

# **INVESTIGAREA RUPERII FRAGILE ÎN MODUL MIXT PE MATERIALE POLIURETANICE**

Teză destinată obținerii  
titlului științific de doctor inginer  
la  
Universitatea "Politehnica" din Timișoara  
în domeniul "INGINERIE MECANICĂ"  
de către

**ing. Hannelore-Elfride RUS**

Conducător științific:  
Referenți științifici:

Prof. univ. Dr. ing. T. D. BABEU  
Prof. univ. Dr. ing. D. M. CONSTANTINESCU  
Conf. univ. Dr.ing. M. C. DUDESCU  
Prof. univ. Dr. ing. L. MARȘAVINA

Ziua susținerii tezei: 10.12.2012

Seriile Teze de doctorat ale UPT sunt:

- |   |  |
|---|--|
| 1. Automatică                               | 9. Inginerie Mecanică                      |
| 2. Chimie                                   | 10. Știința Calculatoarelor                |
| 3. Energetică                               | 11. Știința și Ingineria Materialelor      |
| 4. Ingineria Chimică                        | 12. Ingineria sistemelor                   |
| 5. Inginerie Civilă                         | 13. Inginerie energetică                   |
| 6. Inginerie Electrică                      | 14. Calculatoare și tehnologia informației |
| 7. Inginerie Electronică și Telecomunicații | 15. Ingineria materialelor                 |
| 8. Inginerie Industrială                    | 16. Inginerie și Management                |

Universitatea „Politehnica” din Timișoara a inițiat seriile de mai sus în scopul diseminării expertizei, cunoștințelor și rezultatelor cercetărilor întreprinse în cadrul școlii doctorale a universității. Seriile conțin, potrivit H.B.Ex.S Nr. 14 / 14.07.2006, tezele de doctorat susținute în universitate începând cu 1 octombrie 2006.

Copyright © Editura Politehnica – Timișoara, 2012

Această publicație este supusă prevederilor legii dreptului de autor. Multiplicarea acestei publicații, în mod integral sau în parte, traducerea, tipărirea, reutilizarea ilustrațiilor, expunerea, radiodifuzarea, reproducerea pe microfilme sau în orice altă formă este permisă numai cu respectarea prevederilor Legii române a dreptului de autor în vigoare și permisiunea pentru utilizare obținută în scris din partea Universității „Politehnica” din Timișoara. Toate încălcările acestor drepturi vor fi penalizate potrivit Legii române a drepturilor de autor.

România, 300159 Timișoara, Bd. Republicii 9,  
tel. 0256 403823, fax. 0256 403221  
e-mail: editura@edipol.upt.ro

## Cuvânt înainte

Teza mea de doctorat a fost elaborată pe parcursul activității de cercetare desfășurată în cadrul Departamentului de Mecanică și Rezistența Materialelor al Universității „Politehnica” din Timișoara.

Lucrarea tratează problema ruperii fragile în modul mixt I/II a materialelor poliuretanică în prezența concentratorilor de tensiune, materiale utilizate astăzi pe scară largă în aplicațiile industriale. În prima parte a lucrării sunt prezentate rezultatele încercărilor experimentale efectuate pentru determinarea caracteristicilor mecanice, elastice și de mecanica ruperii ale două materiale poliuretanică cu densități diferite. Două tipuri de epruvete au fost utilizate pentru realizarea testelor de mecanica ruperii: epruvete semidisc cu concentrator singular de tensiune de tipul fisură și epruvete dreptunghiulare cu concentrator nesingular de tensiune de tipul creștătură U, pentru patru valori diferite ale razei la vârful creștăturii. Prin adecvarea condițiilor de încercare au fost realizate șase combinații diferite între modul I și II de solicitare.

Condițiile critice ale ruperii fragile sunt estimate în lucrare pe baza calculului tensiunilor, respectiv pe baza calculului energiei de deformație. În acest scop, sunt utilizate criteriul tensiunii circumferențiale maxime (criteriul MTS) formulat de F. Erdogan în 1963 și două modificări recente aduse acestuia, și anume: generalizarea criteriului MTS (criteriul GMTS) prin considerarea efectului tensiunilor nesingulare T propusă de D.J. Smith (2001) și extinderea criteriului MTS pentru cazul concentratorilor nesingulari de tensiune (criteriul UMTS) formulată de M.R. Ayatollahi (2009). De asemenea, sunt implicate criteriul energiei specifice de deformație minimă (criteriul SED) formulat de G.C. Sih (1974) și criteriul valorii medii a energiei specifice de deformație (criteriul SED medie) propus în lucrările publicate de P. Lazzarin (2001, 2005) și F.J. Gómez (2007). Rezultatele obținute sunt prezentate în forma diagramelor de rupere și a diagramelor de variație a unghiului critic de inițiere a ruperii. De asemenea, predicțiile forței critice de rupere sunt prezentate prin comparație cu rezultatele experimentale. O serie de recomandări privind acuratețea și aplicabilitatea criteriilor analizate sunt formulate în baza acestor rezultate.

În final, este investigată influența modului mixt de solicitare asupra traiectoriei fisurilor la ruperea epruvetelor semidisc. Simularea numerică a propagării fisurilor este realizată utilizând două tehnici, și anume: propagarea cvasiautomată a fisurilor cu pachetul software FRANC2D/L și propagarea interactivă a fisurilor cu pachetul software Abaqus 6.5. Lucrarea se încheie cu o prezentare a principalelor rezultate și a contribuțiilor personale.

Timișoara, decembrie 2012

Hannelore-Elfride FILIPESCU

Recunoștința mea la publicarea acestei lucrări este adresată în mod deosebit conducătorului tezei, Dl. Prof. univ. Dr. ing. Dimitrie Tiberiu BABEU.

Adresez mulțumiri pentru susținerea acordată pe parcursul elaborării tezei tuturor colegilor mei, care, direct sau indirect, m-au ajutat să o fac posibilă.

Un gând special de recunoștință pentru suportul științific în elaborarea lucrării este destinat d-lor Prof. univ. Dr. ing. Liviu MARȘAVINA, As. Dr. ing. Radu NEGRU și Drd. ing. Niculai PAȘCA.

Doresc să mulțumesc și membrilor comisiei de doctorat, Prof. univ. Dr. ing. Dan Mihai CONSTANTINESCU, Conf. univ. Dr. ing. Mircea Cristian DUDESCU și Prof. univ. Dr. ing. Valer DOLGA pentru amabilitatea de a-mi analiza lucrarea.

Rus, Hannelore-Elfride

**Investigarea ruperii fragile în modul mixt pe materiale poliuretanic**

Teze de doctorat ale UPT, Seria 9, Nr. 125, Editura Politehnica, 2012, 146 pagini, 80 figuri, 24 tabele.

ISSN: 1842-4937

ISBN: 978-606-554-579-3

Cuvinte cheie: rupere fragilă în modul mixt I/II, criterii de rupere, materiale poliuretanic.

Rezumat,

Lucrarea este dedicată studiului ruperii fragile în modul mixt I/II pe materiale poliuretanic în prezența concentratorilor de tensiune. În prima parte sunt prezentate rezultatele testelor experimentale efectuate pentru determinarea caracteristicilor mecanice, elastice și de mecanica ruperii. Comportamentul materialelor poliuretanic la ruperea fragilă în prezența concentratorilor de tensiune este evaluat pentru două tipuri de epruvete utilizând mai multe criterii de rupere. O serie de rezultate importante sunt prezentate și analizate: diagramele de rupere, diagramele de variație a unghiului critic de inițiere a ruperii și predicțiile forței critice de rupere. Fundamentate pe aceste rezultate, sunt formulate o serie de recomandări privind acuratețea și aplicabilitatea criteriilor analizate. De asemenea, sunt estimate prin simulare numerică cu metoda elementului finit traiectoriile de propagare a fisurilor. Ultimul capitol prezintă principalele rezultate și contribuțiile personale.

# CUPRINS

<b>1. Stadiul actual al cercetărilor privind evaluarea condițiilor critice ale rupei fragile</b> .....	4
1.1. Importanța cedărilor prin rupere fragilă în inginerie .....	4
1.2. Noțiuni introductive de mecanica rupei liniar elastice .....	6
1.2.1. Câmpul tensiunilor elastice în vecinătatea vârfului fisurii .....	6
1.2.2. Câmpul tensiunilor elastice în vecinătatea vârfului concentratorilor de tensiune nesingulari (crestătură V rotunjită, crestătură U) .....	9
1.3. Metode și criterii de evaluare a condițiilor critice ale rupei fragile.....	13
1.4. Obiectivele temei de cercetare .....	18
<b>2. Determinarea experimentală a caracteristicilor mecanice, elastice și de mecanica rupei</b> .....	19
2.1. Încercări pentru determinarea proprietăților mecanice ale materialelor poliuretanic Necuron 1020 și Necuron 651.....	19
2.1.1. Încercări mecanice la tracțiune monoaxială .....	19
2.1.2. Determinarea tenacității la rupere $K_{IC}$ .....	22
2.1.3. Determinarea coeficientului de contracție transversală pe baza tehnicii excitației prin impuls .....	24
2.2. Încercări de mecanica rupei în modul mixt.....	26
2.2.1. Încercări de încovoiere în trei puncte pe epruvete cu crestătură laterală de tip U (epruvete SENB).....	26
2.2.2. Încercări de încovoiere asimetrică în trei puncte pe epruvete semidisc cu fisură laterală verticală (epruvete ASCB) .....	32
<b>3. Evaluarea rupei fragile pe baza calculului tensiunilor</b> .....	37
3.1. Criteriul tensiunii circumferențiale maxime (maximum tangential stress MTS) 37	
3.1.1. Formularea criteriului tensiunii circumferențiale maxime.....	37
3.1.2. Generalizarea criteriului tensiunii circumferențiale maxime (criteriul GMTS) 39	
3.1.3. Extinderea criteriului MTS la concentratori nesingulari de tensiune.....	46
3.2. Evaluarea rupei fragile pe semidiscul cu fisură laterală verticală solicitat la încovoiere asimetrică (epruveta ASCB) .....	48
3.2.1. Geometria epruvetei ASCB.....	48
3.2.2. Determinarea factorilor de intensitate a tensiunii $K_I$ , $K_{II}$ și a tensiunilor nesingulare $T$ pentru epruveta ASCB.....	49
3.2.3. Analiza rezultatelor experimentale pe baza criteriului GMTS .....	54
3.2.4. Estimarea forței critice de rupere pentru epruvetele ASCB .....	60
3.3. Evaluarea rupei fragile pe epruvete de încovoiere în trei puncte (SENB) cu crestătură laterală în formă de U .....	64
3.3.1. Criteriul UMTS.....	64
3.3.2. Determinarea factorilor de intensitate a tensiunii $K_I^U$ și $K_{II}^U$ pentru epruvete SENB cu crestătură U .....	65

3.3.3. Analiza rezultatelor experimentale pe baza criteriului UMTS .....	73
3.3.4. Predicția forței critice de rupere pentru epruvetele SENBA .....	80
<b>4. Evaluarea ruperii fragile pe baza energiei de deformație .....</b>	<b>83</b>
4.1. Criteriul energiei specifice de deformație minimă .....	83
4.1.1. Ipotezele de bază ale criteriului energiei specifice de deformație minimă ....	83
4.1.2. Cazul bidimensional liniar-elastic pentru corpurile cu fisuri.....	85
4.1.3. Evaluarea ruperii fragile a epruvetelor ASCB pe baza criteriului energiei specifice de deformație minimă .....	87
4.1.4. Estimarea forței critice de rupere pentru epruvetele ASCB pe baza criteriului energiei specifice de deformație minimă .....	92
4.2. Criteriul valorii medii a energiei specifice de deformație .....	95
4.2.1. Expresiile energiei specifice de deformație într-un volum finit de la vârful concentratorilor de tensiune .....	96
4.2.1.1. Cazul concentratorilor singulari de tensiune de tipul creștătură V.....	96
4.2.1.2. Cazul concentratorilor de tensiune de tipul creștătură V rotunjită la vârf (nesingulari) – modul I de solicitare .....	98
4.2.1.3. Cazul concentratorilor de tensiune de tipul creștătură U – modul mixt de solicitare.....	101
4.2.2. Evaluarea ruperii fragile a epruvetelor SENB cu creștătură laterală în formă de U .....	102
<b>5. Evaluarea numerică a direcției de propagare a fisurilor în modul mixt .</b>	<b>110</b>
5.1. Abordări în simularea propagării fisurilor .....	110
5.2. Influența modului mixt de solicitare asupra traiectoriei fisurilor la ruperea epruvetelor ASCB .....	112
5.2.1. Simularea numerică a propagării fisurilor cu pachetul software FRANC2D/L .....	112
5.2.2. Simularea propagării fisurilor pe baza criteriului GMTS .....	121
<b>6. Concluzii și contribuții personale .....</b>	<b>127</b>
6.1. Rezultate și concluzii.....	127
6.2. Contribuții personale.....	130
<b>Bibliografie .....</b>	<b>133</b>

# 1. Stadiul actual al cercetărilor privind evaluarea condițiilor critice ale rupei fragile

## 1.1. Importanța cedărilor prin rupere fragilă în inginerie

Cedarea este definită de Pană [2000] ca "starea în care o structură sau o componentă a unei structuri devine neutilizabilă sau necorespunzătoare scopului pentru care a fost proiectată". Termenul de cedare este folosit și pentru a caracteriza un material aflat în stare de rupere, de curgere generalizată sau în condițiile de propagare instabilă a unei fisuri preexistente.

În general, cedarea componentelor mecanice se produce printr-unul din următoarele moduri (Stephens [2001], Taylor [2007]):

- cedarea prin *deformare excesivă* elastică sau plastică;
- cedarea prin *rupere ductilă* desemnează cedarea cauzată de producerea deformațiilor plastice la nivel macroscopic, prin depășirea limitei de curgere a materialului pe o porțiune importantă a secțiunii, care are ca rezultat ruperea sau modificarea formei componentelor structurale;
- cedarea prin **rupere fragilă** este rezultatul propagării instabile a unei fisuri preexistente sau a unei fisuri inițiate la vârful unui concentrator de tensiune, propagarea fisurii fiind însoțită de regulă de deformații plastice foarte mici.
- *ruperea prin oboseală* este rezultatul acțiunii sarcinilor variabile în timp, propagarea fisurii de oboseală fiind însoțită de deformații elastice reduse (oboseală în domeniul durabilităților mari);
- *ruperea prin fluaj* reprezintă un mod de cedare specific componentelor structurale care lucrează la temperaturi mari și constă în producerea de deformații plastice importante sub acțiunea statică îndelungată a sarcinilor de exploatare;
- *ruperea datorată coroziunii* este un mod de cedare treptată, caracterizat prin inițierea și propagarea unei fisuri ca rezultat al acțiunii conjugate a mediului coroziv și stării de tensiune produsă de sarcinile aplicate;
- *uzura* desemnează cedarea cauzată de interacțiunea dintre două suprafețe în contact în mișcare relativă.

Distrugerile cauzate de cedarea componentelor structurale sau structurilor prin rupere fragilă sunt importante, câteva cazuri larg mediatizate fiind amintite aici:

- distrugerea prin rupere fragilă în ianuarie 1919 a unui imens rezervor de melasă al unei distilerii din Boston;
- avariile suferite de navele Liberty și tancurile petroliere T2 în timpul celui de-al doilea război mondial, vase realizate prin sudare din oțeluri cu rezistență medie;
- accidentele catastrofale ale avioanelor Comet în perioada 1952-1954 cauzate de cedarea fuselajelor prin creșterea rapidă a fisurilor apărute în zona hublourilor;

În acest context, în cea de-a doua jumătate a secolului XX, a apărut o disciplină nouă, numită *meccanica rupei*, având drept obiect de studiu analiza experimentală și teoretică a comportamentului structurilor în prezența fisurilor. Dezvoltarea meccanicii rupei s-a bazat pe rezultatele obținute în diverse domenii de cercetare

(fizica solidului, teoria elasticității și plasticității, analiza numerică, etc.), contribuțiile majore în domeniu fiind următoarele (Pană [2000], Saouma [2000]):

- pe baza unui studiu teoretic și experimental realizat pe bare din sticlă, Griffith [1921] explică reducerea rezistenței de rupere a materialelor perfect fragile prin procesul de dezvoltare a defectelor;
- Griffith [1924] formulează bilanțul energetic dintre energia eliberată prin introducerea unei fisuri și energia necesară pentru crearea suprafețelor libere în solide;
- Westergaard [1939] introduce funcția complexă de tensiune  $Z(z)$  și obține o expresie pentru câmpul tensiunilor și deplasărilor de la vârful fisurii;
- investigând ruperea metalelor Irwin [1948] completează bilanțul energetic formulat de Griffith cu energia consumată pentru formarea zonelor plastice de la vârful fisurii și propune un nou criteriu de rupere introducând conceptul de forță de extensie a fisurii  $\mathcal{G}$ , Irwin [1956];
- Irwin [1957] introduce noțiunea de factor de intensitate a tensiunii  $K$  în exprimarea câmpului tensiunilor și deplasărilor de la vârful fisurii;
- Paris [1961] propune prima ecuație empirică care exprimă viteza de propagare a fisurii de oboseală în funcție de variația factorului de intensitate a tensiunii;
- pentru caracterizarea comportării neliniare a materialului în zona de la vârful fisurii Wells [1963] utilizează deplasarea de deschidere la vârful fisurii  $CTOD$ , iar mai târziu Rice [1968] introduce conceptul integralei  $J$ ;
- Erdogan [1963] introduce primul criteriu pentru evaluarea propagării în modul mixt a unei fisuri și anume criteriul tensiunii circumferențiale maxime.

Actualitatea și importanța problemei cedării prin rupere fragilă la solicitări statice a componentelor structurale este dovedită și prin numărul extrem de mare al lucrărilor științifice publicate și indexate în bazele de date ale editurilor de prestigiu: ScienceDirect-Elsevier peste 78700 titluri, respectiv SpringerLink peste 35400 de titluri. Acestea li se adaugă numeroasele monografii publicate (Janssen [2004], Gdoutos [2005], Anderson [2005], Dumitru [2001], Taylor [2007], Constantinescu [2003], Cotterell [2010], Saxena [1998], Shukla [2005]) și conferințele internaționale organizate periodic în domeniul mecanicii ruperii (International Conference on Fracture ICF, European Conference on Fracture ECF, Fracture and Damage Mechanics FDM; New Trends in Fatigue and Fracture NT2F, Crack Paths CP). Tendințele actuale în domeniul mecanicii ruperii, relevate de conținutul științific al lucrărilor publicate, pot fi sumarizate astfel:

- perfecționarea metodelor de calcul a parametrilor de mecanica ruperii  $\mathcal{G}$ ,  $K$  și  $J$ ;
- utilizarea metodelor numerice în evaluarea parametrilor de mecanica ruperii  $\mathcal{G}$ ,  $K$ ,  $J$  și în predicția traiectoriei de propagare a fisurilor;
- formularea unor criterii noi de estimare a condițiilor critice ale ruperii pentru modurile mixte de solicitare;
- utilizarea conceptelor mecanicii ruperii pentru evaluarea comportării materialelor și structurilor la solicitări variabile;
- îmbunătățirea metodelor de determinare a tenacității la rupere pentru materiale avansate (materiale compozite, nanomateriale, materiale cu proprietăți gradate funcțional);
- modificarea criteriilor de rupere aplicabile corpurilor cu fisuri astfel încât să permită evaluarea ruperii componentelor structurale cu concentratori de tensiune nesingulari.



## 1.2. Noțiuni introductive de mecanica ruperii liniar elastice

### 1.2.1. Câmpul tensiunilor elastice în vecinătatea vârfului fisurii

Modul în care se extinde o fisură depinde de starea de tensiune realizată în solidul sollicitat. După mișcarea relativă a suprafețelor de rupere, situate de o parte și de a planului în care se propagă fisura, extinderea acesteia are loc în următoarele trei moduri simple (fig. 2.1):

- modul I – fisura se extinde prin deschiderea suprafețelor de rupere;
- modul II - fisura se extinde prin lunecarea frontală a suprafețelor de rupere;
- modul III - fisura se extinde prin lunecarea laterală a suprafețelor de rupere.

Oricare mod mixt se poate exprima printr-o combinație a celor trei moduri simple. Pentru fiecare dintre cele trei moduri simple se definește câte un factor de intensitate a tensiunii  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ , un parametru important în mecanica ruperii liniar elastică.

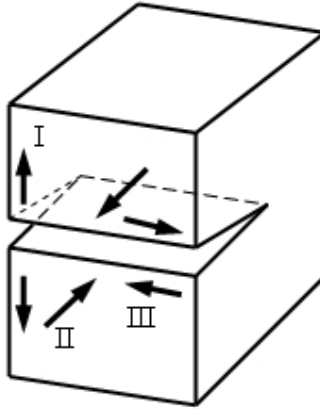


Fig. 1.1. Modurile simple de propagare a fisurii

Cu referire la problema bidimensională, se consideră o fisură străpunsă de lungime  $2a$  într-un corp omogen, izotrop și liniar elastic (fig. 1.2). Câmpul tensiunilor elastice într-un punct de coordonate  $(r, \theta)$  din vecinătatea vârfului fisurii ( $r \leq a$ ) poate fi descris prin componentele  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  și  $\tau_{xy}$  exprimate în sistemul de coordonate carteziene (Westergaard [1939]):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + T + O(r^{1/2}) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(r^{1/2}) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + O(r^{1/2}),\end{aligned}\quad (1.1)$$

cu  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  și  $\sigma_z = 0$ , pentru starea plană de tensiune, respectiv  $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$  pentru starea plană de deformare.

Deplasările după direcțiile axelor de coordonate sunt exprimate prin:

$$u = \frac{K_I}{2G} \left[ \frac{r}{2n} \right]^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{2G} \left[ \frac{r}{2n} \right]^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.2)$$

$$v = \frac{K_I}{2G} \left[ \frac{r}{2n} \right]^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{2G} \left[ \frac{r}{2n} \right]^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

În starea plană, deformările specifice unghiulare  $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ , iar deformarea specifică lineară  $\epsilon_z = 0$  pentru starea plană de deformare și  $\epsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)/E$  pentru starea plană de tensiune. În expresiile (1.2)  $G$  reprezintă modulul de elasticitate transversală,  $\kappa = 3 - 4\nu$  pentru starea plană de deformare și  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  pentru starea plană de tensiune, cu  $\nu$  este coeficientul lui Poisson (coeficientul de contracție transversală) și  $E$  modulul de elasticitate longitudinală.

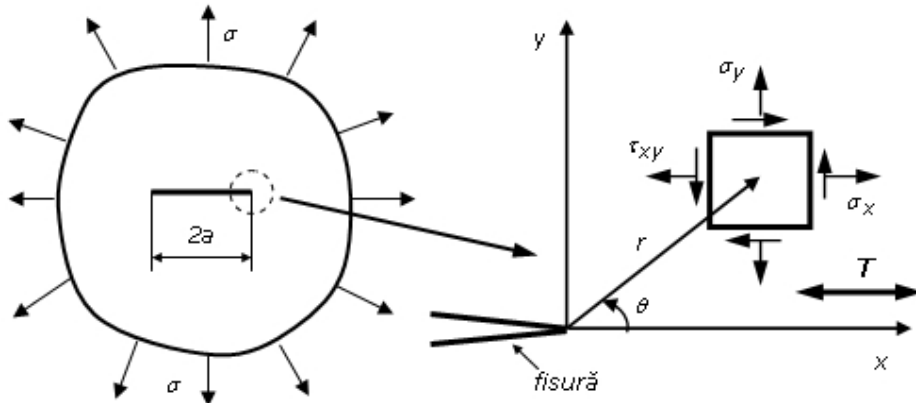


Fig. 1.2. Componentele tensiunilor elastice în vecinătatea vârfului fisurii (problema plană)

Expresiile (1.1) mai conțin parametrii  $K_I$ ,  $K_{II}$  care caracterizează câmpul tensiunilor și deplasărilor din vecinătatea frontului fisurii, denumiți factori de intensitate a tensiunii corespunzătorii celor trei moduri simple de extensie a fisurii. În aplicațiile practice, expresiile factorilor de intensitate a tensiunii conțin parametri ce caracterizează dimensiunea fisurii, geometria corpului și starea de solicitare; în monografiile lui Tada [1985] și Murakami [1987], [1992] sunt prezentate expresiile acestora pentru o mare diversitate de configurații geometrice și tipuri de încărcări. Dacă câmpul tensiunilor elastice în vecinătatea vârfului fisurii este cunoscut, de exemplu în urma analizei cu elemente finite, atunci o definiție formală a factorilor de intensitate a tensiunii este dată prin relațiile:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_y \sqrt{2nr}, \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{xy} \sqrt{2nr}. \quad (1.3)$$

Deseori, în aplicațiile practice este utilă exprimarea tensiunilor în sistemul de coordonate polare (Smith [2006]):

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2}\right) + T \cos^2 \theta + O(r^{1/2}) \\
\sigma_\theta &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3 \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + T \sin^2 \theta + O(r^{1/2}) \\
\tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + \frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (3 \cos \theta - 1) - T \sin \theta \cos \theta + O(r^{1/2}) .
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Din examinarea relațiilor (1.1) se observă că toate componentele stării de tensiune prezintă discontinuități la vârful fisurii, adică pentru  $r = 0$ , din cauza termenului singular  $1/\sqrt{2\pi r}$ . Această singularitate este dominantă în imediata vecinătate a vârfului fisurii, pentru fiecare mod în parte. Termenul nesingular  $T$  reprezintă tensiunea constantă care acționează paralel cu direcția fisurii, numit tensiune  $T$ , iar termenii nesingulari de ordinul  $r^{1/2}$  sunt neglijabili în vecinătatea vârfului fisurii.

În realitate tensiunea nu este infinită la vârful fisurii, materialele reale manifestând efecte de plasticitate datorită concentrării puternice a tensiunilor și deformațiilor. Se formează astfel la vârful fisurii o *zonă deformată plastic* (enclavă plastică) ale cărei formă și dimensiuni depind de starea de tensiune și deformație. Dacă raza zonei plastice de la vârful fisurii este relativ mică în comparație cu celelalte dimensiuni geometrice, factorul de intensitate a tensiunii se poate utiliza în forma dată de mecanica ruperii liniar-elastice în regiunea de la vârful fisurii denumită zona de *dominanță a factorului de intensitate a tensiunii*.

Considerați parametri esențiali în mecanica ruperii liniar elastică, factorii de intensitate a tensiunii  $K_I$ ,  $K_{II}$  caracterizează câmpul tensiunilor și deplasărilor din vecinătatea frontului fisurii în zona de dominanță. Aceștia controlează comportamentul fisurii determinându-i stabilitatea, traiectoria și viteza de propagare.

Evaluarea factorilor de intensitate a tensiunii pentru o aplicație dată, deseori o problemă dificilă, se poate face prin metode analitice - metoda aproximațiilor asimptotice, metoda transformărilor conforme, metoda transformărilor integrale, prin metode numerice sau prin metode experimentale - fotoelasticitate (Constantinescu [1999]), tensometrie electrică rezistivă (Dally [1986]), corelare de imagini digitale (Dudescu [2009]), termoelasticimetrie (Marșavina [2004]).

Introducerea metodelor numerice (metoda elementului finit Zienkiewicz [1977], Blumenfeld [1995], Rao [2005], Faur [2002], metoda elementelor de graniță, Brebbia [1980], [1989]) în analiza câmpului tensiunilor și deplasărilor elastice în vecinătatea vârfului fisurii a condus la dezvoltarea tehnicilor de extragere a parametrilor de mecanica ruperii, în particular a factorului de intensitate a tensiunii și a tensiunii nesingulare  $T$ , din rezultatele numerice. Pentru extragerea factorului de intensitate a tensiunii sunt utilizate frecvent următoarele tehnici, implementate în pachetele software comerciale:

- metoda corelării deplasărilor, Chan [1970], Shih [1976];
- metoda integralei  $J$ , Cherepanov [1967], Rice [1968], Ishikawa [1980];
- metoda extensiei virtuale a fisurii, Rybicki [1977], Ramamurthy [1986], Raju [1987], Singh [1998].

Metoda integralei  $J$  este implementată în pachetul software Abaqus 6.5 pentru extragerea termenului nesingular  $T$ .

### 1.2.2. Câmpul tensiunilor elastice în vecinătatea vârfului concentratorilor de tensiune nesingulari (crestătură V rotunjită, crestătură U)

Prima încercare de a descrie într-o formă analitică câmpul tensiunilor elastice în vecinătatea unui concentrator de tensiune nesingular îi aparține lui Creager [1967], pentru o crestătură adâncă și subțire cu raza la vârf mică. După soluția lui Creager câmpul tensiunilor este similar cu cel al unei fisuri, al cărei vârf ascuțit este plasat în punctul aflat la distanța  $\rho/2$  față de centrul de curbură al crestăturii rotunjite. Glinka [1985], [1987] a modificat soluția lui Creager propunând o expresie nouă pentru factorul de intensitate a tensiunii  $K$ .

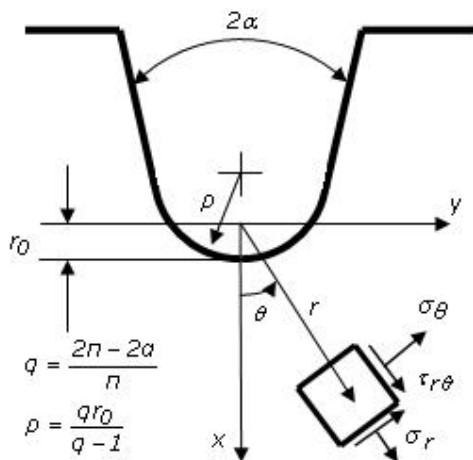


Fig. 1.3. Geometria concentratorului de tensiune în abordarea lui Filippi [2002]

Adoptând metoda funcțiilor de variabilă complexă pentru determinarea distribuției tensiunilor elastice la vârful unui concentrator de tip crestătură (fig. 1.3), Filippi [2002] propune două funcții analitice de forma:

$$(z) = az^\lambda + dz^\mu, \quad \psi(z) = bz^\lambda + cz^\mu \quad (1.5)$$

unde coeficienții  $a, b, c, d$  sunt complecși, exponenții  $\lambda, \mu$  sunt reali,  $\lambda > 0$  și  $\lambda > \mu$ . Filippi impune condițiile la limită într-un sistem de coordonate curbilinii  $u$  și  $v$  (fig. 1.4), cu relația de transformare a coordonatelor:

$$x + iy = re^{i\theta} = z = w^q = (u + iv)^q \quad (1.6)$$

unde coeficientul real  $q$  primește valori în intervalul: 1 (în lipsa concentratorului) și 2 (cazul fisurii). Curba definită prin condiția  $u = 0$  în sistemul de coordonate curbilinii descrie în  $(x, y)$  un unghi ascuțit la vârful egal cu  $2a$

$$2a = \pi(2 - q), \quad (1.7)$$

iar curba  $u = u_0$ , corespunzătoare flancurilor libere ale concentratorului, prezintă la vârf o rază de curbură  $\rho$  (la nivelul intersecției cu axa  $x$ , unde  $r_0 = u_0^q$ ):

$$\rho = \frac{qu_0^q}{q-1} = \frac{qr_0}{q-1} . \quad (1.8)$$

Deoarece flancurile creștăturii sunt libere de sarcini, condițiile la limită impuse sunt:

$$(\sigma_u)_{u=u_0} = 0, \quad (\tau_{uv})_{u=u_0} = 0 . \quad (1.9)$$

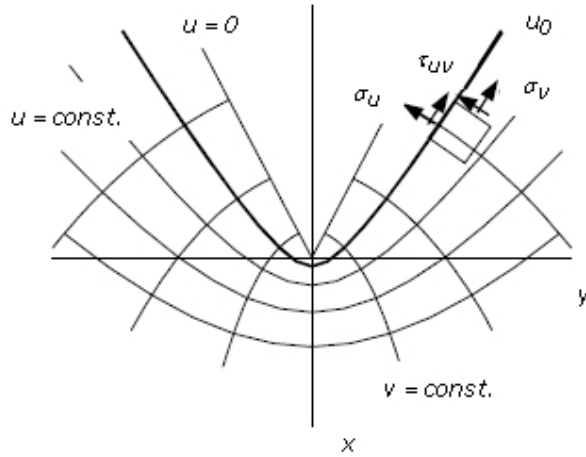


Fig. 1.4. Sistemul de coordonate curbilini pentru impunerea condițiilor la limită

Din cauza numărului redus de parametri ai funcțiilor de tensiune alese, condițiile la limită nu pot fi satisfăcute în întregime de-a lungul flancurilor libere ale creștăturii.

$$\begin{aligned} (\sigma_u)_{u=u_0} = (\sigma_r)_{r=r_0} = 0, \quad (\tau_{uv})_{u=u_0} = (\tau_{r\theta})_{r=r_0} = 0, \\ \left( \frac{\partial \sigma_u}{\partial v} \right)_{u=u_0, v=0} = \left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} - \frac{2}{q} \tau_{r\theta} \right)_{r=r_0, \theta=0} = 0, \\ \left( \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} \right)_{u=u_0, v=0} = \left( \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{q} \sigma_\theta \right)_{r=r_0, \theta=0} = 0, \\ (\sigma_u)_{u=u_0, v \ll -v_0} + (\sigma_u)_{u=u_0, v \gg v_0} = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow -q\pi/2}} (r^{1-\mu} \sigma_\theta)_+ \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow +q\pi/2}} (r^{1-\mu} \sigma_\theta) = 0, \\ (\tau_{uv})_{u=u_0, v \gg v_0} - (\tau_{uv})_{u=u_0, v \ll -v_0} = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow +q\pi/2}} (r^{1-\mu} \tau_{r\theta}) - \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow -q\pi/2}} (r^{1-\mu} \tau_{r\theta}) = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Astfel, Filippi le simplifică considerând că (1.9) trebuie satisfăcute suficient de departe de zona de la baza concentratorului unde termenii de exponent  $\mu$  sunt lipsiți de sens, iar câmpul tensiunilor trebuie să fie descris cu exactitate în apropierea concentratorului (iar de aici, primii doi termeni ai dezvoltării în serie de-a lungul flancurilor, asociați tensiunilor  $\sigma_U$  și  $\tau_{UV}$ , trebuie să fie egali cu zero). De asemenea, Filippi a impus ca tensiunile de întindere să fie nule la distanță de vârful creștăturii, pentru componentele de exponent  $\mu$ , rezultând în final relațiile (1.10).

Soluționarea în detaliu a problemei se găsește în lucrarea lui Filippi [2002], pentru modul mixt I+II tensiunile în zona concentratorului fiind date de relațiile pentru modul I:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \lambda_1 r^{\lambda_1-1} a_1 \begin{Bmatrix} (1+\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta \\ (3-\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta \\ (1-\lambda_1)\sin(1-\lambda_1)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{b_1}(1-\lambda_1) \begin{Bmatrix} \cos(1+\lambda_1)\theta \\ -\cos(1+\lambda_1)\theta \\ \sin(1+\lambda_1)\theta \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{q}{4(q-1)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} \left( \chi_{d_1} \begin{Bmatrix} (1+\mu_1)\cos(1-\mu_1)\theta \\ (3-\mu_1)\cos(1-\mu_1)\theta \\ (1-\mu_1)\sin(1-\mu_1)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{c_1} \begin{Bmatrix} \cos(1+\mu_1)\theta \\ -\cos(1+\mu_1)\theta \\ \sin(1+\mu_1)\theta \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

și pentru modul II:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \begin{Bmatrix} (1+\lambda_2)\cos(1-\lambda_2)\theta \\ (3-\lambda_2)\cos(1-\lambda_2)\theta \\ (1-\lambda_2)\sin(1-\lambda_2)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{b_2}(1-\lambda_2) \begin{Bmatrix} \cos(1+\lambda_2)\theta \\ -\cos(1+\lambda_2)\theta \\ \sin(1+\lambda_2)\theta \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{q}{4(q-1)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2-\lambda_2} \left( \chi_{d_2} \begin{Bmatrix} (1+\mu_2)\cos(1-\mu_2)\theta \\ (3-\mu_2)\cos(1-\mu_2)\theta \\ (1-\mu_2)\sin(1-\mu_2)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{c_2} \begin{Bmatrix} \cos(1+\mu_2)\theta \\ -\cos(1+\mu_2)\theta \\ \sin(1+\mu_2)\theta \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

unde  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  sunt primele valori proprii (dominante pentru starea de tensiune din zona concentratorului) ale ecuațiilor ("+" pentru modul I și "-" pentru modul II):

$$\sin(\lambda q n) \pm \lambda \sin(q n) = 0 \quad (1.13)$$

iar ceilalți coeficienți din relațiile (1.11) și (1.12) au soluțiile exacte obținute de Lazzarin [1996], Atzori [1997], Filippi [2002].

Din relațiile (1.11) și (1.12) se observă că tensiunile din zona creștăturii sunt determinate cu excepția constantelor  $a_1$  și  $a_2$ . Filippi [2002] exprimă aceste constante prin intermediul factorilor de intensitate a tensiunii pentru creștătura V:

$$K_I^{VP} = \lambda_1 \sqrt{2n} [1 + \lambda_1 + \chi_{b_1}(1-\lambda_1)] a_1, \quad K_{II}^{VP} = -\lambda_2 \sqrt{2n} [(1-\lambda_2) + \chi_{b_2}(1-\lambda_2)] a_2 \quad (1.14)$$

definiți de Gross [1972]. Lazzarin [2006] propune o formă generală a factorilor de intensitate a tensiunii pentru creștăturile rotunjite la vârf și modul mixt de solicitare, considerând tensiunea la o distanță potrivită de vârful concentratorului:

$$K_I^{VP} = \sqrt{2n} \frac{(\sigma_\theta)_{\theta=0} r^{1-\lambda_1}}{1 + \omega_1 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1}}, \quad K_{II}^{VP} = \sqrt{2n} \frac{(\tau_{r\theta})_{\theta=0} r^{1-\lambda_2}}{1 + \omega_2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2-\lambda_2}} \quad (1.15)$$

cu expresiile pentru  $\omega_1$  și  $\omega_2$  :

$$\omega_1 = \frac{q}{4(q-1)} \left[ \frac{X_{d_1}(1+\mu_1) + X_{c_1}}{1+\lambda_1 + X_{b_1}(1-\lambda_1)} \right],$$

$$\omega_2 = \frac{1}{4(\mu_2-1)} \left[ \frac{X_{d_2}(1-\mu_2) - X_{c_2}}{1-\lambda_2 + X_{b_2}(1+\lambda_2)} \right]. \quad (1.16)$$

Dacă se introduc următoarele funcții de argument  $\theta$

$$\begin{Bmatrix} f_\theta \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1+\lambda_1 + X_{b_1}(1-\lambda_1)} \begin{Bmatrix} (1+\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta \\ (3-\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta \\ (1-\lambda_1)\sin(1-\lambda_1)\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (1+\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta \\ (3-\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta \\ (1-\lambda_1)\sin(1-\lambda_1)\theta \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

și

$$\begin{Bmatrix} g_\theta \\ g_r \\ g_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{q}{4(q-1)[1+\lambda_1 + X_{b_1}(1-\lambda_1)]} \cdot \left[ X_{d_1} \begin{Bmatrix} (1+\mu_1)\cos(1-\mu_1)\theta \\ (3-\mu_1)\cos(1-\mu_1)\theta \\ (1-\mu_1)\sin(1-\mu_1)\theta \end{Bmatrix} + X_{c_1} \begin{Bmatrix} \cos(1+\mu_1)\theta \\ -\cos(1+\mu_1)\theta \\ \sin(1+\mu_1)\theta \end{Bmatrix} \right], \quad (1.18)$$

expresiile (1.11) și (1.12) se pot scrie în forma sintetică:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(I)} = \frac{K_I^{V\rho}}{\sqrt{2\pi} r^{1-\lambda_1}} \left[ \begin{Bmatrix} f_\theta \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} \begin{Bmatrix} g_\theta \\ g_r \\ g_{r\theta} \end{Bmatrix} \right]^{(I)} \quad \text{- pentru modul I,} \quad (1.19)$$

și

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(II)} = \frac{K_{II}^{V\rho}}{\sqrt{2\pi} r^{1-\lambda_2}} \left[ \begin{Bmatrix} f_\theta \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2-\lambda_2} \begin{Bmatrix} g_\theta \\ g_r \\ g_{r\theta} \end{Bmatrix} \right]^{(II)} \quad \text{- pentru modul II,} \quad (1.20)$$

După cum demonstrează Filippi [2002], soluția (1.19), (1.20) este de mare generalitate. Pentru o creștătură V singulară, adică  $\rho=0$ , aceasta este în concordanță cu soluția lui Williams [1952], [1957]. Dacă deschiderea unghiulară a concentratorului  $2a=0$ , atunci soluția se dovedește a fi exact soluția dată de Creager [1967]. În cazul  $\rho=0$  și  $2a=0$  câmpul tensiunilor în zona din vecinătatea concentratorului este practic identic cu soluția lui Irwin [1957].

### 1.3. Metode și criterii de evaluare a condițiilor critice ale ruperii fragile

**Ruperea fragilă** reprezintă un mod frecvent de cedare mecanică a componentelor structurale în prezența concentratorilor de tensiune singurari (fisură sau creștătură V ascuțită) sau nesingurari (creștătură V rotunjită, creștătură U, etc.). Aceasta se poate produce într-unul dintre modurile simple de solicitare I, II sau III sau într-un mod mixt, o combinație între modurile simple, frecvent în modul mixt I+II. Deoarece prezența acestor discontinuități geometrice este inevitabilă, stabilirea condițiilor critice ale ruperii fragile devine un obiectiv important al practicii ingineresti.

În literatura științifică, ruperea fragilă în modul mixt este investigată atât teoretic, utilizând diferite criterii de rupere, cât și experimental prin încercări mecanice adecvate aplicației. Pentru că cercetările experimentale conduse pe componente structurale reale sunt costisitoare și deseori dificil de realizat, sunt preferate investigațiile experimentale pe epruvete. Acestea sunt astfel proiectate încât, în zona concentratorului de tensiune, să permită reproducerea câmpului de tensiune și deformație din componenta reală.

În acest paragraf, în continuare, sunt prezentate pe scurt criteriile de rupere, tipurile de epruvete și materialele utilizate frecvent în investigarea ruperii fragile: criteriul factorului critic de intensitate a tensiunii  $K_{IC}$ , criteriul MTS și variantele modificate GMTS și UMTS; Teoria Distanțelor Critice; criteriul SED și criteriul SED medie; criteriul fisurii virtuale critice; metoda volumetrică și modelul zonei coezive.

**Criteriul factorului critic de intensitate a tensiunii**  $K_{IC}^V$  a fost formalizat pentru cedarea prin rupere fragilă a corpurilor cu creștături V ascuțite:

$$K_{I, II, III}^V \geq K_{IC, IIc, IIIc}^V \quad (1.21)$$

prin analogie cu cazul corpurilor cu fisuri. Conform condiției (1.21) o fisura se va iniția și se va propaga de la vârful unei creștături V ascuțite atunci când valoarea factorului de intensitate a tensiunii  $K^V$  atinge o valoare critică  $K_C^V$  determinată experimental, dar care depinde de deschiderea unghiulară a creștăturii și are unitate de măsură exprimată prin  $[MPa \cdot m^{\lambda}]$ . Criteriul a fost utilizat pentru studiul inițierii ruperii fragile pe epruvete DENT (*double edge notch tensile*) și SENB (*single edge notch bending*) solicitate la încovoiere în patru puncte de Dunn [1997], [1997a]; toate epruvetele au fost realizate din PMMA. Pentru a depăși inconvenientul legat de determinarea experimentală a factorului critic  $K_C^V$ , Seweryn [1994] a modificat criteriul pentru modul I de solicitare, exprimând valoarea critică  $K_{IC}^V$  ca o funcție de tenacitatea  $K_{IC}$  și rezistența la rupere  $\sigma_r$ :



$$K_I^V \geq (1 - \lambda_I) \sigma_C \left( \frac{2K_{IC}}{\sigma_r} \right)^{2\lambda_I} \quad (1.22)$$

Încercările experimentale conduse în modul I de solicitare au fost efectuate pe epruvete cu creștătură V ascuțită, realizate din PMMA și duraluminu.

Criteriul tensiunii circumferențiale maxime sau **criteriul MTS** (*maximum tangential stress*) a fost formulat de Erdogan [1963] pentru evaluarea ruperii fragile a corpurilor cu fisuri, iar ipotezele care stau la baza lui se pot enunța astfel:

(i) inițierea la propagarea fisurii se produce în direcția radială determinată prin unghiul polar  $\theta = \theta_0$ , la care tensiunea circumferențială  $\sigma_\theta$  devine maximă;

(ii) propagarea fisurii se produce atunci când  $\sigma_{\theta \max}$  la o distanță critică  $r_c$  măsurată de la vârful fisurii atinge o valoare critică  $\sigma_C$ . Din punct de vedere matematic cele două ipoteze se exprimă prin relațiile:

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0 \quad \text{și} \quad \sigma_\theta(r_c, \theta_0) = \sigma_C \quad . \quad (1.23)$$

În evaluarea tensiunii circumferențiale  $\sigma_\theta$  în vecinătatea vârfului fisurii, Erdogan a considerat doar primul termen singular din relațiile (1.1) și (1.3). **Criteriului GMTS** (*generalized maximum tangential stress*), propus în literatura tehnică de Smith [2001] reprezintă o generalizare a criteriului MTS prin considerarea în expresia tensiunii  $\sigma_\theta$  a termenului nesingular  $T$ . Ulterior, pe baza soluției propuse de Filippi [2002], Ayatollahi [2009a], [2010a] a extins criteriul MTS la studiul ruperii fragile în prezența concentratorilor de tensiune nesingulari, numindu-l **criteriul UMTS**.

Investigațiile experimentale au fost conduse în laborator pe o gamă largă de epruvete și tipuri de concentratori de tensiune, pentru modul mixt I+II de solicitare:

- epruvete semidisc cu fisură laterală verticală ASCB (*asymmetric semi-circular bend*) sau înclinată SCB (*semi-circular bend*) sollicitate la încovoiere și realizate din PMMA – Ayatollahi [2006], [2006a], [2011], respectiv marmură – Saghafi [2010];
- epruvete semidisc cu creștătură V rotunjită RV-SCB (*rounded-tip V-notched semi-circular bend*) sollicitate în modul I și realizate din PMMA și alumina – Ayatollahi [2010b];
- epruvete de tip disc cu fisură centrală CBD (*cracked brazilian disc*) realizate din PMMA – Ayatollahi [2005], respectiv ceramică – Aliha [2012];
- epruvete de tip disc cu creștătură de tip U centrală UNBD (*U-notched brazilian disc*) realizate din PMMA și sticlă – Ayatollahi [2010];
- epruvete de tip disc cu creștătură V centrală rotunjită RV-BD (*rounded-tip V-notched brazilian disc*) realizate din PMMA – Ayatollahi [2010a];
- epruvete inelare cu două fisuri radiale dispuse simetric DCR (*diametrically compressed ring*) realizate din granit – Aliha [2008];
- epruvete de formă pătrată cu fisură centrală înclinată și sollicitate pe direcția diagonală DLSP (*diagonally loaded square plate*) realizate din PMMA – Ayatollahi [2009];
- epruvete de încovoiere cu creștătură U sollicitate la încovoiere SENB realizate din PMMA – Ayatollahi [2009a].

**Metoda distanțelor critice** (*Theory of Critical Distances – TCD*) reprezintă un grup de metode care au o abordare comună, și anume utilizează lungimea caracteristică  $L$  și tensiunea critică  $\sigma_0$  drept caracteristici de material, Taylor [2006], [2007], [2008]. Din acest grup de metode, pornind de la cea mai simplă de aplicat, *metoda punctului* (*Point Method*), mai fac parte *metoda liniei* (*Line Method*), *metoda ariei* (*Area Method*) și *metoda volumului* (*Volume Method*).

Utilizarea TCD la predicția ruperii fragile presupune cunoașterea câmpului tensiunilor elastice din vecinătatea concentratorului, obținut printr-o analiză cu elemente finite (sau o soluție analitică, dacă este disponibilă), și a două constante de material, lungimea caracteristică  $L$  și tensiunea critică  $\sigma_0$  (numită și rezistența intrinsecă a materialului).

*Metoda punctului*, cea mai simplă formă a TCD, utilizează un criteriu de rupere care poate fi enunțat astfel: cedarea se va produce atunci când tensiunea la o distanță  $L/2$  măsurată de la baza concentratorului (pornind din punctul de tensiune maximă) este egală cu tensiunea critică  $\sigma_0$  a materialului, Taylor [2007]. Așadar, dacă se notează cu  $r$  distanța de la baza concentratorului, metoda punctului poate fi exprimată într-o formă matematică prin relația următoare:

$$\sigma(r = L/2) = \sigma_0 \quad , \quad (1.24)$$

unde lungimea caracteristică  $L$  se determină după relația:

$$L = \frac{1}{n} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_0} \right)^2 \quad . \quad (1.25)$$

Pentru celelalte trei metode parametrul utilizat nu este tensiunea într-un anumit punct, ci valoarea medie a acesteia stabilită peste o anumită regiune a câmpului de tensiune de la baza concentratorului. Astfel, în *metoda liniei* medierea se realizează pentru o distanță critică  $2L$ , pornind de la baza concentratorului. *Metoda ariei* și *metoda volumului* propun medierea tensiunilor pentru o anumită suprafață din vecinătatea concentratorului, respectiv pentru un anumit volum; în mod evident, rezultatele vor depinde de forma suprafeței, respectiv volumului. Pentru o suprafață semicirculară centrată în punctul de tensiune maximă, în cazul unei creștături ascuțite, Bellet [2005] a demonstrat că raza critică este egală cu  $1.32L$ ; similar, pentru un volum de formă emisferică Bellet [2005] a obținut o rază critică de  $1.54L$ .

TCD a fost utilizată pentru estimarea forței critice de rupere într-o serie de cercetări experimentale efectuate pe:

- epruvete de tracțiune uniaxială confecționate din PMMA, pentru o mare varietate de concentratori de tensiune – Taylor [2004];
- epruvete cu creștătură de tip V rotunjită DENT (*double edge notch tensile*) solicitate în modul I, epruvete de încovoiere în trei puncte SENB cu creștătură tip U și V rotunjită realizate din oțelul En3B – Susmel [2008];
- epruvete cilindrice (bară) cu creștătură V circumferențială rotunjită la vârf cu  $\rho = 0.2 \div 4 [mm]$ , realizate din PMMA și solicitate în modul mixt I+III - Susmel [2008a];
- epruvete cilindrice (bară) cu creștătură V circumferențială rotunjită la vârf realizate din Al6082 și solicitate în modul mixt I+III - Susmel [2010], [2010a];
- epruvete DENT cu creștături tip U și V rotunjite realizate din Necuron 1020 – Filipescu [2010].

Utilizarea TCD la evaluarea cedării prin rupere fragilă a componentelor structurale prezintă câteva avantaje incontestabile: aplicarea cu ușurință în practica inginerască, în cazul problemelor complexe când o soluție analitică nu este disponibilă; aplicarea metodei implică o analiză liniar elastică cu elemente finite și cunoașterea unui număr minim de parametri ai materialului, distanța caracteristică  $L$  și tensiunea critică  $\sigma_0$ ; posibilitatea de integrare a metodei în modulele de postprocesare ale pachetelor software de analiză cu elemente finite.

Criteriul energiei specifice de deformare minimă, cunoscut și sub numele de **criteriul SED** (*strain energy density failure criterion*) a fost propus la începutul anilor '70 de Sih [1973], [1974]. Mărimea fundamentală utilizată de criteriul SED este reprezentată de energia de deformare  $dW/dV$  conținută în unitatea de volum, denumită funcția energiei specifice de deformare. În studiul cedării corpurilor cu fisuri, Sih [1991] a introdus drept amplitudine a câmpului energiei specifice de deformare factorul  $S$ , funcția  $dW/dV$  fiind scrisă în forma:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{S}{r} , \quad (1.24)$$

unde dimensiunea  $r$  reprezintă raza măsurată de la locul de inițiere a rupei. După ipotezele formulate de Sih, criteriul se formulează astfel:

(i) inițierea la propagarea fisurii se produce pe direcția determinată de unghiul  $\theta_0$ , pentru care factorul  $S$  prezintă o valoare minimă;

(ii) propagarea fisurii se produce atunci când factorul  $S$  atinge valoarea sa critică  $S_c$ , considerată o constantă de material, și se exprimă matematic prin:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 , \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0 , \quad \text{și } S_{min} = S(\theta_0) = S_c . \quad (1.25)$$

Criteriul SED a fost verificat experimental pentru o serie de probleme de mare importanță practică: ruperea fragilă în modul mixt I+III (Zacharopoulos [2005]), ruperea corpurilor cu fisuri realizate din materiale compozite, cedarea corpurilor de tipul placă sau înveliș în prezența fisurilor, cedarea conductelor cu fisuri circumferențiale (Nobile [2004]) creșterea fisurii de oboseală, cedarea corpurilor cu concentratori de tensiune (Sih [1991]), problemele de rupere dinamică, ruperea ductilă.

Ulterior, Lazzarin [2001] a introdus criteriul valorii medii a energiei specifice de deformare  $\bar{W}$ , valoare medie determinată pentru un volum finit de raza  $R_c$ , numit și **criteriul SED medie**, la evaluarea cedării statice și la solicitări ciclice a componentelor cu creștături V ascuțite. Criteriul afirmă că ruperea fragilă se produce atunci când valoarea medie  $\bar{W}$  atinge o valoare critică  $W_c$ . Criteriul a fost validat prin evaluarea cedării în modul mixt I+II în prezența concentratorilor singulari de tipul creștătură V, pentru componente realizate din PMMA (Lazzarin [2001], Yosibash [2004], Gómez [2009]), alumina (Yosibash [2004]) și duraluminiu (Lazzarin [2001]). Lazzarin [2005] a extins criteriul pentru evaluarea cedării în modul I de solicitare a componentelor cu concentratori de tensiune nesingulari de tipul creștătură V și U. Validarea criteriului s-a realizat pentru componente realizate din PMMA (Lazzarin [2005]). Pentru concentratorii de tensiune nesingulari, Gómez [2007] a extins criteriul valorii medii a energiei specifice de deformare pentru evaluarea cedării componentelor solicitate în modul mixt I+II. Numeroasele studii

publicate în ultimii ani - Berto [2007], [2009], Gómez [2009a], Lazzarin [2009] – au validat extinderea criteriului pentru solicitarea în modul mixt I+II. Încercările experimentale au fost efectuate la temperaturi scăzute  $-60...-40^{\circ}\text{C}$ , pe epruvete SENB realizate din PMMA.

**Criteriul fisurii virtuale critice** a fost propus de Leguillon pentru evaluarea ruperii fragile a componentelor structurale în prezența concentratorilor de tensiune de tipul creștăturilor V ascuțite [2002] sau rotunjite la vârf [2003]. Criteriul afirmă că ruperea se produce atunci când tensiunea circumferențială maximă  $\sigma_{\theta}$  la o distanță critică măsurată de la vârful creștăturii și forța de extensie a fisurii  $\mathcal{G}$  la vârful plasat în același punct al unei fisuri virtuale își ating amândouă valorile lor critice, adică:

$$\sigma_{\theta}(d_0) = \sigma_c, \quad K(d_0) = K_c \quad . \quad (1.26)$$

Încercările experimentale au fost efectuate pe epruvete SENB cu creștătură V solicitate la încovoiere în trei puncte, realizate din PMMA și alumină.

Li [2006] și Zhang [2008] au modificat criteriul propus de Leguillon [2002], [2003] prin introducerea unui al treilea parametru de mecanica ruperii care să cuantifice nivelul de concentrare a tensiunilor: forța de extensie a fisurii  $\mathcal{G}_c^U$  pentru ruperea la tracțiune uniaxială. Criteriul propus de Li [2006] și Zhang [2008] a fost aplicat la predicția ruperii fragile în modul I a epruvetelor DENT cu concentratori semicirculari și tip U realizate din Necuron 1020 de Filipescu [2010].

Alte două criterii introduse relativ recent pentru evaluarea forței critice de rupere la cedarea materialelor fragile sunt metoda volumetrică și modelul zonei coezive.

**Metoda Volumetrică** a fost propusă de Pluinage [2002] și aplicată de El Minor [2002], [2003] pentru estimarea ruperii fragile pe epruvete inelare cu creștătură tip U realizate din oțelul de înaltă rezistență 45CDS6. Metoda Volumetrică a fost utilizată și de Negru [2012] pentru evaluarea rezistenței la oboseală în domeniul durabilităților medii  $50 \cdot 10^3 \div 10^6$  [cicluri] pe epruvete DENT cu creștături tip V rotunjite.

• **Modelul Zonei Coezive** a fost propus la începutul anilor '60 de Dugdale [1960] și Barenblatt [1962] cu scopul de a extinde analiza elastică și în cazul materialelor pentru care zona plastică de la vârful fisurii nu mai are o dimensiune redusă, neglijabilă. Mai târziu, Hillerborg [1973] a extins modelul pentru aplicațiile în care nu există o fisură inițială macroscopică. Ulterior, acest model a fost modificat și aplicat cu succes la estimarea forței critice de rupere a epruvetelor cu creștătură tip U și V realizate din PMMA, Gómez [2000], [2003], [2006].

În concluzie, în literatura științifică o serie de criterii care utilizează unul sau mai mulți parametri de mecanica ruperii au fost propuse pentru evaluarea condițiilor critice ale ruperii fragile a componentelor structurale. Investigațiile experimentale au fost efectuate pe epruvete cu concentratori de tensiune singulari (fisură, creștătură V ascuțită) sau nesingulari (creștătură V rotunjită, creștătură U), pentru solicitări în modul mixt I+II, respectiv modul mixt I+III.

Între materialele utilizate se distinge PMMA-ul, utilizat cu precădere din cauza comportamentului său fragil binecunoscut, dar și materialele ceramice, granitul sau marmura.

## 1.4. Obiectivele temei de cercetare

Materialele poliuretanică sunt utilizate pe scară largă în industrie pentru diverse aplicații: matrițe de ștanțare a tablelor, modele de turnare, calapoade de verificare, modele de testare aerodinamică și hidrodinamică. Aceste materiale sunt livrate sub formă de plăci într-o gamă largă de densități  $0.1 \div 1.4 \left[ \text{gr./cm}^3 \right]$  în funcție de cerințele aplicației. În plus, materialele poliuretanică au bune proprietăți de prelucrabilitate mecanică.

Analiza modului de cedare a două componente specifice aplicațiilor din industrie ale acestor materiale, și anume un bloc conector din industria automotive (fig. 1.5) și un locaș inserție metalică (fig. 1.6), probează comportamentul lor fragil la temperatura ambiantă.

Cu aceste argumente, tema de cercetare își propune să utilizeze materialele poliuretanică, și anume Necuron 1020 și Necuron 651, în investigarea teoretică și experimentală a ruperii fragile în modul mixt I+II.

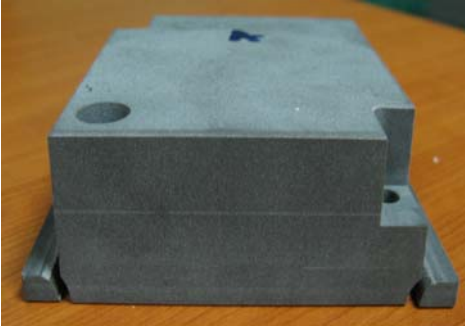


Fig. 1.5. Bloc de conectare din industria automotive

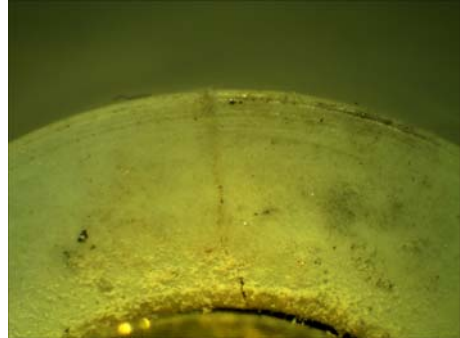


Fig. 1.6. Locaș inserție metalică

Obiectivele principale propuse prin tema de cercetare pot fi sintetizate după cum urmează:

- determinarea experimentală a caracteristicilor mecanice, elastice și de mecanica ruperii pentru poliuretanul Necuron 1020 și Necuron 651;
- evaluarea experimentală a ruperii componentelor, realizate din aceste materiale poliuretanică, în prezența concentratorilor de tensiune singulari (fisură) și respectiv nesingulari (crestătură U), cu modificarea acuității concentratorului (raza la vârf  $\rho$ );
- analiza capacității de predicție a condițiilor critice de rupere pentru câteva criterii publicate în literatura științifică;
- evaluarea numerică a direcției de propagare a fisurilor în modul mixt I+II.

## 2. Determinarea experimentală a caracteristicilor mecanice, elastice și de mecanica ruperii

Caracteristicile mecanice, elastice și de mecanica ruperii ale poliuretanului Necuron 1020 și Necuron 651 au fost determinate prin încercări experimentale realizate în Laboratorul de Rezistența Materialelor al Universității "Politehnica" din Timișoara. Pentru efectuarea testelor au fost utilizate mașinile universale LBG A009 și Zwick/Roell Z005, cu principalele caracteristici tehnice prezentate în continuare.

Mașina universală LBG A009 este echipată cu o celulă de forță de  $100 [kN]$  în sollicitare uniaxială, în clasa de precizie  $0.5$  pe domeniul de măsurare a forței  $2 \div 100 [\%]$  conform ISO 7500-1. Mașina LBG A009 este prevăzută cu soft-ul de prelucrare a datelor TCSofT2004Plus și extensometrul MFA2 cu deplasarea maximă de  $2 [mm]$  în clasa de precizie  $0.2$  conform EN 10002-4.

Mașina universală Zwick/Roell Z005 este echipată cu o celulă de forță de  $5 [kN]$  în sollicitare uniaxială, în clasa de precizie  $0.5$  pe domeniul de măsurare a forței  $1 \div 130 [\%]$  conform ISO 7500-1. Mașina Zwick/Roell Z005 este prevăzută cu soft-ul de prelucrare a datelor TestXpert și un extensometru incremental cu eroarea maximă de  $\pm 1 [\mu m]$  la măsurarea diferențială a deplasării între două puncte de măsurare în domeniul  $20 \div 200 [\mu m]$  (clasa de precizie  $0.5$ ).

### 2.1. Încercări pentru determinarea proprietăților mecanice ale materialelor poliuretanic Necuron 1020 și Necuron 651

#### 2.1.1. Încercări mecanice la tracțiune monoaxială

Pentru determinarea proprietăților mecanice ale poliuretanului Necuron 1020 și Necuron 651, ținând cont de forma în placă a semifabricatului, s-au utilizat epruvetele plate cu geometria și dimensiunile prezentate în fig. 2.1 (ASTM D638-03). Epruvetele au fost realizate prin frezare la viteze reduse de prelucrare, cu scopul de a împiedica încălzirea excesivă a materialului, fiind cunoscută sensibilitatea rezultatelor la regimul de prelucrare.

Încercările experimentale au fost efectuate la temperatura ambiantă  $23 \pm 2^\circ C$ , în regimul de deplasare controlată cu viteza de  $5 [mm/min]$ , conform recomandărilor ASTM D638-03. Pentru măsurarea deformației s-a utilizat extensometrul MFA2 cu baza de măsurare de  $50 [mm]$  și clasa de precizie  $0.2$ , pentru deplasarea maximă de  $2 [mm]$ .

Rezultatele experimentale, valoarea medie și abaterea standard pentru modulul de elasticitate longitudinală  $E$ , rezistența la rupere  $\sigma_r$  și deformația specifică la rupere  $\varepsilon_r$  sunt prezentate în tabelul 2.1. Curbele caracteristice tensiune-deformație specifică  $\sigma - \varepsilon$  sunt redată în fig. 2.2, alături de curbele

caracteristicile ale PMMA-ului la două valori diferite ale temperaturii. Astfel, Gómez [2005] consideră că un comportament liniar până la rupere devine evident doar la temperaturi de sub  $-40^{\circ}\text{C}$ , astfel de condiții experimentale fiind însă relativ dificil de obținut.

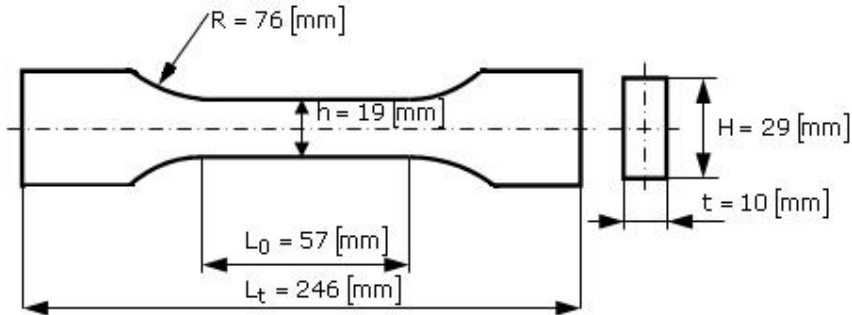


Fig. 2.1. Epruveta plată pentru încercarea la tracțiune monoaxială

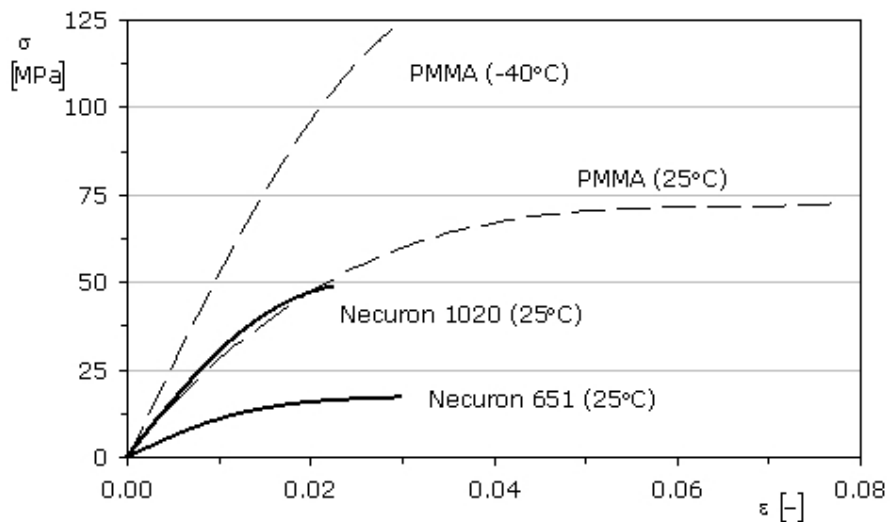


Fig. 2.2. Curbele caracteristice  $\sigma$ - $\varepsilon$  pentru Necuron 1020, Necuron 651 și PMMA (Gómez [2005])

Comparația comportamentului celor două materiale plastice la aceeași temperatură de  $25^{\circ}\text{C}$ , una uzuală pentru încercările de laborator, pune în evidență o liniaritate mai pronunțată a curbei caracteristice pentru poliuretanul Necuron 1020 în comparație cu PMMA. Astfel, utilizarea acestuia în evaluarea condițiilor critice ale ruperii fragile, pe baza conceptelor mecanicii ruperii liniar elastice, este aparent mai potrivită. De asemenea, se observă o similitudine între curbele caracteristice ale poliuretanului Necuron 651 și PMMA la temperatura de  $25^{\circ}\text{C}$ .

Tabel 2.1. Rezultatele experimentale pentru încercarea de tracțiune monoaxială

Material	$E$ [MPa]		$\sigma_r$ [MPa]		$\varepsilon_r$ [%]	
N 1020	3370		49.58		2.64	
N 1020	3315	<b>3340±27.84</b>	49.95	<b>49.75±0.18</b>	2.81	2.71
N 1020	3335		49.72		2.69	
N 651	1250		17.53		3.26	
N 651	1265	<b>1250±15.00</b>	17.63	<b>17.40±00.32</b>	3.25	3.16
<i>N 651</i>	1235		17.04		2.98	

În cadrul programului experimental, pentru investigarea ruperii fragile, au fost testate la întindere uniaxială și epruvete cu concentratori de tensiune laterali simetrici semicirculari cu geometria recomandată de Seweryn [1994], [2002] și prezentată în fig.2.3. Încercările s-au realizat la temperatura ambiantă, în regimul de deplasare controlată cu viteza de  $1$  [mm/min]. După cum se observă și din fig. 2.2, pentru epruvetele netede materialul prezintă un comportament neliniar, în timp ce comportamentul acestuia se păstrează liniar la încercarea epruvetelor cu concentratori de tensiune (fig. 2.6). În aceste condiții, Seweryn [1994] propune determinarea valorii critice a energiei specifice de deformație  $W_C$  prin utilizarea în relația de calcul a tensiunii normale maxime  $\sigma_{max}$  la baza concentratorului semicircular în locul rezistenței la rupere  $\sigma_r$  determinată pe epruvete standardizate (netede).

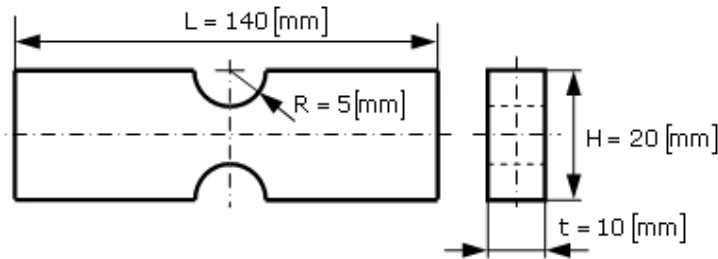


Fig. 2.3. Epruveta cu concentratori de tensiune de tip creștătură laterală semicirculară

Rezultatele testelor experimentale sunt prezentate în tab.2.2, unde tensiunea nominală  $\sigma_{nom}$  este determinată pentru valoarea medie a forței maxime  $F_{max}$  înregistrate și aria secțiunii brute a epruvetei. Tensiunea maximă la baza concentratorului semicircular  $\sigma_{max}$  s-a obținut din analiza liniar elastică cu elemente finite realizată cu pachetul software Cosmos/M 2.9, prin încărcare la  $F_{max}$  determinată experimental. Astfel, pentru coeficientul de concentrare teoretic global de concentrare a tensiunilor:

$$K_{tg} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad , \quad (2.1)$$

s-a obținut valoarea  $K_{tg} = 3.24$ .



Tabel 2.2. Rezultatele experimentale (crestătură laterală semicirculară)

Concentrator de tensiune	Material	Forța maximă $F_{max}$ [N]	Forța medie $F_{med}$ [N]	Tensiunea nominală $\sigma_{nom}$ [MPa]	Tensiunea maximă $\sigma_{max}$ [MPa]
semicircular	N 1020	4780			
semicircular	N 1020	4860	4866.33	24.33	79.05
semicircular	N 1020	4960			
semicircular	N 651	2030			
semicircular	N 651	2255	2153.33	10.76	34.95
<i>semicircular</i>	N 651	2175			

### 2.1.2. Determinarea tenacității la rupere $K_{IC}$

Pentru poliuretanul Necuron 651 și Necuron 1020 (producător Necumer-Product GmbH), s-au efectuat încercări experimentale pentru determinarea tenacității la rupere  $K_{IC}$  după recomandările standardului ASTM D 5045-99.

Încercările mecanice s-au efectuat pe epruvete tip SENB (Single Edge Notch Bending) a căror geometrie și mod de solicitare sunt redată în fig. 2.4, cu dimensiunile  $H = 20$  [mm],  $t = 10$  [mm] și  $a = 0.5H$ , la temperatura ambiantă și în regimul de deplasare controlată cu viteza de  $10$  [mm/min]. La vârful crestăturii realizată prin frezare, fisura s-a prelungit pe lungimea de aprox.  $1$  [mm] prin tăiere cu o lamă de grosime  $0.1$  [mm].

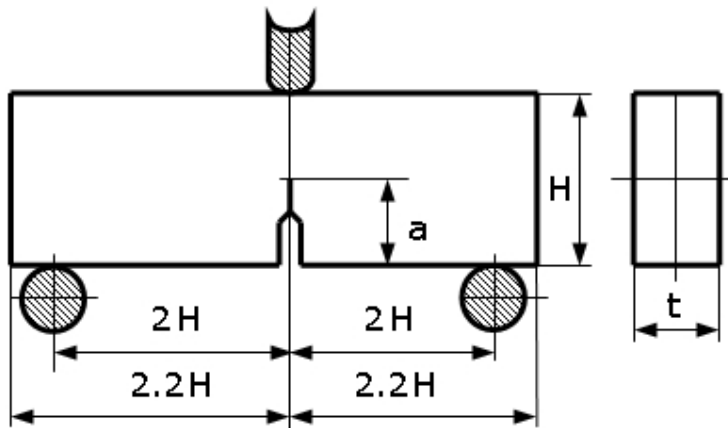


Fig. 2.4. Epruveta SENB pentru determinarea tenacității la rupere  $K_{IC}$

Valoarea critică a factorului de intensitate a tensiunii  $K_{IC}$  pentru epruvetele SENB solicitate la încovoiere în trei puncte este determinată cu relația:

$$K_{IC} = \frac{F_{max}}{t H^{1/2}} f(x) \quad , \quad (2.2)$$

unde

$$f(x) = 6x^{1/2} \frac{\left[ 1.99 - x(1-x)(2.15 - 3.93x + 2.7x^2) \right]}{(1+2x)(1-x)^{3/2}} \quad , \quad (2.3)$$

cu  $x = a/H$ ,  $0 < x < 1$ . Rezultatele experimentale sunt prezentate în tabelul 2.3, împreună cu valoarea medie și abaterea standard pentru tenacitate.

Validarea rezultatelor experimentale presupune verificarea condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească dimensiunile epruvetei SENB pentru realizarea stării plane de deformație, după cum urmează:

$$t = 10 [mm], \quad a = 10.5 [mm], \quad (H - a) = 9.5 [mm] > 2.5 \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_r} \right)^2 \cong 5.34 [mm] \quad (2.4)$$

pentru Necuron 1020, respectiv

$$t = 10 [mm], \quad a = 10 [mm], \quad (H - a) = 10 [mm] > 2.5 \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_r} \right)^2 \cong 8.25 [mm] \quad (2.5)$$

pentru Necuron 651.

Tabel 2.3. Rezultatele experimentale pentru determinarea tenacității  $K_{IC}$

$t$ [mm]	$H$ [mm]	$a$ [mm]	<b>Forța maximă</b> $F_{max}$ [N]	$a/H$	$f(a/H)$	<b>Tenacitate</b> $K_{IC}$ [MPa√m]
10.3	20.20	10.50	288	0.5198	11.3526	2.300
10.3	20.20	10.50	287	0.5198	11.3526	2.292
10.3	20.20	10.45	291	0.5173	11.2601	2.306
<b>Necuron 1020</b>						<b>2.299±0.007</b>
10.1	20.12	10.02	137	0.4980	10.5831	1.012
10.1	20.07	9.81	136	0.4888	10.2811	0.977
10.2	20.12	10.02	139	0.4980	10.5831	1.016
<b>Necuron 651</b>						<b>1.0017±0.021</b>

În capitolele lucrării următoarele valori sunt utilizate în determinările analitice:  $K_{IC} = 2.3 [MPa\sqrt{m}]$  pentru Necuron 1020 și  $K_{IC} = 1.0 [MPa\sqrt{m}]$  pentru Necuron 651.

### 2.1.3. Determinarea coeficientului de contracție transversală pe baza tehnicii excitației prin impuls

Metoda excitației prin impuls, conform recomandărilor ASTM E1876-01, este utilizată pentru determinarea proprietăților elastice ale materialelor omogene, izotrope și elastice la temperatura ambiantă. Aceste proprietăți se determină dacă geometria, masa și frecvențele proprii de rezonanță ale epruvetei utilizate (de formă dreptunghiulară sau cilindrică) sunt cunoscute.

Astfel, dacă se utilizează o epruvetă de formă dreptunghiulară, modulul de elasticitate longitudinală  $E$  se calculează pe baza frecvenței de rezonanță determinată pentru modul transversal de vibrație:

$$E = 0.9465 \left( m f_1^2 / b \right) \left( L^3 / t^3 \right) T_1 \quad , \quad (2.6)$$

unde  $m$  reprezintă masa epruvetei,  $f_1$  frecvența fundamentală de rezonanță la încovoiere,  $T_1$  factorul de corecție, iar  $b$  lățimea,  $L$  lungimea și  $t$  grosimea epruvetei. Modulul de elasticitate transversală  $G$  se calculează pe baza frecvenței  $f_2$  de rezonanță la răsucire:

$$G = \left( 4 L f_2^2 / b t \right) [B / (1 + A)] \quad , \quad (2.7)$$

unde  $A$  este factorul de corecție, iar coeficientul lui Poisson  $\nu$  se determină pe baza relației dintre caracteristicile elastice

$$\nu = (E / 2G) - 1 \quad . \quad (2.8)$$

Aplicarea tehnicii excitației prin impuls presupune parcurgerea următorilor pași:

- 1). rezemarea epruvetei la mijlocul lungimii și lățimii sale prin suspendarea pe fire de-a lungul liniilor nodale (fig. 2.5);
- 2). poziționarea traductorului fără contact (microfonul) într-unul dintre sferturile epruvetei (de preferat la distanța  $0.224L$  de capăt);

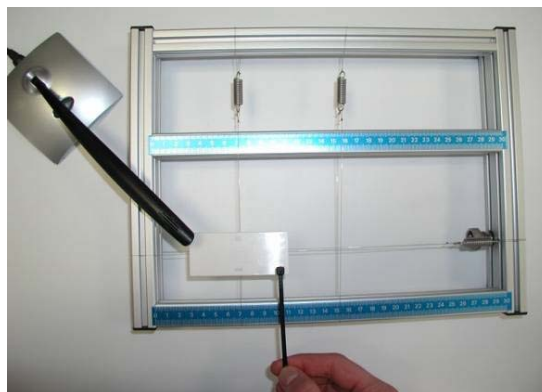


Fig. 2.5. Rezemarea epruvetei, poziționarea traductorului și a punctului de lovire

- 3). lovirea epruvetei cu o bilă de oțel (impuls) în sfertul de epruvetă aflat pe diagonala celui de poziționare a traductorului (de preferat la aceeași distanță  $0.224L$  de capăt);
- 4). înregistrarea și prelucrarea semnalului de vibrație pe baza Transformatei Fourier Rapide pentru determinarea frecvențelor fundamentale de rezonanță.

Tabel 2.4. Caracteristicile elastice determinate prin tehnica excitației

<b>Necuron 1020</b>	<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>	<b>Valoare medie</b>
$E [MPa]$	3610	3600	3590	3600	3600	$3600 \pm 7.1$
$G [MPa]$	1340	1340	1340	1340	1340	$1340 \pm 0.0$
$\nu [-]$	0.347	0.343	0.340	0.343	0.343	<b><math>0.343 \pm 0.0025</math></b>

<b>Necuron 651</b>	<b>(1)</b>	<b>(2)</b>	<b>(3)</b>	<b>(4)</b>	<b>(5)</b>	<b>Valoare medie</b>
$E [MPa]$	1560	1550	1570	1560	1540	$1556 \pm 11.4$
$G [MPa]$	610	605	610	610	605	$0.608 \pm 0.0273$
$\nu [-]$	0.279	0.281	0.287	0.279	0.273	<b><math>0.279 \pm 0.0050</math></b>

Rezultatele experimentale obținute pe baza tehnicii excitației prin impuls pentru caracteristicile elastice dinamice ale poliuretanului Necuron 1020 și Necuron 651 sunt prezentate în tabelul 2.4. În comparație cu rezultatele prezentate în tabelul 2.1, pentru modulul de elasticitate longitudinală  $E$  eroarea relativă este de  $+7.8\%$  pentru Necuron 1020 și respectiv  $+24.4\%$  pentru Necuron 651.

În capitolele lucrării, pentru caracteristicile elastice ale celor două materiale poliuretane, următoarele valori sunt utilizate în determinările analitice și analizele numerice cu metoda elementului finit:  $E = 3340 [MPa]$  și  $\nu = 0.34$  pentru Necuron 1020, respectiv  $E = 1250 [MPa]$  și  $\nu = 0.28$  pentru Necuron 651.

## 2.2. Încercări de mecanica ruperii în modul mixt

### 2.2.1. Încercări de încovoiere în trei puncte pe epruvete cu creștătură laterală de tip U (epruvete SENB)

Încercările de încovoiere în trei puncte pe epruvete cu creștătură laterală de tip U (epruvete SENB, fig. 2.6) s-au efectuat pentru poliuretanul Necuron 1020 și patru valori ale razei  $\rho$  la vârful creștăturii, și anume:  $0.5$ ,  $0.75$ ,  $1$  și  $2$  [mm]. Pentru toate epruvetele au fost păstrate constante următoarele dimensiuni geometrice: adâncimea creștăturii  $a$ , lungimea  $L$ , înălțimea  $H$  și grosimea epruvetei  $t$ .

Modul I pur se obține pentru epruvetele cu creștătură verticală (fig. 2.6 a) prin solicitarea simetrică la încovoiere:  $S_1 = S_2 = 60$  și  $b = 0$  [mm]. În modul mixt, diferitele combinații dintre modul I și II, cu predominanța modului I, se realizează prin menținerea suporturilor de rezemare în pozițiile  $S_1 = 60$ ,  $S_2 = 12$  [mm] și modificarea punctului de aplicație a forței:  $b = -4$ ,  $4$  și  $24$  [mm].

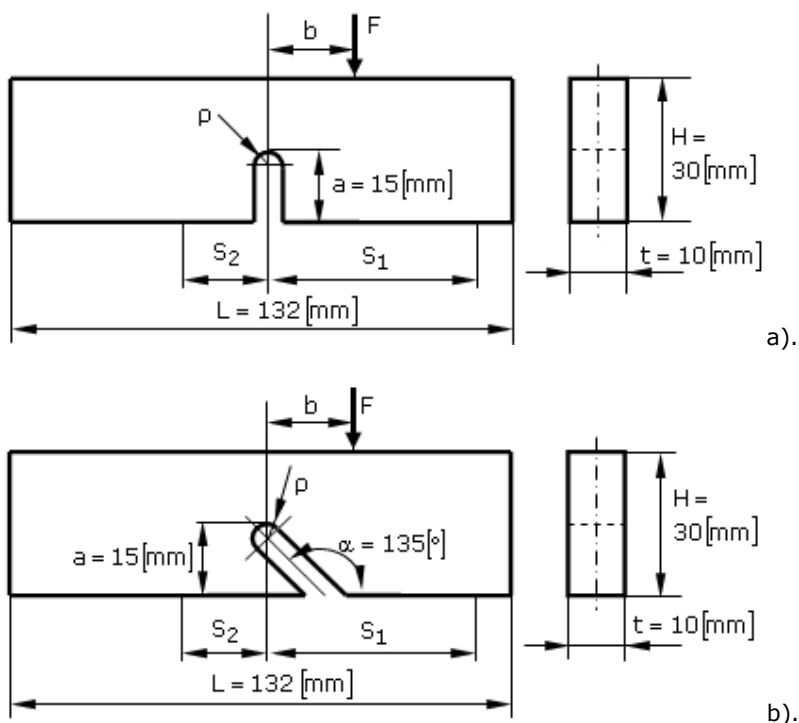


Fig. 2.6. Geometria pruvetelor SENB cu creștătură U verticală (a) și înclinată (b)

Pentru realizarea unei solicitări în modul mixt cu predominanța modului II, Berto [2007] recomandă efectuarea încercărilor experimentale pe epruvete SENB cu creștătura U înclinată. Pentru o înclinare la  $45^\circ$  a creștăturii (fig. 2.6 b), încercările experimentale s-au efectuat cu suportii de rezemare fixați la distanțele  $S_1 = 60$  și  $S_2 = 12[mm]$ , iar forța  $F$  aplicată la  $b = 9[mm]$  față de axa verticală care trece prin centrul epruvetei.

Tabel 2.5. Rezultatele experimentale pentru epruvetele SENB (Necuron 1020)

$\rho [mm]$	$S_1 [mm]$	$S_2 [mm]$	$b [mm]$	$F_1 [N]$	$F_2 [N]$	$F_{med} [N]$	Obs.
0.50	60	60	0	437*	444	440.5	(1)*
0.50	60	12	-4	1780	1770*	1770	(2)*
0.50	60	12	4	1200*	1260	1230	(3)*
0.50	60	12	24	1970*	1810	1890	(4)*
0.50	60	12	9	1340*	1390	1365	(5)* U înclinat
0.50	60	7.5	9	1740*	1920	1830	(6)* U înclinat
0.75	60	60	0	489	492	490.5	
0.75	60	12	-4	2030	1940	1985	
0.75	60	12	4	1390	1400	1395	
0.75	60	12	24	2110	2190	2150	
0.75	60	12	9	1500	1430	1465	U înclinat
0.75	60	7.5	9	2010	2150	2080	U înclinat
1.00	60	60	0	533	503	518	
1.00	60	12	-4	2170	2070	2120	
1.00	60	12	4	1480	1450	1465	
1.00	60	12	24	2330	2150	2240	
1.00	60	12	9	1520	1580	1550	U înclinat
1.00	60	8	9	2140	2080	2110	U înclinat
2.00	60	60	0	612	668	640	
2.00	60	12	-4	2550	2590	2570	
2.00	60	12	4	1900	1820	1860	
2.00	60	12	24	2640	2820	2730	
2.00	60	12	9	1660	1730	1695	U înclinat
2.00	60	9	9	2130	2200	2165	U înclinat

\*) epruvetele SENB pentru care curbele forță-deplasare sunt prezentate în fig. 2.7

Realizarea unei solicitări în modul II pur este imposibil de obținut pentru toate epruvetele testate, la o singură poziție a suportilor de rezemare și a punctului de aplicație a forței, din cauza razelor  $\rho$  diferite la vârful creștăturii. În aceste condiții, s-au menținut neschimbate pozițiile  $S_1 = 60$  și  $b = 9[mm]$ , modificându-se

poziția  $S_2$  a celui de-al doilea suport în funcție de raza  $\rho$  de la vârful creștăturii:  $S_2 = 7.5 [mm]$  pentru  $\rho = 0.5$  și  $0.75 [mm]$ ,  $S_2 = 8 [mm]$  pentru  $\rho = 1.0 [mm]$ , respectiv  $S_2 = 9 [mm]$  pentru  $\rho = 2.0 [mm]$ . Și în acest caz, distanțele sunt măsurate față de verticala care trece prin centrul epruvetei. Condițiile înainte menționate în care s-au efectuat încercările de încovoiere în trei puncte ale epruvetelor SENB, au fost stabilite după analiza preliminară cu elemente finite a stării de tensiune și deformație pentru fiecare caz de solicitare.

Rezultatele experimentale sunt prezentate în tabelul 2.5, câte două încercări fiind efectuate pentru fiecare caz în parte. Câteva dintre curbele forță-deplasare înregistrate sunt redată în fig. 2.7. Exceptând zona de așezare specifică încercărilor pe materialele polimerice (în fig. 2.7 această porțiune se întinde până la nivelul forței aplicate de max.  $200 [N]$ ), comportamentul epruvetelor cu creștătură U rămâne liniar.

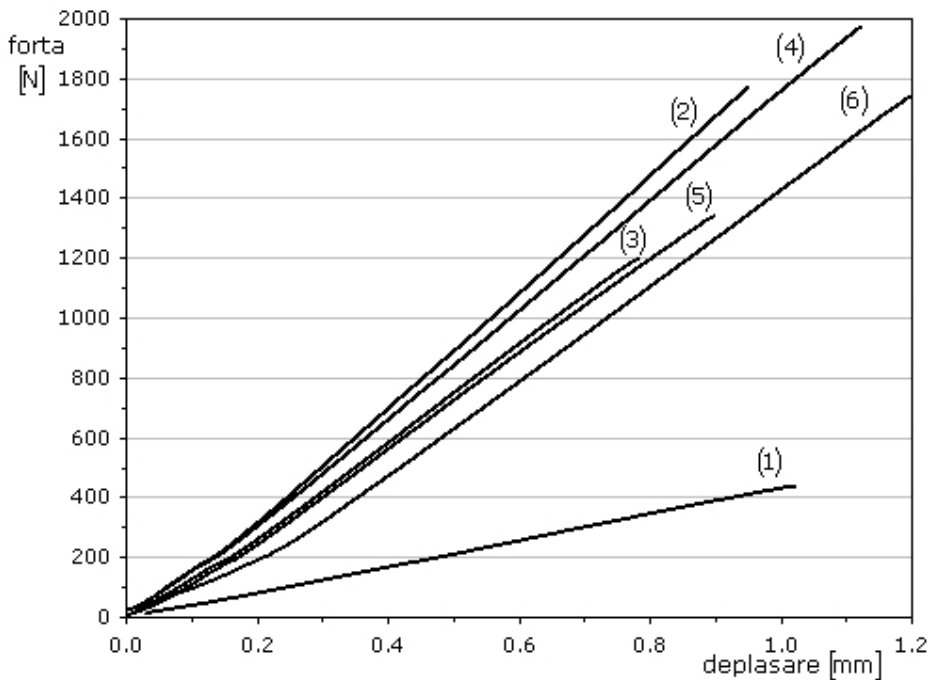
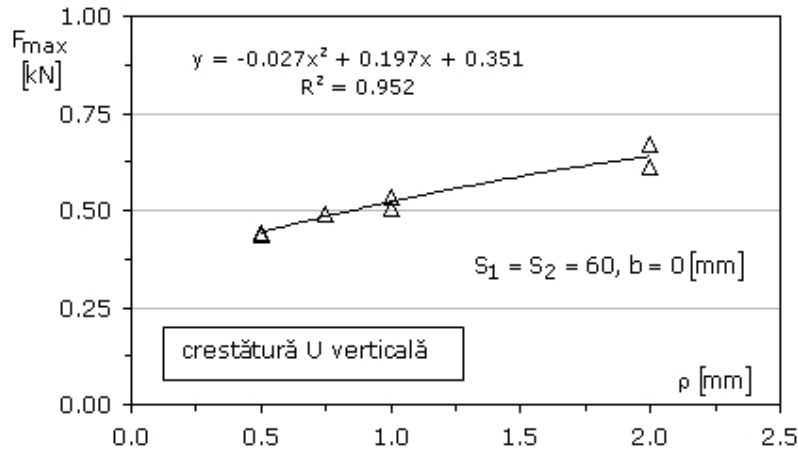
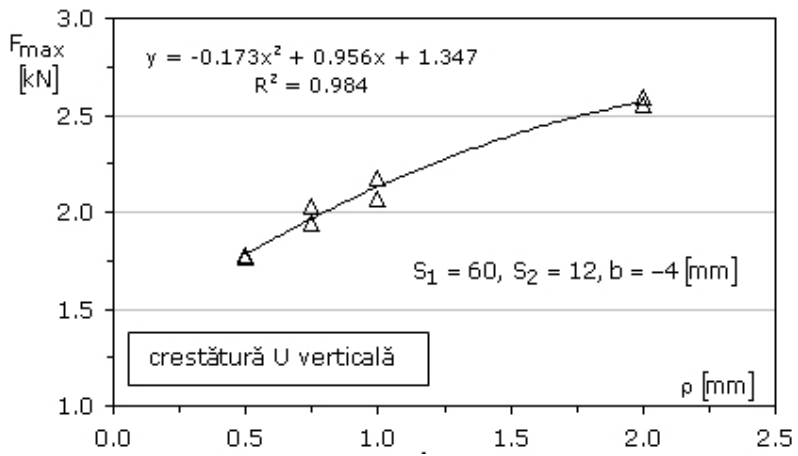


Fig. 2.7. Curbele forță-deplasare înregistrate pentru epruvetele SENB cu creștătură U pentru raza  $\rho = 0.5 [mm]$  (Necuron 1020)

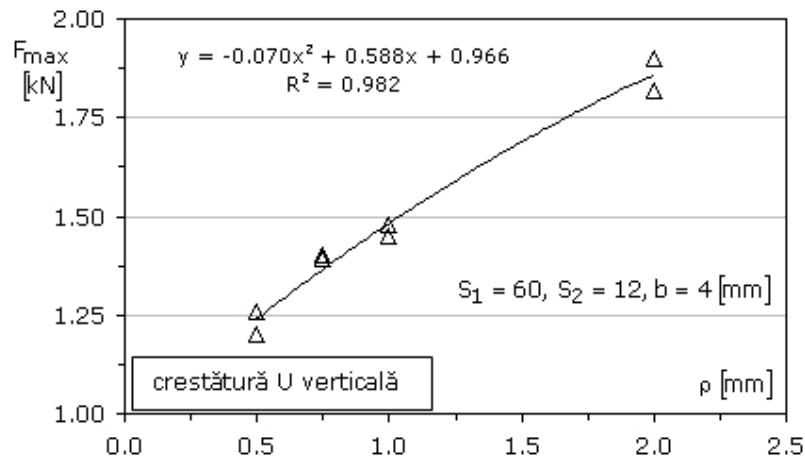
Valorile măsurate ale forței maxime  $F_{max}$  în funcție de raza  $\rho$  a creștăturii U sunt prezentate în fig. 2.8. Variația redată prin linie continuă s-a obținut prin interpolare după o funcție de gradul doi. Pentru fiecare caz de solicitare în parte, se observă cu ușurință, așa cum era de așteptat, creșterea valorii măsurate a  $F_{max}$  cu raza  $\rho$  a creștăturii.



a).



b).



c).



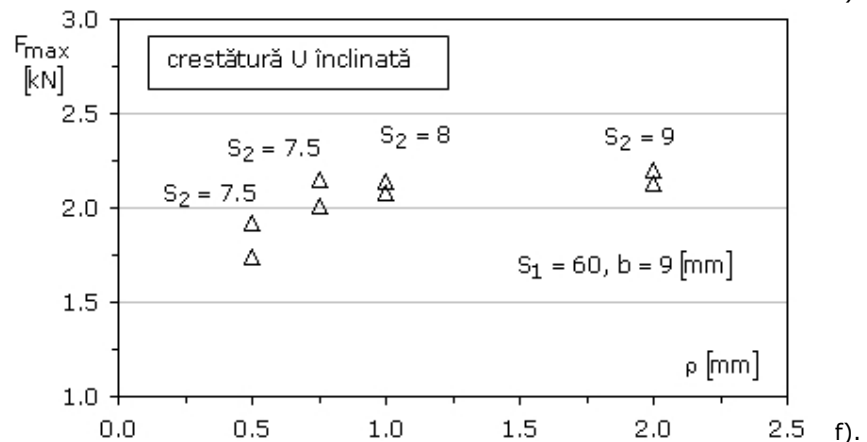
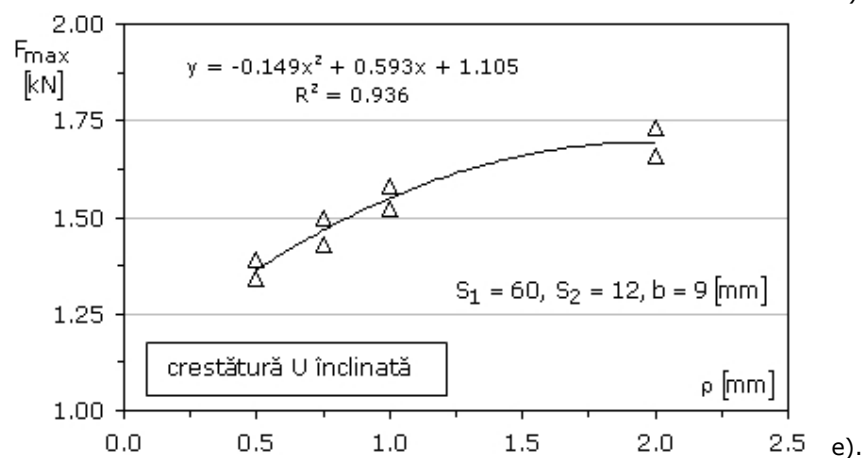
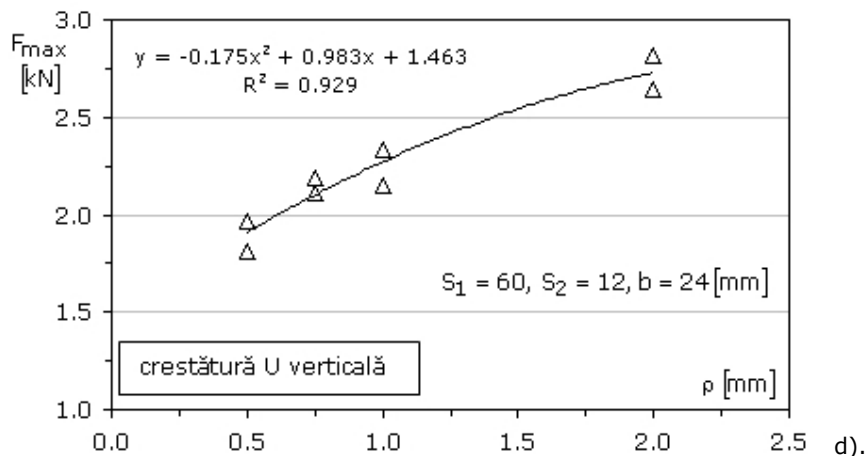
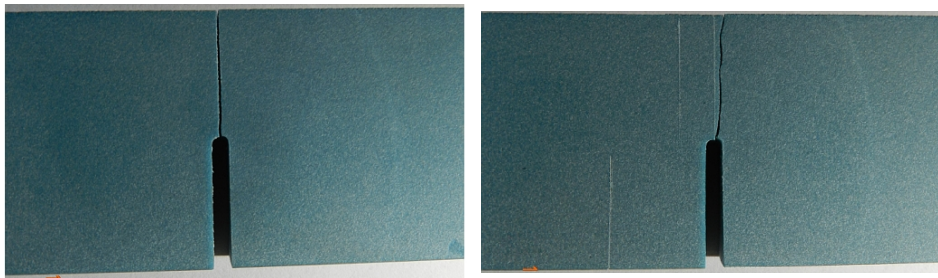
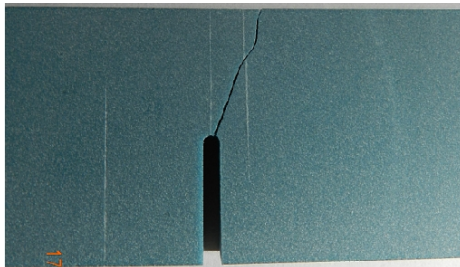


Fig. 2.8. Forța maximă la ruperea epruvetelor SENB în funcție de raza  $\rho$  a creștăturii

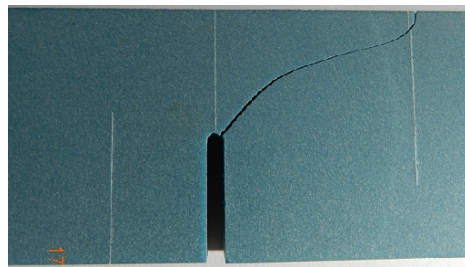


a).  $S_1 = S_2 = 60$  [mm],  $b = 0$  [mm]

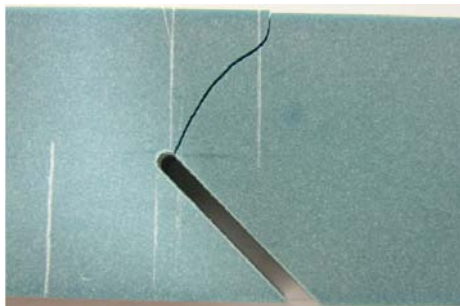
b).  $S_1 = 60$  [mm],  $S_2 = 12$  [mm],  $b = -4$  [mm]



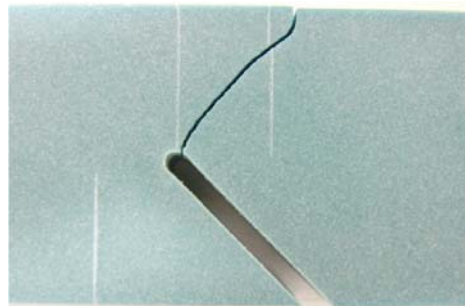
c).  $S_1 = 60$  [mm],  $S_2 = 12$  [mm],  $b = 4$  [mm]



d).  $S_1 = 60$  [mm],  $S_2 = 12$  [mm],  $b = 24$  [mm]



e).  $S_1 = 60$  [mm],  $S_2 = 12$  [mm],  $b = 9$  [mm]  
crestătură U înclinată



f).  $S_1 = 60$  [mm],  $S_2 = 8$  [mm],  $b = 9$  [mm]  
crestătură U înclinată

Fig. 2.9. Epruvete SENB cu crestătură U rupte la diferite combinații între modul I și modul II (raza la vârful crestăturii  $\rho = 1$  [mm], Necuron 1020)

În fig. 2.9 sunt ilustrate pentru raza crestăturii  $\rho = 1$  [mm] traiectoriile fisurilor pentru fiecare caz de solicitare. Se observă că direcția de inițiere a fisurii în modul mixt depinde de combinația între modul I și II. Pe porțiune finală a traiectoriei este evidentă o deviere a acesteia spre punctul de aplicație a forței.

### 2.2.2. Încercări de încovoiere asimetrică în trei puncte pe epruvete semidisc cu fisură laterală verticală (epruvete ASCB)

Încercările de încovoiere asimetrică în trei puncte pe epruvete semidisc cu fisură laterală verticală (epruvete ASCB - Asymmetric Semi-Circular Bend, Ayatollahi [2011]) s-au efectuat pentru poliuretanul Necuron 1020 și Necuron 651, păstrând constante dimensiunile: lungimea fisurii  $a$ , raza semidiscului  $R$  și grosimea epruvetei  $t$  (fig. 2.10).

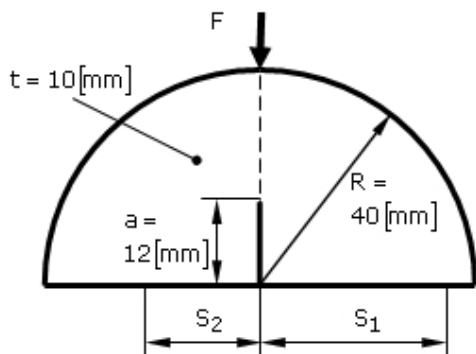


Fig. 2.10. Geometria epruvetelor ASCB cu fisură laterală verticală

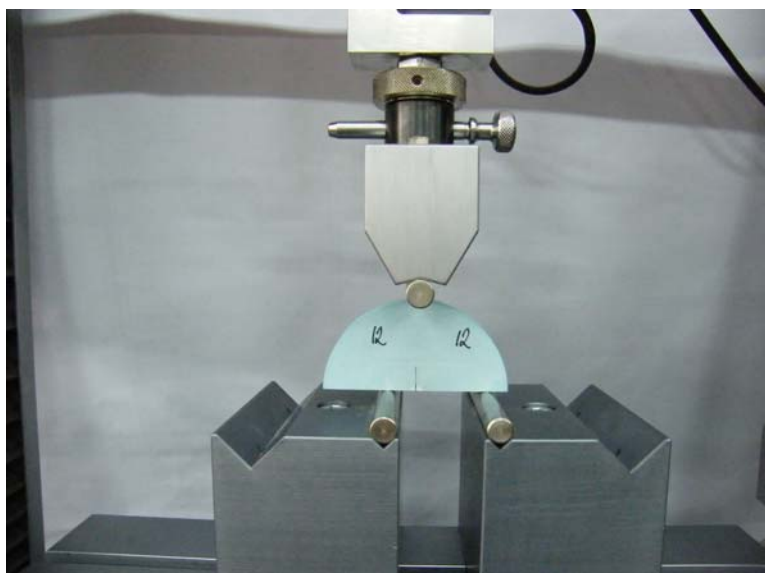


Fig. 2.11. Dispozitivul de încovoiere în trei puncte utilizat la poziționarea epruvetelor

Tabel 2.6. Rezultatele experimentale pentru epruvetele ASCB

Material	$S_1$ [mm]	$S_2$ [mm]	$F_1$ [N]	$F_2$ [N]	$F_3$ [N]	$F_4$ [N]	$F_{med}$ [N]	Obs.
N 1020	30	30	2460	2490	2410	2500	2465.00	
N 1020	30	15	3290	3370	3160	-	3273.33	
N 1020	30	12	4970	5080	4840	-	4963.33	
N 1020	30	8	6840	6560	6740	-	6713.33	
N 1020	30	6	7130	7015	7475	-	7206.67	
N 1020	30	4.3	6550	6455	6080	-	6391.33	
N 651	30	30	1160*	1140	1190	-	1163.33	(1)*
N 651	30	15	1580*	1625	1545	-	1583.33	(2)*
N 651	30	12	2360*	2435	2210	-	2335.00	(3)*
N 651	30	8	3060*	2990	3020	-	3023.33	(4)*
N 651	30	6	3160*	3120	3090	-	3123.33	(5)*
<i>N 651</i>	30	4.3	2890*	3200	3150	-	3080.00	(6)*

\*) epruvetele ASCB pentru care curbele forță-deplasare sunt prezentate în fig. 2.12

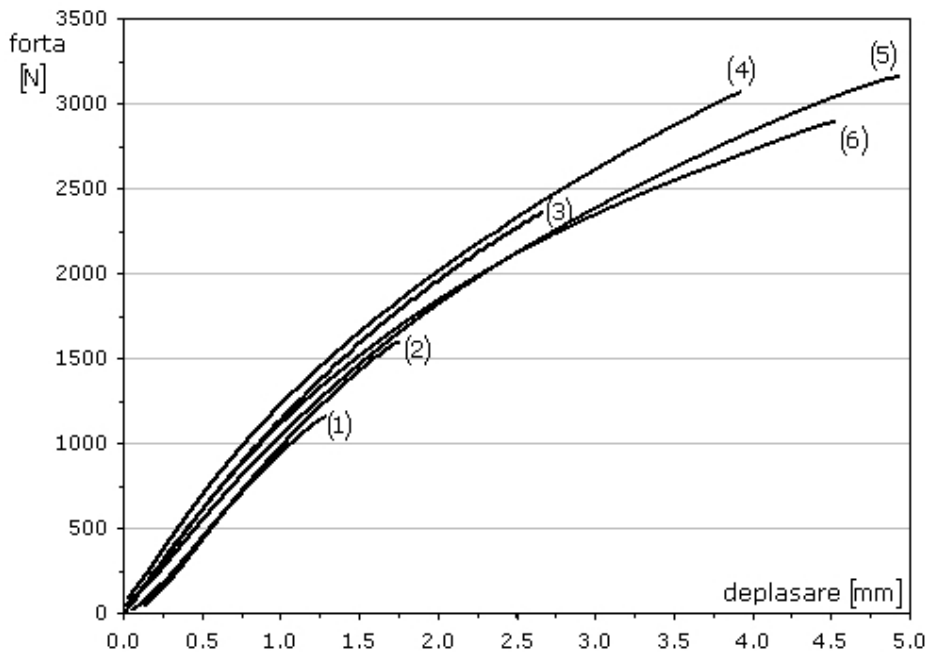
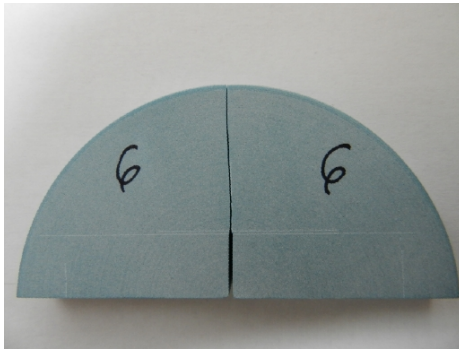
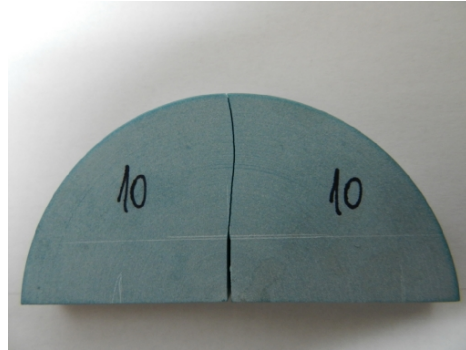


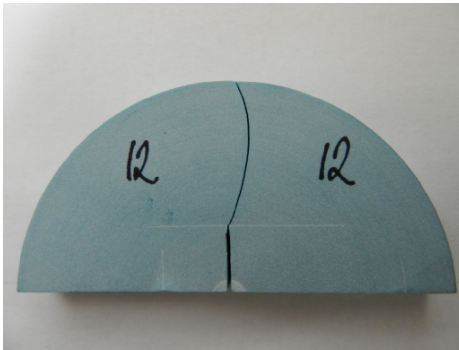
Fig. 2.12. Curbele forță-deplasare înregistrate pentru epruvetele ASCB (Necuron 651 – în tabelul 2.6 marcate cu \*)



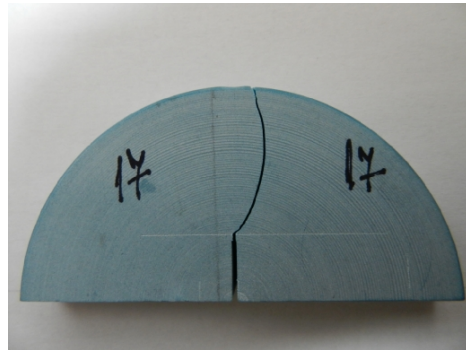
a).  $S_1 = 30, S_2 = 30$  [mm] (modul I)



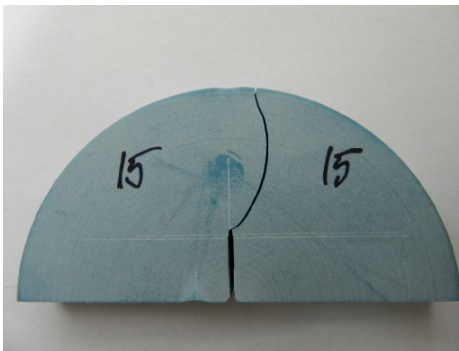
b).  $S_1 = 30, S_2 = 15$  [mm] (modul mixt)



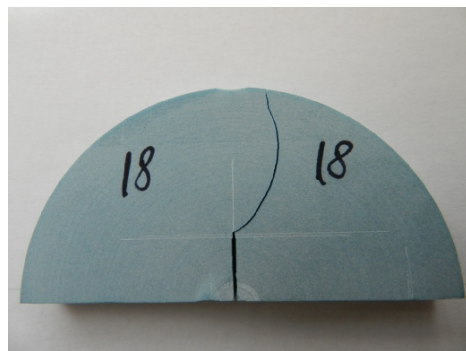
c).  $S_1 = 30, S_2 = 12$  [mm] (modul mixt)



d).  $S_1 = 30, S_2 = 8$  [mm] (modul mixt)

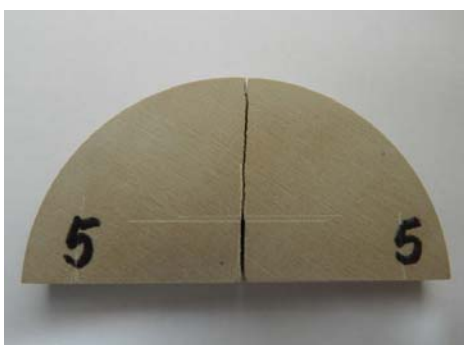


e).  $S_1 = 30, S_2 = 6$  [mm] (modul mixt)

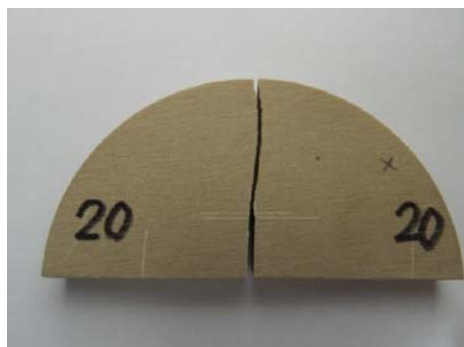


f).  $S_1 = 30, S_2 = 4.3$  [mm] (modul II)

Fig. 2.13. Epruvete ASCB rupte la diferite combinații între modul I și modul II (Necuron 1020)



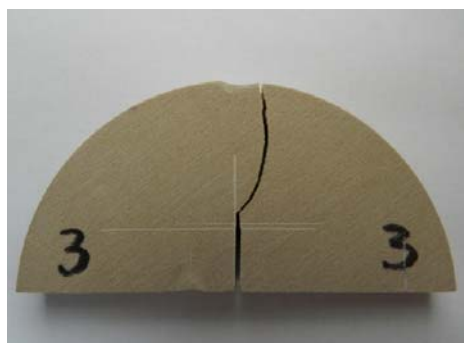
a).  $S_1 = 30, S_2 = 30$  [mm] (modul I)



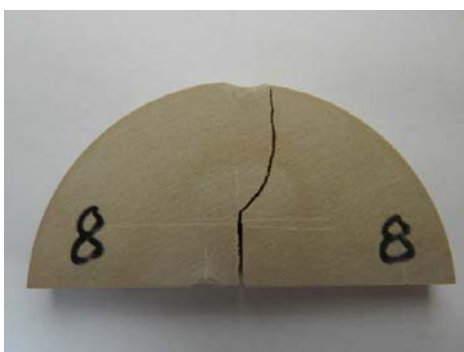
b).  $S_1 = 30, S_2 = 15$  [mm] (modul mixt)



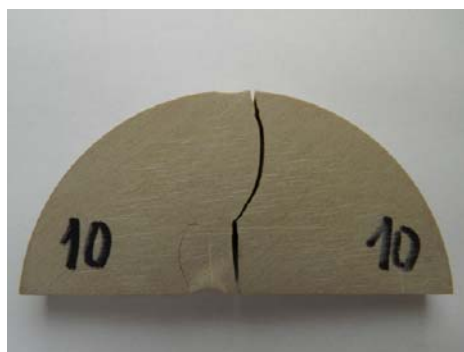
c).  $S_1 = 30, S_2 = 12$  [mm] (modul mixt)



d).  $S_1 = 30, S_2 = 8$  [mm] (modul mixt)



e).  $S_1 = 30, S_2 = 6$  [mm] (modul mixt)



f).  $S_1 = 30, S_2 = 4.3$  [mm] (modul II)

Fig. 2.14. Epruvete ASCB rupte la diferite combinații între modul I și modul II (Necuron 651)

Modul I se obține prin solicitarea simetrică la încovoiere, în cazul studiat  $S_1 = S_2 = 30 [mm]$ . Diferitele combinații dintre modul I și II, în modul mixt, se realizează prin solicitarea asimetrică la încovoiere utilizând un dispozitiv adecvat (fig. 2.11) care permite modificarea distanțelor dintre suportii de rezemare  $S_1 \neq S_2$ , relativ la direcția de aplicare a forței  $F$ . Astfel, încercările experimentale s-au efectuat prin menținerea constantă a poziției  $S_1$  și modificarea poziției  $S_2$  la 15, 12, 8, 6 și 4.3 [mm]. Condițiile menționate în care s-au efectuat încercările de încovoiere asimetrică în trei puncte ale epruvetelor ASCB au fost stabilite după analiza preliminară cu elemente finite a stării de tensiune și deformație pentru fiecare caz de solicitare studiat.

Rezultatele experimentale sunt prezentate în tabelul 2.6, cel puțin trei încercări fiind efectuate pentru fiecare situație de solicitare. Câteva dintre curbele forță-deplasare înregistrate pentru poliuretanul Necuron 651 sunt redată în fig. 2.12. Liniaritatea acceptabilă a curbelor, chiar și pentru valoarea relativ redusă a densității poliuretanului de aprox.  $0.7 [gr./cm^3]$ , justifică modelarea liniar elastică a comportamentului acestuia în evaluarea ruperii componentelor cu concentratori de tensiune singulari (fisură).

În fig. 2.13 și 2.14 sunt ilustrate pe epruvetele rupte traiectoriile de propagare a fisurilor. Pentru modul I de solicitare traiectoria este o linie dreaptă, inițierea la propagarea fisurii producându-se în planul fisurii inițiale. Pentru solicitarea în modul mixt, inițierea la propagare se produce printr-o deviere de la direcția inițială, fisura urmând în continuare o traiectorie curbilinie. De asemenea, în modul mixt de solicitare, dependența direcției de inițiere la propagarea fisurii în funcție de combinația între modul I și II este ușor de observat.

În capitolele următoare ale lucrării se urmărește estimarea condițiilor critice ale ruperii fragile și predicția forței critice de rupere pentru toate tipurile de epruvete pe baza câtorva dintre criteriile propuse în literatura științifică. De asemenea, rezultatele experimentale obținute la ruperea fragilă a epruvetele ASCB și SENB vor permite determinarea valorilor critice ale factorilor de intensitate a tensiunii  $K_{IC}$  și  $K_{IIc}$ . În partea finală a lucrării, se vor studia posibilitățile de simulare numerică a propagării fisurilor pe epruvetele ASCB cu pachetele software disponibile Cosmos/M 2.9 și Abaqus 6.5. Trajectoriile experimentale digitizate cu ajutorul pachetului software SigmaScan Pro 5 constituie baza validării rezultatelor numerice.

## 3. Evaluarea ruperii fragile pe baza calculului tensiunilor

### 3.1. Criteriul tensiunii circumferențiale maxime (maximum tangential stress MTS)

#### 3.1.1. Formularea criteriului tensiunii circumferențiale maxime

Criteriul tensiunii circumferențiale maxime a fost propus de Erdogan [1963] pentru studiul propagării fisurilor în materialele fragile în modul mixt și este cunoscut în literatura tehnică sub numele de criteriul MTS (*maximum tangential stress*). Ipotezele care stau la baza acestui criteriu se pot enunța astfel:

- inițierea la propagarea fisurii se produce în direcția radială determinată prin unghiul polar  $\theta = \theta_0$ , la care tensiunea circumferențială  $\sigma_\theta$  devine maximă;
- propagarea fisurii se produce atunci când tensiunea circumferențială maximă la o distanță critică  $r_c$  măsurată de la vârful fisurii pe această direcție atinge o valoare critică  $\sigma_c$ , egală cu rezistența de rupere la întindere uniaxială (cele două mărimi  $r_c$  și  $\sigma_c$ , sunt considerate proprietăți de material).

Din punct de vedere matematic cele două ipoteze se exprimă prin relațiile:

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0 \quad (3.1a)$$

și

$$\sigma_\theta(r_c, \theta_0) = \sigma_c \quad (3.1b)$$

În cazul aplicațiilor plane, câmpul tensiunilor elastice de la vârful fisurii în modul mixt, se poate exprima în coordonate polare prin relațiile (Williams [1957], Erdogan [1963]):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \left( \frac{3}{2} \sin \theta - 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right], \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \sin \frac{\theta}{2} + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

și  $\sigma_z = 0$ , pentru starea plană de tensiune, respectiv,  $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$  pentru starea plană de deformare. În relațiile (3.2) termenii de ordin superior sunt considerați neglijabili, cunoscută fiind dominanța primului termen singular în regiunea din vecinătatea vârfului fisurii.



În baza relațiilor (3.1a) și (3.2), valoarea  $\theta_0$  a unghiului polar care determină direcția radială de inițiere la propagarea fisurii reprezintă soluția ecuației (Gdoutos [2005]):

$$K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0 \quad . \quad (3.3)$$

Expresia (3.3) indică faptul că unghiul polar  $\theta_0$  al direcției radiale de inițiere la propagarea fisurii depinde de doi parametri, factorii de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$ , pentru oricare combinație între modurile I+II. Se observă cu ușurință că, pentru direcția radială determinată de  $\theta_0$ , tensiunea circumferențială  $\sigma_\theta$  reprezintă o tensiune principală, iar tensiunea tangențială  $\tau_{r\theta}$  se anulează.

Pentru a estima inițierea ruperii fragile în modul mixt pe baza criteriului MTS, unghiul polar  $\theta_0$  împreună cu o distanță critică  $r_c$  măsurată de la vârful fisurii se înlocuiesc în relația (3.1b) rezultând:

$$\sigma_\theta(r_c, \theta_0) = \sigma_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_c}} \cos \frac{\theta_0}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right]. \quad (3.4)$$

Presupunând că inițierea ruperii în modul mixt se produce în condiții critice similare modului I (când  $K_I = K_{IC}$ ,  $K_{II} = 0$  și  $\theta_0 = 0$ ), ecuația (3.4) devine:

$$\sigma_c = \frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi r_c}} \Rightarrow \sigma_c \sqrt{2\pi r_c} = K_{IC} \quad , \quad (3.5)$$

iar condiția ruperii fragile în modul mixt I+II se rescrie în funcție de factorul critic de intensitate a tensiunii  $K_{IC}$ :

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right] = K_{IC} \quad . \quad (3.6)$$

Din ecuațiile (3.3) și (3.6) se determină variația unghiului  $\theta_0$  de inițiere la propagarea fisurii și, respectiv, diagrama de rupere  $K_{II}/K_{IC}$  în funcție de  $K_I/K_{IC}$ , rezultatele fiind ilustrate în fig.3.1 și fig.3.2. După Shih [1974], parametrul adimensional  $M^e$  caracterizează pentru modul mixt combinația între modul I și modul II, astfel:

$$M^e = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right) \quad . \quad (3.7)$$

Pentru modul II, adică  $M^e = 0$ , după cum se observă din fig.3.1. și fig.3.2, criteriul MTS estimează că inițierea la propagarea fisurii se produce sub unghiul  $\theta_0 = -\arccos(1/3) = -70.5^\circ$  relativ la planul acesteia, iar factorul critic de intensitate a tensiunii este  $K_{IIc} = 0.866K_{IC}$ . În modul I, pentru  $M^e = 1$ , criteriul MTS estimează că inițierea la propagarea fisurii se produce sub unghiul  $\theta_0 = 0^\circ$ , adică în planul fisurii inițiale, iar factorul critic de intensitate a tensiunii este  $K_{IC}$ .

### 3.1.2. Generalizarea criteriului tensiunii circumferențiale maxime (criteriul GMTS)

Datorită simplității sale teoretice criteriul MTS a fost utilizat pe larg în prezentarea și explicarea rezultatelor experimentale de către foarte mulți cercetători. Acuratețea sa în estimarea ruperii fragile în modul mixt I+II a fost studiată pentru o serie de materiale fragile și diferite tipuri de epruvete.

Astfel, o serie de rezultate experimentale prezentate în literatura tehnică au verificat aplicabilitatea criteriului MTS la evaluarea ruperii fragile în modul mixt I+II. Sunt amintite aici rezultatele experimentale obținute la temperatura ambiantă de Maccagno [1989] pe epruvete din PMMA solificate la încovoiere în patru puncte. Dintre toate criteriile de rupere evaluate, cele mai exacte estimări au fost obținute prin aplicarea criteriului MTS. De asemenea, studiile experimentale realizate de Mahajah [1989] pe epruvete din PMMA și Homalite-100 au verificat capacitatea criteriului MTS în estimarea condițiilor critice de inițiere și propagare a fisurii pentru ruperea fragilă în modul mixt I+II.

Spre deosebire de aceste studii, numeroase alte rezultate experimentale nu au validat acuratețea criteriului MTS în evaluarea ruperii fragile în modul mixt I+II. Se regăsesc aici studiile efectuate de Williams [1972] pe epruvete de tip placă dreptunghiulară cu fisură înclinată realizate din PMMA și solificate la întindere uniaxială. Între rezultatele experimentale și estimările bazate pe criteriul MTS pentru evaluarea ruperii fragile în modul mixt I+II s-au înregistrat diferențe semnificative mai ales în cazurile de predominanță a modului II de solitare. Acestea sunt explicate pe baza termenului nesingular din dezvoltarea în serie a expresiilor tensiunilor din zona vârfului fisurii (Ewing [1974]).

O evaluare a criteriului MTS privind estimarea factorului critic de intensitate a tensiunii și a direcției de propagare pentru modul I, II și mixt I+II este publicată de Suresh [1990]. Pentru încercările de încovoiere în patru puncte realizate pe epruvete din  $Al_2O_3$ , Suresh a obținut pentru modul II o valoare  $K_{IIc} = 2.3K_{Ic}$  care invalidează criteriul MTS. Criteriul MTS este invalidat și de studiile publicate de Ueda [1983] și Lim [1994] pentru încercările realizate pe PMMA și piatră (epruvetă semidisc cu fisură, solicitată la încovoiere în trei puncte).

Numeroase alte rezultate experimentale obținute pentru modul II pe epruvete de tipul discului brazilian cu fisură centrală (CBD) nu sunt în concordanță cu ecuațiile (3.3) și (3.6). Astfel, de exemplu, raportul  $K_{IIc}/K_{Ic}$  este semnificativ mai mare decât valoarea 0.866 estimată pe baza criteriului MTS:  $K_{IIc}/K_{Ic} = 1.19$  pentru gresie (Krishnan [1998]) și  $K_{IIc}/K_{Ic} = 2.16$  pentru piatră calcaroasă (Khan [2000]).

Aceste rezultate experimentale au demonstrat că prezența tensiunilor nesingulare (al doilea termen nesingular din dezvoltarea în serie a expresiilor tensiunilor) în zona vârfului fisurii joacă un rol important în modificarea condițiilor critice de inițiere și propagare a fisurii la ruperea materialelor fragile în modul mixt. O generalizare a criteriului MTS (GMTS – *generalized maximum tangential stress criterion*) care să ia în considerare efectele primilor doi termeni - singular și nesingular - din expresia tensiunii circumferențiale în zona vârfului fisurii a fost propusă în literatura tehnică de Smith [2001, 2006]. În acest sens, câmpul tensiunilor elastice de la vârful fisurii se exprimă în coordonate polare prin relațiile (Williams [1957]):

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \left( \frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] + T \cos^2 \theta + O(r^{1/2}) \\
\sigma_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] + T \sin^2 \theta + O(r^{1/2}) \\
\tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \sin \frac{\theta}{2} + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] - T \sin \theta \cos \theta + O(r^{1/2}),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

unde, la o distanță  $r_c$  măsurată de la vârful fisurii, termenii de ordin superior  $O(r^{1/2})$  se consideră neglijabili, iar tensiunile nesingulare  $T$  reprezintă o parte semnificativă a tensiunii circumferențiale (în funcție de geometria epruvetei).

Pentru modul I, termenul nesingular  $T \sin^2 \theta$  din expresia tensiunii circumferențiale  $\sigma_\theta$  se anulează de-a lungul direcției de propagare a fisurii, adică pentru  $\theta = 0$ , ceea ce înseamnă că pentru materialele liniar-elastice aceste tensiuni nesingulare  $T$  nu au nici o influență. În schimb, în modul mixt I+II, propagarea fisurii nu se produce în planul fisurii inițiale, tensiunile nesingulare  $T$  contribuind la modificarea condițiilor critice de inițiere și propagare a fisurii la ruperea materialelor fragile.

Pe baza raționamentului prezentat în paragraful 3.1.1, din condiția (3.1a) și expresia (3.8) a tensiunii circumferențiale  $\sigma_\theta$ , se determină unghiul polar  $\theta_0$ :

$$\left. \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \Rightarrow \left[ K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) \right] - \frac{16T}{3} \sqrt{2\pi r_c} \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \theta_0 = 0. \tag{3.9}$$

Ecuția (3.9) indică faptul că unghiul polar  $\theta_0$  al direcției radiale de propagare a fisurii depinde de trei parametri, factorii de intensitate a tensiunii  $K_I$ ,  $K_{II}$ , și tensiunea nesingulară  $T$  pentru oricare combinație între modurile I+II.

Pentru a estima inițierea ruperii fragile în modul mixt pe baza criteriului GMTS, unghiul polar  $\theta_0$  determinat din (3.9) împreună cu distanța critică  $r_c$  măsurată de la vârful fisurii se înlocuiesc în relația (3.1b):

$$\sqrt{2\pi r_c} \sigma_c = \cos \frac{\theta_0}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right] + \sqrt{2\pi r_c} T \sin^2 \theta_0, \tag{3.10}$$

unde  $\sigma_\theta(r_c, \theta_0) = \sigma_c$  reprezintă valoarea critică a tensiunii circumferențiale la distanța critică  $r_c$ . Și pentru criteriul GMTS, în modul I, când  $K_{II} = 0$  și  $\theta_0 = 0$ , ecuația (3.10) se reduce la (3.5), iar condiția ruperii fragile (3.10) în modul mixt I+II se rescrie în funcție de factorul critic de intensitate a tensiunii  $K_{IC}$ :

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right] + \sqrt{2\pi r_c} T \sin^2 \theta_0 = K_{IC}. \tag{3.11}$$

Ecuțiile (3.9) și (3.11) reprezintă formularea criteriului MTS generalizat, estimarea condițiilor critice ale ruperii fragile realizându-se pentru oricare combinație a modului mixt I+II pe baza celor trei parametri ai fisurii,  $K_I$ ,  $K_{II}$  și  $T$ .

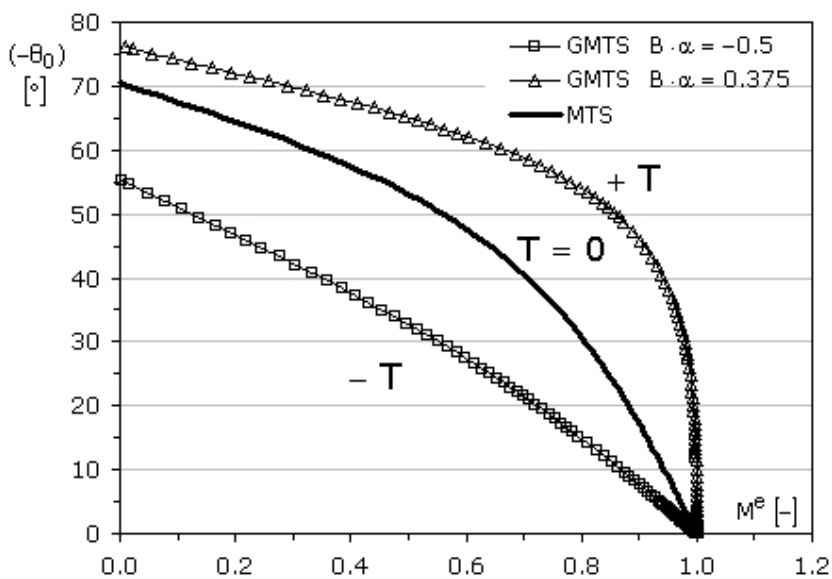


Fig. 3.1. Variația unghiului  $\theta_0$  de inițiere la propagarea fisurii (Smith [2001], [2006])

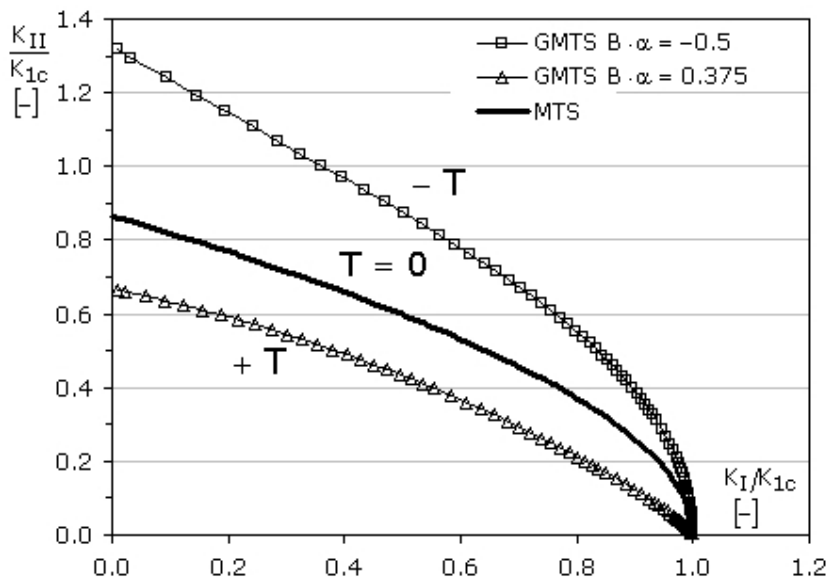


Fig. 3.2. Diagrama de rupere în modul mixt I+II (Smith [2001], [2006])

Pentru a analiza efectul pe care tensiunile nesingulare  $T$  îl au în determinarea condițiilor critice de inițiere și propagare a fisurii la ruperea materialelor fragile, raportul de biaxialitate  $B$  introdus de Leever [1982] pentru modul I

$$B = (T\sqrt{\pi a})/K_I \quad (3.12)$$

a fost extins de către Smith [2001] la modul mixt I+II

$$B = (T\sqrt{\pi a})/K_{ef} \quad (3.13)$$

unde:  $K_{ef} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$  - factorul efectiv de intensitate a tensiunii,  $a$  - lungimea fisurii. Notând în plus  $a = \sqrt{2\pi r_c/a}$ , Smith [2001] rescrie ecuațiile (3.9) și (3.11) astfel:

$$[K_I \sin \theta_0 + K_{II}(3 \cos \theta_0 - 1)] - \frac{16Ba}{3} K_{ef} \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \theta_0 = 0 \quad (3.14)$$

și

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right] + Ba K_{ef} \sin^2 \theta_0 = K_{IC} \quad (3.15)$$

unde pentru modul mixt I+II

$$Ba = \frac{T}{\sigma_c} \frac{K_{IC}}{K_{ef}} \quad , \quad (3.16)$$

cu simplificările de rigoare pentru modul I și, respectiv, modul II.

În cazul  $Ba < 0.375$ , condiție care se obține în modul I din  $\frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0$ , Smith [2001] obține o soluție relativ simplă pentru ecuațiile (3.14) – (3.15).

Astfel, din variația unghiului  $\theta_0$ , reprezentată în fig.3.1 pentru două valori ale parametrului  $Ba$  ( $-0.5$  și  $0.375$ ) alături și de soluția criteriului MTS, se desprind câteva observații:

- pentru  $Ba = 0$  (adică  $T = 0$ ) soluția corespunde criteriului MTS;
- în modul I tensiunile nesingulare  $T$  nu influențează valoarea unghiului  $\theta_0$ ;
- în modul mixt I+II tensiunile nesingulare  $T$  influențează valoarea unghiului  $\theta_0$ , influența fiind mai importantă pentru predominanța modului II ( $M^e$  scade spre zero);
- pentru tensiuni nesingulare  $T$  pozitive valorile unghiului  $\theta_0$  de propagare a fisurii cresc (în valori absolute), iar pentru tensiuni nesingulare  $T$  negative valorile lui  $\theta_0$  descresc (în valori absolute).

În fig.3.2 este reprezentată diagrama de rupere,  $K_{II}/K_{IC}$  în funcție de  $K_I/K_{IC}$ , pentru două valori ale parametrului  $Ba$  ( $-0.5$  și  $0.375$ ) alături și de soluția criteriului MTS:

- pentru  $Ba = 0$  (adică  $T = 0$ ) soluția corespunde criteriului MTS;

- în modul mixt I+II, valorile factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  cresc pentru tensiuni nesingulare  $T$  negative și scad pentru tensiuni nesingulare  $T$  pozitive;
- în modul II, valoarea factorului critic de intensitate a tensiunii  $K_{IIc}$  este influențată semnificativ de tensiunile nesingulare  $T$ .

Dacă  $Ba > 0.375$  rezultatele obținute de Ayatollahi [2002] și Smith [2006] sunt interesante.

Astfel, în modul I unghiul de propagare  $\theta_0$  nu mai coincide cu planul fisurii, adică  $\theta_0 \neq 0$ , tensiunea circumferențială maximă producându-se de ambele părți ale planului fisurii, după soluția:

$$\theta_0 = \pm 2 \arccos \left[ \frac{3}{32B_I a} + \sqrt{\left( \frac{3}{32B_I a} \right)^2 + \frac{1}{2}} \right] . \quad (3.17)$$

Parametrul adimensional  $B_I a$  se exprimă în funcție de tensiunile nesingulare  $T$  normalizate cu valoarea critică a tensiunii circumferențiale  $\sigma_c$

$$\frac{T}{\sigma_c} = \frac{K_I}{K_{Ic}} B_I a , \quad (3.18)$$

unde  $B_I = (T\sqrt{\pi a})/K_I$  reprezintă simplificarea relației generale (3.13) pentru modul I, condiția ruperii fragile (3.15) devenind:

$$\frac{K_I}{K_{Ic}} = \left[ \cos^3 \frac{\theta_0}{2} + B_I a \sin^2 \theta_0 \right]^{-1} . \quad (3.19)$$

În modul I, variația unghiului de propagare a fisurii  $\theta_0$  și a factorului de intensitate a tensiunii  $K_I$  la rupere, raportată la valoarea critică  $K_{Ic}$ , sunt ilustrate în fig.3.3 și fig.3.4 în funcție de tensiunea nesingulară normalizată  $T/\sigma_c$ . Pentru ușurința interpretării rezultatelor reprezentările grafice sunt extinse și în domeniul tensiunilor nesingulare negative (unde precedentele observații rămân valabile):

- unghiul critic  $\theta_c$  crește cu valoarea tensiunilor nesingulare (fig.3.3), deviind de la planul fisurii inițiale;
- valoarea factorului de intensitate a tensiunii  $K_I$  la rupere scade rapid cu  $T/\sigma_c$ .

În modul II, unghiul de propagare  $\theta_0$  a fisurii este dat de ecuația (3.14), care se transformă în

$$K_{II} \left[ (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{16B_{II} a}{3} \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \theta_0 \right] = 0 \quad (3.20)$$

unde  $B_{II} = (T\sqrt{\pi a})/K_{II}$  reprezintă simplificarea relației generale (3.13) pentru modul II și se exprimă în funcție de tensiunile nesingulare  $T$  normalizate:

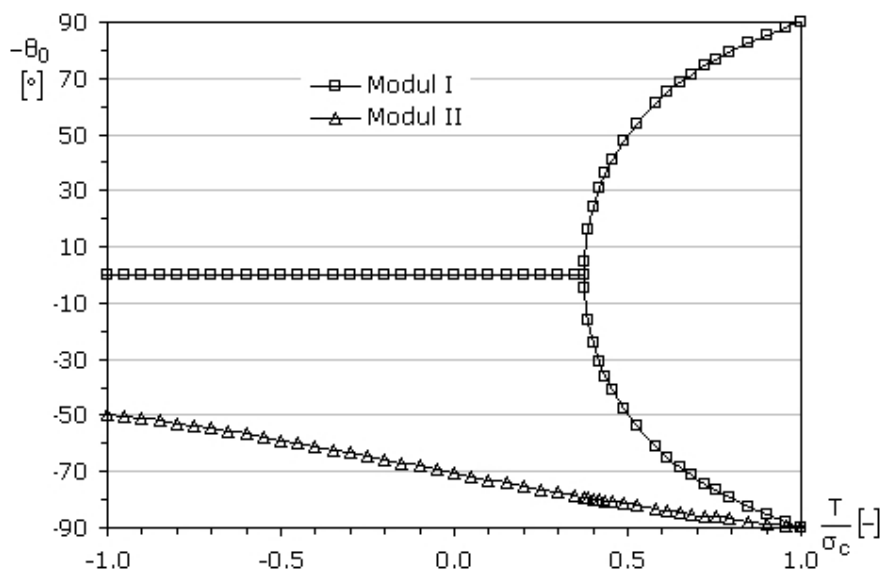


Fig. 3.3. Variația unghiului  $\theta_0$  de propagare a fisurii pentru modul I și II în funcție de tensiunile nesingulare normalizate (Smith [2001], [2006])

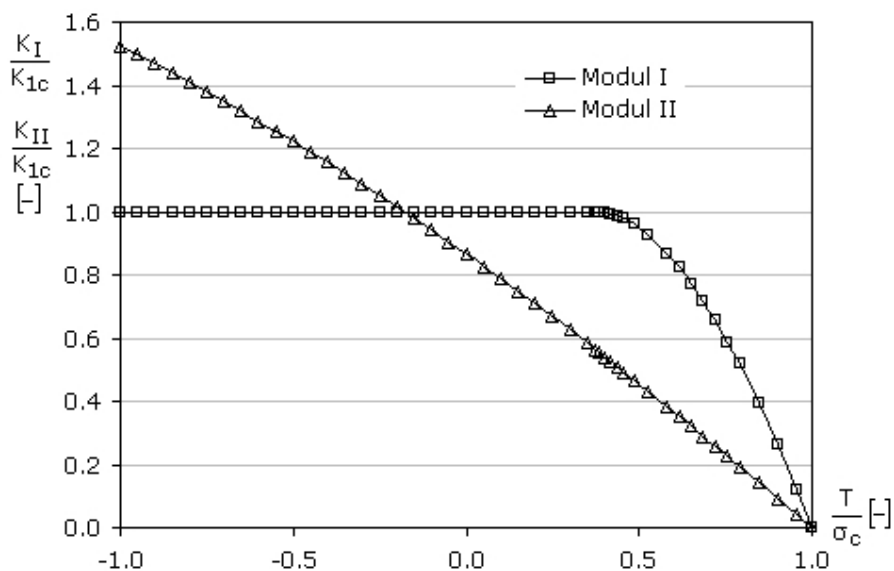


Fig. 3.4. Variația factorului critic de intensitate a tensiunii pentru modul I și II în funcție de tensiunile nesingulare normalizate (Smith [2001], [2006])

$$\frac{T}{\sigma_c} = \frac{K_{II}}{K_{IC}} B_{II} a \quad . \quad (3.21)$$

În final, condiția rupei (3.15) devine pentru modul II:

$$\frac{K_{II}}{K_{IC}} = \left[ B_{II} a \sin^2 \theta_0 - \frac{3}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right]^{-1} \quad . \quad (3.22)$$

Variația unghiului de propagare a fisurii  $\theta_0$  și a factorului de intensitate a tensiunii  $K_{II}$  la rupere, raportată la valoarea critică  $K_{IC}$ , sunt ilustrate în fig.3.3 și fig.3.4 în funcție de tensiunea nesingulară normalizată  $T/\sigma_c$ , pentru modul II, cu observațiile:

- pentru  $T/\sigma_c = 0$  estimările criteriului GMTS coincid cu cele ale criteriului MTS ( $\theta_0 = -70.5^\circ$ ) și  $K_{IIC} = 0.866K_{IC}$ );
- pentru valori pozitive ale tensiunii nesingulare, valoarea critică a factorului de intensitate a tensiunii  $K_{IIC}$  scade sub valoarea  $0.866K_{IC}$ , iar la valori negative ale tensiunii nesingulare depășește această limită, influența fiind semnificativă chiar și pentru valori moderate ale raportului  $T/\sigma_c$ . Din acest motiv, valoarea critică a factorului de intensitate a tensiunii  $K_{IIC}$  determinată experimental se utilizează în aplicațiile ingineresti pentru care condițiile la vârful fisurii (în termenii tensiunilor nesingulare) sunt similare celor pentru care a fost determinată valoarea critică  $K_{IIC}$ .

Criteriul GMTS a fost utilizat în analiza rezultatelor experimentale și în estimarea condițiilor critice ale rupei fragile în modul I, modul II sau modul mixt I+II: unghiul  $\theta_0$  al direcției de inițiere a fisurii, diagrama de rupere în termenii  $K_I/K_{IC}$  -  $K_{II}/K_{IC}$  și factorul critic de intensitate a tensiunii  $K_{IIC}$ .

Acuratețea criteriului GMTS a fost testată pentru diferite materiale și tipuri de epruvete, astfel:

- discul brazilian cu fisură centrală înclinată (CBD), solicitat la compresiune pe direcția diametrului, pentru teste pe calcar și gresie (Ayatollahi [2005]);
- semidiscul cu fisură laterală înclinată (SCB) solicitat simetric la încovoiere în trei puncte, pentru PMMA (Ayatollahi [2006], [2006a]);
- placa pătrată cu fisură centrală înclinată, solicitată la întindere pe direcția diagonală (DLSP), realizată din Plexiglas (Ayatollahi [2009]);
- inelul cu două fisuri înclinate solicitat la compresiune pe direcția diametrului, la încercări experimentale pe granit (Aliha [2008]);
- epruveta pentru încovoiere asimetrică în patru puncte (ASFPB), pentru încercări pe marmură (Aliha [2009]);
- semidiscul cu fisură laterală verticală (ASCB) solicitat asimetric la încovoiere în trei puncte, pentru PMMA (Ayatollahi [2011]).

Generalizând criteriul MTS prin considerarea tensiunii nesingulare  $T$  alături de termenul singular în expresia tensiunii circumferențiale  $\sigma_\theta$  în zona vârfului fisurii, lucrările amintite demonstrează că estimările bazate pe criteriul GMTS sunt în acord cu rezultatele experimentale.



### 3.1.3. Extinderea criteriului MTS la concentratori nesingulari de tensiune

Introdus de către Erdogan [1963] pentru componentele cu fisuri, criteriul MTS a fost extins la studiul ruperii fragile a componentelor cu concentratori de tensiune nesingulari. Astfel, au fost investigați concentratori de tensiune de tipul creștăturilor în formă de U, pe diferite epruvete:

- SENB – epruvete de încovoiere în trei puncte cu creștătură laterală, realizate din PMMA, Ayatollahi [2009a];
- UNBD – epruvete de tipul discului brazilian cu creștătură centrală în formă de U, realizate din PMMA și sticlă, Ayatollahi [2010].

Pentru studiul concentratorilor de tensiune de tipul creștăturilor în formă de V rotunjite la vârf a fost utilizat discul brazilian cu creștătură centrală de tip V (RVBD) realizat din PMMA, Ayatollahi [2010a].

Denumit, după forma geometrică a creștăturii, criteriul UMTS, respectiv criteriul RV-MTS, permite extinderea criteriului MTS la concentratorii de tensiune nesingulari se bazează pe soluția propusă de Filippi [2002] pentru câmpul tensiunilor elastice în modul mixt de sollicitare - relațiile (1.19), (1.20). Astfel, expresia tensiunii circumferențiale  $\sigma_\theta$  în zona vârfului creștăturii este:

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \frac{K_I^{V\rho}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_1}}} \left[ f_\theta^I(\theta) + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} g_\theta^I(\theta) \right] + \frac{K_{II}^{V\rho}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_2}}} \left[ f_\theta^{II}(\theta) + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2-\lambda_2} g_\theta^{II}(\theta) \right] \quad (3.23)$$

unde  $K_I^{V\rho}$  și  $K_{II}^{V\rho}$  reprezintă factorii de intensitate a tensiunii pentru concentratorul de tensiune în formă de V cu raza la vârf  $\rho$ ,  $r_0$  este distanța de la originea sistemului de coordonate la vârful concentratorului, exponenții reali  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  depind de deschiderea unghiulară  $2a$ , iar  $f_\theta^I, f_\theta^{II}, g_\theta^I, g_\theta^{II}$ , sunt funcții de unghiul polar  $\theta$ . Pentru concentratorii de tensiune de tipul creștăturilor U (cu  $2a = 0$  și  $r_0 = \rho/2$ ), respectiv, de tipul creștăturilor V cu vârful ascuțit ( $\rho = 0$  și  $r_0 = 0$ ) relația (3.23) se simplifică corespunzător.

Prima ipoteză a criteriului RV-MTS (sau după caz UMTS) presupune că ruperea fragilă se inițiază de la vârful creștăturii din punctul determinat de unghiul  $\theta_0$ , atunci când tensiunea  $\sigma_\theta$  la o distanță critică  $r_c$  este maximă. Astfel, înlocuind expresia (3.23) în condiția (3.1a), se obține ecuația

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}(r_c, \theta_0) = 0, \quad (3.24)$$

din care se determină unghiul  $\theta_0$  de inițiere a ruperii, în funcție de factorii de intensitate a tensiunii  $K_I^{V\rho}$ ,  $K_{II}^{V\rho}$ . În ecuația (3.24) raza  $r$  se înlocuiește cu distanța critică  $r_c$  măsurată din originea sistemului de axe. Se observă că unghiul  $\theta_0$  de

inițiere a ruperii depinde de distanța critică  $r_c$  și de geometria concentratorului de tensiune, prin raza la vârful  $\rho$  și deschiderea unghiulară  $2\alpha$ .

Cea de-a doua ipoteză a criteriului RV-MTS (sau după caz UMTS) presupune că ruperea se produce atunci când tensiunea circumferențială  $\sigma_\theta$  de-a lungul direcției de unghi  $\theta_0$  atinge valoarea critică  $\sigma_c$ , la distanța  $r = r_c$ . Astfel, în baza expresiei (3.23), se obține relația care determină condițiile ruperii în modul mixt:

$$\sigma_c = \frac{K_I^{V\rho}}{\sqrt{2\pi r_c^{1-\lambda_1}}} \left[ f_\theta^I(\theta_0) + \left( \frac{r_c}{r_0} \right)^{\mu_1-\lambda_1} g_\theta^I(\theta_0) \right] + \frac{K_{II}^{V\rho}}{\sqrt{2\pi r_c^{1-\lambda_2}}} \left[ f_\theta^{II}(\theta_0) + \left( \frac{r_c}{r_0} \right)^{\mu_2-\lambda_2} g_\theta^{II}(\theta_0) \right]. \quad (3.25)$$

Cu referire la modul I pur, ruperea se produce atunci când factorul de intensitate a tensiunii  $K_I^{V\rho}$  atinge valoarea sa critică  $K_{IC}^{V\rho}$ ; aceasta se determină experimental și depinde de geometria concentratorului de tensiune prin raza la vârful  $\rho$  și deschiderea unghiulară  $2\alpha$ , nefiind o constantă de material în sensul unei valori critice unice. Introducând în (3.25) condițiile de rupere  $\theta_0 = 0$ ,  $K_I^{V\rho} = K_{IC}^{V\rho}$ ,  $K_{II}^{V\rho} = 0$  pentru modul I, se obține relația

$$\sigma_c = \frac{K_{IC}^{V\rho}}{\sqrt{2\pi r_c^{1-\lambda_1}}} \left[ f_\theta^I(\theta_0 = 0) + \left( \frac{r_c}{r_0} \right)^{\mu_1-\lambda_1} g_\theta^I(\theta_0 = 0) \right], \quad (3.26)$$

care permite exprimarea tensiunii  $\sigma_c$  în funcție de valoarea critică  $K_{IC}^{V\rho}$ , rezultând:

$$\frac{K_{IC}^{V\rho}}{\sqrt{2\pi r_c^{1-\lambda_1}}} \left[ f_\theta^I(0) + \left( \frac{r_c}{r_0} \right)^{\mu_1-\lambda_1} g_\theta^I(0) \right] = \frac{K_I^{V\rho}}{\sqrt{2\pi r_c^{1-\lambda_1}}} \left[ f_\theta^I(\theta_0) + \left( \frac{r_c}{r_0} \right)^{\mu_1-\lambda_1} g_\theta^I(\theta_0) \right] + \frac{K_{II}^{V\rho}}{\sqrt{2\pi r_c^{1-\lambda_2}}} \left[ f_\theta^{II}(\theta_0) + \left( \frac{r_c}{r_0} \right)^{\mu_2-\lambda_2} g_\theta^{II}(\theta_0) \right]. \quad (3.27)$$

Cu valorile cunoscute pentru  $r_c$  și  $K_{IC}^{V\rho}$ , din (3.24) și (3.27) se trasează diagrama de rupere în modul mixt, pentru un anumit concentrator de tensiune. De asemenea, cu valorile determinate experimental pentru  $K_{IC}^{V\rho}$  și  $\sigma_c$  se obține din (3.26) relația de calcul a distanței critice  $r_c$  (dependentă de geometria creștăturii):

$$r_c^{1-\lambda_1} - \frac{K_{IC}^{V\rho}}{\sqrt{2\pi\sigma_c}} \left[ f_\theta^I(0) + \left( \frac{r_c}{r_0} \right)^{\mu_1-\lambda_1} g_\theta^I(0) \right] = 0, \quad (3.28)$$

unde pentru materialele fragile  $\sigma_c$  se consideră egală cu rezistența la rupere  $\sigma_r$  la întindere uniaxială.

## 3.2. Evaluarea ruperii fragile pe semidiscul cu fisură laterală verticală solicitat la încovoiere asimetrică (epruveta ASCB)

### 3.2.1. Geometria epruvetei ASCB

Epruveta de tip semidisc solicitată la încovoiere (SCB) în trei puncte, prezentată în fig.3.5, a fost utilizată pentru analiza ruperii materialelor fragile în modul mixt în numeroase studii. Pentru acest tip de epruvetă cu fisură înclinată, distanța dintre direcția forței aplicate și suportii de rezemare este menținută constantă. Pentru modul mixt de rupere, diferitele combinații dintre modul I și II se obțin prin înclinarea fisurii laterale la diferite valori ale unghiului  $\beta$ , față de direcția de aplicare a forței  $F$  (Ayatollahi [2006], [2006a]). Astfel, pentru a obține un mod mixt cu predominanța modului II valorile acestui unghi sunt relativ mari  $\beta \cong 50 [^\circ]$ . Dificultatea realizării practice a unei fisuri înclinate este principalul dezavantaj al acestui tip de epruvetă.

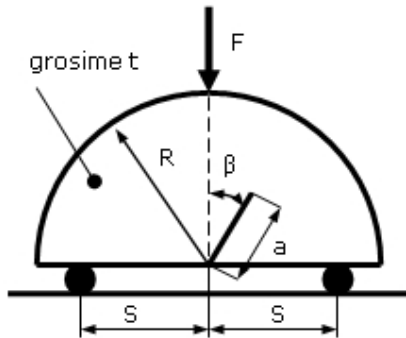


Fig. 3.5. Semidiscul cu fisură laterală înclinată solicitat simetric la încovoiere (SCB, Ayatollahi [2006])

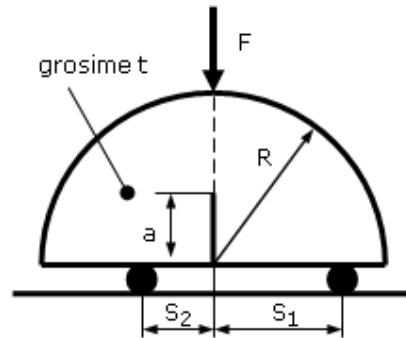


Fig. 3.6. Semidiscul cu fisură laterală verticală solicitat asimetric la încovoiere (ASCB, Ayatollahi [2011])

Într-o lucrare recentă, Ayatollahi [2011] propune o variantă îmbunătățită a acestei epruvete: semidiscul cu fisură laterală verticală solicitat asimetric la încovoiere (ASCB, fig. 3.6). Diferitele combinații dintre modul I și II, în modul mixt, se obțin prin solicitarea asimetrică la încovoiere utilizând un dispozitiv adecvat care permite modificarea distanțelor dintre suportii de rezemare  $S_1 \neq S_2$ , relativ la direcția de aplicare a forței  $F$  ( $S_1$  fixă, iar  $S_2$  variabilă). Evident, modul I se obține pentru solicitarea simetrică la încovoiere a epruvetei, adică pentru  $S_1 = S_2$ .

Utilizarea semidiscului ASCB la analiza ruperii materialelor fragile în modul mixt implică determinarea combinației dintre modul I și modul II pentru fiecare geometrie și poziție a suportilor de rezemare. În fapt, acest demers se rezumă la determinarea factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  pentru diferitele valori relative ale dimensiunilor geometrice  $a/R$ ,  $S_1/R$  și  $S_2/R$ , unde  $R$  reprezintă raza

semidiscului, iar  $a$  lungimea fisurii inițiale. Aplicarea criteriului GMTS implică în plus și determinarea tensiunilor nesingulare  $T$  pentru fiecare caz de solicitare, utilizarea metodei elementului finit în acest scop reprezentând o soluție rapidă și accesibilă.

### 3.2.2. Determinarea factorilor de intensitate a tensiunii $K_I$ , $K_{II}$ și a tensiunilor nesingulare $T$ pentru epruveta ASCB

Pentru epruveta ASCB, Ayatollahi [2011] propune determinarea factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  în funcție de relațiile dintre dimensiunile geometrice (prin  $a/R$ ,  $S_1/R$  și  $S_2/R$ ) după expresiile:

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{F}{2Rt} \sqrt{\pi a} Y_I(a/R, S_1/R, S_2/R) \\ K_{II} &= \frac{F}{2Rt} \sqrt{\pi a} Y_{II}(a/R, S_1/R, S_2/R) \end{aligned} \quad (3.29)$$

unde  $Y_I$  și  $Y_{II}$  sunt coeficienții adimensionali corespunzători modului I și, respectiv, modului II. O expresie similară este utilizată și pentru determinarea tensiunii nesingulare  $T$ :

$$T = \frac{F}{2Rt} T^*(a/R, S_1/R, S_2/R) \quad (3.30)$$

unde  $T^*$  reprezintă coeficientul adimensional al tensiunii nesingulare (sau tensiunea nesingulară normalizată, cu alte cuvinte).

Coeficienții adimensionali  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  și  $T^*$  din relațiile (3.29) și (3.30) se determină din analiza numerică cu metoda elementului finit.

Pentru dimensiunile geometrice ale epruvetelor ASBC realizate din Necuron 1020 și Necuron 651 testate la încovoiere în trei puncte -  $R = 40 [mm]$ ,  $a = 12 [mm]$  și  $t = 10 [mm]$ , fig. 2.10 - relațiile geometrice utilizate în analiza numerică sunt:

$$a/R = 0.3, \quad S_1/R = 0.75, \quad S_2/R = 0.1 \div 0.75. \quad (3.31)$$

cu raportul  $S_2/R$  variabil, pentru obținerea combinației analizate dintre modul I și modul II.

În fig. 3.7 este prezentat unul dintre modelele cu elemente finite, realizat cu pachetul software CosmosM 2.9. Pentru a modela singularitatea  $1/\sqrt{r}$ , un rând de 32 elemente finite bidimensionale triunghiulare cu 6 noduri a fost generat pe o rază de  $0.02 [mm]$  în zona de la vârful fisurii (detaliul din fig. 3.7). Nodurile situate pe mijlocul laturilor adiacente vârfului fisurii au fost deplasate la o distanță de  $1/4$  din lungimea laturii elementului finit, spre nodul corespunzător vârfului fisurii (Marșavina [1998]). În jurul acestui rând de elemente singulare, pe o rază de  $1.5 [mm]$ , s-a generat o rețea fină conținând 1600 elemente finite izoparametrice cu 8 noduri. În final, discretizarea întregului domeniu plan s-a realizat cu un număr total de 5248 elemente finite plane și 16092 noduri (cu câte 2 grade de libertate pe fiecare nod). La o grosime a epruvetelor de  $t = 10 [mm]$  modelarea s-a realizat în condițiile stării plane de deformație.

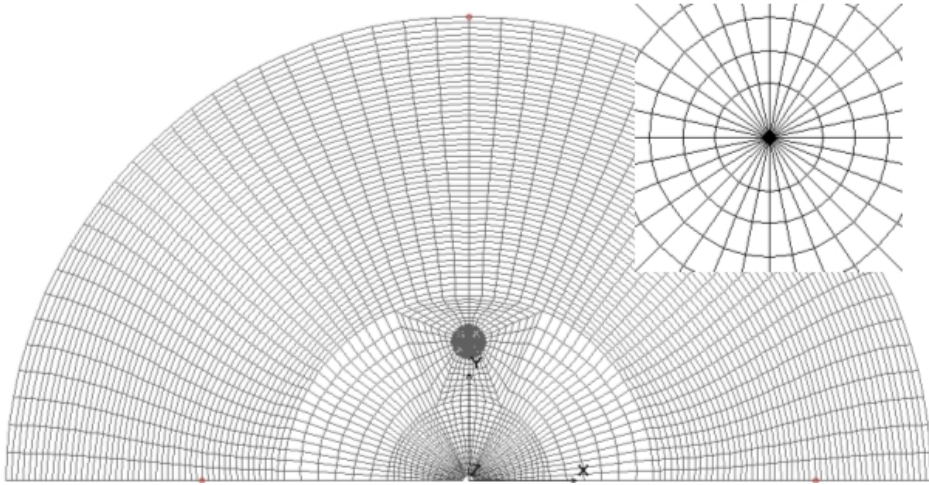


Fig. 3.7. Modelul cu elemente finite realizat în pachetul software CosmosM 2.9 (modelarea zonei de la vârful fisurii, în detaliu)

Pentru poliuretanul rigid Necuron 1020 următoarele proprietăți mecanice elastice au fost considerate în analiza liniar-elastică cu elemente finite: modulul de elasticitate longitudinal  $E = 3340 \text{ [MPa]}$  și coeficientul de contracție transversală  $\nu = 0.34$ .

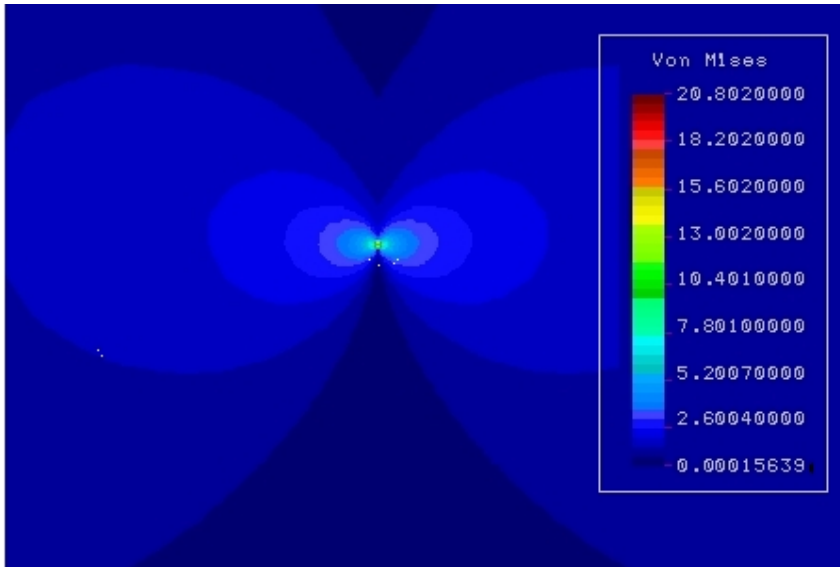


Fig. 3.8. Câmpul tensiunilor von Mises pentru modul I ( $K_{II} = 0$ )

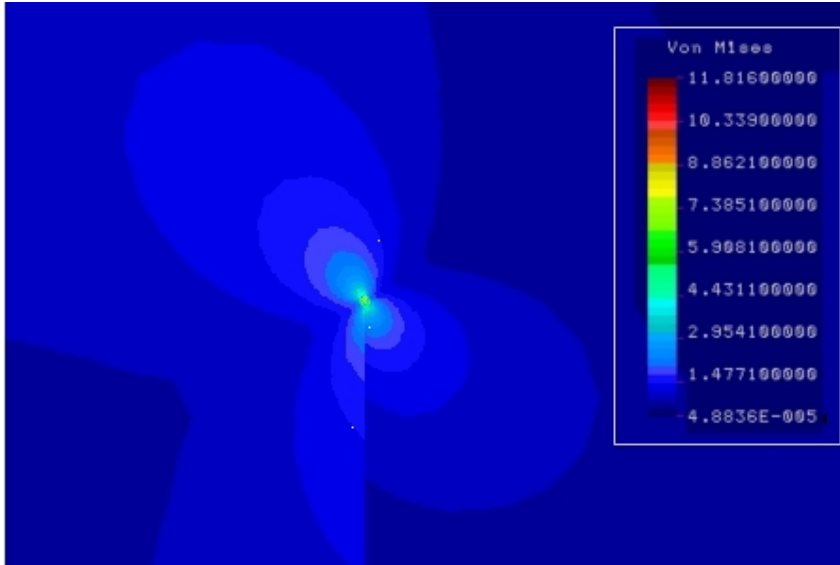


Fig. 3.9. Câmpul tensiunilor von Mises pentru modul mixt I+II ( $K_I/K_{II} = 0.9$ )

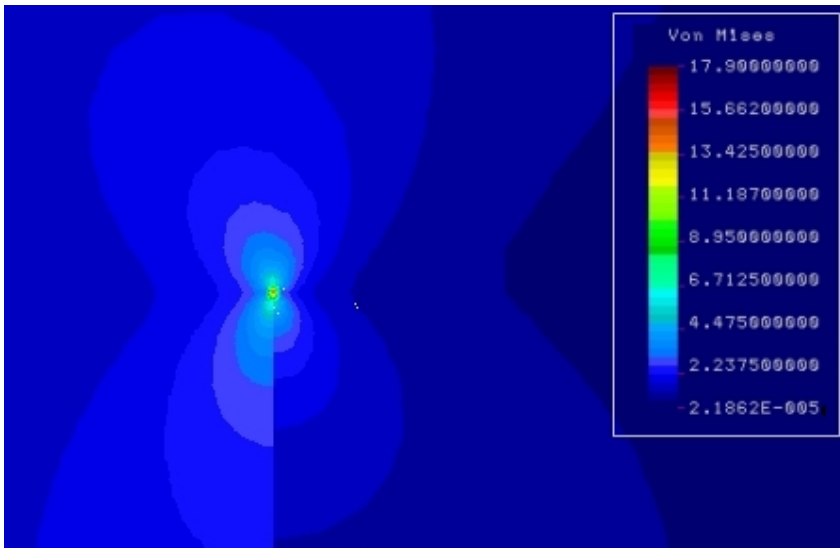


Fig. 3.10. Câmpul tensiunilor von Mises pentru modul II ( $K_I = 0$ )

Încovoierea asimetrică în trei puncte din fig. 3.6 a fost modelată impunând condițiile la limită: deplasările verticale pentru nodurile corespunzătoare suportilor de rezemare  $u_y = 0$  și o forță  $F = 100 [N]$  aplicată pe direcția verticală conținută în

planul fisurii inițiale. Câmpul tensiunilor echivalente von Mises în zona de la vârful fisurii pentru trei dintre cazurile analizate este redat în fig. 3.8 - 3.10.

Valorile factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  s-au determinat pentru fiecare dintre cazurile analizate prin metoda extrapolării tensiunilor. În fig. 3.11, pentru trei dintre cazurile analizate, este redată în coordonate dublu-logaritmice variația factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  în zona de la vârful fisurii pe direcția  $\theta = 0$ , pentru forța verticală aplicată  $F = 100 [N]$ . Se remarcă constanța factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$ , inclusiv pentru modul mixt I+II, până la o distanță  $r = 1 [mm]$  măsurată de la vârful fisurii.

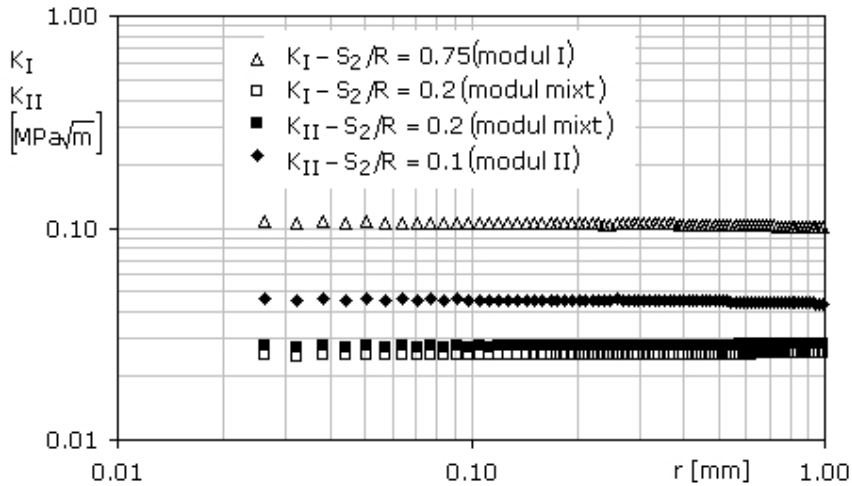


Fig. 3.11. Variația factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  pentru  $F = 100 [N]$

În baza relațiilor (3.29), și cu valorile determinate pentru  $K_I$  și  $K_{II}$  din analiza numerică a stării de tensiune în zona de la vârful fisurii, se determină coeficienții adimensionali  $Y_I$  și  $Y_{II}$  pentru geometria dată a epruvetei ASBC. Variația acestor coeficienți este redată în fig. 3.12 în funcție de raportul adimensional  $S_2/R$ . Situația  $S_1 = S_2$ , pentru care coeficientul  $Y_{II} = 0$ , corespunde modului I pur. La micșorarea distanței  $S_2$  (prin deplasarea suportului corespunzător spre planul fisurii) coeficientul adimensional  $Y_I$  al modului I scade, iar coeficientul  $Y_{II}$  al modului II crește. În modul mixt, diferitele combinații dintre modul I și II se obțin prin poziționarea suportului la distanța  $S_2$  corespunzătoare. Pentru un raport  $S_2/R = 0.108$  coeficientul adimensional al modului I devine  $Y_I = 0$ , această situație de solicitare corespunzând modului II pur.

Pentru validarea rezultatelor, un model similar de calcul numeric cu elemente finite pentru epruveta ASCB a fost realizat și în pachetul software Abaqus

6.5, unde determinarea factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  se bazează pe calculul integralei  $J$ , în cazul unui material cu comportare liniar-elastică.

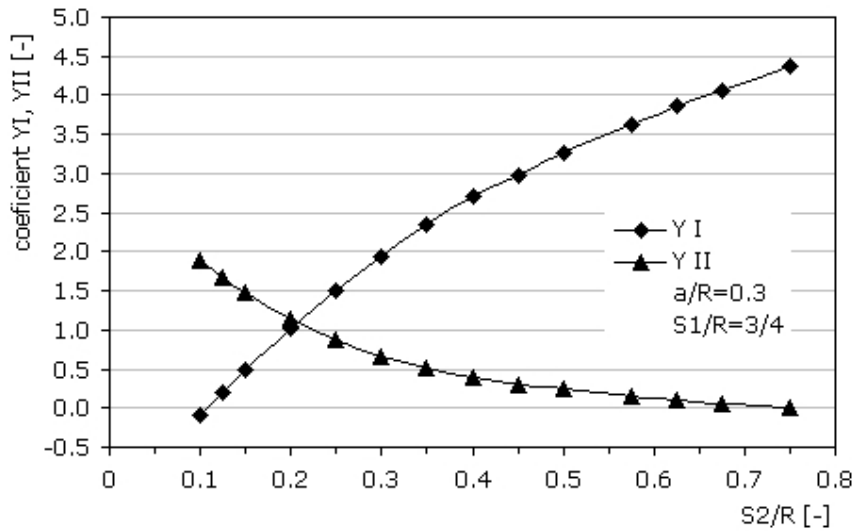


Fig. 3.12. Variația coeficienților adimensionali  $Y_1$  și  $Y_2$  ai factorilor de intensitate a tensiunii

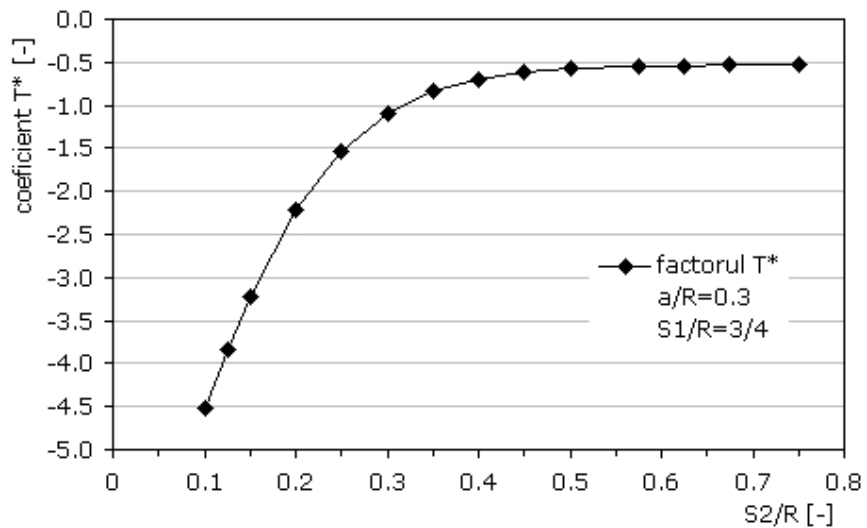


Fig. 3.13. Variația coeficientului adimensional  $T^*$  al tensiunii nesingulare



Erorile relative pentru valorile coeficienților adimensionali  $Y_I$  și  $Y_{II}$  determinate pe cele două modele de calcul numeric sunt de ordinul  $\pm 2.5$  [%].

Aplicarea criteriului GMTS la analiza ruperii materialelor fragile în modul mixt pe epruvete ASCB presupune și cunoașterea tensiunilor nesingulare  $T$  în zona de la vârful fisurii. Variația coeficientului adimensional  $T^*$  al tensiunii nesingulare, este prezentată în fig. 3.13 pentru geometria epruvetei ASCB analizată în lucrare. Graficul s-a trasat în baza relației (3.30) și a tensiunilor nesingulare determinate direct pe modelul cu elemente finite realizat în pachetul software Abaqus 6.5, la o forță aplicată pe direcția verticală  $F = 100$  [N]. Pentru geometria și starea de solicitare studiate, din fig. 3.13 se observă că tensiunile nesingulare  $T$  sunt negative pe întreg domeniul, iar valorile lor scad pe măsură ce raportul  $S_2/R$  se micșorează, adică cu predominanța modului II.

### 3.2.3. Analiza rezultatelor experimentale pe baza criteriului GMTS

Rezultatele pentru încercările de rupere în modul mixt I+II realizate pe epruvete ASCB confecționate din poliuretanul rigid Necuron 1020 sunt prezentate în tabelul 3.1. Alături de forța critică  $F_{Cr}$  înregistrată, în tabelul 3.1 sunt prezentate valorile factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  determinate pentru  $F_{Cr}$ , precum și valorile măsurate ale unghiului  $\theta_0$  de inițiere la propagarea fisurii pentru fiecare epruvetă.

În mod practic, înlocuind expresiile (3.29) și (3.30) în relația (3.9), se determină unghiul critic  $\theta_0$  ca soluție a ecuației:

$$[Y_I \sin \theta_0 + Y_{II}(3 \cos \theta_0 - 1)] - \frac{16T^*}{3} \sqrt{2r_c/a} \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \theta_0 = 0, \quad (3.32)$$

pentru valorile coeficienților adimensionali  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  și  $T^*$  determinate din fig. 3.12 și fig. 3.13 prin interpolare pentru un anumit raport  $S_2/R$ . Cu unghiul critic  $\theta_0$  calculat, condiția (3.11) a ruperii fragile în modul mixt I+II se rescrie în funcție de coeficienții adimensionali  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  și  $T^*$  astfel încât să rezulte raportul  $K_I/K_{Ic}$ :

$$\frac{K_I}{K_{Ic}} = \left\{ \cos \frac{\theta_0}{2} \left[ \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} \frac{Y_{II}}{Y_I} \sin \theta_0 \right] + \sqrt{\frac{2r_c}{a}} \frac{T^*}{Y_I} \sin^2 \theta_0 \right\}^{-1}, \quad (3.33a)$$

și respectiv  $K_{II}/K_{Ic}$

$$\frac{K_{II}}{K_{Ic}} = \left\{ \cos \frac{\theta_0}{2} \left[ \frac{Y_I}{Y_{II}} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} \sin \theta_0 \right] + \sqrt{\frac{2r_c}{a}} \frac{T^*}{Y_{II}} \sin^2 \theta_0 \right\}^{-1}, \quad (3.33b)$$

pe baza cărora se construiește diagrama de rupere după criteriului GMTS.

Distanța critică  $r_c$  se determină cu relația propusă de Taylor [2006], [2007], [2008]:

$$r_c = \frac{L}{2} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_r} \right)^2 = 0.34 [mm] \quad , \quad (3.34)$$

unde  $K_{IC} = 2.3 [MPa\sqrt{m}]$  și  $\sigma_r = 49.75 [MPa]$ , determinate în capitolul 2.

Din analiza rezultatelor experimentale obținute pe epruvete ASCB pentru poliuretanul rigid Necuron 1020 (prezentate în tab. 3.1) rezultă o valoare medie a factorului critic de intensitate a tensiunii  $K_{IC} = 2.655 [MPa \sqrt{m}]$ , valoare superioară cu aproximativ 15 [%] celei determinate pe epruvete standard de încovoiere în trei puncte  $K_{IC} = 2.3 [MPa \sqrt{m}]$  (ASTM D 5045-99). Din valoarea medie obținută pentru factorului critic de intensitate a tensiunii în modul II, și anume  $K_{IIC} = 2.771 [MPa \sqrt{m}]$ , rezultă un raport  $K_{IIC}/K_{IC} = 1.04$  superior predicției după criteriul MTS.

Tabel 3.1 Rezultatele testelor pe epruvete ASCB (Necuron 1020)

$S_2/R [-]$	$F_{cr} [N]$	$K_I [MPa \sqrt{m}]$	$K_{II} [MPa \sqrt{m}]$	$M^e [-]$	$-\theta_0 [^\circ]$
0.75	2460	2.650	0	1	0.5
0.75	2490	2.682	0	1	0.7
0.75	2410	2.596	0	1	0.8
0.75	2500	2.693	0	1	0.0
0.5	3290	2.654	0.187	0.955	17.3
0.5	3370	2.718	0.192	0.955	20.1
0.5	3160	2.549	0.180	0.955	13.0
0.3	4970	2.385	0.793	0.795	45.8
0.3	5080	2.438	0.811	0.795	40.3
0.3	4840	2.323	0.772	0.795	36.8
0.2	6840	1.709	1.897	0.467	50.3
0.2	6560	1.639	1.819	0.467	61.2
0.2	6740	1.684	1.869	0.467	47.4
0.15	7130	0.835	2.585	0.199	59.6
0.15	7015	0.822	2.543	0.199	62.9
0.15	7475	0.876	2.710	0.199	65.0
0.108	6550	0	2.852	0	65.6
0.108	6455	0	2.810	0	63.2
0.108	6080	0	2.649	0	73.0

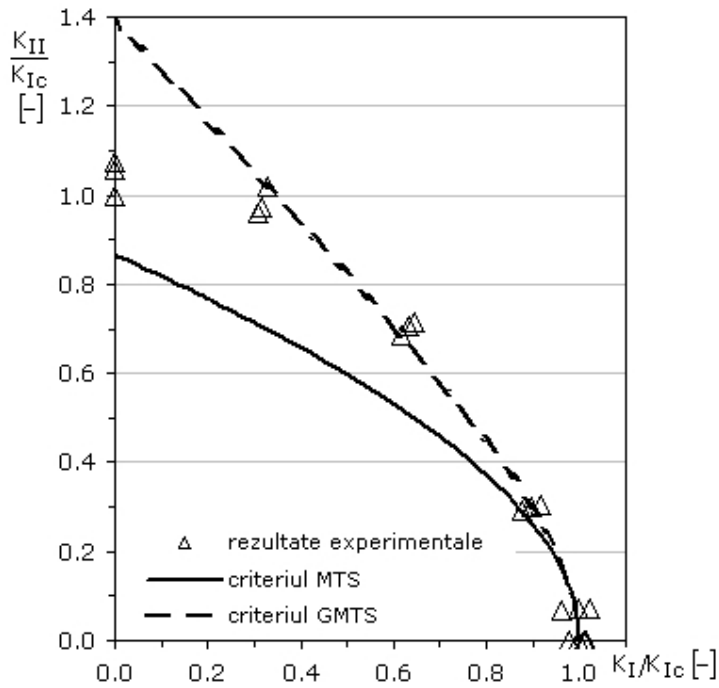


Fig. 3.14. Diagrama ruperii în modul mixt pe epruvete ASCB realizate din Necuron 1020

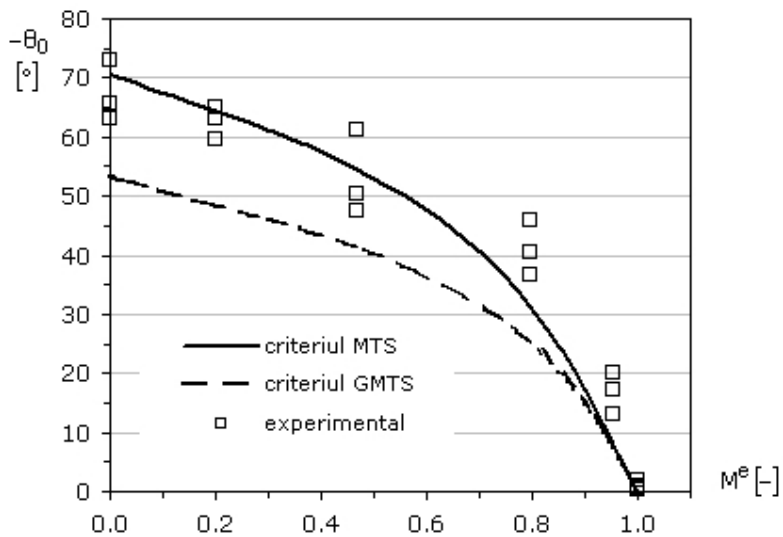


Fig. 3.15. Variația unghiului critic de inițiere la propagarea fisurii  $\theta_c$  cu parametrul  $M^e$

Din diagrama de rupere ilustrată în fig. 3.14, se constată că criteriul MTS subestimează semnificativ condițiile critice ale ruperii fragile în modul mixt, îndeosebi pentru cazurile de predominanță a modului II, unde conform rezultatelor din fig 3.13 tensiunile nesingulare  $T$  sunt negative și se majorează în valori absolute. Astfel, erorile medii relative sunt cuprinse în intervalul  $+20.28\% \dots + 32.34\%$  pentru  $M^e \leq 0.466$ .

În fig. 3.14 este reprezentată și diagrama de rupere estimată pe baza criteriului GMTS, pentru valoarea distanței critice  $r_c = 0.34 [mm]$ . Erorile relative pentru estimarea condițiilor critice ale ruperii fragile în modul mixt sunt cuprinse în intervalul  $-2.60\% \dots + 3.53\%$ , pentru  $M^e > 0.199$ . Pentru valori mai mici ale parametrului  $M^e$  erorile de estimare devin importante, pentru modul II eroarea relativă medie fiind egală cu  $32.87\%$ . În concluzie, aplicarea criteriului GMTS îmbunătățește sensibil estimările condițiilor de rupere pentru  $M^e > 0.199$ , dar erorile sunt importante pentru situațiile de predominanță a modului II.

În fig. 2.13 sunt prezentate câteva dintre epruvetele ASCB realizate din Necuron 1020, rupte în modul mixt I+II. Se observă că propagarea fisurii se produce în afara planului fisurii inițiale pentru toate combinațiile între modul I și II, cu excepția cazului de solicitare în modul I pur.

În domeniul de predominanță a modului II, criteriul MTS furnizează estimări rezonabile ale unghiului critic  $\theta_c$  de inițiere la propagarea fisurii. Astfel, pentru modul II de solicitare, estimarea criteriului MTS pentru unghiul critic este  $\theta_0 = -70.5 [^\circ]$ , din încercările experimentale rezultând o valoare medie  $\theta_0 = -67.29 [^\circ]$ , adică o eroare relativă de  $-5.2\%$ . Estimările nu sunt îmbunătățite prin considerarea tensiunilor nesingulare  $T$ . Astfel, pentru  $r_c = 0.34 [mm]$ , estimarea criteriului GMTS devine  $\theta_0 = -53.31 [^\circ]$ , adică o eroare relativă de  $20.6\%$ , pentru modul II de solicitare. Cum valorile măsurate pentru unghiul  $\theta_0$  depind sensibil de distanța critică  $r_c$  la care măsurătorile sunt efectuate, erorile sunt parțial explicate și de acest factor.

Pentru poliuretanul rigid Necuron 651, distanța critică  $r_c$  se determină din:

$$r_c = \frac{L}{2} = \frac{1}{2n} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_r} \right)^2 = 0.52 [mm] ,$$

unde  $K_{IC} = 1.0 [MPa\sqrt{m}]$  și  $\sigma_r = 17.40 [MPa]$ , determinate în capitolul 2.

Din analiza rezultatelor experimentale obținute pe epruvetele ASCB pentru Necuron 651 (prezentate în tab. 3.2) rezultă o valoare medie a factorului critic de intensitate a tensiunii  $K_{IC} = 1.253 [MPa\sqrt{m}]$ , valoare superioară cu aproximativ  $25\%$  celei determinate pe epruvete standard de încovoiere în trei puncte  $K_{IC} = 1.0 [MPa\sqrt{m}]$  (ASTM D 5045-99). Pentru valoarea medie a factorului critic de intensitate a tensiunii în modul II, și anume  $K_{IIC} = 1.376 [MPa\sqrt{m}]$ , rezultă un raport  $K_{IIC}/K_{IC} = 1.10$  superior predicției după criteriul MTS.

Și pentru Necuron 651 criteriul MTS subestimează semnificativ condițiile critice ale ruperii fragile în modul mixt, îndeosebi pentru cazurile de predominanță a modului II (fig.3.16). Astfel, erorile relative medii sunt cuprinse în intervalul  $-1.66\%...+35.71\%$  pentru  $1 \geq M^e \geq 0$ .

Tabel 3.2 Rezultatele testelor pe epruvete ASCB (Necuron 651)

$S_2/R [-]$	$F_{Cr} [N]$	$K_I [MPa \sqrt{m}]$	$K_{II} [MPa \sqrt{m}]$	$M^e [-]$	$-\theta_0 [^\circ]$
0.75	1160	1.249	0	1	0.8
0.75	1140	1.228	0	1	1.2
0.75	1190	1.282	0	1	0.5
0.5	1580	1.274	0.090	0.955	11.6
0.5	1625	1.310	0.092	0.955	20.9
0.5	1545	1.246	0.088	0.955	17.5
0.3	2360	1.132	0.376	0.795	29.1
0.3	2435	1.168	0.388	0.795	31.7
0.3	2210	1.060	0.352	0.795	33.5
0.2	3060	0.764	0.848	0.467	51.0
0.2	2990	0.747	0.829	0.467	46.1
0.2	3020	0.754	0.837	0.467	41.9
0.15	3160	0.370	1.145	0.199	63.3
0.15	3120	0.365	1.131	0.199	55.1
0.15	3090	0.362	1.120	0.199	52.1
0.108	2890	0	1.291	0	67.5
0.108	3200	0	1.429	0	57.5
0.108	3150	0	1.407	0	59.9

În fig. 3.16 este reprezentată și diagrama de rupere estimată pe baza criteriului MTS și GMTS, pentru valoarea distanței critice  $r_c = 0.52 [mm]$ . Erorile relative în estimarea condițiilor critice ale ruperii fragile în modul mixt sunt cuprinse în intervalul  $-3.06\%...+4.93\%$ , pentru  $M^e \geq 0.466$ . Pentru valori mai mici ale parametrului  $M^e$  erorile de estimare devin importante:  $20.21\%$  pentru  $M^e = 0.199$  și  $41.43\%$  pentru  $M^e = 0.000$  (modul II pur). În concluzie, aplicarea criteriului GMTS nu îmbunătățește sensibil estimările condițiilor de rupere pentru poliuretanul rigid Necuron 651.

Estimările criteriilor MTS și GMTS pentru unghiul critic  $\theta_c$  de inițiere la propagarea fisurii sunt în concordanță cu măsurătorile experimentale (fig.3.17).

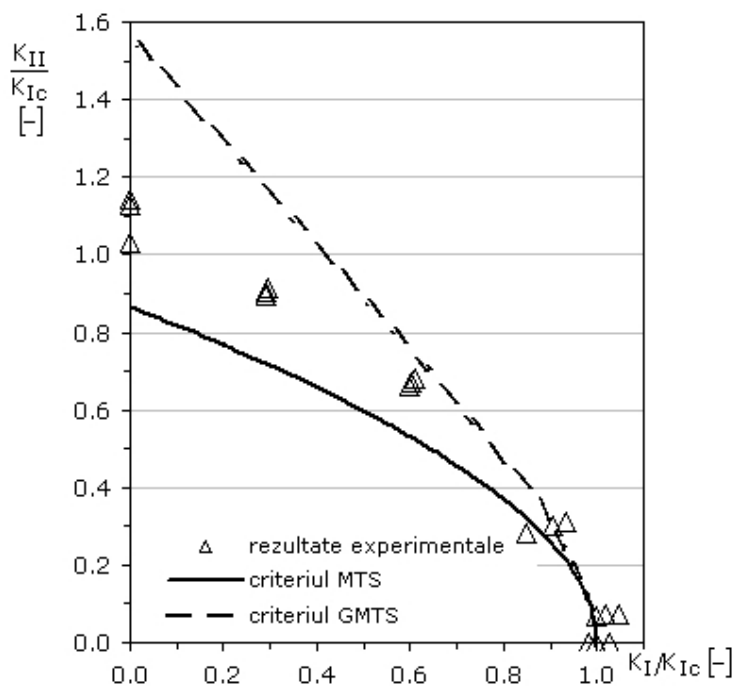


Fig. 3.16. Diagrama ruperii în modul mixt pe epruvete ASCB realizate din Necuron 651

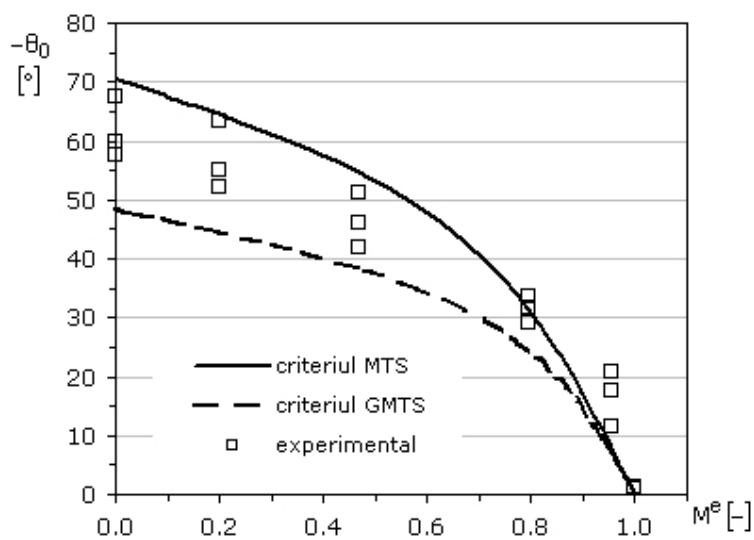


Fig. 3.17. Variația unghiului critic de inițiere la propagarea fisurii  $\theta_c$  cu parametrul  $M^e$

Pentru modul II de solicitare, estimarea criteriului MTS pentru unghiul de inițiere este  $\theta_0 = -70.5 [^\circ]$ , din încercările experimentale rezultând o valoare medie  $\theta_0 = -61.66 [^\circ]$ , adică o eroare relativă de  $-14.9\%$ . Estimarea criteriului GMTS este  $\theta_0 = -48.8 [^\circ]$ , eroarea relativă față de măsurătorile experimentale fiind de  $21.4\%$ .

Criteriul GMTS propus de Smith [2001], [2006], prin considerarea efectului tensiunilor nesingulare  $T$ , îmbunătățește estimarea condițiilor critice ale ruperii fragile pe epruvete ASCB în modul mixt pentru  $0.199 \leq M^e \leq 1$ , în comparație cu criteriul MTS. La dominanța modului II, pentru  $0 \leq M^e < 0.199$ , erorile sunt importante:  $K_{IIc}/K_{Ic} = 1.38$  în comparație cu rezultatul experimental  $K_{IIc}/K_{Ic} = 1.04$  pentru Necuron 1020, respectiv  $K_{IIc}/K_{Ic} = 1.55$  în comparație cu valoarea determinată experimental  $K_{IIc}/K_{Ic} = 1.10$  pentru Necuron 651.

Pentru epruvetele ASCB utilizate, tensiunile nesingulare negative pe întregul interval de testare  $0.1 \leq S_2/R \leq 0.75$ , respectiv  $0 \leq M^e \leq 1$ , produc o creștere a factorului critic de intensitate a tensiunii, astfel  $K_{IIc}/K_{Ic} = 1.04$  pentru Necuron 1020 și  $K_{IIc}/K_{Ic} = 1.10$  pentru Necuron 651. Un rezultat asemănător este obținut și de Ayatollahi [2011]: pentru materialele cu o distanță critică  $r_c$  mai mare se obține o valoare  $K_{IIc}$  superioară, efectul tensiunilor nesingulare  $T$  fiind mai pronunțat pentru astfel de materiale (marmură, granit). Valorile factorului critic de intensitate a tensiunii  $K_{IIc}$  determinate experimental pe epruvete ASCB, în prezența unui câmp al tensiunilor nesingulare  $T$  negative, se utilizează cu precauție în evaluarea ruperii componentelor cu fisuri, și doar după analiza câmpului tensiunilor din zona de la vârful fisurii. Existența unui câmp al tensiunilor nesingulare  $T$  pozitive, pentru o geometrie și mod de solicitare diferite de cele pentru care s-au făcut determinările experimentale, produce o reducere aparentă a factorului critic de intensitate a tensiunii  $K_{IIc}$ .

Prezența tensiunilor nesingulare  $T$  în zona de la vârful fisurii influențează și valoarea unghiului critic  $\theta_0$ . Pentru epruvetele analizate ASCB are loc, în valori absolute, o reducere a unghiului de inițiere la propagarea fisurii.

### 3.2.4. Estimarea forței critice de rupere pentru epruvetele ASCB

Conform celei de-a doua ipoteze a criteriului MTS, respectiv GMTS, propagarea fisurii se produce pe direcția radială de unghi  $\theta_0$ , atunci când tensiunea circumferențială maximă la o distanță critică  $r_c$  atinge valoarea critică  $\sigma_c$ . Cele două mărimi sunt considerate proprietăți de material, cu  $\sigma_c = \sigma_r$  și  $r_c$  determinată cu relația (3.34). După criteriul MTS, dacă se introduce în (3.4) expresiile (3.29), se determină forța critică  $F_{cr}$  la rupere din relația

$$\sigma_c = \frac{F}{2Rt} \sqrt{\frac{a}{2r_c}} \left( Y_1 \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} Y_2 \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \theta_0 \right) , \quad (3.35)$$

pentru diferite valori ale parametrului dimensional  $M^e$ . O relația similară se obține și după criteriul GMTS, înlocuind în (3.10) expresiile (3.29) și (3.30):

$$\sigma_c = \frac{F}{2Rt} \left[ \sqrt{\frac{a}{2r_c}} \left( Y_1 \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} Y_2 \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \theta_0 \right) + T^* \sin^2 \theta_0 \right] . \quad (3.36)$$

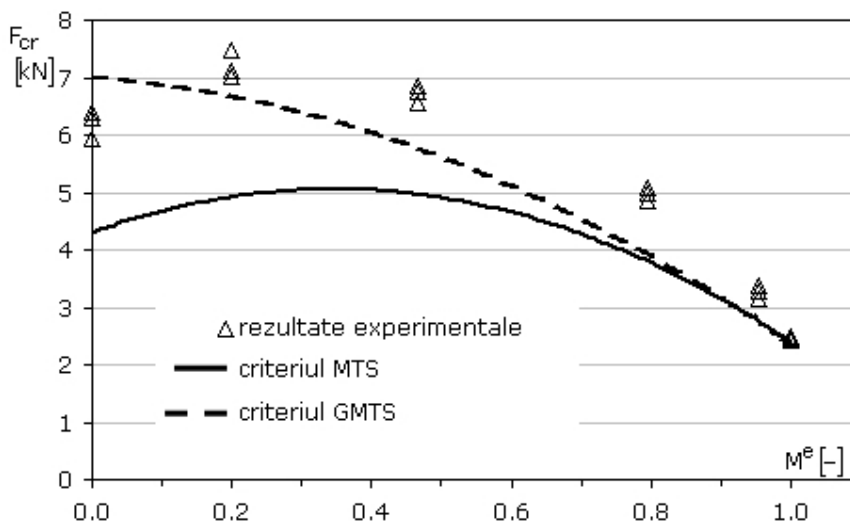


Fig. 3.18. Variația  $F_{Cr}$  de rupere a epruvetelor ASCB în modul mixt (Necuron 1020)

Pentru Necuron 1020, în tabelul 3.3 sunt prezentate rezultatele experimentale pentru forța critică  $F_{Cr}$  medie, împreună cu estimările după criteriile MTS și GMTS. Variația forței critice după criteriile MTS și GMTS comparativ cu rezultatele experimentale este redată în fig. 3.18, pentru  $\sigma_r = 49.75 [MPa]$  și  $r_c = 0.34 [mm]$ .

Tabel 3.3 Estimarea forței critice pentru epruvetele ASCB (Necuron 1020)

$M^e$ [-]	$F_{Cr}$ [N] rezultate experimentale	$F_{Cr}$ [N] estimare MTS	Eroare relativă [%]	$F_{Cr}$ [N] estimare GMTS	Eroare relativă [%]
1.000	2465	2134	-13.4	2134	-13.4
0.955	3273	2829	-13.5	2831	-13.5
0.795	4963	4192	-15.5	4303	-13.3
0.467	6713	4821	-28.2	5662	-15.6
0.199	7206	4730	-34.3	6458	-10.4
0.000	6201	4455	-28.1	7154	+15.3



Rezultatele experimentale și predicțiile după criteriile MTS și GMTS, pentru Necuron 651, sunt prezentate în tabelul 3.4 și ilustrate în fig.3.19, cu  $\sigma_r = 17.40 [MPa]$  și  $r_c = 0.52 [mm]$ .

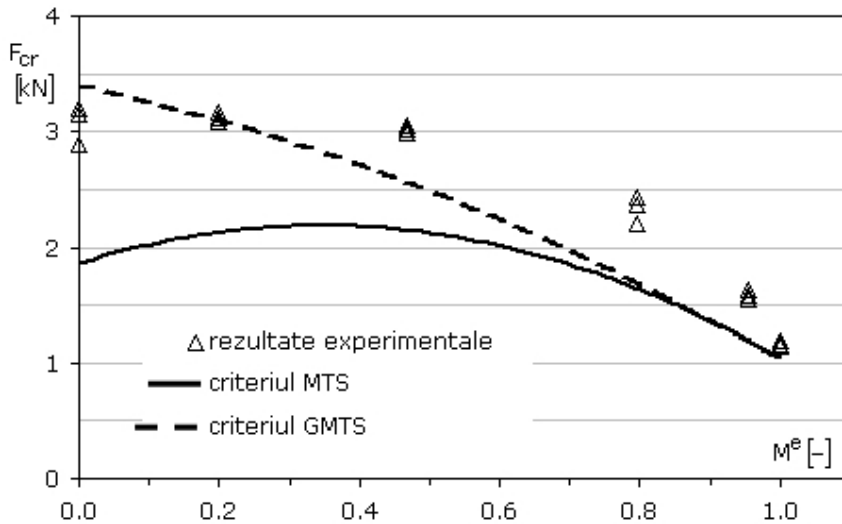


Fig. 3.19. Variația  $F_{Cr}$  de rupere a epruvetelor ASCB în modul mixt (Necuron 651)

Tabel 3.4 Estimarea forței critice pentru epruvetele ASCB (Necuron 651)

$M^e [-]$	$F_{Cr} [N]$ rezultate experimentale	$F_{Cr} [N]$ estimare MTS	Eroare relativă [%]	$F_{Cr} [N]$ estimare GMTS	Eroare relativă [%]
1.000	1163	923	-20.6	923	-20.6
0.955	1583	1224	-22.7	1225	-22.6
0.795	2335	1813	-22.3	1871	-19.8
0.467	3023	2085	-31.0	2527	-16.4
0.199	3123	2046	-34.5	2987	-4.3
0.000	3080	1927	-37.4	3475	+12.8

Pentru modul I și pentru modul mixt, la predominanța modului I, estimările celor două criterii sunt comparabile, iar erorile relative față de rezultatele experimentale sunt aprox.  $-13.5 [ \% ]$  pentru Necuron 1020 și respectiv  $-20 [ \% ]$  pentru Necuron 651.

Criteriul MTS introduce erori relative ridicate în estimarea forței critice de rupere fragilă în modul mixt, la predominanța modului II, aprox.  $-28.2.. -34.3 [ \% ]$  pentru Necuron 1020 și respectiv  $-31.0.. -37.4 [ \% ]$  pentru Necuron 651. În schimb,

estimările după criteriul GMTS sunt mai exacte, cu erori relative în intervalul  $-10.4..+15.3[\%]$  pentru Necuron 1020 și respectiv  $-16.4..+12.8[\%]$  pentru Necuron 651.

Prin considerarea efectului tensiunilor nesingulare  $T$ , criteriul GMTS permite estimarea cu suficientă precizie pentru aplicațiile ingineresti a forței critice de rupere fragilă în modul mixt pentru componentele realizate din materialele poliuretanic Necuron 1020 și Necuron 651.

### 3.3. Evaluarea ruperii fragile pe epruvete de încovoiere în trei puncte (SENB) cu creștătură laterală în formă de U

#### 3.3.1. Criteriul UMTS

În cazul concentratorilor nesingulari de tipul creștătură laterală în formă de U, pentru care  $2a = 0$ ,  $r_0 = \rho/2$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$  și  $\mu_1 = \mu_2 = -0.5$ , expresia (3.23) a tensiunii circumferențiale  $\sigma_\theta$  se simplifică după cum urmează:

$$\sigma_\theta = \frac{K_I^U}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ \left( \frac{3}{2} + \frac{\rho}{r} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}^U}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ \left( \frac{3}{2} - \frac{\rho}{r} \right) \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.37)$$

iar ecuația (3.24) din care se determină unghiul  $\theta_0$  de inițiere a ruperii devine:

$$-K_I^U \left[ \left( \frac{3}{4} + \frac{\rho}{2r_c} \right) \sin \frac{\theta_0}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta_0}{2} \right] + K_{II}^U \left[ \left( \frac{3}{4} - \frac{\rho}{2r_c} \right) \cos \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{4} \cos \frac{3\theta_0}{2} \right] = 0 \quad (3.38)$$

demonstrând dependența acestuia de raza la vârful creștăturii  $\rho$  și de distanța critică  $r_c$ , măsurată în sistemul de coordonate polare, Ayatollahi [2009a], [2010].

Cea de-a doua ipoteză a criteriului UMTS, și anume ecuația (3.25) care determină condițiile ruperii în modul mixt I+II, se transformă după cum urmează

$$\sigma_c = \frac{K_I^U}{2\sqrt{2\pi r_c}} \left[ \left( \frac{3}{2} + \frac{\rho}{r_c} \right) \cos \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta_0}{2} \right] + \frac{K_{II}^U}{2\sqrt{2\pi r_c}} \left[ \left( \frac{3}{2} - \frac{\rho}{r_c} \right) \sin \frac{\theta_0}{2} + \frac{3}{2} \sin \frac{3\theta_0}{2} \right], \quad (3.39)$$

relație care pentru modul I, exprimă tensiunea critică  $\sigma_c$  în funcție de valoarea critică  $K_{Ic}^U$ , rezultând:

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}^U}{2\sqrt{2\pi r_c}} \left( 2 + \frac{\rho}{r_c} \right). \quad (3.40)$$

Dacă se introduce (3.40) în (3.39) rezultă ecuația care determină condițiile ruperii în modul mixt, exprimată utilizând valoarea critică a factorului de intensitate a tensiunii  $K_{Ic}^U$ :

$$K_{Ic}^U \left( 2 + \frac{\rho}{r_c} \right) = K_I^U \left[ \left( \frac{3}{2} + \frac{\rho}{r_c} \right) \cos \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta_0}{2} \right] + K_{II}^U \left[ \left( \frac{3}{2} - \frac{\rho}{r_c} \right) \sin \frac{\theta_0}{2} + \frac{3}{2} \sin \frac{3\theta_0}{2} \right], \quad (3.41)$$

cu valoarea  $K_{Ic}^U$  determinată experimental, Gómez [2004]:

$$K_{Ic}^U = K_I^U(F_1) \frac{F_{max}}{F_1} \quad . \quad (3.42)$$

În relația (3.42) factorul de intensitate a tensiunii  $K_I^U$  pentru creștătură se determină la o valoare arbitrară  $F_1$  a forței, iar valoarea critică  $K_{Ic}^U$  se obține pentru forța maximă  $F_{max}$  înregistrată experimental.

Cu valorile determinate experimental pentru  $K_{Ic}^U$  și  $\sigma_c$  se obține din (3.40) relația de calcul a distanței critice  $r_c$ , Ayatollahi [2009a]:

$$\left(4r_c^2 + \rho^2 + 4\rho r_c\right) \left(\frac{K_{Ic}^U}{\sigma_c}\right)^2 - 8\pi r_c^3 = 0 \quad , \quad (3.43)$$

unde pentru materialele fragile  $\sigma_c$  se consideră egală cu rezistența la rupere  $\sigma_r$  pentru întindere uniaxială. Cu distanța critică  $r_c$  astfel determinată, se trasează relativ simplu diagrama de rupere pentru creștătura în formă de U, adică variația  $K_{II}^U/K_{Ic}^U$  în funcție de  $K_I^U/K_{Ic}^U$ .

Parametrul adimensional  $M^e$  introdus de Shih [1974] prin relația (3.7) pentru a caracteriza combinația între modul I și modul II pentru modul mixt de sollicitare în cazul componentelor cu fisuri:

$$M^e = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{K_I^U}{K_{II}^U}\right) \quad (3.44)$$

devine în cazul creștăturilor U, Ayatollahi [2009a]:

$$M^e = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{K_I^U}{K_{II}^U}\right) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{\rho}{2r_c}\right) \cos \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{4} \cos \frac{3\theta_0}{2}}{\left(\frac{3}{4} + \frac{\rho}{2r_c}\right) \sin \frac{\theta_0}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta_0}{2}}\right) \quad . \quad (3.45)$$

Relația (3.45) permite, ca alternativă la ecuația (3.38), determinarea unghiului  $\theta_0$  de inițiere a rupei pentru o anumită combinația între modul I și modul II.

### 3.3.2. Determinarea factorilor de intensitate a tensiunii $K_I^U$ și $K_{II}^U$ pentru epruvete SENB cu creștătură U

Dimensiunile geometrice ale epruvetelor SENB testate la încovoiere în trei puncte, realizate din Necuron 1020, sunt redate în fig. 2.6a) și fig. 2.6b), iar rezultatele experimentale sunt prezentate în tabelul 2.5.

În fig. 3.20 este prezentat unul dintre modelele cu elemente finite pentru raza la vârful creștăturii  $\rho = 1[mm]$ , realizat în pachetul software CosmosM 2.9. În zona concentratorului de tensiune s-a generat o rețea fină de elemente finite,

utilizând un număr de 50 elemente finite pe o lungime de  $1[mm]$ , la un coeficient de spațiere egal cu 5. În final, discretizarea întregului domeniu plan s-a realizat cu un număr total de 98140 elemente finite izoparametrice plane și 296133 noduri. La o grosime a epruvetelor de  $t = 10[mm]$  modelarea s-a realizat în condițiile stării plane de deformare.

Pentru poliuretanul rigid Necuron 1020 următoarele proprietăți mecanice elastice au fost considerate în analiza liniar-elastică cu elemente finite: modulul de elasticitate longitudinal  $E = 3340[MPa]$  și coeficientul de contracție transversală  $\nu = 0.34$ .

Încovoierea în trei puncte a fost modelată impunând condițiile la limită: deplasările verticale ale nodurilor corespunzătoare suporturilor de rezemare  $u_y = 0$  și o forță  $F_y$  aplicată pe direcție verticală, la o distanță bine determinată de planul creștăturii, pentru a obține în modul mixt combinația dorită între modul I și II.

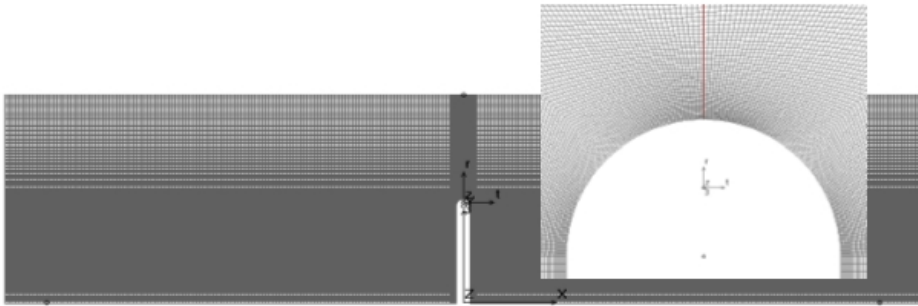


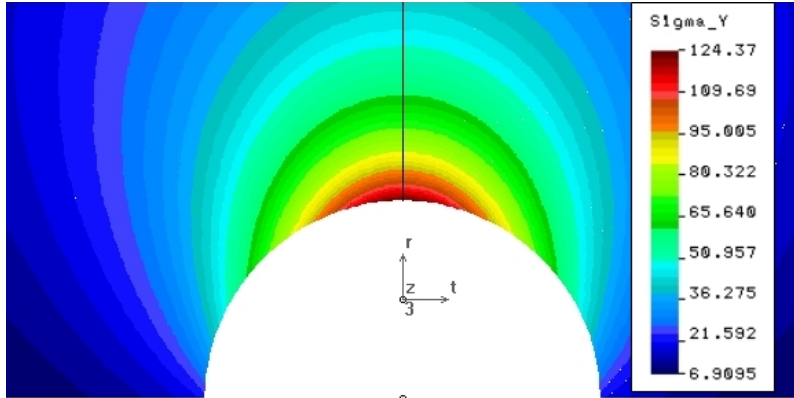
Fig. 3.20. Modelul cu elemente finite realizat în pachetul software CosmosM 2.9 (în detaliu este redată rețeaua de elemente finite în zona de la vârful creștăturii în formă de U)

Câmpul tensiunilor circumferențiale  $\sigma_\theta$  în zona de la vârful creștăturii U este ilustrat în fig. 3.21 pentru forța maximă medie înregistrată la ruperea epruvetelor și pentru raza la vârf  $\rho = 1[mm]$ .

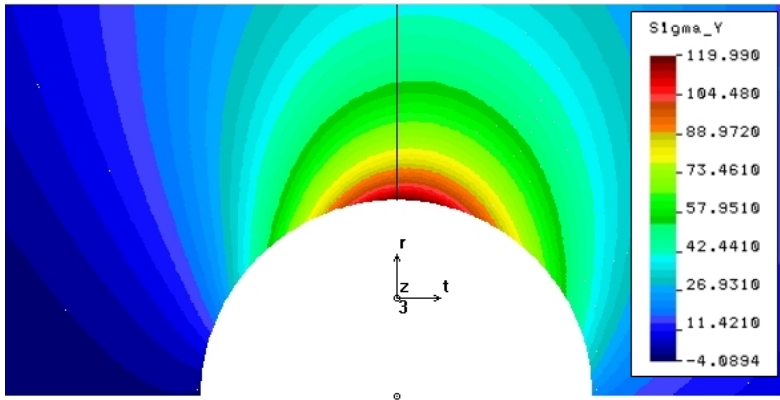
Forțele maxime medii înregistrate la ruperea epruvetelor pentru modul I de solicitare și pentru fiecare dintre cele patru raze  $\rho$  la vârful creștăturii au fost utilizate în analiza liniar elastică cu elemente finite pentru determinarea tensiunii circumferențiale  $\sigma_\theta(r = r_0, \theta = 0)$ , în condițiile prezentate anterior. În baza relației propuse de Filippi [2002] pentru modul I de solicitare:

$$K_{IC}^U = \sigma_{max} \sqrt{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda_1}}{1+\omega_1} = \sigma_{max} \sqrt{2\pi} \left( \frac{q-1}{q} \rho \right)^{1-\lambda_1}, \quad (3.45)$$

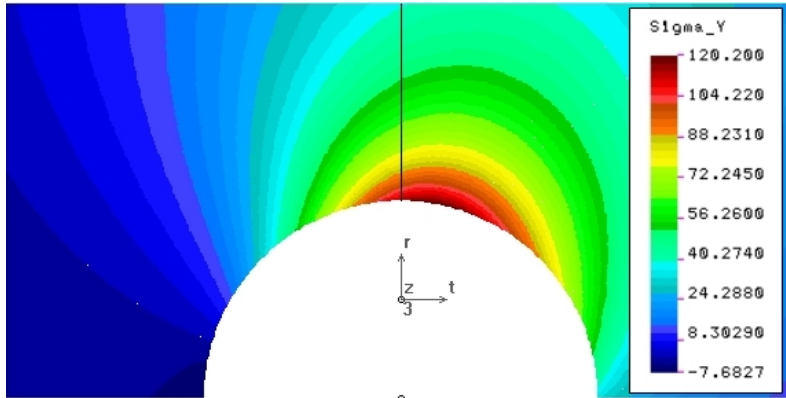
cu  $q = 2$ ,  $r_0 = \rho/2$ ,  $\lambda_1 = 0.5$ ,  $\omega_1 = 1$  pentru creștătura U și tensiunea principală maximă  $\sigma_{max} = \sigma_\theta(r = r_0, \theta = 0)$ , s-au determinat valorile critice ale factorului de intensitate a tensiunii  $K_{IC}^U$ , rezultatele fiind prezentate în tabelul 3.5.



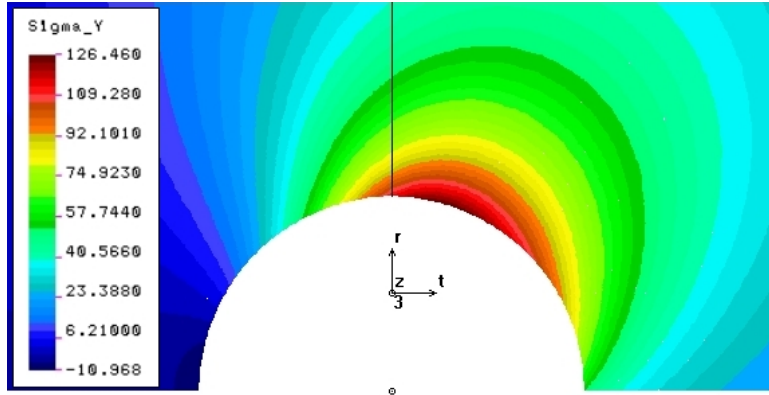
a).  $M^e = 1$  (modul I,  $S_1 = S_2 = 60 [mm]$ ,  $m = 0 [mm]$ )



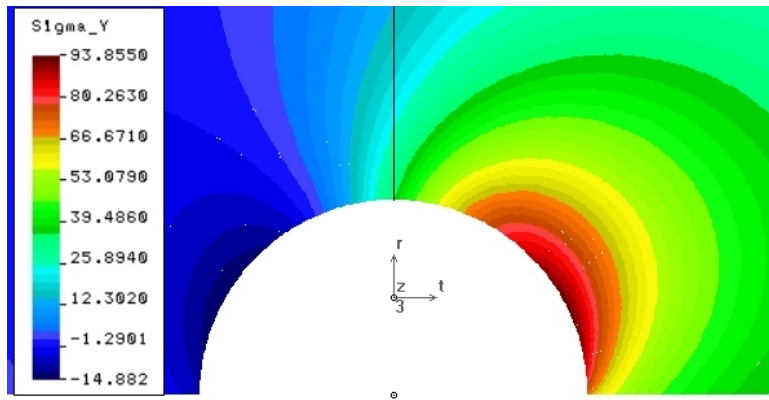
b).  $M^e = 0.870$  (modul mixt,  $S_1 = 60 [mm]$ ,  $S_2 = 12 [mm]$ ,  $m = -4 [mm]$ )



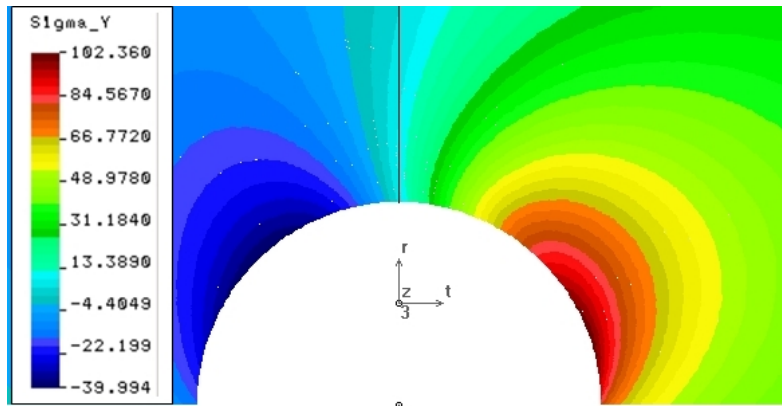
c).  $M^e = 0.658$  (modul mixt,  $S_1 = 60 [mm]$ ,  $S_2 = 12 [mm]$ ,  $m = 4 [mm]$ )



d).  $M^e = 0.550$  (modul mixt,  $S_1 = 60 [mm]$ ,  $S_2 = 12 [mm]$ ,  $m = 24 [mm]$ )



e).  $M^e = 0.218$  (modul mixt,  $S_1 = 60 [mm]$ ,  $S_2 = 12 [mm]$ ,  $m = 9 [mm]$ , U înclinat)



f).  $M^e = 0.042$  (modul mixt,  $S_1 = 60 [mm]$ ,  $S_2 = 8 [mm]$ ,  $m = 9 [mm]$ , U înclinat)

Fig. 3.21. Tensiunea circumferențială  $\sigma_\theta$  în zona de la vârful creștăturii pentru  $\rho = 1 [mm]$

Extrapolarea rezultatelor experimentale obținute pentru factorul critic de intensitate a tensiunii  $K_{IC}^U$  pentru creștătura U (fig. 3.22) permite în cazul fisurii , adică pentru  $\rho = 0 [mm]$ , determinarea valorii critice  $K_{IC} = 2.24 [MPa\sqrt{m}]$  . Aceasta este cu aproximativ 2.6[%] mai mică decât valoarea determinată experimental pe epruvete SENB standardizate.

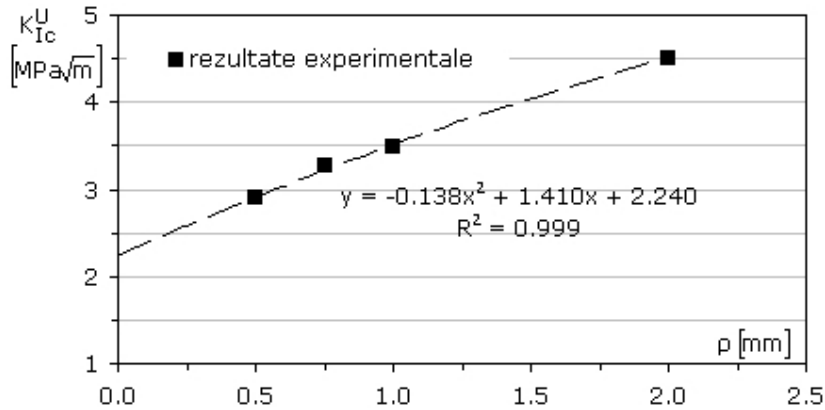


Fig. 3.22. Variația  $K_{IC}^U$  în funcție de  $\rho$  pentru epruvete SENB (Necuron 1020)

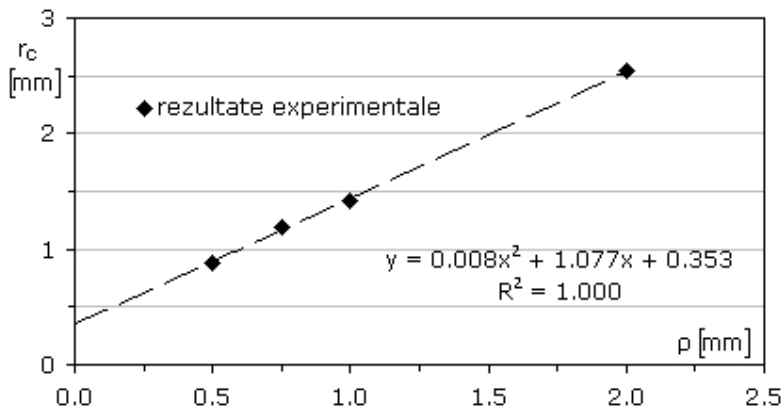


Fig. 3.23. Variația  $r_c$  în funcție de  $\rho$  pentru epruvete SENB (Necuron 1020)

De asemenea în tabelul 3.5 sunt prezentate și valorile distanței critice  $r_c$  determinate din ecuația (3.43) pentru fiecare dintre cele patru raze  $\rho$  la vârful creștăturii, luând pentru poliuretanul rigid Necuron 1020 tensiunea critică  $\sigma_c$  egală



cu rezistența la întindere uniaxială  $\sigma_c = \sigma_r = 49.75 [MPa]$ . O eroare relativă de același ordin de mărime  $+ 3.8 [\%]$  se obține prin extrapolarea rezultatelor și pentru raza critică  $r_c$  ( $r_c = 0.34 [mm]$ ) determinată pe epruvete ASCB cu fisură). Ayatollahi [2010] denumește parametrul  $r_c$  ca distanță critică pentru creștătura U și conform relației (3.43) depinde de raza la vârf  $\rho$ , fiind un parametru dependent de geometria creștăturii și nu o constantă de material.

În cazul solicitării în modul mixt, factorii de intensitate a tensiunii  $K_I^U$  și  $K_{II}^U$  pentru creștătura U s-au determinat după relațiile propuse de Lazzarin [2006]:

$$K_{IC}^U = \sqrt{2\pi r}^{1-\lambda_1} \frac{(\sigma_\theta)_{\theta=0}}{1 + \omega_1 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1 - \lambda_1}}, \quad K_{IIc}^U = \sqrt{2\pi r}^{1-\lambda_2} \frac{(\tau_{r\theta})_{\theta=0}}{1 + \omega_2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2 - \lambda_2}} \quad (3.46)$$

unde  $\sigma_\theta$  și  $\tau_{r\theta}$  sunt tensiunile la distanța  $r$  măsurată în sistemul de coordonate local (a cărui origine este situată la distanța  $r_0$  față de vârful creștăturii, fig.1.3).

Deoarece expresiile propuse de Filippi [2002] pentru a descrie câmpul tensiunilor în vecinătatea vârfului concentratorilor nesingulari sunt aproximative, relațiile (3.46) nu produc valori constante pentru factorii  $K_I^U$  și  $K_{II}^U$ , acestea prezentând o ușoară variabilitate pe lungimea de  $1/10$  din adâncimea creștăturii U, așa cum se observă și din fig.3.24 și 3.25. Pentru a elimina influența distanței  $r$ , Lazzarin [2006] propune determinarea valorilor factorilor  $K_I^U$  și  $K_{II}^U$  printr-o mediere a rezultatelor pe lungimea  $\eta\rho$ , cu  $\eta = 0.4$  pentru un efect slab de concentrare a tensiunilor. Mediarea se realizează după relațiile următoare :

$$\bar{K}_I^U = \frac{1}{\eta\rho} \int_{r_0}^{r_0 + \eta\rho} (K_I^U) dr, \quad \bar{K}_{II}^U = \frac{1}{\eta\rho} \int_{r_0}^{r_0 + \eta\rho} (K_{II}^U) dr \quad (3.47)$$

utilizate în continuare în estimarea valorilor  $K_I^U$  și  $K_{II}^U$ , rezultatele fiind prezentate în tabelul 3.6, pentru fiecare dintre cele patru raze  $\rho$  la vârful creștăturii.

Tabel 3.5 Valorile  $K_{IC}^U$  și  $r_c$  în funcție de raza  $\rho$  (Necuron 1020)

$\rho [mm]$	0.0	0.5	0.75	1.0	2.0
$K_{IC}^U [MPa\sqrt{m}]$	2.240 <sup>*)</sup>	2.893	3.262	3.486	4.510
$r_c [mm]$	0.353 <sup>*)</sup>	0.88523	1.18551	1.42582	2.54054

<sup>\*)</sup> valori determinate prin extrapolarea după rezultatelor experimentale (în acest scop s-a admis că variația mărimilor urmează o funcție de gradul doi)

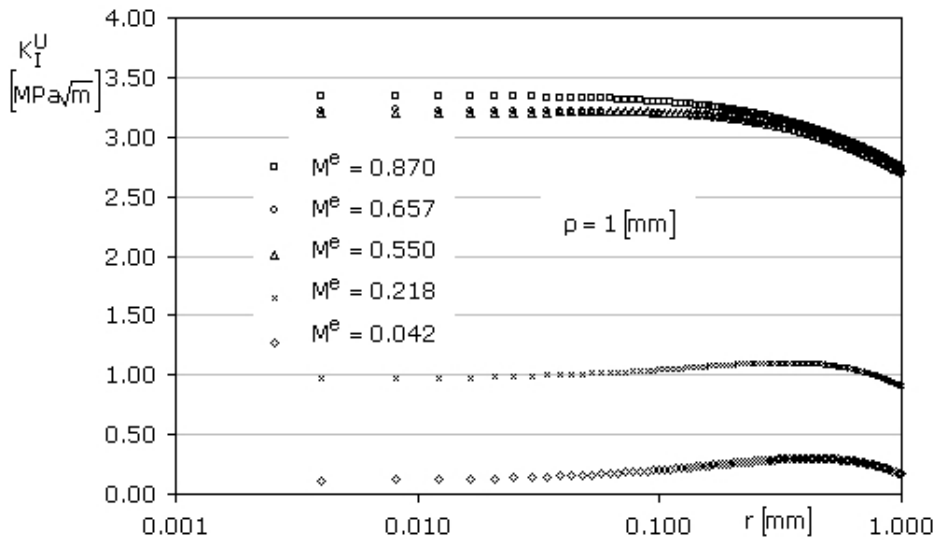


Fig. 3.24. Variația factorului de intensitate a tensiunii  $K_I^U$  în funcție de distanța  $r$  de la vârful creștăturii (în coordonate semi-logaritmice)

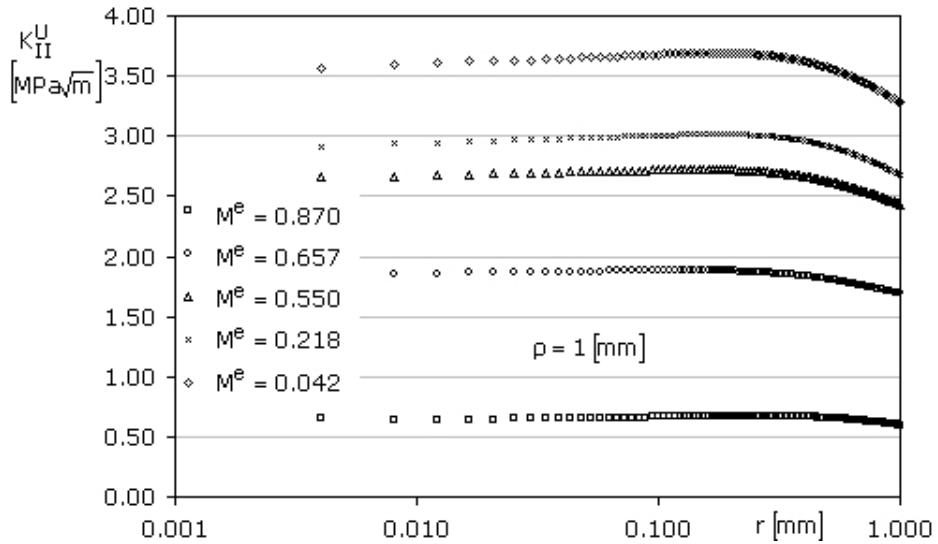


Fig. 3.25. Variația factorului de intensitate a tensiunii  $K_{II}^U$  în funcție de distanța  $r$  de la vârful creștăturii (în coordonate semi-logaritmice)

Tabel 3.6 Rezultatele analizei cu MEF pe epruvete SENB (Necuron 1020)

$\rho$ [mm]	$M^e$ [-]	$F_{cr}$ [N]	$\bar{K}_I^U$ [MPa $\sqrt{m}$ ]	$\bar{K}_{II}^U$ [MPa $\sqrt{m}$ ]	
0.50	1.000	437	2.870	0.000	
		444	2.916	0.000	
	0.870	1780	2.659	0.550	
		1770	2.644	0.547	
	0.683	1200	2.527	1.374	
		1260	2.653	1.443	
	0.576	1970	2.748	2.161	
		1810	2.525	1.985	
	0.252	1340	1.025	2.452	
		1390	1.064	2.544	
	0.042	1740	0.190	2.911	
		1920	0.210	3.212	
	0.75	1.000	489	3.252	0.000
			492	3.272	0.000
0.870		2030	3.063	0.633	
		1940	2.927	0.605	
0.670		1390	2.952	1.684	
		1400	2.973	1.696	
0.562		2110	2.954	2.428	
		2190	3.066	2.520	
0.238		1500	1.105	2.813	
		1430	1.053	2.682	
0.033		2010	0.179	3.458	
		2150	0.192	3.699	
1.00		1.000	533	3.587	0.000
			503	3.385	0.000
	0.870	2170	3.300	0.681	
		2070	3.148	0.649	
	0.658	1480	3.164	1.885	
		1450	3.100	1.847	
	0.550	2330	3.268	2.797	
		2150	3.016	2.581	
	0.218	1520	1.018	2.888	
		1580	1.058	3.002	
	0.038	2140	0.229	3.779	
		2080	0.223	3.673	

2.00	1.000	612	4.313	0.000
		668	4.707	0.000
	0.873	2550	3.987	0.806
		2590	4.050	0.818
	0.616	1900	4.164	2.871
		1820	3.989	2.750
	0.506	2640	3.740	3.664
		2820	3.995	3.913
	0.156	1660	0.845	3.369
		1730	0.881	3.511
	0.027	2130	0.174	4.117
		2200	0.180	4.252

### 3.3.3. Analiza rezultatelor experimentale pe baza criteriului UMTS

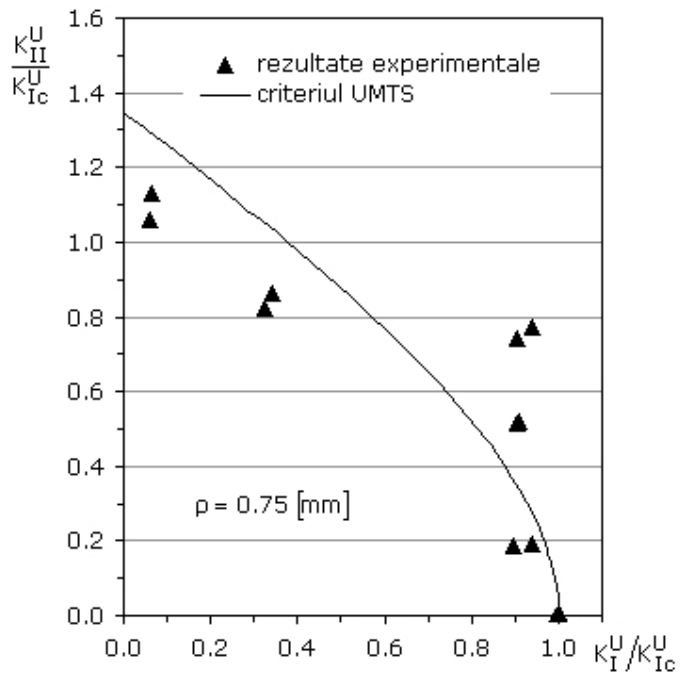
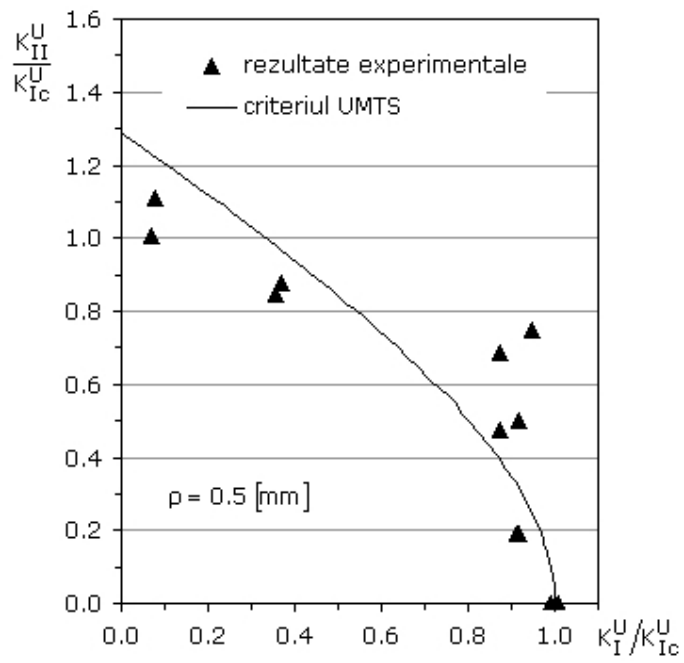
Cu valorile determinate pentru  $K_{IC}^U$  și  $r_c$  trasarea diagramei de rupere după criteriul UMTS presupune parcurgerea următoarelor etape (Ayatollahi [2009a] și [2010a]):

- se alege o valoare arbitrară pentru parametrul adimensional  $M^e$  în domeniul  $[0, 1]$ ;
- se înlocuiește această valoare în (3.45) și se rezolvă ecuația obținută pentru determinarea unghiului  $\theta_0$  de inițiere a ruperii;
- pentru soluția  $\theta_0$  se rezolvă sistemul de ecuații (3.41) și (3.44) în necunoscutele  $K_I^U/K_{IC}^U$  și  $K_{II}^U/K_{IC}^U$ .

Diagrama de rupere se trasează repetând acest algoritm pentru un număr suficient de mare de valori ale parametrului  $M^e$ . În mod implicit, se obține și diagrama de variație a unghiului  $\theta_0$  de inițiere a ruperii în funcție de parametrul adimensional  $M^e$ .

Din diagramele de rupere prezentate în fig.3.26 și diagramele de variație a unghiului  $\theta_0$  cu parametrul  $M^e$  ilustrate în fig. 3.27, pentru fiecare dintre cele patru valori ale razei  $\rho$  la vârful creștăturii, se desprind următoarele observații:

- la  $M^e = 0$ , adică pentru modul II de solicitare, după criteriul UMTS raportul  $K_{II}^U/K_{IC}^U$  depinde de raza la vârful creștăturii, majorându-se de la  $K_{II}^U/K_{IC}^U = 1.288$  pentru  $\rho = 0.5 [mm]$  la valoarea  $K_{II}^U/K_{IC}^U = 1.490$  pentru raza  $\rho = 2 [mm]$ ;
- după criteriul UMTS, unghiul de inițiere a ruperii  $\theta_0$  pentru modul II scade cu majorarea razei la vârful creștăturii, de la  $\theta_{0\max} = 66.69 [^\circ]$  pentru  $\rho = 0.5 [mm]$  la valoarea  $\theta_{0\max} = 65.09 [^\circ]$  pentru  $\rho = 2 [mm]$ .



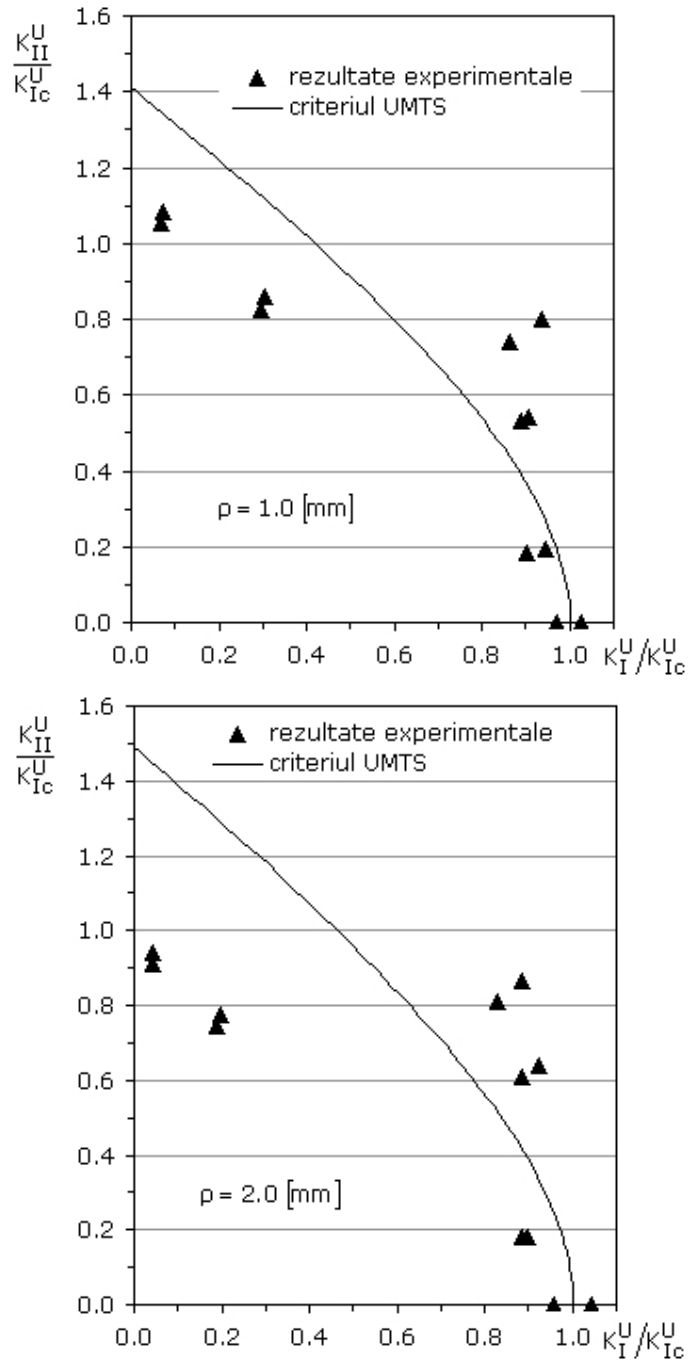
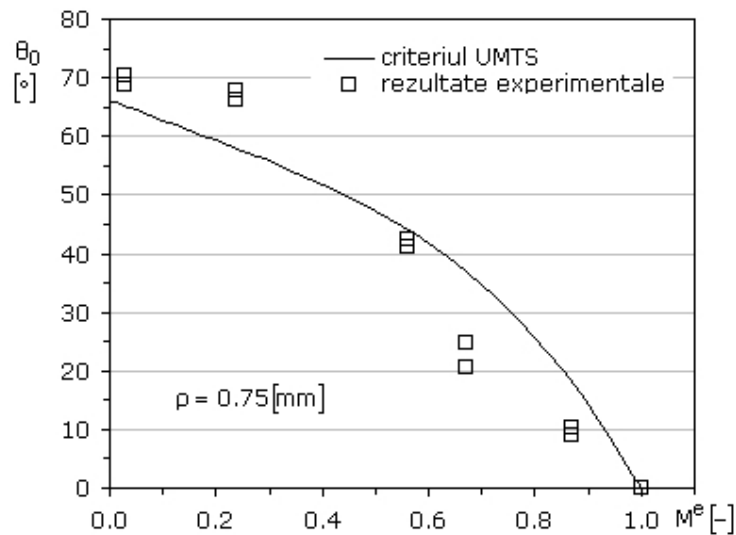
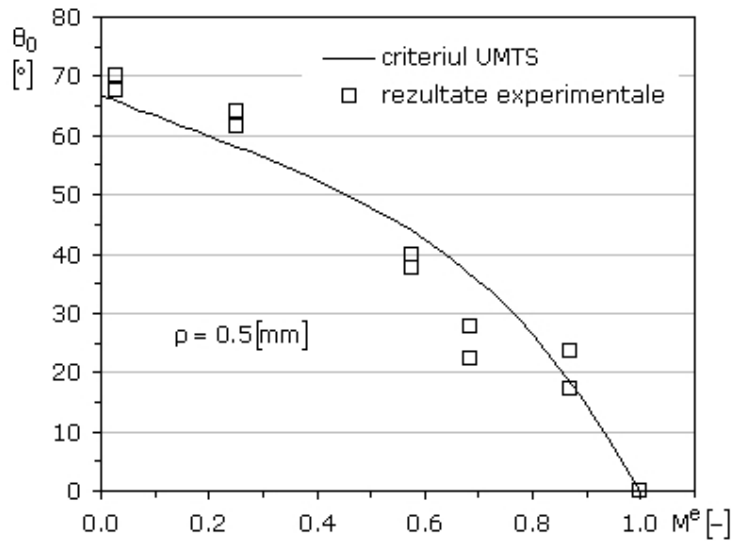


Fig. 3.26. Diagramele de rupere pentru epruvetele SENB cu creștătură U (Necuron 1020)

În cazul concentratorilor de tensiune de tipul fisurilor, conform criteriului MTS, raportul factorului critic de intensitate a tensiunii  $K_{IIc}/K_{Ic} = 0.866$  și unghiul de inițiere la propagarea fisurii  $\theta_0 = -70.5 [^\circ]$  pentru modul II sunt constanți. După cum rezultă din observațiile precedente, prin extensia criteriului MTS la problema concentratorilor nesingulari de tensiune, constanța parametrilor  $K_{IIc}/K_{Ic}$  și  $\theta_0$  nu se mai păstrează. În cazul creșterii de tip U, valorile critice depind de raza  $\rho$  la vârful concentratorului de tensiune, de factorul critic de intensitate a tensiunii  $K_{Ic}^U$  și de rezistența la rupere  $\sigma_r$  (determinată la întindere uniformă uniaxială).



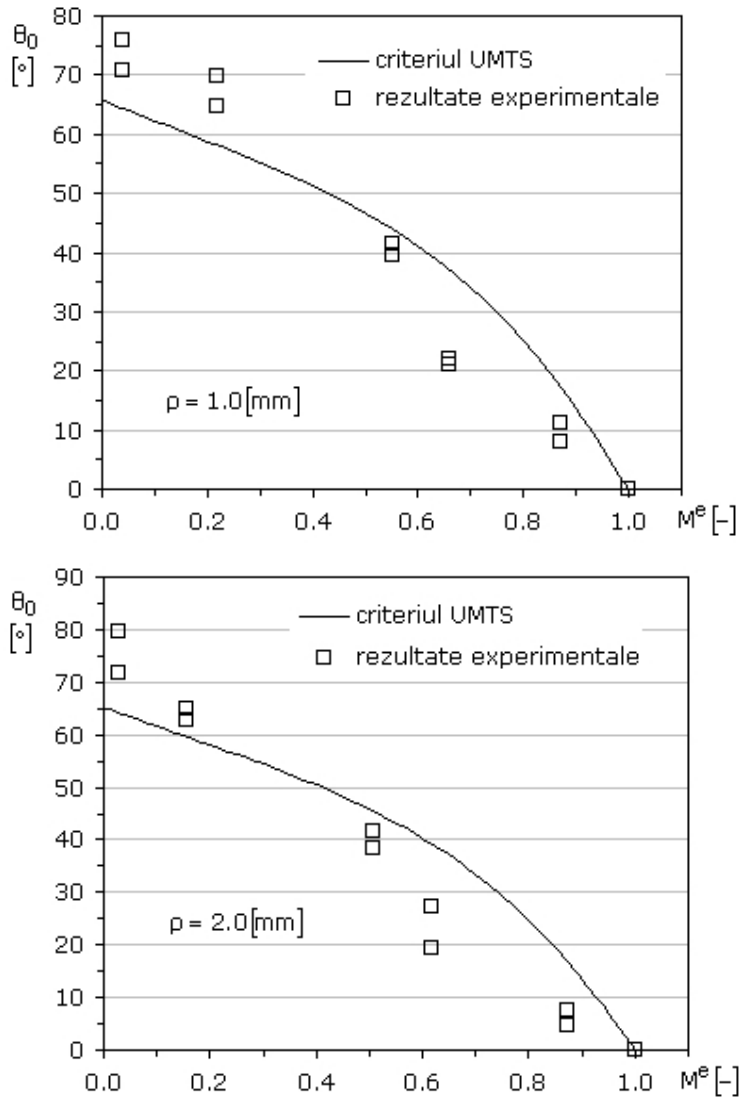


Fig. 3.27. Variația unghiului  $\theta_0$  cu parametrul  $M^e$  (epruvete SENB, Necuron 1020)

Pentru comparația cantitativă a rezultatelor experimentale cu estimările după criteriul UMTS, Ayatollahi [2009a] utilizează factorul efectiv de intensitate a tensiunii  $K_{ef}^U$ :

$$K_{ef}^U = \sqrt{(K_I^U)^2 + (K_{II}^U)^2} . \quad (3.48)$$



Din rezultatele prezentate în tab. 3.7 se observă că pentru  $\rho = 0.5 [mm]$ ,  $0.75 [mm]$  și  $1.0 [mm]$  erorile relative sunt acceptabile și sunt cuprinse în intervalul  $-26.70...+21.81[\%]$ , cu subevaluarea  $K_{ef}^U$  la  $M^e \cong 0.6...0.5$  și supraevaluarea tenacității la predominanța modului II, la  $M^e < 0.25$ . În schimb, pentru raza la vârful creștăturii  $\rho = 2.0 [mm]$  și situațiile de predominanță a modului II, criteriul UMTS supraevaluează factorul efectiv de intensitate a tensiunii  $K_{ef}^U$  cu mai mult de  $50[\%]$ . După cum se observă din variațiile ilustrate în fig. 3.27 și din rezultatele prezentate în tab. 3.7 pentru unghiul de inițiere  $\theta_0$ , erorile maxime între măsurătorile experimentale și estimările criteriului UMTS sunt extreme pentru  $M^e \cong 0.6$  și  $M^e < 0.25$ . Soluția lui Filippi [2002] produce rezultate suficient de precise, pentru câmpul tensiunilor din zona vârfului creștăturii U, până la o valoare minimă a raportului  $a/\rho = 4$ . Astfel, pentru creștătura cu raza maximă  $\rho = 2 [mm]$ , raportul dintre adâncimea și raza creștăturii este  $a/\rho = 7.5$ . Aproximarea de limita minimă, constituie o explicație a erorilor de estimare pe baza criteriului UMTS.

Tabel 3.7. Rezultatele experimentale și estimările criteriului UMTS (Necuron 1020)

$\rho$ [mm]	$M^e$ [-]	$K_{ef}^U$	$K_{ef}^U$	Eroare relativă [%]	$\theta_0$ [%]	$\theta_0$ [%]
		[MPa $\sqrt{m}$ ] exp.	[MPa $\sqrt{m}$ ] UMTS		exp.	UMTS
0.50	1.000	2.870	2.937	-2.35	0.0	0.00
		2.916		-0.74		
	0.870	2.715	2.826	-4.08	13.6	18.45
		2.699		-4.67		
	0.683	2.876	2.748	+4.46	27.8	36.64
		3.020		+9.01		
	0.576	3.496	2.733	+21.81	37.5	43.81
		3.212		+14.89		
	0.252	2.658	2.957	-11.30	64.2	58.04
		2.757		-7.23		
	0.042	2.917	3.543	-21.50	67.5	65.26
		3.219		-10.10		
0.75	1.000	3.252	3.312	-1.86	0.0	0.00
		3.272		-1.24		
	0.870	3.128	3.194	-2.11	10.4	18.06
		2.989		-6.85		

	0.670	<u>3.398</u> 3.423	3.123	<u>+8.12</u> +8.77	<u>20.5</u> 24.8	37.00
	0.562	<u>3.824</u> 3.969	3.124	<u>+18.30</u> +21.29	<u>42.4</u> 41.2	43.98
	0.238	<u>3.022</u> 2.881	3.465	<u>-14.70</u> -20.30	<u>67.7</u> 66.3	57.98
	0.033	<u>3.463</u> 3.704	4.208	<u>-21.50</u> -13.60	<u>70.5</u> 68.7	65.06
	1.000	<u>3.587</u> 3.385	3.557	<u>+0.84</u> -5.07	<u>0.0</u> 0.0	0.00
	0.870	<u>3.369</u> 3.214	3.438	<u>-2.04</u> -6.97	<u>7.9</u> 11.2	17.21
1.00	0.658	<u>3.683</u> 3.608	3.383	<u>+8.14</u> +6.25	<u>22.1</u> 20.9	36.49
	0.550	<u>4.301</u> 3.970	3.402	<u>+20.92</u> +14.31	<u>41.3</u> 39.4	43.24
	0.218	<u>3.062</u> 3.183	3.887	<u>-26.90</u> -22.10	<u>69.7</u> 64.6	57.41
	0.038	<u>3.786</u> 3.680	4.660	<u>-23.10</u> -26.70	<u>70.8</u> 75.7	63.76
	1.000	<u>4.313</u> 4.707	4.576	<u>-6.10</u> +2.78	<u>0.0</u> 0.0	0.00
	0.873	<u>4.068</u> 4.132	4.439	<u>-9.14</u> -7.44	<u>4.5</u> 7.4	17.33
2.00	0.615	<u>5.058</u> 4.845	4.420	<u>+12.61</u> +8.77	<u>19.3</u> 27.1	40.09
	0.506	<u>5.236</u> 5.592	4.493	<u>+14.18</u> +19.65	<u>38.3</u> 41.6	46.36
	0.156	<u>3.473</u> 3.620	5.520	<u>-58.90</u> -52.50	<u>64.9</u> 62.7	60.29
	0.027	<u>4.121</u> 4.256	6.450	<u>-56.50</u> -51.50	<u>79.6</u> 71.7	64.80

Acuratețea criteriului UMTS în evaluarea ruperii componentelor cu concentratori de tensiune nesingulari (crestătură U sau crestătură V rotunjită la vârf) a fost validată pentru PMMA și sticlă, prin încercări experimentale realizate pe epruvete de încovoiere în trei puncte și epruvete de tipul discului brazilian cu crestătură centrală (Ayatollahi [2009a], [2010] și [2010a]). Supraevaluarea raportului  $K_{II}/K_{IC}$  în baza criteriului UMTS, pentru situațiile de predominanță a modului II, a fost și în aceste cazuri demonstrată. De asemenea, utilizarea în lucrările amintite a unei erori medii calculate pentru toate combinațiile analizate dintre modul I și II, la o anumită rază la vârful concentratorului  $\rho$ , este de natură să contribuie la reducerea erorilor de estimare și la validarea criteriului UMTS.

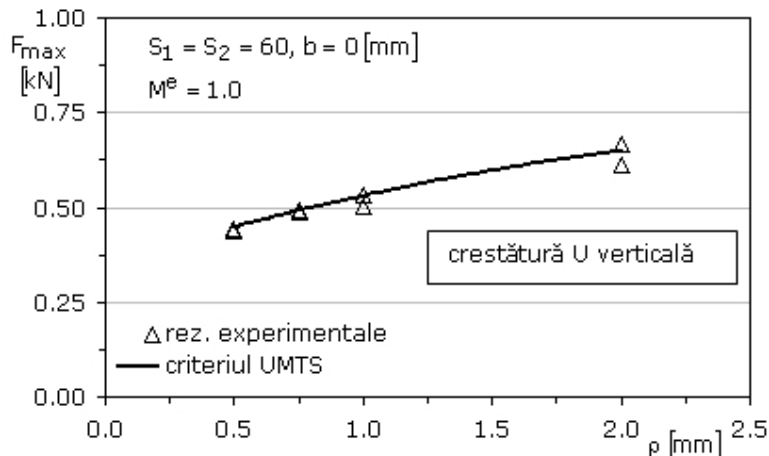
### 3.3.4. Predicția forței critice de rupere pentru epruvetele SENB

Cu valorile factorului efectiv de intensitate a tensiunii determinate numeric  $K_{ef}^U$  pentru o valoare considerată a forței  $F$ , pe de o parte, și estimate  $K_{ef.UMTS}^U$ , pe de altă parte, se propune o relație simplă de predicție a forței critice de rupere  $F_{Cr}$  pe baza criteriului UMTS (similară expresiei 3.42):

$$F_{Cr} = F \left( \frac{K_{ef.UMTS}^U}{K_{ef}^U} \right), \quad (3.49)$$

unde  $F$  s-a considerat egală cu  $100 [N]$ , pentru simplitatea calculelor.

Pentru trei cazuri de solicitare, cărora le corespund combinații diferite dintre modul I și II, rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul 3.8, alături de valorile maxime  $F_{max}$  determinate experimental și erorile relative de estimare. De asemenea, variația forței critice  $F_{Cr}$  cu raza  $\rho$  la vârful crestăturii U și rezultatele experimentale ale forței maxime  $F_{max}$  sunt prezentate în fig. 3.28 (interpolarea rezultatelor estimate s-a realizat după o funcție de gradul doi).



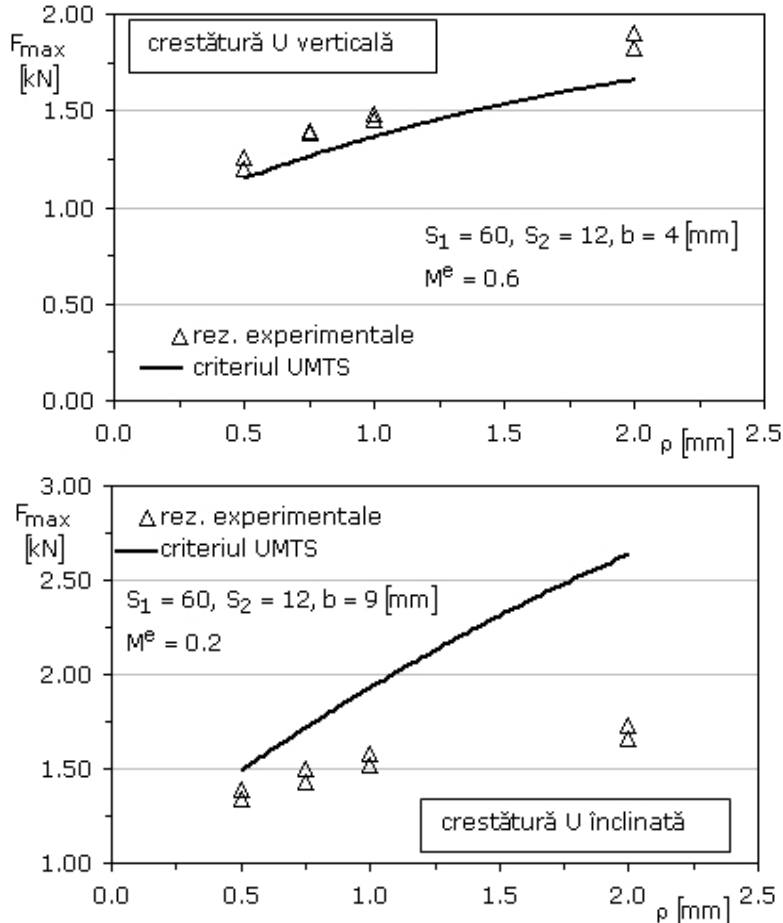


Fig. 3.28. Estimarea forței maxime pentru ruperea epruvetelor SENB cu crestătură U pe baza criteriului UMTS

Câteva concluzii se desprind din examinarea predicțiilor pentru forța critică de rupere a epruvetelor SENB, pe baza criteriului UMTS, fiind prezentate pe scurt în continuare.

Estimările sunt precise, cu erori relative în domeniul  $-10.75 \dots +1.93$  [%], pentru cazurile de solicitare în modul I și modul mixt, la predominanța modului I. Pentru modul mixt caracterizat prin parametrul adimensional  $M^e = 0.6$  (predominanța modului I), erorile relative se majorează cu creșterea razei. Acest comportament se explică prin raportul  $a/\rho$  care se reduce cu majorarea razei, pe de o parte, și prin poziția punctului de inițiere care se deplasează în modul mixt în afara axei de simetrie a crestăturii, pe de altă parte. Ambele situații contribuie la reducerea acurateții soluției lui Filippi [2002], utilizată de criteriul UMTS pentru a descrie câmpul tensiunilor în zona vârfului crestăturii. În baza celor precizate, erorile

relative mari pentru cazul de solicitare în modul mixt la predominanța modului II, caracterizat prin parametrul adimensional  $M^e = 0.2$ , sunt ușor de înțeles.

Tabel 3.8 Estimarea forței critice pentru epruvetele SENB (Necuron 1020)

$M^e$ [-]	$\rho$ [mm]	$F_{max}$ [N] <b>rezultate experimentale</b>	$F_{Cr}$ [N] <b>estimare UMTS</b>	<b>Eroare relativă [%]</b>
1.0 $S_1 = 60$ [mm] $S_2 = 60$ [mm] $b = 0$ [mm]	0.50	440.50	447	+1.48
	0.75	490.50	498	+1.53
	1.00	518	528	+1.93
	2.00	640	629	+1.41
0.6 $S_1 = 60$ [mm] $S_2 = 12$ [mm] $b = 4$ [mm]	0.50	1230	1146	-6.83
	0.75	1395	1277	-8.46
	1.00	1465	1359	-7.24
	2.00	1860	1660	-10.75
0.2 *) $S_1 = 60$ [mm] $S_2 = 12$ [mm] $b = 9$ [mm]	0.50	1365	1491	+9.22
	0.75	1465	1720	+17.40
	1.00	1550	1929	+24.48
	2.00	1695	2638	+55.65

\*) epruvete cu creștătură U înclinată

## 4. Evaluarea ruperii fragile pe baza energiei de deformație

### 4.1. Criteriul energiei specifice de deformație minimă

#### 4.1.1. Ipotezele de bază ale criteriului energiei specifice de deformație minimă

Criteriul energiei specifice de deformație minimă este cunoscut și sub numele de criteriul SED (*strain energy density failure criterion*). Criteriul a fost propus la începutul anilor '70 de Sih [1973], [1974], în încercarea de a depăși dificultățile ridicate de aplicarea majorității criteriilor de cedare la problemele ruperii în modul mixt (Gdoutos [1990]). Criteriul formulat de Sih nu presupune existența unui defect inițial de tip fisură și, în plus, se poate aplica la evaluarea cedărilor atât prin rupere cât și prin curgere. Astfel, criteriul SED permite analiza întregului proces de cedare, de la stadiul de inițiere a fisurii, la propagarea stabilă a fisurii și până la ruperea finală.

Mărimea fundamentală utilizată de criteriul SED este reprezentată de energia de deformație  $dW/dV$  conținută în unitatea de volum, denumită funcția energiei specifice de deformație:

$$\frac{dW}{dV} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad , \quad (4.1)$$

unde  $\sigma_{ij}$  și  $\varepsilon_{ij}$  reprezintă componentele tensiunii și deformației (Gdoutos [1990]).

Pentru un material cu un comportament liniar-elastic, în cazul stării tridimensionale de tensiune, funcția energiei specifice de deformație se poate scrie:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2), \quad (4.2)$$

unde  $E$  reprezintă modulul de elasticitate longitudinal,  $\nu$  coeficientul de contracție transversală, iar  $G$  modulul de elasticitate transversal, cu  $E = 2G(1 + \nu)$ . Ecuația (4.2) reprezintă energia specifică totală de deformație  $dW/dV$ , conținând atât energia specifică de deviație  $(dW/dV)_d$  cât și energia specifică de modificare a volumului  $(dW/dV)_v$ , cele două componente fiind inseparabile în descrierea completă a procesului de degradare a materialului, fapt demonstrat de examinarea cu raze X a zonei de cedare pentru un oțel cu conținut scăzut de carbon, în cazul solicitării modul I (Gdoutos [1990]).

În cazul problemelor plane ale teoriei elasticității, funcția energiei specifice de deformație (4.2) se transformă după cum urmează:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{4G} \left[ \frac{\kappa + 1}{4} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2 - 2(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \right], \quad (4.3)$$

unde  $\kappa = 3 - 4\nu$  pentru starea plană de deformație, respectiv  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ , pentru starea plană de tensiune.

Pentru funcția energiei specifice de deformație  $dW/dV$ , Sih [1991] a propus următoarea expresie generală pentru zona de inițiere a cedării (fisură, concentrator de tensiune de tip creștătură, incluziune sau gol):

$$\frac{dW}{dV} = \frac{S}{r^{1-m}}, \quad m \geq 0 \quad (4.4)$$

prin introducerea factorului  $S$  ca amplitudine a câmpului energiei specifice de deformație. În (4.4) dimensiunea  $r$  reprezintă raza măsurată de la locul de inițiere a cedării (dimensiune considerată mică în comparație cu lungimea fisurii, Sih [1973]), iar  $m = 2\lambda - 1$ , unde  $\lambda$  reprezintă ordinul singularității câmpului de tensiune, soluție a ecuației:

$$\sin(2\lambda\varphi) \pm \lambda \sin(2\varphi) = 0, \quad (4.5)$$

cu semnul + pentru modul I și semnul - pentru modul II.

Pentru problemele corpurilor cu fisuri, atunci când  $\lambda = 0.5$  și  $m = 0$ , singularitatea de tipul  $1/r$  a energiei specifice de deformație se aplică pentru toate tipurile de materiale (de la materialele liniar-elastice la cele neliniare vâscoase și plastice) și toate tipurile de fisuri (fisuri de suprafață, de colț sau interioare).

Cele trei ipoteze ale criteriului SED pot fi enunțate după cum urmează (Sih [1974], Gdoutos [1990]):

(i) punctul de inițiere a cedării prin rupere fragilă sau prin curgere este determinat de minimul relativ al energiei specifice de deformație  $(dW/dV)_{min}$ , respectiv de maximumul relativ al energiei specifice de deformație  $(dW/dV)_{max}$ ;

(ii) cedarea prin rupere fragilă sau prin curgere se produce atunci când  $(dW/dV)_{min}$ , respectiv  $(dW/dV)_{max}$ , ating valorile critice corespunzătoare;

(iii) fisura se extinde cu cantitatea  $r_1, r_2, \dots, r_j, \dots, r_c$  după relația

$$\left( \frac{dW}{dV} \right)_c = \frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = \dots = \frac{S_j}{r_j} = \dots = \frac{S_c}{r_c}, \quad (4.6)$$

curgerea sau propagarea instabilă a fisurii producându-se la atingerea valorii critice a distanței  $r_c$ .

Criteriul SED a fost verificat experimental pentru o serie de probleme de mare importanță practică: ruperea corpurilor cu fisuri realizate din materiale neomogene și materiale compozite, cedarea corpurilor de tipul placă sau înveliș în prezența fisurilor, cedarea conductelor cu fisuri circumferențiale (Nobile [2004]) creșterea fisurii de oboseală, cedarea corpurilor cu concentratori de tensiune (Sih [1991]), problemele de rupere dinamică, ruperea ductilă - implicând estimarea inițierii fisurii, propagarea stabilă a fisurii și ruperea finală (Gdoutos [2003]). De asemenea, numeroase rezultate au fost publicate în volumele unor conferințe internaționale dedicate criteriului S de rupere (Sih [1983], Sih [1992]).

#### 4.1.2. Cazul bidimensional liniar-elastic pentru corpurile cu fisuri

Câmpul tensiunilor elastice de la vârful unei fisuri, pentru cazul unei aplicații plane caracterizată prin factorii de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$ , se exprimă în coordonate carteziane prin relațiile (Williams [1957]):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right],\end{aligned}\quad (4.7)$$

și  $\sigma_z = 0$  pentru starea plană de tensiune, respectiv,  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$  pentru starea plană de deformăție. În formularea criteriului SED, Sih [1974] a neglijat termenii nesingulari contribuția lor fiind considerată neglijabilă, în comparație cu termenii de singularitate  $1/\sqrt{r}$ .

Introducând expresiile câmpului tensiunilor elastice (4.7) în relația (4.3), Sih a obținut următoarea formă pătratică pentru funcția energiei specifice de deformăție

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{r} \left( a_{11}k_I^2 + 2a_{12}k_Ik_{II} + a_{22}k_{II}^2 \right), \quad (4.8)$$

iar în baza definiției (4.4), expresia factorului energiei specifice de deformăție  $S$  (înțeles ca amplitudine a câmpului energiei specifice de deformăție):

$$S = a_{11}k_I^2 + 2a_{12}k_Ik_{II} + a_{22}k_{II}^2, \quad (4.9)$$

unde  $k_I = K_I/\sqrt{\pi}$  și  $k_{II} = K_{II}/\sqrt{\pi}$ ; în acest demers, în direcția normală pe planul  $xy$  dimensiunea elementului de volum a fost considerată egală cu unitatea. În expresiile (4.8) și (4.9) coeficienții  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) sunt exprimați prin:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{1}{16G} (1 + \cos \theta)(\kappa - \cos \theta) \\ a_{12} &= \frac{1}{16G} \sin \theta [2 \cos \theta - (\kappa - 1)] \\ a_{22} &= \frac{1}{16G} [(\kappa + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)],\end{aligned}\quad (4.10)$$

și depind de constantele elastice  $\kappa$  și  $G$ .

Se observă din (4.8) că funcția energiei specifice de deformăție  $dW/dV$  depinde invers proporțional cu raza  $r$ , măsurată de la vârful fisurii, devenind nemărginită pentru  $r \rightarrow 0$ . De asemenea, din relația (4.9), factorul  $S$  depinde de unghiul polar  $\theta$  prin intermediul coeficienților  $a_{ij}$ , realizând astfel descrierea



completă a câmpului energiei specifice de deformare (adică, pentru oricare plan radial ce trece prin vârful fisurii).

Pentru ruperea fragilă a corpurilor cu fisuri, situație în care propagarea fisurii se rezumă la instabilitatea finală, primele două ipoteze ale criteriului SED se exprimă matematic prin relațiile:

(i) inițierea la propagarea fisurii se produce pe direcția determinată de unghiul  $\theta_0$ , pentru care factorul energiei specifice de deformare  $S$  prezintă o valoare minimă

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0 \quad (4.11)$$

de unde se obține unghiul  $\theta_0$ , cu  $-n < \theta_0 < n$ ;

(ii) propagarea fisurii se produce atunci când factorul  $S$  atinge valoarea sa critică (pe direcția determinată de unghiul  $\theta_0$ )

$$S_{min} = S(\theta_0) = a_{11}k_I^2 + 2a_{12}k_I k_{II} + a_{22}k_{II}^2 = S_c. \quad (4.12)$$

În ecuația (4.12) valoarea critică  $S_c$  este considerată o constantă de material, măsură a tenacității materialului.

Spre deosebire de factorul critic de intensitate a tensiunii  $K_{IC}$  care reprezintă doar o măsură a amplitudinii câmpului tensiunii de la vârful fisurii, factorul energiei specifice de deformare  $S$  este sensibil la schimbarea direcției. În acest sens, Sih [1973a] asociază factorului  $S$  semnificația unei mărimi vectoriale, spre deosebire de  $K_{IC}$  care are semnificația unei mărimi scalare. Astfel, valoarea critică  $S_c$  furnizează o informație completă privind extensiei fisurii la solicitarea în modul mixt prin tenacitatea materialului și direcția de inițiere la propagarea fisurii, determinată de unghiul polar  $\theta_0$ . Pentru cazul solicitării în modul I, adică  $K_{II} = 0$ , valoarea critică  $S_c$  este legată de valoarea critică a factorului de intensitate a tensiunii  $K_{IC}$  prin relația:

$$S_c = \frac{(\kappa - 1)K_{IC}^2}{8G} = \frac{(\kappa - 1)}{n} \frac{K_{IC}^2}{8G}, \quad (4.13)$$

care devine pentru cazul stării plane de deformare:

$$S_c = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)K_{IC}^2}{2nE}. \quad (4.14)$$

Deoarece factorul  $S$ , definit prin relația (4.9) și reprezentând amplitudinea funcției energiei specifice de deformare  $dW/dV$  pentru un element de volum, încetează să mai fie valid pentru o rază  $r$  infinit mică, Sih [1974] propune stabilirea acestuia la o anumită distanță critică  $r_c$  măsurată de la vârful fisurii. Sih [1974] recomandă și o soluție pentru determinarea distanței critice  $r_c$ : dacă se admite că fisura are o rază  $\rho$  foarte mică finită la vârf, atunci distanța critică  $r_c$  reprezintă distanța la care predicțiile criteriului SED coincid cu cele obținute pentru o fisură ideală cu raza la vârf  $\rho = 0$ .

Dacă se introduce expresia (4.12) în sistemul de ecuații (4.11) se stabilește direcția de inițiere la propagarea fisurii, determinată de soluția  $\theta_0$  a următoarelor ecuații:

$$K_I^2 [2 \cos \theta - (\kappa - 1)] \sin \theta + 2K_I K_{II} [2 \cos 2\theta - (\kappa - 1) \cos \theta] + K_{II}^2 [(\kappa - 1 - 6 \cos \theta) \sin \theta] = 0 \quad (4.15)$$

și

$$K_I^2 [2 \cos 2\theta - (\kappa - 1) \cos \theta] + 2K_I K_{II} [(\kappa - 1) \sin \theta - 4 \sin 2\theta] + K_{II}^2 [(\kappa - 1) \cos \theta - 6 \cos 2\theta] > 0 \quad (4.16)$$

Ecuațiile (4.15) și (4.16) reprezintă formulele generale ale criteriului SED pentru o fisură sollicitată în modul mixt I+II. Dacă, pentru o problemă plană particulară, expresiile factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  sunt cunoscute, prin introducerea acestora în ecuația (4.15) se obține soluția  $\theta_0$  care satisface inegalitatea (4.16). În continuare, prin înlocuirea soluției  $\theta_0$  în (4.12) se obține sarcină critică aplicată pentru care minimumul  $S_{min}$  atinge valoarea critică  $S_C$ , adică sarcină aplicată pentru care are loc inițierea la propagarea fisurii.

#### 4.1.3. Evaluarea ruperii fragile a epruvetelor ASCB pe baza criteriului energiei specifice de deformație minimă

Semidiscul cu fisură laterală verticală sollicitat asimetric la încovoiere ASCB, propus de Ayatollahi [2011] pentru studiul ruperii fragile în modul mixt, permite realizarea diferitelor combinații între modul I și II prin modificarea distanțelor dintre suportii de rezemare  $S_1 \neq S_2$ , distanțe măsurate față de direcția de aplicare a forței (fig. 3.6, paragraful 3.2.1). Pentru determinarea factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$ , Ayatollahi [2011] a propus expresiile:

$$K_I = \frac{F}{2Rt} \sqrt{\pi a} Y_I(a/R, S_1/R, S_2/R) \\ K_{II} = \frac{F}{2Rt} \sqrt{\pi a} Y_{II}(a/R, S_1/R, S_2/R) \quad , \quad (4.17)$$

unde  $Y_I$  și  $Y_{II}$  sunt coeficienții adimensionali corespunzători modului I și II de sollicitare, determinați din analiza numerică cu metoda elementului finit, în funcție de relațiile dintre dimensiunile geometrice  $a/R$ ,  $S_1/R$  și  $S_2/R$  (în paragraful 3.2.2, fig.3.12 prezintă variația coeficienților adimensionali  $Y_I$  și  $Y_{II}$ ).

Dacă expresiile factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  date de (4.17) se introduc în (4.15), se obține ecuația următoare:

$$Y_I^2 [2 \cos \theta - (\kappa - 1)] \sin \theta + 2Y_I Y_{II} [2 \cos 2\theta - (\kappa - 1) \cos \theta] + Y_{II}^2 [(\kappa - 1 - 6 \cos \theta) \sin \theta] = 0 \quad (4.18)$$

a cărei soluție  $\theta_0$  trebuie să satisfacă inegalitatea:

$$Y_I^2 [2 \cos 2\theta - (\kappa - 1) \cos \theta] + 2Y_I Y_{II} [(\kappa - 1) \sin \theta - 4 \sin 2\theta] + Y_{II}^2 [(\kappa - 1) \cos \theta - 6 \cos 2\theta] > 0 \quad (4.19)$$

Variația unghiului  $\theta_0$  de inițiere la propagarea fisurii, pentru  $\nu = 0.34$  (Necuron 1020) și  $\nu = 0.28$  (Necuron 651), este ilustrată în fig. 4.1 în funcție de parametrul adimensional  $M^e$  care caracterizează combinația între modul I și II de solicitare.

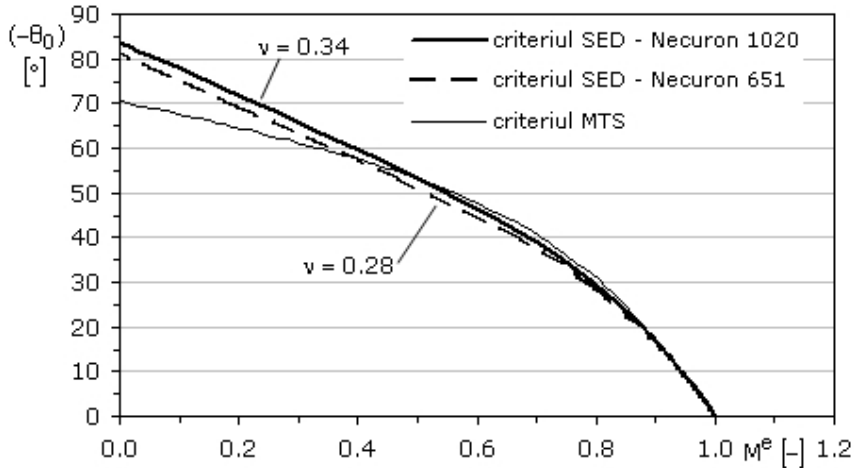


Fig. 4.1. Variația unghiului  $\theta_0$  de inițiere la propagarea fisurii pentru epruvetele ASCB după criteriul SED

Din variația unghiului  $\theta_0$ , ilustrată în fig.4.1 pentru două valori ale coeficientului de contracție transversală  $\nu$  alături și de soluția criteriului MTS, se desprind câteva observații:

- soluția criteriului SED depinde de valoarea coeficientului  $\nu$  și nu coincide cu soluția criteriului MTS, diferențele fiind mai importante la dominanța modului II de solicitare;
- pentru  $M^e = 0$ , în modul II de solicitare, valorile maxime ale unghiului de inițiere la propagarea fisurii sunt  $\theta_0 = -83.8$  [°] pentru  $\nu = 0.34$  și  $\theta_0 = -81.5$  [°] pentru  $\nu = 0.28$ , în comparație cu predicția  $\theta_0 = -70.5$  [°] după criteriul MTS.

Pentru soluția  $\theta_0$ , se obține din (4.12) minimumul  $S(\theta_0)$  care egalează valoarea critică  $S_c$  la atingerea condițiilor ruperii fragile; înlocuind în (4.12) expresia (4.14) a valorii critice  $S_c$ , rezultă ecuația:

$$a_{11} \frac{K_I^2}{n} + 2a_{12} \frac{K_I K_{II}}{n} + a_{22} \frac{K_{II}^2}{n} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)K_{IC}^2}{2nE}, \quad (4.20)$$

care se transformă în baza relațiilor (4.10) în:

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 (1 + \cos \theta_0)(\kappa - \cos \theta_0) + 2 \frac{K_I}{K_{Ic}} \frac{K_{II}}{K_{Ic}} [2 \cos \theta_0 - (\kappa - 1)] + \left(\frac{K_{II}}{K_{Ic}}\right)^2 [(k + 1)(1 - \cos \theta_0) + (1 + \cos \theta_0)(3 \cos \theta_0 - 1)] = 4(1 - 2\nu). \quad (4.21)$$

Dacă ecuației (4.21) i se asociază relația de definiție a parametrului adimensional  $M^e$ :

$$M^e = \frac{2}{n} \arctan\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right) = \frac{2}{n} \arctan\left(\frac{K_I/K_{Ic}}{K_{II}/K_{Ic}}\right) = \frac{2}{n} \arctan\left(\frac{Y_I}{Y_{II}}\right), \quad (4.22)$$

se obține diagrama de rupere, adică variația  $K_{II}/K_{Ic}$  în funcție de  $K_I/K_{Ic}$ , redată în fig.4.2. Următoarele observații sunt de subliniat:

- diagrama de rupere  $K_{II}/K_{Ic} - K_I/K_{Ic}$  depinde de valoarea coeficientului de contracție transversală  $\nu$  și nu coincide cu soluția criteriului MTS, diferențele fiind sensibile pentru toate combinațiile modului mixt I+II;
- pentru modul II de solicitare, factorul critic de intensitate a tensiunii este  $K_{II} = 0.893K_{Ic}$  pentru  $\nu = 0.34$  și  $K_{II} = 0.985K_{Ic}$  pentru  $\nu = 0.28$  după estimarea criteriului SED, în comparație cu predicția  $K_{II} = 0.866K_{Ic}$  după criteriul MTS.

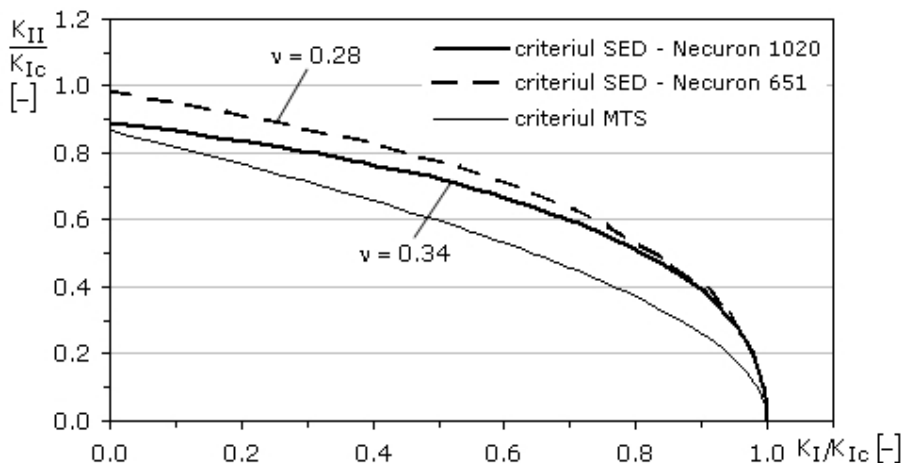


Fig. 4.2. Diagrama de rupere în modul mixt I+II după criteriul SED pentru epruvetele ASCB

Din diagramele de rupere ilustrate în fig.4.3 și 4.5, se constată că predicțiile criteriului SED pentru condițiile critice ale ruperii fragile în modul mixt sunt în foarte bună concordanță cu rezultatele experimentale:

- pentru Necuron 1020 erorile relative sunt cuprinse în intervalul  $-7.35\% \dots +20.11\%$ , cu o eroare relativă medie  $+14.35\%$  în estimarea raportului  $K_{IIc}/K_{Ic}$ ;
- pentru Necuron 651 erorile relative sunt în domeniul  $-11.05\% \dots +13.89\%$ , cu o eroare relativă medie  $+10.35\%$  în estimarea raportului  $K_{IIc}/K_{Ic}$ .

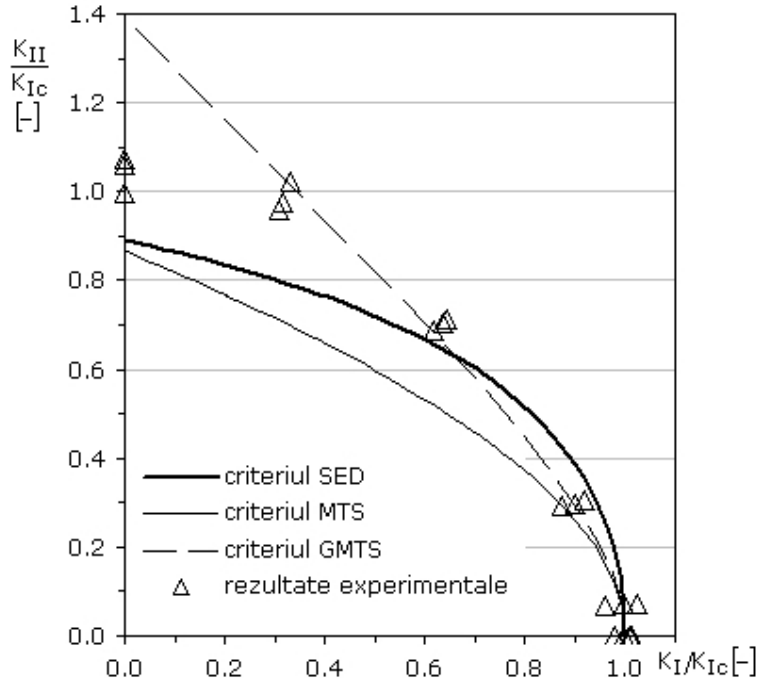


Fig. 4.3. Diagrama ruperii în modul mixt pe epruvete ASCB realizate din Necuron 1020

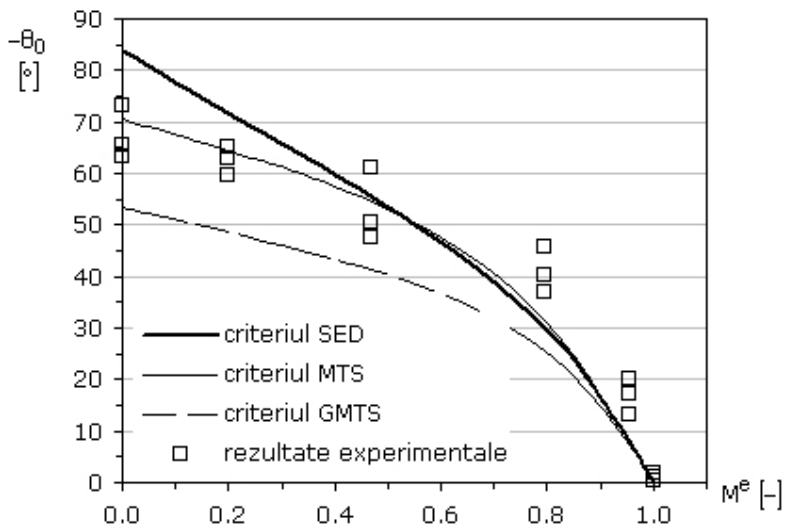


Fig. 4.4. Variația unghiului de inițiere la propagarea fisurii  $\theta_0$  cu parametrul  $M^e$  (Necuron 1020, epruvete ASCB)

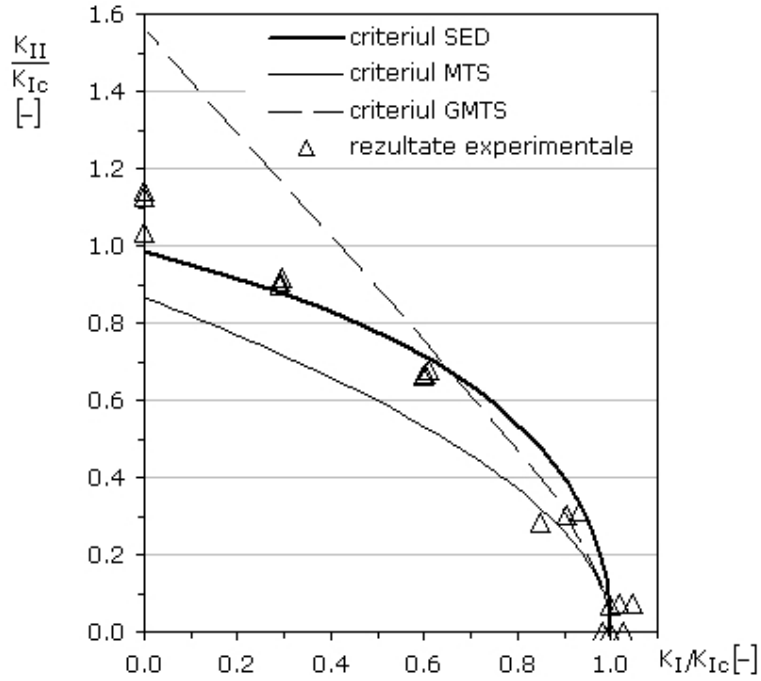


Fig. 4.5. Diagrama ruperii în modul mixt pe epruvete ASCB realizate din Necuron 651

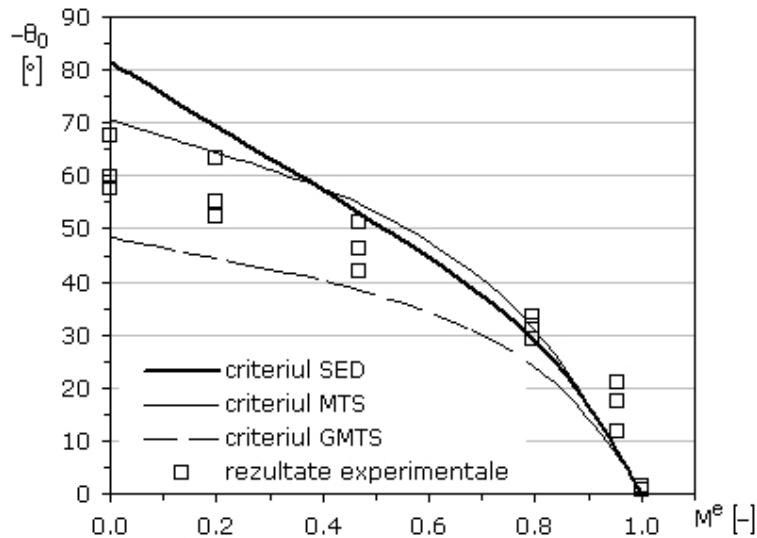


Fig. 4.6. Variația unghiului de inițiere la propagarea fisurii  $\theta_0$  cu parametrul  $M^e$  (Necuron 651, epruvete ASCB)

În fig.4.4 și 4.6 este ilustrată variația unghiului de inițiere la propagarea fisurii  $\theta_0$  în funcție de parametrul adimensional  $M^e$  pentru cele două materiale. În modul mixt, pentru dominanța modului II, estimările criteriului SED sunt superioare valorilor măsurate pe epruvetele ASCB, cu erori relative maxime de aprox. -32.62% pentru Necuron 1020, respectiv -41.69% pentru Necuron 651.

Criteriul SED propus de Sih [1973], [1974] se bazează pe calculul energiei specifice de deformație și introduce o nouă mărime pentru măsurarea tenacității unui material: factorul energiei specifice de deformație  $S_c$ . Luând în calcul coeficientul de contracție transversală  $\nu$ , criteriul SED furnizează estimări ale condițiilor ruperii fragile în bună concordanță cu rezultatele experimentale pentru cele două materiale, în întregul domeniu al combinațiilor dintre modul I și II.

#### 4.1.4. Estimarea forței critice de rupere pentru epruvetele ASCB pe baza criteriului energiei specifice de deformație minimă

Conform celei de-a doua ipoteze a criteriului SED, propagarea fisurii se produce pe direcția definită de unghiul  $\theta_0$  determinat din ecuațiile (4.18) și (4.19), atunci când factorul energiei specifice de deformație  $S$  atinge valoarea sa critică  $S_c$ . Astfel, ecuația (4.12) devine:

$$S_c = a_{11} \frac{K_I^2}{n} + 2a_{12} \frac{K_I K_{II}}{n} + a_{22} \frac{K_{II}^2}{n} \quad (4.23)$$

cu valoarea critică  $S_c$  determinată din expresia (4.14) pentru starea plană de deformație, iar coeficienții  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) determinați cu relațiile (4.10).

Înlocuind expresiile (4.17) ale factorilor de intensitate a tensiunii în ecuația (4.23) rezultă ecuația:

$$S_c = \frac{F_{Cr}^2 na}{(2Rt)^2} \left( a_{11} \frac{Y_I^2}{n} + 2a_{12} \frac{Y_I Y_{II}}{n} + a_{22} \frac{Y_{II}^2}{n} \right), \quad (4.24)$$

de unde se obține expresia forței critice la ruperea fragilă a epruvetelor ASCB:

$$F_{Cr} = \frac{2Rt \sqrt{S_c}}{\sqrt{a \left( a_{11} \frac{Y_I^2}{n} + 2a_{12} \frac{Y_I Y_{II}}{n} + a_{22} \frac{Y_{II}^2}{n} \right)}}. \quad (4.25)$$

Proprietățile de material pentru Necuron 1020 și Necuron 651 utilizate în determinarea forței critice sunt prezentate în tabelul 4.1, iar în fig.4.7 și fig.4.8 sunt ilustrate predicțiile forței critice  $F_{Cr}$  pentru ruperea fragilă a epruvetelor ASCB pe baza criteriului SED împreună cu rezultatele experimentale. În tabelul 4.2 sunt centralizate rezultatele și erorile relative de estimare a forței critice  $F_{Cr}$  după criteriul SED.

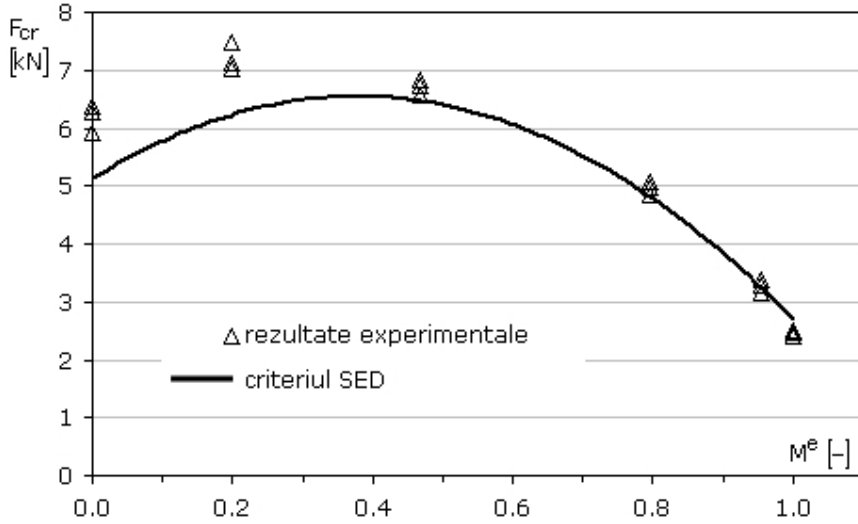


Fig. 4.7. Variația  $F_{Cr}$  de rupere a epruvetelor ASCB în modul mixt (Necuron 1020)

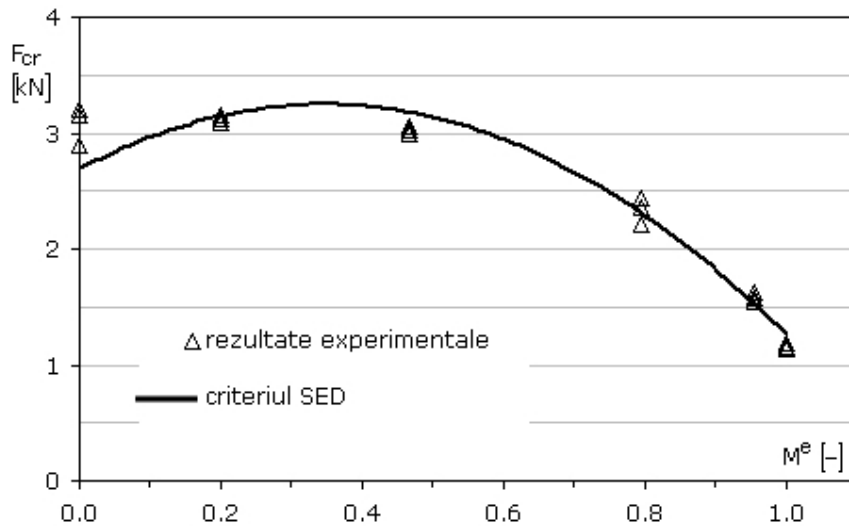


Fig. 4.8. Variația  $F_{Cr}$  de rupere a epruvetelor ASCB în modul mixt (Necuron 651)

Pentru modul I și pentru modul mixt, la dominanța modului I  $0.467 \leq M^e \leq 1$ , erorile relative de estimare sunt în domeniul  $-4.9\% \dots +4.7\%$  pentru Necuron 1020 și, respectiv,  $-2.1\% \dots +5.3\%$  pentru Necuron 651. Pentru  $0 \leq M^e < 0.199$ , la dominanța modului II, erorile de estimare după criteriul SED



sunt rezonabile pentru aplicațiile ingineresti:  $-17.1\% - 14.4\%$  pentru Necuron 1020 și  $-10.4\% - 2.4\%$  pentru Necuron 651.

Tabel 4.1 Proprietățile de material pentru Necuron 1020 și Necuron 651

	$\nu [-]$	$E [MPa]$	$K_{IC}^{*})$ $[MPa \sqrt{m}]$	$S_c [MPa mm]$
Necuron 1020	0.34	3340	2.655	0.144
Necuron 651	0.28	1250	1.253	0.113

\*) valoare determinată pe epruvetele ASCB

Tabel 4.2 Estimarea forței critice pentru epruvetele ASCB pe baza criteriului SED

$M^e [-]$	$F_{cr} [N]$ <b>exp.</b> <b>(Necuron 1020)</b>	$F_{cr} [N]$ <b>SED</b> <b>(Necuron 1020)</b>	<b>Eroare relativă</b> [%]	$F_{cr} [N]$ <b>exp.</b> <b>(Necuron 651)</b>	$F_{cr} [N]$ <b>SED</b> <b>(Necuron 651)</b>	<b>Eroare relativă</b> [%]
1.000	2465	2464	0.0	1163	1163	0.0
0.955	3273	3283	+0.3	1583	1549	-2.1
0.795	4963	5196	+4.7	2335	2460	+5.3
0.467	6713	6385	-4.9	3023	3142	+3.9
0.199	7206	5972	-17.1	3123	3047	-2.4
0.000	6201	5304	-14.4	3080	2760	-10.4

## 4.2. Criteriul valorii medii a energiei specifice de deformație

Criteriul valorii medii a energiei elastice specifice de deformație  $\bar{W}$ , valoare medie determinată pentru un volum finit de raza  $R_c$  (respectiv o suprafață finită în cazul aplicațiilor plane), a fost introdus de către Lazzarin [2001] pentru evaluarea cedării statice și la solicitări ciclice a componentelor cu concentratori de tensiune singulari de tipul creștăturilor V la diferite valori ale deschiderii unghiulare  $2\alpha$ . Criteriul afirmă că, în prezența concentratorilor de tensiune, ruperea fragilă se produce atunci când valoarea medie a energiei elastice specifice de deformație  $\bar{W}$  atinge o valoare critică  $W_c$ . Cu alte cuvinte, inegalitatea

$$\bar{W} < W_c \quad (4.26)$$

reprezintă condiția care asigură integritatea componentelor la inițierea ruperii fragile în prezența concentratorilor de tensiune.

Pentru un material cu un comportament ideal fragil, valoarea critică  $W_c$  se determină cu relația (Lazzarin [2001]):

$$W_c = \frac{\sigma_F^2}{2E} \quad (4.27)$$

Criteriul a fost validat prin evaluarea cedării în modul mixt I+II în prezența concentratorilor singulari de tipul creștătură V, pentru componente realizate din PMMA (Lazzarin [2001], Yosibash [2004], Gómez [2009]), alumină (Yosibash [2004]) și duraluminu (Lazzarin [2001]).

Lazzarin [2005] a extins criteriul pentru evaluarea cedării în modul I de solicitare a componentelor cu concentratori de tensiune nesingulari de tipul creștătură V și U. Validarea criteriului s-a realizat pentru componente realizate din PMMA (Lazzarin [2005]).

Pentru concentratorii de tensiune nesingulari, Gómez [2007] a extins criteriul valorii medii a energiei specifice de deformație pentru evaluarea cedării componentelor solicitate în modul mixt I+II. Numeroasele studii publicate în ultimii ani - Berto [2007], [2009], Gómez [2009a], Lazzarin [2009] - au validat extinderea criteriului pentru solicitarea în modul mixt I+II.

Lucrările publicate de Gómez [2008] și Lazzarin [2010] au stabilit relațiile existente între valoarea medie  $\bar{W}$  a energiei specifice de deformație determinată pentru un volum finit de la vârful concentratorului și expresiile factorilor de intensitate a tensiunii, pentru concentratorii nesingulari de tipul creștătură U. Un studiu recent publicat de Barati [2011] stabilește pentru modul I de solicitare o relație între valoarea medie  $\bar{W}$  a energiei elastice specifice de deformație și integrala  $J$  pentru concentratorii de tensiune de tipul creștătură U.

Important de amintit aici, pentru a asigura comportamentul liniar elastic al materialului și caracterul fragil al ruperii, majoritatea încercărilor experimentale înainte amintite au fost efectuate pe PMMA la temperaturi scăzute  $-60 \dots -40^\circ\text{C}$ , condiții de laborator relativ greu de realizat.

#### 4.2.1. Expresiile energiei specifice de deformare într-un volum finit de la vârful concentratorilor de tensiune

Cu referire la sistemul de coordonate prezentat în fig. 1.3, distribuția tensiunilor în zona vârfului unei creștături V este descrisă de relațiile (Lazzarin [1996], Filippi [2002]):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta} \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(I)} = \frac{K_I^{V\rho}}{\sqrt{2\pi} r^{1-\lambda_1}} \begin{Bmatrix} f_{\theta} \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} \begin{Bmatrix} g_{\theta} \\ g_r \\ g_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad \text{- pentru modul I,} \quad (4.28)$$

și

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta} \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(II)} = \frac{K_{II}^{V\rho}}{\sqrt{2\pi} r^{1-\lambda_2}} \begin{Bmatrix} f_{\theta} \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2-\lambda_2} \begin{Bmatrix} g_{\theta} \\ g_r \\ g_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad \text{- pentru modul II,} \quad (4.29)$$

unde funcțiile unghiulare  $f_{\theta}$ ,  $f_r$ ,  $f_{r\theta}$  și  $g_{\theta}$ ,  $g_r$ ,  $g_{r\theta}$  sunt date prin expresiile (1.17) și (4.18). Factorii de intensitate a tensiunii  $K_I^{V\rho}$  pentru modul I și  $K_{II}^{V\rho}$  pentru modul II de solicitare sunt definiți de Lazzarin [2006] prin relațiile:

$$K_I^{V\rho} = \sqrt{2\pi} \frac{(\sigma_{\theta})_{\theta=0} r^{1-\lambda_1}}{1 + \omega_1 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1}}, \quad K_{II}^{V\rho} = \sqrt{2\pi} \frac{(\tau_{r\theta})_{\theta=0} r^{1-\lambda_2}}{1 + \omega_2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2-\lambda_2}} \quad (4.30)$$

cu tensiunile  $\sigma_{\theta}$  și  $\tau_{r\theta}$  evaluate la distanța corespunzătoare  $r$  (mai mare decât  $r_0$ ) față de originea sistemului de coordonate. Pentru starea plană de deformare funcțiile unghiulare  $f$  și  $g$  satisfac și relațiile:

$$f_z = \nu(f_{\theta} + f_r), \quad g_z = \nu(g_{\theta} + g_r) \quad . \quad (4.31)$$

##### 4.2.1.1. Cazul concentratorilor singulari de tensiune de tipul creștătură V

În cazul creștăturilor ascuțite V (concentrator de tensiune singular,  $\rho = 0$ ), distanța  $r_0$  devine egală cu zero, iar termenii corespunzători parametrilor  $\mu_1$  și  $\mu_2$  în expresiile (4.28), (4.29) se anulează. Astfel, Lazzarin [2001] exprimă energia specifică de deformare în forma:

$$W(r, \theta) = W_1(r, \theta) + W_2(r, \theta) + W_{12}(r, \theta) \quad , \quad (4.32)$$

unde:

$$W_1(r, \theta) = \frac{r^{2(\lambda_1-1)} (K_I^V)^2}{2E} \left[ f_{\theta}^2 + f_r^2 + f_z^2 - 2\nu(f_{\theta}f_r + f_{\theta}f_z + f_rf_z) + 2(1+\nu)f_{r\theta}^2 \right] \quad (4.33)$$

$$W_2(r, \theta) = \frac{r^{2(\lambda_2-1)} (K_{II}^V)^2}{2E} \left[ g_\theta^2 + g_r^2 + g_z^2 - 2\nu(g_\theta g_r + g_\theta g_z + g_r g_z) + 2(1+\nu)g_{r\theta}^2 \right]$$

$$W_{12}(r, \theta) = \frac{r^{\lambda_1+\lambda_2-2} K_I^V K_{II}^V}{2E} \left[ f_\theta g_\theta + f_r g_r + f_z g_z - \nu(f_\theta g_r + f_\theta g_z + f_r g_\theta + f_r g_z + f_z g_\theta + f_z g_r) + 2(1+\nu)f_{r\theta} g_{r\theta} \right].$$

Întrucât domeniul de integrare este simetric în raport cu bisectoarea creștăturii, contribuția termenului  $W_{12}$  se anulează. Astfel, energia totală de deformare determinată pentru suprafața de rază  $R_C$  devine:

$$E = E_1 + E_2 = \int_A W dA = \int_0^{R_C+\gamma} \int_{-Y}^Y W(r, \theta) r dr d\theta = \quad (4.34)$$

$$= \frac{1}{E} \frac{I_1(Y)}{4\lambda_1} (K_I^V)^2 R_C^{2\lambda_1} + \frac{1}{E} \frac{I_2(Y)}{4\lambda_2} (K_{II}^V)^2 R_C^{2\lambda_2} .$$

unde  $\gamma = \pi - a$ , iar integralele  $I_1$  și  $I_2$  sunt:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-Y}^{+Y} \left[ f_\theta^2 + f_r^2 + f_z^2 - 2\nu(f_\theta f_r + f_\theta f_z + f_r f_z) + 2(1+\nu)f_{r\theta}^2 \right] d\theta , \quad (4.35)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-Y}^{+Y} \left[ g_\theta^2 + g_r^2 + g_z^2 - 2\nu(g_\theta g_r + g_\theta g_z + g_r g_z) + 2(1+\nu)g_{r\theta}^2 \right] d\theta .$$

În condițiile stării plane de tensiune Lazzarin [2001] a dat o soluție analitică pentru integralele  $I_1$  și  $I_2$ , o soluție numerică fiind în schimb propusă pentru starea plană de deformare. Rezultatele sunt date tabelar în funcție de deschiderea unghiulară a creștăturii  $V$ .

Cu referire la aplicațiile plane, volumul critic devine sectorul circular ilustrat în fig. 4.9a), a cărui arie se determină prin integrare:

$$A = \int_0^{R_C+\gamma} \int_{-Y}^Y r dr d\theta = R_C^2 \gamma . \quad (4.36)$$

Astfel, energia medie specifică de deformare  $\bar{W}$  se obține prin împărțirea expresiei (4.34) la (4.36), rezultând:

$$\bar{W} = \frac{E}{A} = \frac{I_1}{4E\lambda_1 Y} \left( \frac{K_I^V}{R_C^{1-\lambda_1}} \right)^2 + \frac{I_2}{4E\lambda_2 Y} \left( \frac{K_{II}^V}{R_C^{1-\lambda_2}} \right)^2 . \quad (4.37)$$

Reducând problema la modul I de solicitare pentru o creștătură  $V$  cu deschiderea unghiulară  $2a = 0$  (cazul fisurii), expresia (4.37) permite calculul razei critice  $R_C$ , luând  $\bar{W} = W_C$  și  $K_I^V = K_{IC}$ :

$$R_C = \left[ \frac{I_1 K_{IC}^2}{4\lambda_1 \gamma E W_C} \right]^{1/[2(1-\lambda_1)]} \quad (4.38)$$

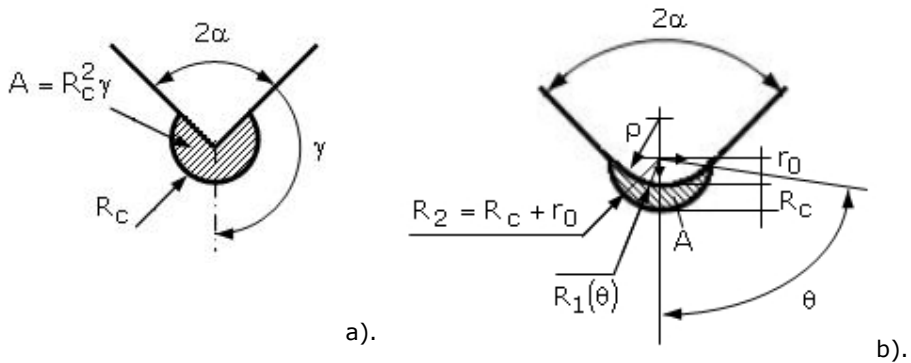


Fig. 4.9. a). Suprafața critică pentru o creștătură V ascuțită (Lazzarin [2001]);  
b). suprafața critică pentru o creștătură V rotunjită la vârf (Gómez [2007]).

O expresie mai simplă de calcul a razei critice  $R_C$  a fost propusă de Yosibash [2004] pentru starea plană de deformare:

$$R_C = \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_r} \right)^2, \quad (4.39)$$

respectiv, pentru starea plană de tensiune (Lazzarin [2005a]):

$$R_C = \frac{(5-3\nu)}{4\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_r} \right)^2. \quad (4.40)$$

#### 4.2.1.2. Cazul concentratorilor de tensiune de tipul creștătură V rotunjită la vârf (nesingulari) – modul I de solicitare

În cazul concentratorilor de tensiune nesingulari de tipul creștătură V rotunjită, în relațiile (1.11) și (1.12) care descriu distribuția tensiunilor, parametrul  $a_1$  se exprimă în funcție de tensiunea principală maximă la vârful creștăturii:

$$a_1 = \frac{\sigma_{max} r_0^{1-\lambda_1}}{1+\omega_1}, \quad (4.41)$$

cu parametrul auxiliar  $\omega_1$  definit prin expresia (1.16). Astfel, cu referire doar la modul I de solicitare, relațiile (1.11) și (1.12) care descriu distribuția tensiunilor în zona vârfului unei creștături V rotunjite se transformă (Lazzarin [1996], Filippi [2002]) după cum urmează:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^{(I)} = \frac{\sigma_{max}}{1+\omega_1} \left( \frac{r_0}{r} \right)^{1-\lambda_1} \begin{Bmatrix} f_\theta \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix} + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1-\lambda_1} \begin{Bmatrix} g_\theta \\ g_r \\ g_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

Energia elastică specifică de deformare este scrisă de Lazzarin [2005] în expresia:

$$W_I(r, \theta) = \frac{1}{2E} \left( \frac{\sigma_{max}}{1+\omega_1} \right)^2 \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2(\lambda_1-1)} F_\lambda + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2(\mu_1-1)} G_\mu + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_1+\mu_1-2} M_{\lambda\mu} \right] \quad (4.43)$$

cu funcțiile unghiulare:

$$\begin{aligned} F_\lambda &= f_\theta^2 + f_r^2 + f_z^2 - 2\nu(f_\theta f_r + f_\theta f_z + f_r f_z) + 2(1+\nu)f_{r\theta}^2, \\ G_\mu &= g_\theta^2 + g_r^2 + g_z^2 - 2\nu(g_\theta g_r + g_\theta g_z + g_r g_z) + 2(1+\nu)g_{r\theta}^2, \\ M_{\lambda\mu} &= f_\theta g_\theta + f_r g_r + f_z g_z - \nu(f_\theta g_r + g_\theta f_r + f_\theta g_z + g_\theta f_z + f_r g_z + g_r f_z) \\ &\quad + 2(1+\nu)f_{r\theta} g_{r\theta}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Considerând aria  $A$  în formă de semilună prezentată în fig. 4.9b), energia totală de deformare se obține prin integrare:

$$E_I = \int_A W dA = \int_{-\theta}^{+\theta} d\theta \int_{R_1}^{R_2} W_I(r, \theta) r dr = \frac{1}{2E} \left( \frac{\sqrt{2\pi} \sigma_{max}}{1+\omega_1} \right)^2 r_0^{2(1-\lambda_1)} (I_\lambda + I_\mu + I_{\lambda\mu}), \quad (4.45)$$

unde

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \int_{-\theta}^{+\theta} \frac{(R_2^{2\lambda_1} - R_1^{2\lambda_1})}{2\lambda_1} F_\lambda d\theta, \quad I_\mu = (r_0)^{2(\lambda_1-\mu_1)} \int_{-\theta}^{+\theta} \frac{(R_2^{2\mu_1} - R_1^{2\mu_1})}{2\mu_1} G_\mu d\theta, \\ I_{\lambda\mu} &= 2(r_0)^{\lambda_1-\mu_1} \int_{-\theta}^{+\theta} \frac{(R_2^{\lambda_1+\mu_1} - R_1^{\lambda_1+\mu_1})}{\lambda_1+\mu_1} M_{\lambda\mu} d\theta. \end{aligned} \quad (4.46)$$

A treia integrală  $I_{\lambda\mu}$  din (4.46) este valabilă pentru cazul în care deschiderea unghiulară a creștăturii  $2\alpha \neq 0$ , fiind  $I_{\lambda\mu} = 0$  pentru creștătura U, pentru care  $2\alpha = 0$ . Cu notația

$$I_I = \frac{1}{2\pi} (I_\lambda + I_\mu + I_{\lambda\mu}), \quad (4.47)$$

energia elastică totală de deformare pentru volumul de control se scrie în forma sintetică:

$$E_I = \frac{1}{2E} \left[ \frac{\sqrt{2\pi} \sigma_{max}}{(1+\omega_1)r_0^{\lambda_1-1}} \right]^2 I_I. \quad (4.48)$$

Astfel, cu aria  $A$  din fig. 4.9b) determinată prin integrala:

$$A = \int_{R_1 - \theta}^{R_2 + \theta} r dr d\theta \quad , \quad (4.49)$$

energia medie specifică de deformare  $\bar{W}_I$  devine:

$$\bar{W}_I = \frac{E_I}{A} = \frac{1}{E} \left( \frac{I_1}{2A} \right) \left[ \frac{\sqrt{2\pi} \sigma_{max} r_0^{1-\lambda_1}}{(1+\omega_1)} \right]^2 . \quad (4.50)$$

Deoarece integrala  $I_1$  și aria  $A$  depind de raza la vârful creștăturii  $\rho$ , de raza critică  $R_c$  și deschiderea unghiulară  $2a$ , Lazzarin introduce notația:

$$\frac{I_1}{2A}(2a, \rho, R_c) = \frac{1}{\rho^{2(1-\lambda_1)}} H\left(2a, \frac{R_c}{\rho}\right) \quad , \quad (4.51)$$

și transformă expresia (4.50) pentru energia medie specifică de deformare:

$$\bar{W}_I = \frac{E_I}{A} = \frac{\sigma_{max}^2}{E} F(2a) H\left(2a, \frac{R_c}{\rho}\right) \quad , \quad (4.52)$$

unde

$$F(2a) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^{2(1-\lambda_1)} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{1+\omega_1}\right)^2 . \quad (4.53)$$

Soluțiile numerice ale parametrilor  $F(2a)$  și  $H(2a, R_c/\rho)$  sunt date tabelar pentru diferite valori ale coeficientului lui Poisson  $\nu$ , obținute pentru situația în care suprafața de control în formă de semilună cuprinde numai muchia semicirculară a concentratorului și nu flancurile liniare ale acestuia.

Berto [2009] transformă relația (4.52) de calcul a energiei specifice de deformare  $\bar{W}_I$  în

$$\bar{W}_I = H\left(2a, \frac{R_c}{\rho}\right) \frac{(K_I^{V\rho})^2}{E} \frac{1}{\rho^{2(1-\lambda_1)}} \quad , \quad (4.54)$$

cu ajutorul relației de definiție a factorului de intensitate  $K_I^{V\rho}$  introdusă de Lazzarin [2006]:

$$K_I^{V\rho} = \sqrt{2\pi} \frac{\sigma_{max}}{1+\omega_1} \left(\frac{q-1}{q}\right)^{1-\lambda_1} \rho = \sqrt{F(2a)} \sigma_{max} \rho^{1-\lambda_1} \quad . \quad (4.55)$$

#### 4.2.1.3. Cazul concentratorilor de tensiune de tipul creștătură U – modul mixt de solicitare

În cazul concentratorilor de tensiune nesingulari de tipul creștătură U, pentru modul I de solicitare, prin particularizarea

$$2a = 0, \quad \lambda_1 = 0.5, \quad q = 2.0, \quad \omega_1 = 1.0, \quad r_0 = \rho/2, \quad (4.56)$$

relațiile (4.52) și (4.54) de calcul a energiei specifice medii de deformare se simplifică după cum urmează (Gómez [2007], Berto [2007]):

$$\bar{W}_1 = \frac{\pi \sigma_{max}^2}{4E} H(R_c/\rho), \quad (4.57)$$

și

$$\bar{W}_1 = H(R_c/\rho) \frac{(K_I^{V\rho})^2}{\rho E}. \quad (4.58)$$

Cu referire la modul mixt I+II de solicitare, aplicarea relațiilor introduse de Lazzarin [2005] pentru modul I devine dificilă, în principal din cauza faptului că tensiunea principală maximă  $\sigma_{max}$  se produce în afara bisectoarei creștăturii. Poziția punctului de tensiune maximă P, determinată prin unghiul  $\varphi$  în fig. 4.10 a) și b) depinde de combinația dintre modul I și II; unghiul  $\theta_0$  din fig. 4.10 a) reprezintă unghiul de inițiere a fisurii.

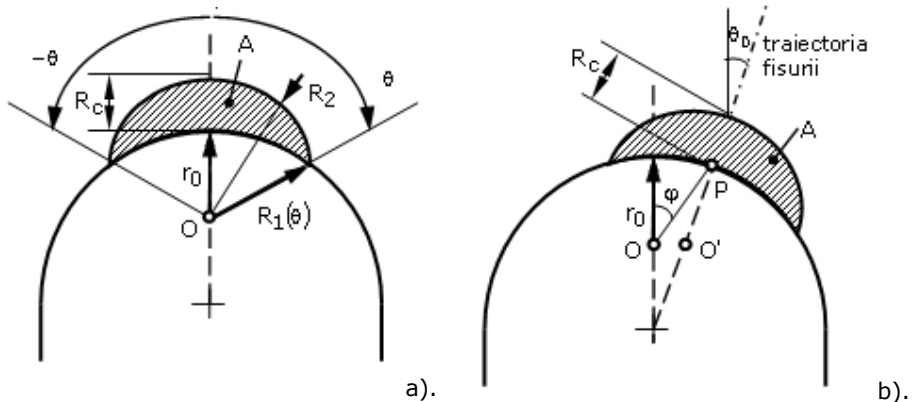


Fig. 4.10. a). Suprafața critică pentru o creștătură U – modul I; b). suprafața critică pentru o creștătură U – modul mixt (Berto [2007], Gómez [2007]).

Astfel, Berto [2007] propune o expresie echivalentă pentru calculul energiei medii specifice de deformare:

$$\bar{W}_1 = \frac{\pi \sigma_{max}^2}{4E} H^*(R_c/\rho), \quad (4.59)$$



unde  $\sigma_{max}$  este valoarea maximă a tensiunii principale de-a lungul muchiei creștăturii U, iar  $H^*(\rho/R_C)$  depinde de raza normalizată  $\rho/R_C$  coeficientul lui Poisson  $\nu$  și combinația între modul I și II. Berto [2007] a găsit pentru  $H^*$  o slabă dependență cu modul mixt, diferențele între valorile calculate pentru  $H$  și  $H^*$  fiind de sub 1%, în cazul creștăturilor verticale. Diferențele cresc însă până la 5 – 8.5% pentru creștăturile U înclinate, la predominanța modului II în modul mixt de solicitare.

O abordare echivalentă pentru modul mixt propune și Gómez [2007], bazată pe determinarea energiei medii specifice de deformație  $\bar{W}_I$  din analiza liniar elastică cu elemente finite, acceptând ipotezele:

- volumul (suprafața) de control în modul mixt se obține prin rotirea volumului (suprafeței) de control determinat pentru modul I astfel încât configurația geometrică de forma semilună să fie centrată în punctul de tensiune maximă;
- valoarea critică  $W_C$  determinată pentru modul I de solicitare este valabilă și în modul mixt.

#### 4.2.2. Evaluarea ruperii fragile a epruvetelor SENB cu creștătură laterală în formă de U

Evaluarea ruperii fragile a epruvetelor SENB cu creștătură U pe baza criteriului propus de Lazzarin [2005] presupune determinarea mediei  $\bar{W}_I$  a energiei specifice de deformație pe suprafața de control de raza critică  $R_C$ . În acest scop, beneficiind de rezultatele prezentate în subcapitolul 3.3, abordarea echivalentă propusă de Gómez [2007] este utilizată în continuare.

Pentru Necuron 1020, cu caracteristicile elastice și mecanice prezentate în capitolul 2

$$E = 3340 [MPa], \quad \nu = 0.34, \quad \sigma_t = 79.05 [MPa], \quad K_{IC} = 2.3 [MPa\sqrt{m}]$$

rezultă în baza relațiilor (4.27) și (4.39), valorile pentru energia specifică critică de deformație  $W_C$  și raza critică  $R_C$  a suprafeței de control:

$$W_C = \frac{\sigma_t^2}{2E} = 0.935 [MJ/m^3], \quad R_C = \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2 = 0.206 [mm]. \quad (4.60)$$

În calculul valorii critice  $W_C$ , s-a utilizat tensiunea  $\sigma_t$  determinată pe epruvete cu concentrator de tensiune lateral semicircular, recomandate de Seweryn [1994], [2002] pentru a compensa neliniaritatea curbei tensiune-deformație specifică a epruvetelor netede.

Toate analizele cu metoda elementului finit au fost realizate cu pachetul software Cosmos/M 2.9, în condițiile elasticității liniare și a stării plane de deformație, un exemplu de model cu elemente finite fiind prezentat în fig. 3.20. La valoarea medie a forței maxime  $F_{Cr}$ , din analiza cu elemente finite se determină: unghiul  $\varphi$  care stabilește poziția punctului P caracterizat prin tensiunea principală maximă  $\sigma_{max}$ , unghiul  $\theta_0$  format de direcția inițială a fisurii cu verticala (în ipoteza

că direcția inițială a fisurii este normală la direcția tensiunii  $\sigma_{max}$ ). Rezultatele numerice sunt sumarizate în tabelul 4.3, tensiunea circumferențială  $\sigma_{\theta}^*$  fiind evaluată pe bisectoarea creștăturii U.

Tabel 4.3 Rezultatele numerice pe epruvete SENB (Necuron 1020)

$\rho$ [mm]	$M^e$ [-]	$F_{Cr}^{med}$ [N]	$\varphi$ [°]	$\theta_0$ [°]	$\sigma_{max}$ [MPa]	$\sigma_{\theta}^*$ [MPa]
0.50	1.000	440.50	0.00	0.00	146.00	146.00
	0.870	1775	18.85	9.55	138.40	136.20
	0.683	1230	43.70	23.49	147.40	132.30
	0.576	1890	60.83	34.94	167.80	133.60
	0.252	1365	90.53	60.53	144.41	48.92
	0.042	1830	96.77	67.00	145.32	5.89
0.75	1.000	490.50	0.00	0.00	134.40	134.40
	0.870	1985	16.92	8.55	128.60	126.80
	0.670	1395	42.48	22.74	139.00	124.50
	0.562	2150	60.38	34.94	158.90	125.30
	0.238	1465	92.01	62.03	133.02	40.96
	0.033	2080	97.23	67.50	144.04	3.42
1.00	1.000	518	0.00	0.00	124.40	124.40
	0.870	2120	14.97	7.55	120.90	119.30
	0.658	1465	42.07	22.50	128.50	115.00
	0.550	2240	60.83	34.94	146.00	114.20
	0.218	1550	93.94	64.02	124.93	33.71
	0.038	2110	97.69	67.99	135.50	4.00
2.00	1.000	640	0.00	0.00	113.80	113.80
	0.873	2570	12.03	6.04	109.90	108.90
	0.616	1860	39.17	20.76	122.50	109.20
	0.506	2730	60.14	34.44	134.30	102.50
	0.156	1695	95.83	66.01	106.95	19.20
	0.027	2165	98.61	68.99	116.88	1.22

Variația tensiunilor cu distanța de la vârful creștăturii U, pentru valoarea medie a forței critice  $F_{cr}$ , este exemplificată în fig. 4.11: raza  $\rho = 1[mm]$  și  $M^e = 1.000$ , respectiv  $M^e = 0.658$

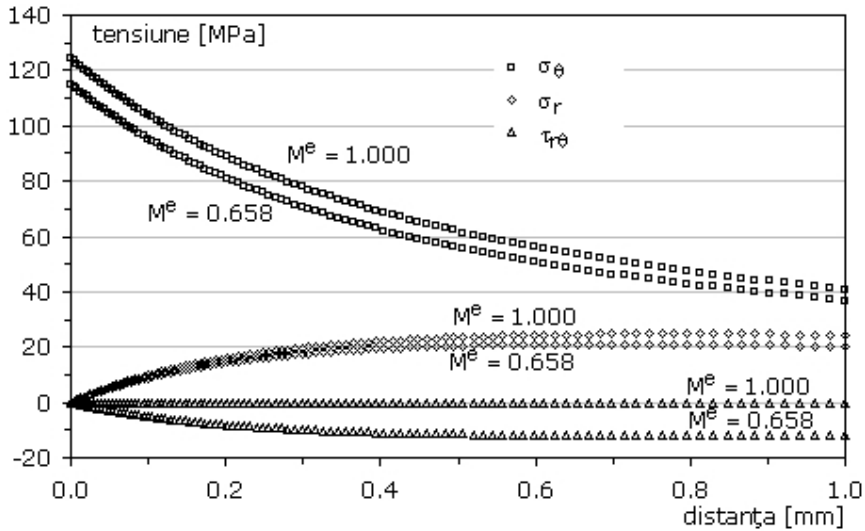


Fig. 4.11. Variația tensiunilor cu distanța de la punctul de tensiune principală maximă pentru creștătura U cu raza  $\rho = 1[mm]$ , modul I, forța maximă medie  $F_{max} = 518[N]$

Evaluarea valorii medii  $\bar{W}_1$  a energiei specifice de deformație presupune rafinarea rețelei de elemente finite pe suprafața de control. Un exemplu de discretizare automată pentru cazul  $M^e = 0.658$  și  $\rho = 1[mm]$  este prezentat în fig. 4.12, cu utilizarea entităților geometrice de tipul regiune și a elementelor finite bidimensionale triunghiulare cu 6 noduri – TRIANG. Pentru discretizarea suprafeței de control de arie  $A = 0.21079[mm^2]$  s-au utilizat 4261 elemente finite cu 8840 noduri, modelul conținând în total 45609 elemente finite și 91958 noduri.

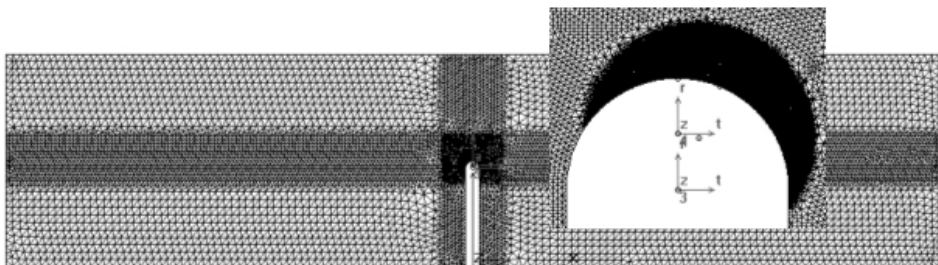
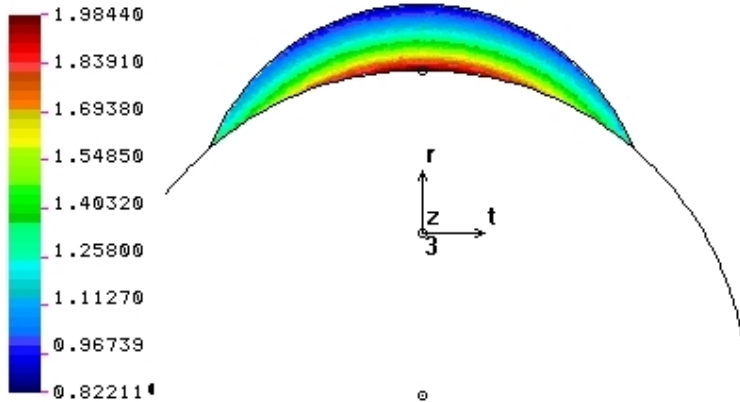
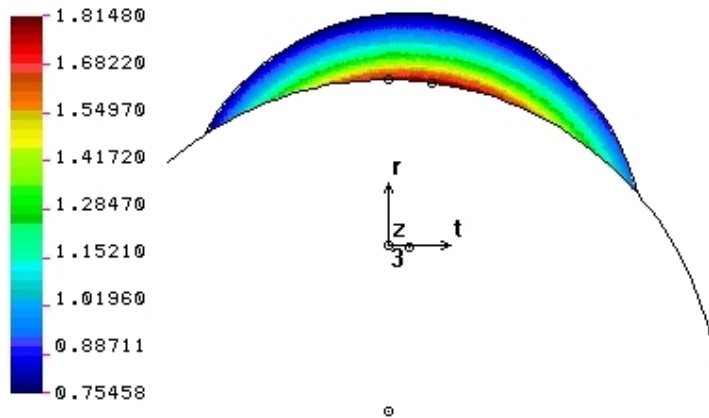


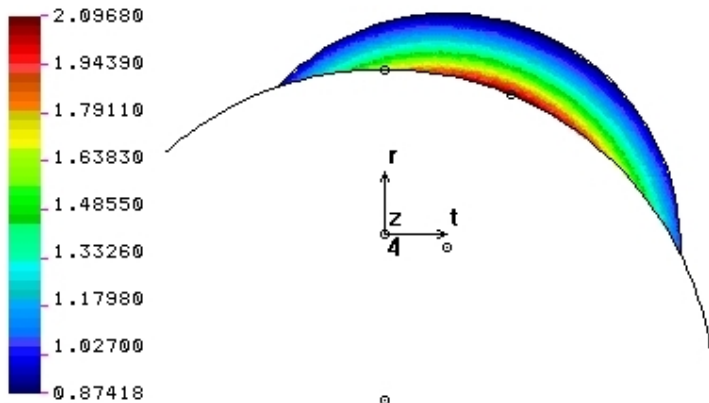
Fig. 4.12. Rețeaua de elemente finite - detaliu cu rafinarea din zona suprafeței de control pentru creștătura U cu  $\rho = 1.0[mm]$ ,  $M^e = 0.658$ .



a).  $M^e = 1$ ,  $S_1 = S_2 = 60$  [mm],  $m = 0$  [mm],  $\bar{W}_1 = 1.28$  [MJ/m<sup>3</sup>];



b).  $M^e = 0.870$ ,  $S_1 = 60$  [mm],  $S_2 = 12$  [mm],  $m = -4$  [mm],  $\bar{W}_1 = 1.10$  [MJ/m<sup>3</sup>];



c).  $M^e = 0.658$ ,  $S_1 = 60$  [mm],  $S_2 = 12$  [mm],  $m = 4$  [mm],  $\bar{W}_1 = 1.28$  [MJ/m<sup>3</sup>];

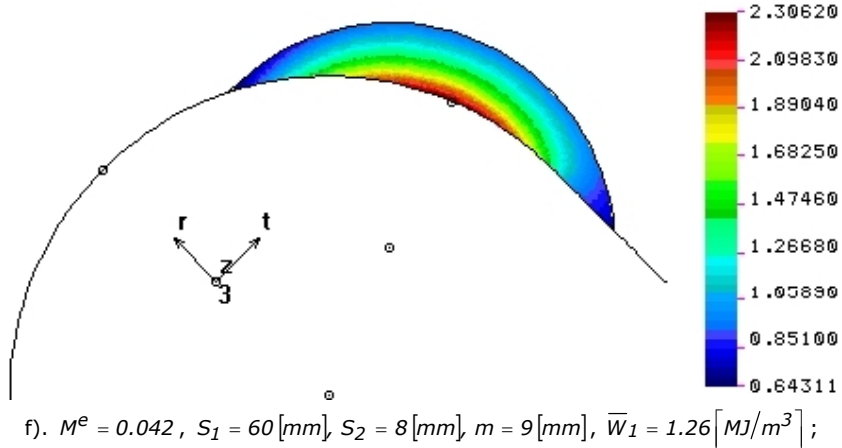
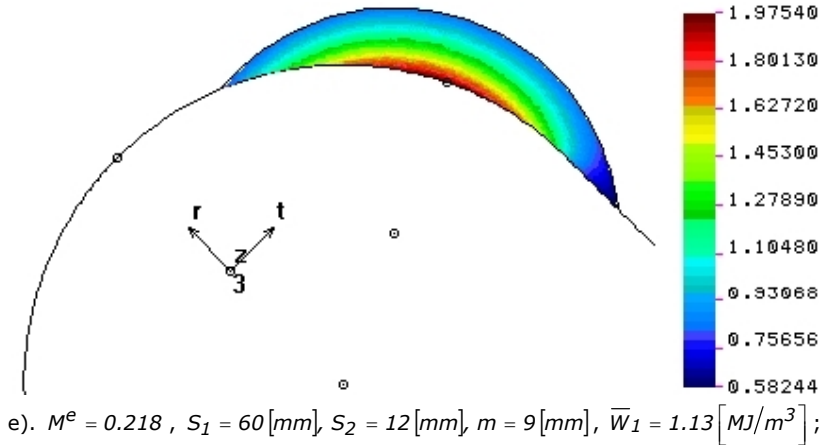
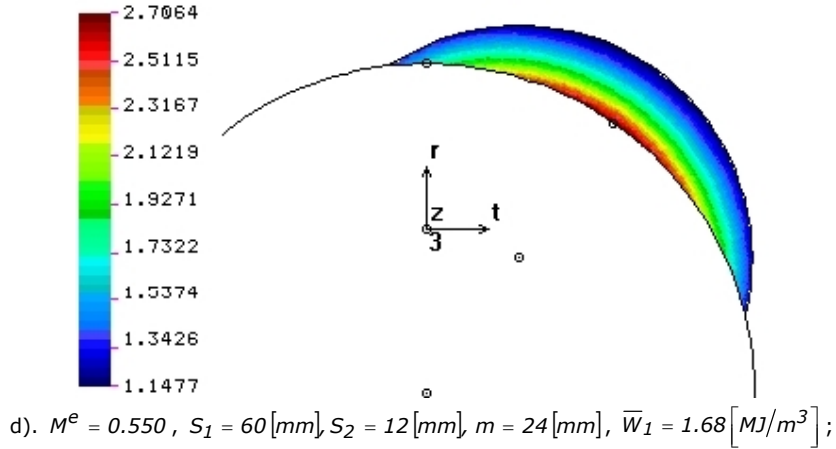
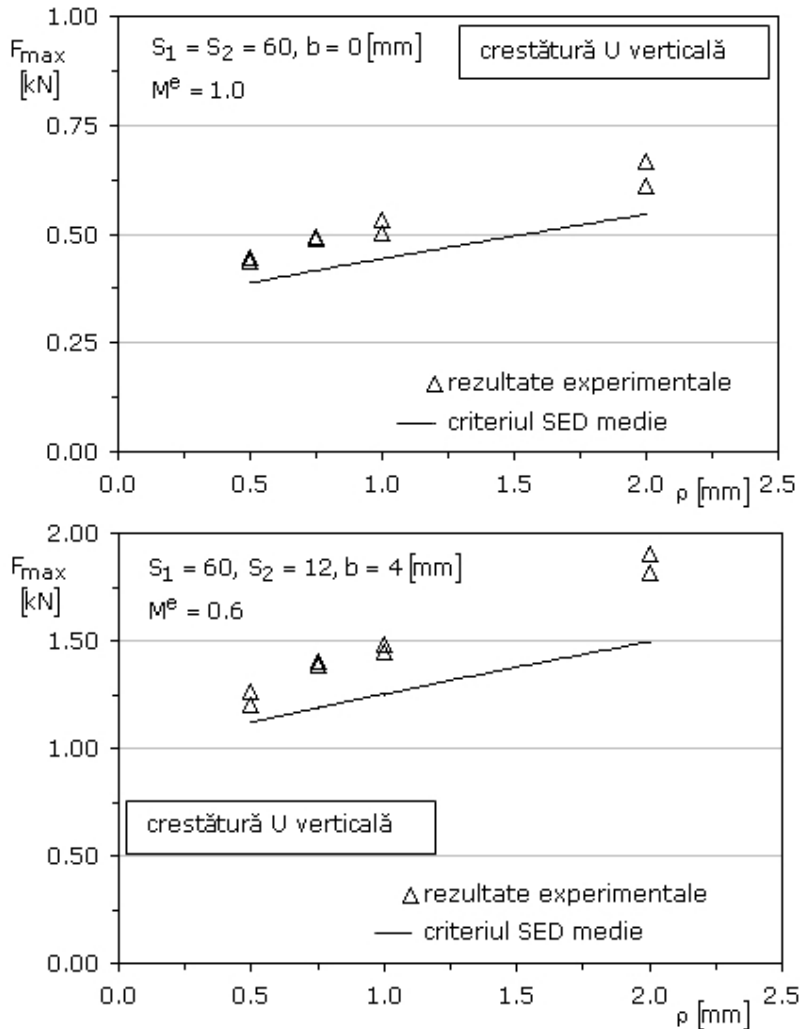


Fig. 4.13. Distribuția energia specifică de deformare pe suprafața de control ( $\rho = 1 [mm]$ )

Distribuția energiei specifice de deformație  $\bar{W}_I$  pe suprafața de control este ilustrată în fig. 4.13 la raza  $\rho = 1[\text{mm}]$  pentru toate cele șase cazuri diferite de solicitare. După cum se observă, curbele de egală densitate a energiei de deformație au centrul poziționat aproximativ la distanța  $r_0 = \rho/2$  față de centrul de curbură al creștăturii, în acord cu ipoteza formulată de Gómez [2007]. De asemenea, se observă că nivelul densității energiei specifice scade cu creșterea razei.

În fig. 4.14 sunt ilustrate predicțiile forței critice  $F_{cr}$  pentru ruperea fragilă a epruvetelor SENB cu creștătură U pe baza criteriului SED medie împreună cu rezultatele experimentale, pentru cazurile caracterizate de  $M^e = 1.0$ ,  $M^e = 0.6$  și  $M^e = 0.2$ .



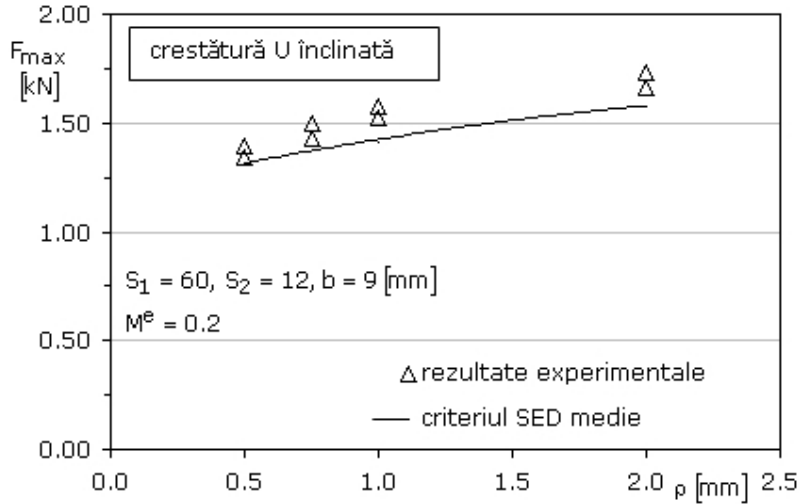


Fig. 4.14. Estimarea forței maxime pentru ruperea epruvetelor SENB cu crestătură U pe baza criteriului SED medie

Variația forței critice, determinată pe baza predicției acestui criteriu s-a obținut prin interpolarea rezultatelor după o funcție de gradul al doilea. În tabelul 4.4 sunt centralizate rezultatele și erorile relative de estimare a forței critice după criteriul SED medie.

Tabel 3.8 Estimarea forței critice pentru epruvetele SENB (Necuron 1020)

$M^e$ [-]	$\rho$ [mm]	$F_{max}$ [N] rezultate experimentale	$F_{cr}$ [N] estimare SED medie	Eroare relativă [%]
1.0 $S_1 = 60$ [mm] $S_2 = 60$ [mm] $b = 0$ [mm]	0.50	440.50	388	-11.92
	0.75	490.50	416	-15.19
	1.00	518	443	-14.48
	2.00	640	545	-14.84
0.6 $S_1 = 60$ [mm] $S_2 = 12$ [mm] $b = 4$ [mm]	0.50	1230	1120	-8.94
	0.75	1395	1190	-14.70
	1.00	1465	1250	-14.68
	2.00	1860	1495	-19.62
0.2*) $S_1 = 60$ [mm] $S_2 = 12$ [mm] $b = 9$ [mm]	0.50	1365	1305	-4.40
	0.75	1465	1395	-4.78
	1.00	1550	1410	-9.03
	2.00	1695	1580	-6.78

\*) epruvete cu crestătură U înclinată

În comparație cu criteriul UMTS, criteriul SED medie subestimează nivelul forței critice  $F_{CR}$  pentru solicitarea în modul mixt, la toate combinațiile dintre modul I și II analizate. În schimb, erorile relative sunt cuprinse în intervalul  $-4.40... - 19.62[\%]$ , erori rezonabile pentru aplicațiile inginerești.

În concluzie, cu dezavantajul unei analize mai laborioase, criteriul valorii medii a energiei specifice de deformație se recomandă pentru estimarea ruperii fragile în modul mixt a componentelor structurale realizate din poliuretanul Necuron 1020, în prezența concentratorilor de tensiune nesingulari, fără restricții privind raza la vârful creștăturii sau predominanța modului II.



## 5. Evaluarea numerică a direcției de propagare a fisurilor în modul mixt

### 5.1. Abordări în simularea propagării fisurilor

Soluționarea completă a problemelor de estimare a ruperii fragile a componentelor structurale include și stabilirea traiectoriei fisurilor. O clasificare complexă a abordărilor utilizate în literatura științifică de-a lungul timpului pentru simularea procesului de inițiere și propagare a fisurilor este prezentată de Ingraffea [2004]. Astfel, Ingraffea [2004] împarte aceste abordări în două mari clase, în funcție de modul în care prezența fisurii este implementată în procedurile numerice.

Metodele din prima clasă reprezintă fisura ca o entitate geometrică distinctă, iar modelul geometric și modelul cu elemente finite sunt, după caz, actualizate cu extensia fisurii (fig. 5.1). Metodele din această clasă se împart în două categorii după geometriei fisurii: forma condiționată sau forma arbitrară a fisurii.

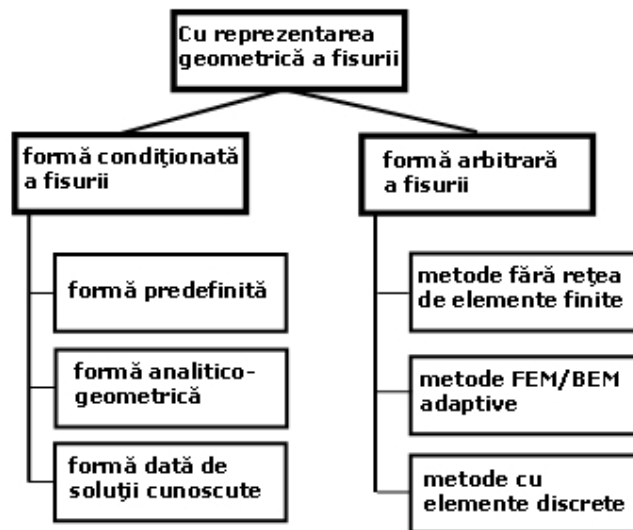


Fig. 5.1. Metode cu reprezentarea distinctă a fisurii (preluare Ingraffea [2004])

Din prima categorie, tehnica formei predefinite a fisurii a fost utilizată prima dată de Clough [1962] pentru cercetarea efectului pe care prezența fisurii îl are asupra stării de tensiune dintr-un baraj de beton. Fețele fisurii sunt predefinite de fețele elementelor finite existente, fără o modificare a rețelei la extensia fisurii, dar cu decuplarea nodurilor printre care fisura se propagă.

Dintre metodele care condiționează geometria fisurii, cea mai simplă și frecvent utilizată metodă se bazează pe soluțiile analitice sau numerice cunoscute.

Metoda se pretează însă pentru un număr redus al combinațiilor geometrie-condiții la limită, fisurile având geometriile reduse la linii drepte în problemele 2D sau suprafețe netede în aplicațiile 3D, iar propagarea fisurii se realizează în ipotezele mecanicii ruperii liniar elastice. Această metodă este implementată de pachetele software NASGRO și AFGROW.

Metodele din cea de-a doua categorie modelează fisura printr-o formă arbitrară, fără restricții impuse de discretizarea cu elemente finite a modelului geometric. În mod obișnuit trei abordări sunt incluse în această categorie: metoda fără rețea de elemente finite (*Meshfree methods*, Belytschko [1996]), metodele elementului finit/elementelor de frontieră adaptive (*Adaptive FEM/BEM methods*) și metodele elementelor discrete, cu reprezentări la nivel de latice, particulă sau atom.

Astăzi, dintre aceste tehnici, cea mai utilizată este metoda elementului finit adaptivă care permite investigarea comportamentului structurilor cu fisuri de forme arbitrare prin actualizarea permanentă a rețelei de elemente finite la extensia fisurii. Metoda este implementată în pachetul software FRANC2D și FRANC3D (Wawrzynek [1987], [1989], [1991]). Tehnica a fost utilizată cu succes în studiul propagării fisurilor în diferite componente structurale, precum eclisele de lanț (Babeu [1998]) sau un pinion melcat (Carter [2000]).

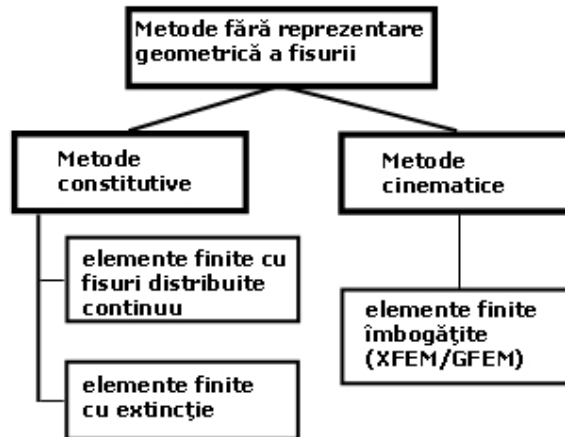


Fig. 5.2. Metode fără reprezentarea geometrică a fisurii (preluare Ingraffea [2004])

Metodele din cea de-a doua clasă nu presupun existența unei fisuri distincte conținută de modelul geometric, iar acesta și modelul cu elemente finite nu se modifică la extensia fisurii. Mai degrabă, aceste metode reprezintă fisura printr-o localizare puternică a deformației, decât printr-o reprezentare geometrică distinctă, cea mai cunoscută fiind metoda elementelor finite extinse (XFEM, *eXtended Finite Element Method*, Belytschko [1999]).

## 5.2. Influența modului mixt de solicitare asupra traiectoriei fisurilor la ruperea epruvetelor ASCB

### 5.2.1. Simularea numerică a propagării fisurilor cu pachetul software FRANC2D/L

Elaborat de un grup de cercetători (Computational Fracture Group) de la Cornell University sub conducerea Prof. Anthony Ingraffea și a Dr. Paul Wawrzynek ([www.cfq.cornell.edu](http://www.cfq.cornell.edu)), FRANC2D (FRacture Analysis Code 2D) este un pachet software bazat pe metoda elementelor finite destinat simulării comportării solidelor bidimensionale care conțin discontinuități geometrice de forma fisurilor (Wawrzynek [1987], [1989], [1991]). La Kansas State University, Prof. Daniel Swenson (Swenson [1997]) a dezvoltat varianta FRANC2D/L cu facilități suplimentare de simulare a structurilor multistrat. Ulterior, pentru simularea propagării fisurilor în problemele tridimensionale, a fost dezvoltată și varianta FRANC3D (Carter [2000]).

Modelul geometric al epruvetelor ASBC prezentat în fig. 3.6 și modelul cu elemente finite au fost realizate cu preprocesorul CASCA 1.4 (Wawrzynek [1997]). Subregiunile geometrice au fost astfel generate încât să asigure o rețea fină de elemente finite în zona fisurii și să permită impunerea cu exactitate a condițiilor la limită pentru încovoierea asimetrică în trei puncte: deplasările verticale ale nodurilor corespunzătoare suporturilor de rezemare  $u_y = 0$  și forța  $F = F_{Cr}$  aplicată pe direcția verticală conținută în planul fisurii inițiale ( $F_{Cr}$  reprezintă valoarea medie înregistrată). Pentru poliuretanul rigid Necuron 1020 următoarele proprietăți de material au fost considerate în analiza liniar-elastică cu elemente finite: modulul de elasticitate longitudinal  $E = 3340 [MPa]$ , coeficientul de contracție transversală  $\nu = 0.34$  și valoarea critică a factorului de intensitate a tensiunii  $K_{IC} = 2.3 [MPa\sqrt{m}]$ . Discretizarea, în condițiile stării plane de deformare, s-a realizat cu elemente finite izoparametrice cu 8 noduri rezultând în final un model care conține 8550 elemente finite și 25971 noduri (fig. 5.3).

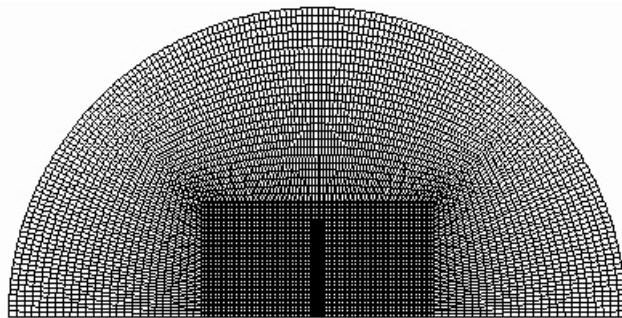


Fig. 5.3. Modelul cu elemente finite pentru simularea propagării fisurii (epruveta ASCB)

Singularitatea de forma  $1/\sqrt{r}$  pentru fisura de margine cu lungimea  $a = 12 [mm]$  s-a obținut prin introducerea unei rozete formată din 8 elemente finite triunghiulare izoparametrice singulare cu 6 noduri ilustrată în fig. 5.4a (Barsoum [1976]).

Simularea cvasiautomată a propagării fisurilor cu pachetul software FRANC2D/L este caracterizată prin etapele succesive prezentate în continuare.

**Analiza stării de tensiune și deformație, determinarea factorilor de intensitate a tensiunii.** Pentru analiza stării de tensiune și deformație din epruvetele ASCB, în ipoteza elasticității liniare, FRANC2D/L utilizează metoda matricei de rigiditate care implică o soluționare a sistemului de ecuații liniare prin metoda de eliminare a lui Gauss. Rezultatele analizei structurale permit determinarea factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$ , pentru geometria și condițiile la limită date, prin una din metodele implementate: metoda corelării deplasărilor (Chan [1970], Shih [1976]), metoda integralei J (Cherepanov [1967], Rice [1968], Ishikawa [1980]) și metoda extensiei virtuale a fisurii (Rybicki [1977], Ramamurthy [1986], Raju [1987], Singh [1998]). Metoda corelării deplasărilor a fost utilizată pentru evaluarea factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  în simularea propagării fisurilor pe epruvete ASCB cu pachetul software FRANC2D/L.

**Determinarea direcției de propagare și a poziției noului vârf al fisurii.** Introducând valorile determinate ale factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  în ecuațiile criteriului de inițiere la propagarea în modul mixt se determină direcția de extensie și noua poziție a vârfului fisurii prin precizarea incrementului de propagare (sau acceptarea lungimii implicite pentru incrementul fisurii).

FRANC2D/L are implementate trei criterii de inițiere la propagarea fisurii în modul mixt, și anume: criteriul tensiunii circumferențiale maxime propus de Erdogan [1963], criteriul energiei specifice de deformație minimă formulat de Sih [1973, 1974] și respectiv criteriul forței maxime de extensie a fisurii propus de Hussain [1974]. Pentru situația în care modul II este dominant, adică pentru un raport  $K_{II}/K_I$  mare, acuratețea rezultatelor se îmbunătățește prin reducerea incrementului de extensie a fisurii.

**Îndepărtarea elementelor finite poziționate de-a lungul traiectoriei și actualizarea geometriei fisurii.** După stabilirea direcției de inițiere la propagarea fisurii și a incrementului de extensie a fisurii, elementele finite poziționate de-a lungul traiectoriei sunt îndepărtate și o suprafață poligonală temporară destinată rediscrētizării este generată (fig. 5.4b). Fisura inițială este extinsă în noua poziție a vârfului (fig. 5.4c) și o rozetă formată din 8 elemente finite triunghiulare izoparametrice singulare este introdusă pentru a simula singularitatea  $1/\sqrt{r}$  (fig. 5.4d). În acest pas actualizarea geometriei fisurii este completă.

**Rediscrētizarea automată a suprafeței din vecinătatea fisurii.** Algoritmul de rediscrētizare implementat de pachetul software FRANC2D/L îndeplinește două cerințe importante: menține compatibilitatea cu restul rețelei de elemente finite (de exemplu condițiile la limită nu trebuie modificate ca rezultat al propagării fisurii) și asigură o bună progresie a dimensiunii elementelor la trecerea de la rețeaua fină de elemente finite de la vârful fisurii spre rețeaua mai grosieră din celelalte regiuni ale solidului.

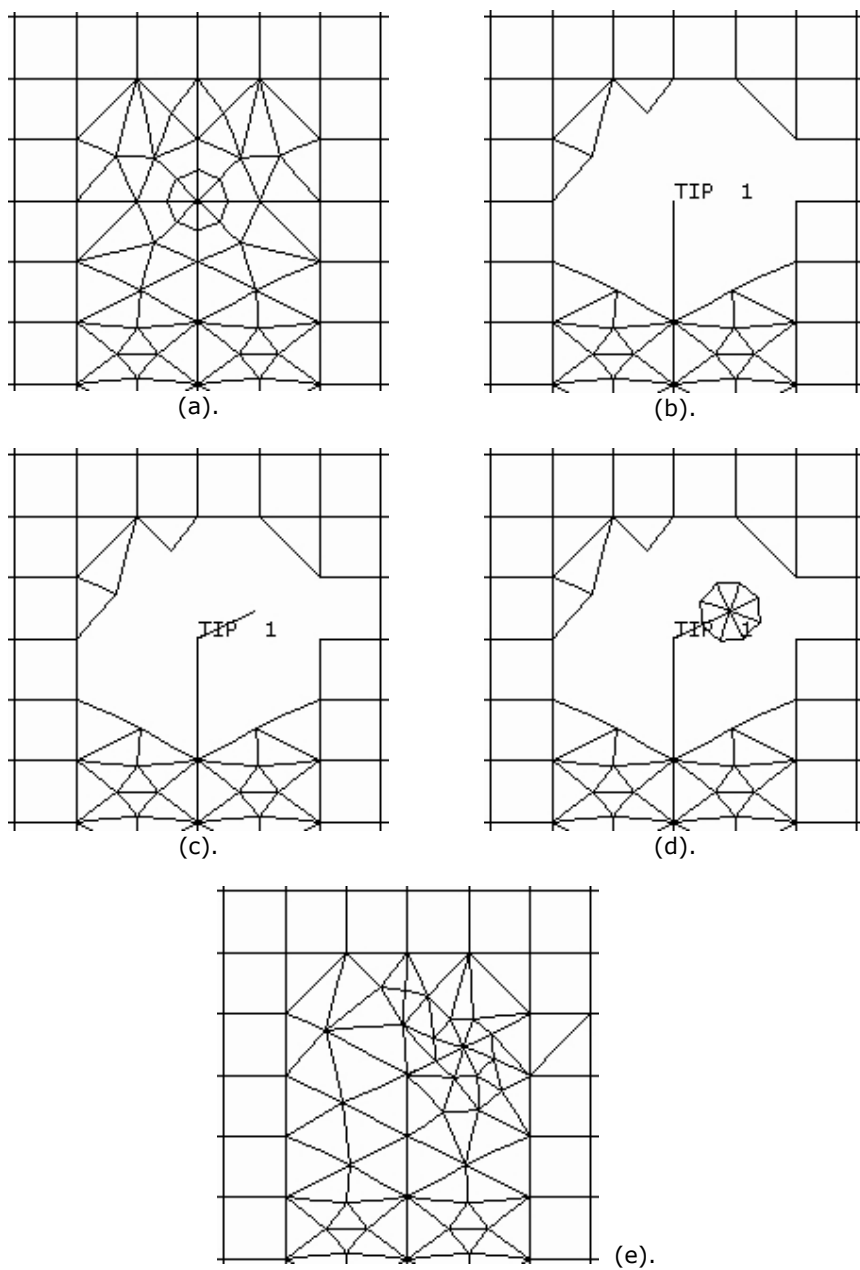
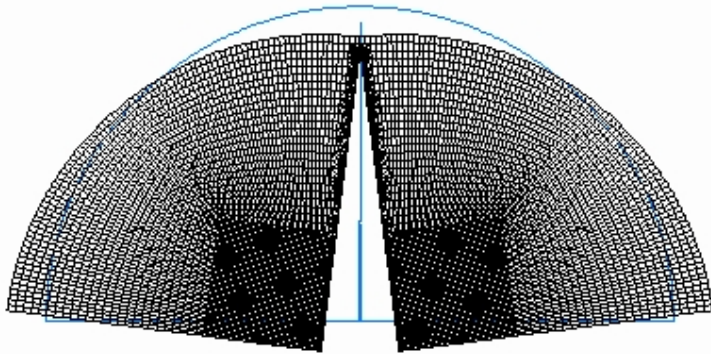
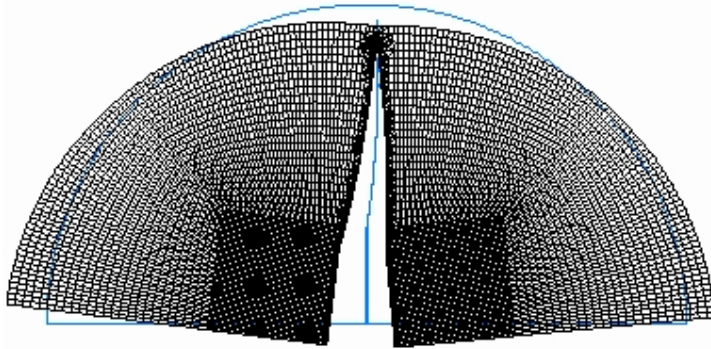


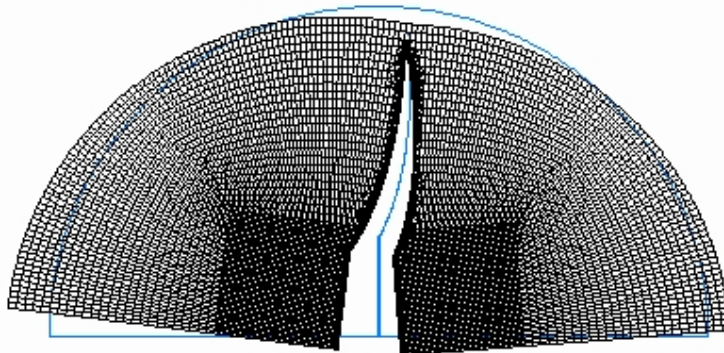
Fig. 5.4. Ilustrarea pașilor de actualizare a geometriei și rediscrizare automată



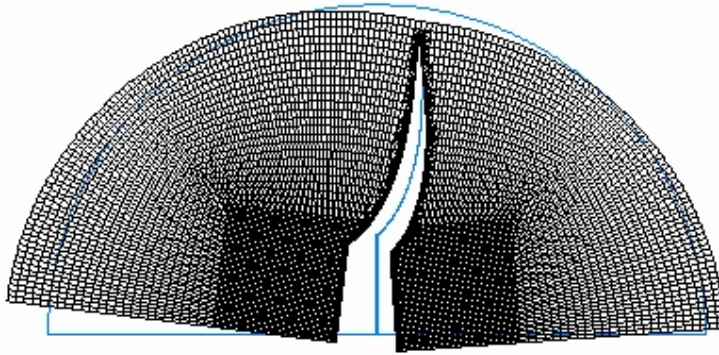
a).  $M^e = 1$  (modul I,  $K_{II} = 0$ )



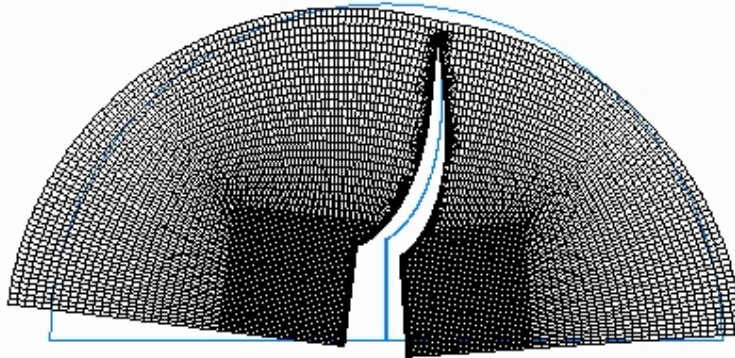
b).  $M^e = 0.955$  (modul mixt)



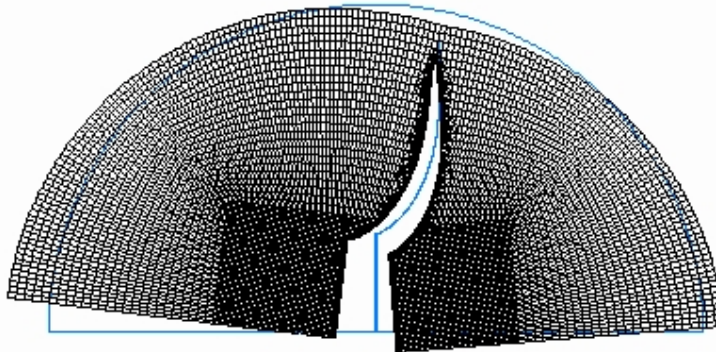
c).  $M^e = 0.795$  (modul mixt)



d).  $M^e = 0.467$  (modul mixt)



e).  $M^e = 0.199$  (modul mixt)



f).  $M^e = 0$  (modul II,  $K_I = 0$ )

Fig. 5.5. Simularea în FRANC2D/L a traiectoriilor de propagare a fisurii pentru epruvete ASCB la diferite combinații între modul I și modul II (Necuron 1020)

Rediscretizarea se realizează printr-o procedură de împărțire recursivă a regiunii într-un număr de mici subregiuni de formă geometrică similară (de exemplu, un pătrat este împărțit în patru pătrate mai mici), operația repetându-se pentru fiecare dintre subregiuni. Rețeaua de elemente finite este ajustată prin modificarea coordonatelor nodurilor interne astfel încât să ocupe poziția centrului de greutate al nodurilor adiacente. Algoritmul de rediscretizare este prezentat în detaliu de Bittencourt [1996]. Rețeaua de elemente finite generată automat în zona de la vârful fisurii este ilustrată în fig. 5.4e.

În fig. 2.13 și fig. 2.14 sunt prezentate pentru epruvetele ASCB, realizate din Necuron 1020 și Necuron 651, traiectoriile de propagare a fisurilor la ruperea în regim cvasistatic, pentru toate combinațiile între modul I și modul II analizate (în funcție de parametrul adimensional  $M^e$ ).

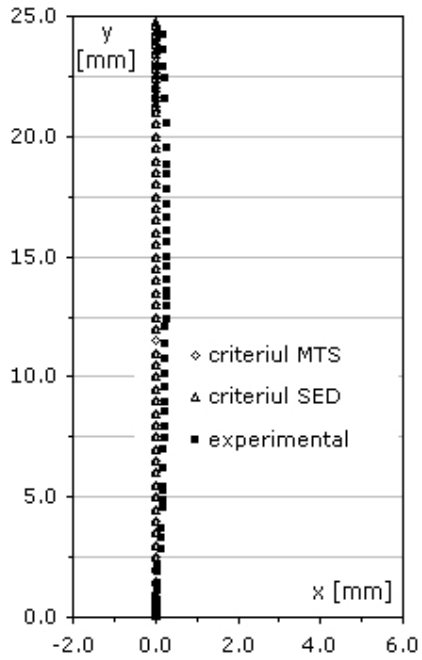
Din examinarea traiectoriilor de propagare se evidențiază următoarele concluzii:

- pentru cazul  $M^e = 1$ , adică epruveta ASCB este solicitată în modul I, inițierea la propagare se produce în planul fisurii inițiale, traiectoria fiind o linie dreaptă;
- pentru cazurile în care  $0 \leq M^e < 1$ , adică epruveta ASCB este solicitată în modul mixt la diferite combinații între modul I și II, inițierea la propagarea fisurii se produce printr-o deviere bruscă de la direcția fisurii inițiale;
- după această deviere de unghi  $\theta_0$  traseul fisurii urmează o traiectorie curbilinie lină fără schimbări bruște de direcție;
- unghiul de inițiere la propagarea fisurii  $\theta_0$  crește pe măsură ce valoarea parametrului adimensional  $M^e$  se reduce, cu dominanța modului II;
- pentru toate cazurile de solicitare, pe ultima porțiune a traiectoriei, fisura se propagă arcuindu-se spre punctul de aplicare a sarcinii.

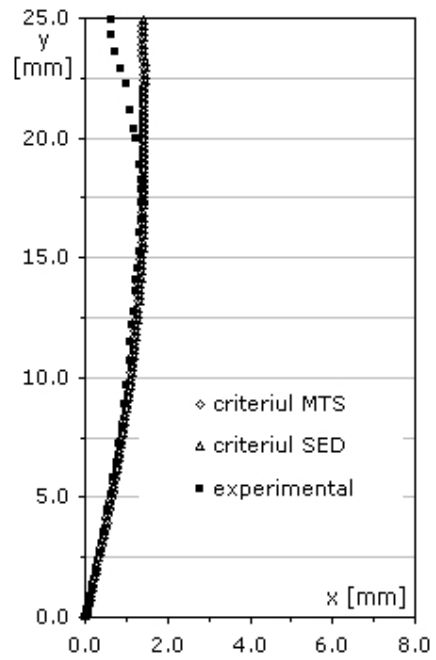
În toate cazurile analizate, la simularea cu pachetul software FRANC2D/L a propagării fisurilor în regim cvasistatic pe epruvete ASCB, pentru determinarea factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  s-a utilizat metoda corelării deplasărilor. Pentru fiecare caz în parte, direcția de propagare a fisurii s-a stabilit atât pe baza criteriului tensiunii circumferențiale maxime (MTS), cât și pe baza criteriului energiei specifice de deformație minimă (criteriul SED). Propagarea fisurii pentru epruvetele ASCB s-a realizat practic acceptând o valoare redusă de  $0.1[mm]$  a incrementului pentru primii 10 pași de extensie, iar pentru restul traseului simularea s-a realizat cu un increment de  $0.2[mm]$ , cu scopul de a obține o traiectorie cât mai exactă a fisurii.

În fig. 5.5 sunt ilustrate, prin rețeaua de elemente finite deformată, traiectoriile rezultate din simularea numerică a propagării fisurilor pe epruvetele ASCB realizate din Necuron 1020. Buna concordanță dintre rezultatele numerice și cele experimentale este reliefată de similaritatea traiectoriilor pentru toate valorile parametrului  $M^e$  (fig. 5.6). Practic, traiectoriile experimentale digitizate și respectiv traiectoriile obținute prin simularea propagării fisurilor cu pachetul software FRANC2D/L sunt identice pentru cea mai mare parte din lungimea fisurii propagate; exprimată prin coordonata  $y$ , această lungime este cuprinsă între  $0 - 20[mm]$ .

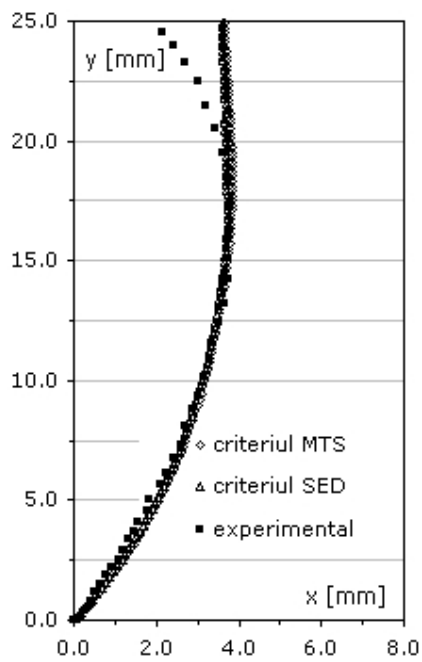




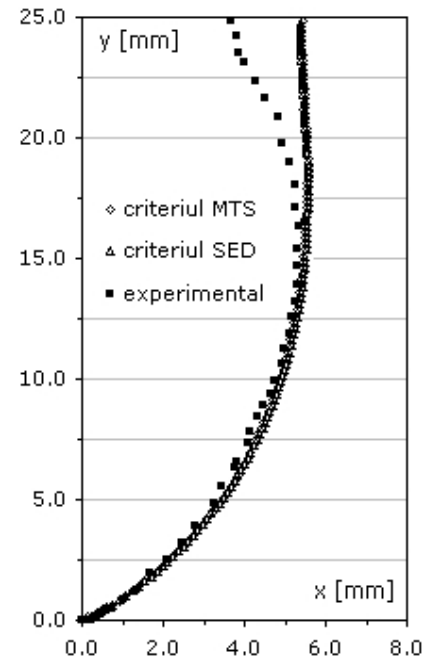
a).  $M^e = 1$  (modul I,  $K_{II} = 0$ )



b).  $M^e = 0.955$  (modul mixt)



c).  $M^e = 0.795$  (modul mixt)



d).  $M^e = 0.467$  (modul mixt)

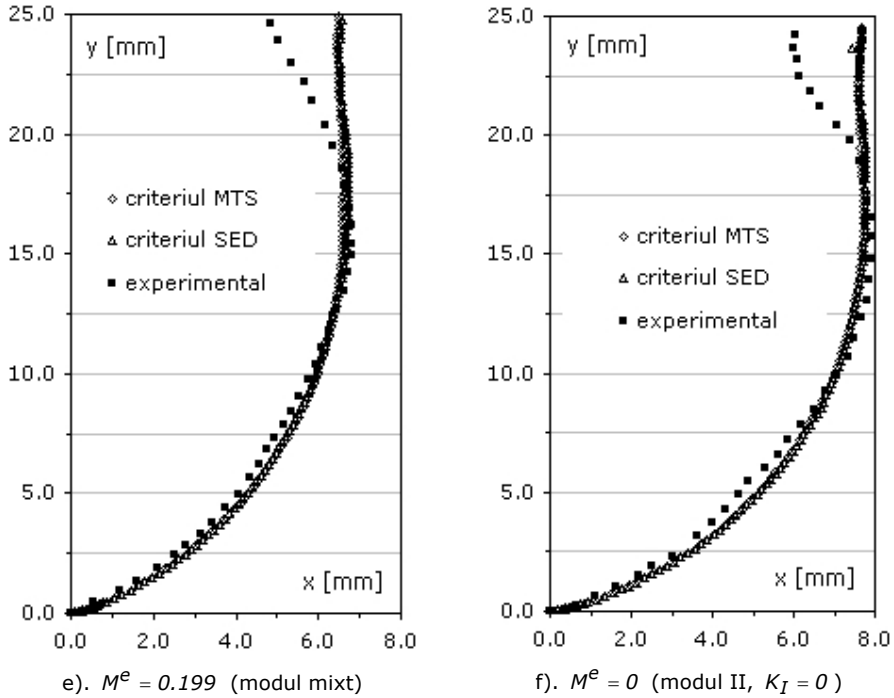


Fig. 5.6. Traiectoriile de propagare a fisurilor pentru diferite combinații între modul I și modul II (Necuron 1020)

Cu excepția cazului  $M^e = 1$ , pe ultima porțiune din lungimea fisurii propagate (exprimată prin coordonata  $y$ , această porțiune este reprezentată prin intervalul  $20 - 25$  [mm]) traiectoriile determinate prin simularea cu elemente finite deviază de la traseul experimental. Pentru această deviere a traiectoriei fisurilor, o explicație posibilă este legată de modificarea condițiilor de rezemare în timpul experimentului, condițiile la limită din simularea numerică fiind în schimb păstrate neschimbate.

De asemenea, nu sunt observate diferențe semnificative între traiectoriile globale determinate din analiza cu elemente finite, la utilizarea celor două criterii de inițiere la propagarea fisurii, criteriul MTS și criteriul SED. Re prezentarea în detaliu din fig. 5.7 (pentru cazul  $M^e = 0.199$ ) a zonei de la vârful fisurii inițiale evidențiază faptul că inițierea la propagare se produce sub un unghi  $\theta_0$  care depinde însă de criteriul utilizat. Valorile obținute din analiza numerică cu elemente finite  $\theta_0 = -64.49^\circ$  pentru criteriul MTS și  $\theta_0 = -71.18^\circ$  pentru criteriul SED sunt în bună concordanță cu soluțiile analitice:  $\theta_0 = -64.42^\circ$  și respectiv  $\theta_0 = -71.83^\circ$ .

Variația factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  în funcție de lungimea fisurii propagate  $a$ , ilustrată în fig. 5.8, confirmă principiul simetriei locale formulat de Goldstein [1974]. Astfel, pentru cazul unei solicitări în modul mixt I+II, inițierea la propagare se produce printr-o deviere de la fisura inițială pe o direcție care să asigure  $K_{II} = 0$ . Cu alte cuvinte, traiectoria fisurii revine la configurația de simetrie

globală, comportament demonstrat și de rezultatele experimentale publicate de Smith[2001].

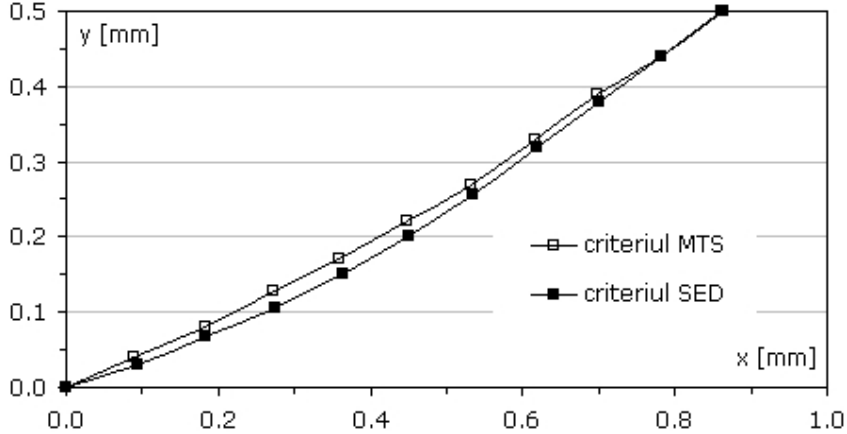


Fig. 5.7. Detaliu din zona de la vârful fisurii inițiale pentru traiectoriile de propagare la  $M^e = 0.199$  (Necuron 1020)

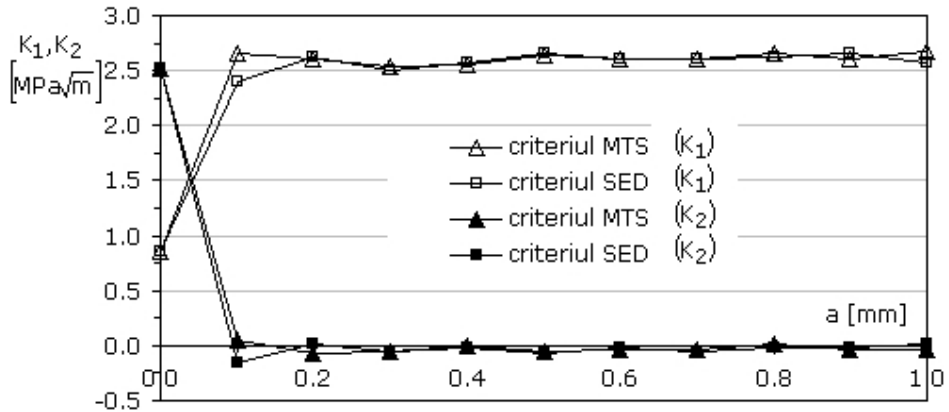


Fig. 5.8. Variația factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$  și  $K_{II}$  pentru cazul  $M^e = 0.199$  în funcție de lungimea fisurii (Necuron 1020)

Analizând rezultatele obținute pentru simularea numerică a traiectoriilor de propagare a fisurilor pe epruvetele ASCB confecționate din Necuron 1020 și Necuron 651 se desprind concluziile:

- unghiul de inițiere  $\theta_0$  la propagarea fisurii este estimat numeric corect pe baza criteriul SED, criteriul considerând în modelul analitic și influența coeficientului de contracție transversală  $\nu$  ;
- la nivel global, traseul fisurii depinde de combinația între modul I și II, traiectoriile fiind similare pentru cele două materiale.

## 5.2.2. Simularea propagării fisurilor pe baza criteriului GMTS

Pachetul software ABAQUS 6.5 [2004] include câteva facilități importante de analiză a aplicațiilor de mecanica ruperii:

- definirea interactivă pentru aplicațiile bi- și tridimensionale a fisurilor de margine, a frontului fisurii și a vectorului care definește direcția de extensie a fisurii;
- controlul interactiv al degenerării elementelor finite și poziționarea nodurilor de pe mijlocul laturilor în poziția corespunzătoare ordinului singularității;
- evaluarea integralei  $J$ , a factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$ ,  $K_{II}$  și  $K_{III}$ , a tensiunii nesingulare  $T$  și a direcției de propagare a fisurii pe baza criteriului MTS și a criteriului forței maxime de extensie a fisurii;
- vizualizarea seturilor de noduri și a rezultatelor pentru fiecare contur de integrare.

Facilitatea de calcul a factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$ ,  $K_{II}$  și a tensiunii nesingulare  $T$  oferită de pachetul software ABAQUS 6.5 permite evaluarea traiectoriilor fisurilor în modul mixt de solicitare pe baza criteriului GMTS. Simularea propagării fisurii se realizează incremental, după algoritmul prezentată în fig. 5.9.

**Definirea și analiza modelului în ABAQUS 6.5.** Geometria epruvetei ASCB este ilustrată în fig. 3.6, cu dimensiunile  $R = 40 [mm]$ ,  $S_1 = 30 [mm]$  și  $S_2 = 6 [mm]$  (pentru  $M^e = 0.199$ ), iar lungimea inițială a fisurii  $a = 12 [mm]$ . Pentru poliuretanul rigid Necuron 1020 următoarele proprietăți de material au fost considerate în analiza liniar elastică cu elemente finite: modulul de elasticitate longitudinal  $E = 3340 [MPa]$  și coeficientul de contracție transversală  $\nu = 0.34$

Modelul geometric partiționat prezentat în fig. 5.10 a fost discretizat, în condițiile stării plane de deformare, cu elemente finite izoparametrice pătratice cu 6 și respectiv 8 noduri rezultând în final un model care conține 7205 elemente finite și 21758 noduri (fig. 5.11). Singularitatea de ordinul  $1/\sqrt{r}$  se obține prin colapsul elementelor finite pătratice cu 8 noduri și poziționarea nodurilor de pe mijlocul laturilor adiacente la  $1/4$  față de nodul care reprezintă vârful fisurii.

Partiționarea modelului geometric ilustrată în fig. 5.10 asigură impunerea cu exactitate a condițiilor la limită pentru încovoierea asimetrică în trei puncte: deplasările verticale ale nodurilor corespunzătoare suporturilor de rezemare  $u_y = 0$  (partițiile  $RP - 1$  și  $RP - 3$ ) și forța  $F = F_{Cr}$  (partiția  $RP - 2$ ) aplicată pe direcția verticală conținută în planul fisurii inițiale ( $F_{Cr}$  reprezintă valoarea medie experimentală). În primul pas al analizei se determină starea de tensiune și deformare de la vârful fisurii.

**Evaluarea factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$ ,  $K_{II}$  și a tensiunii nesingulare  $T$ .** Pentru un material linear elastic și cazul unei solicitări în modul mixt, pachetul software ABAQUS 6.5 utilizează metoda propusă de Shih [1988] și bazată pe calculul integralei  $J$  pentru extragerea factorilor de intensitate a tensiunii  $K_I$ ,  $K_{II}$  și a tensiunii  $T$  (ABAQUS [2004]).

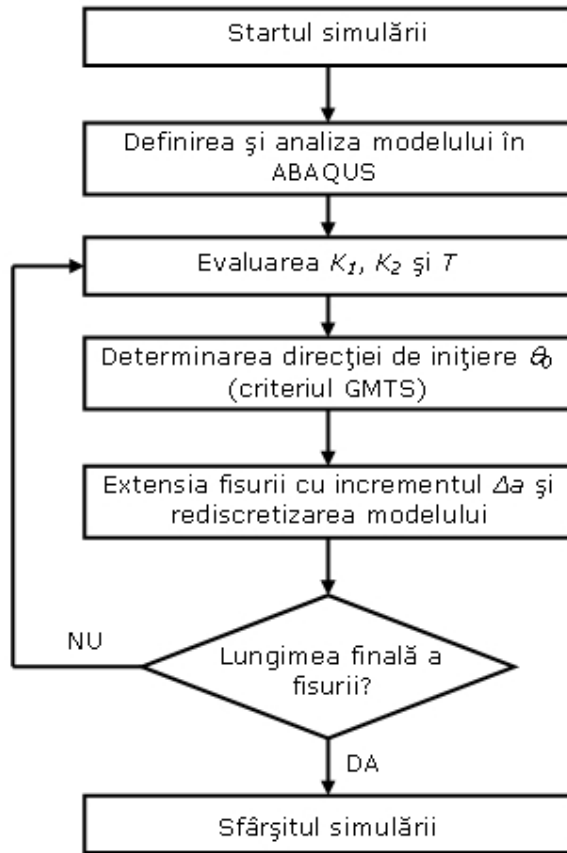


Fig. 5.9. Algoritm de simulare a propagării fisurii cu pachetul software ABAQUS 6.5

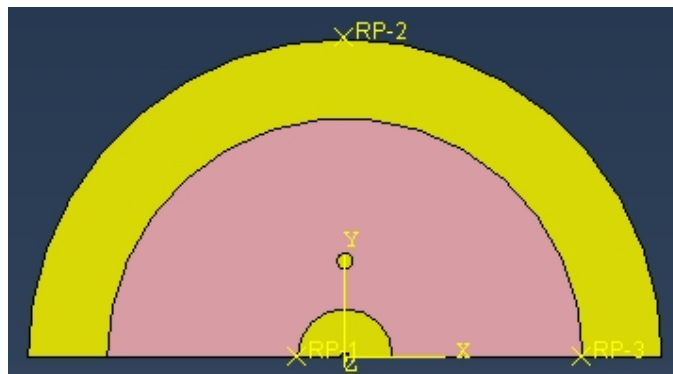


Fig. 5.10. Modelul geometric partiționat al epruvetei ASCB

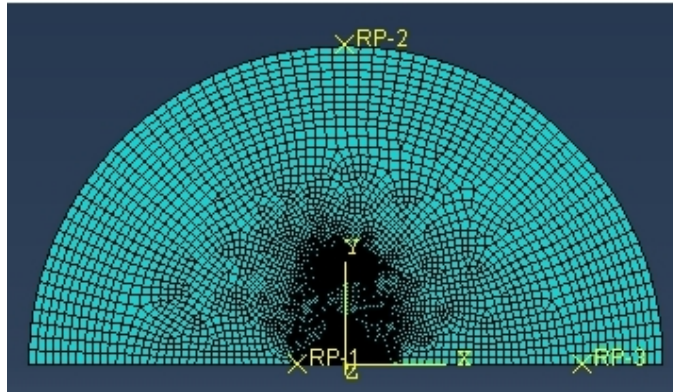


Fig. 5.11. Modelul cu elemente finite al epruvetei ASCB

Pentru fisura inițială cu lungimea  $a = 12 [mm]$ , fig. 5.10 și fig. 5.11 ilustrează rezultatele obținute pentru primele 6 contururi de integrare, în funcție de raza  $r$  măsurată de la vârful fisurii. Se constată o foarte bună convergență a rezultatelor, următoarele valori determinate prin extrapolare fiind utilizate pentru determinarea direcției de inițiere la propagarea fisurii pe baza criteriului GMTS:

$$K_I = 0.8627 [MPa\sqrt{m}] , K_{II} = 2.6156 [MPa\sqrt{m}] \text{ și } T = -28.992 [MPa].$$

**Determinarea direcției de inițiere pe baza criteriului GMTS.** Conform criteriului GMTS, direcția de inițiere la propagarea fisurii se determină ca soluție a ecuației (3.9) pentru  $r_c = 0.34 [mm]$  și rezultatele precedente:

$$\left[ K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) \right] - \frac{16T}{3} \sqrt{2nr_c} \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \theta_0 = 0, \quad (5.1)$$

rezultând  $\theta_0 = -48.43^\circ$ .

**Extensia fisurii și rediscritizarea modelului.** Pe direcția de unghi  $\theta_0 = -48.43^\circ$  fisura inițială se extinde cu incrementul  $\Delta a = 2 [mm]$ , iar modelul geometric obținut se rediscritizează în condițiile prezentate anterior. Incrementul de extensie a fisurii  $\Delta a = 2 [mm]$  a fost ales astfel încât să rezulte un număr rezonabil de pași. Analiza stării de tensiune și deformație pentru noul model de calcul asigură determinarea parametrilor de mecanica ruperii  $K_I$ ,  $K_{II}$  și  $T$ , iar pe baza criteriului GMTS se determină unghiul de inițiere la propagarea noii fisuri extinse cu incrementul  $\Delta a$ .

După algoritmul prezentat, fisura s-a propagat un număr adecvat de pași pînă în apropierea conturului exterior al epruvetei ASCB. Pentru cazul  $M^e = 0.199$  fisura a fost propagată progresiv în 14 pași cu incrementul  $\Delta a = 2 [mm]$  păstrat constant. Deformata modelului cu elemente finite este ilustrată în fig. 5.14 pentru trei valori ale lungimii fisurii.

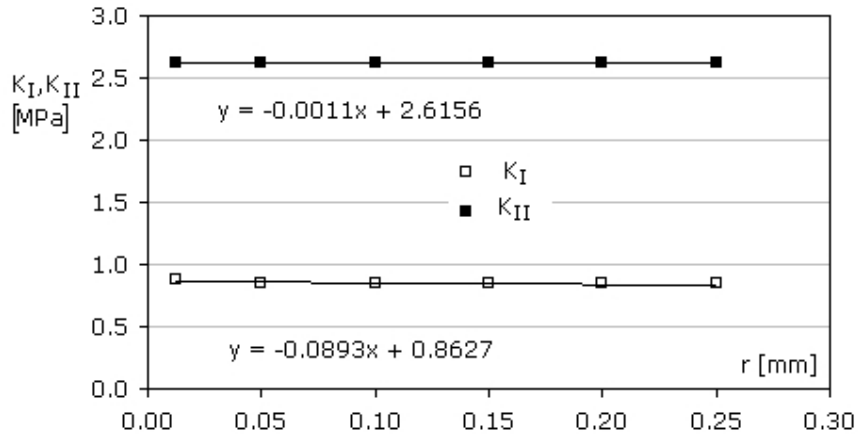


Fig. 5.12. Variația factorilor de intensitate a tensiunii cu distanța de la vârful fisurii ( $M^e = 0.199$  și  $a = 12$  [mm])

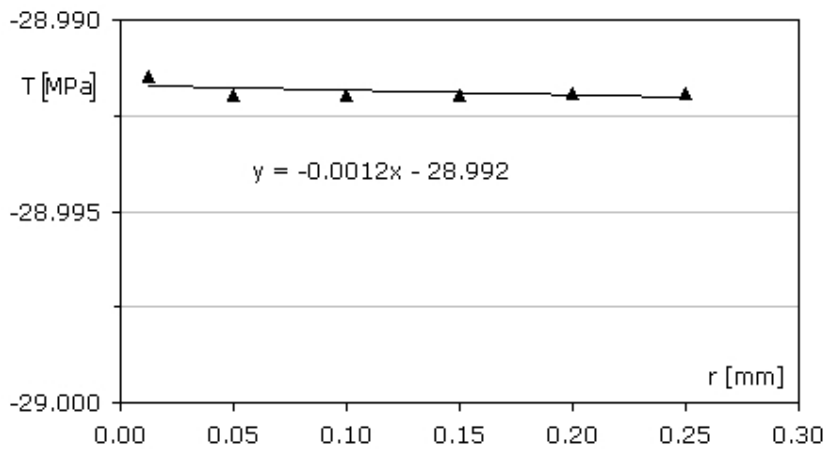
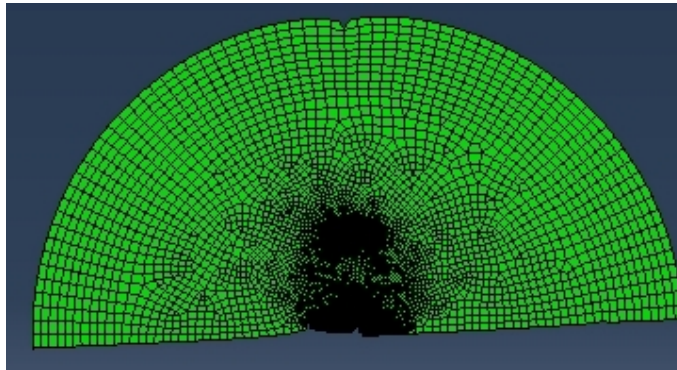
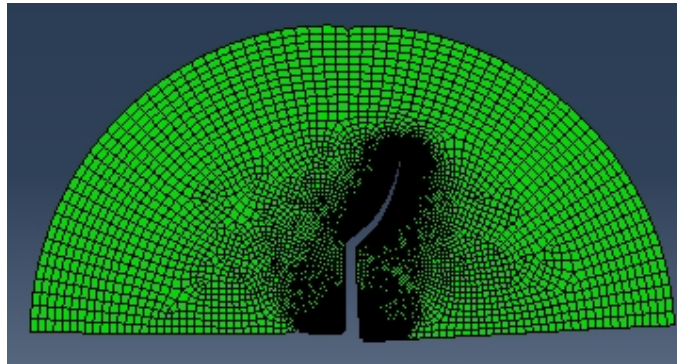


Fig. 5.13. Variația tensiunii nesingulare  $T$  cu distanța de la vârful fisurii ( $M^e = 0.199$  și  $a = 12$  [mm])

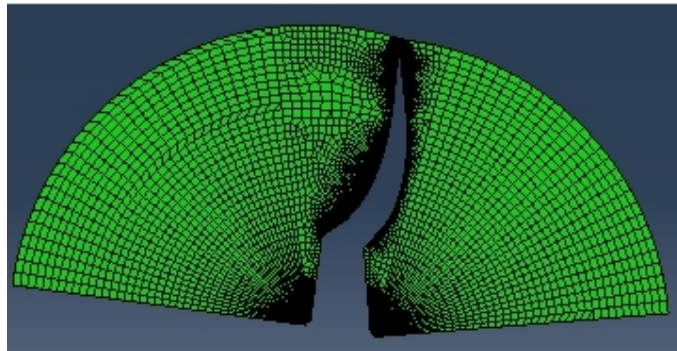
Buna concordanță dintre rezultatele numerice și cele experimentale este reliefată de similaritatea traiectoriilor ilustrate în fig. 5.15. Practic, traiectoria experimentală digitizată și respectiv traiectoria obținută prin simularea propagării fisurii pe baza criteriului GMTS sunt identice pentru cea mai mare parte din lungimea fisurii propagate; exprimată prin coordonata  $y$ , această lungime este cuprinsă între  $0 - 20$  [mm]. Pe ultima porțiune din lungimea fisurii propagate (exprimată prin coordonata  $y$ , intervalul  $20 - 25$  [mm]) traiectoria simulată pe baza criteriului GMTS cu pachetul software ABAQUS 6.5 deviază de la traseul experimental.



a). Lungimea inițială a fisurii  $a = 12 [mm]$  (factor de scară 2.5 )



b).pasul 7 ,  $\Delta a = 14 [mm]$  (factor de scară 1.5 )



c).pasul 14 ,  $\Delta a = 28 [mm]$  (factor de scară 0.2 )

Fig. 5.14. Deformata epruvetei ASCB realizată din Necuron 1020 la propagarea incrementală a fisurii cu pachetul software ABAQUS 6.5 ( $M^e = 0.199$ )



În fig. 5.15 sunt prezentate comparativ și traiectoriile de propagare a fisurii după criteriile MTS și GMTS. Prin introducerea efectului tensiunilor nesingulare  $T$ , direcția de inițiere la propagarea fisurii se modifică, dar global cele două traiectorii nu sunt sensibil diferite pe traseul de propagare. Simularea propagării fisurii pe baza criteriului GMTS cu pachetul software ABAQUS 6.5, confirmă o dată în plus principiul simetriei locale: după inițiere fisura tinde să se propage în modul I.

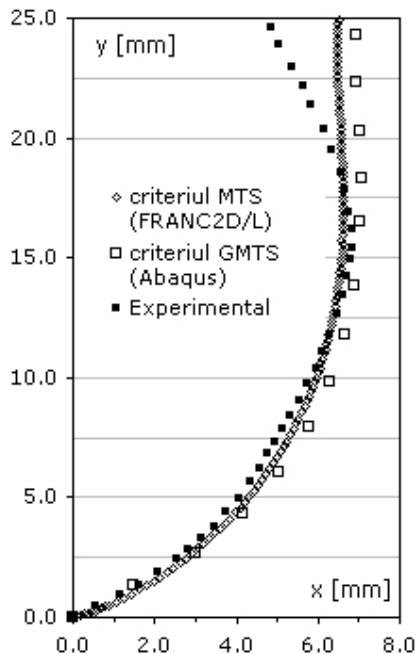


Fig. 5.15. Traiectoriile de propagare a fisurii pentru  $M^e = 0.199$  (Necuron 1020)

## 6. Concluzii și contribuții personale

### 6.1. Rezultate și concluzii

Câteva dintre rezultatele cercetării teoretice și experimentale a ruperii fragile pe materialele polimerice investigate sunt prezentate în acest paragraf.

**1. Caracteristicile mecanice, elastice și de mecanica ruperii.** Pentru polimerii Necuron 1020 și Necuron 651 principalele caracteristici mecanice și elastice obținute pe cale experimentală sunt prezentate în tabelul 6.1. Valorile determinate prin tehnica excitației prin impuls și pe baza curbelor tensiune-deformație specifică ridicate pentru încercările de întindere uniaxială sunt în bună concordanță.

Tab. 6.1. Caracteristici mecanice și elastice pentru Necuron 1020 și Necuron 651

	$\rho$ [gr./cm <sup>3</sup> ]	$E^*$ [MPa]	$E^{**}$ [MPa]	$\nu^{**}$ [MPa]	$\sigma_r^*$ [MPa]
Necuron 1020	1.217	3340	3600	0.343	49.75
Necuron 651	0.626	1250	1556	0.279	17.40

\*) determinate prin încercări experimentale de tracțiune uniaxială (ASTM D638-03);

\*\*\*) determinate prin tehnica excitației prin impuls (ASTM E1876-01).

Valorile critice ale factorilor de intensitate a tensiunii  $K_{IC}$  și  $K_{IIC}$  sunt prezentate în tabelul 6.2.

Tab. 6.2. Caracteristici de mecanica ruperii pentru Necuron 1020 și Necuron 651

	$K_{IC}^a)$ [MPa√m]	$K_{IC}^b)$ [MPa√m]	$K_{IC}^c)$ [MPa√m]	$K_{IIC}^b)$ [MPa√m]	$K_{IIC}^c)$ [MPa√m]
Necuron 1020	2.30	2.65	2.24	2.77	2.46
Necuron 651	1.00	1.25	-	1.37	-

a) determinate pe epruvete standardizate SENB cu fisură (ASTM D5045-99);

b) determinate pe epruvete ASCB cu fisură;

c) determinate prin extrapolarea rezultatelor obținute pentru epruvete SENB cu creștătură U (raza la vârf 0.5, 0.75, 1.00 și 2.00[mm]).

Rezultatele obținute pentru caracteristicile de mecanica ruperii sunt dependente, prin geometria epruvetei, de tipul constrângerii realizate la vârful fisurii (stare plană de deformație sau de tensiune), câmpul tensiunilor  $T$  nesingulare, etc., dar erorile relative sunt în limitele rezonabile pentru aplicațiile din inginerie.

**2. Predicția forței critice  $F_{Cr}$  de rupere pentru componentele cu fisuri.** În condițiile ipotezei unui comportament linia elastic până la ruperea finală, estimarea forței critice  $F_{Cr}$  s-a efectuat pentru epruvetele ASCB cu fisuri. S-au utilizat trei criterii de rupere, și anume criteriul MTS (Erdogan [1963]), criteriul GMTS (Smith [2001]) și criteriul SED (Sih [1973]).

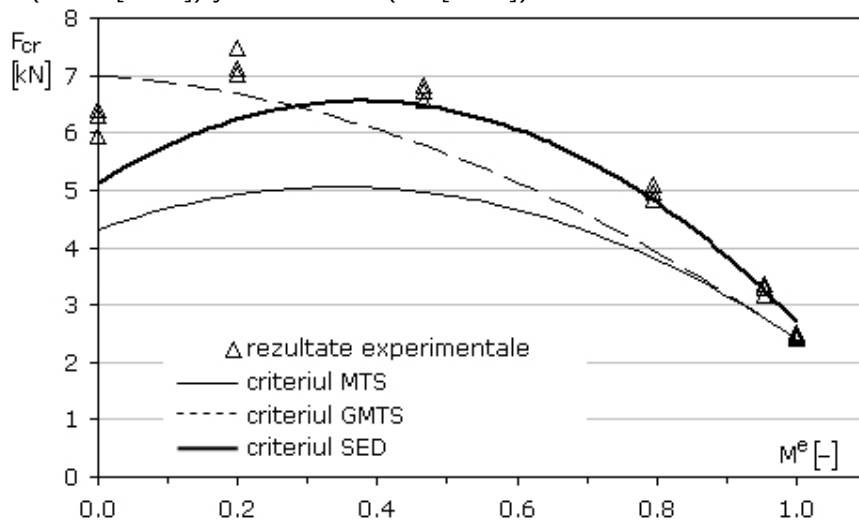


Fig. 6.1. Estimarea  $F_{Cr}$  la ruperea fragilă în modul mixt a epruvetelor ASCB, Necuron 1020

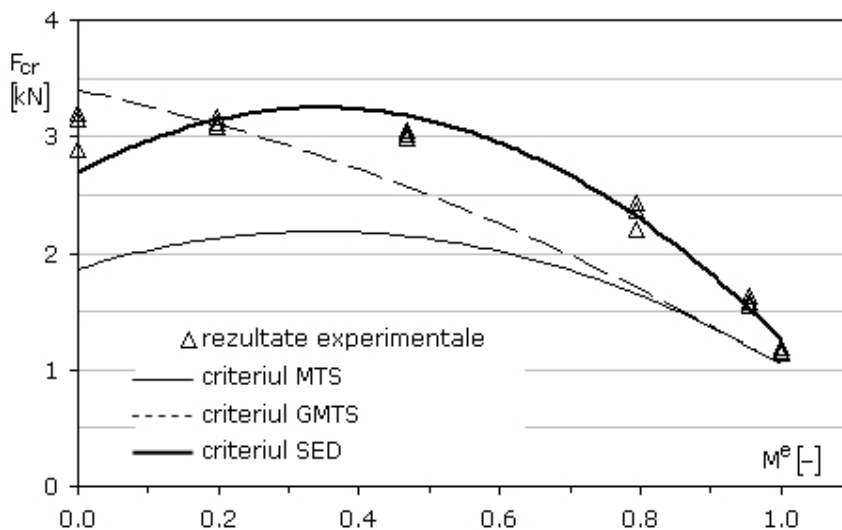
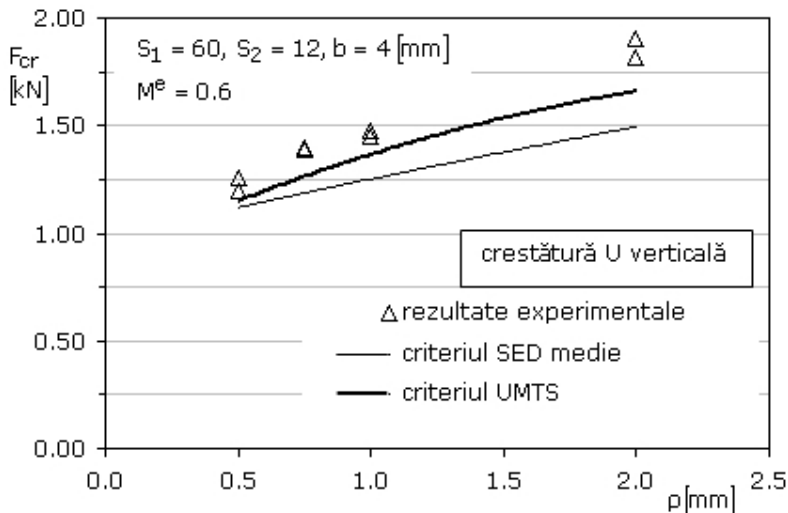
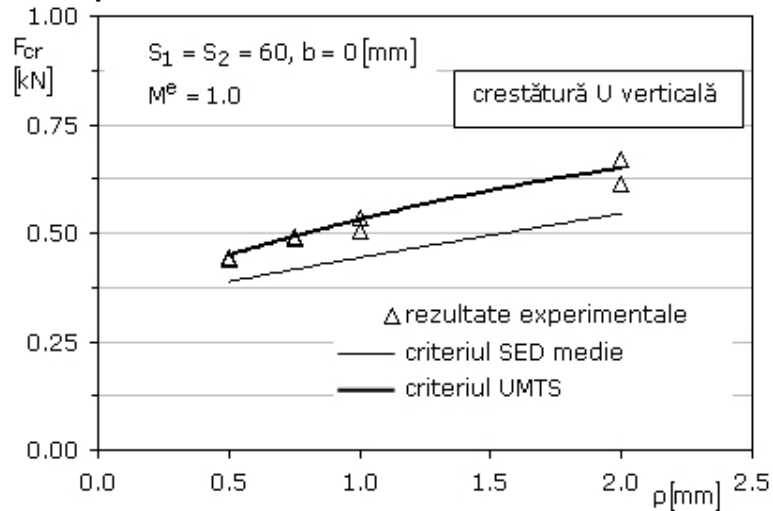


Fig. 6.2. Estimarea  $F_{Cr}$  la ruperea fragilă în modul mixt a epruvetelor ASCB, Necuron 651

Predicțiile sunt prezentate în fig. 6.1 și 6.2, împreună cu rezultatele experimentale, pentru epruvetele ASCB. Privind acuratețea predicției ruperii fragile în prezența fisurilor, pentru epruvetele ASCB investigate, se desprind câteva concluzii:

- estimările pe baza criteriului MTS sunt cele mai inexacte, eroarea relativă maximă de  $-37.4[\%]$  s-a obținut pentru Necuron 651, la solicitarea în modul II;
- aplicarea criteriului GMTS îmbunătățește acuratețea estimărilor, cu eroarea relativă maximă de  $+15.3[\%]$  pentru modul II de solicitare (Necuron 651);
- criteriul SED oferă predicții precise pentru toate combinațiile între modul I și II (eroarea relativă maximă de  $-14.4[\%]$  pentru modul II, Necuron 651).

### 3. Predicția forței critice $F_{Cr}$ de rupere pentru componentele cu creștături de tip U.



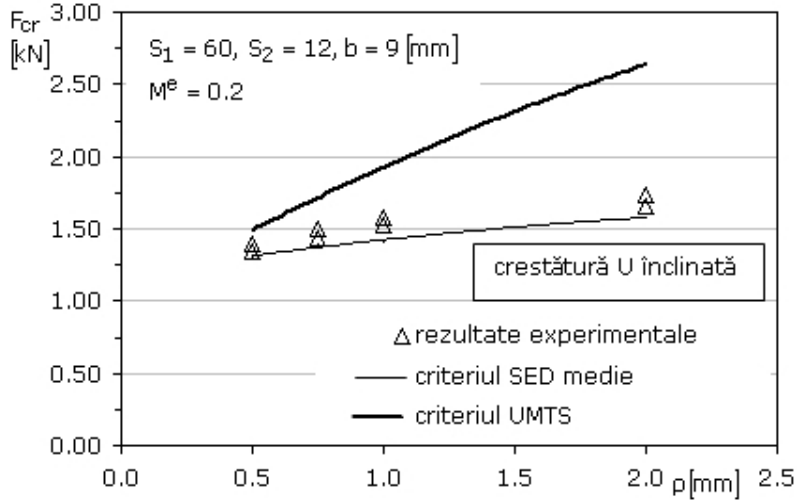


Fig. 6.3. Estimarea  $F_{Cr}$  la ruperea fragilă a epruvetelor SENB cu crestătură U (N1020)

În ipoteza unui comportament linia elastic până la ruperea finală, estimarea forței critice  $F_{Cr}$  s-a efectuat pentru epruvetele SENB solicitate la încovoiere, pe baza a două criterii de rupere: criteriul UMTS (Ayatollahi [2009a], [2010]) și criteriul valorii medii a energiei specifice de deformație (Gómez [2007]). Predicțiile sunt prezentate în fig. 6.3, împreună cu rezultatele experimentale, pentru trei valori ale parametrului adimensional  $M^e$ .

Privind acuratețea predicției ruperii fragile în prezența crestăturilor tip U, pentru epruvete SENB realizate din poliuretanul Necuron 1020, se desprind câteva concluzii:

- pentru  $M^e = 1$  erorile relative sunt plasate în intervalul  $+1.41...+1.93[\%]$  pentru criteriul UMTS și respectiv  $-11.92...-15.19[\%]$  pentru criteriul SED medie;
- pentru  $M^e = 0.6$  erorile relative sunt cuprinse între  $-6.83...-10.75[\%]$  pentru criteriul UMTS și respectiv  $-8.94...-19.62[\%]$  pentru criteriul SED medie;
- pentru  $M^e = 0.2$  erorile relative sunt cuprinse în intervalul  $+9.22...+55.65[\%]$  pentru criteriul UMTS și respectiv  $-4.40...-9.03[\%]$  pentru criteriul SED medie.

Dacă se are în vedere întreaga plajă a combinațiilor dintre modul I și II, capabilitatea criteriului SED medie de a estima forța critică de rupere cu o acuratețe rezonabilă este remarcată.

## 6.2. Contribuții personale

Teza nu epuizează vasta problematică a cedării prin rupere fragilă a componentelor realizate din materiale poliuretanic. Lucrare se dorește a fi însă un mic pas înainte în studiul acestei probleme.

Principalele contribuții personale în ordinea prezentării lor pe parcursul lucrării sunt:

- prezentarea într-o manieră originală, rezultatul unui vast studiu bibliografic, a criteriilor de rupere folosite frecvent în investigarea ruperii fragile, a principalelor tipuri de epruvete și materiale utilizate în studiile de mecanica ruperii liniar elastice (capitolul 1).

- determinarea experimentală a caracteristicilor mecanice (rezistența la rupere  $\sigma_r$ ), elastice (modulul de elasticitate  $E$  și coeficientul lui Poisson  $\nu$ ) și de mecanica ruperii (valorile critice ale factorilor de intensitate a tensiunii  $K_{IC}$  și  $K_{IIC}$ ) pentru materialele poliuretanic Necuron 1020 și Necuron 651. Modulul de elasticitate  $E$  este determinat din curbele tensiune-deformație specifică ridicate pentru încercările la întindere monoaxială și cu tehnica excitației prin impuls. Factorul critic de intensitate a tensiunii  $K_{IC}$  în modul I este determinat pe epruvete standardizate SENB, pe epruvete ASCB cu fisură și pe epruvete SENB cu creștătură U (prin extrapolarea rezultatelor pentru raza  $\rho$  la vârf egală cu zero). De asemenea, factorul critic de intensitate a tensiunii  $K_{IIC}$  în modul II este determinat pe epruvete ASCB cu fisură și pe epruvete SENB cu creștătură U (prin extrapolarea rezultatelor pentru raza  $\rho$  la vârf egală cu zero, pentru Necuron 1020). Erorile relative pentru aceste determinări experimentale încrucișate sunt în marja practicii ingineresti (capitolul 2).

- prezentarea concisă, dar clară, a formulărilor analitice pentru toate criteriile de rupere utilizate în demersul științific: pe de o parte, criteriile MTS, GMTS și UMTS, iar pe de altă parte, criteriile SED și SED medie (capitolele 3 și 4).

- stabilirea variației coeficienților adimensionali  $Y_I$  și  $Y_{II}$  ai factorilor de intensitate a tensiunii, precum și variația coeficientului adimensional  $T^*$  al tensiunii nesingulare  $T$ , în plaja de combinații posibile dintre modul I și II de solicitare, pentru geometria considerată a epruvetei ASCB, din analizele stării de tensiune cu metoda elementului finit realizate cu pachetele software Cosmos/M 2.9 și Abaqus 6.5 (capitolul 3).

- determinarea analitică a diagramelor de rupere  $K_{II}/K_{IC} - K_I/K_{IC}$  - și a diagramelor de variație ale unghiului critic  $\theta_0$  de inițiere la propagarea fisurii în funcție de parametrul  $M^e$ , pe baza criteriilor MTS, GMTS și SED, pentru epruvetele ASCB cu fisură verticală, confecționate din materialele poliuretanic Necuron 1020 și Necuron 651. Diagramele au fost ridicate pe baza soluțiilor obținute cu codurile scrise în MathCad 14 (capitolele 3 și 4).

- determinarea analitică a diagramelor de rupere  $K_{II}^U/K_{IC}^U - K_I^U/K_{IC}^U$  și a diagramelor de variație ale unghiului critic  $\theta_0$  de inițiere, în funcție de parametrul  $M^e$ , pe baza criteriului UMTS, pentru epruvetele SENB cu creștătură U verticală și înclinată, confecționate din poliuretanul Necuron 1020. Diagramele au fost ridicate pentru toate cele patru valori ale razei  $\rho$  la vârful creștăturii, cu soluțiile obținute cu codurile scrise în MathCad 14 (capitolele 3 și 4).

- predicția forței critice de rupere  $F_{Cr}$  pentru epruvetele ASCB cu fisură verticală, realizate din cele două materiale poliuretanic, pe baza criteriilor MTS, GMTS și SED. Înglobarea tensiunilor nesingulare  $T$  conduce la îmbunătățirea

predicțiilor după criteriul GMTS în comparație cu rezultatele criteriului MTS. Însă, cele mai acurate estimări sunt obținute prin aplicarea criteriului SED (capitolele 3 și 4).

- predicția forței critice de rupere  $F_{Cr}$  pentru epruvetele SENB cu creștătură U, la patru valori diferite ale razei  $\rho$  la vârful creștăturii, realizate din poliuretanul Necuron 1020, pe baza criteriilor UMTS și SED medie. Criteriul SED medie îmbunătățește predicțiile pentru situațiile de dominanță a modului II, chiar și la cea mai mare valoare a razei la vârful creștăturii (capitolele 3 și 4).

- predicția traiectoriilor fisurilor pe epruvetele ASCB după criteriile MTS și SED prin simulare numerică cvasiautomată cu metoda elementului finit, implementată de pachetul software FRANC2D/L. Traiectoriile au fost comparate cu cele experimentale digitizate, pentru toate combinațiile analizate dintre modul I și II (capitolul 5).

- predicția traiectoriei de propagare a fisurii pe epruveta ASCB după criteriile GMTS, prin simulare numerică interactivă cu metoda elementului finit, utilizând pachetul software Abaqus 6.5., pentru valoarea parametrului  $M^e$  egală cu 0.199 (capitolul 5).

Pe parcursul stagiului doctoral și în demersul de elaborare a acestei lucrări autoarea a găsit necesară pentru viitor îndreptarea atenției spre trei noi direcții de cercetare:

- aplicarea metodei distanțelor critice pentru predicția forței critice  $F_{Cr}$  de rupere a epruvetelor ASCB și SENB realizate din materiale poliuretanic;

- verificarea capabilității criteriilor de rupere utilizate în această lucrare de a estima ruperea fragilă a componentelor structurale realizate din materiale compozite (CEEX nr.202/2006) și materiale avansate (Uțu [2012]);

- verificarea capabilității criteriilor de rupere utilizate de a estima cedarea îmbinărilor realizate prin lipire (CEEX nr.262/2006).

## BIBLIOGRAFIE

Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R., Pakzad R. (2008) Brittle fracture analysis using a ring-shape specimen containing two angled cracks, *International Journal of Fracture* 153, 63-68.

Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R., Pakzad R. (2009) Mode II brittle fracture assessment using ASFPB specimen, *International Journal of Fracture* 159, 241-246.

Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R. (2012) Analysis of fracture initiation angle in some cracked ceramics using the generalized maximum tangential stress criterion, *International Journal of Solids and Structures* 49, 1877-1883.

Anderson T.L. (2005) *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications* 3<sup>rd</sup> ed., CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton FL, USA.

Atzori B., Lazzarin P., Tovo R. (1997) Stress distributions For V-shaped notches under tensile and bending loads, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 20, 1083-1092.

Ayatollahi M.R., Pavier M.J., Smith D.J. (2002) Mode I cracks subjected to large T-stresses, *International Journal of Fracture* 117, 159-174.

Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. (2005) Cracked Brazilian disc specimen subjected to mode II deformation, *Engineering Fracture Mechanics* 72, 493-503.

Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. (2006) On determination of mode II fracture toughness using semi-circular bend specimen, *International Journal of Solids and Structures* 43, 5217-5227.

Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M., Hassani M.M. (2006a) Mixed mode brittle fracture in PMMA – An experimental study using SCB specimens, *Materials Science and Engineering A* 417, 348-356.

Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. (2009) Analysis of a new specimen for mixed mode fracture tests on brittle materials, *Engineering Fracture Mechanics* 76, 1563-1573.

Ayatollahi M.R., Torabi A.R. (2009a) A criterion for brittle fracture in U-notched components under mixed mode loading, *Engineering Fracture Mechanics* 76, 1883-1896.

Ayatollahi M.R., Torabi A.R. (2010) Determination of mode II fracture toughness for U-shaped notches using Brazilian disc specimen, *International Journal of Solids and Structures* 47, 454-465.

Ayatollahi M.R., Torabi A.R. (2010a) Investigation of mixed mode brittle fracture in rounded-tip V-notched components, *Engineering Fracture Mechanics* 77, 3087-3104.

Ayatollahi M.R., Torabi A.R. (2010b) Brittle fracture in rounded-tip V-shaped notches, *Materials and Design* 31, 60-67.

Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M., Saghafi H. (2011) An improved semi-circular bend specimen for investigating mixed mode brittle fracture, *Engineering Fracture Mechanics* 78, 110-123.

Babeu T.D., Marşavina L., Stroia M. (1998) Studiul propagării fisurilor în eclisele de lanţ prin metoda elementelor finite, *Buletin Ştiinţific, vol.II, Lucrările sesiunii ALTEXIM-1, Sibiu*, 269-274.

Barati E., Alizadeh Y., Mohandesi J.A. (2011) Relationship between J-integral and averaged strain-energy density for U-notches in the case of large control volume under mode I loading, *Engineering Fracture Mechanics* 78, 1317-1322.



- Barenblatt G.I. (1962) The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture, *Advances in Applied Mechanics* 7, 55-129.
- Barsoum R.S. (1976) On the use of isoparametric elements in linear fracture mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10, 25-37.
- Bellet D., Taylor D., Marco S., Mazzeo E., Guillois J., Pircher T. (2005) The fatigue behaviour of three-dimensional stress concentrations, *International Journal of Fatigue* 27, 207-221.
- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., Krysl P. (1996) Meshless methods: an overview and recent developments, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139, 3-47.
- Belytschko T., Black T (1999) Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45, 601-620.
- Berto F., Lazzarin P., Gómez F.J., Elices M. (2007) Fracture assessments of U-notches under mixed mode loading: two procedures based on the equivalent local mode I concept, *International Journal of Fracture* 148, 415-433.
- Berto F., Lazzarin P. (2009) A review of the volume-based strain energy density approach applied to V-notches and welded structures, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 52, 183-194.
- Bittencourt T.N., Wawrzynek P.A., Ingraffea A.R., Sousa J.L. (1996) *Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems*, Engineering Fracture Mechanics 55, 321-334.
- Blumenfeld Maty (1995) *Introducere în metoda elementelor finite*, Editura Tehnică, București.
- Brebbia C.A. (1980) *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press Ltd. 2<sup>nd</sup> edition.
- Brebbia C.A., Dominguez J. (1989) *Boundary Elements: An Introductory Course*, McGraw-Hill, New York.
- Carter B.J., Wawrzynek P.A., Ingraffea A.R. (2000) Automated 3-D crack growth simulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47, 229-253.
- Chan S.K., Tuba I.S., Wilson W.K. (1970) On the finite element method in linear fracture mechanics, *Engineering Fracture Mechanics* 2, 1-17.
- Chen D.H., Ozaki S. (2008) Investigation of failure criteria for a sharp notch, *International Journal of Fracture* 152, 63-74.
- Cherepanov G.P. (1967) Crack propagation in continuous media, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 31, 503-512.
- Clough R.W. (1962) *The Stress Distribution of Norfolk Dam, Structures and Materials Research*, Department of Civil Engineering, University of California: series 100, issue 19, Berkeley.
- Constantinescu D.M. (2003) *Dezvoltări și Aplicații în Mecanica Ruperii și Oboseală*, Editura Academiei Române, București.
- Constantinescu D.M. (1999) *Contribuții la studiul stării de tensiune în zona fisurii în plăci elastice subțiri*, Teză de doctorat, Universitatea Politehnică din București.
- Cotterell B. (2010) *Fracture and Life*, Imperial College Press, London, UK.
- Creager M., Paris P.C. (1967) Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking, *International Journal of Fracture Mechanics* 3, 247-252.

- Dally J.W., Berger J.R. (1986) A strain gage method for determining  $K_I$  and  $K_{II}$  in a mixed mode stress field, *Proceedings of the 1986 SEM Spring Conference on Experimental Mechanics*, New Orleans, June 9-13, 603-612.
- Dudescu M., Botean A., Hărdău M. (2009) Digital image correlation method applied to material testing, In: *Proceedings of the 26th Danubia-Adria Symposium on Advances in Experimental Mechanics*, September 23-26, Leoben, Austria, 45-47.
- Dugdale D.S. (1960) Yielding in steel sheets containing slits, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8, 100-104.
- Dumitru I., Marşavina L. (2001) *Introducere în Mecanica Ruperii*, Monografie RezMat 27, Editura Mirton, Timișoara.
- Dunn M.L., Suwito W., Cunningham S. (1997) Fracture initiation at sharp notches: correlation using critical stress intensities, *International Journal of Solids and Structures* 34, 3873-3883.
- Dunn M.L., Suwito W., Cunningham S., May C.W. (1997a) Fracture initiation at sharp notches under mode I, mode II, and mild mixed mode loading, *International Journal of Fracture* 84, 367-381.
- El Minor H., Louah M., Azari Z., Pluvinage G. and Kifani A. (2002) Brittle mixed mode (I+II) fracture: application of the equivalent notch stress intensity factor to cracks emanating from notches, *Strength of Materials* 34, 570-577.
- El Minor H., Kifani A., Louah M., Azari Z., Pluvinage G. (2003) Fracture toughness of high strength steel – using the notch stress intensity factor and volumetric approach, *Structural Safety* 25, 35-45.
- Erdogan F., Sih G. C. (1963) On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME* 85, 519-525.
- Ewing P.D., Williams J.G. (1974) Further observations on the angled crack problem, *International Journal of Fracture* 10, 135.
- Faur N. (2002) *Elemente Finite. Fundamente*, Editura Politehnica, Timișoara.
- Filipescu Hannelore-Elfride**, Marşavina L., Căplescu C., Culea L., Negru R. (2010) Stress concentration effect on fracture behaviour of polyurethane material, *The Tenth Meeting "New Trends in Fatigue and Fracture NT2F10"*, Metz, France, 30 August-1 September, CD edition.
- Filipescu Hannelore-Elfride**, Negru R., Marşavina L., Căplescu C. (2010) Assessment of two fracture criteria for components with circular holes, *Annals of DAAAM for 2010 & Proceedings of the 21st International DAAAM Symposium*, DAAAM International, Vienna, Austria, 0023-0024.
- Filippi S., Lazzarin P., Tovo R. (2002) Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates, *International Journal of Solids and Structures* 39, 4543-4565.
- Gdoutos E.E. (1990) *Fracture Mechanics Criteria and Applications (Engineering Applications of Fracture Mechanics)*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Gdoutos E.E., Rodopoulos C.A., Yates J.R. (ed.) (2003) *Problems of Fracture Mechanics and Fatigue. A solution guide*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Gdoutos E.E. (2005) *Fracture Mechanics. An Introduction*, 2<sup>nd</sup> ed., Springer, Dordrecht, The Netherlands.
- Glinka G. (1985) Energy density approach to calculation of inelastic strain-stress near notches and cracks, *Engineering Fracture Mechanics* 22, 485-508.
- Glinka G., Newport A. (1987) Universal features of elastic notch-tip stress fields, *International Journal of Fatigue* 9, 143-150.

- Goldstein R.V., Salganik R.L. [1974] Brittle fracture of solids with arbitrary cracks, *International Journal of Fracture* 10, 507-523.
- Gómez F.J., Elices M., Valiente A. (2000) Cracking in PMMA containing U-shaped notches, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 23, 795-803.
- Gómez F.J., Elices M. (2003) A fracture criterion for sharp V-notched samples, *International Journal of Fracture* 123, 163-175.
- Gómez F.J., Elices M. (2004) A fracture criterion for blunted V-notched samples, *International Journal of Fracture* 127, 239-264.
- Gómez F.J., Elices M., Planas J. (2005) The cohesive crack concept: application to PMMA at -60°C, *Engineering Fracture Mechanics* 72, 1268-1285.
- Gómez F.J., Guinea G.V., Elices M. (2006) Failure criteria for linear elastic materials with U-notches, *International Journal of Fracture* 141, 99-113.
- Gómez F.J., Elices M., Berto F., Lazzarin P. (2007) Local strain energy to assess the static failure of U-notches in plates under mixed mode loading, *International Journal of Fracture* 145, 29-45.
- Gómez F.J., Elices M., Berto F., Lazzarin P. (2008) A generalised notch stress intensity factor for U-notched components loaded under mixed mode, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 4819-4833.
- Gómez F.J., Elices M., Berto F., Lazzarin P. (2009) Fracture of V-notched specimens under mixed mode (I+II) loading in brittle materials, *International Journal of Fracture* 159, 121-135.
- Gómez F.J., Elices M., Berto F., Lazzarin P. (2009a) Fracture of U-notched specimens under mixed mode: Experimental results and numerical predictions, *Engineering Fracture Mechanics* 76, 236-249.
- Griffith A.A. (1921) The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 221, 163-198.
- Griffith A.A. (1924) The theory of rupture, *Proceedings, First International Congress of Applied Mechanics* (Delft, The Netherlands), 55-63.
- Gross B., Mendelson A. (1972) Plane elastoplastic analysis of V notched plates, *International Journal of Fracture Mechanics* 8, 267-276.
- Hillerborg A., Modéer M., Petersson P.E. (1976) Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite element, *Cement and Concrete Research* 6, 773-782.
- Hussain M.A., Pu S.L., Underwood J. (1974) Strain energy release rate for a crack under combined mode I and II, in: *Fracture Analysis, ASTM STP 560*, ASTM, Philadelphia, 2-28.
- Ingraffea A.R., Wawrzynek P.A. (2003) *Comprehensive Structural Integrity. Numerical and Computational Methods* vol.3 (ed. de Borst R., Mang H.A.), Elsevier Ltd., Oxford, UK.
- Ingraffea A.R. (2004) *Computational Fracture Mechanics*, in: *Encyclopedia of Computational Mechanics*, vol.2, chapter 11 (ed. E. Stein, R. De Borst, T.J.R. Hughes), John Wiley and Sons.
- Irwin G.R. (1948) Fracture Dynamics, in: *Fracturing of Metals*, Symposium of the American Society of Metals, Cleveland, Ohio, 147-166.
- Irwin G.R. (1956) Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminium alloys, *Sagamore Research Conference Proceedings* vol 2, 289-305.
- Irwin G.R. (1957) Analysis of stresses and strain near the end of a crack transversing a plate, *Journal of Applied Mechanics* 24, 361-364.

Ishikawa H. (1980) A finite element analysis of stress intensity factors for combined tensile and shear loading by only a virtual crack extension, *International Journal of Fracture* 16, 243-246.

Janssen M., Zuidema J., Wanhill R. (2004) *Fracture Mechanics* 2<sup>nd</sup> ed., Spon Press, Taylor & Francis Group, New York NY, USA.

Khan K., Al-Shayea N.A. (2000) Effect of specimen geometry and testing method on mixed I-II fracture toughness of a limestone rock from Saudi Arabia, *Rock Mechanics and Rock Engineering* 33, 179-206.

Krishnan G.R., Zhao X.I., Zaman M., Roegiers J.C. (1998) Fracture toughness of a soft sandstone, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 35, 695-710.

Lazzarin P., Tovo R. (1996) A unified approach to the evaluation of linear elastic fields in the neighborhood of cracks and notches, *International Journal of Fracture* 78, 3-19.

Lazzarin P., Zambardi R. (2001) A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches, *International Journal of Fracture* 112, 275-298.

Lazzarin P., Berto F. (2005) Some expressions for the strain energy in a finite volume surrounding the root of blunt V-notches, *International Journal of Fracture* 135, 161-185.

Lazzarin P., Berto F. (2005a) From Neuber's elementary volume to Kitagawa and Atzori's diagrams: an interpretation based on local energy, *International Journal of Fracture* 135, L33-L38.

Lazzarin P., Filippi S. (2006) A generalized stress intensity factor to be applied to rounded V-shaped notches, *International Journal of Solids and Structures* 43, 2461-2478.

Lazzarin P., Berto F., Elices M., Gómez J. (2009) Brittle failures from U- and V-notches in mode I and mixed, I+II, mode: a synthesis based on the strain energy density averaged on finite-size volumes, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 32, 671-684.

Lazzarin P., Berto F., Zappalorto M. (2010) Rapid calculations of notch stress intensity factors based on averaged strain energy density from coarse meshes: Theoretical bases and applications, *International Journal of Fatigue* 32, 1559-1567.

Leguillon D. (2002) Strength or toughness ? A criterion for crack onset at a notch, *European Journal of Mechanics A/Solids* 21, 61-72.

Leguillon D. (2003) Crack onset at a V-notch. Influence of the notch tip radius, *International Journal of Fracture* 122, 1-21.

Leevers P.S., Radon J.C. (1982) Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries, *International Journal of Fracture* 19, 311-325.

Lim I.L., Johnston I.W., Choi S.K. (1994) Fracture testing of soft rock with semi-circular specimens under three-point bending. Part 2-mixed-mode, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* 31, 185-197.

Maccagno T.M., Knott J.F. (1989) The fracture behaviour of PMMA in mixed modes I and II, *Engineering Fracture Mechanics* 34, 65-86.

Mahajah R.V., Ravi-Chandar K. (1989) An experimental investigation of mixed mode fracture, *International Journal of Fracture* 41, 235-252.

Marşavina L. [1998] *Metode Numerice în Mecanica Ruperii*, Editura Mirton, Timişoara.

- Marşavina L., Tomlinson R.A. (2004) The use of infra-red detectors for determination of the fracture mechanics parameters, *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials* 6, 1323-1329.
- Murakami Y. (Ed.) (1987) *Stress Intensity Factors Handbook*, vols. 1 and 2, Pergamon Press, Oxford.
- Murakami Y. (Ed.) (1992) *Stress Intensity Factors Handbook*, vol. 3, The Society of Materials Science, Japan.
- Negru R., Marşavina L., **Filipescu Hannelore-Elfride**, Căplescu C. (2012) Application of two methods for notch fatigue life prediction, *Key Engineering Materials* 488-489, 654-657.
- Nobile L., Carloni C., Nobile M. (2004) Strain energy density prediction of crack initiation and cracked T-beams and pipes, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 41, 137-145.
- Pană T., Pastramă S.D. (2000) *Integritatea Structurilor Metalice*, Editura Fair Partners, Bucureşti.
- Paris P.C., Gomez M.P., Anderson W.P. (1961) A rational analytic theory of fatigue, *The Trend in Engineering* 13, 9-14.
- Pluvinage G. (2003) *Fracture and Fatigue Emanating from Stress Concentrators*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Ramamurthy T.S., Krishnamurthy T., Badari Narayana K., Vijayakumar K., Dattaguru B. (1986) Modified crack closure integral method with quarter point elements, *Mechanics Research Communications* 13, 179-186.
- Raju I.S. (1987) Calculation of strain-energy release rate with high order and singular finite elements, *Engineering Fracture Mechanics* 28, 251-274.
- Rao S.S. (2005) *The Finite Element Method in Engineering 4<sup>th</sup> edition*, Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington, USA.
- Rice J.R. (1968) A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks, *Journal of Applied Mechanics* 35, 379-386.
- Rybicki E.R., Kanninen M.F. (1977) A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral, *Engineering Fracture Mechanics* 9, 931-938.
- Saghafi H., Ayatollahi M.R., Sistaninia M. (2010) A modified MTS criterion (MMTS) for mixed-mode fracture toughness assessment of brittle materials, *Materials Science and Engineering A* 527, 5624-5630.
- Saouma V.E. (2000) *Lecture notes in Fracture Mechanics*, University of Colorado, Boulder, USA.
- Saxena A. (1998) *Nonlinear Fracture Mechanics for Engineers*, CRC Press.
- Seweryn A. (1994) Brittle fracture criterion for structures with sharp notches, *Engineering Fracture Mechanics* 47, 673-681.
- Seweryn A., Lukaszewicz A. (2002) Verification of brittle criteria for elements with V-shaped notches, *Engineering Fracture Mechanics* 69, 1487-1510.
- Shih C.F. (1972) Small-scale yielding analysis of mixed-mode plane-strain crack problems, in: *Fracture Analysis* (edited by Paris P.C. and Irwin G.R.) ASTM STP 560, American Society for Testing and Materials and Materials, Philadelphia, PA, USA, 2-28.
- Shih C.F., Delorenzi H.G., German M.D. (1976) Crack extension modeling with singular quadratic isoparametric elements, *International Journal of Fracture* 1, 647-651.
- Shih C.F., Asaro R.J. (1988) Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part I – Small scale yielding, *Journal of Applied Mechanics* 55, 299-316.

- Shukla A. (2005) *Practical Fracture Mechanics in Design* 2<sup>nd</sup> ed., Marcel Dekker, USA.
- Sih G.C. (1973) Energy-density concept in fracture mechanics, *Engineering Fracture Mechanics* 5, 1037-1040.
- Sih G.C. (1973a) Some basic problems in fracture mechanics and new concepts, *Engineering Fracture Mechanics* 5, 365-377.
- Sih G.C. (1974) Strain-energy-density applied to mixed mode crack problems, *International Journal of Fracture* 10, 305-321.
- Sih G.C. (1983) *Proceedings of an International Symposium on Absorbed Specific Energy and/or Strain Energy Density Criterion: In Memory of the Late Professor Laszlo*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Sih G.C., Ho J.W. (1991) Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 16, 179-214.
- Sih G.C., Gdoutos E.E. (1992) *Mechanics and Physics of Energy Density: Characterization of Material/Structure Behaviour with and without Damage (Engineering Applications of Fracture Mechanics)*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Singh R., Carter B., Wawrzynek P., Ingraffea A. (1998) Universal crack closure integral for SIF estimation, *Engineering Fracture Mechanics* 60, 133-146.
- Smith C.W., Constantinescu D.M., Liu C.T. (2001) Stress intensity factors and paths for cracks in photoelastic motor grain models under internal pressure, *Proceedings of 2001 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, New York NY, USA.
- Smith D.J., Ayatollahi M.R., Pavier M.J. (2001) The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 24, 137-150.
- Smith D.J., Ayatollahi M.R., Pavier M.J. (2006) On the consequences of T-stress in elastic brittle fracture, *Proceedings of The Royal Society A, Mathematical, Physical & Engineering Sciences* 462, 2415-2437.
- Stephens R.I., Fatemi A., Stephens R.R., Fuchs H.O. (2001) *Metal Fatigue in Engineering* 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons Inc., USA.
- Suresh S., Shih C.F., Morrone A., O'Dowd N.P. (1990) Mixed-mode fracture toughness of ceramic materials, *Journal of the American Ceramic Society* 73, 1257-1267.
- Susmel L., Taylor D. (2008) On the use of the Theory of Critical Distances to predict static failures in ductile materials containing different geometrical features, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 4410-4421.
- Susmel L., Taylor D. (2008a) The theory of critical distances to predict static strength of notched brittle components subjected to mixed-mode loading, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 534-550.
- Susmel L., Taylor D. (2010) The Theory of Critical Distances to estimate the static strength of notched samples of Al6082 loaded in combined tension and torsion. Part I: Material cracking behaviour, *Engineering Fracture Mechanics* 77, 452-469.
- Susmel L., Taylor D. (2010a) The Theory of Critical Distances to estimate the static strength of notched samples of Al6082 loaded in combined tension and torsion. Part II: Multiaxial static assessment, *Engineering Fracture Mechanics* 77, 470-478.
- Swenson D., James M. (1997) *FRANC2D/L: A Crack Propagation Simulator for Plane Layered Structures. User's Guide, Version 1.4.*

- Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. (1985) *The Stress Analysis of Cracks Handbook* 2<sup>nd</sup> edition, Paris Productions Incorporated, St. Louis, Missouri.
- Taylor D., Merlo M., Pegley R., Cavatorta M.P. (2004) The effect of stress concentrations on the fracture strength of polymethylmethacrylate, *Materials Science and Engineering A* 382, 288-294.
- Taylor D. (2006) The Theory of Critical Distances: a history and a new definition, *Structural Durability & Health Monitoring* 2, 1-10.
- Taylor D. (2007) *The Theory of Critical Distances. A New Perspective in Fracture Mechanics*, Elsevier, London.
- Taylor D. (2008) The theory of critical distances, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 1696-1705.
- Ueda Y., Ikeda K., Yao T., Aoki M. (1983) Characteristics of brittle fracture under general combined modes including those under bi-axial tensile loads, *Engineering Fracture Mechanics* 18, 1131-1158.
- Uțu Dragoș, Hulka I., Șerban V.A., **Filipescu Hannelore-Elfride** (2012) Corrosion properties of cermet coatings sprayed by high-velocity oxygen-fuel, *4th International Conference*, October 23-25, Brno, Czech Republic.
- Wawryznek P.A., Ingraffea A.R. (1987) Interactive finite element analysis of fracture processes: an integrated approach, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 8, 137-150.
- Wawryznek P.A., Ingraffea A.R. (1989) An interactive approach to local remeshing around a propagating crack, *Finite Element in Analysis and Design* 5, 87-96.
- Wawryznek P.A., Ingraffea A.R. (1991) *FRANC2D: A Two Dimensional Crack Propagation Simulator. User's Guide. Version 3.1*, Cornell University, Ithaca, New York.
- Wawryznek P.A., Martha L. (1997) *CASCA: A Simple 2-D Mesh Generator. Version 1.4 User's Guide*, Cornell University, Ithaca, New York.
- Wells A.A. (1963) Application of fracture mechanics at and beyond general yielding, *British Welding Journal* 10, 563-570.
- Westergaard H.M. (1939) Bearing Pressures and Cracks, *Journal of Applied Mechanics* 6, A49-53.
- Williams M.L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *Journal of Applied Mechanics* 19, 526-528.
- Williams M.L. (1957) On the stress distribution at the base of a stationary crack, *Journal of Applied Mechanics* 24, 109-114.
- Williams J.G., Ewing P.D. (1972) Fracture under complex stress-the angled crack problem, *International Journal of Fracture* 8, 441-446.
- Yosibash Z., Bussiba A., Gilad I. (2004) Failure criteria for brittle elastic materials, *International Journal of Fracture* 125, 307-333.
- Zacharopoulos D.A., Kalaitzidis P.A., Amaxas I.C. (2005) Mixed-mode growth and path in three point bending cracked specimen, *11<sup>th</sup> International Conference on Fracture, Turin, Italy, March 20-25*.
- Zienkiewicz O.C. (1977) *The Finite Element Method 3<sup>rd</sup> edition*, McGraw-Hill Book Company Ltd., Maidehead, Berkshire, England.
- \*\*\* - CEEEX nr. 202/20.07.2006, *Modelarea și simularea comportării la solicitări complexe a materialelor compozite cu aplicații în industria aeronautică*, Constantinescu D.M. (director de proiect), Marșavina L. (coordonator proiect UPT), Faur N., Negru R., Chelu P., **Filipescu Hannelore-Elfride**, samd.

\*\*\* - CEEEX nr. 262/12.09.2006, *Asamblări hibride cu adezivi și nituri la structuri din materiale compozite și aliaje de aluminiu*, Sandu M. (director de proiect), Negru R. (coordonator proiect UPT), Marșavina L., Faur N., **Filipescu Hannelore-Elfride**, Culea L. samd.

\*\*\* - ASTM D638-03 Standard Test Method for Tensile Properties of Plastics.

\*\*\* - ASTM D5045-99 Standard Test Methods for Plain-Strain Fracture Toughness and Strain Energy Release Rate of Plastic Materials.

\*\*\* - ASTM E1876-01 Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio by Impulse Excitation of Vibration.

\*\*\* - Abaqus 6.5 (2004), Theory Manual, Abaqus Inc., USA.

\*\*\* - Manual Cosmos/M 2.9 (2004), Structural Research and Analysis Corporation.