,J)+F(I,J)*HY(I+1,J)
   HCY=2.*PY*C2*JC(I,J)+B(I,J)*HX(I,J)+
  *G(I,J)*HY(I,J)+D(I,J)*HX(I,J+1)+K(I,J)*HY(I,J+1)-
  *F(I,J)*HX(I+1,J)+L(I,J)*HY(I+1,J)
   DHX=ABS((HCX-HX(I+1,J+1))/HCX)
   DHY=ABS((HCY-HY(I+1,J+1))/HCY)
   HX(I+1,J+1)=HCX
   HY(I+1,J+1)=HCY
   HT(I+1,J+1)=H1(HCX,HCY)
   IF(DHX.GE.0.001.OR.DHY.GE.0.001) GOTO 9
   CALL CAMIU(I+1,J+1,HMIU)
 8 CONTINUE
   DO 10 I=1,NEMY
   HY(I+1,NNX)=2.*PX*JC(I,NEX)+PXPY*HX(I,NEX)+
  *HY(I,NEX)-PXPY*HX(I+1,NEX)+HY(I+1,NEX)+
  *PXPY*HX(I,NNX)-HY(I,NNX)
   HT(I+1,NNX)=ABS(HY(I+1,NNX))
   CALL CAMIU(I+1,NNX,HMIU)
10 CONTINUE
   DO 11 J=1,NEMX
   HX(NNY,J+1)=2.*PY*JC(NEY,J)+HX(NEY,J)+
  *PYPX*HY(NEY,J)-HX(NNY,J)+PYPX*HY(NNY,J)+
  *HX(NEY,J+1)-PYPX*HY(NEY,J+1)
```



```
   HT(NNY,J+1)=ABS(HX(NNY,J+1))
   CALL CAMIU(NNY,J+1,HMIU)
11 CONTINUE
   CALL CAMIU(NNY,NNX,HMIU)
   DO 16 I=1,NNY
   DO 16 J=1,NNX
   BX(I,J)=HX(I,J)*AMIU(I,J)
   BY(I,J)=HY(I,J)*AMIU(I,J)
16 BT(I,J)=HT(I,J)*AMIU(I,J)
   WRITE(108,12)
12 FORMAT(//T20,'TABELUL 5.1'///)
   WRITE(108,2)
 2 FORMAT(T20,'HX'/)
   WRITE(108,3)((HX(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
 3 FORMAT(T10,5F10.1)
   WRITE(108,4)
 4 FORMAT(/T20,'HY'/)
   WRITE(108,3)((HY(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
   WRITE(108,5)
 5 FORMAT(/T20,'H'/)
   WRITE(108,3)((HT(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
   WRITE(108,20)
20 FORMAT(/T20,'BX'/)
   WRITE(108,6)((BX(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
 6 FORMAT(T10,5F10.4)
   WRITE(108,21)
21 FORMAT(/T20,'BY'/)
   WRITE(108,6)((BY(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
   WRITE(108,22)
22 FORMAT(/T20,'B'/)
   WRITE(108,6)((BT(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
   CALL CALCP
   STOP
   END
```

ANEXA A4 (continuare)

```
      SUBROUTINE CAMIU(I,J,HMIU)
      COMMON HX(5,5),HY(5,5),HT(5,5),BX(5,5),
     *BY(5,5),BT(5,5),MED(5,5),JC(5,5),AMIU(5,5),
     *A(5,5),B(5,5),C(5,5),D(5,5),E(5,5),
     *F(5,5),G(5,5),K(5,5),L(5,5),
     *PX,PY,NNX,NNY,NEX,NEY
      AMIU0=16.*ATAN(1.)*10.**(-7)
      IF(MED(I,J).EQ.1) GOTO 4
      AMIU(I,J)=AMIU0
      GOTO 41
    4 AMIU(I,J)=HMIU(HT(I,J))
   41 RETURN
      END
```



```
      SUBROUTINE CALCP
      DIMENSION X(8),Y(8),AZX(5,5),AZY(5,5),AZ(5,5)
      COMMON HX(5,5),HY(5,5),HT(5,5),BX(5,5),
     *BY(5,5),BT(5,5),MED(5,5),JC(5,5),AMIU(5,5),
     *A(5,5),B(5,5),C(5,5),D(5,5),E(5,5),
     *F(5,5),G(5,5),K(5,5),L(5,5),
     *PX,PY,NNX,NNY,NEX,NEY
      DO 30 I=1,NNY
      AZX(I,NNX)=0.
   30 AZY(I,NNX)=0.
      DO 31 J=1,NNX
      AZX(NNY,J)=0.
   31 AZY(NNY,J)=0.
      DO 32 NI=1,NEY
      I=NNY-NI
      DO 32 NJ=1,NEX
      J=NNX-NJ
      AZX(I,J)=AZX(I,J+1)+(BY(I,J+1)+BY(I,J))/2.*PX
   32 AZY(I,J)=AZY(I+1,J)+(BX(I+1,J)+BX(I,J))/2.*PY
      DO 33 I=1,NNY
      DO 33 J=1,NNX
   33 AZ(I,J)=(AZX(I,J)+AZY(I,J))/2.
      WRITE(108,24)
   24 FORMAT(/T20,'AZ'/)
      WRITE(108,34)((AZ(I,J),J=1,NNX),I=1,NNY)
   34 FORMAT(T10,5F10.3)
      POT=0.05
      AUX=0.
      DO 35 I=1,NEY
      DO 35 J=1,NEX
      IF(AUX.LT.AZ(I,J)) AUX=AZ(I,J)
   35 CONTINUE
   43 IX=0
      DO 36 NI=1,NEY
      I=NNY-NI
      DO 37 NJ=1,NEX
      J=NNX-NJ
      IF(POT.GE.AZ(I,J)) GO TO 37
      IX=IX+1
      X(IX)=(J-1)*PX+APROX(AZ(I,J),AZ(I,J+1),PX,POT)
      Y(IX)=-(I-1)*PY
      GO TO 36
   37 CONTINUE
   36 CONTINUE
      DO 39 NJ=1,NEX
      J=NNX-NJ
      DO 40 NI=1,NEY
```



```
      I=NNY-NI
      IF(POT.GE.AZ(I,J)) GO TO 40
      IX=IX+1
      X(IX)=(J-1)*PX
      Y(IX)=-(I-1)*PY-APROX(AZ(I,J),AZ(I+1,J),PY,POT)
      GOTO 39
   40 CONTINUE
   39 CONTINUE
      WRITE(108,41) POT,X,Y
   41 FORMAT(///T20,'POT=',F4.2/T10,'X=',8F6.3/
     *T10,'Y=',8F6.3)
      NEXY=NEX+NEY
      DO 42 I=1,NEXY
      X(I)=0.
   42 Y(I)=0.
      POT=POT+0.05
      IF(POT.LT.AUX) GOTO 43
      RETURN
      END
```

ANEXA A4 (continuare)

```
FUNCTION HMIU(HT)
COMMON/TM/AM,BM,CM
HMIU=1./(AM+BM*HT)+CM
RETURN
END
b.06                                    CD12GM04   27/03/82   19.50.
```

```
FUNCTION APROX(Y1,Y0,P,X)
APROX=(Y1-X)/(Y1-Y0)*P
RETURN
END
.06                                     CD12GM04   27/03/82   19.50.
```