

INSTITUTUL POLITEHNIC "TRAIAN-VUIA"
FACULTATEA DE CONSTRUCȚII
CATEDRA DE BETON ARMAT ȘI CLĂDIRI

Ing. NGUYEN-MANH-YEN

CONTRIBUȚII LA CALCULUL STRUCTURILOR
DIN PLĂCI DE BETON ARMAT PRIN METODA
ELEMENTELOR FINITE ȘI TEORIA ECHIVALENTELOR

TEZA DE DOCTORAT

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC
PROF. EMERIT ING. CONSTANTIN AVRAM
M.C. AL ACADEMIEI R. S. R.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMIȘOARA

TIMIȘOARA

INST.	1979	AC. T. S. R. R.
		LIBRĂRIE
		TRAIAN-VUIA
		3530/0
		122 Lit. G

P R E F A T A

Avântul pe care l-au cunoscut în ultimul timp metodele numerice bazate pe discretizarea structurilor, are la bază dezvoltarea bazei materiale a cercetării științifice și proiectării structurilor. Dotarea intensă cu calculatoare electronice a tuturor ramurilor de activitate, a înlesnit abordarea calculului structurilor inginerești prin metode mai exacte, care în plus oferă mai multe informații despre comportarea structurii, cu același cuantumul de timp alocat.

În contextul metodelor numerice un loc important ocupă metoda elementelor finite. Prin rezultatele foarte bune care s-au obținut, această metodă a devenit familiară inginerilor constructori care lucrează în domeniul cercetării științifice și proiectării. Utilizarea ei permite abordarea calculului unor structuri complexe ca alcătuire, și care în trecut se puteau calcula doar prin simplificări importante.

În paralel, teoria echivalențelor oferă inginerului proiectant un instrument de calcul tot atât de exact, iar în anumite situații mai ușor de aplicat. Teoria echivalențelor utilizează tot o discretizare fizică a structurii, transformând-o într-un model echivalent format din bare, model foarte familiar inginerilor constructori prin tradiție.

Lucrarea de față a utilizat cele două metode, sus prezentate, la calculul plăcilor de beton armat simple și complexe, considerându-le izotrope și respectiv ortotrope.

Lucrarea cuprinde un număr de 6 capitole și un volum de anexe conținând programele de calcul întocmite pentru exemplele de calcul studiate.

În capitolul I se prezintă stadiul actual al problemelor de plăci elastice subțiri, un scurt istoric al dezvoltării teoriei plăcilor plane și tendințele actuale în cercetarea științifică a teoriei plăcilor plane, menționând totodată soluțiile clasice precum și cele numerice moderne ale ecuației fundamentale Lagrange - Sophie Germain.

În capitolul II se prezintă problemele fundamentale ale metodei elementelor finite, cu utilizarea sa la calculul plăcilor plane elastice izotrope și ortotrope.

Se determină matricele de rigiditate pentru cazuri de compatibilitate a câmpurilor deformațiilor alese, și matricele de transformare a deplasărilor nodale în eforturi unitare și eforturi unitare principale.

Se elaborează programele corespunzătoare fiecărui caz considerat, menționându-se că programele de calcul pentru cazul plăcilor anizotrope sînt generale acoperind și cazul plăcilor izotrope.

În capitolul III se prezintă teoremele de bază ale teoriei echivalențelor. În studiul propriu, se folosesc trei modele echivalente pentru plăci izotrope și două modele pentru plăci ortotrope. Pentru fiecare model, se determină caracteristicile mecanice și geometrice ale modelului pe baza echivalenței energiilor de deformații ale celor două sisteme : real și echivalent.

Se construiește matricea rigidităților modelului echivalent analizîndu-l cu ajutorul metodei deplasărilor.

Se stabilește relația deplasării nodale - eforturi unitare determinînd matricea de transformare a deplasărilor nodale în eforturile barelor și după aceea, în eforturile unitare ale plăcii.

Se întocmesc programele de calcul corespunzătoare fiecărui model studiat. De asemenea, se menționează că programele de calcul pentru modelele ortotrope sînt generale și acoperă cazurile de modele izotrope.

În capitolul IV se prezintă aplicațiile de calcul la plăci izotrope utilizînd programele întocmite pentru a calcula 6 tipuri de plăci izotrope cu diverse condiții de margine precum și plăci avînd grosimea variabilă respectiv plăci cu goluri.

Rezultatele obținute se compară cu cele obținute de alți autori pe cale teoretică sau experimentală.

În capitolul V se prezintă aplicațiile de calcul la plăci avînd caracter ~~de~~ anizotropie geometrică sau de material. Se tratează detaliat o gamă largă de plăci ortotrope : plăci de beton armat, plăci cu nervuri, plăci ondulate, planșee casetate.

Utilizînd programele proprii, se calculează patru exemple de calcul pentru cele patru tipuri de plăci ortotrope. Se efectuează o analiză comparativă a rezultatelor proprii cu cele obținute de diverși autori.

In capitolul VI se prezintă concluziile care se desprind din analiza comparativă a utilizării celor două metode studiate la calculul plăcilor plane izotrope și ortotrope, cât și a programelor de calcul folosite precum și observații asupra exactității acestora, relativ la modelele utilizate și la parametrii de calcul folosiți.

Autorul ține să-și exprime și pe această cale profun-
da recunoștință profesorului emerit ing. Constantin AVRAM, membru
corespondent al Academiei R.S.R., pentru îndrumarea și grija
permanentă acordată pe parcursul elaborării acestei lucrări.

De asemenea, autorul dorește să aducă mulțumiri con-
ducerii Catedrei de Beton armat și clădiri, cadrelor didactice
din catedră, tovarășului dr.ing. Richard FRIEDRICH pentru spri-
jinul acordat la elaborarea acestei lucrări.

CAPITOLUL I.

STADIUL ACTUAL AL PROBLEMELOR STUDIIATE

1. Introducere

Prin placă plană se înțelege un corp prismatic sau cilindric a cărui înălțime h este mică în raport cu dimensiunile bazei (fig.1.1).

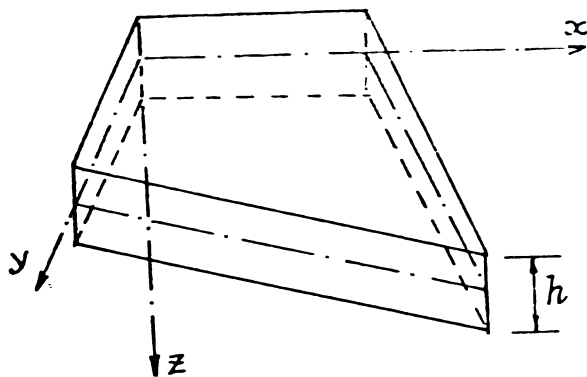


Fig.1.1

O placă plană este definită printr-o suprafață mediană plană. Cele două suprafețe care mărginesc placa sînt situate la egală distanță de suprafața mediană.

În cazul general, plăcile plane sînt supuse unor încărcări care acționează oblic în raport cu suprafața mediană. Cazul plăcilor plane acționate de încărcări cuprinse în planul lor median corespunde problemei plane a teoriei elasticității.

În prezenta lucrare ne vom limita la plăcile plane acționate de forțe normale pe planul lor median (plăci de planșee, în general). În acest caz se pot face unele ipoteze simplificatoare. Trebuie observat că, în general, nu avem de-aface numai cu încovoierea plăcii ci în marea majoritate a cazurilor, încovoierea plăcii este însoțită de răsucire.

Studiul eforturilor unitare și a deformațiilor unor astfel de plăci ne conduce la înlocuirea ecuațiilor diferențiale ale încovoierii (pentru problema barelor) prin ecuații cu derivate parțiale, a căror integrare este mult mai dificilă, atît datorită in-

fluentei răsucirii cât și datorită faptului că trebuie să raportăm eforturile unitare și deformațiile nu față de o singură linie (axa barei) ci față de o suprafață (suprafața mediană).

În mod obișnuit, plăcile plane se pot clasifica în următoarele categorii, pe baza efectului lor structural :

a. Plăci rigide care sînt plăci subțiri cu rigiditate la încovoiere supuse în general, momentelor încovoietoare și forțelor tăietoare în mod similar cu grinzile (fig.1.2a).

b. Membrane care sînt plăci subțiri fără rigiditate la încovoiere supuse forțelor axiale și forțelor de lunecare (fig. 1.2b). Deoarece grosimea lor este prea mică, momentele lor de rezistență sînt neglijabile.

c. Plăci flexibile care prezintă combinația celor două categorii de plăci rigide și membrane, supuse acțiunilor combinate de momente, forțe tăietoare și forțe axiale (fig.1.2c). Aceste plăci sînt larg folosite în practică.

d. Plăci groase, ale căror condiții de eforturi sînt asemenea cu cele ale continuumului tridimensional (fig.1.2d).

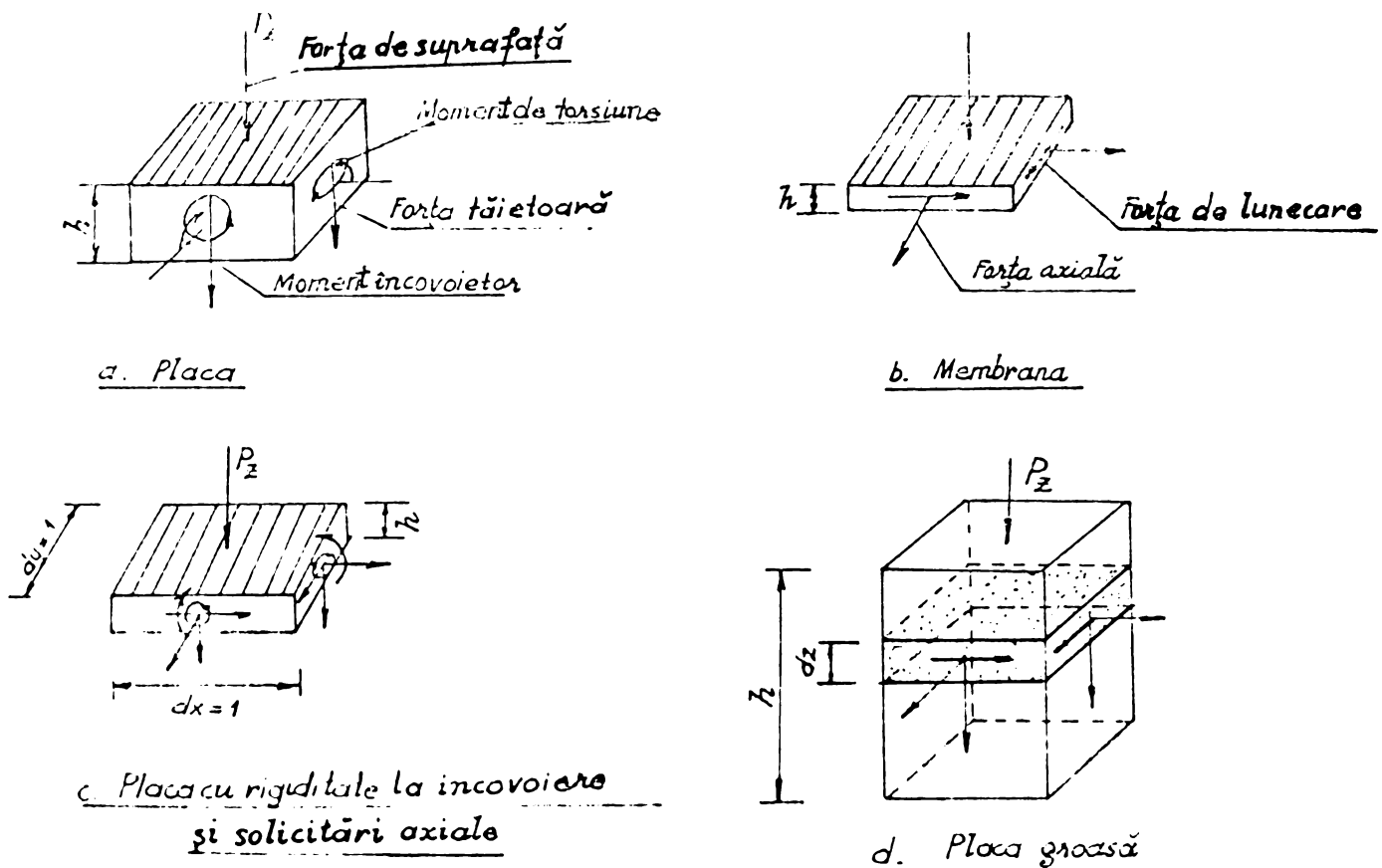


Fig. 1.2

Teoriile de calcul ale plăcilor fac distincție netă între plăcile avînd deformații mici și cele avînd deformații mari. Pentru primele, legea suprapunerii este, în general, aplicabilă, în timp ce, pentru ultimile trebuie utilizată teoria de calcul de ordinul al doilea.

Teoriile plăcilor pot fi grupate și pe baza relațiilor tensiuni - deformații. Teoria plăcilor elastice este bazată pe ipoteza legăturii liniare între eforturi și deformații după legea cunoscută a lui Hooke, în timp ce elasticitatea neliniară, plasticitatea și vîscoelasticitatea consideră relații mai complexe de tensiuni - deformații. Toate aceste teorii, cu excepția vîscoelasticității, care consideră numai încărcarea dinamică, pot fi împărțite în statice și dinamice depinzînd de natura dinamică sau statică a încărcărilor acționate.

În cele ce urmează se prezintă teoriile valabile pentru plăcile cu grosime mică numite "plăci plane subțiri" cu deformație mică.

Aceste teorii sînt studiate pe baza următoarelor ipoteze :

1. Materialele sînt elastice și omogene dar pot fi izotrope sau ortotrope.

2. Grosimea plăcii este mică în raport cu celelalte dimensiuni.

3. Deplasările plăcii sînt mici față de grosimea plăcii.

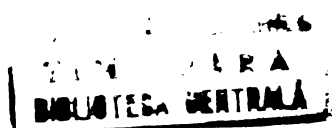
4. Panta suprafeței mediane deformată este mică față de unitate.

5. Un segment de dreaptă normal pe suprafața mediană înainte de încovoiere rămîne un segment de dreaptă și este normal pe suprafața mediană a plăcii după încovoiere (adică se neglijează influența forșelor tăietoare asupra deformației secțiunii plăcii similar ipotezei secțiunilor plane în teoria gînzilor).

6. Se neglijează eforturile unitare paralele cu direcția perpendiculară pe planul median al plăcii ($\sigma_z = 0$).

Aceste ipoteze se numesc în literatură sub numele de ipotezele Love - Kirchhoff.

Nevoile practicii au determinat o dezvoltare deosebită a acestei teorii, care s-a dovedit deosebit de eficace. Totuși, încă de la începutul constituirii ei, s-au pus în evidență anumite contradicții interne, astfel încît s-a dezvoltat în paralel o literatură deosebit de vastă consacrată eliminării acestor contra-



dicții propunându-se noi formulări. Printre formulările noi, menționăm pe aceea a lui Reissner E. sau Vlasov V., după care a urmat un mare număr de alte formulări mai mult sau mai puțin complicate.

2. Scurt istoric al dezvoltării teoriilor plăcilor plane.

Primele studii ~~analitice~~ și experimentale ale plăcilor plane au fost dedicate aproape exclusiv problemelor vibrațiilor libere.

Prima aproximare matematică în teoria membranei a fost formulată de Euler L. (1766), care a rezolvat problema vibrațiilor libere ale membranei elastice de formă dreptunghiulară și circulară utilizând analogia cu două șiruri de fire ortogonale întinse /32/. Studentul lui Bernoulli I., strănepotul matematicianului renumit cu acelaș nume, a extins analogia lui Euler la plăci, prin introducerea analogiei de rețea /13/. Fiindcă a neglijat influența răsucirii în ecuația diferențială de mișcare a plăcilor, el a găsit numai corespondență între teorie și experimente, fără a avea caracter general.

Fizicianul german, Chaladni, a descoperit diferite moduri de vibrații libere /47/. În experimentele lui cu plăci orizontale el a folosit pudre uniform distribuite care au format desene regulate după inducția vibrației. Pudrele s-au acumulat în lungul lăniilor nodale în care nu s-au produs deplasările verticale.

Matematiciana franceză Sophie Germain a obținut o ecuație diferențială pentru vibrațiile plăcilor utilizând calculul variațional. Ea a neglijat, însă, în expresia energiei deformațiilor plăcii, lucrul mecanic datorită încovoierii suprafeței mediane.

Lagrange I., a corectat această ecuație a lui Germain S., adăugând termenul lipsă în expresia energiei deformațiilor astfel, pentru prima dată s-a folosit ecuația diferențială corectă pentru vibrațiile libere ale plăcilor. Această ecuație fără deducerea ei, s-a găsit postum între notițele lui Lagrange I., (1813).

Marele inginer de poduri, Navier H. (1785-1836) poate fi considerat creatorul real al teoriei moderne a elasticității. Numeroasele activități științifice ale lui includ și soluțiile diferitelor probleme de plăci. El a obținut ecuația diferențială corectă a plăcilor dreptunghiulare supuse la încovoiere. Pentru rezolvarea problemelor cu anumite condiții de margine, Navier H. a introdus o metodă "exactă", care transformă ecuația diferenția-

lă în ecuații algebrice. Metoda lui se bazează pe utilizarea seriilor trigonometrice introduse de Fourier F. în același domeniu. Această metodă a dat relativ ușor soluțiile matematice exacte când condițiile de margine ale plăcii sînt cele de tip Navier adică sînt cazuri de plăci dreptunghiulare simplu rezemate.

Poisson S., a extins (1829) utilizarea ecuației fundamentale diferențiale a plăcilor derivată de Navier la problema vibrației laterale a plăcilor circulare. Condițiile de margine ale problemelor formulate de Poisson, însă, sînt aplicabile numai la plăci groase.

Datorită rezultatelor științifice publicate în cartea lui de fizică matematică /47/, Kirchhoff G., (1824-1887) este considerat fondatorul teoriei plăcilor care ia în considerare combinația încovoiere - forțe axiale. În analiza plăcilor cu deformații mari, el a găsit faptul că nu se pot neglija toți termenii neliniari. Alte contribuții importante constituie descoperirea ecuației de frecvență a plăcilor și introducerea metodei deplasărilor virtuale în rezolvarea problemei plăcilor.

Cartea lui Kirchhoff a fost tradusă de Clebsch /25/ în limba engleză, această traducere conține numeroase comentarii valoroase de Saint - Venant, dintre care este cea mai importantă extinderea ecuației diferențiale a lui Kirchhoff la plăci subțiri considerînd în mod exact matematic acțiunea complexă de încovoiere și de întindere.

Love A. a utilizat lucrarea lui Kirchhoff la probleme de plăci groase.

La sfîrșitul secolului al XIX-lea construcția navală și-a schimbat metodele ei de producție prin înlocuirea materialelor lemnoase cu oțel. Această schimbare a fost extraordinar de roditoare în dezvoltarea teoriilor plăcilor.

Savanții ruși au avut contribuții meritorii la construcția navală. Krîlov A. (1863 - 1945) /46/ și studentul lui, Bulnov I., au avut contribuții importante la teoria plăcilor subțiri avînd rigidități la încovoiere și la întindere.

Timoshenko S. (1878 - 1972) a completat treptat realizările ruse în domeniul teoriei elasticității. Dintre numeroasele sale contribuții importante sînt soluția plăcilor cu deplasări mari /87/ și formularea problemelor stabilității elastice /86/.

Föppl A., în cartea lui de mecanica construcțiilor /37/ publicată în 1907, a prezentat teoria neliniară a plăcilor. Forma finală a ecuației diferențiale a teoriei deplasărilor mari, însă, a fost dezvoltată de Karman T. /95/, care în lucrările lui următoare a studiat, de asemenea, problema de deschidere efectivă /96/ și proprietățile postelastice ale plăcilor /97/.

Westergaard H., /99/ și Schleicher F., /81/ au studiat problemele plăcilor pe mediul elastic.

Prescott J., în cartea lui de elasticitate aplicată /65/ a introdus o teorie mai exactă la încovoierea plăcilor luând în considerare deformațiile în suprafață mediană.

Dezvoltarea construcției de avioane moderne a îndreptat eforturi puternice spre cercetările analitice mai riguroase ale problemelor plăcilor.

Savantul polonez Huber M. a studiat plăci ortotrope /45/ și a rezolvat problemele plăcilor circulare supuse la forțe nesimetrice distribuite și momente marginale /44/.

Teoria mai riguroasă a plăcilor luând în considerație deformațiile provocate de forțele tăietoare transversale a fost introdusă de Reissner E., /69/.

Lucrările savanților ruși Volmir A., /98/ și Panov reprezintă contribuții valoroase la rezolvarea problemelor neliniare a plăcilor, în timp ce Oniashvili și Gontkevitch au devotat problema vibrației forțate și libere a plăcilor.

Savantul chinez, Chien - Wei - Zang a introdus metoda perturbațiilor pentru soluția de deformații mari.

Analiza liniilor de rupere a lui Johansen K. poate fi considerată prima abateră importantă față de teoria clasică de elasticitate a plăcilor /48/.

Hodge P.H. /42/ a extins teoria matematică a plasticității la analiza plăcilor rotativ - simetrice.

Cele mai recente tehnici, ca utilizarea calculatoarelor electronice cu viteză mare (1950) au avut o influență considerabilă asupra analizei statice și dinamice a plăcilor.

Deși în anul 1941, Hrennikoff A. /43/ a dezvoltat deja un sistem de bare articulate pentru analiza statică a problemelor complexe de plăci, lucrarea lui fundamentală în discretizarea continuumului n-a putut fi din plin utilizată datorită lipsei instrumentelor moderne de calcul.

În 1956, Turner M., Clough R., Martin H., și Topp L., /93/ au introdus metoda elementelor finite, care permite soluțiile nu-

merice ale problemelor plăcilor plane și curbe pe o cale economică.

Numeroase contribuții în acest domeniu aparțin lui Argyris /8/, /9/ și Zienkiewicz O.C., /105/, /107/.

Teoria echivalențelor introdusă de Absi E. /1/, /2/, de asemenea, este aplicabilă foarte efectiv la analiza statică a plăcilor.

În afară de acestea, se folosesc și tehnicile diferențelor finite dezvoltate de Stiissi F., Collatz L., /26/, Soare M., /80b/ și alții pentru analiza statică și dinamică a plăcilor supuse la încărcări oarecare și având forme geometrice arbitrare.

În prezent, dezvoltarea teoriilor plăcilor este caracterizată prin folosirea puternică a calculatoarelor electronice cu viteze mari și introducerea metodelor mai riguroase de calcul.

3. Principalele tendințe în cercetarea științifică.

Studiile clasice cât și tratatele cele mai recente recurg la mijloacele oferite de teoria plăcilor plane și anume la soluțiile cunoscute ale ecuației fundamentale Lagrange - Sophie Germain în coordonate carteziene (fig.1.3).

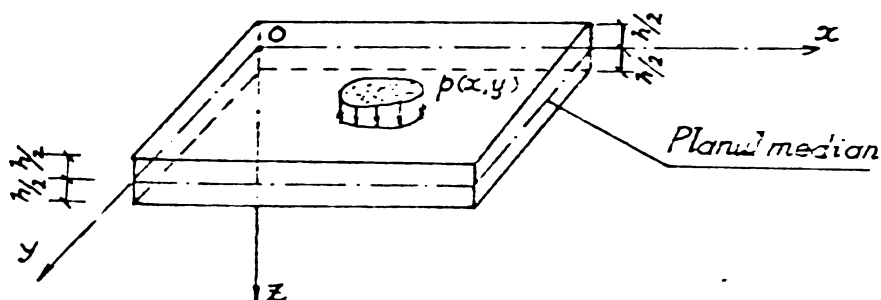


Fig. 1.3 Placa plană în sistemul de coordonate carteziene

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \quad (1.1)$$

unde : $\omega(x,y)$ - săgeata unui punct curent pe planul median al plăcii;

$p(x,y)$ - încărcarea normală la planul median raportată la unitatea suprafeței;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ rigiditatea cilindrică a plăcii;

în care : E - modulul de elasticitate al materialului plăcii;

h - grosimea plăcii, presupusă constantă;

ν - coeficientul lui Poisson.

Principalele metode pentru rezolvarea ecuației fundamentale (1.1) sînt clasificate în următoarele grupe :

a. Soluții riguroase.

În limitele determinate de ipotezele de bază ale teoriei plăcilor plane, se utilizează dezvoltări în serii de funcții exponențiale sau trigonometrice, simple sau duble, de tip Navier, Love, Timoshenko sau Girkmann, la care se ajunge, în mod obișnuit, prin exprimarea funcției de încărcări $p(x,y)$ sub formă de serie sau serii de funcții trigonometrice și identificarea termenului general care satisface ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul de patru (1.1) respectiv prin integrarea acestei ecuații.

În unele cazuri particulare, dezvoltările în serie s-au putut înlocui prin expresii "închise" adică suma seriilor respective.

b. Soluții aproximative și numerice.

Aceste categorii de soluții mai sînt împărțite în următoarele grupe mai mici .

1. Soluții aproximative de tip Marcus sau Westergaard.

Se obțin aplicînd metoda diferențelor finite ca procedeu aproximativ de integrare a ecuației (1.1) respectiv înlocuind în relațiile cunoscute operatorii diferențiali prin operatori cu diferențe finite. Condițiile de margine se exprimă fără dificultăți iar programele de calcul pot fi înlocuite cu ușurință, fapt care explică răspîndirea actuală a acestei metode.

2. Soluții aproximative de tip Reileigh, Galerkin sau

Ritz - Timoshenko, sînt deduse prin aplicarea așa numitelor metode energetice sau metode variaționale, respectiv prin dezvoltări ale principiului variațional - energetic : dintre toate cîmpurile de deplasări posibile ale unei structuri, cel care este produs în mod real de acțiunea forțelor exterioare face staționară energia totală Π a sistemului forțe - structură, unde :

$$\Pi = U + W \quad (1.2)$$

în care : U - energia deformațiilor (interioară);

W - energia potențială a forțelor exterioare.

O particularizare a acestui principiu, valabilă într-o largă gamă de probleme de analiză elastică a structurilor o constituie teorema minimumului energiei totale :

$$\delta (U + W) = 0 \quad (1.3)$$

Y
D
A
BIBLIOTECA CENTRALĂ

care permite scrierea ecuațiilor de echilibru, diferențiale sau algebrice, prin operații variaționale. Soluțiile nu sînt riguroase întrucît funcțiile alese pentru a descrie topologic și reologic fenomenul analizat, de exemplu, deplasările suprafeței mediane deformate a plăcii, nu pot fi decît aproximative în majoritatea cazurilor întîlnite iar condițiile de margine sînt rareori satisfăcute integral.

3. Soluții aproximative.

La acestea s-a ajuns recurgîndu-se la analogia cu membrana și asimilarea membranei cu o rețea elastică /55/.

Pot fi grupate în aceeași categorie și alte soluții care pornesc de la asimilarea plăcii plane cu o rețea de grinzi ortogonale, solidar legate între ele /5/, /54/. Rigiditățile la încovoiere și la torsiune ale grinzilor astfel definite se determină din condiția ca energia de deformație a rețelei să fie echivalentă cu aceea a plăcii reale pe care o schematizează /104/, /27/.

4. Soluțiile aproximative cele mai recente au fost obținute prin metoda elementelor finite, metodă numerică modernă (1955) perfect adaptată prelucrării automate a datelor. Noua metodă permite rezolvări ale problemelor de cîmp exprimabile sub formă variațională (cîmp de eforturi sau cîmp de deformații) putînd fi considerată ca o extindere a metodei lui Rayleigh. În loc să fie însă aplicată global, întregului cîmp din domeniul studiat, metoda elementelor finite se aplică unor regiuni mici dar finite ale acestui domeniu, elemente a căroră asamblare reconstitue cîmpul întreg. În subregiunile în care a fost împărțit domeniul ce se analizează pot fi alese, pentru a aproxima cîmpul cercetat (cel mai adesea cîmpul - deplasărilor), funcții evident mult mai simple decît cele care ar servi pentru descrierea întregului cîmp.

Adaptîndu-se relativ ușor unor forme complicate de cîmpuri, metoda elementelor finite elimină unele din marile dificultăți ale metodelor energetice, precum alegerea funcției care aproximează cîmpul întreg și respectarea condițiilor de limită.

În analiza elastică liniară a structurilor, rezolvarea problemei prin această metodă este redusă la determinarea unui număr finit de n parametri α_i legați printr-un sistem de ecuații algebrice.

Prezenta lucrare va prezenta și utiliza mai detaliat conținutul și interpretarea fizică a metodei elementelor finite în

problema analizei statice a plăcilor plane elastice subțiri, în următoarele capitole (cap.2, 4 și 5).

Ca soluții ale ecuației fundamentale (1.1), toate categoriile de soluții cunoscute (riguroase sau aproximative) admit implicit ipoteza comportării liniar - elastice a materialului. O atare limitare nu a împiedicat însă largă lor utilizare în practica proiectării plăcilor plane (inclusiv a plăcilor din beton armat) și nu a redus interesul pentru elaborarea de noi soluții privind analiza statică a acestei importante categorii de elemente portante plane.

Faptul este ilustrat și prin marele volum de studii și lucrări recente, apărute după 1955, care sistematizează, dezvoltă sau particularizează soluțiile cunoscute, îmbogățind substanțial teoria plăcilor plane.

Pe aceeași linie a diversificării soluțiilor devenite clasice se situează numeroase studii moderne, elaborate în ultimii 10 - 15 ani privind aspecte speciale ale topologiei plăcilor plane, cum ar fi plăci plane cu goluri /36/, /35/, /108/, plăci plane de grosime variabilă /18/, /70/, plăci plane cu una sau două margini libere /63/, /76/, /100/, etc.

În această lucrare, se va utiliza metoda elementelor finite și teoria echivalențelor energetice pentru analiza unui număr de tipuri de plăci plane elastice izotrope sau ortotrope din beton armat, având diferite condiții de margine, de încărcări și având goluri sau grosime variabilă.

Rezultatele obținute vor fi comparate cu cele calculate cu metodele clasice sau cu alte metode numerice cuprinse în literatură privind teoria plăcilor plane elastice, sau cu rezultate experimentale.

CAPITOLUL II.

BAZELE METODEI ELEMENTELOR FINITE SI CONTRIBUTII

PERSONALE PRIVIND APLICAREA EI

2.1. Introducere

Metoda elementelor finite este considerată ca fiind extinderea metodelor variaționale și a metodei matriceale de deplasări la analiza structurilor continue. Ea este și una din cele mai moderne procedee de calcul variațional.

Metoda elementelor finite este un procedeu de discretizare prin care sistemul de ecuații ale teoriei elasticității, avînd un număr infinit de grade de libertate, poate fi transformat într-un sistem finit de ecuații aproximative.

Prin această aproximație de natură fizică, se realizează o schimbare cantitativă a problemei, analiza corpului complex reducîndu-se la studiul elementelor componente ale structurii rezultate din discretizarea sa; aceasta, în cuprinsul lor, sînt tot corpuri continue, dar cu o formă simplă putînd fi mult mai ușor abordate pe baza unor legi convenționale la distribuția deplasărilor.

Prin discretizare, se realizează substituirea unui continuum elastic compus dintr-o infinitate de puncte, printr-o structură formată dintr-un anumit număr de elemente finite interconectate într-un număr finit de noduri.

Datorită acestei substituiri, în studiul stărilor de eforturi și de deformații ale continuumului considerat, vor trebui definite și analizate numai un număr finit de mărimi caracteristice și ca atare nu mai este necesară folosirea funcțiilor pe care le utilizează mecanica mediilor continue pentru a putea reprezenta aceste mărimi în toate punctele corpului considerat.

Metoda elementelor finite are la bază specializările a două principii variaționale generale :

1. Principiul minimului energiei totale de deformații.
2. Principiul minimului energiei complementare de deformații.

Pe baza acestor două principii, se folosesc următoarele modele pentru a idealiza structura reală studiată :

1. Modelul deplasării pure care are ca mod fundamental

un câmp de deplasări care trebuie să fie compatibil în interiorul fiecărui element și să fie conformabil pe frontierele elementelor finite adiacente.

2. Modelul tensiunilor pure care are ca mod fundamental un câmp de tensiuni care trebuie să satisfacă condițiile de echilibru în interiorul fiecărui element finit și să asigure identitatea tensiunilor pe frontiere comune ale elementelor finite adiacente.

Un model devine hibrid adică nu este nici de tipul deplasării pure și nici de tipul tensiunii pure, în cazul când una dintre condițiile menționate nu este perfect îndeplinită. Acest model se bazează pe principiul variațional al lui Reissner și este o combinație a modelului deplasării și cel al tensiunii pure, datorită faptului că el nu satisface integral nici condițiile de compatibilitate și nici condițiile de echilibru.

În toate cele trei grupe de modele funcțiile de interpolare ale variabilelor câmpului în interiorul elementului au fost alese astfel ca să continue în fiecare punct pe frontiere și nu numai la noduri. Acest fapt este un avantaj al metodei elementelor finite față de modelele variaționale tradiționale (cum ar fi metoda lui Ritz), permițând rezolvarea problemelor la care marginile geometrice sînt complexe.

Metoda elementelor finite nu trebuie confundată cu metoda diferențelor finite, cu toate că ambele au ca scop rezolvarea unor sisteme integro-diferențiale și necesită trasarea pe structură a unui carcoaj mai mult sau mai puțin complex. În prima metodă această rețea reprezintă frontierele între elementele studiate separat și apoi reasamblate, idealizarea efectuîndu-se la nivel structural iar ipotezele și simplificările sînt de resortul inginerului. În a doua metodă, rețeaua este reprezentată de linii în lungul cărora ecuațiile diferențiale vor fi înlocuite prin diferențe finite și integrările efectuate numeric, idealizarea fiind de nivel matematic iar aproximațiile trebuie studiate de specialiști în analiza numerică.

În prezenta lucrare vom folosi metoda elementelor finite - modelul deplasării pure - pentru analiza plăcilor plane elastice izotrope și ortotrope.

2.2. Ecuația fundamentală a metodei elementelor finite.
Modelul deplasării pure.

Metoda elementelor finite - modelul deplasării pure - este dezvoltată urmînd mai multe căi. Una dintre acestea este cea a folosirii principiului lucrului mecanic virtual.

Formula matricială a acestui principiu este următoarea :

$$\int_V \{\epsilon\}^T \{\delta\epsilon\} dV = \int_V \{p\}^T \{\delta u\} dV + \int_S \{p\} \{\delta u\} dS \quad (2.1)$$

în care : $\{\epsilon\}$ - vectorul eforturilor unitare;

$\{\delta\epsilon\}$ - variația deformațiilor specifice;

$\{p\}$ - vectorul forțelor unitare de volum;

$\{p\}$ - vectorul forțelor unitare de suprafață;

$\{\delta u\}$ - variația deplasărilor.

Folosindu-se relațiile de deformații - deplasări, de deformații - eforturi și de deplasări ale unui punct curent - deplasări ale nodurilor într-un element finit, precum și efectuînd transformări intermediare /62/, se obține ecuația fundamentală a metodei elementelor finite :

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (2.2)$$

unde : $[K]$ - matricea rigidităților elementului finit considerat avînd forma patrată simetrică de ordinul n (n este suma de grade de libertate considerate a elementului finit). Matricea $[K]$ conține caractere geometrice și elastice ale elementului finit studiat. Ea este determinată cu formula :

$$[K] = \int_V [b]^T [X] [b] dV \quad (2.3)$$

în care :

$$[b] = [N][A]^{-1} \quad (2.4)$$

$[N]$ - matricea derivatelor parțiale ale cîmpului deplasărilor alese ale elementului finit studiat;

$[A]$ - matricea anumitor coordonate ale nodurilor elementului finit considerat în raport cu sistemul de coordonate local ;

$[X]$ - matricea de elasticitate a materialului;

$\{u\}$ - vectorul deplasărilor nodale ale elementului finit, care sînt considerate ca necunoscute ale ecuației fundamentale (2.2),

iar : $\{F\}$ - vectorul forțelor nodale echivalent, care este determinat, de asemenea, cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual :

$$\sum_{i=1}^n F_{i\Delta} u_{i\Delta} = \int_V \rho_{\Delta}(x,y) u_{\Delta}(x,y) dV + \int_S p_{\Delta}(x,y) u_{\Delta}(x,y) ds \quad (2.5)$$

adică : lucrul mecanic produs de încărcările reale datorită deplasării punctelor lor de aplicație într-o direcție arbitrară este egal cu lucrul mecanic produs de forțele nodale echivalente datorită deplasării nodurilor în aceeași direcție.

Notațiile folosite în (2.5) sînt următoarele :

$F_{i\Delta}$ - forța nodală echivalentă din nodul (i) în direcția (Δ);

$u_{i\Delta}$ - deplasarea nodului (i) în direcția (Δ);

$u_{\Delta}(x,y)$ - deplasarea punctului de aplicație al forței reale, masică sau de suprafață, în direcția (Δ);

$\rho_{\Delta}(x,y)$ - forța masică pe unitate de volum într-un punct curent după direcția Δ și

$p_{\Delta}(x,y)$ - forța distribuită pe unitate de suprafață.

În general, ecuația fundamentală a unui element finit (2.2) nu se rezolvă direct ci se procedează în felul următor :

- se calculează matricile rigidității ale tuturor elementelor finite și prin asamblarea lor cu ajutorul unor reguli simple și precise se obține matricea rigidităților a structurii;

- se calculează matricile forțelor nodale echivalente ale tuturor elementelor finite și prin asamblarea lor în concordanță cu precedentă, se obține matricea forțelor nodale echivalente a întregii structuri;

- se formează matricea deplasărilor prin asamblarea matricilor deplasărilor nodale ale fiecărui element, în conformitate cu ordinea descrisă mai sus;

- se introduce condiția de margine, adică se elimină gradele de libertate împiedicate de condițiile de rezemare sau de simetrie.

În final, obținem sistemul de ecuații fundamentale a întregii structuri :

$$[K]_s \{u\}_s = \{F\}_s \quad (2.6)$$

în care : $[K]_s$ - matricea rigidităților structurii în care se includ toate caracteristicile geometrice și elastice ale structurii globale și care este cunoscută;

- $\{u\}_s$ - vector al deplasărilor nodale ale structurii studiate, în care conține toate deplasările nodale rezultate din discretizarea structurii într-un număr finit de elemente, ce constituie necunoscutele ecuației (2.6);
- $\{F\}_s$ - matricea forțelor nodale echivalente ale structurii alcătuită din forțele echivalente aplicate în toate nodurile structurii, care se asemenea este cunoscută.

Soluția ecuației (2.6) este următoarea :

$$\{u\}_s = [K]_s^{-1} \{F\}_s \quad (2.7)$$

Pe baza valorilor deplasărilor nodale obținute în (2.7), se pot determina mai departe deformațiile specifice, eforturile unitare, eforturile unitare principale și direcțiile lor, cu ajutorul relațiilor bine cunoscute în rezistența materialelor.

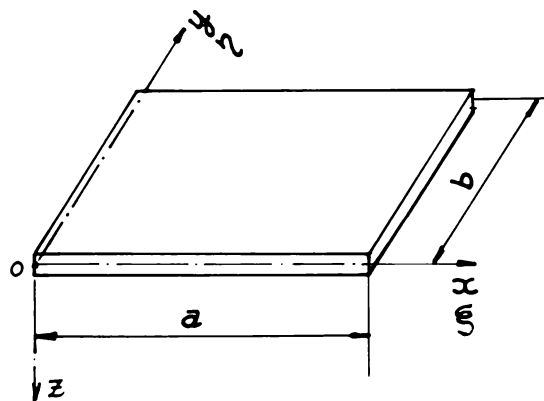
2.3. Definierea elementelor finite folosite în problemele plăcilor plane.

Pentru definierea unui tip de element finit propriu unei anumite probleme, de exemplu în mecanica plăcilor plane, este necesar să se rezolve două probleme de bază :

1. Definierea caracteristicilor geometrice, derivate din forma inițială.
2. Definierea caracteristicilor cinematice, care precizează legea de deformație a unui element finit.

Definierea caracteristicilor geometrice presupune :

- a. adoptarea unui sistem de coordonate generale care pot să coincidă cu coordonatele carteziene ortogonale (x,y);
- b. adoptarea unui sistem de coordonate locale, definite în interiorul elementului finit (în mod curent, în funcție de caracteristicile topologice ale tipurilor de elemente finite). Se adoptă în lucrare coordonatele locale corespunzătoare definite în următoarea figură : (Fig. 2.1)
- c. definierea unui vector, ale cărui elemente sînt coordonate (în sistemul local de referință) care permit definierea completă a formei elementului finit;
- d. definierea matricii de interpolare care leagă coordonatele locale și cele generale.



$$\xi = \frac{x}{a}$$
$$\eta = \frac{y}{b}$$

Fig. 2.1

Definirea caracteristicilor cinematice presupune :

- definirea vectorului deplasărilor nodale ale elementului finit;
- adaptarea unui sistem de coordonate locale (problema este aceeași ca cea ridicată la punctul b de mai înainte);
- definirea unui vector, ale cărui elemente caracterizează deplasările unor puncte caracteristice ale elementului finit (noduri) și care permite determinarea univocă a poziției deformată a punctelor curente în elementul finit;
- definirea matricei de influență care permite determinarea vectorului deplasărilor nodale în etapa "a" prin intermediul relației deplasări nodale - deplasări ale punctelor curente, în fiecare punct interior a elementului finit.

În dezvoltarea elementelor finite specifice teoriei plăcilor plane există o oarecare corespundență cu elementele finite specifice teoriei plane a elasticității, dar această corespundență nu este perfectă, dificultățile fiind considerabil sporite de adoptarea unor expresii corespunzătoare pentru matricile de influență.

În cele ce urmează, pe baza definițiilor menționate mai sus, se va prezenta forma de element finit folosită în calculul plăcilor plane subțiri supuse la încovoiere tratate în această lucrare.

2.4. Reprezentarea elementului finit, utilizat, de formă dreptunghiulară liniară.

Se folosește elementul finit dreptunghiular liniar prezentat în fig.2.2 pentru analiza plăcilor plane subțiri supuse la încovoiere.

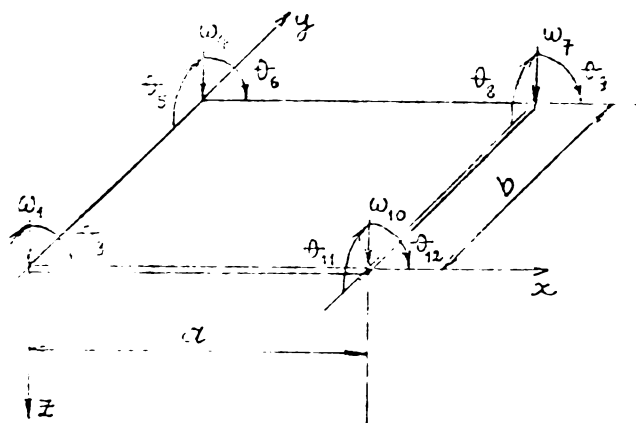


Fig. 2.2

2.4.1. Vectorul deplasărilor nodale.

În fiecare nod, se atașează deplasărilor nodale necunoscute câte trei componente : o deplasare verticală (săgeată) și două rotiri.

Vectorul deplasărilor nodale necunoscute elementului finit considerat are deci următoarea formă :

$$\{u\}^T = [\omega_1 \theta_{x2} \theta_{y3} \omega_4 \theta_{x5} \theta_{y6} \omega_7 \theta_{x8} \theta_{y9} \omega_{10} \theta_{x11} \theta_{y12}] \quad (2.8)$$

2.4.2. Cîmpul deplasării alese.

Se adoptă drept cîmp de deplasare o funcție avînd forma generală :

$$\omega_z(x, y) = a \cdot u \quad (2.9)$$

în care : a - matricea de influență a deplasărilor nodale în deplasări ale punctului curent în interiorul elementului finit;

u - vectorul deplasărilor nodale ale elementului finit avînd forma (2.8).

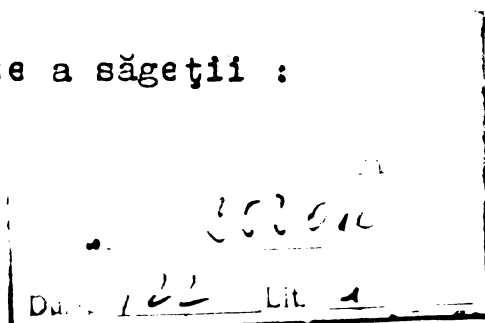
În cele ce urmează, vom studia analiza statică a plăcilor, cu cele două ipoteze de compatibilitate a deplasărilor alese.

1. Funcția deplasărilor satisface numai condiția de compatibilitate a săgeții.

2. Funcția deplasărilor satisface condiția de compatibilitate a săgeții și a rotirii.

După fiecare ipoteză, matricea de influență [a] are următoarea formă /67/ :

Pentru cazul de compatibilitate a săgeții :



$$[a]^T = \begin{bmatrix} 1 - \xi\eta - (3-2\xi)\xi^2(1-\eta) - (1-\xi)(3-2\eta)\eta^2 \\ (1-\xi)\eta(1-\eta)^2 b \\ -\xi(1-\xi)^2(1-\eta) a \\ (1-\xi)(3-2\eta)\eta^2 + \xi(1-\xi)(1-2\xi)\eta \\ -(1-\xi)(1-\eta)\eta^2 b \\ -\xi(1-\xi)^2\eta a \\ (3-2\xi)\xi^2\eta - \eta\xi(1-\eta)(1-2\eta) \\ -\xi(1-\eta)\eta^2 b \\ (1-\xi)\xi^2\eta a \\ (3-2\xi)\xi^2(1-\eta) + \xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ \xi\eta(1-\eta)^2 b \\ (1-\xi)\xi^2(1-\eta)a \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Pentru cazul de compatibilitate a săgeții și a rotirii :

$$[a]^T = \begin{bmatrix} (1+2\xi)(1-\xi)^2(1+2\eta)(1-\eta)^2 \\ (1+2\xi)(1-\xi)^2\eta(1-\eta)^2 b \\ -\xi(1-\xi)^2(1+2\eta)(1-\eta)^2 a \\ (1+2\xi)(1-\xi)^2(3-2\eta)\eta^2 \\ -(1+2\xi)(1-\xi)^2(1-\eta)\eta^2 b \\ -\xi(1-\xi)^2(3-2\eta)\eta^2 a \\ (3-2\xi)\xi^2(3-2\eta)\eta^2 \\ -(3-2\xi)\xi^2(1-\eta)\eta^2 b \\ (1-\xi)\xi^2(3-2\eta)\eta^2 a \\ (3-2\xi)\xi^2(1+2\eta)(1-\eta)^2 \\ (3-2\xi)\xi^2\eta(1-\eta)^2 b \\ (1-\xi)\xi^2(1+2\eta)(1-\eta)^2 a \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

2.4.3. Matricea de influență a deplasărilor nodale - în deformațiile specifice.

Intr-un punct curent al elementului finit, deformațiile specifice sînt determinate de următoarele relații :

$$\xi_x = -z \frac{\partial^2 \omega_z(x,y)}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 \omega_z(x,y)}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 \omega_z(x,y)}{\partial x \partial y}$$

(2.12)

în care : $\omega_z(x,y)$ - este de forma (2.9) și după caz, matricea de influență [a] are forma (2.10) sau (2.11).

Inlocuindu-se (2.9) în (2.12) și ținând seama de (2.10) sau (2.11), după caz, se mai pot scrie relațiile deplasări - deformații sub forma generală :

$$\{\varepsilon\} = [b]\{u\}$$

(2.13)

în care [b] - matricea de influență a deplasărilor nodale în deformații specifice. După caz, matricea [b] are următoarea formă :

- pentru cazul de compatibilitate a săgeții : (tab.II.1);
- pentru cazul de compatibilitate a săgeții și rotirii (tab.II.2).

2.4.4. Matricea de rigiditate a elementului finit.

Se folosește formula (2.3) pentru determinarea termenilor matricei de rigiditate a elementului finit.

În cele ce urmează se vor determina matricile de rigiditate pentru cele patru cazuri.

1. Matricea rigidității pentru elementul finit al plăcii elastice izotrope când funcția deplasării satisface numai condiția de compatibilitate a săgeții.

2. Matricea rigidității pentru elementul finit al plăcii elastice izotrope când funcția deplasării satisface condiția de compatibilitate a săgeții și a rotirii.

3. Matricea rigidității pentru elementul finit al plăcii elastice ^{anizotrope} ~~orizontale~~ când funcția deplasării satisface numai condiția de compatibilitate a săgeții.

4. Matricea rigidității pentru elementul finit al plăcii elastice ortotrope când funcția deplasării satisface de compatibilitate a săgeții și a rotirii.

2.4.4.1. Matricea rigidității elementului finit al plăcii elastice izotrope când funcția deplasării satisface numai condiția de compatibilitate a săgeții.

Se folosește, în formula (2.3) matricea de influență b

de forma (2.14) și matricea de elasticitate de forma :

$$[X] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

După rezolvarea operațiilor matriceale și integrale din formula (2.3) rezultă matricea de rigiditate a elementului finit menționat, de ordinul 12 x 12 (vezi tab.II.3).

2.4.4.2. Matricea rigidității elementului finit al plăcii elastice izotrope când funcția deplasării satisface condiția de compatibilitate a săgeții și a rotirii.

Se folosesc în formula generală (2.3) matricea de influență b de forma (2.15) și matricea de elasticitate izotropă de forma (2.16) *.

După efectuarea operațiilor matriceale și integrale din formula (2.3) rezultă matricea de rigiditate a elementului finit considerat, de ordinul 12 x 12 (vezi tab.II.4).

2.4.4.3. Matricea rigidității elementului finit al plăcii elastice anizotrope când funcția deplasării satisface numai condiția de compatibilitate a săgeții.

Se folosesc în formula generală (2.3) matricea de influență b de forma (2.14) și matricea de elasticitate anizotropă având următoarea formă :

$$[X] = \begin{bmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \\ \chi_2 & \chi_4 & \chi_5 \\ \chi_3 & \chi_5 & \chi_6 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

în care : χ_i - caracteristica rigidității după direcția i .

După efectuarea operațiilor matriceale și integrale din formula (2.3) rezultă matricea de rigiditate a elementului finit considerat, de ordinul 12 x 12 (vezi tab.II.5).

Tab. II-1 Matricea de influență [b]

(model de deformăți satisface numai condiția de compatibilitatea săgeții)

$[b]^T =$

$(1-2\xi)(1-\eta) \frac{6z}{a^2}$	$(1-\xi)(1-2\eta) \frac{6z}{b^2}$	$[1-6\xi(1-\xi)-6\eta(1-\eta)] \frac{72z}{ab}$
0	$(1-\xi)(2-3\eta) \frac{2z}{b}$	$(1-4\eta+3\eta^2) \frac{2z}{a}$
$-(2-3\xi)(1-\eta) \frac{2z}{a}$	0	$-(1-4\xi+3\xi^2) \frac{2z}{b}$
$(1-\xi)\eta \frac{6z}{a^2}$	$-(1-\xi)(1-2\eta) \frac{6z}{b^2}$	$[-1+6\xi(1-\xi)+6\eta(1-\eta)] \frac{72z}{ab}$
0	$(1-\xi)(1-3\eta) \frac{2z}{b}$	$-\eta(2-3\eta) \frac{2z}{a}$
$-(2-3\xi)\eta \frac{2z}{a}$	0	$(1-4\xi+3\xi^2) \frac{2z}{b}$
$-(1-2\xi)\eta \frac{6z}{a^2}$	$-\xi(1-2\eta) \frac{6z}{b^2}$	$[1-6\xi(1-\xi)-6\eta(1-\eta)] \frac{72z}{ab}$
0	$\xi(1-3\eta) \frac{2z}{b}$	$\eta(2-3\eta) \frac{2z}{a}$
$-(1-3\xi)\eta \frac{2z}{a}$	0	$-\xi(2-3\xi) \frac{2z}{b}$
$-(1-2\xi)(1-\eta) \frac{6z}{a^2}$	$\xi(1-2\eta) \frac{6z}{b^2}$	$[-1+6\xi(1-\xi)+6\eta(1-\eta)] \frac{72z}{ab}$
0	$\xi(2-3\eta) \frac{2z}{b}$	$-(1-4\eta+3\eta^2) \frac{2z}{a}$
$-(1-3\xi)(1-\eta) \frac{2z}{a}$	0	$\xi(2-3\xi) \frac{2z}{b}$

(2.14)

Tab. II-2 Matricea de influență [b]

(model de deformăți satisface condiția de compatibilitatea săgeții și rotirii)

$[b]^T =$

$(1-2\xi)(1+2\eta)(1-\eta) \frac{6z}{a^2}$	$(1+2\xi)(1-\xi)^2(1-\eta) \frac{6z}{b^2}$	$-\xi(1-\xi)\eta(1-\eta) \frac{72z}{ab}$
$(1-2\xi)\eta(1-\eta)^2 \frac{6bz}{a^2}$	$(1+2\xi)(1-\xi)^2(2-3\eta) \frac{2z}{b}$	$\xi(1-\xi)(1-\eta)(1-3\eta) \frac{12z}{a}$
$-(2-3\xi)(1+2\eta)(1-\eta) \frac{2z}{a}$	$-\xi(1-\xi)^2(1-2\eta) \frac{6az}{b^2}$	$-(1-\xi)(1-3\xi)\eta(1-\eta) \frac{12z}{b}$
$(1-2\xi)(3-2\eta)\eta^2 \frac{6bz}{a^2}$	$-(1+2\xi)(1-\xi)^2(1-2\eta) \frac{6z}{b^2}$	$\xi(1-\xi)\eta(1-\eta) \frac{72z}{ab}$
$-(1-2\xi)(1-\eta)\eta^2 \frac{6bz}{a^2}$	$(1+2\xi)(1-\xi)^2(1-3\eta) \frac{2z}{b}$	$-\xi(1-\xi)\eta(2-3\eta) \frac{12z}{a}$
$-(2-3\xi)(3-2\eta)\eta^2 \frac{2z}{a}$	$\xi(1-\xi)^2(1-2\eta) \frac{6az}{b^2}$	$(1-\xi)(1-3\xi)\eta(1-\eta) \frac{12z}{b}$
$-(1-2\xi)(3-2\eta)\eta^2 \frac{6z}{a^2}$	$-(3-2\xi)\xi^2(1-2\eta) \frac{6z}{b^2}$	$-\xi(1-\xi)\eta(1-\eta) \frac{72z}{ab}$
$(1-2\xi)(1-\eta)\eta^2 \frac{6bz}{a^2}$	$(3-2\xi)\xi^2(1-3\eta) \frac{2z}{b}$	$\xi(1-\xi)\eta(2-3\eta) \frac{12z}{a}$
$-(1-3\xi)(3-2\eta)\eta^2 \frac{2z}{a}$	$-(1-\xi)\xi^2(1-2\eta) \frac{6az}{b^2}$	$-\xi(2-3\xi)\eta(1-\eta) \frac{12z}{b}$
$-(1-2\xi)(1+2\eta)(1-\eta) \frac{6z}{a^2}$	$(3-2\xi)\xi^2(1-2\eta) \frac{6z}{b^2}$	$\xi(1-\xi)\eta(1-\eta) \frac{72z}{ab}$
$-(1-2\xi)\eta(1-\eta)^2 \frac{6bz}{a^2}$	$(3-2\xi)\xi^2(2-3\eta) \frac{2z}{b}$	$-\xi(1-\xi)(1-\eta)(1-3\eta) \frac{12z}{a}$
$-(1-3\xi)(1+2\eta)(1-\eta) \frac{2z}{a}$	$(1-\xi)\xi^2(1-2\eta) \frac{6az}{b^2}$	$\xi(2-3\xi)\eta(1-\eta) \frac{12z}{b}$

(2.15)

2.4.4.4. Matricea rigidității elementului finit al plăcii elastice ortotrope când funcția deplasării satisface condiția de compatibilitate a săgeții și a rotirii.

Se folosesc în formula generală (2.3) matricea de influență b de forma (2.15) și matricea de elasticitate ortotropă de forma :

$$[X] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ x_2 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & x_6 \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

După efectuarea operațiilor matriceale și integrale din formula (2.3) rezultă matricea de rigiditate a elementului finit considerat, de ordinul 12×12 (vezi tab.II.6).

2.4.5. Matricea de transformare a deplasărilor nodale în eforturi unitare a elementului finit.

Se studiază, în mod similar cu matricele rigidității, cele pentru cazuri sus menționate.

În cele ce urmează se vor determina matricele de transformare a deplasărilor nodale în eforturi unitare în cele patru puncte nodale și în centrul elementului finit cu ajutorul relației următoare :

$$\{\sigma\} = [X][b]\{u\} \quad (2.23)$$

în care, după cazul considerat, matricile $[X]$ și $[b]$ au diferite forme, iar $\{u\}$ este vectorul deplasărilor nodale al elementului finit considerat.

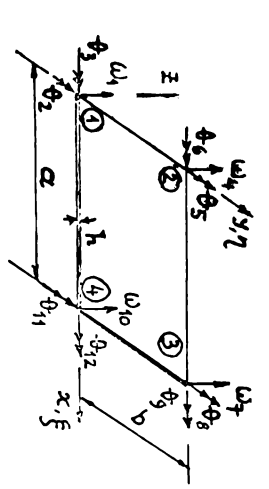
Se notează :

$$[BD] = [X][b] \quad (2.24)$$

Matricea de transformare a deplasărilor nodale în eforturi unitare a elementului finit.

2.4.5.1. Matricea de transformare $[BD]$ a elementului finit al plăcii elastice izotrope, la care funcția deplasării satisface numai condiția de compatibilitate a săgeții.

Se substituie în formula (2.24) matricea de influență b de forma (2.14) și matricea de elasticitate izotropă $[X]$ de forma (2.16).



atunci scries la incovoie
săgeții și a rotirii
ab]

[multipliatorul $Eh^3/12(1-\nu^2)$

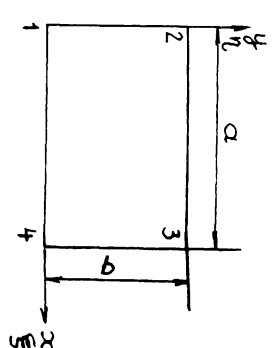
Tab. II-4

Matricea rigidității renbu elementul finit dreptunghiular izotrop scris la incovoie
model de deplasări satface condiția de compatibilitate ca

$\frac{156}{35}(\beta^2 + \beta'^2) + \frac{12}{25}$										
$(\frac{22}{35}\beta^2 + \frac{18}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25}E_1)$ b	$(\frac{4}{35}\beta^2 + \frac{52}{35}\beta'^2 + \frac{8}{25})$ b ²									
$-\frac{18}{35}\beta^2 + \frac{22}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25}E_2$ a	$-\frac{14}{35}(\beta^2 + \beta'^2) + \frac{1}{50}E_1$ ab	$(\frac{52}{35}\beta^2 - \frac{4}{35}\beta'^2 + \frac{8}{25})$ a ²								
$\frac{54}{35}\beta^2 - \frac{156}{35}\beta'^2 - \frac{12}{25}$	$(\frac{13}{35}\beta^2 - \frac{18}{35}\beta'^2 - \frac{6}{25})$ b	$(-\frac{27}{35}\beta^2 - \frac{22}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25}E_2)$ a	$\frac{156}{35}(\beta^2 + \beta'^2) + \frac{12}{25}$							
$(-\frac{13}{35}\beta^2 + \frac{18}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25})$ b	$(-\frac{3}{35}\beta^2 + \frac{26}{35}\beta'^2 - \frac{2}{25})$ b ²	$(\frac{13}{35}\beta^2 - \frac{11}{35}\beta'^2 - \frac{1}{50}E_2)$ ab	$(-\frac{22}{35}\beta^2 + \frac{18}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25}E_2)$ b							
$(-\frac{27}{35}\beta^2 + \frac{22}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25}E_1)$ a	$(-\frac{13}{35}\beta^2 + \frac{41}{35}\beta'^2 + \frac{1}{50}E_2)$ ab	$(\frac{18}{35}\beta^2 - \frac{4}{35}\beta'^2 - \frac{8}{25})$ a ²	$(-\frac{18}{35}\beta^2 + \frac{22}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25}E_2)$ a							
$-\frac{54}{35}(\beta^2 + \beta'^2) + \frac{12}{25}$	$(-\frac{13}{35}\beta^2 - \frac{27}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25})$ b	$(\frac{27}{35}\beta^2 - \frac{13}{35}\beta'^2 - \frac{6}{25})$ a	$(-\frac{13}{35}\beta^2 + \frac{22}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25}E_2)$ b							
$(\frac{13}{35}\beta^2 + \frac{27}{35}\beta'^2 - \frac{6}{25})$ b	$(\frac{3}{35}\beta^2 + \frac{9}{35}\beta'^2 + \frac{2}{25})$ b ²	$(-\frac{13}{35}\beta^2 + \beta'^2) - \frac{1}{50}$ ab	$(\frac{22}{35}\beta^2 - \frac{27}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25}E_2)$ b							
$(-\frac{27}{35}\beta^2 + \frac{13}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25})$ a	$(-\frac{13}{35}\beta^2 + \beta'^2) + \frac{1}{50}$ ab	$(\frac{9}{35}\beta^2 + \frac{3}{35}\beta'^2 + \frac{2}{25})$ a ²	$(-\frac{13}{35}\beta^2 + \frac{18}{35}\beta'^2 - \frac{1}{50})$ ab							
$-\frac{56}{35}\beta^2 + \frac{54}{35}\beta'^2 - \frac{12}{25}$	$(-\frac{22}{35}\beta^2 + \frac{27}{35}\beta'^2 - \frac{6}{25}E_2)$ b	$(\frac{78}{35}\beta^2 - \frac{13}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25})$ a	$(-\frac{22}{35}\beta^2 + \frac{27}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25}E_2)$ b							
$(-\frac{22}{35}\beta^2 + \frac{27}{35}\beta'^2 - \frac{6}{25}E_2)$ b	$(-\frac{4}{35}\beta^2 + \frac{27}{35}\beta'^2 - \frac{6}{25})$ b ²	$(\frac{11}{35}\beta^2 - \frac{13}{35}\beta'^2 + \frac{1}{50}E_2)$ ab	$(-\frac{13}{35}\beta^2 + \frac{27}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25}E_2)$ b							
$(-\frac{18}{35}\beta^2 + \frac{13}{35}\beta'^2 - \frac{6}{25}E_2)$ a	$(-\frac{41}{35}\beta^2 + \frac{13}{35}\beta'^2 - \frac{1}{50}E_2)$ ab	$(\frac{26}{35}\beta^2 - \frac{3}{35}\beta'^2 - \frac{2}{25})$ a ²	$(-\frac{18}{35}\beta^2 + \frac{22}{35}\beta'^2 + \frac{6}{25}E_2)$ a							

$$\beta = \frac{b}{a} \quad ; \quad E_1 = 1 + 6\nu \quad ; \quad E_2 = 1 +$$

5v



Matricea de rigiditate a elementului dreptunghiular anizotrop
model de deformatii satisfac conditia de compatibilitate a sagetii

Tab. II-5

[Multiplicator $\frac{1}{ab}$]

$4(\beta^2 K_1 + \beta^2 K_4) + 2K_2 + \frac{28}{5} K_6$																			
$(K_2 + 2\beta^2 K_4 + \frac{2}{5} K_6) b$	$(\frac{4}{3}\beta^2 K_4 + \beta^{-1} K_5 + \frac{18}{5} K_6) b^2$																		
$-(2\beta^2 K_1 + K_2 + \frac{2}{5} K_6) a$	$-(\beta K_2 + \frac{1}{6}\beta^2 K_3 + \frac{1}{6} K_5) a^2$	$(\frac{4}{3}\beta^2 K_1 + \beta K_3 + \frac{8}{15} K_6) a^2$																	
$2(\beta^2 K_1 - 2\beta^2 K_4) - 2K_2 - \frac{28}{5} K_6$	$-(2\beta^2 K_4 + \frac{2}{5} K_6) b$	$(-\beta^2 K_1 - 2\beta K_3 + K_2 + \frac{2}{5} K_6) a$	$4(\beta^2 K_1 + \beta^2 K_4) + 2K_2 + \frac{28}{5} K_6$																
$(2\beta^2 K_4 + \frac{2}{5} K_6) b$	$(\frac{2}{3}\beta^2 K_4 - \frac{2}{15} K_6) b^2$	$(\beta^2 K_3 + K_5) \frac{a^2}{6}$	$(\beta^2 K_3 + K_5) \frac{a^2}{6}$																
$(-\beta^2 K_1 + K_2 + 2\beta K_3 + \frac{2}{5} K_6) a$	$(\beta^2 K_3 + K_5) \frac{a^2}{6}$	$(\frac{2}{3}\beta^2 K_1 - \frac{8}{15} K_6) a^2$	$(\beta K_2 - \frac{1}{6}\beta^2 K_3 - \frac{1}{6} K_5) a^2$																
$-2(\beta^2 K_1 + \beta^2 K_4) + 2K_2 + \frac{28}{5} K_6$	$-(\beta^2 K_4 + 2\beta^2 K_3 + \frac{2}{5} K_6) b$	$(\beta^2 K_1 + 2\beta K_3 - \frac{2}{5} K_6) a$	$4(\beta^2 K_1 + \beta^2 K_4) + 2K_2 + \frac{28}{5} K_6$																
$(\beta^2 K_4 + 2\beta^2 K_3 + \frac{2}{5} K_6) b$	$(\frac{1}{3}\beta^2 K_4 + \beta^2 K_5 + \frac{2}{15} K_6) b^2$	$(-\beta^2 K_3 + K_5) \frac{a^2}{6}$	$(\beta^2 K_3 + K_5) \frac{a^2}{6}$																
$(-\beta^2 K_1 - 2\beta K_3 + \frac{2}{5} K_6) a$	$-(\beta^2 K_3 + K_5) \frac{a^2}{6}$	$(\frac{1}{3}\beta^2 K_1 + \beta K_3 + \frac{2}{15} K_6) a^2$	$(\beta^2 K_3 + K_5) \frac{a^2}{6}$																
$2(-2\beta^2 K_1 + \beta^2 K_4) - 2K_2 - \frac{28}{5} K_6$	$(-K_2 + \beta^2 K_4 + 2\beta^2 K_3 + \frac{2}{5} K_6) b$	$(-K_2 + \beta^2 K_1 + \beta^2 K_4) + 2K_2 + \frac{28}{5} K_6$	$(\beta^2 K_1 + 2\beta K_3 - \frac{2}{5} K_6) a$																
$(\beta^2 K_4 - 2\beta^2 K_3 - K_2 - \frac{2}{5} K_6) b$	$(\frac{2}{3}\beta^2 K_4 - \frac{8}{15} K_6) b^2$	$(\beta^2 K_3 + K_5) \frac{a^2}{6}$	$(\beta^2 K_3 + K_5) \frac{a^2}{6}$																
$-(2\beta^2 K_1 + \frac{2}{5} K_6) a$	$(\beta^2 K_3 + K_5) \frac{a^2}{6}$	$(\frac{2}{3}\beta^2 K_1 - \frac{8}{15} K_6) a^2$	$(\beta^2 K_3 + K_5) \frac{a^2}{6}$																

$$\beta = \frac{b}{a}$$

$K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$ sînt caracteristicile de rigiditate după direcții diferite ale elementului considerat

După efectuarea operațiilor matriceale din formula (2.24) rezultă matricea de transformare pentru elementul finit considerat (vezi tab.II.7).

2.4.5.2. Matricea de transformare $[BD]$ a elementului finit al plăcii elastice izotrope la care funcția deplasărilor satisface condiția de compatibilitate a săgeții și a rotirii.

Se substituie în formula (2.24) matricea de influență $[b]$ de forma (2.15) și matricea de elasticitate izotropă $[X]$ de forma (2.16). După efectuarea operațiilor matriceale din formula (2.24) rezultă matricea de transformare pentru elementul finit studiat (vezi tab.II.8).

2.4.5.3. Matricea de transformare $[BD]$ a elementului finit al plăcii anizotrope elastice la care funcția deplasărilor satisface numai condiția de compatibilitate a săgeții.

Se substituie în formula (2.24) matricea de influență $[b]$ de forma (2.14) și matricea de elasticitate anizotropă $[X]$ de forma (2.19).

După efectuarea operațiilor matriceale din formula (2.24) rezultă matricea de transformare pentru elementul finit studiat (vezi tab.II-9).

2.4.5.4. Matricea de transformare $[BD]$ a elementului finit a plăcii ortotrope elastice la care funcția deplasărilor satisface condiția de compatibilitate a săgeții și a rotirii.

Se substituie în formula (2.24) matricea de influență $[b]$ de forma (2.15) și matricea de elasticitate ortotropă de forma (2.21).

După efectuarea operațiilor matriceale din formula (2.24) rezultă matricea de transformare pentru elementul finit studiat (vezi tab.II.10).

2.4.6. Determinarea eforturilor unitare principale în centrul elementului finit.

Pe baza eforturilor unitare obținute în centrul elementului finit, se pot determina eforturile unitare principale în

Matricea de transformarea deplasărilor nodale în eforturile unitare ale elementului finit ortotrop
 model de deplasări satisfăce condiția de compatibilitate a săgeților și rotațiilor.

nod. 1	M_x	$\frac{6}{a^2}K_1 + \frac{6}{b^2}K_2$	$\frac{4}{b}K_2$	$-\frac{4}{a}K_1$	$-\frac{6}{b^2}K_2$	$\frac{2}{b}K_2$	0	0	0	$-\frac{6}{a^2}K_1$	0	$-\frac{2}{a}K_1$
	M_y	$\frac{6}{a^2}K_2 + \frac{6}{b^2}K_4$	$\frac{4}{b}K_4$	$-\frac{4}{a}K_2$	$-\frac{6}{b^2}K_4$	$\frac{2}{b}K_4$	0	0	0	$-\frac{6}{a^2}K_2$	0	$-\frac{2}{a}K_2$
	M_{xy}	0	0	$-\frac{3}{b}K_6$	0	0	0	$\frac{3}{b}K_6$	0	0	0	0
nod. 2	M_x	$-\frac{6}{b^2}K_2$	$-\frac{2}{b}K_2$	0	$-\frac{6}{a^2}K_1 + \frac{6}{b^2}K_2$	$-\frac{4}{b}K_2$	$-\frac{4}{a}K_1$	0	$-\frac{6}{a^2}K_1$	$-\frac{2}{a}K_1$	0	0
	M_y	$-\frac{6}{b^2}K_4$	$-\frac{2}{b}K_4$	0	$\frac{6}{a^2}K_2 + \frac{6}{b^2}K_4$	$-\frac{4}{b}K_4$	$-\frac{4}{a}K_2$	0	$-\frac{6}{a^2}K_2$	$-\frac{2}{a}K_2$	0	0
	M_{xy}	0	0	0	0	$\frac{3}{a}K_6$	0	$-\frac{3}{a}K_6$	0	0	0	0
nod. 3	M_x	0	0	0	$-\frac{6}{a^2}K_1$	0	$\frac{2}{a}K_1$	$\frac{6}{a^2}K_1 + \frac{6}{b^2}K_2$	$-\frac{4}{b}K_2$	$\frac{4}{a}K_1$	$-\frac{2}{b}K_2$	0
	M_y	0	0	0	$-\frac{6}{a^2}K_2$	0	$\frac{2}{a}K_2$	$\frac{6}{a^2}K_2 + \frac{6}{b^2}K_4$	$-\frac{4}{b}K_4$	$\frac{4}{a}K_2$	$-\frac{2}{b}K_4$	0
	M_{xy}	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{b}K_6$	0	$-\frac{3}{b}K_6$
nod. 4	M_x	$-\frac{6}{a^2}K_1$	0	$\frac{2}{a}K_1$	0	0	0	$-\frac{6}{b^2}K_2$	$\frac{2}{b}K_2$	0	$\frac{4}{b}K_2$	$\frac{4}{a}K_1$
	M_y	$-\frac{6}{a^2}K_2$	0	$\frac{2}{a}K_2$	0	0	0	$-\frac{6}{b^2}K_4$	$\frac{2}{b}K_4$	0	$\frac{4}{b}K_4$	$\frac{4}{a}K_2$
	M_{xy}	0	$\frac{3}{a}K_6$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{a}K_6$	0	0
celt. de elem.	M_x	0	$\frac{1}{2b}K_2$	$-\frac{1}{2a}K_1$	0	$-\frac{1}{2b}K_2$	$-\frac{1}{2a}K_1$	0	$-\frac{1}{2b}K_2$	$\frac{1}{2a}K_1$	$\frac{1}{2b}K_2$	$\frac{1}{2a}K_1$
	M_y	0	$\frac{1}{2b}K_4$	$-\frac{1}{2a}K_2$	0	$-\frac{1}{2b}K_4$	$-\frac{1}{2a}K_2$	0	$-\frac{1}{2b}K_4$	$\frac{1}{2a}K_2$	$\frac{1}{2b}K_4$	$\frac{1}{2a}K_2$
	M_{xy}	$-\frac{3}{2ab}K_6$	$-\frac{2}{2a}K_6$	$\frac{3}{4b}K_6$	$-\frac{2}{2ab}K_6$	$-\frac{3}{4a}K_6$	$-\frac{3}{4a}K_6$	$-\frac{2}{2ab}K_6$	$-\frac{3}{4a}K_6$	$\frac{3}{4b}K_6$	$-\frac{3}{4a}K_6$	$\frac{3}{4b}K_6$

(2.28)

Tab. II-7 Matricea de transmisibilitate a nodurilor în eforturile unitare ale elementului dreptunghiular.
 model de deformatii satisfac numai condiția de compatibilitatea săgeților

(multiplicătion $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$)

Nod. 1	M_x	$\frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2}$	$\frac{4\nu}{b}$	$-\frac{4}{a}$	$-\frac{6\nu}{b^2}$	$\frac{2\nu}{b}$	0	0	0	0	$-\frac{6}{a^2}$	0	0	$-\frac{2}{a}$
	M_y	$\frac{6\nu}{a^2} + \frac{6}{b^2}$	$-\frac{4\nu}{a}$	$-\frac{4\nu}{a}$	$-\frac{6}{b^2}$	$\frac{2}{b}$	0	0	0	$-\frac{6\nu}{a^2}$	$-\frac{6\nu}{a^2}$	0	0	$-\frac{2\nu}{a}$
	M_{xy}	$\frac{E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{ab}$	0	$\frac{E_4}{b}$	$\frac{E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{ab}$	0	$-\frac{E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{a}$	0
	M_x	$-\frac{6\nu}{b^2}$	0	$-\frac{4\nu}{b}$	$\frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2}$	$-\frac{4\nu}{b}$	0	0	0	$-\frac{4\nu}{b}$	0	$-\frac{2}{a}$	0	0
	M_y	$-\frac{6}{b^2}$	0	$-\frac{4\nu}{a}$	$\frac{6\nu}{a^2} + \frac{6}{b^2}$	$-\frac{4\nu}{a}$	0	0	0	$-\frac{4\nu}{a}$	0	$-\frac{2\nu}{a}$	0	0
	M_{xy}	$\frac{E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{ab}$	$\frac{E_4}{a}$	$\frac{E_4}{b}$	$\frac{E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{a}$	$-\frac{E_4}{ab}$	0	0	0
Nod. 2	M_x	0	0	0	$-\frac{6}{a^2}$	0	$\frac{2}{a}$	0	0	0	$-\frac{6\nu}{b^2}$	$\frac{4\nu}{a}$	$-\frac{2\nu}{b}$	0
	M_y	0	0	0	$-\frac{6\nu}{a^2}$	0	$\frac{2\nu}{a}$	0	0	$-\frac{6\nu}{a^2}$	$\frac{4\nu}{a}$	$\frac{4\nu}{a}$	$-\frac{2}{b}$	0
	M_{xy}	$\frac{E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{ab}$	$\frac{E_4}{a}$	0	$-\frac{E_4}{a}$	$-\frac{E_4}{a}$	$-\frac{E_4}{ab}$	$\frac{E_4}{b}$	$\frac{E_4}{b}$	0	$-\frac{E_4}{b}$
	M_x	$-\frac{6}{a^2}$	$\frac{2}{a}$	0	0	0	0	$\frac{2\nu}{b}$	$\frac{2\nu}{b}$	0	$-\frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2}$	$\frac{4\nu}{b}$	$\frac{4\nu}{b}$	$-\frac{4}{a}$
	M_y	$-\frac{6\nu}{a^2}$	$\frac{2\nu}{a}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{6\nu}{a^2} + \frac{6}{b^2}$	$\frac{4\nu}{b}$	$\frac{4\nu}{b}$	$\frac{4\nu}{a}$
	M_{xy}	$\frac{E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{ab}$	$\frac{E_4}{a}$	0	0	0	$-\frac{E_4}{ab}$	$\frac{E_4}{b}$	$\frac{E_4}{b}$	0	$-\frac{E_4}{b}$
	M_x	0	$-\frac{1}{2a}$	$-\frac{\nu}{2b}$	0	0	$-\frac{\nu}{2b}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2a}$	$\frac{\nu}{2b}$	$\frac{1}{2a}$
	M_y	0	$-\frac{\nu}{2a}$	$-\frac{1}{2b}$	0	0	$-\frac{1}{2b}$	0	0	0	0	$\frac{\nu}{2a}$	$\frac{1}{2b}$	$\frac{\nu}{2a}$
	M_{xy}	$\frac{E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{ab}$	$\frac{E_4}{a}$	0	0	0	$-\frac{E_4}{ab}$	$\frac{E_4}{b}$	$\frac{E_4}{b}$	0	$-\frac{E_4}{b}$
Centrul nodului	M_x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	M_y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	M_{xy}	$-\frac{2E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{2E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{a}$	$-\frac{E_4}{a}$	$-\frac{E_4}{a}$	$-\frac{E_4}{a}$	$-\frac{2E_4}{ab}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{b}$	$-\frac{E_4}{4a}$	$-\frac{E_4}{4b}$

(2.25)

$E_4 = 1 - \nu$

Tab. II-8

Matricea de transformarea câmpurilor nodale în eforturile unitare ale elementului dreptunghiular
 model de deformare satisface condiția de compatibilitate a săgeților și rotirilor.

(multiplicato: $Eh^3/12(1-\nu^2)$)

nod. 1	M_x	$\frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2}$	$\frac{4\nu}{b}$	$-\frac{4}{a}$	$-\frac{6\nu}{b^2}$	$\frac{2\nu}{b}$	0	0	0	0	$-\frac{6}{a^2}$	0	0	$-\frac{2}{a}$
	M_y	$\frac{6\nu}{a^2} + \frac{6}{b^2}$	$\frac{4}{b}$	$-\frac{4\nu}{a}$	$-\frac{6}{b^2}$	$\frac{2}{b}$	0	0	0	$-\frac{6\nu}{a^2}$	$\frac{2\nu}{b}$	$-\frac{4}{a}$	0	$-\frac{2\nu}{a}$
	M_{xy}	0	0	$-\frac{3E_3}{b}$	0	0	$\frac{3E_3}{b}$	0	0	0	0	0	0	0
nod. 2	M_x	$-\frac{6\nu}{b^2}$	$-\frac{2\nu}{b}$	0	$\frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2}$	$-\frac{4\nu}{b}$	$-\frac{4}{a}$	0	0	$-\frac{6}{a^2}$	$-\frac{4\nu}{a}$	$-\frac{2}{a}$	0	0
	M_y	$-\frac{6}{b^2}$	$-\frac{2}{b}$	0	$\frac{6\nu}{a^2} + \frac{6}{b^2}$	$-\frac{4}{b}$	$-\frac{4\nu}{a}$	0	0	$-\frac{6\nu}{a^2}$	$-\frac{4\nu}{a}$	$-\frac{2\nu}{a}$	0	0
	M_{xy}	0	0	0	0	$\frac{3E_3}{a}$	0	$-\frac{3E_3}{a}$	0	0	0	0	0	0
nod. 3	M_x	0	0	0	$-\frac{6}{a^2}$	0	$\frac{2}{a}$	$-\frac{4\nu}{b}$	$\frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2}$	$-\frac{4\nu}{b}$	$\frac{4}{a}$	$-\frac{2\nu}{b}$	$-\frac{2\nu}{b}$	0
	M_y	0	0	0	$-\frac{6\nu}{a^2}$	0	$-\frac{2\nu}{a}$	$-\frac{4}{b}$	$\frac{6\nu}{a^2} + \frac{6}{b^2}$	$-\frac{4}{b}$	$\frac{4\nu}{a}$	$-\frac{2}{b}$	$-\frac{2}{b}$	0
	M_{xy}	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3E_3}{b}$	0	0	$-\frac{3E_3}{b}$	
nod. 4	M_x	$-\frac{6}{a^2}$	0	$\frac{2}{a}$	0	0	0	$\frac{2\nu}{b}$	$-\frac{6\nu}{b^2}$	$\frac{2\nu}{b}$	0	$\frac{4\nu}{b}$	$\frac{4\nu}{b}$	$-\frac{4}{a}$
	M_y	$-\frac{6\nu}{a^2}$	0	$\frac{2\nu}{a}$	0	0	0	$\frac{2}{b}$	$-\frac{6}{b^2}$	$\frac{2}{b}$	0	$\frac{4}{b}$	$\frac{4}{b}$	$\frac{4\nu}{a}$
	M_{xy}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{3E_3}{a}$	$-\frac{3E_3}{a}$	0	
primul elem.	M_x	0	0	$-\frac{1}{2a}$	0	$-\frac{\nu}{2b}$	$-\frac{1}{2a}$	$-\frac{\nu}{2b}$	0	0	0	$\frac{\nu}{2b}$	$\frac{\nu}{2b}$	$\frac{1}{2a}$
	M_y	0	0	$-\frac{\nu}{2a}$	0	$-\frac{1}{2b}$	$-\frac{\nu}{2a}$	$-\frac{1}{2b}$	0	0	0	$\frac{1}{2b}$	$\frac{1}{2b}$	$\frac{\nu}{2a}$
	M_{xy}	$-\frac{2}{2} = -1$	$-\frac{2}{2} = -1$	$-\frac{3}{4} \frac{E_3}{4b}$	$\frac{9}{2} \frac{E_3}{2ab}$	$-\frac{3}{4} \frac{E_3}{4b}$	$-\frac{9}{2} \frac{E_3}{2ab}$	$-\frac{3}{4} \frac{E_3}{4a}$	$-\frac{9}{2} \frac{E_3}{2ab}$	$-\frac{3}{4} \frac{E_3}{4a}$	$-\frac{3}{4} \frac{E_3}{4b}$	$-\frac{9}{4} \frac{E_3}{4a}$	$\frac{3}{4} \frac{E_3}{4a}$	$\frac{3}{4} \frac{E_3}{4b}$

(2.26)

$$E_3 = \frac{1-\nu}{2}$$

Tab. II-9 Abacul de transformare a eforturilor nodale în eforturile unitate ale elementului finit anizotrop
 model de deformare satisfăcătoare numai condiția de compatibilitate a săgeților

nod. 1	M_x	$\frac{6}{a^3}K_1 + \frac{6}{b^3}K_2 + \frac{2}{ab}K_5$	$\frac{4}{b}K_2 + \frac{2}{a}K_3$	$-\frac{4}{a}K_1 - \frac{2}{b}K_3$	$-\frac{6}{b^2}K_2 - \frac{2}{ab}K_5$	$\frac{2}{b}K_3$	$\frac{2}{ab}K_3$	0	$-\frac{6}{a^2}K_1 - \frac{2}{ab}K_3$	$-\frac{2}{a}K_3$	$-\frac{2}{a}K_1$
	M_y	$\frac{6}{a^3}K_3 + \frac{6}{b^3}K_4 + \frac{2}{ab}K_5$	$\frac{4}{b}K_4 + \frac{2}{a}K_5$	$-\frac{4}{a}K_2 - \frac{2}{b}K_5$	$-\frac{6}{b^2}K_4 - \frac{2}{ab}K_5$	$\frac{2}{b}K_5$	$\frac{2}{ab}K_5$	0	$-\frac{6}{a^2}K_3 - \frac{2}{ab}K_5$	$-\frac{2}{a}K_5$	$-\frac{2}{a}K_2$
	M_{xy}	$\frac{6}{a^3}K_5 + \frac{6}{b^3}K_6 + \frac{2}{ab}K_6$	$\frac{4}{b}K_5 + \frac{2}{a}K_6$	$-\frac{4}{a}K_3 - \frac{2}{b}K_6$	$-\frac{6}{b^2}K_6 - \frac{2}{ab}K_6$	$\frac{2}{b}K_6$	$\frac{2}{ab}K_6$	0	$-\frac{6}{a^2}K_5 - \frac{2}{ab}K_6$	$-\frac{2}{a}K_6$	$-\frac{2}{a}K_3$
	M_x	$-\frac{6}{b^3}K_2 + \frac{2}{ab}K_3$	$-\frac{2}{b}K_2$	$-\frac{2}{b}K_3$	$\frac{6}{a^2}K_1 + \frac{6}{b^2}K_2 - \frac{2}{ab}K_3$	$-\frac{4}{a}K_1 + \frac{2}{b}K_3$	$-\frac{6}{a^2}K_1 + \frac{2}{ab}K_3$	$-\frac{2}{a}K_1$	$-\frac{2}{ab}K_3$	0	0
	M_y	$-\frac{6}{b^3}K_4 + \frac{2}{ab}K_5$	$-\frac{2}{b}K_4$	$-\frac{2}{b}K_5$	$\frac{6}{a^2}K_3 + \frac{6}{b^2}K_4 - \frac{2}{ab}K_5$	$-\frac{4}{a}K_2 + \frac{2}{b}K_5$	$-\frac{6}{a^2}K_3 + \frac{2}{ab}K_5$	$-\frac{2}{a}K_2$	$-\frac{2}{ab}K_5$	$-\frac{2}{a}K_2$	0
	M_{xy}	$-\frac{6}{b^3}K_6 + \frac{2}{ab}K_6$	$-\frac{2}{b}K_5$	$-\frac{2}{b}K_6$	$\frac{6}{a^2}K_5 + \frac{6}{b^2}K_6 - \frac{2}{ab}K_6$	$-\frac{4}{a}K_3 + \frac{2}{b}K_6$	$-\frac{6}{a^2}K_5 + \frac{2}{ab}K_6$	$-\frac{2}{a}K_3$	$-\frac{2}{ab}K_6$	$-\frac{2}{a}K_3$	0
nod. 2	M_x	$\frac{2}{ab}K_3$	0	0	$-\frac{6}{a^2}K_1 - \frac{2}{ab}K_3$	$\frac{2}{a}K_1$	$\frac{6}{a^2}K_1 + \frac{6}{b^2}K_2 + \frac{2}{ab}K_3$	$-\frac{4}{b}K_2 - \frac{2}{a}K_3$	$-\frac{2}{b}K_2$	$-\frac{2}{b}K_2$	$-\frac{2}{b}K_3$
	M_y	$\frac{2}{ab}K_5$	0	0	$-\frac{6}{a^2}K_3 - \frac{2}{ab}K_5$	$\frac{2}{a}K_2$	$\frac{6}{a^2}K_3 + \frac{6}{b^2}K_4 + \frac{2}{ab}K_5$	$-\frac{4}{b}K_4 - \frac{2}{a}K_5$	$-\frac{2}{b}K_4$	$-\frac{2}{b}K_4$	$-\frac{2}{b}K_5$
	M_{xy}	$\frac{2}{ab}K_6$	0	0	$-\frac{6}{a^2}K_5 - \frac{2}{ab}K_6$	$\frac{2}{a}K_3$	$\frac{6}{a^2}K_5 + \frac{6}{b^2}K_6 + \frac{2}{ab}K_6$	$-\frac{4}{b}K_5 - \frac{2}{a}K_6$	$-\frac{2}{b}K_5$	$-\frac{2}{b}K_5$	$-\frac{2}{b}K_6$
nod. 3	M_x	$\frac{2}{ab}K_3$	0	0	$-\frac{6}{a^2}K_1 - \frac{2}{ab}K_3$	0	0	$\frac{2}{b}K_2$	$\frac{4}{b}K_2 - \frac{2}{a}K_3$	$\frac{4}{b}K_2 - \frac{2}{a}K_3$	$\frac{4}{b}K_2 - \frac{2}{a}K_3$
	M_y	$\frac{2}{ab}K_5$	0	0	$-\frac{6}{a^2}K_3 - \frac{2}{ab}K_5$	0	0	$\frac{2}{b}K_4$	$\frac{4}{b}K_4 - \frac{2}{a}K_5$	$\frac{4}{b}K_4 - \frac{2}{a}K_5$	$\frac{4}{b}K_4 - \frac{2}{a}K_5$
	M_{xy}	$\frac{2}{ab}K_6$	0	0	$-\frac{6}{a^2}K_5 - \frac{2}{ab}K_6$	0	0	$\frac{2}{b}K_5$	$\frac{4}{b}K_5 - \frac{2}{a}K_6$	$\frac{4}{b}K_5 - \frac{2}{a}K_6$	$\frac{4}{b}K_5 - \frac{2}{a}K_6$
nod. 4	M_x	$-\frac{6}{a^2}K_1 + \frac{2}{ab}K_3$	$\frac{2}{a}K_3$	$\frac{2}{a}K_4$	$-\frac{2}{ab}K_3$	0	0	$-\frac{6}{b^2}K_2 + \frac{2}{ab}K_3$	$\frac{6}{a^2}K_1 + \frac{6}{b^2}K_2 - \frac{2}{ab}K_3$	$\frac{4}{b}K_2 - \frac{2}{a}K_3$	$\frac{4}{b}K_2 - \frac{2}{a}K_3$
	M_y	$-\frac{6}{a^2}K_3 + \frac{2}{ab}K_5$	$\frac{2}{a}K_5$	$\frac{2}{a}K_5$	$-\frac{2}{ab}K_5$	0	0	$-\frac{6}{b^2}K_4 + \frac{2}{ab}K_5$	$\frac{6}{a^2}K_3 + \frac{6}{b^2}K_4 - \frac{2}{ab}K_5$	$\frac{4}{b}K_4 - \frac{2}{a}K_5$	$\frac{4}{b}K_4 - \frac{2}{a}K_5$
	M_{xy}	$-\frac{6}{a^2}K_6 + \frac{2}{ab}K_6$	$\frac{2}{a}K_6$	$\frac{2}{a}K_6$	$-\frac{2}{ab}K_6$	0	0	$-\frac{6}{b^2}K_5 + \frac{2}{ab}K_6$	$\frac{6}{a^2}K_5 + \frac{6}{b^2}K_6 - \frac{2}{ab}K_6$	$\frac{4}{b}K_5 - \frac{2}{a}K_6$	$\frac{4}{b}K_5 - \frac{2}{a}K_6$
centru de elem.	M_x	$-\frac{4}{ab}K_3$	$\frac{1}{2b}K_2 - \frac{1}{2a}K_3$	$-\frac{1}{2a}K_1 - \frac{1}{2b}K_3$	$\frac{4}{ab}K_3$	$-\frac{1}{2a}K_1 - \frac{1}{2b}K_3$	$-\frac{4}{ab}K_3$	$-\frac{1}{2b}K_2 + \frac{1}{2a}K_3$	$-\frac{1}{2b}K_2 + \frac{1}{2a}K_3$	$\frac{1}{2a}K_1 + \frac{1}{2b}K_3$	$\frac{1}{2a}K_1 + \frac{1}{2b}K_3$
	M_y	$-\frac{4}{ab}K_5$	$\frac{1}{2b}K_4 - \frac{1}{2a}K_5$	$-\frac{1}{2a}K_2 - \frac{1}{2b}K_5$	$\frac{4}{ab}K_5$	$-\frac{1}{2a}K_2 - \frac{1}{2b}K_5$	$-\frac{4}{ab}K_5$	$-\frac{1}{2b}K_4 + \frac{1}{2a}K_5$	$-\frac{1}{2b}K_4 + \frac{1}{2a}K_5$	$\frac{1}{2a}K_2 + \frac{1}{2b}K_5$	$\frac{1}{2a}K_2 + \frac{1}{2b}K_5$
	M_{xy}	$-\frac{4}{ab}K_6$	$\frac{1}{2b}K_5 - \frac{1}{2a}K_6$	$-\frac{1}{2a}K_3 - \frac{1}{2b}K_6$	$\frac{4}{ab}K_6$	$-\frac{1}{2a}K_3 - \frac{1}{2b}K_6$	$-\frac{4}{ab}K_6$	$-\frac{1}{2b}K_5 + \frac{1}{2a}K_6$	$-\frac{1}{2b}K_5 + \frac{1}{2a}K_6$	$\frac{1}{2a}K_3 + \frac{1}{2b}K_6$	$\frac{1}{2a}K_3 + \frac{1}{2b}K_6$

(2.27)

același punct cu ajutorul relațiilor bine cunoscute în ~~Resistența~~ **Resistența** materialelor.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\end{aligned}\quad (2.29)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

în care : σ_x, σ_y - sînt eforturile unitare normale după direcția x și respectiv y;
 τ_{xy} - este efortul unitar tangențial;
 α - este unghiul care arată direcțiile principale

2.4.7. Determinarea vectorului forțelor nodale echivalente a elementului finit.

În general, în fiecare nod sînt trei componente ale forțelor nodale echivalente. Aceste forțe sînt determinate pe bază aproximativă a echilibrului static sau pe baza mai exactă a echivalenței energetice între încărcările reale și forțele nodale echivalente.

În această lucrare, s-a folosit în exemplele de calcul, echilibrul static pentru determinarea forțelor nodale echivalente. Această aproximare aduce erori admisibile în calculul curent.

În scopul limitării erorilor comise, se poate folosi principiul lucrului mecanic virtual care este prezentat în relația (2.5) în acest capitol, se determină forțele nodale echivalente.

2.5. Determinarea matricei de rigiditate a structurii discretizate.

După ce s-au determinat matricele de rigiditate ale elementelor finite, este necesar a le asambla într-o matrice globală, pentru structura studiată, prin ecuația fundamentală a metodei elementelor finite, la nivelul de structură (2.6).

Asamblarea acestor matrici ale elementelor finite poate fi realizată chiar după determinarea fiecărei matrice de element finit cu ajutorul unui subprogram de cunoaștere a elementelor finite care se elaborează pe baza schemei logice dată în fig.2.3.

Matricea de rigiditate obținută prin asamblare susmenționată, în general, este singulară. De aceea, trebuie să se elimine elementele deplasărilor nodale împiedicate de condițiile de margine, prin înmulțirea termenilor principali corespunzători deplasărilor nule cu un număr pozitiv infinit de mare, cum ar fi cu $+ 10^{10}$.

Realizându-se introducerea condițiilor de margine în matricea rigidităților a structurii, se obține o matrice nesingulară care ne permite să o inversăm pentru a rezolva ecuația (2.6).

2.6. Determinarea deplasărilor nodale ale structurii discretizate.

Din ecuația fundamentală (2.6) rezultă :

$$\{u\}_s = [K]_s^{-1} \{F\} \quad (2.31)$$

Este evident însă că inversarea efectivă a unei matrice patrute de ordinul $n \times n$, care chiar pentru structuri mici poate ajunge la dimensiuni uriașe ($n \geq 1000$), nu se poate realiza practic decât în baza unor procedee speciale cum ar fi metoda lui Gauss - Jordan.

Studiile recente privind inversarea matricilor sau rezolvarea sistemelor de ecuații prin diversele metode elaborate în decursul timpurilor au pus în evidență că în cazul unui sistem de N ecuații având r cazuri de încărcări :

- timpul de calcul, cu ajutorul calculatoarelor electronice este proporțional cu numărul înmulțirilor simple ce trebuie efectuate pentru determinarea necunoscutelor;

- în acest sens, procedeul de eliminare directă a lui Gauss are cel mai mic număr de operații

$$M = \frac{N^3}{3} + rN^2 - \frac{N}{3} \quad (2.32)$$

deci este cel mai economic;

- inversarea propriu-zisă este practic neinteresantă deoarece presupune N^3 operații;

- matricea simetrică, sub formă de bandă, care, în plus, este și pozitiv definită, poate fi abordată cu ajutorul procedurii propus de Cholesky, care este ceva mai simplă și mai eficientă necesitând și mai puține operații :

$$M = \frac{N^3}{6} + N^3 \left(r + \frac{1}{2} \right) + N \left(r + \frac{1}{3} \right) \quad (2.33)$$

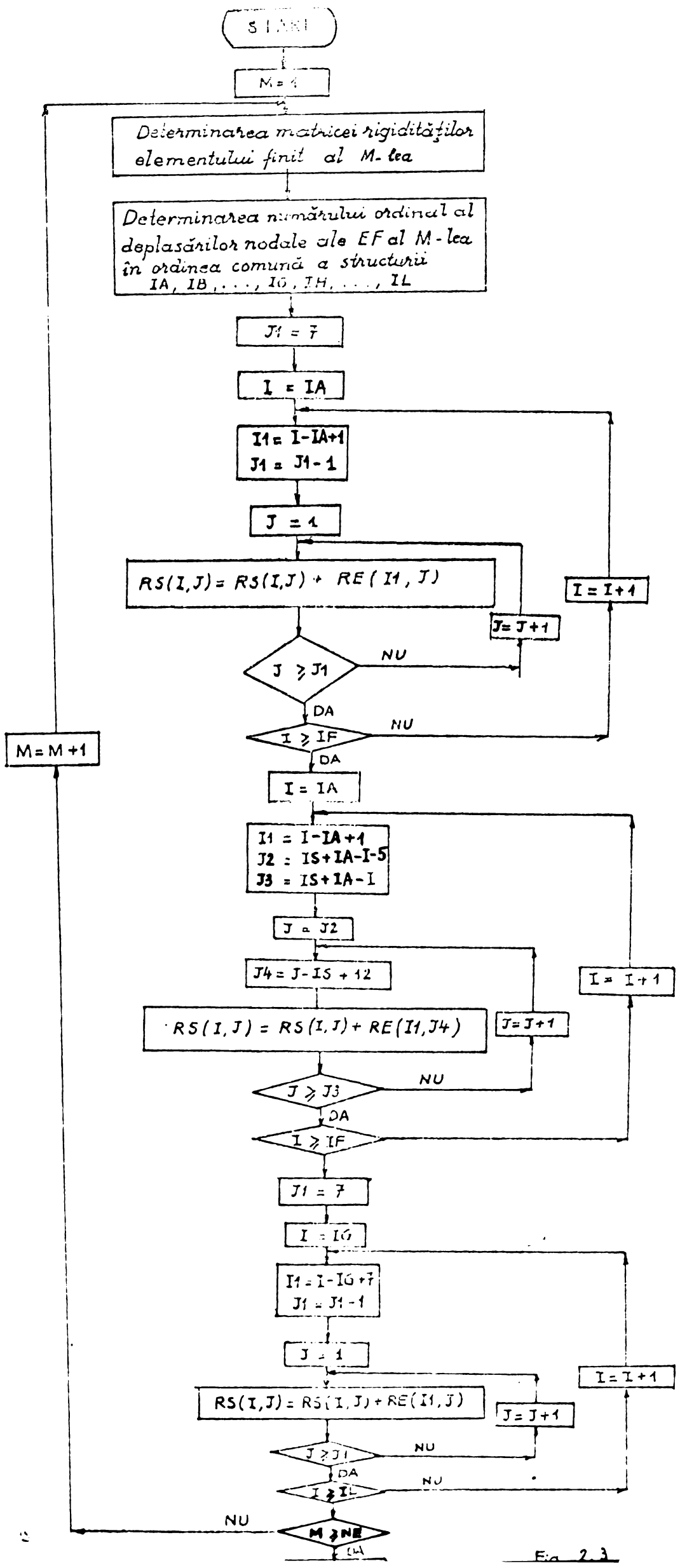


Fig. 2.3

în care : r este înălțimea benzii.

Pe baza acestor considerente, în cazul utilizării metodei deplasărilor pentru stabilirea ecuațiilor metodei elementelor finite, la rezolvarea lor se aplică de regulă metoda de eliminare directă a lui Gauss iar dacă se reușește obținerea unei structuri sub formă de bandă a matricei de rigiditate, se utilizează procedeul lui Cholesky care asigură o bună stabilitate algoritmului de calcul.

În lucrarea de față, se va folosi metoda de rezolvare a sistemului ecuațiilor liniare cu o matrice sub formă de semibandă, care dă posibilitatea de economie a timpului de calcul și a memoriilor calculatorului.

În cele ce urmează se vor prezenta sumar cele două metode menționate.

Metoda lui Gauss este un procedeu sistematic, foarte cunoscut și ușor de programat, care constă într-o primă etapă în eliminarea treptată a tuturor elementelor situate sub diagonala principală a matricei de rigiditate și obținerea în aceste condiții a unei matrici triunghiulare superioare și cu "substituție înapoi" se determină toate necunoscutele $\{u\}$.

Metoda lui Cholesky se mai numește și metoda descompunerii a factorizării sau a rădăcinii patrate. Ea pornește de la proprietatea matricelor simetrice, pozitiv definite, de a avea o singură descompunere de forma :

$$[K] = [T]^T [T] \quad (2.34)$$

În care $[T]$ este o matrice triunghiulară superioară, iar $[T]^T$ transpusa sa inferioară.

Elementele matricei $[T]$ se determină, în funcție de cele ale matricei $[K]$ prin identificare, termen cu termen, a rezultatelor produsului matriceal $[T]^T [T]$.

Termenii de pe diagonala principală rezultă sub forma rădăcinii patrate din diferența dintre elementele diagonalei, respective K_{mm} și suma patratelor tuturor elementelor de pe aceeași coloană calculate anterior.

Termenii secundari se calculează făcând diferența între elementul respectiv k_{mj} al matricei inițiale și suma unor produse de câte doi factori reprezentând elementele coloanelor m și j , iar totul se împarte la elementul diagonalei principale t_{mm} :

$$t_{11} = \sqrt{K_{11}} \quad ; \quad t_{ij} = \frac{K_{ij}}{t_{11}} \quad (j \geq 2)$$

$$\begin{aligned}
 t_{mm} &= \sqrt{K_{mm} - \sum_{\ell=1}^{m-1} t_{\ell m}^2} \quad (1 < m = j) \\
 t_{mj} &= (K_{mj} - \sum_{\ell=1}^{m-1} t_{\ell m} \cdot t_{\ell j}) / t_{mm} \quad (1 < m < j) \\
 t_{mj} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

De remarcat că descompunerea efectuată nu afectează termenii liberi $\{F\}$ și deci matricea $[T]$ odată obținută poate fi utilizată și pentru alte situații de încărcare.

În afară de cele două metode menționate mai sus, se mai poate utiliza metoda de rezolvare în blocuri /52/, /66/ care constituie modalitatea de soluționare efectivă cu ajutorul calculatoarelor electronice, a sistemelor de ecuații. Ea se bazează pe proprietatea pe care o prezintă matricele bandă ca în cursul eliminării preconizate de metoda Gauss sau a substituțiilor din cea a lui Cholesky, în fiecare etapă intervine numai un număr limitat de $(n-1)$ linii anterioare aceleia pe care se operează. Prin urmare în memoria centrală a calculatorului trebuie să existe întotdeauna două blocuri concomitente, unul pe care se lucrează, iar celălalt care cuprinde elementele cenzare acestei prelucrări.

În ultimul timp s-au elaborat o sumedenie de studii și subrutine de rezolvare a sistemelor de ecuații /21/, /91/ sau ecuații de bandă /14/, /19/, /23/, ..., care stau la baza programelor de calcul complexe sau a sistemelor integrate.

În această lucrare, s-a folosit un subprogram propriu pentru rezolvarea sistemului de ecuații de forma semibandă.*

2.7. Prezentarea programelor de calcul în limbajul FORTRAN IV.

Pe baza formulelor de calcul, a matricelor rigidităților și a matricelor de transformare stabilite în precedentele paragrafe pentru fiecare categorie de placă izotropă sau ortotropă, se vor elabora două programe de calcul, unul pentru cazul de compatibilitate a săgeții și altul pentru cazul de compatibilitate a săgeții și a rotirii.

Toate programele de calcul sînt scrise în limbajul FORTRAN IV și sînt bazate pe schema logică unică prezentată în fig.2.4.

Schema logică MELEFIN

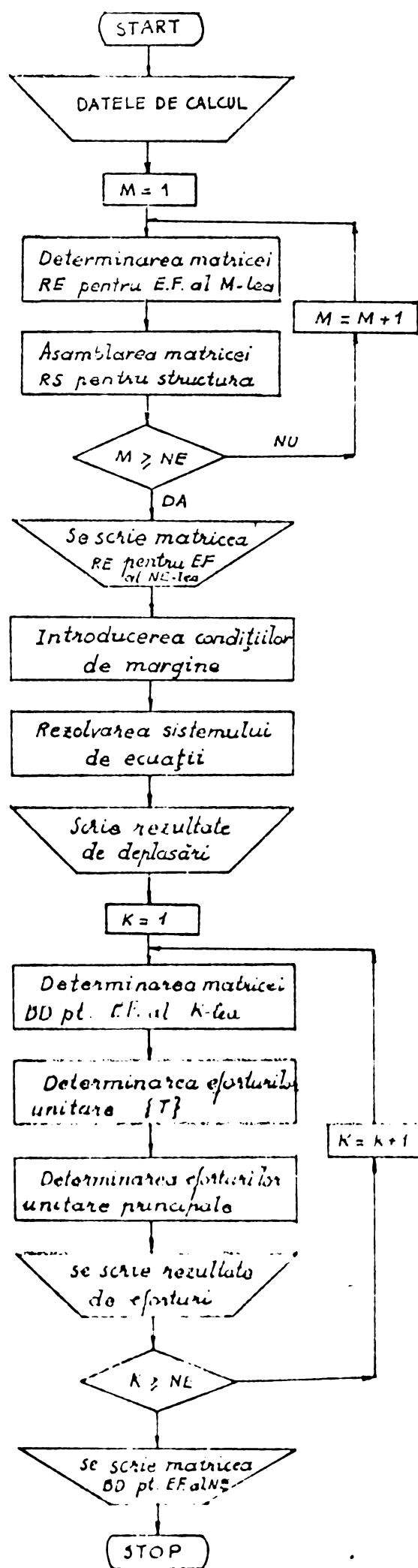


Fig. 2.4

În programe s-au folosit un număr de notații care sînt explicate în continuare :

- NE - numărul elementelor finite divizate din structura plăcii;
- NN - numărul coloanelor rețelei discretizate după direcția avînd numărul mai mic de elemente;
- NLIN - numărul gradelor de libertate ale structurii discretizate;
- LCL - numărul gradelor de libertate eliminate de legăturile exterioare;
- IS - lățimea benzii matricei adică numărul cel mai mare posibil de termeni ai unui rînd din matrice;
- NINC - numărul ipotezelor de încărcări;
- A(NE), B(NE), T(NE) - listele de dimensiuni geometrice ale elementelor finite discretizate;
- NI(NE), NJ(NE) - listele cu numerele de ordine ale elementelor în rețeaua discretizată - după direcțiile x și y;
- U(NLIN, NINC) - tabelul care conține, la început, termenii liberi (matricea forțelor nodale echivalente) și după aceea rezultatele deplasărilor nodale (matricea deplasărilor nodale);
- RE(12, 12) - matricea rigidității elementului finit;
- RC(NLIN, IS) - matricea bandă de rigiditate a structurii;
- ICL(LCL) - lista gradelor de libertate eliminate (deplasările nule);
- BD(15, 12) - matricea de transformare a deplasărilor nodale în eforturi unitare a elementului finit;
- UE(12, NINC) - tabelul care conține deplasările nodale ale elementului finit provocate de toate ipotezele de încărcări;
- SIG(15, NINC) - tabelul ce conține eforturile unitare ale elementului finit provocate de toate ipotezele de încărcări;
- SIG1(NINC), SIG2(NINC) - tabele care conțin eforturile unitare principale în centrul elementului finit provocate de toate ipotezele de încărcări;
- BETA(NINC) - tabelul cu valorile unghiurilor direcționale ale eforturilor unitare principale;

μ - coeficientul lui Poisson;

E - modulul de elasticitate;

D - rigiditatea cilindrică a plăcii.

Capacitatea de calcul a programelor elaborate, adică numărul maxim de elemente finite pe care le pot rezolva programele, depinde de modul împărțirii rețelei discretizate.

Relația dintre modul de împărțire a rețelei discretizate și numărul maxim admisibil este definită cu ajutorul graficului prezentat în fig.2.5.

Se remarcă, în final, că aceste programe elaborate se pot utiliza atât pentru calculul plăcilor pline cât și a celor cu goluri, cu grosimea constantă sau variabilă, cu condiția ca formele geometrice să fie dreptunghiulare.

Pentru a deosebi între ele cazurile de plăci considerate, se definesc MELEFIN 1, 2, 3, 4 numele programelor de calcul corespunzătoare și anume :

MELEFIN 1 - pentru calculul plăcii izotrope la care funcția deplasărilor satisface numai condiția de compatibilitate a săgeții.

MELEFIN 2 - pentru calculul plăcii izotrope la care funcția deplasărilor satisface condiția de compatibilitate a săgeții și a rotirii.

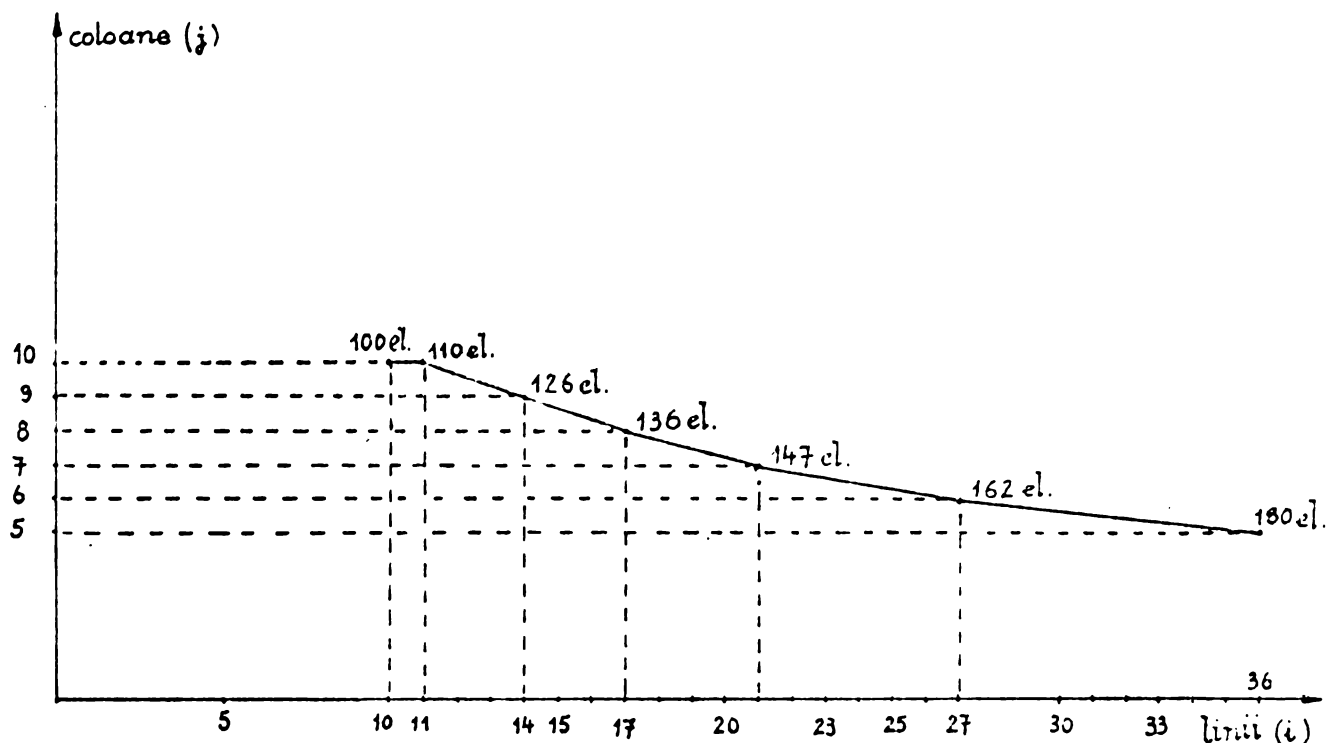
MELEFIN 3 - pentru calculul plăcii anizotrope la care funcția deplasărilor satisface numai condiția de compatibilitate a săgeții.

MELEFIN 4 - pentru calculul plăcii ortotrope la care funcția deplasărilor satisface condiția de compatibilitate a săgeții și a rotirii.

Se pot folosi ~~ultimele~~ ultimele două programe atât pentru plăci ortotrope cât și pentru plăci izotrope, cu următoarele substituiri :

$$\begin{aligned} K_1 &= D \\ K_2 &= \nu D \\ K_3 &= 0 \\ K_4 &= D \\ K_5 &= 0 \\ K_6 &= \frac{1-\nu}{2} D \end{aligned} \quad (2.36)$$

Capacitatea limită a programului MELLFIN



Rețea	Num. de elem.	Num. de dep. nodale	Lățimea benzii	Num. de cuvinte	Aproxiere
				16384 (*)	Memoria internă
11 x 11	121	432	42	18144	imposibil
11 x 10	110	396	39	15444	posibil
10 x 10	100	363	39	14157	posibil
14 x 9	126	450	36	16200	posibil
17 x 8	136	486	33	16038	posibil
21 x 7	147	528	30	15840	posibil
27 x 6	162	588	27	15876	posibil
36 x 5	180	666	24	15984	posibil

$$\begin{aligned}
 (*) \quad 64 \text{ K}\varnothing &= 64 \times 1024 = 65536 \text{ octeți} \\
 &= \frac{65536}{4} = 16384 \text{ cuvinte}
 \end{aligned}$$

Nici un tablou nu poate depăși această mărime (chiar dacă se află într-un COMMON separat)

Fig 2.5

unde K_1, K_2, \dots, K_6 sînt caracteristicile rigidităților ale matricei de elasticitate anizotropă de forma (2.19)

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

2.8. Concluzii.

Metoda elementelor finite recent dezvoltată s-a dovedit a fi instrumentul cel mai puternic și cel mai universal pentru a analiza varietatea problemelor plăcilor plane sau curbe supuse încărcărilor statice sau dinamice.

Cu toate că metoda este încă în stadiul dezvoltării, ea promite a putea fi utilizată în viitor în multe domenii de structuri și în mecanica continuumului.

Cele mai importante avantaje ale metodei elementelor finite sînt :

1. Soluția este obținută fără utilizarea directă a ecuațiilor diferențiale fundamentale ale teoriei plăcilor.

2. Metoda utilizează metode familiare pentru inginerii constructori.

3. Condiții arbitrare de marfime și de încărcări pot fi luate în același mod ca probleme simple.

4. Metoda permite automatizarea completă a tuturor procedurilor.

5. Metoda permite combinarea elementelor structurale diferite ca de pildă plăci, grinzi și plăci curbe.

6. Metoda poate fi extinsă pentru a acoperi efectiv toate domeniile mecanicii continuumului.

Cu toate că aceste avantaje, următoarele dezavantaje trebuie să fie menționate :

1. Metoda are nevoie de utilizarea calculatoarelor - electronice cu viteză mare și cu o mare capacitate de înmagazinare.

2. Pregătirea datelor pentru fiecare element finit cere mult timp și este sursa cea mai generală a erorilor omenești în soluție.

3. Cîteva probleme pot avea nevoie de programe speciale de calcul și deci, de ajutorul specialiștilor în calculatoare.

4. Este dificil de a preciza exactitatea rezultatelor obținute cînd sînt analizate sistemele structurale.

În mare parte, studiile curente în acest domeniu sînt

îndreptate către dezvoltarea funcțiilor perfecționale ale formă și a formelor de elemente care pot da o convergență fidelă precum și o exactitate perfecțională.

În cele ce urmează se prezintă cele trei criterii "tehnice" de convergență ale problemei rezolvate de metoda elementelor finite, propuse de Zienkiewicz O.C., și Bazeley G.P. ș.a., /109/.

1. Dacă pentru anumite deplasări ale nodurilor, deformațiile specifice sînt constante în cuprinsul elementului, această situație trebuie să se regăsească și din aplicarea legii considerate.

2. Considerîndu-se o deplasare de corp rigid dată, conform teoriei elasticității trebuie să rezulte că elementul finit nu se deformează (adică nu sînt induse deformații). Acest criteriu este de fapt o consecință a primului, întrucît deplasarea corpului rigid poate fi echivalentă cu o deformație constantă nulă.

3. Funcțiile trebuie să asigure continuitatea deplasărilor pe interfețele elementelor, pentru ca energia deformațiilor acumulată în aceasta să fie nulă.

Uneori ultima condiție nu este respectată, în mod involuntar sau deliberat, dar totuși se pot obține rezultate corecte dacă este respectată condiția principală 1, aceasta implicînd la limită și continuitatea deplasărilor.

În ultimul timp, problema preciziei și convergenței metodei elementelor finite a preocupat pe mulți cercetători, care au căutat fie să găsească noi căi de abordare a problemei, care să înlocuiască criteriul convergenței monotone acceptat la începuturile metodei, fie să determine erorile introduse de diversele tipuri de elemente și prin urmare precizia acestora.

CAPITOLUL III.

BAZELE TEORIEI ECHIVALENTELOR SI CONTRIBUTII PERSONALE PRIVIND APLICAREA EI

3.1. Generalități.

Ideea înlocuirii reale cu o structură echivalentă, nu este, desigur, nouă. Deja în secolul al XVIII-lea, Euler L. a propus înlocuirea unei membrane printr-un sistem de fire flexibile ortogonale /32/. După aceea, în anul 1774 Bernoulli A. a extins analogia lui Euler L. la problemele plăcilor introducând analogia rețelelor de grinzi ortogonale /13/.

În anul 1920, Timoshenko S.P. a prezentat metoda lui pentru calculul barelor cu modelul format din arce și console.

În anul 1941 Hrennikoff A. /43/ a aproximat un corp elastic printr-o structură articulată spațială iar în 1943 Henry Mc. l-a înlocuit printr-o rețea de bare.

În anul 1956 Rjanițin A. /75b/ a modelat medii continui printr-un sistem de bare coplanare și spațiale și a găsit condițiile echivalente între corpurile reale și modelele înlocuitoare.

În afară de autorii menționați mai sus, trebuie să se mai enumere Marcus /55/, Ewell, Okubo și Abrams /33/ Wieghard K. /100b/, Riedel W. /70b/, Spierig S. /85b/ Lightfoot /53/ Yettram și Husain /101/, /102/ și alții /83/, /15/, ..., care au contribuit meritorii la calculul plăcilor plane elastice printr-o analogie de rețea.

Mai târziu, după aproape un deceniu de studiu și verificare a teoriei echivalențelor, în anul 1970 Absi E. a publicat rezultatele lui de publicare sub titlul "Teoria echivalențelor și aplicarea ei la diverse probleme de elasticitate" /5/. Această teorie de echivalențe constituie o aproximare generală care permite substituirea studiului corpului real încărcat prin studiul unui sistem fictiv echivalent, cel mai accesibil la calculul eforturilor și al deformațiilor.

Considerând condiția de echivalență între energia deformațiilor a celor două sisteme, real și fictiv, Absi E. a obținut rezultate bune și generale.

Teoria echivalențelor introdusă de Absi E. a condus la un procedeu de calcul intrînd în cadrul metodelor generale și familiare de rezolvare a problemelor de elasticitate bi și tri-dimensionale.

Aplicarea eficientă a analizei rețelelor de bare echivalente este foarte sigură datorită funcțiilor exacte de deplasări sau tensiuni ale elementelor de bare ce sînt binecunoscute.

Principala dificultate în teoria echivalențelor este datorată efectului coeficientului Poisson, care nu influențează cu nimic calculul sistemului de bare unidirecționale dar influențează considerabil calculul rețelei de bare, ce simulează placa studiată. Caracteristicile de încovoiere în toate direcțiile trebuind să fie cuplate.

Prima reușită a analogiei rețelelor ținînd seama de efectul coeficientului Poisson a fost obținută de Yettram A. și Husain M. /101/, /102/. Pentru prima dată ei au folosit o tehnică de o aproximație succesivă de luare în considerare efectul coeficientului Poisson utilizînd o rețea de grinzi ortogonale /101/. Yettram A. și alți autori au mai folosit modelul echivalent dreptunghiular cu bare diagonale în analogia rețelelor /102/ sau au mai introdus un număr de forme de mecanisme și resorturi /15/, /17/, pentru simularea efectului coeficientului Poisson.

Împreună cu metoda elementelor finite, teoria echivalențelor este utilizată efectiv în analiza plăcilor elastice.

Echivalența între elementul de placă și modelul echivalent de bare este studiată pe două linii principale :

- prin echivalența directă a deplasărilor corespunzătoare celor două sisteme;
- prin echivalența energiilor deformațiilor celor două sisteme.

În lucrarea de față, se folosește linia a doua construită pe teoria echivalențelor introdusă de Absi E.

În cele ce urmează se va prezenta în mod succint bazele teoriei sus menționate.

3.2. Bazele teoriei echivalențelor și aplicația sa în analiza plăcii elastice subțiri.

3.2.1. Expunere generală.

Se consideră un corp deformabil încărcat de potențialul (fig.3.1).

Potențialul total Π al sistemului (adică corp + acțiune) presupus conservativ se scrie :

$$\Pi = U + \Phi \quad (3.1)$$

unde : U - potențialul deformațiilor corpului considerat.

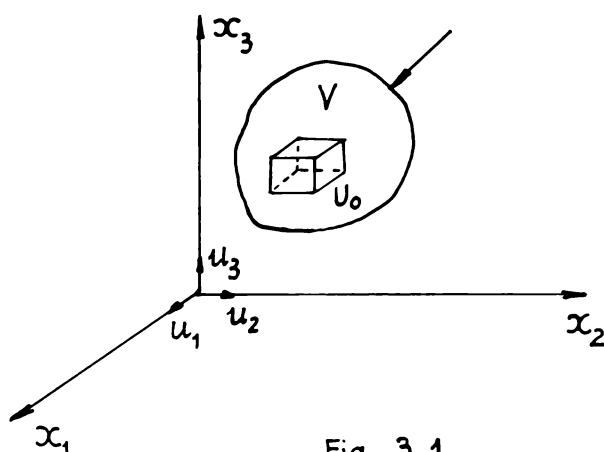


Fig. 3.1

Notînd cu U_0 densitatea potențialului unei unități de volum, expresia (3.1) se scrie :

$$\Pi = \int_V U_0 dV + \Phi \quad (3.2)$$

Presupunînd că sarcina este independentă de starea deformată a corpului, funcția poate fi scrisă sub forma :

$$\Phi = - \sum \vec{P}\vec{u} - \int_S \vec{p}\vec{u} ds - \int_V \vec{\rho}\vec{u} dV \quad (3.3)$$

unde : \vec{P} - forțele concentrate pe suprafața exterioară a corpului studiat;

\vec{p} - forțele distribuite pe suprafața exterioară;

$\vec{\rho}$ - forțele pe unitatea de volum;

\vec{u} - cîmpul deplasărilor considerate ale corpului.

Rezolvarea ecuației (3.2) revine la determinarea unui cîmp de deformații compatibile și a minimului funcției Π (adică $d\Pi = 0$).

Acum se ~~consideră~~ ^{consideră} al doilea corp ce ocupă același spațiu V și este supus aceleiași încărcări (fig.3.2). Notînd cu U'_0 densitatea sa de deformații, potențialul total Π' al sistemului se scrie :

$$\Pi' = \int_V U'_0 dV + \Phi \quad (3.4)$$

De asemenea, rezolvarea ecuației (3.4) revine la determinarea cîmpului de deformații compatibile și a minimului funcției Π' (adică $d\Pi' = 0$) ale corpului al doilea.

Se presupune că :

$$\delta\Pi = \delta\Pi' \quad (3.5)$$

În acest caz, se spune că cele două sisteme studiate sînt echivalente. Ele admit același cîmp de deformații. Într-adevăr, soluțiile celor două ecuații (3.2) și (3.4) sînt identice, avem deci :

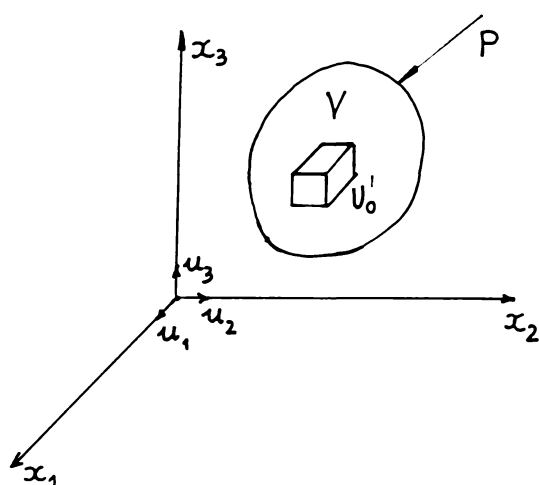


Fig. 3.2

$$\delta \Pi = \delta \Pi' = 0 \quad (3.6)$$

Condiția (3.6) ne permite să reducem studiul unui corp real încărcat la studiul unui corp echivalent avînd legi de comportări diferite.

În general, există echivalență între cele două sisteme elastice dacă are loc unul dintre următoarele cazuri :

1. Cele două densități de energie de deformație diferă cu o anumită cantitate u_0 , adică :

$$U_0 = U_0' + u_0 \quad (3.7)$$

astfel că :

$$\int_V u_0 dV = \text{const} \quad (3.8)$$

sau :

$$\delta \int_V u_0 dV = 0$$

deci, din nou :

$$\delta \Pi = \delta \Pi'$$

2. Cele două densități de energie de deformație U_0 și U_0' sînd egale, edică :

$$U_0 = U_0' \quad (3.9)$$

Teoria echivalențelor se mai verifică cu condiția :

$$\Pi = \alpha \Pi' \quad (3.10)$$

în care : α - este un coeficient arbitrar.

Intr-adevăr, condiția (3.10) asigură verificarea ecuației (3.6).

Din cele de mai sus se constată că echivalența poate fi realizată între :

- un corp continuu și celălalt tot continuu;
- un corp discret și celălalt tot discret;
- un corp continuu și celălalt discret.

3.2.2. Energia de deformăție elastică.

Teoria echivalențelor energiei deformațiilor presupune înlocuirea studiului corpului continuu (cum ar fi plăci plane, plăci curbe sau corpuri masive), printr-un corp discret (rețea de bare, sistem de grinzi).

Modelele echivalente alese sînt presupuse cît mai mici. Se poate, deci, considera că cîmpul deformațiilor alese sîmîne uniform în interiorul modelului de bază.

Caracteristicile de rigiditate ale modelului studiat sînt determinate pe baza identificării expresiilor potențialelor deformațiilor înmagazinate în cele două elemente : real și fictiv. De aceea, se vor studia, în cele ce urmează, diferite expresii pentru energia deformațiilor corpurilor elastice.

Pentru cazul cel mai general, corpul tridimensional, densitatea energiei deformațiilor U_0 este exprimată prin relația stabilită în teoria elasticității :

$$U_0 = \frac{1}{2} \lambda [e_{11} + e_{22} + e_{33}]^2 + \mu [(e_{11})^2 + (e_{22})^2 + (e_{33})^2 + 2(e_{12})^2 + 2(e_{13})^2 + 2(e_{23})^2] \quad (3.11)$$

în care :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.12)$$

unde : u_i, u_j - sînt componentele deplasării u într-un sistem de referință arbitrar (x_i, x_j, \dots);

λ, μ - sînt coeficienții lui Lamé.

Acești coeficienți sînt determinați prin următoarele relații :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.13)$$

în care : E - modulul de elasticitate;

ν - coeficientul lui Poisson.

Particularizîndu-se expresia (3.11) pentru cîteva cazuri curent întîlnite, se obține :

1. Problemele de tensiune plană :

$$U_0 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[(e_{11})^2 + (e_{22})^2 + 2\nu e_{11} e_{22} + 2(1-\nu)(e_{12})^2 \right] \quad (3.14)$$

2. Problemele de deformăție plană :

$$U_0 = \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu\right) \left[(e_{11})^2 + (e_{22})^2 \right] + \lambda e_{11} e_{22} + 2\mu (e_{12})^2 \quad (3.15)$$

3. Problemele plăcilor plane încovoiate :

$$U_0 = \frac{1}{2}D \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\right)^2 \right\} \quad (3.16)$$

unde :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

în care : $\omega_z(x,y)$ - săgeata în punct curent (x,y) .

Limitînd examinarea la cazul plăcii plane cu deplasări mici, teoria clasică neglijează eforturile de membrană, rezultînd :

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \neq 0 \quad (3.17)$$

ca atare, relația (3.16) devine :

$$U_0 = \frac{1}{2}D \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\right)^2 \right\} \quad (3.18)$$

Diversele calcule efectuate cu această relație (3.18) au arătat că aproximația este satisfăcătoare.

Modele echivalente des folosite sînt alcătuite din bare articulate, bare supuse la încovoiere și la torsiune.

Energia de ormațiilor modelului echivalent se determină prin suma energiilor deformațiilor barelor componente. De aceea, în cele ce urmează, se vor prezenta expresiile energiilor cîtorva tipuri de bare.

1. Bare articulate.

$$W_{AB} = \frac{1}{2} \rho_{AB} (\alpha_i \alpha_j e_{ij})^2 \quad (3.19)$$

în care : α_i, α_j - cosinusurile directoare ale barei AB în raport cu sistemul de referință considerat.

$$\rho_{AB} = ES l_{AB} \quad (3.20)$$

este caracteristica de rigiditate la întindere sau compresiune a barei AB;

S - suprafața secțiunii transversale a barei;

l_{AB} - lungimea barei AB;

E - modulul de elasticitate.

2. Bare încovoiate.

Pornind de la relația bine cunoscută între momentele încovoietoare și curburile barelor supuse la încovoiere :

$$M_i = EI \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \quad (3.21)$$

în care : I - momentul de inerție al secțiunii transversale a barei;

X - axa de referință locală a barei raportată la sistemul de referință general prin următoarele relații (fig.3.3) :

$$\frac{\partial w}{\partial X} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha$$

rezultă energia de încovoiere a barei ij :

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \frac{1}{2} M_i \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} l_{ij} = \frac{1}{2} EI l_{ij} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho_{ij} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right]^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

unde : l_{ij} - lungimea barei ij;

$$\rho_{ij} = EI l_{ij} \quad (3.24)$$

este caracteristica de rigiditate la încovoiere a barei ij.

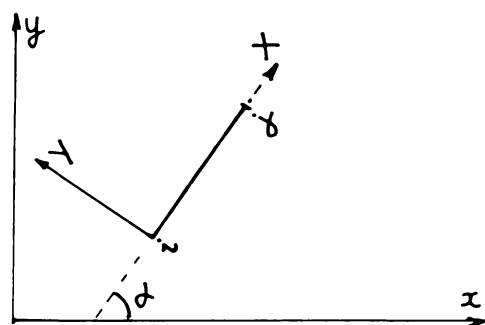


Fig. 3.3

3. Bare supuse la torsiune.

Momentul de torsiune este exprimat prin relația :

$$M_t = \mu J \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.25)$$

vom avea :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (3.26)$$

Substituindu-se (3.26) în (3.25) rezultă :

$$\begin{aligned} W_t^{ij} &= \frac{1}{2} \mu J M_t \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \right]^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

în care : J - momentul de inerție la torsiune al secțiunii transversale a barei :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

iar : $\delta_{ij} = \mu J l_{ij}$ (3.28)

este caracteristica de rigiditate la torsiune a barei ij .

3.3. Analiza plăcilor plane subțiri elastice izotrope cu ajutorul teoriei echivalențelor.

Pe baza relațiilor și formulelor determinate în precedentele paragrafe, noi vom studia următoarele modele echivalente :

1. Modelul grinzilor ortogonale.
2. Modelul dreptunghiular cu bare diagonale.
3. Modelul patrat cu bare diagonale propus de Hrennikoff.

3.3.1. Modelul grinzilor ortogonale.

Modelul este prezentat în fig.3.4.

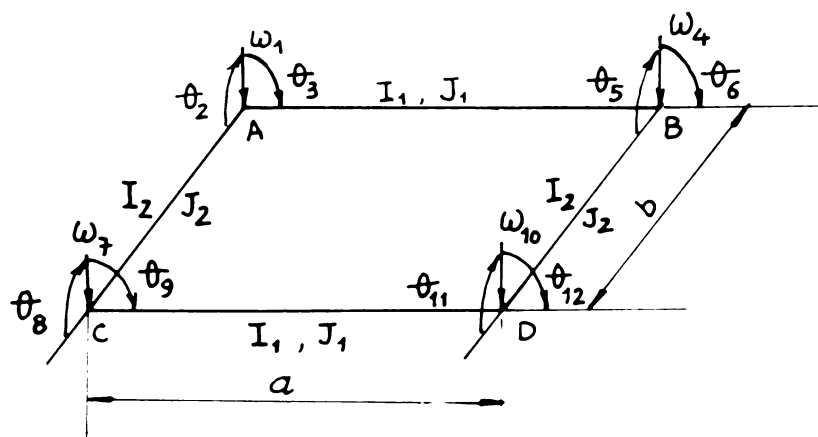


Fig. 3.4

3.3.1.1. Determinarea caracteristicilor de calcul ale modelului.

Pe baza condiției de echivalență între energiile deformațiilor modelului ales și ale elementului plăcii reale, rezultă caracteristicile geometrice corespunzătoare, cu rigiditățile la încovoiere și la torsiune ale fiecărei b. re.

Pentru aceasta, la început, se determină expresiile energiei deformațiilor a modelului și elementului de placă.

a. Energia deformațiilor elementului plăcii reale.

Neglijându-se eforturile de membrană, se folosește relația (3.18) :

$$U = AU_0 = \frac{1}{2}abD \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \quad (3.29)$$

b. Energia deformațiilor modelului echivalent.

Folosindu-se formulele (3.23) și (3.27) se poate determina energia deformațiilor modelului echivalent cu următoarea relație :

$$W = \sum (W_i + W_t)_{ij} \quad (3.30)$$

$$= (W_i + W_t)_{AB} + (W_i + W_t)_{AC} + (W_i + W_t)_{BD} + (W_i + W_t)_{CD}$$

în care :

$$(W_i)_{AB} = (W_i)_{CD} = \frac{1}{2} \rho_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2$$

$$(W_i)_{AC} = (W_i)_{BD} = \frac{1}{2} \rho_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2$$

$$(W_t)_{AB} = (W_t)_{CD} = \frac{1}{2} \delta_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$$

$$(W_t)_{AC} = (W_t)_{BD} = \frac{1}{2} \delta_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (3.31)$$

unde :

$$\rho_1 = EI_1 a$$

$$\rho_2 = EI_2 b$$

$$\delta_1 = GJ_1 a = \frac{EJ_1 a}{2(1+\nu)}$$

$$\delta_2 = GJ_2 b = \frac{EJ_2 b}{2(1+\nu)} \quad (3.32)$$

Substituindu-se (3.31) în (3.30) rezultă :

$$W = \rho_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (3.33)$$

Identificînd termenii corespunzători din cei doi membri din dreapta ai ecuațiilor (3.29) și (3.33) se obține :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2} ab D \\ \rho_2 &= \frac{1}{2} ab D \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = ab D$$

Inlocuindu-se (3.34) în (3.32) și presupunînd că $\gamma_1 = \gamma_2$ se poate determina caracteristicile geometrice ale barelor :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{Db}{2E} = \frac{bh^3}{24(1-\nu^2)} \\ I_2 &= \frac{Da}{2E} = \frac{ah^3}{24(1-\nu^2)} \\ J_1 &= \frac{Db(1+\nu)}{E} = \frac{bh^3}{12(1-\nu)} \\ J_2 &= \frac{Da(1+\nu)}{E} = \frac{ah^3}{12(1-\nu)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.3.1.2. Matricea de rigiditate a modelului echivalent.

Pe baza rezultatelor parafragului 3.3.1.1, se va analiza modelul echivalent cu ajutorul metodei deplasărilor pentru a construi matricea rigidităților modelului.

Analiza modelului echivalent se arată în fig.3.5 cu valorile caracteristicilor la încovoiere și la torsiune :

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{EI_1}{a} = \frac{Db}{2a} \\ i_2 &= \frac{EI_2}{b} = \frac{Da}{2b} \\ i_{01} &= \frac{GJ_1}{a} = \frac{EJ_1}{2(1+\nu)a} = \frac{Db}{2a} \\ i_{02} &= \frac{GJ_2}{b} = \frac{EJ_2}{2(1+\nu)b} = \frac{Da}{2b} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Rezultă matricea rigidităților modelului echivalent de ordinul 12 x 12 (vezi tabelul III-1).

3.3.1.3. Matricea de transformate a deplasărilor în eforturile barelor modelului echivalent.

Eforturile în barele modelului se determină cu ajutorul relației următoare :

$$\{T\} = [K_0][U_0]\{u\} \quad (3.38)$$

unde : $\{T\}$ - vectorul eforturilor, care cuprinde trei componente:

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

în care : $[K_0]$ - matricea cvasi-diagonală asamblată cuprinzând matricile de rigiditate ale tuturor barelor modelului echivalent. Această matrice se arată în tabelul III.2 avînd ordinul 12×12 .

$[U_0]$ - matricea de transformare a deplasărilor unitare în deformațiile capetelor barelor modelului echivalent, care este determinată pe baza analizei modelului supus deplasărilor unitare din fig.2.6. Această matrice este reprezentată în tab.III.3, avînd ordinul 12×12 .

$\{u\}$ - vectorul deplasărilor nodurilor modelului echivalent, care este determinat cu ajutorul sistemului de ecuații de condiții ale metodei deplasărilor.

În final, se determină matricea de transformare a deplasărilor în eforturile barelor modelului echivalent :

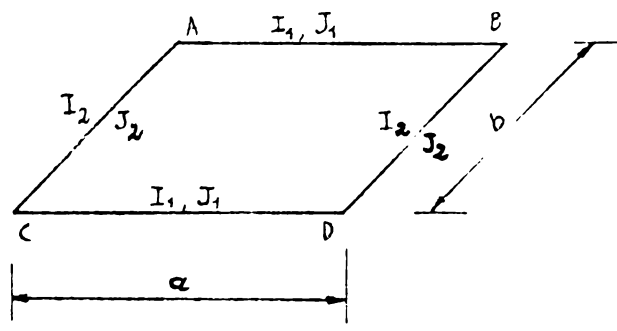
$$[BD] = [K_0][U_0] \quad (3.42)$$

Realizînd operația de înmulțire matriceală din formula (3.42) rezultă matricea de transformare de ordinul 12×12 (vezi tabelul III-4).

Pe baza matricilor de rigiditate $[K]$ de forma (3.37) și de transformare $[BD]$ de forma (3.43), se pot analiza plăcile menționate în mod automat cu ajutorul unui program pentru calculatoare electronice care se va prezenta în partea finală a acestui capitol.

3.3.2. Modelul dreptunghiular cu bare diagonale.

Modelul se prezintă în fig.3.7.



$$I_1 = \frac{bh^3}{24(1-\nu^2)} ; J_1 = \frac{bh^3}{12(1-\nu)}$$

$$I_2 = \frac{ah^3}{24(1-\nu^2)} ; J_2 = \frac{ah^3}{12(1-\nu)}$$

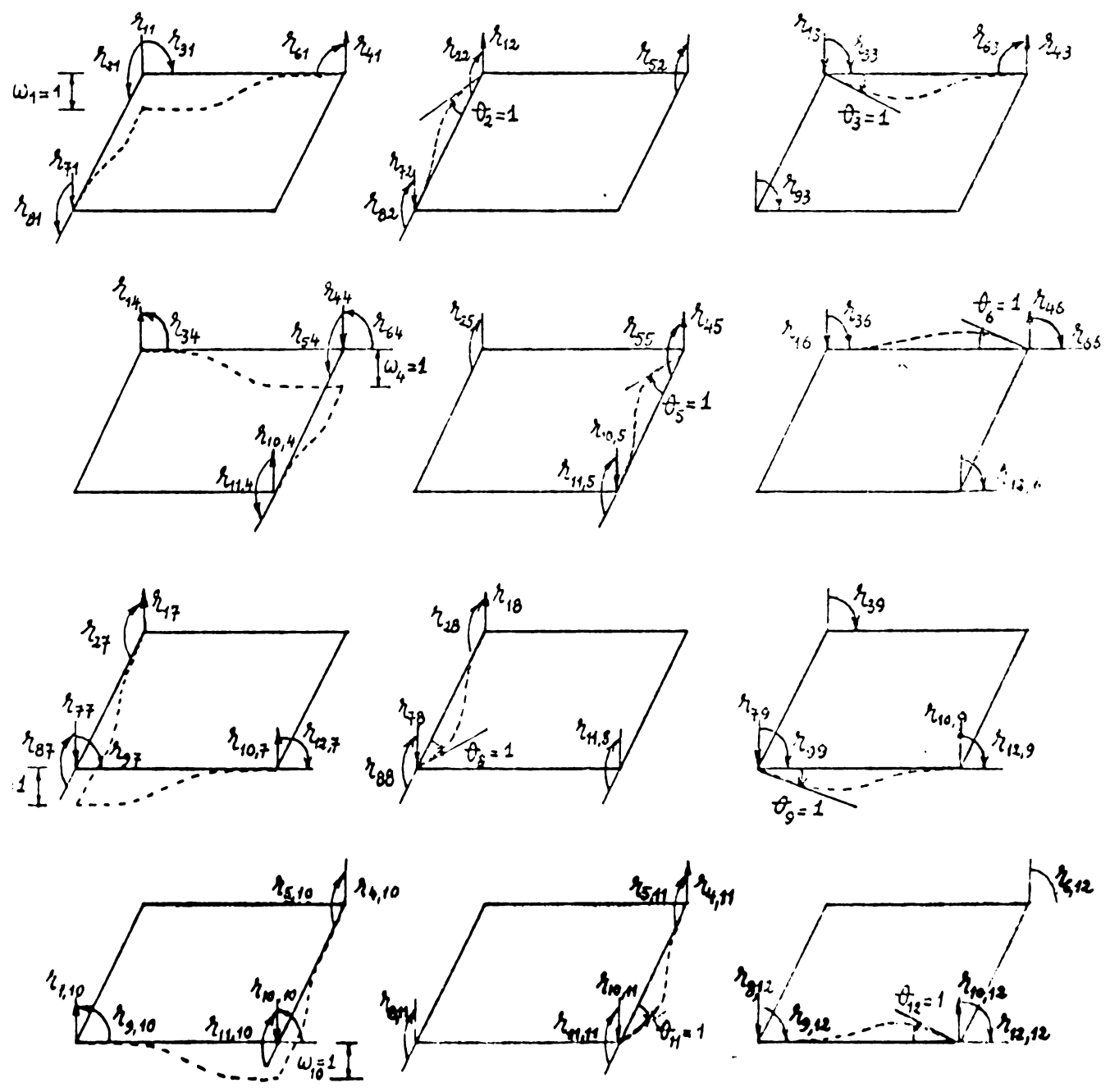


Fig. 3.5

Matricea rigidităților modelului echivalent de grinzi ortogonale

$\omega_7 = 1$	$\phi_2 = 1$	$\phi_3 = 1$	$\omega_4 = 1$	$\phi_5 = 1$	$\phi_6 = 1$	$\omega_7 = 1$	$\phi_8 = 1$	$\omega_9 = 1$	$\phi_{11} = 1$	$\phi_{12} = 1$
$\frac{12i_1}{a^2} + \frac{12i_2}{b^2}$										
$-\frac{6i_2}{b}$	$4i_2 + i_{01}$									
$\frac{6i_1}{a}$	0	$4i_1 + i_{02}$					[Simetric]			
$-\frac{12i_1}{a^2}$	0	$-\frac{6i_1}{a}$	$\frac{12i_1}{a^2} + \frac{12i_2}{b^2}$							
0	$-i_{01}$	0	$-\frac{6i_2}{b}$	$4i_2 + i_{01}$						
$\frac{6i_1}{a}$	0	$2i_1$	$-\frac{6i_1}{a}$	0	$4i_1 + i_{02}$					
$-\frac{12i_2}{b^2}$	$\frac{6i_2}{b}$	0	0	0	0	$\frac{12i_1}{a^2} + \frac{12i_2}{b^2}$				
$-\frac{6i_2}{b}$	$2i_2$	0	0	0	0	$\frac{6i_2}{b}$	$4i_2 + i_{01}$			
0	0	$-i_{02}$	0	0	0	$-\frac{6i_1}{a}$	0	$4i_1 + i_{02}$		
0	0	0	$-\frac{12i_2}{b^2}$	$-\frac{6i_2}{b}$	0	$-\frac{12i_1}{a^2}$	0	$-\frac{6i_1}{a}$	$\frac{12i_1}{a^2} + \frac{12i_2}{b^2}$	
0	0	0	$-\frac{6i_2}{b}$	$2i_2$	0	0	$-i_{01}$	0	$\frac{6i_2}{b}$	$4i_2 + i_{01}$
0	0	0	0	0	$-i_{02}$	$\frac{6i_1}{a}$	0	$2i_1$	$-\frac{6i_1}{a}$	$4i_1 + i_{02}$

(3.37)

$$i_1 = \frac{Db}{2a} \quad ; \quad i_2 = \frac{Da}{2b} \quad ; \quad i_{01} = \frac{Db}{2a} \quad ; \quad i_{02} = \frac{Da}{2b} \quad ; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

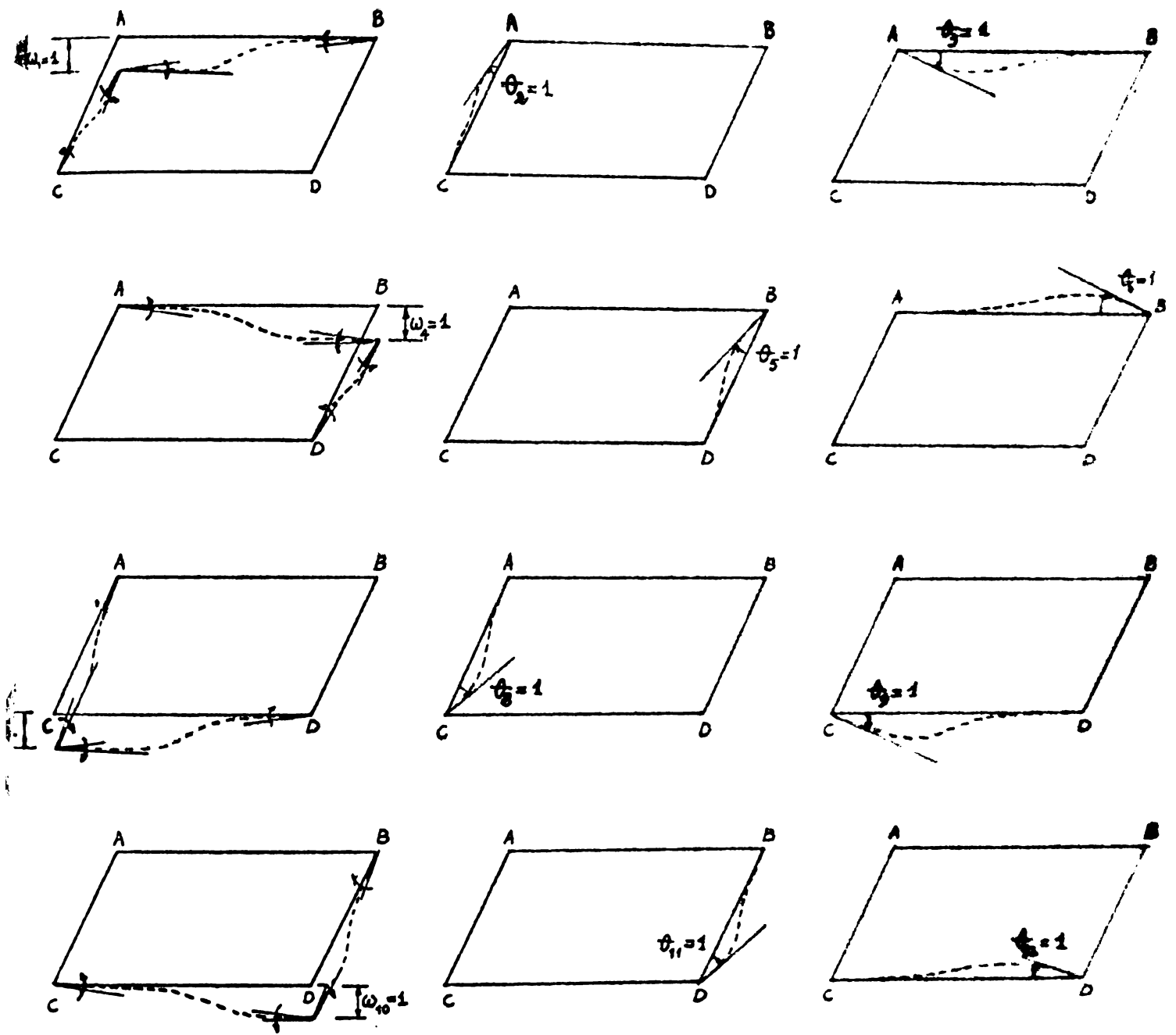


Fig. 3.6

Deformațiile capetelor barelor modelului echivalent
provocate de deplasările nodale unitare

Tab. III-2 Matricea crasi - diagonala de rigiditati K_0
(modelul grinzilor ortogonale)

Bara	Def. EI_{xx}	$\theta_i^{AB} = 1$	$\theta_i^{BA} = 1$	$\theta_i^{AB} = 1$	$\theta_i^{AC} = 1$	$\theta_i^{CA} = 1$	$\theta_i^{AC} = 1$	$\theta_i^{BD} = 1$	$\theta_i^{DB} = 1$	$\theta_i^{BD} = 1$	$\theta_i^{CD} = 1$	$\theta_i^{DC} = 1$	$\theta_i^{CD} = 1$
A - B	M_i^{AB}	$4i_1$	$2i_1$	0									
	M_i^{BA}	$2i_1$	$4i_1$	0									
	M_i^{AB}	0	0	i_{01}									
A - C	M_i^{AC}				$4i_2$	$2i_2$	0						
	M_i^{CA}				$2i_2$	$4i_2$	0						
	M_i^{AC}				0	0	i_{02}						
B - D	M_i^{BD}							$4i_2$	$2i_2$	0			
	M_i^{DB}							$2i_2$	$4i_2$	0			
	M_i^{BD}							0	0	i_{02}			
C - D	M_i^{CD}										$4i_1$	$2i_1$	0
	M_i^{DC}										$2i_1$	$4i_1$	0
	M_i^{CD}										0	0	i_{01}

(3.40)

M_i^{kl} - moment incalzator al sectiunii k a barei kl
 M_i^{kl} - moment de torsune al barei kl

Tab. III-3

Matricea de transformarea deplasărilor nodale în deformările barelor
(modelul grinzilor ortogonale)

Bare	dep. def.	$\omega_1=1$	$\vartheta_2=1$	$\vartheta_3=1$	$\omega_4=1$	$\vartheta_5=1$	$\vartheta_6=1$	$\omega_7=1$	$\vartheta_8=1$	$\vartheta_9=1$	$\omega_{10}=1$	$\vartheta_{11}=1$	$\vartheta_{12}=1$
A - B	ϑ_i^{AB}	$\frac{1}{a}$	0	1	$-\frac{1}{a}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	ϑ_i^{BA}	$\frac{1}{a}$	0	0	$-\frac{1}{a}$	0	1	0	0	0	0	0	0
	ϑ_t^{AB}	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
A - C	ϑ_i^{AC}	$-\frac{1}{b}$	1	0	0	0	0	$\frac{1}{b}$	0	0	0	0	0
	ϑ_i^{CA}	$-\frac{1}{b}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{b}$	1	0	0	0	0
	ϑ_t^{AC}	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
B - D	ϑ_i^{BD}	0	0	0	$-\frac{1}{b}$	1	0	0	0	0	$\frac{1}{b}$	0	0
	ϑ_i^{DB}	0	0	0	$-\frac{1}{b}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{b}$	1	0
	ϑ_t^{BD}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
C - D	ϑ_i^{CD}	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{a}$	0	1	$-\frac{1}{a}$	0	0
	ϑ_i^{DC}	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{a}$	0	0	$-\frac{1}{a}$	0	1
	ϑ_t^{CD}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0

(3.41)

Tab. III-4

Matricea de transformarea deplasărilor nodale în eforturile
(modelul grinzilor ortogonale)

Bare	Dep. Efor.	$\omega_1=1$	$\vartheta_2=1$	$\vartheta_3=1$	$\omega_4=1$	$\vartheta_5=1$	$\vartheta_6=1$	$\omega_7=1$	$\vartheta_8=1$	$\vartheta_9=1$	$\omega_{10}=1$	$\vartheta_{11}=1$	$\vartheta_{12}=1$
A - B	M_i^{AB}	$\frac{6i_1}{a}$	0	$4i_1$	$-\frac{6i_1}{a}$	0	$2i_1$	0	0	0	0	0	0
	M_i^{BA}	$\frac{6i_1}{a}$	0	$2i_1$	$-\frac{6i_1}{a}$	0	$4i_1$	0	0	0	0	0	0
	M_t^{AB}	0	i_{01}	0	0	i_{01}	0	0	0	0	0	0	0
A - C	M_i^{AC}	$-\frac{6i_2}{b}$	$4i_2$	0	0	0	0	$\frac{6i_2}{b}$	$2i_2$	0	0	0	0
	M_i^{CA}	$-\frac{6i_2}{b}$	$2i_2$	0	0	0	0	$\frac{6i_2}{b}$	$4i_2$	0	0	0	0
	M_t^{AC}	0	0	i_{02}	0	0	0	0	0	i_{02}	0	0	0
B - D	M_i^{BD}	0	0	0	$-\frac{6i_2}{b}$	$4i_2$	0	0	0	0	$\frac{6i_2}{b}$	$2i_2$	0
	M_i^{DB}	0	0	0	$-\frac{6i_2}{b}$	$2i_2$	0	0	0	0	$\frac{6i_2}{b}$	$4i_2$	0
	M_t^{BD}	0	0	0	0	0	i_{02}	0	0	0	0	0	i_{02}
C - D	M_i^{CD}	0	0	0	0	0	0	$\frac{6i_1}{a}$	0	$4i_1$	$-\frac{6i_1}{a}$	0	$2i_1$
	M_i^{DC}	0	0	0	0	0	0	$\frac{6i_1}{a}$	0	$2i_1$	$-\frac{6i_1}{a}$	0	$4i_1$
	M_t^{CD}	0	0	0	0	0	0	0	i_{01}	0	0	i_{01}	0

(3.43)

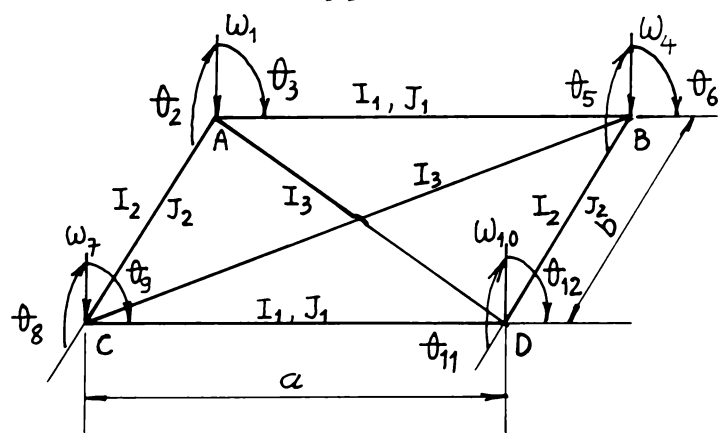


Fig. 3.7

3.3.2.1. Determinarea caracteristicilor de calcul ale modelului echivalent.

Se presupune că rigiditățile de torsiune ale barelor diagonale sînt neglijate, (adică $J_3 = 0$).

Proceedînd în mod similar cu cazul precedent, rezultă următoarele :

1. Energia deformațiilor elementului de placă ABCD (fig. 3.7) :

$$U = \frac{1}{2} ab D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \quad (3.44)$$

2. Energia deformațiilor modelului echivalent ABCD (fig. 3.7)

$$W = (W_i + W_t)_{AB} + (W_i + W_t)_{AC} + (W_i + W_t)_{BD} + (W_i + W_t)_{CD} + (W_i)_{AD} + (W_i)_{BC} \quad (3.45)$$

în care :

$$\begin{aligned} (W_i)_{AB} &= (W_i)_{CD} = \frac{1}{2} \rho_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \\ (W_i)_{AC} &= (W_i)_{BD} = \frac{1}{2} \rho_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \\ (W_i)_{AD} &= \frac{1}{2} \rho_3 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right]^2 \\ (W_i)_{BC} &= \frac{1}{2} \rho_3 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right]^2 \\ (W_t)_{AB} &= (W_t)_{CD} = \frac{1}{2} \gamma_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ (W_t)_{AC} &= (W_t)_{BD} = \frac{1}{2} \gamma_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Înlocuindu-se relațiile (3.46) în (3.45) se obține :

$$W = (\rho_1 + \rho_3 \cos^4 \alpha) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + (\rho_2 + \rho_3 \sin^4 \alpha) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + (4\rho_3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \gamma_1 + \gamma_2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2\rho_3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.47)$$

Udentificînd termenii corespunzători din cei doi membrii din partea dreaptă ai expresiilor (3.44) și (3.47) rezultă un sistem de ecuații :

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_3 \cos^4 \alpha &= \frac{1}{2} abD \\ \rho_2 + \rho_3 \sin^4 \alpha &= \frac{1}{2} abD \\ \rho_3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} \gamma abD \\ (\gamma_1 + \gamma_2) + 4\rho_3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha &= abD(1 - \nu) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Rezolvîndu-se (3.48) - se obține :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2} abD \left(1 - \nu \frac{a^2}{b^2} \right) \\ \rho_2 &= \frac{1}{2} abD \left(1 - \nu \frac{b^2}{a^2} \right) \\ \rho_3 &= \frac{1}{2} abD \nu \left(2 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \\ \gamma_1 + \gamma_2 &= abD(1 - 3\nu) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Din rezultatele (3.49) se pot determina caracteristicile geometrice ale secțiunilor barelor modelului echivalent :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{Db}{2E} \left(1 - \nu \frac{a^2}{b^2} \right) \\ I_2 &= \frac{Da}{2E} \left(1 - \nu \frac{b^2}{a^2} \right) \\ I_3 &= \frac{Dab}{2E\sqrt{a^2+b^2}} \left(2 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Iar momentele de inerție la torsiune sînt determinate presupunînd că caracteristicile de torsiune sînt invers proporționale cu lungimea barei, adică :

$$\gamma_1 = \frac{b}{a+b} abD(1 - 3\nu) \quad (3.51)$$

$$\gamma_2 = \frac{a}{a+b} abD(1 - 3\nu)$$

De aceea, rezultă :

$$J_1 = \frac{2Db^2}{E(a+b)} (1+\nu)(1-3\nu) \quad (3.52)$$

$$J_2 = \frac{2Da^2}{E(a+b)} (1+\nu)(1-3\nu)$$

3.3.2.2. Matricea rigidităților modelului echivalent.

Analiza modelului echivalent se reprezintă în fig.3.8 cu următoarele caracteristici la încovoiere și la torsiune :

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{EI_1}{a} = \frac{Db}{2a} \left(1 - \nu \frac{a^2}{b^2}\right) \\ i_2 &= \frac{EI_2}{b} = \frac{Da}{2b} \left(1 - \nu \frac{b^2}{a^2}\right) \\ i_3 &= \frac{EI_3}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{Dab}{2(a^2+b^2)} \nu \left(2 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \\ i_{01} &= \frac{GJ_1}{a} = \frac{Db^2}{a(a+b)} (1-3\nu) \\ i_{02} &= \frac{GJ_2}{b} = \frac{Da^2}{b(a+b)} (1-3\nu) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Rezultă matricea rigidităților modelului echivalent K de ordinul 12×12 (vezi tabelul III-5).

3.3.2.3. Matricea de transformare a deplasărilor în eforturile barelor modelului echivalent.

Se folosește relația (3.42) pentru a determina matricea de transformare $[BD]$, în care matricea $[K_0]$ are forma dată în tabelul III-6 cu ordinul 12×12 iar matricea $[U_0]$ are forma dată în tabelul III-7 cu ordinul 12×12 , care este determinată prin analiza modelului echivalent supus deplasărilor unitare din fig.3.9.

În final, efectuând înmulțirea celor două matrice sus menționate după relația (3.42) rezultă matricea de transformare a deplasărilor în eforturile barelor modelului echivalent cu ordinul 12×12 (vezi tabelul III-8).

Programul de calcul pentru calculatoare electronice va fi prezentat în ultima parte a acestui capitol.

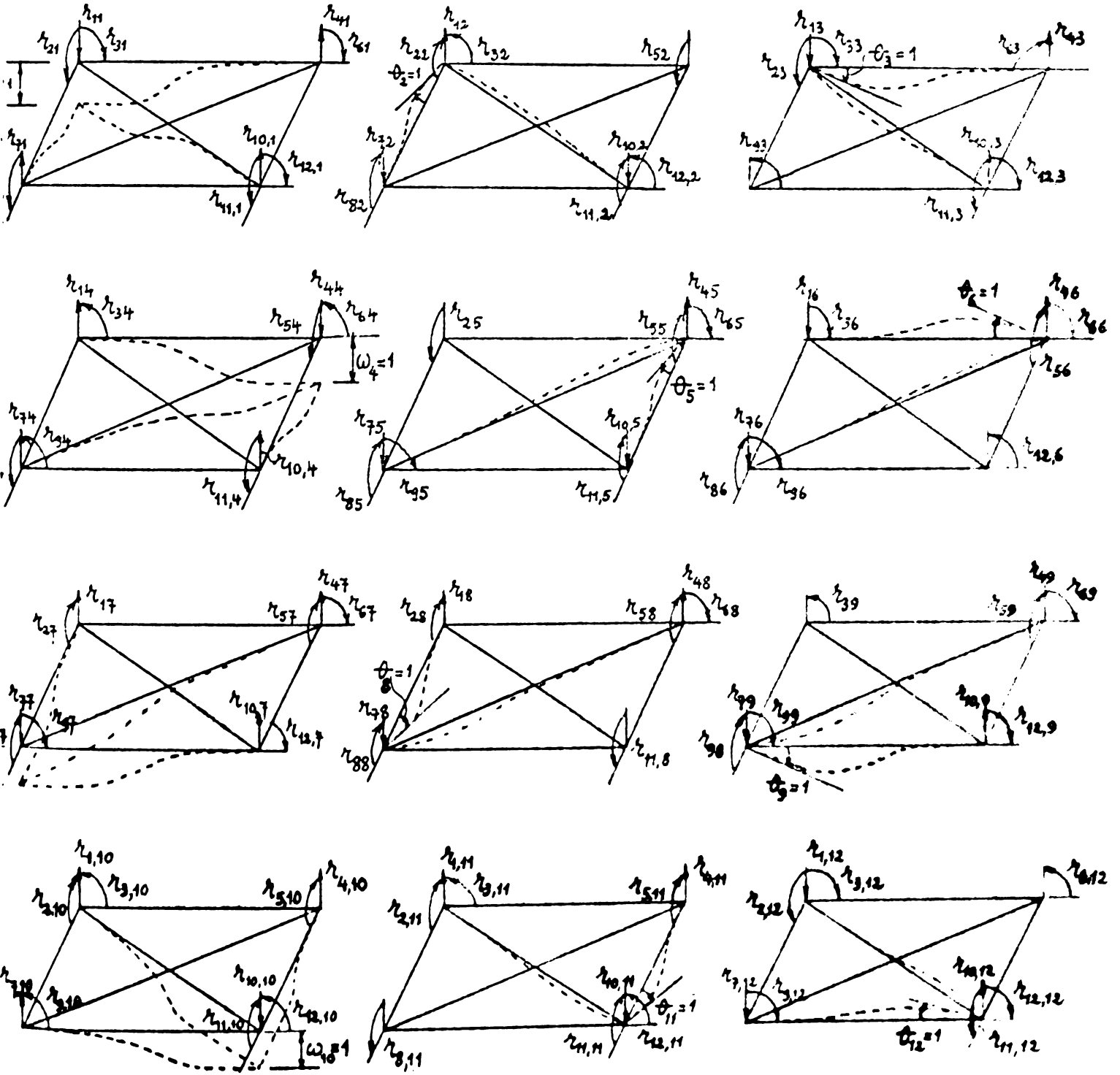
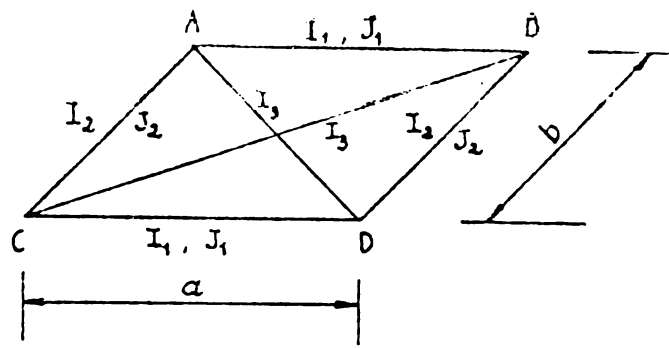


Fig. 3.8

Tab. III-5 Matricea de rigidități ale modelului dreptunghiular cu baze diagonale

$\omega_1 = 1$	$\theta_2 = 1$	$\theta_3 = 1$	$\omega_4 = 1$	$\theta_5 = 1$	$\theta_6 = 1$	$\omega_7 = 1$	$\theta_8 = 1$	$\theta_9 = 1$	$\omega_{10} = 1$	$\theta_{11} = 1$	$\theta_{12} = 1$
$\frac{12i_1 + 12i_2 + 12i_3}{a^2 b^2 d^2}$											
$-\frac{6i_3}{b} - \frac{6i_3 \cdot s}{d}$	$4i_2 + 4i_3 \cdot s^2 + i_{01}$										
$\frac{6i_4}{a} + \frac{6i_3 \cdot s}{d}$	$-4i_3 \cdot s \cdot c$	$4i_1 + 4i_3 \cdot c^2 + i_{02}$					[simetric]				
$-\frac{12i_4}{a^2}$	0	$-\frac{6i_1}{a}$	$\frac{12i_4 + 12i_5 + 12i_3}{a^2 b^2 d^2} + \frac{12i_3}{d^2}$								
0	$-i_{01}$	0	$-\frac{6i_2}{b} - \frac{6i_3 \cdot s}{d}$	$4i_2 + 4i_3 \cdot s^2 + i_{01}$							
$-\frac{6i_1}{a}$	0	$2i_1$	$-\frac{6i_1}{a} - \frac{6i_3 \cdot c}{d}$	$4i_3 \cdot s \cdot c$	$4i_1 + 4i_3 \cdot c^2 + i_{02}$						
$-\frac{12i_3}{b^2}$	$\frac{6i_2}{b}$	0	$-\frac{12i_3}{d^2}$	$\frac{6i_3}{d} \cdot s$	$\frac{6i_3}{d} \cdot c$	$\frac{12i_4 + 12i_5 + 12i_3}{a^2 b^2 d^2} + \frac{12i_3}{d^2}$					
$-\frac{6i_2}{b}$	$2i_2$	0	$-\frac{6i_3 \cdot s}{d}$	$2i_3 \cdot s^2$	$2i_3 \cdot s \cdot c$	$\frac{6i_2}{b} + \frac{6i_3 \cdot s}{d}$	$4i_2 + 4i_3 \cdot s^2 + i_{01}$				
0	0	$-i_{02}$	$-\frac{6i_3 \cdot c}{d}$	$2i_3 \cdot s \cdot c$	$2i_3 \cdot c^2$	$\frac{6i_3}{a} + \frac{6i_3 \cdot c}{d}$	$4i_3 \cdot s \cdot c$	$4i_1 + 4i_3 \cdot c^2 + i_{02}$			
$-\frac{12i_1}{d^2}$	$\frac{6i_3}{d} \cdot s$	$-\frac{6i_3 \cdot c}{d}$	$-\frac{12i_2}{b^2}$	$\frac{6i_3}{b}$	0	$-\frac{12i_4}{a^2 b^2 d^2}$	0	$-\frac{6i_1}{a}$	$\frac{12i_4 + 12i_5 + 12i_3}{a^2 b^2 d^2} + \frac{12i_3}{d^2}$		
$-\frac{6i_1}{d} \cdot s$	$2i_3 \cdot s^2$	$-2i_3 \cdot c \cdot s$	$-\frac{6i_2}{b}$	$2i_2$	0	0	$-i_{01}$	0	$\frac{6i_2}{b} + \frac{6i_3 \cdot s}{d}$	$4i_2 + 4i_3 \cdot s^2 + i_{01}$	
$-\frac{6i_3 \cdot c}{d}$	$-2i_3 \cdot s \cdot c$	$2i_3 \cdot c^2$	0	0	$-i_{02}$	$\frac{6i_3}{a}$	0	$2i_1$	$-\frac{6i_3}{a} - \frac{6i_3 \cdot c}{d}$	$-4i_3 \cdot c^2$	$4i_1 + 4i_3 \cdot c^2 + i_{02}$

(3.54)

$C = \cos \alpha$ $s = \sin \alpha$ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

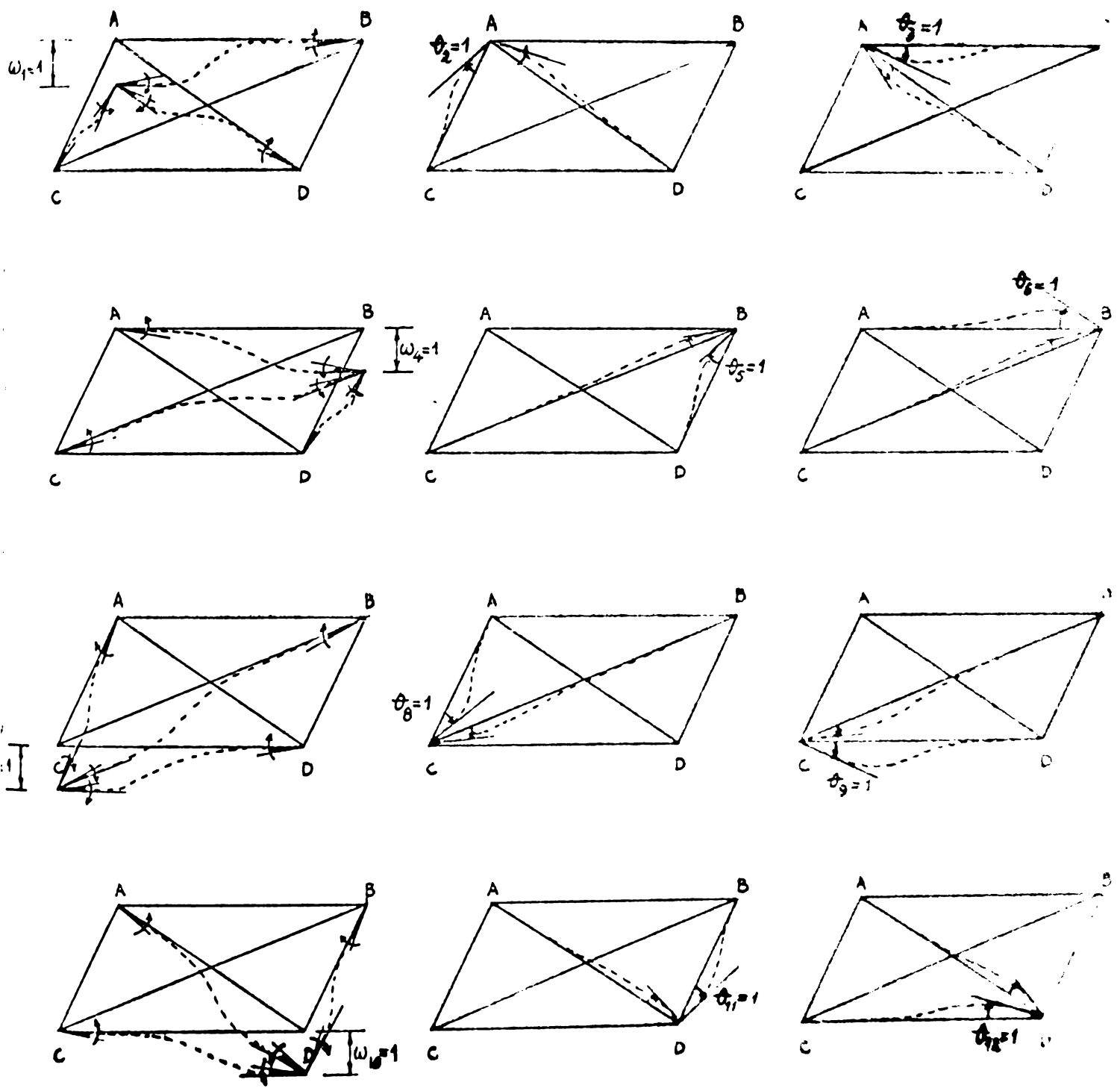


Fig. 3.9

Deformațiile capetelor barelor modelului echivalent
provocate de deplasările nodale unitare

Tab. III-6

Matricea de transformarea deplasărilor nodale în deformări
modelul echivalent dreptunghiular cu bare diagonale

Bare	Dep. Def.	$\omega_1=1$	$\theta_2=1$	$\theta_3=1$	$\omega_4=1$	$\theta_5=1$	$\theta_6=1$	$\omega_7=1$	$\theta_8=1$	$\theta_9=1$	$\omega_{10}=1$	$\theta_{11}=1$	$\theta_{12}=1$
		A - B	θ_i^{AB}	$\frac{1}{a}$	0	1	$-\frac{1}{a}$	0	0	0	0	0	0
θ_i^{BA}	$\frac{1}{a}$		0	0	$-\frac{1}{a}$	0	1	0	0	0	0	0	0
θ_t^{AB}	0		1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
A - C	θ_i^{AC}	$-\frac{1}{b}$	1	0	0	0	0	$\frac{1}{b}$	0	0	0	0	0
	θ_i^{CA}	$-\frac{1}{b}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{b}$	1	0	0	0	0
	θ_t^{AC}	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
B - D	θ_i^{BD}	0	0	0	$-\frac{1}{b}$	1	0	0	0	0	$\frac{1}{b}$	0	0
	θ_i^{DB}	0	0	0	$-\frac{1}{b}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{b}$	1	0
	θ_t^{BD}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
C - D	θ_i^{CD}	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{a}$	0	1	$-\frac{1}{a}$	0	0
	θ_i^{DC}	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{a}$	0	0	$-\frac{1}{a}$	0	1
	θ_t^{CD}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0

(3.55)

Tab. III-7 Matricea cvasi-diagonală de rigidități K_0
modelul dreptunghiular cu bare diagonale

Bare	Def. Efor.	$\theta_i^{AB}=1$	$\theta_i^{BA}=1$	$\theta_t^{AB}=1$	$\theta_i^{AC}=1$	$\theta_i^{CA}=1$	$\theta_t^{AC}=1$	$\theta_i^{BD}=1$	$\theta_i^{DB}=1$	$\theta_t^{BD}=1$	$\theta_i^{CD}=1$	$\theta_i^{DC}=1$	$\theta_t^{CD}=1$
		A - B	M_i^{AB}	$4i_1+4i_3^2$	$2i_1$	0							
M_i^{BA}	$2i_1$		$4i_1+4i_3^2$	0									
M_t^{AB}	0		0	i_{01}									
A - C	M_i^{AC}				$4i_2+4i_3^2$	$2i_2$	0						
	M_i^{CA}				$2i_2$	$4i_2+4i_3^2$	0						
	M_t^{AC}				0	0	i_{02}						
B - D	M_i^{BD}							$4i_2+4i_3^2$	$2i_2$	0			
	M_i^{DB}							$2i_2$	$4i_2+4i_3^2$	0			
	M_t^{BD}							0	0	i_{02}			
C - D	M_i^{CD}										$4i_1+4i_3^2$	$2i_1$	0
	M_i^{DC}										$2i_1$	$4i_1+4i_3^2$	0
	M_t^{CD}										0	0	i_{01}

(3.56)

exerciții de transformarea spașianilor 710016 în eforturi
(modelul echivalent dreptunghiular cu bare diagonale)

Barele	$\theta_1 = 1$	$\theta_2 = 1$	$\theta_3 = 1$	$\omega_4 = 1$	$\theta_5 = 1$	$\theta_6 = 1$	$\omega_7 = 1$	$\theta_8 = 1$	$\theta_9 = 1$	$\omega_{10} = 1$	$\theta_{11} = 1$	$\theta_{12} = 1$
M_L^{AB}	0	0	$4i_1 + 4i_3 C^2$	$-\frac{6i_1 + 4i_3 C^2}{a}$	0	$2i_1$	0	0	0	0	0	0
M_L^{BA}	0	0	$2i_1$	$-\frac{6i_1 + 4i_3 C^2}{a}$	0	$4i_1 + 4i_3 C^2$	0	0	0	0	0	0
M_L^{AB}	i_{01}	i_{01}	0	0	i_{01}	0	0	0	0	0	0	0
M_L^{AC}	$4i_2 + 4i_3 S^2$	$4i_2 + 4i_3 S^2$	0	0	0	0	$\frac{6i_2 + 4i_3 S^2}{b}$	$2i_2$	0	0	0	0
M_L^{CA}	$2i_2$	$2i_2$	0	0	0	0	$\frac{6i_2 + 4i_3 S^2}{b}$	$4i_2 + 4i_3 S^2$	0	0	0	0
M_L^{AC}	0	0	i_{02}	0	0	0	0	0	i_{02}	0	0	0
M_L^{BD}	0	0	0	$-\frac{6i_2 + 4i_3 S^2}{b}$	$4i_2 + 4i_3 S^2$	0	0	0	0	$\frac{6i_2 + 4i_3 S^2}{b}$	$2i_2$	0
M_L^{DB}	0	0	0	$-\frac{6i_2 + 4i_3 S^2}{b}$	$2i_2$	0	0	0	0	$\frac{6i_2 + 4i_3 S^2}{b}$	$4i_2 + 4i_3 S^2$	0
M_L^{BD}	0	0	0	0	0	i_{02}	0	0	0	0	0	i_{02}
M_L^{CD}	0	0	0	0	0	0	$\frac{6i_1 + 4i_3 C^2}{a}$	0	$4i_1 + 4i_3 C^2$	$-\frac{6i_1 + 4i_3 C^2}{a}$	0	$4i_1 + 4i_3 C^2$
M_L^{DC}	0	0	0	0	0	0	$\frac{6i_1 + 4i_3 C^2}{a}$	0	$2i_1$	$-\frac{6i_1 + 4i_3 C^2}{a}$	0	$2i_1$
M_L^{CD}	0	0	0	0	0	0	0	i_{01}	0	0	i_{01}	0

(3.57)

$$i_1 = \frac{Db}{2a} (1 - \nu \frac{a^2}{b^2})$$

$$i_2 = \frac{Da}{2b} (1 - \nu \frac{b^2}{a^2})$$

$$i_3 = \frac{Dab\nu}{2(a^2 + b^2)} (2 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2})$$

$$i_{01} = \frac{Db^2}{a(a+b)} (1 - 3\nu)$$

$$i_{02} = \frac{Da^2}{b(a+b)} (1 - 3\nu)$$

$C = \cos \alpha$
 $S = \sin \alpha$
 ν coeficientul lui Poisson

3.3.3. Modelul echivalent patrat cu bare diagonale propus de Hrennikoff A.

Modelul echivalent se prezintă în fig.3.10.

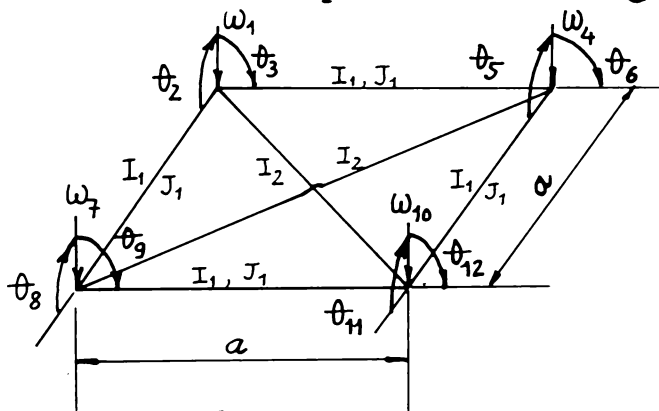


Fig. 3.10

Autorul a presupus următoarele ipoteze :

1. Se neglijează rigiditățile la torsiune în toate barele.
2. Coeficientul lui Poisson are valoarea 1/3.
3. Caracteristicile secțiunilor au valorile următoare :

$$I_1 = \frac{ah^3}{24(1+\nu)} \quad (3.58)$$

$$I_2 = \frac{ah^3}{12\sqrt{2}(1+\nu)}$$

3.3.3.1. Matricea rigidităților modelului echivalent.

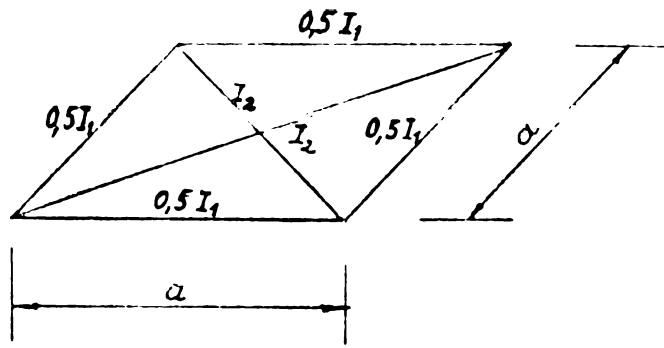
Pe baza acestor caracteristici (3.58), se realizează în mod similar cu cele două cazuri precedente analizând modelul cu ajutorul metodei deplasărilor (vezi fig.3.11), rezultă matricea rigidităților modelului $[K]$ de ordinul 12×12 (vezi tabelul III-9).

În matricea $[K]$ se notează :

$$i_1 = \frac{EI_1}{a} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \quad (3.60)$$

$$i_2 = \frac{EI_2}{a\sqrt{2}} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}$$

în care : h - grosimea plăcii studiate;
 E - modulul de elasticitate;
 ν - coeficientul lui Poisson presupus egal cu 1/3.



$$I_1 = \frac{ah^3}{12(1+\nu)}$$

$$I_2 = \frac{ah^3}{12\sqrt{2}(1+\nu)}$$

$$\nu = 1/3$$

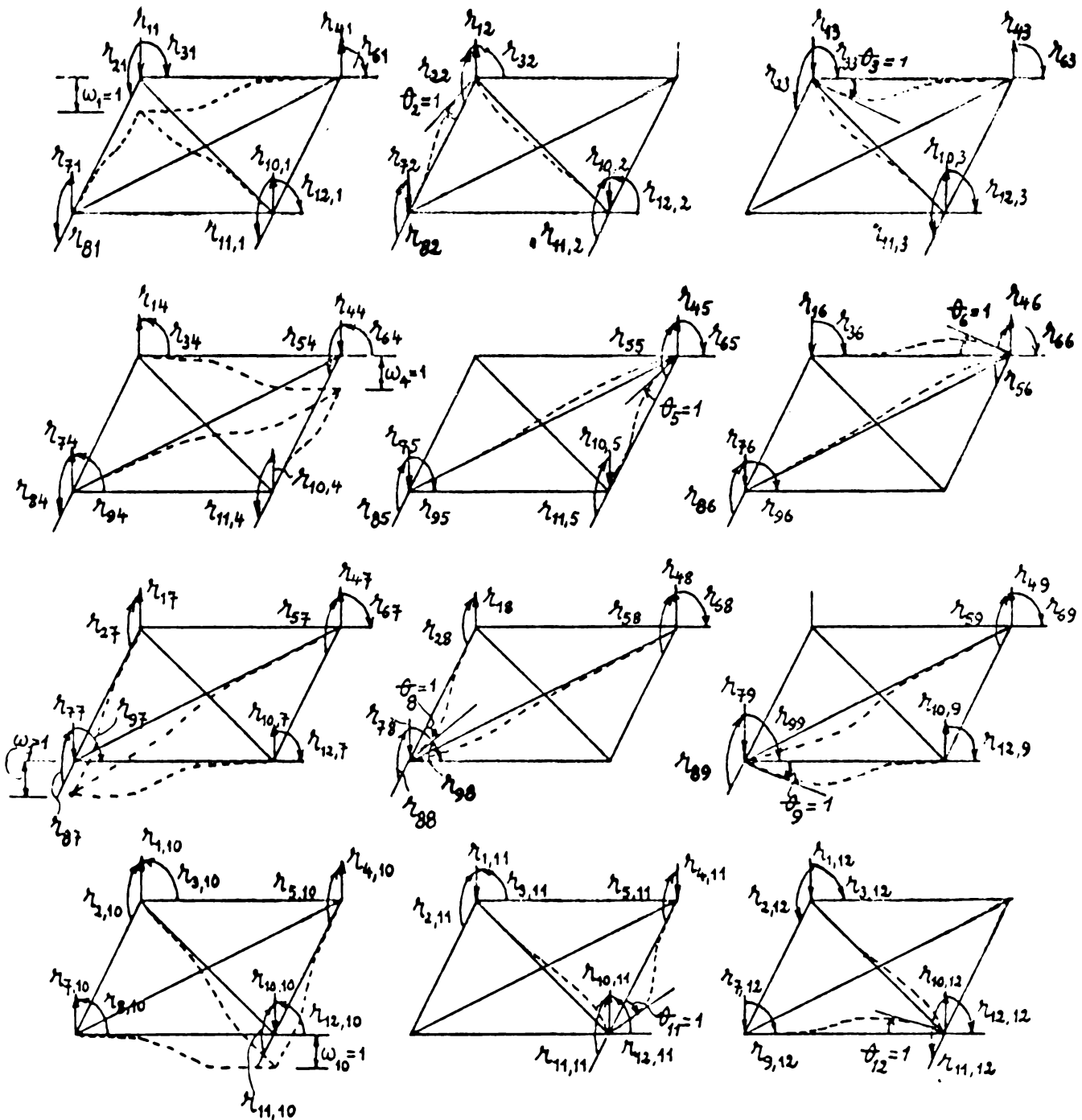


Fig. 3.11

Tab. III-9

Matricea de rigidități als modelului patrat cu bare diagonale
(modelul lui Hrennikoff)

$\omega_1 = 1$	$\theta_2 = 1$	$\theta_3 = 1$	$\omega_4 = 1$	$\theta_5 = 1$	$\theta_6 = 1$	$\omega_7 = 1$	$\theta_8 = 1$	$\theta_9 = 1$	$\omega_{10} = 1$	$\theta_{11} = 1$	$\theta_{12} = 1$
$\frac{6}{a^2}(4i_1 + i_2)$											
$-\frac{6i_1 + 3i_2}{a}$	$4i_1 + 2i_2$										
$\frac{6i_1 + 3i_2}{a}$	$-2i_2$	$4i_1 + 2i_2$					[simetric]				
$-\frac{12i_1}{a^2}$	0	$-\frac{6i_1}{a}$	$\frac{6}{a^2}(4i_1 + i_2)$								
0	0	0	$-\frac{6i_1 + 3i_2}{a}$	$4i_1 + 2i_2$							
$\frac{6i_1}{a}$	0	$2i_1$	$-\frac{6i_1 + 3i_2}{a}$	$2i_2$	$4i_1 + 2i_2$						
$-\frac{12i_1}{a^2}$	$\frac{6i_1}{a}$	0	$-\frac{6i_2}{a^2}$	$\frac{3i_2}{a}$	$\frac{3i_2}{a}$	$\frac{6}{a^2}(4i_1 + i_2)$					
$-\frac{6i_1}{a}$	$2i_1$	0	$-\frac{3i_2}{a}$	i_2	i_2	$\frac{6i_2 + 3i_2}{a}$	$4i_1 + 2i_2$				
0	0	0	$-\frac{3i_2}{a}$	i_2	i_2	$\frac{6i_1 + 3i_2}{a}$	$2i_2$	$4i_1 + 2i_2$			
$-\frac{6i_2}{a^2}$	$\frac{3i_2}{a}$	$\frac{3i_2}{a}$	$-\frac{12i_1}{a^2}$	$\frac{6i_1}{a}$	0	$-\frac{12i_1}{a^2}$	0	$-\frac{6i_1}{a}$	$\frac{6}{a^2}(4i_1 + i_2)$		
$-\frac{3i_2}{a}$	i_2	$-i_2$	$-\frac{6i_1}{a}$	$2i_1$	0	0	0	0	$\frac{6i_1 + 3i_2}{a}$	$4i_1 + 2i_2$	
$\frac{3i_2}{a}$	$-i_2$	i_2	0	0	0	$\frac{6i_1}{a}$	0	$2i_1$	$-\frac{6i_1 + 3i_2}{a}$	$-2i_2$	$4i_1 + 2i_2$

(3.59)

3.3.3.2. Determinarea matricei de transformare a deplasărilor în eforturile barelor modelului echivalent.

Matricea de transformare BD pentru modelul patrat cu bare diagonale poate fi determinată direct din matricea BD a modelului dreptunghiular cu bare diagonale pe care le-am studiat în paragraful 3.3.2, prin introducerea următoarelor condiții :

1. lungimile barelor sînt aceleași și egale cu a ;
2. rigiditățile la torsiune ale tuturor barelor sînt neglijate ($i_{o1} = i_{o2} = 0$).

Cu aceste condiții, se obține matricea de transformare BD pentru acest caz.

Programul de calcul pentru calculatoare electronice va fi prezentat în ultima parte a acestui capitol.

Este de remarcat că modelul lui Hrennikoff este cazul particular al aplicării teoriei echivalențelor în problema încovoierii pure a plăcilor plane cu condițiile introduse mai sus.

3.4. Analiza plăcilor plane elastice ortotrope cu ajutorul teoriei echivalențelor.

Se utilizează două modele echivalente ortotrope :

1. modelul echivalent dreptunghiular;
2. modelul echivalent dreptunghiular cu bare diagonale.
3. 3.1. Modelul dreptunghiular ortotrop.

Modelul este prezentat în fig.3.12.

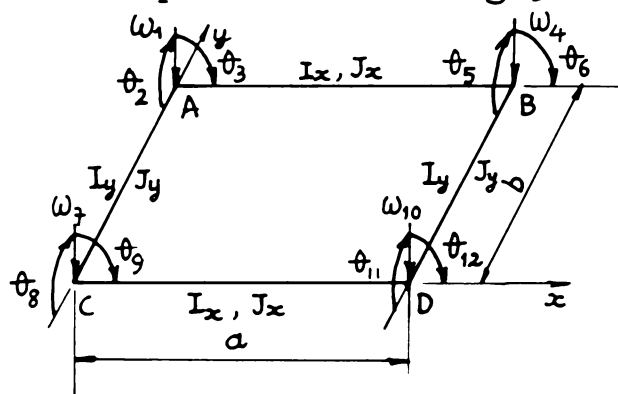


Fig. 3.12

3.4.1.1. Energia deformațiilor elementului plăcii ABCD (fig.3.12).

Neglijînd eforturile de membrană, expresia energiei de deformație a elementului plăcii ABCD este scrisă :

Tab. III-10

Matricea de transformarea deplasărilor nodale în eforturile barelor.

(modelul lui Hrennikoff)

Baza	Dep. ϵ_{ij}	$\omega_1 = 1$	$\theta_2 = 1$	$\theta_3 = 1$	$\omega_4 = 1$	$\theta_5 = 1$	$\theta_6 = 1$	$\omega_7 = 1$	$\theta_8 = 1$	$\theta_9 = 1$	$\omega_{10} = 1$	$\theta_{11} = 1$	$\theta_{12} = 1$
Q - <	M_i^{AB}	$\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	0	$4i_1 + 2i_2$	$-\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	0	$2i_1$	0	0	0	0	0	0
	M_i^{BA}	$\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	0	$2i_1$	$-\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	0	$4i_1 + 2i_2$	0	0	0	0	0	0
	M_i^{AB}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Q - <	M_i^{AC}	$-\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	$4i_1 + 2i_2$	0	0	0	0	$\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	$2i_1$	0	0	0	0
	M_i^{CA}	$-\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	$2i_1$	0	0	0	0	$\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	$4i_1 + 2i_2$	0	0	0	0
	M_i^{AC}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Q - >	M_i^{BD}	0	0	0	$-\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	$4i_1 + 2i_2$	0	0	0	0	$\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	$2i_1$	0
	M_i^{DB}	0	0	0	$-\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	$2i_1$	0	0	0	0	$\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	$4i_1 + 2i_2$	0
	M_i^{BD}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Q - >	M_i^{CD}	0	0	0	0	0	0	$\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	0	$4i_1 + 2i_2$	$-\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	0	$2i_1$
	M_i^{DC}	0	0	0	0	0	0	$\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	0	$2i_1$	$-\frac{6i_1 + 2i_2}{a}$	0	$4i_1 + 2i_2$
	M_i^{CD}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(3.60)

$$i_1 = i_2 = -\frac{D}{2}(1-\nu) \quad D = \frac{EK^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$U = \frac{1}{2}ab \left\{ D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \quad (3.61)$$

în care : D_x, D_y - sînt caracteristicile de rigiditate la încovoiere după direcțiile x și y iar D_{xy} la torsiune.

3.4.1.2. Energiile deformațiilor barelor modelului echivalent.

Folosindu-se formulele (3.23) și (3.27) se poate determina energia deformațiilor modelului echivalent cu următoarea relație :

$$W = \sum (W_i + W_t) \quad (3.62)$$

$$= (W_i + W_t)_{AB} + (W_i + W_t)_{AC} + (W_i + W_t)_{BD} + (W_i + W_t)_{CD}$$

în care :

$$\begin{aligned} (W_i)_{AB} &= (W_i)_{CD} = \frac{1}{2} \rho_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \\ (W_i)_{AC} &= (W_i)_{BD} = \frac{1}{2} \rho_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \\ (W_t)_{AB} &= (W_t)_{CD} = \frac{1}{2} \gamma_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ (W_t)_{AC} &= (W_t)_{BD} = \frac{1}{2} \gamma_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Substituind relațiile (3.63) în (3.62) rezultă expresia energiei deformațiilor modelului echivalent ortotrop :

$$W = \rho_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \rho_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + (\gamma_x + \gamma_y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (3.64)$$

în care : ρ_x, ρ_y sînt caracteristicile de rigiditate la încovoiere ale barelor paralele cu axa x și respectiv y .
 γ_x, γ_y sînt caracteristicile de rigiditate la torsiune ale barelor paralele cu axa x și respectiv y .

3.4.1.3. Determinarea caracteristicilor de rigiditate ale barelor modelului echivalent ortotrop.

Identificînd termenii corespunzători din cei doi membri din dreapta ai ecuațiilor (3.61) și (3.64) rezultă expresiile caracteristice de rigiditate :

$$\rho_x = \frac{1}{2} ab D_x$$

$$\rho_y = \frac{1}{2} ab D_y \quad (3.65)$$

$$\delta_x + \delta_y = 2ab D_{xy}$$

Se presupune că caracteristicile la torsiune sînt invers proporționale cu lungimile barelor, adică :

$$\delta_x = \frac{b}{a+b} 2ab D_{xy}$$

$$\delta_y = \frac{a}{a+b} 2ab D_{xy} \quad (3.66)$$

sau se presupune că :

$$\delta_x = \delta_y = ab D_{xy} \quad (3.67)$$

Pe baza rezultatelor date în (3.65) și (3.67) se pot deduce caracteristicile geometrice ale secțiunilor barelor modelului echivalent :

$$\rho_x = E_x I_x a = \frac{1}{2} ab D_x$$

$$\rho_y = E_y I_y b = \frac{1}{2} ab D_y$$

$$\delta_x = G J_x a = ab D_{xy}$$

$$\delta_y = G J_y b = ab D_{xy}$$

(3.68)

Din (3.68) rezultă :

$$I_x = \frac{D_x}{2E_x} b$$

$$I_y = \frac{D_y}{2E_y} a$$

$$J_x = \frac{D_{xy}}{G} b$$

$$J_y = \frac{D_{xy}}{G} a$$

(3.69)

3.4.1.4. Matricea de rigiditate a modelului echivalent ortotrop.

Matricea de rigiditate $[K]$ poate fi determinată direct din matricea de rigiditate a modelului echivalent dreptunghiular izotrop (3.37), înlocuind caracteristicile i_1, i_2, i_{10}, i_{20} cu i_x, i_y, i_{ox}, i_{oy} respective.

Caracteristicile de rigiditate ale barelor modelului ortotrop sînt determinate cu expresiile următoare :

$$\begin{aligned}i_x &= \frac{E_x I_x}{a} = \frac{1}{2} D_x \frac{b}{a} \\i_y &= \frac{E_y I_y}{b} = \frac{1}{2} D_y \frac{a}{b} \\i_{ox} &= \frac{GJ_x}{a} = D_{xy} \frac{b}{a} \\i_{oy} &= \frac{GJ_y}{b} = D_{xy} \frac{a}{b}\end{aligned}\tag{3.70}$$

3.4.1.5. Matricea de transformare a deplasărilor în eforturile barelor modelului echivalent ortotrop.

Matricea de transformare [BD] poate fi determinată în mod direct din matricea de transformare a modelului dreptunghiular izotrop (3.43) înlocuind în mod similar cu cazul matricei de rigiditate menționat mai sus.

3.4.1.6. Etape de lucru.

Analiza plăcii ortotrope cu teoria echivalențelor utilizînd modelul dreptunghiular ortotrop se poate realiza după următoarele etape de lucru :

1. Determinarea rigidităților D_x , D_y , D_{xy} pentru elementul plăcii studiate, după caz.
2. Determinarea rigidităților barelor modelului echivalent i_x , i_y , i_{ox} , i_{oy} , după formula (3.70).
3. Introducerea acestor caracteristici (3.70) la matricele de rigiditate (3.37) și de transformare (3.43) ale modelului echivalent izotrop.
4. Restul procedurii rămîne același ca și în cazul plăcilor izotrope.

Programul de calcul pentru calculatoarele electronice este același ca și în cazul plăcii izotrope.

Este de remarcat faptul că modelul echivalent izotrop este un caz particular al modelului echivalent ortotrop cu următoarele substituiri :

$$D_x = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$D_y = D \tag{3.71}$$

$$D_{xy} = \frac{D}{2}(1-\nu)$$

Substituind (3.71) în (3.70) se obțin din nou relațiile (3.36) ale modelului izotrop.

3.4.2. Modelul dreptunghiular ortotrop cu bare diagonale.

Modelul echivalent este prezentat în fig.3.13.

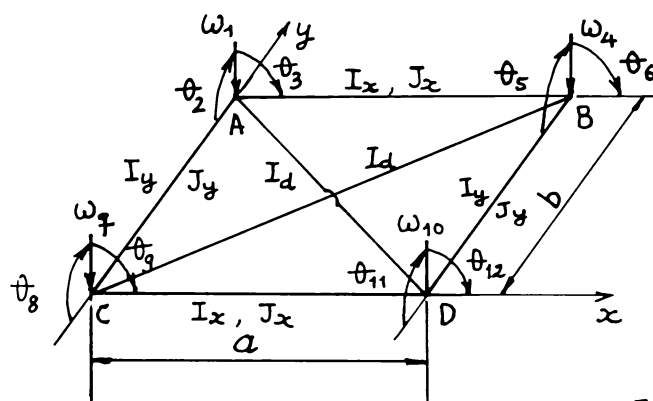


Fig. 3.13

3.4.2.1. Energia deformațiilor elementului plăcii ABCD.

$$U = \frac{1}{2}ab \left\{ D_x \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) + D_y \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + 2D_v \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 4D_{xy} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \tag{3.72}$$

- în care :
- D_x, D_y - sînt rigiditățile la încovoiere după direcțiile x și respectiv y ;
 - D - este rigiditatea la încovoiere datorită deformațiilor în planul orizontal;
 - D_{xy} - este rigiditatea la torsiune.

3.4.2.2. Energiile deformațiilor barelor modelului echivalent.

Neglijînd rigiditățile la torsiune ale barelor diagonale și folosind formulele (3.23) și (3.27) se pot determina energiile deformațiilor modulului echivalent cu următoarele relații :

$$W = (W_i + W_t)_{AB} + (W_i + W_t)_{AC} + (W_i + W_t)_{BD} + (W_i + W_t)_{CD} + (W_i)_{AD} + (W_i)_{BC} \tag{3.73}$$

în care :

$$\begin{aligned}
 (W_i)_{AB} &= (W_i)_{CD} = \frac{1}{2} \rho_x \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 \\
 (W_i)_{AC} &= (W_i)_{BD} = \frac{1}{2} \rho_y \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 \\
 (W_i)_{AD} &= \frac{1}{2} \rho_d \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cos^2 \alpha - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right]^2 \\
 (W_i)_{BC} &= \frac{1}{2} \rho_d \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right]^2 \\
 W_t^{AB} &= W_t^{CD} = \frac{1}{2} \gamma_x \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \\
 W_t^{AC} &= W_t^{BD} = \frac{1}{2} \gamma_y \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Substituind relațiile (3.74) în (3.73) rezultă expresia energiei deformațiilor modelului echivalent ortotrop :

$$\begin{aligned}
 W &= (\rho_x + \rho_d \cos^4 \alpha) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + (\rho_y + \rho_d \sin^4 \alpha) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \rho_d \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\
 &+ (4 \rho_d \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \gamma_x + \gamma_y) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

în care : ρ_x, ρ_y - sînt caracteristicile de rigiditate la încovoiere ale barelor paralele cu axa x și respectiv y;
 ρ_d - este caracteristica de rigiditate la încovoiere a barei diagonale;
 γ_x, γ_y - sînt caracteristicile de rigiditate la torsiune ale barelor paralele cu axa x și respectiv y.

3.4.2.3. Determinarea caracteristicilor de rigiditate ale barelor modelului echivalent ortotrop.

Identificînd termenii corespunzători din cei doi membrii din dreapta ecuațiilor (3.72) și (3.75) rezultă sistemul de ecuații :

$$\begin{aligned}
 \rho_x + \rho_d \cos^4 \alpha &= \frac{1}{2} ab D_x \\
 \rho_y + \rho_d \sin^4 \alpha &= \frac{1}{2} ab D_y \\
 \rho_d \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} ab D_y \\
 4 \rho_d \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \gamma_x + \gamma_y &= 2 ab D_{xy}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Rezolvând acest sistem de ecuații (3.76) se obține :

$$\begin{aligned} \rho_x &= \frac{1}{2}ab \left[D_x - D_v \frac{a^2}{b^2} \right] \\ \rho_y &= \frac{1}{2}ab \left[D_y - D_v \frac{b^2}{a^2} \right] \\ \rho_d &= \frac{1}{2}ab D_v \left[2 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right] \\ \delta_x + \delta_y &= 2ab \left[D_{xy} - D_v \right] \end{aligned} \quad (3.77)$$

Se presupune că rigiditatea la torsiune este invers proporțional cu lungimea barei, adică :

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{b}{a+b} 2ab \left[D_{xy} - D_v \right] \\ \delta_y &= \frac{a}{a+b} 2ab \left[D_{xy} - D_v \right] \end{aligned} \quad (3.78)$$

Din relațiile (3.77) și (3.78) rezultă caracteristicile geometrice ale secțiunilor barelor modelului studiat :

$$\begin{aligned} \rho_x &= E_x I_x a \\ \rho_y &= E_y I_y b \\ \rho_d &= E_d I_d \sqrt{a^2 + b^2} \\ \delta_x &= G J_x a \\ \delta_y &= G J_y b \end{aligned} \quad (3.79)$$

Din (3.79) rezultă :

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{b}{2E_x} \left[D_x - D_v \frac{a^2}{b^2} \right] \\ I_y &= \frac{a}{2E_y} \left[D_y - D_v \frac{b^2}{a^2} \right] \\ I_d &= \frac{ab D_v}{2E_d \sqrt{a^2 + b^2}} \left[2 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right] \\ J_x &= \frac{b}{a+b} \frac{2ab}{G a} \left[D_{xy} - D_v \right] \\ J_y &= \frac{a}{a+b} \frac{2ab}{G b} \left[D_{xy} - D_v \right] \end{aligned} \quad (3.80)$$

3.4.2.4. Matricea de rigiditate a modelului echivalent ortotrop cu bare diagonale.

In mod similar cu cazul precedent, matricea de rigiditate [K] poate fi direct determinată din matricea de rigiditate a modelului echivalent izotrop (3.54) cu următoarele caracteristici de rigiditate :

$$\begin{aligned}
 i_x &= \frac{E_x I_x}{a} = \frac{1}{2} \left[D_x - D_v \frac{a^2}{b^2} \right] \frac{b}{a} \\
 i_y &= \frac{E_y I_y}{b} = \frac{1}{2} \left[D_y - D_v \frac{b^2}{a^2} \right] \frac{a}{b} \\
 i_d &= \frac{E_d I_d}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab D_v}{2(a^2+b^2)} \left[2 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right] \\
 i_{ox} &= \frac{G J_x}{a} = \frac{2b}{a+b} \left[D_{xy} - D_v \right] \frac{b}{a} \\
 i_{oy} &= \frac{G J_y}{b} = \frac{2a}{a+b} \left[D_{xy} - D_v \right] \frac{a}{b}
 \end{aligned}
 \tag{3.81}$$

3.4.2.5. Matricea de transformare a deplasărilor în eforturile barelor modelului echivalent ortotrop.

Matricea de transformare [BD] poate fi determinată în mod direct din matricea de transformare [BD] a modelului dreptunghiular izotrop cu bare diagonale (3.57) substituind (3.81) în această matrice (3.57).

Programul de calcul pentru calculatoarele electronice este același cu cazul modelului izotrop.

Este menționat că modelul echivalent dreptunghiular izotrop cu bare diagonale este un caz particular al acestui model, cu următoarele substituiri :

$$\begin{aligned}
 D_x &= D \\
 D_y &= D \\
 D_v &= \nu \cdot D \\
 D_{xy} &= \frac{D}{2}(1 - \nu)
 \end{aligned}
 \tag{3.82}$$

Substituind (3.82) în (3.81) se obțin din nou relațiile (3.53) pentru modelul izotrop.

3.5. Programele de calcul pentru calculatoarele electronice.

Pe baza formulelor, matricilor pe care le-am determinat în paragrafele precedente, s-au elaborat programele de calcul în limbajul FORTRAN IV cu ajutorul schemei logice care este prezentată în fig. 3.14.

În programele de calcul se folosesc următoarele notații :

- NE - numărul de elemente finite în care este divizată structura;
 - NV - numărul coloanelor rețelei discretizate după direcția având numărul mai mic de elemente;
 - NLI - numărul de grade de libertate ale structurii discretizate;
 - NNC - numărul de grade de libertate eliminate de legăturile exterioare;
 - LS - lățimea benzii matricii, adică numărul cel mai mare posibil de termeni ai unui rând din matrice;
 - NIN - numărul ipotezelor de încărcare;
 - A(NE), B(NE), H(NE) - listele de dimensiuni geometrice ale modelului echivalent;
 - NI(NE), NJ(NE) - listele cu numerele de ordine ale elementelor în rețeaua discretizată după direcțiile x și y;
 - US(NLI, NIN) - tabelul care conține, la început, termenii liberi (matricea forțelor nodale echivalente) și apoi rezultatele obținute de deplasări (matricea deplasărilor nodale);
 - AE(12, 12) - matricea rigidităților modelului echivalent;
 - AS(NLI, LS) - matricea bandă de rigiditate a rețelei de bare;
 - NC(NNC) - lista gradelor de libertate eliminate;
 - BD(12, 12) - matricea de transformare a deplasărilor nodale în eforturile barelor modelului echivalent;
 - UE(12, NIN) - tabelul ce conține deplasările nodale ale modelului provocate de toate ipotezele de încărcare;
 - PO - coeficientul lui Poisson;
 - D - rigiditatea cilindrică a plăcii.
- Pentru a putea deosebi între cele cinci cazuri mai sus considerate, s-au numit TECHIVA 1, 2, 3, 4, 5 programele de calcul corespunzătoare și anume :

Schema logică TECHIVA

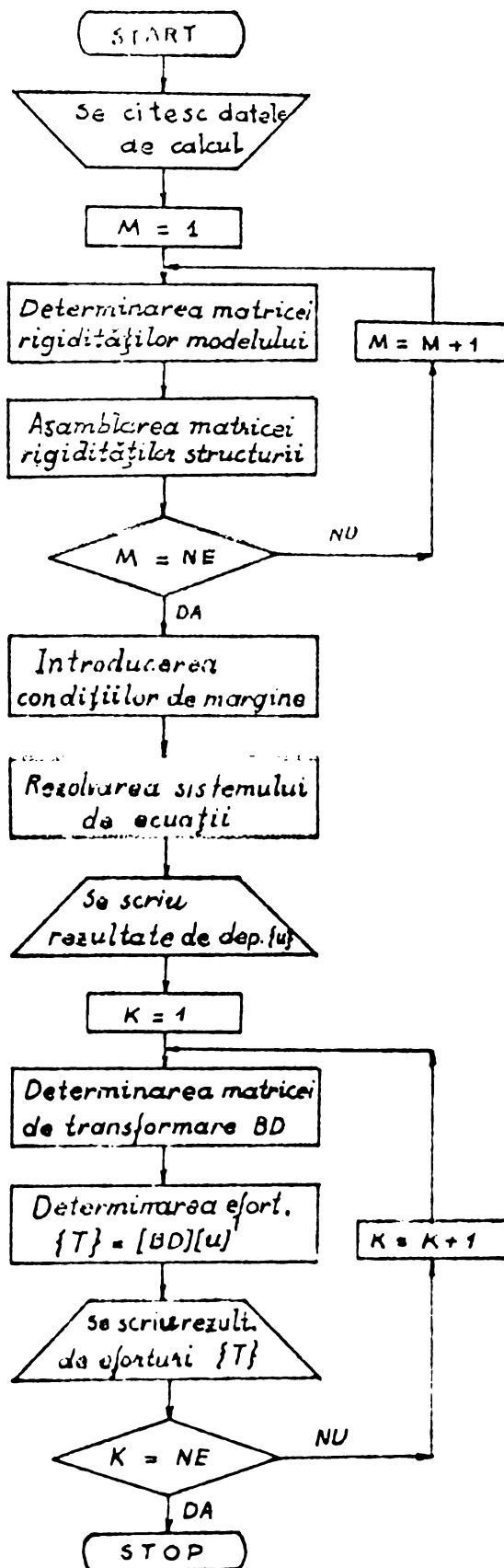


Fig. 3.12

- TECHIVA 1 - pentru modelul grinzilor ortogonale ale plăcii izotrope;
- TECHIVA 2 - pentru modelul dreptunghiular cu bare diagonale ale plăcii izotrope;
- TECHIVA 3 - pentru modelul patrat propus de Hrennikoff A,
- TECHIVA 4 - pentru modelul grinzilor ortogonale ale plăcii ortotrope;
- TECHIVA 5 - pentru modelul dreptunghiular cu bare diagonale ale plăcii ortotrope.

Este de remarcat că, aceste programe elaborate pot fi utilizate atât pentru calculul plăcilor pline cât și al plăcilor cu goluri, avînd grosimi constante sau variabile, iar formele lor geometrice sînt numai dreptunghiulare.

3.6. Concluzii.

În acest studiu, s-a făcut presupunerea că modelele echivalente se constituie din elemente infinit de mici. Această presupunere ne permite să considerăm că, cîmpul deformațiilor rămîne acelaș în interiorul unui aceluiaș model.

Aproximația de calcul depinde esențial de dimensiunile alese ale modelului considerat. Dacă aceste dimensiuni devin din ce în ce mai mici, se ajunge sigur la soluția exactă a problemei. Într-adevăr, la limită se găsește integrala (3.4). Se vede că convergența procedurii de calcul este asigurată.

În realitate, se găsește un compromis între precizia rezultatelor de calcul și economia de timp pentru calcul.

Aplicațiile diverse care s-au examinat arată, în mod clar, că adaptînd o rețea ortogonală de grinzi se ajunge la o precizie suficient de mare pentru nevoile practicii curente. Convergența procedurii de calcul este cu atît mai rapidă cu cît dimensiunile modelului devin mai mici.

Celelalte contribuții personale din acest capitol se referă la determinarea caracteristicilor de rigiditate pentru trei modele echivalente izotrope și două modele echivalente ortotrope, la deducerea matricelor rigidităților cît și a relațiilor deplasări - eforturi pentru variantele TECHIVA 1, TECHIVA 2, ... TECHIVA 5 și la programele de calcul pentru calculatoarele electronice.

Este de remarcat că problemele plăcilor ortotrope studiate cu teoria echivalențelor, încă nu există în literatura de specialitate pînă acum.

In final, teoria echivalențelor prezintă o identitate între câmpurile deformațiilor corpurilor reale și fictive și nu determină direct identitatea între eforturile sau solicitările celor două corpuri considerate.

De aceea, în general, rezultatele deplasărilor obținute sînt mai bune decît cele ale eforturilor.

CAPITOLUL IV.

APLICATII LA CALCULUL PLACILOR ELASTICE IZOTROPE

În acest capitol se vor prezenta aplicațiile la calculul plăcilor elastice izotrope.

Utilizând programele de calcul MELEFIN 1, 2 și TECHIVA 1, 2, 3, se calculează cele șase tipuri de plăci plane, efectuându-se o analiză comparativă cu rezultatele obținute de alți autori pe cale teoretică sau experimentală.

Programele elaborate pot calcula plăcile plane dreptunghiulare având orice condiții de margine chiar și în prezența golurilor de formă dreptunghiulară. Grosimea plăcii poate fi constantă sau variabilă.

Programele pot rula în același timp mai multe ipoteze de încărcări aplicate.

În cele ce urmează se vor prezenta cele șase exemple de calcul abordate.

4.1. Exemplul de calcul nr.1.

Se calculează o placă patrată simplu rezemată pe colțuri, încărcată pe margine (vezi fig.4.1).

Placa a fost încercată de Prof. Bilge M. la Universitatea Tehnică din Istanbul (Turcia) /17/.

Datele de calcul sînt următoarele :

- latura $a = 90$ cm;
- grosimea $h = 0,63$ cm;
- modulul de elasticitate $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm²;
- coeficientul lui Poisson $\nu = 0,3$.

Placa a fost încercată în două ipoteze de încărcare :

1. forțele distribuite uniform de-a lungul marginilor plăcii $P_i = 5$ kg;
2. forțele concentrate, aplicate în mijlocul marginilor $P_M = 10$ kg;

Calculul este efectuat pe un sfert de placă, ca urmare a simetriei plăcii studiate.

Rețeaua distretizată este aleasă cu 25 elemente patrate avînd latura de 9 cm.

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelele IV-1 și IV-2 și diagramele din fig.4.2 și 4.3, inclusiv rezultatele experimentale și teoretice obținute de Bilge M. /17/.

4.2. Exemplul de calcul nr.2.

Se calculează o placă dreptunghiulară simplu rezemată pe o latură scurtă, încastrată pe latura opusă și liberă pe celelalte două (vezi fig.4.4).

Datele de calcul sînt următoarele :

- laturile $a = 6$ m, $b = 4$ m;
- grosimea $h = 0,14$ m;
- modulul de elasticitate $E = 2 \cdot 10^7$ t/m²;
- coeficientul lui Poisson $\nu = 0,0$ și $\nu = 0,15$.

Ipotezele de încărcare :

1. forțele uniform distribuite, $q = 10$ t/m²;
2. forța concentrată în punctul 12, $P_{12} = 4,5$ t.

Rețeaua discretizată este aleasă cu 24 elemente patrute avînd laturile de 1 m.

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul IV-3, IV-4, IV-5, IV-6, IV-7, IV-8 și diagramele din figurile 4.5, 4.6 și 4.7, inclusiv rezultatele comparative din lucrarea /2/.

4.3. Exemplul de calcul nr.3.

Se calculează o placă simplu rezemată pe cele două laturi paralele și liberă pe celelalte două (vezi fig.4.8).

Datele de calcul sînt următoarele :

- laturile $a = b = 8$ m;
- grosimea $h = 0,14$ m;
- modulul de elasticitate $E = 2,05 \cdot 10^7$ t/m²;
- coeficientul lui Poisson $\nu = 0$.

Ipotezele de încărcare :

1. forțele distribuite uniform $q = 10$ t/m²;
2. forța concentrată în centrul plăcii $P = 10007$.

Calculul este efectuat pentru un sfert de placă datorită simetriei plăcii studiate.

Rețeaua discretizată este aleasă din 16 elemente partate avînd latura de 1 m.

Rezultatele obținute pentru deplasări și eforturi sînt prezentate în tabelele IV-9, IV-10, IV-11a, IV-11b, și diagramele din figurile 4.9 și 4.10, inclusiv rezultatele comparative extra-se din lucrarea /2/.

4.4. Exemplul de calcul nr.4.

Se calculează o placă cu grosimea variabilă simplu rezemată pe trei laturi și liberă pe a patra (vezi fig.4.12).

Datele de calcul sînt următoarele :

- laturile $a = b = 10$ m;
- grosimea h este variabilă după o singură direcție;
- modulul de elasticitate $E = 2 \cdot 10^6$ t/m²;
- coeficientul lui Poisson $\nu = 0,25$;

Ipoteza de încărcare se prezintă în fig.4.12.

Rețeaua discretizată este aleasă cu 16 elemente patrulate avînd latura de 2,5 m.

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelele IV-12, IV-13 și diagramele din fig.4.13, inclusiv rezultatele comparative extrase din lucrarea /2/.

4.5. Exemplul de calcul nr.5.

Se calculează o placă simplu rezemată pe colțuri, încărcată pe margine (vezi fig.4.14).

Datele de calcul sînt următoarele :

- laturile $a = b = 10$ m;
- grosimea $h = 0,23$ m;
- modulul de elasticitate $E = 2,05 \cdot 10^6$ t/m²;
- coeficientul lui Poisson $\nu = 0,0$ și $\nu = 0,20$.

Ipotezele de încărcare :

1. forțele uniform distribuite de-a lungul marginilor plăcii $P_i = 10$ t;
2. forțele aplicate concentrat la mijlocul marginilor plăcii $P_M = 100$ t.

Calculul este realizat pentru un sfert de placă datorită simetriei plăcii studiate.

Rețeaua discretizată este aleasă cu 25 elemente portante avînd laturile de 1 m.

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelele IV-14, IV-15, IV-16, IV-17 și diagramele din figurile 4.15, 4.16, 4.17.

4.6. Exemplul de calcul nr.6.

Se calculează aceeași placă din exemplul nr.2 dar în care este prevăzut un gol dreptunghiular (vezi fig.4.18).

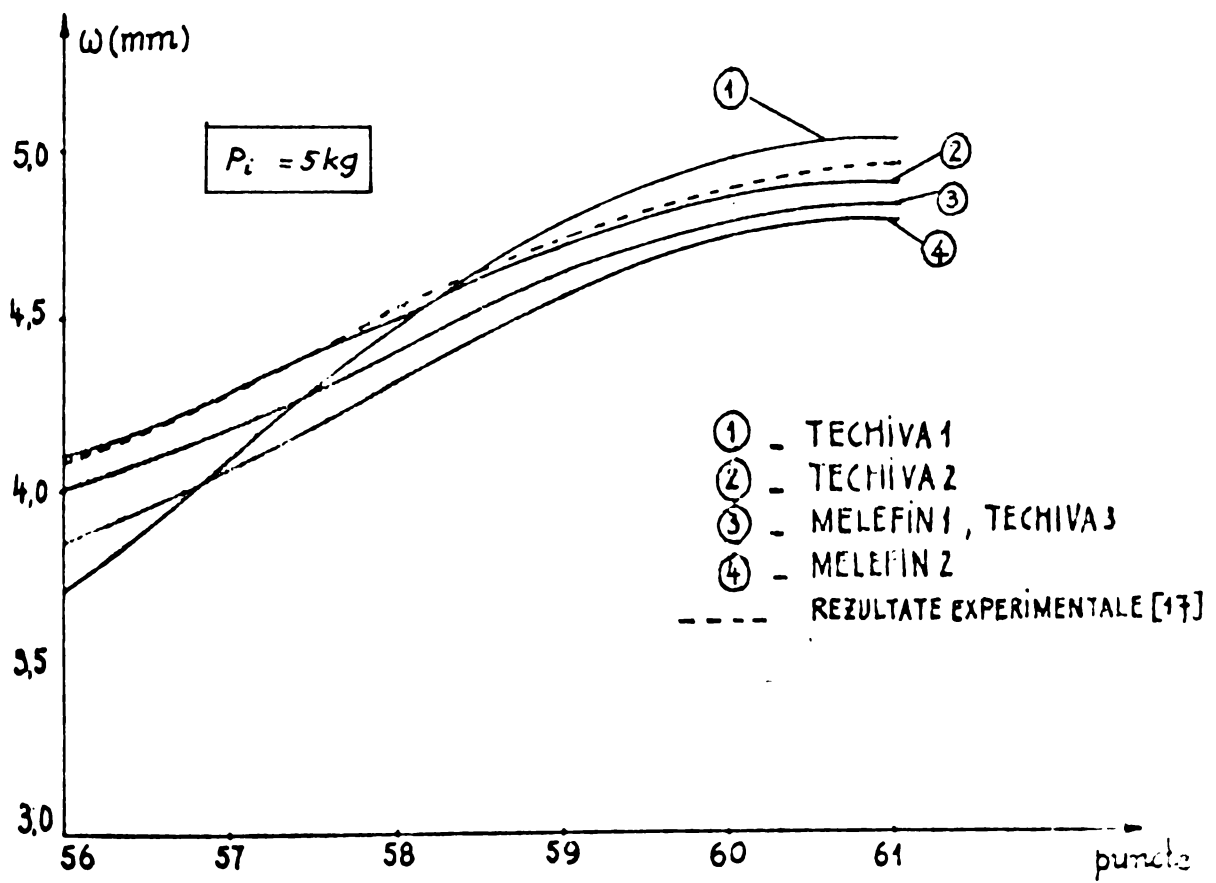
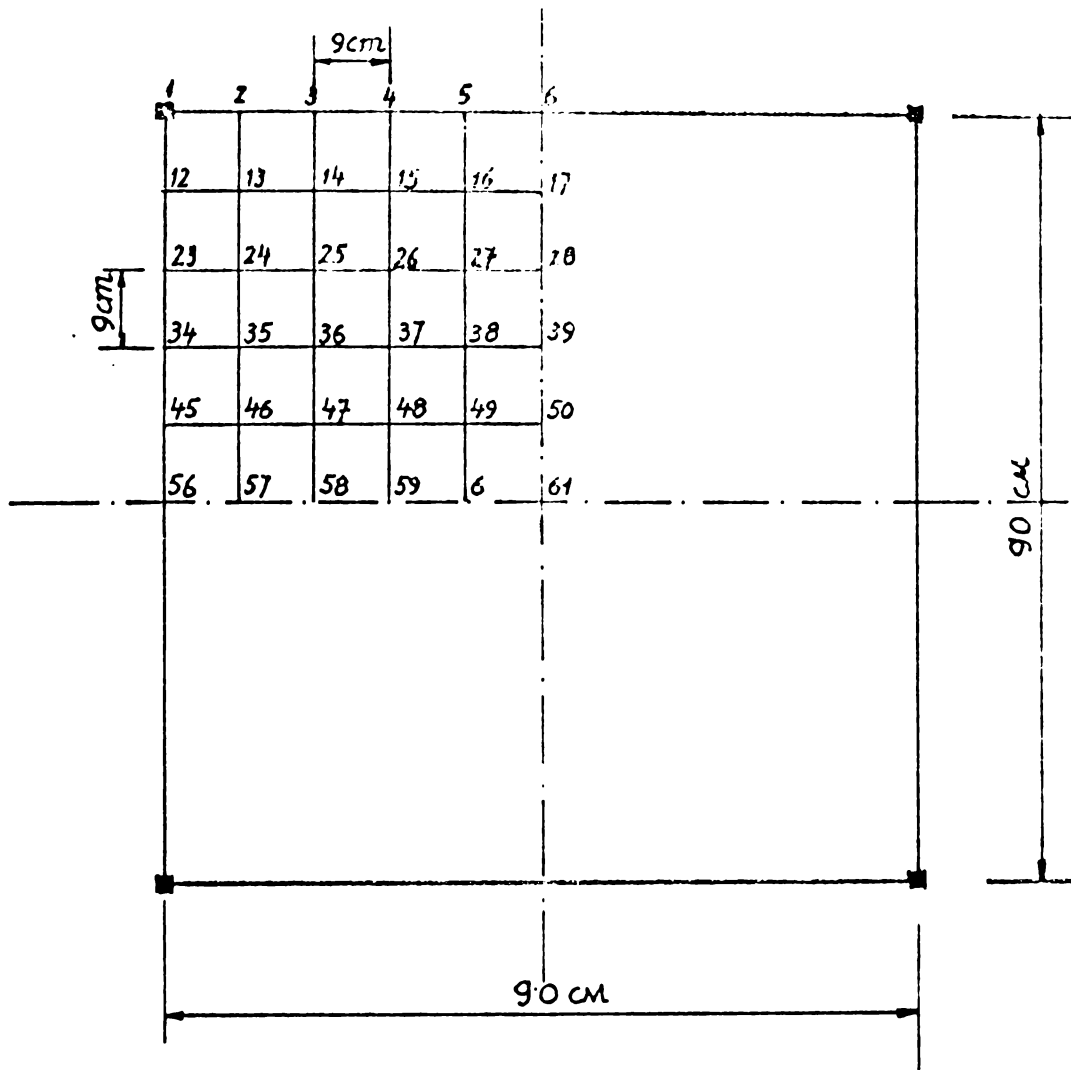


Fig 4.2

Tab. IV-1 Rezultate obținute pt săgețile w (mm)

Exemp. N°1 - $P_i = 5 \text{ kg}$

punct	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3	Rezultatele obținute de Bilge M.	Rezultatele experimentale extrase din [17]
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,07
13	2,19	2,13	2,14	2,26	2,20	2,16	2,09
25	3,56	3,48	3,57	3,64	3,54	3,54	3,55
37	4,24	4,27	4,45	4,42	4,29	4,36	4,38
49	4,73	4,67	4,92	4,81	4,65	4,77	4,81
61	4,84	4,80	5,06	4,92	4,76	4,90	4,98
60	4,79	4,74	4,99	4,87	4,71	4,84	4,90
59	4,64	4,57	4,79	4,72	4,57	4,67	4,73
58	4,42	4,33	4,48	4,50	4,37	4,41	4,53
57	4,19	4,07	4,10	4,28	4,17	4,12	4,30
56	4,00	3,85	3,69	4,10	4,02	3,85	4,08

Tab. IV-2 Rezultate obținute pt. săgețile w (mm)

Exemp. N°1 - $P_M = 15 \text{ kg}$

punct	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3	Rezultatele obținute de Bilge M.	Rezultatele experimentale extrase din [17]
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02
13	0,98	0,95	0,95	1,01	0,98	0,95	0,90
25	1,65	1,61	1,64	1,63	1,63	1,62	1,57
37	2,05	2,01	2,08	2,07	2,01	2,03	2,01
49	2,24	2,21	2,31	2,27	2,19	2,23	2,23
61	2,29	2,27	2,38	2,32	2,24	2,29	2,32
60	2,27	2,24	2,34	2,30	2,22	2,27	2,24
59	2,20	2,16	2,25	2,23	2,16	2,19	2,16
58	2,10	2,06	2,11	2,13	2,07	2,08	2,08
57	2,01	1,96	1,95	2,05	1,99	1,96	2,01
56	1,97	1,90	1,80	2,01	1,97	1,88	1,97

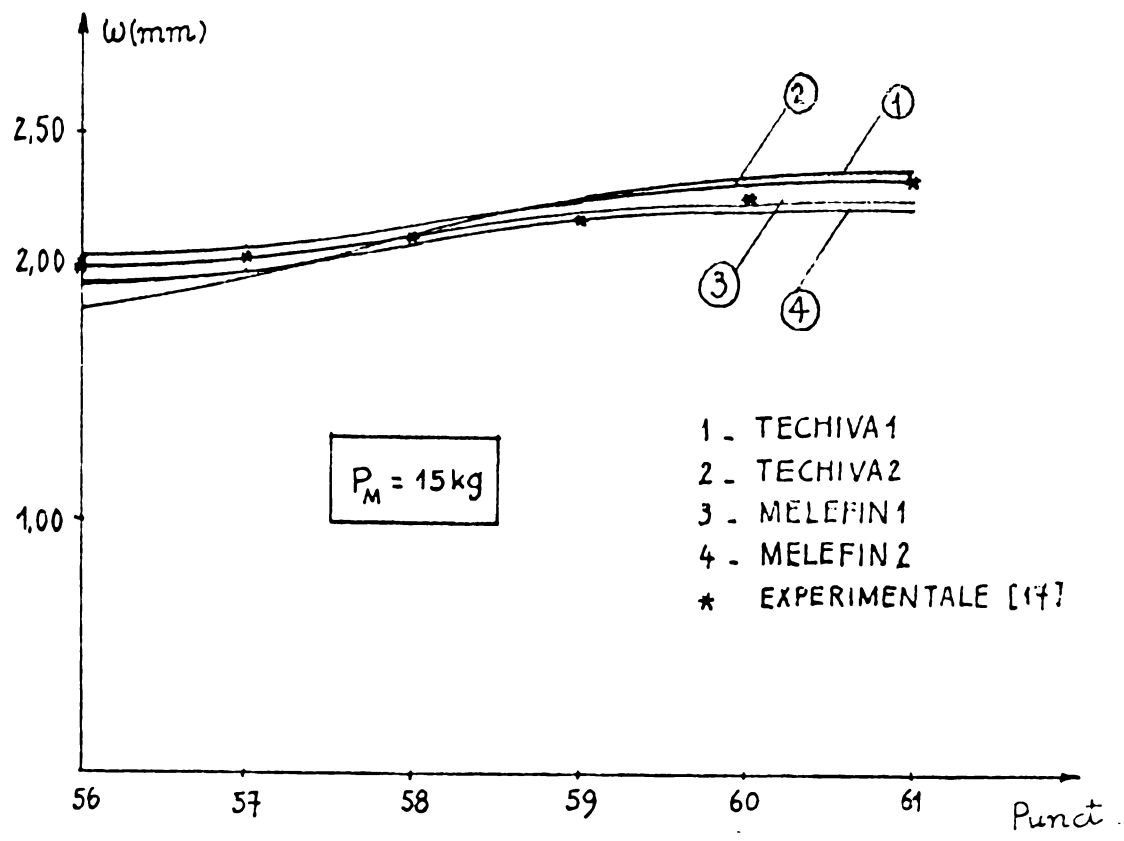
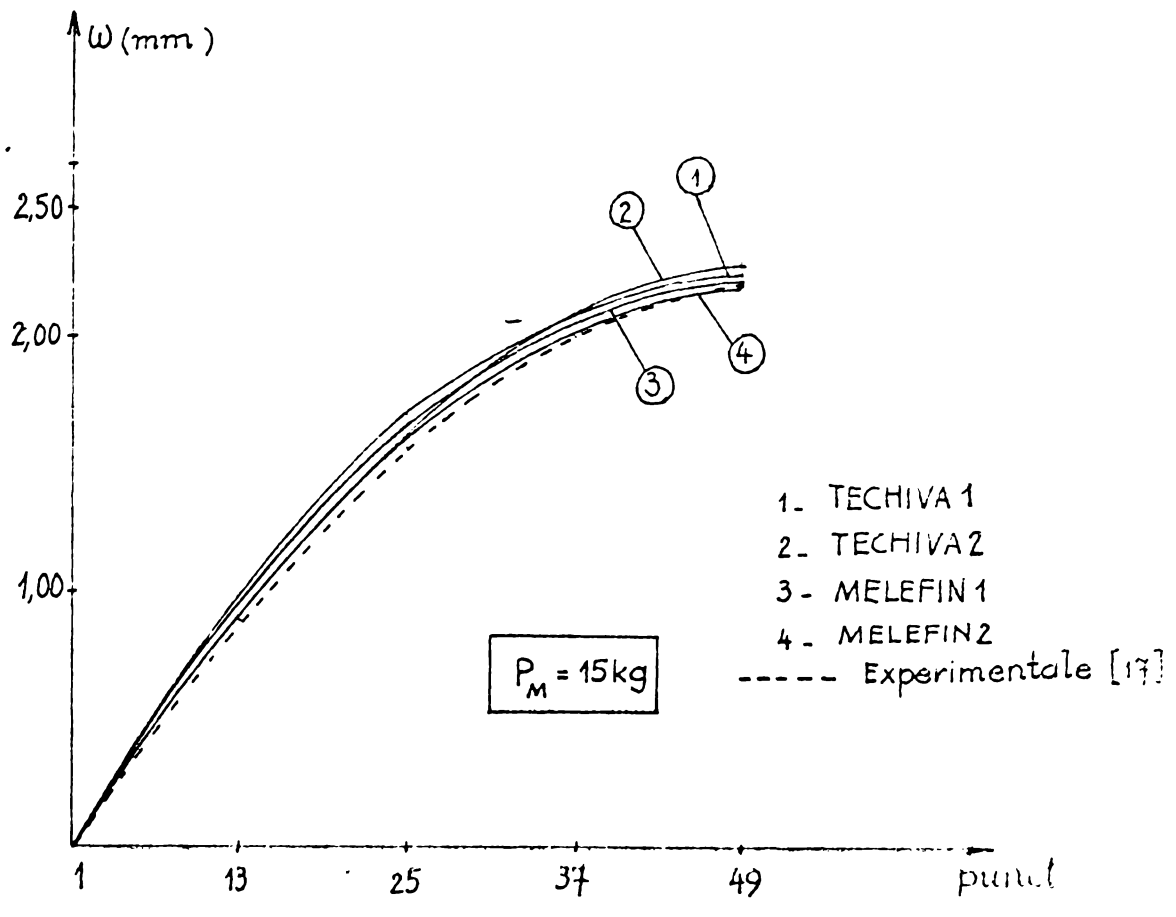
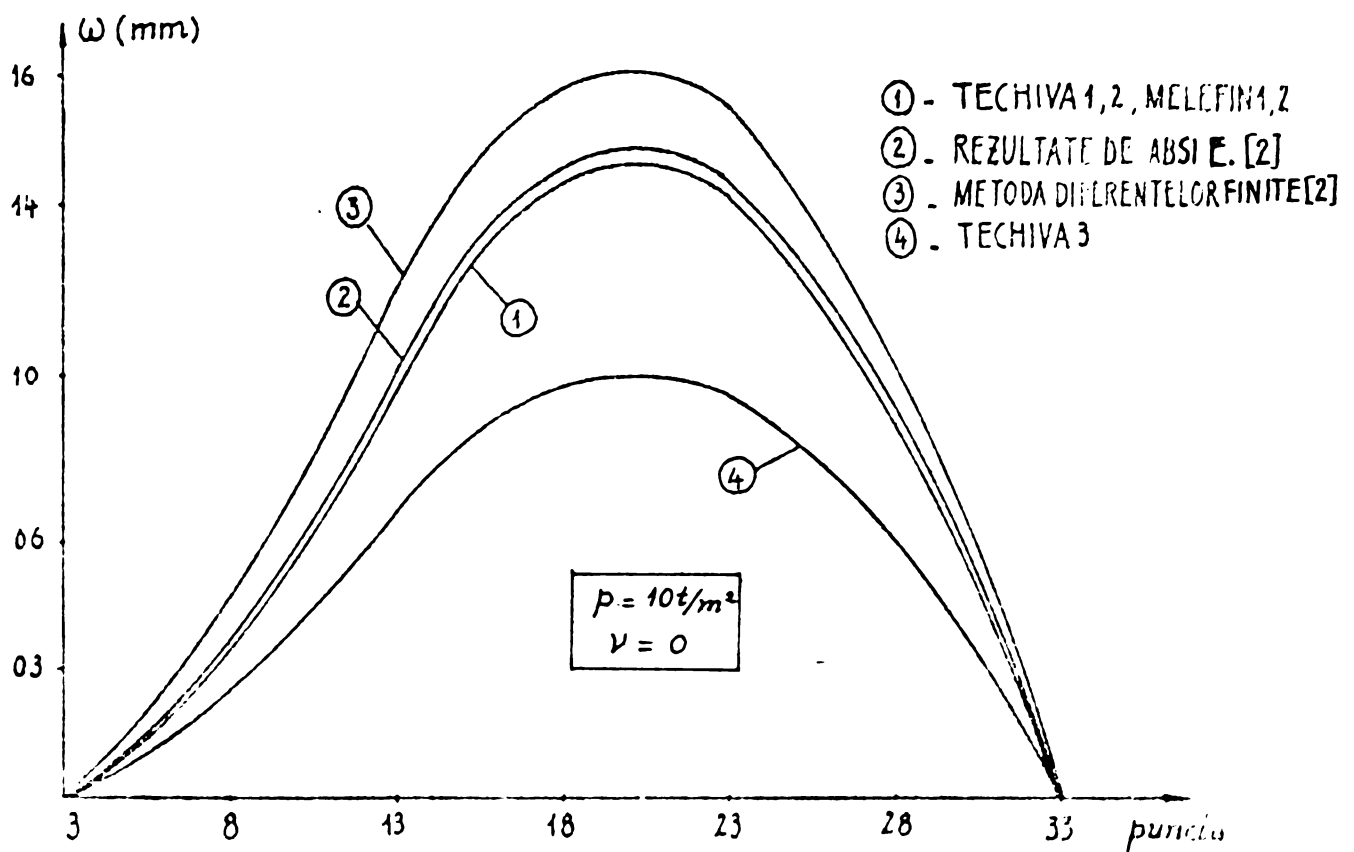
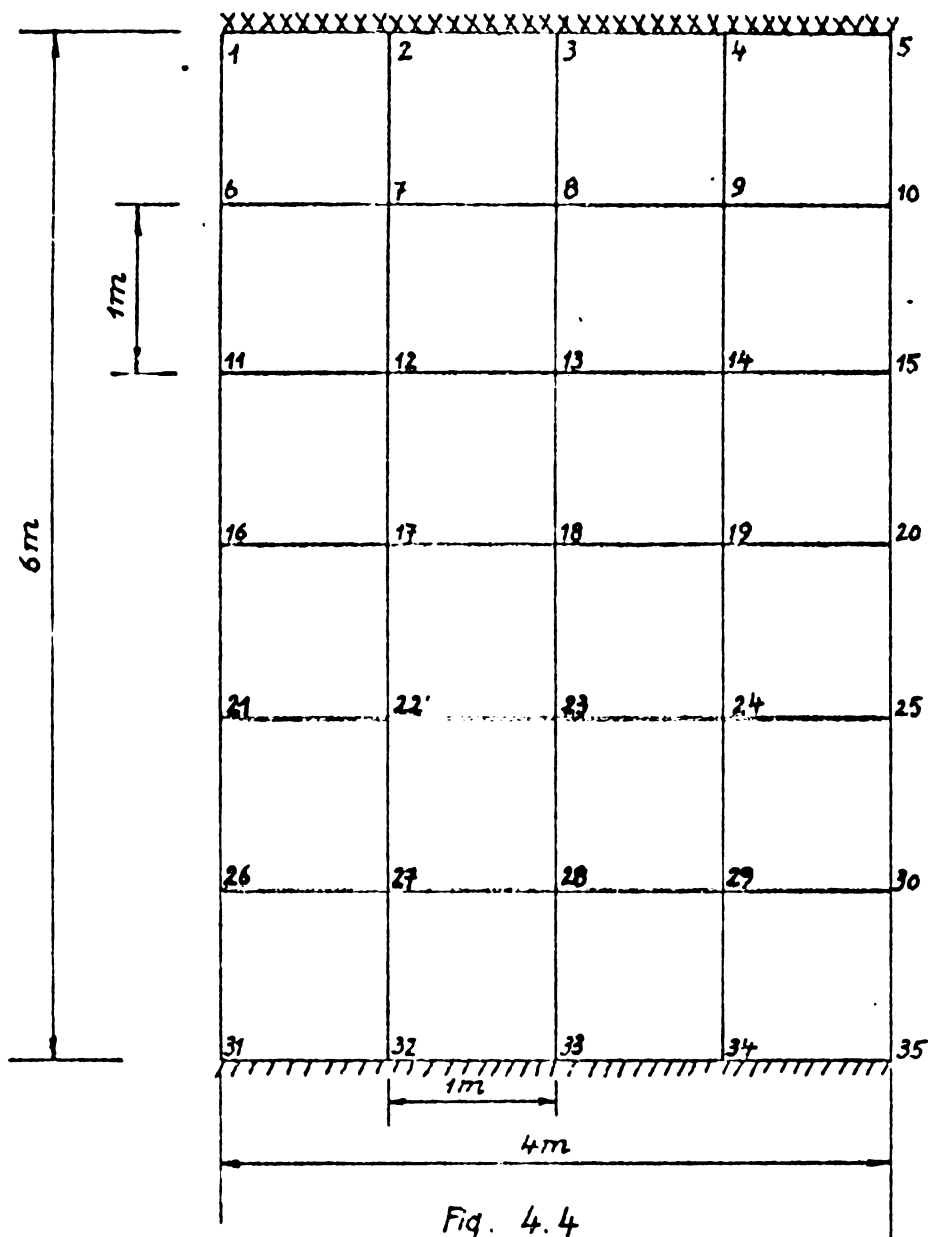


Fig 4.3



Tab. IV-3 Rezultate obținute pt. săgețile w (cm)

Exemp. N° 2 - $p = 10t/m^2$ - $\nu = 0$

puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3	Rezultatele obținute de Absi E., [2]	Metoda diferențelor finite [2]
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	0,36	0,36	0,36	0,36	0,24	0,37	0,48
13	1,01	1,00	1,01	1,01	0,67	1,03	1,20
18	1,46	1,45	1,46	1,46	0,98	1,49	1,67
23	1,43	1,43	1,43	1,43	0,96	1,47	1,63
28	0,89	0,89	0,89	0,89	0,60	0,92	1,01
33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. IV-4 Rezultate obținute pt. săgețile w (cm)

Exemp. N° 2 - $P_2 = 4,5t$ - $\nu = 0$

puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,104	0,102	0,104	0,104	0,068
13	0,269	0,265	0,269	0,269	0,176
18	0,333	0,330	0,333	0,333	0,220
23	0,283	0,281	0,283	0,283	0,188
28	0,160	0,159	0,160	0,160	0,106
33	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tab. IV-5

Rezultate obtinute pt. momentele $M_y (t)$

Exemp. N°2 - $p = 10t/m^2 - \nu = 0$

Puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3	Rezultatele obținute de Absi E. [2]	Metoda diferențelor finite [2]
3	-43,75	-43,41	-43,75	-43,75	-50,99	-44,76	-43,15
8	-11,46	-11,52	-11,46	-11,46	-16,75	-12,07	-10,96
13	10,83	10,76	10,83	10,83	13,33	10,37	11,24
18	23,12	23,06	23,12	23,12	29,92	22,76	23,43
23	25,41	25,34	25,41	25,41	33,11	25,19	25,60
28	17,71	17,68	17,71	17,71	22,54	17,62	17,81
33	0,00	0,08	0,00	0,00	3,92	0,00	0,00

Tab. IV-6

Rezultate obtinute pt. momentele $M_y (t)$

Exemp. N°2 - $P_{12} = 4,5t - \nu = 0$

puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3	Rezultatele obținute de Absi E. [2]	Metoda diferențelor finite [2]
3	-1,306	-1,267	-1,302	-1,302	-1,467	-1,310	-1,235
8	-0,225	-0,251	-0,249	-0,249	-0,342	-0,233	-0,245
13	0,604	0,600	0,617	0,617	0,673	0,625	0,630
18	0,550	0,541	0,546	0,546	0,716	0,515	0,505
23	0,328	0,335	0,332	0,332	0,450	0,316	0,325
28	0,163	0,166	0,164	0,164	-0,224	0,155	0,165
33	0,000	0,000	0,000	0,000	0,038	0,000	0,000

Tab. IV-7 Rezultate obținute pt. săgețile w (cm)

Exempl. N° 2 - $p_1 = 10 \text{ t/m}^2$ - $\nu = 0,15$

puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA 3		Rezultatele obținute de Abși E., $\nu=0$
					$\nu=0,15$	$\nu=0,25$	
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	0,35	0,35	0,35	0,35	0,28	0,30	0,37
13	0,98	0,98	0,98	0,98	0,78	0,84	1,03
18	1,41	1,41	1,42	1,41	1,12	1,22	1,49
23	1,39	1,39	1,40	1,39	1,10	1,21	1,47
28	0,86	0,86	0,87	0,86	0,69	0,75	0,92
33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-
6	0,36	0,37	0,35	0,36	0,30	0,32	-
11	1,01	1,03	0,96	1,02	0,87	0,94	-
16	1,47	1,49	1,42	1,48	1,27	1,38	-
21	1,46	1,48	1,40	1,46	1,26	1,37	-
26	0,91	0,92	0,87	0,91	0,79	0,86	-
31	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-

Tab. IV- 8 Rezultate obținute pt. momentele M_y (t)

Exemp. N° 2 - $p = 10 \text{ t/m}^2$ - $\nu = 0,15$

puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3	Rezultatele obținute de Absci E., $\nu=0$.
1	-43,95	-45,29	-43,95	-43,75	-44,69	-53,78	-
6	-12,45	-12,97	-12,45	-11,46	-12,22	-22,09	-
11	10,89	11,20	10,89	10,83	11,15	14,40	-
16	23,63	24,05	23,63	23,12	24,04	34,72	-
21	26,03	26,53	26,03	25,42	26,46	38,79	-
26	18,16	18,96	18,16	17,71	18,43	27,20	-
31	0,18	3,14	0,18	0,00	0,10	0,64	-
3	-43,41	-43,20	-43,40	-43,75	-44,36	-50,98	-44,76
8	-11,46	-11,45	-11,46	-11,46	-11,90	-16,74	-12,07
13	10,68	10,59	10,68	10,83	11,06	13,33	10,37
18	22,76	22,80	22,76	23,12	23,69	29,22	22,76
23	25,01	25,11	25,01	25,42	26,03	33,10	25,19
28	17,47	17,49	17,47	17,71	18,10	22,53	17,62
33	0,02	0,30	0,02	0,00	0,48	3,92	0,00

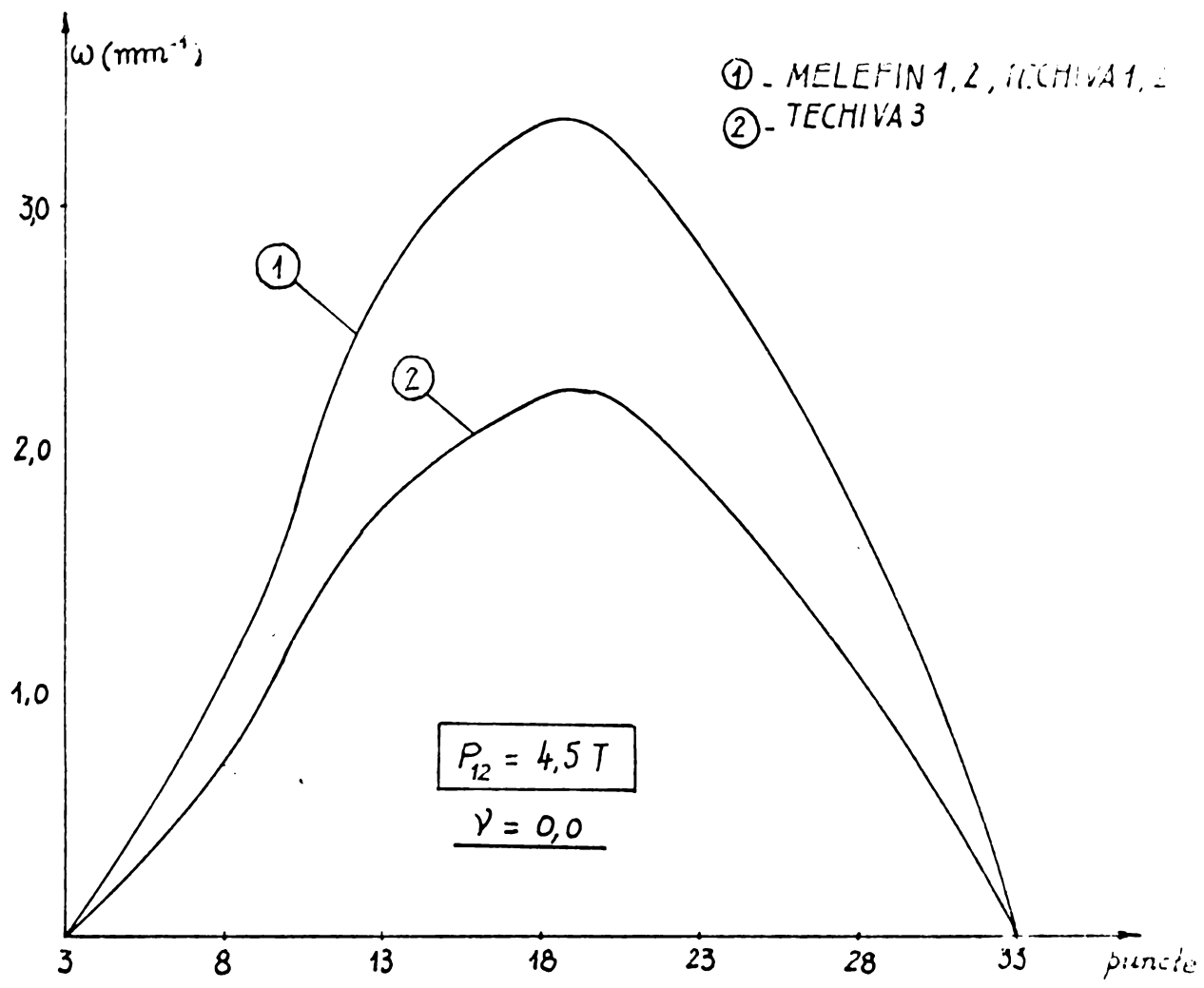


Fig. 4.6

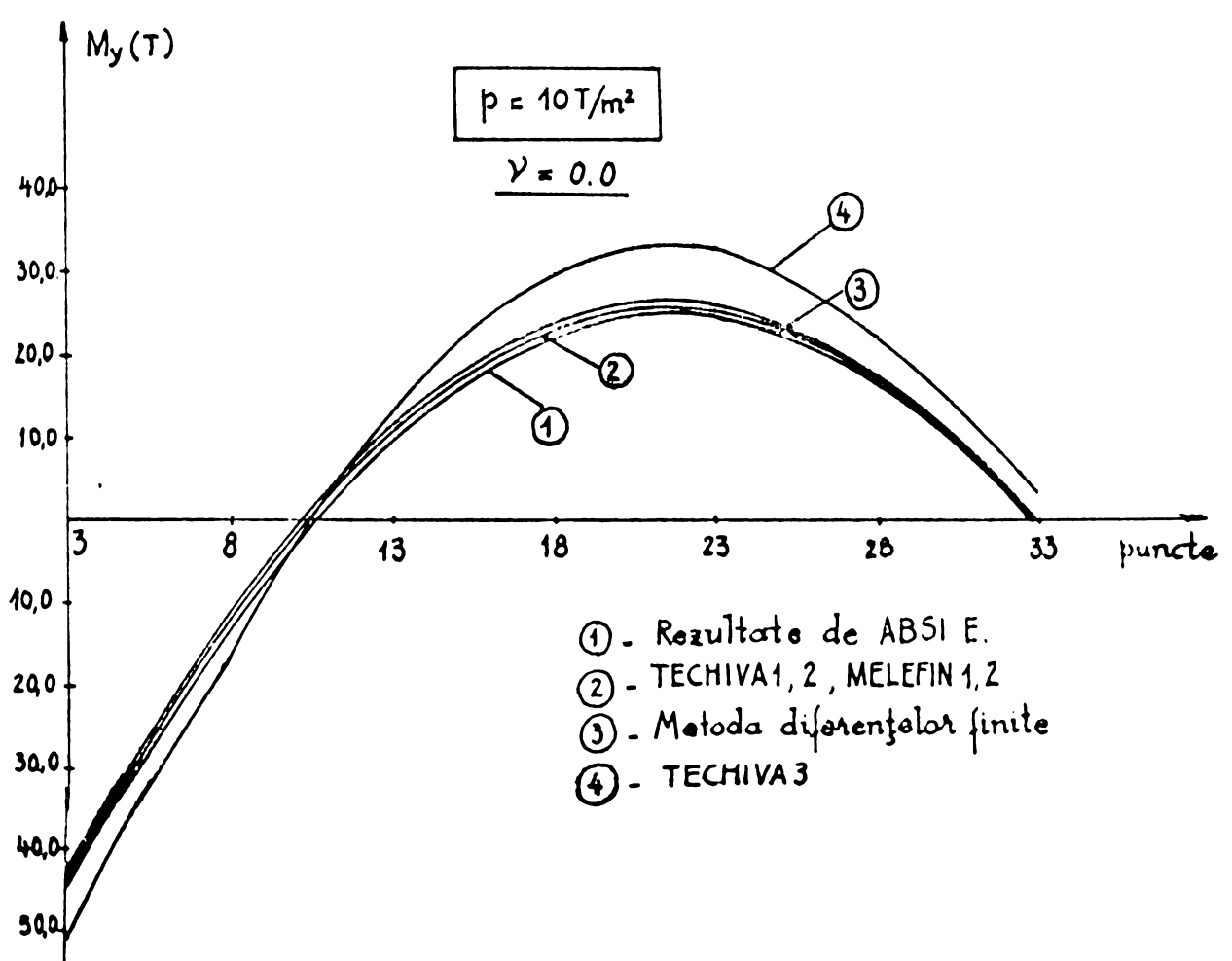


Fig. 4.7

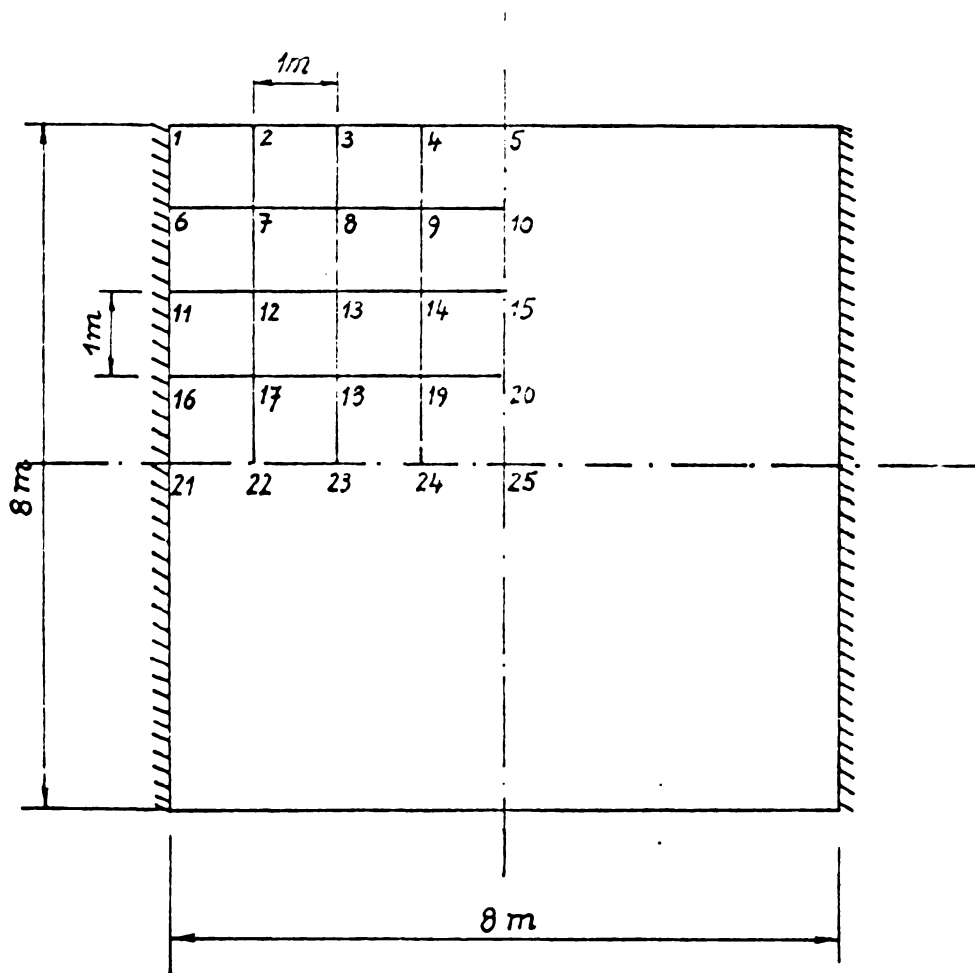


Fig. 4.8

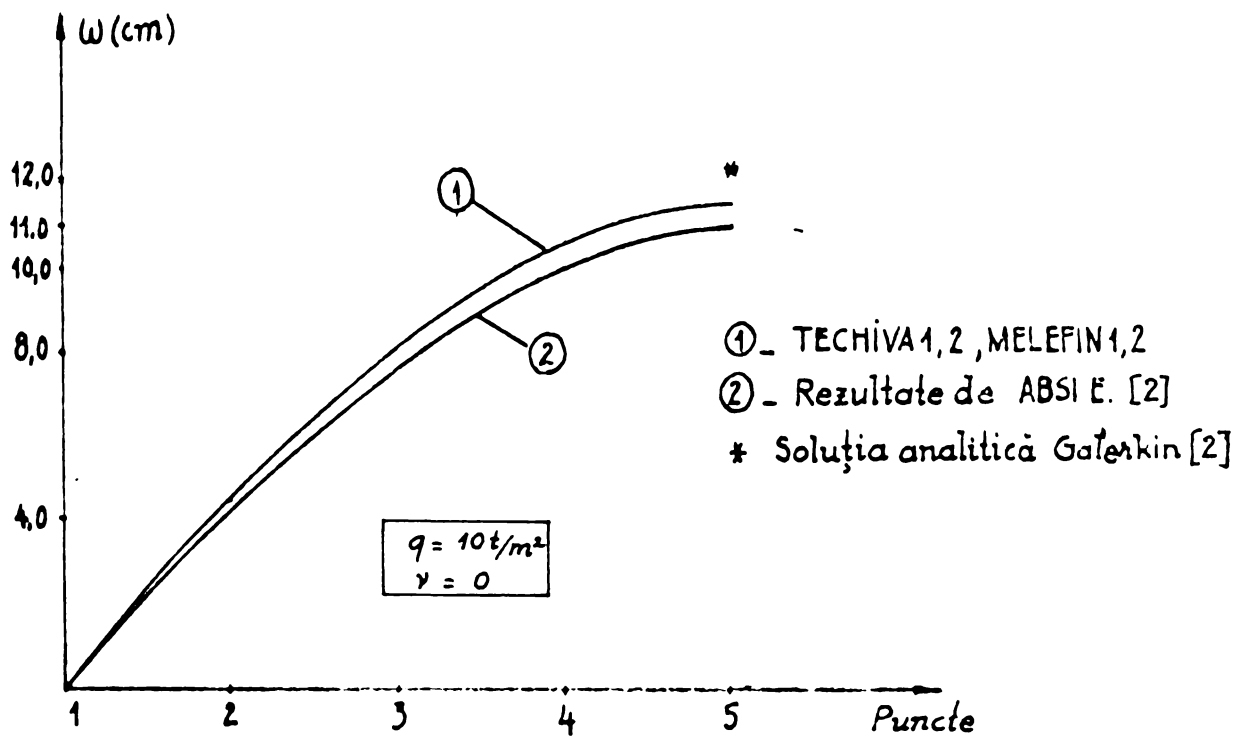


Fig. 4.9

Tab. IV-9 Rezultate obținute pentru săgețile w (cm)

Exemp. N° 3 - $p = 10 t/m^2$ - $\nu = 0$

puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3 $\nu = 0,25$	Soluțiile obținute de Galerkina	Rezultatele obținute de Absi E., [2]
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
2	4,46	4,48	4,46	4,46	4,44		
3	8,19	8,23	8,20	8,20	8,14		7,68
4	10,65	10,69	10,66	10,66	10,57		
5	11,50	11,50	11,51	11,51	11,42	12,32	11,04
21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
22	4,46	4,46	4,46	4,46	3,76		
23	8,19	8,19	8,19	8,19	6,90		7,88
24	10,65	10,65	10,65	10,65	8,98		
25	11,51	11,51	11,51	11,51	9,70	11,10	11,07

Tab. IV-10 Rezultate obținute pt. momentele M_x (t)

Exemp. N° 3 - $p = 10 t/m^2$ - $\nu = 0$

puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3 $\nu = 0,25$	Soluțiile obținute de Galerkina	Rezultatele obținute de Absi E., [2]
1	0,00	-2,75	0,00	0,00	-4,33		
2	34,97	35,92	34,99	34,99	56,54		
3	59,95	60,27	59,98	59,98	94,45		59,38
4	74,93	75,23	74,98	74,98	118,80		
5	79,93	80,23	79,98	79,98	126,70		79,87
21	0,00	0,02	0,00	0,00	7,82		
22	34,97	34,97	34,99	34,99	45,99		
23	59,95	59,94	59,98	59,98	80,34		60,16
24	74,93	74,92	74,98	74,98	100,89		
25	79,93	79,92	79,98	79,98	107,70	79,95	80,18

Tab. IV-11a

Rezultate obținute pt. săgețile w (cm)Exemp. N° 3 - $P = 1000 t$ - $\nu = 0,15$

puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3	Rezultatele obținute de Absi E., [2]	Soluțiile analitice Găbrăne $\nu = 0,20$
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
2	9,42	9,50	9,29	9,38	8,02		
3	17,46	17,70	17,25	17,41	14,86	16,48	17,40
4	22,88	23,20	22,63	22,84	19,49		
5	24,79	25,20	24,54	24,76	21,12	23,40	24,74
21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
22	11,15	11,13	11,68	11,17	8,72		
23	21,11	21,04	22,09	21,12	16,49	21,05	20,83
24	28,64	28,45	29,94	28,62	22,32		
25	32,02	31,69	33,41	31,96	24,91	31,84	31,20

Tab. IV-11b

Rezultate obținute pentru momentele $M_x(t)$ Exemp. N° 3 - $P = 1000 t$ - $\nu = 0,15$

puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3	Rezultatele obținute de Absi E., [2]	Soluțiile analitice $\nu = 0,20$ (*)
1	-0,026	0,613	-2,82	0,367			
2	64,360	63,950	61,030	63,410			
3	122,500	122,400	116,800	121,750		125,800	125,000
4	164,700	167,600	153,650	161,200			
5	180,300	185,300	166,800	175,300	264,600	186,600	185,000
21	-0,265	5,950	-8,600	-6,390			
22	58,950	61,065	57,000	58,610			
23	120,650	123,000	113,400	116,500			
24	180,250	183,500	178,400	182,900			
25	430,300	405,600	410,400	414,400	474,600	384,500	338,000

(*) Soluțiile analitice obținute de N. S. Kurdin (URSS), 1959 [2]

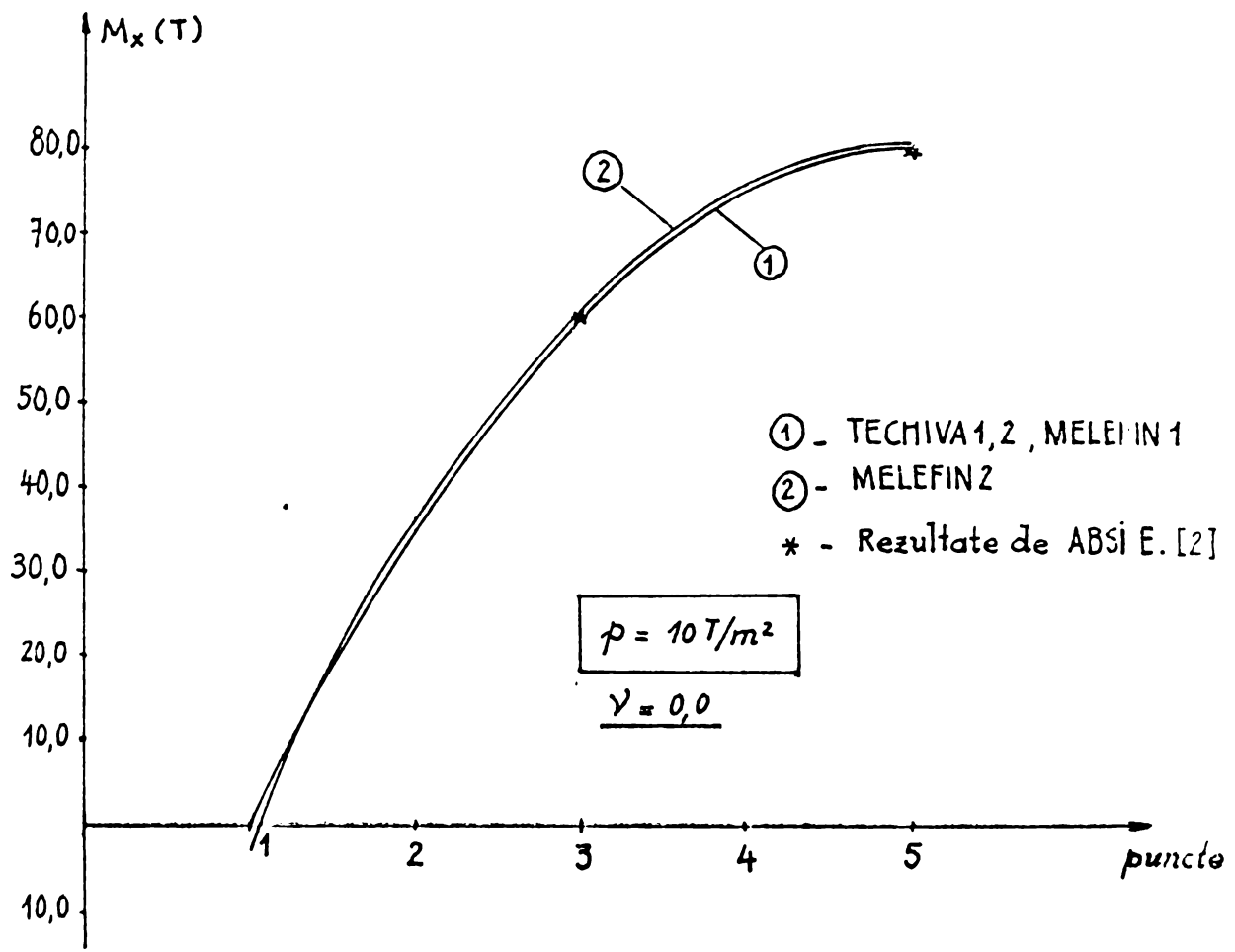
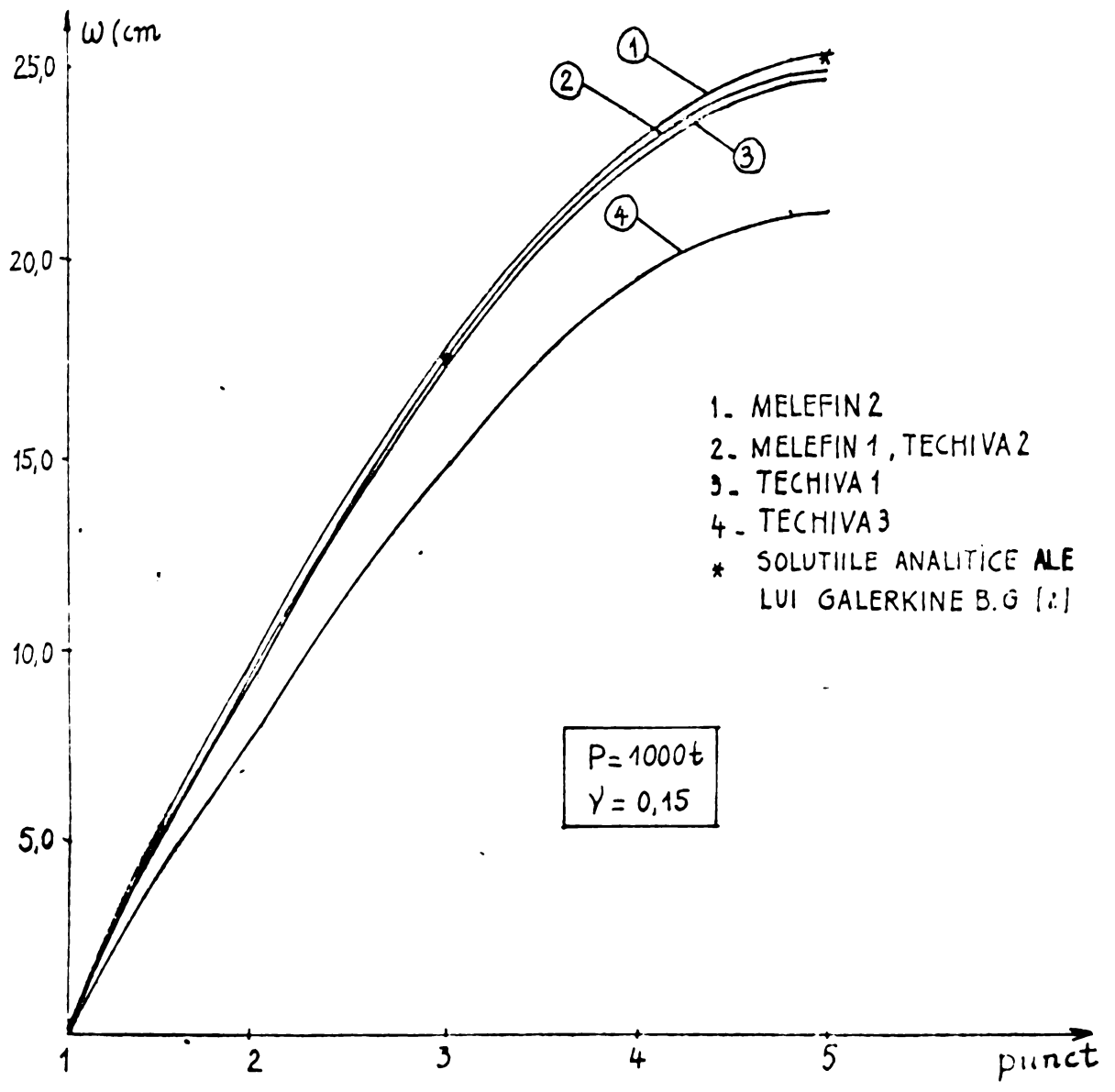


Fig. 4. 10



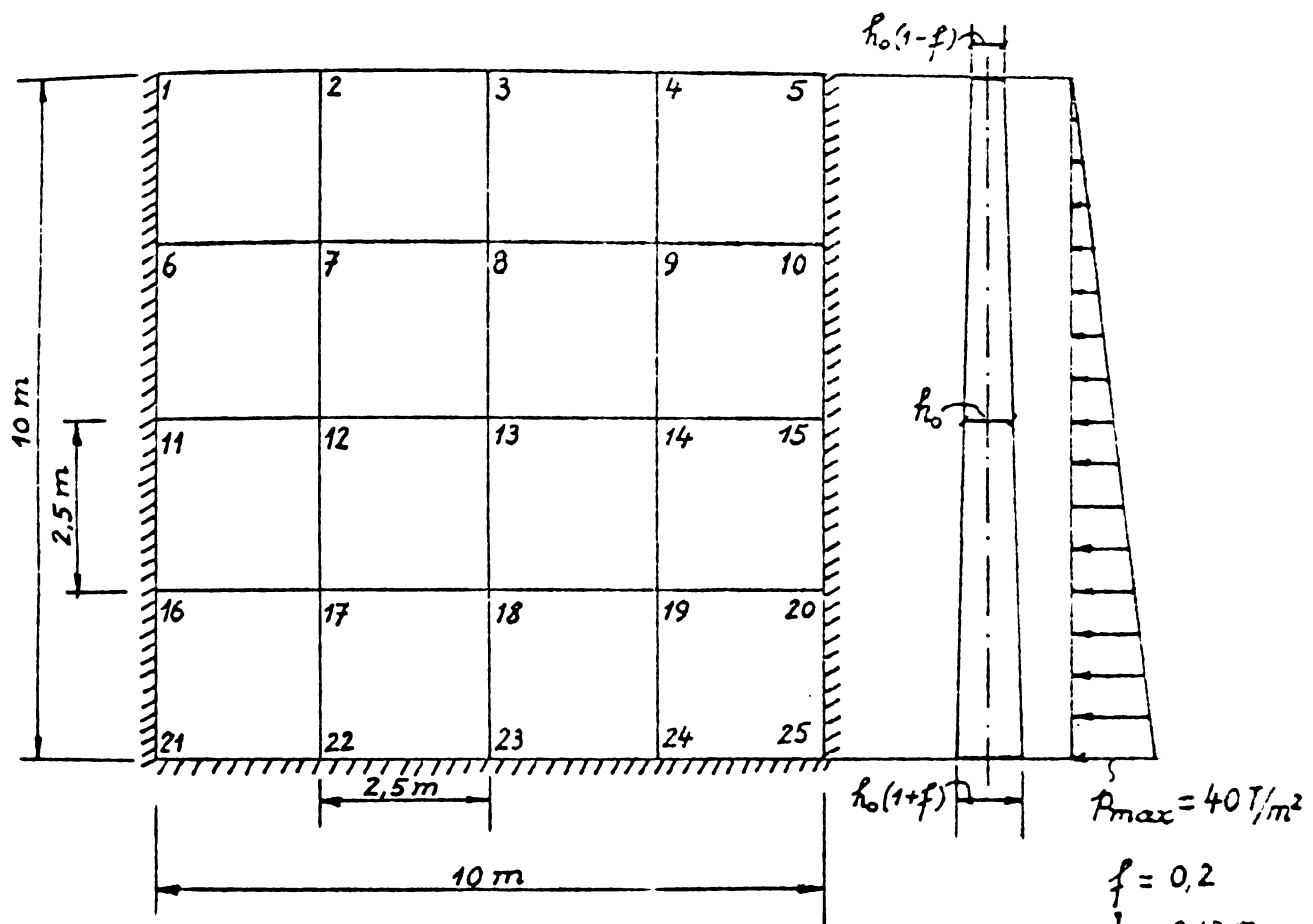


Fig. 4. 12

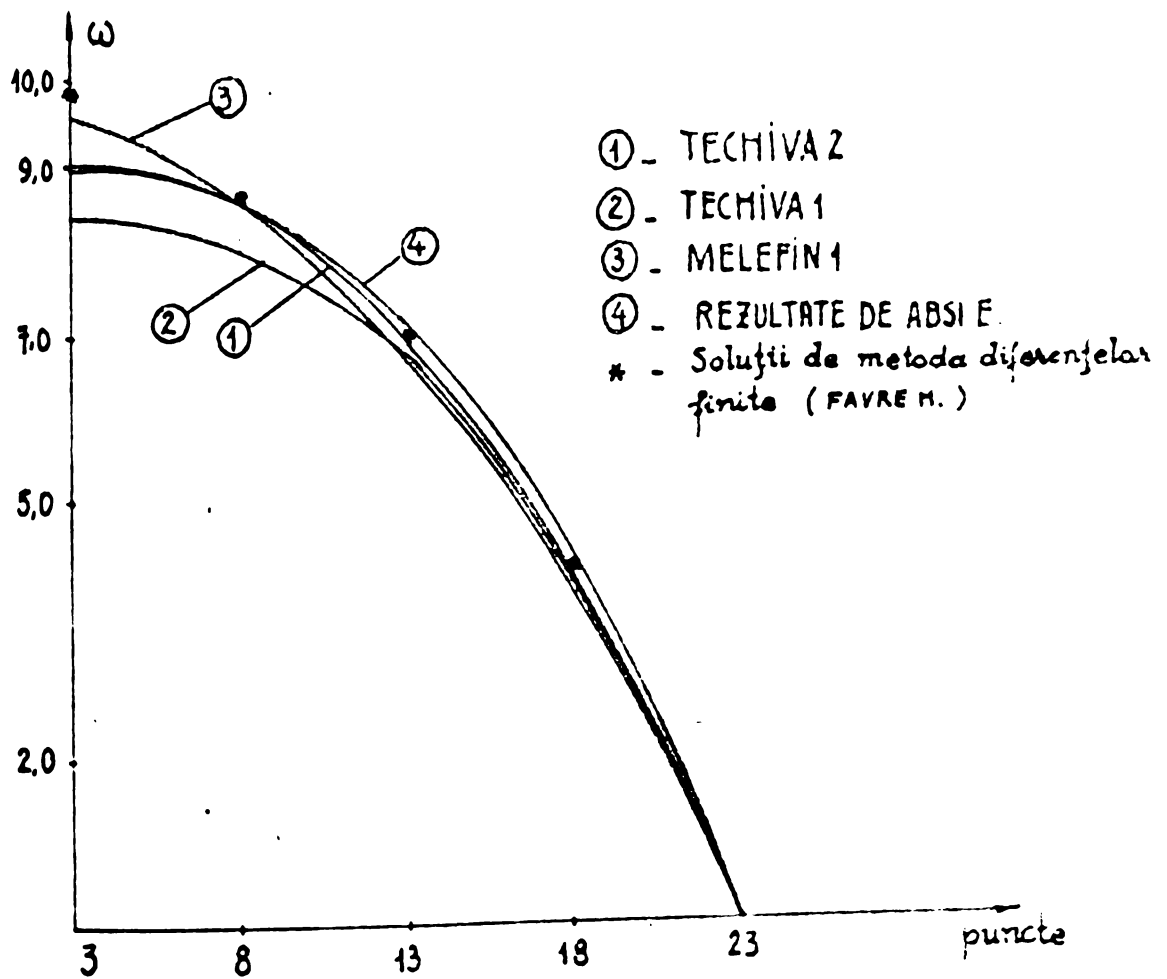


Fig. 4 . 13

Tab. IV-12

Rezultate obținute pentru săgețile w

Exemp. N° 4 - Incărcare distribuită triunghiular.

Puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3	Rezultatele obținute de Absi E., [2]	Soluțiile obținute de Favre H. [2]
3	9,56	9,55	8,39	9,96	9,63	8,93	9,73
8	8,32	8,12	8,02	8,53	7,88	8,52	8,60
13	6,78	6,58	6,82	6,92	6,26	7,20	7,06
18	3,99	3,96	4,10	4,09	3,68	4,26	4,13
23	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	6,80	6,77	6,96	7,08	6,86	6,40	6,66
7	5,90	5,75	5,71	6,07	5,62	6,10	6,10
12	4,85	4,66	4,88	4,95	4,48	5,30	5,07
17	2,87	2,74	2,94	2,94	2,64	3,20	2,93
21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. IV-13

Rezultate obținute pentru momentele M_x

Exemp. N° 4

Puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3	Rezultatele obținute de Absi E., [2]	Rezultatele obținute de Favre H. [2]
3	100,50	100,50	94,40	105,700	156,000		
8	110,90	106,01	107,44	135,700	148,900	110,00	107,00
13	129,40	119,90	124,98	149,10	159,500	131,00	120,00
18	105,42	87,91	97,50	122,10	125,200	106,00	104,00
23	3,17	123,00	72,56	26,20	62,400	80,00	77,00

* Soluțiile obținute prin dezvoltarea seriei reliaate de Favre H., și Schumann, Bul. Suisse Romande, 1955, no 11

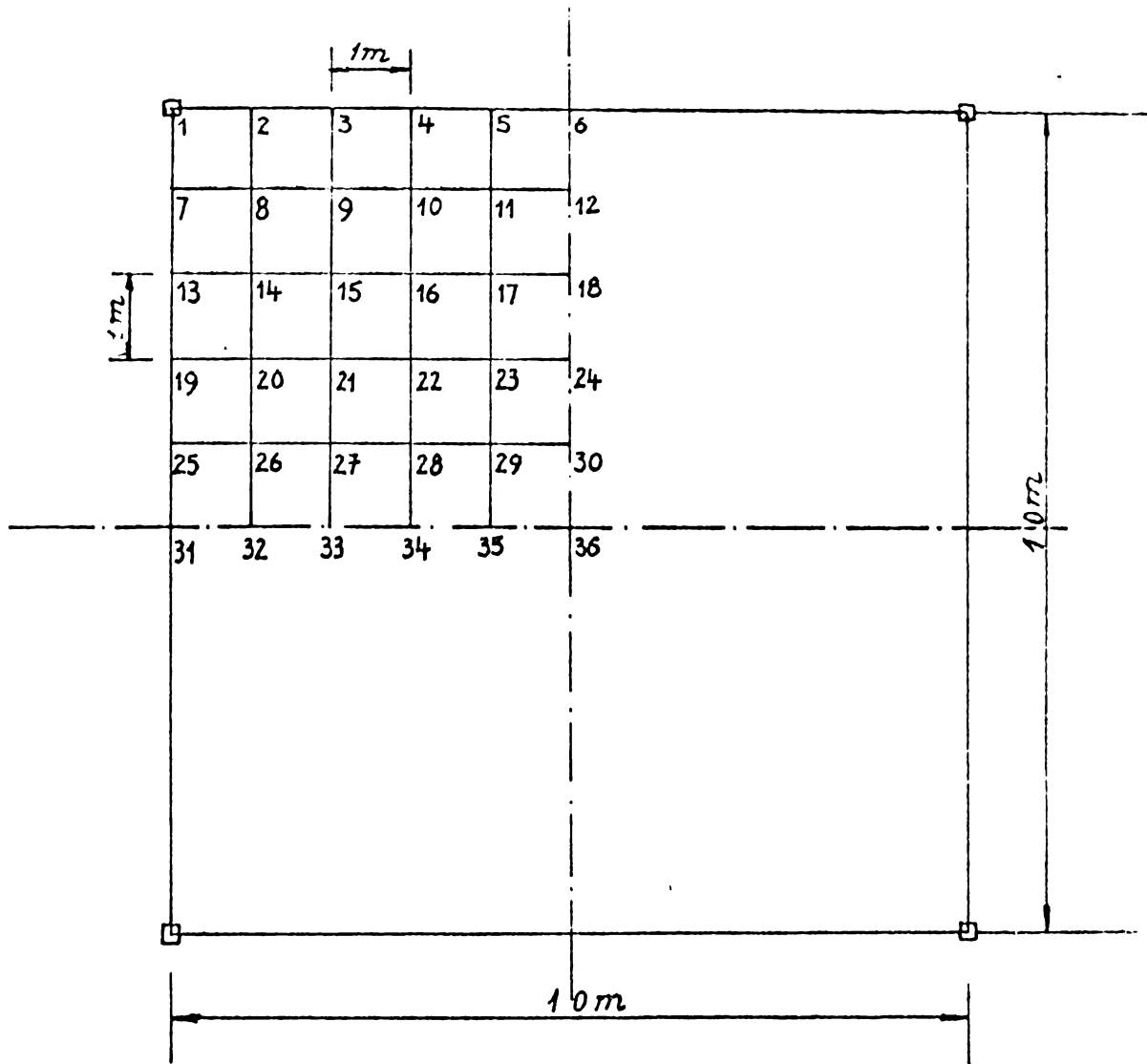


Fig. 4.14

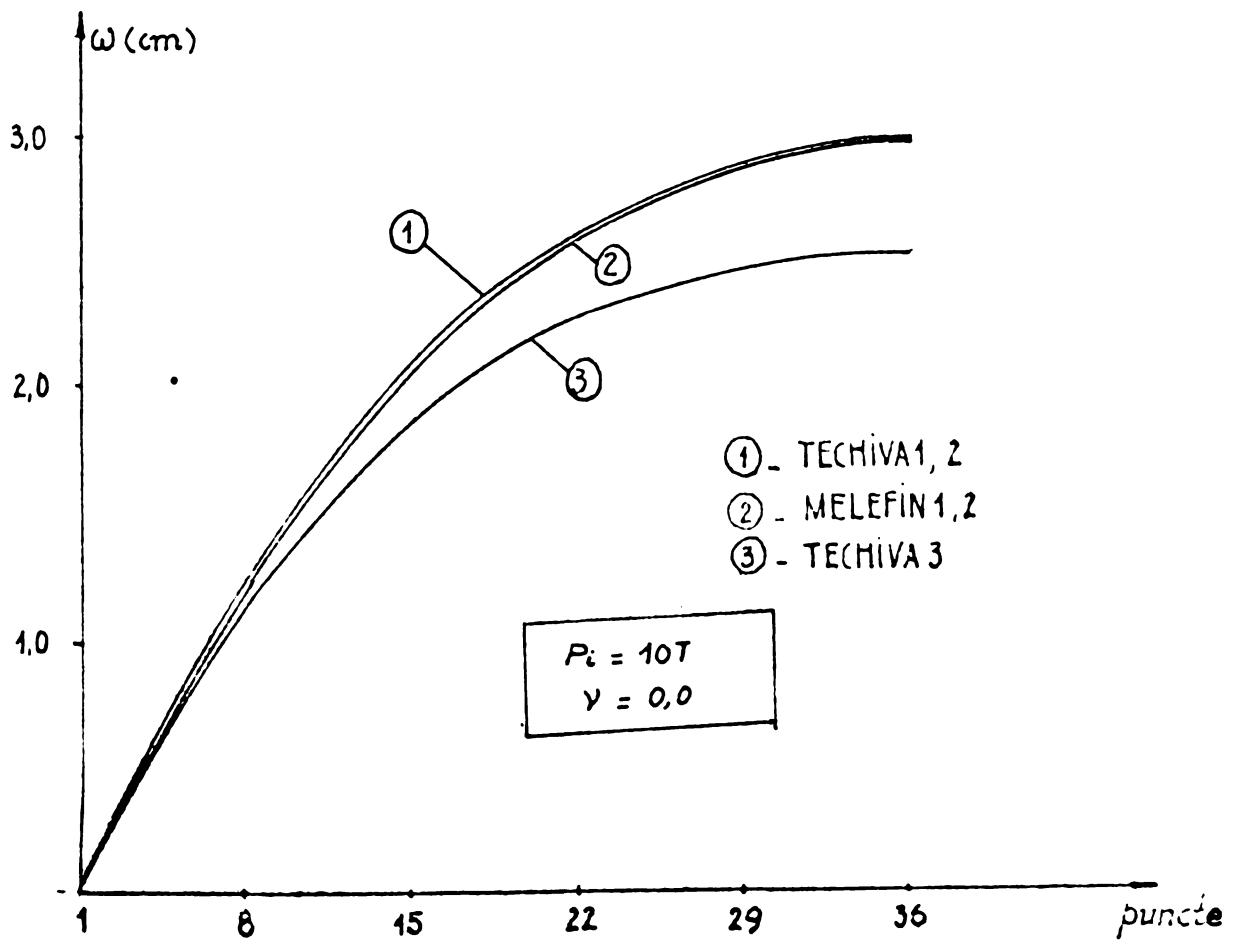


Fig. 4.15

Tab. IV-14

Rezultate obținute pentru săgețile w (cm)

Exem. N° 5 - $P_i = 10 t$ - $\nu = 0,0$

Puncte	TECHIVA1	TECHIVA2	MELEFIN1	MELEFIN2	MELEFIN3	TECHIVA3	
						$\nu=0$	$\nu=0,3$
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	1,26	1,26	1,23	1,22	1,23	0,90	1,17
15	2,10	2,10	2,07	2,06	2,07	1,45	1,88
22	2,62	2,62	2,59	2,59	2,59	1,76	2,28
29	2,89	2,89	2,87	2,88	2,87	1,91	2,47
36	2,98	2,98	2,96	2,97	2,95	1,95	2,53
31	2,17	2,17	2,13	2,09	2,12	1,65	2,14
32	2,41	2,41	2,38	2,36	2,38	1,71	2,22
33	2,64	2,64	2,61	2,60	2,60	1,79	2,32
34	2,82	2,82	2,79	2,80	2,79	1,87	2,43
35	2,94	2,94	2,91	2,92	2,91	1,93	2,50
36	2,98	2,98	2,96	2,97	2,95	1,95	2,53

Tab. IV-15

Rezultate obtinute pentru momentele $M_x(t)$

Exemp. N° 5 - $P_i = 10t$ - $v = 0,00$

Puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	MELEFIN3	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3
1	- 1,94	- 14,80	- 1,94	- 33,16	- 33,16	- 34,06
2	23,45	25,02	23,45	28,73	28,73	39,91
3	30,57	31,56	30,56	34,24	34,24	48,45
4	35,25	35,76	35,24	37,98	37,98	56,12
5	37,77	38,23	37,77	40,18	40,18	60,30
6	38,63	39,03	38,63	40,90	40,90	61,66
31	0,05	2,12	0,05	3,54	3,54	- 18,22
32	4,30	4,28	4,30	3,61	3,61	- 10,10
33	9,13	9,89	9,14	8,46	8,46	- 0,87
34	13,38	14,36	13,39	12,77	12,77	9,74
35	16,25	17,30	16,26	15,67	15,67	15,22
36	17,25	18,32	17,26	16,68	16,66	17,10

Tab. IV-16

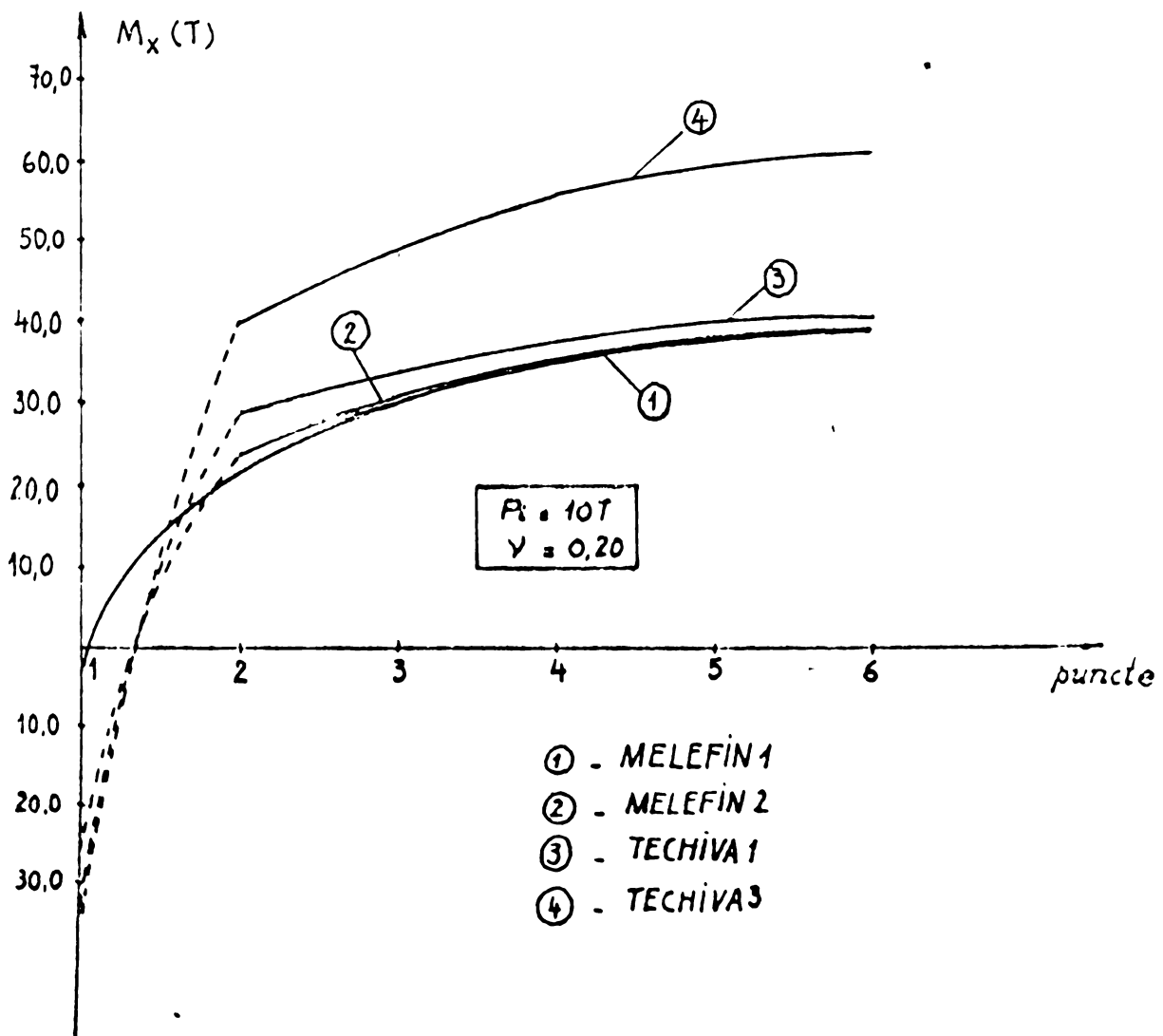
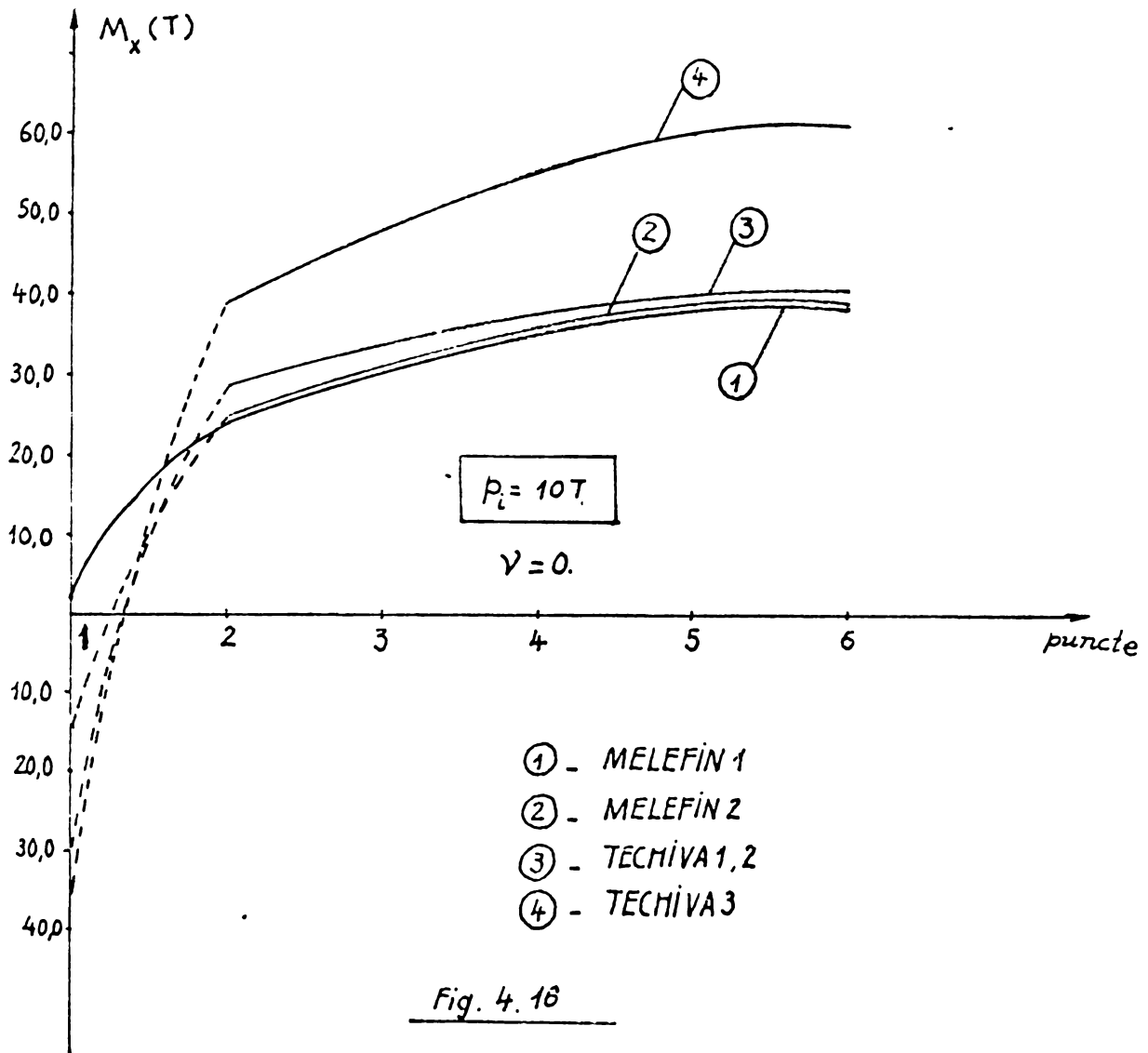
Rezultate obținute pentru săgețile w (cm)Exempl. № 5 - $P_i = 10t$ - $\nu = 0,2$

Puncte	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3	MELEFIN1	MELEFIN2	Rezultatele obținute de Absci E., [2]	Rezultatele obținute de Bilge M., [2] (*)
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	1,23	1,22	1,13	1,18	1,17	1,17	1,16
15	2,05	1,99	1,81	1,95	1,93	1,94	1,91
22	2,55	2,45	2,20	2,40	2,39	2,44	2,35
29	2,82	2,68	2,38	2,63	2,63	2,70	2,58
36	2,90	2,75	2,44	2,70	2,70	2,83	2,68
31	2,12	2,18	2,06	2,13	2,07	2,02	2,10
32	2,35	2,33	2,13	2,28	2,24	2,29	2,27
33	2,57	2,48	2,24	2,44	2,42	2,51	2,42
34	2,72	2,62	2,34	2,57	2,57	2,67	2,56
35	2,86	2,71	2,41	2,67	2,67	2,78	2,66
36	2,90	2,75	2,44	2,70	2,70	2,83	2,68

Tab. IV-17 Rezultate obținute pentru momentele $M_x(t)$

Exemp. N° 5 - $P_t = 10t - v = 0,2$

Puncte	TECHIVA1	TECHIVA2	TECHIVA3	MELEFIN1	MELEFIN2
1	-33,15	-31,40	-33,99	-3,00	-25,72
2	28,71	32,89	39,83	22,18	23,93
3	34,22	40,10	48,32	30,17	30,74
4	37,97	44,23	55,96	35,33	35,41
5	40,16	46,50	60,10	38,15	38,16
6	40,88	47,16	61,47	39,06	39,06
31	-3,54	0,95	-18,17	0,08	-2,31
32	3,60	2,85	-10,04	4,63	4,80
33	8,45	5,95	1,15	9,43	10,56
34	12,76	10,25	9,67	13,54	14,96
35	15,55	13,25	15,13	16,27	17,81
36	16,66	14,32	17,01	17,23	18,80



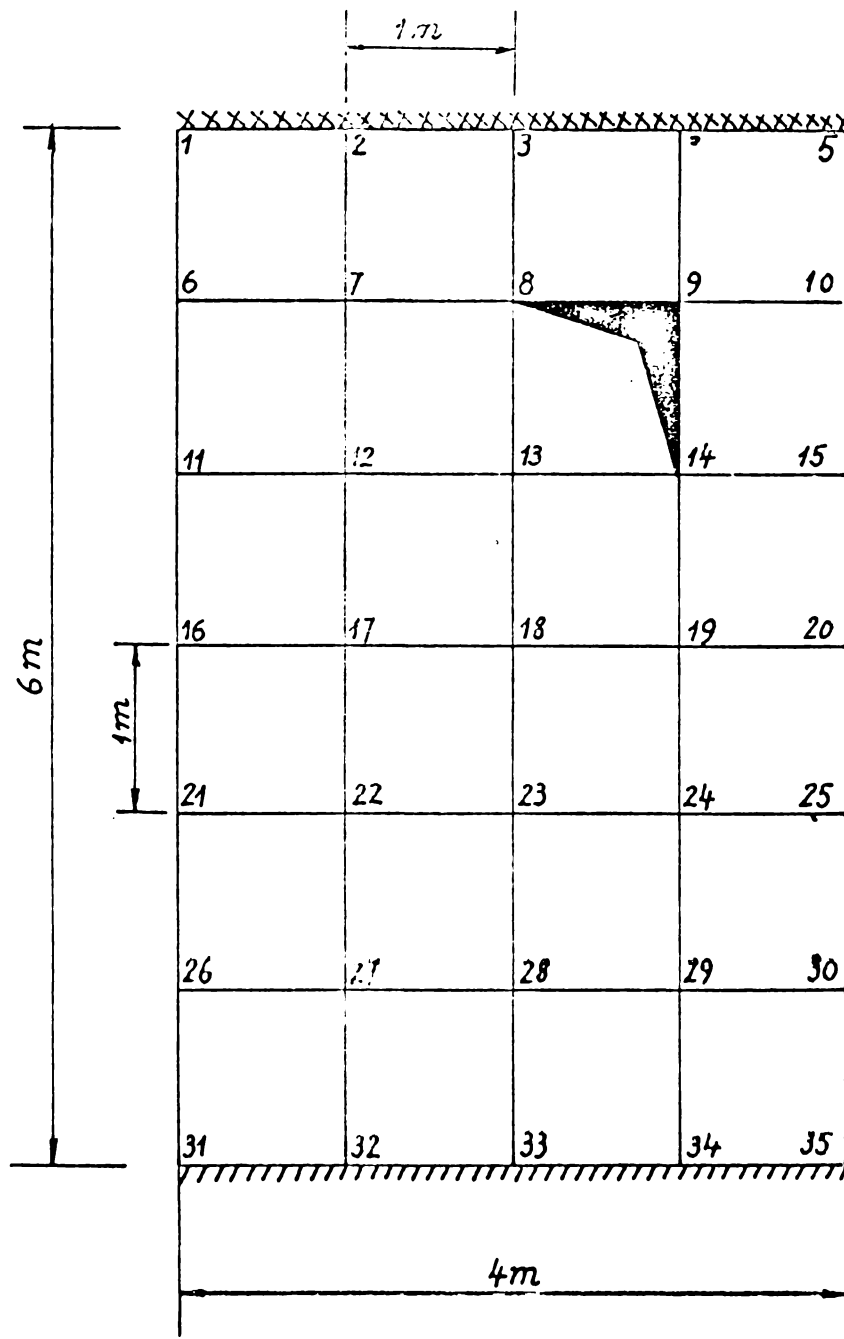
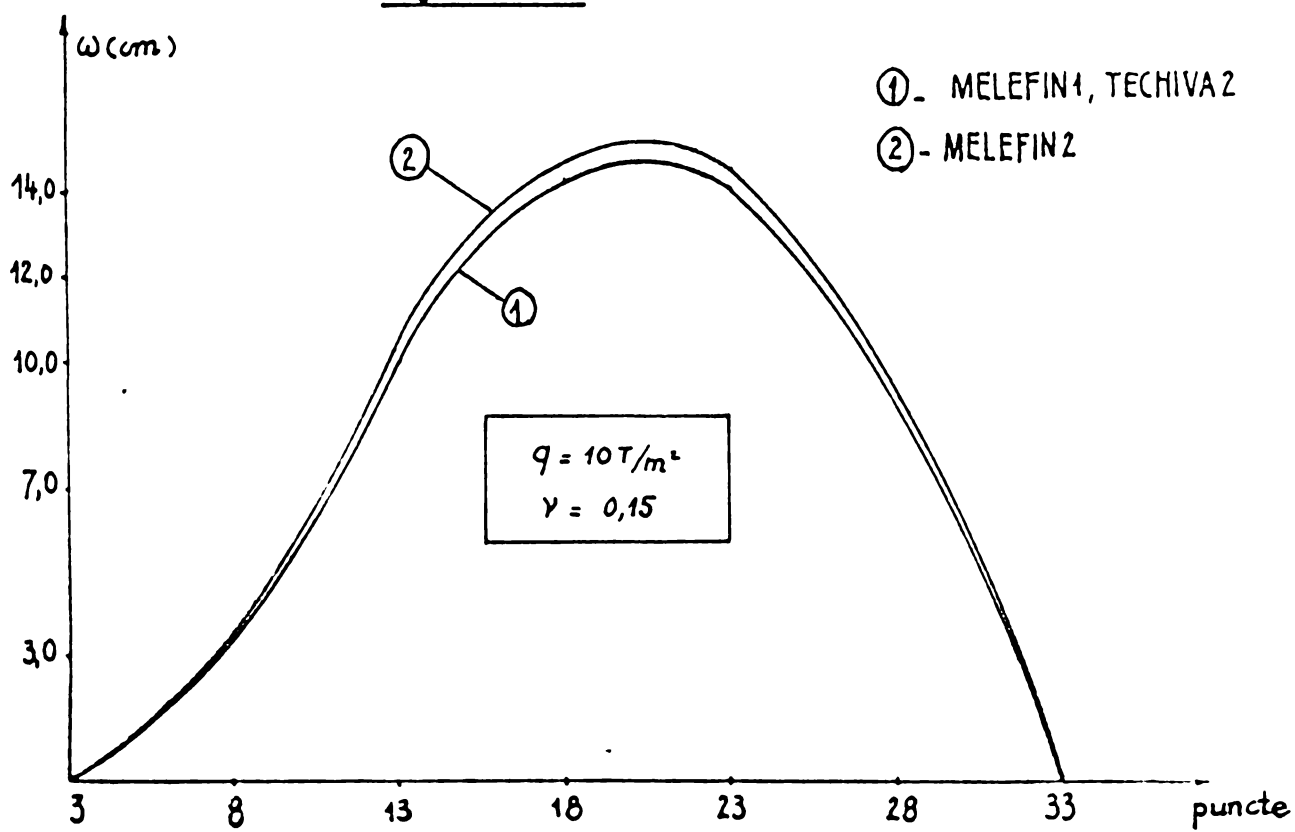


Fig. 4.18



Tab. IV-18 Rezultate obținute pentru săgețile ω (cm)

Exemp. N° 6 - $p = 10 \text{ t/m}^2$ - $\nu = 0,15$

Puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA 1	TECHIVA 2
3	0,00	0,00	0,00	0,00
8	3,43	3,52	3,02	3,43
13	9,95	10,03	8,75	9,98
18	14,25	14,66	12,50	14,24
23	13,95	14,44	12,27	13,98
28	8,70	8,95	7,63	8,69
33	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. IV-19 Rezultate obținute pt. momentele M_y (t)

Exemp. N° 6 - $p = 10 \text{ t/m}^2$ - $\nu = 0,15$

puncte	MELEFIN1	MELEFIN2	TECHIVA 1	TECHIVA 2
3	- 43,22	- 43,13	- 43,32	- 43,84
8	- 14,58	- 15,10	- 14,41	- 15,53
13	14,04	14,41	13,91	13,54
18	22,83	22,82	23,06	23,75
23	25,06	25,38	25,42	26,47
28	17,49	17,69	17,72	17,60
33	0,02	0,07	0,00	0,09

Exemplul este prezentat cu scopul controlării aplicației programelor la plăcile cu goluri.

Rezultatele obținute cu programele menționate sînt comparate între ele, în tabelele IV-18 și diagramele din fig.4.19.

4.7. Concluzii asupra rezultatelor obținute.

Din cele șase exemple mai sus menționate, se observă că formulele de calcul, matricile elementare și programele de calcul sînt bine determinate.

Calcululele de verificare au dat rezultate bune atît pentru deplasări cît și pentru eforturi, obținîndu-se rezultate bune atît calitativ cît și cantitativ.

Din rezultatele obținute pentru cele cinci tipuri de plăci studiate, se desprind următoarele concluzii :

1. Pentru plăcile simplu rezemate în colțuri (exemplul 1 și exemplul 5), rezultatele obținute pentru deplasări sînt mult mai bune decît cele obținute pentru eforturi. În colțurile plăcii, valorile eforturilor obținute nu sînt în concordanță cu situația reală de rezemare (vezi fig.4.16 și 4.17).

2. Pentru placa cu grosimea variabilă, rezultatele obținute pentru eforturi pot fi îmbunătățite dacă se folosește o rețea mai deasă de elemente finite, plecînd de la ipoteza că în domeniul fiecărui element finit se consideră o valoare constantă atît pentru grosime cît și pentru încărcare.

3. Pentru alte plăci studiate, valorile obținute cu ajutorul programelor MELEFIN 1, 2 și TECHIVA 1, 2, sînt bune pentru deplasări și eforturi, iar cele obținute cu TECHIVA 3 nu sînt bune decît luînd coeficientul Poisson egal cu $1/3$ și pentru grosimea prea mică a plăcii.

4. În cazul valorilor nule pentru coeficientul Poisson, programele TECHIVA 1, 2 și MELEFIN 1, dau rezultate foarte apropiate între ele.

5. În punctele situate de-a lungul marginilor libere, valorile obținute pentru eforturi cu MELEFIN 1, 2, sînt mai apropiate de realitate decît cele obținute cu TECHIVA 1, 2. Aceasta arată că condițiile de margine influențează mai mult rezultatele de calcul în teoria echivalențelor decît în metoda elementelor finite.

6. Rezultatele obținute cu programele menționate (exclusiv TECHIVA 3), în majoritatea cazurilor, sînt apropiate de cele obținute de alți autori pe cale teoretică sau experimentală.

Rezultatele obținute în urma calculului celor șase exemple, deși puține la număr, ne permit să tragem concluzia posibilității aplicării, cu rezultate bune, a teoriilor prezentate și a programelor de calcul elaborate, și la alte tipuri de plăci elastice izotrope, care se folosesc în practică.

CAPITOLUL V.

APLICATII LA CALCULUL PLACILOR ELASTICE ORTOTROPE

5.1. Introducere.

Progresele tehnice remarcabile realizate în ultimele decenii în domeniul construcțiilor s-au datorat mai multor cauze : cunoașterea mai aprofundată a caracteristicilor materialelor, fabricarea unor noi materiale cu proprietăți fizico-mecanice superioare, perfecționarea concepțiilor de proiectare și progresul metodelor de calcul, perfecționarea metodelor de execuție și montaj, etc.

În privința perfecționării concepțiilor de proiectare și a metodelor de calcul se menționează :

- folosirea structurilor multiplu static nedeterminate;
- luarea în considerare a comportării spațiale a structurilor complexe;
- aplicarea principiului cumulării funcțiilor;
- utilizarea secțiunilor cu nervuri dese sau casetate, avantaioase din punct de vedere al repartiției transversale a sarcinilor.

Plăcile ortotrope, alcătuite din table și nervuri de rigidizare pe una sau două direcții ortogonale, îmbină în mod avantajos lucru de placă al tablei și cel de grindă al nervurilor, permițând obținerea unei mari rigidități la încovoiere și la torsiune cu un consum de material minim.

Metodele de calcul sînt extrem de complexe și în teoria plăcilor ortotrope se pot distinge mai multe etape atît din punct de vedere cronologic cît și al ipotezelor de bază.

Cea mai larg aplicată metodă pentru calculul plăcilor cu nervuri de rigidizare constă în netezirea structurii, adică în distribuirea nervurilor pe suprafața plăcii, astfel încît ansamblul să devină un mediu continuu ortotrop.

De aceea, se consideră o placă ortotropă ca un continuum elastic avînd comportările fizico-mecanice sau geometrice variabile după două direcții ortogonale. Vom putea utiliza metoda elementelor finite pentru analiza acestei categorii de plăci.

În categoria plăcilor intră mai multe tipuri de structuri și anume :

a. Plăci cu ortotropie de material.

- Plăci din placaj.
- Plăci din beton armat avînd armarea pe două direcții ortogonale.

b. Plăci cu ortotropie geometrică.

- Plăci ondulate.
- Plăci cu nervuri de rigidizare simetrică sau nesimetrică.
- Plăci celulare tip fagure.
- kețele de grinzi în casete.

Toate aceste tipuri mai sus menționate de plăci ortotrope pot fi studiate cu ajutorul aceleiași ecuații fundamentale a teoriei plăcii subțiri elastice ortotrope /64/.

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(K_y + 2K_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (5.1)$$

unde : K_x - rigiditatea la încovoiere a plăcii ortotrope în direcția x;

K_y - rigiditatea la încovoiere a plăcii ortotrope în direcția y;

K_y - rigiditatea la încovoiere datorită deformației transversale a plăcii ortotrope;

K_{xy} - rigiditatea la torsiune a plăcii ortotrope.

Aceste caracteristici de rigiditate, în general, se determină pentru unitatea de lungime a secțiunii prin placă, normală pe axa respectivă. Ele au expresii diferite pentru fiecare tip de placă considerată.

În acest capitol folosind programele MELEFIN 3, MELEFIN 4, TECHIVA 4 și TECHIVA 5 se analizează câteva tipuri de plăci ortotrope din cele sus menționate.

5.2. Utilizarea programelor de calcul elaborate în calculul plăcilor ortotrope.

Pentru utilizarea programelor sus menționate la calculul diferitelor tipuri de plăci ortotrope, la început, trebuie să se determine caracteristicile de rigiditate K_i ale matricilor de rigiditate $[K]$ și matricea de transformare $[BD]$ pentru elementul finit.

Caracteristicile K_3 și K_5 sînt egale cu zero datorită ortotropiei.

De aceea, în cele ce urmează, se vor determina numai patru dintre cele șase caracteristici pentru fiecare tip de plăci considerate.

5.2.1. Placă din beton armat.

Caracteristicile de rigiditate ale elementului finit pe placa din beton armat avînd armare pe două direcții ortogonale, sînt determinate de formulele propuse de Huber M.T. /45/ :

$$\begin{aligned} K_1 = K_x &= \frac{E_b}{1-\nu^2} [I_{bx} + (n-1) I_{ax}] \\ K_4 = K_y &= \frac{E_b}{1-\nu^2} [I_{by} + (n-1) I_{ay}] \\ K_2 = K_\nu &= \nu \sqrt{K_1 K_4} \\ K_6 = 2K_{xy} &= (1-\nu) \sqrt{K_1 K_4} \end{aligned} \quad (5.2)$$

unde : I_{bx} - momentul de inerție al betonului din placă luat în raport cu axa neutră a secțiunii $x = \text{const.}$;

I_{ax} - momentul de inerție al armăturii luat în raport cu axa neutră a secțiunii $x = \text{const.}$;

I_{by} și I_{ay} - momentele de inerție ale betonului și respectiv ale armăturii luate în raport cu axa neutră a secțiunii $y = \text{const.}$;

E_b - modulul de elasticitate al betonului;

E_a - modulul de elasticitate al oțelului;

n - coeficientul de echivalență $n = E_a/E_b$;

ν - coeficientul lui Poisson.

5.2.2. Placa întărită prin nervuri echidistante după una din direcții. (fig.5.1).

Pentru placa întărită simetric în raport cu planul său median așa cum se arată în fig.5.1, caracteristicile de rigiditate sînt determinate prin formulele propuse de Lehnitzki /50/ :

$$K_1 = K_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$K_4 = K_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'I}{a_1}$$

$$K_2 = K_y = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$K_6 = 2K_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \quad (5.3)$$

- unde :
- E - modulul de elasticitate al materialului plăcii;
 - E' - modulul de elasticitate al materialului nervurilor;
 - I - momentul de inerție al unei nervuri luat în raport cu axa neutră a secțiunii plăcii;
 - a₁ - distanța dintre două nervuri;
 - h - grosimea plăcii;
 - ν - coeficientul lui Poisson.

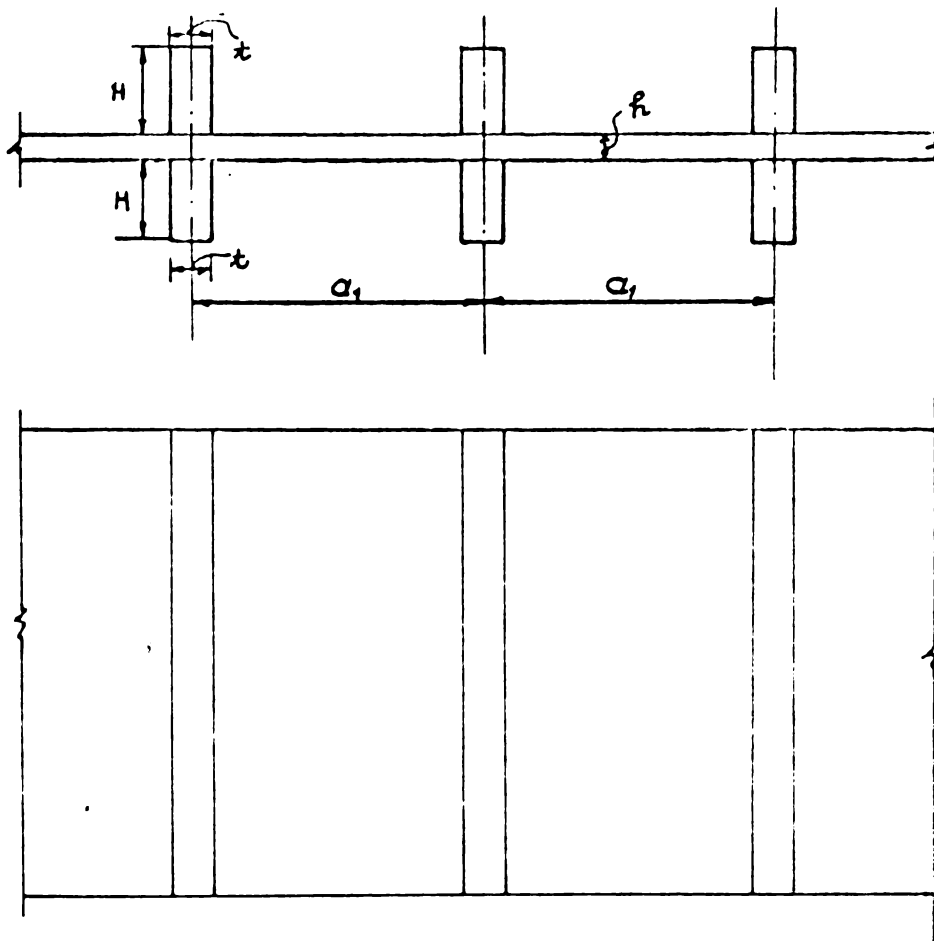


Fig. 5.1

5.2.3. Placa întărită cu două șiruri ortogonale de nervuri echidistante după fiecare direcție.

Pentru placa întărită cu nervurile de rigidizare așezate simetric în raport cu planul său median, caracteristicile de rigiditate ale elementului finit sînt determinate de formulele propuse de Lehnitzki /50/ :

$$\begin{aligned}
 K_1 = K_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'I_x}{a_x} \\
 K_4 = K_y &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'I_y}{a_y} \\
 K_2 = K_\nu &= \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\
 K_6 = 2K_{xy} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

- în care :
- I_x - momentul de inerție al unei nervuri în secțiunea $x = \text{const.}$;
 - I_y - momentul de inerție al unei nervuri în secțiunea $y = \text{const.}$;
 - a_x - distanța dintre axele celor două nervuri paralele cu distanța x ;
 - a_y - distanța dintre axele celor două nervuri paralele cu direcția y ;
 - E - modulul de elasticitate al materialului plăcii;
 - E' - modulul de elasticitate al nervurilor;
 - h - grosimea plăcii;
 - ν - coeficientul lui Poisson.

5.2.4. Placa întărită de un șir de nervuri echidistante așezate pe o singură față a plăcii.

În acest caz, caracteristicile de rigiditate ale elementului finit sînt determinate de formulele propuse de Lehnitzki /50/.

$$K_1 = K_x = \frac{Ea_y h^3}{12(a_y - t + \alpha^3 t)}$$

$$K_4 = K_y = \frac{EI}{a_1}$$

$$K_2 = K_y = 0 \quad (5.5)$$

$$K_6 = 2K_{xy} = K_p + \frac{K_N}{2a_1}$$

- unde : I - momentul de inerție al secțiunii de formă T avînd lățimea a_1 ;
 a_1 - distanța dintre axele celor două nervuri;
H și t - dimensiunile secțiunii transversale ale unei nervuri;
h - grosimea plăcii;
 $\alpha = h/H$;
 K_p - rigiditatea la torsiune a plăcii fără nervuri;
 K_N - rigiditatea la torsiune a unei nervuri;
E - modulul de elasticitate al materialului.

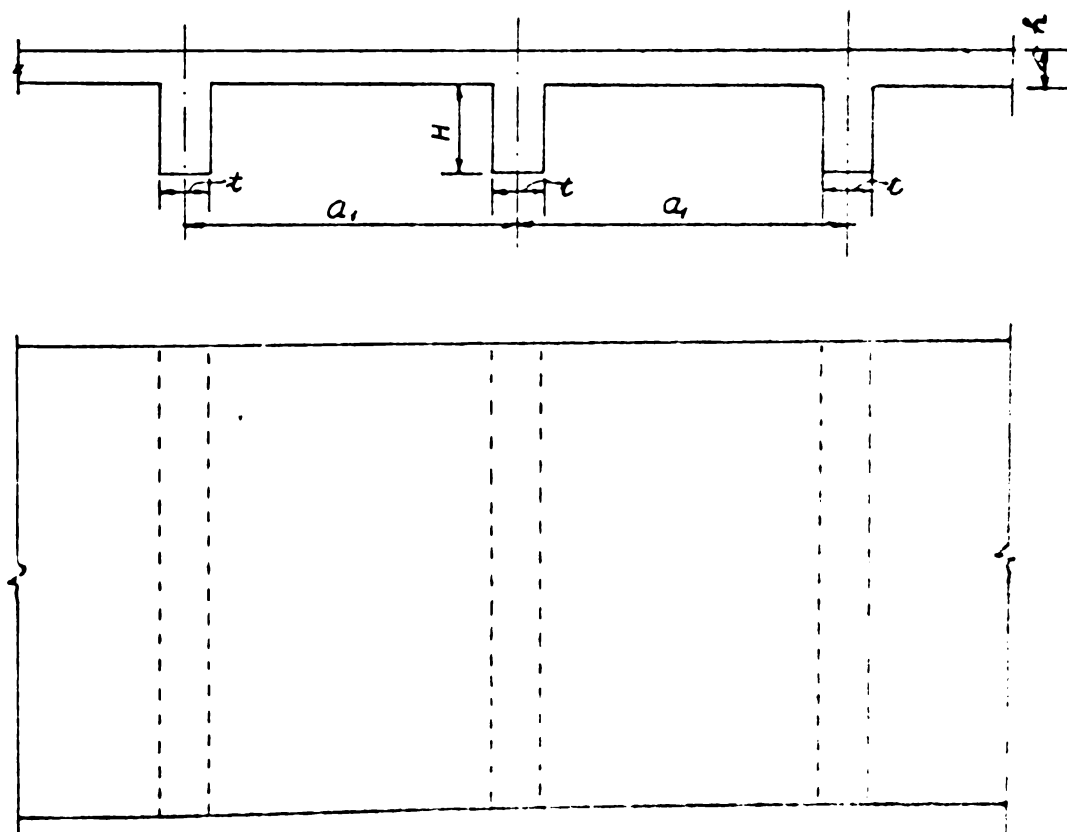
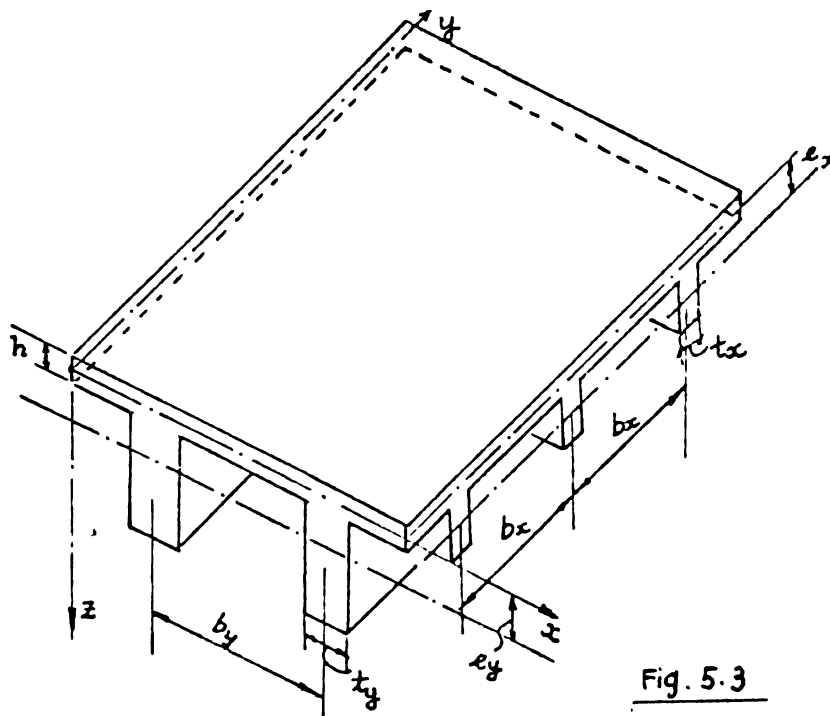


Fig. 5.2

5.2.5. Placa întărită cu două șiruri de nervuri echidis-
tante așezate pe o singură față a plăcii.

Tipul general de placă este prezentat în fig.5.3.



Caracteristicile de rigiditate ale elementului finit sînt determinate de formulele propuse de Soare M. /80/, dar pentru a corespunde matricii rigidităților elementului finit introduse în programele de calcul elaborate, este necesar modificarea caracteristicii de torsiune K_6 :

$$\begin{aligned}
 K_1 = K_x &= \frac{EI_x}{b_x} \\
 K_4 = K_y &= \frac{EI_y}{b_y} \\
 K_2 = K_y &= \nu (K_0 + K_0' e_x e_y) \\
 K_6 = 2K_{xy} &= \sqrt{K_{6x}^2 + K_{6y}^2}
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

în care :

$$K_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{rigiditatea la încovoiere a plăcii} \tag{5.7}$$

$$K_o' = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \quad \text{rigiditatea axială a plăcii} \quad (5.8)$$

$$K_{6x} = (1 - \nu) \left[K_o + e_x (e_x + e_y) \frac{K_o'}{2} \right] + 2K_{Nx} \quad (5.9)$$

$$K_{6y} = (1 - \nu) \left[K_o + e_y (e_x + e_y) \frac{K_o'}{2} \right] + 2K_{Ny} \quad (5.10)$$

$$K_{Nx} = \frac{Gt_x^3 A_{xN}}{3b_x} \quad \text{rigiditatea la torsiune a nervurii paralele cu axa x;} \quad (5.11)$$

$$K_{Ny} = \frac{Gt_y^2 \cdot A_{yN}}{3b_y} \quad \text{rigiditatea la torsiune a nervurii paralele cu axa y;} \quad (5.12)$$

- t_x - grosimea nervurii paralele cu axa x;
- t_y - grosimea nervurii paralele cu axa y;
- b_x - interaxul nervurilor paralele cu axa x;
- b_y - interaxul nervurilor paralele cu axa y;
- A_{xn} - aria secțiunii transversale a nervurii în direcția x;
- A_{yn} - aria secțiunii transversale a nervurii în direcția y;
- I_x - momentul de inerție al secțiunii nervurii paralele cu axa x în $x = \text{const.}$, luat în raport cu axa centrului de greutate al secțiunii;
- I_y - momentul de inerție al secțiunii nervurii paralele cu axa y în $y = \text{const.}$, luat în raport cu axa centrului de greutate al secțiunii;
- h - grosimea plăcii;
- e_x - cota centrului de greutate al ariei A_{xn} în raport cu planul median al plăcii;
- e_y - cota centrului de greutate al ariei A_{yn} în raport cu planul median al plăcii;
- E - modulul de elasticitate al materialului;
- ν - coeficientul lui Poisson.

5.2.6. Rețeaua ortogonală de grinzi dese (fig.5.4).

Un astfel de sistem constă din două șiruri de grinzi așezate la distanțe egale între ele după fiecare direcție (x și y) și legate rigid în punctele lor de intersecție.

Dacă distanța a_1 și b_1 între grinzi sînt mici, în comparație cu dimensiunile plăcii, caracteristicile de rigiditate se pot determina prin formule propuse de S. Timoshenko /89/.

$$\begin{aligned} K_1 = K_x &= \frac{B_1}{b_1} \\ K_4 = K_y &= \frac{B_2}{a_1} \\ K_2 = K_y &= 0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

iar, K_6 poate fi exprimat în funcție de rigiditățile la torsiune C_1 și C_2 ale grinzilor paralele cu axele x și respectiv y .

Pentru aceasta, se consideră răsucirea unui element, așa cum se arată în fig. 5.4b și rezultă următoarele relații dintre momentele de torsiune și curba de torsiune $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$

$$M_{xy} = \frac{C_1}{b_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad M_{yx} = \frac{C_2}{a_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \tag{5.14}$$

De aceea, caracterul rigidității la torsiune K_6 se determină cu următoarea formulă :

$$K_6 = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1}{b_1} + \frac{C_2}{a_1} \right) \tag{5.15}$$

în formulele menționate mai sus s-au notat :

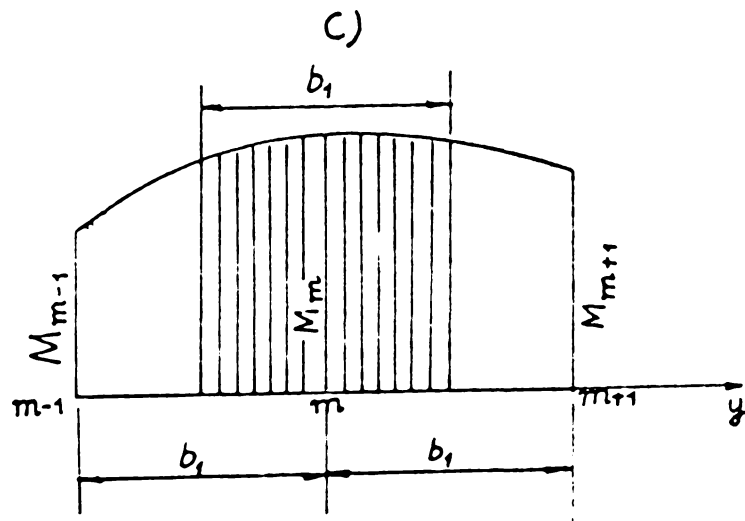
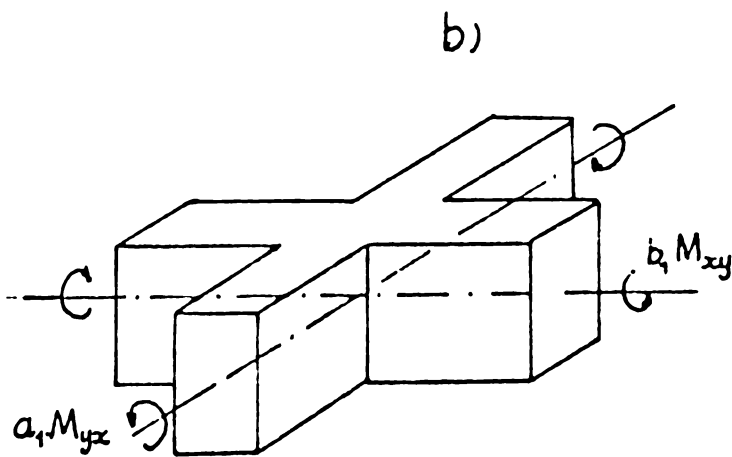
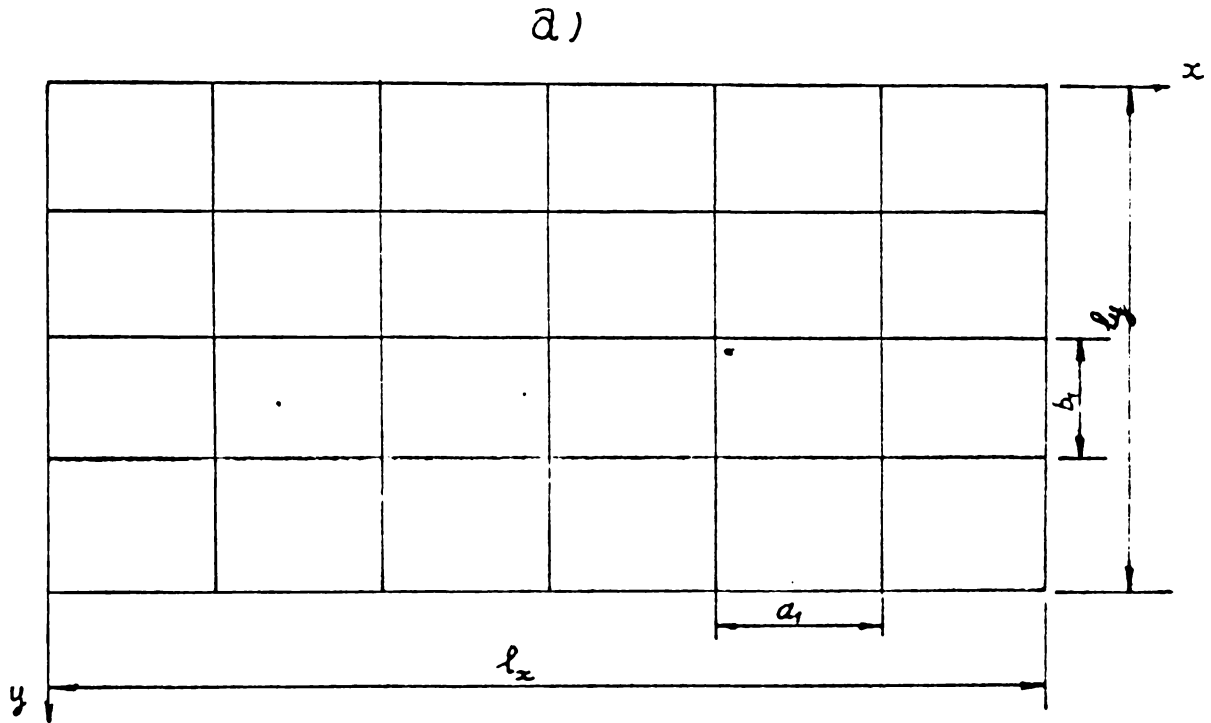
- B_1 - rigiditatea la încovoiere a fiecărei grinzi paralele cu axa x ;
- B_2 - rigiditatea la încovoiere a fiecărei grinzi paralele cu axa y ;
- a_1 - distanța între grinzile paralele cu axa x ;
- b_1 - distanța între grinzile paralele cu axa y ;
- C_1 - rigiditatea la torsiune a fiecărei grinzi paralele cu axa x ;
- C_2 - rigiditatea la torsiune a fiecărei grinzi paralele cu axa y .

Caracteristicile B_1 , B_2 , C_1 , C_2 sînt determinate cu ajutorul binecunoscutelor rezistențe ale materialelor /22/.

Toate formulele prezentate mai sus se pot utiliza în calculul planșelor cu rețele de grinzi casetate.

Pentru a obține momentele finale de încovoiere și de torsiune a unei grinzi vom avea încă de multiplicat momentele valabile pentru unitatea de lățime de rețea cu distanța dintre grinzi.

Variația momentelor, de exemplu M_x sau M_{xy} , poate fi admisă parabolică între punctele consecutive, după cum se arată în fig.5.4c.



5.2.7. Tabla ondulată.

Se consideră o tablă ondulată prezentată în fig.5.5 de forma :

$$z = f \sin \frac{\pi x^2}{l} \quad (5.16)$$

unde : f - amplitudinea maximă a arcului de semiundă;
 l - pasul ondulei.

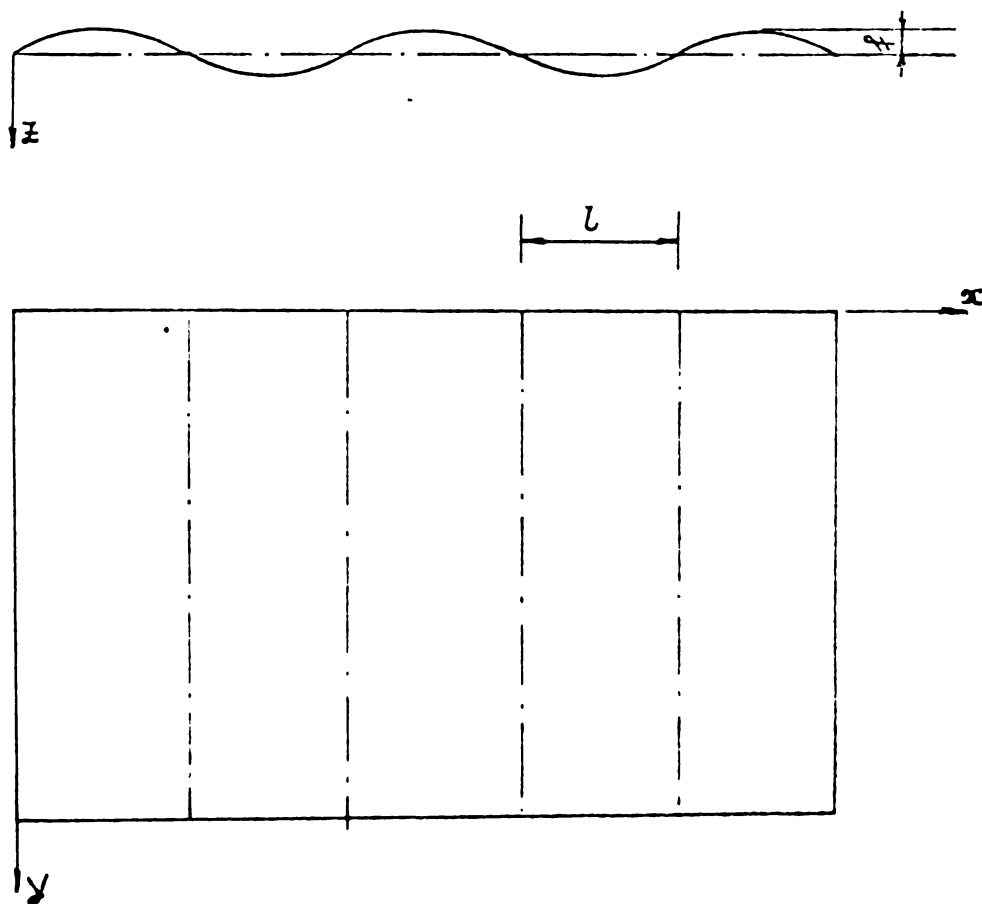


Fig. 5.5

Caracteristicile de rigiditate ale elementului finit sînt determinate de formulele propuse de E. Seydel /82/ :

$$K_1 = K_x = \frac{l}{12} \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)}$$

$$K_4 = K_y = EI \quad (5.17)$$

$$K_2 = K_\nu = 0$$

$$K_6 = 2K_{xy} = \frac{l}{12} \frac{Eh^3}{(1+\nu)}$$

în care : s și I sînt evaluate aproximativ cu următoarele formule :

$$s = l \left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{4l^2} \right) \quad (5.18)$$

$$I = \frac{f^2 h}{2} \left(1 - \frac{0,81}{1 + 2,5 \left(\frac{f}{2l} \right)^2} \right) \quad (5.19)$$

unde : h - grosimea tablei;
 s - lungimea arcului de semiundă;
 E - modulul de elasticitate;
 ν - coeficientul lui Poisson.

5.3. Exemple de calcul.

Se prezintă cele patru exemple de calcul efectuate cu ajutorul programelor MELEFIN 3, MELEFIN 4, TECHIVA 4 și TECHIVA 5, și anume :

1. placa de beton armat;
2. placa cu nervuri de rigidizare pe o singură parte;
3. placa cu rețea de grinzi ortogonale;
4. placa ondulată.

Se efectuează și o analiză comparativă a rezultatelor proprii cu cele obținute de diverși autori pe cale teoretică sau experimentală.

5.3.1. Exemplul de calcul nr.1.

Se calculează o placă patrată din beton armat simplu rezemată pe toate laturile și încărcată cu o forță concentrată la centrul plăcii $P = 25$ t.

Dimensiunile plăcii și armăturile sale sînt prezentate în fig.5.6.

Celelalte date de calcul sînt :

$$E_b = 190000 \text{ daN/cm}^2.$$

$$E_a = 2.100.000 \text{ daN/cm}^2.$$

$$\nu = 0,2.$$

$$n = \frac{E_a}{E_b} = 11.$$

Calculul este realizat pe un sfert de placă datorită simetriei plăcii.

Se presupun, în calculul deplasărilor și eforturilor plăcii trei ipoteze de rigiditate ale secțiunii transversale de beton armat.

1. $K = E_b I_b$

2. $K = 0,6 E_b I_b$

3. K este evaluat de formulele (5.2)

Rețeaua discretizată este aleasă cu 25 elemente dreptunghiulare diferite.

Exemplul se extrage din lucrarea /72/ în care placa este încercată cu încărcări statice.

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul V-1 și diagrama din fig.5.7, inclusiv rezultatele experimentale extrase din /72/.

5.3.2. Exemplul de calcul nr.2.

Se calculează un planșeu cu rețeaua de grinzi în casete peste o sală 8 x 12 m, prezentată în fig.5.8.

Planșeul este simplu rezemat pe contur.

Rețeaua de grinzi paralelă cu laturile planșeului.

Distanțele între grinzi după cele două direcții sînt aceleași și egale cu $a = 2$ m.

Planșeul este încărcat cu încărcări permanente și utile cu $q = 0,6$ t/m².

Deci, sarcina concentrată în noduri revine la :

$$P_1 = 2,00 \times 2,00 \times 0,6 = 2,4 \text{ t.}$$

Dimensiunile secțiunilor grinzilor după ambele direcții sînt aceleași și egale cu 40 x 18 cm.

Calculul este efectuat cu și fără luarea în considerație a torsiunii.

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul V-2, V-3 și diagramele din fig.5.9 și 5.10 inclusiv rezultatele extrase din /20/ care sînt obținute prin calcul, neglijînd torsiunea.

5.3.3. Exemplul de calcul nr.3.

Se calculează o placă ortotropă cu nervuri de rigidizare pe o singură parte la care rigiditățile la încovoiere după cele

două direcții sînt mult diferite. (fig.5.11).

Secțiunile transversale prin placă necesare stabilirii tuturor caracteristicilor de calcul sînt date în fig.5.11.

Constantele elastice ale materialului sînt :

$$E = 0,21 \times 10^7 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\nu = 0,3$$

$$G = \frac{E}{0,6}$$

Se presupune că placa este încărcată de sarcina liniară constantă $p = 100 \text{ daN/cm}$ pe linia de mijloc a plăcii cu axa x .

Rețeaua discretizată este aleasă cu 24 elemente dreptunghiulare de $145 \times 89,5 \text{ cm}$.

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul V-4, V-5 și diagramele din fig.5.12, inclusiv rezultatele comparative extrase din lucrarea /80/ care se obțin prin dezvoltarea seriilor trigonometrice cu un singur termen.

5.3.4. Exemplul de calcul nr.4.

Se calculează o tablă ondulată simplu rezemată pe două laturi scurte (fig.5.13).

Tabla este încărcată cu sarcina uniform distribuită $q = 0,2 \text{ t/m}^2$.

Modulul de elasticitate $E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$.

Coeficientul lui Poisson $\nu = 0,2$.

Forma și dimensiunile tablei se arată în fig.5.13.

Rețeaua discretizată este aleasă cu 24 elemente patrute cu laturile de 25 cm .

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelele V-6, V-7 și diagrama din fig.5.18.

5.4. Concluzii asupra rezultatelor obținute.

Din cele patru exemple se poate trage concluzia că formulele de calcul, matricile elementare și programele elaborate au fost determinate corect. Calculele efectuate au dat rezultate bune calitativ și cantitativ atît pentru deplasări cît și pentru eforturi.

Rezultatele obținute pe cele patru tipuri de plăci ortotropice permit să se tragă următoarele concluzii :

1. Programele MELEFIN 3, TECHIVA 4 și TECHIVA 5 dau rezultate apropiate între ele atît pentru deplasări cît și pentru eforturi.

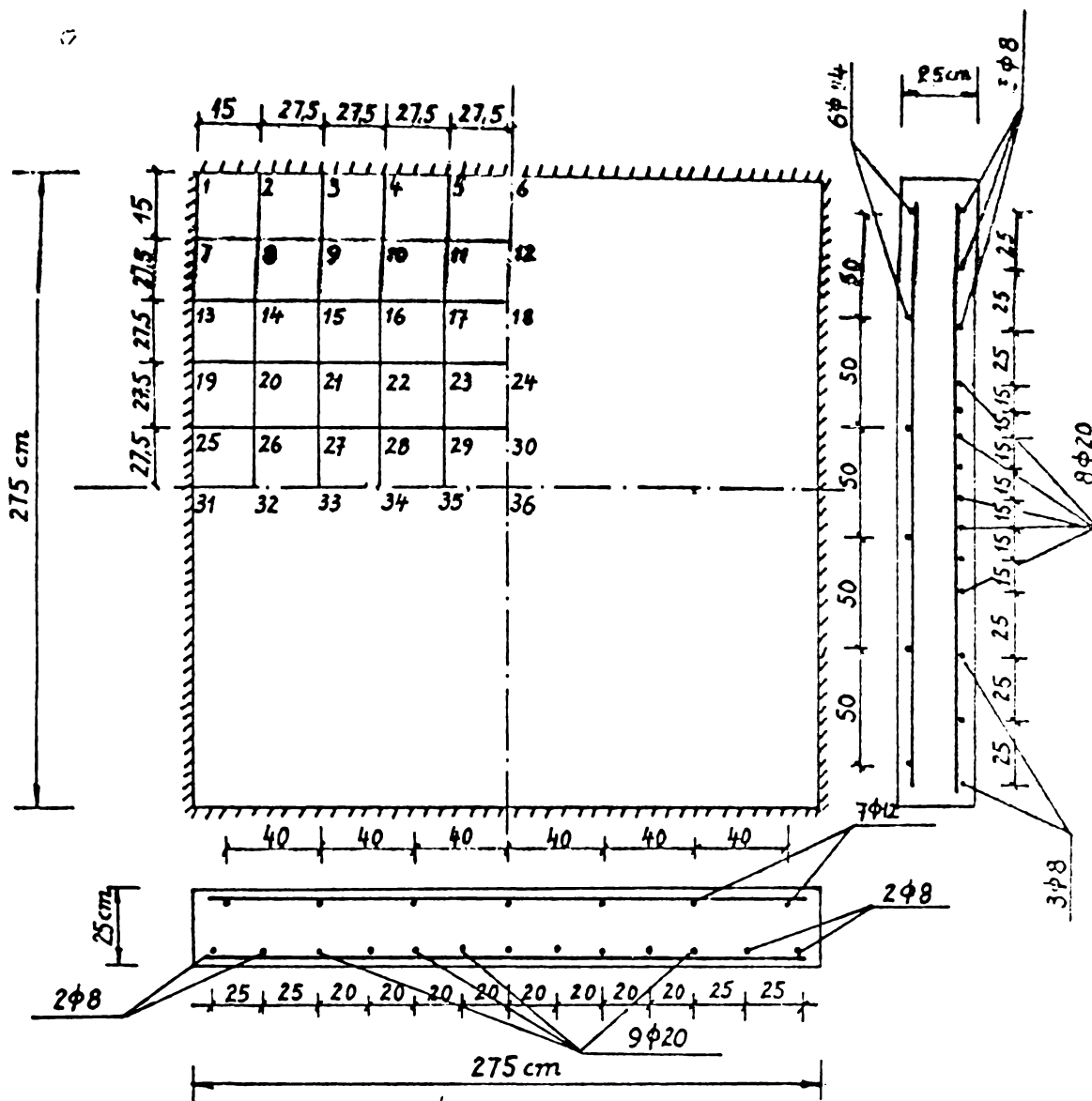


Fig. 5.6

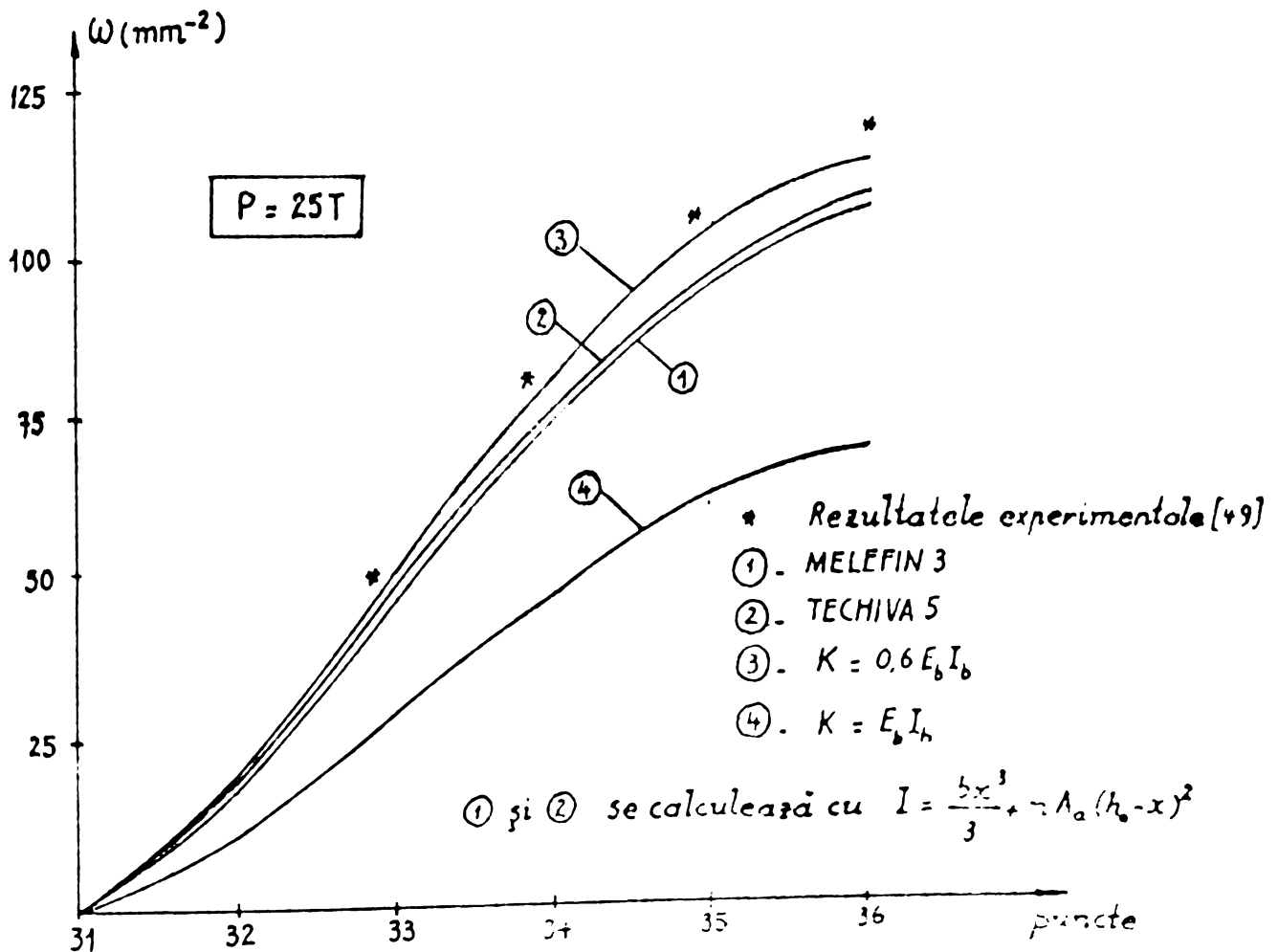


Fig. 5.7

Tab. V-1 Rezultate obținute pt. săgețile w (mm)

Exemp. N° 1

Puncte	MELEFIN3 *	TECHIVA5 *	$K=0,6 E_b I_b$	$K= E_b I_b$	Rezultatele experimentale [72] **
1	0,00	0,00	0,00	0,00	
8	0,03	0,03	0,03	0,02	
15	0,24	0,24	0,24	0,14	
22	0,56	0,58	0,59	0,36	
29	0,90	0,92	0,97	0,58	
36	1,08	1,10	1,19	0,71	1,20
31	0,00	0,00	0,00	0,00	
32	0,17	0,18	0,18	0,11	
33	0,47	0,48	0,50	0,30	
34	0,74	0,76	0,81	0,48	
35	0,97	0,99	1,06	0,63	
36	1,08	1,11	1,19	0,71	1,20

(*) Rezultatele calculate cu $I = \frac{bx^3}{3} + nA_a (r_0 - x)^2$

(**) Rezultatele obținute în punctele care sînt alături de punctele nodale prezentate în acest tabel se prezintă direct în diagrama (fig 5.7)

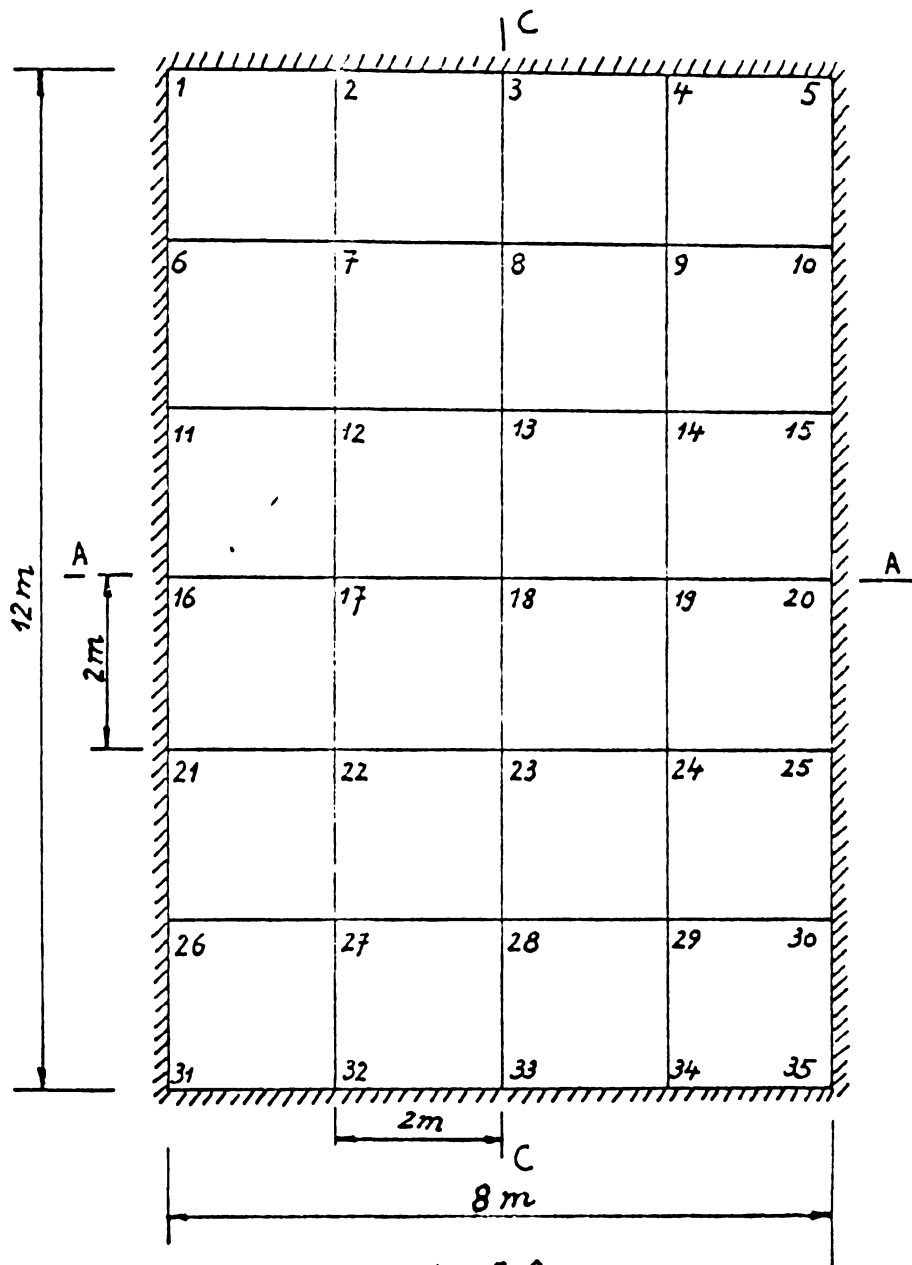


Fig. 5.8

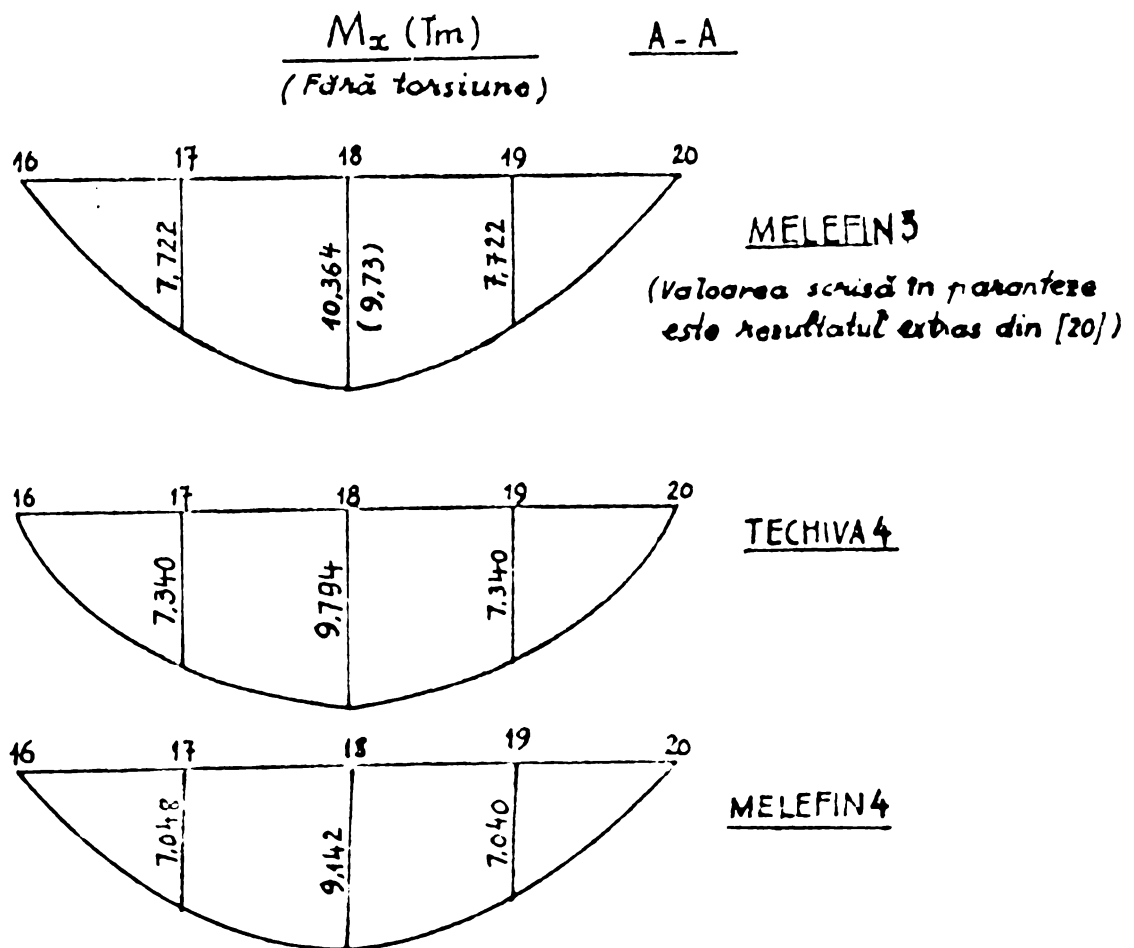


Fig. 5.9

Tab. V-2

Rezultate obținute pt. momentele M_x (tm)

Exemp. N° 2

Puncte	MELEFIN 3		MELEFIN 4		TECHIVA 4		Rezultatele date de Creșteru (*)
	fără torsiune	cu torsiune	fără torsiune	cu torsiune	fără torsiune	cu torsiune	
16	0,000	-0,040	-0,860	-0,300	0,000	-0,60	
17	7,722	5,640	7,060	5,220	7,340	5,690	
18	10,360	7,400	9,140	6,640	9,790	7,430	9,730
19	7,722	5,640	7,060	5,220	7,340	5,690	
20	0,000	0,000	-0,860	-0,300	0,000	-0,600	
11	0,000	-0,020	-0,960	-0,600	0,000	-0,500	
12	6,856	5,020	6,240	4,630	6,500	5,060	
13	9,086	6,500	8,020	5,850	8,590	6,540	8,640
14	6,856	5,020	6,240	4,630	6,500	5,060	
15	0,000	-0,020	-0,960	-0,600	0,000	-0,500	

Tab. V-3

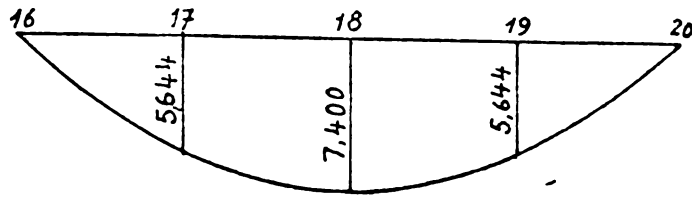
Rezultate obținute pt. momentele M_y (tm)

Exemp. N° 2

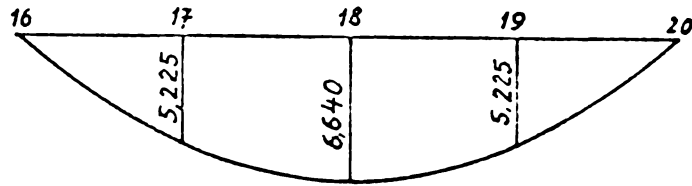
Puncte	MELEFIN 3		MELEFIN 4		TECHIVA 4		Rezultatele date de Creșteru P (*)
	fără torsiune	cu torsiune	fără torsiune	cu torsiune	fără torsiune	cu torsiune	
3	0,000	-0,020	-1,800	-1,140	0,000	-0,900	
8	3,370	2,538	3,090	2,358	3,150	2,620	
13	3,950	2,823	3,280	2,419	3,720	2,909	
18	3,820	2,714	3,280	2,370	3,670	2,816	3,690
23	3,950	2,823	3,280	2,419	3,720	2,909	
28	3,370	2,538	3,090	2,358	3,150	2,620	
33	0,000	0,000	-1,800	-1,140	0,000	-0,900	

(*) Rezultatele obținute cu neglijarea rigidității de torsiune

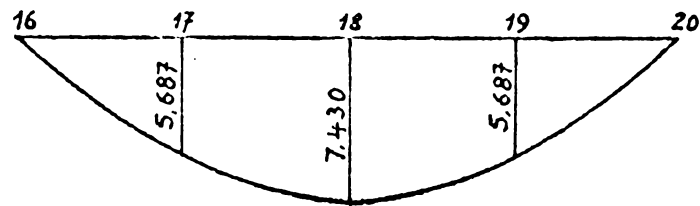
$M_x (Tm)$ A - A
(cu rigiditate de torsiune)



MELEFIN 3

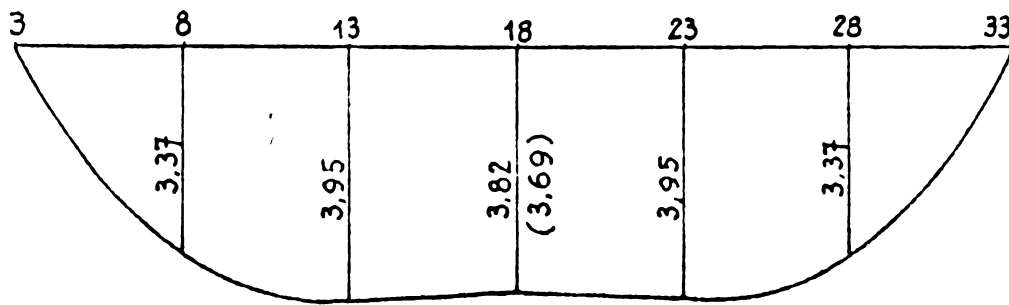


MELEFIN 4



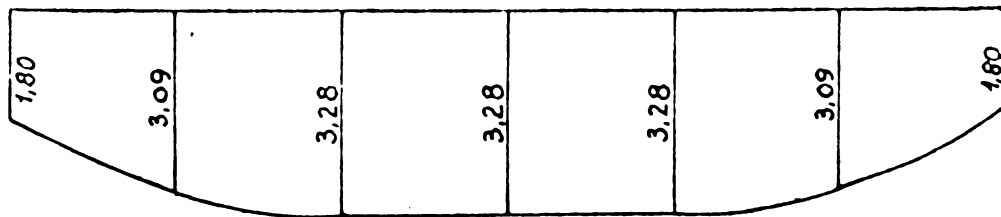
TECHIVA 4

$M_y (Tm)$ C - C
(fără torsiune)

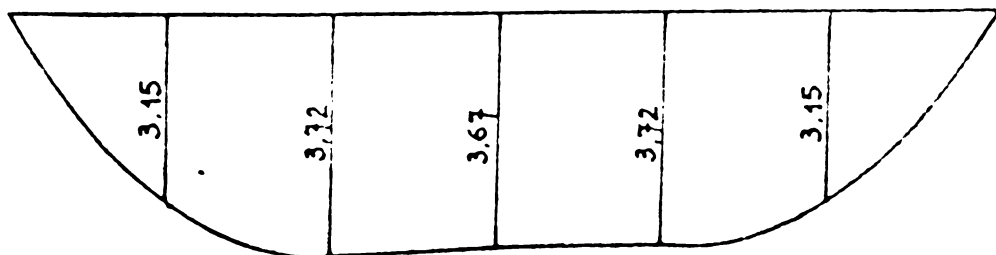


MELEFIN 3

valoarea scrisă în paranteze este extrasă din [20]



MELEFIN 4



TECHIVA 4

Fig 5.10

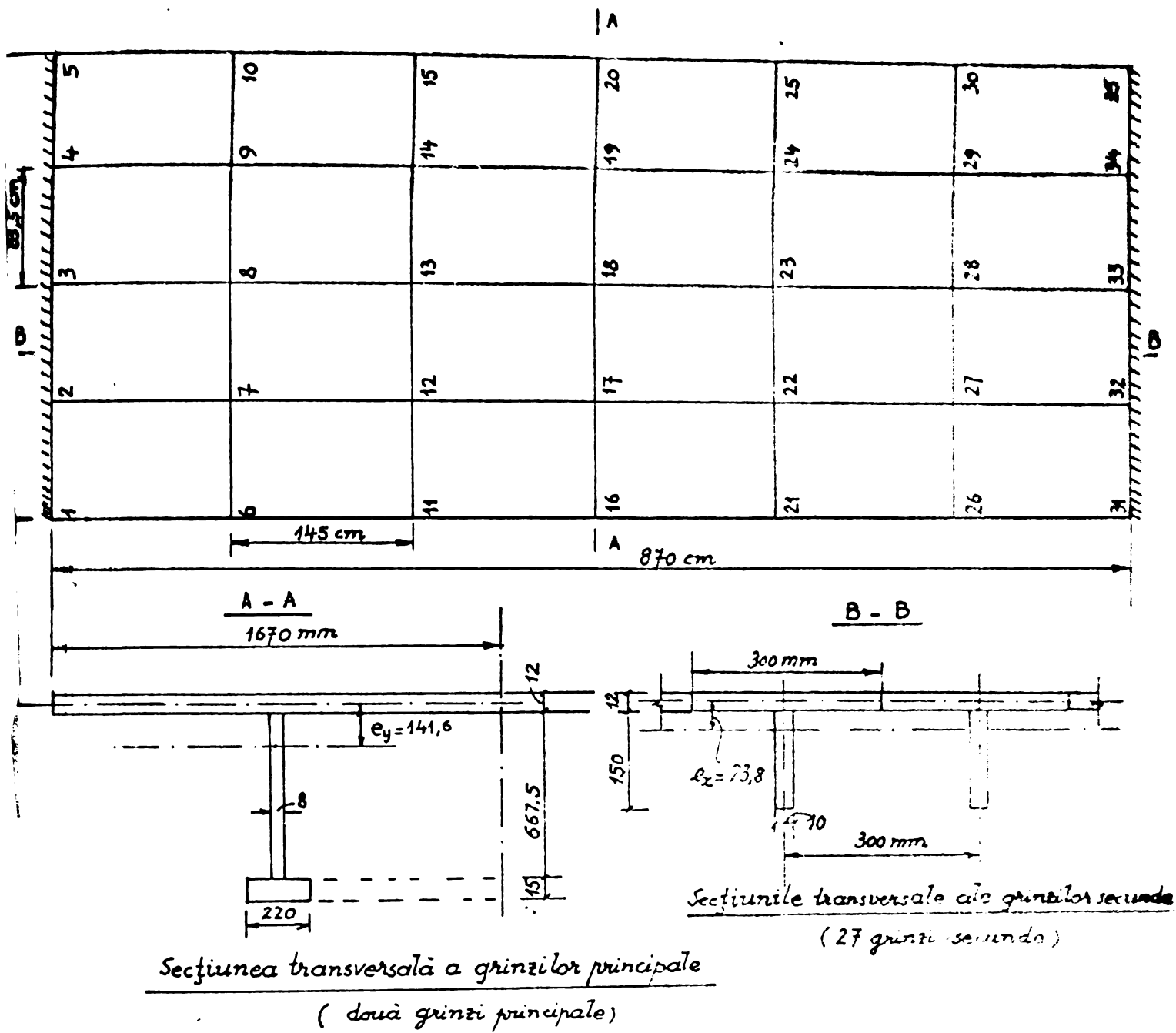
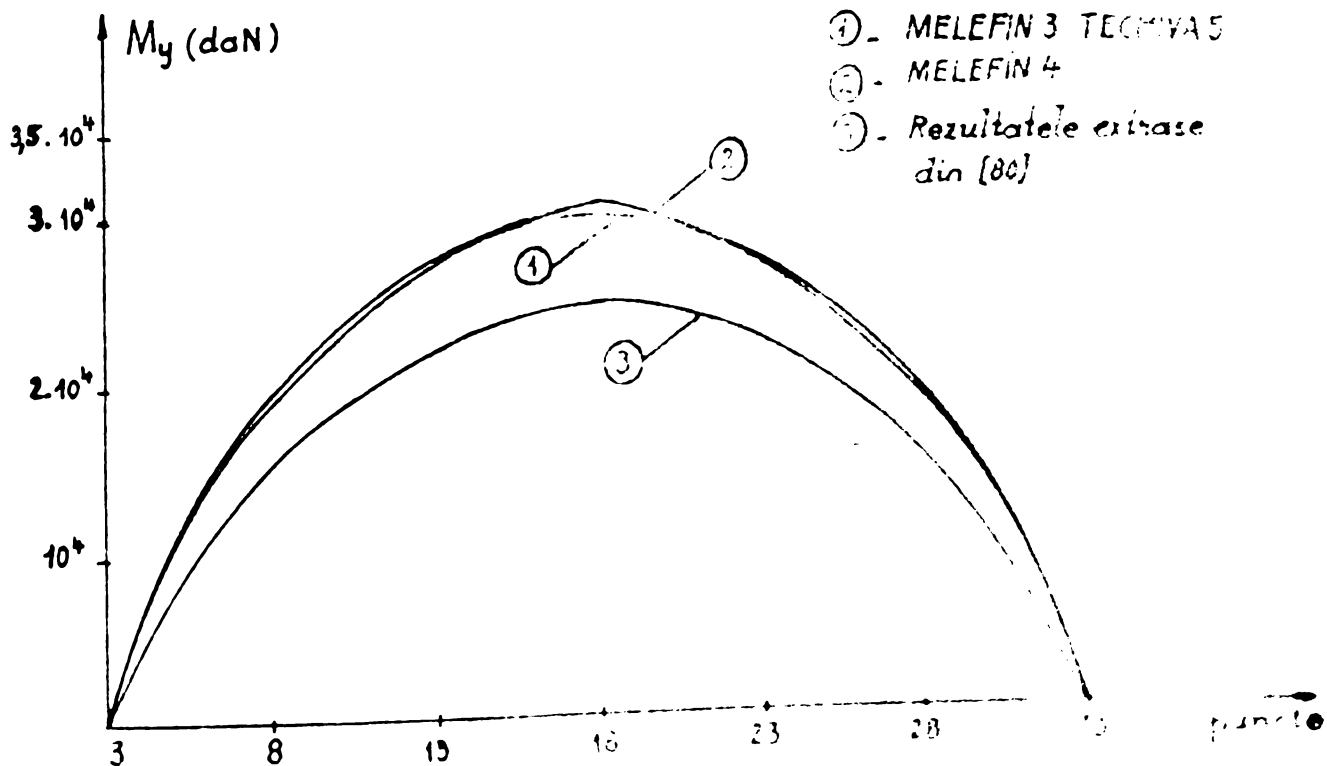


Fig. 5. 11



Tab. V-4 Rezultate obținute pt. săgețile w (cm)

Exemp. N° 3

puncte	MELEFIN 3	MELEFIN 4	TECHIVA 5	Rezultatele date de M. Soare [80]
3	0,00	0,00	0,00	0,00
8	0,55	0,53	0,55	0,43
13	0,94	0,91	0,94	0,74
18	1,07	1,04	1,08	0,84
23	0,94	0,91	0,94	0,74
28	0,55	0,53	0,55	0,43
33	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. V-5 Rezultate obținute pt. momentele M_y (daN)

Exemp. N° 3

puncte	MELEFIN 3	MELEFIN 4	TECHIVA 5	Rezultatele date de M. Soare [80]
3	413	789	879	0,00
8	19145	18330	20032	16103
13	27695	27115	28700	22303
18	30630	31090	31460	24151
23	27695	27115	28700	22303
28	19145	18330	20032	16103
33	413	789	879	0,00

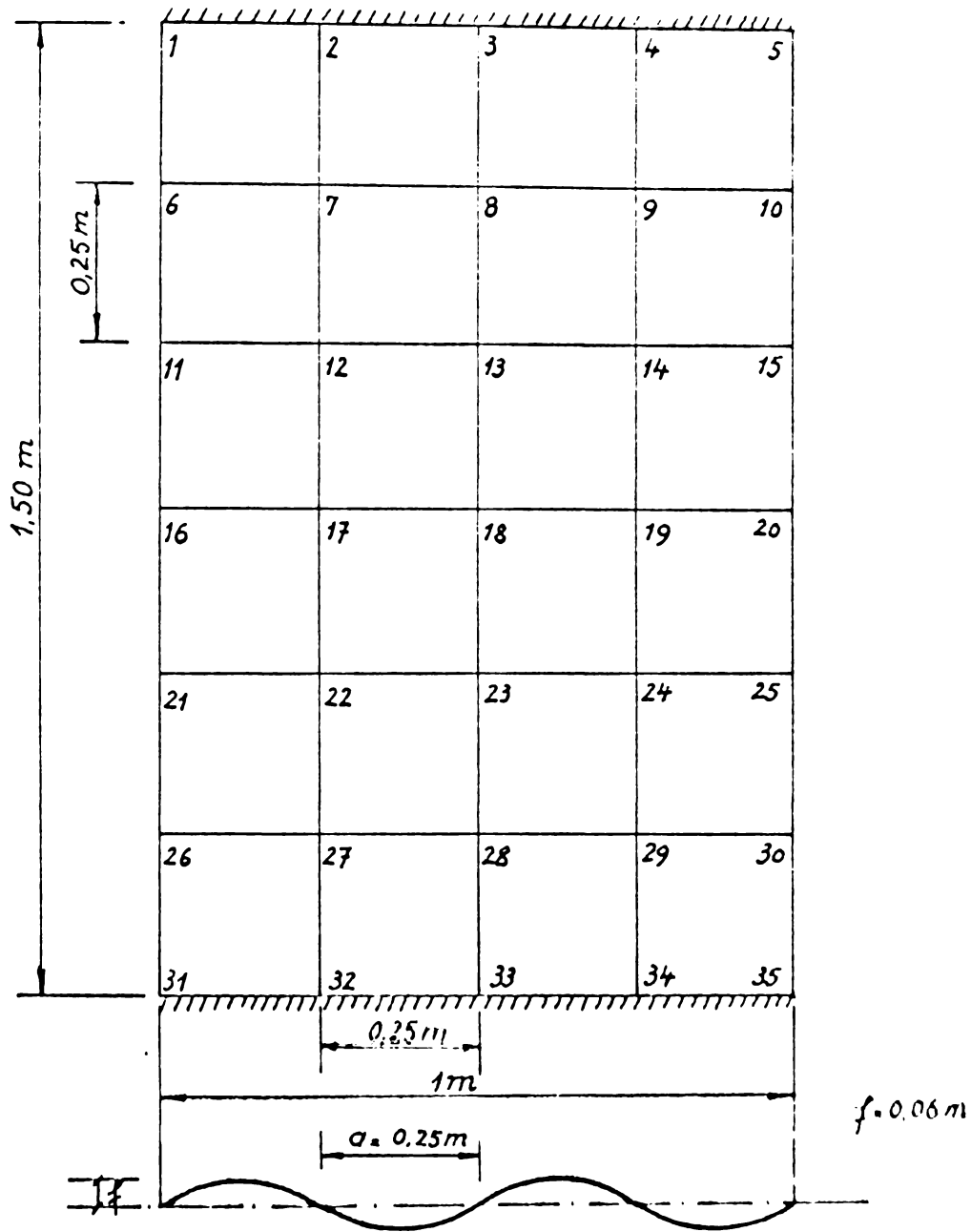


Fig. 5.13

ω

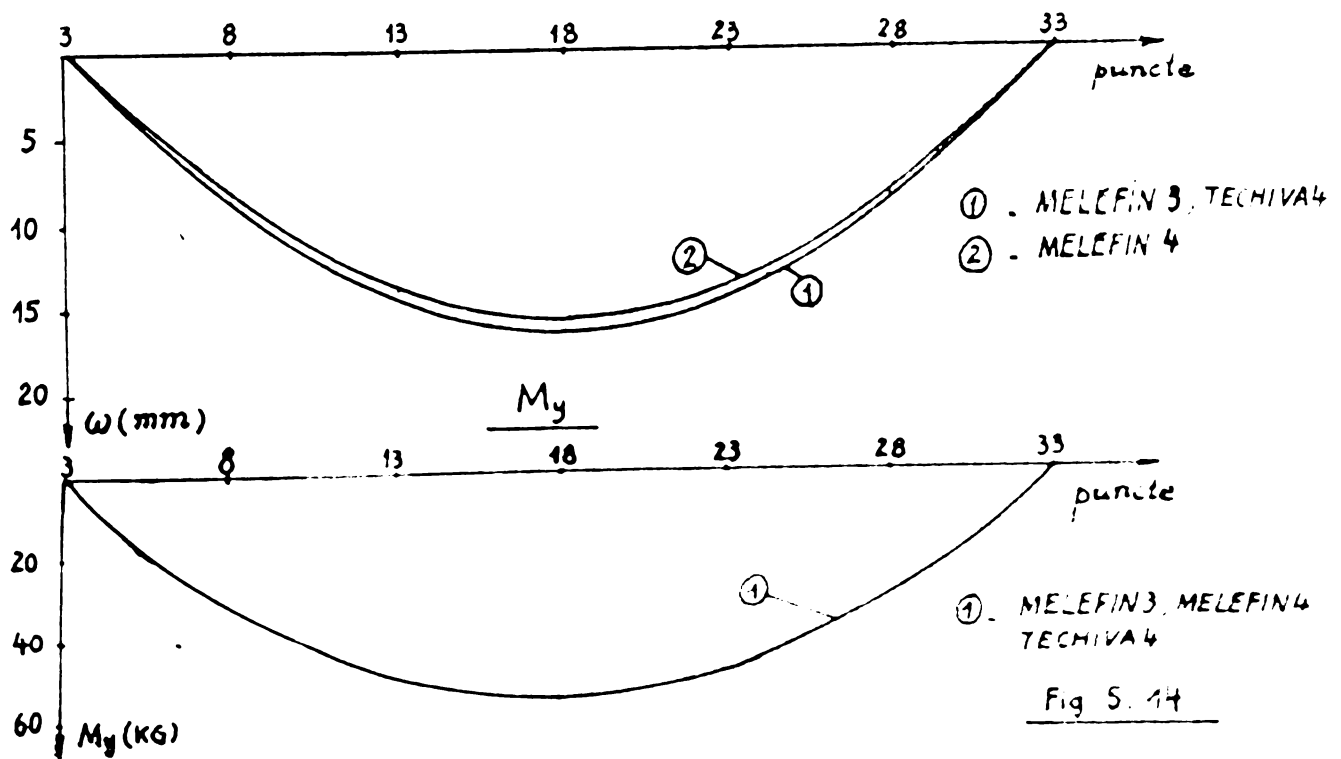


Fig. 5.14

Tab. V-6 Rezultate obținute pt. săgețile w (cm)

(Exemp. N° 4)

puncte	MELEFIN3	MELEFIN 4	TECHIVA 4
3	0,00	0,00	0,00
8	0,83	0,81	0,83
13	1,43	1,39	1,42
18	1,64	1,60	1,64
23	1,43	1,39	1,42
28	0,83	0,81	0,83
33	0,00	0,00	0,00

Tab. V-7 Rezultate obținute pt. momentele M_y (T)

(Exemp. N° 4)

puncte	MELEFIN3	MELEFIN 4	TECHIVA 4
3	0,000	- 0,002	0,000
8	0,031	0,031	0,031
13	0,050	0,049	0,050
18	0,056	0,055	0,056
23	0,050	0,049	0,050
28	0,031	0,031	0,031
33	0,000	- 0,002	0,000

2. MELEFIN 3 și TECHIVA 4 dau cele mai bune rezultate în cazul plăcilor ortotrope avînd caracteristica de rigiditate $D_{\gamma} = 0$.

3. Exemplul nr.2 arată că neglijarea rigidității la torziune, în cazul rețelelor de grinzi ortogonale legate rigid în noduri, aduce erori considerabile în rezultatele de calcul.

4. Diferențele dintre rezultatele obținute pentru exemplul nr.3 și cele extrase din /80/ prezentate în tabelele V-4 și V-5, se pot datora următoarelor cauze :

- efectuării calculelor de către /80/ cu luarea în considerare a unui singur termen în dezvoltarea seriilor trigonometrice ;
- considerării în studiile proprii a rigidității la torziune egală după cele două direcții;-

Valorile obținute pentru eforturi și deplasări prin programele propuse, apropiate de valorile obținute de alți autori, pe cale teoretică sau experimentală, ne permit să tragem concluzia că metodele de calcul prezentate și programele elaborate pot fi extinse cu rezultate bune și asupra altor tipuri de plăci elastice avînd ortotropie geometrică sau de material, care se folosesc în practică.

CAPITOLUL VI.

C O N C L U Z I I

Rezultatele obținute din studiile și calculele din precedentele capitole, ne permit să tragem următoarele concluzii :

1. Folosirea metodei elementelor finite și a teoriei echivalențelor în analiza plăcilor elastice ne ajută să evităm restrîngerile din punct de vedere matematic, a rezolvării ecuațiilor fundamentale ale plăcilor izotrope (1.1) și ortotrope (5.1) cu orice condiții de margine.

Faza cea mai importantă și dificilă a analizei este cea a evaluării caracteristicilor de rigiditate ale elementului finit (sau model de calcul). Deși această fază este efectuată în mod sistematizat și automatizat cu ajutorul formulelor precedente și a programelor la calculatoare electronice.

Cînd aceste caracteristici sînt determinate, analiza plăcii urmează procedeul familiar al metodelor matriceale utilizate în mecanica construcțiilor, pentru aceasta, în general, programe de calculator sînt disponibile.

2. În urma folosirii metodei deplasărilor pentru determinarea matricelor de rigiditate a elementului, adică necunoscutele problemei considerate sînt deplasările nodurilor, rezultatele obținute de deplasări sînt mai bune decît cele de eforturi corespunzătoare.

Condițiile de margine influențează mai mult eforturile decît deplasările plăcilor studiate.

3. Prin comparația rezultatelor programelor MELEFIN 1 și MELEFIN 2 s-ar părea că discontinuitatea rotirii normale pe laturi nu afectează deloc elementul dreptunghiular, pe cînd Cloug /26b), a arătat că pentru elementul triunghiular este o sursă de erori.

4. Toate formulele de calcul au fost determinate în absența forțelor aplicate în interiorul elementului finit, validitatea lor nu este asigurată decît pentru placa supusă forțelor concentrate în nodurile rețelei discretizate.

În scopul de a limita aceste erori comise, în cazul încărcării distribuite, se pot determina forțele nodale echivalente, aplicate la noduri, cu ajutorul principiului lucrului mecanic vir-

tual, prezentat în formula (2.5).

5. Precizia metodei elementelor finite este influențată de următorii parametri, care sînt înregistrați în ordinea importanței :

- a. metodele de deplasări alese pentru elementul finit;
- b. numărul de elemente;
- c. tehnica de reprezentare a încărcărilor aplicate structurii;
- d. condițiile de margine ale problemelor speciale;
- e. programele de calcul.

Exemplul următor arată influența numărului de elemente, la precizia rezultatelor de calcul :

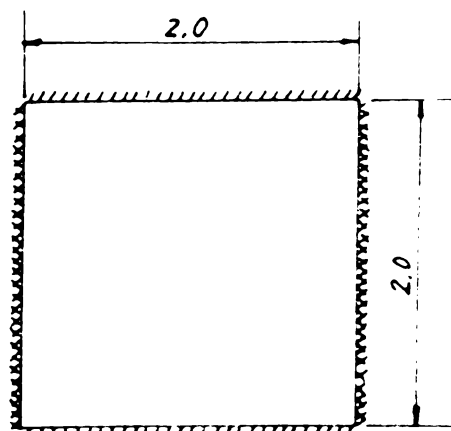
Se calculează o placă simplu rezemată pe două laturi paralele și încărcată pe celelalte două de o sarcină uniform distribuită $p = 1$ (fig.6.1).

Placa este calculată pe rînd cu rețele discretizate 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 .

Rezultatele deplasărilor maxime sînt următoarele :

$$\text{Rezultatul exact } \omega_{\max} = 0,3355$$

Rețea de E.F	ω_{\max}	eroare %
2 x 2	0,351227	4,69
3 x 3	0,342654	2,15
4 x 4	0,339726	1,26
5 x 5	0,337776	0,68



$$\nu = 0,3$$

$$h = 1$$

$$E = 1$$

Fig 6 1

6. Precizia teoriei echivalențelor este influențată de aceiași parametri sus amintiți, dar în care ordinul importanței este modificat datorită următoarelor cauze :

a. În general, modelele de deplasări ale elementelor de bază sînt binecunoscute și destul de exacte.

b. Condițiile de margine ale plăcii, influențează mult rezultatele obținute în teoria echivalențelor, în timp ce, această influență este mai mică în metoda elementelor finite.

De exemplu, modelul de grinzi ortogonale este potrivit analizei plăcilor încastate pe contur, pe cînd în cel al plăcii simplu rezemate pe colțuri rezultatele sînt mai puțin exacte.

Eroarea rezultatelor este mai mare la plăcile cu laturi sau colțuri libere.

c. În afară de parametri de influență menționați, coeficientul Poisson este și el o sursă de erori a rezultatelor teoriei echivalențelor.

De exemplu, programele TECHIVA 1, TECHIVA 2 dau rezultate bune cu $\nu = 0,0 \sim 0,15$, pe cînd TECHIVA 3 numai cu $\nu = 1/3$.

Dacă $\nu = 0$, rezultatele obținute de MELEFIN 1, MELEFIN 2, TECHIVA 1 și TECHIVA 2, sînt foarte apropiate între ele.

7. Se poate propune modul corectativ pentru cazurile plăcilor avînd coeficientul Poisson diferit de zero : la început, se calculează cu $\nu = 0$ și după aceea, se aplică o corecție :

$$\begin{aligned} M_x^\nu &= M_x^0 + \nu M_y^0 \\ M_y^\nu &= M_y^0 + \nu M_x^0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

unde : M_x^ν și M_y^ν - sînt momentele încovoietoare după direcțiile x și y corespunzătoare coeficientului Poisson diferit de zero;

M_x^0 și M_y^0 - corespunzătoare coeficientului Poisson egal cu zero;

ν - coeficientul Poisson.

8. Se pare că, utilizarea teoriei echivalențelor pentru analiza plăcilor este preferată de inginerii constructori și proiectanți datorită următoarelor cauze :

a. folosirea sistemelor de grinzi ortogonale este mai obișnuită pentru ingineri și proiectanți;

- b. determinarea caracteristicilor de calcul pentru rețeaua de bare este mai simplă cu ajutorul metodelor statice construcțiilor; legile deformațiilor barelor este binecunoscută și determinată exact;
- c. analiza rețelei ortogonale este potrivită cu plăcile de beton armat în care, în general; se pun armături pe două direcții ortogonale ;
 - analiza rețelei de bare utilizează aceeași matrice de rigiditate unitară ca cea folosită pentru structura în cadre. Acest fapt este foarte util pentru analiza structurii mixte.

9. Datorită folosirii modelului deplasării pure, rezultatele obținute de eforturi nu satisfac condiția de echilibru de margine a elementelor finite. Pentru îmbunătățirea rezultatelor de calcul se pot folosi următoarele măsuri :

- creșterea numărului de elemente finite atît cît este admis de capacitatea programului elaborat (vezi graficele din fig.2.5);
- folosirea rețelei discretizate neregulate, care sînt mai dese în jurul forțelor concentrate și al golurilor sau al rezemărilor;
- se înlocuiește determinarea eforturilor unitare în noduri cu cea în centrul elementului finit.

10. Rezultatele obținute de programele elaborate atît pentru metoda elementelor finite cît și pentru teoria echivalențelor, în general, sînt apropiate între ele, și cu rezultatele obținute de alți autori, pe cale teoretică sau experimentală. Acest fapt ne permite să tragem concluzia că metodele de calcul precum și formulele, matricele și programele de calcul prezentate în lucrarea de față, pot fi extinse cu rezultate bune și asupra altor tipuri de plăci elastice izotrope și ortotrope care se folosesc în trac-tică.

INSTITUTUL POLITEHNIC
TIM SOARA
BIBLIOTECA CENTRALĂ

B I B L I O G R A F I E

- /1/ Absi, E., - La theorie de équivalences et son application à l'étude des ouvrages d'art, Annales I.T.B.T.P., Suppl. au no 298, Paris, oct., 1972.
- /2/ Absi, E., - Théorie des Equivalences. Application au Génie civil, Paris, C.E.B.T.B.
- /3/ Absi, E., Prager, W., - A comparison of equivalences and finite Element Methods Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.6, No 1, July, 1975.
- /4/ Absi, E., - Differences finites - Elements finit et Equivalences dans le cas de l'elasticite lineaire, Annales I.T.B.T.P., No 351, Paris, Juin, 1977.
- /5/ Absi, E., - La theorie des equivalences et son application à divers problèmes d'elasticité et au calcul de ponts biaux, Extrait de Annales de travaux publics de Belgique, No 3, 1971/1972.
- /6/ Agent, R., - Sistemete reticular nedeterminate, Editura Tehnică, București, 1970.
- /7/ Anderson, G., Irons, M., Zienkiewicz, O.C., - Vibration and Stability of Plates using Finite Elements, International Journal of Solids and Structures, Vol.4, 1968.
- /8/ Argyris, J.H., - LUMINA Element for the Matrix Displacement Method, Aer. Jour., Vol.72, 1968.
- /9/ Argyris, J.H., Sharpf, D., - Some general considerations on the natural mode technique. Aer. Jour., Vol.73, 1969.
- /10/ Avram, C., - Curs de beton armat, părțile I și II, Timișoara, Litografia Invățămîntului, 1957 și 1955.
- /11/ Avram, C., Fărăoaru, I., Filimon, I., Mîrșu, O., Terteș, I., - Rezistențele și deformațiile betonului, Editura Tehnică, București, 1971.
- /12/ Avram, C., - Mathematiques et mecanique de constructions, București, Rev. Roum. Sci. Techn. - Mec. Appl., Tome 19, 1974, pp. 391-395.

- /13/ Bernoulli, J., - Essais theorique sur les vibrations de plaques elastiques rectangulaires et libres. Nova acta Acad. Petropolit, 5 (1789), pp. 197-219.
- /14/ Bertes, C.J., - A computational Technique for the Efficient Handling of Large Matrices, Inst. J. Num. Meth. Eng., No 7, 1973, pp.85-100.
- /15/ Bernard, E., - A study of the Relationship between Continuous and Lattice Structures, Thesis of Doctor of Philosophy presented to the University of Illinois in 1965.
- /16/ Beleş, A., Voinea, R., - Rezistența materialelor, Vol.II, Editura Tehnică, București, 1958.
- /17/ Bilge, M., - Verification experimentale du calcul d'une plaque carrée possé sur le angles et chargé sur le bords, Cahier de l'A.F.B., Serie essais et mesures, Annales de I.T.B.T.P., Supl. au No 356, dec., 1977.
- /18/ Buchholz, E., - Beitrag zur Berechnung der Schnittkräfte und Durchbiegungen von umfangs gelagerten Rechteckplatten mit in einer Spannrichtung veränderlichen Querschnitt - Dissertation, Technische Hochschule, Karlsruhe, 1963.
- /19/ Cantin, G., - An Equation solver of very large capacity Inst. J. num. Meths. Eng., 3, 1971, pp.379-388.
- /20/ Cireșșanu, P., - Calculul rețelelor de grinzi în casete, Editura Tehnică, București, 1960.
- /21/ Chow, T.S., Kowalik, J.S., - Computing with Matrices, Inst. J. Num. Meths. Eng., 7, 1973, pp. 211-223.
- /22/ Caracostea, ș.a. - Manual pentru calculul construcțiilor, Vol. I, Editura Tehnică, București, 1977.
- /23/ Crațu, G., Lupșă, C., - Programarea la calculatorul FELIX C-256, Editura Tehnică, București, 1973.
- /24/ Curtis, A.R., Rei, J.K., - Fortran Subroutines for the Solution of Sparse Sets of linear Equations, E.K.A.E.A. Research Group, Raport AERER Harwell Berkshire, 1971.

- /25/ Clebsch, A., - Theorie de l'elasticité de corps solides avec de notes entendues de Saint - Venant, Dumod, Paris, 1883, pp. 687-706.
- /26a/ Collatz, L., - The numerical Treatment of Differential Equations 3rd, Springer - Verlag, Berlin, 1966.
- /26b/ Cough, R.W., - The Finite Element Method in Structural Mechanics, Cap.7, In : Stress Analysis, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1965, pp.85-119.
- /27/ Davidovici, V.E., Jalil, W.A., - Plancher - dalles, Annales I.T.B.T.P., Paris, Dec., 1969.
- /28/ Dill, H., Ortega, A., - Derivation of a Stiffness Matrices for the Analysis of Plate Element in Bending, Conference Wright - Patterson, Air Force Base, Ohio, 1965.
- /29/ Dimo, P., - Programarea în FORTRAN, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
- /30/ Dorn, W.S., - Cracken Mc.D.D., - Metode numerice cu programe în FORTRAN IV, (traducere din l.engleză), Editura Tehnică, București, 1975.
- /31/ Blumenfeld, M., - Calculul barelor cu calculatoare numerice, Editura Tehnică, București, 1975.
- /32/ Euler, L., - De motu vibratorio tympanorum, Novi Commentari Acad. Petropolit, 10 (1766), pp.243-260.
- /33/ Ewell, W.W., Okobu, S., Abram, J.I., - Transactions ASCE, Vol.89, Paper No2520, 1952, pp.869-890.
- /34/ Filonenko-Borodici, M.M., - Teoria elasticității, traducere din l.rusă, Editura Tehnică, București, 1952.
- /35/ Fluhr, A., Siess, C.P., - Theoretical Analysis of the Effects of Openings on the Bending Moments in Square Plates with Fixed Edges, Civil Eng. Studies, Str. Research, Serie No203, Univ.of Illinois, Urbana, 1960.
- /36/ Frenzel, D., - Zweiseitig gestützte, quadratische Platten mit einer grössererer Öffnung bei Beanspruchung durch eine Gleichmässig verteilte Flächenlast - Dissertation, Technische Hochschule Braunschweig, 1966.

- /37/ Föppl, A., - Vorlesungen über technische Mechanik Vols 3 and 5, 8th and 3rd, Ed. B.G. Teubner, Leipzig, 1923.
- /38/ Friedrich, R., - Bazele metodei elementelor finite, Centrul de multiplicare al I.P.T., Timișoara, 1972.
- /39/ Friedrich, R., - Contribuții la studiul grinzilor pereți de beton armat, Teză de doctorat, Timișoara, 1974.
- /40/ Ghali, A., Neville, A.M., - Structural Analysis : A Unified Classical and Matrix Approach, Intext Educational Publishers, 1972.
- /41/ Gheorghiu, Al., - Concepții moderne în calculul structurilor, Editura Tehnică București, 1975.
- /42/ Hodge, P.H.G., - Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells, Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1963.
- /43/ Hrennikoff, A., - Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method, Trans. ASME, J. App. Mech., 8, Dec., 1941, pp.169-175.
- /44/ Huber, M.T., - Teoria sprężystości, Theorie de l'elasticité, Nakl. Polskiej Akademii Umiejętności Krakow 1948-1950, pp. 166-190.
- /45/ Huber, M.T., - Die theorie des Kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten, Der Bauingenieur, 4 (1923), pp.354-392.
- /46/ Krylov, A., - On Stresses Experienced by an Ship in a Sea Way, Trans. Inst. Naval Architects, London, 4 (1898), pp. 197-209.
- /47/ Kirchhoff, G., - Vorlesungen über Mathematische Physik, Vol.1, B.G. Teubner, Leipzig, 1976.
- /48/ Johansen, K.W., - Brudlinieteori, J. Gjellerup, Copenhagen, 1943.
- /49/ Ilantsis, A., Coquillat, G., - Essais sur porteaux et dalles en béton de granulats légers, Cahier de L'A.F.B., No 41, Janvier, 1974.
- /50/ Lehnitzki, S.G., - Anizotropnie plactinki, Moskva, 1957.
- /51/ Levi, S., - Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings, Journal of Aeronautical Science, Vol. 20, 1953.

- /52/ Lesting, J., Prachuktam, S., - A Blocking Technique for Large Scale Structural Analysis Computers Structures, 3, 1973, pp.669-714.
- /53/ Lightfoot, E., - A Grid Framework Analogy for Laterally Loaded Plates International J.of Mec. Sciences, Vol.6, 1964.
- /54/ Zeleski Zamenhof, L.C., - Methode du maillage orthogonal, (une application de la theorie de equivalences à l'analys numerique de plaques et coques), Annales I.T.B.T.P., No , Sept., 1975.
- /55/ Marcus, H., - Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, Springer - Verlag, Berlin, 1932.
- /56/ Martin, H.C., - On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deffection and Stability Problems, Wright - Patterson, Air Force Base, Ohio, 1965.
- /57/ Munteanu, I.I., - Calculul static al structurilor, Editura FACLA, Timișoara, 1976.
- /58/ Munteanu, I.I., - Calculul structurilor spațiale în formulare matriceală, Editura FACLA, Timișoara, 1973.
- /59/ Massonnet, CH. ș.a., Calculul structurilor la calculatoare electronice, Editura tehnică, traducere din limba franceză, București, 1974.
- /60/ Mîrșu, O., Friedrich, R., - Construcții industriale speciale din beton armat, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
- /61/ Negruțiu, R., - Analiza elastică a structurilor cu dale, Ed. A.R.S.R., București, 1976.
- /62/ Olteanu, N., Pîrvu, E.A., - Metode de discretizare a continuumului în vederea rezolvării diferitelor tipuri de probleme de mecanică, Vol.II, III, Metoda elementelor finite INID, București, 1972.
- /63/ Olsen, H., Reinitshuber, F., - Die zweiseitig gelagerte Platte (I,II), Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, 1959 (1951).

- /64/ Papenfuss, S.W., - Lateral Plates Deflection by Stiffness Matrix Methods with Application to a Marguerre, Thesis of Master of Science presents to Washington University, 1959.
- /65/ Prescott, J.J., Applied Elasticity, Dover Publications, Inc., New York, 1946.
- /66/ Pastnov, V.A., Harhurin, I.I., - Metoda elementelor finite în calculul structurilor navale (în limba rusă), Izdatelstvo Sudostroenie, Leningrad, 1974.
- /67/ Przemieniecki, J.S., - Theory of Matrix Structural Analysis New York, McGraw-Hill, 1968.
- /68/ Wang, P.C., - Metode numerice și matriceale în mecanica construcțiilor, traducere din limba engleză, Editura Tehnică, București, 1970.
- /69/ Reissner, E., - The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, J. Appl. Mech. 12, (1954), pp.69-77.
- /70a/ Reinitzhuber, F., Krug, H., - Platten mit Verstärkungen, Die Bautechnik, 1963.
- /70b/ Riedel, W., - Beiträge zur Lösung der ebenen Probleme eines Elastizitätslehne und seine Anwendung auf die Statik-hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke, Verhandlungen des Vereins zur Förderung des Gewerbefleisses, 85 (1906), pp.139-176.
- /71/ Rowe, R.E., - Concrete Bridge Design, New York, 1962.
- /72/ Rusu, O., Gale, T., - Problemele moderne ale rezistenței materialelor, Editura Tehnică, București, 1970.
- /73/ Rozin, L.A., - Sterjnevnie sistemî kak sistemî konecnîh elementov, izd. Leningrad Universiteta, Leningrad, 1976.
- /74/ Rozin, L.A., - Metod konecnîh elementov v primenenii k uprugim sistemam, Stroiizdat, Moskva, 1977.
- /75a/ Rjanitsîn, A.R., - Novîi metodî raschiot stroitelniîh konstrukcii, Stroiizdat, Moskva, 1971.

- /75b/ Rjanitsîn, A.R., - Sarnirno sterjenevîe modeli dlea neirerivnîh sred isledovania po stroitelnoi mehanike teorii uprugosti i plasticinost, SNISK, Moskva, 1956.
- /76/ Rûsch, H., - Berechnungstabeln für rechtwinklige Fahrbahnplatt von Strassenbrücken 6, Auflage - Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, 1965.
- /77/ Sadek, E.A., - On the Instability of Frameworks, Thesis of Master of Science presented to Cairo University in 1967.
- /78/ Sandi, H., - Metode matriceale în mecanica structurilor, Editura Tehnică, Bucureşti, 1975.
- /79/ Sandi, H., ş.a. - Subprograme pentru determinarea stării de eforturi şi de deplasări statice şi dinamice în grinzi pereţi, diafragme plane, plăci plane, Bucureşti, INCERC, 1971.
- /80/ Soare, M., - Contribuţii la calculul plăcilor ortotrope cu nervuri de rigidizare pe o singură parte, Rev. Studii şi Cercet.de Mec. Aplicată, Ed. ARSR, Nr.4, Tom 33, 1974, p.695-710 şi nr.1, Tom 34, 1975.
- /81/ Scheicher, F., - Kreisplatten auf elastischer Unterlage, Springer - Verlag, Berlin, 1926.
- /82/ Seydel, E., - Versuchsanstalt Luftfahrt, Berlin, 1931.
- /83/ Schnobrich, C., Melin, W., Mohraz, B., - The Numerical Analysis of shell Structures by a Discrete Element System, published by TSINIS, Mosscou, 1968.
- /84/ Szilard, R., - Theory and Analysis of Plates Classical and Numerical Methods, Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- /85a/ Smiernov, A.R., - Metodî raeciota sterjenevîh sistem plastin i oboloceskî c ispolzovanîem E.V.M. Moskva, 1976.
- /85b/ Spierig, S., - Beitrag zur Lösung von Scheiben, Platten und Schalenproblemen mit Hilfe von Gitterwerksmodellen, Abh. Braunschweig Wissenschaftl. Gesellschaft 15, 1963, pp.133-165.

- /86/ Timoshenko, S.P., - Sur la stabilité de systemes élastiques, Annales des Ponts et Chaussées, 13 (1913) pp.496-566; 16, pp.73-132, 372-412.
- /87/ Timoshenko, S.P., - On large deflection of Circular Plates, (în limba rusă), Mem. Inst.Ways Commun, 89, 1915.
- /88/ Timoshenko, S.P., Gere, J., - Theorie of Elastic Stability, McGraw-Hill Book, Co Inc., New York, 1961.
- /89/ Timoshenko, S.P., Krieger, W.S., - Theorie of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1959.
- /90/ Timoshenko, S.P., - Staticeskie i dinamicieskie problemî teorii uprugosti, uzd. Naukova-Dumka, Kiev, 1975.
- /91/ Tuff, A.D., Jennings, A., - An Iterative Methods for Large Systems of Linear Structural Equation, Inst. J. Num. Meth. Eng., No 7, 1973, pp. 175-183.
- /92/ Teodorescu, P.P., - Probleme plane în teoria elasticităţii, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1966.
- /93/ Turner, M.J., ş.a. - Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, J. Aerom. Sci. No 23, Sept. 1956, pp. 805-823.
- /94/ Ţopa, N., - Contribuţii la utilizarea metodei elementelor finite în calculul plăcilor cu rezemare rigidă, Buletinul Stiinţific al Institutului de Construcţii Bucureşti, 1972.
- /95/ Von Karman, TH., - Festigkeitsprobleme im Maschinenbau Encycl der math. Wiss., 4 (1910) pp.348-351.
- /96/ Von Karman, TH., Die mittragende Breite, in beiträge zur technischer Mechanik und technischen Physik, August Föppl zum 70, Geburtstag am 24, Iannuar gewidmet, Springer Verlag, Berlin, 1924, pp.114.
- /97/ Von Karman, TH., ş.a. - The strength of Thin Plattes in Compression Trans. ASME 54 (1932), pp.53-57.
- /98/ Volmir, A.S., - Ghivkie plastinki i oboloceski, izd. Tehnik, Moskva, 1956.
- /99/ Vestergaard, H.M., - On the Analysis of Plates on Elastic Supports, Ingenioren, 32, No 42 (1923), pp.513.

- /100/ Weghardt, K., - Über einen Grenzübergang in der Elastizitätslehre und seine Anwendung auf die Statikhochgradig Statisch unbestimmter Fachwerke, Verhandlungen di Vereins zur Forderung des Gewerbefleisses, 85 (1906), pp.139-176.
- /101/ Yettram, A., Husain, M., - Grid Framework Method for Plates in Fluxure, J. of the Eng. Mec. Div., Vol.91, No EM3, Proc. paper 4361, June, 1965, pp.53-64.
- /102/ Yettram, A., Husain, M., The Representation of a Plates in Flexure by a Grid of Orthogonally Connected Beams, Inst. J. of Mec. Sci., Vol.7, 1965.
- /103/ Yettram, A., Rpecheford, M., - Calculul plăcilor cutate prin metoda cadrelor spațiale echivalente, în Building Science, Anglia, 3, No 4, Febr. 1969, pp.221-226.
- /104/ Zeitouni, M., - Contribution à l'étude de l'assimilation d'une dalle à un grillage de poutres, Thèse présentée à la Faculté de Sciences de l'Université de Paris, 1968.
- /105/ Zienkiewicz, O.C., - The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, Publising Company, New York, 1971.
- /106/ Zienkiewicz, O.C., - Introductory Lectures on the Finite Element Method, Course Hend at the Departement of Mecanics, of Solids, London, 1962.
- /107/ Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method : From Intuition to Generality, Rev. App. Mech. Reviews, 1970, pp. 249-256.
- /108/ Zienkiewicz, O.C., Bazeley, G.P., s.a. - Triangular Elements in Plate Bending : Conforming and Nonconforming Solutions, Proc. conf. Matrix Methods in Struc. Mech. AFFDL - TR - 66 - 80 (oct.26-28, 1965), pp.547-576, Wright - Patterson AFB, Ohio.
- /109/ Zuber, E., - Ein Beitrag zur Berechnung Elastischer Platten mit Rechtecköffnungen Dissertation, Technische Hochschule, Darmstadt, 1967.

TABLA DE MATERII

Prefața

Cap.I. STADIUL ACTUAL AL PROBLEMELOR STUDIATE	1
1.1. Introducere	1
1.2. Scurt istoric al dezvoltării teoriilor plăcilor plane	4
1.3. Principalele tendințe în cercetarea științifică	7
Cap.II. BAZELE METODEI ELEMENTELOR FINITE SI CONTRIBUTII PERSONALE PRIVIND APLICAREA EI	11
2.1. Introducere	11
2.2. Ecuația fundamentală a metodei elementelor finite - Modelul deplasărilor pure	13
2.3. Definirea elementelor finite folosite în problemele plăcilor plane	15
2.4. Reprezentarea elementului finit, utilizat, de formă dreptunghiulară liniară	16
2.4.1. Vectorul deplasărilor nodale	17
2.4.2. Câmpul deplasărilor alese	17
2.4.3. Matricea de influență a deplasărilor nodale în deformații specifice	18
2.4.4. Matricea de rigiditate a elementului finit	19
2.4.4.1. Matricea rigidității elementului finit a plăcii elastice izotrope când func- ția deplasării satisface numai condi- ția de compatibilitate a săgeții . . .	19
2.4.4.2. Matricea rigidității elementului finit al plăcii elastice izotrope sînd func- ția deplasării satisface condiția de compatibilitate a săgeții și rotirii .	20
2.4.4.3. Matricea rigidității elementului finit al plăcii anizotrope elastice când funcția deplasării satisface numai condiția de compatibilitate a săgeții	20
2.4.4.4. Matricea rigidității elementului finit al plăcii elastice ortotrope când funcția deplasării satisface condiția de compatibilitate a săgeții și rotirii	22

2.4.5. Matricea de transformare a deplasărilor nodale în eforturi unitare a elementului finit	22
2.4.5.1. Matricea de transformare a elementului finit al plăcii elastice izotrope când funcția deplasării satisface numai condiția de compatibilitate a săgeții	22
2.4.5.2. Matricea de transformare a elementului finit al plăcii elastice izotrope când funcția deplasării satisface condiția de compatibilitate a săgeții și rotirii	26
2.4.5.3. Matricea de transformare a elementului finit al plăcii elastice anizotrope când funcția deplasării satisface numai condiția de compatibilitate a săgeții	26
2.4.5.4. Matricea de transformare a elementului finit al plăcii elastice ortotrope când funcția deplasării satisface condiția de compatibilitate a săgeții și rotirii	26
2.4.6. Determinarea eforturilor unitare principale în centrul elementului finit	26
2.4.7. Determinarea vectorului forțelor nodale echivalente a elementului finit	31
2.5. Determinarea matricei de rigiditate a structurii discretizate	31
2.6. Determinarea deplasărilor nodale ale structurii discretizate	32
2.7. Prezentarea programelor de calcul în FORTRAN IV	35
2.8. Concluzii	40
Cap.III. BAZELE TEORIEI ECHIVALENTELOR SI CONTRIBUTII PERSONALE PRIVIND APLICAREA EI	42
3.1. Generalități	42
3.2. Bazele teoriei echivalențelor și aplicarea sa în analiza plăcii elastice subțiri	43
3.2.1. Expunere generală	43
3.2.2. Energia de deformație elastică	46
3.3. Analiza plăcilor plane subțiri elastice izotrope cu ajutorul teoriei echivalențelor	49

3.3.1. Modelul grinzilor ortotrope	49
3.3.1.1. Determinarea caracteristicilor de calcul ale modelului echivalent	50
3.3.1.2. Matricea de rigiditate a modelului echivalent	51
3.3.1.3. Matricea de transformare a deplasărilor în eforturile barelor modelului echi- valent	52
3.3.2. Modelul triunghiular cu bare diagonale	52
3.3.2.1. Determinarea caracteristicilor de cal- cul ale modelului echivalent	59
3.3.2.2. Matricea rigidității modelului echi- valent	61
3.3.2.3. Matricea de transformare a deplasărilor în eforturile barelor modelului echi- valent	61
3.3.3. Modelul echivalent patrat cu bare diagonale propus de Hrennikoff A.	68
3.3.3.1. Matricea rigidității modelului echi- valent	68
3.3.3.2. Matricea de transformare a deplasărilor în eforturile barelor modelului echi- valent	71
3.4. Analiza plăcilor plane elastice ortotrope cu ajutorul teoriei echivalențelor	71
3.4.1. Modelul dreptunghiular ortotrop	71
3.4.1.1. Energia deformațiilor elementului plăcii	71
3.4.1.2. Energiile deformațiilor barelor mode- lului	73
3.4.1.3. Determinarea caracteristicilor de rigiditate ale barelor modelului echi- valent ortotrop	73
3.4.1.4. Matricea de rigiditate a modelului echivalent ortotrop	74
3.4.1.5. Matricea de transformare a deplasări- lor nodale în eforturile barelor mo- delului echivalent ortotrop	75
3.4.1.6. Etape de lucru	75

3.4.2. Modelul dreptunghiular ortotrop cu bare diagonale	76
3.4.2.1. Energia deformațiilor elementului plăcii	76
3.4.2.2. Energiile deformațiilor barelor modelului echivalent	77
3.4.2.3. Determinarea caracteristicilor de rigiditate ale barelor modelului echivalent ortotrop	77
3.4.2.4. Matricea de rigiditate a modelului echivalent ortotrop cu bare diagonale	79
3.4.2.5. Matricea de transformare a deplasărilor în eforturile barelor modelului echivalent ortotrop	79
3.5. Programele de calcul pentru calculatoarele electronice	80
3.6. Concluzii	82
Cap.IV. APLICATII LA CALCULUL PLACILOR ELASTICE IZOTROPE	84
4.1. Exemplul de calcul nr.1	84
4.2. Exemplul de calcul nr.2.	85
4.3. Exemplul de calcul nr.3.	85
4.4. Exemplul de calcul nr.4.	86
4.5. Exemplul de calcul nr.5.	86
4.6. Exemplul de calcul nr.6.	86
4.7. Concluzii asupra rezultatelor obținute	109
Cap.V. APLICATII LA CALCULUL PLACILOR ELASTICE ORTOTROPE	111
5.1. Introducere	111
5.2. Utilizarea programelor de calcul elaborate în calculul plăcilor ortotrope	112
5.2.1. Plăci din beton armat	112
5.2.2. Placa întărită prin nervuri echidistante după una din direcții	113
5.2.3. Placa întărită cu două șiruri ortogonale de nervuri echidistante după fiecare direcție	115
5.2.4. Placa întărită de un șir de nervuri echidistante așezate pe o singură față a plăcii	115
5.2.5. Placa întărită cu două șiruri de nervuri echidistante așezate pe o singură față a plăcii	117

5.2.6. Rețeaua ortogonală de grinzi dese	118
5.2.7. Tabla ondulată	121
5.3. Exemple de calcul	122
5.3.1. Exemplul de calcul nr.1.	122
5.3.2. Exemplul de calcul nr.2.	123
5.3.3. Exemplul de calcul nr.3.	123
5.3.4. Exemplul de calcul nr.4. ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼	124
5.4. Concluzii asupra rezultatelor obținute	124
Cap.VI. C O N C L U Z I I	135
B I B L I O G R A F I E	139

