

MINISTERUL EDUCATIEI SI INVATAMINTULUI
Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timișoara
Facultatea de Electrotehnică

Ing. Virgil Tiponuț

STUDII PRIVIND APLICAREA ESANTIONARII LA
APARATELE DE MASURAT

- Teză de doctorat -

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

INSTITUTUL POLITEHNIC TIMIȘOARA	
BIBLIOTECA	
CENTRALĂ	
Volumul Nr.	406. 778
Dulap	313 Lit. F

Conducător științific
Prof. dr. ing. Eugen Pop

I N T R O D U C E R E

Aparatele electronice de măsurat reprezintă unul dintre cele mai importante domenii aplicative ale electronicii. Neglijând diferențierile de ordin tehnologic, ele au cunoscut pînă în prezent două direcții evolutive, ce au coexistat în timp și cărora le corespund aparatele analogice respectiv numerice.

În momentul de față predomină, în general, aparatele analogice, existînd însă o pronunțată tendință de implementare a tehnicii de măsurat numerice. Această tendință este explicabilă dacă se au în vedere avantajele pe care le prezintă aparatele numerice de măsurat și costul lor în continuă scădere, ca urmare a perfecționării tehnologiei circuitelor integrate.

Mai mult, asistăm în etapa actuală la o puternică penetrație a mijloacelor electronice de calcul în domeniul aparaturii numerice, cu preponderență a dispozitivelor numerice de calcul. Fenomenul s-a accentuat după ce microprocesoarelor și celelalte circuite integrate pe scară largă, aferente, au devenit disponibile la un cost acceptabil oricărei categorii de aplicații.

Se poate aprecia că aparatura de măsură reprezintă, în prezent, principalul domeniu de aplicații al microprocesoarelor, prezența acestora asigurînd, în principiu, următoarele două funcții:

- înlocuirea logicii bazate pe circuitele integrate fixe (a logicii cablate), cu logica programată;
- posibilitatea prelucrării pe cale numerică a rezultatelor măsurării.

În ce privește primul aspect, vom menționa doar că, microprocesorul poate îndeplini toate atribuțiile unui dispozitiv de comandă sofisticat, capabil să asigure un înalt grad de automatizare a aparatului, începînd cu selectarea automată a intervalului de măsurare și a regimului de lucru, autotestarea - cu afișarea codificată a părții componente defecte - etc., pînă la autoetalonare, corecția derivei nulului, eliminarea erorilor sistematice și a celor determinate de modifică-

rile factorilor de influență externă.

Cel de al doilea aspect include, de regulă, calcule cum ar fi împărțiri cu unele constante, determinarea valorii maxime, a valorii medii sau efective, compararea cu anumite valori limită, liniarizarea caracteristicilor unor traductoare utilizate.

Au fost elaborate însă și aparate, de fapt sisteme complexe, cu posibilități de calcul mai dezvoltate, obținute prin utilizarea unui minicalculator, sau a unui calculator mai puternic nu neapărat încorporate în aparat. Rezultatele măsurării se obțin, în acest caz, pe bază de calcul asupra funcției semnal, cunoscută printr-o serie de valori discrete, corespunzătoare unor momente de timp bine precizate.

Un exemplu tipic în acest sens, fără a fi cel mai recent, îl constituie osciloscopul cu prelucrare numerică a semnalului elaborat de firma TEKTRONIX, în care este utilizat minicalculatorul PDP-11 [107].

Sistemul asigură, printre altele, efectuarea de operații aritmetice asupra semnalelor memorate, calculul transformatei Fourier directe și inverse, calculul funcției de corelație, a parametrilor semnalelor în impuls, etc. Programarea minicalculatorului se face într-un limbaj adaptat prelucrării numerice de semnale, denumit APD BASIC, o variantă a limbajului BASIC.

Problemele ce pot fi soluționate cu un asemenea sistem de măsură, cu prelucrare numerică a semnalelor, pot fi chiar mai complexe decât cele menționate mai sus.

Pentru a ilustra această afirmație, ne vom referi la un exemplu, semnalat frecvent în literatura de specialitate [108] [109] [110] [111], de corecție a semnalului de ieșire la aparatele de măsurat.

Asimilînd sistemul de măsurat, între intrare și ieșire, cu un sistem liniar, dependența dintre semnalul de ieșire $y(t)$ și semnalul de intrare $g(t)$ este dată de produsul convolutiv [16]:

$$\int_0^t g(\tau)h(t-\tau)d\tau = y(t) \quad (1)$$

Prin $h(t)$ a fost notată funcția pondere a sistemului.

Problema care se pune constă în a determina funcția semnal la intrare, adică pe $g(t)$, pe baza răspunsului la ieșire $y(t)$, în ideea că $h(t)$ este cunoscut. Cu alte cuvinte, se urmărește corecția pe cale numerică a distorsiunilor liniare introduse de circuitele analogice ale sistemului de măsură.

Determinarea lui $g(t)$ presupune, în principiu, rezolvarea ecuației integro-diferențiale (1), de tip Volterra. Au fost elaborați, în acest scop, algoritmi care conduc la un rezultat corect chiar și în cazul în care funcția la ieșire $y(t)$, este afectată de erori: datorită preciziei limitate a sistemului de măsurat și a zgomotelor (se demonstrează că erori mici în cunoașterea lui $y(t)$ afectează considerabil rezultatul obținut prin calcul, în special în domeniul frecvențelor înalte). Asemenea algoritmi au fost implementați deja, experimental, în osciloscoapele cu eșantionare.

Vom sublinia acum câteva trăsături specifice ale sistemelor de măsurat cu prelucrare numerică.

Ne referim întâi la faptul că, din motive evidente, un asemenea sistem tinde să reunească funcțiile realizate pînă acum de aparate diferite. Prin urmare, se poate vorbi de sisteme de măsurat destinate unui anumit gen de aplicații.

Pe de altă parte, indiferent de destinația unui asemenea sistem, problemele ce trebuie soluționate în legătură cu conceperea lui, pot fi rezumate, pe scurt, la următoarele două:

a) problema reprezentării sub formă numerică a semnalului analogic respectiv problema conversiei inverse;

b) elaborarea de algoritmi specifici genului de măsurări ce urmează a fi efectuate cu sistemul în cauză.

Procesele ce trebuie analizate, în legătură cu prima problemă, sînt eșantionarea și conversia analog-numerică a semnalului de măsurat, respectiv reconstituirea semnalului continuu, pe baza eșantioanelor.

În ce privește cea de a doua problemă, obiectivul urmărit este acela ca pornind de la o anumită informație primară (eșantioanele semnalului), să se ajungă la rezultatul dorit, printr-o strategie care să asigure erori minime și o dura-

tă redusă a timpului de calcul (se au în vedere erorile de metodă, erorile de calcul putând fi neglijate la sistemele actuale).

Lucrarea de față se încadrează în problematica menționată la pct.a, abordând chestiuni legate de eșantionarea și reconstituirea semnalelor. Se urmărește, de fapt, o reducere a frecvenței de eșantionare și implicit a numărului de eșantioane prelucrate, simultan cu micșorarea, la reconstituire, a erorilor și a duratei de calcul.

Problemele au fost tratate pe parcursul a cinci capitole care se referă la :

1. Teorema eșantionării semnalelor, cu un accent deosebit pe clasa semnalelor periodice, în scopul elucidării unor aspecte teoretice insuficient sau incorect tratate în literatura de specialitate.

2. Modificarea spectrului semnalelor periodice prin transformarea pătratică, în ideea determinării unor clase de semnale, care să poată fi eșantionate și reconstituite în condiții mai avantajoase decât cele date de teorema eșantionării.

3. Studiul erorilor la reconstituirea semnalelor eșantionate, cu referire în special la erorile de tip "alias".

4. Elaborarea unor procedee de reconstituire care să comporte erori mai mici decât procedeele cunoscute actualmente.

5. Elaborarea unui algoritm de reconstituire a semnalelor eșantionate, care utilizând TFR, asigură, în anumite condiții, o scurtare considerabilă a duratei calculului.

Se subliniază că preocupările în domeniul eșantionării și reconstituirii semnalelor nu sînt numai de dată recentă în cadrul Institutului politehnic din Timișoara. Primele cercetări au fost inițiate de prof.dr.ing.Pop Eugen și au avut drept obiectiv fie abordarea unor probleme teoretice legate de teorema eșantionării [68] fie elaborarea de noi tipuri de aparate pentru măsurarea mărimilor electrice, bazate pe eșantionare [112]. Pot fi semnalate, de asemenea, unele contribuții ale autorului în legătură cu problematica osciloscopelor cu eșantionare [113] [114].

Aceste cercetări au căpătat mai multă consistență în ultimii ani, pe măsură ce au devenit mai accesibile circuitele integrate pe scară largă. Se menționează în acest sens,

contribuțiile aduse la măsurarea numerică a puterii și energiei active [115] [116].

Realizările recente la nivel mondial, în domeniul sistemelor de măsurat cu prelucrare numerică a semnalului, atât din punctul de vedere al teoriei generale, cât și în ce privește aspectele aplicative, au determinat orientarea eforturilor și în această direcție, extrem de promițătoare.

Lucrarea de față se aliniază în cadrul acestor preocupări, ca un început. Ea constituie rezultatul unei activități susținute din partea autorului, concentrată mai cu seamă în ultimii doi ani, sub îndrumarea competentă și plină de înțelegere a conducătorului, prof.dr.ing.Eugen Pop.

Pentru sfaturile și îndrumările primite pe întreaga durată a pregătirii doctoratului, pentru sprijinul profesional și moral acordat cu prilejul elaborării tezei, autorul îi aduce caile mulțumiri și îi rămîne prăfund îndatorat.

CAPITOLUL 1

TEOREMA ESANTIONARII SI RECONSTITUIREA SEMNALELOR ESANTIONATE

1.1. Eșantionarea și reconstituirea semnalelor aperiodice

1.1.1. Teorema WKS

Teorema eșantionării își are originea în lucrările matematicienilor E.T. și J.M. Whittaker. Primul a definit funcția cardinală, sub forma [1] [2]:

$$f_c(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_c(a+nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t-a-nT)}{\frac{\pi}{T} (t-a-nT)} \quad (1.1)$$

expresie ce depinde de valori ale funcției corespunzătoare valorilor echidistante $a, a+T, \dots, a+nT, \dots$ ale argumentului E.T. Whittaker a arătat de asemenea că o funcție de forma (1.1) nu conține componente periodice cu perioada mai mică de $2T$. Dezvoltând teoria funcțiilor cardinale J.M. Whittaker stabilește legătura dintre funcția $f(t)$ și transformata Fourier corespunzătoare, trunchiată [1] [2].

Rezultatele matematice menționate au fost puse în valoare, în domeniul transmiterii informației, de către Kotelnikov [1][4], Someya [5] și mai ales de către Shannon, care dă mărimilor ce intervin în rel.(1.1) semnificații fizice bine precizate. În formularea dată de Shannon - cunoscută în literatură ca teorema lui Shannon, teorema eșantionării sau teorema WKS (după inițialele fondatorilor Whittaker, Kotelnikov, Shannon) - se afirmă că o funcție $f(t)$, ce nu conține frecvențe mai mari ca W , este complet determinată de valorile ei într-o serie de puncte distanțate, pe axa timpului, cu $1/2 W$ între ele [6]. Reconstituirea funcției inițiale $f(t)$, pe baza eșantionelor, se face conform expresiei:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin \pi (2Wt-n)}{\pi (2Wt-n)} \quad (1.2)$$

similară cu expresia (1.1).

Cu privire la teorema WKS se pot face următoarele observații:

a) Reconstituirea fără erori a funcției $f(t)$ este posibilă și în situația că pasul de eșantionare este mai mic ca $1/2 W$. Această afirmație, bine cunoscută, poate fi justificată printr-o demonstrație similară cu cea dată în [6] pentru teorema WKS.

b) Teorema lui Shannon se aplică funcțiilor care admit transformată Fourier directă și inversă [6] [7] [8], adică aparțin clasei $L_1(-\infty, +\infty)$ și satisfac condițiile Dirichlet [9]. Rezultă că sînt excluse din această categorie funcțiile periodice.

c) Funcția $f(t)$ dată de rel.(1.2) este nelimitată în timp, deoarece funcția spectrală corespunzătoare $F(\omega)$ este limitată pe axa pulsațiilor [10]. În consecință, în situațiile practice cînd se operează cu un număr finit de eșantioane, adică se prelucrează un semnal de durată limitată, reconstituirea fără erori a funcției inițiale este imposibilă.

d) Funcția eșantion definită de relația:

$$s_n(t) = \frac{\sin \pi (2Wt - n)}{\pi (2Wt - n)} \quad (1.3)$$

devine egală cu 1 pentru $t = n/2W$ și se anulează corespunzător lui $t = m/2W$, m fiind întreg diferit de n . Rezultă că în punctele de eșantionare valoarea reconstituită este egală cu valoarea eșantionată, încît procesul de reconstituire în aceste puncte nu comportă erori, indiferent de mărimea pasului de eșantionare.

e) Pe baza proprietății de dualitate a transformării Fourier [11] [12] [13] se obține din rel.(1.2) o formulă de interpolare în domeniul frecvență, valabilă pentru funcțiile de durată finită T_0 [1] [14]:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(n \frac{2\pi}{T_0}\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega T_0}{2} - n\pi\right)}{\frac{\omega T_0}{2} - n\pi} \quad (1.4)$$

Din rel.(1.4) rezultă că funcția spectrală $F(\omega)$, corespunzătoare unei funcții de timp de durată finită T_0 , este determinată dacă se cunosc ordonatele ei în puncte de eșantionare distanțate cu $2\pi/T_0$ pe axa frecvențelor.

f) Egalitatea $T = 1/2 W$, T reprezentând pasul de eșantionare, este permisă numai dacă spectrul $F(\omega)$ nu conține o funcție $\delta(\omega)$ pentru $|\omega| = 2\pi W$ [7].

● g) Expresia de reconstituire (1.2) este stabilă în sens Hadamard - adică erori mici ale valorii eșantioanelor determină erori reduse ale semnalului reconstituit - dacă semnalul inițial, continuu, este de energie finită ($f(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$) [15].

1.1.2. Interpretarea fizică a teoremei WKS și a expresiei de reconstituire

Substratul fizic al teoremei WKS rezultă dacă se are în vedere spectrul semnalului eșantionat.

Fie $s(t)$ semnalul inițial, continuu, cărui îi corespunde spectrul $S(\omega)$. În urma eșantionării uniforme, cu pasul T , rezultă semnalul $\bar{s}(t)$, a cărui spectru $\bar{S}(\omega)$ este dat de relația [16] [17]:

$$\bar{S}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right) \quad (1.5)$$

Adică spectrul $\bar{S}(\omega)$ se obține prin însumarea unei infinități de spectre $S(\omega)$, decalete pe axa pulsațiilor cu $n \cdot 2\pi/T$ și înmulțite cu $1/T$, ca în fig.1.1.

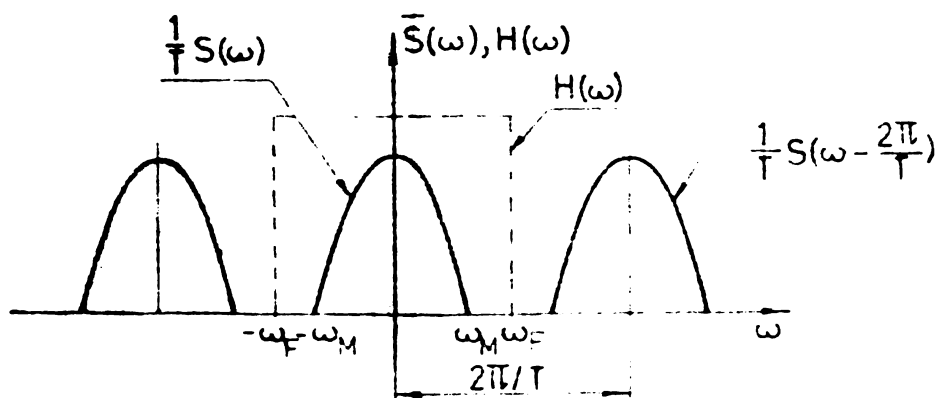


Fig.1.1.

Este evident ca semnalul inițial nu poate fi reconstituit numai în situația că spectrele învecinate nu interferează, încît, cu notațiile din fig.1.1:

$$T \leq \pi / \omega_M \quad (1.6)$$

În scopul reconstituirii se aplică semnalul eșantionat la intrarea unui filtru trece-jos ideal, avînd caracteristica atenuare-frecvență $H(\omega) = T$ pentru $|\omega| \leq \omega_F = \pi/T$ și nulă în rest (fig.1) iar caracteristica de fază nulă peste tot. La ieșirea filtrului se obține un semnal, a cărui spectru $S^x(\omega)$ este dat de rel. [16]:

$$S^x(\omega) = \bar{S}(\omega) \cdot H(\omega) = S(\omega) \quad (1.7)$$

Egalitatea de mai sus evidențiază faptul că semnalul $s^x(t)$ de la ieșirea filtrului-semnalul reconstituit-este același cu semnalul continuu $s(t)$. Prin urmare, procedurii de reconstituire îi corespunde o operație de filtrare a semnalului eșantionat, cu ajutorul unui filtru trece-jos ideal, avînd funcția de transfer $H(\omega)$ ca în fig.1.1. Se precizează că valoarea $\omega_F = \pi/T$ este impusă de situația limită cînd $T = \pi/\omega_M$, situația în care spectrul $S(\omega)/T$ devine tangent cu spectrele învecinate, pentru pulsațiile $\omega = \pm \pi/T$.

Interpretarea fizică prezentată rezultă mai clar dacă procedura de reconstituire este analizată în domeniul temporal. Deoarece se are în vedere procesul de eșantionare ideală, adică impulsurile de eșantionare sînt funcția $\delta(t)$ periodică -teorema WKS fiind stabilită în această ipoteză [7]- semnalul eșantionat $\bar{s}(t)$ este dat de relația:

$$\bar{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \delta(t-nT) \quad (1.8)$$

Se va remarca că suma din membrul drept al egalității de mai sus se reduce întotdeauna la un singur termen.

Produsul algebric (1.7), în domeniul frecvență, îi corespunde în domeniul timp produsul de convoluție [8], încît:

$$s^x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \bar{s}(t-\tau) d\tau \quad (1.9)$$

Prin $h(t)$ a fost notată funcția pondere a filtrului ideal trece-jos. Înlocuind expresia lui $\bar{s}(t)$, dată de rel.(1.8), în rel.(1.9), se obține o nouă exprimare a semnalului reconstituit, sub forma:

$$s^x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)h(t-nT) \quad (1.10)$$

Deoarece funcția pondere a unui filtru trece-jos ideal, cu caracteristica de transfer $H(\omega)$ ca în fig.1.1 este funcția eșantion-adică $h(t) = [\sin(\pi t/T)]/(\pi t/T)$ - se deduce în final că :

$$s^x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \frac{\sin(\pi/T)(t-nT)}{(\pi/T)(t-nT)} \quad (1.11)$$

Prin urmare semnalul reconstituit are, așa cum era de așteptat, o expresie similară cu rel.(1.1),(1.2). Dacă este satisfăcută condiția (1.6) atunci $s^x(t) = s(t)$.

Interpretarea fizică poate fi mai mult aprofundată, observând că rel.(1.10) reflectă următoarea realitate: semnalul reconstituit rezultă prin însumarea la ieșirea filtrului a tuturor contribuțiilor $s(nT)h(t-nT)$ corespunzătoare eșantioanelor $s(nT)\delta(t-nT)$ aplicate la intrarea acestuia. Modul concret în care are loc însumarea rezultă din fig.1.2, care reprezintă grafic egalitatea (1.11). Se observă că în punctele de eșantionare valoarea reconstituită rezultă ca urmare a contribuției unei singure funcții eșantion, în timp ce în celelalte puncte își dau contribuția toate funcțiile eșantion.

Expresia (1.11) deși a fost stabilită considerând procesul de eșantionare ideală, prezintă interes din punct de vedere aplicativ la reconstituirea pe cale numerică a valorilor unui semnal eșantionat. Cu scopul reducerii timpului de calcul se utilizează expresia echivalentă [16]:

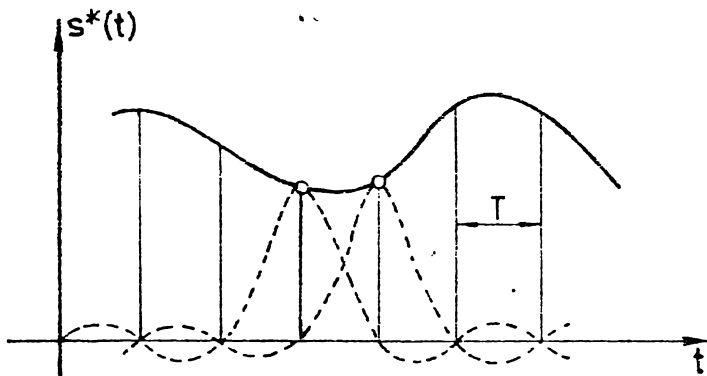


Fig.1.2

$$s^*(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi/T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \frac{(-1)^n}{t - nT} \quad (1.12)$$

care exclude calculul repetat al funcției sinus, pentru fiecare valoare reconstituită. Se necesită de asemenea evitarea în algoritmi de reconstituire a calculului valorilor semnalului în punctele de eșantionare, când expresia (1.12) devine de forma 0/0, fapt ce determină la cele mai multe sisteme de calcul întreruperea prelucrării datelor.

În legătură cu cele prezentate în cadrul acestui paragraf se mai pot face următoarele observații.

Definirea procesului de eșantionare printr-o expresie de forma (1.8), determinată de considerente de simplificare a calculelor matematice, nu permite o interpretare fizică convenabilă. Într-adevăr, deoarece pentru $t = nT$, $\delta(t-nT) = \infty$, ar rezulta valori infinite ale eșantioanelor prelevate.

Totodată, egalitatea (1.8) nu este corespunzătoare nici din punct de vedere dimensional, știind că funcția $\delta(t)$ - ca derivată a funcției semn sgnt [14] - are dimensiunea $[T^{-1}]$. Această neconcordanță, sub aspect dimensional, este mai evidentă în domeniul frecvență (rel.1.5). Din acest motiv unii autori definesc procesul de eșantionare ideală prin relația [8]:

$$\bar{s}(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \delta(t-nT) \quad (1.8)'$$

care satisface din punct de vedere dimensional.

Este evident că în acest caz se impune ca filtrul trece-jos ideal să aibe caracteristica de transfer $H(\omega) = 1$, pentru $|\omega| \leq \pi/T$ și nulă în rest (caracteristica de fază de asemenea nulă).

O demonstrație originală a teoremei eșantionării, care evită cel de al doilea neajuns, semnalat mai sus, este prezentată în [17]. Aici se pleacă de la procesul real de eșantionare, constând din modularea, cu semnalul $s(t)$, a unui tren de impulsuri cu perioada T și avînd durată t_0 și amplitudinea A , constante și de valori finite. Trecerea la procesul de eșantionare ideală se face înainte de efectuarea integralei (1.9), presupunînd că impulsurile de eșantionare au aria unitară, adică $At_0 = 1$ și durată nulă, $t_0 = 0$.

Se subliniază în încheiere faptul că pe tot parcursul lucrării va fi avută în vedere teoria aferentă eșantionării ideale, acoperitoare pentru problemele pe care le implică operațiile de prelucrare numerică a semnalelor. De altfel, teoria eșantionării, cu luarea în considerare a duratei finite a impulsurilor de eșantionare, nu comportă deosebiri de principiu față de eșantionarea ideală [18].

1.2. Eșantionarea și reconstituirea semnalelor periodice

1.2.1. Generalități

Problema eșantionării și reconstituirii semnalelor periodice a constituit obiectul unor cercetări mai restrînse comparativ cu cercetările întreprinse privind eșantionarea și reconstituirea semnalelor aperiodice. Observația se bazează pe de o parte pe faptul că această problemă este în extrem de mică măsură abordată în literatura de specialitate, putînd fi citate în acest sens doar trei articole [7] [19] [20] și unele referiri succinte din anumite tratate de specialitate [14] [16] [21]; pe de altă parte și nu de puține ori, eșantionarea și reconstituirea semnalelor periodice este tratată atît din punct de vedere teoretic cît și sub aspect aplicativ pe baza teoriei cunoscute de la funcțiile aperiodice, ceea ce poate conduce la

erori.

Un motiv probabil al situației menționate îl constituie cerințele sporite pe care le prezintă teorema eșantionării funcțiilor periodice (pct.1.2.2), comparativ cu teorema WKS, fapt ce îi limitează aplicabilitatea practică, cu consecințe evidente asupra investigațiilor teoretice.

Dezvoltarea metodelor și mijloacelor de prelucrare numerică a semnalelor impune însă o reconsiderare a importanței acordate teoremei eșantionării și reconstituirii semnalelor periodice. Pentru că o operație frecventă, de prelucrare numerică a unor spectre—spre exemplu—când se operează cu spectre discrete, echivalează de fapt cu prelucrarea unor semnale periodice, spectrele discrete corespunzând acestei clase de semnale. În consecință este mai potrivit ca anumite metode și procedee de prelucrare numerică să aibe la bază teorema eșantionării funcțiilor periodice și nu teorema WKS. Vor fi justificate afirmațiile de mai sus pe următorul exemplu.

Transformarea Fourier discretă, din care derivă transformata Fourier rapidă (TFR), de mare interes practic, este prezentată de obicei ca o aproximație de ordin zero a transformării integrale Fourier [16]. Drept urmare, condițiile în care semnalul inițial continuu poate fi reconstituit fără erori pe baza componentelor spectrale, rezultate ca urmare a aplicării transformării Fourier discrete setului de eșantioane ale semnalului, sînt date de teorema WKS [16]. Cum numărul de eșantioane prelucrate este întotdeauna finit, adică semnalul continuu aferent acestor eșantioane este limitat în timp, funcția spectrală corespunzătoare este nelimitată pe axa pulsațiilor. S-ar impune deci, pentru o reconstituire perfectă, un pas de eșantionare infinit de mic, irealizabil practic. Rezultă ca urmare că reconstituirea fără erori, pe baza componentelor transformatei Fourier discrete, este imposibilă.

Concluzia de mai sus este eronată, deoarece pot exista situații în care semnalul continuu, corespunzător eșantioanelor prelucrate, reprezintă o perioadă completă a unui semnal periodic de bandă limitată. În aceste cazuri, dacă pasul de eșantionare satisface cerința impusă de teorema eșantionării pentru funcțiile periodice, este posibilă reconsti-

tuirea fără erori.

Datorită aspectelor menționate și avînd în vedere anumite proprietăți specifice pe care le prezintă funcțiile periodice la eșantionare și reconstituire, în cele ce urmează teorema eșantionării funcțiilor periodice va fi tratată mai pe larg, evidențiindu-se și unele contribuții proprii.

1.2.2. Teorema eșantionării funcțiilor periodice

Se consideră în continuare doar acele funcții periodice $f_p(t)$ care satisfac condițiile dezvoltării în serie Fourier [9] și deci pot fi reprezentate sub forma:

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1.13)$$

În expresia (1.13) coeficientul c_k are valoarea cunoscută [8]:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (1.13)'$$

iar $\omega_0 = 2\pi/T_0$ reprezintă pulsația corespunzătoare primei componente armonice (fundamentalei). Prin T_0 este notată perioada fundamentalei.

Teorema eșantionării stipulează că o funcție periodică, ce conține K componente armonice, poate fi reconstituită fără erori pe baza a N eșantioane, prelevate uniform dintr-o perioadă, dacă este satisfăcută condiția [16]:

$$N \geq 2K + 1 \quad (1.14)$$

Cerințele impuse de teorema eșantionării funcțiilor periodice sînt mai dificil de satisfăcut în situațiile practice, avînd în vedere că :

a) prelevarea uniformă a celor N eșantioane. ca în

fig.1.3, impune sincronizarea dispozitivului de eșantionare cu semnalul ce urmează a fi eșantionat, fapt care introduce în general complicații nedorite [16];

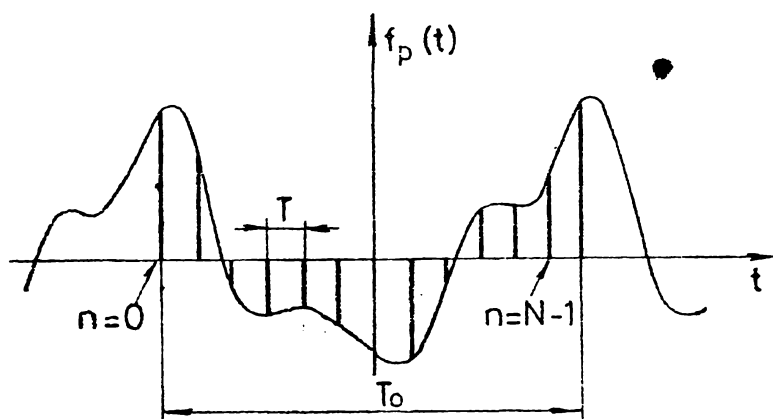


Fig.1.3

b) In cazul semnalelor periodice pasul de eșantionare este dat de relația:

$$T = \frac{T_0}{N} = \frac{T_0/K}{2+(1/K)} \quad (1.15)$$

adică este mai mic decât jumătate din perioada T_0/K a componentei de cea mai mare frecvență din spectrul semnalului. Prin urmare, pentru o aceeași lățime a spectrului, semnalul periodic trebuie eșantionat la limită mai des decât semnalul aperiodic.

Față de dezavantajele menționate, eșantionarea și reconstituirea semnalelor periodice prezintă un avantaj major, comparativ cu semnalele aperiodice prin faptul că este posibilă reconstituirea fără erori chiar în situațiile practice, când se prelucrează un număr finit de eșantioane.

Se prezintă în cele ce urmează a justificare matematică a condiției (1.14) [22].

Fie o funcție periodică $f_p(t)$, de forma (1.13), eșantionată uniform cu pasul T . Valorile eșantioanelor se obțin, pe baza rel.(1.13), conform expresiei :

$$f_p(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 nT} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k w_N^{kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.16)$$

în care $w_N = e^{j2\pi/N}$. Indicele întreg k poate fi scris ca o sumă :

$$k = m+rN, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad r = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (1.17)$$

Deoarece $w_N^N = 1$ încît $w_N^{kn} = w_N^{(m+rN)n} = w_N^{mn}$, rezultă în continuare:

$$f_p(nT) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{m+rN} w_N^{(m+rN)n} = \sum_{m=0}^{N-1} w_N^{mn} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{m+rN} \quad (1.18)$$

Se definește coeficientul "alias" \hat{c}_m sub forma [22]:

$$\hat{c}_m = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{m+rN} \quad (1.19)$$

obținîndu-se ca urmare:

$$f_p(nT) = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{c}_m w_N^{mn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.20)$$

(denumirea "alias" provine de la faptul că acești coeficienți sînt strîns legați -așa cum va rezulta- de fenomenul "alias", prezentat în cap.3).

Ultima relație arată legătura dintre coeficienții "alias" \hat{c}_m și eșantioanele funcției periodice.

În cazul general, coeficienții Fourier c_{m+rN} nu pot fi determinați funcție de coeficienții "alias", prin utilizarea rel.(1.19) [22] și prin urmare nu este posibilă reconstituirea semnalului periodic inițial pe baza eșantioanelor sale. Să presupunem însă că semnalul continuu este un polinom trigonometric, adică o serie Fourier cu număr finit de termeni:

$$f_p(t) = \sum_{m=-M}^M c_m e^{jm\omega_0 t} \quad (1.21)$$

Dacă este satisfăcută condiția $N \geq 2M+1$, rezultă atunci din (1.19) că :

$$\hat{c}_m = \begin{cases} c_m & |m| \leq M \\ 0 & |m| > M \end{cases} \quad (1.22)$$

Deoarece coeficienții \hat{c}_m pot fi determinați din sistemul de ecuații (1.20), funcție de eșantioanele $f_p(nT)$ iar componentele spectrale c_m sînt egale, conform ultimei relații, cu coeficienții \hat{c}_m , rezultă posibilitatea reconstituirii exacte a funcției $f_p(t)$. Este evident că cerințele arătate mai sus sînt identice cu condițiile impuse de teorema eșantionării funcțiilor periodice.

Pentru a stabili expresia de reconstituire se are în vedere faptul că în cazul unei funcții $f_p(t)$, eșantionată în concordanță cu teorema eșantionării, integrala din expresia coeficienților Fourier poate fi înlocuită cu o sumă finită [22] :

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_p(nT) e^{-jk\omega_0 nT} \quad (1.23)$$

În relația de mai sus s-a avut în vedere că $T/T_0 = 1/N$. Utili-

zînd rel.(1.13), în care $|k| \leq K$, se obține expresia de reconstituire sub forma:

$$f_p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=-K}^K \sum_{n=0}^{N-1} f_p(nT) e^{jk\omega_0(t-nT)} \quad (1.24)$$

Se menționează în final că posibilitatea aproximării integralei dintr-o funcție de bandă limitată printr-o sumă, în care intervin eșantioanele funcției, în condițiile respectării teoremei eșantionării, este valabilă și în cazul funcțiilor aperiodice [23].

1.2.3. Interpretarea fizică a teoremei eșantionării funcțiilor periodice

Se prezintă pentru început o interpretare în domeniul timp a cerințelor teoremei eșantionării semnalelor periodice [16]. În acest scop se consideră funcția :

$$f_p(t) = A \sin(2\pi ft + \alpha) \quad (1.25)$$

Dacă pasul de eșantionare este T , setul de eșantionare care rezultă este dat de expresia:

$$\{f_{pn}\} = \left\{ A \sin(2\pi fnT + \alpha) \right\}, \quad n = \dots -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1.26)$$

Utilizînd identitatea $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$, unde k este un întreg oarecare, precum și notația $k/n = m$, din rel.(1.26) se obține:

$$\left\{ A \sin(2\pi fnT + \alpha) \right\} = \left\{ A \sin \left[2\pi (f+m/T)nT + \alpha \right] \right\} \quad (1.27)$$

Este lesne de observat că dacă se au în vedere numai acele valori ale lui k , pentru care raportul $k/n = m$ este întreg, printre acestea se vor găsi unele astfel că $m = ct.$, indiferent de n . Pentru aceste valori $m = ct.$, membrul drept al

rel.(1.27)) reprezintă seturi de eşantioane prelevate din sinusoidă avînd frecvenţa $(f + m/T)$.

Cu această observaţie, ultima egalitate reflectă faptul că pentru un interval de eşantionare T , sinusoidalele cu frecvenţa f şi $f + m/T$, m fiind un întreg oarecare, au aceleaşi valori în punctele de eşantionare şi deci nu pot fi distinse. Această concluzie este reprezentată grafic în fig.1.4, în care sînt marcate frecvenţele cîtorva sinusoidale ce nu pot fi distinse.

Din fig.1.4 rezultă, de asemenea, următoarea afirmaţie :

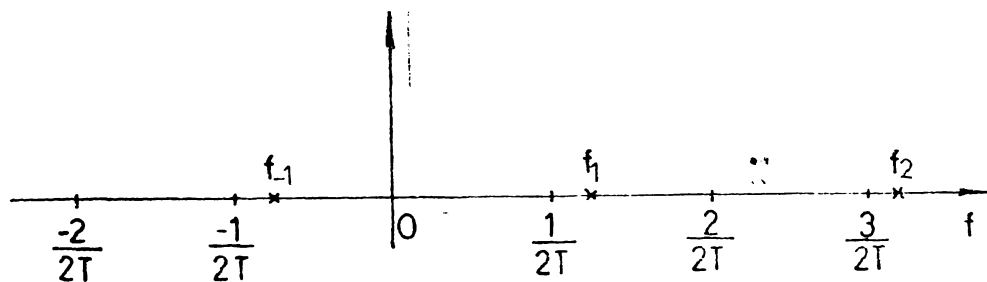


Fig.1.4

"Orice sinusoidă de frecvenţă $|f| \gg 1/2T$ este echivalentă în punctele de eşantionare cu o sinusoidă a cărei frecvenţă este cuprinsă în intervalul $[-1/2T, 1/2T]$ ".

Intr-o altă exprimare, doar sinusoidalele avînd frecvenţa $|f| \leq 1/2T$ sînt unic determinate de valorile eşantionate la intervale egale cu T . Legătura dintre ultima formulare şi teorema eşantionării rezultă imediat. Este de asemenea evident că rezultatele stabilite mai sus, în cazul particular al unei tensiuni sinusoidale, pot fi extrapolate pentru semnale periodice oarecare, ce pot fi dezvoltate în serie Fourier.

Necesitatea utilizării unei frecvenţe sporite de eşantionare, în cazul semnalelor periodice, comparativ cu semnalele aperiodice, rezultă mai clar pe baza interpretării fenomenului în domeniul frecvenţă [24] [7]. Înainte de abordarea chestiunii vom face însă precizarea că, în cele ce urmează, se va utiliza noţiunea de spectru a unui semnal periodic, funcţia $S_p(\omega)$ definită de expresia [8] [25] :

$$S_p(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (1.28)$$

În relația de mai sus s-a notat prin $\delta(\omega)$ funcția delta iar ω_0 reprezintă pulsația fundamentalei.

Exprimarea spectrului unei funcții periodice sub forma unei distribuții, ca în rel. (1.28), apare logică dacă se are în vedere că $S(\omega)$ și în mod asemănător și $S_p(\omega)$, sînt de fapt funcții de densitate spectrală [14]. Ori spectrul coeficienților Fourier fiind discret, funcția de densitate spectrală corespunzătoare este o distribuție [25].

Utilizarea în calcule, a spectrului continuu $S_p(\omega)$ este extrem de avantajoasă, deoarece acesta se bucură de toate proprietățile caracteristice spectrelor semnalelor aperiodice [25][26].

Din rel.(1.28) rezultă expresia unei componente spectrale de rang k :

$$S_{pk}(\omega) = 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (1.29)$$

Pe baza observațiilor de mai sus se poate scrie pentru spectrul semnalului periodic eșantionat, o expresie similară cu cea dată de rel. (1.5) :

$$\bar{S}_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_p\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right) \quad (1.30)$$

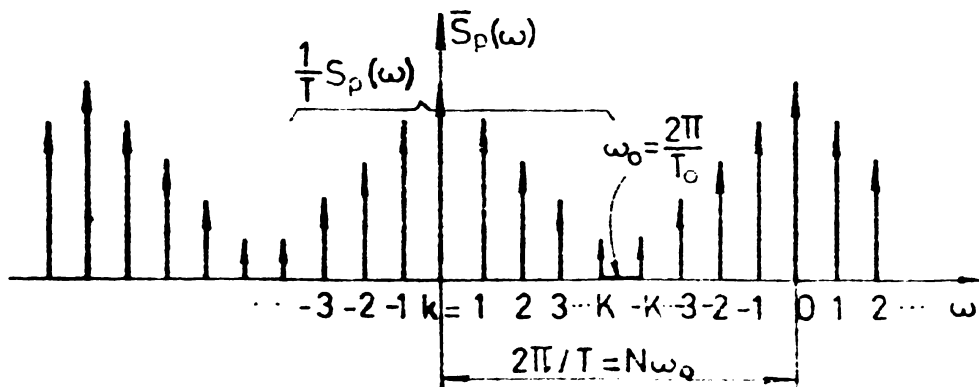


Fig.1.5.

Din fig.1.5, în care este reprezentată funcția $\bar{S}_p(\omega)$, rezultă că pentru ca spectrele alăturate să nu interfereze și prin urmare reconstituirea să se facă fără erori, se impune ca :

$$\frac{2\pi}{T} \geq (2K+1)\omega_0 \quad (1.31)$$

Avînd în vedere că :

$$\frac{2\pi/T}{\omega_0} = N \quad (1.32)$$

se obține în final condiția cunoscută :

$$N \geq 2K + 1 \quad (1.33)$$

Din aceeași figură rezultă totodată că necesitatea utilizării unui pas de eșantionare mai mic se datorește faptului că, spre deosebire de cazul semnalelor aperiodice, când spectrele învecinate puteau fi la limită tangente, în cazul semnalelor periodice, intervalul minim dintre spectre este egal cu ω_0 .

În fine, din rel.(1.29), (1.30), rezultă, pentru componenta de rang k a spectrului $\bar{S}_p(\omega)$:

$$\bar{S}_{pk}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{k-rN} \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

și avînd în vedere rel.(1.19) :

$$\bar{S}_{pk}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \hat{c}_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (1.34)$$

Ultima expresie arată că în spectrul semnalului eșantionat intervin, în general, coeficienții "alias" \hat{c}_k .

În cazul în care $N \geq 2K+1$, egalitatea (1.34) devine (rel.(1.22)) :

$$\bar{S}_{pk}(\omega) = \frac{2\pi}{T} c_k \delta(\omega - k\omega_0), \quad |k| \leq K \quad (1.35)$$

Relația de mai sus, poate fi interpretată, pe baza fig.1.5, în sensul că, pentru $N \geq 2K+1$ fiind evitată interferența spectrelor

$\bar{s}_p(\omega)$ va depinde de coeficienții Fourier ai semnalului continuu.

La stabilirea rel.(1.24) a fost avut în vedere cazul în care erau satisfăcute cerințele teoremei eșantionării. Este util de cercetat însă ce reprezintă această expresie și în legătură cu ea formula (1.23), în situația că teorema eșantionării nu este respectată.

Semnalul reconstituit va fi evident un semnal periodic, de forma (1.13). Ce semnificație au însă în această situație coeficienții calculați cu rel. (1.23) ?

O modalitate de a găsi răspunsul la această întrebare ar consta în exprimarea coeficienților "alias" \hat{c}_m , din sistemul de ecuații (1.20), funcție de valorile eșantioanelor $s_p(nT)$. Se va proceda însă mai simplu, determinînd pentru început expresia coeficienților dezvoltării în serie Fourier a semnalului periodic eșantionat $\bar{s}_p(t)$, funcție de coeficienții "alias" \hat{c}_k .

Avînd în vedere că, în definitiv, și $\bar{S}_{pk}(\omega)$ este de forma (1.29), avem :

$$S_{pk}(\omega) = 2\pi \bar{c}_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (1.36)$$

Utilizînd apoi egalitatea (1.34), se obține dependența căutată :

$$\bar{c}_k = \frac{1}{T} \hat{c}_k \quad (1.37)$$

Pe baza expresiei coeficienților \bar{c}_k , funcție de eșantioanele semnalului [8]:

$$\bar{c}_k = \frac{1}{T} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_p(nT) e^{-jk\omega_0 nT} \quad (1.38)$$

rezultă în cele din urmă că :

$$\hat{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_p(nT) e^{-jk\omega_0 nT} \quad (1.39)$$

406.798
213 F

Relația de mai sus exprimă faptul că mărimile calculate cu formula (1.23) reprezintă în cazul general, valorile coeficienților "alias". Doar în situațiile în care este satisfăcută teorema eșantionării, respectiv $N \geq 2K+1$ și prin urmare $\hat{c}_k = c_k$ pentru $|k| \leq K$ (rel.1.22), expresia (1.23) permite calculul coeficienților Fourier funcție de eșantioanele semnalului. Este de asemenea clar că utilizarea expresiei (1.24), în condițiile în care nu este satisfăcută teorema eșantionării, conduce la un semnal reconstituit periodic, în a cărui dezvoltare în serie Fourier intervin coeficienții \hat{c}_k în loc de c_k .

1.2.4. Interpretarea fizică a expresiei de reconstituire

O interpretare fizică a expresiei de reconstituire (1.24) nu a fost prezentată încă în literatură. Dificultățile aparente ale unei asemenea interpretări sînt legate de faptul că în expresia amintită intervin un număr finit de eșantioane; ori în cazul unei reconstituiri prin filtrare s-ar impune prelucrarea unei infinități de eșantioane, semnalul periodic fiind prin definiție nelimitat în timp. Pe de altă parte, din fig.1.5 rezultă că procesul de reconstituire trebuie să fie în esență același cu reconstituirea în regim aperiodic. Se va verifica în cele ce urmează valabilitatea acestei ipoteze.

Presupunem că semnalul periodic a fost eșantionat conform cerințelor teoremei eșantionării, fiind prelevate un număr N impar de eșantioane din fiecare perioadă. Dacă semnalul eșantionat $\bar{s}_p(t)$ este aplicat la intrarea unui filtru trece-jos ideal, avînd o caracteristică $H(\omega)$ identică cu cea utilizată la reconstituirea în regim aperiodic (fig.1.6), spectrul semnalului reconstituit va avea expresia :

$$S_p^*(\omega) = \bar{S}_p(\omega) \cdot H(\omega) = S_p(\omega) \quad (1.40)$$

Egalitatea de mai sus evidențiază identitatea, în condițiile amintite, a semnalului reconstituit cu semnalul continuu.

Cu privire la caracteristica $H(\omega)$ se va observa că în cazul unui număr N impar de eșantioane, frecvențele de tăiere ale filtrului trece-jos, $\pm \pi/T = \pm \omega_0 N/2$ sînt un număr in-

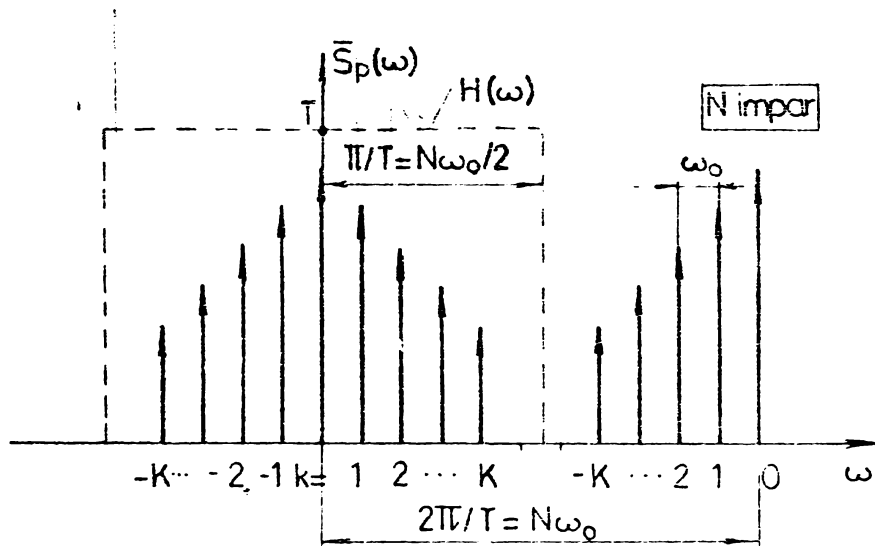


Fig.1.6

par de $\omega_0/2$ și deci se vor situa întotdeauna între două componente spectrale succesive (fig.1.6).

Pentru a determina funcția de timp $s_p^{\#}(t)$, corespunzătoare spectrului $S_p^{\#}(\omega)$ a semnalului reconstituit, se poate proceda după cum urmează:

- Fie utilizând produsul de convoluție care corespunde în domeniul timp produsului algebric reprezentat de rel.(1.40),
- Sau prin aplicarea directă a transformatei Fourier inverse funcției $S_p^{\#}(\omega)$.

Utilizarea produsului de convoluție necesită unele precauții, dat fiindcă una dintre funcțiile de timp ce intervin în acest produs și anume semnalul eșantionat $\bar{s}_p(t)$ este o funcție periodică, pe când funcția pondere corespunzătoare lui $H(\omega)$ este o funcție eșantion, aperiodică [14]. Ori în literatură produsul de convoluție este definit fie între două funcții periodice fie între două funcții aperiodice [14] [27].

În ce privește cea de a doua cale se va observa că spectrul $S_p^{\#}(\omega)$ este de forma (1.28) și prin urmare, deși corespunde unui semnal periodic, permite determinarea funcției de timp a acestui semnal prin aplicarea transformatei Fourier inverse.

În conformitate cu rel.(1.40) și fig.1.6 se poate scrie că:

$$s_p^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_p^*(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \bar{S}_p(\omega) \cdot T e^{j\omega t} d\omega \quad (1.41)$$

Pentru a evidenția eșantioanele $s_p(nT)$ în spectrul $\bar{S}_p(\omega)$ se face precizarea că semnalul eșantionat $\bar{s}_p(t)$:

$$\bar{s}_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_p(t) \delta(t-nT) \quad (1.42)$$

este o funcție periodică cu perioada T_0 . În consecință $\bar{S}_p(\omega)$ este definit de expresia (1.28), în care coeficienții c_k au valoarea \bar{c}_k , dată de relația :

$$\bar{c}_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_p(t) \delta(t-nT) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (1.43)$$

Înlocuind valoarea \bar{c}_k în expresia (1.28) se obține:

$$\bar{S}_p(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - k\omega_0) \cdot \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_p(t) \delta(t-nT) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (1.44)$$

Se va observa acum că integrarea făcându-se pe o singură perioadă $[-T_0/2, T_0/2]$, valoarea lui n poate fi limitată în intervalul $[0, N-1]$. Cu această precizare și intervertind integrala cu suma rezultă:

$$\bar{S}_p(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(\omega - k\omega_0) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s_p(t) e^{-jk\omega_0 t} \delta(t-nT) dt \quad (1.45)$$

Aplicînd integralei din (1.45) teorema convoluției cu funcția delta periodică [14] avem în final:

$$\bar{S}_p(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} s_p(nT) e^{-jk\omega_0 nT} \cdot \delta(\omega - k\omega_0) \quad (1.46)$$

Substituind acest rezultat în rel.(1.41), adică :

$$s_p^{\#}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} T_0 \cdot \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} s_p(nT) e^{-jk\omega_0 nT} \cdot \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.47)$$

se obține, după inversarea integrării cu sumarea și aplica-
rea din nou a teoremei convoluției cu funcția delta periodi-
că, expresia cunoscută (1.24).

Acest rezultat, care satisface sub aspect global, în sensul
că permite interpretarea fizică a procesului de reconstituire
în deplină concordanță cu rel.(1.24), nu dezvăluie totuși me-
canismul intim de prelucrare a eşantioanelor în domeniul timp,
într-un mod similar cu cele arătate în cazul semnalelor aperi-
dice.

Pentru a elucida și acest aspect se va determina ex-
presia semnalului reconstituit prin utilizarea produsului
de convoluție. În acest scop, dat fiind cele arătate anterior,
se impune mai întâi stabilirea expresiei de calcul a produsu-
lui de convoluție dintre o funcție periodică și una aperi-
dică. Se va demonstra în acest sens următoarea teoremă, nesemna-
lată în literatură.

Teorema 1.1

Dacă $f_p(t)$ și $f_2(t)$ sînt două funcții de timp, prima periodi-
că iar cea de a doua aperiodică, și avînd spectrele $F_p(\omega)$
respectiv $F_2(\omega)$, atunci produsului algebric în domeniul frec-
vență, dintre cele două spectre, îi corespunde produsul de
convoluție dintre funcțiile de timp, conform relației:

$$F_p(\omega) \cdot F_2(\omega) \iff \int_{-\infty}^{\infty} f_p(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Fie pentru demonstrație o funcție periodică $f_p(t)$,
de perioadă T_0 , scrisă sub forma :

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1(t-nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{1n}(t) \quad (1.48)$$

Prin $f_1(t)$ s-a notat aici o funcție aperiodică, astfel determinată, încît prin însumarea repetărilor periodice $f_{1n}(t)$ ale acestei funcții se obține $f_p(t)$. Dacă $f_2(t)$ reprezintă o funcție aperiodică, cu spectrul corespunzător $F_2(\omega)$ iar $F_p(\omega)$ și $F_{1n}(\omega)$ sînt spectrele funcțiilor $f_p(t)$ respectiv $f_{1n}(t)$, rezultă pe baza teoremei liniarității că [8]:

$$F_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{1n}(\omega) \quad (1.49)$$

Prin urmare:

$$F_p(\omega) \cdot F_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{1n}(\omega) \cdot F_2(\omega) \quad (1.50)$$

Deoarece $f_{1n}(t)$ și $f_2(t)$ sînt ambele aperiodice se poate scrie:

$$F_{1n}(\omega) \cdot F_2(\omega) \iff f_{1n}(t) * f_2(t) \quad (1.51)$$

$$\text{și deci } F_p(\omega) \cdot F_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{1n}(\omega) \cdot F_2(\omega) \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{1n}(t) * f_2(t) \quad (1.52)$$

Explicitînd în ultima expresie produsul de convoluție rezultă :

$$F_p(\omega) \cdot F_2(\omega) \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{1n}(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (1.53)$$

astfel că după intervertirea sumării cu integrare și avînd în vedere rel.(1.48), se obține rezultatul final sub forma:

$$F_p(\omega) \cdot F_2(\omega) \iff \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau \quad (1.54)$$

Se poate deci afirma că produsului algebric în domeniul frecvență, dintre spectrele a două funcții una periodică și alta neperiodică, îi corespunde în domeniul timp produsul de convoluție definit la fel ca și în cazul funcțiilor aperiode.

Pe baza acestui rezultat și avînd în vedere expresia semnalului eșantionat (1.42) precum și funcția pondere a filtrului trece-jos ideal [14], rel.(1.40) poate fi pusă în domeniul timp, sub forma:

$$s_p^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_p(nT) \delta(t-nT-\tau) \frac{\sin \frac{\pi}{T} \cdot \tau}{\frac{\pi}{T} \cdot \tau} d\tau =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_p(nT) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{T} \cdot \tau}{\frac{\pi}{T} \cdot \tau} \delta[(t-nT)-\tau] d\tau$$

sau

$$s_p^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_p(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_p(nT) s_n(t) \quad (1.55)$$

Egalitatea obținută, identică ca formă cu rel. (1.11), arată că procesul fizic de reconstituire este același indiferent că este vorba de reconstituirea unui semnal periodic sau aperiodic. Este de presupus deci că expresia de reconstituire (1.24), în care intervin eșantioanele prelevate dintr-o singură perioadă, este o formă particulară, valabilă

pentru semnale periodice, a expresiei mai generale (1.11). Existența unei asemenea expresii este posibilă dat fiindcă în cazul semnalelor periodice eșantionate uniform, ca în fig.1.3, informația despre semnal este conținută în totalitate în eșantioanele aferente unei singure perioade. Eșantioanele prelevate din toate celelalte perioade vor avea valori corespunzător egale și prin urmare nu aduc informație suplimentară.

Pentru a verifica afirmațiile de mai sus se va avea în vedere faptul că în expresia (1.55) eșantioanele $s_p(nT)$, care înmulțesc funcția $s_n(t)$ și sînt distanțate pe axa timpului la intervale egale cu perioada T_0 , au o aceeași valoare ce poate fi dată factor comun; pe de altă parte, există N asemenea valori corespunzătoare celor N eșantioane prelevate dintr-o perioadă.

Cu aceste precizări, expresia semnalului reconstituit poate fi pusă sub forma:

$$s_p^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_p(nT) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s_n(t-mT_0) \quad (1.56)$$

Conform formulei lui Poisson [8]:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} s_n(t-mT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_n(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (1.57)$$

$S_n(\omega)$ reprezentînd, în relația de mai sus, spectrul corespunzător funcției eșantion $s_n(t)$. Este însă ușor de observat că $s_n(t)$ rezultă prin deplasarea în timp cu nT a funcției pondere $h(t)$, încît se obține, pe baza teoremei întîrzierii, că [8]:

$$S_n(\omega) = H(\omega) e^{-jn\omega T} \quad (1.58)$$

Tinînd cont de rel.(1.56),(1.57), egalitatea (1.55) devine:

$$s_p^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_p(nT) \cdot \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k\omega_0) e^{-jk\omega_0 nT} e^{jk\omega_0 t} \quad (1.59)$$

Pentru a stabili expresia concretă a caracteristicii de transfer a filtrului ideal trece-jos, utilizat la reconstituire, se are în vedere fig.1.6. Se determină că:

$$H(k\omega_0) = T \text{ pentru } |k| = 0, 1, \dots, K \quad (1.60)$$

Relațiile (1.59), (1.60) conduc în fine la o expresie de reconstituire identică cu (1.24).

1.2.5. Observații privind reconstituirea semnalelor periodice

Se prezintă în cele ce urmează, pe baza teoriei expuse, două observații originale, utile din punct de vedere aplicativ:

a) În expresia de reconstituire (1.24) intervine mărimea K , ca rangul celei mai înalte armonici din spectrul semnalului continuu. În multe situații concrete, valoarea lui K nu este cunoscută, existînd însă certitudinea că semnalul a fost eșantionat suficient de des, încît $N \geq 2K+1$. Expresia (1.24) poate fi utilizată și în aceste cazuri, dacă valoarea ce se adoptă pentru K este corelată cu mărimea lui N .

Pentru cazul N impar, N avînd o mărime dată, din inegalitatea $N \geq 2K+1$ rezultă că este acoperitor dacă se consideră în expresia (1.24) o valoare $K' = (N-1)/2$. O valoare mai mică ar putea eventual lipsi semnalul reconstituit de aportul unor componente de frecvență ridicată. Dacă N este par, spectrul semnalului eșantionat astfel încît să fie evitată la limită interferența spectrelor adiacente, se prezintă ca în fig.1.7. Se va observa că aici, spre deosebire de cazul N impar (fig.1.6), frecvențele de tăiere ale filtrului trece-jos $\pm\pi/T = \pm\omega_0 N/2$ sînt un multiplu întreg de ω_0 . Din

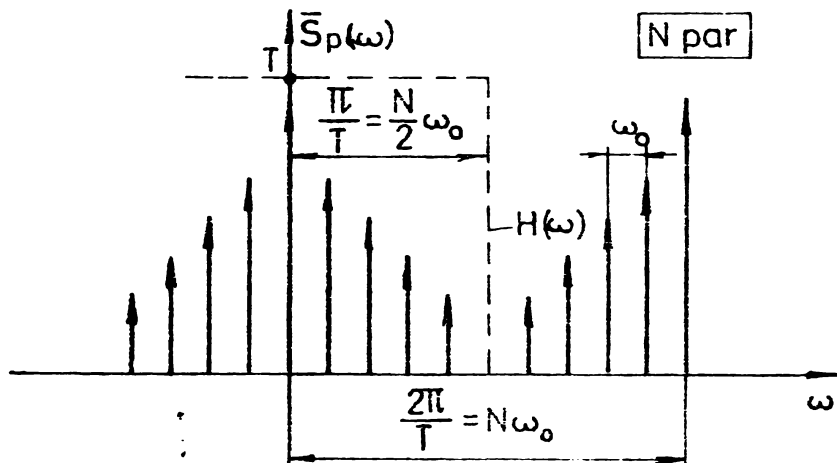


Fig.1.7.

figură rezultă că se impune, în scopul unei reconstituiri perfecte, ca $N \geq 2K+2$, obținându-se în consecință $K''=(N-2)/2$.

Pentru ambele cazuri N impar respectiv par, dacă rangul K , al celei mai înalte armonici din spectrul semnalului continuu, este mai mic decât valorile limită K' , K'' , coeficienții Fourier c_k , $k = K+1, K+2, \dots, K'(K'')$, evaluați conform (1.23), vor fi nuli. Această constatare confirmă odată mai mult posibilitatea utilizării în rel.(1.24), pentru mărimea K , a valorilor limită stabilite mai sus.

b) În aplicații practice, de prelucrare numerică a semnalelor, se necesită frecvent un număr par de eșantioane, putere întreagă a lui 2, pentru a putea utiliza algoritmi ce au la bază TFR [28]. În aceste condiții, faptul că la limită $N = 2K+1$ este întotdeauna impar, poate prezenta pentru anumite situații particulare serioase inconveniente.

Fie pentru exemplificare cazul unui semnal periodic al cărui spectru include 64 componente armonice ($K=64$), componenta de cea mai înaltă frecvență avînd încă o valoare importantă. S-ar impune prin urmare, dacă se necesită o reconstituire exactă, prelevarea a cel puțin $N = 129$ eșantioane. Pe baza celor expuse anterior rezultă că frecvența de eșantionare trebuie astfel aleasă, încît să rezulte $N=256=2^8$, adică o valoare aproape dublă față de cea impusă de teorema

eșantionării. Este firesc prin urmare să se cerceteze ce se întâmplă cu semnalul reconstituit dacă se ia $N = 128 = 2^7$.

Evident, acesta va prezenta erori de reconstituire. Erorile sînt determinate de faptul că valoarea coeficientului "alias" \hat{c}_k , stabilită pe baza fig.1.8. :

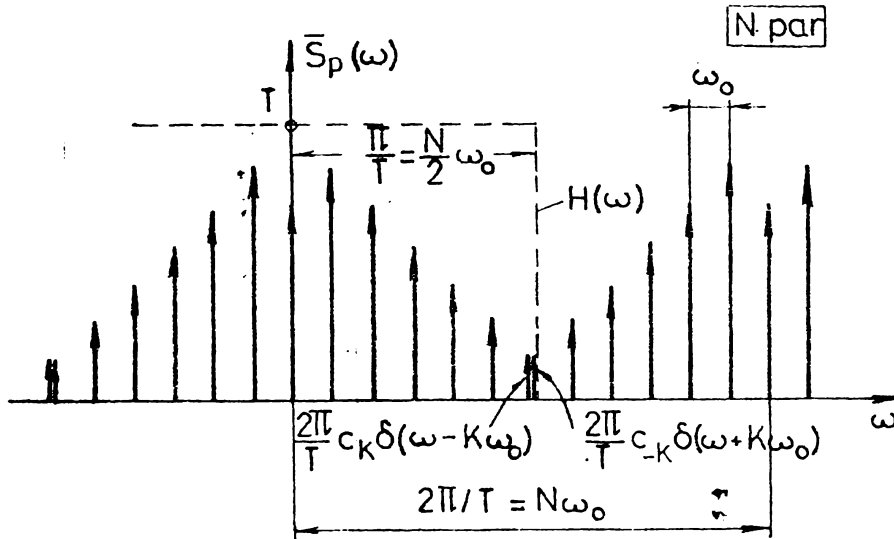


Fig.1.8

$$\bar{S}_{pK}(\omega) = \frac{1}{T} [S_{pK}(\omega) + S_{p(-K)}(\omega)]$$

sau (rel.(1.29), (1.36), (1.37)) :

$$\hat{c}_K = c_K + c_{-K} = 2 \operatorname{Re} \{c_K\} \neq c_K \quad (1.61)$$

diferă, așa cum a rezultat mai sus, de coeficientul Fourier c_K cu același rang. Ultima egalitate s-a obținut avînd în vedere faptul că, în general, pentru semnale reale, componentele de rang k și $-k$ sînt complex conjugate [11]. Se precizează totodată că determinarea valorii corecte c_K , cu ajutorul rel.(1.61), în care \hat{c}_K se consideră cunoscut, este imposibilă, partea imaginară a lui c_K fiind pierdută.

În cazul particular al semnalelor pare, pentru care coeficienții Fourier sînt reali și prin urmare $c_k = c_{-k}$, rel.(1.61) devine:

$$\hat{c}_K = c_K + c_{-K} = 2 c_K \quad (1.62)$$

Din această egalitate rezultă mărimea $c_K = \hat{c}_K/2$. Așa cum s-a arătat în cele precedente, calculul coeficienților \hat{c}_K se face cu aceeași expresie (1.23), stabilită pentru coeficienții Fourier. În consecință, în cazul funcțiilor pare eșantionate cu $N = 2K$, expresia de reconstituire (1.24) capătă forma particulară :

$$f_p(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=c}^{N-1} f_p(nT) \left[\sum_{k=-(K-1)}^{K-1} e^{jk\omega_0(t-nT)} + \cos P\omega_0(t-nT) \right] \quad (1.63)$$

1.2.6. Legătura dintre teorema eșantionării funcțiilor periodice și teorema WKS [29]

Cerințele apropiate exprimate de teorema eșantionării pentru funcțiile periodice respectiv aperiodice precum și existența unei expresii generale unice de reconstituire, conduc în mod firesc la problema legăturii ce există între cele două teoreme. Ne propunem să cercetăm, în cele ce urmează, această chestiune neabordată încă în literatură.

Se va prezenta, pentru început, o formă mai generală a teoremei eșantionării funcțiilor periodice.

Teorema 1.2

Un semnal periodic $s_p(t)$, ce nu conține armonici de rang mai mare ca K , poate fi reconstituit fără erori pe baza a N eșantioane, culese uniform pe durata a P perioade, dacă frecvența de eșantionare este suficient de ridicată, încît să rezulte $N \geq 2KP+1$.

Demonstrația teoremei de mai sus se poate face printr-o metodă similară cu cea utilizată în cazul teoremei eșantionării funcțiilor periodice (pct.1.2.2). Se înlocuiește, în acest scop, perioada T_0 a fundamentalei cu PT_0 . Expresia de reconstituire rezultă de asemenea, prin analogie cu (1.24), sub forma:

$$s_p^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=-KP}^{KP} \sum_{n=0}^{N-1} s_p(nT) e^{jk \frac{\omega_0}{P}(t-nT)} \quad (1.64)$$

Teorema eșantionării, generalizată, este susceptibilă de o interpretare fizică similară cu cea prezentată la pct.1.2.3. Singura deosebire o constituie faptul că, în reprezentarea spectrului semnalului eșantionat (fig.1.9), intervalul dintre două componente respectiv intervalul minim dintre repetările periodice ale spectrului semnalului continuu, încît să fie evitată interferența, este ω_0/P și nu ω_0 .

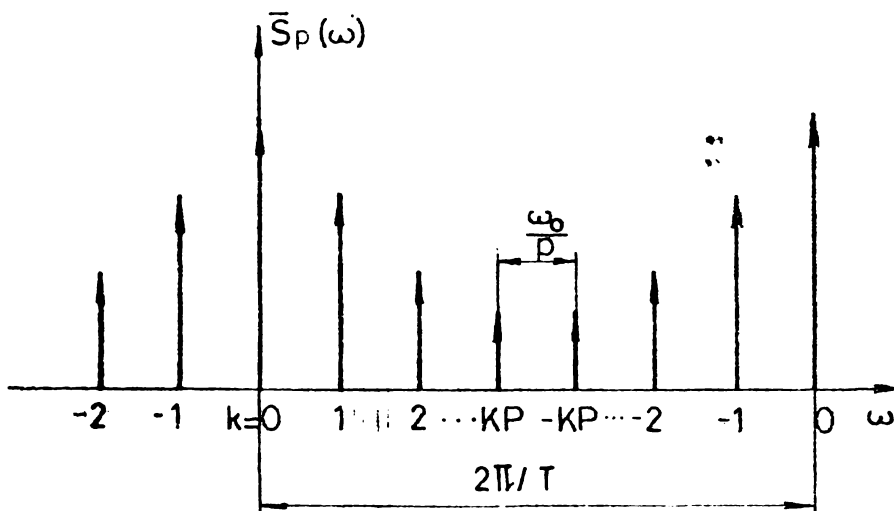


Fig.1.9

In consecință, pentru o reconstituire fără erori se impune ca:

$$2\pi/T \geq (2KP+1) \omega_0/P \quad (1.65)$$

sau, dat fiindcă $T = PT_0/N$, rezultă:

$$N \geq 2KP+1 \quad (1.66)$$

In ceea ce privește interpretarea fizică a expresiei de reconstituire rămîn valabile afirmațiile făcute la pct.1.2.4, cu precizarea că se va considera drept perioadă a fundamentalei mărimea PT_0 (P de valoare finită).

Din rel.(1.66) rezultă că teorema generalizată impune prelevarea unui număr sporit de eşantioane, comparativ cu teorema negeneralizată (rel.1.14).

Este important să se observe de asemenea că, în cazul satisfacerii la limită a condiției (1.66), adică pentru $N = 2KP+1$, raportul:

$$\frac{T_0}{T} = \frac{N}{P} = 2K + \frac{1}{P} \quad (1.67)$$

va diferi de un număr întreg. Aceasta înseamnă că eşantioanele corespunzătoare oricărei perioade din cele P avute în vedere, nu constituie o repetare a eşantioanelor din celelalte $P-1$ perioade, considerate. Cu alte cuvinte, informația despre semnal este dată de eşantioanele din toate cele P perioade și nu de eşantioanele extrase dintr-o singură perioadă, așa cum s-a arătat în cazul teoremei negeneralizate.

Necesitatea extragerii unui număr mai mare de eşantioane, în cazul teoremei generalizate, este compensată de o oarecare reducere a frecvenței de eşantionare.

Intradevăr, deoarece $T = PT_0/N$ și $N \geq 2KP+1$, rezultă că pasul de eşantionare trebuie să satisfacă inegalitatea:

$$T \leq \frac{T_0}{2K+1/P} \quad (1.68)$$

Mărimea lui T , impusă de condiția (1.68), este mai ridicată decât valoarea pasului de eşantionare corespunzătoare teoremei negeneralizate (rel.(1.15)) :

$$T \leq \frac{T_0}{2K+1} \quad (1.68)'$$

Cresțerea lui T și scăderea corespunzătoare a frecvenței de eşantionare este neglijabilă însă din punct de vedere aplicativ, față de efortul suplimentar de calcul ce trebuie investit în vederea prelucrării unui număr sporit de eşantioane. Pentru $K = 10$ și $P = 2$ - spre exemplu - când numă-

rul de eșantioane prelucrate crește cu cca.100%, frecvența de eșantionare scade cu numai 2,38%. Aceste date ilustrează convingător afirmația precedentă.

Dacă teorema generalizată a eșantionării funcțiilor periodice nu prezintă interes din punct de vedere practic, ea permite în schimb stabilirea unei legături cu teorema WKS.

Se consideră în acest scop că $P \rightarrow \infty$, adică sînt prelevate eșantioane distincte dintr-un număr din ce în ce mai mare de perioade. La limită se poate considera că este eșantionat și reconstituit nu un semnal periodic ci unul aperiodic. Afirmația este întărită și de observația că pentru $P \rightarrow \infty$ spectrul semnalului eșantionat devine un spectru continuu, caracteristic semnalelor aperiodice (în fig.1.9 pentru $P \rightarrow \infty, \omega_0/P \rightarrow 0$).

În aceste condiții, pasul de eșantionare care asigură reconstituirea fără erori, este dat de expresia (rel. (1.68)) :

$$T \leq \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{T_0}{2K + 1/P} = \frac{T_0}{2K} \quad (1.69)$$

Deoarece T_0/K reprezintă perioada componentei de cea mai înaltă frecvență din spectrul semnalului continuu, rel. (1.69) impune extragerea a cel puțin două eșantioane pe durata acestei perioade. O asemenea condiție, identică cu cea impusă de teorema WKS, reflectă faptul că teorema lui Shannon reprezintă un caz particular, limită, al teoremei generalizate a eșantionării funcțiilor periodice.

În ceea ce privește expresia de reconstituire a semnalelor aperiodice (rel.1.24), aceasta poate fi de asemenea obținută prin trecerea la limită, pornind de la rel.(1.64).

Avînd în vedere periodicitatea funcției $e^{-jk\omega_0 nT/P}$ și a eșantioanelor $s_p(nT)$ - fig.1.10-rezultă că:

$$s_p(nT)e^{-jk\omega_0 nT/P} = s_p[(n-N)T] e^{-jk\omega_0 (n-N)T/P} \quad (1.70)$$

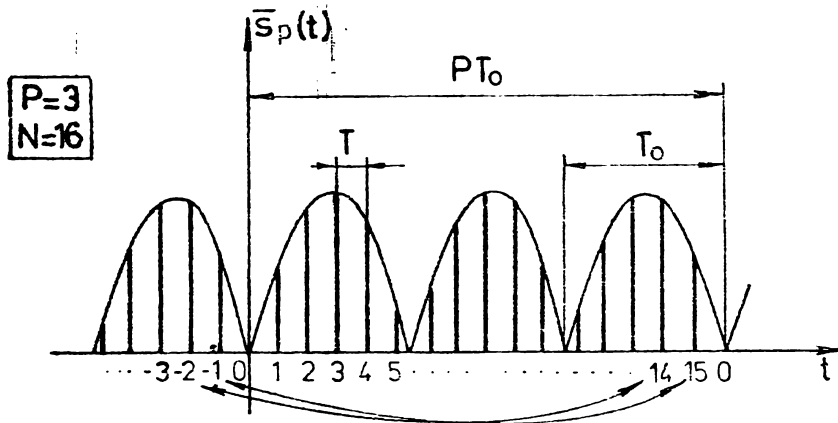


Fig.1.10

Cu această observație și considerînd cazul N impar, respectiv $N-1$ par, rel.(1.64) poate fi scrisă sub forma:

$$\begin{aligned}
 s_p^*(t) &= \frac{1}{N} \sum_{k=-KP}^{KP} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} s_p(nT) e^{-jk \frac{\omega_0}{P} (t-nT)} \\
 &= \sum_{n=-KP}^{KP} s_p(nT) \frac{PT_0/(2\pi)}{2KP+1} \sum_{k=-KP}^{KP} e^{jk \frac{\omega_0}{P} (t-nT)} \cdot \frac{2\pi}{PT_0}
 \end{aligned} \tag{1.71}$$

În expresia (1.71) s-a înlocuit $N = 2KP+1$, adică s-a presupus că teorema eșantionării este satisfăcută la limită. De asemenea, cînd $P \rightarrow \infty$, $k \omega_0 / P \rightarrow \omega$, $2\pi / PT_0 \rightarrow d\omega$ și suma din dreapta tinde la o integrală. Limitele între care se va face integrarea sînt:

$$\pm \lim_{P \rightarrow \infty} KP \frac{\omega_0}{P} = \pm \lim_{P \rightarrow \infty} K\omega_0 \tag{1.72}$$

Utilizînd acum faptul că $N = PT_0/T = 2KP+1$ și că

$\omega_0 = 2\pi/T_0$, se obține că:

$$\pm \lim_{P \rightarrow \infty} K \omega_0 = \pm \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{2\pi K}{T(2K+1/P)} = \pm \frac{\pi}{T} \quad (1.73)$$

Cu aceste precizări, prin trecere la limită, expresia (1.71) devine:

$$s^*(t) = \lim_{P \rightarrow \infty} s_p^*(t) = \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{n=-KP}^{KP} s_p(nT) \frac{T_0/(2K)}{2(1+1/(2KP))} \sum_{k=-KP}^{KP} e^{jk \frac{\omega_0}{P}(t-nT)}$$

$$\cdot \frac{2\pi}{PT_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\omega(t-nT)} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \frac{\sin(\pi/T)(t-nT)}{(\pi/T)(t-nT)} \quad (1.74)$$

Se poate deci afirma că și din punctul de vedere al expresiei de reconstituire teorema WKS reprezintă un caz limită al teoremei generalizate a eșantionării funcțiilor periodice.

Este important de observat că în scrierea rel. (1.74), s-a avut în vedere faptul că:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{T_0}{2K} = T \quad (1.75)$$

T reprezintă aici-așa cum rezultă din egalitatea (1.75)-pasul de eșantionare minim, care asigură reconstituirea fără erori a semnalului aperiodic rezultat din semnalul periodic, prin trecerea la limită. Această observație este în deplină concordanță cu ipoteza inițială $N = 2K+1$, care conduce de asemenea la valoarea minimă a pasului de eșantionare, pentru care sînt excluse erorile de reconstituire ale semnalului periodic.

1.3. Extensii ale teoremei WKS

1.3.1. Clasificarea diferitelor extensii și variante ale teoremei WKS

Chestiunile abordate în paragrafele precedente reprezintă doar o mică parte din teoria cuprinzătoare elaborată, privind eşantionarea și reconstituirea funcțiilor și avînd drept punct de plecare teorema WKS. De fapt, această teorie vizează actualmente un domeniu cu mult mai larg decît cel al teoriei comunicațiilor [1], unde teorema WKS a fost introdusă pentru prima dată.

O prezentare a principalelor variante și extensii ale teoremei WKS, care fără a adopta un criteriu unic de clasificare, oferă o imagine de ansamblu asupra contribuțiilor aduse, este dată în fig.1.11 [1]. Se menționează de asemenea-fără ca acest lucru să fi fost specificat în fig.1.11-teoria elaborată în domeniul sistemelor automate cu eşantionare, privind eşantionarea și reconstituirea semnalelor cu considerarea parametrilor fizici ai eşantionatorului [18] [30] [31]. Această teorie, extrem de importantă în domeniul automatizării, nu va fi abordată-așa cum s-a menționat- în cadrul prezentei lucrări.

1.3.2. Teorema eşantionării generalizată (WKS_K)

Meritul elaborării și prezentării unei variante generalizate a teoremei WKS îi revine lui Kramer [32] (de unde și inițiala K, la urmă, în prezentarea WKS_K). Se menționează însă că încercări în acest sens au existat încă înainte de publicarea lucrării lui Kramer [33].

Generalizarea se referă la nucleul transformării integrale asociate funcției eşantionate. În timp ce teorema WKS este aplicabilă în cazul funcțiilor cu transformată Fourier directă și inversă (pct.1.11), adică o transformare integrală avînd drept nucleu funcția exponențială, nucleul $K(x,t)$ -în cazul teoremei generalizate-poate fi o funcție mai generală, de tipul pătratic integrabilă

Teorema eşantionării generalizată (WKS)

- Teorema eşantionării pentru funcții de n variabile
- Teorema eşantionării cu valorile funcției și derivatele sale
- Teorema eşantionării pentru procese aleatoare
- Teorema eşantionării pentru eşantionare neuniformă
- Teorema eşantionării pentru funcții "trece-bandă"
- Teorema eşantionării cu eşantionare implicită
- Teorema eşantionării funcțiilor generalizate (distribuțiilor)

Teorema
WKS

Extensii ale teoremei
WKS

Alte extensii
ale teoremei
WKS

Teorema eşantionării pentru semnale cu spectru și bandă de trecere nestaționare

Fig.1.11.

$(K(x,t) \in L_2(I))$. Enunțul teoremei constă în următoarele [1] [32]:

" Fie I un interval și $L_2(I)$ clasa funcțiilor $\phi(x)$ astfel încât :

$$\int_I |\phi(x)|^2 dx < \infty \quad (1.76)$$

Dacă pentru orice t real

$$f(t) = \int_I K(x,t)g(x)dx \quad (1.77)$$

în care $g(x) \in L_2(I)$, $K(x,t) \in L_2(I)$ și există o mulțime numărabilă $E = \{t_n\}$, astfel încât $\{K(x,t_n)\}$ este o mulțime completă și ortogonală pe I , atunci

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} f(t_n)S_n(t) \quad (1.78)$$

unde

$$S_n(t) = S(t, t_n) = \frac{\int_I K(x,t)\overline{K(x,t_n)}dx}{\int_I |K(x,t_n)|^2 dx} \quad (1.79)$$

În expresiile de mai sus $K(x,t)$ și $\overline{K(x,t)}$ sînt complex conjugate.

Teorema WSKK poate căpăta o formulare și mai generală prin introducerea în mod explicit, în integrala (1.77), a unei funcții pondere $p(x)$ [34] [35].

Trebuie remarcat de asemenea faptul că din enunț nu rezultă, la fel ca și în cazul teoremei WKS, intervalul de eșantionare, ^{teorema} evidențind doar posibilitatea reconstituirii, în condiții relativ generale, a unei funcții eșantionate.

Este logic să fie așa deoarece pasul de eșantionare depinde de forma particulară a nucleului $K(x,t)$, valorile $\{t_n\}$ trebuind să fie astfel stabilite, încît mulțimea de funcții $\{K(x,t_n)\}$ să fie ortogonală pe I .

În ce privește forma nucleului $K(x,t)$, impusă de enunțul teoremei, o serie de lucrări au arătat că aceasta corespunde cu unele dintre funcțiile speciale, menționate în matematici și care definesc transformări integrale cunoscute: funcția Bessel $J_m(x,t)$ de prima speță și de ordinul m , nucleul transformării Hankel-Bessel [32], funcția Laguerre $L_t(x)$ [36], polinoamele Legendre [35], Gegenbauer, Chebyshev [37]. S-a arătat de asemenea că funcțiile $f(t)$, ce pot fi dezvoltate în conformitate cu teorema generalizată, în care nucleul $K(x,t)$ este reprezentat de una dintre funcțiile speciale menționate anterior, pot fi totodată eșantionate și reconstituite conform teoremei WKS [35][38].

Cu privire la utilitatea, din punct de vedere aplicativ, a teoremei WKS se prezintă următorul exemplu din fizica optică [39].

Este cunoscut că în condițiile unei simetrii circulare, transformarea Hankel de ordin zero este echivalentă cu o transformare Fourier bi-dimensională [40]. În aceste cazuri, teorema WKS pentru funcții bi-dimensionale (pct.1.3.3) poate fi înlocuită cu teorema generalizată WSK, avînd drept nucleu funcția Bessel $J_0(x,t)$. Urmare este că valorile funcției reconstituite pot fi calculate mai ușor, utilizînd o singură serie de forma (1.78), în loc de două.

Alte aplicații ale teoremei WSK sînt cele privind analiza sistemelor nestaționare [41], studiul transferului de căldură [42] și mai recent domeniul transformărilor generale discrete [1].

1.3.3. Teorema eșantionării pentru funcții n -dimensionale

Teorema WKS este aplicabilă și în cazul funcțiilor de mai multe variabile și de bandă limitată, în următoarea formulare [43] [44]:

"Fie $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ o funcție de n variabile a că-

rei transformată Fourier n-dimensională există și este egală cu zero înafara unui interval n-dimensional, adică:

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad |y_k| > |\omega_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.80)$$

Atunci:

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi m_1}{\omega_1}, \dots, \frac{\pi m_n}{\omega_n}\right) \frac{\sin(\omega_1 t_1 - m_1 \pi)}{\omega_1 t_1 - m_1 \pi} \dots \frac{\sin(\omega_n t_n - m_n \pi)}{\omega_n t_n - m_n \pi} \quad (1.81)$$

Această teoremă a fost extinsă pentru procese aleatoare staționare cu n variabile [45], pentru funcții eșantionate neuniform dar periodic [46], precum și în cazul în care reconstituirea se face pe baza valorilor funcției și a derivatelor parțiale pînă la un anumit ordin [47]. Se cunoaște de asemenea o extensie a teoremei WKSJ pentru funcții de n variabile [1].

1.3.4. Teorema eșantionării cu valorile funcției și ale derivatelor sale

Enunțul acestei teoreme, importantă din punct de vedere aplicativ, constă în următoarele [48]:

Dacă o funcție $f(t)$ nu conține componente cu frecvența mai mare ca W , ea poate fi complet determinată pe baza valorilor primelor R derivate, într-o serie de puncte distanțate între ele cu intervalul de eșantionare $h = (R+1)/(2W)$.

Expresia de reconstituire este de forma [49]:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[f(kh) + (t-kh) f'(kh) + \dots + \frac{(t-kh)^R}{R!} f^{(R)}(kh) \right] \left[\frac{\sin \frac{\pi}{h}(t-kh)}{\frac{\pi}{h}(t-kh)} \right]^{R+1} \quad (1.82)$$

în care $f^{(j)}(kh)$ reprezintă o combinație liniară a derivatelor $f^{(j)}(kh)$ de ordinul j [49].

Avantajul reconstituirii pe baza valorilor funcției și a primelor R derivate constă în posibilitatea utilizării unei frecvențe de eșantionare mai scăzute. Dacă se urmărește spre exemplu determinarea, pe baza eșantioanelor, a traseului parcurs de un corp mobil, frecvența de eșantionare poate fi scăzută la jumătate în cazul că sînt prelevate simultan eșantioane care reprezintă poziția respectiv viteza mobilului.

Teorema eșantionării cu utilizarea primelor R derivate a fost extinsă și în cazul altor transformări integrale decît transformarea Fourier [50] [51].

1.3.5. Teorema eșantionării pentru eșantionare neuniformă

În numeroase situații practice din domeniul prelucrării numerice a semnalelor este util ca prelevarea eșantioanelor să nu se facă periodic, la intervale riguros egale și neuniform. Au fost elaborate în acest sens o serie de teoreme care precizează condițiile în care eșantionarea neuniformă conservă întreaga informație conținută de semnal.

O primă teoremă afirmă că în cazul unei funcții de timp, dacă timpul este împărțit în intervale egale cu T , T fiind mai mic sau egal cu jumătate din perioada componentei de cea mai înaltă frecvență din spectrul funcției și dacă este prelevat în orice manieră cîte un eșantion din fiecare interval, cunoașterea valorilor eșantioanelor și a momentelor la care acestea au fost prelevate, face posibilă reconstituirea fără erori a funcției inițiale [52].

Condițiile ce rezultă din enunțul de mai sus sînt, evident, mai lesne de satisfăcut decît cele impuse de teorema WKS. Se păstrează însă dezavantajul necesității cunoașterii momentelor la care au fost extrase eșantioanele. Sub acest aspect se dovedește mai avantajoasă următoarea for-

mulare [53]:

"O funcție $f(t)$ poate fi reprezentată de o combinație liniară de eșantionare neuniform prelevate, dacă valoarea medie a frecvenței de eșantionare depășește frecvența Nyquist, adică dacă numărul de eșantionare în unitatea de timp este în medie mai mare decât dublul celei mai înalte frecvențe din spectrul funcției".

Se arată totodată că numai eșantioanele care preced momentul corespunzător valorii reconstituite trebuiesc eșantionate cu o frecvență medie mai mare ca frecvența Nyquist.

Condițiile de realizare a eșantionării neuniforme pot căpăta și alte formulări decât cele menționate anterior. În așa numita teoremă a eșantionării "semiuniforme" [54], se afirmă posibilitatea reconstituirii fără erori a semnalului continuu, dacă momentele de eșantionare t_n , satisfac condiția:

$$|t_n - n/(2W)| < \frac{1}{\pi} \ln 2 \approx 0,22 \quad (1.83)$$

Prin W a fost notată, mai sus, frecvența maximă din spectrul semnalului continuu.

O procedură mai complicată de efectuare a eșantionării neuniforme este prezentată în [55] (eșantionare neuniformă recurentă).

Momentele de eșantionare sînt împărțite în grupe de cîte N puncte fiecare și grupele se repetă cu o perioadă de repetiție egală cu $N/2W$, așa cum se arată în fig.1.12.

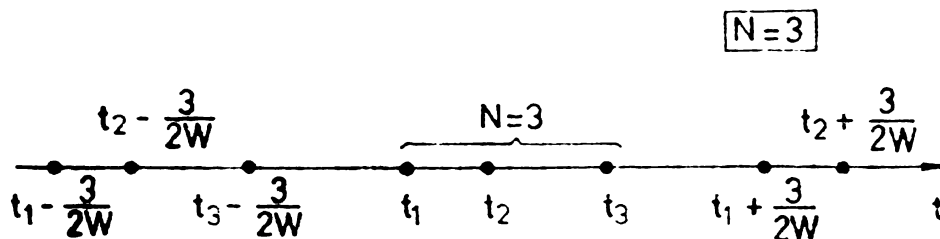


Fig.1.12.

Teorema afirmă că o funcție $f(t)$, de bandă limitată, este unic determinată de valorile sale în punctele de eșantionare stabilite conform rel. (fig. 1.12):

$$t_{pn} = t_p + (nN/2W) \quad p = 1, 2, \dots, N; \quad n = \dots -1, 0, 1, \dots \quad (1.84)$$

Expresia de reconstituire este de forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=1}^N f(t_{pn}) \Psi_{pn}(t) \quad (1.85)$$

în care:

$$\Psi_{pn}(t) = \frac{\prod_{g=1}^N \sin \frac{2\pi W}{N} (t - t_g)}{\prod_{g=1, g \neq p}^N \sin \frac{2\pi W}{N} (t_p - t_g)} \cdot \frac{(-1)^{nN}}{\frac{2\pi W}{N} \left(t - t_p - \frac{2nN}{2W} \right)} \quad (1.86)$$

Se menționează în final existența unor teoreme de eșantionare neuniformă bazate pe funcția de interpolare Lagrange [56].

1.3.6. Eșantionarea funcțiilor trece-bandă

Prin definiție, o funcție trece-bandă are spectrul $F(\omega)$ limitat pe axa pulsațiilor conform uneia dintre următoarele două relații:

$$F(\omega) \in [2\pi W_0, 2\pi(W_0 + W)] \quad (1.87)$$

sau

$$F(\omega) \in [2\pi W_0, 2\pi(W_0 + W)] \cup [-2\pi W_0, -2\pi(W_0 + W)] \quad (1.88)$$

Ne vom referi mai întâi la funcțiile caracterizate de rel. (1.87).

Reconstituirea acestei clase de funcții este posibilă pe baza eșantioanelor prelevate după procedeul denumit "eșantionare de ordinul doi" [57].

În general, expresia de reconstituire a unei func-

ții care a suferit o eșantionare de ordinul p, este de forma:

$$f(t) = \sum_{i=1}^p f_i(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_i+k_i) S_i(t-nT_i-k_i) \quad (1.89)$$

În această expresie seria de eșantionare de rang i, $f_i(t)$, este caracterizată de intervalul de eșantionare T_i , "faza" k_i și "funcția eșantion" S_i . De fapt, o eșantionare de ordinul p reprezintă o suprapunere de p secvențe de eșantioane prelevate uniform, fiecare cu un anumit pas T_i și un anumit defazaj k_i .

Pentru o eșantionare de ordinul doi este valabilă următoarea teoremă [57][58][14]:

"Dacă o funcție $f(t)$ are spectrul limitat în intervalul (W_0, W_0+W) , ea poate fi reconstituită exact, pentru orice valori ale mărimilor W_0 și W , în conformitate cu expresia:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[f\left(\frac{n}{W}\right) S\left(t - \frac{n}{W}\right) + f\left(\frac{n}{W} + k\right) S\left(\frac{n}{W} + k - t\right) \right] \quad (1.90)$$

în care

$$S(t) = \frac{\cos [2\pi(W_0+W)t - (r+1)\pi Wk] - \cos [2\pi(rW-W_0)t - (r+1)\pi Wk]}{2\pi Wt \sin(r+1)\pi Wk} + \\ + \frac{\cos [2\pi(rW-W_0)t - r\pi Wk] - \cos [2\pi W_0 t - r\pi Wk]}{2\pi Wt \sin r\pi Wk} \quad (1.91)$$

În rel.(1.91) r este un întreg care satisface dubla inegalitate $2W_0/W < r < 2W_0/(W+1)$ iar k este o constantă, astfel încât $kWr, kW(r+1) \neq 0, 1, \dots$. Se poate observa că teorema de mai sus reprezintă o particularizare a rel.(1.89) pentru $p = 2, T_1 = T_2 = 1/W, k_1 = 0, k_2 = k \neq 0$. Se precizează de asemenea că, deși în aparență frecvența de eșantionare este egală cu $W(T_1=T_2=1/W)$, valoarea acestei frecvențe este de

fapt $2W$, ca urmare a suprapunerii celor două secvențe de eșantioane, defazate.

Cu privire la eșantionarea și reconstituirea funcțiilor caracterizate de rel.(1.88), se menționează în literatură [1] o variantă a teoremei generalizate WKS. Această variantă rezultă prin substituirea domeniului I, din rel. (1.76)-(1.79), cu intervalul $R_{BT} = [W_0 - \pi W, W_0 + \pi W] \cup [-W_0 - \pi W, -W_0 + \pi W]$. Enunțul constă în următoarele:

" Fie $g(\omega)$ o funcție complexă de variabila reală ω , definită pe domeniul $(-\infty, \infty)$, astfel încât $g(\omega) \in L_1$, adică:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\omega)| d\omega < \infty \quad (1.92)$$

și fie $K(t, \omega)$ o funcție complexă de variabila timp, care satisface condiția: $K(t, \omega) = K(t, -\omega)$. Se consideră de asemenea funcția reală $f(t)$, al cărei spectru este limitat la intervalul $R_{BT} = [W_0 - \pi W, W_0 + \pi W] \cup [-W_0 - \pi W, -W_0 + \pi W]$. Dacă

$$f(t) = \int_{R_{BT}} g(\omega) K(t, \omega) d\omega \quad (1.93)$$

atunci

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n}{W}\right) L_n(t) \quad (1.94)$$

în care

$$L_n(t) = \frac{2 \int_{R_{BT}} K(t, \omega) \overline{K\left(\frac{n}{W}, \omega\right)} d\omega}{\int_{R_{BT}} \left| K\left(\frac{n}{W}, \omega\right) \right|^2 d\omega} \quad (1.95)$$

Teorema dată mai sus a fost la rîndul ei generalizată pentru cazul funcțiilor de mai multe variabile [1].

1.3.7. Eșantionarea proceselor aleatoare

Alte variante ale teoremei WKS au fost elaborate pentru reprezentarea, funcție de eșantioane, a proceselor aleatoare. Una dintre teoremele în această direcție este următoarea [59][14]:

"Fie $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, o funcție aleatoare reală sau o funcție aleatoare complexă de variabilă reală, staționară în sens larg și avînd densitatea spectrală nulă înafara intervalului $[-2\pi W, 2\pi W]$. Atunci, pentru orice t , $f(t)$ este dată de relația:

$$x(t) = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin \pi(2Wt-n)}{\pi(2Wt-n)} \quad (1.96)$$

unde l.i.m. este o limită în sens de medie patrativă."

Se cunosc și alte formulări, similare teoremei de mai sus [60], precum și extensii ale acesteia, pentru cazul în care prelevarea eșantioanelor se face aleator [61], pentru cazul funcțiilor de mai multe variabile [62], etc.

1.3.8. Eșantionarea implicită

Teoremele prezentate pînă aici permiteau reconstituirea funcției inițiale $f(t)$ pe baza eșantioanelor $f(t_n)$, corespunzătoare unor momente de timp t_n , care sînt independente de $f(t)$. În cazul eșantionării implicite funcția este reprezentată ca o dependență de mulțimea momentelor $\{t_n\}$, pentru care funcția are o valoare bine precizată și cunoscută: momentele trecerii prin zero, adică $\{t_n: f(t_n) = 0\}$ sau momentele intersecției cu funcția cosinus $\{t_n: f(t_n) = C \cos 2\pi W t_n\}$ - spre exemplu.

O primă teoremă are următorul enunț [63]:

"Fie $f(t)$ o funcție cu valori limitate și care nu conține frecvențe mai mari ca W , încît expresia:

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n f\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin(2\pi wz - n\pi)}{(2\pi wz - n\pi)} \quad (1.97)$$

converge uniform pentru $w < W$, în orice regiune limitată a planului z . Fie $C \geq |f(t)|$ precum și

$$\{t_n\} = \{t: f(t) = C \cos 2\pi wt_n\}, n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1.98)$$

Atunci produsul :

$$f(z) = [f(0) - C] \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n \left(1 - \frac{z}{t_n}\right) + C \cos \pi wz \quad (1.99)$$

va converge uniform în aceeași regiune, dacă $t_{\pm n}$ corespunde zerourilor funcției $f(z)$, din dreapta respectiv stînga originii".

Se precizează că $f(z)$ rezultă din $f(t)$ prin înlocuirea lui t cu variabila complexă z . Din cele de mai sus se poate observa că funcția $f(t)$ este determinată de valoarea în origine $f(0)$ și mulțimea momentelor de eșantionare $\{t_n\}$.

Din punct de vedere aplicativ prezintă mai mare interes următoarea teoremă, care asigură reconstituirea pe baza zerourilor funcției $f(z)$ situat într-un interval specificat $(-T_0/2, T_0/2)$ [64]:

O funcție $f(t)$ ce nu conține frecvențe mai mari ca W poate fi reprezentată de expresia:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N (-1)^n A_n \frac{\sin(2\pi Wt - n\pi)}{2\pi Wt - n\pi} \quad (1.100)$$

în care A_n este dependent de valorile celor $2N$ zerouri z_m ale lui $f(z)$, situate în interiorul intervalului $(-T_0/2, T_0/2)$, adică :

$$A_n = f(0) \frac{\prod_{m=1}^N \frac{1}{2Wz_m} \prod_{m=1}^N (2Wz_m^{-n})}{\prod_{m=1}^N \left(\frac{1}{m}\right)^2 \prod_{\substack{m=-N \\ m \neq n}}^N (m-n)} \quad (1.101)$$

iar N reprezintă cel mai mare întreg ce nu depășește WT_0 .

1.3.9. Teorema eșantionării pentru semnale cu spectru și bandă de trecere nestaționare [65]

Se consideră clasa de semnale continue:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi W_1(t)}^{2\pi W_2(t)} F(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.102)$$

avînd spectrul $F(\omega, t)$ și limitele acestui spectru $2\pi W_1(t)$ respectiv $2\pi W_2(t)$ nestaționare. Funcțiile $W_1(t)$, $W_2(t)$ sînt continue pe porțiuni, cu valori limitate, și astfel încît $W_2(t) > W_1(t)$, $W_2(t) > 0$. Variațiile în timp ale lui $f(t)$ sînt determinate în acest caz nu numai de un anumit spectru $F(\omega)$ dar și de modificările în timp ale acestui spectru și a limitelor acestuia.

Pentru a evidenția distinct acest lucru funcția (1.103) va fi specificată sub forma unui semnal nestaționar [65], adică:

$$f(t, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi W_1(\zeta)}^{2\pi W_2(\zeta)} F(\omega, \zeta) e^{j\omega t} d\omega \quad (10.103)$$

cu transformata Fourier corespunzătoare:

$$F(\omega, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \zeta) e^{-j\omega t} dt \quad (1.104)$$

Se arată în [65] că funcția $f(t)$, dată de rel. (1.102), poate fi exprimată în raport cu eşantioanele funcției $f(t, \zeta)$, sub forma:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f \left\{ \frac{k}{2W(t)}, t \right\} \varphi_k(t) \quad (1.105)$$

unde:

$$W(t) = \frac{1}{2} [W_2(t) - W_1(t)]$$

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin \pi [2tW(t) - k]}{[2tW(t) - k] \pi} \exp \left\{ 2\pi i W_0(t) \left[t - \frac{k}{2W(t)} \right] \right\}$$

$$W_0(t) = \frac{1}{2} [W_1(t) + W_2(t)]$$

Se va observa că eşantioanele $\{f(t_k)\}$ sînt egale cu coeficienții $f \left\{ \frac{k}{2W(t)}, t \right\}$ numai pentru soluțiile $\{t_k\}$ ale ecuației: $2tW(t) - k = 0$.

1.3.10. Alte variante ale teoremei WKS

În cadrul acestui paragraf vor fi prezentate pe scurt o serie de variante ale teoremei WKS, care, fără a afecta esența acestei teoreme, comportă elemente de noutate în ce privește prelevarea eşantioanelor sau reconstituirea semnalului. Vor fi menționate de asemenea variante ale teoremei eşantionării, aplicabile unor clase particulare de semnale.

O primă variantă considerată este cea dată în [22] și care exprimă o funcție $f(t)$, de bandă limitată :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.106)$$

ca o dependență de eșantioanele $g(nT)$ ale semnalului:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.107)$$

ce se obține la ieșirea sistemului $H(\omega)$, comandat la intrare cu $f(t)$. Seria eșantion este de forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) y(t-nT) \quad (1.108)$$

în care

$$y(t) = \frac{1}{2\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{e^{j\omega t}}{H(\omega)} d\omega \quad (1.109)$$

O altă variantă a teoremei lui Shannon permite reconstituirea valorilor unui semnal pe baza eșantioanelor precedente [6][67]. Fie o funcție $f(t) \in L_2(-\pi, \pi)$ și de bandă limitată în intervalul $|\omega| \leq \pi$. Dacă pasul de eșantionare T satisface condiția $0 < T < 1/2$, $f(t)$ poate fi aproximată printr-o combinație liniară de eșantioanele precedente $f(t-kT)$, conform relației:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(t) - \sum_{k=1}^n a_{kn} f(t-kT) \right| = 0 \quad (1.110)$$

În expresia de mai sus $-\infty < t < \infty$ și $a_{kn} = (-1)^{k+1} (\cos \pi T)^k \binom{n}{k}$.

O variantă a teoremei WKS este legată de o nouă procedură, mai generală, de reconstituire a semnalului continuu. E.Pop [68] și A.Popoulis [23] au arătat, independent, că o funcție $f(t)$ de bandă limitată :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.111)$$

poate fi reconstituită pe baza eșantioanelor, utilizând expresia :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin \omega_0 (t-nT)}{\omega_2 (t-nT)} \quad (1.112)$$

Aici $\omega_2 = \pi/T \geq \omega_1$ și $\omega_1 \leq \omega_0 \leq 2\omega_2 - \omega_1$. Enunțul teoremei are la bază concluzia ce se desprinde din fig.1.13 și anume că, în cazul în care semnalul este eșantionat cu o frecvență mai mare ca frecvența Nyquist, frecvența de tăiere ω_0 a filtrului trece-jos ideal poate fi mai mică ca π/T , în limitele date de ultima dublă inegalitate.

O serie de variante ale teoremei WKS au rezultat ca urmare a limitării aplicabilității acestei teoreme la clase particulare de funcții.

Considerând funcțiile $f^2(t)$ în loc de $f(t)$, expresia (1.112) capătă forma modificată [23] :

$$f^2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f^2(nT) \frac{\sin \omega_0 (t-nT)}{\omega_2 (t-nT)} \quad (1.113)$$

în care $\omega_2 = \pi/T \geq 2\omega_1$, $2\omega_1 \leq \omega_0 \leq 2\omega_2 - 2\omega_1$. Se va observa că în acest caz, frecvența minimă de eșantionare este de două ori mai mare decât frecvența Nyquist.

Alte variante ale teoremei WKS sînt aplicabile semnalelor de durată finită și nu semnalelor de bandă limitată [6

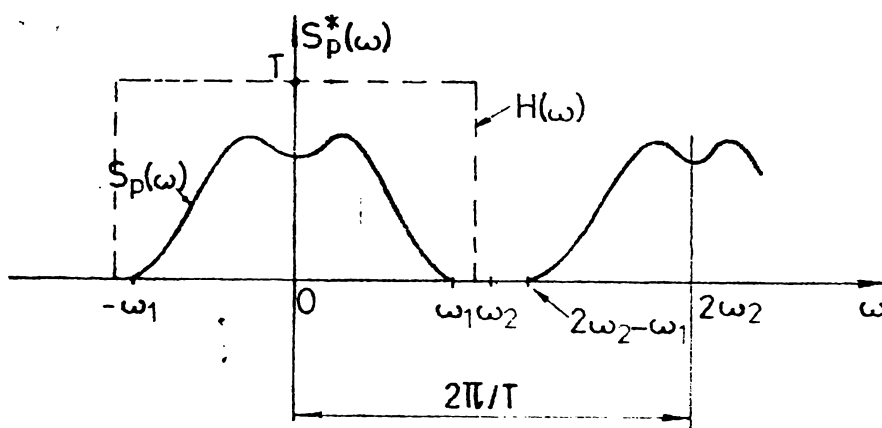


Fig.1.13

[70].

Deosebit de promițător pare procedeul de reconstituire a semnalelor de durată și energie finită, eșantionate [70], bazat pe o serie cu funcțiile undă elipsoidale. Aceste funcții de bandă limitată, care alcătuiesc o mulțime completă și ortogonală, atât pe un interval finit în domeniul timp cât și pe un interval limitat în domeniul frecvență, prezintă încă o calitate remarcabilă: aceea de a concentra într-un interval de timp limitat, o energie mai mare decât energia, corespunzătoare aceluiași interval, a oricărei alte funcții de bandă limitată și avînd aceeași energie totală. Datorită acestor proprietăți, expresia de reconstituire a unor semnale de durată finită, cu utilizarea funcțiilor undă elipsoidale, comportă cele mai mici erori [70] [71]. Aplicarea procedeului este deocamdată relativ restrînsă, dat fiind dificultățile de calcul pe care le comportă.

CAPITOLUL 2

TRANSFORMAREA PATRATICĂ ȘI SPECTRUL SEMNALELOR PERIODICE

2.1. Introducere

În capitolul precedent s-a subliniat importanța pe care o prezintă, în general, teoria funcțiilor periodice pentru tehnicile de prelucrare numerică a semnalelor. Au fost prezentate totodată unele contribuții proprii, privind interpretarea fizică a procesului de reconstituire a semnalelor periodice eșantionate precum și legătura dintre teorema eșantionării funcțiilor periodice și teorema lui Shannon.

În cadrul acestui capitol va fi tratată o problemă încă neabordată în literatura de specialitate, aceea a modificării spectrului semnalelor periodice prin transformarea patrată.

Apare evident faptul că o asemenea problemă este strâns legată de teoria eșantionării și reconstituirii semnalelor periodice. Se precizează apoi că au fost avute în vedere funcțiile periodice, dat fiind -așa cum s-a arătat - importanța pe care o prezintă teoria acestor funcții pentru sistemele cu prelucrare numerică. Pe de altă parte, problema enunțată poate fi mai ușor soluționată în cazul funcțiilor periodice decât în regim aperiodic (pct.2.3), fapt important la o primă abordare a chestiunilor.

2.2. Teorema eșantionării funcțiilor $f^2_p(t)$

Este cunoscut faptul că patratul $f^2(t)$, al unei funcții $f(t)$, aperiodice și de bandă limitată, are spectrul de două ori mai larg decât spectrul $F(\omega)$, corespunzător funcției inițiale [23]. O consecință a acestei observații o constituie teorema eșantionării funcțiilor $f^2(t)$, prezentată la pct.1.3.10. Se va arăta, în cele ce urmează, că observația menționată își păstrează valabilitatea și în cazul funcțiilor periodice.

Se consideră în acest scop o funcție $f_p(t)$, periodică și de bandă limitată:

$$f_p(t) = \sum_{k=-K}^K c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.1)$$

Funcția patrat $f_p'(t) = f_p^2(t)$ va fi, evident, tot periodică -adică de forma (2.1)- în care coeficienții Fourier vor avea valorile corespunzătoare c_k' . Deoarece produsului algebric în domeniul timp îi corespunde produsul de convoluție în domeniul frecvență, valoarea unui coeficient c_n' este dată de expresia [72]:

$$c_n' = \sum_{k=-K}^K c_k c_{n-k} \quad (2.2)$$

Din rel.(2.2) rezultă că valoarea maximă a lui $|n|$ este $2K$, adică rangul celei mai înalte armonici din spectrul lui $f_p^2(t)$ este de două ori mai mare ca rangul armonicii superioare din spectrul corespunzător lui $f_p(t)$. Această concluzie rezultă și din fig.2.1, în care este reprezentat modul de obținere a produsului convolutiv (2.2), pentru componenta c_{2K}' .

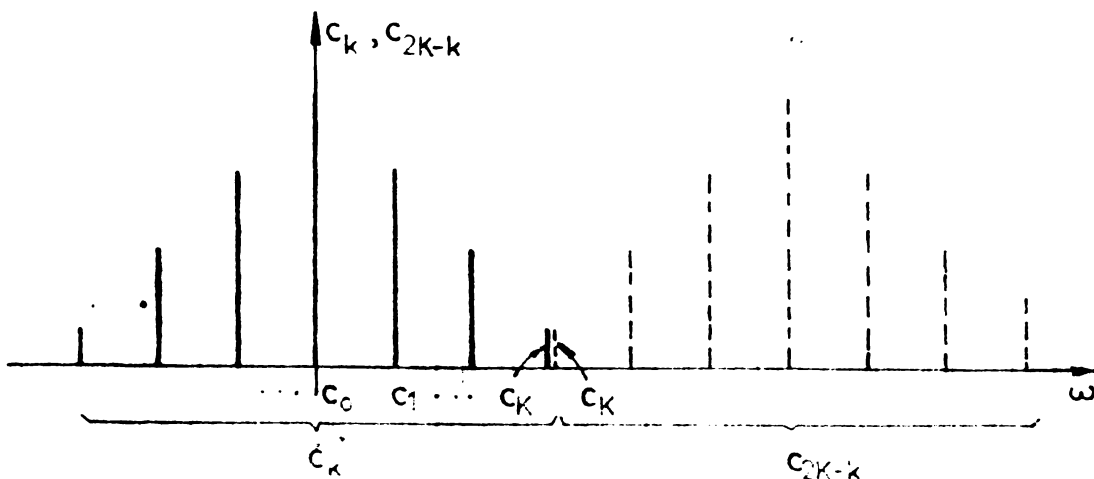


Fig.2.1

Pe baza afirmației de mai sus, se poate enunța o teoremă a eșantionării pentru funcțiile periodice $f_p^2(t)$, în următoarea formulare:

Teorema 2.1.

Dacă $f_p^2(t)$ reprezintă patratul unei funcții periodice $f_p(t)$, al cărei spectru nu conține armonici de rang mai mare ca K , $f_p^2(t)$ poate fi reconstituită direct, pe baza a cel puțin $N = 4K+1$ eșantioane, prelevate uniform dintr-o perioadă. Expresia de reconstituire este de forma (rel.1.24):

$$f_p^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=-2K}^{2K} \sum_{n=0}^{N-1} f_p^2(nT) e^{jk\omega_0(t-nT)} \quad (2.3)$$

Teorema este utilă la reprezentarea, funcției de eșantioane, a semnalelor periodice care rezultă din măsurători direct sub forma patrativă $f_p^2(t)$.

2.3. Problema inversă

Pornind de la teorema dată la punctul precedent, ne propunem, în cele ce urmează, să vedem în ce măsură este valabilă și următoarea afirmație: fiind dat un semnal periodic de bandă limitată $s_p'(t) = [s_p(t)]^2$, cu $2K$ componente armonice, și determinînd printr-un procedeu matematic oarecare eșantioanele lui $s_p(t)$, este posibilă reconstituirea fără erori a semnalului $s_p(t)$, pe baza a numai $N = 2K+1$ eșantioane prelevate uniform dintr-o perioadă? Sau, mai direct, pentru orice semnal $s_p'(t)$, spectrul corespunzător lui $s_p(t)$ este redus la jumătate?

Dacă răspunsul este afirmativ înseamnă că funcționalul A , definit de expresia:

$$s_p(t) = A s_p'(t) \quad (2.4)$$

se comportă ca un filtru trece-jos, care reduce la jumătate frecvența maximă din spectrul semnalului aplicat la intrarea sa. În consecință, prin aplicarea repetată a acestui opera-

tor, spectrul semnalului inițial $s'_p(t)$ poate fi restrîns oricît de mult, fără pierderi de informație, deoarece $s'_p(t)$ poate fi refăcut prin operația inversă de ridicare succesivă la patrat. Ar rezulta deci că un semnal de bandă limitată, eșantionat, poate fi reconstituit fără erori, chiar dacă frecvența de eșantionare este mai mică decît frecvența Nyquist.

Se menționează că în cazul particular al unei funcții $s_p(t)$, care satisface condiția $s_p(t) \geq 0$, pentru orice t din domeniul de definiție, determinarea eșantionanelor lui $s_p(t)$, pe baza eșantionanelor lui $s'_p(t)$, se reduce la o simplă operație de extragere a radicalului.

Pentru a verifica valabilitatea concluziei privind posibilitatea utilizării unei frecvențe de eșantionare mai scăzute decît frecvența Nyquist, este necesară determinarea spectrului semnalului $s_p(t)$, funcție de spectrul corespunzător lui $s'_p(t)$.

Problema poate fi soluționată în domeniul timp, rezolvînd ecuația funcțională (2.4), prin procedeele cunoscute [73][74], și determinînd spectrul soluției rezultate. O cale mai directă o constituie însă abordarea problemei în domeniul frecvență, prin rezolvarea sistemului de ecuații:

$$\sum_{k=-K}^K c_k c_{n-k} = c'_n \quad n = -2K, -(2K-1), \dots, 0, \dots, 2K \quad (2.5)$$

în care coeficienții c'_n se presupun cunoscuți.

Este demn de remarcat faptul că, în regim aperiodic, determinarea spectrului $S(\omega)$, corespunzător semnalului $s(t)$ -funcția $S(\omega)$ fiind dată-ar implica soluționarea ecuației integro-diferențiale :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi) \cdot S(\omega - \xi) d\xi = S'(\omega) \quad (2.6)$$

Ecuația (2.6), în domeniul frecvență, corespunde ecuației (2.4) din domeniul timp.

Este evident că soluționarea unui sistem de ecuații algebrice comportă, în general, mai puține dificultăți decât rezolvarea unei ecuații întregodiferențiale. Acest fapt a constituit unul dintre motivele pentru care au fost preferate, pentru început, în cadrul cercetării, funcțiile periodice.

Pentru a putea stabili unele observații cu privire la sistemul de ecuații (2.5), acesta va fi scris sub formă dezvoltată. Se obține:

$$\begin{aligned}
 & c_0^2 + 2(c_1 c_{-1} + c_2 c_{-2} + \dots + c_K c_{-K}) = c_0' \\
 & \left. \begin{array}{l} 2K \\ \text{ecuații} \end{array} \right\} \begin{cases} 2(c_0 c_1 + c_{-1} c_2 + \dots + c_{-(K-1)} c_K) = c_1' \\ \dots \\ c_0 c_K + c_1 c_{K-1} + c_2 c_{K-2} + \dots + c_K c_0 = c_K' \\ \dots \\ c_{K-1} c_K + c_K c_{K-1} = c_{2K-1}' \\ c_K^2 = c_{2K}' \end{cases} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} 2K \\ \text{ecuații} \end{array} \right\} \begin{cases} 2(c_0 c_{-1} + c_1 c_{-2} + \dots + c_{K-1} c_{-K}) = c_{-1}' \\ \dots \\ c_0 c_{-K} + c_{-1} c_{-(K-1)} + c_{-2} c_{-(K-2)} + \dots + c_{-K} c_0 = c_{-K}' \\ \dots \\ c_{-(K-1)} c_{-K} + c_{-K} c_{-(K-1)} = c_{-(2K-1)}' \\ c_{-K}^2 = c_{-2K}' \end{cases}
 \end{aligned}$$

Analiza rel.(2.7) conduce la următoarele observații:

a) Sistemul conține $4K+1$ ecuații în timp ce trebuie determinati $2K+1$ coeficienți necunoscuți. Prin urmare sistemul nu poate fi rezolvat pentru orice coeficienți c_n' , respectiv pentru orice semnal $s_p'(t)$. Dacă coeficienții c_k sînt determinați din $2K+1$ ecuații, cele $2K$ ecuații neutilizate vor reprezenta tot atîtea condiții pentru semnalul $s_p'(t)$.

b) Deoarece coeficienții c_k și c_{-k} sînt, în general, în cazul funcțiilor reale complex conjugați, încît produsul

$c_k \cdot c_{-k} = |c_k|^2 > 0$, rezultă din prima ecuație că întotdeauna $c'_0 > 0$. Această condiție trebuie neapărat avută în vedere atunci când se sintetizează un semnal $s'_p(t)$ și se impune, printre altele, valoarea componentei c'_0 .

Se precizează că o alegere incorectă a semnului lui c'_0 , nu este pusă în evidență prin imposibilitatea satisfacerii, din punct de vedere matematic, a celor $2K$ condiții ce rezultă pentru semnalul $s'_p(t)$. Condiția $c'_0 > 0$ se explică prin aceea că necondiționat $s'_p(t) \geq 0$.

În cazul funcțiilor pare, pentru care c_k este real și $c_k = c_{-k}$, rezultă din (2.7) o condiție similară pentru componenta c'_{2K} , adică $c'_{2K} > 0$.

c) În cazul unui semnal $s'_p(t)$, ale cărui componente spectrale satisfac toate cele $2K$ condiții, se obține o aceeași soluție, corespunzătoare semnalului $s_p(t)$, indiferent care ecuații, din cele $4K+1$ disponibile, au fost alese.

d) Dacă semnalul $s'_p(t)$ satisface numai p condiții, $p < 2K$, și se determină o soluție $s_{p1}(t)$, spectrul $S'_{p1}(\omega)$ corespunzător lui $[s_{p1}(t)]^2$, va diferi de spectrul $S'_p(\omega)$ al lui $s'_p(t)$, prin valorile a $2K-p$ componente. Vor apărea diferențe în cazul acelor componente ale lui $s'_p(t)$, care intervin în ecuațiile rămase drept condiții și care nu sînt satisfăcute. Este posibil deci, ca funcție de modul în care sînt alese cele $2K+1$ ecuații pentru determinarea lui $s_{p1}(t)$, $S'_{p1}(\omega)$ să difere de $S'_p(\omega)$ în ce privește componentele de înaltă frecvență sau componentele de joasă frecvență—spre exemplu.

e) În cazul particular al semnalelor $s'_p(t)$ pare, dat fiindcă $c'_k = c'_{-k}$, sistemul (2.7) va conține doar $2K+1$ ecuații distincte. Deoarece $s_p(t)$ va fi în acest caz fie o funcție pară fie una impară avînd deci $K+1$ componente distincte, rezultă că se impune satisfacerea a numai K condiții pentru ca soluția obținută prin rezolvarea sistemului să corespundă lui $s_p(t)$.

În scopul aprofundării observațiilor de mai sus și mai ales pentru a găsi semnificația condițiilor impuse semnalului $s'_p(t)$, se va analiza în continuare, în detaliu, cazul simplu al unui semnal $s'_p(t)$ avînd $2K=2$ componente armonice.

Sistemul (2.7) se reduce în acest caz la $4K+1=5$ ecuații:

$$\begin{cases} c_0^2 + c_1 c_{-1} = c'_0 \\ 2c_0 c_1 = c'_1 \\ c_1^2 = c'_2 \\ 2c_0 c_{-1} = c'_{-1} \\ c_{-1}^2 = c'_{-2} \end{cases} \quad (2.8)$$

Presupunind funcția $s_p(t)$ pară-pentru a simplifica și mai mult lucrurile din (2.8) rezultă următoarele ecuații distincte:

$$\begin{cases} c_0^2 + 2c_1^2 = c'_0 \\ 2c_0 c_1 = c'_1 \\ c_1^2 = c'_2 \end{cases} \quad (2.9)$$

Egalitățile (2.9) stabilesc legătura dintre semnalele $s_p(t)$ și $s'_p(t)$, date de expresiile [8]:

$$s_p(t) = c_0 + 2c_1 \cos \omega_0 t \quad (2.10)$$

$$s'_p(t) = c'_0 + 2c'_1 \cos \omega_0 t + 2c'_2 \cos 2\omega_0 t \quad (2.11)$$

Sistemul (2.9) conține 3 ecuații cu 2 necunoscute, existînd prin urmare 3 modalități de rezolvare.

Cazul I. Coeficienții c_0 , c_1 sînt determinați din ultimele două ecuații, rezultînd următoarele soluții:

$$c_0 = \frac{c'_1}{2\sqrt{c'_2}} \quad c_1 = \sqrt{c'_2} \quad (2.12)$$

și

$$c_0 = -\frac{c'_1}{2\sqrt{c'_2}} \quad c_1 = -\sqrt{c'_2}$$

Înlocuind aceste perechi de valori în prima ecuație, neutilizată, rezultă o condiție unică pentru semnalul $s_p'(t)$, sub forma:

$$2c_2' + \frac{c_1'^2}{4c_2'} = c_0' \quad (2.13)$$

Se va remarca mai întâi faptul că s-au obținut două soluții, care diferă numai prin semn și care, evident, satisfac ambele, condiționat, sistemul. În rezolvare s-au presupus coeficienții c_1' , c_2' dați, încît rel.(2.13) reprezintă o condiție pentru valoarea componentei continue a semnalului $s_p'(t)$. Dacă această condiție nu este satisfăcută, patrutul semnalului avînd drept coeficienți mărimile c_0' , c_1' , determinate mai sus, va diferi de $s_p'(t)$ tocmai în ce privește valoarea lui c_0' .

Este evident că există o infinitate de semnale $s_p'(t)$ care satisfac o condiție de forma (2.13). Mai mult, aceste semnale pot fi asociate în perechi, astfel încît componentele spectrale ale semnalelor din aceeași pereche să difere numai prin semnul lui c_1' (rel.(2.12), (2.13)).

Cazul II. Coeficienții c_0' , c_1' sînt determinați din prima și ultima ecuație a sistemului (2.9). Se obțin valorile:

$$c_0 = \pm \sqrt{c_0' - 2c_2'} \quad c_1 = \pm \sqrt{c_2'} \quad (2.14)$$

care, prin înlocuire în ecuația neutilizată, conduc la relația:

$$\pm 2 \sqrt{c_2'(c_0' - 2c_2')} = c_1' \quad (2.15)$$

Se poate observa, în primul rînd, că valorile (2.14) reprezintă două perechi de soluții:

$$\begin{cases} c_0 = \sqrt{c_0' - 2c_2'} & c_1 = \sqrt{c_2'} \\ c_0 = -\sqrt{c_0' - 2c_2'} & c_1 = -\sqrt{c_2'} \end{cases} \quad (2.16)$$

și

$$\begin{cases} c_0 = \sqrt{c_0' - 2c_2'} & c_1 = -\sqrt{c_2'} \\ c_0 = -\sqrt{c_0' - 2c_2'} & c_1 = \sqrt{c_2'} \end{cases} \quad (2.17)$$

semnalele corespunzătoare fiecărei perechi diferind între ele numai în ce privește semnul. Faptul este explicabil prin aceea că soluțiile (2.16), (2.17) au fost determinate pe baza valorilor componentelor c_0' , c_2' care, așa cum s-a arătat, aparțin spectrelor a două semnale $s_p'(t)$, ce diferă între ele prin semnul lui c_1' . De altfel, rel. (2.15) reprezintă, de asemenea, condiții pentru două semnale $s_p'(t)$, funcție de semnul lui c_1' . Deoarece radicalul este întotdeauna o cantitate pozitivă, din (2.15) rezultă că:

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{c_2'(c_0' - 2c_2')} = c_1' \text{ ptr. } c_1' \geq 0 \\ \text{și} & -2\sqrt{c_2'(c_0' - 2c_2')} = c_1' \text{ ptr. } c_1' < 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

În fine, eliminînd influența semnelui lui c_1' , prin ridicarea la pătrat a egalității (2.15), se obține-așa cum este de așteptat-condiția unică (2.13).

Cazul III. Coeficienții c_0 , c_1 sînt determinați din primele două ecuații ale sistemului (2.9), rezultînd, la fel ca și în cazul precedent, două perechi de soluții:

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt{\frac{c_0' + \sqrt{c_0'^2 - 2c_1'^2}}{2}} & c_1 &= \frac{c_1'}{\sqrt{2(c_0' + \sqrt{c_0'^2 - 2c_1'^2})}} \\ c_0 &= -\sqrt{\frac{c_0' + \sqrt{c_0'^2 - 2c_1'^2}}{2}} & c_1 &= -\frac{c_1'}{\sqrt{2(c_0' + \sqrt{c_0'^2 - 2c_1'^2})}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{c_0' - \sqrt{c_0'^2 - 2c_1'^2}}{2}} \quad c_1 = \frac{c_1'}{\sqrt{2(c_0' - \sqrt{c_0'^2 - 2c_1'^2})}}$$

și

$$c_0 = -\sqrt{\frac{c_0' - \sqrt{c_0'^2 - 2c_1'^2}}{2}} \quad c_1 = -\frac{c_1'}{\sqrt{2(c_0' - \sqrt{c_0'^2 - 2c_1'^2})}} \quad (2.20)$$

Substituind valorile (2.19) sau (2.20) în ultima ecuație din (2.9), se obține că:

$$\frac{c_1'^2}{2(c_0' \pm \sqrt{c_0'^2 - 2c_1'^2})} = c_2' \quad (2.21)$$

Egalitatea (2.21) exprimă, de fapt, condiții pentru două semnale $s_p'(t)$, care diferă între ele prin mărimea componentei c_2' . Este firesc în această situație, ca rezolvînd sistemul funcție de coeficienții c_0' , c_1' să obținem două perechi de soluții, câte o pereche pentru fiecare semnal $s_p'(t)$. Se poate verifica totodată că rel.(2.21) este identică cu condiția (2.13).

Rezumînd pe scurt cele prezentate pînă aici, cu privire la sistemul (2.9), se poate conchide că:

1. Toate observațiile făcute referitor la sistemul general (2.7) rămîn valabile, cu particularizările ce se impun, și în cazul sistemului (2.9).

2. În cazul particular al semnalelor $s_p(t)$ pare și avînd o singură componentă armonică sistemul corespunzător poate fi rezolvat dacă $s_p'(t)$ satisface condiția (2.13), indiferent de alegerea celor două ecuații din care se determină c_0 și c_1 . Se obține în această situație, pentru fiecare $s_p'(t)$, câte două soluții ce diferă între ele prin semn.

3. În aceleași condiții particulare, specificate la pct.2, dacă semnalul $s_p'(t)$ satisface condiția (2.13), se poate determina funcția corespunzătoare $s_p(t)$ numai pe baza valorilor componentelor c_0' și c_1' . Cum frecvențele acestor com-

ponente nu depășesc jumătate din frecvența maximă a spectrului lui $s_p'(t)$, rezultă că determinarea lui $s_p(t)$, pe baza eșantioanelor lui $s_p'(t)$, se poate face pentru o frecvență de eșantionare mai mică decât cea dată de teorema eșantionării. Asupra acestei observații, importantă din punct de vedere aplicativ, se va reveni pe larg, în cazul general, la pct.2.5.

În prezentarea făcută pînă aici au fost avute în vedere numai funcții de bandă limitată și pe baza intuiției ne-am fi așteptat ca pentru orice semnal $s_p'(t)$, cu spectrul limitat, să putem determina semnalul corespunzător $s_p(t)$ (de fapt două soluții). Contrar așteptărilor, găsirea soluțiilor $s_p(t)$ este posibilă numai în cazul semnalelor $s_p'(t)$ care satisfac anumite condiții și prin urmare este important să analizăm semnificația acestor condiții.

Vom considera pentru început cazul particular, mai simplu, al semnalelor $s_p(t)$ și $s_p'(t)$ cercetate anterior, date de expresiile generale (2.10), (2.11). În scopul găsirii semnificației condiției (2.13), vor fi studiate valorile minime ale lui $s_p'(t)$.

Prima derivată a acestei funcții:

$$\frac{ds_p'(t)}{dt} = -2\omega_0 \sin \omega_0 t (c_1' + 4c_2' \cos \omega_0 t) \quad (2.22)$$

se anulează în punctele:

$$\cos \omega_0 t_A = -\frac{c_1'}{4c_2'}, \text{ adică } \omega_0 t_{A1,2} = \pm \cos^{-1} \left(-\frac{c_1'}{4c_2'} \right) + 2k\pi \quad (2.23)$$

și

$$\sin \omega_0 t_B = 0 \text{ respectiv } \omega_0 t_B = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Derivata a doua a lui $s_p'(t)$:

$$\frac{d^2 s_p'(t)}{dt^2} = -2\omega_0^2 (c_1' \cos \omega_0 t + 4c_2' \cos 2\omega_0 t) \quad (2.25)$$

are, pentru $\omega_0 t_A$, expresia:

$$2\omega_0^2 \left[4c_2' + \frac{c_1'^2}{4c_2'} \right] = (4c_1^2 - c_0^2) 2\omega_0^2 \quad (2.26)$$

Ultima egalitate a rezultat prin înlocuirea lui c_1' și c_2' cu valorile acestor componente, date de sistemul (2.9).

Se poate observa că pentru $\omega_0 t_A$ ^{și considerind $|c_1'| > |c_0|$} derivata a doua este întotdeauna pozitivă, și prin urmare punctele respective sînt puncte de minim. Valoarea minimă atinsă, aceeași în ambele puncte, este dată de relația:

$$s'_{\min} = c_0' - 2c_2' - \frac{c_1'^2}{4c_2'} \quad (2.27)$$

Trebuie totodată observat că rel.(2.23) și în consecință și expresia (2.27), sînt valabile cu condiția ca :

$$|\cos \omega_0 t_A| = \left| -\frac{c_1'}{4c_2'} \right| = \left| -\frac{c_0}{2c_1'} \right| < 1 \quad (2.28)$$

Vom considera în cele ce urmează cazul în care: ^{ca și cum s-a arătat,}

$$|\cos \omega_0 t_A| = \left| -\frac{c_0}{2c_1'} \right| < 1 \quad (2.29)$$

adică, amplitudinea primei armonici a semnalului $s_p(t)$ este mai mare decît valoarea absolută a componentei continue c_0 . În această situație $s_p(t)$, avînd expresia (2.10), se anulează în două puncte (fig.2.2) și este lesne de verificat că aceste puncte corespund valorilor $\omega_0 t_A$ 1,2, date de rel.(2.23).

Din rel.(2.23) și fig.2.2 rezultă totodată că $s'(t)$ are puncte de maxim, corespunzător valorilor $\omega_0 t_B$.

Comparînd acum expresia valorii lui $s'_p(t)$, în puncte-

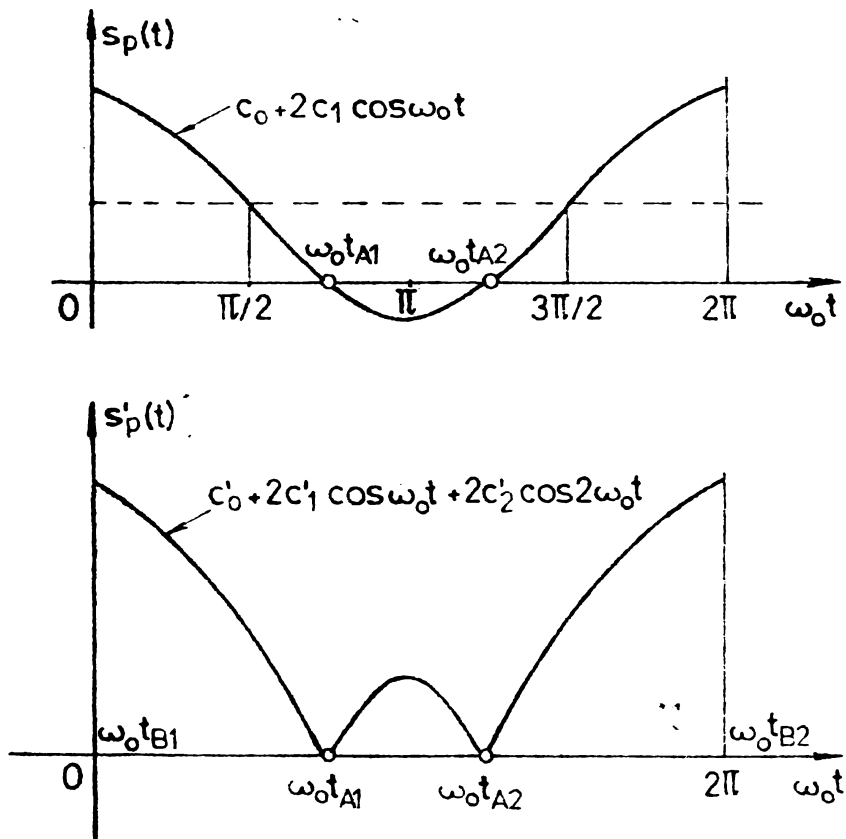


Fig.2.2

le de minim (rel.(2.27)) cu condiția (2.13), se constată cu ușurință că această condiție impune, de fapt, ca în punctele de anulare ale lui $s_p(t)$ - aceste puncte corespunzând minime-
lor-valoarea lui $s'_p(t)$ să fie de asemenea zero.

Să revenim din nou în domeniul frecvență, considerînd mulțimea semnalelor $s'_p(t)$ avînd aceleași valori ale componentelor c'_1 , c'_2 , date de rel.(2.9), pentru un anumit semnal $s_p(t)$. Semnalele din această mulțime, cu o aceeași formă de variație în timp dar diferind în ce privește valorile componentei continue c'_0 , ar putea constitui patratul unei funcții $s_p(t)$ -definită de expresia (2.10)-deoarece c'_1 , c'_2 satisfac sistemul (2.9). Ar fi necesar doar, pentru o asemenea realizare, o valoare potrivită a componentei continue încît, corespunzător momentelor de trecere prin zero ale lui $s_p(t)$, funcția patrat $s'_p(t)$ să se anuleze (fig.2.2).

Avînd în vedere că în situația în care c_1' , c_2' au valori date (cazul I), condiția (2.13) determină valoarea componentei c_0' și că această valoare satisface-conform celor stabilite prin studiul valorilor minime-tocmai cerința anterior exprimată, rezultă că rel.(2.13) nu reprezintă altceva decît condiția ca $s_p'(t)$ să fie patratul lui $s_p(t)$. Adică patratul unei funcții de bandă limitată.

Pornind de la această constatare se poate acum formula următoarea-teoremă , generală:

Teorema 2.2

Orice funcție $f_p'(t)$ de bandă limitată și avînd $4K+1$ componente armonice, care satisfac $2K$ condiții, ce rezultă dintr-un sistem de forma (2.7), reprezintă patratul unei alte funcții periodice $f_p(t)$, cu $2K+1$ componente.

Demonstrația afirmației de mai sus este imediată, pe baza celor deja cunoscute.

Oricărei funcții cu $4K+1$ componente i se poate asocia un sistem de forma (2.7). Din $2K+1$ ecuații rezultă cele $2K+1$ componente ale lui $f_p(t)$ și deoarece $f_p'(t)$ îndeplinește-conform ipotezei-condițiile menționate, ecuațiile neutilizate vor fi satisfăcute implicit. Avînd în vedere că sistemul (2.7) reprezintă produsul de convoluție în domeniul frecvență, rezultă că $f_p'(t) = [f_p(t)]^2$.

Reciproca acestei teoreme este de asemenea adevărată și poate fi demonstrată în mod similar.

Teorema dată mai sus, în aparență banală și aproape evidentă, permite însă formularea următoarei întrebări, de maximă importanță:

"Patratul căror funcții este reprezentat de semnalele de bandă limitată $f_p'(t)$ ce nu satisfac cele $2K$ condiții menționate? Se au , bineînțeles , în vedere semnalele de bandă limitată, cu valori pozitive sau nule.

Existența unor funcții periodice $f_{p1}'(t)$ o, de bandă limitată și care nu satisfac condițiile cunoscute, este certă. In cazul semnalelor cu $2K=2$ componente - spre exemplu-funcțiile $f_{p1}'(t)$ corespund semnalelor a căror componență continuă diferă de valoarea c_0' , dată de rel.(2.13).

Răspunsul la întrebarea de mai sus este dat
mătoarea teoremă:

Teorema 2.3.

Dacă $f'_{pl}(t)$ reprezintă o funcție de bandă
care nu satisface condițiile ce rezultă dintr-un sine
forma (2.7) dar este patratul unei funcții $f_{pl}(t)$ adică
 $f'_{pl}(t) = [f_{pl}(t)]^2$, atunci $f_{pl}(t)$ este bandă nelimitată.

Demonstrația se va face prin metoda reducerii
absurd. Se presupune în acest scop contrariul concluziei
anume că $f_{pl}(t)$ este de bandă limitată. Conform recip.
teoremei 2.2, rezultă că $f'_{pl}(t)$ va fi de asemenea de
limitată și că satisface condițiile cunoscute. Această
mație contravine însă ipotezei, putându-se conchide
presupunerea făcută este falsă și prin urmare $f_{pl}(t)$
bandă nelimitată.

Existența funcțiilor $f'_{pl}(t)$ a fost justificată
teoric. În ceea ce privește funcțiile $f_{pl}(t)$, se va arăta
că acestea pot fi lesne determinate în cazul unor funcții
 $f'_{pl}(t)$ continue și cu valori strict pozitive, în intervalul
domeniul de definiție.

Pentru aceste funcții $f'_{pl}(t)$, funcțiile $f_{pl}(t)$
zătoarea $f_{pl}(t)$ vor fi în general de asemenea continue
strict pozitive sau strict negative ($f_{pl}(t) > 0$
și reciproc). Rezolvarea ecuației funcției de bandă
duce deci la extragerea rădăcinii pătrate, operație
în condițiile menționate, conduse întotdeauna la o funcție
reală.

2.4. Teorema eșantionării pentru funcții de bandă

Se consideră pentru început funcții de bandă
 $f'_p(t) = [f_p(t)]^2$, $f_p(t)$ fiind continuă și $f_p(t) > 0$ în
iar $f'_p(t) > 0$ în domeniul de definiție. Se va demonstra
cele ce urmează următoarea teoremă:

Teorema 2.4

Dacă o funcție periodică $f'_p(t)$ cu valori strict pozitive și avînd $2K$ componente armonice, este patratul unei funcții $f_p(t)$ continue și de bandă limitată, atunci $f'_p(t)$ poate fi reconstituită pe baza a $N = 2K+1$ eșantioane, preluate uniform dintr-o perioadă, la intervale egale cu T , expresia de reconstituire fiind de forma:

$$f'_p(t) = \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-K}^K \sqrt{f'_p(nT)} e^{jk\omega_0(t-nT)} \right]^2 \quad (2.30)$$

Pentru demonstrarea celor de mai sus se are în vedere faptul că, în condițiile menționate, spectrul lui $f_p(t)$ va conține K componente armonice și că în punctele de eșantionare $f_p(nT) = \sqrt{f'_p(nT)}$ (pct.2.3). Prin urmare $f_p(t)$ poate fi reconstituită pe baza a $N = 2K+1$ eșantioane, conform formulei (1.24). Se obține expresia din parantezele (2.30) și deoarece $f'_p = [f_p(t)]^2$ rezultă imediat egalitatea (2.30).

Este demn de relevat faptul că o teoremă similară poate fi formulată și justificată pentru semnalele aperiodice $f'(t) = f^2(t)$, $f(t)$ fiind continuă și de bandă limitată iar $f'(t) > 0$. Frecvența de eșantionare care asigură reconstituirea fără erori a lui $f'(t)$ este redusă la jumătate, în cazul acestei teoreme, comparativ cu valoarea dată de teorema prezentată în [23].

În cazul mai general, al semnalelor ce pot lua și valori nule, adică $f'_p(t) \geq 0$, se va demonstra următoarea teoremă :

Teorema 2.5

Dacă o funcție periodică $f'_p(t) \geq 0$ și avînd $2K$ componente armonice este patratul unei funcții $f_p(t)$ de bandă limitată, atunci $f'_p(t)$ poate fi reconstituită pe baza a

$N = 3K+1$ eşantioane, prelevate uniform dintr-o perioadă. Valorile reconstituite sînt date de expresia:

$$f'_p(t) = \left[\sum_{k=-K}^K c_k e^{jk\omega_0 t} \right]^2 \quad (2.31)$$

Coeficienții c_k de mai sus, corespunzători lui $f_p(t)$, rezultă din sistemul de ecuații:

$$c'_m = \sum_{k=-K}^K c_k c_{m-k} \quad |m| \leq K \quad (2.32)$$

funcție de primele K componente armonice c'_m :

$$c'_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f'_p(nT) e^{-jk\omega_0 nT} \quad (2.33)$$

ale lui $f'_p(t)$.

Drept punct de plecare pentru demonstrarea teoremei îl constituie observația că coeficienții c_k ai lui $f_p(t)$, pot fi determinați, în raport cu coeficienții c'_m , din oricare $2K+1$ ecuații ale sistemului (2.7) (pct.2.3). Se presupune în continuare că aceste ecuații se aleg astfel încît componentele c'_m , care intervin în ele, să corespundă domeniului frecvențelor joase din spectrul lui $f'_p(t)$, adică $|m| \leq K$ (rel.2.32). Calculul acestor coeficienți c'_m - funcție de eşantioanele lui $f'_p(t)$ - este posibil și în situația că frecvența de eşantionare este mai mică decît valoarea impusă de teorema eşantionării.

Pentru justificarea afirmației precedente se are în vedere fig.2.3. Aici s-a reprezentat spectrul semnalului eşantionat $f'_p(t)$, în situația că frecvența de eşantionare are o asemenea valoare, încît este evitată la limită modificarea valorilor primelor K componente armonice, datorită fenomenului de "alias". Pentru această situație se obține că (fig.2.3) :

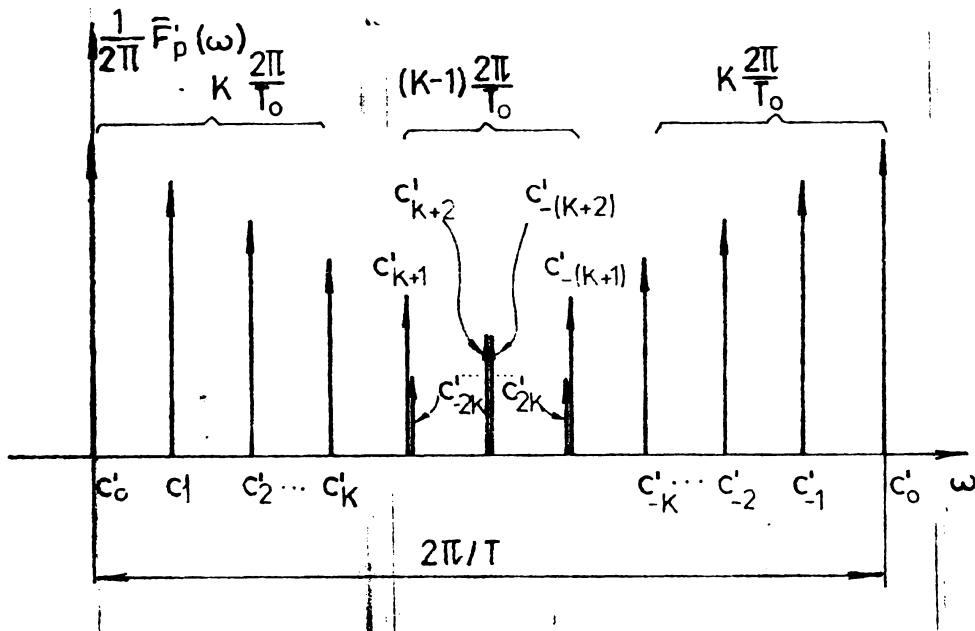


Fig. 2.3.

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_0} (3K+1) \quad (2.34)$$

sau

$$N = \frac{T_0}{T} = 3K+1 \quad (2.35)$$

Prin urmare, dacă $N \geq 3K+1$, este posibilă determinarea coeficienților c'_m , calculul făcându-se cu formula (1.23). În caz contrar, aplicarea formulei menționate dă pentru unii dintre coeficienții c'_m , valorile corespunzătoare ale coeficienților "alias" $\hat{\delta}'_m$, de același rang.

Aplicarea formulei (1.23) conduce la rel. (2.33). Din sistemul (2.32) este posibilă acum determinarea coeficienților c_k și pe baza lor rezultă expresia de reconstituire (2.31).

Teorema 2.5 impune, în vederea unei reconstituiri perfecte a semnalului eșantionat, prelevarea unui număr de eșantioane $N = 3K+1$ mai mic cu cca 25% decât valoarea dată de teorema clasică a eșantionării ($N = 4K+1$). Această reducere se realizează pe seama informației suplimentare privind semnalul eșantionat și anume faptul că acest semnal este patrul

unei funcții de bandă limitată,

Utilitatea practică a teoremelor 2.4 și 2.5 în unele domenii, cum ar fi spre exemplu studiul anumitor probleme de dispersie în cristalografie [75] este evidentă.

2.5

2.6. Descompunerea funcțiilor periodice

Teorema eșantionării funcțiilor periodice, analizată pe larg în capitolul precedent, impune o frecvență minimă de prelevare a eșantioanelor. Așa după cum s-a arătat deja în cadrul acestui capitol, pentru anumite clase particulare de semnale, care satisfac anumite condiții, cunoscute, frecvența de eșantionare poate fi mai scăzută decât această valoare minimă. În același sens se va demonstra, în cele ce urmează, următoarea teoremă:

Teorema 2.6

O funcție $f_{pA}(t)$ periodică, cu $2K$ componente armonice și a cărei componentă continuă c_{A0} satisface condiția $c_{A0} > 0$, poate fi descompusă conform rel. :

$$f_{pA}(t) = \left[f_{pB}(t) \right]^2 + f_{pC}(t) \quad (2.36)$$

spectrul funcțiilor $f_{pB}(t)$ și $f_{pC}(t)$ fiind limitat la K componente armonice.

Teorema 2.6 afirmă, prin urmare, posibilitatea reducerii la jumătate a frecvenței minime de eșantionare, în cazul funcțiilor de bandă limitată și avînd componenta continuă pozitivă, comparativ cu valoarea impusă de teorema eșantionării. Numărul total de eșantionare, pe baza cărora se face reconstituirea, rămîne însă același, deoarece trebuiesc eșantionate două semnale în loc de unul.

Pentru demonstrație se are în vedere că $f_{pA}(t)$ este de forma:

$$f_{pA}(t) = \sum_{|k|=1}^K c_{Ak} e^{jk\omega_0 t} + \sum_{|k|=K+1}^{2K} c_{Ak} e^{jk\omega_0 t} + c_{A0} \quad (2.37)$$

și că se caută o descompunere conform rel.(2.36).

Se va remarca mai întâi faptul că o asemenea descompunere este, în principiu, posibilă, deoarece spectrul semnalului din membrul drept are de asemenea $2K$ componente.

Pentru a determina forma concretă a termenilor sumei se presupune pentru început că :

$$f_{pB}(t) = \sum_{k=-K}^K c_{Bk} e^{jk\omega_0 t} \quad (2.38)$$

și prin urmare:

$$f'_{pB}(t) = [f_{pB}(t)]^2 = \sum_{|k|=1}^K c'_{Bk} e^{jk\omega_0 t} + \sum_{|k|=K+1}^{2K} c'_{Bk} e^{jk\omega_0 t} + c'_{B0} \quad (2.39)$$

De fapt, funcția $f_{pB}(t)$ va fi astfel aleasă, încît :

$$c'_{Bk} = c_{Ak} \text{ pentru } k = 0 \text{ și } |k| = K+1, \dots, 2K \quad (2.40)$$

$$\text{încît } \sum_{|k|=K+1}^{2K} c'_{Bk} e^{jk\omega_0 t} + c'_{B0} = \sum_{|k|=K+1}^{2K} c_{Ak} e^{jk\omega_0 t} + c_{A0} \quad (2.41)$$

Este important să se observe că $f_{pB}(t)$ este unic determinat de condiția (2.40), coeficienții c_{Bk} putînd fi calculați din $2K+1$ ecuații ale sistemului (2.7), în care intervin componentele $c'_{Bk} = c_{Ak}$, $k = 0$ și $k = K+1, \dots, 2K$. Este necesar doar să fie respectată condiția $c_{A0} > 0$ (pct.2.3).

Din rel.(2.39), (2.40) rezultă că :

$$\sum_{|k|=K+1}^{2K} c_{Ak} e^{jk\omega_0 t} + c_{A0} = \left[f_{pB}(t) \right]^2 - \sum_{|k|=1}^K c_{Bk}^i e^{jk\omega_0 t} \quad (2.42)$$

și înlocuind acest rezultat în (2.37), se obține în final:

$$f_{pA}(t) = \left[f_{pB}(t) \right]^2 + \sum_{|k|=1}^K (c_{Ak} - c_{Bk}^i) e^{jk\omega_0 t} \quad (2.43)$$

Utilizînd notația:

$$f_{pC}(t) = \sum_{|k|=1}^K (c_{Ak} - c_{Bk}^i) e^{jk\omega_0 t} \quad (2.44)$$

rezultă rel.(2.36), din enunțul teoremei.

Descompunerea lui $f_{pA}(t)$, sub forma (2.36), se poate realiza efectiv pe cale matematică, utilizînd relațiile stabilite. Procedura constă în următoarele:

- se determină cu formulele cunoscute [14] coeficienții c_{Ak} , $k = -2K, \dots, 0, \dots, 2K$ (funcția $f_{pA}(t)$ se presupune dată sub formă continuă);

- din $2K+1$ ecuații ale sistemului (2.7), în care intervin în membrul drept coeficienții $c_{Bk}^i = c_{Ak}$, $k = 0$ și $|k| = K+1, \dots, 2K$, se calculează coeficienții Fourier c_{Bk} ai funcției $f_{pB}(t)$, considerați ca necunoscute;

- înlocuind valorile astfel obținute, în membrul stîng al ecuațiilor aceluiași sistem, rămase neutilizate, se stabilesc valorile c_{Bk}^i , $|k| = 1, \dots, K$.

Procedurii de prelucrare, dată mai sus, îi corespunde o schemă analogică, posibilă, reprezentată în fig.2.4. Funcționarea circuitului rezultă din analiza elementelor schemei bloc precum și a diferitelor semnale de intrare și de ieșire.

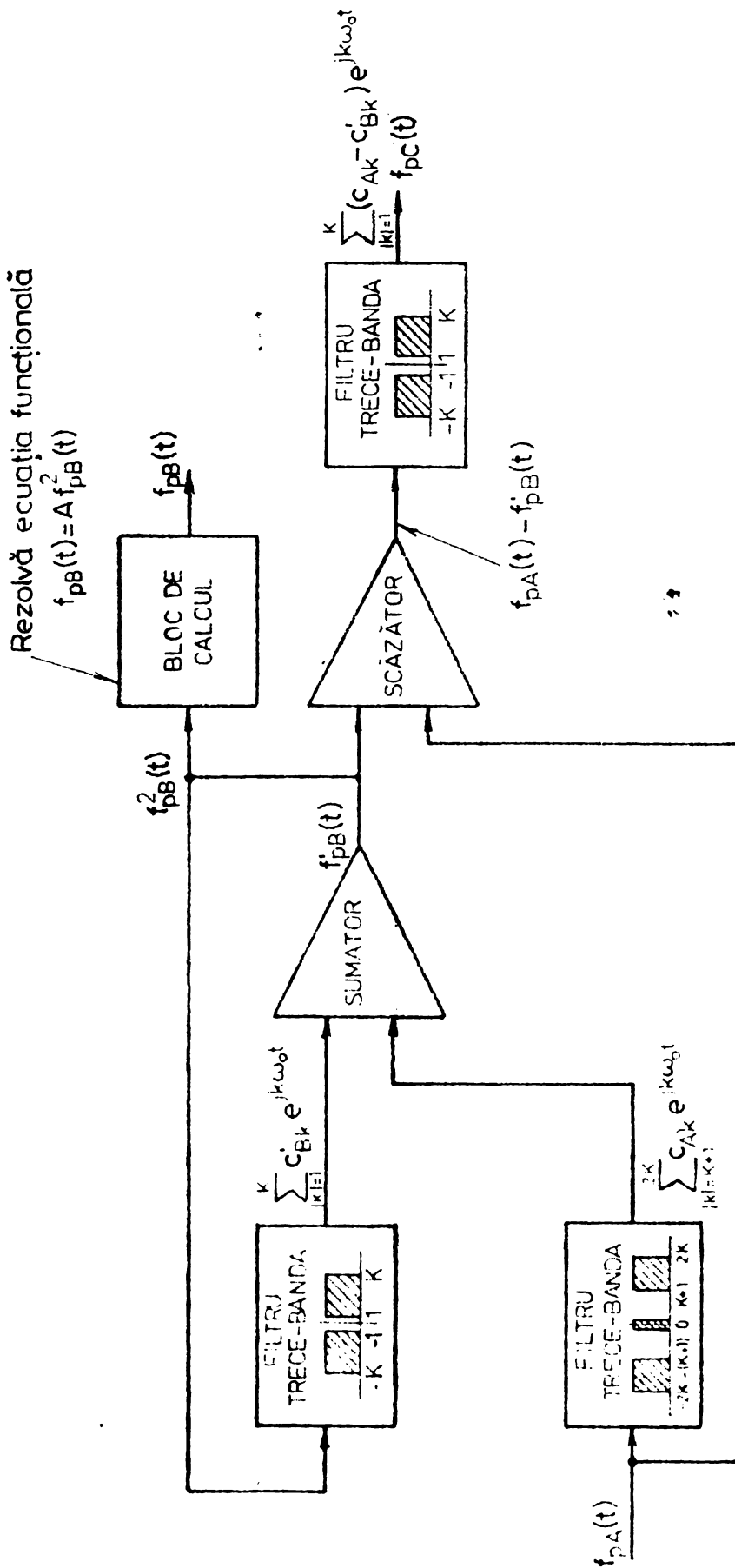


Fig. 2.4

Se evidențiază în încheiere posibilitatea aplicării procedurii de descompunere și în cazul în care funcția $f_{pA}(t)$ este dată prin eşantioanele sale. Procedura va include aceleași operații, cu precizarea că coeficienții Fourier c_{Ak} , $k = -2K, \dots, 0, \dots, 2K$, ai funcției $f_{pA}(t)$, vor fi calculați cu rel.(1.23). Frecvența minimă de eşantionare a lui $f_{pA}(t)$ va fi cea impusă de teorema eşantionării funcțiilor periodice (corespuzătoare lui $N = 4K+1$ eşantioane dintr-o perioadă).

Importanța posibilității descompunerii unui semnal periodic sub forma (2.36) este, cel puțin deocamdată, de natură teoretică. Din cele prezentate anterior rezultă că nu frecvența de eşantionare reprezintă, de fapt, parametrul a cărui valoare garantează evitarea pierderii de informație, ci numărul de eşantioane.

Procedeul poate fi aplicat repetat funcțiilor rezultate $f_{pB}(t)$ și $f_{pC}(t)$, deoarece acestea, la rândul lor, au banda de trecere limitată. Rezultă de fiecare dată o reducere la jumătate a spectrului acestor funcții. Numărul total minim de eşantioane, utilizate în descompunere rămâne însă constant, deoarece deși frecvența de eşantionare scade la jumătate, la fiecare aplicare, se dublează de fiecare dată numărul de semnale eşantionate.

Se opinează că teorema 2.6. și-ar putea găsi o aplicație concretă în domeniul aproximării funcțiilor periodice de bandă limitată.

Expresia (2.36), în fond, aproximează funcția $f_{pA}(t)$ prin $[f_{pB}(t)]^2$, cu o precizie ce depinde de funcția $f_{pC}(t)$. Dacă $f_{pA}(t)$ are $2K$ componente armonice, atunci se pot determina C_{4K+1}^{2K+1} funcții $f_{pB}(t)$, care să satisfacă rel.(2.36), depinzând de rangul celor $2K+1$ coeficienți ce intervin în egalitatea (2.40). În cazul teoremei 2.6, această egalitate s-a scris pentru componentele de rang cel mai înalt respectiv componenta continuă, cu scopul obținerii unui semnal $s_{pC}(t)$ având spectrul limitat la K componente. Se poate impune însă ca $f_{pB}(t)$ să fie astfel determinat, încât semnalul eroare $s_{pC}(t)$ să aibă-conform unui anumit criteriu de aproximare-o valoare minimă.

O asemenea aproximare a lui $f_{pA}(t)$ este utilă în situațiile în care, din anumite considerații, frecvența care se face eșantionarea este jumătate din valoarea teoremei eșantionării. Este de așteptat că, în aceste cazuri, aproximarea lui $f_{pA}(t)$ printr-o funcție avînd frecvență jumătate din spectrul redusă la jumătate, să comporte erori mici decît erorile determinate de nerespectarea condițiilor teoremei eșantionării.

2.6. Exemple

Se prezintă, drept încheiere la acest capitol, două exemple care probează teorema 2.3.

Un prim exemplu ce se are în vedere îl constituie funcția periodică, de bandă nelimitată, $|\sin x|$ care prin ridicare la pătrat conduce la funcția $\sin^2 x$, de bandă limitată.

Un al doilea exemplu, la care ne vom referi, este funcția periodică, cu perioada 2π :

$$f_p(x) = \sqrt{1 + \varepsilon \cos x}, \quad |\varepsilon| \leq 1 \quad (2.4)$$

Se constată imediat că, cu condiția menționată, $f_p(x)$ are numai valori reale. Totodată, prin ridicare la pătrat rezultă:

$$f_p'(x) = 1 + \varepsilon \cos x \quad (2.5)$$

adică o funcție de bandă limitată, ce nu satisface condițiile specificate.

Se va arăta, în cele ce urmează, că $f_p(x)$ are spectrul nelimitat pe axa pulsațiilor.

În acest scop se cercetează expresia generală a coeficienților dezvoltării în serie Fourier a lui $f_p(x)$. Funcția fiind pară, rezultă că [6]:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_p(x) \cos kx dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varepsilon \cos x} \cos kx dx, \quad k = 0, \dots$$

Pentru determinarea valorii integralei se va proceda la dezvoltarea în serie a funcției de integrat.

Se arată în [104], că o funcție de forma:

$$f(u) = (1 + u)^{1/2} \quad (2.48)$$

poate fi dezvoltată în serie :

$$f(u) = 1 + \frac{1}{2} u - \frac{1}{2 \cdot 4} u^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} u^3 - \dots \quad (2.49)$$

convergența fiind asigurată dacă $|u| \leq 1$. Considerând, în rel.(2.49), că $u = \varepsilon \cos x$, se constată că este satisfăcută condiția indicată anterior, încît se poate scrie:

$$f_p(x) = (1 + \varepsilon \cos x)^{1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \cos^m x \quad (2.50)$$

Cosicienții d_m , din ultima egalitate, rezultă prin identificare cu rel.(2.49). Nu vom da o expresie analitică a acestora, ca nefiind utilă în continuare. Ne vom mărgini doar să observăm că $d_m \neq 0$, pentru $m = 0, 1, \dots$

Seria (2.50) fiind convergentă, poate fi integrată termen cu termen [97], rezultînd:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \int_0^{2\pi} \cos^m x \cdot \cos kx dx \quad (2.51)$$

La rîndul ei, funcția $\cos^m x$ poate fi dezvoltată într-o serie convergentă, sub forma [105] :

$$\cos^m x = \frac{1}{2^{m-1}} \left[\cos^m x + \binom{m}{1} \cos^{m-2} x + \binom{m}{2} \cos^{m-4} x + \dots \right] \quad (2.52)$$

respectiv

$$\cos^m x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(m-2n)x \quad (2.53)$$

Cu privire la coeficienții ε_n , rămân valabile cele afirmate în cazul coeficienților d_m .

Înlocuind expresia (2.53) în rel.(2.51) și înlocuind termen cu termen, se obține:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_m \varepsilon_n \int_0^{2\pi} \cos(m-2n)x \cdot \cos kx dx \quad (2.54)$$

Se poate constata acum că pentru orice mărime k , există o pereche de valori m' și n' , astfel încât $k = m' - 2n'$. Termenul din suma (2.54), corespunzător acestor indici, va fi diferit de zero, pentru că :

$$\int_0^{2\pi} \cos px \cdot \cos qx \neq 0 \quad \text{pentru } p = q \quad (2.55)$$

și totodată, așa cum s-a subliniat :

$$d_m \neq 0, \quad \varepsilon_n \neq 0, \quad m, n, = 0, 1, \dots$$

Prin urmare, în suma (2.54) există întotdeauna un termen diferit de zero, încât se poate afirma că $c_k \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots$

Ultima concluzie indică faptul că $f_p(t)$ este bandă nelimitată.

CAPITOLUL 3

ERORI LA RECONSTITUIREA SEMNALELOR EȘANTIONATE

3.1. Introducere. Clasificarea erorilor.

Problema evaluării erorilor ce apar la reconstituire este, din punct de vedere aplicativ, la fel de importantă poate ca însăși teorema eșantionării. Acest lucru se datorește faptului că foarte puține semnale, și acestea numai din clasa semnalelor periodice, pot satisface cerințele teoremei eșantionării, încât să fie posibilă reconstituirea fără erori (pct.1.2.2). Afirmatia este sprijinită, de altfel și de existența unui număr relativ mare de lucrări cu privire la erorile de reconstituire, menționate în literatura de specialitate [1].

O clasificare a erorilor specifice reconstituirii semnalelor eșantionate, larg acceptată în literatură, include următoarele categorii de erori [1] [23]:

a) Erorile de trunchiere, rezultate ca urmare a utilizării, în expresia de reconstituire, a unui număr finit de eșantioane. Se precizează că teorema eșantionării fiind aplicabilă semnalelor de bandă limitată, deci nelimitate în timp, s-ar impune, pentru o reconstituire exactă, utilizarea unui număr infinit de eșantioane.

b) Erorile cauzate de utilizarea unui pas de eșantionare prea mare. Semnalul obținut în urma reconstituirii din eșantioane prelevate cu o frecvență de eșantionare insuficientă, constituie un așa-zis semnal "alias" al semnalului inițial. Abaterile semnalului "alias", față de semnalul inițial, continuă, le vom denumi, în cele ce urmează, erori "alias" (în l. engleză ele sînt desemnate prin termenul de largă circulație "aliasing error").

c) Erori determinate de extragerea eșantioanelor la momente de timp ce diferă de presupusele puncte de eșantionare. Aceste erori le vom denumi erori de instabilitate (de la denumirea consacrată în l. engleză "jitter error").

d) Erorile de amplitudine, rezultate ca urmare a

utilizării, în expresia semnalului reconstituit, a unor valori eronate ale eșantioanelor prelevate.

Este interesant de observat că judecînd lucrurile în domeniul frecvență, erorile de trunchiere apar de fapt ca erori de tip "alias".

Utilizarea unui număr finit de eșantioane echivalează cu prelucrarea unei porțiuni, de o anumită durată, din semnalul inițial. Dacă acest semnal este de bandă limitată și se presupune că a fost eșantionat corect, erorile ce apar la reconstituire se datoresc, numai trunchierii. Ori aceste erori apar ca urmare a faptului că se reconstituie o porțiune din semnalul inițial, deci un semnal de durată finită, a cărui spectru este nelimitat. Prin urmare erorile introduse sînt erori "alias".

În situația că semnalul inițial nu este eșantionat corect, la erorile "alias", datorită trunchierii, se mai adaugă erorile "alias", propriu zise.

Un asemenea punct de vedere, original, este util în aplicațiile în care se necesită evaluarea erorilor globale, rezultate ca urmare a trunchierii și a fenomenului "alias".

O asemenea evaluare este posibilă prin aplicarea procedurii de calcul specifice erorilor "alias" (pct.3.5), asupra spectrului semnalului trunchiat și nu asupra spectrului semnalului inițial. De altminteri, în majoritatea situațiilor, semnalul inițial, complet, nu este cunoscut, ci numai semnalul trunchiat.

Se va remarca totodată că determinarea separată, prin procedeele cunoscute, a erorilor de trunchiere și de tip "alias", numai pe baza semnalului trunchiat este imposibilă (pct.3.2, pct.3.3). Prin urmare, în situațiile cînd se cunoaște doar semnalul trunchiat, ideea evaluării globale a acestor erori este deosebit de utilă, ca fiind singura evaluare posibilă.

În cele ce urmează se va face, pentru început, o scurtă trecere în revistă a diferitelor expresii de calcul ale categoriilor de erori menționate mai sus, la nivelul cunoscut actualmente în literatură. Vor fi prezentate apoi o

serie de contribuții, proprii, privind eroarea maximă de tip "alias", cu unele observații specifice semnalelor periodice precum și expresii de evaluare a erorii medii patratice de tip "alias".

3.2. Erori de trunchiere și limitele lor

Pentru un semnal de bandă limitată, dat de rel. (1.2), erorile de trunchiere sînt rezultatul aproximării semnalului prin suma parțială $f_N(t)$, adică au expresia:

$$\varepsilon_T = f(t) - f_N(t) = \sum_{|n| > N} f\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin(2\pi Wt - n\pi)}{(2\pi Wt - n\pi)} \quad (3.1)$$

Se va presupune, în cele ce urmează, că cei $2N+1$ termeni corespund eșantioanelor din intervalul finit $[-T_0, T_0]$. Prin W s-a notat cea mai înaltă frecvență din spectrul lui $f(t)$.

O primă evaluare a lui ε_T este dată în [76], sub forma:

$$|\varepsilon_T(t)| \leq \frac{2}{\pi} E |\sin \pi Wt| \sqrt{\frac{T_0}{W T_0^2 - t^2}} \quad (3.2)$$

pentru $-T_0 \leq t \leq T_0$. E reprezintă aici energia totală, finită, a semnalului, adică:

$$E = \int_{-2\pi W}^{2\pi W} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (3.3)$$

Din reprezentarea funcție de timp a expresiei (3.2) [77], rezultă că $|\varepsilon_T(t)|$ atinge valori absolute maxime mai ridicate la extremitățile intervalului $[-T_0, T_0]$ și că se anulează în punctele de eșantionare.

Anularea în punctele de eşantionare este caracteristică erorilor determinate de o frecvență de eşantionare insuficientă (pct.1.1.1) - adică erorilor "alias". Această observație justifică odată în plus, afirmația cu privire la originea comună a erorilor de trunchiere și a erorilor "alias".

Aproximarea lui $f(t)$ se poate face și conform sumei finite [78]:

$$f_N(t) = \sum_{n=K-N}^{K+N} f\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin(2\pi Wt - n\pi)}{(2\pi Wt - n\pi)}, \quad 0 < N < \infty \quad (3.4)$$

K reprezintă aici un întreg, a cărui valoare este o funcție de timp și care satisface condiția:

$$2Wt - 1/2 \leq K(t) \leq 2Wt + 1/2 \quad (3.5)$$

Eroarea ε_T a fost evaluată, în aceste condiții, pentru funcțiile $f(t)$ avînd spectrul limitat corespunzător valorii $rW < W$, cu $0 < r < 1$. S-a obținut următorul rezultat, lesne de utilizat în aplicațiile practice :

$$|\varepsilon_T(t)| \leq \frac{4M}{\pi^2 N(1-r)} = \frac{4M}{\pi^2 Nq} \quad -\infty < t < \infty \quad (3.6)$$

în care $q = 1-r$ iar $M = \max |f(t)|$, pentru orice t .

S-au avut în vedere și aici funcțiile cu banda limitată la rW .

Dacă $f(t)$ este aproximat prin suma parțială, asimetrică [78]:

$$f_{N_1, N_2}(t) = \sum_{n=K-N_1}^{K+N_2} f\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin(2\pi Wt - n\pi)}{2\pi Wt - n\pi} \quad (3.7)$$

eroarea absolută corespunzătoare $|\varepsilon_T(t)|$ are limita:

$$|\xi_T(t)| \leq \frac{2M}{\pi^2(1-r)} \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right), \quad -\infty < t < \infty \quad (3.8)$$

Introducerea așa numitei benzi de gardă $(1-r)W$, determină o reducere a limitei erorii de trunchiere. Această reducere este cu atât mai importantă cu cât qW este mai mare (rel.(3.6),(3.8)).

Pentru a obține o limită a lui $|\xi_T(t)|$, ce descrește mai rapid cu N decât mărimea dată de rel.(3.6), se consideră $f(t)$ sub forma dezvoltării în serie "auto-trunchiată" (self-truncating) [78]:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2W}\right) \left[\frac{\sin \frac{2\pi qW}{m} \left(t - \frac{n}{2W}\right)}{\frac{2\pi qW}{m} \left(t - \frac{n}{2W}\right)} \right]^m \cdot \frac{\sin 2\pi W \left(t - \frac{n}{2W}\right)}{2\pi W \left(t - \frac{n}{2W}\right)} \quad (3.9)$$

(m este un întreg pozitiv). Eroarea ce rezultă prin limitarea la N a numărului termenilor însumați în rel.(3.9), este dată de expresia:

$$|\xi_T(t)| \leq 1,48 M(qN - 1,74)^{-1/2} \cdot (3,2)^{-qN} \quad (3.10)$$

Pentru aceleași valori ale lui N , M și q , valoarea maximă a lui $|\xi_T(t)|$, - dată de rel.(3.10) - este de aproximativ 100 de ori mai mică decât valoarea ce rezultă din (3.6). Se precizează că la obținerea limitei (3.10) s-a considerat pentru m valoarea optimă, $m = Nq\pi/e$ [78].

Aceiași autori [78], au analizat erorile de trunchiere pentru cazul dezvoltării lui $f(t)$ în raport cu valorile acestei funcții și valorile primei derivate (pct.1.3.4).

Considerînd în dezvoltare un același factor de auto-trunchiere, ca și cel din rel.(3.9) (paranteza dreaptă ridicată la putere), rezultă următoarea limită a erorii, ca urmare a limitării la N a numărului de termeni [78]:

$$|\varepsilon_T(t)| \leq 2,1 M(qN - 0,87)^{-1/2} \cdot (3,2)^{-2qN} \quad (3.11)$$

Comparativ cu limita dată de (3.6), rel.(3.11) conduce - în aceleași condiții - la o valoare de cea 10^5 ori mai mică. Prin urmare, reconstituirea în raport cu valorile funcției și valorile primei derivate se impune și în situațiile în care se urmărește obținerea unor erori de trunchiere reduse.

O limită mai restrînsă a erorii de trunchiere, corespunzătoare dezvoltării (3.7), față de valoarea stabilită de rel.(3.8), este prezentată în [79]:

$$|\varepsilon_T(t)| \leq \frac{M |\sin 2\pi Wt|}{2\pi \cos \frac{r\pi}{2}} \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right), \quad -\infty < t < \infty \quad (3.12)$$

Semnificația notațiilor M , r și W este cea menționată anterior. Limita dată de (3.12) a fost apoi extinsă pentru cazul funcțiilor de mai multe variabile, eșantionate, precum și în cazul dezvoltării în raport cu valorile funcției și ale primei derivate.

A fost stabilită, de asemenea, o limită pentru $|\varepsilon_T(t)|$, în situația că restricția $|f(t)| \leq M$ este înlocuită cu condițiile: $f(t)$ să fie de energie finită E (adică $f(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$) și de bandă limitată la rW [79]. S-a obținut:

$$|\varepsilon_T(t)| \leq \frac{2 [2ErW]^{-1/2} |\sin 2\pi Wt|}{\pi^2 (1-r)} \cdot \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right) \quad (3.13)$$

Pentru cazul funcțiilor $f(t)$ de energie finită, astfel încît $F(\omega) \in L_2(-\pi r, \pi r)$, este stabilită următoarea limită a erorii de trunchiere, rezultate prin utilizarea aproximării (3.7) [80]:

$$|\varepsilon_T(t)| \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} |\sin \pi t| \sqrt{E} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi r}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right), \quad t \leq \frac{1}{2} \quad (3.14)$$

Comparativ cu rel.(3.13), expresia (3.14) dă valori mai strînse pentru limitele erorii de trunchiere, dacă r este apropiat de 1.

Acest lucru rezultă din fig.3.1, în care au fost reprezentată varia ia, funcție de r, a raportului R, dintre limitele stabilite de rel.(3.14)  i (3.13) [80] :

$$R = \frac{\sqrt{2\pi} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi r}{2} \right)^{1/2} (1-r)}{\sqrt{r}} \quad (3.15)$$

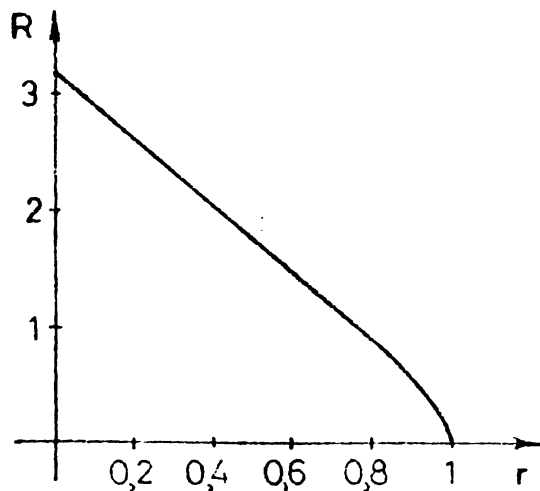


Fig.3.1

Din fig.rezultă că $R < 1$ pentru $0,8 \leq r \leq 1$.

Consider nd cazul semnalelor de energie finită  i de bandă limitată la $(-\pi r, \pi r)$, se stabile te pentru eroarea definită de rel.(3.1), următoarea expresie [81] :

$$|e_T(t)| \leq \frac{1}{\pi^{3/2}} \left[B \operatorname{tg} \frac{\pi r}{2} \right]^{1/2} (1 + \sqrt{2}) \sin \pi t \left[\frac{1}{N+m} + \frac{1}{N-m} \right] \quad (3.16)$$

- In expresia de mai sus s-a presupus că $t \leq N$  i că m reprezintă cel mai apropiat întreg fa  de t.

Comparativ cu rel.(3.13), stabilită de asemenea pentru cazul semnalelor de energie finită  i de bandă limitată, expresia (3.16) d  limite mai str nse pentru eroarea de

trunchiere, dacă $0,73 < r < 1$. Această afirmație rămîne valabilă și în cazul în care se compară limita dată de rel. (3.16) cu limita ce rezultă din (3.14), pentru toate valorile lui r .

Problema erorilor de trunchiere este abordată de asemenea într-o serie de lucrări ale lui A. Popoulis [1]. Ne vom referi în cele ce urmează la două dintre ele.

Pentru eroarea definită de rel. (3.1), este prezentată în [23], următoarea expresie:

$$|\varepsilon_T(t)| \ll \frac{|\sin \frac{\pi}{T} \cdot t|}{\frac{\pi}{T}} \sum_{|n| > N} \left| \frac{f(nT)}{t-nT} \right|, \quad -\infty < t < \infty \quad (3.17)$$

Dacă se limitează valoarea lui t , astfel încît $|t| \ll (NT/a)$ $N \gg 1$, atunci se obține limita [23] [82] :

$$|\varepsilon_T(t)| \left[\frac{|\sin at|}{\sqrt{\pi a}} \frac{1}{(NT/a)+t} \sum_{n=-\infty}^{-(N+1)} f^2\left(\frac{n\pi}{a}\right) \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{(NT/a)-t} \sum_{n=N+1}^{\infty} f^2\left(\frac{n\pi}{a}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

În cele de mai sus s-a folosit notația $a = \pi/T$.

Utilizînd unele rezultate stabilite în [82], se determină în [83] mărimea limitei superioare a erorilor de trunchiere, valabilă pentru semnalele de energie și de bandă limitată. Se conchide totodată că, utilizarea unei frecvențe de eșantionare mai mare doar cu cîteva procente decît frecvența Nyquist, determină o micșorare considerabilă a erorilor de trunchiere.

Se menționează în încheiere lucrarea [84], în care este prezentată o limită a erorii de trunchiere pentru teorema eșantionării, generalizată.

În cele precedente s-au făcut referiri numai la o parte din publicațiile care tratează problema erorilor de trun-

chiere. O listă bibliografică cuprinzătoare cu aceste lucrări este prezentată în [1]. Interesul manifestat pentru studiul acestor erori se datorește, probabil, frecvenței cu care apar în aplicațiile practice. Numai semnalele periodice pot fi reconstituite practic, fără erori de trunchiere.

Se va remarca în fine valabilitatea afirmației făcute la pct.3.1 și anume că, evaluarea limitelor erorii de trunchiere este posibilă numai dacă sînt cunoscuți anumiți parametri privind întregul semnal, netrunchiat (setul de esanțioane, spectrul semnalului, energia sau valoarea maximă).

3.3. Erori "alias" și limitele lor

Așa cum s-a mai arătat, erorile "alias" :

$$\varepsilon_A(t) = f(t) - f^*(t) \quad (3.19)$$

sînt rezultatul dezvoltării funcției $f(t)$ după formula de interpolare (1.2), în situația că spectrul ac stei funcții este nelimitat sau este limitat la o valoare mai mare ca $2\pi W$. Prin $f^*(t)$ s-a notat -la fel ca și pînă aici- semnalul reconstituit conform (1.2).

O evaluare a erorilor "alias", care se prezintă pentru început, este cea stabilită în [85]:

$$|\varepsilon_A(t)| = |f(t) - f^*(t)| \leq \frac{2}{\pi} \int_{W/T}^{\infty} |F(\omega)| d\omega \quad (3.20)$$

Inegalitatea (3.20) a rezultat considerînd că spectrul $F(\omega)$ al semnalului satisface următoarele condiții:

$$\begin{aligned} F(\omega) &\in L_1(-\infty, \infty) \\ F(\omega) &\neq 0 \text{ pentru } \omega > \pi/T \\ F(\omega) &= \dot{F}(-\omega) \\ F(\omega + 0) + F(\omega - 0) &= 2F(\omega) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Se precizează că prin $\hat{F}(\omega)$ s-a notat, în (3.21), spectrul complex conjugat spectrului $F(\omega)$.

O altă expresie a limitei superioare a erorii "alias" este de forma [23]:

$$|\varepsilon_A(t)| \leq \frac{B}{2\pi} \left| \sin \frac{\pi}{T} t \right| \quad (3.22)$$

în care:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} |E_A(\omega)| d\omega \quad (3.23)$$

$E_A(\omega)$ reprezintă mai sus spectrul semnalului eroare $\varepsilon_A(t)$, dică:

$$E_A(\omega) = F(\omega) - F^*(\omega)$$

Se observă că limita dată de rel.(3.22) depinde de variabila timp și că poate fi atinsă cel puțin în punctele de eșantionare. Datorită acestui fapt este de preferat în aplicațiile practice. Așa cum se va arăta la pct.3.5, rel. (3.22) este valabilă doar în cazul unor semnale avînd limitată lățimea spectrului, la anumite valori, fapt ce îi reduce aplicabilitatea.

O limită similară cu cea dată de rel.(3.20) este stabilită pentru cazul mai general, cînd sînt satisfăcute doar primele două condiții din rel.(3.21) [86]. Se arată că:

$$|\varepsilon_A(t)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|\omega| > \pi/T} |F(\omega)| d\omega \quad (3.24)$$

Rezultă imediat că pentru $F(\omega) = \hat{F}(-\omega)$, rel.(3.24) poate fi scrisă sub forma (3.20). La aceleași rel.(3.20) respectiv (3.24) se ajunge în [87], printr-o procedură de calcul diferită de cea utilizată în [85][86].

Problema erorilor "alias" a fost abordată și în

cazul funcțiilor trece-bandă (pct.1.3.6).

Presupunând că funcția $f(t)$ este exprimată sub forma (1.90), cu toate că spectrul corespunzător $F(\omega)$ nu este nul înafara intervalului trece-bandă $I_{TB} = (\omega_0, \omega_0 + W)$, se obține următoarea limită a erorii [88]:

$$|\varepsilon_A(t)| \leq 2 \int_{\omega \in I_{TB}} |F(\omega)| d\omega \quad (3.25)$$

Se menționează apoi o limită a erorii $\varepsilon_A(t)$ stabilită pentru cazul semnalelor de bandă limitată ω_0 , eșantionate cu o frecvență prea mică, încît $\omega_0 > \pi/T$. Relația este de forma [89]:

$$|\varepsilon_A(t)| \leq \frac{2}{\pi} \left(\omega_0 - \frac{\pi}{T} \right) \cdot \max_{\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \omega_0} |F(\omega)| \quad (3.26)$$

Expresia (3.26) este mai lesne de utilizat în multe cazuri, comparativ cu rel.(3.22), stabilită așa cum s-a arătat-tot pentru funcții de bandă limitată.

Limitele (3.20) respectiv (3.25) au fost reconstituite pentru cazul teoremei eșantionării, generalizată.

Se obțin, corespunzător funcțiilor de bandă limitată respectiv pentru funcțiile trece-bandă, drept limite a erorii [1]:

$$|\varepsilon_A(t)| \leq 2\alpha \int_I |F(\omega)| d\omega \quad (3.27)$$

$$|\varepsilon_A(t)| \leq 2\alpha \int_{\omega \in R_{BT}} |F(\omega)| d\omega \quad (3.28)$$

Prin I s-a notat intervalul în care funcțiile din mulțimea $\{K(\omega, t_n)\}$ sînt ortogonale (pct.1.3.2), după cum R_{BT} repre-

zintă banda de trecere definită ca la pct. 1.3.6. In expresiile de mai sus s-a considerat $\alpha = \max |K(\omega, t)|$, pentru orice ω real.

3.4. Erori de amplitudine și de instabilitate

Erorile de amplitudine apar ca urmare a imposibilității determinării exacte a valorilor eșantioanelor, datorită cuantizării, influenței zgomotelor, sau a erorilor de rotunjire (round-off error). Dacă $f'(nT)$ reprezintă valorile eșantioanelor, așa cum au rezultat din măsurări, atunci semnalul reconstituit este de forma:

$$f^{\#}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f'(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t-nT)}{\frac{\pi}{T} (t-nT)} \quad (3.29)$$

Cu relația :

$$\beta_n = f(nT) - f'(nT) \quad (3.30)$$

eroarea de amplitudine are expresia [23]:

$$\varepsilon_{AM}(t) = f(t) - f^{\#}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t-nT)}{\frac{\pi}{T} (t-nT)} \quad (3.31)$$

In cele de mai sus s-a presupus că funcția $f(t)$, de bandă limitată, a fost astfel eșantionată încît este satisfăcută cerința impusă de teorema eșantionării.

Erorile de instabilitate rezultă ca urmare a prelevării eșantioanelor la momentele :

$$t_n = nT - \mu_n \quad (3.32)$$

ce diferă de momentele nT , impuse de teorema eșantionării. În aceste condiții semnalul reconstituit are forma:

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT - \mu_n) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \quad (3.33)$$

diferind de $f(t)$, prin eroarea de instabilitate:

$$\varepsilon_I(t) = f(t) - f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \quad (3.34)$$

În rel.(3-34) s-a utilizat notația $\delta_n = f(nT) - f(nT - \mu_n)$.

Din compararea rel.(3.31) și (3.34) rezultă că erorile de amplitudine și de instabilitate au expresii similare și prin urmare pot fi analizate prin aceleași procedee. Datorită acestui fapt, tratarea lor se face în cadrul aceluiași paragraf.

O limită pentru eroarea de amplitudine, definită de rel.(3.31), în ipoteza că această eroare este determinată exclusiv de erorile de rotunjire, este stabilită în [23]:

$$|\varepsilon_{AM}(t)| \leq \left(\frac{WB_R}{\pi} \right)^{1/2} \quad (3.35)$$

în care:

$$B_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{AM}^2(t) dt \quad (3.36)$$

iar W reprezintă frecvența maximă din spectrul lui $f(t)$. Este

important de precizat că erorile locale, $\varepsilon_{AM}(nT)$, au fost considerate drept variabile aleatoare necorelate, avînd o aceeași valoare medie fiecăr și o aceeași dispersie.

Relația (3.35) este, de altfel, aplicabilă pentru orice tip de eroare de amplitudine care satisface condițiile menționate anterior, privind erorile locale $\varepsilon_{AM}(nT)$.

În [89] se prezintă o limită a erorii medii practice rezultate prin trunchiere și ca urmare a influenței zgomotelor asupra valorii eșantioanelor.

Se presupune că $f(t)$ este o funcție de bandă limitată, cu valoarea absolută maximă M și care este perturbată de un zgomot aditiv. Eșantioanele de zgomot, considerate ca variabile aleatoare necorelate, au valoarea medie nulă și dispersia σ^2 . Dacă semnalul $f(t)$ astfel rezultat, este aproximat în intervalul $[-T/2, T/2]$, prin seria trunchiată :

$$\tilde{f}_N(t) = \sum_{n=-N}^N \tilde{f}(nT)\theta(t-nT) \quad (3.37)$$

atunci valoarea medie patratice $E |\varepsilon(t)|^2$ a erorii de reconstituire, satisface inegalitatea :

$$E |\varepsilon(t)|^2 \leq M^2 \left(\frac{\sin \pi t}{T} \right)^2 \frac{4}{m^2 \pi^2} \left(\frac{M}{Nr\pi} \right)^{2m} + \sigma^2 \left[\left(1 - \frac{1}{3} r m^{-0,515} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} t \right) + \cos \frac{2\pi}{T} t \right] \quad (3.38)$$

pentru orice t astfel încît $|t| \leq T/2$.

În rel.(3.37) $\theta(t)$ reprezintă factorul de auto-trunchiere, definit în expresia (3.9). Semnificația parametrilor r și m , ce apar în rel.(3.38), este cea dată la pct. 3.2. Prin T s-a notat pasul de eșantionare.

Evaluarea erorilor de instabilitate este prezentată în literatură pentru două situații.

În una din situații întârzierile μ_n se presupun cunoscute și se pune problema determinării lui $f(t)$, pe baza eșantioanelor $f(nT - \mu_n)$ și a valorilor μ_n . Se va arăta în continuare că evaluarea lui $f(t)$, în condițiile menționate, este afectată de erori care, conform rel.(3.34), sînt erori de instabilitate.

În acest scop se definește funcția de bandă limitată [23]:

$$\alpha(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n \frac{\sin \frac{\pi}{T} (\zeta - nT)}{\frac{\pi}{T} (\zeta - nT)} \quad (3.39)$$

care satisface condiția:

$$\alpha(nT) = \mu_n \quad (3.40)$$

Prin transformarea neliniară:

$$t = \zeta - \alpha(\zeta) \quad (3.41)$$

căreia îi corespunde funcția inversă:

$$\zeta = \beta(t) \quad (3.42)$$

punctele $nT - \mu_n$ de pe axa t sînt transformate în punctele nT de pe axa ζ (pentru $\zeta = nT$ rezultă din (3.41) și (3.40) că $t = nT - \mu_n$).

Problema este tratată în continuare prin raportare la axa ζ .

Definind funcția:

$$g(\zeta) = f^*[\zeta - \alpha(\zeta)] = f^*(t) \quad (3.43)$$

rezultă imediat că :

$$g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT - \mu_n) \frac{\sin \frac{\pi}{T} (\zeta - nT)}{\frac{\pi}{T} (\zeta - nT)} \quad (3.44)$$

dacă spectrul acestei funcții este limitat la cel mult π/T .
Cu această condiție se obține în final, pe baza rel.(3.43),
expresia căutată:

$$f(t) = g[\beta(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT - \mu_n) \frac{\sin \frac{\pi}{T} [\beta(t) - nT]}{\frac{\pi}{T} [\beta(t) - nT]} \quad (3.45)$$

Se arată însă în [23] că spectrul lui $g(\zeta)$ se am-
lează începînd cu $\pi/T + W$, W fiind cea mai înaltă frecvență
din spectrul lui $f(t)$. Prin urmare egalitatea (3.44) nu este
adevărată, cei doi membri diferind între ei tocmai prin eroa-
rea "alias". Observînd acum că o aceeași diferență apare
și între membrii egalității (3.45), rezultă că eroarea de
instabilitate, căutată, este egală cu eroarea "alias" intro-
dusă de reprezentarea (3.44).

O creștere a frecvenței de eșantionare, pînă la
valoarea care asigură valabilitatea egalității (3.44), con-
duce la reconstituirea exactă a lui $f(t)$, utilizînd rel.(3.45).

O a doua situație ce se are în vedere la evaluarea
erorilor $\xi_I(t)$ este aceea în care întîrzierile μ_n sînt consi-
derate ca variabile aleatoare, necorelate, cu valoare me-
die nulă și dispersia σ^2 [23]. Dacă M_1 este o mărime astfel
aleasă, încît inegalitatea :

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq M_1 |t_1 - t_2| \quad (3.46)$$

este satisfăcută pentru orice t_1, t_2 , atunci dispersia erorii
de instabilitate satisface inegalitatea :

$$E\{\xi_I^2(t)\} \approx M_1^2 \sigma^2 \quad (3.47)$$

În încheiere se menționează că o serie de chestiuni

privind erorile de amplitudine sînt prezentate în lucrările [90] [91] [92] [93], după cum erorile de instabilitate sînt tratate și în [94] [95].

3.5. O generalizare a expresiei limitei erorilor "alias"

Din prezentarea făcută la pct.3.3 se poate constata că rel.(3.22) conduce la cea mai scăzută limită pentru valorile absolute ale erorilor "alias", inclusiv valoarea zero în punctele de eșantionare. Din acest punct de vedere limita (3.22) este de preferat în aplicațiile practice.

Pe de altă parte însă, așa cum se va arăta, rel. (3.22) poate fi utilizată numai în cazul semnalelor a căror bandă de trecere nu depășește o valoare, bine precizată. Acest fapt îi limitează aplicabilitatea.

Ne propunem, în cele ce urmează, stabilirea unei relații similare inegalității (3.22), valabilă pentru cazul mai general al funcțiilor de bandă limitată sau nelimitată. Se precizează că o asemenea expresie nu a fost prezentată, încă, în literatura de specialitate.

Se consideră în acest scop un semnal $s(t)$, al cărui spectru $S(\omega)$ este nelimitat pe axa pulsațiilor. Presupunînd că semnalul este eșantionat cu o perioadă T și reconstituit conform expresiei:

$$s^{\#}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \frac{\sin \omega_F(t-nT)}{\omega_F(t-nT)}, \quad \omega_F = \frac{\pi}{T} \quad (3.48)$$

diferența:

$$e(t) = s(t) - s^{\#}(t) \Leftrightarrow E(\omega) = S(\omega) - S^{\#}(\omega) \quad (3.49)$$

va reprezenta erorile "alias".

Se va determina în continuare spectrul $E(\omega)$ al semnalului eroare $e(t)$.

Pentru aceasta se au în vedere expresiile spectrelor $\bar{S}(\omega)$ și $S^*(\omega)$, corespunzătoare semnalului eșantionat respectiv semnalului reconstituit (rel.(1.5) și (1.7)). Din fig.3.2.a, în care sînt reprezentate grafic aceste expresii, rezultă, pe baza rel.(3.49), că (fig.3.2.b).

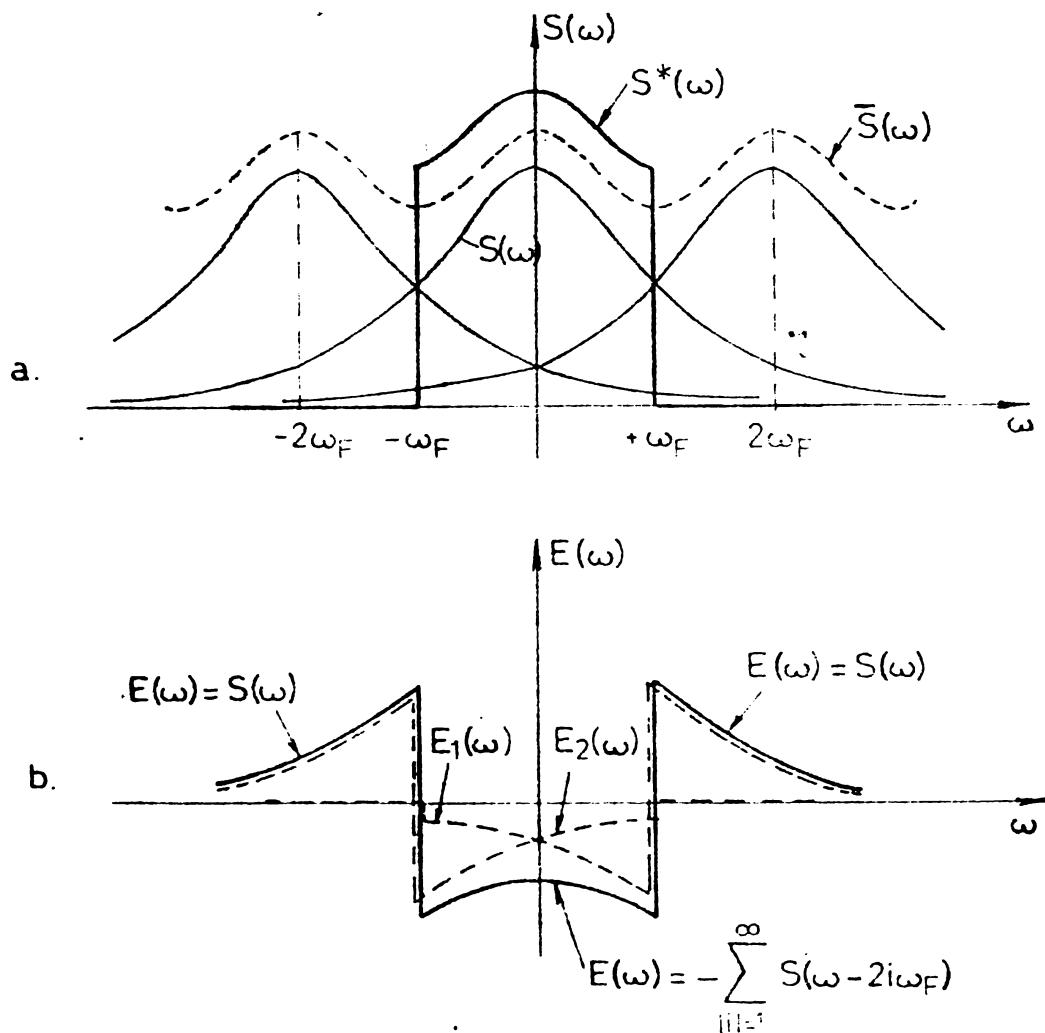


Fig.3.2

$$E(\omega) = \begin{cases} S(\omega), & |\omega| \leq \omega_F \\ -\sum_{|i|=1}^{\infty} S(\omega - 2i\omega_F), & |\omega| > \omega_F \end{cases} \quad (3.50)$$

Exprimarea limitei erorii $|e(t)|$, funcție de spectrul $E(\omega)$, sub forma dată de rel. (3.22), a fost posibilă prin utilizarea următoarei egalități [12].

Deoă spectrul $H(\omega)$, corespunzător unui semnal $h(t)$, are alura din fig.3.3, atunci este valabilă egalitatea :

$$h(t) = 2h_x(t)\cos\omega_0 t + 2h_y(t)\sin\omega_0 t \quad (3.51)$$

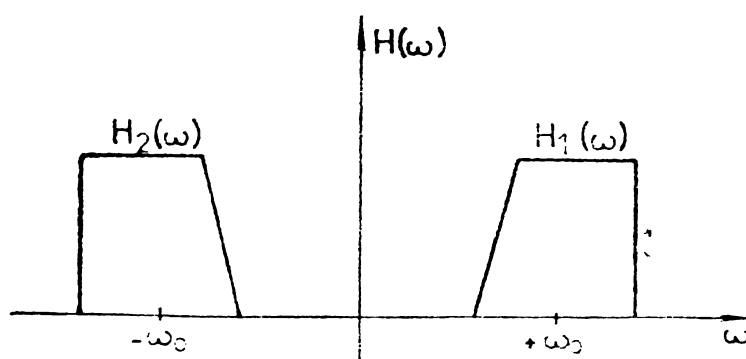


Fig.3.3

Semnalele $h_x(t)$ și $h_y(t)$ corespund componentelor în fază $H_x(\omega)$ respectiv în cuadratură de fază $H_y(\omega)$, definite de expresiile :

$$H_x(\omega) = \frac{H_{d1}(\omega) + H_{d2}(\omega)}{2} \quad (3.52)$$

$$H_y(\omega) = \frac{H_{d2}(\omega) - H_{d1}(\omega)}{2j}$$

În relațiile de mai sus :

$$H_{d1}(\omega) = H_1(\omega + \omega_0) \quad (3.53)$$

$$H_{d2}(\omega) = H_2(\omega - \omega_0)$$

reprezintă componentele:

$$H_1(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega) \quad (3.54)$$

$$H_2(\omega) = H(\omega) \cdot U(-\omega)$$

deplasate cu ω_0 respectiv $-\omega_0$. Prin $U(\omega)$ s-a notat funcția treaptă unitate.

Se va remarca că în fig.3.3, componentele $H_1(\omega)$ și $H_2(\omega)$ sînt situate numai în domeniul valorilor pozitive respectiv negative ale lui ω și că :

$$H_1(\omega) = \dot{H}_2(-\omega) \quad (3.55)$$

Prima dintre condiții a impus limitarea spectrului semnalului a cărui eroare este dată de rel.(3.22) .

Vom demonstra, în cele ce urmează, că rel.(3.51) își păstrează valabilitatea și în situația că fiecare dintre cele două componente menționate mai sus, se extind atît în domeniul valorilor pozitive cît și în domeniul valorilor negative ale lui ω .

Această valabilitate este condiționată însă de satisfacerea rel.(3.55). Rezultatul menționat, stabilit pentru prima dată, stă la baza elaborării unei expresii a limitei erorilor "alias" aplicabilă pentru semnale cu orice lățime a spectrului, inclusiv infinită.

Se va avea în vedere, pentru demonstrație, tocmai spectrul $E(\omega)$, încît expresiile obținute să poată fi utilizate direct, fără alte particularizări.

Subliniem însă că acest fapt nu reduce gradul de generalitate al rezultatului, care poate fi aplicat oricărui alt spectru ce poate fi descompus în două componente caracterizate de rel.(3.55).

Plecînd de la $E(\omega)$, se face decompunerea în componentele $E_1(\omega)$, $E_2(\omega)$, încît să fie satisfăcute relațiile (fig.3.2. b) :

$$E(\omega) = E_1(\omega) + E_2(\omega) \quad (3.56)$$

$$E_1(\omega) = \dot{E}_2(-\omega) \quad (3.57)$$

Se constată identitatea condițiilor (3.57), (3.55). Pe de altă parte, este evident că $E_1(\omega)$ și $E_2(\omega)$ se situează atât în domeniul valorilor pozitive cât și în domeniul valorilor negative ale variabilei ω .

Se introduc acum spectrele deplasate:

$$E_{1d}(\omega) = E_1(\omega + \omega_F) \quad (3.58)$$

$$E_{2d}(\omega) = E_2(\omega - \omega_F)$$

precum și componentele $E_x(\omega)$ - în fază și respectiv $E_y(\omega)$ - în cuadratură de fază:

$$E_x(\omega) = \frac{1}{2} [E_{1d}(\omega) + E_{2d}(\omega)] \quad (3.59)$$

$$E_y(\omega) = \frac{1}{2j} [E_{2d}(\omega) - E_{1d}(\omega)] \quad (3.60)$$

Pe baza relației, a cărei valabilitate se constată imediat-avînd în vedere cele de mai sus :

$$E_{1d}(-\omega) = E_1(-\omega - \omega_F) = \dot{E}_2(\omega - \omega_F) = \dot{E}_{2d}(\omega) \quad (3.61)$$

rezultă că:

$$E_x(-\omega) = \frac{1}{2} [E_{1d}(-\omega) + E_{2d}(-\omega)] = \frac{1}{2} [\dot{E}_{2d}(\omega) + \dot{E}_{1d}(\omega)] = \dot{E}_x(\omega) \quad (3.62)$$

respectiv :

$$E_y(-\omega) = \frac{1}{2j} [E_{2d}(-\omega) - E_{1d}(-\omega)] = \frac{1}{2j} [\dot{E}_{1d}(\omega) - \dot{E}_{2d}(\omega)] = \dot{E}_y(\omega) \quad (3.63)$$

Se poate afirma deci că $E_x(\omega)$ și $E_y(\omega)$ sînt transformate Fourier a două funcții reale [8] :

$$\begin{aligned} e_x(t) &\Leftrightarrow E_x(\omega) \\ e_y(t) &\Leftrightarrow E_y(\omega) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Rel.(3.59), (3.60) și (3.64) permit stabilirea, în continuare, a următoarelor corespondențe :

$$\begin{aligned} e_x(t) - j e_y(t) &\Leftrightarrow E_{1d}(\omega) \\ e_x(t) + j e_y(t) &\Leftrightarrow E_{2d}(\omega) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Utilizînd teorema deplasării avem apoi că :

$$\begin{aligned} e^{j\omega_F t} [e_x(t) - j e_y(t)] &\Leftrightarrow E_{1d}(\omega - \omega_F) = E_1(\omega) \\ e^{-j\omega_F t} [e_x(t) + j e_y(t)] &\Leftrightarrow E_{2d}(\omega + \omega_F) = E_2(\omega) \end{aligned} \quad (3.66)$$

relații prin a căror adunare se obține rezultatul dorit :

$$2 e_x(t) \cos \omega_F t + 2 e_y(t) \sin \omega_F t \Leftrightarrow E(\omega) \quad (3.67)$$

respectiv:

$$e(t) = 2 e_x(t) \cos \omega_F t + 2 e_y(t) \sin \omega_F t \quad (3.68)$$

Precizăm, în final, că o descompunere de forma reprezentată de rel.(3.56), (3.57) este posibilă pentru orice spectru corespunzător unui semnal real.

Intradevăr, prin adunarea la egalitatea (3.57), a relației evidente:

$$E_2(\omega) = \dot{E}_1(-\omega) \quad (3.69)$$

se obține, în baza expresiei (3.56), că este necesar ca :

$$E(\omega) = \dot{E}(-\omega) \quad (3.70)$$

Condiția (3.70) este satisfăcută de spectrul oricărui semnal real.

Vom utiliza în continuare rezultatele stabilite, având în vedere că $E(\omega)$ este definit de expresia (3.50). Se obține succesiv că (fig.3.2.b) :

$$E_1(\omega) = \begin{cases} S(\omega), & \omega > \omega_F \\ - \sum_{i=1}^{\infty} S(\omega - 2i\omega_F), & |\omega| \leq \omega_F \\ 0, & \omega < -\omega_F \end{cases} \quad (3.71)$$

$$E_2(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega > \omega_F \\ - \sum_{i=1}^{\infty} S(\omega + 2i\omega_F), & |\omega| \leq \omega_F \\ S(\omega), & \omega < -\omega_F \end{cases} \quad (3.72)$$

respectiv spectrele deplasate (rel.3.58):

$$E_{1d}(\omega) = \begin{cases} S(\omega + \omega_F), & \omega > 0 \\ - \sum_{i=1}^{\infty} S[\omega - (2i-1)\omega_F], & -2\omega_F \leq \omega \leq 0 \\ 0, & \omega < -2\omega_F \end{cases} \quad (3.73)$$

$$E_{2d}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega > 2\omega_F \\ -\sum_{i=1}^{\infty} S[\omega + (2i-1)\omega_F], & 0 \leq \omega \leq 2\omega_F \\ S(\omega - \omega_F), & \omega < 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

Se pot calcula acum componentele $E_x(\omega)$ și respectiv $E_y(\omega)$ (rel.(3.59), (3.60)) :

$$E_x(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} S(\omega + \omega_F), & \omega > 2\omega_F \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} S[\omega + (2i-1)\omega_F], & 0 \leq \omega \leq 2\omega_F \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} S[\omega - (2i-1)\omega_F], & -2\omega_F \leq \omega \leq 0 \\ \frac{1}{2} S(\omega - \omega_F), & \omega < -2\omega_F \end{cases} \quad (3.75)$$

$$E_y(\omega) = \begin{cases} -\frac{1}{2j} S(\omega + \omega_F), & \omega > 2\omega_F \\ -\frac{1}{2j} \left\{ 2S(\omega + \omega_F) + \sum_{i=2}^{\infty} S[\omega + (2i-1)\omega_F] \right\}, & 0 \leq \omega \leq 2\omega_F \\ \frac{1}{2j} \left\{ 2S(\omega - \omega_F) + \sum_{i=2}^{\infty} S[\omega - (2i-1)\omega_F] \right\}, & -2\omega_F \leq \omega \leq 0 \\ \frac{1}{2j} S(\omega - \omega_F), & \omega < -2\omega_F \end{cases} \quad (3.76)$$

Pe baza rel.(3.75), (3.76) vor fi calculate în con-

tinuare semnalele $e_x(t)$ și $e_y(t)$. Se obține că :

$$\begin{aligned}
 e_x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-2\omega_F} S(\omega - \omega_F) e^{j\omega t} d\omega - \right. \\
 &- \int_{-2\omega_F}^0 \sum_{i=2}^{\infty} S[\omega - (2i-1)\omega_F] e^{j\omega t} d\omega - \int_0^{2\omega_F} \sum_{i=2}^{\infty} S[\omega + (2i-1)\omega_F] e^{j\omega t} d\omega + \\
 &+ \left. \int_{2\omega_F}^{\infty} S(\omega + \omega_F) e^{j\omega t} d\omega \right\} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-2\omega_F} S(\omega - \omega_F) e^{j\omega t} d\omega - \right. \\
 &- \sum_{i=2}^{\infty} e^{j2(i-1)\omega_F t} \int_{-2\omega_F}^0 S[\omega - (2i-1)\omega_F] e^{j[\omega - 2(i-1)\omega_F] t} d\omega - \\
 &- \sum_{i=2}^{\infty} e^{-j2(i-1)\omega_F t} \int_0^{2\omega_F} S[\omega + (2i-1)\omega_F] e^{j[\omega + 2(i-1)\omega_F] t} d\omega + \\
 &+ \left. \int_{2\omega_F}^{\infty} S(\omega + \omega_F) e^{j\omega t} d\omega \right\} \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

Se va observa acum că:

$$\int_{-2\omega_F}^0 S[\omega - (2i-1)\omega_F] e^{j[\omega - 2(i-1)\omega_F] t} d\omega = \int_{-2i\omega_F}^{-2(i-1)\omega_F} S(\omega - \omega_F) e^{j\omega t} d\omega,$$

$i = 2 \dots$
 (3.78)

(egalitatea rezultă efectuînd schimbarea de variabilă

$\omega = \omega' + 2(i-1)\omega_F$. Pe baza rel.(3.78), primul termen din paranteza rel.(3.77) poate fi descompus într-o sumă de integrale, adică :

$$\int_{-\infty}^{-2\omega_F} S(\omega - \omega_F) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{i=2}^{\infty} \int_{-2i\omega_F}^{-2(i-1)\omega_F} S(\omega - \omega_F) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} \int_{-2\omega_F}^0 S[\omega - (2i-1)\omega_F] e^{j[\omega - 2(i-1)\omega_F]t} d\omega \quad (3.79)$$

În mod asemănător se poate arăta apoi că:

$$\int_{2\omega_F}^{\infty} S(\omega + \omega_F) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{i=2}^{\infty} \int_0^{2\omega_F} S[\omega + (2i-1)\omega_F] e^{j[\omega + 2(i-1)\omega_F]t} d\omega \quad (3.80)$$

Utilizând ultimele două relații, $e_x(t)$ se aduce la forma :

$$e_x(t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \left[1 - e^{j2(i-1)\omega_F t} \right] \int_{-2\omega_F}^0 S[\omega - (2i-1)\omega_F] e^{j[\omega - 2(i-1)\omega_F]t} d\omega + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^{\infty} \left[1 - e^{-j2(i-1)\omega_F t} \right] \int_0^{2\omega_F} S[\omega + (2i-1)\omega_F] e^{j[\omega + 2(i-1)\omega_F]t} d\omega \right\} \quad (3.81)$$

respectiv :

$$|e_x(t)| = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=2}^{\infty} \left\{ \left[1 - e^{j2(i-1)\omega_F t} \right] \int_{-2\omega_F}^0 S[\omega - (2i-1)\omega_F] \cdot \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \cdot e^{j[\omega - 2(1-l)\omega_F]t} \frac{d\omega}{d\omega} + \left| 1 - e^{-j2(1-l)\omega_F t} \right| \int_0^{2\omega_F} S[\omega + (2i-1)\omega_F] \\
 & \cdot e^{j[\omega + 2(1-l)\omega_F]t} \frac{d\omega}{d\omega} \left. \right\} \quad (3.82)
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Se va justifica în continuare următoarea inegalitate utilă:

$$\left| \int S'(\omega) d\omega \right| \leq \int |S'(\omega)| d\omega \quad (3.83)$$

$S'(\omega)$ fiind o funcție complexă de variabilă reală.

Se consideră în acest scop inegalitatea lui Schwarz pentru funcții complexe [12] :

$$\left| \int f \cdot g dt \right|^2 \leq \int |f|^2 dt \cdot \int |g|^2 dt \quad (3.84)$$

Pentru cazul particular când cele două funcții sînt identice, se poate scrie:

$$\left| \int S(\omega) \cdot S(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int |S(\omega)|^2 d\omega \cdot \int |S(\omega)|^2 d\omega$$

sau

$$\left| \int S^2(\omega) d\omega \right| \leq \int |S(\omega)|^2 d\omega$$

Notînd $S^2(\omega) = S'(\omega)$ și avînd în vedere că $|S(\omega)|^2 = |S^2(\omega)|$ rezultă:

$$\left| \int S'(\omega) d\omega \right| \leq \int |S'(\omega)| d\omega$$

adică tocmai inegalitatea (3.83).

Se va observa acum că este valabilă egalitatea :

$$\int_{-2\omega_F}^0 S[\omega - (2i-1)\omega_F] e^{j[\omega - 2(i-1)\omega_F]t} d\omega = \int_0^{2\omega_F} S[\omega + (2i-1)\omega_F] e^{-j[\omega + 2(i-1)\omega_F]t} d\omega \quad (3.85)$$

Pe baza acestei relații și a inegalității (3.83), expresia lui $|e_x(t)|$ capătă forma :

$$|e_x(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=2}^{\infty} |1 - e^{-j2(i-1)\omega_F t}| \int_0^{2\omega_F} S[\omega + (2i-1)\omega_F] d\omega \quad (3.86)$$

Printr-o procedură similară se determină expresia lui $e_y(t)$. Se obține succesiv:

$$\begin{aligned} e_y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_y(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{4\pi j} \left\{ \int_{-\infty}^{-2\omega_F} S(\omega - \omega_F) e^{j\omega t} d\omega + \right. \\ &+ \int_{-2\omega_F}^0 \sum_{i=2}^{\infty} S[\omega - (2i-1)\omega_F] e^{j\omega t} d\omega + \int_{-2\omega_F}^0 2S(\omega - \omega_F) e^{j\omega t} d\omega - \\ &- \int_0^{2\omega_F} 2S(\omega + \omega_F) e^{j\omega t} d\omega - \int_0^{2\omega_F} \sum_{i=2}^{\infty} S[\omega + (2i-1)\omega_F] e^{j\omega t} d\omega - \\ &\left. - \int_{2\omega_F}^{\infty} S(\omega + \omega_F) e^{j\omega t} d\omega \right\} \end{aligned}$$

Apoi :

$$e_y(t) = \frac{1}{4\pi j} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[1 + e^{j2(i-1)\omega_F t} \right] \int_{-2\omega_F}^0 S[\omega - (2i-1)\omega_F] e^{j[\omega - 2(i-1)\omega_F]t} d\omega \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{\infty} \left[1 + e^{-j2(i-1)\omega_F t} \right] \int_0^{2\omega_F} S[\omega + (2i-1)\omega_F] e^{j[\omega + 2(i-1)\omega_F]t} d\omega \right\} \quad (3.87)$$

și în final:

$$|e_y(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \left| 1 + e^{-j2(i-1)\omega_F t} \right| \int_0^{2\omega_F} |S[\omega + (2i-1)\omega_F]| d\omega \quad (3.88)$$

Pentru a determina limita erorii $e(t)$ se are în vedere rel.(3.68), pe baza căreia rezultă:

$$|e(t)| \leq 2 |e_x(t)| |\cos \omega_F t| + 2 |e_y(t)| |\sin \omega_F t| \quad (3.89)$$

respectiv, prin utilizarea inegalităților (3.86), (3.88) :

$$|e(t)| \leq \frac{1}{\pi} \left\{ |\cos \omega_F t| \sum_{i=2}^{\infty} B_i |1 - e^{-j2(i-1)\omega_F t}| \right. \\ \left. + |\sin \omega_F t| \sum_{i=1}^{\infty} B_i |1 + e^{-j2(i-1)\omega_F t}| \right\} \quad (3.90)$$

cu notația :

$$B_i = \int_0^{2\omega_F} |S[\omega + (2i-1)\omega_F]| d\omega \quad (3.91)$$

Observații

1. La fel ca și în cazul rel.(3.22), stabilită în [23], eroarea $e(t)$ se anulează în punctele de eșantionare, adică pentru $t = nT$ (se reamintește că $\omega_F = \pi/T$).

2. Integralele care intervin în rel.(3.90), prin intermediul termenilor B_1 , reprezintă porțiuni din aria mărginită de curba $|S(\omega)|$ și axa absciselor. Aceste porțiuni corespund unor intervale de $2\omega_F$ pe axa absciselor, pentru $\omega \geq \omega_F$ (fig.3.4).

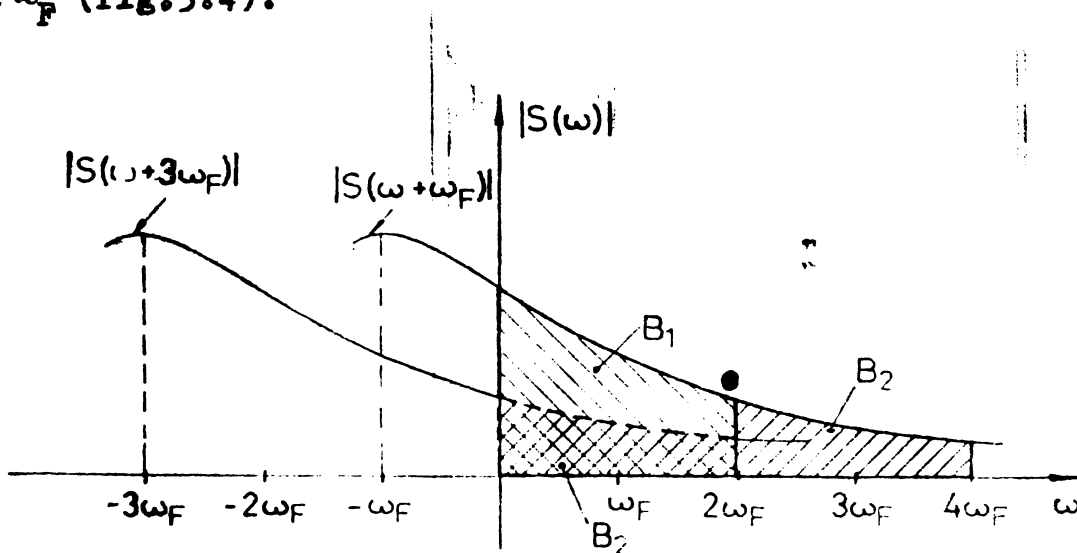


Fig.3.4

3. Particularizînd rel.(3.90), pentru cazul $i=1$, se obține :

$$|e(t)| \leq \frac{2}{\pi} B_1 |\sin \omega_F t| \quad (3.92)$$

Deoarece începînd cu B_2 termenii B_1 sînt nuli, spectrul $S(\omega)$ este limitat în acest caz, la cel mult $\pm 3\omega_F$ (fig.3.4). Pentru o asemenea situație, reprezentată în fig.3.5, rezultă imediat că :

$$B_1 = \frac{1}{4} B \quad (3.93)$$

B fiind definit de rel.(3.23). În consecință, rel.(3.92) de-

vine :

$$|e(t)| \leq \frac{1}{2\pi} B |\sin \omega_F t| \quad (3.22')$$

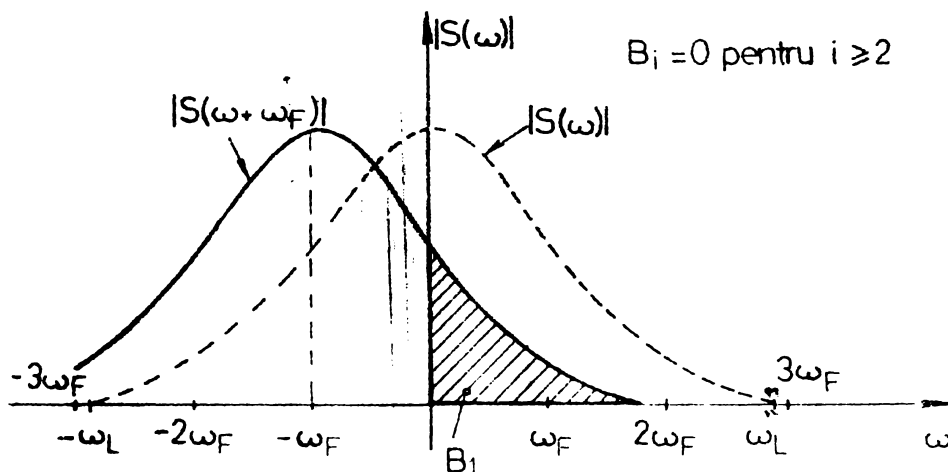


Fig. 3.5.

identică cu (3.22).

Se subliniază în mod deosebit faptul că în [23] nu se fac precizări cu privire la condițiile de valabilitate ale rel.(3.22). Din figura pe baza căreia au fost scrise relațiile de calcul, rezultă însă că au fost avute în vedere semnalele al căror spectru este nul înafara limitelor $\pm \omega_F$.

O asemenea restricție a fost impusă -așa cum s-a precizat-spre a se putea utiliza egalitatea (3.51), demonstrată în [12], pentru cazul spectrelor de forma dată în fig.3.3.

Pe baza ultimelor expresii se poate afirma că, de fapt, rel.(3.22) este valabilă în condiții mai largi, respectiv, este aplicabilă semnalelor al căror spectru este nul înafara limitelor $\pm 3\omega_F$.

4. Dacă semnalul $s(t)$ nu este de bandă nelimitată, cum s-a presupus inițial, ci are spectrul limitat la $\pm \omega_L$, în inegalitatea (3.90) se va considera drept limită superioară a lui i , cea mai mare valoare I , care satisface inegalitatea (fig.3.6):

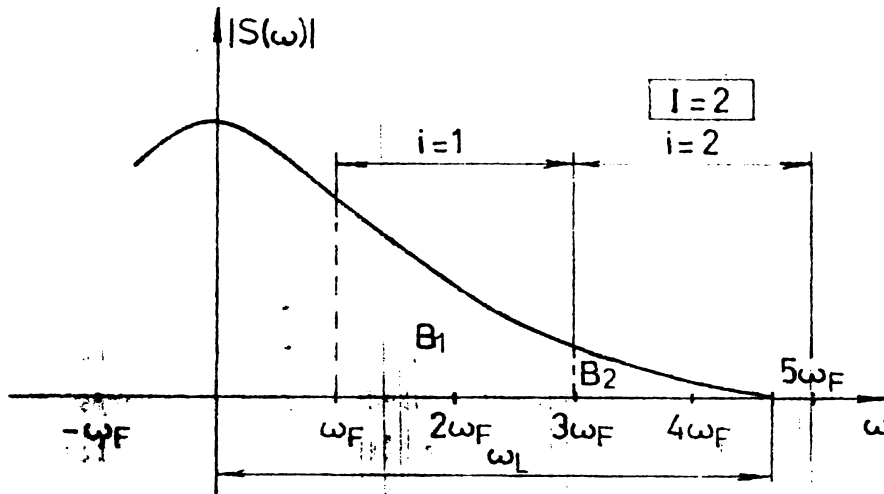


Fig.3.6

$$I.2 \omega_F - \omega_F < \omega_L$$

(3.94)

3.6. Extinderea limitei generalizate la cazul funcțiilor periodice

Din prezentarea bibliografică generală, făcută la pct.3.3, se poate constata că studiul erorilor "alias" a fost abordat pînă în prezent doar pentru semnalele aperiodice. Generalizarea făcută în paragraful precedent a avut de asemenea, în vedere, aceeași clasă de funcții.

Consecvenți ideii menționate, privind importanța teoriei semnalelor periodice pentru sistemele cu prelucrare numerică a semnalelor, va fi tratată, în cadrul acestui paragraf, problema neabordată încă în literatură, a erorilor "alias" în cazul semnalelor periodice.

Așa cum va reeși din cele ce urmează, un asemenea studiu prezintă importanță nu numai prin aceea că permite stabilirea unei limite a erorilor "alias" ci evidențiază totodată o concluzie originală, de mare importanță practică: și anume faptul că, în anumite condiții, spre deosebire de regimul aperiodic, în cazul semnalelor periodice erorile "alias"

nu se anulează în punctele de eşantionare.

Se va considera pentru studiu o funcție periodică $s_p(t)$, de bandă infinită:

$$s_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.95)$$

eşantionată cu o frecvență mai mică decît valoarea impusă de teorema eşantionării. Semnalul reconstituit $s_p^{\#}(t)$ va comporta, în consecință, erori "alias", apariția erorilor de trunchiere fiind exclusă (erorile de instabilitate și de amplitudine se presupun nule).

Vom nota prin $e_p(t)$ erorile apărute, încît se poate scrie:

$$e_p(t) = s_p(t) - s_p^{\#}(t) \quad (3.96)$$

Pentru stabilirea limitelor lui $|e_p(t)|$ pot fi utilizate rezultatele obținute în paragraful precedent.

Intradevăr, fenomenul fizic de reconstituire a unui semnal eşantionat este același indiferent că este vorba de o funcție periodică sau de una aperiodică. Diferențele ce apar privind limitele frecvenței minime de eşantionare precum și expresiile de reconstituire se datoresc faptului că spectrul funcțiilor periodice este discret în timp ce semnalele aperiodice au, în general, un spectru continuu. Prin urmare funcția spectrală $E_p(\omega)$, corespunzătoare erorii $e_p(t)$, este dată de aceeași relație (3.50), în care $S(\omega)$ este înlocuit cu $S_p(\omega)$.

Cu această precizare, rămîn valabile, pentru regimul periodic, toate relațiile stabilite ulterior, cu excepția inegalității (3.82). Această excepție apare ca urmare a formei particulare pe care o au, în regim periodic, factorii B_1 . Problema se reduce deci la stabilirea expresiei factorilor B_{pi} și reconsiderarea cu această expresie, a rel.(3.82).

Se precizează, în fine, că în toate expresiile, spectrul $S_p(\omega)$ trebuie considerat ca un spectru "continuu", adică dat de relația (pct.1.2.3) :

$$S_p(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot 2\pi \delta(\omega - k\omega_0) \quad (3.97)$$

Se menționează, de asemenea, că vor fi avute în vedere cele două cazuri, în care sînt prelevate un număr N de eșantioane impar respectiv par:

Cazul N impar

Pornind de la relația evidentă:

$$N = \frac{T_0}{T} = \frac{2\omega_F}{\omega_0}, \quad \omega_F = \frac{\pi}{T} \quad (3.98)$$

se obține că pulsația de tăiere a filtrului trece-jos ideal, corespunzător reconstituirii :

$$\omega_F = N \frac{\omega_0}{2} \quad (3.99)$$

este un număr impar de $\omega_0/2$. Prin urmare spectrul $S_p(\omega)$, pe baza căruia sînt evaluați factorii B_{pi} , se prezintă în raport cu valorile $\pm \omega_F$ ca în fig.3.7.

Pentru determinarea limitei erorii $|e_p(t)|$ se va utiliza, în cele ce urmează, o procedură puțin diferită de cea prezentată, în principiu, anterior. Adică, plecînd de la rel.(3.81) ,(3.87), în care $S(\omega)$ se înlocuiește cu $S_p(\omega)$, se caută să se ajungă la o inegalitate de forma (3.90). Expresiile factorilor B_{pi} rezultă în consecință.

Se preferă această cale deoarece evaluarea integralei (3.91), în care ar interveni modulul unei sume (rel. 3.97), conduce în mod inevitabil la o inegalitate. În această

situație s-ar impune nedefinirea factorilor B_{p1} . Un al doi-

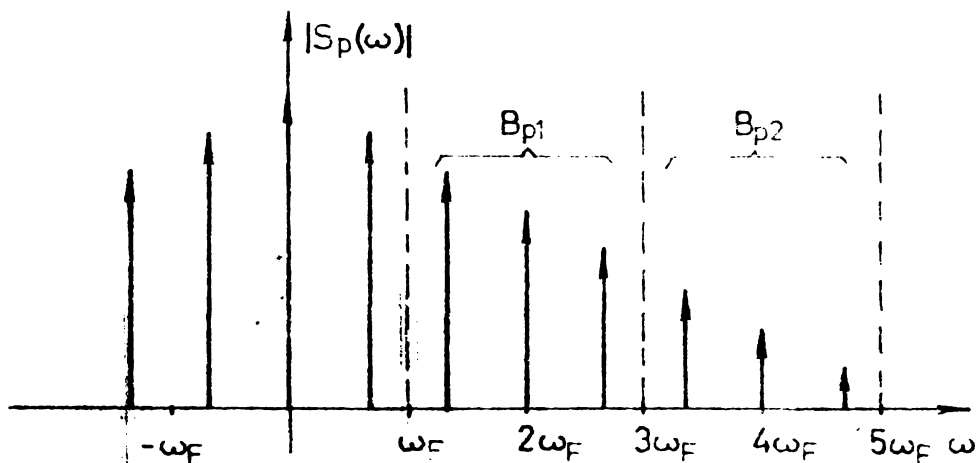


Fig.3.7

lea motiv va rezulta pe parcursul prezentării.

În vederea aplicării procedurii de mai sus se calculează integrala :

$$I_{11} = \int_0^{2\omega_F} S_p[\omega + (2i-1)\omega_F] e^{j[\omega + 2(i-1)\omega_F]t} d\omega \quad (3.100)$$

Prin înlocuirea lui $S_p(\omega)$ (rel.3.97), în expresia (3.100), se obține :

$$I_{11} = \int_0^{2\omega_F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot 2\pi \delta[\omega - k\omega_0 + (2i-1)\omega_F] e^{j[\omega + 2(i-1)\omega_F]t} d\omega =$$

$$= 2\pi \sum_{k=K_1}^{K_1'} c_k e^{j(k\omega_0 - \omega_F)t} \quad (3.101)$$

Ultima egalitate a rezultat pe baza proprietății de filtraj a funcției $\delta(\omega)$ [13]. Limitele K_1, K_1' se obțin din fig.3.7:

$$K_1 = \frac{(2i-1)\omega_F}{\omega_0} + 0,5 \quad K'_1 = \frac{(2i+1)\omega_F}{\omega_0} - 0,5 \quad (3.102)$$

Relații similare pot fi stabilite pentru integrala:

$$I_{21} = \int_{-2\omega_F}^0 S_p[\omega - (2i-1)\omega_F] e^{j[-\omega - 2(1-i)\omega_F]t} d\omega \quad (3.103)$$

Evaluarea acesteia nu este însă necesară, putîndu-se face trecerea direct de la I_{11} la I_{21} , pe baza egalității (3.85).

Prin scrierea unor relații similare cu (3.82), (3.86) respectiv (3.87), (3.88), se obține în final-utilizînd inegalitatea (3.89)- că :

$$|e_p(t)| = \frac{1}{\pi} \left\{ \left| \cos \omega_F t \right| \sum_{i=2}^{\infty} B_{pi} |1 - e^{-j2(1-i)\omega_F t}| + \right. \\ \left. + \left| \sin \omega_F t \right| \sum_{i=1}^{\infty} B_{pi} |1 + e^{-j2(1-i)\omega_F t}| \right\} \quad (3.104)$$

B_{pi} avînd expresia :

$$B_{pi} = \sum_{k=K_i}^{K'_i} 2\pi |c_k| \quad (3.105)$$

pentru K_i, K'_i cu valorile date de rpl.(3.102).

Este util să se observe că factorii B_{pi} reprezintă sume de modulul unor componente spectrale ale lui $S_p(\omega)$. Aceste componente corespund unor intervale egale cu $2\omega_F$, pe axa absciselor, limita inferioară a primului interval fiind $\omega = \omega_F$. In fig.3.7 au fost indicate, pentru exemplificare, componentele aferente factorilor B_{p1} și B_{p2} .

Cazul N par

Relația (3.99) arată că în acest caz ω_F este un număr întreg de ω_0 . În consecință, spectrul $S_p(\omega)$ se poziționează, în raport cu limitele $\pm \omega_F$, după cum este arătat în fig.3.8.a. În fig.3.8.b este reprezentat spectrul $E_p(\omega)$ al erorii. Se subliniază că semnalul reconstituit include și componentele de pulsație $\pm \omega_F$.

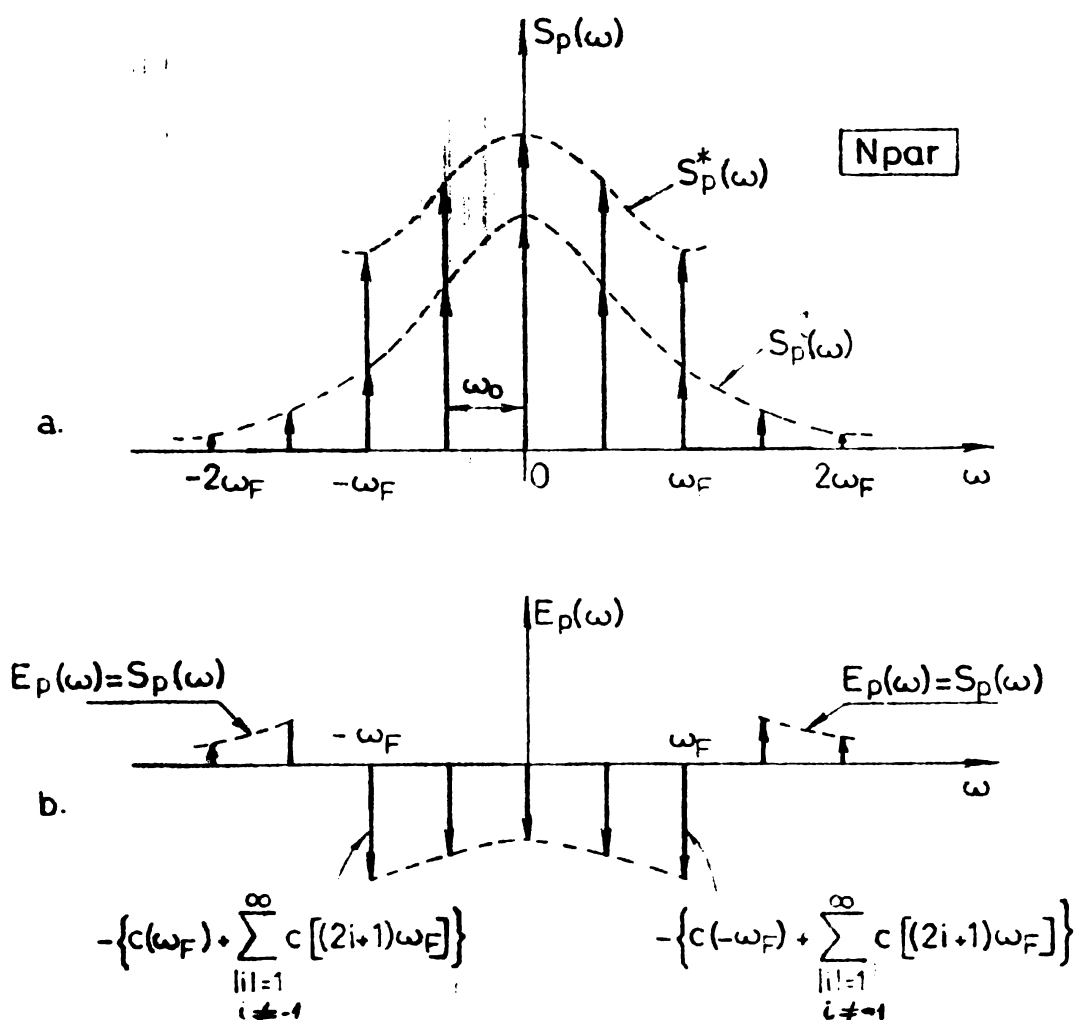


Fig.3.8

Trebuie remarcat acum un aspect important.

Spre deosebire de regimul aperiodic respectiv cazul N impar, nu mai este posibilă descompunerea lui $S_p(\omega)$, $\omega > \omega_F$, în sume parțiale de componentele lui $E_p(\omega)$, din intervalul $[-\omega_F, \omega_F]$. Această imposibilitate se datorește, pe de o parte, faptului că spectrul $E_p(\omega)$ însumează printre altele și componentele de pulsație $\pm \omega_F$, adică $c(\omega_F)$ și $c(-\omega_F)$. Ori aceste componente nu se regăsesc în $S_p(\omega)$, pentru $\omega > \omega_F$ (fig.3.8).

Pe de altă parte se are în vedere următorul motiv.

În ipoteza că inegalitatea (3.90) ar fi aplicată și în cazul N par, la evaluarea factorilor B_{pi} , dați de rel.(3.105), coeficienții c_k de rang $k = 3\omega_F/\omega_0, 5\omega_F/\omega_0, 7\omega_F/\omega_0, \dots$ ș.m.d. apar în expresiile a câte doi factori B_{pi} , consecutivi. Această particularitate se datorește faptului că rangul componentelor respective coincide - de această dată - cu limitele K_1, K_1' (fig.3.8).

În consecință, $S_p(\omega)$ nu este descompus corect, adică în spectre parțiale care prin însumare să conducă la spectrul inițial.

Ambele aspecte menționate conduc la concluzia că rezultatele obținute pentru regimul aperiodic nu sînt aplicabile în cazul N par. Cu toate acestea, problema poate fi soluționată pe baza teoriei stabilite, procedînd la descompunerea lui $S_p(\omega)$ în două spectre componente:

$$S_p(\omega) = S_{pA}(\omega) + S_{pB}(\omega) \quad (3.106)$$

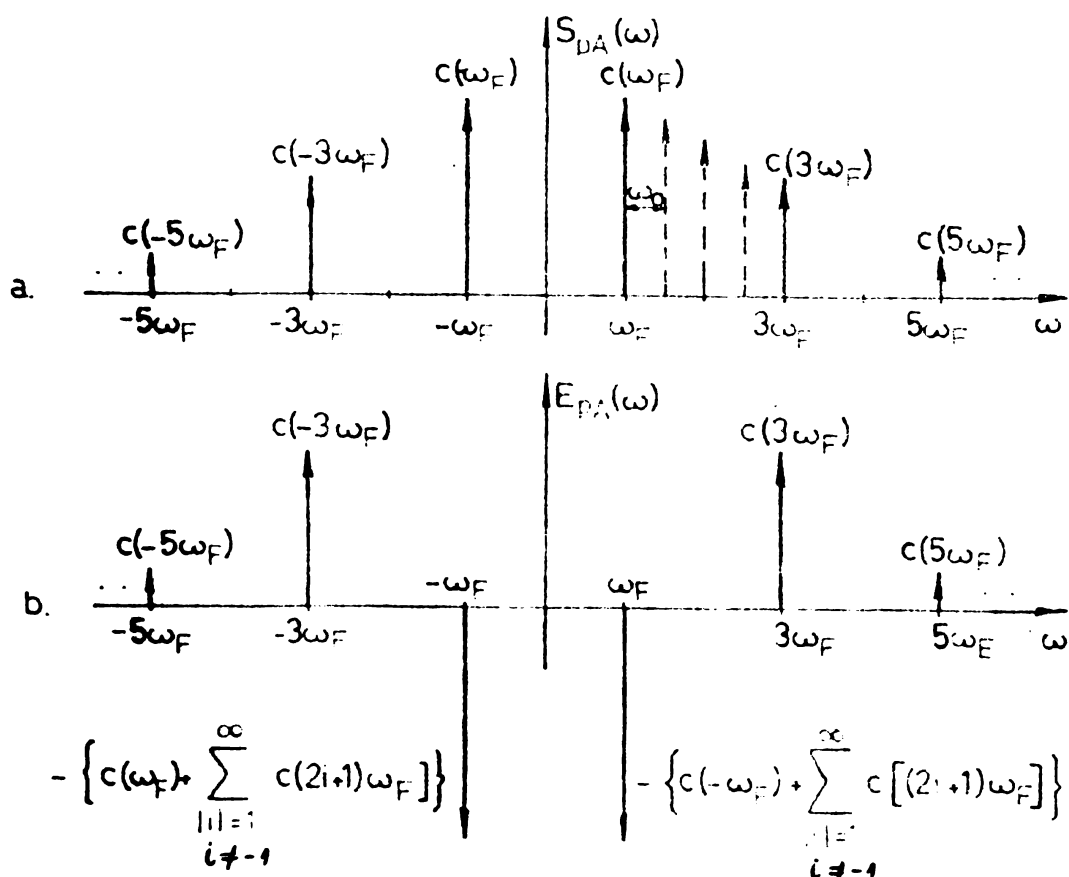


Fig.3.9.

Unul dintre acestea, $S_{pA}(\omega)$, ar urma să includă tocmai acele componente care fac inaplicabile concluziile de la regimul aperiodic, adică componentele de rang $k = \omega_F/\omega_0$ precum și $k = 3\omega_F/\omega_0, 5\omega_F/\omega_0, 7\omega_F/\omega_0, \dots$ ș.m.d. (fig.3.9). Spectrui $S_{pB}(\omega)$ rezultă apoi conform rel.(3.106). Se poate deci scrie:

$$S_{pA}(\omega) = \begin{cases} S_p(\omega) & \omega = (2n+1)\omega_F, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altminteri} \end{cases} \quad (3.107)$$

$$S_{pB}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = (2n+1)\omega_F, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ S_p(\omega) & \text{altminteri} \end{cases} \quad (3.108)$$

Descompunerii (3.106) îi corespunde, în domeniul timp, egalitatea :

$$e_p(t) = e_{pA}(t) + e_{pB}(t) \quad (3.109)$$

$e_{pA}(t)$ și $e_{pB}(t)$ reprezentînd erorile "alias" de reconstituire ale semnalelor $s_{pA}(t) \Leftrightarrow S_{pA}(\omega)$ respectiv $s_{pB}(t) \Leftrightarrow S_{pB}(\omega)$. Ambele spectre componente fiind de lățime infinită, apariția erorilor "alias" este certă.

Din rel.(3.109) rezultă că :

$$|e_p(t)| \leq |e_{pA}(t)| + |e_{pB}(t)| \quad (3.110)$$

astfel că problema se reduce în continuare la determinarea limitelor pentru erorile $|e_{pA}(t)|$ și $|e_{pB}(t)|$.

În ce privește eroarea $e_{pB}(t)$, mărimea acesteia poate fi evaluată cu rel.(3.104) (3.105), procedura de calcul de la regimul aperiodic fiind întrutotul aplicabilă - așa cum rezultă din cele de mai sus - spectrului $S_{pB}(\omega)$. Se obține că:

$$e_{pB}(t) \leq \frac{1}{\pi} \left\{ |\cos \omega_F t| \sum_{i=2}^{\infty} B'_{pi} \left| 1 - e^{-j2(i-1)\omega_F t} \right| + \right. \\ \left. + |\sin \omega_F t| \sum_{i=1}^{\infty} B'_{pi} \left| 1 + e^{-j2(i-1)\omega_F t} \right| \right\} \quad (3.111)$$

cu notația :

$$B'_{pi} = \sum_{k=K_{Bi}}^{K'_{Bi}} 2\pi |c_k| \quad (3.112)$$

Limitele K_{Bi} și K'_{Bi} se obțin pe baza fig.3.10, în care este reprezentat spectrul $S_{pB}(\omega)$, $S_{pB}(\omega)$ fiind definit de rel.(3.108) (în figură au fost reprezentate și componentele spectrale omise, cu linie întreruptă). Rezultă imediat că: :

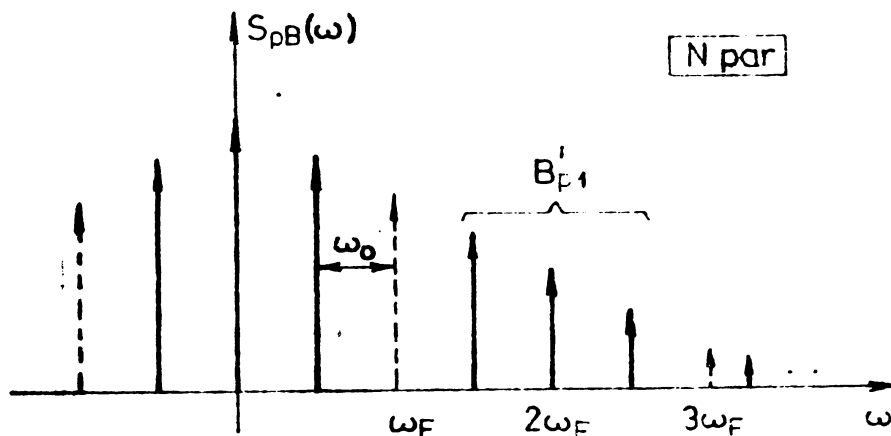


Fig.3.10.

$$K_{Bi} = \frac{(2i+1)\omega_F}{\omega_0} + 1 \quad K'_{Bi} = \frac{(2i+1)\omega_F}{\omega_0} - 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.113)$$

Pentru evaluarea limitelor erorii $e_{pA}(t)$ se va proceda la un calcul direct.

Pornind de la rel.(3.107), se scrie expresia spectrului $S_{pA}(\omega)$, funcție de coeficienții c_k . Se are în vedere, în

acest scop, rel.(3.97). Se obține (fig.3.9.a) :

$$S_{pA}(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} 2\pi \cdot c [(2i+1)\omega_F] \delta[\omega - (2i+1)\omega_F] + \sum_{i=0}^{\infty} 2\pi c [-(2i+1)\omega_F] \cdot \delta[\omega + (2i+1)\omega_F] \quad (3.114)$$

Cu $S_{pA}(\omega)$ sub această formă, se determină spectrul $E_{pA}(\omega)$ al erorii "alias" $e_{pA}(t)$. Rezultă că (fig.3.9.b):

$$\begin{aligned} E_{pA}(\omega) &= \sum_{i=1}^{\infty} 2\pi c [-(2i+1)\omega_F] \delta[\omega + (2i+1)\omega_F] - \sum_{i=1}^{\infty} 2\pi \cdot \\ &\cdot \left\{ c [(2i+1)\omega_F] + c [-(2i+1)\omega_F] \right\} \delta(\omega + \omega_F) - \\ &- 2\pi c(\omega_F) \delta(\omega + \omega_F) - 2\pi c(-\omega_F) \delta(\omega - \omega_F) - \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} 2\pi \left\{ c [(2i+1)\omega_F] + c [-(2i+1)\omega_F] \right\} \delta(\omega - \omega_F) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} 2\pi c [(2i+1)\omega_F] \delta[\omega - (2i+1)\omega_F] \quad (3.115) \end{aligned}$$

Avînd în vedere că :

$$e_{pA}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{pA}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.116)$$

precum și proprietatea de filtraj a funcției $\delta(\omega)$, se obține după calcule :

$$\begin{aligned}
 e_{pA}(t) = & \sum_{i=1}^{\infty} c [-(2i+1)\omega_F] e^{-j(2i+1)\omega_F t} - \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ c [(2i+1)\omega_F] + \right. \\
 & \left. + c [-(2i+1)\omega_F] \right\} e^{-j\omega_F t} - c(\omega_F) e^{-j\omega_F t} - c(-\omega_F) e^{j\omega_F t} - \\
 & - \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ c [(2i+1)\omega_F] + c [-(2i+1)\omega_F] \right\} e^{j\omega_F t} + \sum_{i=1}^{\infty} c [(2i+1)\omega_F] e^{j(2i+1)\omega_F t}
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

respectiv inegalitatea :

$$|e_{pA}(t)| \leq 2 |c(\omega_F)| + 6 \sum_{i=1}^{\infty} |c [(2i+1)\omega_F]| \tag{3.118}$$

Pe baza el.(3.110), (3.111) și (3.113), rezultă în final inegalitatea căutată:

$$\begin{aligned}
 |e_p(t)| \leq & \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} B'_{pi} |\cos \omega_F t| |1 - e^{-j2(i-1)\omega_F t}| + \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^{\infty} B'_{pi} |\sin \omega_F t| |1 + e^{-j2(i-1)\omega_F t}| + 2\pi |c(\omega_F)| + 6 \sum_{i=1}^{\infty} |c [(2i+1)\omega_F]| \right\}
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

în care valoarea lui B'_{pi} este dată de expresiile (3.112), (3.113).

O comparație între expresiile (3.104) și (3.119) evidențiază următoarea diferență: în timp ce pentru cazul N impar, la fel ca și în regim aperiodic, erorile "alias" se anulează în punctele de eșantionare (rel.3.104), o asemenea afirmație nu poate fi făcută cu privire la cazul N par. Este adevărat că pe baza inegalității (3.119) nu se poate afirma nici contrariul, adică că în punctele de eșantionare nu are

loc anularea erorilor "alias", chiar dacă membrul drept al rel.(3.119) ar diferi de zero.

Chestiunea poate fi lămurită pornind de la expresia exactă a erorii $e_p(t)$, pentru cazul N par. Este utilă însă și următoarea observație: componenta $e_{pB}(t)$ a erorii se anulează în punctele de eșantionare (rel.(3.111)). Problema se reduce prin urmare la cercetarea componentei $e_{pA}(t)$.

Drept punct de plecare se consideră expresia (3.117), pusă sub forma :

$$e_{pA}(t) = \left(e^{-j2i\omega_F t} - 1 \right) \sum_{i=1}^{\infty} c[-(2i+1)\omega_F] e^{-j\omega_F t} + \left(e^{j2i\omega_F t} - 1 \right) \sum_{i=1}^{\infty} c[(2i+1)\omega_F] e^{j\omega_F t} - \sum_{i=0}^{\infty} c[(2i+1)\omega_F] e^{-j\omega_F t} - \sum_{i=0}^{\infty} c[-(2i+1)\omega_F] e^{j\omega_F t} \quad (3.120)$$

Pentru $t = nT$, adică în punctele de eșantionare, se obține ($\omega_F = \pi/T$) :

$$e_{pA}(nT) = - \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ c[(2i+1)\omega_F] + c[-(2i+1)\omega_F] \right\}$$

sau, avînd în vedere că $c_k = c_{-k}$:

$$e_{pA}(nT) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2R_e \left\{ c[(2i+1)\omega_F] \right\} \quad (3.121)$$

Prin $R_e \{ \}$ s-a notat partea reală a coeficientului din paranteză.

Din rel.(3.121) se desprinde următoarea concluzie originală și de mare interes în aplicațiile practice: în regim periodic, cu excepția unei clase restrânse de semnale, erorile "alias" nu se anulează în punctele de eșantionare, dacă numărul de eșantioane prelevate este par. Se exceptează de la această regulă funcțiile periodice carecure, dar care satisfac condiția:

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_{\sigma} \left\{ c \left[(2k+1)\omega_F \right] \right\} = 0 \quad (3.122)$$

precum și funcțiile impare (funcțiile impare îndeplinesc condiția (3.122), avînd nulă partea reală a coeficienților c_k).

Excepția menționată, de neanulare a erorilor în punctele de eșantionare, dacă N este par, are următoarele aplicații imediate:

1. Prin compararea valorilor semnalului reconstituit, în punctele de eșantionare, cu valorile eșantioanelor, se poate stabili dacă frecvența de eșantionare corespunde sau nu cerințelor teoremei eșantionării. Procedeu, nementionat încă în literatura de specialitate, este aplicabil în cazul unei clase extrem de largi de semnale periodice.

2. În echipamentele și sistemele electronice cu prelucrare numerică a semnalelor, din considerentele expuse la pct.1.2.3, se prelucrează un număr par de eșantioane. În această situație, dacă teorema eșantionării nu este satisfăcută, valorile reconstituite în punctele de eșantionare comportă erori. Se recomandă deci evitarea, în algoritmi de reconstituire, a calculării semnalului în punctele de eșantionare, preluîndu-se direct valorile eșantioanelor—oricum disponibile (tendința de reconstituire a valorilor eșantionate este determinată de o scriere mai simplă a programului de calcul).

3.7. Evaluarea valorii medii patratice și a valorii patratice totale a erorilor "alias" [96]

Limitele stabilite în paragraful precedent, precum și cele menționate în literatura de specialitate, cu privire la erorile "alias", deși utile, prezintă serioase neajunsuri din punct de vedere aplicativ.

Ne referim în primul rând la faptul că ele intervin, în general, în relații de inegalitate, atingerea valorilor limită avînd loc doar pentru anumite funcții semnal, particulare (această constatare rezultă din analiza procedurii de stabilire a relațiilor menționate). În această situație nu este posibilă compararea - din punctul de vedere al erorilor "alias" maxime - a două semnale reconstituite, deoarece semnalul cu limită calculată de valoare mai mare, poate avea de fapt o eroare maximă mai scăzută.

Un al doilea motiv, poate cel mai important, este următorul.

Aprecierea, pe baza criteriului erorii absolute maxime, a gradului de apropiere dintre semnalul reconstituit și semnalul inițial, este puțin concludentă. Mult mai adecvat și de altfel aproape în exclusivitate utilizat în teoria semnalelor, este criteriul celor mai mici patrate [14] [97].

Conform acestui criteriu, măsura abaterii semnalului reconstituit, față de semnalul inițial, este dată de eroarea patratice totală respectiv eroarea medie patratice. Se impune deci cu necesitate evaluarea acestor mărimi.

Este momentul să se observe că, cu toate precizările de mai sus, problema evaluării valorii medii patratice a erorilor "alias" aproape că nu este abordată în literatură. Sînt citate în legătură cu această chestiune doar două lucrări [1], care se referă la cazul semnalelor aleatoare.

Datorită acestui fapt va fi reluată, în cele ce urmează, problema erorilor "alias", cu scopul stabilirii unor relații între valoarea patratice totală respectiv valoarea

rea medie patratice a acestor erori și spectrul semnalului inițial. Vom avea în vedere semnalele deterministe, aperi-
dice și periodice.

3.7.1. Eroarea pătratică totală "alias" pentru semnale aperiodice

Se consideră un semnal $s(t)$ aperiodic, eșantionat cu o frecvență mai mică decât frecvența Nyquist. La reconstituire apar prin urmare erori "alias", exprimate în domeniul timp respectiv frecvență, de rel.(3.49).

Semnalul reconstituit $s^*(t)$ fiind de bandă finită, deci nelimitat în timp, din rel.(3.49) rezultă că, în general, semnalul eroare $e(t)$ va fi de asemenea nelimitat în timp (afirmația este certă în cazul unor semnale $s(t)$, de durată finită). Este firesc deci, ca pentru început, să calculăm eroarea patratice totală a lui $e(t)$.

Se va utiliza în acest scop teorema lui Parseval pentru funcții aperiodice, care afirmă că [14]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad (3.123)$$

Se poate scrie, prin urmare :

$$E^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega \quad (3.124)$$

Pe baza expresiei lui $E(\omega)$, dată de rel.(3.50), se obține apoi :

$$E^2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\omega_F} |S(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\omega_F}^{\omega_F} \left| - \sum_{i=1}^{\infty} S(\omega + 2i\omega_F) \right|^2 d\omega + \int_{-\omega_F}^{\omega_F} \left| - \sum_{i=-1}^{\infty} S(\omega + 2i\omega_F) \right|^2 d\omega + \int_{\omega_F}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \right\} \quad (3.125)$$

O primă simplificare a rel.(3.125) rezultă dacă se are în vedere că $S(\omega) = \dot{S}(-\omega)$ și prin urmare:

$$\int_{-\infty}^{-\omega_F} |S(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{-\omega_F} |\dot{S}(-\omega)|^2 d\omega = \int_{\omega_F}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (3.126)$$

Ultima egalitate a rezultat printr-o schimbare de variabilă $\omega' = -\omega$ și cunoscând că $|\dot{S}(\omega)| = |S(\omega)|$. O transformare similară ne conduce la egalitatea :

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_F}^{\omega_F} \left| \sum_{i=-1}^{-\infty} S(\omega + 2i\omega_F) \right|^2 d\omega &= \int_{-\omega_F}^{\omega_F} \left| \sum_{i=-1}^{-\infty} \dot{S}(-\omega - 2i\omega_F) \right|^2 d\omega = \\ &= \int_{-\omega_F}^{\omega_F} \left| \sum_{i=1}^{\infty} S(\omega + 2i\omega_F) \right|^2 d\omega \end{aligned} \quad (3.127)$$

Utilizând relațiile de mai sus, în expresia (3.125), avem în cele din urmă :

$$B^2 = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{\omega_F}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\omega_F}^{\omega_F} \left| \sum_{i=1}^{\infty} S(\omega + 2i\omega_F) \right|^2 d\omega \right\} \quad (3.128)$$

respectiv :

$$B^2 = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{\omega_F}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\omega_F}^{\omega_F} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |S(\omega + 2i\omega_F)|^2 \right] d\omega \right\} \quad (3.129)$$

Ultima relație este o inegalitate care comportă, din punct de vedere aplicativ, dezavantajul menționat la începutul acestui paragraf. Cu toate acestea ea a fost scrisă, putând fi utilă în anumite situații, prin faptul că operează doar cu modulul funcției spectrale.

Din compararea rel.(3.90) și (3.129) rezultă, în fine, că atât limita superioară cât și eroarea medie patrată depind în cele din urmă de $|S(\omega)|$, $\omega \gg \omega_p$, fiind cu atât mai reduse cu cât $|S(\omega)|$ are valori mai mici.

3.7.2. Eroarea medie patrată "alias" pentru semnale periodice

Vom reconsidera cazul unui semnal periodic $s_p(t)$, definit de rel.(3.95), eșantionat cu o frecvență mai mică decât limita stabilită de teorema eșantionării. Erorile "alias" care apar sînt reprezentate în domeniul timp de diferența (3.96). Pentru determinarea lor vom utiliza, la fel ca și în cazul precedent, teorema lui Parseval.

În cazul funcțiilor periodice această teoremă este exprimată de egalitatea [22]:

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c(k\omega_0)|^2 \quad (3.130)$$

$c(k\omega_0)$ reprezentînd, în relația de mai sus, coeficienții Fourier ai lui $f_p(t)$. Se va observa că de această dată este posibilă determinarea erorii medii patratice, o măsură mai realistă a gradului de apropiere între două semnale, decât eroarea patrată totală [16].

Vom trata problema simultan pentru cazul N impar respectiv cazul N par.

Se pornește în acest scop de la spectrul semnalului eroare, care prin analogie cu rel.(3.50), rezultă de forma:

$$E_p(\omega) = \begin{cases} S_p(\omega) & |\omega| > \omega_F \\ - \sum_{|i|=1}^{\infty} S_p(\omega - 2i\omega_F) & |\omega| \leq \omega_F \end{cases} \quad (3.131)$$

$S_p(\omega)$ de mai sus este dat de expresia (3.97). Aplicarea teoremei lui Parseval conduce la relația :

$$E_p^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e_p^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_e(k\omega_0)|^2 \quad (3.132)$$

prin $c_e(k\omega_0)$ fiind notați coeficienții dezvoltării în seria Fourier a lui $e_p(t)$.

Se are acum în vedere că o componentă $E_{PK}(\omega)$ a spectrului semnalului eroare, are forma generală (rel.(3.97)):

$$E_{PK}(\omega) = c_e(k\omega_0) 2\pi \cdot \delta(\omega - k\omega_0) \quad (3.133)$$

În consecință, coeficienții $c_e(k\omega_0)$ ce intervin în rel. (3.132), pot fi determinați din expresiile de definire (3.131) ale lui $E_p(\omega)$.

Cu această precizare se obține:

$$E_p^2 = \sum_{k=-\infty}^{K_1} |c(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left| - \sum_{i=-1}^{-\infty} c(k\omega_0 - 2i\omega_F) \right|^2 + \\ + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left| - \sum_{i=1}^{\infty} c(k\omega_0 - 2i\omega_F) \right|^2 + \sum_{k=K_1}^{\infty} |c(k\omega_0)|^2 \quad (3.134)$$

limitele K_1, K_2 fiind date de relațiile :

$$K_1 = \frac{\omega_F}{\omega_0} + 0,5 \quad K_2 = \frac{\omega_F}{\omega_0} - 0,5 \quad \text{pentru } N \text{ impar} \quad (3.135)$$

$$K_1 = \frac{\omega_F}{\omega_0} + 1 \quad K_2 = \frac{\omega_F}{\omega_0} \quad \text{pentru } N \text{ par}$$

Relația (3.134) poate fi simplificată cunoscând că $c(k\omega_0) = \dot{c}(k\omega_0)$ și că $|c(k\omega_0)| = |\dot{c}(k\omega_0)|$. Utilizând aceste proprietăți rezultă imediat că :

$$\sum_{k=-\infty}^{-K_1} |c(k\omega_0)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{-K_1} |\dot{c}(-k\omega_0)|^2 = \sum_{k=K_1}^{\infty} |c(k\omega_0)|^2 \quad (3.136)$$

După cum :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left| - \sum_{i=-1}^{-\infty} c(k\omega_0 - 2i\omega_F) \right|^2 &= \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \dot{c}(-k\omega_0 - 2i\omega_F) \right|^2 = \\ &= \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \dot{c}(k\omega_0 - 2i\omega_F) \right|^2 = \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left| \sum_{i=1}^{\infty} c(k\omega_0 - 2i\omega_F) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.137)$$

Cu relațiile de mai sus se obține :

$$E_p^2 = 2 \left\{ \sum_{k=K_1}^{\infty} |c(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left| \sum_{i=1}^{\infty} c(k\omega_0 - 2i\omega_F) \right|^2 \right\} \quad (3.138)$$

respectiv:

$$E_p^2 \leq 2 \sum_{k=K_1}^{\infty} |c(k\omega_0)|^2 + 2 \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |c(k\omega_0 - 2i\omega_F)| \right]^2 \quad (3.139)$$

Se observă analogia formală dintre rel.(3.128) și (3.138) respectiv (3.129) și (3.139) (integralele sînt înlocuite cu sume iar în locul spectrului continuu intervin coeficienții Fourier).

Este de asemenea evident că limita erorii medii patratice este cu atît mai coborîtă cu cît $|c(k\omega_0)|$, pentru $k \geq K_1$, este mai mic.

3.7.3. Eroarea medie patratică "alias" pentru semnale de durată finită

În aplicațiile practice sînt prelucrate-din motive evidente-semnale de durată finită. Spectrul acestora fiind nelimitat pe axa pulsațiilor, prin reconstituirea semnalului eșantionat se introduc erori "alias". Ne propunem să cercetăm în cele ce urmează problema acestor erori, cu scopul evaluării mărimii lor.

În elaborarea problemei se impune de la început următoarea observație.

Un semnal $s_{T_0}(t)$, limitat în intervalul $[-T_0/2, T_0/2]$, poate fi reconstituit în acest interval pe baza eșantioanelor sale, în două moduri: considerîndu-l fie ca atare, adică ca semnal aperiodic ori se consideră semnalul periodic ce rezultă prin repetarea sa :

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{T_0}(t+nT_0) \quad (3.140)$$

Dacă cele două proceduri de reconstituire conduc la rezulta-

te diferite , atunci problema erorilor se impune a fi abordată separat, pentru fiecare dintre ele. Vom lămuri pentru început această chestiune.

Se reconsideră în acest scop procesul de reconstituire (fig.3.11). Prin $\bar{S}(\omega)$ și $\bar{S}_p(\omega)$ au fost notate spectrele corespunzătoare lui $s_{T_0}(t)$ respectiv $s_p(t)$, eșantionate.

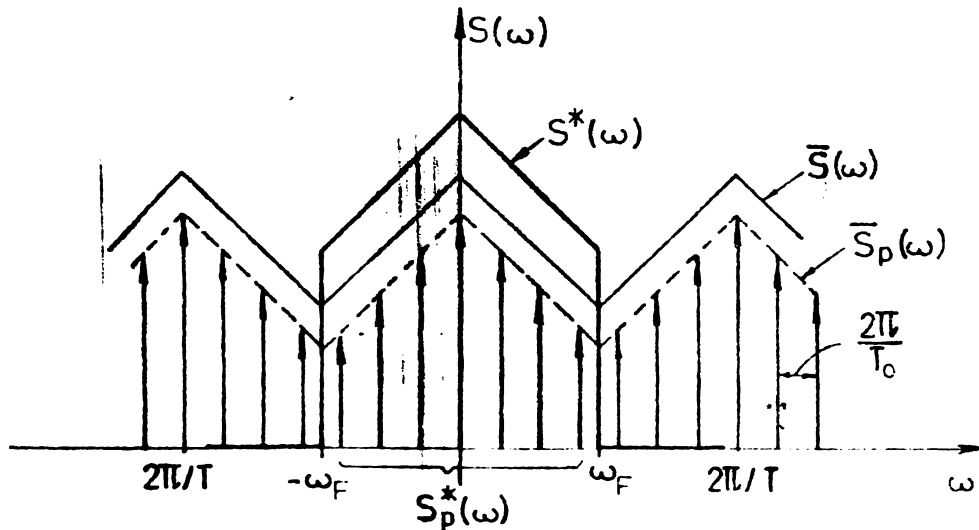


Fig.3.11

Pasul de eșantionare s-a considerat egal cu T și s-a presupus un număr impar de eșantionare.

Din cele arătate la pct.1.2.3. rezultă că, componentele lui $S_p(\omega)$ diferă prin $(2\pi/T_0)\delta(\omega - k\omega_0)$ de valorile lui $S(\omega)$, corespunzătoare aceluiași frecvențe. Este clar că o aceeași diferență se va păstra și între $\bar{S}(\omega)$ și $\bar{S}_p(\omega)$ respectiv între spectrele $S^{\pi}(\omega)$ și $S_p^{\pi}(\omega)$ ale semnalelor reconstituite (fig. 3.11).

Se desprinde din cele de mai sus concluzia că semnalul periodic reconstituit $s_p^{\pi}(t) \Leftrightarrow S_p^{\pi}(\omega)$ este dat de repetarea periodică, cu perioada T_0 , a semnalului aperiodic reconstituit $s^{\pi}(t) \Leftrightarrow S^{\pi}(\omega)$. Deoarece $s^{\pi}(t)$ este nelimitat în timp (pct.3.7.2 există posibilitatea ca în intervalul $[-T_0/2, T_0/2]$ semnalele reconstituite să difere între ele, dacă contribuțiile perioadelor învecinate, în intervalul menționat, nu se compensează reciproc (fig.3.12).

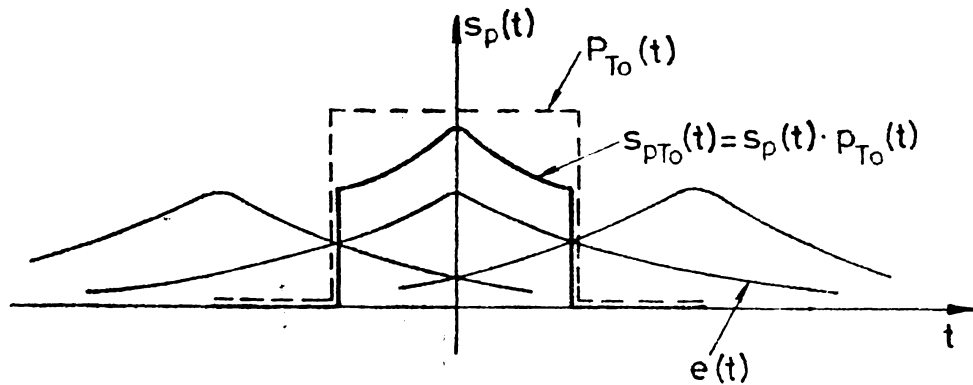


Fig.3.12

Vom nota, pentru cele ce urmează, prin $s_{T_0}^*(t)$ și $s_{pT_0}^*(t)$ semnalele obținute prin limitarea, la intervalul $[-T_0/2, T_0/2]$, a lui $s^*(t)$ respectiv $s_p^*(t)$, adică:

$$s_{T_0}^*(t) = s^*(t) \cdot p_{T_0}(t) \quad (3.141)$$

$$s_{pT_0}^*(t) = s_p^*(t) \cdot p_{T_0}(t) \quad (3.142)$$

și vom demonstra că întotdeauna:

$$s_{T_0}^*(t) \neq s_{pT_0}^*(t) \quad (3.143)$$

În cele de mai sus s-a notat prin $p_{T_0}(t)$ impulsul unitar de durată T_0 .

Pentru a justifica neegalitatea (3.143) este suficient să se arate că o aceeași relație este valabilă pentru spectrele corespunzătoare :

$$S_{T_0}^*(\omega) \neq S_{pT_0}^*(\omega) \quad (3.144)$$

în care $S_{T_0}^{\#} \rightleftharpoons s_{T_0}^{\#}(t)$ respectiv $S_{pT_0}^{\#} \rightleftharpoons s_{pT_0}^{\#}(t)$.

Spectrele ce intervin în rel.(3.144) se pot determina pe baza expresiilor (3.141), (3.142) și aplicând teorema convoluției în frecvență [8]. Se obține:

$$S_{T_0}^{\#}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^{\#}(\xi) P_{T_0}(\omega - \xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_p}^{\omega_p} S^{\#}(\xi) P_{T_0}(\omega - \xi) d\xi \quad (3.145)$$

și :

$$S_{pT_0}^{\#}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_p^{\#}(\xi) P_{T_0}(\omega - \xi) d\xi \quad (3.146)$$

S-a utilizat notația $P_T(\omega) \rightleftharpoons p_T(t)$ și s-a ținut cont că $S^{\#}(\omega)$ este limitat în intervalul $[-\omega_F, \omega_F]$. Se are acum în vedere că $S_p^{\#}(\omega)$, ca spectru limitat pe axa pulsațiilor, este dat de expresia (fig.3.11) :

$$S_p^{\#}(\omega) = \sum_{k=-K}^K 2\pi \cdot \hat{c}(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) \quad (3.147)$$

cu limita:

$$K = \frac{\omega_F}{\omega_0} - 0,5 \quad (3.148)$$

Trebuie precizat că atât fig.3.11 cât și rel.(3.147), corespund cazului analizat, când sînt prelevate un număr N impar de eșantioane ale semnalului.

Înlocuind valoarea spectrului $S_p^{\#}(\omega)$ în rel.(3.146) se obține, după inversarea operației de integrare cu sumarea și aplicarea teoremei convoluției cu funcția delta, că:

$$S_{pT_0}^{\#}(\omega) = \sum_{k=-K}^K c(k\omega_0) \cdot P_{T_0}(\omega - k\omega_0) \quad (3.149)$$

Pe baza relației evidente :

$$\delta(k\omega_0) = \frac{1}{T_0} S^*(k\omega_0) \quad (3.150)$$

rezultă, în fine:

$$S_{PT_0}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-K}^K S^*(k\omega_0) P_{T_0}(\omega - k\omega_0) \cdot \omega_0 \quad (3.151)$$

Din compararea rel.(3.145) cu (3.151) și avînd în vedere fig.(3.11), rezultă că suma (3.151) reprezintă aproximare integralei (3.145), pe baza eșantioanelor funcției de integrat, prelevate în punctele $\omega = k\omega_0$, $k = -K, -(K-1), \dots, K-1, K$. Se arată însă în [22] că valoarea unei integrale este reprezentată exact de o sumă de forma (3.151), dacă funcția de sub integrală este de bandă limitată și eșantionată conform teoremei eșantionării.

Să verificăm prin urmare dacă funcția :

$$F(\xi) = S^*(\xi) P_{T_0}(\omega - \xi), \quad \omega = ct. \quad (3.152)$$

satisfacă condițiile menționate.

Prima condiție, ca $F(\xi)$ să aibe spectrul corespunzător, de lățime finită, presupune- în virtutea proprietății de dualitate a transformatei Fourier - ca funcția de timp $f(t) \rightleftharpoons F(\xi)$, să fie de durată limitată. Utilizînd teorema convoluției în domeniul timp [8], din relația (3.152) rezultă că :

$$f(t) = s^*(t) * p_1(t) \quad (3.153)$$

cu notația : $p_1(t) \rightleftharpoons P_{T_0}(\omega - \xi)$

Este evident că $f(t)$ nu are durată finită, deoarece unul dintre factorii produsului de convoluție și anume

$s^*(t)$, este de durată nelimitată [8]. Se poate afirma deci, fără a mai verifica și cea de a doua condiție, că cel puțin pentru o valoare $\omega = ct.$, are loc:

$$S_{T_0}^*(\omega) \neq S_{pT_0}^*(\omega)$$

inegalitate din care decurge valabilitatea rel.(3.143).

Rezultatul obținut mai sus impune, în consecință, un studiu al erorilor separat pentru fiecare dintre cele două proceduri de reconstituire menționate.

Vom începe cu cazul mai simplu al reconstituirii semnalului $s_p(t)$, când pot fi utilizate relațiile stabilite în paragraful precedent (rel.(3.138), (3.139)). Pentru ca în expresii să intervină valorile spectrului $S(\omega) \rightarrow s_{T_0}(t)$ (ca fiind elementul cunoscut), se are în vedere că :

$$c(k\omega_0) = \frac{1}{T_0} S(k\omega_0) \quad (3.154)$$

Ultima relație este evidentă dacă se are în vedere că $c(k\omega_0)$ reprezintă, în acest caz, coeficienții Fourier ai unuia semnal periodic $s_p(t)$, rezultat prin repetarea, cu perioada T_0 , a lui $s_{T_0}(t)$.

Se obține :

$$E_{pT_0}^2 = \frac{2}{T_0^2} \left\{ \sum_{k=K_1}^{\infty} |S(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |S(k\omega_0 - 2i\omega_p)|^2 \right] \right\} \quad (3.155)$$

respectiv :

$$E_{pT_0}^2 \leq \frac{2}{T_0^2} \left\{ \sum_{k=K_1}^{\infty} |S(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |S(k\omega_0 - 2i\omega_p)|^2 \right] \right\} \quad (3.156)$$

Se precizează că limitele K_1, K_2 , din expresiile de mai sus,

sînt date de rel.(3.135).

În ce privește evaluarea erorii medii patratice la reconstituirea lui $s_{T_0}(t)$, ca semnal aperiodic, se va observa că nu este aplicabilă teoria stabilită la pct.3.7.1.

Teoria respectivă se referă la erorile corespunzătoare întregului semnal reconstituit și care, în cazul de față, fiind de durată nelimitată, se extinde înafara intervalului $[-T_0/2, T_0/2]$.

Dacă :

$$e(t) = s_{T_0}(t) - s^*(t) \quad (3.157)$$

sîntem interesați în evaluarea valorii medii patratice $E_{T_0}^2$ a semnalului:

$$e_{T_0}(t) = e(t) \cdot p(t) \quad (3.158)$$

adică a semnalului eroare aferent intervalului $[-T_0/2, T_0/2]$. Prin $p_{T_0}(t)$ s-a notat impulsul unitar de durată T_0 (fig.3.12). Funcția spectrală $E_{T_0}(\omega) \Leftrightarrow e_{T_0}(t)$ rezultă din rel. (3.141), pe baza teoremei convoluției în frecvență :

$$E_{T_0}(\omega) = E(\omega) \otimes P_{T_0}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) P_{T_0}(\omega - \xi) d\xi, \quad P_{T_0}(\omega) \Leftrightarrow p_{T_0}(t) \quad (3.159)$$

Se poate scrie deci (rel.3.123) :

$$\begin{aligned} E_{T_0}^2 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} e_{T_0}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi T_0} \int_{-\infty}^{\infty} |E_{T_0}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi T_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) P_{T_0}(\omega - \xi) d\xi \right|^2 d\omega \quad (3.160) \end{aligned}$$

In scopul aducerii expresiei (3.160) la o formă mai simplă, utilă în aplicațiile practice, se are în vedere inegalitatea lui Schwarz pentru funcții complexe (rel.3.84). Pe baza acesteia rezultă :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) P_{T_0}(\omega - \xi) d\xi \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2 d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |P_{T_0}(\omega - \xi)|^2 d\xi \quad (3.161)$$

Vom evalua acum integrala :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |P_{T_0}(\omega - \xi)|^2 d\xi \quad (3.162)$$

Pentru aceasta se va observa că $P_{T_0}(\omega - \xi) \stackrel{!}{=} e^{-j\omega t} \cdot p_{T_0}(-t)$ și avînd în vedere teorema lui Parseval pentru funcții aperiode (rel.3.123), se obține :

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j\omega t} \cdot p_{T_0}(-t)]^2 dt = 2\pi \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j2\omega t} dt = 2\pi T_0 \frac{\sin \omega T_0}{\omega T_0} \quad (3.163)$$

In cele de mai sus s-a considerat impulsul unitar $p_{T_0}(t)$ ca în fig.3.12 și s-a utilizat faptul că $p_{T_0}(t) = p_{T_0}(-t)$.

Pe baza rel.(3.161), (3.163), expresia (3.160) capătă forma :

$$F_{T_0}^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2 d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega T_0}{\omega T_0} d\omega \quad (3.164)$$

In inegalitatea de mai sus intervine integrala cu limite infinite :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega T_0}{\omega T_0} d\omega \quad (3.165)$$

a cărei convergență trebuie dovedită. Se are în vedere, în acest scop, că funcția de sub integrală fiind pară, se poate scrie:

$$I_1 = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega T_0}{\omega T_0} d\omega = \frac{2}{T_0} \text{Si}(\infty) = \frac{\pi}{T_0} \quad (3.166)$$

Prin $\text{Si}(t)$ a fost notată funcția sinus integral, a cărei valoare la infinit este $\text{Si}(\infty) = \pi/2$ [14]. Cu rel.(3.166), expresia limitei erorii medii patratice devine:

$$E_{T_0}^2 \leq \frac{1}{4\pi T_0} \int_{-\infty}^{\infty} |E(\xi)|^2 d\xi \quad (3.167)$$

respectiv, după înlocuirea valorii spectrului $E(\xi)$ (rel.3.50) și efectuarea calculelor, la fel ca și în paragraful 3.7.1, se obține inegalitatea finală:

$$E_{T_0}^2 \leq \frac{1}{2\pi T_0} \left\{ \int_{\omega_F}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega + \int_{-F}^F \left[\sum_{i=1}^{\infty} |S(\omega + 2i\omega_F)|^2 \right] d\omega \right\} \quad (3.168)$$

Limitele obținute pentru eroarea medie patratice "alias", $E_{pT_0}^2$ și $E_{T_0}^2$, nu dau un răspuns direct la următoarea întrebare, extrem de importantă din punct de vedere aplicativ. Oare erorile $E_{pT_0}^2$ și $E_{T_0}^2$, corespunzătoare celor două proceduri de reconstituire, diferă sau nu între ele? Dacă $E_{pT_0}^2 \neq E_{T_0}^2$, care dintre proceduri și în ce condiții se dovedește mai avantajoasă față de cealaltă, din punctul de vedere al erorii medii patratice?

Se precizează că prima întrebare are sens obiar și în situația în care este cunoscut că semnalul reconstituit-

te prin cele două proceduri diferă, ca funcții de timp, între ele.

Vom aborda problema ridicată pornind de la relația (3.160). Pe baza expresiei energiei unui semnal de durată limitată, funcție de valori discrete ale spectrului corespunzător, se poate scrie că [14]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) P_{T_0}(\omega - \xi) d\xi \right|^2 d\omega = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) P_{T_0}(n\omega_0 - \xi) d\xi \right|^2 \quad (3.169)$$

Vom presupune, urmînd a verifica apoi în ce măsură este adevărat, că este valabilă egalitatea:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) P_{T_0}(n\omega_0 - \xi) d\xi \right|^2 = \omega_0^2 \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(k\omega_0) P_{T_0}[(n-k)\omega_0] \right|^2 \quad (3.170)$$

Înlocuind expresiile de mai sus în rel.(3.160), rezultă:

$$E_{T_0}^2 = \frac{1}{T_0^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(k\omega_0) P_{T_0}(n\omega_0 - k\omega_0) \right|^2 \quad (3.171)$$

Se are în vedere în continuare că [8]:

$$P_{T_0}[(n-k)\omega_0] = T_0 \frac{\sin \frac{(n-k)\omega_0 T_0}{2}}{(n-k)\omega_0 T_0 / 2} = T_0 \frac{\sin(n-k)\pi}{(n-k)\pi} = \begin{cases} T_0 & \text{pt. } n=k \\ 0 & \text{pt. } n \neq k \end{cases} \quad (3.172)$$

încît se obține:

$$E_{T_0}^2 = \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |E(k\omega_0)|^2 \quad (3.173)$$

Vom face acum constatarea că, la fel ca și în cazul semnalelor reconstituite $s^{\#}(t)$ și $s_p^{\#}(t)$, este valabilă egalitatea:

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t+nT_0) \quad (3.174)$$

și prin urmare:

$$c_e(k\omega_0) = \frac{1}{T_0} E(k\omega_0) \quad (3.175)$$

Prin $c_e(k\omega_0)$ au fost notați aici coeficienții Fourier ai semnalului eroare $e_p(t)$. Pe baza ultimei relații se obține, din (3.173) :

$$E_{T_0}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_e(k\omega_0)|^2 = E_p^2 T_0 \quad (3.176)$$

Se poate trage deci concluzia că, în ipoteza menționată, cele două procedee de reconstituire conduc la aceleași erori medii patratice. Rămîne de stabilit în continuare, dacă rel.(3.170) este sau nu adevărată.

Vom scrie în acest scop că (rel.(3.172)) :

$$\omega_0^2 \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(k\omega_0) \cdot P_{T_0} [(n-k)\omega_0] \right|^2 = 4\pi^2 |E(n\omega_0)|^2 \quad (3.177)$$

relație valabilă pentru orice n întreg.

Pe de altă parte, în baza inegalității lui Schwarz (rel.(3.84))

avem :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) P_{T_0}(n\omega_0 - \xi) d\xi \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |E(\xi)|^2 d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |P_{T_0}(n\omega_0 - \xi)|^2 d\xi \quad (3.178)$$

Utilizând rel.(3.162), (3.163), se obține:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |P_{T_0}(n\omega_0 - \xi)|^2 d\xi = 2\pi T_0 \frac{\sin n\omega_0 T_0}{n\omega_0 T_0} = \begin{cases} 2\pi T_0 & \text{pentru } n = 0 \\ 0 & \text{altminteri} \end{cases} \quad (3.179)$$

respectiv :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) P_{T_0}(n\omega_0 - \xi) d\xi \right|^2 \leq 2\pi T_0 \int_{-\infty}^{\infty} |E(\xi)|^2 d\xi \quad \text{pentru } n = 0 \quad (3.180)$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) P_{T_0}(n\omega_0 - \xi) d\xi \right|^2 = 0 \quad \text{în rest}$$

Expresiile ce intervin în rel.(3.180) și (3.177) reprezintă cei doi membri ai rel.(3.170). Este limpede că egalitatea (3.170) nu poate fi adevărată, deoarece în timp ce membrul stâng se anulează pentru orice $n \neq 0$, valorile corespunzătoare ale membrului drept sînt diferite, în general, de zero. Cazul particular în care $|E(n\omega_0)|^2 = 0$ pentru orice $n \neq 0$, corespunde unui semnal eroare al cărui spectru $E(n\omega_0) = 0$ pentru $n \neq 0$.

Un asemenea spectru poate avea însă doar un semnal de durată finită ori așa cum s-a arătat, $e(t) \Leftrightarrow E(\omega)$ este nelimitat în timp.

Din cele de mai sus se desprinde concluzia originală [că, prin esantionarea și reconstituirea unui semnal de durată

limitată, considerat ca atare sau periodizat, valorile erorii medii patratice corespunzătoare celor două proceduri de reconstituire vor diferi întotdeauna între ele.

Mai mult, $E_{T_0}^2$ va fi mai mare sau mai mic ca $E_{P_{T_0}}^2$, după cum :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) P_{T_0}(n\omega_0 - \xi) d\xi \right|^2 > 4\pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |E(k\omega_0)|^2 \quad (3.181)$$

respectiv:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) P_{T_0}(n\omega_0 - \xi) d\xi \right|^2 < 4\pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |E(k\omega_0)|^2 \quad (3.182)$$

Avînd în vedere rel.(3.178), ultima inegalitate capătă o formă mai simplă, utilizabilă în aplicațiile practice :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E(\xi)|^2 d\xi \leq \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |E(k\omega_0)|^2$$

În toate expresiile scrise, $E(\omega)$ este de forma dată de rel.(3.50).

CAPITOLUL 4

PROCEDURILE DE RECONSTITUIRE CU REDUCEREA ERORII "ALIAS"

4.1. Introducere

În capitolul precedent a fost subliniată ideea că, de cele mai multe ori, reconstituirea semnalelor eșantionate comportă erori de principiu determinate de o frecvență de eșantionare insuficientă și/sau prelucrarea unui număr finit de eșantioane. Ambele categorii de erori care apar, pot fi evaluate global-așa cum s-a arătat-prin eroarea de tip "alias", analizată pe larg la pct.3.5-3.7. Este firesc deci, ca în direcția elaborării unor procedee de reconstituire cu erori cât mai mici, să fie abordată, în primul rând, problema reducerii erorilor "alias".

Din cele expuse în același capitol se poate observa totodată că, fie valoarea maximă fie valoarea patratică totală respectiv valoarea medie patratică a erorilor "alias" depinde, într-o formă sau alta, de spectrul semnalului continuu, înafara limitelor $\pm \pi/T$ (T reprezentând pasul de eșantionare). Prin urmare, o reducere a erorilor "alias" este posibilă printr-o modificare potrivită (micșorarea modulului și/sau restrângerea limitelor) a spectrului menționat anterior.

O transformare simplă, în domeniul timp, care ar putea modifica spectrul unui semnal, în sensul amintit, este transformarea patratică respectiv transformarea inversă acesteia, simbolizată prin operatorul A (cap.2). Ne propunem să cercetăm, în cele ce urmează, în ce condiții transformările specificate permit reducerea, la reconstituirea, a erorilor "alias".

Concluziile stabilite în cap.2 și care au sugerat, de altfel, principiul procedurii amintite, de reducere a erorilor "alias", se referă aproape în exclusivitate la funcțiile periodice. Aceste concluzii pot fi extrapolate însă-cel puțin în ce privește modificarea limitelor spectrelor-și în cazul unor semnale aperiodice. Se au în vedere acele semnale aperi-

dice, care conduc, prin repetarea lor periodică, la semnale periodice ce satisfac anumite condiții (menționate în cap.2). Justețea celor afirmate anterior este evidentă, cunoscând faptul că limitele spectrelor, corespunzătoare unui semnal aperiodic respectiv unui semnal periodic, ce rezultă prin repetarea semnalului aperiodic, sînt practic aceleași.

Vom aborda prin urmare, problema reducerii erorilor "alias", folosind aceeași procedură, atît în cazul reconstituirii semnalelor periodice cît și la reconstituirea semnalelor aperiodice, de durată limitată (s-a optat pentru aceste clase de semnale, ca fiind cele mai utile în aplicațiile practice).

În ce privește criteriul de evaluare a erorii se va avea în vedere eroarea medie patrată, din considerentul expus la pct.3.7.2.

Trebuie semnalată însă, în legătură cu acest fapt, următoarea dificultate.

Pentru semnalele periodice respectiv semnalele rezultate prin periodizarea unui semnal de durată limită (pct. 3.7.3), au fost stabilite expresii exacte ale erorilor medii patratice "alias" la reconstituire (rel.(3.138) și (3.155)). În cazul semnalelor aperiodice de durată limitată, reconstituite ca atare, nu se cunoaște însă decît limita superioară a acestei erori (inegalitatea (3.168)).

Vom soluționa problema ridicată în următorul sens.

Din cele prezentate la pct.3.7.3 rezultă că eroarea medie patrată la reconstituirea în regim aperiodic, a semnalului limitat în timp, se situează în jurul erorii ce apare prin reconstituirea semnalului periodic, obținut prin periodizare. Diferența între cele două erori depinde de gradul de aproximare a integralei din membrul stîng cu suma din membrul drept al rel.(3.170) (se va observa că suma din membrul drept reprezintă aproximarea, prin metoda dreptunghiurilor, a integralei din membrul stîng [97]).

Oricum, este de așteptat, ca în general, odată cu micșorarea sumei din membrul drept să se micșoreze și valoarea integralei.

Vom observa apoi că în timp ce membrul drept al rel.(3.170) determină eroarea la reconstituirea semnalului obținut prin periodizare, integrala din membrul stîng inter-

vine în expresia erorii la reconstituirea semnalului aperiodic. Pe baza celor precedente se poate afirma-cu rezerva menționată-că o reducere a erorii "alias", la reconstituirea semnalului periodic rezultat prin repetarea unui semnal de durată limitată, implică totodată o micșorare a erorii ce apare la reconstituirea, ca semnal aperiodic, a semnalului de durată limitată.

Prin urmare, fie că este vorba de semnale periodice sau semnale aperiodice de durată limitată, problema reducerii erorilor "alias" este suficient a fi abordată doar în regim periodic. Se poate conchide, așadar, că atât din punctul de vedere al procedurii cât și în ce privește metoda de tratare, problema în discuție a fost redusă la cazul funcțiilor periodice.

Este, de altfel, o trăsătură generală a acestei lucrări, ca o serie de probleme, greu sau deloc rezolvabile în regim aperiodic, să fie soluționate pe baza teoriei specifice regimului periodic.

4.2. Procedeu de reducere a erorii "alias" la reconstituirea semnalelor periodice

Se va avea în vedere, pentru început, modificarea spectrului semnalului prin transformarea patratică. Procedura de reconstituire optimizată va consta în următoarele :

Dacă $s_p(t)$ reprezintă semnalul ce trebuie eșantionat și reconstituit, vom reconstitui în locul acestuia pe $s'_p(t) = [s_p(t)]^2$, după care se revine, printr-o metodă potrivită (cap.2), la semnalul inițial (de fapt la un semnal "alias" al semnalului inițial).

Facem precizarea că eșantioanele lui $s'_p(t)$ rezultă prin simpla ridicare la patrat a eșantioanelor corespunzătoare ale lui $s_p(t)$.

Notînd prin $e'(t)$ eroarea "alias" la reconstituirea lui $s'_p(t)$, adică :

$$e'(t) = s'_p(t) - s_p^*(t) \quad (4.1)$$

rezultă :

$$s_p^{\#}(t) = s_p'(t) - e'(t) = s_p^2(t) - e'(t) \quad (4.2)$$

Se determină apoi semnalul reconstituit conform procedurii de ridicare la pătrat, $s_p^{\#}(t)$, astfel încît:

$$\left[s_p^{\#}(t) \right]^2 = e_p^{\#}(t) \quad (4.3)$$

funcție de care se obține eroarea metodei:

$$e_p(t) = s_p(t) - s_p^{\#}(t) \quad (4.4)$$

Scriind ultima relație sub forma :

$$s_p^{\#}(t) = s_p(t) - e_p(t)$$

rezultă prin ridicare la pătrat :

$$\left[s_p^{\#}(t) \right]^2 = s_p^2(t) - 2 s_p(t) e_p(t) + e_p^2(t) \quad (4.5)$$

Eroarea $e_p(t)$ fiind în general redusă, în ultima relație poate fi neglijat termenul $e_p^2(t)$, față de diferența celorlalți doi. Prin urmare, cu o bună aproximare se poate scrie (rel.(4.3), (4.2)) :

$$\left[s_p^{\#}(t) \right]^2 = s_p^2(t) - e'(t) \approx s_p^2(t) - 2s_p(t)e_p(t)$$

respectiv:

$$e_p(t) = \frac{e'(t)}{2 s_p(t)} \quad (4.6)$$

Ultima egalitate exprimă eroarea "alias" ce apare la reconstituirea conform procedurii optimizată, funcție de eroarea $e'(t)$, calculabilă.

Notînd acum prin $e(t)$ eroarea "alias" introdusă la reconstituirea directă a lui $s_p(t)$, în virtutea celor convenite la pct.4.1 ar urma să cercetăm dacă și în ce condiții:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e_p^2(t) dt < \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^2(t) dt \quad (4.7)$$

sau după înlocuirea lui $e_p(t)$ (rel.(4.6)) :

$$\int_0^{T_0} \frac{e'^2(t)}{4s_p^2(t)} dt < \int_0^{T_0} e^2(t) dt \quad (4.8)$$

Ultima inegalitate poate fi adusă la o formă mai convenabilă, pe baza unei proprietăți cunoscute a funcțiilor integrabile [97][98] : dacă $f(x) \geq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$ și dacă f și g sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \quad (4.9)$$

(proprietatea de monotonie a integralei).

Notînd cu m marginea inferioară a lui $s_p(t)$ pe intervalul $[0, T_0]$, este evident că :

$$\frac{e'^2(t)}{4m^2} > \frac{e'^2(t)}{4s_p^2(t)}, \quad t \in [0, T_0] \quad (4.10)$$

încît (rel.(4.9)) :

$$\int_0^{T_0} \frac{s'^2(t)}{4m^2} dt \geq \int_0^{T_0} \frac{s'^2(t)}{4s_p^2(t)} dt, \quad t \in [0, T_0] \quad (4.11)$$

In baza rel.(4.11), inegalitatea (4.8) este satisfăcută dacă are loc:

$$\frac{1}{4m^2} \int_0^{T_0} s'^2(t) dt < \int_0^{T_0} e^2(t) dt \quad (4.12)$$

Condiția de integrabilitate, impusă de proprietatea de monotonie, este satisfăcută de cele mai multe semnale utilizate în practică.

Se menționează că o transformare, în sensul de mai sus, a inegalității (4.8) este posibilă și prin utilizarea formulei generale a mediei pentru integrale [97]. O asemenea cale ar fi introdus însă condiții suplimentare, restrîngînd prin această mulțimea funcțiilor $s_p(t)$ ce pot fi avute în vedere.

Înainte de a stabili posibilitatea și condițiile în care inegalitatea (4.12) ar putea avea loc așa cum s-a arătat mai sus-vom analiza procedeul de reconstituire bazat pe transformarea inversă ridicării la patrat. Deoarece în situațiile practice, din motive evidente, vom opera cu semnale pentru care această transformare se reduce la operația de extragere a radicalului (cap.2), o vom denumi în cele ce urmează transformarea radical.

Metoda constă, de această dată, în reconstituirea semnalului $s''(t) = \sqrt{s_p(t)}$ și determinarea în final, prin ridicare la patrat, a semnalului $s_R''(t)$, reconstituit conform procedeului. Se precizează că transformarea radical se aplică, de fapt, numai eșantioanelor lui $s_p(t)$.

Cu notațiile de mai sus se poate scrie:

$$e''(t) = s_p''(t) - s_p''^{\#}(t) \Rightarrow s_p''^{\#}(t) = \sqrt{s_p(t)} - e''(t) \quad (4.13)$$

apoi:

$$s_R^{\#}(t) = [s_p''^{\#}]^2 = s_p(t) - 2\sqrt{s_p(t)}e''(t) + e''^2(t) \quad (4.14)$$

respectiv eroarea metodei :

$$e_R^{\#}(t) = s_p(t) - s_R^{\#}(t) \approx 2\sqrt{s_p(t)} e''(t) \quad (4.15)$$

Ultima relație a rezultat neglijînd în expresia (4.14), pe $e''^2(t)$, față de diferența celorlalți termeni din sumă.

Condiția :

$$\int_0^{T_0} e_R^{\#2}(t) dt < \int_0^{T_0} e^2(t) dt \quad (4.16)$$

impune satisfacerea inegalității :

$$\int_0^{T_0} 4s_p(t)e''^2(t) dt < \int_0^{T_0} e^2(t) dt \quad (4.17)$$

care, printr-o manieră similară cu cea utilizată la procedeul prin ridicare la patrat, poate fi înlocuită cu :

$$4M \int_0^{T_0} e''^2(t) dt < \int_0^{T_0} e^2(t) dt \quad (4.18)$$

S-a notat aici prin M , marginea superioară a lui $s_p(t)$ pentru

$t \in [0, T_0]$.

Din analiza inegalităților (4.12) și (4.18), similar, rezultă clar că problema ce trebuie rezolvată în continuare este aceeași, atât în cazul procedurii prin ridicare la patrat cât și în cazul reconstituirii prin transformarea radical. Vom aborda deci chestiunea în cazul primului procedeu, urmînd a face, la momentul potrivit, particularizările ce se impun pentru reconstituirea prin transformarea radical.

Pe baza erorii medii patratice "alias" la reconstituirea semnalelor periodice (rel.(3.138)), inegalitatea (4.12) devine:

$$\frac{1}{4m^2} \left\{ \sum_{k=K_1}^{\infty} |c'(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left| \sum_{i=1}^{\infty} c'(k\omega_0 - 2i\omega_F) \right|^2 \right\} <$$

$$\sum_{k=K_1}^{\infty} |c(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left| \sum_{i=1}^{\infty} c(k\omega_0 - 2i\omega_F) \right|^2 \quad (4.19)$$

În expresiile de mai sus, limitele K_1, K_2 sînt date de rel. (3.135). Prin $c(k\omega_0)$ și $c'(k\omega_0)$ au fost notați coeficienții Fourier ai semnalelor $s_p(t)$ respectiv $s'_p(t) = s_p^2(t)$. Celelalte notații au semnificația cunoscută.

Inegalitatea (4.19) reprezintă deja o condiție pentru semnalele $s_p(t)$, care fiind satisfăcută, ne asigură de reconstituirea acestor semnale cu erori mai mici, utilizînd procedeul prin ridicare la patrat. Dat fiind forma ei relativ complicată, prezintă însă o aplicabilitate redusă. De aceea, vom încerca să dăm o formă mai simplă relației amintite, chiar dacă sîntem conduși prin aceasta la restrîngerea clasei de funcții, a căror reconstituire prin procedeul menționat are sens.

În acest scop, se va înlocui mai întîi rel.(4.19) cu inegalitatea :

$$\frac{1}{4m^2} \left\{ \sum_{k=K_1}^{\infty} |c'(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |c'(k\omega_0 - 2i\omega_F)| \right]^2 \right\} -$$

$$\sum_{k=K_1}^{\infty} |c(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |c(k\omega_0 - 2i\omega_F)| \right]^2 \quad (4.20)$$

Ven restringe apoi clasa semnalelor $s_p(t)$ la mulțimea funcțiilor de bandă nelimitată și a căror coeficienți Fourier sînt reali iar $c(k\omega_0 - 2i\omega_F)$, $i = 1, 2, \dots, \infty$, $|k| \leq K_2$, au același semn. În aceste condiții inegalitatea (4.20) devine:

$$\frac{1}{4m^2} \left\{ \sum_{k=K_1}^{\infty} |c'(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |c'(k\omega_0 - 2i\omega_F)| \right]^2 \right\} -$$

$$\sum_{k=K_1}^{\infty} |c(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |c(k\omega_0 - 2i\omega_F)| \right]^2 \quad (4.21)$$

Compararea sumelor din cei doi membri ai inegalității poate fi acum redusă, la compararea termenilor din aceste sume. Se va observa, în acest scop, că termenii de forma $c(k\omega_0 - 2i\omega_F)$, $k = -K_2, \dots, 0, \dots, K_2$, $i = 1, \dots, \infty$, sînt de fapt aceiași cu $c(k\omega_0)$, $k = K_1, \dots, \infty$. Afirmatia este valabilă și în ce privește termenii $c'(k\omega_0 - 2i\omega_F)$ și $c'(k\omega_0)$.

Cu aceste precizări, inegalitatea (4.21) este adevărată dacă :

$$\frac{1}{4m^2} |c'(k\omega_0)|^2 < |c(k\omega_0)|^2, \quad k = K_1, K_1+1, \dots, \infty \quad (4.22)$$

Este util de observat importanța condiției ca $s_p(t)$ să fie de bandă nelimitată. Rel.(4.22) implică inegalitatea (4.21) numai dacă numărul termenilor n_n, n_d , din membrul stîng

respectiv membrul drept al inegalității satisfac condiția $n_s < n_d$.

Daoă $s_p(t)$ ar fi de bandă limitată, atunci $n_s = 2n_d - 1 > n_d$ (se consideră că $s_p(t)$ are cel puțin o componentă armonică). Doar pentru $s_p(t)$ de bandă nelimitată, conform celor cunoscute de la cap.2, $n_s \leq n_d$.

Cu notația :

$$c(k\omega_0) = A_k - jB_k \quad (4.23)$$

condițiile precizate mai sus pot fi rezumate la următoarele:

$$a) B_k = 0, \quad k > K_1 \quad (4.24)$$

$$b) \text{ pentru orice } k \text{ astfel încît } k \leq K_2 \\ c(k\omega_0 - 2i\omega_F), \quad i = 1, 2, \dots, \text{ au același semn} \quad (4.25)$$

$$d) \frac{1}{2^{|m|}} |c'(k\omega_0)| < |c(k\omega_0)|, \quad k > K_1 \quad (4.26)$$

Stabilirea condițiilor în care procedeul prin transformarea radical conduce la erori de reconstituire mai mici, decurge în mod similar celor de mai sus.

Analog rel.(4.19), (4.21), (4.24)-(4.26), se obține, cu aceleași condiții pentru funcțiile $s_p(t)$ că :

$$4M \left\{ \sum_{k=K_1}^{\infty} |c''(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left| \sum_{i=1}^{\infty} c''(k\omega_0 - 2i\omega_F) \right|^2 \right\} < \\ \sum_{k=K_1}^{\infty} |c(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left| \sum_{i=1}^{\infty} c(k\omega_0 - 2i\omega_F) \right|^2 \quad (4.27)$$

respectiv:

$$4M \left\{ \sum_{k=K_1}^{\infty} |c^n(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |c^n(k\omega_0 - 2i\omega_p)| \right]^2 \right\} <$$

$$\sum_{k=K_1}^{\infty} |c(k\omega_0)|^2 + \sum_{k=-K_2}^{K_2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |c(k\omega_0 - 2i\omega_p)| \right]^2 \quad (4.28)$$

precum și ●

$$a) B_k = 0, \quad k \geq K_1 \quad (4.29)$$

b) pentru orice k astfel încît $|k| \leq K_2$

$$c(k\omega_0 - 2i\omega_p), \quad i = 1, 2, \dots \text{ au același semn} \quad (4.30)$$

$$d) \sqrt{M} |c^n(k\omega_0)| < |c(k\omega_0)|, \quad k \geq K_1 \quad (4.31)$$

În relațiile de mai sus, $c^n(k\omega_0)$ reprezintă coeficienții dezvoltării în serie Fourier ai lui $s_p^n(t) = \sqrt{s_p}(t)$.

Se va remarca și de această dată că trecerea de la rel.(4.28) la inegalitatea (4.31), impune necesitatea ca semnalul $s_p(t)$ să fie de bandă nelimitată.

Dacă $s_p(t)$ ar fi de bandă finită, conform celor discutate în cap.2, $s_p^n(t)$ poate să fie sau nu de bandă limitată. Ar exista în această situație semnale pentru care $n_g > n_d$, în cazul cărora nu se mai poate face compararea termen cu termen a membrilor inegalității (4.28)). Pentru aceste semnale condițiile nu mai pot fi scrise sub forma (4.29)-(4.31).

Vom încheia acest paragraf subliniind în mod deosebit faptul că, mulțimea de semnale, care prin aplicarea unuia dintre procedeele menționate pot fi reconstituite cu erori mici, este mai largă decît mulțimea funcțiilor ce satisfac condițiile (4.24)-(4.26), (4.29)-(4.31) (ne referim la aceste condiții ca fiind mai comode de utilizat în practică). Pe de altă parte, în calcule au fost neglijați termenii $e^{i2}(t)$ (rel.(4.5)) respectiv $e^{n2}(t)$ (rel.(4.15)).

Aspectele menționate impun ca :

- în cazul semnalelor care nu satisfac condițiile amintite, să fie testată, prin calcul direct, posibilitatea aplicării celor două procedee. Există șanse ca unele dintre aceste semnale să poată fi reconstituite cu erori mai mici, conform celor arătate mai sus;

- indiferent de faptul că semnalele prelucrate satisfac sau nu - în mod evident - condițiile (4.19), (4.27), se impune de fiecare dată verificarea, prin calcul direct, a eficacității procedurii aplicat, tocmai datorită neglijărilor menționate.

În concluzie, estimările teoretice trebuie dublate necondiționat de o verificare experimentală, pentru fiecare tip de funcție semnal, prelucrată.

4.3. Procedeu de reducere a erorii "alias"

la reconstituirea semnalelor aperiodice

La pct.4.1 s-a arătat că problema reconstituirii optimizate a unui semnal aperiodic $s_{T_0}(t)$, cu durata finită, poate fi redusă la problema similară pentru semnalul rezultat prin repetarea periodică a lui $s_{T_0}(t)$. Ori pentru semnalele periodice există deja teoria elaborată la pct.4.2. Prin urmare, condițiile (4.19) respectiv (4.27) pot fi aplicate și în acest caz, cu precizarea că $s_p(t)$ va reprezenta, de această dată, semnalul obținut prin periodizarea lui $s_{T_0}(t)$.

În ce privește periodizarea lui $s_{T_0}(t)$, vom observa că este de dorit ca perioada de repetiție să fie egală cu durata T_0 a semnalului. Acesta este cazul în care erorile medii pătratice, corespunzătoare lui $s_{T_0}(t)$ respectiv semnalului $s_p(t)$, rezultat prin periodizare, au valorile cele mai apropiate. Se va avea în vedere apoi ca periodizarea să fie astfel făcută, încît să se obțină $s_p(t)$ de bandă nelimitată, dacă se dorește utilizarea unor condiții de forma (4.24)-(4.26) respectiv (4.29)-(4.31). Pentru anumite tipuri de semnale, cerințele menționate nu pot fi simultan satisfăcute.

Dacă la cele de mai sus se adaugă constatarea

deja făcută (pct.4.1), oă micșorarea erorilor la reconstituirea lui $s_p(t)$, nu determină, cu strictețe, reducerea erorilor de reconstituire ale lui $s_T(t)$, rezultă că în cazul semnalelor aperiodice se impune, cu și mai multă necesitate, verificarea prin calcul direct a eficacității procedurii utilizat.

CAPITOLUL 5

PROCEDEU DE RECONSTITUIRE BAZAT PE TEOREMA DEPLASARII, CU UTILIZAREA TFR

5.1. Introducere

La reconstituirea semnalelor eșantionate, pe lângă obținerea unor erori cât mai mici, prezintă un interes deosebit și scurtarea duratei de calcul. De altfel, cele două cerințe amintite sînt strîns corelate între ele, o precizie mai ridicată a reconstituirii necesitînd, de regulă, un timp de calcul mai mare.

Problema menționată nu a fost lipsită de atenție din partea cercetătorilor. La pct.1.3. a fost evidențiată o tehnică de calcul pentru reconstituirea semnalelor aperiodeice (rel.(1.12)), care prin evitarea calculului repetat al funcției sinus, scurtează considerabil durata operațiilor.

În ce privește reconstituirea semnalelor periodice eșantionate, rezultate spectaculoase, legate de scurtarea duratei de calcul, au fost obținute după utilizarea și în această problemă a TFR. Se va descrie pe scurt, procedeul cunoscut de reconstituire, bazat pe TFR [99], acesta servind drept termen de comparație pentru un algoritm original elaborat de autor și prezentat în cadrul acestui capitol.

Înainte de abordarea problemei se face precizarea că în general, în literatură, se face distincție între seria Fourier discretă (SFD) și transformata Fourier discretă TFD [100].

SFD este asociată unei secvențe periodice de eșantionare și este, la rîndul ei, o funcție periodică [100]. TFD corespund unei secvențe de durată finită și are numărul de componente limitat [100].

Uneori, distincția menționată nu este evidențiată [8] [16]. Dacă ea totuși apare, motivul este de ordin formal, pentru a păstra o oarecare analogie cu realitatea fizică, știind că semnalelor periodice le corespunde seria Fourier, în timp ce semnalelor aperiodice li se asociază transformata Fourier. Analogia are însă un caracter limitat, deoarece atât funcția de timp cât și transformata Fourier corespunzătoare pot fi infinite în timp respectiv pe axa pulsațiilor.

În cele ce urmează se va avea în vedere distincția specificată și se va utiliza SFD, cu caracteristicile generale date mai sus. Motivația unui asemenea punct de vedere este următoarea.

Procesul de reconstituire are la bază teoria spectrului semnalului eșantionat. Este posibilă o analogie între spectrul unui semnal periodic eșantionat, care este de asemenea o funcție periodică, cu valori discrete, și SFD. Această legătură, care facilitează aprofundarea chestiunilor, pe baza unor rezultate deja cunoscute, nu este posibilă în cazul TFD, care are un număr limitat de componente.

Se reamintesc apoi expresiile ce definesc transformarea directă și inversă corespunzătoare SFD [16] [100].

Dacă $s_n = s_p(nT)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, reprezintă cele N eșantioane prelevate uniform dintr-o perioadă a semnalului $s_p(t)$, periodic, componentele SFD sînt definite de expresia:

$$S_m = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j2\pi mn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-jmn\omega_0 T}, \quad m=0, 1, \dots, N-1 \quad (5.1)$$

Revenirea la eșantioanele inițiale, pornind de la componentele S_m , este posibilă prin transformarea inversă:

$$s_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S_m e^{j2\pi mn/N} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S_m e^{jmn\omega_0 T}, \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (5.2)$$

Expresiile lui S_m și s_n , definite de obicei formal [100], au fost date și în forma în care intervin mărimile ω și T , cu semnificația cunoscută, pentru a evidenția legătura cu fenomenul fizic de eșantionare.

Vom observa, în fine, că în dezacord cu denumirea, metoda de calcul rapid TFR a fost elaborată inițial pentru SFD [101]. Prin urmare, aplicarea ei la SFD nu comportă nici o problemă.

5.2. Algoritm de reconstituire prin adiționare de componente de frecvență, cu utilizarea TFR

Se pleacă de la observația că un semnal periodic eșantionat poate fi reconstituit funcție de componentele SFD, conform expresiei [16]:

$$s_p^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{m=-M}^M S_{1m} e^{j2\pi mt/NT} \quad (5.3)$$

în care:

$$S_{1m} = S_m \text{ și } M = (N-1)/2 \quad (5.4)$$

dacă N este impar, respectiv:

$$S_{1m} = \begin{cases} S_m/2 & , |m| = N/2 \\ S_m & , |m| < N/2 \end{cases} \text{ și } M = N/2 \quad (5.5)$$

pentru N par.

Se demonstrează totodată că reconstituirea fără erori este posibilă numai dacă cele N eşantioane ale semnalului, pe baza cărora sînt calculate componentele S_m , sînt prelevate conform cerinţelor teoremei eşantionării funcţiilor periodice [16]. În aceste condiţii însă, componentele S_m de rang $\pm N/2$ sînt întotdeauna nule (fig.1.7), încît rel. (5.3), (5.4), (5.5) capătă o formă mai convenabilă :

$$s_p^{\#}(t) = \frac{1}{N} \sum_{m=-M}^M S_m e^{j2\pi mt/NT} \quad (5.6)$$

în care:

$$M = (N-1)/2, \quad N \text{ impar} \quad (5.7)$$

$$M = N/2 \text{ sau } (N/2)-1, \quad N \text{ par} \quad (5.8)$$

Vom da o justificare proprie primelor două afirmaţii, pentru a evidenţia legătura lor cu procesul fizic.

Se consideră, în acest scop, expresia de reconstituire a unui semnal periodic eşantionat, scrisă sub forma:

$$s_p^{\#}(t) = \sum_{k=-K}^K \delta_k e^{jk\omega_0 t} \quad (5.9)$$

Egalitatea de mai sus a rezultat explicitînd, în rel.(1.24), coeficienţii "alias" δ_k , daţi de rel.(1.39). Totodată pe baza observaţiilor de la pct.1.2.4, valorile lui K sînt date de expresiile (5.4), (5.5).

Comparînd acum relaţiile ce definesc coeficienţii δ_k (rel.1.39) şi componentele S_m , rezultă imediat că :

$$\delta_k = \frac{1}{N} S_m, \quad \text{pentru } m = k \quad (5.10)$$

Pe baza ultimei egalități, identitatea rel.(5.3) și (5.9) este evidentă, prima afirmație fiind astfel demonstrată.

În ce privește cea de a doua afirmație vom observa că, rel.(5.9) și prin urmare și expresia (5.3), asigură o reconstituire exactă numai în situația că este satisfăcută teorema eșantionării funcțiilor periodice, caz în care $\hat{c}_k = c_k$ (pct.1.2.3).

Procedeeul cunoscut în literatură, bazat pe SFD și la care ne vom referi în continuare, evită calculul valorilor semnalului continuu, cu rel.(5.3), deoarece aceasta nu se pretează la utilizarea TFR (incluzând și componente cu rang negativ). Tehnica folosită este următoarea.

În setul inițial de N componente aferente unei perioade: S_m , $m = 0, 1, \dots, N-1$ (fig.5.1.a), presupuse cunoscute, se introduc între componentele de rang $N/2$, $(N/2)+1-N$ fiind par-componente noi, de valoare nulă. Se obține succe-

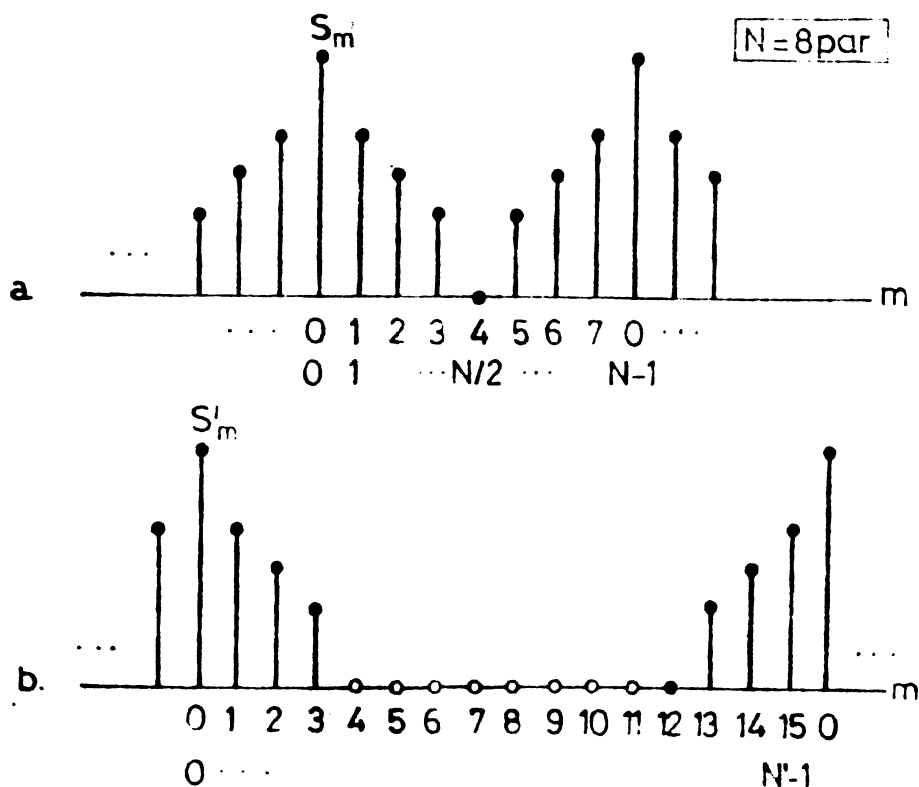


Fig.5.1.

siunea cu N' componente, notate cu S'_m , reprezentată în fig.5.1.b.

Aplicînd noului set de componente transformarea inversă (rel.(5.2)) :

$$s'_n = \frac{1}{N'} \sum_{m=0}^{N'-1} S'_m e^{j2\pi mn/N'} \quad , \quad n = 0, 1, \dots, N'-1 \quad (5.11)$$

se obțin N' eșantioane. Aceste eșantioane aparțin aceluiași semnal ce include eșantioanele s_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, pe baza cărora a fost determinat setul inițial de componente $S_m [10^2]$.

Vom justifica afirmația de mai sus printr-o metodă proprie, pe baza dependenței dintre SFD și spectrul unui semnal periodic eșantionat. O asemenea legătură cu procesul fizic, pe lîngă că permite utilizarea unor rezultate deja stabilite în cap.1, evidențiază și anumite particularități ale procedurii (pct.5.3).

Utilizînd rel.(5.10) și (1.34) rezultă că :

$$\bar{S}_{pk}(\omega) = \frac{2\pi}{NT} S_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (5.12)$$

Egalitatea de mai sus ne arată că orice modificare privind valoarea și/ sau rangul componentelor S_m , determină modificări similare în expresia lui $\bar{S}_p(\omega)$.

Se poate afirma, deci, că introducerea unor componente S_m suplimentare este echivalentă cu creșterea, în spectrul semnalului eșantionat, a intervalului dintre două repetări succesive ale spectrului semnalului inițial. În fig.5.2.a este reprezentat spectrul $\bar{S}_p(\omega)$, corespunzător setului inițial de componente S_m . După introducerea de componente suplimentare, spectrul corespunzător $\bar{S}'_p(\omega)$ se prezintă ca în fig. 5.2.b. Se remarcă o creștere a perioadei de repetiție de la $N\omega_0 = 2\pi/T$ la $N'\omega_0 = 2\pi/T'$.

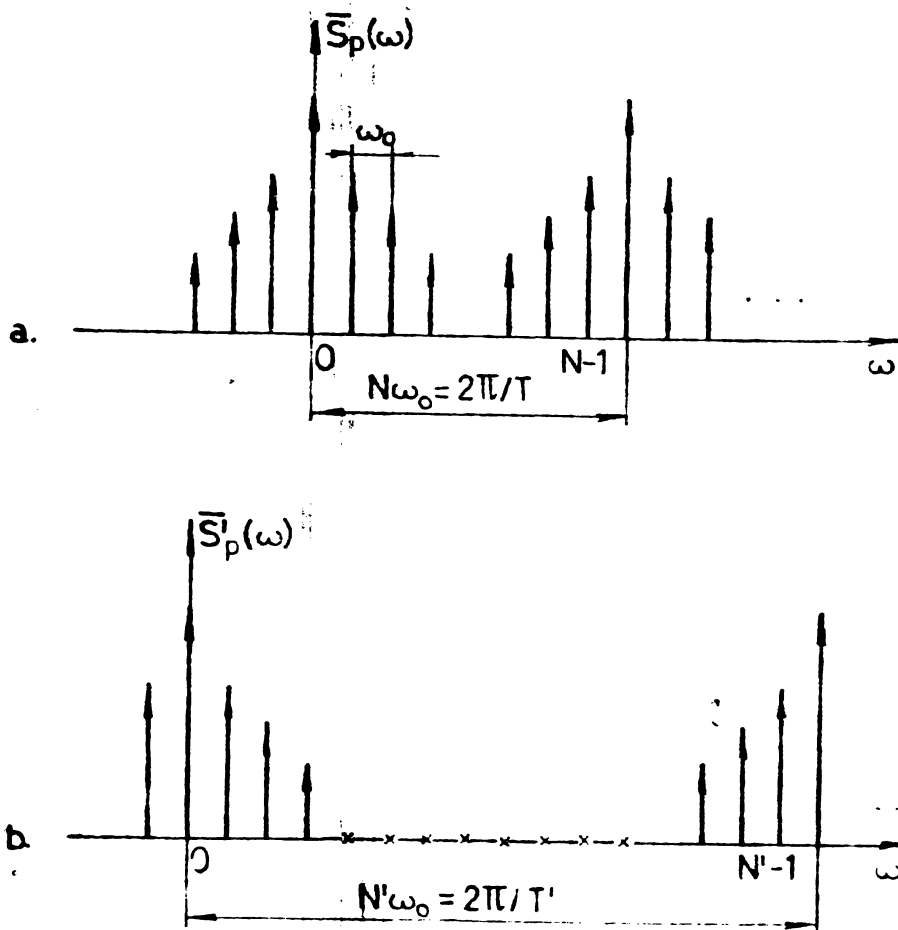


Fig.5.2.

Din cele două figuri rezultă că spectrele $\bar{S}_p(\omega)$ și $\bar{S}'_p(\omega)$ conduc, prin aplicarea procedurii cunoscut de reconstituire, la un același semnal $s_p(t)$. Datorită acestui fapt, și seturile de eșantioane s_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$ respectiv s'_n , $n = 0, 1, \dots, N'-1$ vor aparține ambele semnalului $s_p(t)$. Intre cele două succesiuni există diferențe privind numărul de eșantioane și pasul de eșantionare ($N' > N \Rightarrow T' < T$, perioada semnalului fiind una și aceeași).

Procedeele descrise prezintă avantajul major că operația de reconstituire constă într-o transformare inversă pentru SPD cu N' componente. Ori această operație se poate efectua utilizând unul dintre algoritmi cunoscuți de TFR [16] [100], rezultând o scurtarea considerabilă a timpului de calcul.

Este semnificativ în această privință următorul raționament.

Calcululele ce le implică reconstituirea unei valori, utilizând rel.(5.3), sînt similare—în ce privește natura operațiilor—cu calculul unei componente la aplicarea TFR inverse [16]. În ambele situații menționate, se impune calcularea unui anumit număr de produse complexe, ori acestea determină, aproape în exclusivitate durata de calcul.

În consecință, este posibilă o comparare a duratei reconstituirii unui anumit număr de valori, prin utilizarea rel.(5.3) respectiv a algoritmului descris, prin compararea numărului de produse complexe pe care le necesită fiecare dintre procedeele amintite.

Presupunînd că se impune reconstituirea a V valori, numărul P , de produse complexe calculate, rezultă după cum urmează:

- prin utilizarea rel.(5.3), (5.4), $P_1 = V(N-1)$;
- în ce privește procedeul descris, cu utilizarea TFR, se are în vedere că, aplicarea TFR unui set de V componente, necesită calculul doar a [16]:

$$P_2 = \frac{V}{2} \log_2 V \quad (5.13)$$

produse complexe.

În cele de mai sus N reprezintă numărul inițial de eşantioane respectiv componente ale SFD.

Considerînd pentru exemplificare $N = 16$ și $V = 64$, se obține :

$$P_1 = 160 \quad P_2 = 192$$

Rezultă o scurtare la 1/5 a duratei calcululelor și acest avantaj crește substanțial cu mărirea numărului de valori reconstituite.

5.3. Algoritm de reconstituire bazat pe teorema deplasării

Se consideră drept punct de plecare expresia de reconstituire (5.6), care se scrie sub forma :

$$s_p^{\#}(t) = \frac{1}{N} \left[\sum_{m=0}^M S_m e^{j2\pi mt/NT} + \sum_{m=-M}^{-1} S_m e^{j2\pi mt/NT} \right] \quad (5.14)$$

Avînd în vedere proprietatea de periodicitate a TFD [16] [100], dată de relația :

$$S_m = S_{m+N} \quad (5.15)$$

$s_p^{\#}(t)$ devine :

$$s_p^{\#}(t) = \frac{1}{N} \left[\sum_{m=0}^M S_m e^{j2\pi mt/NT} + \sum_{m=-M}^{-1} S_{m+N} e^{j2\pi mt/NT} \right] \quad (5.16)$$

Efectuînd o schimbare de variabilă $m' = m + N$, se obține apoi:

$$s_p^{\#}(t) = \frac{1}{N} \left[\sum_{m=0}^M S_m e^{j2\pi mt/NT} + \sum_{m=N-M}^{N-1} S_m \cdot e^{-j2\pi t/T} e^{j2\pi mt/NT} \right] \quad (5.17)$$

respectiv:

$$s_p^{\#}(t) = \frac{1}{N} \left[\sum_{m=0}^M S_m e^{j2\pi mt/NT} + \sum_{m=N-M}^{N-1} S_m e^{-jN\omega_0 t} e^{j2\pi mt/NT} \right] \quad (5.18)$$

Se vor utiliza în continuare notațiile :

$$\tilde{S}_m = \begin{cases} S_m, & m = 0, 1, \dots, (N-1)/2 \\ -jN\omega_0 t S_m e^{-jN\omega_0 t}, & m = (N+1)/2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (5.19)$$

dacă N este impar și

$$\tilde{S}_m = \begin{cases} S_m, & m = 0, 1, \dots, (N/2)-1 \\ 0, & m = N/2 \\ S_m \cdot e^{-jN\omega_0 t}, & m = (N/2)+1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (5.20)$$

pentru N par.

Cu ajutorul lor și avînd în vedere valorile lui M (rel. (5.7), (5.8) - pentru N par se consideră $M = N/2$), rezultă că :

$$s_p^\pi(t) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{S}_m e^{j2\pi mt/NT} \quad (5.21)$$

Problema ce se pune în continuare constă în a stabili modul în care o expresie de forma (5.21) poate fi calculată utilizînd TFR.

Algoritmul de calcul TFR operează asupra unui set de N componente, obținîndu-se drept rezultat un același număr de eșantioane. În consecință, utilizarea lui impune reconstituirea simultană a mai multor valori ale semnalului inițial.

Vom presupune că sînt reconstituite simultan N valori, câte una în fiecare interval dintre două eșantioane succesive și întîrziate cu Δt față de eșantionul precedent. Valorile reconstituite corespund, deci, unor momente de timp $(nT + \Delta t)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ și sînt date de expresia :

$$s_p^\pi(nT + \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{S}_m e^{jm\omega_0(nT + \Delta t)} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{S}_m e^{jm\omega_0 \Delta t} e^{j2\pi mn/N} \quad (5.22)$$

pentru $n = 0, 1, \dots, N-1$ și \tilde{S}_m dat de rel.(5.19), (5.20).
 Utilizând acum notațiile :

$$S_{dm} = \begin{cases} \tilde{S}_m \cdot e^{jm\omega_0 \Delta t} & , \quad m = 0, 1, \dots, (N-1)/2 \\ \tilde{S}_m \cdot e^{j\omega_0 \Delta t (N+m)} & , \quad m = (N+1)/2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (5.23)$$

pentru N impar precum și :

$$S_{dm} = \begin{cases} \tilde{S}_m \cdot e^{jm\omega_0 \Delta t} & , \quad m = 0, 1, \dots, (N/2)-1 \\ \tilde{S}_m \cdot e^{j\omega_0 \Delta t (N+m)} & , \quad N/2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (5.24)$$

pentru N par, rezultă că:

$$s_p^*(nT + \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S_{dm} e^{j2\pi mn/N} \quad , \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.25)$$

expresie care, evident , poate fi calculată utilizând TFR.

O comparație între algoritmul cunoscut (pct.5.2) și cel propus în lucrare, evidențiază următoarele aspecte.

a) Algoritmul cunoscut permite calculul simultan al tuturor valorilor ce trebuie reconstituite, oricât de multe, în limitele puterii sistemului de calcul. Deoarece TFR operează cu un număr mare de componente, scurta-rea duratei relative a calculelor este considerabilă. Necesită însă disponibilități de memorie corespunzător numărului de componente prelucrate, și care, în orice caz, este mai mare ca numărul inițial de eșantioane N .

b) Din cele prezentate la pct.5.2. rezultă că

valorile reconstituite cu procedeul cunoscut vor fi distribuite la intervale egale pe durata unei perioade a semnalului $s_p(t)$. Această particularitate poate constitui un dezavantaj major, în anumite situații.

Avem în vedere cazul în care se impune reconstituirea unor valori ale semnalului inițial, neuniform distribuite în intervalul dintre două eșantioane, dar a căror poziție relativă se păstrează de la un interval la altul. N' trebuie astfel ales încît printre valorile reconstituite, uniform repartizate, să se regăsească și valorile dorite.

Pot exista, în acest caz, situații în care N' să rezulte de valoare prea ridicată, încît aplicarea procedeului să devină nejustificată, comparativ chiar cu utilizarea rel.(5.6). Vom considera pentru exemplificare un caz simplu.

Fiind dată succesiunea de eșantioane s_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, ne interesează reconstituirea a numai N' valori, s'_n , întîrziate fiecare cu o aceeași durată Δt față de eșantionul corespunzător (fig.5.3). Este evident că intervalul maxim $\Delta t'$, dintre valorile reconstituite, care să includă

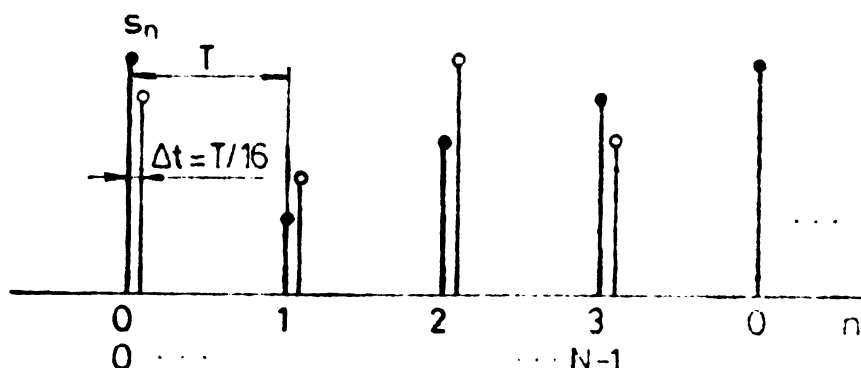


Fig.5.3.

cele N' măriri s'_n , căutate, este dat-din punct de vedere valoris- de cel mai mare divizor comun al mărimilor Δt și T_0 . Funcție de aceste valori, $\Delta t'$ poate rezulta mic, ceea ce conduce la valori ridicate pentru N' ($N' = T_0 / \Delta t'$).

Avînd apoi în vedere că este necesar ca $N' = 2^k$, valoarea se poate crește și mai mult.

Pentru situația din figură, în care $N = 4$, $T/\Delta t = 16$ se obține $\Delta t' = T_0/64$ respectiv $N' = 64$. Numărul de produse complexe ce trebuiesc calculate este (rel.(5.13)): $P_2 = 192$. Reconstituirea prin utilizarea rel.(5.6), necesită în schimb, calculul a numai $P_1 = 12$ produse complexe, ceea ce este, evident, mult mai avantajos.

c) Algoritmul propus, în forma dată anterior, se dovedește relativ mai lent, fiind prelucrate simultan cu TFR doar N componente, în loc de $N'(N < N')$. Capacitatea necesară a memoriei este însă corespunzător mai mică și, ceea ce este demn de subliniat, egală cu cantitatea de memorie utilizată la determinarea componentelor S_m , funcție de cele N eșantioane s_n .

d) Valorile reconstituite, în cazul algoritmului propus, se pot situa la orice interval Δt , același pentru toate, față de eșantionul premergător, corespunzător. Caracteristica menționată îl face mai avantajos, comparativ cu procedeul dat la pct.5.2, în multe situații practice, cînd valorile reconstituite corespund unor momente de timp impuse.

Reluînd exemplul de la pct.b, se constată că algoritmul propus necesită calculul doar a $P_3 = 4$ produse complexe (rel.(5.13)). Acest fapt îl face superior oricărui alt procedeu de reconstituire cunoscut, în cazul concret considerat.

În încheierea acestui paragraf și drept urmare a celor de mai sus, se relevă faptul că cei doi algoritmi-cel cunoscut respectiv cel propus în lucrare-pot fi aplicați în mod combinat, după cum urmează.

Presupunînd componentele F_m , $m = 0, 1, \dots, N-1$ determinate, se intercalează, așa cum s-a arătat la pct. 5.2., un număr de componente nule, corespunzător unor valori reconstituite, uniform distribuite. Secvenței de N' componente, astfel obținută, i se aplică algoritmul propus. Drept consecință vor fi calculate încă N' valori, întîrziate cu Δt fiecare, în raport cu valorile uniforme distribuite, corespunzătoare.

Algoritmul combinat poate fi aplicat în mod repetat, cu scopul obținerii numărului dorit de componente uniform distribuite respectiv întârziate cu diferite valori Δt . Se impune în acest caz o repartizare judicioasă a valorilor reconstituite, pe cele două categorii amintite și pe diferitele etape de reconstituire.

5.4. Recomandări privind aplicarea algoritmului propus

Aceste recomandări sînt legate de faptul că fiind utilizată, în cadrul algoritmului, TFR, numărul de valori reconstituite simultan, egal cu numărul de componente ale TFD, trebuie să fie o putere întreagă a lui 2, adică $N=2^k$, $k > 0$ și întreg.

1. Dacă numărul componentelor TFD este $N \neq 2^k$ se adaugă, înainte de aplicarea procedurii, un număr de componente nule, pînă la satisfacerea condiției $N' = 2^k$. Trebuie avut în vedere că, în acest fel, crește numărul de valori reconstituite.

Pe de altă parte, întârzierile Δt nu se vor considera în raport cu cele N eșantioane inițiale ci față de valorile rezultate prin aplicarea TFR inverse setului de N' componente (acesta include cele N componente inițiale precum și componentele nule, suplimentar adăugate).

2. La pct.1.2.4 a fost prezentată o procedură de reconstituire a semnalelor periodice pare, eșantionate cu $N = 2K$ și care evită erorile ca urmare a frecvenței de eșantionare insuficiente.

Procedura consta, în esență, în determinarea valorii corecte a coeficientului c_K , funcție de \hat{c}_K (rel. (1.62)) și reconstituirea, în continuare, a semnalului, conform celor cunoscute (rel.(1.63)).

Aplicarea acestei proceduri, utilizînd algoritmul propus, presupune modificarea setului de componente S_m , $m = 0, 1, \dots, N-1$ (fig.5.4.a), conform celor arătate în fig.5.4.b. Vom observa însă că numărul de componente S_{1m} , ce rezultă, este $N_1 = N + 1$, deci impar. Pentru ca setul să

conțină totuși un număr par de valori, se introduce o componentă nulă, obținându-se succesiunea S_{2m} , $m = 0, 1, \dots, N_2 - 1$ (fig.5.4.c).

Această succesiune permite aplicarea TFR, dacă $N_2 = 2^k$, $k > 0$ și întreg (dacă $N_2 \neq 2^k$ se introduce un număr corespunzător de 0).

Pe baza analogiei cu teoria stabilită la pct.1.2.4, se poate afirma că procedura prezintă avantaj, în sensul că reduce eroarea de reconstituire, și în cazul unor funcții periodice oarecare. Dacă ne referim la fig.5.4.b, partea reală a componentelor de rang $N/2$, $(N/2)+1$, va fi acum corectă. În schimb partea imaginară va fi întotdeauna nulă, valoarea acesteia fiind pierdută, ca urmare a suprapunerii (pct.1.2.4).

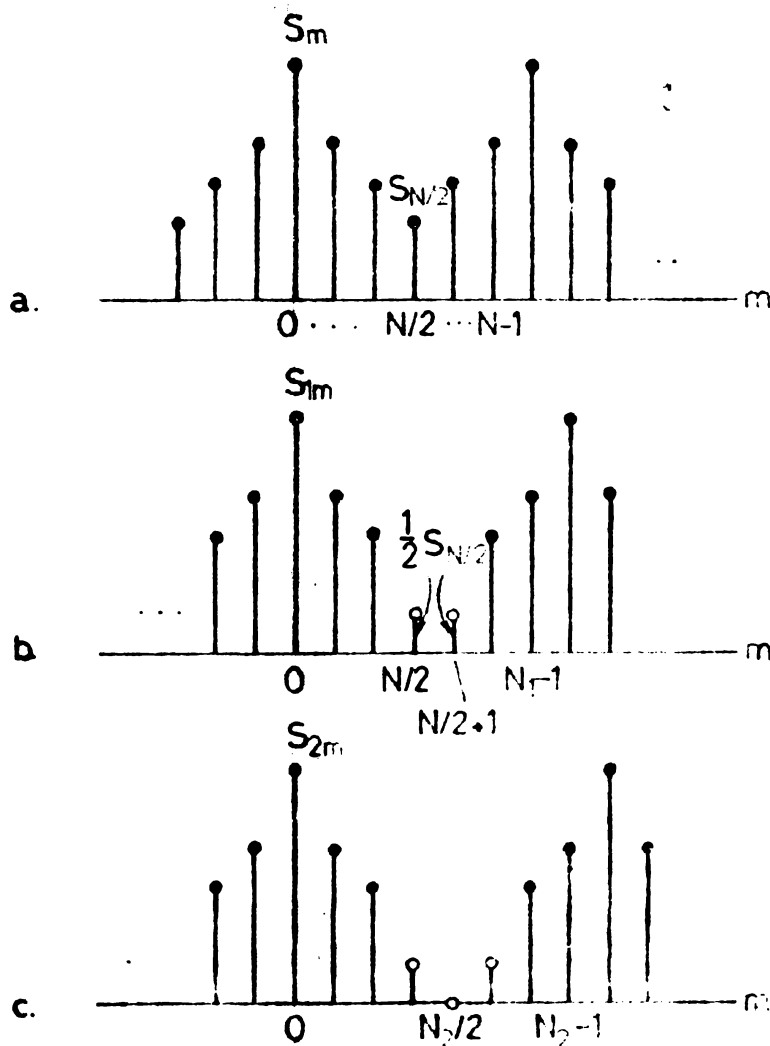


Fig.5.4.

Totodată, aplicarea procedurii în cazul funcțiilor impare, pentru care componenta S_m , de rang $m = N/2$ este nulă, cu toate că nu micșorează eroarea, nu deranjează cu nimic.

Se justifică deci, includerea procedurii analizate, în algoritmul propus.

5.5. Observații

Vor fi prezentate, pe baza celor discutate la punctele precedente, unele observații cu caracter mai general.

1. Valorile reconstituite $s_p(nT + \Delta t)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, pot fi interpretate ca eșantioane ale unui semnal defazat înainte cu Δt , față de $s_p(t)$. Ori aceste valori au rezultat prin aplicarea TFD inverse, setului de componente S_{dm} , definite de rel. (5.23), (5.24). Se poate afirma, deci, că S_{dm} , $m = 0, 1, \dots, N-1$, reprezintă TFD corespunzătoare secvenței $s_p(nT + \Delta t)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ iar rel. (5.23), (5.24) definesc o teoremă a deplasării pentru TFD.

Intr-o formulare mai concisă avem :

Teorema 5.1

Dacă succesiunea S_m , $m = 0, 1, \dots, N-1$ reprezintă TFD a unui set de eșantioane prelevate dintr-un semnal $s_p(t)$, respectînd cerințele teoremei eșantionării funcțiilor periodice, atunci componentele S_{dm} , $m = 0, 1, \dots, N-1$, corespunzătoare eșantioanelor semnalului defazat $s_p(t + \Delta t)$, sînt date de rel. (5.23), (5.24).

Teorema de mai sus a sugerat denumirea algoritmului propus.

Se subliniază că este cunoscută în literatură o teoremă a deplasării pentru SFD, în situația că $\Delta t = rT$, r fiind un întreg oarecare [16] [100]. Teorema stipulează că o deplasare cu rT a secvenței $s_p(nT)$, implică înmulțirea fiecărei componente S_m , a SFD, cu $e^{j m \omega_0 r T}$.

Este lesne de observat că teorema de mai sus reprezintă un caz particular al teoremei 5.1.

2. Se accentuează în mod deosebit faptul că întreaga teorie aferentă celor două procedee de reconstituire, inclusiv teorema 5.1, este valabilă în situația ca N eșan-

face teorema eșantionării. Nici în literatură și nici în cadrul prezentei lucrări, nu este abordată problema erorilor de reconstituire, ca urmare a unei frecvențe insuficiente de eșantionare.

Vom face, cu toate acestea, următoarea remarcă interesantă.

Expresia de reconstituire a unui semnal periodic (rel.5.9), nu permite determinarea-pentru cele mai multe funcții periodice-a valorilor corecte în punctele de eșantionare, pentru N par și dacă nu este satisfăcută teorema eșantionării (cap.3). În aceleași condiții însă, SFT și formula (rel.5.2), asigură calculul valorilor exacte ale semnalului în punctele de eșantionare.

3. Prezentarea, justificarea și exemplificarea algoritmului propus s-a făcut pe mulțimea funcțiilor periodice. Cu toate acestea el este aplicabil direct și în cazul semnalelor aperiodice, de durată limitată, care pot fi considerate drept o singură perioadă a unui semnal periodic.

Vom semnala în încheiere existența unei metode de reconstituire a funcțiilor complexe, în punctele de eșantionare, în cercul unitate și care utilizează transformata Fourier.

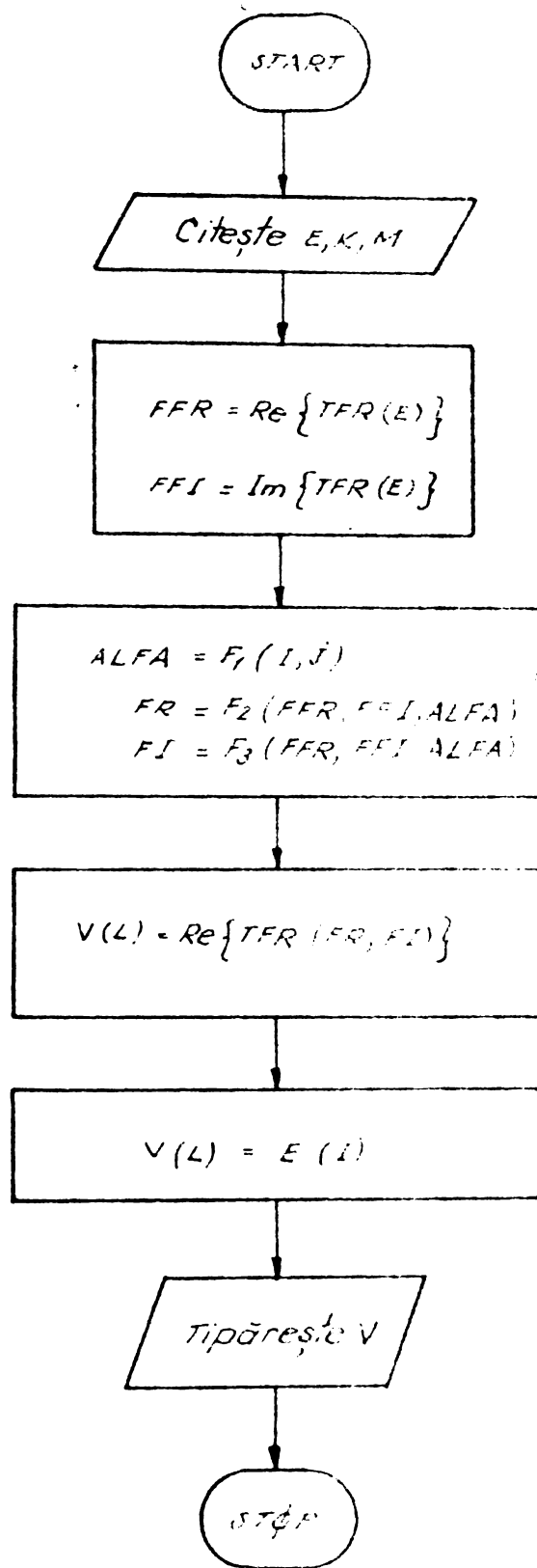
5.6. Program FORTRAN pentru procedurile de reconstituire bazat pe teorema eșantionării, utilizarea TFR

Pornind de la algoritmul de reconstituire al semnalului periodic, prezentat la pct.5.3, a fost scrisă, în limbajul FORTRAN, subrutina DRECP. Această subrutină permite reconstituirea valorilor unui semnal periodic, direct, de la baza eșantionării, pe baza eșantionărilor acestuia.

O organigramă simplificată, care cuprinde toate etapele subrutinei DRECP, este prezentată în fig.5.9.

Inițial sînt transferați, în program, următorii parametri:

- cele $N=2^k$ eșantioane și valoarea lui N pentru reconstituirea. Aceste eșantioane sînt considerate ca fiind într-un spațiu N -dimensional și avînd 2^k elemente;
- valoarea lui k ;



- parametrul M , care reprezintă numărul de eșantioane ce urmează a fi reconstituite, între două eșantioanele, succesive.

Este demn de reținut deci, că, subrutina a repetarea automată de M ori a algoritmului de calcul, reconstituite în total $N \times M$ valori.

În etapa următoare sînt calculate componentele FFR, FFI ale SFD, utilizînd TFR. Pe baza ecuației unghiului ALFA (I, J), care reprezintă argumentul funcției exponențiale ce intervine în rel.(5.5), sînt calculate componentele FR, FI (părțile reale respective ale componentelor S_{dm}). Indicele I ține seama de numărul eșantionului în raport cu care se consideră întârzierilor reconstituite după cum J , reprezintă numărul de întârzieri.

Funcțiile pe baza cărora sînt calculate ALFA, FR, FI au fost notate, în continuare, respectiv $F1, F2, F3$.

Este de menționat că FR și FI sînt valori complexe conjugate ale componentelor S_{dm} . În aceste condiții, calculul valorilor de calcul carea TFR inverse se poate face cu ușurință pentru calculul direct, aplicată componentele terminate ca mai sus (a se vedea rel.(5.5)). Astfel valorile nou reconstituite (tabloul același tablou sînt incluse, în final, în tabloul lor inițiale, după care are loc transformarea (eșantioane și valori reconstituite, în normală).

Instrucțiunile subrutina sînt prezentate în fig.5.6.

```

SUBROUTINE DREORCE(K,M,FFM,FFI,V,FK,FI)
DIMENSION E(4),FEP(4),FFI(4),V(15),FRC(5),FI(1)
DATA DY/3.1414,502653589793/
N=2**K
DO 1 I=1,N
  FRC(I)=FPI
1 CONTINUE
DO 2 I=1,N/2
  FRC(I)=FRC(I)+FRC(I+N)
2 CONTINUE
DO 4 I=1,N/4
  FRC(I)=FRC(I)+FRC(I+N/2)
  FRC(I+N/4)=FRC(I+N/4)+FRC(I+N/4+N/2)
4 CONTINUE
DO 5 I=1,N/8
  FRC(I)=FRC(I)+FRC(I+N/4)
  FRC(I+N/8)=FRC(I+N/8)+FRC(I+N/8+N/4)
  FRC(I+N/4+N/8)=FRC(I+N/4+N/8)+FRC(I+N/4+N/8+N/4)
  FRC(I+N/4+N/8+N/4)=FRC(I+N/4+N/8+N/4)+FRC(I+N/4+N/8+N/4+N/4)
5 CONTINUE
DO 6 I=1,N/16
  FRC(I)=FRC(I)+FRC(I+N/8)
  FRC(I+N/16)=FRC(I+N/16)+FRC(I+N/16+N/8)
  FRC(I+N/8+N/16)=FRC(I+N/8+N/16)+FRC(I+N/8+N/16+N/8)
  FRC(I+N/8+N/16+N/8)=FRC(I+N/8+N/16+N/8)+FRC(I+N/8+N/16+N/8+N/8)
  FRC(I+N/8+N/16+N/8+N/8)=FRC(I+N/8+N/16+N/8+N/8)+FRC(I+N/8+N/16+N/8+N/8+N/8)
6 CONTINUE
V(1)=FRC(1)
V(2)=FRC(2)
V(3)=FRC(3)
V(4)=FRC(4)
V(5)=FRC(5)
V(6)=FRC(6)
V(7)=FRC(7)
V(8)=FRC(8)
V(9)=FRC(9)
V(10)=FRC(10)
V(11)=FRC(11)
V(12)=FRC(12)
V(13)=FRC(13)
V(14)=FRC(14)
V(15)=FRC(15)
E(1)=FRC(1)
E(2)=FRC(2)
E(3)=FRC(3)
E(4)=FRC(4)
FEP(1)=FRC(1)
FEP(2)=FRC(2)
FEP(3)=FRC(3)
FEP(4)=FRC(4)
FFI(1)=FRC(1)
FFI(2)=FRC(2)
FFI(3)=FRC(3)
FFI(4)=FRC(4)
FFI(5)=FRC(5)
FFI(6)=FRC(6)
FFI(7)=FRC(7)
FFI(8)=FRC(8)
FFI(9)=FRC(9)
FFI(10)=FRC(10)
FFI(11)=FRC(11)
FFI(12)=FRC(12)
FFI(13)=FRC(13)
FFI(14)=FRC(14)
FFI(15)=FRC(15)
FFI(16)=FRC(16)
FFI(17)=FRC(17)
FFI(18)=FRC(18)
FFI(19)=FRC(19)
FFI(20)=FRC(20)
FFI(21)=FRC(21)
FFI(22)=FRC(22)
FFI(23)=FRC(23)
FFI(24)=FRC(24)
FFI(25)=FRC(25)
FFI(26)=FRC(26)
FFI(27)=FRC(27)
FFI(28)=FRC(28)
FFI(29)=FRC(29)
FFI(30)=FRC(30)
FFI(31)=FRC(31)
FFI(32)=FRC(32)
FFI(33)=FRC(33)
FFI(34)=FRC(34)
FFI(35)=FRC(35)
FFI(36)=FRC(36)
FFI(37)=FRC(37)
FFI(38)=FRC(38)
FFI(39)=FRC(39)
FFI(40)=FRC(40)
FFI(41)=FRC(41)
FFI(42)=FRC(42)
FFI(43)=FRC(43)
FFI(44)=FRC(44)
FFI(45)=FRC(45)
FFI(46)=FRC(46)
FFI(47)=FRC(47)
FFI(48)=FRC(48)
FFI(49)=FRC(49)
FFI(50)=FRC(50)
FFI(51)=FRC(51)
FFI(52)=FRC(52)
FFI(53)=FRC(53)
FFI(54)=FRC(54)
FFI(55)=FRC(55)
FFI(56)=FRC(56)
FFI(57)=FRC(57)
FFI(58)=FRC(58)
FFI(59)=FRC(59)
FFI(60)=FRC(60)
FFI(61)=FRC(61)
FFI(62)=FRC(62)
FFI(63)=FRC(63)
FFI(64)=FRC(64)
FFI(65)=FRC(65)
FFI(66)=FRC(66)
FFI(67)=FRC(67)
FFI(68)=FRC(68)
FFI(69)=FRC(69)
FFI(70)=FRC(70)
FFI(71)=FRC(71)
FFI(72)=FRC(72)
FFI(73)=FRC(73)
FFI(74)=FRC(74)
FFI(75)=FRC(75)
FFI(76)=FRC(76)
FFI(77)=FRC(77)
FFI(78)=FRC(78)
FFI(79)=FRC(79)
FFI(80)=FRC(80)
FFI(81)=FRC(81)
FFI(82)=FRC(82)
FFI(83)=FRC(83)
FFI(84)=FRC(84)
FFI(85)=FRC(85)
FFI(86)=FRC(86)
FFI(87)=FRC(87)
FFI(88)=FRC(88)
FFI(89)=FRC(89)
FFI(90)=FRC(90)
FFI(91)=FRC(91)
FFI(92)=FRC(92)
FFI(93)=FRC(93)
FFI(94)=FRC(94)
FFI(95)=FRC(95)
FFI(96)=FRC(96)
FFI(97)=FRC(97)
FFI(98)=FRC(98)
FFI(99)=FRC(99)
FFI(100)=FRC(100)

```

U014PV09 21/07/81 20.32.20

FURTRAM 00.00

Fig. 5.6

CAPITOLUL 6

VERIFICARI EXPERIMENTALE

Scopul acestui capitol este de a ilustra, pe exemple concrete, valabilitatea principalelor concluzii stabilite în capitolele precedente, precum și a algoritmilor propuși. Au fost alese exemple simple, care implică calcule matematice puțin laborioase. În ce privește testarea algoritmilor, aceasta s-a făcut prin programe rulate pe calculator.

6.1. Exemplu care probează teorema 2.5

Două exemple care permit verificarea teoremei au fost prezentate deja în cap.2. În cele ce urmează testăm valabilitatea acestei teoreme, luând în considerare funcții $f'_p(t)$ de forma (2.11) (cazul analizat pe larg în cap.2).

Se are în vedere funcția:

$$f'_p(t) = 2 + \cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t \quad (6.1)$$

pentru care: $c'_0 = 2$, $c'_1 = c'_2 = 0,5$. Se stabilește imediat că:

$$2c'_2 + \frac{c'^2_1}{4c'_2} = 1,125 \neq c'_0 = 2 \quad (6.2)$$

adică $f'_p(t)$ nu satisface condiția (2.15), cunoscută.

Verificarea s-a făcut prin două metode, directă și indirectă, direct, cu ajutorul calculatorului electronic.

Intr-un prim caz au fost calculate valorile maxime și minime ale funcției $f'_p(t) = \sqrt{f''_p(t)}$ și pe baza acestora au fost determinate primii N coeficienți ai dezvoltării în serie Fourier a lui $f'_p(t)$ (calculul valorilor lui $f'_p(t)$ s-a făcut prin metoda rădăcinii patrate, deoarece $f''_p(t) > 0$). Pentru determinarea coeficienților s-a utilizat FFT, varianta cu decimația setului de eșantioane [16].

Rezultatele obținute, prin rularea pe un calculator FELIX C-256, a unui program scris în limbajul FORTRAN, sînt prezentate în anexa A1 (pag.A1.2.).

Numărul de eșantioane prolevate uniform dintr-o perioadă și prelucrate a fost $N = 128$, fapt ce permite evaluarea corectă a componentelor spectrale ale unui semnal cu $K = 63$ componente armonice ($2K + 1 = 127 < N = 128$).

Teorema 2.3 ar fi fost infirmată dacă $f_p(t)$ ar avea doar două componente : componenta continuă și fundamentală. Numai o asemenea funcție, de bandă limitată, poate conduce, prin ridicare la patrat, la un $f_p'(t)$ de forma (6.12). Ori din calcule rezultă că $f_p(t)$, notată cu $S2(T)$ în anexă, include cel puțin 30 componente armonice.

Este adevărat că, neglijînd erorile de calcul, valorile calculate ale acestor componente ar putea fi eronate, ca urmare a unei frecvențe de eșantionare insuficiente. Pentru un $f_p(t)$, caracterizat prin $K = 1$, aceste erori ar fi excluse însă, așa cum rezultă din cele arătate mai sus.

Se va observa apoi că $f_p(t)$ fiind pară, coeficienții Fourier sînt reali (au partea imaginară nulă). Cu toate acestea au fost tipărite și valorile calculate ale părții imaginare a coeficienților, spre a servi, orientativ, la aprecierea erorilor de calcul (pg.A1.3).

Programul a determinat totodată și tipărit - cu scopul verificării corectitudinii acestuia - coeficienții Fourier ai lui $f_p(t)$ (funcția $S1(T)$ în anexa A1).

O a doua metodă de verificare, cu utilizarea calculatorului electronic, a constat în următoarele:

Funcția $f_p(t)$, aceiași ca și în cazul precedent, a fost reconstituită într-o serie de puncte, pe baza unor seturi de eșantioane. Operația de reconstituire a fost repetată pentru mai multe valori, progresiv crescătoare, ale frecvenței de eșantionare, determinîndu-se de fiecare dată - prin calcul direct- eroarea medie patrată "alias".

Programul, împreună cu rezultatele obținute în urma rulării pe calculator, sînt prezentate în anexa A2. ERORILE MEDIE PATRATICA 1 desemnează aici eroarea la reconstituirea

lui $f'_p(t)$, eșantionat conform teoremei eșantionării funcțiilor periodice ($N = 8$). Teoretic, această eroare ar trebui să fie nulă. Dacă totuși diferă de zero, acest fapt se datorește erorilor de calculator. Se poate aprecia deci, că, erorile de calcul sînt de ordinul 10^{-14} (programul a fost rulat în dublă precizie [105]).

Erorile la reconstituirea lui $f_p(t)$ sînt notate cu EROARE MEDIE PĂTRATICĂ 2. Rezultatele indică totodată și numărul N de eșantioane utilizate, corespunzător fiecărei erori calculate.

Se poate constata clar tendința de scădere a erorilor "alias", pe măsură ce crește valoarea lui N (deci frecvența de eșantionare); pe de altă parte, eroarea "alias" depășește substanțial eroarea de calcul (10^{-12} față de 10^{-14}) chiar și pentru $N = 64$ eșantioane prelucșate.

În acord cu teoria erorilor "alias" (cap.3), se poate afirma că spectrul de frecvențe al lui $f_p(t)$ include cel puțin 32 componente armonice (la care se mai adaugă fundamentală). Cum o funcție $f_p(t)$, de bandă limitată și astfel încît $[f_p(t)]^2 = f'_p(t)$, $f'_p(t)$ fiind date de rel.(6.12), nu poate conține decît o componentă continuă și fundamentală, rezultă că de fapt, $f_p(t)$ este de bandă nelimitată.

În anexă nu a fost inclusă subrutina de reconstituire DRECP, asupra căreia se revine la pct.6.5.

6.2. Neanularea erorilor în rețelele de eșantionare

Se consideră funcția periodică, pară, definită în expresia:

$$f_p(t) = 1 + \cos\omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t \quad (6.3)$$

Prin urmare spectrul lui $f_p(t)$ include o componentă continuă și trei componente armonice reale ($K = 3$): $c_0 = 1$ și $c_k = c_{-k} = 0,5$, $k = 1, 2, 3$.

Se presupune că $f_p(t)$ este eșantionată încît $N = 4$ deci par. și $N < 2K+1 = 7$. Spectrul semnalului eșantionat, împreună cu coeficienții Fourier respectiv "alias", corespunzători fiecărei componente, este reprezentat în fig.6.2.

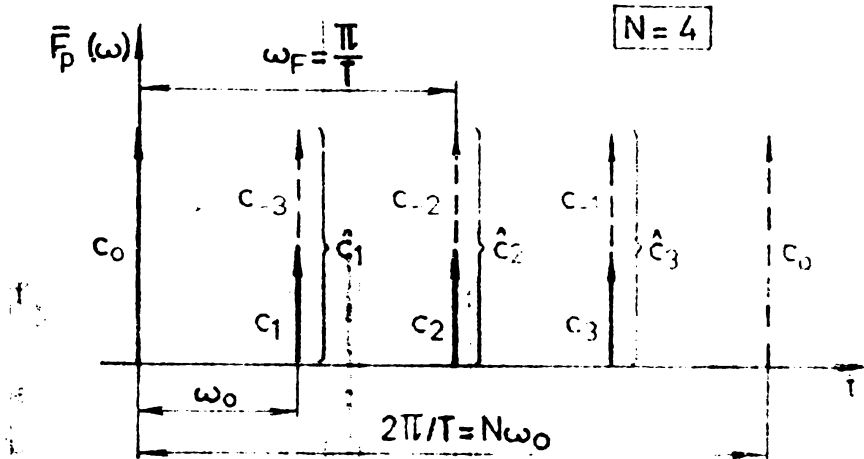


Fig.6.2.

Se poate constata imediat că (rel.(5.122)) :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ c \left[(2i+1)\omega_F \right] \right\} = c_2 = 0,5 \neq 0 \quad (6.4)$$

În condițiile de mai sus, conform celor arătate la pct.3.6., erorile de reconstituire în punctele de eșantionare trebuie să difere de zero. Vom dovedi acest lucru printr-un calcul direct.

Valorile eșantioanelor rezultă după cum urmează:

$$f_p(0) = 4 \quad f_p(T) = 0 \quad f_p(2T) = 0 \quad f_p(3T) = 0$$

În cele de mai sus, prin T a fost notat pasul de eșantionare. Utilizînd rel.(1.24), în care se ia $K = 2$ (fig.6.2), se determină următoarele valori reconstituite în punctele de eșantionare :

$$f_p^*(0) = 5 \neq f_p(0) \quad f_p^*(T) = -1 \neq f_p(T)$$

$$f_p^*(2T) = 1 \neq f_p(2T) \quad f_p^*(3T) = -1 \neq f_p(3T)$$

Rezultatele de mai sus întăresc justetea afirmației

privind neanularea - în anumite condiții - a erorilor în punctele de eșantionare.

6.3. Procedeu de reconstituire a funcțiilor pare, eșantionate cu $N = 2K$

Vom considera și de această dată o funcție periodică, pară, simplă :

$$f_p(t) = 1 + \cos\omega_0 t + \cos 2\omega_0 t \quad (6.5)$$

Rezultă deci că : $K = 2$, $c_0 = 1$ și $c_k = c_{-k} = 0,5$, $k = 1, 2$.

Dacă eșantionarea se face astfel încît $N = 4 = 2K$ și $2K + 1$, reconstituirea conform rel. (1.24) conduce la erori de reconstituire. În condițiile menționate este posibilă utilizarea expresiei de reconstituire (1.63), a cărei aplicare ar trebui să excludă erorile menționate. Se va arăta prin calcul că această afirmație este adevărată.

Se determină mai întâi valorile eșantionelor, rezultînd :

$$f_p(0) = 3 \quad f_p(T) = 0 \quad f_p(2T) = 1 \quad f_p(3T) = 0$$

Presupunînd că $f_p(t)$ este reconstituit în punctul corespunzător lui $\omega_0 t = \pi/3$, prin aplicarea relației (1.24) se obține valoarea eronată $f_p^*(\pi/3\omega_0) = 0,5$. Utilizarea expresiei (1.63) conduce la valoarea corectă $f_p^*(\pi/3\omega_0) = 1$.

Se precizează că, eroarea amintită apare ca urmare a faptului că valoarea coeficientului "alius" $\hat{c}_2 = 1$ (rel. (1.23)) diferă de $c_2 = 0,5$.

6.4. Exemplu de aplicare a procedurii de reconstituire prin ridicare la putere

Aplicarea procedurii menționat este condiționată de

satisfacerea condițiilor determinate la pct.4.2. Aceste condiții nu permit însă - cel puțin în forma în care au fost stabilite - delimitarea concretă a unei clase de funcții, ce pot fi reconstituite cu noul procedeu.

Se impune, deci, ca o etapă prealabilă, obligatorie, stabilirea - pentru tipul de funcție avut în vedere - dacă sînt satisfăcute sau nu, condițiile amintite.

Pentru a ilustra procedura de aplicare a algoritmului și avantajele ce rezultă, se va considera cazul unui semnal aperiodic, de durată limitată T_1 , definit de relația:

$$s(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t & , \quad -\pi/3 \leq \omega_0 t \leq \pi/3 \\ 0 & , \quad \text{altminteri} \end{cases} \quad (6.6)$$

Din acest semnal (fig.6.3), sînt prelevate 12 eșantioane, pe baza cărora ne propunem reconstituirea semnalului inițial, aplicînd procedeul prin ridicare la patrat.

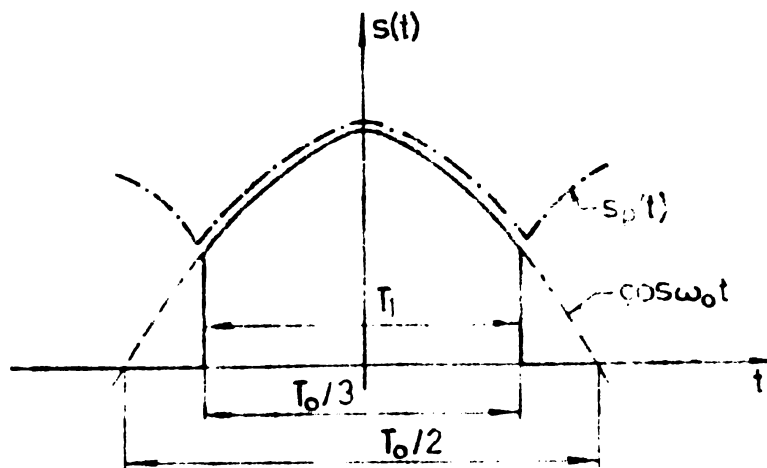


Fig.6.3.

Vom cerceta mai întii dacă sînt satisfăcute condițiile (4.24)-(4.26).

Aceste condiții se referă la coeficienții Fourier ai funcțiilor periodice $s_p(t)$ și $s_p'(t) = [s_p(t)]^2$, $s_p(t)$ re-

zultînd prin repetarea lui $s(t)$, cu o perioadă egală cu durata acestuia, adică (fig.6.3) :

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t + nT_1) \quad (6.7)$$

Pentru a stabili coeficienții $c(k\omega_1)$ și $c'(k\omega_1)$ corespunzători semnalelor $s_p(t)$ și $s'_p(t)$, de pulsație $\omega_1 = 2\pi/T_1$, se determină la început spectrul $S(\omega) \Leftrightarrow s(t)$.

În domeniul timp se poate scrie că :

$$s(t) = \cos\omega_0 t \cdot p_{T_1}(t) \quad (6.8)$$

$p_{T_1}(t)$ reprezentînd impulsul dreptunghiular de durată T_1 și amplitudine unitară. Deoarece [25] :

$$\cos\omega_0 t \Leftrightarrow 2\pi \cdot 0,5 \left[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \right] \quad (6.9)$$

și avînd în vedere teorema 1.1, din (6.8) se obține:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot 0,5 \left\{ \delta[(\omega - \omega_0) - \xi] + \delta[(\omega + \omega_0) - \xi] \right\} P_{T_1}(\xi) d\xi \quad (6.10)$$

În expresia de mai sus $P_{T_1}(\omega)$ reprezintă spectrul corespunzător impulsului $p_{T_1}(t)$ [8] :

$$P_{T_1}(\omega) = T_1 \frac{\sin(\omega T_1/2)}{\omega T_1/2} \quad (6.11)$$

Aplicînd integralei din (6.10) teorema convoluției cu funcția delta, rezultă:

$$S(\omega) = 0,5 \left[P_{T_1}(\omega + \omega_0) + P_{T_1}(\omega - \omega_0) \right] \quad (6.12)$$

Pe baza rel.(6.12), (6.11), se pot determina acum coeficienții Fourier $c(k\omega_1)$, aferenți lui $s_p(t)$, sub forma:

$$c(k\omega_1) = \frac{1}{T_1} S(k\omega_1) = 0,5 \frac{\sin \frac{T_1}{2} (k\omega_1 + \omega_0)}{\frac{T_1}{2} (k\omega_1 + \omega_0)} + \frac{\sin \frac{T_1}{2} (k\omega_1 - \omega_0)}{\frac{T_1}{2} (k\omega_1 - \omega_0)} \quad (6.13)$$

Pentru calculul coeficienților $c'(k\omega_1)$ se determină în prealabil spectrul corespunzător lui $\cos^2 \omega_0 t$.

Coeficienții dezvoltării în serie Fourier a lui $\cos^2 \omega_0 t$ rezultă simplu, pe baza produsului de convoluție (2.2), aplicat coeficienților Fourier a lui $\cos \omega_0 t$. Se obține corespundența :

$$\cos^2 \omega_0 t \Leftrightarrow 2\pi \left[0,25\delta(\omega + 2\omega_0) + 0,5\delta(\omega) + 0,25\delta(\omega - 2\omega_0) \right] \quad (6.14)$$

Procedînd în continuare, similar celor de mai sus, rezultă succesiv:

$$S'(\omega) = 0,25 P_{T_1}(\omega + 2\omega_0) + 0,5 P_{T_1}(\omega) + 0,25 P_{T_1}(\omega - 2\omega_0) \quad (6.15)$$

respectiv :

$$c'(k\omega_1) = \frac{1}{T_1} S'(k\omega_1) = 0,25 \left[\frac{\sin \frac{T_1}{2} (k\omega_1 + 2\omega_0)}{\frac{T_1}{2} (k\omega_1 + 2\omega_0)} - \frac{\sin \frac{T_1}{2} (k\omega_1 - 2\omega_0)}{\frac{T_1}{2} (k\omega_1 - 2\omega_0)} \right] + 0,5 \frac{\sin \frac{T_1}{2} k\omega_1}{\frac{T_1}{2} k\omega_1}$$

În rel.(6.15), $S'(\omega) \iff s'(t) = [s(t)]^2$.

Pentru cele ce urmează ne interesează valoarea $c'(k\omega_1)$, $k \neq 0$. Avînd în vedere că :

$$\frac{T_1}{2} k\omega_1 = k\pi$$

expresia (6.16) poate fi adusă la o formă mai simplă:

$$c'(k\omega_1) = 0,25 \left[\frac{\sin \frac{T_1}{2} (k\omega_1 + 2\omega_0)}{\frac{T_1}{2} (k\omega_1 + 2\omega_0)} - \frac{\sin \frac{T_1}{2} (k\omega_1 - 2\omega_0)}{\frac{T_1}{2} (k\omega_1 - 2\omega_0)} \right] + \frac{\sin \frac{T_1}{2} k\omega_1}{\frac{T_1}{2} k\omega_1}$$

Revenind la sistemul de ecuații (6.14) și (6.15) observa acum următoarele.

Deoarece atât $s_p(t)$ cât și $s'(t)$ sunt semnale periodice, coeficienții Fourier corespunzători sunt:

$$c_k = A_k \quad B_k = 0 \quad , |k| = 0, 1, 2, \dots$$

$$c'_k = A'_k \quad B'_k = 0$$

Pe de altă parte, avînd în vedere că $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$, în rel.(3.135) rezultă :

$$K_1 = \frac{\omega_F}{\omega_1} + 1 = \frac{N}{2} + 1 = 7 \quad (6.17)$$

$$K_2 = \frac{\omega_F}{\omega_1} = \frac{N}{2} = 6 \quad (6.18)$$

În stabilirea ultimelor două expresii s-a avut în vedere că $\omega_F = \pi/T$.

Pe baza rel.(6.17), (6.18) se poate afirma că este îndeplinită condiția (4.23). Totodată, din fig.6.3 rezultă că $|m| = \cos \pi/3 = 1/2$. Cu aceste precizări, aplicarea procedurii de mai sus este posibilă dacă

a) Pentru orice n dat, astfel încît $|n| \leq 6$:

$c(n\omega_1 - 2i\omega_F)$, $i = 1, 2, \dots$, au același semn

$c'(n\omega_1 - 2i\omega_F)$, $i = 1, 2, \dots$, au același semn

b) $|c'_k| < |c_k|$, $|k| \geq 7$

În expresiile de mai sus, c'_k și c_k sînt dați de rel.(6.17) respectiv (6.18).

Vom cerceta, în continuare, condiția de semn a).
a).

Se pornește, în acest scop, de la faptul că (din fig. 6.3):

$$\frac{T_0}{T_1} = 3 \quad \omega_0 = \frac{\omega_1}{3}$$

Relația (6.23) permite scrierea expresiei (6.17), sub forma

$$c(k\omega_1) = 0,5 \left[\frac{\sin(k\pi + \pi/3)}{k\pi + \pi/3} + \frac{\sin(k\pi - \pi/3)}{k\pi - \pi/3} \right]$$

respectiv:

$$c(k\omega_1) = - \frac{0,0918}{(k^2-1/9)}, \quad k \text{ par} \quad (6.15)$$

$$c(k\omega_1) = + \frac{0,0918}{(k^2-1/9)}, \quad k \text{ impar} \quad (6.16)$$

În mod similar rezultă că :

$$c'(k\omega_1) = 0,25 \left[\frac{\sin(k\pi + 2\pi/3)}{k\pi + 2\pi/3} + \frac{\sin(k\pi - 2\pi/3)}{k\pi - 2\pi/3} \right] \quad (6.17)$$

Încît :

$$c^*(k\omega_1) = - \frac{0,0918}{2(k^2-4/9)}, \quad k \text{ par și } k \neq 0 \quad (6.18)$$

$$c^*(k\omega_1) = + \frac{0,0918}{2(k^2-4/9)}, \quad k \text{ impar și } k \neq 0 \quad (6.19)$$

Se constată apoi, imediat, că deoarece:

$$2i\omega_F = 2i \cdot \frac{\pi}{T} = i \cdot N\omega_1 = i \cdot 12\omega_1 \quad (6.20)$$

pentru $|n| \leq 6$ și $i = 1, 2, \dots, \infty$, rangul termenilor $c(k\omega_1) = c(n\omega_1 - 2i\omega_F)$ și $c'(k\omega_1) = c'(n\omega_1 - 2i\omega_F)$ satisface condiții :

$$k \leq -6 \text{ adică } k \neq 0 \quad (6.21)$$

Totodată, pentru un anumit n , componentele $c(n\omega_1 - 2i\omega_F)$, $c'(n\omega_1 - 2i\omega_F)$, în care $i = 1, 2, \dots, \infty$, sînt fie de rang par fie de rang impar, după cum n este par respectiv impar. În virtutea celor precedente și avînd în vedere rel. (6.15), (6.16),

și (6.28), (6.29) se poate afirma că, în cazul considerat, este satisfăcută condiția (6.22.a).

În ce privește ultima condiție, (6.22.b), ea este îndeplinită dacă (rel.(6.25)...(6.29)) :

$$2(k^2 - 4/9) > (k^2 - 1/9), \quad |k| \geq 7 \quad (6.22.b)$$

Această inegalitate, scrisă sub forma echivalentă :

$$k^2 > \frac{7}{9}$$

este evident satisfăcută pentru orice k , astfel încât

Avantajele pe care le comportă aplicarea procedurii la reconstituirea lui $s(t)$, dat de rel.(6.17), rezultă din analiza rezultatelor prezentate în anexa A3.

Sînt date aici valorile reconstituite prin procedura clasică (rel.(1.12)), împreună cu eroarea medie patrată corespunzătoare, (pg.A3.8), precum și rezultatele similare obținute prin procedeul ridicării la patrat -pg.A.3.9, (inclusiv valorile reconstituite pentru $s^2(t)$).

Se poate constata că, procedeul propus asigură o reducere de cca 3 ori a erorii medii patratice, comparat cu metoda clasică.

Se subliniază totodată faptul că, metoda cunoscută în literatură, de reducere a erorilor "alias" prin linișțirea spectrului semnalului inițial, cu ajutorul unui filtru ideal, de jos, asigură o micșorare de numai 2 ori a erorii $[106]$ și aceasta numai în cazul utilizării unui filtru ideal. În acest punct de vedere, procedeul de reconstituire prin ridicarea la patrat se dovedește net superior. Acesta prezintă totodată și avantajul că implică calcule deosebit de simple.

Nu trebuie uitat însă faptul că aplicarea lui este limitată numai în cazul anumitor funcții semnal și că nivelul de reducere a erorii depinde de forma concretă a semnalului supus prelucrării. Este posibilă, deci, o reducere a erorii, mai substanțială decît cea menționată mai sus, fiind posibilă și însă și situația inversă.

În fine, etapa de verificare a condițiilor trebuie să le satisfacă semnalul ce urmează a fi eșant și reconstituit, este relativ complicată.

Aspectele menționate mai sus au determinat, în fel, ca prezentarea aplicării algoritmului prin ridicarea la pătrat să se facă pe un singur caz.

În anexa A3 sînt prezentate de asemenea procedurile de calcul al rezultatelor amintite precum și subrutina de reconstituire utilizată, RECS, scrisă în limbajul ASSIRIS (pg.A3.1-A3.7).

5.6. Program ASSIRIS pentru calculul TFR

Subrutina de reconstituire DRKCP, bazată pe metoda deplasării (pct.5.6), face apel la o altă subrutină DEFØUR, pentru calculul TFR, de asemenea în dublă precizie.

Asemenea subrutine, scrise în limbajul FORTRAN sînt larg cunoscute în literatură [16] [100], motiv pentru care nu se insistă în continuare în legătură cu subrutina elaborată. Precizăm totuși că subprogramul DEFØUR a fost scris în limbajul ASSIRIS cu scopul micșorării duratei de calcul. Instrucțiunile subrutinei sînt prezentate în anexa A4 (pg.A4.1-A4.3).

A N E X E

RESULTATE

FULLIA ST117

NR 8

PARTEM REAIA 177555E-13 .27359E-13

.20000
.50000

.20000
.50000

PARTEM REAIA 177555E-13 .27359E-13

.20000
.50000

.20000
.50000


```

1 REAL E(104),FER(64),FFI(64),V(172),FM(64),FI(64),VP(192)
3 DATA V(2),C(18),M(7),*2*PI/N)*2*PI/N)*C(18),M(7),*4*PI/N)
4 KF(M,M)=SQR2(AE3580793)
5 PI=3.141592653589793
6 WRITE(108,6) RESULTATE/DUX.'*****'///)
7 DO 1 M(1,N)
8 CALL FFER(F,K,M,M,FFR,FFI,V,FR,FI)
9 DO 2 M(1,24)
10 V(M)=F(M,24)
11 CALL FFER(V,V,24,ERP,KERP,KERP)
12 WRITE(108,3) BEOARE
13 FORMAT(10V,3) BEOARE MEDIE PATRAT(CA1=.612,5/)
14 DO 100 K(1,2)
15 DO 20 V(1,N)
16 DO 4 M(1,N)
17 E(M)=E(M,N)
18 CALL FFER(F,K,M,M,FFR,FFI,V,FR,FI)
19 DO 3 M(1,M)
20 V(M)=F(M,M)
21 CALL FFER(V,V,M,ERP,KERP,KERP)
22 WRITE(108,5) BEOARE
23 FORMAT(10V,5) BEOARE DE IE PATRAT(CA2=.612,5)
24 END
25 BEOARE 21/01/81 60.32.14

```

```

SUBROUTINE FFER(V,VP,NM,ERP,KERP,KERP)
REAL V(1),V(24)
END

```

```

1 DO 1 M(1,N)
2 FER=FC(S(1)-VP(2))**2
3 FER=FC(OUT(ERP))
4 KERP=KERP/M
5 END

```

0014800 21/01/81 60.32.20

RESULTS

FROM MEDIE PATRIOTIQUE 231555E-14

MEMO ERUARE MEDIE PATRIOTIQUE 15745E-02
MEMO ERUARE MEDIE PATRIOTIQUE 140119E-04
MEMO ERUARE MEDIE PATRIOTIQUE 130605E-07
MEMO ERUARE MEDIE PATRIOTIQUE 144676E-12

STOP

0957 0074800Y AN = P000 PH = 0004 DATE = 21/07/87
M.DEB = 20H 54M 27s H.FRN = 20H 34M 50S TIME = 0000052Y
LCP = 00065 RSM = 00010 LC = 000000 .N = 00000
PT = 04 PP = 00

END

14

CAPITOLUL 7

C O N C L U Z I I

În lucrarea de față a fost abordată o problemă de maximă importanță pentru sistemele de măsurat cu prelucrare numerică, aceea a eșantionării și reconstituirii în condiții cât mai avantajoase a semnalelor. S-a urmărit, în principiu, îmbunătățirea frecvenței de eșantionare simultan cu reducerea erorilor și a duratei de calcul.

În tratare s-a insistat în mod deosebit asupra funcțiilor periodice, avînd în vedere că:

- teoria cunoscută în literatură prezintă anumite lacune, privind procesul de reconstituire a semnalelor periodice eșantionate, precum și în problema știrilor pe care le comportă acest proces;

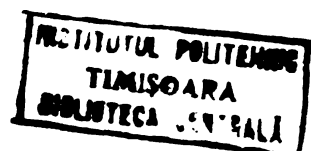
- pe de altă parte, așa cum s-a arătat la pct. 1.1, este mai potrivit ca teoria prelucrării pe cale numerică a semnalelor - în care teorema eșantionării joacă un rol central - să fie elaborată pentru regimul periodic.

Se menționează aparte, abordarea în cadrul lucrării, a unei probleme noi, strîns legată de teorema eșantionării, aceea a modificării spectrului prin transformarea patruierii.

Analiza problemelor menționate mai sus, plecînd de la stadiul cunoscut din literatură, a permis stabilirea unor concluzii și rezultate originale. Principalele contribuții aduse de autor, în această lucrare, constau în următoarele:

1. Pornind de la ipoteza că procesul fizic de reconstituire a unui semnal eșantionat, trebuie să fie același indiferent că semnalul este aperiodic sau periodic, se justifică valabilitatea acestei afirmații. Se arată că, în felul acesta, în regim aperiodic, semnalul periodic reconstituit, dat de ec. (1.24), se obține la ieșirea unui filtru trece-jos ideal la intrarea căruia este aplicată succesiunea de eșantioane.

Rezultatul de mai sus a fost obținut prin aplicarea



transformatei Fourier inverse, spectrului semnalului periodic rezultat la ieșirea filtrului ideal.

2. Interpretarea fizică, menționată, deși satisface sub aspect global, nu dezvăluie mecanismul intim de prelucrare a eșantioanelor în domeniul timp.

Intrădeavăr, reconstituirea conform rel.(1.24) se face pe baza unui număr finit de eșantioane, cu toate că, în realitate, semnalul periodic-prin definiție nelimitat în timp-presupune un număr infinit de eșantioane aplicate la intrarea filtrului ideal.

Pentru a elucida acest aspect, a fost demonstrată, pentru început, teorema 1.1. Aceasta afirmă că produsului algebric dintre spectrele a două funcții, una periodică iar cealaltă aperiodică, îi corespunde produsul convolutiv dintre funcțiile de timp, definit ca în regim aperiodic.

Aplicînd acest rezultat expresiei spectrului semnalului obținut la ieșirea filtrului ideal, rezultă, pentru semnalul periodic reconstituit, o același formulă de reconstituire ca și în regim aperiodic (rel.1.11).

Se poate afirma, deci, că în regim periodic, expresiile (1.11), (1.24) sînt identice. Această identitate a fost, apoi, demonstrată direct, pornind de la observația că eșantioanele aferente unei perioade se repetă de la o perioadă la alta a semnalului eșantionat. Existența unei expresii de forma (1.24) este posibilă avînd în vedere că informația despre semnal este conținută, în totalitate, în eșantioanele aferente unei singure perioade.

3. Pe baza teoriei stabilite se fac recomandări privind alegerea valorii minime a rangului K , ce intervine în rel.(1.24) și pentru care este asigurată reconstituirea fără erori (se presupune satisfăcută teorema eșantionării). Valoarea lui K este dată funcția de numărul N de eșantioane prelevate (par respectiv impar).

Recomandările sînt utile atunci cînd se urmărește scurtarea duratei calculului de reconstituire.

4. În ideea că numărul de eșantioane prelucrate este, de cele mai multe ori, par, a fost elaborată expresia de reconstituire (1.63). Aceasta asigură reconstituirea fără

erori a semnalelor pare, pentru cazul în care $N = 2K < 2K+1$, adică nu este satisfăcută teorema eşantionării funcțiilor periodice. Rezultatul de mai sus poate fi extrem de util, în anumite situații practice.

Utilizarea rel.(1.63) este recomandabilă, de altfel, în orice situație în care numărul de eşantioane este par și frecvența de eşantionare este insuficientă. Se obțin, în acest fel, erori de reconstituire mai mici decât prin aplicarea expresiei (1.24).

5. Teorema eşantionării funcțiilor periodice permite o formulare mai generală decât cea dată la pct.1.2.2. În varianta generalizată, (teorema 1.2), se consideră că eşantioanele sînt prelevate uniform dintr-un număr de perioade $P > 1$. Toate cele arătate cu privire la teorema clasică a eşantionării, rămîn valabile și în acest caz, inclusiv interpretarea fizică - cu precizarea că în relații, pulsația fundamentalei se ia de P ori mai mică, respectiv rangul celei mai înalte armonici din spectrul semnalului se ia de P ori mai mare.

Dezavantajele legate de prelucrarea, la reconstituire, a unui număr sporit de eşantioane, sînt compensate de o oarecare scădere a frecvenței de eşantionare; ne semnificativă însă din punct de vedere aplicativ.

Teorema eşantionării, generalizată, prezintă însă importanță din punct de vedere teoretic.

Se arată în lucrare că pornind de la această teoremă, prin trecerea la limită pentru $P \rightarrow \infty$, are loc, de fapt, trecerea de la regimul periodic la regimul aperiodic. Totodată, la limită, atît condiția privind frecvența de eşantionare cît și expresia de reconstituire au forma cunoscută de la regimul aperiodic.

Cele arătate mai sus reflectă faptul că teorema WKS reprezintă un caz particular, limită, al teoremei generalizate a eşantionării funcțiilor periodice.

6. În strînsă legătură cu cerințele privind frecvența minimă de eşantionare, este abordată în lucrare problema modificării spectrului semnalelor periodice prin transformarea patritică.

Se arată că și în cazul funcțiilor periodice de

banda limitată, la fel ca și în regim aperiodic, lățimea spectrului funcției rezultate prin ridicarea la patrat crește de două ori. Pe baza acestei afirmații a fost formulată următoarea teoremă a eșantionării funcțiilor $f_p^2(t)$ (teorema 2.1).

7. Pornind de la cele afirmate la punctul precedent, a fost cercetată în continuare problema spectrului funcțiilor periodice $f_p(t)$, ce rezultă din funcțiile $f'_p(t) = f_p^2(t)$, de bandă limitată, prin transformarea inversă ridicării la patrat.

În acest scop, se arată mai întâi că (teorema 2.2), din mulțimea de funcții periodice $f'_p(t)$ avînd $4K+1$ componente spectrale, numai funcții care satisfac $2K$ condiții pot reprezenta patratul unor funcții $f_p(t)$, cu $2K+1$ componente. Este reciproc.

Afirmația precedentă conduce în mod firesc la cercetarea spectrului funcțiilor $f_p(t)$, care prin ridicare la patrat conduc la funcții $f'_p(t)$ de bandă limitată, ce nu satisfac cele $2K$ condiții menționate mai sus (se au în vedere funcțiile $f'_p(t) \geq 0$, pentru $t \in (-\infty, +\infty)$). Rezultatul obținut, este deosebit de important prin implicațiile teoretice pe care le prezintă, și afirmă că aceste funcții $f'_p(t)$ reprezintă patratul unor funcții $f_p(t)$, avînd spectrul de lățime infinită, dacă $f'_p(t)$ este de bandă limitată. Existența funcțiilor $f_p(t)$ este certă dacă aceste funcții sînt continue și dacă $f'_p(t)$ este strict pozitivă.

Cu alte cuvinte, există funcții periodice de bandă nelimitată, care conduc, prin ridicare la patrat, la funcții de bandă limitată cu spectrul de lățime finită.

Legătura dintre acest rezultat și teorema de eșantionare este evidentă.

8. În cazul particular al funcțiilor $f'_p(t)$ strict pozitive, și care reprezintă patratul unor funcții $f_p(t)$ continue și de bandă limitată, frecvența minimă de eșantionare scade la jumătate, față de valoarea dată de teorema 2.1 (teorema 2.4). Afirmația este valabilă și în cazul funcțiilor aperiodice, care satisfac condițiile menționate.

Se demonstrează apoi că, în cazul mai general al funcțiilor $f'_p(t) \geq 0$, patrat al unor funcții $f_p(t)$ de bandă limitată, se impune prelevarea uniformă a coloanelor în N.

eșantioane dintr-o perioadă, pe baza cărora $f_p'(t)$ poate fi reconstituit fără erori ($f_p'(t)$ conține $2K$ componente armonice). Comparativ cu cerințele teoremei clasice a eșantionării ($N \geq 4K+1$), numărul de eșantioane este mai redus cu oca 25%. Această reducere se realizează pe seama informației suplimentare privind semnalul eșantionat și anume faptul că acest semnal reprezintă patratul unei funcții de bandă limitată.

9. Pe baza teoriei privind modificarea spectrului prin transformarea patrativă, a fost elaborată teorema 2.6. Aceasta permite descompunerea unei funcții periodice având $2K$ componente armonice și componenta continuă pozitivă, într-o sumă de două funcții, cu spectrul limitat la K componente armonice.

Teorema afirmă, prin urmare, posibilitatea reducerii la jumătate a frecvenței minime de eșantionare, în cazul funcțiilor menționate, comparativ cu valoarea impusă de teorema eșantionării. Numărul total de eșantioane, pe baza cărora se face reconstituirea, rămâne însă același, deoarece trebuie eșantionate două semnale în loc de unul.

Decompunerea, conform celor de mai sus, poate fi efectiv realizată pe cale matematică sau cu circuite analogice, fiind prezentată în acest sens o schemă posibilă.

Se opinează că, în afară de importanța strict teoretică, rezultatul de mai sus și-ar putea găsi o aplicație concretă în domeniul aproximării funcțiilor periodice de bandă limitată.

10. În problema erorilor la reconstituirea semnalelor eșantionate a fost reliefată ideea că, erorile de trunchiere sînt de fapt și ele, erori de tip "alias". Un asemenea punct de vedere este util în aplicațiile în care se necesită evaluarea erorilor globale, rezultate ca urmare a trunchierii și a fenomenului "alias". De altfel, în situațiile în care se cunoaște doar semnalul trunchiat, evaluarea globală a celor două categorii de erori amintite este singura evaluare posibilă.

11. Pe baza celor arătate mai sus și avînd în vedere că celelalte categorii de erori, care se manifestă la reconstituire, nu țin de esența procesului de eșantionare, au fost analizate în detaliu erorile "alias".

Pentru această categorie de erori a fost stabilită o expresie a limitei valorii lor absolute, aplicabilă în cazul semnalelor aperiodice, cu orice lăţime a spectrului. Expresia cunoscută în literatură, a limitei erorilor "alias", utilizabilă pentru semnale cu o anumită lăţime a spectrului, se obţine ca un caz particular al rezultatului menţionat anterior.

Expresia generalizată a fost extinsă apoi şi în cazul semnalelor periodice.

12. Studiul erorilor "alias" a evidenţiat o particularitate importantă a procesului de reconstituire în regim periodic : faptul că, cu excepţia unei clase restrânse de semnale, erorile "alias" nu se anulează în punctele de eşantionare, dacă numărul de eşantioane prelevate este par.

Particularitatea amintită prezintă interes din punct de vedere aplicativ, deoarece permite a se stabili, în cazul unei clase extrem de largi de semnale periodice, dacă frecvenţa de eşantionare corespunde sau nu cerinţelor teoremei eşantionării.

13. Pornind de la ideea că o măsură mai concludentă a abaterii semnalului reconstituit faţă de semnalul iniţial, o constituie eroarea patratică totală respectiv eroarea medie patratică "alias" au fost stabilite expresii exacte respectiv limite pentru valorile absolute ale acestor erori.

În cazul semnalelor aperiodice a fost calculată eroarea patratică totală, în timp ce, pentru semnalele periodice, a fost avută în vedere eroarea medie patratică. S-au putu constăta în ambele situaţii, că eroarea depinde de tratamentul medulului spectrului înafara limitelor $\pm \pi/T$.

14. Problema erorii medii patratică a fost apoi reluată în cazul semnalelor aperiodice, de durată finită. Se constată că un astfel de semnal poate fi reconstituit considerându-l fie ca stare, adică ca semnal aperiodic, ori se reconstituie semnalul periodic ce rezultă prin repetarea sa (perioada de repetiţie fiind egală cu durata).

Se demonstrează în lucrare că, semnalele reconstituite conform celor două procedee, de mai sus, şi limitele la intervalul corespunzător semnalului iniţial, vor di-

feri întotdeauna între ele. Acest fapt a determinat un studiu al erorilor medii patratice separat pentru fiecare dintre cele două procedee.

Din compararea expresiilor astfel obținute a rezultat concluzia că erorile medii patratice "alias", corespunzătoare reconstituirii ca semnal aperiodic respectiv periodic, diferă, de asemenea, între ele. Se prezintă totodată, condiții pentru spectrul semnalului eroare (acesta, la rândul său, poate fi exprimat funcție de spectrul semnalului inițial), care asigură erori mai mici în fiecare dintre cele două procedee.

15. Pe baza teoriei stabilite, privind modificarea spectrului semnalelor prin transformarea patrată și utilizând expresiile deduse pentru eroarea medie patrată "alias", au fost elaborate două noi procedee de reconstituire a semnalelor eșantionate. Aceste procedee, aplicabile atât în cazul semnalelor periodice cât și în cazul semnalelor aperiodice, de durată limitată, pot conduce, în anumite condiții, la erori de reconstituire mai mici, comparativ cu metodele cunoscute.

Pentru semnalul avut în vedere la verificarea prin calcul direct a algoritmului de reconstituire prin ridicare la patrat-spre exemplu-eroarea medie patrată a fost de cca. 3 ori mai mică, față de eroarea introdusă la reconstituirea aceluiași semnal, conform procedeei clasice. Dependent de forma semnalului, această reducere poate fi și mai substanțială.

16. În scopul reducerii duratei de calcul, la reconstituirea semnalelor periodice, a fost elaborat un algoritm de reconstituire, în care este utilizată IFR. Algoritmul asigură calculul unui număr de valori reconstituite egal cu numărul de eșantioane și decalate fiecare, față de eșantionul corespunzător, cu un același interval Δt .

În anumite situații concrete, algoritmul propus se dovedește mai avantajos-din punctul de vedere al duratei calculului-comparativ cu oricare dintre metodele de reconstituire, cunoscute actualmente.

17. Teoria stabilită la elaborarea algoritmului de mai sus, a permis formularea unei teoreme a deplasării în cazul TFD, valabilă - în condițiile satisfacerii teoremei de eșantionării - pentru orice decalaj Δt .

Teorema deplasării, cunoscută în literatură, este vădită ca un caz particular, în situația că Δt este un număr întreg de intervale de eșantionare.

x

x

x

Drept încheiere la prezenta lucrare vom sublinia faptul că rezultatele originale menționate, vor servi la fundarea și lărgirea cercetărilor privind elaborarea, în cadrul Catedrei de electronică și măsurări, de la Institutul de tehnic Timișoara, de aparatură de măsurat bazată pe eșantionare. Se menționează totodată ideea că, unele dintre contribuțiile aduse, pot fi aplicate și își dovedesc utilitatea în cazul oricărui sistem cu prelucrare numerică a semnalelor.

În teză s-a insistat în mod deosebit în legătură cu problema erorilor la reconstituire. Motivația unui asemenea punct de vedere o constituie faptul că scopul final al lucrării, a cărui punct de plecare îl constituie lucrarea de față, este de a elabora sisteme de măsurat cu prelucrare numerică, la care precizia reprezintă unul dintre cei mai importanți parametri caracteristici.

B I B L I O G R A F I E

1. Abdul J. Jerri The Shannon sampling theorem-its variations extensions and applications:A tutorial review. Proc. of the IEEE, vol.65, nr.11, nov.1977, pg.1565-1596.
2. Whittaker,E.M. On the functions which are represented by the expansion of interpolating theory.Proc.Roy.Soc.Edinburgh, vol.35, pg.181-194, 1915.
3. Whittaker,J.M. The Fourier theory of the cardinal functions. Proc.Math.Soc.Edinburgh, vol.1, pg.169-176, 1929.
4. Kotelnikov,V.A. On the transmission capacity of "ether" and wire in electrocommunications (material for the first all-union conference on questions of communications) Izd.Red.Upr.Svyazi RKKA, Moscova, 1933.
5. Someya, I. Waveform Transmission Tokyo, Shukyo, Ltd., 1949.
6. Shannon,C.E. Communications in the presence of noise Proc.IRE, vol.37, ian.1949, pg.10-31.
7. Linden, D.A. A discussion of sampling theorems.Proc. IRE, vol.47, nr.7, iulie 1959, pg.1219-1226.
8. Cartianu, Gh. Analiza și sinteza circuitelor electrice. Editura didactică și pedagogică, București, 1972.
9. Ganea,T. Serii trigonometrice. Ed.tehnică, Buc., 1956.
10. Landau, H.J. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty-I. The Bell Syst.Techn.Journal,nr.1,ian.

- 1961, pg.46-63.
11. Max, J. Methodes et techniques de traitement-du signal et applications aux mesures physiques Masson, Paris, 1977.
 12. Popoulis, A. The Fourier Integral and its Application. New-York, Mc Graw-Hill, 1962.
 13. Stanomir, D.
Stănăgîlă, O. Metode matematice în teoria semnalelor. Edit. tehnică, București, 1980.
 14. Spătaru, Al. Teoria transmisiunii informației. Semnale și perturbații. Editura tehnică, București, 1966.
 15. Landau, H.J. Sampling data transmission and the Nyquist rate. Proc. IEEE, vol.55, 1967, pg.1701-1706.
 16. Stearns, D.Samuel Digital Signal Analysis. Hayden Book Company, Inc. New-Jersey, 1975.
 17. Pop, E.
Stoica, V. Principii și metode de măsurare numerică. Edit. Facla, 1977.
 18. Kuo, C.B. Sisteme automate cu eșantionare, Edit. tehnică, Buc., 1967.
 19. Maeda, N. On sampling theorems of band-limited periodic signals. J. Inst. Electron. Comm. Engrs., Japan, vol.50, nr.3, 1967, pg.1472-1473.
 20. Anibal R.Figueiras-Vidal Some new results in sampling deterministic signals. EUSPICO-80, First European Signal Processing Conference, Switzerland, sept. 1980.
 21. Constantinescu, I. Teoria informației. Editura tehnică, București, 1958.
 22. Popoulis, A. Signal Analysis. Mc Graw-Hill, Inc., 1977
 23. Popoulis, A. Error Analysis in Sampling Theory. Proc. IEEE, vol.54, nr.7, 1966, pg.947-955.

24. S. Goldman Information Theory, Prentice Hall, New-York, 1968.
25. Kecs, W.
Teodorescu, P.P. Introducere în teoria distribuțiilor cu aplicații în tehnică. Edit. tehnică, București, 1975.
26. Gîrlașu, S. Prelucrarea în timp real a semnalelor fizice. Edit. "Scrisul românesc", Craiova, 1978.
27. Hamming, R.W. Numerical Methods for Scientists and Engineers. Mc Graw-Hill Company, 1973.
28. Oppenheim, A. Selected papers in digital signal processing. IEEE Press, 1976.
29. Tiponuț, V. Legătura dintre teorema eșantionării funcțiilor periodice și teorema WKS. Buletinul științific și tehnic al IPTVT. fasc.2/1981 (în curs de publicare).
30. Ross, D.T. Notes on Analog-Digital Conversions Techniques. John Wiley Sons, N.Y., 1952.
31. Panter, P.F. Modulation, Noise and Spectral Analysis. Mc Graw-Hill Book Company, 1965.
32. Kramer, H.F. A generalized sampling theorem. J. Math. Phys., vol.38, 1959, pg.68-72.
33. Weiss, P. Sampling theorems associated with Sturm-Liouville systems. Bull. Math. Soc., vol.63, 1957, pg.242.
34. Coddington, E.A.
Levison, N. Theory of Ordinary Differential Equations. New-York, Mc.Graw-Hill, 1955.
35. Campbell, L.L. A comparison of the sampling theorem of Kramer and Whittaker. J. SIAM, vol.12, 1964, pg.117-130.
36. Jerri, A.J. Sampling expansion for the L^2 Laguerre integral transform. J. Research of Nat. Stands.-B. Math. Science, vol.30 B,

- sept.1976, pg.415-418.
37. Jerri, A.J. On the application of some interpolating functions in physics. J.Res.Nat. Bur.Stands.-B. Math.Sciences, vol.70B, nr.3, sept.1969, pg.241-245.
38. Jerri, A.J. On the equivalence of Kramer's and Shannon's sampling theorems. IEEE Trans. Inform.Theory, vol.IT-15, iulie 1969, pg.497-499.
39. Popoulis, A. Systems and Transforms with Applications in Optics. New-York, Mc.Graw-Hill, 1968.
40. Sneddan, I.N. The Use of Integral Transforms. New-York, Mc. Graw- Hill, 1972.
41. Jerri, A.J. Application of the sampling theorem to time-varying systems. J.Franklin Inst., vol.293, nr.4, ian.1972.pg.53-58.
42. Jerri, A.J. Application of the sampling theorems to boundary value problems. J.Eng.Math., Davis, E.J. vol.8, ian.1974, pg.1-8.
43. Reza, F.M. An Introduction to Information Theory. New-York, Mc Graw-Hill, 1961.
44. Parzen, E. A simple proof and some extensions of sampling theorems. Stanford University, Stanford, CA, Tech., Rep.7,1956.
45. Miyakawa, H. Sampling theorem of stationary stochastic variables in multidimensional space. J. Inst.Commun. Engrs.,Japan, vol.42, 1959, pg.421-427.
46. Gaarder, N.T. A note on multidimensional sampling theorem. Proc.IEEE, vol.60, febr.1972, pg.247-248.
47. Montgomery, W.D. K-Order sampling of N-dimensional bandlimited functions. Int.J.Contr., vol.1,

nr.1, jan.1965, pg.7-12.

48. Fogel, L. A note on the sampling theorem. IRE Trans., vol.1., martie 1955, pg.47-48.
49. Linden, D.A. A generalization of the sampling theorem. Abramsen, N.M. Inform. Contr., vol.3, 1960, pg.26-31.
50. Jerri, A.J. Sampling expansions with derivatives for Kreisler, D.W. finite Hankel and other transforms. SIAM J. Math. Anal., vol.6, nr.2, aprilie 1975.
51. Kreisler, D.W. Sampling expansion with derivatives for finite Hankel and other transforms. Ph. D. dissertation, Clarkson College of Technology, Potsdam, NY, 1972.
52. Black, H.S. Modulation Theory. New York, van Nostrand, 1953.
53. Beutlen, F.J. Error-free recovery of signals from irregularly spaced samples. SIAM Rev., vol.8, nr.3, iulie 1966, pg.328-335.
54. Yao, K. A class of nonuniform sampling representation. Symp. Signal Trans. Processing, Thomas, J.B. Columbia University, mai 1968, pg.69-75.
55. Yen, J.L. On the nonuniform sampling of band width limited signals. IRE Trans. Circuit Theory, vol.CT-3, dec.1956, pg.251-257.
56. Yas, K. On some stability and interpolating properties of nonuniform sampling expansions. Thomas, J. B. IEEE Trans. Circuit Theory, vol.CT-14, dec.1967, pg.404-408.
57. A.Kohlenberg Exact interpolation of band-limited functions. J. Appl. Physics, vol.24, 1953, pg.1432-1436.
58. Middleton, D. An Introduction to Statistical-Communication Theory. New-York, Mc.Graw-Hill, 1960.

59. Balakrishnan, A.V. A note on the sampling principle for continuous signals IRE Trans. Inform.Theory, vol.IT-3, iunie 1957, pg.143-146.
60. Lichtenberger, C.B. A note on perfect predictability and analytic processes. IEEE Trans. Inform.Theory, vol.IT-20, 1974, pg. 101-102.
61. Beutler, F.J.
Leneman, O. Random sampling of random processes; stationary point process. Inform. Contr., vol.9, 1966, pg.325-346.
62. Miyakawa, H. Sampling theorem of stationary stochastic variables in multidimensional space. J.Inst.Elec.Commun.Engrs. Japan, vol.42, 1959, pg.421-427.
63. Bar-David, I. An implicit sampling theorem for bounded band limited functions. Inform. Contr., vol.24, ian.1974, pg.36-44.
64. Bond, F.E.
Cahn, C.R. On sampling the zeroes of band width limited signals. IRE Trans. Inform.Theory, vol.IT-4, 1958, pg.110-113.
65. Horinchi, H. Sampling principle for continuous signals with time-varying bands: Inform. Contr., vol.13, iulie 1968, pg.53-61.
66. Wainstein, L.A.
Zubakov, V.D. Extraction of Signals from Noise. Prentice Hall, 1962.
67. Brown, J.L.Jr. Uniform linear prediction of band-limited processes from past samples. IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-18, sept.1972.
68. Pop E. O generalizare a teoremei eșantionării. Buletinul științific și tehnic al I.P.T. Seria electrotehnică, Tom 19(13), fasc.1, 1974.

69. Wunsch, G. Concerning a generalization of the sampling theorem and its applications in system theory. Nachrichtentech.Z. vol.13, 1963, pg.380-382.
70. Slepian, D. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty-I. Bell Syst. Tech.J., vol.40, 1961, pg.43-64.
Pollack, H.C.
71. Gabor, C.s.a. The optimization of bandlimited systems. Proc.IEEE, vol.61, nr.2, febr.1973, pg.196-234.
72. Hamming, R.W. Digital Filters. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1977.
73. Coman, Gh. Introducere în teoria ecuațiilor operatoriale. Editura "Dacia", Cluj-Napoca, 1976.
74. Arfken, G. Mathematical Methods for Physicists. Academic Press, New-York and London, 1966.
75. Brillouin, L. Science and Information Theory. New York, Academic Press, 1963, ed.II.
76. Tsymbakov, B.S. On the accuracy of restoring a function with a finite number of terms of Kotelnikov series. Radi Eng. Electron., vol.4, nr.3, martie 1954, pg.274-275.
Iakovlev, V.P.
77. Chetverikov, V. Data Processing for Control and Management. Mir Publishers, Moscova, 1977.
78. Helms, H.D. Truncation error of sampling theorem expansion. Proc.IRE, vol.50, februarie 1962, pg.179-184.
Thomas, J.B.
79. Yao, K. On truncation error for sampling representations of band-limited signals. IEEE Trans. Aero. Electron. Syst., vol.AES-2, nov.1966.
Thomas, J.B.
80. Brown, J.L.Jr. Bounds for truncation error in sampling

expansions of band limited signals. IRE Trans. Inform. Theory, vol.IT-15, iulie 1969, pg.440-444.

81. Piper, H.J.Jr. Best asymptotic bounds for truncation error in sampling expansions of band-limited signals. IEEE Trans. Inform.Theory, vol.IT-21, nov.1975, pg.482-485.
82. Popoulis, A. Limits on band-limited signals. Proc.IEEE, vol.55, nr.10, oct.1967, pg.1677-1681.
83. Mendelovicz, E. Truncation error bounds for signal sampling. Conf. Circuit Syst.Comput., nov. 1975, pg.16.
84. Yao, K. Applications of reproducing kernel Hilbert spaces-band-limited signal models. Inform. Contr., vol.11. 1967, pg.429-444.
85. Weiss, P. An estimate of the error arising from misapplication of the sampling theorem. American Math. Soc.Notias, nr.10.351,1963.
86. Brown,J.L.Jr. On the error in reconstructing a nonband limited function by means of the band pass sampling theorem.J.Math.Anal.Appl.,vol.18, 1967, pg.75-84.
87. Boas,R.P.Jr. Summation formulas and band-limited signals. Tôkoku Math.J., vol.24, 1972, pg.121-125.
88. Brown, J.L.Jr. A least upper bound for aliasing error. IEEE Trans. Auto.Contr., vol.AC-13, nr.6, dec.1968, pg.754-755.
89. Knab,JJ. A system error bound for self truncating reconstruction filter class. IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-21, mai 1975, pg.341-342.
90. Stewart, R.M. Statistical design and evaluation of filters for the restoration of sampled data.Proc. IRE, vol.44, februarie,1956, pg.253-257.

91. Spilker, J.J. Theoretical bounds on the performances of sampled data communications systems. IRE Trans. Circuit Theory, vol.CT-7, sept.1960, pg.335-341.
92. Chang, S.S.L. Optimum transmission of a continuous signal over a sampled data link. AIEE Trans., vol.79, jan.1961, pg.533-542.
93. Brown, W.M. Optimum prefiltering of sampled data. IRE Trans. Inform. Theory, vol.IT-7, oct.1961, pg.269-270.
94. Balakrishnan, A.V. On the problem of time jitter in sampling. IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT-8, aprilie 1962, pg.226-236.
95. Brown, W.M. System performance in the presence of stochastic delays. IRE Trans. Inform. Theory, vol.IT-8, sept.1962, pg.S206-S214.
96. Tiponut, V. Evaluarea valorii medii patratice și a valorii patratice totale a erorilor "alias". Buletinul științific și tehnic al IPTVT fasc.2/1981 (în curs de publicare).
97. Roșculeț, M. Analiza matematică. Edit.didactică și pedagogică, București, 1979.
98. Ciorănescu, N. Analiza matematică, vol.II. Editura IFB, 1952.
99. Savarensky, E. Seismic Waves Mir Publishers, Moscova, 1975.
100. Oppenheim, A. Digital Signal Processing Prentice-Hall, Schafer, R. 1975.
101. Cochran, W.T. What is the Fast Fourier Transform? Proc. IEEE, vol.55, nr.10, oct.1967, pg.1164-1674.
102. Schafer, R. A digital signal processing approach to interpolation Proc.IEEE, iunie 1973, Rabiner, L.

pg.692-702.

103. Kishore Singhal Interpolation using the Fast Fourier Transform. Proc.IEEE., vol.60, nr.12, dec.1972,pg.1558.
Jiri,Vlach
104. * * * Formel und Tabellenbach für Starkstrom-Ingenieure, 3 überarbeitete Auflage, Siemens-Schuckerwerke.Aktiengesellschaft, 1965.
105. Dima,P. Programarea în FORTRAN. Edit.didactică și pedagogică, București, 1971.
106. Thomas,J.B. Error problems in sampling representation.IEEE Int.Conv.Rec.,vol.12,pert.5, 1964,pg.269-277.
Liu, B.
107. * * * Ein rechnergesteuertes Oszillografensystem.Radio Fernschen Elektronik, vol. 23, nr.3, 1974, pg.106.
108. Simonov,M.M. Tifrovai algoritm vosstanovlenia vhodnogo signala.Izmeritelnaia tehnica, nr.5, 1979,pg.24-32.
Vasiliev,E.A.
109. Andrianov,A.V. Sposob korrekții vîhodnogo signala izmeritelnih priborov.Izmeritelnoia tehnica, nr.4, 1975, pg.59-61.
Krîlov,V.V.
110. Arsenin,V.Ia. Vosstanovlenie formî signala, svobodnoi ot iskajenii, obaslovlennih apparaturnoi i kanalom predaci.Izmeritelnaia tehnica, nr.1, 1969, pg.74-79.
Ivanov, V.V.
111. Naidenov,P. O vosstanovlenii vhodnogo signala v ostillograficeskîh ustroistvah s transformatiei vremenogo maștaba .Izmeritelnaia tehnica, nr.2, 1974, pg.88-91.
Poțius, V.P.
112. Pop,E. Erori produse de eșantionare la măsurarea puterii .Buletinul științific și tehnic al IPT, 2/1973.
113. Tiponuț,V. Distorsiunile de frecvență introduse de

osciloscopul cu eşantionare. Buletinul științific și tehnic al IPT, Seria electrotehnică, Tom 18 (32), fasc.2/1973.

114. Tiponut, V. Metodă de calcul a dispozitivului de eşantionare pentru oscilografiera tensiunilor. Buletinul științific și tehnic al IPT, Seria electrotehnică, Tom 18(32), fasc. 2/1973.
115. Pop, E.
Naformiță, I. Wattmetre și contoare numerice. Buletinul științific și tehnic al IPTVT, nr.3/1978.
116. Pop, E.
Naformiță, I. Asupra erorilor de măsurare a puterii prin metoda multiplicării numerice. Metrologia aplicată, nr.3/1979.

C U P R I N S

Introducere	I
1. Teorema eşantionării şi reconstituirea semnalelor eşantionate	1
1.1. Eşantionarea şi reconstituirea semnalelor aperiodice	1
1.1.1. Teorema WKS	1
1.1.2. Interpretarea fizică a teoremei WKS şi a expresiei de reconstituire...	3
1.2. Eşantionarea şi reconstituirea semnalelor periodice	7
1.2.1. Generalităţi	7
1.2.2. Teorema eşantionării funcţiilor periodice	9
1.2.3. Interpretarea fizică a teoremei eşantionării funcţiilor periodice.....	13
1.2.4. Interpretarea fizică a expresiei de reconstituire	18
1.2.5. Observaţii privind reconstituirea semnalelor periodice.....	25
1.2.6. Legătura dintre teorema eşantionării funcţiilor periodice şi teorema WKS...	28
1.3. Extensii ale teoremei WKS	34
1.3.1. Clasificarea diferitelor extensii şi variante ale teoremei WKS	34
1.3.2. Teorema eşantionării generalizată.....	34
1.3.3. Teorema eşantionării pentru funcţii n-dimensionale	37
1.3.4. Teorema eşantionării cu valorile funcţiei şi ale derivatelor sale.....	38
1.3.5. Teorema eşantionării pentru eşantionare neuniformă	39
1.3.6. Eşantionarea funcţiilor trece-bandă...	41
1.3.7. Eşantionarea proceselor aleatoare.....	44
1.3.8. Eşantionarea implicită	44
1.3.9. Teorema eşantionării pentru semnale cu spectru şi bandă de trecere nestăţionate	46
1.3.10. Alte variante ale teoremei WKS.....	47

2. Transformarea patratică și spectrul semnalelor periodice	51
2.1. Introducere	51
2.2. Teorema eşantionării funcțiilor $f_p^2(t)$	51
2.3. Problema inversă	53
2.4. Teorema eşantionării pentru funcțiile $f_p^1(t)$	65
2.5. Descompunerea funcțiilor periodice	69
2.6. Exemple	74
3. Erori la reconstituirea semnalelor eşantionate	77
3.1. Introducere. Clasificarea erorilor	77
3.2. Erori de trunchiere și limitele lor	79
3.3. Erori "alias" și limitele lor	85
3.4. Erori de amplitudine și de instabilitate	85
3.5. O generalizare a expresiei limitei erorilor "alias"	93
3.6. Extinderea limitei generalizate la cazul funcțiilor periodice	108
3.7. Evaluarea valorii medii patratică și a valorii patratică totale a erorilor "alias"	121
3.7.1. Eroarea patratică totală "alias" pentru semnalele aperiodice	122
3.7.2. Eroarea medie patratică "alias" pentru semnale periodice	124
3.7.3. Eroarea medie patratică "alias" pentru semnalele de durată finită	127
4. Procedee de reconstituire cu reducerea erorii "alias"	140
4.1. Introducere	140
4.2. Procedeu de reducere a erorii "alias" la reconstituirea semnalelor periodice	142
4.3. Procedeu de reducere a erorii "alias" la reconstituirea semnalelor aperiodice	151
4. Procedeu de reconstituire bazat pe teorema deplasării cu utilizarea TFR	153
5.1. Introducere	153
5.2. Algoritm de reconstituire prin adăugarea de componente de frecvență, cu utilizarea TFR	155
5.3. Algoritm de reconstituire bazat pe teorema deplasării	160
5.4. Recomandări privind aplicarea algoritmului propus	165
5.5. Observații	165
5.6. Program FORTRAN pentru procedeu de reconstituire bazat pe teorema deplasării cu utilizarea TFR	169
6. Verificări experimentale	170

6.1. Exemplu care probează teorema 2.3.	170
6.2. Neanularea erorilor în punctele de eşantionare. . .	175
6.3. Exemplu de aplicare a procedurii de reconstituire a funcțiilor pare, eşantionate cu $N=2K$. . .	177
6.4. Exemplu de aplicare a procedurii de reconstituire prin ridicare la patrat	177
6.5. Program ASSIRIS pentru calculul TFR	185
Anexe	186
7. Concluzii	184
Bibliografie	12